

الله أكبر



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده برق و رباتیک

گروه کنترل

## MIMO

دانشجو : علیرضا سحاب

استاد راهنما

دکتر محمد حداد ظریف

استاد مشاور

پروفسور عبدالله شیدفر

رساله دکتری جهت اخذ درجه دکتری

تیر ۱۳۸۸

# دانشگاه صنعتی شاهرود

## دانشکده برق و رباتیک

### گروه کنترل

رساله دکتری آقای علیرضا سحاب تحت عنوان:

طراحی کنترل کننده بهینه برای کلاس خاصی از سیستمهای غیرخطی MIMO

با استفاده از روش پسگام تعمیم یافته

در تاریخ ۱۳۸۸/۴/۹ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک دکتری مورد ارزیابی و با درجه .....  
مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	استاد مشاور	امضاء	استاد راهنما
	پروفسور عبدالله شیدفر		دکتر محمد حداد ظریف

امضاء	اساتید داور
	دکتر ناصر پریر
	دکتر محمدعلی صدرنیا
	دکتر محمد مهدی فاتح
	دکتر علیرضا فاتحی
امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی
	دکتر امیدرضا معروضی

تقدیم بہ:

عشق

در ابتدای کار بر خود لازم می‌دانم که از خانواده عزیزم که در لحظه لحظه انجام این کار یار و یاور من بودند؛ از پدر، مادر و همسر بزرگوارم تشکر و قدردانی نمایم.

از استاد راهنمای خود جناب آقای دکتر محمد حدادظریف و همچنین استاد مشاور خود جناب آقای پروفیسور عبدالله شیدفر که مشکل گشای من در تمام مراحل اجرای پروژه بوده‌اند، تشکر می‌نمایم.

از اساتید ارزیاب بزرگوار جناب آقای دکتر ناصر پریرز، جناب آقای دکتر محمدعلی صدرنیا، جناب آقای دکتر محمد مهدی فاتح و جناب آقای دکتر علیرضا فاتحی و نماینده محترم تحصیلات تکمیلی جناب آقای دکتر امیدرضا معروضی که با وجود گرفتاریهای فراوان قبول زحمت کرده و در جلسه دفاعیه شرکت نموده و با پیشنهادات خود مرا در تدوین بهتر پایان‌نامه یاری نموده‌اند، سپاسگزارم.

از دوستان عزیزم که تعداد آنها بیشمار است و زمان، مکان و زبان اجازه نوشتن نام تک‌تک آنها را به من نمی‌دهند و در لحظات تلخ و شیرین انجام این تحقیق یار و یاور من بوده‌اند، قدردانی می‌نمایم.

در انتها از کلیه کسانی که در هر گام از اجرای این تحقیق به من کمک کرده‌اند و من را مدیون خود ساخته‌اند ولی کمبود جا و ناتوانی حافظه از نام بردن آنها جلوگیری نموده است، تشکر نموده و برای ایشان آرزوی موفقیت و بهروزی روزافزون دارم.

علیرضا سحاب

تیر ۱۳۸۸

اینجانب علیرضا سحاب تایید می‌نمایم که مطالب مندرج در این رساله نتیجه تحقیقات خودم بوده و در صورت استفاده از نتایج دیگران، مرجع آن را ذکر نموده‌ام.

کلیه حقوق مادی مترتب از نتایج مطالعات، آزمایشات و نوآوری ناشی از تحقیق موضوع این رساله متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد.

تیر ۱۳۸۸

برای مدت بسیار طولانی تنها راه بررسی پایداری در سیستمهای خطی و غیرخطی تئوری لیاپانوف بود. با کاربردی شدن این تئوری، دانشمندان بیش از پیش با مشکلات آن آشنا شدند. از مهمترین مشکلاتی که دانشمندان در این راه با آن مواجه شدند، یافتن تابعی با خصوصیات ویژه تابع لیاپانوف می باشد. برای حل این مشکل راه‌حلهای متفاوتی ارائه شد که یکی از آنها روش پسگام است. روش پسگام با پسخور گرفتن از حالات سیستم و اعمال ترکیب غیرخطی آنها طبق روابط خاص تضمین کننده پایداری مجانبی سیستم و همچنین تعیین کننده تابع لیاپانوف سیستم می باشد. اما مشکلی که در این راه ایجاد می شود، محدودیت در تعداد سیستمهایی است که می توان این روش را به آنها اعمال کرد.

برای حل مشکل محدوده کوچک کاربرد این روش و تعمیم آن به سیستمهای بیشتر، در این رساله روشی نوین ارائه شده است. با توجه به اینکه اصول کار این روش مشابه روش پسگام بوده و در واقع کارآیی آن را برای سیستمهای واقعی بیشتری گسترش می دهد، این روش را پسگام تعمیم یافته نام نهاده ایم.

برای اثبات کارآیی روش پیشنهادی در سیستمهای عملی، پدیده آشوب به عنوان یک مورد مطالعاتی انتخاب و با توضیح این پدیده و سپس اعمال کنترل کننده طراحی شده به روش پسگام تعمیم یافته به چنین سیستمهایی، کارآیی بیشتر این روش اثبات می گردد.

در انتخاب سیستمهای آشوبناک از دو مدل سیستمهای SISO و MIMO استفاده شده تا در هر دو مورد از امتیازات این روش در کنترل این سیستمها استفاده گردد. برای کنترل این پدیده سیستمها را از دو دیدگاه پایدارسازی و ردیابی ورودی پله مورد بررسی قرار داده ایم.

در انتها برای دستیابی به پاسخی بهتر، کنترل کنندههای طراحی شده برای حذف آشوب را با استفاده از الگوریتم ژنتیک بهینه نموده ایم.

**کلمات کلیدی** : آشوب، الگوریتم ژنتیک، تابع لیاپانوف کنترلی، روش پسگام، روش پسگام

تعمیم یافته، سیستم اتونوموس، سیستم پسخور صریح، سیستم چند ورودی - چند خروجی.



1. **"Improved Backstepping Method to GBM"** Accepted on World Applied Science Journal (WASJ); ISI Journal.
2. **"Chaos Control in Nonlinear Systems Using the Generalized Backstepping Method"** Accepted on American Journal of Engineering and Applied Science (AJEAS).
3. **"Generalized Backstepping Method to Design MIMO Autonomous Nonlinear Control Systems "** Accepted on ECTI-CON 2009.

۴. «روش نوین در طراحی سیستم‌های غیرخطی» پذیرفته شده در مجله علمی - پژوهشی ریاضیات کاربردی دانشگاه آزاد اسلامی.

۵. «کنترل سیستم غیرخطی آونگ وارونه» پذیرفته شده در مجله علمی - پژوهشی ریاضیات کاربردی دانشگاه آزاد اسلامی و کنفرانس ملی ریاضیات.

۱	.....	فصل اول : مقدمه
۵	.....	فصل دوم : مقدمه‌ای بر تئوری لیاپانوف
۶	.....	۱-۲ مقدمه
۶	.....	۲-۲ تعاریف اولیه
۱۰	.....	۳-۲ بررسی پایداری نقاط تعادل
۱۴	.....	۴-۲ روشهای تعیین تابع لیاپانوف
۱۴	.....	۱-۴-۲ تعیین تابع لیاپانوف در سیستمهای خطی تغییرناپذیر با زمان (LTI)
۱۷	.....	۲-۴-۲ تعیین تابع لیاپانوف در سیستمهای غیرخطی اتونوموس
۲۲	.....	فصل سوم : تاریخچه‌ای روش پسگام
۲۳	.....	۱-۳ مقدمه
۲۳	.....	۲-۳ پیدایش تئوری پسگام
۲۴	.....	۳-۳ کاربردهای روش پسگام
۲۵	.....	۴-۳ گسترش روش پسگام
۲۸	.....	فصل چهارم : روش پسگام
۲۹	.....	۱-۴ مقدمه
۲۹	.....	۲-۴ مفهوم پسگام
۳۲	.....	۳-۴ استفاده از روش پسگام برای کنترل سیستمهای پسخور صریح
۳۵	.....	۴-۴ نتایج شبیه‌سازی

۴۵	.....	فصل پنجم : روش پسگام تعمیم یافته
۴۶	.....	مقدمه ۱-۵
۴۶	.....	روش پسگام تعمیم یافته ۲-۵
۵۰	.....	نتایج شبیه سازی ۳-۵
۵۱	.....	پایدارسازی حالات سیستم ۱-۳-۵
۵۲	.....	ردیابی ورودی پله ۲-۳-۵
۵۵	.....	فصل ششم : نمونه های کاربردی
۵۶	.....	مقدمه ۱-۶
۵۶	.....	آونگ وارونه ۲-۶
۵۸	.....	طراحی کنترل کننده به روش پسگام تعمیم یافته ۱-۲-۶
۵۹	.....	طراحی کنترل کننده فازی با کنترل کننده ناظر غیر فازی ۲-۲-۶
۶۲	.....	مقایسه دو روش پسگام تعمیم یافته و کنترل فازی با کنترل کننده نظارتی ۳-۲-۶
۶۳	.....	تاثیر تغییر پارامتر در خروجی با استفاده از روش پسگام تعمیم یافته ۴-۲-۶
۶۴	.....	ترمز هیدرولیک سیستم ترمز ضد قفل خودرو ۳-۶
۶۶	.....	کنترل ترمز هیدرولیک ABS با استفاده از روش پسگام تعمیم یافته ۱-۳-۶
۶۷	.....	کنترل ترمز هیدرولیک ABS با استفاده از روش کنترل کننده LQG ۲-۳-۶
۶۸	.....	تاثیر تغییر پارامتر بر خروجی سیستم بصورت تجربی ۳-۳-۶
۶۹	.....	مقایسه دو روش پسگام تعمیم یافته و کنترل کننده LQG ۴-۳-۶

۷۱	.....	<b>فصل هفتم : روش پسگام تعمیم یافته در کنترل سیستمهای MIMO</b>
۷۲	.....	مقدمه ۱-۷
۷۲	.....	روش پسگام تعمیم یافته در سیستمهای غیر اتونوموس MIMO ۲-۷
۷۶	.....	نتایج شبیه سازی ۳-۷
۷۶	.....	پایداری سازی حالات سیستم مثال ۱-۷ ۱-۳-۷
۷۸	.....	ردیابی ورودی پله مثال ۱-۷ ۲-۳-۷
۸۲	.....	پایداری سازی حالات سیستم مثال ۲-۷ ۳-۳-۷
۸۵	.....	<b>فصل هشتم : آشوب</b>
۸۶	.....	مقدمه ۱-۸
۸۶	.....	تاریخچه آشوب ۲-۸
۸۷	.....	نگاشت تک بعدی ۳-۸
۹۰	.....	چند نمونه عملی از آشوب در سیستمها ۴-۸
۹۰	.....	آشوب در مدارهای الکتریکی ۱-۴-۸
۹۴	.....	آشوب در سیستمهای مکانیکی ۲-۴-۸
۹۸	.....	معادلات لورنز ۳-۴-۸
۱۰۲	.....	<b>فصل نهم : کنترل آشوب</b>
۱۰۳	.....	مقدمه ۱-۹
۱۰۳	.....	کنترل آشوب در یک سیستم SISO ۲-۹
۱۰۴	.....	پایداری سازی حالات سیستم ۱-۲-۹
۱۰۸	.....	ردیابی ورودی پله ۲-۲-۹

۱۱۰	.....	مقاسیه روش پسگام با روش پسگام تعمیم یافته	۳-۲-۹
۱۱۰	.....	کنترل آشوب در یک سیستم MIMO	۳-۹
۱۱۳	.....	پایداری حالات سیستم	۱-۳-۹
۱۱۷	.....	ردیابی ورودی پله	۲-۳-۹
۱۱۹	.....	<b>فصل دهم: بهینه سازی کنترل کننده های آشوب</b>	
۱۲۰	.....	مقدمه	۱-۱۰
۱۲۰	.....	مقدمه ای بر الگوریتم ژنتیک	۲-۱۰
۱۲۰	.....	بعضی از اصطلاحات الگوریتم ژنتیک	۱-۲-۱۰
۱۲۲	.....	مراحل الگوریتم ژنتیک	۲-۲-۱۰
۱۲۳	.....	کاربرد الگوریتم ژنتیک در بهینه سازی کنترل کننده های آشوب	۳-۱۰
۱۲۴	.....	بهینه سازی کنترل کننده های آشوب در سیستم SISO	۱-۳-۱۰
۱۲۶	.....	بهینه سازی کنترل کننده های آشوب در سیستم MIMO	۲-۳-۱۰
۱۲۸	.....	<b>فصل یازدهم: نتیجه گیری و پیشنهادات</b>	
۱۲۹	.....	مقدمه	۱-۱۱
۱۲۹	.....	مروری بر کارهای انجام شده در رساله	۲-۱۱
۱۳۰	.....	مزایای روش پسگام تعمیم یافته	۳-۱۱
۱۳۱	.....	معایب روش پسگام تعمیم یافته	۴-۱۱
۱۳۲	.....	پیشنهادات	۵-۱۱
۱۳۳	.....	<b>فهرست مراجع و مآخذ</b>	

## شکلهای فصل دوم

- شکل ۱-۲ : مفاهیم پایداری ..... ۸
- شکل ۲-۲ : مفهوم همگرایی به بزرگترین مجموعه تغییر ناپذیر  $M$  ..... ۱۳

## شکلهای فصل سوم

- شکل ۱-۳ : آمار مقالات ارائه شده در IEEE در مورد پسگام ..... ۲۷

## شکلهای فصل چهارم

- شکل ۱-۴ : مفهوم پسگام ..... ۳۱
- شکل ۲-۴ : تغییر حالات سیستم (۲۹-۴) قبل از پایداری سازی ..... ۳۵
- شکل ۳-۴ : تاثیر افزودن کنترل کننده به سیستم (۲۹-۴) ..... ۳۶
- شکل ۴-۴ : تابع لیاپانوف سیستم (۲۹-۴) ..... ۳۷
- شکل ۵-۴ : تغییر حالات سیستم (۳۲-۴) قبل از پایداری سازی ..... ۳۷
- شکل ۶-۴ : تاثیر افزودن کنترل کننده به سیستم (۳۲-۴) ..... ۳۸
- شکل ۷-۴ : تابع لیاپانوف سیستم (۳۲-۴) ..... ۳۹
- شکل ۸-۴ : تغییر حالات سیستم (۳۵-۴) قبل از پایداری سازی ..... ۳۹
- شکل ۹-۴ : تاثیر افزودن کنترل کننده به سیستم (۳۵-۴) ..... ۴۰
- شکل ۱۰-۴ : تابع لیاپانوف سیستم (۳۵-۴) ..... ۴۰
- شکل ۱۱-۴ : تغییر حالات سیستم (۳۸-۴) قبل از پایداری سازی ..... ۴۱
- شکل ۱۲-۴ : تاثیر افزودن کنترل کننده به سیستم (۳۸-۴) ..... ۴۲
- شکل ۱۳-۴ : تابع لیاپانوف سیستم (۳۸-۴) ..... ۴۳

### شکلهای فصل پنجم

- شکل ۵-۱ : تغییر حالات سیستم (۵-۱۸) قبل از پایدارسازی ..... ۵۰
- شکل ۵-۲ : تاثیر افزودن کنترل کننده به سیستم (۵-۱۸) ..... ۵۲
- شکل ۵-۳ : تابع لیاپانوف سیستم (۵-۱۸) ..... ۵۳
- شکل ۵-۴ : ردیابی پاسخ پله توسط خروجی سیستم (۵-۱۸) با روش پسگام تعمیم یافته .... ۵۴

### شکلهای فصل ششم

- شکل ۶-۱ : سیستم آونگ وارونه ..... ۵۶
- شکل ۶-۲ : تغییر حالات سیستم آونگ وارونه قبل از پایدارسازی ..... ۵۷
- شکل ۶-۳ : تغییر حالت  $x_1$  سیستم آونگ وارونه پس از پایدارسازی به ازای شرایط اولیه متفاوت ..... ۵۸
- شکل ۶-۴ : تغییر حالت  $x_2$  سیستم آونگ وارونه پس از پایدارسازی به ازای شرایط اولیه متفاوت ..... ۵۹
- شکل ۶-۵ : تغییر حالت  $x_1$  سیستم آونگ وارونه پس از پایدارسازی با کنترل کننده فازی نظارتی ..... ۶۱
- شکل ۶-۶ : سیگنال کنترل لازم برای پایدارسازی با کنترل کننده پسگام تعمیم یافته ..... ۶۲
- شکل ۶-۷ : سیگنال کنترل لازم برای پایدارسازی با کنترل کننده فازی نظارتی ..... ۶۳
- شکل ۶-۸ : تغییر زاویه آونگ در اثر تغییر جرم وزنه ..... ۶۳
- شکل ۶-۹ : سیگنال کنترلی لازم برای پایدارسازی در اثر تغییر جرم وزنه ..... ۶۴
- شکل ۶-۱۰ : تغییرات لغزش نسبت به زمان در بخش هیدرولیک ABS قبل از اعمال کنترل کننده ..... ۶۶
- شکل ۶-۱۱ : تغییرات لغزش نسبت به زمان در بخش هیدرولیک ABS پس از اعمال کنترل کننده با استفاده از روش پسگام تعمیم یافته ..... ۶۷
- شکل ۶-۱۲ : تغییرات لغزش نسبت به زمان در بخش هیدرولیک ABS پس از اعمال کنترل کننده با استفاده از روش کنترل کننده LQG ..... ۶۸

شکل ۶-۱۳ : تاثیر خروجی سیستم از تغییر ممان اینرسی به اندازه ۲۰٪ با اعمال کنترل کننده به

روش پسگام تعمیم یافته ..... ۶۸

شکل ۶-۱۴ : تاثیر خروجی سیستم از تغییر ممان اینرسی به اندازه ۲۰٪ با اعمال  $LQG$  ..... ۶۹

### شکل‌های فصل هفتم

شکل ۷-۱ : تغییر حالات سیستم (۷-۲۱) قبل از پایدارسازی ..... ۷۴

شکل ۷-۲ : تغییر حالات سیستم (۷-۲۱) پس از اعمال کنترل کننده ..... ۷۵

شکل ۷-۳ : قوانین کنترل پسخور حالت مناسب برای پایدارسازی سیستم (۷-۲۱) ..... ۷۶

شکل ۷-۴ : تابع لیاپانوف سیستم (۷-۲۱) ..... ۷۷

شکل ۷-۵ : ردیابی ورودی پله توسط حالت  $x_2$  در سیستم (۷-۲۱) ..... ۷۹

شکل ۷-۶ : قوانین پسخور حالت برای ردیابی ورودی پله توسط حالت  $x_2$  در سیستم (۷-۲۱) . ۷۹

شکل ۷-۷ : تغییر حالات سیستم (۷-۳۹) قبل از پایدارسازی ..... ۸۲

شکل ۷-۸ : تغییر حالات سیستم (۷-۳۹) پس از اعمال کنترل کننده ..... ۸۴

شکل ۷-۹ : قوانین کنترل پسخور حالت مناسب برای پایدارسازی سیستم (۷-۳۹) ..... ۸۴

### شکل‌های فصل هشتم

شکل ۸-۱ : تحلیل نموداری دو تکرار مختلف ..... ۸۸

شکل ۸-۲ : نقاط ثابت جاذب و دافع ..... ۸۸

شکل ۸-۳ : مدارهای مختلف در یک تابع با توجه به نقطه شروع ..... ۸۹

شکل ۸-۴ : مدار چوآ ..... ۹۰

شکل ۸-۵ : مشخصه عنصر غیرخطی ..... ۹۱

شکل ۸-۶ : رفتارهای مختلف یک مدار چوآ ..... ۹۳



- شکل ۷-۸: تغییر حالت مدار چوآ به ازای  $\alpha = 9.4$  ..... ۹۳
- شکل ۸-۸: آشوب در مدار چوآ ..... ۹۴
- شکل ۹-۸: سیستم خود تحریک مکانیکی ..... ۹۵
- شکل ۱۰-۸: پاسخ معادله (۸-۱۴) ..... ۹۷
- شکل ۱۱-۸: پاسخ معادله (۸-۱۵) ..... ۹۷
- شکل ۱۲-۸: پاسخ معادله (۸-۱۶) ..... ۹۸
- شکل ۱۳-۸: تغییر حالات سیستم (۸-۱۷) ..... ۹۹
- شکل ۱۴-۸: نمودارهای دوبعدی صفحه- فاز سیستم (۸-۱۷) در  $t = 250Sec$  ..... ۱۰۰
- شکل ۱۵-۸: نمودار سه بعدی صفحه- فاز سیستم (۸-۱۷) در  $t = 250Sec$  ..... ۱۰۱

### شکلهای فصل نهم

- شکل ۱-۹: تاثیر افزودن کنترل کننده به سیستم (۹-۲) ..... ۱۰۵
- شکل ۲-۹: نمودار سه بعدی صفحه- فاز سیستم (۹-۲) پس از پایدارسازی در  $t = 250Sec$  ..... ۱۰۵
- شکل ۳-۹: نمودارهای دوبعدی صفحه- فاز سیستم (۹-۲) پس از پایدارسازی در  $t = 250Sec$  ..... ۱۰۶
- شکل ۴-۹: تابع لیاپانوف سیستم (۹-۲) ..... ۱۰۷
- شکل ۵-۹: ردیابی ورودی پله توسط خروجی سیستم (۹-۸) با روش پسگام تعمیم یافته ... ۱۰۹
- شکل ۶-۹: تاثیر افزودن کنترل کننده با روش پسگام به سیستم (۸-۱۷) ..... ۱۰۹
- شکل ۷-۹: تغییر حالات سیستم (۹-۱۲) ..... ۱۱۱
- شکل ۸-۹: نمودار سه بعدی صفحه- فاز سیستم (۹-۱۲) در  $t = 250Sec$  ..... ۱۱۱
- شکل ۹-۹: نمودارهای دوبعدی صفحه- فاز سیستم (۹-۱۲) در  $t = 250Sec$  ..... ۱۱۲
- شکل ۱۰-۹: تاثیر افزودن کنترل کننده به سیستم (۹-۱۲) ..... ۱۱۴
- شکل ۱۱-۹: نمودار سه بعدی صفحه- فاز سیستم (۹-۱۲) پس از پایدارسازی در  $t = 250Sec$  ..... ۱۱۴

شکل ۹-۱۲: نمودارهای دوبعدی صفحه- فاز سیستم (۹-۱۲) پس از پایدارسازی در  $t = 250\text{Sec}$  ۱۱۵

شکل ۹-۱۳: تابع لیاپانوف سیستم (۹-۱۲) ..... ۱۱۶

شکل ۹-۱۴: ردیابی ورودی پله توسط خروجی سیستم (۹-۸) با روش پسگام تعمیم یافته ۱۱۸

### شکلهای فصل دهم

شکل ۱۰-۱: تاثیر بهینه‌سازی کنترل کننده اعمالی به سیستم (۹-۲) ..... ۱۲۴

شکل ۱۰-۲: تغییرات تابع برازندگی سیستم (۹-۲) قبل و بعد از بهینه‌سازی ..... ۱۲۵

شکل ۱۰-۳: تاثیر بهینه‌سازی کنترل کننده اعمالی به سیستم (۹-۱۲) ..... ۱۲۶

شکل ۱۰-۴: تغییرات تابع برازندگی سیستم (۹-۱۲) قبل و بعد از بهینه‌سازی ..... ۱۲۷



در طول تاریخ بشریت، کنترل سیستمها از مسائلی بوده که انسان همواره با آن درگیر می‌باشد؛ از انسان غارنشین گرفته تا انسان امروزی، همواره خواستار این مساله بوده که سیستم در اختیار او پایدار گشته و یا اینکه حالت خاصی داشته باشد که مفهوم آن همان ردیابی است. اگرچه سیستمهایی که در اختیار آنها بوده از لحاظ پیچیدگی تفاوت‌های بسیاری با هم دارد، ولی اساس کار آنها یکی است؛ مثلاً انسان بدوی در هنگام شکار همواره سعی کرده تا سنگ پرتاب‌شده به جانور متحرک برخورد نماید و این در حالیست که انسان امروزی با پرتاب موشک‌های آشیانه‌یاب<sup>۱</sup>، همواره قصد هدف قرار دادن هدفهای متحرک را دارد. هر دو کار بر اساس ردیابی یک ورودی مرجع انجام می‌گیرد؛ اما پیچیدگی سیستمها با هم متفاوت است.

