

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده : برق و رباتیک

گرایش : کنترل

مدلسازی و کنترل غیر خطی مقاوم ردگیری ربات کروی

دانشجو : امیر علیزاده

استاد راهنما : دکتر محمد مهدی فاتح

پایان نامه کارشناسی ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

به پاس تعبیر عظیم و انسانی شان از کلمه ایثار و از خودگذشتگی  
به پاس قلب های بزرگشان که فریادرس است و سرکردانی و ترس در پناہشان به شجاعت می گراید  
به پاس عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجودشان که در این سردترین روزگار ان بهترین پشتیبان است  
و به پاس محبت های بی دریغشان که هرگز فروکش نمی کند

این مجموعه را به خانواده عزیزم تقدیم می کنم

درود فراوان خدمت خانواده بسیار عزیز، دلسوز و فداکارم که پیوسته جرعه نوش جام تعيلم و تربيت، فضيلت و انسانيت آنها بوده‌ام و همواره چراغ وجودشان روشنگر راه من در سختی‌ها و مشکلات بوده است، از ایشان تقدير و تشکر فراوان دارم..

از زحمات بی‌دریغ استاد فرهیخته و بزرگوام در دانشگاه صنعتی شاهرود جناب آقای دکتر فاتح که با راهنمایی‌های دلسوزانه خود در پیشبرد این پروژه راهگشای اینجانب بودند، کمال تشکر و سپاسگزاری را دارم.

همچنین از تمامی دوستان که لحظاتی سرشار از صفا و صمیمیت را در کنار خود برایم به یادگار گذاشتند و همیشه اینجانب را مورد لطف و محبت خود قرار داده و به من درس صداقت و مهرورزی آموختند بسیار سپاسگزارم.

## تعهدنامه

اینجانب امیر علیزاده دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته برق-کنترل دانشکده برق و

رباتیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه: مدلسازی و کنترل غیر خطی مقاوم

ردگیری ربات کروی تحت راهنمایی های دکتر محمد مهدی فاتح متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تا کنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا « *Shahrood University of Technology* » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجودات زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.

## تاریخ

### امضای دانشجو

#### مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

## چکیده :

در این پایان نامه به مدلسازی سینماتیکی و دینامیکی ربات کروی می‌پردازیم. سپس کنترل مقاوم آن طراحی و شبیه سازی می‌گردد. مفاصل ربات کروی به ترتیب لولایی، لولایی و کشویی بوده که سه درجه آزادی را برای این بازوی مکانیکی فراهم می‌سازند. در بدست آوردن مدل سینماتیک از دستورالعمل دناویت هارتنبرگ و در مدل دینامیک از معادلات اویلر لاگرانژ استفاده شده است. مدل دینامیکی ربات چند متغیره، غیر خطی، همراه با کوپلینگ شدید و عدم قطعیت است. برای کنترل ربات از روش غیر خطی مقاوم استفاده نموده‌ایم. روش کنترل پیشنهادی پایداری سیستم حلقه بسته را تضمین می‌نماید و عملکرد آن مناسب است بطوریکه خطای ردگیری مسیر ناچیز می‌باشد. برای تحلیل پایداری از روش مستقیم لیاپانوف استفاده شده است. با توجه به آن که عدم قطعیت شامل عدم قطعیت پارامتری، دینامیک مدل نشده و اغتشاش خارجی است سیستم کنترل توانمندی قابل ملاحظه‌ای در غلبه بر عدم قطعیت‌ها نشان می‌دهد. در پایان روش کنترل پیشنهادی با روش کنترل غیر خطی مقاوم اسپانگ مقایسه شده است.

کلمات کلیدی: سینماتیک، دینامیک، عدم قطعیت، لاگرانژ، کنترل مقاوم، ربات کروی

## فهرست مطالب

۱.....	فصل اول
۱.....	مقدمه‌ای بر سیستم‌های رباتیک.....
۲.....	۱-۱- مقدمه.....
۳.....	۲-۱- سینماتیک مستقیم.....
۴.....	۳-۱- سینماتیک سرعت.....
۵.....	۴-۱- دینامیک.....
۵.....	۵-۱- مقدمات ریاضی مسئله سینماتیک.....
۶.....	۱-۵- انتقال، دوران و تبدیل‌های همگن.....
۱۷.....	۶-۱- سابقه تحقیق.....
۱۷.....	۱-۶-۱- کنترل نیرو.....
۱۸.....	۲-۶-۱- کنترل امپدانس.....
۱۹.....	۳-۶-۱- ساختار متغیر.....
۱۹.....	۴-۶-۱- روش‌های مود لغزش.....
۲۰.....	فصل دوم
۲۰.....	مدلسازی سینماتیکی.....
۲۱.....	۱-۲- مقدمه.....
۲۱.....	۲-۲- اجزا و ساختار ربات.....
۲۲.....	۱-۲-۲- فضای کار.....
۲۳.....	۲-۲-۲- دقت.....
۲۳.....	۳-۲-۲- تکرار پذیری.....
۲۴.....	۳-۲- پیکربندی‌های سینماتیکی متداول.....
۲۴.....	۱-۳-۲- طبقه بندی بازوهای مکانیکی ماهر.....
۳۱.....	۴-۲- نمایش دناویت - هارتنبرگ.....
۳۷.....	۵-۲- سینماتیک وارون.....
۳۹.....	۶-۲- سینماتیک سرعت.....
۳۹.....	۱-۶-۲- تعیین ماتریس ژاکوبین.....
۴۶.....	۷-۲- وضعیت تکین ربات.....
۴۸.....	فصل سوم
۴۸.....	مدلسازی دینامیکی.....
۴۹.....	۱-۳- مقدمه.....

۵۰	..... انرژى جنبشى	۲-۳
۵۳	..... توزيع جرم	۱-۲-۳
۶۱	..... انرژى پتانسيل	۳-۳
۶۲	..... لاگرانژين	۴-۳
۶۲	..... معادلات ديناميكى	۵-۳
۶۵	..... شبيه سازى ديناميك بدنه ربات در متلب	۱-۵-۳
۶۶	..... محرکه	۶-۳
۶۸	..... محرکهای هیدرولیکى	۱-۶-۳
۷۰	..... محرکهای پنوماتیکى	۲-۶-۳
۷۲	..... موتورهای $dc$ مغناطيس دائم	۳-۶-۳
۷۶	..... مدل ديناميكى سيستم ربات به همراه محرکه	۷-۳
۷۹	..... فصل چهارم	
۷۹	..... کنترل مقاوم	
۸۰	..... مقدمه	۱-۴
۸۱	..... سيستم غير خطى متغير با زمان	۲-۴
۸۱	..... کنترل حلقه بسته و فيدبک (بازخورد)	۳-۴
۸۲	..... تحليل پايدارى	۴-۴
۸۴	..... روش دوم لياپانوف	۱-۴-۴
۸۶	..... تقسيم قانون کنترل	۵-۴
۸۶	..... ديناميك وارون	۶-۴
۸۷	..... انتخاب $k_p$ و $k_d$ در قانون کنترل سروو	۷-۴
۸۹	..... کنترل مقاوم	۸-۴
۹۸	..... رهيافت جديد براى طراحى سيستم کنترل با استفاده از تابع لياپانوف	۱-۸-۴
۱۰۲	..... مقايسه روش کنترل مقاوم پيشنهادهى با روش اسپانگ	۹-۴
۱۰۳	..... پارامترهاى شبيه سازى	۱۰-۴
۱۰۴	..... نتيجه گيرى و پيشنهاده	۱۱-۴



## فهرست اشکال

- شکل ۱-۲ نمایش نمادهای مفاصل ربات ..... ۲۱
- شکل ۲-۲-۲ ربات با پیکربندی هنرمند ..... ۲۵
- شکل ۳-۲-۳ دیاگرام مفصلی پیکربندی ربات هنرمند ..... ۲۵
- شکل ۴-۲ ربات استنفورد ..... ۲۶
- شکل ۵-۲ دیاگرام مفصلی ربات استنفورد ..... ۲۶
- شکل ۶-۲ ربات یونیمیت با پیکربندی کروی ..... ۲۷
- شکل ۷-۲ دیاگرام مفصلی ربات کروی ..... ۲۷
- شکل ۸-۲ ربات اسکارا ..... ۲۸
- شکل ۹-۲ دیاگرام مفصلی ربات اسکارا ..... ۲۸
- شکل ۱۰-۲ ربات با پیکربندی دکارتی ..... ۳۰
- شکل ۱۱-۲ دیاگرام مفصلی ربات دکارتی ..... ۳۰
- شکل ۱۲-۲ فضای کاری و دیاگرام مفصلی انواع پیکربندی بازوهای ماهر ..... ۳۱
- شکل ۱۳-۲ دستگاههای مختصات با برقراری فرضهای  $DH1$  و  $DH2$  ..... ۳۵
- شکل ۱۴-۲ اختصاص دستگاه مختصات با برقراری شروط  $DH$  به دیاگرام مفصلی ربات کروی ..... ۳۶
- شکل ۱۵-۲ دیاگرام مفصلی ربات کروی ..... ۳۸
- شکل ۱۶-۲ حرکت مجری نهایی بواسطه رابط شماره  $i$  ..... ۴۳
- شکل ۱-۳-۱ دستگاههای مختصات متصل به جسم صلب ..... ۴۹
- شکل ۲-۳ ساخت قطعات ربات در محیط نرم افزار *SolidWorks* ..... ۵۵
- شکل ۳-۳-۳ ربات کروی *Unimate* ..... ۵۶
- شکل ۴-۳-۴ مشخصه‌های مکانیکی رابط اول قبل از اختصاص دستگاه مختصات به مرکز جرم ..... ۵۷
- شکل ۵-۳-۵ مشخصه‌های مکانیکی رابط دوم قبل از اختصاص دستگاه مختصات به مرکز جرم ..... ۵۸
- شکل ۶-۳-۶ مشخصه‌های مکانیکی رابط سوم قبل از اختصاص دستگاه مختصات به مرکز جرم ..... ۵۹
- شکل ۷-۳-۷ نحوه اختصاص دستگاه مختصات در نرم افزار *SolidWorks* ..... ۶۰
- شکل ۸-۳-۸ راستای ثابت گرانشی با توجه به نحوه اختصاص دستگاههای مختصات به ربات تعیین میگردد ..... ۶۱
- شکل ۹-۳-۹ ساختار محرکه هیدرولیکی با یک درجه آزادی ..... ۶۹
- شکل ۱۰-۳-۱۰ دیاگرام بلوکی سیستم محرکه هیدرولیکی ..... ۷۰
- شکل ۱۱-۳-۱۱ نمودار شماتیک یک سیستم فشار ..... ۷۱
- شکل ۱۲-۳-۱۲ سطح مقطع موتور  $dc$  مغناطیس دائم ..... ۷۳
- شکل ۱۳-۳-۱۳ دیاگرام مدار برای موتور  $dc$  کنترل شده با ولتاژ آرمیچر ..... ۷۴
- شکل ۱۴-۳-۱۴ مدل فشرده یک رابط با سیستم انتقال چرخ دنده-محرکه ..... ۷۵
- شکل ۱-۴-۱۰ دیاگرام بلوکی سیستم کنترل فیدبک ..... ۸۲
- شکل ۲-۴-۲ پاسخ سیستم کنترل در حالت ایده‌آل ..... ۸۸
- شکل ۳-۴-۳ خطای ردگیری سیستم کنترل در حالت ایده‌آل ..... ۸۹

- شکل ۴-۴- پاسخ سیستم کنترل با در نظر گرفتن ۲۰٪ عدم قطعیت ..... ۹۰
- شکل ۵-۴- خطای ردگیری سیستم کنترل با در نظر گرفتن ۲۰٪ عدم قطعیت ..... ۹۱
- شکل ۶-۴- سیگنال کنترل ..... ۹۷
- شکل ۷-۴- شبیه سازی سیستم کنترل در *MATLAB* ..... ۹۷
- شکل ۸-۴- پاسخ سیستم کنترل با در نظر گرفتن ۲۰٪ عدم قطعیت در مدل سیستم ..... ۱۰۰
- شکل ۹-۴- خطای سیستم کنترل با در نظر گرفتن ۲۰٪ عدم قطعیت ..... ۱۰۱
- شکل ۱۰-۴- مقایسه خطای ردگیری روش کنترل غیر خطی مقاوم و روش پیشنهادی ..... ۱۰۲

## فهرست جداول

- جدول ۱-۲- جدول پارامترهای رابط مربوط به ربات کروی ..... ۳۶
- جدول ۱-۴- پارامترهای استفاده شده در شبیه سازی ها ..... ۱۰۳

# فصل اول

## مقدمه‌ای بر سیستم‌های رباتیک

- ❖ مقدمه
- ❖ سینماتیک مستقیم
- ❖ سینماتیک سرعت
- ❖ دینامیک
- ❖ مقدمات ریاضی مسئله سینماتیک
- ❖ انتقال، دوران و تبدیل‌های همگن

## ۱-۱- مقدمه

جهان صنعتی در چند دهه اخیر توجه خود را به بکارگیری ربات ها در صنایع<sup>۱</sup> مختلف معطوف داشته، زیرا رباتها توانایی انجام وظایف مختلف با عملکرد دقیق را دارند و همچنین استفاده از رباتها به جای نیروی انسانی باعث افزایش کیفیت و راندمان تولید می گردد. بنابراین بکارگیری رباتها در صنایع مختلف به علت توجه اقتصادی و حفظ نرخ تولید و همچنین ویژگی کیفیت، اجتناب ناپذیر است. مدل‌های ریاضی نمی‌توانند به صورت دقیق یک سیستم فیزیکی را مدل نمایند [۱]، از این روی یکی از مسائلی که در مهندسی کنترل وجود دارد عدم قطعیت<sup>۲</sup> است. عدم قطعیت می‌تواند هم در مدل و هم در اندازه گیری وجود داشته باشد. حضور این عدم قطعیت ها در سیستم‌های کنترل باعث می‌شود تا اهداف کنترلی آنچنان که باید تحقق پیدا نکند. کنترل مقاوم<sup>۳</sup> تلاشی است که برای از پیش رو برداشتن این مشکل انجام می‌شود. در واقع کنترل مقاوم، کنترل در حضور عدم قطعیت ها می‌باشد به طوریکه رفتار و عملکرد<sup>۴</sup> سیستم در تمام حالات ممکن قابل قبول باشد یک از مسائل حساس و مهم در هنگام رویارویی با موضوع عدم قطعیت پایداری<sup>۵</sup> سیستم کنترل است. حفظ پایداری در حضور عدم قطعیت‌ها یکی از چالش‌ها اصلی کنترل مقاوم است. در نظریه‌های کلاسیک دانستن مدل سیستم از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است، از این رو ابتدا به معرفی تکنیک‌هایی برای مدلسازی<sup>۶</sup> سینماتیکی و دینامیکی سیستم بازوی مکانیکی ماهر می‌پردازیم. سینماتیک یک بازوی مکانیکی ماهر در واقع مطالعه هندسه‌ی حرکت بازوی آن است [۲]. از آنجایی که انجام وظایف مشخص به وسیله حرکت اهرم‌های بازو میسر می‌شود، لذا علم سینماتیک جزء ابزار مهم در طراحی و کنترل بازوی مکانیکی می‌باشد. در این فصل به معرفی روش‌های ریاضی مورد نیاز

---

<sup>1</sup> Industrial

<sup>2</sup> Uncertainty

<sup>3</sup> Robust control

<sup>4</sup> Performance

<sup>5</sup> Stability

<sup>6</sup> Modeling

برای توصیف حرکت بازوهای ربات و همچنین معرفی انواع پیکربندی‌های متداول سینماتیکی<sup>۱</sup> می‌پردازیم. مسئله مدلسازی سینماتیکی بطور کامل در فصل دوم بیان می‌گردد. برای تجزیه و تحلیل رفتار ربات و همچنین طراحی سیستم کنترل نیاز به تعیین مشخصه‌های دینامیکی<sup>۲</sup> آن می‌باشد. رفتار دینامیکی به نرخ تغییر حالت و وضعیت بازو نسبت به گشتاور اعمالی به وسیله محرکه‌ها<sup>۳</sup> اطلاق می‌شود و این ارتباط را می‌توان با یک سری معادلات دیفرانسیل به نام معادلات حرکت که بر پاسخ بازو به گشتاور<sup>۴</sup> اعمال شده حاکم است، بیان کرد. در فصل سوم مدلسازی دینامیکی بدنه ربات به طور کامل معرفی شده است. پس از انجام مدلسازی سینماتیکی و دینامیکی به طراحی سیستم کنترل می‌پردازیم. کنترل بازوی ماهر رباتیک تعیین ورودی‌های مفصل<sup>۵</sup> بر حسب زمان است که وجود آنها برای اجرای یک دستور حرکت توسط بازوی ماهر ضروری است. ورودی‌های مفصل ممکن است نیروها و گشتاورهای مفصل باشند یا ممکن است ورودی‌های محرکه‌ها باشند.

## ۱-۲- سینماتیک مستقیم<sup>۶</sup>

اولین مسئله که لازم است روشن شود تعیین موقعیت ابزار و مجری نهایی<sup>۷</sup> در دستگاه مختصات مشترک است [۳]. معمولاً بازوی ماهر قادر به حس موقعیت خود با استفاده از سنسورهای داخلی<sup>۸</sup> (شمارشگر موقعیت) که در مفاصل نصب شده‌اند می‌باشد. در سینماتیک مستقیم با تعیین متغیرهای مفاصل می‌توان موقعیت و جهت مجری نهایی را تعیین نمود. یک سیستم مختصات ثابت به نام مختصات

---

<sup>1</sup> *Common kinematic arrangements of manipulators*

<sup>2</sup> *Dynamic properties*

<sup>3</sup> *Actuators*

<sup>4</sup> *Torque*

<sup>5</sup> *Joint*

<sup>6</sup> *Forward kinematics*

<sup>7</sup> *End-effector*

<sup>8</sup> *Internal sensors*

جهانی<sup>۱</sup> یا پایه برقرار می‌شود تا همه اشیا مشتمل بر بازوی ماهر به آن رجوع نمایند. معادلات سینماتیک مستقیم برای رباتهایی با درجه ی آزادی بالا کاملاً پیچیده است. در ادامه برای مفاصل، دستگاه های مختصات را برپا می کنیم و اجازه می دهیم که انتقال به صورت سیستمی داخل این دستگاه های مختصات با ماتریس های انتقال انجام شود. برای انجام این کار از روشی که به نماد گذاری دناویت- هارتنبرگ<sup>۲</sup> معروف است، استفاده می‌کنیم. نقطه مقابل سینماتیک مستقیم، سینماتیک وارون<sup>۳</sup> می باشد که از حل معادلات سینماتیک مستقیم به ازای موقیت معین مجری نهایی به منظور بدست آوردن زوایای مفاصل، تشکیل شده است. از آنجا که معادلات سینماتیک مستقیم غیر خطی<sup>۴</sup> هستند ممکن است یافتن راه حل آسان نباشد و علاوه بر آن ممکن است پاسخها چندگانه<sup>۵</sup> باشند و به طور کلی پاسخ یکتا وجود نداشته باشد [۴].

### ۱-۳- سینماتیک سرعت<sup>۶</sup>

به منظور تعقیب مسیر در سرعت ثابت یا در هر سرعت معین باید ارتباط بین سرعت ابزار و سرعت های مفاصل را بدانیم در این حالت می توانیم با مشتق گیری از روابط سینماتیک مستقیم ، سینماتیک سرعت را بیابیم که ژاکوبین<sup>۷</sup> نامیده می شود. علاوه بر آن بدست آوردن ژاکوبین در یافتن ترکیب تکین<sup>۸</sup> بازوی ماهر بسیار اهمیت دارد. [۵]

---

<sup>1</sup>World coordinates

<sup>2</sup>Denavit-Hartenberg representation

<sup>3</sup>Inverse Kinematics

<sup>4</sup>Nonlinear

<sup>5</sup>Non-uniqueness of solutions

<sup>6</sup>Velocity Kinematics

<sup>7</sup>Jacobian

<sup>8</sup>Singular configuration

## ۱-۴- دینامیک

بازوی ماهر ربات اساساً یک دستگاه کنترل موقعیت<sup>۱</sup> است. برای کنترل موقعیت باید ویژگی‌های دینامیکی بازوی ماهر را داشته باشیم تا نیروی لازم را برای به حرکت در آوردن بازوی ربات، اعمال نماییم [۶]. بدست آوردن معادلات دینامیکی حرکت برای ربات‌ها کار ساده‌ای نیست زیرا تعداد درجه‌ی آزادی زیاد است و سیستم غیر خطی است در ادامه بر اساس دینامیک لاگرانژ<sup>۲</sup> معادلات حرکت چنین سیستمی را بدست می‌آوریم. همچنین به بررسی دینامیک محرکه و سیستم انتقال<sup>۳</sup> و اثرات آن روی مسئله کنترل می‌پردازیم. مسئله کنترل حرکت از مسئله تعقیب مسیر<sup>۴</sup> و حذف اثر اغتشاش<sup>۵</sup> تشکیل می‌شود. در واقع آن مسئله تعیین ورودی‌های کنترل برای تعقیب کردن و یا دنبال کردن یک مسیر دلخواه<sup>۶</sup> است. مسیری برای بازوی ماهر در نظر گرفته شده است و بطور همزمان اغتشاشات حذف می‌شوند. اغتشاشاتی که به وسیله اثرات دینامیک‌های مدل<sup>۷</sup> نشده نظیر اصطکاک<sup>۸</sup> و نویز وجود دارند.

## ۱-۵- مقدمات ریاضی مسئله سینماتیک

برای پرداختن به مسئله سینماتیک و دینامیک به توصیف‌های ریاضی مشخصی نیاز داریم که در این قسمت به معرفی آنها می‌پردازیم.

---

<sup>1</sup> Position Control

<sup>2</sup> Lagrangian dynamics

<sup>3</sup> Transmit

<sup>4</sup> Tracking

<sup>5</sup> Disturbance Rejection Problem,

<sup>6</sup> Desired trajectory

<sup>7</sup> Unmodeled dynamic

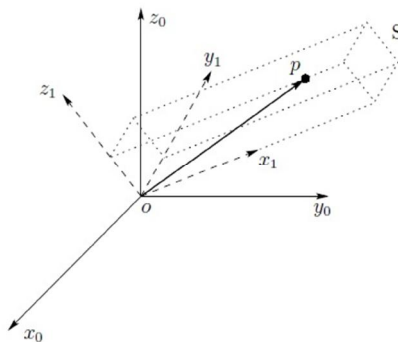
<sup>8</sup> Friction

## ۱-۵-۱- انتقال، دوران و تبدیل های همگن

بخش بزرگی از مسئله سینماتیک ربات به برقرار نمودن سیستم های مختصات مختلف برای نشان دادن موقعیت ها و جهت های اجسام صلب<sup>۱</sup> و همچنین به تبدیل های داخل این سیستم های مختصات توجه دارند. در واقع هندسه ی فضای سه بعدی<sup>۲</sup> و حرکت صلب در همه ی جنبه های کاری رباتیکی که روی اجسام می شود یک نقش اصلی ایفا می کند. حرکت بازوهای ربات را در فضا به وسیله دوران و انتقال می توانیم نشان دهیم به این منظور ابتدا به معرفی انتقال، دوران و اصطلاح تبدیل های همگن می پردازیم [۷].

### ۱-۱-۵-۱- دوران<sup>۳</sup>

شکل زیر جسم صلب  $S$  را نشان می دهد که به آن دستگاه مختصات  $\{1\}$  متصل شده است. مختصات نقطه  $P$  روی جسم  $S$  را در دستگاه  $\{1\}$ ، به مختصات  $P$  در یک دستگاه غیر چرخشی  $\{0\}$  ارتباط می دهیم.



شکل ۱-۱ دستگاه مختصات متصل به جسم صلب

<sup>1</sup> Rigid objects

<sup>2</sup> Geometry of three-dimensional space

<sup>3</sup> Rotation transformation



$$P_0 = P_{0x}i_0 + P_{0y}j_0 + P_{0z}k_0 \quad (1-1)$$

$$P_1 = P_{1x}i_1 + P_{1y}j_1 + P_{1z}k_1 \quad (2-1)$$

از آنجا که  $P_0$  و  $P_1$  نمایش یکسان بردار  $P$  می باشند، ارتباط بین مولفه‌های  $P$  در دو دستگاه مختصات

به صورت زیر می باشد:

$$P_{0x} = P_0i_0 = P_1i_0 = P_{1x}i_1i_0 + P_{1y}j_1i_0 + P_{1z}k_1i_0 \quad (3-1)$$

$$P_{0y} = P_0j_0 = P_1j_0 = P_{1x}i_1j_0 + P_{1y}j_1j_0 + P_{1z}k_1j_0 \quad (4-1)$$

$$P_{0z} = P_0k_0 = P_1k_0 = P_{1x}i_1k_0 + P_{1y}j_1k_0 + P_{1z}k_1k_0 \quad (5-1)$$

روابط بالا به صورت ماتریسی به صورت زیر می باشد:

$$\begin{bmatrix} P_{0x} \\ P_{0y} \\ P_{0z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1i_0 & j_1i_0 & k_1i_0 \\ i_1j_0 & j_1j_0 & k_1j_0 \\ i_1k_0 & j_1k_0 & k_1k_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ P_{1z} \end{bmatrix} \quad (6-1)$$

$$P_0 = R_0^1 P_1 \quad (7-1)$$

$$R_0^1 = \begin{bmatrix} i_1i_0 & j_1i_0 & k_1i_0 \\ i_1j_0 & j_1j_0 & k_1j_0 \\ i_1k_0 & j_1k_0 & k_1k_0 \end{bmatrix} \quad (8-1)$$

به طور مشابه داریم  $P_1 = R_1^0 P_0$ ، که در آن  $R_1^0$  معکوس ماتریس  $R_0^1$  می باشد. در مورد این ماتریس

می توان نشان داد که ترانزاده<sup>1</sup> آن با معکوس آن برابر است، بنابراین در محاسبات بجای معکوس این

ماتریس از ترانزاده<sup>1</sup> آن استفاده می کنیم. ماتریس هایی که ترانزاده<sup>1</sup> ی آنها با معکوس آنها یکسان هستند

متعامد<sup>2</sup> نامیده می شوند. در مورد این ماتریس ها می توان نشان داد که:

$$(R_0^1)^T = (R_0^1)^{-1} = R_1^0 \quad (9-1)$$

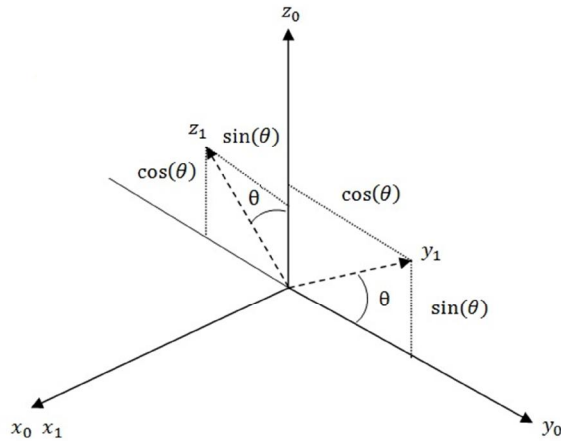
$$\det(R_0^1) = \pm 1 \quad (10-1)$$

<sup>1</sup> Transpose

<sup>2</sup> Orthogonal

دوران های ساده را می توان حول سه محور  $x, y, z$  به صورت زیر بدست آورد:

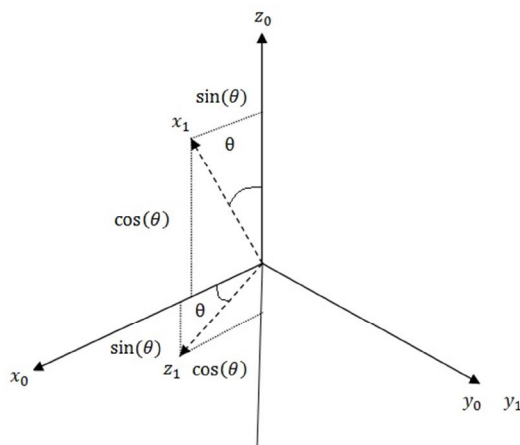
❖ دوران به اندازه  $\theta$  زاویه حول محور  $x$  به صورت زیر می باشد.



شکل ۱-۲- دوران حول محور  $x$

$$R_1 = Rot(x, \theta) = \begin{bmatrix} i_1 i_0 & j_1 i_0 & k_1 i_0 \\ i_1 j_0 & j_1 j_0 & k_1 j_0 \\ i_1 k_0 & j_1 k_0 & k_1 k_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_\theta & -S_\theta \\ 0 & S_\theta & C_\theta \end{bmatrix} \quad (11-1)$$

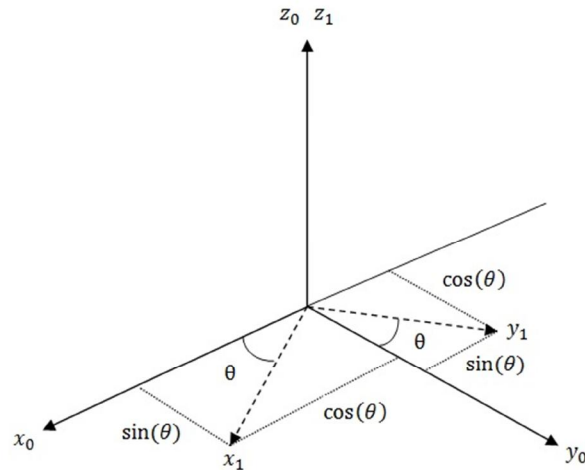
❖ دوران به اندازه  $\theta$  زاویه حول محور  $y$  به صورت زیر می باشد.



شکل ۱-۳- دوران حول محور  $y$

$$R_1 = Rot(y, \theta) = \begin{bmatrix} i_1 i_0 & j_1 i_0 & k_1 i_0 \\ i_1 j_0 & j_1 j_0 & k_1 j_0 \\ i_1 k_0 & j_1 k_0 & k_1 k_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_\theta & 0 & S_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_\theta & 0 & C_\theta \end{bmatrix} \quad (12-1)$$

❖ دوران به اندازه ی زاویه ی  $\theta$  حول محور  $z$  به صورت زیر می باشد.



شکل ۱-۴ دوران حول محور z

$$R_1 = Rot(z, \theta) = \begin{bmatrix} i_1 i_0 & j_1 i_0 & k_1 i_0 \\ i_1 j_0 & j_1 j_0 & k_1 j_0 \\ i_1 k_0 & j_1 k_0 & k_1 k_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_\theta & -S_\theta & 0 \\ S_\theta & C_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13-1)$$

ماتریس دوران را می توان به سه روش مختلف تفسیر نمود:

۱. تبدیلی است که مختصات نقطه ی  $p$  را در دو دستگاه مختلف نشان می دهد.
۲. جهت یک مختصات تبدیل شده را نسبت به دستگاه مختصات ثابت<sup>۱</sup> ارائه می دهد.
۳. یک عملگر<sup>۲</sup> است که بردار  $p$  را دوران می دهد و آن را به بردار جدید  $r$  در همان دستگاه مختصات تبدیل میکند.

