

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ





دانشکده مهندسی برق و رباتیک

رساله دکتری مهندسی کنترل

## کنترل ساختار متغیر نرم برای سیستم های غیر خطی خودگردان افاین

نگارنده: مجتبی کاهنی

استاد راهنما:

دکتر محمد حداد ظریف

استاد مشاور:

دکتر علی اکبرزاده

دی ماه ۱۳۹۷



فرم شماره ۱۲: صورت جلسه نهایی دفاع از رساله دکتری (Ph.D)  
(ویژه دانشجویان ورودی های ۹۴ و ما قبل)

بدینوسیله گواهی می شود آقای/خانم مجتبی کاهنی دانشجوی دکتری رشته برق - کنترل به شماره دانشجویی ۹۲۱۶۰۵۵  
ورودی مهر ماه سال ۱۳۹۲ در تاریخ ۱۳۹۷/۱۰/۱۷ از رساله نظری  / عملی  خود با عنوان:

کنترل ساختار متغیر نرم برای سیستم های غیر خطی خودگردان افاین

دفاع و با اخذ نمره ۱۹٫۲۳ به درجه: عالی نائل گردید.

<input checked="" type="checkbox"/> الف) درجه عالی: نمره ۱۹-۲۰	<input type="checkbox"/> ب) درجه بسیار خوب: نمره ۱۸/۹۹ - ۱۷
<input type="checkbox"/> ج) درجه خوب: نمره ۱۶/۹۹ - ۱۵	<input type="checkbox"/> د) غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد
<input type="checkbox"/> ه) رساله نیاز به اصلاحات دارد	

ردیف	هیئت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
	دکتر محمد رضا طرف	استاد/ اساتید راهنما	اسی	
	دکتر سعید اکبرزاده گل	مشاور / مشاورین	دکتر	
	دکتر ابراهیم رضی	استاد مدعو داخلی / خارجی	استاد	
	دکتر محمد میری فاتح	استاد مدعو داخلی / خارجی	استاد	
	دکتر علی رضا الغی	استاد مدعو داخلی / خارجی	دانشیار	
	دکتر محمد علی صدرنیا	سرپرست ( نماینده ) تحصیلات تکمیلی دانشکده	دانشیار	

مدیر محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه:

ضمن تأیید مراتب فوق مقرر فرمائید اقدامات لازم در خصوص انجام مراحل دانش آموختگی آقای/ خانم  
مجتبی کاهنی بعمل آید.

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده:   
تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:





تقدیم به...

پدر و مادر عزیزم

به پاس آنچه از وصف ایشان است در کلام من ننگید

به پاس آنکه مویشان سپید شد تا روی من سپید شود

به پاس آنکه وجودشان مایه آرامش و دلگرمی من است



## پاسکاری

پاس من از آن خدایی است که در تمامی مراحل زندگی ام لطف حضورش را از

من دریغ نکرد.

پاس از اساتید فریخته و کران پایه ام، جناب آقای دکتر محمد حداد ظریف و جناب

آقای دکتر علی اکبر کلات که همواره رهنمودهای ارزشمند علمی و اخلاقیشان در این

پژوهش، همچون چراغی، هدایت‌گر و گره‌گشا بوده است.





## تعهدنامه

اینجانب **مجتبی کاهنی** دانشجوی دوره دکتری رشته **مهندسی کنترل دانشکده برق و رباتیک** دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده رساله با عنوان **کنترل ساختار متغیر نرم برای سیستم های غیرخطی خودگردان افاین** تحت راهنمایی **دکتر محمد حداد ظریف** متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « **Shahrood University of Technology** » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده ( یا بافتهای آنها ) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

### تاریخ

### امضای دانشجو

#### مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است ) متعلق به دانشگاه شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.



## چکیده

در این رساله، روش نوینی بنام "کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی"<sup>۱</sup> جهت افزایش نرخ تنظیم<sup>۲</sup> سیستم های خطی یک ورودی-یک خروجی<sup>۳</sup> و چند ورودی-چند خروجی<sup>۴</sup> ارائه می شود. روش پیشنهادی علاوه بر اینکه نسبت به دیگر روش های کنترل ساختار متغیر نرمی که تا کنون در مراجع مطرح شده اند، پاسخ سریع تری دارد، اولین روش کنترل ساختار متغیر نرمی است که به سیستم های خطی چند ورودی-چند خروجی تعمیم داده شده است. پس از این نوآوری، روش پیشنهادی با روش کنترلی خطی سازی فیدبکی<sup>۵</sup> ترکیب می شود و سیستم کنترل ساختار متغیر نرمی جهت بهبود سرعت سیستم های غیرخطی یک ورودی-یک خروجی خودگردان افاین بدست می آید. در ادامه تحقیق، با اضافه کردن نامعینی<sup>۶</sup> به مدل سیستم غیرخطی یک ورودی-یک خروجی خودگردان<sup>۷</sup> افاین، نتایج حاصله توسعه داده می شود و ساختاری جهت کنترل ساختار متغیر نرم مقاوم<sup>۸</sup> برای کلاسی از سیستم های غیرخطی یک ورودی-یک خروجی ارائه می گردد. پایداری<sup>۹</sup> روش پیشنهادی در تمامی موارد، بر اساس محک پایداری دایره<sup>۱۰</sup> و لم کالمن-یاکوبوویچ-پوپوف اثبات می شود. نتایج حاصل از شبیه سازی روش پیشنهادی در سیستم های مختلف، بیانگر بهبود پاسخ و کاهش زمان نشست<sup>۱۱</sup> می باشد در حالیکه محدودیت اندازه سیگنال کنترل رعایت می شود.

**کلید واژه:** کنترل غیر خطی، کنترل ساختار متغیر نرم، محک دایره، افزایش نرخ تنظیم

<sup>1</sup> Radial Pole Path Soft Variable Structure Control

<sup>2</sup> Regulation rate

<sup>3</sup> Single Input Single Output (SISO)

<sup>4</sup> Multi Input Multi Output (MIMO)

<sup>5</sup> Feedback Linearization Control

<sup>6</sup> Uncertainty

<sup>7</sup> autonomous

<sup>8</sup> Robust

<sup>9</sup> Stability

<sup>10</sup> Circle Stability Criterion

<sup>11</sup> Settling time



عنوان مقالات مستخرج از رساله			
سال	محل ارائه	عنوان	شماره
2020	Asian Journal of Control	Radial Pole Paths SVSC for Linear Time Invariant Multi Input Systems with Constrained Inputs	۱
2018	Journal of Information Technology and Control	Soft Variable Structure Control of Linear Systems via Desired Pole Paths	۲
2018	European Control Conference (ECC 2018), Limassol, Cyprus.	Robust feedback linearization for input-constrained nonlinear systems with matched uncertainties	۳
1397	هفدهمین کنفرانس انجمن هوافضای ایران، تهران، دانشگاه علوم و تحقیقات	راهکار کنترل ساختار متغیر نرم جهت پاسخ سریع و بدون ضربه سیستم کنترل هواپیما	۴



## فهرست مطالب

فصل اول: معرفی سیستم های کنترل ساختار متغیر .....	۱
۱-۱-مقدمه .....	۲
۱-۲- تاریخچه پیشرفت سیستم های کنترل ساختار متغیر .....	۴
۱-۳- روشهای کنترل ساختار متغیر نرم .....	۸
۱-۳-۱- کنترل ساختار متغیر بوسیله توابع لیاپانوف ضمنی شبکه ای .....	۱۲
۱-۳-۱-۱- کنترل ساختار متغیر ناپیوسته بوسیله توابع لیاپانوف ضمنی شبکه ای .....	۱۳
۱-۳-۱-۲- کنترل ساختار متغیر نرم بوسیله توابع لیاپانوف ضمنی شبکه ای .....	۱۶
۱-۴- کنترل ساختار متغیر نرم دینامیکی .....	۱۸
۱-۵- کنترل ساختار متغیر نرم با اشباع متغیر .....	۲۴
۱-۶- معایب روش های مرسوم .....	۲۸
۱-۶-۱- معایب کنترل ساختار متغیر نرم بوسیله توابع لیاپانوف شبکه ای .....	۲۹
۱-۶-۲- معایب کنترل ساختار متغیر نرم دینامیکی .....	۳۵
۱-۶-۳- اشکالات کنترل ساختار متغیر نرم با اشباع متغیر .....	۳۸
فصل دوم: کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی برای سیستم های خطی یک ورودی یک خروجی .....	۴۳
۱-۲-مقدمه .....	۴۴
۲-۲- معرفی مسئله .....	۴۴
۳-۲- کنترل پسخورد حالت .....	۴۶
۴-۲- کنترل ساختار متغیر نرم شعاعی .....	۵۱
۱-۴-۲- بررسی پایداری کنترل ساختار متغیر نرم شعاعی .....	۵۴
۵-۲- نتایج شبیه سازی .....	۵۸
۱-۵-۲- تاثیر $vmin$ .....	۶۱
فصل سوم: کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی برای سیستم های خطی چند ورودی چند خروجی .....	۶۵
۱-۳-مقدمه .....	۶۶
۲-۳- جایابی قطب برای سیستم های خطی چند ورودی چند خروجی [۵۱] .....	۶۶
۳-۳- جایابی قطب برای سیستم های خطی چند ورودی چند خروجی با محدودیت در سیگنال کنترل .....	۷۱





۷۲.....	۳-۴- کنترل ساختار متغیر مسیر قطب شعاعی برای سیستم های خطی چند ورودی چند خروجی
۷۷.....	۳-۵- شبیه سازی.....
۸۳.....	فصل چهارم: کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی برای سیستم های غیرخطی خودگردان افاین.....
۸۴.....	۴-۱- مقدمه.....
۸۴.....	۴-۲- معرفی مسئله.....
۸۶.....	۴-۳- طراحی کنترل خطی سازی پسخورد برای سیستم غیر خطی افاین با ورودی محدود.....
۸۹.....	۴-۴- کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی برای سیستم غیر خطی افاین.....
۹۵.....	۴-۵- شبیه سازی.....
۹۹.....	فصل پنجم: کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی برای کلاسی از سیستم های نامعین غیرخطی خودگردان افاین.....
۱۰۰.....	۵-۱- مقدمه.....
۱۰۰.....	۵-۲- معرفی مسئله.....
۱۰۲.....	۵-۳- کنترل خطی سازی پسخورد مقاوم برای سیستم های غیرخطی افاین با سیگنال کنترل محدود.....
۱۰۷.....	۵-۴- کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی برای سیستم های غیرخطی افاین نامعین.....
۱۱۱.....	۵-۵- شبیه سازی.....
۱۲۱.....	نتیجه گیری و تحقیقات پیش رو.....
۱۲۳.....	مراجع.....



## فهرست اشکال

- شکل ۱-۱: سیستم کنترل ساختار متغیر..... ۳
- شکل ۲-۱: کنترل ساختار متغیر نرم ..... ۳
- شکل ۳-۱: لامپ روغنی فیلون ..... ۵
- شکل ۴-۱: سیستم کنترل ساختار متغیر..... ۹
- شکل ۵-۱: کنترل ساختار متغیر نرم ..... ۱۰
- شکل ۶-۱: نحوه شبکه بندی فضای شرایط اولیه..... ۱۵
- شکل ۷-۱: کنترل ساختار متغیر نرم بوسیله توابع لیپانوف شبکه ای..... ۱۸
- شکل ۸-۱: توابع  $\alpha(x)$  و  $\beta(x)$ ..... ۲۲
- شکل ۹-۱: کنترل ساختار متغیر نرم دینامیکی..... ۲۳
- شکل ۱۰-۱: کنترل ساختار متغیر نرم با اشباع متغیر..... ۲۵
- شکل ۱۱-۱: کنترل ساختار متغیر نرم با اشباع متغیر بازنویسی شده ..... ۲۶
- شکل ۱۲-۱: تغییرات  $p$  و  $u$  بر حسب  $x$ ..... ۲۶
- شکل ۱۳-۱: ناحیه لیپانوف و محدوده  $|u_0| < |k^T x|$  برای  $k^T = [2, 2]$ ..... ۳۰
- شکل ۱۴-۱: خروجی سیستم ۱-۶۷ با کنترل  $k^T = [2, 2]$  تحت اغتشاش اولیه  $x(0)^T = [0, 0.8]$ ..... ۳۱
- شکل ۱۵-۱: سیگنال کنترل سیستم ۱-۶۷ با کنترل  $k^T = [2, 2]$  اغتشاش اولیه  $x(0)^T = [0, 0.8]$ ..... ۳۱
- شکل ۱۶-۱: فضای حالت شبکه بندی شده..... ۳۲
- شکل ۱۷-۱: خروجی سیستم ۱-۶۷ با کنترل ساختار متغیر توابع لیپانوف شبکه ای، اغتشاش اولیه  $x(0)^T = [0, 0.8]$ ..... ۳۳
- شکل ۱۸-۱: سیگنال کنترل سیستم ۱-۶۷ با کنترل ساختار متغیر توابع لیپانوف شبکه ای، اولیه  $x(0)^T = [0, 0.8]$ ..... ۳۳
- شکل ۱۹-۱: خروجی سیستم ۱-۶۷ با کنترل ساختار متغیر دینامیکی، اغتشاش اولیه  $x(0)^T = [0, 0.8]$ ..... ۳۶
- شکل ۲۰-۱: سیگنال کنترل سیستم ۱-۶۷ با کنترل ساختار متغیر دینامیکی، اغتشاش اولیه  $x(0)^T = [0, 0.8]$ ..... ۳۶
- شکل ۲۱-۱: خروجی سیستم ۱-۶۷ با کنترل ساختار متغیر دینامیکی، اغتشاش اولیه  $x(0)^T = [0, 0.8]$ ..... ۳۷
- شکل ۲۲-۱: سیگنال کنترل سیستم ۱-۶۷ با کنترل ساختار متغیر دینامیکی، اغتشاش اولیه  $x(0)^T = [0, 0.8]$ ..... ۳۷
- شکل ۲۳-۱: خروجی سیستم ۱-۶۷ با کنترل ساختار متغیر با اشباع متغیر، اغتشاش اولیه  $x(0)^T = [0, 0.8]$ ..... ۳۹
- شکل ۲۴-۱: سیگنال کنترل سیستم ۱-۶۷ با کنترل ساختار متغیر با اشباع متغیر، اغتشاش اولیه  $x(0)^T = [0, 0.8]$ ..... ۳۹
- شکل ۱-۲: مسیرهای شعاعی قطب..... ۴۶
- شکل ۲-۲: فلوجارت پروسه ۱..... ۵۰
- شکل ۳-۲: دیاگرام فاز یک سیستم مرتبه ۲ هنگامی که  $X_0 \subset G$ ..... ۵۱
- شکل ۴-۲: فلوجارت پروسه ۲..... ۵۲
- شکل ۵-۲: بلوک دیاگرام کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی..... ۵۳
- شکل ۶-۲: نمایش پسخورد حالت کنترل ساختار متغیر نرم شعاعی..... ۵۵



- شکل ۷-۲: سیستم کنترل ماهواره..... ۵۸
- شکل ۸-۲: ناحیه لیاپانوف، محدودیت سیگنال ورودی و ناحیه ممکن شرایط اولیه برای سیستم ۲-۲۱..... ۵۹
- شکل ۹-۲: خروجی سیستم ۱: کنترل بنگ-بنگ، ۲: کنترل فیدبک حالت، ۳: کنترل ساختار متغیر نرم دینامیکی، ۴: کنترل ساختار متغیر نرم با اشباع متغیر، ۵: کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی..... ۶۰
- شکل ۱۰-۲: سیگنال کنترل ۱: کنترل بنگ-بنگ، ۲: کنترل فیدبک حالت، ۳: کنترل ساختار متغیر نرم دینامیکی، ۴: کنترل ساختار متغیر نرم با اشباع متغیر، ۵: کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی..... ۶۱
- شکل ۱۱-۲: تاثیر مقدار  $U_{min}$  در خروجی سیستم..... ۶۲
- شکل ۱۲-۲: تاثیر مقدار  $U_{min}$  در سیگنال کنترل..... ۶۲
- شکل ۱۳-۳: نمونه ای از مسیر حالت در ناحیه لیاپانوف یک سیستم مرتبه ۲..... ۷۲
- شکل ۲-۳: نمونه ای از مسیر قطب شعاعی برای یک سیستم مرتبه سوم..... ۷۳
- شکل ۳-۳: پیکربندی روش کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی برای سیستم های خطی چند ورودی چند خروجی..... ۷۵
- شکل ۴-۳: نمایش سیستم حلقه بسته بازنویسی شده توسط ۳-۲۹..... ۷۶
- شکل ۵-۳: مقایسه خروجی سیستم ۳-۳۷ تحت کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی و جایابی قطب..... ۷۹
- شکل ۶-۳: مقایسه ورودی سیستم ۳-۳۷ تحت کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی و جایابی قطب..... ۸۰
- شکل ۷-۳: تغییرات پارامتر  $\nu$  در کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی..... ۸۰
- شکل ۱-۴: نمونه مسیر قطب برای یک سیستم مرتبه سوم..... ۸۷
- شکل ۲-۴: فلوجارت پروسه ۱..... ۹۱
- شکل ۳-۴: پیکربندی روش کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی برای سیستم های غیر خطی یک ورودی یک خروجی افاین..... ۹۳
- شکل ۴-۴: شمای سیستم بازنویسی شده توسط رابطه ۴-۲۴..... ۹۵
- شکل ۵-۴: مقایسه خروجی سیستم ۴-۱ با کنترل خطی سازی پسخورده و کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی..... ۹۷
- شکل ۶-۴: مقایسه ورودی سیستم ۴-۱ با کنترل خطی سازی پسخورده و کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی..... ۹۷
- شکل ۷-۴: مقایسه خطای سیستم ۴-۱ با کنترل خطی سازی پسخورده و کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی..... ۹۸
- شکل ۱-۵: نمونه مسیر قطب شعاعی برای یک سیستم با درجه نسبی ۳..... ۱۰۵
- شکل ۲-۵: فلوجارت پروسه ۱..... ۱۰۹
- شکل ۳-۵: پیکربندی کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی برای سیستم های غیر خطی افاین نامعین..... ۱۱۰
- شکل ۴-۵: سیستم جرم و فنر غیر خطی..... ۱۱۱
- شکل ۵-۵: ناحیه مجاز شرایط اولیه، خطوط محدودیت ها و ناحیه لیاپانوف..... ۱۱۲
- شکل ۶-۵: خروجی سیستم با کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی و خطی سازی پسخورده مقاوم..... ۱۱۵
- شکل ۷-۵: ورودی سیستم با کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی و خطی سازی پسخورده مقاوم..... ۱۱۶
- شکل ۸-۵: متغیر انتخاب  $\nu$ ..... ۱۱۷
- شکل ۱۰-۵: خروجی سیستم با کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی و خطی سازی پسخورده مقاوم..... ۱۱۸
- شکل ۱۱-۵: ورودی سیستم با کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی و خطی سازی پسخورده مقاوم..... ۱۱۹
- شکل ۱۲-۵: خطای سیستم با کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی و خطی سازی پسخورده مقاوم..... ۱۱۹
- شکل ۱۳-۵: متغیر انتخاب  $\nu$ ..... ۱۲۰



## فهرست جداول

جدول ۱-۱: تاریخچه پیشرفت کنترل ساختار متغیر.....	۷
جدول ۱-۲: معایب روشهای مرسوم.....	۴۰





## **فصل اول:**

**معرفی سیستم های کنترل ساختار متغیر**

## ۱- مقدمه

پایداری، افزایش سرعت تنظیم و کاهش زمان نشست از جمله اهداف یک سیستم کنترل است. جهت دست یابی به حداقل زمان نشست ممکن، نظریه کنترل بهینه با استفاده از روش موسوم به "کنترل بنگ بنگ" پاسخ مناسبی را حاصل می سازد [۱]. لیکن در برخی از سیستم های صنعتی، تغییر ناگهانی سیگنال کنترل که حاصل کنترل بنگ بنگ است، علاوه بر تلاش کنترلی مضاعف، باعث فرسوده شدن محرک می گردد که در هزینه های تعمیر و نگهداری و عمر مفید محرک اثر نامطلوب دارد. سیستم های کنترل ساختار متغیر که تاریخچه آن حتی به قبل از میلاد حضرت مسیح بر می گردد، راهکاری جهت دست یافتن به اهداف کنترلی می باشند. منظور از سیستم کنترل ساختار متغیر، سیستمی است که در آن قانون کنترل بر اساس تابع انتخاب گسسته [۲]

$$p = S(\mathbf{x}), \quad 0 \leq p \leq k \quad (1-1)$$

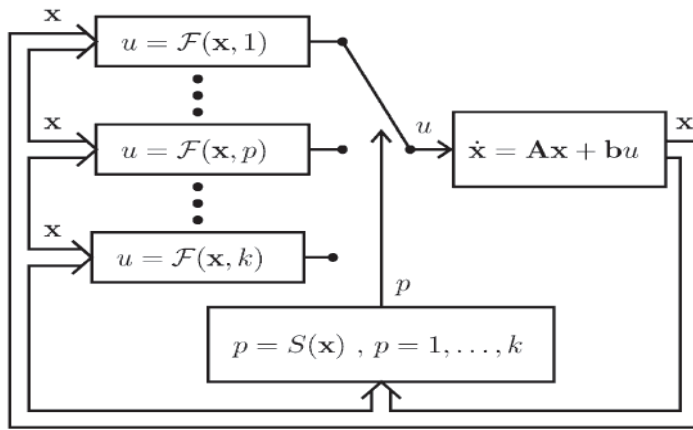
تغییر کرده و بین چند قانون از قبل تعیین شده سوییچ شود. کنترل مود لغزشی<sup>۱۲</sup> [۳-۶]، انواع کنترل های نظارتی<sup>۱۳</sup> [۷-۹]، سیستم های کنترل هایبرید<sup>۱۴</sup> [۱۰-۱۲] و ... از مثال های سیستم های کنترل ساختار متغیر می باشند. شکل ۱-۱ شمای یک سیستم کنترل ساختار متغیر را نشان می دهد.

---

<sup>12</sup> Sliding mode control

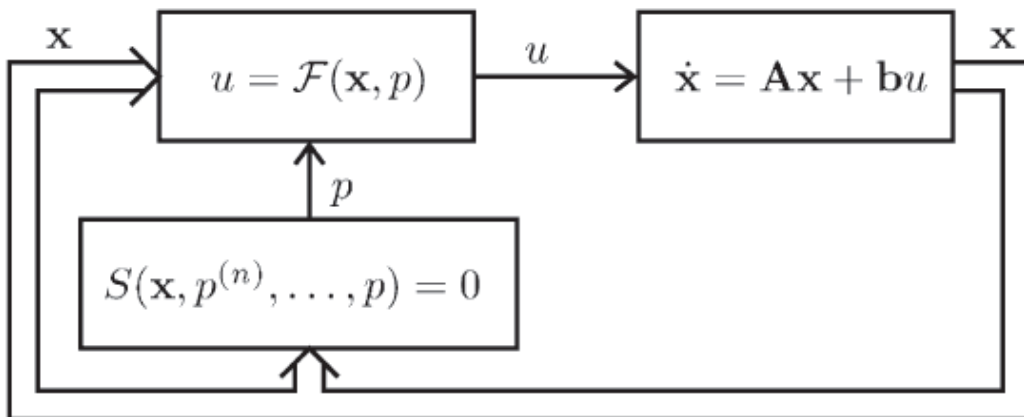
<sup>13</sup> Supervisory control

<sup>14</sup> Hybrid control



شکل ۱-۱: سیستم کنترل ساختار متغیر [۱۴]

سیستم های کنترل ساختار متغیر گرچه در بهبود بسیاری از معیارهای کنترلی موفق می باشند، لیکن سیگنال کنترل در این سیستم ها نرم نیست [۱۳] و احتمالاً تغییرات ناگهانی دارد که همانگونه که ذکر شد، در بسیاری از کاربردهای صنعتی نامطلوب است. در دهه ۷۰ و ۸۰ میلادی روش های موسوم به کنترل ساختار متغیر نرم<sup>۱۵</sup> در سیستم های خطی معرفی شد [۱۴] که در آن تابع انتخاب  $p = S(\mathbf{x})$  پیوسته شده و در نتیجه قانون کنترل  $u = F(\mathbf{x}, p)$  به صورت نرم تغییر پیدا می کند. شکل ۲-۱ شمای کنترل ساختار متغیر نرم را بیان می کند.



شکل ۲-۱: کنترل ساختار متغیر نرم [۱۴]

<sup>15</sup>Soft Variable Structure Control (SVSC)

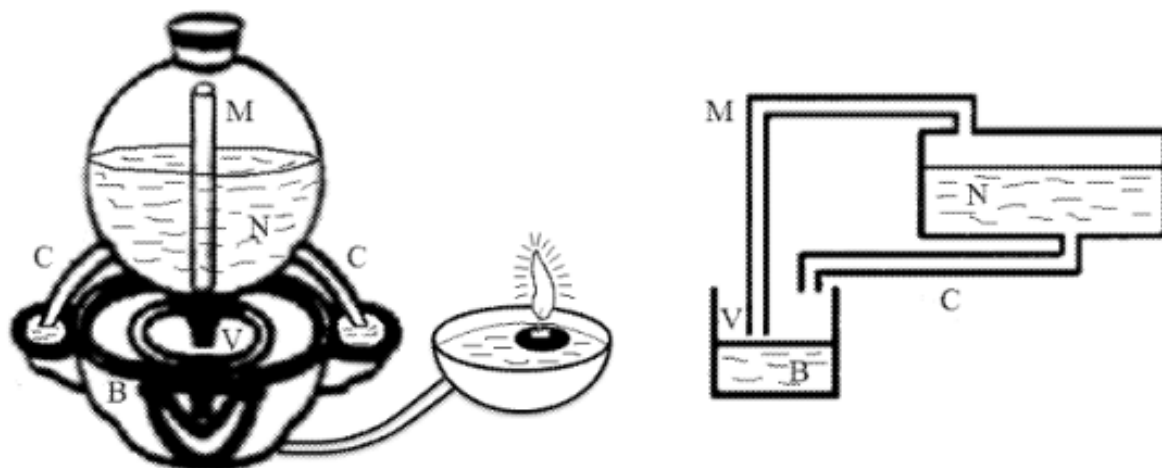
در این فصل تاریخچه روش های کنترل ساختار متغیر، و روشهای ساختار متغیر نرمی که تا کنون جهت افزایش سرعت تنظیم سیستم های کنترل ارائه گردیده اند بررسی شده و معایب و مزایای هر کدام ارائه می گردد.

## ۱-۲- تاریخچه پیشرفت سیستم های کنترل ساختار متغیر

هر سیستمی که در آن قانون کنترل با شرایط متغیرهای حالت تغییر کند، سیستم کنترل ساختار متغیر نامیده می شود. شاید اولین سیستم کنترل ساختار متغیر، لامپ های روغنی فیلون<sup>۱۶</sup> باشد که ۲۰۰ سال قبل از میلاد مسیح در یونان باستان مورد استفاده قرار می گرفت. همانگونه که در شکل ۱-۳ مشخص است، در صورتی که روغن مخزن B سوخته شود و فاصله هوایی در ناحیه V ایجاد شود، هوا از طریق لوله M وارد مخزن اصلی N شده و باعث می شود که روغن از طریق لوله C وارد مخزن B شود، این فرایند ادامه پیدا می کند تا فاصله هوایی V از روغن پر شود و پس از آن فشار هوا اجازه ادامه تخلیه روغن از مخزن اصلی N به مخزن B را نخواهد داد. ساختار مشابه، اما پیچیده تری توسط برادران بانو موسی در زمان خلافت بنی امیه جهت کنترل سطح روغن در قرن ۹ میلادی در بغداد نیز طراحی و اجرا شد که بسیاری از آن بعنوان تولد کنترل اتوماتیک نام می برند [۱۴].

---

<sup>16</sup> Philon oil lamp



شکل ۱-۳: لامپ روغنی فیلون [۱۴]

در قرن ۱۸ میلادی برای نخستین بار کنترل روشن-خاموش<sup>۱۷</sup> در موتورهای بخار و کشتی ها مورد استفاده قرار گرفت که در واقع شمای کنترلی مشابه با آنچه امروز بعنوان کنترل ساختار متغیر شناخته میشود دارد. در اواخر قرن ۱۸ میلادی و پس از گسترش روش صفحه فاز در سیستم های غیرخطی، کنترل روشن-خاموش بیشتر گسترش یافته و در اواسط قرن ۱۹ میلادی ساختار کنترل های ناپیوسته کاملاً تدوین شد [۱۵].

در سالهای ۱۹۴۰ تا ۱۹۶۰، پس از پیشرفت کنترل روشن-خاموش، دانشمندان آن دوره به این نتیجه رسیدند که جهت بهبود اهداف کنترلی نظیر زمان نشست و کاهش فراجهدش، می توان بجای سویچ بین دو حالت در کنترل روشن-خاموش، چندین قانون کنترل انتخاب نمود و بسته به شرایط متغیرهای حالت، قانون کنترل مطلوب را انتخاب کرد. این شیوه در واقع امروزه مفهوم اصلی کنترل

<sup>17</sup> Relay Control

ساختار متغیر می باشد [۱۶-۱۸]. مهمترین اهداف بکارگیری کنترل ساختار متغیر در این دوره کاهش زمان نشست و یافتن قانون کنترل شبه بهینه<sup>۱۸</sup> و همچنین کنترل تطبیقی<sup>۱۹</sup> بوده است.

فاز دوم توسعه کنترل ساختار متغیر، ارائه تئوری کنترل مود لغزشی<sup>۲۰</sup> بوده است. پس از آنکه فیلیپوف تئوری معادلات دیفرانسیل با قسمت سمت راست ناپیوسته را گسترش داد [۱۹]، روش مود لغزشی در راستای پژوهشهای امیلیانوف و همکاران وی معرفی [۱۳] و توسط سایر دانشمندان دهه ۷۰ و ۸۰ میلادی تکمیل و توسعه داده شد [۳, ۶, ۲۰]. قابلیت های فراوان کنترل مود لغزشی [۴, ۵, ۲۱, ۲۲] به سرعت این روش را مورد توجه پژوهشگران قرار داد، لیکن تاثیر منفی فرکانس های بالای کلید زنی در کاربردهای صنعتی [۲۳] با وجود اینکه راهکارهای اصلاحی متنوعی تاکنون معرفی شده اند هنوز زمینه باز تحقیقاتی است.

فاز سوم توسعه تئوری کنترل ساختار متغیر در دهه ۷۰ میلادی شروع می شود که در آن بازه، هدف کنترلی کاهش زمان نشست سیستم پرننگ شده و استفاده از سیستم های کنترل ساختار متغیر برای نیل به این هدف مرسوم می گردند. برخی کیندل را اولین کسی که می دانند که در سال ۱۹۷۲ از سیستم های کنترل ساختار متغیر با چند قانون کنترل خطی متفاوت جهت کاهش زمان نشست سیستم استفاده نمود [۱۴].

فاز چهارم توسعه کنترل ساختار متغیر مربوط به دهه ۹۰ می باشد که در آن با هدف کنترل تطبیقی سیستم ها، ساختارهایی با عناوینی نظیر "کنترل تطبیقی چند مدله"<sup>۲۱</sup>، "کنترل نظارتی"<sup>۲۲</sup> و

---

<sup>18</sup> Sub-optimal control law

<sup>19</sup> Adaptive control

<sup>20</sup> Sliding mode control

<sup>21</sup> Multi-model adaptive control

<sup>22</sup> Switching supervisory control (SSC)

"کنترل کننده جامع"<sup>۲۳</sup> مطرح شد [۲۴-۲۷]. با وجود اینکه از نظر ساختاری روش های فوق الذکر نوعی کنترل ساختار متغیر می باشند لیکن با توجه به اینکه هدف اصلی این ساختارها پایداری می باشد، با آنچه امروزه در متون علمی در لفظ به عنوان کنترل ساختار متغیر، (که هدف آن کاهش زمان نشست سیستم) شناخته می شود، تفاوت دارند. کنترل هایبرید که در دهه ۹۰ توسعه یافت نیز می توان در مجموعه کنترل های ساختار متغیر دسته بندی نمود [۱۰، ۱۱]. در سال های اخیر نیز کنترل ساختار متغیر برای کلاس های خاصی از سیستم های غیرخطی [۲۸]، سیستم هایی با مدل فازی [۲۹]، کاربرد در سیستم های دو وجهی<sup>۲۴</sup> [۳۰]، سیستم های تکین<sup>۲۵</sup> [۳۱-۳۳] و سیستم های با مرتبه کسری [۳۴] مورد استفاده قرار گرفته است. جدول زیر بطور خلاصه روند توسعه سیستم های کنترل ساختار متغیر را نشان می دهد.

#### جدول ۱-۱: تاریخچه پیشرفت کنترل ساختار متغیر

ساخت لامپ روغنی توسط فیلون در یونان باستان	۲۰۰ سال قبل از میلاد مسیح
کنترل سطح سیال توسط برادران بانو موسی در بغداد	قرن هشتم میلادی
استفاده از کنترل روشن-خاموش در کشتی و موتورهای بخار و توسعه کنترل نا پیوسته توسعه روش صفحه فاز	قرن هجدهم میلادی تا دهه ۶۰ میلادی
تئوری حل معادلات دیفرانسیل با قسمت سمت راست نا پیوسته توسط فیلیپوف و کنترل مود لغزشی	اوایل قرن نوزدهم میلادی
ارائه کنترل ساختار متغیر با هدف کاهش زمان نشست و نرخ تنظیم توسط کیندل و توسعه آن در سیستم های خطی	دهه ۶۰ میلادی
معرفی کنترل ساختار متغیر نرم برای اولین بار توسط فرانک و پیگیری مطالعات کیندل توسط سایر پژوهشگران	دهه ۷۰ میلادی
استفاده از کنترل ساختار متغیر جهت پایداری، کنترل تطبیقی چند مدله، کنترل نظارتی و کنترل کننده جامع	دهه ۸۰ میلادی
کنترل هایبرید، استفاده از کنترل ساختار متغیر در سیستم های با مدل فازی، سیستم های تکین و کسری	دهه ۹۰ میلادی تاکنون

<sup>23</sup> Universal controller

<sup>24</sup> Bilinear systems

<sup>25</sup> Singular systems



## ۱-۳- روشهای کنترل ساختار متغیر نرم

جهت آشنایی با کنترل ساختار متغیر نرم، توضیحات با یک مثال ساده شروع می شود. فرض کنید

نیاز به کنترل سیستم خطی مرتبه  $n$  زیر است:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{bu} \quad (۲-۱)$$

که در آن سیگنال کنترل بایستی در محدوده تعریف شده توسط رابطه زیر باشد:

$$|u| \leq u_0 \quad (۳-۱)$$

اگر قانون کنترل به شکل زیر تعریف شود:

$$u = F(\mathbf{x}, p) \quad (۴-۱)$$

که در آن  $F(\cdot)$  یک تابع دلخواه از حالت های سیستم و متغیر انتخاب  $p$  باشد، که در آن  $p$  توسط یک

قانون انتخاب و یا ناظر بصورت زیر انتخاب گردد:

$$p = S(\mathbf{x}) \quad (۵-۱)$$

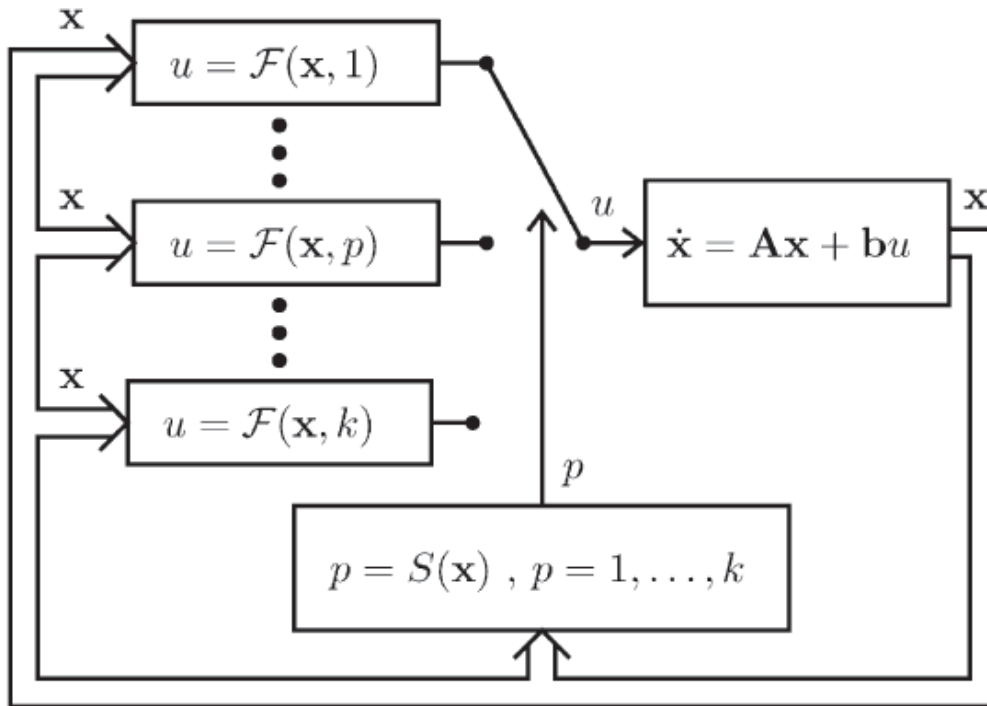
در ابتدا فرض می کنیم  $S(\cdot)$  یک تابع گسسته باشد که بین ۱ تا  $k$  سویچ می شود. در نتیجه:

$$1 \leq p \leq k \quad (۶-۱)$$

و به روشنی نتیجه می شود که  $k$  قانون کنترل مختلف  $F(\mathbf{x}, p)$  برای سیستم ممکن می باشد. مدل

توضیح داده شده حالت کلی کنترل ساختار متغیر بوده که در شمای آن در شکل ۱-۴ نشان داده شده

است.



