



دانشکده برق و رباتیک

پایان نامه کارشناسی ارشد

بررسی پایداری سیستم های فازی

تاکاگی - سوگنو - کانگ

ایمان زمانی

استاد راهنما:

دکتر محمد حداد ظریف

استاد مشاور:

دکتر محمد مهدی فاتح

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

تقدیم به محضر

حضرت ولی عصر (ارواحنا له الفداء)

و به

همه ی مردان و زنان پاک این آب و خاک

الف

چکیده

تئوری فازی توسط پروفیسور لطفی زاده، در سال 1965 در مقاله ای بنام « مجموعه های فازی » معرفی گردید. بدلیل تاکید زیاد کنترل کلاسیک بر روی دقت و عدم کارایی مناسب در برخورد با سیستم های پیچیده، نیاز به نوع جدیدی از ریاضیات (ریاضیات مقادیر مبهم یا فازی) به شدت احساس می شد. پس از معرفی کردن سیستم های فازی توسط آقای زاده در حقیقت زمینه ای در سیستم های کنترل بوجود آمد که سیستم های تکلیف گرا¹ بودند (بر خلاف سیستم های کنترل متعارف که سیستم های مبتنی به نقطه کار می باشند). البته این موفقیت ها نشان از وجود متد طراحی و تحلیل قوی در این گونه سیستم ها نبود.

در این پایان نامه سعی بر این است تا ایده ها و روش های نوین برای بررسی پایداری سیستم های فازی $T - S$ در حالات مختلف مورد بررسی قرار داده شود: بررسی پایداری سیستم های فازی در حضور عدم قطعیت های پارامتری، سیستم های فازی بزرگ-مقیاس، آفین به همراه اغتشاش، بررسی پایداری به همراه عملکرد سیستم های فازی و ارائه ی چندین مثال و نمونه های شبیه سازی شده با موردهای کاربردی و غیر کاربردی. در ابتدای بحث تلاش می شود تا با ارائه ی قضایا و پرداختن به اثبات ریاضی، بتوان رهیافتهایی جدید برای تحلیل پایداری یافت که دارای مزیت هایی از جمله کاهش محاسبات، سادگی قضایا، تضمین پایداری و برخی دیگر از مزایایی باشند که در ضمن بحث به آنها پرداخته خواهد شد. سپس با خارج شدن از بحثی کاملا تئوریک و ریاضی، نگارنده با نگاهی مهندسی، به استخراج الگوریتم های طراحی سیستم های کنترل از متن قضایای مذکور همت گماشته که حاصل آن به دست آوردن چند الگوریتم طراحی می باشد که دارای خصوصیات همچون تضمین پایداری، عملکردی مناسب، کاهش محاسبات و سادگی اعمال می باشند.

¹ Task-Oriented

فهرست

1. مقدمه
- 1.1. مقدمه (نگاهی تاریخی و مروری بر چالش ها) 2
2. واژه شناسی منطق فازی و تئوری پایداری
- 2.1. پیشگفتار 14
- 2.2. واژه شناسی منطق فازی 14
- 2.3. پیکر بندی سیستم های کنترل فازی 18
- 2.4. پایداری و روش مستقیم لیاپانوف 20
- 2.5. پایداری و مقادیر ویژه 24
- 2.6. بحثی در طراحی کنترلر 29
3. تبیین پایداری در ساختارهای مدل فازی نوع سوم
- 3.1. مدل فازی متعارف 34
- 3.2. مدل فازی آفین 37
- 3.3. مدل فازی تاخیردار 44
- 3.4. مدل فازی با حضور عدم قطعیت های پارامتری 52
4. بحثی در پایداری سیستم های فازی $T - S$ متعارف
- 4.1. پیشگفتار 55
- 4.2. سیستم های فازی $T - S$ متعارف (معرفی اجمالی) 56
- 4.3. مدل فازی $T - S$ 57
- 4.4. معرفی سیستم های غیر خطی 71
- 4.5. سیستم جرم - فنر - دمپر به همراه مدل فازی آن 75
- 4.6. نمونه شبیه سازی شده 77
- 4.7. ارائه قضایا و الگوریتم های مبتنی بر زیر ناحیه های عملگر OS 79
- 4.8. تحلیل پایداری 79
- 4.9. تحلیل پایداری در حضور عدم قطعیت های پارامتری 80
- 4.10. تحلیل پایداری به همراه تضمین عملکردی مناسب از سیستم 88
- 4.11. طراحی یک الگوریتم 89
- 4.12. نمونه شبیه سازی شده یک 90
- 4.13. نمونه شبیه سازی شده دو 94
5. نگرشی در تحلیل پایداری سیستم های فازی مقیاس - بزرگ

| | |
|-----|--|
| 102 | 5.1. پیشگفتار(نگرش ها،چالش ها و آینده) |
| 103 | 5.2. سیستم های فازی مقیاس – بزرگ |
| 105 | 5.3. طراحی کنترلر غیر خطی |
| 113 | 5.4. الگوریتم طراحی |
| 115 | 5.5. نمونه های شبیه سازی شده |
| 119 | 5.6. معرفی سیستم پاندول معکوس دو تایی |
| 113 | 5.7. طراحی کنترلر غیر خطی |

| | |
|-----|---------------------|
| 130 | ضمیمه |
| 133 | نتایج و تحقیقات آتی |
| 134 | مراجع |

نمادهای اختصاری

| | |
|--------------------|--|
| \mathbb{R}^n | فضای اقلیدسی n بعدی |
| \mathbb{R}_+ | مجموعه اعداد حقیقی غیر منفی |
| j | $\sqrt{-1}$ |
| $ \cdot $ | قدر مطلق |
| $\ A\ $ | نرم ماتریس A |
| A^T | ترانهاده A |
| A^* | ترانهاده مزدوج A |
| A^{-1} | معکوس A |
| I | ماتریس واحد |
| $A > 0$ | ماتریس معین مثبت A |
| $A \geq 0$ | ماتریس نیمه معین مثبت A |
| $A > B$ | ماتریس معین مثبت $(A - B)$ |
| $diag(A, B)$ | ماتریس قطری از A و B |
| M_i^j | مجموعه فازی |
| $p_i(t)$ | متغیر پیشین |
| $\alpha_i(p(t))$ | توابع عضویت نرمالیزه شده |
| r | تعداد قوانین |
| μ | توابع عضویت |
| μ | توابع عضویت نرمالیزه شده (در سیستم های مقیاس-بزرگ) |
| $x(t), x(k)$ | بردار حالت |
| x_e | حالت تعادل |
| $u(t), u(k)$ | بردار کنترل |
| sup | عملگر سوپریمم |
| inf | عملگر اینفیمم |
| max | عملگر بیشینه |
| min | عملگر کمینه |
| $\lambda_{max}(A)$ | بیشینه مقدار ویژه A |
| $\lambda_{min}(A)$ | کمینه مقدار ویژه A |
| $T(L, \leq)$ | شبکه L |
| K_i | بهره های فیدبک |

| | |
|-------------------------------|---|
| $:=$ | تعریف می شود |
| \forall | به ازای همه ی مقادیر |
| \exists | وجود دارد |
| \in | عضویت |
| \cap | اشتراک |
| \cup | اجتماع |
| $\frac{\partial}{\partial x}$ | مشتق جزئی |
| $\nabla f(x)$ | گرادیان |
| $V(\cdot)$ | تابع لیاپانف |
| $\dot{V}(\cdot)$ | مشتق تابع لیاپانف در طول مسیر های سیستم |
| $\nabla_x V(x, t)$ | مشتق جزئی V نسبت به x |

فصل اول

مقدمه

مقدمه (نگاهی تاریخی و مروری بر چالش ها)

تئوری فازی بوسیله پروفیسور لطفی زاده¹، در سال 1965 در مقاله ای بنام «مجموعه های فازی²» معرفی گردید [1.1]. بدلیل تاکید زیاد کنترل کلاسیک بر روی دقت و عدم کارایی مناسب در برخورد با سیستم های پیچیده، نیاز به نوع جدیدی از ریاضیات (ریاضیات مقادیر مبهم یا فازی) به شدت احساس می شد. آقای زاده توانست در دومین مقاله خود با نام "مجموعه های فازی" به ایده های خود تجسم بخشد. آقای ممدانی³ برای اولین بار تئوری های فازی را در بعد عملی پیاده سازی کرد. بعد از ارائه مقالات [1.2][1.3] توسط آقای ممدانی محوریت تحقیقات مرتبط با این گونه از سیستم ها، عمدتاً موضوع پایداری قرار گرفت. بسیاری از خلاءهایی که در زمینه فازی وجود داشت از عدم وجود ابزار تحلیلی در این سیستم ها نشأت می گرفت. به هر حال، سیستم های فازی با موفقیت های چشم گیری در بعد عملی بعد از دهه 90 روبرو شد، اما هنوز متد بررسی و تحلیل قدرتمندی در این زمینه وجود نداشت.

پس از معرفی کردن سیستم های فازی توسط آقای زاده در حقیقت زمینه ای در سیستم های کنترل بوجود آمد که سیستم های تکلیف گرا⁴ بودند (بر خلاف سیستم های کنترل متعارف که سیستم های مبتنی به نقطه کار⁵ می باشند). به بیانی دیگر این سیستم ها دارای کاربردهای متفاوتی از جمله کنترل چند معیاری⁶، کنترل پیشخور⁷ کنترل نظارتی⁸ تا کنترل تناسبی-انتگرالی-مشتقی⁹ (PID) متعارف می باشد. البته این نکته را متذکر می شویم که بحث پایداری در سیستم های صنعت به طور کامل حل نشده است (در این گونه سیستم ها موضوع قابلیت اطمینان¹⁰ بحثی به مراتب مهمتر از پایداری است). این موفقیت ها نشان از وجود

¹ Lotfizadeh

² Fuzzy Sets

³ Mamdani

⁴ Task-Oriented

⁵ Set-Point Oriented

⁶ Multi-Criterion Control

⁷ Feed forward Control

⁸ Supervisory Control

⁹ Proportional-Integral-Derivate (PID)

¹⁰ Reliability

متد طراحی و تحلیل قوی در این گونه سیستم ها نبود. همچنین در کنترل متعارف ، یک کنترلر فیدبک را می توان به راحتی به گونه ای طراحی کرد که سیستم حلقه بسته پایدار شود اما این رهیافت یک چهارچوب محدود را برای طراحی در سیستم های کنترل مشخص می کند و محدود به طراحی در نقطه کار می باشد در حالیکه تئوری پایداری^۱ دید طراح و مهندس را در گسترش سیستم کنترل (فازی^۲) وسعت می بخشد.

در مقایسه با کنترل متعارف ، کنترل فازی دارای حداقل دو مزیت می باشد، سیستم های فازی دارای حساسیت کمتری نسبت به نویز و تغییرات پارامتری می باشند که اولین مزیت سیستم های فازی محسوب می شوند . همچنین سیستم های فازی را می توان به سیستم ها و فرآیند های نامناسب (ناخوش تعریف)^۳ اعمال کرد که در خیلی از این موارد سیستم های کنترل متعارف غیر قابل پیاده سازی می باشند .

اما گستره عظیم استفاده از سیستم های فازی نیاز به متدها و ابزار تحلیل مدرن و منسجم دارد، که پایداری یکی از این ضروریات تحلیل در این گونه سیستم ها می باشد و از اهمیت وافری برخوردار است. بدلیل ذات غیر خطی سیستم های فازی ، بحث پایداری در این سیستم ها از زمینه های پرکار به شمار می رود، تا آنجایی که به اعتراف عده کثیری از صاحبان تخصص، این زمینه ی تحقیقاتی از پرکارترین زمینه های تحقیقاتی می باشد ، اما عدم وجود یک متد عام در این زمینه از موانع عمده تحلیل و طراحی بوده است. این پایان نامه تلاش می کند تا بتواند با بحث بر روی پایداری سیستم های فازی در حالات مختلف به ارائه راهکارها ، الگوریتم ها و متدهای طراحی بپردازد .

همواره در ارتباط با سیستم های فازی سه سوال عمده مطرح بوده است .

- چگونه می توان یک سیستم فازی را مدل کرد و یا به بیانی دیگر طریقه ی استخراج یک مدل فازی مناسب برای (از) یک سیستم چگونه می باشد؟
- آیا قانون کنترل فازی وجود دارد که بتوان یک سیستم مفروض را پایدار کرد؟

¹ Stability Theory

² Fuzzy

³ Ill-Defined

• چگونه می توان یک الگوریتم پایدار ساز برای سیستم های فازی ارائه داد؟

سوال اول که مرتبط با مسائل مدل سازی می باشد نیاز مند وجود یک مدل ریاضی از سیستم¹ می باشد . در متون کنترل کلاسیک یک مدل ریاضی از سیستم به طور صریح با یک معادله دیفرانسیل توصیف می شود، در حالیکه در سیستم های فازی یک مدل به طور ضمنی با قانون های فازی توصیف می شود .

رهیافت ها و الگوریتم های زیادی برای مدل سازی سیستم های فازی اولیه ارائه شده است. شناسایی با استفاده از داده های ورودی و خروجی [1.4] و استخراج مدل از روی مدل غیر خطی سیستم [1.5] از زمره ی متدهای موجود می باشند . البته این نکته را متذکر می شویم که [1.6] اثبات کرد که هر سیستم غیر خطی را می توان به طور دقیق با یک سیستم فازی مدل کرد .

در متون کنترل فازی سوال دوم به طور کامل حل شده است . همانطوری که در [1.7] نشان داده شده است کنترلرهای فازی ، کنترلرهای عمومی می باشند و هر سیستمی که قابلیت پایدار سازی را داشته باشد با سیستم فازی نیز قابل پایدار سازی است. همانطوری [1.8] که نشان داد برای پایدار سازی یک سیستم خطی نامتغیر با زمان² (LTI) می توان یک کنترلر ممدانی با چهار قانون را طراحی کرد که پایداری سیستم را تضمین کند .

سوال سوم یک مسئله طراحی را بیان می کند . در نخستین گام های جنبش فازی اعمال سیستم های (کنترلرهای) فازی (که مبتنی بر علم بشری می باشند) بر روی یک سیستم با روش ابتکاری صورت می گرفت . عیب بزرگی این روش عدم تضمین کامل پایداری بود که بدلیل نبود یک متد کلی برای طراحی و تضمین پایداری بود که به همین دلیل اغلب رهیافت ها، مبتنی بر تقریب ، درک شهودی و تجربه استوار بودند .

اولین گام، زمانی شروع شد که متدی با نام جبران ساز توزیع شده³ (PDC) توسط [1.9] برای سیستم های فازی نوع سوم مطرح شد . ایده اصلی روش مبتنی بر جبران هر قانون توسط یک قانون کنترل است که در نهایت خروجی کنترلر ترکیب کل سیستم های خطی می باشد. این ایده موجب تسهیل اعمال تئوری های

¹ Plant

² Linear-Time Invariant (LTI)

³ Parallel-Distributed-Compensation(PDC)

پایداری همچون تئوری لیاپانوف شد که در این رهیافت ها معمولاً گین فیدبک حالت را می توان با روش های عددی حل نامعادلات ماتریسی¹ $LMIs(BMIs)$ حل کرد به گونه ای که پایداری سیستم تضمین شود. طرح متد (PDC) موجبات ارائه بسیاری از رهیافت ها و ایده های جدیدی را در زمینه پایداری بوجود آورد که می توان به [1.10][1.11][1.12] اشاره کرد.

بطور کلی سه نوع سیستم های فازی (کنترل) موجود می باشد نوع اول² که همان فازی متعارف می باشد توسط آقای ممدانی ارائه شد که برای اولین بار نیز برای کنترل موتور بخار مورد استفاده قرار گرفت [1.2] این نوع از سیستم ها به صورت زیر تشریح می شوند:

$$\text{if } p_1 \text{ is } M_1^i \text{ and } p_2 \text{ is } M_2^i \text{ and } \dots \text{ and } p_s \text{ is } M_s^i \text{ then } y \text{ is } H^i \\ i = 1, 2, \dots, n$$

که M^i و H^i مجموعه های فازی می باشند. تا کنون متدهای فراوانی برای نوع استدلال در این سیستم ها به کار رفته به گونه ای که حدوداً چهار نوع از این متدها در مقالات و تحقیقات مورد استفاده قرار گرفته اند. به عنوان یک حالت خاص از این سیستم ها، سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{if } p_1 \text{ is } M_1^i \text{ and } p_2 \text{ is } M_2^i \text{ and } \dots \text{ and } p_s \text{ is } M_s^i \text{ then } y \text{ is } h^i \\ i = 1, 2, \dots, n$$

که h^i یک مجموعه منفرد³ یعنی یک عدد حقیقی می باشد. این نوع از سیستم های فازی را که نوع دوم⁴ می نامند بعنوان یک حالت خاص از سیستم های نوع اول مطرح می باشند که کاربردهای بسیاری در کنترل مسیر اتومبیل و بازوی ربات داشته است [1.13]. سیستم نوع اول به دلیل اینکه از مجموعه های فازی در هر دو قسمت مقدمه و نتیجه استفاده می کند دارای خصوصیات فازی و زبانی بیشتری می باشد. به بیانی دیگر در سیستم فازی نوع دوم تعداد پارامترها کمتر شده و قسمت غیر فازی ساز⁵ نیز حذف شده است. اگر قصد داشته

¹ Linear Matrix Inequality (LMI) , Bilinear Matrix Inequality (BMI)

² Type-I

³ Singleton

⁴ Type-II

⁵ Defuzzifier

باشیم از نگاهی کاربردی به سیستم های نوع دوم بنگریم ، موفقیت ها و کاربردهای عملی این نوع از سیستم های فازی خود موید اهمیت این سیستم ها در بین سیستم های فازی می باشد.

اما مزایای استفاده از سیستم های فازی نوع دوم ، آسان بودن این نوع مدل برای شناسایی و همچنین قابلیت تقریب مناسب می باشد . با نگاهی تئوری، کنترلر از گونه فازی نوع اول را زمانی به کار می بریم که طراح خواستار استفاده از مجموعه های فازی در قسمت نتایج قوانین باشد کما اینکه در اغلب استفاده های نوع اول ، نوع دوم نیز کار ساز و قابل استفاده می باشد . همچنین بحث پایداری در سیستم های نوع دوم بدلیل شباهت بیشتر به نوع اول تا نوع دوم قابل گسترش به سیستم های فازی نوع اول نیز می باشد. یکی از این رهیافت ها تقریب سیستم فازی نوع اول با سیستم فازی نوع دوم می باشد . البته یکی از معایب استفاده از سیستم های فازی نوع دوم در مقایسه با سیستم های فازی نوع سوم تعداد قوانین بالا در رویارویی با سیستم های چند بعدی^۱ است .

سیستم های فازی نوع سوم^۲ دارای قوانینی به صورت زیر می باشند :

$$\begin{aligned} & \text{if } p_1 \text{ is } M_1^i \text{ and } p_2 \text{ is } M_2^i \text{ and } \dots \text{ and } p_s \text{ is } M_s^i \\ & \text{then } y = f^i(p_1, p_2, \dots, p_n) \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

که f^i یک تابع از متغیر های پیشین^۳ p_1, p_2, \dots, p_n می باشد . البته معمولاً این تابع را به صورت خطی زیر مشخص می شود .

$$f^i(p_1, p_2, \dots, p_n) = a_0^i + a_1^i p_1 + a_2^i p_2 + \dots + a_s^i p_s$$

سیستم فازی نوع سوم برای کنترل مدل ماشین برای اولین بار به کار رفت [1.14][1.15] . این سیستم ها دارای این عیب می باشند که خصوصیات محض سیستم فازی را بدلیل خطی بودن قسمت نتایج قوانین ندارند . اما بدلیل مدل سازی اغلب سیستم های غیر خطی (یک مدل مرجع مناسب^۴) و همچنین امکان اعمال تئوری

¹ Multidimensional Systems

² Type-III

³ Premise Variable

⁴ Model-Based

های کنترل خطی بر روی این نوع از سیستم های فازی، دارای کاربردهای فراوانی می باشد . همچنین با کاربرد این سیستم می توان تعداد قوانین را در سیستم های غیر خطی درجه بالا کاهش داد . همانگونه که دیده می شود سیستم های فازی نوع دوم را نیز می توان حالت خاصی از سیستم های نوع سوم نیز در نظر گرفت . در سیستم های نوع سوم می بینیم که اگر تعداد قوانین را به یک کاهش دهیم سیستم فازی تبدیل به سیستم خطی خواهد شد . البته در مورد سیستم های نوع دوم نیز این مسئله نشان داده شده است [1.16] .

لزوم بحث پایداری با وجود یک مدل مرجع در مقالات متعددی مورد بحث و مطالعه قرار گرفته است. در برخی از مقالات به ایجاد یک کنترلر فازی در فیدبک سیستم های غیر خطی و سپس پایداری را مورد بحث قرار داده است [1.17]، که معمولا در این گونه طراحی ها همواره سیستم فازی به عنوان یک سیستم غیر خطی مد نظر می باشد و از خصوصیات خاص فازی استفاده چندانی نمی شود ، تا آنجا که به استخراج تابع شرح دهنده^۱، صفحه فاز^۲ و معیار دایره ای^۳ نیز همت گماشته شد [1.18][1.19] . در واقع شاهراه اصلی این ایده که اغلب برای سیستم های فازی نوع یک به کار می رفت مبتنی سیستم های لور^۴ بود که به صورت زیر می باشد .

یک سیستم خطی با فیدبک غیر خطی را در نظر بگیرید :

$$\dot{x} = Ax + bu \quad , \quad y = c^T x \quad , \quad u = -\varphi(y) \quad , \quad \varphi(0) = 0$$

که φ معمولا شرط قطاعی^۵ را ارضا می کند :

$$k_1 \leq \left(\frac{\varphi(y)}{y} \right) \leq k_2$$

در حالتی که سیستم فازی برای کنترل مد نظر باشد، $\varphi(y)$ را با یک سیستم فازی جایگزین می کنند . برای مثال در تحلیل تابع شرح دهنده $\varphi(y)$ با ky تقریب زده می شود . این متد شرایط کافی را در اختیار طراح قرار

¹ Describing Function
² Phase-Plane
³ Circular Criterion
⁴ Lur'e Systems
⁵ Sector Condition

نمی دهد و آن هم بدلیل تقریبی است که به کار برده می شود. پایداری این گونه سیستم ها بر اساس قطاع محدود $[k_1, k_2]$ تحلیل می شود که برای این هدف، مقالاتی بسیاری با رهیافت های همچون تابع لیاپانوف^۱، کالمن - یاکوبویچ^۲ و قضیه پف^۳ و ... به رشته ی تقریر درآمده اند، که $\varphi(y)$ را در حالات گوناگون (متغیر زمان^۴، دینامیکال^۵ و حافظه دار^۶) بررسی کرده اند [1.20][1.21][1.22]. در بحث پایداری^۷، پایداری مقاوم^۸، ساختار متغیرها^۹، کنترل سطح لغزشی^{۱۰}، تئوری دو شاخه شدن^{۱۱} و کنترل فازی تطبیقی^{۱۲} مقالات و تقریرات زیاد نیز نگارش شده اند [1.23][1.24][1.25].

با این تفاسیر، هنور فقدان یک متد و تئوری کلی برای تحلیل پایداری سیستم فازی نوع اول وجود دارد و همانطور که مشاهده شد تقریباً تمامی مقالات و متدهای ارائه شده مبتنی بر ابتکار عمل و نگاهی غیر خطی به سیستم های فازی است. در تئوری کنترل متعارف، تحلیل پایداری سیستم کنترل مبتنی بر سیستم دینامیکی یعنی سیستم بدون کنترل^{۱۳} می باشد.

یک سیستم کنترل فازی نوع سوم با مجموعه قوانین مربوطه به صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned} \text{if } x(t) \text{ is } M^i \quad \text{then } \delta x(t) &= A_i x(t) + B_i u(t) \\ \text{if } x(t) \text{ is } M^i \quad \text{then } u(t) &= K_i x(t) \end{aligned}$$

که

$$\delta x(t) = \begin{cases} x(t+1) & \text{a discrete case} \\ \dot{x}(t) & \text{a continuous case} \end{cases}$$

¹ Lyapunov Function
² Kalman-Yakubovitch Lemma
³ Popov's Theorem
⁴ Time-variant
⁵ Dynamical
⁶ With Memory
⁷ Stability
⁸ Robust Stability
⁹ Variable Structure
¹⁰ Sliding Mode Control
¹¹ Bifurcation
¹² Adaptive Fuzzy Control
¹³ Unforced Control

که کنترل به صورت فیدبک و تحت یک کنترلر فازی صورت می گیرد که اولین بار توسط [1.13] و با عنوان جبرانساز توزیع شده یکنواخت (PDC) مطرح شد. در قوانین فوق $x(t)$ بردار حالت، $u(t)$ بردار کنترل و M^i بردار مجموعه های فازی می باشند، همچنین (A_i, B_i) و K_i ماتریس های ثابت می باشند .

تحلیل پایداری سیستم های فازی نوع سوم در حالت بدون کنترل ($u(t) \equiv 0$) برای اولین بار در حالت گسسته¹ و توسط [1.26] ارائه شد که رهیافتی مبتنی بر تابع لیاپانوف بود . کارهای مشابه را می توان در مراجع [1.27][1.28] جستجو کرد . در چند ساله اخیر اکثریت تلاش ها متمرکز بر روی بحث پایداری در سیستم های فازی نوع سوم شده است در حقیقت بحث پایداری از نوع اول به نوع سوم انتقال پیدا کرده است . و علت این امر هم بدلیل سازگار بودن بیشتر سیستم های فازی نوع سوم با تئوری کنترل متعارف می باشد . در مقالات [1.29][1.30] می توان مباحث مربوط به بحث پایداری سیستم فازی نوع سوم گسسته را مطالعه کرد و در [1.31][1.32] نیز پایداری برای سیستم های فازی نوع سوم پیوسته² مورد بحث قرار گرفته است . [1.33] نیز سیستم های غیر قطعی فازی نوع سوم را مورد مطالعه قرار داده است.

در این پایان نامه سعی شده در پاسخ به سوال سوم به ارائه متدها و رهیافت های طراحی سیستم های (کنترل) فازی پایدار پرداخته شود . همت نگارنده بر این اساس می باشد تا در ابتدا با ارائه بحثی تئوری در منطق و سیستم های فازی بتوان قضایای مربوط به پایداری سیستم های فازی استخراج شود و سپس با خارج شدن از بحثی کاملا تئوریک و با نگاهی مهندسی قضایای مربوط را در قالب الگوریتم های طراحی تجسم ببخشد . بنابراین این پایان نامه به صورت زیر قالب بندی و طرح شده است .

بعد از طی مقدمات و در فصل دوم به مطالعه و بررسی مقدمات فازی ، تئوری های پایداری ، لزوم بحث پایداری ، سیستم های فازی تاکاگی-سوگنو-کانگ³ پرداخته شده است . در ابتدا به اختصار برخی از ملزومات منطق

¹ Discrete Case

² Continuous Case

³ Takagi-Sugeno-Kang

فازی همانند نرم ها^۱ و کو-نرم ها^۲، برخی از متدهای استنتاج^۳ و پاره ای از تعاریف مورد نیاز معرفی خواهند شد و سپس با نگاهی گذرا به معرفی سیستم های فاز خواهد داشت. طرح بحث پایداری بدون معرفی و شرح تئوری های کاربردی در زمینه ی پایداری میسر نمی باشد. لذا بحث در این فصل با معرفی تئوری های پایداری در سیستم های غیر خطی و ذکر چند مثال ادامه می یابد و در نهایت نیز نگاهی اجمالی به معرفی و پایداری در سیستم های فازی خواهد داشت.

در فصل دوم به معرفی کاملتری از سیستم های فازی نوع سوم پرداخته شده است. سیستم های فازی متعارف، سیستم های فازی آفین^۴، سیستم های فازی تاخیر دار^۵ و سیستم های فازی با حضور عدم قطعیت ها^۶ از موارد مورد بحث در این فصل می باشد. همچنین پایداری هر کدام از سیستم ها به همراه معرفی قضایای نمونه ای در هر نوع از ساختارها از کارهای انجام شده در این فصل می باشد.

در فصل چهارم و پنجم که نتایج کار نگارنده می باشد. راهکارها، متدها و الگوریتم هایی استخراج شده اند تا بتوان در حد امکان موانع و مشکلات موجود در بحث پایداری سیستم های فازی را مرتفع کرد. از عمده مشکلات موجود، سنگینی محاسبات، غیر خطی بودن بسیاری از شرایط بدست آمده در مقالات، دشواری استخراج گین ها از معادلات غیر خطی، محدود بودن پاره از متدها و دشوار بودن اعمال برخی از قضایای پایداری از مشکلات مربوطه می باشد. همچنین در مقالات و تحقیقات معمولاً پایداری سیستم را بدون در نظر گرفتن عملکرد سیستم و یا قابلیت اطمینان آن مورد بحث قرار داده اند تا جائیکه تعداد محدودی از مقالات پایداری سیستم های فازی مقیاس-بزرگ^۷ را مورد مطالعه قرار داده اند.

¹ Norms

² Co-Norms

³ Inference

⁴ Fuzzy Affine Systems

⁵ Time-Delay T-S Fuzzy Models

⁶ Uncertainties

⁷ Fuzzy Large-Scale Systems

بنا به مباحث فوق فصل چهارم را به سیستم های فازی متعارف و فصل پنجم را به سیستم های فازی مقیاس - بزرگ اختصاص داده ایم .

یکی از روش های معروف و اولیه ای که جهت تحلیل پایداری مطرح شد توسط آقایان تاناکاووگنو در [1.26] مطرح گردید، که تحلیل پایداری را به صورت ترم های LMI فرموله کردند . این مقاله و بسیاری از تحقیقاتی که بعد از این مقاله ارائه شد مبتنی بر یافتن یک ماتریس متقارن معین مثبت P بودند که بتواند شرایط لیاپانوف را در کل مجموعه جهانی و برای تمامی قوانین ارضا کند به طوری که برای سیستم درجه دو که دارای پنج تابع عضویت برای هر ورودی می باشد، استخراج گین های فیدبک حالت به گونه ای که پایداری تضمین شود. مستلزم حل 625 نامعادله ماتریسی می باشد . اگر تعداد قوانین بالاتر رود این مشکل به مراتب حادتر خواهد شد. لذا در ابتدای فصل چهارم به ارائه راهکاری اساسی مبتنی بر محدود کردن تابع لیاپانوف¹ در نواحی عملگر² پرداخته شده است که پیدا کردن ماتریس P در نواحی کوچکتر و نامعادلات کمتر از عمده مزایای آن می باشد. برای مثال یک سیستم فازی درجه سوم را در نظر بگیرید که هر ورودی دارای شش مجموعه فازی می باشد . برای حل معمول و استخراج ماتریس ها باید 46656 نامعادله حل کرد در حالیکه در روش مورد نظر این تعداد به 4500 کاهش پیدا خواهد کرد . (برای مطالعه و نگاهی روشن تر به نوع متد و مزایای آن ، قضایای 4.1 ، 4.2 و قضیه نمونه ای 4.1 را ببینید)

در ادامه بر پایه ی چنین رهیافتی به استخراج شرایط کافی پایداری سیستم های فازی ، پایداری با حضور عدم قطعیت ها³ و پایداری در ضمن بررسی عملکرد سیستم همت گماشته ایم که حاصل آن قضایای 4.4 و 4.5 و 4.6 می باشد . سپس با نگاهی به سیستم های غیر خطی به معرفی سیستم نمونه ای جرم - فنر - دمپر⁴ به همراه مدل فازی آن پرداخته ایم و از الگوریتم استخراجی از متن قضایای مطرح شده، کنترلرهای فازی در حالات مختلف سیستم و با معیارهای متفاوت طراحی شده است .

¹ Lyapunov

² Operating Subregion

³ Parametric Uncertainties

⁴ Mass-Spring-Damper

مدل فازی یک سیستم مقیاس-بزرگ^۱، سیستم فازی مقیاس-بزرگ^۲ نامیده می شود که تحلیل و طراحی کنترلر آنها به مراتب پرکارتر از سیستم های فازی معمولی می باشد. یک سیستم فازی مقیاس-بزرگ شامل تعداد مشخصی از سیستم های فازی $T - S$ می باشد که تداخل های داخلی^۳ در بین این زیر سیستم ها وجود دارد. همچنین این زیر سیستم ها که خود یک سیستم فازی $T - S$ می باشند می توانند آفین، تاخیر زمانی، دارای عدم قطعیت ها و یا دارای اغتشاش باشند. متأسفانه زمینه مطالعاتی و کاربرد تحلیل، طراحی و کنترل این گونه سیستم در تحقیقات و مقالات در حد شایسته ای مورد بررسی قرار نگرفته است، اما پیش بینی می شود این زمینه ی تحقیقاتی با سرعتی بالادر سالهای آتی به طور فزاینده گسترش یابد.

در فصل پنج این پایان نامه نیز سعی شده است تا کنترلرها و رهیافت های تحلیل پایداری جدیدی در این زمینه پیدا نمود و همچنین با گسترش متدهای موجود در سیستم های فازی $T - S$ به سیستم های فازی مقیاس-بزرگبتوان روزنه ای برای یافتن متدهای تحلیل و طراحی ساده تر، عملی تر با دید مهندسی و بر پایه منطقی قدرتمند پیدا نمود، پس تلاش خواهیم کرد تا متدهای به دست آمده را علاوه بر اعمال بر روی نمونه های متفاوت بر روی سیستم های عملی نیز اعمال کنیم(قضایای 5.1، 5.2، 5.3 و 5.4 را ببینید).

¹ Large-Scale System

² Fuzzy Large-Scale System

³ Interconnection

فصل دوم

واژه شناسی منطق فازی

و

تئوری پایداری

2.1. پیشگفتار

در این فصل به معرفی و شرح برخی از مفهومات و تعاریف فازی و همچنین پاره از نتایج قضایای پایداری سیستم های کنترل پرداخته می شود. در انتها نیز مسئله طراحی کنترلر مطرح می شود و متد طراحی کنترلر غیر خطی برای سیستم های دو خطی¹ نیز مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

2.2. واژه شناسی² منطق فازی

تعریف 2.1: نرم مثلثی³ و کو-نوم مثلثی⁴ [2.1]

فرض می شود صفر و یک مینیمم و ماکزیمم المان های شبکه⁵ (L, \leq) باشند، تابع $T: L \times L \rightarrow L$ یک نرم مثلثی خوانده می شود، اگر T شرایط (1) تا (4) را ارضا کند و همچنین $T(a, 1) = a$ (برای همه $a \in L$) و همینطور تابع $T: L \times L \rightarrow L$ یک کو-نوم مثلثی نامیده می شود، اگر شرایط (1) تا (4) را ارضا کند و $T(a, 0) = a$ (برای همه $a \in L$).

$$(1) \quad T(0,0) = 0, T(1,1) = 1$$

$$(2) \quad T(a,b) = T(b,a) \quad \forall a, b \in L$$

$$(3) \quad a \leq c, b \leq d \implies T(a,b) \leq T(c,d) \quad \forall a, b, c, d \in L$$

$$(4) \quad T(T(a,b),c) = T(a,T(b,c)) \quad \forall a, b, c \in L$$

در تعریف \leq نشان دهنده کوچکتر بودن و جفت نماد (L, \leq) یک شبکه می باشد و به این معنا است که

$$\inf\{a,b\} \in L, \quad \sup\{a,b\} \in L \quad \forall a, b \in L$$

در منطق فازی کافی است که $L = [0,1]$ باشد.

مثال 2.1: فرض کنید که $L = [0,1]$ داریم که:

¹ Bilinear

² Terminology

³ Triangular Norms

⁴ Triangular Co-Norms

⁵ Lattice

$$T_0(a, b) := a \wedge b \quad (i.e. \min(a, b)), \quad T_1(a, b) := a \cdot b$$

$$T_2(a, b) := a \cdot \frac{b}{(1 + (1 - a) \cdot (1 - b))}$$

$$T_\infty(a, b) := 0 \vee (a + b - 1) \quad (i.e. \max(0, a + b - 1))$$

$$S_0(a, b) := a \vee b, \quad S_1(a, b) := a + b - a \cdot b$$

$$S_2(a, b) := \frac{a + b}{1 + a \cdot b}$$

$$S_\infty(a, b) := 1 \wedge (a + b)$$

واضح است که (L, \leq) یک شبکه می باشد، حال اگر $L = [0, 1]$ و \leq نشان از علامت متعارف \leq باشد می

توان نشان داد که T_0, T_1, T_2, T_∞ نرم های مثلثی بروی L می باشند و S_0, S_1, S_2, S_∞ نیز کو-نرم های مثلثی

بروی L می باشند .

تعریف 2.2: (مجموعه فازی) [2.2]¹

یک مجموعه ی فازی F در مجموعه جهانی U مورد بحث یک تابع مشخصه با تابع عضویت $\mu_F: U \rightarrow [0, 1]$ می

باشد. به طور اختصار F را می توان به صورت های زیر در دو حالت پیوسته و گسسته نوشت:

$$F = \int_U \mu_F(x)/x \quad (continuous) \quad \text{and} \quad F = \sum_{i=1}^n \mu_F(x_i)/x_i \quad (discrete)$$

این مفاهیم اولین بار توسط آقای زاده در سال 1965 معرفی شدند. به بیانی دیگر مجموعه فازی را می توان

حالت تعمیم یافته ای از مجموعه های معمولی در نظر گرفت که تابع عضویت این مجموعه ی معمولی فقط دو

مقدار صفر و یا یک را اختیار می کنند . بر اساس تئوری مجموعه های فازی می توان مفاهیم مبهم در زبان

گفتاری را به صورت ریاضی مدل کرد که در واقع اساس کار (علم بشری و یا دانسته های انسانی) در کنترل

فازی می باشند .

تعریف 2.3 (متمم - T) [2.1]³

¹ Fuzzy Sets

² Universal set

³ T-Complement

فرض کنید N یک تابع بروی شبکه (L, \leq) با خصوصیات زیر باشند :

$$(1) \quad a \leq b \Rightarrow N(a) \leq N(b) \quad \forall a, b \in L$$

$$(2) \quad N(N(a)) = a \quad \forall a \in L$$

آنگاه N را یک عملگر متمم- T بر روی (L, \leq) می نامند .

در حالت خاص ، اگر $L = [0,1]$ و $N(x) = 1 - x \quad \forall x \in [0,1]$ آنگاه N یک عملگر متمم بر روی $[0,1]$

می باشد که متمم فازی¹ نامیده می شود و معمولا به صورت A^c نشان داده می شود:

$$A^c = \int_U (1 - \mu_A(x))/x$$

تعریف 2.4: اشتراک- T ² و اجتماع- T ³ [2.1]

فرض کنید A_1, A_2 دو مجموعه فازی در مجموعه ی جهانی U باشند اشتراک- T و اجتماع- T بر روی

A_1, A_2 به صورت زیر تعریف می شوند :

$$A_1 \cup A_2 := \int_U (\mu_{A_2}(x) \dot{+} \mu_{A_1}(x))/x$$

$$A_1 \cap A_2 := \int_U (\mu_{A_2}(x) * \mu_{A_1}(x))/x$$

که $\dot{+}$ و $*$ به ترتیب نرم و کو-نرم مثلثی می باشند .

اگر نرم و کو-نرم را T_0 و S_0 که در مثال قبل تعریف شدند در نظر بگیریم اشتراک- T و اجتماع- T به اجتماع و

اشتراک فازی متعارف تبدیل می شوند .

تعریف 2.5: رابطه فازی⁴ [2.2]

یک رابطه فازی یک مجموعه ی فازی در $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_M$ می باشد، که به صورت زیر بیان می شود :

$$R_{U_1 \times U_2 \times \dots \times U_M} = \int_{U_1 \times U_2 \times \dots \times U_M} \mu_R(U_1, U_2, \dots, U_M) / (U_1, U_2, \dots, U_M)$$

¹ Fuzzy Complement

² T-Intersection

³ T-Union

⁴ Fuzzy Relation

در تئوری سیستم‌ها کنترل فازی، یک رابطه فازی معمولاً با قوانین فازی¹ (اگر A آنگاه B)، که با $A \rightarrow B$ نشان داده می‌شود (تشریح می‌شود). توابع عضویت رابطه $A \rightarrow B$ را می‌توان از نرم‌ها و کو-نرم‌های مثلثی استنتاج کرد. حدوداً 40 نوع استنتاج فازی متفاوت در مقالات و تحقیقات مورد استفاده قرار گرفته است.

مثال 2.2: [2.1]

- عطف فازی²

$$A \rightarrow B = \int_{U \times V} (\mu_A(u) * \mu_B(v)) / (u, v)$$

- استلزام کلی³

$$A \rightarrow B = \int_{U \times V} (N(\mu_A(u) \dot{+} \mu_B(v))) / (u, v)$$

- محاسبه گزاره‌ای⁴

$$A \rightarrow B = \int_{U \times V} (N(\mu_A(u) \dot{+} (\mu_A(v) * \mu_B(v)))) / (u, v)$$

- استلزام پوننس تعمیم یافته⁵

$$A \rightarrow B = \int_{U \times V} \sup \{c \in [0,1] : \mu_A(u) * c \leq \mu_B(v)\} / (u, v)$$

تعریف 2.6: ترکیب $sup - star$ [2.2]⁶

¹ Fuzzy Rules
² Fuzzy Conjunction
³ Material Implication
⁴ Propositional Calculus
⁵ Generalized of Modus Ponens
⁶ Super-Star Composition

اگر R یک رابطه فازی در $U \times V$ باشد و A یک مجموعه فازی در U ، آنگاه ترکیب A و R به صورت زیر می باشد :

$$A \circ R = \int_U \sup_{u \in U} \left((\mu_A(u) * \mu_R(u, v)) / (u, v) \right)$$

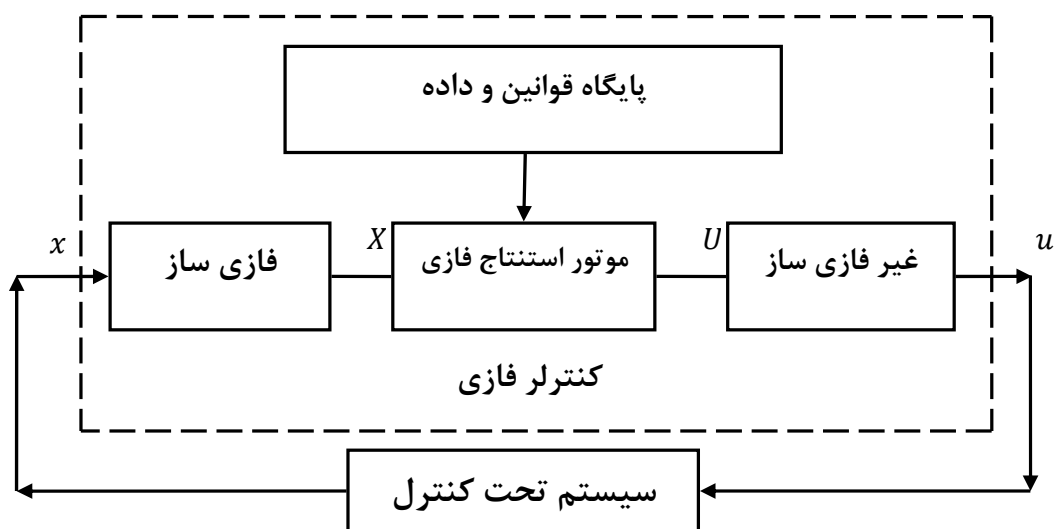
که $*$ یک نرم مثلثی است .