۴. ماتریس های دوران مختلف را می توان با هم ترکیب کرد:

<sup>1</sup> Fixed coordinate frame

<sup>2</sup> Operator

$$P_0 = R_0^l P_1 \quad (14-1)$$

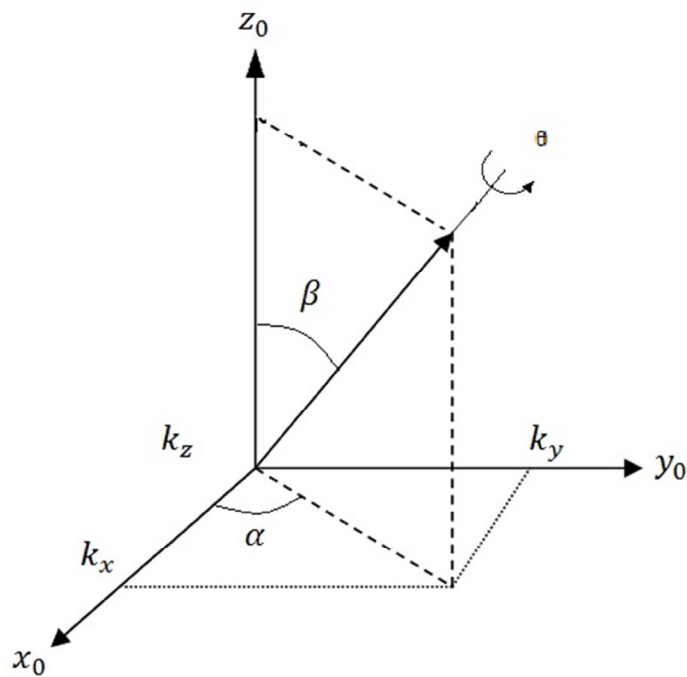
$$P_1 = R_1^2 P_2 \quad (15-1)$$

$$P_0 = R_0^l (R_1^2 P_2) = R_0^2 P_2 \quad (16-1)$$

$$R_0^2 = R_0^l R_1^2 \quad (17-1)$$

نکته‌ی مهم در مورد ماتریس‌های دوران اینست که جابجایی پذیر نیستند و در ترکیب دوران‌ها باید پیش ضرب یا پس ضرب شدن آنها را مورد توجه قرار داد. دوران در دستگاه فعلی به صورت پس ضرب و در دستگاه مبنا به صورت پیش ضرب عمل می‌کند.

دوران‌ها همیشه حول محورهای مختصات نیستند، بلکه اغلب حول محوری دلخواه در فضا انجام می‌شوند در این صورت بردار  $k = [k_x \ k_y \ k_z]^T$  را در نظر بگیرید که در دستگاه  $\{0\}$  بردار واحدیکه محور را تعریف می‌کند. آسان‌ترین راه برای بدست آوردن دوران حول بردار  $k$  به اندازه زاویه  $\theta$  به صورت زیر می‌باشد:



شکل ۱-۵- دوران حول محور دلخواه

$$R(k, \theta) = R(z, \alpha)R(y, \beta)R(z, \theta)R(y, -\beta)R(z, -\alpha) \quad (18-1)$$

$$R(k, \theta) = R(z, \alpha)R(y, \beta)R(z, \theta)R(y, -\beta)R(z, -\alpha) \quad (19-1)$$

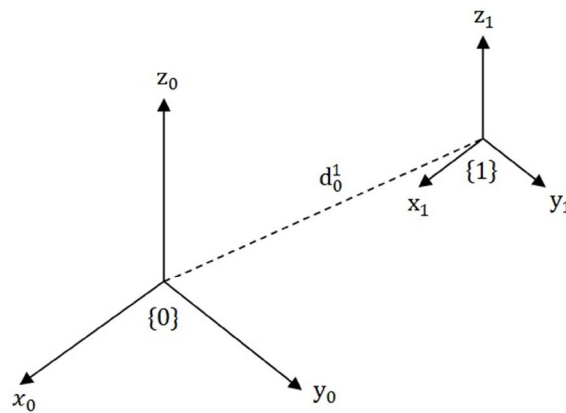
که با جایگذاری روابط بالا داریم:

$$R(k, \theta) = \begin{bmatrix} C_\alpha & -S_\alpha & 0 \\ S_\alpha & C_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\beta & 0 & S_\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_\beta & 0 & C_\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\theta & -S_\theta & 0 \\ S_\theta & C_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\beta & 0 & -S_\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ S_\beta & 0 & C_\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\alpha & S_\alpha & 0 \\ -S_\alpha & C_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (20-1)$$

### ۱-۵-۱-۲- تبدیل‌های همگن<sup>۱</sup>

به دستگاه مختصات  $\{1\}$  توجه نمایید که از دستگاه  $\{0\}$  با انتقال موازی به مسافت  $|d|$  مطابق شکل

زیر بدست آمده است.



شکل ۱-۶- دستگاه مختصات منتقل شده

$$P_0 = P_1 + d_0^1 \quad (21-1)$$

بیشترین رابطه ی کلی بین دستگاه های مختصات  $\{0\}$  و  $\{1\}$  به صورت ترکیب دوران های خالص و انتقال خالص می تواند باشد و به عنوان حرکت صلب معرفی شود. تبدیل  $P$  به شرط آنکه  $R$  متعامد باشد حرکت صلب را تعریف می کند.

<sup>1</sup> Homogeneous transformation

$$P_0 = RP_1 + d \quad (22-1)$$

$$\begin{bmatrix} P_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ 1 \end{bmatrix} \quad (23-1)$$

$$H = \begin{bmatrix} R & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (24-1)$$

حرکت صلب به وسیله مجموعه ماتریس  $H$  نمایش داده می شود. مجموعه‌ای از تبدیل‌های همگن پایه

به صورت زیر می‌باشد :

$$Trans(x, a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (25-1)$$

$$Trans(y, b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (26-1)$$

$$Trans(z, c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (27-1)$$

تعمیم یافته ترین تبدیل فضایی<sup>1</sup> به شکل زیر می باشد :

$$H = \begin{bmatrix} R_{3 \times 3} & d_{3 \times 1} \\ f_{1 \times 3} & S_{1 \times 1} \end{bmatrix} \quad (28-1)$$

عناصر این ماتریس عبارتند از:

❖  $R_{3 \times 3}$  ماتریس دوران

❖  $d_{3 \times 1}$  بردار انتقال<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Most general homogeneous transformation

❖ بردار نمایش سه بعدی<sup>۲</sup>  $f_{1 \times 3}$

❖ ضریب بزرگ نمایی<sup>۳</sup>  $S_{1 \times 1}$

در عمده‌ترین فرم ارائه شده ضریب بزرگ نمایی برابر یک و بردار نمایش سه بعدی به صورت  $[0 \ 0 \ 0]$  در نظر گرفته می‌شوند ولی در حالت کلی استفاده از پارامترهای  $S, f$  هنگامی که سیستم بینایی<sup>۴</sup> برای شبیه سازی گرافیکی به ربات افزوده شده، مفید می‌باشد. در ادامه به بررسی خصوصیات بیشتری از ماتریس‌های دوران که برای محاسبه تبدیل‌های سرعت نسبی و شتاب نسبی بین دستگاه‌های مختصات مفید هستند و همچنین معرفی ماتریس پاد متقارن می‌پردازیم.

### ۱-۵-۳- ماتریس پادمتقارن<sup>۵</sup>

ماتریس  $S$  پاد متقارن نامیده می‌شود اگر و فقط اگر داشته باشیم:

$$S^T + S = 0 \quad (۲۹-۱)$$

گروه همه‌ی ماتریس‌های پاد متقارن را با  $SS(3)$  نماد گذاری می‌کنیم. اگر  $S \in SS(3)$  دارای اعضای  $S_{ij}, i, j = 1, 2, 3$  باشد و آنگاه داریم:

$$S_{ij} + S_{ji} = 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (۳۰-۱)$$

با توجه به رابطه بالا مشخص است که درایه‌های قطر اصلی صفر هستند ( $S_{ii} = 0$ ) و درایه‌های غیر اصلی  $S_{ij} (i \neq j)$  در رابطه ی  $S_{ij} = -S_{ji}$  صدق می‌کنند. بنابراین ماتریس پاد متقارن فقط سه درآیه مستقل دارد. هر ماتریس پاد متقارن  $3 \times 3$  به صورت زیر است:

---

<sup>1</sup> Translation

<sup>2</sup> Perspective

<sup>3</sup> Scale factor

<sup>4</sup> Vision system

<sup>5</sup> Skew symmetric matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & -S_1 & S_2 \\ S_1 & 0 & -S_3 \\ -S_2 & S_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (31-1)$$

اگر  $P = [P_x \ P_y \ P_z]^T$  یک بردار سه عضوی باشد، ماتریس پاد متقارن  $S(P)$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S(P) = \begin{bmatrix} 0 & -P_z & P_y \\ P_z & 0 & -P_x \\ -P_y & P_x & 0 \end{bmatrix} \quad (32-1)$$

در ادامه به معرفی برخی خواص ماتریس پاد متقارن که در رباتیک پر کاربرد است، می‌پردازیم. یکی از ویژگی‌های مهم  $S(P)$  خطی بودن آن است، بنابراین داریم:

$$S(\alpha P_1 \pm \beta P_2) = \alpha S(P_1) \pm \beta S(P_2) \quad (33-1)$$

ویژگی مهم دیگر که برای هر بردار  $P = [P_x \ P_y \ P_z]^T$  داریم، عبارت است از:

$$S(P)a = P \times a = -a \times P \quad (34-1)$$

رابطه زیر فقط زمانی صادق است که  $R$  متعامد باشد:

$$R(P_1 \times P_2) = RP_1 \times RP_2 \quad (35-1)$$

با توجه به خواص بالا داریم:

$$RS(P_1)R^T P_2 = R(P_1 \times R^T P_2) = (RP_1) \times (RR^T P_2) = (RP_1) \times P_2 = S(RP_1)P_2 \quad (36-1)$$

برای بررسی سرعت و شتاب نسبی در وضعیت و شرایط یکسان استفاده از ماتریس پاد متقارن بسیار سودمند می‌باشد، برای این کار از متعامد بودن ماتریس  $R$  استفاده می‌کنیم:

$$R(\theta).R(\theta)^T = I \quad (37-1)$$

با مشتق گیری از طرفین معادله، داریم:



$$\frac{dR(\theta)}{d\theta}R(\theta)^T + R(\theta)\frac{dR(\theta)^T}{d\theta} = 0 \quad (38-1)$$

بنابراین با توجه به تعریف ماتریس پاد متقارن ، داریم :

$$S = \frac{dR(\theta)}{d\theta}R(\theta)^T \quad (39-1)$$

$$\frac{dR(\theta)}{d\theta} = SR(\theta) \quad (40-1)$$

توصیف موقعیت عبارت است از  $P_0 = d_0^l + R_0^l P_1$  ، که بامشتق گیری از آن به توصیف سرعت می

رسیم:

$$\dot{P}_0 = \dot{d}_0^l + \dot{R}_0^l P_1 + R_0^l \dot{P}_1 \quad (41-1)$$

از آنجا که  $P$  در دستگاه  $\{1\}$  ثابت است در نتیجه  $\dot{P}_1 = 0$  می باشد، بنابراین داریم:

$$\dot{P}_0 = \dot{d}_0^l + \dot{R}_0^l P_1 \quad (42-1)$$

در معادله بالا  $\dot{d}_0^l$  سرعت خطی<sup>۱</sup> مبداء دستگاه  $\{1\}$  در دستگاه  $\{0\}$  می باشد :

$$\dot{R}_0^l = S(w_0^l)R_0^l \quad (43-1)$$

$$R_0^l P_1 = r \quad (44-1)$$

$$\dot{P}_0 = S(w_0^l)R_0^l P_1 + \dot{d}_0^l \quad (45-1)$$

$$\dot{P}_0 = w_0^l \times R_0^l P_1 + \dot{d}_0^l \quad (46-1)$$

$$\dot{P}_0 = (w_0^l \times r) + \dot{d}_0^l \quad (47-1)$$

در رابطه (۴۸-۱)  $\dot{d}_0^l$  ، سرعت ناشی از انتقال و ترم  $(w_0^l \times r)$  ناشی از دوران می باشد. توصیف

شتاب<sup>۱</sup> با دو بار مشتق گیری از توصیف موقعیت یا یک بار مشتق گیری از توصیف سرعت بدست می آید

که عبارت است از:

---

<sup>۱</sup> Linear velocity

$$\ddot{P}_0 = \ddot{d}_0^l + S(w_0^l) R_0^l P_1 \quad (48-1)$$

$$\ddot{P}_0 = \ddot{d}_0^l + \dot{w}_0^l \times r + S(w_0^l) S(w_0^l) R_0^l P_1 \quad (49-1)$$

که در نهایت معادله شتاب  $P$  در دستگاه  $\{0\}$  به صورت زیر می‌باشد:

$$\ddot{P}_0 = \ddot{d}_0^l + (\dot{w}_0^l \times r) + (w_0^l \times w_0^l \times r) \quad (50-1)$$

سرعت زاویه‌ای<sup>۲</sup> دستگاه  $\{n\}$  در دستگاه  $\{0\}$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$w_0^n = w_0^l + R_0^l w_1^2 + R_0^l R_1^2 w_2^3 + \dots + R_0^{n-1} w_{n-1}^n \quad (51-1)$$

برای اثبات رابطه (51-1) از خواص ماتریس پاد متقارن استفاده می‌کنیم:

$$R_0^n = R_0^l R_1^2 R_2^3 \dots R_{n-1}^n \quad (52-1)$$

با مشتق‌گیری از طرفین داریم:

$$\dot{R}_0^n = \dot{R}_0^l R_1^2 + R_0^l \dot{R}_1^2 R_2^3 + R_0^l R_1^2 \dot{R}_2^3 R_3^4 + \dots + R_0^{n-1} \dot{R}_{n-1}^n \quad (53-1)$$

در این قسمت با بهره‌گیری از خواص ماتریس پاد متقارن و جایگذاری رابطه (54-1) در رابطه (53-1)

داریم:

$$\dot{R}_0^n = S(w_0^n) R_0^n \quad (54-1)$$

$$S(w_0^n) R_0^n = S(w_0^l) R_0^l R_1^2 + R_0^l S(w_1^2) R_1^2 R_2^3 + R_0^l R_1^2 S(w_2^3) R_2^3 R_3^4 + \dots + R_0^{n-1} S(w_{n-1}^n) R_{n-1}^n \quad (55-1)$$

با توجه به رابطه (58-1)، رابطه (57-1) را می‌توانیم به صورت (59-1) بنویسیم:

$$R^T R = I \quad (56-1)$$

$$S(w_0^n) R_0^n = S(w_0^l) R_0^n + R_0^l S(w_1^2) R_0^{lT} R_0^n + R_0^l R_1^2 S(w_2^3) R_0^{2T} R_0^n + \dots + R_0^{n-1} S(w_{n-1}^n) R_0^{n-1T} R_0^n \quad (57-1)$$

با توجه به خواص ماتریس پاد متقارن داریم:

$$S(w_0^n) R_0^n = S(w_0^l) R_0^n + S(R_0^l w_1^2) R_0^n + S(R_0^l R_1^2 w_2^3) R_0^n + \dots + S(R_0^{n-1} w_{n-1}^n) R_0^n \quad (58-1)$$

<sup>1</sup> Acceleration

<sup>2</sup> Angular Velocity

در رابطه (۶۰-۱) می‌توانیم از طرفین معادله  $R_0^n$  را حذف کنیم، بنابراین داریم:

$$S(w_0^n) = S(w_0^l) + S(R_0^l w_1^2) + S(R_0^2 w_2^3) + \dots + S(R_0^{n-l} w_{n-1}^n) \quad (۵۹-۱)$$

با توجه به خاصیت خطی بودن ماتریس پاد متقارن به رابطه زیر می‌رسیم [۸]:

$$w_0^n = w_0^l + R_0^l w_1^2 + R_0^2 w_2^3 + \dots + R_0^{n-l} w_{n-1}^n \quad (۶۰-۱)$$

## ۱-۶- سابقه تحقیق

در تحقیقات گذشته استراتژی‌های کنترلی مختلفی برای کنترل موقعیت ربات بکار گرفته شده است. برخی از استراتژی‌ها مبتنی بر مدل و برخی مستقل از مدل می‌باشند. در این تحقیق به بررسی کنترل غیر خطی مقاوم که روشی مبتنی بر مدل است، پرداخته شده است بنابراین در این قسمت به معرفی برخی از استراتژی‌های کنترلی مبتنی بر مدل می‌پردازیم.

### ۱-۶-۱- کنترل نیرو<sup>۱</sup>

در کاربردهایی نظیر مونتاژ، ربات‌ها با محیط تماس گسترده‌ای دارند بنابراین کنترل موقعیت از طریق کنترل نیروهای تعامل بین بازوی ماهر و محیط می‌تواند به صورت بهتری انجام شود. [۲] در این روش بدیهی است که باید دستورات موقعیت را بر اساس اطلاعات نیروی حس شده اصلاح نماییم. بنابراین یک الگوریتم کنترل پسخوری نیرو باید دستورات نیرو و حرکت را بپذیرد، نیروها و موقعیت‌ها را اندازه‌گیری کند و فرمان‌های حرکت بازوی ماهر را تولید نماید.

سه نوع اصلی حساسه<sup>۲</sup> پسخوری نیرو وجود دارد که عبارتند از حساسه‌های نیروی مچ<sup>۳</sup>، حساسه‌های گشتاور مفصل<sup>۴</sup> و حساسه‌های لامسه<sup>۵</sup> یا حساسه‌های دست.

<sup>۱</sup> Force Control

<sup>۲</sup> Sensor

<sup>۳</sup> Wrist Force Sensors

<sup>۴</sup> Joint Torque Sensors

<sup>۵</sup> Tactile or Hand Sensors

تعامل بازو و محیط، نیروها یا گشتاورهایی را در مجری نهایی یا ابزار تولید خواهد کرد.  $\delta X$  تغییر مکان مجازی مجری نهایی است که توسط نیروی  $F$  ایجاد شده و  $\delta q$  تغییر مکان مفصل مربوط را نشان می‌دهد. این تغییر مکان‌های مجازی از طریق ژاکوبین بازوی ماهر  $J(q)$  مطابق رابطه زیر مرتبط می‌شوند:

$$\delta X = J(q)\delta q \quad (61-1)$$

همچنین کار مجازی مطابق زیر تعریف می‌گردد:

$$\delta w = F^T \delta X - \tau^T \delta q \quad (62-1)$$

با جایگذاری رابطه  $\delta X$  در  $\delta w$  داریم :

$$\delta w = F^T J(q)\delta q - \tau^T \delta q \quad (63-1)$$

$$\delta w = (F^T J(q) - \tau^T)\delta q \quad (64-1)$$

هرگاه بازو در تعادل باشد، رابطه بالا برابر صفر است. بنابراین داریم :

$$\tau = J(q)^T F \quad (65-1)$$

به عبارت دیگر نیروهای مجری نهایی به گشتاورهای مفاصل با ترانهادهی ژاکوبین بازوی ماهر ارتباط دارند.

## ۱-۶-۲- کنترل امپدانس<sup>۱</sup>

در کنترل امپدانس هدف ردیابی حرکت یا مسیرهای نیرو نیست، بلکه تلاش به منظور تنظیم رابطه بین سرعت و نیرو می‌باشد، به عبارت دیگر امپدانس مکانیکی مد نظر می‌باشد. با استفاده از دوگانه‌های برق - مکانیک که نیرو را با ولتاژ و سرعت را با جریان متناظر می‌کنند.

---

<sup>1</sup> Impedance Control

نسبت نیرو به سرعت همانند امیدانس مکانیکی سیستم نسبت دارد. این رابطه در حوزه فرکانس به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{F_e(s)}{V(s)} = Z(s) \quad (66-1)$$

در رابطه بالا  $F_e(s)$  و  $V(s)$  و  $Z(s)$  به ترتیب نیرو، سرعت و امیدانس هستند. روابط بالا را اگر بر اساس موقعیت بنویسیم ه صورت زیر تبدیل می‌گردد:

$$\frac{F_e(s)}{X(s)} = sZ(s) \quad (67-1)$$

در این استراتژی کنترلی قانون کنترلی مورد نیاز باید در فضای مفصل اجرا شود.

### ۱-۶-۳- ساختار متغیر<sup>۱</sup>

سیستم ساختار متغیر سیستمی است که ساختار آن می‌تواند تغییر کند یا کلید زنی آن مطابق با یک کلید زنی منطقی معینی باشد که هدف آن ایجاد یک رفتار کلی مطلوب از سیستم است.

### ۱-۶-۴- روش های مود لغزش<sup>۲</sup>

این روش توسط سویت یونین بیش از سی سال پیش ارائه شد. این روش از کلید زنی با سرعتهای بالا بین مقادیر کنترلی، استفاده می‌کند. پیشرفت های اخیر در الکترونیک قدرت سرعت کلید زنی را در عمل برای بسیاری از سیستم ها نظیر موتورهای الکتریکی بالا برده است. بنابراین توجه به مود لغزش در سیستم های رباتیک رو به افزایش است.

<sup>1</sup> Variable Structure

<sup>2</sup> Sliding Mode

## فصل دوم

### مدلسازی سینماتیکی

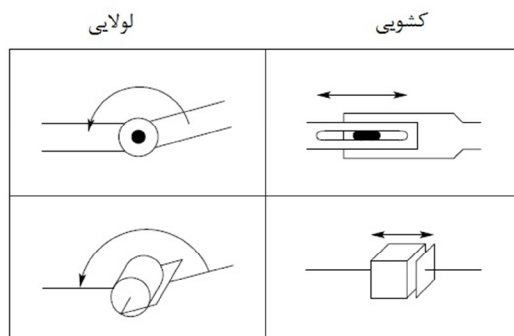
- ❖ مقدمه
- ❖ اجزا و ساختار ربات
- ❖ فضای کار
- ❖ دقت
- ❖ تکرار پذیری
- ❖ پیکربندیهای سینماتیکی متداول
- ❖ طبقه بندی بازوهای مکانیکی ماهر
- ❖ سینماتیک وارون
- ❖ سینماتیک سرعت
- ❖ تعیین ماتریس ژاکوبین
- ❖ وضعیت تکین ربات

## ۲-۱- مقدمه

همان گونه که در مقدمه بیان شد در رباتیک اولین مسئله که لازم است روشن شود، تعیین موقعیت ابزار و مجری نهایی در دستگاه مشترک می باشد. سینماتیک مستقیم یا ساختاری بیانگر موقعیت و جهت مجری نهایی به ازای متغیرهای مفاصل ربات می باشد. متغیرهای مفصلی در مفاصل لولایی<sup>۱</sup>، زاویه بین رابط ها و در مفاصل کشویی<sup>۲</sup> طول رابط می باشد.

## ۲-۲- اجزا و ساختار ربات

بازوی مکانیکی ماهر از رابطهای متصل شده بوسیلهی مفاصل در یک زنجیر باز سینماتیک<sup>۳</sup> تشکیل می شوند. مفاصل به طور مشخص لولایی (دوار) یا کشویی (خطی) می باشند. یک مفصل لولایی شبیه یک لولا است که اجازه چرخش نسبی بین دو رابط را می دهد. یک مفصل کشویی اجازه حرکت نسبی طولی بین دو رابط را می دهد. از حرف اختصاری  $R$  برای نشان دادن مفاصل لولایی و حرف اختصاری  $P$  برای مفاصل کشویی استفاده می کنیم. شکل زیر نمادهای مفاصل ربات را نشان می دهد.



شکل ۱-۲ نمایش نمادهای مفاصل ربات

<sup>1</sup> Revolute joint

<sup>2</sup> Prismatic joint

<sup>3</sup> Open kinematic chain

تعداد مفاصل، درجه آزادی<sup>۱</sup> بازوی مکانیکی ماهر را تعیین می‌کند. یک بازوی مکانیکی ماهر حداقل شش درجه آزادی مستقل دارد. سه درجه آزادی برای موقعیت یابی<sup>۲</sup> و سه درجه آزادی برای جهت یابی<sup>۳</sup> می‌باشد با کمتر از شش درجه آزادی بازو به هر نقطه در محیط کار با زاویه دلخواه نخواهد رسید. برای کاربردهایی نظیر دسترسی به اطراف یا پشت موانع نیاز به تعداد درجات آزادی بیشتر از شش می‌باشد. مشکل کنترل یک بازوی ماهر با افزایش درجه آزادی، افزایش می‌یابد. بازوی ماهر با داشتن بیش از شش رابط بعنوان بازوی ماهر با حرکت اضافی<sup>۴</sup> معرفی می‌گردد/۹].

برای معرفی یک ربات از اصطلاحاتی نظیر فضای کار، فضای قابل دسترس، فضای ماهر، دقت و تکرارپذیری استفاده می‌شود که در ادامه به معرفی آنها می‌پردازیم.

## ۲-۲-۱- فضای کار<sup>۵</sup>

فضای کار بازوی ماهر، کل حجم جارو شده توسط مجری نهایی می‌باشد، بطوریکه بازوی ماهر تمام حرکتهای ممکن را بتواند اجرا نماید. فضای کار بوسیله هندسه‌ی بازوی ماهر و همچنین بوسیله محدودیت‌های مکانیکی<sup>۶</sup> مفاصل مقید می‌شود. فضای کار به دو بخش فضای قابل دسترس و فضای ماهر تقسیم می‌شود/۱۰].

## ۲-۲-۱-۱- فضای قابل دسترس<sup>۷</sup>

فضای قابل دسترس به مجموعه‌ای از نقاط قابل دسترس توسط بازوی ماهر گفته می‌شود

---

<sup>1</sup> *Degrees-of-freedom (DOF)*

<sup>2</sup> *Positioning*

<sup>3</sup> *Orientation*

<sup>4</sup> *Redundant Manipulator*

<sup>5</sup> *Workspace*

<sup>6</sup> *Mechanical constraints*

<sup>7</sup> *Reachable workspace*



## ۲-۱-۲-۲ - فضای ماهر<sup>۱</sup>

فضای ماهر از نقاطی تشکیل می‌شود که در آن مجری نهایی می‌تواند با هر جهت دلخواه به آنها برسد. فضای ماهر زیر مجموعه ای از فضای قابل دسترس می‌باشد.

## ۲-۲-۲ - دقت<sup>۲</sup>

دقت بازوی ماهر به اندازه‌ی نزدیک شدن بازوی ماهر به یک نقطه تعیین شده در داخل فضای کار آن تعریف می‌شود.

## ۲-۲-۳ - تکرار پذیری<sup>۳</sup>

تکرار پذیری به اندازه نزدیک شدن مجدد یک بازوی ماهر به نقطه‌ای که از قبل آموخته، تعریف می‌شود. اغلب بازوهای ماهر جدید قابلیت تکرار پذیری بالایی دارند اما خیلی دقیق نیستند. تکرار پذیری به طور عمده از درجه تشخیص کنترل کننده<sup>۴</sup> تاثیر می‌پذیرد. منظور از درجه تشخیص کنترل کننده، کوچکترین افزایش در حرکت است که کنترل کننده می‌تواند حس نماید. [۱۰]

---

<sup>1</sup> *Dextrous workspace*

<sup>2</sup> *Accuracy*

<sup>3</sup> *Repeatability*

<sup>4</sup> *Controller resolution*

## ۲-۳- پیکربندی‌های سینماتیکی متداول

اگر چه بازوی ماهر دستگاه‌های چند منظوره است اما در این بازوها معمولاً برای گروه خاصی از کارهای تخصصی نظیر جوشکاری، مونتاژ و کار روی مواد طراحی می‌شوند. این کاربرد ها بطور چشم گیری انتخاب پارامترهای طراحی بازوی ماهر را تعیین می‌کند.

### ۲-۳-۱- طبقه بندی بازوهای مکانیکی ماهر<sup>۱</sup>

برای طبقه بندی بازوهای ربات از معیارهای متفاوتی نظیر هندسه آنها ، یا ساختار سینماتیک، نوع کاربرد آنها برای آنچه طراحی می‌شوند، روش کنترل و غیره می‌توان استفاده کرد. در متن‌های تخصصی رباتیک معمولاً بازوی ماهر را مطابق هندسه آنها طبقه بندی می‌کنیم. در حال حاضر اغلب بازوهای ماهر صنعتی دارای شش یا کمتر درجه آزادی هستند. این بازوهای ماهر به طور سینماتیکی بر اساس بازو سه مفصل اول توصیف می‌شوند. سه مفصل انتها ، می‌باشد که بطور مجزا توصیف می‌شود. به منظور انجام آنالیزهای سینماتیکی دیاگرام مفصلی برای بازو ترسیم می‌شود. اکثریت بازوهای ماهر در یکی از پنج نوع شکل هندسی که در ادامه معرفی می‌کنیم، قرار می‌گیرند[۳].

### ۲-۳-۱-۱- هنرمند<sup>۲</sup>

این بازوی ماهر، شبیه به انسان یا چرخان نامیده می‌شود. در این پیکربندی تمام مفاصل بازو از نوع لولایی می‌باشد. شکل زیر یک ربات که به منظور کار در کارخانه ذوب فلز طراحی شده را نشان می‌دهد.

---

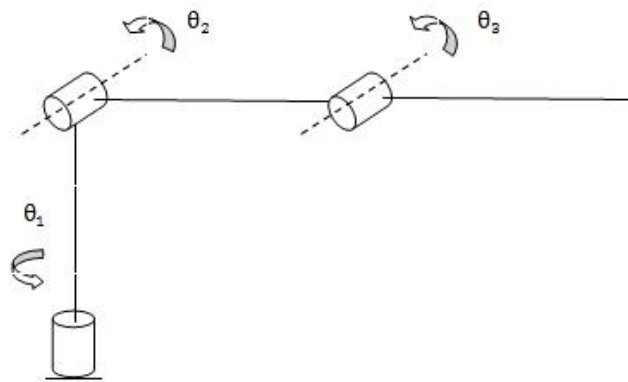
<sup>1</sup> Classification of Robotic Manipulators

<sup>2</sup> Articulated (RRR)



شکل ۲-۲-ربات با پیکربندی هنرمند

دیاگرام مفصلی ربات بالا به صورت زیر می باشد:



شکل ۳-۲- دیاگرام مفصلی پیکربندی ربات هنرمند

## ۲-۳-۱-۳-۲-کروی<sup>۱</sup>

در این پیکربندی از دو مفصل لولایی و یک مفصل کشویی استفاده شده است. اصطلاح ترکیب کروی از این حقیقت ناشی می شود که از مختصات کروی<sup>۲</sup> برای تعریف موقعیت مجری نهایی استفاده می شود. رباتهای یونیمیت<sup>۳</sup> و استنفورد<sup>۴</sup> از این نوع می باشند.