در این راستا یکی از مشکلات عمده، رفتار غیرخطی سیستمهای در اختیار می‌باشد. در طول سالیان دانشمندان همواره درصدد بوده‌اند تا با ابداع روشهای مختلف کنترلی، در جهت رفع این مشکل گام بردارند. در این راستا یکی از بهترین روشها توسط دانشمندان و ریاضی‌دان روسی، لیاپانوف<sup>۲</sup>، مطرح گردیده است. لیاپانوف کل یک سیستم غیرخطی را با یک تابع شبه‌انرژی مدل کرده و سپس نتیجه گرفت که اگر سیستم دارای مقداری انرژی باشد و این انرژی دائماً در حال کاهش باشد، پس از گذشت مدت زمان مشخص، بالاخره انرژی تمام شده و سیستم به حالت پایدار و آرامش خواهد رسید.

در این رساله روش پسگام را مورد بررسی قرار داده و کاربرد آن را با بیان چند قضیه گسترش می‌دهیم و روشی نوین به نام روش پسگام تعمیم‌یافته را ارائه خواهیم کرد. سپس این روش را به سیستمهای MIMO گسترش می‌دهیم. روش پیشنهادی در سیستمهای بیشتری کاربرد داشته و بنابراین مشکل کارایی سایر روشهای موجود را ندارد. تمام شبیه‌سازیهای این رساله که در محیط SIMULINK نرم‌افزار MATLAB انجام گرفته است، پاسخ بهتر این روش نسبت به روشهای موجود را به اثبات می‌رساند.

---

1. Homing  
2. A. M. Lyapunov

این رساله دارای یازده فصل می‌باشد که عبارتند از:

- در فصل اول مختصری از مطالب مختلف داخل رساله بیان می‌شود.
- در فصل دوم مقدمه‌ای از تئوری لیاپانوف، تعاریف، قضایا و مواردی که با تکیه بر آنها تحقیق انجام گرفته و رساله تنظیم گردیده است، توضیح داده می‌شود.
- در فصل سوم تاریخچه‌ای از روش پسگام بیان می‌شود که شامل چگونگی پیدایش، توسعه و سرانجام محدودیت‌های روش است.
- در فصل چهارم مفهوم پسگام و اساس کار روش پسگام توضیح داده می‌شود و با بیان چند مثال مفهوم آن روشن‌تر می‌شود.
- در فصل پنجم روش جدید پسگام تعمیم‌یافته برای کلاس خاصی از سیستم‌های غیرخطی اتونوموس یک ورودی - یک خروجی با تکیه بر بیان و اثبات یک قضیه ارائه گردیده و برای آشنایی بیشتر با چگونگی کاربرد آن، به بیان مثال می‌پردازیم.
- در فصل ششم برای اثبات کارکرد بهتر روش پیشنهادی و همچنین پاسخ بهتر این روش چند نمونه کاربردی را با استفاده از این روش و یکی از روش‌های موجود پایدارسازی نموده و با مقایسه آنها، کارایی بیشتر روش جدید به اثبات می‌رسد.
- در فصل هفتم با بیان و اثبات یک قضیه دیگر، کارایی روش برای کلاس خاصی از سیستم‌های غیرخطی چند ورودی - چند خروجی بیان می‌گردد و با شبیه‌سازی یک مثال، کارایی روش نشان داده می‌شود.
- در فصل هشتم پدیده آشوب در سیستمها بصورت بنیادی بیان شده و برای توضیح بیشتر، چند نمونه عملی از سیستم‌های آشوبناک شرح داده می‌شود.
- در فصل نهم پدیده آشوب در دو سیستم؛ یک سیستم SISO و دیگری MIMO توسط روش پسگام تعمیم‌یافته کنترل می‌شود. این کنترل از دو دیدگاه پایدارسازی و ردیابی ورودی پله انجام می‌پذیرد.

- در فصل دهم کنترل‌کننده طراحی شده برای پایداری آشوب در فصل پیش بهینه‌سازی شده است.
- در فصل یازدهم مزایا و معایب این روش و همچنین پیشنهاداتی در راستای استفاده هر چه بیشتر و همچنین کارایی بالاتر این روش مطرح می‌گردد.



## ۲-۱ مقدمه

برای یک سیستم دلخواه مفروض، اولین و مهمترین سؤالی که مطرح می‌شود این است که آیا این سیستم پایدار می‌باشد یا نه؟ چرا که اساساً یک سیستم کنترل ناپایدار، بی‌استفاده و خطرناک است. بطور کلی به سیستمی پایدار می‌گوییم که با شروع از نقطه‌ای حول نقطه کار، در محدوده‌ای از همسایگی همان نقطه به کار خود ادامه دهد. تمامی سیستمهای خطی و غیرخطی به نوعی درگیر مساله‌ای به نام پایداری می‌باشند؛ از این رو باید این مساله بدقت بررسی شود.

در این فصل ابتدا مختصری در مورد مفاهیم پایداری بحث نموده و سپس به بیان قضایای مربوط به تئوری لیاپانوف می‌پردازیم. در انتها روشهای مختلف دستیابی به تابع لیاپانوف را بررسی می‌کنیم.

## ۲-۲ تعاریف اولیه

مفیدترین روش جهت بررسی پایداری سیستمهای غیرخطی، در اواخر قرن ۱۹ میلادی توسط لیاپانوف، ریاضیدان روسی، بیان شد. اساس کار لیاپانوف در بررسی پایداری، شامل دو روش کلی بود که عبارتند از: روش خطی‌سازی<sup>۱</sup> و روش مستقیم<sup>۲</sup>؛ روش خطی‌سازی بیشتر در ارتباط با پایداری محلی<sup>۳</sup> حول یک نقطه تعادل است؛ ولی در روش مستقیم، با تعریف یک تابع شبه‌انرژی، پایداری در نقاط مختلف، چه به صورت محلی و چه به صورت کلی<sup>۴</sup>، بررسی می‌گردد.

برای بررسی در مورد روشهای موجود، ابتدا به بیان چند تعریف می‌پردازیم.

### تعریف ۱-۲: سیستم اتونوموس<sup>۵</sup>

یک سیستم اتونوموس نامیده می‌شود، اگر تابع  $f$  مستقیماً به زمان وابسته نباشد؛ یعنی بتوان معادلات حالت توصیف‌کننده سیستمی را بصورت زیر نوشت:

- 
1. Linearization Method
  2. Direct Method
  3. Local Stability
  4. Global Stability
  5. Autonomous System



$$\dot{x} = f(x) \quad (1-2)$$

به سیستمی که اتونوموس نباشد، سیستم غیر اتونوموس<sup>۱</sup> گفته می‌شود. □

### تعریف ۲-۲: نقطه تعادل<sup>۲</sup>

نقطه تعادل سیستم به نقطه‌ای گفته می‌شود که حالات سیستم در آن آرامش یابند. یعنی حالت  $x^*$  را نقطه تعادل (حالت تعادل<sup>۳</sup>) سیستم (۱-۲) گوییم، هرگاه حالات سیستم با رسیدن به آن حالت و بدون دریافت انرژی، تا ابد در همان حالت باقی بمانند. □

برای بدست آوردن نقطه تعادل سیستم کفایت معادله زیر را حل نماییم:

$$\dot{x} = 0 \Rightarrow f(x^*) = 0 \quad (2-2)$$

معمولاً نقطه تعادل سیستم را صفر انتخاب می‌کنند؛ یعنی  $x^* = 0$ . اگر نقطه تعادل در مبدا نباشد، با تغییر متغیر  $y = x - x^*$  سیستمی بدست می‌آید که نقطه تعادل آن، صفر است.

### تعریف ۳-۲: گوی باز

یک ناحیه باز حول نقطه  $A$  که به فاصله  $r$  از آن بوده و از رابطه زیر بدست آید را گوی باز حول نقطه  $A$  می‌نامند و آن را با  $B_r$  نمایش می‌دهند.

$$\|x - A\| < r \quad (3-2)$$

□

### تعریف ۴-۲: پایداری لیاپانوفی<sup>۴</sup>

نقطه تعادل  $x^* = 0$  برای سیستم (۱-۲) یک نقطه تعادل پایدار لیاپانوفی می‌باشد، اگر به ازای هر گوی باز  $B_R$  حداقل یک گوی باز  $B_r$  وجود داشته باشد که با انتخاب حالت اولیه سیستم از داخل

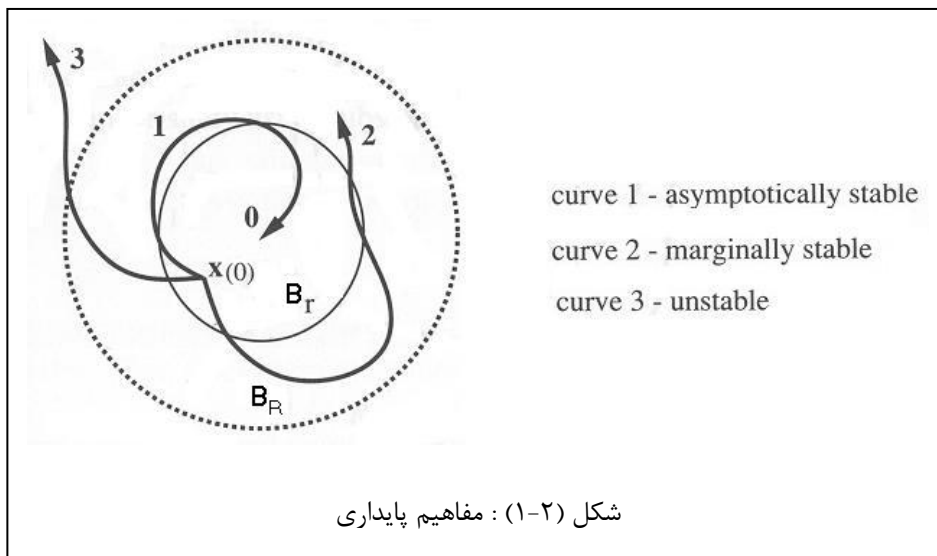
- 
1. Non-Autonomous System
  2. Equilibrium Point
  3. Equilibrium State
  4. Lyapunov Stability

گوی  $B_r$  ، همواره حالات سیستم در  $B_R$  باقی بمانند. این تعریف را می‌توان بصورت ریاضی، با رابطه زیر بیان کرد:

$$\forall R > 0 \exists r > 0 \ni x(0) \in B_r \Rightarrow \forall t \geq 0 x(t) \in B_R \quad (4-2)$$

لذا اگر حداقل یک  $R > 0$  وجود داشته باشد که نتوان به ازای آن  $r > 0$  یافت که شرایط (4-2) را برآورده کند، سیستم را ناپایدار می‌گوییم. مفاهیم پایداری بیان شده، در شکل (1-2) نشان داده شده

است. □



### تعریف 2-5: پایداری مجانبی<sup>1</sup>

نقطه تعادل  $x^* = 0$  پایدار مجانبی است، اگر دو شرط زیر را برآورده سازد:

• پایداری لیپانوفی داشته باشد.

•  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \rightarrow 0$

□

### تعریف 2-6: پایداری نمایی<sup>2</sup>

نقطه تعادل  $x^* = 0$  پایدار نمایی است، اگر دو عدد اکیداً مثبت  $\lambda$  و  $\alpha$  موجود باشند

که رابطه زیر را برقرار سازند:

1. Asymptotically Stability
2. Exponentially Stability

$$\|x(0)\| \in B_r, \forall t > 0 \Rightarrow \|x(t)\| \leq \alpha \|x(0)\| e^{-\lambda t} \quad (5-2)$$



### تعریف ۲-۷: پایداری کلی<sup>۱</sup> و پایداری محلی

اگر هر یک از تعاریف بیان شده برای مفهوم پایداری به ازای تمامی شرایط اولیه برقرار باشد، پایداری را پایداری کلی می‌گوییم. ولی اگر تعاریف فوق به ازای بعضی شرایط اولیه برقرار باشد،



پایداری را پایداری محلی می‌گوییم.

در روش مستقیم، لیاپانوف سیستم (۱-۲) را با تابع اسکالر  $V(x)$  جایگزین نمود. وی با بررسی خواص  $V(x)$  به خصوصیات سیستم (۱-۲) پی برد و در مورد آن قضایای مختلفی بیان کرد. قبل از بیان قضایا باید با چند اصطلاح آشنا شویم.

### تعریف ۲-۸:

در مورد تابع اسکالر  $V(x)$  همواره خواهیم داشت:

- مثبت معین (PD)<sup>۲</sup> است، اگر رابطه زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases} V(0)=0 \\ \forall x \neq 0 ; V(x) > 0 \end{cases} \quad (6-2)$$

- مثبت نیمه معین (PSD)<sup>۳</sup> است، اگر رابطه زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases} V(0)=0 \\ \forall x \neq 0 ; V(x) \geq 0 \end{cases} \quad (7-2)$$

- منفی (نیمه) معین (N(S)D)<sup>۴</sup> است، اگر  $-V(x)$  مثبت (نیمه) معین باشد.




---

۱. به پایداری کلی (جهانی)، پایداری به مفهوم وسیع Stability in the Large نیز گفته می‌شود.

2. Positive Definite  
3. Positive Semi Definite  
4. Negative (Semi) Definite

## تعریف ۲-۹: شعاعی نامحدود<sup>۱</sup>

تابع اسکالر  $V(x)$  بصورت شعاعی نامحدود است، اگر رابطه زیر برقرار باشد:

$$\forall x \ni \|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow \infty \quad (۸-۲)$$

□

## تعریف ۲-۱۰: تابع لیاپانوف کنترلی<sup>۲</sup> (CLF)

سیستم اتونوموس داده شده با رابطه (۱-۲) را در نظر می‌گیریم. تابع اسکالر  $V(x)$  در گوی

باز  $B_R(x^*)$  برای این سیستم، یک تابع لیاپانوف کنترلی یا به اختصار تابع لیاپانوف است، اگر شرایط

زیر برقرار باشد:

•  $V(x)$  و مشتقات آن نسبت به  $x$  در گوی باز  $B_R(x^*)$  تعریف شده و پیوسته باشند.

•  $V(x)$  تابعی مثبت معین باشد.

□

•  $\dot{V} = dV/dt$  روی مسیرهای حالت سیستم، منفی نیمه‌معین باشد.

## ۳-۲ بررسی پایداری نقاط تعادل

در این بخش با توجه به مفاهیم و تعاریف بیان‌شده در بخش قبل، قضایایی عنوان خواهد شد تا

با استفاده از آن بتوان به راه‌حل ساده‌تری برای مطالعه پایداری نقاط تعادل دست یافت.

## قضیه ۲-۱: روش اول لیاپانوف (روش خطی‌سازی لیاپانوف)<sup>۳</sup>

سیستم اتونوموس  $\dot{x} = f(x)$  را در نظر بگیرید. فرض می‌کنیم  $x^*$  نقطه تعادل این سیستم بوده

و مدل خطی این سیستم حول نقطه تعادل بصورت زیر بیان شود:

$$\Delta \dot{x} = A \Delta x \quad (۹-۲)$$

- 
1. Radially Unbounded
  2. Control Lyapunov Function
  3. Lyapunov's Linearization Method

که مقدار ماتریس  $A$  از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x^*} \quad (10-2)$$

در این صورت همواره خواهیم داشت:

- اگر قسمت حقیقی تمامی مقادیر ویژه  $A$  منفی باشند، نقطه تعادل  $x^*$  پایدار لیاپانوفی است.
- اگر حداقل یکی از مقادیر ویژه  $A$  دارای قسمت حقیقی مثبت باشد، نقطه تعادل  $x^*$  را ناپایدار گوییم.
- در صورتیکه حداقل یک مقدار ویژه  $A$  روی محور موهومی قرار گرفته و بقیه مقادیر ویژه دارای قسمت حقیقی منفی باشند، از این قضیه در مورد پایداری و یا ناپایداری سیستم نمی‌توان هیچ نتیجه‌ای گرفت.

■

اثبات. به [1] مراجعه کنید.

همانطور که می‌بینیم یکی از مشکلات این روش، کوچک بودن محدوده بررسی می‌باشد؛ یعنی فقط می‌توان به یک پایداری محلی پی برد. مشکل دیگر این روش عدم کارایی در قسمت سوم می‌باشد.

## قضیه ۲-۲: قضیه دوم لیاپانوف (بیان محلی)

سیستم اتونوموس  $\dot{x} = f(x)$  را در نظر بگیرید. هرگاه برای این سیستم در گوی باز  $B_{R_0}$  حول نقطه تعادل  $x^*$ ، بتوان تابع اسکالر  $V(x)$  را چنان یافت که شرایط تابع لیاپانوف را برآورده سازد، در این صورت نقطه تعادل  $x^*$ ، پایدار لیاپانوف محلی می‌باشد.

اگر  $\dot{V}(x)$  در  $B_{R_0}$  منفی معین باشد، در این صورت نقطه تعادل  $x^*$  پایدار مجانبی محلی است.

اثبات. به [1] مراجعه کنید. ■

### قضیه ۲-۳: قضیه دوم لیاپانوف (بیان کلی)

هرگاه برای سیستم اتونوموس  $\dot{x} = f(x)$  به ازای تمامی نقاط بتوان تابع اسکالر  $V(x)$  را یافت؛ بطوریکه شرایط تابع لیاپانوف را برآورده سازد و همچنین تابع اسکالر  $V(x)$  بصورت شعاعی نامحدود باشد، آنگاه نقطه تعادل  $x^*$  پایداری لیاپانوفی کلی دارد.

اگر  $\dot{V}(x)$  منفی معین باشد، در این صورت نقطه تعادل  $x^*$  پایدار مجانبی کلی است.

اثبات. به [1] مراجعه کنید. ■

معمولاً در بررسی پایداری نقطه تعادل، پایداری مجانبی اهمیت بیشتری دارد. از آنجاییکه شرط منفی معین بودن  $\dot{V}(x)$  بسیار مشکل است، بنابراین همواره سعی بر این بوده است تا این شرط آسانتر شود. در این راستا قضیه لاسال<sup>۱</sup> بیان شد. قبل از بیان این قضیه به یک تعریف نیاز داریم.

### تعریف ۲-۱۱: مجموعه تغییرناپذیر $(IS)$ <sup>۲</sup>

اگر در لحظه  $t_0$  مسیرهای<sup>۳</sup> یک سیستم داخل مجموعه  $G$  قرار گرفته و به ازای  $t \geq t_0$ ، مسیرها

در داخل همان مجموعه باقی بمانند، آنگاه  $G$  یک مجموعه تغییرناپذیر می باشد. ■

### قضیه ۲-۴: قضیه مجموعه تغییرناپذیر لاسال (بیان محلی)

---

1. Lasal Theory  
2. Invariant Set  
3. Trajectory

سیستم اتونوموس  $\dot{x} = f(x)$  را در نظر بگیرید. فرض می‌کنیم  $f$  پیوسته بوده و  $V(x)$  دارای

مشتقات نسبی مرتبه اول پیوسته باشد. فرض می‌کنیم:

- $\Omega_l$  ناحیه‌ای کراندار باشد.  $\Omega_l = \{x | V(x) < l\}$
- $\dot{V}(x)$  در داخل  $\Omega_l$  غیر مثبت باشد.  $\forall x \in \Omega_l \Rightarrow \dot{V}(x) \leq 0$
- ناحیه‌ای مانند  $R$  در  $\Omega_l$  بصورت مقابل وجود داشته باشد.  $R = \{x | \dot{V}(x) = 0\}$
- $M$  بزرگترین مجموعه تغییر ناپذیر موجود در  $R$  باشد.

آنگاه به ازای هر حالت اولیه متعلق به  $\Omega_l$  ( $\forall x(0) \in \Omega_l$ )، در نهایت مسیرهای حالات سیستم

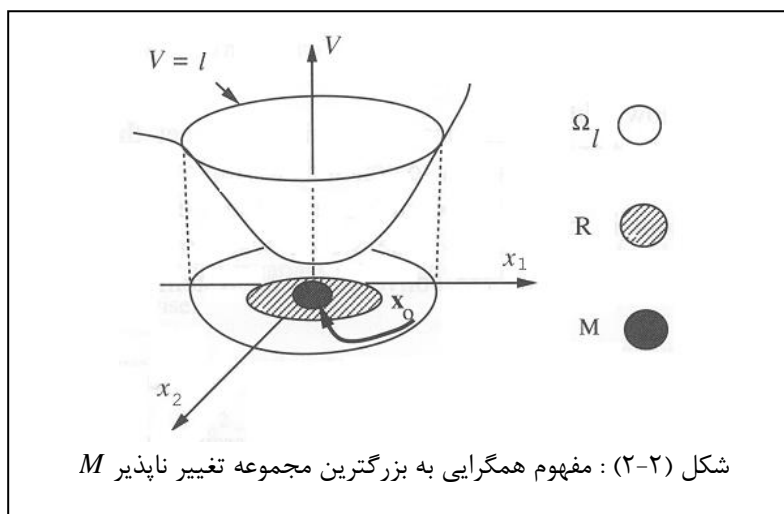
به  $M$  جذب می‌شوند.

■

اثبات. به [1] مراجعه کنید.

برای اینکه مفاهیم مجموعه‌ها در قضیه ۲-۴ بصورت کامل مشخص شود، به شکل (۲-۲) مراجعه

کنید.



## قضیه ۲-۵: قضیه تغییرناپذیر لاسال (بیان کلی)

سیستم اتونوموس  $\dot{x} = f(x)$  را در نظر بگیرید. فرض می‌کنیم  $f$  پیوسته بوده و  $V(x)$  تابعی با مشتقات نسبی مرتبه اول پیوسته باشد و داشته باشیم:

- $V(x)$  بصورت شعاعی نامحدود باشد.
- $V(x)$  در تمامی فضای حالت منفی نیمه‌معین باشد.
- $R = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \dot{V}(x) = 0\}$ .
- $M$  بزرگترین مجموعه تغییرناپذیر در  $R$  باشد.

آنگاه هر حالت اولیه  $x(0)$  در نهایت (  $t \rightarrow \infty$  ) به ناحیه  $M$  جذب می‌شود.

اثبات. به [1] مراجعه کنید. □

همانطور که می‌بینیم در قضایای محلی و کلی لاسال، اگر بزرگترین مجموعه تغییرناپذیر، همان نقطه تعادل باشد، پایداری مجانبی سیستم تضمین می‌شود.

## ۲-۴ روشهای تعیین تابع لیاپانوف

همانطور که می‌بینیم یکی از مشکلات عمده تئوریهای فوق، چگونگی تعیین تابع لیاپانوف می‌باشد. در این قسمت روشهای موجود تعیین تابع لیاپانوف سیستمهای خطی و غیرخطی را بررسی خواهیم کرد.

### ۲-۴-۱ تعیین تابع لیاپانوف در سیستمهای خطی تغییرناپذیر با زمان (LTI)<sup>۱</sup>

قبل از بیان روش بدست آوردن تابع لیاپانوف در سیستمهای خطی تغییرناپذیر با زمان به بیان چند تعریف می‌پردازیم.

---

1. Linear Time-Invariant System



## تعریف ۲-۱۲: سیستم تغییرناپذیر با زمان

به سیستم  $Y(t) = f(X(t), t)$  تغییر ناپذیر با زمان گفته می‌شود، هرگاه هر گونه انتقال در ورودی همان انتقال را در خروجی سیستم ایجاد کند؛ یعنی همواره رابطه زیر برقرار باشد:

$$\forall t_0 \in \mathcal{R} \Rightarrow Y(t - t_0) = f(X(t - t_0), t) \quad (11-2)$$

□

## تعریف ۲-۱۳: فرم مرتبه دوم<sup>۱</sup> ماتریس $M$

برای یک ماتریس مربعی  $n \times n$ ، مانند  $M$ ، یک بردار  $n$  بعدی  $x$  را در نظر می‌گیریم. در این صورت فرم مرتبه دوم ماتریس  $M$  با رابطه زیر نمایش داده می‌شود:

$$\forall x \in \mathcal{R}^n, M_{n \times n} \Rightarrow x^T M x \quad (12-2)$$

□

## تعریف ۲-۱۴:

ماتریس مربعی  $n \times n$ ، مانند  $M$  مفروض است. تعاریف زیر در مورد آن قابل بیان می‌باشد:

•  $M$  مثبت معین است، اگر یکی از دو قسمت رابطه زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases} \forall x \in \mathcal{R}^n ; x^T M x > 0 \\ \text{Eig}(M) > 0 \end{cases} \quad (13-2)$$

•  $M$  مثبت نیمه معین است، اگر یکی از دو قسمت رابطه زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases} \forall x \in \mathcal{R}^n ; x^T M x \geq 0 \\ \text{Eig}(M) \geq 0 \end{cases} \quad (14-2)$$

□ •  $M$  منفی (نیمه) معین است، اگر ماتریس  $-M$  مثبت (نیمه) معین باشد.