مطابق با تعاریف 2.5 و 2.6 دلیل وجود نرم ها و کو-نرم های متفاوت ترکیب روابط متفاوتی را خواهیم داشت . در [2.2] نتایج متفاوتی مبتنی بر شهودهای متفاوت ارائه شده است . به طور کلی نمی توان به طور مطلق مشخص کرد که کدامیک از متدها و استنتاج ها نسبت به دیگری ارجحیت دارد. اما T_0, T_1, S_0 که در مثال 2.1 مشخص شده اند به طور نسبی دارای عملکردی آسان می باشند و در متون کنترل فازی عموماً مورد استفاده قرار می گیرند. برای جزئیات بیشتر می توان به مراجع [2.1][2.2] و [2.3] رجوع کرد .

2.3. پیکر بندی سیستم های کنترل فازی

یک سیستم کنترل فازی یک سیستم با کنترلر فازی می باشد که پیکربندی کلی آن در شکل 2.1 نشان داده شده است. این نکته را مد نظر داشته باشید که ورودی " u " و خروجی " x " فازی نمی باشند . با اجرای عملگر فازی ساز¹، مقدار دقیق " x " به مجموعه ی فازی " X " تبدیل می شود . مکانیزم استنباط در شکل را می توان به صورت $U = X \circ R$ فرموله کرد که " \circ " یک عملگر ترکیب فازی² است و R یک رابطه فازی مشخص شده در پایگاه قوانین می باشد. غیر فازی ساز³ عمل تبدیل مجموعه ی فازی " U " به مقدار دقیق و معلوم " u " را انجام می دهد . قوانین فازی که معمولاً به صورت " اگر - آنگاه " می باشند می توانند بر مبنای علم یک متخصص و یا یک الگوریتم یادگیری و سایر متدهای مربوطه ساخته شود .

¹ Fuzzifier
² Fuzzy Composition
³ Defuzzifier



شکل 2.1 پیکر بندی کلی سیستم کنترل فازی

همچنین از خصوصیات قوانین کامل¹ و سازگار بودن² از اهمیت خاصی برخوردارند، کامل بودن قوانین متضمن این مطلب است که هر حالت دارای یک خروجی کنترلر مناسب است و از سازگار بودن قوانین نیز عدم تضاد بین قوانین نتیجه می شود. جزئیات و شرح بیشتر را می توان در مراجع [2.1][2.2] جستجو کرد.

همانگونه که در فصل قبل بحث شد می توان سیستم های فازی را به دو گونه ممدانی³ و $T-S$ ⁴ مطابق با قسمت نتیجه ی قوانین⁵ تقسیم بندی نمود و سیستم های نوع سوم را حالت خاصی از این دو نوع به حساب آورد. در مدل ممدانی نتایج هر قانون فازی یک مجموعه ی فازی است، در حالی که در مدل $T-S$ قسمت نتیجه هر قانون یک تابع دقیق⁶ از متغیرهای پیشین⁷ می باشد. از تحقیقات و مقالاتی که سیستم های

1 Complement of Fuzzy Sets
 2 Consistency of Fuzzy Sets
 3 Mamdani
 4 Takagi-Sugeno-Kang (TSK or T-S)
 5 Consequent of Rules
 6 Crisp Function
 7 Premise Variable

کنترل فازی را به سه دسته تقسیم می کنند و مدل فازی منفرد¹ را به عنوان نوع دوم در نظر می گیرند می توان به [2.4] اشاره کرد.

2.4. پایداری و روش مستقیم لیاپانوف

معادله یک سیستم پیوسته متغیر با زمان را در حالت عمومی به صورت زیر در نظر بگیرید :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.1)$$

که $x(t) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ بردار حالت می باشد و f یک تابع بردای است که شرایط وجود و منحصر به فرد بودن جواب با شرایط اولیه $x(t_0) = x_0 \in \Omega$ را ارضا می کند . یکی از ساده ترین شرایط برای وجود و منحصر به فرد بودن جواب شرط لیپ - شیتز² به صورت زیر می باشد :

معادله ی 2.1 دارای جواب منحصر به فرد است اگر یک مقدار مثبت اسکالر $L > 0$ وجود داشته باشد به طوری که برای همه ی $x_1(t), x_2(t) \subseteq \mathbb{R}^n$ داشته باشیم :

$$|f(x_1(t), t) - f(x_2(t), t)| \leq L \cdot |x_1(t) - x_2(t)|$$

بحث در مورد عدم وجود جواب به ازای برخی شرایط اولیه و یا وجود جواب غیر منحصر به فرد نیز از مسائل مهم می باشد . در این پایان نامه فرض می شود تمامی معادلات دارای جواب منحصر به فرد می باشند.

مثال 2.2 : [2.5]

فرض کنید :

$$\dot{x}(t) = 2\sqrt{x(t)} \quad (x(t) \in [0, +\infty) \subseteq \mathbb{R}) \quad (2.2)$$

¹ Singleton

² Lipschitz

واضح است $x(t) = (t + \sqrt{x_0})^2$ جواب معادله ی (2.2) است که $x(0) = x_0 \geq 0$ است. پاسخ دیگر این معادله به ازای $x_0 = 0$ ، $x(t) \equiv 0$ می باشد. لذا معادله ی 2.2 دارای دو جواب متفاوت می باشد. تحت فرض وجود جواب منحصر به فرد، پایداری جواب را می توان به صورت زیر مشخص کرد.

تعریف 2.7 (پایداری به مفهوم لیاپانوف)¹ [2.5]

فرض کنید جواب $\bar{x}(t)$ برای معادله (2.7) برای زمان های $t \geq t_0$ به خوبی تعریف شده باشد، آنگاه این جواب پایدار است (به مفهوم لیاپانوف) اگر برای هر $\epsilon > 0$ و $t_1 \geq t_0$ ، $\delta(\epsilon, t_1) > 0$ وجود داشته باشد به طوری که هر جواب $x(t)$ با شرایط اولیه $x(t_1)$ که شرط $|x(t) - \bar{x}(t)| < \delta(\epsilon, t_1)$ را ارضا کند آنگاه شرط $|x(t) - \bar{x}(t)| < \epsilon$ برای همه $t \geq t_1$ را نیز ارضا کند. همچنین جواب $\bar{x}(t)$ را پایدار یکنواخت² می نامند، اگر جواب $\bar{x}(t)$ پایدار باشد و δ مستقل از t_1 باشد. همینطور جواب $\bar{x}(t)$ زمانی پایدار مجانبی³ گویند اگر جواب $\bar{x}(t)$ پایدار باشد و $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - \bar{x}(t)| \rightarrow 0$. اگر جواب $\bar{x}(t)$ پایدار مجانبی باشد و $\delta(\epsilon, t_1)$ را بتوان به طور دلخواه هر مقدار بزرگی انتخاب کرد آنگاه $\bar{x}(t)$ را پایدار مجانبی کلی⁴ گویند.

تعریف 2.8 (پایداری نمایی)⁵ [2.5]

جواب $\bar{x}(t)$ معادله (2.1) را پایدار نمایی گویند اگر برای $|x(t_0) - \bar{x}(t_0)|$ به اندازه کافی کوچک بتوان یافت به طوری که $\alpha, \beta > 0$

$$|x(t) - \bar{x}(t)| < \beta \cdot e^{-\alpha(t-t_0)} \cdot |x(t_0) - \bar{x}(t_0)|$$

هنگامی که مقدار $|x(t_0) - \bar{x}(t_0)|$ مقدار دلخواه باشد آنگاه $\bar{x}(t)$ را پایدار نمایی کلی⁶ گویند.

پایداری به مفهوم لیاپانوف بر اولین بار توسط لیاپانوف بر اساس بر مفهوم انرژی در قرن 19 ارائه شد.

¹ Stability in the Sense of Lyapunov

² Uniformly Stable

³ Asymptotic stable

⁴ Globally stable

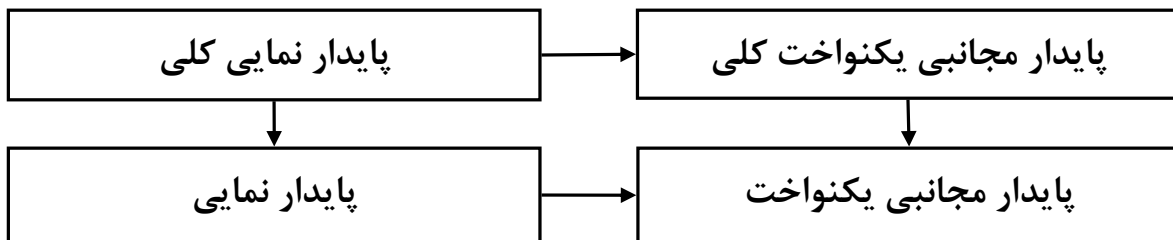
⁵ Exponential stability

⁶ Globally Exponentially Stable

در حقیقت برای بررسی پایداری جواب $\bar{x}(t)$ ، کافی است که شرایط تعریف 2.7 را فقط برای برخی $t_1 \geq t_0$ به جای همه $t_1 \geq t_0$ بررسی کرد، و این هم به دلیل آن است که در هر بازه بسته $[t_0, t_1]$ ، مقدار $|x(t) - \bar{x}(t)|$ می تواند به طور دلخواه کوچک انتخاب شود. همچنین باید یادآوری شود که پایداری $\bar{x}(t)$ لزوماً به معنای همگرایی $|x(t) - \bar{x}(t)| \rightarrow 0$ هنگامی که $t \rightarrow \infty$ نمی باشد، حتی اگر $|x(t) - \bar{x}(t)| \rightarrow 0$ جواب $\bar{x}(t)$ ممکن است ناپایدار باشد (مثال 2.3 را ببینید). به هر حال اگر $|x(t) - \bar{x}(t)|$ به طور نمایی به صفر همگرا شود آنگاه پایداری $\bar{x}(t)$ تضمین می شود. برای سیستم های غیر خطی عمومی، روابط بین پایداری در حالات مختلف جواب در شکل 2.2 نشان داده شده است. حالت x_e را حالت تعادل¹ (2.1) می نامند، اگر $x(t)$ به x_e میل کند و سپس برای همه زمان ها در x_e باقی بماند یعنی $f(x_e, t) = 0$. بدون از دست دادن عمومیت مسئله، ما می توانیم فرض کنیم که $\bar{x}(t) \equiv 0$ یک حالت تعادل سیستم (2.1) می باشد. اگر حالت تعادل $x_e = 0$ هم نباشد، می توان با تغییر متغیر $y(t) = x(t) - \bar{x}(t)$ ، آنگاه $\dot{y}(t) = F(y(t), t)$ و $F(0, t) = 0$

$$F(y(t), t) = f(\bar{x}(t) + y(t), t) - \dot{x}(t)$$

حالت تعادل را به مبدا انتقال داد یعنی $y(t) = 0$ و سیستم نیز برابر با معادله $\dot{y}(t) = F(y(t), t)$ خواهد بود.



شکل 2.2: روابط بین پایداری در حالات مختلف

مثال 2.3: [2.6]

¹ Equilibrium

فرض کنید :

$$\dot{x}(t) = -x(t)^2 \quad (2.3)$$

با جداسازی متغیرها به راحتی می توان جواب معادله را استخراج نمود . برای هر شرط اولیه $x(0) = x_0$ ،
 $x(t) = \frac{x_0}{(1+x_0(t-t_0))}$ جواب معادله خواهد بود . واضح است که اگر $t \rightarrow \infty$ آنگاه $x(t) \rightarrow 0$ ، اما جواب
 بدیهی $\bar{x}(t) \equiv 0$ ناپایدار است زیرا $x(t) \rightarrow \infty$ هنگامی $t \rightarrow t_0 - \frac{1}{x_0}$ (که $x_0 \neq 0$).

ایده ی اصلی این روش بحث بر روی پایداری جواب سیستم داده شده بوسیله ی تغییرات زمانی یک تابع معین
 مناسب (تابع لیاپانوف) درطور مسیر های سیستم می باشد . با این روش می توان بروی پایداری سیستم بدون
 حل معادله بحث کرد که متدی مفید برای تحلیل پایداری در سیستم های غیر خطی می باشد . به هر حال
 دشواری کار پیدا کردن تابع لیاپانوف می باشد . برخی از بحث های جزئی بر روی ساخت تابع لیاپانوف را می
 توان در [2.7] پیدا نمود . نتیجه اصلی متد سیستم لیاپانوف به صورت زیر است .

قضیه 2.1 : (قضیه لیاپانوف اول) [2.5]¹

فرض کنید یک تابع لیاپانوف مشتق پذیر اسکالر پیوسته $V: \Omega \rightarrow [t, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ وجود داشته باشد به طوری
 که $V(0, t) = 0$ ، $V(x, t) \geq \alpha(x)$ و $\dot{V}(x, t) \leq 0$ که برای $\alpha(x) > 0$ ، آنگاه جواب بدیهی $\bar{x}(t) \equiv 0$
 سیستم 2.1 پایدار به مفهوم لیاپانوف است . (توجه داشته باشید که

$$(\dot{V}(x, t) = \frac{\partial V}{\partial t}(x, t) + (\nabla_x V(x, t))^T f(x(t), t):$$

قضیه 2.2 (قضیه لیاپانوف دوم) [2.5]²

فرض کنید که یک تابع اسکالر مشتق پذیر پیوسته $V: \Omega_0 \rightarrow [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ ($\Omega_0 \subseteq \Omega$) ، به طوری که
 $\alpha_0(|x|) \leq V(x, t) \leq \alpha_1(|x|)$ و $\dot{V}(x, t) \leq -\alpha_2(|x|)$ که α_0 ، α_1 و α_2 توابع اکیدا صعودی و اسکالر

¹ First Lyapunov Theorem

² Second Lyapunov Theorem

پیوسته می باشند و همچنین $\alpha_0(0) = \alpha_1(0) = \alpha_2(0) = 0$ ، آنگاه جواب بدیهی $\bar{x}(t) \equiv 0$ سیستم (2.1) به صورت یکنواخت پایدار مجانبی است البته با ناحیه جذب قضیه Ω_0 .

قضیه 2.3: [2.5]

فرض کنید $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$ ، $x(t_0) = x_0$ که f یک تابع پیوسته مشتق پذیر است آنگاه جواب بدیهی $\bar{x}(t) \equiv 0$ به طور یکنواخت پایدار کلی است ، اگر و فقط اگر یک تابع $V: \mathbb{R}^n \times [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ ($\Omega_0 \subseteq \Omega$) واسکالره‌های مثبت α_0 ، α_1 ، α_2 و α_3 وجود داشته باشند به طوریکه شرایط زیر را ارضا کند:

- $\alpha_0 \cdot |x|^2 \leq V(x, t) \leq \alpha_1 \cdot |x|^2$
- $|\nabla_x V(x, t)| \leq \alpha_3 \cdot |x|$

در این قسمت برخی از مفهوم ها و نتایج مهم در بحث پایداری سیستم های غیر خطی پیوسته را مطرح کردیم . جزئیات بیشتر را می توان در مرجع [2.5] یافت . مشابه با بحث های ذکر شده ، جزئیات مربوط به سیستم های گسسته را نیز می توان در مرجع [2.8] مطالعه نمود. رهیافت هایی برای ساخت توابع لیپانوف در مرجع [2.7] مورد بحث قرار گرفته است و برخی نتایج جدید بر روی توابع عمومی لیپانوف در مراجع [2.9] مورد بررسی قرار گرفته است.

2.5. پایداری و مقادیر ویژه¹

سیستم خطی تغییر ناپذیر با زمان $\dot{x}(t) = Ax(t)$ و یا $x(k+1) = Ax(k)$ را در نظر بگیرید . پایداری بدیهی $x(t) \equiv 0$ و یا $x(k) \equiv 0$ به طور کامل بوسیله مقادیر ویژه ماتریس A مشخص می شود که می توان به صورت زیر آن را خلاصه کرد (نامعادله لیپانوف)

فرض کنید :

¹ Eigen Values

$$D = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} a & b \\ b^* & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix} < 0 \right\}$$

یک ناحیه باز در صفحه مختلط باشد که $\begin{bmatrix} a & b \\ b^* & c \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ دارای یک مقدار ویژه اکیدا منفی و یک مقدار ویژه اکیدا مثبت باشد، همینطور * نشان دهنده عملگر متمم ترانهاده¹ باشد، آنگاه نامعادله لیاپانوف به صورت زیر فرموله می شود.

قضیه 2.4: (نامعادله لیاپانوف) [2.10]

همه ی مقادیر ویژه ماتریس A در ناحیه D قرار دارد اگر و تنها اگر یک ماتریس $P = P^* > 0$ وجود داشته باشد به طوریکه

$$\begin{bmatrix} I \\ A \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} aP & bP \\ b^*P & cP \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ A \end{bmatrix} < 0 \quad (2.4)$$

اگر $a = c = 0$ و $b = 1$ آنگاه ناحیه D یک ناحیه ی نیم باز از سمت چپ می باشد. در این حالت نامعادله ماتریسی (2.4) شکل $A^*P + PA < 0, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (یعنی $A^T P + PA < 0, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$) را بخود می گیرد که شرط لازم و کافی برای پایداری سیستم خطی نامتغیر با زمان پیوسته $\dot{x}(t) = Ax(t)$ می باشد. و همچنین اگر، اگر $a = -1, b = 0, c = 1$ آنگاه D یک ناحیه باز دایره واحد در صفحه مختلط خواهد شد. در این حالت (2.4) شکل $A^T P A - P < 0$ را به خود می گیرد که شرط لازم و کافی برای پایداری سیستم گسسته $x(k+1) = Ax(k)$ می باشد.

نتایج و بحث های مشابه در مورد محل قرار گیری مقادیر ویژه را می توان در [2.10] مشاهده نمود و همچنین یک اثبات جدید از نامعادله لیاپانوف را می توان در [2.9] یافت. به هر حال برای سیستم خطی متغیر با زمان $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ ، پایداری پاسخ بدیهی $x(t) \equiv 0$ مستقل از مقادیر ویژه ماتریس $A(t)$ می باشد همانطوریکه در مثال 2.4 نشان داده می شود.

¹ Transpose Conjugate

² Lyapunov's Inequality

مثال 2.4 : [2.5]

فرض کنید :

$$\dot{x}(t) = A_1(t)x(t) \quad (2.5)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 - 9\cos^2(6t) + \sin(6t)\cos(6t) & 12\cos^2(6t) + 9\sin(6t)\cos(6t) \\ -12\sin^2(6t) + 9\sin(6t)\cos(6t) & -1 - 9\sin^2(6t) - 12\sin(6t)\cos(6t) \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه A_1 بطور اکید در نیم صفحه چپ صفحه مختلط قرار دارد.

($\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -10$) ، اما جواب بدیهی (2.5) ناپایدار است و یا مثال زیر را در نظر بگیرید :

$$\dot{x}(t) = A_2(t)x(t) \quad (2.6)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -11 + 15\sin(12t) & 15\cos(12t) \\ 15\cos(12t) & -11 - 15\sin(12t) \end{bmatrix}$$

و جواب بدیهی مسئله (2.6) یعنی $x(t) \equiv 0$ ، به طور مجانبی پایدار است، هر چند که دارای یک مقدار ویژه

در نیم صفحه ی راست صفحه مختلط می باشد ($\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -26$) .

حال سیستم مستقل غیر خطی¹ زیر را در نظر بگیرید :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad (2.7)$$

که $f(0) = 0$ ، اگر f یک تابع پیوسته مشتق پذیر مرتبه دو (یعنی مشتق دوم نیز وجود دارد) در همسایگی

صفر باشد آنگاه این معادله می تواند به صورت $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + g(x(t))$ فرموله شود که :

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0}, \quad g(x(t)) = (g_1(x(t)), \dots, g_n(x(t)))^T$$

$$g_k(x(t)) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f_k(\theta_k, x)}{\partial x_i \partial x_j} x_i x_j, \quad 0 < \theta_k < 1$$

¹ Autonomous Non-Linear System

قضیه ای که در ادامه بیان می شود نشان دهنده پایداری جواب بدیهی (2.7) می باشد که تاحدودی، وابسته به مقادیر ویژه ماتریس A می باشد .

قضیه 2.5: [2.12]

اگر همه ی مقادیر ویژه ماتریس A به طور اکید در نیم صفحه ی چپ صفحه ی مختلط قرار گرفته باشد آنگاه جواب بدیهی $x(t) \equiv 0$ معادله (2.7) به طور مجانبی پایدار است . اگر ماتریس A حداقل یک مقدار ویژه در نیم صفحه باز راست داشته باشد آنگاه جواب بدیهی $x(t) \equiv 0$ معادله (2.7) ناپایدار خواهد بود .

مثال 2.5: [2.13]

مدل پاندول معکوس زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l} \sin(x_1) - \frac{k}{m} x_2 + \frac{1}{ml^2} T \end{aligned} \quad (2.8)$$

که

$$g = 9.81, l = 1.0, m = 1.0, k = 0.5$$

و x_1 زاویه نسبت به خط عمود، x_2 سرعت زاویه و T ورودی کنترل می باشد.

$$\begin{cases} [0, 0]^T \\ [\pi, 0]^T \end{cases} \text{ نقاط تعادل:}$$

جهت تحلیل پایداری $[\pi, 0]^T$ داریم که:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x - [\pi, 0]^T \\ \dot{\bar{x}}_1 &= \bar{x}_2 = \bar{f}_1(\bar{x}) \\ \dot{\bar{x}}_2 &= -\frac{g}{l} \sin(\bar{x}_1) - \frac{k}{m} \bar{x}_2 + \frac{1}{ml^2} T = \bar{f}_2(\bar{x}) \end{aligned}$$

پس کافی است که مبداء مختصات را برای سیستم زیر در نظر بگیریم:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 = f_1(x) \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l} \sin(x_1) - \frac{k}{m} x_2 + \frac{1}{ml^2} T = f_2(x) \end{aligned}$$

که می توان $T = \Phi(x_1, x_2)$ را به عنوان یک کنترلر فازی در نظر گرفت. با خطی سازی حول مبداء خواهیم داشت:

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{array} \right]_{x=0} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} + \frac{1}{ml^2} \frac{\partial T}{\partial x_1} & -\frac{k}{m} + \frac{1}{ml^2} \frac{\partial T}{\partial x_2} \end{array} \right]_{x=0}$$

برای اینکه مقادیر ویژه \bar{A} ($\lambda_i, i = 1, 2$) بطور اکید در نیم صفحه چپ صفحه مختلط واقع شوند کافی است که ریشه های معادله زیر در نیم صفحه چپ صفحه مختلط واقع شوند:

$$\lambda^2 + \left(\frac{k}{m} - \frac{1}{ml^2} \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) \lambda + \left(-\frac{g}{l} - \frac{1}{ml^2} \frac{\partial T}{\partial x_1} \right) = 0$$

پس باید:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x_2} \right|_{x=0} < 0.5$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x_1} \right|_{x=0} < -9.81$$

لذا اگر کنترلر دو شرط فوق را ارضاء کند، سیستم پایدار خواهد شد.

در نهایت، متذکر می شویم که پایداری سیستم های فازی را نیز می توان با بررسی مقادیر ویژه مشخص کرد. سیستم فازی حلقه - باز پیوسته زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t)) A_i x(t) \quad (2.9)$$

که $\alpha_i(x(t)) \geq 0$ و $\sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t)) = 1$. اگر همه مقادیر ویژه های $(A_i + A_i^T)$ به طور اکید در نیم صفحه چپ صفحه مختلط قرار گرفته باشند، آنگاه جواب بدیهی $x(t) \equiv 0$ معادله (2.9) پایدار مجانبی است. اگر α_i را در رابطه ی (2.9) بتوان بطور کامل بعنوان پارامترهای غیر قطعی مستقل از $x(t)$ در نظر گرفت، آنگاه پایداری جواب بدیهی $x(t) \equiv 0$ را می توان با تعیین موقعیت مقادیر ویژه $\sum_{i=1}^r \alpha_i A_i$ تعیین کرد. اگر چه $\sum_{i=1}^r \alpha_i A_i$ یک تابع محدب¹ از پارامترهای α_i می باشد.

¹ Convex Function

همانطور که اشاره شد ، مقادیر ویژه نقش مهمی رادر تحلیل پایداری ایفا می کنند . در قسمت بعد کاربردهای بیشتری را از مقادیر ویژه در طراحی کنترلر بیان می کنیم .

2.6. بحثی در طراحی کنترلر

تاکنون نتایجی را مطرح کردیم که متمرکز بر سیستم های بدون کنترل¹ بوده اند ، حال پاره از نکات مربوط به طراحی کنترلر این گونه سیستم ها را نیز بیان می کنیم . هدف از طراحی کنترلر بدست آوردن حالات مناسب و خروجی فیدبک می باشد به طوریکه سیستم حلقه بسته دارای خصوصیات مطلوب مورد نظر طراح باشد . پایداری نیز از زمره این نیازمندیها و خصوصیات مهم می باشد . اما پیش فرض طراحی کنترلر ، کنترل پذیر بودن² سیستم می باشد، بدین معنی که بوسیله یک کنترلر مناسب بتوان حالات مطلوب را از هر شرایط اولیه ای استخراج نمود .

برای سیستم های کنترلر غیر متغیر با زمان خطی :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.10)$$

که $u(t) \in \mathbb{R}^m$ و $x(t) \in \mathbb{R}^n$

طراحی کنترلر برای این گونه سیستم ها یک مسئله ی حل شده در متون مهندسی می باشد. شرایط کنترل پذیر بودن براحتی بوسیله معیار رتبه³ بدست می آید . به این صورت که سیستم (2.10) کنترل پذیر است اگر و فقط اگر $rank[B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] = n$ ، به علاوه اگر (2.10) کنترل پذیر باشد ، آنگاه می توان به طور قطع و یقین آن را از طریق طراحی فیدبک حالت مناسب پایدار نمود . برای سیستم های متعارف غیر خطی ، طراحی کنترلر بسیار پیچیده تر می باشد و تکنیک های بدست آمده برای ترکیب و طراحی قوانین

¹ Unforced System

² Controllability

³ Rank Criterion

کنترل، شامل خطی سازی ژاکوبین^۱، زمان بندی بهره^۲، خطی سازی فیدبکی^۳، کنترل مد لغزشی^۴، و کنترل تطبیقی^۵ می باشند [2.14]. همچنین سیستم های غیر خطی را می توان با مدل های فازی تقریب زد و می توان تکنیک جبران سازی توزیع شده موازی^۶ (PDC) را جهت طراحی کنترلر مدل-بیس^۷ فازی به کار برد. سیستم های دو خطی^۸ دسته کاملاً ساده ای از سیستم های غیر خطی می باشند که اگر معادلات کنترل و حالت جداگانه در نظر گرفته شوند آنگاه سیستم را می توان خطی فرض کرد. با دو خطی سازی کارلمن^۹ گروه بزرگی از سیستم های غیر خطی را که در ورودی آفین می باشند را می توان بوسیله ی سیستم های دو خطی توصیف کرد [2.15].

فرض کنید که سیستم دو خطی مورد بحث به صورت زیر فرموله می شود :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + \sum_{i=1}^m N_i x(t) u_i(t) \quad (2.11)$$

که $x(t) \in \mathbb{R}^n$ یک بردار حالت n بعدی و $u(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)]^T \in \mathbb{R}^m$ بردار کنترل m بعدی است. همچنین $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ و $N_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($i = 1, 2, \dots, m$) ماتریس های ثابتی می باشند. ماتریس B را می توان به صورت $B = [b_1 | b_2 \dots | b_m]$ نوشت که $(i = 1, 2, \dots, m)$ ، $b_i \in \mathbb{R}^n$ بردار ستونی می باشد. لذا (2.11) را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^m (b_i + N_i x(t)) u_i(t) \quad (2.12)$$

¹ Jacobian Linearization

² Gain Scheduling

³ Feedback Linearization

⁴ Sliding Mode Control

⁵ Adaptive Control

⁶ Parallel Distributed Compensation(PDC)

⁷ Model-Based

⁸ Bilinear Systems

⁹ Carleman Bilinearization

فرض کنید $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \mu_i \pm jv_i \quad (i = 1, 2, \dots, q, \quad k + 2q = n))$ مقادیر ویژه ماتریس A می باشند و همچنین فرض کنید که $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \zeta_i + j\eta_i \quad (i = 1, 2, \dots, q))$ بردارهای ویژه معادل می باشند که در شرایط زیر صدق می کنند :

$$\begin{cases} A\xi_l = \lambda_l \xi_l, & l = 1, 2, \dots, k \\ A\zeta_i = \mu_i \zeta_i - v_i \eta_i; & A\eta_i = \mu_i \eta_i + v_i \zeta_i, \quad i = 1, 2, \dots, q \end{cases} \quad (2.13)$$

T را به صورت $T := [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \zeta_1, \dots, \zeta_q, \eta_1, \dots, \eta_q]$ و P را بصورت $P := (T^{-1})^T T^{-1}$ (در صورتی که T معکوس پذیر باشد) تعریف می کنیم .

قضیه 2.6: [2.6]

فرض کنید که T معکوس پذیر است ، $(i = 1, 2, \dots, k, \quad j = 1, 2, \dots, q)$ ، $\lambda_i, \mu_j \leq 0$ و

$$\{x | x^T (A^T P + PA)x = 0\} \cap \left(\bigcap_{i=1}^m \{x | x^T P (b_i + N_i x) = 0\} \right) = \{0\} \quad (2.14)$$

آنگاه سیستم دو خطی (2.11) به صورت مجانبی کلی از طریق قانون کنترل فیدبک حالت غیر خطی $u_i = -x^T P (b_i + N_i x)$ ، $i = 1, 2, \dots, m$ پایدار می شود .

اگر A یک ماتریس هرویتز¹ باشد ، آنگاه برای هر ماتریس مثبت معین متقارن Q ، یک ماتریس مثبت معین متقارن منحصر به فرد P وجود دارد که معادله لیاپانوف $(A^T P + PA = -Q)$ را ارضا کند . بدین وسیله ، معادله $x^T (A^T P + PA)x = 0$ جواب منحصر به فرد $x = 0$ را دارا است که شرایط (2.14) را ارضا می کند . بوسیله ی قضیه (2.6) ، زیرقضیه زیر بدست می آید.

نتیجه فرعی 2.1: [2.6]

¹ Hurwitz

فرض کنید که همه مقادیر ویژه A دارای قسمت حقیقی اکیدا مثبت باشند ، آنگاه سیستم دو خطی (2.11)

بوسیله قانون کنترل

$$u_i = -x^T P (b_i + N_i x) , \quad i = 1, 2, \dots, m$$

به طور مجانبی پایدار کلی است .

تبیین پایداری

در

ساختارهای مدل فازی نوع

سوم

3.1 مدل فازی $T - S$ متعارف

طبق سلسله مباحث فصول قبل ، سیستم های فازی نوع سوم بعد از دهه 90 به شدت مورد استفاده تحقیقاتی و کاربردی قرار گرفتند و این طرز نگرش نیز بدلیل سادگی استخراج مدل $T - S$ از سیستم های غیر خطی (خطی سازی در ناحیه کار) بود . همچنین بحث پایداری در این سیستم ها با توجه به نوع قوانین در آنها آسانتر از سایر سیستم های فازی صورت می گرفت . بسیاری از این متدهای مبتنی بر حل مسائل بهینه سازی محدب¹ می باشند . (صورت LMI و یا BMI) جهت نمونه می توان به [3.1][3.2] در حالت گسسته و [3.3][3.4] در حالت پیوسته نام برد و یا از [3.5] که سعی بر طراحی کنترلر غیر خطی جهت پایدار سازی دارد ، نام برد . بسیاری از این مقالات در فصل اول ذکر شده اند . یادآوری می شود بحث سیستم های فازی و موضوع عدم قطعیتها در این فصل با نگاهی گذرا مورد بررسی قرار می گیرد . (در فصل چهارم به تفصیل بیشتر نطالعه می شوند) اما سعی خواهیم کرد تا مدل فازی آفین و تاخیردار را با شرحی گسترده تر مورد کنکاش قرار دهیم . مشکلات و معایبی که در اکثر مقالات و تحقیقات به نوعی سعی شده است جهت رفع آنها روشی ارائه شود به صورت زیر می باشند .

- نبود یک متد کلی (اکثر قریب به اتفاق مقالات ، ارائه دهنده شروط کافی می باشند)
 - ثقیل بودن محاسبات
 - خاص و محدود بودن روش ها و همچنین جوابگو نبودن برای سیستم های فازی بزرگ²
- جهت نمونه می توان به مقالاتی اشاره کرد که مبتنی بر یافتن ماتریس معین مثبت همانند P می باشند . این متدها زمانی که سیستم دارای قوانین زیاد (اصطلاحا بزرگ) باشند با مشکل یافتن ماتریس P و همچنین سنگینی محاسبات مواجه می شوند .

¹ Convex Optimization

² Large

در این مجال نگاهی گذرا به سیستم های فازی نوع سوم و راهکار بررسی پایداری ارائه شده توسط [3.6] خواهیم داشت .

حالت پیوسته :

قوانین سیستم^۱:

if $p_1(t)$ is M_1^i and $p_2(t)$ is M_2^i and ... and $p_s(t)$ is M_s^i then

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y_i(t) = C_i x(t) \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, r$$

(3.1)

که y_i خروجی i -امین زیر سیستم محلی و $p(t)$ بردار متغیرهای پیشین^۲ ، M_j^i ($j = 1, 2, \dots, s$) مجموعه های فازی ، (A_i, B_i) ماتریس های سیستم می باشند.

، $p(t) = [p_1(t), p_2(t), \dots, p_s(t)]^T = O x(t)$ ، $rank(O) = s$ ، $(1 \leq s \leq n)$. یک ماتریس مربعی است ، $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$ بردار حالت می باشد و r معرف تعداد قوانین می باشد . جهت کنترل این سیستم اغلب PDC از متد استفاده می شود (که جزئیات بیشتر به همراه شرحی از سیستم های فازی نوع سوم در فصل بعد ارائه شده است) و طراحی یک سیستم کنترلر مبتنی بر تکنیک PDC کنترلر زیر را در پی خواهد داشت :

قوانین کنترلر^۳:

if $p_1(t)$ is M_1^i and $p_2(t)$ is M_2^i and ... and $p_s(t)$ is M_s^i

then

$$u(t) = K_i y_i(t) \quad i = 1, 2, \dots, r$$

(3.2)

¹ Plant Rules

² Premise Variable

³ Controller Rules

اگر از متد استنتاج^۱ استاندارد فازی استفاده کنیم یعنی منفرد^۲، استنتاج فازی ضرب^۳ یا مینیمم^۴ و غیر فازی ساز میانگین-مراکز^۵ آنگاه رابطه (5.1) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i,j}^r \alpha_i(p(t))\alpha_j(p(t))(A_i + B_i K_j C_j)x(t) \quad (3.3)$$

که

$$\alpha_i(p(t)) = \frac{w_i}{\sum_{j=1}^r w_j} \quad w_i = \prod_{k=1}^n M_k^i(x_k(t))$$

که در واقع سیستم های فازی نوع سوم نوعی وزن دهنده به ورودی ها می باشند که خروجی ترکیبی از ورودی های وزن دار می باشند .

لم 3.1 [3.6]

سیستم فازی پیوسته (3.3) به صورت مجانبی پایدار کلی است اگر یک ماتریس عمومی مثبت P وجود داشته باشد به گونه ای

$$A_i^T P + P A_i < 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, r \quad (3.4)$$

که r تعداد قوانین می باشد.

برای سیستم های گسسته قوانین و قضیه پایداری بصورت زیر می باشد:

if $p_1(k)$ is M_1^i and $p_2(k)$ is M_2^i and ... and $p_s(k)$ is M_s^i then

$$\begin{cases} x(k+1) = A_i x(k) + B_i u(k) \\ y_i(k) = C_i x(k) \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, r$$

(3.5)

¹ Inference
² Singleton
³ Product
⁴ Minimum
⁵ Central-Average Defuzzifier

که شرط کافی پایداری به صورت زیر تغییر می کند .

$$A_i^T P A_i - P < 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, r \quad (3.6)$$

اما جهت تحلیل پایداری علاوه بر متدهای مبتنی بر $LMI(BMI)$ و یا متدها و روش هایی نیز بر اساس مقادیر ویژه وجود دارد که شرایط کافی را از شرایط ویژه ماتریس های زیر سیستم ها استخراج می کنند [4.7].

3.2. مدل سیستم فازی آفین¹

در ارتباط با پایداری سیستم فازی $T - S$ ، اغلب نتایج مبتنی بر پایدار بودن زیر سیستم ها می باشند تا در نهایت پایداری سیستم تضمین شود. برای غلبه بر این محدودیت روشهای متعددی اخیراً با استفاده از ساختارهای اطلاعاتی فازی و دیگر رهیافت ها ارائه شده است. [3.1][3.2] با ارائه رهیافتی مبتنی بر BMI ، به تحلیل و استخراج شرایط پایداری در سیستم های فازی آفین در دو حالت گسسته و پیوسته می پردازد. همچنین روشی مبتنی بر $LMI(ILMI)^2$ برای حالت پیوسته توسط نگارنده مقاله مذکور در [3.3] ارائه شده است. سایر تحقیقاتی را که در بررسی پایداری سیستم های فازی آفین $T - S$ به ارائه رهیافت و راهکار پرداخته اند می توان از [3.4] که بروی رهیافتی در طراحی کنترلر مبتنی بر تابع لیاپانوف قطعه ای³ در سیستم فازی آفین متمرکز شده و در نهایت شرایطی مبتنی بر LMI بدست آورده است، نام برد. در بررسی پایداری سیستم فازی آفین نخست به معرفی و شرح سیستم های فازی آفین در دو حالت گسسته و پیوسته می پردازیم و در انتها با شرح روشی مبتنی بر ساخت مینیمم فوق بیضوی [3.5] بحث پایداری در سیستم های فازی آفین را به پایان می رسانیم .

¹ Fuzzy Affine Systems

² Iterative LMI

³ Piecewise Lyapunov Function

سیستم های فازی $T - S$ که مورد مطالعه مدل های فازی $T - S$ آفین می باشند دارای یک ترم آفست در هر زیر سیستم می باشند. در حالت خاص اگر تمامی افست ها صفر باشند این مدل آفین به مدل فازی $T - S$ معمولی تبدیل خواهد شد .

سیستم آفین فازی با قوانین زیر تعریف می شوند :

$$\text{if } p_1(t) \text{ is } M_1^i \text{ and } p_2(t) \text{ is } M_2^i \text{ and } \dots \text{ and } p_s(t) \text{ is } M_s^i \text{ then}$$

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + e_i \quad i = 1, 2, \dots, r$$

(3.7)

و به طور مشابه با مباحث قبل کل سیستم به صورت زیر فرموله می شود :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(p(t))(A_i x(t) + e_i)$$

(3.8)

که برای حالت گسسته قوانین و فرمول به صورت تغییر می کنند:

$$\text{if } p_1(k) \text{ is } M_1^i \text{ and } p_2(k) \text{ is } M_2^i \text{ and } \dots \text{ and } p_s(k) \text{ is } M_s^i \text{ then}$$

$$x(k+1) = A_i x(k) + e_i \quad i = 1, 2, \dots, r$$

(3.9)

لذا کل سیستم به صورت زیر خواهد بود :

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(p(k))(A_i x(k) + e_i)$$

(3.10)

بررسی پایدار مبتنی بر ساختار فوق بیضوی¹: [3.5]

در این روش از اطلاعات ساختاری برای ساخت مینیمم فوق بیضوی مبتنی بر لم زیر استفاده می شود و سپس با بحث بروی ماکزیمم مقدار مشتق تابع لیاپانوف در هر ناحیه از این مینیمم فوق بیضوی ، شرایط کافی برای پایداری حلقه بازمدل آفین به صورت ترمهای LMI استخراج می شود.

¹ Minimal Hyper Ellipsoid

لم 3.2:

فرض کنید $D = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)^T : a_i < x_i < b_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ یک ناحیه در \mathbb{R}^n باشد. سپس مینیمم فوق بیضوی شامل D به صورت زیر است:

$$\frac{(x_1 - x_{01})^2}{c_1^2} + \frac{(x_2 - x_{02})^2}{c_2^2} + \dots + \frac{(x_n - x_{0n})^2}{c_n^2} = 1 \quad (3.11)$$

که

$$x_{0i} = \frac{a_i + b_i}{2}, \quad c_i^2 = n \left(\frac{a_i - b_i}{2} \right)^2 \quad (3.12)$$

در اینجا به بیان یک از فضایا برای سیستم های فازی گسسته اکتفا می کنیم .

لم 3.3

جواب $x(t) \equiv 0$ برای سیستم آفین فازی (4.10) به صورت مجانبی پایدار است اگر یک ماتریس متقارن معین مثبت P و همچنین اسکالرهای مثبت τ_i وجود داشته باشند به طوریکه

$$A_i^T P A_i - P < 0 \quad (i \in I_0) \quad (3.13. a)$$

$$\begin{bmatrix} e_i^T P e_i + \tau_i - \tau_i p_{0i}^T C_i p_{0i} & e_i^T P A_i + \tau_i p_{0i}^T C_i Q \\ A_i^T P e_i + \tau_i Q^T C_i p_{0i} & A_i^T P A_i - P - \tau_i Q^T C_i Q \end{bmatrix} < 0 \quad (i \in I_1) \quad (3.13. b)$$

I_0 و I_1 و سایر پارامتر ها به صورت زیر تعریف می شوند:

M_j^i نواحی محدودی را مشخص می کنند یعنی

$$\exists a_{ji}, b_{ji} \in \mathbb{R}^n \quad (a_{ji} < b_{ji}) \quad S. t \quad \{x(t) : \mu_{M_j^i}(x(t)) > 0\} = (a_{ji}, b_{ji})$$

$$1 \leq i \leq r, \quad 1 \leq j \leq r$$

$$\Rightarrow D_i := (a_{1i}, b_{1i}) \times \dots \times (a_{ni}, b_{ni})$$

$$\frac{(x_1 - x_{01i})^2}{c_{i1}^2} + \frac{(x_2 - x_{02i})^2}{c_{i2}^2} + \dots + \frac{(x_n - x_{0ni})^2}{c_{in}^2} = 1 \quad (3.14)$$

که

$$x_{0ji} = \frac{a_{ji} + b_{ji}}{2} \quad , \quad c_{ji}^2 = n \left(\frac{a_{ji} - b_{ji}}{2} \right)^2 \quad (3.15)$$

و همچنین

$$x_{0i} := [x_{01i}, x_{02i}, \dots, x_{0ni}]^T \quad , \quad C_i := \begin{bmatrix} 1/c_{i1}^2 & & & 0 \\ & 1/c_{i2}^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1/c_{ini}^2 \end{bmatrix} \quad , \quad x(t) = QP(t) \quad (3.16)$$

پس معادله (3.14) را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$x^T C_i x + x_{0i}^T C_i x_{0i} - 2x_{0i}^T C_i x = 1 \quad (3.17)$$

$$I_0 = \{i: 1 - x_{0i}^T C_i x_{0i} \geq 0, 1 \leq i \leq r\}$$

$$I_1 = \{i: 1 - x_{0i}^T C_i x_{0i} < 0, 1 \leq i \leq r\}$$

$$(3.18)$$

همچنین فرض می شود که برای $e_i = 0, i \in I_0$.