<sup>۱</sup> Spherical (RRP)

<sup>۲</sup> Spherical coordinates

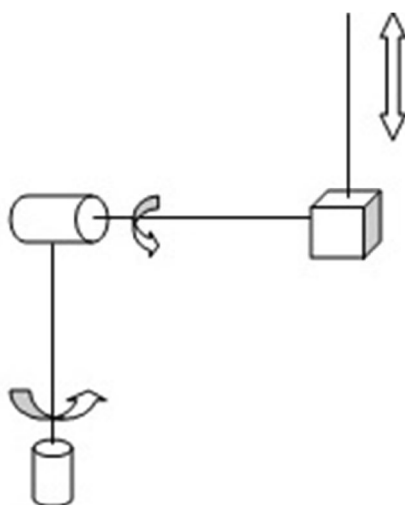
<sup>۳</sup> Unimate manipulator

<sup>۴</sup> Stanford manipulator



شکل ۴-۲ ربات استنفورد

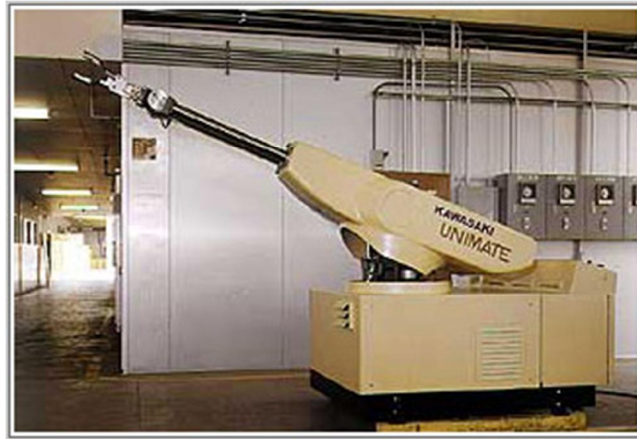
دیاگرام مفصلی ربات استنفورد به صورت زیر می‌باشد :



شکل ۵-۲ دیاگرام مفصلی ربات استنفورد

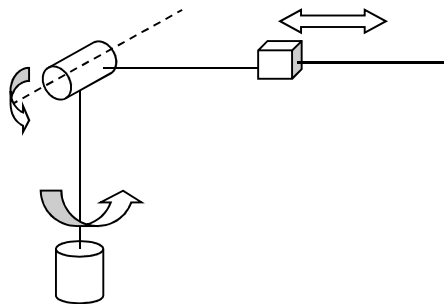
کاربرد ربات‌هایی با پیکربندی کروی بیشتر در صنایع ذوب فلزات می‌باشد. ربات یونیمیت یکی از این

قبیل ربات‌ها می‌باشد که در شکل زیر نمایش داده شده است.



شکل ۲-۶ ربات یونیمیت با پیکربندی کروی

شکل زیر دیاگرام مفصلی ربات یونیمیت با پیکربندی کروی را نشان می‌دهد:



شکل ۲-۷ دیاگرام مفصلی ربات کروی

## ۲-۳-۱-۳- اسکارا<sup>۱</sup>

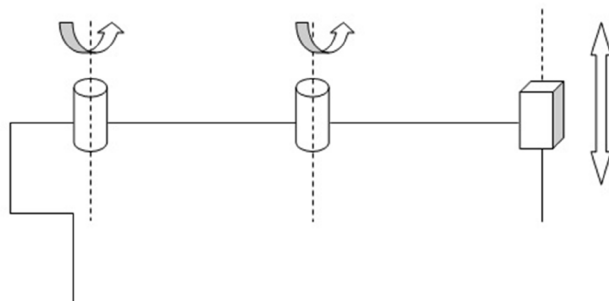
در این ترکیب از دو مفصل لولایی و یک مفصل کشویی استفاده شده است. این ربات عموماً برای عملیات مونتاژ<sup>۲</sup> استفاده می‌شود. تصویر و دیاگرام مفصلی آن در شکل زیر نشان داده شده است.

<sup>۱</sup> SCARA (RRP)

<sup>۲</sup> Assembly



شکل ۸-۲ ربات اسکارا



شکل ۹-۲ دیاگرام مفصلی ربات اسکارا

## ۲-۳-۱-۴- استوانه‌ای<sup>۱</sup>

در این ترکیب اولین مفصل از نوع دورانی یا مفصلی می‌باشد، که چرخش حول پایه ایجاد می‌کند. مفاصل بعدی از نوع کشویی می‌باشند. متغیرهای مفاصل مجری نهایی در یک مختصات استوانه‌ای<sup>۲</sup> نسبت به پایه ربات تعریف می‌شوند. شکل زیر ربّاتی با پیکربندی استوانه‌ای نشان می‌دهد .



شکل ۲-۱۰ بازوی ربات با پیکربندی استوانه‌ای

## ۲-۳-۱-۵- کارتیزین<sup>۳</sup>

در این پیکربندی فقط از مفاصل کشویی استفاده می‌شود. برای بازوی ماهر دکارتی، متغیرهای مفاصل مجری نهایی در مختصات دکارتی<sup>۴</sup> نسبت به پایه می‌باشند. ترکیب‌های دکارتی برای کارهای مونتاژ بالای میز، بعنوان ، ربات‌های نقاله، برای انتقال محموله‌ها یا اشیاء به کار می‌روند.

---

<sup>۱</sup> *Cylindrical (RPP)*

<sup>۲</sup> *Cylindrical Coordinates*

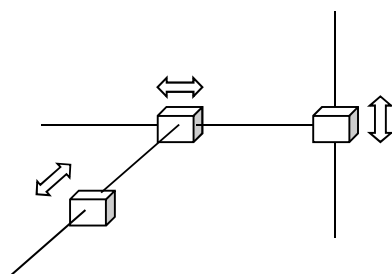
<sup>۳</sup> *Cartesian (PPP)*

<sup>۴</sup> *Cartesian coordinates*



شکل ۱۰-۲ ربات با پیکربندی دکارتی

شکل زیر دیاگرام مفصلی ربات دکارتی را نشان می‌دهد:






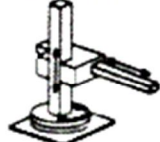











شکل ۱۱-۲ دیاگرام مفصلی ربات دکارتی

### ۲-۳-۱-۶- فضای کاری انواع پیکربندی‌های بازوهای ماهر

طبق تعریفی که پیش‌تر از فضای کاری ارائه شد، فضای کار بازوی ماهر، کل حجم جارو شده توسط

مجری نهایی می‌باشد، در شکل زیر فضای کاری انواع پیکربندی‌ها ترسیم شده است:



Principle	Kinematic Structure	Workspace
 Cartesian Robot		
 Cylindrical Robot		
 Spherical Robot		
 SCARA Robot		
 Articulated Robot		

شکل ۲-۱۲- فضای کاری و دیاگرام مفصلی انواع پیکربندی بازوهای ماهر

در این پایان نامه به تفصیل به مدلسازی سینماتیکی و دینامیکی ربات کروی می پردازیم.

## ۲-۴- نمایش دناویت - هارتنبرگ

برای انجام آنالیز سینماتیک مستقیم در یک روش متقارن باید برخی دستورات عملها معرفی شود. البته بدون این روش خاص هم می توان آنالیز سینماتیک را انجام داد، اما برای ربات هایی با  $n$  رابط، فوق العاده پیچیده است. دستوراتی که در ادامه معرفی می شود معادلات را بطور قابل توجهی ساده می سازد، بعلاوه آنها به یک زبان عمومی ارتقا می یابند که با آن، مهندسين ربات می توانند ارتباط برقرار کنند.

در ربات‌هایی با  $n+1$  رابط، رابط‌ها را از شماره ۰ تا  $n$  شماره‌گذاری می‌کنیم. از پایه ربات بعنوان رابط صفر شروع می‌کنیم و مفاصل را از شماره ۱ تا  $n$  نام‌گذاری می‌کنیم. حال فرض کنید  $A_i$  ماتریسی همگن است که مختصات یک نقطه از مختصات  $i$  را به دستگاه  $i-1$ ، تبدیل می‌کند. ماتریس  $A_i$  ثابت نیست اما مطابق با تغییر ترکیب ربات تغییر می‌کند. بنابراین  $A_i$  تابعی از متغیرمفاصل  $q_i$  می‌باشد:

$$A_i = A_i(q_i) \quad (1-2)$$

این ماتریس همگن، ماتریس تبدیل نامیده می‌شود و با  $T_i^j$  نشان داده می‌شود:

$$\begin{cases} T_i^j = A_{i+1}A_{i+2}\dots A_{j-1}A_j & i < j \\ T_i^j = I & i = j \end{cases} \quad (2-2)$$

$$T_i^j = (T_j^i)^{-1} \quad (3-2)$$

با توجه به روشی که ما دستگاه‌های مختصات را صورت صلب به رابط‌های مربوط متصل نموده‌ایم. در نتیجه موقعیت هر نقطه روی مجری نهایی که در دستگاه  $n$  بیان می‌شود مقداری ثابت و مستقل از شکل ربات است. موقعیت و جهت مجری نهایی نسبت به دستگاه مبنا بوسیله یک بردار سه عضوی  $d_0^n$  و یک ماتریس  $3 \times 3$  دوران  $R_0^n$  به ترتیب نشان داده می‌شوند و ماتریس همگن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H = \begin{bmatrix} R_0^n & d_0^n \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (4-2)$$

در نتیجه موقعیت هر نقطه روی مجری نهایی در دستگاه مبنا با رابطه‌ی زیر تعیین می‌گردد:

$$H = T_0^n = A_1(q_1)\dots A_n(q_n) \quad (5-2)$$

هر تبدیل همگن  $A_i$  به صورت زیر است:

$$A_i = \begin{bmatrix} R_{i-1}^i & d_{i-1}^i \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (6-2)$$

بنابراین داریم:

$$T_i^j = A_{i+1}A_{i+2}\dots A_{j-1}A_j = \begin{bmatrix} R_i^j & d_i^j \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7-2)$$

ماتریس  $R_i^j$  جهت دستگاه  $z$  را نسبت به دستگاه  $i$  بیان می کند. بخش های دوران ماتریس  $T_i^j$  به

صورت زیر می باشد :

$$R_i^j = R_i^{i+1} \dots R_{j-1}^j \quad (8-2)$$

بردار  $d_i^j$  بوسیله رابطه زیر بصورت تکراری بدست می آید :

$$d_i^j = d_i^{j-1} + R_i^{j-1} d_{j-1}^j \quad (9-2)$$

برای انجام آنالیز می توانیم هر دستگاه دلخواهی را به رابطه متصل نماییم، ولی رعایت نظم در انتخاب دستگاهها مفید خواهد بود. یک دستورالعمل متداول برای تعیین دستگاههای مختصات در کاربردهای رباتیک، دناویت-هارتنببرگ یا دستورالعمل  $D-H$  است در این دستورالعمل هر ماتریس تبدیل  $A_i$  به صورت ضرب چهار تبدیل اساسی نشان داده می شود :

$$A_i = Rot(z, \theta_i).Trans(z, d_i).Trans(x, a_i).Rot(x, \alpha_i) \quad (10-2)$$

با جایگذاری ماتریس های تبدیل اساسی و انجام ضرب ماتریس  $A_i$  به صورت زیر تبدیل می شود :

$$A_i = \begin{bmatrix} C_{\theta} & -S_{\theta} & 0 & 0 \\ S_{\theta} & C_{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{\alpha} & -S_{\alpha} & 0 \\ 0 & S_{\alpha} & C_{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11-2)$$

$$A_i = \begin{bmatrix} C_{\theta_i} & -S_{\theta_i}C_{\alpha_i} & S_{\theta_i}S_{\alpha_i} & a_iC_{\theta_i} \\ S_{\theta_i} & C_{\theta_i}C_{\alpha_i} & -C_{\theta_i}S_{\alpha_i} & a_iS_{\theta_i} \\ 0 & S_{\alpha_i} & C_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12-2)$$

در ماتریس تبدیل  $A_i$  چهار کمیت  $\theta_i, d_i, a_i, \alpha_i$  پارامترهای رابط<sup>۱</sup> می‌باشند.  $a_i$  طول رابط<sup>۲</sup>،  $\alpha_i$  پیچش رابط<sup>۳</sup>،  $d_i$  انحراف رابط<sup>۴</sup> و  $\theta_i$  زاویه مفصل<sup>۵</sup> نامیده می‌شود. در مفاصل لولایی  $\theta_i$  متغیر مفصلی و در مفاصل کشویی  $d_i$  متغیر مفصلی می‌باشد.

با دقت در انتخاب دستگاه‌های مختصات و اینکه دو شرط زیر را داشته باشد، می‌توانیم ادعا کنیم که اعداد یگانه  $\theta, d, a, \alpha$  بگونه‌ای وجود دارند که :

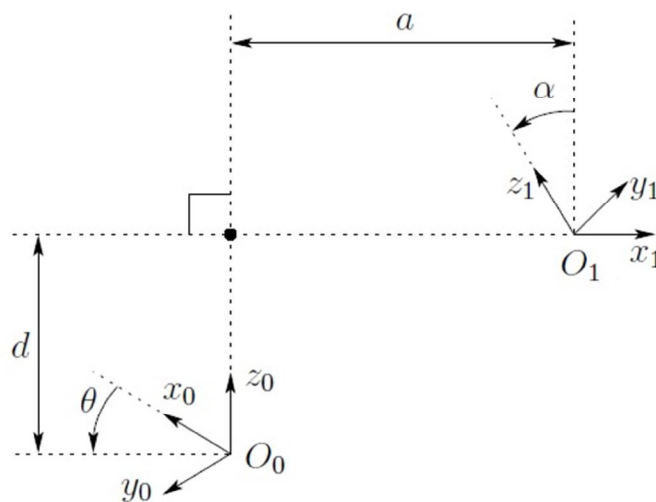
$$A_i = Rot(z, \theta_i).Trans(z, d_i).Trans(x, a_i).Rot(x, \alpha_i) \quad (۱۳-۲)$$

البته از آنجا که  $\theta, \alpha$  زاویه هستند، در بازه‌ی  $[0, 2\pi]$  قرار دارند. دو شرط گفته شده به صورت زیر می‌باشند :

-  $DH1$  : محور  $x_i$  عمود بر محور  $z_0$  باشد .

-  $DH2$  : محور  $x_i$  با محور  $z_0$  متقاطع باشد .

در شکل زیر دستگاه‌های مختصات با برقراری فرض‌های  $DH1$  و  $DH2$  نمایش داده شده است .



<sup>1</sup> Link parameters

<sup>2</sup> Link length

<sup>3</sup> Link twist

<sup>4</sup> Link offset

<sup>5</sup> Joint angle

شکل ۲-۱۳ دستگاه‌های مختصات با برقراری فرض‌های  $DH1$  و  $DH2$

الگوریتم زیر به طور خلاصه، دستورالعمل دناویت-هارتنبرگ را نشان می‌دهد:

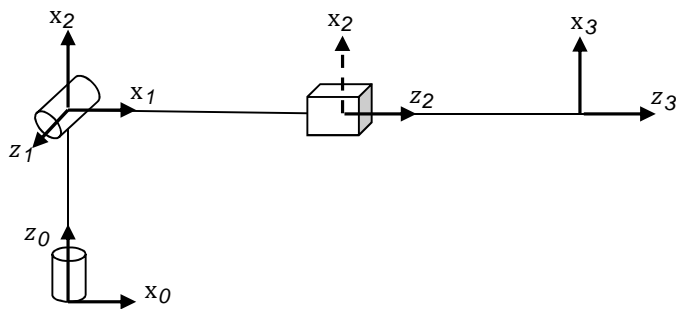
- گام ۱. محور مفاصل را  $Z_0, \dots, Z_{n-1}$  قرار داده و نامگذاری می‌نماییم.
- گام ۲. دستگاه پایه را نصب می‌نماییم و مبدا آن را در محلی دلخواه روی محور  $Z$  قرار می‌دهیم. و محورهای  $\gamma$  و  $x$  را با در نظر گرفتن دستگاه راستگرد بطور مناسب انتخاب می‌نماییم. (برای  $i=0, \dots, n-1$  گام‌های ۳ تا ۵ را اجرا می‌نماییم)
- گام ۳. مبدا  $O_i$  را در جایی که عمود مشترک  $Z_{i-1}$  و  $Z_i$  را قطع می‌کند قرار می‌دهیم. اگر  $Z_{i-1}$  و  $Z_i$  متقاطع هستند نقطه  $O_i$  را در نقطه تقاطع قرار می‌دهیم. اگر  $Z_{i-1}$  و  $Z_i$  موازی هستند  $O_i$  را در محل مفصل  $i$  قرار می‌دهیم.
- گام ۴.  $x_i$  را در امتداد عمود مشترک بین  $Z_{i-1}$  و  $Z_i$  و در عبور از  $O_i$  قرار می‌دهیم. یا هنگامیکه  $Z_{i-1}$  و  $Z_i$  متقاطع هستند در جهت عمود به صفحه  $Z_{i-1}$  و  $Z_i$  قرار می‌دهیم.
- گام ۵.  $\gamma_i$  را با تکمیل دستگاه راستگرد مشخص می‌کنیم.
- گام ۶. دستگاه مختصات قسمت پایانی  $O_n x_n y_n z_n$  را تعیین می‌نماییم.
- گام ۷. یک جدول از پارامترهای رابط  $\alpha_i$  و  $a_i$  و  $d_i$  و  $\theta_i$  تشکیل می‌دهیم.
  - ❖  $a_i$  طول در امتداد  $x_i$  از  $O_i$  تا محل تقاطع محورهای  $x_i$  و  $Z_{i-1}$ .
  - ❖  $d_i$  طول در امتداد  $Z_{i-1}$  از  $O_{i-1}$  تا محل تقاطع محورهای  $x_i$  و  $Z_{i-1}$ .
  - ❖  $\alpha_i$  زاویه بین  $Z_{i-1}$  و  $Z_i$  که حول  $x_i$  اندازه‌گیری می‌شود.
  - ❖  $\theta_i$  زاویه بین  $x_{i-1}$  و  $x_i$  که حول  $Z_{i-1}$  اندازه‌گیری می‌شود.
- گام ۸. ماتریس‌های تبدیل‌های همگن  $A_i$  را تشکیل می‌دهیم.

گام ۹.  $T^n = A_1 \dots A_n$  را تشکیل می دهیم . این ماتریس موقعیت و جهت دستگاه

مختصات ابزار در دستگاه مختصات پایه تعیین می کند [۱۱]/و [۱۲].

شکل زیر اختصاص دستگاه مختصات به دیاگرام مفصلی ربات کروی و نام گذاری مفاصل را نشان می -

دهد :



شکل ۲-۱۴ اختصاص دستگاه مختصات با برقراری شروط DH به دیاگرام مفصلی ربات کروی

پس از ترسیم دیاگرام مفصلی ، طبق گام ۷ جدول پارامترهای رابط را تشکیل می دهیم :

شماره رابطها	$\theta$	$d$	$a$	$\alpha$
رابط شماره ۱	$\theta_1^*$	$d_1$	•	$\pi/2$
رابط شماره ۲	$\theta_2^*$	•	•	$\pi/2$
رابط شماره ۳	•	$d_3^*$	•	•

جدول ۲-۱ جدول پارامترهای رابط مربوط به ربات کروی

ماتریسهای تبدیل همگن به صورت زیر می باشد :

$$T_0^1 = \begin{bmatrix} C_{\theta_1} & 0 & S_{\theta_1} & 0 \\ S_{\theta_1} & 0 & -C_{\theta_1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14-2)$$

$$T_1^2 = \begin{bmatrix} C_{\theta_2} & 0 & S_{\theta_2} & 0 \\ S_{\theta_2} & 0 & -C_{\theta_2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (15-2)$$

$$T_2^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (16-2)$$

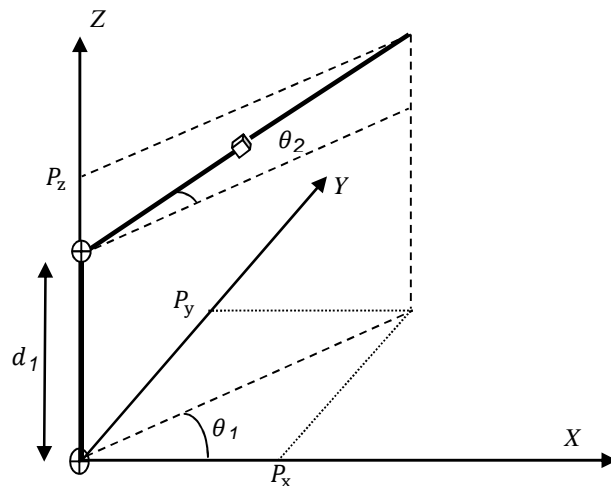
موقعیت هر نقطه روی مجری نهایی در دستگاه مبنا با رابطه‌ی زیر تعیین می‌گردد :

$$T_0^3 = T_0^1 T_1^2 T_2^3 \quad (17-2)$$

$$T_0^3 = \begin{bmatrix} C_{\theta_1} C_{\theta_2} & S_{\theta_1} & C_{\theta_1} S_{\theta_2} & d_3 C_{\theta_1} S_{\theta_2} \\ S_{\theta_1} C_{\theta_2} & -C_{\theta_1} & S_{\theta_1} S_{\theta_2} & d_3 S_{\theta_1} S_{\theta_2} \\ S_{\theta_2} & 0 & -C_{\theta_2} & d_1 - d_3 C_{\theta_2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (18-2)$$

## ۲-۵- سینماتیک وارون

سینماتیک وارون عبارت از یافتن متغیرهای مفاصل به ازای موقعیت و جهت معین مجری نهایی می‌باشد. مسئله سینماتیک وارون به طور کلی مشکل تر از سینماتیک مستقیم است. برای یافتن معادلات سینماتیک وارون ربات‌ها هیچ الگوریتم مشخصی وجود ندارد و بستگی به پیکربندی ربات دارد. معادلات سینماتیک وارون ربات کروی به صورت زیر می‌باشد [۱۳]:



شکل ۱۵-۲ دیاگرام مفصلی ربات کروی

در این مرحله فرض می‌کنیم بردار موقعیت<sup>۱</sup> مجری نهایی  $P = [P_x \ P_y \ P_z]^T$  معین است و با روش‌های تحلیلی متغیرهای مفاصل را تعیین می‌نماییم:

$$\theta_1 = a \tan 2(P_x, P_y) \quad (۱۹-۲)$$

$$d_3 = \sqrt{(P_z - d_1)^2 + (P_x^2 + P_y^2)} \quad (۲۰-۲)$$

$$\theta_2 = a \tan 2(\sqrt{P_x^2 + P_y^2}, P_z - d_1) \quad (۲۱-۲)$$

حل تحلیلی این معادلات بطور مستقیم خیلی دشوار است علاوه بر آن ممکن است یک جواب داشته باشد یا نداشته باشد، حتی در صورت وجود جواب ممکن است یگانه نباشد. بعلاوه معادلات سینماتیک مستقیم بطور کلی توابعی پیچیده و غیرخطی از متغیرهای مفاصل می‌باشد، بنابراین پاسخ‌ها در صورت وجود ممکن است به سختی بدست بیاید. برای حل این معادلات بیشتر علاقمند به یافتن حل تحلیلی از معادلات هستیم که به حل عددی ترجیح داده می‌شود. این راه حل‌ها به دو دلیل ترجیح داده می‌شود. در

<sup>1</sup>Position vector



کاربردهای معین مانند تعقیب مسیر<sup>۱</sup> جوشکاری که موقعیت آن به وسیله سیستم بینایی فراهم می‌شود، معادلات سینماتیک مستقیم باید به سرعت حل شوند. داشتن روابط تحلیلی نسبت به جستجوی عددی یک ضرورت عملی می‌باشد. علاوه بر آن راه حل‌های تحلیلی امکان ایجاد قوانین برای انتخاب راه حل ویژه را از بین راه حل‌های مختلف می‌دهد.

## ۲-۶- سینماتیک سرعت

از دیدگاه ریاضی، معادلات سینماتیک مستقیم یک تابع بین فضای جهت‌ها و موقعیت‌های دکارتی<sup>۲</sup> و فضای موقعیت‌های مفاصل تعریف می‌کند. روابط سرعت بوسیله ژاکوبین این تابع تعیین می‌شوند. ژاکوبین یک تابع، ماتریسی است و می‌تواند بعنوان نوعی بردار از مشتق یک تابع اسکالر تلقی گردد. ماتریس ژاکوبین یکی از مهمترین کمیت‌های آنالیز و کنترل حرکت ربات محسوب می‌شود. ماتریس ژاکوبین در طراحی و اجرای مسیرهای هموار<sup>۳</sup>، تعیین ترکیب‌های تکین، تعیین معادلات دینامیکی حرکت، تبدیل نیروها و گشتاورها از مجری نهایی به مفاصل بازوی ماهر بکار می‌رود.

### ۲-۶-۱- تعیین ماتریس ژاکوبین

بازوی ماهر را با  $n$  رابط و متغیرهای مفاصل  $q_1, \dots, q_n$  در نظر بگیریم، ماتریس تبدیل آن به صورت زیر می‌باشد:

$$T_0^n(q) = \begin{bmatrix} R_0^n(q) & d_0^n(q) \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (2-22)$$

این ماتریس بیان کننده تبدیل از دستگاه مختصات متصل به مجری نهایی، به دستگاه مبنا را نشان می‌دهد.  $q = [q_1, \dots, q_n]^T$  بردار متغیر مفاصل را نشان می‌دهد. متغیرهای مفاصل  $q_i$ ، موقعیت مجری

<sup>1</sup> Trajectory-following

<sup>2</sup> Space of cartesian positions and orientations

<sup>3</sup> Smooth

نهایی  $d_o^n$ ، جهت مجری نهایی  $R_o^n$  تابعی از زمان هستند. هدف ما برقراری ارتباط بین سرعت‌های خطی و زاویه‌ای مجری نهایی با بردار سرعت‌های مفاصل  $\dot{q}(t)$  می‌باشد. در این قسمت با استفاده از خواص ماتریس پاد متقارن به تعیین ژاکوبین می‌پردازیم. با توجه به متعامد بودن ماتریس دوران  $R$  داریم [۱۴]:

$$R(\theta)R(\theta)^T = I \quad (23-2)$$

با مشتق‌گیری از طرفین داریم:

$$\frac{dR(\theta)}{d\theta}R(\theta)^T + R(\theta)\frac{dR(\theta)^T}{d\theta} = 0 \quad (24-2)$$

با توجه به تعریف ماتریس پاد متقارن که پیش‌تر مطرح گردید، می‌توانیم ماتریس پاد متقارن زیر را در نظر بگیریم:

$$S = \frac{dR(\theta)}{d\theta}R(\theta)^T \quad (25-2)$$

رابطه بالا را می‌توانیم به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$S(w_o^n) = \dot{R}_o^n (R_o^n)^T \quad (26-2)$$

در رابطه بالا  $w_o^n$  بردار سرعت زاویه‌ای مجری نهایی را تعریف می‌کند، همچنین سرعت خطی مجری

نهایی بوسیله‌ی  $V_o^n$  تعریف می‌گردد:

$$V_o^n = J_v \dot{q} \quad (27-2)$$

$$w_o^n = J_w \dot{q} \quad (28-2)$$

در روابط بالا  $J_v$  و  $J_w$  ماتریس‌هایی  $3 \times n$  می‌باشند. که  $n$  تعداد رابط‌ها می‌باشد. روابط بالا را می‌توانیم

به صورت ماتریسی بنویسیم:

$$\begin{bmatrix} V_o^n \\ w_o^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_v \\ J_w \end{bmatrix} \dot{q} \quad (29-2)$$

$$J_0^n = \begin{bmatrix} J_v \\ J_w \end{bmatrix} \quad (۳۰-۲)$$

توجه داشته باشید که ماتریس ژاکوبین یک ماتریس  $6 \times n$  می باشد که در آن  $n$  تعداد رابطها می باشد.

در فصل اول با استفاده از خواص ماتریس پاد متقارن، رابطه سرعت زاویه ای اثبات شد، در این قسمت با استفاده از آن نتایج به یافتن ژاکوبین می پردازیم.

$$w_0^n = w_0^l + R_0^l w_1^2 + R_0^2 w_2^3 + \dots + R_0^{n-1} w_{n-1}^n \quad (۲-۳۱)$$

چنانچه مفصل شماره  $i$  لولایی باشد، آنگاه  $q_i$  متغیر مفصل شماره  $i$  برابر  $\theta_i$  و  $z_{i-1}$  محور دوران می باشد. بنابراین سرعت زاویه ای رابط  $i$  در دستگاه  $i-1$  به صورت زیر می باشد:

$$w_{i-1}^i = \dot{q}_i k \quad (۳۲-۲)$$

با جایگذاری در رابطه سرعت زاویه ای داریم:

$$w_0^n = \dot{q}_1 k + \dot{q}_2 R_0^l k + \dots + \dot{q}_n R_0^{n-1} k \quad (۲-۳۳)$$

رابطه بالا را می توانیم با اضافه کردن  $\rho$  به صورت زیر باز نویسی کنیم:

$$w_0^n = \rho_1 \dot{q}_1 k + \rho_2 \dot{q}_2 R_0^l k + \dots + \rho_n \dot{q}_n R_0^{n-1} k \quad (۳۴-۲)$$

$$\rho_i = \begin{cases} 0 & \text{برای مفاصل کشویی} \\ 1 & \text{برای مفاصل لولایی} \end{cases}$$

چنانچه مفصل شماره  $i$  کشویی باشد، در این صورت حرکت دستگاه  $i-1$  یک انتقال است و در این صورت داریم:

$$w_{i-1}^i = 0 \quad (۲-۳۵)$$

بنابراین اگر مفصل  $i$  کشویی باشد، سرعت زاویه‌ای مجری نهایی به متغیر مفصلی که در این نوع مفاصل  $d_i$  است، بستگی ندارد. بنابراین سرعت زاویه‌ای کلی مجری نهایی،  $w_0^n$  در دستگاه پایه با معادله زیر قابل توصیف می‌باشد:

به صورت ماتریسی داریم:

$$w_0^n = [\rho_1 z_0 \quad \rho_2 z_1 \quad \dots \quad \rho_n z_{n-1}] \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \quad (۳۶-۲)$$

$$J_w = [\rho_1 z_0 \quad \rho_2 z_1 \quad \dots \quad \rho_n z_{n-1}] \quad (۳۷-۲)$$

بنابراین اگر مفصل شماره  $i$  لولایی باشد رابطه  $J_{w_i}$  به صورت زیر می‌باشد:

$$J_{w_i} = z_{i-1} \quad (۲-۳۸)$$

و اگر مفصل شماره  $i$  کشویی باشد،  $J_{w_i} = 0$  می‌باشد. برای تعیین سرعت خطی مفاصل لولایی از

بردار موقعیت مشتق می‌گیریم:

$$d_0^n = d_0^{i-1} + R_0^{i-1} d_{i-1}^n \quad (۳۹-۲)$$

$$\dot{d}_0^n = \dot{d}_0^{i-1} + \dot{R}_0^{i-1} d_{i-1}^n + R_0^{i-1} \dot{d}_{i-1}^n \quad (۴۰-۲)$$

از آنجا که  $d_0^{i-1}$  ثابت است، بنابراین  $\dot{d}_0^{i-1}$  صفر می‌باشد، همچنین از آنجا که فقط متغیر شماره  $i$  مورد

نظر است بنابراین  $R_0^{i-1}$  ثابت است در نتیجه سرعت خطی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\dot{d}_0^n = R_0^{i-1} \dot{d}_{i-1}^n = R_0^{i-1} (w_{i-1}^n \times d_{i-1}^n) \quad (۲-۴۱)$$

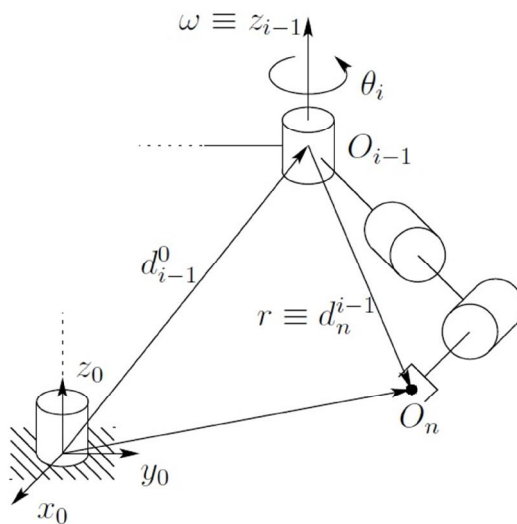
$$\dot{d}_0^n = R_0^{i-1} w_{i-1}^n \times R_0^{i-1} d_{i-1}^n \quad (۲-۴۲)$$

$$\dot{d}_0^n = z_{i-1} \dot{q}_i \times (d_0^n - d_0^{i-1}) \quad (۴۳-۲)$$

$$\dot{d}_0^n = J_v \dot{q} \quad (۲-۴۴)$$

بنابراین رابطه  $J_v$  به صورت زیر می باشد :

$$J_v = \frac{\partial d_0^n}{\partial q_i} = z_{i-1} \times (d_0^n - d_0^{i-1}) \quad (۴۵-۲)$$