## تعریف ۲-۱۵: ماتریس متقارن<sup>۲</sup>

ماتریس مربعی  $M$  را متقارن گوییم، هرگاه رابطه زیر برقرار باشد:

---

1. Quadratic Form  
2. Symmetric Matrix

$$M = M^T \equiv \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} ; M_{ij} = M_{ji} \quad (15-2)$$



### تعریف ۲-۱۶: ماتریس شبه متقارن<sup>۱</sup>

ماتریس مربعی  $M$  را شبه متقارن گوییم، هرگاه رابطه زیر برقرار باشد.

$$M = -M^T \equiv \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} ; M_{ij} = -M_{ji} \quad (16-2)$$



### قضیه ۲-۶: روش لیاپانوف برای تعیین تابع لیاپانوف سیستمهای $LTI$

سیستم خطی تغییر ناپذیر با زمان  $\dot{x} = Ax$  را در نظر می‌گیریم. این سیستم پایدار است،

اگر و فقط اگر ماتریسهای مثبت معین و متقارن  $P$  و  $Q$  یافت شوند که در رابطه زیر صدق نمایند که این رابطه به معادله لیاپانوف<sup>۲</sup> معروف است.

$$A^T P + PA = -Q \quad (17-2)$$

در این صورت تابع لیاپانوف را می‌توان با استفاده از رابطه زیر بدست آورد:

$$V(x) = x^T P x \quad (18-2)$$



اثبات. به [1] مراجعه کنید.

همانطور که از قضیه ۲-۶ پیداست، راه حل عملی برای یافتن تابع لیاپانوف در سیستمهای

$LTI$  بصورت زیر می‌باشد:

- ابتدا ماتریس مثبت معین و متقارن  $Q$  را انتخاب می‌کنیم.
- معادله لیاپانوف را حل کرده و ماتریس  $P$  را بدست می‌آوریم.

---

1. Skew-Symmetric Matrix  
2. Lyapunov Equation

- اگر  $P$  مثبت معین و متقارن باشد، سیستم خطی، پایدار بوده و تابع لیپانوف از رابطه (۱۸-۲) بدست می‌آید؛ در غیر این صورت سیستم خطی ناپایدار خواهد بود.

معمولاً بهترین جواب زمانی حاصل می‌شود که  $Q=I$  انتخاب شود. برای بیان علت این امر نیازمند تعریف زیر می‌باشیم.

### تعریف ۲-۱۷: نرخ همگرایی<sup>۱</sup>

دو ماتریس متقارن و مثبت معین  $P$  و  $Q$  در معادله لیپانوف را در نظر می‌گیریم. هرگاه بزرگترین مقدار ویژه ماتریس  $P$  را با  $\lambda_{\max}(P)$  و کوچکترین مقدار ویژه ماتریس  $Q$  را با  $\lambda_{\min}(Q)$  نمایش دهیم، آنگاه نرخ همگرایی را با  $\gamma$  نمایش داده و مقدار آن از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\gamma = \lambda_{\min}(Q) / \lambda_{\max}(P) \quad (۱۹-۲)$$



نرخ همگرایی معیاری برای میزان درستی انتخاب  $P$  و  $Q$  می‌باشد و ثابت می‌شود با انتخاب  $Q=I$ ، بهترین مقدار برای نرخ همگرایی حاصل می‌گردد [1].

### ۲-۴-۲ تعیین تابع لیپانوف سیستمهای غیرخطی اتونوموس

در این قسمت قضایایی بیان می‌کنیم که با تکیه بر آن می‌توان روشهایی برای محاسبه تابع لیپانوف سیستمهای غیرخطی اتونوموس بدست آورد. این روشها عبارتند از:

- خطی‌سازی حول نقطه تعادل و نوشتن  $V(x)$  با حل معادله لیپانوف.
- روش کراسفسکی<sup>۲</sup>.
- روش کراسفسکی تعمیم‌یافته<sup>۳</sup>.

---

1. Convergence Rate  
2. Krasovskii's Method  
3. Generalized Krasovskii's Method

- روش گرادیان متغیر<sup>۱</sup>.

## الف. خطی سازی حول نقطه تعادل

در این روش ابتدا سیستم غیرخطی را حول نقطه تعادل سیستم خطی نموده و سپس با استفاده از قضیه ۲-۶، تابع لیاپانوف را بدست می آوریم.

این روش دو مشکل عمده دارد که عبارتند از:

۱. پایداری را در محدوده‌ای حول نقطه تعادل تضمین می‌کند. یعنی پایداری محلی را تضمین می‌نماید.

۲. در این روش دینامیکهای غیرخطی از بین رفته و نمی‌توان اثر آنها را در پاسخ خروجی مشاهده نمود.

## ب. روش کراسفسکی

در این روش هدف تعیین تابع لیاپانوف برای سیستمهای اتونوموس می‌باشد که اساس آن را با یک قضیه بیان می‌کنیم.

### قضیه ۲-۷: قضیه کراسفسکی

سیستم اتونوموس بیان شده با رابطه (۲-۱) را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم نقطه تعادل این سیستم مبدا مختصات باشد ( $x^* = 0$ ). ماتریس ژاکوبین<sup>۲</sup> این سیستم را با  $A(x)$  نشان می‌دهیم که مقدار آن با رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$A(x) = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (2-7)$$

---

1. Variable Gradient Method  
2. Jacobian Matrix

اگر ماتریس  $F = A + A^T$  در یک همسایگی  $\Omega$  از مبدا منفی معین باشد، آنگاه سیستم بطور مجانبی پایدار بوده و تابع لیاپانوف سیستم از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$V(x) = f^T(x) f(x) \quad (21-2)$$

اگر  $\Omega$  شامل کل فضای حالات بوده و  $V(x)$  بصورت شعاعی نامحدود باشد، آنگاه مبدا پایداری مجانبی کلی دارد.

■ اثبات. به [1] مراجعه کنید.

این روش نیز دارای دو ایراد عمده می‌باشد که عبارتند از:

۱. اگر تعداد حالتها زیاد باشد، تعیین ماتریسها و شرایط قضیه دشوار بوده و همچنین همواره باید  $\Omega$  موجود باشد تا بتوان پایداری محلی را بررسی کرد.
۲. منفی معین بودن ماتریس  $F$  شرط دشواری است.

### پ. روش کراسفسکی تعمیم یافته

برای ساده کردن مشکلات موجود در روش کراسفسکی، قضیه دیگری بیان شد که اساس روش کراسفسکی تعمیم یافته را تشکیل می‌دهد.

### قضیه ۲-۸: روش کراسفسکی تعمیم یافته

سیستم اتونوموس بیان شده با رابطه (۱-۲) را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم نقطه تعادل این سیستم مبدا بوده و ماتریس ژاکوبین این سیستم از رابطه (۲۰-۲) بدست آید. اگر دو ماتریس مثبت معین متقارن  $P$  و  $Q$  چنان موجود باشند که به ازای تمامی  $x \neq 0$  ماتریس  $F(x)$  بدست آمده از رابطه زیر در یک همسایگی  $\Omega$  از مبدا منفی نیمه معین باشد، آنگاه این سیستم در همسایگی  $\Omega$  از مبدا، پایدار مجانبی است.

$$F(x) = A^T P + PA + Q \quad (22-2)$$

تابع لیپانوف این سیستم با رابطه زیر بدست می آید.

$$V(x) = f^T(x) P f(x) \quad (23-2)$$

اگر  $\Omega$  شامل کل فضای حالات بوده و  $V(x)$  بطور شعاعی نامحدود باشد، آنگاه مبدا پایداری مجانبی کلی دارد.

اثبات. به [1] مراجعه کنید. ■

در این روش مشکل اول روش کراسفسکی همچنان باقی است و حتی محاسبات آن پیچیده تر شده است، ولی مشکل دوم که شرط منفی معین بودن ماتریس  $F(x)$  بود، ساده تر شده و به حالت منفی نیمه معین رسیده است.

### ت. روش گرادیان متغیر

روش گرادیان متغیر راهی برای محاسبه تابع لیپانوف سیستمهای غیرخطی می باشد. در این روش ابتدا فرض می کنیم که گرادیان تابع لیپانوف مشخص بوده و سپس با انتگرال گیری از آن، تابع لیپانوف را بدست می آوریم. در سیستمهای مرتبه پایین، معمولاً این روش پاسخ مناسبی خواهد داشت.

رابطه بین یک تابع اسکالر و گرادیان آن با رابطه زیر بیان می شود.

$$V(x) = \int_0^x \nabla V dx \quad ; \quad \nabla V = [\partial V / \partial x_1 \quad \partial V / \partial x_2 \quad \dots \quad \partial V / \partial x_n]^T \quad (24-2)$$

برای بدست آوردن یک تابع لیپانوف یکتا، باید رابطه زیر که به شرط کرل<sup>1</sup> معروف است، برقرار باشد.

$$\forall i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad ; \quad \frac{\partial \nabla V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \nabla V_j}{\partial x_i} \quad (25-2)$$

که در آن:

---

1. Curl Condition

$$\nabla V_i = \frac{\partial V}{\partial x_i} \quad ; \quad i=1,2,\dots,n \quad (26-2)$$

بنابراین برای بدست آوردن تابع لیپانوف با استفاده از روش گرادیان متغیر، باید مراحل زیر را

انجام دهیم:

۱. فرض می‌کنیم  $\nabla V_i$  بصورت رابطه زیر باشد.

$$\nabla V_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad ; \quad i=1,2,\dots,n \quad (27-2)$$

۲. برای بدست آوردن ضرایب  $a_{ij}$  باید شرایط کرل بیان شده در روابط (۲۵-۲) و (۲۶-۲) را حل

کنیم.

۳. ضرایب  $a_{ij}$  را طوری تعیین می‌کنیم که  $V$ ، حداقل بصورت محلی، منفی نیمه‌معین باشد.

۴. با استفاده از رابطه زیر می‌توان  $V(x)$  را از  $\nabla V$  بدست آورد.

$$V(x) = \sum_{i=1}^n \int_0^{x_i} \nabla V dx_i = \int_0^{x_1} \nabla V dx_1 + \int_0^{x_2} \nabla V dx_2 + \dots + \int_0^{x_n} \nabla V dx_n \quad (28-2)$$

۵. مثبت معین بودن تابع اسکالر بدست آمده از رابطه (۲۶-۲) را آزمایش می‌کنیم.

این روش نیز دو ایراد کلی دارد که عبارتند از:

۱. همواره حل معادلات بدست آمده ساده نمی‌باشد و فقط در مورد سیستمهای مرتبه پایین

جواب قابل قبول دارد، ولی برای سیستمهای مرتبه بالا منجر به دستگاه معادلاتی می‌شود که

حل آن بسیار دشوار و پیچیده می‌باشد.

۲. جواب بدست آمده، تفاوت چندانی با روش خطی‌سازی ندارد.





### ۳-۱ مقدمه

برای مدت بسیار طولانی تنها راه بررسی پایداری در سیستم‌های خطی و غیرخطی، تئوری لیاپانوف بود. با کاربردی شدن این تئوری، دانشمندان مشکلات آن را دریافتند که از مهمترین این مشکلات، یافتن تابعی اسکالر با خصوصیات ویژه تابع لیاپانوف می‌باشد. برای حل این مشکل راه‌حلهای متفاوتی ارائه شد که یکی از مهمترین این راه‌حلها روش پسگام می‌باشد.

در این فصل بطور مختصر در مورد نحوه پیدایش تئوری پسگام توضیح داده و تاریخچه‌ای مختصر از کارهای انجام گرفته در ارتباط با گسترش این روش در زمینه‌های مختلف کنترل را بیان می‌کنیم.

### ۳-۲ پیدایش تئوری پسگام

برای مدت طولانی، تئوری لیاپانوف ابزار مناسبی جهت بررسی سیستم‌های کنترل خطی و غیرخطی بوده است. این روش نخستین بار توسط ریاضی‌دان و دانشمند روسی، لیاپانوف، پایه‌ریزی شد. او موفق شد که بردار حالت  $X(t)$  را به یک تابع اسکالر  $V(X)$  تبدیل کند و از روی این تابع نحوه دور شدن سیستم از نقطه تعادل را اندازه‌گیری نماید.  $V(X)$  را می‌توان بیان‌کننده مقدار انرژی موجود در سیستم دانست. اگر  $V(X)$  پیوسته کاهش یابد، نشانگر این است که سیستم بصورت خودکار به سمت نقطه تعادل پیش می‌رود [2].

مشکل اصلی این تئوری، مخصوصاً در سیستم‌های غیرخطی، یافتن تابعی است که دارای خصوصیات ویژه تابع لیاپانوف باشد. اگر بتوان چنین تابعی را یافت، پایداری سیستم تضمین می‌شود؛ ولی یافتن آن به تجربه طراح نیاز دارد. در این راستا روشهایی پیشنهاد شده است، ولی هر کدام محدودیتهای خاص خود را دارند.

به علت وجود مشکلات تئوریهایی فوق، دانشمندان در جهت یافتن راهی که به کمک آن بتوان تابع لیاپانوف سیستم را بدست آورد و با تکیه بر آن، کنترل‌کننده‌ای مناسب برای سیستم طراحی

نمود، تلاش کردند. مجموعه این تلاشها، منجر به ایجاد روشهای نوین برای محاسبه تابع لیپانوف شد که یکی از این روشها، روش پسگام<sup>۱</sup> است.

پسگام یک روش بازگشتی است که می‌تواند به ما در دستیابی به تابع لیپانوف کمک کند. در روش پسگام، با پسخور گرفتن از حالات سیستم و اعمال آنها به ورودی کنترل، سیستم ناپایدار را پایدار نموده و تابع لیپانوف سیستم نیز بدست می‌آید. در واقع پسگام گسترش روش طراحی کنترل‌کننده پسخور حالت از سیستمهای خطی به سیستمهای غیرخطی می‌باشد که در این راستا از تئوریهای لیپانوف استفاده شده است. انعطاف‌پذیری این روش، اجازه استفاده بیشتر از آن را در بسیاری از مسائل علمی، نسبت به روشهای مشابه، فراهم می‌کند.

مبدا پیدایش تئوری پسگام دقیقاً مشخص نبوده و تجربه‌های همزمانی در این مورد انجام گرفته است و تقریباً می‌توان آغاز دستیابی به آن را در چندین مقاله همزمان در دهه ۱۹۸۰ م. دانست. اگرچه منصفانه‌تر اینست که بگوییم تحقیقات پروفیسور کوکوتوویچ<sup>۲</sup> و همکارانش باعث بوجود آمدن این تئوری بصورت محض و غیرکاربردی گردید [3].

در سال ۱۹۹۱ م. مقاله کوکوتوویچ در این مورد منتشر شد [4]؛ مجموعه پیشرفتهای روش پسگام و سایر ابزارهای کنترل غیرخطی در دهه ۱۹۹۰ م. توسط کوکوتوویچ در سال ۱۹۹۹ م. در کنگره جهانی IFAC ارائه شد [5].

### ۳-۳ کاربردهای روش پسگام

با طرح این تئوری در مجامع بین‌المللی تا سال ۱۹۹۵ م. بیشتر تحقیقات در مورد تئوری و فواید آن انجام گرفت و کمتر وارد مسائل کنترلی شدند. از معدود مقالاتی که در این سالها در مورد کاربرد روش پسگام در کنترل منتشر شد، مقاله‌ای در مورد بدست آوردن یک روش ریاضی بر پایه تئوری پسگام جهت طراحی کنترل‌کننده سیستمهای غیرخطی است [6]؛ اما از سال ۱۹۹۵ م. به بعد،

---

1. Backstepping Method  
2. Petar V. Kokotovic

کاربرد این روش در مسائل کنترلی بیشتر شد، تا آنجا که برای کنترل بسیاری از سیستم‌های خطی و غیرخطی از این روش استفاده شده است [7-18].

یکی از بزرگترین مزایای این روش جلوگیری از حذف دینامیک‌های غیرخطی مؤثر سیستم می‌باشد؛ بدین معنی که پدیده‌هایی که در اثر وجود دینامیک‌های غیرخطی شدید در سیستم بوجود می‌آیند؛ مانند آشوب<sup>۱</sup>، را می‌توان به کمک این روش بررسی و کنترل نمود؛ زیرا در این روش نیازی به حذف دینامیک‌های غیرخطی نیست [19-21].

یکی از عمده‌ترین سیستم‌های آشوبی، معادلات لورنز<sup>۲</sup> است. لورنز برای اولین بار بطور جدی با تحقیق روی سیستم‌های حرارتی متوجه شد که در بعضی از سیستمها با دانستن معادلات و شرایط اولیه، خروجی سیستم، همان خروجی از پیش تعیین شده نمی‌باشد. در [19] روشی برای کنترل سیستم‌های آشوبی لورنز با استفاده از روش پسگام بیان شده است.

تحقیقات دانشمندان نشان می‌دهد که PLL<sup>۳</sup>، یک سیستم آشوبی است. PLL مانند بسیاری از سیستم‌های آشوبی نظیر خانواده مدارهای چوا<sup>۴</sup> [22]، اتصالات جوزپسون<sup>۵</sup> [23] و نوسان‌ساز واندرپیل<sup>۶</sup> [24] مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است. در سال ۲۰۰۲ م. با تکیه بر روش پسگام، مشکل آشوب در این سیستمها نیز رفع شد.

### ۳-۴ گسترش روش پسگام

با گذشت زمان و اثبات کارایی روش پسگام، کاربرد این روش در سیستم‌های غیرخطی گسترش یافت. از جمله کاربردهای این روش، می‌توان به موارد زیر اشاره نمود:

- کنترل موتورهای رلکتانسی [25].

- 
1. Chaos
  2. Lorenz Equations
  3. Phase-Locked Loop
  4. Chua's Circuit Family
  5. Josephson Junctions
  6. Van der Pol Oscillator

- کنترل سیستم خودخلبان<sup>۱</sup> موشک [26].
- کنترل فرآیندهای حرارتی [27].
- کنترل موتورهای تزریق مستقیم [28].
- کنترل چرخبال<sup>۲</sup> [29].
- حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی [30].
- کنترل سیستم تعلیق خودروها [31].
- کنترل رباتهای متحرک [32].
- کنترل سیستمهای زنجیره‌ای<sup>۳</sup> [33].

با گسترش کاربردهای صنعتی روش پسگام، مشکلات و محدودیتهای این روش بیش از پیش بر دانشمندان مشخص شد؛ با این حال به دلیل انعطاف‌پذیری بالای سیستم، همچنان یکی از بهترین روشها در کنترل سیستمهای غیرخطی بود. از این‌رو در سالهای اخیر در جهت رفع محدودیتهای این روش گام‌هایی برداشته شده است که از جمله این پیشرفت‌ها می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

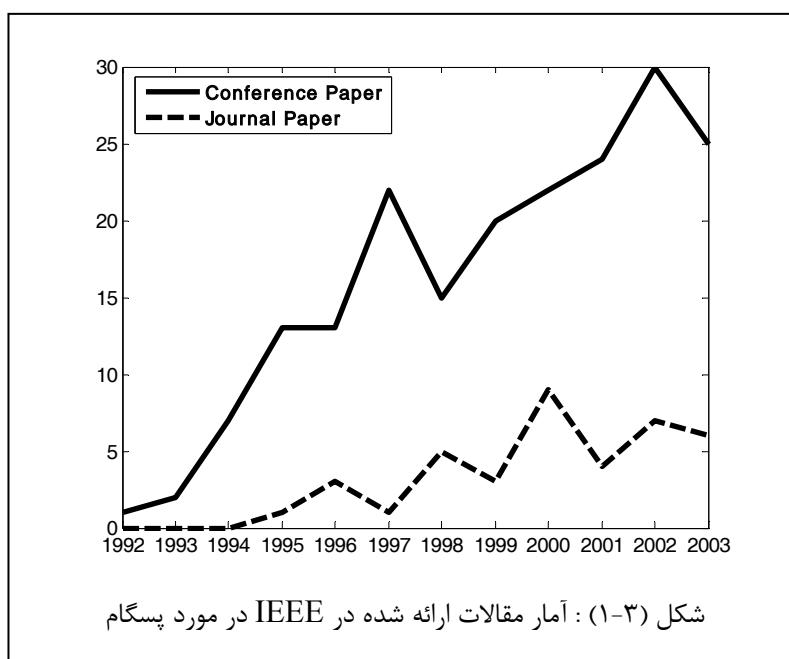
- وارد کردن روش پسگام در حوزه کنترل تطبیقی [34].
- وارد کردن روش پسگام در حوزه کنترل ساختار متغیر VS<sup>۴</sup> [35].
- وارد کردن روش پسگام در حوزه کنترل مقاوم [36].
- وارد کردن روش پسگام در حوزه کنترل بهینه [37].
- گسترش روش پسگام برای سیستمهای ناهموار<sup>۵</sup> [15].
- ادغام زمینه‌های مختلف کنترلی با تئوری پسگام [38].

---

1. Autopilot  
 2. Helicopter  
 3. Chained Systems  
 4. Variable Structure Control  
 5. Nonsmooth Systems

اهمیت روش پسگام در سالهای اخیر به جایی رسیده است که در دانشگاهها و مؤسسات آموزش عالی به عنوان بخشی از دروس دانشگاهی ارائه شده و کارگاههای آموزشی بسیاری در این زمینه برگزار می‌گردد [39-40].

با نگاهی اجمالی به آمار مقالات ارائه شده در IEEE می‌توان به روند رو به رشد کاربرد این روش در سیستمهای غیرخطی پی برد. در شکل (۳-۱) آمار این مقالات بین سالهای ۱۹۹۲ تا ۲۰۰۳ میلادی مشخص شده است.



با تمامی مقدماتی که در این زمینه ارائه شده است؛ ولی روش پسگام برای سیستمهای غیرخطی خاصی کاربرد دارد. در این رساله تا حدود بسیار زیادی این نقیصه رفع می‌گردد و روشی نوین جهت دستیابی به کنترل‌کننده پیشنهاد می‌شود؛ درستی روش پیشنهادی با اثبات قضایای بیان شده بصورت تئوری و با شبیه‌سازیهای انجام‌گرفته بصورت عملی اثبات می‌شود.



## ۱-۴ مقدمه

همانطور که در گفتارهای پیشین بیان شد، یکی از راههای دستیابی به تابع لیاپانوف یک سیستم، روش پسگام می‌باشد. با این روش علاوه بر تعیین تابع اسکالر با خصوصیات ویژه تابع لیاپانوف، می‌توان حالات ناپایدار سیستم را نیز پایدار نمود. یکی از بزرگترین مشکلات این روش محدودیت کاربرد این روش در سیستمهای واقعی می‌باشد.

در این فصل ابتدا مفهوم واژه پسگام را برای مدلی خاص از سیستمها بیان می‌کنیم و سپس به بیان کاربرد آن برای کنترل این کلاس از سیستمهای غیرخطی که سیستمهای پسخور صریح<sup>۱</sup> نامیده می‌شوند، می‌پردازیم. در نهایت با استفاده از چند مثال، کاربرد روش پسگام را نشان می‌دهیم.

## ۲-۴ مفهوم پسگام

در این قسمت سیستم ساده‌ای را با دو حالت<sup>۲</sup> بصورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)\eta \\ \dot{\eta} = u \\ x, \eta \in \mathcal{R} \end{cases} \quad (1-4)$$

سیستم (۱-۴) را می‌توان بصورت شکل (۱-۴-الف) نشان داد. در واقع این سیستم از اتصال دو بخش مجزا مطابق شکل بدست می‌آید. فرض می‌کنیم که بتوان قسمت دوم سیستم که معادل جمله اول در رابطه (۱-۴) می‌باشد را با کنترل پسخور حالت<sup>۳</sup>  $\eta = \Phi(x)$  با شرط  $\Phi(0) = 0$  پایدار کنیم؛ یعنی مبدا سیستم زیر پایدار مجانبی باشد.

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\Phi(x) \quad (2-4)$$

انتخاب  $\Phi(x)$  باید به گونه‌ای باشد که بتوان تابع اسکالر  $V(x)$  را چنان یافت که دارای خصوصیات ویژه تابع لیاپانوف باشد؛ مثلاً می‌توان تابع را بصورت زیر در نظر گرفت:

- 
1. Strict Feedback Systems
  2. State
  3. State Feedback Control

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2 \quad (3-4)$$

یعنی بتوان تابع مثبت معین  $W(x)$  را چنان یافت که همواره رابطه زیر برقرار باشد.

$$\forall x \ ; \ \dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial V}{\partial x} [f(x) + g(x)\Phi(x)] \leq -W(x) \quad (4-4)$$

بنابراین با کمی تغییر می‌توان سیستم (۱-۴) را بصورت زیر نمایش داد:

$$\begin{cases} \dot{x} = [f(x) + g(x)\Phi(x)] + g(x)[\eta - \Phi(x)] \\ \dot{\eta} = u \end{cases} \quad (5-4)$$

که در شکل (۱-۴-ب) نشان داده شده است. حال با تغییر متغیر  $z = \eta - \Phi(x)$  سیستم زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases} \dot{x} = [f(x) + g(x)\Phi(x)] + g(x)z \\ \dot{z} = u - \dot{\Phi}(x) \end{cases} \quad (6-4)$$

که در شکل (۱-۴-پ) نشان داده شده است.