خصوصیات روش :

- تمام نا مساوی ها ماتریسی در قضایای فوق به صورت استاندارد *LMI* می باشند همچنین این نامساوی ها را می توان به وسیله روشهای عددی مؤثر در *Matlab* مطلب حل کرد.
- در نتیجه فوق ، مجموعه های فازی در قانون های فازی با اندیس $i \in I_0$ نیاز به محدود بودن ندارند .

- اگر $rank(Q) = n$ نیز برقرار باشد، آنگاه تحت شرایط پایداری در قضیه فوق جواب سیستم فازی آفین مطرح شده در (3.9) و (3.10) به صورت نمایی پایدار خواهد بود .
- با استفاده از مفهوم سطوح لغزشی می توان به آسانی نشان داد که قضیه ی فوق نیز برای سیستم های آفین قطعه ای¹ نیز برقرار است.
- جواب بدیهی نتیجه فوق به صورت جامع پایدار است اگر دامنه تعریف همه ی فضای \mathbb{R}^n را بپوشاند در غیر این صورت جواب بدیهی فقط به صورت محلی پایدار است .

مثال 3.1 سیستم گسسته آفین $T - S$ زیر را در نظر بگیرید .

جدول دارای 25 قانون پایه می باشد. برای مثال برای مربع 19 (قانون فازی 19) داریم که:

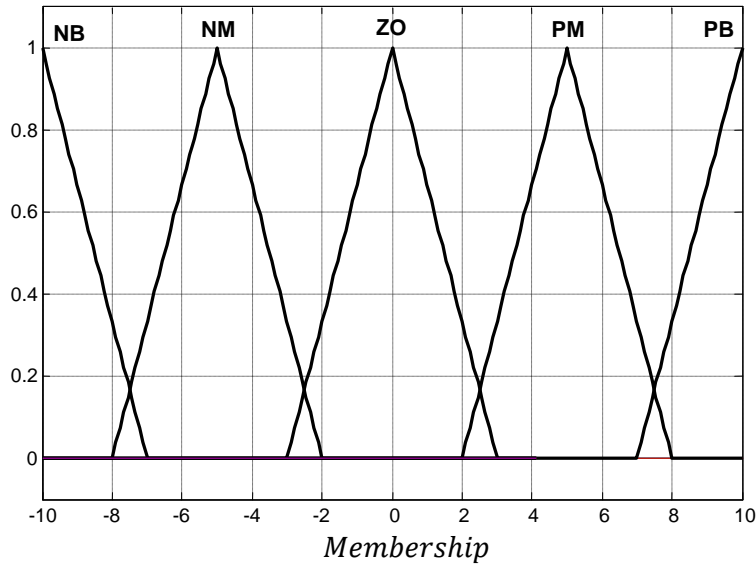
$$\text{if } x_1(t) \text{ is NM and } x_2(t) \text{ is PM , then } x(k + 1) = A_{19}x(k) + e_{19}$$

| | | | | | | |
|----------|----|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $x_1(t)$ | PB | (A_1, e_1) | (A_2, e_2) | (A_3, e_3) | (A_4, e_4) | (A_5, e_5) |
| | PM | (A_6, e_6) | (A_7, e_7) | (A_8, e_8) | (A_9, e_9) | (A_{10}, e_{10}) |
| | ZO | (A_{11}, e_{11}) | (A_{12}, e_{12}) | (A_{13}, e_{13}) | (A_{14}, e_{14}) | (A_{15}, e_{15}) |
| | NM | (A_{16}, e_{16}) | (A_{17}, e_{17}) | (A_{18}, e_{18}) | (A_{19}, e_{19}) | (A_{20}, e_{20}) |
| | NB | (A_{21}, e_{21}) | (A_{22}, e_{22}) | (A_{23}, e_{23}) | (A_{24}, e_{24}) | (A_{25}, e_{25}) |
| | | NB | NM | ZO | PM | PB |
| | | $x_2(t)$ | | | | |

جدول 3.1 جدول قوانین

توابع عضویت x_1 و x_2 نیز مانند شکل (2) می باشد.

¹ Piecewise Fuzzy Affine Systems



شکل 3.1 توابع عضویت x_1 و x_2

و ماتریس های A_i ها نیز به صورت زیر می باشند:

$$A_3 = A_{23} = \begin{bmatrix} 0.86 & -0.32 \\ 0.25 & -0.72 \end{bmatrix}, A_{11} = A_{15} = \begin{bmatrix} 1.2 & -0.12 \\ 0.12 & -0.67 \end{bmatrix}$$

$$A_i = \begin{bmatrix} 0.86 & -0.1 \\ 0.12 & -0.89 \end{bmatrix} \quad (1 \leq i \leq 25, i \neq 3, 11, 15, 23)$$

$$e_3 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.5 \end{bmatrix}, e_{23} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, e_i = 0 \quad (1 \leq i \leq 25, i \neq 3, 25)$$

واضح است که دو زیر سیستم در قوانین فازی 15 و 11 ناپایدار می باشند. به آسانی می توان نشان داد که کل

سیستم به صورت زیربازنویسی خواهد شد:

$$\begin{aligned} x(k+1) = & [1 - \alpha_3(x(k)) - \alpha_{11}(x(k)) - \alpha_{15}(x(k)) - \alpha_{23}(x(k))]A_1x(k) \\ & + \alpha_3(x(k))(A_3x(k) + e_3) + \alpha_{11}(x(k))A_{11}x(k) + \alpha_{15}(x(k))A_{15}x(k) \\ & + \alpha_{23}(x(k))(A_{23}x(k) + e_{23}) \end{aligned}$$

با به کارگیری لم 3.3 می توان جواب LMI s را بدست آورد.

$$P = \begin{bmatrix} 772.1 & 384.9 \\ 384.9 & 2898.4 \end{bmatrix} > 0, \tau_3 = 1775.2$$

$$\tau_{11} = 7779.5, \tau_{15} = 7779.5, \tau_{23} = 1824.7$$

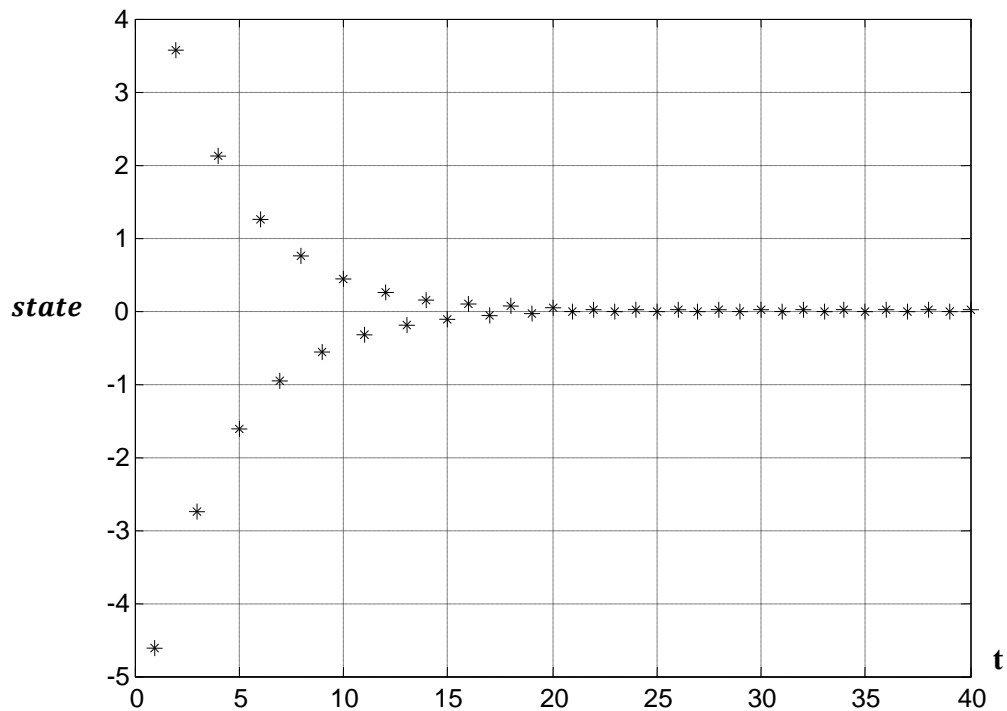
بنابراین بوسیله لم 3.3 سیستم به صورت نمایی در ناحیه جذب

$$[-10,10] \times [-10,10]$$

پایدار است. مسیره‌های x_1 و x_2 در شکل (3.3) و (3.4) نشان داده شده اند (حالت اولیه از منطقه ی ناپایدار 15-

امین قانون انتخاب شده است). از آنجائیکه در سیستم مذکور $x(k)$ در خارج از محدوده $[-10,10] \times [-10,10]$

تعریف نشده است جواب جزئی فقط به صورت نمایی محلی پایدار است.

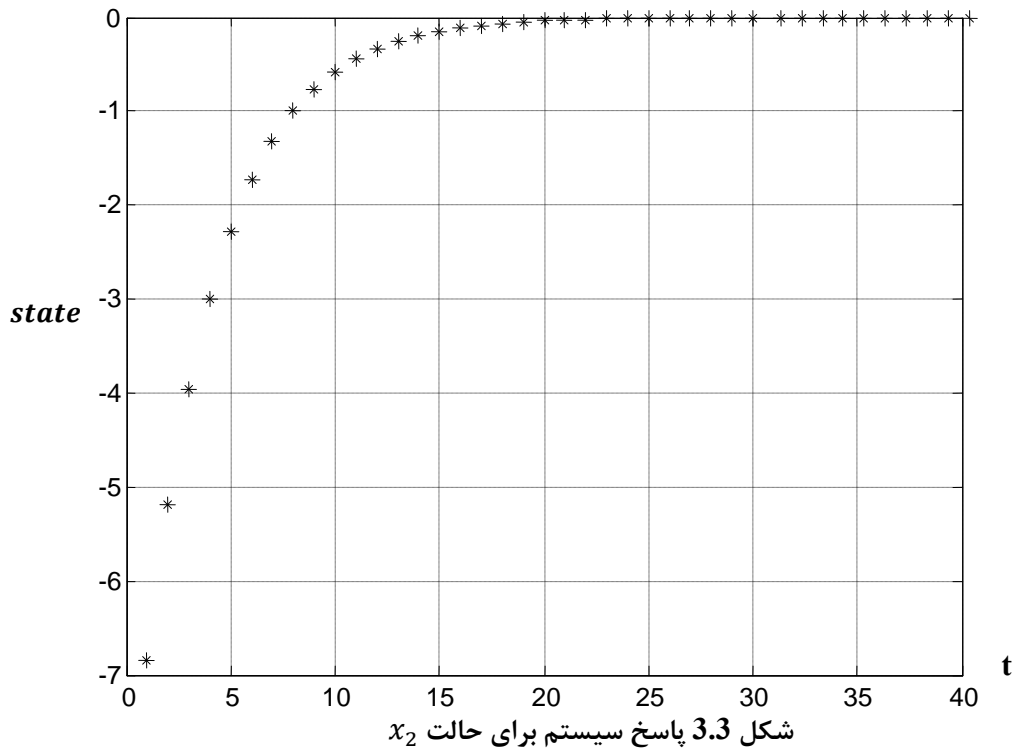


شکل 3.2 پاسخ سیستم برای حالت x_1

همچنین اگر ما بتوانیم α_3 و α_{11} و α_{15} و α_{23} را چنان تعریف کنیم که این پارامترها در محدوده ی $x(t) \in$

$\mathbb{R}^2[-10,10] \times [-10,10]$ مقدار صفر داشته باشند آنگاه سیستم در این حالت به صورت نمایی جامع پایدار

است.



در مثال فوق از آنجای که هر دو سیستم دارای زیر سیستم های نا پایداری می باشند که نشان می دهد نتایج ارائه شده در این رهیافت کمتر دارای محدودیت می باشند البته این رهیافت نیاز دارد که برخی مجموعه های فازی محدود وجود داشته باشد. به هر حال هنگامی که این رهیافت بر روی یک سیستم کنترل فازی حلقه بسته اعمال می شود شرایط پایداری دارای محاسبات کمتری می باشد.

3.3 مدل سیستم های فازی تاخیر دار

بسیاری از سیستم های پیچیده غیر خطی، سیستم های غیر خطی تاخیر دار¹ می باشند که از آن جمله می توان به شبکه های مخابرات² اشاره کرد. در حقیقت، پیشرفت های اخیر در سیستم های تاخیر دار خطی متقابلاً

¹ Time-Delay Systems

² Communication Networks

متدها و روش های مهمی جهت تحلیل و طراحی سیستم های فازی تاخیردار¹ نیز بوجود آورده اند که این نتایج عمدتاً مبتنی بر وجود یک تابع عمومی لیاپانوف - کراسفسکی² ($CLKF$) برای همه ی مدل های خطی محلی می باشند [3.6] که به صورت مسئله ی بهینه سازی محدب³ در ترمهای $LMIS(BMIS)$ بیان می شوند. اما مشکلی که وجود دارد عدم وجود چنین تابعی برای همه ی سیستم های فازی است به ویژه در مورد سیستم های پیچیده فازی این مشکل حادثر خواهد شد ([3.7] به ذکر چند نمونه از این گونه سیستم ها پرداخته است). به بیان دیگر این نوع تحلیل که مبتنی بر یافتن ($CLKF$) می باشد تحلیل بسیار محافظه کارانه ای می باشد که یکی از دلایل آن عدم در نظر گیری اطلاعات ناشی از توابع عضویت در روند کار می باشد که اخیراً روش نویی مبتنی بر تابع لیاپانوف مربعی پیوسته⁴ توسط [3.7] ارائه شده است که پس از آن تحقیقات نیز مبتنی بر این رهیافت به رشته تحریر در آمده اند [3.8].

جهت ذکر نمونه از کارهای انجام شده می توان به [3.9] اشاره کرد که با رهیافتی مبتنی بر تابع لیاپانوف غیر مربعی⁵ شرایط پایداری را مد نظر قرار داده است، همچنین [3.10] [3.11] به ارائه روشهای مبتنی بر تابع لیاپانوف - کراسفسکی پرداخته که در نهایت منجر به شرایطی به صورت $LMIS$ شده است. [3.12] دونوع طراحی را مبتنی بر تئوری رزومیکhin⁶ و لیاپانوف که طراحی کنترل فیدبک حالت و کنترل مبتنی بر PDC می باشند را مورد مطالعه قرار داده است. [3.13] به مطالعه یک نوع سیستم های فازی تاخیر دار شرح دهند⁷ همت گماشته است. همچنین [3.14][3.15] نیز هرکدام با رهیافتهایی مشابه به مطالعه سیستم های فازی تاخیردار پرداخته اند.

¹ Fuzzy Time-Delay systems

² Common Lyapunov-Krasovskii Functional (CLKF)

³ Convex Optimization

⁴ Piecewise Continuous Quadratic Lyapunov

⁵ Non-Quadratic Lyapunov Function

⁶ Razumikhin

⁷ Descriptor Systems

مقدمه ای بر سیستم های تاخیر زمانی

فضای کلاس رزومیخین و مندهای مبتنی بر تابع لیاپانوف اصلی ترین رهیافت های تحلیل پایداری سیستم های تاخیر زمانی می باشند که با معادله دیفرانسیل زیر توصیف می شوند:

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t) \quad (3.19)$$

که $t \in J = [\delta, \infty)$ و $\theta \in [-\tau, 0]$ یک تابع از $J \times C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ به \mathbb{R}^n می باشد همچنین $C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ فضای باناخ¹ توابع پیوسته، نگاشت بازه $[-\tau, 0]$ به \mathbb{R}^n می باشد. نرم در $C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\|\phi\| = \sup_{\theta \in [-\tau, 0]} |\phi(\theta)|_p \quad (\phi \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)) \quad (3.20)$$

که $|\cdot|_p$ معرف هر گونه نرم از نوع p می باشد، همانند نرم ها 1، 2 و ∞ . فرض می شود که $f(0, t) = 0$ برای همه $t \in J$ یعنی $x(t) = 0$ ($\forall t \in J$) یک جواب بدیهی معادله (3.19) می باشد. همچنین اگر $x(t) = 0$ جواب نباشد می توان با تغییر متغیر $z(t) = x(t) - y(t)$ که $y(t)$ یک جواب معادله (3.19) می باشد (به ازای شرایط اولیه معلوم)، آنگاه $\dot{z}(t) = f(t, z_t + y_t) - f(t, y_t)$ دارای جواب بدیهی $z(t) = 0$ می باشد، به علاوه برای هر $t_0 \in J$ که مقداری معلوم می باشد و هر شرط اولیه $\phi \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ فرض می شود که (3.19) دارای یک جواب منحصر به فرد $x(t_0, \phi)$ می باشد که بتوان آن را به صورت زیر توصیف کرد:

$$\begin{cases} x_{t_0}(\theta) = \phi(\theta) & \theta \in [-\tau, 0] \\ x(t) = \phi(0) + \int_{t_0}^t f(s, x_s) ds & t \geq t_0 \end{cases} \quad (3.21)$$

¹ Banach Space

که این معادله دیفرانسیل تابعی تاخیر دار را می توان گسترشی از معادله دیفرانسیل معمولی ($\tau = 0$) دانست. با اصلاحات کمی بر روی مفهوم پایداری متعارف می توان آن را در مورد معادلات دیفرانسیل تابعی تاخیر دار نیز توسعه داد.

تعریف 3.1) پایداری مجانبی [3.16]

جواب بدیهی (3.19) پایدار نامیده می شود اگر برای هر $t_0 \in J$ و $\epsilon > 0$ یک $\delta(\epsilon, t_0) > 0$ وجود داشته باشد به طوریکه $\|\phi\| < \delta(\epsilon, t_0)$ ایجاب کند که

$$\|x_t(t_0, \phi)\| < \epsilon \quad \text{for all } t \geq t_0 \quad (3.22)$$

همچنین اگر $\delta(\epsilon, t_0)$ مستقل از t_0 باشد آنگاه جواب بدیهی پایدار یکنواخت نامیده می شود. اگر جواب بدیهی پایدار باشد و برای هر $t_0 \in J$ یک $\eta(t_0) > 0$ وجود داشته باشد به طوریکه $\|\phi\| < \eta(t_0)$ ایجاب کند که $x(t_0, \phi) \rightarrow 0$ هنگامی که $t \rightarrow 0$ ، آنگاه جواب بدیهی پایدار مجانبی نامیده می شود

لم 3.4) قضیه رزومیکین¹ [3.17]

فرض کنید u, v و w توابع پیوسته اکیداً صعودی یکنواخت از \mathbb{R}_+ به \mathbb{R}_+ باشند که

$$w(0) > 0, u(0) = v(0) = 0$$

اگر یک تابع پیوسته $V: J \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ وجود داشته باشد به طوریکه:

$$t \in J, x \in \mathbb{R}^n \quad u(|x|) \leq V(t, x) \leq v(|x|) \quad \text{الف)}$$

ب) یک تابع غیر کاهشی پیوسته $p(s) > s$ برای $s > 0$ وجود داشته باشد که:

$$\forall t_0 \in J \quad \dot{V}(t, x) \leq -w(|x|), \text{ if } V(t + \theta, x(T + \theta)) < p(V(t, x)) \quad \forall \theta \in [-\tau, 0] \text{ and } t \geq t_0$$

آنگاه جواب بدیهی به طور یکنواخت پایدار مجانبی است، همچنین اگر $\lim_{s \rightarrow \infty} u(s) = \infty$ آنگاه جواب بدیهی (3.19) به طور یکنواخت پایدار کلی است.

¹ Razumikhin Theorem

لم 3.5 قضیه اصلاح شده رزومیکین¹ [3.16]

فرض کنید u, v و w توابع پیوسته اکیداً صعودی یکنواخت از \mathbb{R}_+ به \mathbb{R}_+ باشند به طوری که

$$w(0) > 0, u(0) = v(0) = 0$$

اگر یک تابع پیوسته $V: J \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ وجود داشته باشد به طوری که :

$$t \in J, x \in \mathbb{R}^n \quad u(|x|) \leq V(t, x) \leq v(|x|) \text{ (الف)}$$

(ب) یک مقدار مثبت $q > 1$ وجود داشته باشد و

$$t_0 \in J, \dot{V}(t, x) \leq -w(|x|), \quad \text{if } |x(t + \theta)| < q|x| \text{ for } \theta \in [-\tau, 0] \text{ and } t \geq t_0$$

آنگاه جواب بدیهی ... به طور یکنواخت پایدار مجانبی است. همچنین اگر $\lim_{s \rightarrow \infty} u(s) = \infty$ آنگاه جواب بدیهی به طور یکنواخت پایدار مجانبی کلی است.

لم 3.6 قضیه لیاپانوف - کراسفسکی²

فرض کنید که f در (3.19) ناحیه $\mathbb{R} \times (\text{bounded sets in } C([- \tau, 0], \mathbb{R}^n))$ را به مجموعه های محدود

در \mathbb{R}^n می نگارد، u, v و w توابعی پیوسته غیر کاهشی از \mathbb{R}_+ به \mathbb{R}_+ می باشند که $v(s), u(s), w(s) > 0$

و $\lim_{s \rightarrow \infty} u(s) = \infty$. اگر یک تابع پیوسته مشتق پذیر $V: \mathbb{R} \times$

$C([- \tau, 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ وجود داشته باشد به طوری که

$$u(|\phi(0)|) \leq V(t, \phi) \leq v(\|\phi\|)$$

$$\dot{V}(t, \phi) \leq -w(\|\phi(0)\|)$$

آنگاه جواب بدیهی (3.19) به صورت مجانبی پایدار یکنواخت کلی است.

سیستم با تاخیر زمانی فازی

سیستم با تاخیر زمانی فازی $T - S$ زیر می تواند نمایشی برای یک نوع از سیستم های پیچیده غیر خطی باشد

که قوانین و مدل های خطی همراه با تاخیر زمانی محلی آن به صورت زیر می باشد:

¹ Improved Razumikhin Theorem

² Lyapunov-Krasovskii Theorem

if $p_1(k)$ is M_1^i and $p_2(k)$ is M_2^i and ... and $p_s(k)$ is M_s^i then

$$\begin{cases} x(k+1) = A_i x(k) + A_{di} x(k-\tau) + B_i u(k) \\ y(k) = C_i x(k) \\ z(k) = C_{zi} x(k) + C_{zdi} x(k-\tau) + D_{zi} u(k) \\ x(k) = \phi(k), \quad k = 0, -1, \dots, -\bar{\tau} \end{cases} \quad (3.23)$$

که r تعداد قوانین، $M_j^i, (j = 1, 2, \dots, s)$ مجموعه های فازی، $x(k) \in \mathbb{R}^n$ بردار حالت، $x(k-\tau) \in \mathbb{R}^n$ بر دار حالت تاخیر دار همراه با تاخیر ثابت τ که ارضاء کننده شرط $0 < \tau \leq \bar{\tau}$ می باشد حد بالایی تاخیر زمانی است که مقداری مشخص است، $p(k) = [p_1(k), p_2(k), \dots, p_s(k)]$ بردار متغیر های پیشین¹ می باشد $z(k) \in R^{nz}, y(k) \in R^{ny}, u(k) \in R^{nu}$ به ترتیب بردار متغیرهای کنترل، بردار اندازه گیری خروجی، بردار خروجی کنترل شده و شرایط اولیه می باشند. با بکارگیری غیر فازی ساز (میانگین - مراکز)، استنتاج حاصلضرب و فازی ساز منفرد و همچنین داشتن توابع عضویت نرمالیزه

$$\mu_i(p(k)) = w_i / \sum_{j=1}^r w_j \quad w_i = \prod_{k=1}^n M_k^i(x_k(k)), \quad \sum_{i=1}^r \mu_i(x_i(k)) = 1$$

برای کل سیستم داریم که :

$$\begin{cases} x(k+1) = A(k)x(k) + A_d(k)x(k-\tau) + B(k)u(k) \\ y(k) = C(k)x(k) \\ z(k) = C_z(k)x(k) + C_{zd}(k)x(k-\tau) + D_z(k)u(k) \\ x(k) = \phi(k), \quad k = 0, -1, \dots, -\bar{\tau} \end{cases} \quad (3.24)$$

که

$$\begin{bmatrix} A(k) & A_d(k) & B(k) \\ C(k) & 0 & 0 \\ C_z(k) & C_{zd}(k) & D_z(k) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r \mu_i \begin{bmatrix} A_i & A_{di} & B_i \\ C_i & 0 & 0 \\ C_{zi} & C_{zdi} & D_{zi} \end{bmatrix}$$

همچنین این مدل سازی برای سیستم های پیوسته های به صورت زیر می باشند:

if $p_1(t)$ is M_1^i and $p_2(t)$ is M_2^i and ... and $p_s(t)$ is M_s^i then

¹ Premise Variable

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + A_{di} x(t - d_i(t)) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t) \\ z(t) = C_{zi} x(t) + C_{zdi} x(t - d_i(t)) + D_{zi} u(t) \\ x(t) = \phi(t) \quad t \in [-\tau, 0], \quad d_i(t) \in [0, \tau], \quad (i = 1, 2, \dots, r) \end{cases} \quad (3.25)$$

با بکارگیری غیر فازی ساز برای کل سیستم داریم که :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + A_d(t)x(t - d_i(t)) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) \\ z(t) = C_z(t)x(t) + C_{zd}(t)x(t - d_i(t)) + D_z(t)u(t) \\ x(t) = \phi(t), \quad k = 0, -1, \dots, -\bar{r} \end{cases} \quad (3.26)$$

که

$$\begin{bmatrix} A(t) & A_d(t) & B(t) \\ C(t) & 0 & 0 \\ C_z(t) & C_{zd}(t) & D_z(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r \mu_i \begin{bmatrix} A_i & A_{di} & B_i \\ C_i & 0 & 0 \\ C_{zi} & C_{zdi} & D_{zi} \end{bmatrix}$$

همچنین اگر بر کنترل مدل فوق از *PDC* استفاده کرد آنگاه قوانین کنترل به صورت زیر می باشند:

برای مثال سیستم پیوسته را در نظر بگیرید:

قوانین کنترلر

If $p_1(t)$ is M_1^i and $p_2(t)$ is M_2^i and \dots and $p_s(t)$ is M_s^i

then

$$u(t) = K_i x(t) \quad i = 1, 2, \dots, r$$

(3.27)

که K_i های فیدبک می باشند که باید طراحی شوند و به طور مشابه با مباحث قبل، آنگاه کل سیستم به

صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_i^r \alpha_i(p(t)) (A_i x(t) + A_{di} x(t - d_i(t)) + B_i u(t)) \\ u(t) &= \sum_i^r \alpha_i(p(t)) (K_i x(t)) \end{aligned}$$

(3.28)

که سیستم تاخیر زمانی حلقه بسته رامی توان به صورت زیر فرموله کرده:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(p(t)) \alpha_j(p(t)) [(A_i + B_i K_j) x(t) + A_{di} x(t - d_i(t))] \\ x(t) = \phi(t), \quad k = 0, -1, \dots, -\bar{\tau} \end{cases} \quad (3.29)$$

لم 3.7: [4.10]

در سیستم آزاد¹ $u(t) \equiv 0$ زیر

$$\dot{x}(t) = \sum_i^r \alpha_i(p(t)) (A_i x(t) + A_{di} x(t - d_i(t)))$$

اگر ماتریس های $P > 0, Q > 0, Z > 0$ و $T_k, k = 1, 2, 3, 4$ وجود داشته باشند به طوریکه شرایط زیر ارضاء

شوند آنگاه سیستم مذکور به طور مجانبی پایدار است:

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} & \tau N_1 \\ * & \Phi_{22} & \Phi_{23} & \tau N_2 \\ * & * & \Phi_{33} & \tau N_3 \\ * & * & * & \tau Z \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

که

$$\Phi_{11} = Q + N_1 + N_1^T - T_1 A_i - A_i^T T_1^T$$

$$\Phi_{12} = N_2^T - N_1 - A_i^T T_2^T - T_1 B_i$$

$$\Phi_{13} = P + N_3^T - A_i^T T_3^T + T_1$$

$$\Phi_{22} = -Q - N_2 - N_2^T - T_2 B_i - B_i^T T_2^T$$

$$\Phi_{23} = -N_3^T + T_2 - B_i^T T_3^T$$

$$\Phi_{33} = \tau Z + T_3 + T_3^T$$

مثال 3.2:

سیستم زیر را در نظر بگیرید:

¹ Free System

$$A_1 = \begin{bmatrix} -3.2 & 0.6 \\ 0 & -2.1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 1 & 1.6 \end{bmatrix}$$

هدف بدست آوردن τ_{max} است به گونه ای که سیستم به طور مجانبی پایدار شود. با حل نامعادلات لم 3.7

$$\tau_{max} = 0.6148 \quad \text{خواهیم داشت که:}$$

در اثبات لم 3.7 از تابع لیاپانوف - کراسفسکی زیر استفاده شده است (مرجع [4.10] را ببینید)

$$V(t) = x(t)^T P x(t) + \int_{t-\tau}^t x(s)^T Q x(s) ds + \int_{-\tau}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}(t)^T Z \dot{x}(s) ds d\theta$$

3.4 مدل فازی $T - S$ با حضور عدم قطعیت ها

پایداری مقاوم¹ همواره یکی موارد مهم تحقیقاتی در مسئله پایداری است که با وجود عدم قطعیت ها در سیستم برخوردار . چگونگی برخورد با این پدیده از دو رهیافت LMI و معادله ریکاتی² نشأت می گیرد . اخیرا متدهای مبتنی بر رهیافت LMI به وفور یافت می شوند .

منشا وجود عدم قطعیت های پارامتری از ساختار داخلی³ و یا اغتشاش خارجی⁴ می باشد . در تحقیقات معمولا فرض می شود که این عدم قطعیت ها دارای یک سری شرایط خاص می باشند .

- شرط تطبیق⁵
- شرط رتبه - یک⁶
- شرط نرم - محدود⁷

¹ Robust Stability
² Riccati Equation
³ Internal Structure
⁴ External Disturbance
⁵ Matching Condition
⁶ Rank-One
⁷ Bounded- Norm

در این پایان نامه فرض شده است که این عدم قطعیت های ارضا کننده شرط نرم - محدود می باشند . در

حالت کلی فرض کنید که سیستم علاوه عدم قطعیت های پارامتری شامل تاخیر زمانی نیز باشد :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A_i + \Delta A_i)x(t) + A_{d_i}x(t - d_i(t)) + (B_i + \Delta B_i)u(t) \\ x(t) = \Phi(t) \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, r$$

(3.30)

که $d_i(t) \leq \tau_i < 1$ و $(\Delta A_i, \Delta B_i)$ عدم قطعیت های سیستم می باشند.

شرحی مفصل نیز از این قسمت همانند مدل فازی سیستم $T - S$ در فصل بعد ارائه شده است .

بحثی

در پایداری سیستم های

فازی $T - S$ متعارف

4.1. پیشگفتار

در این فصل سعی بر این است تا ایده ها و روش های نوین برای بررسی پایداری سیستم های فاز $T - S$ در حالات مختلف مورد بررسی قرار داده شود. همچنین در این قسمت به بررسی پایداری سیستم های فاز در حضور عدم قطعیت های پارامتری^۱، سیستم های فاز مقیاس-بزرگ^۲ آفین به همراه اغتشاش^۳، بررسی پایداری به همراه عملکرد^۴ سیستم های فاز و ارائه ی چندین مثال و نمونه های شبیه سازی شده با موردهای کاربردی و غیر کاربردی پرداخته خواهد شد. در ابتدای بحث تلاش می شود تا با ارائه ی قضایا و پرداختن به اثبات ریاضی، بتوان رهیافتهایی جدید برای تحلیل پایداری یافت که دارای مزیت هایی از جمله کاهش محاسبات، سادگی قضایا، تضمین پایداری و برخی دیگر از مزایایی باشند که در ضمن بحث به آنها پرداخته خواهد شد. سپس با خارج شدن از بحثی کاملا تئوریک و ریاضی، نگرانده با نگاهی مهندسی، به استخراج الگوریتم های طراحی سیستم های کنترل از متن قضایای مذکور همت گماشته که حاصل آن به دست آوردن چند الگوریتم طراحی می باشد که دارای خصوصیتی همچون تضمین پایداری، عملکردی مناسب، کاهش محاسبات و سادگی اعمال می باشند.

از آن جایی که تحلیل پایداری سیستم های فاز از پرکارترین زمینه های مطالعاتی می باشد و ارائه هر قضیه و برنامه نویسیهای مربوطه به همراه مراحل اثبات آن بحث را به درازا می کشاند، لذا در این پایان نامه از پرداختن به برخی از مراحل غیرضروری و نگارش برنامه نویسی اجتناب می شود هر چند که برنامه نویسی هر سیستم مورد نظر خود نیز کاری ثقیل می باشد و نیازمند دقت و حوصله فراوان است کما اینکه نگارش این پایان نامه مستلزم برنامه نویسی های فراوان شده است.

¹ Parametric Uncertainty

² Large-Scale

³ Disturbance

⁴ Performance

4.2. سیستم های فازی $T - S$ متعارف

(معرفی اجمالی)

همچنان که در فصول قبل ذکر شد در سالهای اخیر، زمینه های مطالعاتی تحلیل پایداری سیستم های فازی مورد بحث تعداد زیادی از تحقیقات و مطالعات بوده [4.1][4.2][4.3][4.4] و از آنجایی که هر سیستم غیر خطی را می توان با یک مدل فازی تقریب زد و همچنین بدلیل ذات غیر خطی مدلهای فازی، بررسی و تحلیل پایداری به همراه عملکرد این گونه مدل ها از ضروریات امر می باشد. در اغلب مقالات ارائه شده این تحلیل نیازمند یافتن یک ماتریس مثبت معین متقارن همانند P برای همه مدلهای خطی محلی می باشد به طوریکه ارضاء کننده ی شرایط لیاپانوف باشد. در خیلی از موارد زمانی که تعداد قوانین زیاد باشد، پیدا کردن چنین ماتریسی کار دشواری می باشد و همینطور پاره ای از روشها نیازمند استخراج گین های طراحی مربوطه قبل از تحلیل پایداری می باشند [4.1][4.5][4.6]. در برخی از متدها نیز که مبتنی بر $LMIs (BMIs)$ می باشند، علاوه بر وجود مشکل مذکور، سنگین بودن محاسبات نیز از دیگر موانع کار می باشند [4.1][4.3]. ذکر این نکته ضروری است که فقط در برخی از مقالات به بررسی عملکرد به همراه تحلیل پایداری پرداخته شده است در حالی که عملکرد سیستم همواره از اهداف اصلی طراحی می باشد. مجددا یاد آوری می شود هدف در این فصل مرتفع کردن موانع فوق در حد امکان می باشد. از جمله ی این مشکلات که در رهیافتهای این فصل به آنها پرداخته خواهد شد می توان به موارد زیر اشاره نمود:

- کاهش محاسبات به میزان چشمگیر
- عدم وابستگی متدهای مورد نظر به شکل مجموعه های فازی
- بالا بردن امکان یافت ماتریس P
- آسانسازی مسائل بهینه محذب
- ...

2.3 مدل فازي T - S

یک سیستم فاز T - S به صورت زیر مدل می شود :

قوانین سیستم^۱:

if $p_1(t)$ is M_1^i and $p_2(t)$ is M_2^i and ... and $p_s(t)$ is M_s^i then

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y_i(t) = C_i x(t) \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, r$$

که y_i خروجی i -امین زیر سیستم محلی و $p(t)$ بردار متغیرهای پیشین ، M_j^i ($j = 1, 2, \dots, s$) مجموعه های فازي ، (A_i, B_i) ماتریس های سیستم می باشند.

است ، $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$ بردار حالت می باشد و r معرف تعداد قوانین می باشد . طراحی

یک سیستم کنترلر مبتنی بر تکنیک PDC کنترلر زیر را در پی خواهد داشت :

قوانین کنترلر^۲:

If $p_1(t)$ is M_1^i and $p_2(t)$ is M_2^i and ... and $p_s(t)$ is M_s^i

then

$$u(t) = K_i y_i(t) \quad i = 1, 2, \dots, r$$

(4.2)

که K_i ($i = 1, 2, \dots, r$) گین فیدبک خروجی می باشند که باید طراحی شوند، لذا کل سیستم به صورت زیر

فرموله می شود:

$$u(t) = \sum_{i=1}^r \left[\frac{\omega_i(x(t))}{\sum_{j=1}^r \omega_j(x(t))} \right] K_i y_i(t)$$

¹ Plant Rules

² Controller Rules

$$\left(\frac{\omega_i(p(t))}{\sum_{j=1}^r \omega_j(p(t))} \right) := \alpha_i(p(t)), \omega_i = \prod_{k=1}^n M_k^i(p_k(t))$$

که w_i را توانایی آتش^۱ قانون i -ام می نامند .

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = \sum_{i,j}^r \alpha_i(p(t)) \alpha_j(p(t)) (A_i + B_i K_j C_j) x(t)$$

(4.3)

همچنین از تعاریف فوق مشخص می شود که

$$0 \leq \alpha_i(p(t)) \leq 1 \quad \forall i = 1, 2, \dots, r, \quad \sum_{i=1}^r \alpha_i(p(t)) = 1$$

تعریف 4.1:

یک دسته از مجموعه های فازی $\{M_i, i = 1, 2, \dots, m_i\}$ را یک افراز دو به دو - هم پوش^۲ گویند اگر هر کدام از M_i با مجموعه ی فازی مجاور خود، هم پوشانی نداشته باشند. نرمالیزه بودن مجموعه ها در این تعریف لحاظ نمی شود. برای مثال مرجع [4.7] نمونه از مجموعه های فازی استاندارد را معرفی کرده است که می تواند مصداق این تعریف باشند. همچنین مجموعه های معرفی شده توسط سوگنو^۳ [4.8] نیز مصداقی دیگر می باشند (به صورت زیر).

$$M_j^i = \begin{cases} \frac{p_i(t) - d_i(j-1)}{d_i(j) - d_i(j-1)} & d_i(j-1) \leq p_i(t) \leq d_i(j) \\ \frac{d_i(j+1) - p_i(t)}{d_i(j+1) - d_i(j)} & d_i(j) \leq p_i(t) \leq d_i(j+1) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(4.4)

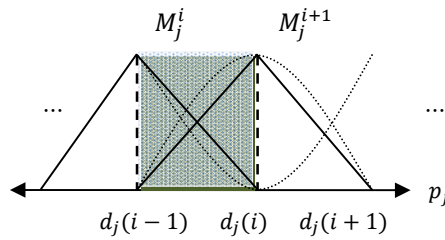
که $\mu_{M_j^i}(p_j(t)) + \mu_{M_j^{i+1}}(p_j(t)) = 1, (j = 1, 2, \dots, s, i = 1, 2, \dots, m_i)$ تعداد مجموعه های فازی

هر ورودی است.

¹ Firing Strength

² Two-Overlapped Fuzzy Partition

³ Sugeno



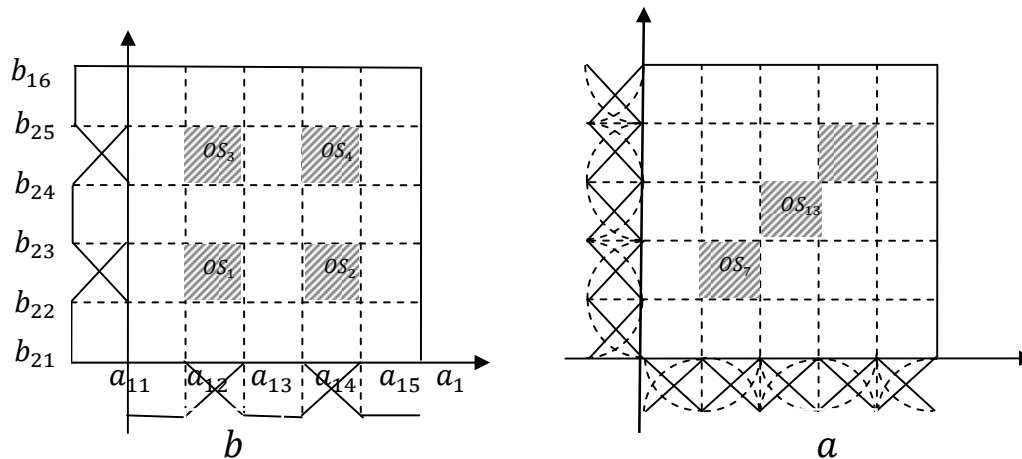
شکل 4.1: دو نمونه از مجموعه های فازی دو به دو - هم پوش ، مجموعه های فازی مثلثی مجموعه های معرفی شده در [4.8] می باشند.

تعریف 4.2: زیر ناحیه های عملگر¹ (OS)

نواحی هستند که شامل 2^n قانون می باشند و اشتراک دو مجموعه ی فازی مجاور نیز می باشند همانند شکل (4.2) که برای روشن شدن تعریف به توضیحات بیشتر می پردازیم.

شکل (4.2.a) و شکل (4.2.b) را در نظر بگیرید. طبق تعریف فوق و همانطوری که نشان داده شده است هر $OS_k (k = 1, 2, \dots, \prod_{i=1}^n (m_i - 1))$ شامل چهار قانون می باشد و برای سیستم با تعداد ورودی n این تعداد قانون $2^n (n = \text{the number of input})$ خواهد بود . این مطلب را می توان به راحتی به وسیله قانون ضرب نشان داد . در هر OS ، تعداد 2^n تا α_i وجود دارد که $\alpha_i \neq 0$ می باشد . بنابراین برای تحلیل پایداری در هر OS نیازمند تحلیل 2^n تترم شامل $\alpha_i \neq 0$ می باشیم .

