

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ

الرَّحِيمِ



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مهندسی برق و رباتیک

گروه مهندسی برق - کنترل

پایان نامه کارشناسی ارشد

شبیه سازی و طراحی کنترل کننده های مقاوم H_∞ & H_2

روی سیستم ربات دو بازو

ارائه دهنده:

محمد حسین خلفباغی

استاد راهنما:

دکتر محمد علی صدر نیا

استاد مشاور:

دکتر علیرضا الفی

تیر ۱۳۸۹

ب

تقدیم به پدر و مادرم،

آنها که سعادت را جز در قلمرو عشقشان

شناختم

ضمن تقدیر از زحمات کلیه اساتید محترم دانشکده برق و
رباتیک، از کمک های بی دریغ استاد راهنما جناب آقای دکتر
صدرنیا که در انجام پروژه و تدوین پایان نامه مرا یاری کردند،
سپاسگزاری می نمایم.

همچنین از دوستانم حسام، سیامک، صادق، امیر و حمید ممنونم
که با آنها زندگی در خوابگاه را تجربه نمودم.

چکیده

این پایان نامه در مورد طراحی کنترل کننده H_2 و H_∞ برای سیستم ربات دو بازو می باشد. ابتدا در مورد کنترل سیستم های چند متغیره بحث می شود. بحث سیستم های چند متغیره در مورد مصالحه بین ماتریس حساسیت و حساسیت مکمل، مقادیر تکین و نامعینی می باشد. سپس با بدست آوردن مدل سیستم ربات دو بازو و معرفی کنترل کننده های چند متغیره مقاوم H_2 و H_∞ ، طراحی دو کنترل کننده مزبور را بر روی سیستم ربات دو بازو انجام می دهیم. سپس کنترل کننده مقاوم مود لغزشی را معرفی می کنیم. این کنترل کننده را برای سیستم ربات دو بازو طراحی می کنیم و در انتها کنترل کننده مقاوم H_2 و H_∞ با کنترل کننده مقاوم مود لغزشی مقایسه می گردد.

سیستم ربات دو بازو دارای چهار متغیر حالت و دو ورودی و دو خروجی می باشد. اهداف این پایان نامه شامل پایدارسازی و مقاوم سازی عملکرد سیستم کنترل شده می باشد. با ورود نامعینی به سیستم، پایداری و عملکرد آن مورد بررسی قرار می گیرد.

واژه های کلیدی: نامعینی - کنترل کننده H_2 - کنترل کننده H_∞ - کنترل کننده مود لغزشی - ربات دو بازو

فهرست مطالب

فصل اول مقدمه

- ۱-۱- مقدمه ۱
- ۲-۱- کنترل مقاوم ۱
- ۳-۱- ساختار پایان نامه ۴

فصل دوم کنترل کننده چند متغیره

- ۱-۲- مقدمه ۶
- ۲-۲- سیستم چندمتغیره ۷
- ۳-۲- نمایش مدل نامی سیستم چند متغیره ۸
- ۱-۳-۲- نمایش ماتریس تابع تبدیل ۸
- ۲-۳-۲- نمایش فضای حالت ۹
- ۴-۲- ماتریس حساسیت و حساسیت مکمل ۹
- ۵-۲- نامعینی ۱۱
- ۱-۵-۲- منابع نامعینی ۱۱
- ۲-۵-۲- انواع نحوه نمایش نامعینی ۱۱
- ۳-۵-۲- انواع نامعینی ها از لحاظ ساختار ۱۴
- ۶-۲- مقادیر تکین ۱۵
- ۱-۶-۲- تجزیه مقادیر تکین ۱۷
- ۲-۶-۲- خواص مقادیر تکین ۱۹

۲۰	۷-۲- عملگر اندازه (نرم های اپراتوری) $\ G\ _r$ و $\ G\ _\infty$
۲۰	۲-۷-۱- ویژگی های عملگر اندازه
۲۱	۲-۸- تبدیل خطی کسری
	فصل سوم مدل سازی ربات دو بازو
۲۴	۳-۱- معرفی
۲۴	۳-۲- مدل سازی سینماتیکی
۲۵	۳-۲-۱- نمایش دناویت- هارتنبرگ
۲۸	۳-۲-۲- سینماتیک وارون
۳۰	۳-۳- سینماتیک سرعت
۳۰	۳-۳-۱- تعیین ماتریس ژاکوبین
۳۱	۳-۴- دینامیک
۳۹	۳-۵- خطی سازی سیستم غیرخطی
	فصل چهارم معرفی کنترل کننده H_2
۴۵	۴-۱- معرفی
۴۷	۴-۲- حل مسأله H_2
۴۷	۴-۲-۱- نامعینی سازگار
۴۸	۴-۲-۱-۱- فیدبک حالت برای سیستم با نامعینی سازگار
۴۸	۴-۲-۱-۲- کنترل بهینه برای نامعینی سازگار
۴۹	۴-۲-۲- نامعینی ناسازگار
۴۹	۴-۲-۲-۱- کنترل بهینه برای نامعینی ناسازگار
۵۰	۴-۲-۳- نامعینی در ماتریس ورودی

۵۱	۴-۲-۳-۱- کنترل بهینه برای نامعینی در ماتریس ورودی
۵۲	۴-۲-۴- فیلتر کالمن
۵۵	۴-۳- طراحی کنترل کننده H_2 برای مدل ربات دو بازو
	فصل پنجم معرفی کنترل کننده H_∞
۶۲	۵-۱- مقدمه
۶۴	۵-۲- حداقل نمودن حساسیت
۶۶	۵-۳- پایدار سازی
۶۸	۵-۴- فرموله کردن مسئله H_∞
۶۸	۵-۴-۱- حداقل کردن حساسیت
۶۹	۵-۴-۲- موضوع پایداری مقاوم
۷۰	۵-۴-۳- موضوع مختلف مقاوم بودن و عملکرد
۷۰	۵-۴-۴- الگوریتم گلوور- دوپل برای مسئله H_∞ کلی
۷۱	۵-۵- شکل دهی حلقه مقدار تکین
۷۵	۵-۶- طراحی کنترل کننده H_∞ برای مدل ربات دو بازو
	فصل ششم معرفی کنترل کننده مود لغزشی
۸۴	۶-۱- اصول اساسی کنترل لغزشی
۸۶	۶-۲- طراحی کننده مود لغزشی
۸۹	۶-۳- طراحی کنترل کننده مقاوم مود لغزشی
۹۰	۶-۳-۱- طراحی کنترل مقاوم مود لغزشی سیستم های چند متغیره
۹۰	۶-۴- طراحی کنترل کننده مقاوم مود لغزشی برای مدل ربات دو بازو

فصل هفتم نتایج و پیشنهادات

۹۷

۷-۱- نتایج

۹۸

۷-۲- پیشنهادات

مراجع

۹۹

مراجع

فهرست شکل‌ها

فصل دوم کنترل کننده چند متغیره

- شکل ۱-۲-۱- انواع سیستم های چند متغیره ۷
- شکل ۲-۲-۲- نمایش سیستم دو ورودی- دو خروجی ۸
- شکل ۳-۲-۳- الگوی سیستم کنترل ۹
- شکل ۴-۲-۴- الگوی سیستم کنترل با اغتشاش و نویز ۱۰
- شکل ۵-۲-۵- طراحی طیف فرکانسی T و طراحی طیف فرکانسی S ۱۱
- شکل ۶-۲-۶- دیاگرام تحلیلی مقاوم سیستم $M - \Delta$ ۱۵
- شکل ۷-۲-۷- نمودار رابطه مقادیر تکین تابع حساسیت با تابع حساسیت مکمل ۱۹
- شکل ۸-۲-۸- نمایش سیستم دو ورودی- دو خروجی ۲۱
- شکل ۹-۲-۹- نمایش ارتباط خروجی دوم با ورودی دوم ۲۲
- شکل ۱۰-۲-۱۰- نمایش تبدیل خطی- کسری پایینی ۲۲
- شکل ۱۱-۲-۱۱- نمایش ارتباط خروجی اول با ورودی اول ۲۲
- شکل ۱۲-۲-۱۲- نمایش تبدیل خطی- کسری بالایی ۲۲

فصل سوم مدل سازی ربات دو بازو

- شکل ۱-۳-۱- ربات دوبازو ۲۴
- شکل ۲-۳-۲- نمایش دناویت- هارتنبرگ ۲۶
- شکل ۳-۳-۳- نمایش اتصال دستگاه مختصات به ربات دوبازو ۲۸
- شکل ۴-۳-۴- نمایش سینماتیک وارون ربات دو بازو ۲۹
- شکل ۵-۳-۵- انواع پیکربندی ربات دوبازو ۳۰

فصل چهارم معرفی کنترل کننده H_2

۵۷ شکل ۴-۱- رسم مقادیر تکین سیستم کنترل شده با کنترل کننده H_2

۵۸ شکل ۴-۲- نمایش خطای رویت گر

۵۸ شکل ۴-۳- خروجی سیستم کنترل شده به ازای شرایط اولیه $q_1 = \frac{\pi}{2}, q_2 = 0$

۵۹ شکل ۴-۴- خروجی اول سیستم کنترل شده به ازای شرایط اولیه $q_1 = 0, q_2 = \frac{\pi}{2}$

۵۹ شکل ۴-۵- پاسخ سیستم کنترل شده به ازای شرایط اولیه $q_1 = \frac{\pi}{2}, q_2 = \frac{\pi}{2}$

۶۰ شکل ۴-۶- پاسخ پله سیستم کنترل شده با کنترل کننده H_2

۶۱ شکل ۴-۷- نمودار استفاده شده در *Simulink*

فصل پنجم معرفی کنترل کننده H_∞

۶۲ شکل ۵-۱- فرم استاندارد سیستم تعمیم یافته

۶۲ شکل ۵-۲- ساختار عمومی حلقه باز

۶۲ شکل ۵-۳- نمایش استاندارد یک سیستم

۶۳ شکل ۵-۴- نمایش استاندارد یک سیستم با نامعینی

۶۴ شکل ۵-۵- نمایش استاندارد سیستم حلقه بسته همراه با اغتشاش و نویز

۶۶ شکل ۵-۶- نمایش استاندارد سیستم حلقه بسته همراه با اغتشاش

۷۱ شکل ۵-۷- روش ترکیب حساسیت در سیستم کنترل چند متغیره

۷۲ شکل ۵-۸- نامعینی ضرب شونده / جمع شونده

۷۴ شکل ۵-۹- مشخصات مقدار تکین روی T و S

۷۹ شکل ۵-۱۰- پاسخ فرکانسی سیستم نامی

۷۹ شکل ۵-۱۱- نمودار نایکوئیست سیستم نامی

- شکل ۵-۱۲- محل قرار گرفتن قطب های سیستم نامی ۸۰
- شکل ۵-۱۳- پاسخ فرکانسی ۱۰ نمونه از سیستم واقعی ۸۰
- شکل ۵-۱۴- پاسخ فرکانسی سیستم با مدل نامعینی ضرب شونده ۸۰
- شکل ۵-۱۵- رسم مقادیر تکین سیستم حلقه بسته با کنترل کننده H_{∞} ۸۱
- شکل ۵-۱۶- پاسخ فرکانسی $W_p T$ با کنترل کننده H_{∞} ۸۱
- شکل ۵-۱۷- پاسخ پله سیستم حلقه بسته با کنترل کننده H_{∞} ۸۱
- شکل ۵-۱۸- نمودار کارآیی نامی ۸۲
- شکل ۵-۱۹- نمودار پایداری مقاوم ۸۲
- شکل ۵-۲۰- نمودار کنترل کننده H_{∞} استفاده شده در *simulink* ۸۳
- فصل ششم معرفی کنترل کننده مود لغزشی
- شکل ۶-۱- سطح لغزشی در صفحه فاز دو بعدی ۸۶
- شکل ۶-۲- نوسان و لایه مرزی ۸۷
- شکل ۶-۳- پاسخ پله رابط اول ۹۴
- شکل ۶-۴- پاسخ پله رابط دوم ۹۴
- شکل ۶-۵- سطح لغزشی رابط اول ۹۵
- شکل ۶-۶- سطح لغزشی رابط دوم ۹۵
- شکل ۶-۷- نمودار استفاده شده در محیط *simulink* ۹۶

فهرست جداول

فصل اول مقدمه

۳	جدول ۱-۱- دوره های زمانی کنترل کننده‌ها
	فصل سوم مدل سازی ربات دو بازو
۲۷	جدول ۱-۳- پارامترهای رابط ربات دوبازو
	فصل چهارم معرفی کنترل کننده H_2
۵۴	جدول ۱-۴- دوگان رویت گر بهینه و کنترل بهینه

۱-۱ مقدمه

جهان صنعتی در چند دهه اخیر توجه خود را به بکارگیری ربات ها در صنایع مختلف معطوف داشته است زیرا ربات ها توانایی انجام وظایف مختلف با عملکرد دقیق را دارند و همچنین استفاده از ربات ها بجای نیروی انسانی باعث افزایش کیفیت و راندمان تولید می گردد.

بنابراین به کارگیری ربات ها در صنایع به علت توجیه اقتصادی و حفظ نرخ تولید و همچنین ویژگی کیفیت، اجتناب ناپذیر است. مدل سازی و کنترل ربات یکی از فضاهاى فعال تحقیقاتی است. مدل‌های ریاضی نمی‌توانند به صورت دقیق یک سیستم فیزیکی را مدل نمایند از این رو با عدم قطعیت در مدل سازی سیستم مواجه هستیم. بنابراین با بکارگیری کنترل مقاوم سعی در غلبه بر عدم قطعیت ها می‌نماییم [۲].

۱-۲ کنترل مقاوم

هر سیستم فیزیکی نیاز به یک کنترل کننده دارد، زیرا سیستم های فیزیکی در بیشتر موارد خاصیت ردیابی و پایداری خوبی از خود نشان نمی‌دهند. به همین دلیل باید یک کنترل کننده یا یک جبران ساز برای سیستم فیزیکی طراحی شود تا سیستم پایدار باشد و در عین حال ورودی را ردیابی کند. در سیستم های عملی مسأله عدم قطعیت در مدل سیستم، اجتناب ناپذیر است. بعلاوه سیگنال‌های اغتشاش نامعین نیز در اغلب محیط‌ها اظهار وجود می‌کنند. در روش طراحی عملی و واقع بینانه سیستم های کنترل، ناگزیر باید این عدم قطعیت‌ها را در نظر گرفت. طراحی‌های مبتنی بر مدل دقیق سیستم ممکن است تنها بر روی کاغذ عملکرد خوبی داشته باشند و نتوانند در دنیای عملی وارد گردند چرا که به عنوان مثال اغلب کافی است تنها یکی از پارامترهای سیستم تغییر کند تا نتایج استنتاج شده اعتبار خود را از دست بدهند.

توجه به این عدم قطعیت‌ها و اغتشاشات اجتناب ناپذیر در عمل، انگیزه ظهور روش‌های متعدد کنترل مقاوم است، به عنوان یک تعریف جامع و موجز از کنترل مقاوم می‌توان گفت:

کنترل مقاوم عبارت است از کنترل سیستم‌های غیرقطعی (یعنی سیستم‌هایی با دینامیک غیرقطعی و یا در معرض سیگنال اغتشاشی نامعین) به طوری که سیستم حلقه بسته در ابتدا پایدار مانده و در مرتبه بعدی عملکرد آن را در محدوده مناسبی تضمین نماید [۱].

در کنترل کلاسیک (از سال ۱۹۳۰ تا ۱۹۶۰)، که در حوزه فرکانس عمل می‌کرد، کنترل‌کننده‌ها بر پایه منحنی بود، تست پایداری نایکوئیست، تست پایداری روث و حاشیه‌های بهره و فاز طراحی می‌شدند. این کنترل‌کننده‌ها شامل کنترل‌کننده‌های PID^1 (تناسبی-انتگرالی-مشتقی) و جبران سازه‌های پیش فاز و پس فاز بودند. از سال ۱۹۶۰ طراحی بر پایه مدل‌های فضای حالت، کنترل پذیری و رؤیت پذیری و فرآیندهای تصادفی انجام می‌شد، که در حوزه زمان عمل می‌کرد. این دوره به دوره کنترل مدرن شهرت دارد. کنترل‌کننده‌ها نیز شامل فیلتر کالمن، LQR و H_2 بودند. اما باید گفته شود که در این زمان هنوز کنترل‌کننده‌ها در صنعت همان کنترل‌کننده‌های کلاسیک بود، زیرا کنترل‌کننده‌های مدرن مقاومت خوبی در مقابل نامعینی نداشتند. به همین خاطر از سال ۱۹۸۰ به فکر کنترل‌کننده‌هایی افتادند که مقاومت آن در مقابل نامعینی زیاد باشد، به این دلیل به سراغ نمودارهای مقدار تکین و آنالیز SSV^2 رفتند، زیرا تغییرات مقدار تکین در مقابل تغییرات یک آرایه از ماتریس حالت بسیار کم بود، ولی تغییرات مقدار ویژه در مقابل تغییرات یک آرایه از ماتریس حالت بسیار زیاد بود. در این دوره که به دوره کنترل مقاوم شهرت دارد طراحی در حوزه فرکانس و حوزه زمان با هم صورت می‌گرفت که کنترل‌کننده‌های این دوره، کنترل‌کننده H_∞ ، کنترل‌کننده μ (SSV) و کنترل‌کننده LQG/LTR می‌باشد.

¹ Proportional Integrative Derivative

² Structured singular value

لفظ کنترل مقاوم به طور صریح از اوایل دهه هشتاد وارد ادبیات کنترلی گردید و با توجه به نیازهای عملی به وجود یک کنترلر مقاوم برای سیستم‌های صنعتی آنچنان به سرعت پیشرفت کرد که هم اکنون طراحی یک کنترل کننده برای یک سیستم نامی، هر چند که دارای بازده بالایی برای سیستم نامی باشد، اگر متضمن مقاومت خوب در برابر نامعینی‌های سیستم و اغتشاشات خارجی و دیگر شرایط فیزیکی که به مرور زمان بر سیستم وارد می‌شوند نباشد، وارد حوزه صنعت نشده و از لحاظ تئوری نیز دارای یک ضعف غیر قابل دفاع می‌باشد.

مسئله کنترل H_∞ خطی اولین بار توسط زیمس^۱ فرموله گردید که یک روش طراحی حوزه فرکانس برای سیستم‌های کنترل مقاوم بود. در سال ۱۹۸۱، زیمس این نظریه را مطرح کرد که سنجش کارایی بر حسب نرم بی‌نهایت به نیازهای کاربردی بسیار نزدیک‌تر است بدین معنی که:

روش‌های نرم بی‌نهایت، مقدار rms متغیرهای تنظیم شونده را برای بدترین شرایط اغتشاشات که طیف ناشناخته‌ای دارند کمینه می‌کند.

طی سال‌هایی که از دوره کنترل مقاوم می‌گذرد، سعی بر طراحی و یا استفاده از این کنترل کننده‌ها نیز افزایش می‌یابد. برای مثال می‌توان از کنترل کننده‌های H_∞ و μ در سیستم‌های مختلفی از جمله در کشتی، هواپیما، روبات و غیره نام برد.

جدول (۱-۱) دوره‌های زمانی کنترل کننده‌ها

کنترل مقاوم ۱۹۸۰ تاکنون	کنترل مدرن ۱۹۶۰-۱۹۸۰	کنترل کلاسیک ۱۹۳۰-۱۹۶۰	
نمودارهای مقدار تکین آنالیز μ (SSV)	مدل‌های فضای حالت کنترل پذیری رویت پذیری فرآیندهای تصادفی	منحنی بود (پاسخ فرکانسی) تست پایداری نایکوئیست تست پایداری روث حاشیه‌های بهره و فاز	آنالیز
طراحی H_∞ طرحی μ LQG/LTR	فیلتر کالمن LQR, H_2	کنترل کننده‌های PID جبران سازی پیش فاز- پس فاز	سنتز
حوزه فرکانس و حوزه زمان	حوزه زمان	حوزه فرکانس	حوزه کاری

^۱ zames

سیستم ربات نیز به نوبه خود باید دارای یک کنترل کننده برای پایداری و ردیابی باشد، این کنترل کننده می تواند یک کنترل کننده کلاسیک مانند کنترل کننده PID و یا یک کنترل کننده مدرن مانند فیلتر کالمن باشد [۳].

در دهه های اخیر طراحان کنترل به دنبال کنترل کننده هایی با مقاومت بالا در برابر نامعینی ها هستند، این نامعینی ها شامل نویز، اغتشاش، غیر خطی بودن سیستم و تغییر در پارامترهای سیستم می باشد.

در سیستم ربات نامعینی ها شامل لقی در مفاصل ربات، میزان بار ربات، دینامیک های مدل نشده، اصطکاک، نویز، تغییر پارامترهای ربات در اثر استفاده زیاد، تأخیر زمانی و غیره می باشد.

۱-۳ ساختار پایان نامه

این پایان نامه شامل طراحی کنترل کننده هایی برای مدل ربات دو بازو می باشد. مدل در نظر گرفته شده از [۲] آورده شده است و پارامترهای مدل از [۱] آورده شده است.

این مدل دارای ۴ متغیر حالت و ۲ ورودی و ۲ خروجی می باشد (خروجی مورد نظر دو متغیر حالت از ۴ متغیر حالت می باشد) برای این سیستم سه کنترل کننده، اولی از دوره کنترل مدرن و با نام کنترل کننده H_2 و دومی از دوره کنترل مقاوم و با نام کنترل کننده H_∞ و سومی کنترل کننده مود لغزشی می باشد.

معرفی کنترل کننده H_2 و H_∞ از [۱۵] و [۱۶] آورده شده است.

این پایان نامه طی هفت فصل ارائه می گردد. ساختار فصل های پایان نامه بدین صورت می باشد:

- فصل اول شامل معرفی پایان نامه و معرفی دوره های کنترل می باشد.

- در فصل دوم مروری بر کنترل کننده‌های چندمتغیره انجام خواهد شد که شامل تعاریفی از جمله تعاریف سیستم چندمتغیره، ماتریس حساسیت^۱، ماتریس حساسیت مکمل^۲، مقادیر تکین، عملگرهای اندازه دو، عملگرهای اندازه بی‌نهایت، نامعینی خواهد بود.
- در فصل سوم مدل ربات دو بازو و روابط موجود در آن بحث می‌شود. کنترل بر روی این مدل انجام خواهد شد.
- در فصل چهارم کنترل کننده‌ای از دوره کنترل مدرن یعنی کنترل کننده H_2 معرفی خواهد شد که بر روی مدل ربات مورد نظر نیز اجرا خواهد شد.
- در فصل پنجم کنترل کننده‌ای از دوره کنترل مقاوم یعنی کنترل کننده H_∞ معرفی خواهد شد که بر روی مدل ربات مورد نظر نیز اجرا خواهد شد.
- در فصل ششم کنترل کننده مود لغزشی^۳ معرفی خواهد شد و در فصل هفتم نتایج کنترل کننده مود لغزشی با کنترل کننده H_2 ، H_∞ مقایسه می‌گردد و همچنین پیشنهادهایی مبنی بر بهتر بودن این کنترل کننده‌ها خواهد آمد.

¹ Sensitivity

² Sensitivity complementary

³ Sliding mode

۲-۱ مقدمه

در طبیعت سیستم‌های گوناگونی وجود دارد که دارای ورودی‌هایی برای تحول در سیستم و خروجی‌هایی هستند مانند سیستم جرم- فنر که دارای یک ورودی و یک خروجی است.

تعریف ۱-۲: هر سیستم شبیه سیستم بالا که دارای یک ورودی و یک خروجی باشد سیستم یک ورودی- یک خروجی (*SISO*)^۱ می‌باشد.

سیستم دیگری از طبیعت که می‌توان از آن نام برد سیستم ربات است که دارای چند ورودی و چند خروجی است.

تعریف ۲-۲: به هر سیستم مانند سیستم بالا که دارای چند ورودی و دارای چند خروجی باشد سیستم چندمتغیره (*MIMO*)^۲ گویند. انواع دیگری از سیستم‌ها در طبیعت وجود دارد که دارای یک ورودی و چند خروجی می‌باشند مانند قطار مغناطیسی

تعریف ۳-۲: به هر سیستم مانند سیستم بالا که دارای یک ورودی و چند خروجی باشد سیستم چند متغیره (*SIMO*)^۳ گویند. انواع دیگر از سیستم‌ها مانند کنترل ربات در فضای کار در طبیعت وجود دارند که دارای چند ورودی و تک خروجی می‌باشند.

تعریف ۴-۲: به هر سیستم مانند سیستم بالا که دارای چند ورودی و یک خروجی باشد سیستم چند متغیره (*MISO*)^۴ گویند

¹ *Single Input-Single output*

² *Multiply Input-Multiply Output*

³ *Single Input- Multiply Output*

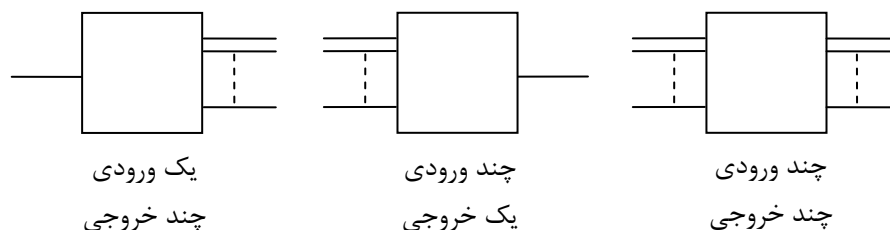
⁴ *Multiply Input- Single Output*

۲-۲ سیستم چند متغیره

سیستم چند متغیره به سیستمی گفته می شود که تعداد ورودی یا خروجی آن یک نباشد مانند

سیستم $MIMO$ و $MISO$ و $SIMO$.

شکل (۱-۲) انواع سیستم چند متغیره را نشان می دهد [۵].



شکل (۱-۲) انواع سیستم های چند متغیره

یک سیستم چند متغیره را در نظر بگیرید، هرگاه به ورودی اول یک سیگنال اعمال کنیم همه خروجی ها تغییر خواهند کرد. اگر بخواهیم مانند سیستم یک ورودی - یک خروجی کنترل نماییم برای هر ورودی جدای از ورودی های دیگر باید یک کنترل کننده قرار بدهیم. به همین ترتیب باید برای ورودی های دوم تا آخر نیز کنترل کننده قرار دهیم و این یعنی n خروجی برای یک ورودی، دارای n کنترل کننده باشد، که این روش امکان پذیر نیست، زیرا هر خروجی تنها نیاز به یک کنترل کننده دارد نه به چند کنترل کننده (به تعداد ورودی). این تداخل بین ورودی ها و خروجی ها در سیستم های چند متغیره وجود دارد و این تداخل را کوپلینگ^۱ می نامند.

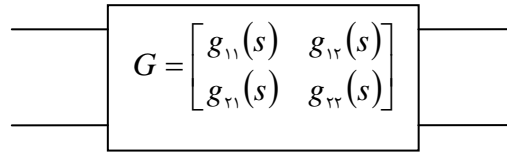
هنگامی که یکی از ورودی ها تغییر نماید و تمام خروجی های سیستم تحت تأثیر قرار گیرند و تغییر کنند به این پدیده تزویج یا کوپلینگ گویند. اگر هر خروجی تحت تأثیر یک ورودی باشد سیستم را دکوپله^۲ گوئیم [۴].

