



دانشکده مهندسی برق و رباتیک

پایان نامه کارشناسی ارشد

پایدارسازی سیستم غیرافین

با استفاده از قانون کنترل حداکثر زاویه و مفهوم زاویه ویژه

سیده ثمره مصطفوی

استاد راهنما:

دکتر محمد حداد ظریف

بهمن ۱۳۸۸

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده مهندسی برق و رباتیک

گروه کنترل

پایدارسازی سیستم غیرافین با استفاده از قانون کنترل حداکثر زاویه و مفهوم زاویه ویژه

دانشجو: سیده ثمره مصطفوی

استاد راهنما:

دکتر محمد حدادظریف

استاد مشاور:

دکتر عارف شاه منصوریان

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

بهمن ۱۳۸۸

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده : مهندسی برق و رباتیک

گروه : کنترل

پایان نامه کارشناسی ارشد خانم سیده ثمره مصطفوی

تحت عنوان:

پایدارسازی سیستم غیرافین با استفاده از قانون کنترل حداکثر زاویه و مفهوم زاویه ویژه

در تاریخ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد مورد ارزیابی و با درجه مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	استاد مشاور	امضاء	استاد راهنما
	نام و نام خانوادگی : دکتر عارف شاه منصوریان		نام و نام خانوادگی : دکتر محمد حداد ظریف

امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
	نام و نام خانوادگی : دکتر امیدرضا معروضی		نام و نام خانوادگی : دکتر محمد مهدی فاتح
		نام و نام خانوادگی : دکتر علیرضا ناظمی	

تقدیم به پدر و مادر مهربانم

با تشكر از زحمات:

جناب آقای دكتر محمد حداد ظریف

و جناب آقای دكتر عارف شاه منصوریان

اینجانب سیده ثمره مصطفوی دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی برق (گرایش

کنترل) در دانشگاه صنعتی شاهرود تأیید می کنم که مطالب مندرج دراین پایان نامه نتیجه

تحقیقات اینجانب می باشد و در صورت استفاده از نتایج دیگران مرجع آن را ذکر نموده ام.

کلیه حقوق مادی مترتب از نتایج مطالعات، آزمایشات و نوآوری ناشی از تحقیق

موضوع این پایان نامه متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد.

بهمن ۱۳۸۸

چکیده

در این رساله، مسأله پایدارسازی سیستم‌های غیرافین دو ورودی با استفاده از قانون کنترل حداکثر زاویه مورد بررسی قرار گرفته است. قانون کنترل حداکثر زاویه یکی از انواع قوانین پایدارساز مبتنی بر تابع لیاپانوف کنترل است که در مجموعه کنترل‌های بهینه معکوس طبقه بندی می‌شود. قانون کنترل حداکثر زاویه بر مبنای ایده حداکثر کردن زاویه بین دو بردار گرادیان تابع لیاپانوف کنترل و مشتق بردار حالت به دست می‌آید. در این رساله روش حلی برای تعمیم این قانون روی سیستم‌های دو ورودی معرفی شده است و نحوه پیاده‌سازی آن را روی یک نمونه سیستم دو ورودی نشان می‌دهیم. همچنین، یکی از مزایای مهم قانون کنترل حداکثر زاویه این است که چنانچه معادلات حالت سیستم افین در یک ماتریس نامعینی یا ماتریسی که شامل عبارات غیرافین از ورودی کنترل باشد، ضرب شود، و برای بخش افین قانون کنترل حداکثر زاویه به دست آمده باشد، سیستم غیرافین جدید تحت شرایطی توسط قانون کنترل حداکثر زاویه بخش افین قابل پایدارسازی است. در این رساله قانون کنترل حداکثر زاویه برای سیستم‌های دو ورودی را روی نمونه‌ای از سیستم غیرافین دو ورودی پیاده‌سازی می‌کنیم و نشان می‌دهیم شرایط و قوانین استفاده از این قانون جهت پایدارسازی سیستم‌های غیرافین دو ورودی نیز صادق است. در مباحث مربوط به تعمیم قانون کنترل به سیستم‌های غیرافین، برقراری شرایط لازم متکی به محاسبه زاویه ویژه برای ماتریس مربعی جداشده از سیستم است و فرمول بسته‌ای برای محاسبه زاویه ویژه همه ماتریس‌های مربعی وجود ندارد. بنابراین لازم است برای هر نمونه خاص محاسبات مجزایی صورت گیرد. در این رساله در خلال محاسبه قانون کنترل برای سیستم غیرافین دو ورودی مذکور، به محاسبه زاویه ویژه برای دسته جدیدی از ماتریس‌ها می‌پردازیم.

کلمات کلیدی: تابع لیاپانوف کنترل، قانون کنترل بهینه معکوس، قانون کنترل حداکثر زاویه، سیستم

غیرافین، زاویه ویژه

فهرست مطالب

۱	مقدمه	۱
۶	پایداری از دیدگاه لیاپانوف	۲
۷	۱-۲- مفاهیم پایداری در سیستم های ناخودگردان	
۹	۲-۲- پایداری لیاپانوف در سیستم های ناخودگردان	
۱۳	۳-۲- قضایای ناپایداری	
۱۴	۴-۲- وجود توابع لیاپانوف	
۱۶	۳ تابع لیاپانوف کنترل	۳
۱۷	۱-۳- مفاهیم	
۱۹	۲-۳- تعایف و قضایا	
۲۴	۴ روش های یافتن CLF	۴
۲۵	۱-۴- خطی سازی ژاکوبی	
۲۶	۲-۴- خطی سازی پسخور	
۲۶	۳-۴- روش گام به عقب	
۲۷	۱-۳-۴- توصیف سیستم	
۲۸	۲-۳-۴- تعاریف پایداری	
۲۹	۳-۳-۴- تابع لیاپانوف کنترل مقاوم	

۳۱	۴-۳-۴- شرط تطابق
۳۲	۴-۳-۵- سیستم های پسخور اکید
۳۴	۴-۳-۶- روش طراحی گام به عقب
۳۶	۴-۴- روش پیش خوراند
۳۸	۴-۵- معادله ریکاتی ایستا (FRE)
۳۹	۴-۶- پارامتر خطی متغیر (LPV)
۴۰	۴-۷- روش جدید یافتن CLF
۴۴	۵ کنترل بهینه معکوس
۴۶	۵-۱- مفاهیم
۵۱	۵-۲- قوانین کنترل حداقل نرم نقطه ای
۵۳	۵-۳- قانون کنترل حداکثر زاویه
۶۳	۵-۴- تابع لیاپانوف کنترل برای سیستم های غیرخطی غیرافین
۶۴	۵-۴-۱- زاویه ویژه
۶۶	۵-۴-۲- تابع لیاپانوف کنترل برای سیستم غیرافین
۷۱	۶ قانون کنترل حداکثر زاویه برای سیستم های دو ورودی
۷۲	۶-۱- قانون کنترل حداکثر زاویه برای سیستم های دو ورودی
۷۸	۶-۲- کنترل سیستم لوتکا-ولترا
۸۲	۷ پایدارسازی سیستم غیرافین آونگ دوگانه
۸۴	۷-۱- معرفی سیستم

۸۹	۲-۷ - جداسازی ماتریس غیرافین از سیستم آونگ دوگانه
۹۱	۳-۷ - پایدارسازی بخش افین سیستم آونگ دوگانه
۹۳	۴-۷ - پایدارسازی سیستم آونگ دوگانه
۹۹	نتیجه گیری و پیشنهادات
۱۰۱	مراجع

فهرست شکل ها

۴۹	مقایسه بین قوانین کنترل (۲.۵)، (۴.۵) و (۵.۵)	۱-۵
۴۹	مقایسه بین تغییرات حالت متناظر با قوانین کنترل (۲.۵)، (۴.۵) و (۵.۵)	۲-۵
۵۴	نمایش زاویه بین $f + gu$ و V_x^T	۳-۵
۵۷	نمایش زوایای بردار گرادیان تابع لیاپانوف کنترل و معادلات سیستم	۴-۵
۶۲	سیگنال کنترل و زاویه بین $f + gu$ و V_x^T برای شرایط اولیه $x=[1, 1, -1]$	۵-۵
۶۲	همگرایی حالت ها برای شرایط اولیه $x=[1, 1, -1]$ و مشتق زمانی تابع لیاپانوف کنترل	۶-۵
۶۳	سیگنال کنترل و زاویه بین $f + gu$ و V_x برای شرایط اولیه $x=[-7, -5, 4]$	۷-۵
۶۳	همگرایی حالت ها برای شرایط اولیه $x=[-7, -5, 4]$ و مشتق تابع لیاپانوف کنترل	۸-۵
۷۰	سیگنال کنترل و زاویه بین $f + gu$ و V_x برای شرایط اولیه $x=[1, 1, -1]$	۹-۵
۷۰	همگرایی حالت ها برای شرایط اولیه $x=[1, 1, -1]$ و مشتق زمانی تابع لیاپانوف کنترل	۱۰-۵
۷۹	نمایش مسیرهای سیستم (۱۹.۶) در حالت بدون ورودی	۱-۶
۸۱	سیگنال کنترل و زاویه بین $f + gu$ و V_x برای شرایط اولیه $x=[1, 1]$	۲-۶
۸۱	همگرایی حالت ها برای شرایط اولیه $x=[1, 1]$ و مشتق زمانی تابع لیاپانوف کنترل	۳-۶
۸۴	سیستم آونگ دوگانه	۱-۷
۹۲	سیگنال کنترل و زاویه بین $f + gu$ و V_x برای شرایط اولیه $x=[0.01, 0, -0.01, 0]$	۲-۷
۹۳	همگرایی حالت ها برای شرایط اولیه $x=[0.01, 0, -0.01, 0]$	۳-۷

۹۳	مشفق زمانی تابع لیاپانوف کنترل	۴-۷
۹۷	سیگنال کنترل و زاویه $f + gu$ و V_x برای شرایط اولیه $x=[0.01, 0, -0.01, 0]$	۵-۷
۹۷	همگرایی حالت ها برای شرایط اولیه $x=[0.01, 0, -0.01, 0]$	۶-۷
۹۸	مشفق زمانی تابع لیاپانوف کنترل	۷-۷

فهرست جداول

۶۵	۱-۵- زاویه ویژه برای تعدادی از ماتریس ها
----	--

فصل اول:

مقدمه

در همه سیستم های کنترلی، پایداری مهم ترین شرط لازم است. با وجود این که روش های حوزه فرکانس، همچنان در توسعه نظریه کنترل خطی مقاوم راه گشا هستند، اما در حوزه کنترل غیرخطی استفاده از این روش ها چندان کارساز نیست. از طرف دیگر روش های فضای حالت در سیستم های غیرخطی کاربرد چشم گیری دارند. از جمله مفاهیم پایداری که در نظریه کنترل از اهمیت ویژه ای برخوردار است، نظریه پایداری لیاپانوف^۱ می باشد. با در اختیار داشتن یک مسأله کنترل غیرخطی در فضای حالت، مهم ترین شرط لازم و کافی برای پایداری، وجود یک تابع مثبت (نیمه) معین^۲ از حالت های سیستم با مشتق زمانی منفی است، که تابع لیاپانوف نامیده می شود. کافی بودن شرط مذکور توسط الکساندر میخائیلویچ لیاپانوف^۳ (۱۸۵۷-۱۹۱۷) در ۱۹۰۷ اثبات شد و شرط لازم نیم قرن بعد (۱۹۵۶) با ظهور قضایای عکس اثبات گردید. با وجود این که این شرط در حالت کلی قابل بررسی نیست، توابع لیاپانوف به طور گسترده در تحلیل پایداری غیرخطی مورد استفاده قرار می گیرند [۳].

اساس نظریه لیاپانوف برای پایداری سیستم های بدون ورودی شکل گرفت، زیرا تئوری لیاپانوف پیش از تئوری کنترل مطرح گردید؛ از این رو منحصر به تحلیل پایداری سیستم های دینامیکی بدون ورودی است و در سیستم های کنترل نیز، به منظور تحلیل پایداری سیستم های حلقه بسته قابل استفاده است؛ یعنی سیستم هایی که ورودی آن ها با یک قانون کنترل پسخور از پیش تعیین شده، جایگزین شده است. به همین دلیل ایده هایی مبنی بر تعمیم تحلیل لیاپانوف به سیستم های کنترلی مطرح شد؛ به این ترتیب که در هنگام طراحی پسخور، کاندیداهایی از توابع لیاپانوف به کار گرفته شد که هنگام انتخاب قانون کنترل، به مشتق زمانی منفی دست می یافتند. این تلاش ها برای سیستم های شامل ورودی کنترل، با معرفی تابع لیاپانوف کنترل^۴ (CLF) سامان دهی گردید. همان گونه که از تابع لیاپانوف برای

^۱ Lyapunov Stability Theory

^۲ Positive (Semi) Definite

^۳ Alexandr Mihailovich Lyapunov

^۴ Control Lyapunov Function

اثبات پایداری سیستم های بدون ورودی استفاده می شود، تابع لیپانوف کنترل ابزاری برای اثبات پایداری پذیری سیستم های شامل ورودی کنترل است. علاوه بر این، CLF در جهت طراحی کنترل کننده های پایدارساز مورد استفاده قرار می گیرد [۲ و ۳].

برای یافتن CLF در سیستم های غیرخطی عمومی، روش سیستماتیکی وجود ندارد و روش های معرفی شده در منابع گوناگون، تنها برای رده هایی از سیستم ها تابع لیپانوف کنترل را به دست می دهند. از جمله روش های یافتن CLF می توان به خطی سازی ژاکوبی^۱ حول مبدأ، خطی سازی سیستم به کمک پسخور حالت، روش گام به عقب^۲ و روش پیش خوراند^۳ اشاره نمود که به ترتیب در سیستم های با شرایط اولیه حول مبدأ، سیستم های قابل خطی سازی پسخور^۴، سیستم های پسخور اکید^۵ و سیستم های با معادلات پیش خور، تابع لیپانوف کنترل را به دست می دهند [۲، ۳ و ۴].

کنترل کننده های پایدارساز مبتنی بر توابع لیپانوف کنترل که اخیراً در صنایع به کار گرفته شده است، علاوه بر پایدارسازی، یک تابع هزینه شامل جریمه روی حالت ها و ورودی (و اغتشاش) را حداقل می نمایند. در طراحی این کنترل کننده ها فقط باید یک CLF برای سیستم در دسترس داشته باشیم. با داشتن CLF طراحی کنترل کننده سراسر است و تابع هزینه نیز بر اساس CLF محاسبه می شود. طراحی کنترل کننده ها به این روش را کنترل بهینه معکوس^۶ می گویند، چرا که کنترل کننده طراحی شده، تابع هزینه از پیش تعیین نشده ای را حداقل می نماید. وجود راه حل بسته و کاملاً دقیق و بدون نیاز به روش های عددی در کنترل کننده های بهینه معکوس باعث جذابیت آن ها شده است. کنترل بهینه معکوس تاریخچه نسبتاً طولانی دارد. اصطلاح بهینه معکوس برای سیستم های خطی اولین بار

^۱ Jacobian Linearization
^۲ Backstepping
^۳ Forwarding
^۴ Feedback Linearizable
^۵ Strict Feedback
^۶ Inverse Optimal Control

توسط لین^۷ و زونتاج^۸ و برای سیستم های غیرخطی توسط مویلن^۹ و آندرسن^{۱۰} در ۱۹۷۳ مطرح شد. اولین مسائل کنترل بهینه معکوس برای سیستم های خطی تغییرناپذیر با زمان مطرح و حل شد که بر اساس آن ماتریس بهره پایدارساز یک تابع هزینه درجه دوم^{۱۱} را حداقل می کرد. کنترل بهینه معکوس برای سیستم های غیرخطی موفقیت کمتری داشت و اولین نتایج آن برای سیستم های حلقه باز پایدار به دست آمد. اما از اواخر دهه ۸۰ کنترل بهینه معکوس به همراه روش گام به عقب رشد چشمگیری داشته است [۲].

از جمله قوانین کنترل پایدارساز در این حوزه می توان به قانون کنترل حداقل نرم نقطه ای^{۱۲} و قانون کنترل حداکثر زاویه^{۱۳} اشاره نمود. این قوانین در حقیقت فرمول های بسته ای برای محاسبه قانون کنترل پایدارساز که تابعی از معادلات سیستم و یک CLF از آن است، به دست می دهند. همان گونه که پیش تر عنوان شد، این قوانین تابع هزینه از پیش تعیین نشده ای را حداقل می نمایند [۱].

قانون کنترل حداکثر زاویه یک قانون کنترل پایدارساز جدید مبتنی بر تابع لیاپانوف کنترل است که بر مبنای ایده حداکثر کردن زاویه بین بردار گرادیان تابع لیاپانوف کنترل و مشتق بردار حالت در هر نقطه از مسیر حالت عمل می کند [۲۵]. قانون کنترل حداکثر زاویه مزیت هایی نسبت به قانون کنترل حداقل نرم نقطه ای داراست که از آن جمله می توان به سرعت بیشتر، معرفی یک معیار پایداری لحظه ای برای قوانین کنترل مبتنی بر CLF، و امکان کنترل رده ای از سیستم های غیرافین^{۱۴} تحت فضایی مطرح شده در این حوزه اشاره نمود [۱]. قانون کنترل حداکثر زاویه برای سیستم های خطی و غیرخطی تک ورودی قابل به کارگیری است. از آن جا که بسیاری از سیستم های واقعی خصوصاً در حوزه های روباتیک

^۷ Y.Lin

^۸ E.D.Sontag

^۹ P.J.Moylan

^{۱۰} B.D.O.Anderson

^{۱۱} Quadratic

^{۱۲} Pointwise Min-Norm Control Law

^{۱۳} Maximum Angle Control Law

^{۱۴} Non-Affine

و هوافضا بیش از یک ورودی دارند، به دست آوردن روابط قانون کنترل حداکثر زاویه برای سیستم های چند ورودی، و تعمیم این قانون برای سیستم های با ورودی های بیشتر از اهمیت بسزایی برخوردار است. سیستم های غیرافین سیستم هایی هستند که معادلات حالت آن ها نسبت به سیگنال کنترل غیرخطی است؛ یعنی

$$\dot{x} = f(x) + g(x)h(x, u) \quad (1-1)$$

که در آن h در حالت کلی تابعی غیرخطی از از سیگنال های کنترل و متغیرهای حالت است. در نتیجه واضح است که پایدارسازی و کنترل آن ها دشوار باشد. در این حوزه تاکنون تلاش های بسیاری صورت گرفته است که هر یک روی رده خاصی از سیستم های غیرافین متمرکز بوده است. همگام با پیچیدگی روزافزون سیستم ها، نیاز به کنترل انواع سیستم های غیرافین نیز رو به فزونی است و در حال حاضر یکی از حوزه های مهم تحقیقات در زمینه سیستم های کنترلی محسوب می شود. همان گونه که پیش تر عنوان شد، یکی از مزایای مهم قانون کنترل حداکثر زاویه، امکان تعمیم آن به دسته ای از سیستم های غیرافین به منظور ساختن توابع لیاپانوف کنترل و پایدارسازی این سیستم ها می باشد. این امر از طریق معرفی مفهومی به نام زاویه ویژه^{۱۵} برای ماتریس های مربعی ناویژه حقیقی محقق می شود [۲۵] و مرجع [۲۸] آن. برای دسته ای از سیستم های غیرافین که در آن ها می توان بخش غیرافین را به صورت یک ماتریس مربعی ناویژه از معادلات حالت جداسازی نمود، این روش، یافتن توابع لیاپانوف کنترل برای سیستم غیرافین را، به یافتن توابع لیاپانوف کنترل برای بخش افین جداسازی مذکور (که ممکن است خطی هم باشد) تبدیل می کند و اولین گام در محاسبه CLF برای سیستم های غیرافین محسوب می شود [۲۵]. در عین حال در صورت برقراری شرایط، قانون کنترل حداکثر زاویه که با استفاده از یک CLF برای بخش افین به دست می آید، برای پایدارسازی کل سیستم نیز معتبر است [۲۵]. از آن جا که در این

^{۱۵} Eigen Angle

روش، برقراری شرایط لازم متکی به محاسبه زاویه ویژه برای ماتریس مربعی جداشده از سیستم است و فرمول بسته ای برای محاسبه زاویه ویژه همه ماتریس های مربعی در حالت عمومی وجود ندارد، لازم است برای هر نمونه خاص محاسبات مجزایی صورت گیرد [۲۵]. از این رو محاسبه زاویه ویژه برای نمونه های بیشتری از ماتریس های مربعی، گام مهمی در توسعه این روش کنترلی برای مجموعه های بزرگ تری از سیستم های غیرافین محسوب می شود.

در این گزارش، با ذکر پیش زمینه ای از مفاهیم پایداری در حوزه لیاپانوف، بحث خود را بر روی سیستم های کنترلی تعمیم داده، مفاهیم و روش های یافتن توابع لیاپانوف کنترل را بررسی می کنیم. سپس به بیان کاربرد های تابع لیاپانوف کنترل در مقوله کنترل بهینه معکوس خواهیم پرداخت و با تمرکز بر قانون کنترل حداکثر زاویه، مثالی از پیاده سازی این قانون برای کنترل یک سیستم افین تک ورودی و یک سیستم غیرافین تک ورودی را مورد بررسی قرار می دهیم. پس از آن روش حلی برای تعمیم این قانون روی سیستم های دو ورودی معرفی می کنیم و نحوه پیاده سازی آن را روی یک نمونه سیستم دو ورودی نشان می دهیم. در ادامه با هدف پیاده سازی نتایج به دست آمده روی یک نمونه واقعی سیستم غیرافین دو ورودی، به کنترل نوسان آونگ دوگانه^{۱۶} می پردازیم. در راستای این هدف، محاسبات مجزایی برای یافتن زاویه ویژه دسته جدیدی از ماتریس های مربعی انجام می دهیم.

لازم به توضیح است که موضوع این رساله در امتداد مطالب مطرح شده در رساله دکترای آقای عارف شاه منصوریان، تحت عنوان "تحلیل و طراحی کنترل کننده های بهینه معکوس با استفاده از توابع لیاپانوف کنترل" (مرجع [۲۵]) و با نظارت و راهنمایی ایشان، به منظور پیاده سازی قانون کنترل حداکثر زاویه روی نمونه ای از سیستم های غیرافین تعریف شده است.

^{۱۶} Swing-up Control of Double Pendulum

فصل دوم:

پایداری از دیدگاه لیاپانوف

هرچند نظریه پایداری لیاپانوف، به تنهایی فاقد ابزار لازم جهت پایدارسازی سیستم های با ورودی کنترلی است؛ ایده های برآمده از آن الهام بخش انواع روش های کنترلی بوده است. از آن میان، روش های کنترل بهینه معکوس که در این رساله مدنظر قرار می گیرد، بر پایه تعمیمی از نظریه پایداری لیاپانوف به سیستم های کنترلی بنا شده است. از این رو، پیش از ورود به مباحث کنترلی برآمده از نظریه لیاپانوف، ذکر پیش زمینه ای از مفاهیم و قضایای این حوزه ضروری به نظر می رسد. در این فصل مفاهیم اساسی در نظریه پایداری لیاپانوف و برخی قضایای کلیدی در این حوزه را مورد بررسی قرار می دهیم.

۱-۲- مفاهیم پایداری در سیستم های ناخودگردان^۱ [۳]

مفاهیمی چون پایداری لیاپانوف^۲، پایداری مجانبی^۳، پایداری یکنواخت^۴، پایداری مجانبی یکنواخت^۵ و ... به عنوان یک صورت کلی از ویژگی های یک سیستم دینامیکی محسوب نمی شوند؛ بلکه در حکم پاسخ های مجزای سیستم می باشند. سیستم متغیر با زمان زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (1-2)$$

که در آن $x \in R^n$ ، و $f: R^n \times R_+ \rightarrow R^n$ نسبت به t پیوسته قطعه ای^۶ و نسبت به x لپشیتز محلی^۷ است. پاسخ معادله (۱-۲) را که از نقطه x در زمان $t \geq 0$ شروع می شود ($x(t_0; x_0, t) = x_0$)، به صورت $x(t; x_0, t)$ نشان می دهیم. مفهوم پایداری لیاپانوف بیانگر ویژگی های پیوستگی $x(t; x_0, t)$ نسبت به x_0 است. اگر شرط اولیه x_0 به سمت \tilde{x} منحرف شود،

^۱ Non-Autonomous Systems

^۲ Lyapunov Stability

^۳ Asymptotic Stability

^۴ Uniform Stability

^۵ Uniform Asymptotic Stability

^۶ Piecewise Continuous

^۷ Locally Lipschitz

آنگاه برای پایداری لازم است پاسخ منحرف شده $x(t; \tilde{x}_., t.)$ به ازای همه $t \geq t_0$ نزدیک به

$x(t; x_., t.)$ باقی بماند. علاوه بر این، برای پایداری مجانبی لازم است خطای

$$x(t; \tilde{x}_., t.) - x(t; x_., t.)$$

در $t \rightarrow \infty$ صفر شود. بنابراین پاسخ $x(t; x_., t.)$ از رابطه (۱-۲):

- محدود^۸ است، اگر ثابت $B(x_., t.) > 0$ وجود داشته باشد به گونه ای که

$$|x(t; x_., t.)| < B(x_., t.), \quad \forall t \geq t_0; \quad (۲-۲)$$

- پایدار^۹ است، اگر برای هر $\varepsilon > 0$ یک $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ وجود داشته باشد به گونه ای که

$$|\tilde{x}_. - x_.| < \delta \Rightarrow |x(t; \tilde{x}_., t.) - x(t; x_., t.)| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0; \quad (۳-۲)$$

- جذب کننده^{۱۰} است، اگر یک $r(t_0) > 0$ وجود داشته باشد، و نیز برای هر $\varepsilon > 0$ ، یک

$$T(\varepsilon, t_0) > 0 \text{ وجود داشته باشد به گونه ای که}$$

$$|\tilde{x}_. - x_.| < r \Rightarrow |x(t; \tilde{x}_., t.) - x(t; x_., t.)| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0 + T; \quad (۴-۲)$$

- پایدار مجانبی^{۱۱} است، اگر پایدار و جذب کننده باشد.

مشخصه های پایداری $x(t; x_., t.)$ در حالت کلی به زمان اولیه t_0 بستگی دارد. برای t_0 های

متفاوت، مقادیر متفاوتی از $B(x_., t_0)$ ، $\delta(\varepsilon, t_0)$ ، $r(t_0)$ و $T(\varepsilon, t_0)$ برای برقراری روابط (۲-۲)،

(۳-۲) و (۴-۲) نیاز است. هرگاه این ثابت ها مستقل از t_0 باشند، مشخصه های متناظر آن ها

یکنواخت^{۱۲} نامیده می شوند. برای سیستم های تطبیقی پایداری یکنواخت بسیار مطلوب تر از پایداری

صرف است، و مطلوب تر از همه پایداری مجانبی یکنواخت^{۱۳} است که اغلب UAS نامیده می شود. پاسخ

^۸ Bounded

^۹ Stable

^{۱۰} Attractive

^{۱۱} Asymptotically Stable

^{۱۲} Uniform

^{۱۳} Uniform Asymptotic Stability

UAS $x(t; x_0, t_0)$ نامیده می شود اگر پایدار یکنواخت و جذب کننده یکنواخت باشد؛ یعنی $\delta(\varepsilon, t) = \delta(\varepsilon)$ ، $r(t) = r$ و $T(\varepsilon, t) = T(\varepsilon)$ مستقل از t باشند. پایداری مجانبی یکنواخت یک مشخصه مطلوب محسوب می شود؛ زیرا سیستم هایی که دارای این مشخصه هستند با انحراف ها^{۱۴} و اغتشاش ها^{۱۵} بهتر برخورد می کنند.