¹ Operating Subregion



شکل 4.2: دو نمونه از مجموعه های فازی دو به دو - هم پوش ، مجموعه های فازی مثلثی مجموعه های معرفی شده در [4.8] می باشند.

تعداد OS ها در شکل های مذکور نیز $\prod_{i=1}^n (m_i - 1)$ می باشد که m_i تعداد مجموعه های فازی هر ورودی است. شکل (4.2.b) را می توان به زیر نواحی (S) تقسیم کرد که هر کدام شامل یک OS می باشند برای مثال :

$$S_1 =: [a_{11}, a_{14}] \times [b_{21}, b_{24}]$$

$$S_2 =: [a_{14}, a_{16}] \times [b_{21}, b_{24}]$$

$$S_3 =: [a_{11}, a_{14}] \times [b_{24}, b_{26}]$$

$$S_4 =: [a_{14}, a_{16}] \times [b_{24}, b_{26}]$$

$$\bigcup_{i=1}^4 S_i = univers \quad \text{and} \quad \bigcap_{i=1}^4 S_i = \phi$$

هر S شامل چهار دسته از (A_i, B_i, K_i) می باشد که OS مربوطه نیز شامل آنها نیز می شود لذا اگر همه ی OS ها پایدار باشند آنگاه کل سیستم پایدار می باشد (در ادامه اثبات می شود) .

حال رهیافتی را ارائه می دهیم که در روش های مبتنی بر $LMIs(BMIs)$ در کل مجموعه جهانی، محاسبات را کاهش می دهد . پس جهت شروع، روشی را در نظر بگیرید که مستلزم حل تعداد مشخصی از $LMIs(BMIs)$ در کل مجموعه جهانی باشد. (از جمله روشهای مبتنی بر $LMIs(BMIs)$ می توان به [4.1][4.4][4.11] اشاره نمود).

قضیه 4.1: تعداد $LMIs(BMIs)$ یک متد که پایداری را در OS تحلیل می کند برابر است با حاصلضرب تعداد

$$\prod_{i=1}^n (m_i - 1) \text{ و } OS \text{ بررسی شود.}$$

اثبات: واضح است که تعداد کل $LMIs(BMIs)$ برابر است با حاصلضرب تعداد OS و $LMIs(BMIs)$ مربوط

به هر OS ، واز آن جایی که تحلیل را محدود به بررسی در هر OS کرده ایم و تعداد OS برابر است

با $\prod_{i=1}^n (m_i - 1)$ لذا لم فوق به راحتی اثبات می شود. ■

برای بهتر روشن شدن مطلب متد آقایان تاناکا و سوگنو¹ را در نظر بگیرید که در مرجع [4.1] ارائه شده است.

این روش مبتنی بر یافتن یک ماتریس متقارن معین مثبت P است به گونه ای که شرایط زیر را ارضا کند.

$$A_i^T P + P A_i < 0$$

for all $i = 1, 2, \dots, r$ (continuous case)

(4.6)

for all $i = 1, 2, \dots, r$ (discrete case)

(4.7)

همچنین برای سیستم فازی مبتنی بر PDC با بکارگیری یک ایده ساده برای کاهش $LMIs$ ، معیارهای

زیرتوسط ایشان جایگزین (4.6) و (4.7) می شوند.

$$(A_i + B_i K_i)^T P + P(A_i + B_i K_i) < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$G_{ij}^T P + P G_{ij} < 0 \quad i < j \leq r$$

(4.8)

و برای حالت گسسته:

$$(A_i + B_i K_i)^T P(A_i + B_i K_i) - P < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$G_{ij}^T P + P G_{ij} < 0 \quad i < j \leq r$$

(4.9)

که

¹ Tanaka and Sugeno

$$G_{ij} = \frac{(A_i + B_i K_j) + (A_j + B_j K_i)}{2}$$

حال (4.6) و (4.7) را "method1" ، (4.8) و (4.9) را "method2" و متد مبتنی بر نواحی عملگر را "proposed method" می نامیم . اگر "method1" را برای هر OS به کار ببریم آنگاه تعداد کل LMIs برابر خواهد شد با :

$$\sum_{k=1}^{\prod_{i=1}^n (m_i - 1)} \left(\frac{r_k(r_k + 1)}{2} \right) \quad (4.10)$$

که r_k برابر با 2^k می باشد . اما تعداد LMIs های "method1" و "method2" به صورت زیر است .

Method1: r^2

Method2: $\frac{r(r+1)}{2}$

که:

$$r = \left(\prod_{i=1}^n m_i \right) = m^n, \quad m \text{ is each input fuzzy sets}$$

که r برابر است با تعداد قوانین سیستم . برای حالتی که ما اکنون بررسی می کنیم یعنی حالتی که m_i ها مساوی باشند و $(i = 1, 2, \dots, m)$ داریم که :

$$r = m^n$$

قضیه 4.2: تعداد LMIs های موجود در "method1" ، "method2" و "proposed method" در حالتی که $m_i = m (i = 1, 2, \dots, n)$ به صورت زیر است .

$$\text{proposed method} < \text{method2} < \text{method1}$$

اثبات : هدف اثبات نامساوی زیر می باشد :

$$r^2 \geq \frac{1}{2} \left(m^n \left(\frac{m^n}{r} + 1 \right) \right) \geq \frac{1}{2} (2^n (2^n + 1) (m - 1)^n)$$

یا

$$\frac{1}{2} \left(\frac{m^n(m^n + 1)}{(m-1)^n} \right) \geq \frac{1}{2} (2^n(2^n + 1)) \quad \text{and} \quad r^2 \geq \frac{1}{2} \left(m^n \left(\frac{m^n}{r} + 1 \right) \right) \quad (4.11)$$

که

$$(m-1)^n = \prod_{i=1}^n (m_i - 1) \quad \text{is the number of OS} \quad (4.12)$$

با استفاده از برهان استقراء داریم که :

اگر $n > 1$ $m > 1$ با ثابت در نظر گرفتن n آنگاه اگر $m = 2$ باشد رابطه فوق صحیح می باشد .

حال فرض می کنیم رابطه فوق برای $m = k$ صحیح می باشد و برای $m = k + 1$ صحت رابطه را اثبات می

کنیم ، پس یکی از فرض های قضیه به صورت زیر است .

$$\frac{1}{2} \left(\frac{k^n(k^n + 1)}{(k-1)^n} \right) \geq \frac{1}{2} (2^n(2^n + 1))$$

تابع $f(m)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$f(m) = \frac{m^n(m^n + 1)}{(m-1)^n} \quad (4.13)$$

آنگاه

$$\frac{\partial f}{\partial m} = \frac{nm^{n-1}}{(m-1)^{n+1}} (m^{n+1} - 2m^n - 1)$$

$$\& \text{if } \begin{cases} m > 2 \\ n \geq 2 \end{cases} \text{ then } \frac{\partial f}{\partial m} > 0$$

بنابراین f یک تابع صعودی است و می توان نوشت که:

$$\text{if } m_1 > m_2 \Rightarrow f(m_1) > f(m_2)$$

$$m_1 = k + 1 > m_2 = k \Rightarrow f(k + 1) > f(k)$$

و همچنین:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{(k+1)^n ((k+1)^n + 1)}{((k+1) - 1)^n} \right) > \frac{1}{2} \left(\frac{k^n (k^n + 1)}{(k-1)^n} \right) \geq \left(\frac{1}{2} (2^n (2^n + 1)) \right) = constant$$

واز آنجایی که داریم:

$$\left(\frac{r(r+1)}{2} \right) \leq r^2$$

لذا:

$$\frac{1}{2} (2^n (2^n + 1) (m-1)^n) \leq \left(\frac{r(r+1)}{2} \right) \leq r^2$$

(4.14)

لذا قضیه اثبات شد. ■

حالا قصد داریم قضیه قبل را در حالت کلی تری اثبات کنیم.

فرض کنید متدی برای تحلیل پایداری وجود دارد (مبتنی بر $LMIs$) و ارضا کننده شرایط مذکور که تعداد

$LMIs$ آن تابعی از r به صورت زیر باشد:

$$f(r) = ar(r+b)$$

(4.15)

قضیه 4.3:

با اعمال رهیافت OS بر روی هر متد مبتنی بر $LMIs(BMIs)$ برای تحلیل پایداری که تعداد $LMIs(BMIs)$

آن تابعی از r به صورت $f(r) = ar(r+b)$ باشد، می توان با بررسی تعداد به مراتب کمتری از $LMIs(BMIs)$

پایداری سیستم را بررسی کرد.

اثبات:

تابع لیاپانوف زیر را در نظر بگیرید.

$$V = \sum_{k=1}^m \xi_k V_k, \quad m = \prod_{i=1}^n (m_i - 1) \quad (4.16)$$

که ξ_k تابع مشخصه OS_k به صورت زیر است :

$$\xi_k = \begin{cases} \zeta_k & \text{if } x(t) \in OS_k \\ 0 & \text{if } x(t) \notin OS_k \end{cases}, \quad \zeta_k > 0 \quad (4.17)$$

و V_k یک تابع لیپانوف در OS_k می باشد.

$$\begin{aligned} & V(x(t) + \Delta t \dot{x}(t)) - V(x(t)) \\ &= \sum_{k=1}^m \xi_k V_k(x(t) + \Delta t \dot{x}(t)) - \sum_{k=1}^m \xi_k V_k(x(t)) \\ &= \sum_{k=1}^m \xi_k (x(t) + \Delta t \dot{x}(t))^T P_k (x(t) + \Delta t \dot{x}(t)) - \sum_{k=1}^m \xi_k V_k(x(t)) \\ &= \sum_{k=1}^m \xi_k (x(t)^T P_k x(t) + x(t)^T P_k \Delta t \dot{x}(t) + \Delta t \dot{x}(t)^T P_k x(t) + \Delta t \dot{x}(t)^T P_k \Delta t \dot{x}(t) - x(t)^T P_k x(t)) \\ & \quad \bar{D}^+ V(x(t)) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \sup \left(\frac{V(x(t) + \Delta t \dot{x}(t)) - V(x(t))}{\Delta t} \right) \\ &= \sum_{k=1}^m \xi_k \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \sup \left(\Delta t \dot{x}(t)^T P_k x(t) + \frac{x(t)^T P_k \Delta t \dot{x}(t) + \Delta t \dot{x}(t)^T P_k x(t)}{\Delta t} \right) \right) \\ &= \sum_{k=1}^m \xi_k \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \sup (x(t)^T P_k \dot{x}(t) + \dot{x}(t)^T P_k x(t)) = \sum_{k=1}^m \xi_k \dot{V}_k(x(t)) < 0 \\ & \quad \bar{D}^+ V(0) = 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

پس اگر همه $\dot{V}_k < 0$ آنگاه $\dot{V} < 0$ و سیستم پایدار خواهد بود که همچنین می توان ماتریس P در روابط (4.6) و (4.7) را به صورت زیر نیز به دست آورد.

$$P = \sum_{k=1}^m \xi_k P_k$$

که P_k ماتریس مثبت معین متقارن در هر S_k می باشند .

حال باید اثبات کرد که

$$a \prod_{i=1}^n m_i \left(\prod_{i=1}^n m_i + b \right) \geq a 2^n (2^n + b) \prod_{i=1}^n (m_i - 1) \quad (4.20)$$

فرض کنید که:

$$\prod_{i=1}^n (m_i - 1) = A = \text{constant} \quad (4.21)$$

تابع f را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$f(m_1, m_2, \dots, m_n) = \prod_{i=1}^n m_i \left(\prod_{i=1}^n m_i + b \right) \quad (4.22)$$

اکنون با تغییرات i باید مینیمم f را پیدا کرد.

$$g(m_1, m_2, \dots, m_n) = \prod_{i=1}^n (m_i - 1) - A \quad \text{and} \quad f_{m_j} = \frac{\partial f}{\partial m_j} = \lambda g_{m_j} = \lambda \frac{\partial g}{\partial m_j} \quad \forall j$$

$$f_{m_j} = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n m_i \left(\prod_{i=1}^n m_i + b \right) + \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n m_i \times \prod_{i=1}^n m_i \quad \text{and} \quad \lambda g_{m_j} = \lambda \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (m_i - 1) \quad \forall j \quad (4.23)$$

با ضرب m_j در هر دو طرف رابطه (4.23) داریم که:

$$\prod_{i=1}^n m_i \left(\prod_{i=1}^n m_i + b \right) + \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n m_i \right)^2 = \lambda \frac{m_j}{m_j - 1} \prod_{i=1}^n (m_i - 1) \quad \forall j \quad (4.24)$$

سمت چپ مقداری ثابت است، پس خواهیم داشت که:

$$\frac{m_1}{m_1 - 1} = \frac{m_2}{m_2 - 1} = \dots = \frac{m_n}{m_n - 1} \quad \Rightarrow \quad m_1 = m_2 = \dots = m_n \quad (4.25)$$

$$(4.22) \text{ از: } m_i = \sqrt[n]{A} + 1 = m_0 \quad \forall i$$

حال باید m_0 را پیدا نمود به طوریکه:

$$f(m_1, m_2, \dots, m_n) \geq f(m_0, m_0, \dots, m_0) \quad \forall m_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$f(m_0, m_0, \dots, m_0) = (\sqrt[n]{A} + 1)^n \left((\sqrt[n]{A} + 1)^n + 1 \right)$$

$$A \geq 2^n$$

(4.26)

حال باید اثبات کرد که:

$$(\sqrt[n]{A} + 1)^n \left((\sqrt[n]{A} + 1)^n + 1 \right) \geq 2^n (2^n + 1) A$$

(4.27)

تابع زیر را تعریف می کنیم

$$h(A) = \frac{(\sqrt[n]{A} + 1)^n \left((\sqrt[n]{A} + 1)^n + 1 \right)}{A}$$

(4.28)

حال باید مینیمم $h(A)$ را پیدا نمود

$$h'(A) = \frac{\frac{n}{n(\sqrt[n]{A}^{n-1})} (\sqrt[n]{A} + 1)^{n-1} \left((\sqrt[n]{A} + 1)^n + 1 \right)}{A^2} + \frac{\frac{n}{n(\sqrt[n]{A}^{n-1})} (\sqrt[n]{A} + 1)^{n-1} \left((\sqrt[n]{A} + 1)^n \right)}{A^2} - \frac{(\sqrt[n]{A} + 1)^n \left((\sqrt[n]{A} + 1)^n + 1 \right)}{A^2}$$

(4.29)

با قراردادن معادله زیر، داریم که:

$$h'(A) = 0$$

آنگاه:

$$\frac{1}{A^2} (\sqrt[n]{A} + 1)^{n-1} \left[\sqrt[n]{A} \left((\sqrt[n]{A} + 1)^n + 1 \right) + \sqrt[n]{A} (\sqrt[n]{A} + 1)^n - (\sqrt[n]{A} + 1) \left((\sqrt[n]{A} + 1)^n + 1 \right) \right] = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{A} (\sqrt[n]{A} + 1)^n - (\sqrt[n]{A} + 1)^n - 1 = 0$$

(4.30)

تعریف می کنیم:

$$(\sqrt[n]{A} + 1) = B \Rightarrow (B - 1)B^2 - B - 1 = 0 \Rightarrow B^2 - 2B - 1 = 0 \quad (4.31)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \text{if } A \geq 2^n \text{ then } \sqrt[n]{A} \geq 2 \Rightarrow B \geq 3^n \\ B^n \geq 1 \text{ and } (B - 2) \geq 1 \Rightarrow B^n(B - 2) > 1 \Rightarrow B^2 - 2B - 1 > 0 \end{aligned} \quad (4.32)$$

بنابراین $h(A)$ یک تابع صعودی است.

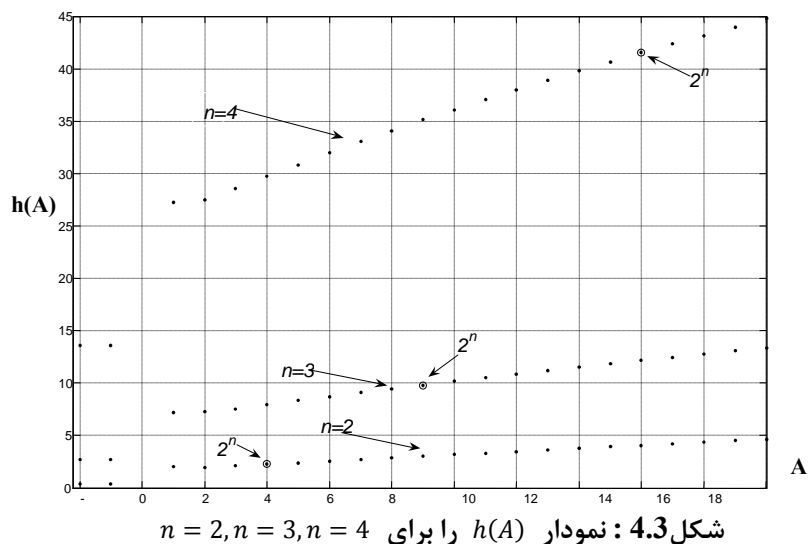
$$\begin{aligned} \text{If } p > q \Rightarrow h(p) > h(q) \\ (h(A_0) = \min(h(A))) \end{aligned}$$

از آنجایی که $A > 2^n$

$$\Rightarrow A_0 < 2^n$$

پس قضیه اثبات شد. ■

شکل (4.3) نمودار $h(A)$ را برای $n = 2, n = 3, n = 4$ نشان می دهد.



برای نشان دادن مزایای قضیه 4.3، به مقایسه "method1"، "method2" و "proposed method" وقتی

که $(a = 0.5, b = 1)$ می پردازیم و نشان داده می شود که تعداد $LMIs$ ها به شدت کاهش پیدا می کند.

فرض کنید همه $m_i = m (i = 1, 2, \dots, n)$ برابر باشند.

$$r = \left(\prod_{i=1}^n m_i \right) = m^n \quad (4.33)$$

حال جداول (4.1) و (4.2) را برای متدهای مختلف مشاهده کنید .

| $n = 2$ ($i = 1, \dots, n$) | $m_i = 2$ | $m_i = 3$ | $m_i = 4$ | $m_i = 5$ | $m_i = 6$ |
|----------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| <i>Method1</i> | 16 | 81 | 256 | 625 | 1296 |
| <i>method2</i> | 10 | 45 | 136 | 325 | 666 |
| <i>Proposed method</i> | 10 | 40 | 90 | 160 | 250 |

جدول (4.1): مقایسه "*method1*" ، "*method2*" و "*proposed method*" هنگامی که $n = 2$

| $n = 3$ ($i = 1, \dots, n$) | $m_i = 2$ | $m_i = 3$ | $m_i = 4$ | $m_i = 5$ | $m_i = 6$ |
|----------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| <i>Method1</i> | 64 | 729 | 4096 | 15625 | 46656 |
| <i>method2</i> | 36 | 378 | 2080 | 7875 | 23436 |
| <i>Proposed method</i> | 36 | 288 | 972 | 2304 | 4500 |

جدول (4.1): مقایسه "*method1*" ، "*method2*" و "*proposed method*" هنگامی که $n = 3$

از نتایج جداول (4.1) و (4.2) واضح و مبرهن است که این رهیافت میزان محاسبات را به ویژه زمانی که تعداد

قوانین زیاد باشد به شدت کاهش می دهد و پیدا کردن ماتریس های P_k نیز به مراتب ساده تر از ماتریس P

می باشند. همچنین عدم وابستگی این رهیافت به شکل خاصی از مجموعه های فازی از دیگر مزایای این

رهیافت می باشد، لذا ایده مذکور را می توان ایده کارآمد برای بررسی پایداری، مورد نظر قرار داد. اکنون می توان روابط (4.6) و (4.7) را به صورت زیر بیان کرد.

قضیه نمونه ای 4.1:

در سیستم های فازی $T-S$ پیوسته که با رابطه ی (4.1) و (4.2) توصیف می شوند و مجموعه های فازی ورودی آنها دو به دو - هم پوشان باشند، اگر بتوان تعداد $\prod_{i=1}^n (m_i - 1)$ ماتریس مثبت معین متقارن P_k ($k = 1, 2, \dots, \prod_{i=1}^n (m_i - 1)$) یافت به طوری که شرایط زیر ارضا شوند:

$$\begin{aligned} (A_i + B_i K_i)^T P_k + P_k (A_i + B_i K_i) &< 0 \quad , \quad i \in I_k \\ G_{ij}^T P_k + P_k G_{ij} &< 0 \quad i < j \quad , \quad i, j \in I_k \end{aligned} \quad (4.34)$$

به صورت کلی پایدار مجانبی است. که در آن $x = 0$ آنگاه حالت تعادل

$$\left\{ \begin{array}{l} I_k = \text{set of index } j \text{ that } \alpha_j \neq 0 \text{ in } S_k \\ \prod_{i=1}^n (m_i - 1) = \text{number of } S_k \text{ and } k = 1, 2, \dots, \prod_{i=1}^n (m_i - 1) \\ m_i = \text{number of membership of } i\text{-th input} \end{array} \right.$$

تذکر 4.1: این قضیه معرف یک متد مبتنی بر $BMIS$ می باشد که میتوان آن را با الگوریتم های ارائه شده در مقالات [4.14] حل کرد، اما در نظر داشته باشید که این الگوریتم ها لزوماً به جواب همگرا نخواهند شد.

تذکر 4.2: اگر همه P_k ($k = 1, 2, \dots, \prod_{i=1}^n (m_i - 1)$) برابر باشند و $V_i = K_i Q_k$ ، $P_k = Q_k^{-1}$ آنگاه می توان متد فوق را به متدی مبتنی بر $LMIS$ تبدیل کرد.

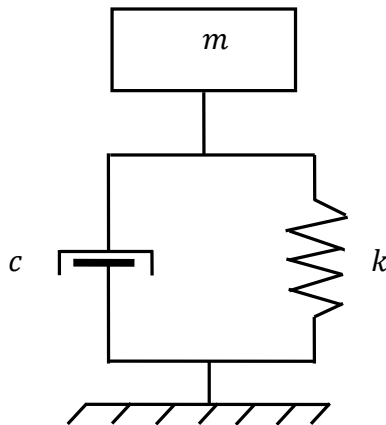
$$\begin{aligned} Q_k A_i^T + A_i Q_k + V_i^T B_i^T + B_i V_i &< 0 \quad i \in I_k \\ Q_k A_i^T + A_i Q_k + Q_k A_j^T + A_j Q_k + V_j^T B_i^T + B_i V_j + V_i^T B_j^T + B_j V_i &< 0 \quad i < j \quad , \quad i, j \in I_k \end{aligned} \quad (4.35)$$

معرفی سیستم غیر خطی 4.4.

بسیاری از سیستم های نوسانی که در مسائل مهندسی یافت می شوند به صورت زیر توصیف می شوند :

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + f(u, du/dt, c, k) = 0 \quad (4.36)$$

یک مدل فیزیکی برای چنین سیستمی در شکل (4.4) نشان داده شده است. در این مدل m جرم، c ضریب میرایی و k ضریب سختی فنر است.



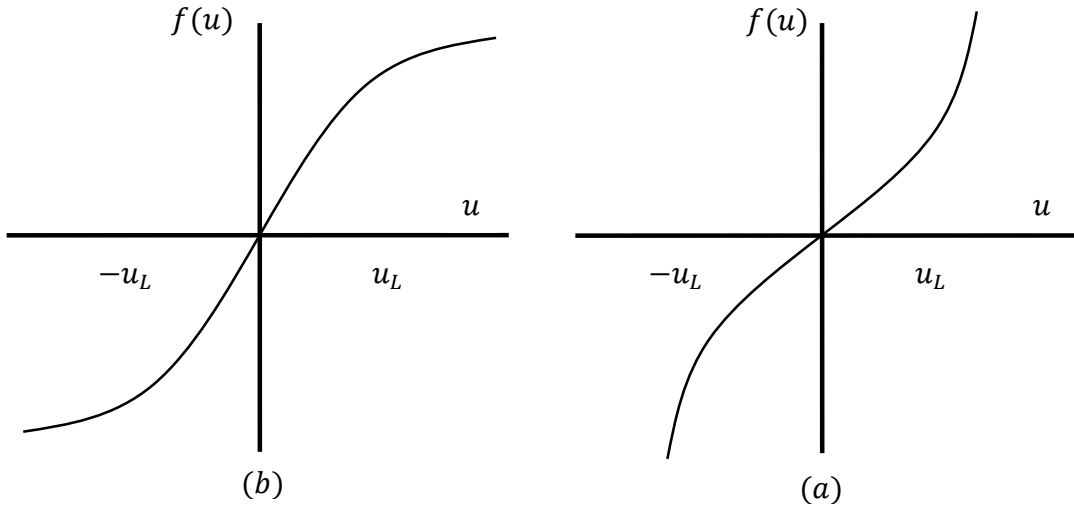
شکل 4.4 مدل فیزیکی یک نوسانگر

تابع f می تواند یک تابع زاویه ای (مثلا یک آونگ) باشد. همچنین می تواند منحنی غیر خطی بار-جابجایی یک فنر را نشان دهد (شکل 4.5). فرض کنید یک سیستم بدون اتلاف انرژی داریم و نیروی ذخیره شده را می توان به صورت زیر تقریب زد :

$$f(u) = ku - \frac{\mu k u^3}{6} \quad (4.37)$$

آنگاه به معادله دیفرانسیل زیر می رسیم .

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \omega_0^2 u - \frac{\mu\omega_0^2 u^3}{6} = 0 \quad (4.38)$$



شکل 4.5: مشخصه شاخص سختی یک فنر

که در آن ، $\omega_0^2 = k/m$ ، معادله (4.38) ، معادله دافینگ¹ نامیده می شود و در تئوری نوسانات غیر خطی بسیار مهم است . زیرا تعداد زیادی از سیستم های دینامیکی را مدل سازی می کند . حال روش موازنه همساز² را معرفی می کنیم که می تواند در بررسی معادله دافینگ مفید واقع شود. اگر پاسخ تقریبی معادله (4.38) به صورت،

$$u(t) = C \sin(\omega t) \quad (4.39)$$

باشد که در آن C یک عدد ثابت است ، با جایگذاری معادله (4.39) در معادله (4.38) همراه با یکسان سازی و با در نظر گرفتن تساوی ،

¹ Doffing's Equation
² Harmonic Balance

$$u^3 = C^3 \sin^3(\omega t) \equiv C^3 \left(\frac{3}{4} \sin(\omega t) - \frac{1}{4} \sin(3\omega t) \right)$$

خواهیم داشت :

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega_0^2 \left(u - \frac{\mu u^3}{6} \right) = \left(\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{\mu \omega_0^2 C^2}{8} \right) C \sin(\omega t) + \left(\frac{\mu \omega_0^2 C^3}{24} \right) \sin(3\omega t) \quad (4.40)$$

که در حالت کلی مساوی صفر نیست . با این حال می توان با قرار دادن ،

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{\mu C^2}{8} \right) \quad (4.41)$$

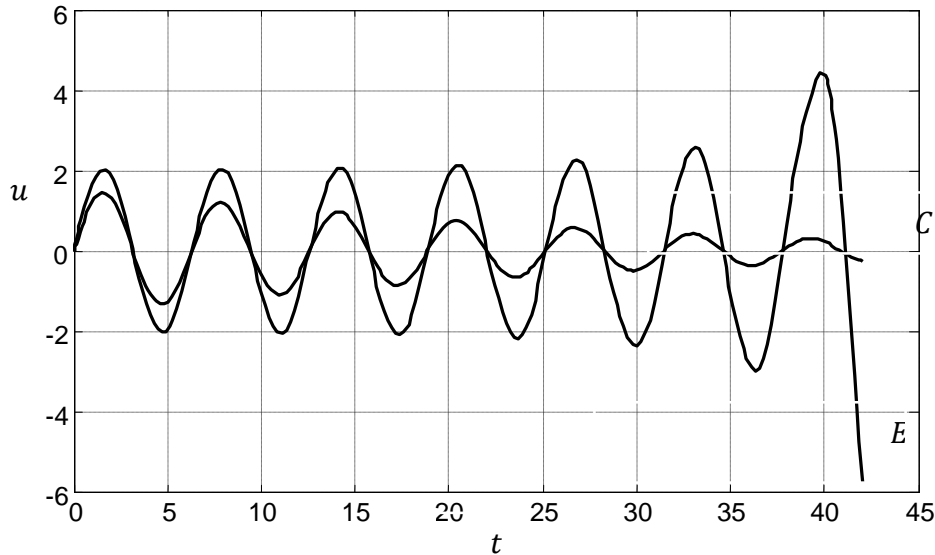
و نیز با فرض کوچک بودن C^3 از حذف ضریب $\sin(\omega t)$ مطمئن شد . معادله (4.41) نشان می دهد که فرکانس دایره ای¹ یک سیستم غیر خطی $\mu \neq 0$ ، وابسته به دامنه نوسان C است. این خاصیت مخصوص سیستم های نوسانی غیر خطی است و در سیستم های خطی اتفاق نمی افتد. در سیستم های خطی فرکانس نوسانات فقط وابسته به خاصیت سیستم است . برای مثال اگر به نوسانات کوچک $u \in (-u_1, u_1)$ توجه کنیم (شکل 4.5) می توان فرض نمود که $\mu = 0$ و معادله (4.41) را به صورت $\omega^2 = \omega_0^2$ در آورد . که می توان برای جزئیات بیشتر به مراجع [4.15][4.16][4.17][4.18] مراجعه کرد. دیگر خواص سیستم های غیر خطی را می توان با استفاده از معادله و اندرپول² نشان داد :

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 0.1(1 - u^2) \frac{du}{dt} + u = 0 \quad (4.42)$$

¹ Circular Frequency

² Van der pol

در شکل (4.6) جواب های شاخص معادله (4.42) نشان داده شده اند .



شکل 4.6 جواب های شاخص معادله

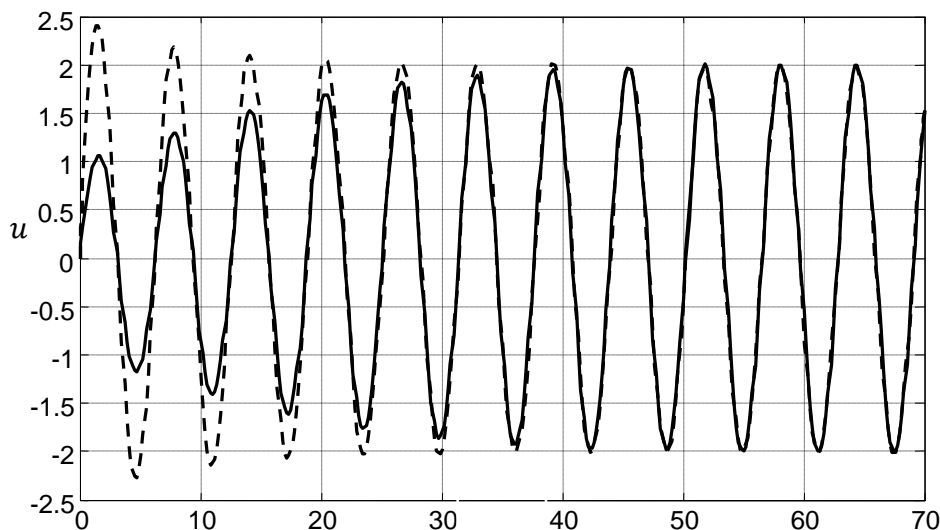
دو جواب نشان داده شده در اینجا ، فقط در شرایط اولیه متفاوتند و بسته به شرایط اولیه ممکن است همگرا به صفر و یا واگرا به بی نهایت شوند . این خاصیت وابستگی پایداری به شرایط اولیه ، فقط مشخصه سیستم های غیر خطی می باشد .

معادله (4.42) را به صورت زیر تغییر می دهیم :

$$\frac{d^2u}{dt^2} - 0.1(1 - u^2) \frac{du}{dt} + u = 0 \quad (4.43)$$

اگر به جواب ها با شرایط اولیه متفاوت توجه کنیم ، پدیده شاخص دیگری از سیستم های غیر خطی را مشاهده می کنیم و آن این است که دامنه ی نوسانات متناوب ممکن است مستقل از شرایط اولیه باشد . این حالت در

شکل (4.7) توصیف شده است. علاوه بر این حقایق، تفاوت های جالب دیگری از قبیل دو شاخه شدن¹، آشوب² و جاذب های همزمان³ وجود دارد.



شکل 4.7 نوسانات یک سیستم غیر خطی

4.5. سیستم جرم - فنر - دمپر⁴ به همراه مدل فازی آن

یک مثال کاربردی مناسب برای بررسی پایداری سیستم غیر خطی مدل جرم - فنر - دمپر می باشد [4.19] که شکل (4.8) نمایشی از آن است.

معادلات سیستم به صورت زیر می باشند.

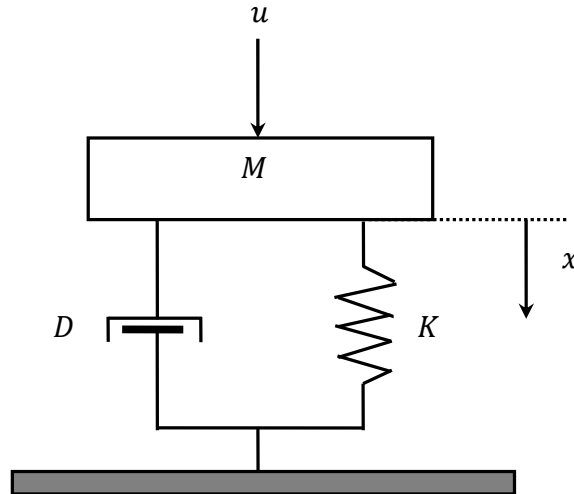
$$M\ddot{x}(t) + g(x(t), \dot{x}(t)) + f(x(t)) = \phi(\dot{x}(t))u(t)$$

که

$$g(x(t), \dot{x}(t)) = c_1x(t) + c_2\dot{x}(t)$$

¹ Bifurcation
² Chaos
³ Co-Existing Attractors
⁴ Mass-Spring-Damper System

$$\begin{aligned}
 f(x(t)) &= c_3x(t) + c_4x(t)^3 \\
 \phi(\dot{x}(t)) &= 1 + c_5\dot{x}(t)^2
 \end{aligned}
 \tag{4.44}$$



شکل 4.8: سیستم جرم - فنر - دمپر

که فرض می شود دامنه عملکرد حالات بین $[-1.5, 1.5]$ می باشد. (مدل فازی این سیستم موقعی که حالات خارج از این محدوده باشند معتبر نخواهد بود)، همچنین

$$M = 1.0, c_1 = 0, c_2 = 1, c_3 = 0.01, c_4 = 0.1, c_5 = 0.13$$

پس معادلات به این صورت تبدیل خواهند شد:

$$\ddot{x}(t) = -\dot{x}(t) - 0.01x(t) - 0.1x(t)^3 + (1.4387 - 0.13\dot{x}(t)^2)u(t)$$

این سیستم غیر خطی را می توان با مدل فازی زیر معادل کرد .

قانون i -ام سیستم عبارت است :

$$\text{If } x(t) \text{ is } M_1^i \text{ and } \dot{x}(t) \text{ is } M_2^i$$

then

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$\tag{4.45}$$

که

$$A_1 = A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.01 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = A_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.235 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.4387 \end{bmatrix}, \quad B_2 = B_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5316 \end{bmatrix}$$

و توابع عضویت در شکل (4.9) به صورت خطوط نقطه چین نمایش داده شده اند و با معادلات زیر توصیف می شوند :

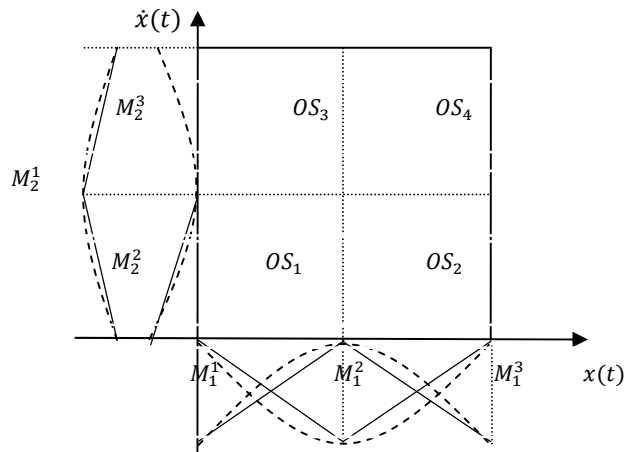
$$\mu_{M_1^1}(x(t)) = \mu_{M_1^2}(x(t)) = 1 - \frac{x(t)^2}{2.25} \quad (4.46.a)$$

$$\mu_{M_1^3}(x(t)) = \mu_{M_1^4}(x(t)) = \frac{x(t)^2}{2.25} \quad (4.46.b)$$

$$\mu_{M_2^1}(x(t)) = \mu_{M_2^3}(x(t)) = 1 - \frac{\dot{x}(t)^2}{6.75} \quad (4.46.c)$$

$$\mu_{M_2^2}(x(t)) = \mu_{M_2^4}(x(t)) = \frac{\dot{x}(t)^2}{6.75} \quad (4.46.d)$$

برای جزئیات بیشتر می توان به [4.19] رجوع کرد .



شکل 4.9: توابع عضویت مدل فازی سیستم جرم - فنر - دمپر به همراه تقریب آنها

4.6. نمونه شبیه سازی شده

برای اعمال قضیه نمونه ای 1 بر روی سیستم جرم - فنر - دمپر و شبیه سازی آن ، تغییرات ناچیزی در سیستم جرم - فنر - دمپر به وجود آورده ایم و این تغییرات شامل تغییر توابع عضویت می باشد تا به آسانی قادر باشیم

صفحه- فاز را به چهار OS تقسیم کنیم ، به بیانی دیگر قضیه ی نمونه ای 1 را بر روی سیستم تقریبی مدل فازی جرم - فنر - دمپر اعمال می کنیم . در شکل (4.9) خطوط ممتد و پیوسته تقریبی از خطوط نقطه چین می باشند لذا سیستم را به صورت زیر در نظر می گیریم .

Rule i:

If $x(t)$ is M_1^i and $\dot{x}(t)$ is M_2^i

then

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \quad i = 1, 2, \dots, 9$$

(4.47)

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_7 = A_8 = A_9 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.01 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = A_5 = A_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.235 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = B_2 = B_3 = B_7 = B_8 = B_9 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.4387 \end{bmatrix}$$

$$B_4 = B_5 = B_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5316 \end{bmatrix}$$

$$-1.5 < x(t) < 1.5 \quad \text{and} \quad -1.5 < \dot{x}(t) < 1.5$$

همانطور که مشاهده می کنیم سیستم دارای چهار OS می باشد (OS_1, OS_2, OS_3, OS_4). اگر فرض کنیم که همه $C_j = I$ باشند و همه Q_k ها برابر باشند آنگاه نتایجی که از برنامه نویسی در محیط مطلب و استفاده از توابع LMI در مطلب به دست می آید به صورت زیر می باشند .

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = P^{-1} = \begin{bmatrix} 5055.225 & -1809.2048 \\ -1809.2048 & 1643.2558 \end{bmatrix} > 0$$

$$K1 = [-0.078043 \quad -0.14613] , \quad K2 = [-0.078043 \quad -0.14613]$$

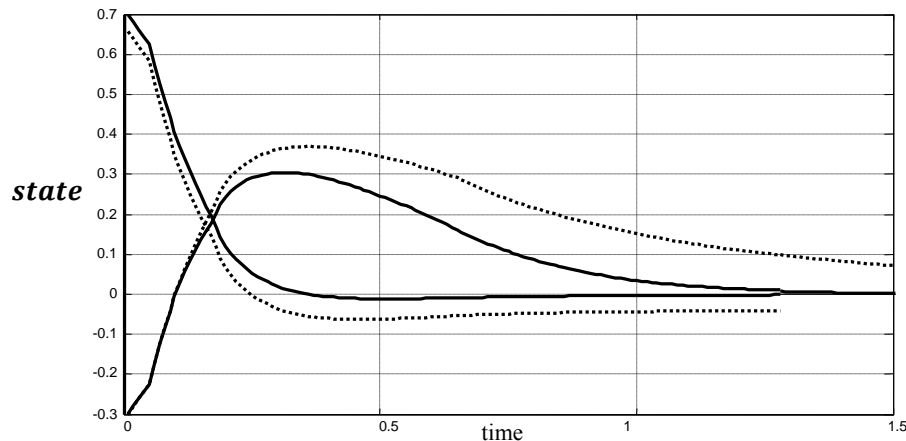
$$K3 = [-0.077885 \quad -0.12111] , \quad K4 = [-0.05151 \quad -0.15428]$$

$$K5 = [-0.046038 \quad 0.0096021] , \quad K6 = [-0.078043 \quad -0.14613]$$

$$K7 = [-0.077885 \quad -0.12111] , \quad K8 = [-0.05151 \quad -0.15428]$$

$$K9 = [-0.046038 \quad 0.0096021]$$

که در شکل (4.10) پاسخ سیستم و پاسخ سیستم بافیدبک خروجی ارائه شده در قضیه نمونه 1 را به شرایط اولیه $x = [-0.3 \ 0.7]^T$ مشاهده می شود .



شکل 4.10: پاسخ سیستم جرم- فنر- دمپر . خطوط ممتد و پیوسته پاسخ سیستم بافیدبک و خطوط نقطه چین پاسخ سیستم

4.7. ارائه قضایا و الگوریتم های مبتنی بر زیر ناحیه های عملگر OS

با معرفی OS ، مجموعه های فازی دو به دو - هم پوشان و مزایای آنها اکنون زمینه فراهم است تا به تحلیل پایداری ، تحلیل پایداری با حضور عدم قطعیت های پارامتری و تحلیل پایداری به همراه تضمین عملکردی مناسب از سیستم مبتنی بر OS پرداخته شود .