علت اصلی نامگذاری این روش، برداشتن  $\Phi(x)$  از خروجی انتگرال گیر و بازگشتن آن به ورودی انتگرال گیر می‌باشد؛ یعنی حرکت از شکل (۱-۴-ب) به شکل (۱-۴-پ) را پسگام نامیده‌اند.

مقدار  $\dot{\Phi}(x)$  را از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\dot{\Phi}(x) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} [f(x) + g(x)\eta] \quad (7-4)$$

با انتخاب  $\mu = u - \dot{\Phi}(x)$ ، رابطه (۶-۴) بصورت رابطه (۸-۴) تبدیل می‌شود که مشابه

سیستم (۱-۴) است؛ با این تفاوت که جمله اول آن در حالت ورودی صفر، پایدار مجانبی است.

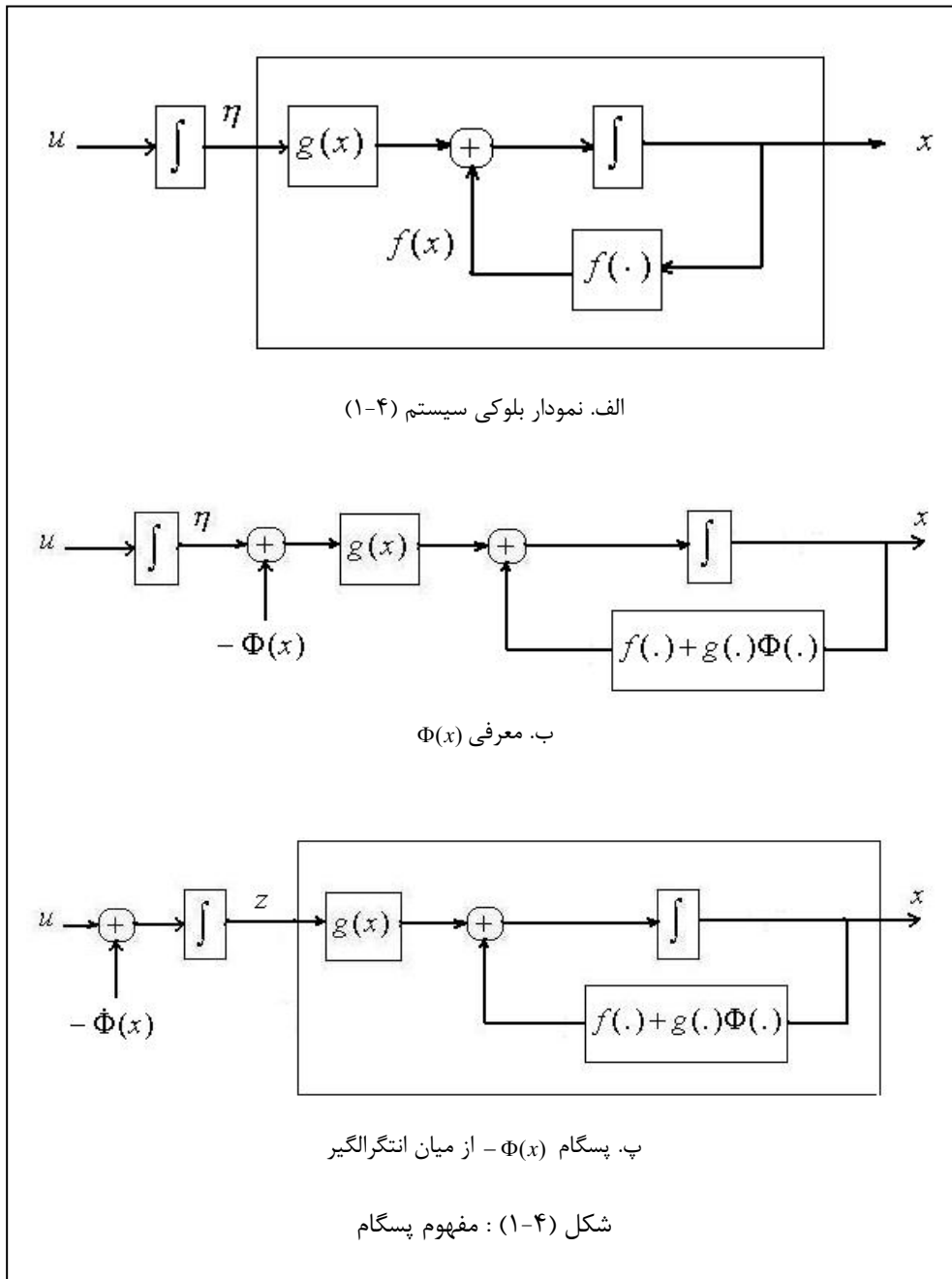
$$\begin{cases} \dot{x} = [f(x) + g(x)\Phi(x)] + g(x)z \\ \dot{z} = \mu \end{cases} \quad (8-4)$$

حال از این روش برای پایدارسازی کل سیستم استفاده می‌کنیم. فرض کنید تابع لیاپانوف کل

سیستم را بصورت زیر در نظر بگیریم:

$$V_t(x, \eta) = V(x) + \frac{1}{2}z^2 \quad (9-4)$$





که با توجه به این تعریف می توان نوشت:

$$\dot{V}_i(x, \eta) = \frac{\partial V}{\partial x} [f(x) + g(x)\Phi(x)] + \frac{\partial V}{\partial x} g(x)z + z\mu \leq -W(x) + \frac{\partial V}{\partial x} g(x)z + z\mu \quad (۱۰-۴)$$

بنابراین با انتخاب  $\mu$  مطابق رابطه زیر:

$$\mu = -kz - \frac{\partial V}{\partial x} g(x) \quad ; \quad k > 0 \quad (11-4)$$

خواهیم داشت:

$$\dot{V}_i(x, \eta) \leq -W(x) - kz^2 \quad (12-4)$$

که نشان می‌دهد مبدا پایدار مجانبی است. اگر محدوده مثبت معین بودن  $V_i(x, \eta)$  و منفی معین بودن  $\dot{V}_i(x, \eta)$  کل فضای حالات بوده و همچنین  $V_i(x, \eta)$  بصورت شعاعی نامحدود باشد، پایداری مجانبی کلی سیستم تضمین می‌شود.

در نتیجه با جاگذاری مقدار متغیرها می‌توان تابع لیاپانوف و قانون کنترل پسخور حالت را از روابط زیر بدست آورد.

$$V_i(x, \eta) = V(x) + \frac{1}{2} [\eta - \Phi(x)]^2 \quad (13-4)$$

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} [f(x) + g(x)\eta] - \frac{\partial V}{\partial x} g(x) - k[\eta - \Phi(x)] \quad (14-4)$$

اگر سیستم (۱-۴) بصورت زیر باشد،

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)\eta \\ \dot{\eta} = f_a(x, \eta) + g_a(x, \eta)u \\ x, \eta \in \mathfrak{R} \end{cases} \quad (15-4)$$

ابتدا تغییر متغیر  $u_a = f_a(x, \eta) + g_a(x, \eta)u$  را در نظر می‌گیریم و در نهایت پس از

محاسبه  $u_a$  با استفاده از رابطه (۱۴-۴) می‌توان مقدار کنترل پسخور حالت را بصورت زیر

بدست آورد:

$$u = \frac{u_a - f_a(x, \eta)}{g_a(x, \eta)} \quad (16-4)$$

### ۳-۴ استفاده از روش پسگام برای کنترل سیستمهای پسخور صریح

در حالت کلی سیستمهایی که با رابطه زیر نمایش داده می‌شوند، سیستم پسخور صریح نامیده می‌شوند.

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = f_1(z_1) + g_1(z_1)z_2 \\ \dot{z}_2 = f_2(z_1, z_2) + g_2(z_1, z_2)z_3 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} = f_{n-1}(z_1, z_2, \dots, z_{n-1}) + g_{n-1}(z_1, z_2, \dots, z_{n-1})z_n \\ \dot{z}_n = f_n(z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n) + g_n(z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n)u \end{cases} \quad (۱۷-۴)$$

که در آن  $(z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n = \eta) \in \mathfrak{R}$  و  $f_0$  تا  $f_n$  در مبدا صفر می‌باشند.

علت نامگذاری پسخور صریح برای این سیستمها آن است که در معادله  $\dot{z}_i$  توابع غیرخطی  $f_i$  و  $g_i$  فقط به حالت‌های پیشین که تا کنون پسخور شده‌اند، وابسته می‌باشد. همواره فرض می‌کنیم:

$$g_i(z_1, z_2, \dots, z_i) \neq 0 \quad ; \quad 1 \leq i \leq n-1 \quad (۱۸-۴)$$

با تکرار روش بازگشتی می‌توان سیستمهای پسخور صریح را پایدار نمود. برای این کار ابتدا سیستم زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\dot{z}_1 = f_1(z_1) + g_1(z_1)z_2 \quad (۱۹-۴)$$

که در آن ورودی کنترل است.

فرض می‌کنیم بتوان تابع لیاپانوف  $V_1(z_1)$  و قانون کنترل پسخور حالت پایدار ساز  $z_2 = \Phi_1(z_1)$  را با شرط  $\Phi_1(0) = 0$  بر ناحیه مورد نظر چنان تعریف نمود که بتوان نوشت:

$$\frac{\partial V_1}{\partial z_1} [f_1(z_1) + g_1(z_1)\Phi_1(z_1)] \leq -W(z_1) \quad (۲۰-۴)$$

حال با در اختیار داشتن  $\Phi_1(z_1)$  و  $V_1(z_1)$  می‌توان به شیوه‌ای منظم مساله را حل نمود. در گام اول سیستم زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = f_1(z_1) + g_1(z_1)z_2 \\ \dot{z}_2 = f_2(z_1, z_2) + g_2(z_1, z_2)z_3 \end{cases} \quad (21-4)$$

با فرض آنکه زیر سیستم (۲۱-۴) حالت خاصی از سیستم (۱۵-۴) می‌باشد، داریم:

$$x = z_1, \eta = z_2, u = z_3, f = f_1, g = g_1, f_a = f_2, g_a = g_2 \quad (22-4)$$

در اینصورت تابع لیاپانوف و کنترل پسخور حالت بصورت زیر است:

$$\Phi_2(z_1, z_2) = \frac{\frac{\partial \Phi_1}{\partial z_1}(f_1 + g_1 z_2) - \frac{\partial V_1}{\partial z_1} g_1 - k_1(z_2 - \Phi_1) - f_2}{g_2}; \quad k_1 > 0 \quad (23-4)$$

$$V_2(z_1, z_2) = V_1(z_1) + \frac{1}{2} [z_2 - \Phi_1(z_1)]^2 \quad (24-4)$$

در گام بعدی سیستم زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = f_1(z_1) + g_1(z_1)z_2 \\ \dot{z}_2 = f_2(z_1, z_2) + g_2(z_1, z_2)z_3 \\ \dot{z}_3 = f_3(z_1, z_2, z_3) + g_3(z_1, z_2, z_3)z_4 \end{cases} \quad (25-4)$$

این بار تعاریف رابطه (۲۸-۴) در نظر می‌گیریم.

$$x = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \eta = z_3, u = z_4, f = \begin{bmatrix} f_1 + g_1 z_2 \\ f_2 \end{bmatrix}, g = \begin{bmatrix} 0 \\ g_2 \end{bmatrix}, f_a = f_3, g_a = g_3 \quad (26-4)$$

در این گام می‌توان کنترل پسخور حالت پایدار ساز و نیز تابع لیاپانوف را بصورت زیر بدست آورد:

$$\Phi_3(z_1, z_2, z_3) = \frac{\frac{\partial \Phi_2}{\partial z_1}(f_1 + g_1 z_2) + \frac{\partial \Phi_2}{\partial z_2}(f_2 + g_2 z_3) - \frac{\partial V_2}{\partial z_2} g_2 - k_2(z_3 - \Phi_2) - f_3}{g_3} \quad (27-4)$$

$$k_1, k_2 > 0$$

$$V_3(z_1, z_2, z_3) = V_1(z_1) + \frac{1}{2} [z_2 - \Phi_1(z_1)]^2 + \frac{1}{2} [z_3 - \Phi_2(z_1, z_2)]^2 \quad (28-4)$$

با تکرار این عملیات پس از  $n-1$  مرحله، می‌توان قانون کنترل پسخور حالت پایدارساز کل سیستم بصورت  $u = \Phi(z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, \eta)$  و همچنین تابع لیاپانوف کل سیستم بصورت  $V_t(z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, \eta)$  را بدست آورد.

#### ۴-۴ نتایج شبیه‌سازی

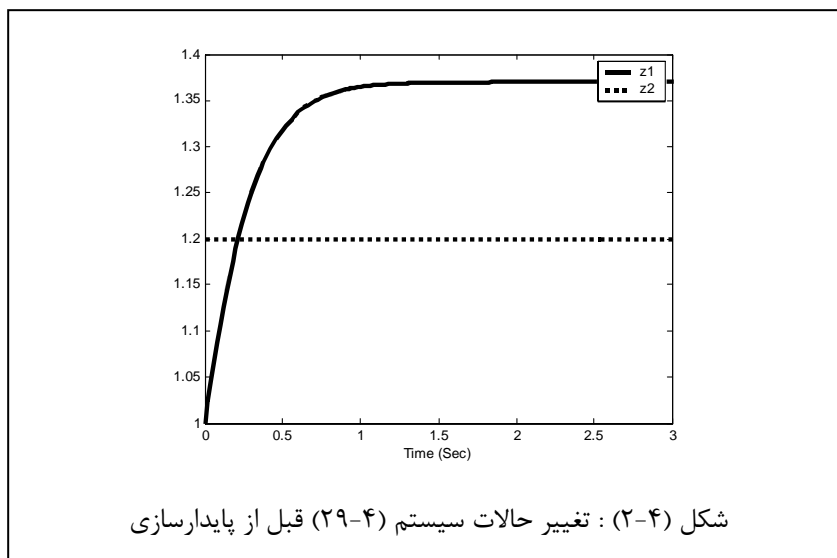
در این قسمت برای روشن شدن مطلب و همچنین آشنایی بیشتر با روش پسگام به بیان چند مثال می‌پردازیم. این مثالها به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که ابتدا حالت‌های ساده‌تر و سپس حالت‌های مشکلتر با تعداد حالت‌های بیشتر و یا نیازمند تغییر متغیر باشند تا بتوان مدلهای مختلفی که مستقیم و یا با تغییر متغیر به این روش مرتبط می‌شوند را شامل گردد.

##### مثال ۱-۴

سیستم زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -z_1^3 + z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 = u \end{cases} \quad (۲۹-۴)$$

شکل (۲-۴) تغییرات حالات سیستم را برحسب زمان نشان می‌دهد.



همانطور که در شکل (۲-۴) می بینیم دو حالت سیستم به مقداری غیر صفر رسیده اند و آرامش کامل نیافته اند. حال می خواهیم با استفاده از روش پسگام حالات سیستم را به عدد صفر باز گردانیم.

برای جلوگیری از حذف دینامیک مؤثر  $z_1^3 - z_1$  باید  $z_2 = \Phi(z_1) = -z_1$  انتخاب گردد. فرض

می کنیم  $V_1(z_1) = \frac{1}{2} z_1^2$ . در این صورت با استفاده از روابط (۲۷-۴) و (۲۸-۴) خواهیم داشت:

$$u = z_1^3 - 2z_1 - z_2 - k(z_1 + z_2) \quad ; \quad k > 0 \quad (۳۰-۴)$$

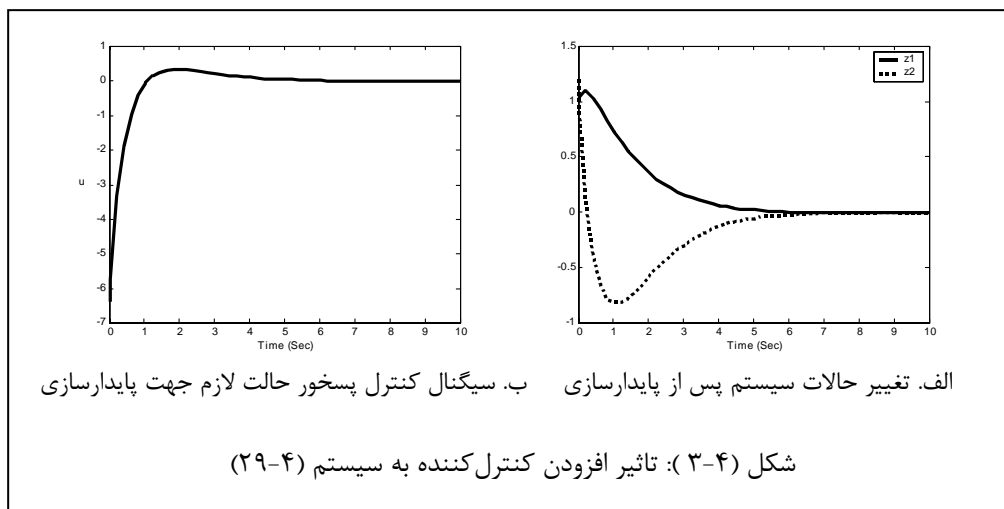
$$V(z_1, z_2) = \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} (z_1 + z_2)^2 \quad (۳۱-۴)$$

در شکل (۳-۴ الف) تاثیر کنترل کننده بر حالات سیستم (۲۹-۴) نشان داده شده است. در

شکل (۳-۴ ب) سیگنال کنترل پسخور حالت رسم شده است. تمامی شکلها به ازای  $k=1.9$  رسم

شده اند. در شکل (۴-۴)، تابع لیاپانوف سیستم (۲۹-۴) رسم شده است. در شکلها مشخص است

تمامی حالات سیستم بعد از گذشت مدت زمان کوتاهی در صفر پایدار می گردند. \*

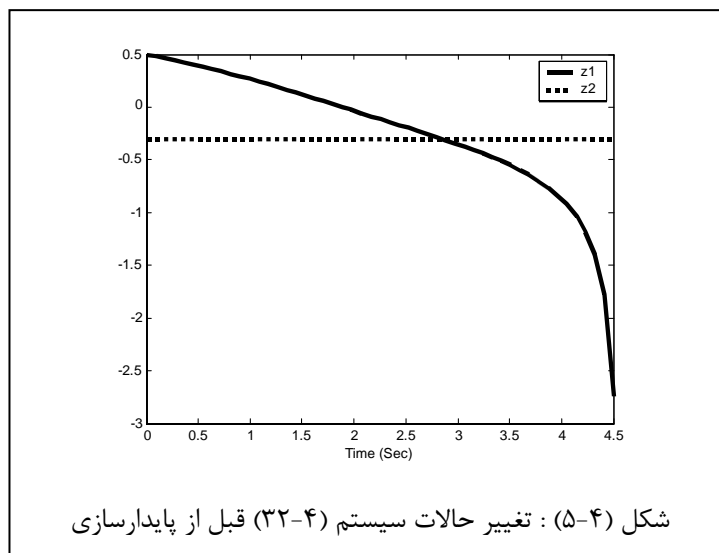
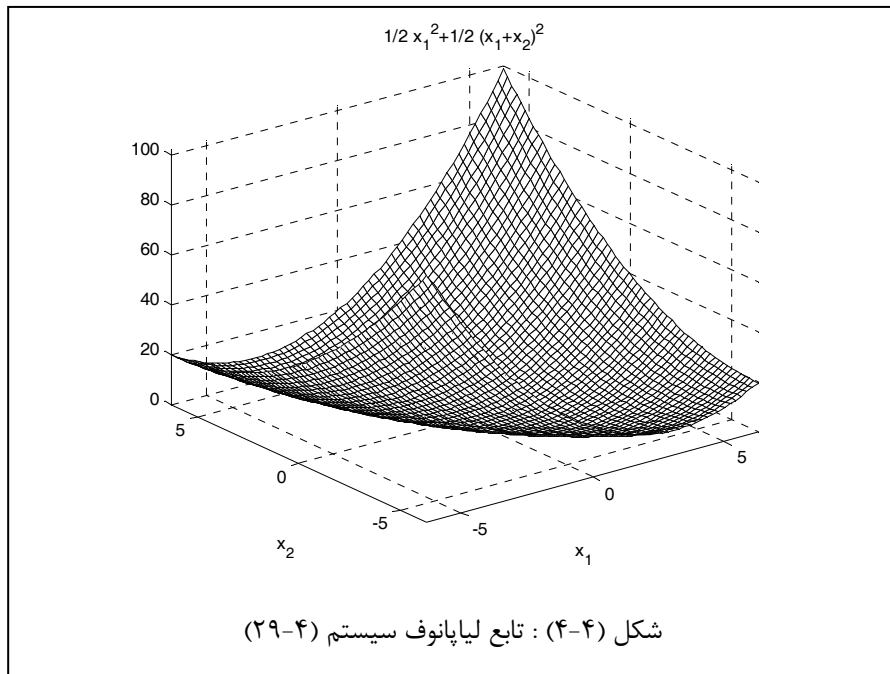


## مثال ۲-۴

سیستم زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_1^3 + z_2^5 + z_2 \\ \dot{z}_2 = u \end{cases} \quad (۳۲-۴)$$

همانطور که در شکل (۴-۵) می بینیم حالت  $z_1$  بعد از گذشت زمان کوتاهی به بی نهایت رفته و حالت  $z_2$  در صفر پایدار نشده است.