شکل ۱۶-۲ حرکت مجری نهایی بواسطه رابط شماره  $i$

برای مفاصل کشویی داریم :

$$d_0^n = d_0^{i-1} + R_0^{i-1} d_{i-1}^i + R_0^i d_{i-1}^n \quad (۴۶-۲)$$

از آنجا که فقط مفصل شماره  $i$  حرکت می کند  $R_0^{i-1}$  و  $d_0^{i-1}$  ثابت هستند و از آنجا که مفصل شماره  $i$  کشویی است  $R_0^i$  نیز ثابت می باشد .

$$\dot{d}_0^n = R_0^{i-1} \dot{d}_{i-1}^i \quad (۲-۴۷)$$

$$\dot{d}_0^n = z_{i-1} \dot{d}_i \quad (۴۸-۲)$$

بنابراین  $J_{v_i}$  به صورت زیر می باشد:

$$J_{v_i} = z_{i-1} \quad (۲-۴۹)$$

بنابراین با جمع بندی روابط بالا می توانیم نتایج زیر را در بدست آوریم :

❖ ماتریس ژاکوبین برای مفاصل کشویی

$$J_i = \begin{bmatrix} J_v \\ J_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2-50)$$

❖ ماتریس ژاکوبین برای مفاصل لولایی

$$J_i = \begin{bmatrix} J_v \\ J_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{i-1} \times (d_0^n - d_0^{i-1}) \\ z_{i-1} \end{bmatrix} \quad (2-51)$$

سینماتیک سرعت برای ربات با پیکربندی کروی با دو مفصل لولایی و یک مفصل کشویی، به صورت

زیر می باشد:

$$J = \begin{bmatrix} z_0 \times d_0^3 & z_1 \times (d_0^3 - d_0^1) & z_2 \\ z_0 & z_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2-52)$$

پارامترهای مختلف بکار رفته در رابطه بالا به صورت زیر می باشد:

$$z_{i-1} = R_0^{i-1} k \quad (2-53)$$

$$Z_1 = R_1 k = \begin{bmatrix} S_{\theta_1} \\ -C_{\theta_1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2-54)$$

$$k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2-55)$$

$$d_0^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_1 \end{bmatrix} \quad (2-56)$$

$$d_0^3 = \begin{bmatrix} d_3 C_{\theta_1} S_{\theta_2} \\ d_3 S_{\theta_1} S_{\theta_2} \\ d_1 - d_3 C_{\theta_2} \end{bmatrix} \quad (2-57)$$

$$z_2 = R_0^2 k = \begin{bmatrix} C_{\theta_1} S_{\theta_2} \\ S_{\theta_1} S_{\theta_2} \\ -C_{\theta_2} \end{bmatrix} \quad (2-58)$$

بنابراین ماتریس ژاکوبین به صورت زیر می باشد :

$$J_{6 \times n} = \begin{bmatrix} -d_3 S_{\theta_1} S_{\theta_2} & -d_1 C_{\theta_1} & C_{\theta_1} S_{\theta_2} \\ d_3 C_{\theta_1} S_{\theta_2} & -d_1 S_{\theta_1} & S_{\theta_1} S_{\theta_2} \\ 0 & 0 & -C_{\theta_2} \\ 0 & S_{\theta_1} & 0 \\ 0 & -C_{\theta_1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2-59)$$

اگر فقط قصد تعیین ژاکوبین بازوی ربات را داشته باشیم (بدون در نظر گرفتن مچ ربات)، می توانیم از روشی که در ادامه معرفی می شود نیز استفاده کرد . ابتدا موقعیت مجری نهایی در فضای سه بعدی تعیین می نماییم :

$$P = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} \quad (2-60)$$

$$P_x = d_3 C_{\theta_1} S_{\theta_2} \quad (61-2)$$

$$P_y = d_3 S_{\theta_1} S_{\theta_2} \quad (62-2)$$

$$P_z = d_1 - d_3 C_{\theta_2} \quad (2-63)$$

ژاکوبین را با مشتق گیری به صورت زیر تعیین می نماییم :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial P_x}{\partial \theta_2} & \frac{\partial P_x}{\partial d_3} \\ \frac{\partial P_y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial P_y}{\partial \theta_2} & \frac{\partial P_y}{\partial d_3} \\ \frac{\partial P_z}{\partial \theta_1} & \frac{\partial P_z}{\partial \theta_2} & \frac{\partial P_z}{\partial d_3} \end{bmatrix} \quad (2-64)$$

$$J = \begin{bmatrix} -d_3 S_{\theta_1} S_{\theta_2} & d_3 C_{\theta_1} C_{\theta_2} & C_{\theta_1} S_{\theta_2} \\ d_3 C_{\theta_1} S_{\theta_2} & d_3 S_{\theta_1} C_{\theta_2} & S_{\theta_1} S_{\theta_2} \\ 0 & d_3 S_{\theta_2} & -C_{\theta_2} \end{bmatrix} \quad (2-65)$$

## ۲-۷- وضعیت تکین ربات

تعیین وضعیت تکین ربات به دلایل زیر از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است :

❖ تکین ، ترکیب‌هایی را نشان می‌دهد که جهات معینی از حرکت ممکن است غیر قابل اجرا باشد.

❖ در تکین‌ها ممکن است سرعت‌های محدود مجری نهایی به سرعت‌های نامحدود مفاصل مربوط شود.

❖ در تکین‌ها ممکن است نیروها و گشتاورهای محدود مجری نهایی به گشتاورهای نا-محدود مفاصل مربوط شود.

❖ تکین‌ها معمولا (نه همیشه) به نقاط مرزی فضای کاری بازوی ماهر مربوط می‌شوند که نقاط ماکزیمم دسترسی بازوی ماهر هستند. [۱۰]

❖ تکین‌ها به نقاطی در فضای کار مربوط می‌شوند که ممکن است در اثر مقدار کوچکی تغییر در پارامترهای رابط نظیر طول ، انحراف و غیره ، غیر قابل دسترس باشند.

❖ نزدیک تکین‌ها راه حل یگانه‌ای برای سینماتیک وارون وجود ندارد. در این حالت ممکن است هیچ پاسخی وجود نداشته باشد، یا ممکن است تعداد بی نهایت پاسخ وجود داشته باشد.

با درمیان<sup>۱</sup> گرفتن از ماتریس ژاکوبین می‌توانیم وضعیت تکین ربات را تعیین نماییم. [۱]

$$|J| = 0 \quad (2-66)$$

<sup>۱</sup> Determinant



$$|J| = \begin{vmatrix} -d_3 S_{\theta_1} S_{\theta_2} & d_3 C_{\theta_1} C_{\theta_2} & C_{\theta_1} S_{\theta_2} \\ d_3 C_{\theta_1} S_{\theta_2} & d_3 S_{\theta_1} C_{\theta_2} & S_{\theta_1} S_{\theta_2} \\ 0 & d_3 S_{\theta_2} & -C_{\theta_2} \end{vmatrix} = d_3^2 S_{\theta_2} = 0 \rightarrow \theta_2 = 0, \pi \quad (2-67)$$

در وضعیت تکین ربات ، مرتبه ماتریس ژاکوبین کاهش پیدا می کند . برای ربات‌هایی که در وضعیت تکین قرار گرفته باشند ، هیچ کنترلی نمی توان اعمال کرد. در وضعیت تکین درجه آزادی سیستم از دست می رود. بنابراین ناگزیر به اعمال تدابیری برای جلوگیری از تکین شدن ربات می باشیم. راه حل های زیر جهت اجتناب از تکین شدن ربات پیشنهاد می گردد: [۱]

- ❖ حرکت از مسیرهایی که ماتریس ژاکوبین در آن معکوس پذیر است .
- ❖ استفاده از  $J^T$  به جای  $J^{-1}$
- ❖ در مواقعی که ماتریس ژاکوبین معکوس پذیر نیست ، مانند مواقعی که ماتریس ژاکوبین مربعی نیست، از ماتریس وارون مجازی بجای وارون ماتریس استفاده می نماییم.

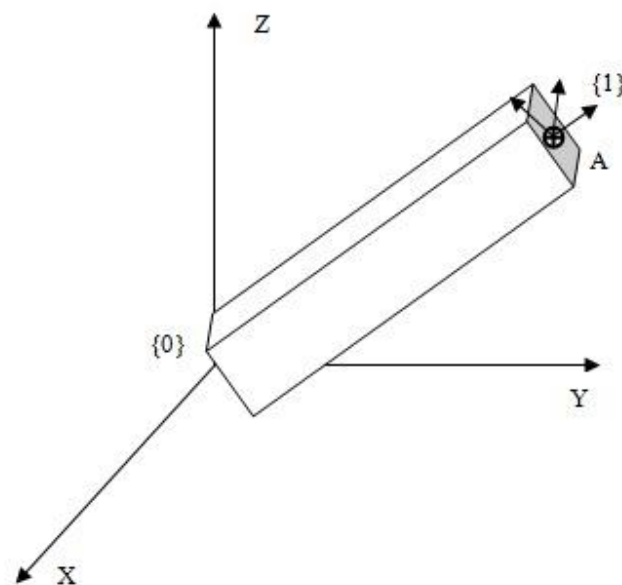
# فصل سوم

## مدلسازی دینامیکی

- ❖ مقدمه
- ❖ توزیع جرم
- ❖ انرژی جنبشی
- ❖ انرژی پتانسیل
- ❖ لاگرانژین
- ❖ معادلات دینامیکی
- ❖ محرکه ها
- ❖ مدل دینامیکی سیستم ربات به همراه محرکه

### ۳-۱- مقدمه

در این فصل با استفاده از روش‌های مکانیک تحلیلی، معادلات دینامیکی ربات را بدست می‌آوریم. در مکانیک تحلیلی با تعیین انرژی‌های جنبشی<sup>۱</sup> و پتانسیل<sup>۲</sup> و تشکیل لاگرانژین سیستم، می‌توانیم با استفاده از معادلات اویلر-لاگرانژ معادلات دینامیکی را تشکیل می‌دهیم [۱۵].



شکل ۳-۱- دستگاه‌های مختصات متصل به جسم صلب

در شکل بالا موقعیت نقطه A در دستگاه {0} بوسیله  $P_0$  و در دستگاه {1} بوسیله  $P_1$  توصیف می‌شود،  $d_0^1$  توصیف مبداء دستگاه {1} در {0}، همچنین ماتریس دوران دستگاه {1} در دستگاه {0} می‌باشد. رابطه زیر ارتباط بین دو توصیف  $P_0$  و  $P_1$  را نشان می‌دهد.

$$P_0 = d_0^1 + R_0^1 P_1 \quad (۳-۱)$$

<sup>1</sup> Kinetic energy

<sup>2</sup> Potential energy

### ۳-۲- انرژی جنبشی

انرژی جنبشی از رابطه  $K = \frac{1}{2}mv^2$  محاسبه می‌گردد. انرژی جنبشی در رابطه‌های ربات از مجموع

انرژی نقاط رابطه بدست می‌آید، بنابراین داریم:

$$K = \frac{1}{2} \int_A \dot{P}_0^T \dot{P}_0 dm \quad (۲-۳)$$

با جایگذاری  $\dot{P}_0$  در رابطه بالا داریم:

$$K = \frac{1}{2} \int_A (\dot{d}_0^l + \dot{R}_0^l P_l)^T (\dot{d}_0^l + \dot{R}_0^l P_l) dm \quad (۳-۳)$$

$$K = \frac{1}{2} \int_A \dot{d}_0^{lT} \dot{d}_0^l dm + \frac{1}{2} \int_A \dot{d}_0^{lT} \dot{R}_0^l P_l dm + \frac{1}{2} \int_A P_l^T \dot{R}_0^{lT} \dot{d}_0^l dm + \frac{1}{2} \int_A P_l^T \dot{R}_0^{lT} \dot{R}_0^l P_l dm \quad (۴-۳)$$

$$K = K_1 + K_2 + K_3 + K_4 \quad (۵-۳)$$

در حاصل انتگرال زیر مختصات مرکز جرم<sup>۱</sup> ظاهر می‌شود، بنابراین اگر دستگاه مختصات را در مرکز

جرم قرار دهیم، حاصل انتگرال صفر می‌گردد:

$$\int P_l dm = \tau_c m \quad (۶-۳)$$

$$\int P_l dm = 0 \quad (۷-۳)$$

بنابراین انرژی جنبشی ربات به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$K_1 = \frac{1}{2} \int_A \dot{d}_0^{lT} \dot{d}_0^l dm = \frac{1}{2} \dot{d}_0^{lT} \dot{d}_0^l \int_A dm = \frac{1}{2} m \dot{d}_0^{lT} \dot{d}_0^l = \frac{1}{2} m v_c^T v_c \quad (۸-۳)$$

$$K_2 + K_3 = K_2 + K_2^T = \frac{1}{2} \int_A \dot{d}_0^{lT} \dot{R}_0^l P_l dm + \frac{1}{2} \int_A P_l^T \dot{R}_0^{lT} \dot{d}_0^l dm = \frac{1}{2} \int_A \dot{d}_0^{lT} \dot{R}_0^l P_l dm + \left( \frac{1}{2} \int_A \dot{d}_0^{lT} \dot{R}_0^l P_l dm \right)^T \quad (۹-۳)$$

با توجه به اینکه در مدلسازی، دستگاه‌های مختصات در مرکز جرم قرار داده شده‌اند، داریم:

<sup>۱</sup> Center of mass

$$K_2 + K_3 = \frac{1}{2} \dot{d}_0^{iT} \dot{R}_0^i \int_A P_i dm + \left( \frac{1}{2} \dot{d}_0^{iT} \dot{R}_0^i \int_A P_i dm \right)^T = 0 \quad (10-3)$$

$$K_4 = \frac{1}{2} \int_A P_i^T \dot{R}_0^{iT} \dot{R}_0^i P_i dm = \frac{1}{2} \int_A P^T \left( S(w_0^i) R_0^i \right)^T \left( S(w_0^i) R_0^i \right) P_i dm \quad (11-3)$$

$$K_4 = \frac{1}{2} \int_A P_i^T R_0^{iT} S(w_0^i)^T S(w_0^i) R_0^i P_i dm = \frac{1}{2} \int_A w_0^{iT} S(R_0^i P_i)^T S(R_0^i P_i) w_0^i dm \quad (12-3)$$

با استفاده از خواص ماتریس پادمتقارن داریم :

$$S(w_0^i) R_0^i P_i = w_0^i \times R_0^i P_i = -R_0^i P_i \times w_0^i = -S(R_0^i P_i) w_0^i \quad (13-3)$$

$$K_4 = \frac{1}{2} w_0^{iT} \left( \int_A S(R_0^i P_i)^T S(R_0^i P_i) dm \right) w_0^i = \frac{1}{2} w_0^{iT} R_0^i \left( \int_A S(P_i)^T S(P_i) dm \right) R_0^{iT} w_0^i \quad (14-3)$$

$$K_4 = \frac{1}{2} w_0^{iT} R_0^i I_c R_0^{iT} w_0^i \quad (15-3)$$

بنابراین انرژی جنبشی جسم  $A$  به صورت زیر تعریف می شود :

$$K = \frac{1}{2} m v_c^T v_c + \frac{1}{2} w_0^{iT} R_0^i I_c R_0^{iT} w_0^i \quad (16-3)$$

در رابطه بالا  $I_c$  تانسور اینرسی<sup>۱</sup> یا تانسور لختی می باشد. بنابراین انرژی جنبشی رابط شماره  $i$  از رابطه

زیر محاسبه می گردد:

$$K = \left( \frac{1}{2} \right) \sum_{i=1}^n m_i v_{c_i}^T v_{c_i} + \left( \frac{1}{2} \right) \sum_{i=1}^n w_i^T R_i I_i R_i^T w_i \quad (17-3)$$

با استفاده از رابطه‌ی موجود بین سرعت و سینماتیک سرعت ، داریم :

$$V_{c_i} = J_{v_{c_i}} \dot{q} \quad (18-3)$$

$$w_i = J_{w_i} \dot{q} \quad (19-3)$$

با جایگذاری در معادله انرژی جنبشی رابط شماره  $i$  ، داریم :

---

<sup>1</sup> Inertia tensor

$$K = \left(\frac{1}{2}\right) \sum_{i=1}^n (m_i \dot{q}^T J_v^T J_v \dot{q} + \dot{q}^T J_w^T R_i I_i R_i^T J_w \dot{q}) \quad (20-3)$$

$$K = \left(\frac{1}{2}\right) \dot{q}^T \left( \sum_{i=1}^n (m_i J_v^T J_v + J_w^T R_i I_i R_i^T J_w) \right) \dot{q} \quad (21-3)$$

با تعریف  $D(q)$  به صورت زیر داریم :

$$D(q) = \sum_{i=1}^n (m_i J_v^T J_v + J_w^T R_i I_i R_i^T J_w) \quad (22-3)$$

$$K = \left(\frac{1}{2}\right) \dot{q}^T D(q) \dot{q} \quad (23-3)$$

$D(q)$  هسته‌ی اصلی تشکیل معادلات دینامیکی ربات می‌باشد.  $D(q)$  برای ربات کروی به صورت

زیر محاسبه می‌گردد :

$$D(q) = m_1 J_{v_{c1}}^T J_{v_{c1}} + m_2 J_{v_{c2}}^T J_{v_{c2}} + m_3 J_{v_{c3}}^T J_{v_{c3}} + J_{w_1}^T R_1 I_1 R_1^T J_{w_1} + J_{w_2}^T R_2 I_2 R_2^T J_{w_2} + J_{w_3}^T R_3 I_3 R_3^T J_{w_3} \quad (24-3)$$

با توجه به مطالبی که پیش‌تر درباره‌ی بدست آوردن ژاکوبین مطرح شد، پارامترهای مختلف  $D(q)$

را به صورت زیر محاسبه می‌نماییم :

$$J_{v_{c1}} = [z_0 \times (d_0^{c1} - d_0^0) \quad 0 \quad 0] \quad (25-3)$$

$$J_{w_1} = [z_0 \quad 0 \quad 0] \quad (26-3)$$

$$J_{v_{c2}} = [z_0 \times (d_0^{c2} - d_0^0) \quad z_1 \times (d_0^{c2} - d_0^l) \quad 0] \quad (27-3)$$

$$J_{w_2} = [z_0 \quad z_1 \quad 0] \quad (28-3)$$

$$J_{v_{c3}} = [z_0 \times (d_0^{c3} - d_0^0) \quad z_1 \times (d_0^{c3} - d_0^l) \quad z_2] \quad (29-3)$$

$$J_{w_3} = [z_0 \quad z_1 \quad 0] \quad (30-3)$$

در روابط بالا به صورت زیر می‌باشد :

$$d_0^{c_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_{c_1} \end{bmatrix} \quad (31-3)$$

$$d_0^{c_2} = \begin{bmatrix} l_{c_2} C_{\theta_1} S_{\theta_2} \\ l_{c_2} S_{\theta_1} S_{\theta_2} \\ d_1 - l_{c_2} C_{\theta_2} \end{bmatrix} \quad (32-3)$$

$$d_0^{c_3} = \begin{bmatrix} l_{c_3} C_{\theta_1} S_{\theta_2} \\ l_{c_3} S_{\theta_1} S_{\theta_2} \\ d_1 - l_{c_3} C_{\theta_2} \end{bmatrix} \quad (33-3)$$

### ۳-۲-۱- توزیع جرم<sup>۱</sup>

در سیستم‌های با یک درجه آزادی غالباً درباره جرم جسم صلب<sup>۲</sup> بحث می‌شود. در حرکت دورانی حول محوری ثابت مفهوم لنگر لختی<sup>۳</sup> بیان می‌شود. در حالتی که جسم صلب آزادانه در سه بعد حرکت می‌کند، تعداد محورهای دوران ممکن، بینهایت است. در مورد دوران حول محوری دلخواه، باید چگونگی توزیع جرم در جسم صلب را کاملاً مشخص کرد. در این قسمت تانسور لختی را، که می‌توان آن را تعمیم لنگر لختی اسکالری یک جسم در نظر گرفت، معرفی می‌کنیم. اگر چه تانسور لختی را می‌توان نسبت به هر دستگاه مختصات دلخواهی تعریف کرد، اما در کاربردهای رباتیک همواره تانسورهای لختی را نسبت به دستگاه مختصات متصل شده به جسم صلب تعریف می‌کنیم.

با توجه رابطه انرژی جنبشی ربات، تانسور اینرسی به صورت زیر می‌باشد:

$$I_c = \int_A S(P_1)^T S(P_1) dm \quad (34-3)$$

با استفاده از خواص ماتریس پاد متقارن به صورت زیر می‌توانیم به محاسبه تانسورهای لختی پردازیم:

<sup>1</sup> Mass distribution

<sup>2</sup> Rigid object

<sup>3</sup> Moment of inertia

$$P_l = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} \quad (۳۵-۳)$$

$$S(P_l) = \begin{bmatrix} 0 & -P_z & P_y \\ P_z & 0 & -P_x \\ -P_y & P_x & 0 \end{bmatrix} \quad (۳۶-۳)$$

$$I_c = \int_A \begin{bmatrix} 0 & -P_z & P_y \\ P_z & 0 & -P_x \\ -P_y & P_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -P_z & P_y \\ P_z & 0 & -P_x \\ -P_y & P_x & 0 \end{bmatrix} dm \quad (۳۷-۳)$$

$$I_c = \int_A \begin{bmatrix} -(P_z^2 + P_y^2) & P_y P_x & P_z P_x \\ P_x P_y & -(P_z^2 + P_x^2) & P_z P_y \\ P_x P_z & P_y P_z & -(P_y^2 + P_x^2) \end{bmatrix} dm \quad (۳۸-۳)$$

بنابراین تانسور لختی به صورت زیر محاسبه می‌گردد :

$$I_c = \begin{bmatrix} -\int_A (P_z^2 + P_y^2) dm & \int_A P_y P_x dm & \int_A P_z P_x dm \\ \int_A P_x P_y dm & -\int_A (P_z^2 + P_x^2) dm & \int_A P_z P_y dm \\ \int_A P_x P_z dm & \int_A P_y P_z dm & -\int_A (P_y^2 + P_x^2) dm \end{bmatrix} \quad (۳۹-۳)$$

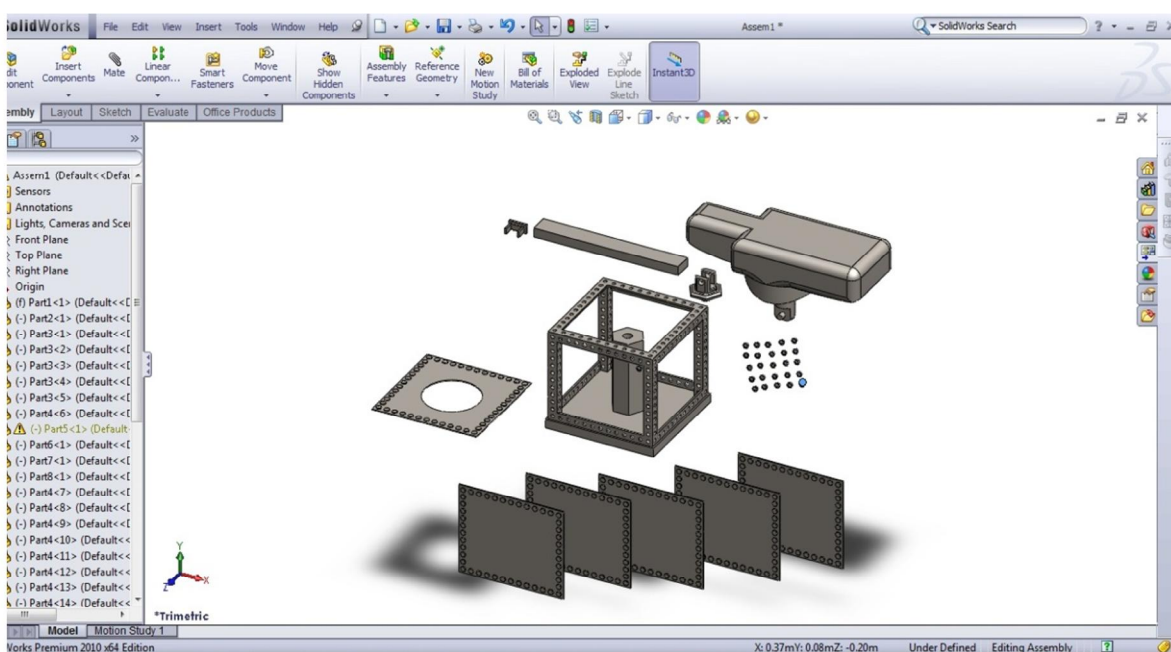
در ماتریس بالا عنصرهای روی قطر اصلی را لنگرهای لختی جرم<sup>۱</sup> می‌نامند. سایر عنصرهای این ماتریس را حاصلضربهای لختی جرم<sup>۲</sup> می‌نامند. این مجموعه شش عضوی از کمیت‌های مستقل، برای هر جسم صلب، به مکان و جهت گیری دستگاه مختصاتی که جسم نسبت به آن تعریف شده است، بستگی دارد. اگر در انتخاب جهت گیری دستگاه مختصات آزاد باشیم، می‌توان طوری عمل کرد که حاصلضربهای لختی صفر گردد. محورهایی از دستگاه مختصات مرجع که در آنها حاصلضربهای لختی صفر می‌گردد،

<sup>۱</sup> Mass moment of inertia

<sup>۲</sup> Mass product of inertia



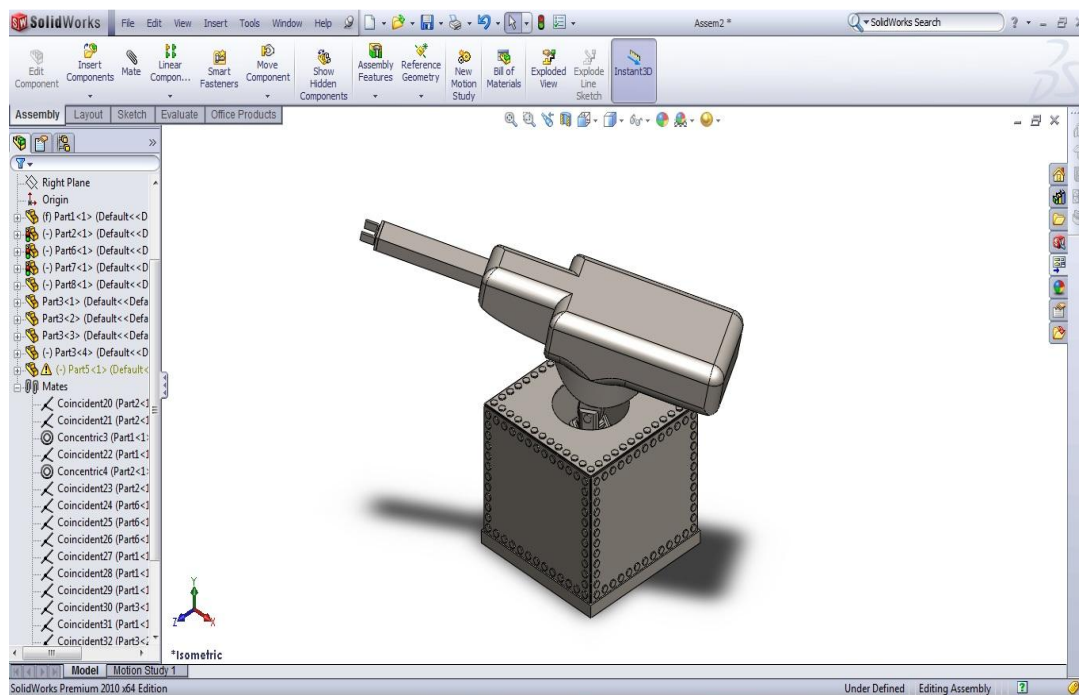
محورهای اصلی و لنگرهای جرم متناظر با آنها را لنگرهای لختی اصلی<sup>۱</sup> می‌نامند. در عمل برای بدست آوردن تانسورهای لختی از نرم‌افزارهای مکانیکی مانند *SolidWorks* یا *CATIA* استفاده می‌شود. در این پایان‌نامه برای انجام مدلسازی از نرم‌افزار *SolidWorks* استفاده شده است. در این نرم‌افزار ابتدا رابطها را در محیط *part* طراحی می‌کنیم، سپس به مونتاژ آنها می‌پردازیم.



