



دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده برق و ریاضیاتیک
گروه کنترل

پایان نامه کارشناسی ارشد

طراحی و شبیه سازی سیستم کنترل مقاوم μ برای قطار مغناطیسی

ارائه دهنده: عطیه حاجی جعفری

استاد راهنما: دکتر محمد علی صدرنیا

استاد مشاور: دکتر حسین مروی

زمستان ۸۵

تقدیم به پدر و مادرم،

آنها که سعادت را جز در قلمرو عشقشان نشناخته ام.

ضمن تقدیر از زحمات کلیه اساتید محترم دانشکده برق و رباتیک،
از کمک های بی دریغ استاد راهنما جناب آقای دکتر صدرنیا و
استاد مشاور جناب آقای دکتر مروی که در انجام پروژه و تدوین
پایان نامه مرا یاری کردند، سپاسگزاری می نمایم.

چکیده

سیستم های تعلیق مغناطیسی که پایه و اساس عملکرد قطارهای مغناطیسی هستند به دو دسته کلی تقسیم می شوند: تعلیق الکترودینامیکی (EDS) و تعلیق الکترومغناطیسی (EMS). EDS براساس نیروهای دافعه مغناطیسی عمل کرده و سیستمی به طور ذاتی پایدار است و حتی در بسیاری موارد با کنترل حلقه باز مقاومت خوبی دارد. اما EMS که براساس نیروهای جاذبه مغناطیسی عمل می کند سیستم ذاتاً ناپایداری است که بدون وجود کنترل فیدبکی عملکرد ضعیفی دارد. به این ترتیب ناگزیر از بکارگیری فیدبک هستیم و برای سنتز سیستم کنترل فیدبکی نیاز به یک مدل ریاضی دقیق برای دستگاه داریم. برای اینکه چنین مدلی به مدل فیزیکی واقعی دستگاه نزدیکتر باشد لازم است که عدم قطعیت های مختلفی را نیز لحاظ کنیم. بر این اساس سیستم کنترل باید از پایداری و عملکرد مقاومی در برابر عدم قطعیت های مدل برخوردار باشد. دو خواسته فوق در قالب کنترل کننده ای با تکنیک μ قابل دستیابی است.

در این مقاله فرض می شود که سیستم تعلیق از نوع EMS است و عدم قطعیتها را در سه مرحله به صورت عدم قطعیت های پارامتری، غیر پارامتری و مخلوط (ترکیبی از عدم قطعیت های پارامتری و غیر پارامتری) در سیستم منظور می کنیم. در ابتدا تغییرات پارامترهای مدل به عنوان منبع و عامل عدم قطعیت در نظر گرفته می شود و از آنجا که این تغییرات را می توان به نحوی در پارامترهای فضای حالت (A,B,C,D) نمایش داد، عدم قطعیت با ساختار خواهد بود. سپس عدم قطعیت های غیرپارامتری که از دینامیک های مدل شده و نویز محرکه ها و سنسورها، خطاهای مدل سازی و اغتشاشات بیرونی سیستم ناشی شده و عدم قطعیت های بدون ساختار خوانده می شوند لحاظ می گردند. در نهایت نیز هر دو نوع عدم قطعیت را همزمان به سیستم وارد می کنیم. سه نوع کنترل کننده مقاوم LQG , H_{∞} , μ در هر سه حالت فوق برای سیستم قطار مغناطیسی طراحی می شود و در هر مرحله نتایج تحلیل فرکانسی با یکدیگر مقایسه می شوند.

واژه های کلیدی: کنترل مقاوم- تکنیک μ - قطار مغناطیسی

فصل اول: مقدمه

- ۲ ۱-۱ قطار مغناطیسی
- ۳ ۲-۱ کنترل مقاوم
- ۵ ۳-۱ ساختار پایان نامه

فصل دوم: مدل سیستم قطار مغناطیسی

- ۷ ۱-۲ مقدمه
- ۸ ۲-۲ مدل وسیله نقلیه تک واگنه
- ۱۰ ۳-۲ مدل تعلیق مغناطیسی
- ۱۰ ۱-۳-۲ مدل تعلیق مغناطیسی غیرخطی
- ۱۲ ۲-۳-۲ مدل تعلیق مغناطیسی خطی سازی شده
- ۱۳ ۴-۲ مدل سختی
- ۱۳ ۱-۴-۲ فرآیند فضایی
- ۱۴ ۲-۴-۲ فرآیند گذرا
- ۱۴ ۵-۲ مدل مسیر هادی
- ۱۵ ۶-۲ معادلات حالت سیستم

فصل سوم: سیستمهای چند متغیره و عدم قطعیتها

- ۱۹ ۱-۳ مقدمه
- ۲۰ ۲-۳ مفاهیم سیستمهای چند متغیره (MIMO)
- ۲۰ ۱-۲-۳ نمایش مدل نامی سیستم چندمتغیره
- ۲۰ ۱-۱-۲-۳ نمایش ماتریس تابع تبدیل
- ۲۰ ۲-۱-۲-۳ نمایش فضای حالت

۲۱	۳-۲-۱-۳ نمایش ماتریسی - کسری
۲۱	۳-۲-۲ ماتریس های حساسیت و حساسیت مکمل
۲۳	۳-۲-۳ پایداری سیستم چند متغیره
۲۳	۳-۲-۱ پایداری ورودی محدود - خروجی محدود (BIBO)
۲۳	۳-۲-۲ پایداری نمایی
۲۳	۳-۲-۳ پایداری داخلی
۲۵	۳-۳ عدم قطعیت در مدل سیستمها
۲۶	۳-۳-۱ عدم قطعیت بدون ساختار
۲۹	۳-۳-۲ عدم قطعیت با ساختار
	فصل چهارم : کنترل مقاوم μ
۳۲	۴-۱ مقدمه
۳۳	۴-۲ تاریخچه کنترل مقاوم μ
۳۵	۴-۳ مبانی ریاضی کنترل مقاوم
۳۵	۴-۳-۱ معرفی نرم
۳۵	۴-۳-۱-۱ نرم بردار
۳۶	۴-۳-۱-۲ نرم ماتریس
۳۷	۴-۳-۱-۳ نرم تابع تبدیل
۳۸	۴-۳-۲ مقادیر تکین (بهره های اساسی)
۳۹	۴-۳-۳ تبدیل خطی - کسری (LFT)
۴۰	۴-۳-۴ تست پایداری نایکوئیست MIMO پایداری مقاوم
۴۱	۴-۳-۵ مبنای اصلی روشهای تحلیل

۸۱	۲-۳-۵ عدم قطعیت های غیر پارامتری و طراحی کنترل کننده برای سیستم با این نوع عدم قطعیت
۹۵	۳-۳-۵ عدم قطعیت های پارامتری و غیر پارامتری و طراحی کنترل کننده برای سیستم با هر دو نوع عدم قطعیت
۱۰۳	۴-۵ شبیه سازی در حوزه زمان
	فصل ششم: نتیجه گیری و پیشنهادات
۱۱۵	۱-۶ نتیجه گیری
۱۱۶	۶-۲ پیشنهادات
	پیوست ها
۱۲۰	پیوست الف: کاهش مرتبه مدل
۱۲۱	پیوست ب: کنترل کننده LQG
۱۲۴	پیوست ج: کنترل کننده H_{∞}
۱۲۷	مراجع

۸	شکل ۱-۲- قطار مغناطیسی و ریل آن
۹	شکل ۲-۲- مدل وسیله نقلیه (نمای جلو)
۱۰	شکل ۳-۲- پیکربندی الکترومغناطیس و صفحه فرومغناطیس
۱۱	شکل ۴-۲- نیروی جاذبه مغناطیسی به صورت تابعی از شکاف هوایی
۱۵	شکل ۵-۲- مسیرهادی با دو دهانه
۱۹	شکل ۱-۳- انواع سیستمهای چند متغیره
۲۱	شکل ۲-۳- الگوی سیستم کنترل
۲۲	شکل ۳-۳- الگوی اصلی سیستم کنترل
۲۳	شکل ۴-۳- حلقه فیدبکی برای تحقق پایداری داخلی
۲۹	شکل ۵-۳- نمایش استاندارد دستگاه به همراه عدم قطعیت و با جبران ساز فیدبکی
۳۰	شکل ۶-۳- نمایش استاندارد، با ترکیب دستگاه و جبران ساز فیدبکی و به همراه عدم قطعیت
۳۹	شکل ۱-۴- تبدیل خطی - کسری پایینی
۴۰	شکل ۲-۴- تبدیل خطی - کسری بالایی
۴۰	شکل ۳-۴- سیستم فیدبکی مورد استفاده در تحقق پایداری
۴۲	شکل ۴-۴- الگوی سیستم کنترل فیدبکی، بدون نویز
۴۴	شکل ۵-۴- سیستم فیدبکی با عدم قطعیت های ضرب شونده و جمع شونده
۴۵	شکل ۶-۴- یافتن حاشیه های بهره و فاز از طریق ماتریسهای ضرب شونده
۴۶	شکل ۷-۴- ترکیب مسائل تحلیل و طراحی؛ (الف): تحلیل ، (ب): طراحی
۵۱	شکل ۸-۴- نمایش سیستم با عدم قطعیت در مسأله طراحی به همراه عدم قطعیت افزوده
۵۸	شکل ۹-۴- عدم قطعیت های ضرب شونده ورودی و خروجی
۶۱	شکل ۱-۵- سیستم کنترل حلقه باز
۶۲	شکل ۲-۵- سیستم کنترل حلقه بسته
۶۵	شکل ۳-۵- نمایش ماتریس سیستم M با بردار ورودی r و بردار خروجی v در تعریف LFT
۶۶	شکل ۴-۵- ماتریس M و بردارهای v, r با تقسیم به دو بخش بالایی و پایینی
۶۶	شکل ۵-۵- ارتباط عدم قطعیت Δ با بخشی از ورودی ها و خروجی های سیستم
۶۶	شکل ۶-۵- تبدیل خطی - کسری پایینی M, Δ
۶۶	شکل ۷-۵- ارتباط ماتریس عدم قطعیت Ω با بخشی از ورودی ها و خروجی های سیستم
۶۷	شکل ۸-۵- تبدیل خطی - کسری بالایی M, Ω
۶۷	شکل ۹-۵- عنصر نامعین c_s به صورت LFT پایینی

- شکل ۵-۱۰- عنصر نامعین m_p به صورت LFT بالایی ۶۸
- شکل ۵-۱۱- ساختار اتصالات داخلی سیستم ۶۹
- شکل ۵-۱۲- نمای کلی بخش معلوم سیستم ۷۰
- شکل ۵-۱۳- سیستم نامعین کلی به صورت LFT بالایی ۷۱
- شکل ۵-۱۴- دیاگرام بد کنترل کننده LQG برای سیستم با عدم قطعیت‌های پارامتری ۷۳
- شکل ۵-۱۵- تست عملکرد نامی سیستم حلقه بسته با کنترل کننده LQG برای سیستم با عدم قطعیت‌های پارامتری ۷۴
- شکل ۵-۱۶- تست پایداری مقاوم سیستم حلقه بسته با کنترل کننده LQG برای سیستم با عدم قطعیت‌های پارامتری ۷۴
- شکل ۵-۱۷- تست عملکرد مقاوم سیستم حلقه بسته با کنترل کننده LQG برای سیستم با عدم قطعیت‌های پارامتری ۷۵
- شکل ۵-۱۸- دیاگرام بد کنترل کننده H_∞ برای سیستم با عدم قطعیت‌های پارامتری ۷۶
- شکل ۵-۱۹- تست عملکرد نامی سیستم حلقه بسته با کنترل کننده H_∞ برای سیستم با عدم قطعیت‌های پارامتری ۷۶
- شکل ۵-۲۰- تست پایداری مقاوم سیستم حلقه بسته با کنترل کننده H_∞ برای سیستم با عدم قطعیت‌های پارامتری ۷۷
- شکل ۵-۲۱- تست عملکرد مقاوم سیستم حلقه بسته با کنترل کننده H_∞ برای سیستم با عدم قطعیت‌های پارامتری ۷۷
- شکل ۵-۲۲- دیاگرام بد کنترل کننده μ برای سیستم با عدم قطعیت‌های پارامتری ۷۹
- شکل ۵-۲۳- تست عملکرد نامی سیستم حلقه بسته با کنترل کننده μ برای سیستم با عدم قطعیت‌های پارامتری ۷۹
- شکل ۵-۲۴- تست پایداری مقاوم سیستم حلقه بسته با کنترل کننده μ برای سیستم با عدم قطعیت‌های پارامتری ۸۰
- شکل ۵-۲۵- تست عملکرد مقاوم سیستم حلقه بسته با کنترل کننده μ برای سیستم با عدم قطعیت‌های پارامتری ۸۰
- شکل ۵-۲۶- ساختار ارتباطات داخلی سیستم ۸۵
- شکل ۵-۲۷- دیاگرام شماتیکی سیستم قطار مغناطیسی با عدم قطعیت‌های غیرپارامتری ۸۵
- شکل ۵-۲۸- دیاگرام بد کنترل کننده LQG برای سیستم با عدم قطعیت‌های غیرپارامتری ۸۷
- شکل ۵-۲۹- تست عملکرد نامی سیستم حلقه بسته با کنترل کننده LQG برای سیستم با عدم قطعیت‌های غیرپارامتری ۸۸

- شکل ۳۰-۵- تست پایداری مقاوم سیستم حلقه بسته با کنترل کننده LQG برای سیستم با عدم قطعیت‌های غیرپارامتری ۸۸
- شکل ۳۱-۵- تست عملکرد مقاوم سیستم حلقه بسته با کنترل کننده LQG برای سیستم با عدم قطعیت‌های غیرپارامتری ۸۹
- شکل ۳۲-۵- دیاگرام بد کنترل کننده H_{∞} برای سیستم با عدم قطعیت‌های غیرپارامتری ۹۰
- شکل ۳۳-۵- تست عملکرد نامی سیستم حلقه بسته با کنترل کننده H_{∞} برای سیستم با عدم قطعیت‌های غیرپارامتری ۹۱
- شکل ۳۴-۵- تست پایداری مقاوم سیستم حلقه بسته با کنترل کننده H_{∞} برای سیستم با عدم قطعیت‌های غیرپارامتری ۹۱
- شکل ۳۵-۵- تست عملکرد مقاوم سیستم حلقه بسته با کنترل کننده H_{∞} برای سیستم با عدم قطعیت‌های غیرپارامتری ۹۲
- شکل ۳۶-۵- دیاگرام بد کنترل کننده μ برای سیستم با عدم قطعیت‌های غیرپارامتری ۹۳
- شکل ۳۷-۵- تست عملکرد نامی سیستم حلقه بسته با کنترل کننده μ برای سیستم با عدم قطعیت‌های غیرپارامتری ۹۴
- شکل ۳۸-۵- تست پایداری مقاوم سیستم حلقه بسته با کنترل کننده μ برای سیستم با عدم قطعیت‌های غیرپارامتری ۹۴
- شکل ۳۹-۵- تست عملکرد مقاوم سیستم حلقه بسته با کنترل کننده μ برای سیستم با عدم قطعیت‌های غیرپارامتری ۹۵
- شکل ۴۰-۵- دیاگرام شماتیکی سیستم قطار مغناطیسی با عدم قطعیت‌های پارامتری و غیرپارامتری ۹۶
- شکل ۴۱-۵- دیاگرام شماتیکی سیستم قطار مغناطیسی با عدم قطعیت‌های پارامتری و غیرپارامتری ۹۷
- شکل ۴۲-۵- تست عملکرد نامی سیستم حلقه بسته با کنترل کننده LQG برای سیستم با عدم قطعیت‌های پارامتری و غیرپارامتری ۹۷
- شکل ۴۳-۵- تست پایداری مقاوم سیستم حلقه بسته با کنترل کننده LQG برای سیستم با عدم قطعیت‌های پارامتری و غیرپارامتری ۹۸
- شکل ۴۴-۵- تست عملکرد مقاوم سیستم حلقه بسته با کنترل کننده LQG برای سیستم با عدم قطعیت‌های پارامتری و غیرپارامتری ۹۸
- شکل ۴۵-۵- دیاگرام بد کنترل کننده H_{∞} برای سیستم با عدم قطعیت‌های پارامتری و غیرپارامتری ۹۹
- شکل ۴۶-۵- تست عملکرد نامی سیستم حلقه بسته با کنترل کننده H_{∞} برای سیستم با عدم قطعیت‌های پارامتری و غیرپارامتری ۹۹

- شکل ۵-۴۷- تست پایداری مقاوم سیستم حلقه بسته با کنترل کننده H_∞ برای سیستم با عدم قطعیت های پارامتری و غیرپارامتری ۱۰۰
- شکل ۵-۴۸- تست عملکرد مقاوم سیستم حلقه بسته با کنترل کننده H_∞ برای سیستم با عدم قطعیت های پارامتری و غیرپارامتری ۱۰۰
- شکل ۵-۴۹- دیاگرام بد کنترل کننده μ برای سیستم با عدم قطعیت های پارامتری و غیر پارامتری ۱۰۱
- شکل ۵-۵۰- تست عملکرد نامی سیستم حلقه بسته با کنترل کننده μ برای سیستم با عدم قطعیت های پارامتری و غیرپارامتری ۱۰۲
- شکل ۵-۵۱- تست پایداری مقاوم سیستم حلقه بسته با کنترل کننده μ برای سیستم با عدم قطعیت های پارامتری و غیرپارامتری ۱۰۲
- شکل ۵-۵۲- تست عملکرد مقاوم سیستم حلقه بسته با کنترل کننده μ برای سیستم با عدم قطعیت های پارامتری و غیرپارامتری ۱۰۳
- شکل ۵-۵۳- پاسخ زمانی سیستم حلقه بسته با کنترل کننده LQG در شرایط نامی ۱۰۴
- شکل ۵-۵۴- پاسخ زمانی سیستم حلقه بسته با کنترل کننده LQG در حضور برخی عدم قطعیت ها ۱۰۵
- شکل ۵-۵۵- پاسخ زمانی سیستم حلقه بسته با کنترل کننده H_∞ در شرایط نامی ۱۰۶
- شکل ۵-۵۶- پاسخ زمانی سیستم حلقه بسته با کنترل کننده H_∞ در حضور برخی عدم قطعیت ها ۱۰۷
- شکل ۵-۵۷- پاسخ زمانی سیستم حلقه بسته با کنترل کننده H_∞ در حضور عدم قطعیت های افزوده ۱۰۸
- شکل ۵-۵۸- پاسخ زمانی سیستم حلقه بسته با کنترل کننده μ در شرایط نامی ۱۰۹
- شکل ۵-۵۹- پاسخ زمانی سیستم حلقه بسته با کنترل کننده μ در حضور برخی عدم قطعیت ها ۱۱۰
- شکل ۵-۶۰- پاسخ زمانی سیستم حلقه بسته با کنترل کننده μ در حضور عدم قطعیت های افزوده ۱۱۱
- شکل ۵-۶۱- پاسخ زمانی سیستم حلقه بسته با کنترل کننده μ در حضور عدم قطعیت های پارامتری (تا مرز بالایی) و عدم قطعیت های غیر پارامتری غیرپارامتری ۱۱۲
- شکل ۵-۶۲- پاسخ زمانی سیستم حلقه بسته با کنترل کننده μ در حضور عدم قطعیت های پارامتری (تا مرز پایینی) و عدم قطعیت های ۱۱۳
- شکل ب-۱- فیلترکالمن ۱۲۲
- شکل ب-۲- ساختار جبرانساز LQG ۱۲۳
- شکل ج-۱- سیستم کنترل حلقه بسته با ترکیب مدل سیستم و ماتریسهای وزنی در طراحی H_∞ ۱۲۴

فصل اول

مقدمه

۱-۱ قطار مغناطیسی^۱

قطار مغناطیسی یک فن آوری جدید در صنعت حمل و نقل است که با جایگزینی اجزاء الکترونیکی بجای اجزاء مکانیکی بر محدودیت های فنی چرخ - ریل غلبه می کند و دارای ویژگی های زیر است:

سرعت بالا؛ در حد ۲۵۰ تا ۳۰۰ مایل بر ساعت (۱۱۲ تا ۱۳۴ متر بر ثانیه) یا بالاتر.

امنیت بالا؛ علی رغم سرعت زیاد این سیستم نسبت به دیگر سیستم های حمل و نقل امن تر و راحت تر است چرا که تعلیق موجود باعث می شود از خط خارج شدن غیرممکن شده و علاوه بر این اطمینان می دهد که هیچ مانعی نمی تواند در مسیر باشد.

آلودگی کمتر؛ از آنجایی که قطار مغناطیسی به صورت الکتریکی تغذیه می شود آلودگی سیستم هوا مانند هواپیماها و اتومبیل ها وجود ندارد.

مصرف انرژی پایین؛ به خاطر فن آوری بدون تماسی هیچ اتلاف انرژی به خاطر اصطکاک وجود ندارد. وزن وسیله نیز به دلیل نبود چرخ ها، محورها و موتور پایین تر است.

ظرفیت بالا؛ سیستم های قطار مغناطیسی می توانند ظرفیت لازم را جهت تطبیق با رشد ترافیک فراهم کنند.

¹ magnetic levitation (maglev) train

دو طراحی عمده متفاوت برای سیستمهای تعلیق وجود دارد: طراحی تعلیق الکترو دینامیکی (EDS)^۱ و تعلیق الکترومغناطیسی (EMS)^۲.

سیستم EDS که براساس نیروهای دافعه مغناطیسی عمل می نماید به طور ذاتی پایدار است زیرا دافعه مغناطیسی با کاهش شکاف بین وسیله نقلیه^۳ و مسیرهادی^۴ افزایش می یابد. میزان شناوری قطار در این سیستم ها ۱ تا ۱۰ سانتی متر است.

سیستم EMS که براساس نیروهای جاذبه مغناطیسی عمل می کند سیستمی به طور ذاتی ناپایدار است زیرا جاذبه مغناطیسی با کاهش شکاف افزایش می یابد و برای پایداری نیاز به سیستم کنترل الکترونیکی جهت حفظ شکاف و جلوگیری از تماس قطار و ریل ضروری است. میزان شناوری قطار در سیستم EMS به طور نامی ۱۰ میلیمتر است.

کنترل کننده ای که در این پایان نامه برای سیستم قطار مغناطیسی در نظر گرفته شده است کنترل کننده مقاومی است که با تکنیک μ طراحی می شود تا ضمن پایدارسازی، سیستم را از عملکرد مطلوبی نیز برخوردار نماید.

۱-۲ کنترل مقاوم^۵

بسیاری از روشهای متداول تحلیل و طراحی کنترل سیستمها همچون روشهای کلاسیک و بهینه بر مبنای مدل نامی سیستمها پایه گذاری شده اند. بنابراین در صورت بروز هر گونه تغییر و انحراف از مدل نامی ممکن است کنترل کننده نتواند عملکرد مطلوبی داشته باشد. در بعضی از روشهای مذکور اثر تغییر پارامترهای سیستم تا حدودی در نظر گرفته می شود، اما چون به عنوان یک هدف اصلی در تحلیل یا طراحی سیستم دنبال نمی شود، کارایی این روشها را فقط در برابر تغییرات سیگنال کوچک

¹ electrodynamic suspension

² electromagnetic suspension

³ vehicle

⁴ guideway

⁵ robust control

تضمین می نماید. مدل‌هایی که برای نمایش سیستم های واقعی شبیه سازی می شوند، به دلایل مختلف رفتار کاملاً منطقی با رفتار سیستم واقعی ندارند و بدیهی است که یک روش تحلیل یا طراحی در صورتی کاربرد عملی خواهد داشت که به انواع اغتشاشات ورودی سیستم، منابع عدم قطعیت و انحرافات موجود در مدل سیستم توجه کافی داشته باشد. این مسأله باعث پدید آمدن مفهوم کنترل مقاوم شد.

کنترل مقاوم در حالت کلی عبارت است از تحلیل و طراحی کنترل کننده های ثابت برای مدل نامی سیستمها در حضور اغتشاشات و عدم قطعیت‌های مختلف. لذا کنترل مقاوم تنها مدل نامی سیستم را در بر نمی گیرد بلکه به مجموعه ای از مدل‌های سیستم توجه می کند که از ترکیب مدل نامی با انحرافات و عدم قطعیت‌های مدل به وجود می آید.

کنترل مقاوم به دو بخش اصلی تحلیل و طراحی تقسیم می شود. در تحلیل دو نگرش کلی وجود دارد:

۱- فرض بر این است که دامنه و یا ساختار عدم قطعیتها مشخص می باشد و لذا هدف تحلیل، تحقیق برقراری پایداری و عملکرد مناسب در حضور کلیه عدم قطعیت‌های مجاز سیستم می باشد.

۲- فرض می شود که ساختار احتمالی عدم قطعیتها مشخص است. بنابراین هدف تحلیل یافتن حداکثر عدم قطعیت‌های مجاز سیستم می باشد به شرطی که پایداری و عملکرد سیستم حلقه بسته در حد مطلوب حفظ شود. این نگرش گاه تحت عنوان محاسبه حاشیه پایداری و عملکرد نیز مطرح می گردد. حسن عمده این نگرش این است که با کمک آن می توان قابلیت و کارایی روشهای مختلف را با یکدیگر مقایسه نمود.

تئوری تحلیل مقادیر تکین با ساختار μ قادر است با هر یک از این دو نگرش فوق عمل تحلیل را انجام دهد.

در مسأله طراحی هدف آن است که با در نظر گرفتن محدوده و ساختار عدم قطعیت در سیستم، کنترل کننده ای بیابیم که در حضور عدم قطعیت‌های مجاز علاوه بر تضمین پایداری حلقه بسته مشخصه های عملکردی^۱ مطلوبی نیز داشته باشد.

تئوری کنترل H_{∞} و μ ، هر دو، این هدف را در طراحی دنبال می کنند، اما برتری روش μ نسبت به روشهای دیگر کنترل مقاوم مانند H_{∞} بهینه این است که محافظه کاری کمتری دارد.

۱-۳ ساختار پایان نامه

در این مطالعه سیستم تعلیق قطار مغناطیسی را به صورت یک سیستم EMS در نظر می گیریم.

پایان نامه به این شکل سازماندهی می شود:

مدل سیستم وسیله نقلیه در فصل ۲ معرفی می شود که شامل مدل وسیله نقلیه تک واگن با دو درجه آزادی، مدل مغناطیس، مدل مسیر هادی و مدل سختی آن است. این مدل ها به شکل فضای حالت فرمول بندی می شوند.

فصل ۳ به معرفی مبانی و مفاهیم سیستمهای چند متغیره و عدم قطعیتها می پردازد.

در فصل ۴ مفهوم کنترل مقاوم به روش μ مورد بررسی قرار می گیرد.

فصل ۵ شامل اعمال روش های کنترل LQG, H_{∞}, μ بر روی سیستم قطار مغناطیسی است. پاسخ های سیستم کنترل شده با هر یک از روشهای مذکور مقایسه شده و برتری μ از نظر مقاوم بودن^۲ نسبت به دو روش دیگر مورد ملاحظه قرار می گیرد.

فصل ۶ شامل نتیجه گیری بوده و پیشنهادهایی برای بهبود در طراحی سیستم کنترل نیز ارائه می شود.

^۱ performance objectives

^۲ robustness

فصل دوم

مدل سیستم قطار مغناطیسی

۱-۲ مقدمه

در ۳۰ سال گذشته مدل های بسیاری برای قطار مغناطیسی پیشنهاد شده و مورد تحلیل قرار گرفته است. Katz و دیگران در سال ۱۹۷۴ دو مدل ساده برای قطار مغناطیسی با تعلیق نوع جاذبه و دافعه پیشنهاد کردند. تاثیرات چند عامل غالب شامل سختی^۱ مسیر هادی و غیرخطی بودن نیروی تعلیق مورد بررسی قرار گرفت. یک سیستم وسیله نقلیه دو درجه آزادی با یک بدنه واگن و یک مغناطیس در بررسی آنها استفاده شده و با سیستم کنترلی که برای تعلیق نوع جاذبه طراحی گردید خطای ردیابی در حد ۱/۴ نقطه تعادل شکاف هوایی برای جلوگیری از تماس مغناطیس - مسیر هادی بدست آمد.

Cai و دیگران در سال ۱۹۹۳ روی یک مدل وسیله نقلیه چند واگنه^۲ مطالعاتی انجام دادند. تاثیرات متقابل وسیله نقلیه و مسیر هادی روی محدوده وسیعی از سرعت با پارامترهای مختلف وسیله نقلیه و مسیر هادی مورد بررسی قرار گرفت. فقط حرکت عمودی قطار در مطالعات آنها ملاحظه شد. و در نهایت نتیجه گرفتند که قطارهای چند واگنه بخاطر فشارهای عمودی داخل واگن شتاب بدنه واگن کمتری نسبت به قطارهای تک واگنه^۳ دارند.

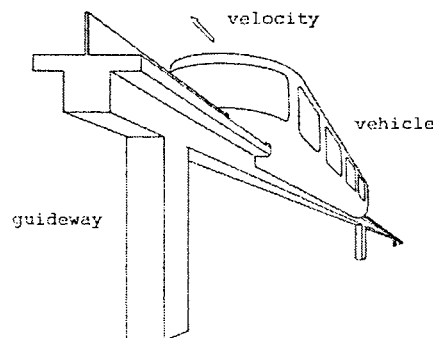
¹ roughness

² multi-car vehicle

³ single- car vehicle

Wang و Nagurka در سال ۱۹۵۵ سیستم دینامیکی وسیله نقلیه را با یک مدل پنج درجه آزادی برای وسیله نقلیه، یک مدل مغناطیس ابر رسانا و یک مدل مسیر هادی نرم^۱ در نظر گرفتند. یک سیستم کنترل بهینه پیش بین با عملکرد انتگرالی طراحی گردید و آنها دریافتند که طرح کنترل پیش بین کارایی وسیله نقلیه را می تواند بالا ببرد.

جهت کنترل مناسب رفتار سیستم قطار مغناطیسی یک مدل کامل باید تعریف شود که شامل مدل دینامیک وسیله نقلیه، مدل تعلیق مغناطیسی، مدل ساختار مسیر هادی و مدل سختی مسیر هادی است. در فرمول بندی معادلات از نمایش فضای حالت استفاده می شود؛ در این فصل معادلات حالت مستقیم را بدست می آوریم و در نهایت برای سیستم بدست آمده در اینجا به طراحی کنترل مقاوم می پردازیم. لازم به ذکر است که جهت تنظیم مطالب این فصل به خصوص روابط و معادلات، عمدتاً از مرجع شماره ۱ استفاده شده است.



شکل ۱-۲- قطار مغناطیسی و ریل آن

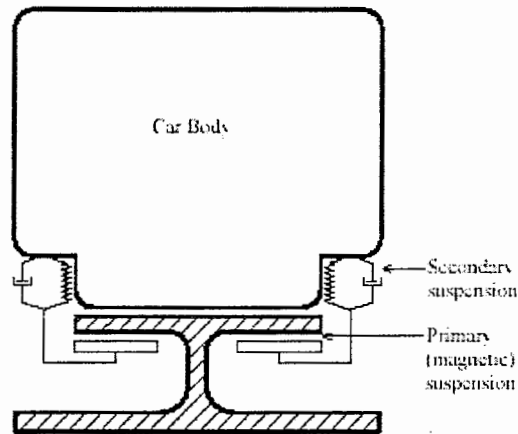
۲-۲ مدل وسیله نقلیه تک واگنه

دینامیک وسیله نقلیه در این بررسی با دو درجه آزادی در نظر گرفته می شود. جرم بدنه واگن صلب فرض شده و توسط فنر و میرا کننده^۲ که تعلیق ثانویه را در سیستم قطار مغناطیسی تشکیل می دهند

¹ flexible

² dashpot

نگه داشته می شود. تعلیق اولیه شامل بالا نگه داشتن بوژی^۱ به صورت مغناطیسی است. الکترومغناطیس روی بوژی صلب نصب شده و این اتصال نیز صلب فرض می شود. وسیله نقلیه دو درجه آزادی دارد شامل جابجایی انتقالی در مرکز جرم بدنه واگن و جابجایی انتقالی در بوژی. شکل ۲-۲ نمای جلویی وسیله نقلیه را نشان می دهد. تعلیق اولیه و ثانویه علی رغم اینکه در دو جهت وسیله نقلیه قرار دارند به صورت یک مجموعه یکپارچه در نظر گرفته می شوند.



شکل ۲-۲- مدل وسیله نقلیه (نمای جلو)

معادله حرکت بوژی به این صورت بدست می آید:

$$m_p \ddot{v}_p + c_s (\dot{v}_p - \dot{v}_s) + k_s (v_p - v_s) = f \quad (1-2)$$

v_p تغییر مکان عمودی بوژی است، f نیروی تعلیق مغناطیسی دینامیکی روی بوژی، k_s, c_s سختی فنر^۲ و میرایی^۳ مربوط به تعلیق بدنه واگن و v_s تغییر مکان عمودی واگن در مرکز جرم آن است.

معادله حرکت بدنه واگن نیز به این شکل بدست می آید:

$$m_s \ddot{v}_s + c_s (\dot{v}_s - \dot{v}_p) + k_s (v_s - v_p) = 0 \quad (2-2)$$

¹ bogie

² spring stiffness

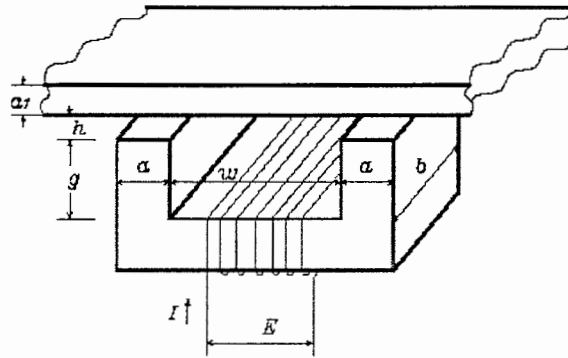
³ damping

۳-۲ مدل تعلیق مغناطیسی

۱-۳-۲ مدل تعلیق مغناطیسی غیرخطی

بیکربندی الکترومغناطیس و صفحه فرومغناطیس در سیستم تعلیق قطار مغناطیسی در شکل ۳-۲ نشان داده شده است. نیروی جاذبه بین سطح قطب و صفحه فرومغناطیس به این صورت می باشد:

$$F = \frac{1}{2\mu_0} B_m^2 (2A_m) \quad (۳-۲)$$



شکل ۳-۲- بیکربندی الکترومغناطیس و صفحه فرومغناطیس

که B_m چگالی شار سرتاسر شکاف هوایی است، A_m فضای سطح وجه قطب و μ_0 نفوذپذیری مغناطیسی هوا^۱.

Wang و Meisenholder در سال ۱۹۷۲ معادله نیروی جاذبه مغناطیسی را به این شکل به دست آوردند:

$$F = \frac{(mmf)^2 \mu_0 ab}{4} \left[h + \frac{\mu_0}{\mu_i} (w + g + 2a) \right]^{-2} \quad (۴-۲)$$

که h شکاف هوایی است، μ_i نفوذپذیری آهن و mmf نیروی محرکه مغناطیس که از این رابطه به دست می آید:

$$mmf = NI \quad (۵-۲)$$

که N تعداد دور سیم پیچ است و I جریان سیم پیچی.

^۱ permeability

نفوذپذیری مغناطیسی هوا، μ_0 ، $4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{henry}}{\text{m}}$ است و چگالی شار اشباع، B_{sat} ، که باعث اشباع

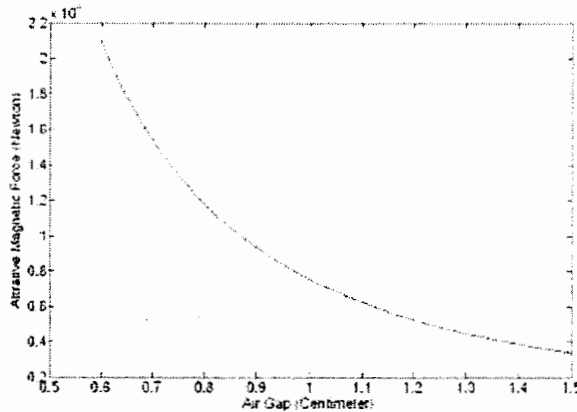
هسته می شود بین $1.5 \frac{\text{weber}}{\text{m}^2}$ تا $2 \frac{\text{weber}}{\text{m}^2}$ تغییر می کند. اگر $h \gg \frac{\mu_0}{\mu_0} (w + g + 2a)$ معادله (۲-۴)

به این صورت نوشته می شود:

$$F = \frac{(mmf)^2 \mu_0 ab}{4h^2} \quad (۲-۶)$$

شکل ۲-۴ ارتباط غیرخطی بین شکاف هوایی و نیروی جاذبه مغناطیسی را نشان می دهد که مقادیر

پارامترها عبارتند از: $a = 5\text{cm}$ ، $b = 10\text{cm}$ ، $mmf = 4.67 \times 10^8 \text{ amp}$



شکل ۲-۴- نیروی جاذبه مغناطیسی به صورت تابعی از شکاف هوایی

نیروی محرکه مغناطیسی، mmf ، را می توان به دو بخش تقسیم کرد: یک بخش که ثابت فرض می شود وزن وسیله نقلیه را متعادل کرده و توانایی تعلیق را فراهم می سازد. بخش دوم با یک جریان تریم^۱ تولید می شود که توسط یک ولتاژ کنترل شده برای نگه داشتن فاصله هوایی در یک مقدار نامی بدست می آید. هر ماژول مغناطیسی شامل n_m مغناطیس است و تمام مغناطیس ها در یک ماژول منبع تغذیه یکسانی دارند. نیروی مغناطیسی تولید شده توسط یک ماژول مغناطیسی با رابطه زیر داده می شود:

$$F = \frac{n_m \mu_0 ab}{4h^2} (N_c I_c + N_t i)^2 \quad (۲-۷)$$

^۱ trim

که N_c تعداد چرخش های سیم پیچ است که یک نیروی ثابت فراهم می کند و I_c جریان ثابت متناظر است، N_t تعداد چرخش های سیم پیچ که جریان تریم را فراهم می کند و i جریان تریم متناظر است. رابطه بین نیروی مغناطیسی و جریان تریم نیز غیرخطی است.

رابطه بین جریان تریم و ولتاژ از قانون ولتاژ کیرشهف^۱ بدست می آید.

$$u - R_c i - N_t \frac{d(B_m ab)}{dt} = 0 \quad (۸-۲)$$

که

$$B_m = \frac{\mu_0 (mmf)}{2} \left[h + \frac{\mu_0}{\mu_i} (w + g + 2a) \right]^{-1} \quad (۹-۲)$$

با جایگذاری معادله (۹-۲) در (۸-۲) و حذف جمله دوم در B_m ، جریان تریم به این صورت از روی ولتاژ مشخص می شود:

$$u = R_c i + \frac{\mu_0 ab N_t^2}{2h} \frac{di}{dt} - \frac{\mu_0 ab N_t (N_c I_c + N_t i)}{2h^2} \frac{dh}{dt} \quad (۱۰-۲)$$

۲-۳-۲ مدل تعلیق مغناطیسی خطی سازی شده

نیروی جاذبه مغناطیسی، معادله (۷-۲)، با استفاده از قضیه تیلور حول شکاف هوایی نامی خطی سازی می شود. در $i = i_0 = 0, h = h_0$ داریم:

$$F = F(h_0, i_0) + \left. \frac{\partial F}{\partial h} \right|_{h=h_0, i=i_0} (h - h_0) + \left. \frac{\partial F}{\partial i} \right|_{h=h_0, i=i_0} (i - i_0) + O(h) \quad (۱۱-۲)$$

با صرف نظر از جملات مرتبه دوم و بالاتر نیروی مغناطیسی عبارت است از:

$$F \approx \frac{M_1}{2} N_c I_c - \frac{M_1}{h_0} N_c I_c (h - h_0) + M_1 N_t i \quad (۱۲-۲)$$

$$M_1 = \frac{\mu_0 ab n_m}{2h_0^2} 2h_0^2 N_c I_c \quad \text{که}$$

و نیروی مغناطیسی دینامیکی به صورت زیر بیان می شود:

$$f \approx -\frac{M_1}{h_0} N_c I_c (h - h_0) + M_1 N_t i \quad (۱۳-۲)$$

^۱ kirchhoff's voltage law

قانون ولتاژ، معادله (۲-۱۰)، نیز در شکاف هوایی نامی خطی سازی می شود.

در $i = i_0, \dot{h} = \dot{h}_0, i = i_0 = 0, h = h_0$ داریم:

$$u = u(h_0, i_0, \dot{h}_0, \dot{i}_0) + \frac{\partial u}{\partial h} \bigg|_{\substack{h=h_0 \\ i=i_0 \\ \dot{h}=\dot{h}_0 \\ \dot{i}=\dot{i}_0}} (h - h_0) + \frac{\partial u}{\partial i} \bigg|_{\substack{h=h_0 \\ i=i_0 \\ \dot{h}=\dot{h}_0 \\ \dot{i}=\dot{i}_0}} (i - i_0) + \frac{\partial u}{\partial \dot{h}} \bigg|_{\substack{h=h_0 \\ i=i_0 \\ \dot{h}=\dot{h}_0 \\ \dot{i}=\dot{i}_0}} (\dot{h} - \dot{h}_0) + \frac{\partial u}{\partial \dot{i}} \bigg|_{\substack{h=h_0 \\ i=i_0 \\ \dot{h}=\dot{h}_0 \\ \dot{i}=\dot{i}_0}} (\dot{i} - \dot{i}_0) + O(h) \quad (۱۴-۲)$$

در نتیجه

$$i \approx M_2 u - M_3 \dot{i} + M_4 \dot{h} \quad (۱۵-۲)$$

$$M_4 = \frac{N_c I_c}{h_0 N_t} \text{ و } M_3 = \frac{2R_c h_0}{\mu_0 ab N_t^2}, \quad M_2 = \frac{2h_0}{\mu_0 ab N_t^2} \text{ که}$$

معادلات (۲-۱۳) و (۲-۱۵) مدل نیروی مغناطیسی دینامیکی و مدل ولتاژی هستند که در مدل کردن سیستم قطار مغناطیسی مورد نظر استفاده می شوند.