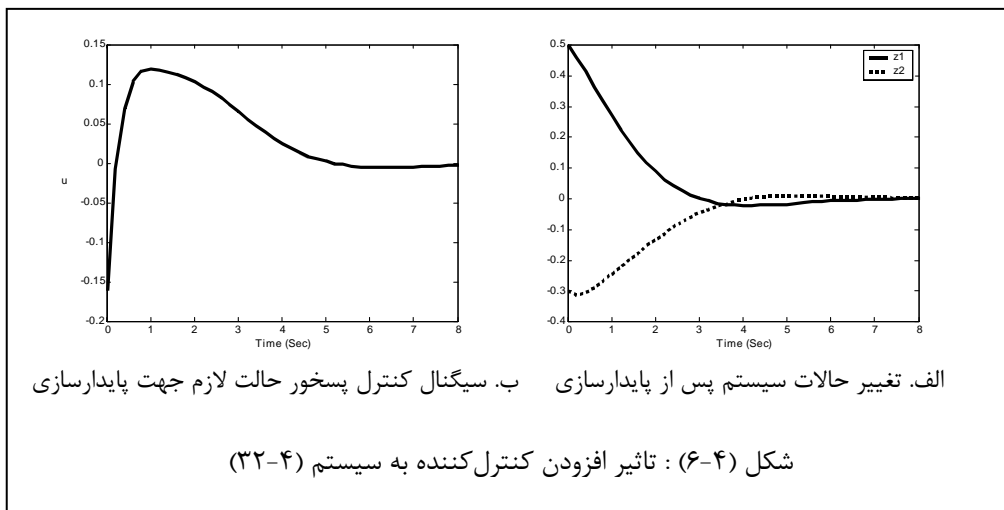
برای اینکه سیستم فوق را کنترل کنیم، در مرحله اول فرض می کنیم:  $\alpha = z_2^5 + z_2$ . بنابراین برای پایداری سیستم می توان  $\alpha = \Phi(z_1) = -2z_1^3$  را انتخاب نمود. همچنین در این مرحله فرض

می‌کنیم  $V_1(z_1) = \frac{1}{2} z_1^2$  با این انتخاب کنترل پسخور حالت و تابع لیاپانوف برای این سیستم بصورت زیر می‌باشند.

$$u = \frac{1}{5z_2^4 + 1} [-6z_1^2(z_1^3 + z_2^5 + z_2) - z_1 - 2z_1^3 - z_2^5 - z_2] \quad ; \quad k > 0 \quad (33-4)$$

$$V(z_1, z_2) = \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} (z_1 + z_2^5 + z_2)^2 \quad (34-4)$$

در شکل (۴-۶-الف) تاثیر کنترل کننده بر حالات سیستم (۴-۳۲) نشان داده شده است. در شکل (۴-۶-ب) سیگنال کنترل پسخور حالت رسم شده است. تمامی این شکلها به ازای  $k=1.4$  رسم شده‌اند. در شکل (۴-۷) تابع لیاپانوف سیستم (۴-۳۲) رسم شده است. در شکلها مشخص است تمامی حالات سیستم بعد از گذشت مدت زمان کوتاهی در صفر پایدار می‌گردند.\*



### مثال ۳-۴

سیستم زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_1^2 - z_1^3 + z_2 \\ \dot{z}_2 = u \end{cases} \quad (35-4)$$

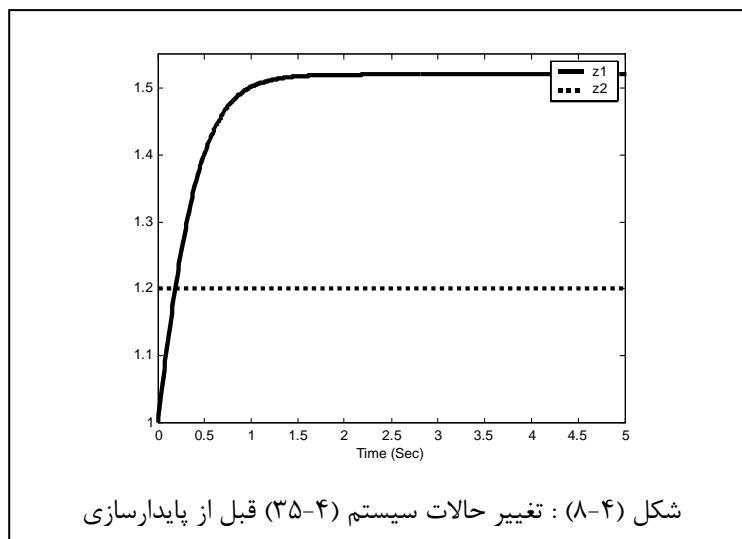
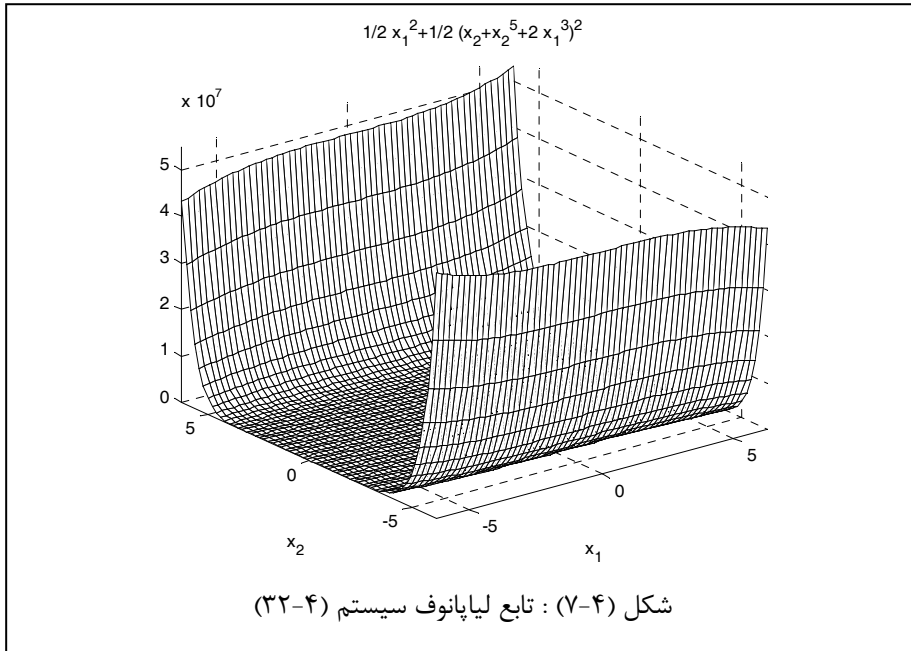
شکل (۴-۸) تغییرات حالات سیستم را برحسب زمان نشان می‌دهد. همانطور که در شکل دیده می‌شود، دو حالت سیستم به مقداری غیر صفر رسیده‌اند و آرامش کامل نیافته‌اند. حال می‌خواهیم با



استفاده از روش پسگام حالات سیستم را به عدد صفر باز گردانیم. این بار برای پایدارسازی سیستم

کافیست  $z_2 = \Phi(z_1) = -z_1^2 - z_1$  انتخاب گردد. فرض می‌کنیم  $V_1(z_1) = \frac{1}{2} z_1^2$ . با این انتخاب کنترل

پسخور حالت و تابع لیاپانوف سیستم بصورت زیر می‌باشند.

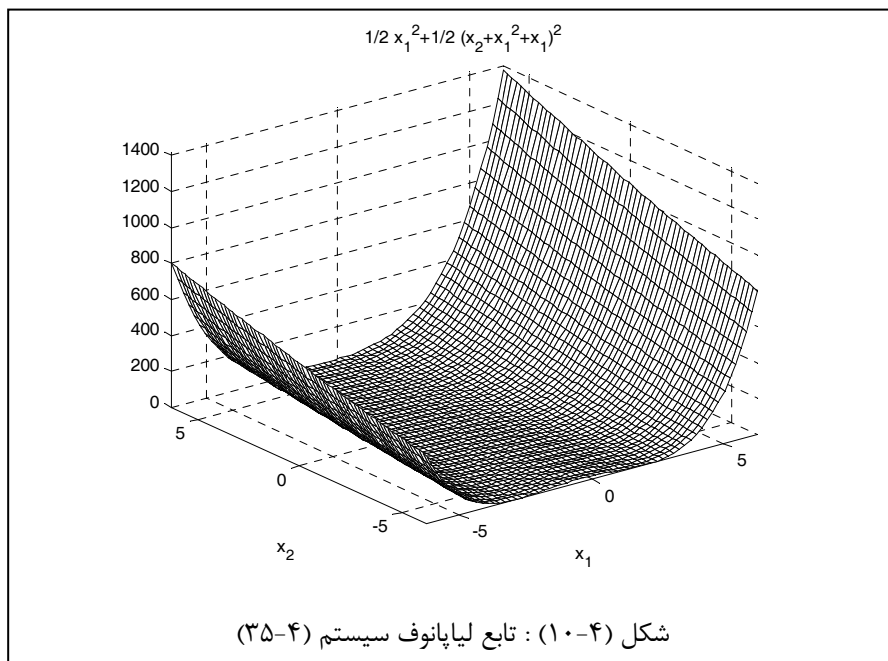
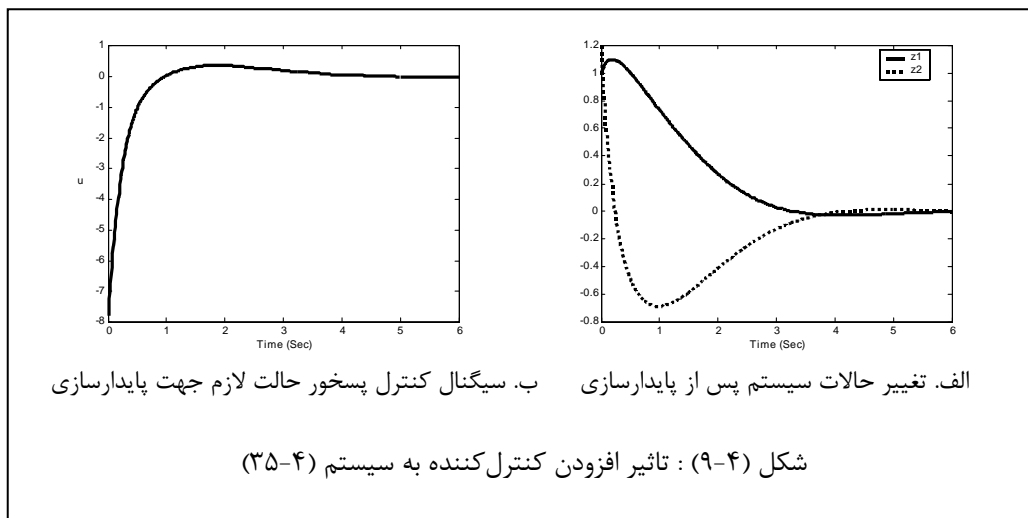


$$u = -(2z_1 + 1)(z_1^2 - z_1^3 + z_2) - z_1 - k(z_2 + z_1^2 + z_1) ; \quad k > 0 \quad (۴-۳۶)$$

$$V(z_1, z_2) = \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} (z_2 + z_1 + z_1)^2 \quad (37-4)$$

در شکل (۹-۴ الف) تاثیر کنترل کننده بر حالات سیستم (۳۵-۴) و در شکل (۹-۴ ب) سیگنال کنترل پسخور حالت رسم شده است. تمامی این شکلها به ازای  $k=1$  رسم شده اند. در شکل (۱۰-۴) تابع لیاپانوف سیستم (۳۵-۴) رسم شده است. در شکلها مشخص است تمامی حالات سیستم بعد از گذشت مدت زمان کوتاهی در صفر پایدار می گردند.

\*

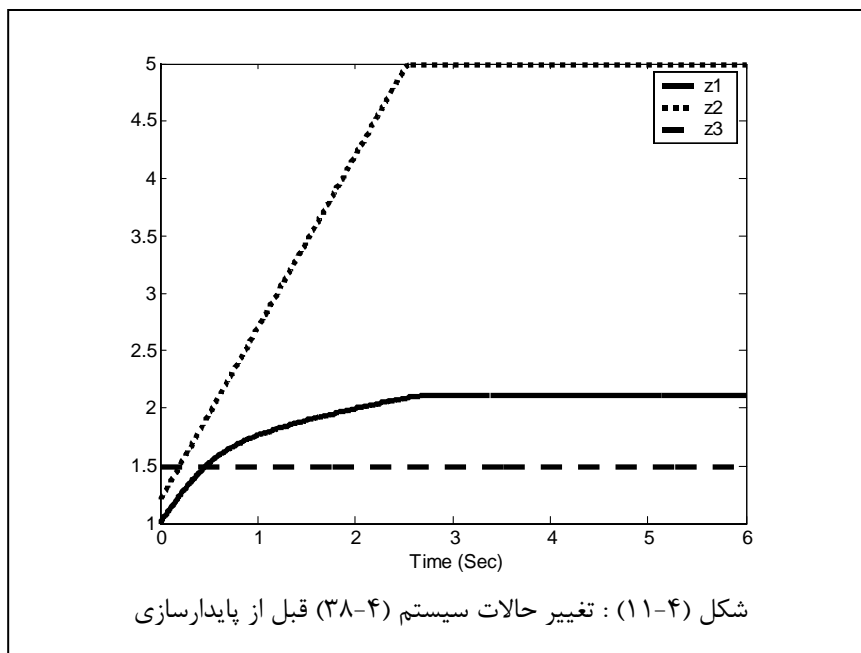


## مثال ۴-۴

سیستم زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_1^2 - z_1^3 + z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \dot{z}_3 = u \end{cases} \quad (۳۸-۴)$$

این سیستم از سیستم مثال ۳-۴ با یک انتگرالگیر اضافی در طرف ورودی تشکیل شده است. همانطور که در شکل (۱۱-۴) می‌بینیم سه حالت سیستم به مقداری غیر صفر رسیده‌اند و آرامش کامل نیافته‌اند. حال می‌خواهیم با استفاده از روش پسگام حالات سیستم را به صفر باز گردانیم.



در این حالت نیز مانند مثال قبل، پسگام را به مساله اعمال می‌کنیم؛ در این صورت پس از یک گام بازگشت به عقب، می‌توان سیستم مرتبه دوم زیر را پایدار نمود.

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_1^2 - z_1^3 + z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \end{cases} \quad (۳۹-۴)$$

که در آن مقدار  $z_3$  را می‌توان سیگنال پسخور حالت مثال قبل در نظر گرفت.

بنابراین با استفاده از رابطه (۳۶-۴)، می‌توان مقدار  $z_3$  را از رابطه زیر بدست آورد.

$$z_3 = -(2z_1 + 1)(z_1^2 - z_1^3 + z_2) - z_1 - k_1(z_2 + z_1^2 + z_1) = \Phi(z_1, z_2) ; k_1 > 0 \quad (40-4)$$

تابع لیاپانوف سیستم (۳۹-۴)، با توجه به رابطه (۳۷-۴) از رابطه (۴۱-۴) قابل محاسبه می‌باشد.

$$V(z_1, z_2) = \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} (z_2 + z_1^2 + z_1)^2 \quad (41-4)$$

حال کل سیستم (۳۸-۴) را در نظر می‌گیریم. این سیستم حالت خاصی از سیستمهای پسخور صریح رابطه (۱۷-۴) است. بنابراین با در نظر گرفتن تعاریف زیر، می‌توان قانون کنترل پسخور حالت را برای آن محاسبه کرد.

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \eta = z_3, f = \begin{bmatrix} z_1^2 - z_1^3 + z_2 \\ 0 \end{bmatrix}, g = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (42-4)$$

با استفاده از روابط (۲۷-۴) و (۲۸-۴) می‌توان مقدار تابع کنترل پسخور حالت و تابع لیاپانوف کل سیستم را بصورت زیر بدست آورد:

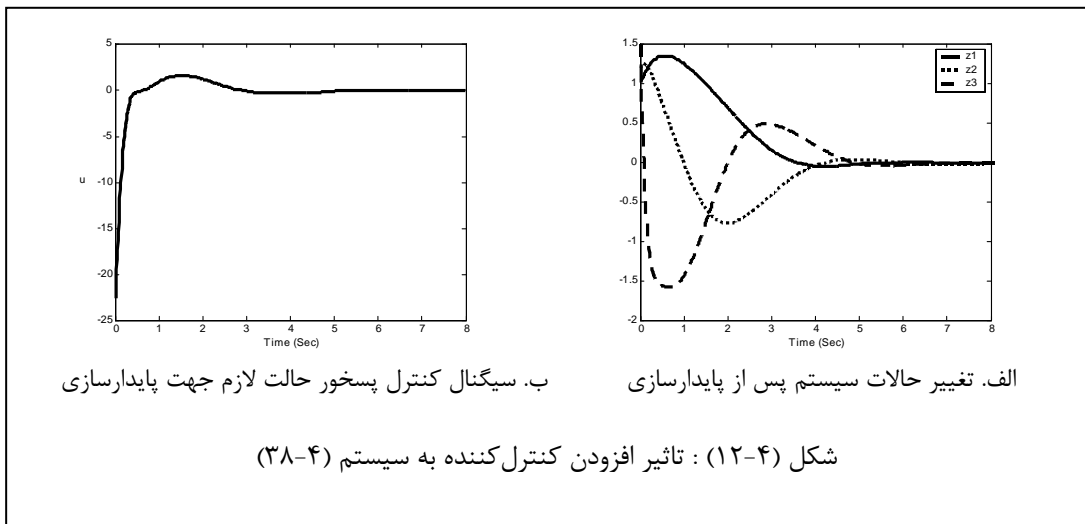
$$(43-4)$$

$$u = \frac{\partial \Phi(z_1, z_2)}{\partial z_1} (z_1^2 - z_1^3 + z_2) + \frac{\partial \Phi(z_1, z_2)}{\partial z_2} z_3 - \frac{\partial V(z_1, z_2)}{\partial z_2} - k_2 [z_3 - \Phi(z_1, z_2)] ; k_2 > 0$$

$$V(z_1, z_2) = \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} (z_2 + z_1^2 + z_1)^2 + \frac{1}{2} [z_3 - \Phi(z_1, z_2)]^2 \quad (44-4)$$

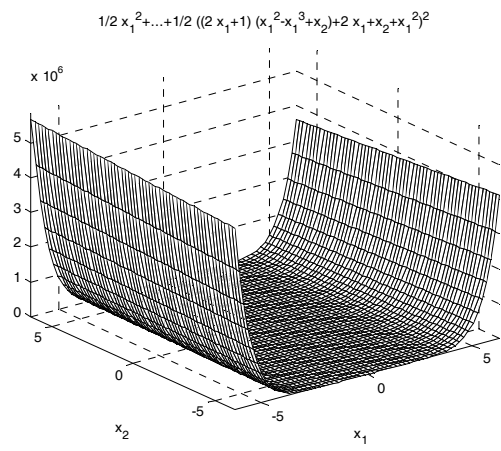
در شکل (۴-۱۲-الف) تاثیر کنترل کننده بر حالات سیستم نشان داده شده است. در شکل

(۴-۱۲-ب) سیگنال کنترل پسخور حالت رسم شده است. تمامی این شکلها به ازای  $k_1 = k_2 = 1$  رسم شده‌اند.

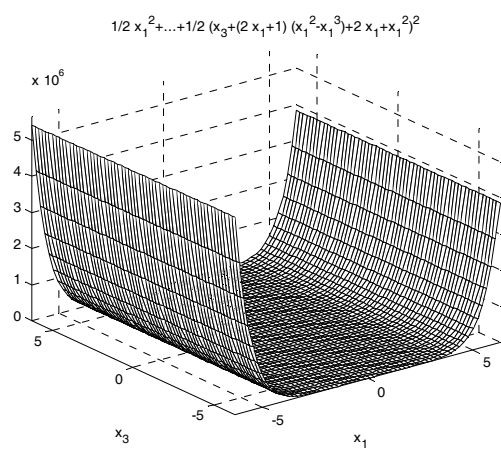


تابع لیاپانوف سیستم (۴-۳۸) به ازای تغییر حالت‌های  $z_1$  و  $z_2$ ، به ازای تغییر حالت‌های  $z_1$  و  $z_3$  و به ازای تغییر حالت‌های  $z_2$  و  $z_3$  به ترتیب در شکل‌های (۴-۱۳ الف)، (۴-۱۳ ب) و (۴-۱۳ پ) نشان داده شده است. در شکلها مشخص است که تمامی حالات سیستم بعد از گذشت مدت زمان کوتاهی در صفر پایدار می‌گردند.

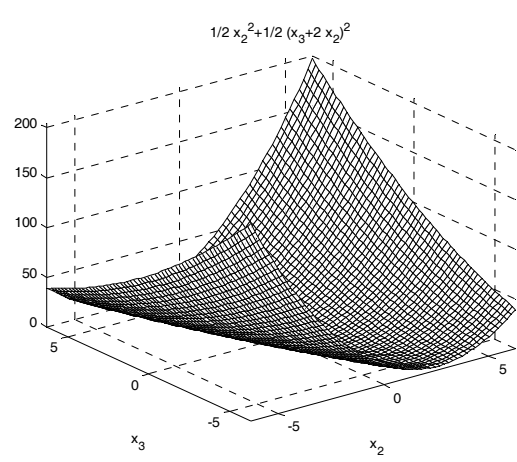
\*



الف. تابع لیپانوف بر حسب تغییرات  $Z_2$  و  $Z_1$



ب. تابع لیپانوف بر حسب تغییرات  $Z_3$  و  $Z_1$



پ. تابع لیپانوف بر حسب تغییرات  $Z_3$  و  $Z_2$

شکل ۴-۱۲: تابع لیپانوف سیستم (۴-۳۸)



در فصل چهارم یکی از مهمترین راههای دستیابی به تابع لیپانوف یک سیستم که به علت مشکلات روشهای پیشین ابداع شده بود، بیان شد. یکی از مشکلات روش پسگام، محدودیت کاربرد این روش می‌باشد؛ یعنی برای سیستمهای محدودی می‌توان از این روش استفاده کرد. زیرا در حالت کلی، سیستمهای محدودی وجود دارند که بتوان آنها را با تغییر متغیر و عملیات سطری و ستونی به شکل پسخور صریح تبدیل کرد. در این گفتار برای رفع این مشکل، روش جدیدی بیان کرده‌ایم که آن را روش پسگام تعمیم‌یافته<sup>۱</sup> نامیده‌ایم.

در این فصل ابتدا روش پسگام تعمیم‌یافته را بیان کرده و قضیه مربوط به آن را اثبات می‌کنیم، سپس با استفاده از یک مثال کارآیی روش را روشن می‌نماییم. با این مثال دو مساله پایدارسازی حالات و ردیابی ورودی پله را بصورت جداگانه بررسی می‌کنیم. در فصل بعدی برای روشن شدن مطلب و بیان کارآیی روش، مثالهای کاربردی دیگری را بیان می‌کنیم.

## ۲-۵ روش پسگام تعمیم‌یافته

در این بخش برای بیان روش پسگام تعمیم‌یافته ابتدا قضیه‌ای را بیان کرده و سپس آن را اثبات می‌نماییم. از آنجا که مفهوم روش پیشنهادی، شبیه روش پسگام است و از طرفی نسبت به روش پسگام کاربرد بیشتری داشته و سیستمهای بیشتری را می‌توان با تکیه بر این روش کنترل کرد، این روش را پسگام تعمیم‌یافته نام نهاده‌ایم.

کلاس خاصی از سیستمهای غیرخطی اتونوموس را بصورت زیر فرض می‌کنیم.

$$\begin{cases} \dot{X} = F(X) + G(X)\eta \\ \dot{\eta} = f_0(X, \eta) + g_0(X, \eta)u \end{cases} \quad (1-5)$$

که در آن  $X = [x_1, x_2, \dots, x_{n-1}] \in \mathcal{R}^{n-1}$  و  $\eta \in \mathcal{R}$  است.



بسیاری از سیستم‌های کنترل غیرخطی یا توسط مدل رابطه (۱-۵) قابل نمایش هستند؛ مانند معادلات مربوط به سیستم خودخلبان هواپیما [3] و یا اینکه به راحتی به این مدل تبدیل می‌شوند؛ مانند معادلات لورنز [41]. برای تعیین تابع لیاپانوف و قانون کنترل پسخور حالت، با تکیه بر این مدل قضیه ۱-۵ را مطرح می‌کنیم.

### قضیه ۱-۵: روش پسگام تعمیم یافته

فرض کنید رابطه (۱-۵) مدل سیستم کنترل غیرخطی مفروضی باشد. حال تابع اسکالر  $V(X)$  را بصورت زیر در نظر بگیرید.

$$V(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \quad (۲-۵)$$

تابع اسکالر  $\eta = \Phi_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$  به ازای  $i=1, 2, \dots, n-1$  را طوری تعریف می‌کنیم که تابع  $V(X)$  رابطه (۲-۵) مثبت معین بوده و مشتق آن منفی معین باشد. در این صورت تابع کنترل پسخور حالت و تابع لیاپانوف کل سیستم با استفاده از روابط زیر بدست می‌آیند.

$$u = \frac{1}{g_0(X, \eta)} \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} [f_j(X) + g_j(X)\eta] - \sum_{i=1}^{n-1} x_i g_i(X) - \sum_{i=1}^{n-1} k_i [\eta - \Phi_i(X)] - f_0(X, \eta) \right\} ; \quad \forall k_i > 0 ; \quad i=1, 2, \dots, n-1 \quad (۳-۵)$$

$$V_t(X, \eta) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} [\eta - \Phi_i(X)]^2 \quad (۴-۵)$$

در روابط (۳-۵) و (۴-۵)  $F = [f_1, f_2, \dots, f_{n-1}]^T$  و  $G = [g_1, g_2, \dots, g_{n-1}]^T$  می‌باشند. در

ضمن پایداری سیستم کنترل شده از نوع مجانبی به مفهوم وسیع (کلی) می‌باشد.

اثبات.

رابطه (۱-۵) را بصورت زیر گسترش می‌دهیم.

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(X) + g_i(X)\eta ; i=1,2,\dots,n-1 \\ \dot{\eta} = f_0(X,\eta) + g_0(X,\eta)u \end{cases} \quad (5-5)$$

با توجه به فرض، تابع  $V(X)$  مثبت معین و مشتق آن منفی معین است، بنابراین می توان نوشت.

$$\dot{V}(X) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i \dot{x}_i = \sum_{i=1}^{n-1} x_i [f_i(X) + g_i(X)\Phi_i(X)] \Rightarrow \dot{V}(X) \leq -W(X) \quad (6-5)$$

$W(X)$  یک تابع مثبت معین می باشد.