سیستم دو ورودی - دو خروجی زیر را دکوپله گوئیم اگر و تنها اگر:

¹ Coupling

² Decouple

$$g_{12}(s) = g_{21}(s) = 0$$



شکل ۲-۲: نمایش سیستم دو ورودی- دو خروجی

در روش کلاسیک ابتدا سیستم را مانند یک سیستم یک ورودی- یک خروجی در نظر می گیرند. یعنی ورودی اول با خروجی اول و ... و ورودی آخر با خروجی آخر در ارتباط باشد. در طراحی به روش کلاسیک ابتدا باید مشخص نمود ورودی ها کدام یک از خروجی ها را بیشتر تحت تأثیر قرار می دهد آنگاه با استفاده از روش هایی، ورودی- خروجی ها را متناظر با هم تفکیک نمود. بعد از تفکیک تعداد کنترل کننده ها، به تعداد ورودی بستگی دارد.

به منظور مشاهده رفتار یک سیستم فیزیکی و شبیه سازی آن یک مدل ریاضی به صورت معادلات دیفرانسیل جزئی و غیر خطی برای آن سیستم استخراج می شود. مدل نامی از خطی سازی این معادلات حول نقطه کار سیستم بدست می آید. حال هرچه این مدل جزئیات و دینامیک های سیستم را بهتر و دقیق تر توصیف کند پاسخ مدل و شبیه سازی آن به رفتار سیستم واقعی نزدیک تر است.

۳-۲ نمایش مدل نامی سیستم چند متغیره (MIMO)

به مدل ثابتی که برای یک فرآیند یا سیستم فیزیکی در نظر گرفته می شود مدل نامی گویند.

۳-۲-۱ نمایش ماتریس تابع تبدیل

این ماتریس به تعداد ورودی ها ستون و به تعداد خروجی ها سطر دارد و اعضای آن توابع تبدیل تک ورودی- تک خروجی در حوزه لاپلاس است.

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

۲-۳-۲ نمایش فضای حالت

در معادلات حالت مشتق حالت‌ها و نیز خروجی‌ها، با حالت‌ها و ورودی‌ها رابطه دارند.

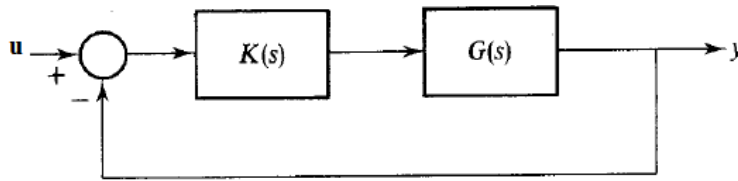
$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

۴-۲ ماتریس حساسیت و حساسیت مکمل

الگوی سیستم کنترل را که در شکل (۲-۲) نشان داده شده است در نظر بگیرید [۶].

$$e = u - y = (I + GK)^{-1}u \quad (۲-۲)$$



شکل (۳-۲) الگوی سیستم کنترل

ماتریس $S = (I + GK)^{-1}$ را ماتریس حساسیت می‌نامند.

و برای خروجی خواهیم داشت:

$$y = (I + GK)^{-1}GKu \quad (۳-۲)$$

ماتریس $T = (I + GK)^{-1}GK$ را ماتریس حساسیت مکمل گویند و رابطه (۴-۲) برای S و T در تمامی

فرکانس‌ها برقرار می‌باشد:

$$S + T = I \quad (۴-۲)$$

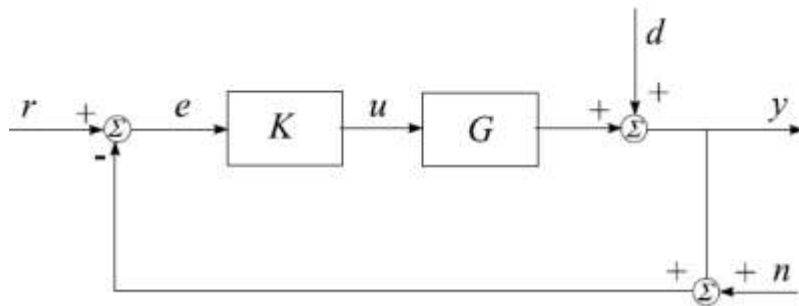
از رابطه (۲-۲) نتیجه مقابل را خواهیم داشت: باید ماتریس حساسیت را آنقدر کوچک نماییم که خطا، مورد قبول برای طراحی باشد.

از رابطه (۳-۲) نتیجه مقابل را خواهیم داشت، برای آن که خروجی بتواند به طور کامل ورودی را دنبال نماید باید ماتریس حساسیت مکمل را I در نظر بگیریم.

حال اگر الگوی سیستم کنترل شکل (۳-۲) را با اغتشاش و نویز داشته باشیم آنگاه روابط به صورت زیر خواهد بود:

$$y = Sd + T(u - n) \quad (۵-۲)$$

$$e = S(u - d) + Tn \quad (۶-۲)$$



شکل (۴-۲) الگوی سیستم کنترل با اغتشاش و نویز

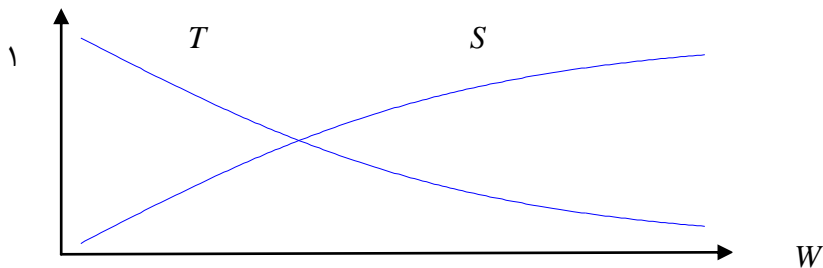
دید می شود که اگر T را برابر I در نظر بگیریم نویز (n) به طور کامل در خروجی و خطای سیستم ظاهر می شود که این در طراحی مطلوب نمی باشد.

از آنجا که نویز یک سیگنال فرکانس بالا می باشد پس طیف فرکانسی ماتریس حساسیت مکمل را طوری انتخاب می کنیم که اندازه ماتریس حساسیت مکمل در فرکانس های بالا برابر با صفر و در فرکانس های پایین برابر با I شود.

برای آن که رابطه (۴-۲) در تمامی فرکانس ها برقرار باشد باید اندازه ماتریس حساسیت (s) در فرکانس های پایین برابر با صفر و در فرکانس های بالا برابر با I باشد، که این مطلوب می باشد چون

اغتشاش (d) یک سیگنال فرکانس پایین می‌باشد و از آنجا که در فرکانس‌های پایین اندازه S برابر صفر است پس اغتشاش در خروجی ظاهر نمی‌شود.

شکل (۵-۲) طراحی طیف فرکانسی T و طراحی طیف فرکانسی S را نشان می‌دهد [۶].



شکل ۵-۲: طراحی طیف فرکانسی T و طراحی طیف فرکانسی S

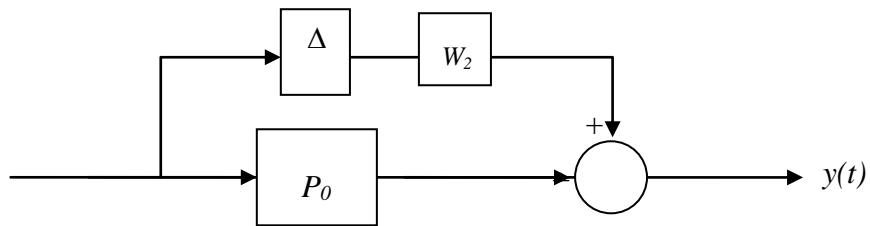
۵-۲ نامعینی

۱-۵-۲ منابع نامعینی

- اثر غیر خطی بودن فرایند (اغلب مدل خطی تقریبی به کار برده می‌شود)
- دینامیک مدل نشده (در نظر گرفتن موده‌های کندتر و صرف نظر کردن از دینامیک‌های سریع و در نتیجه ساده‌تر شدن مدل)
- تغییر پارامترهای سیستم در اثر تغییر شرایط محیط و نقطه کار
- اغتشاشات ناشی از نویز اندازه‌گیری
- اغتشاشات مدل نشده

۲-۵-۲ انواع نحوه نمایش نامعینی

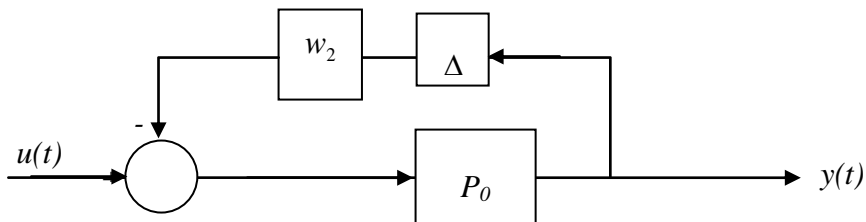
- جمع شونده:



$$y(s) = [(P_o(s) + \Delta(s)w_r(s))]u(s)$$

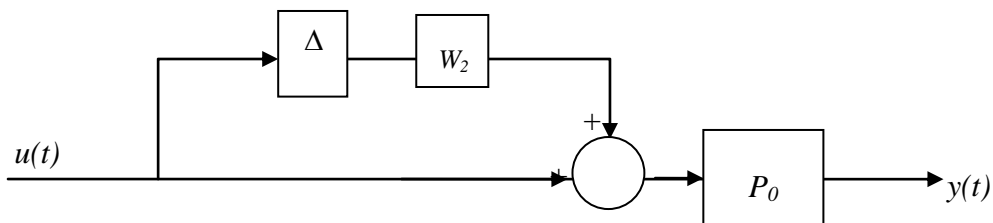
با انتخاب W_2 به عنوان یک فیلتر بالا گذر می توان عدم قطعیت جمعی را برای دینامیک های مدل نشده فرکانس بالا به کار برد [۴].

• جمع شونده معکوس



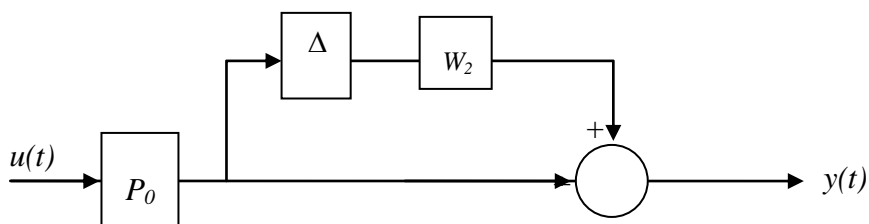
$$u = ((P_o(s))^{-1} + \Delta(s)W_r(s))y(s)$$

• ضرب ورودی



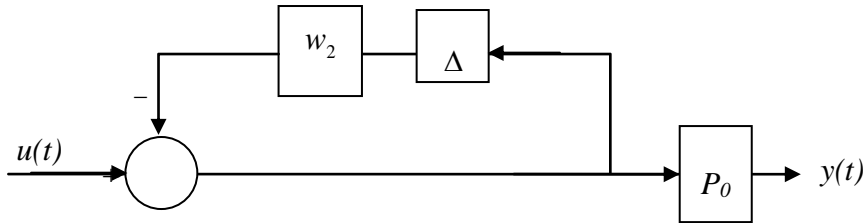
$$y(s) = P_o(I + \Delta(s)W_r(s))u(s)$$

• ضرب شونده خروجی



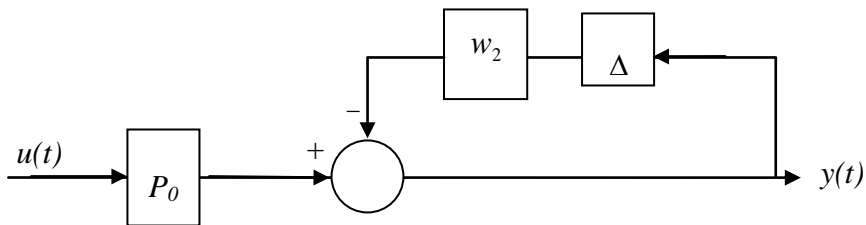
$$y(s) = [(I + \Delta(s)W_r(s))P_o]u(s)$$

- ضرب شونده ورودی معکوس



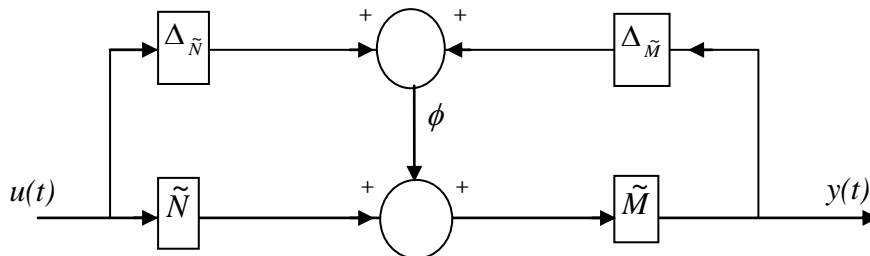
$$u(s) = [(I + \Delta(s)W_r(s))P_o(s)^{-1}]y(s)$$

- ضرب شونده خروجی معکوس



$$u(s) = [(G(s) (I + \Delta(s)W_r(s))]y(s)$$

- عامل عدد اول چپ^۱

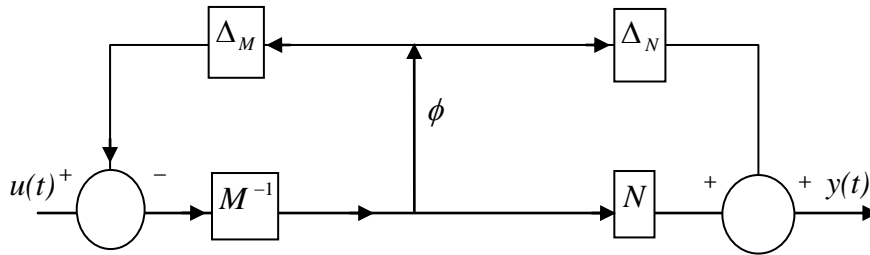


$$y(s) = [(\tilde{M} + \Delta\tilde{M})^{-1}(\tilde{N} + \Delta\tilde{N})]u(s)$$

- عامل عدد اول راست^۲

¹ Left coprime factor

² Right coprime factor



$$y(s) = \left[(\tilde{N} + \Delta\tilde{N})(\tilde{M} + \Delta\tilde{M})^{-1} \right] u(s)$$

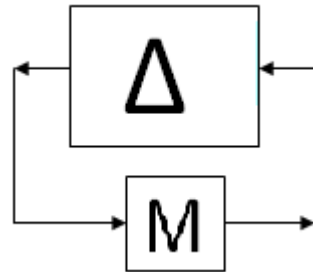
۲-۵-۳ انواع نامعینی‌ها از لحاظ ساختار

- نامعینی ساختاریافته: نامعینی‌هایی که در درون سیستم وجود دارد مثل یک مدل ریاضی سیستم که برخی پارامترها نامعلوم هستند.
- نامعینی ساختاریافته: این نامعینی در اثر ساده سازی مدل به وجود می‌آیند مثل در نظر نگرفتن دینامیک‌های سریع در برابر دینامیک‌های کندتر.
- نامعینی پارامتری: که این نوع نامعینی در اثر تغییر پارامترهای سیستم به وجود می‌آید مانند ضریب ثابت فنر که در مدت کارکرد تغییر می‌کند. نامعینی پارامتری خود نوعی نامعینی ساختاریافته می‌باشد.

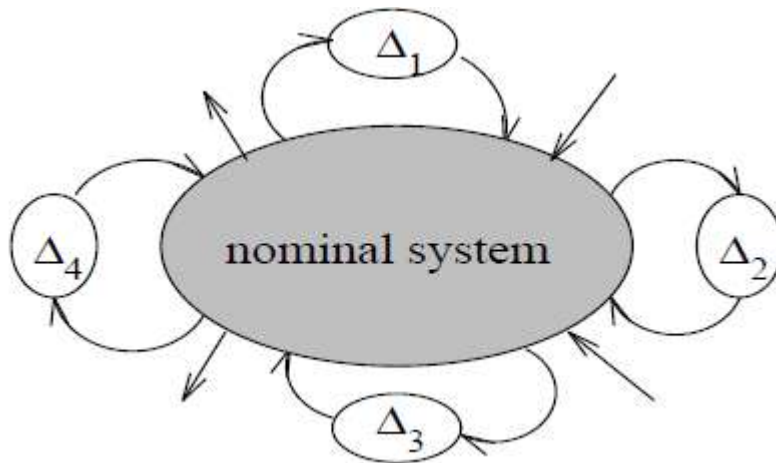
به طراحی سیستم به صورتی که در مقابل نامعینی‌ها پایدار بماند طراحی کنترل مقاوم گویند. هدف طراحی کنترل مقاوم این است که حاشیه پایداری سیستم چند متغیره (MSM)^۱ را بدست آورد. و این یعنی که علاقمند به پیدا کردن بزرگترین Δ هستیم قبل از این که ناپایداری اتفاق بیافتد. دو وظیفه در محاسبه MSM مورد بحث است. مدل نامعینی را به دست آوریم

^۱ Multivariable Stability Margin

قراردادن نامعینی سیستم به صورت یک نامعینی کلی در سیستم $M - \Delta$ مانند شکل (۶-۲)، و آنگاه طراحی کنترل مقاوم [۴].



الف



ب

شکل (۶-۲) دیاگرام تحلیلی مقاوم سیستم $M - \Delta$

۶-۲ مقادیر تکین^۱

در سیستم یک ورودی- یک خروجی کارآیی حلقه فیدبکی به وسیله تغییرات در بهره حلقه، با فرکانس، رد اغتشاش، انتقال نویز و حساسیت های مختلف نسبت به تغییرات پارامترهایی که به بهره وابسته است تعیین می گردد.

¹ Singular Value

اگر تابع انتقال حلقه باز در سمت راست صفحه S هیچ قطبی نداشته باشد، آنگاه حاشیه‌های پایداری و پاسخ گذرای حلقه بسته نیز به وسیله مشخصات بهره حلقه باز تعیین می‌گردد.

اگر کوشش کنیم تا این ارتباط را به سیستم چند متغیره بسط دهیم، مسئله اصلی این است که یک ماتریس یک بهره تنها ندارد، اگر G ماتریس تابع انتقال سیستم و u ورودی سیستم باشد می‌توانیم نسبت‌های

$$\frac{\|G^{-1}(s)y(s)\|}{\|y(s)\|} \quad \text{و} \quad \frac{\|G(s)u(s)\|}{\|u(s)\|}$$

را با استفاده از اندازه ماتریس‌ها محدود کنیم. پس اجازه می‌دهیم بهره تنها را با محدوده بهره جایگذاری کنیم، این محدوده بین دو عدد بالا و پایین قرار دارد.

اگر $\|x\|$ را اندازه بردار بنامیم، آنگاه می‌توانیم اندازه ماتریس را به این صورت تعریف کنیم:

$$\|G\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Gx\|}{\|x\|} \quad (7-2)$$

برای محاسبه اندازه بردار یا نرم از روش‌های زیر استفاده می‌شود

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} = (x^* x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2} \quad (8-2)$$

$$\|x\| = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad (9-2)$$

$$\|x\| = \max_i \{|x_i|\} \quad (10-2)$$

آنگاه اندازه ماتریس محاسبه شده اندازه هیلبرت یا طیفی نامیده می‌شود.

$$\|G\|_s = \bar{\sigma}$$

مقدار $\bar{\sigma}^2$ ماکزیمم مقادیر تکین ماتریس $G^H G$ یا GG^H است. اگر G دارای m ردیف و دارای l ستون باشد ($m \geq l$)، آنگاه ریشه‌های مثبت مقادیر ویژه ماتریس $G^H G$ به نام مقادیر تکین ماتریس

G نامیده می‌شود، و اگر $m \leq l$ باشد آنگاه ریشه‌های مثبت مقادیر ویژه ماتریس GG^H مقادیر تکین ماتریس G می‌باشند.

اگر مقادیر تکین را به ترتیب قرار دهیم $(\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_m)$ آنگاه بزرگترین مقدار تکین (σ_1) را با $\bar{\sigma}$ و کوچکترین مقدار تکین (σ_m) را با $\underline{\sigma}$ نمایش می‌دهیم.

$$\sigma_i(G) = \sqrt{\lambda_i(G^H G)} \quad (11-2)$$

$$\bar{\sigma} = \max_i \left\{ \sqrt{\lambda_i(G^H G)} \right\} \quad (12-2)$$

$$\bar{\sigma}(G(j\omega)) = \|G(j\omega)\|_s \quad (13-2)$$

۲-۶-۱ تجزیه مقادیر تکین

اگر $\Sigma = \text{diag}\{G_1, \dots, G_m\}$ قرار دهیم و G یک ماتریس مختلط باشد آنگاه می‌توان G را به صورت زیر نمایش داد.

$$G = y \Sigma u^H \quad (14-2)$$

G را یک ماتریس انتقال $m \times l$ فرض کنید.

حال اگر $m \geq l$ باشد آنگاه

$$y \in C^{m \times l}$$

$$\Sigma \in R^{l \times l}$$

$$u^H \in C^{l \times l}$$

$$y^H y = I_l$$

$$u^H u = uu^H = I_l$$

و اگر $m \leq l$ باشد آنگاه:

$$\begin{aligned}
y &\in C^{m \times m} \\
\sum &\in R^{m \times m} \\
u^H &\in C^{m \times l} \\
y^H y &= I_m \\
yy^H &\in I_m \\
u^H u &= uu^H = I_l
\end{aligned}$$

که ماتریس R ، ماتریس قسمت حقیقی ماتریس انتقال G می‌باشد و ماتریس C ، ماتریس قسمت موهومی ماتریس انتقال G می‌باشد.

تجزیه مقادیر تکین برای هر ماتریس انتقال یکتا نمی‌باشد.

اگر ماتریس G مربعی باشد و معکوس داشته باشد آنگاه:

$$G^{-1} = u \sum^{-1} y^H \quad (۱۴-۲)$$

$$\|G^{-1}(jw)\|_r = \frac{1}{\bar{\sigma}(w)} \quad (۱۵-۲)$$

$$\frac{\|G^{-1}(jw)y(jw)\|}{\|y(jw)\|} \leq \frac{1}{\underline{\sigma}(w)} \quad (۱۶-۲)$$

$$\frac{\|G(jw)u(jw)\|}{\|u(jw)\|} \leq \bar{\sigma}(w) \quad (۱۷-۲)$$

و اگر

$$y(jw) = G(jw)U(jw)$$

آنگاه

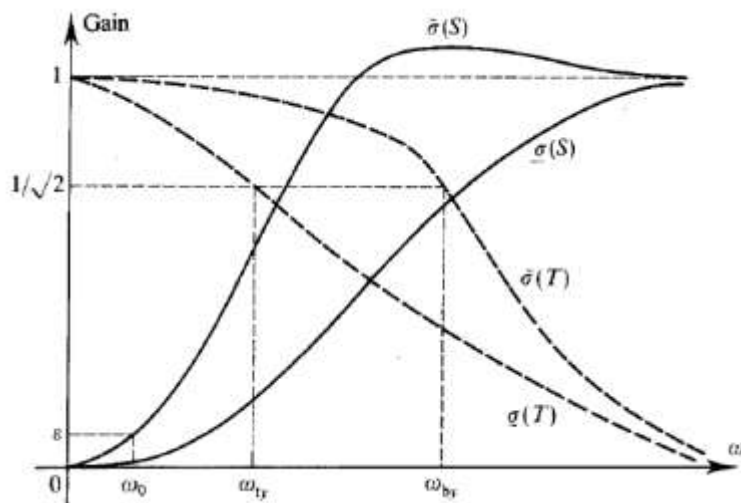
$$\underline{\sigma}(w) \leq \frac{\|G(jw)U(jw)\|}{\|U(jw)\|} \leq \bar{\sigma}(w) \quad (۱۸-۲)$$

و

$$\underline{\sigma}(w) \leq \frac{\|y(jw)\|}{\|U(jw)\|} \leq \bar{\sigma}(w) \quad (19-2)$$

رابطه (۱۸-۲) و (۱۹-۲) نشان می‌دهد که بهره سیستم چند متغیره در بین دو عدد بزرگترین مقدار تکین و کوچکترین مقدار تکین قرار دارد.

در شکل (۷-۲) رابطه میان ماکزیمم مقدار تکین ماتریس حساسیت و مینیمم مقدار تکین ماتریس حساسیت با ماکزیمم مقدار تکین ماتریس حساسیست مکمل و مینیمم مقدار تکین ماتریس حساسیت مکمل نمایش داده شده است [۷].



شکل (۷-۲) نمودار رابطه مقادیر تکین تابع حساسیت با تابع حساسیت مکمل

هر چقدر فاصله $\underline{\sigma}(T)$ با $\bar{\sigma}(T)$ کمتر باشد سیستم چند متغیره دکوپله‌تر است و به سیستم‌های تک متغیره نزدیک‌تر است.

مینیمم کردن فاصله فرکانسی مابین W_{ty} و W_{by} یکی از معیارهای بسیار خوب برای طراحی می‌باشد.

۲-۶-۲ خواص مقادیر تکین

در این قسمت بعضی از ویژگی‌های مقادیر تکین بیان می‌شود:

$$\bar{\sigma}(A) = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \quad .1$$

$$\underline{\sigma}(A) = \min_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \quad .2$$

$$\underline{\sigma}(A) \leq |\lambda_i(A)| \leq \bar{\sigma}(A) \quad .3$$

$$\underline{\sigma}(A) = \frac{1}{\bar{\sigma}(A^{-1})} \quad .4 \text{ اگر } A^{-1} \text{ وجود داشته باشد}$$

$$\bar{\sigma}(A) = \frac{1}{\underline{\sigma}(A^{-1})} \quad .5 \text{ اگر } A^{-1} \text{ وجود داشته باشد}$$

$$\bar{\sigma}(\alpha A) = |\alpha| \bar{\sigma}(A) \quad .6$$

$$\bar{\sigma}(A+B) \leq \bar{\sigma}(A) + \bar{\sigma}(B) \quad .7$$

$$\bar{\sigma}(AB) \leq \bar{\sigma}(A) \bar{\sigma}(B) \quad .8$$

$$\underline{\sigma}(A) \bar{\sigma}(E) \leq \underline{\sigma}(A+E) \leq \underline{\sigma}(A) + \bar{\sigma}(E) \quad .9$$

$$\max\{\bar{\sigma}(A), \bar{\sigma}(B)\} \leq \bar{\sigma}(AB) \leq \sqrt{2} \max\{\bar{\sigma}(A), \bar{\sigma}(B)\} \quad .10$$

$$\max_{i,j} |a_{ij}| \leq \bar{\sigma}(A) \leq n \max_{i,j} |a_{i,j}| \quad .11$$

$$\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 = \text{trace}(A^H A) \quad .12$$

۷-۲ عملگر اندازه (نرم های اپراتوری) $\|G\|_r$ و $\|G\|_\infty$

تعریف (۱-۲): فرض کنید که $G(s)$ یک تابع انتقال سره^۱ باشد که هیچ قطب آن روی محور موهومی

نیست آنگاه:

$$\|G\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int \text{tr}(G(jw)G^T(-jw))dw} \quad (20-2)$$

$$\|G\|_\infty = \text{SUP}_w \bar{\sigma}(G(jw)) \quad (21-2)$$

¹ Proper

۱-۷-۲ ویژگی های عملگر اندازه

$$\|G\| \geq 0 \text{ یا } \|G\| = 0 \text{ اگر } G = 0$$

$$\|\alpha G\| = |\alpha| \|G\| \text{ و } \alpha \text{ اسکالر}$$

$$\|G + H\| \leq \|G\| + \|H\|$$

$$\|GH\|_{\infty} \leq \|G\|_{\infty} \|H\|_{\infty}$$

خاصیت ۱ و ۲ و ۳ هم برای نرم ۲ و هم برای نرم بی نهایت صادق است ولی خاصیت ۴ فقط برای نرم بی نهایت صادق است.