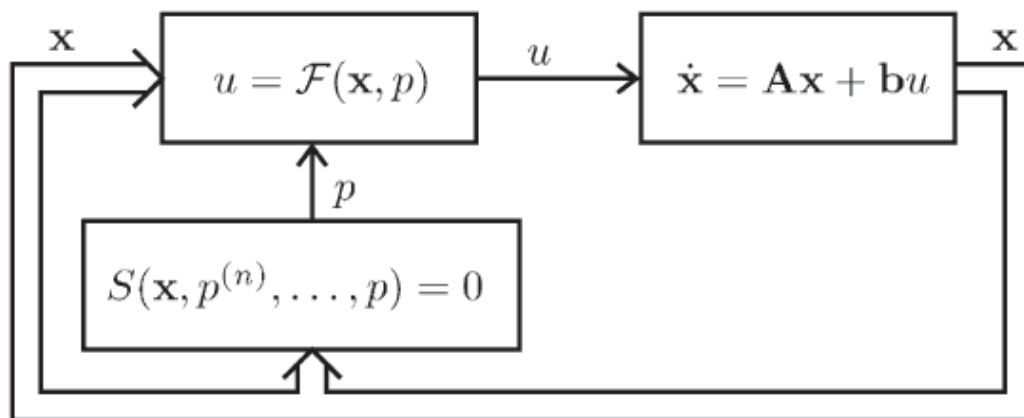
شکل ۴-۱: سیستم کنترل ساختار متغیر [۱۴]

ساختار شکل ۴-۱ می تواند نشان دهنده تمامی حالت های کنترل ساختار متغیر نظیر کنترل مود لغزشی، کنترل نظارتی و... باشد. لیکن از این قسمت این رساله به بعد، سیستم ساختار متغیر که با هدف کاهش زمان نشست می باشد، مورد نظر است. در سیستم کنترل نشان داده شده در شکل ۴-۱، سوچینگ بین قوانین کنترل باعث ظاهر شدن فرکانس های بالا در سیگنال کنترل می گردد که از دیدگاه مهندسان در صنایع، بدلیل کاهش طول عمر و هزینه تعمیر و نگهداری محرک ها نامطلوب است. راه حل این مشکل، جایگزینی تابع پیوسته  $S(\cdot)$  با نمونه گسسته آن است. برای اینکه خواص دینامیکی  $p$  نیز در تابع انتخاب  $S(\cdot)$  منظور گردد، تابع انتخاب پیوسته زیر را پیشنهاد می شود:

$$S(\mathbf{x}, p^{(n)}, \dots, p) = 0 \quad (7-1)$$

شکل ۵-۱ شمای سیستم اصلاح شده که از این در این رساله منظور از "سیستم کنترل ساختار

متغیر نرم" است نشان می دهد.



شکل ۵-۱: کنترل ساختار متغیر نرم [۱۴]

سیستم های ساختار متغیر نرم که تا کنون در منابع علمی معرفی شده اند، در واقع توسعه مدل کیندل برای افزایش سرعت سیستم می باشد، لذا در ادامه این گزارش، منظور از سیستم ساختار متغیر نرم، توسعه روش کیندل به سیستمی با تابع انتخاب پیوسته می باشد که هدف اصلی آن کاهش زمان نشست است.

برای روشن شدن کارایی کنترل ساختار متغیر، فرض کنید سیستم (۲-۱)، توسط قانون کنترل فیدبک حالت  $u = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}$  کنترل شود. بواسطه محدودیت (۳-۱)، مقدار  $\mathbf{k}$  بایستی بنحوی انتخاب شود که در کنترل، شرایط محدودیت تامین گردد. لیکن با گذشت زمان اندازه بردار  $\mathbf{x}$  کوچک می شود، و  $\mathbf{k}$  انتخاب شده دیگر نمی تواند از حداکثر میزان مجاز  $u$  جهت تسریع سیستم استفاده نماید. حال فرض کنیم سیستم تعداد محدود  $k$  کنترل کننده داشته باشد، در این صورت قانون کنترل را می توان بصورت زیر نوشت:

$$u = -\mathbf{k}_p^T \mathbf{x}, \quad p = 1, \dots, k \quad (8-1)$$

هر کنترل کننده (8-1)، به همراه سیستم (2-1)، سیستم کنترلی زیر را منجر می شود:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}_p^T)\mathbf{x} = \hat{\mathbf{A}}_p \mathbf{x} \quad (9-1)$$

با فرض کنترل پذیری سیستم (2-1)، بردارهای  $\mathbf{k}_p^T$  باعث تغییر  $n$  مقدار ویژه ماتریس  $\hat{\mathbf{A}}_p$  می گردند.

اگر  $\mathbf{k}_p^T$  بنحوی انتخاب شود که  $Re\{\lambda_p^i\} < 0, i = 1, \dots, n$  داشته باشیم:

$$\lambda_{p+1}^i = h\lambda_p^i, \quad h > 1 \quad (10-1)$$

در این صورت با افزایش  $p$  سرعت سیستم افزایش می یابد. هدف از کنترل ساختار متغیر، یافتن قانون

انتخاب (5-1) بنحوی است که تا حد امکان و لزوم، از حداکثر مجاز سیگنال کنترل طبق محدودیت (1-1)

(3) استفاده شود و در نتیجه زمان نشست سیستم کاهش یابد.

سه راهکار اصلی تا کنون جهت کنترل ساختار متغیر نرم سیستم های خطی معرفی شده اند که

عبارت اند از:

- کنترل ساختار متغیر نرم بوسیله توابع لیاپانوف ضمنی شبکه ای<sup>26</sup>

- کنترل ساختار متغیر نرم دینامیکی<sup>27</sup>

- کنترل ساختار متغیر نرم با اشباع متغیر<sup>28</sup>

در ادامه این فصل هر کدام از روشهای فوق الذکر به تفکیک شرح داده خواهد شد.

<sup>26</sup> SVSC employing nested and implicit lyapunov functions

<sup>27</sup> Dynamic SVSC

<sup>28</sup> SVSC with variable saturation

### ۱-۳- کنترل ساختار متغیر بوسیله توابع لیاپانوف ضمنی شبکه ای

این روش در ابتدا توسط کیندل در سال ۱۹۷۲ برای کنترل ساختار متغیر ارائه شد. در سال ۱۹۹۱ آدامی روش کیندل را در به کنترل ساختار متغیر نرم توسعه داد. لیکن بدلیل انتشار نتایج به زبان آلمانی، مطالب مربوط به این بخش اساساً از [۱۴] استخراج شده اند. روش مستقیم لیاپانوف نیاز اساسی این روش است که مطمئناً خواننده این رساله با آن آشنایی دارد. لیکن جهت پیوستگی مطالب قضیه پایداری لیاپانوف بطور مختصر معرفی می گردد [۳۵].

قضیه ۱-۱: معادله دیفرانسیل  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$  با تابع پیوسته  $f$  و نقطه تعادل در  $\mathbf{x} = 0$  جواب یکتایی خواهد داشت اگر تابع  $V(\mathbf{x})$  با مشتق تکه ای پیوسته وجود داشته باشد و:

$$V(0) = 0 \quad ۱-$$

$$V(\mathbf{x}) > 0, \quad \mathbf{x} \neq 0 \quad ۲-$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) < 0, \quad \mathbf{x} \neq 0 \quad ۳-$$

در اینصورت، نقطه تعادل  $\mathbf{x} = 0$  بصورت مجانبی پایدار خواهد بود و تابع  $V(\mathbf{x})$  یک تابع لیاپانوف نام خواهد گرفت.

در سیستم خطی  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax}$  شرایط قضیه فوق لازم می دارد که برای یک ماتریس مثبت معین دلخواه  $\mathbf{Q}$ ، ماتریس مثبت معین  $\mathbf{R}$  وجود داشته باشد که در معادله زیر که به معادله لیاپانوف مشهور است صدق کند.

$$\mathbf{A}^T \mathbf{R} + \mathbf{R} \mathbf{A} = -\mathbf{Q} \quad (۱۱-۱)$$

در اینصورت  $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{R} \mathbf{x}$  تابع لیاپانوف سیستم است.

تعریف ۱-۱ (ناحیه لیاپانوف): در صورتی که سیستمی طبق قضیه ۱ پایدار باشد، ناحیه  $G = \{\mathbf{x} | V(\mathbf{x}) < c\}$  یک مجموعه پایا<sup>۲۹</sup> در فضای حالت تشکیل می دهد که به آن "ناحیه لیاپانوف" گفته می شود.

۱-۳-۱- کنترل ساختار متغیر ناپیوسته بوسیله توابع لیاپانوف ضمنی شبکه ای فرض کنید سیستم (۲-۱)، توسط کنترل کننده های خطی  $u = -\mathbf{k}_p^T \mathbf{x}$  کنترل می شود و محدودیت (۳-۱) بایستی رعایت شود و همچنین تابع انتخاب توسط (۵-۱) تعریف شده باشد. هدف از این طراحی، مشخص کردن رابطه ای برای تابع انتخاب است که در سیستم مشخص شده در شکل ۴-۱ علاوه بر تضمین پایداری، سرعت افزایش یابد. فرض می کنیم فضای ممکن برای شرایط اولیه  $X_0$  باشد که تمام فضای  $\mathbb{R}^n$  نمی باشد. این فرض محدود کننده نیست زیرا در مسائل صنعتی و عملی، براحتی محدوده ای برای شرایط اولیه ممکن تعیین می شود. برای کنترل به این روش بایستی چهار شرط زیر برقرار باشد:

۱- تمامی کنترل کننده های  $u = -\mathbf{k}_p^T \mathbf{x}$  منجر به حلقه کنترلی پایدار شوند و زمان پاسخ به ازای افزایش اندیس  $p$ ، کاهش یابد.

۲- برای تمامی حلقه های کنترلی

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}_p^T)\mathbf{x} \quad (۱۲-۱)$$

بایستی ناحیه لیاپانوفی مثل

$$G_p = \{\mathbf{x} | V_p(\mathbf{x}) < c_p\} \quad (۱۳-۱)$$

<sup>29</sup> Invariant set

وجود داشته باشد به نحوی که برای هر  $\mathbf{x} \in G_p$  محدودیت  $|\mathbf{k}_p^T \mathbf{x}| \leq u_0$  برقرار باشد. جهت اطمینان از برقراری این قید، می توان  $G_p$  را بنحوی تشکیل داد که بر خطوط  $u_0 = \mathbf{k}_p^T \mathbf{x}$  و  $u_0 = -\mathbf{k}_p^T \mathbf{x}$  مطابق شکل ۱-۶، مماس گردد. لازمه این امر حل مسئله بهینه سازی زیر است:

$$\max \mathbf{x}^T \mathbf{R}_p \mathbf{x}, \quad \text{subject to } \pm \mathbf{k}_p^T \mathbf{x} \leq u_0 \quad (14-1)$$

که پاسخ آن برابر است با:

$$c_p = \frac{u_0^2}{\mathbf{k}_p^T \mathbf{R}_p^{-1} \mathbf{k}_p} \quad (15-1)$$

۳- نواحی لیاپانوف  $G_p$  باید به نحوی شبکه ای شوند:

$$G_{p+1} \subset G_p, \quad p = 1, \dots, k-1 \quad (16-1)$$

رابطه (۱۶-۱) معادل است با:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{R}_{p+1} \mathbf{x} \leq c_{p+1} \rightarrow \mathbf{x}^T \mathbf{R}_p \mathbf{x} \leq c_p \quad (17-1)$$

و یا به عبارت دیگر:

$$\mathbf{x}^T \frac{\mathbf{R}_{p+1}}{c_{p+1}} \mathbf{x} \leq 1 \rightarrow \mathbf{x}^T \frac{\mathbf{R}_p}{c_p} \mathbf{x} \leq 1 \quad (18-1)$$

یک شرط کافی برای برقراری رابطه ۲-۱۷ این است که ماتریس زیر مثبت معین باشد.

$$\frac{\mathbf{R}_{p+1}}{c_{p+1}} - \frac{\mathbf{R}_p}{c_p}, \quad p = 1, \dots, k-1 \quad (19-1)$$

۴- جهت اطمینان از رعایت محدودیت (۱-۳)، محدوده ممکن شرایط اولیه بایستی زیر مجموعه  $G_1$  باشد.

$$X_0 \subset G_1 \quad (20-1)$$

در اینصورت اگر  $Z_p = G_p - G_{p+1}$ ، که در آن تفریق دو مجموعه بصورت زیر تعریف می گردد:

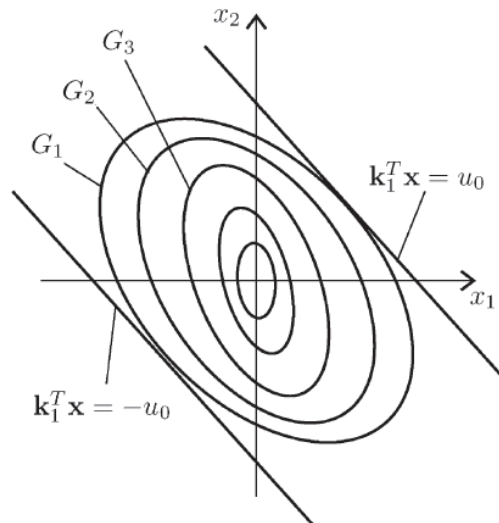
$$A - B = \{x: x \in A \wedge x \notin B\} \quad (21-1)$$

با تعریف تابع انتخاب

$$S(\mathbf{x}) = p \quad \text{if } \mathbf{x} \in Z_p \quad (22-1)$$

کنترل ساختار متغیر گسسته جهت کاهش زمان نشست سیستم طراحی شده است.

فرض شود در ابتدا شرایط اولیه در ناحیه  $Z_1$  باشد، در نتیجه تابع انتخاب، کنترل  $\mathbf{k}_1$  را در سیستم اعمال می کند. شرط دوم اطمینان می دهد که محدودیت (۳-۱) بدلیل اینکه  $Z_1$  زیرمجموعه ای از ناحیه لیاپانوف  $G_1$  است، رعایت می گردد. پس از گذشت مدتی، بدلیل پایداری مجانبی کنترل، اندازه بردار  $\mathbf{x}$  کوچک شده و از مجموعه  $Z_1$  به  $Z_2$  منتقل می گردد. تابع انتخاب در این حالت  $\mathbf{k}_2$  را به سیستم اعمال می نماید تا با افزایش اندازه سیگنال کنترل، بهره وری بیشتری از محدودیت (۳-۱) در راستای کاهش زمان نشست داشته باشد. فرایند فوق ادامه یافته تا به بزرگترین فیدبک انتخاب شده در شرط اول دست یافته شود. شکل ۶-۱ نحوه شبکه بندی در فضای دو بعدی را شرح می دهد.



شکل ۶-۱: نحوه شبکه بندی فضای شرایط اولیه



جهت طراحی معمولاً برای تامین شرط اول از (۱۰-۱) استفاده می شود و سپس در قدم اول بصورت خارج از خط<sup>۳۰</sup> ضرایب پسخورد کنترل کننده ها  $\mathbf{k}_i, i = 1, \dots, k$ ، محاسبه می گردد. پس از آن، جهت تامین شرط دوم، ابتدا معادله لیاپانوف حل می شود:

$$\hat{\mathbf{A}}_p^T \mathbf{R}_p + \mathbf{R}_p \hat{\mathbf{A}}_p = -\mathbf{Q} \quad (۲۳-۱)$$

که در آن  $\hat{\mathbf{A}}_p = \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}_p^T$  است. سپس مطابق رابطه (۱۵-۱)، برای استفاده بهینه از ظرفیت سیگنال کنترل،  $C_p$  در رابطه (۱۳-۱) را آنقدر بزرگ در نظر گرفته می شود که  $G_p$  بر خطوط  $u_0 = \mathbf{k}_p^T \mathbf{x}$  و  $u_0 = -\mathbf{k}_p^T \mathbf{x}$  مماس گردد. برای بررسی شرط سوم نیز از رابطه (۱۹-۱) استفاده می شود. می توان فرایند فوق الذکر را با توابع لیاپانوف دیگری نظیر نرم بردار حالت نیز پیاده سازی کرده و به نتایج مشابهی دست یافت [۳۶].

### ۱-۳-۲- کنترل ساختار متغیر نرم بوسیله توابع لیاپانوف ضمنی شبکه ای

برای تعمیم آنچه در بخش قبل گفته شد به کنترل ساختار متغیر نرم، کافی است شروط مطرح شده به شرح ذیل اصلاح گردند.

۱- خانواده کنترل کننده های پیوسته  $u = -\mathbf{k}^T(p)\mathbf{x}$  بنحوی انتخاب شوند که سیستم:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T(p))\mathbf{x} \quad (۲۴-۱)$$

به ازای تمامی مقادیر  $p$  پایدار بوده و با افزایش  $p$ ، سرعت سیستم افزایش یابد.

۲- برای هر کنترل کننده قسمت ۱، ناحیه لیاپانوف  $G(p)$  بایستی بنحوی انتخاب گردد که برای  $\mathbf{x} \in$

$$G(p) \text{ محدودیت } |u| = |\mathbf{k}_p^T \mathbf{x}| \leq u_0 \text{ برقرار باشد.}$$

<sup>30</sup> Off line

۳- نواحی لیاپانوف  $G(p)$  باید به نحوی شبکه ای شوند که

$$G(p + \varepsilon) \subset G(p) \quad (25-1)$$

برای طراحی کنترلی که شرایط فوق را برآورده سازد به طریق زیر عمل می شود:

تابع مناسب  $g(p, \mathbf{x})$  را بنحوی انتخاب می کنیم که:

$$G(p) = \{\mathbf{x} | g(p, \mathbf{x}) < 0\} \quad (26-1)$$

بدلیل پیوسته بودن در این حالت، قانون کنترل  $p$  فقط در مرز  $G(p)$  فعال می گردد. یعنی در

شرایطی که داشته باشیم:

$$g(p, \mathbf{x}) = 0 \quad (27-1)$$

اگر تعریف کنیم  $c(p)^{-1} = \frac{\mathbf{k}^T(p)\mathbf{R}^{-1}(p)\mathbf{k}(p)}{u_0^2}$  مطابق نتیجه قسمت قبل و انتخاب تابع

لیاپانوف بوسیله حل معادله لیاپانوف، یک انتخاب مناسب برای  $g(p, \mathbf{x})$  برابر است با:

$$g(p, \mathbf{x}) = c(p)^{-1} \cdot \mathbf{x}^T \mathbf{R}(p) \mathbf{x} - 1 \quad (28-1)$$

و شرط سوم نیز نظیر آنچه برای سیستم های ساختار متغیر گسسته شرح داده شد بررسی می

گردد. این روش با وجود اینکه در نگاه اول ساده بنظر می رسد، لیکن بدلیل الزام حل معادله لیاپانوف در

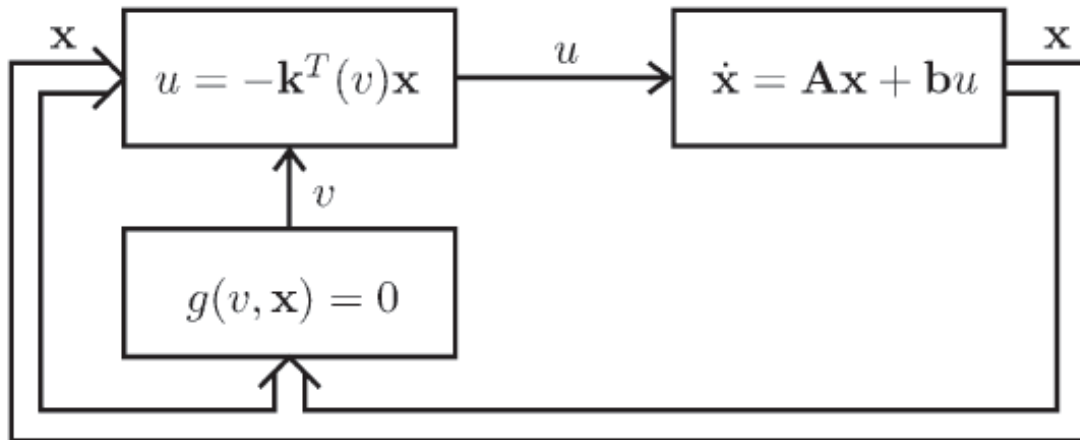
شرایط که به پارامتر  $p$  مرتبط است و (27-1) در هر مرحله، پیاده سازی مشکلی دارد. انتخاب رابطه

مناسب برای مسیر جابه جایی قطب ها و در نتیجه رابطه جبری مناسب برای  $\mathbf{k}(p)$  می تواند در ساده

سازی این روش بسیار موثر باشد. لیکن شرط سوم نیز پیاده سازی را با مشکل اساسی روبرو می کند، زیرا

شاید انتخاب مناسب  $\mathbf{k}(p)$  منجر به ناحیه های لیاپانوف شبکه بندی شده نگردد. شکل ۱-۷ بلوک

دیگرام این روش را نمایش می دهد.



شکل ۷-۱: کنترل ساختار متغیر نرم بوسیله توابع لیاپانوف شبکه ای

## ۱-۴- کنترل ساختار متغیر نرم دینامیکی

روشی که در این قسمت ارائه می شود حاصل پژوهش فرانک می باشد [۱۴] که در سالهای اخیر نیز مورد توجه قرار گرفته است [۳۱-۳۴]. فرض کنید متغیر انتخاب بصورت دینامیکی و طبق رابطه زیر باشد:

$$\dot{p} = f(p, \mathbf{x}) \quad (۲۹-۱)$$

معادله سیستم بصورت

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{bu} \quad (۳۰-۱)$$

تعریف شده و محدودیت

$$|u| \leq u_0 \quad (۳۱-۱)$$

بر سیگنال کنترل مفروض است و  $\mathbf{x}_0$  فضای ممکن شرایط اولیه باشد. قانون کنترل بصورت زیر پیشنهاد می می شود:

$$u = -(\mathbf{k} + p\mathbf{l})^T \mathbf{x} \quad (32-1)$$

که در آن بردار کنترل  $\mathbf{k}$  بنحوی انتخاب می گردد که  $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T$  پایدار باشد.  $p$  متغیر انتخاب کنترل ساختار متغیر بوده و  $\mathbf{l}$  برداری دلخواه باشد. با اعمال قانون کنترل (32-1) به سیستم (30-1) داریم:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T - p\mathbf{b}\mathbf{l}^T)\mathbf{x} = (\mathbf{A}_0 - p\mathbf{b}\mathbf{l}^T)\mathbf{x} \quad (33-1)$$

از معادله (29-1) و (33-1) سیستم افزوده (34-1) ایجاد می گردد:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{A}_0 - p\mathbf{b}\mathbf{l}^T)\mathbf{x} \\ f(p, \mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (34-1)$$

فرض کنید  $\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  نقطه تعادل سیستم باشد. اگر

$$V(p, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{R}\mathbf{x} + qp^2 \quad (35-1)$$

که در آن  $\mathbf{R}$  ماتریسی معین مثبت و  $q$  اسکالری مثبت است. باید تابع  $f(p, \mathbf{x})$  را بنحوی پیشنهاد دهیم تا  $V(p, \mathbf{x})$  یک تابع لیاپانوف برای (34-1) باشد. با مشتق گیری از  $V(p, \mathbf{x})$  داریم:

$$\dot{V}(p, \mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{R}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{R}\dot{\mathbf{x}} + 2qp\dot{p} < 0 \quad (36-1)$$

با استفاده از (34-1) داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V}(p, \mathbf{x}) &= \mathbf{x}^T (\mathbf{A}_0^T \mathbf{R} + \mathbf{R}\mathbf{A}_0)\mathbf{x} - p\mathbf{x}^T (\mathbf{l}\mathbf{b}^T \mathbf{R} + \mathbf{R}\mathbf{b}\mathbf{l}^T)\mathbf{x} + 2pqf(p, \mathbf{x}) \\ &< 0 \end{aligned} \quad (37-1)$$

که برابر است با:

$$\dot{V}(p, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^T (\mathbf{A}_0^T \mathbf{R} + \mathbf{R}\mathbf{A}_0)\mathbf{x} + 2p[-\mathbf{x}^T (\mathbf{R}\mathbf{b}\mathbf{l}^T)\mathbf{x} + qf(p, \mathbf{x})] < 0 \quad (38-1)$$

اگر تابع  $r(p, \mathbf{x})$  را جهت ساده سازی عبارت فوق بصورت زیر تعریف کنیم:

$$-\mathbf{x}^T(\mathbf{RbI}^T)\mathbf{x} + qf(p, \mathbf{x}) = -p.r(p, \mathbf{x}) \quad (39-1)$$

آنگاه:

$$\dot{V}(p, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^T(\mathbf{A}_0^T\mathbf{R} + \mathbf{R}\mathbf{A}_0)\mathbf{x} - 2p^2r(p, \mathbf{x}) < 0 \quad (40-1)$$

چون در ابتدا فرض کردیم که  $\mathbf{A}_0$  پایدار است، پس می توان برای یک ماتریس مثبت معین دلخواه  $\mathbf{Q}$  ماتریس مثبت معین  $\mathbf{R}$  را بگونه ای یافت که:

$$\mathbf{A}_0^T\mathbf{R} + \mathbf{R}\mathbf{A}_0 = -\mathbf{Q} \quad (41-1)$$

و در نتیجه قسمت اول (40-1) منفی می گردد، اگر تابع  $r(p, \mathbf{x})$  بنحوی انتخاب گردد که:

$$r(p, \mathbf{x}) > 0 \quad (42-1)$$

آنگاه پایداری مجانبی (34-1) ثابت می شود.

نحوه پیاده سازی کنترل ساختار متغیر نرم دینامیکی به شرح زیر است.

با استفاده از رابطه (39-1) می توان تابع انتخاب را بصورت زیر نوشت:

$$\dot{p} = f(p, \mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^T\mathbf{RbI}^T\mathbf{x} - p.r(p, \mathbf{x})}{q} \quad (43-1)$$

همچنین از شرط محدودیت سیگنال کنترل داریم:

$$-u_0 \leq -\mathbf{k}^T\mathbf{x} - p.I^T\mathbf{x} \leq u_0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{-u_0 - \mathbf{k}^T\mathbf{x}}{I^T\mathbf{x}} \leq p \leq \frac{u_0 - \mathbf{k}^T\mathbf{x}}{I^T\mathbf{x}} & \text{for } I^T\mathbf{x} > 0 \\ \frac{u_0 - \mathbf{k}^T\mathbf{x}}{I^T\mathbf{x}} \leq p \leq \frac{-u_0 - \mathbf{k}^T\mathbf{x}}{I^T\mathbf{x}} & \text{for } I^T\mathbf{x} < 0 \end{cases} \quad (44)$$

که به مفهوم ایجاد محدودیت در متغیر انتخاب بجای محدودیت سیگنال کنترل است. هنگامی که  $\mathbf{x}$  به صفر نزدیک شود، مخرج کسرها در رابطه (۴۴-۱) بسیار کوچک می شود و در نتیجه محدوده انتخاب  $p$  بسیار گسترده شده و امکان دارد مقادیر بزرگی برای  $p$  انتخاب شود که پیاده سازی فیزیکی آن مشکل باشد. برای رفع این مشکل، محدودیت زیر را به مسئله اضافه می کنیم:

$$-P \leq p \leq P \quad (۴۵-۱)$$

که در آن  $P$  مقداری بزرگ است که بسته به شرایط مسئله انتخاب می گردد. از ترکیب محدودیت های (۴۴-۱) و (۴۵-۱) نتیجه می شود:

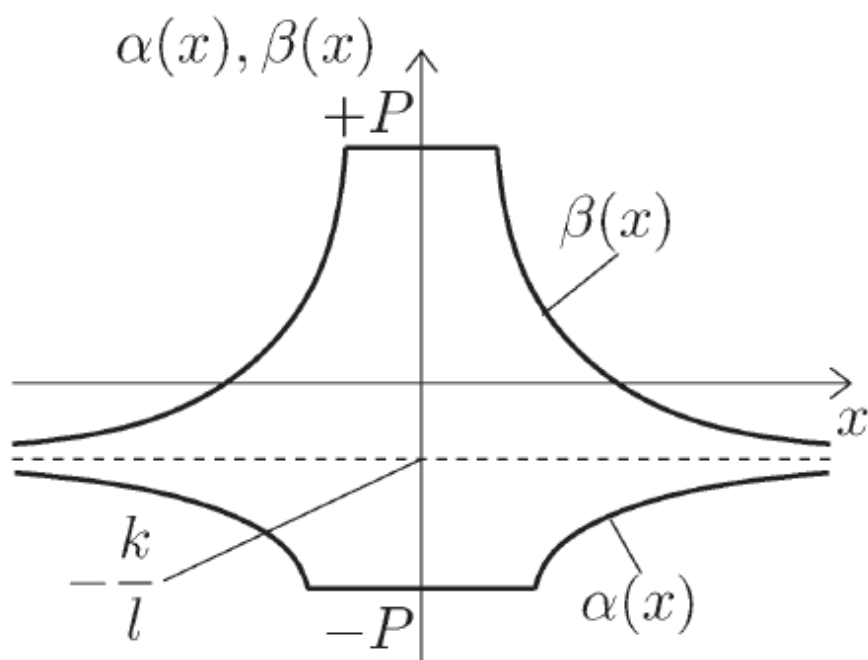
$$\alpha(\mathbf{x}) \leq p \leq \beta(\mathbf{x}) \quad (۴۶-۱)$$

که در آن:

$$\alpha(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{u_0 - \mathbf{k}^T \mathbf{x}}{I^T \mathbf{x}} & I^T \mathbf{x} \leq \frac{-u_0 + \mathbf{k}^T \mathbf{x}}{P} \\ -P & \frac{-u_0 + \mathbf{k}^T \mathbf{x}}{P} \leq I^T \mathbf{x} \leq \frac{u_0 + \mathbf{k}^T \mathbf{x}}{P} \\ \frac{-u_0 - \mathbf{k}^T \mathbf{x}}{I^T \mathbf{x}} & I^T \mathbf{x} \geq \frac{u_0 + \mathbf{k}^T \mathbf{x}}{P} \end{cases} \quad \begin{matrix} -۱) \\ (۴۷) \end{matrix}$$

$$\beta(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{-u_0 - \mathbf{k}^T \mathbf{x}}{I^T \mathbf{x}} & I^T \mathbf{x} \leq \frac{-u_0 - \mathbf{k}^T \mathbf{x}}{P} \\ P & \frac{-u_0 - \mathbf{k}^T \mathbf{x}}{P} \leq I^T \mathbf{x} \leq \frac{u_0 - \mathbf{k}^T \mathbf{x}}{P} \\ \frac{u_0 - \mathbf{k}^T \mathbf{x}}{I^T \mathbf{x}} & I^T \mathbf{x} \geq \frac{u_0 - \mathbf{k}^T \mathbf{x}}{P} \end{cases} \quad \begin{matrix} -۱) \\ (۴۸) \end{matrix}$$

شکل ۸-۱ نمودار توابع  $\alpha(\mathbf{x})$  و  $\beta(\mathbf{x})$  را برحسب  $\mathbf{x}$  نشان می دهد.

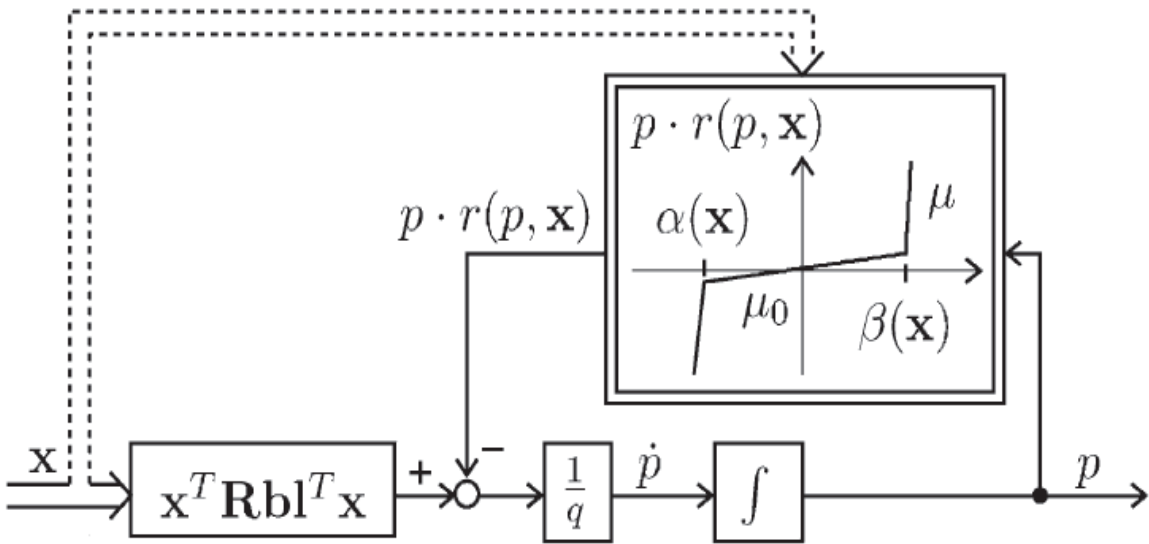


شکل ۸-۱: توابع  $\alpha(x)$  و  $\beta(x)$

یک انتخاب مناسب برای برای  $r(p, \mathbf{x})$  که شرط (۴۲-۱)، (۴۷-۱) و (۴۸-۱) را همزمان برآورده سازد را می توان بصورت زیر پیشنهاد داد:

$$r(p, \mathbf{x}) = \begin{cases} \mu \left( 1 - \frac{\alpha(\mathbf{x})}{p} \right) + \mu_0 \frac{\alpha(\mathbf{x})}{p} & p \leq \alpha(\mathbf{x}) \\ \mu_0 & \alpha(\mathbf{x}) \leq p \leq \beta(\mathbf{x}) \\ \mu \left( 1 - \frac{\beta(\mathbf{x})}{p} \right) + \mu_0 \frac{\beta(\mathbf{x})}{p} & p \leq \beta(\mathbf{x}) \end{cases} \quad \begin{matrix} -1) \\ (49) \end{matrix}$$

که در آن  $1 \gg \mu$  و  $0 < \mu_0 \ll 1$ . بلوک دیاگرام این روش کنترل ساختار متغیر نرم با تابع پیشنهادی (۴۹-۱) به شکل ۹-۱ است.



شکل ۹-۱: کنترل ساختار متغیر نرم دینامیکی [۱۴]

سوالی که ممکن است ذهن خواننده را به خود مشغول کند، اثبات تاثیر این روش در افزایش سرعت سیستم است. تاکنون با اینکه در تحقیقات مختلفی [۱۴, ۳۱, ۳۲, ۳۴] کنترل ساختار متغیر نرم دینامیکی استفاده و تاثیر آن بر افزایش سرعت سیستم گزارش شده است، هنوز اثبات ریاضی دقیقی در خصوص تاثیر کنترل ساختار متغیر نرم دینامیکی در افزایش سرعت سیستم ارائه نشده و محققین به استدلالی شهودی در خصوص تاثیر این روش در افزایش سرعت سیستم اکتفا نموده اند. در اینجا استدلال شهودی ارائه شده در [۱۴] به عنوان نمونه مورد بررسی قرار می گیرد.

فرض کنید در ابتدا سیستم از شرایط اولیه  $p \approx 0$  و  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$  شروع بکار کند، در نتیجه

$$p \cdot r(p, \mathbf{x}) \approx 0 \quad \text{و از (۴۳-۱) نتیجه می شود:}$$

$$\dot{p} \approx \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{R} \mathbf{b} \mathbf{I}^T \mathbf{x}}{q} \quad (۵۰-۱)$$

با توجه به شرایط اولیه غیرصفر حالت ها،  $\dot{p}$  غیر صفر است و در نتیجه  $|p|$  افزایش پیدا می کند.

با افزایش  $|p|$  از معادله ۴۰-۱ نتیجه می شود که  $\dot{V}$  منفی تر شده و لذا تابع لیاپانوف  $V$  با سرعت



بیشتری به سمت صفر، که همان نقطه تعادل سیستم است، حرکت می کند. در انتها اشاره می گردد، این روش کنترل بسیار وابسته به انتخاب بردار  $\mathbf{I}$  است. تا کنون هیچگونه روشی یا شرایطی برای انتخاب بردار  $\mathbf{I}$  ارائه نگردیده است، و در مراجع، بردار فوق با سعی و خطا انتخاب می گردد.