4.8. تحلیل پایداری

قضیه 4.4: سیستم پیوسته - زمان¹ فازی $T - S$ که با رابطه (4.1) و (4.2) شرح داده شد مفروض است . اگر مجموعه های فازی این سیستم دو به دو - هم پوشان باشند، آنگاه حالت تعادل ($x = 0$) به صورت مجانبی پایدار کلی است ، اگر تعداد $\prod_{i=1}^n (m_i - 1)$ ماتریس معین مثبت متقارن Q_k ($k = 1, 2, \dots, \prod_{i=1}^n (m_i - 1)$) وجود داشته باشد بطوریکه شرط زیر ارضا شود :

¹ Continuous Time

$$\begin{bmatrix} R_{k_1 k_1} & R_{k_1 k_2} & \cdots & R_{k_1 k_m} \\ R_{k_2 k_1} & R_{k_2 k_2} & \cdots & R_{k_2 k_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{k_m k_1} & R_{k_m k_2} & \cdots & R_{k_m k_m} \end{bmatrix} < 0$$

(4.48)

که

$$\begin{cases} G_{k_i k_j} = \frac{1}{2} (A_{k_i} Q_k + B_{k_i} v_{k_j} + A_{k_j} Q_k + B_{k_j} v_{k_i}) \\ R_{k_i k_j} = G_{k_i k_j} + G_{k_j k_i}^T \\ v_{k_j} = K_{k_j} C_{k_j} Q_k \text{ and } v_{k_i} = K_{k_i} C_{k_i} Q_k \\ I_k = \text{set of number of rules which } OS_k \text{ includes them} \\ k_i = i - \text{th index of } I_k, m = 2^s, 1 \leq i, j \leq m \\ \prod_{i=1}^s (m_i - 1) = \text{the number of } OS \\ m_i = \text{the number of fuzzy sets of } i - \text{th premise variable} \end{cases}$$

اثبات: اثبات این قضیه بدلیل اختصار بعد از قضیه 4.5 ارائه شده است. ■

مجددا همانطور که مشاهده می شود این قضیه یک متد مبتنی بر $BMIS$ را ارائه می دهد و اگر همه $k = Q_k$ (همه $k = 1, 2, \dots, \prod_{i=1}^n (m_i - 1)$ برابر باشند و همه ی $G_j = I$ آنگاه این متد تبدیل به یک متد مبتنی بر $LMIS$ خواهد شد. روشن است که ما قادر هستیم که تعداد $LMIS$ و به تبع آن میزان محاسبات را کاهش و سرعت تحلیل را افزایش دهیم. با بسط ماتریس فوق می توان مشاهده کرد که این قضیه نیز دارای $(2^n(2^n + 1))/2$ LMI در هر OS است.

تذکره 4.3: برای به دست آوردن شرایطی مطمئن تر (به بیانی دیگر محافظه کارانه تر) می توان ترم $\tau_{ij} I$ را به G_{ij} اضافه نمود. ($\tau_{ij} > 0$)

4.9. تحلیل پایداری در حضور عدم قطعیت های پارامتری

همان سیستم $T - S$ با روابط (4.1) و (4.2) را در نظر بگیرید، اگر سیستم دارای عدم قطعیت های پارامتری به صورت زیر باشد:

$$\begin{cases} \hat{A}_i = A_i + \Delta A_i(t) \\ \hat{B}_i = B_i + \Delta B_i(t) \end{cases}$$

آنگاه :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i,j}^r \alpha_i(p(t)) \alpha_j(p(t)) (\hat{A}_i + \hat{B}_i K_j C_j) x(t) \quad (4.49)$$

معمولا فرض می شود که عدم قطعیت های پارامتری چند شرط متعارف از جمله شرایط تطبیق^۱ [4.20][4.21]، شرط رتبه-یک^۲ [4.22][4.23] و شرط نرم محدود^۳ را ارضا می کند . در رابطه (4.49) فرض می شود عدم قطعیت ها شرط نرم محدود را به صورت زیر ارضا می کنند .

$$\begin{cases} \Delta A_i(t) = \tilde{H}_{ai} \tilde{F}_{ai} \tilde{E}_{ai} \\ \Delta B_i(t) = \tilde{H}_{bi} \tilde{F}_{bi} \tilde{E}_{bi} \end{cases} \quad (r = 1, 2, \dots, r) \quad (4.50)$$

که $H_i := [\tilde{H}_{ai} \quad \tilde{H}_{bi}]$ و $[E_{ai} \quad E_{bi}]$ ماتریس های ثابت مشخصی می باشند و \tilde{F}_{ai} و \tilde{F}_{bi} ماتریس های نامعلومی به صورت زیر می باشند :

$$F_i(t) \in \Omega := \{F(t) | F^T(t)F(t) \leq I, \text{ element of } F(t) \text{ are Lebesgue measurment}\}$$

قضیه 4.5 : برای سیستم کنترل فازی که بوسیله (4.49) شرح داده شده دارای مجموعه های فازی دو به دو- هم پوشان می باشند و همچنین در آن $(\Delta A_i(t), \Delta B_i(t))$ مطابق با روابط (4.50) می باشند ، آنگاه سیستم کنترل حلقه بسته در حضور عدم قطعیت های پارامتری پایدار است اگر یک ماتریس مثبت معین Q_k در هر OS_k و اسکالرهایی مثبت $\epsilon_{ij}, \epsilon_i$ و τ_{ij} وجود داشته باشند بطوریکه شرایط زیر را ارضا کند :

¹ Matching
² Rank-One
³ Norm Bounded

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\epsilon_{k_i}} I & E_{a_{k_i}} Q_k & 0 & 0 \\ Q_k E_{a_{k_i}}^T & -\frac{\tau_{k_i k_j}}{2} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\epsilon_{k_i k_j}} I & E_{b_{k_i}} v_{k_j} \\ 0 & 0 & v_{k_j}^T E_{b_{k_i}}^T & -\frac{\tau_{k_i k_j}}{2} I \end{bmatrix} < 0$$

(4.51. a)

$$\begin{bmatrix} R_{k_1 k_1} & R_{k_1 k_2} & \cdots & R_{k_1 k_m} \\ R_{k_1 k_2} & R_{k_2 k_2} & \cdots & R_{k_2 k_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{k_1 k_m} & R_{k_2 k_m} & \cdots & R_{k_m k_m} \end{bmatrix} < 0$$

(4.51. b)

که

$$\begin{cases} G_{k_i k_j} = \frac{1}{2} (A_{k_i} Q_k + B_{k_i} v_{k_j} + A_{k_j} Q_k + B_{k_j} v_{k_i}) \\ \quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\epsilon_{k_i}} H_{a_{k_i}} H_{a_{k_i}}^T + \frac{1}{\epsilon_{k_i k_j}} H_{b_{k_i}} H_{b_{k_i}}^T + \tau_{k_i k_j} I \right) \\ R_{k_i k_j} = G_{k_i k_j} + G_{k_j k_i}^T \\ v_{k_j} = K_{k_j} C_{k_j} Q_k \quad \text{and} \quad v_{k_i} = K_{k_i} C_{k_i} Q_k \end{cases}$$

جهت اثبات این قضیه از دو لم استفاده شده است که در ابتدا به معرفی و شرح این دو لم می پردازیم.

لم 4.1: متمم اسکر¹ [4.24]

برای هر ماتریس $\phi_{11}, \phi_{12}, \phi_{22}$ که ϕ_{11} و ϕ_{22} متقارن باشند روابط (i) - (ii) و (iii) معادلند:

$$\begin{aligned} (i) \quad & \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{12}^T & \phi_{22} \end{bmatrix} < 0 \\ (ii) \quad & \phi_{11} < 0 \quad , \quad \phi_{22} < \phi_{12}^T \phi_{11}^{-1} \phi_{12} \\ (iii) \quad & \phi_{22} < 0 \quad , \quad \phi_{11} < \phi_{12} \phi_{22}^{-1} \phi_{12}^T \end{aligned}$$

¹ Schur's Complement

لم 4.2: [4.25] ماتریس های Q, H, R, E با ابعاد مناسب مفروض می باشند بطوریکه $Q = Q^T, R = R^T$ و $R > 0$ آنگاه:

$$Q + HFE + E^T F^T H^T < 0$$

که برای همه F ها داریم که $F^T F < R$ ، اگر و فقط اگر تعدادی $\epsilon > 0$ وجود داشته باشند بطوریکه:

$$Q + \epsilon HH^T + \epsilon^{-1} E^T R E < 0$$

اثبات قضیه 4.5:

تابع لیاپانف را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$V_k = x^T(t) P_k x(t)$$

جهت سادگی کار، فرض کنید:

$$\begin{cases} x(t) := x \\ \alpha_i(p(t)) := \alpha_i \end{cases}$$

و بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض می کنیم که شامل تمامی k_i و k_j می باشد.

$$\dot{V}_k = \dot{x}^T P_k x + x^T P_k \dot{x} = \sum_{i,j \in I_k} \alpha_i \alpha_j x^T (\hat{A}_i + \hat{B}_i K_j C_j)^T P_k x + \sum_{i,j \in I_k} \alpha_i \alpha_j x^T P_k (\hat{A}_i + \hat{B}_i K_j C_j) x$$

$$\Rightarrow \dot{V}_k = x^T \left(\sum_{i,j \in I_k} \alpha_i \alpha_j \left((A_i^T + C_j^T K_j^T B_i^T) P_k + P_k (A_i + B_i K_j C_j) \right) \right) x$$

$$+ x^T \left(\sum_{i,j \in I_k} \alpha_i \alpha_j (E_{a_i}^T F_{a_i}^T H_{a_i}^T P_k + C_j^T K_j^T E_{b_i}^T H_{b_i}^T F_{b_i}^T P_k + P_k H_{a_i} F_{a_i} E_{a_i}) \right) x$$

(4.52)

با استفاده از لم 4.2 داریم:

let $Q = 0$ and $R = I$ then

$$E_{a_i}^T F_{a_i}^T H_{a_i}^T P_k + P_k H_{a_i} F_{a_i} E_{a_i} < 0 \quad \text{iff} \quad \epsilon_i E_{a_i}^T E_{a_i} + \frac{1}{\epsilon_i} P_k H_{a_i} H_{a_i}^T P_k < 0$$

and

$$C_j^T K_j^T E_{b_i}^T F_{b_i}^T H_{b_i}^T P_k + P_k H_{b_i} F_{b_i} E_{b_i} K_j C_j < 0 \quad \text{iff} \quad \epsilon_{ij} C_j^T K_j^T E_{b_i}^T E_{b_i} K_j C_j + \frac{1}{\epsilon_{ij}} P_k H_{b_i} H_{b_i}^T P_k < 0$$

Let

$$\begin{aligned} \dot{V}_{new,k} = x^T & \left(\sum_{i,j \in I_k} \alpha_i \alpha_j \left((A_i^T + C_j^T K_j^T B_i^T) P_k + P_k (A_i + B_i K_j C_j) \right) \right) x \\ & + x^T \left(\sum_{i,j \in I_k} \alpha_i \alpha_j \left(\epsilon_i E_{a_i}^T E_{a_i} + \frac{1}{\epsilon_i} P_k H_{a_i} H_{a_i}^T P_k + \epsilon_{ij} C_j^T K_j^T E_{b_i}^T E_{b_i} K_j C_j \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{\epsilon_{ij}} P_k H_{b_i} H_{b_i}^T P_k \right) \right) x \end{aligned} \quad (4.53)$$

بنابراین اگر $\dot{V}_{new,k} < 0$ آنگاه $\dot{V}_k < 0$

$$(Q_k = P_k^{-1})$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_{new,k} \leq x^T & \left(\sum_{i,j \in I_k} \alpha_i \alpha_j \left((Q_k A_i^T + Q_k C_j^T K_j^T B_i^T) + (A_i Q_k + B_i K_j C_j Q_k) + \frac{1}{\epsilon_i} H_{a_i} H_{a_i}^T + \frac{1}{\epsilon_{ij}} H_{b_i} H_{b_i}^T \right. \right. \\ & \left. \left. + \tau_{ij} I \right) \right) x \\ & + x^T \left(\sum_{i,j \in I_k} \alpha_i \alpha_j \left(\epsilon_i Q_k E_{a_i}^T E_{a_i} Q_k - \frac{\tau_{ij}}{2} I + \epsilon_{ij} C_j^T K_j^T E_{b_i}^T E_{b_i} K_j C_j - \frac{\tau_{ij}}{2} I \right) \right) x \end{aligned} \quad (4.54)$$

Let $v_{jk} = K_j C_j Q_k$ and

$$G_{ij} = \frac{1}{2} \left(A_i Q_k + B_i v_{jk} + A_j Q_k + B_j v_{ik} + \frac{1}{\epsilon_i} H_{a_i} H_{a_i}^T + \frac{1}{\epsilon_{ij}} H_{b_i} H_{b_i}^T + \tau_{ij} I \right) \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \dot{V}_{new,k} &\leq x^T \left(\sum_{i,j \in I_k} \alpha_i^2 (G_{ii} + G_{ii}^T) + 2 \sum_{i,j \in I_k} \alpha_i \alpha_j (G_{ij} + G_{ji}^T) \right) x \\ &+ x^T \left(\sum_{i,j \in I_k} \alpha_i \alpha_j \left(\epsilon_i Q_k E_{a_i}^T E_{a_i} - \frac{\tau_{ij}}{2} I + \epsilon_{ij} C_j^T K_j^T E_{b_i}^T E_{b_i} K_j C_j - \frac{\tau_{ij}}{2} I \right) \right) x \end{aligned} \quad (4.56)$$

اگر ترم اول و ترم دوم منفی معین باشند آنگاه :

$$\dot{V}_{new,k} < 0 \Rightarrow \dot{V}_k < 0$$

بوسیله متمم اسکر (برای جمله دوم) داریم که:

$$\epsilon_i Q_k E_{a_i}^T E_{a_i} Q_k - \frac{\tau_{ij}}{2} I < 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1/\epsilon_i I & E_{a_i} Q_k \\ Q_k E_{a_i}^T & -\frac{\tau_{ij}}{2} I \end{bmatrix} < 0 \quad (i, j \in I_k) \quad (4.57)$$

$$\epsilon_{ij} v_{jk}^T E_{b_i}^T E_{b_i} v_{jk} - \frac{\tau_{ij}}{2} I < 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1/\epsilon_{ij} I & E_{b_i} v_{jk} \\ v_{jk} E_{b_i}^T & -\frac{\tau_{ij}}{2} I \end{bmatrix} < 0 \quad (i, j \in I_k) \quad (4.58)$$

یا

$$\begin{bmatrix} -1/\epsilon_i I & E_{a_i} Q_k & 0 & 0 \\ Q_k E_{a_i}^T & -\frac{\tau_{ij}}{2} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/\epsilon_{ij} I & E_{b_i} v_{jk} \\ 0 & 0 & v_{jk} E_{b_i}^T & -\frac{\tau_{ij}}{2} I \end{bmatrix} < 0 \quad (i, j \in I_k) \quad (4.59)$$

For first term of (4.56):

Let $R_{ij} = G_{ij} + G_{ji}^T$, Then:

حال زیر نویس k و i را اعمال می کنیم

$$x^T(t) \begin{bmatrix} \alpha_{k_1}(p(t))I \\ \alpha_{k_2}(p(t))I \\ \vdots \\ \alpha_{k_m}(p(t))I \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} R_{k_1 k_1} & R_{k_1 k_2} & \cdots & R_{k_1 k_m} \\ R_{k_1 k_2} & R_{k_2 k_2} & \cdots & R_{k_2 k_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{k_1 k_m} & R_{k_2 k_m} & \cdots & R_{k_m k_m} \end{bmatrix}}_{R_k} \begin{bmatrix} \alpha_{k_1}(p(t))I \\ \alpha_{k_2}(p(t))I \\ \vdots \\ \alpha_{k_m}(p(t))I \end{bmatrix} x(t) \quad (4.60)$$

So, if $\lambda_{\max}(R_k) < 0$ then

$$\begin{bmatrix} R_{k_1 k_1} & R_{k_1 k_2} & \cdots & R_{k_1 k_m} \\ R_{k_1 k_2} & R_{k_2 k_2} & \cdots & R_{k_2 k_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{k_1 k_m} & R_{k_2 k_m} & \cdots & R_{k_m k_m} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.61)$$

برای بررسی پایداری کلی تابع لیپانف زیر را در نظر بگیرید:

$$V = \sum_{k=1}^m \xi_k V_k, \quad m = \prod_{i=1}^n (m_i - 1) \quad (4.16)$$

که ξ_k تابع مشخصه OS_k به صورت زیر است :

$$\xi_k = \begin{cases} \zeta_k & \text{if } x(t) \in OS_k \\ 0 & \text{if } x(t) \notin OS_k \end{cases}, \quad \zeta_k > 0 \quad (4.17)$$

و V_k یک تابع لیپانوف در OS_k می باشد.

$$\begin{aligned} & V(x(t) + \Delta t \dot{x}(t)) - V(x(t)) \\ &= \sum_{k=1}^m \xi_k V_k(x(t) + \Delta t \dot{x}(t)) - \sum_{k=1}^m \xi_k V_k(x(t)) \\ &= \sum_{k=1}^m \xi_k (x(t) + \Delta t \dot{x}(t))^T P_k (x(t) + \Delta t \dot{x}(t)) - \sum_{k=1}^m \xi_k V_k(x(t)) \\ &= \sum_{k=1}^m \xi_k (x(t)^T P_k x(t) + x(t)^T P_k \Delta t \dot{x}(t) + \Delta t \dot{x}(t)^T P_k x(t) + \Delta t \dot{x}(t)^T P_k \Delta t \dot{x}(t) - x(t)^T P_k x(t)) \\ & \bar{D}^+ V(x(t)) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \sup \left(\frac{V(x(t) + \Delta t \dot{x}(t)) - V(x(t))}{\Delta t} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^m \xi_k \left(\limsup_{\Delta t \rightarrow 0^+} \left(\Delta t \dot{x}(t)^T P_k x(t) + \frac{x(t)^T P_k \Delta t \dot{x}(t) + \Delta t \dot{x}(t)^T P_k x(t)}{\Delta t} \right) \right) \\
&= \sum_{k=1}^m \xi_k \limsup_{\Delta t \rightarrow 0^+} (x(t)^T P_k \dot{x}(t) + \dot{x}(t)^T P_k x(t)) = \sum_{k=1}^m \xi_k \dot{V}_k(x(t)) < 0 \\
&\quad \bar{D}^+ V(0) = 0
\end{aligned}$$

(4.64)

■ قضیه اثبات شد.

اثبات قضیه 4.4 :

شبيه به روند اثبات قضیه 4.5

تابع لیاپانف را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\begin{aligned}
V_k &= x^T(t) P_k x(t) \\
\dot{V}_k &= \dot{x}^T P_k x + x^T P_k \dot{x} = \sum_{i,j \in I_k} \alpha_i \alpha_j x^T (A_i + B_i K_j C_j)^T P_k x + \sum_{i,j \in I_k} \alpha_i \alpha_j x^T P_k (A_i + B_i K_j C_j) x
\end{aligned}$$

(4.65)

Let $R_{ij} = G_{ij} + G_{ji}^T$ and $G_{ij} = \frac{1}{2} (A_i Q_k + B_i v_{jk} + A_j Q_k + B_j v_{ik})$

Then this term is equal to:

$$\begin{aligned}
&x^T (\sum_{i,j \in I_k} \alpha_i^2 R_{ii} + 2 \sum_{i,j \in I_k} \alpha_i \alpha_j R_{ij}) x = \\
&x^T(t) \begin{bmatrix} \alpha_{i_1}(p(t))I \\ \alpha_{i_2}(p(t))I \\ \vdots \\ \alpha_{i_m}(p(t))I \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} R_{i_1 i_1} & R_{i_1 i_2} & \cdots & R_{i_1 i_m} \\ R_{i_2 i_1} & R_{i_2 i_2} & \cdots & R_{i_2 i_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{i_1 i_m} & R_{i_2 i_m} & \cdots & R_{i_m i_m} \end{bmatrix}}_{R_{ij}} \begin{bmatrix} \alpha_{i_1}(p(t))I \\ \alpha_{i_2}(p(t))I \\ \vdots \\ \alpha_{i_m}(p(t))I \end{bmatrix} x(t) \\
&\leq \lambda_{\max}(R_{ij}) (\alpha_{i_1}(p(t))^2 + \alpha_{i_2}(p(t))^2 + \cdots + \alpha_{i_m}(p(t))^2) |x(t)|^2
\end{aligned}$$

(4.66)

■ قضیه اثبات شد.

تذکر 4.4: همانطور که می بینیم این قضیه نیز مبتنی بر BMI می باشد و مجدداً اگر همه ی

تبدیل به LMI می شود . $C_j = I$ ، آنگاه Q_k ($k = 1, 2, \dots, \prod_{i=1}^n (m_i - 1)$) برابر باشند و همه ی $C_j = I$ ، آنگاه تبدیل به LMI می شود .

تذکره 4.5 : همچنین اگر $O = I$ آنگاه $p(t) = x(t)$ و متد فوق همان متد متعارف PDC می باشد و اگر $C_j = I$ باشد، تبدیل به کنترلر فیدبک حالت معمولی می شود .

4.10. تحلیل پایداری به همراه تضمین عملکردی مناسب از سیستم

در سیستم های خطی معمولاً برای ایجاد عملکردی مناسب در سیستم ها سعی بر این است تا قطبهای سیستم در محل های مناسبی قرار گیرند و یا اینکه این قطبها در ناحیه های مشخصی قرار گیرند . در سیستمهای غیر خطی فازی $T - S$ برای تضمین چنین عملکرد مناسبی نیز تلاش می شود تا قطبهای مدل های خطی سیستم $T - S$ در نواحی مشخصی قرار گیرند. لذا در ابتدا به ارائه ی لمی می پردازیم که کمک وافری در به دست آوردن نتیجه مطلوب به ما خواهد کرد .

لم 4.3 : [4.26] قطبهای حلقه - بسته در یک ناحیه LMI زیر قرار می گیرند .

$$D = \{z \in \mathbb{C} | f_D(z) := L + Mz + M^T \bar{z} < 0\} \quad (4.67.a)$$

اگر و فقط اگر ماتریس مثبت معین متقارن x_{pol} وجود داشته باشد به طوریکه :

$$[\lambda_{ij} x_{pol} + \mu_{ij} (A + BK)x_{pol} + \mu_{ij} x_{pol} (A + BK)^T]_{1 \leq i, j \leq m} < 0 \quad (4.67.b)$$

در این لم Z یک متغیر مختلط می باشد ، (A, B, K) ماتریس های سیستم و گین فیدبک حالت سیستم خطی می باشند $M = [\mu_{ij}]_{1 \leq i, j \leq m}$ و $L = L^T = [\lambda_{ij}]_{1 \leq i, j \leq m}$ ماتریس های حقیقی می باشند که به وسیله ناحیه LMI مورد نظر مشخص می شوند . ابعاد این دو ماتریس $(m \times m)$ می باشد .

برخی از این نواحی متعارف را می توان در مرجع [4.27] یافت، برای مثال :

- یک ناحیه دایروی با مرکز $(-q, 0)$ و شعاع r با تابع زیر مشخص می شود

$$f_D(z) = \begin{pmatrix} -r & \bar{z} + q \\ z + q & -r \end{pmatrix}$$

- یک ناحیه مخروطی شکل به مرکزیت مبدا وزاویه داخلی θ

$$f_D(z) = \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} (z + \bar{z}) & -\cos \frac{\theta}{2} (z - \bar{z}) \\ \cos \frac{\theta}{2} (z - \bar{z}) & \sin \frac{\theta}{2} (z + \bar{z}) \end{pmatrix}$$

- یک نوار عمودی محدود به $h_1 < x < h_2$

$$f_D(z) = \begin{pmatrix} 2h_1 - (z + \bar{z}) & 0 \\ 0 & (z + \bar{z}) - 2h_2 \end{pmatrix}$$

و سپس با قرار دادن $f_D(z)$ مورد دلخواه در رابطه (4.67.b) می توان M و L را به دست آورد .

قضیه 4.6: یک کنترلر فازی $T - S$ پیوسته - زمان مبتنی بر PDC که بتواند پایداری مجانبی کلی را تضمین کند و دارای عملکردی مطلوب باشد (با قرار دادن قطبها در ناحیه مشخص در هر مدل خطی محلی) رامی توان با حل نامعادلات زیر به دست آورد :

$$[\lambda_{pq} Q_k + \mu_{pq} A_{k_i} Q_k + \mu_{pq} B_{k_i} v_{k_i} + \mu_{pq} Q_k A_{k_i}^T + \mu_{pq} v_{k_i}^T B_{k_i}^T]_{1 \leq p, q \leq l} < 0 \quad (4.68. a)$$

$$\begin{bmatrix} R_{k_1 k_1} & R_{k_1 k_2} & \cdots & R_{k_1 k_m} \\ R_{k_1 k_2} & R_{k_2 k_2} & \cdots & R_{k_2 k_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{k_1 k_m} & R_{k_2 k_m} & \cdots & R_{k_m k_m} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.68. b)$$

$$Q_k > \alpha I \quad \alpha = \text{positive constant} \quad (4.68. c)$$

اثبات: با قرار دادن $x_{pol} = Q_k$ و استفاده لم 4.3 در هر S_k این قضیه به راحتی اثبات می شود. ■

4.11. طراحی یک الگوریتم

الگوریتمی که می توان از قضیه 4.6 برای طراحی به دست آورد به صورت زیر است :

- **Step1:**

Determine M and L correspond to closed – loop poles , LMI region

- **Step2:**

Solve the LMIs((4.68. a), (4.68. b), (4.68. c)) and obtain Q_k and $v_{jk}(i = 1, 2, \dots, r)$

- **Step3:**

Extract feedback gains ($K_i(i = 1, 2, \dots, r)$) with solving $K_i = v_i^{-1}Q_k$

در این الگوریتم همه ی Q_k ها برابرند . همچنین می توان **Step1** را با **Step** زیر جایگزین کرد :

“Determine K_i with pole – placement methods for each subregion “

Then we do not need all Q_k to be equal, and other steps change to

” Find each Q_k then analyze stability (if system was not stable Return and redesign K_i)”

4.12. نمونه شبیه سازی شده یک

همان نمونه جرم – فنر – دمپر را که در قسمت قبل ارائه داده شد را در نظر بگیرید :

با اعمال قضیه 4.4 نتایج زیر را خواهیم داشت که شکل (4.11) نشان دهنده پاسخ سیستم به شرایط اولیه

$$x(0) = [-0.3 \ 0.7]^T \text{ می باشد :}$$

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = P^{-1} = \begin{bmatrix} 5055.225 & -1809.2048 \\ -1809.2048 & 1643.2558 \end{bmatrix} > 0$$

و گین های فیدبک حالت به صورت زیر خواهند بود:

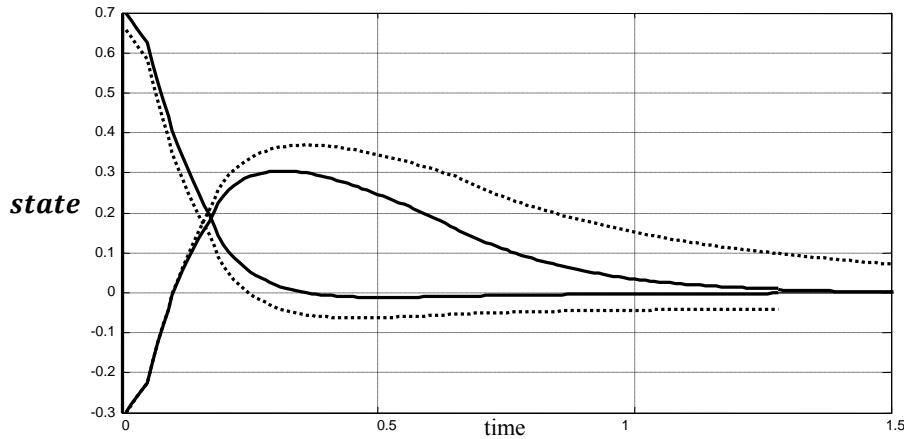
$$K1 = [-0.078043 \quad -0.14613] , K2 = [-0.078043 \quad -0.14613]$$

$$K3 = [-0.077885 \quad -0.12111] , K4 = [-0.05151 \quad -0.15428]$$

$$K5 = [-0.046038 \quad 0.0096021] , K6 = [-0.078043 \quad -0.14613]$$

$$K7 = [-0.077885 \quad -0.12111] , K8 = [-0.05151 \quad -0.15428]$$

$$K9 = [-0.046038 \quad 0.0096021]$$



شکل 4.11: پاسخ سیستم جرم- فنر- دمپر با اعمال قضیه 4.4

اکنون قصد داریم قضیه 5 را اعمال کنیم. فرض کنید ماتریس های سیستم به صورت زیر باشند:

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_7 = A_8 = A_9 = \begin{bmatrix} \delta_1 & 1 \\ -\delta_2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = A_5 = A_6 = \begin{bmatrix} 0 & \delta_3 \\ -\delta_4 & -1 \end{bmatrix}$$

و عدم قطعیت های $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ به صورت تصادفی از بازه های زیر انتخاب می شوند:

$$\delta_1 = [-40\%, 40\%], \delta_2 = [0.01(1 - 20\%), 0.01(1 + 20\%)]$$

or

$$\delta_1 = [-0.4\xi_1, 0.4\xi_1], \delta_2 = [0.01(1 - 0.2\xi_2), 0.01(1 + 0.2\xi_2)]$$

که ξ_1 و ξ_2 اعداد تصادفی در بازه $[-1, 1]$ می باشند و همچنین

$$\delta_3 = [1 - 0.4\xi_1, 1 + 0.4\xi_1], \delta_4 = [0.235(1 - 0.2\xi_2), 0.235(1 + 0.2\xi_2)]$$

$$\hat{A}_i = A_i + H_{ai}F_{ai}E_{ai}, \quad F_{ai} = F_{aj} = \text{diag}(\xi_1, \xi_2), \quad (i, j) \in \{1, 2, \dots, 9\}$$

$$H_{ai} = H_{aj} = \text{diag}(0.4, 0.2), \quad (i, j) \in \{1, 2, \dots, 9\}$$

آنگاه:

$$E_{ai} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0.01 & -1 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, 7, 8, 9$$

$$E_{ai} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.235 & 0 \end{bmatrix}, \quad i = 4, 5, 6$$

با حل نامعادلات قضیه 4.5 نتایج زیر به دست خواهند آمد:

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = P^{-1} = \begin{bmatrix} 5.0298 & -2.4932 \\ -2.4932 & 1.5477 \end{bmatrix} > 0$$

و گین های فیدبک حالت به صورت زیر خواهند بود :

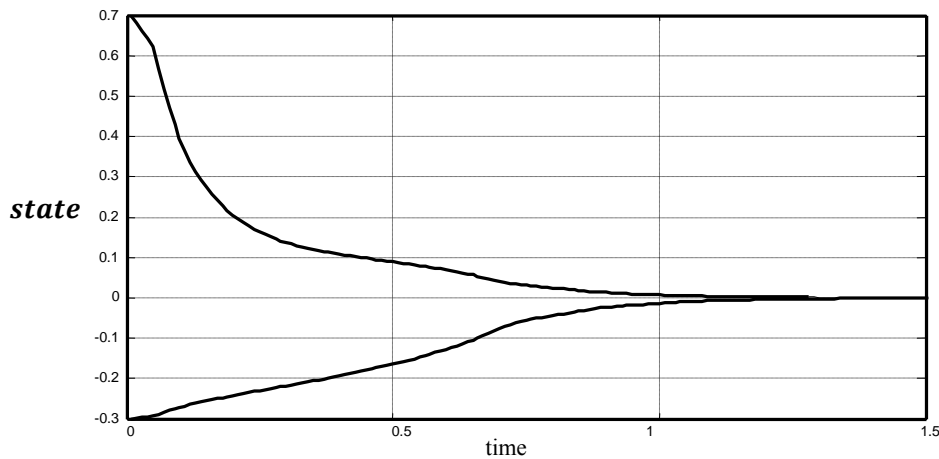
$$\begin{aligned} K1 &= [-5.0843 \quad -8.9963] & K2 &= [-5.0843 \quad -8.9963] \\ K3 &= [-4.1394 \quad -7.1682] & K4 &= [-2.785 \quad -4.8877] \\ K5 &= [-2.4416 \quad -4.3133] & K6 &= [-5.0843 \quad -8.9963] \\ K7 &= [-4.1394 \quad -7.1682] & K8 &= [-2.785 \quad -4.8877] \\ K9 &= [-2.4416 \quad -4.3133] \end{aligned}$$

و همچنین برخی از متغیرهای تصمیم گیری به دست آمده به صورت زیر می باشند و به دلیل اینکه ارائه همه این متغیرها نیاز به فضای بیشتری دارد از نگارش همه پارامترها اجتناب می شود .

$$\epsilon_1 = 0.25, \epsilon_5 = 0.013889, \tau_{13} = 2169.7529, \tau_{33} = 1.537$$

شکل (4.12) نشان دهنده پاسخ سیستم با حضور عدم قطعیت ها با شرایط اولیه $x(0) = [-0.3 \ 0.7]^T$ می

باشد.

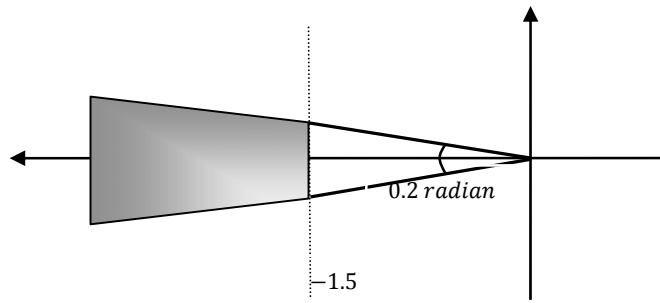


شکل 4.12: پاسخ سیستم جرم- فنر- دمپر با اعمال قضیه 4.5

حال ، قضیه 4.6 را با به دست آوردن یک ناحیه LMI مطلوب به سیستم اعمال می کنیم .مطلوب است پاسخ هر سیستم محلی همانند یک سیستم خطی دارای خصوصیات زیر باشد .

$$\zeta > 0.995 \text{ or } \%OS < 2.25 \times 10^{-12}\% \text{ and } T_s < 2.67(s)$$

به بیانی دیگر قطبهای هر سیستم در ناحیه نشان داده شده در شکل (4.13) باشد .



شکل 4.13: ناحیه LMI مطلوب

از لم 4.3، L و M به صورت زیر به دست خواهند آمد:

$$L = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0998 & -0.995 \\ 0 & 0.995 & 0.0998 \end{bmatrix}$$

با اعمال قضیه 4.6 (الگوریتم مذکور) داریم که:

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = P^{-1} = \begin{bmatrix} 0.14278 & -0.00034 \\ -0.00034 & 0.10951 \end{bmatrix} > 0$$

و گین های فیدبک حالت به صورت زیر خواهند بود:

$$K1 = [-0.14984 \quad -0.99639] \quad K2 = [-0.14984 \quad -0.99639]$$

$$K3 = [-0.31081 \quad -1.01470] \quad K4 = [-0.13551 \quad -0.99044]$$

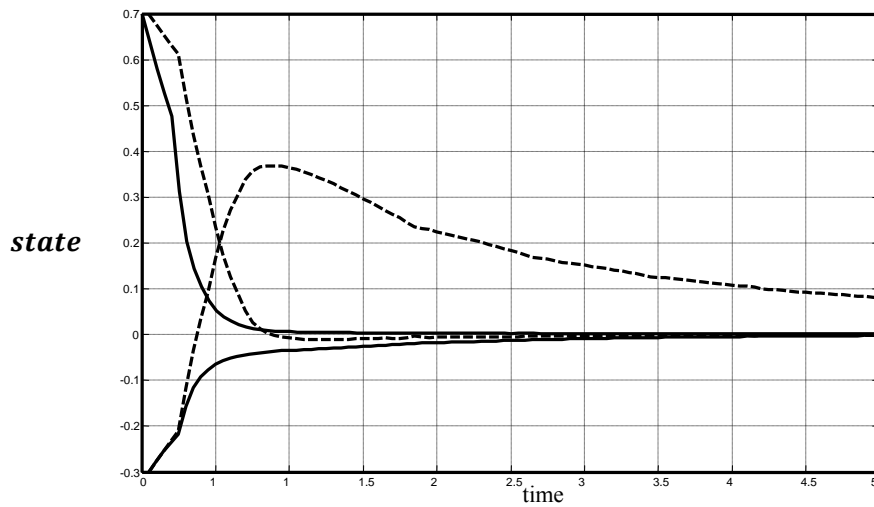
$$K5 = [-0.55088 \quad -0.67792] \quad K6 = [-0.14984 \quad -0.99639]$$

$$K7 = [-0.31081 \quad -1.01470] \quad K8 = [-0.13551 \quad -0.99044]$$

$$K9 = [-0.55088 \quad -0.67792]$$

شکل (4.14) پاسخ سیستم را با شرایط اولیه $x(0) = [-0.3 \ 0.7]^T$ نشان می دهد و واضح است که پاسخ

شرایط مطلوب را برآورده کرده است، کما اینکه پایداری سیستم نیز تضمین شده است.



شکل 4.14: پاسخ سیستم جرم- فنر- دمپر با اعمال قضیه 4.6

4.13. نمونه شبیه سازی شده دو

حال سیستمی به مراتب بزرگتر را در نظر بگیرید. در این مورد شبیه سازی شده فقط به ذکر نتایج پرداخته شده است.