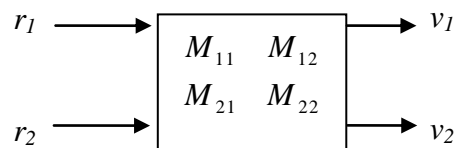
قضیه ۱-۲: اگر $\|u\|_r < \infty$ باشد و $y(s) = G(s)U(s)$ و $G(s)$ پایدار و سره باشد و هیچ قطبی روی محور موهومی نداشته باشد، آنگاه:

$$\sup_u \frac{\|y\|_r}{\|u\|_r} = \|G\|_{\infty}$$

۸-۲ تبدیل خطی کسری (LFT)^۱

یکی از روش های توصیف سیستم، تبدیل خطی کسری می باشد. از LFT ها برای نمایش عدم قطعیت در هر پارامتر استفاده می شود.

سیستم زیر را در نظر بگیرید

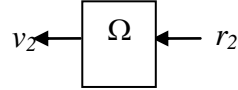


شکل (۸-۲) نمایش سیستم دو ورودی-دو خروجی

^۱ Linear Fractional Transformations

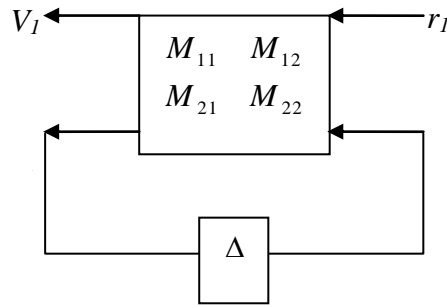
$$\begin{cases} V_1 = M_{11}r_1 + M_{12}r_2 \\ V_2 = M_{21}r_1 + M_{22}r_2 \end{cases}$$

فرض کنید که ماتریس عدم قطعیت Δ با r_2, v_2 به صورت زیر رابطه داشته باشد.



شکل (۹-۲) نمایش ارتباط خروجی دوم با ورودی دوم

در نتیجه سیستم با در نظر گرفتن عدم قطعیت به شکل زیر در می آید

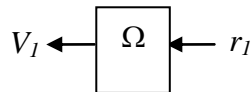


شکل (۱۰-۲) نمایش تبدیل خطی-کسری پایینی

تبدیل خطی - کسری پایینی M ، $F_K(M, \Delta)$ به صورت زیر می باشد:

$$v_1 = [M_{11} + M_{12}\Delta(I - M_{22}\Delta)^{-1}M_{21}]r_1 = F_L(M, \Delta)r_1$$

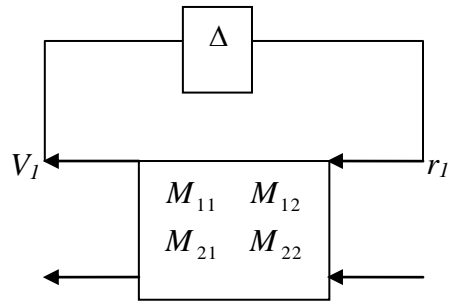
و اگر ماتریس عدم قطعیت با r_1, v_1 به صورت زیر رابطه داشته باشد



شکل (۱۱-۲) نمایش ارتباط خروجی اول با ورودی اول

$$v_1 = \Delta r_1$$

آنگاه تبدیل خطی - کسری بالایی M ، $F_U(M, \Delta)$ به صورت زیر خواهد بود



شکل (۱۲-۲) نمایش تبدیل خطی-کسری بالایی

$$v_2 = \left[M_{22} + M_{21} \Delta (I - M_{11} \Delta)^{-1} M_{12} \right] r_2 = F(M, \Delta) r_2 \quad (22-2)$$

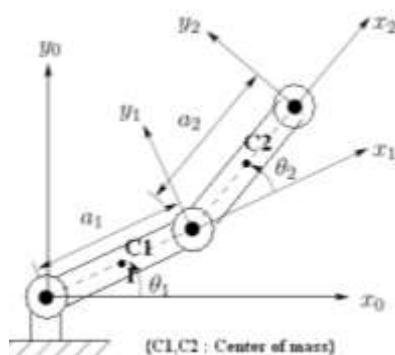
۳-۱ معرفی

برای کنترل هر سیستم ابتدا نیاز به بدست آوردن اطلاعاتی از دینامیک آن سیستم داریم. مدل سازی ربات به دو صورت دینامیکی و سینماتیکی انجام می‌شود. از دینامیک لاگرانژ به منظور مدل-سازی دینامیکی، و از الگوریتم دیناویت-هارتنبِرج به منظور مدل‌سازی سینماتیکی استفاده می‌نماییم که در ادامه توضیح آن خواهیم پرداخت. [۲]

۳-۲ مدل سازی سینماتیکی

در این قسمت به مدل سازی سینماتیکی ربات با استفاده از روش دیناویت-هارتنبِرج می‌پردازیم و سینماتیک مستقیم یا سینماتیک ساختاری را برای ربات های صلب به دست می‌آوریم. سینماتیک مستقیم عبارت است از تعیین موقعیت و جهت مجری نهایی ربات به ازای متغیرهای مفاصل که به وسیله سنسورها حس می‌شود.

متغیرهای مفاصل همان زاویه بین رابط‌ها در مفاصل چرخان یا لولایی و طول در مفاصل کشویی یا لغزشی هستند. فرض کنید که ربات $n+1$ رابط از شماره صفر تا n دارد که از پایه ربات به عنوان رابط صفر شروع می‌کنیم. مفاصل از شماره ۱ تا n شماره گذاری می‌شوند. سپس یک دستگاه مختصات به هر رابط به صورت صلب متصل می‌شود. شکل زیر این ایده را نشان می‌دهد [۲].



شکل ۳-۱ ربات دوبازو

حال فرض کنید که A_i ماتریس همگنی است که مختصات یک نقطه از دستگاه مختصات i را به دستگاه $i-1$ تبدیل می‌کند. ماتریس A_i ثابت نیست و مطابق با ترکیب ربات تغییر می‌کند به معنی آن که A_i فقط تابعی از متغیر q_i است.

$$A_i = A_i(q_i) \quad (1-3)$$

حال ماتریس همگنی که مختصات یک نقطه از دستگاه مختصات j را به دستگاه i تبدیل می‌کند، ماتریس تبدیل نامیده می‌شود و با T_i^j نشان داده می‌شود.

$$T_i^j = A_{i+1} A_{i+2} \cdots A_{j-1} A_j \quad \text{برای } i < j$$

$$T_i^j = 1 \quad \text{برای } i=j$$

$$T_i^j = (T_j^i)^{-1} \quad \text{برای } i > j$$

ما دستگاه‌های مختلف را به صورت صلب به رابط‌های مربوط متصل نموده‌ایم. در نتیجه موقعیت هر نقطه روی مجری نهایی که در دستگاه n بیان می‌شود مقداری ثابت و مستقل از شکل ربات است. موقعیت و جهت مجری نهایی نسبت به دستگاه آغازین به وسیله یک بردار 3 عنصری d^n و یک ماتریس 3×3 دوران R^n به ترتیب نمایش داده می‌شود و ماتریس همگن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H = \begin{bmatrix} R^n & d^n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-3)$$

هر تبدیل همگن به صورت زیر تعریف می‌شود:

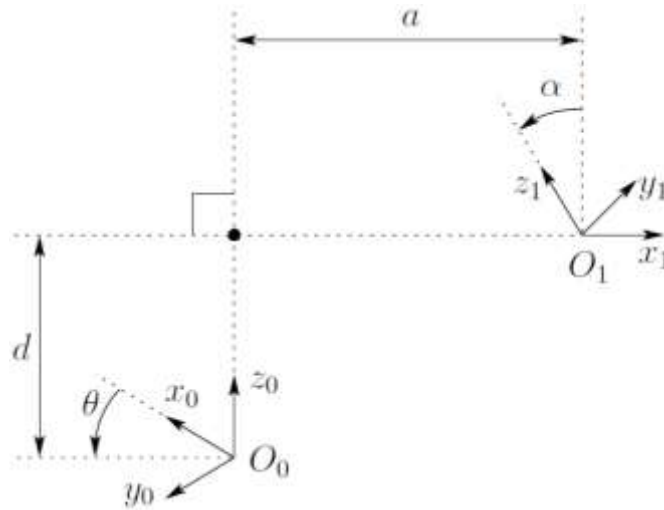
$$A_i = \begin{bmatrix} R_{i-1}^i & d_{i-1}^i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-3)$$

۳-۲-۱ نمایش دناویت - هارتنبرگ

در نمایش دناویت - هارتنبرگ هر ماتریس تبدیل A_i به صورت ۴ تبدیل اساسی نشان داده می‌شود:

$$A_i = Rot_{z, \theta_i} Trans_{z, d_i} Trons_{x, a_i} Rot_{x, \alpha_i} \quad (4-3)$$

که در آن چهار کمیت $\theta_i, d_i, a_i, \alpha_i$ پارامترهای رابط i و مفصل i هستند. فرض کنید دو دستگاه مختصات با شماره صفر و یک داریم حال تصور کنید که دو دستگاه دو ویژگی به صورت زیر دارد که در شکل زیر نمایش داده شده است [۲]:



شکل ۲-۳ نمایش دناویت- هارتنبرگ

محور x_1 بر محور z_0 عمود است.

محور x_1 با محور z_0 متقاطع است.

چون α, θ زاویه هستند منظور این است که در بازه 2π یکتا هستند.

خلاصه الگوریتم دیناویت- هارتنبرگ برای بدست آوردن سینماتیک مستقیم بازوی ماهر:

گام ۱: محور مفاصل را Z_0, \dots, Z_{n-1} قرار داده و نامگذاری می‌نماییم.

گام ۲: دستگاه پایه را نصب می‌نماییم و مبدأ آن را در محلی دلخواه روی محور Z_0 قرار می‌دهیم. و

محورهای x_0, y_0 را با در نظر گرفتن دستگاه راستگرد بطور مناسب انتخاب می‌نماییم.

برای $I = 0, \dots, n-1$ گام های ۳ تا ۵ را اجرا می‌نماییم.

گام ۳: مبدأ O_i را در جایی که عمود مشترک Z_{i-1}, Z_i را قطع می‌کند قرار می‌دهیم. اگر Z_{i-1}, Z_i متقاطع باشند نقطه O_i را در نقطه تقاطع قرار می‌دهیم. اگر Z_{i-1}, Z_i موازی باشند O_i را در محل مفصل i قرار می‌دهیم.

گام ۴: X_i را در امتداد عمود مشترک بین Z_{i-1}, Z_i و در عبور از O_i قرار می‌دهیم یا اگر Z_{i-1}, Z_i متقاطع هستند در جهت عمود به صفحه Z_{i-1}, Z_i قرار می‌دهیم.

گام ۵: y_i را با تکمیل دستگاه راستگرد مشخص می‌کنیم.

گام ۶: دستگاه مختصات قسمتی پایانی $o_n x_n y_n z_n$ را تعیین می‌نماییم.

گام ۷: یک جدول از پارامترهای رابط $\theta_i, d_i, a_i, \alpha_i$ تشکیل می‌دهیم

a_i ، طول در امتداد x_i از O_i تا محل تقاطع محورهای Z_{i-1}, x_i می‌باشد.

d_i ، طول در امتداد Z_{i-1} از O_{i-1} تا محل تقاطع محورهای Z_{i-1}, x_i می‌باشد.

α_i ، زاویه بین Z_{i-1}, Z_i که حول x_i اندازه‌گیری می‌شود، می‌باشد

θ_i ، زاویه بین x_{i-1}, x_i که حول Z_{i-1} اندازه‌گیری می‌شود، می‌باشد.

گام ۸: ماتریس تبدیل‌های همگن A_i را تشکیل می‌دهیم.

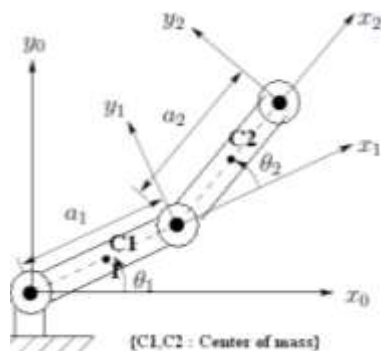
گام ۹: $T_o^n = A_1 \cdots A_n$ را تشکیل می‌دهیم. این ماتریس موقعیت و جهت دستگاه مختصات ابزار را در

دستگاه مختصات پایه تعیین می‌کند.

جدول پارامترهای رابط ربات دو بازو را در زیر مشاهده می‌نمایید:

جدول ۳-۱: پارامترهای رابط ربات دوبازو

رابط	θ_i	α_i	a_i	d_i
۱	θ_1^*	۰	a_1	۰
۲	θ_2^*	۰	a_2	۰



شکل ۳-۳ نمایش اتصال دستگاه مختصات به ربات دوبازو

ماتریس تبدیل همگن مربوط به جدول بالا را به کمک *MATLAB* به صورت زیر درآوردیم:

$$T_o^2 = \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 & a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ S_{12} & C_{12} & 0 & a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

در ماتریس بالا منظور از S_{12}, C_{12}, S_1, C_1 به ترتیب $\sin(\theta_1, \theta_2), \cos(\theta_1 + \theta_2), \sin(\theta_1), \cos(\theta_1)$ می باشد.

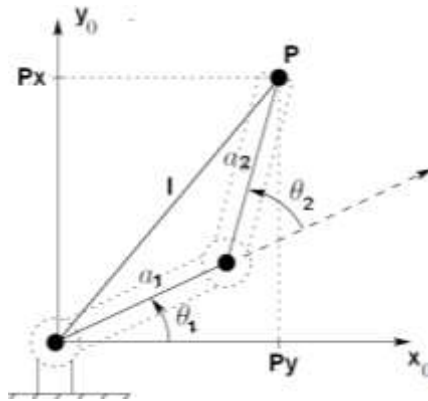
۲-۲-۳ سینماتیک وارون

در قسمت قبل نشان دادیم که چگونه می توان موقعیت و جهت مجری نهایی را بر حسب متغیرهای مفاصل تعیین کرد. در این قسمت به موضوع سینماتیک وارون، یعنی یافتن متغیرهای مفاصل بر حسب موقعیت و جهت مجری نهایی می پردازیم.

در مسئله سینماتیک وارون حل عددی معادلات خیلی مشکل است اگرچه مسئله سینماتیک مستقیم همیشه یک حل یگانه دارد که با ارزیابی سینماتیک مستقیم به دست می آید، اما مسئله سینماتیک وارون ممکن است جواب داشته باشد یا نداشته باشد، همچنین اگر جواب داشته باشد ممکن است یگانه یا غیر یگانه باشد. بعلاوه از آن جا که مسئله سینماتیک مستقیم بطور کلی توابع پیچیده غیر

خطی از متغیرهای مفاصل هستند، پاسخ‌ها در صورت وجود ممکن است به سختی به دست آیند. برای حل مسئله سینماتیک وارون بیشتر علاقمند به یافتن حل تحلیلی از معادلات هستیم که به حل عددی ترجیح داده می‌شود.

راه‌های تحلیلی به دو دلیل ترجیح داده می‌شود، اول این که در کاربردهای معین نظیر تعقیب خط جوشکاری که موقعیت آن توسط سیستم بینایی فراهم می‌شود، معادلات سینماتیک مستقیم باید به سرعت حل شوند، مثلاً هر ۲۰ میلی ثانیه، که داشتن روابط تحلیلی نسبت به جستجوی عددی یک ضرورت عملی است. دوم این که راه‌های تحلیلی امکان ایجاد قوانین برای انتخاب راه حل ویژه را از بین راه‌های مختلف را می‌دهند [۲].



شکل ۳-۴ نمایش سینماتیک وارون ربات دو بازو

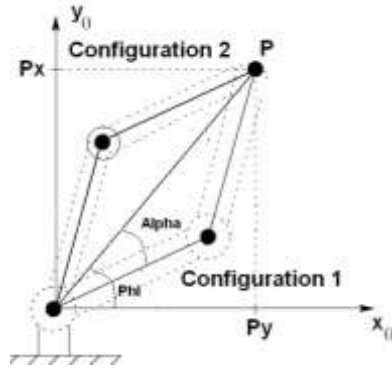
$$l^2 = P^2_y + P^2_x$$

$$l^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(\theta_2)$$

$$\cos(\theta_2) = \frac{l^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1a_2}$$

$$\sin(\theta_2) = \pm \sqrt{1 - \cos^2(\theta_2)}$$

با توجه به این که می‌تواند $\sin(\theta_2) < 0$ یا این که $\sin(\theta_2) > 0$ باشد دو پیکر بندی وجود دارد.



شکل ۳-۵ انواع پیکربندی ربات دوبازو

$$\theta_r = a \tan^2(\sin(\theta_r), \cos(\theta_r))$$

$$\phi = a \tan^2(Py, Px)$$

$$\alpha = a \tan^2(a_r \sin(\theta_r), a_1 + a_r \cos(\theta_r))$$

۳-۳ سینماتیک سرعت

در قسمت های قبل سینماتیک مستقیم و وارون را برای موقعیت های مفاصل و مجری نهایی به دست آوردیم. در این قسمت روابط سرعت را بررسی می‌نماییم. از دیدگاه ریاضی، معادلات سینماتیک مستقیم، یک تابع بین فضای جهت و موقعیت دکارتی و فضای موقعیت های مفاصل تعریف می‌کند. رابطه سرعت به وسیله ژاکوبین این تابع تعریف می‌شود. ژاکوبین یک تابع ماتریسی است و می‌تواند به عنوان نوعی بردار از مشتق یک تابع اسکالر تلقی شود. ماتریس ژاکوبین یکی از مهمترین کمیت های آنالیز و کنترل حرکت ربات محسوب می‌گردد.

۳-۳-۱ تعیین ماتریس ژاکوبین

۱. اگر مفصل i ، لولایی باشد:

$$J_i = \begin{bmatrix} Z_{i-1} \times (O_n - O_{i-1}) \\ Z_{i-1} \end{bmatrix} \quad (۵-۳)$$

۲. اگر مفصل i کشویی باشد:

$$J_i = \begin{bmatrix} Z_{i-1} \\ \circ \end{bmatrix} \quad (6-3)$$

ماتریس ژاکوبین بازوی ماهر به صورت زیر می باشد:

$$J = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_r s_{1r} & -a_r s_{1r} \\ a_1 c_1 + a_r c_{1r} & a_r c_{1r} \\ \circ & \circ \\ \circ & \circ \\ \circ & \circ \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

۳-۴ دینامیک

در این قسمت با استفاده از دینامیک لاگرانژ معادلات دینامیکی بدنه ربات را به دست می آوریم. نخست لاگرانژین سیستم را تشکیل می دهیم. لاگرانژین سیستم، اختلاف مابین انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل است.

$$K = \frac{1}{2} \int \dot{P}_o^T \dot{P}_o dm \quad (7-3)$$

$$P_o = d_o^1 + R_o^1 P_1 \quad \text{موقعیت} \quad (8-3)$$

$$\dot{P}_o = \dot{d}_o^1 + \dot{R}_o^1 P_1 + R_o^1 \dot{P}_1 \quad \text{سرعت} \quad (9-3)$$

دستگاه $\{1\}$ روی قطعه ثابت شده است $\dot{P}_1 = \circ$

$$\dot{P}_o = \dot{d}_o^1 + \dot{R}_o^1 P_1 \quad (10-3)$$

$$k = \frac{1}{\rho} \int (\dot{d}_o^1 + \dot{R}_o^1 P_1)^T (\dot{d}_o^1 + \dot{R}_o^1 P_1) dm$$

$$k = \frac{1}{\rho} \int \dot{d}_o^{1T} \dot{d}_o^1 dm + \frac{1}{\rho} \int \dot{d}_o^{1T} \dot{R}_o^1 P_1 dm + \frac{1}{\rho} \int P_1^T \dot{R}_o^{1T} \dot{d}_o^1 dm + \frac{1}{\rho} \int P_1^T \dot{R}_o^{1T} \dot{R}_o^1 P_1 dm$$

فرض بر این است که دستگاه ۱ در مرکز جرم جسم A قرار داده شده است

$$\frac{1}{\rho} \int \dot{d}_o^{1T} \dot{d}_o^1 dm = \frac{1}{\rho} \dot{d}_o^{1T} \dot{d}_o^1 \int dm = \frac{1}{\rho} m \dot{d}_o^{1T} \dot{d}_o^1 = \frac{1}{\rho} m v_c^T v_c \quad (11-3)$$

$\dot{d}_o^1 = v_c$ ، سرعت مرکز جرم در دستگاه مبنا می‌باشد (سرعت انتقال مرکز جرم)

$$\dot{R}_o^1 = S(w_o^1) R_o^1$$

(12-3)

$$\int P_1 dm = \tau_c m$$

τ_c مختصات مرکز جرم می‌باشد

$$\int P_1 dm = 0$$

$$\frac{1}{2} \int \dot{d}_o^{1T} \dot{R}_o^1 P_1 dm + \frac{1}{2} \int P_1^T \dot{R}_o^{1T} \dot{d}_o^1 dm = \frac{1}{2} \int \dot{d}_o^{1T} \dot{R}_o^1 P_1 dm + \left(\frac{1}{2} \int \dot{d}_o^{1T} \dot{R}_o^1 P_1 dm \right)^T = 0 \quad (13-3)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int P_1^T \dot{R}_o^1 P_1 dm &= \frac{1}{2} \int w_o^{1T} S(R_o^1 P_1)^T S(R_o^1 P_1) w_o^1 dm = \frac{1}{2} w_o^{1T} R_o^1 \left(\int S(P_1)^T S(P_1) dm \right) R_o^{1T} w_o^1 \\ &= \frac{1}{2} w_o^{1T} R_o^1 I_c R_o^{1T} w_o^1 \end{aligned}$$

I_c تانسور اینرسی در دستگاه متصل به مرکز جرم می‌باشد

$$I_c = \begin{bmatrix} \int (y^2 + x^2) dm & - \int xy dm & - \int xz dm \\ - \int xy dm & \int (x^2 + z^2) dm & - \int yz dm \\ - \int xz dm & - \int yz dm & \int (x^2 + y^2) dm \end{bmatrix} \quad (14-3)$$

$$K = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i V_i^T V_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_i^T R_i I_i R_i^T w_i \quad (15-3)$$

حال اگر از ژاکوبین استفاده کنیم، انرژی جنبشی از رابطه زیر به دست می‌آید

$$V_o^n = J_v \dot{q} \quad (۱۶-۳)$$

$$W_o^n = J_w \dot{q} \quad (۱۷-۳)$$

$$K = \frac{1}{2} \dot{q}^T \left(\sum_{i=0}^n m_i J_{V_i}^T J_{V_i} + J_{w_i}^T R_i I_i R_i^T J_{w_i} \right) \dot{q} = \frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \dot{q} \quad (۱۸-۳)$$

I_i ، تانسور اینرسی می باشد که از رابطه زیر به دست می آید [۲]:

$$I_i = \int S(P_i)^T S(P_i) dm, \quad P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (۱۹-۳)$$

$$S(P) = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \quad (۲۰-۳)$$

انرژی پتانسیل ربات، مطابق روابط زیر به دست می آید [۲]:

$$V_i = \int_A (0 \quad 0 \quad g) P_o dm = \int_A (0 \quad 0 \quad g) (d_o^1 + R_o^1 P_i) dm \quad (۲۱-۳)$$

از آنجا که دستگاه $\{1\}$ در مرکز جرم قرار دارد، داریم

$$\int P_i dm = 0$$

$$V_i = [0 \quad 0 \quad g] \int_A d_o^1 dm = m [0 \quad 0 \quad g] d_o^1$$

$$V = \sum_{i=1}^n m_i [0 \quad 0 \quad g] d_o^i \quad (۲۲-۳)$$

دینامیک لاگرانژ را در زیر تشکیل می دهیم

$$L = K - V \quad (۲۳-۳)$$

$$L = \frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \dot{q} - V(q) \quad (۲۴-۳)$$

معادله دینامیکی ربات را توسط معادله اویلر- لاگرانژ به دست می آوریم

معادله اویلر- لاگرانژ در زیر آورده شده است:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau \quad (25-3)$$

τ ، گشتاور. وارد به مفاصل می باشد.

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} (\dot{q}^T D(q) \dot{q}) - \frac{\partial}{\partial q} V(q) \quad (26-3)$$

معادله دینامیکی ربات در حالت کلی:

$$D(q) \ddot{q} + \dot{D}(q) \dot{q} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} (\dot{q}^T D(q) \dot{q}) + \frac{\partial}{\partial q} V(q) = \tau \quad (27-3)$$

$$D(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) + g(q) = \tau \quad (28-3)$$

معادله دینامیکی ربات در حالت کلی را به دست آوردیم. حال می خواهیم از روی معادله دینامیکی

ربات، معادله دینامیکی ربات دو بازو را بدست آوریم.