برخی از پاسخ های سیستم ممکن است پایدار و برخی دیگر ناپایدار باشند؛ یعنی معادله (۱-۲) ممکن است نقاط تعادل^{۱۶} پایدار یا ناپایدار داشته باشد. نقطه تعادل، پاسخ ثابت x_e $x(t; x_e, t) \equiv x_e$ است که شرط $f(x_e, t) \equiv 0$ را برآورده نماید. اگر تعادل x_e پایدار مجانبی باشد، آنگاه دارای یک ناحیه جذب^{۱۷} است. ناحیه جذب یک مجموعه Ω از شرایط اولیه x است، به گونه ای که به ازای $t \rightarrow \infty$ و همه $x \in \Omega$ داشته باشیم: $x(t; x_0, t_0) \rightarrow x_e$. هنگامی که x_e فقط پایدار باشد، پاسخ شروع شده از Ω مطابق با مفهوم رابطه (۳-۲) نزدیک به x_e باقی می ماند. هنگامی که ناحیه جذب، کل فضای R^n باشد، ویژگی های پایداری را جامع^{۱۸} و در غیر این صورت محلی^{۱۹} می نامیم.

۲-۲- پایدار لیپانوف در سیستم های ناخودگردان [۳]

از نظر عملی مطلوب این است که برای به دست آوردن شرایط پایداری، نیاز به حل صریح معادله (۱-۲) نباشد. هدف روش مستقیم لیپانوف، تعیین مشخصه های پایداری $x(t; x_0, t_0)$ از روی مشخصه های $f(x, t)$ و رابطه آن با یک تابع مثبت معین $V(x, t)$ است. برای به دست آوردن نتایج

^{۱۴} Perturbations

^{۱۵} Disturbances

^{۱۶} Equilibrium

^{۱۷} Region of Attraction

^{۱۸} Global

^{۱۹} Local

جامع، این تابع باید نامحدود شعاعی^{۲۰} باشد، یعنی به ازای $\|x\| \rightarrow \infty$ ، به طور یکنواخت در t داشته باشیم: $V(x, t) \rightarrow \infty$.

تعریف ۱: یک تابع اسکالر متغیر با زمان $V(x, t)$ مثبت معین محلی^{۲۱} نامیده می شود اگر $V(0, t) = 0$ باشد و یک تابع مثبت معین تغییر ناپذیر با زمان $V(x)$ وجود داشته باشد به گونه ای که

$$V(x, t) \geq V_0(x), \quad \forall t \geq 0. \quad (5-2)$$

تعریف ۲: یک تابع اسکالر $V(x, t)$ کاهنده^{۲۲} نامیده می شود، اگر $V(0, t) = 0$ باشد و یک تابع مثبت معین تغییر ناپذیر با زمان $V_1(x)$ وجود داشته باشد به گونه ای که

$$V(x, t) \leq V_1(x), \quad \forall t \geq 0. \quad (6-2)$$

تعریف ۳: یک تابع $V(x, t)$ مثبت معین محلی (یا جامع) است، اگر و فقط اگر یک تابع α از کلاس K وجود داشته باشد به گونه ای که $V(0, t) = 0$ باشد و

$$V(x, t) \geq \alpha(\|x\|), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in B_R. \quad (7-2)$$

(یا در کل فضای حالت)

یک تابع $V(x, t)$ کاهنده محلی (یا جامع) است، اگر و فقط اگر یک تابع β از کلاس K وجود داشته باشد به گونه ای که $V(0, t) = 0$ باشد و

$$V(x, t) \leq \beta(\|x\|), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in B_R. \quad (8-2)$$

(یا در کل فضای حالت)

قضیه لاسال-یوشیتزوا^{۲۳}: فرض کنید $x = 0$ یک نقطه تعادل سیستم (۱-۲) باشد و f در x لپشیتز محلی و در t یکنواخت باشد. اگر $V: R^n \rightarrow R_+$ یک تابع به طور پیوسته مشتق پذیر^{۲۴}، مثبت معین و نامحدود شعاعی باشد به گونه ای که

^{۲۰} Radially Unbounded

^{۲۱} Locally Positive Definite

^{۲۲} Decrescent

^{۲۳} LaSalle- Yoshizawa

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x}(x)f(x, t) \leq -W(x) \leq 0, \quad \forall t \geq 0, \forall x \in R^n, \quad (9-2)$$

که در آن W یک تابع پیوسته باشد، آنگاه همه پاسخ های (۱-۲) محدود یکنواخت جامع^{۲۵} می باشند و علاوه بر این داریم:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W(x(t)) = 0. \quad (10-2)$$

به علاوه اگر $W(x)$ مثبت معین باشد، آنگاه تعادل $x = 0$ پایدار مجانبی یکنواخت جامع^{۲۶} (GUAS) است.

قضیه لاسال- یوشیتزوا در سیستم های تغییر پذیر با زمان به کار گرفته می شود و برقراری همگرایی به مجموعه E که در آن $W(x) = 0$ است را ممکن می سازد. در اغلب طراحی ها، $V(x)$ به گونه ای ساخته می شود که مجموعه E تنها شامل مسیرهایی باشد که به هدف ردیابی دست می یابند؛ یعنی مسیرهایی که در آن ها خطای ردیابی صفر باشد.

برای تنظیم^{۲۷} (زمانی که سیگنال مرجع ثابت است) سیستم طراحی شده معمولاً تغییر ناپذیر یا زمان است:

$$\dot{x} = f(x) \quad (11-2)$$

که در این حالت مجموعه های تغییر ناپذیر معرفی می شوند :

تعریف ۴ : مجموعه M یک مجموعه تغییر ناپذیر^{۲۸} سیستم (۱۱-۲) نامیده می شود اگر هر پاسخ $x(t)$ که در لحظه زمانی t_1 به مجموعه M تعلق دارد، به ازای تمام زمان های گذشته و آینده نیز متعلق به M باشد؛ یعنی

^{۲۴} Continuously Differentiable

^{۲۵} Globally Uniformly Bounded

^{۲۶} Globally Uniformly Asymptotically Stable

^{۲۷} Regulation

^{۲۸} Invariant Set

$$x(t_1) \in M \Rightarrow x(t) \in M, \forall t \in R \quad (12-2)$$

مجموعه Ω یک مجموعه مثبت تغییرناپذیر^{۲۹} نامیده می شود اگر شرط بالا تنها به ازای زمان های آینده برقرار باشد؛ یعنی

$$x(t_1) \in \Omega \Rightarrow x(t) \in \Omega, \forall t \geq t_1 \quad (13-2)$$

با استفاده از قضیه تغییرناپذیری لاسال و استنباط پایداری مجانبی آن، می توان همگرایی به یک مجموعه تغییرناپذیر مطلوب را تضمین نمود.

قضیه تغییرناپذیری لاسال^{۳۰}: اگر Ω یک مجموعه مثبت تغییرناپذیر سیستم (۷-۲)، و $V: \Omega \rightarrow R_+$

یک تابع $V(x)$ به طور پیوسته مشتق پذیر با ویژگی $\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \in \Omega$ ، مجموعه $E =$

$\{x \in \Omega | \dot{V}(x) = 0\}$ ، و M بزرگ ترین مجموعه تغییرناپذیر موجود در E باشد، آنگاه هر پاسخ

محدود $x(t)$ که از Ω شروع شود، به ازای $t \rightarrow \infty$ به M همگرا می شود.

استنباط پایداری مجانبی^{۳۱}: اگر $x = 0$ تنها نقطه تعادل (۷-۲)، و $V: R^n \rightarrow R_+$ یک تابع $V(x)$

به طور پیوسته مشتق پذیر، مثبت معین و نامحدود شعاعی با ویژگی $\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \in R^n$ ،

و $E = \{x \in R^n | \dot{V}(x) = 0\}$ باشد، و با فرض این که پاسخ دیگری به جز $x(t) \equiv 0$ نتواند برای

همیشه در E بماند، آنگاه مبدأ پایدار مجانبی جامع^{۳۲} (GAS) است.

همان طور که مشاهده می شود، اگر ابعاد M کمتر باشد، مشخصه های همگرایی سیستم طراحی

شده قوی تر است. در حالت مطلوب پایداری مجانبی، بزرگ ترین زیرمجموعه تغییرناپذیر M از E تنها

مبدأ $x = 0$ است. بنابراین هدف این است که ابعاد M به کمترین حد ممکن درآید.

^{۲۹} Positive Invariant

^{۳۰} LaSalle's Invariance Theorem

^{۳۱} Asymptotic Stability Corollary

^{۳۲} Globally Asymptotically Stable

پایداری ورودی به حالت^{۳۳}: یک مفهوم پایداری دیگر که در ادامه مورد استفاده قرار می گیرد، پایداری

ورودی به حالت (ISS) است که توسط زونتگ در سال ۱۹۸۹ معرفی گردید. سیستم

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (۱۴-۲)$$

پایدار ورودی به حالت نامیده می شود اگر پاسخ سیستم به ازای هر $x(0)$ و هر ورودی $u(0)$ پیوسته و

محدود روی $[0, \infty)$ برای همه $t \geq 0$ وجود داشته باشد و رابطه زیر را برقرار نماید:

$$|x(t)| \leq \beta(|x(0)|, t) + \gamma \left(\sup_{0 \leq \tau \leq t} |u(\tau)| \right), \quad \forall t \geq 0. \quad (۱۵-۲)$$

که در آن $\beta(s, t)$ و $\gamma(s)$ توابع افزایشی اکید از $s \in R_+$ با $\beta(0, t) = 0$ و $\gamma(0) = 0$ می باشند و

β یک تابع کاهشی از t با $\lim_{t \rightarrow \infty} \beta(s, t) = 0, \forall s \in R_+$ است.

این تعریف پایداری ورودی به حالت برای سیستم های غیرخطی مناسب است؛ زیرا به طور صریح

اثر شرایط اولیه $x(0)$ را ترکیب می کند: رابطه (۱۵-۲) نشان می دهد که نرم حالت $x(t)$ تنها به

ورودی $u(\tau)$ بستگی دارد، اما در عین حال یک ترکیب به صورت مجانبی محو شونده از $x(0)$ را شامل

می شود.

۲-۳- قضایای ناپایداری [۳]

قضیه ۱: اگر در یک همسایگی مشخص Ω از مرکز، یک تابع اسکالر به طور پیوسته مشتق پذیر و

کاهنده $V(x, t)$ وجود داشته باشد به گونه ای که

$$V(0, t) = 0, \quad \forall t \geq 0. \quad \bullet$$

$V(x, t)$ هنگامی که به میزان دلخواه به مبداء نزدیک باشد، بتواند مقادیر اکیداً مثبت

اختیار کند.

^{۳۳} Input- to- State Stability

• $\dot{V}(x, t)$ مثبت معین (محلی در Ω) باشد.

سپس نقطه تعادل صفر در زمان t ناپایدار است.

قضیه ۲: اگر در یک همسایگی مشخص Ω از مرکز، یک تابع اسکالر به طور پیوسته مشتق پذیر و

کاهنده $V(x, t)$ وجود داشته باشد به گونه ای که

• $V(0, t) = 0$ باشد و $V(x, t)$ هنگامی که به میزان دلخواه به مبدأ نزدیک باشد، بتواند

مقادیر اکیداً مثبت اختیار کند؛ یعنی

$$\dot{V}(x, t) - \lambda V(x, t) \geq 0, \quad \forall t \geq t_0, \quad \forall x \in \Omega$$

که در آن λ یک ثابت اکیداً مثبت است، آنگاه نقطه تعادل صفر در زمان t_0 ناپایدار است.

قضیه ۳: اگر Ω یک همسایگی مرکز باشد و یک تابع اسکالر $V(x, t)$ با مشتقات جزئی مرتبه اول

پیوسته و کاهنده در Ω ، و یک ناحیه Ω_1 در Ω وجود داشته باشند به گونه ای که

• $V(x, t)$ و $\dot{V}(x, t)$ در Ω_1 مثبت معین باشند؛

• مرکز یک نقطه مرزی Ω_1 باشد؛

• در نقاط مرزی Ω_1 درون Ω ، به ازای همه $t \geq t_0$ ، $V(x, t) = 0$ باشد؛

آنگاه نقطه تعادل صفر در زمان t_0 ناپایدار است.

۲-۴- وجود توابع لیاپانوف [۳]

در مواجهه با مشکل یافتن توابع لیاپانوف این سوال مطرح می شود که آیا اساساً برای

سیستم های پایدار همواره توابع لیاپانوف وجود دارد یا خیر. در این بخش نتایج جالب توجه در رابطه با

وجود توابع لیاپانوف، که تحت عنوان قضایای لیاپانوف معکوس شناخته می شوند مورد بررسی قرار

می دهیم.

قضیه ۱ : اگر مبدأ سیستم (۱-۲) پایدار باشد، آنگاه یک تابع مثبت معین $V(x, t)$ با یک مشتق

نامثبت موجود است.

قضیه فوق بیانگر وجود یک تابع لیاپانوف برای هر سیستم پایدار است.

قضیه ۲ : اگر نقطه تعادل در مبدأ پایدار مجانبی یکنواخت باشد، یک تابع کاهنده و مثبت معین

$V(x, t)$ با یک مشتق منفی معین وجود دارد.

فصل سوم:

تابع لیاپانوف کنترل

۳-۱- مفاهیم

از آنجا که قضیه لیاپانوف بسیار پیش از نظریه کنترل شکل گرفت، این قضیه با مفهوم پایداری در سیستم های دینامیکی بدون ورودی سروکار دارد و در سیستم های کنترلی نیز تنها برای تعیین مشخصه های پایداری سیستم کنترلی حلقه بسته قابل به کارگیری است؛ یعنی سیستم هایی که در آن ها ورودی با یک قانون کنترل از پیش تعیین شده جایگزین شده باشد. اما در طراحی کنترل، به جای تحلیل مشخصه های پایداری یک سیستم داده شده، هدف ایجاد یک سیستم حلقه بسته با مشخصه های پایداری مطلوب است. به همین دلیل برخی از محققان با تعمیم قضیه لیاپانوف، کاندیداهایی از توابع لیاپانوف را در فرآیند طراحی کنترل به کار گرفتند که با انتخاب مناسب قانون کنترل به مشتق زمانی منفی دست می یافتند. چنین ایده هایی به معرفی تابع لیاپانوف کنترل^۱ (CLF) برای سیستم های با ورودی های کنترل منجر گردید. در این بخش به معرفی کلی این ایده ها و نتایج حاصل از آن ها می پردازیم.

فرض کنید برای سیستم تغییرناپذیر با زمان

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in R^n, \quad u \in R, \quad f(0, 0) = 0 \quad (1-3)$$

هدف طراحی قانون کنترل پسخور $\alpha(x)$ برای متغیر کنترلی u ، به گونه ای است که تعادل $x = 0$ برای سیستم حلقه بسته

$$\dot{x} = f(x, \alpha(x)), \quad (2-3)$$

پایدار مجانبی جامع باشد [۲].

^۱ Control Lyapunov Function

اگر یک تابع $V(x)$ به عنوان کاندیدای لیاپانوف انتخاب شود، لازم است مشتق زمانی آن در طول پاسخ معادله (۲-۳) شرط $\dot{V}(x) \leq -W(x)$ را برآورده نماید، که در آن $W(x)$ یک تابع مثبت معین است. بنابراین باید $\alpha(x)$ به گونه ای تعیین شود که به ازای همه $x \in R^n$ ، رابطه

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)f(x, \alpha(x)) \leq -W(x), \quad (3-3)$$

برقرار باشد. این مرحله ممکن است چندان ساده نباشد. زیرا ممکن است قانون کنترل پایدارساز برای سیستم (۱-۳) وجود داشته باشد، اما به دلیل انتخاب ضعیف $V(x)$ و $W(x)$ رابطه (۲-۱۴) برقرار نباشد. سیستمی که برای آن یک انتخاب خوب $V(x)$ و $W(x)$ وجود داشته باشد، گفته می شود یک CLF دارد.

تعریف [۲]: یک تابع مثبت معین و نامحدود شعاعی $V: R^n \rightarrow R_+$ ، یک تابع لیاپانوف کنترل (CLF) نام دارد اگر

$$\inf_{u \in U} \frac{dV}{dt} = \inf_{u \in U} \left\{ \frac{\partial V}{\partial x}(x)f(x, u) \right\} < 0, \quad \forall x \neq 0. \quad (4-3)$$

که در آن U یک مجموعه محدب^۲ از مقادیر مجاز متغیر کنترلی u است. به عبارت دیگر، یک CLF را می توان به سادگی یک کاندیدای تابع لیاپانوف در نظر گرفت که مشتق آن را می توان با انتخاب مقادیر کنترل، به صورت نقطه ای^۳، منفی ساخت. به وضوح می توان گفت اگر f پیوسته باشد و یک پسخور حالت پیوسته برای سیستم (۱-۳) وجود داشته باشد، به گونه ای که نقطه $x = 0$ یک تعادل پایدار مجانبی جامع برای سیستم حلقه بسته شود، آنگاه با قضایای عکس لیاپانوف ثابت می شود باید برای سیستم (۱-۳) یک CLF وجود داشته باشد. اگر نسبت به متغیر کنترل افین باشد، وجود یک CLF برای سیستم (۱-۳)، شرط کافی برای پایدارسازی از طریق پسخور حالت پیوسته محسوب می شود.

^۲ Convex Set

^۳ Pointwise

به طور خلاصه، همان طور که وجود یک تابع لیاپانوف شرط لازم و کافی برای پایداری یک سیستم بدون ورودی است، وجود یک CLF نیز شرط لازم و کافی برای پایداری سیستم با ورودی کنترل است.

مفهوم CLF نخستین بار توسط آرتشتاین^۵ و زونتاگ^۶ در سال ۱۹۸۳ معرفی گردید و تعمیمی بر نتایج طراحی لیاپانوف توسط ژاکوبسون^۷ (۱۹۷۷) و جورجویک^۸ و کوین^۹ (۱۹۷۸) محسوب می شد. آرتشتاین نشان داد رابطه (۳-۴) نه تنها شرط لازم است، بلکه برای وجود یک قانون کنترل که رابطه (۳-۳) را برقرار نماید، شرط کافی نیز محسوب می شود. یعنی وجود یک CLF معادل با پایداری مجانبی جامع است [۴].

۳-۲- تعاریف و قضایا [۲۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸ و ۱۹]

همان گونه که اشاره شد، مفهوم اصلی CLF عبارت است از "یک تابع مثبت معین و نامحدود شعاعی که رده ای از سیگنالهای کنترل قادرند مشتق آن را نسبت به زمان منفی سازند". اگرچه مفهوم اصلی CLF کاملاً معلوم است اما تعاریف متفاوتی از آن در منابع مختلف می توان یافت. علاوه بر این مسئله یافتن توابع لیاپانوف کنترل به طور کلی حل نشده است و تنها برای بعضی از سیستم های غیرخطی روش سرراست محاسبه CLF موجود است. در این بخش تعاریف مختلف CLF و روش های موجود برای پیدا کردن آن و برخی موضوعات جنبی در ارتباط با CLF مطرح می شود.

^۴ Stabilizability

^۵ Artstein

^۶ Sontag

^۷ Jacobson

^۸ Jurdjevic

^۹ Quinn

برای سیستم توصیف شده با معادلات

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad x \in R^n, \quad u \in R^m \quad (5-3)$$

CLF در [6] به صورت زیر تعریف شده است:

تعریف ۱: تابع مثبت معین و نامحدود شعاعی و هموار $V(x): R^n \rightarrow R$ یک CLF است اگر برای هر $x \neq 0$ داشته باشیم:

$$\inf_{u \in U(x)} \{ \nabla V \cdot f(x) + \nabla V \cdot g(x)u \} < 0, \quad (6-3)$$

در [7، ۸ و ۹] برای سیستم توصیف شده با معادلات (5-3)، CLF به صورت زیر توصیف شده است:

تعریف ۲: تابع مشتق پذیر و نامحدود شعاعی و مثبت معین $V(x): R^n \rightarrow R_+$ را یک CLF برای سیستم (5-3) گویند اگر

$$\inf_u \{ V_x^T(x) f(x) + V_x^T(x) g(x)u \} < 0, \quad (x \neq 0) \quad (7-3)$$

در [10 و 11] برای سیستم (5-3) CLF به صورت زیر توصیف شده است:

تعریف ۳: تابع مشتق پذیر مرتبه دوم $V(x): R^n \rightarrow R$ را یک CLF گویند اگر $V(x)$ مثبت معین و نامحدود شعاعی بوده و شرط زیر برقرار باشد:

$$\inf_u V_x^T(f(x) + g(x)u) < 0, \quad x \neq 0 \quad (8-3)$$

برای سیستم کلی

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (9-3)$$

در [۱۲] CLF به صورت زیر تعریف شده است :

تعریف ۴ : تابع مثبت معین و نامحدود شعاعی $V(x): R^n \rightarrow R_+$ را یک CLF برای سیستم (۳-۹) گویند اگر

$$\inf_u [\dot{V}(x, u)] < 0, \quad (۱۰-۳)$$

علاوه بر این در [۱۲] تابع q-CLF به صورت زیر تعریف شده است:

تعریف ۵ : تابع $V(x): R^n \rightarrow R_+$ را q-CLF برای سیستم (۳-۹) گویند هرگاه:

$$\inf_u [\dot{V}(x, u) + q(x, u)] < 0, \quad (۱۱-۳)$$

که در آن $q(x, u)$ یک تابع مثبت معین است.

در [۱۳ و ۱۴] برای سیستم (۳-۵)، CLF به صورت زیر تعریف شده است:

تعریف ۶ : $V(x)$ برای سیستم (۳-۵) یک CLF است اگر گزاره شرطی زیر برای هر $x \neq 0$ برقرار باشد:

$$L_g V(x) = 0 \Rightarrow L_f V(x) < 0, \quad (۱۲-۳)$$

تعریف ۷ : سیستم،

$$\dot{x} = f(x(t), u(t)), \quad (۱۳-۳)$$

را کنترل پذیر مجانبی در مبدأ^{۱۱} (یا به طور مخفف AC) گویند اگر توابع غیرنزولی $\theta, \tilde{\theta}: R \geq 0 \rightarrow$ موجود باشند که $\lim_{r \rightarrow +\infty} \tilde{\theta}(r) = 0$ و برای هر شرایط اولیه $\xi = x(0)$ یک قانون کنترل

^{۱۱} (nul-)asymptotic Controllable

u با خاصیت $\|u\| \leq \theta(|\xi|)$ وجود داشته باشد، به طوری که $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ و

$$Sup\{|x(t)|: 0 \leq t < \infty\} \leq \bar{\theta}(|\xi|) \quad [۱۵, ۱۶, ۱۷].$$

قضیه ۱: سیستم (۲-۲۴) AC است اگر و فقط اگر یک CLF داشته باشد [۱۶ و ۱۸].

تعریف ۸: (V, W) را یک جفت لیاپانوف برای سیستم (۳-۱۳) گویند هرگاه $V(x)$ یک CLF برای

سیستم (۳-۱۳) بوده و $W(x)$ مثبت معین باشد و ورودی u طوری وجود داشته باشد که

$$\dot{V}(x) \leq -W(x) \quad [۱۶].$$

تعریف ۹: جفت لیاپانوف (V, W) را کاهشی با ستیغ محدود^{۱۱} (DBCBP) گویند اگر توابع غیرنزولی

$\sigma, \tau: R \geq 0 \rightarrow R \geq 0$ موجود باشند به طوری که $\lim_{s \rightarrow 0^+} \tau(s) = 0$ و برای هر شرایط

اولیه $\xi = x(0)$ با ویژگی $W(\xi) = 0$ یک عدد $a > 0$ و یک قانون کنترل u در بازه زمانی $[0, a]$

موجود باشد که $\|u\| \leq \sigma(|\xi|)$ و $V(x(a, \xi, u)) < V(\xi)$ و برای هر $0 < t < a$ داشته باشیم:

$$V(x(a, \xi, u)) \leq \tau(\xi) \quad [۱۶].$$

تعریف ۱۰: تابع $V(x)$ را یک تابع لیاپانوف کنترل ضعیف^{۱۲} یا به طور مخفف WCLF برای سیستم

(۳-۱۳) گویند اگر $W(x)$ موجود باشد که جفت لیاپانوف (V, W) کاهشی با ستیغ محدود

(DBCBP) باشد [۱۶].

طبق تعریف فوق هر CLF یک WCLF نیز می باشد.

^{۱۱} Decreasing with Bounded Control and Bounded Peaking

^{۱۲} Weak Control Lyapunov Function

تعریف ۱۱: گوییم تابع لیپانوف کنترل $V(x)$ برای سیستم (۳-۵) دارای خاصیت کنترل کوچک^{۱۳}

است، اگر قانون کنترل پیوسته $\alpha_c(x) \in R^n$ موجود باشد به طوری که:

$$L_f V(x) + L_g V(x) \alpha_c(x) < 0, \quad \forall x \neq 0. \quad (14-3)$$

تعریف ۱۲ [۱۷]: گوییم تابع پیوسته $V(x)$ یک تابع لیپانوف محلی در اطراف نقطه x^0 برای سیستم

(۳-۱۳) است اگر در یک همسایگی D از x^0 خواص زیر برقرار باشد:

(۱) $V(x)$ سره است؛ یعنی سطح $\{x \in R^n | V(x) \leq \varepsilon\}$ یک زیرمجموعه محدب از D است که

ε به اندازه کافی کوچک است.

(۲) $V(x)$ در D مثبت معین است؛ یعنی $V(x^0) = 0$ و به ازای هر $x \neq x^0$ در D داریم:

$$V(x) > 0.$$

(۳) برای هر $x \in D$ یک زمان مثبت σ موجود است که به ازای آن یک قانون کنترل ω در بازه

زمانی $[0, \sigma)$ قابل تعریف باشد، به گونه ای که $\xi = \psi(x, \omega)$ مسیر حالت شروع شده از x و

با این قانون کنترل دارای خواص زیر باشد:

$$I. \quad V(\xi(t)) \leq V(x), \quad \forall t \in [0, \sigma)$$

$$II. \quad V(\xi(\sigma)) < V(x).$$

^{۱۳} Small Control Property

فصل چهارم:

روش های یافتن CLF

در فصل گذشته به تعاریف و قضایای مربوط به توابع لیپانوف کنترل پرداختیم. اکنون این سؤال مطرح می شود که چگونه می توان برای یک سیستم نمونه تابع لیپانوف کنترل به دست آورد. یافتن CLF برای یک سیستم غیر خطی در حالت کلی یک مسئله حل نشده است [۹ و ۱۹]. اما برای رده های خاصی از سیستم ها روش هایی وجود دارد که در این فصل به آنها اشاره می شود.