Rule i :

If $x_1(t)$ is M_1^i and $x_2(t)$ is M_2^i then

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \quad i = 1, 2, \dots, 25$$

لذا 16 زیر سیستم داریم که در شکل (4.15) نشان داده شده اند:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.61 & -0.13 \\ -0.23 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -0.15 & -1 \\ -0.72 & -0.12 \end{bmatrix}$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} -0.32 & -0.7 \\ -0.65 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_7 = \begin{bmatrix} -0.25 & -1 \\ -0.32 & -0.13 \end{bmatrix}$$

$$A_9 = \begin{bmatrix} -0.43 & -0.14 \\ -0.44 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} -0.35 & -1 \\ -0.42 & -0.14 \end{bmatrix}$$

$$A_{13} = \begin{bmatrix} -0.8 & -1.13 \\ -0.32 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_{15} = \begin{bmatrix} -0.54 & -1 \\ -0.22 & -0.14 \end{bmatrix}$$

$$A_{17} = \begin{bmatrix} -0.6 & -0.3 \\ -0.13 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_{19} = \begin{bmatrix} -0.55 & -1 \\ -0.32 & -0.15 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} -1 & -0.41 \\ -0.03 & -0.8 \end{bmatrix}$$

$$A_{23} = \begin{bmatrix} -0.7 & -0.1 \\ -0.23 & -0.7 \end{bmatrix}$$

$$A_{25} = \begin{bmatrix} 0 & 1.41 \\ -1.3 & -0.78 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -0.6 & -0.12 \\ 0.5 & -0.84 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -0.65 & -0.013 \end{bmatrix}$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} -0.24 & -0.13 \\ 0.5 & -0.24 \end{bmatrix}$$

$$A_8 = \begin{bmatrix} 0 & -0.1 \\ -0.54 & -0.13 \end{bmatrix}$$

$$A_{10} = \begin{bmatrix} -1.6 & -0.13 \\ 0.3 & -0.54 \end{bmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & -0.21 \\ -0.1 & -0.65 \end{bmatrix}$$

$$A_{14} = \begin{bmatrix} -0.06 & -0.22 \\ 2.6 & -0.63 \end{bmatrix}$$

$$A_{16} = \begin{bmatrix} 0 & -0.31 \\ -0.2 & -0.98 \end{bmatrix}$$

$$A_{18} = \begin{bmatrix} 0 & -0.1 \\ 0.6 & -0.65 \end{bmatrix}$$

$$A_{20} = \begin{bmatrix} 0 & -0.14 \\ -0.3 & -0.78 \end{bmatrix}$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & -0.41 \\ -0.3 & -1.78 \end{bmatrix}$$

$$A_{24} = \begin{bmatrix} 0 & -0.41 \\ -1.3 & -0.54 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.43 \end{bmatrix}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.6 \end{bmatrix}$$

$$B_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.31 \end{bmatrix}$$

$$B_7 = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 1.4 \end{bmatrix}$$

$$B_9 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.16 \end{bmatrix}$$

$$B_{11} = \begin{bmatrix} 0.1591 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{13} = \begin{bmatrix} 0.1591 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{15} = \begin{bmatrix} 0.1591 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{17} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{19} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.4387 \end{bmatrix}$$

$$B_{23} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5316 \end{bmatrix}$$

$$B_{25} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5316 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.38 \end{bmatrix}$$

$$B_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.31 \end{bmatrix}$$

$$B_6 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 1.3 \end{bmatrix}$$

$$B_8 = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.53 \end{bmatrix}$$

$$B_{10} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.53 \end{bmatrix}$$

$$B_{12} = \begin{bmatrix} 0.1591 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{14} = \begin{bmatrix} 0.1591 \\ 0 \end{bmatrix}$$

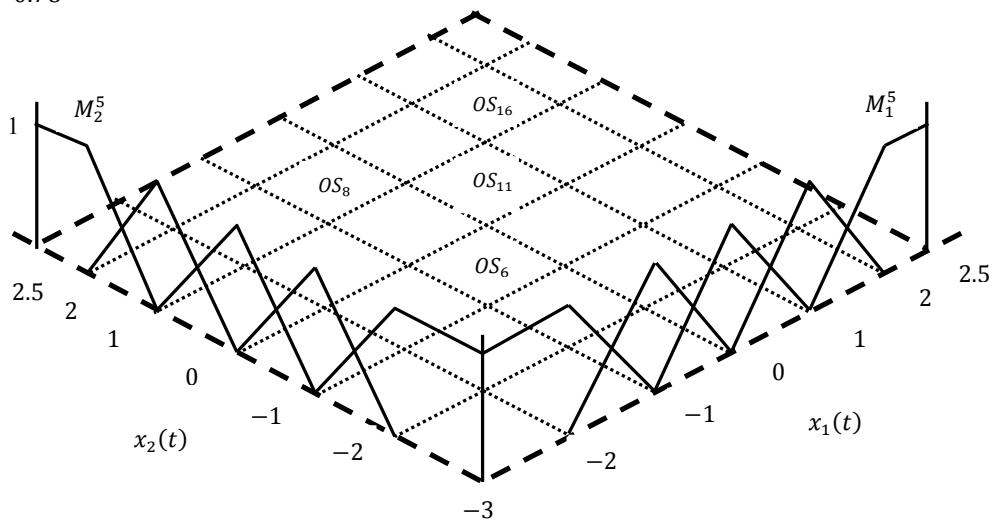
$$B_{16} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{18} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{20} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.4387 \end{bmatrix}$$

$$B_{24} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5316 \end{bmatrix}$$

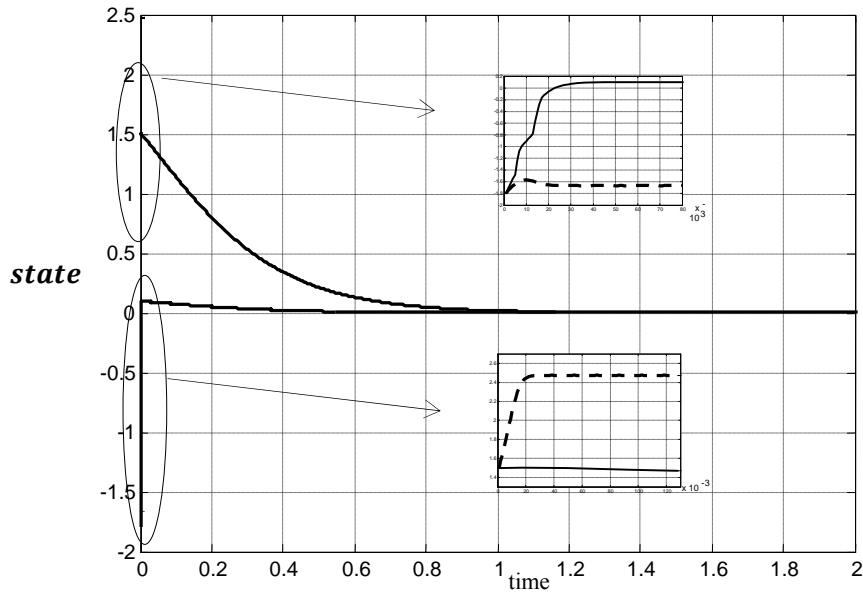


شکل 4.15 : سیستم شماره دو

• *Stability analysis*

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= \begin{bmatrix} 17.05 & 2.27 \\ 2.27 & 16.09 \end{bmatrix}, Q_2 = \begin{bmatrix} 16.65 & 2.04 \\ 2.04 & 6.09 \end{bmatrix}, Q_3 = \begin{bmatrix} 76.78 & 2.21 \\ 2.21 & 5.94 \end{bmatrix}, Q_4 = \begin{bmatrix} 326.92 & 2.31 \\ 2.31 & 5.97 \end{bmatrix} \\
 Q_5 &= \begin{bmatrix} 84.15 & 2.81 \\ 2.81 & 43 \end{bmatrix}, Q_6 = \begin{bmatrix} 34.93 & 1.59 \\ 1.59 & 6.08 \end{bmatrix}, Q_7 = \begin{bmatrix} 116.04 & 1.61 \\ 1.61 & 16.05 \end{bmatrix}, Q_8 = \begin{bmatrix} 5.93 & 1.94 \\ 1.94 & 43.93 \end{bmatrix} \\
 Q_9 &= \begin{bmatrix} 6.11 & 1.59 \\ 1.59 & 5.83 \end{bmatrix}, Q_{10} = \begin{bmatrix} 632.79 & 2.08 \\ 2.08 & 51.97 \end{bmatrix}, Q_{11} = \begin{bmatrix} 51.88 & 1.65 \\ 1.65 & 12.18 \end{bmatrix}, Q_{12} = \begin{bmatrix} 5.99 & 1.72 \\ 1.72 & 5.99 \end{bmatrix} \\
 Q_{13} &= \begin{bmatrix} 643.03 & 1.66 \\ 1.66 & 65.05 \end{bmatrix}, Q_{14} = \begin{bmatrix} 43.14 & 1.72 \\ 1.72 & 32.01 \end{bmatrix}, Q_{15} = \begin{bmatrix} 6.01 & 1.62 \\ 1.62 & 5.99 \end{bmatrix}, Q_{16} = \begin{bmatrix} 51.91 & 2.73 \\ 2.73 & 82.09 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$k_1 = [K_1; K_2; K_3; \dots; K_{25}] = 1000 \times \begin{bmatrix} 0.0046 & -0.2039 \\ 0.0087 & -0.2466 \\ 0.0022 & -0.1333 \\ 0.0020 & -0.0422 \\ 0.0018 & -0.0721 \\ -0.0056 & -0.0614 \\ -0.0054 & -0.0760 \\ -0.0167 & -0.1235 \\ -0.0089 & -0.0143 \\ -0.0039 & -0.0171 \\ -0.0269 & 0.0017 \\ -0.0318 & 0.0018 \\ -0.0300 & 0.0149 \\ -0.0344 & 0.0044 \\ -0.1700 & 0.0149 \\ 0.0005 & 0.0071 \\ 0.0004 & 0.0107 \\ 0.0009 & -0.0043 \\ 0.0087 & -0.0046 \\ 0.0066 & 0.0015 \\ 0.0036 & -1.5697 \\ 0.0059 & -2.0248 \\ 0.2426 & -2.7681 \\ 0.2558 & -2.9576 \\ 0.1734 & -3.1951 \end{bmatrix}$$



شکل 4.16: پاسخ سیستم دو با اعمال قضیه 4.4

- *Robust stabilization subject to parametric uncertainties*

فرض کنید که:

$$A_1 = \begin{bmatrix} \delta_1 & -0.13 \\ \delta_2 & -1 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} \delta_3 & \delta_4 \\ -0.61 & -0.013 \end{bmatrix}, A_7 = \begin{bmatrix} -1.6 & -0.13 \\ \delta_5 & \delta_6 \end{bmatrix}, A_{13} = \begin{bmatrix} \delta_7 & -1.13 \\ -0.32 & \delta_8 \end{bmatrix}$$

$$A_{16} = \begin{bmatrix} \delta_9 & -0.31 \\ \delta_{10} & -0.98 \end{bmatrix}, A_{19} = \begin{bmatrix} -0.55 & \delta_{11} \\ \delta_{12} & -0.15 \end{bmatrix}, A_{22} = \begin{bmatrix} \delta_{13} & 0.41 \\ -0.3 & -1.78 \end{bmatrix}, A_{24} = \begin{bmatrix} \delta_{14} & \delta_{15} \\ -1.3 & -0.54 \end{bmatrix}$$

$$A_{25} = \begin{bmatrix} 0 & \delta_{16} \\ -1.3 & \delta_{17} \end{bmatrix}$$

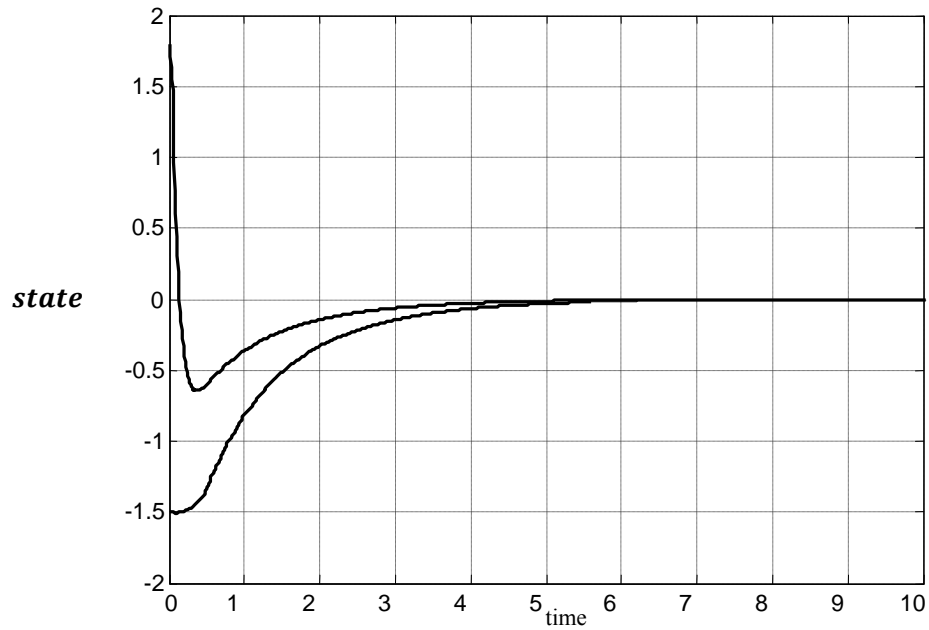
$$\delta = [\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{17}]^T = \begin{bmatrix} -0.61(1 + 0.2\xi_1) \\ -0.23(1 + 0.4\xi_2) \\ -0.25\xi_3 \\ -(1 + 0.1\xi_4) \\ -0.3(1 + 0.2\xi_5) \\ -0.54(1 + 0.3\xi_6) \\ -0.8(1 + 0.1\xi_7) \\ -(1 + 0.5\xi_8) \\ -0.3\xi_9 \\ -0.2(1 + 0.4\xi_{10}) \\ -(1 + 0.2\xi_{11}) \\ -0.32(1 + 0.2\xi_{12}) \\ -0.55\xi_{13} \\ -0.1\xi_{14} \\ -0.41(1 + 0.15\xi_{15}) \\ 1.41(1 + 0.12\xi_{16}) \\ -0.8(1 + 0.1\xi_{17}) \end{bmatrix}$$

$$\hat{A}_i = A_i + H_{ai}F_{ai}E_{ai}, F_{ai} = \text{diag}(\xi_m, \xi_n), 1 \leq m, n \leq 17$$

$$\begin{aligned} Q_1 &= \begin{bmatrix} 70.5 & 22.7 \\ 22.7 & 60.9 \end{bmatrix}, Q_2 = \begin{bmatrix} 6650 & 2040 \\ 2040 & 6090 \end{bmatrix}, Q_3 = \begin{bmatrix} 6780 & 2210 \\ 2210 & 5940 \end{bmatrix}, Q_4 = \begin{bmatrix} 692 & 231 \\ 231 & 597 \end{bmatrix} \\ Q_5 &= \begin{bmatrix} 815 & 281 \\ 281 & 600 \end{bmatrix}, Q_6 = \begin{bmatrix} 5930 & 1590 \\ 1590 & 6080 \end{bmatrix}, Q_7 = \begin{bmatrix} 604 & 161 \\ 161 & 605 \end{bmatrix}, Q_8 = \begin{bmatrix} 593 & 194 \\ 194 & 593 \end{bmatrix} \\ Q_9 &= \begin{bmatrix} 6110 & 1590 \\ 1590 & 5830 \end{bmatrix}, Q_{10} = \begin{bmatrix} 6790 & 2080 \\ 2080 & 5970 \end{bmatrix}, Q_{11} = \begin{bmatrix} 5880 & 1650 \\ 1650 & 6180 \end{bmatrix}, Q_{12} = \begin{bmatrix} 5990 & 1720 \\ 1720 & 5990 \end{bmatrix} \\ Q_{13} &= \begin{bmatrix} 6030 & 1660 \\ 1660 & 6050 \end{bmatrix}, Q_{14} = \begin{bmatrix} 614 & 172 \\ 172 & 601 \end{bmatrix}, Q_{15} = \begin{bmatrix} 6010 & 1620 \\ 1620 & 5990 \end{bmatrix}, Q_{16} = \begin{bmatrix} 5910 & 2730 \\ 2730 & 8090 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$k_2 = 10^3 \times \begin{bmatrix} 0.0971 & -0.3042 \\ 0.0011 & -0.0070 \\ 0.0025 & -0.0002 \\ 0.0042 & -0.0010 \\ 0.0039 & -0.0171 \\ 0.0001 & -0.0146 \\ 0.0016 & -0.0033 \\ -0.0015 & 0.0042 \\ -0.0773 & -0.0540 \\ -0.0051 & -0.0005 \\ -0.0030 & 0.0034 \\ -0.0029 & 0.0026 \\ -0.0681 & 0.0264 \\ -0.0990 & 0.0469 \\ 0.0011 & 0.0021 \\ -0.0013 & 0.0108 \\ 0.0013 & -0.0002 \\ 0.0020 & 0.0092 \\ 0.0283 & -0.0514 \\ 0.1984 & -0.7372 \\ 0.3280 & -1.1799 \\ 0.1566 & -0.5355 \\ 0.0545 & -0.1373 \\ 0.2307 & -0.4601 \end{bmatrix}, e = 10^{-4} \times \begin{bmatrix} 0.1170 \\ 0.0009 \\ 0.0009 \\ 0.3630 \\ 0.0009 \\ 0.0009 \\ 0.0009 \\ 0.0009 \\ 0.0009 \\ 0.0009 \\ 0.0009 \\ 0.4317 \\ 0.0009 \\ 0.0009 \\ 0.2664 \\ 0.0009 \\ 0.0009 \\ 0.2523 \\ 0.0009 \\ 0.0009 \\ 0.0368 \\ 0.0009 \\ 0.0630 \\ 0.0284 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= -5.6111 e + 003, \tau_{12} = 2.1368 e + 007 \\ \tau_{13} &= 0, \tau_{23} = 2.1365 e + 007, \tau_{35} = 0 \end{aligned}$$



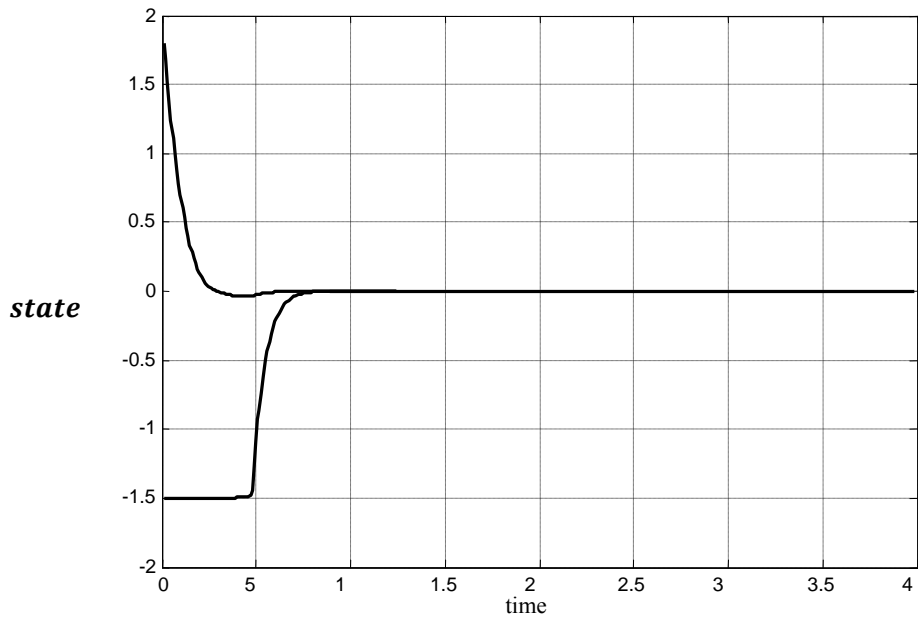
شکل 4.17 پاسخ سیستم دو با اعمال قضیه 4.5

- *Stability and performance together*

همان شرایط مطلوب مورد شبیه سازی شده یک را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= \begin{bmatrix} 1705 & 227 \\ 227 & 1609 \end{bmatrix}, Q_2 = \begin{bmatrix} 16.65 & 2.04 \\ 2.04 & 6.09 \end{bmatrix}, Q_3 = \begin{bmatrix} 76.78 & 2.21 \\ 2.21 & 5.94 \end{bmatrix}, Q_4 = \begin{bmatrix} 326920 & 2310 \\ 2310 & 5970 \end{bmatrix} \\
 Q_5 &= \begin{bmatrix} 84.15 & 2.81 \\ 2.81 & 43 \end{bmatrix}, Q_6 = \begin{bmatrix} 34.93 & 1.59 \\ 1.59 & 6.08 \end{bmatrix}, Q_7 = \begin{bmatrix} 116040 & 1610 \\ 1610 & 16050 \end{bmatrix}, Q_8 = \begin{bmatrix} 5.93 & 1.94 \\ 1.94 & 43.93 \end{bmatrix} \\
 Q_9 &= \begin{bmatrix} 6.11 & 1.59 \\ 1.59 & 5.83 \end{bmatrix}, Q_{10} = \begin{bmatrix} 632790 & 2080 \\ 2080 & 51970 \end{bmatrix}, Q_{11} = \begin{bmatrix} 51880 & 1650 \\ 1650 & 12180 \end{bmatrix}, Q_{12} = \begin{bmatrix} 5.99 & 1.72 \\ 1.72 & 5.99 \end{bmatrix} \\
 Q_{13} &= \begin{bmatrix} 643030 & 1660 \\ 1660 & 65050 \end{bmatrix}, Q_{14} = \begin{bmatrix} 43.14 & 1.72 \\ 1.72 & 32.01 \end{bmatrix}, Q_{15} = \begin{bmatrix} 6.01 & 1.62 \\ 1.62 & 5.99 \end{bmatrix}, Q_{16} = \begin{bmatrix} 51910 & 2730 \\ 2730 & 82090 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$k_3 = [K_1; K_2; K_3; \dots; K_{25}] = 10^5 \times \begin{bmatrix} 0.0001 & -0.0007 \\ 0.0001 & -0.0007 \\ 0.0130 & -0.3775 \\ 0.0000 & -0.0006 \\ 0.0000 & -0.0006 \\ -0.0000 & -0.0007 \\ -0.0001 & -0.0006 \\ -0.0000 & -0.0001 \\ -0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.0006 \\ -0.0230 & 0.0001 \\ -0.0000 & 0.0001 \\ 0.0000 & 0.0003 \\ -0.0001 & -0.0006 \\ -1.1289 & 0.0517 \\ 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.0002 \\ 0.0001 & 0.0000 \\ 0.0001 & 0.0001 \\ 0.0000 & -0.0000 \\ 0.0000 & -0.0000 \\ 0.0016 & -0.0944 \\ 0.0000 & -0.0000 \\ 0.0001 & -0.0000 \end{bmatrix}$$



شکل 4.18 : پاسخ سیستم دو با اعمال قضیه 4.6

نگرشی

در

تحلیل پایداری سیستم

های فازی مقیاس - بزرگ

5.1. پیشگفتار (نگرش ها، چالش ها و آینده)

سیستم های صنعتی معمولاً پیچیده و تصادفی¹ می باشند به بیانی دیگر این سیستم ها مقیاس - بزرگ می باشند. تحلیل پایداری، عملکرد و قابلیت اطمینان همواره از ابعاد مهم طراحی و ساخت این گونه سیستم ها می باشد تا آنجایی که بدون تحلیلی عمیق و دقیق، روند طراحی در این گونه سیستم ممکن است به اخلاص در پایداری و یا عدم تضمین عملکرد مناسب سیستم منجر شود و بدین دلیل تحلیل پایداری در سیستم های مقیاس - بزرگ اخیراً مورد مطالعه و تحقیق بسیاری از محققان و مهندسان قرار گرفته است که از جمله می توان به دو مقاله معروف در این زمینه اشاره کرد [5.1][5.2]. نکته دیگر در تحلیل این سیستم، وجود یک مدل ریاضی مناسب است که بتواند رفتار سیستم را تا حد امکان دقیق تر نشان دهد. این مدل معمولاً دارای درجات بالا در معادلات دینامیک و طبیعت غیر خطی می باشد.

تئوری مجموعه ها و سیستم های فازی در دهه های اخیر ظهور کرده و تا کنون به طور گسترده ای در زمینه های تحقیقاتی فراوانی نفوذ پیدا کرده است. این تئوری برای مدل سازی عدم قطعیت های پدیده های طبیعی، دانش های بشری و اندازه گیری غیر دقیق می باشد که دارای متدهای خاص خود با میزان موفقیت های متفاوت می باشد.

امروزه انعطاف پذیر بودن و قدرت طراحی از خصوصیات مهم سیستم های فازی به شمار می رود. با پیدایش مدل های مختلف سیستم های فازی، تکنیک های طراحی همانند *PDC* و متدهای تحلیل، استفاده از این سیستم ها را در گستره عظیمی از کاربردها قرار داده است و از جمله این کاربردها می توان مدل سازی، طراحی و کنترل سیستم های مقیاس - بزرگ را نام برد. مدل فازی یک سیستم مقیاس - بزرگ، سیستم فازی مقیاس - بزرگ نامیده می شود که تحلیل و طراحی کنترلر آنها به مراتب پرکارتر از سیستم های فازی معمولی می باشد. یک سیستم فازی مقیاس - بزرگ شامل تعداد مشخصی از سیستم های فازی $T - S$ می باشد که تداخل

¹ Stochastic

های داخلی^۱ در بین این زیر سیستم ها وجود دارد. همچنین این زیر سیستم ها که خود یک سیستم فازی $T - S$ می باشند می توانند آفین، تاخیر زمانی، دارای عدم قطعیت ها و یا دارای اغتشاش باشند.

متاسفانه زمینه مطالعاتی و کاربرد تحلیل، طراحی و کنترل این گونه سیستم ها در تحقیقات و مقالات در حد شایسته ای مورد بررسی قرار نگرفته است، اما پیش بینی می شود این زمینه ی تحقیقاتی با سرعتی بالادر سالهای آتی به طور فزاینده گسترش یابد. از جمله تحقیقات و مقالات ارائه شده در این زمینه می توان به [5.3] و [5.4] اشاره کرد که تعدادی معیار برای مسئله پایداری سیستم های فازی مقیاس - بزرگ ارائه می دهند و همچنین [5.5] که یک PDC غیر متمرکز^۲ برای این سیستم ها معرفی می کند. مرجع مناسبی که در حد شایسته ای به بررسی این مقوله پرداخته مرجع [5.6] می باشد که تلاش کرده است تا رهیافتی برای تحلیل پایداری و همچنین یک کنترلر H_∞ مبتنی بر LMI را ارائه دهد.

بنابه دلایل ذکر شده در این پایان نامه نیز سعی شده است تا کنترلرها و رهیافت های تحلیل پایداری جدیدی در این زمینه پیدا نمود و همچنین با گسترش متدهای موجود در سیستم های فازی $T - S$ به سیستم های فازی مقیاس - بزرگ بتوان روزنه ای برای یافتن متدهای تحلیل و طراحی ساده تر، عملی تر با دید مهندسی و بر پایه منطقی قدرتمند پیدا نمود، پس تلاش خواهیم کرد تا متدهای به دست آمده را علاوه بر اعمال بر روی نمونه های متفاوت بر روی سیستم های عملی نیز اعمال کنیم.

5.2. سیستم های فازی مقیاس - بزرگ^۳

یک سیستم فازی مقیاس - بزرگ شامل J زیر سیستم می باشد که تداخل هایی بین این زیر سیستم ها وجود دارد و هر زیر سیستم خود یک سیستم فازی $T - S$ می باشد.

i -امین زیر سیستم یک سیستم فازی مقیاس - بزرگ $S_i, (i = 1, 2, \dots, J)$ به صورت زیر تشریح می شود.

¹ Interconnection

² Decentralized PDC

³ Fuzzy Large-Scale Systems

$$S_i^l = \begin{cases} \text{if } x_{i1}(t) \text{ is } M_i^1 \text{ and } \dots x_{in_i}(t) \text{ is } M_i^{n_i} \\ \text{then } \dot{x}_i(t) = A_i^l x_i(t) + B_i^l u_i(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^J f_{ij}^l(x_j(t)) \end{cases}$$

$$(i = 1, 2, \dots, J), (j = 1, 2, \dots, J), (l = 1, 2, \dots, r_i)$$

(5.1)

که :

S_i^l ، l -امین قانون S_i است .

$u_i(t) \in R^{m_i}$ ، ورودی کنترل S_i در زمان t با ابعاد مناسب می باشد .

$x_i(t) \in R^{n_i}$ ، بردار حالت و $x_i(t) = [x_{i1}(t), x_{i2}(t), \dots, x_{in_i}(t)]^T$

$f_{ij}^l(x_j(t))$ ، تداخل داخلی بین i -امین و j -امین زیر سیستم در l -امین قانون S_i است .

r_i ، تعداد قوانین S_i

n_i ، تعداد حالات S_i

(A_i^l, B_i^l) ماتریس های سیستم در قانون l -ام S_i است که کنترل پذیرند .

M_i^k میزان توابع عضویت $(k = 1, 2, \dots, n_i)$ ، $x_{ik}(t)$ می باشد .

اگر از متد استنتاج^۱ استاندارد فازی استفاده کنیم یعنی منفرد^۲، استنتاج فازی ضرب^۳ یا مینیمم^۴ و غیر فازی

ساز میانگین-مراکز^۵ آنگاه رابطه (5.1) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{l=1}^{r_i} \mu_i^l(x_i(t)) A_i^l x_i(t) + \sum_{l=1}^{r_i} \mu_i^l(x_i(t)) B_i^l u_i(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^J \sum_{l=1}^{r_i} \mu_i^l(x_i(t)) f_{ij}^l(x_j(t))$$

¹ Inference

² Singleton

³ Product

⁴ Minimum

⁵ Central-Average Defuzzifier

$$= \sum_{l=1}^{r_i} \mu_i^l(x_i(t)) (A_i^l x_i(t) + B_i^l u_i(t)) + \sum_{j=1}^J \sum_{\substack{l=1 \\ j \neq i}}^{r_i} \mu_i^l(x_i(t)) f_{ij}^l(x_j(t)) \quad (5.2)$$

که $\mu_i^l(x_i(t)) = \frac{w_i^l}{\sum_{j=1}^{r_i} w_i^j}$ و $w_i^l = \prod_{k=1}^{n_i} M_i^k(x_{ik}(t)) \geq 0$ و $\sum_{l=1}^{r_i} \mu_i^l(x_i(t)) = 1$

را توان آتش قانون l -ام S_i گویند. همچنین در این بحث فرض می شود که C_{ij}^l و $f_{ij}^l(x_j(t)) = C_{ij}^l x_j(t)$ ماتریس ثابت با ابعاد مناسب می باشد.

معادله دینامیکی فازی (5.2) را می توان به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$\dot{x}_i(t) = A_i(x_i(t))x_i(t) + B_i(x_i(t))u_i(t) + \varphi_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, J) \quad (5.3)$$

که

$$A_i(x_i(t)) = \sum_{l=1}^{r_i} \mu_i^l(x_i(t)) A_i^l, \quad B_i(x_i(t)) = \sum_{l=1}^{r_i} \mu_i^l(x_i(t)) B_i^l$$

$$\varphi_i(t) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^J \sum_{l=1}^{r_i} \mu_i^l(x_i(t)) f_{ij}^l(x_j(t)), \quad f_{ij}^l(x_j(t)) = C_{ij}^l x_j(t)$$

5.3 طراحی کنترلر غیر خطی

برای پایدار سازی یک سیستم فازی مقیاس-بزرگ، یک کنترلر غیر خطی به صورت زیر را در نظر گرفته شده است:

$$u_i(t) = - \sum_{k=1}^{c_i} m_i^k(t) K_i^k x_i(t) \quad (5.4)$$

به طوریکه:

$$\sum_{k=1}^{c_i} m_i^k(t) = 1 \quad \& \quad 0 \leq m_i^k(t) \leq 1 \quad \& \quad (i = 1, 2, \dots, J \quad k = 1, 2, \dots, c_i)$$

و K_i^k گین فید بک حالت با ابعاد مناسب و $m_i^k(t)$ یک تابع غیر خطی است که در روابط (5.4)(5.12.a)(5.12.b) تعریف شده است. c_i نیز یک عدد اختیاری برای طراحی کنترلر در هر زیر سیستم می باشد. پس از به کار بردن کنترلر فوق، سیستم حلقه بسته به صورت زیر خواهد بود:

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{l=1}^{r_i} \mu_i^l(x_i(t)) \left(A_i^l x_i(t) - B_i^l \sum_{k=1}^{c_i} m_i^k(t) K_i^k x_i(t) \right) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^J \sum_{l=1}^{r_i} \mu_i^l(x_i(t)) C_{ij}^l x_j(t) \quad (5.5)$$

و اگر: $Y_i^{lk} = A_i^l - B_i^l K_i^k$

(5.6)

حال باید روشی به دست آورد که بتوان K_i^k را طراحی کرد به طوری که سیستم (5.6) پایدار شود. نخست لازم است لمی را بیان کرد که در ادامه بحث مورد نیاز می باشد.

لم 5.1: [5.7] نرم - دو^۱ ماتریس A برابر است با $\sqrt{\max(\text{eig}(A^T A))}$ که $\text{eig}(A)$ همان مقادیر ویژه ماتریس A می باشد. برای یک ماتریس متقارن و مثبت معین این نرم به $\max(\text{eig}(A))$ تبدیل می شود. همچنین:

$$\|A^{-1}\|_2 = \max(\text{eig}(A^{-1})) = \frac{1}{\min(\text{eig}(A))}$$

و همچنین عدد شرطی^۲ مبتنی بر نرم - دو به صورت زیر خواهد بود:

¹ 2-Norm

² Condition Number

$$\|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \max(\text{eig}(A)) \max(\text{eig}(A^{-1})) = \frac{\max(\text{eig}(A))}{\min(\text{eig}(A))}$$

قضیه 5.1: با به کارگیری کنترل غیرخطی معرفی شده در روابط (5.4)(5.12.a)(5.12.b)، می توان سیستم فازی مقیاس-بزرگ (5.3) را پایدار کرد، اگر ماتریس های معین مثبت P_i ، اسکالرهای مثبت η_i^l و بردارهای K_i^1 وجود داشته باشند بطوریکه شرایط زیر ارضا شوند:

$$-Q_i^{l1} \leq -\eta_i^l I_i \quad (5.7.a)$$

$$M > 0 \quad (5.7.b)$$

که

$$I_i = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n_i \times n_i}, \quad (l = 1, 2, \dots, r_i), \quad (i = 1, 2, \dots, J), \quad Y_i^{lkT} P_i + P_i Y_i^{lk} = -Q_i^{lk},$$

$$(k = 1, 2, \dots, c_i) \quad n_i \text{ is the number of states of } S_i, \quad M = [m_{ij}] = \begin{cases} m_i^1(t) \eta_i & i = j \\ -2m_i^1(t) r_i \lambda_i \beta_{ij} & i \neq j \end{cases}$$

$$\eta_i = \min_l(\eta_i^l) > 0, \quad \beta_{ij} = \max_l(\|C_{ij}^l\|), \quad \lambda_i = \max(\text{eig}(P_i)).$$

اثبات:

تابع لیاپانوف را همانند زیر انتخاب می کنیم

$$V(t) = \sum_{i=1}^J V_i(t) \quad \text{such that} \quad V_i(t) = x_i^T(t) P_i x_i(t) \quad (5.8)$$

با مشتق گیری از $V_i(t)$ داریم

$$\dot{V}_i(t) = \dot{x}_i^T(t) P_i x_i(t) + x_i^T(t) P_i \dot{x}_i(t) \quad (5.9)$$

تعریف می کنیم:

$$F_{ij}^l(t) = x_j^T(t) C_{ij}^{lT} P_i x_i(t) + x_i(t)^T P_i C_{ij}^l x_j(t)$$

(5.10)

و با جایگذاری (5.6) در (5.9) داریم

$$\begin{aligned}
\dot{V}_i(t) &= - \sum_{l=1}^{r_i} \sum_{k=1}^{c_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^J \mu_i^l(x_i(t)) m_i^k(t) \left(\frac{1}{J-1} x_i(t)^T Q_i^{lk} x_i(t) - F_{ij}^l(t) \right) \\
&= - \sum_{k=1}^{c_i} m_i^k(t) \left(\sum_{l=1}^{r_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^J \mu_i^l(x_i(t)) \left(\frac{1}{J-1} x_i(t)^T Q_i^{lk} x_i(t) - F_{ij}^l(t) \right) \right) \\
&= - \left(m_i^1(t) \left(\sum_{l=1}^{r_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^J \mu_i^l(x_i(t)) \left(\frac{1}{J-1} x_i(t)^T Q_i^{l1} x_i(t) - F_{ij}^l(t) \right) \right) \right) \\
&\quad - \left(\sum_{k=2}^{c_i} m_i^k(t) \left(\sum_{l=1}^{r_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^J \mu_i^l(x_i(t)) \left(\frac{1}{J-1} x_i(t)^T Q_i^{lk} x_i(t) - F_{ij}^l(t) \right) \right) \right)
\end{aligned} \tag{5.11}$$

که

$$m_i^1(t) = \begin{cases} 1 - \frac{\left(\sum_{k=2}^{c_i} \left(\sum_{l=1}^{r_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^J \mu_i^l(x_i(t)) \left(\frac{1}{J-1} x_i(t)^T Q_i^{lk} x_i(t) - F_{ij}^l(t) \right) \right) \right)}{\sum_{h=1}^{c_i} \sum_{l=1}^{r_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^J \left| \mu_i^l(x_i(t)) \left(\frac{1}{J-1} x_i(t)^T Q_i^{lh} x_i(t) - F_{ij}^l(t) \right) \right|} , & \text{if } \sum_{h=1}^{c_i} \sum_{l=1}^{r_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^J \left| \mu_i^l(x_i(t)) \left(\frac{1}{J-1} x_i(t)^T Q_i^{lh} x_i(t) - F_{ij}^l(t) \right) \right| \neq 0 \\ \frac{1}{c_i} & \text{if } \sum_{h=1}^{c_i} \sum_{l=1}^{r_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^J \left| \mu_i^l(x_i(t)) \left(\frac{1}{J-1} x_i(t)^T Q_i^{lh} x_i(t) - F_{ij}^l(t) \right) \right| = 0 \end{cases} \tag{5.12. a}$$

$$m_i^k(t) = \begin{cases} \frac{\sum_{l=1}^{r_i} \sum_{j=1}^J \mu_i^l(x_i(t)) \left(\frac{1}{J-1} x_i(t)^T Q_i^{lk} x_i(t) - F_{ij}^l(t) \right)}{\sum_{h=1}^{c_i} \sum_{l=1}^{r_i} \sum_{j=1}^J \left| \mu_i^l(x_i(t)) \left(\frac{1}{J-1} x_i(t)^T Q_i^{lh} x_i(t) - F_{ij}^l(t) \right) \right|} & , \text{ if } \sum_{h=1}^{c_i} \sum_{l=1}^{r_i} \sum_{j=1}^J \left| \mu_i^l(x_i(t)) \left(\frac{1}{J-1} x_i(t)^T Q_i^{lh} x_i(t) - F_{ij}^l(t) \right) \right| \neq 0 \\ \frac{1}{c_i} & \text{if } \sum_{h=1}^{c_i} \sum_{l=1}^{r_i} \sum_{j=1}^J \left| \mu_i^l(x_i(t)) \left(\frac{1}{J-1} x_i(t)^T Q_i^{lh} x_i(t) - F_{ij}^l(t) \right) \right| = 0 \end{cases}$$

(5.12. b)

بنابراین

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(t) &= - \left(m_i^1(t) \left(\sum_{l=1}^{r_i} \sum_{j=1}^J \mu_i^l(x_i(t)) \left(\frac{1}{J-1} x_i(t)^T Q_i^{l1} x_i(t) - F_{ij}^l(t) \right) \right) \right) \\ &\quad - \left(\sum_{k=2}^{c_i} \left(\frac{\left(\sum_{l=1}^{r_i} \sum_{j=1}^J \mu_i^l(x_i(t)) \left(\frac{1}{J-1} x_i(t)^T Q_i^{lk} x_i(t) - F_{ij}^l(t) \right) \right)^2}{\sum_{h=1}^{c_i} \sum_{l=1}^{r_i} \sum_{j=1}^J \left| \mu_i^l(x_i(t)) \left(\frac{1}{J-1} x_i(t)^T Q_i^{lh} x_i(t) - F_{ij}^l(t) \right) \right|} \right) \right) \\ \Rightarrow \dot{V}_i(t) &\leq - \left(m_i^1(t) \left(\sum_{l=1}^{r_i} \sum_{j=1}^J \mu_i^l(x_i(t)) \left(\frac{1}{J-1} x_i(t)^T Q_i^{l1} x_i(t) - F_{ij}^l(t) \right) \right) \right) \end{aligned}$$

(5.13)

آنگاه

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \sum_{i=1}^J \dot{V}_i(t) \leq - \sum_{i=1}^J m_i^1(t) \left(\sum_{l=1}^{r_i} \sum_{j=1}^J \mu_i^l(x_i(t)) \left(\frac{1}{J-1} x_i(t)^T Q_i^{l1} x_i(t) - F_{ij}^l(t) \right) \right) \\ &= - \sum_{i=1}^J m_i^1(t) \left(\sum_{l=1}^{r_i} \mu_i^l(x_i(t)) \left(x_i(t)^T Q_i^{l1} x_i(t) \right) - \sum_{l=1}^{r_i} \sum_{j=1}^J \mu_i^l(x_i(t)) F_{ij}^l(t) \right) \end{aligned}$$

(5.14)

اگر برای هر زیر سیستم (S_i) داشته باشیم که

$$\begin{aligned} -Q_i^{11} &\leq -\eta_i^1 I_i \\ -Q_i^{21} &\leq -\eta_i^2 I_i \\ &\vdots \\ -Q_i^{r_i 1} &\leq -\eta_i^{r_i} I_i \end{aligned} \tag{5.15}$$

سپس

$$\begin{aligned} -\mu_i^1(x_i(t))x_i(t)Q_i^{11}x_i^T(t) &\leq -\mu_i^1(x_i(t))\eta_i\|x_i\|^2 \\ -\mu_i^2(x_i(t))x_i(t)Q_i^{21}x_i^T(t) &\leq -\mu_i^2(x_i(t))\eta_i\|x_i\|^2 \\ &\vdots \\ -\mu_i^{r_i}(x_i(t))x_i(t)Q_i^{r_i 1}x_i^T(t) &\leq -\mu_i^{r_i}(x_i(t))\eta_i\|x_i\|^2 \end{aligned} \tag{5.16}$$

آز ان جایی که $\eta_i = \min_l(\eta_i^l)$ & , $\sum_{l=1}^{r_i} \mu_i^l(x_i(t)) = 1$

$$\Rightarrow -\sum_{l=1}^{r_i} \mu_i^l(x_i(t)) (x_i(t)^T Q_i^{l1} x_i(t)) \leq -\eta_i \|x_i\|^2 \sum_{l=1}^{r_i} \mu_i^l(x_i(t)) = -\eta_i \|x_i\|^2 \tag{5.17}$$

همچنین

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{r_i} \mu_i^l(x_i(t)) F_{ij}^l(t) &= \sum_{l=1}^{r_i} \mu_i^l(x_i(t)) (x_j^T(t) C_{ij}^l{}^T P_i x_i(t) + x_i(t)^T P_i C_{ij}^l x_j(t)) \\ &\leq 2r_i \|x_i\| \|x_j\| \|P_i\|_2 \max_l(\|C_{ij}^l\|) \end{aligned} \tag{5.18}$$

بر اساس لم 5.1 و روابط (5.17) و (5.18)

$$\dot{V}(t) \leq \sum_{i=1}^J m_i^1(t) \left(-\eta_i \|x_i\|^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^J 2r_i \|x_i\| \|x_j\| \|P_i\|_2 \max_l(\|C_{ij}^l\|) \right) \tag{5.19}$$

لذا

$$V \leq \sum_{i=1}^J m_i^1(t) \left(-\eta_i \|x_i\|^2 + \sum_{j=1}^J 2r_{ij} \|x_i\| \|x_j\| \lambda_i \beta_{ij} \right) \quad (5.20)$$

که $\|P_i\|_2 = \lambda_i = \lambda_{\max}(P_i)$, $\beta_{ij} = \max_i(\|C_{ij}^l\|)$

از [5.8]: طرف راست رابطه ی (5.20) به فرم مربعی از $\{\|x_1\| \quad \|x_2\| \quad \dots \quad \|x_J\|\}$ می باشد.

$$\text{Right - hand side of (5.20)} = -[\|x_1\| \quad \|x_2\| \quad \dots \quad \|x_J\|] \times M \times \begin{bmatrix} \|x_1\| \\ \|x_2\| \\ \vdots \\ \|x_J\| \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

آنگاه

$$\text{if } \begin{cases} M > 0 \\ -Q_i^{l1} \leq -\eta_i^l I_i \end{cases} \Rightarrow \dot{V}(t) < 0$$

برای حالت $m_i^k(x_i(t)) = \frac{1}{c_i}$ و از آنجایی که $\left(\frac{1}{J-1} x_i(t)^T Q_i^{lk} x_i(t) - F_{ij}^l(t)\right) = 0$ می باشد، روند فوق

ساده تر خواهد شد و به راحتی می توان نتیجه گرفت که: $\dot{V}(t) \leq 0$

پس اثبات کامل شد. ■

تذکر 5.1: برای ارضا شرط $M > 0$ می توان از معیار سیلوستر¹ [5.9] برای ماتریس های مثبت های

معین استفاده نمود ، آنگاه خواهیم دید که شرط $M > 0$ مستقل از $m_i^1(t) (i = 1, 2, \dots, J)$ می

باشد و شرط های $\eta_i (i = 1, 2, \dots, J)$ نیز بدست خواهند آمد :

(برای اختصار $m_i^1(t) = m_i^1$)

$$m_1^1 \eta_1 > 0 \Rightarrow \eta_1 > 0 \quad (5.22)$$

¹ J.J.Sylvester

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{cc} m_1^1 \eta_1 & -2m_1^1 r_1 \lambda_1 \beta_{12} \\ -2m_2^1 r_2 \lambda_2 \beta_{21} & m_2^1 \eta_2 \end{array} \right| > 0 \quad \Rightarrow \quad m_1^1 m_2^1 \left| \begin{array}{cc} \eta_1 & -2r_1 \lambda_1 \beta_{12} \\ -2r_2 \lambda_2 \beta_{21} & \eta_2 \end{array} \right| > 0 \\ \Rightarrow \eta_1 \eta_2 > 4r_1 r_2 \lambda_1 \lambda_2 \beta_{12} \beta_{21} \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ & \left| \begin{array}{cccc} m_1^1 \eta_1 & -2m_1^1 r_1 \lambda_1 \beta_{12} & \dots & -2m_1^1 r_1 \lambda_1 \beta_{1j} \\ \vdots & & & \vdots \\ -2m_j^1 r_j \lambda_j \beta_{j1} & -2m_j^1 r_j \lambda_j \beta_{j2} & \dots & m_j^1 \eta_j \end{array} \right| \\ & = m_1^1 m_2^1 \dots m_j^1 \left| \begin{array}{cccc} \eta_1 & -2r_1 \lambda_1 \beta_{12} & \dots & -2r_1 \lambda_1 \beta_{1j} \\ \vdots & & & \vdots \\ -2r_j \lambda_j \beta_{j1} & -2r_j \lambda_j \beta_{j2} & \dots & \eta_j \end{array} \right| \\ \Rightarrow & \left| \begin{array}{cccc} \eta_1 & -2r_1 \lambda_1 \beta_{12} & \dots & -2r_1 \lambda_1 \beta_{1j} \\ \vdots & & & \vdots \\ -2r_j \lambda_j \beta_{j1} & -2r_j \lambda_j \beta_{j2} & \dots & \eta_j \end{array} \right| > 0 \end{aligned} \quad (5.24)$$

تذکر 5.2: قسمت سمت چپ (5.7.a) شامل ترم های غیر خطی از K_i^1 و P_i می باشد. می توان با رهیافت زیر آنها را تبدیل به ترم های خطی کرد.

$$\begin{aligned} Y_i^{l1T} P_i + P_i Y_i^{l1} &= -Q_i^{l1} < -\eta_i^l I_i \\ (A_i^l - B_i^l K_i^1)^T P_i + P_i (A_i^l - B_i^l K_i^1) &< -\eta_i^l I_i \\ A_i^{lT} P_i - K_i^{1T} B_i^{lT} P_i + P_i A_i^l - P_i B_i^l K_i^1 &< -\eta_i^l I_i \end{aligned} \quad (5.25)$$

آنگاه با قرار دادن $K_i^1 q_i = v_i^1$, $q_i = P_i^{-1}$, و ضرب q_i به دو طرف رابطه فوق داریم:

$$q_i A_i^{lT} - v_i^{1T} B_i^{lT} + A_i^l q_i - B_i^l v_i^1 < -\eta_i^l I_i q_i^2 \quad (5.26)$$

حال با استفاده از متمم اسکر داریم که:

$$\begin{bmatrix} -1/\eta_i^l I_i & q_i \\ q_i & q_i A_i^{lT} - v_i^{1T} B_i^{lT} + A_i^l q_i - B_i^l v_i^1 \end{bmatrix} < 0$$

(5.27)

و قضیه زیر را در پی خواهد داشت :

قضیه 5.3 : با به کارگیری کنترلر غیرخطی فید بک حالت (که با روابط (5.4)(5.12.a)(5.12.b) شرح داده شده است) می توان پایداری سیستم مقیاس-بزرگ (5.3) را تضمین کرد، اگر ماتریس های مثبت معین متقارن q_i و اسکالرهای η_i^l و بردارهای K_i^1 وجود داشته باشند به طوری که شرایط زیر را ارضا کنند :

$$\begin{bmatrix} -1/\eta_i^l I_i & q_i \\ q_i & q_i A_i^{lT} - v_i^{1T} B_i^{lT} + A_i^l q_i - B_i^l v_i^1 \end{bmatrix} < 0$$

(5.27. a)

$$M > 0$$

(5.27. b)

آنگاه : $P_i = q_i^{-1}$ و $K_i^1 = v_i^1 q_i^{-1}$

تمامی نمادگذاری ها همانند قضیه 5.1 می باشد .