در ابتدا باید ماتریس ژاکوبین ربات دو بازو را به دست آورد. از آن جا که ربات دو بازو شامل دو مفصل

لولایی می باشد ماتریس ژاکوبین ربات دو بازو مطابق زیر به دست می آید:

θ_1 : زاویه بازوی اول با خط افقی

θ_2 : زاویه بازوی دوم با بازوی اول

τ_1 : گشتاور تولید شده در فصل اول

τ_2 : گشتاور تولید شده در فصل دوم

l_1 : طول بازوی اول

l_2 : طول بازوی دوم

فاصله مرکز جرم از مفصل ۱: r_1

فاصله مرکز جرم از مفصل ۲: r_2

جرم بازوی اول: m_1

جرم بازوی دوم: m_2

$$J = \begin{pmatrix} J_V \\ J_w \end{pmatrix} \quad (29-3)$$

$$J_V = Z_{i-1} \times (d_o^n - d_o^{i-1}) \quad (30-3)$$

$$J_w = Z_{i-1} \quad (31-3)$$

$$J_{V_1} = (Z_o \times d_o^{C_1} \quad \circ) \quad (32-3)$$

$$J_{V_2} = (Z_o \times d_o^{C_2} \quad Z_1 \times d_1^{C_2}) \quad (33-3)$$

$$J_{W_1} = (Z_o \quad \circ) \quad (34-3)$$

$$J_{W_2} = (Z_o \quad Z_1) \quad (35-3)$$

$$Z_o = K = \begin{pmatrix} \circ \\ \circ \\ 1 \end{pmatrix} \quad (36-3)$$

$$Z_1 = R_o^1 \cdot K = R(Z, \theta) \quad (37-3)$$

$$d_o^{C_1} = \begin{pmatrix} l_{c1} \cos \theta_1 \\ l_{c1} \sin \theta_1 \\ \circ \end{pmatrix} \quad (38-3)$$

$$J_{V_1} = \begin{pmatrix} -l_{c1} S_{\theta_1} & \circ \\ l_{c1} C_{\theta_1} & \circ \\ \circ & \circ \end{pmatrix} \quad (39-3)$$

$$d_o^{C_2} = \begin{pmatrix} a_1 C_{\theta_1} + l_{c2} C_{\theta_1 + \theta_2} \\ a_1 S_{\theta_1} + l_{c2} S_{\theta_1 + \theta_2} \\ \circ \end{pmatrix} \quad (40-3)$$

$$d_1^{c_2} = \begin{pmatrix} l_{c_2} C_{\theta_1+\theta_2} \\ l_{c_2} S_{\theta_1+\theta_2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (41-3)$$

$$Z_1 = R_o^1 \times K = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (42-3)$$

$$J_{V_1} = \begin{pmatrix} -l_{c_1} S_{\theta_1} & 0 \\ l_{c_1} C_{\theta_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (43-3)$$

$$J_{V_1} = \begin{pmatrix} -a_1 S_{\theta_1} - l_{c_1} S_{\theta_1 r} & -l_{c_1} S_{\theta_1 r} \\ a_1 C_{\theta_1} + l_{c_1} C_{\theta_1 r} & l_{c_1} C_{\theta_1 r} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (44-3)$$

$$j_{w_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (45-3)$$

$$j_{w_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (46-3)$$

در ربات دوبازو، $D(q)$ یک ماتریس 2×2 می باشد که مطابق زیر به دست می آید:

$$D(q) = \sum (m_i J_{V_i}^T J_{V_i} + J_{w_i}^T R_i I_i R_i^T J_{w_i}) \quad (47-3)$$

R_i همان R_o^i می باشد.

$$D(q) = m_1 J_{V_1}^T J_{V_1} + J_{w_1}^T R_1 I_1 R_1^T J_{w_1} + m_2 J_{V_2}^T J_{V_2} + J_{w_2}^T R_2 I_2 R_2^T J_{w_2} \quad (48-3)$$

$$D(q) = \begin{bmatrix} m_1 l_{c_1}^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (I_{33})_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + m_2 \begin{bmatrix} a_1^2 + l_{c_1}^2 + 2a_1 l_{c_2} C_{\theta_2} & l_{c_2}^2 + a_1 l_{c_2} C_{\theta_2} \\ l_{c_2}^2 + a_1 a_2 C_{\theta_2} & l_{c_2}^2 \end{bmatrix} \quad (49-3)$$

$$+ \begin{bmatrix} (I_{33})_2 & (I_{33})_2 \\ (I_{33})_2 & (I_{33})_2 \end{bmatrix}$$

$$C_{ijk} = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k} \right\} \quad (50-3)$$

$$C_{111} = 0$$

$$C_{1r1} = -m_r a_1 l_{cr} \sin q_r$$

$$C_{r11} = \frac{1}{r} \frac{\partial d_{11}}{\partial q_r} = -m_r a_1 l_{cr} \sin q_r$$

$$C_{rr1} = \frac{\partial d_{1r}}{\partial q_r} - \frac{1}{r} \frac{\partial d_{rr}}{\partial q_1} = -a_1 l_{cl} m_r \sin q_r$$

$$C_{1rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial d_{rr}}{\partial q_1} = 0$$

$$C_{r1r} = \frac{1}{r} \frac{\partial d_{rr}}{\partial q_1} = 0$$

$$C_{rrr} = \frac{1}{r} \frac{\partial d_{rr}}{\partial q_r} = 0$$

$$\phi_k = \frac{\partial V(q)}{\partial q_k} \quad (51-3)$$

$$V_1 = m_1 g l_{cl} \sin q_1$$

$$V_r = m_r g (a_1 \sin q_1 + l_{cr} \sin(q_1 + q_r))$$

$$V = V_1 + V_r = (m_1 g l_{cl} + m_r g a_1) \sin q_1 + m_r l_{cr} g \sin(q_1 + q_r) \quad (52-3)$$

$$\phi_1 = \frac{\partial V}{\partial q_1} = (m_1 l_{cl} + m_r a_1) g \cos q_1 + m_r l_{cr} g \cos(q_1 + q_r) \quad (53-3)$$

$$\phi_r = \frac{\partial V}{\partial q_r} = m_r l_{cr} g \cos(q_1 + q_r) \quad (54-3)$$

معادله اویلر- لاگرانژ به صورت زیر است

$$\sum_j d_{kj}(q) \ddot{q}_j + \sum_{i,j} C_{ijk}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j + \phi_k(q) = \tau_k \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (55-3)$$

معادله ربات دو بازو که از معادله اوپلر- لاگرانژ بدست می آید، به صورت زیر است

$$\begin{cases} d_{11}\ddot{q}_1 + d_{12}\ddot{q}_2 + C_{121}\dot{q}_1\dot{q}_2 + C_{211}\dot{q}_2\dot{q}_1 + C_{221}\dot{q}_1^2 + \varphi_1 = \tau_1 \\ d_{21}\ddot{q}_1 + d_{22}\ddot{q}_2 + C_{112}\dot{q}_1^2 + \varphi_2 = \tau_2 \end{cases} \quad (56-3)$$

$$d_{11} = m_1 l_{c1}^r + m_p (l_1^r + l_{cp}^r + r l_1 l_{cp} \cos q_p) + I_1 + I_p \quad (57-3)$$

$$d_{12} = d_{21} = m_2 (l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos q_2) + I_2 \quad (58-3)$$

$$d_{22} = m_2 l_{c2}^2 + I_2 \quad (59-3)$$

برای مدل سازی دینامیکی ربات یک روش دیگر هم وجود دارد [۱] که به طور مختصر در زیر آورده

شده است در این روش بار را هم در معادله دینامیکی وارد می کنیم:

$$L = K - P \quad (60-3)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau$$

$$L_{c1} = r_1$$

$$L_{c2} = r_2$$

m_i جرم بار می باشد

$$x_1 = r_1 \cos \theta_1$$

$$x_p = r_p \cos(\theta_1 + \theta_p) + l_1 \cos \theta_1$$

$$y_1 = r_1 \sin \theta_1$$

$$y_p = l_1 \sin \theta_1 + r_p \sin(\theta_1 + \theta_p)$$

$$y_l = l_1 \sin \theta_1 + l_p \sin(\theta_1 + \theta_p)$$

اگر معادله لاگرانژ را تشکیل دهیم، معادله زیر به دست می آید

$$\tau = D(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta}) \quad (۶۱-۳)$$

$$D(\theta) = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \quad (۶۲-۳)$$

$$d_{11} = m_1 r_1^2 + m_2 l_1^2 + m_2 r_2^2 + 2m_2 l_1 r_2 \cos \theta_2 + m_1 l_1^2 + 2m_1 l_1 l_2 \cos \theta_1$$

$$d_{12} = m_2 r_2^2 + m_2 l_1 r_2 \cos \theta_2 + m_1 r_2^2 + m_1 l_1 l_2 \cos \theta_1$$

$$d_{21} = d_{12}$$

$$d_{22} = m_2 r_2^2 + m_1 l_2^2$$

$$C_{11} = -m_2 L_1 r_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 - m_2 L_1 L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 + m_2 g (l_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)) + m_2 g (L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)) - b_1 \dot{q}_1$$

$$C_{21} = -m_2 L_1 r_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 - m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 + m_2 L_1 \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin \theta_2 + m_2 L_1 \dot{\theta}_1 L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin \theta_2 + m_2 g r_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + m_2 g r_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + b_2 \dot{q}_2$$

۳-۵ خطی سازی سیستم غیر خطی

اگرچه دینامیک حاکم بر اکثر فرآیندهای صنعتی و سیستم های واقعی، غیر خطی است، لیکن تحلیل و طراحی سیستم های کنترل برای حالت غیر خطی بسیار دشوار و پیاده سازی کنترل کننده های غیر خطی در بسیار از موارد عملی امری غیر ضروری است. در واقع، در عمل نشان داده شده است که سیستم های کنترل خطی، محدوده بسیار وسیعی از سیستم های واقعی و فرآیندهای پیچیده صنعتی را به خوبی کنترل می نمایند.

از این رو، بدست آوردن مدل های دقیق خطی از سیستم های غیر خطی از نظر مهندسی بسیار مهم و اجتناب ناپذیر است. یک روش کاربردی و موفق در خطی سازی سیستم، بر اساس بسط سری تیلور است.

در ابتدا باید نقطه کار یا نقطه تعادل را بدست آورد.

برای به دست آوردن نقطه کار در ربات دو بازو، باید تمام ورودی‌ها را صفر در نظر گرفت و معادله

ربات را برحسب θ_1 و θ_2 نوشت و مساوی صفر قرار داد.

پس از انجام محاسبات و ساده سازی نتایج زیر به دست آمد:

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2}, \theta_2 = 0 \quad (65-3)$$

بدلیل این که روش خطی سازی حول نقطه کار باید نقطه کار را صفر در نظر گرفت باید از تغییر

متغیر زیر استفاده کنیم:

$$\begin{cases} q_1 = \frac{\pi}{2} - \theta_1 \\ q_2 = \theta_2 \end{cases} \quad (66-3)$$

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = F_1(q, \dot{q}) \\ \ddot{q}_2 = F_2(q, \dot{q}) \end{cases} \quad (67-3)$$

برای ساده سازی تغییر متغیرهای زیر را در نظر بگیرید

$$A = I_1 + I_2 + m_1 r_1^2 + m_2 l_1^2 + m_2 r_2^2$$

$$B = 2m_2 l_1 r_2$$

$$C = 2m_1 l_1 l_2$$

$$D = I_2 + m_2 r_2^2 + m_2 l_2 g$$

$$E = I_2 + m_2 r_2^2 + m_1 l_1 g$$

$$F = m_1 g r_1 + m_2 g l_1$$

$$G = m_2 g r_2 + m_2 g l_1$$

$$H = m_2 l_1 r_2 + m_1 r_1 g$$

حال می خواهیم معادلات فضای حالت را به دست آوریم:

$$x_1 = q_1 \quad x_2 = q_2 \quad x_3 = \dot{q}_1 \quad x_4 = \dot{q}_2 \quad (68-3)$$

$$A = \begin{bmatrix} \circ & \circ & 1 & \circ \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \frac{\partial F_1}{\partial x_3} & \frac{\partial F_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \frac{\partial F_2}{\partial x_3} & \frac{\partial F_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x_1} & \frac{\partial F_3}{\partial x_2} & \frac{\partial F_3}{\partial x_3} & \frac{\partial F_3}{\partial x_4} \end{bmatrix} \quad (69-3)$$

$$B = \begin{bmatrix} \circ & \circ \\ \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \frac{\partial F_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u_1} & \frac{\partial F_2}{\partial u_2} \\ \frac{\partial F_3}{\partial u_1} & \frac{\partial F_3}{\partial u_2} \end{bmatrix} \quad (70-3)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & \circ & \circ & \circ \\ \circ & 1 & \circ & \circ \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix}$$

$$A(\mu, 1) = \frac{D}{D(A+B+C) - \left(E + \frac{B}{\nu} + \frac{C}{\nu}\right)^{\nu}} \left[-F - G + \frac{E + \frac{B}{\nu} + \frac{C}{\nu}}{D} (-G) \right]$$

$$A(\mu, 2) = \frac{D}{(A+B+C)D - \left(E + \frac{B}{\nu} + \frac{C}{\nu}\right)^{\nu}} \left[-G + \frac{E + \frac{B}{\nu} + \frac{C}{\nu}}{D} (-G) \right]$$

$$A(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}) = \frac{D}{(A+B+C) - \left(E + \frac{B}{\mathfrak{r}} + \frac{C}{\mathfrak{r}}\right)^{\mathfrak{r}}}$$

$$A(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}) = \frac{1}{(A+B+C)D - \left(E + \frac{B}{\mathfrak{r}} + \frac{C}{\mathfrak{r}}\right)^{\mathfrak{r}}} \left[E + \frac{B}{\mathfrak{r}} + \frac{C}{\mathfrak{r}} \right]$$

$$A(\mathfrak{r}, 1) = \frac{A+B+C}{(A+B+C)D - \left(E + \frac{B}{\mathfrak{r}} + \frac{C}{\mathfrak{r}}\right)^{\mathfrak{r}}} \left[-G + \frac{E + \frac{B}{\mathfrak{r}} + \frac{C}{\mathfrak{r}}}{A+B+BC} (-F-G) \right]$$

$$A(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}) = \frac{E - A - \frac{B}{\mathfrak{r}} - \frac{C}{\mathfrak{r}}}{(A+B+C)D - \left(E + \frac{B}{\mathfrak{r}} + \frac{C}{\mathfrak{r}}\right)^{\mathfrak{r}}} [G]$$

$$A(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}) = \frac{-\left(E + \frac{B}{\mathfrak{r}} + \frac{C}{\mathfrak{r}}\right)}{D(A+B+C) - \left(E + \frac{B}{\mathfrak{r}} + \frac{C}{\mathfrak{r}}\right)^{\mathfrak{r}}}$$

$$A(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}) = \frac{-(A+B+C)}{D(A+B+C) - \left(E + \frac{B}{\mathfrak{r}} + \frac{C}{\mathfrak{r}}\right)^{\mathfrak{r}}}$$

$$B(\mathfrak{r}, 1) = \frac{D}{(A+B+C)D - \left(E + \frac{B}{\mathfrak{r}} + \frac{C}{\mathfrak{r}}\right)^{\mathfrak{r}}}$$

$$B(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}) = \frac{-\left(E + \frac{B}{\mathfrak{r}} + \frac{C}{\mathfrak{r}}\right)}{(A+B+C)d - \left(E + \frac{B}{\mathfrak{r}} + \frac{C}{\mathfrak{r}}\right)^{\mathfrak{r}}}$$

$$B(\mathfrak{r}, 1) = \frac{\left(E + \frac{B}{\mathfrak{r}} + \frac{C}{\mathfrak{r}}\right)}{(A+B+C)D - \left(E + \frac{B}{\mathfrak{r}} + \frac{C}{\mathfrak{r}}\right)^{\mathfrak{r}}}$$

$$B(\mathbf{r}, \nu) = \frac{A + B + C}{D(A + B + C) - \left(E + \frac{B}{\nu} + \frac{C}{\nu}\right)^{\nu}}$$

در نتیجه مدل خطی شده ربات دو بازو به صورت زیر در می آید

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

پارامترهای ربات به همراه عدم قطعیت ها به صورت زیر است [۱]:

$$m_1 = [13/5 \quad 14]$$

$$m_{\nu} = [3 \quad 3/5]$$

$$I_1 = [62 \quad 62/5]$$

$$I_{\nu} = [110/5 \quad 111]$$

$$l_1 = [7/8 \quad 8/5]$$

$$l_2 = [5/5 \quad 6/5]$$

$$r_1 = [4 \quad 4/5]$$

$$r_{\nu} = [3 \quad 3/5]$$

$$g = 9/8$$

پارامترهای ربات به صورت نامی به صورت زیر است:

$$m_1 = 13/86$$

$$m_2 = 3/33$$

$$I_1 = 62/39$$

$$I_2 = 110/7$$

$$l_1 = 8$$

$$l_2 = 6$$

$$r_1 = 4/12$$

$$r_2 = 3/33$$

۴-۱ معرفی

در این فصل روش طراحی بر پایه تئوری کنترل بهینه را شرح خواهیم داد. تئوری مطلوب در این فصل به نام مسئله خطی درجه دوم گوسی^۱ یا H_2 معروف است. جواب های اصلی تئوری در این فصل بیان می شود. اما برای جزئیات بیشتر خواننده را به [۳۰] و [۳۶] ارجاع می دهیم. این منابع فضایی اساسی را به رسمیت می شناسند.

مدل سیستم در فضای حالت به فرم:

$$\dot{x} = Ax + Bu + \Gamma w \quad (1-4)$$

$$y = cx + v \quad (2-4)$$

می باشد. در رابطه (۱-۴) عنصر u بردار سیگنال کنترل را نمایش می دهد، در رابطه (۲-۴) عنصر y نیز بردار خروجی اندازه گیری شده که با v مخلوط شده است را نمایش می دهد. بردار x نیز متغیر حالت سیستم می باشد. w, v نیز نویز سفید می باشند. این دو متغیر فرآیند تصادفی گوسی با میانگین صفر هستند. این دو متغیر نوابسته^۲ و دارای کوواریانس

$$E\{ww^T\} = W \geq 0, \quad E\{vv^T\} = V > 0 \quad (3-4)$$

هستند، یعنی رابطه

$$E\{wv^T\} = 0 \quad (4-4)$$

برای دو متغیر برقرار است.

مسئله ای که برای طراحی کنترل بهینه مد نظر است حداقل نمودن تابع هزینه

$$J = \lim_{T \rightarrow \infty} D \left\{ \int_0^T (x^T Q x) + u^T R u dt \right\} \quad (5-4)$$

است. در حالی که

¹ Linear Quadratic Gaussian

² Uncorrelated

$$Q = Q^T \geq 0, \quad R = R^T \geq 0 \quad (6-4)$$

ماتریس های وزنی می باشند.

مسئله کنترل بهینه H_p به وسیله تجزیه مقادیر تکین حل می شود. بدین صورت که ابتدا، تخمین بهینه \hat{x} را از حالت x به دست می آوریم (بهینه یعنی این که $E\{(x - \hat{x})^T(x - \hat{x})\}$ مینیمم شود)، آنگاه از این تخمین برای حل مسئله کنترل درجه دوم خطی معین استفاده می کنیم. جملات فوق نشان دهنده این است که مسئله را به دو زیر مسئله کاهش دهیم.

اولین زیر مسئله تخمین حالت های سیستم است. این تخمین به وسیله فیلتر کالمن انجام می شود. خروجی فیلتر کالمن بردار تخمین \hat{x} است. در حالی که بردار ورودی و بردار خروجی فرآیند، y, u و ورودی فیلتر کالمن می باشند. در ادامه به توضیح فیلتر کالمن خواهیم پرداخت.

دومین زیر مسئله حداقل نمودن تابع هزینه

$$\int_0^{\infty} (x^T Q x) + u^T R u dt \quad (7-4)$$

با به دست آوردن سیگنال کنترلی است.

برای حل این زیر مسئله از ماتریس فیدبک حالت استفاده خواهیم کرد. بردار سیگنال کنترل u را تابع خطی از حالت ها در نظر می گیریم. در این صورت از رابطه

$$u = -kx \quad (8-4)$$

استفاده خواهیم کرد، در حالی که K ماتریس فیدبک باشد.

بعد از تخمین بردار حالت، آن گاه از یک ماتریس فیدبک حالت برای کنترل سیستم استفاده می کنیم.

۴-۲ حل مسأله H₂

در ابتدا به طور مختصر راجع به نامعینی سازگار^۱ و ناسازگار^۲ بحث می‌کنیم و سپس برای هر کدام نحوه به دست آوردن ماتریس فیدبک حالت را توضیح می‌دهیم. [۱]

۴-۲-۱ نامعینی سازگار

سیستم به صورت زیر توصیف شده است

$$\dot{x} = A(\rho)x + Bu \quad (۹-۴)$$

که $\rho \in \rho$ پارامترهای نامعین می‌باشد. در این سیستم، نامعینی فقط در ماتریس A فرض شده است. برای سیستم‌های خطی تغییر ناپذیر با زمان مسئله کنترل مقاوم تبدیل به مسئله کنترل بهینه می‌شود. حل مسئله کنترل بهینه وجود دارد اگر سیستم پایدار پذیر باشد. فرضیات مسئله به صورت زیر است:

۱. مقدار نامی $\rho_0 \in \rho$ وجود دارد به نحوی که $(A(\rho_0), B)$ پایدار پذیر باشند.

۲. برای هر ρ یک ماتریس $\varphi(\rho)$ وجود دارد به نحوی که

$$A(\rho) - A(\rho_0) = B\varphi(\rho) \quad (۱۰-۴)$$

($\varphi(\rho)$ کران دار می‌باشد)

تحت فرض ۲ دینامیک سیستم را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$\dot{x} = A(\rho_0)x + Bu + B\varphi(\rho)x \quad (۱۱-۴)$$

¹ Matched Uncertainty

² Unmatched Uncertainty

۴-۲-۱-۱ فیدبک حالت برای سیستم با نامعینی سازگار

حال به دنبال یافتن فیدبک $U = KX$ هستیم به نحوی که سیستم حلقه بسته زیر به ازای تمام ρ ها، پایدار مجانبی گردد [۱]:

$$\dot{x} = A(\rho_0)x + bu + B\varphi(\rho)x = A(\rho_0)x + Bkx + B\varphi(\rho)x \quad (۱۲-۴)$$

ما سعی برای حل مسئله فوق به صورت مستقیم نمی‌کنیم.

رهیافت ما برای حل غیر مستقیم این مسئله، تبدیل آن به مسئله کنترل بهینه است.

۴-۲-۱-۲ کنترل بهینه برای نامعینی سازگار

برای سیستم نامی $\dot{x} = A(\rho_0)x + Bu$ فیدبک حالت $u = kx$ را به نحوی می‌یابیم که تابع هزینه زیر حداقل گردد:

$$\int_0^{\infty} (x^T Fx + x^T x + u^T u) dt \quad (۱۳-۴)$$

که F ، حد بالای عدم قطعیت برای تمام عدم قطعیت‌ها می‌باشد که از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\varphi(\rho)^T \varphi(\rho) \leq F \quad (۱۴-۴)$$

برای حل مسئله کنترل بهینه، ابتدا معادله جبری ریکاتی زیر را حل می‌کنیم

$$R = R^{-1} = I$$

$$A(\rho_0)^T S + SA(\rho_0) + F + I - SBB^T S = 0 \quad (۱۵-۴)$$

سپس کنترل بهینه از رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

$$u = -B^T Sx \quad (۱۶-۴)$$

قضیه ۴-۱: مسئله کنترل مقاوم تحت فرضیات ۱ و ۲ حل پذیر است و حل آن پاسخ مسئله کنترل بهینه است.

۲-۲-۴ نامعینی ناسازگار

سیستم به صورت زیر توصیف شده است:

$$\dot{x} = A(\rho)x + Bu$$

که $\rho \in \rho$ پارامترهای نامعین می‌باشد. در این سیستم، نامعینی فقط در ماتریس A فرض شده است.

فرضیات مسئله به صورت زیر است:

۱. فرض کنید مقدار نامی $\rho_0 \in \rho$ موجود می‌باشد به نحوی که $(A(\rho_0), B)$ پایدار پذیر باشد.

۲. $A(\rho)$ محدود می‌باشد

$$A(\rho) - A(\rho_0) \neq B\varphi(\rho) \quad (۱۷-۴)$$

در ابتدا عدم قطعیت $A(\rho) - A(\rho_0)$ را به جمع دو قسمت سازگار و ناسازگار تجزیه می‌کنیم:

$$B^+ = (B^T B)^{-1} B^T \quad (۱۸-۴)$$

$$A(\rho) - A(\rho_0) = BB^+ (A(\rho) - A(\rho_0)) + (I - BB^+) (A(\rho) - A(\rho_0)) \quad (۱۹-۴)$$

F و H باندهای بالایی عدم قطعیت می‌باشد که از رابطه زیر به دست می‌آید

$$(A(\rho) - A(\rho_0))^T B^{+T} B^+ (A(\rho) - A(\rho_0)) \leq F \quad (۲۰-۴)$$

$$\alpha^{-2} (A(\rho) - A(\rho_0))^T (A(\rho) - A(\rho_0)) \leq H \quad (۲۱-۴)$$

α پارامتر طراحی می‌باشد.

۱-۲-۲-۴ کنترل بهینه برای نامعینی ناسازگار

برای سیستم مشخص $\dot{x} = A(\rho_0)x + Bu + \alpha(I - BB^+)V$ قانون کنترل فیدبک $u = kx$ و $V = Lx$ را

به نحوی می‌یابیم تا تابع هزینه زیر حداقل گردد

$$\int (x^T (F + \rho^2 H + \beta^2 I)x + u^T u + \rho^2 V^T V) dt \quad (۲۲-۴)$$

پارامترهای طراحی می‌باشند. $\rho \geq 0, \beta \geq 0, \alpha \geq 0$

در این مسئله، قانون کنترل V برای نامعینی ناسازگار می‌باشد.

حل مسئله کنترل بهینه به صورت زیر است:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = -\tilde{R}^{-1} \tilde{B}^T Sx \quad (23-4)$$

که در آن S یکتا، مثبت و معین می‌باشد و از حل معادله جبری ریکاتی زیر حاصل می‌شود:

$$S\tilde{A} + \tilde{A}^T S + \tilde{Q} - S\tilde{B}\tilde{R}^{-1}\tilde{B}^T S = 0 \quad (24-4)$$

$$\tilde{A} = A(\rho_0) \quad (25-4)$$

$$\tilde{B} = [B \quad \alpha(I - BB^+)] \quad (26-4)$$

$$\tilde{Q} = F + \rho^2 H + B^2 I \quad (27-4)$$

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \rho^2 I \end{bmatrix} \quad (28-4)$$

قضیه ۲-۴: اگر با انتخاب یک β, α و ρ و حل مسئله کنترل بهینه $U = Kx, V = Lx$ معادله زیر ارضا شود، $U = Kx$ حل مسئله مقاوم می‌باشد.

$$\beta^2 I - 2\rho^2 l^T l > 0 \quad (29-4)$$

۳-۲-۴ نامعینی در ماتریس ورودی

در این مورد سه حالت وجود دارد که ما فقط یک حالت از آن را بررسی می‌نماییم [۱].

سیستم توصیف شده به صورت زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{X} = A(\rho)x + BD(\rho)u \quad (30-4)$$

که $A(\rho)$ شامل عدم قطعیت سازگار و ناسازگار می‌باشد و $D(\rho)$ عدم قطعیت در ماتریس ورودی می‌باشد.

فرضیات مسئله به صورت زیر است.

۱. مقدار نامی $\rho_0 \in \rho$ وجود دارد به نحوی که $(A(\rho_0), B)$ پایدار پذیر باشد.

۲. $A(\rho)$ محدود باشد

۳. ماتریس D به ازای تمامی مقادیر ρ موجود باشد به گونه ای که $0 \leq D \leq D(\rho)$

تحقق این فرضیات، دینامیک سیستم را به فرم زیر در می آورده

$$\dot{x} = A(\rho)x + BD(u + E(\rho)u) \quad (31-4)$$

$$E(\rho) = D^{-1}D(\rho) - I \geq 0 \quad (32-4)$$

هدف، یافتن قانون کنترل فیدبک $U=KX$ به گونه ای که سیستم حلقه بسته زیر به ازای تمامی مقادیر ρ پایدار مجانبی گردد.

$$\dot{x} = A(\rho)x + BD(u + E(\rho)u) \quad (33-4)$$

$$u = kx$$

برای حل این مسئله، ابتدا عدم قطعیت را به دو قسمت سازگار و ناسازگار تجزیه می کنیم:

$$A(\rho) - A(\rho_0) = (BD)(BD)^+(A(\rho) - A(\rho_0)) + (I - (BD)(BD)^+)(A(\rho) - A(\rho_0)) \quad (34-4)$$

برای به دست آوردن قانون کنترل فیدبک، مسئله را به مسئله کنترل بهینه تبدیل می کنیم.

۴-۲-۳-۱ کنترل بهینه برای نامعینی در ماتریس ورودی

برای سیستم مشخص $\dot{x} = (A(\rho) - A(\rho_0))x + (I - (BD)(BD)^+)V$ ، قانون کنترل فیدبک $V=Lx$

و $U=Kx$ را به نحوی پیدا می کنیم که تابع هزینه زیر حداقل گردد

$$\int_0^{\infty} (x^T (G + \rho^2 H + \beta^2 I)x + U^T U + \rho^2 V^T V) dt \quad (35-4)$$

$\rho \geq 0, \beta \geq 0, \alpha \geq 0$ پارامترهای طراحی می باشد.