## ۱-۵- کنترل ساختار متغیر نرم با اشباع متغیر

مطابق قسمت های قبل فرض کنید معادله سیستم

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{bu} \quad (۵۱-۱)$$

بوده و سیگنال کنترل محدودیت  $|u| < u_0$  را داشته و فضای ممکن شرایط اولیه  $X_0$  باشد. سیگنال کنترل را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$u = u_1 + u_2 \quad (۵۲-۱)$$

که در آن:

$$u_1 = -\mathbf{k}_1^T \mathbf{x} \quad (۵۳-۱)$$

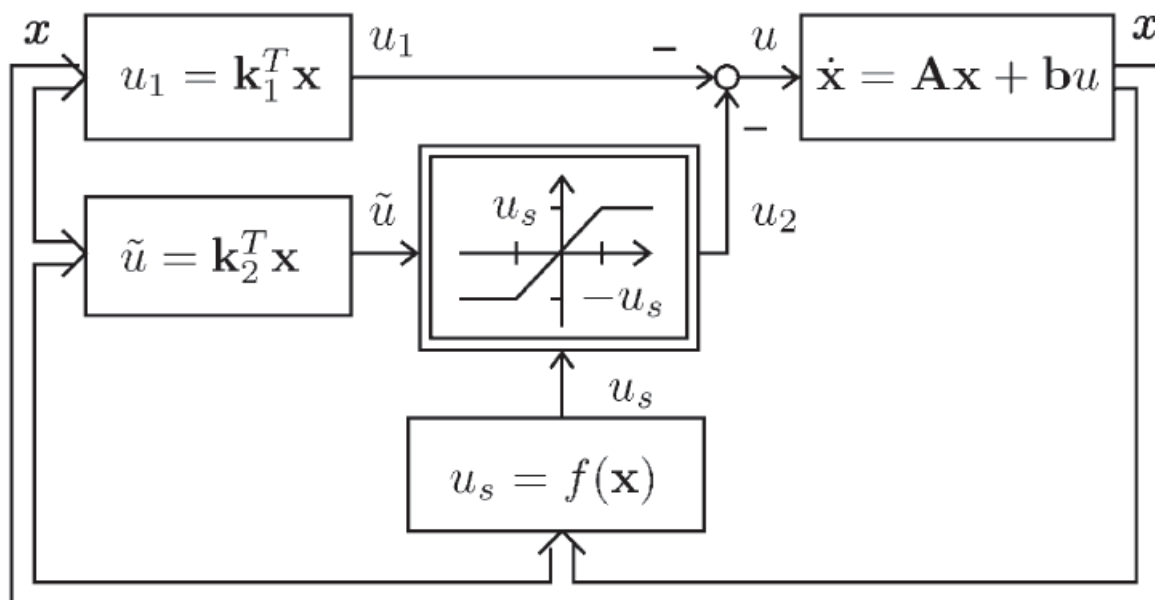
$$u_2 = -\text{sat}(u_s(\mathbf{x}), \tilde{u}), \quad \tilde{u} = \mathbf{k}_2^T \mathbf{x} \quad (۵۴-۱)$$

که در آن تابع اشباع بصورت زیر تعریف می گردد:

$$\text{sat}(u_s(\mathbf{x}), \tilde{u}) = \begin{cases} u_s(\mathbf{x}) & \tilde{u} \geq u_s(\mathbf{x}) \\ \tilde{u} & |\tilde{u}| < u_s(\mathbf{x}) \\ -u_s(\mathbf{x}) & \tilde{u} \leq -u_s(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (۵۵-۱)$$

برای مقادیر بزرگ  $\mathbf{x}$ ،  $u_s(\mathbf{x}) = 0$  انتخاب می کنیم در نتیجه  $u_2 = 0$  و  $u = u_1$ . پس بایستی  $\mathbf{k}_1$  طوری طراحی می گردد که برای مقادیر بزرگ  $\mathbf{x} \in X_0$  محدودیت  $|\mathbf{k}_1^T \mathbf{x}| \leq u_0$  برقرار باشد. اما با گذشت زمان و کاهش  $\mathbf{x}$ ، دیگر کنترل  $\mathbf{k}_1$  از تمام ظرفیت مجاز استفاده از سیگنال کنترل استفاده نکرده

و بایستی از کنترل  $u_2$  جهت افزایش سرعت بهره برد. لذا  $u_s(\mathbf{x}) > 0$  انتخاب شده و روند کاهش  $\mathbf{x}$  ادامه پیدا می کند تا  $|\tilde{u}| = |\mathbf{k}_2^T \mathbf{x}| < u_s(\mathbf{x})$  که در این حالت  $u = -(\mathbf{k}_1^T + \mathbf{k}_2^T)\mathbf{x}$  خواهد شد. در این روش کنترل  $\mathbf{k}_1^T + \mathbf{k}_2^T$  بایستی پایدار بوده و  $\mathbf{k}_1^T + \mathbf{k}_2^T$  بسیار سریع تر از حالتی باشد که  $\mathbf{k}_1^T$  بتنهایی عمل کند. شکل ۱۰-۱ نشان دهنده ساختار کنترلی توضیح داده شده است.



شکل ۱۰-۱: کنترل ساختار متغیر نرم با اشباع متغیر [۱۴]

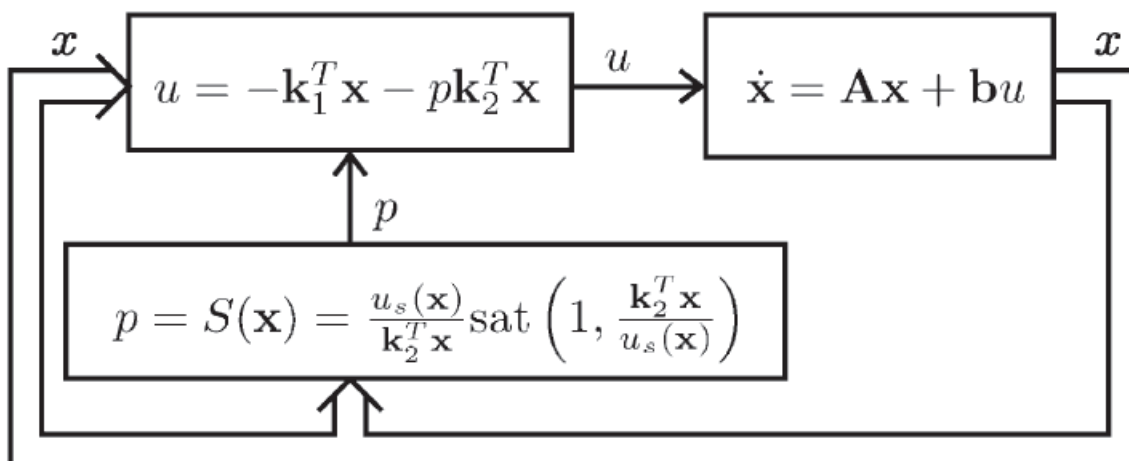
می توانیم روابط ۵۲-۱، ۵۳-۱ و ۵۴-۱ را بصورت زیر باز نویسی کنیم:

$$u = -\mathbf{k}_1^T \mathbf{x} - p \mathbf{k}_2^T \mathbf{x} \quad (۵۶-۱)$$

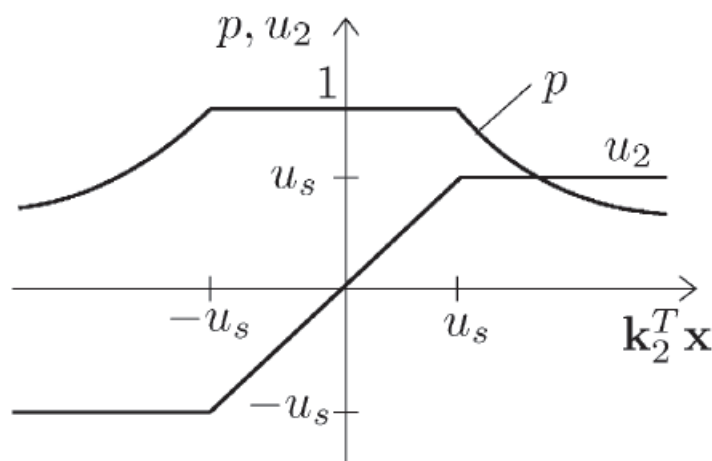
که در آن:

$$p = \frac{u_s(\mathbf{x})}{\mathbf{k}_2^T \mathbf{x}} \text{sat}\left(1, \frac{\mathbf{k}_2^T \mathbf{x}}{u_s(\mathbf{x})}\right) \quad (۵۷-۱)$$

شکل ۱۱-۱ ساختار اصلاح شده با روابط ۵۶-۱ و ۵۷-۱ را نشان می دهد و در شکل ۱۲-۱ تغییرات  $p$  و  $u$  بر حسب  $\mathbf{x}$  رسم شده است.



شکل ۱۱-۱: کنترل ساختار متغیر نرم با اشباع متغیر بازنویسی شده [۱۴]



شکل ۱۲-۱: تغییرات  $p$  و  $u$  بر حسب  $\mathbf{x}$

اعمال قانون کنترل ۵۶-۱ به سیستم ۵۱-۱، نتیجه می دهد:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}_1^T - p\mathbf{b}\mathbf{k}_2^T)\mathbf{x} = \hat{\mathbf{A}}(p)\mathbf{x} \quad (۵۸-۱)$$

در اینصورت بایستی تنها ثابت کنیم که سیستم با روابط ۲-۵۵، ۲-۵۶ پایدار است و همچنین سیستم محدودیت سیگنال ورودی را برآورده می نماید. اثبات شده است [۳۷] سیستم ۱-۵۸ در صورتی برای  $0 \leq p \leq 1$  پایدار است که در معادله زیر:

$$\widehat{\mathbf{A}}(p)^T \mathbf{R} + \mathbf{R} \widehat{\mathbf{A}}(p) = -\mathbf{Q}(p) \quad (59-1)$$

در صورتیکه ماتریس  $\mathbf{R}$  مثبت معین باشد، برای  $p = 0$  و  $p = 1$ ، ماتریس  $\mathbf{Q}(p)$  مثبت معین گردد.

جهت بررسی محدودیت سیگنال کنترل داریم:

$$|u_1 + u_2| \leq u_0 \quad (60-1)$$

محدودیت ۱-۶۰ برقرار است اگر:

$$|u_1| + |u_2| \leq u_0 \quad (61-1)$$

فرض کنید ناحیه لیاپانوف برای حصول اطمینان از اینکه با کنترل  $\mathbf{k}_1^T \mathbf{x}$ ، محدودیت سیگنال ورودی حفظ شود توسط رابطه زیر تعریف گردد:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{R} \mathbf{x} \leq v(\mathbf{x}) \quad (62-1)$$

در این صورت حداکثر اندازه سیگنال  $u_1 = \mathbf{k}_1^T \mathbf{x}$ ، در مرز این ناحیه اتفاق می افتد. لذا حداکثر اندازه  $u_1$  از حل مسئله بهینه سازی زیر بدست می آید:

$$\max |\mathbf{k}_1^T \mathbf{x}|, \quad \text{subject to } \mathbf{x}^T \mathbf{R} \mathbf{x} = v(\mathbf{x}) \quad (63-1)$$

که پاسخ آن برابر است با:

$$\max |\mathbf{k}_1^T \mathbf{x}|_{\mathbf{x}^T \mathbf{R} \mathbf{x} = v(\mathbf{x})} = \sqrt{v(\mathbf{x}) \mathbf{k}_1^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{k}_1} \quad (64-1)$$

از طرف دیگر از تعریف تابع  $sat(\cdot)$  می دانیم که  $|u_2| \leq u_s(\mathbf{x})$  پس رابطه ۱-۶۱ را می توان بصورت زیر نوشت:

$$u_s(\mathbf{x}) + \sqrt{v(\mathbf{x})\mathbf{k}_1^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{k}_1} \leq u_0, \quad v(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{R}\mathbf{x} \quad (۶۵-۱)$$

در نتیجه یک انتخاب مناسب برای  $u_s(\mathbf{x})$  رابطه زیر است:

$$u_s(\mathbf{x}) = u_0 - \sqrt{v(\mathbf{x})\mathbf{k}_1^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{k}_1}, \quad v(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{R}\mathbf{x} \quad (۶۶-۱)$$

که در آن  $\mathbf{R}$  پاسخ معادله لیاپانوف سیستم حلقه بسته با کنترل  $\mathbf{k}_1$  می باشد و همانگونه که نشان داده شد، شرط پایداری و محدودیت سیگنال ورودی برآورده می گردد. اخیراً توسعه این روش بوسیله شبکه های عصبی گزارش شده است [۳۸].

## ۱-۶- معایب روش های مرسوم

در این بخش دلایل ضرورت اصلاح روشهای کنترل ساختار متغیر و اهداف این رساله دکتری ارائه می گردد. همانگونه که توضیح داده شد، بهبود سرعت تنظیم یک سیستم کنترلی همواره مطلوب است و مانع اصلی افزایش سرعت در سیستم ها، محدودیت های طراحی در محرک است. کنترل بنگ بنگ پاسخ بهینه این مسئله را ارائه می نماید. لیکن، سیگنال گسسته کنترل، تلاش کنترلی مضاعف و حساسیت بالای کنترل بنگ بنگ به عدم قطعیت ها، باعث مطرح شدن و پیشرفت در کنترل ساختار متغیر شده است. روش های مرسوم که در بخش های قبلی معرفی گردیده اند، با وجود اینکه در برخی از مسائل کارآمد می باشند، لیکن بررسی های انجام شده در مطالعات اولیه این رساله دکتری، نشان می دهد هر روش کاستی مربوط به خود را دارد و نیاز به بهبود روش های فوق و یا ارائه روشی نوین جهت رفع اشکالات احساس می گردد. ضمناً تا کنون کنترل ساختار متغیر نرم به سیستم های غیر خطی توسعه

داده نشده است و بکارگیری کنترل ساختار متغیر نرم در سیستم های غیرخطی، می تواند موضوعی مناسب برای تحقیق باشد. در این بخش با ارائه مثال به بررسی اشکالات روش های مرسوم اشاره می شود.

## ۱-۶-۱- معایب کنترل ساختار متغیر نرم بوسیله توابع لیاپانوف شبکه ای

سیستم کنترل فضاپیما که در [۳۵] معرفی شده است را در نظر بگیرید:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (۶۷-۱)$$

فرض کنیم سیستم محدودیت ورودی کنترل و شرایط اولیه زیر را دارد:

$$|u| < 10 \quad (۶۸-۱)$$

$$|x_1(0)| < 1, \quad |x_2(0)| < 1 \quad (۶۹-۱)$$

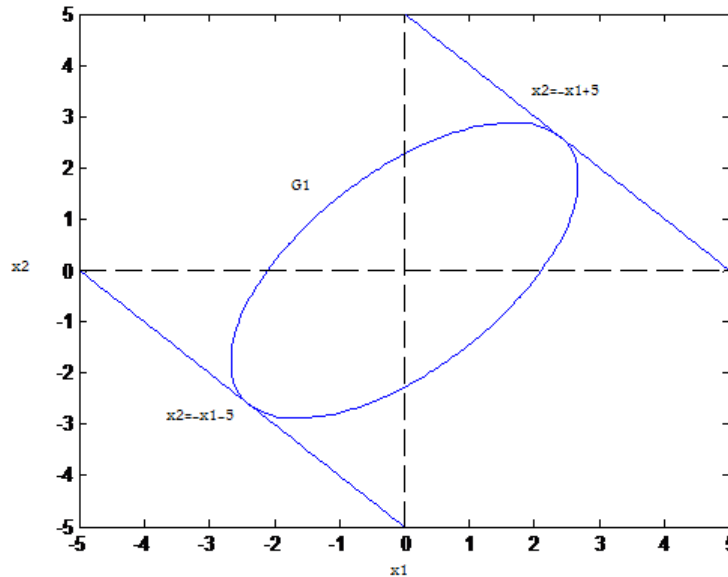
فرض کنیم با کنترل فیدبک حالت قصد داریم در زمان کوتاه، متغیرهای حالت به نقطه تعادل برسند. برای آنکه مطمئن شویم در کل زمان کنترل، سیگنال کنترل محدودیت ۱-۶۸ را رعایت می کند می توان الگوریتم زیر را انجام داد.

### الگوریتم ۱-۱:

- بردار کنترل  $\mathbf{k}$  را بنحوی انتخاب شود که سیستم حلقه بسته پایدار شود.
- معادله لیاپانوف  $\mathbf{A}^T \mathbf{R} + \mathbf{R} \mathbf{A} = -\mathbf{Q}$  برای سیستم حلقه بسته حل شده و ماتریس مثبت معین  $\mathbf{R}$  تعیین گردد. (در این مثال ماتریس  $\mathbf{Q}$ ، همانی با بعد مناسب انتخاب شده است.)
- از رابطه ۱-۱۴، حداکثر ناحیه لیاپانوفی که محدودیت ۱-۶۸ را رعایت می کند تعیین گردد.
- بررسی شود که ناحیه شرایط اولیه، زیر مجموعه ناحیه لیاپانوف هست یا خیر. این عمل در مسائل دو و یا سه بعدی با رسم ناحیه لیاپانوف که در قسمت قبل بدست آمده قابل انجام است و در

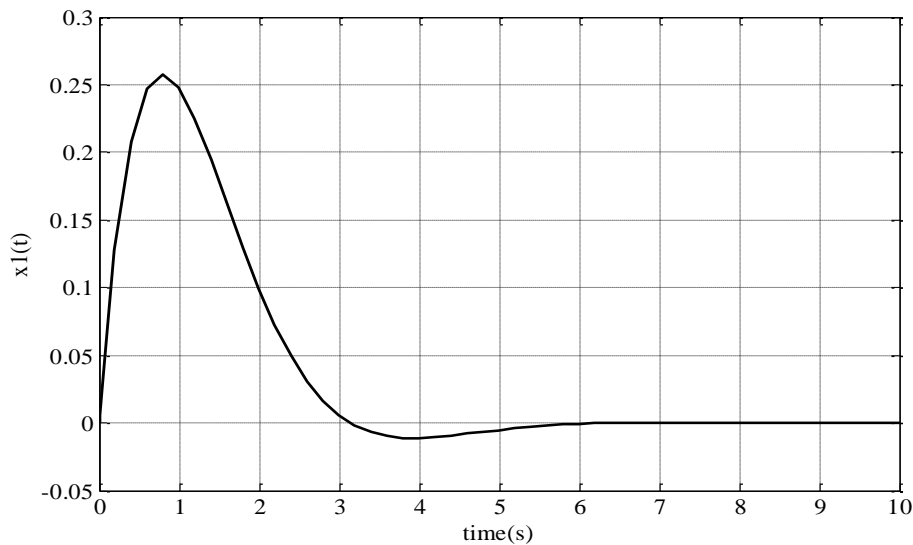
مسائل با ابعاد بزرگتر، باید از روش های تحلیلی استفاده نمود. اگر جواب مثبت باشد،  $\mathbf{k}$  کنترلی قابل قبول است و در غیر اینصورت بایستی با  $\mathbf{k}$  کوچکتر، مراحل تکرار شود.

با توجه به الگوریتم ۱-۱،  $\mathbf{k}^T = [2, 2]$  کنترلی مناسب برای سیستم با محدودیت ۲-۳ است.

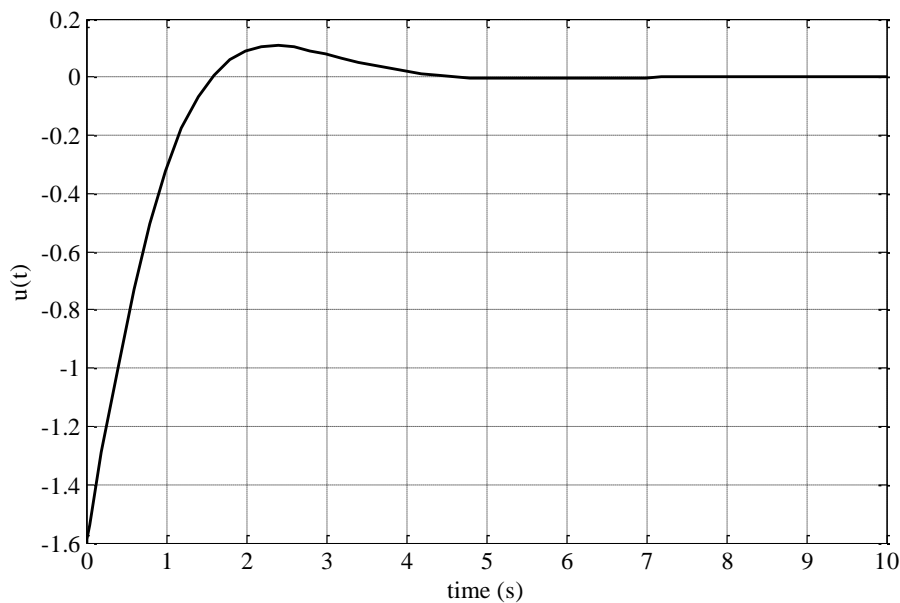


شکل ۱-۱۳: ناحیه لیاپانوف و محدوده  $|\mathbf{k}^T \mathbf{x}| < |\mathbf{u}_0|$  برای  $\mathbf{k}^T = [2, 2]$

از شکل ۱-۱۳ نتیجه می شود با توجه به اینکه پایداری سیستم نتیجه می دهد  $\dot{V} < 0$  پس  $G_1$  یک مجموعه پایاست، لذا اطمینان حاصل می شود که کنترل  $\mathbf{k}^T = [2, 2]$  محدودیت ۱-۶۸ را برای تمامی زمان ها رعایت می کند. شکل ۱-۱۴ و ۱-۱۵ پاسخ زمانی حالت های سیستم با کنترل فوق الذکر پس از اغتشاش اولیه  $\mathbf{x}(0)^T = [0, 0.8]$  نشان می دهد.



شکل ۱-۱۴: خروجی سیستم ۶۷-۱ با کنترل  $\mathbf{k}^T = [2, 2]$  تحت اغتشاش اولیه  $\mathbf{x}(0)^T = [0, 0.8]$



شکل ۱-۱۵: سیگنال کنترل سیستم ۶۷-۱ با کنترل  $\mathbf{k}^T = [2, 2]$  تحت اغتشاش اولیه  $\mathbf{x}(0)^T = [0, 0.8]$

جهت پیاده سازی کنترل ساختار متغیر ناپیوسته بوسیله توابع لیاپانوف شبکه ای مطابق فرایند

مطرح شده در بخش ۱-۳-۱ عمل می شود فرض کنیم:

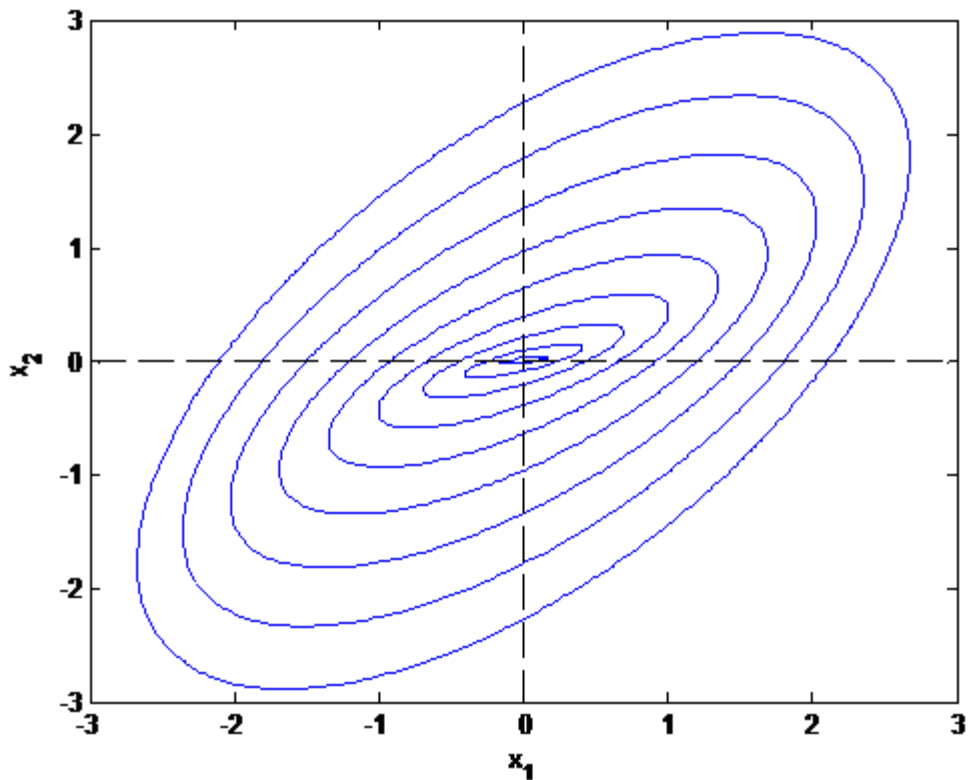
$$\mathbf{k}(p) = \begin{bmatrix} 2p^{-2} \\ 2p^{-1} \end{bmatrix}, \quad p = \{1, 0.9, 0.8, 0.7, 0.6, 0.5, 0.4, 0.3, 0.2, 0.1\} \quad (۷۰-۱)$$



در ابتدا برای تمامی کنترل کننده های ۱-۷۰، معادله لیاپانوف حل می شود. اندیس  $i$  در  $\mathbf{R}_i$  و  $c_i$  شمارنده  $p$  از 1 تا 0.1 است. و  $c_i$  از رابطه ۱-۱۵ حاصل می شود. همانگونه که ذکر شد، جهت اینکه فضای حالت شبکه بندی شده باشد، بایستی ماتریس

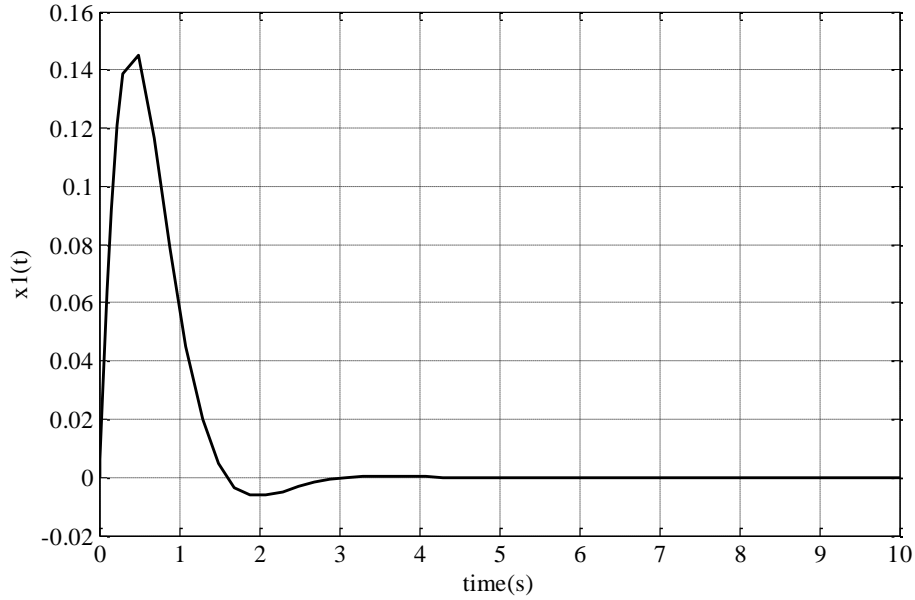
$$\frac{\mathbf{R}_{i+1}}{c_{i+1}} - \frac{\mathbf{R}_i}{c_i} \quad (۷۱-۱)$$

معین مثبت باشد. در این مثال این شرایط برقرار است.

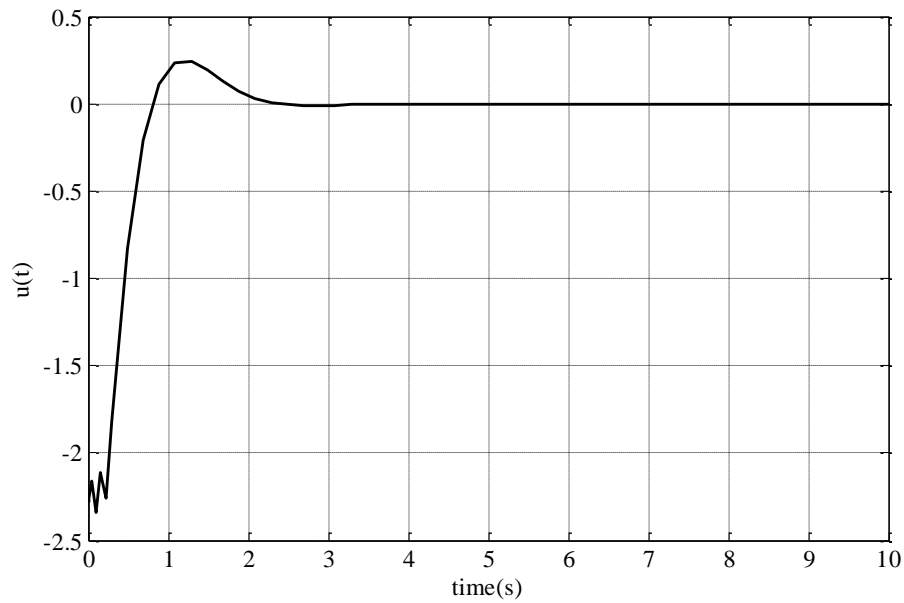


شکل ۱-۱۶: فضای حالت شبکه بندی شده

در شکل های ۱-۱۷ و ۱-۱۸، پاسخ سیستم به اغتشاش مشابه، توسط کنترل ساختار متغیر بوسیله توابع لیاپانوف شبکه ای آورده شده است.



شکل ۱۷-۱: خروجی سیستم ۶۷-۱ با کنترل ساختار متغیر توابع لیاپانوف شبکه ای، اغتشاش اولیه  $\mathbf{x}(0)^T = [0, 0.8]$



شکل ۱۸-۱: سیگنال کنترل سیستم ۶۷-۱ با کنترل ساختار متغیر توابع لیاپانوف شبکه ای، اغتشاش اولیه  $\mathbf{x}(0)^T = [0, 0.8]$

همانگونه که مشخص است، استفاده از این روش در کاهش زمان نشست موثر بوده است. لیکن موارد زیر جزو اشکالات اساسی این راهکار است.

- همانگونه که در شکل ۱۸-۱ مشاهده می گردد، سیگنال کنترل تا حد ممکن، از محدودیت ۱-۶۸ استفاده نکرده است و در بسیاری از لحظات، فاصله اندازه سیگنال کنترل با حداکثر مجاز، زیاد است. دلیل این اشکال، ساختار محافظه کارانه تابع انتخاب است، همانگونه که در شکل ۱-۱۳ نیز مشاهده می شود، حد مماس تنها در دو نقطه مرز  $G_1$  برابر با حداکثر مقدار مجاز می شود و حتی در سایر نقاط مرزی  $G_1$  سیگنال کنترل مقداری کمتر از حداکثر حد مجاز دارد.
- شرط شبکه ای شدن ناحیه های لیاپانوف در بسیاری از مسائل محدود کننده است. به عنوان مثال سیستم کنترل ارتفاع زیر دریایی که در [۱۴] معرفی شده است معادلاتی بصورت زیر دارد:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -0.005 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (۷۲-۱)$$

فرض کنیم در ابتدا می خواهیم مقادیر ویژه را به مقادیر ۱-۷۳ منتقل کنیم:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -0.00369 \\ \lambda_{2,3} &= -0.00246 \pm j0.00492 \end{aligned} \quad (۷۳-۱)$$

سطر انتهایی ماتریس ضرایب سیستم حلقه بسته در این حالت برابر است با:

$$\hat{\mathbf{a}}^T = [1.1165 * 10^{-7}, 4.8413 * 10^{-5}, 8.6100 * 10^{-3}] \quad (۷۴-۱)$$

و بصورت مشابه مثال قبل می توان کنترل را بصورت زیر نوشت.

$$\mathbf{k}_1^T = [1.1165 * 10^{-7}, 4.8413 * 10^{-5}, 3.6100 * 10^{-3}] \quad (۷۵-۱)$$

می توان نشان داد اگر انتخاب کنیم:

$$\mathbf{k}_2^T = [10^{-8}, 5 * 10^{-5}, 4 * 10^{-3}] \quad (۷۶-۱)$$

با وجود اینکه اندازه  $\mathbf{k}$  افزایش یافته است و همچنان به کنترلی پایدار منجر می گردد، لیکن شرط

شبکه ای شدن برقرار نیست و ماتریس  $\frac{P_{i+1}}{c_{i+1}} - \frac{P_i}{c_i}$  مثبت معین نمی گردد.

- الگوریتم پیاده سازی برای کنترل ساختار متغیر نرم بسیار پیچیده و بواسطه حل مسائل بهینه

سازی، زمانبر است، لذا در کاربردهای عملی، بایستی بصورت زمان گسسته پیاده سازی گردد

[۱۴]. اجرای زمان گسسته این سیستم به ناپیوستگی سیگنال کنترل می انجامد که نامطلوب

است.

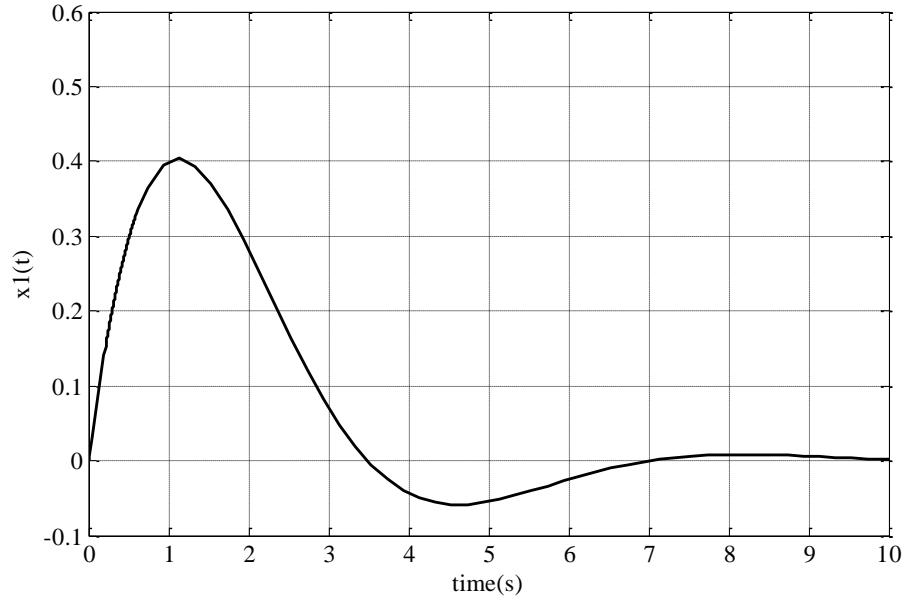
### ۱-۶-۲- معایب کنترل ساختار متغیر نرم دینامیکی

سیستم کنترل فضاپیما که در ۱-۶۷ مطرح شد را توسط تئوری کنترل ساختار متغیر نرم

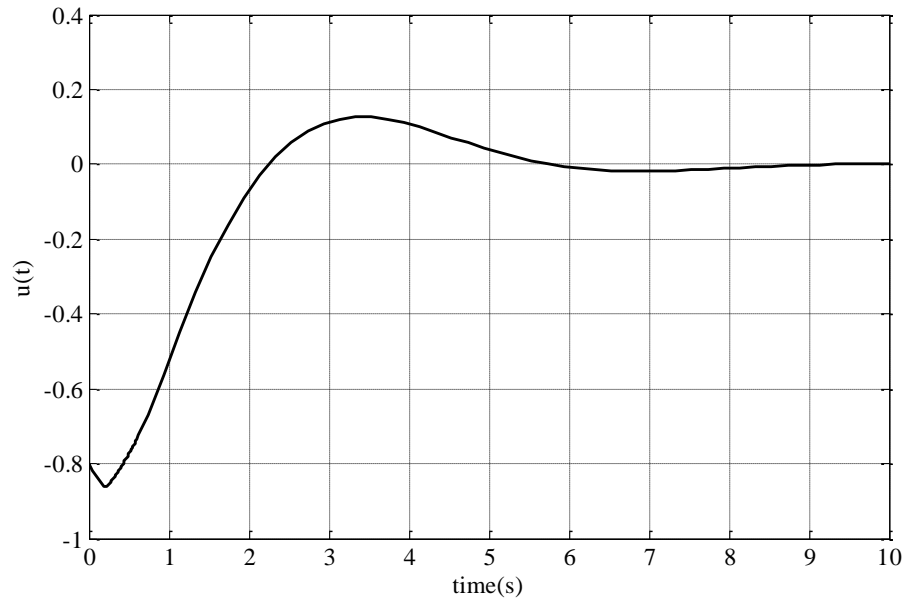
دینامیکی، با همان فرضیات و تابع  $r(p, X)$  پیشنهادی در ۱-۴۹، در محیط سیمولینک متلب مدل می

کنیم. در ابتدا فرض می شود  $q = 1$  و  $\mathbf{I}^T = [1, 1]$  در این حالت شکل های ۱-۱۹ و ۱-۲۰، خروجی

و سیگنال کنترل را نشان می دهند.



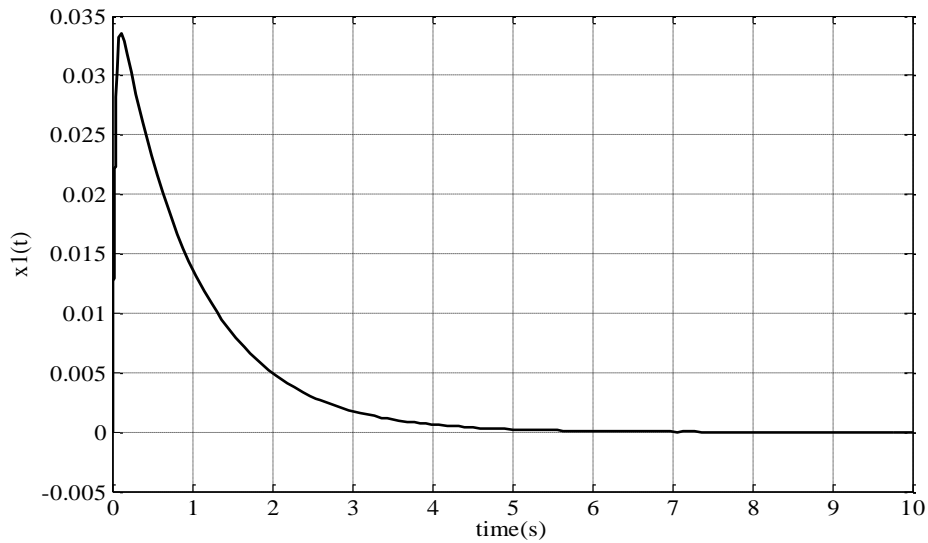
شکل ۱-۱۹: خروجی سیستم ۱-۶۷ با کنترل ساختار متغیر دینامیکی، اغتشاش اولیه  $\mathbf{x}(0)^T = [0, 0.8]$



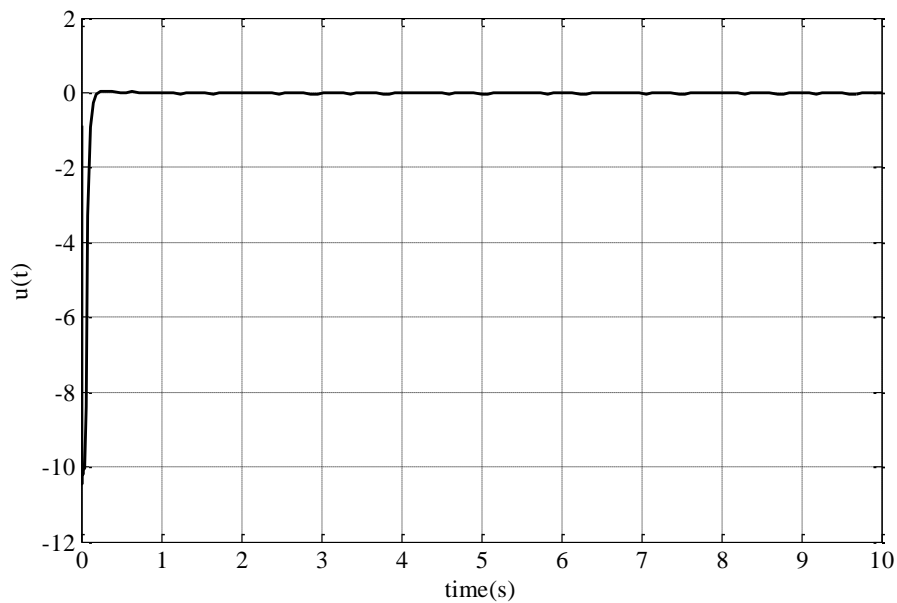
شکل ۱-۲۰: سیگنال کنترل سیستم ۱-۶۷ با کنترل ساختار متغیر دینامیکی، اغتشاش اولیه  $\mathbf{x}(0)^T =$

$[0, 0.8]$

سپس فرض می شود  $q = 1$  و  $\mathbf{I}^T = [100, 100]$  در این حالت شکل های ۲۱-۱ و ۲۲-۱، خروجی و سیگنال کنترل را نشان می دهند.