۱-۴ - خطی سازی ژاکوبی [۲۵ و ۹]

در این روش با حل یک مسئله LQR برای سیستم غیر خطی می توان یک CLF در اطراف مبدا برای سیستم به دست آورد. می دانیم که مسئله حداقل سازی تابع هزینه درجه دوم،

$$\min_u J = \min_u \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt, \quad (1-4)$$

برای سیستم با معادلات

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (2-4)$$

با قانون کنترل $u = -kx$ نیاز به محاسبه پاسخ مثبت معین معادله ریکاتی زیر دارد:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0, \quad (3-4)$$

که قانون کنترل به صورت $u = -R^{-1}B^T P x$ خواهد بود. در حالت غیرخطی که سیستم با معادلات

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (4-4)$$

توصیف شده است، برای خطی سازی سیستم (۴-۴) فرض می شود:

$$B = \frac{\partial g}{\partial u} \Big|_{x=0}, \quad A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=0}.$$

که با حل معادله ریکاتی فوق می توان تابع $V(x) = x^T P x$ را به عنوان CLF برای سیستم غیر خطی فوق در نظر گرفت. اما این تابع فقط در یک ناحیه کوچک اطراف مبداء یک CLF تعریف می کند و برای شرایط اولیه با فاصله زیاد از مبداء مناسب برای طراحی نیست.

۴-۲- خطی سازی پسخور [۲۵ و ۴]

در این روش ابتدا سیستم را به کمک پسخور حالت خطی سازی کرده و سپس برای مدل خطی بدست آمده، تابع لیاپانوف کنترل طراحی می شود. مزیت روش سادگی آن است، اما فقط برای سیستم های خطی شدنی به کمک پسخور قابل اعمال است.

۴-۳- روش گام به عقب^۱ [۲ و ۳]

این روش در سیستم های به شکل پسخور اکید^۲، تابع لیاپانوف کنترل مقاوم^۳ (RCLF) را به دست می دهد که همان CLF برای سیستم بدون اغتشاش معادل محسوب می شود. برای توصیف این روش مهم لازم است ابتدا برخی مفاهیم پیش زمینه ای در این ارتباط توضیح داده شود.

تعریف ۱: یک نگاشت مجموعه-مقدار^۴، نگاشتی از مجموعه ناتهی X به زیرمجموعه های یک مجموعه ناتهی دیگر Z است. نمایش $F: X \rightsquigarrow Z$ یک نگاشت مجموعه-مقدار F از X به زیرمجموعه های Z را نشان می دهد. یک نگاشت مجموعه-مقدار $F: X \rightsquigarrow Z$ را می توان به صورت نگاشت تک-مقدار $F: X \rightarrow 2^Z$ در نظر گرفت که در آن 2^Z نمایش مجموعه توانی همه زیرمجموعه های Z است.

^۱ Back-Stepping

^۲ Strict Feedback

^۳ Robust Control Lyapunov Function

^۴ Set-valued Map

۴-۳-۱- توصیف سیستم [۲]

چهار فضای اقلیدسی با بعد محدود در نظر می گیریم: فضای حالت \mathcal{X} ، فضای کنترل \mathcal{U} ، فضای

اغتشاش \mathcal{W} و فضای اندازه گیری \mathcal{Y} . با فرض تابع $f: \mathcal{X} \times \mathcal{U} \times \mathcal{W} \times R \rightarrow \mathcal{X}$ معادله دیفرانسیل

$$\dot{x} = f(x, u, \omega, t), \quad (۵-۴)$$

که در آن $x \in \mathcal{X}$ متغیر حالت، $u \in \mathcal{U}$ ورودی کنترل، $\omega \in \mathcal{W}$ ورودی اغتشاش، و $t \in R$ متغیر مستقل زمانی می باشد. فرض بر این است که همراه با این معادله، قيود مجموعه- مقدار اندازه گیری های مجاز، اغتشاش های مجاز، و کنترل های مجاز تعریف شده اند.

یک اندازه گیری برای معادله (۵-۴)، تابع $y: \mathcal{X} \times R \rightarrow \mathcal{Y}$ است به طوری که $y(\cdot, t)$ به ازای هر زمان ثابت $t \in R$ پیوسته و $y(x, \cdot)$ به ازای هر حالت ثابت $x \in \mathcal{X}$ ، L_∞ محلی باشد. یک تابع را L_∞ محلی گوئیم، هرگاه در همسایگی هر نقطه ذاتاً محدود باشد. برای یک قید اندازه گیری $Y: \mathcal{X} \times R \rightsquigarrow \mathcal{Y}$ ، می گوئیم $y(x, t)$ مجاز است، هرگاه به ازای همه $(x, t) \in \mathcal{X} \times R$ داشته باشیم: $y(x, t) \in Y(x, t)$. این نحوه عمومیت بخشیدن به اندازه گیری، موجب در نظر گرفتن اثر نامعینی های اندازه گیری مانند سنسورهای غیرایده آل می شود؛ زیرا ممکن است مسیره های اندازه گیری های مجاز و متفاوتی متناظر با فقط یک مسیر حالت وجود داشته باشد.

یک اغتشاش برای معادله (۵-۴) یک تابع $\omega: \mathcal{X} \times \mathcal{U} \times R \rightarrow \mathcal{W}$ است به طوری که $\omega(\cdot, \cdot, t)$ برای هر زمان ثابت $t \in R$ پیوسته، و $\omega(x, u, \cdot)$ برای هر ثابت $(x, u) \in \mathcal{X} \times \mathcal{U}$ ، L_∞ محلی است. برای یک قید اغتشاش $W: \mathcal{X} \times \mathcal{U} \times R \rightsquigarrow \mathcal{W}$ می گوئیم اغتشاش $\omega(x, u, t)$ مجاز است، هرگاه به ازای همه $(x, u, t) \in \mathcal{X} \times \mathcal{U} \times R$ داشته باشیم: $\omega(x, u, t) \in W(x, u, t)$.

یک کنترل برای سیستم (۵-۴) تابع $u: \mathcal{Y} \times R \rightarrow \mathcal{U}$ است به طوری که $u(\cdot, t)$ به ازای همه زمان های ثابت $t \in R$ پیوسته، و $u(y, \cdot)$ به ازای هر $y \in \mathcal{Y}$ ثابت، L_∞ محلی است. برای یک

قید کنترلی $U: \mathcal{Y} \times R \rightsquigarrow \mathcal{U}$ می‌گوییم کنترل $u(y, t)$ مجاز است هرگاه به ازای همه $(y, t) \in \mathcal{Y} \times R$ داشته باشیم: $u(y, t) \in U(y, t)$ و $u(y, t)$ در (y, t) توأمان پیوسته باشد. تابع f همراه با سه قید مجموعه-مقدار U, W, Y و سیستم $\Sigma = (f, U, W, Y)$ را می‌سازند. منظور از پاسخ Σ ، پاسخ $x(t)$ به شرایط اولیه در مسأله

$$\dot{x} = f(x, u(y(x, t), t), \omega(x, u(y(x, t), t), t), t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (6-4)$$

که در آن اندازه‌گیری $y(x, t)$ ، اغتشاش $\omega(x, u, t)$ ، کنترل $u(y, t)$ و یک شرط اولیه $(x_0, t_0) \in \mathcal{X} \times R$ را در اختیار داشته باشیم.

می‌گوییم سیستم $\Sigma = (f, U, W, Y)$ تغییرناپذیر با زمان است، اگر نگاشت‌های f, U, W و Y ، همگی مستقل از t باشند. در این حالت در تمام روابط از ذکر t صرف‌نظر می‌کنیم.

۴-۳-۲- تعاریف پایداری [۲]

تعریف ۱: یک کنترل برای سیستم Σ قرار دهید و $\Omega \in \mathcal{X}$ را یک مجموعه فشرده با فرض $0 \in \mathcal{X}$ در نظر بگیرید. پاسخ‌های Σ ، پایدار مجانبی یکنواخت جامع مقاوم نسبت به Ω (GUAS- Ω) نامیده می‌شود، اگر $\beta \in \mathcal{KL}$ وجود داشته باشد، به طوری که برای همه اندازه‌گیری‌های مجاز، اغتشاش‌های مجاز، و شرایط اولیه $(x_0, t_0) \in \mathcal{X} \times R$ همه پاسخ‌های $x(t)$ به ازای همه $t \geq t_0$ وجود داشته باشد و رابطه زیر نیز به ازای همه $t \geq t_0$ برقرار باشد:

$$|x(t)|_{\Omega} \leq \beta(|x_0|_{\Omega}, t - t_0), \quad (7-4)$$

همچنین پاسخ‌های Σ ، RGUAS است هرگاه $\{0\}$ -RGUAS باشد.

توجه کنید که $\Omega - \text{RGUAS}$ نشان می دهد مجموعه مانده^۵ Ω مثبت (مقاوم) تغییرناپذیر است. به طور خاص RGUAS (با $\Omega = \{0\}$) نشان می دهد $0 \in \mathcal{X}$ برای هر اندازه گیری مجاز و اغتشاش مجاز یک نقطه تعادل است.

مسئله پایدارسازی مقاوم برای یک سیستم Σ که از تعریف ۱ نتیجه می شود، ایجاد یک کنترل مجاز به گونه ای است که پاسخ های Σ برای مجموعه مانده Ω ، $\Omega - \text{RGUAS}$ باشد. برحسب این که تا چه حد می توانیم این مجموعه Ω را کوچک کنیم، سه نوع قابلیت پایدارسازی مقاوم معرفی می شود:

تعریف ۲: سیستم Σ پایدارشونده جانبی مقاوم^۶ نامیده می شود، هنگامی که یک کنترل مجاز وجود داشته باشد، به گونه ای که پاسخ های Σ ، RGUAS باشند. سیستم Σ پایدارشونده کاربردی مقاوم^۷ نام دارد هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ یک کنترل مجاز و یک مجموعه فشرده $\Omega \subset \mathcal{X}$ با شرط $0 \in \Omega \subset \varepsilon B$ وجود داشته باشد، به گونه ای که پاسخ های Σ ، $\Omega - \text{RGUAS}$ باشد. سیستم Σ پایدارشونده مقاوم^۸ است، هرگاه یک کنترل مجاز و یک مجموعه فشرده $\Omega \subset \mathcal{X}$ با شرط $0 \in \Omega$ وجود داشته باشد، به گونه ای که پاسخ های Σ ، $\Omega - \text{RGUAS}$ باشد.

۴-۳-۳- تابع لیاپانوف کنترل مقاوم [۲ و ۳]

تعریف ۱: یک تابع $V \in \mathcal{V}(x)$ یک تابع لیاپانوف کنترل مقاوم (RCLF) برای سیستم Σ نام دارد، هرگاه وجود داشته باشد $c_V \in R_+$ و $\alpha_V \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ به گونه ای که به ازای همه $\gamma \in \mathcal{Y}$ ، $t \in R$ و $c > c_V$ رابطه زیر برقرار باشد:

^۵ Residual

^۶ Robustly Asymptotically Stabilizable

^۷ Robustly Practically Stabilizable

^۸ Robustly Stabilizable

$$\inf_{u \in U(y,t)} \sup_{x \in Q(y,c,t)} \sup_{\omega \in W(x,u,t)} [L_f V(x,u,\omega,t) + \alpha_V(x,t)] < 0. \quad (۸-۴)$$

مفهوم RCLF در چندین جهت CLF را تعمیم می دهد. اول این که ورودی های کنترل و اغتشاش در تعریف بیان می شوند. ثانیاً این تعریف پسخور اندازه گیری و پسخور حالت را پوشش می دهد و تعریف CLF خروجی^۹ که در برخی مراجع عنوان شده است را تعمیم می دهد. در انتها نیز پارامتر c_V در نظر گرفتن هر سه نوع پایدارشوندگی به جای پایدارشوندگی مجانبی صرف را، در تعریف ۲ زیرفصل پیشین پوشش می دهد.

در حالی که تنها حالت خاص پسخور حالت را برای سیستم های تغییرناپذیر با زمان در نظر می گیریم، به تعریف ساده تری از RCLF دست می یابیم:

تعریف ۲: فرض کنید Σ تغییرناپذیر با زمان، $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ ، و به ازای همه $x \in \mathcal{X}$ داشته باشیم: $Y(x) = \{x\}$. آنگاه یک تابع تغییرناپذیر با زمان $V \in \mathcal{V}(x)$ یک RCLF برای سیستم Σ است، اگر و فقط اگر وجود داشته باشد $c_V \in R_+$ و یک تابع تغییرناپذیر با زمان $\alpha_V \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ به گونه ای که هرگاه $V(x) > c_V$ است، رابطه زیر برقرار باشد:

$$\inf_{u \in U(x)} \sup_{\omega \in W(x,u)} [L_f V(x,u,\omega) + \alpha_V(x)] < 0. \quad (۹-۴)$$

نامساوی (۹-۴) را می توان به صورت زیر تفسیر نمود: برای هر x ثابت، یک مقدار مجاز u برای کنترل وجود دارد به گونه ای که مشتق لیاپانوف برای هر مقدار اغتشاش مجاز ω منفی شود. این تعریف یک تعمیم طبیعی CLF برای سیستم های با ورودی های اغتشاش است.

^۹ Output CLF

۴-۳-۴- شرط تطابق^{۱۰} [۲]

RCLF برای سیستم‌هایی تعریف می‌شود که بسیار عمومی‌تر از سیستم‌های مرتبط در تعریف CLF هستند. به طور خاص، ورودی‌های اغتشاش، پسخور اندازه‌گیری و قیود کنترلی غیرثابت در تعریف RCLF مدنظر قرار می‌گیرند. آنچه از منظر ریاضیات حائز اهمیت می‌باشد، پاسخ به این سوال است که آیا RCLF و CLF برای دسته کوچکی از سیستم‌ها که برای آن‌ها می‌توان CLF تعریف کرد، با یکدیگر تطابق دارند یا خیر. برای این منظور یک سیستم تغییرناپذیر با زمان Σ با اندازه‌گیری حالت کامل $(Y(x) = \{x\})$ به ازای همه $x \in \mathcal{X}$ ، یک قید کنترل ثابت $(U(x) \equiv U)$ ، و بدون ورودی اغتشاش در نظر می‌گیریم. از فصل دو می‌دانیم که تابع (تغییرناپذیر با زمان) $V \in \mathcal{V}(x)$ یک CLF برای $\dot{x} = f(x, u)$ است هرگاه رابطه زیر برقرار باشد:

$$x \neq 0 \Rightarrow \inf_{u \in U} L_f V(x, u) < 0 \quad (10-4)$$

از رابطه (۹-۴) واضح است که هر RCLF برای این سیستم (با $c_V = 0$) یک CLF نیز هست. بنابراین وجود RCLF، معادل با وجود CLF برای سیستم بدون اغتشاش متناظر است. اما عکس این مطلب در حالت کلی برقرار نیست؛ یعنی هر CLF برای سیستم معادلی که به آن اغتشاش افزوده شود، یک RCLF محسوب نمی‌شود. تنها زمانی این حالت برقرار است که ورودی اغتشاش با ورودی کنترل تطابق داشته باشد؛ یعنی هنگامی که اغتشاش ω از همان کانال ورودی کنترل u وارد شود و در نتیجه اگر یک سیگنال اندازه‌گیری شده باشد، بتواند توسط سیگنال کنترل حذف شود. سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = F(x) + G(x)u + H(x)\omega \quad (11-4)$$

^{۱۰} Matching Condition

که در آن F ، G و H توابع پیوسته شناخته شده، u ورودی کنترل و ω ورودی اغتشاش است. فرض می‌کنیم سیستم نامی $\dot{x} = F(x) + G(x)u$ پایدارشونده است و برای سادگی فرض می‌شود حالت‌ها برای پسخور موجود باشند ($Y(x) = \{x\}$)، هیچ قیدی روی کنترل نباشد ($U \equiv \mathcal{U}$)، و قید اغتشاش توپ بسته واحد ($W \equiv B$) است. فرض می‌کنیم یک CLF برای سیستم نامی شناخته شده باشد. در این صورت اگر $H(x)$ به ازای یک تابع پیوسته $E(x)$ شرط ساختاری $H(x) = G(x)E(x)$ را برآورده نماید، تابع لیپانوف کنترل موجود برای سیستم غیرنامی نیز یک RCLF محسوب می‌شود. این شرط ساختاری شرط تطابق خوانده می‌شود. تحت این شرط سیستم (۴-۱۱) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\dot{x} = F(x) + G(x)[u + E(x)\omega] \quad (۴-۱۲)$$

یعنی ورودی اغتشاش از همان کانال کنترل وارد می‌شود. برای مثال از دو سیستم زیر

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u + x_1^3 \omega \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1^3 \omega \\ \dot{x}_2 = u \end{cases}$$

تنها سیستم سمت چپ شرط تطابق را برآورده می‌کند.

۴-۳-۵- سیستم‌های پسخور اکید^{۱۱} [۲]

سیستم مرتبه n زیر را در نظر بگیرید :

$$\dot{x} = F(x, \omega) + G(x, \omega)u \quad (۴-۱۳)$$

که در آن F و G توابع پیوسته می‌باشند. فرض بر این است که پسخور حالت ($Y(x) = \{x\}$)، و یک ورودی کنترل نامقید ($U(x) \equiv \mathcal{U} = R$) وجود دارد و قید اغتشاش $W(x)$ مستقل از u است. فرض می‌کنیم F و G را می‌توان به صورت زیر نوشت:

^{۱۱} Strict Feedback Systems

$$F(x, \omega) = \begin{bmatrix} \varphi_{1,1}(x, \omega) & \varphi_{1,2}(x, \omega) & \cdot & \cdots & \cdot \\ \varphi_{2,1}(x, \omega) & \varphi_{2,2}(x, \omega) & \varphi_{2,3}(x, \omega) & \cdots & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n-1,1}(x, \omega) & \varphi_{n-1,2}(x, \omega) & \varphi_{n-1,3}(x, \omega) & \cdots & \varphi_{n-1,n}(x, \omega) \\ \varphi_{n,1}(x, \omega) & \varphi_{n,2}(x, \omega) & \varphi_{n,3}(x, \omega) & \cdots & \varphi_{nn}(x, \omega) \end{bmatrix} x \\ + F(\cdot, \omega),$$

$$G(x, \omega) = \begin{bmatrix} \cdot \\ \vdots \\ \cdot \\ \varphi_{n,n+1}(x, \omega) \end{bmatrix}, \quad (14-4)$$

که در آن توابع اسکالر پیوسته هستند و هریک تنها تابعی از ω و ترکیب حالت از x_1 تا x_i می باشند، یعنی به ازای $i = 1, 2, \dots, n$ و $j = 1, 2, \dots, i + 1$ داریم:

$$\varphi_{ij}(x, \omega) = \varphi_{ij}(x_1, \dots, x_i, \omega), \quad (15-4)$$

و در نهایت فرض بر این است که به ازای همه $\omega \in B$ و $x_1, \dots, x_i \in R$ برای $i = 1, 2, \dots, n$ داشته باشیم:

$$\varphi_{ij}(x_1, \dots, x_i, \omega) \neq 0, \quad (16-4)$$

شرط (16-4) کنترل پذیری سیستم (13-4) را به ازای هر اغتشاش ثابت $\omega \in B$ تضمین می نماید. سیستمی که شرایط (14-4) تا (16-4) را برقرار نماید سیستم پسخور اکید نامیده می شود. هرگاه سیستمی را بتوان به شکل پسخور اکید تبدیل کرد، یک RCLF به روش گام به عقب برای آن به دست می آید. برخی از سیستم ها با آزمایشات هندسی و تبدیل مختصات به شکل پسخور اکید تبدیل می شوند، اما در حالت کلی ممکن است استفاده از این روش ها برای به دست آوردن شکل پسخور اکید بلااستفاده باشد. برای مثال سیستم زیر

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \frac{u|u|x_1^3}{1+u^2}, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= u. \end{aligned} \quad (17-4)$$

به دلیل وجود u در معادله اول به شکل پسخور اکید نیست و حتی به شکل کلی سیستم های افین نسبت به ورودی کنترل نیز نیست. به همین دلیل آزمایشات هندسی روی این سیستم بلااستفاده است. با وجود این سیستم مذکور را می توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + x_1^3 \omega, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= u. \end{aligned} \quad (18-4)$$

که در آن ω ورودی اغتشاش با قید $\omega \in [-1, 1]$ است. در واقع $\omega = u|u|(1+u^2)^{-1}$ برحسب تعاریف پیشین یک اغتشاش مجاز محسوب می شود و برای (18-4) یک RCLF به روش گام به عقب وجود دارد.

نکته: در حالت کلی سیستم های به شکل پسخور اکید، شرط تطابق را در روش طراحی مجدد لیاپانوف برآورده نمی کنند. در این حالت شرط تطابق لازم می دارد توابع φ_{ij} به ازای $1 \leq i \leq n-1$ مستقل از اغتشاش ω باشند.

۴-۳-۶- روش طراحی گام به عقب [۲ و ۳]

اگر فضای حالت \mathcal{X} با استفاده از توابع اسکالر هموار $s_1(x_1)$ ، $s_2(x_1, x_2)$ ، ...، $s_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})$ افزایش شود، که در آن هر تابع s_i تنها به ترکیب حالت های x_1 تا x_i بستگی دارد، می توان بردار حالت تبدیل یافته ای به صورت زیر تعریف نمود:

$$\begin{aligned}
z_1 &:= x_1, \\
z_2 &:= x_2 - z_1 s_1(x_1), \\
z_3 &:= x_3 - z_2 s_2(x_1, x_2), \\
&\vdots \\
z_n &:= x_n - z_{n-1} s_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}).
\end{aligned} \tag{۱۹-۴}$$

این تبدیل و معکوس آن به شکل ماتریسی به صورت زیر است:

$$z := S(x)x \tag{۲۰-۴}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ -s_1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ s_1 s_2 & -s_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -s_1 s_2 s_3 & s_2 s_3 & -s_3 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \pm s_1 \cdots s_{n-1} & \mp s_2 \cdots s_{n-1} & \pm s_3 \cdots s_{n-1} & \cdots & -s_{n-1} & 1 \end{bmatrix} x,$$

و

$$x = S^{-1}(x)z = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ s_1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & s_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & s_{n-1} & 1 \end{bmatrix} z, \tag{۲۱-۴}$$

علامت های سطر آخر ماتریس رابطه (۲۰-۴) به زوج یا فرد بودن بعد n در بردار حالت بستگی دارد.

قضیه ۱: اگر سیستم (۱۳-۴) به شکل پسخور اکید باشد، آنگاه توابع مناسب s_i وجود دارند به گونه ای که $V(x) := z^T z$ یک RCLF برای سیستم است. علاوه بر این، اگر $F(\cdot, \omega) = 0$ باشد (یعنی اغتشاش در نقطه تعادل $x = 0$ تأثیرگذار نباشد)، آنگاه V خاصیت کنترل کوچک را برآورده می نماید (در این حالت قانون کنترل به جای همگرایی به یک مجموعه مانده، همگرایی به $x = 0$ را تضمین می کند).

اثبات این قضیه و روند بازگشتی نتیجه شده از آن برای یافتن توابع s_i ، به تفصیل در مرجع [۲] آمده است.

۴-۴- روش پیش خوراند^{۱۲} [۲۵ و مراجع ۱۰، ۳۴، ۶۰، ۷۳، ۷۵ و ۷۷ از آن]

این روش طراحی برای سیستم های به شکل پیش خور زیر قابل اعمال است:

$$\begin{cases} \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, u), \\ \vdots \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, u), \\ \dot{x}_1 = f_1(x_1, u). \end{cases} \quad (۲۲-۴)$$

سیستم های به صورت پیش خور در حالت کلی قابل خطی سازی به کمک پسخور نیستند. همان طور که در معادلات (۲۲-۴) دیده می شود مشتق هر متغیر حالت به متغیرهای با اندیس کمتر از خودش و ورودی بستگی دارد.

به طور خلاصه در این روش اول تابع لیاپانوف برای زیرسیستم x_1 طراحی شده و کنترل کننده از روی آن محاسبه می گردد و سپس تابع لیاپانوف با افزودن جملاتی برای کل سیستم مرحله به مرحله تعمیم یافته و کنترل کننده کلی محاسبه می شود.

روش طراحی پیش خوراند برای فرم های زیر که کلی تر از فرم پیش خور است تعمیم یافته

است [۲۰ و ۲۱]:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + h(x, \xi) + g_1(x, \xi)u, & h(x, 0) = f(0) = 0 \\ \dot{\xi} = A\xi + bu. \end{cases} \quad (۲۳-۴)$$

و

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + h(x, \xi) + g_2(x, \xi, y), \\ \dot{\xi} = A\xi + by, \\ \dot{y} = u. \end{cases} \quad (۲۴-۴)$$

همان طور که مشاهده می شود، در این فرم ها دو زیرسیستم طوری هستند که دومی داخل اولی

رفته است. در سیستم (۲۳-۴) ابتدا برای زیرسیستم x تابع لیاپانوف $W(x)$ و برای زیرسیستم ξ تابع

^{۱۲} Forwarding

لیاپانوف $\xi^T P \xi$ تعریف می شود. جمع این دو تابع الزاماً برای کل سیستم تابع لیاپانوف نیست، بلکه یک جمله ترکیبی $\psi(x, \xi)$ به صورت زیر باید به آن ها اضافه شود (P پاسخ مثبت معین معادله ریکاتی $A^T P + PA = -Q$ است):

$$V_0(x, \xi) = W(x) + \psi(x, \xi) + \xi^T P \xi. \quad (25-4)$$

در [۲۰] $\psi(x, \xi)$ به صورت زیر برای سیستم (۳-۲۳) ارائه شده است:

$$\psi(x, \xi) = \int_0^\infty \frac{\partial W}{\partial x}(\tilde{x}(s; x, \xi)h(\tilde{x}(s; x, \xi)), \tilde{\xi}(s; x)) ds, \quad (26-4)$$

که در آن $\tilde{x}(s; x, \xi)$ و $\tilde{\xi}(s; x)$ پاسخ سیستم (۴-۲۳) با شروع از نقطه اولیه (x, ξ) است.

می توان ثابت نمود که تحت شرایط زیر $\psi(x, \xi)$ موجود بوده و پیوسته و مثبت معین و نامحدود شعاعی است:

(۱)

γ_1 و γ_2 از رده k مشتق پذیر در مبدأ هستند و $\| \cdot \|$ نشانگر نرم-۲ بردار است.