۲-۴ مدل سختی

۲-۴-۱ فرآیند فضایی^۱

مدل سختی ناشی از اختلاف بلندی پایه های زیر ریل و دفرمگیهای خزشی^۲، یک فرآیند تصادفی ایستاد غیر سفید فرض می شود که به صورت پاسخ یک فیلتر خطی مرتبه اول به یک تحریک سفید ایستاد مدل می شود:

$$\frac{1}{r_f} \frac{dh_d(x)}{dx} + h_d(x) = w_d(x) \quad (۱۶-۲)$$

که w_d یک نویز سفید گوسی با میانگین صفر است.

تابع تبدیل بین w_d و h_d به شکل زیر است:

$$H(r) = \frac{1}{1 + \left(\frac{r}{r_f}\right)i} \quad (۱۷-۲)$$

^۱ spatial process

^۲ creep deformations

که r عدد موج (معکوس طول موج، λ) است و بعد $\frac{1}{m}$ دارد.

مربع قدرمطلق آن عبارتست از:

$$|H(r)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{r}{r_f}\right)^2} \quad (18-2)$$

اگر چگالی طیف توان¹ (PSD) نویز سفید w_d ، S_0 باشد، خروجی این فیلتر برابر است با

$$S_{h_d h_d}(r) = |H(r)|^2 S_0 \quad (19-2)$$

پارامترهای فیلتر S_0 و r_f بوده و S_0 در سیستم مورد نظر $4.87 \times 10^{-5} m^3$ فرض می شود و r_f برای PSD های مختلف مقادیر متفاوتی دارد. (از $0.01 m^{-1}$ تا $0.02 m^{-1}$).

۲-۴-۲ فرآیند گذرا^۲

برای انجام تحلیل فضای حالت باید مدل سختی از حوزه فضایی به حوزه زمانی تبدیل شود:

$$\dot{h}_d(t) = \frac{dh_d(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = V \frac{dh_d(x)}{dx} \quad (20-2)$$

که V سرعت وسیله نقلیه است.

با جایگذاری معادله فوق در رابطه (۲-۱۶) مدل سختی در حوزه زمان به شکل زیر در نظر گرفته می شود:

$$\frac{1}{r_f V} \dot{h}_d(t) + h_d(t) = w_d(t) \quad (21-2)$$

۲-۵ مدل مسیر هادی

مدل مسیر هادی (ریل) که تحت تاثیر قطار دچار خمیدگی می شود به صورت یک تابع سینوسی در نظر گرفته می شود:

$$v_g + \omega^2 v_g = 0 \quad (22-2)$$

که v_g تغییر مکان عمودی میله ریل است و ω مطابق با رابطه زیر به پارامترهای مختلفی بستگی دارد:

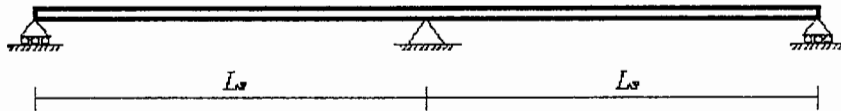
¹ power spectral density

² temporal process

$$\omega = a \sqrt{\frac{EI}{mL_s^2}} \quad (23-2)$$

a یک عدد ثابت است، EI سختی خمشی^۱ میله ریل، m جرم میله ریل بر واحد طول و L_s فاصله دودهانه^۲ ریل از یکدیگر.

شکل ۵-۲ یک مسیر هادی دو دهانه را نشان می دهد.



شکل ۵-۲- مسیر هادی با دو دهانه

با تعریف فوق برای خمیدگی مسیر، اختلاف شکاف از مقدار نامی از رابطه زیر بدست می آید:

$$h - h_0 = h_d + v_p - v_g \quad (24-2)$$

۶-۲ معادلات حالت سیستم

با توجه به معادلات توصیف شده در بخش های ۲-۲ تا ۵-۲ مجموعه معادلات کل سیستم به این صورت می باشد:

$$m_p \ddot{v}_p + c_s(v_p - v_s) + k_s(v_p - v_s) + \frac{M_1}{h_0} N_c I_c (h_d + v_p - v_g) - M_1 N_t i = 0 \quad (25-2)$$

$$m_s \ddot{v}_s + c_s(v_s - v_p) + k_s(v_s - v_p) = 0$$

$$i = M_2 u - M_3 i + M_4 (h_d + v_p - v_g)$$

$$\frac{1}{r_f V} \dot{h}_d + h_d = w_d$$

$$\ddot{v}_g + \omega^2 v_g = 0$$

وسیله نقلیه مورد نظر ۲ درجه آزادی دارد (حرکت انتقالی بوژی و بدنه واگن)، در نتیجه ۴ متغیر

حالت بخاطر درجات آزادی سیستم وجود دارد. ۱ متغیر حالت از قانون ولتاژ در تعلیق مغناطیسی، ۱

¹ bending rigidity

² span

متغیر حالت از مدل سختی مسیر هادی و ۲ متغیر حالت نیز از مدل مسیر هادی داریم. به این ترتیب تعداد کل متغیرهای حالت سیستم ۸ تا است.

سیستم خطی قطار مغناطیسی در شکل فضای حالت به این صورت نوشته می شود:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Hw(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) + v(t) \end{cases} \quad (26-2)$$

که $x(t)$ بردار حالت سیستم است، $u(t)$ بردار ورودیهای سیستم، $w(t), v(t)$ بردار نویز سفید گوسی و D, C, H, B, A ماتریس هایی با ابعاد مناسب.

بردار حالت سیستم برابر است با

$$x(t) = \begin{bmatrix} v_p & \dot{v}_p & v_s & \dot{v}_s & i & h_d & v_g & \dot{v}_g \end{bmatrix}^T \quad (27-2)$$

و بردار ورودی

$$u(t) = [u] \quad (28-2)$$

بردار اغتشاش ورودی

$$w(t) = [w_d] \quad (29-2)$$

بردار نویز اندازه گیری

$$v(t) = [v_d] \quad (30-2)$$

می باشند (v_d نویز سفید گوسی با میانگین صفر است).

ماتریس های H, B, A به این صورت هستند:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_s & \frac{M_1 N_c I_c}{m_p} & -\frac{c_s}{m_p} & \frac{k_s}{m_p} & \frac{c_s}{m_p} & \frac{M_1 N_l}{m_p} & -\frac{M_1 N_c I_c}{m_p h_0} & \frac{M_1 N_c I_c}{m_p h_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_s}{m_s} & \frac{c_s}{m_s} & -\frac{k_s}{m_s} & -\frac{c_s}{m_s} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_4 & 0 & 0 & -M_3 & M_4 & 0 & 0 & -M_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_f V & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (31-2)$$

$$B = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ M_2 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (32-2)$$

$$H = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ r_f V \ 0 \ 0]^T \quad (33-2)$$

خروجی های سیستم، شتاب عمودی بدنه واگن (\ddot{v}_s) و اختلاف شکاف هوایی بین وسیله نقلیه و مسیر هادی از مقدار نامی ($h - h_0$) است. شتاب عمودی بدنه واگن با راحتی مسافر در قطار رابطه دارد و هر چه مقدار آن کمتر باشد راحتی مسافر بیشتر خواهد بود. مقدار اختلاف شکاف هوایی بین وسیله نقلیه و مسیر هادی از مقدار نامی نیز در حالت ایده آل صفر است.

ماتریس های D, C به شکل زیر تعریف می شوند.

$$C = \begin{bmatrix} \frac{k_s}{m_s} & \frac{c_s}{m_s} & -\frac{k_s}{m_s} & -\frac{c_s}{m_s} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (34-2)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (35-2)$$

مدل کامل سیستم که شامل مدل دینامیکی وسیله نقلیه، مدل تعلیق مغناطیسی، مدل مسیر هادی و مدل سختی مسیر هادی است، ترکیب شده و به صورت خطی در شکل فضای حالت بیان گردیده است. از آنجا که مدل تعلیق مغناطیسی جاذبه ذاتا ناپایدار است نیاز به کنترل کننده برای این سیستم ضروری بنظر می رسد و چون کنترل کننده مقاوم به تغییرات پارامترهای سیستم و انواع اغتشاشات موجود توجه می کند، کنترل کننده ای که در اینجا برای سیستم قطار مغناطیسی در نظر گرفته می شود کنترل کننده مقاوم بوده که در فصل ۴ به معرفی آن می پردازیم و در فصل ۵ نیز روند طراحی کنترل کننده آورده می شود.

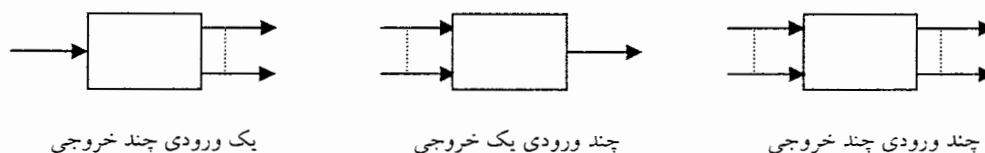
فصل سوم

سیستمهای چند متغیره و

عدم قطعیتها

۳-۱ مقدمه

در مقابل سیستم SISO^۱ که سیستمی با یک ورودی و یک خروجی است سیستم چند متغیره (MIMO)^۲ را داریم که دارای چند ورودی و چند خروجی می باشد؛ به عبارتی تعداد ورودی و یا خروجی آن یک نیست. انواع سیستمهای چند متغیره به صورت یک ورودی چند خروجی، چند ورودی یک خروجی و چند ورودی چند خروجی هستند، همانطور که در شکل زیر نشان داده شده است.



شکل ۳-۱- انواع سیستمهای چند متغیره

به منظور مشاهده رفتار یک سیستم فیزیکی و شبیه سازی آن یک مدل ریاضی به صورت معادلات دیفرانسیل جزئی و غیر خطی برای آن سیستم استخراج می شود. مدل نامی از خطی سازی این معادلات حول نقطه کار سیستم بدست می آید. حال هرچه این مدل جزئیات و دینامیکهای سیستم را بهتر و دقیقتر توصیف کند پاسخ مدل و شبیه سازی آن به رفتار سیستم واقعی نزدیکتر است. بنابراین طراحی مورد نظر ما برای مدل غیر خطی سیستم دارای عملکرد مطلوبتری خواهد بود. اگر به هر

^۱ Single Input-Single Output

^۲ Multi Input-Multi Output

دلیلی نقطه کار سیستم تغییر نماید پارامترهای مدل دچار تغییرات شده و عدم قطعیت^۱ وارد مدل می شود. یعنی تشابه مدل خطی با سیستم غیر خطی واقعی کاهش می یابد. اصولاً در مدلسازی برای سادگی و کاهش مرتبه مدل از دینامیکهای کم اهمیت و سریع سیستم صرفنظر می شود و همین امر باعث اختلاف بین سیستم واقعی و مدل سیستم خواهد شد. غیر از مسائل تغییرات مدل بروز اختلالات و نویز بر روی سیستم نیز باعث اختلاف رفتار در سیستم واقعی می شود، بنابراین باید سعی شود که اثرات نویز و اغتشاشات را نیز در خروجی و بر روی پاسخ سیستم تا حد امکان کاهش داد. بحث کنترل مقاوم با در نظر گرفتن عوامل عدم قطعیت در سیستم مطرح می شود.

۲-۳ مفاهیم سیستمهای چند متغیره (MIMO)

۱-۲-۳ نمایش مدل نامی سیستم چند متغیره

به مدل ثابتی که برای یک فرآیند یا سیستم فیزیکی در نظر گرفته می شود مدل نامی گویند. تعیین مدل نامی در حقیقت مصالحه ای است میان دو تضاد "ساده بودن" و "دقیق بودن"، بنابراین هرگز نمی توان یک فرآیند یا سیستم فیزیکی را بدون خطا مدل کرد.

متداولترین روشهای نمایش مدل نامی سیستم چند متغیره عبارتند از:

۱-۱-۲-۳ نمایش ماتریس تابع تبدیل

این ماتریس به تعداد ورودیها ستون و به تعداد خروجیها سطر دارد و اعضای آن توابع تبدیل تک ورودی - تک خروجی در حوزه لاپلاس است زیرا تک تک خروجیها با همه ورودیها رابطه ای در حوزه لاپلاس دارند. رابطه بین ورودی و خروجی در نمایش تابع تبدیل به صورت زیر است:

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad (۱-۳)$$

که $G(s)$ ماتریس تابع تبدیل است و $U(s)$ و $Y(s)$ بردارهایی ستونی هم بعد با تعداد ورودیها و خروجیها.

^۱ uncertainty

۳-۲-۱-۲ نمایش فضای حالت

در معادلات حالت مشتق حالتها و نیز خروجیها با حالتها و ورودیها رابطه دارند. معادلات به این صورت نشان داده می شوند:

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU \\ Y = CX + DU \end{cases} \quad (۲-۳)$$

۳-۲-۱-۳ نمایش ماتریسی - کسری^۱

در این حالت ماتریس تابع تبدیل سیستم توسط یکی از فاکتور گیریهای متباین^۲ راست یا چپ به صورت زیر نمایش داده می شود:

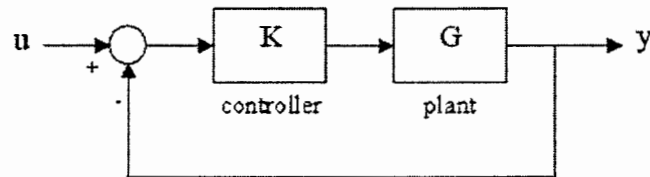
$$G(s) = N_r(s)D_r^{-1}(s) \quad (۳-۳-الف) \text{ فاکتورگیری متباین راست}$$

$$G(s) = D_l^{-1}(s)N_l(s) \quad (۳-۳-ب) \text{ فاکتورگیری متباین چپ}$$

در عبارات فوق $D_r(s)$ ، $D_l(s)$ ، $N_r(s)$ و $N_l(s)$ ماتریسهای چند جمله ای می باشند.

۳-۲-۲ ماتریس های حساسیت^۳ و حساسیت مکمل^۴

سیستم کنترل شکل زیر را در نظر بگیرید.



شکل ۳-۲-۲- الگوری سیستم کنترل

سیگنال خطا به این صورت بدست می آید:

$$e = u - y = (I + GK)^{-1}u \quad (۴-۳)$$

ماتریس حساسیت را به این شکل تعریف می کنیم:

^۱ matrix fraction

^۲ coprime factorization

^۳ sensitivity

^۴ complementary sensitivity

$$S = (I + GK)^{-1} \quad (5-3)$$

برای خروجی خواهیم داشت:

$$y = GK(I + GK)^{-1}u \quad (6-3)$$

ماتریس حساسیت مکمل نیز به این شکل تعریف می شود:

$$T = GK(I + GK)^{-1} \quad (7-3)$$

رابطه بین S و T به این صورت می باشد:

$$S + T = I \quad (8-3)$$

در طراحی، ماتریس حساسیت را باید آنقدر کوچک کرد که خطای سیستم تا حد امکان کوچک باشد.

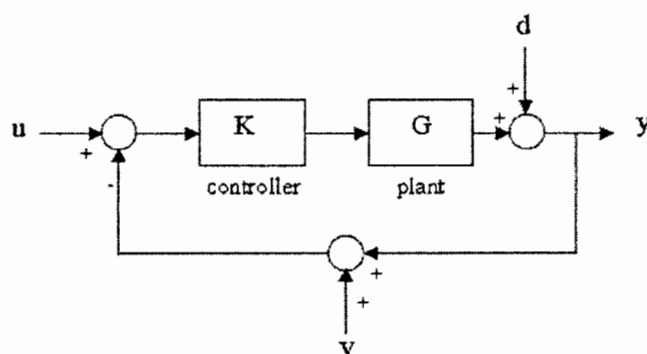
ماتریس حساسیت مکمل نیز باید برابر با I باشد تا ورودی و خروجی دقیقاً برابر باشند.

حال اگر الگوی اصلی سیستم کنترل، شکل ۳-۳، را با اغتشاش (d) و نویز (v) در نظر بگیریم، روابط

خطا و خروجی به این صورت خواهد بود:

$$e = S(u - d) + Tv \quad (9-3)$$

$$y = Sd + T(u - v) \quad (10-3)$$



شکل ۳-۳- الگوی اصلی سیستم کنترل

افزایش T باعث می شود که نویز به طور کامل در خروجی و همچنین در خطای سیستم دیده شود و

این در طراحی مطلوب نیست. چون نویز یک سیگنال فرکانس بالاست پس باید طیف فرکانسی

ماتریس T را طوری طراحی نماییم که در فرکانسهای بالا برابر 0 و در فرکانسهای پایین برابر I شود.

این بیان معادل است با اینکه S در فرکانسهای پایین برابر 0 و در فرکانسهای بالا برابر I گردد. چون معمولاً ورودی، سیگنال فرکانس پایین است، خطای سیستم در فرکانسهای پایین با حالت بدون نویز تغییر چندانی نخواهد کرد.

۳-۲-۳ پایداری سیستم چند متغیره

۱-۳-۲-۳ پایداری ورودی محدود - خروجی محدود^۱ (BIBO)

سیستمی پایدار ورودی محدود - خروجی محدود است که اگر ورودی آن محدود باشد خروجی نیز پاسخ محدودی داشته باشد.

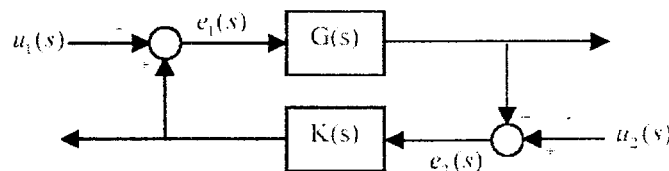
۲-۳-۲-۳ پایداری نمایی

یک ماتریس تابع تبدیل گویا پایدار نمایی است اگر و تنها اگر سره^۲ باشد و هیچ قطبی در نیم صفحه راست صفحه S نداشته باشد و یا در مورد سیستم گسسته در زمان هیچ قطبی در محدوده داخل دایره واحد نداشته باشد.

۳-۳-۲-۳ پایداری داخلی

سیستم کنترل شکل ۳-۴ را که یک حلقه فیدبکی است، در نظر بگیرید. با توابع تبدیل H_{12} ، H_{11} ، H_{21} و H_{22} که در همین قسمت معرفی خواهند شد روابط زیر را داریم:

$$\begin{cases} e_1(s) = H_{11}(s)u_1(s) + H_{12}(s)u_2(s) \\ e_2(s) = H_{21}(s)u_1(s) + H_{22}(s)u_2(s) \end{cases} \quad (۱۱-۳)$$



شکل ۳-۴- حلقه فیدبکی برای تحقق پایداری داخلی

¹ Bounded Input - Bounded Output

² proper

سیستم فیدبکی نشان داده شده در شکل ۳-۴ پایدار داخلی است اگر و تنها اگر ماتریس تابع تبدیل داده شده در رابطه (۳-۱۱)، ماتریس $H = [H_{ij}]$ ، پایدار نمایی باشد.

قضیه (۳-۱): اگر $K(s)$ پایدار نمایی باشد، آنگاه سیستم فیدبکی نشان داده شده در شکل ۳-۴ پایدار داخلی است اگر و تنها اگر

$$H_{21}(s) = [I - G(s)K(s)]^{-1}G(s) \quad (۳-۱۲)$$

پایدار نمایی باشد. سه مؤلفه دیگر ماتریس H را به صورت زیر می توان به H_{21} ربط داد؛ به همین دلیل است که تنها کافی است پایداری H_{21} را مورد بررسی قرار دهیم.

$$\begin{aligned} I + K(s)H_{21}(s) &= I + K(s)[I - G(s)K(s)]^{-1}G(s) & (۳-۱۳) \\ &= I + K(s)G(s)[I - K(s)G(s)]^{-1} \\ &= [I - K(s)G(s)]^{-1} \\ &= H_{11}(s) \end{aligned}$$

$$H_{11}(s)K(s) = H_{12}(s) \quad (۳-۱۴)$$

$$\begin{aligned} I + H_{21}(s)K(s) &= I + [I - G(s)K(s)]^{-1}G(s)K(s) & (۳-۱۵) \\ &= [I - G(s)K(s)]^{-1} \\ &= H_{22}(s) \end{aligned}$$

قضیه (۳-۲): اگر $K(s)$ پایدار نمایی باشد، آنگاه H_{21} پایدار نمایی است اگر و تنها اگر

۱- $\det[I - G(s)K(s)]$ هیچ صفری (شامل ∞) در نیم صفحه راست صفحه S نداشته باشد.

۲- $[I - G(s)K(s)]^{-1}G(s)$ هیچ قطبی (شامل ∞) در نیم صفحه راست بسته قطب $G(s)$ نداشته باشد.

اگر در شکل ۳-۴ فیدبک منفی داشته باشیم (یعنی بجای علامت مثبت در فیدبک علامت منفی قرار دهیم)، آنگاه بجای $I - G(s)K(s)$ در عبارات فوق $I + G(s)K(s)$ قرار می گیرد.

۳-۳ عدم قطعیت در مدل سیستمها

همانگونه که پیشتر ذکر شد مدل خطی با یکی از سه نمایش متداول ماتریس تابع تبدیل، فضای حالت و یا ماتریسی - کسری داده می شود. اگر به هر دلیلی نقطه کار سیستم تغییر نماید پارامترهای مدل دچار تغییرات شده و عدم قطعیت وارد مدل می شود. یعنی تشابه مدل خطی با سیستم غیر خطی واقعی کاهش می یابد. در مدلسازی برای سادگی و کاهش مرتبه مدل از دینامیکهای کم اهمیت و سریع سیستم صرفنظر می شود و این امر باعث اختلاف بین سیستم واقعی و مدل سیستم خواهد شد. غیر از مسائل تغییرات مدل بروز اختلالات و نویز بر روی سیستم نیز باعث اختلاف رفتار در سیستم واقعی می شود، بنابراین باید سعی شود که اثرات نویز و اغتشاشات را در خروجی و بر روی پاسخ سیستم تا حد امکان کاهش داد. به طور مختصر می توان منابع و عوامل عدم قطعیت در سیستم را به صورت زیر برشمرد:

- ۱- عدم تعیین دقیق پارامترهای مدل بعلت محدودیتهای اندازه گیری و محاسبات
- ۲- ساده سازی و کاهش درجه مدلها از طریق حذف دینامیکهای کم اهمیت و سریع
- ۳- غیر خطی بودن معادلات و خطای ناشی از خطی سازی
- ۴- عدم شناخت کافی از سیستم فیزیکی و در نتیجه بروز خطا در مدلسازی بعلت دینامیکها و تأخیرات مدل نشده سیستم
- ۵- صرفنظر از دینامیکها و تأخیرات مدل و عملگرها و سنسورها در خارج از حوزه فرکانسی دلخواه (زیرا اکثر سیستمها در باند فرکانسی معین و محدود مدلسازی می شوند)
- ۶- تغییر نقطه کار سیستم و در نتیجه تغییر پارامترها و ساختار آن
- ۷- خطای سنسورها یا تخمینگرهای حالت در اندازه گیری یا محاسبه متغیرهای سیستم
- ۸- خطای محرکها در انجام سریع و دقیق فرمان اعمالی به آنها
- ۹- خطای محاسبات در تحلیل و طراحی و تأخیر در زمان محاسبه
- ۱۰- ورودیهای اغتشاش پیش بینی نشده

بدین ترتیب بجای در نظر گرفتن یک مدل نامی باید مجموعه ای از مدلها در نظر گرفته شود که ترکیبی از مدل نامی و انواع عدم قطعیت آن را شامل گردد. این مجموعه مدل نامی را نیز در برخواهد داشت. انواع عدم قطعیت در مدل سیستمها را در دسته بندیهای زیر می توان در نظر گرفت:

۱- عدم قطعیت با ساختار^۱ و بدون ساختار^۲

۲- عدم قطعیت پارامتری و غیر پارامتری

۳- عدم قطعیت معین^۳ و نامعین^۴

۴- عدم قطعیت حقیقی و مختلط

با توجه به روش نمایش مدل نامی و همچنین دقت نظر نسبت به مفهوم فیزیکی عدم قطعیتها و ارتباط آنها با مدل سیستم، عدم قطعیتها را اغلب به یکی از روشهای متداول زیر مدل می کنند:

۱- ضرب شونده^۵ در ورودی (نمایش ماتریس تابع تبدیل):

$$G^* = G(I + \Delta_i)$$

۲- ضرب شونده فیدبکی در ورودی (نمایش ماتریس تابع تبدیل):

$$G^* = G(I + \Delta_i)^{-1}$$

۳- پارامتری (نمایش فضای حالت):

$$A^* X = (A + \Delta A) X$$

۴- ضرب شونده در خروجی (نمایش ماتریس تابع تبدیل):

$$G^* = (I + \Delta_o) G$$

۵- ضرب شونده فیدبکی در خروجی (نمایش ماتریس تابع تبدیل):

$$G^* = (I + \Delta_o)^{-1} G$$

۶- جمع شونده^۶ (نمایش ماتریس تابع تبدیل):

$$G^* = G + \Delta_a$$

در عبارات فوق G نمایش مدل نامی است و G^* نمایش مدل در معرض عدم قطعیت.

۳-۳-۱ عدم قطعیت بدون ساختار

برای یک سیستم چند متغیره به طور معمول سه مدل عدم قطعیت بدون ساختار استفاده می شود:

¹ structured uncertainty

² unstructured uncertainty

³ deterministic

⁴ stochastic

⁵ multiplicative

⁶ additive

ما نیاز به هر دو مدل عدم قطعیت ضرب شونده داریم، چون ضرب ماتریسها خاصیت جابجایی ندارد. در واقع (۳-۱۷) بیان می کند که تمام قطعیتها در ورودی دستگاه اتفاق می افتد در حالیکه در (۳-۱۸) تمام عدم قطعیتها در خروجی دستگاه رخ می دهد.

در بعضی موارد برگرداندن تمام عدم قطعیتها به ورودی یا خروجی سیستم مناسب نیست و لازم است که مدل جمع شونده را نیز بکار گیریم و یا مدلهای ضربی دیگری همچون:

$$G(s) = [I + \Delta_o(s)]G_0(s)[I + \Delta_i(s)] \quad (۳-۱۹)$$

یا

$$G(s) = G_0(s) * [I + \Delta_S(s)] \quad (۳-۲۰)$$

که " * " ضرب مؤلفه به مؤلفه را نشان می دهد.

مدلهای دیگری که پیشنهاد شده اند مدل ضرب شونده معکوس است:

$$G(s) = [I + \Delta_R(s)]^{-1}G_0(s) \quad (۳-۲۱)$$

و مدلی براساس توصیف ماتریسی - کسری:

$$G(s) = N(s)D^{-1}(s) \quad (۳-۲۲)$$

که

$$N(s) = N_0(s) + \Delta_N(s) \quad , \quad D(s) = D_0(s) + \Delta_D(s) \quad (۳-۲۳)$$

و $N(s)$ و $D(s)$ توابع تبدیل پایدار هستند.

یک مزیت عمده استفاده از نرمهای اپراتوری (در فصل بعد بطور کامل معرفی خواهند شد) در توصیف عدم قطعیت مدل، این است که وجود مدل تابع تبدیل واقعی ضروری نیست. بعنوان مثال فرض کنید ورودی $u(t)$ با $\|u\|_2 = 1$ را به دستگاه اعمال می کنیم و خروجی $y(t)$ خواهد بود. حال اگر ورودی مشابهی به مدل نامی دستگاه با تابع تبدیل G_0 اعمال کرده و خروجی $y_0(t)$ را داشته باشیم، آنگاه از (۳-۱۶) می توان نتیجه گرفت که

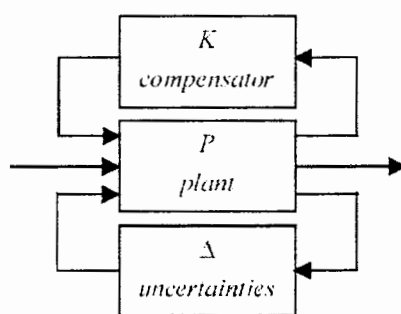
$$\|y - y_0\|_2 \leq \|\Delta_a\|_\infty$$

۳-۳-۲ عدم قطعیت با ساختار

در عدم قطعیت بدون ساختار اکثر عناصر ماتریس تابع تبدیل دارای عدم قطعیت می باشند، درحالی که در عدم قطعیت با ساختار فقط عناصر روی قطر اصلی ماتریس عدم قطعیت داشته و تغییرات بقیه عناصر قابل صرفنظر است.

عدم قطعیت با ساختار بوسیله اختلاف پارامتری در دینامیک دستگاه نمایش داده می شود. برای مثال عدم قطعیت در پارامترهای فضای حالت (A,B,C,D) ، عدم قطعیت در قطبها و یا صفرهای تابع تبدیل و عدم قطعیت در بهره/ فاز حلقه.

دستگاه P را با سه مجموعه ورودی و سه مجموعه خروجی به صورت نشان داده شده در شکل ۳-۵ در نظر می گیریم. اولین مجموعه از ورودیها شامل سیگنالهای کنترل است و دومین مجموعه شامل سیگنالهای ورودی خارجی مثل اغتشاشات و نویز اندازه گیری. اولین مجموعه از خروجیها شامل تمام سیگنالهای اندازه گیری شده است که در جبران ساز فیدبکی K استفاده می شوند، در حالیکه دومین مجموعه شامل دیگر خروجیهایی است که رفتار مطلوب مشخص دارند مثل سیگنالهای خطا.



شکل ۳-۵- نمایش استاندارد دستگاه به همراه عدم قطعیت و با جبران ساز فیدبکی

در هر بخشی از سیستم که عدم قطعیت وجود داشته باشد می توان نمایش عدم قطعیت را با یک بلوک Δ حول پارامتر قطعی در نظر گرفت. به این ترتیب هر یک از چنین بلوکهایی یک ورودی دارند (که می تواند یک اسکالریا یک بردار باشد) و یک خروجی. با کنار هم گذاردن تمام ورودیهای

بلوکهای Δ ، دسته سوم خروجیهای P را تشکیل می دهیم و با کنار هم گذاشتن تمام خروجیهای بلوکهای Δ ، دسته سوم ورودیهای P را.

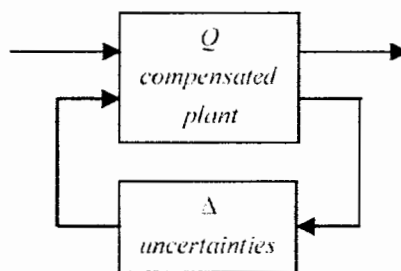
در این روش تمام بلوکهای Δ بیرون از دستگاه در نظر گرفته می شوند. این Δ یک ساختار خیلی خاص دارد: قطری - بلوکی است و بلوکهای روی قطر، Δ های کوچکی هستند که در واقع از داخل دستگاه بیرون کشیده شده اند. به این ترتیب اگر n بلوک داشته باشیم داریم:

$$\Delta(s) = \text{diag}\{\Delta_1(s), \dots, \Delta_n(s)\} \quad (3-24)$$

هر Δ_i می تواند یک اسکالر یا یک ماتریس باشد.

در فرمول بندی شرایط استاندارد در طراحی رباست، عدم قطعیتها را به صورت نرمالیزه در نظر می گیریم؛ یعنی $\|\Delta_i\|_{\infty} \leq 1$.

اگر جبران کننده K معلوم باشد می توان با آن و با بخش قطعی دستگاه، P ، سیستم Q را به صورت نشان داده شده در شکل 3-6 تشکیل داد. البته عدم قطعیت مرتبط با جبران کننده را می توان همانند عدم قطعیت دستگاه مدل کرد. در این صورت چند بلوک دیگر به Δ اضافه می شود. به این ترتیب در صورت وجود عدم قطعیت در K نیز می توان نمایش سیستم را به شکل 3-6 داشت.



شکل 3-6- نمایش استاندارد، با ترکیب دستگاه و جبران ساز فیدبکی و به همراه عدم قطعیت

نمایش عدم قطعیت نشان داده شده در شکل های 3-5 و 3-6 هر دو کلی و دقیق هستند و انواع گوناگونی از مدل های عدم قطعیت با ساختار را توصیف می کنند.

فصل چہارم

کنترل مقاوم μ

۴-۱ مقدمه

تحلیل و طراحی سیستمها و فرایندها از جمله مهمترین مسائل علم کنترل به شمار می رود. قدم اول در این مسأله مدل سازی می باشد که هدف آن یافتن مدل تجربی یا ریاضی مناسبی است که در بررسی ها و محاسبات جایگزین سیستم یا فرآیند واقعی شود. به دلایل مختلف از جمله طبیعت پیچیده و غیر خطی سیستم ها، عدم امکان استفاده از مدل های پیچیده در محاسبات و همچنین تغییر احتمالی مشخصات سیستم ها یا فرایندها، مدل های انتخاب شده هرگز به طور دقیق بر سیستم اصلی منطبق نیستند. بنابراین وجود عدم قطعیت در مدل سیستم ها امری بدیهی به نظر می رسد. با توجه به این حقیقت، در علم کنترل مبحثی بنام کنترل مقاوم مطرح می گردد. هدف کنترل مقاوم درحقیقت تحلیل و طراحی سیستم به گونه ای است که در دنیای واقعیت و به هنگام مواجه شدن با عدم قطعیت عملکرد مطلوب خود را حفظ نماید.

با توجه به روشها و نظریات مطرح شده در کنترل می توان روند پیشرفت علم کنترل را از لحاظ تاریخی به سه دوران تقسیم بندی کرد. دوران اول که در محدوده سالهای ۱۹۳۰ تا ۱۹۶۰ میلادی واقع شده است، به دوران کلاسیک مشهور می باشد. تکنیک های آنالیز این دوران عبارت بودند از نمودارهای Bode ، Nyquist و مکان ریشه ها. کنترل کننده های تقدم فاز، تأخیر فاز و PID از جمله کنترل کننده های متداول این دوران بودند. این روشها هنوز هم در دنیای صنعت کاربرد فراوانی دارند.

دوران دوم که بین سالهای ۱۹۶۰ تا ۱۹۸۰ میلادی بوده و به دوران کنترل مدرن معروف شده است به تکنیک های آنالیز و طراحی فضای حالت اختصاص دارد. روش های طراحی این دوران از جمله LQR بخاطر عدم توجه به مسأله عدم قطعیت در مدل سیستم ها در دنیای واقعیت با مشکلات متعددی روبرو هستند. دوران سوم کنترل که به دوران کنترل مقاوم مشهور می باشد از حدود سال های ۱۹۸۰ آغاز شد. روش های معرفی شده در این دوران با توجه به در نظر گرفتن مسأله عدم قطعیت به تدریج جای خود را در صنعت باز می کنند.

آنالیز و سنتز μ از جمله معروفترین روش های تحلیل و طراحی کنترل مقاوم می باشد. روشهای آنالیز و سنتز μ را با توجه به نحوه نگرش آنها به مسأله عدم قطعیت می توان یکی از قویترین روش های موجود در کنترل مقاوم به شمار آورد.

۴-۲ تاریخچه کنترل مقاوم μ

در سال ۱۹۸۲، Doyle به معرفی مقادیر تکین با ساختار پرداخت. این مقادیر ابزاری برای تحلیل و طراحی کنترل کننده مقاوم برای سیستمهای خطی می باشد و پایداری و عملکرد مقاوم را به صورت مستقیم و در حضور عدم قطعیتهای سیستم بررسی می نماید. کاربرد μ برای حالتی مطرح شد که عدم قطعیت در یک ماتریس و به صورت قطری - بلوکی مدل شود.

در همان سالی که Doyle به معرفی μ پرداخت، حاشیه های پایداری سیستم چند متغیره با فیدبک و با فرض عدم قطعیت قطری بررسی و در سال بعد شروط عدم قطعیت برای پایداری مقاوم تشریح شد. اما اولین سنتز μ به منظور طراحی کنترل کننده در سال ۱۹۸۵ و با استفاده از روش تکرار $D-K$ توسط Doyle صورت پذیرفت. در همان سال با استفاده از روشهای محاسبه مقادیر ویژه و تکین، شروط لازم و کافی برای پایداری سیستمهای دارای عدم قطعیت با ساختار بیان گردید. در این مقالات عدم قطعیت ساختار کامل در نظر گرفته شده است اما برای بررسی شروط، حالات ضعیف تری اعمال گردیده است. در سال ۱۹۸۶ چهار چوب هندسی برای توصیف و حل مسأله μ ارائه شد. در این روش فهم مسأله μ محسوستر گردید و محدوده مقدار μ با اشکال هندسی ترسیم شد.

در همان سال روشی کارآمد برای محاسبه μ به همراه گسترش خواص و مفاهیم آن ارائه شد. محاسبه دقیق حاشیه های پایداری سیستم چند متغیره در سال ۱۹۸۸ تشریح شد و همزمان روش محاسبه μ در حالتی که بلوکهای اسکالر تکراری باشند ارائه گردید. پس از آن روش قدرتمندی برای محاسبه μ ارائه و گام مؤثری در بدست آوردن مقادیر دقیق آن برداشته شد.

عدم قطعیت ممکن است از بلوکهای حقیقی یا مختلط و یا مخلوطی از آن دو تشکیل شده باشد. در سال ۱۹۹۰ روشی برای محاسبه μ در حضور عدم قطعیت‌های حقیقی و مختلط بیان شد.

اولین نرم افزاری که مباحث تحلیل و طراحی μ را برای بررسی سیستمها بکار گرفت در سال ۱۹۹۱ توسط چند تن از معروفترین محققان این رشته ارائه گردید. این نرم افزار جعبه ابزار μ -tools است که تحت MATLAB اجرا می شود. در همان سال تحلیل مقاوم درحضور عدم قطعیت‌های غیر قطری و پارامتری بیان شد. تحقیقی که μ را از طریق تعداد کاهش یافته ای از متغیرهای بهینه بدست می آورد در سال ۱۹۹۲ ارائه شد. یک مقاله آموزشی طولانی در سال ۱۹۹۳ منتشر شد که در آن مروری بر همه مباحث مقادیر تکین با ساختار با تأکید بر چشم انداز ریاضی آن به صورت دسته بندی شده ارائه گردید. در این مقاله مباحث محدودیت‌های محاسبه μ ، روشهای آنالیز مقاوم بودن μ برای سیستمهای خطی، خواص ریاست نس سیستمهای دارای فیدبک خطی، تستهای پایداری و عملکرد مقاوم، روشهای مدلسازی سیستمها برای آنالیز و سنتز ریاست، مسأله طراحی μ ، کاربرد LFT و مقایسه روشهای حوزه فرکانسی و فضای حالت بیان گردیده است. در سال ۱۹۹۴ ثابت شد که همیشه محاسبه دقیق μ امکان پذیر نیست و در بعضی از نقاط تحلیل ممکن است هرگز به مقدار اصلی μ دسترسی پیدا نکنیم، لذا تلاشها بر روی محاسبه حدود بالا و پایین آن متمرکز شد. در سال ۱۹۹۵ حدود μ مخلوط محاسبه و در سال بعد خواص آن تشریح گردید. ارائه ویژگیها و طریقه محاسبه μ در حالت ساختار کامل گامی بلند در رفع محافظه کاری در روش μ بود که در سال ۱۹۹۶ در مقاله ای از Chen به چاپ رسید.

۳-۴ مبانی ریاضی کنترل مقاوم

۱-۳-۴ معرفی نرم

در یک سیستم تک ورودی - تک خروجی عملکرد حلقه فیدبکی توسط تغییرات بهره حلقه با فرکانس، رد اغتشاش، انتقال نویز و حساسیتهای مختلف نسبت به تغییرات پارامترهایی که به بهره وابسته است تعیین می گردد. اگر تابع تبدیل حلقه باز (نسبت بازگشتی^۱) در سمت راست صفحه S هیچ قطبی نداشته باشد، آنگاه حاشیه های پایداری و پاسخ گذرای حلقه بسته نیز بوسیله مشخصات بهره حلقه باز تعیین می گردد. اگر بکوشیم که این ارتباط را به سیستم چند متغیره بسط دهیم مسأله اصلی این است که یک ماتریس، یک بهره تنها ندارد. به همین دلیل ناگزیر از تعریف نرم هستیم. نرم معیاری است برای سنجش اندازه که برای بردار و ماتریس تعریف می شود.

۱-۱-۳-۴ نرم بردار

نرم بردار x در C^n ، تابع $f: C^n \rightarrow R$ ، خواص زیر را دارد:

$$f(x) \geq 0 \quad (1-4)$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad (2-4)$$

$$f(x+y) \leq f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in C^n \quad (3-4)$$

$$f(ax) = |a|f(x) \quad \forall a \in R \quad (4-4)$$

holder یا نرم P بردار:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \quad (5-4)$$

نرم ۱:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad (6-4)$$

نرم ۲:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} = \sqrt{x^* x} \quad (7-4)$$

¹ return ratio

نرم بینهایت:

$$\|x\|_{\infty} = \max_i |x_i| \quad (۸-۴)$$

۲-۱-۳-۴ نرم ماتریس

نرم ماتریس نیز باید در روابط (۱-۴) تا (۴-۴) صدق کند. علاوه بر سه نرم ۱، ۲ و بینهایت، نرم فروبنیوسی^۱ نیز کاربرد دارد:

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} \quad \forall A \in C^{m \times n} \quad (۹-۴)$$

holder یا نرم P ماتریس:

$$\|A\|_p = \sup \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} \quad \forall A \in C^{m \times n}, x \neq 0, \forall x \in C^n \quad (۱۰-۴)$$

نرم P ماتریس را نرم القایی^۲ نیز گویند، زیرا نرم P روی بردارها القا می شود. همچنین می توان آنرا بیشترین بهره ماتریس A تلقی کرد. محاسبه نرم P ماتریس عملاً امکان پذیر نیست، زیرا باید آن را برای همه بردارهای ورودی $x \in C^n$ محاسبه نمود. تنها برای مقادیر $P = 1, 2, \infty$ روش دقیق محاسبه نرم P وجود دارد و برای بقیه مقادیر روش دقیقی ارائه نگردیده است. اگر $A = [a_{ij}] \in C^{m \times n}$ باشد عبارات زیر محاسبه دقیق این سه نرم را نشان می دهند.