G و H باندهای عدم قطعیت می باشند که از روابط زیر بدست می آیند:

$$\alpha^{-2} (A(\rho) - A(\rho_0))^T (A(\rho) - A(\rho_0)) \leq H \quad (36-4)$$

$$(A(\rho) - A(\rho_0))^T (BD)^{+T} (BD)^+ (A(\rho) - A(\rho_0)) \leq G \quad (37-4)$$

حل مسئله کنترل بهینه به صورت زیر می باشد

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = -\tilde{R}^{-1} B^T Sx \quad (38-4)$$

S ، یکتا و مثبت معین می باشد و با حل معادله جبری ریکاتی زیر به دست می آید

$$S\tilde{A} + \tilde{A}^T S + \tilde{Q} - S\tilde{B}\tilde{R}^{-1}\tilde{B}^T S = 0 \quad (39-4)$$

$$\tilde{A} = A(\rho_0) \quad (40-4)$$

$$\tilde{B} = [B \quad \alpha(I - BB^+)] \quad (41-4)$$

$$\tilde{Q} = F + \rho^2 H + \beta^2 I \quad (42-4)$$

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \rho^2 I \end{bmatrix} \quad (43-4)$$

قضیه ۳-۴: شرط مقاوم بودن کنترل کننده طراحی شده این است که نامعادله زیر برقرار باشد:

$$\beta^2 I - 2\rho^2 l^T l > 0 \quad (44-4)$$

۴-۲-۴ فیلتر کالمن

برای آن که ممکن است به تمامی حالت های سیستم دسترسی نداشته باشیم باید از یک رویت گر استفاده کنیم.

مسئله طراحی رویت گر بهینه دوگان مسئله طراحی کنترل بهینه می باشد. رویت گر بهینه معمولاً فیلتر کالمن یا فیلتر کالمن-باکی نامیده می شود. سیستم خطی تغییر ناپذیر با زمان زیر را در نظر بگیرد:

$$\dot{x} = Ax + Bu + \psi \quad (45-4)$$

$$y = Cx + Du + \lambda \quad (46-4)$$

که ψ نویز سیستم و λ نویز قابل اندازه گیری می باشد. ψ و λ نویز مفید می باشند. این دو متغیر فرآیند تصادفی گوسی با میانگین صفر هستند. این دو متغیر نوابسته و دارای کوواریانس

$$E\{\psi(t)\} = 0 \quad (47-4)$$

$$E\{\psi(t)\psi(\tau)^T\} = \Psi\delta(t-\tau) \quad (48-4)$$

$$E\{\lambda(t)\} = 0 \quad (49-4)$$

$$E\{\lambda(t)\lambda(\tau)^T\} = \Gamma\delta(t-\tau) \quad (50-4)$$

هستند. یعنی رابطه

$$E[\psi(t) \lambda(\tau)^T] = 0 \quad (51-4)$$

برای دو متغیر برقرار است.

رویت گر بهینه برای سیستم بالا به فرم زیر می باشد:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu - G(y - \hat{y}) \quad (52-4)$$

که خطای تخمین برابر است با:

$$\tilde{x} = x - \hat{x} \quad (53-4)$$

$$\dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} \quad (54-4)$$

با توجه به این که مسئله طراحی رویت گر بهینه دوگان مسئله طراحی کنترل بهینه می باشد، از دوگان زیر استفاده می کنیم.

جدول ۴-۱: دوگان رویت گر بهینه و کنترل بهینه

کنترل بهینه	فیلتر کالمن
$A + Bk$	$A^T + C^T G^T$
$Q + K^T Rk$	$\Psi + G\Gamma G^T$
A	A^T
B	C^T
K	G^T
G	Ψ
R	Γ

قضیه ۴-۴: برای سیستم خطی تغییر ناپذیر با زمان زیر که ψ و λ نویز هستند و در معادلات زیر صدق می‌کنند:

$$\dot{x} = Ax + Bu + \psi$$

$$y = Cx + Du + \lambda$$

$$E\{\psi(t)\psi(\tau)^T\} = \Psi\delta(t-\tau)$$

$$E[\psi(t) \lambda(\tau)^T] = 0$$

$$E\{\lambda(t)\lambda(\tau)^T\} = \Gamma\delta(t-\tau)$$

اگر (A, C) آشکار پذیر باشند فیلتر کالمن یا رویت گر بهینه به صورت زیر می‌باشد:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu - G(y - \hat{y}) \quad (55-4)$$

$$G = -(\Gamma^{-1}CU)^T = -UC^T\Gamma^{-1} \quad (56-4)$$

U یک ماتریس مثبت معین، یکتا می‌باشد و از حل معادله ریکاتی حاصل می‌شود:

$$UA^T + AU + \Psi - UC^T\Gamma^{-1}CU = 0 \quad (57-4)$$

۳-۴ طراحی کنترل کننده H_2 برای مدل ربات دو بازو

با توجه به آن که در مدل ربات در نظر گرفته شده، عدم قطعیت هم در ماتریس ورودی و هم در ماتریس A وجود دارد، باید از روش عدم قطعیت در ماتریس ورودی استفاده کنیم. برای طراحی کنترل کننده H_2 با استفاده از دستور LQR در نرم افزار $MATLAB 8.0$ ابتدا نیاز داریم که باندهای عدم قطعیت را به دست آوریم.

برای به دست آوردن باندهای عدم قطعیت (ماتریس H و G) و همچنین برای به دست آوردن ماتریس D از ژنتیک الگوریتم استفاده کرده ایم

دستور LQR به فرمت زیر می باشد:

$$[k, s, e] = LQR(A, B, Q, R) \quad (۵۸-۴)$$

که Q از معادله (۴-۴۲) و R از معادله (۴-۴۳) به دست می آید.

در رابطه بالا، A و B را از مدل ربات خواهیم داشت.

ماتریس D به دست آمده از ژنتیک الگوریتم مطابق زیر است.

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0/0017 & 0 \\ 0/0003 & 0/00096 \end{bmatrix}$$

باندهای عدم قطعیت (H, G) به دست آمده از ژنتیک الگوریتم مطابق زیر است:

$$G = \begin{bmatrix} 1/094 \times 10^5 & -8/1269 \times 10^5 & 1/7853 \times 10^4 & 6/227 \times 10^3 \\ -3/3675 \times 10^4 & 5/9986 \times 10^5 & 1/5108 \times 10^3 & 3/7492 \times 10^4 \\ 1/6789 \times 10^4 & 1/5356 \times 10^3 & 33/3446 & 81/9094 \\ 8/9397 \times 10^3 & 2/6472 \times 10^4 & 58/5428 & 1/0905 \times 10^3 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} ۲۶/۷۹۴۱ & ۰/۰۰۳۲ & ۰/۰۴۵ & ۶/۳۶۸۵ \times ۱۰^۵ \\ -۰/۰۹۲۱ & ۰/۰۰۹۶ & ۰/۰۰۲۲ & ۰/۴۰۹۵ \\ ۰/۰۴۵۷ & -۰/۰۰۸۹ & ۵/۵۶۴۳ \times ۱۰^{-۵} & ۰/۰۰۱۵ \\ ۰/۰۱۵۸ & ۰/۴۰۷۱ & ۰/۰۰۱۵ & ۰/۰۰۱۶ \end{bmatrix}$$

برای به دست آوردن ماتریس فیلترکالمن، با توجه به این که دوگان کنترل بهینه می باشد از دستور زیر استفاده می کنیم:

$$[G^T, S, e] = LQR(A^T, C^T, \Psi, \Gamma) \quad (۵۹-۴)$$

که G بهره ماتریس فیلتر کالمن می باشد.

در ابتدا باید فرضیات را بررسی کنیم:

$$B = I_{۴ \times ۴} \quad ۱.$$

$$A(P_0) = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ -۷/۲۸۳۷ & ۱/۵۰۰۷ & ۰/۰۳۸۷ & ۰/۲۰۴۹ \\ ۲/۰۲۴۲ & -۴/۵۵۳۲ & -۰/۰۸۲ & -۰/۵۳۳۴ \end{bmatrix}$$

با بررسی کردن $(A(P_0), B)$ معلوم می شود که پایدار پذیر می باشد.

۲. ماتریس D ، که در شرط زیر صدق کند، در زیر آورده شده است:

$$۰ \leq D \leq D(P)$$

$$D = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \\ ۰/۰۰۱۷ & ۰ \\ ۰/۰۰۰۳ & ۰/۰۰۹۶ \end{bmatrix}$$

۳. $A(P_0)$ هم محدود می باشد.

پارامترهای طراحی α, β و ρ به صورت زیر می باشد:

$$\alpha = 0.05$$

$$\beta = 10$$

$$\rho = 0.1$$

بهره ماتریس فیلتر کالمن به دست آمده به صورت زیر است:

$$G = 10^3 \times \begin{bmatrix} 3/3151 & -0/1032 \\ -0/1032 & 0/7678 \\ 0/0439 & -0/0184 \\ -0/001 & 0/0408 \end{bmatrix}$$

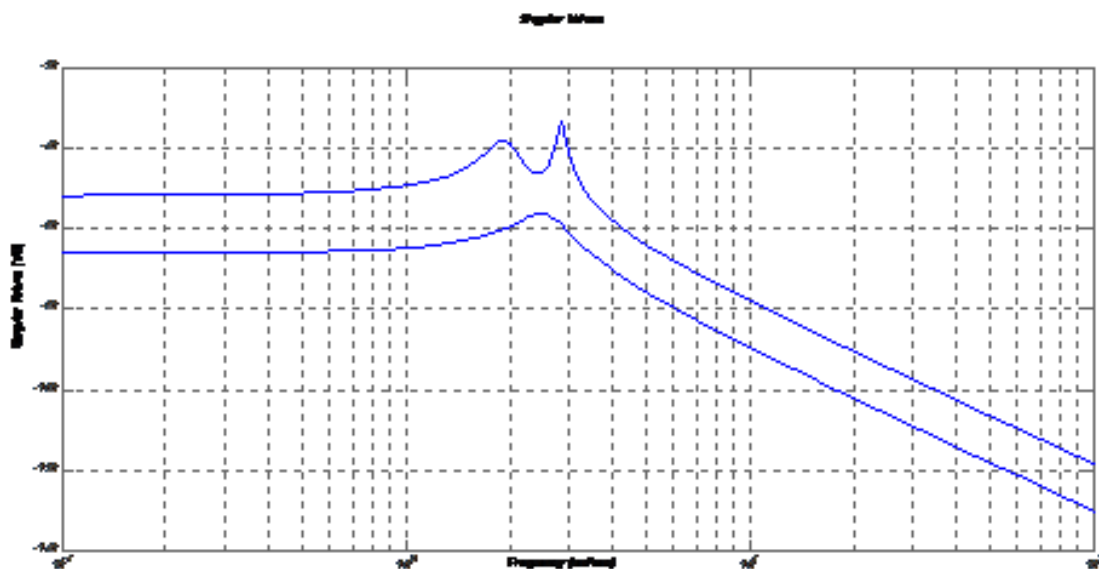
و کنترل بهینه به دست آمده نیز به صورت زیر است:

$$U = Kx, \quad V = Lx$$

$$k = 10^6 \begin{bmatrix} 0 & 0/0001 & 0/0004 & -0/0001 \\ 0 & 0/0003 & 0/0008 & -0/0008 \end{bmatrix}$$

$$L = 10^6 \begin{bmatrix} 1/0483 & -0/0326 & 0/0033 & 0/0005 \\ -0/0326 & 0/2421 & -0/0003 & 0/0175 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

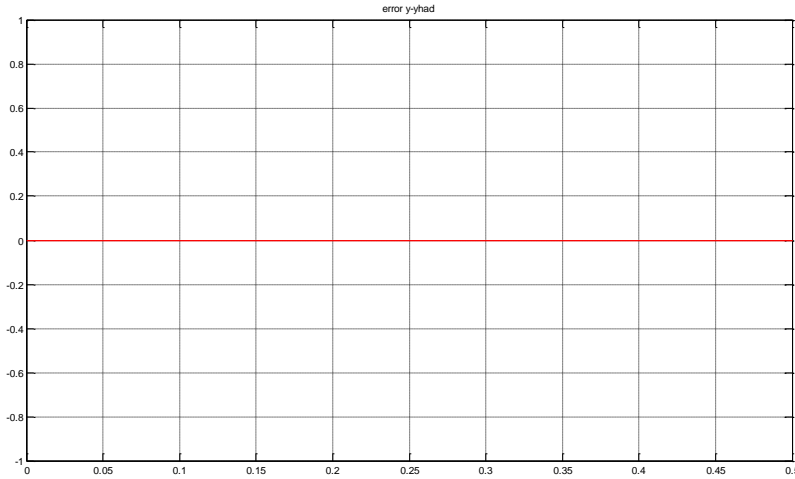
در شکل زیر مقادیر تکین سیستم رسم شده است:



شکل ۴-۱: رسم مقادیر تکین سیستم کنترل شده با کنترل کننده H_2

از شکل (۱-۴) نتیجه می شود که سیستم حلقه بسته پایدار است

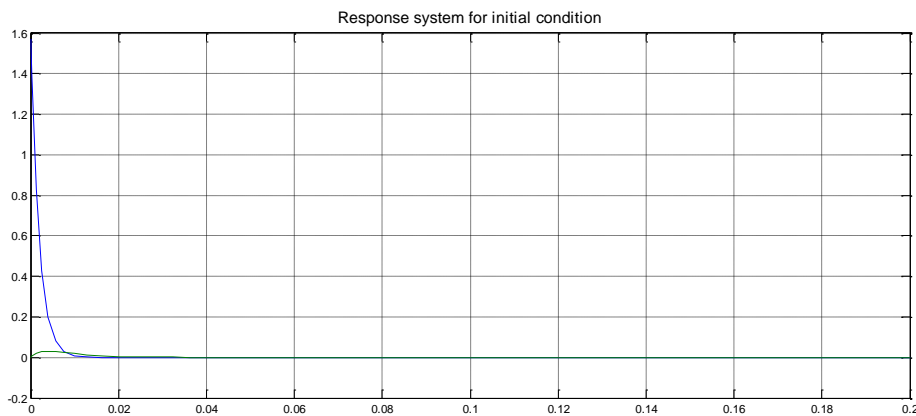
در ابتدا ما بررسی می کنیم که خروجی رویتگر با خروجی واقعی چه مقدار خطا دارد



شکل ۲-۴ نمایش خطای رویت گر

همانطور که ملاحظه می شود رویتگر بدون خطا، حالت های سیستم را تخمین زده است.

در زیر خروجی سیستم حلقه بسته به ازای شرایط اولیه $q_1 = \frac{\pi}{2}, q_2 = 0$ نمایش داده شده است



شکل ۳-۴: خروجی سیستم کنترل شده به ازای شرایط اولیه $q_1 = \frac{\pi}{2}, q_2 = 0$

همانطور که از شکل (۳-۴) نتیجه می شود، با این که شرایط اولیه برای q_2 صفر بود ولی می بینیم که

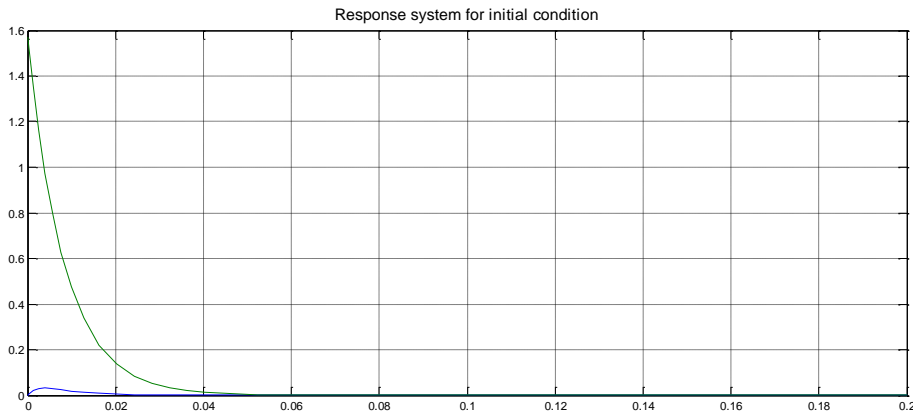
خروجی دوم سیستم کنترل شده نیز تحت تأثیر قرار گرفت و این بدان معنی است که سیستم به طور

کامل دکوپله نمی‌باشد و ورودی اول بر روی خروجی دوم تأثیر می‌گذارد. خطای حالت ماندگار

خروجی اول $2/02 \times 10^{-6}$ می‌باشد و خطای حالت ماندگار خروجی دوم $0/0003$ می‌باشد.

برای آن که ببینیم ورودی دوم بر روی خروجی اول تأثیر می‌گذارد یا نه، باید پاسخ سیستم به ازای

شرایط اولیه $q_1 = 0, q_2 = \frac{\pi}{2}$ را به دست آوریم:



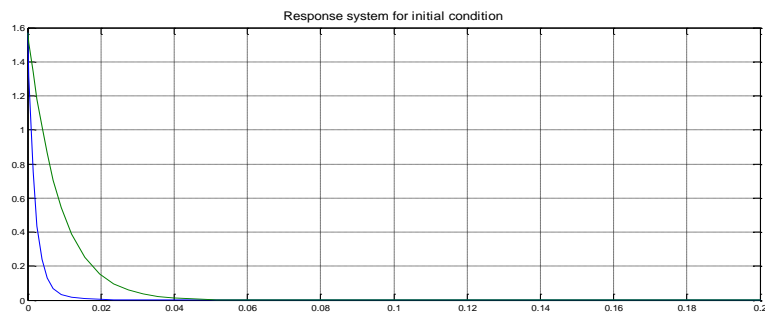
شکل ۴-۴: خروجی اول سیستم کنترل شده به ازای شرایط اولیه $q_1 = 0, q_2 = \frac{\pi}{2}$

خطای حالت ماندگار خروجی اول 4×10^{-5} می‌باشد و خطای حالت ماندگار خروجی دوم $1/2 \times 10^{-3}$

می‌باشد.

همان طور که مشاهده می‌شود ورودی دوم هم بر روی خروجی اول تأثیر می‌گذارد.

پاسخ سیستم کنترل شده، به ازای شرایط اولیه $q_1 = \frac{\pi}{2}, q_2 = \frac{\pi}{2}$ به صورت زیر است:



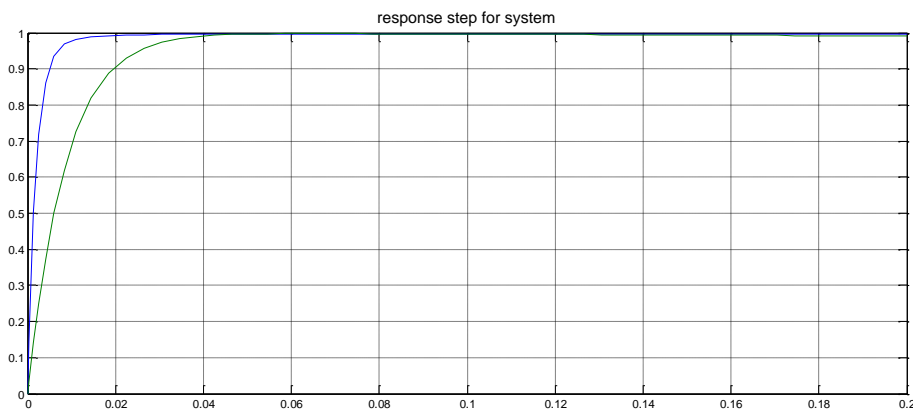
شکل ۴-۵: پاسخ

سیستم کنترل شده به ازای شرایط اولیه $q_1 = \frac{\pi}{2}, q_2 = \frac{\pi}{2}$

خطای حالت ماندگار خروجی اول 0.0002 و خطای حالت ماندگار خروجی دوم 0.0008 می باشد. همان طور که ملاحظه می شود تنها تفاوت شکل (۴-۵) و (۴-۴) و (۴-۳) خطای حالت ماندگار و زمان نشست می باشد و می بینیم که باز هم کنترل کننده به خوبی عمل می کند و در نتیجه کنترل کننده، مقاومت خوبی در مقابل عدم قطعیتها از خود نشان می دهد.

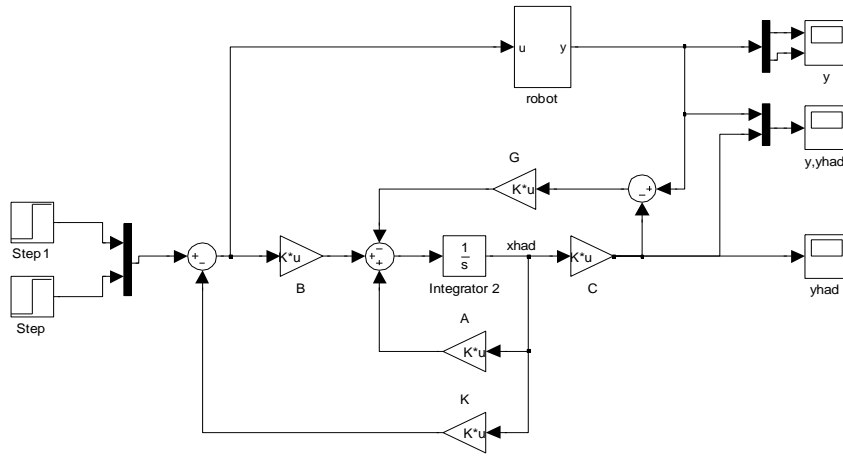
حال باید پاسخ پله سیستم حلقه بسته را به دست آوریم.

ابتدا تمام عدم قطعیتها را به صورت حداکثر در نظر می گیریم و پاسخ پله را به دست می آوریم



شکل ۴-۶: پاسخ پله سیستم کنترل شده با کنترل کننده H_2

خطای ردگیری بازوی اول 0.0004 و خطای ردگیری بازوی دوم 0.0006 می باشد. همان طور که ملاحظه می شود خطای ردگیری بازوی دوم از خطای ردگیری بازوی اول بیشتر است که این نیز منطقی به نظر می آید زیرا خطای بازوی اول، خطای بازوی دوم را تشدید می کند. و در پایان شبیه سازی *Simulink*، برای سیستم ربات دو بازو که با کنترل کننده H_2 کنترل شده است، آورده شده است.

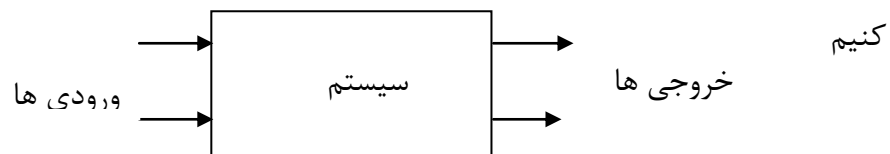


شکل ۴-۷: نمودار استفاده شده در Simulink

۵-۱ مقدمه

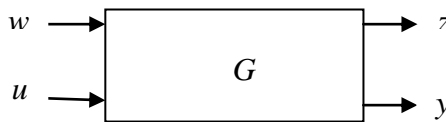
این فصل در مورد کنترل بهینه H_∞ می‌باشد. کنترل کننده طراحی شده، همان کنترل کننده فیدبکی می‌باشد. همان طور که می‌دانیم، می‌توانیم نمایش صریحی از نامعینی‌ها را با یک مدل وابسته به سیستم اصلی داشته باشیم.

ابتدا کلیه مسائل کنترل را به یک فرم استاندارد به نام سیستم تعمیم یافته مانند شکل زیر تبدیل می‌کنیم



شکل ۵-۱: فرم استاندارد سیستم تعمیم یافته

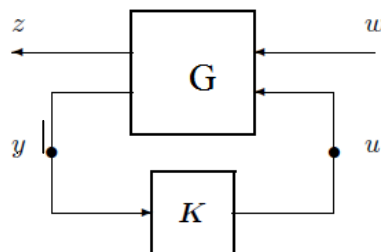
که این ساختار بنام ساختار عمومی حلقه باز معروف است.



شکل ۵-۲: ساختار عمومی حلقه باز

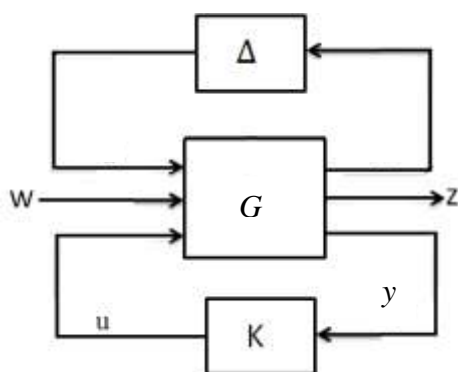
که در آن w ، ورودی خارجی می‌باشد و یک بردار از تمام سیگنال‌هایی است که به سیستم وارد می‌شوند و u بردار سیگنال کنترل می‌باشد و y بردار اندازه‌گیری شده از خروجی می‌باشد و z خطا می‌باشد که یک بردار از تمام سیگنال‌هایی است که برای نشان دادن خصوصیات رفتار سیستم حلقه بسته نیاز است.

اگر کنترل کننده طراحی شده را در سیستم وارد نماییم ساختار حلقه بسته به صورت زیر می‌شود



شکل ۵-۳: نمایش استاندارد یک سیستم

حال اگر نامعینی‌ها را از سیستم بیرون بکشیم ساختار حلقه بسته به صورت زیر می‌شود:



شکل ۴-۵: نمایش استاندارد یک سیستم با نامعینی

فرض کنید $G(s)$ به صورت زیر باشد

$$G(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (1-5)$$

G را چنان تقسیم می‌کنیم که $g_{11}\Delta$ مربعی باشد.

$$y = g_{21}w + g_{22}u \quad (2-5)$$

$$z = g_{11}w + g_{12}u \quad (3-5)$$

$$u = ky \quad (4-5)$$

$$y = g_{21}w + g_{22}(ky) \quad (5-5)$$

$$y = (I - g_{22}k)^{-1} g_{21}w \quad (6-5)$$

$$z = g_{11}w + g_{12}(ky) = g_{11}w + g_{12}k(I - g_{22}k)^{-1} g_{21}w \quad (7-5)$$

می‌خواهیم این سیستم را به یک سیستم خطی کسری پایینی که در فصل دوم توضیح داده شد، تبدیل کنیم.

$$z = g_{11}w + g_{12}u = g_{11}w + g_{12}k(I - g_{22}k)^{-1} g_{21}w$$

$$z = F_L(gk)w \quad (8-5)$$

$$F_L(g, k) = g_{11} + g_{12}k(I - g_{22}k)^{-1} g_{21}$$

برای هر کنترل کننده $K(s)$ که سیستم حلقه بسته را پایدار نگهدارد و در رابطه

$$\minimize \|F_L(g, k)\|_\infty \quad (9-5)$$

به ازای همه کنترل کننده های $K(s)$ صدق کند، پاسخ مطلوب برای کنترل کننده H_∞ می باشد.