شکل ۲۱-۱: خروجی سیستم ۶۷-۱ با کنترل ساختار متغیر دینامیکی، اغتشاش اولیه  $\mathbf{x}(0)^T = [0, 0.8]$



شکل ۲۲-۱: سیگنال کنترل سیستم ۶۷-۱ با کنترل ساختار متغیر دینامیکی، اغتشاش اولیه  $\mathbf{x}(0)^T =$

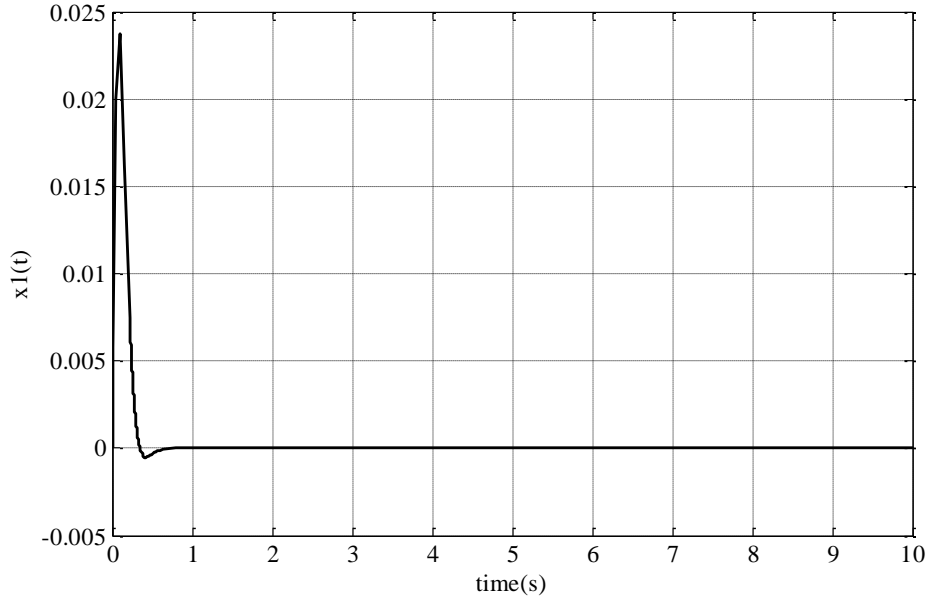
$$[0, 0.8]$$

با توجه به نتایج حاصل از شبیه سازی های فوق، موارد زیر از جمله مهمترین ایرادات روش کنترل ساختار متغیر نرم دینامیکی می باشد.

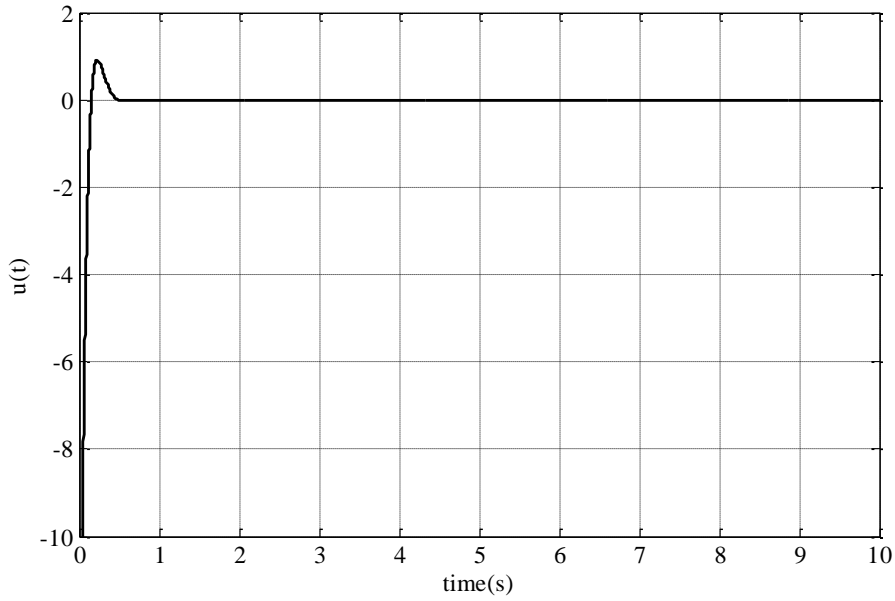
- همانگونه که در شکل ۱-۱۹ نشان داده شده است، پاسخ در این حالت در مقایسه با کنترل فیدبک حالت عادی (شکل ۱-۱۴) زمان نشست بیشتری دارد! این شبیه سازی نشان می دهد همانگونه که در فصل دوم نیز به اختصار ذکر گردید، تاثیر این روش در کاهش زمان نشست ثابت شده نیست.
- در مقایسه شکل ۱-۱۹ و ۱-۲۱، مشخص می شود این روش بشدت وابسته به انتخاب بردار  $\mathbf{I}$  است. تاکنون روشی جهت انتخاب بهینه بردار  $\mathbf{I}$  در مقالات ارائه نشده و این بردار با سعی و خطا تعیین گردیده است که مناسب نمی باشد.
- در صورتیکه بردار  $\mathbf{I}$  با سعی و خطا برای یک اغتشاش خاص مشخص گردد، آن بردار الزامی برای ارائه پاسخ مناسب برای شرایط اولیه ممکن دیگر ندارد که ایرادی بسیار محدود کننده است.
- از نظر ریاضی، مفاهیم ارائه شده در این روش نسبتاً ثقیل است و بسختی مورد قبول مهندسين قرار می گیرد. مخصوصاً پارامتر انتخاب  $p$  و نحوه انتخاب شدن و تاثیر آن ناملموس است.

### ۱-۶-۳- اشکالات کنترل ساختار متغیر نرم با اشباع متغیر

مجدداً سیستم کنترل فضاپیما را در نظر بگیرید. با استفاده از مطالب بخش ۱-۵ این سیستم، با فرض  $\mathbf{k}_1^T = [2,2]$  و  $\mathbf{k}_2^T = [200,20]$ ، شبیه سازی گردید. شکل های ۱-۲۳ و ۱-۲۴، خروجی و سیگنال کنترل را نشان می دهند.



شکل ۲۳-۱: خروجی سیستم ۱-۶۷ با کنترل ساختار متغیر با اشباع متغیر، اغتشاش اولیه  $\mathbf{x}(0)^T = [0, 0.8]$



شکل ۲۴-۱: سیگنال کنترل سیستم ۱-۶۷ با کنترل ساختار متغیر با اشباع متغیر، اغتشاش اولیه  $\mathbf{x}(0)^T = [0, 0.8]$



این روش نسبت به دو روش قبلی جامع تر می باشد و پاسخ مناسب تری دارد. مشکل این روش، که بر اهمیت نیز می باشد، نزدیک شدن مقدار  $\mathbf{k}_2^T \mathbf{x}$  در تابع انتخاب به صفر پس از تنظیم است که منجر به نامحدود شدن کسر ضرب شونده در تابع اشباع می گردد. در صورتیکه که حد بالایی برای این کسر نیز در نظر گرفته شود، اثبات پایداری و حفظ شرط محدودیت سیگنال کنترل مختل می گردد. علاوه بر آن، بدلیل رابطه محافظه کارانه، احتمالاً از حداکثر سیگنال کنترل استفاده نمی شود.

#### جدول ۱-۲: معایب روشهای مرسوم

کنترل ساختار متغیر نرم بوسیله توابع لیاپانوف شبکه ای	- پیاده سازی مشکل - عدم استفاده از حداکثر مجاز سیگنال ورودی بدلیل رابطه محافظه کارانه - شرط شبکه ای شدن در برخی مسائل محدود کننده است
کنترل ساختار متغیر دینامیکی	- الگوریتم پیچیده - وابستگی زیاد به بردار $\mathbf{I}$ در حصول پاسخ مناسب و عدم وجود راه حل تحلیلی جهت انتخاب مناسب بردار $\mathbf{I}$ - عدم اثبات تاثیر در کاهش زمان نشست
کنترل ساختار متغیر نرم با اشباع متغیر	- نزدیک شدن مقدار $\mathbf{k}_2^T \mathbf{x}$ در تابع انتخاب به صفر پس از تنظیم - عدم استفاده از حداکثر مجاز سیگنال ورودی بدلیل رابطه محافظه کارانه

### ۱-۷- جمع بندی

در این فصل پس از معرفی سیستم های کنترل ساختار متغیر و تاریخچه آن، روش های کنترل ساختار متغیر نرم که تا کنون در مراجع معرفی شده است مورد بررسی قرار گرفت. با شبیه سازی روش های

مطرح شده به روی سیستم کنترل ماهواره، نواقص هر روش مشخص گردید که نشان می دهد ارائه روشی نوین کنترل ساختار متغیر نرم با هدف بهبود روش های پیشین، موضوعی جذاب جهت پژوهش می باشد.



## **فصل دوم:**

**کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی برای  
سیستم‌های خطی یک ورودی یک خروجی**

## ۲-۱- مقدمه

در این فصل، روش کنترل ساختار متغیر نرم نوینی که کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی<sup>۳۱</sup> نامگذاری شده است برای سیستم های خطی یک ورودی و یک خروجی پیشنهاد می گردد [۳۹]. این روش در سیستم هایی که اندازه سیگنال کنترل محدود است، هنگامی که پاسخ سریع و سیگنال کنترل پیوسته مطلوب باشد کاربرد دارد. بطور خلاصه این روش تعمیمی از روش جایگذاری قطب<sup>۳۲</sup> است [۴۰]. ابتدا مسیرهایی شعاعی برای قطب های سیستم حلقه بسته در نظر گرفته می شود سپس با حل یک مسئله بهینه سازی روی خط، جایابی قطب با هدف یافتن مجموعه قطب های حلقه بسته ای بروی مسیر پیشنهادی - که علاوه بر رعایت محدودیت سیگنال ورودی، سریع ترین پاسخ را داشته باشند؛ انجام می گردد. این تغییرات در روش جایابی قطب، باعث می شود که سیستم خطی نامتغیر با زمان<sup>۳۳</sup> تبدیل به سیستمی خطی متغیر با زمان گردد<sup>۳۴</sup>. اثبات پایداری سیستم های خطی تغییر پذیر با زمان پیچیده تر از سیستم های خطی نامتغیر با زمان است و بطور کلی حتی این حقیقت که قطب های سیستم حلقه بسته بروی مسیری در نیمه سمت چپ صفحه فاز تغییر می کنند، دلیل محکمی برای پایداری سیستم حلقه بسته نمی باشد [۴۱]. در این فصل جهت اثبات پایداری از لم کالمن یا کوبویچ پوپوف و محک قدرتمند دایره<sup>۳۵</sup> جهت اثبات پایداری سیستم حلقه بسته استفاده شده است [۴۱].

## ۲-۲- معرفی مسئله

سیستم یک ورودی یک خروجی کنترل پذیر در فضای حالت با معادلات دیفرانسیل زیر در نظر بگیرید

---

<sup>31</sup> Radial pole path SVSC

<sup>32</sup> Pole Placement

<sup>33</sup> Linear time invariant

<sup>34</sup> Linear time varying

<sup>35</sup> Circle criterion

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{bu} \quad (1-2)$$

که در آن  $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n, u \in \mathcal{R}$  و سیگنال کنترل دارای محدودیت

$$|u| \leq u_0 \quad (2-2)$$

می باشد. بدون از دست رفتن کلیت مسئله، فرض می شود ۱-۲ در فرم استاندارد کنترل پذیر است یا می

تواند به فرم کنترل پذیری تبدیل شود. بنابراین ماتریس  $\mathbf{A}$  و  $\mathbf{b}$  بصورت زیر فرض می شوند

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3-2)$$

فرض کنید ویژگی های مطلوب در این مسئله، کنترلی پیوسته، سریع و نرم می باشد که محدودیت ۲-۲

را هنگامی که

$$\mathbf{x}_0 \in X_0 \subset \mathcal{R}^n \quad (4-2)$$

برآورده سازد. مشخص است که شرط پیوستگی سیگنال کنترل، استفاده از روش کنترل زمان بهینه

(بنگ بنگ) را در این مسئله ناممکن می سازد. جهت دست یابی به اهداف فوق الذکر در این فصل در

ابتدا در بخش ۲-۲ روشی بر مبنای یافتن بهترین کنترل ساختار ثابت<sup>۳۶</sup> جایابی قطب که محدودیت ۲-۲

را برآورده می سازد مطرح می گردد. پس از آن در بخش ۳-۲ با توسعه روش ارائه شده در بخش ۲-۲ به

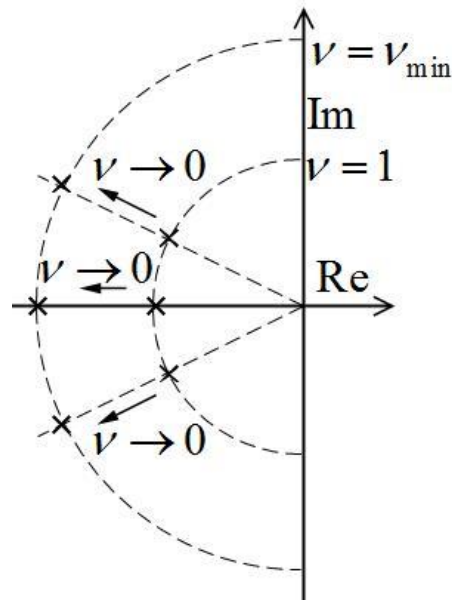
ساختاری متغیر با زمان، نتایج اصلی مورد نظر این فصل ارائه می شود.

---

<sup>36</sup> Fixed structure

## ۲-۳- کنترل پسخورد حالت

جهت یافتن کنترلی مناسب برای سیستم ۱-۲ با شرایط مطرح شده در بخش ۱-۲، یکی از گزینه‌ها استفاده از پسخورد حالت و روش مرسوم جایابی قطب می‌باشد. در این روش، بایستی تلاش شود که محل‌هایی جهت قطب‌های سیستم حلقه بسته انتخاب گردد که علاوه بر تضمین پایداری سیستم و برآورده‌سازی محدودیت ۲-۲، تا حد امکان پاسخ زمانی سیستم سریع باشد. فرض کنید که یافتن مناسب‌ترین جایابی قطب بروی مسیرهایی شعاعی - که در شکل ۱-۲ نشان داده شده است؛ مطلوب است.



شکل ۱-۲: مسیرهای شعاعی قطب

متغیر انتخاب  $v$  که در شکل ۱-۲ نشان داده است جهت تعیین کنترل پسخورد حالت مناسب، برای هر محل قطب بروی مسیرهای شعاعی می‌باشد. مشخص است که با کوچکتر شدن متغیر انتخاب  $v$ ، سرعت سیستم حلقه بسته افزایش می‌یابد. ماتریس ضرایب سیستم حلقه بسته در این حالت بصورت زیر تعریف می‌گردد.

$$\mathbf{A}_c(v) = (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T(v)) \quad (5-2)$$

در واقع  $\mathbf{k}^T(v)$  بنحوی تعریف می گردد که

$$v_1 < v_2 \Rightarrow \operatorname{Re}(\operatorname{eig}(\mathbf{A}_c(v_1))) < \operatorname{Re}(\operatorname{eig}(\mathbf{A}_c(v_2))) \quad (6-2)$$

پروسه زیر روشی را ارائه می دهد که می توان با استفاده از آن بهترین مکان قطب در مسیر معرفی شده در شکل ۱-۲ را بدست آورد.

**پروسه ۱:** شروع با  $flag = 0$

**گام اول:** مسیر قطب شعاعی مانند شکل ۱-۲ بصورت دلخواه و یا با توجه به محدودیت حداکثر فراجهبش مجاز سیستم حلقه بسته انتخاب گردد.

**گام دوم:** یک مجموعه ممکن از محل های قطب در مسیر پیشنهادی بصورت دلخواه انتخاب گردد و  $v = 1$  برای این مجموعه قطب در نظر گرفته شود.

**گام سوم:** دو پله تغییرات مثبت،  $s_1$  و  $s_2$  انتخاب شود بطوریکه  $1 < s_1 < s_2 \ll 1$ . به عنوان مثال  $s_1 = 0.2$  و  $s_2 = 0$ . انتخاب های مناسبی می باشند.

**گام چهارم:** تابع پسخورد حالت،  $\mathbf{k}^T(v)$ ، بنحوی تعریف شود که هر مجموعه از قطبهای ممکن بروی مسیر شعاعی پیشنهادی، به صورت یک به یک به مقداری از  $v$  مرتبط گردد. اگر سیستم حلقه بسته بصورت زیر تعریف گردد

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T(v))\mathbf{x} = \mathbf{A}_c(v)\mathbf{x} \quad (7-2)$$

آنگاه  $\mathbf{k}(v)$  مناسب برابر است با



$$k(v) = \begin{bmatrix} \hat{a}_0 v^{-n} - a_0 \\ \hat{a}_1 v^{-(n-1)} - a_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_{n-1} v^{-1} - a_{n-1} \end{bmatrix} \quad (۸-۲)$$

که در آن  $\hat{a}_j$ ،  $j = 0, 1, \dots, n-1$  ضرایب چند جمله ای مشخصه  $A_c(v)$  است هنگامی که  $v = 1$ .

**گام پنجم:** معادله لیاپانوف (رابطه ۱-۱۱) حل شود تا ماتریس معین مثبت  $R$  و پس از آن تابع لیاپانوف  $V(x) = x^T R x$  بدست آید.

**گام ششم:** با استفاده از تابع لیاپانوف بدست آمده در گام پنجم، ناحیه لیاپانوف  $G = \{x | V(x) < c\}$  بنحوی تعیین گردد که محدودیت ۲-۲ برآورده شود. برای اینکه از محدودیت سیگنال کنترل بصورت بهینه استفاده شود، می بایست که صفحات  $\pm k^T x = u_0$  بر  $G$  مماس گردد. برای یافتن مقدار بهینه  $c$  می بایست مسئله بهینه سازی زیر حل شود

$$\begin{aligned} \max x^T R x \quad \text{s. t.} \\ |k^T x| < u_0. \end{aligned} \quad (۹-۲)$$

پاسخ ۹-۲ برابر است با

$$c = u_0^2 / k^T R^{-1} k \quad (۱۰-۲)$$

**گام هفتم:** اگر  $X_0 \notin G$ ، مقدار  $u$  را به  $u = u + s_2$  تغییر بده و قرار بده  $flag = 1$ . برو به گام چهارم.

**گام هشتم:** اگر  $X_0 \subset G$  و  $flag = 0$ ، مقدار  $u$  را به  $u = u - s_1$  تغییر بده و برو به گام چهارم.

**گام نهم:** اگر  $X_0 \subset G$  و  $flag = 1$ ، پایان.

شکل ۲-۲، فلوچارت پروسه ۱ را نمایش می دهد.

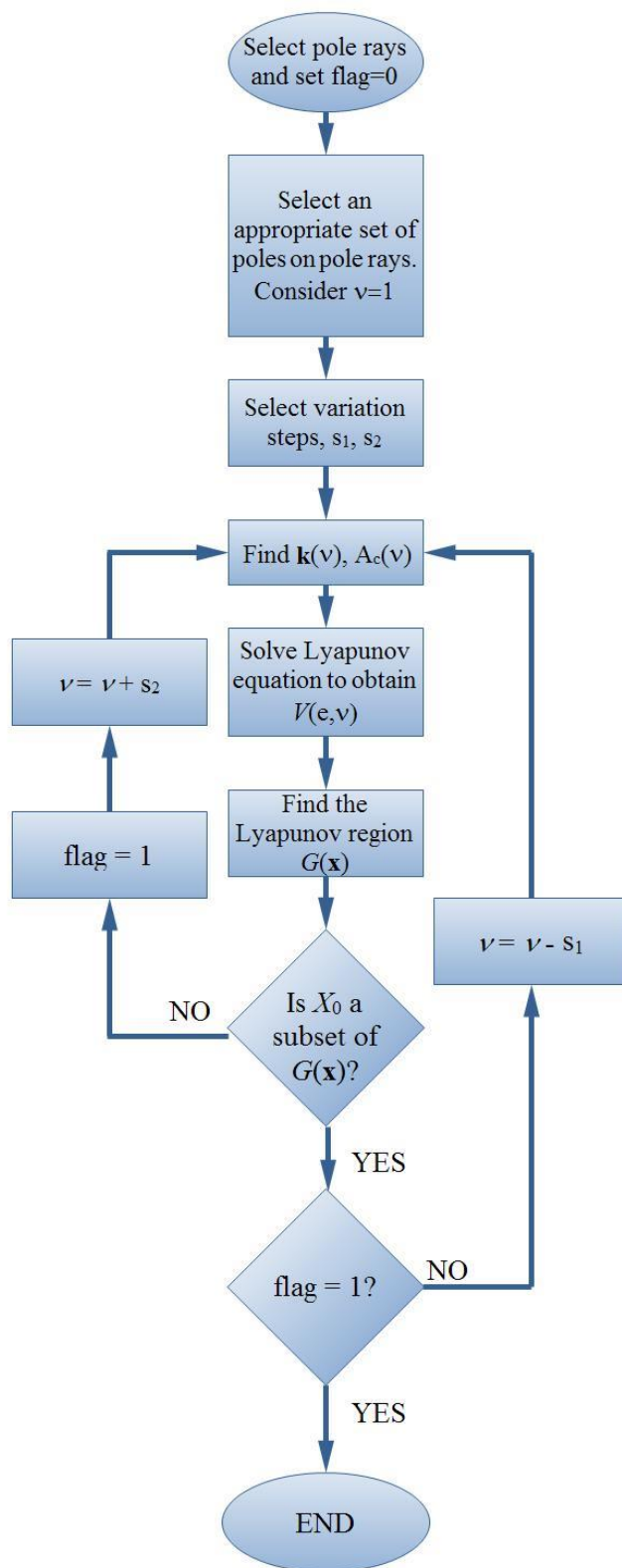
تذکر ۱-۲: پروسه ۱ تلاش می کند کمترین مقدار  $v$  را برای رسیدن به ناحیه لیپانوف  $G$  که  $X_0 \subset G$  بیابد. الگوریتم با مقدار اولیه  $v$  شروع می شود که مربوط به ناحیه لیپانوفی است که  $X_0 \notin G$ . سپس بصورت مستمر پله تغییرات  $S_2$  به آن اضافه می گردد و چک می شود که آیا  $X_0 \subset G$  تا به مقدار بهینه  $v$  دست یافته شود. پارامتر **flag** برای این منظور تعریف شده است که با کمک پله تغییرات  $S_1$  مقدار اولیه  $v$  را به اندازه ای کوچک نماید که  $X_0 \notin G$ .

تذکر ۲-۲: اگر مجموعه شرایط اولیه ممکن،  $X_0$ ، زیر مجموعه ای از  $G$  باشد، شرط محدودیت سیگنال ورودی برآورده خواهد شد زیرا  $G$  مجموعه ای پایاست و اگر  $X_0 \subset G$  آنگاه مسیر متغیرهای حالت نمی توانند  $G$  را ترک کنند. شکل ۲-۳ این حالت را نمایش می دهد. پروسه ۱ در واقع بدنبال یافتن کوچکترین مقدار  $v$  می باشد که منجر ناحیه لیپانوفی می گردد که  $X_0 \subset G$ .

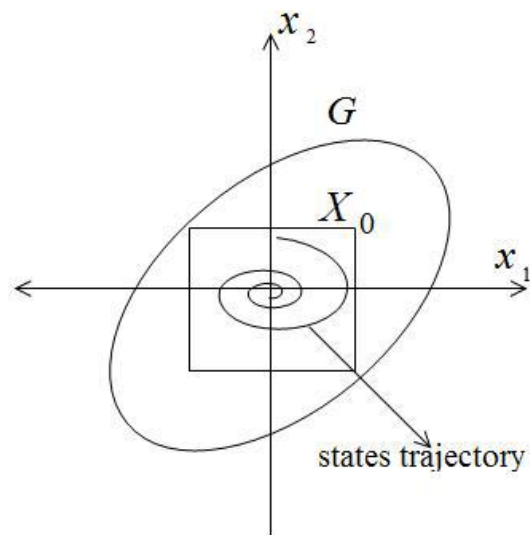
تذکر ۳-۲: روشی که در این بخش به آن پرداخته شد، کنترلی ساختار ثابت می باشد. هنگامی که بصورت زیر خط<sup>۳۷</sup> بهترین جایابی قطب توسط پروسه ۱ یافته شد که محدودیت ۲-۲ را برآورده می سازد، قانون کنترل ساختار ثابت مربوطه به سیستم اعمال می گردد.

---

<sup>37</sup> Off line



شکل ۲-۲: فلوجارت پروسه ۱



شکل ۲-۳: دیاگرام فاز یک سیستم مرتبه ۲ هنگامی که  $X_0 \subset G$

## ۲-۴- کنترل ساختار متغیر نرم شعاعی

روشی که در بخش ۲-۲ مطرح شد، کنترل ساختار ثابت مناسبی جهت یافتن کنترلی سریع و پیوسته می باشد. ولی در هنگام تنظیم، اندازه متغیرهای حالت کاهش یافته و در نتیجه، بکارگیری قانون کنترل سریع تری روی مسیر شعاعی قطب (شکل ۲-۱) که محدودیت ۲-۲ را برآورده سازد ممکن می باشد. الگوریتم نوینی در این بخش پیشنهاد می گردد که "کنترل ساختار متغیر نرم شعاعی" نامگذاری گردیده است. در این روش در ابتدا تابع کنترل پسخورده حالت  $k(v)$  مطابق بخش قبل برای مسیر شعاعی معرفی شده در شکل ۲-۱، تعریف می گردد و بطور خلاصه تلاش می شود که حداقل مقدار  $v$  که باعث می گردد محدودیت سیگنال ورودی برآورده گردد بصورت روی خط با حل یک مسئله بهینه سازی بدست آید.

### پروسه ۲

گام اول: پروسه ۱ اجرا شود.

گام دوم: برای نتایج حاصل از گام اول  $v = 1$  در نظر گرفته شود.

گام سوم: مقدار روی خط متغیرهای حالت دریافت شود.

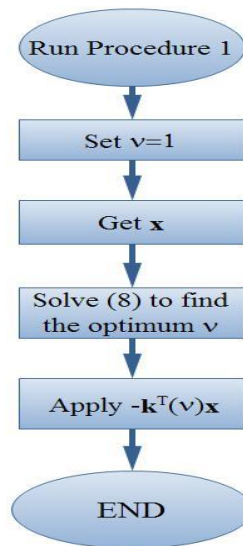
گام چهارم: مسئله بهینه سازی زیر حل شود

$$\begin{aligned} \min v \quad & \text{s. t.} \\ u_{min} \leq v \leq 1 & \\ |\mathbf{k}^T(v)\mathbf{x}| - u_0 \leq 0 & \end{aligned} \quad (11-2)$$

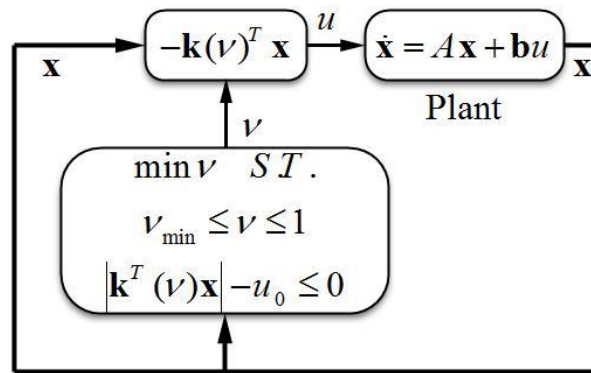
که در آن  $v_{min} > 0$ .

گام پنجم:  $-\mathbf{k}^T(v)\mathbf{x}$  به سیستم اعمال گردد.

بهترین قانون کنترل در مسیر شعاعی انتخابی،  $-\mathbf{k}^T(v)\mathbf{x}$  می باشد که در آن  $v$  جواب مسئله بهینه سازی ۱۱-۲ می باشد. شکل های ۴-۲ و ۵-۲ بترتیب فلوجارت و بلوک دیاگرام این روش را نشان می دهد.



شکل ۴-۲: فلوجارت پروسه ۲



شکل ۲-۵: بلوک دیاگرام کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی

تذکر ۲-۴: انتخاب مناسب  $v_{min}$  در ۲-۱۱ به تحلیل پایداری سیستم بستگی دارد و در ادامه مورد بررسی قرار می گیرد.

تذکر ۲-۵: با توجه به ۲-۸، مسئله بهینه سازی ۲-۱۱ در واقع یک مسئله برنامه ریزی چند جمله ای<sup>۳۸</sup> می باشد [۴۲]. پاسخ این مسئله بهینه سازی می تواند بوسیله روش های ابتکاری<sup>۳۹</sup> نظیر الگوریتم ژنتیک<sup>۴۰</sup> [۴۳، ۴۴]، جستجوی تبو<sup>۴۱</sup> [۴۵]، الگوریتم زنبور عسل<sup>۴۲</sup> [۴۶] و یا الگوریتم ازدحام ذره ها<sup>۴۳</sup> (PSO) [۴۷] بدست آورد. لیکن، ساختار بازگشتی روش های مذکور برای کنترل روی خط مناسب نمی باشند. بهترین راهکار برای حل مسئله بهینه سازی ۲-۱۱، یافتن فضای ممکن مسئله با حل محدودیت های چند جمله ای و سپس، یافتن اشتراک فضای ممکن محدودیت های چند جمله ای با بازه  $[v_{min}, 1]$  می باشد. پس آن مقدار کمینه  $v$  در فضای ممکن مسئله قابل محاسبه است.

<sup>38</sup> Polynomial programming problem

<sup>39</sup> Heuristic methods

<sup>40</sup> Genetic algorithm

<sup>41</sup> Tabu search

<sup>42</sup> Bees algorithm

<sup>43</sup> Particle swarm optimization

## ۲-۴-۱- بررسی پایداری کنترل ساختار متغیر نرم شعاعی

ساختار پیشنهاد شده در بخش قبل، ساختاری متغیر با زمان است و باید پایداری سیستم حلقه بسته کاملاً مورد بررسی قرار بگیرد. خاطر نشان می‌سازد این حقیقت که همیشه قطب‌های سیستم حلقه بسته در نیمه سمت چپ فاز در روش کنترل ساختار متغیر نرم شعاعی می‌باشد، تضمینی جهت پایداری سیستم متغیر با زمان نمی‌باشد [۳۵].

از ترکیب معادلات ۲-۵، ۲-۷ و ۲-۸ داریم

$$A_c(v) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\hat{a}_0 v^{-n} & -\hat{a}_1 v^{-(n-1)} & -\hat{a}_2 v^{-(n-2)} & \dots & -\hat{a}_{n-1} v^{-1} \end{bmatrix} \quad (12)$$

می‌توانیم ۲-۱۲ را بصورت زیر بازنویسی کنیم

$$A(v) = A_c(1) - RM(v) \quad (13-2)$$

که در آن  $A(1) = A(v)|_{v=1}$ ،  $R, M(v) \in \mathcal{R}^{n \times n}$  و

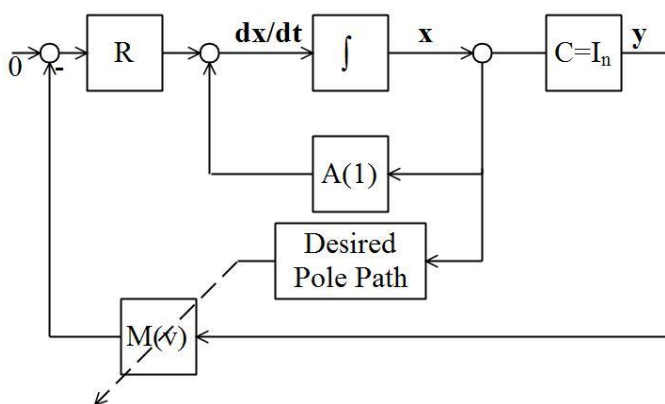
$$R = \begin{bmatrix} 0_{(n-1) \times n} \\ 1_{(1 \times n)} \end{bmatrix} \quad (14-2)$$

$$M(v) = \text{diag}\{\hat{a}_0 v^{-n} - \hat{a}_0, \dots, \hat{a}_{n-1} v^{-1} - \hat{a}_{n-1}\} \quad (15-2)$$

رابطه ۲-۱۳ در واقع نشان دهنده یک سیستم خطی با پس‌خورد حالت است که با اندکی تغییرات می‌توان

آن را بصورت استاندارد بررسی پایداری به روش محک دایره آماده سازی کرد. شکل ۲-۶ این بازنویسی را

نشان می‌دهد.



شکل ۲-۶: نمایش پاسخورد حالت کنترل ساختار متغیر نرم شعاعی

ما بدنبال یافتن بازه  $v = [v_{min}, 1]$  در ۲-۱۱ هستیم که پایداری سیستم تضمین شود. برای این منظور از محک دایره چند متغیره<sup>۴۴</sup> استفاده خواهد شد.

### قضیه ۲-۱: محک دایره چند متغیره [۴۱]

سیستم کنترل پذیر و مشاهده پذیر فیدبکی چند متغیره بصورت زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \\ u &= -\varphi(t, y) \end{aligned} \quad (۱۶-۲)$$

که در آن  $x \in \mathcal{R}^n, u, y \in \mathcal{R}^p$  ماتریسی هورویتز و  $\varphi: [0, \infty) \times \mathcal{R}^p \rightarrow \mathcal{R}^p$  تابعی غیرخطی بدون حافظه و احتمالاً متغیر با زمان است که بصورت تکه ای پیوسته در  $t$  و بصورت محلی لپیشیز در  $y$  است. اگر  $\varphi(t, y)$  در سکتور  $0$  و  $K_{max}y$  محدود باشد یعنی

$$\begin{aligned} \varphi^T(t, y)[\varphi(t, y) - K_{max}y] &\leq 0 \\ \forall t \geq 0, \quad \forall y \in \mathcal{R}^p \end{aligned} \quad (۱۷-۲)$$

و  $Z(s) = I_n + K_{max}C(sI_n - A)^{-1}B$  اکیدا مثبت حقیقی<sup>۴۵</sup> باشد (SPR) آنگاه سیستم فیدبک پایدار است.

<sup>44</sup> Multi variable circle criterion



برای رسیدن به نتایج به لم زیر هم نیاز است.

لم ۱-۲: کالمن - یاکوبویچ - پوپوف [۴۱]

اگر  $Z(s) = C(sI_n - A)^{-1}B + D$  یک ماتریس تابع انتقال  $p \times p$  باشد، که در آن  $A$  هورویتز،  $(A, B)$  کنترل پذیر و  $(A, C)$  مشاهده پذیر باشد. آنگاه  $Z(s)$  اکیدا مثبت حقیقی (SPR) است اگر و فقط اگر ماتریس مثبت معین متقارن  $P$ ، ماتریس  $W$  و  $L$ ، و همچنین ثابت مثبت  $\varepsilon$  وجود داشته باشند بنحوی که

$$\begin{aligned} PA + A^T P &= -L^T L - \varepsilon P \\ PB &= C^T - L^T W \\ W^T W &= D + D^T. \end{aligned} \quad (۱۸-۲)$$

حال با استفاده از نتایج حاصله از قضیه ۱-۲ و لم ۱-۲ می توان پایداری سیستم کنترل ساختار متغیر نرم شعاعی را تحقیق کرد.