شکل ۳-۲- ساخت قطعات ربات در محیط نرم افزار *SolidWorks*

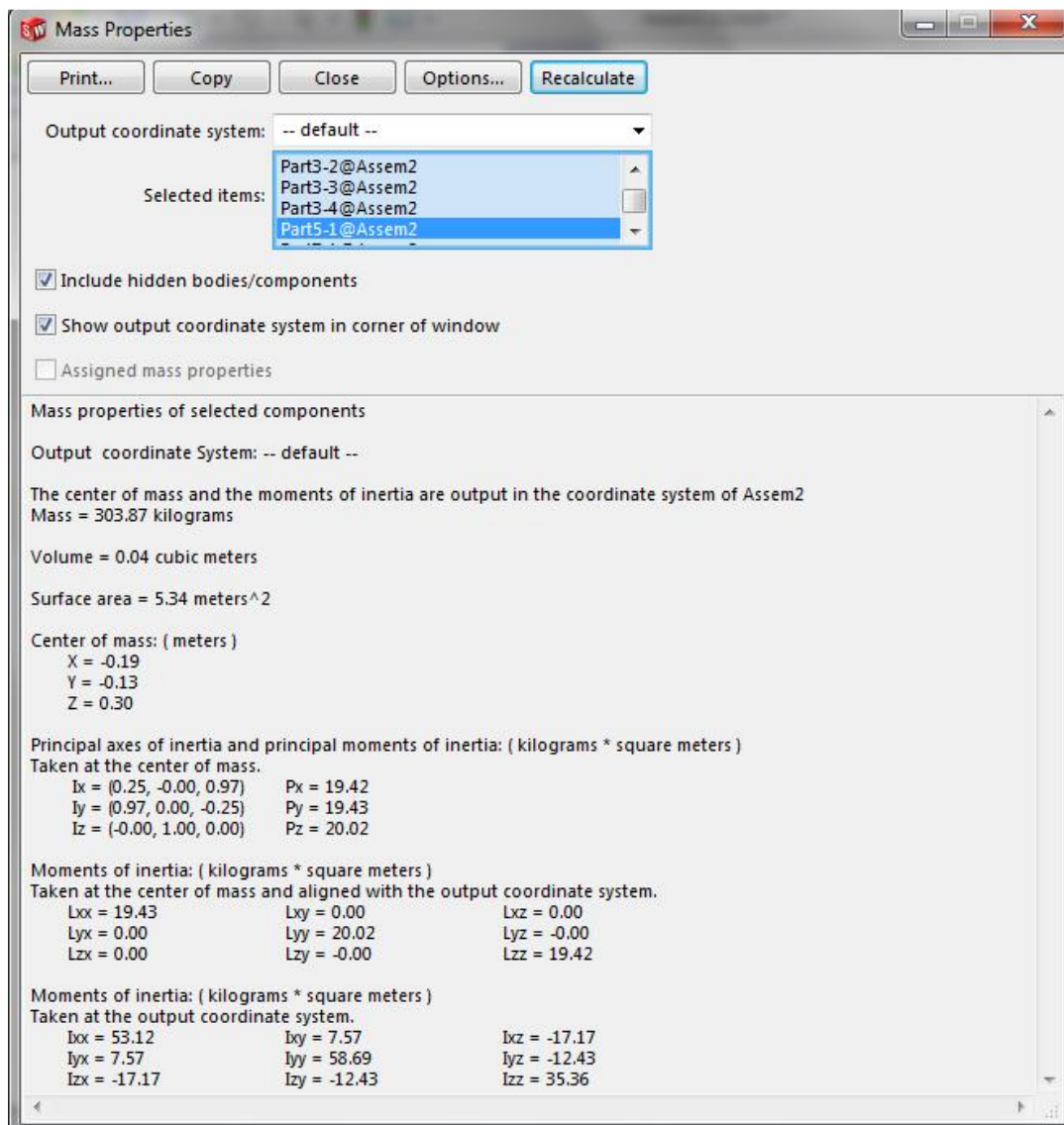
شکل زیر ربات کروی مونتاژ شده را نشان می‌دهد:

<sup>۱</sup> *Principal moment of inertia*

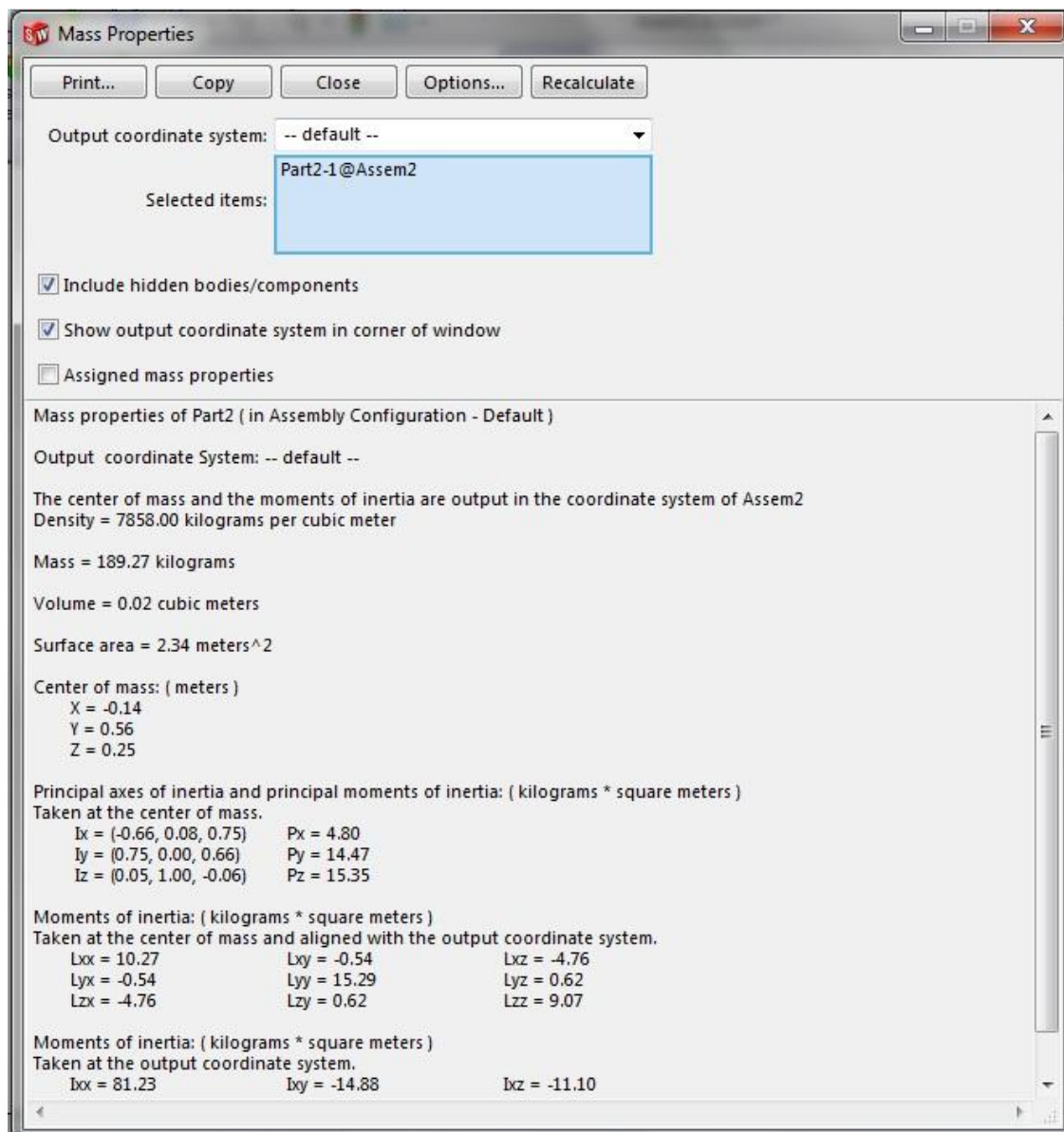


شکل ۳-۳- ربات کروی *Unimate*

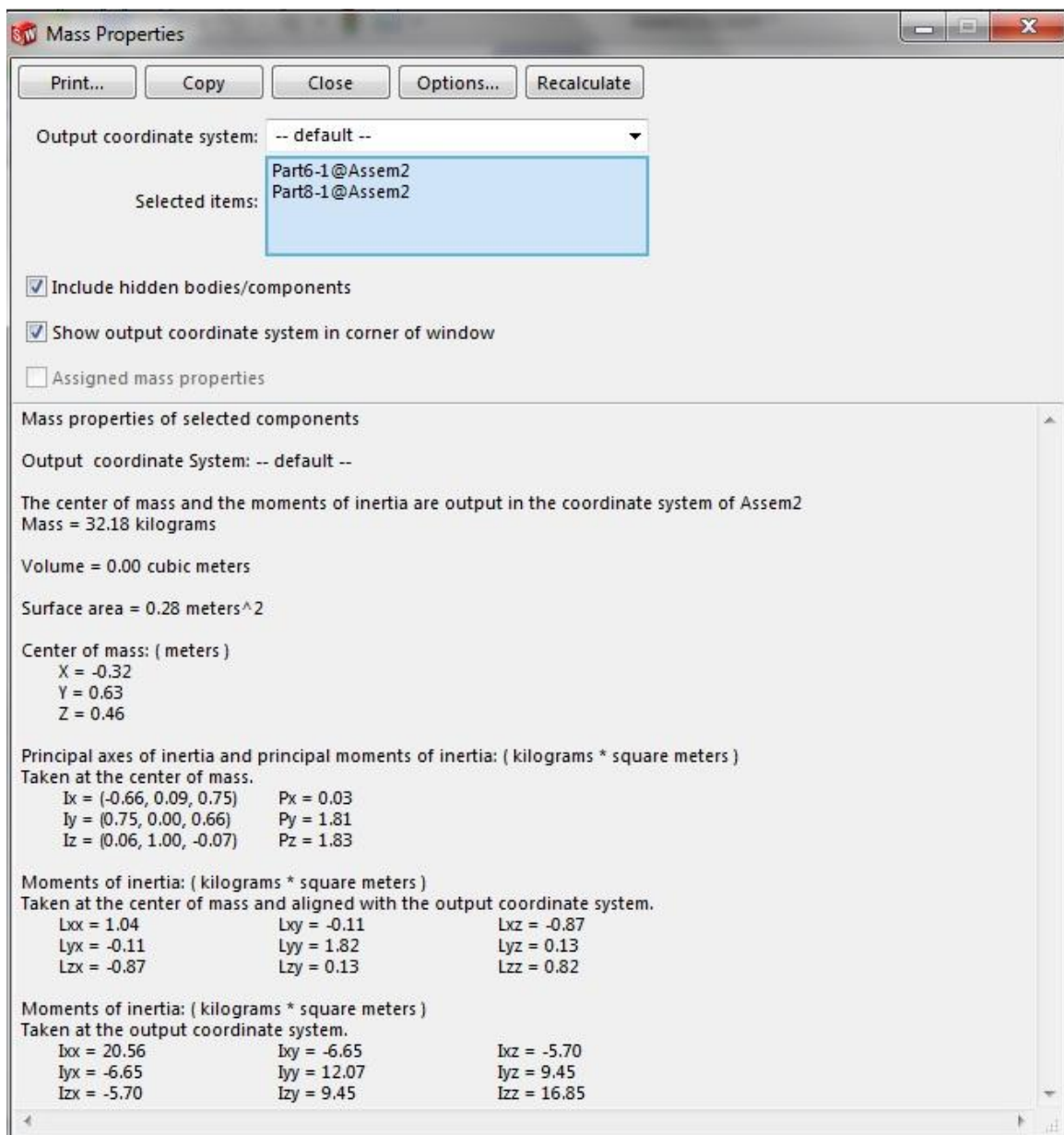
پس از مونتاژ ربات با استفاده از ابزار *Mass Properties* به تعیین مشخصه‌های مکانیکی ربات مانند مرکز جرم و جرم رابط‌ها می‌پردازیم. پس از مشخص نمودن مراکز جرم به هر کدام یک دستگاه مختصات اختصاص می‌دهیم. پس از اختصاص دستگاه‌های مختصات به مراکز جرم با استفاده مجدد از ابزار *Mass Properties* به تعیین تانسورهای اینرسی می‌پردازیم. در ادامه تصویر پنجره *Mass Properties* برای هر رابط آورده شده است.



شکل ۳-۴- مشخصه‌های مکانیکی رابط اول قبل از اختصاص دستگاه مختصات به مرکز جرم



شکل ۳-۵- مشخصه‌های مکانیکی رابط دوم قبل از اختصاص دستگاه مختصات به مرکز جرم

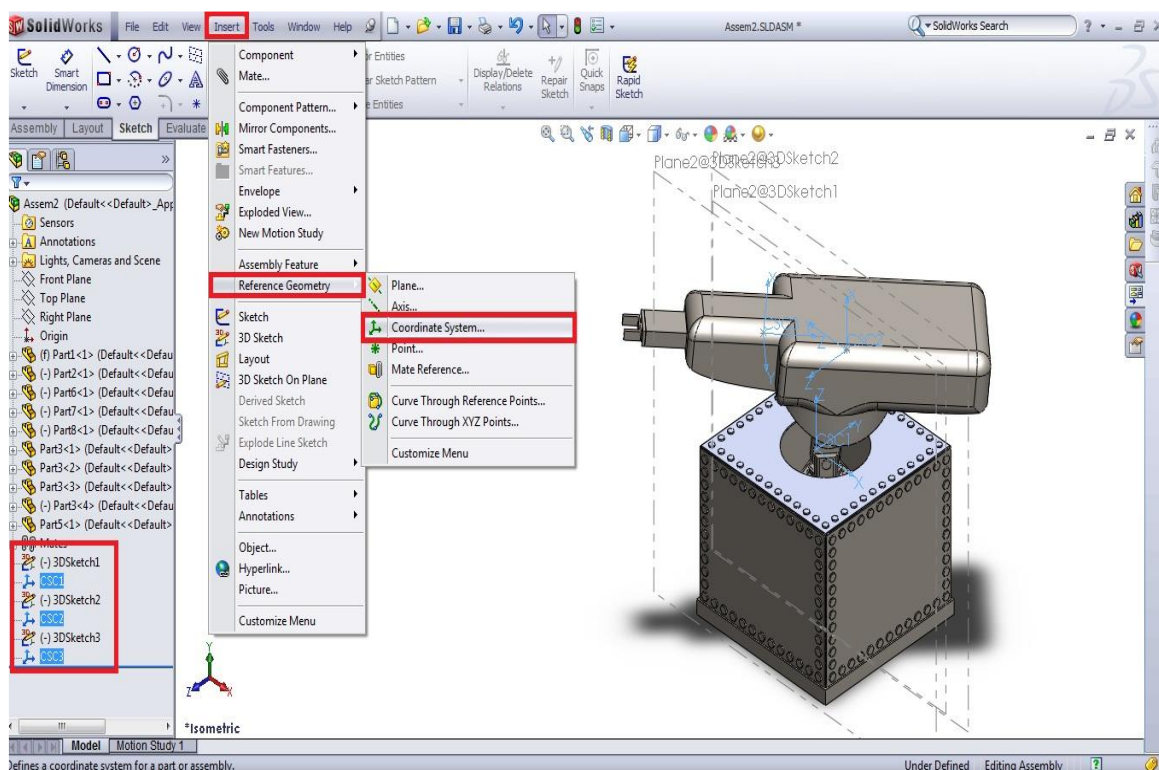


شکل ۳-۶- مشخصه‌های مکانیکی رابط سوم قبل از اختصاص دستگاه مختصات به مرکز جرم

با توجه به داده‌های بدست آمده در بالا مراکز جرم به صورت زیر می‌باشد:

$$c_1 = \begin{bmatrix} -0.19 \\ -0.13 \\ 0.3 \end{bmatrix} \quad c_2 = \begin{bmatrix} -0.14 \\ 0.56 \\ 0.25 \end{bmatrix} \quad c_3 = \begin{bmatrix} -0.32 \\ 0.63 \\ 0.46 \end{bmatrix} \quad (۳-۴۰)$$

با توجه به استخراج مراکز جرم رابطها می‌توانیم در قسمت طراحی کلیات<sup>۱</sup>، پس از اختصاص نقطه<sup>۲</sup> به مختصات مورد نظر، با مراجعه به منوی *Insert*، دستگاه مختصات<sup>۳</sup> را به محل مورد نظر اختصاص دهیم. شکل زیر مراحل انجام این کار را نشان می‌دهد.



شکل ۳-۷- نحوه اختصاص دستگاه مختصات در نرم افزار *SolidWorks*

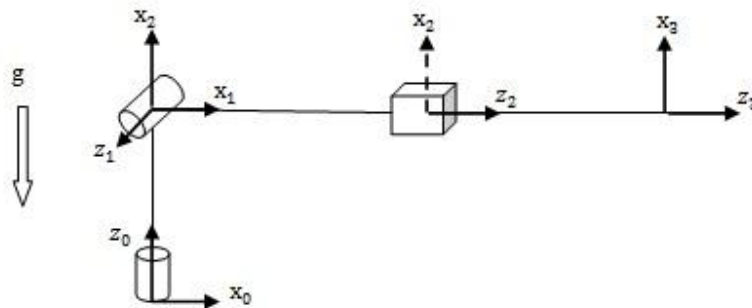
<sup>1</sup> Sketch

<sup>2</sup> Point (SolidWorks-Sketch Tab)

<sup>3</sup> Insert/Reference Geometry/Coordinate System

### ۳-۳- انرژی پتانسیل

انرژی پتانسیل از رابطه  $mgh$  محاسبه می‌گردد. در این رابطه  $g$  ثابت گرانشی<sup>۱</sup>،  $۹.۸۱$  می‌باشد.  $m$  جرم جسم مورد نظر و  $h$  ارتفاع می‌باشد. برای ربات‌ها، با توجه به روال مدلسازی تشریح شده، ثابت گرانشی در راستای محور مفصل شماره ۱ می‌باشد. بنابراین با توجه به شکل زیر ثابت گرانشی برای ربات کروی در جهت محور  $Z$  دستگاه مبدأ می‌باشد.



شکل ۳-۸- راستای ثابت گرانشی با توجه به نحوه اختصاص دستگاه‌های مختصات به ربات تعیین می‌گردد

انرژی پتانسیل ربات با توجه به قرار دادن دستگاه‌های مختصات در مرکز جرم، به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$P = g^T r_{c_i} m_i \quad (۴۱-۳)$$

$$P = g^T (m_1 d_0^{c_1} + m_2 d_0^{c_2} + m_3 d_0^{c_3}) \quad (۴۲-۳)$$

$$g^T = [0 \quad 0 \quad 9.8] \quad (۴۳-۳)$$

<sup>۱</sup> Gravitational constant

### ۳-۴- لاگرانژین

لاگرانژین عبارت است از اختلاف انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی، که به صورت زیر محاسبه می-

گردد: [۲]

$$L = K - P \quad (۳-۴۴)$$

$$K = \frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \dot{q} \quad (۳-۴۵)$$

$$L = \frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \dot{q} - P(q) \quad (۳-۴۶)$$

### ۳-۵- معادلات دینامیکی<sup>۱</sup>

با استفاده از معادله دینامیکی اوپلر-لاگرانژ<sup>۲</sup> که به صورت زیر تعریف می‌شود، دینامیک بدنه ربات را

بدست می‌آوریم:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau \quad (۳-۴۷)$$

با قرار دادن رابطه لاگرانژین در معادله دینامیکی اوپلر-لاگرانژ داریم:

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} (\dot{q}^T D(q) \dot{q}) - \frac{\partial}{\partial q} V(q) \quad (۳-۴۸)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = D(q) \ddot{q} \quad (۳-۴۹)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = D(q) \ddot{q} + \dot{D}(q) \dot{q} \quad (۳-۵۰)$$

بنابراین معادله دینامیکی ربات به صورت زیر بدست می‌آید:

$$D(q) \ddot{q} + \dot{D}(q) \dot{q} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} (\dot{q}^T D(q) \dot{q}) + \frac{\partial}{\partial q} V(q) = \tau \quad (۳-۵۱)$$

<sup>۱</sup> Dynamic equations

<sup>۲</sup> Euler-Lagrange Equations



معادله دینامیکی ربات معمولاً به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau \quad (52-3)$$

در رابطه بالا، درایه‌های ماتریس  $C(q, \dot{q})$  نمادهای کریستوفل<sup>۱</sup> نامیده می‌شود و می‌توان آنها را به

صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$c_{ijk} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k} \right\} \quad (53-3)$$

$$c_{kj} = \sum_{i=1}^n c_{ijk}(q) \dot{q}_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k} \right\} \dot{q}_i \quad (54-3)$$

در معادله دینامیکی ربات سه بخش وجود دارد، که بخش اول پیچیدگی، دوم مشتق از مختصات تعمیم یافته بخش‌های دوم با توان دوم مشتق‌های اول  $q$  که ممکن است ضرایب وابسته به  $q$  داشته باشند متناسب است. این قسمت به دو بخش تقسیم بندی می‌شود. بخش‌های شامل یک ضریب از نوع  $\dot{q}_i^2$  که جانب مرکز<sup>۲</sup> نامیده می‌شوند، هنگامی که آنها شامل یک ضریب از نوع  $\dot{q}_i \dot{q}_j$  برای  $i \neq j$  هستند، بخش‌های کورولیس<sup>۳</sup> نامیده می‌شوند. نوع سوم آنهایی هستند که فقط شامل  $q$  هستند و مشتقات آن را ندارند. واضح است که آخرین قسمت از مشتق انرژی پتانسیل بدست می‌آید.

بنابراین با توجه به معادله دینامیک اوپلر-لاگرانژ داریم:

$$\sum_j d_{kj}(q) \ddot{q}_j + \sum_{i,j} c_{ijk}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j + \phi_k(q) = \tau_k \quad k=1, \dots, n \quad (55-3)$$

$$k=1 \quad i, j=1, 2, 3$$

$$d_{11}\ddot{q}_1 + d_{12}\ddot{q}_2 + d_{13}\ddot{q}_3 + c_{111}\dot{q}_1\dot{q}_2 + c_{121}\dot{q}_1\dot{q}_2 + c_{131}\dot{q}_1\dot{q}_3 + c_{211}\dot{q}_1\dot{q}_2 + c_{221}\dot{q}_2\dot{q}_2 + c_{231}\dot{q}_3\dot{q}_2 + c_{311}\dot{q}_1\dot{q}_3 + c_{321}\dot{q}_3\dot{q}_2 + c_{331}\dot{q}_3\dot{q}_3 + \phi_1 = \tau_1 \quad (56-3)$$

<sup>1</sup> Christoffel Symbols

<sup>2</sup> Centrifugal

<sup>3</sup> Coriolis

$$k = 2 \quad i, j = 1, 2, 3$$

$$d_{21}\ddot{q}_1 + d_{22}\ddot{q}_2 + d_{23}\ddot{q}_3 + c_{112}\dot{q}_1\dot{q}_2 + c_{122}\dot{q}_1\dot{q}_2 + c_{132}\dot{q}_1\dot{q}_3 + c_{212}\dot{q}_1\dot{q}_2 + c_{222}\dot{q}_2\dot{q}_2 + c_{232}\dot{q}_3\dot{q}_2 + c_{312}\dot{q}_1\dot{q}_3 + c_{322}\dot{q}_3\dot{q}_2 + c_{332}\dot{q}_3\dot{q}_3 + \phi_2 = \tau_2 \quad (57-3)$$

$$k = 3 \quad i, j = 1, 2, 3$$

$$d_{31}\ddot{q}_1 + d_{32}\ddot{q}_2 + d_{33}\ddot{q}_3 + c_{113}\dot{q}_1\dot{q}_2 + c_{123}\dot{q}_1\dot{q}_2 + c_{133}\dot{q}_1\dot{q}_3 + c_{213}\dot{q}_1\dot{q}_2 + c_{223}\dot{q}_2\dot{q}_2 + c_{233}\dot{q}_3\dot{q}_2 + c_{313}\dot{q}_1\dot{q}_3 + c_{323}\dot{q}_3\dot{q}_2 + c_{333}\dot{q}_3\dot{q}_3 + \phi_3 = \tau_3 \quad (58-3)$$

معادلات دینامیکی بدنه ربات به صورت ماتریسی به شکل کلی زیر می باشد:

$$D(q)\ddot{q} + c(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau \quad (59-3)$$

با تعریف  $H(q, \dot{q})$  به صورت زیر داریم:

$$H(q, \dot{q}) = c(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) \quad (60-3)$$

درایه های ماتریس های  $D(q)$  و  $H(q, \dot{q})$  به صورت زیر می باشد:

$$D(q) = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix} \quad H(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{21} \\ h_{31} \end{bmatrix} \quad (61-3)$$

$$D_{11} = I_{22_1} + I_{33_2} + I_{33_3} + I_{11_2} S_{q_2}^2 + I_{11_3} S_{q_2}^2 - I_{33_2} S_{q_2}^2 - I_{33_3} S_{q_2}^2 - 2I_{13_2} C_{q_2} S_{q_2} - 2I_{13_3} C_{q_2} S_{q_2} + l_{c_2}^2 m_2 S_{q_2}^2 + l_{c_3}^2 m_3 S_{q_2}^2 + m_3 q_3^2 S_{q_2}^2 + 2l_{c_3}^2 m_3 S_{q_2}^2 \quad (62-3)$$

$$D_{12} = I_{12_2} S_{q_2} - I_{23_3} C_{q_2} - I_{23_2} C_{q_2} + I_{12_3} S_{q_2} \quad (63-3)$$

$$D_{13} = 0 \quad (64-3)$$

$$D_{21} = I_{12_2} S_{q_2} - I_{23_3} C_{q_2} - I_{23_2} C_{q_2} + I_{12_3} S_{q_2} \quad (65-3)$$

$$D_{22} = I_{22_2} + I_{22_3} + m_2 l_{c_2}^2 + m_3 l_{c_3}^2 + 2m_3 l_{c_3} q_3 + m_3 q_3^2 \quad (66-3)$$

$$d_{23} = 0 \quad (67-3)$$

$$D_{31} = 0 \quad (68-3)$$

$$D_{32} = 0 \quad (69-3)$$

$$D_{33} = m_3 \quad (70-3)$$

$$h_{11} = \dot{q}_2^2 \{ I_{12_2} C_{q_2} + I_{12_3} C_{q_2} + I_{23_2} S_{q_2} + I_{23_3} S_{q_2} \} - \dot{q}_1 \dot{q}_2 \{ 2I_{13_2} C_{2q_2} + 2I_{13_3} C_{2q_2} - I_{11_2} S_{2q_2} - I_{11_3} S_{2q_2} + I_{33_2} S_{2q_2} + I_{33_3} S_{2q_2} - l_{c_2}^2 m_2 S_{2q_2} - l_{c_3}^2 m_3 S_{2q_2} - m_3 q_3^2 S_{2q_2} - 2l_{c_3} m_3 q_3 S_{2q_2} \} + \dot{q}_1 \dot{q}_3 \{ l_{c_3} m_3 + m_3 q_3 - l_{c_3} m_3 C_{2q_2} - m_3 q_3 C_{2q_2} \} \quad (71-3)$$

$$h_{21} = \dot{q}_1^2 \{ I_{13_2} C_{2q_2} + I_{13_3} C_{2q_2} - \frac{1}{2} I_{11_2} S_{2q_2} - \frac{1}{2} I_{11_3} S_{2q_2} + \frac{1}{2} I_{33_2} S_{2q_2} + \frac{1}{2} I_{33_3} S_{2q_2} - \frac{1}{2} l_{c_2}^2 m_2 S_{2q_2} - \frac{1}{2} l_{c_3}^2 m_3 S_{2q_2} - \frac{1}{2} m_3 q_3^2 S_{2q_2} - l_{c_3} m_3 q_3 S_{2q_2} + \dot{q}_2 \dot{q}_3 \{ 2l_{c_3} m_3 + 2m_3 q_3 \} + g \{ l_{c_2} m_2 S_{\theta_2} + l_{c_3} m_3 S_{\theta_2} + m_3 q_3 S_{q_2} \} \quad (72-3)$$

$$h_{31} = \dot{q}_1^2 \{ -m_3 l_{c_3} - m_3 q_3 + m_3 l_{c_3} C_{q_2}^2 + m_3 q_3 C_{q_2}^2 \} + \dot{q}_2^2 \{ -m_3 l_{c_3} - m_3 q_3 \} - g m_3 C_{q_2} \quad (73-3)$$

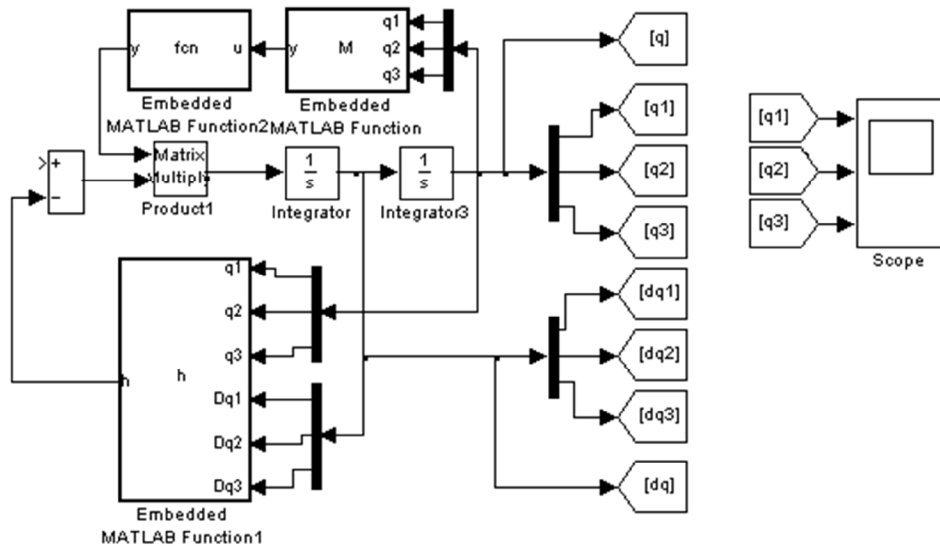
### ۳-۵-۱- شبیه سازی دینامیک بدنه ربات در متلب<sup>۱</sup>

در محیط *SIMULINK* نرم افزار متلب به شبیه سازی بدنه ربات می پردازیم. ماتریس های  $D(q)$  و  $H(q, \dot{q})$  با استفاده از بلوک های توابع جاسازی شده<sup>۲</sup>، قابل پیاده سازی می باشد. توابع تعریف شده توسط کاربر<sup>۳</sup> نیز این قابلیت را فراهم می کنند که از توابع متلب در محیط *SIMULINK* استفاده کرد.

<sup>1</sup> MATLAB

<sup>2</sup> Embedded Function

<sup>3</sup> User Define Function



شکل ۳-۱۰- شبیه سازی بدنه ربات

### ۳-۶- محرکه

محرکه آخرین عنصر حلقه‌ی کنترل<sup>۱</sup> می‌باشد، به عبارت دیگر فرمان کنترل کننده در نهایت توسط محرکه اجرا می‌گردد. با توجه به معادله دینامیکی بدنه ربات، برای به حرکت در آوردن بدنه ربات نیاز به اعمال گشتاور می‌باشد. برای ایجاد گشتاور مورد نیاز از محرکه‌ها استفاده می‌کنیم. محرکه‌ها به طور کلی به سه دسته تقسیم می‌شوند که عبارتند از:

❖ محرکه‌های الکتریکی<sup>۲</sup>

❖ محرکه‌های هیدرولیکی<sup>۳</sup>

❖ محرکه‌های پنوماتیکی<sup>۴</sup>

موتورهای *dc* مغناطیس دائم<sup>۱</sup> و موتورهای پله‌ای<sup>۲</sup> عمده‌ترین نوع موتورهای الکتریکی هستند که در رباتیک بکار برده می‌شوند. اساس کار موتورهای الکتریکی تبدیل انرژی الکتریکی به انرژی مکانیکی می-

<sup>۱</sup> Control loop

<sup>۲</sup> Electrical actuators

<sup>۳</sup> Hydraulic actuators

<sup>۴</sup> Pneumatic actuators

باشد. میزان بزرگی و جهت جریان در آرمیچر<sup>۳</sup>، تعیین کننده میزان گشتاور تولیدی متناظر می‌باشد. موتورهای *dc* مغناطیس دائم امروزی می‌توانند با حجم بسیار کم، گشتاور به نسبت بزرگی را تولید نمایند که این مسئله در ساخت ربات‌های امروزی از اهمیت به سزایی برخوردار است. این موتورها دقیق و قابل اطمینان<sup>۴</sup> هستند، بعلاوه با توسعه و پیشرفت سویگرهای الکتریکی<sup>۵</sup>، المان‌های الکترونیک صنعتی نظیر ترانزیستورهای قدرت<sup>۶</sup> و تایریستورها<sup>۷</sup> و تراپاک‌ها و غیره، توانایی‌های اجرایی موتوهای *dc* مغناطیس دائم روز به روز پیشرفت خواهد یافت. موتورهای پله‌ای با استفاده از پالس‌های الکتریکی<sup>۸</sup> عمل می‌کنند. میزان پالس‌ها به طور مستقیم موقعیت موتور را در یک حلقه‌ی باز کنترل می‌نمایند. از این نوع موتورها در کاربردهایی که نیاز به دقت بالا نمی‌باشد و حلقه کنترلی باز قابل قبول می‌باشد، استفاده می‌شود.