نرم بی نهایت $F_L(g, k)$ از رابطه زیر به دست می آید:

$$\|F_L(g, k)\|_\infty = \sup_w \bar{\sigma}(jw) \quad (10-5)$$

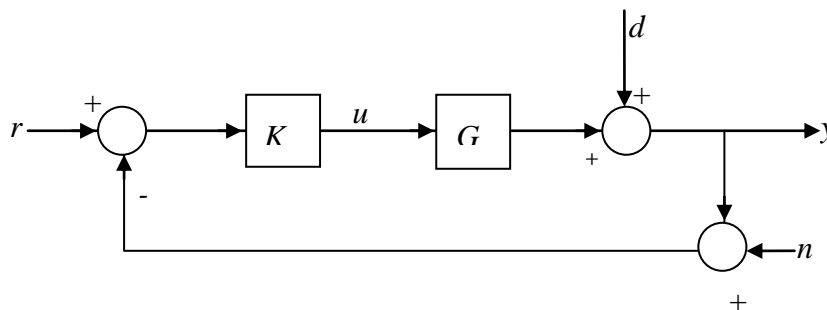
$$\sigma_i(jw) = \lambda_i^{\frac{1}{2}}(F_L(g, k)^H F_L(g, k)) \quad (11-5)$$

یعنی نرم بی نهایت $F_L(g, k)$ با ماکزیمم مقدار تکین $F_L(g, k)$ برابر است.

۵-۲ حداقل نمودن حساسیت

برای آن که اثر اغتشاش در خروجی را کاهش دهیم باید تابع حساسیت را کاهش دهیم:

شکل زیر را در نظر بگیرید:



شکل ۵-۵: نمایش استاندارد سیستم حلقه بسته همراه با اغتشاش و نویز

$$y(s) = \frac{kG}{1+Gk} r + \frac{1}{1+Gk} d + \left(\frac{-Gk}{1+Gk} \right) n \quad (12-5)$$

تابع حساسیت به صورت زیر تعریف می شود:

$$S(s) = \frac{1}{1+Gk} \quad (14-5)$$

تابع حساسیت مکمل به صورت زیر تعریف می شود:

$$T(s) = 1 - S = \frac{Gk}{1 + Gk} \quad (15-5)$$

در نتیجه خروجی بر حسب تابع حساسیت و تابع حساسیت مکمل به صورت زیر است:

$$y(s) = Tr + Sd - Tn \quad (16-5)$$

همان طور که دیده می‌شود برای کم کردن اثر اغتشاش در خروجی باید تابع حساسیت را کوچک در نظر گرفت.

فرض کنید که G پایدار باشد و نمی‌دانیم که اغتشاش چگونه است، اما می‌دانیم که طیف فرکانسی آن در بازه فرکانسی $0 \leq w \leq w_b$ است. یک هدف طراحی قابل قبول این است که کنترل کننده K را طوری پیدا کنیم که در بهترین حالت، خروجی z به ازای هر اغتشاش d حداقل شود و حلقه پایدار باشد. برای رسیدن به این هدف باید S را می‌نیمیم نماییم.

$$\min imize \|S\|_{\infty} \quad (17-5)$$

و یا معادل آن

$$\min imize \sup_w |S(jw)| \quad (18-5)$$

این هدف در صورتی محقق می‌شود که محدودیت در بازه فرکانسی که اغتشاش اتفاق می‌افتد انجام شود، یعنی در فرکانس‌هایی که اغتشاش مقدار دارد تابع حساسیت تقریباً صفر شود، و در فرکانس‌هایی که اغتشاش مقدار صفر دارد تابع حساسیت مقدار داشته باشد. می‌توانیم یک تابع انتقال پایدار

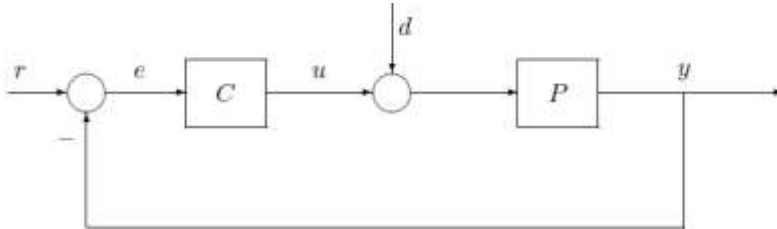
$$\begin{cases} |w_1(jw)| = 1 & 0 \leq w \leq w_b \\ |w_1(jw)| \ll 1 & w > w_b \end{cases} \quad (19-5)$$

پیدا کنیم. و آنگاه این مسئله را مطرح کنیم که:

$$\min imize \sup_w |w_1(jw)S(jw)| \quad (20-5)$$

۳-۵ پایدار سازی

سیستم زیر را در نظر بگیرید



شکل ۵-۶: نمایش استاندارد سیستم حلقه بسته همراه با اغتشاش

مسئله سنتز به این صورت است که:

برای سیستم G کنترل کننده K را چنان پیدا می‌کنیم تا

۱. سیستم حلقه بسته پایدار داخلی باشد.

۲. برخی از کارایی‌ها چون ردیابی مجانبی تضمین شود.

بدین منظور مجموعه تمامی کنترل کننده‌هایی که شرایط مفروض را برآورده می‌سازد تعیین می‌

کنیم سپس از بین آنها، آن را که بهترین کارایی را دارد انتخاب می‌کنیم.

فرض کنید G پایدار باشد

قضیه ۵-۱: (قضیه پارامتری‌سازی یولا): فرض کنید G تابع تبدیل گویا، سره و پایدار باشد، مجموعه

ای از همه کنترل کننده‌ها که سیستم حلقه بسته را پایدار داخلی می‌کنند عبارت است از:

$$k = \left\{ \frac{Q}{1-GQ} \right\} \quad (۲۱-۵)$$

که Q به پارامتر یولا معروف است و Q تابع تبدیل گویا، سره و پایدار می‌باشد.

پایدار داخلی، پایداری به ازای تمام Q تابع تبدیل ممکن است.

بنابراین برای پایداری داخلی هر Q تابع تبدیل تعریف شده در شکل (۵-۶) باید پایدار باشد.

Q تابع تبدیل به صورت زیر است:

$$1/1+GK \begin{bmatrix} 1 & -G & 1 \\ k & 1 & -K \\ GK & G & 1 \end{bmatrix}$$

با تعریف کنترل کننده به صورت

$$k = \frac{Q}{1-GQ}$$

۹ تابع تبدیل به صورت زیر می باشد:

$$\begin{bmatrix} 1-GQ & -G(1-GQ) & -(1-GQ) \\ Q & 1-GQ & -Q \\ GQ & G(1-GQ) & 1-GQ \end{bmatrix}$$

همانطور که مشاهده می شود، ۹ تابع تبدیل از G و Q تشکیل شده اند، از آن جا که G را پایدار در نظر گرفتیم بنابراین اگر Q پایدار باشد کل سیستم پایدار است و اگر Q ناپایدار باشد کل سیستم ناپایدار می باشد.

G تابع تبدیل گویا، سره و پایدار است. با توجه به (۲۱-۵)، Q سره خواهد بود اگر K سره باشد.

می توان دوباره S و T را با استفاده از ترم های G و Q به صورت

$$S = \frac{1}{1+GK} = 1-GQ \quad (22-5)$$

$$T = \frac{GK}{1+GK} = GQ \quad (23-5)$$

به دست آورد.

فرمول (۲۰-۵) را می توان با توجه به تعریف پارامتریولا به صورت زیر نوشت:

$$\min \text{imize} \text{SUP} |w_1(I-GQ)(jw)| \quad (24-5)$$

۴-۵ فرموله کردن مسئله H_∞

۱-۴-۵ حداقل کردن حساسیت

از آنجایی که می‌خواهیم تابع حساسیت را حداقل کنیم، از (۹-۵) نتیجه می‌شود که $F(G, K)$ برابر با تابع حساسیت می‌گردد.

$$w_1(I + GK)^{-1} = w_1[I - GK(I + GK)^{-1}] \quad (۲۵-۵)$$

$$F_L(G, K) = w_1(I + GK)^{-1} \quad (۲۶-۵)$$

از مقایسه فرمول بالا با فرمول (۸-۵) نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$g_{pp} = -G \quad g_{p1} = I \quad g_{1p} = -W_1G \quad g_{11} = W_1$$

از روی سیستم تعمیم یافته بالا (G) و نتایج بدست آمده در ابتدای فصل، نتایج زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{1p} \\ g_{p1} & g_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}$$

که Z و W به صورت زیر انتخاب می‌شود:

$$W = d$$

$$Z = W_1 y$$

که d متغیرهای اغتشاش و y خروجی می‌باشد که در شکل (۴-۵) نمایش داده شده است.

در سیستم های چند متغیره g_{11} و g_{p1} همیشه مربعی هستند. در حالی که g_{1p} و g_{pp} بعدی شبیه بعد ماتریس تابع انتقال G خواهند داشت.

در مجموع، برای سیستم های چند متغیره باید $\|W_1 S\|_\infty$ را می‌نیمم کنیم

$$\minimize \|W_1 S\|_\infty \quad (۲۷-۵)$$

در اغلب مسائل کنترلی فرم ورودی مرجع ناشناخته است و فقط کرانی از آن در دسترس است. فرض

کنید $r(t)$ یک سیگنال سینوسی با فرکانس متغیر و دامنه کوچکتر یا مساوی یک است

$$r(t) = a \sin wt \quad |a| \leq 1$$

$$e = rS$$

$$\|e\|_{\infty} = a \|S\|$$

$$\|e\|_{\infty} \leq |S(jw)| \leq \|S(jw)\|_{\infty}$$

همواره ما تمایل داریم خطای ردگیری از یک مقدار عدد مثبت کوچک، کوچکتر باشد

$$\|e\|_{\infty} < \varepsilon_0$$

پس باید

$$\|S\|_{\infty} < \varepsilon_0$$

یعنی

$$\|e\|_{\infty} \leq \|S\|_{\infty} \leq \varepsilon_0$$

برقرار باشد.

همواره W_I یک تابع وزنی جهت برآورده کردن خواسته ها می باشد (برای مثال در اینجا $|a| \leq 1$)

در نتیجه همیشه باید شرط زیر برقرار باشد.

$$\|W_I S\| < 1 \quad (28-5)$$

که این شرط، شرط کارآیی نامی می باشد.

اگر معیار خطای ردیابی به صورت نرم دو خطا (e) باشد، برای ردیابی باید شرط بالا برقرار باشد [۱۶]

$$\text{SUP} \|e\|_2 = \text{SUP} \{ \|SW_I r\|_2 \} = \|W_I S\|_{\infty} \quad (29-5)$$

۲-۴-۵ موضوع پایداری مقاوم

کنترل کننده، پایداری مقاوم را برای سیستم حلقه بسته فراهم می کند اگر برای تمامی مدل های

متعلق به مجموعه مدل، پایداری داخلی را تضمین نماید.

با توجه به قضیه بهر کوچک، می‌خواهیم پایداری را در حضور نامعینی ضرب شونده نگهداریم. شرط پایداری مقاوم به صورت زیر به دست می‌آید:

$$H = W_p \frac{-GK}{1+GK} = -W_p T \quad (30-5)$$

H تابع تبدیلی است که از دو سر نامعینی دیده می‌شود

۳-۴-۵ موضوع مختلف مقاوم بودن و عملکرد

فرض کنید می‌خواهیم عملکرد خوبی در رد اغتشاش فراهم کنیم، و پایداری را در حضور نامعینی ضرب‌شونده نگه داریم. یعنی می‌خواهیم که تابع حساسیت S و تابع حساسیت مکمل T را کوچک نگهداریم. اما همزمان این عمل انجام نمی‌شود، البته ما می‌توانیم در هر فرکانسی S یا T را کوچک نگه داریم. این موضوع می‌تواند به صورت زیر فرموله شود

$$F_L(P, K) = \begin{bmatrix} W_1 S \\ W_p T \end{bmatrix} \quad (32-5)$$

در مقایسه ۳۲-۵ با ۳-۵، به نتایج زیر می‌رسیم

$$g_{22} = -G \quad g_{21} = I \quad g_{12} = \begin{bmatrix} -W_1 G \\ W_p G \end{bmatrix} \quad g_{11} = \begin{bmatrix} W_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

۴-۴-۵ الگوریتم گلوور - دوپل برای مسئله H_∞ کلی

این قسمت از مراجع [۹] و [۱۰] آورده شده است.

این الگوریتم برای کنترل‌کننده‌های K پایدار کننده حلقه بسته حاصل می‌شود.

مسئله فوق به شرح زیر بیان می‌شود.

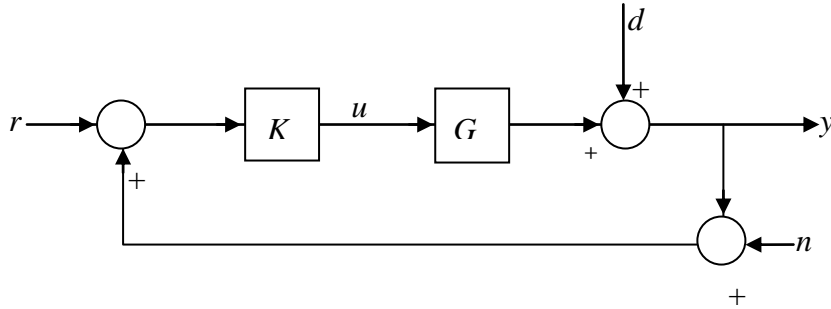
با داشتن G, K را چنان پیدا می‌کنیم تا:

۱. $F_L(G, K)$ پایدار داخلی باشد.

$$F_L(G, K) \leq \gamma \quad ۲.$$

۵-۵ شکل دهی حلقه مقدار تکین

روش ترکیب حساسیت سیستم نمودار بلوکی سیستم کنترل چند متغیره شکل (۷-۵) را در نظر بگیرید، برای کم کردن حاشیه‌های پایداری و عملکرد چنین سیستم‌هایی می‌توانیم از مقدارهای تکین ماتریس‌های تابع انتقال حلقه بسته از r به خروجی‌های y, u, e استفاده کنیم.



شکل (۷-۵) روش ترکیب حساسیت در سیستم کنترل چند متغیره

$$\begin{cases} S(s) = (I + G(s)K(s))^{-1} \\ R(s) = K(s)(I + G(s)K(s))^{-1} \\ T(s) = G(s)K(s)(I + G(s)K(s))^{-1} \end{cases} \quad (۳۳-۵)$$

نمودارهای منحنی بود مقادیر تکین برای هر کدام از این ماتریس‌های تابع انتقال $T(s), R(s), S(s)$ نقش مهمی در طراحی سیستم کنترل چند متغیره مقاوم دارند.

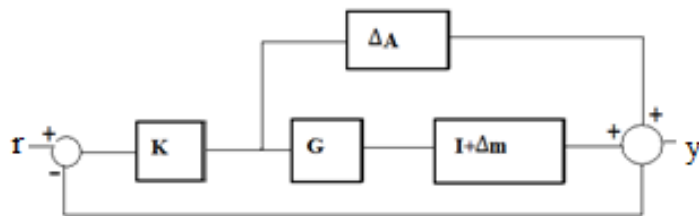
مقادیر تکین و ماتریس انتقال $L(s) = K(s)G(s)$ نیز مهم هستند چون $L(s)$ ماتریس‌های $S(s), T(s)$ را معین می‌کند. مقادیر تکین $S(j\omega)$ تضعیف اغتشاش را معین می‌کنند چون $S(s)$ در

حقیقت تابع انتقال حلقه بسته از اغتشاش d به خروجی فرآیند y می باشد. بنابراین تضعیف اغتشاش به صورت زیر نوشته می شود:

$$\bar{\sigma}(S(j\omega)) \leq |W_1^{-1}(j\omega)| \quad (34-5)$$

در حالیکه $|W_1^{-1}(j\omega)|$ ضریب تضعیف اغتشاش مطلوب است.

نمودارهای بود مقادیر تکین $R(s)$ و $T(s)$ برای اندازه گیری حاشیه های پایداری طراحی های فیدبکی چند متغیره در حضور تغییرات جمع شونده Δ_A و تغییرات فرآیند ضرب شونده Δ_M استفاده می شود. شکل (۸-۵) را برای نامعینی جمع شونده و ضرب شونده می بینید.



شکل ۸-۵: نامعینی ضرب شونده/ جمع شونده

ببینیم چگونه منحنی بود مقدار تکین مکمل حساسیت $T(s)$ حاشیه پایداری را برای تغییرات ضرب شونده Δ_M تعیین می کند. حاشیه پایداری ضرب شونده مطابق تعریف، اندازه کوچکترین $\Delta_M(s)$ پایدار است که سیستم را ناپایدار می کند وقتی که نامعینی جمع شونده Δ_A برابر صفر است. طبق تعریف، اندازه $\Delta_m(j\omega)$ است و دو قضیه پایداری زیر را داریم

قضیه ۲-۵: فرض کنید که شکل (۸-۵) نامعینی جمع شونده/ ضرب شونده پایدار باشد و هر دو Δ_A و Δ_M صفر باشند. آنگاه اندازه کوچکترین $\Delta_M(s)$ پایدار برای این که سیستم ناپایدار شود برابر است با:

$$\bar{\sigma}(\Delta_M(j\omega)) = \frac{1}{\bar{\sigma}(T(j\omega))} \quad (35-5)$$

هر چقدر $\bar{\sigma}(T(j\omega))$ کوچکتر باشد اندازه کوچکترین تغییرات ضرب شونده ناپایدار کننده بزرگتر خواهد بود و بنابراین حاشیه پایداری بزرگتری خواهیم داشت. نتیجه مشابه با تغییرات جمع شونده

$\Delta_A(s)$ نسبت به $R(s)$ به دست می‌آید. فرض کنید $\Delta_A(jw)$ اندازه $\bar{\sigma}(\Delta_A(jw))$ در فرکانس w باشد، آنگاه قضیه پایداری زیر را خواهیم داشت.

قضیه ۳-۵: فرض کنید که شکل (۸-۵)، نامعینی جمع شونده/ ضرب شونده پایدار باشد و هر دو Δ_A و Δ_m صفر باشند. آنگاه اندازه کوچکترین $\Delta_A(s)$ پایدار برای این که سیستم، ناپایدار شود برابر است با:

$$\bar{\sigma}(\Delta_A(jw)) = \frac{1}{\bar{\sigma}(R(jw))} \quad (۳۶-۵)$$

به عنوان نتیجه این دو قضیه، مرسوم است که حاشیه های پایداری سیستم‌های کنترل از طریق نامعادلات مقدار تکین نظیر

$$\bar{\sigma}(R(jw)) \leq |W_p^{-1}(jw)|$$

$$\bar{\sigma}(T(jw)) \leq |W_p^{-1}(jw)|$$

در حالی که $|W_2(jw)|$ و $|W_3(jw)|$ اندازه های بزرگترین تغییرات فرآیند جمع شونده و ضرب شونده پیش بینی شده است. مرسوم است که تمام اثرات نامعینی را به داخل یک تغییر ضرب شونده فرضی Δ_m جمع می‌کنیم، یعنی مشخصات طراحی کنترل به صورت زیر نوشته شود:

$$\frac{1}{\sigma_i(S(jw))} \geq |W_1(jw)|$$

$$\frac{1}{\sigma_i(T(jw))} \geq |W_3(jw)|$$

هم چنین که در شکل (۹-۵) نشان داده شده است، مشخصات مقدار تکین، روی S و T دیده می‌شود.

جالب است که توجه کنیم که در قسمت بالایی شکل (۹-۵) مشخصات مقدار تکین روی S و T ، بالای

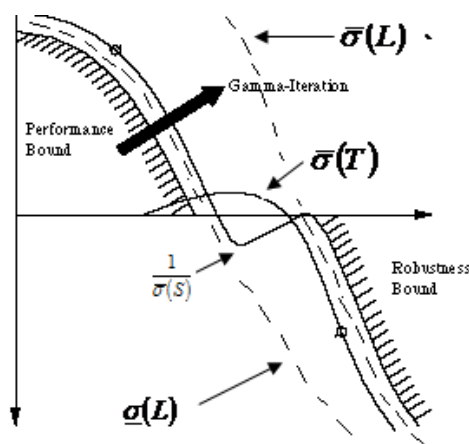
خط صفحه dB

$$\underline{\sigma}(L(j\omega)) \approx \frac{1}{\overline{\sigma}(S(j\omega))}$$

است، در حالی که قسمت پایینی شکل (۵-۹) مشخصات مقدار تکین روی S و T پایین خط صفر dB

$$\overline{\sigma}(L(j\omega)) \approx \overline{\sigma}(T(j\omega))$$

است.



شکل ۵-۹: مشخصات مقدار تکین روی S و T

این نتایج از این حقیقت ناشی است که

$$S(s) = (I + L(s))^{-1} = L(s)^{-1} \quad \text{اگر} \quad \underline{\sigma}(L(s)) \gg 1$$

$$T(s) = (L(s))(I + L(s))^{-1} = L(s) \quad \text{اگر} \quad \overline{\sigma}(L(s)) \ll 1$$

بنابراین مرسوم است که مشخصات تضعیف اغتشاش و حاشیه پایداری ضرب شونده به طور مستقیم بر

حساب نواحی غیر مجاز برای منحنی های بود $\sigma(L(j\omega))$ به عنوان نیازهای «شکل دهی حلقه مقدار

تکین» دیده می شود.

نکته مهم در انتخاب مشخصات طراحی W_1, W_3 این است که فرکانس قطع صفر dB منحنی بود W_1

باید به مقدار کافی زیر فرکانس قطع صفر dB منحنی بود W_3^{-1} باشد، در غیر این صورت شرایط فوق

قابل دسترسی نخواهد بود.

برای داشتن تعقیب خوب ورودی و تضعیف اغتشاش فرکانس پایین، باید W_1 در فرکانس های پایین بزرگ باشد

برای در نظر گرفتن نامعینی های فرکانس بالا ناشی از دینامیک های مدل نشده باید W_3 در فرکانس های بالا بزرگ باشد.

در فرکانس صفر مقدار ماتریس وزنی W_1 بیشتر از ۱ (یا صفر dB) باشد و در فرکانس بی نهایت مقدار ماتریس وزنی W_1 کمتر از ۱ (یا صفر dB) باشد.

در فرکانس صفر مقدار ماتریس وزنی W_3 کمتر از ۱ (یا صفر dB) باشد و در فرکانس بی نهایت مقدار ماتریس وزنی W_3 بیشتر از ۱ (یا صفر dB) باشد.

باید فرکانس محل قطع ماتریس وزنی W_1 با محور صفر dB از فرکانس محل قطع ماتریس وزنی W_3 با محور صفر dB به اندازه کافی کوچک باشد.

۵-۶ طراحی کنترل کننده H_∞ برای مدل ربات دو بازو

در ابتدا باید نامعینی های سیستم را مشخص نمود. سپس باید سیستم ربات را مانند شکل (۴-۵) به یک شکل استاندارد تبدیل کرد. برای انجام این کار باید سیستم را به شکل زیر تعریف نمود:

$$E(P)\dot{x} = A(P)x + B(P)u$$

$$y = C(P)x + D(P)u$$

که $E(P)$ ماتریس *affine* نسبت به u می باشد. یعنی این که ماتریس E به عنوان یک ضریب مستقل در B ظاهر شده است.

مثلاً در سیستم $T_1 + T_1 Q$ ، Q را نسبت به T_2 *affine* گویند.

سپس به وسیله دستور *aff2LFT* در نرم افزار *MATLAB 2008*، سیستم را به فرم استاندارد تبدیل می‌کنیم.

برای آن که بتوانیم ماتریس E را تشکیل بدهیم باید معادلات سیستم را به فرم زیر بنویسیم.

$$A = \begin{bmatrix} \circ & \circ & 1 & \circ \\ \frac{A_p}{A_1} & \frac{A_w}{A_1} & \frac{bA_f}{A_1} & \frac{bA_\delta}{A_1} \\ \frac{A_f}{A_1} & \frac{A_v}{A_1} & -\frac{b_1A_\delta}{A_1} & -\frac{b_pA_q}{A_1} \\ \frac{A_\delta}{A_1} & \frac{A_3}{A_1} & \circ & \circ \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \circ & \circ \\ \frac{A_f}{A_1} & -\frac{A_\delta}{A_1} \\ \frac{A_\delta}{A_1} & \frac{A_3}{A_1} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & \circ & \circ & \circ \\ \circ & 1 & \circ & \circ \end{bmatrix}$$

سپس ماتریس E مطابق زیر می‌شود:

$$E = \text{diag}([1, 1, A_1, A_1])$$

همان‌طور که دیده می‌شود نمایش فضای حالت سیستم به صورت نامعین است. که در این معادلات $A_1, A_p, A_w, A_f, A_\delta, A_v, A_3, A_q$ به صورت زیر می‌باشد.

$$A_1 = D(A+B+C) - \left(D + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} \right)^2$$

$$A_2 = -(F+G) - \left(E + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} \right) G$$

$$A_3 = -GD + \left(E + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} \right) G$$

$$A_4 = D$$

$$A_5 = E + \frac{B}{2} + \frac{C}{2}$$

$$A_6 = -G(A+B+C) + \left(E + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} \right) (F+G)$$

$$A_7 = \left(E - A - \frac{B}{2} - \frac{C}{2} \right) G$$

$$A_8 = A+B+C$$

برای به دست آوردن باندهای بالا و پایین $A_8 - A_1$ از الگوریتم ژنتیک استفاده شده است که نتایج زیر

بدست آمده است:

$$A_1 \in [5/8393 \times 10^4 \quad 4/0351 \times 10^5]$$

$$A_2 \in [-3/9995 \times 10^6 \quad -1/3772 \times 10^5]$$

$$A_3 \in [6/1916 \times 10^3 \quad 5/7727 \times 10^5]$$

$$A_4 \in [137/8359 \quad 356/8922]$$

$$A_5 \in [208/782 \quad 1/4811 \times 10^3]$$

$$A_6 \in [1/107 \times 10^5 \quad 5/9341 \times 10^5]$$

$$A_7 \in [-2/4265 \times 10^6 \quad -4/681 \times 10^4]$$

$$A_8 \in [-3/9995 \times 10^6 \quad -1/3772 \times 10^5]$$

حال باید نامعینی‌های ساختار نیافته سیستم ربات را به دست آوریم و به وسیله نمایش مدل ضرب شونده که در فصل دوم توضیح داده شد، مدل کنیم. برای این کار ابتدا باید مدل نامی سیستم و حد بالای نامعینی را به دست آوریم. چنانچه می‌دانیم لازم است که حد بالای نامعینی تا آنجا که ممکن است، در رنج وسیعی زیر odb باشد. برای بدست آوردن مدل نامی، از ماتریس‌های نامعین فضای حالت ۱۰ نمونه گرفته می‌شود و هر کدام از ده نمونه به عنوان مدل نامی فرض می‌شود. سپس با هر کدام از آنها تابع تبدیل حد بالای نامعینی بدست آمده و از بین آنها مدل نامی مناسب و حد بالای نامعینی بدست می‌آید.

لازم به ذکر است که مدل نامی بدست آمده و حد بالای نامعینی باید نامساوی زیر را برآورده سازند.

$$\left| \frac{G}{G_0} - 1 \right| < W_3(s)$$

$W_3(s)$ مدل نامعینی سیستم می‌باشد که سعی می‌کنیم آن را طوری انتخاب کنیم که اندازه کمتر از یک داشته باشد چنان چه مدل نامی صحیح انتخاب نشود، باعث می‌شود که حد بالای نامعینی، پایین صفر dB باشد.

برای به دست آوردن نامعینی ساختار نیافته سیستم ربات از دستور `ltiarray2uss` استفاده می‌کنیم.