قضیه ۲-۲: پایداری سیستم کنترل ساختار متغیر نرم شعاعی

سیستم کنترل ساختار متغیر نرم شعاعی پایدار است اگر ماتریس مثبت معین  $P$ ، ماتریس  $L$  و ثابت مثبت  $\varepsilon$  وجود داشته باشد بنحوی که

$$\begin{aligned} PA_c(1) + A_c(1)^T P &= -L^T L - \varepsilon P \\ PR &= M(v_{\min})^T - \sqrt{2}L^T \end{aligned} \quad (۱۹-۲)$$

اثبات: در ابتدا نشان می دهیم که فرضیات قضیه ۱-۲ برای سیستم کنترل ساختار متغیر نرم شعاعی برقرار است. واضح است که  $(A_c(1), R)$  در فرم کانونی کنترل پذیر است و در نتیجه کنترل پذیر است.  $(A_c(1), I_n)$  مشاهده پذیر است و از با توجه به اینکه تمامی مقادیر ویژه با اعمال پروسه ۱ در نیمه

<sup>45</sup> Strictly positive real

سمت چپ صفحه فاز قرار دارد،  $A_C(1)$  هورویتز است. همچنین بایستی دو خاصیت زیر مورد بررسی قرار بگیرد:

۱-  $M(v)$  تکه ای پیوسته باشد

با توجه به ۱-۲، از آنجایی که  $v = 1$  همیشه یک جواب ممکن برای مسئله بهینه سازی می باشد، جواب مسئله ۱-۲ یک ریشه چندجمله ای  $(k^T(v)x)^2 = u_0^2$  می باشد و یا  $v_{min}$ . از آنجایی که ضرایب  $(k^T(v)x)^2$  توابع پیوسته ای از متغیرهای حالت می باشند، بصورت پیوسته با تغییرات حالت سیستم تغییر می کنند، در نتیجه با توجه به پیوستگی ضرایب چند جمله ای، ریشه های چند جمله ای نیز بصورت پیوسته تغییر می کنند [۴۸]. در نتیجه  $M(v)$  همیشه تکه ای پیوسته است.

$$y^T M(v)^T [M(v)y - M(v_{min})y] \leq 0 \quad 2-$$

با توجه به تعریف  $M(v)$ ، از آنجاییکه  $a_i > 0$  برای  $i = 1, \dots, n-1$  و  $0 < v_{min} < v < 1$ ،  
 1.  $M(v) > 0$  و  $M(v) \leq M(v_{min})$ ،  $\forall v \in [v_{min}, 1)$ ، در نتیجه  $M(v)^T [M(v) - M(v_{min})]y \leq 0$  و  $M(v_{min}) \leq 0$  باعث می شود  
 $y^T M(v)^T [M(v)y - M(v_{min})y] \leq 0$

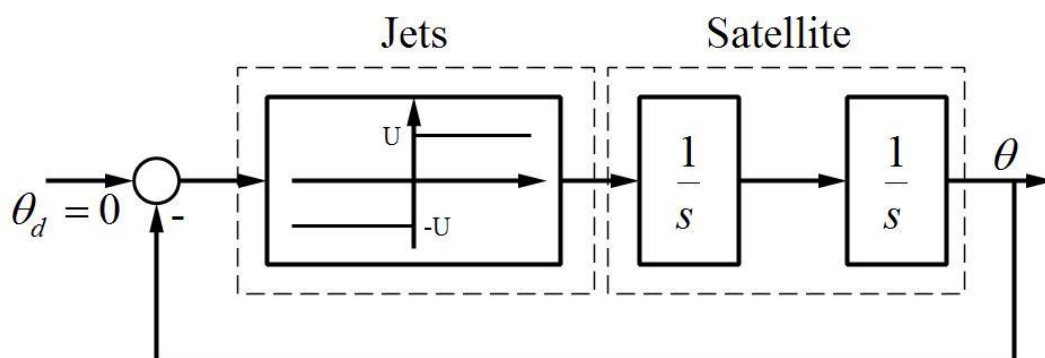
در نتیجه سیستم کنترل ساختار متغیر نرم شعاعی تمامی فرضیات قضیه ۱-۲ را دارد. در ادامه، می بایست بررسی شود که  $I_n + M(v_{min})(sI_n - A(1))^{-1}R$  اکیدا مثبت حقیقی (SPR) است یا خیر. اعمال لم ۱-۲ با در نظر گرفتن  $D = I_n$ ، نتیجه می دهد که  $I_n + M(v_{min})(sI_n - A(1))^{-1}R$  اکیدا مثبت حقیقی است اگر ماتریس معین مثبت متقارن  $P$ ، ماتریس  $L$  و ثابت مثبت  $\epsilon$  وجود داشته باشند به نحوی که ۱۹-۲ برآورده شود.

مقادیر کوچکتر  $v_{min}$  معادل سکتورهای بزرگتر در ۲-۱۷ می باشند. لذا اگر یک مقدار  $v_{min}$  منجر به تلاشی ناموفق برای یافتن ماتریس معین مثبت متقارن  $P$  در قضیه ۲-۲ گردید، مقدار بزرگتر  $v_{min}$  بایستی جهت اثبات پایداری جایگزین گردد.

تذکر ۲-۵: یک شرط لازم (ولی غیرکافی) برای اینکه ۲-۱۹ دارای جواب ممکن باشد این است که ماتریس ضربی  $A(1)A(v_{min})$  مقدارویژه حقیقی منفی نداشته باشد. این شرط مقادیر ناممکن  $v_{min}$  را بدون حل ۲-۱۹ حذف می کند [۴۹].

## ۲-۵- نتایج شبیه سازی

شکل ۲-۷، شمای یک سیستم ساده کنترل ماهواره را نشان می دهد [۳۵]



شکل ۲-۷: سیستم کنترل ماهواره

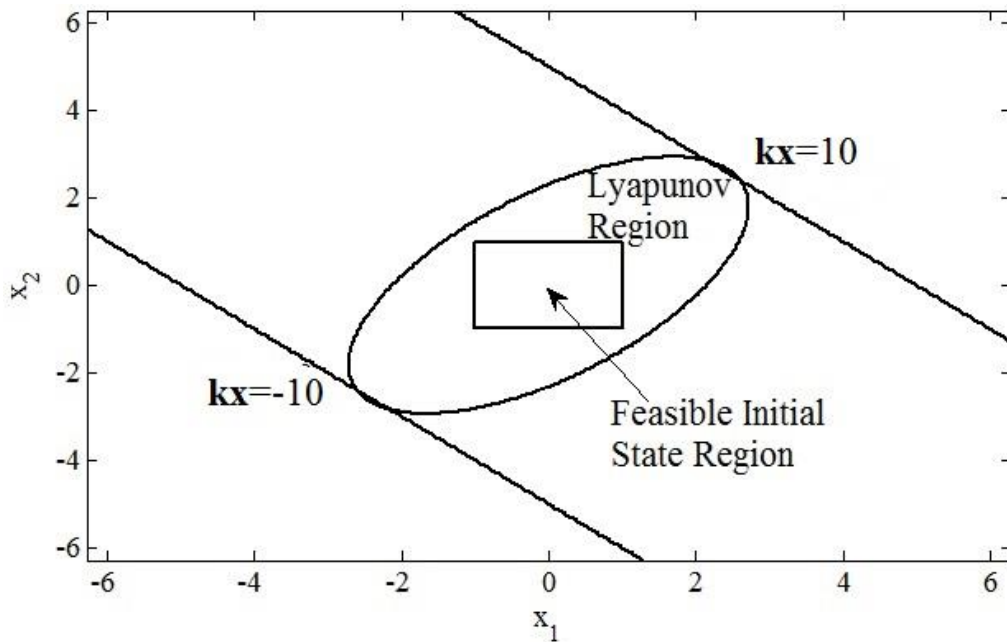
ماهواره ها معمولا توسط دو موتور جت که توانایی ایجاد گشتاور بین دو مقدار  $U$  (آتش مثبت) و  $-U$  (آتش منفی) دارند. هدف سیستم کنترل این است که ماهواره را بوسیله قانون کنترلی که محدودیت گشتاور موتورهای جت را در نظر می گیرد، در زاویه صفر درجه نگه دارد. مدل ریاضی این سیستم برابر است با

$$\ddot{\theta} = u \quad (2-20)$$

با در نظر گرفتن  $\theta = x_1$  و  $\dot{\theta} = x_2$  معادلات فضای حالت سیستم بصورت زیر نوشته می شود

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (21-2)$$

فرض کنید که مقدار ممکن شرایط اولیه  $x_1(0) < 1, x_2(0) < 1$  باشد و همچنین سیگنال ورودی دارای محدودیت  $|u| \leq 10$  و خروجی سیستم  $y = x$  است. مسیر شعاعی قطب با زاویه ۴۵ درجه با محور حقیقی منفی انتخاب می شود. اجرای پروسه ۱ نتیجه می دهد  $k = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$  که نحوه رعایت محدودیت سیگنال کنترل و دربرگرفتن شرایط اولیه ممکن در ناحیه لیاپانوف در شکل ۸-۲ نشان داده شده است.

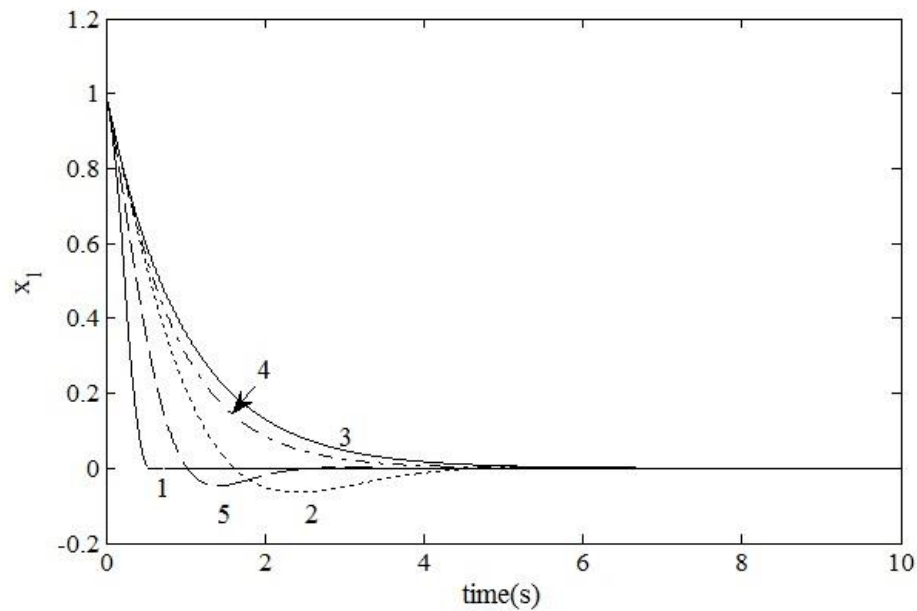


شکل ۸-۲: ناحیه لیاپانوف، محدودیت سیگنال ورودی و ناحیه ممکن شرایط اولیه برای سیستم ۲۱-۲

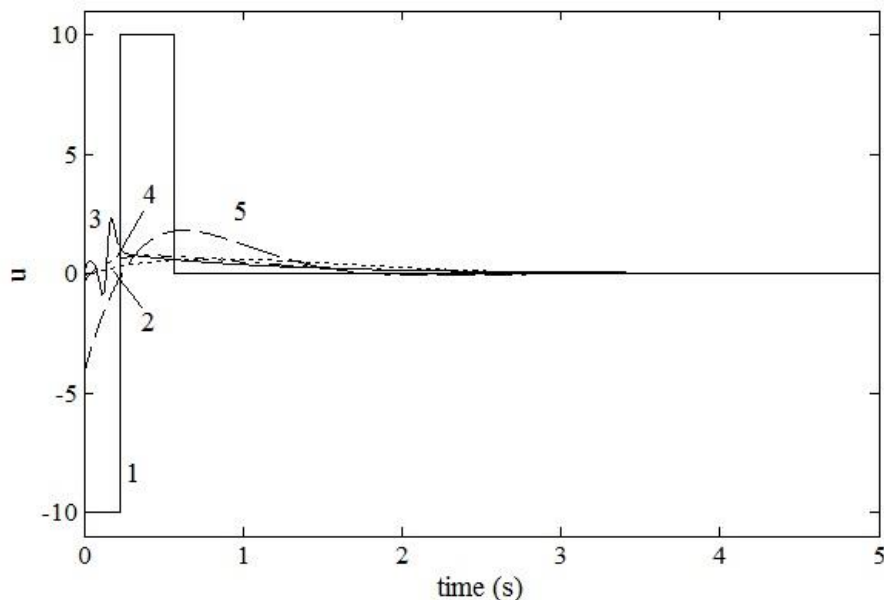
با توجه به ۵-۲ و ۸-۲ می توان معادله سیستم حلقه بسته کنترل شده بوسیله روش کنترل ساختار متغیر نرم شعاعی را بصورت زیر نوشت

$$\dot{x} = (A - bk^T(v))x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2v^{-2} & -2v^{-1} \end{bmatrix} x \quad (22-2)$$

می توان بررسی کرد که اگر  $v_{\min} = 0.5$  انتخاب گردد،  $P = \begin{bmatrix} 24 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$  شرایط قضیه ۲-۲ را برآورده می سازد. شکل ۲-۹ و ۲-۱۰ بترتیب پاسخ و سیگنال کنترل را در روشهای کنترل بنگ-بنگ، کنترل فیدبک حالت، کنترل ساختار متغیر نرم دینامیکی، کنترل ساختار متغیر اشباع متغیر و روش پیشنهادی در این رساله، کنترل ساختار متغیر نرم شعاعی را برای سیستم کنترل ماهواره مقایسه می نماید.



شکل ۲-۹: خروجی سیستم ۱: کنترل بنگ-بنگ، ۲: کنترل فیدبک حالت، ۳: کنترل ساختار متغیر نرم دینامیکی، ۴: کنترل ساختار متغیر نرم با اشباع متغیر، ۵: کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی



شکل ۲-۱۰: سیگنال کنترل ۱: کنترل بنگ-بنگ، ۲: کنترل فیدبک حالت، ۳: کنترل ساختار متغیر نرم دینامیکی، ۴:

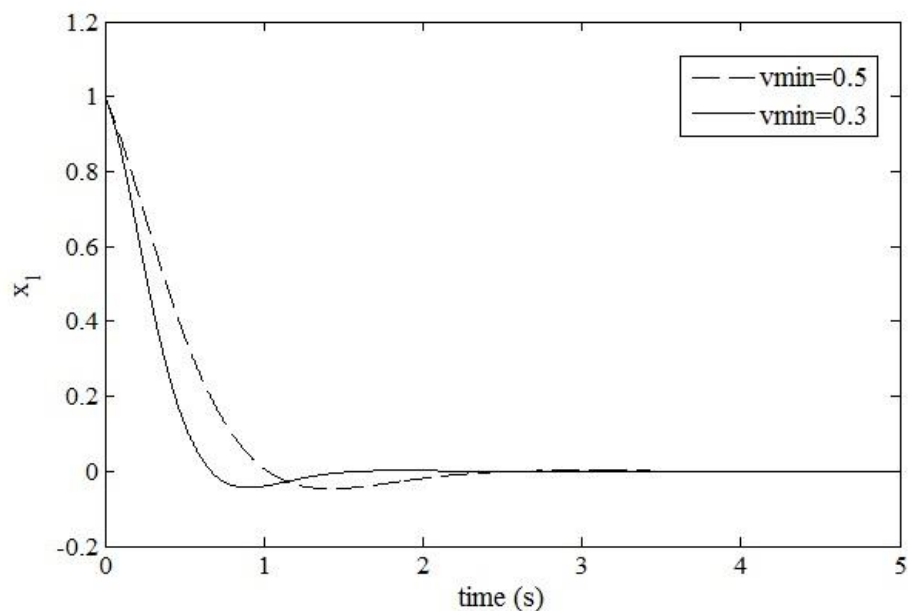
کنترل ساختار متغیر نرم با اشباع متغیر، ۵: کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی

همانگونه که در شکل ۲-۹ نشان داده شده است، روش پیشنهادی ما، کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی، پاسخ مطلوبی در مقایسه با کنترل پسخورد حالت، کنترل ساختار متغیر نرم دینامیکی و کنترل ساختار متغیر نرم با اشباع متغیر دارد. خروجی سیستم کنترل شده توسط روش کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی، پاسخی نزدیک به کنترل زمان بهینه دارد در حالیکه سیگنال کنترل در آن، همانگونه که در شکل ۲-۱۰ نشان داده شده است پیوسته است.

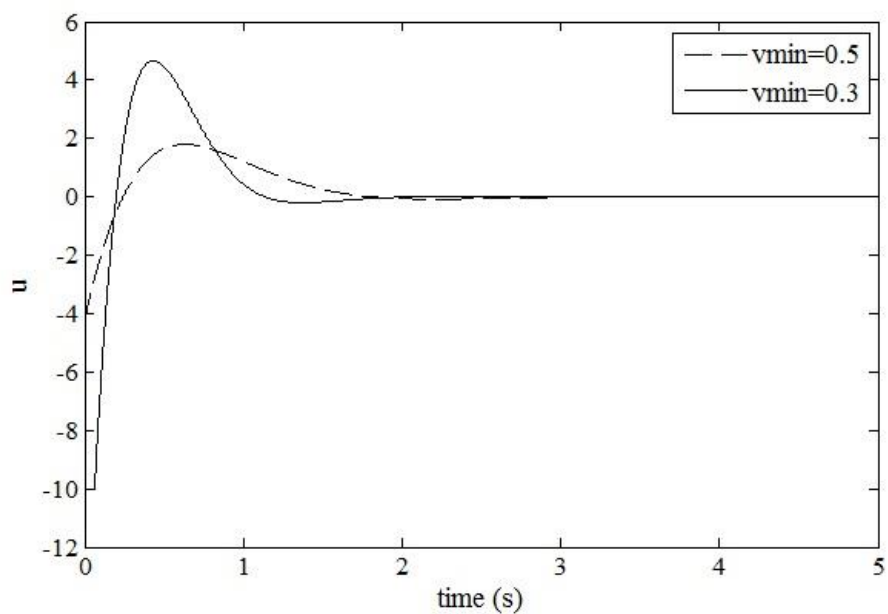
### ۲-۵-۱- تاثیر $u_{min}$

پاسخ سیستم و سیگنال کنترل در سیستم هواپیما به روش کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی در دو حالت  $u_{min} = 0.3$  و  $u_{min} = 0.5$  در شکل های ۲-۱۱ و ۲-۱۲ مقایسه شده اند. همانگونه که مشخص است مصالحه ای بین سرعت پاسخ و نرمی سیگنال کنترل برقرار است. مقادیر بزرگتر  $u_{min}$  سیگنال کنترل را نرم تر می کنند لیکن باعث کاهش سرعت سیستم می شوند. مقادیر کوچکتر  $u_{min}$

سرعت سیستم را افزایش می دهند ولی این افزایش سرعت به قیمت کاهش نرمی سیگنال کنترل می باشد.



شکل ۲-۱۱: تاثیر مقدار  $u_{min}$  در خروجی سیستم



شکل ۲-۱۲: تاثیر مقدار  $u_{min}$  در سیگنال کنترل

## ۲-۶- جمع بندی

در این فصل روش کنترل ساختار متغیر نرم جدیدی به نام کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی پیشنهاد گردید. در این روش، ابتدا مسیرهای شعاعی متقارن جهت قطب های سیستم حلقه بسته معین می گردد و سپس بهترین مکان قطب های حلقه بسته سیستم بروی این مسیرها، با هدف کاهش زمان نشست و رعایت محدودیت سیگنال کنترل با حل یک مسئله بهینه سازی تعیین می گردد. نتایج حاصل از پیاده سازی این روش بروی سیستم خطی یک ورودی- یک خروجی کنترل ماهواره با روش های کنترل ساختار متغیر نرم پیشین و همچنین کنترل بهینه مورد مقایسه قرار گرفت که نتایج بیانگر بهبود سرعت سیستم می باشد.





## **فصل سوم:**

**کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی برای  
سیستم‌های خطی چند ورودی چند خروجی**

### ۳-۱- مقدمه

روش هایی که تا کنون جهت کنترل ساختار متغیر نرم معرفی شده اند، منحصر به سیستم های خطی یک ورودی یک خروجی هستند. در این فصل بدنبال این هستیم که روش پیشنهاد شده در فصل قبل، کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی را برای سیستم های خطی چند ورودی چند خروجی<sup>۴۶</sup> توسعه دهیم [۵۰]. جهت دستیابی به این امر، بدنبال توسعه روش جایابی قطب برای سیستم های چند ورودی چند خروجی به کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی هستیم. در بخش های ابتدایی این فصل، روش جایابی قطب برای سیستم های خطی چند ورودی چند خروجی معرفی می شود و سپس روشی مشابه فصل قبل برای پیاده سازی کنترل ساختار متغیر با هدف افزایش سرعت سیستم معرفی می گردد. اثبات پایداری روش پیشنهادی مشابه فصل قبل بر اساس محک دایره چند متغیره و لم کالمن، یاکوبوویچ، پوپوف می باشد. نتایج حاصله در انتها بروی سیستم کنترل پرواز در سرعت ثابت، شبیه سازی شده است.

### ۳-۲- جایابی قطب برای سیستم های خطی چند ورودی چند خروجی

[۵۱]

سیستم خطی چند ورودی چند خروجی با معادلات حالت زیر را نظر بگیرید:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (۱-۳)$$

---

<sup>46</sup> Multi input multi output

که در آن  $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$  بردار متغیرهای حالت،  $\mathbf{u} \in \mathcal{R}^m$  بردار کنترل و ماتریس های  $\mathbf{A}$  و  $\mathbf{B}$  دارای ابعاد مناسب می باشند. بدون از دست رفتن کلیت مسئله می توانیم فرض کنیم سیستم ۱-۳ در فرم کانونی فروبینیوس<sup>۴۷</sup> است و یا می تواند به آن تبدیل شود

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_F \mathbf{x} + \mathbf{B}_F \mathbf{u} \quad (۲-۳)$$

که

$$\mathbf{A}_F = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\mu_1 \times \mu_1}^{cf_1} & \mathbf{0}_{(\mu_1-1) \times \mu_2} & \dots & \mathbf{0}_{(\mu_1-1) \times \mu_m} \\ *_{1 \times \mu_2} & \mathbf{A}_{\mu_2 \times \mu_2}^{cf_2} & \dots & *_{1 \times \mu_m} \\ \mathbf{0}_{(\mu_2-1) \times \mu_1} & & & \mathbf{0}_{(\mu_2-1) \times \mu_m} \\ *_{1 \times \mu_1} & & & *_{1 \times \mu_m} \\ \vdots & & & \vdots \\ \mathbf{0}_{(\mu_m-1) \times \mu_1} & \mathbf{0}_{(\mu_m-1) \times \mu_2} & \dots & \mathbf{A}_{\mu_m \times \mu_m}^{cf_m} \\ *_{1 \times \mu_1} & *_{1 \times \mu_2} & \dots & \vdots \end{bmatrix} \quad (۳-۳)$$

$$\mathbf{B}_F = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{\mu_1} & \mathbf{0}_{(\mu_1-1) \times 1} & \dots & \mathbf{0}_{(\mu_1-1) \times 1} \\ * & * & \dots & * \\ \mathbf{0}_{\mu_2 \times 1} & \mathbf{w}_{\mu_2} & \dots & \mathbf{0}_{(\mu_2-1) \times 1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mathbf{0}_{\mu_m \times 1} & \mathbf{0}_{\mu_m \times 1} & \dots & \mathbf{w}_{\mu_m} \end{bmatrix} \quad (۴-۳)$$

و در آن، \* بیانگر ماتریس غیر صفر،  $\mu_j$  اندیس کنترل پذیری<sup>۴۸</sup> مرتبط با ستون  $j$  ام ماتریس  $\mathbf{B}$ ،  $\mathbf{w}_{\mu_j}$  بردار یکه مقدماتی<sup>۴۹</sup>  $(1 \times \mu_j)$  با 1 در موقعیت  $j$ ،  $\mathbf{A}_{\mu_j \times \mu_j}^{cf_j}$  بیانگر ماتریسی مربعی در فرم همراه و در نهایت،  $\mathbf{Q}$  ماتریس تبدیل است.

47 Frobenius canonical form

48 Controllability index

49 Unit elementary vector

فرض شود که شرایط اولیه و سیگنال ورودی بصورت زیر محدود باشند

$$x_0 \in X_0 \subset \mathcal{R}^n \quad (5-3)$$

$$\begin{aligned} |u_1| &\leq u_1^{\max} \\ |u_2| &\leq u_2^{\max} \\ &\vdots \\ |u_m| &\leq u_m^{\max} \end{aligned} \quad (6-3)$$

هدف ما در این بخش یافتن ماتریس پسخورد حالت  $\mathbf{K}$  بنحوی است که سیستم حلقه بسته

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_c \mathbf{x} \quad (7-3)$$

که در آن

$$\mathbf{A}_c = \mathbf{A}_F + \mathbf{B}_F \mathbf{K} \quad (8-3)$$

چندجمله ای مشخصه مطلوب داشته باشد.

یادآوری می شود که ماتریس کنترل پذیری بصورت زیر تعریف می گردد

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{A}\mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{A}^{\mu_1-1}\mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_m \\ \mathbf{A}\mathbf{b}_m \\ \vdots \\ \mathbf{A}^{\mu_m-1}\mathbf{b}_m \end{bmatrix}^T \quad (9-3)$$

بردارهای زیر تعریف می گردند

$$\mathbf{q}_k = \mathbf{e}_{r_k}^T \mathbf{R}^{-1}, \quad r_k = \sum_{i=1}^k \mu_i, \quad k = 1, \dots, m \quad (10-3)$$

که در آن  $\mathbf{e}_{r_k}$  بردار یکه مقدماتی  $(n \times 1)$  با 1 در موقعیت  $r_k$  می باشد.

ما در این فصل روش ارائه شده توسط نگوین برای قرار دادن قطب ها در محل مطلوب را بررسی می کنیم [۵۱]. در سیستمی که در فرم کانونی فروبنیوس قرار دارد، ماتریس های  $\mathbf{A}_F$  و  $\mathbf{B}_F$  می توانند بصورت زیر بخش بندی شوند.

$$\mathbf{A}_F = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_3) \quad (۱۱-۳)$$

$$\mathbf{B}_F = \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1 \quad (۱۲-۳)$$

که  $\mathbf{A}_0 \in \mathcal{R}^{n \times n}$  و  $\mathbf{A}_1 \in \mathcal{R}^{n \times m}$  بصورت زیر تعریف می گردند

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n-1) \times 1} & \mathbf{I}_{n-1} \\ \mathbf{0}_{1 \times n} & \end{bmatrix} \quad (۱۳-۳)$$

$$\mathbf{A}_1 = \text{diag}\{w_{\mu_1}, w_{\mu_2}, \dots, w_{\mu_m}\} \quad (۱۴-۳)$$

$\mathbf{A}_2 \in \mathcal{R}^{m \times n}$  برابر است با

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \vdots \\ -a_m \end{bmatrix}, \quad -a_k = -\mathbf{q}_k \mathbf{A}^{\mu_k} \mathbf{Q} \quad (۱۵-۳)$$

و  $\mathbf{A}_3 \in \mathcal{R}^{m \times n}$  برابر است با

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(m-1) \times 1} & \text{diag}\{w_{\mu_1}^T, w_{\mu_2}^T, \dots, w_{\mu_{m-1}}^T\} & \mathbf{0}_{(m-1) \times (\mu_{m-1})} \\ & \mathbf{0}_{1 \times n} & \end{bmatrix} \quad (۱۶-۳)$$

و در انتها ماتریس  $\mathbf{B}_1 \in \mathcal{R}^{m \times m}$  بصورت زیر تعریف می شود

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_m \end{bmatrix}, \quad b'_k = \mathbf{q}_k \mathbf{A}^{\mu_k - 1} \mathbf{B} \quad (۱۷-۳)$$

بر اساس بخش بندی ۱۱-۳ و ۱۲-۳، نگوین رابطه زیر را برای بدست آوردن ماتریس پس‌خورد  $\mathbf{K}_F$  که قطب های سیستم حلقه بسته چند ورودی چند خروجی خطی را به محل دلخواه منتقل می کند پیشنهاد داد.

$$\mathbf{K}_F = \mathbf{B}_1^{-1}(-\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_4) \quad (۱۸-۳)$$

روش های مختلفی برای تعیین ماتریس  $A_4$  در مراجع ذکر شده است تا تضمین کند قطب های سیستم حلقه بسته در مکان مطلوب قرار بگیرند. در این پایان نامه، ما روش ساده و کارآمد چن را دنبال می کنیم [۴۰]. در این روش، ماتریس  $A_4$  قطب های مطلوب را در میان بلوک های فروبینیوس بنحوی تقسیم می کند که بزرگترین مقدار ویژه در کوچکترین بلوک ها قرار گیرد. فرض کنید چندجمله ای مشخصه  $D(s)$  به  $m$  چند جمله ای  $D_i(s)$  با مرتبه  $\mu_i$  تجزیه شود.

$$D(s) = \prod_{i=1}^m D_i(s), \quad D_i(s) = s^{\mu_i} + d_{\mu_i-1}^i s^{\mu_i-1} + \dots + d_1^i s + d_0^i \quad (۱۹)$$

اگر با توجه به ضرایب مطلوب  $D_i(s)$  در ۱۹-۳ بردارهای زیر را تعریف کنیم

$$d_i = [d_0^i, d_1^i, \dots, d_{\mu_i-2}^i, d_{\mu_i-1}^i] \quad (۲۰-۳)$$

آنگاه ماتریس  $A_4$  برابرست با

$$\mathbf{A}_4 = \mathbf{A}_3 + \begin{bmatrix} -d_1 & \mathbf{0}_{1 \times (n-\mu_1)} \\ \mathbf{0}_{1 \times \mu_1} & -d_2 & \mathbf{0}_{1 \times (n-\mu_1-\mu_2)} \\ & \vdots & \\ \mathbf{0}_{1 \times (n-\mu_m)} & -d_m \end{bmatrix} \quad (۲۱-۳)$$

### ۳-۳- جایابی قطب برای سیستم های خطی چند ورودی چند خروجی با

#### محدودیت در سیگنال کنترل

تقریباً در تمامی سیستم های صنعتی سیگنال کنترل تحت محدودیت های محرک است و مهندسان کنترل، باید این محدودیت ها را در طراحی سیستم کنترل در نظر بگیرند. پروسه زیر روشی برای در برآورده سازی محدودیت های سیگنال کنترل در روش کنترل جایابی قطب ارائه می دهد.

#### پروسه ۱

**گام اول:** چند جمله ای مشخصه مطلوب را انتخاب نموده و ماتریس پسخورده مرتبط با آن،  $\mathbf{K}$ ، را بدست آورید.

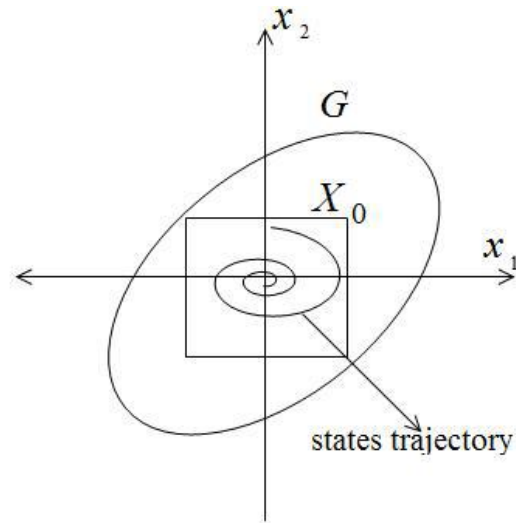
**گام دوم:** معادله لیاپانوف،  $A_c^T P + P A_c = -Q$  را برای یافتن ماتریس مثبت معین  $P$  در سیستم حلقه بسته حل نموده تا تابع لیاپانوف مرتبط به آن،  $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}$  بدست آید.

**گام سوم:** حداکثر مقدار ثابت  $c$  را بنحوی پیدا کنید که ناحیه  $G = \{\mathbf{x} | V(\mathbf{x}) < c\}$  با صفحات  $\pm \mathbf{k}_i \mathbf{x} = u_i^{max}$  برای  $i = 1, 2, \dots, m$  تقاطع نداشته باشد، که در آن  $\mathbf{k}_i$  بیان گر سطر  $i$  ام ماتریس  $\mathbf{K}$  می باشد.

**گام چهارم:** اگر  $X_0 \subset G$ ،  $\mathbf{K}$  محدودیت ۳-۶ را برآورده می سازد، پایان. در غیر اینصورت چند جمله ای مشخصه دیگری پیشنهاد گردد و به گام اول بروید.

**تذکر ۳-۱:** اگر  $X_0 \subset G$ ، از انجاییکه  $G$  مجموعه ای پایاست، با شروع از هر شرایط اولیه ای در  $X_0$  مسیرهای فاز نمی توانند  $G$  را ترک کنند لذا سیگنال ورودی همیشه محدودیت ها را برآورده می سازد. شکل ۳-۱ این شرایط را نشان می دهد.





شکل ۳-۱: نمونه ای از مسیر حالت در ناحیه لیاپانوف یک سیستم مرتبه ۲

تذکر ۳-۲: برای تعیین مقدار مناسب  $C$  در رابطه ناحیه لیاپانوف گام سوم، مسئله بهینه سازی زیر بایستی برای  $i = 1, 2, \dots, m$  حل شود.

$$\begin{aligned} \max x^T P x \quad s. t. \\ |k_i x| < u_i^{max} \end{aligned} \quad (22-3)$$

جواب ۲۲-۳ برابر است با

$$c_i = (u_i^{max})^2 / k_i P^{-1} k_i^T \quad (23-3)$$

سپس، مقدار بیشینه  $C$  در گام سوم برابر است با

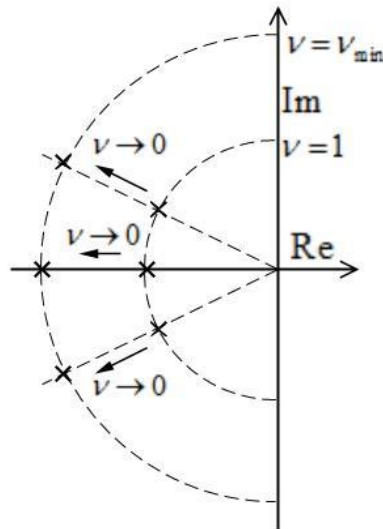
$$c = \min c_i \quad , for i = 1, 2, \dots, m. \quad (24-3)$$

### ۳-۴- کنترل ساختار متغیر مسیر قطب شعاعی برای سیستم های خطی

#### چند ورودی چند خروجی

روشی که در بخش ۳-۲ به آن پرداخته شد، یک روش سعی و خطاست که از محدوده مجاز سیگنال کنترل بصورت بهینه استفاده نمی کند. اگر تنها هدف کنترلی برآورده سازی محدودیت دامنه سیگنال

کنترل، سیگنال کنترل پیوسته و پایداری باشد، روش بخش ۲-۳ کارآمد است. اما اگر علاوه بر برآورده سازی محدودیت سیگنال کنترل، سیگنال کنترل پیوسته و پایداری، افزایش سرعت سیستم نیز مطلوب باشد، باید روش های کنترل ساختار متغیر نرم با هدف افزایش سرعت سیستم، به سیستم های خطی چند ورودی چند خروجی توسعه داده شود. در این بخش بدنبال توسعه کنترل ساختار متغیر مسیر قطب شعاعی، که در فصل ۲ برای سیستم های خطی یک ورودی یک خروجی معرفی گردید؛ به سیستم های خطی چند ورودی چند خروجی هستیم. مانند فصل ۲ در ابتدا مسیری شعاعی برای قطب های حلقه بسته نظیر شکل ۲-۳ در نظر می گیریم.



شکل ۲-۳: نمونه ای از مسیر قطب شعاعی برای یک سیستم مرتبه سوم

فرض کنید تابع انتخابی نظیر  $v = S(x)$  ماتریس پسخورد حالت  $\mathbf{K}(v)$  را مشخص می کند که توسط آن مکان دقیق قطب ها بروی مسیر پیشنهادی در هر لحظه تعیین می گردد. اگر مسیر قطب ها همانند شکل ۲-۳ شعاعی باشد، چند جمله ای مشخصه سیستم حلقه بسته برابر است با

$$d(v) = s^n + a_{n-1}v^{-1}s^{n-1} + a_{n-2}v^{-2}s^{n-2} + \dots + a_1v^{-(n-1)}s + a_0v^{-n} \quad (25-3)$$

از ۲۵-۳ می توانیم بطور مستقیم معادله دینامیکی سیستم حلقه بسته را در فرم فضای حالت همراه بازنویسی کنیم

$$\dot{x} = A_c(v)x \quad (۲۶-۳)$$

که در آن

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & 1 \\ -a_0 v^{-n} & -a_1 v^{-(n-1)} & \dots & -a_{n-1} v^{-1} \end{bmatrix} \quad (۲۷-۳)$$

و  $a_0 > 0, a_{n-2}, \dots, a_{n-1}$  بیانگر ضرایب چندجمله ای مشخصه سیستم حلقه بسته برای  $v = 1$  می باشند. مشخص است که سرعت سیستم با کاهش  $v$ ، کاهش می یابد ( $0 < v \leq 1$ ). این درجه آزادی در انتخاب مجموعه ای از کنترل کننده ها برای یک سیستم مشخص می تواند برای دست یافتن به اهداف کنترلی نظیر قوام و یا پاسخ سریع سیستم استفاده گردد. در ادامه نحوه استفاده از کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی برای سیستم های خطی چند ورودی چند خروجی با هدف افزایش سرعت سیستم تشریح می گردد.

## پروسه ۲

**گام اول:** با استفاده از پروسه ۱ کنترل جایابی قطب مناسب تعیین گردد. فرض شود برای این کنترل کننده  $v = 1$ .

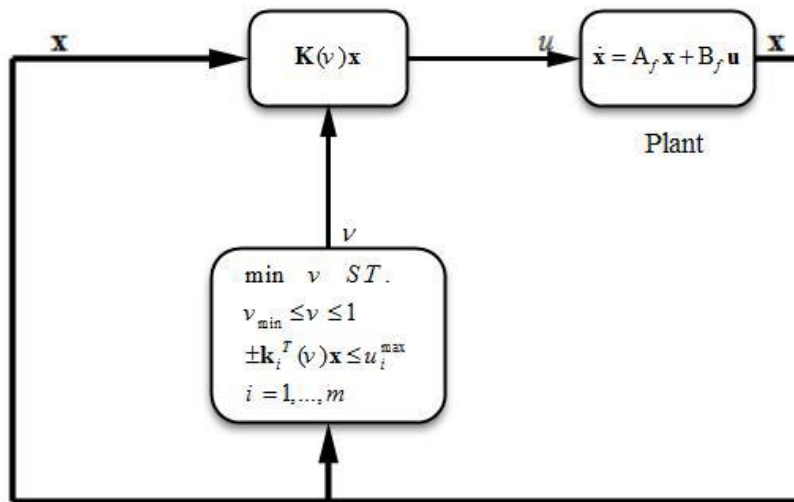
**گام دوم:** تابع  $K(v)$  بر اساس  $d(v)$  تعیین شود.

**گام سوم:** مسئله بهینه سازی زیر حل گردد

$$\begin{aligned} \min v \quad & \text{s.t.} \\ 0 < v_{\min} \leq v \leq 1 & \\ \pm \mathbf{k}_i^T(v) \mathbf{x} \leq u_i^{\max} \quad & i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (28-3)$$

که در آن مقدار کمینه بازه  $v = [v_{\min}, 1]$  می باشد، که در آن پایداری سیستم سویچینگ  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_c(v)\mathbf{x}$ ,  $v \in \mathcal{V}$  و  $\mathbf{A}_c(v) = \mathbf{A} + \mathbf{BK}(v)$  تضمین شده است. در ادامه در خصوص نحوه تعیین  $v_{\min}$  بحث خواهد شد.

**گام چهارم:** کنترل  $\mathbf{K}(v)\mathbf{x}$  به سیستم اعمال گردد که در آن  $v$  پاسخ مسئله بهینه سازی ۲۸-۳ می باشد. شکل ۳-۳ این روش کنترلی را به تصویر می کشد.