نرم ۱: ماکزیمم جمع ستونی

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^m |a_{ij}| \quad (۱۱-۴)$$

نرم ۲: ماکزیمم مقدار تکین

$$\|A\|_2 = \bar{\sigma}(A) \quad (۱۲-۴)$$

نرم بینهایت: ماکزیمم جمع سطری

$$\|A\|_{\infty} = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (۱۳-۴)$$

^۱ Frobenius norm

^۲ induced norm

۳-۱-۳-۴ نرم تابع تبدیل

اگر $G(j\omega) \in C^{m \times n}$ ماتریس تابع تبدیل فضای $L_2(R)$ (فضای توابع اسکالر زمانی که مجذور آنها قابل اندازه گیری است) و $g(t) \in R^{m \times n}$ ماتریس پاسخ ضربه آن باشد، نرم 2 برای آن به صورت زیر مشخص می گردد:

$$\|G\|_2^2 = \langle G, G \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega = \langle g, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt \quad (14-4)$$

به این معنی که نرم 2 تابع تبدیل برابر جذر مجموع مربعات عناصر ماتریس پاسخ ضربه می باشد. یک توصیف مهم برای نرم 2 تابع تبدیل این است که اگر $y = Gu$ و u ، بردار ورودی، فرآیند نویز سفیدی با کواریانس $E(uu^T) = I$ باشد، آنگاه RMS توان خروجی (کواریانس حالت ماندگار خروجی) همان نرم 2 تابع تبدیل است: $E(yy^T) = \|G\|_2^2$.

بنابراین در تمام طراحی های کنترل مدرن با نرم مربعی^۱ مانند LQR و LQG و فیلتر کالمن - بوسی نرم 2 ماتریس تابع تبدیل کمینه می شود.

در تئوری کنترل فقط فضای $L_2(R)$ برای سیگنالهای حوزه زمانی مورد استفاده قرار می گیرد، زیرا مجذور نرم 2 یک سیگنال را می توان بعنوان انرژی آن سیگنال تصور نمود و نرم 2 دارای رابطه واضحی با RMS سیگنالها می باشد.

نرم بینهایت را نیز می توان بعنوان بهره ماکزیمم ماتریس تابع تبدیل بر روی محور $j\omega$ در نظر گرفت، یعنی برابر ماکزیمم بهره القایی برای سیگنالهایی که در $L_2(R)$ هستند:

$$\|G\|_{\infty} = \text{ess sup}_{\omega \in R} \bar{\sigma}[G(j\omega)] \quad (15-4)$$

یا

$$\|G\|_{\infty} = \sup_{u \neq 0} \frac{\|Gu\|_2}{\|u\|_2} \quad u \in L_2(R, R^{n \times 1}) \quad (16-4)$$

در این روابط sup کران بالا را نشان می دهد و ess از نقاط مشتق ناپذیر و غیر معمولی صرفنظر می کند.

¹ quadratic norm

(توجه: نرم ۲ سیگنال $u(t)$ در حوزه زمان از این رابطه بدست می آید: $\|u\|_2 = [\int_{-\infty}^{\infty} (u(t))^2 dt]^{1/2}$ ،

همچنین اگر $u(t)$ یک بردار باشد داریم: $\|u\|_2 = [\int_{-\infty}^{\infty} u^T(t)u(t)dt]^{1/2}$)

رابطه (۴-۱۵) $\sigma[G(j\omega)]$ ، را بر روی یک رشته منفصل از فرکانسها حساب کرده و ماکزیمم مقدار آن را می دهد. این روش مقدار تقریبی نرم بینهایت را بر می گرداند.

۴-۳-۲ مقادیر تکین (بهره های اساسی)^۱

همانگونه که قبلاً ذکر گردید نرم القایی ماتریس G به این صورت تعریف می شود:

$$\|G\|_p = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Gx\|_p}{\|x\|_p} \quad (۴-۱۷)$$

حال اگر نرم اقلیدسی بردار x را بکارگیریم؛

$$\|x\| = \sqrt{x^H x} \quad , \quad x^H = x^{*T} \quad (۴-۱۸)$$

آنگاه نرم القایی ماتریس، نرم هیلبرت^۲ یا نرم طیفی^۳ خواهد بود:

$$\|G\|_S = \bar{\sigma} \quad (۴-۱۹)$$

که $\bar{\sigma}^2$ ماکزیمم مقدار ویژه $G^H G$ یا (GG^H) است.

اگر G دارای m سطرو l ستون باشد و $m \geq l$ ، آنگاه ریشه های مثبت مقادیر ویژه^۴ ماتریس $G^H G$

مقادیر تکین ماتریس G نامیده می شوند و اگر $m \leq l$ ، آنگاه ریشه های مثبت مقادیر ویژه GG^H

مقادیر تکین ماتریس G هستند. به عبارتی مقادیر تکین (یا بهره های اساسی) ماتریس $G_{m \times l}$ با رتبه r

را با σ_i نشان داده و داریم:

$$\sigma_i(G) = \begin{cases} \sqrt{\lambda_i(G^H G)} & \text{if } m \geq l \\ \sqrt{\lambda_i(GG^H)} & \text{if } m \leq l \end{cases} \quad (۴-۲۰)$$

و به این صورت تنظیم می کنیم:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_p \quad , \quad p = \min[m, l] \quad (۴-۲۱)$$

¹ principal gains

² Hilbert norm

³ spectral norm

⁴ eigenvalues

و اگر $r < p$ آنگاه به تعداد $p-r$ مقدار تکین صفر داریم یعنی

$$\sigma_{r+1} = \sigma_{r+2} = \dots = \sigma_p = 0 \quad \text{if } r < p \quad (22-4)$$

لازم به ذکر است که بزرگترین و کوچکترین مقدار تکین G را با علامتهای زیر نمایش می دهند:

$$\begin{cases} \overline{\sigma}(G) = \sigma_1 \\ \underline{\sigma}(G) = \sigma_p \end{cases} \quad (23-4)$$

۴-۳-۳ تبدیل خطی - کسری^۱ (LFT)

ماتریس تابع تبدیل $P(s)$ با بردار ورودی $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ و بردار خروجی $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ در نظر گرفته می

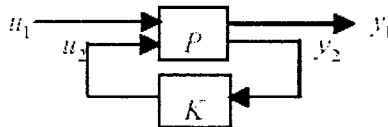
شود:

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \quad (24-4)$$

وقتی ماتریس تابع تبدیل K از y_2 به u_2 متصل شود، شکل ۴-۱، روابط زیر بدست می آید:

$$\begin{cases} y_1 = P_{11}u_1 + P_{12}u_2 \\ y_2 = P_{21}u_1 + P_{22}u_2 \end{cases}, \quad u_2 = Ky_2 \quad (25-4)$$

$$\begin{aligned} y_1 &= [P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21}]u_1 \\ &= F_l(P, K)u_1 \end{aligned} \quad (26-4)$$



شکل ۴-۱- تبدیل خطی - کسری پایینی

به $F_l(P, K)$ تبدیل خطی - کسری پایینی^۲ گویند.

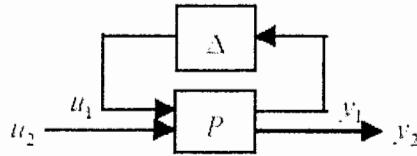
اگر y_1 توسط ماتریس تبدیل Δ به u_1 متصل شود ماتریس تبدیل از u_2 به y_2 به این صورت خواهد

بود:

$$\begin{aligned} y_2 &= [P_{22} + P_{21}\Delta(I - P_{11}\Delta)^{-1}P_{12}]u_2 \\ &= F_u(P, \Delta) \end{aligned} \quad (27-4)$$

¹ Linear Fractional Transformation

² Lower LFT



شکل ۴-۲- تبدیل خطی - کسری بالایی

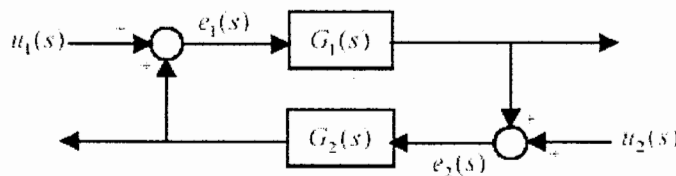
به $F_u(P, \Delta)$ تبدیل خطی - کسری بالایی^۱ گویند.

تئوری طراحی براساس μ, LQG, H_∞, H_2 عموماً براساس LFT نمایش داده می شود. علاوه بر این LFT کاربردهای مفیدی در تحلیل رباست نس دارد.

۴-۳-۴ تست پایداری نایکوئیست MIMO

در سیستم فیدبکی نشان داده شده در شکل زیر ماتریس تابع تبدیل از ورودیهای u_1 و u_2 به خروجی اتصالات جمع شونده e_1 و e_2 به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I - G_2 G_1)^{-1} & G_2 (I - G_1 G_2)^{-1} \\ G_1 (I - G_2 G_1)^{-1} & (I - G_1 G_2)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (۲۸-۴)$$



شکل ۴-۳- سیستم فیدبکی مورد استفاده در تحقق پایداری

اگر G_1 و G_2 تحقق فضای حالت زیر را داشته باشند،

$$G_1 = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix}, \quad G_2 = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \quad (۲۹-۴)$$

ماتریس تحقق فضای حالت سیستم حلقه بسته با استفاده از فرمول LFT به این شکل به دست می آید:

$$F_u = \begin{bmatrix} A_1 + B_1 D_2 E C_1 & B_1 F C_2 \\ B_2 E C_1 & A_2 + B_2 D_1 F C_2 \end{bmatrix} \quad (۳۰-۴)$$

که

^۱ Upper LFT

$$E = (I - D_1 D_2)^{-1} \quad , \quad F = (I - D_2 D_1)^{-1} \quad (31-4)$$

درمیان ماتریس تفاضلی $(I - G_1(s)G_2(s))$ بر اساس قطبهای حلقه باز و حلقه بسته تشریح می گردد و داریم:

$$\det[I - G_1(s)G_2(s)] = k \frac{\det(sI - F_u)}{\det(sI - A_1) \det(sI - A_2)} \quad (32-4)$$

که k یک ثابت حقیقی است.

صفرهای تابع $\det[I - G_1(s)G_2(s)]$ در محل قطبهای سیستم حلقه بسته و قطبهای این تابع در محل قطبهای سیستم حلقه باز $G_1 G_2$ می باشد.

تست پایداری نایکوئیست MIMO بوسیله این درمیان و بر اساس حلقه فیدبک SISO گسترش می یابد.

قضیه (4-1) ، تست پایداری نایکوئیست MIMO : فرض کنید s در جهت عقربه های ساعت بر روی کانتور نایکوئیست در صفحه مختلط حرکت کند. برای مقادیر مختلف s مقادیر $\det[I - G_1(s)G_2(s)]$ ترسیم می شود. با توجه به اصل آرگومان و بسط تست نایکوئیست SISO و شکل 4-3 تساوی زیر برقرار خواهد بود:

+ تعداد قطبهای ناپایدار سیستم حلقه باز = تعداد قطبهای ناپایدار سیستم حلقه بسته

تعداد گردش در جهت عقربه ساعت حول مبدأ در نگاشت $\det[I - G_1(s)G_2(s)]$

این قضیه مبنای تست پایداری مقاوم در سیستمهای MIMO توسط مقادیر تکین با ساختار است.

4-3-5 مبنای اصلی روشهای تحلیل پایداری مقاوم

قضیه (4-2) ، قضیه بهره کوچک¹ : این قضیه مبنای اصلی روشهای تحلیل پایداری مقاوم می باشد. در شکل 4-3 فرض کنید $G_1, G_2 \in H_\infty$ که G_1 و G_2 توابع انتقال پایدار و با بهره محدود باشند، در این صورت اگر $\|G_1 G_2\|_\infty < 1$ چون داریم: $\|G_1 G_2\|_\infty \leq \|G_1\|_\infty \|G_2\|_\infty$ ، در نتیجه شرط کافی برای پایداری سیستم حلقه بسته به صورت $\|G_1\|_\infty \|G_2\|_\infty < 1$ است.

¹ small gain theorem

H_∞ فضای توابعی از $C^{m \times n} \rightarrow C$ است که پایدار و با بهره کراندار می باشند. در اکثر اوقات فرض بر این است که G_1 سیستم اصلی و G_2 مجموعه عدم قطعیتها می باشد. اگر عدم قطعیتها با ساختار باشند، می توان نشان داد که قضیه بهره کوچک به شرط لازم و کافی تبدیل خواهد شد و می توان از آن بعنوان ابزاری مناسب در تحلیل پایداری سیستمهای دارای عدم قطعیت استفاده کرد. در حالتی که عدم قطعیت فقط از لحاظ فاز محدود باشد، قضیه مشابهی به نام قضیه فاز کوچک¹ ارائه شده است.

۴-۳-۶ مقایسه اثر عدم قطعیت و اغتشاش

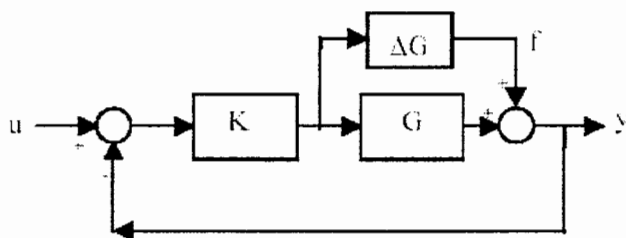
هدف این قسمت بررسی این مسأله است که آیا می توان در سیستمهای دارای فیدبک اثر عدم قطعیتها را با اغتشاش در خروجی مدل نمود؟

با حذف ورودی نویز اندازه گیری از الگوی اصلی سیستم کنترل ، شکل ۳-۳ ، داریم:

$$\begin{cases} y = Tu + Sd \\ G^* = G + \Delta G \end{cases} \quad (۳۳-۴)$$

ΔG کلیه عدم قطعیتها روی مدل است.

در این حالت ، مدل سیستم به شکل زیر تبدیل میشود:



شکل ۴-۴- الگوی سیستم کنترل فیدبکی، بدون نویز

که برای آن می توان نوشت:

$$y = Tu + Sf \quad (۳۴-۴)$$

با فرض $f=d$ دو رابطه (۳۳-۴) و (۳۴-۴) برابر خواهند شد. تنها تفاوت اساسی موجود این است که در رابطه (۳۳-۴)، d یک سیگنال خارجی است و ربطی به وضعیت داخلی سیستم ندارد، در حالیکه در (۳۴-۴)، f به صورت زیر به وضعیت داخلی سیستم مرتبط است:

¹ small phase theorem

$$f = \Delta G K e = \Delta G K [I + (G + \Delta G) K]^{-1} u \quad (35-4)$$

بنابراین در مدل کردن عدم قطعیتها با اغتشاش دچار خطا خواهیم شد مگر آنکه عدم قطعیتها کوچک و بی اهمیت باشند. حتی در این حالت هم نمی توان نتیجه دقیقی ارائه نمود، زیرا اغتشاشات محدود باعث ناپایداری سیستم نخواهد شد در حالیکه عدم قطعیتها ممکن است سیستم را ناپایدار کند.

۴-۳-۷ قضایای پایداری مقاوم

کاهش مقادیر تکین ماتریس S در حقیقت توانایی حذف اغتشاش و مقدار خطای حالت ماندگار و کاهش مقادیر تکین ماتریس T چگونگی ردیابی سیگنال مرجع و دفع نویز سنسور را در سیستم معرفی می کند. کاهش مقادیر تکین ماتریس R ($R(s) = K(s)S(s)$) نیز محدوده دامنه و پهنای باند سیگنال کنترلی را معرفی می کند.

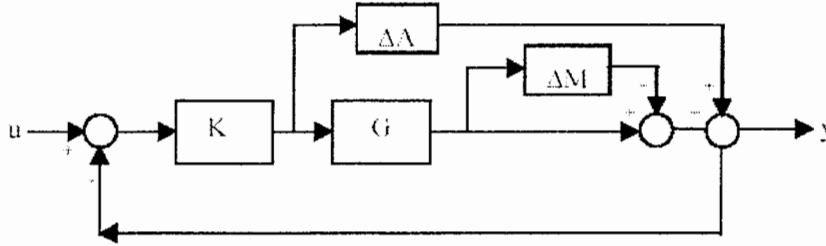
قضیه (۳-۴) ، پایداری مقاوم با عدم قطعیت ضرب شونده : فرض بر این است که سیستم شکل زیر، شکل ۴-۵ ، وقتی ΔA و ΔM هر دو صفر هستند پایدار است. اکنون اگر ΔA صفر باشد اندازه کوچکترین ΔM پایدار که باعث ناپایداری سیستم حلقه بسته می شود به این صورت به دست می آید:

$$\bar{\sigma}(\Delta M(j\omega)) = \frac{1}{\sigma(T(j\omega))} \quad (36-4)$$

هرچه $\bar{\sigma}(T(j\omega))$ کوچکتر باشد حداکثر عدم قطعیت مجاز ضرب شونده در خروجی بیشتر و حاشیه پایداری بزرگتر می شود.

قضیه (۴-۴) ، پایداری مقاوم با عدم قطعیت جمع شونده : فرض بر این است که سیستم شکل ۴-۵ وقتی ΔA و ΔM هر دو صفر هستند پایدار است. حال اگر ΔM صفر باشد اندازه کوچکترین ΔA پایدار که سیستم حلقه بسته را ناپایدار می کند برابر است با:

$$\bar{\sigma}(\Delta A(j\omega)) = \frac{1}{\sigma(R(j\omega))} \quad (37-4)$$



شکل ۴-۵- سیستم فیدبکی با عدم قطعیت‌های ضرب شونده و جمع شونده

۴-۳-۸ یافتن حاشیه های بهره و فاز MIMO از طریق ماتریسهای ضرب شونده D

D و Δ را ماتریسهای قطری به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n) \quad d_i > 0, d_i \in \mathbb{R} \quad , \quad \Delta = \text{diag}(\Delta_1, \dots, \Delta_n) \quad (4-38)$$

و چون ماتریس Δ قطری است داریم:

$$D\Delta D^{-1} = \Delta D D^{-1} = \Delta \quad (4-39)$$

لذا جایگزین کردن DMD^{-1} به جای M و $D^{-1}\Delta D$ به جای Δ هیچ تأثیری در پایداری سیستم

نخواهد گذاشت (شکل ۴-۶) و بنا بر قضیه بهره کوچک شرط کافی پایداری سیستم به صورت

$$\overline{\sigma}(\Delta) \overline{\sigma}(DMD^{-1}) < 1 \quad \omega \in \mathbb{R} \quad (4-40)$$

خواهد بود. در نتیجه

$$\frac{1}{r(\omega)} = \inf_D \overline{\sigma}(DMD^{-1}) \quad , \quad r_{\min} = \inf r(\omega) \quad (4-41)$$

با جستجو روی D برای حداقل کردن $\overline{\sigma}(DMD^{-1})$ در هر فرکانس، می توان نشان داد که $r(\omega)$ را با

توجه به مقدار اولیه ماتریس D که در ابتدا برابر I می باشد می توان بهبود داد. با تکرار عمل جستجو

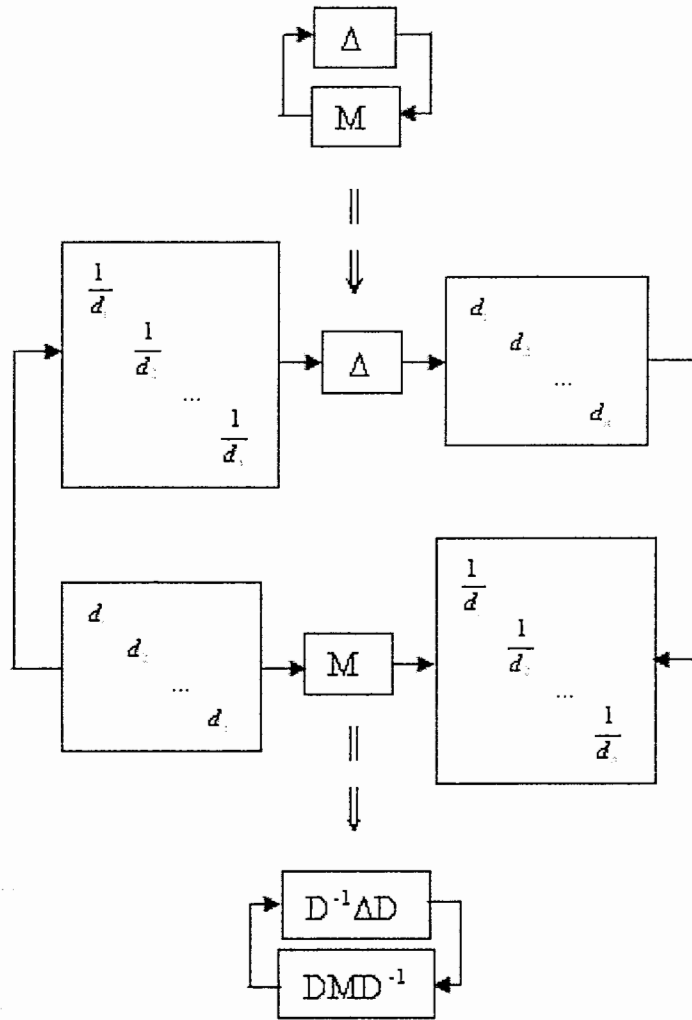
و به دست آوردن ماتریس D مناسب می توان مقادیر بزرگتری را برای $r(\omega)$ پیدا کرد. چگونگی پیدا

کردن ماتریس D مناسب با فرض ثابت بودن K بخشی از روش تکرار $D-K$ در طراحی کنترل

کننده برای سیستم از طریق مقادیر تکین با ساختار μ می باشد و بخش دیگر آن که طراحی کنترل

کننده با فرض ثابت بودن ماتریس D است، از طریق طراحی به کمک تئوری H_∞ صورت می پذیرد.

به همین دلیل توضیح این تئوری به طور مختصر در پیوست ج آمده است.



شکل ۴-۶- یافتن حاشیه های بهره و فاز از طریق ماتریسهای ضرب شونده

۴-۴ تحلیل و طراحی با مقادیر تکین با ساختار μ

۴-۴-۱ ترکیب کلی مسائل تحلیل و طراحی

در ابتدا باید در نظر داشت که چون معمولاً عدم قطعیتها با نرم محدود^۱ در نظر گرفته می شوند می توان نوشت:

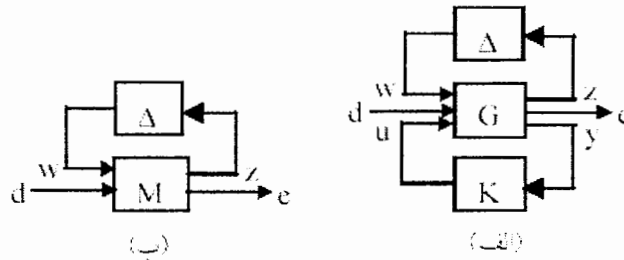
$$\bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) \leq W(j\omega), \forall \omega \quad (4-42)$$

که W حد بالای عدم قطعیت را تعیین می کند و با استفاده از آن می توان عدم قطعیت Δ را به عدم قطعیت نرمالیزه Δ^* تبدیل نمود به طوری که

^۱ bounded norm

$$\bar{\sigma}(\Delta^*(j\omega)) \leq 1, \forall \omega \quad (43-4)$$

شکل زیر ترکیب کلی مسائل تحلیل و طراحی را به طور واضح نشان می دهد:



شکل 4-7- ترکیب مسائل تحلیل و طراحی؛ (الف): تحلیل ، (ب): طراحی

در شکل فوق G ماتریس تابع تبدیل مدل نامی سیستم است، K ماتریس تابع تبدیل کنترل کننده سیستم و Δ بلوک عدم قطعیت. u ورودیهای کنترل، y متغیرهای اندازه گیری شده، d ورودیهای خارجی و اغتشاشات و w و z ورودیها و خروجیهای نظیر عدم قطعیتها هستند و e سیگنال خطایی که باید کوچک نگه داشته شود. در مسائل آنالیز معمولاً کنترل کننده و سیستم را در هم ادغام نموده و به صورت یک بلوک M در نظر می گیرند، در نتیجه شکل تحلیل به شکل طراحی تبدیل خواهد شد. تعریف (4-1) ، عدم قطعیت مقدار مختلط با نرم محدود : عدم قطعیت مقدار مختلط با نرم محدود و بی ساختار Δ_C با ابعاد $p \times p$ عبارتست از مجموعه ای از توابع تبدیل $\Delta(s): C \rightarrow C^{p \times p}$ که به صورت زیر می باشد:

$$\Delta_C = \{ \Delta(s) \text{ satable} \mid \bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) \leq W(j\omega), \omega \in (-\infty, +\infty) \} \quad (44-4)$$

همچنین مجموعه عدم قطعیتهای نرمالیزه به صورت زیر نمایش داده می شود:

$$B\Delta_C = \{ \Delta(s) \in \Delta_C \mid \bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) \leq 1, \omega \in (-\infty, +\infty) \} \quad (45-4)$$

از جمله کاربردهای این نوع عدم قطعیت می توان به مدلسازی دینامیکهای مدل نشده سیستم اشاره کرد.

تعریف (4-2) ، عدم قطعیت مقدار حقیقی با نرم محدود : عدم قطعیت مقدار حقیقی با نرم محدود Δ_r با ابعاد $p \times p$ به صورت زیر قابل تعریف است:

$$\Delta_r = \{ \Delta \mid \Delta \in \text{diag}\{\delta_i\}; \delta_i \in [\delta_{iu}, \delta_{iu}], i=1,2,\dots,p \} \quad (46-4)$$

که δ_{ii} و δ_{iu} اعداد حقیقی و محدود در R هستند.

مجموعه فوق به صورت زیر نرمالیزه می شود:

$$B\Delta_r = \{\Delta \mid \Delta \in \text{diag}\{\delta_i\}; \delta_i \in [-1,1], i=1,2,\dots,p\} \quad (47-4)$$

عدم قطعیت حقیقی با نرم محدود در نمایش عدم قطعیت‌های فیزیکی نظیر تغییر پارامترهای مدل کاربرد دارد.

تعریف (4-3) ، عدم قطعیت مخلوط¹ با نرم محدود : برای اینکه یک حالت کلی در نظر گرفته شود فرض می کنیم که Δ ، هم از بلوکهای ماتریسی کامل² و هم از بلوکهای با تکرار اسکالرها³ تشکیل شده است. بنابراین می توان نوشت:

$$\bar{\Delta} = \text{diag}\{\delta_1 I_{r_1}, \dots, \delta_S I_{r_S}, \Delta_{S+1}, \dots, \Delta_{S+F}\} \quad (48-4)$$

که در آن

$$\begin{cases} \delta_i \in C, 1 \leq i \leq S \\ \Delta_{S+j} \in C^{m_j \times m_j}, 1 \leq j \leq F \end{cases} \quad (49-4)$$

از آن جا که r_i و m_j به ترتیب نمایانگر ابعاد بلوکهای اسکالر i ام و بلوکهای کامل j ام هستند می توان نوشت:

$$\sum_{i=1}^S r_i + \sum_{j=1}^F m_j = n \quad (50-4)$$

با توجه به تعریف فوق مجموعه Δ های نرمال به صورت زیر قابل تعریف می باشد:

$$B\bar{\Delta} = \{\Delta \in \bar{\Delta} \mid \sigma(\Delta) \leq 1\} \quad (51-4)$$

4-4-2 تعاریف پایداری و عملکرد مقاوم

پایداری نامی⁴ (NS) : به معنای پایدار بودن مدل نامی سیستم (بدون در نظر گرفتن عدم قطعیت) است. برای تحلیل پایداری نامی می توان از روشهایی مانند محاسبه قطبهای حلقه بسته، معیار

¹ mixed uncertainty

² full blocks

³ repeated scalar blocks

⁴ Nominal Stability

پایداری نایکوئیست SISO و MIMO و روش روت - هرویتز استفاده کرد و کافی است که قطبهای سیستم مورد نظر در سمت چپ محور موهومی باشد تا سیستم پایداری نامی داشته باشد.

پایداری مقاوم^۱ (RS): به معنای حفظ پایداری سیستم در حضور مجموعه ای از عدم قطعیتها، حول نقطه کار نامی می باشد. برای اطمینان از برقراری پایداری مقاوم روشهایی مانند محاسبه حاشیه بهره و فاز SISO و MIMO، نمودار مقادیر تکین و تحلیل μ مورد استفاده قرار می گیرد.

عملکرد نامی^۲ (NP): به معنای برقراری اهداف عملکردی سیستم حلقه بسته برای مدل نامی است. روشهای متداول تحلیل عملکرد نامی عبارتند از نمودار مقادیر تکین سیستم حلقه بسته، پاسخ پله و یا RMS پاسخهای زمانی به نویز سفید(معادل نرم دو ماتریس تابع تبدیل).

اهداف عملکردی معمولاً براساس نیاز طراحی و با توجه به سیستم فیزیکی تعیین می شوند. این اهداف با توجه به شکل مسأله طراحی (شکل ۴-۷-ب) به صورت محدود نگاه داشتن خطای e در ازای تغییرات مجاز ورودی d می باشد. بنابراین شرط عملکرد نامی را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\bar{\sigma}(M_{22}(j\omega)) \leq W_p(j\omega), \forall \omega \quad (۵۲-۴)$$

عملکرد مقاوم^۳ (RP): به معنای برقراری اهداف عملکردی سیستم حلقه بسته در حضور عدم قطعیتهایی است که مدل سیستم با آن مواجه می شود.

آنالیز μ از مناسبترین روشها برای اطمینان از برقراری عملکرد مقاوم می باشد. با توجه به رابطه فوق می توان نشان داد که شرط عملکرد مقاوم عبارت است از:

$$\bar{\sigma}(F_u(M, \Delta)) \leq W_p(j\omega), \forall \omega \quad (۵۳-۴)$$

۴-۳-۴ مقادیر تکین با ساختار μ

^۱ Robust Stability

^۲ Nominal Performance

^۳ Robust Performance

تعریف (۴-۴) ، مقادیر تکین با ساختار Δ این مقادیر با در نظر گرفتن ساختار Δ در تابع $\mu_\Delta(M)$ به

صورت زیر تعریف می شوند:

$$\mu_\Delta(M) = \begin{cases} 0 & \text{if } \det(I - M\Delta) \neq 0 \quad \forall \Delta \in B\bar{\Delta} \\ \{\inf_{\Delta \in B\bar{\Delta}} \bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) : \det(I - M\Delta) = 0\}^{-1} & \end{cases} \quad (54-4)$$

لازم به ذکر است که اولاً μ تابعی از M می باشد که به ساختار Δ ها در $B\bar{\Delta}$ بستگی دارد و

ثانیاً $\frac{1}{\mu(M)}$ اندازه کوچکترین ناپایدار کننده است که در شرط $\det(I - M\Delta) = 0$ صدق می کند.

۴-۳-۱ خواص μ

در روابط زیر \bar{D} مجموعه تمام ماتریسهایی است که حقیقی و مثبت بوده و دارای ساختاری کاملاً مشابه با ماتریس Δ هستند. همچنین \bar{U} مجموعه کلیه ماتریسهای یکانی قطری است که ساختاری مشابه با ماتریس Δ دارند بطوریکه

$$\bar{U} = \text{diag}\{U_1, U_2, \dots, U_n\}, \quad U_i \in C^{k_i \times k_i}, \quad U_i U_i^* = I_{k_i} \quad (55-4)$$

در این صورت می توان روابط زیر را ثابت نمود:

$$\mu(aM) = |a| \mu(M) \quad \forall a \in R \quad (56-4)$$

$$\mu(I) = 1 \quad (57-4)$$

$$\mu(AB) \leq \mu(A) \mu(B) \quad (58-4)$$

$$\mu(\Delta) = \bar{\sigma}(\Delta) \quad \forall \Delta \in \bar{\Delta} \quad (59-4)$$

$$U\Delta \in \bar{\Delta}, \quad \Delta U \in \bar{\Delta} \quad \forall U \in \bar{U}, \Delta \in \bar{\Delta} \quad (60-4)$$

$$D\Delta D^{-1} = \Delta \quad \forall D \in \bar{D}, \Delta \in \bar{\Delta} \quad (61-4)$$

$$\mu(MU) = \mu(UM) = \mu(M) \quad \forall U \in \bar{U} \quad (62-4)$$

$$\mu(DMD^{-1}) = \mu(M) \quad \forall D \in \bar{D} \quad (63-4)$$

$$\rho(M) \leq \mu(M) \leq \bar{\sigma}(M) \quad (64-4)$$

که ρ شعاع طیفی^۱ است و برابر است با اندازه بزرگترین مقدار ویژه؛

$$\rho(\cdot) = \max_i |\lambda_i(\cdot)| \quad (65-4)$$

$$\max_{U \in \bar{U}} \rho(UM) \leq \mu(M) \leq \inf_{D \in \bar{D}} \bar{\sigma}(DMD^{-1}) \quad (66-4)$$

این رابطه یک نامساوی مفید برای محاسبه μ است.

۴-۳-۲ محاسبه μ

اگرچه قضایای تحلیل μ (در بخشهای آتی) شروط لازم و کافی ریاست بودن را معرفی می کند ولی از آنجا که محاسبه μ توسط رابطه (۴-۵۴) به راحتی امکان پذیر نیست، نمی توان قضایای فوق را بکار گرفت. بنابراین باید بدنبال روشی برای محاسبه μ بود. در این زمینه مقالات زیادی ارائه گردیده است. در سال ۱۹۹۴ Braatz ثابت کرد که محاسبه دقیق μ در شرایط مختلف برای همه نقاط تحلیل غیر ممکن است. لذا تنها راه، پیدا کردن محدوده های بالا و پایین برای μ می باشد. در حالت کلی که عدم قطعیتها مختلط هستند رابطه (۴-۶۶) نامساوی ارزشمندی را در مورد محاسبه μ معرفی می کند. ثابت شده است که سمت چپ این نامساوی همواره تبدیل به تساوی می شود. بنابراین می توان μ را به صورت زیر یافت:

$$\mu = \max_{U \in \bar{U}} \rho(UM) \quad (67-4)$$

اکنون مشکل این است که حل این مسأله به دلیل وجود ماکزیممهای محلی همیشه ممکن نیست. بنابراین جستجوی محلی نمی تواند به دست آوردن μ را تضمین کند، فقط می تواند به یک باند پایین منجر شود. در مورد محاسبه حد بالای μ چنین مشکلی وجود ندارد. در این حالت می توان با استفاده از یک نگاشت مناسب تابع $\bar{\sigma}(DMD^{-1})$ را به شکل یک تابع محدب تبدیل نمود و بنابراین محاسبه حداقل مطلق برای آن امکان پذیر است. بر خلاف حد پایین، حد بالا فقط در بعضی حالتها بر μ منطبق است. تساوی فقط در حالتی رخ می دهد که $2S + F \leq 3$ باشد (S و F ابعاد بلوکهای عدم قطعیت؛ روابط (۴-۴۸) و (۴-۴۹)).

^۱ spectral radius

۴-۴-۴ تحلیل μ و قضایای آن

تحلیل μ معیاری غیر محافظه کارانه برای مقاوم بودن پایداری و عملکرد سیستمها در حضور عدم قطعیتها می باشد.

تعریف (۴-۵): در شکل مربوط به طراحی (شکل ۴-۷-ب) اگر ماتریس M به صورت زیر باشد

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \quad (۴-۶۸)$$

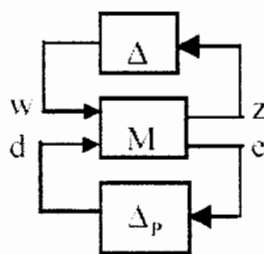
آنگاه می توان نوشت:

$$\begin{cases} z = M_{11}w + M_{12}d \\ e = M_{21}w + M_{22}d \end{cases}, \quad w = \Delta z \quad (۴-۶۹)$$

این دسته از معادلات را خوب وضع^۱ گویند، اگر برای هر ورودی w و d جوابهای یکتایی برای z و e وجود داشته باشد که در معادلات فوق صدق کند.

قضیه (۴-۵): تبدیل خطی - کسری $F_l(M, \Delta_p)$ برای $\forall \Delta_p \in B\bar{\Delta}_p$ خوب وضع است اگر و فقط اگر $\mu_p(M_{22}) < 1$.

شکل زیر حاصل افزودن بلوک عدم قطعیت بدون ساختار Δ_p به شکل مربوط طراحی (شکل ۴-۷-ب) می باشد.



شکل ۴-۸- نمایش سیستم با عدم قطعیت در مسأله طراحی به همراه عدم قطعیت افزوده

در این حالت می توان ماتریس عدم قطعیت Δ^* و مجموعه $B\bar{\Delta}^*$ را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\Delta^* = \text{diag}\{\Delta, \Delta_p\} \quad (۴-۷۰)$$

$$B\bar{\Delta}_p = \{\Delta_p \mid \bar{\sigma}(\Delta_p) \leq 1\} \quad (۴-۷۱)$$

^۱ well posed

$$B\bar{\Delta}^* = \left\{ \Delta^* \mid \Delta \in B\bar{\Delta}, \Delta_p \in B\bar{\Delta}_p \right\} \quad (۷۲-۴)$$

با توجه به تعریف μ شرط لازم و کافی برای پایداری مقاوم با قضایای زیر بیان می شود.

قضیه (۶-۴) ، قضیه حلقه اصلی^۱ :

$$\mu_*(M) < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_\Delta(M_{11}) < 1 \\ \max_{\Delta \in B\bar{\Delta}} \mu_p(F_u(M, \Delta)) < 1 \end{cases} \quad (۷۳-۴)$$

قضیه (۷-۴) ، قضیه پایداری مقاوم : سیستم مربوط به شکل طراحی (شکل ۴-۷-ب) برای

$$\forall \Delta \in B\bar{\Delta} \text{ پایدار است اگر و فقط اگر } \sup_{\omega} \mu_\Delta(M_{11}(j\omega)) < 1 .$$

علاوه بر شرط پایداری برقرار بودن شروط عملکردی نیز اهمیت دارد. هدف، ترکیب دو مسأله پایداری و عملکرد و تبدیل آن به یک مسأله است، بدین منظور آنالیز μ روشی را ارائه می کند تا بتوان مسائل فوق را به شکل یک مسأله واحد تبدیل نمود.

تعریف (۶-۴) ، عدم قطعیت مجازی عملکرد : شروط عملکردی که در شکل فوق به صورت

مجازی مدل شده اند با توجه به شکل مدل طراحی (شکل ۴-۷-ب) عبارتند از محدود ماندن

خروجیهای e در یک مجموعه معین به ازای مجموعه مشخصی از ورودیهای d و عدم قطعیتهای Δ .

همچنین فرض بر این است که عدم قطعیت عملکردی نیز توسط ماتریسهای وزنی مناسب نرمالیزه

شده است. این ماتریسهای وزنی در داخل ماتریس M قرار می گیرند. در این حالت شرط فوق به

عبارت $\mu_p(M_{22}) < 1$ خلاصه می شود و شرط عملکرد مقاوم نیز به این صورت می باشد:

$$\|F_u(M, \Delta^*)\|_\infty < 1$$

با توجه به قضیه بهره کوچک برقراری شرط فوق به این معنی است که می توان بدون نگرانی از

ناپایداری سیستم یک حلقه فیدبک فرضی بین e و d از طریق یک بلوک نرمال و بدن ساختار Δ_p

مطابق شکل فوق برقرار نمود. با توجه به اینکه Δ_p یک عدم قطعیت بدون ساختار می باشد این

مسأله یک شرط کافی برای برقراری شرط عملکردی است.

قضیه (۸-۴) ، پایداری و عملکرد مقاوم μ :

¹ main loop theorem

$$\mu_*(M) < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} F_u(M, \Delta) : \text{stable} \\ \Delta \in B_\Delta \\ \|F_u(M, \Delta)\|_\infty < 1 \end{cases} \quad (74-4)$$

در این قضیه تمام شرایط برای حالت نرمال در نظر گرفته شده است. این قضیه را می توان به صورت پارامتری (قضیه ۹-۴) نیز در نظر گرفت.

قضیه (۹-۴) ، پایداری و عملکرد مقاوم μ در حالت پارامتری : اگر $\beta > 0$ آنگاه

$$\mu_*(M) < \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_\Delta(M_{11}) < \beta \\ \mu_p(F_u(M, \Delta)) < \beta \\ \Delta \in B_\Delta \end{cases} \quad (75-4)$$

۵-۴-۴ طراحی با μ

با توجه به شکل مربوط به تحلیل (شکل ۷-۴-الف) و قضیه (۸-۴)، شرط لازم و کافی برای پایداری و عملکرد مقاوم μ به صورت زیر می باشد:

$$\sup_{\omega} \mu_{\Delta^*}(F_l(G, K)) < 1 \quad (76-4)$$

در مسأله ستز μ هدف، یافتن کنترل کننده K به صورت زیر می باشد:

$$K = \arg(\inf_{K \text{ stabilizing}} \sup_{\omega} \mu_{\Delta^*}(F_l(G, K))) \quad (77-4)$$

پس از حل این مسأله (در صورت وجود جواب) اگر شرط فوق، رابطه ۷۶-۴، برقرار باشد، آنگاه علاوه بر وجود پایداری و عملکرد مقاوم برای سیستم می توان محدوده مجاز عدم قطعیتها را نیز افزایش داد.

متأسفانه روش هایی همانند تکرار $K-\mu$ که برای طراحی با μ ارائه گردیده، به صورت نرم افزار ارائه نشده است و طراحی به روش تکرار $D-K$ توسط نرم افزار نیز تنها با جعبه ابزار μ -tools انجام می شود.

۱-۵-۴-۴ روش تکرار D-K

این روش با توجه به رابطه (۶۶-۴) مقدار μ را به طریق زیر محاسبه می نماید:

$$\mu_*(M) = \inf_{D \in D} \bar{\sigma}(DMD^{-1}) \quad (78-4)$$

با استفاده از این تقریب قابل قبول، مسأله طراحی μ را به شکل زیر می توان بیان نمود:

$$K = \arg(\inf_{K \text{ stabilizing}} \sup_{\omega} \inf_{D \in D} \bar{\sigma}(D.F_1(G, K).D^{-1})) \quad (79-4)$$

مسأله فوق با توجه به این که ترکیبی است از دو مسأله کمینه سازی بر روی متغیرهای D و K ، به راحتی قابل حل نمی باشد. این مسأله را می توان به صورت تکراری و با حل متوالی روی یکی از متغیرهای D و K و ثابت نگه داشتن متغیر دیگر حل نمود. این عمل تا حالتی ادامه می یابد که شرط (76-4) (در صورت وجود K) برقرار شود و یا اینکه عبارت فوق به حداقل خود رسیده و بهینه شود. در حالتی که D ثابت نگهداشته شود مسأله یافتن K در حقیقت یک مسأله طراحی H_∞ می باشد و می توان آن را توسط یکی از روش های طراحی H_∞ حل نمود و در حالتی که K ثابت نگهداشته شود، D محاسبه می گردد. بنابراین مسأله تکرار $D-K$ به صورت زیر خلاصه می شود:

مرحله اول : با بکارگیری یکی از روش های سنتز H_∞ و با فرض ثابت بودن ماتریس D (در تکرار اول به علت عدم دسترسی به ماتریس D ، این ماتریس برابر I فرض می شود) کنترل کننده $K(s)$ چنان یافت می شود که سیستم حلقه بسته پایدار بوده و $\|D.F_1(G, K).D^{-1}\|_\infty$ نیز مینیمم شود.