با تغییر متغیر  $u_0 = f_0(X,\eta) + g_0(X,\eta)u$  و همچنین اضافه و کم کردن  $g_i(X)\Phi_i(X)$  به سطر

$i$ -ام رابطه (5-5) خواهیم داشت.

$$\begin{cases} \dot{x}_i = [f_i(X) + g_i(X)\Phi_i(X)] + g_i(X)[\eta - \Phi_i(X)] , i=1,2,\dots,n-1 \\ \dot{\eta} = u_0 \end{cases} \quad (7-5)$$

حال با استفاده از تغییر متغیر زیر بدست می آوریم.

$$z_i = \eta - \Phi_i(X) \Rightarrow \dot{z}_i = u_0 - \dot{\Phi}_i(X) \quad (8-5)$$

$$\dot{\Phi}_i(X) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} [f_j(X) + g_j(X)\eta] \quad (9-5)$$

بنابراین رابطه (7-5) بصورت زیر خواهد بود.

$$\begin{cases} \dot{x}_i = [f_i(X) + g_i(X)\Phi_i(X)] + g_i(X)[\eta - \Phi_i(X)] \\ \dot{z}_i = u_0 - \dot{\Phi}_i \end{cases} , i=1,2,\dots,n-1 \quad (10-5)$$

می دانیم که  $z_i$  ها،  $n-1$  جمله هستند. بنابراین  $\lambda_i$  را نیز بصورت  $n-1$  جمله زیر در

نظر می گیریم.

$$\lambda_i = u_0 - \dot{\Phi}_i ; i=1,2,\dots,n-1 \quad (11-5)$$

در نتیجه خواهیم داشت.

$$\dot{z}_i = \lambda_i ; i=1,2,\dots,n-1 \quad (12-5)$$

حال ثابت می کنیم که رابطه زیر می تواند تابع لیاپانوف سیستم (1-5) باشد.

$$V_t(X, \eta) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} [\eta - \Phi_i(X)]^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} z_i^2 \quad (13-5)$$

تابع تعریف شده در رابطه (۱۳-۵) تابعی مثبت معین می باشد. پس کافی است که منفی معین

بودن مشتق آن را بررسی نماییم. با مشتق گیری از (۱۳-۵) نسبت به زمان، رابطه زیر بدست می آید.

$$\dot{V}_t(X, \eta) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial V(X)}{\partial x_i} [f_i(X) + g_i(X)\Phi_i(X)] + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial V(X)}{\partial x_i} g_i(X)z_i + \sum_{i=1}^{n-1} z_i \lambda_i \quad (14-5)$$

برای اینکه  $\dot{V}_t(X, \eta)$  منفی معین باشد، مقدار  $\lambda_i$  را بصورت زیر در نظر می گیریم.

$$\lambda_i = -\frac{\partial V(X)}{\partial x_i} g_i(X) - k_i z_i \quad ; \quad \forall k_i > 0 \quad (15-5)$$

بنابراین مقدار  $\dot{V}_t(X, \eta)$ ، با توجه به (۶-۵) از رابطه زیر بدست می آید.

$$\dot{V}_t(X, \eta) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i [f_i(X) + g_i(X)\Phi_i(X)] - \sum_{i=1}^{n-1} k_i z_i^2 \leq -W(X) - \sum_{i=1}^{n-1} k_i z_i^2 \quad (16-5)$$

که نشان دهنده منفی معین بودن  $\dot{V}_t(X, \eta)$  است. در نتیجه تابع رابطه (۱۳-۵) یک تابع لیاپانوف

برای سیستم با معادلات (۱-۵) می باشد. در ضمن تابع کنترل پسخور حالت  $u_0$  جهت پایدارسازی

سیستم (۱-۵)، با ترکیب روابط (۷-۵)، (۹-۵) و (۱۰-۵) بصورت زیر خواهد بود:

$$u_0 = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} [f_j(X) + g_j(X)\eta] - \sum_{i=1}^{n-1} x_i g_i(X) - \sum_{i=1}^{n-1} k_i [\eta - \Phi_i(X)] \quad (17-5)$$

در نهایت با استفاده از تغییر متغیری که داده ایم؛  $u = \frac{u_0 - f_0(X, \eta)}{g_0(X, \eta)}$ ، تابع کنترل پسخور حالت

$u$  مطابق رابطه (۳-۵) بدست می آید.

ضمناً چون محدوده مثبت معین بودن  $V_t(X, \eta)$  و منفی معین بودن  $\dot{V}_t(X, \eta)$  کل فضای حالات

بوده و  $V_t(X, \eta)$  بصورت شعاعی نامحدود می باشد، پایداری مجانبی سیستم به مفهوم وسیع تضمین

می گردد. ■

نکته‌ای که ممکن است در نگاه اول مشکل به نظر آید، انتخاب  $\Phi_i$  می‌باشد در حالیکه بدین منظور با توجه به تابع لیپانوف انتخابی، می‌توان در هر حالت  $\Phi_i = [-f_i(X) - x_i]/G_i(X)$  را در نظر گرفت که با این تعریف خواسته قضیه برآورده شده؛ ولی لزوماً حالت بهینه نمی‌باشد.

۳-۵ نتایج شبیه‌سازی

در این قسمت برای اثبات کارایی روش پسگام تعمیم‌یافته، یک مثال بیان می‌کنیم و سپس با استفاده از روش پسگام تعمیم‌یافته آن را پایدار می‌کنیم. در نهایت مساله ردیابی<sup>۱</sup> را برای سیستم بیان شده آزمایش می‌کنیم.

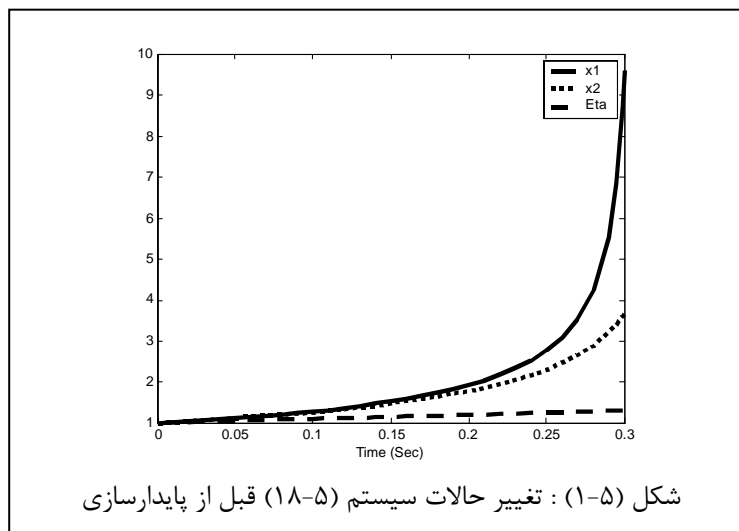
در این بخش سیستمی را مطابق رابطه زیر در نظر می‌گیریم.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^3 + x_1 x_2 - x_1 + x_1 \eta \\ \dot{x}_2 = x_2^3 + x_2 \eta \\ \dot{\eta} = u \end{cases} \quad (18-5)$$

معادلات (۱۸-۵) مثالی از سیستم‌های بیان‌شده با رابطه (۱-۵) است.

همانطور که در شکل (۱-۵) نشان داده شده است، حالات سیستم ناپایدار بوده و بعد از گذشت

مدت زمانی کوتاه، به بی‌نهایت می‌روند.



با مقایسه روابط (۱۸-۵) و (۱-۵) بدست می‌آوریم:

1. Tracking

$$\begin{aligned} g_1(X) &= x_1 & \Rightarrow & \quad g_1(X) \neq 0 \\ f_1(X) &= x_1^3 + x_1 x_2 - x_2 & \Rightarrow & \quad f_1(X) \neq f_1(x_1) \end{aligned} \quad (19-5)$$

از رابطه (۱۹-۵) نتیجه می‌گیریم که سیستم با معادلات (۱۸-۵) با سیستمهای پسخور صریح بیان شده با رابطه (۱۷-۴) تفاوت داشته و بنابراین مسایل پایداری و ردیابی سیستم (۱۸-۵) با استفاده از روش پسگام امکان‌پذیر نیست. در ادامه نشان می‌دهیم که پایداری و ردیابی پاسخ پله این سیستم با استفاده از روش پسگام تعمیم‌یافته بخوبی امکان‌پذیر می‌باشد.

### ۱-۳-۵ پایداری حالات سیستم

همانطور که در قضیه ۱-۵ بیان شده است؛ برای پایداری سیستم (۱۸-۵)، ابتدا باید دو تابع اسکالر  $\Phi_1(x_1, x_2)$  و  $\Phi_2(x_1, x_2)$  انتخاب کنیم که شرایط قضیه را برآورده سازند؛ یکی از این انتخابها می‌تواند بصورت زیر باشد.

$$\begin{cases} \Phi_1(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2 \\ \Phi_2(x_1, x_2) = -2x_2^2 \end{cases} \quad (20-5)$$

حال با جاگذاری  $\Phi_1(x_1, x_2)$  و  $\Phi_2(x_1, x_2)$  در روابط (۳-۵) و (۴-۵) می‌توان مقدار تابع کنترل پسخور حالت و تابع لیپانوف کل سیستم را بدست آورد. این توابع بصورت زیر می‌باشند:

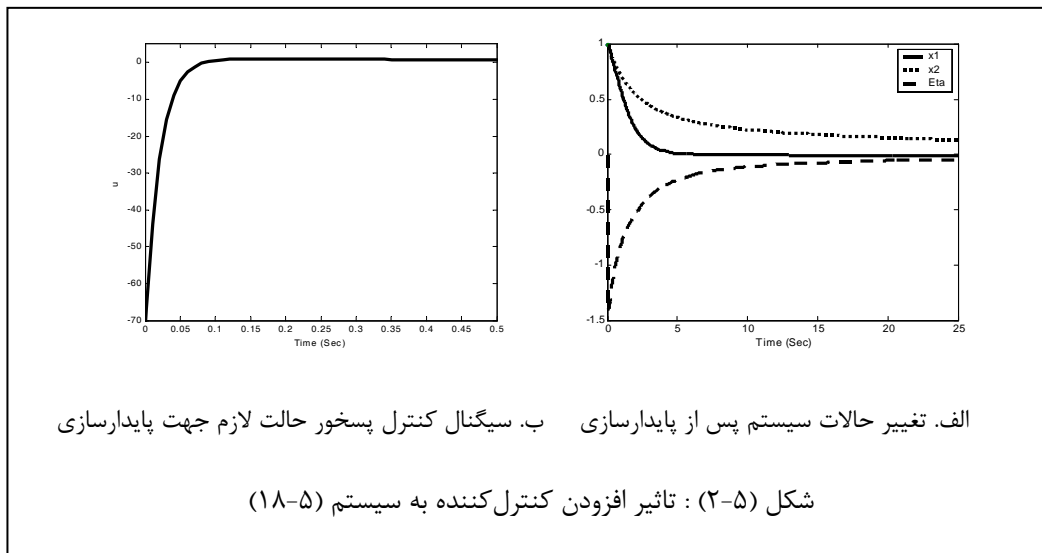
$$u = -(x_1^2 + x_2^2) - k_1(\eta + x_1^2 + x_2) - k_2(\eta + 2x_2^2) - 2x_1\dot{x}_1 - (4x_2 + 1)\dot{x}_2 \quad ; \quad k_1, k_2 > 0 \quad (21-5)$$

$$V_t(x_1, x_2, \eta) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}(\eta + x_1^2 + x_2)^2 + \frac{1}{2}(\eta + 2x_2^2)^2 \quad (22-5)$$

شکل (۲-۵ الف) تاثیر کنترل‌کننده بر حالات سیستم را نشان می‌دهد. در شکل (۲-۵ ب) سیگنال کنترل پسخور حالت رسم شده است. تمامی این شکلها به ازای  $k_1 = 1, k_2 = 20$  رسم شده‌اند. در شکل (۳-۵ الف) تابع لیپانوف سیستم (۱۸-۵) به ازای تغییرات حالت‌های  $x_1$  و  $x_2$  در شکل (۳-۵ ب) تابع لیپانوف سیستم (۱۸-۵) به ازای تغییرات حالت‌های  $x_1$  و  $\eta$  و در شکل

(۵-۳-پ) تابع لیاپانوف سیستم (۵-۱۸) به ازای تغییرات حالت‌های  $x_2$  و  $\eta$  نشان داده شده است. در

شکلها مشخص است تمامی حالات سیستم بعد از گذشت مدت زمانی در صفر پایدار می‌گردند. \*



### ۵-۳-۲ ردیابی ورودی پله

این قسمت به مساله ردیابی سیستم اختصاص دارد؛ یعنی آیا خروجی سیستم ورودی مرجع را

دنبال می‌کند یا نه؟ این بخش را به ردیابی پاسخ پله اختصاص می‌دهیم.

بطور کلی برای بررسی مساله ردیابی باید در سیستم تغییر متغیر ایجاد کنیم. فرض می‌کنیم

ورودی سیستم بصورت  $r(t)$  بوده و بخواهیم حالت  $x_i$  این ورودی را ردیابی کند. در این

صورت با تغییر متغیر  $y_i = x_i - r(t)$  این کار را انجام می‌دهیم.

در این مثال فرض می‌کنیم ورودی  $r(t)$  بصورت تابع پله به سیستم (۵-۱۸) اعمال گردد و

خروجی سیستم حالت  $x_1$  باشد؛ یعنی بخواهیم حالت  $x_1$  ورودی پله را دنبال کند. بنابراین باید تغییر

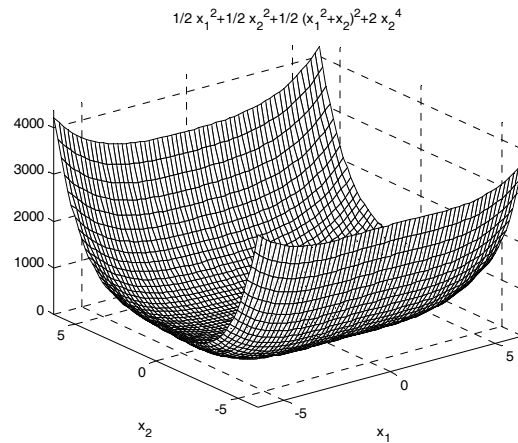
متغیر زیر را انجام دهیم.

$$y_1 = x_1 - r(t) = x_1 - 1 \quad ; \quad t \geq 0 \quad (۵-۲۳)$$

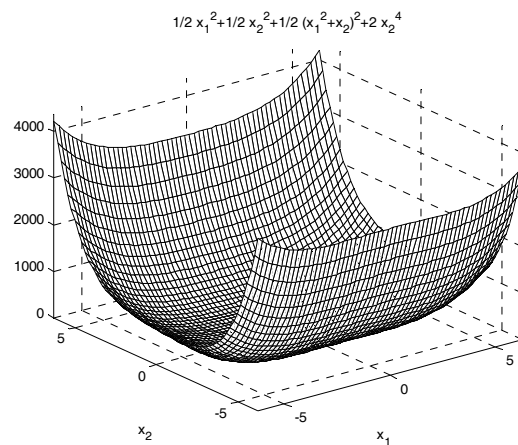
با استفاده از تغییر متغیر رابطه (۲۳-۵) سیستم (۱۸-۵) به سیستم زیر تبدیل می‌شود.

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = (1 + y_1)^3 - y_1 x_2 + (1 + y_1) \eta \\ \dot{x}_2 = x_2^3 + x_2 \eta \\ \dot{\eta} = u \end{cases}$$

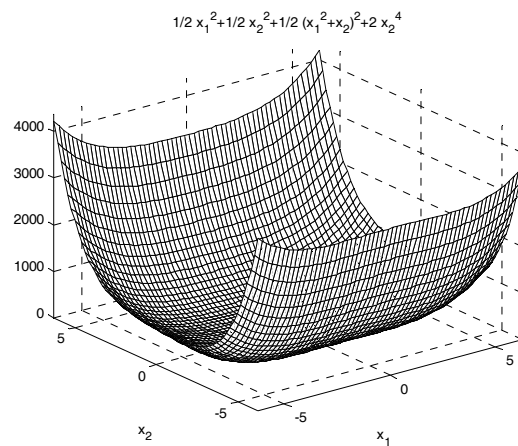
(۲۴-۵)



الف. تابع لیپانوف بر حسب تغییرات  $x_1$  و  $x_2$



ب. تابع لیپانوف بر حسب تغییرات  $x_1$  و  $\eta$



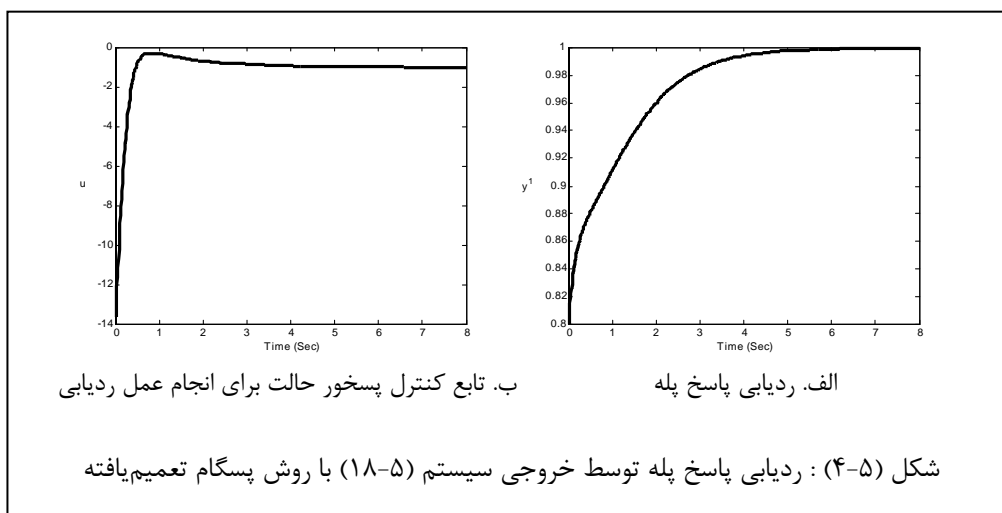
پ. تابع لیپانوف بر حسب تغییرات  $x_2$  و  $\eta$

شکل (۳-۵) : تابع لیپانوف سیستم (۱۸-۴)

با توجه به شرایط قضیه خواهیم داشت.

$$\Phi_1(y_1, x_2) = \frac{y_1 x_2 - 2(1 + y_1)^3}{1 + y_1}, \quad \Phi_2(y_1, x_2) = -2x_2^2 \quad (۲۵-۵)$$

نتایج شبیه‌سازی در شکل (۴-۵) نشان داده شده است. شکل (۴-۵-الف) تغییرات حالت  $x_1$  را نسبت به زمان نشان می‌دهد. همانطور که در شکل دیده می‌شود، خروجی  $x_1$  بخوبی ورودی سیستم را دنبال می‌کند. شکل (۴-۵-ب) تابع کنترل پسخور حالت برای انجام ردیابی را نشان می‌دهد.







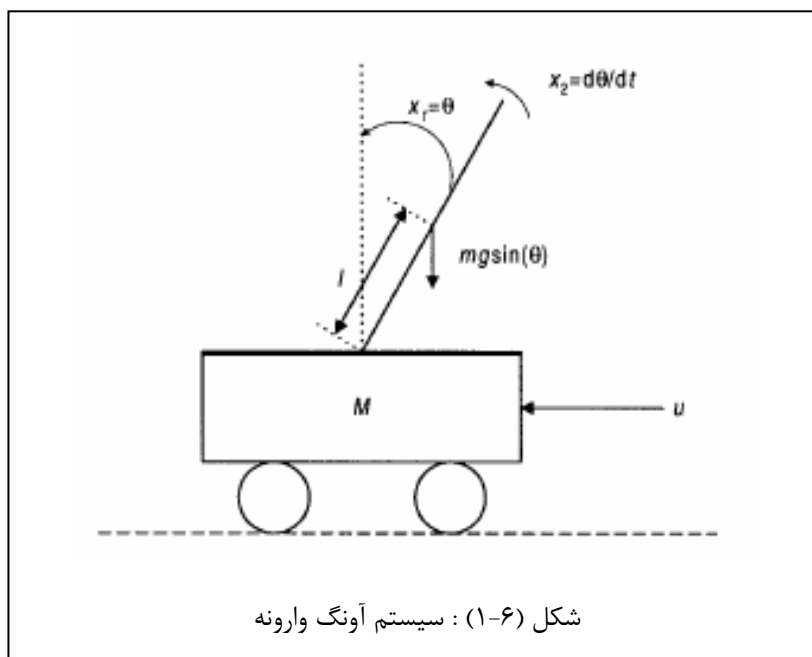
## ۱-۶ مقدمه

در فصل پنجم روش پسگام تعمیم یافته را به عنوان روشی جدید در کنترل سیستمهای غیرخطی بیان کردیم و برای روشن شدن شیوه کار این روش، سیستمی را شبیه سازی کرده و با استفاده از این روش آن را پایدار نموده و مساله ردیابی را نیز بررسی نمودیم.

در این فصل به عنوان نمونه دو سیستم واقعی آونگ وارونه و بخش هیدرولیک سیستم ترمز ضد قفل خودرو را در نظر می گیریم. برای اثبات مزایای این روش نسبت به روشهای موجود در هر قسمت نتایج شبیه سازیها را با یکی از روشهای انجام شده پیشین مقایسه می کنیم.

## ۲-۶ آونگ وارونه<sup>۱</sup>

یکی از مهمترین سیستمهایی که در اکثر مراجع و کتب کنترلی به عنوان نمونه بیان می شود، سیستم آونگ وارونه است که برای بررسی کارایی و نحوه عملکرد بسیاری از روشهای کنترلی از آن استفاده می شود [42-45]. در شکل (۱-۶) سیستم آونگ وارونه نشان داده شده است.



هدف کنترل این سیستم عبارتست از متعادل نمودن آونگ وارونه و همزمان با آن، تضمین

کران‌دار بودن حالات سیستم. سیستم آونگ وارونه را می‌توان بصورت زیر مدل‌سازی کرد [42].

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{g \sin x_1 - \frac{m l x_2^2 \cos x_1 \sin x_1}{M+m}}{l \left( \frac{4}{3} - \frac{m \cos^2 x_1}{M+m} \right)} + \frac{\cos x_1}{l \left( \frac{4}{3} - \frac{m \cos^2 x_1}{M+m} \right)} u \end{cases} \quad (1-6)$$

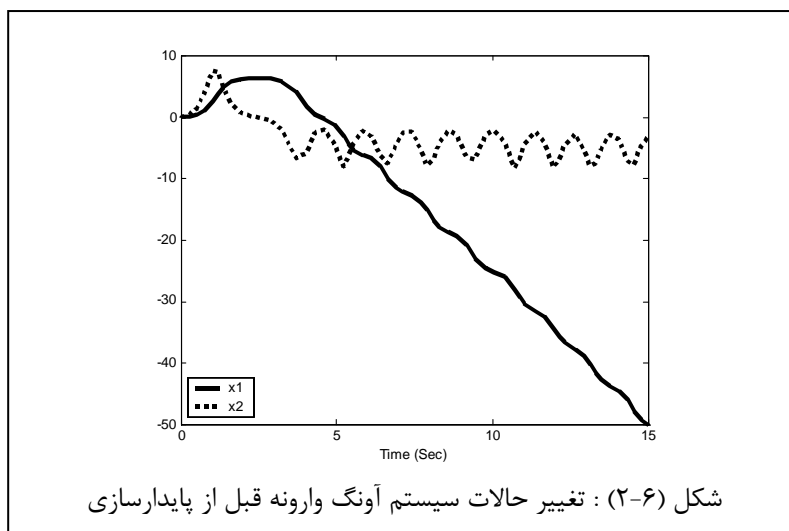
در این رابطه  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$  شتاب جاذبه زمین،  $M$  جرم ارابه،  $m$  جرم میله،  $l$  نصف طول میله

و  $u$  نیروی اعمالی (کنترل) می‌باشد. به ازای  $u = 0$ ، حالات  $x_1$  و  $x_2$  را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

تمامی شبیه‌سازیها براساس مقادیر زیر انجام گرفته است.

$$M = 1 \text{ Kg} \quad , \quad m = 0.1 \text{ Kg} \quad , \quad l = 0.5 \text{ m} \quad (2-6)$$

شکل (۲-۶) تغییرات حالات سیستم را نسبت به زمان نشان می‌دهد.



در این قسمت ابتدا سیستم آونگ وارونه را با روش پسگام تعمیم‌یافته کنترل نموده و سپس

نتایج حاصل را با روش کنترل فازی با کنترل‌کننده نظارتی<sup>۱</sup> مقایسه می‌کنیم.

## ۱-۲-۶ طراحی کنترل کننده به روش پسگام تعمیم یافته

برای اینکه بتوانیم از قضیه ۵-۱ استفاده کنیم، می توان مقدار  $\Phi(x_1)$  را مطابق رابطه زیر انتخاب کرد.