شکل ۳-۳: پیکربندی روش کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی برای سیستم های خطی چند ورودی چند خروجی

تذکر ۳-۳: همانگونه که در بخش قبل توضیح داده شد، بهترین راهکار حل ۲۸-۳ یافتن ریشه های چند جمله ای ها و پس آن فضای ممکن محدودیت ها می باشد. سپس مقدار بهینه تابع هدف در فضای ممکن قابل استحصال است.

تذکر ۳-۴: در سیستم های خطی چند متغیره نیز همانند سیستم های یک ورودی-یک خروجی با کاهش  $v_{min}$  سرعت سیستم افزایش می یابد که البته این بهبود در سرعت سیستم، به قیمت کاهش نرمی (افزایش مشتق) سیگنال کنترل می باشد.

می توانیم ۳-۲۷ را بصورت زیر بازنویسی کنیم

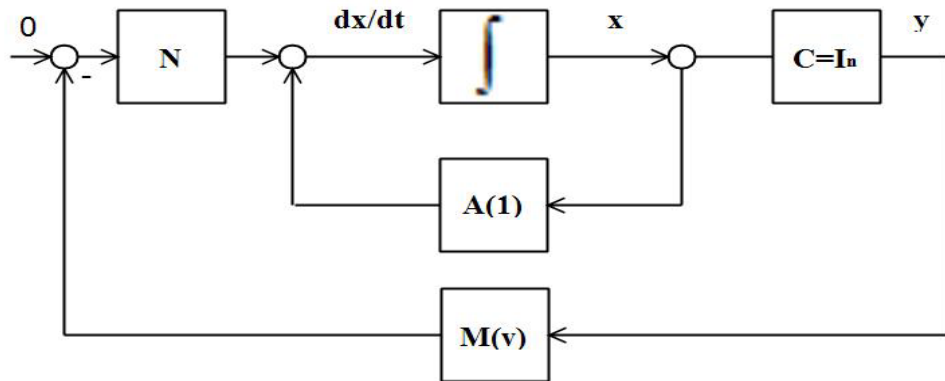
$$\mathbf{A}_c(v) = \mathbf{A}_c(1) - \mathbf{N}\mathbf{M}(v) \quad (۲۹-۳)$$

که در آن  $\mathbf{A}_c(1) = \mathbf{A}_c(v)|_{v=1}$ ،  $\mathbf{N}, \mathbf{M}(v) \in \mathcal{R}^{n \times n}$  و

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0_{(n-1) \times n} \\ \mathbf{1}_{(1 \times n)} \end{bmatrix} \quad (۳۰)$$

$$\mathbf{M}(v) = \text{diag}\{a_0 v^{-n} - a_0, a_1 v^{-(n-1)} - a_1, \dots, a_{n-1} v^{-1} - a_{n-1}\} \quad (۳۱)$$

سیستم حلقه بسته بازنویسی شده در ۳-۲۹ همانگونه که در شکل ۳-۴ نشان داده شده است، بیانگر یک سیستم خطی با فیدبک غیرخطی است که می تواند همانند فصل قبل، با کمک محک دایره چند متغیره و لم کالمن یا کوبویچ پوپوف پایداری آن را بررسی کرد.



شکل ۳-۴: نمایش سیستم حلقه بسته بازنویسی شده توسط ۳-۲۹

قضیه ۳-۱: پایداری کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی برای سیستم های خطی چند متغیره

کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی سیستم ۳-۲ پایدار است اگر ماتریس مثبت معین  $\mathbf{P}$ ، ماتریس  $\mathbf{L}$  و ثابت مثبت  $\varepsilon$  وجود داشته باشند بنحوی که

$$\begin{aligned} \mathbf{PA}_c(1) + \mathbf{A}_c(1)^T \mathbf{P} &= -\mathbf{L}^T \mathbf{L} - \varepsilon \mathbf{P} \\ \mathbf{PN} &= \mathbf{M}(v_{min})^T - \sqrt{2} \mathbf{L}^T \end{aligned} \quad (32-3)$$

اثبات: اثبات این قضیه کاملاً مشابه اثبات قضیه ۲-۲ و با استفاده از محک دایره و لم کالمن یا کوبوویچ پوپوف می باشد.

### ۳-۵- شبیه سازی

مدل هواپیمای جت در حالت پرواز با سرعت ثابت ۰٫۸ ماخ و ارتفاع ۴۰۰۰۰ پا با متغیرهای حالت، کنترل و خروجی زیر در نظر بگیرید [۵۲]

$$\mathbf{x} = [\text{beta}, \text{yaw}, \text{roll}, \text{phi}]^T$$

$$\mathbf{u} = [\text{rudder}, \text{aileron}]^T$$

$$\mathbf{y} = [\text{yaw rate}, \text{bank angle}]^T$$

این سیستم بصورت تقریبی می تواند توسط یک سیستم خطی چند متغیره معادل سازی شود.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}} &= \mathbf{A}\mathbf{p} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{p} \end{aligned} \quad (33-3)$$

که در آن

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.0558 & -0.9968 & 0.0802 & 0.0415 \\ 0.5980 & -0.1150 & -0.0318 & 0 \\ -3.0500 & 0.3880 & -0.4650 & 0 \\ 0 & 0.0805 & 1.000 & 0 \end{bmatrix} \quad (34-3)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0.0073 & 0 \\ -0.4750 & 0.0077 \\ 0.1530 & 0.1430 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (35-3)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (36-3)$$

پس از انتقال ۳-۳۳ به فرم فروبنیوس داریم

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}_f \mathbf{x} + \mathbf{B}_f \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_f \mathbf{x} \end{aligned} \quad (37-3)$$

که در آن

$$\mathbf{A}_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.7723 & -0.1777 & -0.0042 & 0.0162 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -9.6028 & -1.7613 & -0.0568 & -0.4581 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} -3) \\ (38) \end{matrix}$$

$$\mathbf{B}_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} -3) \\ (39) \end{matrix}$$

$$\mathbf{C}_f = \begin{bmatrix} -0.0167 & -0.4750 & 0.0058 & 0.0077 \\ 0.1148 & 0 & 0.1436 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} -3) \\ (40) \end{matrix}$$

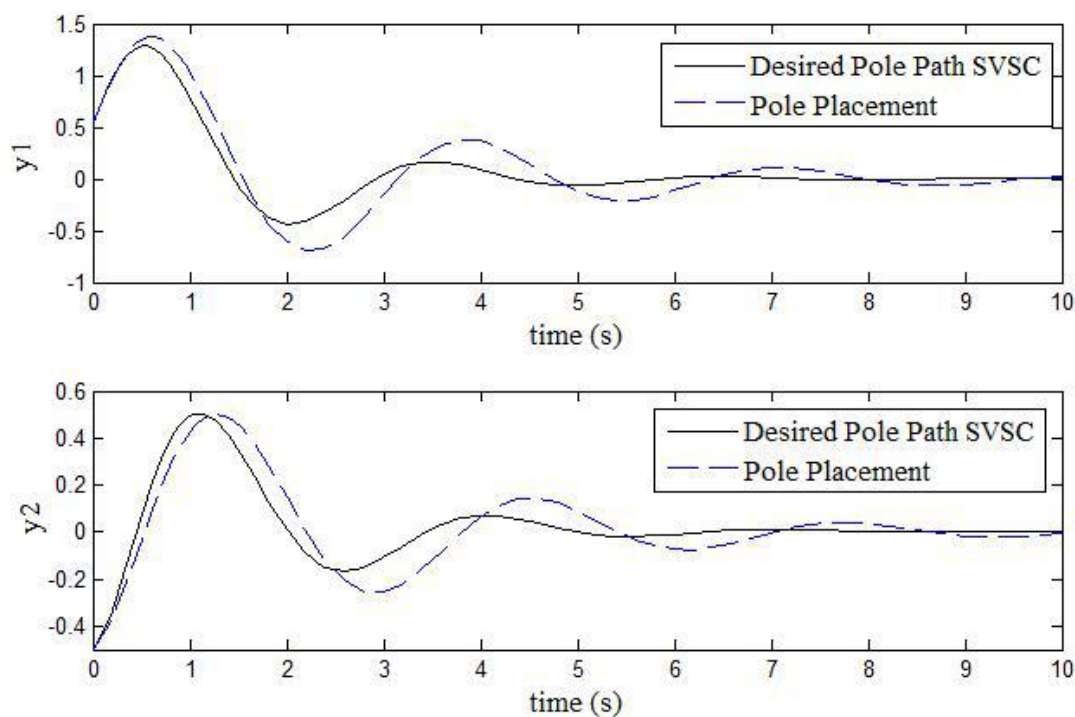
فرض کنید که محدوده ممکن شرایط اولیه  $X_0 \subset \mathcal{R}^4$  و  $|x_1| \leq 1$ ,  $|x_2| \leq 0.5$ ,  $|x_3| \leq 0.1$ , و  $|x_4| \leq 0.5$ ، و سیگنال ورودی تحت محدودیت  $|u_1| \leq 10$  و  $|u_2| \leq 40$  می باشد. مقایسه ورودی و خروجی ها بین روش کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی و جایابی قطب هنگامی که شرایط اولیه  $x_0 = [1, 0.5, 0, -0.5]^T$  در شکل ۳-۵ و ۳-۶ آورده شده است. در این مثال، فرض شده است که مکان قطب ها برای  $v = 1$ ،  $\{-1 \pm 0.1j, -0.5 \pm 0.05j\}$  می باشد و  $v_{\min} = 0.7$ ، ۳-۳۲ را برآورده می سازد هنگامی که

$$P = \begin{bmatrix} 0.2401 & -0.4026 & 0.0914 & -0.1335 \\ -0.4026 & 5.4701 & 2.4560 & 0.5984 \\ 0.0914 & 2.4560 & 5.8263 & 1.4612 \\ -0.1335 & 0.5984 & 1.4612 & 0.5618 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon = 10^{-6} \quad (3)$$

$$(4)$$

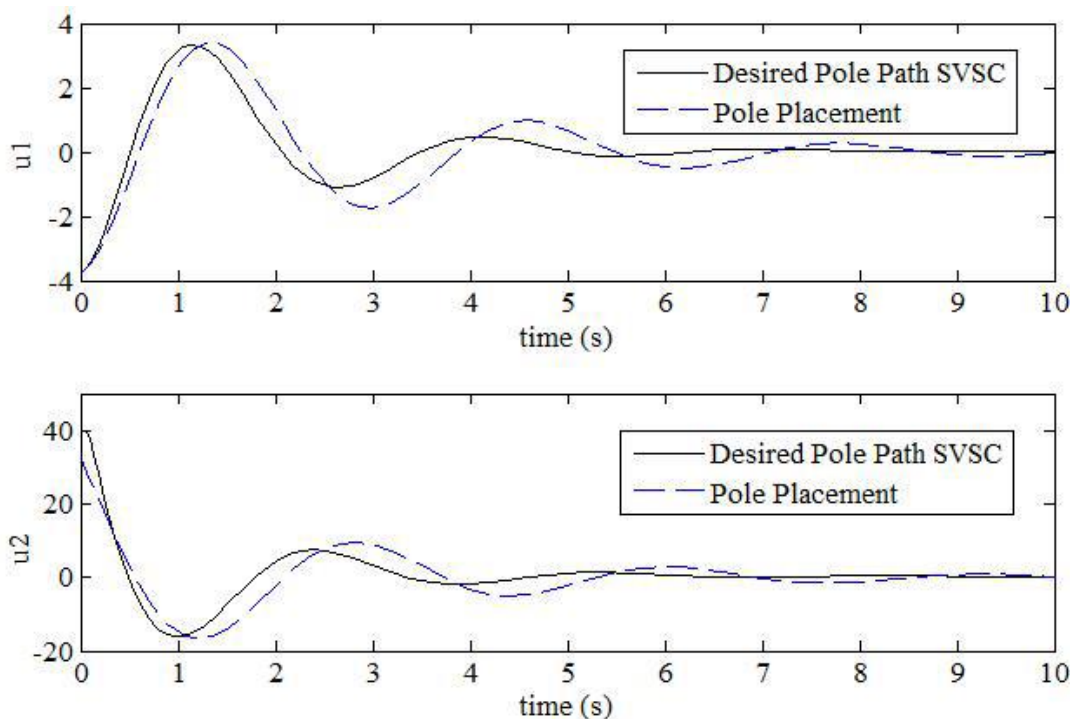
بنابراین پایداری سیستم ساختار متغیر تضمین شده است.

شکل ۳-۵ نشان می دهد که سرعت پاسخ بطور قابل توجهی با اعمال کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی نسبت به جایابی قطب افزایش می یابد. شکل ۳-۶ نشان می دهد که این افزایش در سرعت سیستم در حالی اتفاق افتاده است که محدودیت سیگنال کنترل نیز برآورده شده است. زمان نشست در سیستم کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب حدود ۶,۵ ثانیه است در حالیکه زمان نشست در سیستم کنترل جایابی قطب ۱۰ ثانیه می باشد.

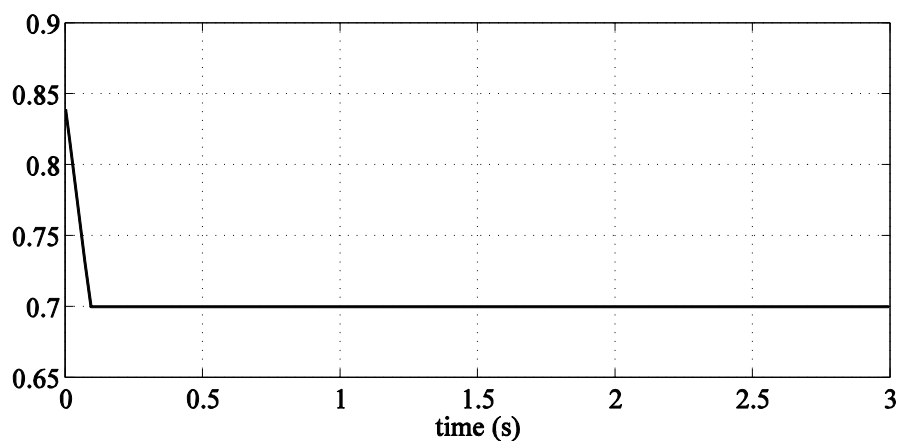


شکل ۳-۵: مقایسه خروجی سیستم ۳-۳۷ تحت کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی و جایابی قطب





شکل ۳-۶: مقایسه ورودی سیستم ۳-۲۷ تحت کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی و جایابی قطب



شکل ۳-۷: تغییرات پارامتر  $v$  در کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی

### ۳-۶- جمع بندی

در این فصل پس از مرور روش جایابی قطب برای سیستم های چند متغیره در بخش ۳-۱، روش کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی به سیستم های چند متغیره خطی توسعه داده شده است. بررسی

پایداری سیستم همانند فصل قبل، بر اساس محک دایره و لم کالمن-یاکوبوویچ- پوپوف می باشد. نتایج حاصل این فصل، بروی مدل کنترل هواپیما شبیه سازی شد که نتایج بیانگر بهبود سرعت سیستم در مقایسه با روش جایابی قطب می باشد.



## **فصل چهارم:**

**کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی برای  
سیستم‌های غیرخطی خودگردان افاین**

## ۴-۱- مقدمه

در این فصل بدنبال آن هستیم که روش پیشنهاد شده در فصول دوم و سوم، کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی را برای سیستم های غیرخطی افاین یک ورودی یک خروجی توسعه دهیم. روش هایی که تا کنون برای کنترل ساختار متغیر نرم با هدف افزایش سرعت سیستم معرفی شده اند، محدود به سیستم های خطی می باشند و نتایج ارائه شده در این فصل، نخستین کنترل ساختار متغیر نرم با هدف افزایش سرعت سیستم های غیرخطی می باشد. بطور خلاصه روش پیشنهادی در این فصل توسعه روش کنترلی خطی سازی پسخورد<sup>۵۰</sup> در سیستم های غیرخطی است که محل قطب های سیستم خطی شده، مشابه روشی که در فصول دوم و سوم به آن پرداختیم، بروی مسیرهای شعاعی قابل حرکت است. شبیه سازی نتایج حاصل از این فصل بیانگر عملکرد مطلوب روش پیشنهادی در سیستم های غیرخطی افاین است.

## ۴-۲- معرفی مسئله

سیستمی یک ورودی یک خروجی غیرخطی افاین بصورت زیر در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (۱-۴)$$

که در آن بردار متغیر حالت،  $u \in \mathcal{R}$  سیگنال کنترل،  $f, g: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$  و  $h: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$  توابعی به اندازه کافی نرم در دامنه تعریف خود می باشند. شرایط اولیه ممکن سیستم و سیگنال کنترل فرض می شود که بصورت زیر محدود باشند

$$x_0 \in X_0 \subset \mathcal{R}^n \quad (۲-۴)$$

$$|u| \leq u_0 \quad (۳-۴)$$

---

<sup>50</sup> Feedback linearization

فرض کنید دینامیک های صفر<sup>۵۱</sup> پایدار باشند. در این حالت، کنترل خطی سازی پسخورد رابطه زیر را نتیجه می دهد

$$u = \left( L_g L_f^{r-1} h(\mathbf{x}) \right)^{-1} \left( p - L_f^r h(\mathbf{x}) \right) \quad (۴-۴)$$

که در آن

$$p = y_d^{(r)} + a_{r-1} e^{(r-1)} + \dots + a_1 \dot{e} + a_0 e = y_d^{(r)} + \mathbf{k}^T \mathbf{e} \quad (۵-۴)$$

و  $L$  بیانگر مشتق لی<sup>۵۲</sup>،  $e = y_d - y$ ،  $e = [e, \dot{e}, \dots, e^{(r-1)}]$  و  $r$  درجه نسبی<sup>۵۳</sup> سیستم می باشد. فرض کنید شرایط اولیه ممکن  $e$  محدود به

$$e_0 \in E_0 \subset \mathcal{R}^r \quad (۶-۴)$$

و ضرایب  $a_i, i = 0, 1, \dots, r-1$  بنحوی انتخاب می شوند که دینامیک سیستم پایدار باشد. در این حالت دینامیک خطای سیستم خطی شده برابر است با

$$\dot{e} = \mathbf{A}e + \mathbf{b}u \quad (۷-۴)$$

که در آن

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{r-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (۸-۴)$$

<sup>51</sup> Zero dynamics

<sup>52</sup> Lie derivative

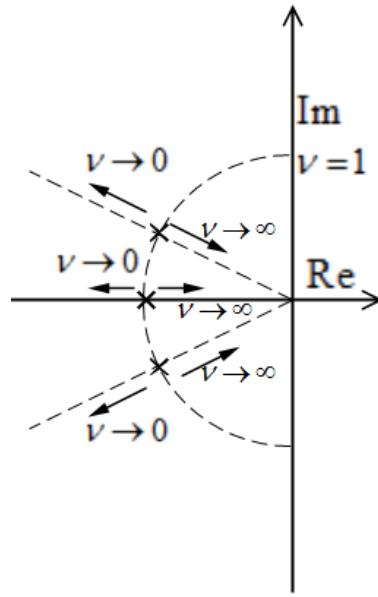
<sup>53</sup> Relative degree

## ۴-۳- طراحی کنترل خطی سازی پسخورد برای سیستم غیر خطی افاین با ورودی محدود

سیستمی که توسط روابط ۴-۱ تا ۴-۸ تعریف گردد جامعه قابل توجهی از سیستم های غیرخطی را در بر می گیرد و همچنین برای بکارگیری روش کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی، جهت دستیابی به پاسخی سریع و پایدار مناسب است. بایستی تابع انتخابی تعریف کنیم که بتواند کارآمد ترین محل برای قطب های سیستم حلقه بسته - که همزمان با برآورده سازی محدودیت سیگنال کنترل، منجر به افزایش سرعت سیستم می گردد؛ انتخاب کند. در ابتدا مشابه فصول دو و سه، پروسه ای را مطرح می کنیم که بتواند کنترل خطی سازی پسخورد مناسب ساختار ثابت را برای سیستم ۴-۱ با در نظر گرفتن محدودیت ۴-۳ تعیین نماید. سپس در پروسه بعدی توسعه این کنترل ساختار ثابت به کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی مطرح می گردد.

پروسه ۱: شروع با دو مقدار پرچم  $flag1 = 0$  و  $flag2 = 0$

گام اول: مسیر قطب شعاعی مناسب همانند شکل ۴-۱، تعریف کنید. بنحوی که در آن  $\nu$  متغیر تصمیم باشد که با کمک آن بتوان محل قطب ها در مسیر قطب شعاعی تعیین نمود.



۴-۱- نمونه مسیر قطب برای یک سیستم مرتبه سوم

**گام دوم:** یک مجموعه قطب ممکن در مسیر قطب انتخاب کنید و  $v = 1$  برای مجموعه قطب انتخابی

قرار دهید. بردار  $\mathbf{k}(1)$  را برای این مجموعه پیدا کنید. فرض کنید  $\mathbf{k}(1) = [\hat{a}_0, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{r-1}]^T$

منجر به سیستم حلقه بسته با قطب های مطلوب شود، در این حالت ماتریس  $\mathbf{A}(v)$  برابر است با

$$\mathbf{A}(v) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\hat{a}_0 v^{-r} & -\hat{a}_1 v^{-(r-1)} & -\hat{a}_2 v^{-(r-2)} & \dots & -\hat{a}_{r-1} v^{-1} \end{bmatrix} \quad (9-4)$$

و بردار  $\mathbf{k}(v)$  برابر است با

$$\mathbf{k}(v) = [\hat{a}_0 v^{-r}, \hat{a}_1 v^{-(r-1)}, \dots, \hat{a}_{r-1} v^{-1}]^T \quad (10-4)$$

**گام سوم:** گام های تغییرات  $S_1$  و  $S_2$  را بنحوی انتخاب کنید که  $1 < S_1 < S_2 \ll 1$ . بعنوان مثال  $S_1 =$

0.2 و  $S_2 = 0.02$  انتخاب های مناسبی می باشند.



**گام چهارم:** مجموعه دلخواهی از قطب های سیستم حلقه بسته را روی مسیر شعاعی پیشنهادی انتخاب کنید و بردار پسخورد  $\mathbf{k}(v)$  مربوطه را پیدا کنید.

**گام پنجم:** معده لیپانوف را با توجه به  $A(v)$  برای بدست آوردن ماتریس مثبت معین  $P$  حل کنید تا تابع لیپانوف  $V(e) = e^T P e$  بدست آید.  $\text{flag1} = 0$  قرار دهید.

**گام ششم:** برای  $c$  مقدار مثبت دلخواهی قرار دهید.

**گام هفتم:** با توجه به تابع لیپانوف بدست آمده در گام پنجم، ناحیه لیپانوف  $G = \{e | V(e) < c\}$  را بدست آورید.

**گام هشتم:** مقادیر زیر را در ناحیه لیپانوف بدست آورید

$$y_d^{(r)}_{max} = \max\{y_d^{(r)}\} \quad (11-4)$$

$$y_d^{(r)}_{min} = \min\{y_d^{(r)}\} \quad (12-4)$$

$$L_f^r h(x)_{max} = \max\{L_f^r h(x)\} \quad (13-4)$$

$$L_f^r h(x)_{min} = \min\{L_f^r h(x)\} \quad (14-4)$$

$$L_g L_f^{r-1} h(x)_{min} = \min\{L_g L_f^{r-1} h(x)\} \quad (15-4)$$

**گام نهم:** اگر که دو صفحه

$$k^T(v)e = (L_g L_f^{r-1} h(x)_{min})u_{max} - y_d^{(r)}_{max} + L_f^r h(x)_{min} \quad (16-4)$$

و

$$k^T e = -(L_g L_f^{r-1} h(x)_{min})u_{max} - y_d^{(r)}_{min} + L_f^r h(x)_{max} \quad (17-4)$$

ناحیه لیاپانوف  $G$  را قطع نمی کنند و  $flag1 = 1$ ، برو به گام دهم. اگر این دو صفحه ناحیه لیاپانوف  $G$  را قطع نمی کنند و  $flag1 = 0$ ، قرار دهید  $c = c + s_1$  و به گام هفتم بروید. در غیر اینصورت، قرار دهید  $c = c - s_2$ ،  $flag1 = 1$  و به گام هفتم بروید.

**گام دهم:** اگر  $E_0 \not\subset G$ ، قرار بده  $v = v + s_2$ ،  $flag2 = 1$  و به گام پنجم برو.

**گام یازدهم:** اگر  $E_0 \subset G$  و  $flag2 = 0$ ، قرار بده  $v = v - s_1$  و به گام پنجم برو. اگر  $E_0 \subset G$  و  $flag2 = 1$ ، برو به گام دوازدهم.

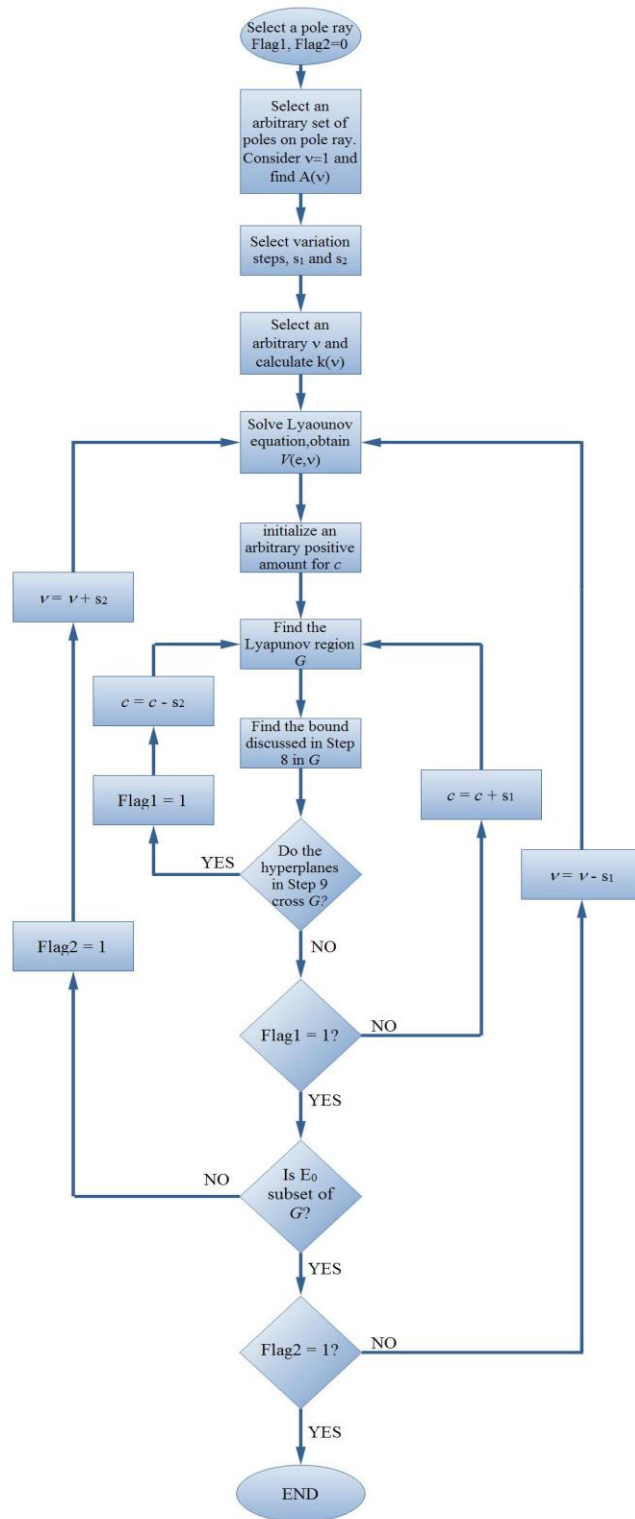
**گام دوازدهم:** قانون کنترل ۴-۴ را با ضرایب  $\hat{a}_0 v^{-r}, \hat{a}_1 v^{-(r-1)}, \dots, \hat{a}_{r-1} v^{-1}$  به سیستم اعمال نمایید.

پروسه ۱ در واقع تلاش می کند که کوچکترین مقدار  $v$  را که منجر شود  $E_0 \subset G$  پیدا کند. شکل ۴-۲ فلوجارت پروسه ۱ را نشان می دهد.

#### ۴-۴- کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی برای سیستم غیر خطی افاین

پروسه ۱ کنترل خطی سازی پسخورد مناسبی برای کلاسی از سیستم های غیرخطی افاین با محدودیت در سیگنال ورودی ارائه می کند. لیکن این کنترل بسیار محافظه کارانه است و از محدوده مجاز سیگنال بصورت بهینه استفاده نمی کند. اگر تنها هدف برآورده سازی محدودیت سیگنال کنترل و پایداری باشد، روش ارائه شده در پروسه ۱ کارآمد است، اما اگر علاوه بر موارد فوق، استفاده بهینه از محدوده مجاز سیگنال کنترل جهت افزایش سرعت سیستم نیز مطلوب باشد، می توانیم از روش های کنترل ساختار متغیر با هدف افزایش سرعت استفاده نماییم. در این بخش به دنبال توسعه روش کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی به سیستم های غیرخطی یک ورودی یک خروجی افاین با هدف کاهش زمان

نشست هستیم. در این روش ابتدا مجموعه قطب مناسب توسط پروسه  $\lambda$  انتخاب می شود و  $v = 1$  انتخاب می شود، سپس با تعریف تابع انتخاب مناسب، مقدار بهینه  $v$  در بازه  $0 < v_{min} < v < 1$  که علاوه بر برآورده سازی محدودیت سیگنال کنترل، سریع ترین پاسخ را داشته باشد، تعیین می گردد.



شکل ۴-۲ - فلوجارت پروسه ۱

## پروسه ۲

**گام اول:** مسیر قطب شعاعی مطلوب را انتخاب کرده و بهترین کنترل خطی سازی پسخورد را توسط پروسه ۱ تعیین نمایید.

**گام دوم:** قرار دهید  $v = 1$  برای نتیجه حاصل شده در گام اول  $k(v)$  را بنحوی که در گام دوم پروسه ۱ تشریح شد بیابید.

**گام سوم:** مسئله بهینه سازی زیر را حل نمایید

$$\begin{aligned} \min v \quad & \text{s. t.} \\ 0 < v_{min} \leq v \leq 1 & \quad (۴) \\ \mathbf{k}^T(v)\mathbf{e} \leq \left(L_g L_f^{r-1} h(\mathbf{x})\right) u_{max} - y_d^{(r)} + L_f^r h(\mathbf{x}) & \quad (۱۸) \\ \mathbf{k}^T(v)\mathbf{e} \geq -\left(L_g L_f^{r-1} h(\mathbf{x})\right) u_{max} - y_d^{(r)} + L_f^r h(\mathbf{x}) & \end{aligned}$$

**گام چهارم:** کنترل  $k^T(v)$  را برای قسمت خطی قانون کنترل ۴-۴ قرار دهید که در آن  $v$  پاسخ مسئله بهینه سازی گام سوم می باشد.

شکل ۴-۳ پیکربندی روش کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی را برای سیستم های غیرخطی یک ورودی یک خروجی افاین نشان می دهد.

**تذکر ۴-۱:** همانگونه که در بخش های قبلی بحث شد، پاسخ ۴-۱۸ که یک مسئله بهینه سازی چندجمله ای است را می توان با یافتن ریشه های چند جمله ای محدودیت ها و یافتن فضای ممکن، براحتی محاسبه نمود.

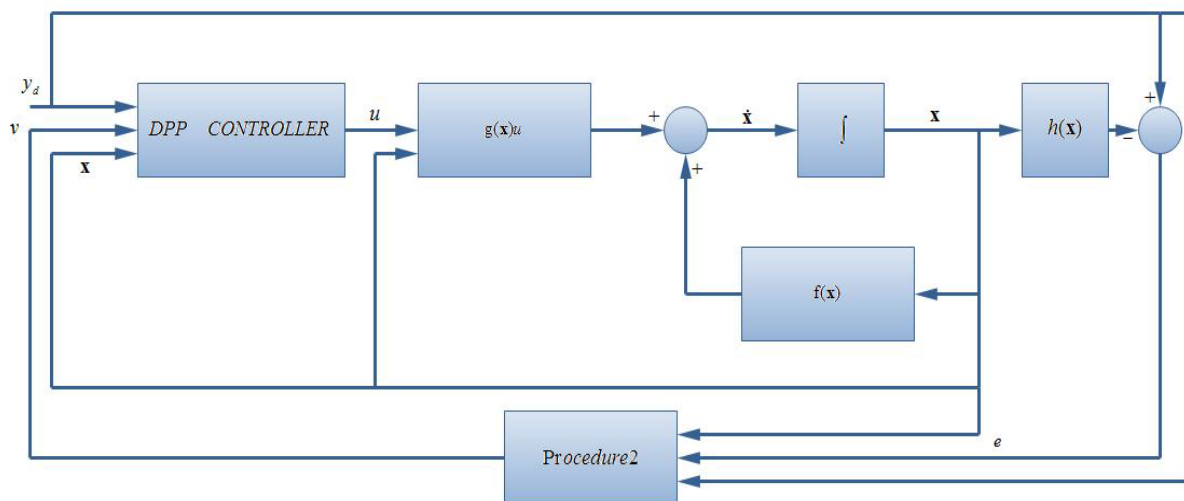
**تذکر ۴-۲:** مشتق  $r$  ام  $y$  در ۴-۱ نتیجه می دهد

$$y^{(r)} = L_f^r h(x) + (L_g L_f^{r-1} h(x)) u \quad (19-4)$$

با جایگذاری  $u$  از ۴-۴ در ۱۹-۴ داریم

$$\begin{aligned} y^{(r)} &= p \\ \dot{e} &= \mathbf{A}(v)e \end{aligned} \quad (20-4)$$

کاهش مقدار  $v$  باعث کاهش قسمت حقیقی مقادیر ویژه  $\mathbf{A}(v)$  که این امر باعث افزایش سرعت سیستم می شود.



شکل ۴-۳- پیکربندی روش کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی برای سیستم های غیرخطی یک ورودی یک خروجی افاین

در ادامه ما پایداری این سیستم سوچپینگ را بررسی می کنیم. تابع کاندید لیاپانوف زیر را در نظر بگیرید

$$V(e, v) = e^T P e \quad (21-4)$$

مشتق ۲۱-۴ با در نظر گرفتن ۲۰-۴ برابر است با

$$\dot{V} = e^T (\mathbf{A}(v)^T P + P \mathbf{A}(v)) e \quad (22-4)$$

ما احتیاج داریم که  $P$  مناسب در ۲۱-۴ را بنحوی بیابیم که برای تمامی  $0 < v_{min} < v < 1$

$$\mathbf{A}(v)^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}(v) < 0 \quad (23-4)$$

می‌توانیم همانند فصل دوم  $\mathbf{A}(v)$  را بصورت زیر بازنویسی کنیم

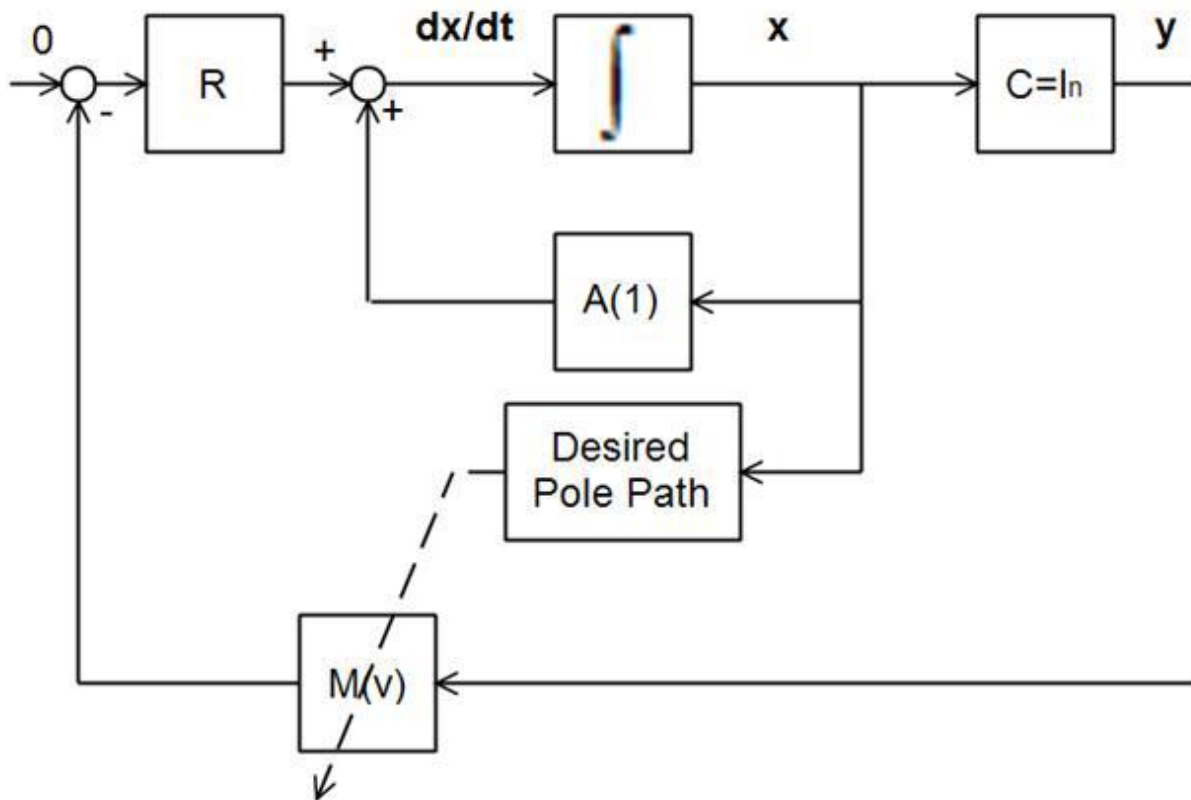
$$\mathbf{A}(v) = \mathbf{A}(1) - \mathbf{R} \mathbf{M}(v) \quad (24-4)$$

که در آن  $\mathbf{R}, \mathbf{M}(v) \in \mathcal{R}^{r \times r}$  و  $\mathbf{A}(1) = \mathbf{A}(v)|_{v=1}$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(r-1) \times r} \\ \mathbf{1}_{(1 \times r)} \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\mathbf{M}(v) = \text{diag}\{a_0 v^{-r} - a_0, a_1 v^{-(r-1)} - a_1, \dots, a_{r-1} v^{-1} - a_{r-1}\} \quad (26)$$

شکل ۴-۴ نمایش سیستم بازنویسی شده توسط ۲۴-۴ را نشان میدهد. همانگونه که مشخص است این سیستم کاملاً شرایط بکارگیری محک دایره چند متغیره را دارد. تضمین پایداری این سیستم نیز نظیر فصل‌های ۲ و ۳ توسط محک دایره و لم کالمن یا کوبوویچ پوپوف صورت می‌گیرد.