(۲) ثوابت مثبت K و c موجودند که تابع $W(x)$ علاوه بر نامساوی $L_f W(x) \leq 0$ (که برای پایداری جامع $\dot{x} = f(x)$ لازم است) شرط زیر را نیز برقرار کند:

$$\|x\| > c \Rightarrow \left\| \frac{\partial W}{\partial x} \right\| \|x\| \leq kW(x),$$

با محاسبه $\psi(x, \xi)$ برای سیستم (۴-۲۴) تابع لیاپانوف را به صورت زیر می توان تعریف نمود:

$$V_1(x, \xi, y) = W(x) + \psi(x, \xi) + \xi^T P \xi + \frac{1}{p} y^2, \quad (27-4)$$

که بر اساس آن قانون کنترل

$$u(x, \xi, y) = \frac{-\partial V_1}{\partial x} g_r(x, \xi, y) - \frac{\partial V_1}{\partial \xi} b - y, \quad (28-4)$$

سیستم (۲۴-۳) را پایدار جامع خواهد نمود؛ زیرا

$$\dot{V}_1(x, \xi, y) \leq L_f W(x) - \xi^T Q \xi - y^2 \leq 0. \quad (29-4)$$

در [۲۲] روش پیش خوراند برای سیستم های به فرم زیر اعمال شده است:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_2, x_3, \dots, x_n) + g_1(x_2, x_3, \dots, x_n)u, \\ \dot{x}_2 = f_2(x_3, \dots, x_n) + g_2(x_3, \dots, x_n)u, \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = f_{n-1}(x_n) + g_{n-1}(x_n)u, \\ \dot{x}_n = g_n u. \end{cases} \quad (30-4)$$

با فرض این که توابع $f = (f_1, \dots, f_{n-1})$ و $g = (g_1, \dots, g_n)$ هموار^{۱۳} بوده و

$f(\cdot) = 0$ و $g_n \neq 0$ است. علاوه بر این سیستم خطی شده حول مبدأ پایدارشونده می باشد (و چون

سیستم به فرم پیشخور است، کنترل پذیر نیز می باشد).

روش پیش خوراند به نوعی دوگان روش گام به عقب است. مقایسه فرم سیستم های پیشخور اکید

و پیشخور موید این مطلب است.

۴-۵- معادله ریکاتی ایستا^{۱۴} (FRE) (۹ و ۲۵)

ایده اصلی این روش که گاهی به آن "معادله ریکاتی وابسته به حالت" گویند عبارت است از حل

سرخط معادله ریکاتی در هر لحظه از زمان برای سیستم توصیف شده با معادله

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)u, \quad (31-4)$$

معادله ریکاتی زیر در یک نقطه بخصوص $x = x$ حل می شود:

^{۱۳} Smooth

^{۱۴} Frozen Riccati Equation

$$A^T(x.)P(x.) + P(x.)A(x.) - P(x.)g^T(x.)R^{-1}g(x.)P(x.) + Q = 0, \quad (۳۲-۴)$$

که قانون کنترل از رابطه $u = -R^{-1}g^T(x)P(x)x$ محاسبه می شود. در این جا تابع $V(x) = x^T P(x)x$ یک CLF محلی خواهد بود. اگرچه اثبات محکمی برای پایداری سیستم حلقه بسته وجود ندارد، اما سادگی روش باعث شده است که در بعضی از کاربردها از آن استفاده شود.

مهم ترین مشکل در این روش نحوه انتخاب نمایش معادله (۳۱-۴) است. نمایش (۳۱-۴)

برای یک سیستم یکتا نیست و از طرفی مشخص نیست کدام روش عملکرد مطلوب را به دست می دهد.

۴-۶- پارامتر خطی متغیر^{۱۵} (LPV) [۲۵ و ۱۲]

این روش برای سیستم های پارامتری به صورت

$$\dot{x} = A(\rho(x))x + B(\rho(x))u, \quad (۳۳-۴)$$

کاربرد دارد و مبتنی بر نامساوی های ماتریسی است. ρ یک پارامتر وابسته به x است که در مجموعه زیر قرار دارد:

$$F_\rho^v = \{\rho \in C^1(R^+, R^m): \rho \in P, \underline{v}_i(\rho) \leq \dot{\rho}_i \leq \bar{v}_i(\rho), i = 1, 2, \dots, m\}, \quad (۳۴-۴)$$

که $P \in R^m$ یک مجموعه فشرده است.

قضیه: اگر یک ماتریس مثبت یعنی $X(\rho) \in P$ طوری پیدا شود که به ازاء هر $\rho \in P$ نامساوی های زیر برقرار باشند:

$$\begin{bmatrix} -\sum \bar{v}_i(\rho) \frac{\partial X}{\partial \rho_i} + A(\rho)X(\rho) + X(\rho)A^T(\rho) - B(\rho)B^T(\rho) & X(\rho)C^T(\rho) \\ C(\rho)X(\rho) & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (۳۵-۴)$$

^{۱۵} Linear Parameter Varying

که در آن $C(p) = Q^{1/2}(\rho(x))$ می باشد و اندیس بالا و پایین در نامساوی (۳۵-۴) به معنی همه جمع های ممکن \underline{V}_i و \overline{V}_i ها است (در حقیقت باید 2^m نامساوی بررسی شود)، آنگاه سیستم حلقه بسته با قانون کنترل

$$u = -B^T(\rho(x)X^{-1}\rho(x))x, \quad (۳۶-۴)$$

پایدار بوده و $V(x) = x^T X^{-1}(\rho(x))x$ یک CLF است.

۴-۷- روش جدید یافتن CLF [۲۵]

سیستم غیرخطی

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (۳۷-۴)$$

را در نظر می گیریم که در آن $x \in R^n$ بردار حالت و $u \in R^m$ ورودی هستند و داریم $g(x) \in R^{n.m}$ و $f(x) \in R^n$. سوال این است که تحت چه شرایطی $V(x)$ یک CLF برای سیستم غیرخطی

$$\dot{x} = A(x)f(x) + B(x)g(x)u, \quad (۳۸-۴)$$

می باشد که در آن $A(x) \in R^{n.n}$ و $B(x) \in R^{n.n}$ ماتریس هایی با درایه های پیوسته می باشند.

لم ۱ [۲۵]: اگر $V(x)$ یک CLF هموار برای سیستم (۳۷-۴) باشد ، و یک تابع مثبت $S(x)$ موجود

باشد که در ناحیه ای که $\nabla V(x)A(x)f(x) > 0$ است نامساوی

$$\frac{\|\nabla V(x)B(x)g(x)\|^2}{\nabla V(x)A(x)f(x)} \geq S(x), \quad (۳۹-۴)$$

برقرار باشد، آنگاه $V(x)$ برای سیستم (۳۸-۴) نیز یک CLF است.

نتیجه: اگر برای هر x نامساوی $\nabla V(x)A(x)f(x) \leq 0$ برقرار باشد، و یا برای هر $x \neq 0$ نامساوی $\|\nabla V(x)B(x)g(x)\| \neq 0$ برقرار باشد، آنگاه $V(x)$ یک CLF برای سیستم (۴-۳۸) است.

لم ۲ [۲۵]: اگر در حالت خاص $A(x)$ یک اسکالر مثبت باشد ($A(x) = a(x) \geq 0$)، و $V(x)$ یک CLF برای سیستم (۴-۳۷) باشد و یک تابع مثبت $S(x)$ موجود باشد که در ناحیه ای که $\|\nabla V(x)g(x)\|a(x) > 0$ نامساوی

$$\frac{\|\nabla V(x)B(x)g(x)\|^2}{\|\nabla V(x)g(x)\|^2 a(x)} \underline{\sigma}_{R(x)} \geq S(x), \quad (۴۰-۳)$$

را برقرار کند، آنگاه $V(x)$ یک CLF برای سیستم (۴-۳۸) خواهد بود. در نامساوی (۴۰-۴) $\underline{\sigma}_{R(x)}$ کوچک ترین مقدار استثنایی ماتریس $R(x)$ در تابعی هزینه LQR است.

نکات [۲۵]:

نکته ۱: بر اساس لم های ۱ و ۲ ممکن است $V(x)$ یک تابع لیاپانوف کنترل ضعیف (WCLF) برای سیستم (۴-۳۸) باشد.

نکته ۲: اگر $V(x)$ برای سیستم (۴-۳۷) یک CLF باشد، آنگاه برای سیستم

$$\dot{x} = a(x)f(x) + g(x)u, \quad (۴۱-۴)$$

که $a(x)$ یک اسکالر است یک CLF خواهد بود، اگر در ناحیه ای که $x \neq 0$ و $a(x)\nabla V(x)f(x) \geq 0$ عبارت $\nabla V(x)g(x)$ غیر صفر باشد. علاوه بر این وجود CLF برای سیستم $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ هیچ دلیلی برای وجود CLF برای سیستم $\dot{x} = a(x)f(x) + g(x)u$ که در آن $a(x)$ یک اسکالر است نمی شود.

نکته ۳: توجه به این نکته مهم است که لم های ۱ و ۲ شرط کافی را بیان می کنند که تحت آن $V(x)$ یک CLF برای سیستم (۳۸-۴) باشد، وگرنه برای بررسی این که $V(x)$ (که برای سیستم ساده شده (۳۷-۴) یک CLF است و آن را به راحتی به دست آورده ایم) برای سیستم (۳۸-۳) نیز یک CLF است، گاهی استفاده از تعریف CLF برای خود سیستم (۳۸-۴) راحت تر است.

مثال ۱ [۲۵]: سیستم غیرخطی زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 x_2 + x_1 u, \\ \dot{x}_2 = x_2^2 + x_3 + x_2 u, \\ \dot{x}_3 = x_2^2 + x_3 u. \end{cases} \quad (۴۲-۴)$$

این سیستم به صورت زیر قابل نمایش است:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & x_2 + 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & x_1 \\ \cdot & \cdot & x_2 \\ \cdot & \cdot & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad (۴۳-۴)$$

با فرض

$$A(x) = \begin{bmatrix} x_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & x_2 + 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & x_2 \end{bmatrix}, \quad B(x) = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & x_1 \\ \cdot & \cdot & x_2 \\ \cdot & \cdot & x_3 \end{bmatrix}, \quad (۴۴-۴)$$

یافتن CLF برای سیستم (۴۲-۴) به یافتن CLF برای سیستم زیر تبدیل می شود:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix} u. \quad (۴۵-۴)$$

یک CLF مناسب برای سیستم (۴۵-۴) عبارت است از:

$$V(x) = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} (x_1 + x_2)^2 + \frac{1}{2} (x_1 + 2x_2 + x_3)^2, \quad (۴۶-۴)$$

که داریم:

$$\nabla V(x)B(x)g(x) = 3x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 > 0, \quad (47-4)$$

بنابراین $V(x)$ برای سیستم (42-4) نیز یک CLF است.

مثال ۲ [۲۵]: سیستم غیرخطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1 \frac{x_3^2}{1+x_3^2}, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2, \\ \dot{x}_3 = x_2x_3 + x_3u, \end{cases} \quad (48-4)$$

این سیستم به صورت زیر قابل نمایش است:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{x_3^2}{1+x_3^2} & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad (49-4)$$

بنابراین، یافتن CLF برای سیستم (48-4) به یافتن CLF برای سیستم زیر منجر می شود:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1, \\ \dot{x}_2 = -x_2, \\ \dot{x}_3 = x_3 + u, \end{cases} \quad (50-4)$$

یک CLF مناسب برای سیستم (50-4) عبارت است از

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_3^2), \quad (51-4)$$

که داریم:

$$\nabla V(x)B(x)g(x) = x_3^2. \quad (52-4)$$

هرچند $\nabla V(x)B(x)g(x)$ در $x_3 = 0$ برابر صفر است، اما می توان نشان داد که روی این

سطح $\nabla V(x)A(x)f(x) \leq 0$ است. بنابراین براساس نتیجه لم ۱، $V(x)$ یک CLF برای سیستم

(48-4) است.

فصل پنجم:

کنترل بهینه معکوس

به دلیل حاشیه پایداری مناسب، غالباً طراحی کنترل پسخور پایدارساز (مقاوم) که نسبت به تابعی هزینه معنی داری نیز بهینه باشد، مطلوب است. در عین حال در مسائل کنترل بهینه برای اکسترمم کردن تابعی هزینه^۱، لازم است معادله دیفرانسیل جزئی هامیلتون- ژاکوبی- بلمن^۲ (HJB) یا هامیلتون-ژاکوبی- ایساکز^۳ (HJI) (در صورت حضور نامعینی) برای یافتن یک تابع مثبت معین هموار از حالت های سیستم، حل شود که تابع مقدار^۴ نام دارد و خود در ادامه یک قانون کنترل پسخور حالت پیوسته به دست می دهد که منجر به پایداری و بهینگی عملکرد سیستم نسبت به مفهوم تابعی هزینه و (در حالت HJI) مقاومت^۵ آن نسبت به نامعینی خواهد شد. از طرفی معادله HJB یا HJI در حالت کلی حل بسته دقیقی ندارد و پاسخ آن برای برخی از سیستم ها با محاسبات دشوار قابل دستیابی است. برای سیستم های با مرتبه بیشتر از دو، هیچ روش عملی برای حل معادله HJB وجود ندارد. اغلب روش های تقریبی تنها نتایج محلی به دست می دهند، به این معنی که نتایج به دست آمده تنها برای محدوده ای معتبر هستند که اندازه آن نیز می بایست توسط محاسبات اضافی تخمین زده شود[۲].

همان گونه که پیشتر عنوان شد، وجود تابع لیاپانوف کنترل به منزله پایداری پذیری است. از طرفی با در اختیار داشتن یک CLF از سیستم، می توان کنترل کننده های پایدارسازی طراحی نمود که بهینگی عملکرد سیستم را تضمین نمایند. در حقیقت مزیت اساسی CLF، علاوه بر اثبات پایداری پذیری سیستم ها، استفاده از آن در قانون های کنترل پایدارساز بهینه معکوس^۶ است. با به کارگیری ایده کنترل بهینه معکوس، از حل معادله HJB یا HJI اجتناب می شود. فرآیند کنترل بهینه معکوس با اثبات قضایایی همراه است که نشان می دهد هر CLF از سیستم، به منزله پاسخ یک HJB متناظر با یک تابع هزینه

^۱ Cost Functional

^۲ Hamilton- Jacobi- Bellman

^۳ Hamilton- Jacobi- Isaacs

^۴ Value Function

^۵ Robustness

^۶ Inverse Optimal Stabilizable Control Laws

معنی دار و از پیش تعیین نشده از سیستم است. با داشتن یک تابع لیاپانوف کنترل از سیستم، می توان قوانین کنترل پایدارسازی طراحی نمود که هر یک تابع هزینه معنی داری را مینیمم می کنند. به این ترتیب که با در اختیار داشتن یک CLF از سیستم، مستقیماً قانون کنترل پسخور پایدارساز بهینه به دست می آید؛ سپس نشان داده می شود قانون کنترل مذکور نسبت به تابعی هزینه معنی داری بهینه است [۲ و ۵].

۵-۱- مفاهیم

تعریف ۵-۱: قانون کنترل بهینه معکوس عبارت است از قانون کنترل پایدارسازی که تابعی هزینه معنی دار از پیش تعیین نشده ای را مینیمم می کند و دارای حاشیه بهره است [۲۵].

قانون کنترل بهینه معکوس معطوف به یک مسأله مشخص بهینه سازی نیست، به عبارت دیگر انتظار نمی رود قانون کنترل بهینه معکوس پاسخ یک مسأله بهینه سازی مورد نظر طراح باشد و یا حتی به جواب آن نزدیک باشد [۲۵]. بلکه به این سبب که بسیاری از مسائل کنترل بهینه حل دشواری دارند، در این گونه موارد به جای حل مسأله اصلی یک مسأله معکوس حل می شود که نتیجه آن قانون کنترلی با مقداری حاشیه پایداری است که نسبت به مفهوم معنی داری بهینه است. در این حالت ممکن است قانون کنترل بهینه معکوس پاسخ محافظه کارانه ای برای یک مسأله بهینه سازی مطلوب طراح باشد [۲۵]. برای هرچه نزدیک تر کردن پاسخ حاصل از کنترل بهینه معکوس به پاسخ واقعی (که در اختیار ما نیست) ، تلاش هایی صورت گرفته است و از جمله مباحث مهم در حوزه کنترل بهینه معکوس به شمار می رود. در این فصل از ذکر جزئیات و قضایای این حوزه صرف نظر کرده، بحث خود را بر روی نقش تابع لیاپانوف کنترل در ساختن قوانین کنترل بهینه معکوس متمرکز می کنیم.

مثال ۱-۵^۷: سیستم ساده زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = -x^3 + u + \omega x, \quad (1-5)$$

که در آن u ورودی کنترل نامقید ($u \in U \equiv R$) و ω ورودی اغتشاش با قید $W \equiv [-1, 1]$ است.

یک RCLF برای این سیستم $V(x) = x^2$ است و مشتق آن را می توان با قانون کنترل

$$u = x^3 - 2x, \quad (2-5)$$

منفی نمود. این قانون کنترل که با استفاده از خطی سازی پسخور به دست آمده است، گرچه پاسخ های سیستم را RGUAS می سازد، یک انتخاب خوب نیست. زیرا جمله x^3 در (۲-۵) نشان دهنده تلاش کنترلی بیهوده ای است که صرف حذف یک غیرخطی مفید شده است. علاوه بر این، این ترم پسخور مثبت است که خطر ناپایداری را افزایش می دهد. یک روش دیگر، حل یک مسأله کنترل بهینه با تابعی هزینه ای است که تلاش کنترلی را جریمه می کند. برای سیستم (۱-۵)، تابعی هزینه درجه دوم زیر

$$J = \int_0^{\infty} [x^2 + u^2] dt, \quad (3-5)$$

قانون کنترل بهینه زیر را نتیجه می دهد:

$$u = x^3 - x - x\sqrt{x^4 - 2x^2 + 2}, \quad (4-5)$$

قانون کنترل (۴-۵) با تشخیص مزیت جمله غیرخطی ($-x^3$) تلاش کنترلی کوچک تری برای

x های بزرگ تولید می کند. علاوه بر این این قانون کنترل، هیچ گاه پسخور مثبت ایجاد نمی کند.

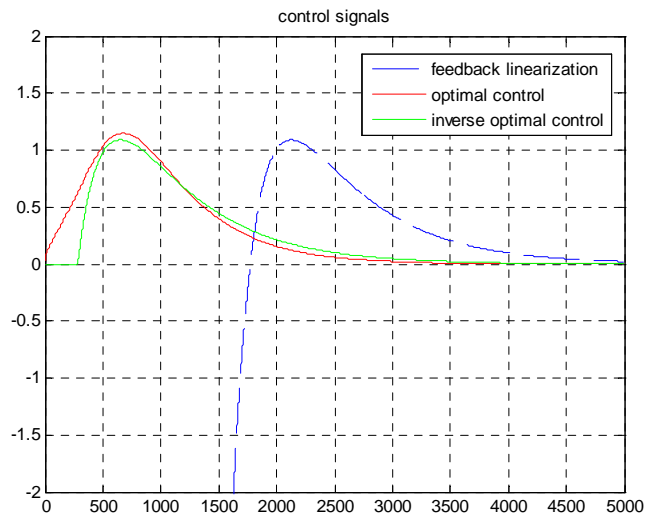
^۷ صورت مسأله مثال ۱-۵ از مرجع [۲] می باشد و حل و شبیه سازی توسط نویسنده رساله انجام گرفته است.

اگرچه این مزیت ها به بهای حل معادله دیفرانسیل جزئی HJI به دست آمده است؛ عملی که تنها برای سیستم های غیرخطی ساده امکان پذیر است.

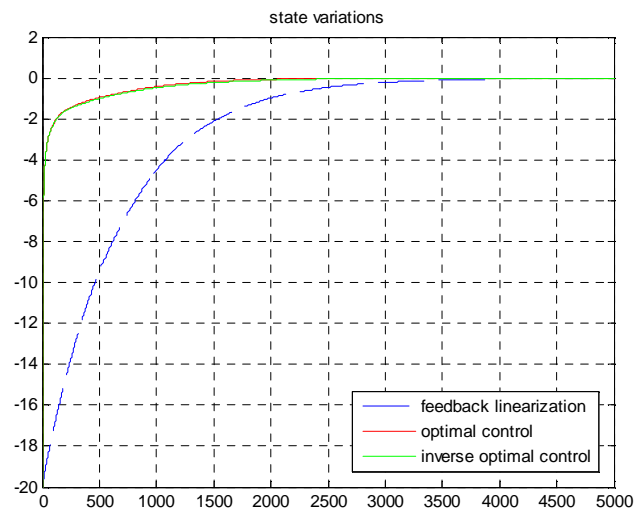
یک جایگزین برای حل معادله HJI، محاسبه یک قانون کنترل بهینه معکوس است. در این جا به منظور مقایسه، از قانون کنترل حداقل نرم نقطه ای استفاده شده است. این قانون در بخش های بعد به طور مفصل توضیح داده می شود. یک قانون کنترل حداقل نرم نقطه ای برای سیستم (۱-۵) عبارت است از

$$u = \begin{cases} x^2 - 2x, & x^2 < 2 \\ 0, & x^2 \geq 2 \end{cases} \quad (5-5)$$

در شکل (۱-۵) قوانین کنترل (۲-۵)، (۴-۵) و (۵-۵) و در شکل (۲-۵) تغییرات حالت بر حسب زمان برای حالت اولیه $x(0) = -20$ در هر سه نوع پیاده سازی نشان داده شده است. مشاهده می شود که قانون (۱-۵) برای پایدارسازی سیستم به تلاش کنترلی بیشتری نیاز دارد و حالت نیز دیرتر به صفر همگرا شده است. اما قوانین کنترل بهینه و کنترل بهینه معکوس که هر دو نسبت به تابعی هزینه معنی داری بهینه هستند از نظر کیفی تقریباً در یک سطح قرار دارند. هر دو به سبب تشخیص مزیت ترم غیرخطی تلاش کنترلی کمتری برای سیگنال های بزرگ صرف می کنند و هیچ گاه پسخور مثبت ایجاد نمی کنند. تفاوت اصلی بین این دو در شیوه تحلیل آن ها نهفته است: قانون کنترل حداقل نرم نقطه ای از یک فرمول ساده به دست آمده است در حالی که به دست آوردن قانون کنترل (۴-۵) مستلزم حل یک معادله HJI می باشد.



شکل (۱-۵): مقایسه بین قوانین کنترل (۲-۵)، (۴-۵) و (۵-۵)



شکل (۲-۵): مقایسه بین تغییرات حالت متناظر با قوانین کنترل (۲-۵)، (۴-۵) و (۵-۵)

مقدار مینیمم تابعی هزینه در مسئله کنترل بهینه تابعی از حالت ها است که به آن تابع مقدار^۸

می گویند [۲۵]. خواص زیر برای هر تابع مقدار برقرار است [۲۵]:

(۱) هر تابع مقدار معنی دار یک تابع لیاپانوف است.

(۲) هر تابع لیاپانوف یک تابع مقدار معنی دار است.

(۳) هر CLF یک تابع مقدار معنی دار است.

(۴) هر RCLF یک حد بالایی معنی دار برای تابع مقدار یک مسأله بهینه سازی است.

در حالت کلی برای سیستم و تابعی هزینه به صورت

$$\dot{x} = f(x, u, \omega), \quad J = \int_0^{\infty} L(x, u) dt, \quad (۶-۵)$$

معادله HJI عبارت است از

$$0 = \min_u \max_{\omega} [L(x, u) + \nabla V(x) \cdot f(x, u, \omega)], \quad (۷-۵)$$

که در آن تابع مقدار $V(x)$ ناشناخته است (برای معادله HJB نیز تعریف مشابهی بدون حضور جمله اغتشاش موجود است). برای یک انتخاب مناسب $L(x, u)$ در (۶-۵) ، یک پاسخ مثبت معین هموار $V(x)$ برای معادله (۷-۵) وجود دارد که به کنترل پسخور حالت پیوسته $u(x)$ منجر می شود و پایداری، بهینگی و مقاومت نسبت به اغتشاش ω را در پی دارد. هرچند محاسبه چنین پاسخ های همواری ممکن است بسیار سخت باشد یا اصلاً وجود نداشته باشد [۲].

فرض کنید برای یک سیستم معین یک CLF یافته ایم. اگر بتوانیم یک تابعی هزینه معنی دار

بیابیم که CLF موجود، تابع مقدار متناظر آن باشد، در این صورت به صورت غیرمستقیم پاسخی برای

^۸ Value Function

معادله HJB آن به دست آمده است و می توان قانون کنترل بهینه را محاسبه نمود. تا زمانی که تابعی هزینه معنی دار باشد، قانون کنترل به دست آمده ذاتاً بهینه خواهد بود. در حقیقت حتی به ساخت تابعی هزینه نیازی نیست؛ زیرا می توان پسخور بهینه را به طور مستقیم و بدون رجوع به معادله HJB به دست آورد. برای این منظور فرمول های مستقیمی به دست آمده است که هر یک دسته ای از چنین قوانین کنترل بهینه ای را تولید می کنند و تنها تابعی از CLF، معادلات سیستم و پارامترهای طراحی هستند. این قوانین، همان قوانین کنترل بهینه معکوس می باشند و از جمله آن ها می توان به قانون کنترل حداقل نرم نقطه ای و قانون کنترل حداکثر زاویه اشاره نمود.

۵-۲- قوانین کنترل حداقل نرم نقطه ای [۱ و ۲۵]

یکی از مهم ترین قوانین کنترل پایدارساز مبتنی بر تابع لیپانوف کنترل، فرمول زونتاگ می باشد.

اگر $V(x)$ یک تابع لیپانوف کنترل برای سیستم زیر باشد:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (۸-۵)$$

آنگاه قانون کنترل

$$u^* = \quad (۹-۵)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} - \left(C + \frac{V_x f + \sqrt{(V_x f)^T + (L_g V(x))(L_g V(x)^T)^T}}{(L_g V(x))(L_g V(x)^T)} \right) (L_g V(x))^T \\ L_g V(x) \neq \cdot \\ V_x g(x) = \cdot \end{array} \right.$$

نقطه $x = 0$ را برای سیستم (۸-۵)، پایدار مجانبی جامع می کند.

از جمله قوانین کنترل پایدارساز مبتنی بر تابع لیاپانوف کنترل، قانون کنترل حداقل نُرم نقطه ای می باشد. این قانون همان طور که از نامش پیداست، در هر نقطه از مسیر حالت حداقل نُرم را داراست. به زبان ساده، قانون کنترل $u(x)$ برای سیستم با معادله حالت (۵-۸) که شرایط زیر را برقرار کند، قانون کنترل حداقل نُرم نقطه ای نامیده می شود.

$$\begin{cases} \text{Inf}_u u^T u & (۵-۱۰) \\ \text{s. t: } & V_x(f(x) + g(x)u) \leq -\sigma(x) \end{cases}$$

که $V(x)$ یک CLF برای (۵-۸) بوده و $\sigma(x)$ یک تابع پیوسته و مثبت معین است. بر اساس این قانون کنترل، در حالی که دامنه u مینیمم است، $V(x)$ در هر نقطه از مسیر حالت با نرخ $\sigma(x)$ کاهش می یابد.