مرحله دوم : ماتریس $D(s)$ که دارای ساختاری مشابه با ماتریس عدم قطعیت Δ می باشد چنان یافت می شود که $D(s)$ و $D^{-1}(s)$ پایدار بوده و عبارت $\bar{\sigma}(D.F_1(G, K).D^{-1})$ با فرض ثابت بودن K مینیمم شود. پس از یافتن D برای جلوگیری از افزایش بیش از حد درجه کنترل کننده، توابعی ثابت و یا با حداقل درجه ممکن بر روی هریک از عناصر قطری D جایگزین می شود. با توجه به شکل مسأله نشان داده شده است که فاز D در این قسمت اثری بر حل مسأله ندارد بنابراین به هنگام جایگزینی D با توابع ساده تر فقط به اندازه آن توجه می شود.

نکته قابل توجه این است که اگر چه ممکن است مسائل بهینه سازی در هر مرحله همگرا و دارای جواب باشد ولی این امر دلیلی بر همگرا بودن ترکیب دو مرحله یعنی مسأله μ نمی باشد و ممکن است مسأله دارای جواب نباشد.

۴-۵-۴-۲ چگونگی یافتن ماتریس D

۱- عدم قطعیت جمع شونده

۲- عدم قطعیت ضرب شونده

۳- عدم قطعیت پارامتری و غیر پارامتری

۴- عدم قطعیت با ساختار و بی ساختار

۵- ترکیبی از روش های مدل سازی فوق

عدم قطعیت ممکن است با ساختار، بی ساختار یا ساختار کامل^۱ باشد. نرم افزار μ -tools قادر نیست عدم قطعیت را به صورت ساختار کامل مدل نماید. ضمناً مدل با ساختار حالت خاصی از مدل بی ساختار می باشد و حالتی است که ماتریس عدم قطعیت مربعی و تعداد ورودی ها و خروجی های آن برابر باشد و تنها، عناصر روی قطر ماتریس تابع تبدیل سیستم دارای عدم قطعیت باشد، به طوری که هر خروجی عدم قطعیت تنها از ورودی متناظر خود تأثیر پذیرد.

ماتریس ساختار بلوکی^۲ عدم قطعیت برای توصیف تعداد، اندازه و نوع بلوک های عدم قطعیت در ماتریس Δ^* تعریف می شود. این ماتریس عدم قطعیت را به صورت مختلط در نظر گرفته و دارای ابعاد $n \times 2$ می باشد که n تعداد بلوک های عدم قطعیتی است که بر روی قطر اصلی ماتریس Δ^* مرتب می شوند.

۴-۶-۱ عدم قطعیت ضرب شونده

اکثر تحقیقات انجام شده برای طراحی کنترل مقاوم μ از این روش مدل سازی استفاده کرده اند. چون روش جمع شونده فقط برای سیستم های SISO یا سیستمهایی که بتوان عدم قطعیت آنها را به صورت بلوک های تک ورودی - تک خروجی در آورد و روش پارامتری برای سیستم هایی که براساس پارامترها مدل می شوند کاربرد دارد. علاوه بر آن در روش ضرب شونده ماکزیمم تغییرات اندازه توابع تبدیل سیستم SISO و MIMO را براحتی (بدون توجه به فاز آنها) می توان به صورت حاصلضرب یک تابع ثابت یا تابع فرکانسی با اندازه تابع تبدیل نمایش داد. همچنین خطای سیگنال

¹ full structured

² block structured matrix

ها، تأخیر محرکها در اجرای فرمان، نویز سنسورها و تأخیرات دیگر موجود در سیستم را می توان به صورت حاصلضرب یک سیگنال در ورودی یا خروجی سیستم یا زیر سیستم مدل نمود. انحراف مدل از نقطه کار نامی نیز معمولاً به یکی از دو شکل ضرب شونده ورودی یا خروجی مدل سازی می گردد. ضمناً استفاده از مدل ضرب شونده در عدم قطعیت ها محافظه کاری کمتری را نسبت به مدل جمع شونده به همراه دارد. برای بکارگیری این مدل مراحل زیر باید به ترتیب انجام گیرد:

۱- ماتریس توابع تبدیل سیستم یا زیر سیستم که قرار است عدم قطعیت آن مدل سازی گردد محاسبه می شود ($T_{m \times n}(s)$).

۲- با استفاده از رابطه زیر عدم قطعیت ضرب شونده هر تابع تبدیل (عناصر ماتریس $T(s)$) در شرایط و نقاط کار مختلف نسبت به شرایط نامی بدست می آید.

$$\Delta_{pq}(s) = \frac{T_{pq}(s) - T_{nom}(s)}{T_{nom}(s)} \quad 1 \leq p \leq m, \quad 1 \leq q \leq n \quad (82-4)$$

۳- اندازه عدم قطعیت ها در فرکانس های مختلف محاسبه و در کنار هم ترسیم می شود.

$$|\Delta_{pq}(j\omega)| = \left| \frac{T_{pq}(j\omega)}{T_{nom}(j\omega)} - 1 \right| \quad 1 \leq p \leq m, \quad 1 \leq q \leq n \quad (83-4)$$

۴- در صورتی که عدم قطعیت به صورت ضرب شونده ورودی مدل شود، عدم قطعیت های هر ستون به طور مجزا ترسیم شده و منحنی تابع $W_{mult-in}^k(j\omega)$ به گونه ای انتخاب می شود که اندازه آن در همه فرکانس ها از اندازه عدم قطعیت های ستون k ام بیشتر بوده و کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

$$\forall \omega \quad |W_{mult-in}^k(j\omega)| \geq |\Delta_{pk}(j\omega)| \quad 1 \leq p \leq m, \quad 1 \leq k \leq n \quad (84-4)$$

اگر عدم قطعیت به صورت ضرب شونده خروجی مدل شود، عدم قطعیت های هر سطر به طور مجزا ترسیم شده و منحنی تابع $W_{mult-out}^k(j\omega)$ به گونه ای انتخاب می شود که در همه فرکانس ها اندازه آن از اندازه عدم قطعیت سطر k ام بیشتر بوده و کمترین مقدار ممکن را دارا باشد.

$$\forall \omega \quad |W_{mult-out}^k(j\omega)| \geq |\Delta_{kq}(j\omega)| \quad 1 \leq k \leq m, \quad 1 \leq q \leq n \quad (85-4)$$

اگر عدم قطعیت با ساختار باشد آنگاه مدل های عدم قطعیت ضرب شونده ورودی و خروجی برابر خواهد بود.

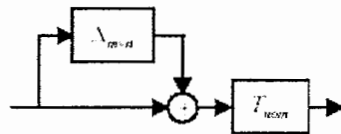
۵- عدم قطعیت نرمالیزه شده و به صورت زیر نمایش داده می شود:

ضرب شونده ورودی

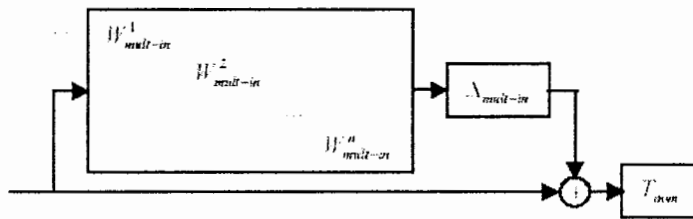
$$T : \{T_{nom} (I + \Delta_{mult-in} W_{mult-in}) : \|\Delta_{mult-in}\|_{\infty} \leq 1\} \quad (۸۶-۴)$$

ضرب شونده خروجی

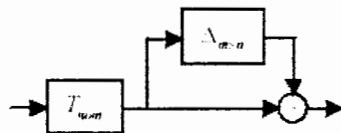
$$T : \{(I + W_{mult-out} \Delta_{mult-out}) T_{nom} : \|\Delta_{mult-out}\|_{\infty} \leq 1\} \quad (۸۷-۴)$$



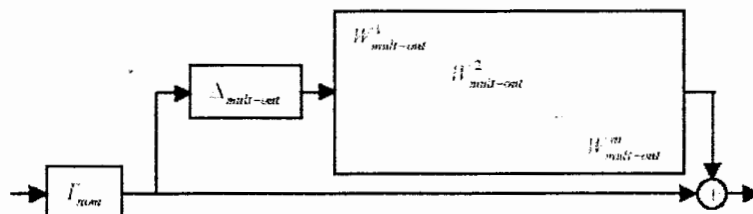
عدم قطعیت ضرب شونده ورودی



عدم قطعیت ضرب شونده ورودی نرمالیزه



عدم قطعیت ضرب شونده خروجی



عدم قطعیت ضرب شونده خروجی نرمالیزه

شکل ۴-۹- عدم قطعیت های ضرب شونده ورودی و خروجی

۶- ممکن است در چند زیر سیستم به طور همزمان مدل سازی عدم قطعیت به صورت ورودی یا خروجی صورت گیرد، در این حالت باید دقت شود که ساختار بلوکی عدم قطعیت های عملکردی، متناسب با ساختار بلوکی عدم قطعیت های واقعی در نظر گرفته شود. اگر در سیستمی عدم قطعیت سنسورها و محرک ها به طور همزمان مدل شود مدل عدم قطعیت شکل ورودی - خروجی به خود خواهد گرفت.

فصل پنجم

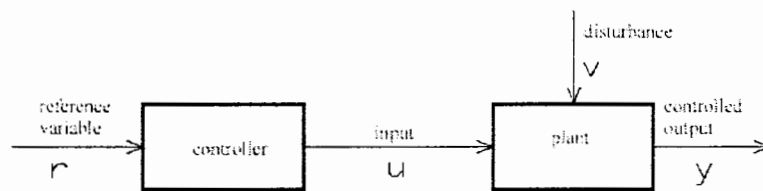
طراحی کنترل کننده مقاوم

برای قطار مغناطیسی

۱-۵ مقدمه

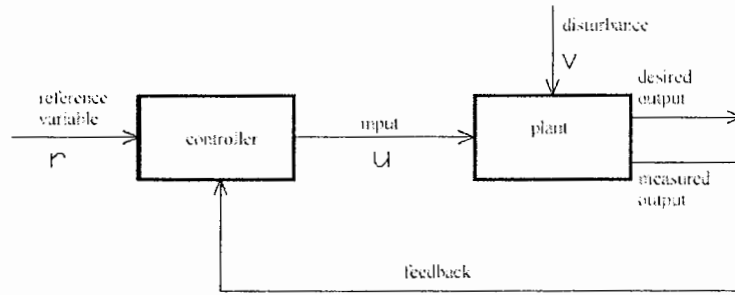
هدف اصلی طراحی کنترل کننده رسیدن به مشخصه های مطلوبی همچون پایداری و عملکرد مناسب برای یک سیستم است. یک سیستم کنترل شامل اجزاء اصلی زیر است: (۱) دستگاه که سیستمی است که باید کنترل شود. (۲) سنسورها که اطلاعات مربوط به متغیرها را جمع آوری می کنند (و در طراحی کنترل کننده این اطلاعات مورد استفاده قرار می گیرد). (۳) کنترل کننده که مقادیر اندازه گیری شده را با مقادیر مطلوبشان مقایسه کرده و متغیرهای ورودی به سیستم را تنظیم می کند. به طور کلی دو نوع کنترل کننده وجود دارد: کنترل کننده های حلقه باز و کنترل کننده های حلقه بسته.

کنترل کننده حلقه باز ورودی را فقط بر اساس مقادیر کنونی و مقادیر پیشین متغیر مرجع تولید می کنند. در این حالت فرمان ها به ترتیب و با صرف نظر از نتایج به دست آمده انجام می شوند.



شکل ۱-۵- سیستم کنترل حلقه باز

یک سیستم حلقه بسته سیستمی است که با استفاده از فیدبک در مورد سیگنال کنترلی که دستگاه را تحریک می کند تصمیم سازی می کند.



شکل ۲-۵- سیستم کنترل حلقه بسته

کنترل کننده حلقه باز به پارامترهای سیستم وابسته است و چون در این حالت هیچ اطلاعی در مورد دستگاه در دسترس نیست اغتشاشات وارد شده به سیستم را نمی توان مدل کرد. بر خلاف کنترل کننده های حلقه باز، کنترل کننده های حلقه بسته می توانند اطلاعات دستگاه را در حین عملکرد جمع آوری کنند و بنابراین می توانند تاثیر اغتشاشات را کم کنند.

در این فصل به طراحی کنترل کننده های H_{∞} , LQ و μ برای سیستم قطار مغناطیسی مورد بحث در فصل ۲ پرداخته و میزان مقاوم بودن سیستم کنترل حلقه بسته حاصل در مقابل انواع عدم قطعیت ها با استفاده از تکنیک های آنالیز و سنتز μ مورد بررسی قرار می گیرد.

۲-۵ مدل دینامیکی قطار مغناطیسی

مدل سیستم قطار مغناطیسی شامل مدل یک وسیله نقلیه تک واگنه ۲ درجه آزادی، مدل تعلیق مغناطیسی، مدل سختی ریل و مدل مسیر هادی است که در فصل ۲ معادلات مربوط به آن به طور کامل آورده شده است. مدل فضای حالت نیز با ورودی ها و خروجی های مشخص در انتهای همان فصل داده شده است. بنابراین در بکارگیری مدل خطی بر روی مدل فضای حالت متمرکز شده و کنترل کننده را بر اساس آن طراحی خواهیم نمود.

مقادیر پارامترهای سیستم که در فصل ۲ معرفی شده و در معادلات نیز مورد استفاده قرار گرفته اند در جدول ۱-۵ آورده شده است.

symbol	value	units
m_p	500	kg
m_s	500	kg
c_s	10^4	Ns/m
k_s	10^5	N/m
μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$	weber/ Am
A_m	0.04	m^2
n_m	12	
a	0.05	m
b	0.1	m
h_0	0.01	m
N_t	96	
R_c	2	ohm
r_f	0.01	m^{-1}
V	400	m/s
ω	34.5	rad/s

جدول ۵-۱- مقادیر پارامترهای سیستم قطار مغناطیسی

مدل نامی سیستم با جایگزینی مقادیر فوق با پارامترهای موجود در معادلات به دست خواهد آمد. پس از تعیین مدل نامی قدم بعدی که در طراحی کنترل مقاوم از اهمیت زیادی برخوردار است شناسایی و مدل سازی عدم قطعیت های مدل و همچنین شناسایی اغتشاشات و نویز موجود در سیستم است. در بخش بعد به تعیین مدل عدم قطعیت ها، نویز و اغتشاشات موجود در سیستم خواهیم پرداخت.

۵-۳ عدم قطعیت های موجود در سیستم قطار مغناطیسی و طراحی کنترل کننده برای

سیستم نامعین

در رابطه با عدم قطعیت‌ها بایستی نوع، ساختار و محدوده آن‌ها را شناسایی و سپس بهترین شکل را انتخاب کرد. یک مدل نامناسب ممکن است در برگیرنده تمام حالت‌های موجود نباشد و یا این که مجموعه‌ای غیر واقعی از عدم قطعیت‌ها را شامل شود. در حالت اول کنترل کننده از درجه ریاست نس خوبی برخوردار نخواهد بود و در حالت دوم عمل سنتز محافظه کارانه انجام شده و مساله ممکن است به جواب نرسد. در این پروژه عدم قطعیت‌ها را در دو دسته پارامتری و غیر پارامتری مورد بررسی قرار می‌دهیم و برای هر حالت به طور جداگانه به طراحی کنترل کننده مقاوم می‌پردازیم. در نهایت نیز با در نظر گرفتن عدم قطعیت مخلوط¹ که ترکیبی است از دو نوع عدم قطعیت پارامتری و غیر پارامتری کنترل کننده مقاوم دیگری برای سیستم قطار مغناطیسی طراحی می‌نماییم.

۵-۳-۱ عدم قطعیت‌های پارامتری و طراحی کنترل کننده برای سیستم با این نوع عدم

قطعیت

پارامترهای k_s, c_s, m_s, m_p و ... تحت تاثیر عوامل مختلفی از جمله تغییر بار قطار، تلورانس مقاومت سیستم تعلیق مغناطیسی و ... ثابت نبوده و عدم قطعیت‌هایی را شامل می‌شوند. محدوده عدم قطعیت‌هایی که برای هر پارامتر در نظر گرفته شده به صورت زیر می‌باشد. سعی شده است که این محدوده‌ها به گونه‌ای باشند که رنج وسیعی از تغییرات را در هر پارامتر (که ممکن است خود، متاثر از پارامتر دیگری باشد) پوشش دهند. به عنوان مثال با تعریف m_s نامعین به صورت زیر، اثر تغییر بار قطار را به اندازه 50% وزن بدنه واگن در شرایط نامی در نظر می‌گیریم. و یا با تغییر R_s از 1Ω تا 3Ω ، M_3 در محدوده داده شده زیر تغییر خواهد کرد.

$$m_p = \bar{m}_p (1 + 0.25\delta_{m_p}) \quad (1-5)$$

$$m_s = \bar{m}_s (1 + 0.5\delta_{m_s}) \quad (2-5)$$

$$c_s = \bar{c}_s (1 + 0.3\delta_{c_s}) \quad (3-5)$$

¹ mixed uncertainty

$$k_s = \bar{k}_s(1 + 0.4\delta_{k_s}) \quad (4-5)$$

$$M_3 = \bar{M}_3(1 + 0.5\delta_{M_3}) \quad (5-5)$$

$$r_f = \bar{r}_f(1 + 0.005\delta_{r_f}) \quad (6-5)$$

$$V = \bar{V}(1 + 0.25\delta_V) \quad (7-5)$$

$$\omega = \bar{\omega}(1 + 0.45\delta_\omega) \quad (8-5)$$

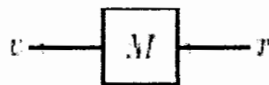
و یا از آن جایی که در معادلات ω^2 وجود دارد و نه ω ، داریم:

$$\omega^2 = \bar{\omega}^2(1 + 0.75\delta_{\omega^2}) \quad (9-5)$$

در معادلات فوق $\bar{k}_s, \bar{c}_s, \bar{m}_s, \bar{m}_p$ و ... مقادیر نامی پارامترهای مذکور هستند و کلیه δ ها در بازه $[-1, 1]$ قرار دارند. با توجه به معادلات فضای حالت سیستم (روابط (۲-۳۱) تا (۲-۳۵)) پارامترهای $\omega^2, V, r_f, M_3, k_s, c_s$ به طور مستقیم در معادلات ظاهر می شوند اما در مورد m_s, m_p ، معکوس این دو پارامتر در روابط مرتب شده به شکل فضای حالت وارد می شوند.

تعمیمی از تحقق فضای حالت به این شکل است که سیستم دینامیکی خطی را به صورت اتصالات فیدبکی یک ماتریس ثابت و یک مولفه دینامیکی ساده (متشکل از تاخیرها یا انتگرال گیرها) می توان نمایش داد. این تحقق ارتباطات موجود در سیستم را به خوبی نشان داده و انجام محاسبات را نیز ساده تر می کند. از LFTها برای نمایش عدم قطعیت در هر پارامتر استفاده می شود. نتیجه بکارگیری روش قدرتمند و انعطاف پذیر LFT در هر پارامتر ماتریسی با یک اتصال فیدبکی است. برای درک بهتر این مطلب به مرور مفهوم LFT می پردازیم. ابتدا ماتریس سیستم M ، را که به صورت زیر با بردارهای v, r ارتباط دارد در نظر می گیریم:

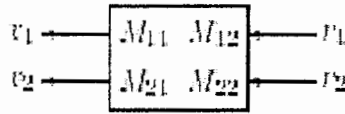
$$v = Mv \quad (10-5)$$



شکل ۳-۵- نمایش ماتریس سیستم M با بردار ورودی r و بردار خروجی v در تعریف LFT

اگر v, r به دو بخش بالایی و پایینی تقسیم شوند روابط به این صورت خواهند بود:

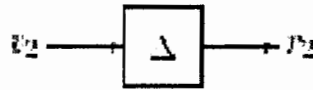
$$\begin{cases} v_1 = M_{11}r_1 + M_{12}r_2 \\ v_2 = M_{21}r_1 + M_{22}r_2 \end{cases} \quad (11-5)$$



شکل ۴-۵- ماتریس M و بردارهای v, r با تقسیم به دو بخش بالایی و پایینی

فرض کنید که ماتریس عدم قطعیت Δ با r_2, v_2 و به این صورت ارتباط دارد:

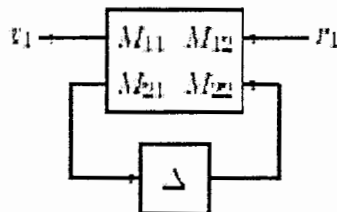
$$r_2 = \Delta v_2 \quad (12-5)$$



شکل ۵-۵- ارتباط عدم قطعیت Δ با بخشی از ورودی ها و خروجی های سیستم

تبدیل خطی - کسری پایینی M, Δ ، $F_L(M, \Delta)$ ، به صورت زیر می باشد:

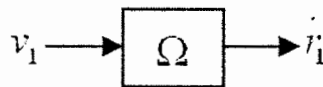
$$\begin{aligned} v_1 &= [M_{11} + M_{12}\Delta(I - M_{22}\Delta)^{-1}M_{21}]r_1 \\ &= F_L(M, \Delta)r_1 \end{aligned} \quad (13-5)$$



شکل ۶-۵- تبدیل خطی - کسری پایینی M, Δ

اگر ماتریس عدم قطعیت Ω نیز با r_1, v_1 به این شکل ارتباط داشته باشد:

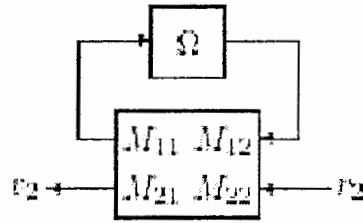
$$r_1 = \Omega v_1 \quad (14-5)$$



شکل ۷-۵- ارتباط ماتریس عدم قطعیت Ω با بخشی از ورودی ها و خروجی های سیستم

تبدیل خطی - کسری بالایی M, Ω ، $F_U(M, \Omega)$ ، به این صورت خواهد بود.

$$\begin{aligned} v_2 &= [M_{22} + M_{21}\Omega(I - M_{11}\Omega)^{-1}M_{12}]r_2 \\ &= F_U(M, \Omega)r_2 \end{aligned} \quad (15-5)$$



شکل ۵-۸- تبدیل خطی - کسری بالای M, Ω

اکنون به عنوان نمونه پارامتر c_s نامعین را به صورت LFT پایینی نمایش می دهیم:

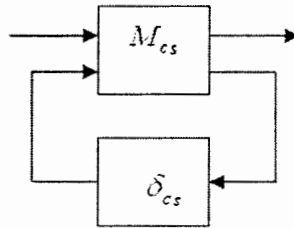
$$c_s = \bar{c}_s + 0.3\bar{c}_s\delta_{c_s}$$

با مقایسه رابطه فوق با (۵-۱۳) داریم:

$$M_{11} = \bar{c}_s, M_{12} = 0.3\bar{c}_s, \Delta = \delta_{c_s}, M_{22} = 0, M_{21} = 1$$

به این ترتیب برای پارامتر خواهیم داشت:

$$M - c_s = \begin{bmatrix} \bar{c}_s & 0.3\bar{c}_s \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5-16)$$



شکل ۵-۹- عنصر نامعین c_s به صورت LFT پایینی

برای پارامترهای دیگر نیز به همین ترتیب داریم:

$$M - k_s = \begin{bmatrix} \bar{k}_s & 0.4\bar{k}_s \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5-17)$$

$$M - M_3 = \begin{bmatrix} \bar{M}_3 & 0.5\bar{M}_3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5-18)$$

$$M - r_f = \begin{bmatrix} \bar{r}_f & 0.005\bar{r}_f \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5-19)$$

$$M - V = \begin{bmatrix} \bar{V} & 0.25\bar{V} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (20-5)$$

$$M - \omega^2 = \begin{bmatrix} \bar{\omega}^2 & 0.75\bar{\omega}^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (21-5)$$

برای پارامتر m_p که معکوس آن در معادلات ظاهر می شود داریم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m_p} &= \frac{1}{\bar{m}_p} \frac{1}{1+0.25\delta_{m_p}} \\ &= \frac{1}{\bar{m}_p} \left(1 + \frac{-0.25\delta_{m_p}}{1-(-0.25\delta_{m_p})}\right) = \frac{1}{\bar{m}_p} + (-0.25)\delta_{m_p} (1-(-0.25\delta_{m_p}))^{-1} \left(\frac{1}{\bar{m}_p}\right) \end{aligned}$$

با مقایسه رابطه فوق با تعریف LFT پایینی، رابطه (۱۳-۵)، داریم:

$$M_{11} = \frac{1}{\bar{m}_p}, M_{12} = -0.25, \Delta = \delta_{m_p}, M_{22} = -0.25, M_{21} = \frac{1}{\bar{m}_p}$$

به عبارتی برای پارامتر m_p خواهیم داشت:

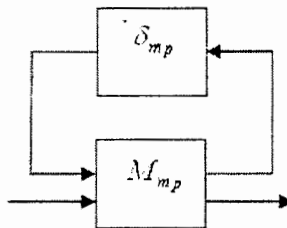
$$M - m_p = \begin{bmatrix} \frac{1}{\bar{m}_p} & -0.25 \\ \frac{1}{\bar{m}_p} & -0.25 \end{bmatrix} \quad (22-5)$$

و یا با مقایسه رابطه $\frac{1}{m_p}$ با تعریف LFT بالایی، رابطه (۱۵-۵)، داریم:

$$M_{22} = \frac{1}{\bar{m}_p}, M_{21} = -0.25, \Omega = \delta_{m_p}, M_{11} = -0.25, M_{12} = \frac{1}{\bar{m}_p}$$

بنابراین ماتریس M مربوط به پارامتر m_p با استفاده LFT از بالایی به این شکل به دست می آید:

$$M - m_p = \begin{bmatrix} -0.25 & \frac{1}{\bar{m}_p} \\ -0.25 & \frac{1}{\bar{m}_p} \end{bmatrix} \quad (23-5)$$

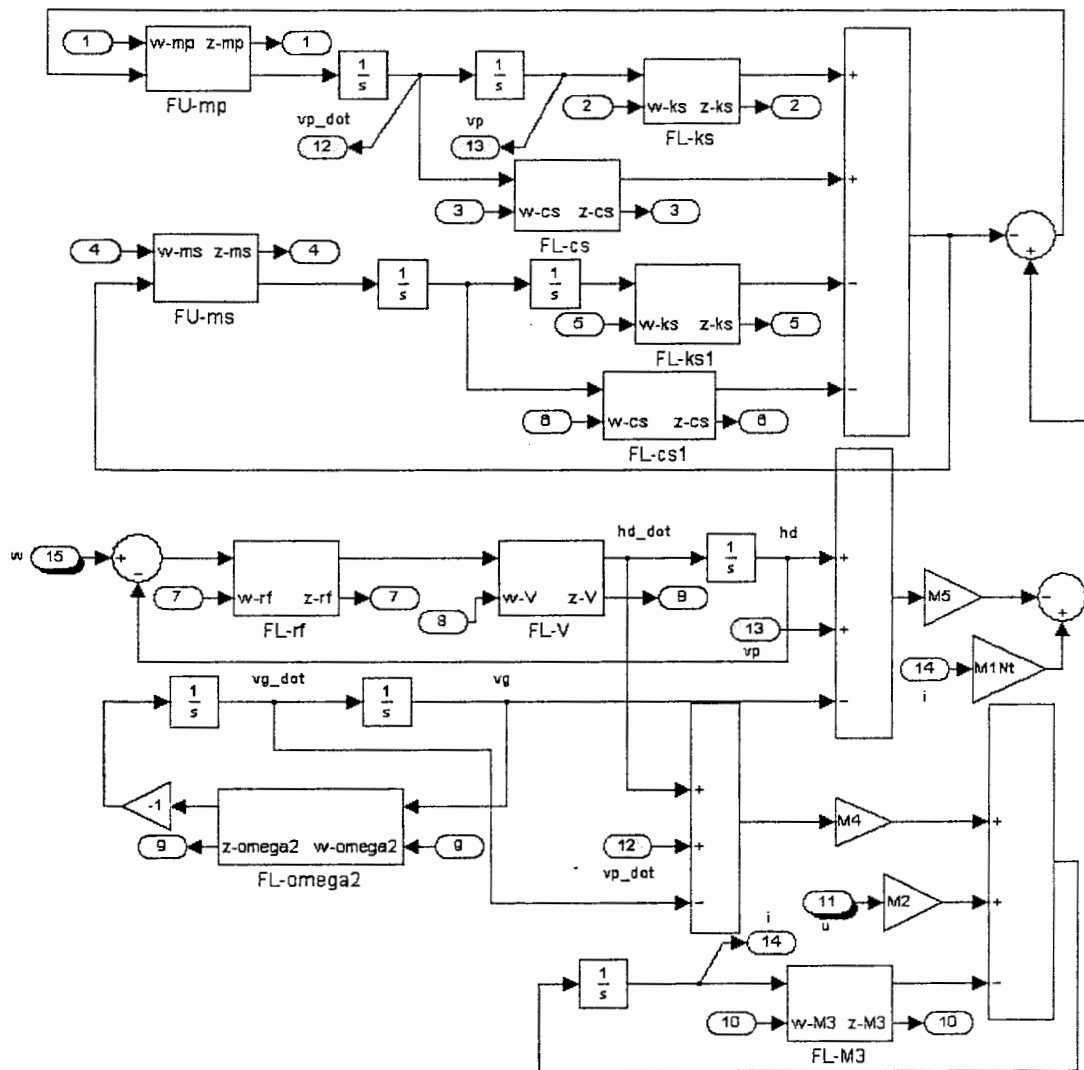


شکل ۱۰-۵- عنصر نامعین m_p به صورت LFT بالایی

و به همین ترتیب نیز برای m_s با استفاده از تعریف LFT بالایی داریم:

$$M - m_s = \begin{bmatrix} -0.5 & \frac{1}{\bar{m}_s} \\ -0.5 & \frac{1}{\bar{m}_s} \end{bmatrix} \quad (24-5)$$

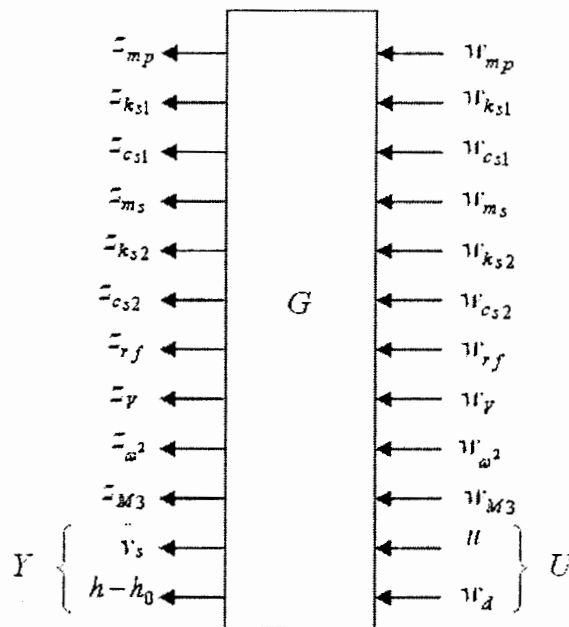
از آنجا که معمولا در تحلیل یک سیستم بخش معلوم از بخش نامعلوم جدا می شود، در این جا نیز قسمت معلوم و معین سیستم را که ماتریس های M ، بهره های مشخص و انتگرال گیرها هستند از قسمت نامعلوم که δ ها هستند جدا کرده و بلوک دیاگرام زیر را برای بخش معلوم در شبیه سازی ها در نظر می گیریم.



شکل ۵-۱۱- ساختار اتصالات داخلی سیستم

با دستور sysic در جعبه ابزار μ -tools از نرم افزار matlab می توان ساختار اتصالات داخلی سیستم^۱ را محاسبه کرده و حاصل را در ماتریس سیستم G قرار داد.

با توجه به شکل ۱۱-۵ سیستم مورد نظر ۱۲ ورودی، ۱۲ خروجی و ۸ حالت دارد. در شکل ۱۲-۵ نمایش سیستم با ورودی ها و خروجی های آن آورده شده است.



شکل ۱۲-۵- نمای کلی بخش معلوم سیستم

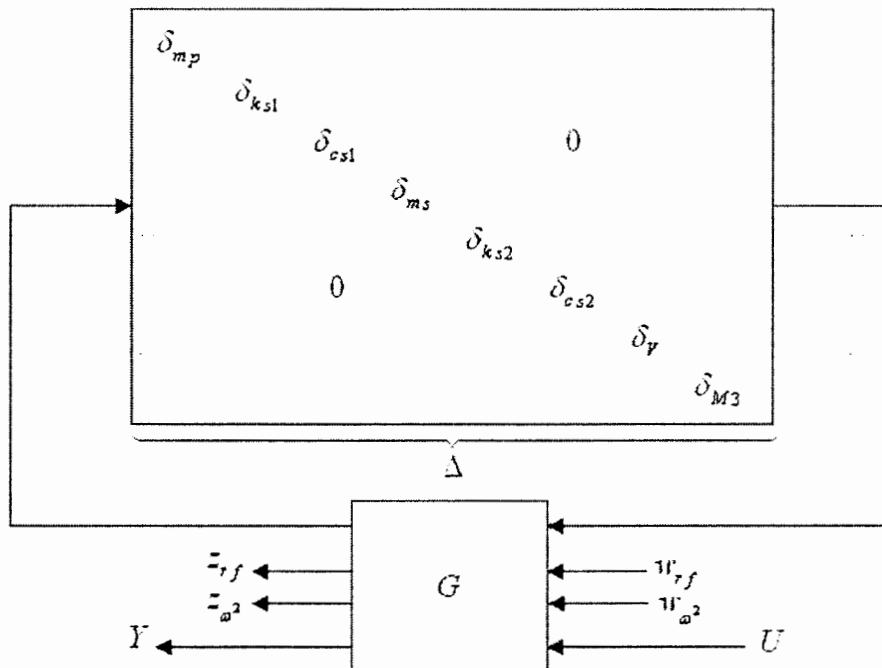
در طراحی کنترل کننده دو ورودی اصلی سیستم (بردار U) و دو خروجی اصلی سیستم (بردار Y) را در نظر می گیریم. ورودی و خروجی های دیگر سیستم ورودی و خروجی های نظیر عدم قطعیت ها هستند که در سنتز μ به کار خواهند رفت.

سیستم مورد بحث با ۸ حالت، ۲ ورودی و ۲ خروجی سیستمی کنترل ناپذیر است. با استفاده از تکنیک کاهش مرتبه مدل^۲، مدهای کنترل ناپذیر سیستم را جدا کرده و برای بخش کنترل پذیر به طراحی کنترل کننده خواهیم پرداخت. توصیف روش کاهش مرتبه مدل در پیوست الف آمده است. از روی معادلات فضای حالت ماتریس تابع تبدیل سیستم را به دست آورده و آن را به شکل نمایش

¹ system interconnection structure

² model reduction

صفر و قطب ها مرتب می کنیم. به این ترتیب فرکانس هایی که در آن ها، در تحقق مینیمال مدل، حذف صفر و قطب رخ می دهد مشخص می شود. با شناختی که از سیستم و مقادیر پارامترهای آن داریم به راحتی می توانیم دریابیم صفر و قطب مذکور به کدام معادله دینامیکی و در نتیجه کدام حالت یا حالت های سیستم مربوط می شود. در مجموع در معادلات توصیف کننده مدل، (۲-۲۵)، دو معادله آخر باعث کنترل ناپذیری سیستم می شوند. با حذف حالت های مربوط به این معادلات به روش تقریب نرم هنکل^۱ توصیف سیستم در ۵ حالت خلاصه می شود. به طور کلی رفتار سیستم نامعین با یک LFT بالایی ماتریس G و یک ماتریس عدم قطعیت قطری Δ به شکل زیر مشخص می شود:



شکل ۵-۱۳- سیستم نامعین کلی به صورت LFT بالایی

در نهایت برای سیستم G با ورودی U و خروجی Y کنترل کننده طراحی می شود و سیستم حلقه بسته را M می نامیم.

^۱ Hankel norm approximation

دو معادله حذف شده در نتیجه کاهش مرتبه مدل با توجه به تعریف آن ها، در فصل ۲، به نحوی بیانگر اغتشاشات عملکردی سیستم هستند. بنابراین آن ها را می توان به عنوان عدم قطعیت های عملکردی سیستم، Δ_p ، لحاظ کرد.

با توجه به این که وزن های عدم قطعیت ها توسط ماتریس های $M - \dots$ در ساختار داخلی سیستم لحاظ گردیده اند، عدم قطعیت ها به صورت نرمالیزه شده ($\|\Delta\|_{\infty} \leq 1$ ، $\|\Delta_p\|_{\infty} \leq 1$) در خارج از دستگاه در نظر گرفته می شوند.

ماتریس اغتشاش Δ با ساختار است. یک ساختار قطری- بلوکی دارد و با استفاده از مفهوم LFT روی ارتباط بین ورودی U و خروجی Y تاثیر می گذارد. ماتریس اغتشاش عملکردی Δ_p نیز ساختاری مشابه Δ دارد. ماتریس عدم قطعیت کلی سیستم را به این صورت در نظر می گیریم:

$$\Delta^* = \text{diag}(\Delta, \Delta_p) \quad (25-5)$$

پس از تعیین مدل کامل سیستم (مدل نامی به اضافه عدم قطعیت ها و اغتشاشات) به طراحی کنترل کننده می پردازیم.

در ابتدا کنترل کننده LQG را برای سیستم قطار مغناطیسی طراحی می کنیم. توضیح این نوع کنترل کننده در پیوست ب آمده است.

کنترل کننده در این حالت دارای مرتبه ۵ خواهد بود. پایداری نامی سیستم حلقه بسته را با در نظر گرفتن قطب های سیستم حلقه بسته مورد بررسی قرار می دهیم.

$$-0.4784 + 50.9904i$$

$$-0.4784 - 50.9904i$$

$$-2.8585 + 50.9919i$$

$$-2.8585 - 50.9919i$$

$$-1.6668$$

$$-1.6639$$

$$-0.0100 + 0.1411i$$

$$-0.0100 - 0.1411i$$

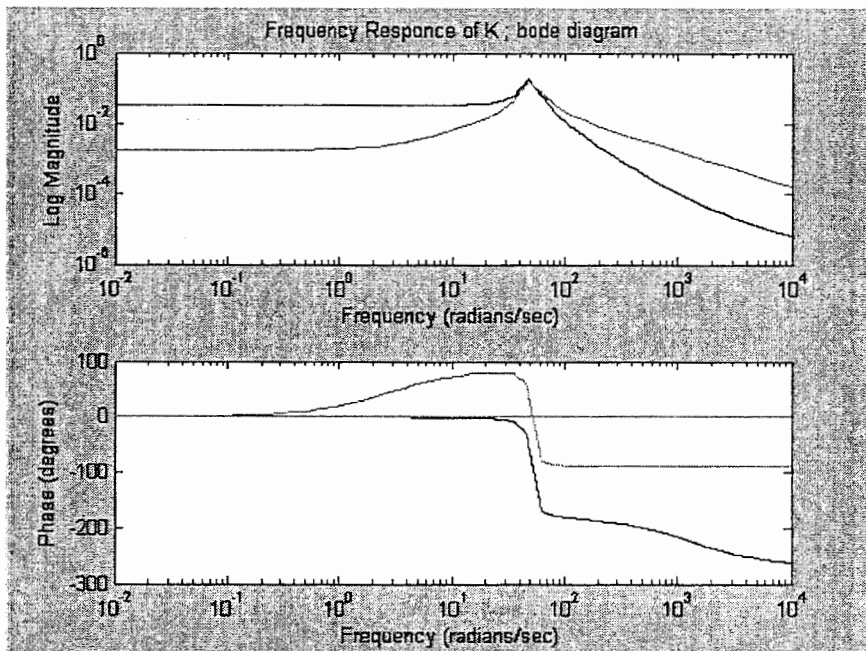
$$-0.0102 + 0.1409i$$

-0.0102 - 0.1409i

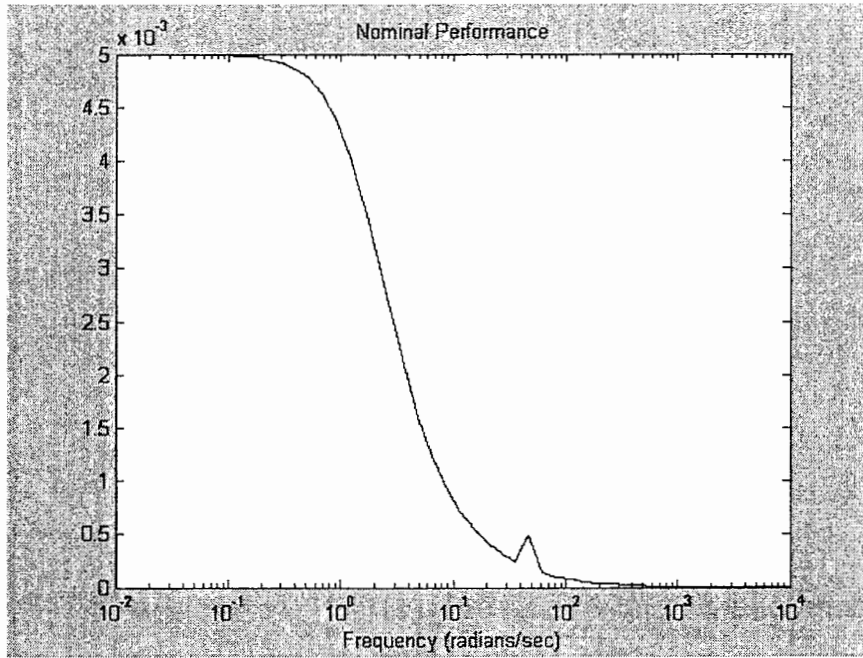
از آنجا که تمامی قطب ها در سمت چپ محور موهومی قرار دارند، سیستم حلقه بسته حاصل از پایداری نامی برخوردار است.