توجه داشته باشید که روابط قضیه 5.1 و قضیه 5.2 فقط برای Q_i^{l1} و در ادامه جهت بدست آوردن K_i^1 چک می شوند لذا K_i^k (for $k \neq 1$) همه اختیاری می باشند و تاثیری بر روی پایداری ندارند . بر اساس مشاهدات و تجربیات نگارنده این گین ها K_i^k ($k \neq 1$) بر روی نوع پاسخ (میزان نوسان¹ ، زمان نشست² و ...) تاثیرگذار است ، بنابراین میزان محاسبات نیز کاهش می یابد .

5.4 الگوریتم طراحی

برای سیستم های مقیاس-بزرگ یک الگوریتم برای طراحی مبتنی بر قضایای مذکور ارائه می گردد.

اگر

¹ Overshoot/Undershoot

² Settling Time

$$q_i A_i^{lT} - v_i^{1T} B_i^{lT} + A_i^l q_i - B_i^l v_i^1 < -\eta_i^l I_i \|q_i\|^2 = -\frac{\eta_i^l}{\min(\text{eig}(P_i))^2} \quad (5.28)$$

آنگاه (5.26) به طور حتم ارضا می شود ، بنابراین

$$\text{assume } P_1 = P_2 = \dots = P_J = P \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_J = \lambda$$

step1: Obtain β_{ij} ($i = 1, 2, \dots, r_i$, $j = 1, 2, \dots, J$)

step2 : For $i = 1$ (namely S_1)

select $\eta_1 = (\lambda_{\min}(P_i))^2$ then with LMI Toolbox,

solve following inequalities and extract $P = q^{-1}$.

$$q A_1^{lT} - v_1^{1T} B_1^{lT} + A_1^l q - B_1^l v_1^1 < -I_1 \quad , \quad (l = 1, 2, \dots, r_1)$$

and v_1^1 , then $K_1^1 = v_1^1 q^{-1}$

step3: For $i = 2$ (namely S_1)

$$\text{Select } \eta_2 \text{ subject to: } \begin{vmatrix} (\lambda_{\min}(P_i))^2 & -2r_1 \lambda \beta_{12} \\ -2r_2 \lambda \beta_{21} & \eta_2 \end{vmatrix} > 0 \text{ then with LMI Toolbox ,}$$

solve following inequalities and extract v_2^1

$$q A_2^{lT} - v_2^{1T} B_2^{lT} + A_2^l q - B_2^l v_2^1 < -\frac{\eta_2^l}{\min(\text{eig}(P))^2} \quad , \quad (l = 1, 2, \dots, r_2)$$

$$\text{and then } K_2^1 = v_2^1 q^{-1}$$

step4: For $i = 3$ (namely S_3)

Select η_3 subject to:

$$\begin{vmatrix} (\lambda_{\min}(P_i))^2 & -2r_1 \lambda \beta_{12} & -2r_1 \lambda \beta_{13} \\ -2r_2 \lambda \beta_{21} & \eta_2 & -2r_2 \lambda \beta_{23} \\ -2r_3 \lambda \beta_{31} & -2r_3 \lambda \beta_{32} & \eta_3 \end{vmatrix} > 0$$

then with LMI Toolbox , solve following inequalities

$$q A_3^{lT} - v_3^{1T} B_3^{lT} + A_3^l q - B_3^l v_3^1 < -\frac{\eta_3^l}{\min(\text{eig}(P))^2} \quad , \quad (l = 1, 2, \dots, r_3)$$

$$\text{and extract } v_3^1 \text{ and then } K_3^1 = v_3^1 q^{-1}$$

توجه داشته باشید که q در مرحله اول به دست می آید و در مراحل بعد مورد استفاده قرار می گیرد و همچنین این الگوریتم ممکن است برای زمانی که i عدد بزرگی باشد جوابگو نباشد .

5.5. نمونه های شبیه سازی شده

در این قسمت به شبیه سازی یک مثال از سیستم های فازی مقیاس- بزرگ می پردازیم :

سیستم مورد نظر در این مثال شامل دو زیر سیستم به صورت زیر است :

• Subsystem S_1 :

Rule1: if $x_{11}(t)$ is M_1^2 and $x_{12}(t)$ is M_1^1

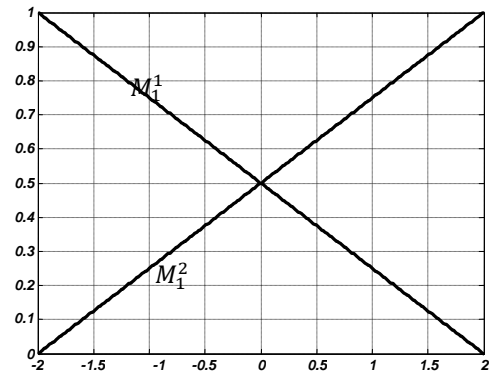
$$\text{then } \dot{x}_1(t) = A_1^1 x_1(t) + B_1^1 u_1(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^k C_{1j}^1 x_j(t)$$

Rule2: if $x_{11}(t)$ is M_1^1 and $x_{12}(t)$ is M_1^2

$$\text{then } \dot{x}_1(t) = A_1^2 x_1(t) + B_1^2 u_1(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^k C_{1j}^2 x_j(t)$$

Rule3: if $x_{11}(t)$ is M_1^1 and $x_{12}(t)$ is M_1^1

$$\text{then } \dot{x}_1(t) = A_1^3 x_1(t) + B_1^3 u_1(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^k C_{1j}^3 x_j(t)$$



شکل 5.1: توابع عضویت زیر سیستم 1

که در آن

$$A_1^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, A_1^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1.2 & 1 \end{bmatrix}, A_1^3 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B_1^1 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}, B_1^2 = \begin{bmatrix} 1.6 \\ 0 \end{bmatrix}, B_1^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.2 \end{bmatrix}$$

$$C_{12}^1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ -0.6 & 0 \end{bmatrix}, C_{12}^2 = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.01 \\ -0.6 & 0 \end{bmatrix}, C_{12}^3 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.21 \\ -0.6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \beta_{12} &= \max_l (\|C_{12}^l\|) = \max\{\|C_{12}^1\|, \|C_{12}^2\|, \|C_{12}^3\|\} = 0.6094 \\ r_1 &= 3 \quad \text{and} \quad k(\text{superscript in summation in consequent of each rule}) = 2 \end{aligned} \right.$$

$$\& x_1(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ x_{12}(t) \end{bmatrix}$$

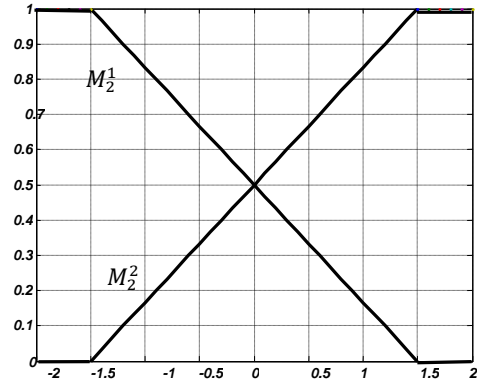
• **Subsystem S_2 :**

Rule1: if $x_{21}(t)$ is M_2^1 and $x_{22}(t)$ is M_2^1

$$\text{then } \dot{x}_2(t) = A_2^1 x_2(t) + B_2^1 u_2(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^k C_{2j}^1 x_j(t)$$

Rule2: if $x_{21}(t)$ is M_2^2 and $x_{22}(t)$ is M_2^2

$$\text{then } \dot{x}_2(t) = A_2^2 x_2(t) + B_2^2 u_2(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^k C_{2j}^2 x_j(t)$$



شکل 5.2: توابع عضویت زیر سیستم 2

که در آن

$$\left. \begin{aligned} A_2^1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1.5 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, A_2^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, B_2^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.56 \end{bmatrix}, B_2^2 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}, C_{21}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C_{21}^2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix} \\ \beta_{21} &= \max_l (\|C_{21}^l\|) = \max\{\|C_{21}^1\|, \|C_{21}^2\|\} = 0.2000 \\ r_2 &= 2 \quad \text{and} \quad k = 2 \end{aligned} \right\} \quad \& \quad x_2(t) = \begin{bmatrix} x_{21}(t) \\ x_{22}(t) \end{bmatrix}$$

توابع عضویت هر سیستم نیز در شکل (5.1) و (5.2) نشان داده شده اند. برای سیستم در حالت آزاد¹ یعنی

های (5.3)، (5.4)، (5.5) و (5.6) نشان داده شده است، پاسخ سیستم کنترل شده با کنترلر فیدبک حالت

غیر خطی در همان شکل ها نیز نشان داده شده است.

¹ Free System

البته این نکته را مد نظر داشته باشید که در شکل های مذکور محور افقی زمان نمی باشد بلکه زمان - گام¹ می باشد که همان مراحل زمانی در حل عددی معادلات غیر خطی می باشند لذا اگر اعداد محور افقی اعدادی بزرگ باشند امری دور از انتظار نمی باشد .

مراحل طراحی کنترلر غیر خطی

برای هر زیر سیستم فرض شده است که $c_1 = c_2 = 2$ ، با بکارگیری الگوریتم قبل داریم که :

Step1:

$$K_1^1 = [2.0734 \quad -0.1452], q = \begin{bmatrix} 5.5420 & 0.3937 \\ 0.3937 & 2.8138 \end{bmatrix} = P^{-1} > 0$$

$$\Rightarrow \eta_1 = (0.1786)^2 = (\lambda_{\min}(P))^2 = 0.0319, \quad \lambda_{\max}(P) = 0.3626$$

Step2:

$$\eta_2 = 24.0959 \Rightarrow \begin{vmatrix} (\lambda_{\min}(P_i))^2 & -2r_1\lambda\beta_{12} \\ -2r_2\lambda\beta_{21} & \eta_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0.0319 & -2 \times 3 \times 0.3626 \times 0.6094 \\ -2 \times 2 \times 0.3626 \times 0.2000 & \eta_2 \end{vmatrix} > 0$$

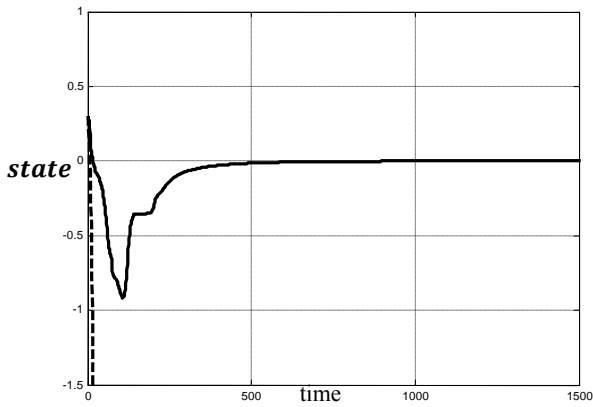
همچنین گین فید بک K_2^1 به صورت زیر به دست می آید :

$$K_2^1 = [5.1682 \quad 43.5930]$$

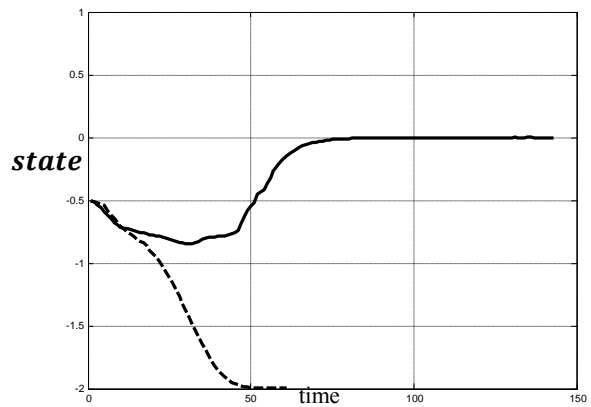
اختیاری می باشند آنها را به صورت زیر در نظر گرفته ایم: K_2^2 و K_1^2 و از آنجایی که

$$K_1^2 = [1,1], \quad K_2^2 = [0.01,0.01]$$

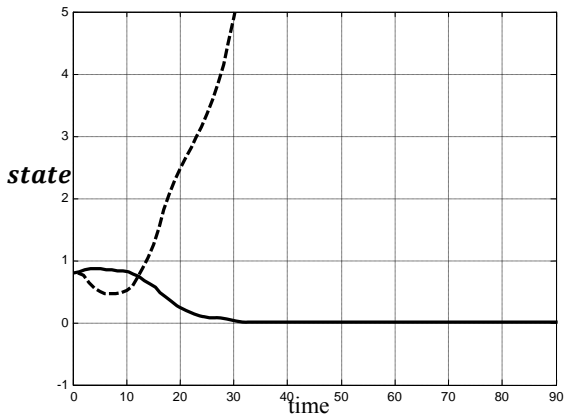
¹ Time-Step



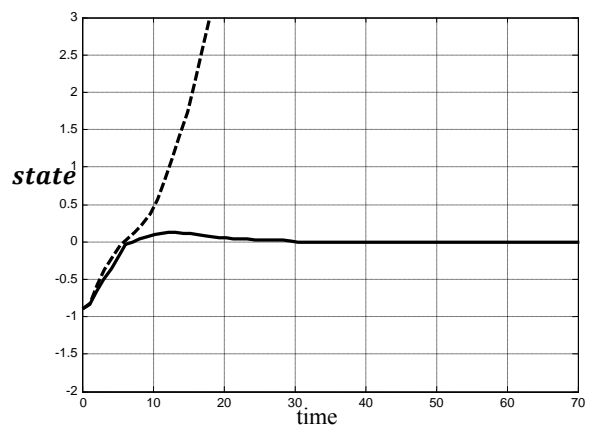
شکل 5.3: پاسخ $x_{11}(t)$ از زیر سیستم 1 هنگامی که $u(t) = 0$ (خطوط نقطه چین) و همراه با کنترلر (خطوط ممتد و پیوسته) وقتی که $x_{11}(0) = 0.3$



شکل 5.4: پاسخ $x_{12}(t)$ از زیر سیستم 1 هنگامی که $u(t) = 0$ (خطوط نقطه چین) و همراه با کنترلر (خطوط ممتد و پیوسته) وقتی که $x_{12}(0) = -0.5$



شکل 5.5: پاسخ $x_{21}(t)$ از زیر سیستم 2 هنگامی که $u(t) = 0$ (خطوط نقطه چین) و همراه با کنترلر (خطوط ممتد و پیوسته) وقتی که $x_{21}(0) = 0.8$



شکل 5.6: پاسخ $x_{22}(t)$ از زیر سیستم 2 هنگامی که $u(t) = 0$ (خطوط نقطه چین) و همراه با کنترلر (خطوط ممتد و پیوسته) وقتی که $x_{22}(0) = -0.9$

5.6 معرفی سیستم پاندول معکوس دو تایی

جهت روشن شدن قضایای ارائه شده و همچنین ارائه یک نمونه شبیه سازی شده، نخست سیستم نمونه ای را انتخاب و سپس با اعمال قضا یا الگوریتم ها به بررسی نتایج می پردازیم. سیستمی که منتخب این قسمت می باشد پاندول معکوس دو تایی¹ است که می توان نمونه ی عملی مناسبی برای سیستم های مقیاس - بزرگ با تعداد زیر سیستم های کم باشد. این سیستم شامل دو پاندول معکوس دو تایی می باشد که به وسیله یک فنر فشرده شده به یکدیگر اتصال پیدا کرده اند. این سیستم که از [5.6] اقتباس شده است و در شکل (5.14) نشان داده شده است دارای معادلات سیستمی زیر می باشد:

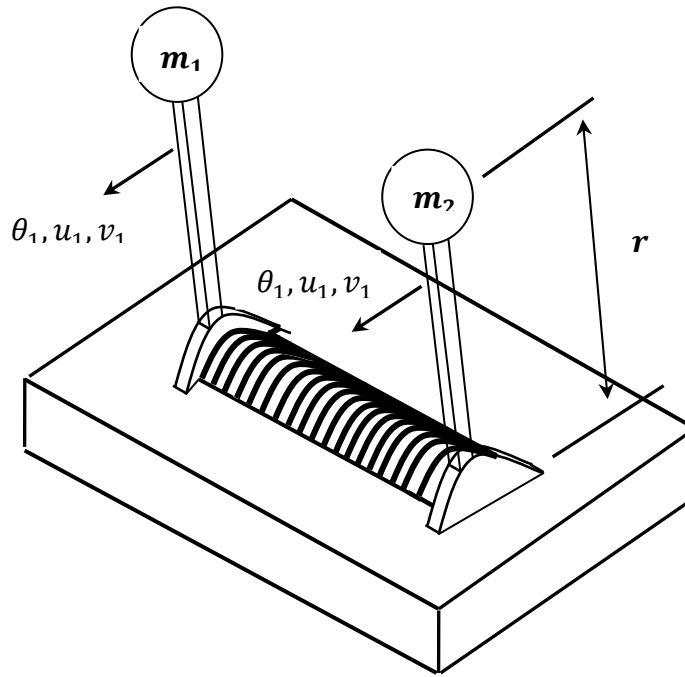
$$\dot{x}_{11}(t) = x_{12}(t)$$

$$\dot{x}_{12}(t) = \frac{m_1 gr}{J_1} \sin(x_{11}(t)) - \frac{k}{J_1} x_{11}(t) + \frac{u_1}{J_1} + \frac{k}{J_1} x_{21}(t) + \frac{v_1(t)}{J_1}$$

$$\dot{x}_{21}(t) = x_{22}(t)$$

$$\dot{x}_{22}(t) = \frac{m_2 gr}{J_2} \sin(x_{21}(t)) - \frac{k}{J_2} x_{21}(t) + \frac{u_2}{J_2} + \frac{k}{J_2} x_{11}(t) + \frac{v_2(t)}{J_2}$$

¹ Double Inverted Pendulums



شکل 5.7: پاندول معکوس دو تایی

که $x_1(t) = [x_{11}(t), x_{12}(t)]^T$, $x_2(t) = [x_{21}(t), x_{22}(t)]^T$ بردارهای حالت زیر سیستم های یک و دو می باشند. فرض در دسترس بودن θ_i و $\dot{\theta}_i$ (موقعیت زاویه و مشتق آن) نیز برقرار است که $\theta_1 = x_{11}(t)$ و $\theta_2 = x_{21}(t)$ جابه جایی زاویه ای پاندول ها از مبدا عمومی می باشند. جرم پاندول ها به صورت $m_1 = 2 \text{ kg}$ و $m_2 = 2.5 \text{ kg}$ می باشند، $J_1 = 2 \text{ kg}$ و $J_2 = 2.5 \text{ kg}$ گشتاور اینرسی نیز می باشند و هم چنین مقدار ثابت فشردگی فنر $k = 2 \text{ N.m/rad}$ ، ارتفاع پاندول ها $r = 1 \text{ m}$ و شتاب گرانش $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ می باشند. فنر هنگامی که پاندول ها در حالت عمودی می باشند در حالت آرامش¹ می باشد. مبرهن است که مبدا $(x_{11} = x_{12} = x_{21} = x_{22} = 0)$ نقطه تعادل سیستم می باشد.

برای استخراج مدل فازی سیستم را حول مبدا خطی سازی شده و $x_i = [\pm 88^\circ, 0]^T$ ، آنگاه سیستم فازی زیر را خواهیم داشت:

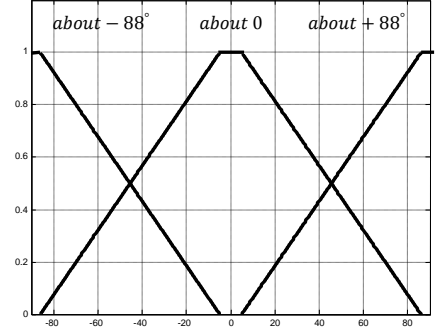
¹ Relaxed

• **Subsystem S_1 :**

Rule1: if $x_{11}(t)$ is about -88°

then $\dot{x}_1(t)$

$$= A_1^1 x_1(t) + \alpha_1^1 + B_1^1 u_1(t) + D_1^1 v_1(t) + C_{12}^1 x_2(t)$$



شکل 5.8: توابع عضویت زیر سیستم 1

Rule2: if $x_{11}(t)$ is about 0

$$\text{then } \dot{x}_1(t) = A_1^2 x_1(t) + \alpha_1^2 + B_1^2 u_1(t) + D_1^2 v_1(t) + C_{12}^2 x_2(t)$$

Rule3: if $x_{11}(t)$ is about $+88^\circ$

$$\text{then } \dot{x}_1(t) = A_1^3 x_1(t) + \alpha_1^3 + B_1^3 u_1(t) + D_1^3 v_1(t) + C_{12}^3 x_2(t)$$

$$A_1^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.6576 & 0 \end{bmatrix}, A_1^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8.81000 & 0 \end{bmatrix}, A_1^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.6576 & 0 \end{bmatrix}, B_1^1 = B_1^2 = B_1^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}, C_{12}^1 = C_{12}^2 = C_{12}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \alpha_1^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -9.2783 \end{bmatrix}, \alpha_1^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_1^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 9.2783 \end{bmatrix}, D_1^1 = D_1^2 = D_1^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

شکل (5.15) توابع عضویت زیر سیستم یک را نشان می دهد .

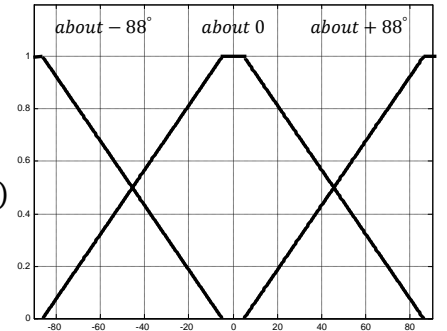
• **Subsystem S_2 :**

Rule1: if $x_{21}(t)$ is about -88°

$$\text{then } \dot{x}_2(t) = A_2^1 x_2(t) + \alpha_2^1 + B_2^1 u_2(t) + D_2^1 v_2(t) + C_{21}^1 x_1(t)$$

Rule2: if $x_{21}(t)$ is about 0

$$\text{then } \dot{x}_2(t) = A_2^2 x_2(t) + \alpha_2^2 + B_2^2 u_2(t) + D_2^2 v_2(t) + C_{21}^2 x_1(t)$$



شکل 5.9: توابع عضویت زیر سیستم 2

Rule3: if $x_{21}(t)$ is about $+88^\circ$

$$\text{then } \dot{x}_2(t) = A_2^3 x_2(t) + \alpha_2^3 + B_2^3 u_2(t) + D_2^3 v_2(t) + C_{21}^3 x_1(t)$$

$$A_2^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.4576 & 0 \end{bmatrix}, A_2^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 9.0100 & 0 \end{bmatrix}, A_2^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.4576 & 0 \end{bmatrix}, B_2^1 = B_2^2 = B_2^3 \\ = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.4 \end{bmatrix} \\ C_{21}^1 = C_{21}^2 = C_{21}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.8 & 0 \end{bmatrix}, \alpha_2^1 = [-9.2783], \alpha_2^2 = [0], \alpha_2^3 = [9.2783], \\ D_2^1 = D_2^2 = D_2^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

شکل (5.16) توابع عضویت زیر سیستم دو را نشان می دهد .

5.7. طراحی کنترلر غیر خطی :

در ابتدا نیاز است که لم زیر معرفی شود.

لم 5.3 : [5.10]

الف) برای هر بردار تحقیقی x, y و ماتریس حقیقی $P > 0$ با ابعاد مناسب رابطه زیر برقرار است .

$$2x^T y \leq x^T P^{-1} x + y^T P y$$

ب) ماتریس های حقیقی A, D, E و $F(t)$ با ابعاد مناسب مفروضند . به طوری که $\|F(t)\| \leq 1$.

آنگاه برای هر اسکالر $\epsilon > 0$ ، رابطه زیر برقرار می باشد .

$$DF(t)E + E^T F^T(t)D^T \leq \epsilon^{-1}DD^T + \epsilon E^T E$$

اما برای پایدارسازی یک سیستم فازی مقیاس-بزرگ ، یک کنترلر غیر خطی همانند زیر در نظر

گرفته شده است .

$$u_i(t) = - \sum_{k=1}^2 m_i^k(t) (K_i^k x_i(t) + \gamma_i) \\ (i = 1, 2)$$

(5.30)

به طوریکه :

$$\sum_{k=1}^2 m_i^k(t) = \sum_{l=1}^3 \mu_i^l(x_i(t)) = 1 \quad \& \quad 0 \leq m_i^k(t) \leq 1$$

(5.31)

که در آن K_i^k گین فید بک حالت با ابعاد مناسب γ_i^k یک اسکالر ثابت ، c_i یک عدد اختیاری جهت طراحی کنترلر غیر خطی برای هر زیر سیستم ها و $m_i^k(t)$ یک تابع غیر خطی (که در روابط (5.32)(5.49.a)(5.49.b) تعریف شده است) می باشند . با به کارگیری کنترلر غیر خطی مذکور سیستم فازی حلقه - بسته به این صورت خواهد بود :

$$\dot{x}_i = \sum_{l=1}^3 \mu_i^l(x_i(t)) \left(A_i^l x_i(t) - B_i^l \sum_{k=1}^2 m_i^k(t) (K_i^k x_i(t) + \gamma_i) + C_{ij} x_j(t) + D_i^l v_i(t) + \alpha_i^l \right)$$

(i = 1,2 & j = 1,2 & for C_{ij} j ≠ i) (5.32)

که اگر $Y_i^{lk} = A_i^l - B_i^l K_i^k$ ، آنگاه :

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{l=1}^3 \sum_{k=1}^2 \left(\mu_i^l(x_i(t)) m_i^k(t) (Y_i^{lk} x_i(t) + D_i^l v_i(t) + (\alpha_i^l - B_i^l \gamma_i) + C_{ij} x_j(t)) \right)$$

(5.33)

تابع لیاپانوف را همانند زیر انتخاب می کنیم

$$V(t) = \sum_{i=1}^2 V_i(t) \quad \text{such that} \quad V_i(t) = x_i^T(t) P_i x_i(t)$$

(5.34)

for i = 1,

با مشتق گیری از $V_i(t)$ داریم

$$\dot{V}_1(t) = \dot{x}_1^T(t) P_1 x_1(t) + x_1^T(t) P_1 \dot{x}_1(t)$$

(5.35)

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) = & \sum_{l=1}^3 \sum_{k=1}^2 \left(\mu_1^l(x_1(t)) m_1^k(t) \left(x_1^T(t) Y_1^{lkT} P_1 x_1(t) + D_1^{lT} v_1(t) P_1 x_1(t) \right. \right. \\ & \left. \left. + (\alpha_1^l - B_1^l \gamma_1)^T P_1 x_1(t) + x_2^T(t) C_{12}^T P_1 x_1(t) \right) \right) \\ & + \sum_{l=1}^3 \sum_{k=1}^2 \left(\mu_1^l(x_1(t)) m_1^k(t) \left(x_1^T(t) P_1 Y_1^{lk} x_1(t) + x_1^T(t) P_1 v_1(t) D_1^l \right. \right. \\ & \left. \left. + x_1^T(t) P_1 (\alpha_1^l - B_1^l \gamma_1) + x_1^T(t) P_1 C_{12} x_2(t) \right) \right) \end{aligned}$$

(5.36)

بر اساس لم 5.2 الف داریم:

$$\left((\alpha_1^l - B_1^l \gamma_1)^T P_1 x_1(t) \right) \leq \left(0.5 (\alpha_1^l - B_1^l \gamma_1)^T P^{-1} (\alpha_1^l - B_1^l \gamma_1) + x_1^T(t) P_1 P P_1 x_1(t) \right) \quad (5.37)$$

قرار دهید $P = P_i^{-1}$

$$\left((\alpha_1^l - B_1^l \gamma_1)^T P_1 x_1(t) \right) \leq \left(0.5 \left((\alpha_1^l - B_1^l \gamma_1)^T P_1 (\alpha_1^l - B_1^l \gamma_1) + x_1^T(t) P_1 x_1(t) \right) \right) \quad (5.38)$$

($P = P_1$)

$$\begin{aligned} & \left(x_1^T(t) P_1 (\alpha_1^l - B_1^l \gamma_1) \right) \\ & \leq \left(0.5 \left((\alpha_1^l - B_1^l \gamma_1)^T P_1 (\alpha_1^l - B_1^l \gamma_1) + x_1^T(t) P_1 x_1(t) \right) \right) \end{aligned} \quad (5.39)$$

(since $v_i(t) = \beta_i f_i(t)$, where $\|f_i(t)\| \leq 1$, (β_i, τ_i) are constant which $\tau_i > 0$)

$$\left(x_1^T(t) P_1 (v_1(t) l) D_1^l + D_1^{lT} (v_1(t) l) P_1 x_1(t) \right) \leq \left(\tau_1^{-1} \beta_1^2 D_{1l}^T D_1^l + \tau_1 x_1^T(t) P_1^2 x_1(t) \right) \quad (5.40)$$

لذا

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) \leq & \sum_{l=1}^3 \sum_{k=1}^2 \left(\mu_1^l(x_1(t)) m_1^k(t) \left(x_1^T(t) \left(Y_1^{lkT} P_1 + P_1 Y_1^{lk} + \tau_1 P_1^2 + P_1 \right) x_1(t) \right. \right. \\ & \left. \left. + x_2^T(t) C_{12}^T P_1 x_1(t) + x_1^T(t) P_1 C_{12} x_2(t) \right) \right) \\ & + \sum_{l=1}^3 \left(\mu_1^l(x_1(t)) \left((\alpha_1^l - B_1^l \gamma_1)^T P_1 (\alpha_1^l - B_1^l \gamma_1) + \tau_1^{-1} \beta_1^2 D_1^{lT} D_1^l \right) \right) \end{aligned}$$

$$\left((\alpha_1^l - B_1^l \gamma_1)^T P_1 (\alpha_1^l - B_1^l \gamma_1) + \tau_1^{-1} \beta_1^2 D_1^{lT} D_1^l \right) < 0$$

آنگاه با استفاده از متمم اسکر $P_1 = q_1^{-1}$

$$-(\alpha_1^l - B_1^l \gamma_1)^T (-q_1^{-1}) (\alpha_1^l - B_1^l \gamma_1) + \tau_1^{-1} \beta_1^2 D_1^{lT} D_1^l < 0$$

if $\tau_1 \geq 1$

$$\begin{aligned} & \left(-(\alpha_1^l - B_1^l \gamma_1)^T (-q_1^{-1}) (\alpha_1^l - B_1^l \gamma_1) + \tau_1^{-1} \beta_1^2 D_1^{lT} D_1^l \right) \leq \left(-(\alpha_1^l - B_1^l \gamma_1)^T (-q_1^{-1}) (\alpha_1^l - B_1^l \gamma_1) + \tau_1 \beta_1^2 D_1^{lT} D_1^l \right) \end{aligned} \quad (16)$$

بنابراین اگر $0 < \begin{bmatrix} -q_1 & (\alpha_1^l - B_1^l \gamma_1) \\ (\alpha_1^l - B_1^l \gamma_1)^T & \tau_1 \beta_1^{-2} D_1^{lT} D_1^l \end{bmatrix}$ آنگاه طرف سمت راست (5.45) کمتر از صفر

است و آنگاه

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) \leq & \sum_{l=1}^3 \sum_{k=1}^2 \left(\mu_1^l(x_1(t)) m_1^k(t) \left(x_1^T(t) \left(Y_1^{lkT} P_1 + P_1 Y_1^{lk} + \tau_1 P_1^{-2} + P_1 \right) x_1(t) \right. \right. \\ & \left. \left. + x_2^T(t) C_{12}^T P_1 x_1(t) + x_1^T(t) P_1 C_{12} x_2(t) \right) \right) \end{aligned} \quad (5.43)$$

$$\text{Let } \begin{cases} Y_1^{lkT} P_1 + P_1 Y_1^{lk} + \tau_1 P_1^{-2} + P_1 = -Q_1^{lk} \\ x_2^T(t) C_{12}^T P_1 x_1(t) + x_1^T(t) P_1 C_{12} x_2(t) = F_{12}(t) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) \leq & \left(m_1^1(t) \left(\sum_{k=1}^2 \mu_1^l(x_1(t)) (-x_1^T(t) Q_1^{l1} x_1(t) + F_{12}(t)) \right) \right. \\ & \left. + m_1^2(t) \left(\sum_{k=1}^2 \mu_1^l(x_1(t)) (-x_1^T(t) Q_1^{l2} x_1(t) + F_{12}(t)) \right) \right) \end{aligned} \quad (5.44)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \dot{V}_1(t) \leq & -m_1^1(t) \left(\sum_{k=1}^2 \mu_1^l(x_1(t)) (x_1^T(t) Q_1^{l1} x_1(t) - F_{12}(t)) \right) \\ & - \frac{(\sum_{i=1}^3 \mu_1^l(x_1(t))^T Q_1^{li} x_1(t) - F_{12}(t))^2}{\sum_{h=1}^2 \sum_{i=1}^3 |\mu_1^l(x_1(t))^T Q_1^{li} x_1(t) - F_{12}(t)|} \\ \leq & -m_1^1(t) \left(\sum_{k=1}^2 \mu_1^l(x_1(t)) (x_1^T(t) Q_1^{l1} x_1(t) - F_{12}(t)) \right) \end{aligned} \quad (5.45)$$

$$\dot{V}(t) = \dot{V}_1(t) + \dot{V}_2(t)$$

$$\begin{aligned} \leq & -m_1^1(t) \left(\sum_{k=1}^2 \mu_1^l(x_1(t)) (x_1^T(t) Q_1^{l1} x_1(t) - F_{12}(t)) \right) \\ & - m_2^1(t) \left(\sum_{k=1}^2 \mu_2^l(x_2(t)) (x_2^T(t) Q_2^{l1} x_2(t) - F_{21}(t)) \right) \end{aligned}$$

۴۵

$$m_1^1(t) = \begin{cases} 1 - \frac{\sum_{l=1}^3 \mu_1^l(x_1(t)^T Q_1^{l2} x_1(t) - F_{12}(t))}{\sum_{h=1}^2 \sum_{l=1}^3 |\mu_1^l(x_1(t)^T Q_1^{lh} x_1(t) - F_{12}(t))|}, & \text{if } \sum_{h=1}^2 \sum_{l=1}^3 |\mu_1^l(x_1(t)^T Q_1^{lh} x_1(t) - F_{12}(t))| \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{if } \sum_{h=1}^2 \sum_{l=1}^3 |\mu_1^l(x_1(t)^T Q_1^{lh} x_1(t) - F_{12}(t))| = 0 \end{cases} \quad (5.46. a)$$

$$m_1^2(t) = \begin{cases} \frac{\sum_{l=1}^3 \mu_1^l(x_1(t)^T Q_1^{l2} x_1(t) - F_{12}(t))}{\sum_{h=1}^2 \sum_{l=1}^3 |\mu_1^l(x_1(t)^T Q_1^{lh} x_1(t) - F_{12}(t))|}, & \text{if } \sum_{h=1}^2 \sum_{l=1}^3 |\mu_1^l(x_1(t)^T Q_1^{lh} x_1(t) - F_{12}(t))| \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{if } \sum_{h=1}^2 \sum_{l=1}^3 |\mu_1^l(x_1(t)^T Q_1^{lh} x_1(t) - F_{12}(t))| = 0 \end{cases} \quad (5.46. b)$$

اگر برای هر زیر سیستم (S_i) داشته باشیم که

$$\begin{aligned} -Q_i^{11} &\leq -\eta_i^1 \\ -Q_i^{21} &\leq -\eta_i^2 \\ -Q_i^{31} &\leq -\eta_i^3 \end{aligned}$$

آنگاه

$$\begin{aligned} -\mu_i^1 x_i(t) Q_i^{11} x_i^T(t) &\leq -\mu_i^1 \eta_i \|x_i\|^2 \\ -\mu_i^2 x_i(t) Q_i^{21} x_i^T(t) &\leq -\mu_i^2 \eta_i \|x_i\|^2 \\ -\mu_i^3 x_i(t) Q_i^{31} x_i^T(t) &\leq -\mu_i^3 \eta_i \|x_i\|^2 \end{aligned} \quad (5.48)$$

$$\eta_i^l > 0, \eta_i = \min_l \eta_i^l, (i = 1, 2 \quad l = 1, 2, 3)$$

از آن جایی که $\sum_{l=1}^3 \mu_i^l(x_i(t)) = 1$ and $\eta_i = \min_l(\eta_i^l)$

$$-\sum_{l=1}^3 \mu_i^l(x_i(t)^T Q_i^{l1} x_i(t)) \leq -\eta_i \|x_i\|^2 \sum_{\substack{l=1 \\ i \neq j}}^3 \mu_i^l = -\eta_i \|x_i\|^2 \quad (5.49)$$

$$\mu_i^l F_{ij}(t) = \mu_i^l (x_j^T(t) C_{ij}^T P_i x_i(t) + x_i(t)^T P_i C_{ij} x_j(t)) \leq 2 \|x_i\| \|x_j\| \|P_i\|_2 \|C_{ij}\| \quad (5.50)$$

از [5.8]: طرف راست رابطه ی (5.58) به فرم مربعی از $\{\|x_1\| \quad \|x_2\| \quad \dots \quad \|x_j\|\}$ می

باشد.

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq \sum_{i=1}^2 \left(-m_i^1(t) \left(\eta_i \|x_i\|^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^2 2 \|x_i\| \|x_j\| \|P_i\|_2 \|C_{ij}\| \right) \right) \\ &= -[\|x_1\| \quad \|x_2\|] \times \\ &\quad \begin{bmatrix} \eta_1 m_1^1(t) & -2m_1^1(t) \|P_1\|_2 \|C_{12}\| \\ -2m_2^1(t) \|P_2\|_2 \|C_{21}\| & \eta_1 m_1^1(t) \end{bmatrix} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} \|x_1\| \\ \|x_2\| \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.51)$$

$$\|P_i\|_2 = \lambda_{\max}(P_i) = 1/\lambda_{\min}(q_i),$$

if
M =

$$\begin{bmatrix} \eta_1 m_1^1(t) & -2m_1^1(t) 1/\lambda_{\min}(q_1) \|C_{12}\| \\ -2m_2^1(t) 1/\lambda_{\min}(q_2) \|C_{21}\| & \eta_1 m_1^1(t) \end{bmatrix} > 0 \quad (5.52.a)$$

$$\text{and} \quad \begin{bmatrix} -q_i & (\alpha_i^l - B_i^l \gamma_i) \\ (\alpha_i^l - B_i^l \gamma_i)^T & \tau_i \beta_i^2 D_i^{lT} D_i^l \end{bmatrix} < 0 \quad (i = 1, 2 \ \& \ l = 1, 2, 3) \quad (5.52.b)$$

می توان نتیجه گرفت که: $\dot{V}(t) < 0$

جهت اعمال نتایج فوق، از نرم افزار مطلب جهت برنامه نویسی استفاده شده است و شرایط زیر نیز

مفروضند :

$$v_1(t) = \sin(t), v_2(t) = \cos(t) \text{ and } c_1 = c_2 = 2$$

آنگاه نتایج زیر را جهت طراحی بدست خواهیم آورد :

$$\begin{cases} \delta_{12} = 1 \\ \delta_{21} = 0.8 \end{cases} \quad \begin{cases} \eta_1 = 1.54 > 0 \\ \eta_2 = 2.7641e + 006 > 0 \end{cases}$$

$$K_1^1 = (1.0e + 004)[0.0399 \quad 1.3990] \quad , \quad K_2^1 = (1.0e + 004)[0.0339 \quad 0.1402]$$

$$\gamma_1^1 = \gamma_1^2 = -12.3511 \quad , \quad \gamma_2^1 = \gamma_2^2 = -12.3511 \quad , \quad \tau_1 = 1.8400, \tau_2 = 2.5060$$

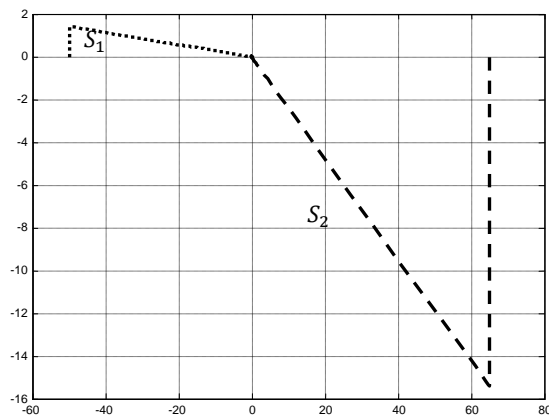
$$q_1 = \begin{bmatrix} 20.750 & 0.856 \\ 0.856 & 10019.17 \end{bmatrix} > 0 \quad , \quad q_2 = \begin{bmatrix} 70.01 & -2.500 \\ -2.500 & 100000 \end{bmatrix} > 0$$

$$\Rightarrow \eta_1 \eta_2 \gg 4r_1 r_2 \lambda_1 \lambda_2 \delta_{12} \delta_{21} \cong 3.4118e - 005$$

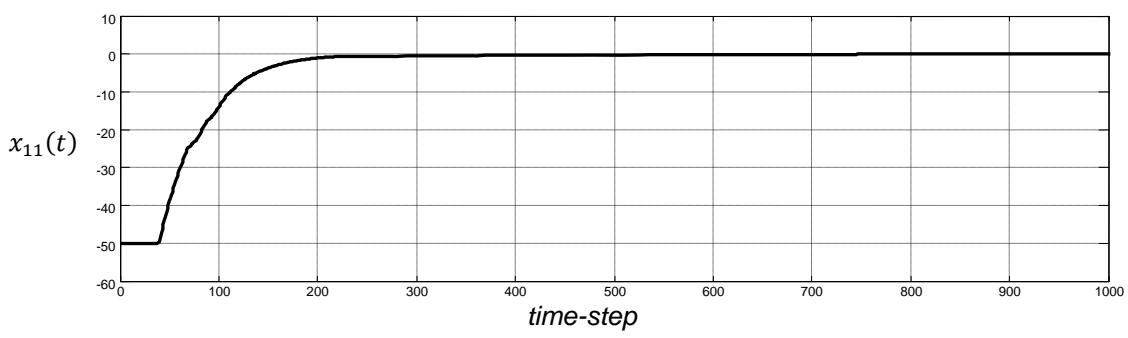
و از آنجایی که K_1^2, K_2^2 اختیاری می باشند آنها را به صورت زیر در نظر گرفته ایم :

$$K_1^2 = [-1.5895 \quad -10] \quad , \quad K_2^2 = [-1.5895 \quad -10]$$

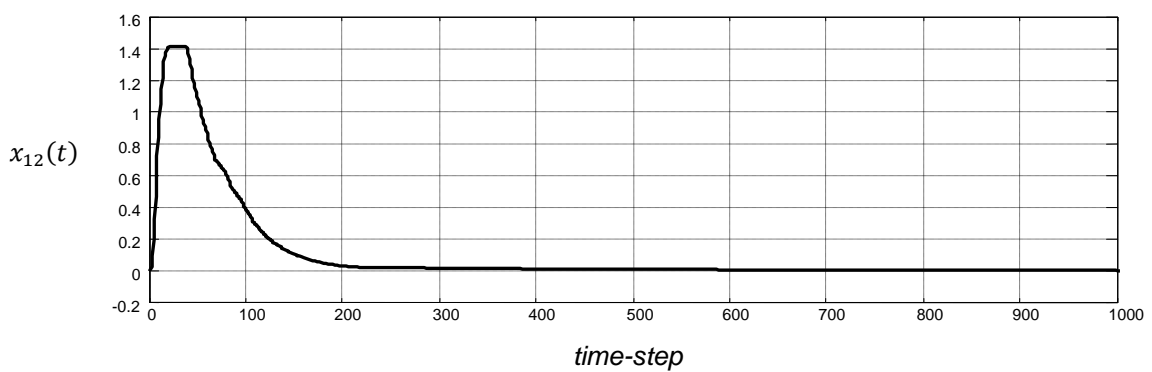
شکل (5.17) نمایش دهنده صفه - فاز¹ سیستم و شکل های (5.18)(5.19)(5.20)(5.21) نشان دهنده پاسخ سیستم به شرایط اولیه $x_1(0) = [-50,0]^T$ و $x_2(0) = [65,0]^T$ می باشند . باز هم این نکته را مد نظر داشته باشید که در شکل های مذکور محور افقی زمان نمی باشد بلکه زمان-گام می باشد که همان مراحل زمانی در حل عددی معادلات غیر خطی می باشند لذا اگر اعداد محور افقی بزرگ باشند امری دور از انتظار نمی باشد .