در حالت خاصی که

$$\sigma(x) = \sqrt{(L_f V(x))^2 + q(x) \left((L_g V(x))(L_g V(x))^T \right)},$$

باشد، پاسخ مسأله به صورت زیر خواهد بود:

$$u^* = \quad (۵-۱۱)$$

$$\begin{cases} -\frac{V_x f + \sqrt{(L_f V(x))^2 + q(x) \left((L_g V(x))R^{-1}(x)(L_g V(x))^T \right)}}{(L_g V(x))(L_g V(x))^T} (L_g V(x))^T & L_g V(x) \neq \cdot \\ \cdot & L_g V(x) = \cdot \end{cases}$$

که این فرمول زونتگ با تغییر جزئی^۹ نامیده می شود. $q(x)$ در این رابطه مثبت (نیمه) معین و مشتق پذیر است و قانون کنترل (۱۱-۵) یک پاسخ بهینه برای تابع هزینه زیر است، در حالی که همچنان اندازه u را نقطه به نقطه حداقل نگاه می دارد.

$$\min_u J(u) = \min_u \int_0^{\infty} (q(x) + u^T u) dt. \quad (۱۲-۵)$$

همه کنترل کننده های حداقل نرم نقطه ای $\sigma(x)$ را به عنوان پارامتر طراحی مورد استفاده قرار می دهند. $\sigma(x)$ در حقیقت مصالحه بین سرعت همگرایی حالت ها به صفر و تلاش کنترلی است. در حالت کلی انتخاب $\sigma(x)$ مشکل است و در صورت وجود انحراف در $f(x)$ و $g(x)$ ممکن است منجر به ناپایداری حلقه بسته گردد.

۵-۳- قانون کنترل حداکثر زاویه [۱ و ۲۵]

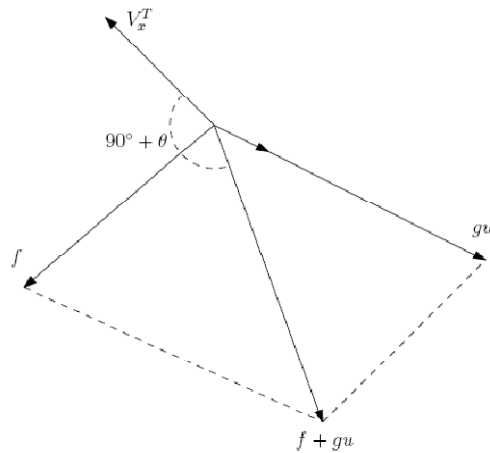
یک قانون کنترل پایدارساز جدید مبتنی بر CLF، قانون کنترل حداکثر زاویه است. با استفاده از این قانون یک معیار پایداری لحظه ای برای قوانین کنترل مبتنی بر CLF به دست می آید. سیستم تک ورودی زیر را در نظر می گیریم:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad f(\cdot) = \cdot, x \in R^n, g(x) \neq \cdot, \forall x \neq \cdot \quad (۱۳-۵)$$

فرض کنیم $V(x)$ یک تابع لیپانوف کنترل هموار سیستم (۱۳-۵) باشد. قانون کنترل حداکثر زاویه به گونه ای است که در هر نقطه از مسیر حالت، بردار گرادیان تابع لیپانوف کنترل و مشتق بردار حالت حداکثر زاویه را با هم می سازند.

^۹ Slight Variation of Sontag's Formula

برای راحتی کار $f(x)$ را با f ، $g(x)$ را با g و $\frac{\partial V(x)}{\partial x}$ را با V_x^T و ضرب داخلی u در v با uv و نرْم-۲ بردار را با $\|\cdot\|$ نمایش می دهیم. فرض کنیم زاویه بین $f + gu$ و V_x^T برابر $90^\circ + \theta$ باشد (شکل (۳-۵)).



شکل (۳-۵): نمایش زاویه بین V_x^T و $f + gu$

داریم:

$$V_x^T (f + gu) = -\|V_x^T\| \|f + gu\| \sin\theta, \quad (۱۴-۵)$$

یا،

$$V_x^T f + V_x^T gu = -\|V_x^T\| \|f + gu\| \sin\theta, \quad (۱۵-۵)$$

با مربع کردن طرفین (۱۵-۵) و ساده سازی داریم:

$$\begin{aligned} & [(V_x^T \cdot g)^2 - \|g\|^2 \|V_x^T\|^2 \sin^2 \theta] u^2 \quad (۱۶-۵) \\ & + [2(V_x^T \cdot f)(V_x^T \cdot g) - 2(f \cdot g) \|V_x^T\|^2 \sin^2 \theta] u \\ & + [(V_x^T f)^2 - \|f\|^2 \|V_x^T\|^2 \sin^2 \theta] = 0, \end{aligned}$$

با فرض $V_x \neq 0$ و موازی نبودن f با g برای آن که (۵-۱۶) برای u ریشه حقیقی داشته باشد، لازم است:

$$\Delta = [(V_x^T \cdot f)(V_x^T \cdot g) - (f \cdot g) \|V_x^T\|^2 \sin^2 \theta] - [(V_x^T \cdot g)^2 - \|g\|^2 \|V_x^T\|^2 \sin^2 \theta][(V_x^T f)^2 - \|f\|^2 \|V_x^T\|^2 \sin^2 \theta] \geq 0, \quad (5-17)$$

با فرض:

$$M = (\|f\|^2 \|g\|^2 - (fg)^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (5-18)$$

رابطه (۵-۱۷) به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$\sin^2 \theta \leq \frac{(V_x^T f)^2 \|g\|^2 + (V_x^T g)^2 \|f\|^2 - 2(V_x^T f)(V_x^T g)(fg)}{\|V_x^T\|^2 M^2}, \quad (5-19)$$

و یا،

$$0 < \sin \theta \leq \frac{\|(V_x^T f)g - (V_x^T g)f\|}{M \|V_x^T\|}. \quad (5-20)$$

نامساوی (۵-۲۰) حداکثر مقدار θ را برای یک $V(x)$ نشان می دهد. حال u را طوری انتخاب

می کنیم که زاویه بین $f + gu$ و V_x^T حداکثر باشد. این زاویه عبارت است از $\theta + 90^\circ$ که θ از

رابطه زیر به دست می آید:

$$\sin \theta = \frac{\|(V_x^T f)g - (V_x^T g)f\|}{M \|V_x^T\|}. \quad (5-21)$$

با $\theta = \theta$ معادله (۵-۱۶) برای u ریشه مضاعف دارد و این ریشه برابر است با:

$$u = \frac{(fg)\|V_x^T\|^r \sin^r \theta - (V_x^T g)(V_x^T f)}{(V_x^T g)^r - \|g\|^r \|V_x^T\|^r \sin^r \theta}. \quad (22-5)$$

با اعمال (21-5) در (22-5) به دست می آید:

$$u = \frac{(fg)\|(V_x^T g)f - (V_x^T f)g\|^r - (V_x^T g)(V_x^T f)M^r}{(V_x^T g)^r M^r - \|g\|^r \|(V_x^T f)g - (V_x^T g)f\|^r}. \quad (23-5)$$

برای سیستم های درجه دوم، طرف دوم (21-5) همواره مساوی با 1 است؛ زیرا برای هر سه

بردار f ، g و V_x^T در R^r داریم،

$$\|(V_x^T f)g - (V_x^T g)f\| = M\|V_x^T\|. \quad (24-5)$$

بدیهی است که در R^r می توان ورودی u را طوری انتخاب کرد که $f + gu$ با V_x^T زاویه 180°

بسازد (متناظر است با $90^\circ = \theta$).

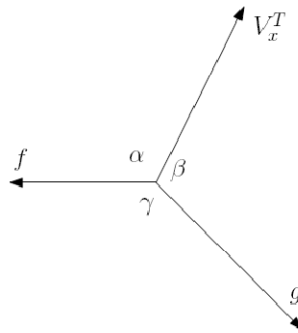
لم 1-5 [1 و 25]: برای سیستم های درجه سوم و بالاتر طرف دوم (21-5) کوچک تر (یا مساوی) یک

است؛ یعنی:

$$\frac{\|(V_x^T f)g - (V_x^T g)f\|}{M\|V_x^T\|} \leq 1. \quad (25-5)$$

اثبات [1 و 25]: فرض می کنیم زوایای بین f و g برابر γ ، f و V_x^T برابر α ، و g و V_x^T برابر β باشد

(شکل (4-5)).



شکل (۴-۵): نمایش زوایای بردار گرادیان تابع لیپانوف کنترل و معادلات سیستم

داریم،

$$\pm(\alpha - \beta) \leq \gamma \leq \alpha + \beta, \quad (۲۶-۵)$$

می توان نامساوی (۲۶-۵) را به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\cos^2 \beta + \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \leq \sin^2 \gamma, \quad (۲۷-۵)$$

و یا،

$$(\cos \gamma - \cos(\alpha + \beta))(\cos \gamma - \cos(\alpha - \beta)) \leq 0, \quad (۲۸-۵)$$

که این نامساوی اخیر از نامساوی (۲۶-۵) نتیجه می گردد.

با اعمال قانون کنترل (۲۳-۵) به سیستم (۱۳-۵) مشتق $V(x)$ در امتداد مسیر حالت

سیستم حلقه بسته عبارت است از:

$$\dot{V}(x) = V_x^T (f + gu) \quad (۲۹-۵)$$

$$= \frac{((fg)(V_x^T g) - (V_x^T f)\|g\|^2)\|(V_x^T g)f - (V_x^T f)g\|^2}{(V_x^T g)^2 M^2 - \|g\|^2 \|(V_x^T f)g - (V_x^T g)f\|^2}.$$

با توجه به شکل (۴-۵) و فرض این که مخرج رابطه (۲۹-۵) صفر نیست می توان نشان داد:

$$\dot{V}(x) = \frac{\cos\gamma\cos\beta - \cos\alpha}{\cos^2\beta\sin^2\gamma - \cos^2\alpha - \cos^2\beta + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} \quad (۳۰-۵)$$

$$\cdot \frac{\|(V_x^T g)f - (V_x^T f)g\|^2}{\|V_x^T\| \|f\| \|g\|^2},$$

یا

$$\dot{V}(x) = \frac{\|(V_x^T g)f - (V_x^T f)g\|^2}{(\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma)\|V_x^T\| \|f\| \|g\|^2}, \quad (۳۱-۵)$$

پس برای $\dot{V}(x) < 0$ لازم است $\cos\alpha < \cos\beta\cos\gamma$ باشد. از طرف دیگر $\dot{V}(x) < 0$ معادل $\theta > 0$ است و این برای پایداری مجانبی سیستم حلقه بسته کافی است. اگر $\cos\alpha > \cos\beta\cos\gamma$ باشد، آنگاه قانون کنترل (۲۳-۵) به جای حداکثر کردن θ آن را حداقل می کند و برای حداکثر کردن θ باید قانون کنترل $\pm\infty$ انتخاب شود. نامساوی $\cos\alpha < \cos\beta\cos\gamma$ به صورت زیر قابل تبدیل است:

$$V_x^T f < \frac{(V_x^T g)(fg)}{\|g\|^2}. \quad (۳۲-۵)$$

بحث بالا را می توان در قضیه زیر جمع بندی نمود:

قضیه ۵-۱ [۲۵ و ۱]: فرض کنید $V(x)$ برای سیستم (۱۳-۵) یک CLF باشد و نامساوی (۳۲-۵) به ازای همه x های مخالف صفر برقرار باشد. سپس "قانون کنترل حداکثر زاویه نقطه ای" زیر، سیستم حلقه بسته را پایدار مجانبی جامع کرده و به ازای آن بردارهای V_x^T و $f(x) + g(x)u$ حداکثر زاویه ممکن را با هم می سازند:

$$\tilde{u}(x) = \quad (۳۳-۵)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(fg)\|(V_x^T g)f - (V_x^T f)g\|^2 - (V_x^T g)(V_x^T f)M^2}{(V_x^T g)^2 M^2 - \|g\|^2 \|(V_x^T f)g - (V_x^T g)f\|^2}, \quad (V_x^T f)\|g\|^2 < (V_x^T g)(fg), \\ 0, \quad x = 0, \end{array} \right.$$

که در آن M در رابطه (۱۸-۵) تعریف شده است. علاوه بر این، به ازای برقراری شرط در ضابطه اول، حداکثر زاویه مذکور برابر $\theta + 90^\circ$ است که θ از رابطه زیر به دست می آید:

$$\theta = \arcsin \left(\frac{\|(V_x^T f)g - (V_x^T g)f\|}{\|V_x^T\|(\|f\|^2 \|g\|^2 - (fg)^2)^{1/2}} \right). \quad (۳۴-۵)$$

ملاحظات :

(۱) در صورت عدم برقراری شرط نامساوی (۳۲-۵) به ازای همه x های غیرصفر ، قانون کنترل

(۳۳- ۵) که زاویه بین دو بردار مذکور را حداکثر می کند، ناپیوسته است. در این حالت می توان

یک قانون کنترل پیوسته به گونه ای تعریف نمود که زاویه بین $f + gu$ و V_x کمتر از مقدار

حداکثر $\theta + 90^\circ$ باشد. در مثال (۲-۵) چنین حالتی را مورد بررسی قرار می دهیم [۱ و ۲۵].

(۲) قانون کنترل حداکثر زاویه، زاویه بین $f + gu$ و V_x را حداکثر می کند، در حالی که قانون

کنترل حداقل نرم نقطه ای $V_x^T \cdot (f + gu)$ را حداقل می کند. بنابراین قانون کنترل حداقل

نرم نقطه ای در حالت $V_x^T g = 0$ برابر صفر است، زیرا در این حالت نیروی کنترل روی $\dot{V}(x)$

اثر ندارد؛ اما قانون کنترل حداکثر زاویه در این حالت صفر نیست و بنابراین قانون کنترل حداکثر

زاویه از قانون کنترل حداقل نرم نقطه ای سریع تر است. علاوه بر این قانون کنترل حداکثر زاویه

نیازی به تعریف $\sigma(x)$ به عنوان یک پارامتر طراحی ندارد. تنها مشکل قانون کنترل حداکثر

زاویه این است که سیگنال کنترل در همسایگی سطح

$$V_x^T \cdot f = \frac{(V_x^T \cdot g)(f \cdot g)}{\|g\|^2},$$

بزرگ است [۱ و ۲۵].

(۳) منحنی زاویه بین $f + gu$ و V_x را می توان به عنوان معیار لحظه ای پایداری قانون کنترل برحسب زمان ترسیم کرد. هر چه این منحنی زاویه از 90° بزرگ تر باشد، نشانه آن است که نامعینی های لحظه ای در سیستم به همان اندازه می توانند بردار $f + gu$ را بگردانند، در حالی که همچنان پایداری سیستم حلقه بسته حفظ شود [۱ و ۲۵]. در مثال های (۲-۵) و (۳-۵) نمونه هایی از این منحنی ترسیم شده است.

مثال ۲-۵^{۱۰} [۱]: سیستم غیرخطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + (x_1 - x_2)u, \\ \dot{x}_2 = x_2 + (x_1 + x_2)u, \\ \dot{x}_3 = 0.25x_3 + x_3u. \end{cases} \quad (35-5)$$

اگر تابع مثبت معین

$$V(x) = 0.5(x_1^2 + x_2^2) + x_3^2, \quad (36-5)$$

را در نظر بگیریم، مشتق زمانی آن عبارت است از:

$$\dot{V}(x) = (1 + u)(x_1^2 + x_2^2) + (0.5 + 2u)x_3^2. \quad (37-5)$$

^{۱۰} شبیه سازی مثال ۲-۵ از نویسنده رساله می باشد.

از آن جا که سیگنال u وجود دارد که به ازای آن مشتق زمانی بالا منفی شود، رابطه (۳۶-۵) یک CLF برای سیستم (۳۵-۵) است. نامساوی (۳۲-۵) به ازای همه $x \neq 0$ برقرار نیست؛ در این حالت می توانیم طراحی کنترل را برای زاویه ای کمتر از حداکثر زاویه انجام دهیم تا شرط مذکور برقرار گردد. برای نمونه فرض کنید می خواهیم قانون کنترلی طرح کنیم که زاویه بین $f + gu$ و V_x بزرگ تر از 120° درجه باشد. با فرض $p = x_1^2 + x_2^2$ و $q = x_3^2$ لازم است نامساوی زیر برقرار باشد:

$$\frac{p + 0.5q + (p + 2q)u}{\sqrt{(p + 4q)[p + 0.625q + (2p + 0.5q)u + (2p + q)u^2]}} < -\frac{1}{2} \quad (38-5)$$

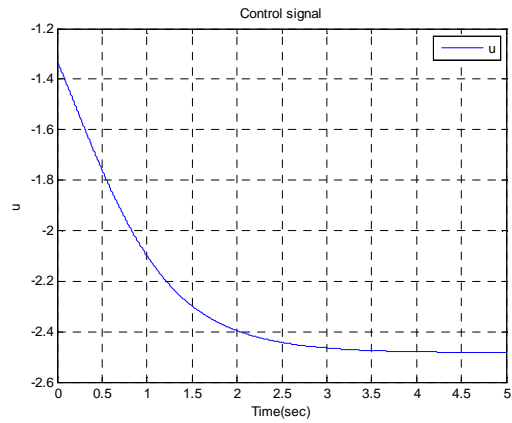
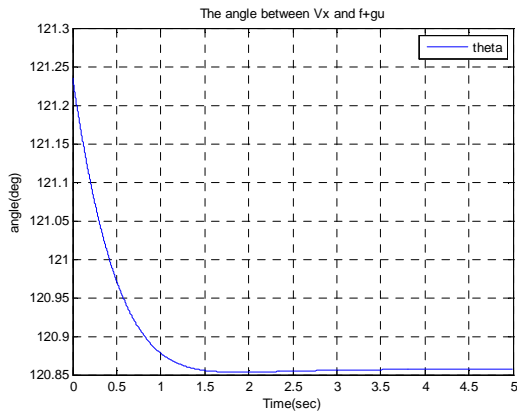
پس از ساده سازی داریم:

$$(2p^2 + 7pq + 12q^2)u^2 + (6p^2 + 11/5pq + 6q^2)u + 3p^2 - 0.625pq + 0.75q^2 > 0,$$

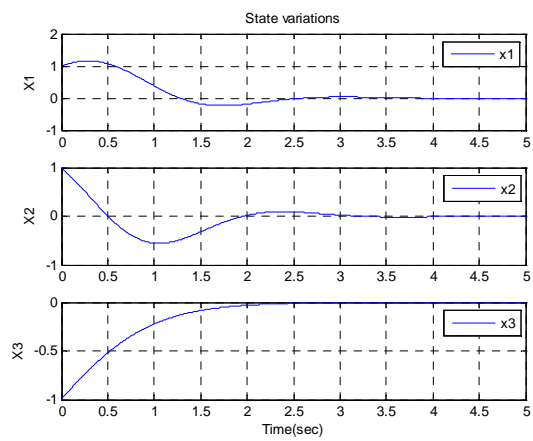
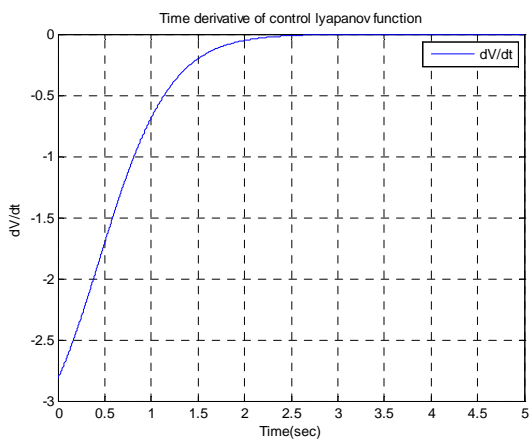
ریشه معادله بالا عبارت است از:

$$k(x) = \frac{-6p^2 - 11/5pq - 6q^2 - \sqrt{12p^4 - 54/5p^3q + 56p^2q^2 + 120pq^3}}{2(2p^2 + 7pq + 12q^2)} \quad (39-5)$$

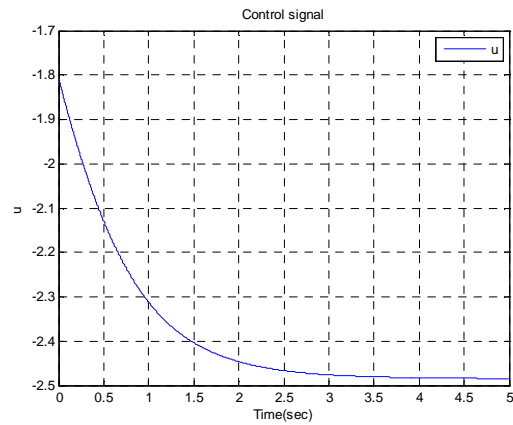
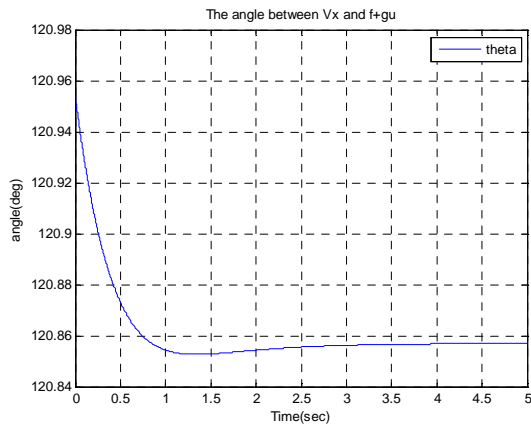
از آن جا که سمت چپ رابطه (۳۸-۵) منفی است $u(x) < k(x)$ است. بنابراین با فرض $u(x) = 1/0.5k(x)$ نامساوی برقرار می شود و به ازای این قانون کنترل، زاویه بین $f + gu$ و V_x بزرگ تر از 120° درجه خواهد بود. نتایج حاصل از این طراحی به ازای شرایط اولیه $x=[1, 1, -1]$ در شکل های (۵-۵) و (۶-۵)، و به ازای شرایط اولیه $x=[-7, -5, 4]$ در شکل های (۷-۵) و (۸-۵) ترسیم شده است. مشاهده می شود که مستقل از انتخاب شرایط اولیه، در هر دو حالت همگرایی حالت ها به ازای سیگنال کنترل پیوسته و کراندار به دست می آید و زاویه بین $f + gu$ و V_x در طول زمان بزرگ تر از 120° درجه و مشتق زمانی تابع لیاپانوف کنترل در طول زمان منفی است.



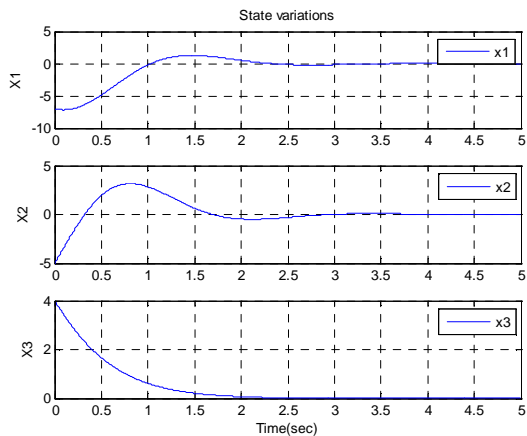
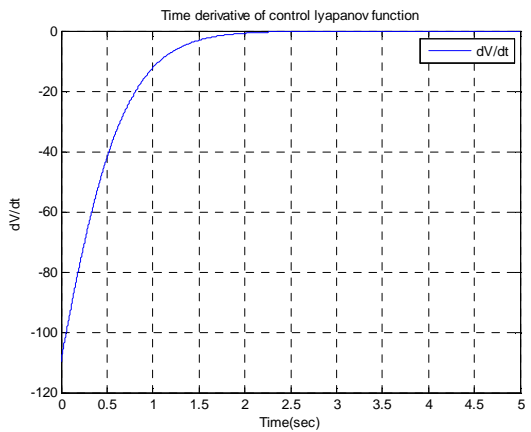
شکل (۵-۵): سیگنال کنترل و زاویه بین $f + gu$ و V_x برای شرایط اولیه $x=[1, 1, -1]$



شکل (۶-۵): همگرایی حالت ها برای شرایط اولیه $x=[1, 1, -1]$ و مشتق زمانی تابع لیپانوف کنترل



شکل (۷-۵): سیگنال کنترل و زاویه بین $f + gu$ و V_x برای شرایط اولیه $X = [-7, -5, 4]$



شکل (۸-۵): همگرایی حالت ها برای شرایط اولیه $X = [-7, -5, 4]$ و مشتق زمانی تابع لیپانوف کنترل

۴-۵- تابع لیپانوف کنترل برای سیستم های غیرخطی غیرافین [۱ و ۲۵]

در این بخش، ابتدا به معرفی مفهومی به نام "زاویه ویژه" برای ماتریس های مربعی حقیقی

می پردازیم. سپس روشی برای یافتن تابع لیپانوف کنترل سیستم های غیرخطی غیرافین ارائه می دهیم.

۵-۴-۱- زاویه ویژه [۱ و ۲۵]

تعریف ۲-۵: برای یک ماتریس مربعی حقیقی $A_{n \times n}$ زاویه ویژه عبارت است از حداکثر چرخشی که ماتریس $A_{n \times n}$ به بردار دلخواه $x \in R^n$ می تواند بدهد؛ به عبارت دیگر:

$$\theta = \sup_{x \in R^n, x \neq 0} \text{Arc cos} \left(\frac{x^T A x}{\sqrt{(x^T A^T A x)} \sqrt{x^T x}} \right). \quad (۴۰-۵)$$

روابط زاویه ویژه برای تعدادی از ماتریس ها در جدول (۱-۵) آمده است [۱ و ۲۵].

ملاحظات [۱ و ۲۵]:

۱. واضح است که چرخش حاصل ضرب دو ماتریس از مجموع چرخش های تک تک ماتریس ها کمتر (یا مساوی آن) است.
 ۲. زاویه ویژه A و A^{-1} با هم برابر است.
- لم زیر نشان می دهد که زاویه ویژه ماتریس های مثبت معین تنها به مقادیر ویژه این ماتریس ها بستگی دارد.

لم ۲-۵ [۱ و ۲۵]: فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ مثبت معین است و تجزیه SVD آن چنین است:

$$A = U \Sigma U^T, \quad (۴۱-۵)$$

در این حالت، زاویه ویژه A با زاویه ویژه Σ برابر است.