برای هر یک از تعاریف پایداری مقاوم، عملکرد نامی و عملکرد مقاوم که در بخش ۳-۶-۵ به صورت چند قضیه بیان شد منحنی های مربوطه را رسم می کنیم. در هر مورد که مقدار پیک منحنی ها کوچکتر از ۱ باشد می توان نتیجه گرفت که به مشخصه مطلوب دست یافته ایم.

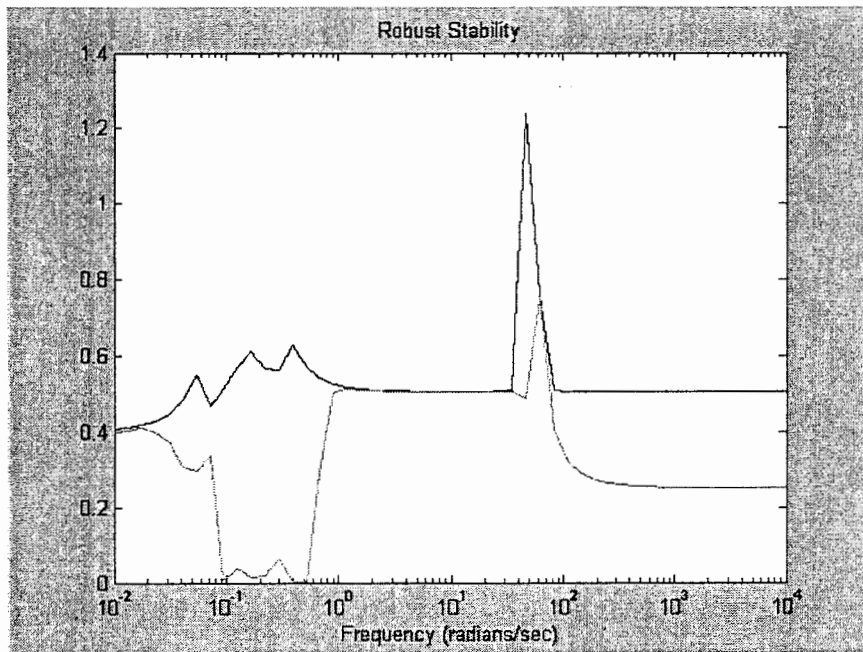
برای کنترل LQG منحنی های دیاگرام بد کنترل کننده، تستهای عملکرد نامی، پایداری مقاوم و عملکرد مقاوم به ترتیب در شکل های ۵-۱۴ تا ۵-۱۷ آمده است. واضح است که سیستم مورد مطالعه با این نوع کنترل کننده تنها از عملکرد نامی مناسب برخوردار بوده و مشخصه پایداری و عملکرد مقاوم را برآورده نمی سازد.



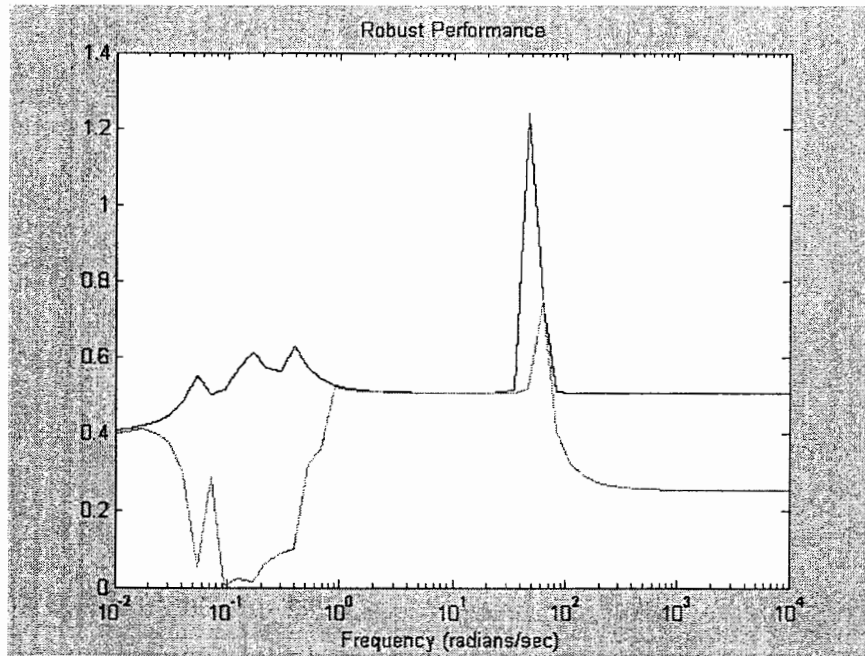
شکل ۵-۱۴- دیاگرام بد کنترل کننده LQG برای سیستم با عدم قطعیت های پارامتری



شکل ۵-۱۵- تست عملکرد نامی سیستم حلقه بسته با کنترل کننده LQG برای سیستم با عدم قطعیت‌های پارامتری



شکل ۵-۱۶- تست پایداری مقاوم سیستم حلقه بسته با کنترل کننده LQG برای سیستم با عدم قطعیت‌های پارامتری



شکل ۵-۱۷- تست عملکرد مقاوم سیستم حلقه بسته با کنترل کننده LQG برای سیستم با عدم قطعیت‌های پارامتری در مرحله بعد به طراحی کنترل کننده H_∞ می پردازیم. توضیح کوتاهی در مورد تئوری این نوع کنترل کننده در پیوست ج آورده شده است.

کنترل کننده در این حالت نیز دارای مرتبه ۵ خواهد بود. قطب های سیستم حلقه بسته از این قرارند:

$$-0.0100 + 50.9904i$$

$$-0.0100 - 50.9904i$$

$$-0.0127 + 50.9780i$$

$$-0.0127 - 50.9780i$$

$$-12.0407$$

$$-1.6668$$

$$-0.0100 + 0.1411i$$

$$-0.0100 - 0.1411i$$

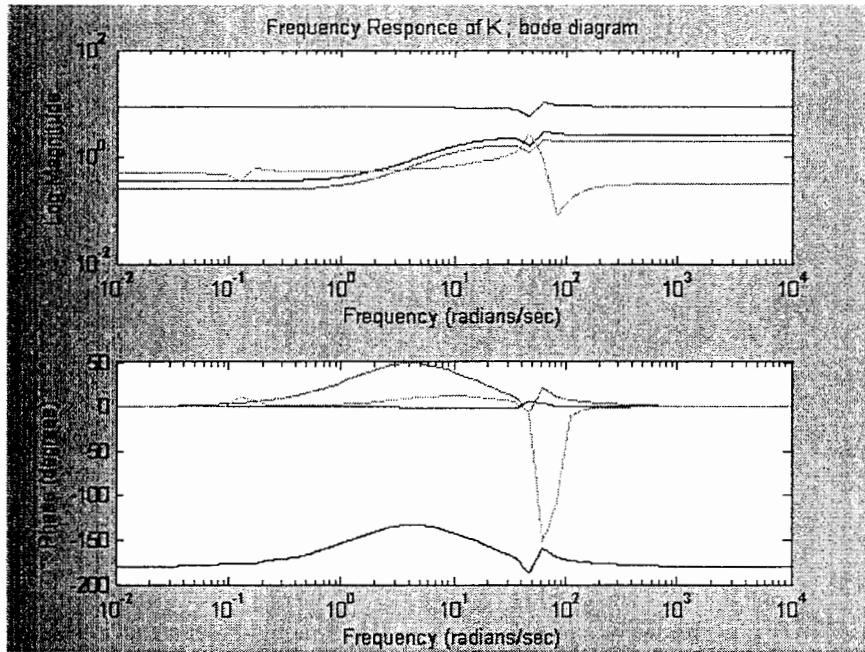
$$-0.0100 + 0.1411i$$

$$-0.0100 - 0.1411i$$

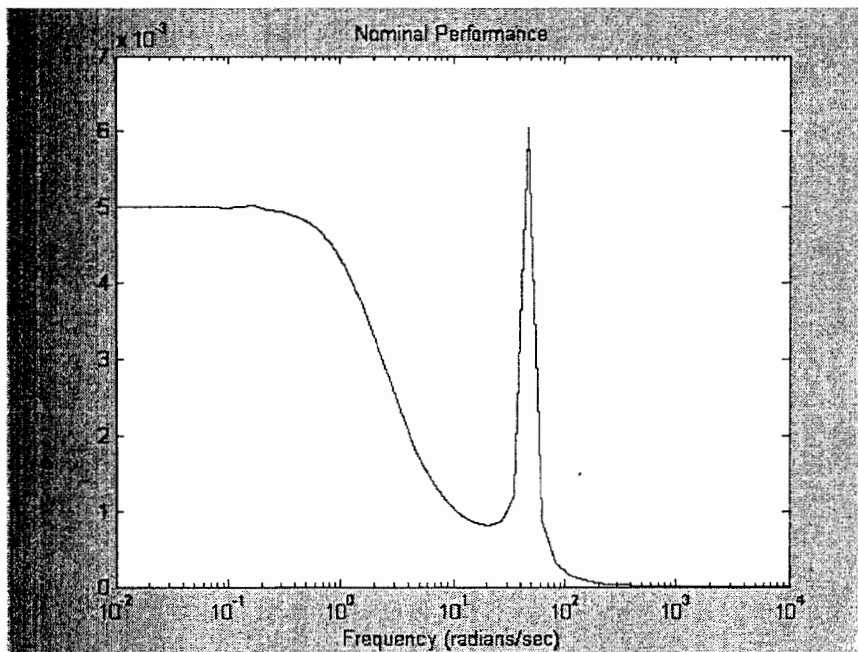
وچون تمامی قطب ها در سمت چپ محور موهومی قرار دارند، سیستم حلقه بسته حاصل از

پایداری نامی برخوردار است.

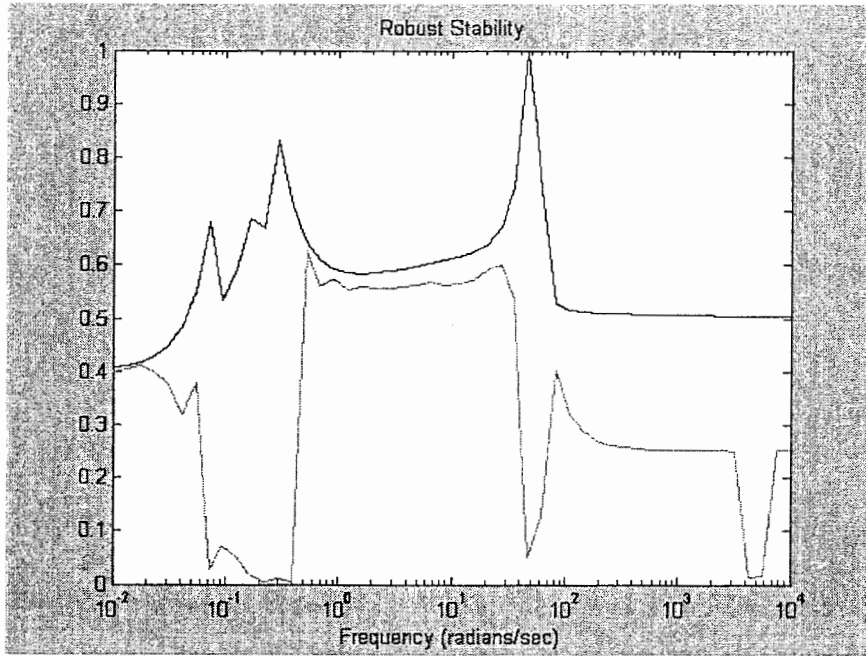
نتایج تحلیل فرکانسی به همان ترتیبی که در مورد کنترل LQG ذکر شد در شکل های ۱۸-۵ تا ۲۱-۵ آورده شده است.



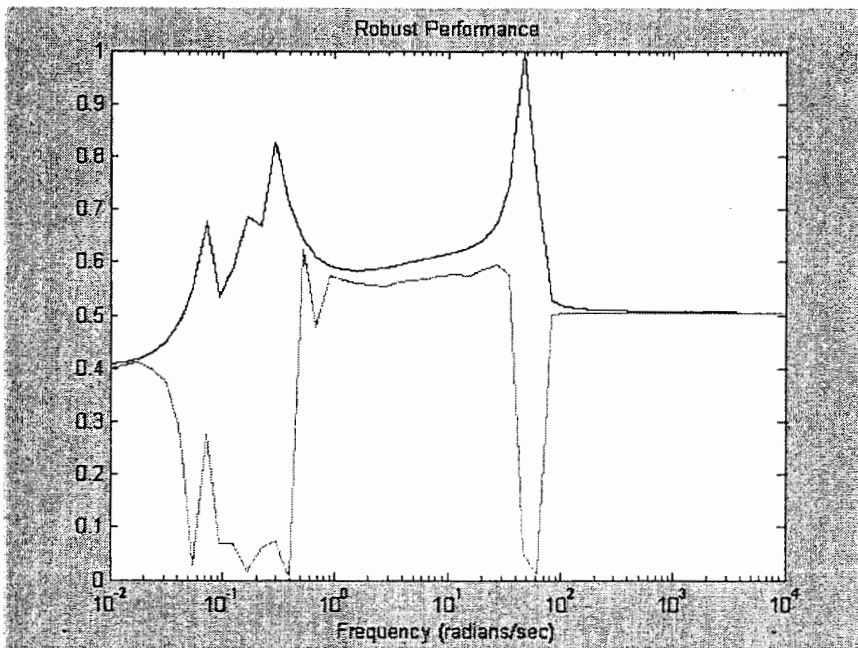
شکل ۱۸-۵- دیاگرام بد کنترل کننده H_{∞} برای سیستم با عدم قطعیت‌های پارامتری



شکل ۱۹-۵- تست عملکرد نامی سیستم حلقه بسته با کنترل کننده H_{∞} برای سیستم با عدم قطعیت‌های پارامتری



شکل ۵-۲۰- تست پایداری مقاوم سیستم حلقه بسته با کنترل کننده H_∞ برای سیستم با عدم قطعیت‌های پارامتری



شکل ۵-۲۱- تست عملکرد مقاوم سیستم حلقه بسته با کنترل کننده H_∞ برای سیستم با عدم قطعیت‌های پارامتری

در این مورد نیز سیستم عملکرد نامی مناسبی دارد اما چون مقدار پیک $\mu_{\Delta_p}(M_{22})$ و $\mu_{\Delta_o}(M)$ برابر ۱ است به پایداری و عملکرد مقاوم نمی توان دست یافت.

در نهایت کنترل کننده μ را برای سیستم طراحی خواهیم نمود. با استفاده از روش تکرار $D-K$ و در تکرار سوم به منحنی های $5-22$ تا $5-25$ برای دیاگرام بد کنترل کننده، تست عملکرد نامی و تست پایداری و عملکرد مقاوم خواهیم رسید. با توجه به این که مقدار پیک سه منحنی آخر کوچک تر از 1 است این نوع کنترل کننده باعث می شود که سیستم حلقه بسته شرایط عملکرد نامی، پایداری مقاوم و عملکرد مقاوم را به خوبی برقرار نماید.

کنترل کننده در این حالت دارای مرتبه 13 می باشد و قطبهای سیستم حلقه بسته به شکل زیر بوده و بنابراین سیستم حلقه بسته پایدار نامی نیز خواهد بود.

$$-79.8613 + 46.6828i$$

$$-79.8613 - 46.6828i$$

$$-0.0238 + 50.9880i$$

$$-0.0238 - 50.9880i$$

$$-56.2526$$

$$-11.7051$$

$$-5.6828$$

$$-1.6667$$

$$-0.5703$$

$$-0.3286 + 0.2357i$$

$$-0.3286 - 0.2357i$$

$$-0.0101 + 0.1412i$$

$$-0.0101 - 0.1412i$$

$$-0.1438 + 0.1009i$$

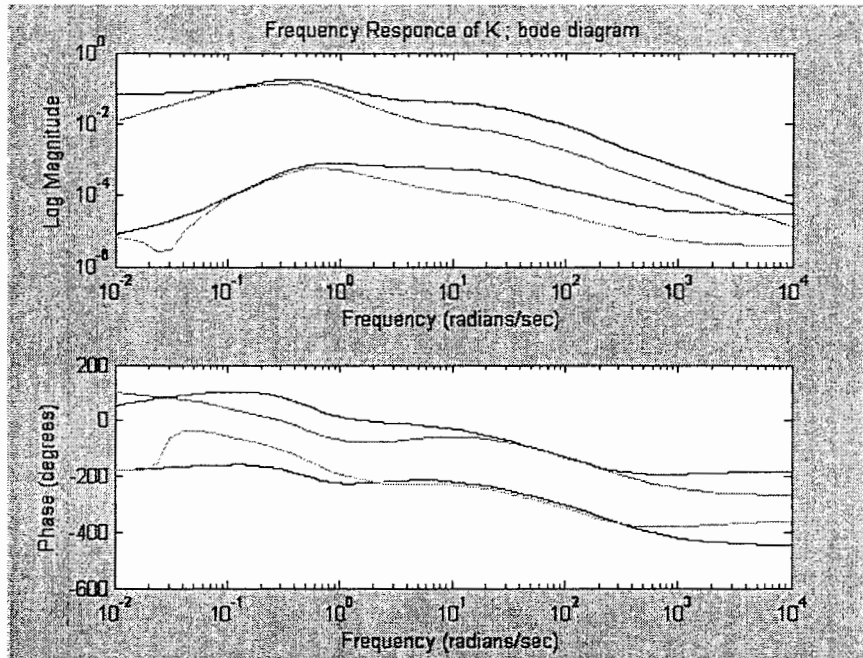
$$-0.1438 - 0.1009i$$

$$-0.0203$$

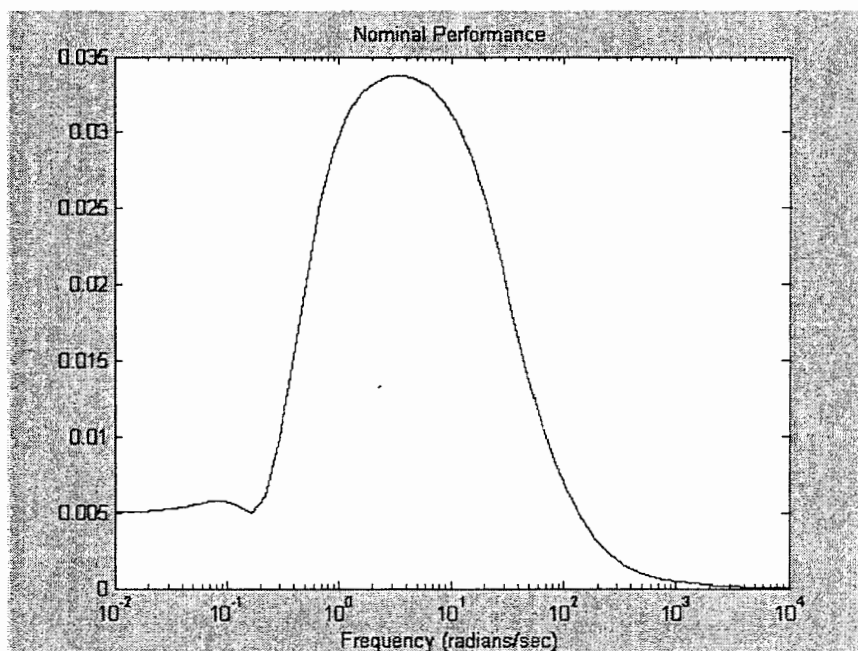
$$-0.0054 + 0.0140i$$

$$-0.0054 - 0.0140i$$

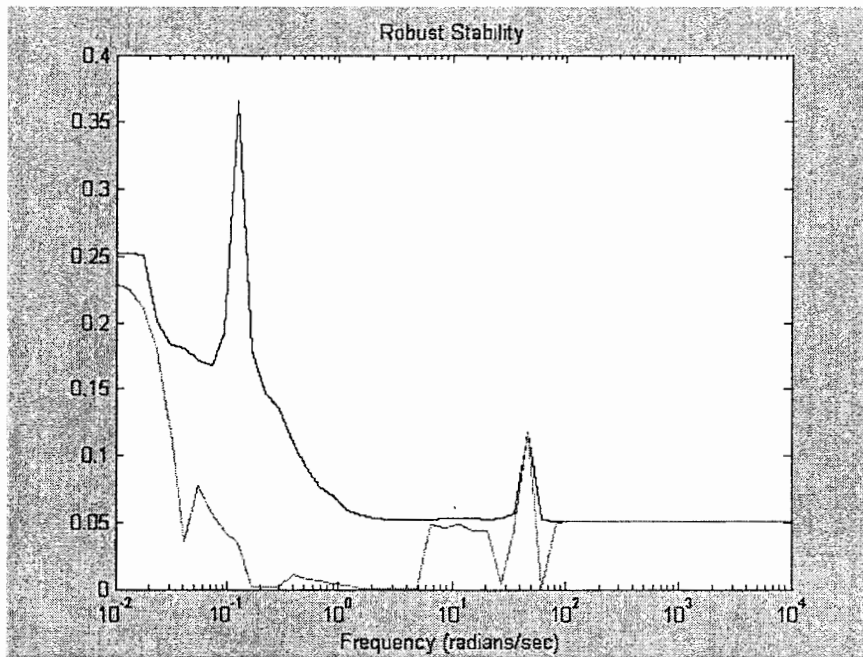
باید توجه داشت که در طراحی μ به روش تکرار $D-K$ ممکن است در تکرارهای بالاتر به مقدار μ پایبندی دست یافت ولی این امر به درجه بالاتری برای کنترل کننده منجر می شود. بنابراین در این مورد باید مصالحه ای بین حداکثر مقدار μ و درجه کنترل کننده صورت گیرد.



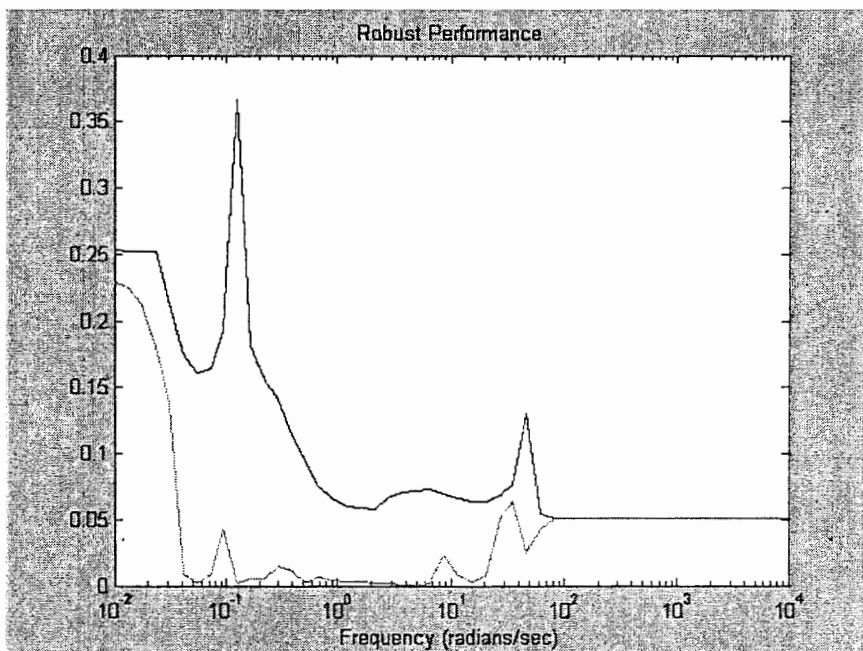
شکل ۵-۲۲- دیاگرام بد کنترل کننده μ برای سیستم با عدم قطعیت‌های پارامتری



شکل ۵-۲۳- تست عملکرد نامی سیستم حلقه بسته با کنترل کننده μ برای سیستم با عدم قطعیت‌های پارامتری



شکل ۵-۲۴- تست پایداری مقاوم سیستم حلقه بسته با کنترل کننده μ برای سیستم با عدم قطعیت‌های پارامتری



شکل ۵-۲۵- تست عملکرد مقاوم سیستم حلقه بسته با کنترل کننده μ برای سیستم با عدم قطعیت‌های پارامتری

۵-۳-۲ عدم قطعیت های غیر پارامتری و طراحی کنترل کننده برای سیستم با این نوع عدم

قطعیت

به طور کلی به دو روش می توان به کمک سعی و خطا عدم قطعیت های دینامیکی سیستم را تعیین کرد. در روش اول ابتدا عدم قطعیت ها را با کمترین درجه و بهره انتخاب کرده و در مراحل بعد ملاحظه کاری را کاهش داده و درجه و بهره عدم قطعیت ها را افزایش می دهیم تا جایی که در همگرایی روش μ خللی وارد نشود. البته باید توجه داشت که افزایش درجه توابع وزنی به منزله افزایش درجه کنترل کننده است پس باید وزن ها را به گونه ای انتخاب کرد که با حداقل صفر و قطب بیشترین تاثیر را داشته باشند. سعی می شود وزن های کلیه عدم قطعیت ها با هم در کاهش محافظه کاری نقش داشته باشند و این که یک عدم قطعیت بخصوص تاثیر زیادی در مدل داشته و عدم قطعیت دیگر تاثیر کمی، مطلوب نیست. لازم به ذکر است که وزن و محل صفر و قطب های وزن های عدم قطعیت ها با توجه به فرکانس نوسانات، فرکانس قطع و پهنای باند سیستم و... تعیین می شود. مثلا در مورد عدم قطعیت های فرکانس بالا اگر مقدار اندازه تابع تبدیل نامی سیستم در این فرکانس ها کوچک باشد و نوسانات دستگاه در آن بازه نباشد، می توان از این نوع عدم قطعیت صرف نظر کرد.

در روش دوم ابتدا وزن عدم قطعیت ها را با درجه و بهره بالا انتخاب می کنیم و به تدریج تا همگرا شدن روش سنتز μ به کاهش بهره و درجه آن ها می پردازیم. این انتخاب با استفاده از اطلاعات قبلی در مورد عدم قطعیت های سیستم های مشابه صورت می گیرد.

در این پروژه با استفاده از روش اول وزن عدم قطعیت های غیر پارامتری سیستم تعیین می شود.

مهم ترین منابع عدم قطعیت در سیستم قطار مغناطیسی عبارتند از:

الف) عدم قطعیت ناشی از دینامیکهای مدل نشده و نویز محرکه ها و سنسورها

به دلیل پیچیده بودن سیستم محرکه ها و سنسورها عدم امکان مدل سازی کامل آن ها، این نوع عدم قطعیت را می توان جزء بديهی ترین موارد موجود دانست. با توجه به محل وقوع این نوع عدم قطعیت ها، برای عدم قطعیت در محرکه مدل ضرب شونده ورودی و برای سنسورها مدل ضرب شونده خروجی در نظر گرفته می شود.

عدم قطعیت ورودی نشان دهنده تاخیر محرکه ها و المان ها، تلورانس تقویت کننده ها و اجزای موجود در سیستم است و به صورت زیر مدل می شود.

$$W_{in} = \frac{s+10}{\frac{1}{100}s+50} \quad (26-5)$$

این وزن به این معنی است که در فرکانس های پایین 20% عدم قطعیت در ورودی وجود دارد و در فرکانس تقریبی 50rad/sec عدم قطعیت حدود 100% است. در فرکانس های بالاتر، میزان عدم قطعیت از 100% هم بالاتر می رود.

بنابراین ماتریس عدم قطعیت ورودی سیستم با در نظر گرفتن تعداد ورودی ها به صورت زیر است:

$$W_{in} = w_{in} I_{2 \times 2} \quad (27-5)$$

عدم قطعیت خروجی نشان دهنده نویز سنسورهاست و در حالت کلی معمولا در فرکانس های بالا مطرح می شود چرا که نویز سنسورها با افزایش فرکانس شدیدتر می شود. این نوع عدم قطعیت را به صورت زیر در نظر می گیریم.

$$w_n = 0.01 \frac{1+s/0.01}{1+s/0.1} \quad (28-5)$$

بنابراین اگر γ متغیر خروجی باشد، متغیر اندازه گیری شده برابر است با

$$y_{meas} = y + w_n \eta_y \quad (29-5)$$

$$\|\eta_y\|_{\infty} \leq 1$$

با در نظر گرفتن تعداد خروجی ها ماتریس عدم قطعیت خروجی سیستم به صورت زیر است.

$$W_n = w_n I_{2 \times 2} \quad (30-5)$$

چنانچه در فصل ۳ (بخش ۳-۲-۲) بیان گردید تابع مکمل حساسیت، تابع انتقال سیستم از نویز به خروجی است و باید در فرکانس های بالا اندازه کوچکی داشته باشد. بنابراین چنان که کنترل کننده ای که با وزن عدم قطعیت فوق طراحی می شود خواسته مذکور را برآورده نسازد، باید مقدار w_n را تغییر داد.

(ب) عدم قطعیت ناشی از خطای مدل سازی محرکه ها و سنسورها

در نظر گرفتن خطاهای محرکه ها و سنسورها به عنوان اغتشاشات ورودی و خروجی در بهبود مشخصه های عملکردی فرآیند کمک قابل توجهی می کند چرا که عملکرد سیستم باید به گونه ای باشد که تاثیر خطاهای ابزاری، بایاس و وسایل اندازه گیری و... تا حد امکان کاهش پیدا کند. بر این اساس فرض می کنیم محرکه ها در ارسال فرامین کنترلی به سیستم و سنسورها در اندازه گیری های خود (که در فیدبک از آن ها استفاده می شود) خطاهایی به شرح زیر دارند.

سطوح سیگنال محرکه ها به این شکل وزن دهی می شوند

$$e_{act} = \begin{bmatrix} e_u \\ e_{w_d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u \\ 2w_d \end{bmatrix} \quad (31-5)$$

و یا به صورت ماتریسی

$$e_{act} = w_{act} \begin{bmatrix} u \\ w_d \end{bmatrix}, \quad w_{act} = 2 \quad (32-5)$$

به این ترتیب داریم

$$W_{act} = w_{act} I_{2 \times 2} \quad (33-5)$$

خطای مربوط به سنسورهای شتاب و شکاف نیز که در برگیرنده خطاهای ساختمان درونی آنها، بایاس اندازه گیری و ... است به این شکل مدل می شود.

$$e_{perf} = 10 \frac{1+s}{1+s/0.01} \begin{bmatrix} \ddot{v}_s \\ h-h_0 \end{bmatrix} \quad (34-5)$$

در نتیجه داریم

$$w_{perf} = 10 \frac{1+s}{1+s/0.01} \quad (35-5)$$

و یا

$$W_{perf} = w_{perf} I_{2 \times 2} \quad (36-5)$$

تابع حساسیت همانگونه که در بخش ۳-۲-۲ معرفی شد، تابع انتقال سیستم از اغتشاش به خروجی است (اغتشاشی که در خروجی مدل می شود) و باید در فرکانس های پایین اندازه کوچکی داشته باشد. (با توجه به تعریف تابع حساسیت این تابع عکس مقدار اغتشاش عملکردی است و چنانچه اغتشاش را به صورت نرمالیزه در نظر بگیریم خواهیم داشت: $\delta \leq \frac{1}{W_{perf}}$). چنانچه کنترل کننده ای که با وزن عدم قطعیت عملکردی w_{perf} طراحی می شود خواسته فوق (تابع حساسیت کوچک) را برآورده نسازد باید مقدار w_{perf} را تغییر داد.

(ج) عدم قطعیت ناشی از اغتشاشات بیرونی سیستم

گذشته از عدم قطعیت هایی که در بالا ذکر شد وجود اغتشاشات در سیستم نیز از جمله مسائلی است که از اهمیت ویژه ای برخوردار می باشد. این اغتشاشات در صورتی که کوچک باشند احتمالاً موجب تغییر مشخصات عملکردی از حالت مطلوب خواهد شد. در صورتی که اغتشاشات بیش از حد معمول بزرگ باشند مسأله پیچیده تر خواهد بود. در این حالت با توجه به طبیعت غیرخطی اکثر سیستم ها مدل های خطی دیگر معتبر نمی باشند لذا سیستم کنترل کننده عملکرد مطلوب را از دست داده و حتی گاه ممکن است ناپایدار گردد. بنابراین در مسائل کنترل مقاوم باید به اغتشاشات نیز به عنوان عوامل تغییر عملکرد یا بروز ناپایداری توجه ویژه ای داشت.

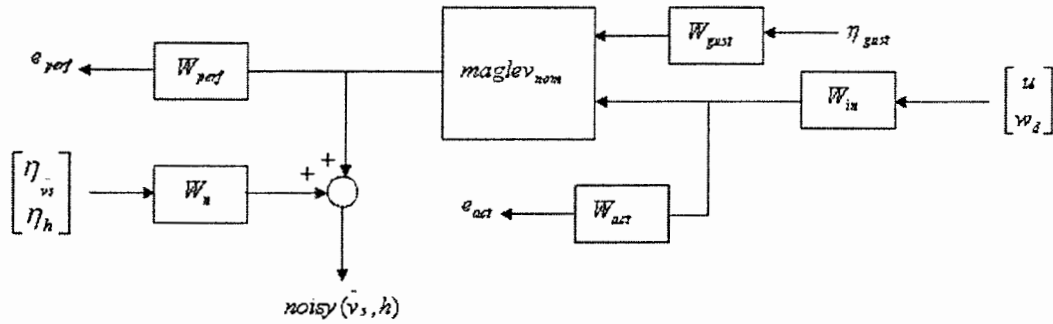
اغتشاشاتی که از بیرون به سیستم وارد می شود می تواند عوامل متعددی داشته باشد اما در این جا، صرفاً اثر تندباد^۱ را مدل می کنیم.

اگر اثر تندباد را بر روی حرکت قطار مغناطیسی به صورت یک تابع ضربه در نظر بگیریم و بعد از تعدیل این اثر، سرعت باد را ثابت فرض نماییم (که در این صورت با یک تابع پله شیفته یافته مدل می شود) می توان مدل نهایی مربوط به وزن تندباد را به این شکل حساب آورد:

¹ wind gust

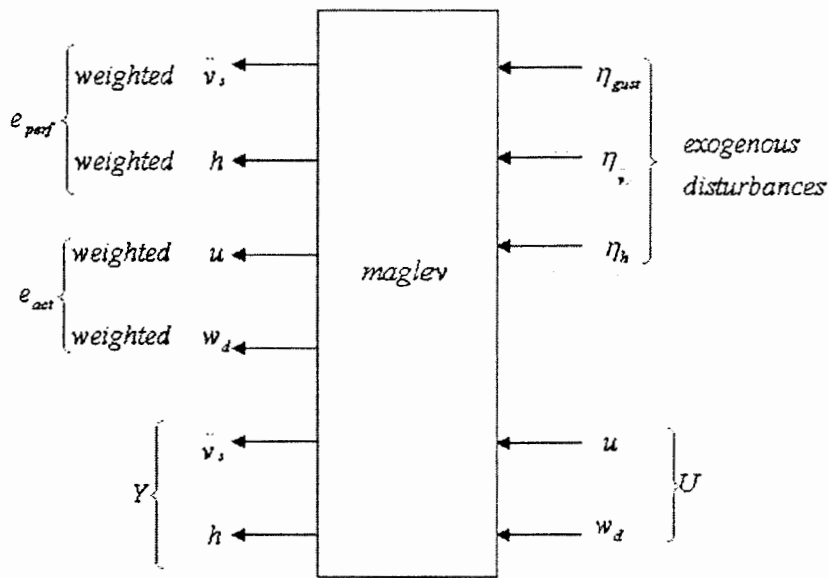
$$W_{gust} = \frac{1+s/10}{s+1} \quad (37-5)$$

با در نظر گرفتن کلیه عدم قطعیت های فوق ساختار ارتباطات داخلی سیستم به این شکل مدل می شود.



شکل ۵-۲۶- ساختار ارتباطات داخلی سیستم

به این ترتیب دیاگرام شماتیکی سیستم قطار مغناطیسی به شکل زیر خواهد بود.



شکل ۵-۲۷- دیاگرام شماتیکی سیستم قطار مغناطیسی با عدم قطعیت های غیرپارامتری

اکنون بعد از تعیین مدل کامل سیستم (مدل نامی به اضافه عدم قطعیتها و اغتشاشات) به طراحی کنترل کننده می پردازیم.

در ابتدا کنترل کننده LQG را برای سیستم طراحی می کنیم. مرتبه آن در این حالت برابر ۱۲ خواهد بود.

باید توجه داشت که مدل نامی سیستم مرتبه ۵ داشته و مجموعه عدم قطعیت ها نیز مرتبه ۷ را به سیستم اضافه می کند.

پایداری نامی سیستم حلقه بسته را با در نظر گرفتن قطبهای سیستم حلقه بسته مورد بررسی قرار خواهیم داد. از آنجا که تمام قطبها در سمت چپ محور موهومی قرار دارند سیستم حلقه بسته از پایداری نامی برخوردار خواهد بود.

$1.0e+002 *$

-2.5012

-0.0281 + 0.3987i

-0.0281 - 0.3987i

-0.0181 + 0.4046i

-0.0181 - 0.4046i

-0.0106 + 0.3815i

-0.0106 - 0.3815i

-2.5000 + 0.0000i

-2.5000 - 0.0000i

-2.5000

-0.0000 + 0.3782i

-0.0000 - 0.3782i

-0.0465

-0.0464

-0.0165

-0.0001 + 0.0014i

-0.0001 - 0.0014i

-0.0001 + 0.0014i

-0.0001 - 0.0014i

-0.0167

-0.0010

-0.0010

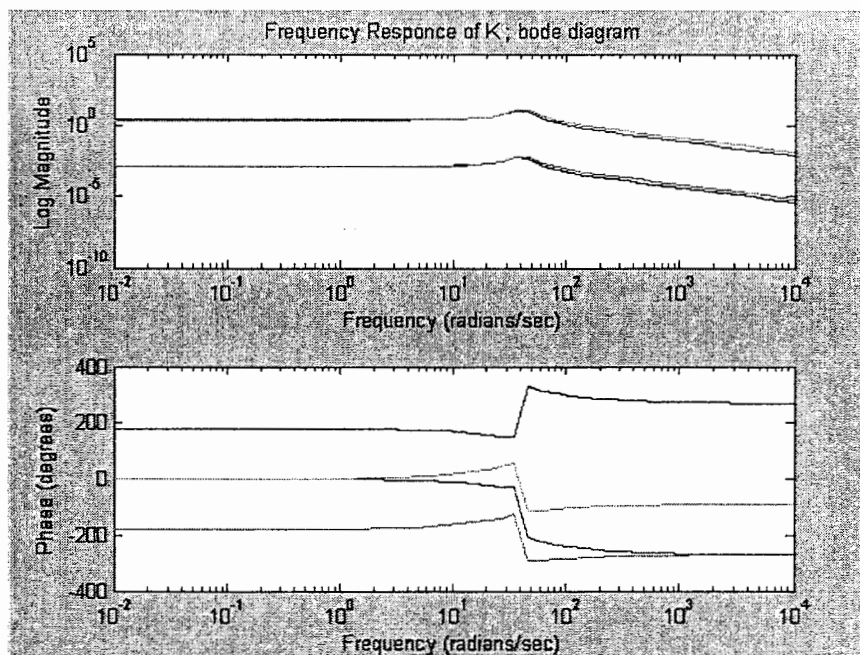
-0.0010

-0.0010

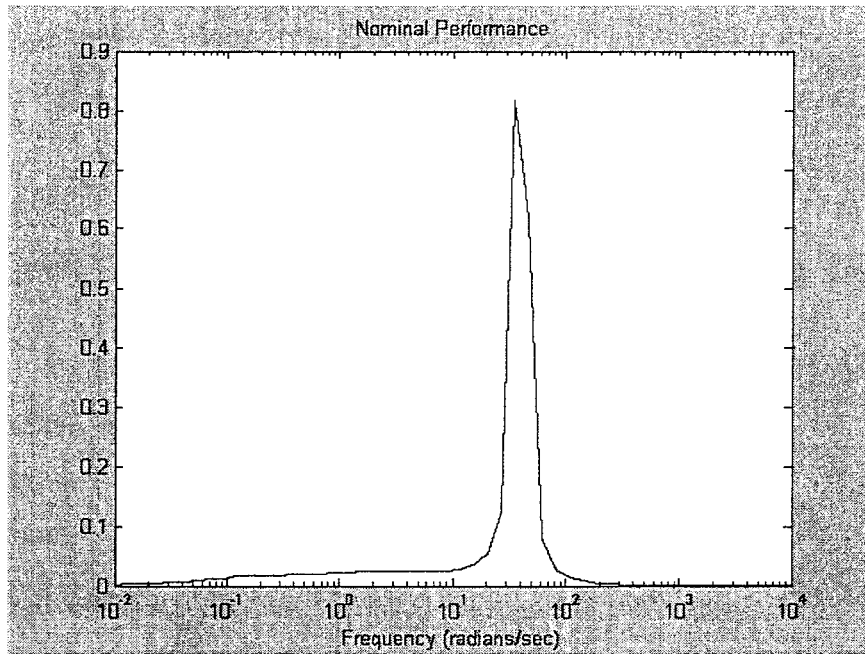
برای هر یک از تعاریف پایداری مقاوم، عملکرد نامی و عملکرد مقاوم (قضایای بخش ۳-۶-۵) منحنی های مربوطه را رسم می کنیم. در هر مورد که مقدار بیک منحنی ها کوچکتر از ۱ باشد می توان نتیجه گرفت که به مشخصه مطلوب دست یافته ایم.

دیاگرام بد کنترل کننده، تستهای عملکرد نامی، پایداری مقاوم و عملکرد مقاوم به ترتیب در شکل های ۵-۲۸ تا ۵-۳۱ آمده است.