این نوع موتورها ساده‌تر و ارزان‌تر از موتورهای *dc* مغناطیس دائم هستند. هر چند که اندازه و وزن آنها نسبت به موتورهای *dc* مغناطیس دائم بیشتر است، ولی توانایی اجرایی و توان محدودتری دارند. ربات‌های اولیه که عموماً در صنایع خودرو سازی مورد استفاده قرار می‌گرفتند، اندازه‌ای بزرگ داشتند و به صورت هیدرولیک عمل می‌کردند و توانایی جابجایی بارهای به نسبت زیادی را داشتند. ربات‌های هیدرولیکی هنوز هم با کمترین هزینه بیشترین انرژی را فراهم می‌کنند و به نظر می‌رسد همچنان در صنایع سنگین مورد استفاده قرار گیرند. ایرادی که به این نوع محرکه‌ها وارد است، نشت روغن و پر صدا بودن آنها است. محرکه‌های هیدرولیکی از انواع مختلف روغن با فشار زیاد (۲۰۰۰ پوند در هر اینچ مربع) استفاده می‌کنند. در این سیستم‌ها یک کنترل کننده، موقعیت یک سوپاپ الکترومکانیکی را کنترل می‌نماید که این سوپاپ

---

<sup>1</sup> Permanent magnet DC motor

<sup>2</sup> Stepper motors

<sup>3</sup> Armature

<sup>4</sup> Reliable

<sup>5</sup> Commutators

<sup>6</sup> Power transistors

<sup>7</sup> Thyristors

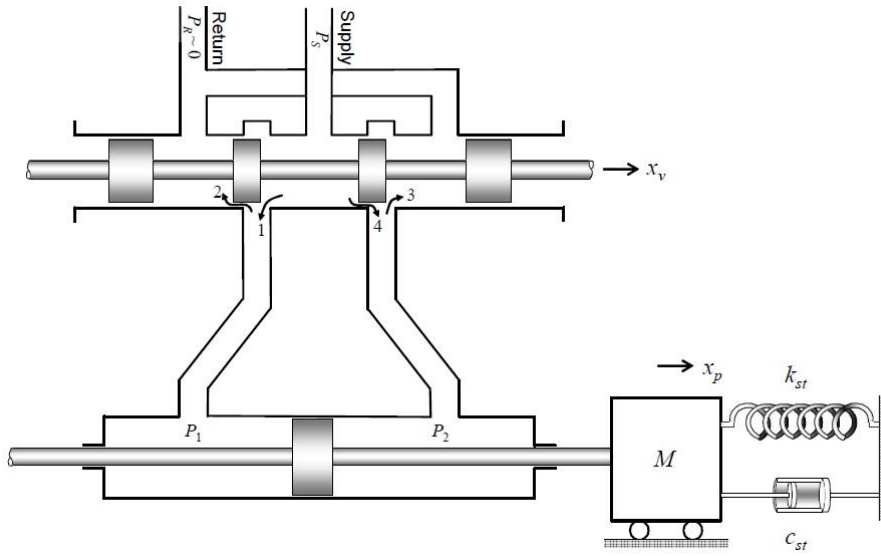
<sup>8</sup> Electrical pulse

خود در درون سیستم مایع هیدرولیک قرار گرفته و فشار روغن را یکسان نموده و کنترل می‌نماید. سوپاپ‌های الکترومکانیکی معمولاً بسیار گران قیمت هستند و باید در روغن کاملاً پاکیزه و خالص که دائماً از فیلتر عبور می‌نماید، کار کنند. مزیت اصلی محرکه‌های هیدرولیکی این است که با حجم کم، بیشترین میزان انرژی را تولید می‌کنند، اما عملکرد آنها به صورت خطی و در یک مسیر نیست، که این امر باعث دشوار شدن کنترل این نوع محرکه‌ها می‌گردد.

نوع دیگری از محرکه‌ها پنوماتیک می‌باشد که از نظر طرح ساده‌ترین و از نظر هزینه کم خرج‌ترین محرکه‌هایی هستند که قابل استفاده می‌باشند. اگر چه این محرکه‌ها از نظر ساختمانی شبیه به محرکه‌های هیدرولیکی هستند، اما سوپاپ‌های کنترل کننده هوا از نظر طرح و عملکرد ساده‌تر از سوپاپ‌های روغنی عمل می‌کنند لذا به مراتب ارزان‌تر هستند. اما متأسفانه از نقطه نظر کنترلی، این نوع محرکه‌ها خیلی سخت‌تر از سایر محرکه‌ها کنترل می‌شوند و این امر به دلیل تراکم پذیر بودن هوا می‌باشد. با استفاده از باد نمی‌توان به سرعت حالت‌های سکون یک پیستون را تغییر داد. در سیستم‌های بادی دقت و ظرافت به سختی حاصل می‌گردد. بنابراین از این نوع محرکه‌ها نیز مانند موتورهای پله‌ای در کاربردهایی که نیاز به دقت بالا نباشد، استفاده می‌گردد. با توجه به مطالب بیان شده درباره‌ی محرکه‌ها و نیاز به دقت در سیستم‌های رباتیکی امروزی، بطور وسیع از موتورهای *dc* مغناطیس دائم استفاده می‌شود. در ادامه به مدلسازی دینامیکی محرکه‌ها می‌پردازیم. [۲]

### ۳-۶-۱- محرکه‌های هیدرولیکی

در سیستم‌های هیدرولیکی با مسائل حرکت سیال در لوله‌ها و ذخیره سازی سیال در مخازن مواجه می‌باشیم. اصول حاکم بر این سیستم‌ها، معادلات حرکت سیال و روابط هیدرواستاتیک می‌باشند. یک محرکه هیدرولیکی، یک درجه آزادی در حرکت ایجاد می‌کند و ساختار آن در شکل زیر ترسیم شده است. [۱۷]



شکل ۳-۹- ساختار محرکه هیدرولیکی با یک درجه آزادی

در ادامه مدل دینامیکی محرکه هیدرولیکی با توجه به خطی سازی<sup>۱</sup> حول نقطه تعادل آورده شده

است: [۱۸]

$$\dot{x}_p = v_p \quad (۷۴-۳)$$

$$\dot{v}_p = \frac{A_p}{M} \Delta P - \omega_{st}^2 x_p - 2\xi_{st} \omega_{st} v_p \quad (۷۵-۳)$$

$$\Delta \dot{P} = 2 \frac{k}{A_p L} (-A_p v_p - \gamma_1 \Delta P - \gamma_2 x_v) \quad (۷۶-۳)$$

$$\dot{x}_v = -\frac{1}{\tau_v} + \frac{k_v}{\tau_v} u \quad (۷۷-۳)$$

در روابط بالا متغیرهای  $x_p$  و  $v_p$  بیان کننده جابجایی،  $\Delta P$  اختلاف فشار  $P_1$  و  $P_2$ ،  $x_v$  جابجایی ماسوره شیر<sup>۲</sup>،  $M$  ترکیبی از جرم پیستون محرکه و ساختار حرکتی،  $A_p$  مساحت سطح پیستون،  $\tau_v$  ثابت زمانی شیرسروو،  $k_v$  بهره شیرسروو،  $k$  مدول بالک<sup>۳</sup> مربوط به روغن،  $\gamma_1$  ثابتی وابسته به مجاری

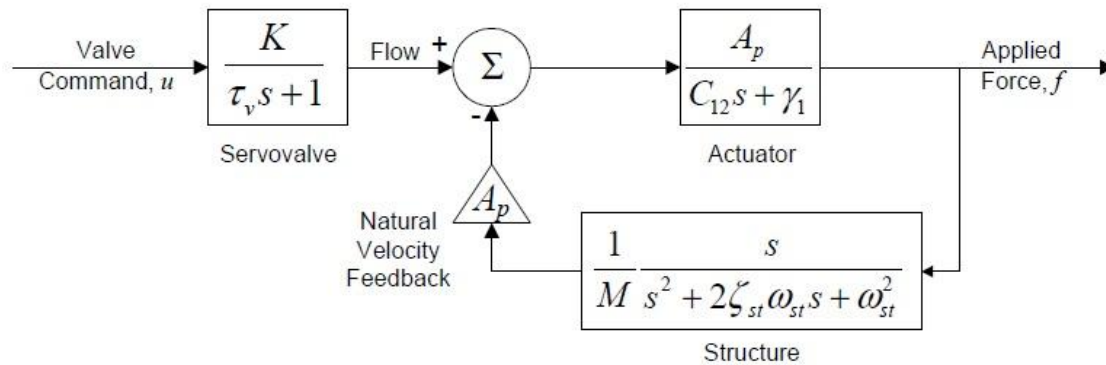
<sup>۱</sup> Linearized

<sup>۲</sup> Valve spool

<sup>۳</sup> Bulk modulus

عبوری روغن و میزان نشتی شیر،  $\gamma_2$  ضریب بهره،  $\omega_{st}$  فرکانس طبیعی و  $\zeta_{st}$  میرایی سیستم می‌باشند.

بلوک دیاگرام سیستم در زیر ترسیم شده است:



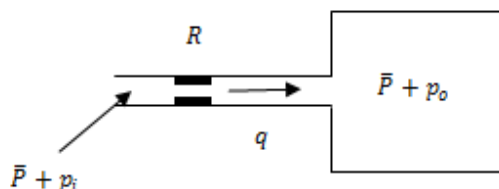
شکل ۳-۱۰-۱- دیاگرام بلوکی سیستم محرکه هیدرولیکی

### ۳-۶-۲- محرکه‌های پنوماتیکی

پنوماتیک، دانش تولید - کنترل و بکارگیری هوای فشرده می‌باشد. در دهه‌های اخیر شاهد پیشرفت- های بزرگی در کنترل کننده های نیوماتیکی کم فشار برای سیستم‌های کنترل صنعتی بوده‌ایم، و اکنون این کنترل کننده‌ها در فرآیندهای صنعتی بسیار بکار می‌روند. از دلایل جاذبه بسیار اینها می‌توان از مشخصاتی از قبیل سادگی ساختار، تمیزی، هزینه کم، تاثیر کم دما انتقال آسان و ... نام برد. در زیر

نمودار شماتیک یک سیستم فشار ترسیم شده است. [۱۹]





شکل ۳-۱۱- نمودار شماتیک یک سیستم فشار

روابط حاکم بر سیستم به صورت زیر می باشد:

$$R = \frac{d(\Delta P)}{dq} \quad (78-3)$$

$$C = \frac{dm}{dp} = V \frac{d\rho}{dp} \quad (79-3)$$

$$p \left( \frac{V}{m} \right)^n = \frac{p}{\rho^n} = K \quad (80-3)$$

در روابط بالا  $\Delta P$  تغییر موچکی در اختلاف فشار گاز و  $dq$  تغییر کوچک آهنگ عبور گاز است.  $C$  بیان کننده ظرفیت شبکه می باشد. ظرفیت سیستم فشار به فرآیند انبساط در آن بستگی دارد. ظرفیت را می توان با استفاده از قانون گازهای ایده آل حساب کرد. رابطه بالا برای گازهای ایده آل به صورت زیر تبدیل می گردد.

$$p\bar{v} = \bar{R}T \quad (81-3)$$

به منظور مدلسازی سیستم، می توانیم فرض کنیم که متغیرها نسبت به مقدار ماندگارشان تغییرات اندکی دارند و سیستم را خطی فرض کنیم. کمیات را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$\bar{P}$  فشار گاز محفظه در حالت ماندگار

$p_i$  تغییر کوچک گاز ورودی

$p_o$  تغییر کوچک فشار گاز محفظه

$V$  حجم محفظه

$m$  جرم گاز داخل محفظه

$q$  آهنگ عبور گاز

$\rho$  چگالی گاز

بنابراین داریم :

$$R = \frac{P_i - P_o}{q} \quad (۸۲-۳)$$

چون حاصلضرب تغییر فشار  $dp_o$  در ظرفیت  $C$  با گاز اضافه شده به مخزن در فاصله  $dt$  برابر است

داریم :

$$RC \frac{dp_o}{dt} + p_o = p_i \quad (۸۳-۳)$$

اگر  $P_o$  و  $P_i$  را به ترتیب ورودی و خروجی سیستم در نظر بگیریم، تابع تبدیل سیستم به صورت زیر

تبدیل می‌گردد:

$$\frac{P_o(s)}{P_i(s)} = \frac{1}{RCS + 1} \quad (۸۴-۳)$$

### ۳-۶-۳- موتورهای $dc$ مغناطیس دائم

موتورهای  $dc$  اصولاً بر این اساس کار می‌کنند که یک هادی حامل جریان در میدان مغناطیسی،

نیروی  $F = \varphi \times i$  را حس می‌نماید که در آن  $\varphi$  شار میدان مغناطیسی<sup>۱</sup> و  $i$  جریان هادی است. موتور از

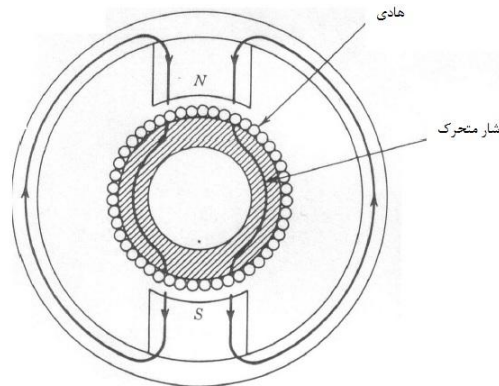
یک استاتور<sup>۲</sup> ثابت و یک روتور<sup>۳</sup> متحرک که در داخل استاتور می‌چرخد مطابق شکل زیر تشکیل می‌شود.

---

<sup>۱</sup> Magnetic flux

<sup>۲</sup> Stator

<sup>۳</sup> Rotor



شکل ۳-۱۲- سطح مقطع<sup>۱</sup> موتور  $dc$  مغناطیس دائم

اگر استاتور یک شار مغناطیسی شعاعی<sup>۲</sup> تولید نماید و جریان روتور  $i$  باشد، آنگاه گشتاوری روی موتور خواهد بود که باعث چرخیدن آن می‌گردد. اندازه‌ی این گشتاور عبارت است از:

$$\tau_m = k_1 \phi i_a \quad (۳-۸۵)$$

که در این رابطه  $\tau_m$  گشتاور موتور  $(N-m)$ ،  $\phi$  میدان مغناطیسی (وبر<sup>۳</sup>)،  $i_a$  جریان آرمیچر (آمپر) و  $k$  یک ثابت فیزیکی است. بعلاوه، هر گاه یک هادی در یک میدان مغناطیسی حرکت کند، یک ولتاژ  $V_b$  بین ترمینال‌های آن تولید می‌گردد که متناسب با سرعت هادی در میدان است. این ولتاژ نیروی ضد محرکه الکتریکی<sup>۴</sup> نامیده می‌شود و تمایل به مخالفت با جریان هادی دارد. رابطه نیروی ضد محرکه به صورت زیر می‌باشد:

$$V_b = k_2 \phi \omega_m \quad (۳-۸۶)$$

که در آن  $V_b$  ولتاژ ضد محرکه بر حسب ولت،  $\omega_m$  سرعت زاویه‌ای روتور بر حسب رادیان بر ثانیه و  $k_2$  ثابت تناسب است. از آنجا که بحث ما روی موتورهای  $dc$  مغناطیس دائم است، بنابراین استاتور از

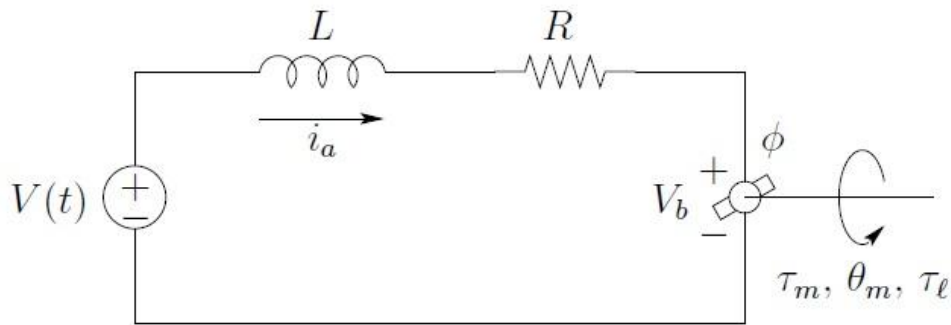
<sup>1</sup> Cross-sectional view

<sup>2</sup> Radial magnetic flux

<sup>3</sup> Webers

<sup>4</sup> Back emf

مغناطیس دائم می‌باشد. در این حالت می‌توانیم شار  $\phi$  را ثابت فرض کنیم. به دیاگرام شماتیک زیر توجه نمایید:



شکل ۳-۱۳- دیاگرام مدار برای موتور  $dc$  کنترل شده با ولتاژ آرمیچر

معادله دیفرانسیل آرمیچر به صورت زیر می‌باشد:

$$L \frac{d}{dt} i_a + R i_a = V - V_b \quad (۸۷-۳)$$

از آنجا که شار  $\phi$  ثابت است، گشتاور تولیدی موتور برابر است با:

$$\tau_m = k_1 \phi i_a = k_m i_a \quad (۸۸-۳)$$

که در آن  $k_m$  ثابت گشتاور<sup>۱</sup> (بر حسب  $N\text{-}m/\text{amp}$ ) است، با توجه به رابطه نیروی ضد محرکه داریم:

$$V_b = k_2 \phi \omega_m = k_b \omega_m = k_b \frac{d}{dt} \theta_m \quad (۸۹-۳)$$

که در آن  $k_b$  ثابت ضد محرکه القایی<sup>۲</sup> می‌باشد. شکل زیر مدل مکانیکی روتور یک موتور گشتاوری

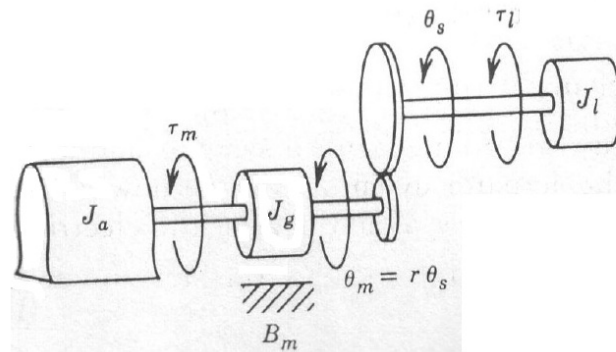
$DC$  را نشان می‌دهد که از طریق یک سیستم انتقال چرخنده‌ای به باری دارای لختی دورانی، متصل

شده است. سیستم انتقال با نسبت چرخ دنده  $I:r$ ، به صورت کاهنده می‌باشد. گشتاور اعمال شده به

<sup>۱</sup> Torque constant

<sup>۲</sup> Back emf constant

روتور،  $\tau_m$  با رابطه زیر به صورت تابعی از جریان  $i_a$  گذرنده از مدار آرمیچر می‌باشد. نسبت چرخ دنده باعث افزایش گشتاور و کاهش سرعت می‌گردد.



شکل ۳-۱۴ مدل فشرده یک رابط با سیستم انتقال چرخ دنده-محرکه<sup>۱</sup>

$$\tau_l = r\tau_m \quad (۹۰-۳)$$

$$\theta_l = r\theta_m \quad (۹۱-۳)$$

معادله حرکت سیستم به صورت زیر می‌باشد:

$$J_m \frac{d^2}{dt^2} \theta_m + B_m \frac{d}{dt} \theta_m = \tau_m - r\tau_l \quad (۹۲-۳)$$

با توجه به رابطه گشتاور موتور که تابعی از جریان روتور است. داریم:

$$\tau_m = k_m i_a \quad (۹۳-۳)$$

$$i_a = k_m^{-1} \tau_m \quad (۹۴-۳)$$

با جایگذاری معادله حرکت روتور در رابطه بالا داریم:

$$i_a = k_m^{-1} \tau_m = k_m^{-1} (J_m \frac{d^2}{dt^2} \theta_m + B_m \frac{d}{dt} \theta_m + r\tau_l) \quad (۹۵-۳)$$

اندوکتانس ظاهر شده در معادله دیفرانسیل آرمیچر بسیار ناچیز و قابل صرف نظر کردن است. بنابراین با صرف نظر از اندوکتانس آرمیچر و جایگذاری جریان  $i_a$  در معادله دیفرانسیل آرمیچر داریم:

<sup>۱</sup> Lumped model of a single link with actuator/gear train

$$V = Ri_a + V_b \quad \div (96-3)$$

$$V = (Rk_m^{-1}J_m r^{-1}) \frac{d^2}{dt^2} \theta_l + (Rk_m^{-1}B_m r^{-1} + k_b r^{-1}) \frac{d}{dt} \theta_l + Rk_m^{-1} r \tau_l \quad (97-3)$$

همان گونه که از رابطه بالا مشخص است، با کنترل ولتاژ دو سر موتور می‌توانیم موقعیت موتور را کنترل نماییم. [۲]

### ۳-۷- مدل دینامیکی سیستم ربات به همراه محرکه

با توجه به مطالبی که پیش‌تر مطرح شد، انتخاب موتور  $dc$  مغناطیس دائم به عنوان محرکه‌ی سیستم انتخاب مناسبی می‌باشد. بنابراین در این قسمت معادله‌ی دینامیکی کل سیستم که شامل دینامیک بدنه ربات و دینامیک محرکه می‌باشد، را بدست می‌آوریم. دینامیک بدنه ربات به صورت رابطه‌ی زیر می‌باشد که در آن  $\tau_l$  گشتاور بار می‌باشد:

$$D(q)\ddot{q} + H(q, \dot{q}) = \tau_l \quad (98-3)$$

رابطه بین ولتاژ و گشتاور موتور نیز به صورت زیر می‌باشد که با جایگذاری در معادله دینامیکی ربات به صورت زیر تبدیل می‌گردد:

$$V = (Rk_m^{-1}J_m r^{-1})\ddot{q} + (Rk_m^{-1}B_m r^{-1} + k_b r^{-1})\dot{q} + Rk_m^{-1}r(D(q)\ddot{q} + H(q, \dot{q})) \quad (99-3)$$

$$V = (Rk_m^{-1}J_m r^{-1} + D(q))\ddot{q} + (Rk_m^{-1}B_m r^{-1} + k_b r^{-1})\dot{q} + Rk_m^{-1}rH(q, \dot{q}) \quad (100-3)$$

با در نظر گرفتن  $M(q)$  و  $N(q, \dot{q})$  به صورت زیر داریم:

$$M(q) = (Rk_m^{-1}J_m r^{-1} + D(q)) \quad (101-3)$$

$$N(q, \dot{q}) = (Rk_m^{-1}B_m r^{-1} + k_b r^{-1})\dot{q} + Rk_m^{-1}rH(q, \dot{q}) \quad (102-3)$$

$$V = M(q)\ddot{q} + N(q, \dot{q}) \quad (103-3)$$

$$V = M(q)\ddot{q} + N(q, \dot{q}) \quad (104-3)$$

درآیبه‌های ماتریس‌های  $M(q)$  و  $N(q, \dot{q})$  در زیر آورده شده است.

$$M(q) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \quad N(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} N_{11} \\ N_{21} \\ N_{31} \end{bmatrix} \quad (105-3)$$

$$M_{11} = \frac{R_1 r_1}{K_{m_1}} \{ I_{22_1} + I_{33_2} + I_{33_3} + I_{11_2} S_{\theta_2}^2 + I_{11_3} S_{\theta_2}^2 - I_{33_2} S_{\theta_2}^2 - I_{33_3} S_{\theta_2}^2 + l_{c_2}^2 m_2 S_{\theta_2}^2 \dots \\ + l_{c_3}^2 m_3 S_{\theta_2}^2 - \frac{1}{2} (I_{13_2} S_{2\theta_2} + I_{13_3} S_{2\theta_2} + I_{31_2} S_{2\theta_2} + I_{31_3} S_{2\theta_2}) \} + \frac{J_{m_1} R_1}{K_{m_1} r_1} \quad (106-3)$$

$$M_{12} = -\frac{R_1 r_1}{K_{m_1}} \{ I_{32_2} C_{2\theta_2} + I_{32_3} C_{2\theta_2} - I_{12_2} S_{2\theta_2} - I_{12_3} S_{2\theta_2} \} \quad (107-3)$$

$$M_{13} = 0 \quad (108-3)$$

$$M_{21} = -\frac{R_2 r_2}{K_{m_2}} \{ I_{23_2} C_{\theta_2} + I_{23_3} C_{\theta_2} - I_{21_2} S_{\theta_2} - I_{21_3} S_{\theta_2} \} \quad (109-3)$$

$$M_{22} = \frac{R_2 r_2}{K_{m_2}} \{ I_{22_2} + I_{22_3} + m_2 l_{c_2}^2 + m_3 l_{c_3}^2 \} + \frac{J_{m_2} R_2}{K_{m_2} r_2} \quad (110-3)$$

$$M_{23} = 0 \quad (111-3)$$

$$M_{31} = 0 \quad (112-3)$$

$$M_{32} = 0 \quad (113-3)$$

$$M_{33} = \frac{R_3 (m_3 r_3^2 + J_{m_3})}{K_{m_3} r_3} \quad (114-3)$$

$$N_{11} = \left( \frac{K_{b_1}}{r_1} + \frac{B_{m_1} R_1}{K_{m_1} r_1} \right) \dot{q}_1 + \frac{R_1 r_1}{K_{m_1}} \{ (I_{12_2} C_{\theta_2} + I_{12_3} C_{\theta_2} + I_{32_2} S_{\theta_2} + I_{32_3} S_{\theta_2}) \dot{q}_2^2 - \dots \\ (-m_2 l_{c_2} S_{2\theta_2} - l_{c_3} m_3 S_{\theta_2}^2 + I_{13_2} C_{2\theta_2} + I_{13_3} C_{2\theta_2} + I_{13_2} C_{2\theta_2} + I_{31_3} C_{2\theta_2} - \dots \\ I_{11_2} S_{2\theta_2} - I_{11_3} S_{2\theta_2} + I_{33_2} S_{2\theta_2} + I_{33_3} S_{2\theta_2}) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \} \quad (115-3)$$

$$\begin{aligned}
N_{2l} = & \left( \frac{K_{b_2}}{r_2} + \frac{B_{m_2} R_2}{K_{m_2} r_2} \right) \dot{q}_2 + \frac{R_2 r_2}{K_{m_2}} \left( \frac{I}{2} \dot{q}_1^2 (m_2 l_{c_2}^2 S_{2\theta_2} - m_3 l_{c_3}^2 S_{2\theta_2} + I_{13_2} C_{2\theta_2} + \dots \right. \\
& I_{13_3} C_{2\theta_2} + I_{31_2} C_{2\theta_2} + I_{31_3} C_{2\theta_2} - I_{11_2} S_{2\theta_2} - I_{11_3} S_{2\theta_2} + I_{33_2} S_{2\theta_2} + I_{33_3} S_{2\theta_2}) - \frac{I}{2} \dot{q}_1 \dot{q}_2 (\dots \\
& I_{12_2} C_{\theta_2} + I_{12_3} C_{\theta_2} - I_{21_2} C_{\theta_2} - I_{21_3} C_{\theta_2} - I_{23_2} S_{\theta_2} - I_{23_3} S_{\theta_2} + I_{32_2} S_{\theta_2} + I_{32_3} S_{\theta_2}) \dots \\
& \left. + g(m_2 l_{c_2} S_{\theta_2} + m_3 l_{c_3} S_{\theta_2}) \right) \quad (116-3)
\end{aligned}$$

$$N_{3l} = \left( \frac{K_{b_3}}{r_3} + \frac{B_{m_3} R_3}{K_{m_3} r_3} \right) \dot{q}_3 \quad (117-3)$$



## فصل چهارم

### کنترل مقاوم

- ❖ مقدمه
- ❖ سیستم غیر خطی متغیر با زمان
- ❖ کنترل حلقه بسته و فیدبک (بازخورد)
- ❖ تحلیل پایداری
- ❖ روش دوم لیاپانوف
- ❖ تقسیم قانون کنترل
- ❖ دینامیک وارون
- ❖ انتخاب  $k_p$  و  $k_d$  در قانون کنترل سروو
- ❖ کنترل مقاوم

## ۴-۱- مقدمه

بر اساس مطالبی که تا کنون مطرح شد، می‌توانیم مکان‌های مفصلی متناظر با حرکت‌های مورد نظر مجری نهایی در فضا را در طول زمان محاسبه نماییم. در این فصل مباحثی پیرامون نحوه‌ی کنترل ردگیری موقعیت سیستم بیان می‌نماییم.

پیش‌تر به مدلسازی دینامیکی و سینماتیکی بدنه ربات به همراه محرکه پرداختیم. معادلات دینامیکی بازوی ماهر ربات پیچیده، غیرخطی<sup>۱</sup> و چند متغیره<sup>۲</sup> می‌باشند. بنابراین برای کنترل ربات ناگزیر به استفاده از روش‌های غیر خطی و چند متغیره می‌باشیم. این روش‌های غیر خطی و چند متغیره به ما اجازه می‌دهند که تحلیل عمیق، کامل و دقیقتری از عملکرد سیستم کنترل داشته باشیم.

روش‌های طراحی کنترل مقاوم در قبال عدم قطعیت بر پایداری مقاوم<sup>۳</sup> و عملکرد مقاوم<sup>۴</sup> تاکید دارند. روش‌های جدید طراحی به این واقعیت اشاره دارند که سیستم‌های فیزیکی<sup>۵</sup> را نمی‌توان دقیقاً مدلسازی کرد. ضمن اینکه به سبک پیش بینی نشده‌ای تغییر می‌کنند و در معرض ورودی‌های مزاحم قابل توجهی قرار دارند. در بسیاری از روش‌های طراحی سیستم‌های کنترل، فرض بر آگاهی از مدل سیستم می‌باشد، اما همان گونه که مطرح شد باید همواره به این مهم که مدل فرآیند دقیق نمی‌باشد، توجه داشته باشیم. [۲۰] برای وجود عدم قطعیت در تعیین دقیق مدل سیستم، می‌توان دلایل زیر را برشمرد:

❖ پارامترهای سیستم تغییر می‌کنند.

❖ دینامیک سیستم کاملاً مدلسازی نشده است.

❖ تاخیرهای زمانی<sup>۶</sup> کاملاً مدلسازی نشده‌اند.

---

<sup>1</sup> *Nonlinear*

<sup>2</sup> *Multivariable*

<sup>3</sup> *Robust stability*

<sup>4</sup> *Robust performance*

<sup>5</sup> *Physical system*

<sup>6</sup> *Time delay*

❖ نقطه تعادل یا نقطه کار تغییر می‌کند.

❖ سنسورها<sup>۱</sup> دارای اغتشاش هستند.

❖ ورودی‌های مزاحم قابل پیش بینی نیستند.

هدف از طراحی سیستم‌های مقاوم حفظ اطمینان از رفتار سیستم در قبال عدم قطعیت در مدلسازی و تغییر پارامترهای مدل می‌باشد.

## ۴-۲- سیستم غیر خطی متغیر با زمان<sup>۲</sup>

حل معادلات سیستم‌هایی که پارامترهای آنها با زمان تغییر می‌کند، یا سیستم‌هایی که ذاتاً غیر خطی‌اند، دشوارتر است. اگر خواص غیر خطی در سیستم شدید نباشد، می‌توان از خطی سازی موضعی<sup>۳</sup> برای بدست آوردن مدل خطی، که تقریبی از معادلات غیر خطی در همسایگی یک نقطه کار<sup>۴</sup> هستند، استفاده کرد. متأسفانه این رهیافت برای کنترل بازوهای مکانیکی ماهر مناسب نیست، زیرا این بازوها پیوسته در نواحی جداگانه‌ی فضای کاری خود در حرکت هستند بطوری که هیچ خطی سازی معتبری را برای کلیه نواحی فوق نمی‌توان یافت.