جدول (۱-۵): زاویه ویژه برای تعدادی از ماتریس ها [۱ و ۲۵]

ماتریس	زاویه ویژه
$\begin{pmatrix} 1 & \\ & \lambda \end{pmatrix}, \lambda > 0$	$\theta = \arctan \frac{ \lambda - 1 }{\sqrt{\lambda}}$
$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ & \lambda \end{pmatrix}$	$\theta = \begin{cases} \pi & \lambda < 0 \\ \arccos \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 1}}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} \right) & \lambda \geq 0 \end{cases}$
$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, b \neq 0$	$\theta = \begin{cases} \pi & a < b \\ \arccos \left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \right) & a > b \\ \frac{\pi}{2} & a = b \end{cases}$
$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, b \neq 0$	$\theta = \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \lambda_1 & \\ & & \lambda_2 \end{pmatrix}, \lambda_1, \lambda_2 > 0$	$\theta = \arccos \left(\min \left\{ \frac{\sqrt{\lambda_1}}{\lambda_1 + 1}, \frac{\sqrt{\lambda_2}}{\lambda_2 + 1}, \frac{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}{\lambda_1 + \lambda_2} \right\} \right)$
$\begin{pmatrix} a & b & \\ -b & a & \\ & & 1 \end{pmatrix}, a > 0$	$\theta = \begin{cases} \arccos \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \\ \arccos \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \\ \arccos \left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - 1}{ a^2 + b^2 - 1 } \sqrt{(a - 1)(a^2 + b^2 - a)} \right) \end{cases}$

اثبات لم ۲-۵ [۱ و ۲۵]:

زاویه ویژه A برابر است با:

$$\theta_A = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \arccos \left(\frac{x^T U \Sigma U^T x}{\|x\| \|U \Sigma U^T x\|} \right). \quad (۴۲-۵)$$

با فرض $z = U^T x$ و در نظر گرفتن این واقعیت که U یکانی^{۱۱} است، داریم:

$$\theta_A = \sup_{z \in \mathbb{R}^n, z \neq 0} \arccos \left(\frac{z^T \Sigma z}{\|z\| \|\Sigma z\|} \right) = \theta_\Sigma. \quad (۴۳-۵)$$

و به این ترتیب لم اثبات می شود.

۵-۴-۲- تابع لیاپانوف کنترل برای سیستم غیرافین

در بخش ۳-۵ یک قانون کنترل مبتنی بر تابع لیاپانوف کنترل معرفی شد که به ازای آن بردارهای V_x^T و $f(x) + g(x)u$ حداکثر زاویه ممکن را با هم می سازند. این حداکثر زاویه را $\theta + 90^\circ$ در نظر گرفتیم که θ از رابطه (۳۴-۵) به دست می آید.

قضیه ۲-۵ [۱ و ۲۵]: فرض کنید $V(x)$ یک CLF برای سیستم غیرخطی (۱۳-۵) و در نامساوی (۳۲-۵) نیز صدق می کند. در نتیجه با استفاده از قانون کنترل قضیه ۱-۵، زاویه بین دو بردار V_x^T و $f(x) + g(x)u$ در هر نقطه از مسیر حالت، برابر $\theta + 90^\circ$ خواهد بود. اکنون سیستم غیرخطی زیر را در نظر بگیرید:

^{۱۱} Unitary

$$\dot{x} = A(x, u)(f(x) + g(x)u). \quad (44-5)$$

که در آن $A(x, u)$ یک ماتریس $n \times n$ مثبت معین است. اگر زاویه ویژه ماتریس $A(x, \tilde{u}(x))$ از θ کمتر باشد، می توان نتیجه گرفت که زاویه بین بردارهای $A(x, \tilde{u}(x))(f(x) + g(x)\tilde{u}(x))$ و V_x^T بزرگ تر از 90° باقی می ماند. بنابراین قانون کنترل (5-33) سیستم (5-45) را پایدار می کند و $V(x)$ برای این سیستم یک CLF محسوب می شود (برای اثبات قضیه می توانید به مرجع [1] رجوع کنید).

قضیه بالا مسأله پایداری سیستم غیرخطی غیرافین (5-44) و ساختن یک CLF برای این سیستم را به پایداری سیستم غیرخطی (خطی) افین (5-13) و ساختن یک CLF برای این سیستم کاهش می دهد.

ملاحظات:

1. ماتریس $A(x, u)$ را می توان به عنوان یک ماتریس نامعینی ضربی برای سیستم (5-13) تعبیر نمود. بنابراین قانون کنترل (5-33) برای سیستم (5-13) یک قانون کنترل پایداری مقاوم محسوب می شود [1 و 25].
2. اگر $V(x)$ در نامساوی (5-32) صدق نکند و برای سیستم (5-13) بتوان یک قانون کنترل پایداری تعریف نمود به نحوی که زاویه بین V_x^T و $f(x) + g(x)u$ بزرگ تر از $90^\circ + \theta_A$ (θ_A زاویه ویژه $A(x, u)$ است) باشد، در این صورت $V(x)$ یک CLF برای سیستم غیرافین (5-44) محسوب می شود [1 و 25].

مثال ۳-۵ [۱]: سیستم غیرافین زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + (x_1 - x_2)u \\ \dot{x}_2 = \frac{(x_2 + (x_1 + x_2)u)(1 + u^2)}{2 + u^2} \\ \dot{x}_3 = 0.75(0.25x_3 + x_3u) \left(2 - e^{-x_1^2} - \frac{|u|}{2|u| + 1} \right) \end{cases} \quad (45-5)$$

این سیستم را می توان به صورت زیر نمایش داد:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{1 + u^2}{2 + u^2} & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0.75 \left(2 - e^{-x_1^2} - \frac{|u|}{2|u| + 1} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 + (x_1 - x_2)u \\ x_2 + (x_1 + x_2)u \\ 0.25x_3 + x_3u \end{bmatrix} \quad (46-5)$$

با فرض،

$$A(x, u) = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{1 + u^2}{2 + u^2} & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0.75 \left(2 - e^{-x_1^2} - \frac{|u|}{2|u| + 1} \right) \end{bmatrix}, \quad (47-5)$$

ماتریس (۴۷-۵) معین مثبت است و مسأله یافتن یک CLF برای سیستم (۴۵-۵) به یافتن یک CLF

برای سیستم افین زیر تبدیل می شود:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + (x_1 - x_2)u \\ \dot{x}_2 = x_2 + (x_1 + x_2)u \\ \dot{x}_3 = 0.25x_3 + x_3u \end{cases} \quad (48-5)$$

^{۱۲} شبیه سازی مثال ۳-۵ از نویسنده رساله می باشد.

در مثال ۲-۵، با استفاده از تابع لیپانوف کنترل زیر

$$V(x) = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + x_2^2, \quad (۴۹-۵)$$

یک قانون کنترل برای سیستم (۳۵-۵) به دست آمد که بر اساس آن، زاویه بین V_x^T و

$f(x) + g(x)u$ بزرگ تر از ۱۲۰ درجه است. از طرف دیگر، بر اساس ردیف پنجم جدول ۱-۵ داریم:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \lambda_1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad (۵۰-۵)$$

$$\Rightarrow \theta_A = \arccos \left[\min \left(\frac{\sqrt{\lambda_1}}{\lambda_1 + 1}, \frac{\sqrt{\lambda_2}}{\lambda_2 + 1}, \frac{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}{\lambda_1 + \lambda_2} \right) \right],$$

برای این که بتوان از قانون کنترل مثال ۲-۵ جهت کنترل سیستم (۴۵-۵) استفاده نمود، لازم

است داشته باشیم:

$$\theta_A < 30^\circ, \quad (۵۱-۵)$$

یا

$$\frac{1}{3} < \frac{\lambda_1}{\lambda_2} < 3, \quad \frac{1}{3} < \lambda_1, \lambda_2 < 3, \quad (۵۲-۵)$$

ماتریس $A(x, u)$ در شرایط (۵۲.۵) صدق می کند. بنابراین، رابطه (۴۹-۵) برای سیستم

(۴۵-۵) نیز یک CLF محسوب می شود و قانون کنترل مثال ۲-۵، این سیستم را نیز پایدار مجانبی

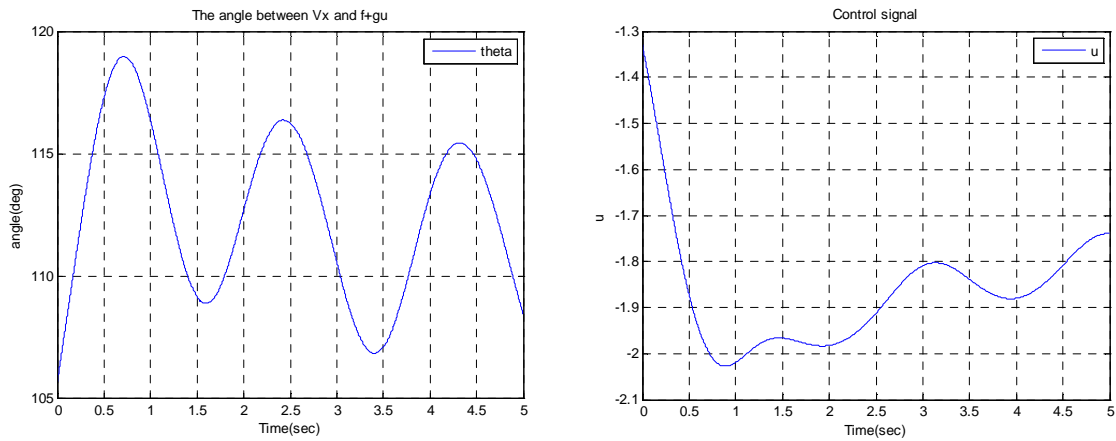
جامع می کند. شکل های (۹-۵) و (۱۰-۵) نحوه عملکرد این قانون روی سیستم (۴۵-۵) را به ازای

شرایط اولیه $x = [1 \ 1 \ -1]^T$ نشان می دهند. از شکل (۹-۵) مشخص است که قانون کنترل پیوسته و

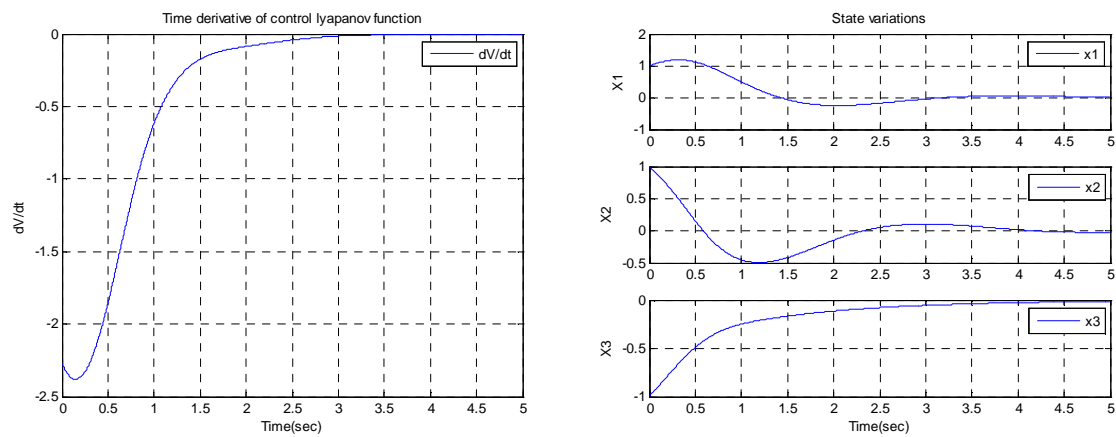
کراندار است و تغییرات زاویه بین بردارهای گرادیان تابع لیپانوف کنترل و مشتق بردار حالت همواره بالای

۹۰ درجه است که نشانی از پایداری مجانبی سیستم حلقه بسته روی نقطه تعادل آن است. شکل (۱۰-۵)

با نمایش همگرایی حالت ها به صفر و نیز منفی بودن مشتق زمانی تابع لیپانوف کنترل، این موضوع را تأیید می کند.



شکل (۹-۵): سیگنال کنترل و زاویه بین $f + gu$ و V_x برای شرایط اولیه $x=[1, 1, -1]$



شکل (۱۰-۵): همگرایی حالت ها برای شرایط اولیه $x=[1, 1, -1]$ و مشتق زمانی تابع لیپانوف کنترل

فصل ششم:

قانون کنترل حداکثر زاویه برای

سیستم های دو ورودی

در فصل گذشته روابط قانون کنترل حداکثر زاویه به دست آمد. قانون کنترل حداکثر زاویه فصل پیش، برای سیستم های خطی و غیرخطی تک ورودی قابل به کارگیری است. از آن جا که بسیاری از سیستم های واقعی خصوصاً در حوزه های رباتیک و هوافضا بیش از یک ورودی دارند، به دست آوردن روابط قانون کنترل حداکثر زاویه برای سیستم های چند ورودی، و تعمیم این قانون برای سیستم های با ورودی های بیشتر از اهمیت بسزایی برخوردار است. در این فصل می خواهیم قانون کنترل حداکثر زاویه را برای سیستم های دو ورودی به دست آوریم. برای این منظور ابتدا به حل روابط و معرفی شرایط لازم برای یک سیستم دو ورودی کلی می پردازیم. سپس با پیاده سازی قانون کنترل به دست آمده روی یک نمونه سیستم غیرخطی دو ورودی، نشان می دهیم که قانون کنترل برای پایدارسازی سیستم های دو ورودی عملکرد مطلوبی دارد^۱.

۶-۱- قانون کنترل حداکثر زاویه برای سیستم های دو ورودی

سیستم دو ورودی ،

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, f(\cdot) = \cdot, x \in R^n, g(x) \neq \cdot, \forall x \neq \cdot \quad (۱-۶)$$

$$g(x) = [g_1(x) \quad g_2(x)], u = [u_1 \quad u_2]^T,$$

را در نظر می گیریم. فرض می کنیم $V(x)$ تابع لیاپانوف کنترل هموار سیستم (۶-۱) باشد. برای راحتی کار $f(x)$ را با f ، $g(x) = [g_1(x) \quad g_2(x)]$ را با $g = [g_1 \quad g_2]$ و $\frac{\partial V(x)}{\partial x}$ را با V_x و ضرب داخلی u در v را با uv و نرم-۲ بردار را با $\|\cdot\|$ نمایش می دهیم. فرض می کنیم زاویه بین $f + gu$ و V_x^T برابر $\theta^\circ + 90^\circ$ باشد. داریم:

۱) کلیه مطالب مطرح شده در این فصل به جز صورت مسأله بخش ۶-۲ از نویسنده رساله می باشد.

$$V_x^T \cdot (f + gu) = \|V_x^T\| \|f + gu\| \cos(\theta + 90^\circ), \quad (2-6)$$

و یا،

$$V_x^T \cdot (f + g_1 u_1 + g_2 u_2) = -\|V_x^T\| \|f + g_1 u_1 + g_2 u_2\| \sin \theta, \quad (3-6)$$

با مربع کردن طرفین (3-6) و ساده سازی داریم:

$$\alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_1 + \beta_1 u_2^2 + \beta_2 u_2 + \gamma u_1 u_2 + \eta = 0, \quad (4-6)$$

که در آن:

$$\alpha_1 = (V_x^T g_1)^2 - \|V_x^T\|^2 \|g_1\|^2 \sin^2 \theta, \quad (5-6)$$

$$\beta_1 = (V_x^T g_2)^2 - \|V_x^T\|^2 \|g_2\|^2 \sin^2 \theta,$$

$$\alpha_2 = 2(V_x^T f)(V_x^T g_1) - 2(f g_1) \|V_x^T\|^2 \sin^2 \theta,$$

$$\beta_2 = 2(V_x^T f)(V_x^T g_2) - 2(f g_2) \|V_x^T\|^2 \sin^2 \theta,$$

$$\gamma = 2(V_x^T g_1)(V_x^T g_2) - 2(g_1 g_2) \|V_x^T\|^2 \sin^2 \theta,$$

$$\eta = (V_x^T f)^2 - \|f\|^2 \|V_x^T\|^2 \sin^2 \theta.$$

بازسازی معادله (4-6) برحسب توان های نزولی u_1 نتیجه می دهد:

$$\alpha_1 u_1^2 + (\alpha_2 + \gamma u_2) u_1 + (\beta_1 u_2^2 + \beta_2 u_2 + \eta) = 0. \quad (6-6)$$

برای آن که (6-6) ریشه حقیقی داشته باشد لازم است:

$$\Delta = (\gamma^2 - 4\alpha_1 \beta_1) u_2^2 + (2\alpha_2 \gamma - 4\alpha_1 \beta_2) u_2 + (\alpha_2^2 - 4\alpha_1 \eta) \geq 0. \quad (7-6)$$

سمت چپ نامساوی (7-6) خود یک معادله درجه دوم برحسب u_2 است و برای برقراری این

رابطه لازم است رابطه (8-6) در نظر گرفته شود و u_2 متناسب با آن انتخاب شود:

$$\hat{\Delta} = (\alpha_r \gamma - \alpha_r \beta_r)^2 - (\gamma^2 - \alpha_r \beta_r)(\alpha_r^2 - \alpha_r \eta) \geq 0. \quad (8-6)$$

با جایگذاری (6-5) در (6-8) و ساده سازی داریم:

$$P \|V_x^T\|^2 \sin^2 \theta + Q \|V_x^T\|^2 \sin^2 \theta + R \geq 0, \quad (9-6)$$

که در آن با فرض،

$$M_1 = \|f\|^2 \|g_1\|^2 - (fg_1)^2, \quad (10-6)$$

$$M_r = \|f\|^2 \|g_r\|^2 - (fg_r)^2,$$

$$M_{rr} = \|g_1\|^2 \|g_r\|^2 - (g_1 g_r)^2,$$

P, Q و R به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$P = \|g_1\|^2 [(g_1 g_r)^2 \|f\|^2 + (fg_1)^2 \|g_r\|^2 - M_{rr} \|g_1\|^2 - 2(fg_1)(fg_r)(g_1 g_r)], \quad (11-6)$$

$$\begin{aligned} Q = & M_1 (V_x^T g_1)^2 \|g_r\|^2 + M_r (V_x^T g_r)^2 \|g_1\|^2 - 2M_1 (V_x^T g_1)(V_x^T g_r)(g_1 g_r) \\ & + M_{rr} (V_x^T g_1)^2 \|f\|^2 + M_{rr} (V_x^T f)^2 \|g_1\|^2 \\ & + 2(fg_1)(g_1 g_r)(V_x^T f)(V_x^T g_r) \|g_1\|^2 \\ & + 2(fg_1)(fg_r)(g_1 g_r)(V_x^T g_1)^2 \\ & + 2(fg_1)(fg_r)(V_x^T g_1)(V_x^T g_r) \|g_1\|^2 \\ & + 2(fg_r)(g_1 g_r)(V_x^T f)(V_x^T g_1) \|g_1\|^2 \\ & - 2(fg_1)^2 (g_1 g_r)(V_x^T g_1)(V_x^T g_r) - 2(fg_r)(V_x^T f)(V_x^T g_r) \|g_1\|^2 \\ & - 2(fg_r)^2 (V_x^T g_1)^2 \|g_1\|^2 - 2(V_x^T f)(V_x^T g_1)(fg_1) \|g_1\|^2 \|g_r\|^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R = & (V_x^T g_1)^2 [-M_{rr} (V_x^T g_1)^2 - M_1 (V_x^T g_r)^2 - M_{rr} (V_x^T f)^2 \\ & + 2(V_x^T f)(V_x^T g_r)(fg_r) \|g_1\|^2 + 2(V_x^T f)(V_x^T g_r)(g_1 g_r)(fg_1) \\ & + 2(V_x^T g_1)(V_x^T g_r)(g_1 g_r) \|f\|^2 + 2(V_x^T f)(V_x^T g_1)(fg_1) \|g_r\|^2 \\ & - 2(V_x^T g_1)(V_x^T g_r)(fg_1)(fg_r) - 2(V_x^T f)(V_x^T g_1)(fg_r)(g_1 g_r) \\ & - 4(V_x^T f)(V_x^T g_r)(fg_1)(g_1 g_r)]. \end{aligned}$$

رابطه (۹-۶) به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$\sin^2 \theta \leq \frac{-Q + \sqrt{Q^2 - 4PR}}{2P \|V_x^T\|^2}, \quad (12-6)$$

و یا،

$$0 < \sin \theta \leq \frac{1}{\|V_x^T\|} \sqrt{\frac{-Q + \sqrt{Q^2 - 4PR}}{2P}}, \quad (13-6)$$

نامساوی (۱۳-۶) حداکثر مقدار θ را برای یک $V(x)$ نشان می دهد. بنابراین حداکثر زاویه بین

$f + gu$ و V_x^T عبارت است از $\theta.^\circ + 90.^\circ$ که θ از رابطه زیر به دست می آید:

$$\sin \theta. = \frac{1}{\|V_x^T\|} \sqrt{\frac{-Q + \sqrt{Q^2 - 4PR}}{2P}}. \quad (14-6)$$

به ازای $\theta = \theta$ رابطه (۹-۶) و یا معادل آن (۸-۶) برابر صفر می شود و رابطه (۷-۶) برای

u_2 ریشه مضاعف دارد. این ریشه برابر است با:

$$u_2 = \frac{2\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\gamma}{\gamma^2 - 4\alpha_1\beta_1}. \quad (15-6)$$

با جایگزینی (۱۴-۶) در (۱۵-۶) رابطه ای برحسب متغیرهای سیستم و گرادیان تابع لیاپانوف

برای u_2 به دست می آید. در این صورت اگر $\gamma^2 - 4\alpha_1\beta_1$ بزرگ تر از صفر باشد، با انتخاب (۱۵-۶)

رابطه (۷-۶) برابر صفر خواهد شد که به معنی ریشه مضاعف معادله (۶-۶) برای u_1 خواهد بود و در

صورت انتخاب مقداری نزدیک به (۱۵-۶)، رابطه (۷-۶) بزرگ تر از صفر است و به معنای وجود دو

ریشه ممکن برای u_1 است. اگر $\gamma^2 - 4\alpha_1\beta_1$ کوچک تر از صفر باشد، تنها انتخاب ممکن برای u_2

همان (۱۵-۶) است که منجر به حصول ریشه مضاعف برای u_1 خواهد شد. بدیهی است که در همه حال u_1 تابعی از u_2 ، گرادیان تابع لیاپانوف و متغیرهای سیستم می باشد.

با اعمال قوانین کنترل u_1 و u_2 به سیستم (۱-۶)، مشتق $V(x)$ در امتداد مسیر حالت سیستم حلقه بسته عبارت است از:

$$\frac{dV}{dt} = V_x^T (f + g_1 u_1 + g_2 u_2). \quad (۱۶-۶)$$

با توجه به تعریف تابع لیاپانوف کنترل، پایداری سیستم حلقه بسته به ازای $\frac{dV}{dt} < 0$ محقق می شود که معادل با $\theta > 0$ است و این شرط برای پایداری مجانبی سیستم حلقه بسته شرط کافی است. اگر شرط مورد نظر برآورده نشود، آنگاه قوانین کنترل به جای حداکثر کردن θ آن را حداقل می کنند. در این حالت می توان قوانین کنترل را با فرض این که زاویه بین گرادیان تابع لیاپانوف کنترل و مشتق بردار حالت کمتر از مقدار حداکثر $\theta + 90^\circ$ باشد، محاسبه نمود؛ یعنی،

$$\sin^2 \theta = \lambda \sin^2 \theta_0, \quad 0 < \lambda < 1, \quad (۱۷-۶)$$

در این صورت رابطه (۹-۶) و یا معادل آن (۸-۶) بزرگ تر از صفر است و دو ریشه مجزا برای u_2 متصور است. پس برای برقراری رابطه (۷-۶) لازم است حالت های زیر مدنظر قرار گیرد:

(۱) اگر یکی از پاسخ های به دست آمده برای u_2 انتخاب شود، یک ریشه مضاعف برای u_1 متصور

است که از رابطه زیر به دست می آید:

$$u_1 = \frac{-(\alpha_2 + \gamma u_2)}{2\alpha_1}. \quad (۱۸-۶)$$

(۲) اگر دو ریشه مجزا برای u_1 در نظر بگیریم، بسته به علامت $\gamma^2 - 4\alpha_1\beta_1$ دو حالت رخ می دهد:

الف) $\gamma^2 - 4\alpha_1\beta_1$ بزرگ تر از صفر است؛ در این صورت u_2 باید مقداری بزرگ تر از ریشه بزرگ تر رابطه (۶-۷) و یا مقداری کوچک تر از ریشه کوچک تر آن اختیار کند. ب) $\gamma^2 - 4\alpha_1\beta_1$ کوچک تر از صفر است؛ در این صورت u_2 باید مقداری کوچک تر از ریشه بزرگ تر رابطه (۶-۷) و یا مقداری بزرگ تر از ریشه کوچک تر آن اختیار کند.

در عین حال برای تضمین پایداری، لازم است در انتخاب بین ریشه بزرگ تر و کوچک تر نیز تمایز قایل شویم. به این صورت که اگر $V_x^T g_2$ و $\gamma^2 - 4\alpha_1\beta_1$ هم علامت باشند، ریشه کوچک تر برای u_2 و در غیر این صورت ریشه بزرگ تر انتخاب می شود. در حالت دوم که برای u_1 دو ریشه مجزا فرض کردیم، نیز لازم است انتخاب یکی از دو ریشه مشروط به تعیین علامت α_1 و $V_x^T g_1$ باشد؛ به این ترتیب که اگر α_1 و $V_x^T g_1$ هم علامت باشند، ریشه کوچک تر و در غیر این صورت ریشه بزرگ تر انتخاب شود. در زیر خلاصه ای از تمامی حالت های مذکور آمده است.