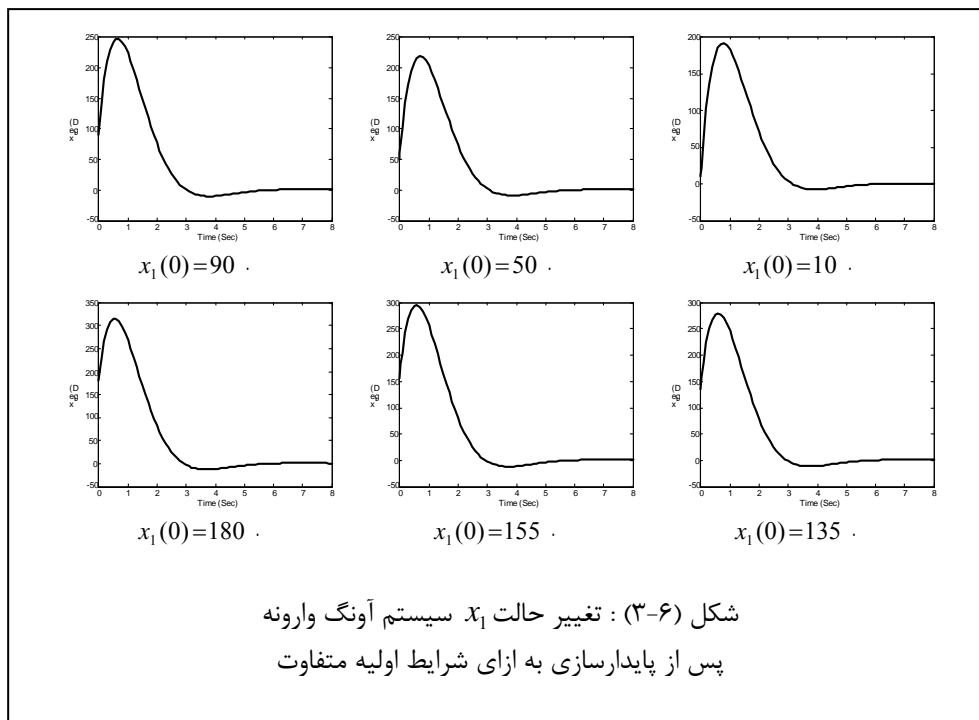
$$\Phi(x_1) = -x_1 \quad (۳-۶)$$

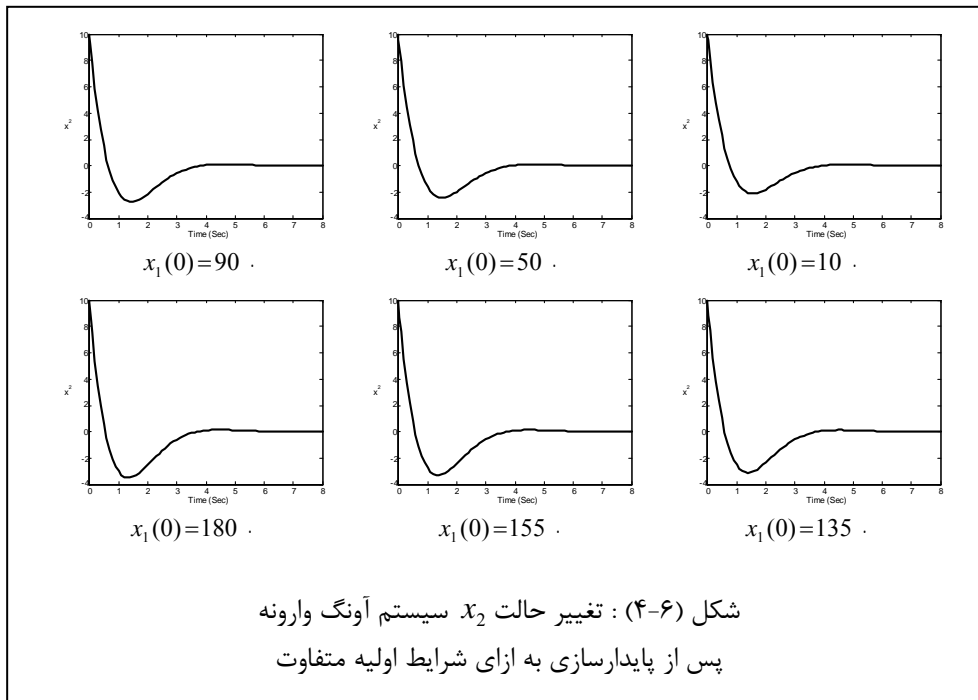
در اینصورت با توجه به مقادیر انتخاب شده برای پارامترها، می توان مقدار قانون کنترل پسخور حالت و همچنین تابع لیاپانوف سیستم آونگ وارونه مدل شده با رابطه (۱-۶) را از روابط زیر بدست آورد.

$$u = -\frac{0.7333 - 0.05 \cos^2 x_1}{\cos x_1} [(k+1)(x_1 + x_2) + \frac{9.8 \sin x_1 - 0.02275 x_2^2 \sin 2x_1}{0.6667 - 0.0455 \cos^2 x_1}] ; k > 0 \quad (۴-۶)$$

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} (x_1 + x_2)^2 \quad (۵-۶)$$

شکلهای (۳-۶ الف) تا (۳-۶ ج) و همینطور شکلهای (۴-۶ الف) تا (۴-۶ ج) به ترتیب تغییر حالتهای  $x_1$  و  $x_2$  را نسبت به زمان، بعد از اعمال تابع کنترل پسخور حالت به سیستم به ازای  $x_1(0) = 10, 50, 90, 135, 155, 180$  نشان می دهد.





همانطور که در شکلها می بینیم با استفاده از روش پسگام تعمیم یافته تمامی خواسته های آونگ وارونه، متعادل نمودن آونگ و کراندار بودن حالات برآورده شده است.

## ۲-۲-۶ طراحی کنترل کننده فازی با کنترل کننده ناظر غیر فازی<sup>۱</sup>

فرض می کنیم پایگاه قواعد فازی شامل قواعد زیر باشد.

(۶-۶) اگر  $x_1$  مثبت و  $x_2$  مثبت است، آنگاه  $u$  بزرگ منفی است.

(۷-۶) اگر  $x_1$  مثبت و  $x_2$  منفی است، آنگاه  $u$  صفر است.

(۸-۶) اگر  $x_1$  منفی و  $x_2$  مثبت است، آنگاه  $u$  صفر است.

(۹-۶) اگر  $x_1$  منفی و  $x_2$  منفی است، آنگاه  $u$  بزرگ مثبت است.

در روابط فوق مجموعه های فازی ” مثبت “، ” منفی “، ” بزرگ منفی “، ” بزرگ مثبت “ و ”

صفر “ به ترتیب با توابع تعلق زیر نمایش داده می شوند.

۱. برای آشنایی بیشتر با این روش به [42] مراجعه کنید.

$$\mu_{Positive}(x) = \frac{1}{1 + e^{-30x}} \quad (10-6)$$

$$\mu_{Negative}(x) = \frac{1}{1 + e^{30x}} \quad (11-6)$$

$$\mu_{Negative-Big}(u) = e^{-(u+5)^2} \quad (12-6)$$

$$\mu_{Positive-Big}(u) = e^{-(u-5)^2} \quad (13-6)$$

$$\mu_{Zero}(u) = e^{-u^2} \quad (14-6)$$

با استفاده از غیرفازی‌ساز میانگین مراکز و موتور استنتاج حاصلضربی، کنترل‌کننده فازی که آن را

بصورت  $u_{fuz}$  نمایش می‌دهیم، از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$(15-6)$$

$$u_{fuz}(X) = \frac{5 \frac{1}{1 + e^{30x_1}} \frac{1}{1 + e^{30x_2}} - 5 \frac{1}{1 + e^{-30x_1}} \frac{1}{1 + e^{-30x_2}}}{\frac{1}{1 + e^{30x_1}} \frac{1}{1 + e^{30x_2}} + \frac{1}{1 + e^{30x_1}} \frac{1}{1 + e^{-30x_2}} + \frac{1}{1 + e^{-30x_1}} \frac{1}{1 + e^{30x_2}} + \frac{1}{1 + e^{-30x_1}} \frac{1}{1 + e^{-30x_2}}}$$

برای طراحی کنترل‌کننده نظارتی باید محدوده  $F^u$  و  $g_L$  را تعیین کنیم که برای این سیستم

داریم:

$$(16-6)$$

$$|f(x_1, x_2)| = \left| \frac{g \sin x_1 - \frac{m x_2^2 \cos x_1 \sin x_1}{M + m}}{l \left( \frac{4}{3} - \frac{m \cos^2 x_1}{M + m} \right)} \right| \leq \frac{9.8 + \frac{0.025}{1.1} x_2^2}{\frac{2}{3} - \frac{0.05}{1.1}} = 15.78 + 0.0366 x_2^2 = F^u(x_1, x_2)$$

فرض کنید ما بخواهیم که  $|x_1(0)| \leq \frac{\pi}{9}$ ؛ در اینصورت باید پارامترها را چنان مشخص کنیم که این

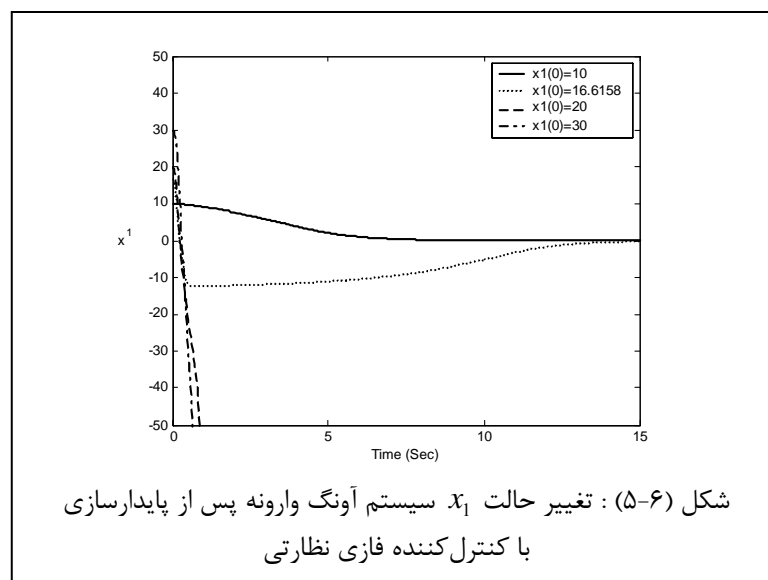
شرط ارضا گردد، آنگاه داریم.

$$|g(x_1, x_2)| \geq \frac{\cos \frac{\pi}{9}}{1.1 \left( \frac{2}{3} + \frac{0.05}{1.1} \cos^2 \frac{\pi}{9} \right)} = 1.1 := g_L(x_1, x_2) \quad (17-6)$$

با توجه به روابط بیان‌شده در [42] می‌توان تابع کنترل‌کننده نظارتی زیر را بدست آورد.

$$u_s = -\text{Sign} \left( \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\text{Cos}x_1}{M+m} \\ l \left( \frac{4}{3} - \frac{m \text{Cos}^2 x_1}{M+m} \right) \end{bmatrix} \right) * \left[ \frac{1}{1.1} \left( 15.78 + 0.0366x_2^2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right) \right] + |u_{fuz}|$$

نتیجه اعمال کنترل کننده فوق به سیستم آونگ وارونه در شکل زیر نشان داده شده است که به ازای حالات اولیه متفاوت بصورت  $x_1(0) = 10, 16.6158, 20, 30$  رسم شده است. (تمامی شرایط اولیه برحسب درجه می باشند).



همانطور که در شکل دیده می شود سیستم با  $x_1(0) = 10, 16.6158$  به حالت پایدار خواسته شده می رسد؛ در حالیکه به ازای شرایط اولیه  $x_1(0) = 20, 30$  سیستم ناپایدار می شود؛ یعنی سیستم در ناحیه طراحی تعیین شده نیز جواب نمی دهد. در واقع سیستم آونگ وارونه فقط در محدوده  $|x_1(0)| \leq 16.6158$  به پایداری می رسد.

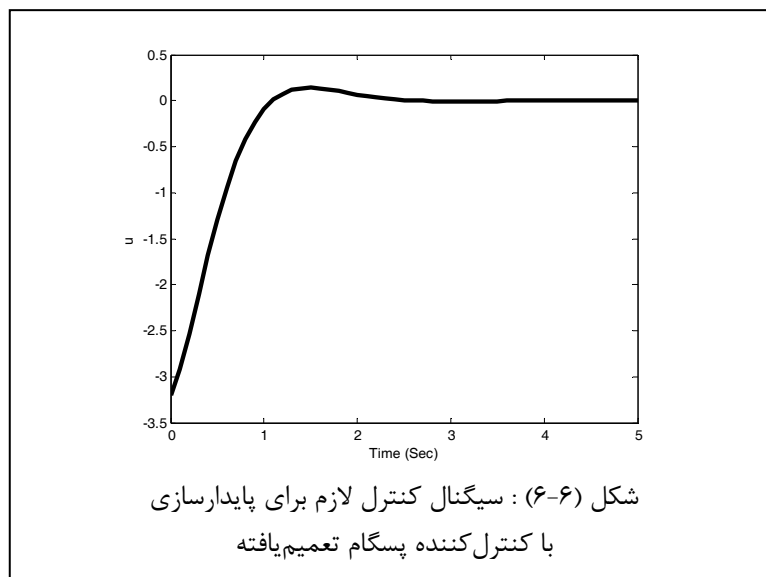
## ۳-۲-۶ مقایسه روش پسگام تعمیم یافته با کنترل فازی با کنترل کننده نظارتی

با مقایسه شکل‌های (۳-۶) و (۵-۶) که به ازای شرایط اولیه متفاوت رسم شده‌اند، می‌توان نتایج زیر را بدست آورد.

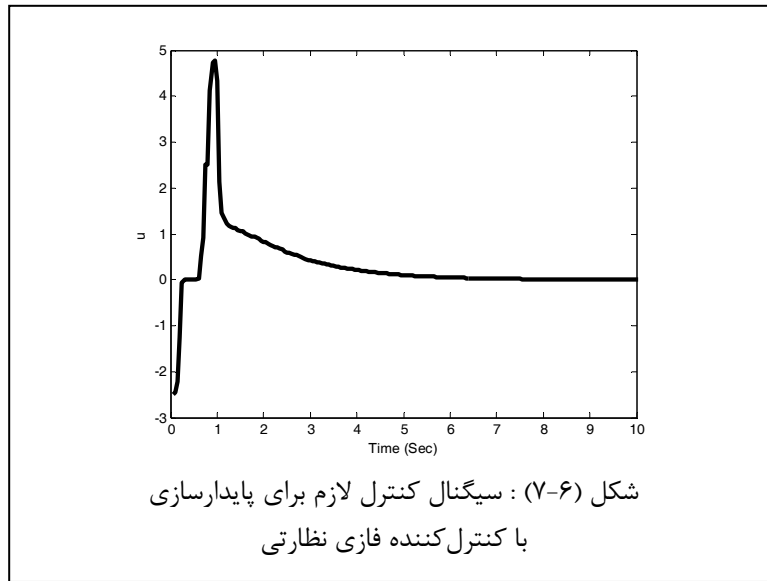
۱. با استفاده از روش پسگام تعمیم یافته سیستم آونگ وارونه را به ازای هر شرط اولیه‌ای، یعنی با رها کردن از هر نقطه می‌توان به حالت تعادل بازگرداند در حالیکه در روش کنترل فازی با کنترل کننده نظارتی بدین صورت نیست و فقط می‌توان با شروع از محدوده کوچکی سیستم را پایدار نمود.

۲. با فرض شرایط اولیه یکسان، روش اول در مدت زمان کوتاهی به حالت تعادل می‌رسد و این در حالیست که در روش دوم مدت زمان بیشتری طول می‌کشد تا سیستم به حالت پایدار خود برسد.

۳. برای مقایسه بین سیگنال کنترلی ایجاد شده توسط دو نوع کنترل کننده، سیگنال لازم برای کنترل سیستم آونگ وارونه به ازای شرایط اولیه برابر؛ بعنوان مثال  $x_1(0) = 15$ ، در شکل‌های (۶-۶) و (۷-۶) رسم شده است. همانگونه که در شکلها دیده می‌شود، در روش ارائه شده در این رساله، سیگنال کنترل محدودتر و دارای زمان نشست کمتری می‌باشد.

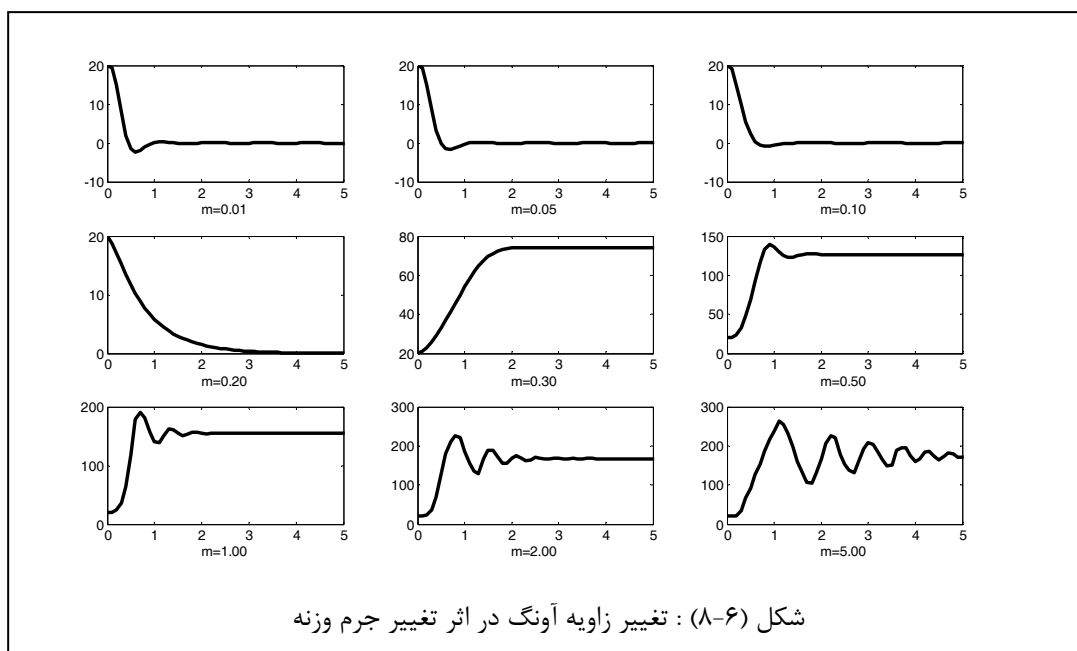


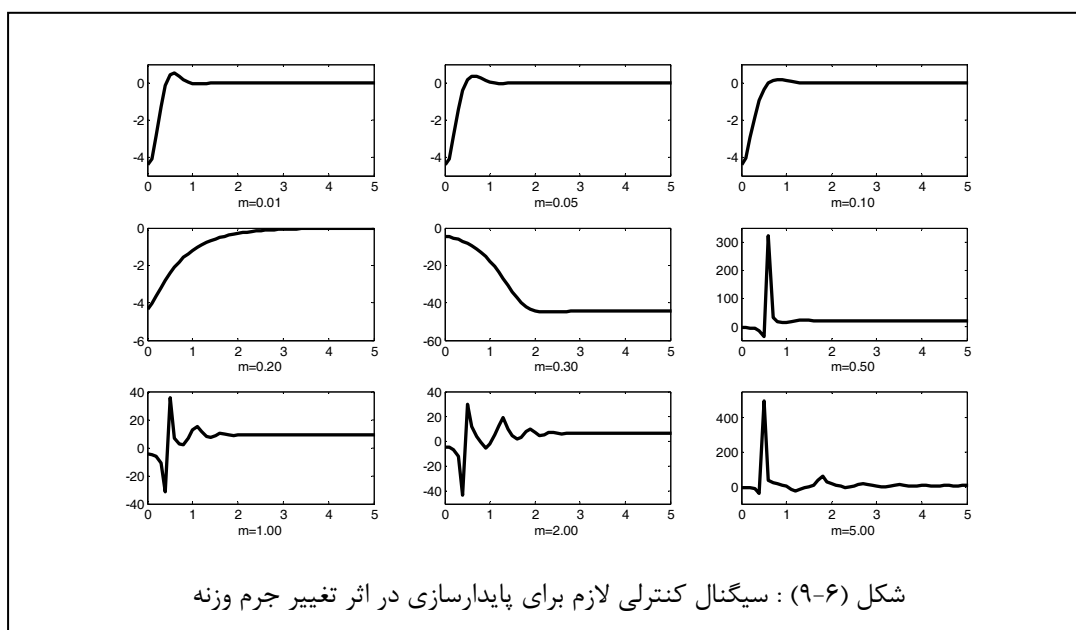




### ۳-۲-۶ تاثیر تغییر پارامتر در خروجی با استفاده از روش پسگام تعمیم یافته

تا کنون تاثیر تغییر یکی از پارامترها؛ شرایط اولیه، بر خروجی سیستم را بررسی نمودیم. در این قسمت می‌خواهیم تاثیر تغییر پارامتر دیگری را بررسی نماییم. تمامی شبیه‌سازیهای انجام شده با فرض این بود که مقدار  $m = 0.1$ . حال فرض می‌نماییم که مقدار جرم وارد بر آونگ تغییر نماید ولی کنترل کننده تفاوتی نکند. نتایج شبیه‌سازیها در شکل‌های (۶-۸) و (۶-۹) رسم شده است.





شکل (۶-۸) تغییر زاویه آونگ و شکل (۶-۹) سیگنال کنترل لازم جهت پایدارسازی در اثر تغییر جرم وزنه را نشان می‌دهد.

همانگونه که در شکلها مشاهده می‌شود کنترل‌کننده در برابر کاهش جرم وزنه و افزایش جرم ۱۰٪ وزنه مقاوم بوده ولی افزایش جرم بیشتر از این مقادیر، سیستم را دچار مشکل کرده و سیستم پاسخهای غیرمنطقی می‌دهد.

### ۳-۶ ترمز هیدرولیک سیستم ترمز ضد قفل خودرو

امروزه ایمنی خودروها از مهمترین مسائل مطرح در صنایع خودروسازی دنیا محسوب می‌شود. در این میان سیستمهای ترمز خودرو نقش عمده‌ای را در بهبود این امر به عهده دارند. یکی از مسائل مهم در سیستمهای ترمز، خطر قفل شدن چرخها هنگام ترمز گرفتن بر روی سطح جاده است. چرا که این رفتار، مشکلاتی از قبیل افزایش فاصله توقف خودرو و نیز کاهش هدایت‌پذیری آن را بر عهده داشته و از لحاظ کنترل خودرو، بسیار نامطلوب است.

بکارگیری سیستمهای ترمز ضدقفل<sup>۱</sup>، ABS، از مهمترین گامهایی است که در جهت کاهش مشکلات و بهبود عملکرد ترمز خودروها برداشته شده است. اهداف ABS شامل کاهش فاصله توقف، افزایش هدایت پذیری و تضمین پایداری خودرو می باشد. بنابراین یکی از سیستمهایی که امروزه بسیار مورد مطالعه و بررسی قرار می گیرد، سیستم ترمز ضد قفل می باشد [46-50].

جهت نیل به این اهداف، ABS از این واقعیت استفاده می نماید که تنها نیروی عمده خارجی وارد بر خودرو، نیروی اصطکاک بین تایر و جاده بوده و این نیرو عمدتاً به مقدار لغزش چرخ بستگی دارد. بنابراین ABS با تغییر مستمر فشار روغن ترمز چرخها و در نتیجه تنظیم مقدار لغزش هر چرخ بر روی مقداری مشخص، دینامیک خودرو را کنترل نموده و اهداف مذکور را دنبال می نماید.

ABS شامل قسمتهای مختلفی می باشد که عبارتند از:

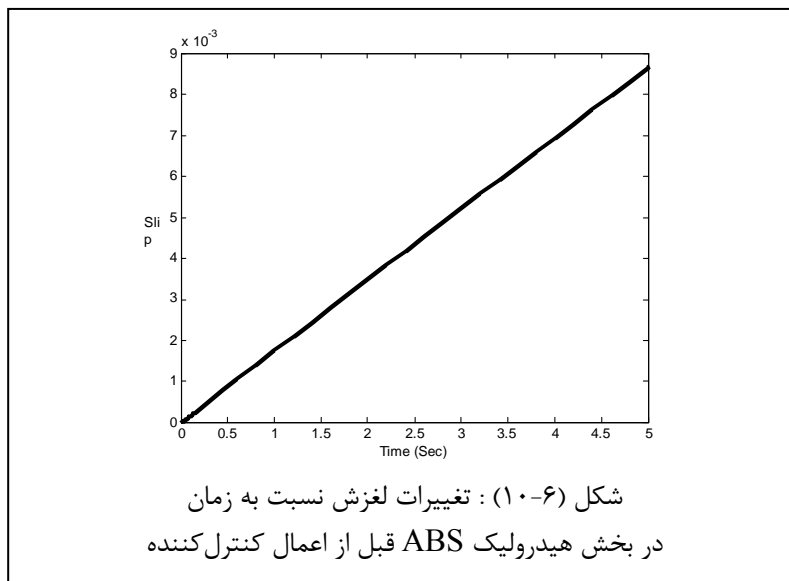
- دینامیک بدنه.
- دینامیک چرخ.
- معادلات تایر.
- معادلات ترمز هیدرولیک.

می توان گفت مهمترین بخش ABS، ترمز هیدرولیک می باشد. بخش هیدرولیک ABS را می توان بصورت زیر مدل سازی کرد.

$$\begin{cases} \dot{\lambda} = -56.448\mu(\lambda) + 0.04T_b \\ \dot{T}_b = k \\ \dot{k} = -100k + 40000(u - \lambda) \end{cases} \quad (19-6)$$

در رابطه (۱۹-۶)،  $\lambda$  مقدار لغزش،  $T_b$  مقدار گشتاور ترمز و  $k$  مقدار فشار روغن ترمز را نشان می دهند.  $\mu(\lambda)$  عبارتی است که به ازای  $\lambda$  از پیش تعیین شده، مقدار خروجی را می دهد که اصطلاحاً به آن جدول جستجو می گوئیم.