شکل ۴-۴ - شمای سیستم باز نویسی شده توسط رابطه ۴-۲۴

قضیه ۴-۱: کنترل مسیر قطب شعاعی سیستم ۴-۱ که توسط پروسه ۲ تعیین می شود پایدار است اگر

ماتریس مثبت معین  $P$ ، ماتریس  $L$  و ثابت مثبت  $\epsilon$  وجود داشته باشند بنحوی که

$$PA(1) + A(1)^T P = -L^T L - \epsilon P \quad (۲۷-۴)$$

$$PR = M(v_{\min})^T - \sqrt{2}L^T$$

اثبات: اثبات این قضیه کاملا مشابه اثبات قضیه ۲-۲ می باشد.

## ۴-۵- شبیه سازی

سیتمی با معادلات دینامیکی زیر در نظر بگیرید [۳۵]



$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ -x_2^5 \sin(4x_1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (28-4)$$

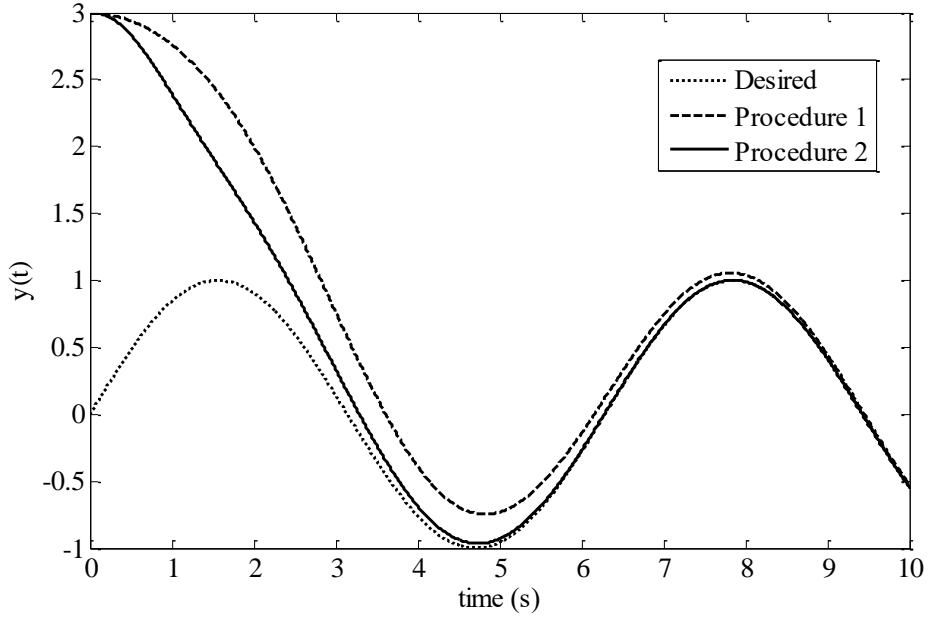
$$y = x_1$$

فرض کنید که  $y_d = \sin(t)$  و ناحیه ممکن شرایط اولیه محدود به  $|x_1(0)| \leq 3$  و  $|x_2(0)|, |x_3(0)| \leq 0.5$  باشد. درجه نسبی سیستم ۳ می باشد و لذا دینامیک صفر وجود ندارد و شرایط اولیه ممکن برای  $e$  برابر است با  $|e_1(0)| \leq 3, |e_2(0)| \leq 0.5, |e_3(0)| \leq 0.5$ . فرض کنید که سیگنال کنترل محدود به  $|u(t)| \leq 10$  باشد.

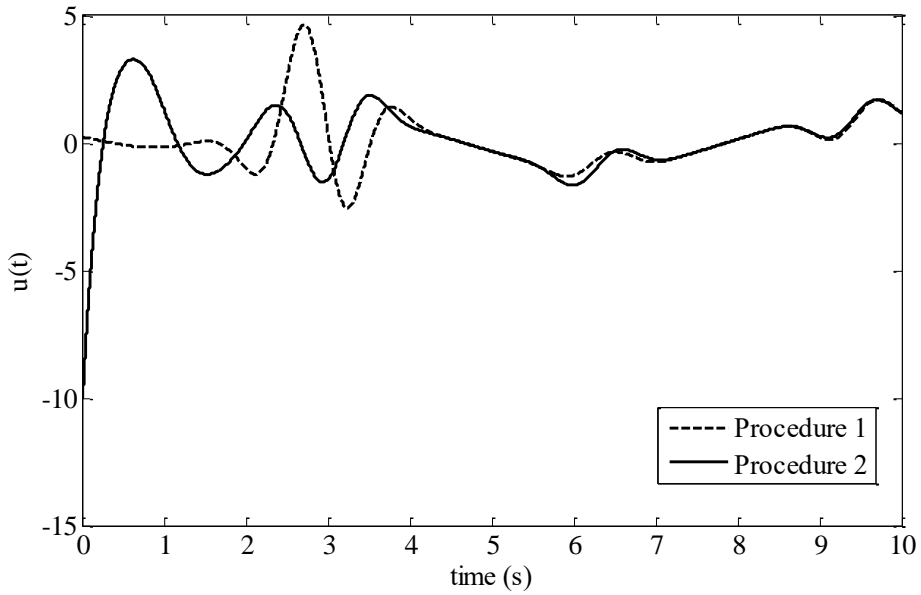
اجرای پروسه ۱ نتیجه می دهد که جایگذاری  $[a_0, a_1, a_2] = [1, 3, 2.5]$  در قانون کنترل خطی سازی پسخوردی ۴-۴، محدودیت ۳-۴ را برآورده می سازد. قضیه ۴-۱ نشان می دهد که کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی که در پروسه ۲ معرفی شد برای  $\forall v \in [0.5, 1]$  پایدار است و

$$P = \begin{bmatrix} 1.1585 & 1.0172 & 0.1149 \\ 1.0172 & 1.1446 & 0.0686 \\ 0.1149 & 0.0686 & 0.1355 \end{bmatrix}, \varepsilon = 10^{-6} \quad (29-4)$$

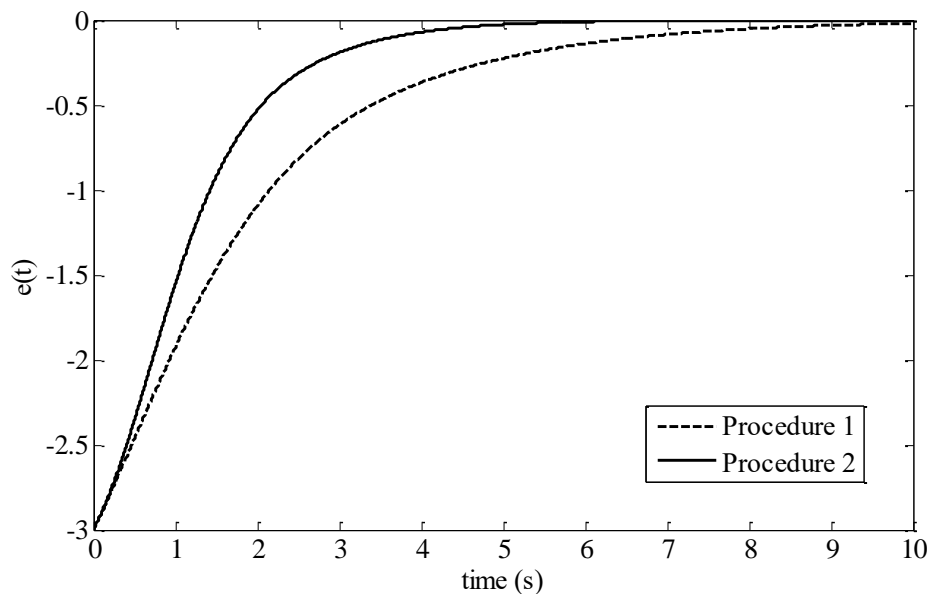
شکل های ۴-۵، ۴-۶ و ۴-۷ بترتیب خروجی سیستم، سیگنال کنترل و خطا را در دو حالت کنترل خطی سازی پسخورد و کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی نشان می دهد. همانگونه که در شکل های ۴-۵ و ۴-۷ مشخص است، سرعت پاسخ سیستم پس از بکارگیری کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی بهبود یافته است و شکل ۴-۶ نشان می دهد این افزایش سرعت در حالی بدست آمده است که محدودیت سیگنال کنترل نیز رعایت گردیده است.



شکل ۴-۵- مقایسه خروجی سیستم ۱-۴ با کنترل خطی سازی پسخورد و کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی



شکل ۴-۶- مقایسه ورودی سیستم ۱-۴ با کنترل خطی سازی پسخورد و کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی



شکل ۴-۷- مقایسه خطای سیستم ۱-۴ با کنترل خطی سازی پسخورد و کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی

## ۴-۶- جمع بندی

در این فصل، روش کنترل ساختار متغیر مسیر قطب شعاعی برای سیستم های غیرخطی توسعه داده شده است. در ابتدا کنترل خطی سازی پسخورد خروجی برای سیستم های غیر خطی تشریح شده و سپس مسیری شعاعی برای قطب های سیستم حلقه بسته فرض می گردد. با تعیین مکان بهینه قطب های سیستم خطی شده، با هدف کاهش زمان نشست خطا در شرایطی که محدودیت دامنه سیگنال کنترل رعایت گردد، قانون کنترل متغیر با زمانی به سیستم اعمال می گردد. پایداری این سیستم متغیر با زمان با استفاده از روش محک دایره اثبات گردید. نتایج حاصله از شبیه سازی بیانگر بهبود سرعت سیستم در مقایسه با کنترل خطی سازی فیدبک خروجی ساختار ثابت است.

## **فصل پنجم:**

**کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی برای کلاسی از  
سیستم های نامعین غیر خطی خودگردان افاین**

## ۵-۱- مقدمه

در این فصل بدنبال آن هستیم که نتایج حاصل از فصول قبل و خصوصا فصل چهارم را برای کلاسی از سیستم های غیرخطی یک ورودی یک خروجی افاین با نامعینی همسان<sup>۵۴</sup> توسعه دهیم. جهت دست یابی به این هدف، ابتدا روشی برای کنترل خطی سازی پسخورد مقاوم برای سیستم های غیرخطی یک ورودی یک خروجی افاین با نامعینی همسان معرفی می شود و سپس پروسه ای برای یافتن کنترل خطی سازی پسخورد مناسب که محدودیت سیگنال کنترل نیز در نظر می گیرد، ارائه می شود. پس از آن کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی با شروع از نتایج حاصل از پروسه نخست با هدف استفاده بهینه از محدوده مجاز سیگنال کنترل و افزایش سرعت سیستم معرفی می گردد. پایداری سیستم کنترل ساختار متغیر نرم با مسیر قطبی شعاعی برای سیستم های غیرخطی یک ورودی یک خروجی افاین با نامعینی همسان نیز همانند فصول قبل بوسیله محک دایره چند متغیره و لم کالمن یا کوبوویچ پوپوف اثبات می گردد. نتایج شبیه سازی در انتهای این فصل ارائه گردیده است که نشان دهنده پیشرفت حاصله پس از بکارگیری کنترل ساختار متغیر نرم با مسیر قطبی شعاعی برای سیستم های غیرخطی یک ورودی یک خروجی افاین با نامعینی همسان در مقایسه با کنترل خطی سازی پسخورد است.

## ۵-۲- معرفی مسئله

سیستم غیرخطی یک ورودی یک خروجی افاین با نامعینی بصورت زیر در نظر بگیرید

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + \Delta f(x) + [g(x) + \Delta g(x)]u \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{۱-۵}$$

---

<sup>54</sup> Matched uncertainty

که در آن، بردار متغیرهای حالت،  $u \in \mathcal{R}$  سیگنال کنترل،  $f, \Delta f, g, \Delta g: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$  و  $h: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$  به اندازه کافی نرم در دامنه تعریفشان هستند. فرض کنید که مبدا نقطه تعادل سیستم باشد و همچنین دینامیک های صفر سیستم ۱-۵ پایدار باشد. همچنین فرض کنید

$$\text{sgn}\{L_g L_f^{r-1} h(x)\} = 1 \quad (2-5)$$

که در آن  $r$  درجه نسبی سیستم است و

$$x_0 \in X_0 \subset \mathcal{R}^n \quad (3-5)$$

و  $\Delta f(x)$  و  $\Delta g(x)$  نامعینی هایی با اندازه محدود مربوط به مدلسازی و خطای اندازه گیری هستند که شرایط همسانی<sup>۵۵</sup> را برآورده می سازند.

$$|\Delta f(x)| \leq \Delta f_{max}(x) \quad (4-5)$$

$$|\Delta g(x)| \leq \Delta g_{max}(x) \quad (5-5)$$

$$\Delta f(x), \Delta g(x) \in \text{span}\{g(x)\} \quad (6-5)$$

فرض شود که مدل ۱-۵ به اندازه کافی دقیق است که نابرابری زیر در دامنه کاری سیستم همیشه برقرار باشد

$$\left| \left( L_g L_f^{r-1} h(x) \right)^{-1} L_{\Delta g_{max}} L_f^{r-1} h(x) \right| < 1 \quad (7-5)$$

و سیگنال کنترل تحت محدودیت زیر است

$$|u| \leq u_{max} \quad (8-5)$$

سیستم معرفی شده توسط ۱-۵ تا ۸-۵ به اندازه کافی گسترده است که دامنه وسیعی از سیستم های غیرخطی را در بر گیرد و بطور همزمان تمامی احتیاجات جهت بکارگیری کنترل ساختار متغیر نرم مسیر

<sup>55</sup> Matching condition

قطب شعاعی را دارد. در این فصل از دوجنبه به کنترل سیستم فوق الذکر پرداخته می شود. نخست قانون کنترلی مقاوم جهت سیستم ارائه می شود و با استفاده از تکنیک های لیاپانوف و مجموعه های پایا، قانون کنترل جهت رعایت محدودیت ۵-۸ آماده می شود. سپس همانند فصول گذشته مسیرهایی شعاعی برای تغییرات در قانون کنترل ارائه می گردد که به کمک آن، کنترلی ساختار متغیر جهت استفاده بهینه از محدوده مجاز سیگنال کنترل و افزایش سرعت سیستم حاصل شود.

### ۵-۳- کنترل خطی سازی پسخورد مقاوم برای سیستم های غیرخطی افاین با سیگنال کنترل محدود

در این بخش بدنبال یافتن کنترلی مقاوم برای سیستم غیرخطی افاین تحت روابط ۵-۱ تا ۵-۸ هستیم. در ابتدا محدودیت ۵-۸ نادیده گرفته می شود و قانون کنترل برای سیستم بدون محدودیت ورودی بدست می آید.

قضیه ۵-۱: قانون کنترل زیر را در نظر بگیرید [۵۳]

$$\begin{aligned}
 u &= \left( L_g L_f^{r-1} h(x) \right)^{-1} \left( v - L_f^r h(x) \right) \\
 v &= \hat{v} + v_R \\
 \hat{v} &= y_d^{(r)} + a_{r-1} e^{(r-1)} + \dots + a_1 \dot{e} + a_0 e \\
 D_{min} &= \left( 1 - \left| \left( L_g L_f^{r-1} h(x) \right)^{-1} L_{\Delta g_{max}} L_f^{r-1} h(x) \right| \right) \quad (5) \\
 N_{max} &= \left| L_{\Delta f_{max}} L_f^{r-1} h(x) \right| + \left| \left( L_g L_f^{r-1} h(x) \right)^{-1} L_{\Delta g_{max}} L_f^{r-1} h(x) \left( L_f^r h(x) \right) \right|^{-} \\
 &\quad + \left| \left( L_g L_f^{r-1} h(x) \right)^{-1} L_{\Delta g_{max}} L_f^{r-1} h(x) (\hat{v}) \right| \quad (9) \\
 v_R &= -\text{sgn}(e^T P w) \frac{N_{max}}{D_{min}} \\
 w_{r \times 1} &= [0, 0, \dots, 1]^T
 \end{aligned}$$

که در آن  $e = [e, \dot{e}, \dots, e^{(r-1)}]$ ،  $e = y_d - y$  و فضای ممکن شرایط اولیه  $e$  محدود به  $e_0 \in \mathcal{R}^r$

باشد. فرض کنید ضرایب  $a_{r-1} \dots a_0$  منجر شوند

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{r-1} \end{bmatrix} \quad (10-5)$$

یک ماتریس اکیدا هورویتز<sup>56</sup> گردد و  $\mathbf{P}$  ماتریس معین مثبتی است که از حل معادله لیاپانوف

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q} \quad (11-5)$$

برای ماتریس مثبت معین دلخواه  $\mathbf{Q}$  بدست می آید. کنترل ۹-۵ تضمین می کند پایداری سیستم ۱-۵ را

بنحوی که خروجی  $y$  بصورت مجانبی سیگنال مرجع  $y_d$  را ردگیری کند.

اثبات: پس از  $r$  بار مشتق گیری از  $y$  بر حسب زمان و در نظر گرفتن شرایط همسانی داریم

$$\begin{aligned} y^{(r)} &= L_f^r h(x) + L_{\Delta f} L_f^{r-1} h(x) + \left( L_g L_f^{r-1} h(x) \right) u \\ &+ \left( L_{\Delta g} L_f^{r-1} h(x) \right) u \end{aligned} \quad (12-5)$$

با جایگذاری  $u$  از ۹-۵ داریم

$$\begin{aligned} y^{(r)} &= v + L_{\Delta f} L_f^{r-1} h(x) + \left( L_{\Delta g} L_f^{r-1} h(x) \right) \left( L_g L_f^{r-1} h(x) \right)^{-1} (v \\ &- L_f^r h(x)) \end{aligned} \quad (13-5)$$

$$\begin{aligned} y^{(r)} &= \hat{v} + \left( 1 + \left( L_{\Delta g} L_f^{r-1} h(x) \right) \left( L_g L_f^{r-1} h(x) \right)^{-1} \right) v_R + L_{\Delta f} L_f^{r-1} h(x) \\ &+ \left( L_{\Delta g} L_f^{r-1} h(x) \right) \left( L_g L_f^{r-1} h(x) \right)^{-1} \left( \hat{v} - L_f^r h(x) \right) \end{aligned} \quad (14-5)$$

<sup>56</sup> strictly Hurwitz matrix



$$\begin{aligned} \dot{e} = & \mathbf{A}e + w \left[ \left( 1 + \left( L_{\Delta g} L_f^{r-1} h(x) \right) \left( L_g L_f^{r-1} h(x) \right)^{-1} \right) v_R \right. \\ & + L_{\Delta f} L_f^{r-1} h(x) \\ & \left. + \left( L_{\Delta g} L_f^{r-1} h(x) \right) \left( L_g L_f^{r-1} h(x) \right)^{-1} \left( \hat{v} - L_f^r h(x) \right) \right] \end{aligned} \quad (15-5)$$

اگر تابع کاندید لیاپانوف زیر را در نظر بگیریم

$$V(e) = e^T P e \quad (16-5)$$

با توجه به هورویتز بودن ماتریس  $A$ ، ماتریس  $P$  مثبت معین است لذا تابع کاندید لیاپانوف ۱۶-۵ شرایط قضیه لیاپانوف را دارد. با مشتق گیری از ۱۶-۵ بر حسب زمان داریم

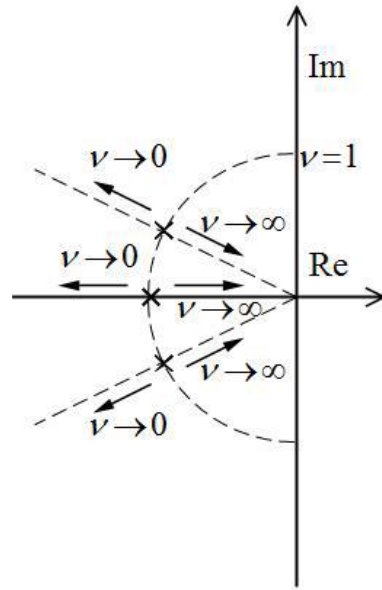
$$\begin{aligned} \dot{V} = & -e^T \mathbf{Q}e + 2e^T \mathbf{P}w \left[ \left( 1 + \left( L_{\Delta g} L_f^{r-1} h(x) \right) \left( L_g L_f^{r-1} h(x) \right)^{-1} \right) v_R \right. \\ & + L_{\Delta f} L_f^{r-1} h(x) \\ & \left. + \left( L_{\Delta g} L_f^{r-1} h(x) \right) \left( L_g L_f^{r-1} h(x) \right)^{-1} \left( \hat{v} - L_f^r h(x) \right) \right] \end{aligned} \quad (17-5)$$

حال اگر  $v_R$  از ۹-۵ در ۱۷-۵ جایگزین شود ۱۷-۵ منفی می شود لذا سیستم ۱-۵ با کنترل ۹-۵ پایدار است.

جهت در نظر گرفتن محدودیت سیگنال ورودی ۸-۵ در قانون کنترل، پروسه زیر که بر اساس روش های لیاپانوف و مجموعه های پایاست مفید است [۵۴].

**پروسه ۱:** شروع با دو مقدار پرچم،  $flag1 = 0$  و  $flag2 = 0$

**گام اول:** مسیر قطب شعاعی مناسب نظیر شکل ۱-۵ انتخاب شود.



شکل ۵-۱- نمونه مسیر قطب شعاعی برای یک سیستم با درجه نسبی ۳

**گام دوم:** یک مجموعه ممکن بروی مسیر قطب انتخاب شود و  $v = 1$  برای این انتخاب در نظر گرفته شود. بردار بهره پسخورد  $\mathbf{k}(v = 1)$  محاسبه شود، فرض شود  $\mathbf{k}(1) = [\hat{a}_0, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{r-1}]^T$  که منجر به سیستم حلقه بسته با قطب های انتخابی می شود. ماتریس  $\mathbf{A}(v)$  در این شرایط برابر است با

$$\mathbf{A}(v) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\hat{a}_0 v^{-r} & -\hat{a}_1 v^{-(r-1)} & -\hat{a}_2 v^{-(r-2)} & \dots & -\hat{a}_{r-1} v^{-1} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} -5) \\ (18) \end{matrix}$$

و بردار  $\mathbf{k}(v)$  برابر است با

$$\mathbf{k}(v) = [\hat{a}_0 v^{-r}, \hat{a}_1 v^{-(r-1)}, \dots, \hat{a}_{r-1} v^{-1}]^T \quad (19-5)$$

**گام سوم:** گام های تغییرات  $S_1$  و  $S_2$  را بنحوی انتخاب کنید که  $1 > S_1 > S_2 \ll 1$ . بعنوان مثال  $S_1 = 0.2$  و  $S_2 = 0.02$  انتخاب های مناسبی می باشند.

گام چهارم: با توجه به  $\mathbf{A}(v)$ ، معادله لیاپانوف  $\mathbf{A}^T(v)\mathbf{P}(v) + \mathbf{P}(v)\mathbf{A}(v) = -\mathbf{Q}$  را برای

ماتریس مثبت معین  $\mathbf{P}(v)$  حل کنید تا تابع لیاپانوف  $V(\mathbf{e}, v) = \mathbf{e}^T \mathbf{P}(v) \mathbf{e}$  بدست آید.

گام پنجم: مقدار دلخواه مثبتی برای  $c$  انتخاب کنید.

گام ششم: با توجه به تابع لیاپانوف، ناحیه لیاپانوف  $G(v, c) = \{e | V(e, v) < c\}$  را بدست آورید.

گام هفتم: مقادیر زیر را در ناحیه لیاپانوف بدست آورید

$$(y_d^{(r)})_{max} = \max\{y_d^{(r)}\} \quad (20-5)$$

$$(y_d^{(r)})_{min} = \min\{y_d^{(r)}\} \quad (21-5)$$

$$(L_f^r h(x))_{max} = \max\{L_f^r h(x)\} \quad (22-5)$$

$$(L_f^r h(x))_{min} = \min\{L_f^r h(x)\} \quad (23-5)$$

$$(L_g L_f^{r-1} h(x))_{min} = \min\{L_g L_f^{r-1} h(x)\} \quad (24-5)$$

$$(v_R)_{max} = \max\{v_R\} \quad (25-5)$$

$$(v_R)_{min} = \min\{v_R\} \quad (26-5)$$

گام هشتم: اگر که صفحات

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^T(v)\mathbf{e} = & (L_g L_f^{r-1} h(\mathbf{x}))_{min} u_{max} - (v_R)_{max} - (y_d^{(r)})_{max} \\ & + (L_f^r h(\mathbf{x}))_{min} \end{aligned} \quad (27-5)$$

$$\mathbf{k}^T(v)\mathbf{e} = -\left(L_g L_f^{r-1} h(\mathbf{x})\right)_{\min} u_{\max} - (v_R)_{\min} - (y_d^{(r)})_{\min} \quad (28-5)$$

$$+ \left(L_f^r h(\mathbf{x})\right)_{\max}$$

ناحیه لیپانوف  $G(v, c)$  را قطع نمی کنند و  $flag1 = 1$ ، برو به گام نهم. اگر این دو صفحه ناحیه لیپانوف  $G(v, c)$  را قطع نمی کنند و  $flag1 = 0$ ، قرار دهید  $c = c + s_1$  و به گام ششم بروید. در غیر اینصورت، قرار دهید  $c = c - s_2$ ،  $flag1 = 1$  و به گام ششم بروید.

**گام نهم:** اگر  $E_0 \not\subset G(v, c)$ ، قرار بده  $v = v + s_2$ ،  $flag2 = 1$  و به گام چهارم برو.

**گام دهم:** اگر  $E_0 \subset G(v, c)$  و  $flag2 = 0$ ، قرار بده  $v = v - s_1$  و به گام چهارم برو. اگر  $flag2 = 1$  و  $E_0 \subset G(v, c)$ ، برو به گام یازدهم.

**گام یازدهم:** قانون کنترل ۹-۵ را با ضرایب  $\hat{a}_0 v^{-r}, \hat{a}_1 v^{-(r-1)}, \dots, \hat{a}_{r-1} v^{-1}$  به سیستم اعمال نمایید.

پروژه ۱ تلاش می کند که بهترین کنترل خطی سازی پسخورد مقاوم را برای سیستم ۱-۵ بیابد. توضیحات چگونگی برآورده شدن محدودیت ۸-۵ دقیقاً مانند فصول قبل است. شکل ۲-۵ فلوجارت پروژه ۱ را نشان می دهد.

## ۴-۵- کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی برای سیستم های

### غیرخطی افاین نامعین

در این بخش نحوه توسعه روش ارائه شده در بخش ۲-۵ به کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی ارائه می گردد. مطالب این بخش نزدیک به فصول قبل با تغییرات بسیار مختصر می باشد. در پروژه ۱ کنترلی پایدار، مقاوم ارائه شد که محدودیت سیگنال ورودی را در نظر می گیرد. در این بخش

توسعه پروسه ۱ به کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی با هدف افزایش سرعت سیستم بیان می شود.

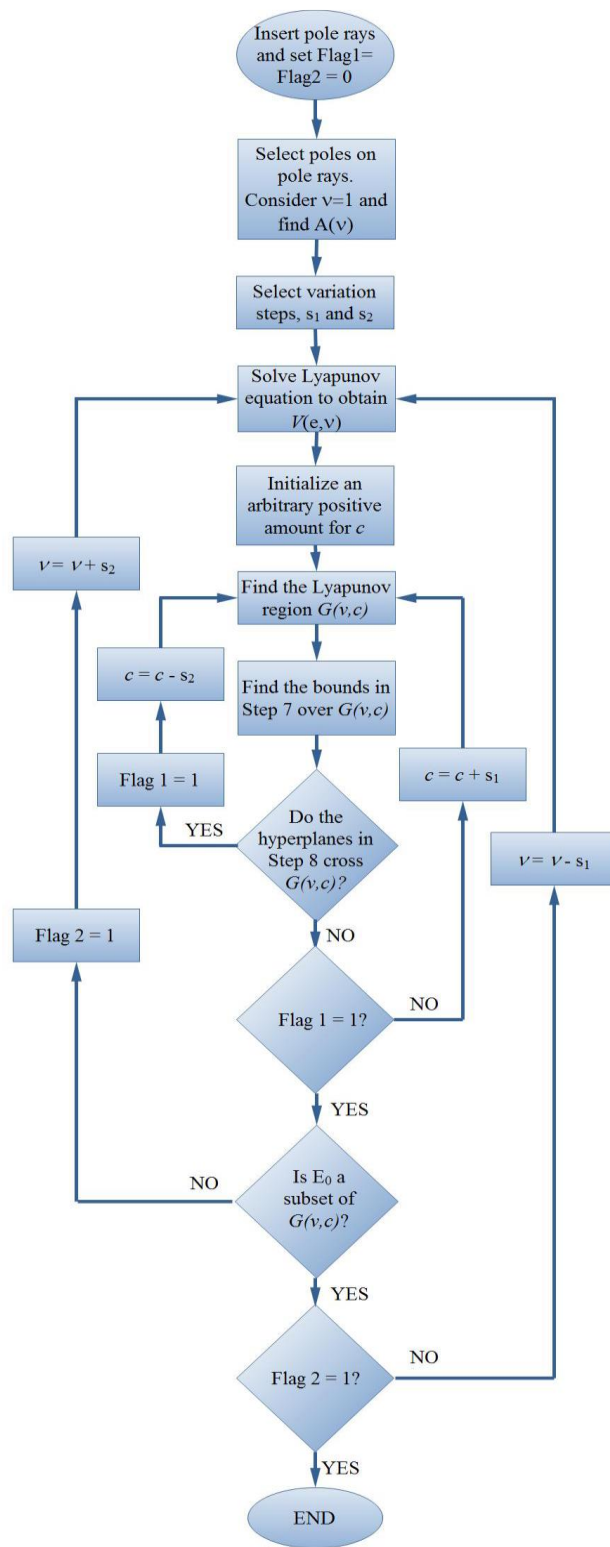
پروسه ۲:

گام اول (خارج از خط<sup>۵۷</sup>): مسیر قطب شعاعی مطلوب را انتخاب کرده و بهترین کنترل خطی سازی پسخورد مقاوم را توسط پروسه ۱ تعیین نمایید.

گام دوم (خارج از خط): قرار دهید  $v = 1$  برای نتیجه حاصل شده در گام اول  $k(v)$  را بنحوی که در گام دوم پروسه ۱ تشریح شد بیابید.

---

<sup>57</sup> Offline



شکل ۵-۲- فلوچارت پروسه ۱

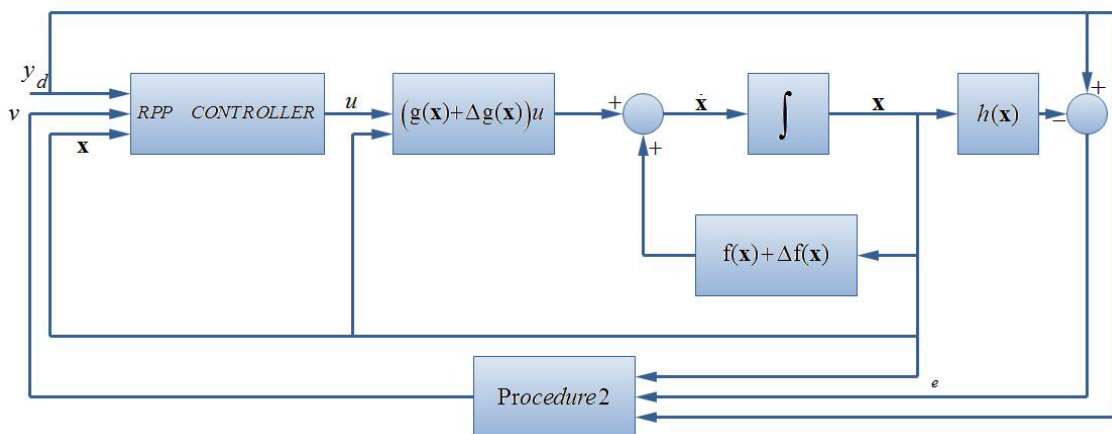
گام سوم (روی خط<sup>۵۸</sup>): مسئله بهینه سازی زیر را حل نمایید

$$\begin{aligned} \min v \quad & \text{s.t.} \\ 0 < v_{min} \leq v \leq 1 & \quad (۵) \\ k^T(v)e \leq (L_g L_f^{r-1} h(x)) u_{max} - y_d^{(r)} - v_R + L_f^r h(x) & \quad (۲۹) \\ k^T(v)e \geq -(L_g L_f^{r-1} h(x)) u_{max} - y_d^{(r)} - v_R + L_f^r h(x) & \end{aligned}$$

گام چهارم (روی خط): کنترل  $k^T(v)$  را برای قسمت خطی قانون کنترل ۹-۵ قرار دهید که در آن  $v$

پاسخ مسئله بهینه سازی گام سوم می باشد.

شکل ۳-۵ پیکره بندی این روش کنترلی را نشان می دهد.



شکل ۳-۵- پیکربندی کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی برای سیستم های غیرخطی افاین نامعین

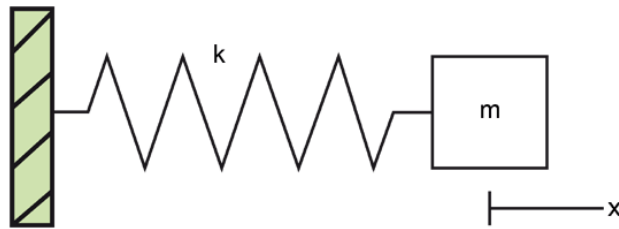
پایداری سیستم کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی برای سیستم های غیرخطی مطابق با ۱-۵ تا ۸-۵ نیز مانند سایر بخش ها قابل بررسی است. از آنجایی که قسمت دوم ۱۷-۵ همواره منفی است در واقع باز هم تنها نیاز است که  $\mathbf{P}$  را بنحوی تعیین کنیم که  $\mathbf{A}^T(v)\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}(v) < 0$  برای همه  $v \in$

[1,  $v_{min}$ ]. اثبات پایداری  $\mathbf{A}(v)$  دقیقا مانند فصول قبل با بازنویسی به فرم مناسب برای استفاده از محک دایره چندمتغیره و لم کالمن یا کوپوویچ پوپوف انجام می پذیرد.

## ۵-۵- شبیه سازی

در این بخش دو مثال عددی جهت بررسی نتایج حاصله ارائه می گردد. در این بخش برای جلوگیری از لرزش سیگنال کنترل<sup>۵۹</sup> تابع اشباع  $sat(\cdot)$  جایگزین تابع علامت  $sgn(\cdot)$  در ۵-۹ گردیده است. این تغییر باعث نرمی سیگنال کنترل می گردد ولی از طرف دیگر، مقداری خطای حالت دائم ایجاد می گردد.

**مثال ۱:** یک سیستم جرم و فنر غیر خطی مشابه آنچه در شکل ۵-۴ نشان داده شده در نظر بگیرید



شکل ۵-۴- سیستم جرم و فنر غیر خطی

فرض کنید معادلات دینامیکی این سیستم را می توان بصورت زیر نوشت.

$$m\ddot{y} + k_1\dot{y} + k_3y^3 = u \quad (۳۰-۵)$$

فرض شود ضرایب در رابطه ۳۰-۵ بطور کامل مشخص نیستند ولی بتوان نوشت

$$\ddot{y} = -c_1\dot{y} - c_3y^3 + bu \quad (۳۱-۵)$$

که در آن

<sup>59</sup> Chattering

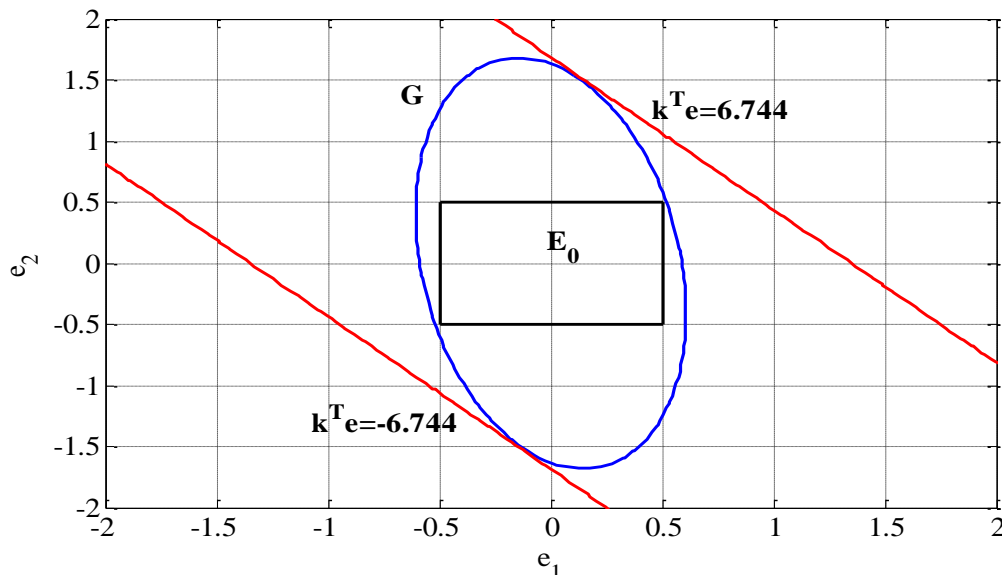


$$\begin{aligned} 0.9 &\leq c_1 \leq 1.1 \\ 0.09 &\leq c_3 \leq 0.11 \\ 0.9 &\leq b \leq 1.1 \end{aligned} \quad (32-5)$$

قرار دهید  $x_1 = y$  و  $x_2 = \dot{y}$  و فرض کنید  $y_d = 0$  و محدوده مجاز شرایط اولیه محدود به  $|x_1(0)| \leq 0.1$  و  $|x_2(0)| \leq 0.1$  باشد. درجه نسبی این سیستم ۲ است و دینامیک صفر وجود ندارد. شرایط اولیه ممکن برای خطا نیز  $|e_1(0)| \leq 0.1$  و  $|e_2(0)| \leq 0.1$  می باشد. فرض کنید که ورودی کنترل مطابق  $|u| \leq 8.5$  محدود باشد. با توجه به ۳۱-۵ و ۳۲-۵ می توان نوشت

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} = & \left( \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 - 0.1x_1^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -(c_1 - 1)x_1 - (c_2 - 0.1)x_1^3 \end{bmatrix} \right) \\ & + \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b - 1 \end{bmatrix} \right) u \end{aligned} \quad (33-5)$$

اجرای پروسه ۱  $[a_0, a_1] = [5, 4]$  را نتیجه می دهد که در قانون کنترل فیدبک ۵-۹ قرار بگیرد تا ردگیری مجانبی تضمین گردد. شکل ۵-۵ ناحیه مجاز شرایط اولیه، مجموعه پایا  $G$  و خطوط محدودیت سیگنال کنترل را نشان می دهد.