حالت اول: زاویه روی مقدار حداکثر تنظیم می شود.

$$\sin^2 \theta = \sin^2 \theta_0,$$

اگر $\gamma^2 - 4\alpha_1\beta_1 > 0$,

$$\Rightarrow \begin{cases} u_2 = \frac{2\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\gamma}{\gamma^2 - 4\alpha_1\beta_1} \rightarrow \Delta = 0, u_1 = \frac{-(\alpha_2 + \gamma u_2)}{2\alpha_1} \\ u_2 = \frac{2\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\gamma}{\gamma^2 - 4\alpha_1\beta_1} \rightarrow \Delta > 0, \begin{cases} u_1 = \frac{-(\alpha_2 + \gamma u_2) \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha_1} \\ \text{با علامت منفی} \rightarrow \text{اگر } (V_x^T g_1) \cdot \alpha_1 > 0 \\ \text{با علامت مثبت} \rightarrow \text{و در غیر این صورت} \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{اگر } \gamma^2 - 4\alpha_1\beta_1 < 0 \Rightarrow \left\{ u_2 = \frac{2\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\gamma}{\gamma^2 - 4\alpha_1\beta_1} \rightarrow \Delta = 0, u_1 = \frac{-(\alpha_2 + \gamma u_2)}{2\alpha_1} \right.$$

حالت دوم: زاویه روی مقداری کمتر از حداکثر تنظیم می شود.

$$\sin^2 \theta = \lambda \sin^2 \theta, \quad 0 < \lambda < 1 \Rightarrow \Delta > 0,$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} u_2 = \frac{\varphi \alpha_1 \beta_2 - \gamma \alpha_2 \gamma \pm \sqrt{\Delta}}{\gamma(\gamma^2 - \varphi \alpha_1 \beta_1)} \\ \text{اگر } (V_x^T g_2) \cdot (\gamma^2 - \varphi \alpha_1 \beta_1) > 0 \rightarrow \text{با علامت منفی} \\ \text{با علامت مثبت} \rightarrow \text{و در غیر این صورت} \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Delta = 0, u_1 = \frac{-(\alpha_2 + \gamma u_2)}{\gamma \alpha_1} \\ \text{اگر } \gamma^2 - \varphi \alpha_1 \beta_1 > 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{اگر } (V_x^T g_2) \cdot (\gamma^2 - \varphi \alpha_1 \beta_1) > 0 \rightarrow u_2 < \frac{\varphi \alpha_1 \beta_2 - \gamma \alpha_2 \gamma - \sqrt{\Delta}}{\gamma(\gamma^2 - \varphi \alpha_1 \beta_1)} \\ \text{و در غیر این صورت} \rightarrow u_2 > \frac{\varphi \alpha_1 \beta_2 - \gamma \alpha_2 \gamma + \sqrt{\Delta}}{\gamma(\gamma^2 - \varphi \alpha_1 \beta_1)} \end{array} \right. \\ \text{اگر } \gamma^2 - \varphi \alpha_1 \beta_1 < 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{اگر } (V_x^T g_2) \cdot (\gamma^2 - \varphi \alpha_1 \beta_1) > 0 \rightarrow u_2 > \frac{\varphi \alpha_1 \beta_2 - \gamma \alpha_2 \gamma - \sqrt{\Delta}}{\gamma(\gamma^2 - \varphi \alpha_1 \beta_1)} \\ \text{و در غیر این صورت} \rightarrow u_2 < \frac{\varphi \alpha_1 \beta_2 - \gamma \alpha_2 \gamma + \sqrt{\Delta}}{\gamma(\gamma^2 - \varphi \alpha_1 \beta_1)} \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \Rightarrow \Delta > 0, \left\{ \begin{array}{l} u_1 = \frac{-(\alpha_2 + \gamma u_2) \pm \sqrt{\Delta}}{\gamma \alpha_1} \\ \text{با علامت منفی} \rightarrow \text{اگر } (V_x^T g_1) \cdot \alpha_1 > 0 \\ \text{با علامت مثبت} \rightarrow \text{و در غیر این صورت} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

۶-۲- کنترل سیستم لوتکا-ولتررا^۲ [۲۳]

سیستم

$$\begin{cases} \dot{x} = (2 - 2y + b_{11}u_1 + b_{12}u_2)x \\ \dot{y} = (3x - 3 + b_{21}u_1 + b_{22}u_2)y \end{cases} \quad (19-6)$$

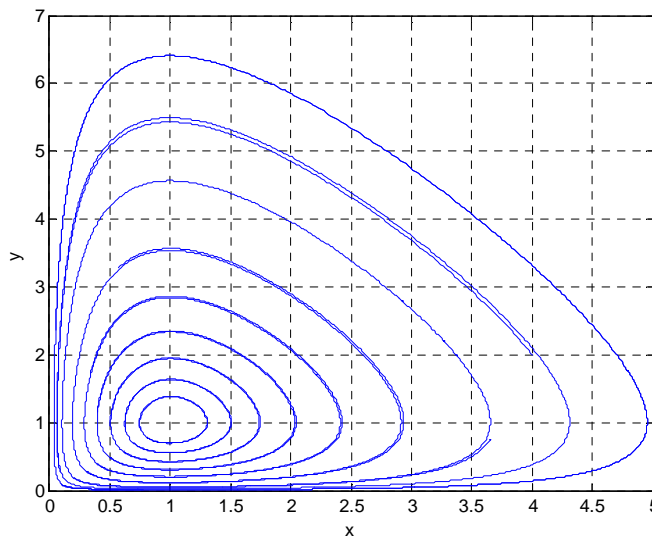
^۲ Lotka- Volterra

را در نظر بگیرید که به ازای $u = [u_1 \ u_2]^T = [0 \ 0]^T$ یک سیستم لوتکا-ولترا مرتبه دوم است. متغیرهای $x(t)$ و $y(t)$ بیانگر کمیت هایی است که تنها مقادیر غیرمنفی را اختیار می کنند (برای مثال اندازه جمعیت و ...). بنابراین، تنها علاقمند به رفتار سیستم در ربع اول هستیم:

$$D = \{(x, y): x > 0, y > 0\}. \quad (20-6)$$

می توان اثبات نمود که مجموعه (20-6) هم برای سیستم آزاد^۳ ($u = 0$) و هم برای سیستم حلقه بسته، یک مجموعه ناوردا محسوب می شود. بنابراین تمرکز روی ربع اول معنی دار است.

شکل (1-6) مسیره های سیستم (19-6) را با $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ و $u = 0$ نشان می دهد. مشاهده می شود که مسیره های سیستم در حالت آزاد به نقطه تعادل $(1 \ 1)^T$ منتهی نمی شوند و تنها اطراف آن باقی می مانند.



شکل (1-6): نمایش مسیره های سیستم (19.6) در حالت بدون ورودی

^۳ Free System

می خواهیم قانون کنترل حداکثر زاویه برای سیستم های دو ورودی در بخش ۱-۶ را روی این

سیستم پیاده سازی کنیم و انتظار می رود نقطه تعادل $(1 \quad 1)^T$ پایدار مجانبی شود.

در اولین گام، با تبدیل دستگاه مختصات به صورت $x_1 = \ln x$ و $x_2 = \ln y$ ، داریم:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2e^{x_2} \\ 3e^{x_1} - 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} u. \quad (21-6)$$

تابع

$$V(x) = 3e^{x_1} - 3x_1 + 2e^{x_2} - 2x_2, \quad (22-6)$$

مثبت معین و نامحدود شعاعی است و یک تابع لیاپانوف کنترل برای سیستم (۲۱-۶) محسوب می شود.

قانون کنترل بخش ۱-۶ به ازای $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ و شرایط اولیه

$$(x_1(0) \quad x_2(0))^T = (1 \quad 1)^T,$$

و با شرط

$$\sin^2 \theta = 0.1 \sin^2 \theta_0, \quad (23-6)$$

روی سیستم (۲۱-۶) اجرا شده است. شکل (۲-۶) سیگنال های کنترل و نیز زاویه بین گرادیان تابع

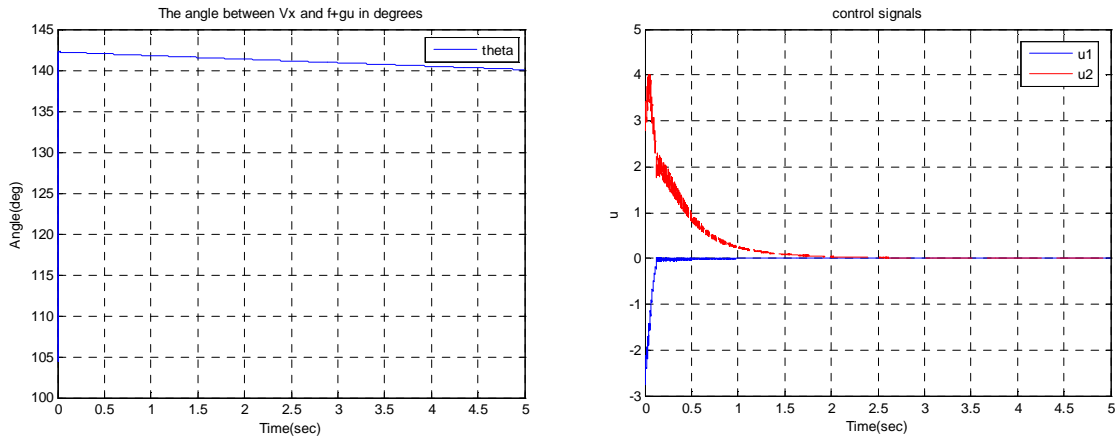
لیاپانوف کنترل و مشتق بردار حالت را نشان می دهد. در منحنی تغییرات زاویه مذکور نسبت به زمان

(شکل سمت چپ)، به عنوان یک معیار پایداری لحظه ای، مشاهده می شود که زاویه موردنظر همواره

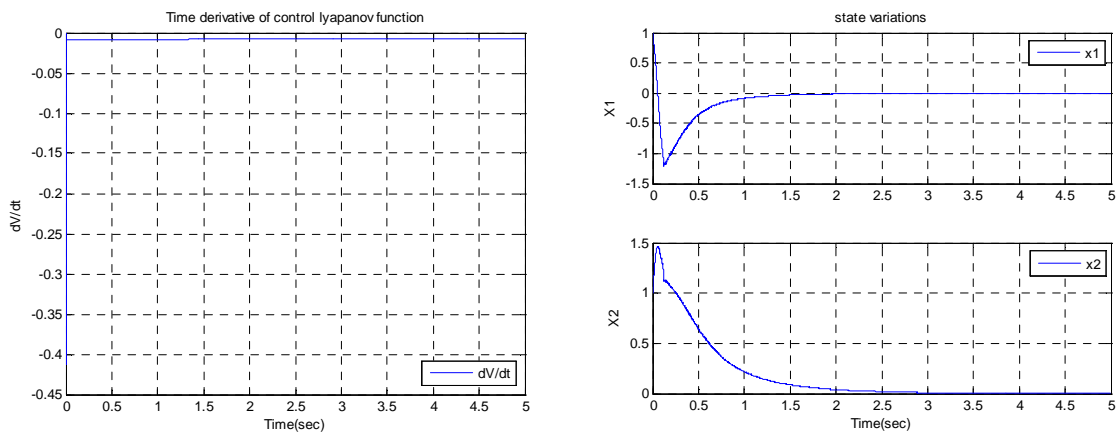
بالای ۹۰ درجه باقی می ماند. در شکل (۳-۶)، (منحنی سمت راست)، همگرایی متغیرهای حالت به

صفر، نشانه پایداری مجانبی نقطه تعادل $(1 \quad 1)^T$ در سیستم معادل (۱۹-۶) است. تغییرات مشتق

زمانی تابع لیپانوف کنترل (منحنی سمت چپ) نیز، تأییدی بر این مطلب است؛ زیرا این پارامتر همواره منفی باقی می ماند و این دلیلی بر پایداری مجانبی سیستم حلقه بسته است.^۴



شکل (۲.۶): سیگنال کنترل و زاویه بین $f + gu$ و V_x برای شرایط اولیه $x=[1, 1]$



شکل (۳.۶): همگرایی حالت ها برای شرایط اولیه $x=[1, 1]$ و مشتق زمانی تابع لیپانوف کنترل

^۴ حل و شبیه سازی بخش ۶-۲ از نویسنده رساله می باشد.

فصل هفتم:

پایدارسازی سیستم غیرافین

آونگ دوگانه

یکی از مزایای مهم قانون کنترل حداکثر زاویه، امکان تعمیم آن به دسته ای از سیستم های غیرافین^۱ به منظور ساختن توابع لیاپانوف کنترل و پایدارسازی این سیستم ها می باشد. در سیستم های غیرافین، معادلات حالت نسبت به سیگنال کنترل غیرخطی است که موجب می شود پایدارسازی و کنترل آن ها دشوار باشد. در عین حال، همگام با پیچیدگی روزافزون سیستم ها، نیاز به کنترل انواع سیستم های غیرافین نیز رو به فزونی است و در حال حاضر یکی از حوزه های مهم تحقیقات در زمینه سیستم های کنترلی محسوب می شود.

همان گونه که در فصل ۵ عنوان شد، قانون کنترل حداکثر زاویه برای دسته ای از سیستم های غیرافین که در آن ها می توان بخش غیرافین را به صورت یک ماتریس مربعی ناویژه از معادلات حالت جداسازی نمود، معتبر است. با استفاده از این قانون و مفهوم زاویه ویژه، یافتن توابع لیاپانوف کنترل برای سیستم غیرافین، به یافتن توابع لیاپانوف کنترل برای بخش افین جداسازی مذکور (که ممکن است خطی هم باشد) تبدیل می شود و اولین گام در محاسبه CLF برای سیستم های غیرافین محسوب می شود. در عین حال در صورت برقراری شرایط، قانون کنترل حداکثر زاویه که با استفاده از یک CLF برای بخش افین به دست می آید، برای پایدارسازی کل سیستم نیز معتبر است.

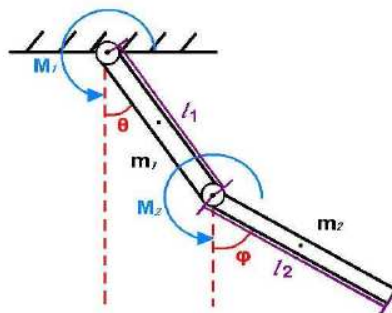
قانون کنترل حداکثر زاویه در سیستم های دو ورودی، که روش حل آن در فصل ۶ معرفی شده است، همان کارایی قانون کنترل حداکثر زاویه در سیستم های تک ورودی به منظور تعمیم به سیستم های غیرافین را داراست و تعایف و قضایای عنوان شده در فصل ۵ در مورد قانون کنترل حداکثر زاویه و شرایط لازم برای امکان پیاده سازی روی سیستم غیرافین، برای تعمیم قانون کنترل حداکثر زاویه در سیستم های دو ورودی افین به سیستم های دو ورودی غیرافین نیز معتبر است.

^۱ Non-Affine System

پایدارسازی آونگ معکوس^۲ یکی از مسایل پایه در کنترل غیرخطی محسوب می شود. این مدل عموماً برای نمایش کارکرد روش های گوناگون کنترلی مورد استفاده قرار می گیرد. مسأله پایدارسازی زمانی چالش برانگیزتر خواهد بود که بازوی دومی به آونگ اضافه شود. اهمیت عملی این کار در پاره ای از کاربردهای واقعی آن مانند کنترل بازوهای روبات و یا جرثقیل ها بروز می کند. به منظور نمایش نحوه پیاده سازی و عملکرد قانون کنترل حداکثر زاویه روی یک نمونه واقعی سیستم دو ورودی غیرافین، به کنترل نوسان آونگ دوگانه^۳ می پردازیم. در بخش ۷-۱ سیستم آونگ دوگانه را معرفی می کنیم. در بخش ۷-۲ یک جداسازی مناسب برای بخش غیرافین پیشنهاد می کنیم. در ادامه سعی می کنیم با استفاده از روابط قانون کنترل حداکثر زاویه برای سیستم های دو ورودی و شرایط مربوط به آن، بخش جداسازی شده و در نهایت سیستم کلی را پایدارسازی نماییم.

۷-۱- معرفی سیستم [۲۴]

سیستم دو درجه آزادی آونگ دوگانه را در شکل (۷-۱) در نظر بگیرید.



شکل (۷-۱): سیستم آونگ دوگانه

^۲ Inverse Pendulum

^۳ Swing-up Control of Double Pendulum

فرض می کنیم چرخش دو بازوی آونگ در صفحه عمودی امکان پذیر است. کنترل گشتاوری به دو مفصل متصل کننده اعمال می شوند. بازوها صلب فرض شده اند و از تمامی نیروهای سایشی صرف نظر شده است. معادلات حرکت با استفاده از معادلات لاگرانژ به صورت زیر حاصل می شود:

$$M_1(t) - M_2(t) \quad (1-7)$$

$$= \frac{1}{3} l_1^2 (m_1 + 3m_2) \ddot{\theta}(t) + \frac{1}{3} g l_1 (m_1 + 2m_2) \sin \theta(t) \\ + \frac{1}{3} l_1 l_2 m_2 \cos(\varphi(t) - \theta(t)) \ddot{\varphi}(t) \\ - \frac{1}{3} l_1 l_2 m_2 \dot{\varphi}^2(t) \sin(\varphi(t) - \theta(t)),$$

$$M_2(t) = \frac{1}{3} l_1 l_2 m_2 \cos(\varphi(t) - \theta(t)) \ddot{\theta}(t) + \frac{1}{3} m_2 l_2^2 \ddot{\varphi}(t) + \frac{1}{3} g l_2 m_2 \sin \varphi(t) \\ - \frac{1}{3} l_1 l_2 m_2 \dot{\theta}^2(t) \sin(\varphi(t) - \theta(t)).$$

که در آن $\theta(t)$ و $\varphi(t)$ زوایای بازوهای اول و دوم نسبت به محور عمودی، و $M_1(t)$ و $M_2(t)$ گشتاورهای وارد شده به مفاصل اول و دوم هستند. در حالت کلی، گشتاور توسط کاراندازی تولید می شود که می تواند تابعی غیرخطی از حالت های سیستم و ورودی کنترل واقعی باشد؛ به طوری که

$$M_i(t) = M_i(\theta(t), \varphi(t), u_i(t)), \quad (2-7)$$

با تعریف توابع زیر

$$f_{11}(\theta, \varphi) = \frac{12}{l_1^2 [4m_1 + 12m_2 - 9m_2 \cos^2(\varphi - \theta)]}, \quad (3-7) \\ f_{12}(\theta, \varphi) = \frac{12l_2 + 18l_1 \cos(\varphi - \theta)}{l_1^2 l_2 [9m_2 \cos^2(\varphi - \theta) - 4m_1 - 12m_2]}$$

$$f_{\tau_1}(\theta, \varphi) = \frac{\lambda \cos(\varphi - \theta)}{l_1 l_\tau [\lambda m_\tau \cos^2(\varphi - \theta) - \epsilon m_1 - \nu m_\tau]},$$

$$f_{\tau\tau}(\theta, \varphi) = \frac{\nu m_1 + \epsilon m_\tau}{l_\tau^2 m_\tau [\epsilon m_1 + \nu m_\tau - \lambda m_\tau \cos^2(\varphi - \theta)]}$$

$$+ \frac{\lambda l_\tau \cos(\varphi - \theta)}{l_1 l_\tau^2 [\epsilon m_1 + \nu m_\tau - \lambda m_\tau \cos^2(\varphi - \theta)]},$$

$$f_{1\tau}(\theta, \dot{\theta}, \varphi, \dot{\varphi})$$

$$= \frac{\lambda g m_\tau \sin(\nu\varphi - \theta)}{l_1 [\lambda \delta m_\tau + \lambda m_1 - \lambda m_\tau \cos(\nu\varphi - \nu\theta)]}$$

$$- \frac{\lambda l_1 m_\tau \dot{\theta}^\nu \sin(\nu\varphi - \nu\theta)}{l_1 [\lambda \delta m_\tau + \lambda m_1 - \lambda m_\tau \cos(\nu\varphi - \nu\theta)]}$$

$$+ \frac{\nu l_\tau m_\tau \dot{\varphi}^\nu \sin(\varphi - \theta)}{l_1 [\lambda \delta m_\tau + \lambda m_1 - \lambda m_\tau \cos(\nu\varphi - \nu\theta)]}$$

$$- \frac{(\lambda \delta g m_\tau + \nu g m_1) \sin \theta}{l_1 [\lambda \delta m_\tau + \lambda m_1 - \lambda m_\tau \cos(\nu\varphi - \nu\theta)]},$$

$$f_{\tau\tau}(\theta, \dot{\theta}, \varphi, \dot{\varphi})$$

$$= \frac{\nu l_1 \dot{\theta}^\nu \sin(\varphi - \theta) (m_1 + \epsilon m_\tau)}{l_\tau [\lambda \delta m_\tau + \lambda m_1 - \lambda m_\tau \cos(\nu\varphi - \nu\theta)]}$$

$$- \frac{\lambda l_\tau m_\tau \dot{\varphi}^\nu \sin(\nu\varphi - \nu\theta)}{l_\tau [\lambda \delta m_\tau + \lambda m_1 - \lambda m_\tau \cos(\nu\varphi - \nu\theta)]}$$

$$- \frac{\lambda g \sin(\varphi - \nu\theta) (m_1 + \nu m_\tau)}{l_\tau [\lambda \delta m_\tau + \lambda m_1 - \lambda m_\tau \cos(\nu\varphi - \nu\theta)]}$$

$$+ \frac{\epsilon g \sin \varphi (m_1 + \epsilon m_\tau)}{l_\tau [\lambda \delta m_\tau + \lambda m_1 - \lambda m_\tau \cos(\nu\varphi - \nu\theta)]}.$$

معادلات (۱-۷) را می توان برحسب $\ddot{\theta}(t)$ و $\ddot{\varphi}(t)$ حل نمود:

$$\ddot{\theta}(t) = f_{11}(\theta, \varphi)M_1(\theta(t), \varphi(t), u_1(t)) \quad (۴-۷)$$

$$+ f_{12}(\theta, \varphi)M_2(\theta(t), \varphi(t), u_2(t)) + f_{13}(\theta, \dot{\theta}, \varphi, \dot{\varphi}),$$

$$\ddot{\varphi}(t) = f_{21}(\theta, \varphi)M_1(\theta(t), \varphi(t), u_1(t)) + f_{22}(\theta, \varphi)M_2(\theta(t), \varphi(t), u_2(t))$$

$$+ f_{23}(\theta, \dot{\theta}, \varphi, \dot{\varphi}).$$

$$\theta(\cdot) = \theta., \dot{\theta}(\cdot) = \dot{\theta}., \varphi(\cdot) = \varphi., \dot{\varphi}(\cdot) = \dot{\varphi}..$$

که در آن $\theta.$ ، $\dot{\theta}.$ ، $\varphi.$ و $\dot{\varphi}.$ شرایط اولیه سیستم هستند.

با تعریف متغیرهای حالت به صورت

$$x_1(t) = \theta(t), x_2(t) = \dot{\theta}(t), x_3(t) = \varphi(t), x_4(t) = \dot{\varphi}(t). \quad (۵-۷)$$

فضای حالت معادلات (۱-۷) عبارت است از:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2 = f_1(x(t), u(t)) \\ \dot{x}_3(t) = x_4(t) \\ \dot{x}_4 = f_2(x(t), u(t)) \end{cases} \quad (۶-۷)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t), x(\cdot) = x..$$

که در آن بردار حالت های قابل اندازه گیری، بردار خروجی ها و بردار ورودی های کنترلی به ترتیب به

صورت

$$x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t)]^T,$$

$$y(t) = [y_1(t) \ y_2(t)]^T,$$

$$u(t) = [u_1(t) \ u_2(t)]^T.$$

است و نیز $f_1(x(t), u(t))$ و $f_2(x(t), u(t))$ به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\begin{aligned}
 f_1(x(t), u(t)) & \quad (7-7) \\
 &= f_{11}(x(t))M_1(x(t), u_1(t)) \\
 &+ f_{12}(x(t))M_2(x(t), u_2(t)) + f_{13}(x(t)), \\
 f_2(x(t), u(t)) & \\
 &= f_{21}(x(t))M_1(x(t), u_1(t)) \\
 &+ f_{22}(x(t))M_2(x(t), u_2(t)) + f_{23}(x(t)).
 \end{aligned}$$

لازم به ذکر است که سیستم نسبت به خروجی های اندازه گیری شده از درجه نسبی^۴ کامل برخوردار است، به طوری که هیچ دینامیک داخلی در سیستم وجود ندارد.

در حالت کلی گشتاور تولید شده توسط یک کارانداز به صورت غیرخطی به حالت های سیستم و ورودی کنترل واقعی بستگی دارد. برای تضمین کنترل پذیری لازم است توابع M_1 و M_2 رابطه زیر را برآورده کنند:

$$\left| \frac{\partial M_i(x, u_i)}{\partial u_i} \right| \geq \beta_i > 0, i = 1, 2 \quad (8-7)$$

هدف از کنترل نوسان آونگ دوگانه، طراحی ورودی کنترل $u(t)$ به گونه ای است که خروجی $y(t)$ به نقطه تعادل سیستم همگرا شود.

^۴ Relative Degree

فرض می کنیم M_1 و M_2 از روابط زیر به دست می آیند:

$$M_1(u_1) = f(u_1) + 0.35u_1, \quad (9-7)$$

$$M_2(u_2) = f(u_2) + 0.25u_2.$$

که در آن

$$f(u_i) = e^{-\frac{u_i^2}{0.7}}. \quad (10-7)$$

و به طوری که داریم:

$$\frac{\partial M_1(u_1)}{\partial u_1} \geq 0.35 > 0, \quad (11-7)$$

$$\frac{\partial M_2(u_2)}{\partial u_2} \geq 0.25 > 0.$$

۷-۲- جداسازی ماتریس غیرافین از سیستم آونگ دوگانه^۵

در سیستم (۷-۶)، آرایش معادلات حالت به گونه ای است که امکان جداسازی بخش های غیرافین به عنوان یک ماتریس مربعی حقیقی و ناویژه که در یک مجموعه معادلات حالت افین ضرب شود، وجود دارد. این جداسازی منحصر به فرد نیست و حالت های مختلفی امکان پذیر است. مناسب ترین جداسازی آن است که ماتریس غیرافین حتی الامکان ساده و دارای آرایش منظمی باشد، به نحوی که بتوان برای آن زاویه ویژه محاسبه نمود. در عین حال، هر یک از آرایه های غیرصفر ماتریس موردنظر باید کراندار باشند.

^۵ کلیه مطالب مطرح شده در این بخش و تمامی شبیه سازی ها تا انتهای فصل هفتم از نویسنده رساله می باشد.

سیستم (۶-۷) را می توان به صورت زیر نمایش داد:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ \cdot / 35 f_{11}(x) u_1 + \cdot / 25 f_{12}(x) u_2 + f_{13}(x) \\ x_4 \\ \cdot / 35 f_{21}(x) u_1 + \cdot / 25 f_{22}(x) u_2 + f_{23}(x) \end{bmatrix}, \quad (12-7)$$

که در آن:

$$\lambda_1 = \frac{f_{11}f(u_1) + f_{12}f(u_2)}{\cdot / 35 f_{21} u_1 + \cdot / 25 f_{22} u_2 + f_{23}},$$

$$\lambda_2 = \frac{f_{21}f(u_1) + f_{22}f(u_2)}{\cdot / 35 f_{11} u_1 + \cdot / 25 f_{12} u_2 + f_{13}}.$$

بنابراین با فرض:

$$A(x, u) \quad (13-7)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{f_{21}f(u_1) + f_{22}f(u_2)}{\cdot / 35 f_{11} u_1 + \cdot / 25 f_{12} u_2 + f_{13}} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix},$$

بنا بر مطالب بخش ۲-۴-۵، مسأله یافتن CLF برای سیستم (۶-۷) و پایدارسازی آن، به یافتن

CLF برای سیستم افین زیر و پایدارسازی این سیستم کاهش می یابد:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \cdot / 35 f_{11}(x) u_1 + \cdot / 25 f_{12}(x) u_2 + f_{13}(x) \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \cdot / 35 f_{21}(x) u_1 + \cdot / 25 f_{22}(x) u_2 + f_{23}(x) \end{cases} \quad (14-7)$$

۳.۷ پایدارسازی بخش افین سیستم آونگ دوگانه

سیستم (۱۴-۷) که در بخش ۲-۷ به دست آمد، یک سیستم غیرخطی و افین دو ورودی است و برای پایدارسازی آن از قانون کنترل حداکثر زاویه برای سیستم های افین دو ورودی که در فصل ۶ به دست آمد، استفاده می کنیم.