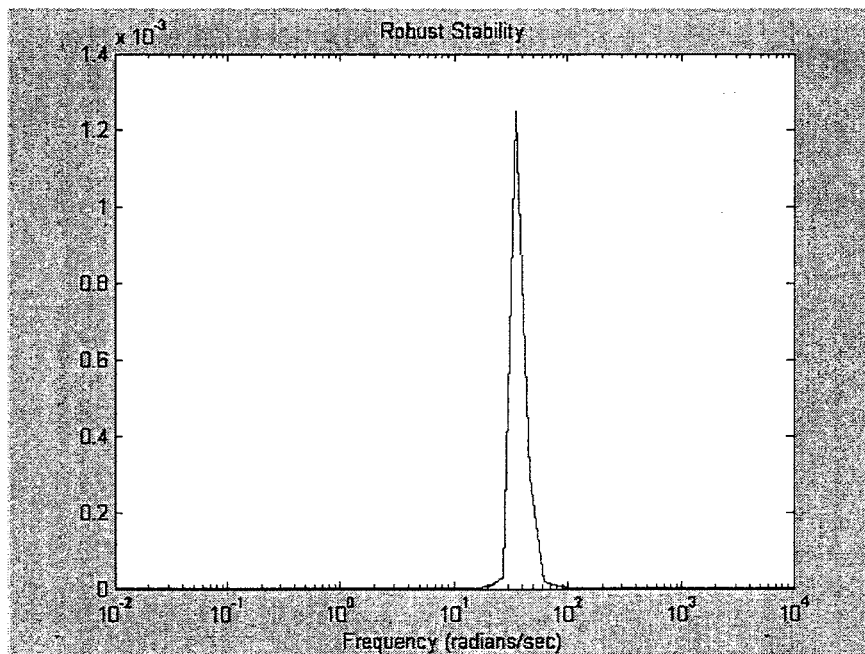
سیستم مورد مطالعه با این نوع کنترل کننده از عملکرد نامی مناسب و پایداری مقاوم برخوردار بوده ولی مشخصه عملکرد مقاوم را برآورده نمی سازد.



شکل ۵-۲۸- دیاگرام بد کنترل کننده LQG برای سیستم با عدم قطعیت های غیر پارامتری

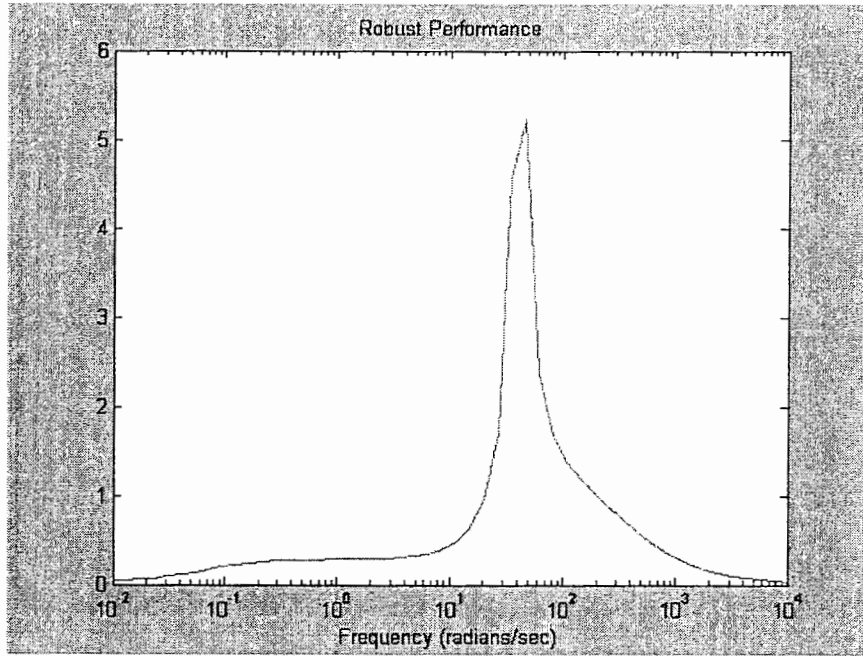


شکل ۵-۲۹- تست عملکرد نامی سیستم حلقه بسته با کنترل کننده LQG برای سیستم با عدم قطعیت‌های غیرپارامتری



شکل ۵-۳۰- تست پایداری مقاوم سیستم حلقه بسته با کنترل کننده LQG برای سیستم با عدم قطعیت‌های

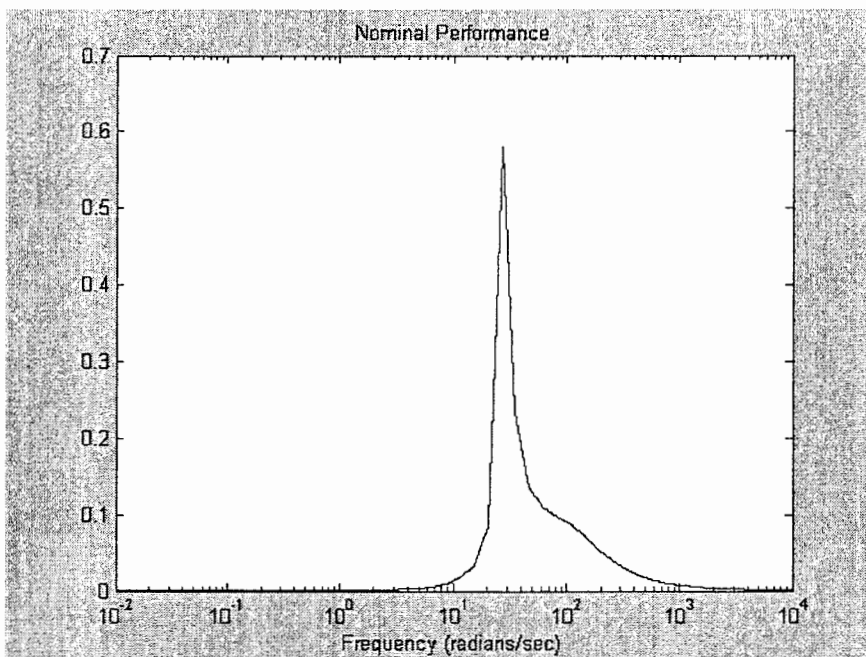
غیرپارامتری



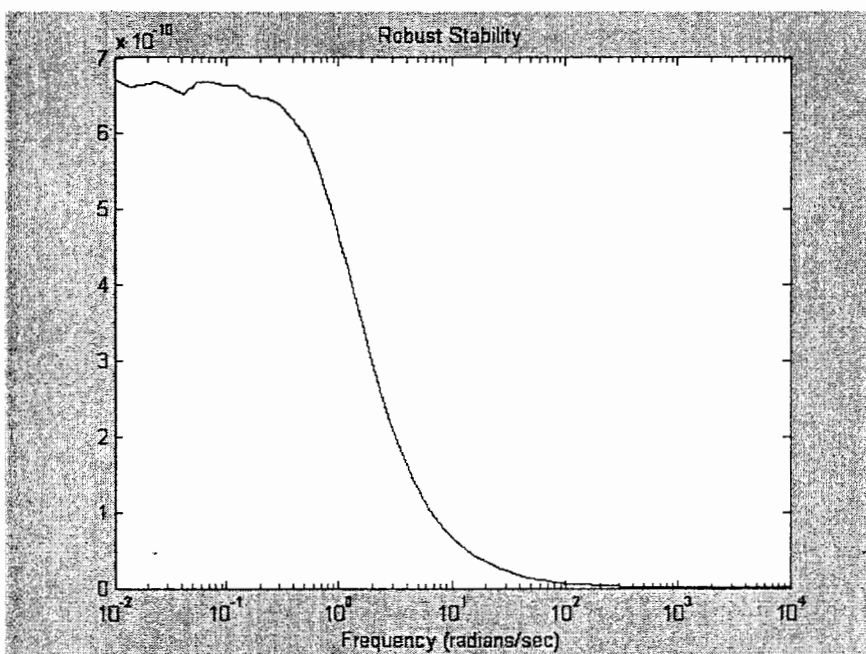
شکل ۵-۳۱- تست عملکرد مقاوم سیستم حلقه بسته با کنترل کننده LQG برای سیستم با عدم قطعیت‌های غیرپارامتری

مرحله بعد شامل طراحی کنترل کننده H_∞ است. نتایج تحلیل فرکانسی به همان ترتیبی که در مورد کنترل کننده LQG ذکر شده در شکل های ۵-۳۲ تا ۵-۳۵ آورده شده است. همچنین پایداری نامی سیستم حلقه بسته با قطبهای آن مشخص می شود و چون فاصله بین قطبها زیاد است و دقت نرم افزار matlab محدود، قطبها در بردار خروجی دستور `spoles` به درستی نمایش داده نمی شود. به همین دلیل بردار صفرها و قطبها (خروجی دستورات `spoles` و `szeros`) را برای ایجاد نمایش تابع تبدیل سیستم (با استفاده از دستور `zpk`) به کار گرفته و سپس از روی تابع تبدیل قطبها را به دست می آوریم. کنترل کننده در این حالت نیز مرتبه ۱۲ دارد.

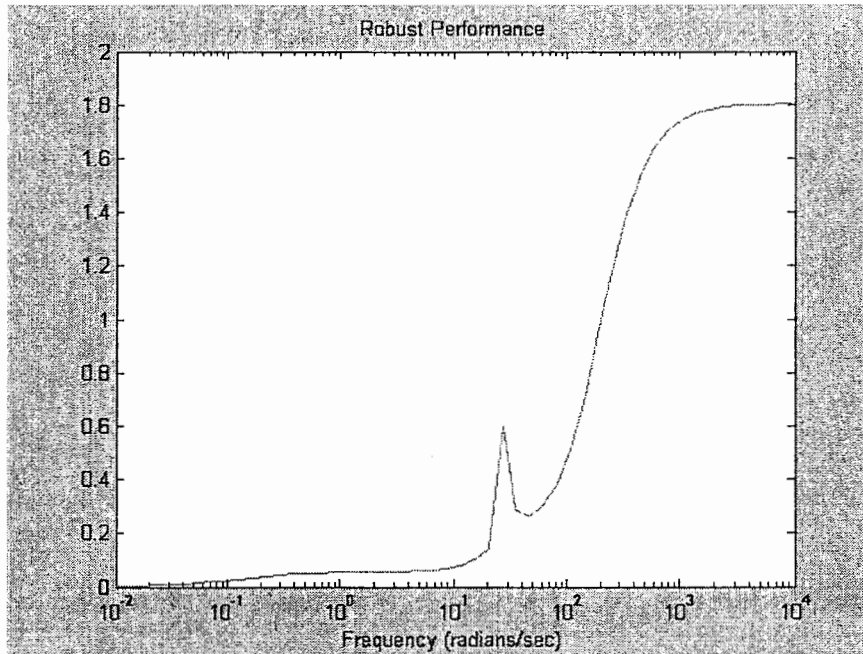
-4e007
 -4e007
 -251.8
 -250
 -250
 -250
 -4.615



شکل ۵-۳۳- تست عملکرد نامی سیستم حلقه بسته با کنترل کننده H_∞ برای سیستم با عدم قطعیت‌های غیرپارامتری



شکل ۵-۳۴- تست پایداری مقاوم سیستم حلقه بسته با کنترل کننده H_∞ برای سیستم با عدم قطعیت‌های غیرپارامتری



شکل ۵-۳۵- تست عملکرد مقاوم سیستم حلقه بسته با کنترل کننده H_∞ برای سیستم با عدم قطعیت‌های غیرپارامتری در این حالت نیز سیستم حلقه بسته مشخصه های پایداری نامی، عملکرد نامی و پایداری مقاوم را به خوبی برقرار می سازد اما عملکرد مقاوم ندارد.

در نهایت کنترل کننده μ را برای سیستم طراحی خواهیم نمود. با استفاده از روش تکرار $D-K$ و در تکرار دوم به منحنی های ۵-۳۶ تا ۵-۳۹ برای دیاگرام بد کنترل کننده، تست عملکرد نامی و تست پایداری و عملکرد مقاوم خواهیم رسید. با توجه به این که مقدار پیک سه منحنی آخر کوچکتر از ۱ است این نوع کنترل کننده باعث می شود که سیستم حلقه بسته شرایط عملکرد نامی، پایداری مقاوم و عملکرد مقاوم را به خوبی برقرار نماید. پایداری نامی سیستم حلقه بسته را نیز مانند قبل مورد بررسی قرار می دهیم. با توجه به سمت چپ محور موهومی قرار گرفتن کلیه قطبها (به صورتی که در زیر آمده است) می توان گفت سیستم حلقه بسته از پایداری نامی نیز برخوردار است.

-4e007

-4e007

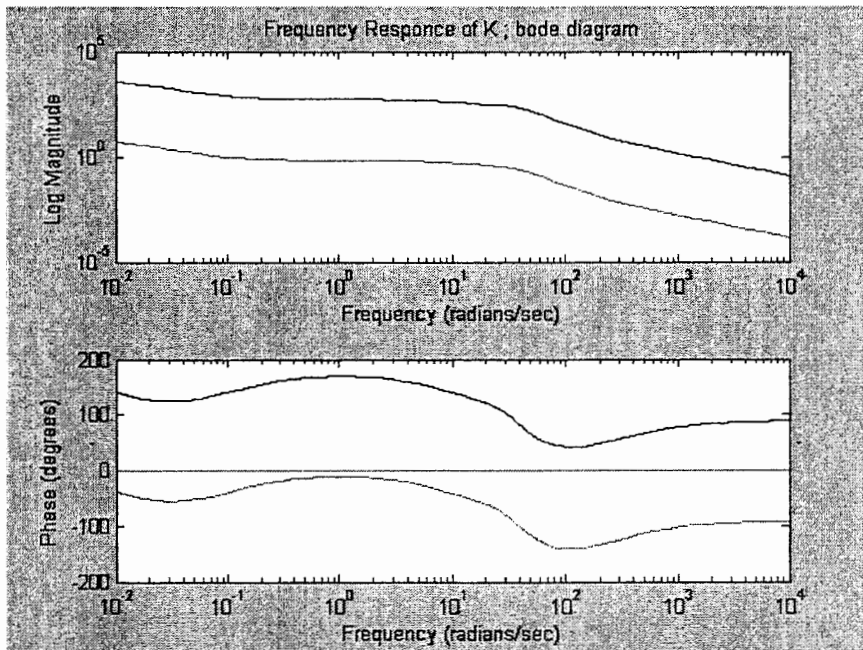
-250

-250

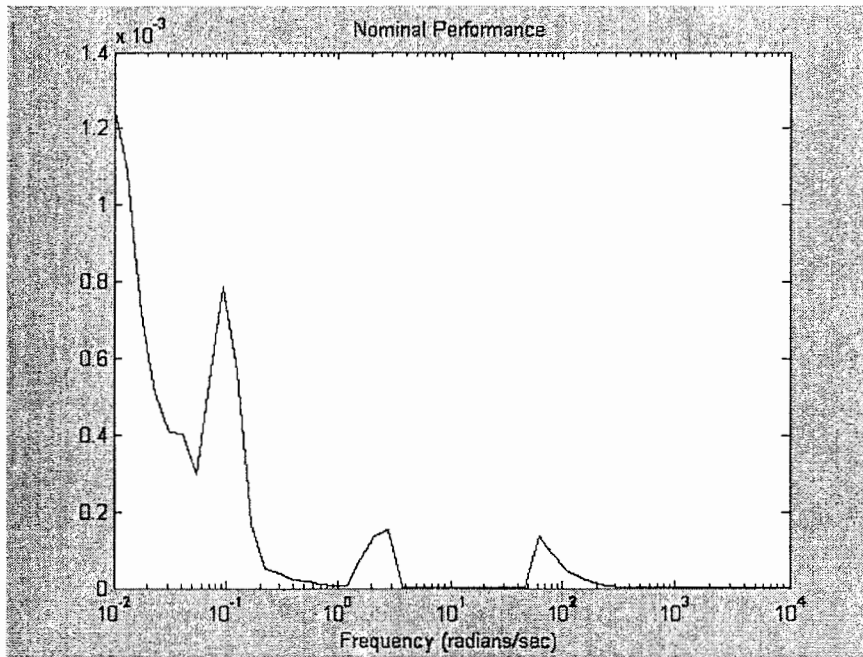
-10

-9.975

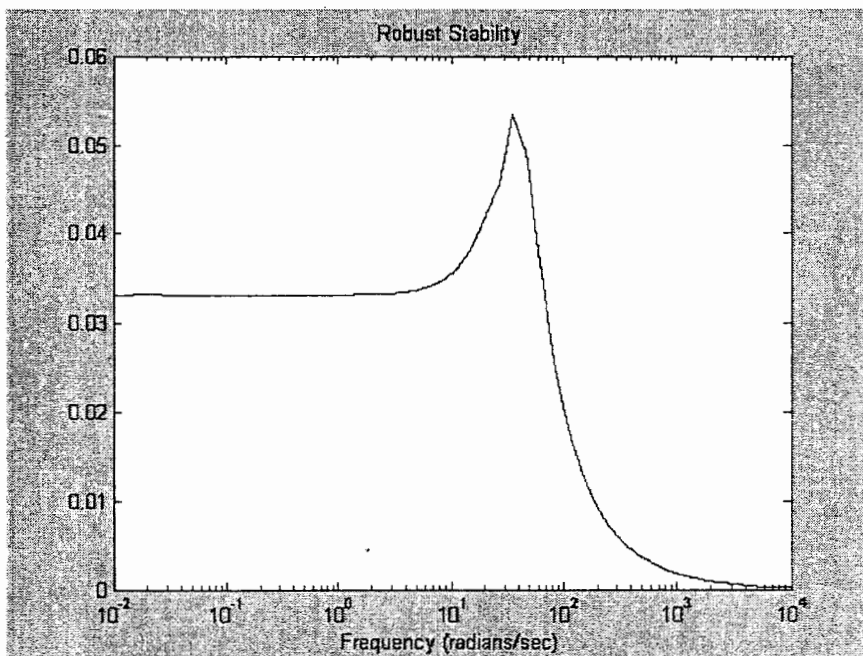
- 4.653
- 4.584
- 1
- 1
- 1
- 1
- 0.1
- 0.1
- 0.014
- 0.01
- 0.01
- 0.005987
- 0.0100+0.0008i
- 0.0100-0.0008i
- 0.9785+28.7079i
- 0.9785-28.7079i
- 21.9000+36.1855i
- 21.9000-36.1855i



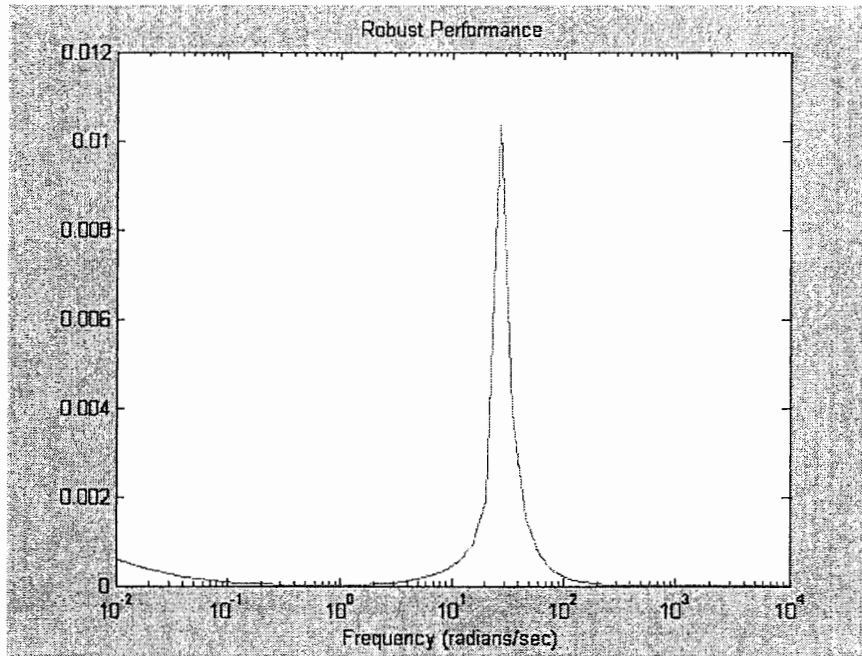
شکل ۵-۳۶- دیاگرام بد کنترل کننده μ برای سیستم با عدم قطعیت‌های غیرپارامتری



شکل ۵-۳۷- تست عملکرد نامی سیستم حلقه بسته با کنترل کننده μ برای سیستم با عدم قطعیت‌های غیرپارامتری



شکل ۵-۳۸- تست پایداری مقاوم سیستم حلقه بسته با کنترل کننده μ برای سیستم با عدم قطعیت‌های غیرپارامتری



شکل ۵-۳۹- تست عملکرد مقاوم سیستم حلقه بسته با کنترل کننده μ برای سیستم با عدم قطعیت‌های غیر پارامتری

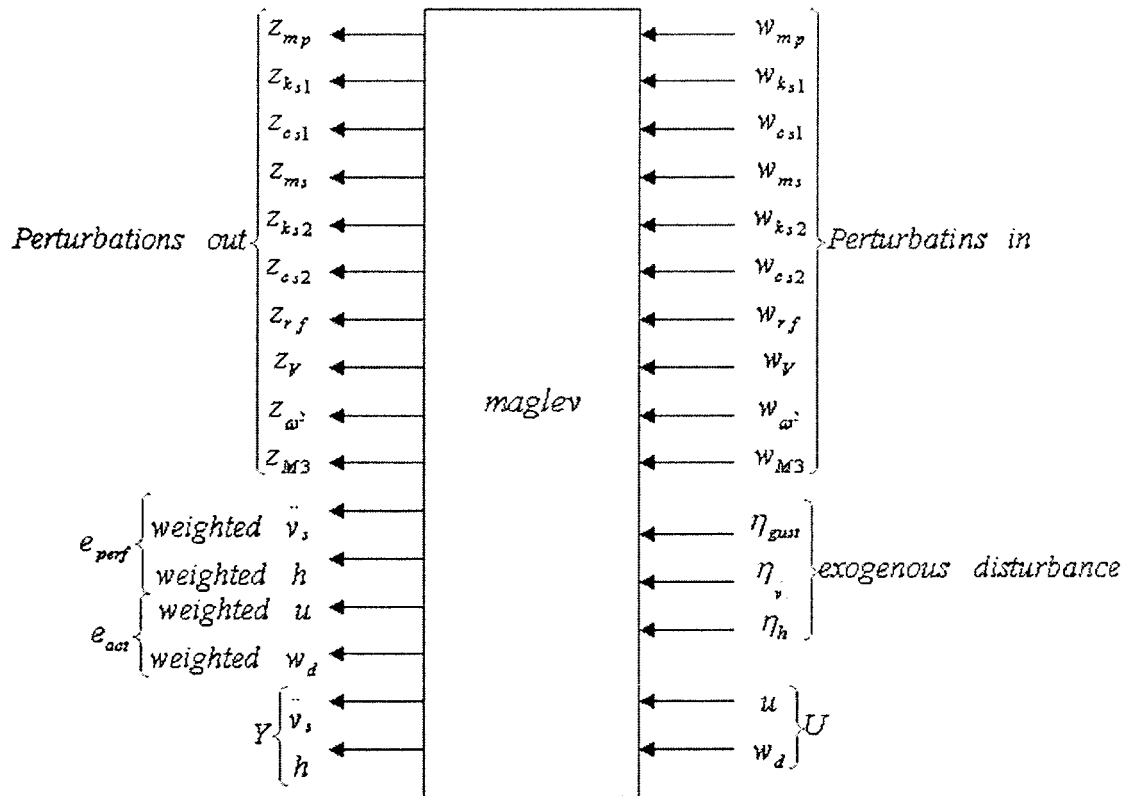
۵-۳-۳ عدم قطعیت های پارامتری و غیر پارامتری و طراحی کنترل کننده برای سیستم با

هر دو نوع عدم قطعیت

در این مرحله کلیه عدم قطعیت هایی را که تاکنون معرفی شده اند (در بخشهای ۵-۳-۱ و ۵-۳-۲) یک جا و در یک سیستم واحد در نظر می گیریم.

لازم به ذکر است که در نظر گرفتن عدم قطعیت های پارامتری به نحوی بیانگر عدم قطعیت ناشی از خطی سازی مدل می باشد. چرا که خطی سازی معادلات به دو دلیل عمده عدم قطعیت وارد سیستم می کند: حذف جملات با مرتبه های بالا و احتمال تغییر نقطه کار (که در این صورت مدل خطی تغییر پیدا می کند و مدل پیشین با نقطه کار اولیه معتبر نخواهد بود). واقعیت امر آن است که تغییر در نقطه کار اثر بیشتری بر این نوع عدم قطعیت دارد. از آنجا که در عدم قطعیت های پارامتری محدوده وسیعی برای تغییرات اکثر پارامترها (ویا بعبارت بهتر تمام پارامترهایی که امکان تغییر در مقدار آنها وجود دارد) منظور گردیده است، عدم قطعیت ناشی از تغییر در نقطه کار تا حدودی پوشش داده می شود.

با در نظر گرفتن تمامی عدم قطعیت ها در سیستم دیاگرام شماتیکی زیر را خواهیم داشت:

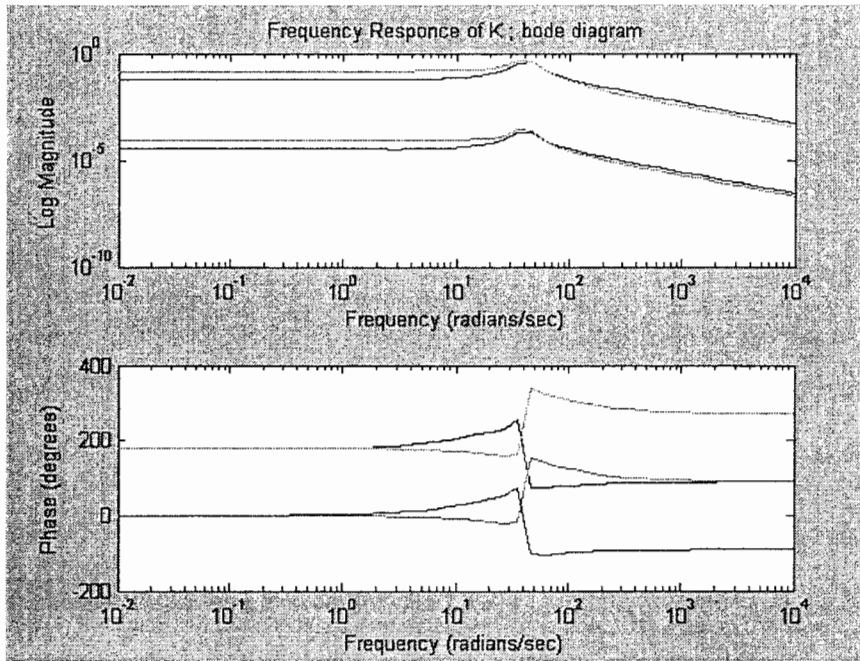


شکل ۵-۴۰- دیاگرام شماتیکی سیستم قطار مغناطیسی با عدم قطعیت های پارامتری و غیرپارامتری

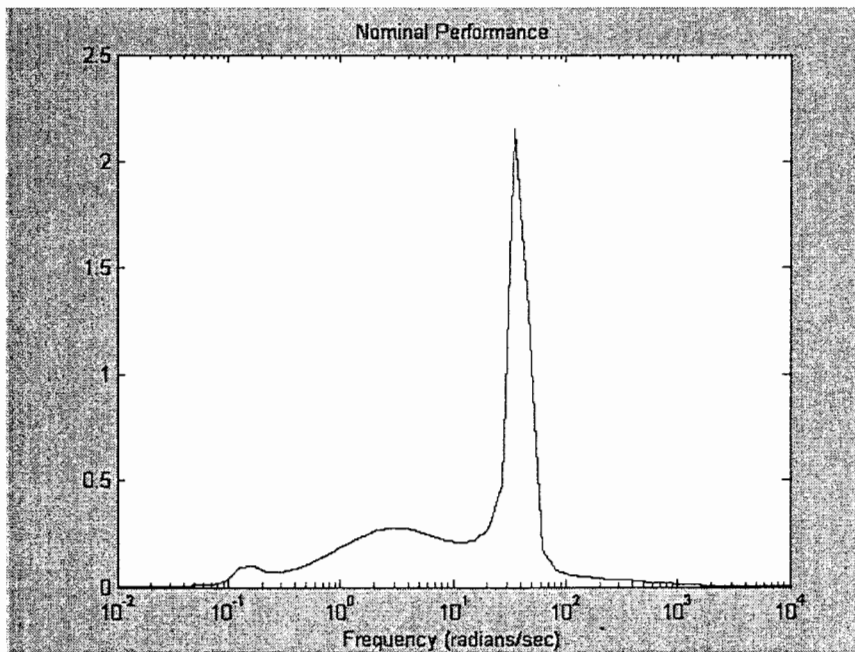
طراحی کنترل کننده برای سیستم فوق مرحله بعدی است که در اینجا به ذکر نتایج خروجی آن می پردازیم.

با کنترل کننده LQG سیستم حلقه بسته تنها از پایداری نامی برخوردار بوده اما شرایط عملکرد نامی، پایداری و عملکرد مقاوم را برقرار نخواهد ساخت. دیاگرام بد کنترل کننده، تست های عملکرد نامی،

پایداری مقاوم و عملکرد مقاوم در شکل های ۵-۴۱ تا ۵-۴۴ آورده شده است.

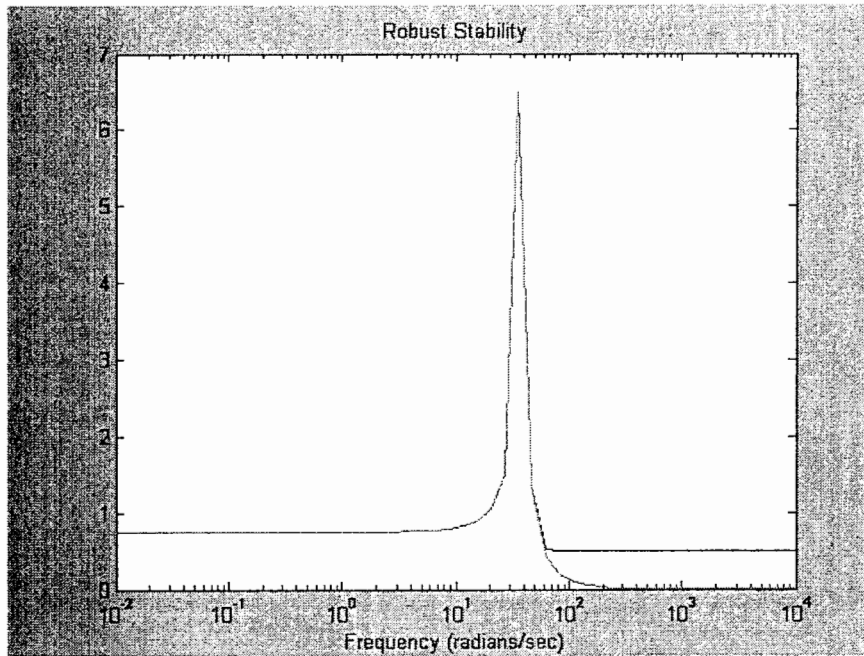


شکل ۵-۴۱- دیاگرام شماتیکی سیستم قطار مغناطیسی با عدم قطعیت های پارامتری و غیرپارامتری

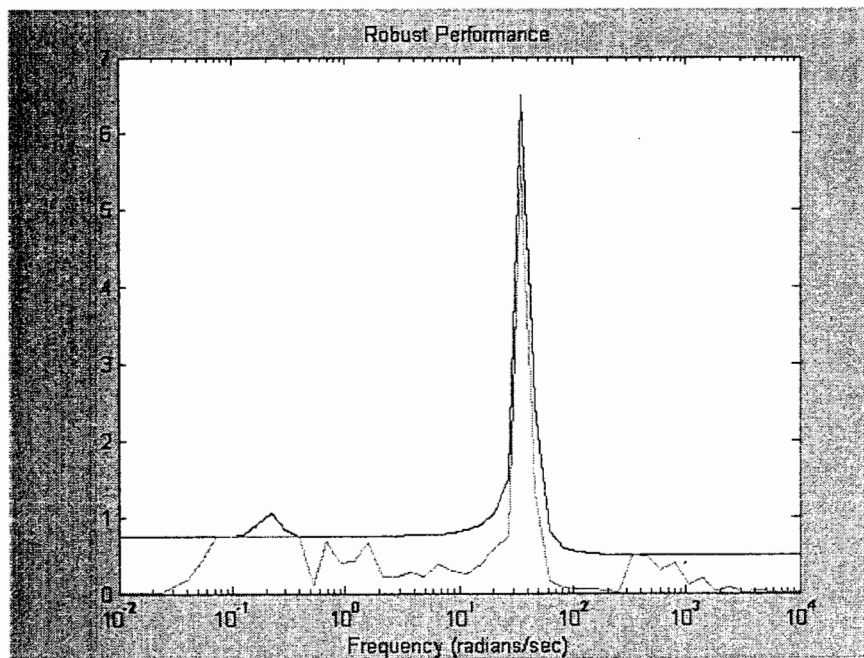


شکل ۵-۴۲- تست عملکرد نامی سیستم حلقه بسته با کنترل کننده LQG برای سیستم با عدم قطعیت های پارامتری

و غیرپارامتری

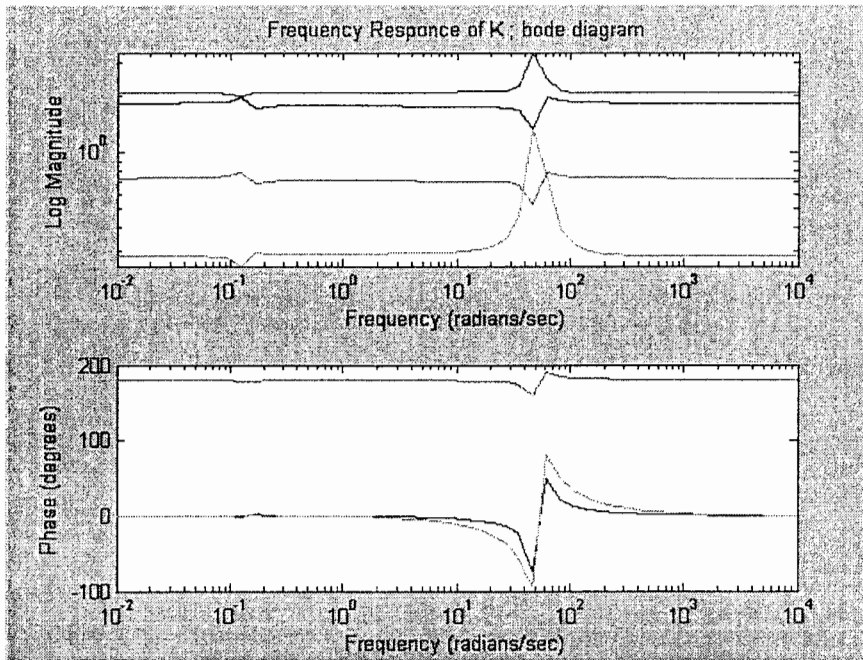


شکل ۵-۴۳- تست پایداری مقاوم سیستم حلقه بسته با کنترل کننده LQG برای سیستم با عدم قطعیت های پارامتری و غیرپارامتری

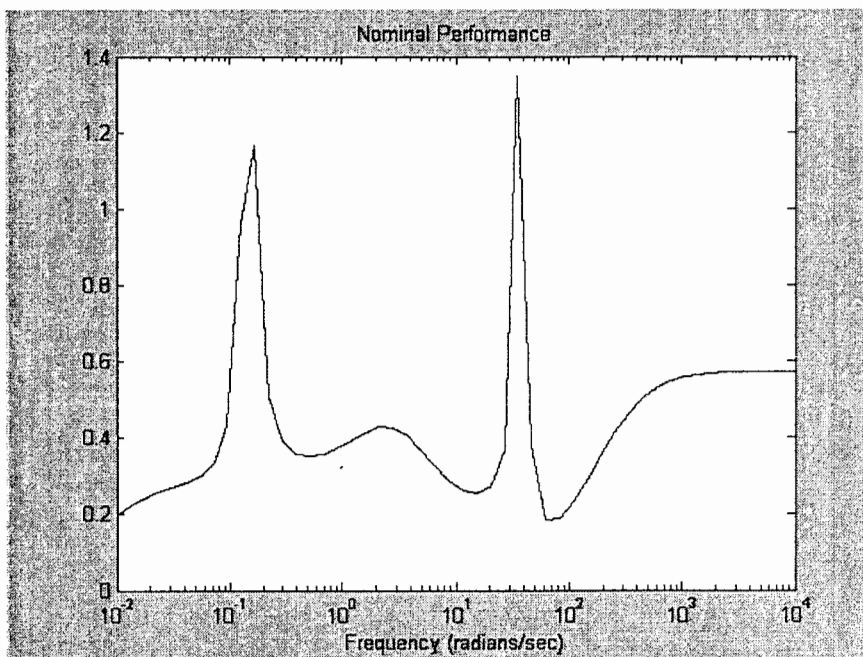


شکل ۵-۴۴- تست عملکرد مقاوم سیستم حلقه بسته با کنترل کننده LQG برای سیستم با عدم قطعیت های پارامتری و غیرپارامتری

سیستم حلقه بسته با کنترل کننده H_∞ نیز پایداری نامی داشته اما عملکرد نامی، پایداری و عملکرد مقاوم ندارد. منحنی های مربوطه نیز در شکل های ۴۵-۵ تا ۴۸-۵ آورده شده است.

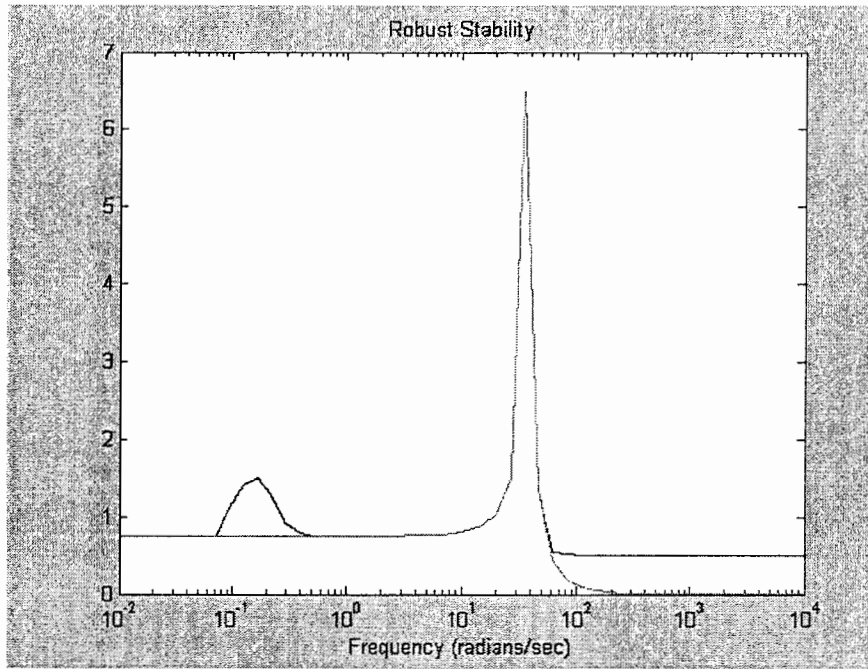


شکل ۴۵-۵- دیاگرام بد کنترل کننده H_∞ برای سیستم با عدم قطعیت های پارامتری و غیر پارامتری

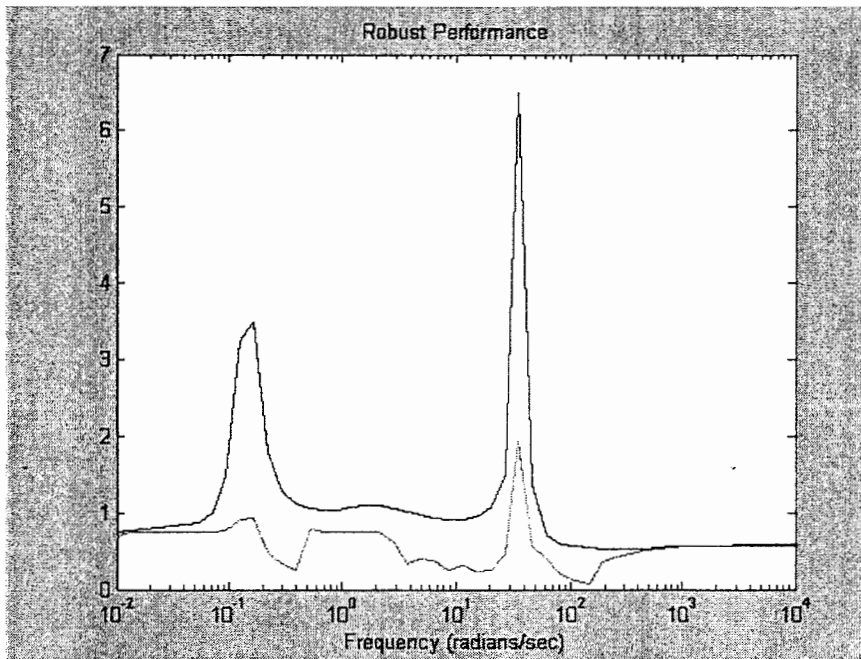


شکل ۴۶-۵- تست عملکرد نامی سیستم حلقه بسته با کنترل کننده H_∞ برای سیستم با عدم قطعیت های

پارامتری و غیر پارامتری



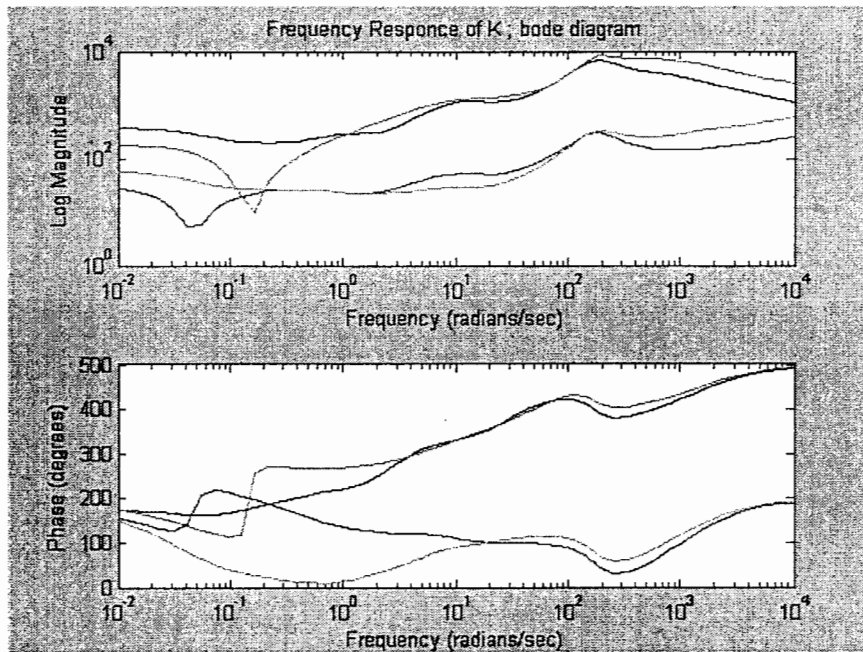
شکل ۵-۴۷- تست پایداری مقاوم سیستم حلقه بسته با کنترل کننده H_∞ برای سیستم با عدم قطعیت های پارامتری و غیرپارامتری



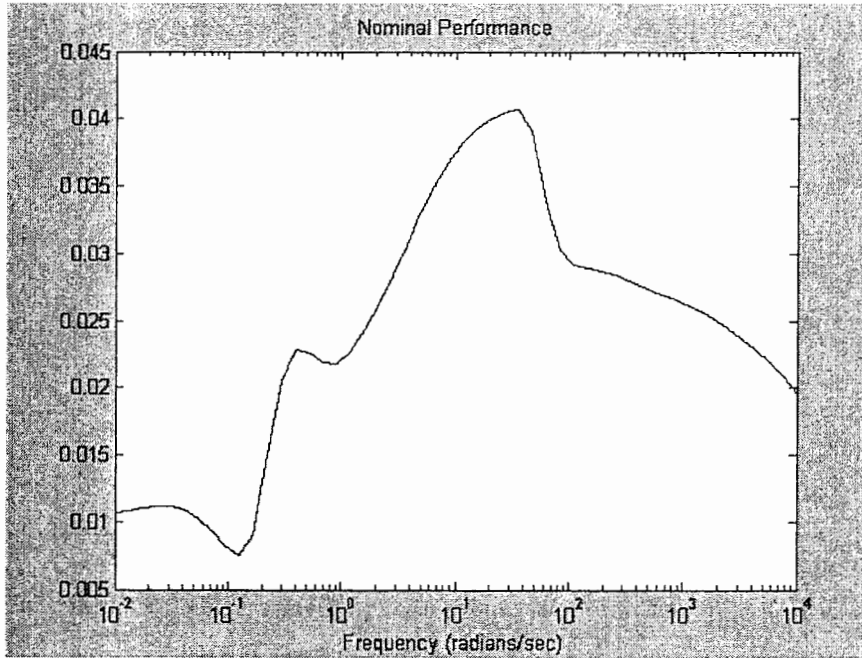
شکل ۵-۴۸- تست عملکرد مقاوم سیستم حلقه بسته با کنترل کننده H_∞ برای سیستم با عدم قطعیت های پارامتری و غیرپارامتری

در آخرین مرحله نیز به طراحی کنترل کننده μ خواهیم پرداخت. در این مورد در تکرار چهارم به نتایج زیر خواهیم رسید.