شکل ۵-۵- ناحیه مجاز شرایط اولیه، خطوط محدودیت ها و ناحیه لیاپانوف

بایستی مقدار قابل قبولی برای  $v_{min}$  نیز یافت شود که با توجه به قضیه پایداری اگر  $v_{min} = 0.5$  و

$$\varepsilon = 10^{-6} \text{ و تعریف کنیم}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \quad (34-5)$$

می توانیم از رابطه دوم قضیه ۴-۱،  $\mathbf{L}$  را بعنوان تابعی از  $\mathbf{P}$  بنویسیم و در رابطه اول جایگذاری کنیم. پس

از مقداری محاسبات به دستگاه معادلات غیرخطی زیر می رسیم.

$$\varepsilon p_{11} - 10p_{21} + 0.5(p_{21} - 15)^2 + 0.5p_{21}^2 = 0 \quad (5-)$$

$$p_{11} - (4 - \varepsilon)p_{21} - 5p_{22} + 0.5p_{21}(p_{22} - 4) + 0.5p_{22}(p_{21} - 15) = 0$$

$$2p_{21} - (8 - \varepsilon)p_{22} + 0.5(p_{22} - 4)^2 + 0.5p_{22}^2 = 0 \quad (35)$$

این دستگاه می تواند با یکی از روش های مرسوم بازگشتی حل شود تا ماتریس  $\mathbf{P}$  بدست آید

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 48.354 & 5.8856 \\ 5.8856 & 1.9715 \end{bmatrix} \quad (36-5)$$

از آنجایی که  $\mathbf{P}$  مثبت معین است، نتیجه می دهد که سیستم ساختار متغیر پایدار است.

برای روشن شدن نحوه حل مسئله بهینه سازی ۵-۲۹، مسئله را در لحظه شروع و برای شرایط اولیه

$x_1(0) = x_2(0) = -0.5$ ، یعنی  $e_1(0) = e_2(0) = 0.5$  روش حل مسئله را پیش می بریم.

بردار ضرایب قسمت خطی متغیر با زمان برابر است با

$$\mathbf{k}(v) = \begin{bmatrix} 5v^{-2} \\ 4v^{-1} \end{bmatrix} \quad (37-5)$$

مقادیر مورد استفاده در مسئله بهینه سازی بصورت زیر است.

$$\mathbf{L}_g \mathbf{L}_f^{r-1} \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}_g \mathbf{L}_f \mathbf{x}_1 = 1 \quad (38-5)$$

$$y_d^{(2)} = 0 \quad (39-5)$$

$$L_f^r h(x) = L_f^2 x_1 = -x_1 - 0.1x_1^3 \quad (40-5)$$

$$D_{\min} = 1 - |L_{\Delta g_{\max}} L_f x_1| = 0.9 \quad (41-5)$$

$$N_{\max} = 0.2|-x_1 - 0.1x_1^3| + 0.1|5v^{-2}e_1 + 4v^{-1}e_2| \quad (42-5)$$

$$P(v) = \begin{bmatrix} \frac{21}{40}v + \frac{5}{8}v^{-1} & \frac{1}{10}v^2 \\ \frac{1}{10}v^2 & \frac{1}{8}v + \frac{1}{40}v^3 \end{bmatrix} \quad (43-5)$$

$$e^T P(v) w = \frac{1}{16}v + \frac{1}{20}v^2 + \frac{1}{80}v^3 \quad (44-5)$$

با در نظر گرفتن شرایط اولیه  $x_1(0) = x_2(0) = -0.5$  و  $e_1(0) = e_2(0) = 0.5$  مسئله بهینه

سازی ۲۹-۵ بصورت زیر نوشته می شود

$$\min v \quad s.t. \quad (5)$$

$$0.5 \leq v \leq 1$$

$$2.5v^{-2} + 2v^{-1} \leq 8.5 - \left( -\operatorname{sgn}\left(\frac{1}{16}v + \frac{1}{20}v^2 + \frac{1}{80}v^3\right) \frac{0.1025 + 0.1|2.5v^{-2} + 2v^{-1}|}{0.9} \right) \quad (4)$$

$$2.5v^{-2} + 2v^{-1} \geq -8.5 - \left( -\operatorname{sgn}\left(\frac{1}{16}v + \frac{1}{20}v^2 + \frac{1}{80}v^3\right) \frac{0.1025 + 0.1|2.5v^{-2} + 2v^{-1}|}{0.9} \right) \quad (5)$$

با توجه به اینکه  $v > 0$  توابع غیرخطی  $\operatorname{sgn}(\cdot)$  و  $\operatorname{abs}(\cdot)$  قابل ساده سازی هستند. در غیر اینصورت

بازه  $0.5 \leq v \leq 1$  می بایست به زیر بازه هایی تقسیم شود که توابع غیر خطی ساده شوند و سپس

مقدار بهینه کلی از میان مقادیر بهینه این زیر مسئله ها حاصل شود.

$$\min v \quad s.t.$$

$$0.5 \leq v \leq 1$$

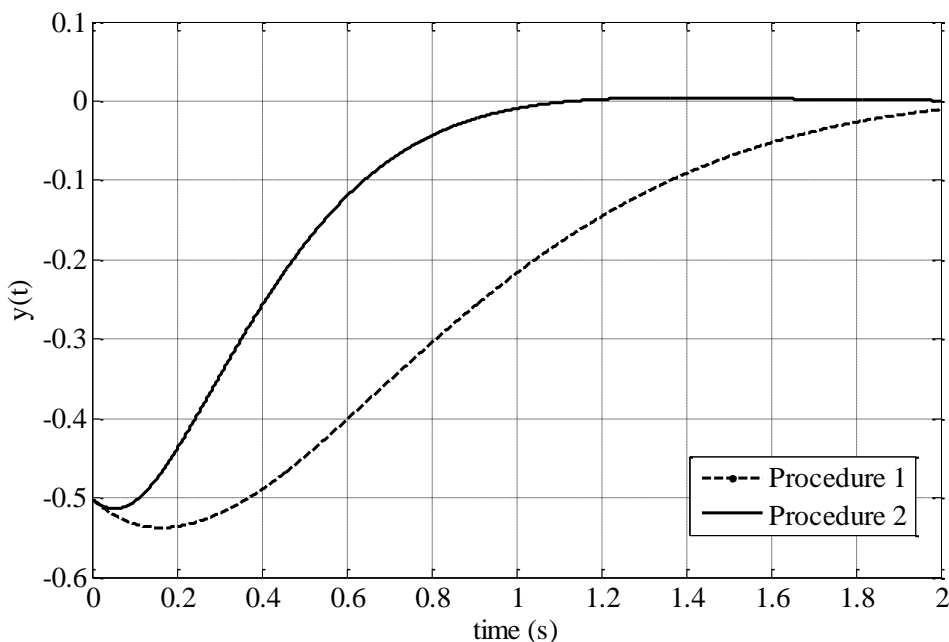
$$\frac{8}{9}(2.5v^{-2} + 2v^{-1}) \leq 9.1263 \quad (46-5)$$

$$\frac{8}{9}(2.5v^{-2} + 2v^{-1}) \geq -7.8736$$

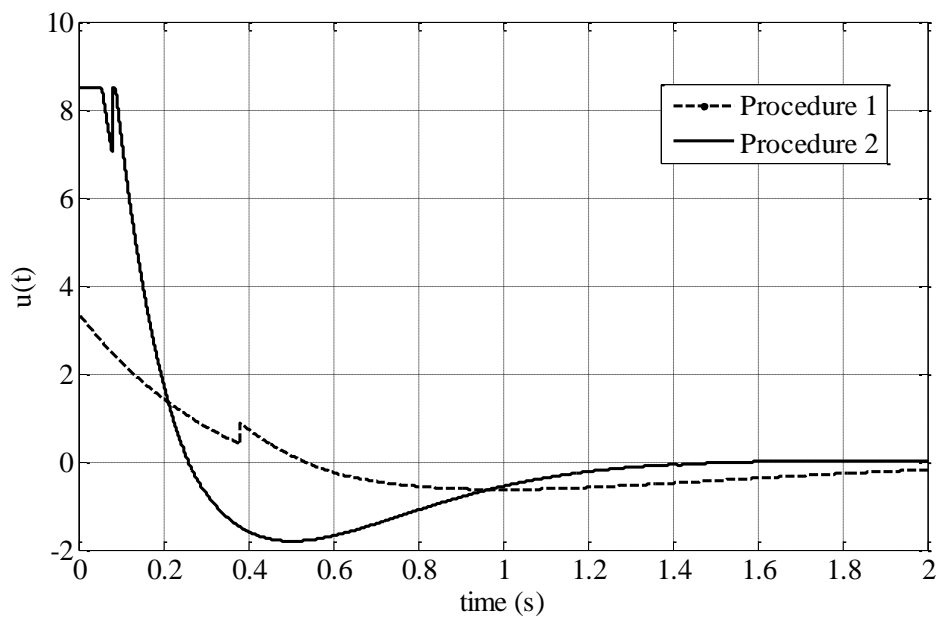
با توجه به اینکه چند جمله ای دوم ریشه حقیقی ندارد، برای هر  $v$  بر قرار است. ریشه های چند جمله ای اول  $-0.4056$  و  $0.6004$  است. لذا فضای ممکن این محدودیت برابر است با

$$v \in (-\infty, -0.4056] \cup [0.6004, \infty) \quad (47-5)$$

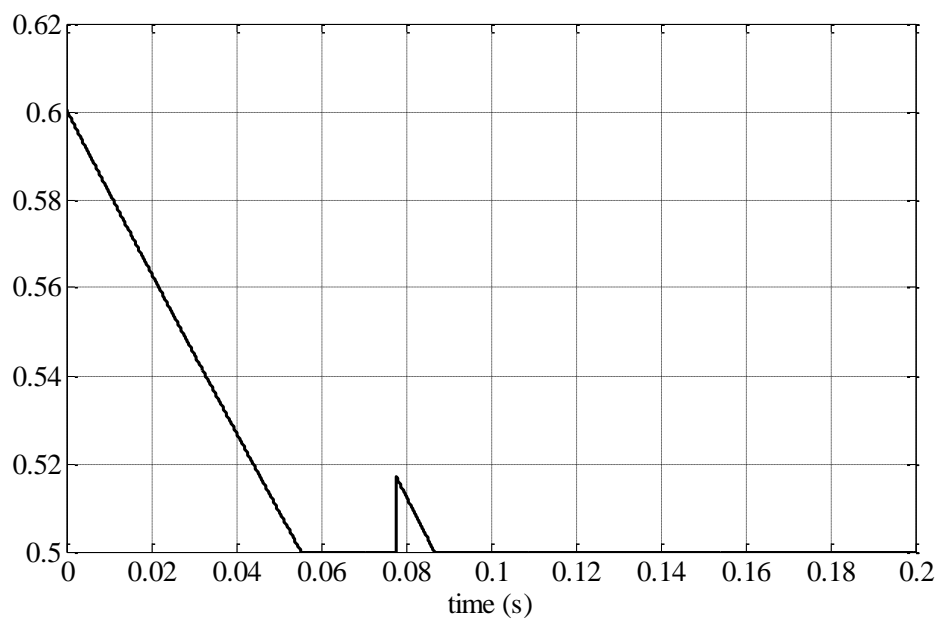
لذا مقدار بهینه در اشتراک فضای ممکن سه محدودیت برابر  $0.6004$  می شود. فرایند مشابهی در هر لحظه برای یافتن مقدار بهینه  $v$  بعنوان تابعی از  $\mathbf{x}$  و  $\mathbf{e}$  بصورت روی خط بایستی انجام پذیرد. شکل های ۶-۵ و ۷-۵ بترتیب خروجی و ورودی سیستم کنترل شده بوسیله کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی را با کنترل خطی سازی پس خورد مقاوم مقایسه می کند و شکل ۸-۵ مربوط متغیر انتخاب  $v$  می باشد. نتایج، بیانگر بهبود پاسخ پس از بکارگیری کنترل ساختار متغیر است درحالیکه محدودیت سیگنال کنترل نیز رعایت گردیده است.



شکل ۶-۵- خروجی سیستم با کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی و خطی سازی پس خورد مقاوم



شکل ۵-۷- ورودی سیستم با کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی و خطی سازی پسخورد مقاوم



شکل ۵-۸- متغیر انتخاب  $v$

مثال ۲: سیستمی با معادلات دینامیکی زیر در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ -\alpha_1(t)x_3^2 - \alpha_2(t)x_2^5 \sin(4x_1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix} u \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (48)$$

که در آن  $1.5 \leq b(t) \leq 2.5$ ،  $|\alpha_1(t)| \leq 0.5$  و  $|\alpha_2(t)| \leq 0.2$  و فرض کنید  $y_d = \sin(t)$  و ناحیه ممکن شرایط اولیه محدود به  $|x_1(0)| \leq 3$  و  $|x_2(0)|, |x_3(0)| \leq 0.5$  باشد که معادل است با  $|e_1(0)| \leq 3$ ،  $0.5 \leq e_2(0) \leq 1.5$ ،  $|e_3(0)| \leq 0.5$ . درجه نسبی سیستم ۳ است و سیستم دینامیک صفر ندارد. فرض کنید سیگنال ورودی محدود به  $|u(t)| \leq 10$  باشد. سیستم ۴۸-۵ را می توان بصورت زیر بازنویسی کرد

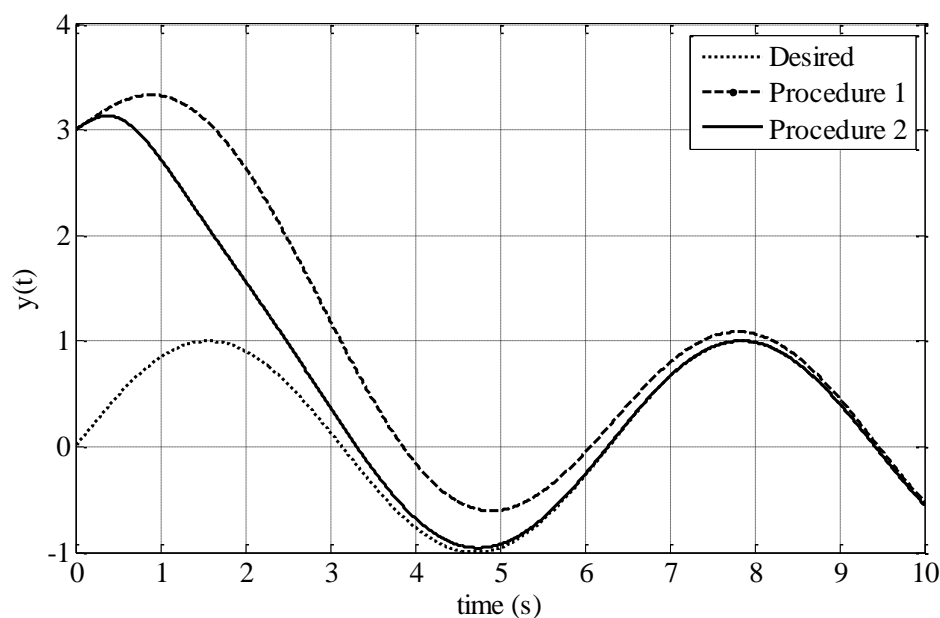
$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\alpha_1(t)x_3^2 - \alpha_2(t)x_2^5 \sin(4x_1) \end{bmatrix} \end{pmatrix} + \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b(t) - 2 \end{bmatrix} \right) u \quad (49)$$

پس از اعمال پروسه ۱ به سیستم، ضرایب  $[a_0, a_1, a_2] = [1, 3, 2.5]$  برای قانون کنترل ۵-۹ جهت برآورده سازی محدودیت سیگنال ورودی حاصل می شود. پس از بررسی قضیه ۴-۱ برای سیستم ساختار متغیر نرم مسیر شعاعی قطب نتیجه می شود که سیستم ساختار متغیر برای  $v_{\min} = 0.5$  پایدار است

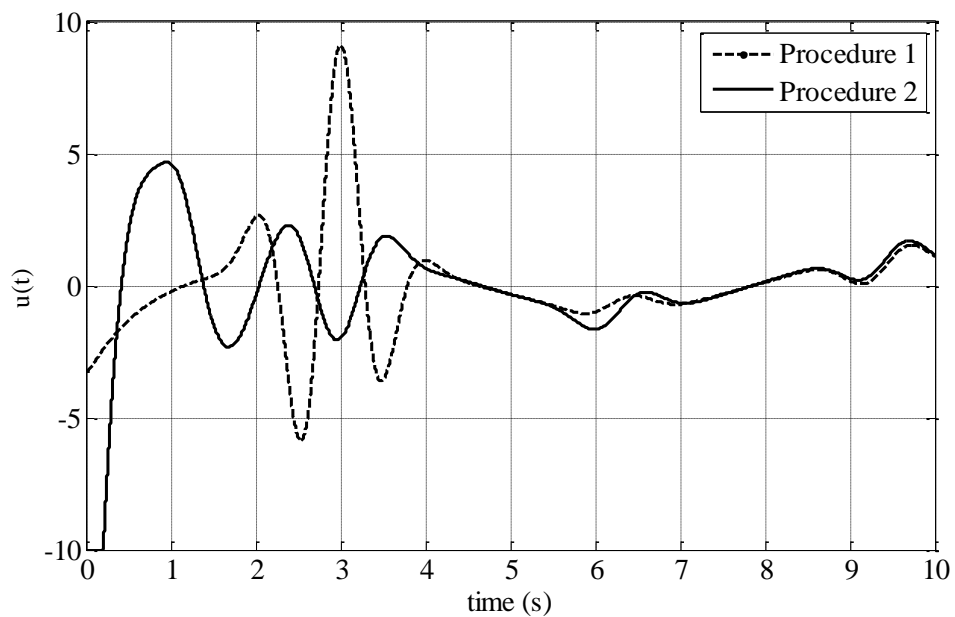
اگر

$$P = \begin{bmatrix} 1.1585 & 1.0172 & 0.1149 \\ 1.0172 & 1.1446 & 0.0686 \\ 0.1149 & 0.0686 & 0.1355 \end{bmatrix}, \varepsilon = 10^{-6} \quad (50-5)$$

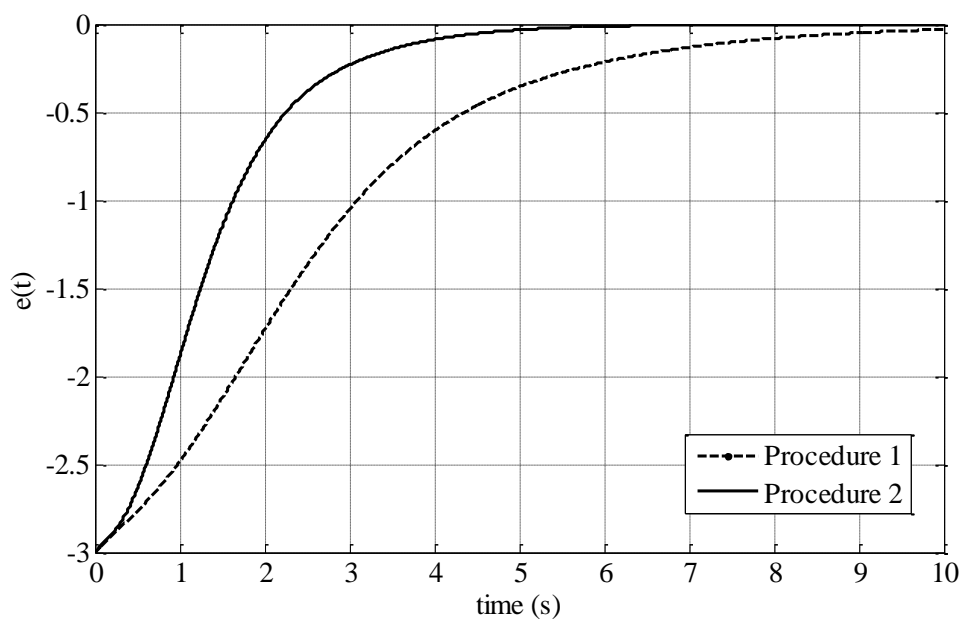
شکل های ۵-۹، ۵-۱۰ و ۵-۱۱ بترتیب خروجی، ورودی و خطای سیستم کنترل شده بوسیله کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی را با کنترل خطی سازی پسخورده مقاوم مقایسه می کند و شکل ۵-۱۲ مربوط متغیر انتخاب  $\nu$  می باشد. نتایج بیانگر بهبود پاسخ پس از بکارگیری کنترل ساختار متغیر است درحالیکه محدودیت سیگنال کنترل نیز رعایت گردیده است.



شکل ۵-۱۰- خروجی سیستم با کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی و خطی سازی پسخورده مقاوم

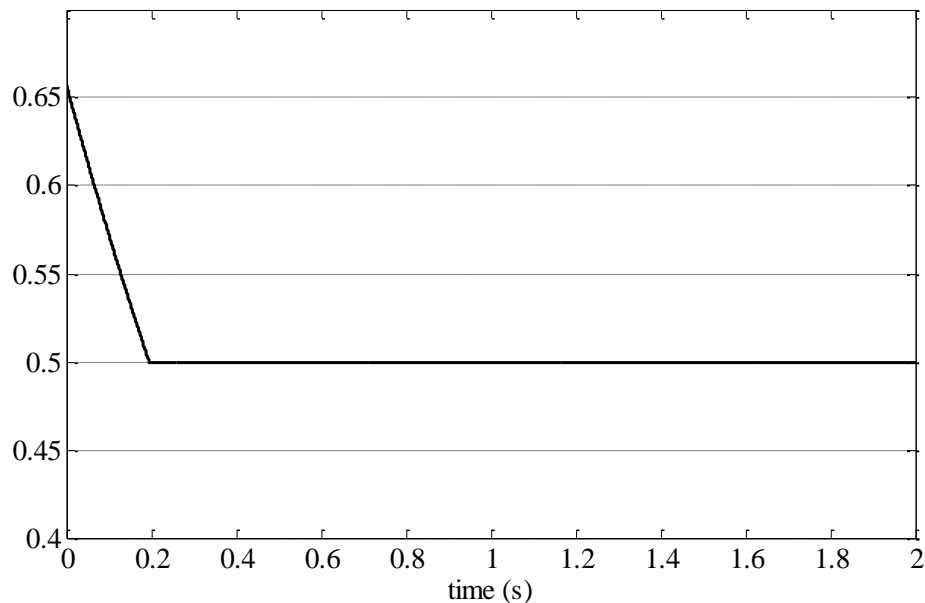


شکل ۵-۱۱- ورودی سیستم با کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی و خطی سازی پسخورد مقاوم



شکل ۵-۱۲- خطای سیستم با کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی و خطی سازی پسخورد مقاوم





شکل ۵-۱۳- متغیر انتخاب  $v$

## ۵-۶- جمع بندی

در این فصل، ابتدا روشی جهت کنترل مقاوم کلاسی از سیستم های غیرخطی افاین بر مبنای کنترل فیدبک خروجی ارائه گردید. سپس بر مبنای آن، کنترل ساختار متغیر مسیر قطب شعاعی برای سیستم های غیرخطی نامعین افاین یک ورودی- یک خروجی توسعه داده شد و پایداری سیستم متغیر با زمان، با استفاده از محک دایره مورد تضمین قرار گرفت. در بخش شبیه سازی، ابتدا روش کنترل ساختار متغیر نرم پیشنهادی بروی یک سیستم جرم و فنر غیر خطی پیاده سازی شد و در این مثال، نحوه پیاده سازی روش بصورت گام به گام شرح داده شد. سپس مثال دیگری با هدف ردگیری مطرح و شبیه سازی شد. نتایج حاصل از شبیه سازی ها بیانگر بهبود سرعت سیستم در مقایسه با کنترل مقاوم خطی سازی پسخورد خروجی ساختار ثابت است.

## نتیجه گیری و تحقیقات پیش رو

یکی از اهداف مطلوب در کنترل سیستم ها، کاهش زمان نشست می باشد. افزایش سرعت سیستم از دیدگاه اقتصادی می تواند باعث افزایش بهره وری در صنایع گردد. از طرفی، در سیستم های صنعتی دامنه سیگنال کنترل محدود می باشد. تئوری کنترل بهینه می تواند قانون کنترلی را بیابد که منجر به سریعترین پاسخ، با در نظر گرفتن محدودیت دامنه سیگنال کنترل شود. لیکن ناپیوستگی قانون کنترل در تئوری کنترل بهینه منجر به افزایش هزینه تعمیر و نگهداری سیستم های صنعتی می گردد. کنترل ساختار متغیر نرم راهکاری جایگزین کنترل بهینه می باشد، هنگامی که علاوه بر پاسخ سریع سیستم پیوستگی سیگنال کنترل نیز مطلوب باشد.

مطالعات انجام شده در این رساله دکتری، روش کنترل ساختار متغیر نرم نوینی را ارائه می دهد که توسعه یافته روش جایابی قطب می باشد. در روش پیشنهادی بجای اینکه محل قطب های سیستم حلقه بسته ثابت فرض گردد، مسیری شعاعی برای تغییرات محل قطب در نظر گرفته می شود و بصورت برخط، محل قرارگیری بهینه قطب های سیستم حلقه بسته، با در نظر گرفتن محدودیت سیگنال کنترل تعیین می گردد. روش پیشنهادی در این رساله برای سیستم های خطی یک ورودی-یک خروجی و چند ورودی-چند خروجی، و همچنین سیستم های یک ورودی-یک خروجی غیر خطی توسعه داده شده است. سپس با اضافه کردن نامعینی به سیستم غیرخطی، روش پیشنهادی در سیستم های غیرخطی یک ورودی-یک خروجی نامعین بکارگرفته شده است. روش های متداول کنترل ساختار متغیر نرم با هدف افزایش سرعت سیستم، تاکنون برای سیستم های خطی یک ورودی-یک خروجی و کلاس های دیگر سیستم های خطی نظیر سیستم های تکین و یا مرتبه کسری توسعه داده شده اند. لذا روش مسیر قطب شعاعی نخستین تحقیق در ارائه روش کنترل ساختار متغیر نرم برای سیستم های خطی چند

ورودی-چند خروجی و سیستم های غیر خطی است. برخی از تحقیقاتی که در آینده می تواند در توسعه این روش موثر باشد عبارتند از:

- توسعه روش کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی به سیستم های غیر خطی چندمتغیره
- مطالعه روش های مختلف اثبات پایداری کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی جهت یافتن بازه بزرگتر تغییرات که می تواند به افزایش سرعت سیستم کمک کند.
- بکارگیری روش پیشنهادی در کلاس های مختلف سیستم های خطی نظیر سیستم های تکین و مرتبه کسری
- ترکیب روش کنترل ساختار متغیر نرم مسیر قطب شعاعی با سیستم های فازی و یا عصبی جهت یافتن تابعی که منجر به حذف حل مسئله بهینه سازی بصورت روی خط گردد.

# مراجع

- [1] D. E. Kirk, *Optimal Control Theory: An Introduction*: Dover Publications, 2004.
- [2] J. Y. Hung, W. Gao, and J. C. Hung, "Variable structure control: a survey," *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, vol. 40, pp. 2-22, 1993.
- [3] I. U. Vadim, "Survey paper variable structure systems with sliding modes," *IEEE Transactions on Automatic control*, vol. 22, 1977.
- [4] V. I. Utkin, "Sliding mode control in discrete-time and difference systems," in *Variable Structure and Lyapunov Control*: Springer Berlin Heidelberg, 1994, pp. 87-107.
- [5] V. I. Utkin, *Sliding modes and their application in variable structure systems*: Mir Publishers, 1978.
- [6] V. Utkin, "Variable structure systems with sliding modes," *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 22, pp. 212-222, 1977.
- [7] A. S. Morse, "Supervisory control of families of linear set-point controllers Part I. Exact matching," *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 41, pp. 1413-1431, 1996.
- [8] L. Vu and D. Liberzon, "Supervisory Control of Uncertain Linear Time-Varying Systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 56, pp. 27-42.
- [9] W. Li-Xiu, "A supervisory controller for fuzzy control systems that guarantees stability," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 39, pp. 1845-1847, 1994.
- [10] V. D. Blondel and J. N. Tsitsiklis, "Complexity of stability and controllability of elementary hybrid systems," *Automatica*, vol. 35, pp. 479-489, 1999.
- [11] M. Morari, M. Baotic, and F. Borrelli, "Hybrid Systems Modeling and Control," *European Journal of Control*, vol. 9, pp. 177-189, 2003.
- [12] F. Borrelli, A. Bemporad, M. Fodor, and D. Hrovat, "An MPC/hybrid system approach to traction control," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 14, pp. 541-552, 2006.
- [13] V. I. Utkin, "Variable structure systems- Present and future," *Automation and Remote Control, (ISSN 0005-1179)*, vol. 44, pp. 1105-1120, 1984.
- [14] J. Adamy and A. Flemming, "Soft variable-structure controls: a survey," *Automatica*, vol. 40, pp. 1821-1844, 2004.
- [15] O. J. M. Smith, *Feedback control systems*. New York: McGraw-Hill, 1958.
- [16] I. Flugge-Lotz, *Discontinuous automatic control*: Princeton University Press, 1953.
- [17] I. Flügge-Lotz and W. S. Wunch, "On a Nonlinear Transfer System," *Journal of Applied Physics*, vol. 26, pp. 484-488, 1955.
- [18] I. Flugge-Lotz and C. Taylor, "Synthesis of a nonlinear control system," *Automatic Control, IRE Transactions on*, vol. 1, pp. 3-9, 1956.
- [19] S. R. Bernfeld, "Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides (A. F. Filippov)," *SIAM Review*, vol. 32, pp. 312-315, 1990.

- [20] V. I. Utkin, "Methods for constructing discontinuity planes in multidimensional variable structure systems," *Automation and Remote Control*, vol. 39, pp. 1466-1470, 1978.
- [21] K. D. Young, V. I. Utkin, and U. Ozguner, "A control engineer's guide to sliding mode control," *IEEE transactions on control systems technology*, vol. 7, pp. 328-342, 1999.
- [22] V. I. Utkin, *Variable structure systems and sliding model-State of the art assessment*: New York: Elsevier, 1993.
- [23] H. Lee, V. I. Utkin, and A. Malinin, "Chattering reduction using multiphase sliding mode control," *International Journal of Control*, vol. 82, pp. 1720-1737, 2009.
- [24] D. Angeli and E. Mosca, "Lyapunov-based switching supervisory control of nonlinear uncertain systems," *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 47, pp. 500-505, 2002.
- [25] F. Minyue and B. Barmish, "Adaptive stabilization of linear systems via switching control," *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 31, pp. 1097-1103, 1986.
- [26] D. E. Miller and E. J. Davison, "An adaptive controller which provides Lyapunov stability," *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 34, pp. 599-609, 1989.
- [27] K. S. Narendra and J. Balakrishnan, "Improving transient response of adaptive control systems using multiple models and switching," *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 39, pp. 1861-1866, 1994.
- [28] P. Shi, Y. Yin, and F. Liu, "Gain-Scheduled Worst-Case Control on Nonlinear Stochastic Systems Subject to Actuator Saturation and Unknown Information," *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 156, pp. 844-858, 2012.
- [29] Q. Jianbin, F. Gang, and G. Huijun, "Observer-Based Piecewise Affine Output Feedback Controller Synthesis of Continuous-Time TSK Fuzzy Affine Dynamic Systems Using Quantized Measurements," *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, vol. 20, pp. 1046-1062, 2012.
- [30] Z. G. Li, C. Y. Wen, and Y. C. Soh, "Switched controllers and their applications in bilinear systems," *Automatica*, vol. 37, pp. 477-481, 2001.
- [31] Y. Liu, C. Zhang, and C. Gao, "Dynamic soft variable structure control of singular systems," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 17, pp. 3345-3352, 2012.
- [32] Y. Liu, Y. Kao, S. Gu, and H. R. Karimi, "Soft variable structure controller design for singular systems," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 352, pp. 1613-1626, 2015.
- [33] X. Ruiping, L. Yunlong, G. Cunchen, and W. Shuqin, "Soft variable structure control with differential equation for generalized systems," presented at Control and Decision Conference (2014 CCDC), The 26th Chinese, 2014.

- [34] S. Kamal and B. Bandyopadhyay, "High Performance Regulator for Fractional Order Systems: A Soft Variable Structure Control Approach," *Asian Journal of Control*, vol. 17, pp. 1342-1346, 2015.
- [35] J. J. E. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control*: Prentice Hall, 1991.
- [36] K. Loskot, A. Polanski, and R. Rudnicki, "Further comments on "Vector norms as Lyapunov functions for linear systems", " *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 43, pp. 289-291, 1998.
- [37] F. Garofalo, G. Celentano, and L. Glielmo, "Stability robustness of interval matrices via Lyapunov quadratic forms," *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 38, pp. 281-284, 1993.
- [38] Y. Liu, S. Gu, Y. Kao, and S. Tang, "Soft variable structure controller design for constrained systems based on S-class functions," *Neural Computing and Applications*, vol. 26, pp. 705-711, 2015.
- [39] M. Kaheni, M. H. Zarif, A. A. Kalat, and M. S. Fadali, "Soft Variable Structure Control of Linear Systems via Desired Pole Paths," *Information Technology and Control*, vol. 47, pp. 447-456, 2018.
- [40] C.-T. Chen, *Linear System Theory and Design*, Third ed. New York: Oxford University Press, 1999.
- [41] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, Third Edition ed, 2001.
- [42] H. D. Sherali and C. H. Tuncbilek, "A global optimization algorithm for polynomial programming problems using a Reformulation-Linearization Technique," *Journal of Global Optimization*, vol. 2, pp. 101-112, 1992.
- [43] M. G. Davoudi, J. Sadeh, and E. Kamyab, "Time domain fault location on transmission lines using genetic algorithm," presented at Environment and Electrical Engineering (EEEIC), 2012 11th International Conference on.
- [44] B. Li, H. Du, and W. Li, "Optimal Distribution Control Of Non-Linear Tire Force Of Electric Vehicles With In-Wheel Motors," *Asian Journal of Control*, vol. 18, pp. 69-88.
- [45] P. L. R. Jing Wu, Xianfang Sun, Ralph R. Martin, "Improving Shape from Shading with Interactive Tabu Search," *Journal of Computer Science and Technology*, vol. 31, pp. 450-462, 2016.
- [46] R. Gholipour, A. Khosravi, and H. Mojallali, "Multi-objective optimal backstepping controller design for chaos control in a rod-type plasma torch system using Bees algorithm," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 39, pp. 4432-4444, 2015.
- [47] X. Liu, "Optimization design on fractional order PID controller based on adaptive particle swarm optimization algorithm," *Nonlinear Dynamics*, vol. 84, pp. 379-386, 2016.
- [48] M. Marden, *The Geometry of the Zeros of a Polynomial in a Complex Variable*, First Edition ed: American Mathematical Society, 1949.

- [49] R. N. Shorten and K. S. Narendra, "On common quadratic Lyapunov functions for pairs of stable LTI systems whose system matrices are in companion form," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 48, pp. 618-621, 2003.
- [50] M. Kaheni, M. Hadad Zarif, A. Akbarzadeh Kalat, and M. S. Fadali, "Radial Pole Paths SVSC for Linear Time Invariant Multi Input Systems with Constrained Inputs," *Asian Journal of Control*, vol. 0.
- [51] C. C. Nguyen, "Arbitrary eigenvalue assignments for linear time-varying multivariable control systems," *International Journal of Control*, vol. 45, pp. 1051-1057, 1987.
- [52] D. T. McRuer, D. Graham, and I. Ashkenas, *Aircraft Dynamics and Automatic Control*, First ed: Princeton University Press, 2014.
- [53] H. R. Karimi and M. R. J. Motlagh, "Robust Feedback Linearization Control for a non Linearizable MIMO Nonlinear System in the Presence of Model Uncertainties," presented at 2006 IEEE International Conference on Service Operations and Logistics, and Informatics, 2006.
- [54] M. Kaheni, M. H. Zarif, A. A. Kalat, and L. Chisci, "Robust feedback linearization for input-constrained nonlinear systems with matched uncertainties," presented at European Control Conference, Limassol, Cyprus, 2018.





## **Abstract**

In this dissertation, a novel method, called "soft variable structure control using radial pole paths", is proposed to increase the regulation rate of single input -single output and multiple input-multiple output systems. The proposed method has a faster response comparing to the other soft variable structure methods mentioned in the literature. Furthermore, it is the first soft variable structure method which has been expanded to include multiple-input multiple-output linear systems. The proposed method is then combined with the Feedback Linearization Control technique to implement a soft variable structure control system that improves the speed of response in affine nonlinear single input-single output autonomous systems. The system is further complemented by adding uncertainties to the affine autonomous nonlinear single input-single output model to implement a robust soft variable structure control strategy for a class of affine autonomous uncertain nonlinear single input-single output systems. The stability of our proposed method is investigated using Circle Criterion and Kalman-Yakobuvich-Popov lemma. Simulation results in different systems show that the regulation rate is improved while the control signal constraint is satisfied.

**Keywords:** Nonlinear Control, Soft Variable Structure Control, Circle Criterion, Improving Regulation Rate





Shahrood University  
of Technology

Faculty of Electrical and Robotics Engineering

Ph.D. Thesis in Control Engineering

# Soft variable Structure Control For Affine Nonlinear Systems

By: Mojtaba Kaheni

**Supervisor:**

Dr. Mohammad Hadad Zarif

**Advisor:**

Dr. Ali Akbarzadeh Kalat

January, 2019