## ۴-۳- کنترل حلقه بسته و فیدبک<sup>۵</sup> (بازخورد)

بازوی مکانیکی ماهر را به صورت مکانیزمی که هر مفصل آن مجهز به حساسه‌هایی برای اندازه‌گیری زاویه مفصلی و محرکه‌ای برای اعمال گشتاور به رابط‌های بعدی است، مدلسازی می‌کنیم. اگر چه حساسه‌ها را می‌توان در مکان دیگری قرار داد، اما در بیشتر بازوهای مکانیکی ماهر، آنها را در مفصل‌ها در

---

<sup>1</sup> Sensors

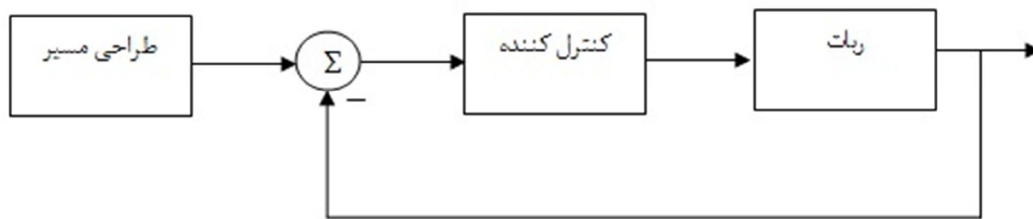
<sup>2</sup> Nonlinear time-varying system

<sup>3</sup> Local linearization

<sup>4</sup> Set-point

<sup>5</sup> Feedback

نظر می‌گیرند. گاهی در مفصل‌ها از حساسه‌های سرعت (دور سنج‌ها) نیز استفاده می‌شود. در ربات‌های صنعتی، روش‌های کار اندازی و انتقال قدرت گوناگونی استفاده می‌شود، اما بسیاری از آنها را می‌توان با فرض وجود یک محرکه در هر مفصل، مدلسازی کرد. از آنجا که می‌خواهیم مفصل‌های ربات مسیری از پیش تعیین شده را طی کنند و از طرفی ربات نیز بر حسب گشتاور فرمان می‌گیرد، باید از نوعی سیستم کنترل برای محاسبه فرمان‌های مناسب برای محرکه‌ها استفاده کرد تا حرکات‌های مورد نظر در مفصل ایجاد گردد. شکل زیر نمودار بلوکی یک سیستم کنترل فیدبک را نشان می‌دهد.



شکل ۴-۱- دیاگرام بلوکی سیستم کنترل فیدبک

بدون شک پایداری یکی از مهم‌ترین مشخصه‌های کنترلی است. اهمیت مفهوم پایداری با این واقعیت تاکید می‌شود که تقریباً تمام سیستم‌های عملی و کاربردی را چنان طراحی می‌کنند که پایدار باشند. در عمل سیستمی که پایدار نباشد عملاً کاربردی ندارد. بنابراین با توجه به اهمیت مسئله پایداری در ادامه به بیان روش تحلیل پایداری می‌پردازیم.

## ۴-۴- تحلیل پایداری<sup>۱</sup>

هدف از طراحی کنترل کننده‌ها، دستیابی به مشخصه‌های عملکردی مانند پایداری و عملکرد مناسب می‌باشد. در این قسمت به بحث درباره‌ی پایداری سیستم کنترل می‌پردازیم. بطور کلی همگرا شدن

<sup>1</sup> Stability analysis

سیستم به سمت نقطه تعادل<sup>۱</sup> بدون حضور ورودی، پایداری می‌باشد. برای سیستم‌های عملی پایداری یکی از نیازهای ذاتی سیستم محسوب می‌شود. معیارهای مختلفی برای بررسی پایداری سیستم وجود دارد. در مورد سیستم‌های خطی تغییر ناپذیر با زمان<sup>۲</sup> با توجه به چند جمله‌ای مشخصه<sup>۳</sup> و ریشه‌های متناظر با آن، می‌توانیم در مورد پایداری سیستم اظهار نظر کنیم. معیار معروفی که در مورد این سیستم-ها استفاده می‌شود، معیار روث‌هورویتز<sup>۴</sup> است. این معیار برای تعیین محل ریشه‌های چند جمله‌ای با ضرایب حقیقی ثابت<sup>۵</sup>، نسبت به نیم صفحه‌ی سمت چپ صفحه‌ی مختلط، بدون حل معادله می‌باشد. معیار نایکویست<sup>۶</sup> راهی دیگر برای بررسی پایداری سیستم‌های خطی تغییر ناپذیر با زمان و تعیین محل ریشه‌های چند جمله‌ای مشخصه نسبت به محور موهومی<sup>۷</sup> می‌باشد. بر خلاف معیار روث‌هورویتز، معیار نایکویست در حوزه فرکانس<sup>۸</sup> می‌باشد و بر اساس پاسخ فرکانسی سیستم می‌باشد. معیار نایکویست بر اساس اصل آرگومان کوشی<sup>۹</sup>، قضیه‌ی پایه آنالیز مختلط استوار است. درجه پیچیدگی تحلیل پایداری سیستم‌های دینامیکی سرعت با تغییر مدل‌های ریاضی سیستم از خطی تغییر ناپذیر با زمان به خطی تغییر پذیر با زمان و غیر خطی افزایش می‌یابد. بسط تحلیل پایداری به سیستم‌های غیرخطی و تغییر پذیر با زمان و همچنین ارائه روش‌هایی که پایداری را بدون تعیین مقادیر ویژه سیستم تعیین کنند، از اهمیت و جایگاه ویژه‌ای در مهندسی کنترل برخوردار است. یکی از کلی‌ترین روش‌های تحلیل پایداری سیستم‌ها، منسوب به دانشمند روسی قرن نوزدهم لیاپانوف<sup>۱۰</sup> است. وی در رساله دکتری خود به بررسی پایداری معادلات دیفرانسیل غیر خطی می‌پردازد. لیاپانوف دو روش برای تحلیل پایداری سیستم‌ها

<sup>1</sup> *Equilibrium point*

<sup>2</sup> *Linear time-invariant system*

<sup>3</sup> *Polynomial*

<sup>4</sup> *Routh-Hurwitz criterion*

<sup>5</sup> *Constant real coefficients*

<sup>6</sup> *Nyquist criterion*

<sup>7</sup> *Imaginary axis*

<sup>8</sup> *Frequency domain*

<sup>9</sup> *Cauchy's argument principle*

<sup>10</sup> *Lyapunov*

پیشنهاد می‌کند. روش اول لیاپانوف، تحلیل پایداری معادلات دیفرانسیل غیر خطی پس از خطی سازی حول نقطه تعادل است. روش دوم لیاپانوف، روش عام تحلیل پایداری سیستم‌ها است. روش دوم لیاپانوف در دهه‌های گذشته به طور گسترده‌ای در تحلیل پایداری بسیار از سیستم‌ها کاربرد پیدا کرده است. روش دوم لیاپانوف نقش مهمی در تحلیل پایداری سیستم‌های کنترل توصیف شده با معادلات فضای حالت<sup>۱</sup> ایفاء می‌کند. در تحلیل پایداری با استفاده از این روش نیازی به حل معادلات دیفرانسیل سیستم نمی‌باشد. همچنین این روش قابل اعمال به سیستم‌های غیر خطی تغییر پذیر با زمان می‌باشد.

#### ۴-۴-۱- روش دوم لیاپانوف

روش دوم یا مستقیم لیاپانوف، بدون بدست آوردن پاسخ سیستم، پایداری آن را تعیین می‌کند. در روش مستقیم لیاپانوف، تعیین مقادیر ویژه و خطی سازی صورت نمی‌گیرد. روش دوم لیاپانوف به سیستم‌های مرتبه بالا با ورودی یا بدون ورودی، خطی یا غیر خطی، تغییر پذیر با زمان یا تغییر ناپذیر با زمان قابل اعمال است. در این روش یک تابع اسکالر  $V(x)$  برای تعیین شرایط پایداری انتخاب می‌شود. وقتی که  $V(x)$  شرایط پایداری را برآورد سازد، تابع لیاپانوف نامیده می‌شود. مشکل اساسی در اعمال روش دوم لیاپانوف تعیین تابع لیاپانوف مناسب است، زیرا که عدم موفقیت یک یا چند تابع در برآورد ساختن شرایط پایداری دلیل بر عدم وجود تابع لیاپانوف مناسب نیست. این مسئله با این واقعیت که تابع لیاپانوف منحصر بفرد نیست پیچیده‌تر می‌شود. با وجود این مشکلات، روش دوم لیاپانوف مورد توجه بسیاری از طراحان سیستم‌های کنترل قرار گرفته است. این روش علاوه بر تحلیل پایداری، در طراحی بسیاری از سیستم‌های کنترل پیشرفته بکار گرفته می‌شود.

فلسفه اصلی روش دوم لیاپانوف، بر این اصل از تئوری کلاسیک مکانیک استوار است که سیستم‌های نوسانی<sup>۲</sup> بدون ورودی خارجی در صورتی پایدار هستند که مجموع انرژی آنها (تابعی معین مثبت) به طور

---

<sup>1</sup> State space

<sup>2</sup> Vibratory system

پیوسته کاهشی<sup>۱</sup> باشد (یعنی آنکه مشتق زمانی مجموع انرژی سیستم باید معین منفی باشد)، تا اینکه به نقطه تعادل برسند.

بعبارت دیگر، روش دوم لیاپانوف بر اساس تعمیم این واقعیت بنا نهاده شده است که اگر سیستمی حالت تعادل پایدار مجانبی دارد، انرژی ذخیره شده سیستم در داخل حوزه جذب<sup>۲</sup> با افزایش زمان کاهش یافته تا اینکه سرانجام به حداقل مقدار آن در حالت تعادل برسد. برای سیستم‌های صرفاً ریاضی، و یا سیستم‌های پیچیده واقعی، راه ساده‌ای برای تعریف تابع انرژی<sup>۳</sup> وجود ندارد. برای رفع این مشکل، لیاپانوف ایده تابع انرژی تعمیم یافته<sup>۴</sup> را مطرح کرد که تابع انرژی فرضی است. امروزه، این تابع را تابع لیاپانوف می‌نامند. این ایده کلی تر از ایده انرژی بوده و حوزه کاربرد آن نیز وسیعتر است. در حقیقت هر تابع اسکالری که قضایای لیاپانوف را برآورده سازد یک تابع لیاپانوف است. رفتار علامتی این تابع و مشتق زمانی آن ماهیت پایداری را مشخص می‌کند. برای سیستم‌های ساده حدس تابع لیاپانوف مناسب امکان پذیر است، لیکن برای سیستم‌های پیچیده پیدا کردن تابع لیاپانوف مناسب بسیار مشکل است. طبق تئوری لیاپانوف سیستم در نزدیکی نقطه تعادل در مبداء پایدار مجانبی است، اگر تابع اسکالری همانند  $V(x)$  وجود داشته باشد که شرایط زیر را برآورد سازد:

❖ در محدوده‌ای حول مبدا پیوسته باشد و مشتقات جزئی آن نیز پیوسته باشند.

❖ در تمام نقاط غیر از مبداء مثبت باشد  $(V(x) > 0 \text{ for } x \neq 0)$

❖ در مبدا صفر باشد  $(V(0) = 0)$

❖  $V(x)$  اکیدا نزولی باشد  $(\dot{V}(x) < 0 \text{ for } x \neq 0)$

---

<sup>1</sup> Continually decreasing

<sup>2</sup> Domain of attraction

<sup>3</sup> Energy function

<sup>4</sup> Generalized energy function

شرایط ۱ تا ۳ مثبت معین بودن  $V(x)$  را تضمین می‌کند و شرط ۴ بدان معنا است که  $\dot{V}(x)$  منفی معین است. باید به این نکته توجه داشت که شرط منفی معین بودن  $\dot{V}(x)$ ، حرکت  $V(x)$  به سمت نقطه تعادل را به ازاء  $t \rightarrow \infty$  تضمین می‌کند. اگر  $\dot{V}(x)$  نیمه معین منفی باشد، ممکن است که  $V(x)$  در سطحی خاص از انرژی باقی بماند. پیدا کردن تابع لیاپانوف مناسب  $V(x)$  بدان معنی است که سیستم پایدار است، لیکن این تنها یک شرط کافی ولی غیر لازم برای پایداری است. عدم توانائی در یافتن تابع  $V(x)$  به معنی عدم وجود آن نیست. قضایای پایداری لیاپانوف در بالا به صورتی بیان شده‌اند که  $V(x)$  را معین مثبت و  $\dot{V}(x)$  را معین منفی یا نیمه معین منفی لازم می‌دارند. همچنین، می‌توان پایداری را برحسب یک  $V(x)$  معین منفی و  $\dot{V}(x)$  معین مثبت یا نیمه مثبت معین بیان کرد. تنها شرط لازم، مخالف بودن علامتهای  $V(x)$  و  $\dot{V}(x)$  است. [۲]

#### ۴-۵- تقسیم قانون کنترل

برای انجام طراحی، قانون کنترل را به دو بخش وابسته به مدل و سروو تقسیم می‌کنیم. در این رهیافت پارامترهای سیستم تنها در قسمت وابسته به مدل ظاهر می‌شوند و قسمت سروو مستقل از پارامترهای سیستم می‌شود. این رهیافت را تقسیم قانون کنترل می‌نامند.

#### ۴-۶- دینامیک وارون

به کاربرد فنون کنترل غیر خطی برای ردگیری بازوی ماهر صلب توجه می‌نماییم. معادله دینامیکی ربات  $n$  رابط به شکل ماتریسی به صورت زیر است:

$$M(q)\ddot{q} + N(q, \dot{q}) = u \quad (۴-۱)$$

ایده‌ی دینامیک وارون، یک قانون کنترل پسخوری غیر خطی به صورت زیر می‌باشد:

$$u = f(q, \dot{q}) \quad (۴-۲)$$



که وقتی در معادله دینامیکی ربات جایگذاری کنیم منجر به یک سیستم حلقه بسته خطی می‌گردد. برای سیستم‌های غیر خطی عمومی شاید یافتن چنین قانون کنترلی کاملاً سخت یا غیر ممکن باشد. اما برای ربات می‌توانیم قانون کنترلی به شکل زیر را در نظر بگیریم:

$$u = M(q)V + N(q, \dot{q}) \quad (3-4)$$

در این صورت از آنجا که ماتریس لختی  $M(q)$  وارون پذیر است. سیستم ترکیب شده به صورت زیر کاهش می‌یابد.

$$\ddot{q} = V \quad (4-4)$$

در رابطه بالا  $V$  قانون کنترل سروو می‌باشد که می‌توان آن را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$V = \ddot{q}_d + k_d(\dot{q}_d - \dot{q}) + k_p(q_d - q) \quad (5-4)$$

با تعریف سیگنال خطا به صورت زیر، معادله مشخصه سیستم را معین می‌نماییم:

$$e = q_d - q \quad (6-4)$$

$$\dot{e} = \dot{q}_d - \dot{q} \quad (7-4)$$

$$\ddot{e} = \ddot{q}_d - \ddot{q} \quad (8-4)$$

$$\ddot{e} + k_d \dot{e} + k_p e = 0 \quad (9-4)$$

همان گونه که از معادله دیفرانسیل بالا قابل مشاهده است با گذر زمان ( $t \rightarrow \infty$ ) خطای سیستم به

صفر میل می‌کند. [۲۸]، [۳۰]

#### ۴-۷- انتخاب $k_p$ و $k_d$ در قانون کنترل سروو

با توجه به استفاده از دینامیک وارون به یک سیستم خطی رسیدیم. طبق نظریه سیستم‌های خطی، هرچه قطب‌های سیستم از محور  $j\omega$  دورتر باشد، پاسخ سیستم بهتر می‌گردد ولی از طرفی به بزرگتر شدن تلاش کنترلی می‌انجامد. بنابراین در انتخاب محل قطب‌های سیستم باید حالت میانه بین پاسخ بهتر

و تلاش کنترلی مناسب در نظر گرفته شود. از آنجا که سریعترین پاسخ بدون نوسان، میرایی بحرانی است.

بنابراین با انتخاب قطب‌های مضاعف در نقطه  $(-10, j0)$  انتظار پاسخ مناسبی از سیستم داریم.

$$\ddot{e} + k_d \dot{e} + k_p e = 0 \quad (10-4)$$

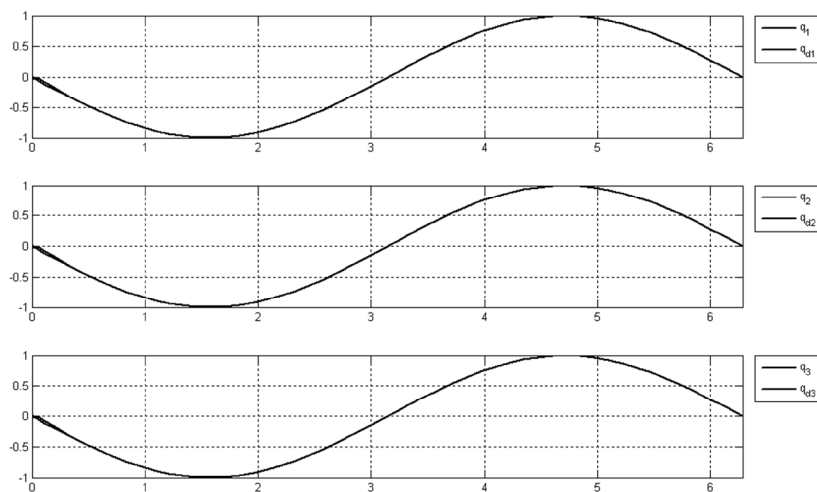
با استفاده از تبدیل لاپلاس معادله مشخصه سیستم را تعیین می‌نماییم:

$$E(s) \{S^2 + k_d S + k_p\} = 0 \quad (11-4)$$

$$(S + 10)^2 = S^2 + 20S + 100 = 0 \quad (12-4)$$

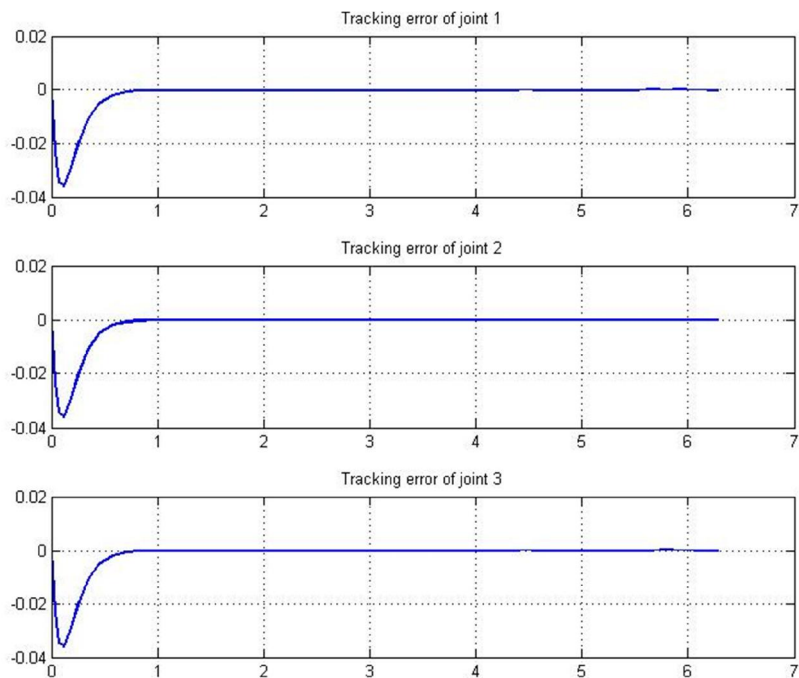
$$k_d = 20 \quad ; \quad k_p = 100 \quad (13-4)$$

پاسخ سیستم کنترل در حالت ایده‌آل در زیر آورده شده است.



شکل ۴-۲- پاسخ سیستم کنترل در حالت ایده‌آل

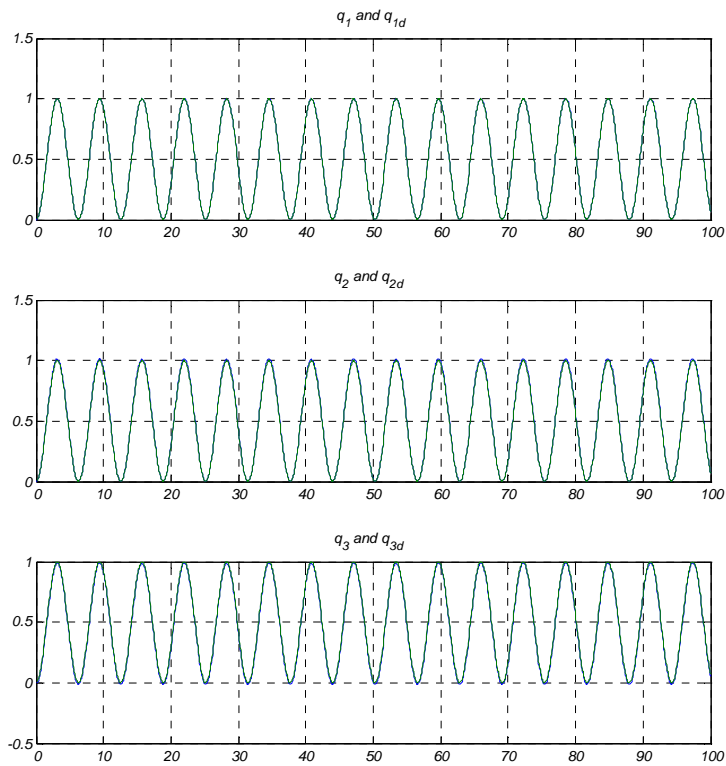
خطای ردگیری سیستم در حالت ایده‌آل در زیر مشخص شده است.



شکل ۴-۳- خطای ردگیری سیستم کنترل در حالت ایده‌آل

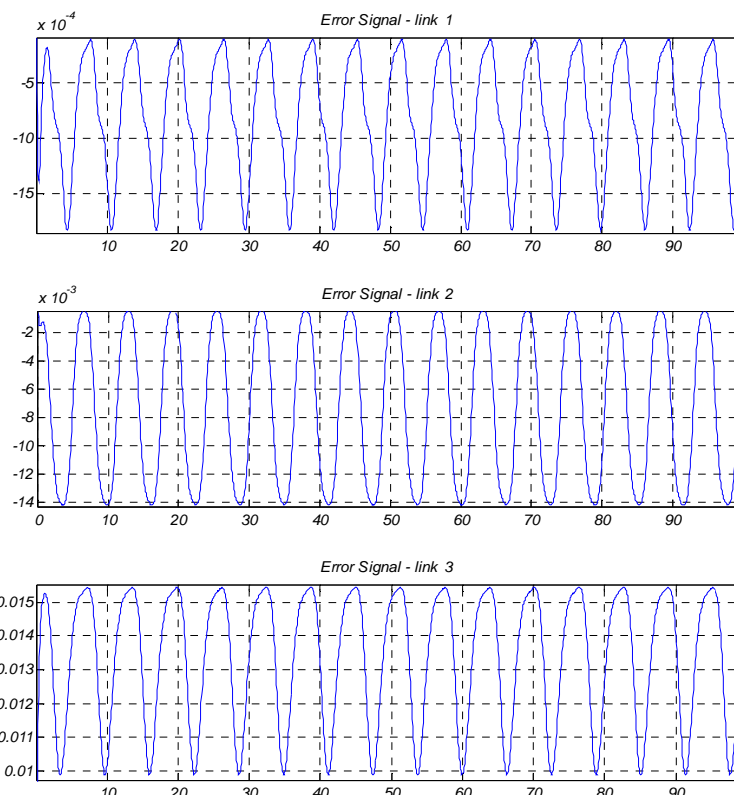
## ۴-۸- کنترل مقاوم

اجرای قسمت اول قانون کنترل (دینامیک وارون) نیاز به تعیین دقیق پارامترهای سیستم و معلوم بودن مدل دینامیکی سیستم و همچنین امکان محاسبه معادلات کامل حرکت به صورت بلادرنگ دارد. بنابراین با در نظر گرفتن عدم قطعیت در تعیین پارامترها و دینامیک سیستم، متوجه می‌شویم که قانون کنترل غیر خطی به طور کامل قادر به برطرف ساختن قسمت‌های غیرخطی سیستم نمی‌باشد، در زیر پاسخ سیستم کنترل با در نظر گرفتن بازه‌ای از عدم قطعیت در تعیین پارامترهای ماتریس‌های  $M(q)$  و  $N(q, \dot{q})$  آورده شده است .



شکل ۴-۴- پاسخ سیستم کنترل با در نظر گرفتن ۲۰٪ عدم قطعیت

در زیر خطای ردگیری سیستم کنترل با در نظر گرفتن بازه‌ی ۲۰ درصدی عدم قطعیت ترسیم شده است.



شکل ۴-۵- خطای ردگیری سیستم کنترل با در نظر گرفتن ۲۰٪ عدم قطعیت

با توجه به نتایج، اعمال قانون کنترل منجر به ردگیری دقیق نمی‌شود. در قانون کنترل دینامیک و ارون پارامترهای تخمینی از سیستم وجود دارد که آنها را با  $\hat{M}$  و  $\hat{N}$  نشان می‌دهیم:

$$u = M(q)\ddot{q} + N(q, \dot{q}) \quad (14-4)$$

$$u = \hat{M}(q)V + \hat{N}(q, \dot{q}) \quad (15-4)$$

با جایگذاری قانون کنترل دینامیک و ارون در معادله دینامیکی سیستم داریم:

$$M(q)\ddot{q} + N(q, \dot{q}) = \hat{M}(q)V + \hat{N}(q, \dot{q}) \quad (16-4)$$

$$\ddot{q} = M(q)^{-1} \{ \hat{M}(q)V + \hat{N}(q, \dot{q}) \} - M(q)^{-1} N(q, \dot{q}) \quad (17-4)$$

$$\ddot{q} = M(q)^{-1} \hat{M}(q)V + M(q)^{-1} \{ \hat{N}(q, \dot{q}) - N(q, \dot{q}) \} \quad (18-4)$$

$$\ddot{q} = \{ M(q)^{-1} \hat{M}(q) - I \} V + M(q)^{-1} \{ \hat{N}(q, \dot{q}) - N(q, \dot{q}) \} + V \quad (19-4)$$

$$\ddot{q} = V + \eta \quad (20-4)$$

در رابطه بالا  $\eta$  ترم عدم قطعیت نامیده می‌شود و به صورت زیر می‌باشد:

$$\eta = \{ M(q)^{-1} \hat{M}(q) - I \} V + M(q)^{-1} \{ \hat{N}(q, \dot{q}) - N(q, \dot{q}) \} \quad (21-4)$$

با اعمال قانون کنترل سروو، و تعریف خطا و مشتقات آن به صورت زیر، معادله دیفرانسیل ناهمگن

سیستم حاصل می‌گردد:

$$V = \ddot{q}_d + k_d(\dot{q}_d - \dot{q}) + k_p(q_d - q) \quad (22-4)$$

$$e = q_d - q \quad (23-4)$$

$$\dot{e} = \dot{q}_d - \dot{q} \quad (24-4)$$

$$\ddot{e} = \ddot{q}_d - \ddot{q} \quad (25-4)$$

$$\ddot{e} + k_d \dot{e} + k_p e = -\eta \quad (26-4)$$

با توجه به ناهمگن بودن معادله دیفرانسیل سیستم، با گذر زمان ( $t \rightarrow \infty$ ) خطای سیستم به سمت

صفر میل نمی‌کند برای جبران عدم قطعیت باید یک ترم جدید به قانون کنترل سروو اضافه نمود.

$$V = \ddot{q}_d + k_d(\dot{q}_d - \dot{q}) + k_p(q_d - q) + \Delta V \quad (27-4)$$

با جایگذاری قانون کنترل سروو جدید در معادلات سیستم، معادله دیفرانسیل سیستم به صورت زیر

تبدیل می‌گردد:

$$\ddot{e} + k_d \dot{e} + k_p e = -(\eta + \Delta V) \quad (28-4)$$

همانگونه که در معادله دیفرانسیل سیستم مشخص است با انتخاب مناسب  $\Delta V$  می‌توان اثر عدم

قطعیت را جبران نمود. همچنین باید مسئله پایداری سیستم را مد نظر قرار دهیم. به این منظور ابتدا

سیستم را در فضای خطا مدل می‌کنیم و پس از یافتن معادلات فضای حالت سیستم به تعیین  $\Delta V$  می‌پردازیم. با تعریف  $e_1 = e$  و  $e_2 = \dot{e}$  می‌توانیم سیستم را در فضای خطا مدل نماییم.

$$\dot{e}_1 = e_2 \quad (29-4)$$

$$\dot{e}_2 = -k_d e_2 - k_p e_1 - (\Delta V + \eta) \quad (30-4)$$

با برقراری شکل ماتریسی معادلات سیستم در فضای خطا به مدل فضای حالت زیر می‌رسیم:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -k_p & -k_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} (-\Delta V - \eta) \quad (31-4)$$

شکل کلی معادلات سیستم در فضای خطا به صورت  $\dot{e} = Ae + Bf$  می‌باشد. تابع لیاپانوف پیشنهادی

زیر را در نظر بگیرید. به منظور پایداری سیستم کنترل، به بررسی شرایط پایداری لیاپانوف می‌پردازیم.

$$V = e^T P e \quad (32-4)$$

در تابع لیاپانوف پیشنهادی  $P$  یک ماتریس معین مثبت می‌باشد. حال ماتریس  $P$  را بگونه‌ای تعیین

می‌کنیم که شرایط پایداری لیاپانوف برآورده شود.

$$\dot{V} = \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} \quad (33-4)$$

با جایگذاری معادلات فضای خطای سیستم در رابطه بالا داریم:

$$\dot{V} = e^T (A^T P + PA) e + 2e^T P B f \quad (34-4)$$

برای تعیین ماتریس  $P$  از معادله لیاپانوف کمک می‌گیریم:

$$A^T P + PA = -Q \quad (35-4)$$

در معادله لیاپانوف ماتریس  $Q$  بگونه‌ای انتخاب می‌شود که مثبت معین باشد. به منظور سادگی در

حل معادله ماتریس  $Q$  را ماتریس همانی در نظر می‌گیریم.

$$Q = I \quad (36-4)$$

$$A^T P + PA = -I \quad (37-4)$$

بنابراین مشتق تابع لیاپانوف پیشنهادی به صورت زیر تبدیل می‌گردد:

$$\dot{V} = -e^T e + 2e^T P B f \quad (38-4)$$

با توجه به اینکه ترم اول منفی می‌باشد، برای نشان دادن پایداری سیستم فقط کافی است که نشان دهیم ترم دوم هم منفی است. به این منظور باید ترم  $\Delta V$  درون قانون کنترل سروو را بگونه‌ای پیشنهاد دهیم که این اتفاق رخ دهد. با در نظر گرفتن  $w^T = e^T P B$  داریم:

$$e^T P B f < 0 \quad (39-4)$$

$$w^T f < 0 \quad (40-4)$$

با توجه به مدل سازی سیستم در فضای خطا،  $f$  به صورت زیر می‌باشد:

$$f = -\Delta V - \eta \quad (41-4)$$

بنابراین داریم:

$$-w^T (\Delta V + \eta) < 0 \quad (42-4)$$

با فرض  $\Delta V$  به صورت زیر و جایگذاری در معادله بالا داریم:

$$\Delta V = \rho \frac{w}{\|w\|} \quad (43-4)$$

$$w^T \left( \rho \frac{w}{\|w\|} + \eta \right) > 0 \quad (44-4)$$

با توجه به اینکه حاصل  $w^T w$  برابر با  $\|w\|^2$  می‌باشد، رابطه بالا به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\rho \|w\| + w^T \eta > 0 \quad (45-4)$$

$$-\rho \|w\| < w^T \eta \quad (46-4)$$

از طرفی کاملاً واضح است که:

$$w^T \eta \leq \rho \|w\| \quad (47-4)$$



بنابراین  $w^T \eta$  نهایتاً می‌تواند بین دو مقدار زیر باشد، که در هر دو حالت مشتق تابع منتخب لیاپانوف منفی است. در نتیجه پایداری سیستم تضمین می‌گردد.