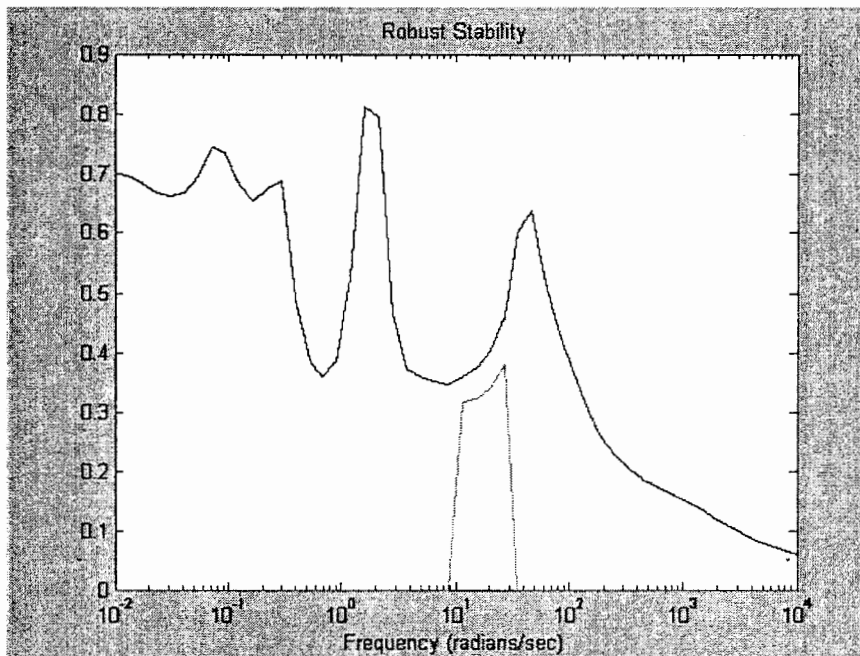
به دلیل غیر مثبت بودن قسمت حقیقی کلیه قطب های حلقه بسته، سیستم از پایداری نامی برخوردار است. منحنی مربوط به دیاگرام بد کنترل کننده نیز در شکل ۵-۴۹ آورده شده است. مطابق با شکل های ۵-۵۰ تا ۵-۵۲ با توجه به این که مقدار پیک منحنی ها کوچکتر از ۱ است سیستم حلقه بسته از عملکرد نامی، پایداری مقاوم و عملکرد مقاوم برخوردار خواهد بود.



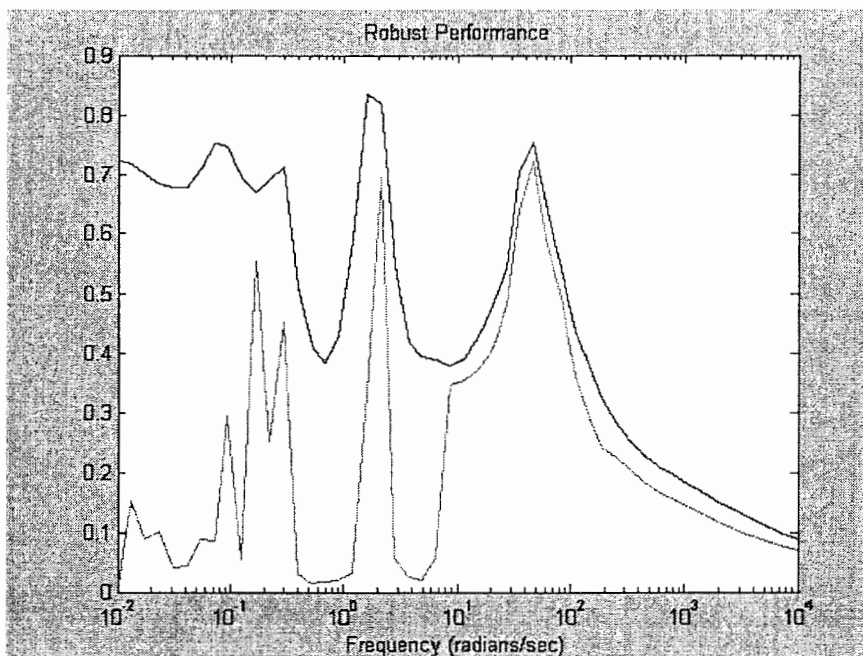
شکل ۵-۴۹- دیاگرام بد کنترل کننده μ برای سیستم با عدم قطعیت های پارامتری و غیر پارامتری



شکل ۵-۵-۰- تست عملکرد نامی سیستم حلقه بسته با کنترل کننده μ برای سیستم با عدم قطعیت های پارامتری و غیرپارامتری



شکل ۵-۵-۱- تست پایداری مقاوم سیستم حلقه بسته با کنترل کننده μ برای سیستم با عدم قطعیت های پارامتری و غیرپارامتری



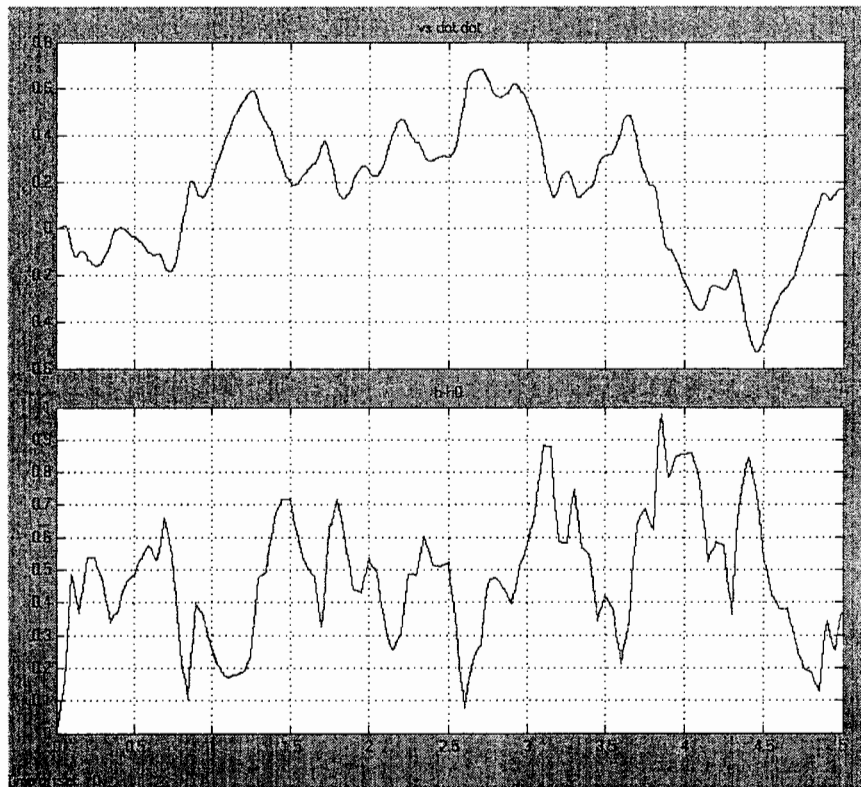
شکل ۵-۲- تست عملکرد مقاوم سیستم حلقه بسته با کنترل کننده μ برای سیستم با عدم قطعیت های پارامتری و غیرپارامتری

به این ترتیب با در نظر گرفتن کلیه عدم قطعیت های پارامتری و غیرپارامتری برای سیستم قطار مغناطیسی تنها کنترل کننده ای که علاوه بر برقراری شرایط پایداری و عملکرد نامی، پایداری و عملکرد مقاوم را نیز برقرار می سازد کنترل کننده طراحی شده به روش μ می باشد.

۵-۴ شبیه سازی در حوزه زمان

در بخش قبل تحلیل های فرکانس های سیستم حلقه بسته با سه نوع کنترل کننده LQG ، H_∞ و μ در سه حالت مختلف با در نظر گرفتن عدم قطعیت های سیستم به صورت پارامتری، غیرپارامتری و در نهایت هر دو نوع عدم قطعیت مورد بررسی قرار گرفت. با توجه به حجم بالای تحلیل های فرکانسی انجام شده و نظر به این که نیازی به تایید هماهنگی و همخوانی تحلیل های فرکانسی و زمانی وجود ندارد، در این بخش تنها به بررسی پاسخهای زمانی سیستم حلقه بسته با کنترل کننده های طراحی شده در کامل ترین حالت (سیستم مورد بحث با هر دو نوع عدم قطعیت پارامتری و غیر پارامتری) خواهیم پرداخت.

برای کنترل کننده LQG خروجی های سیستم (شتاب عمودی بدنه واگن و اختلاف هوایی بین قطار و ریل از مقدار نامی) به ورودی ولتاژ پله در حوزه زمان به شکل زیر می باشند.



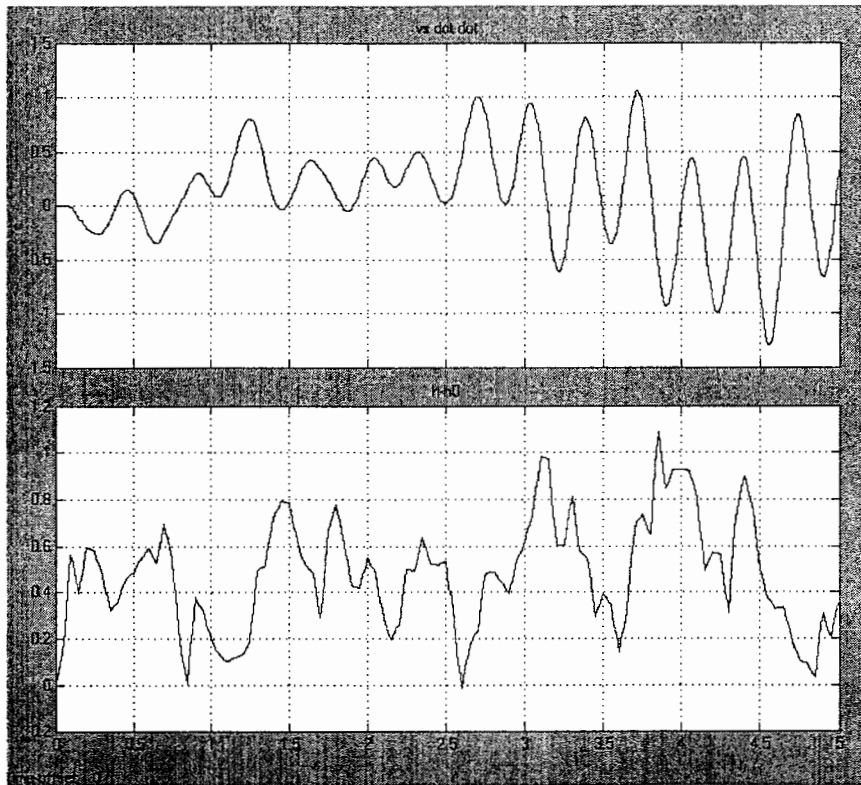
شکل ۵-۳-۵- پاسخ زمانی سیستم حلقه بسته با کنترل کننده LQG در شرایط نامی

نکته قابل توجه این است که مطابق با استاندارد ISO 2631 ماکزیمم شتاب RMS مجاز بدنه واگن به شرط برهم نخوردن وضعیت آسودگی و راحتی مسافران بین $0.04g$ تا $0.1g$ ($0.39 \frac{m}{s^2}$) تا $0.98 \frac{m}{s^2}$ می باشد.

نکته دیگر اینکه با مقدار شکاف نامی ۱۰ میلیمتر، حداکثر انحراف ۱ میلیمتر از این مقدار قابل توجه بوده و با چنین خروجی و نیز در صورت برقراری شرط پیشین می توان نتیجه گرفت کنترل کننده مناسبی طراحی شده است.

جهت بررسی میزان مقاوم بودن کنترل کننده طراحی شده به عنوان نمونه تغییر در پارامترهای سرعت وسیله نقلیه و وزن بدنه واگن را اعمال نموده و خروجی ها را مورد ملاحظه قرار می دهیم.

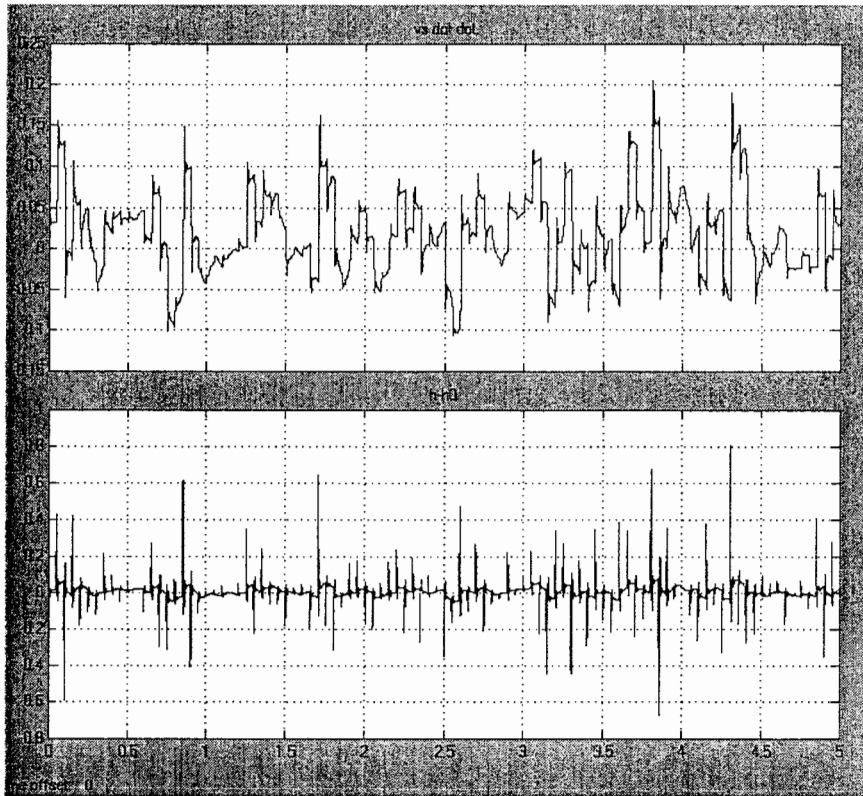
با افزایش سرعت وسیله نقلیه به اندازه ۲۵ درصد (از 400 km/h تا 500km/h) و با افزایش وزن بدنه واگن به اندازه ۵۰ درصد (از 500kg تا 750kg) پاسخ های زیر را خواهیم داشت.



شکل ۵-۵-۵- پاسخ زمانی سیستم حلقه بسته با کنترل کننده LQG در حضور برخی عدم قطعیت ها

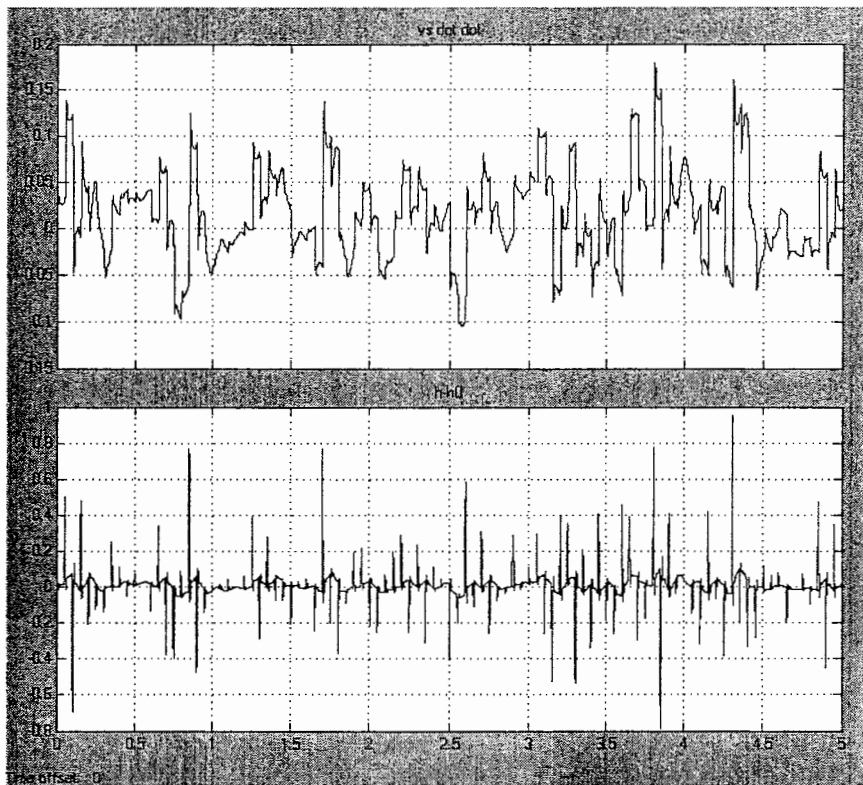
همانگونه که ملاحظه می شود در این شرایط هر دو خروجی شرایط مناسب خود را از دست می دهند.

در مورد کنترل کننده H_{∞} نیز روند فوق را تکرار می کنیم. خروجیهای سیستم در شرایط نامی به شکل زیر هستند.

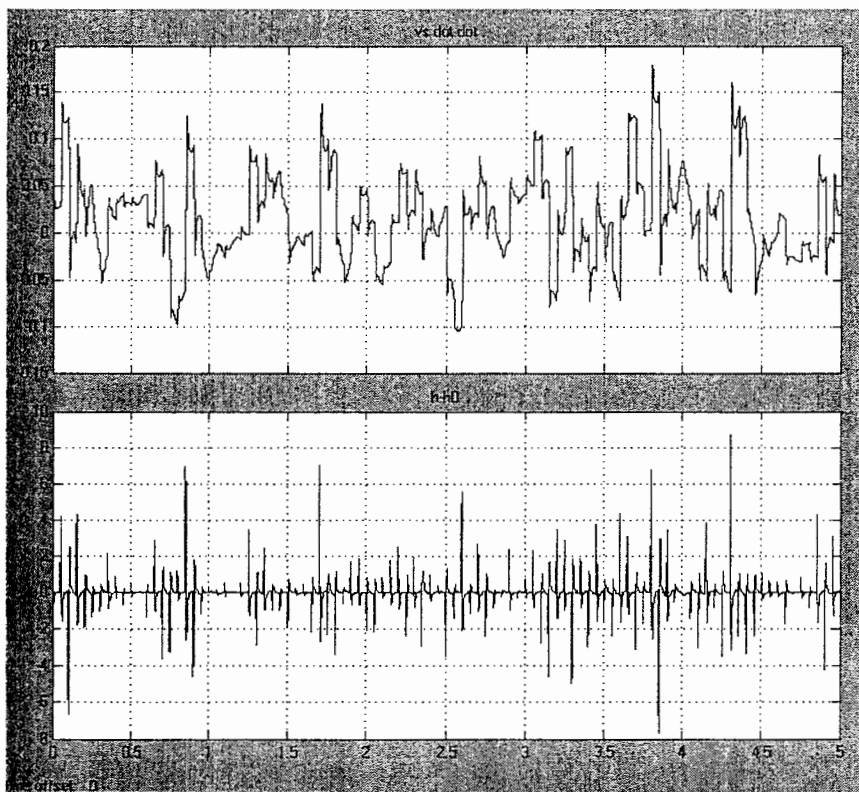


شکل ۵-۵-۵- پاسخ زمانی سیستم حلقه بسته با کنترل کننده H_{∞} در شرایط نامی

و در حضور عدم قطعیت های سرعت به اندازه ۲۵ درصد و وزن بدنه واگن به اندازه ۵۰ درصد به پاسخهای زیر دست می یابیم.



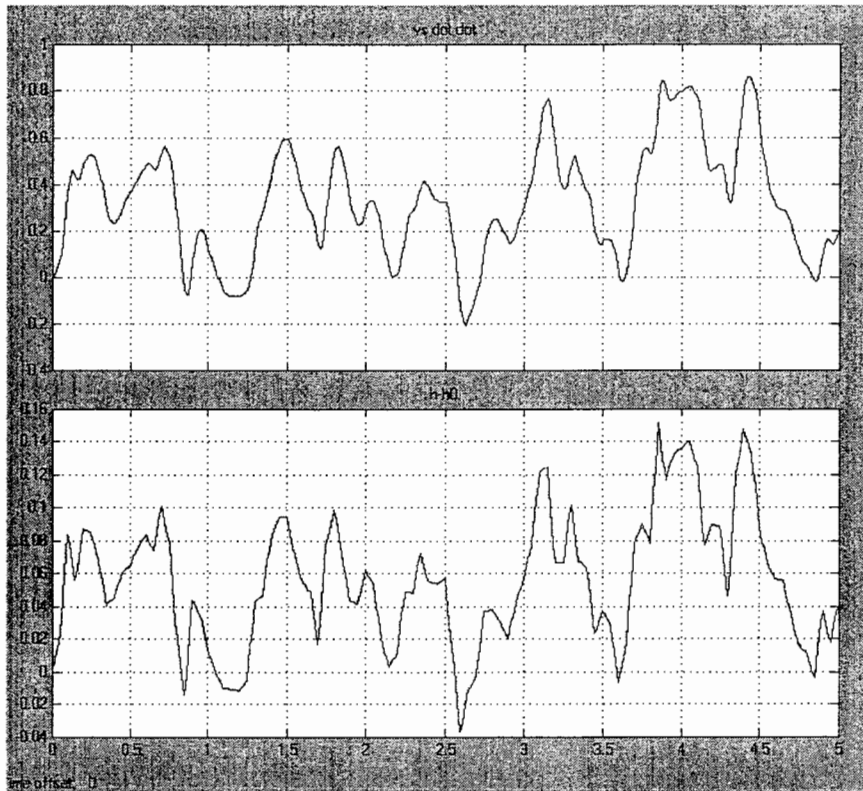
شکل ۵-۵۶- پاسخ زمانی سیستم حلقه بسته با کنترل کننده H_{∞} در حضور برخی عدم قطعیت ها با این میزان عدم قطعیت خروجیها هنوز از مقادیر مناسبی برخوردارند. به این معنی که با در نظر گرفتن عدم قطعیت های سیستم به شکل فوق کنترل کننده H_{∞} طراحی شده یک کنترل مقاوم است. اکنون یکی از وزن های مربوط به عدم قطعیت های غیرپارامتری (w_{perf}) را در سیستم وارد می کنیم. خروجی ها در این حالت به شکل زیر هستند.



شکل ۵-۵۷- پاسخ زمانی سیستم حلقه بسته با کنترل کننده H_{∞} در حضور عدم قطعیت های افزوده

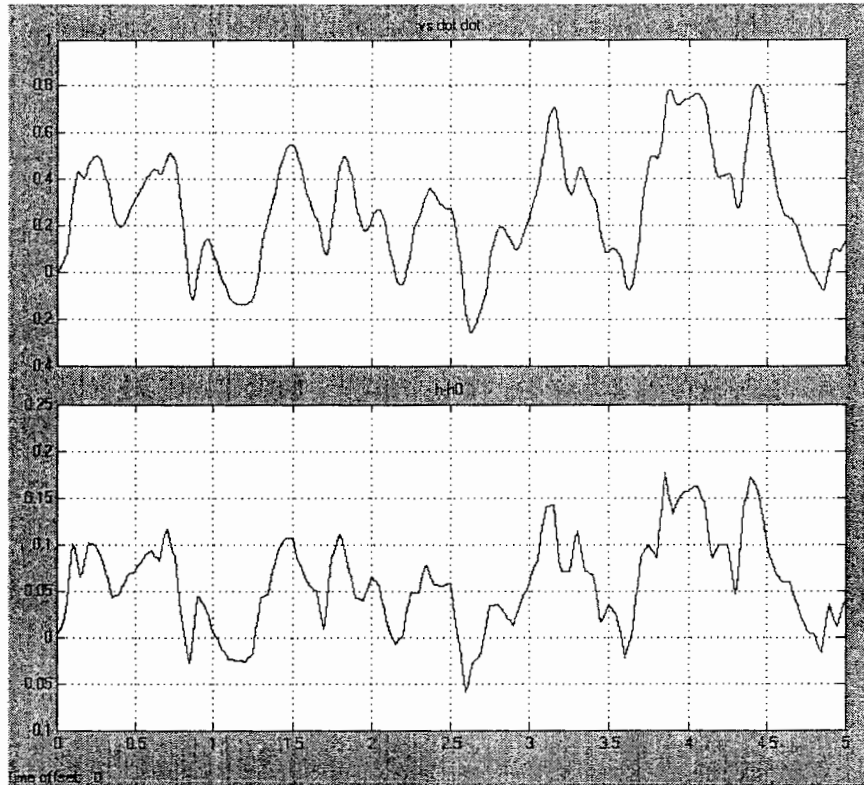
در این شرایط خروجی دوم (اختلاف شکاف هوایی از مقدار نامی) از مقدار مناسبی برخوردار نیست به این معنی که این نوع کنترل کننده نیز مانند کنترل کننده LQG ، کنترل کننده مقاومی برای این سیستم نخواهد بود.

در پایان به بررسی شبیه سازی های مربوط به کنترل کننده μ می پردازیم. پاسخ سیستم در شرایط نامی در شکل زیر آمده است.



شکل ۵-۸-۵- پاسخ زمانی سیستم حلقه بسته با کنترل کننده μ در شرایط نامی

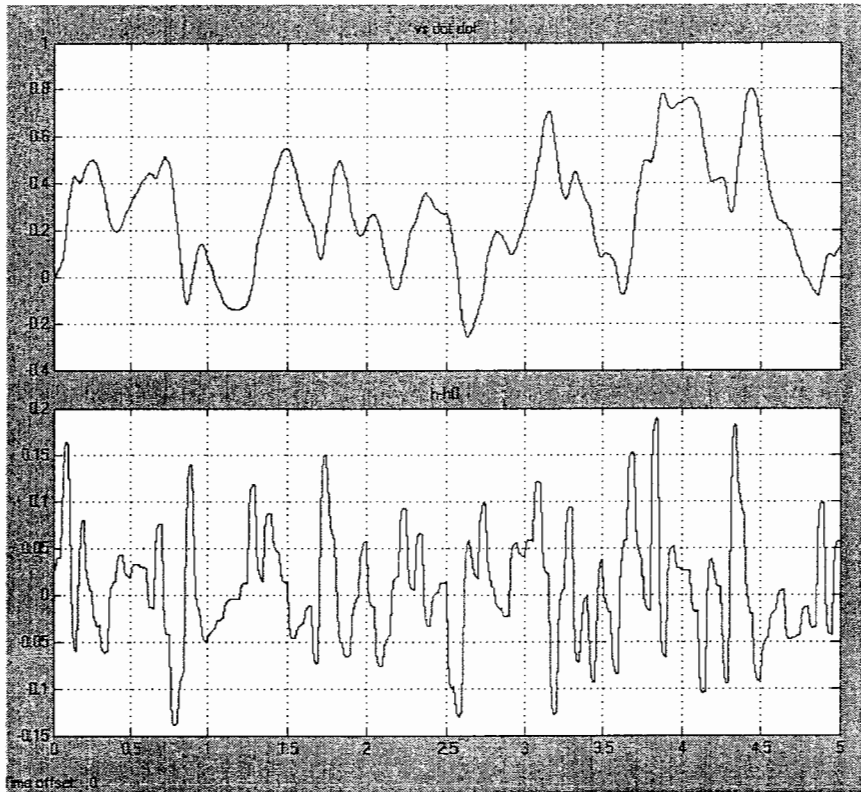
با در نظر گرفتن عدم قطعیت در پارامترهای سرعت وسیله نقلیه و وزن بدنه واگن به ترتیب به اندازه ۲۵ و ۵۰ درصد، خروجی سیستم به شکل زیر خواهد بود. همانطور که در این تحلیل زمانی آمده است خروجی ها از مقادیر مطلوبی برخوردارند.



شکل ۵-۹-۵- پاسخ زمانی سیستم حلقه بسته با کنترل کننده H_∞ در حضور برخی عدم قطعیت ها

مانند کنترل کننده H_∞ عدم قطعیت غیرپارامتری w_{perf} را به سیستم اضافه می کنیم و در این شرایط

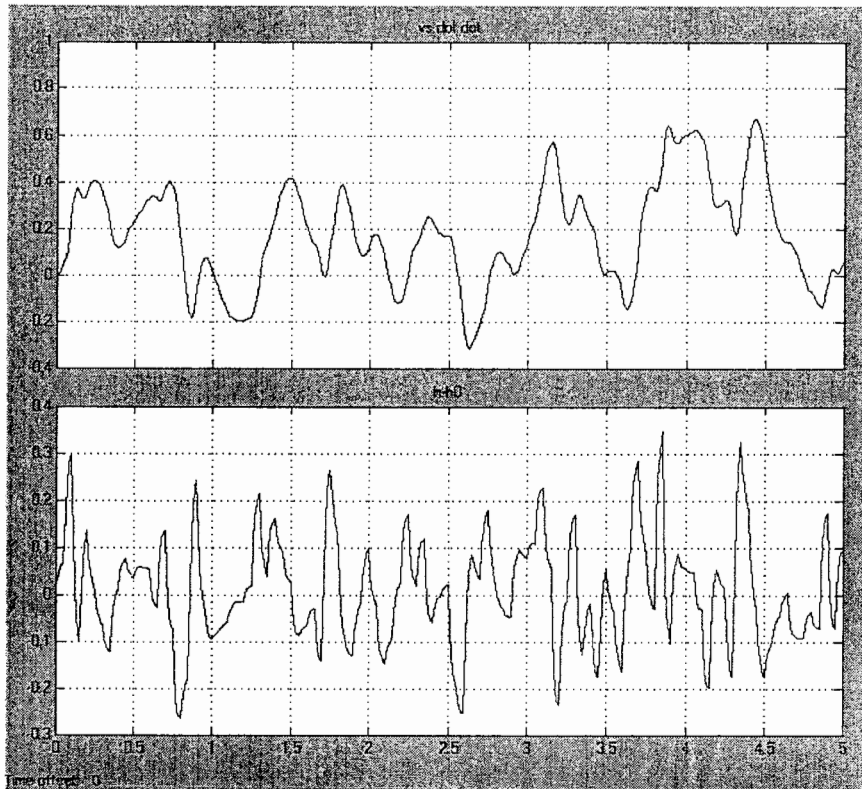
خروجی را مورد بررسی قرار می دهیم.



شکل ۵-۶۰- پاسخ زمانی سیستم حلقه بسته با کنترل کننده μ در حضور عدم قطعیت های افزوده

در این حالت برخلاف کنترل کننده H_{∞} ، خروجیها همچنان مقادیر مناسبی دارند.

میزان عدم قطعیت ها را از مقدار فوق هم بیشتر کرده و کلیه مواردی را که در بخشهای ۱-۳-۵ و ۵-۳-۲ عنوان گردید به نحوی لحاظ می کنیم. به این ترتیب که عدم قطعیت های پارامتری را تا مرز نهایی مقادیر مذکور در جهت افزایشی منظور کرده و عدم قطعیت های غیرپارامتری را نیز به طور کامل در نظر می گیریم. خروجی در این حالت در شکل زیر آمده است.

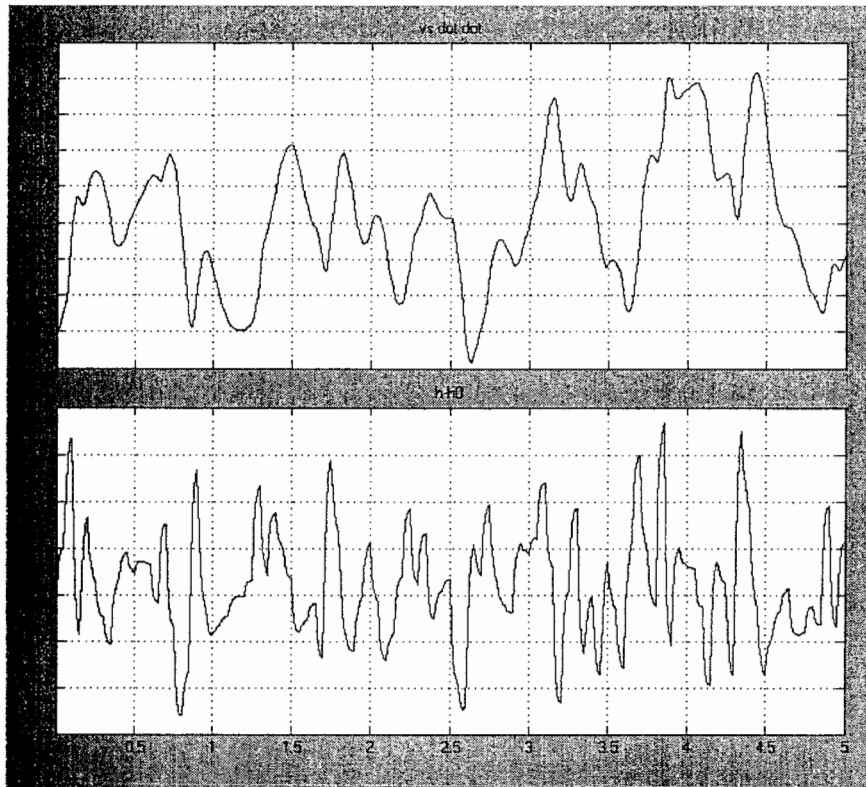


شکل ۵-۶۱- پاسخ زمانی سیستم حلقه بسته با کنترل کننده μ در حضور عدم قطعیت های پارامتری (تا مرز بالایی) و

عدم قطعیت های غیر پارامتری

به طریق دیگری نیز عدم قطعیت ها را در سیستم وارد می کنیم. عدم قطعیت های پارامتری را تا مرز نهایی در جهت کاهشی و عدم قطعیت های غیرپارامتری را به طور کامل در نظر می گیریم. خروجی

این مورد در شکل زیر آورده شده است.



شکل ۵-۶۲- پاسخ زمانی سیستم حلقه بسته با کنترل کننده μ در حضور عدم قطعیت های پارامتری (تا مرز پایینی) و

عدم قطعیت های غیرپارامتری

به همین ترتیب می توان عدم قطعیت ها را با ترکیب متفاوت در نظر گرفت و حالت های مختلف را مورد بررسی قرار داد. هرچند با استناد به تحلیل های فرکانسی انجام شده بدیهی است که در تمام موارد می توان به این نتیجه واحد دست یافت که به هر شکل کنترل کننده μ برای سیستم قطار مغناطیسی با کلیه عدم قطعیت های معرفی شده ریاست نس خوبی به همراه دارد.

فصل ششم

نتیجه گیری و پیشنهادات

۶-۱ نتیجه گیری

در این پروژه ابتدا به تعیین مدل دینامیکی سیستم قطار مغناطیسی شامل قطار تک واگنه با دو درجه آزادی با حرکت یک بعدی- انتقالی- می پردازیم. مدل تعلیق که وسیله نقلیه را در بالای ریل و بدون تماس با آن به صورت شناور قرار می دهد به صورت تعلیق الکتوردینامیکی (EDS) و تعلیق الکترومغناطیسی (EMS) می تواند باشد که EDS براساس نیروهای دافعه مغناطیسی عمل می کند و EMS براساس نیروهای جاذبه مغناطیسی. در پروژه حاضر سیستم را به صورت تعلیق الکترومغناطیسی (EMS) در نظر گرفته ایم. مدل تعلیقی که توصیف نیروی جاذبه بین بوژی و مسیرهادی است با استفاده از قضیه تیلور خطی سازی می شود. رابطه بین جریان و ولتاژ که از قانون ولتاژ کیرشهف بدست می آید نیز به همین شیوه خطی سازی می شود.

ناهمواری مسیرهادی به صورت پاسخ یک فیلتر خطی مرتبه اول به یک تحریک سفید ایستار مدل می شود و در نهایت سازه مسیرهادی به صورت یک میله سخت با دو دهانه در نظر گرفته می شود. هدف از این پروژه طراحی کنترل کننده مقاوم برای سیستم فوق است. به همین منظور می باید عدم قطعیت هایی در سیستم در نظر گرفته و کنترل کننده را در حضور آن ها طراحی نمود. عدم قطعیت ها را در سه مرحله مختلف در سیستم منظور و برای هر حالت کنترل کننده جداگانه ای طراحی می نماییم؛ عدم قطعیت های پارامتری (در برگیرنده محدود تغییرات پارامترها) ، عدم قطعیت های

غیرپارامتری (دربرگیرنده نامعینی های دینامیکی) و عدم قطعیت های مخلوط (هم پارامتری و هم غیر پارامتری)

برای سیستم مذکور سه نوع کنترل کننده مقاوم LQG , H_∞ , μ طراحی می شود.

با در نظر گرفتن عدم قطعیت های پارامتری کنترل کننده های LQG و H_∞ شرایط روبات نس را برآورده نساخته در حالیکه کنترل کننده μ در تکرار سوم روش $D-K$ علاوه بر برقراری پایداری و عملکرد نامی، ویژگی های پایداری و عملکرد مقاوم را نیز برآورده می سازد.

برای سیستم با عدم قطعیت های غیرپارامتری نیز کنترل کننده های LQG و H_∞ ویژگی های پایداری و عملکرد نامی و نیز پایداری مقاوم را برقرار ساخته اما عملکرد مقاوم برای سیستم به همراه ندارد، در حالیکه کنترل کننده μ در تکرار دوم روش $D-K$ تمامی شرایط نامی و روبات نس پایداری و عملکرد را برآورده می سازد.

در سیستم با هر دو نوع عدم قطعیت پارامتری و غیر پارامتری کنترل کننده های LQG و H_∞ تنها پایداری نامی را برای سیستم حلقه بسته تنظیم می کنند اما کنترل کننده μ در تکرار چهارم شرایط پایداری و عملکرد مقاوم را نیز علاوه بر پایداری و عملکرد نامی برقرار می سازد.

عملکرد قطار مغناطیسی از نقطه نظر امنیت و آسودگی مورد بررسی قرار می گیرد. به همین دلیل در شبیه سازی زمانی دو خروجی شکاف هوایی بین وسیله نقلیه و مسیرهادی (که با امنیت حرکت در ارتباط است) و شتاب عمودی بدنه واگن (که با آسودگی و راحتی مسافران مرتبط است) در نظر گرفته می شود.

۶-۲ پیشنهادات

- با در نظر گرفتن حرکت چرخشی^۱ وسیله نقلیه علاوه بر حرکت انتقالی می توان معادلات را کاملتر کرد و بررسی وسیع تری انجام داد. به این ترتیب معادله ای جهت توصیف تغییر

^۱ pitch

مکان زاویه ای بدنه واگن به مجموعه معادلات توصیف کننده مدل اضافه شده و در دیگر معادلات حرکت (حرکت بدنه واگن و حرکت بوژی) نیز این پارامتر وارد می شود.

- برای میرا کردن بهتر تکان های نا مطلوب وسیله نقلیه تعداد بوژی هایی را که در قسمت زیر یک واگن قرار می گیرند بیش تر از یک بوژی است، اما در این پروژه به دلیل جلوگیری از پیچیدگی زیاد معادلات تنها یک بوژی در مدل در نظر گرفته شده است. به عبارتی تنها قسمتی از واگن که یک بوژی در زیر آن قرار گرفته است در معادلات مد نظر قرار گرفته است. حال با در نظر گرفتن تعداد بوژی های بیش تر می توان بدنه واگن را با هر طولی به همراه تأثیرات متقابل آن با بوژی ها و مغناطیس های سوار بر آن ها مورد تحلیل و بررسی قرار داد.

- قطار مغناطیسی در عمل بیش تر از یک واگن دارد بنابراین جهت نزدیک شدن مدل در نظر گرفته شده به مدل واقعی می توان قطار را به صورت چند واگنه در نظر گرفت. در این حالت علاوه بر افزایش تعداد معادلات توصیف کننده مدل دینامیکی تأثیرات متقابل هر واگن بر دیگری نیز در معادلات ظاهر می شود.