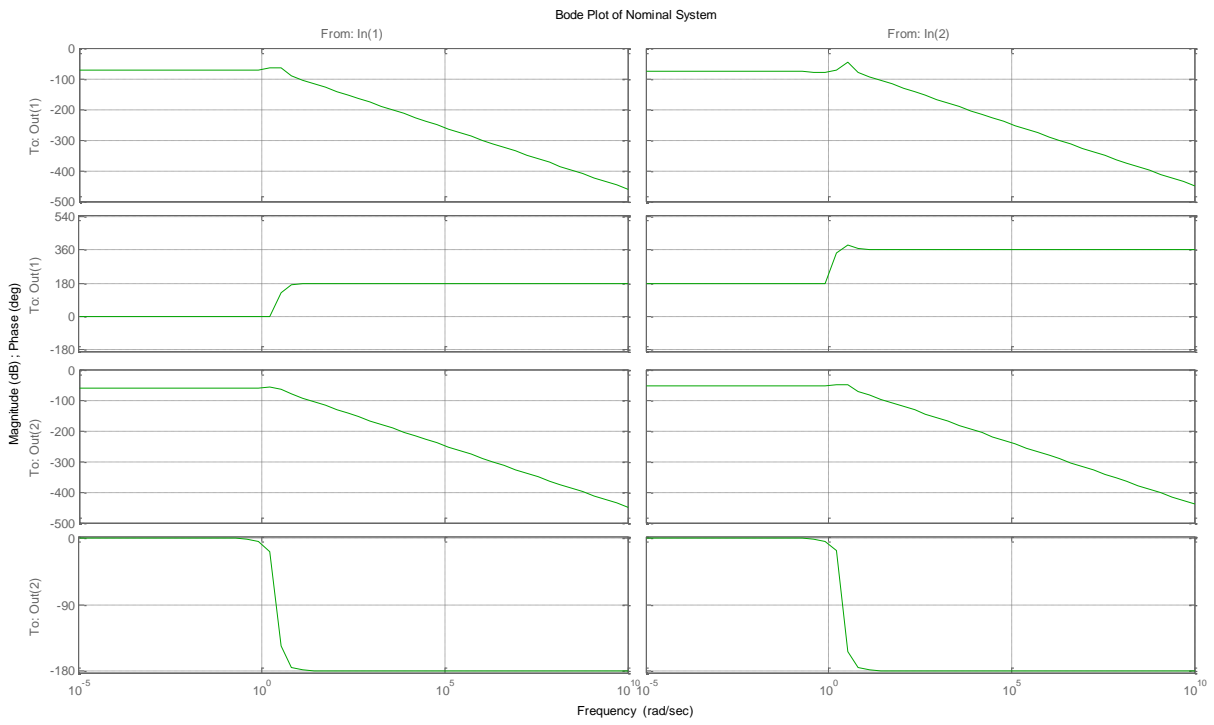
برای طراحی کنترل کننده H_∞ ابتدا باید تابع‌های وزنی W_3, W_1 را مشخص نماییم:

$$W_3 = \frac{2S + 0.02}{S + 10} \times I_2$$

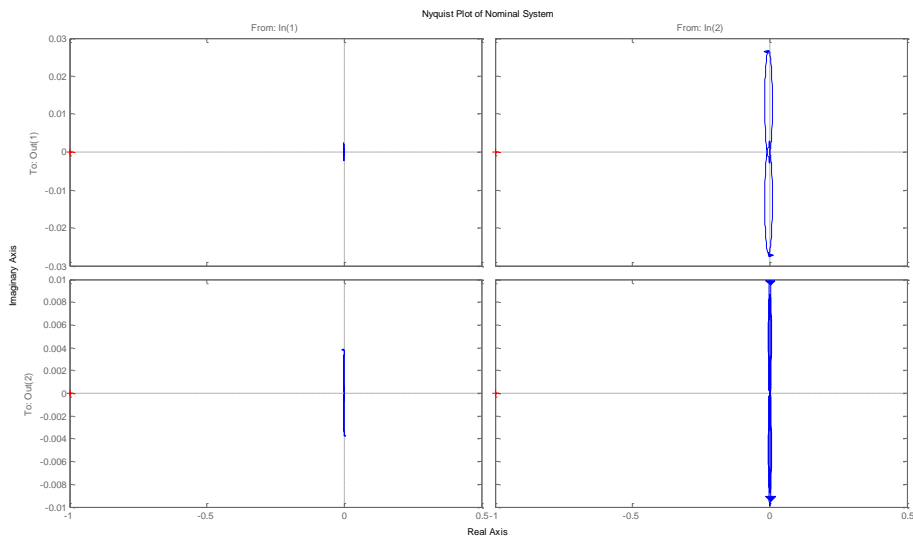
$$W_1 = \left[\frac{0.03S + 30}{100S + 0.01} \right] \times I_2$$

با استفاده از دستور `hinFsyn` کنترل کننده H_∞ و γ_{opt} را به دست می‌آوریم

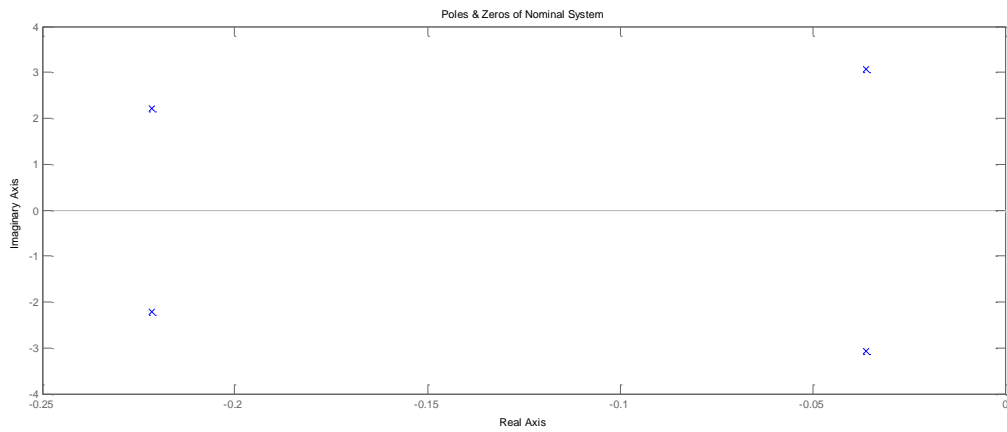
$$\gamma_{opt} = 0/202$$



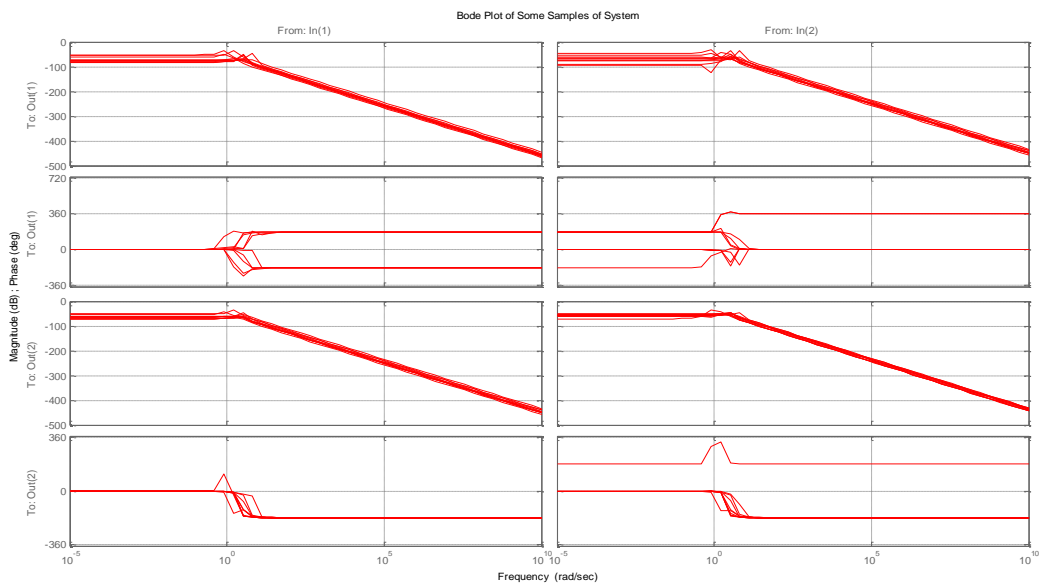
شکل ۵-۱۰: پاسخ فرکانسی سیستم نامی



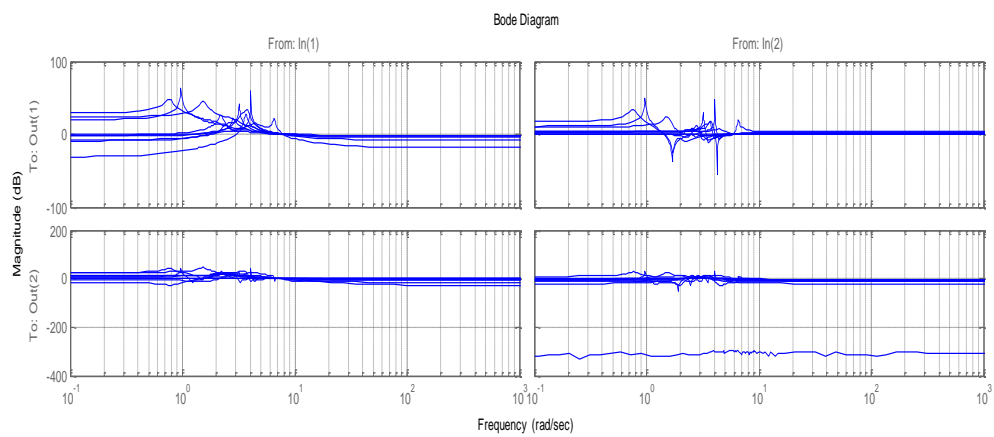
شکل ۵-۱۱: نمودار نایکوئیست سیستم نامی



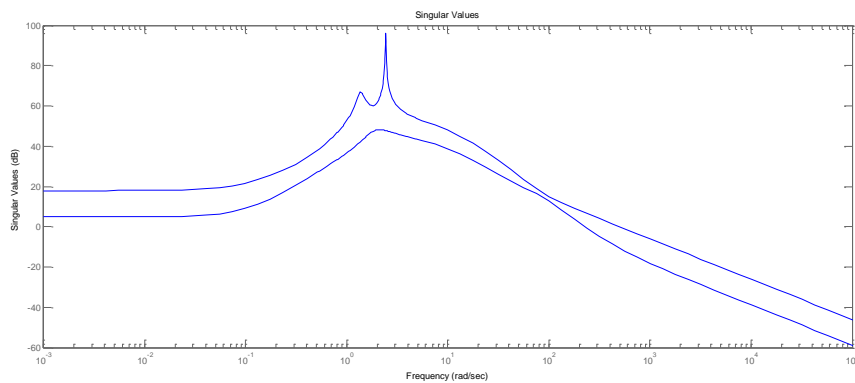
شکل ۵-۱۲: محل قرار گرفتن قطب های سیستم نامی



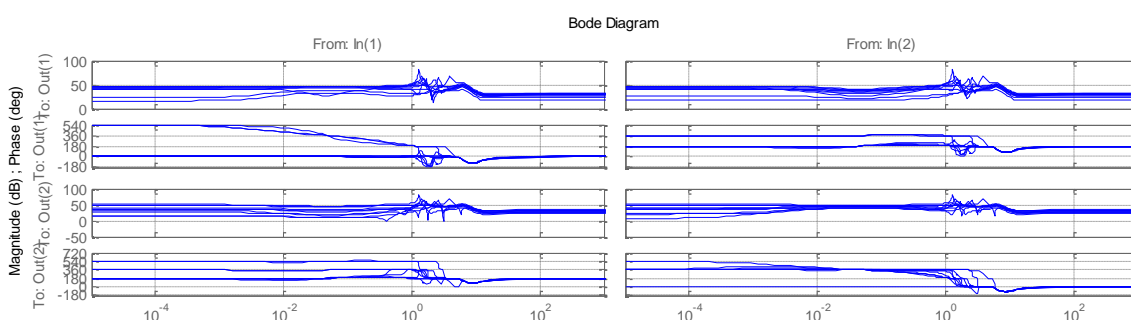
شکل ۵-۱۳: پاسخ فرکانسی ۱۰ نمونه از سیستم واقعی



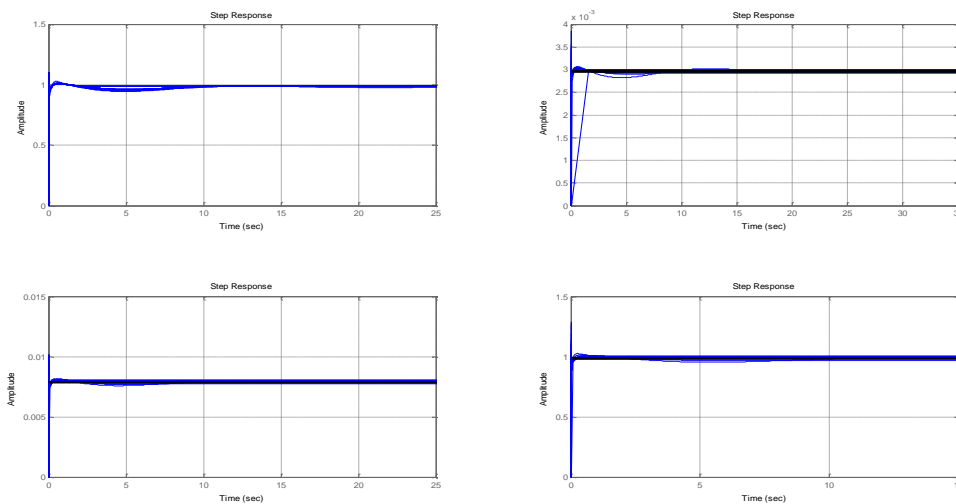
شکل ۵-۱۴: پاسخ فرکانسی سیستم با مدل نامعینی ضربشونده



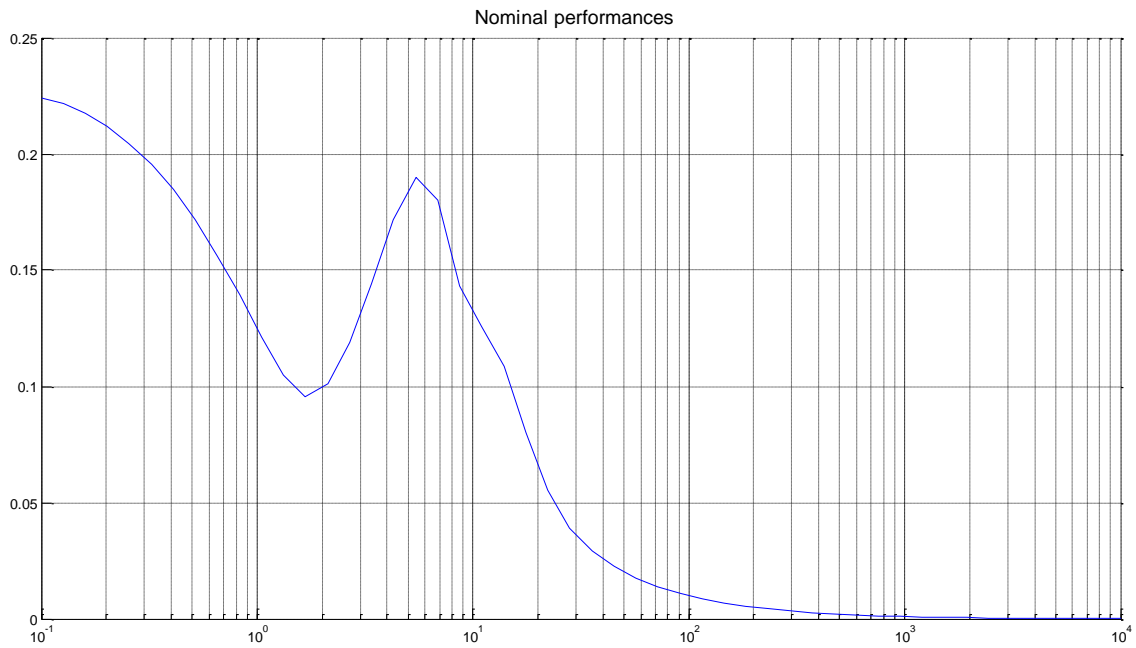
شکل ۵-۱۵: رسم مقادیر تکین سیستم حلقه بسته با کنترل کننده H_∞



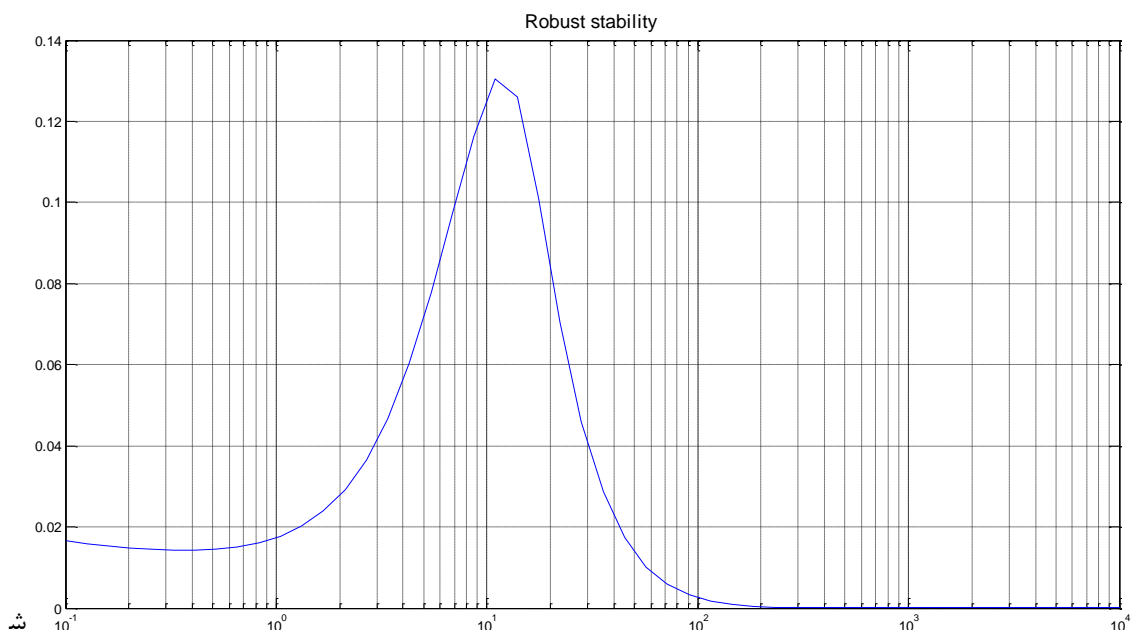
شکل ۵-۱۶: پاسخ فرکانسی $W_p T$ با کنترل کننده H_∞



شکل ۵-۱۷: پاسخ پله سیستم حلقه بسته با کنترل کننده H_∞



شکل ۵-۱۸: نمودار کارایی نامی

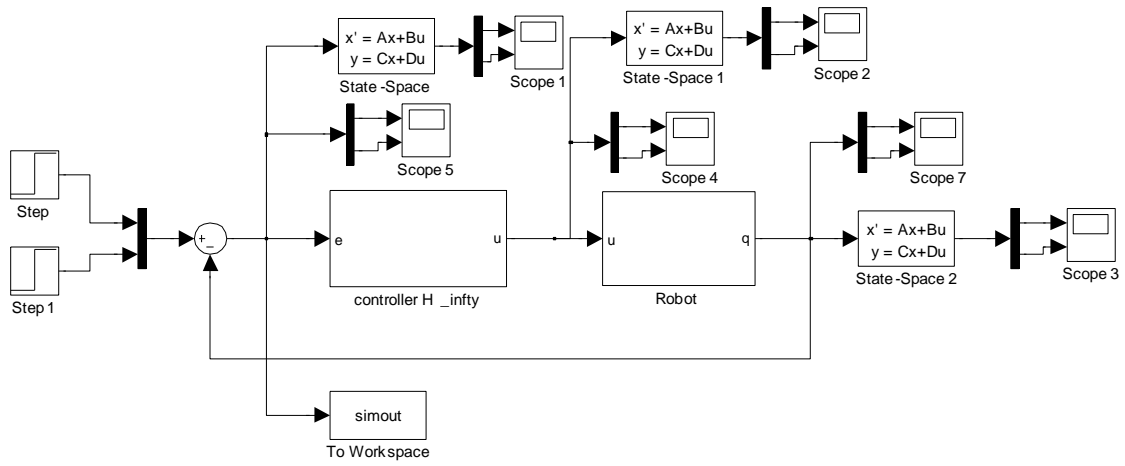


کل ۵-۱۹: نمودار پایداری مقاوم

با مشاهده شکل (۵-۱۸) و (۵-۱۹) می‌توان نتیجه گرفت که سیستم دارای کارایی مقاوم نیز می‌باشد

چون مجموع شکل (۵-۱۸) و (۵-۱۹) کمتر از یک می‌باشد.

بلوک دیاگرام استفاده شده در *simulink* به صورت زیر می‌باشد



شکل ۵-۲۰: نمودار کنترل کننده H_∞ استفاده شده در simulink

مقدمه

کنترل مورد لغزشی یک رهیافت قدرتمند در جهت کنترل سیستم‌های قطعی و غیر قطعی می‌باشد که در آن از قضیه پایداری لیاپانوف برای طراحی کنترل کننده استفاده می‌شود. کنترل لغزشی یک روش مقاوم است و با داشتن مدل عدم قطعیت‌ها و اغتشاش‌ها می‌تواند به کار رود.

۶-۱ اصول اساسی کنترل لغزشی

سیستم غیر خطی $SISO$ زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x}^{(n)} = f(X) + b(X)u \quad (۱-۶)$$

که u ورودی کنترل، x خروجی و X بردار حالت است که فرض می‌شود قابل اندازه گیری باشد. فرض می‌کنیم که توابع $f(X)$ و $b(X)$ معلوم هستند برای کنترل پذیری سیستم توصیف شده لازم است که $b(X) \neq 0$ باشد.

هدف کنترل عبارت است از تعیین یک کنترل فیدبک $u = u(X)$ تا حالت‌های سیستم قادر به

ردگیری مسیر مطلوب $X_d = (X_d, \dot{X}_d, \dots, X_d^{(n-1)})^T$ باشد یعنی خطای ردیابی

$$E = \begin{bmatrix} X - X_d & \dot{X} - \dot{X}_d & \dots & X^{(n-1)} - X_d^{(n-1)} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} e & \dot{e} & \dots & e^{(n-1)} \end{bmatrix}^T \quad (۲-۶)$$

به سمت صفر همگرا گردد.

ایده اساسی کنترل لغزشی بدین صورت است که یک تابع اسکالر به صورت زیر یا هر شکل دیگری از سیگنال خطا و مشتقات آن تعریف می‌شود:

$$s(X, t) = \left(\lambda + \frac{d}{dt} \right)^{n-1} e = \begin{bmatrix} \lambda^{n-1} & a_{n-1} \lambda^{n-2} & \dots & a_1 \lambda & 1 \end{bmatrix} E \quad (۳-۶)$$

که λ یک ثابت مثبت می‌باشد. آنگاه

$$S(X,t) = 0 \quad (4-6)$$

یک سطح وابسته به زمان را در فضای R^n تعریف می‌کند، به عنوان مثال اگر $n=2$ باشد، آنگاه سطح $S(X,t)$ عبارت است از:

$$S(X,t) = \dot{e} + \lambda e = 0 \quad (5-6)$$

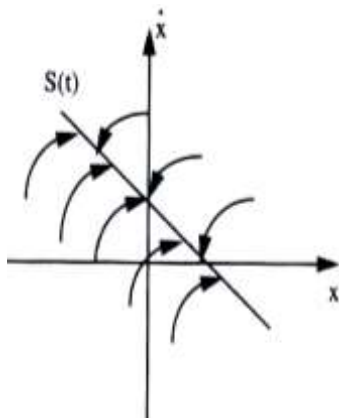
که یک خط مستقیم در صفحه فاز $X - \dot{X}$ می‌باشد که در شکل (۶-۱) نشان داده شده است. از آنجایی که معمولاً توابع متغیر با زمان هستند، لذا $S(X,t)$ متغیر با زمان خواهد بود.

اگر حالت اولیه $X(0)$ با حالت مطلوب $X_d(0)$ مساوی باشد یعنی اگر $e(0) = 0$ باشد، آنگاه از روابط (۶-۳) و (۶-۴) مشاهده می‌شود که در صورتی که بردار حالت X برای تمامی $t \geq 0$ روی سطح $S(X,t) = 0$ باقی بماند آنگاه ما $e(t) = 0$ را برای تمامی $t \geq 0$ خواهیم داشت. در حقیقت $S(X,t) = 0$ یک معادله دیفرانسیل خطی را نشان می‌دهد که پاسخ یکتای آن، $e(t) = 0$ برای شرایط اولیه $e(0) = 0$ می‌باشد.

بنابراین مسئله کنترل ردیابی ما معادل با قرار دادن تابع اسکالر $S(X,t)$ در صفر خواهد بود. برای رسیدن به این هدف، ما می‌توانیم کنترل u را چنان تعیین کنیم که رابطه زیر که به عنوان شرایط لغزشی نامیده می‌شود برقرار گردد

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} S(X,t)^2 \leq -\eta |S(X,t)| \quad (6-6)$$

که در این رابطه η یک عدد مثبت ثابت است. با در نظر گرفتن شرط لغزشی اگر حالت‌های سیستم خارج از سطح S باشند $|S(X,t)|$ کاهش خواهد یافت یعنی مسیر حالت به سمت سطح انتقال خواهد رفت که در شکل (۶-۱) نشان داده شده است.



شکل ۱-۶ سطح لغزشی در صفحه فاز دو بعدی

قضیه ۱-۶: سیستم غیرخطی (۱-۶) را در نظر بگیرید و فرض کنید S همانند رابطه (۳-۶) تعریف گردد. اگر بتوانیم یک کنترل کننده u را چنان طراحی کنیم تا شرط لغزشی (۶-۶) برآورده گردد آنگاه:

۱. حالت‌های سیستم در زمان محدودی به سطح لغزشی S خواهد رسید.
 ۲. هنگامی که حالت‌ها روی سطح لغزشی قرار گیرند، بر روی آن باقی خواهند ماند.
 ۳. اگر حالت‌ها بر روی سطح لغزشی باقی بمانند، خطای ردیابی به سمت صفر همگرا خواهد شد.
- بنابراین هدف ما طراحی یک کنترل کننده u می‌باشد، به طوری که سیستم حلقه بسته شرط لغزشی (۶-۶) را ارضا نماید

۲-۶ طراحی کننده مود لغزشی

با توجه به مرتبه سیستم سطح لغزشی تعریف شده، قانون کنترل زیر را به سیستم اعمال می‌نماییم:

$$u = b^{-1}(X)(-f(X) + L - \eta \operatorname{sgn}(s)) \quad (7-6)$$

که در این قانون کنترل داریم:

$$L = x_d^{(n)} - \Gamma \quad (8-6)$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \dot{e} \\ \ddot{e} \\ \vdots \\ e^{(n-1)} \end{bmatrix} \quad (9-6)$$

و

$$K > 0 \quad (10-6)$$

حال به بررسی کارآیی قانون کنترل پیشنهادی می‌پردازیم، با انتخاب رابطه (۶-۱۱) حاصل می‌شود

$$\dot{V} = S \left(-\eta \frac{|S|}{S} \right) = -\eta |S| \leq 0 \quad (11-6)$$

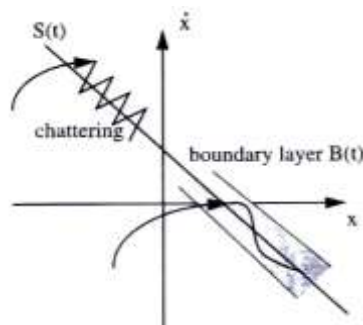
مشاهده می‌شود که شرط لغزشی گفته شده در رابطه (۶-۶) ارضا شده و $\dot{V} \leq 0$ است، از نتایج حاصل

از اثبات می‌توانستیم به صورت زیر پایداری و همگرا شدن خطای ردگیری را ثابت کنیم.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (S(X, t)) = 0 \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} (e) = 0 \quad (12-6)$$

از قانون کنترل پیشنهاد شده مشاهده می‌شود که این قانون در سطح لغزشی $S(X, t)$ گسستگی دارد

و این موضوع مطابق شکل (۶-۲) باعث نوسان خواهد شد.