$$-\rho \|w\| < w^T \eta < \rho \|w\| \quad (4-48)$$

طرح کنترلی بر اساس اصلی است که اگر چه عدم قطعیت  $\eta$  معلوم نیست، اما ممکن است با تخمین بدترین حالت، اثرات آن را روی کارایی ردیابی سیستم محدود نماییم. قانون کنترل  $V$  برای تضمین پایداری سیستم  $\dot{e} = Ae + Bf$  طراحی می‌شود و در نتیجه این حدود روی  $\eta$  برقرار می‌شوند. برای تخمین بدترین حالتی که روی تابع  $\eta$  محدودیت می‌گذارد فرضیات زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\text{فرض ۱-} \sup \|\ddot{q}_d\| < Q_d < \infty \quad t \geq 0$$

$$\text{فرض ۲-} \|E\| = \|M^{-1}\hat{M} - I\| \leq \alpha < 1$$

$$\text{فرض ۳-} \|\Delta N\| = \|\hat{N} - N\| \leq \phi(e, t)$$

$$\text{فرض ۴-} \|\Delta V\| < \rho(e, t)$$

$$\text{فرض ۵-} \|\eta\| < \rho(e, t)$$

از آنجا که ماتریس لختی  $M(q)$  به ازای تمامی مقادیر مثبت  $q$  مثبت معین و همگن است بنابراین

$\underline{M}$  و  $\bar{M}$  وجود دارند بطوریکه :

$$\underline{M} \leq \|M^{-1}(q)\| \leq \bar{M} \quad q \in IR^n \quad (4-49)$$

بنابراین نیاز به تعیین  $\rho$  می‌باشد. در نتیجه با جایگذاری ترم عدم قطعیت در فرض شماره ۵ داریم :

$$\eta = \{M(q)^{-1}\hat{M}(q) - I\}V + M(q)^{-1}\{\hat{N}(q, \dot{q}) - N(q, \dot{q})\} \quad (4-50)$$

$$\|\eta\| < \rho \quad (4-51)$$

$$\|\eta\| \leq \|M^{-1}\hat{M} - I\| \cdot \|\ddot{q}_d\| + \|M^{-1}\hat{M} - I\| \cdot \|K_d e_2 + K_p e_1\| + \|M^{-1}\hat{M} - I\| \|\Delta V\| + \bar{M} \|\hat{N} - N\| \quad (4-52)$$

با توجه به دو رابطه بالا می‌توانیم رابطه زیر را بنویسیم :

$$\rho = \|M^{-1}\hat{M} - I\| \cdot \|\ddot{q}_d\| + \|M^{-1}\hat{M} - I\| \cdot \|K_d e_2 + K_p e_1\| + \|M^{-1}\hat{M} - I\| \|\Delta V\| + \bar{M} \|\hat{N} - N\| \quad (53-4)$$

با در نظر گرفتن فرضیات مطرح شده، می‌توانیم  $\rho$  را به صورت زیر تعیین کنیم:

$$\rho = \alpha Q + \alpha \|K_d e_2 + K_p e_1\| + \alpha \rho + \bar{M} \phi \quad (54-4)$$

$$\rho = \frac{\alpha}{1-\alpha} Q + \frac{\alpha}{1-\alpha} \|K_d e_2 + K_p e_1\| + \frac{\bar{M}}{1-\alpha} \phi \quad (55-4)$$

بنابراین  $\Delta V$  را می‌توانیم به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$\Delta V = \begin{cases} -\rho \frac{B^T P e}{\|B^T P e\|} & \|B^T P e\| \neq 0 \\ 0 & \|B^T P e\| = 0 \end{cases} \quad (56-4)$$

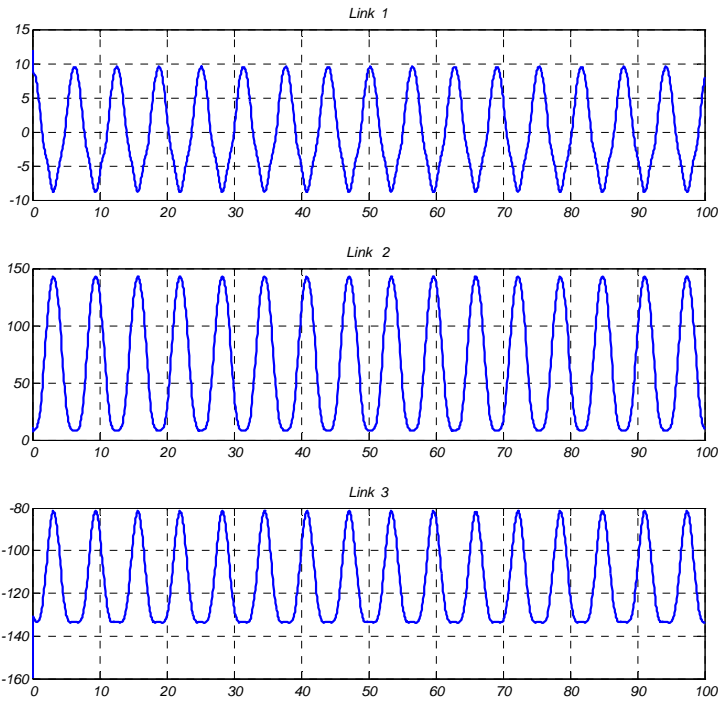
در روابط بالا با توجه به اینکه ماتریس لختی  $M(q)$  به ازای تمامی مقادیر مثبت  $q$  مثبت معین و همگن است، نامعادله‌ی  $q \in IR^n$   $\underline{M} \leq \|M^{-1}(q)\| \leq \bar{M}$  را در نظر گرفتیم. برای تعیین مقادیر  $\underline{M}$  و  $\bar{M}$  می‌توانیم از راه‌های مختلفی استفاده کنیم. در اینجا از الگوریتم ژنتیک به منظور یافتن مقادیر ماکزیمم و مینیمم  $\|M^{-1}(q)\|$  استفاده شده است. ترم  $\Delta V$  که به قانون کنترل اضافه شده است، پاسخ مناسب سیستم را تامین می‌کند ولی باعث ایجاد لرزش<sup>1</sup> در سیگنال کنترلی می‌گردد. برای بر طرف کردن این مشکل می‌توان از تابع اشباع<sup>2</sup> استفاده کرد. بنابراین ترم  $\Delta V$  به صورت زیر می‌گردد :

$$\Delta V = \begin{cases} -\rho \frac{B^T P e}{\|B^T P e\|} & \text{if } \|B^T P e\| > \varepsilon \\ -\rho \frac{B^T P e}{\varepsilon} & \text{if } \|B^T P e\| < \varepsilon \end{cases} \quad (57-4)$$

سیگنال کنترل سیستم به صورت زیر می‌باشد:

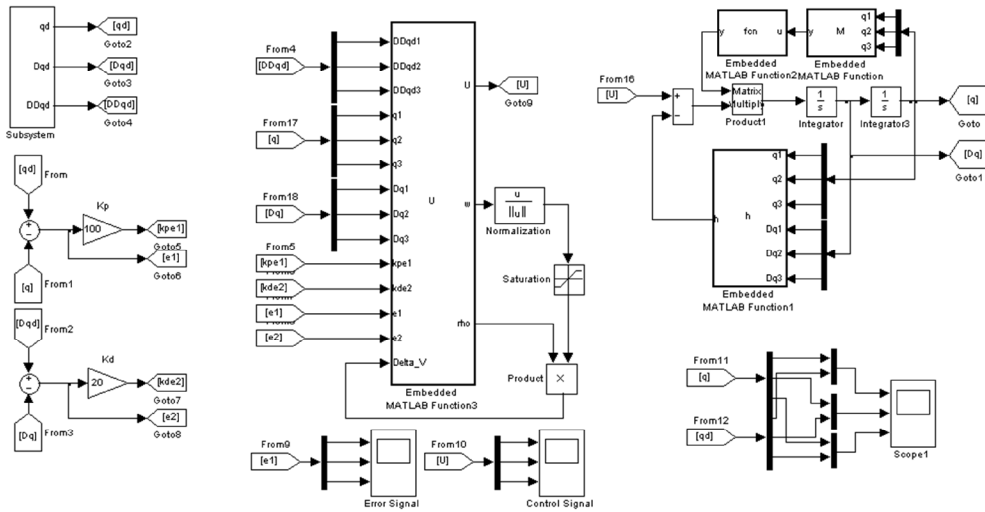
<sup>1</sup> Chattering

<sup>2</sup> Saturation



شکل ۴-۶- سیگنال کنترل

شبیه سازی سیستم کنترل در متلب به صورت زیر می باشد:



شکل ۴-۷- شبیه سازی سیستم کنترل در MATLAB

#### ۴-۸-۱- رهیافت جدید برای طراحی سیستم کنترل با استفاده از تابع لیاپانوف

در این روش با در نظر گرفتن مدل فضای حالت سیستم، به پیشنهاد یک تابع لیاپانوف می‌پردازیم.

مدل سیستم را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\tau = D(q)\ddot{q} + c(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) \quad (۵۸-۴)$$

حالت های سیستم را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x_1 = q_d - q \quad (۵۹-۴)$$

$$x_2 = \dot{q}_d - \dot{q} \quad (۶۰-۴)$$

با تعریف حالت‌های سیستم به صورت بالا، مدل فضای حالت سیستم به صورت زیر می‌باشد:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (۶۱-۴)$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{q}_d - D(q)^{-1}(\tau - c(q, \dot{q})\dot{q} - G(q)) \quad (۶۲-۴)$$

تابع پیشنهادی لیاپانوف زیر را در نظر بگیرید:

$$V(x) = \frac{1}{2} X^T X \quad (۶۳-۴)$$

در رابطه بالا  $X$  بردار حالت‌های سیستم می‌باشد و به صورت زیر می‌باشد:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (۶۴-۴)$$

با در نظر گرفتن بردار حالت‌های سیستم، تابع لیاپانوف به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$V(x) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1^T & x_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} x_1^T x_1 + \frac{1}{2} x_2^T x_2 \quad (۶۵-۴)$$

طبق قضیه پایداری لیاپانوف، مشتق این تابع باید منفی گردد. مشتق این تابع به صورت زیر است:

$$\dot{V}(x) = x_1^T \dot{x}_1 + x_2^T \dot{x}_2 \quad (۶۶-۴)$$

با جایگذاری  $\dot{x}_2$  در مشتق تابع لیاپانوف داریم:

$$\dot{V}(x) = x_1^T x_2 + x_2^T \left( \ddot{q}_d - D(q)^{-1} (\tau - c(q, \dot{q}) \dot{q} - G(q)) \right) \quad (67-4)$$

در این مرحله قانون کنترل  $\tau$  را بگونه‌ای پیشنهاد می‌دهیم که  $\dot{V}(x) < 0$  محقق شود.  $\dot{V}(x)$  را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\dot{V}(x) = x_1^T x_2 - \alpha x_2^T x_1 = (1 - \alpha) x_1^T x_2 \quad (68-4)$$

با توجه به در نظر گرفتن  $\alpha$  در مشتق تابع لیاپانوف، قانون کنترل به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\ddot{q}_d - D(q)^{-1} (\tau - c(q, \dot{q}) \dot{q} - G(q)) = -\alpha x_1 \quad (69-4)$$

$$\tau = D(q)(\alpha x_1 + \ddot{q}_d) + c(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) \quad (70-4)$$

بنابراین با اعمال قانون کنترل، همانگونه که پیش تر اشاره شد در مشتق تابع لیاپانوف ضریب  $(1 - \alpha)$  ظاهر می‌گردد. از آنجا که هدف تحقق  $\dot{V}(x) < 0$  می‌باشد، با توجه به علامت  $x_1^T x_2$  دو انتخاب برای  $\alpha$  وجود دارد:

$$\begin{cases} \text{if } x_1^T x_2 > 0 \text{ then } 1 - \alpha < 0 \Rightarrow \alpha > 1 \\ \text{if } x_1^T x_2 < 0 \text{ then } 1 - \alpha > 0 \Rightarrow \alpha < 1 \end{cases} \quad (71-4)$$

در قانون کنترل دینامیک سیستم ظاهر شده است و از آنجایی که با عدم قطعیت در مدل‌سازی سیستم مواجه هستیم، قانون کنترل به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\tau = \hat{D}(q)(\alpha x_1 + \ddot{q}_d) + \hat{h}(q, \dot{q}) + v \quad (72-4)$$

$$\hat{h}(q, \dot{q}) = \hat{c}(q, \dot{q}) \dot{q} + \hat{G}(q) \quad (73-4)$$

در قانون کنترل بالا ترم  $v$  به منظور غلبه بر عدم قطعیت در نظر گرفته شده است. با جایگذاری قانون کنترل در دینامیک سیستم، معادله سیستم حلقه بسته به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$D(q) \ddot{q} + h(q, \dot{q}) = \hat{D}(q)(\alpha x_1 + \ddot{q}_d) + \hat{h}(q, \dot{q}) + v \quad (74-4)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \left( \hat{D}(q)^{-1} \left[ (D(q) - \hat{D}(q)) \ddot{q} + h(q, \dot{q}) - \hat{h}(q, \dot{q}) \right] + v \right) \quad (75-4)$$

با توجه به در نظر گرفتن عدم قطعیت در مدل سیستم، تابع لیاپانوف را بازنویسی می‌کنیم:

$$V = \frac{1}{2} X^T X \quad (76-4)$$

$$\dot{V} = x_1^T \dot{x}_1 + x_2^T \dot{x}_2 \quad (77-4)$$

$$\dot{V} = x_1^T x_2 + x_2^T \left( -\alpha x_1 + \hat{D}(q)^{-1} \left[ (D(q) - \hat{D}(q)) \ddot{q} + h(q, \dot{q}) - \hat{h}(q, \dot{q}) \right] + v \right) \quad (78-4)$$

$$\dot{V} = (1 - \alpha) x_1^T x_2 + x_2^T \hat{D}(q)^{-1} \left[ (D(q) - \hat{D}(q)) \ddot{q} + h(q, \dot{q}) - \hat{h}(q, \dot{q}) + v \right] \quad (79-4)$$

$$f = (D(q) - \hat{D}(q)) \ddot{q} + h(q, \dot{q}) - \hat{h}(q, \dot{q}) \quad (80-4)$$

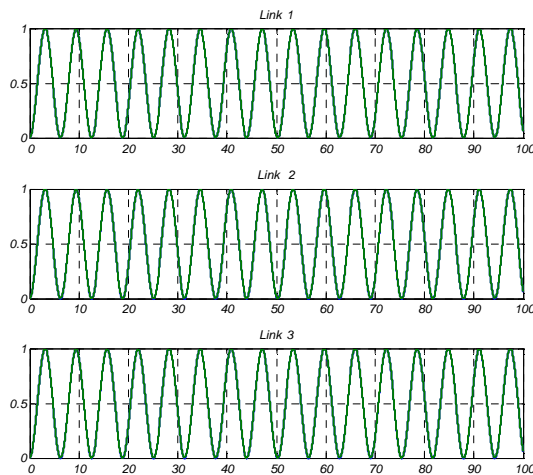
با در نظر گرفتن بالاترین میزان عدم قطعیت به تعیین پارامتر  $\rho$  می‌پردازیم:

$$\| (D(q) - \hat{D}(q)) \ddot{q} + h(q, \dot{q}) - \hat{h}(q, \dot{q}) \| \leq \rho \quad (81-4)$$

پس از تعیین  $\rho$ ، به پیشنهاد ترم  $v$  در قانون کنترل می‌پردازیم:

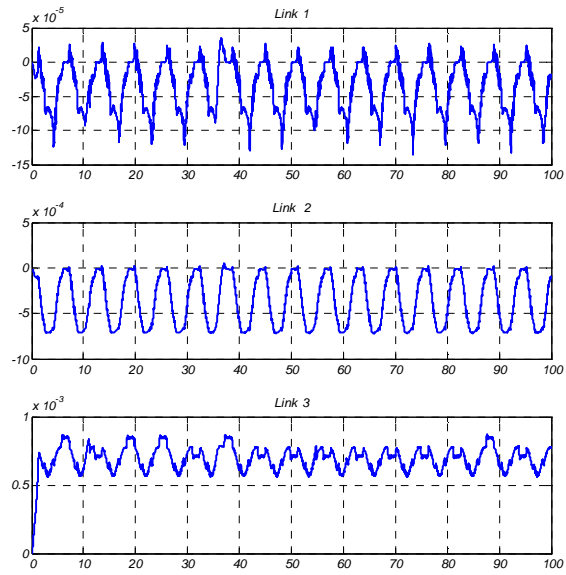
$$v = \frac{\left[ x_2^T \hat{D}(q)^{-1} \right]^T}{\| x_2^T \hat{D}(q)^{-1} \|} \rho \quad (82-4)$$

نتایج شبیه سازی سیستم کنترل به صورت زیر می‌باشد:



شکل ۸-۴- پاسخ سیستم کنترل با در نظر گرفتن ۲۰٪ عدم قطعیت در مدل سیستم

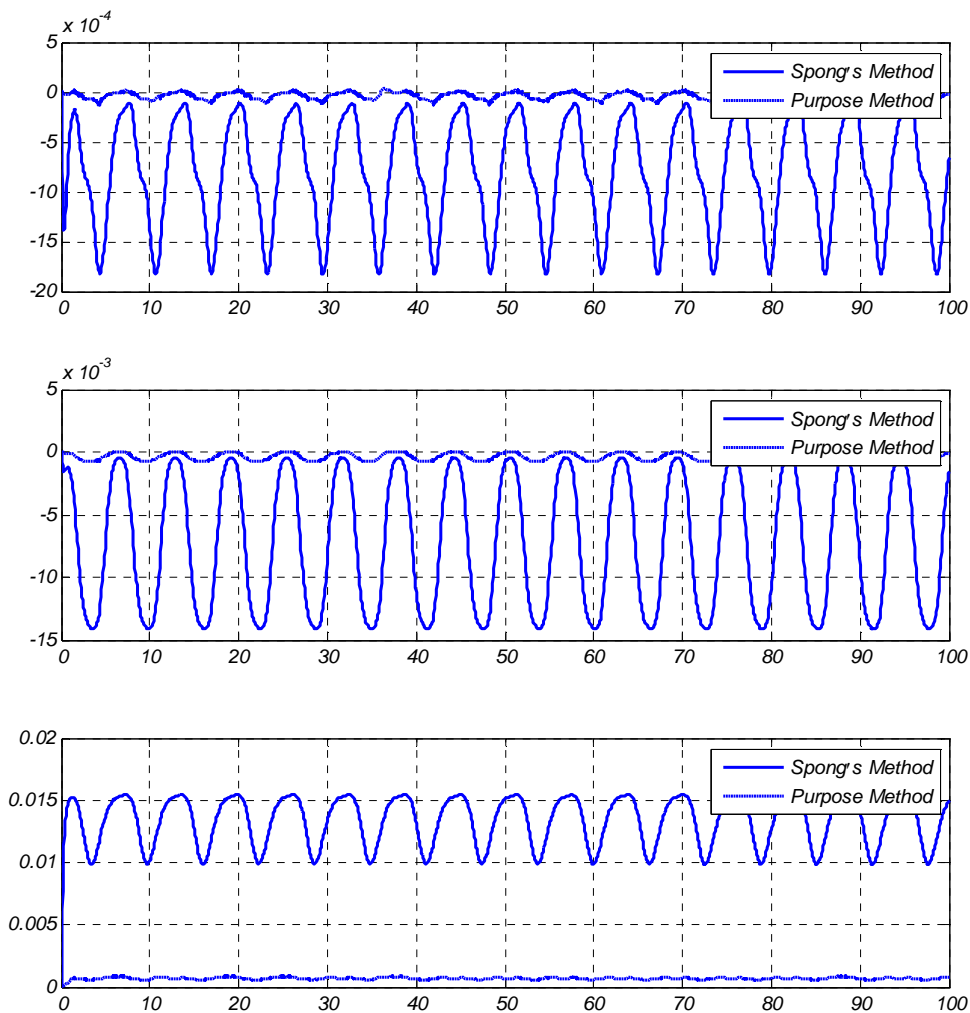
خطای سیستم کنترل به صورت زیر می باشد:



شکل ۴-۹ - خطای سیستم کنترل با در نظر گرفتن ۲۰٪ عدم قطعیت

## ۹-۴- مقایسه روش کنترل مقاوم پیشنهادی با روش اسپانگ

در این قسمت نتایج شبیه سازی روش کنترل غیر خطی مقاوم اسپانگ و روش کنترل پیشنهادی مقایسه شده است. در زیر خطای ردگیری دو روش آورده شده است:



شکل ۹-۴-۱۰- مقایسه خطای ردگیری روش کنترل غیر خطی مقاوم و روش پیشنهادی

با توجه به مقایسه خطای ردگیری دو روش مشاهده می‌گردد که روش کنترل غیر خطی مقاوم پیشنهادی از عملکرد مناسب تری برخوردار است.



#### ۱۰-۴- پارامترهای شبیه سازی

پارامترهای که در شبیه سازی ها استفاده شده اند در جدول زیر مشخص شده اند :

جرم رابط ها	$m_1 = 60.47 \quad m_2 = 88.25 \quad m_3 = 14.32$
مختصات مراکز جرم	$c_1 = \begin{bmatrix} -0.19 \\ -0.13 \\ 0.3 \end{bmatrix} \quad c_2 = \begin{bmatrix} -0.14 \\ 0.56 \\ 0.25 \end{bmatrix} \quad c_3 = \begin{bmatrix} -0.32 \\ 0.63 \\ 0.46 \end{bmatrix}$
ثابت گرانشی	$g = 9.81$
ماتریس $P$	$P = \begin{bmatrix} 2.6250 & 0 & 0 & 0.0050 & 0 & 0 \\ 0 & 2.6250 & 0 & 0 & 0.0050 & 0 \\ 0 & 0 & 2.6250 & 0 & 0 & 0.0050 \\ 0.0050 & 0 & 0 & 0.0253 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0050 & 0 & 0 & 0.0253 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0050 & 0 & 0 & 0.0253 \end{bmatrix}$
$\underline{D} \leq \ D^{-1}(q)\  \leq \bar{D} \quad q \in \mathbb{R}^n$	$\bar{D} = 0.05 \quad \underline{D} = 0.03$
$\alpha$	0.25
$Q$	0.0855
$A$	$I$
$\omega$	$I$
$\varepsilon$	0.01
تانسور اینرسی	$I_1 = \begin{bmatrix} 2.82 & 0.06 & -0.01 \\ 0.06 & 2.65 & -0.04 \\ -0.01 & -0.04 & 4.36 \end{bmatrix} \quad I_2 = \begin{bmatrix} 9.78 & -2.28 & 0 \\ -2.28 & 11.85 & 0 \\ 0 & 0 & 16.9 \end{bmatrix}$  $I_3 = \begin{bmatrix} 2 & -0.01 & -0.01 \\ -0.01 & 1.66 & 0.75 \\ -0.01 & 0.75 & 0.36 \end{bmatrix}$

جدول ۱-۴- پارامترهای استفاده شده در شبیه سازی ها

#### ۴-۱۱- نتیجه گیری و پیشنهاد

در مدلسازی سیستم‌ها با عدم قطعیت مواجه هستیم. بنابراین سیستم‌های کنترل باید توانایی غلبه بر عدم قطعیت را داشته باشند و بتوانند چنین شرایطی عملکرد مناسبی داشته باشند. در این پایان‌نامه مدلسازی سینماتیکی و دینامیکی ربات کروی انجام شد، همچنین روش کنترل غیر خطی مقاوم اسپانگ به منظور دستیابی به عملکرد مطلوب طراحی و پیاده‌سازی شد و با روش کنترلی پیشنهادی مقایسه شد. روش کنترل پیشنهادی دارای خطای ردگیری بسیار ناچیزی می‌باشد. با توجه به اینکه ربات سیستمی غیر خطی، پیچیده، چند متغیره همراه با کوپلینگ شدید می‌باشد، و عملکرد سیستم کنترل در غلبه بر عدم قطعیت‌ها مناسب می‌باشد، استفاده از این کنترل‌کننده برای سیستم‌های غیر خطی از مرتبه دوم توصیه می‌گردد.

## مراجع و منابع

[١]-J.Doyle, B.Francis and A.Tannenbaum , *Feedback Control Theory*, Macmillan Publishing Co , ١٩٩٠

[٢]-M.W Spong, S.Hutchinson, and M.Vidyasagar , *Robot Modeling and Control* , John Wiley & Song, INC. ٢٠٠٦

[٣]-J. C. Colson and N. D. Perreira. *Kinematic arrangements used in industrial robots*. In *Proc. ١٣th International Symposium on Industrial Robots*, ١٩٨٣.

[٤]-A. A. Goldenberg, B. Benhabib, and R. G. Fenton. *A complete generalized solution to the inverse kinematics of robots*. *IEEE J. Robotics and Automation*, RA-١(١):١٤-٢٠, ١٩٨٥.

[٥]-K.Hunt, *Kinematic Geometry of Mechanisms*, Oxford University Press, London , ١٩٧٨.

[٦]-A.K.Behczy , *Robot Arm Dynamics and Control* , Jet Propulsion Laboratory , Pasadena, CA, TM ٣٣-٦٩, ١٩٧٤.

[٧]-I. S. Sokolnikoff nad R. M. Redheffer. *Mathematical Methods of Physics and Modern Engineering*. McGraw-Hill, New York, ١٩٥٨.

[٨]-M. L. Curtiss. *Matrix Groups*. Springer-Verlag, New York, second edition, ١٩٨٤.

[٩]-A. J. Critchlow. *Introduction to Robotics*. Macmillan, New York, ١٩٨٥.

[١٠]-J.Carig, *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*, Addison-Wesley , ١٩٨٩, ٢en ed.

[۱۱]-J.J. Uicker Jr., J. Denavit, and R. S. Hartenberg. *An iterative method for the displacement analysis of spatial mechanisms. Trans. Applied Mechanics*, ۳۱ Series E:۳۰۹–۳۱۴, ۱۹۶۴.

[۱۲]-J. Denavit and R. S. Hartenberg. *A kinematic notation for lower pair mechanisms. Applied Mechanics*, ۲۲:۲۱۵–۲۲۱, ۱۹۵۵.

[۱۳]-A. A. Goldenberg, B. Benhabib, and R. G. Fenton. *A complete generalized solution to the inverse kinematics of robots. IEEE J. Robotics and Automation*, RA-۱(۱):۱۴–۲۰, ۱۹۸۵.

[۱۴]-D.Orin, and W Schrader , *Efficient Jacobian Determination for Robot Manipulators, in Robotics Research: the First International Symposium, MIT Press, Cambridge, MA, ۱۹۸۴.*

[۱۵]-D.B.Silver, *On the Equivalence of Lagrangian and Newton-Euler Dynamics for Manipulators, International Journal Robotics research, Vol.۱ ,No.۲ , ۱۹۸۲.*

[۱۶]-K.Ogata , *Modern control Engineering , ۴th ed,۲۰۰۰.*

[۱۷]-مرجع کاربردی هیدرولیک و پنوماتیک صنعتی ، حسین فلاحی ، حسام حامدی ، علیرضا کشاورز ، انتشارات سها دانش ، ۱۳۸۹

[۱۸]-هیدرولیک و پنوماتیک پیشرفته ، انتشارات اتحاد ، حمیدرضا رستمی ، ۱۳۸۸

[۱۹]-پنوماتیک مقدماتی ، انتشارات فستو ، کاوه عابدیان ، ۱۳۸۸

[۲۰]-F.Lin , *Robust Control Design: An optimal Control Approach , Wiley, ۲۰۰۷.*

[۲۱]-V.Cvetkovic, M.Vukobratovic, *One Robust Dynamic Control Algorithm for Manipulation System, The International Journal of Robotics Research, Vol ۱, No.۴, pp.۱۵-۲۸, Winter ۱۹۸۲.*

[୧୧]-M.Good, K.Strobel and L.M.Sweet , *Dynamics and Control of Robot Drive Systems*, General Electric company, Schenectady, NY, ୧୯୮୩.

[୧୨]-S.Futman, *Uncertain dynamical systems – A Lyapunov Min-Max Approach* , *IEEE Trans , Aut. Control*, AC-୩୪, pp. ୪୩୩-୪୪୩, ୧୯୮୯.

[୧୩]-I.J.Ha, E.G.Gilbert , *Robust Tracking in Nonlinear Systems and its Application to Robotics*, *The University of Michigan, Preprint*, ୧୯୮୬.

[୧୪]-D.Koditschek, *Natural Motion of Robot Arms*, *Proc. IEEE Conference on Decision and Control* , Las Vegas , ୧୯୮୪.

[୧୫]-C.Samson, *Robust Nonlinear Control of robotic Manipulators*, *Proc. ୩୩rd IEEE CDC*, San Antonio, Dec ୧୯୮୩.

[୧୬]-R.Shoureshi, M.D.Riesler and M.J.Corless , *Control of Industrial Manipulators with Bounded Uncertainties* , *Japan-U.S.A. Symposium on Flexible Automation*, Osaka, ୧୯୮୫.

[୧୭]-J.J.Slotine, *Robust Control of Robot Manipulators*, *International Journal Robotics Research*, Vol.୪ , No.୩, ୧୯୮୬.

[୧୮]-M.W.Spong and M.Viduasagar , *Robust Linear Compensator Design for Nonlinear Robotic Control*, *IEEE Journal of Robotics and Automation*, Vol.RA-୩, No.୪, pp.୩୪୬-୩୬୧, Au ୧୯୮୭.

[୧୯]-T.J.Tarn, A.K.Bejczy , A.Isidori, Y.Chen , *Nonlinear Feedback in Robot Arm Control*, *Proc ୩୩rd IEEE CDC* , Las Vegas , NV, Dec. ୧୯୮୪.

[୨୦]-<http://infolab.stanford.edu/pub/voy/museum/pd/Calculators.htm>

[۳۲]-[http://www.motorshopdemammoet.com/kawasaki\\_heavy\\_industries.htm](http://www.motorshopdemammoet.com/kawasaki_heavy_industries.htm)

[۳۳]-[http://www.toshiba-machine.co.jp/english/product/sr\\_e/contents/th55.html](http://www.toshiba-machine.co.jp/english/product/sr_e/contents/th55.html)

[۳۴]- . <http://www.directindustry.com/prod/avm-automation/pneumatic-cartesian-manipulators-۱۹۰۸-۲۲۵۶۸.html>

[۳۵]- *M.R. Soltanpour and M.M. Fateh , Sliding Mode Robust Control of Robot Manipulator in the Task Space by Support of Feedback Linearization and BackStepping Control , World Applied Sciences Journal 6 (1): 70-76, 2009*

## ***Abstract***

*This M.Sc thesis presents the modeling of an Spherical robot manipulator in kinematics and dynamics. Then a robust control design is developed and simulated. The joints of the robot is RRP (Rotational, Rotational, Prismatic). The joints provide three degrees of freedom. To obtain the kinematics we use the Denavit-Hartenberg presentation and to obtain the dynamics the Euler-Lagrange equation has been used. The obtained model is multivariable, nonlinear, coupled and uncertain. To control the robot, a robust nonlinear controller has been designed. The proposed control guarantees the stability of the close-loop system. The performance is very good such that the tracking error is ignoreable. The direct method of lyapounov has been used for stability analysis. Since the uncertainty includes unmodeled dynamics parametric uncertainty and external disturbances. The performance of the controller is important in overcoming the uncertainty. Finally a comparsion between the Spong's method and the proposed controller is presented.*



*Shahrood University of Technology*  
*Faculty of Electrical Engineering and Robotic*

*Master of Science Thesis*

*Modeling and nonlinear Robust Tracking*  
*Control of a Spherical Robot*

*Amir Alizadeh*

*Supervisor:*  
*Dr. M. M. Fateh*

*June – 2011*