- حرکت وسیله نقلیه را می توان در سه بعد در نظر گرفت شامل دو نوع تغییر مکان انتقالی (در جهت شناوری و در جهت هدایت رو به جلو) و سه نوع تغییر مکان دورانی (چرخش، پیچش^۱ و غلتش^۲)

- معادلات را به همان صورت غیرخطی می توان در نظر گرفت؛ در این حالت مدل کنترل غیرخطی پیچیده تری باید پیشنهاد گردد.
- نیروهای آئرو دینامیک را می توان لحاظ کرد.

¹ yaw

² roll

- می توان محدوده عدم قطعیت ها را تغییر داد و تأثیر هر یک را جداگانه بررسی کرد و با شناخت عدم قطعیت هایی که تأثیر بیشتری بر سیستم دارند، کنترل کننده مقاومتی طراحی نمود.
- انواع کنترل کننده های کلاسیک و مدرن را می توان برای سیستم قطار مغناطیسی طراحی نمود و پس از اعمال آن بر سیستم نتایج را با نتایج پروژه حاضر مقایسه کرد.

پیوست ها

در اکثر موارد مطلوب است که نمایش فضای حالت یک سیستم را با نمایش فضای حالت مرتبه پایین تری تقریب بزنیم. این عملیات کاهش مرتبه مدل^۱ نامیده می شود. برای یک ماتریس سیستم^۲ داده شده، $[A \ B ; C \ D]$ ، آسان ترین روش کاهش مدل مرتبه حذف بخشی از ماتریس A و حذف ستون ها و سطرهاى متناظر در ماتریس های B و C است. در این روش مدهایی از ماتریس A حذف می شود که تأثیر چندانی روی سیستم ندارد؛ مثلاً حذف مدهای فرکانس بالا که بز زوی پاسخ فرکانس پایین سیستم نقش مهمی ندارد. نرم های مختلفی برای اندازه گیری خطا در کاهش مرتبه مدل وجود دارد از جمله نرم هنکل^۳ و نرم H_∞ .

توضیح بیش تر در مورد کاهش مرتبه مدل و نرم های فوق را در مرجع ۲۱ می توان یافت. ضمناً دستورات مربوطه در نرم افزار matlab نیز در آن معرفی می شوند. در این پروژه در روند کاهش مرتبه مدل، مدهایی که تأثیر چندانی بر روی سیستم ندارند حذف شده و برای اندازه گیری خطا نیز از نرم هنکل استفاده می شود.

¹ model reduction

² system matrix

³ Hankel norm

روش طراحی LQG¹ (که پایه و اساس آن تئوری کنترل بهینه است) به طراح این امکان را می دهد که جهت دستیابی به مشخصه های عملکرد و یا روابست نس بهره های اساسی (مقادیر تکین) را تشکیل دهد. ویژگی پایداری نیز با این روش خود به خود حاصل می شود و نیازی به ملاحظه مکان های هندسی مشخصه² نیست. مسأله LQG به صورت زیر توصیف می شود.

فرض کنید نمایش فضای حالت دستگاه به شکل زیر است:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + \Gamma w \\ y = Cx + v \end{cases} \quad (\text{ب-1})$$

که w و v نویز سفید (فرآیند تصادفی گوسی با متوسط صفر) و با کواریانس های زیر هستند.

$$E\{ww^T\} = W \geq 0, \quad E\{vv^T\} = V > 0 \quad (\text{ب-2})$$

فرض می شود که w و v ناهمبسته با یکدیگرند یعنی

$$E\{wv^T\} = 0 \quad (\text{ب-3})$$

مسأله طراحی LQG مینیم کردن تابع معیار³ (تابع هزینه)

$$J = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left\{ \int_0^T (z^T Qz + u^T Ru) dt \right\} \quad (\text{ب-4})$$

است که

$$z = Mx \quad (\text{ب-5})$$

ترکیب خطی حالت هاست و

$$Q = Q^T, \quad R = R^T \quad (\text{ب-6})$$

ماتریس های وزنی می باشند. به طور کلی ماتریس های R, Q, V, W پارامترهای تنظیم کننده هستند.

مسأله LQG به این دلیل نوعی کنترل بهینه است که نتیجه طراحی، تخمین \hat{x} از حالت x می باشد.

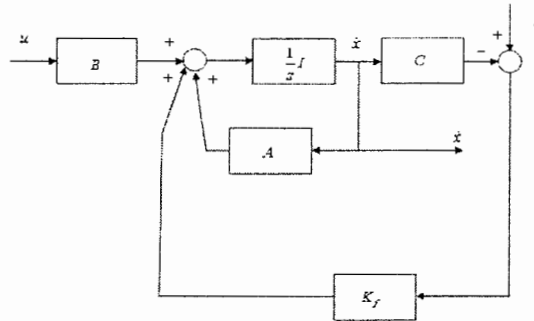
بهینه به این مفهوم که $E\{(x - \hat{x})^T(x - \hat{x})\}$ مینیم می شود.

¹ linear quadratic Gussian

² characteristic loci

³ cost function

روند طراحی شامل دو مسأله است: مسأله اول تخمین حالت است که با تئوری فیلترکالمن که ساختار رؤیتگر حالت را دارد به دست می آید. ورودی های فیلترکالمن بردارهای ورودی و خروجی دستگاه است و خروجی آن بردار تخمین حالت \hat{x} است (شکل ب-۱).



شکل ب-۱- فیلترکالمن

مسأله دوم پیدا کردن سیگنال کنترلی است که هزینه

$$\int_0^{\infty} (z^T Qz + u^T Ru) dt \quad (\text{ب-۷})$$

را مینیمم می کند. u سیگنال کنترل است که تابع خطی از حالت است

$$u = -K_c \hat{x} \quad (\text{ب-۸})$$

حل مسأله دوم در واقع یک جبرانساز است که ساختار آن شامل اتصال سری فیلترکالمن با یک ماتریس فیدبک حالت است (شکل ب-۲).

ماتریس فیدبک حالت بهینه K_c با

$$K_c = R^{-1} B^T P_c \quad (\text{ب-۹})$$

به دست می آید که P_c معادله جبری ریکاتی^۱ را برآورده می سازد:

$$A^T P_c + P_c A - P_c B R^{-1} B^T P_c + M^T Q M = 0 \quad (\text{ب-۱۰})$$

$P_c = P_c^T \geq 0$ یک ماتریس مثبت نیمه معین است. ماتریس بهره فیلترکالمن K_f نیز با

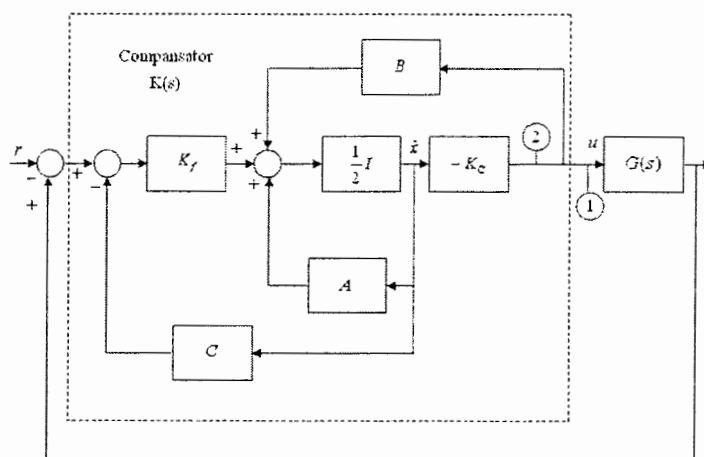
$$K_f = P_f C^T V^{-1} \quad (\text{ب-۱۱})$$

به دست می آید که P_f معادله جبری ریکاتی (دوگان ب-۱۰) را برآورده می سازد:

^۱ algebraic Riccati equation

$$P_f A^T + A P_f - P_f C^T V^{-1} C P_f + \Gamma W \Gamma^T = 0 \quad (\text{ب-۱۲})$$

$$P_f = P_f^T \geq 0 \text{ و}$$



شکل ب-۲- ساختار جبران‌ساز LQG

برای حل معادلات ریکاتی ماتریس هامیلتون^۱ را تشکیل می دهیم.

$$H = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -M^TQM & -A^T \end{bmatrix} \quad (\text{ب-۱۳})$$

ماتریس هامیلتون این ویژگی را دارد که اگر λ مقدار ویژه آن باشد $-\lambda$ نیز مقدار ویژه آن خواهد بود. ماتریس U را به صورت زیر تشکیل می دهیم.

$$U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{ب-۱۴})$$

ستون سمت چپ مقادیر ویژه با قسمت حقیقی منفی و ستون سمت راست مقادیر ویژه با قسمت حقیقی مثبت می باشد. حل معادله ب-۱۰ با

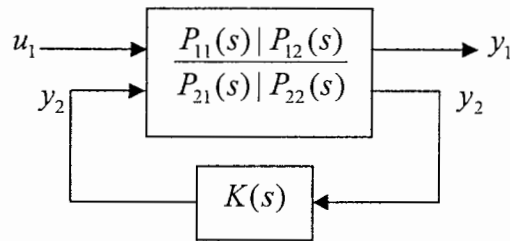
$$P_c = U_{21}U_{11}^{-1} \quad (\text{ب-۱۵})$$

داده می شود و معادله دوگان، ب-۱۲، نیز با جایگزینی A با A^T ، B با C^T ، R با V و M^TQM با $\Gamma W \Gamma^T$ حل می شود.

طراحی کنترل کننده نیز با توجه به شکل‌های ب-۱ و ب-۲ و نوشتن معادلات مربوطه انجام خواهد شد.

^۱ Hamiltonian matrix

در مسأله کنترل H_∞ مدل اصلی سیستم کاملاً معین بوده و طراح وظیفه تعیین ماتریس های وزنی را که شامل توابع گویایی از فرکانس می باشد به عهده دارد. این ماتریسها شکل ماتریسهای T, R, S را تعیین می کنند. ماتریسهای وزنی با مدل اصلی سیستم، $G(s)$ ، ترکیب شده و ماتریس $P(s)$ را تشکیل می دهند. در این حالت سیستم کنترل حلقه بسته به شکل زیر خواهد بود:



شکل (ج-۱) سیستم کنترل حلقه بسته با ترکیب مدل سیستم و ماتریسهای وزنی در طراحی H_∞

$K(s)$ ماتریس تابع تبدیل کنترل کننده است که باید طراحی شود. u_1 بردار ورودیهای خارجی، y_1 بردار سیگنال خطا که باید کمینه گردد، u_2 بردار ورودیهای کنترل و y_2 بردار متغیرهای اندازه گیری شده است.

با توجه به روابط LFT تابع تبدیل بین u_1 و y_1 که با $T_{y_1 u_1}(s)$ نمایش داده می شود به این شکل به دست می آید:

$$T_{y_1 u_1}(s) = F_l(P, K) = [P_{11}(s) + P_{12}(s)(I - P_{22}(s)K(s))^{-1}P_{21}(s)] \quad (\text{ج-۱})$$

اکنون مسأله استاندارد کنترل H_∞ به این شکل تعریف می شود: در شکل (ج-۱) کنترل کننده $K(s)$ را چنان تعریف کنید که:

$$1 - T_{y_1 u_1}(s) \text{ پایدار باشد.}$$

$$2 - \|T_{y_1 u_1}(s)\|_\infty \leq \gamma$$

در کنترل بهینه H_∞ شرط ۲ به این عبارت تبدیل می شود:

$$K_{opt} = \arg(\inf_K \|T_{y_1 u_1}(s)\|_\infty)$$

که $\arg(\inf_K(\cdot))$ به معنای K کمینه کننده است.

مرجع ۲۱ اطلاعات بیشتری در مورد نحوه تعیین ماتریسهای وزنی و دیگر جزییات مربوط به کنترل کننده H_{∞} در اختیار قرار می دهد.

مراجع

-
- [1] Huiguang Dai, 2005. **Dynamic Behavior of Maglev Vehicle/Guideway System with Control**, submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy.
- [2] Yingying Yao, 2005. **The Dynamic Performance Analysis Model of EMS-MAGLEV System Utilize Coupled Field-circuit-Movement Finite Element Method**, *Progress in Electromagnetic Research Symposium, Hangzhou, china*
- [3] Post R.F., 2005. **Toward More Efficient Transport: The Inductrack Maglev System**, *Advanced Transportation Workshop Stanford Global Climate and Energy Project, Lawrence Livermore National Laboratory*
- [4] Kitsios I. and Pimenides T., 2003. **Structured-Specified Robust-Multivariable-Controller Design for Practical Applications Using Genetic Algorithms**, *IEEE Proc. Control Theory Appl.* vol. 150, no. 3, pp. 317-323.
- [5] Balas G.J. and et al., 2001. **μ Analysis and Synthesis Toolbox for Use with MATLAB**, *The MathWorks, Inc. Natick.*
- [6] Jong L. and Boon Ch., 1998. **Analysis and μ -based Controller Design for an Electromagnetic Suspension System**, *IEEE Trans. on Educate*, vol. 41, no. 2, pp. 116-127.
- [7] Trumper D.L. and Subrahmanyam P.K. 1997, **Linearizing Control of Magnetic Suspension Systems**, *IEEE Trans. Control Systems Technology*, vol.5, pp.427-438
- [8] Sinha P.K., 1997. **Analytical and Design Aspect of Passenger Carrying Vehicles Using Controlled D.C. Electromagnetic Suspension**, *IFAC, Multivariable Technological Systems*, pp.573-581.
- [9] Gottzein E. and Gramer W., 1997. **Critical Evaluation of Multivariable Control Techniques Based on Maglev Vehicle Design**, *IFAC, Multivariable Technological Systems*, pp. 633-647.
- [10] Muller P.C., 1997. **Design of Optimal State Observers and Its Application to Maglev Vehicle Suspension Control**, *IFAC, Multivariable Technological Systems*, pp. 175-182.
- [11] Chen, J. and et al., 1996. **Structured Singular Values with Non-diagonal Structures: Characterization and Computation**. *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 41, pp. 1507-1516.
- [12] Young, P.M. and Doyle. J. C., 1996. **Properties of the mixed μ Problem and Its Bounds**. *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 41, pp. 155-159.
- [13] Toffer-Clausen S. and et al. 1995, **A New Approach to μ -Synthesis for Mixed Perturbation Sets**. *Proc. 3rd European Control Conf. , Rom, Italy.* pp.147-152

- [14] Fujita M. and et al., 1995. μ Synthesis of an Electromagnetic Suspension System, *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 40, pp. 530-536.
- [15] Zhang F. and Suyama K., 1994. H_{∞} Control of Magnetic Suspension System. *Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control*, pp. 605-610.
- [16] Braatz, S. and et al., 1994. Computational Complexity of μ Calculation. *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 39, pp. 1000-1002.
- [17] Packard, A. K. and Doyle, J. C., 1993. The Complex Structured Singular Value. *Automatic Control*, vol. 29, pp. 71-109.
- [18] Chen, J. and et al., 1991. on Robustness Analysis with Non-diagonally Structured Uncertainty. *Proc. 30th CDC. , Brighton, England*, pp. 25-30.
- [19] Fan, M. K. H. and et al., 1991. Robustness in the Presence of Mixed Parametric Uncertainty and Unmodeled Dynamics. *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 36, pp. 25-38.
- [20] Young, P. M. and Doyle, J. C., 1990. Computation of μ with Real and Complex Uncertainties. *Proc. 29th Conf. on Decision and Control*, pp. 1230-1235.
- [21] Maciejowski, J. M., 1989. **Multivariable Feedback Design.**
- [22] Packard, A. K. and Doyle, J. C., 1988. Structured Singular Value with Repeated Scalar Blocks. *Proc. American Control conf. Atlanta, Georgia*, pp. 1213-1218.
- [23] Sinha P.K., 1987. **Electromagnetic Suspension Dynamics and Control**, *IEE Control Engineering Series*,.
- [24] Fan, M. K. H. and Tits, A. L., 1986. Characterization and Efficient Computation of the Structured Singular Value. *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 31, pp. 734-743.
- [25] Kouvaritakis, B. and Latchman, H., 1985. Singular Value and Eigenvalue Techniques in the Analysis of Systems with Structured Perturbations. *Int. J. Control*, vol. 41, pp. 1381-1412.
- [26] Doyle, J. C., 1985. Structured Uncertainty in Control System Design. *Proc. 24th Conf. on Decision and Control, Fort Lauderdale, Florida*, pp. 260-265.
- [27] Doyle, J. C., 1982. Analysis of Feedback System with Structured Uncertainty. *IEEE Proc. Part D*, vol. 129, pp. 242-250.

[۲۸] حاجی جعفری ع. ۱۳۸۴، آنالیز وستنز μ در طراحی کنترل کننده های مقاوم، سمینار

کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی شاهرود، دانشکده برق، ریاتیک

[۲۹] پروفلیدیس و.ا.، ۱۳۸۰، مهندسی راه آهن، تئوری و کاربرد، حسینقلیان، م و قهرمانی، ح

[۳۰] فرجی ارمکی، ع. ۱۳۷۸، طراحی کنترل کننده مقاوم μ برای سیستم چند ماشینه قدرت، پایان

نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده مهندسی

[۳۱] ماندگاری، س. ۱۳۷۸، طراحی کنترل کننده مقاوم H_{∞} برای سیستم قدرت چند ماشینه، پایان

نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده مهندسی

[۳۲] هاشمی عطار، ع. ۱۳۷۴، بکارگیری روشهای آنالیز و سنتز μ در طراحی کنترل کننده های

روباست برای سیستم قدرت، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده مهندسی

ROBUST CONTROL DESIGN FOR MAGLEV TRAIN WITH PARAMETRIC UNCERTAINTIES

Mohammad Ali Sadrnia & Atiyeh Haji Jafari
Department of Electrical & Robotic Engineering
Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran
masadrnia@yahoo.com atiyeh_hjafari@yahoo.com

Abstract : The magnetic suspension systems that they are basis of maglev trains divided in two classes: electrodynamic suspension (EDS) and electromagnetic suspension (EMS). EDS is based on repulsive forces acting on a magnet and is inherently stable system and even has well robustness in many cases with open loop control. But EMS is based on attractive forces acting on a magnet, is inherently unstable system that without feedback control has a poor performance. So, we must use feedback and we need to an exact mathematical model of plant to synthesis the feedback control system. This model should contain different uncertainties to make it more similar to actual model. Therefore, control system should have robust stability and performance under model uncertainties. Above desires will be accessible with a controller in μ framework.

In this paper, we assume that the suspension system is EMS and perturbations of the model parameters are considered as the source of uncertainty. Since we can represent these perturbations in state space parameters (A, B, C, D), uncertainty will be structured.

Key-Words: robust control, μ technique, maglev train

1 Introduction

Magnetic levitation (maglev) is an innovative transportation technology that via replacement of mechanical components by electronics overcomes the technical restrictions of wheel on rail technology. Compared with traditional railways maglev systems have high speed, high safety, less pollution, low energy consumption and high capacity. Since the magnetic suspension system used in these trains is unstable, we must use feedback. In addition we must pay attention to robustness of response in control design. This means that the system should have robust stability and performance under model uncertainties. In this study we consider the perturbations of the model parameters as the source of uncertainty. Since we can represent these perturbations in state space parameters, uncertainty will be structured. At each part of system that exist uncertainty it can be considered

uncertainty as a Δ block about certain parameters. In this manner each of such blocks has one input and one output. Putting in order all Δ blocks will forms uncertainty set. In this way all Δ blocks are considered out of plant and obtained uncertainty set has special structure: it is block-diagonal and blocks on diagonal are small Δ s that in fact pulled out from interior of plant. Thus, if we have n blocks, then $\Delta = \text{diag}(\Delta_1, \dots, \Delta_n)$. We consider uncertainties in normalized form in formalization of standard conditions at robust design i.e. $\|\Delta_j\|_\infty \leq 1$.

2 μ Robust control

Robust performance problem is described with general framework shown in fig.1. P is nominal model and represents system interconnections and K is controller. y is

measurement outputs, u is control inputs, d is external inputs and disturbances, e is error signal and z and w are the inputs and outputs same uncertainties.

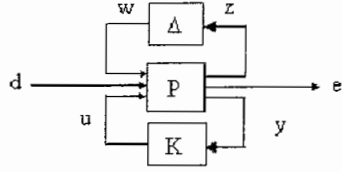


Fig.1 μ Framework

This framework can be shown as combination of analysis and synthesis problems by linear-fractional transformation (LFT) definition.

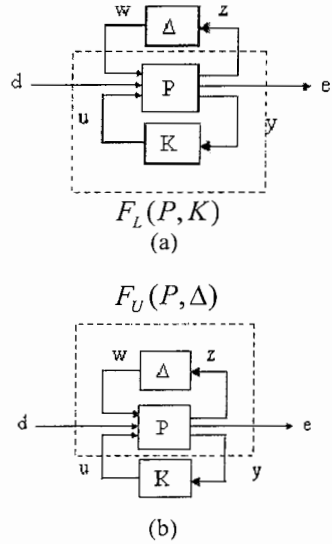


Fig.2 Combination of analysis and synthesis problems

In robust analysis transfer function F_L from $[w \ d]$ to $[z \ e]$ is shown by lower LFT:

$$M = F_L(P, K) = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22})^{-1}P_{21} \quad (1)$$

$$\text{(To define } P_{ij} \text{ s, we have } \begin{cases} e = P_{11}d + P_{12}u \\ y = P_{21}d + P_{22}u \end{cases})$$

And in robust synthesis F_U form d to e is shown by upper LFT:

$$F = F_U(M, \Delta) = M_{22} + M_{21}\Delta(I - M_{11}\Delta)^{-1}M_{12} \quad (2)$$

$$\text{(To define } M_{ij} \text{ s, we have } \begin{cases} z = M_{11}\omega + M_{12}d \\ e = M_{21}\omega + M_{22}d \end{cases})$$

It will be clear that

$$F_L[F_U(P, \Delta), K] = F_U[F_L(P, K), \Delta] \quad (3)$$

Design specification is to obtain stabilizing controller K such that (for all $\Delta \in B\Delta$, that $B\Delta = \{\Delta \in \Delta : \sigma(\Delta) \leq 1\}$)

closed loop system be stable and satisfies

$$\|F_U[F_L(P, K), \Delta]\|_{\infty} \leq 1 \quad (4)$$

Structured singular value that provides suitable test for robust stability and performance is defined as:

$$\mu_{\Delta}(M) = \begin{cases} 0 & \text{if } \det(I - M\Delta) \neq 0 \quad \forall \Delta \in B\Delta \\ \{\inf_{\Delta \in B\Delta} \bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) : \det(I - M\Delta) = 0\}^{-1} & \end{cases} \quad (5)$$

We can consider system performance by external disturbance input. For this purpose we augment fictitious performance uncertainty block to analysis structure. Then extended uncertainty set is defined as

$$\Delta^* = \text{diag}(\Delta, \Delta_p) \quad (6)$$

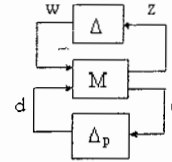


Fig.3 Representation of system with augmented uncertainty

Definition of the nominal and robust stability and performance are expressed as:
Nominal Stability (NS): M is (interior) stable

Nominal Performance (NP):

$$\mu_{\Delta_p}(M_{22}) < 1 \quad \forall \omega$$

Robust Stability (RS): $\mu_{\Delta}(M_{11}) < 1 \quad \forall \omega$

Robust Performance (RP):

$$\mu_{\Delta^*}(M) < 1 \quad \forall \omega$$

The purpose of μ synthesis is to minimize peak of value $\mu_{\Delta^*}(\cdot)$ of closed loop transfer function $F_L(P, K)$ upon stabilizing controller K :

$$\min_{K \text{ stabilizing}} \max_{\omega} \mu_{\Delta^*}\{F_L(P, K)(j\omega)\} \quad (7)$$

There isn't any optimum solution for this minimizing problem, but D-K iteration procedure that compounds μ analysis and H_∞ synthesis often has good results. This procedure attempts to solve

$$\min_{K \text{ stabilizing}} \max_{D(S) \in D, \text{stable, min. phase}} \|D(F_L(P,K)(j\omega)D^{-1})\|_\infty \quad (8)$$

that $D = \{D | D\Delta = \Delta D\}$.

This problem can be solved repeatedly and by a consecutive solution upon one of the variables D and K and fixing another variable. It's worthy of mention that matrix D is assumed equal to I at first iteration because of we don't access to D.

3 Maglev train model

In this paper a model is used with two degrees of freedom with one car body and one magnet. Degrees of freedom are translational displacement at the center of mass of the car body and bogie. To balance the car we should assume the car has two bogies but a part of this system is only considered due to avoidance complexity and high amount of equations because of rotational displacement equation at car body will be added and also the number of equations related with bogies and magnets will be two time as much.

The system contains two suspension systems: magnet suspension and suspension caused by spring and dashpot of bogie. Movement equations satisfy Newton's low; f is magnetic force and all of the parameters introduced in table 1.

$$m_p \ddot{v}_p + c_s(v_p - v_s) + k_s(v_p - v_s) = f \quad (9)$$

$$m_s \ddot{v}_s + c_s(v_s - v_p) + k_s(v_s - v_p) = 0$$

In magnetic suspension model the attractive force between the pole surface and the ferromagnetic plate (fig.4) is:

$$F = \frac{1}{2\mu_0} B_m^2 (2A_m) \quad (10)$$

That is obtained with regard to relationships in [1] as

$$F = \frac{n_m \mu_0 a b}{4h^2} (N_c I_c + N_t i)^2 \quad (11)$$

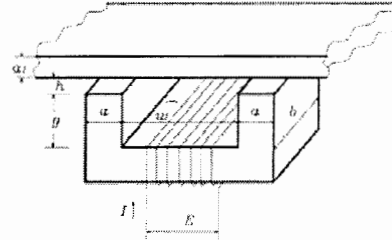


Fig.4 Electromagnetic and ferromagnetic plate configuration

The relationship between voltage and trim current is derived from Kirchhoff's voltage law:

$$u = R_c i - N_t \frac{d(B_m a b)}{dt} = 0 \quad (12)$$

That with replacement of B_m from [1] we have:

$$u = R_c i + \frac{\mu_0 a b N_t^2}{2h} \frac{di}{dt} - \frac{\mu_0 a b N_t (N_c I_c + N_t i)}{2h^2} \frac{dh}{dt} \quad (13)$$

The magnetic force equation is linearized at nominal air gap where $h = h_0$,

$$i = i_0 = 0$$

$$F \approx \frac{M_1}{2} N_c I_c - \frac{M_1}{h_0} N_c I_c (h - h_0) + M_1 N_t i \quad (14)$$

And the dynamic magnetic force is expressed as

$$f \approx -\frac{M_1}{h_0} N_c I_c (h - h_0) + M_1 N_t i \quad (15)$$

The voltage law is also linearized at the nominal air gap, where $h = h_0$, $i = i_0 = 0$,

$$\dot{h} = \dot{h}_0 = 0, \quad \dot{i} = \dot{i}_0 = 0$$

$$i \approx M_2 u - M_3 i + M_4 \dot{h} \quad (16)$$

parameter	symbol
Primary suspension (bogie-magnets) mass	m_p
Secondary suspension (car body) mass	m_s
Vertical displacement of bogie	v_p
Vertical displacement of the car body at the center of gravity	v_s
Secondary damping	c_s
Secondary stiffness	k_s
Permeability of air	μ_0
Flux density across the air gap	B_m
Face area of each magnet pole	A_m
Number of magnets in each module	n_m
Refer to fig.3	a
Refer to fig.3	b
Magnetic air gap	h
Nominal air gap	h_0
Number of turns of coils in each magnet providing a constant force	N_c
Constant current	I_c
Number of turns of coils in each magnet providing trim current	N_t
Trim current	i
Voltage	u
Resistance of trim coil	R_c
Wave number	r_f
Roughness	h_d
Gaussian white noise with zero mean	w_d
Vehicle velocity	V
Beam vertical displacement	v_g
Fundamental frequency	ω

Table 1 Parameters of Maglev Model

It is assumed that the roughness caused by pier elevation difference and creep deformations will be a non-white stationary random process, which is modeled as the response of a first order filter to a stationary white excitation:

$$\frac{1}{r_f} \frac{dh_d(x)}{dx} + h_d(x) = w_d(x) \quad (17)$$

That it is in time domain as:

$$\frac{1}{r_f V} \dot{h}_d(t) + h_d(t) = w_d(t) \quad (18)$$

The guide way model is expressed in this form:

$$\ddot{v}_g + \omega^2 v_g = 0 \quad (19)$$

That v_g is the bending of the guide way under the train and ω is depended on beam bending rigidity, mass of beam and distance of two spans of beam.

In this manner deviation of nominal air gap is obtained with this equation:

$$h - h_0 = h_d + v_p - v_g \quad (20)$$

4 Controller design

The parameters $k_s, c_s, m_s, m_p, \dots$ are not constant due to various factors such as train's load change, tolerance of resistance of magnetic suspension system, etc. and contain uncertainties. Range of uncertainties that be considered for each parameter is in this form:

$$m_p = \bar{m}_p (1 + 0.25\delta_{m_p}) \quad (21)$$

$$m_s = \bar{m}_s (1 + 0.5\delta_{m_s}) \quad (22)$$

$$k_s = \bar{k}_s (1 + 0.4\delta_{k_s}) \quad (23)$$

$$c_s = \bar{c}_s (1 + 0.3\delta_{c_s}) \quad (24)$$

$$M_3 = \bar{M}_3 (1 + 0.5\delta_{M_3}) \quad (25)$$

$$r_f = \bar{r}_f (1 + 0.005\delta_{r_f}) \quad (26)$$

$$\omega = \bar{\omega} (1 + 0.45\delta_{\omega}) \quad (27)$$

or

$$\omega^2 = \bar{\omega}^2 (1 + 0.75\delta_{\omega^2}) \quad (28)$$

$$V = \bar{V} (1 + 0.25\delta_V) \quad (29)$$

All δ 's are in the interval $[-1, 1]$.

We form uncertainties as the matrices by using definition of LFT for example for

k_s we have:

$$k_s = \bar{k}_s (1 + 0.4\delta_{k_s}) \rightarrow M_{k_s} = \begin{bmatrix} \bar{k}_s & 0.4\bar{k}_s \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

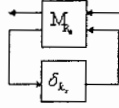


Fig.5 Uncertain k_s as LFT

Thus the linear system interconnection will be shown in fig.6.

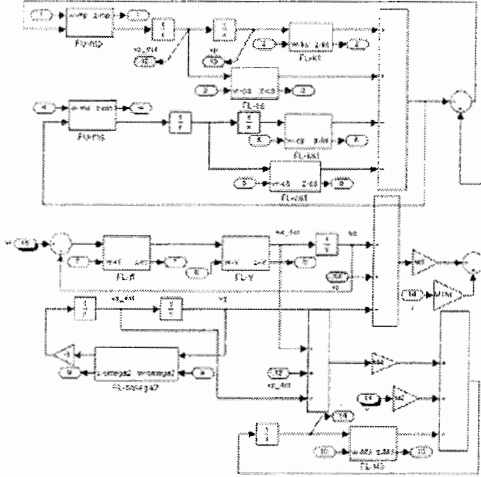


Fig.6 Interconnection structure of linear system

We form this system by "sysic" program in μ -tools toolbox and then engage in design of controller. Three types of controller LQG, H_∞ and μ are designed for this system. To evaluate the robustness of resulting closed loop system, frequency analysis for any of them will be shown in separate curvatures.

5 Simulation results

The maglev train system has two measurement outputs; car body vertical acceleration and air gap between bogie and guide way and two inputs; voltage and roughness input. The values of the parameters are given in table 2. By matrices like shown in fig.4 weights of uncertainties are considered in system interior structure and as a result the

uncertainties will be considered out of plant in normalized form (such as Fig.1)

symbol	value	units
m_p	500	kg
m_s	500	kg
c_s	10^4	Ns/m
k_s	10^5	N/m
μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$	weber/Am
A_m	0.04	m^2
n_m	12	
a	0.05	m
b	0.1	m
h_0	0.01	m
N_t	96	
R_c	2	ohm
r_f	0.01	m^{-1}
V	400	m/s
ω	34.5	rad/s

Table 2 values of model parameters

At first, we engage in design of LQG controller. We form closed loop system by using of lower LFT and then by closed loop system and uncertainties as upper LFT we do μ synthesis. For each of these definition: nominal and robust stability and performance (in section 2) we draw related curvatures. In each case that the peak value of curvature is smaller than 1 can be resulted that we reach to desired characteristic. For LQG control, bode diagram of controller and nominal performance, robust stability and robust performance tests in sequence are shown in figures 7 to 10. It is clear that the system has only suitable nominal performance and does not satisfy robust stability and performance characteristics.

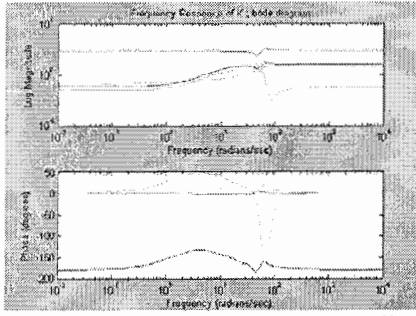


Fig.7 bode diagram of LQG controller

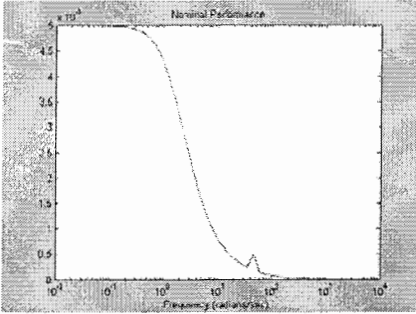


Fig.8 nominal performance test of closed loop system with LQG controller

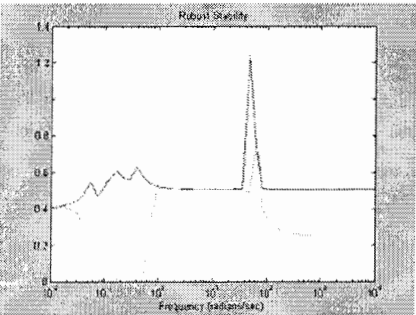


Fig.9 robust stability test of closed loop system with LQG controller

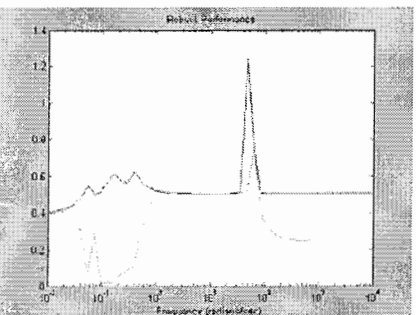


Fig.10 robust performance test of closed loop system with LQG controller

At next stage we engage in design of H_∞ controller. The results are shown in figures 11 to 14 in sequence like LQG

controller. In this case the system has suitable nominal performance, too but because of the peak value of $\mu_{\Delta_p}(M_{22})$ and $\mu_{\Delta}(M)$ is equal to 1, we don't attain robust stability and performance.

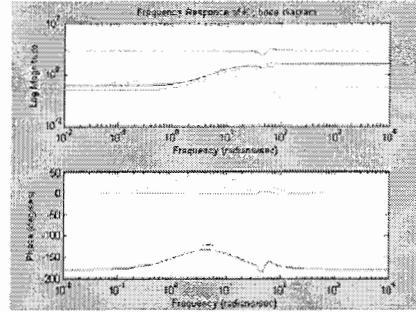


Fig.11 bode diagram of H_∞ controller

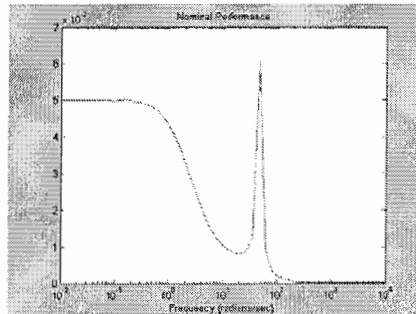


Fig.12 nominal performance test of closed loop system with H_∞ controller

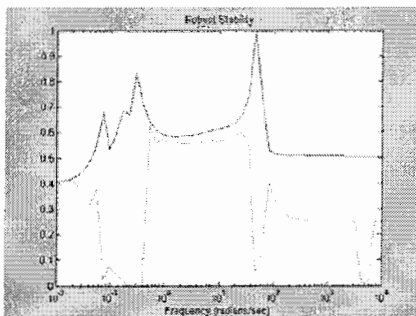


Fig.13 robust stability test of closed loop system with H_∞ controller

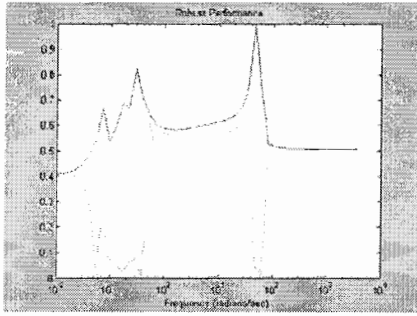


Fig.14 robust performance test of closed loop system with H_∞ controller

At the end, we design μ controller for this system. By using of D-K iteration procedure we will reach bode diagram of controller, nominal performance, robust stability and robust performance tests shown in figure 15 to 18 at third iteration. With regard to the peak values of last three curvatures are smaller than 1, this type of controller provides suitable nominal performance, robust stability and robust performance conditions.

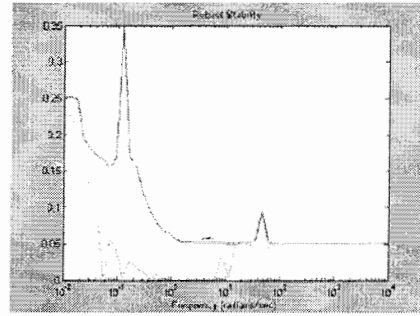


Fig.17 robust stability test of closed loop system with μ controller

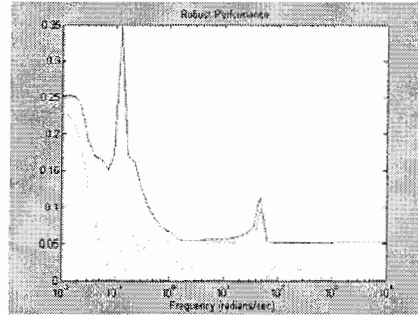


Fig.18 robust performance test of closed loop system with μ controller

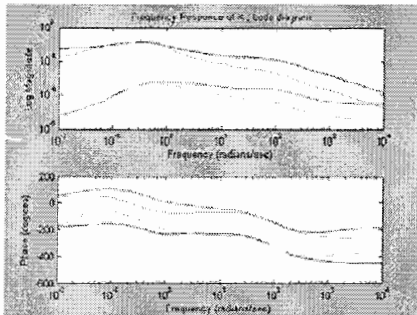


Fig.15 bode diagram of μ controller

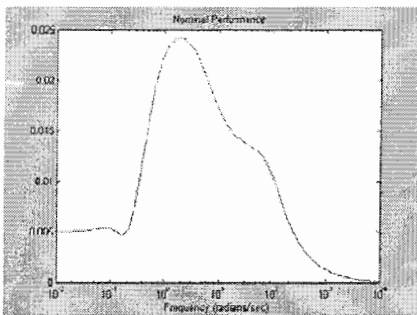


Fig.16 nominal performance test of closed loop system with μ controller

6 Conclusions

For maglev train system that mentioned in this paper with available dynamic equations and with structured uncertainty as uncertainty in model parameters, LQG and H_∞ controller don't satisfy the robustness specification for stability and performance, but μ controller attains suitable robustness in stability and performance at third iteration of D-K iteration procedure.

References:

- [1] Huiguang Dai, Dynamic Behavior of Maglev Vehicle/Guideway System with Control, *submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy*, 2005.
- [2] Fujita M. and et al., μ Synthesis of an Electromagnetic Suspension System, *IEEE*

Trans. Automatic Control, vol. 40, 1995, pp. 530-536.

[3] Zhang F. and Suyama K., H_∞ Control of Magnetic Suspension System. *Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control*, 1994, pp. 605-610.

[4] Sinha P.K., Electromagnetic Suspension Dynamics and Control, *IEE Control Engineering Series*, 1987.

[5] Muller P.C., Design of Optimal State Observers and Its Application to Maglev Vehicle Suspension Control, *IFAC, Multivariable Technological Systems*, 1997, pp. 175-182.

[6] Gottzein E. and Gramer W. Critical Evaluation of Multivariable Control Techniques Based on Maglev Vehicle Design, *IFAC, Multivariable Technological Systems*, 1997, pp. 633-647.

[7] Jong L. and Boon Ch., Analysis and μ -based Controller Design for an Electromagnetic Suspension System, *IEEE Trans. on Educate*, vol. 41, no. 2, 1998, pp. 116-127.

[8] Sinha P.K., Analytical and Design Aspect of Passenger Carrying Vehicles Using Controlled D.C. Electromagnetic Suspension, *IFAC, Multivariable Technological Systems*, 1997, pp.573-581.

[9] Kitsios I. and Pimenides T., Structured-Specified Robust-Multivariable-Controller Design for Practical Applications Using Genetic Algorithms, *IEEE Proc. Control Theory Appl.* vol. 150, no. 3, 2003, pp. 317-323.

[10] Balas G.J. and et al., μ Analysis and Synthesis Toolbox for Use with MATLAB, The MathWorks, Inc. Natick, 2001.

Abstract

The magnetic suspension systems that they are basis of maglev trains divided in two classes: electrodynamic suspension (EDS) and electromagnetic suspension (EMS). EDS is based on repulsive forces acting on a magnet and is inherently stable system and even has well robustness in many cases with open loop control. But EMS is based on attractive forces acting on a magnet, is inherently unstable system that without feedback control has a poor performance. So, we must use feedback and we need to an exact mathematical model of plant to synthesis the feedback control system. This model should contain different uncertainties to make it more similar to actual model. Therefore, control system should have robust stability and performance under model uncertainties. Above desires will be accessible with a controller in μ framework.

In this paper, we assume that the suspension system is EMS and uncertainties are considered at three stages; parametric, nonparametric and mixed (including both parametric and nonparametric) uncertainties. At first, perturbations of the model parameters are considered as the source of uncertainty. Since we can represent these perturbations in state space parameters (A, B, C, D), uncertainty will be structured.

Then we consider nonparametric uncertainties caused by un modeled dynamics, noise of actuators and sensors, modeling errors and exogenous disturbances. This type of uncertainty is called unstructured uncertainty.

At the end, we consider both parametric and nonparametric uncertainties in the model.

We design three robust controllers, μ , H_∞ , LQG , at any of three above stages for maglev train system and compare conclusions of frequency analysis at per stage.

Key-Words: robust control, μ technique, maglev train