شکل ۶-۲: نوسان و لایه مرزی

و نوسان به دلیل این که مستلزم فعالیت کنترل بالا بوده و می تواند دینامیک فرکانس بالایی ایجاد کند، نامطلوب است. یک راه جلوگیری از نوسان، ایجاد یک لایه مرزی در همسایگی سطح لغزش به صورت زیر می باشد.

$$B(t) = \{X : |S(X), t| \leq \phi\} \quad (13-6)$$

ϕ ضمانت لایه مرزی و $\varepsilon = \frac{\phi}{\lambda^{n-1}}$ پهناى لایه مرزی نامیده می شود.

کنترل پیوسته در میان لایه مرزی تغییر می نماید.

قضیه (۶-۲): اگر شرط لغزشی (۶-۶) در خارج از لایه مرزی $B(t)$ برقرار گردد آنگاه تضمین خواهد شد که بعد از مدت زمان محدودی داریم:

$$|e(t)| \leq \varepsilon \quad (14-6)$$

در این حالت قانون کنترل (۶-۷) به قانون کنترل زیر تغییر پیدا می کند:

$$U = n^{-1}(X)(-f(x) + L) - \eta \text{sat}\left(\frac{S}{\phi}\right) \quad (15-6)$$

که تابع اشباع $\text{Sat}\left(\frac{S}{\phi}\right)$ به صورت زیر است:

$$\text{Sat}\left(\frac{S}{\phi}\right) = \begin{cases} -1 & \text{Sat}\left(\frac{S}{\phi}\right) \leq -1 \\ \text{sat}\left(\frac{S}{\phi}\right) & -1 \leq \text{sat}\left(\frac{S}{\phi}\right) \leq 1 \\ 1 & \text{sat}\left(\frac{S}{\phi}\right) > 1 \end{cases} \quad (16-6)$$

از آنجایی که قانون کنترل (۶-۷) و (۶-۱۵) به پارامترهای سیستم وابسته هستند و مدل سازی دقیق سیستم های عملی امکان پذیر نمی باشد باید به دنبال روشی برای مهار این عدم قطعیت ها باشیم.

۳-۶ طراحی کنترل کننده مقاوم مود لغزشی

سیستم تعریف شده در (۶-۱) را در نظر بگیرید، فرض کنید که توابع $b(X), f(X)$ نامعلوم هستند ولی این توابع را می توانیم به مقادیر نامی $b_0(X), f_0(X)$ و عدم قطعیت های $\Delta b(X), \Delta f(X)$ تقسیم نماییم.

$$f(x) = f_0(x) + \Delta f(x) \quad (۶-۱۷)$$

$$b(x) = b_0(x) + \Delta b(x) \quad (۶-۱۸)$$

با در نظر گرفتن این عدم قطعیت ها معادلات سیستم به صورت زیر تعریف می شود:

$$\dot{x}^{(n)} = f_0(X) + b_0(X)u + g(x) \quad (۶-۱۹)$$

$$g(x) = \Delta f(x) + \Delta b(x)u \quad (۶-۲۰)$$

که $g(x)$ یک تابع نامعلوم است ولی فرض می کنیم $|g| \leq P$

قضیه (۶-۳): با اعمال قانون کنترل زیر و مهیا بودن شرط (۶-۲۱) سیستم غیر خطی پایدار بوده و خطای ردگیری به سمت صفر میل می کند.

$$u = b_0^{-1}(X)(-f_0(X) + L - \bar{g} - \eta \operatorname{sgn}(s)) \quad (۶-۲۱)$$

که \bar{g} تخمینی است که با رابطه زیر تعریف می شود

$$\bar{g} = \begin{cases} \rho \frac{S}{|S|} & |S| > \varepsilon \\ \rho \frac{S}{\varepsilon} & |S| \leq \varepsilon \end{cases} \quad (۶-۲۲)$$

$$\eta > \rho \left(1 - \frac{\|S\|}{\varepsilon} \right) \quad (23-6)$$

۱-۳-۶ طراحی کنترل مقاوم مود لغزشی سیستم های چند متغیره

قضیه (۴-۶): با اعمال قانون کنترل زیر و مهیا بودن شرط (۲۷-۶) سیستم غیر خطی چند ورودی

چند خروجی پایدار بوده و خطای ردگیری به سمت صفر میل می کند

$$u = b_0^{-1}(X) \left(-f_0(X) + L - \bar{g} - \eta \frac{S}{\|S\|} \right) \quad (24-6)$$

که در آن

$$\eta = \text{diag}\{\eta_1, \dots, \eta_m\} \quad (25-6)$$

می باشند. مقادیر همه عناصر ماتریس η مثبت هستند و \bar{g} تخمینی از $g(x)$ است که با رابطه زیر

تعریف می شود:

$$\bar{g} = \begin{cases} \rho \frac{S}{\|S\|} & \|S\| > \varepsilon \\ \rho \frac{S}{\varepsilon} & \|S\| \leq \varepsilon \end{cases} \quad (26-6)$$

$$S^T \eta S > \rho \|S\|^r \left(1 - \frac{\|S\|}{\varepsilon} \right) \quad (27-6)$$

همانطور که ملاحظه می شود این روش کنترلی قابلیت اعمال به سیستم های چند متغیره را نیز دارد و

لذا به راحتی می توانیم از این روش کنترلی برای کنترل ربات دو بازو استفاده کنیم.

۴-۶ طراحی کنترل کننده مقاوم مود لغزشی برای مدل ربات دو بازو

سیستم ربات را به صورت زیر در نظر می گیریم

$$\tau = M(q)\ddot{q} + h(q, \dot{q})$$

که در این سیستم h, M نامعین می‌باشند.

$$\underline{M} < M < \overline{M} \quad (28-6)$$

$$\underline{h} < h < \overline{h} \quad (29-6)$$

h, M را به صورت جمع مدل نامی با نامعینی در می‌آوریم

$$M = \hat{M} + \Delta M \quad (30-6)$$

$$h = \hat{h} + \Delta h \quad (31-6)$$

که \hat{h}, \hat{M} مدل نامی و $\Delta h, \Delta M$ نامعینی می‌باشند که به صورت زیر آمده است:

$$\hat{M} = \frac{\overline{M} + \underline{M}}{2} \quad (32-6)$$

$$\hat{h} = \frac{\overline{h} + \underline{h}}{2} \quad (33-6)$$

$$|\Delta M| \leq \overline{M} - \hat{M} \quad (34-6)$$

$$|\Delta h| \leq \overline{h} - \hat{h} \quad (35-6)$$

در نتیجه معادله سیستم را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\tau = \hat{M}\ddot{q} + \hat{h} + \Delta M\ddot{q} + \Delta h \quad (36-6)$$

$$\ddot{q} = \hat{M}^{-1}(\tau - \hat{h}) - \hat{M}^{-1}(\Delta M\ddot{q} + \Delta h) \quad (37-6)$$

از تغییر متغیر زیر اگر استفاده کنیم

$$\eta = \hat{M}^{-1}(\Delta M\ddot{q} + \Delta h) \quad (38-6)$$

معادله سیستم ربات به صورت زیر می‌شود:

$$\ddot{q} = \hat{M}^{-1}(\tau - \hat{h}) - \eta \quad (39-6)$$

یک سطح لغزش بصورت (3-6) تعریف می‌کنیم

$$S = \dot{e} + \lambda e$$

$$\dot{S} = \ddot{e} + \lambda \dot{e}$$

$$e = q_d - q$$

$$\dot{S} = \ddot{q}_d - \ddot{q} + \lambda \dot{e} = \ddot{q}_d - \hat{M}^{-1}\tau + \hat{M}^{-1}\hat{h} + \eta + \lambda \dot{e}$$

برای آن که $S\dot{S} < 0$ باشد، قانون کنترل را به صورت زیر پیشنهاد می‌دهیم:

$$\tau = \hat{M}\ddot{q}_d + \hat{h} + \hat{M}\lambda\dot{e} + \hat{M}\bar{g} + \hat{M}KSgn(s) \quad (40-6)$$

که با اعمال این قانون کنترل، \dot{S} به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\dot{S} = +\eta - \bar{g} - kSgn(s) \quad (41-6)$$

که در آن \bar{g} به صورت زیر می‌باشد

$$\bar{g} = \begin{cases} \rho \frac{S}{|S|} & |S| > \varepsilon \\ \rho \frac{S}{\varepsilon} & |S| \leq \varepsilon \end{cases} \quad (42-6)$$

$$|\eta| \leq \rho \quad (43-6)$$

حال برای بررسی پایداری مجانبی به روش لیاپانوف، قانون زیر را پیشنهاد می‌دهیم:

$$V = \frac{1}{2} S^2 \quad (44-6)$$

$$\dot{V} = S\dot{S} = S(\eta - \bar{g} - KSgn(S)) \quad (47-6)$$

اگر $|S| \leq \varepsilon$ باشد:

$$\dot{V} = S \left(\eta - P \frac{S}{\varepsilon} - K \frac{|S|}{S} \right) = s\eta - P \frac{S^2}{\varepsilon} - K|S| = -|S| \left(\frac{-S\eta}{|S|} + P \frac{|S|}{\varepsilon} + K \right)$$

$$\dot{V} = -|S| \left(\frac{-S}{|S|} \eta + \rho \frac{|S|}{\varepsilon} + K \right) \quad (48-6)$$

$$\dot{V} < -|S| \left[\rho \left(1 + \frac{|S|}{\varepsilon} \right) + K \right] \quad (49-6)$$

اگر شرط زیر برقرار باشد پایداری لیپانوف تضمین می‌شود

$$\rho \left(1 + \frac{|S|}{\varepsilon} \right) + K \geq 0 \quad (50-6)$$

$$K \geq \rho \left(1 + \frac{|S|}{\varepsilon} \right) \quad (51-6)$$

مقادیر نامی و عدم قطعیت‌های تابع‌های $h(q, \dot{q}), M(q)$ به صورت زیر می‌باشد:

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} 657/62 & 67/3 \\ 67/3 & 137/5 \end{bmatrix}$$

$$\overline{M} = \begin{bmatrix} 5461 & 2208 \\ 2208 & 998/0875 \end{bmatrix}$$

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} 2/9593 \times 10^3 & 1/1377 \times 10^3 \\ 1/1377 \times 10^3 & 568/1875 \end{bmatrix}$$

$$\Delta M = \begin{bmatrix} 2/5017 \times 10^3 & 1/0703 \times 10^3 \\ 1/0703 \times 10^3 & 430/6875 \end{bmatrix}$$

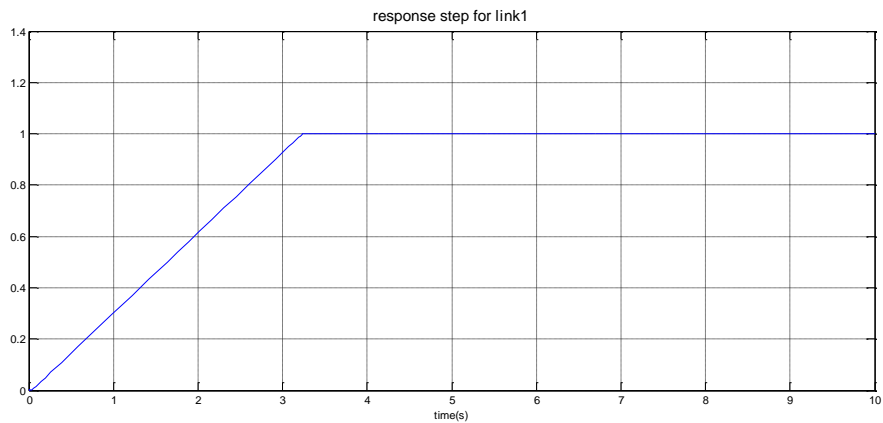
$$\Delta h = \begin{bmatrix} 83016 \\ 33987 \end{bmatrix}$$

$$\hat{h} = \begin{bmatrix} -32574 \\ 3/3985 \times 10^4 \end{bmatrix}$$

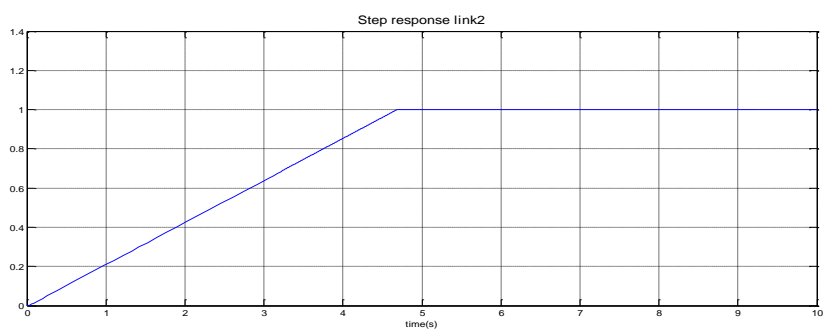
$$\rho = \|\hat{M}^{-1} \Delta M\| \cdot \|\hat{q}\| + \|\hat{M}^{-1}\| \cdot \|\Delta h\|$$

که پس از شبیه سازی در *simulink* پاسخ پله ربات دو بازوی کنترل شده به وسیله روش مود لغزشی

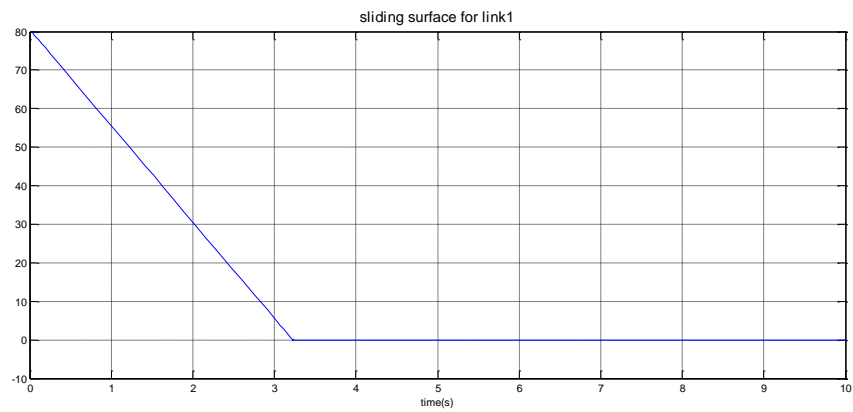
را در زیر مشاهده می کنید:



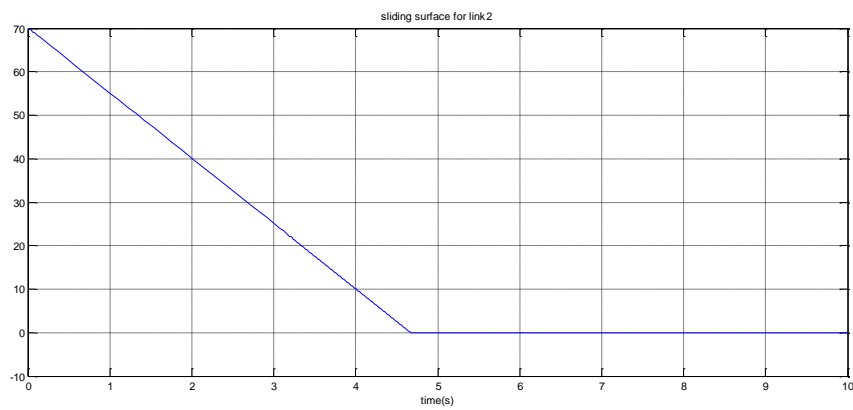
شکل ۳-۶: پاسخ پله رابط اول



شکل ۴-۶: پاسخ پله رابط دوم

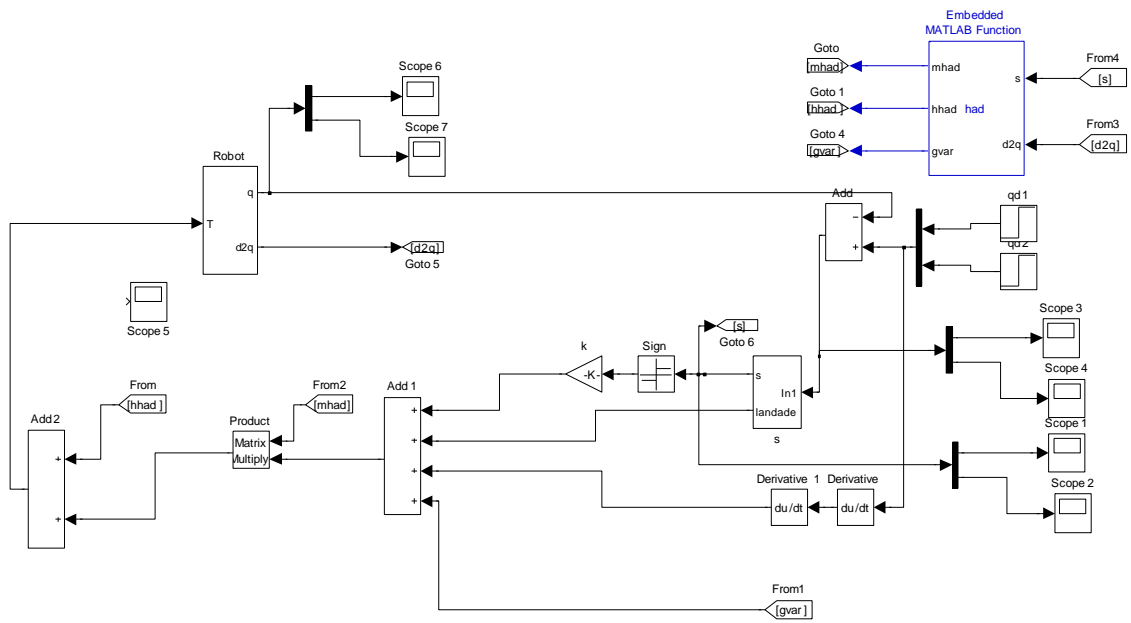


شکل ۶-۵: سطح لغزشی رابط اول



شکل ۶-۶: سطح لغزشی رابط دوم

بلوک دیاگرام استفاده شده در *simulink* به صورت زیر می باشد:



شکل ۶-۷: نمودار استفاده شده در محیط simulink

۷-۱ نتایج

در این پایان نامه سه کنترل کننده مقاوم H_p, H_∞ و مود لغزشی بر روی ربات دو بازو طراحی شد. کنترل کننده H_p طراحی شده در این پایان نامه، قادر به مدل کردن اغتشاش و همچنین دینامیک های مدل نشده نمی باشد که این از معایب آن است ولی در عوض این کنترل کننده یک کنترل کننده بهینه می باشد. این کنترل کننده همان طور که دیده شد در مقابل نامعینی های پارامتری مقاوم بود. خطای حالت دائم کنترل کننده مود لغزشی از دو کنترل کننده دیگر کمتر بود ولی در عوض زمان نشست آن از دو کنترل کننده دیگر بیشتر بود.

همان طور که دیده شد هر سه کنترل کننده از مقاومت خوبی برخوردار بودند.

در کنترل کننده H_∞ ، طراح می تواند مقدار تکین را شکل دهی کند که این کار در کنترل کننده H_p امکان پذیر نیست.

همان طور که در فصل چهارم دیده می شود پاسخ پله کنترل کننده H_p بسیار سریعتر از کنترل کننده H_∞ و مود لغزشی می باشد که این به دلیل مدل نکردن دینامیک های مدل نشده در این کنترل کننده می باشد.

کنترل کننده مود لغزشی تنها در محدوده انحرافات خیلی کوچک مدل اعتبار دارد به همین دلیل در این پایان نامه به طراحی کنترل کننده مقاوم H_∞ پرداختیم.

۲-۷ پیشنهادات

- برای انجام پروژه‌های دیگر توسط دانشجویان پیشنهاد می‌شود:
۱. از کنترل کننده H_∞ غیر خطی بجای کنترل کننده H_∞ استفاده شود.
 ۲. از کنترل کننده μ به جای کنترل کننده H_∞ استفاده شود.
 ۳. از کنترل کننده LQR/LTR به جای کنترل کننده H_p استفاده شود.
 ۴. از کنترل کننده های تطبیقی و H_∞ همزمان استفاده شود.
 ۵. از ربات های کروی و هنرمند و غیره به جای ربات دو بازو استفاده شود.

مراجع

- [1] feng lin, (2007), "Robust Control Design An Optimal Control Approach", RSP
- [2] اسپانگ.م وساگار.و.(۱۳۸۳). "کنترل و دینامیک ربات", فاتح, ام,م, انتشارات دانشگاه صنعتی شاهرود, شاهرود
- [3] H.kwakernaak and R.sivan,(1972),"Linear optimal Control Systems", Newyourk, wiley
- [4] M.J.Crimble and M.A.Johnson.(2005),"Robust control design with matlab', springer
- [5] k. zhou and J.C.Doyle ,(1999), "essentials of Robust Control", prentice hall
- [6] J.Doyle,B.Froncis and A.Tonnen boum,(1990),"feed back control theory", Macmillan Publishing co
- [7] M.Green and D.J.N.limebee , "linear robust control", Pearson education
- [8] M.C.Turner and D.G.Bates.(2007),"mathe matical methods for robust and nonlinear control", springer
- [9] R.Moheimani,(2000),"Perspectives in robust control", springer
- [10] B.Pal and B.choudhuri,(2005),"robust control the parametric Approach", Prentice Hall PTR
- [11] M.J. Crimble .(2006),"robust in dustrial control systems: optimal Design Approach for plhyominal system", john wiley & sons ltd
- [12] R.A.freeman and P.V.kokotovic.(1996),"robust nonlinear control design", Birkhauer
- [13] Q.C Zhong.(2006),"Robust control of time- delay systems",springer
- [14] G.E dullerud,"A course in robust control they"
- [15] N. Elio and m.A.dohleh."computational methods for controller design", springer
- [16] y.choi,w,k. chung and y.youm,(1997),"robust control of monipulators, using Haniltonian optimization" IEEE, Vew mexico
- [17] G.liu and A.Coldenbery.(1997),"robust control of robot manipulators based on dynamics decomposition", IEEE transactions on robots and automation. Vol 13, No5.
- [18] A.A.Boadonov and A.v.tino feev.(1999),"robust optimal neural control of robors", IEEE.

- [19] A.Denker and k.ohnishi,(1996),"robust tracking control of mechatronic arms", IEE trasac Hons on mechatronics,vol,No2
- [20] m.h.a.duvis and r.b.vinter.(1985),"stochastic modeling and control",London: chapman& Halll
- [21] k.Glover and j.c.doyle,(1988),"state spae for mulae for all stabilizing controller htat satify on H_∞ norm bound and relation to rist sensitivity",systems and control letter
- [22] j.doule, k.Glover, p.khargpnegar and b-francis,(1988),"state- space solutions to standard H2 and H_∞ control problems",in proc, American control conf, atlnta GA
- [23] b.a.francis (1986), "a curse in H_∞ control theory",sprige- verlag
- [24] k. hashimoto, t. kimito and h. kimurg, (1996)," H_∞ model- based pobust control of A moni[ulator", IEEE/ RS international workshop on intellingent robots and systems Iros, 91, N.V.3-5
- [25] t.n.namerinawa, f.matsumuta and m.fujita, (1996), "robust control of a fobot manipulator using a linear parameter varying representation",IEEE international conference on industrial technology.
- [26] f.lin and r.d.brandt.(1996),"An optimal control Approach to Robust control of robot manipularors",IEEE inter national conference on control
- [27] H. souley, l.b.boddus, y.b.aubry and m.darouach, " H_∞ control of a scara robot using polytopic", LPV opproach.IEEE
- [28] F.lca and d. dowson,(1993),"control of robot monipulators",new york: Macmillan
- [29] m. chiloli and P.gobinel.(1996)," H_∞ design with pole placement constraints: an LmI opproach",IEEE tronsaut, contr, vol. 41. pp. 358-367
- [30] w,xingcheng and r.ying (2004)," H_∞ control of shi[steering", IEE conference on pobotics, Automotion and mechatinics.
- [31] J. park, w. chung, y. youm and m.kin. (1998)," H_∞ robust motion control oc kinematically redundant monipulators", IEEE/RSJ can frence on intelligent robots and systems Victoria, .c. conada
- [32] m.a.Dohleh and I.J. K. Bolillo,(1995),"control of uncertain system
- [33] c.h. houpis and S.J.Rasmussen.(1987,)"Uantitatie reedback theory",marceldekker
- B.A.Froncis, A course in H_∞ control theory" , springer

- [34] j.m. mociejowski.(1989),"multivariable feedback design" Addison-wesley
- [35] f.paganini.(1997),"state space conditions for robust H_2 Analysis".
- [36] k.y.yang, s.r. rall and e. feron.(1997),"a new design mthod for tobust H_2 controllers using PoPov multupliers"
- [37] s.p.boyd, and c.h.barratt.(1991), "linear controller design: limits of performonce",
nw jerse
- [38] H.rotstein and A.sideris,(1994)," H_∞ optimization with time domoim constraints",
IEEE Transactions on Automatic control
- [39] m.m.moghaddam,B.scandm.eng,(1997),"rout H_∞ - based control of flexible joint
robots with Harmonic drive trunsmision",national library of conaada.
- [40] v. dragan,t. morozan and A.m.stoica.(2005),"mathematical methods in robust
control of linear stochutic systems",springer.

[41] اصغریان ر. و افشاری س، (۱۳۷۴) "معرفی الگوریتمی برای طراحی سیستماتیک کنترل کننده

های روبااست H_∞ ، سومین کنفرانس سالانه مهندسی برق ایران

[42] مسکین ن.(۱۳۸۰)،پایان نامی ارشد،" طراحی کنترل کننده مقاوم H_∞ برای سیستم ترمز ضد

قفل خوردرو"، دانشکده فنی، دانشگاه تهران

[43] گنجه فر س.و گوی ابادی ع، (۱۳۷۷)، "طراحی کنترل مقاوم H_∞ برای روبات های با دینامیک

نامطمئن"، اولین همایش سالانه اتومایون، رباتیک و کنترل

Abstract

This thesis discusses about design of H_2 & H_∞ controllers for the two-arms robot system. First it talks about multivariable control systems. Multivariable control systems, includes trade off between sensitivity and complementary sensitivity, singular value and is uncertainty. Then get the model of the two-arms robot system and introducing H_2 & H_∞ multivariable robust control. The design of H_2 & H_∞ controller perform for the two-arms robot system, Then introducing sliding mode robust controller and designed the controller for the system of two-arms robot. Finally sliding mode robust controller compared with H_2 & H_∞ controller. System of the two-arms robot include 4 state variable, 2 input and 2 output. The aim of this thesis includes stabilization, performance robustness of controlled system. We add uncertainty into systems, and discuss about stability and performance of controlled system.

Key-Words: Uncertainty, H_2 & H_∞ controllers, Sliding Mode Controller, Robot two-arms.