ابتدا برای سیستم (۱۴-۷) تابع لیپانوف کنترل را به روش خطی سازی ژاکوبی حول مبدأ به

دست می آوریم:

$$A = \begin{bmatrix} \dot{} & 1 & \dot{} & \dot{} \\ -\dot{}/41 & \dot{} & 12/61 & \dot{} \\ \dot{} & \dot{} & \dot{} & 1 \\ 37/84 & \dot{} & -4/2 & \dot{} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \dot{} & \dot{} \\ \dot{}/6 & -1/0.714 \\ \dot{} & \dot{} \\ -\dot{}/9 & 2/3571 \end{bmatrix}, \quad (15-7)$$

با حل معادله ریکاتی، تابع لیپانوف کنترل به صورت زیر به دست می آید:

$$V = x^T P x, \quad (16-7)$$

که در آن:

$$P = \begin{bmatrix} 711/0.119 & 182/4292 & 458/4575 & 114/5635 \\ 182/4292 & 47/0.217 & 118/2384 & 29/4444 \\ 458/4575 & 118/2384 & 298/5454 & 74/277 \\ 114/5635 & 29/4444 & 74/277 & 18/5378 \end{bmatrix}, \quad (17-7)$$

همان گونه که در فصل ۴ عنوان شد، CLF به دست آمده به این روش، برای کل فضای حالت

معتبر نیست و هنگام پیاده سازی لازم است شرایط اولیه سیستم به حد کافی کوچک باشند.

قانون کنترل حداکثر زاویه برای سیستم های دو ورودی که در فصل ۶ به دست آمد، به ازای شرایط اولیه

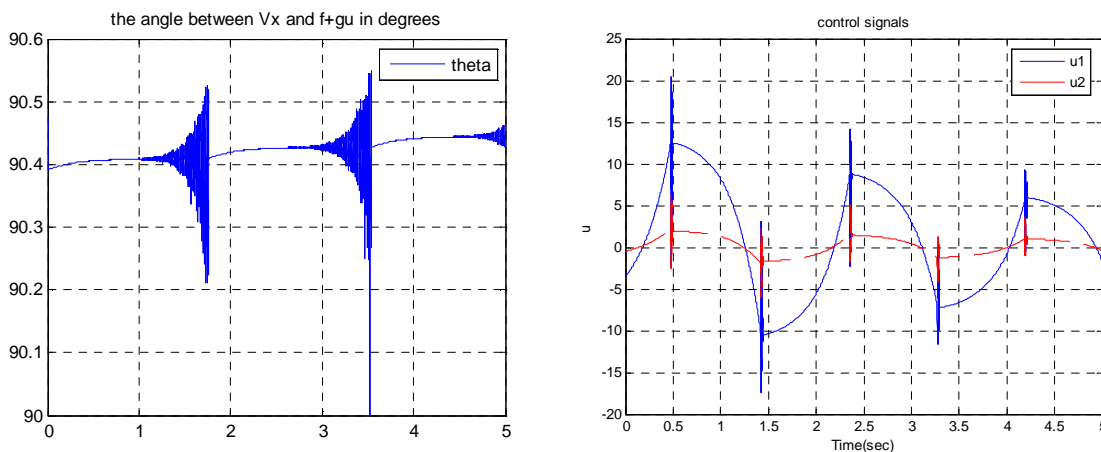
$$x_0 = \begin{bmatrix} 0/01 \\ \dot{} \\ -0/01 \\ \dot{} \end{bmatrix}, \quad (18-7)$$

و با فرض

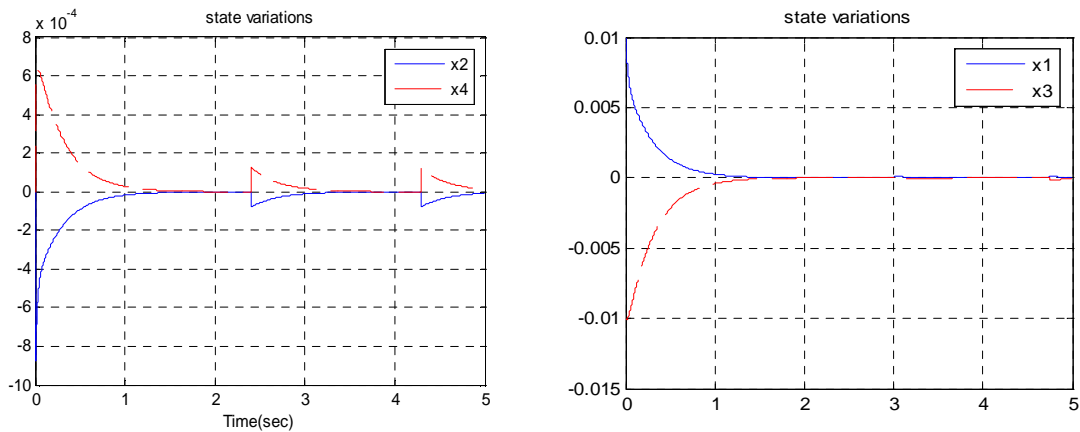
$$\sin^2 \theta = 0/1 \sin^2 \theta_0, \quad (19-7)$$

روی سیستم (۷-۱۴) اجرا شده است. از آن جا که در کنترل نوسان، سیستم از زوایای اولیه غیرصفر رها می شود، سرعت های زاویه ای اولیه $\dot{x}_1(0)$ و $\dot{x}_2(0)$ را صفر در نظر گرفته ایم.

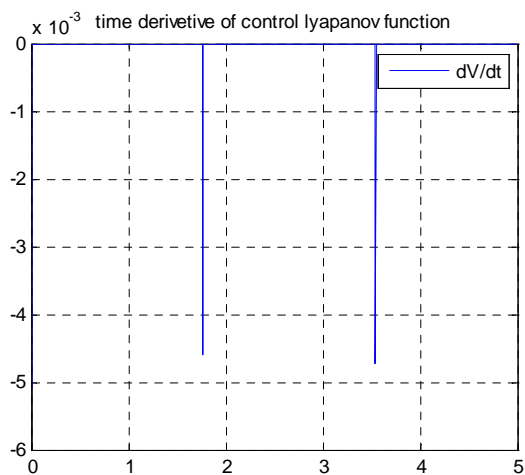
شکل (۷-۲) سیگنال های کنترل و نیز زاویه بین گرادیان تابع لیاپانوف کنترل و مشتق بردار حالت را نشان می دهد. در منحنی تغییرات زاویه مذکور نسبت به زمان، به عنوان یک معیار پایداری لحظه ای، مشاهده می شود که زاویه موردنظر همواره بالای ۹۰ درجه باقی می ماند. در شکل (۷-۳) همگرایی متغیرهای حالت به صفر، نشانه پایداری نقطه تعادل است. منفی بودن مشتق زمانی تابع لیاپانوف کنترل در شکل (۷-۴) نیز تأییدی دیگر بر پایداری سیستم حلقه بسته است.



شکل (۷-۲): سیگنال کنترل و زاویه بین $f + gu$ و V_x برای شرایط اولیه $x_0 = [0/01 \ 0 \ -0/01 \ 0]$



شکل (۳-۷): همگرایی حالت ها برای شرایط اولیه $x=[0/0.1 \ 0 \ -0/0.1 \ 0]$



شکل (۴-۷): مشتق زمانی تابع لیپانوف کنترل

۴-۷- پایدارسازی سیستم آونگ دوگانه

در این بخش، نشان می دهیم CLF و قانون کنترل به دست آمده در بخش ۳-۷، سیستم (۱۲-۷) را نیز پایدار مجانبی می کند. برای این منظور لازم است ماتریس (۱۳-۷) را از حیث زاویه ویژه مورد بررسی قرار دهیم. زاویه ویژه ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \lambda_1 \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \lambda_2 & \cdot & 1 \end{bmatrix}, \quad (20-7)$$

در جدول (۱-۵) موجود نیست. بنابراین برای محاسبه آن به تعریف زاویه ویژه در فصل ۵ رجوع می کنیم:

$$\theta = \sup_{x \in R^n, x \neq 0} \text{Arc cos} \left(\frac{x^T A x}{(x^T A^T A x)^{\frac{1}{2}} (x^T x)^{\frac{1}{2}}} \right). \quad (21-7)$$

بنابراین زاویه ویژه ماتریس (۲۰-۷) عبارت است از:

$$\theta_A = \text{arc cos} \frac{x_2 x_4 (\lambda_1 + \lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1^2 x_4^2 + \lambda_2^2 x_2^2 + 2(\lambda_1 + \lambda_2) x_2 x_4}}, \quad (22-7)$$

که در آن

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad (23-7)$$

بردار دلخواهی است که در شرایط زیر صدق کند:

۱. $0 \leq x_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, 4$ (۲۴-۷)
۲. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1,$
۳. $x_4 = \pm \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) x_2.$

برای مثال به ازای $x_1 = x_3 = 0$ و برقراری شرایط ۲ و ۳، داریم:

$$x_2 = \frac{\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}, \quad x_4 = \frac{\lambda_2}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} \quad (25-7)$$

و زاویه ویژه برابر است با:

$$\theta_A = \arccos \frac{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \sqrt{2\lambda_1^2 \lambda_2^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_2) \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}} \quad (26-7)$$

در حقیقت حداکثر چرخشی که ماتریس (۲۰-۷) قادر است به یک بردار مرتبه ۴ بدهد، از رابطه (۲۲-۷) فراتر نمی رود که در آن بردار مذکور در رابطه (۲۴-۷) صدق کند. بنابراین هر بردار دلخواهی در فضای R^4 که شرایط (۲۴-۷) را نداشته باشد، تحت تأثیر ماتریس (۲۰-۷) لزوماً به چرخشی کمتر از (۲۲-۷) دچار می شود.

اکنون به مسأله پایدارسازی آونگ دوگانه می پردازیم. برای این که CLF و قانون کنترل به دست آمده در بخش ۳-۷، سیستم (۱۲-۷) را پایدار مجانبی کند، لازم است حداکثر چرخشی که ماتریس (۱۳-۷) می تواند به مشتق بردار حالت \dot{x} بدهد، از مقدار معینی کوچک تر باشد. این مقدار به صورت تقریبی از روی شکل ۲-۷ که زاویه بین دو بردار گرادیان تابع لیاپانوف کنترل و مشتق بردار حالت را نشان می دهد، قابل حدس است. اگر حداکثر قابلیت ماتریس (۱۳-۷) برای چرخاندن مشتق بردار حالت از فاصله اندکی که بین منحنی زاویه و مرز ۹۰ درجه وجود دارد، کمتر باشد، می توان نتیجه گرفت که با ضرب این ماتریس در \dot{x} ، منحنی زاویه بین دو بردار مذکور همچنان بالای ۹۰ درجه باقی می ماند که این امر شرط کافی در پایداری مجانبی سیستم حلقه بسته نهایی است.

زاویه ویژه ماتریس (۷-۱۳) در حالت کلی به صورت (۷-۲۲) به دست آمد. برای این که زاویه

ویژه این ماتریس بسیار کوچک باشد، باید داشته باشیم:

$$\frac{(\lambda_1 + \lambda_2) \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) x_2}{\sqrt{2\lambda_2^2 + 2(\lambda_1 + \lambda_2) \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)}} \cong 1, \quad (7-27)$$

و با فرض $0 < x_2 < 1$ و $m = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ محدوده های مجاز λ_1 و λ_2 به صورت زیر به دست می آید:

$$\lambda_1 < \frac{2m(m+1)}{(m+1)^2 - 2m^2}, \lambda_2 < \frac{2m^2(m+1)}{(m+1)^2 - 2m^2}. \quad (7-28)$$

محاسبه محدوده های به دست آمده برای ماتریس (۷-۱۳) نشان می دهد که $A(x, u)$ در

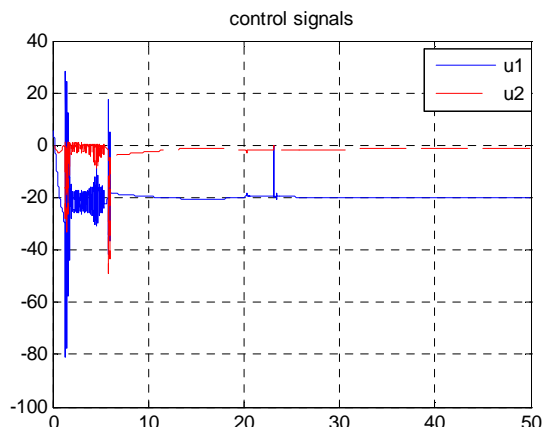
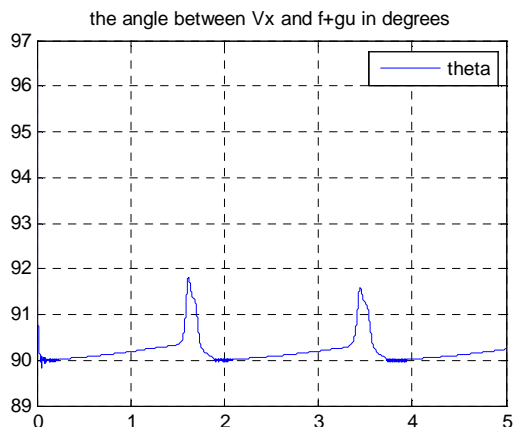
نامساوی های (۷-۲۸) صدق می کند. بنابراین انتظار می رود تابع لیاپانوف کنترل و قانون کنترل نتیجه

شده از آن برای سیستم (۷-۱۴)، سیستم (۷-۱۲) را نیز پایدار مجانبی کند.

شکل های (۷-۵)، (۷-۶) و (۷-۷) نتایج حاصل از پیاده سازی قانون کنترل حداکثر زاویه

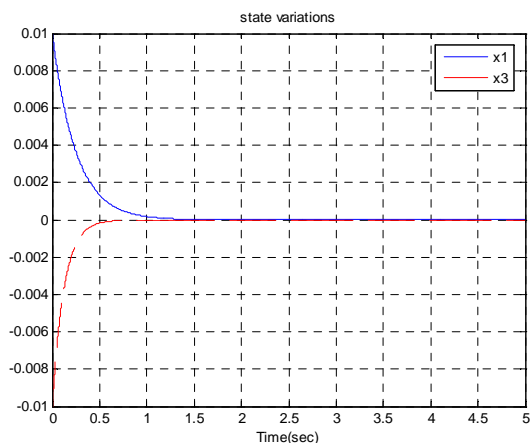
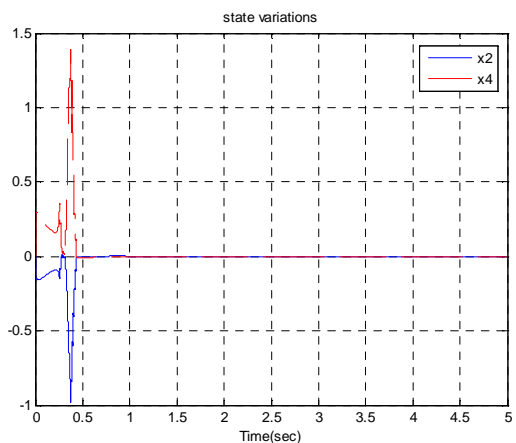
برای سیستم دو ورودی را که در بخش ۷-۳ به دست آمد، روی سیستم آونگ دوگانه با معادلات حالت

(۷-۱۲) نشان می دهد.

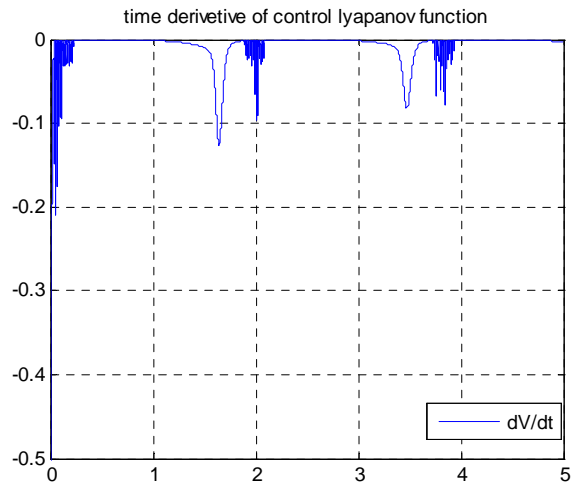


شکل (۵-۷): سیگنال کنترل و زاویه بین $f + gu$ و V_x برای شرایط اولیه $x=[0/0.1, 0, -0/0.1, 0]$

از شکل (۵-۷) مشخص است که زاویه بین بردارهای گرادیان CLF و مشتق بردار حالت، مطابق انتظار بالاتر از مرز ۹۰ درجه باقی می ماند که نشانه پایداری سیستم حلقه بسته است. همگرایی زوایا و سرعت های زاویه ای به صفر که در شکل (۶-۷) دیده می شود و نیز منفی باقی ماندن مشتق زمانی CLF در شکل (۷-۷)، تأییدی بر این امر به شمار می رود.



شکل (۶-۷): همگرایی حالت ها برای شرایط اولیه $x=[0/0.1, 0, -0/0.1, 0]$



شکل (۷-۷): مشتق زمانی تابع لیپانوف کنترل

نتیجه گیری و پیشنهادات:

موضوع کنترل بهینه معکوس و از آن جمله قانون کنترل حداکثر زاویه، در بهینه سازی سیستم های غیرخطی از اهمیت خاصی برخوردار است. وجود حل دقیق تحلیلی بدون نیاز به محاسبات عددی پیچیده روی خط، علاوه بر زیبایی از نظر عملی هم اهمیت دارد و طراحی را ساده می کند. علاوه بر این قانون کنترل حداکثر زاویه مزیت ویژه ای نیز در امکان پیاده سازی روی رده ای از سیستم های غیرافین داراست. امروزه پایدارسازی سیستم های غیرافین از موضوعات چالش برانگیز در عرصه سیستم های کنترلی محسوب می شود. اهم دستاوردهای این رساله عبارتند از:

۱. به دست آوردن قانون کنترل حداکثر زاویه برای سیستم های دو ورودی و پیاده سازی آن بر روی سیستم لوتکا-ولترا به عنوان نمونه ای از سیستم افین دو ورودی. نتایج شبیه سازی حاکی از عملکرد مناسب قانون مذکور روی سیستم های افین دو ورودی می باشد.
۲. نمایش کارایی قانون کنترل حداکثر زاویه روی سیستم آونگ دوگانه که نمونه ای از سیستم غیرافین دو ورودی است. در این راستا جداسازی ویژه ای برای بخش غیرافین سیستم معرفی شد و پس از به دست آوردن تابع لیاپانوف کنترل، قانون کنترل حداکثر زاویه برای بخش افین به دست آمد. سپس نشان داده شد که قانون مذکور برای پایدارسازی سیستم غیرافین آونگ دوگانه نیز معتبر است.
۳. در خلال محاسبات مربوط به سیستم آونگ دوگانه، محاسبه زاویه ویژه برای دسته جدیدی از ماتریس های مربعی حقیقی ناویژه انجام گرفت.

در ادامه این رساله می توان موضوعات زیر را پیشنهاد نمود:

۱. به دست آوردن قانون کنترل حداکثر زاویه برای سیستم های با ورودی های بیشتر.
۲. محاسبه زاویه ویژه برای دسته های وسیع تری از ماتریس های مربعی ناویژه.
۳. پیاده سازی قانون کنترل حداکثر زاویه روی یک سیستم به ازای توابع لیاپانوف کنترل گوناگون از آن سیستم و مقایسه نتایج شبیه سازی.
۴. پیاده سازی قانون کنترل حداکثر زاویه و سایر قوانین کنترل بهینه معکوس به ازای یک تابع لیاپانوف کنترل از سیستم، به منظور بررسی نحوه عملکرد قانون کنترل حداکثر زاویه در مقایسه با سایر قوانین کنترل بهینه معکوس.
۵. پیاده سازی قانون کنترل حداکثر زاویه روی یک نمونه سیستم غیرافین به ازای یک تابع لیاپانوف کنترل از سیستم و جداسازی های گوناگون بخش های غیرافین، به منظور مقایسه عملکرد قوانین کنترل به دست آمده برای اشکال مختلف جداسازی.

مراجع

- [١] A. Shahmansoorian, B. Moshiri, A. Khaki Sedigh and S. Mohammadi (٢٠٠٧), *A new stabilizing control law with respect to a Control Lyapanov Function And construction of Control Lyapanov Function for particular Non-affine nonlinear Systems*, **Journal Of Dynamical And Control Systems** , Vol. ١٢, No. ٤.
- [٢] R. A. Freeman and P. V. Kokotovic (١٩٩٦), *Robust nonlinear control design: state-space and Lyapunov techniques*, **Birkhauser**.
- [٣] M. Krstic, I. Kanelakopoulos, and P. V. Kokotovic (١٩٩٥), *Nonlinear and adaptive control design*, **Wiley**.
- [٤] R. Sepulchre, M. Jankovic, and P. V. Kokotovic (١٩٩٧), *Constructive nonlinear control*, **Springer- Verlag**, New York.
- [٥] A. Shahmansoorian, A. Khaki-Sedigh, B. Moshiri, and S. Mohammadi (٢٠٠٤), *Inverse optimal control design using quadratic approximation of CLF*, **Proc. ٤th IEEE Conf. on Mechatronic And Robotic**, pp. ٦٦-٦٨.
- [٦] D.Liberzon (١٩٩٩), *ISS and integral - ISS disturbance attenuation with bounded controls*, **Proceedings of the ٣rd conference on Decision & control**.
- [٧] J. A. Primbs, V. Nevistic, J. C. Doyle (٢٠٠٠), *A receding horizon generalization of pointwise Min-Norm controllers*, **IEEE transactions on Automatic Control**, Vo.٤٥, No.٥.
- [٨] J. A. Primbs, V. Nevistic, J. C. Doyle (١٩٩٩), *Nonlinear optimal control: A control lyapunov function and receding horizon perspective*, **Asian Journal of control**, Vol.١, pp.١٤-٢٤.
- [٩] A. S. Bazanella, A. S. Silva, P. V. Kokotovic (١٩٩٧), *Lyapunov design of excitation control for synchronous machines*, **Proceeding of the ٣th IEEE CDC**, Sandiego, California.
- [١٠] S. T. Glad (١٩٨٧), *Robustness of nonlinear state feedback: A survey*, **Automatica**, Vol.٢٣, No.٤, pp.٤٢٥-٤٣٥.
- [١١] F. H. Clarke, Yu. S. Ledyaev (١٩٩٦), *Asymptotic controllability and feedback stabilization*, **Conference on Information Sciences and Systems**.
- [١٢] A. Jadbabaie, J. Yu, J. Hauser (١٩٩٩), *stabilizing receding horizon Control of nonlinear systems: A Control lyapunov function approach*, **Proceedings of ACC'٩٩**, San Diago.

[۱۳] L. Praly (۱۹۹۹), *An introduction to some Lyapunov designs of global asymptotic stabilization*, **Proceedings of ACC'۹۹**.

[۱۴] R. Sepulchre, M. Jankovic and P. V. Kokotovic (۱۹۹۷), *Constructive nonlinear control*, Springer Verlag, London limited.

[۱۵] J. Willard Curtis, R. W. Beard (۲۰۰۱), *A model- predictive satisficing approach to a nonlinear tracking problem*, **IEEE proceeding on Decision and control**.

[۱۶] J. Yu, A. Jadbabaie, J. A. Primbs, Y. Huang (۲۰۰۱), *comparison of nonlinear control design for a Ducted Fan Model*, **Automatica**, Vol.۳۷, No, ۱۲, pp.۹۷۱-۱۹۷۸.

[۱۷] E. D. Sontag (۱۹۸۳), *A Lyapunov-like characterization of asymptotic controllability*, **SIAM Journal of Optimization**, Vol. ۲۱, No.۳.

[۱۸] E. D. Sontag (۱۹۸۳), *General classes of control-Lyapunov functions*, stability theory, **Birkhauserverlag**, pp.۸۷-۹۶.

[۱۹] J. Willard Curtis, Randal W. Beard (۲۰۰۴), *Satisficing: A New Approach to Constructive Nonlinear Control*, **IEEE Transactions on Automatic Control**, vol. ۴۹, No. ۷, pp. ۱۰۹۰-۱۱۰۲.

[۲۰] M. Jankovic, R. Sepulchre, P.V. Kokotovic (۱۹۹۶), *Constructive Lyapunov stabilization of nonlinear cascade systems*, **IEEE transactions on Automatic control**, Vol.۴۱, No.۱۲, , pp.۱۷۲۳- ۱۷۳۰.

[۲۱] R. Sepulchre, M. Jankovic, P. V. kokotovic (۱۹۹۷), *Integrator Forwarding; A new Recursive nonlinear Robust design*, **Automatica**, Vol. ۳۳, No.۵, pp.۹۷۹-۹۸۴.

[۲۲] A. Bacciotti, F. Ceragioli (۲۰۰۳), *Nonsmoth optimal regulation and discontinuous stabilization*, **Abstract and applied analysis**, No.۲۰, pp.۱۵۹-۱۱۹۰.

[۲۳] M. Margaliot, G.Longholz (۲۰۰۰), *Some nonlinear optimal control problems with closed form solutions*, **PhD thesis**, Tel Aviv University, Israel,.

[۲۴] A. Young, C. Cao, N. Hovakimyan, E. Lavretsky (۲۰۰۶), *Control of a Non-affine Double Pendulum System via Dynamic Inversion and Time-scale Separation*, **Proceeding of the ۲۰۰۶ American Control Conference**, Minneapolis, Minnesota, USA , June ۱۴-۱۶.

[۲۵] شاه منصوریان ع، (۱۳۸۴)، رساله دکترا: "تحلیل و طراحی کنترل کننده های بهینه معکوس با استفاده از توابع لیاپانوف کنترل"، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی.

Abstract

In this thesis, we consider stabilizing problem of two input affine and non-affine systems by maximum angle control law. Maximum angle control law is a new stabilizing control law which is categorized as an inverse optimal control law. The main characteristic of the inverse optimal control laws is their optimal solution via straightforward control laws which are functions of system variables and a control Lyapunov function of the system. In the case of maximum angle control law, by defining the concept Eigen angle for square real matrices, it is shown that the construction of CLFs for particular non-affine systems and their stabilizing can be reduced to the construction of CLFs and stabilizing of affine systems. Although the maximum angle control law has good properties especially in the case of non-affine systems, it is introduced only for single input systems. Since many important industrial systems have multiple inputs, here the maximum angle control law is generalized to two input systems via a kind of simultaneous solution. The introduced control law is executed on an example of two input affine system. Simulation results are provided to show the effectiveness of the proposed methodology. Moreover, the double pendulum system is stabilized by using this control law, as a two input non-affine system in order to show that the generalization preserves the main property of maximum angle control law for non-affine systems. Accompanied with the stabilization, Eigen angle for a new sort of square matrices is presented.

Key Words: Control Lyapunov Function, Inverse Optimal Control Law, Maximum Angle Control Law, Non-affine System, Eigen Angle.



Shahrood University of Technology

Faculty: Electrical and Robotic Engineering

**Stabilization of Non-Affine System
Using Maximum Angle Control Law and Eigen Angle Concept**

Seyedeh Samareh Mostafavi

Supervisor:

Dr. Mohammad Hadad Zarif

January ۲۰۱۰