شکل 5.10 صفحه - فاز

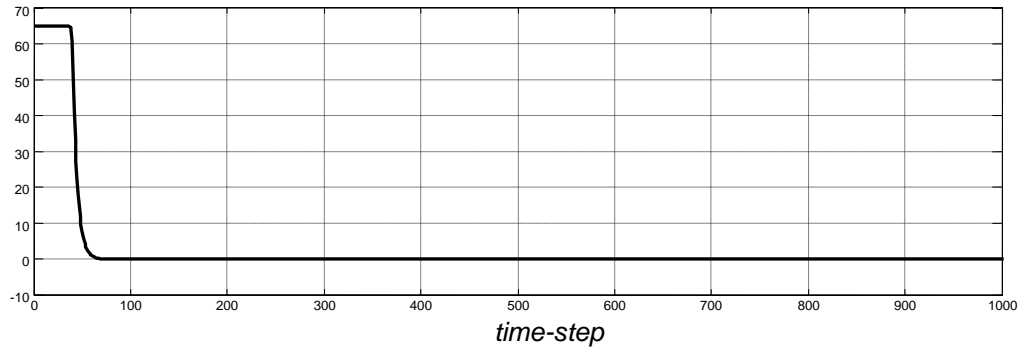


شکل 5.11 پاسخ $x_{11}(t)$ هنگامی که $x_{11}(0) = -50$

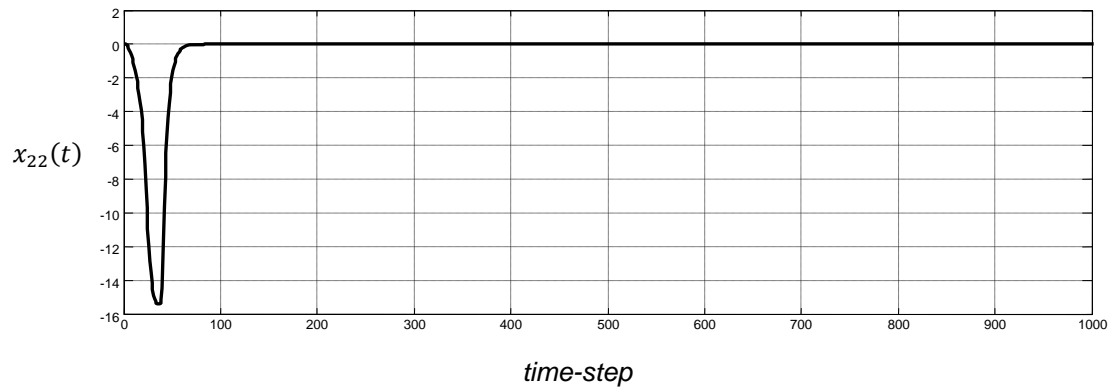


شکل 5.12 پاسخ $x_{12}(t)$ هنگامی که $x_{12}(0) = 0$

¹ Phase-Space



شکل پاسخ 5.13 هنگامی که $x_{21}(0) = 65$



شکل پاسخ 5.14 هنگامی که $x_{11}(0) = 0$

ضمیمه A

مقدمه ای بر مسائل *LMI*

• مقدمه ای بر مسائل *LMI*

تاریخ تکنیکهای نامعادلات ماتریسی خطی به 100 سال پیش باز می گردد. هنگامی که اولین نامعادله ی ماتریسی خطی ($A^T P + PA < 0$) در سال 1890 ظهور کرد. از آن زمان تا کنون رهیافتهای متفاوتی برای حل این مسائل ارائه شده است. از جمله ی این راه حل ها روش گرافیکی ، روش معادله جبری ریکاتی ، برنامه ریزی همگرا و الگوریتم نقاط درونی¹ می باشند [A.1]. امروزه تکنیکهای نامعادلات ماتریسی خطی ، در متون کنترل به وفور استفاده می شود. متن زیر که ارائه می شود مقدمه ای است بر جعبه ابزار *LMI* در مطلب .

یک نامعادله ماتریسی خطی به صورت زیر می باشد :

$$A(x) := A_0 + x_1 A_1 + \dots + x_N A_N < 0 \quad (A.1)$$

که $x = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T$ برداری از متغیرهای برداری می باشد و A_0, A_1, \dots, A_N ماتریسهای متقارن می باشند. اگر $A(x) < 0$ و $A(y) < 0$ آنگاه $A\left(\frac{x+y}{2}\right) < 0$ می باشد یعنی (A.1) محدودیت محدب می باشد.

بنابراین ، پیدا کردن جواب شدنی (A.1) در واقع یک مسئله بهینه سازی می باشد. در اغلب کاربردهای کنترل نتایج *LMI* به صورت زیر می باشند :

$$F_i(X_1, X_2, \dots, X_M) < 0, \quad (i = 1, 2, \dots, r) \quad (A.2)$$

که $F_i(\cdot)$ ($i = 1, 2, \dots, r$) و X_1, X_2, \dots, X_M توابع آفین از متغیرهای ماتریسی ساختاری x_1, x_2, \dots, x_N می باشند. به راحتی می توان دید که می توان رابطه (A.2) را به فرم استاندارد در رابطه (A.1) به صورت معادل با پیدا کردن متغیرهای اسکالر x_1, x_2, \dots, x_N و به عنوان ورودی های مستقل X_1, X_2, \dots, X_M نوشت .

1) مسائل شدنی *LMI*

که به صورت پیدا کردن یک راه حل برای به دست آوردن x ، اگر وجود داشته باشد و محدودیت *LMI* زیر را حل نماید.

$$A(x) < 0$$

که تابع حل این مسائل $feaspl(mis, options, target)$ می باشد که برای محدودیتهای *LMI* ، $options$ برای بردار 50 ورودی اختیاری پارامترهای کنترل و $target$ برای یک مقدار هدف بهینه اختیاری است.

به طور خاص ، برای حل نامعادلات ماتریسی خطی به فرم $M + P^T X Q + Q^T X^T P < 0$ نیز می توان از تابع $basiclmi(M, P, Q)$ به طور مستقیم استفاده کرد .

¹ Interior-Point

2) مسئله مینیمم سازی هدفدار خطی

$$\begin{cases} \text{minimize} & c^T \\ \text{subject to} & A(x) < 0 \end{cases}$$

این مسائل را نیز می توان با تابع $\text{mincx}(lmis, c, options, xint, target)$ حل کرد که $xint$ یک حدس اولیه برای x است.

3) مسئله مینیمم سازی مقادیر ویژه عمومی

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad \lambda \\ & \text{subject to} \quad \begin{cases} A(x) < \lambda B(x) \\ B(x) > 0 \\ C(x) < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

که تابع حل آن در LMI ، $\text{gevp}(lmis, nlf, options, \lambda init, xinit, target)$ می باشد که nlf بیانگر تعداد LMI هایی می باشند که شامل λ است.

هر دو مسئله شدنی LMI و مسئله مینیمم سازی هدفدار خطی مسائل همگرا می باشند. اما مسئله مینیمم سازی مقادیر ویژه عمومی (تعمیم داده شده) یک شبه محدب است. این امکان نیز وجود دارد که مسئله شدنی LMI را می توان به مسئله مینیمم سازی مقادیر ویژه تعمیم یافته تبدیل کرد. به هر حال نا معادله $A(x) \leq 0$ را نیز می توان با توابع حل در LMI (مسئله مینیمم سازی مقادیر ویژه) حل کرد . از آنجایی که $A(x) \leq 0$ امکان پذیر است اگر و فقط اگر $\lambda_{min} \leq 0$. که λ_{min} جواب λ است به طوری که :

$$\begin{cases} \text{minimize} \quad \lambda \\ \text{subject to} \quad A(x) < \lambda I \end{cases}$$

توضیحات بیشتر را می توان در مراجع [A.2] پیدا کرد.

نتایج و تحقیقات آتی

سیستم های صنعتی معمولاً پیچیده و تصادفی می باشند، به بیانی دیگر این سیستم ها مقیاس - بزرگ می باشند. تحلیل پایداری ، عملکرد و قابلیت اطمینان همواره از ابعاد مهم طراحی و ساخت این گونه سیستم ها می باشد تا آنجایی که بدون تحلیلی عمیق و دقیق، روند طراحی در این گونه سیستم ممکن است به اخلال در پایداری و یا عدم تضمین عملکرد مناسب سیستم منجر شود و بدین دلیل تحلیل پایداری در سیستم های مقیاس - بزرگ اخیراً مورد مطالعه و تحقیق برخی از محققان و مهندسان قرار گرفته است. نکته دیگر در تحلیل این سیستم، وجود یک مدل ریاضی مناسب است که بتواند رفتار سیستم را تا حد امکان دقیق تر نشان دهد . این مدل معمولاً دارای درجات بالا در معادلات دینامیک و طبیعت غیر خطی می باشد .

امروزه انعطاف پذیر بودن و قدرت طراحی از خصوصیات مهم سیستم های فازی به شمار می رود. با پیدایش مدل های مختلف سیستم های فازی ، تکنیک های طراحی همانند *PDC* و متد های تحلیل، استفاده از این سیستم ها را در گستره عظیمی از کاربردها قرار داده است و از جمله این کاربردها می توان مدل سازی ، طراحی و کنترل سیستم های مقیاس - بزرگ را نام برد. متأسفانه زمینه مطالعاتی و کاربرد تحلیل ، طراحی و کنترل این گونه سیستم ها در تحقیقات و مقالات در حد شایسته ای مورد بررسی قرار نگرفته است، اما پیش بینی می شود این زمینه ی تحقیقاتی با سرعتی بالادر سالهای آتی به طور فزاینده گسترش یابد.

مراجع

- [1.1] L.A. Zadeh, Fuzzy sets, *Information and Control*, Vol. 8, 338-353, 1965.
- [1.2] E. H. Mamdani and S. Assilian, "An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller," *Int. J. Man-Machine Studies*, vol. 7, pp. 1-13, 1975.
- [1.3] E. H. Mamdani, "Advances in the linguistic synthesis of fuzzy controllers," *Int. J. Man-Machine Studies*, vol. 8, pp. 669-679, 1976.
- [1.4] R.R. Yager and D.P. Filev, Unified structure and parameter identification of fuzzy models, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, Vol. 23, 1198-1205, 1993.
- [1.5] P. Korba, A gain-scheduling approach to model based fuzzy control, VDI Verlag GMBH Duesseldorf, 2000.
- [1.6] S. Kawamoto, K. Tada, A. Ishigame, and T. Taniguchi "Construction of exact fuzzy system for nonlinear system and its stability analysis," in *Proc. 8th Fuzzy Syst. Symp.*, Hiroshima, Japan, May 1992, pp. 517-520 (in Japanese).
- [1.7] S.G. Cao, N.W. Rees and G. Feng, Mamdani -type fuzzy controllers are universal fuzzy controllers, *Fuzzy Sets and Systems* 123 (2001) 359-367.
- [1.8] M. Margaliot and G. Langholz, Fuzzy Lyapunov-based approach to the design of fuzzy controllers, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 106, 49-59, 1999.
- [1.9] Wang, H. O., K. Tanaka and M. Griffin, "An analytical framework of fuzzy modeling and control of nonlinear systems: stability and design issues", *Proceeding of the American Control Conference*, Seattle, Washington, 1995, pp. 2272-2276
- [1.10] Tanaka , K. and M. Sugeno, "Stability analysis and design of fuzzy control system " *fuzzy Sets and Systems*, 45, 1992, 135-156
- [1.11] Assem H.Sonbol and M.Sami Fadali, " TSK fuzzy systems type II and type III stability analysis: continuous case" *IEEE TRANSACTION ON SYSTEMS, MAN, AND CYBERNETICS-PART B: CYBERNETICS*, VOL. 36, NO. 1, 2006
- [1.12] Assem H.Sonbol and M.Sami Fadali, " Stability analysis to discrete TSK type II/III systems" *IEEE TRANSACTION ON SYSTEMS, MAN, AND CYBERNETICS-PART B: CYBERNETICS*, 2006
- [1.13] Yan Wang, Zeng Qi Sun, Fu Chun Sun " Stability analysis and control of discrete-time fuzzy systems: a fuzzy lyapunov function approach"
- [1.14] M. Sugeno, "An introductory survey of fuzzy control," *Inform. Sci.*, vol. 36, pp. 59-83, 1985.
- [1.15] T. Takagi and M. Sugeno, "Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control," *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.*, vol. SMC-15, pp. 116-132, 1985.
- [1.16] H. Ishihashi and H. Tanaka, "PID-fuzzy hybrid controller," in *Proc. 4th Fuzzy Syst. Symp.*, Tokyo, Japan, May 1988, pp. 97-102 (in Japanese).
- [1.17] T. Hasegawa, T. Furuhashi, and Y. Uchikawa, "On design of fuzzy controllers using fuzzy models and modifications of control rules based on descriptions of dynamical behavior of control systems," *J. Japan Soc. Fuzzy Theory Syst.*, vol. 7, no. 2, pp. 413-431, 1995.

- [1.18] M. Inokuchi and S. Murakami, "Stability analysis of indirect fuzzy inference controller using describing function method," in *Proc. 3rd Int. Conf. Fuzzy Logic, Neural Nets, Soft Computing*, Iizuka, Japan, 1994, pp. 387–388.
- [1.19] R. Katoh *et al.*, "Graphical stability analysis of a fuzzy control system," in *Proc. IEEE Int. Conf. Int. Conf. Indust. Electron, Contr., Instrument at. (IECON)*, 1993, pp. 248–253.
- [1.20] C. C. Fuh and P.-C. Tung, "Robust stability analysis of fuzzy control systems," *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 87, pp. 289–298, 1997
- [1.21] R. Katoh, T. Yamashita, and S. Singh, "Stability analysis of control system having PD type of fuzzy controller," *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 74, pp. 321–334, 1995.
- [1.22] C. Calcev *et al.*, "Passivity approach to fuzzy control systems," *Automatica*, vol. 34, no. 3, pp. 339–344, 1998.
- [1.23] R.-E. Precup and S. Preitl, "Popov-type stability analysis method for fuzzy control systems," in *Proc. EUFIT'97*, Aachen, Germany, Sept. 1997, pp. 1306–1310.
- [1.24] K. Fischle and D. Schröder, "Stable adaptive fuzzy control of an electric drive system," in *Proc. 6th IEEE Int. Conf. Fuzzy Syst.*, Barcelona, Spain, July 1997, pp. 287–292
- [1.25] C.-L. Chen and M.-H. Chang, "Optimal design of fuzzy sliding-mode control: A comparative study," *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 93, pp. 37–48, 1998.
- [1.26] T. Alamo, F. Gordillo, and J. Aracil, "Robust fuzzy control using genetic algorithms," in *Proc. EUFIT'95*, Aachen, Germany, Aug. 1995, pp. 781–785.
- [1.27] K. Tanaka and M. Sugeno, "Stability analysis of fuzzy systems using Lyapunov's direct method," in *Proc. North Amer. Fuzzy Inform. Processing Soc. (NAFIPS)*, New York, NY, June 1990, pp. 133–136.
- [1.28] K. Tanaka and M. Sano, "Fuzzy stability criterion of a class of nonlinear systems," *Inform. Sci.—Intell. Syst.*, vol. 22, pp. 51–68, 1993.
- [1.29] S. Kawamoto, K. Tada, A. Ishigame, and T. Taniguchi, "Fuzzy-type Lyapunov function," in *Proc. 2nd IEEE Int. Conf. Fuzzy Syst.*, San Francisco, CA, Mar. 1993, pp. 1431–1436.
- [1.30] S. G. Cao, N. W. Rees, and G. Feng, "A stabilization algorithm for discrete-time fuzzy control systems," *J. Intell. Fuzzy Syst.*, vol. 4, pp. 281–293, 1996.
- [1.31] S. G. Cao, N. W. Rees, and G. Feng, "Analysis and design for a class of continuous-time fuzzy control systems," *Int. J. Contr.*, vol. 64, pp. 1069–1089, 1996.
- [1.32] G. Feng, S. G. Cao, N. W. Rees, and C. K. Chak, "Design of fuzzy control systems with guaranteed stability," *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 85, pp. 1–10, 1997.
- [1.33] G. Feng, S. G. Cao, W. Rees, and C. M. Cheng, "Analysis and design of model based fuzzy control systems," in *Proc. 6th IEEE Int. Conf. Fuzzy Syst.*, Barcelona, Spain, July 1997, pp. 901–906.

- [2.1] Wenxi Zhang and Guangxi Liang, Fuzzy control and systems, Press of Xian Jiaotong University, 1998 (in Chinese).
- [2.2] ChuenChien Lee, Fuzzy logic in control systems: Fuzzy logic controller, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Vol. 20, 404-435, 1990.
- [2.3] R.R. Yager, Uninorms in fuzzy systems modeling, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 122, 167-175, 2001.
- [2.4] Lixin Wang, Adaptive fuzzy systems and control, National Defense Publishing Company, 1995 (in Chinese).
- [2.5] M. Sugeno, on stability of fuzzy systems expressed by fuzzy rules with singleton consequents, IEEE Transactions on Fuzzy systems, Vol. 7, 201-224, 1999.
- [2.6] Kunping Zhu, "Stability Analysis and Stabilization of Fuzzy State Space Models" Ph. D Thesis, University of Duisburg-Essen, 2006.
- [2.7] Kuiquan Zeng, Application of Lyapunov direct method in control theory, Shanghai Scientific Press, 1985 (in Chinese).
- [2.8] K.M. Passino and K.L. Burgess, Stability analysis of discrete event systems, Press John Wiley and Sons. Inc, 1998.
- [2.9] K. Kiriakidis, Robust stabilization of the Takagi-Sugeno fuzzy model via bilinear matrix inequalities, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol. 9, 269-277, 2001.
- [2.10] M. Johansson and A. Rantzer, Piecewise quadratic stability of fuzzy systems, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol. 7, No. 6, 713-721, 1999.
- [2.11] P. Korba, A gain-scheduling approach to model based fuzzy control, VDI Verlag GMBH Duesseldorf, 2000.
- [2.12] M. Chilali and P. Gahinet, H_∞ -design with pole placement constraints: an LMI approach, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 41, 358-367, 1996.
- [2.13] Jenkins D., Passino K.M., "An Introduction to Nonlinear Analysis of Fuzzy Control Systems," Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, Vol. 7, No. 1, pp. 75-103, 1999.
- [2.14] E.B. Erdem and A.G. Alleyne, Design of a class of nonlinear controllers via state dependent Riccati equations, IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 12, 133-137, 2004.
- [2.15] M. Ekman, Suboptimal control for the bilinear quadratic regulator problem, IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 13, 163-168, 2005.

- [3.1] Gang Feng “Stability Analysis of Discrete-Time Fuzzy Dynamic Systems Based on Piecewise Lyapunov Functions” IEEE TRANSACTIONS ON FUZZY SYSTEMS, VOL. 12, NO. 1, FEBRUARY 2004
- [3.2] Songtao Zhang, Guang Ren, “Stability Analysis of Discrete T-S Fuzzy Systems with Piecewise Fuzzy Lyapunov Approach” Proceedings of the 6th World Congress on Intelligent Control and Automation, June 21 - 23, 2006, Dalian, China
- [3.3] Chun-Hsiung Fang, Yung-Sheng Liu, Shih-Wei Kau, Lin Hong, and Ching-Hsiang Lee, “A New LMI-Based Approach to Relaxed Quadratic Stabilization of T–S Fuzzy Control Systems” IEEE TRANSACTIONS ON FUZZY SYSTEMS, VOL. 14, NO. 3, JUNE 2006
- [3.4] Kuang-Yow Lian, Hui-Wen Tu, and Jehh-Jang Liou , “Stability Conditions for LMI-Based Fuzzy Control From Viewpoint of Membership Functions” IEEE TRANSACTIONS ON FUZZY SYSTEMS, VOL. 14, NO. 6, DECEMBER 2006
- [3.5] H. K. Lam, F. H. Leung, and P. K. S. Tam,” Nonlinear state feedback controller for nonlinear systems: stability analysis and design based on fuzzy plant model ” IEEE TRANSACTION ON FUZZY SYSTEMS, VOL.9, NO. 4 ,AUGUST 2001
- [3.6] Tanaka , K. and M. Sugeno, “Stability analysis and design of fuzzy control system ”fuzzy Sets and Systems, 45, 1992, 135-156
- [3.7] Hua O. wang, K. Tanaka and M.F. Griffin, An approach to fuzzy control of nonlinear systems: stability and design issues, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol. 4, 14-23, 1996.
- [3.8] Euntai Kim, Chang-Hoon Lee, and Young-Wan Cho “Analysis and Design of an Affine Fuzzy System Via Bilinear Matrix Inequality” IEEE TRANSACTIONS ON FUZZY SYSTEMS, VOL. 13, NO. 1, FEBRUARY 2005
- [3.9] Euntai Kim and Dongyon Kim, “Stability Analysis and Synthesis for an Affine Fuzzy System via LMI and ILMI: Discrete Case”, IEEE TRANSACTIONS ON SYSTEMS, MAN, AND CYBERNETICS—PART B: CYBERNETICS, VOL. 31, NO. 1, FEBRUARY 2001
- [3.10] Euntai Kim and Seungwoo Kim , “Stability Analysis and Synthesis for an Affine Fuzzy Control System via LMI and ILMI: Continuous Case” IEEE TRANSACTIONS ON FUZZY SYSTEMS, VOL. 10, NO. 3, JUNE 2002
- [3.11] Changbin Li, Aiguo Wu, “Controller Synthesis of Affine TS Fuzzy Systems based on Piecewise Lyapunov Function” Proceedings of the 6th World Congress on Intelligent Control and Automation, June 21 - 23, 2006, Dalian, China
- [3.12] Kunping Zhu,”Stability Analysis and Stabilization of Fuzzy State Space Models” Ph. D Thesis, University of Duisburg-Essen, 2006.
- [3.13] HuiboZhou, HongweiZhang, Yuzhong Liu, “Quadratic Stability of Linear Time-Delayed Switched Systems with Polytopic Perturbations” Proceedings of the 6th World Congress on Intelligent Control and Automation, June 21 - 23, 2006, Dalian, China
- [3.14] M. Johansson, A. Rantzer, and K. Arzen, “Piecewise quadratic stability of fuzzy systems,” IEEE Trans. Fuzzy Syst., vol. 7, no. 6, pp. 713–722, Dec. 1999

- [3.15] Cai-Lian Chen, Gang Feng, and Xin-Ping Guan " Delay-Dependent Stability Analysis and ontroller Synthesis for Discrete-Time T–S Fuzzy Systems With Time Delays" IEEE TRANSACTIONS ON FUZZY SYSTEMS, VOL. 13, NO. 5, OCTOBER 2005
- [3.16] Huai-Ning Wu, "Delay-Dependent Stability Analysis and Stabilization for Discrete-Time Fuzzy Systems With State Delay: A Fuzzy Lyapunov–Krasovskii Functional Approach" IEEE TRANSACTIONS ON SYSTEMS, MAN, AND CYBERNETICS—PART B: CYBERNETICS, VOL. 36, NO. 4, AUGUST 2006
- [3.17] Chong Lin, Yong He, "Stability Analysis for Time-delay Fuzzy Systems Using Augmented Lyapunov Functional Approach" Proceedings of the First International Conference on Innovative Computing, Information and Control (ICIC'06) 0-7695-2616-0/06 \$20.00 © 2006
- [3.18] Jun Yoneyama, "Stability and Stabilization of Fuzzy Time-Delay Systems" 2004 5th Asian Control Conference
- [3.19] Wei-Wei Lin and Wen-June Wang, " Stabilization Criterions for T-S Fuzzy Time-Delay System" , Jhong-Li, 32001, TAIWAN
- [3.20] Chong Lin, Qing-Guo Wang, Tong Heng Lee " Stability and Stabilization of a Class of Fuzzy Time-Delay Descriptor Systems" IEEE TRANSACTIONS ON FUZZY SYSTEMS, VOL. 14, NO. 4, AUGUST 2006
- [3.21] Zhang Yi and Pheng Ann Heng, "Stability of Fuzzy Control Systems With Bounded Uncertain Delays", IEEE TRANSACTIONS ON FUZZY SYSTEMS, VOL. 10, NO. 1, FEBRUARY 2002
- [3.22] Linna Zhou and Qingling Zhang , Shaocheng Tong "Local Stability Analysis and Synthesis of Fuzzy Systems with Time-delay" Proceedings of the 6th World Congress on Intelligent Control and Automation, June 21 - 23, 2006, Dalian, China
- [3.23] Bugong Xu and Yongqing Liu, An improved Razumikhin-Type Theorem and its applications, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 39, 839-841, 1994.
- [3.24] J. Hale, Theory of functional differential equations, Springer Verlag, New York, 1977.

- [4.1] Tanaka , K. and M. Sugeno, "Stability analysis and design of fuzzy control system "fuzzy Sets and Systems, 45, 1992, 135-156
- [4.2] Z.H. Xiu G.Ren," Stability analysis and systematic design of takagi-sugeno fuzzy control system " Fuzzy Sets and Systems ,Vol. 151, no 1, pp. 119-138, 2005
- [4.3] Wang, H. O., K. Tanaka and M. Griffin," An analytical framework of fuzzy modeling and control of nonlinear systems: stability and design issues",Proceeding of the American Control Conference, Seattle, Washington, 1995,pp. 2272-2276
- [4.4] Chung-hsun Sun and Wen-June Wang," An improved stability criterion for T-S fuzzy Discrete systems via vertex expression",IEEE Transactions On Systems, Vol.36, No. 3, June 2006
- [4.5] Wen-June Wang and Chung-Husan Sun " A weighting dependent lyapunov function based relaxed stability criterion for T-S fuzzy discrete systems " 0-7803-8812-7/05 2005 IEEE
- [4.6] Wen –June Wang and Ying-Jen Chen " Stabilization analysis for discrete-time T-S fuzzy systems based on the possible region transitions" IEEE International Conference on Fuzzy Systems, Vancouver, BC, Canada, July 16-21, 2006
- [4.7] Guang Ren ,Zhi-Hang Xiu," Analytical design of takagi-sugeno fuzzy control systems"amarican Control conference,June 8-10,2005 Portland,or ,USA
- [4.8] Micho Sugeno, "On stability of fuzzy systems expressed by fuzzy rules with singleton consequents", IEEE TRANSACTION ON FUZZY SYSTEMS, VOL. 7, NO. 2, APRIL 1999
- [4.9] Guang-Hong Yang and Jiuxiang Dong " Quadratic stability analysis of fuzzy control systems" Proceeding of the 2006 amarican control conference , Minneapolis, Minnesota, USA, June 14-16, 2006
- [4.10] Assem H.Sonbol and M.Sami Fadali," TSK fuzzy systems type II and type III stability analysis: continuous case" IEEE TRANSACTION ON SYSTEMS, MAN, AND CYBERNETICS-PART B: CYBERNETICS, VOL. 36, NO. 1, 2006
- [4.11] Assem H.Sonbol and M.Sami Fadali," Stability analysis to discrete TSK type II/III systems" IEEE TRANSACTION ON SYSTEMS, MAN, AND CYBERNETICS-PART B: CYBERNETICS, 2006
- [4.12] Yan Wang, Zeng Qi Sun, Fu Chun Sun " Stability analysis and control of discrete-time fuzzy systems: a fuzzy lyapunov function approach"
- [4.13] L.El Ghaoui and V. Balakrishnan, Synthesis of fixed-structure controllers via numerical optimization, Proc. IEEE Conf. on Decision and Control, 2678-2683, Orlando, Florida, 1994.
- [4.14] Nayfeh, A. H. and Mook, D. T. (1979): "Non-Linear Oscillation" , J. Wiley and Sons Chichester
- [4.15] Thomsen, J.J. (1997): "Vibrations and Stability" , Mc. Graw-hill, London
- [4.16] Chen, Y., Leung, A.Y.T (1998): "Bifurcation and Chaos in Engineering" , Springer, New York
- [4.17] Blekhman, I.I. (1999): Vibrational Mechanism, World Scientific, Singapore

- [4.18] H. K. Lam, F. H. Leung, and P. K. S. Tam, " Nonlinear state feedback controller for nonlinear systems: stability analysis and design based on fuzzy plant model " IEEE TRANSACTION ON FUZZY SYSTEMS, VOL.9, NO. 4 ,AUGUST 2001
- [4.19] M.S. Mohamud and A.A. Bahnasawi, " Asymptotic stability for a class of nonlinear discrete systems with bounded uncertainties", IEEE Transaction on Automatic Vontrol Vol.133, 572-575,1988
- [4.20] Maolin Ni and Mengjoo Er, Comments on " A new robust control for a class of uncertain discrete time system" IEEE Transaction on Automatic Control ,Vol. 46, 509-511,2001
- [4.21] Hanho Choi and M.yungjin Chung, " Memoryless stabilization of uncertain dynamic system with time-varying delayed states and control " ,Automatic, Vol. 31 ,1349-1351,1995
- [4.22] J.C. Shen, B.S. Chen and F.C. Kung, " Memoryless stabilization of uncertain dynamic delay systems: Riccati equation approach " IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. 36 , 638-640,1991
- [4.23] Boyd, S., L. E. Feron and V. Balakrishnan, "Linear Matrix Inequalities In System and Control Theory" SIAM Studies in Applied Mathematic, SIAM Philadelphia, 1994
- [4.24] Lihua Xie, " Output feedback H_∞ control of systems with parameter uncertainty" ,International Journal of Control , Vol. 63, 741-750,1996
- [4.25] Chilali, M. and P.Gahinet, " H_∞ design with pole placement constraints: An LMI approach" Proceedings of the thirty-third IEEE Conference on Decision and Control , lake Buena Vista,1994,PP ,553-558
- [4.26] Gahinet, P., A. Nemirovski, A. J. Loub and M.chilali, "LMI Control Toolbox: For Use with MATLAB" , The Math Works, 1995

- [5.1] D. D. Siljak, Large-Scale Dynamic Systems: Stability and Structure. New York: Elsevier North-Holland, 1978
- [5.2] Z. Li and G. Chen, “Global Synchronization and Asymptotic Stability of Complex Dynamical Networks” IEEE TRANSACTIONS ON CIRCUITS AND SYSTEMS, VOL. 53, NO. 1, JANUARY 2006
- [5.3] W. J. Wang and L. Luoh “Stability and Stabilization of Fuzzy Large-Scale Systems “ IEEE TRANSACTIONS ON FUZZY SYSTEMS, VOL. 12, NO. 3, JUNE 2004
- [5.4] F. H. Hsiao and J. D. Hwang “Stability Analysis of Fuzzy Large-Scale Systems” IEEE TRANSACTIONS ON SYSTEMS, MAN, AND CYBERNETICS, VOL. 32, NO. 1, FEBRUARY 2001
- [5.5] W. J. Wang and W. W. Lin “Decentralized PDC for Large-Scale T–S Fuzzy Systems” IEEE TRANSACTIONS ON FUZZY SYSTEMS, VOL. 13, NO. 6, DECEMBER 2005
- [5.6] H. Zhang, C. Li, and X. Liao “Stability Analysis and H_∞ Controller Design of Fuzzy Large-Scale Systems Based on Piecewise Lyapunov Functions” IEEE TRANSACTIONS ON SYSTEMS, MAN, AND CYBERNETICS, VOL. 36, NO. 3, JUNE 2006
- [5.7] Gene H. Golub and Charles F. van Loan. *Matrix Computations*. The JohnsHopkins University Press, Baltimore, 3rd edition, 1996.
- [5.8] H. K. Khalil, Nonlinear Systems, 3rd ed. Upper saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2002
- [5.9] K. Ogata, Discrete Time Control Systems. Published 1995, Prentice Hall
- [5.10] Y. Y. Cao, Y. X. Sun, and J. Lam. Delay dependent robust H_∞ control for uncertain systems with time varying delays. IEE Proceedings: Control Theory and Applications, 143(3):pp.338—344, 1998.

- [A.1] S. Boyd, E. Feron, V. Balakrishnan and L. El Ghaoui, History of linear matrix inequalities in control theory, Proceedings of the American Control conference, Baltimore, Maryland, 31-34, 1994
- [A.2] S. Boyd, E. Feron, V. Balakrishnan and L. El Ghaoui, “ Linear Matrix in System Inequalities in Control Theory” Society of Industrial and Applied Mathematic , SIAM . Philadelphia, QA402.3.L489, 1994

Summary and notes

Fuzzy sets theory and systems was developed and extensively applied in previous decades and relevant methods were developed and applied with more or less success depending on the specific problem, and recently, fuzzy control has been successfully applied to a variety of industrial processes. Certainly, without carrying out an in-depth analysis, the design of the system and controller may come with no guarantee of system stability. So, performance and stability are important aspects of designing of such systems. Based on these remarks, researches, application of fuzzy systems and this fact that any nonlinear systems can be modeled by a fuzzy system, fuzzy model can be a reasonable model of nonlinear systems in huge number of modeling problems.

Among of these models, Takagi-Sugeno-Kang (T-S) system is mentioned which was presented as new fuzzy system after advent of Mamdani model. Because of linear state form of consequents in the rules of this system and applicable of many linear control theory, this model (T-S) was prospered at rate of high. Thereafter, Parallel Distributed Compensation (PDC) technique was presented as new method for designing and controlling for such type of fuzzy systems. Arrival of these type of fuzzy models required new methods for stability analysis and controlling subsequently. Extended and innovative methods and relevant conditions for stability analysis of continuous and discrete fuzzy systems were found.

In this evolution, most of results require the existence of a common quadratic Lyapunov function. For instance Tanaka and Sugeno proposed a design and stability method for fuzzy systems via Lyapunov direct method. A common positive-definite symmetric matrix P must be found to satisfy the Lyapunov equation for all local linear models. In many cases, it is difficult to find matrix P when the number of rules for fuzzy systems is large and conditions for existence of such functions are restrictive and difficult to establish. Also, some of these methods can not be used directly for design because of pre-designed feedback gains and the method must be to check stability for pre-designed system that requires trial-and-error for control design. Another important observation in that the length of computation and the number of LMIs (BMIs) are low. Some researches and literatures present ideas and approaches which have high computation that makes these methods unusable just as they are innovative and fair. Another important subject that should be attended is stability analysis with desired performance. Surely, much attempts focus to remove these faults and flaws but it is still necessary to find a beneficial method to guarantee stability and provide performance.

Also, a fuzzy large-scale system consists of interconnected subsystems which are modeled by T-S fuzzy systems as a more complex system. Some attempts have focused on stability and designing of fuzzy large-scale systems. But it is still necessary to find a beneficial method for stability analysis with reasonable performance and low computations, so it is expected to continue growing in this field at an estimated rate of high in coming years.

The contributions of this thesis are twofold. First, we introduce the concept of Operating Subregion (*OS*) and Two-Overlapped fuzzy sets, then propose an approach for decreasing the number of LMIs (BMIs). For showing the benefits of this approach, we shall give comparison with known method and also, this approach is used to obtain sufficient conditions for stability analysis, stability analysis in presence of parametric uncertainties and so on stability analysis with reasonable performance together. Some illustrative examples will be given to verify the result of this chapter. This section has focused on T-S fuzzy systems in chapter four.

Second, we have focused on designing a nonlinear state feedback controller for fuzzy large-scale systems in chapter five. Based on Lyapunov theorem, proposed controller is designed which stability guarantee and low computation makes it as useful method. So, Based on a simple algorithm two examples are shown to verify the results.

فهرست اشکال

- شکل 2.1 پیکر بندی کلی سیستم کنترل فازی 19
- شکل 2.2: روابط بین پایداری در حالات مختلف 22
- شکل 3.1 توابع عضویت x_1 و x_2 42
- شکل 3.2 پاسخ سیستم برای حالت x_1 43
- شکل 3.3 پاسخ سیستم برای حالت x_2 44
- شکل 4.1: دو نمونه از مجموعه های فازی دو به دو - هم پوش ، مجموعه های فازی مثلثی مجموعه های معرفی شده در [4.8] می باشند. 59
- شکل 4.2: دو نمونه از مجموعه های فازی دو به دو - هم پوش ، مجموعه های فازی مثلثی مجموعه های معرفی شده در [4.8] می باشند. 60
- شکل 4.3: نمودار $h(A)$ را برای $n = 2, n = 3, n = 4$ 68
- شکل 4.4 مدل فیزیکی یک نوسانگر 71
- شکل 4.5: مشخصه شاخص سختی یک فنر 72
- شکل 4.6 جواب های شاخص معادله 74
- شکل 4.7 نوسانات یک سیستم غیر خطی 75
- شکل 4.8: سیستم جرم - فنر - دمپر 76
- شکل 4.9: توابع عضویت مدل فازی سیستم جرم - فنر - دمپر به همراه تقریب آنها 77
- شکل 4.10: پاسخ سیستم جرم- فنر- دمپر . خطوط ممتد و پیوسته پاسخ سیستم بافیدیک و خطوط نقطه چین پاسخ سیستم 79
- شکل 4.11: پاسخ سیستم جرم- فنر- دمپر با اعمال قضیه 4.4 91
- شکل 4.12: پاسخ سیستم جرم- فنر- دمپر با اعمال قضیه 4.5 92
- شکل 4.13: ناحیه LMI مطلوب 93
- شکل 4.14: پاسخ سیستم جرم- فنر- دمپر با اعمال قضیه 4.6 94
- شکل 4.15: سیستم شماره دو 95
- شکل 4.16: پاسخ سیستم دو با اعمال قضیه 4.4 97
- شکل 4.17: پاسخ سیستم دو با اعمال قضیه 4.5 99
- شکل 4.18: پاسخ سیستم دو با اعمال قضیه 4.6 100
- شکل 5.1: توابع عضویت زیر سیستم 1 115
- شکل 5.2: توابع عضویت زیر سیستم 2 116
- شکل 5.3: پاسخ $x_{11}(t)$ از زیر سیستم 1 هنگامی که $u(t) = 0$ (خطوط نقطه چین) و همراه با کنترلر (خطوط ممتد و پیوسته) وقتی که $x_{11}(0) = 0.3$ 118

- شکل 5.4: پاسخ $x_{12}(t)$ از زیر سیستم 1 هنگامی که $u(t) = 0$ (خطوط نقطه چین) و همراه با کنترلر (خطوط ممتد و پیوسته) وقتی که $x_{12}(0) = -0.5$ 118
- شکل 5.5: پاسخ $x_{21}(t)$ از زیر سیستم 2 هنگامی که $u(t) = 0$ (خطوط نقطه چین) و همراه با کنترلر (خطوط ممتد و پیوسته) وقتی که $x_{21}(0) = 0.8$ 118
- شکل 5.6: پاسخ $x_{22}(t)$ از زیر سیستم 2 هنگامی که $u(t) = 0$ (خطوط نقطه چین) و همراه با کنترلر (خطوط ممتد و پیوسته) وقتی که $x_{22}(0) = -0.9$ 118
- شکل 5.7: پاندول معکوس دو تایی 120
- شکل 5.8: توابع عضویت زیر سیستم 1 121
- شکل 5.9: توابع عضویت زیر سیستم 2 121
- شکل 5.10: صفحه- فاز 128
- شکل 5.11: پاسخ $x_{11}(t)$ هنگامی که $x_{11}(0) = -50$ 128
- شکل 5.12: پاسخ $x_{12}(t)$ هنگامی که $x_{12}(0) = 0$ 128
- شکل 5.13: پاسخ $x_{21}(t)$ هنگامی که $x_{21}(0) = 65$ 129
- شکل 5.14: پاسخ $x_{22}(t)$ هنگامی که $x_{11}(0) = 0$ 129

فهرست جداول

جدول (3.1) جدول قوانین 41

جدول (4.1): مقایسه "method1"، "method2" و "proposed method" هنگامی که $n = 2$ 69

جدول (4.1): مقایسه "method1"، "method2" و "proposed method" هنگامی که $n = 3$ 69