تجربه نشان می‌دهد برای اینکه ترمز خودرو قفل نکند، بهترین حالت برای لغزش این است که مقدار آن روی عدد  $0/2$  ثابت شود. بنابراین برای حالتی که لغزش بر روی مقدار خواسته شده ثابت شود، با استفاده از دو روش پسگام تعمیم‌یافته و کنترل‌کننده  $LQG$ <sup>۱</sup> سیستم را پایدار می‌کنیم. شکل (۱۰-۶) تغییرات لغزش را نسبت به زمان قبل از اعمال کنترل‌کننده به سیستم (۱۹-۶) نشان می‌دهد.



### ۱-۳-۶ کنترل ترمز هیدرولیک ABS با استفاده از روش پسگام تعمیم‌یافته

برای استفاده از قضیه ۱-۵ باید رابطه (۱۹-۶) را به رابطه کلی (۱-۵) تبدیل کنیم. بدین منظور و برای اینکه مقدار لغزش روی عدد  $0/2$  ثابت شود، تغییر متغیرهای زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\begin{cases} x_1 = T_b + \lambda - 0.2 \\ x_2 = T_b \\ x_3 = k \end{cases} \quad (۲۰-۶)$$

با این تغییرات رابطه (۱۹-۶) به رابطه زیر تبدیل می‌شود.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -56.448\mu(x_1 - x_2 + 0.2) + 0.04x_2 + x_3 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -40000x_1 + 40000x_2 - 100x_3 - 8000 + 40000\mu \end{cases} \quad (۲۱-۶)$$

#### 1. Linear Quadratic Gaussian Controller

حال برای اینکه شرایط قضیه ۵-۱ برقرار شود، می‌توان توابع زیر را انتخاب کرد.

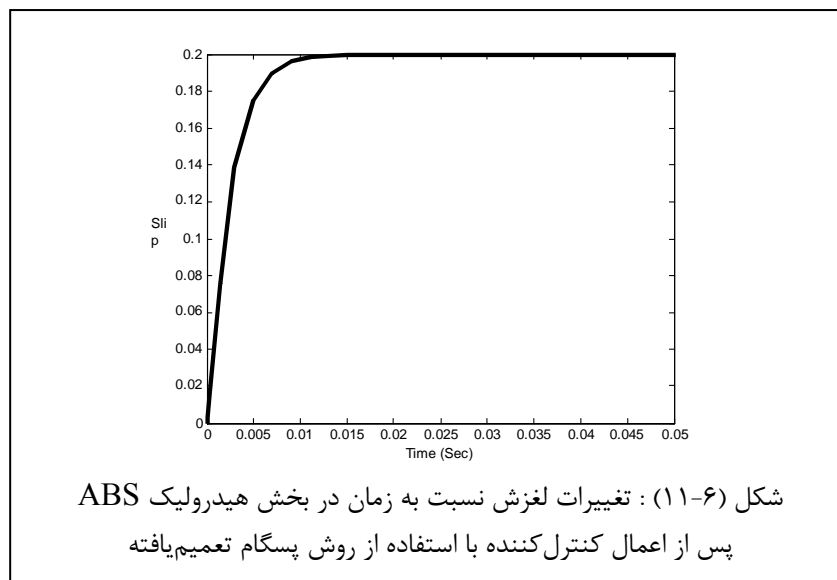
$$\Phi_1(x_1, x_2) = -0.04x_2 + 56.448\mu(x_1 - x_2 + 0.2) - x_1 \quad (۲۲-۶)$$

$$\Phi_2(x_1, x_2) = -x_2 \quad (۲۳-۶)$$

بنابراین با استفاده از قضیه ۵-۱ می‌توان برای قانون کنترل پسخور حالت، رابطه زیر را بدست آورد.

$$u = -56.448\mu(x_1 - x_2 + 0.2) - 0.04x_2 - 2x_3 - (x_1 + x_2) - a_2(x_2 + x_3) - a_1(x_1 + 0.04x_2 + x_3 - 56.448\mu(x_1 - x_2 + 0.2)) \quad ; \quad a_1, a_2 > 0 \quad (۲۴-۶)$$

شکل (۶-۱۱) تغییرات لغزش را نسبت به زمان پس از اعمال کنترل‌کننده به سیستم (۶-۲۰) نشان می‌دهد. همانطور که در شکل دیده می‌شود، مقدار لغزش سیستم پس از مدت زمان کوتاهی، حدود ۰/۰۱ ثانیه، به مقدار خواسته شده می‌رسد. در ضمن مقدار لغزش پس از پایداری دارای مقدار خطای حالت دائم نمی‌باشد.

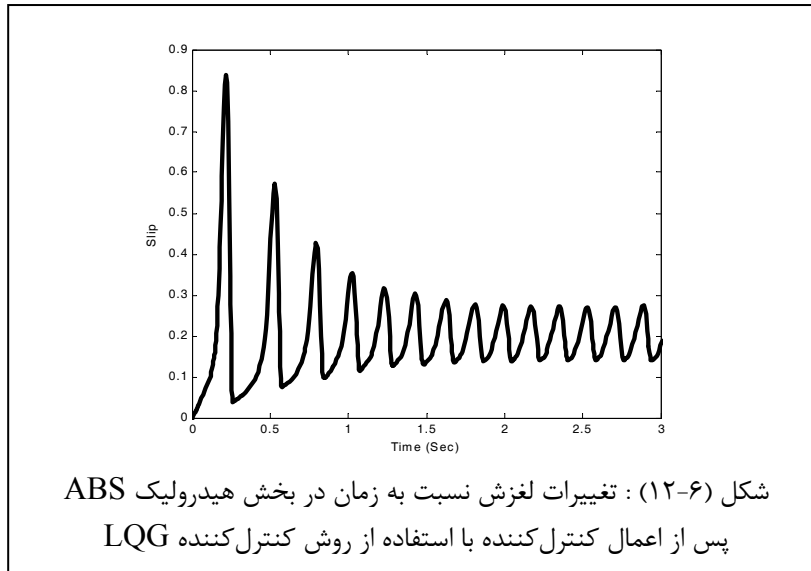


### ۶-۳-۲ کنترل ترمز هیدرولیک ABS با استفاده از کنترل‌کننده LQG

در این بخش، ترمز هیدرولیک سیستم ABS را با استفاده از روش LQG پایدار می‌نماییم. در

شکل (۶-۸) تغییرات لغزش نسبت به زمان پس از اعمال کنترل‌کننده به سیستم (۶-۲۰) نشان داده

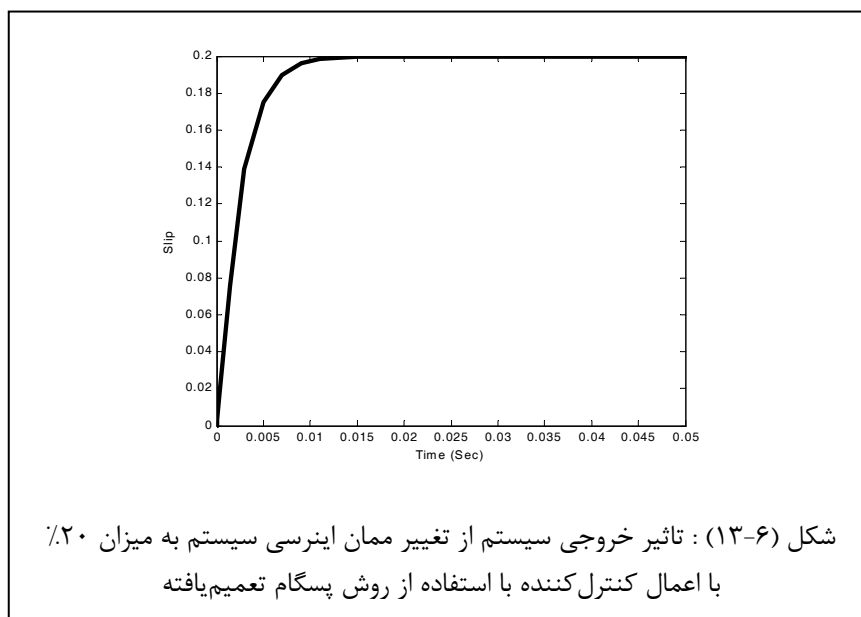
شده است. همانطور که در شکل می بینیم بعد از گذشت حدود یک ثانیه، هنوز لغزش به مقدار ثابت نرسیده و در اطراف ۰/۲ نوسان می کند. در لحظات اولیه نیز چرخ خودرو به آستانه قفل شدن می رسد.

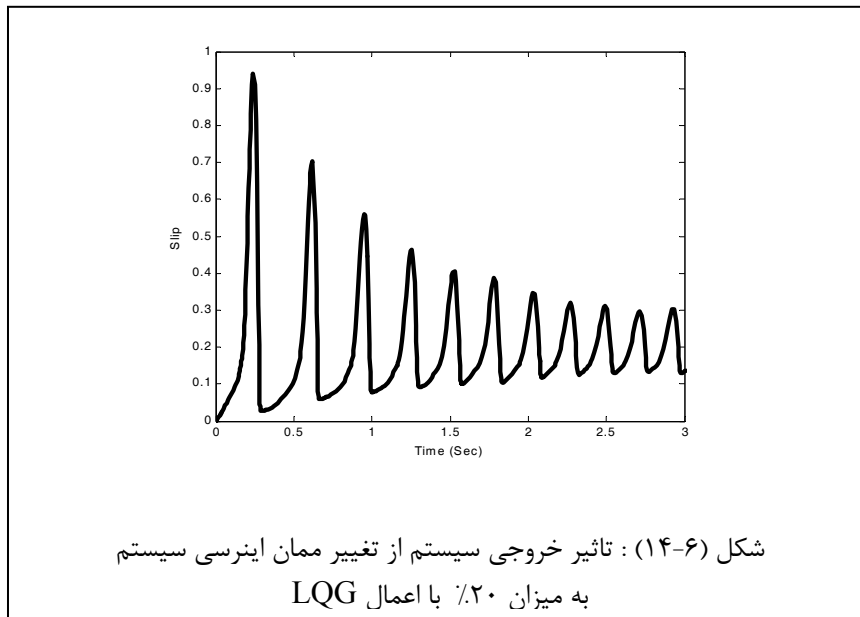


### ۳-۳-۶ تاثیر تغییر پارامتر بر خروجی سیستم بصورت تجربی

در این قسمت فرض می کنیم یکی از پارامترهای ترمز هیدرولیک؛ مانند ممان اینرسی به اندازه ۲۰٪ افزایش یابد، در اینصورت تاثیر این تغییر پارامتر را پس از اعمال کنترل کننده به دو روش در

شکل‌های (۶-۱۳) و (۶-۱۴) می بینیم.





با مقایسه شکل‌های (۶-۹) و (۶-۱۰) در می‌یابیم که در پایدارسازی با استفاده از روش پیشنهادی تغییر پارامتر تاثیر چندانی ندارد و این در حالیست که کنترل‌کننده  $LQG$  نسبت به تغییر پارامتر حساسیت نشان داده و وضعیت آن بگونه‌ای می‌شود که در لحظات اول لغزش به مقدار ۰/۹۵ می‌رسد. البته برای بررسی کامل و دقیق این موضوع باید از قضایای کنترل مقاوم استفاده نمود.

### ۶-۳-۴ مقایسه روش پسگام تعمیم‌یافته با کنترل‌کننده $LQG$

با مقایسه شکل‌های (۶-۷) و (۶-۸) می‌توان موارد زیر را بدست آورد.

- در روش پسگام تعمیم‌یافته، لغزش پس از طی مدت زمان کوتاهی به مقدار ۰/۲ می‌رسد. در حالیکه در روش کنترل‌کننده  $LQG$  بعد از گذشت حدود سه ثانیه به حالت پایدار خود می‌رسد.
- در روش پسگام تعمیم‌یافته مقدار خطای حالت دائم سیستم صفر بوده و این در حالیست که در روش کنترل‌کننده  $LQG$ ، پاسخ خروجی سیستم حول مقدار ثابت ۰/۲ دارای حرکت نوسانی می‌باشد.

- در روش پسگام تعمیم‌یافته مقدار لغزش بدون هیچ مشکلی بر روی مقدار خواسته شده ثابت می‌شود و این در حالیست که در روش کنترل‌کننده  $LQG$  در لحظاتی لغزش به آستانه قفل‌شدن، حدود  $0/85$  می‌رسد.



# MIMO

## ۷-۱ مقدمه

تا کنون کاربرد روش پسگام تعمیم یافته در کنترل سیستمهای غیرخطی یک ورودی - یک خروجی بررسی شده است. همانطوریکه دیدیم، با استفاده از این روش می توان بخوبی سیستمهای مذکور را پایدار نموده و برای آنها تابع لیاپانوف مناسب تعیین کرد؛ همچنین با تغییر متغیرهایی که انجام دادیم، مساله ردیابی ورودیهای مرجع را حل نمودیم. اما بسیاری از سیستمهای واقعی بصورت چند ورودی - چند خروجی می باشند.

در این گفتار چگونگی کاربرد روش پسگام تعمیم یافته برای کنترل سیستمهای غیرخطی چند ورودی - چند خروجی را بررسی می کنیم. در انتها برای اثبات کارایی روابط بدست آمده، سیستمی را با استفاده از این روش کنترل می نماییم.

## ۷-۲ روش پسگام تعمیم یافته در کنترل سیستمهای MIMO

در این گفتار می خواهیم کلاس خاصی از سیستمهای غیرخطی MIMO را که با رابطه زیر بیان می شوند، پایدار نموده و تابع لیاپانوف مناسبی برای آنها بیابیم.

$$\begin{cases} \dot{X} = F(X) + G(X)\eta \\ \dot{\eta} = F_a(X, \eta) + G_a(X, \eta)u \end{cases} \quad (1-7)$$

در رابطه (۱-۷)،  $X = [x_1, x_2, \dots, x_{n-1}] \in \mathbb{R}^{n-1}$ ،  $\eta \in \mathbb{R}^m$  و  $u \in \mathbb{R}^m$  می باشد. برای تعیین تابع لیاپانوف و قانون کنترل پسخور حالت، با تکیه بر این مدل قضیه زیر را مطرح می کنیم.

### قضیه ۷-۱: روش پسگام تعمیم یافته در کنترل سیستمهای غیرخطی MIMO

فرض کنید رابطه (۱-۷) مدل سیستم کنترل غیرخطی مفروضی باشد. حال تابع اسکالر  $V(X)$  را بصورت زیر در نظر بگیرید.

$$V(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \quad (2-7)$$

تابع اسکالر  $\eta_j = \Phi_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$  به ازای  $i=1, 2, \dots, n-1$  و  $j=1, 2, \dots, m$  را طوری تعریف می‌کنیم که تابع  $V(X)$  رابطه (۲-۷) مثبت معین بوده و مشتق آن منفی معین باشد. در این صورت تابع کنترل پسخور حالت و تابع لیاپانوف کل سیستم با استفاده از روابط زیر بدست می‌آیند.

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} = G_a^{-1}(X, \eta) \left\{ \begin{bmatrix} u_{a_1} \\ u_{a_2} \\ \vdots \\ u_{a_m} \end{bmatrix} - F_a(X, \eta) \right\} \quad (۳-۷)$$

$$u_{a_j} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial x_k} [f_k(X) + \sum_{l=1}^m g_{kl}(X)\eta_l] - \sum_{i=1}^{n-1} x_i g_{ij}(X) - \sum_{i=1}^{n-1} k_{ij} [\eta_j - \Phi_{ij}(X)] \quad (۴-۷)$$

$$\forall k_{ij} > 0 \quad ; \quad i=1, 2, \dots, n-1 \quad , \quad j=1, 2, \dots, m$$

$$V_t(X, \eta) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^m [\eta_j - \Phi_{ij}(X)]^2 \quad (۵-۷)$$

که در این روابط مقادیر زیر منظور شده‌اند.

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1m} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{(n-1)1} & g_{(n-1)2} & \cdots & g_{(n-1)m} \end{bmatrix} \quad (۶-۷)$$

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1m} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{(n-1)1} & f_{(n-1)2} & \cdots & f_{(n-1)m} \end{bmatrix} \quad (۷-۷)$$

در ضمن پایداری سیستم کنترل شده از نوع مجانبی به مفهوم وسیع (کلی) می‌باشد.

اثبات. رابطه (۱-۷) را بصورت زیر گسترش می‌دهیم.

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(X) + g_i(X)\eta \quad ; \quad i=1, 2, \dots, n-1 \\ \dot{\eta}_j = u_{a_j} \quad ; \quad j=1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (۸-۷)$$

که در این روابط همواره داریم.

$$u_{a_j} = f_{a_j}(X, \eta) + g_{a_j}(X, \eta)u \quad (9-7)$$

با توجه به فرض، تابع  $V(X)$  مثبت معین و مشتق آن منفی معین است، بنابراین می توان نوشت.

$$\dot{V}(X) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i \dot{x}_i = \sum_{i=1}^{n-1} x_i [f_i(X) + \sum_{j=1}^m g_{ij}(X)\Phi_{ij}(X)] \Rightarrow \dot{V}(X) \leq -W(X) \quad (10-7)$$

که  $W(X)$  یک تابع مثبت معین می باشد.

با اضافه و کم کردن  $\sum_{j=1}^m g_{ij}(X)\Phi_{ij}(X)$  به سطر  $i$ -ام رابطه (9-7) خواهیم داشت.

$$\begin{cases} \dot{x}_i = [f_i(X) + \sum_{j=1}^m g_{ij}(X)\Phi_{ij}(X)] + \sum_{j=1}^m g_{ij}(X)[\eta_j - \Phi_{ij}(X)]; i=1,2,\dots,n-1 \\ \dot{\eta}_j = u_{a_j} \quad ; j=1,2,\dots,m \end{cases} \quad (11-7)$$

حال با استفاده از تغییر متغیر زیر بدست می آوریم.

$$z_{ij} = \eta_j - \Phi_{ij}(X) \Rightarrow \dot{z}_{ij} = u_{a_j} - \dot{\Phi}_{ij}(X) \quad (12-7)$$

$$\dot{\Phi}_{ij}(X) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial x_k} \{ [f_j(X) + \sum_{l=1}^m g_{kl}(X)\Phi_{kl}(X)] + \sum_{l=1}^m g_{kl}(X)[\eta_l - \Phi_{kl}(X)] \} + \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial t} \quad (13-7)$$

می دانیم که  $z_{ij}$  ها،  $(n-1)m$  جمله هستند؛ بنابراین  $\lambda_i$  را نیز بصورت  $(n-1)m$  جمله

زیر در نظر می گیریم.

$$\lambda_{ij} = u_{ij} - \dot{\Phi}_{ij} \quad ; \quad \begin{cases} i=1,2,\dots,n-1 \\ j=1,2,\dots,m \end{cases} \quad (14-7)$$

حال فرض می کنیم:

$$\dot{z}_{ij} = \lambda_{ij} \quad ; \quad \begin{cases} i=1,2,\dots,n-1 \\ j=1,2,\dots,m \end{cases} \quad (15-7)$$

حال می خواهیم ثابت می کنیم که رابطه زیر می تواند تابع لیاپانوف سیستم (9-7) باشد.

$$V_i(X, \eta) = V(X) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^m z_{ij}^2 \quad (16-7)$$

واضح است که تابع تعریف شده در رابطه (۷-۱۶) تابعی مثبت معین می‌باشد. پس کافی است

که منفی معین بودن مشتق آن را بررسی نماییم. با مشتق‌گیری از (۷-۱۶) نسبت به زمان داریم:

$$(۷-۱۷)$$

$$\dot{V}_t(X, \eta) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i [f_i(X) + \sum_{j=1}^m g_{ij}(X) \Phi_{ij}(X)] + \sum_{i=1}^{n-1} x_i \sum_{j=1}^m g_{ij}(X) z_{ij} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^m z_{ij} \lambda_{ij} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^m \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial t} z_{ij}$$

برای اینکه  $\dot{V}_t(X, \eta)$  منفی معین باشد، مقدار  $\lambda_{ij}$  را بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\lambda_{ij} = -x_{ij} g_{ij}(X) - k_{ij} z_{ij} - \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial t} \quad ; \quad \forall k_{ij} > 0 \quad (۷-۱۸)$$

بنابراین مقدار  $\dot{V}_t(X, \eta)$  از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$(۷-۱۹)$$

$$\dot{V}_t(X, \eta) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i [f_i(X) + \sum_{j=1}^m g_{ij}(X) \Phi_{ij}(X)] - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^m k_{ij} z_{ij}^2 \leq -W(X) - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^m k_{ij} z_{ij}^2$$

که نشان‌دهنده منفی معین بودن  $\dot{V}_t(X, \eta)$  است. در نتیجه تابع رابطه (۷-۱۶) یک تابع لیاپانوف

برای سیستم با معادلات (۷-۱) می‌باشد. در ضمن تابع کنترل پسخور حالت  $u_{aj}$  جهت پایدارسازی

سیستم (۷-۱) با استفاده از روابط (۷-۱۱)، (۷-۱۳) و (۷-۱۴) بصورت زیر خواهد بود:

$$u_{aj} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial x_k} [f_k(X) + \sum_{l=1}^m g_{kl}(X) \eta_l] - \sum_{i=1}^{n-1} x_i g_{ij}(X) - \sum_{i=1}^{n-1} k_{ij} [\eta_j - \Phi_{ij}(X)] \quad (۷-۲۰)$$

$$\forall k_{ij} > 0 \quad ; \quad i=1,2,\dots,n-1 \quad , \quad j=1,2,\dots,m$$

همانطور که می‌بینیم، رابطه (۷-۴) اثبات شده است. در نهایت با استفاده از تغییر متغیری که

داده‌ایم؛  $u = G_a^{-1}(X, \eta)[u_a - F_a(X, \eta)]$  ، تابع کنترل پسخور حالت  $u$  مطابق رابطه (۷-۳) بدست

می‌آید.

ضمناً چون محدوده مثبت معین بودن  $V_t(X, \eta)$  و منفی معین بودن  $\dot{V}_t(X, \eta)$  کل فضای حالات

بوده و  $V_t(X, \eta)$  بصورت شعاعی نامحدود می‌باشد، پایداری مجانبی سیستم به مفهوم وسیع تضمین

□

می‌گردد.

### ۳-۷ نتایج شبیه‌سازی

در این قسمت برای اثبات کارایی روش پسگام تعمیم‌یافته در سیستم‌های MIMO، دو مثال بیان کرده و سپس با استفاده از روش پسگام تعمیم‌یافته آن را پایدار می‌کنیم.

#### مثال ۱-۷

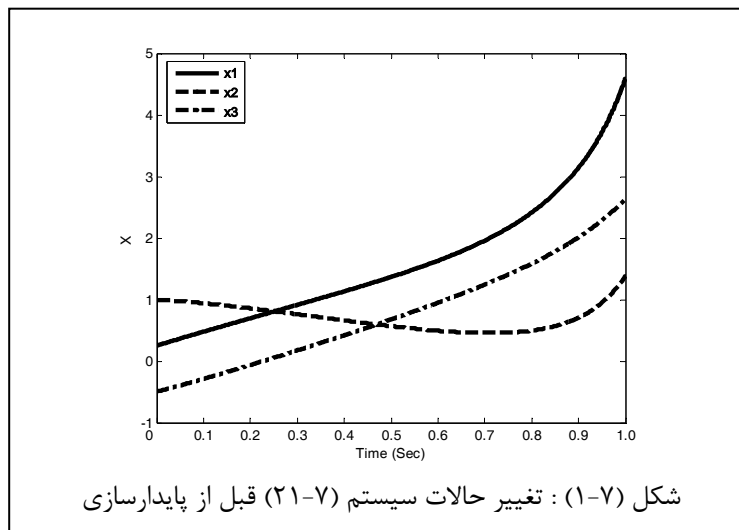
مطابق رابطه زیر، سیستمی را با دو ورودی در نظر می‌گیریم.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 + x_1 + x_2 - 2x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1^2 - 2x_1 + u_1 + 2u_2 \\ \dot{x}_3 = 2x_1 + x_2 - x_3 - u_1 - u_2 \end{cases} \quad (۲۱-۷)$$

که حالت خاصی از سیستم‌هایی است که با رابطه (۱-۷) بیان می‌شوند.

همانگونه که در شکل (۱-۷) دیده می‌شود، حالات این سیستم پس از طی مدت زمان کوتاهی

ناپایدار گشته و سیستم به سمت ناپایداری پیش می‌رود.



#### ۱-۳-۷ پایدارسازی حالات سیستم مثال ۱-۷

اکنون می‌خواهیم با استفاده از روش پسگام تعمیم‌یافته، سیستم (۲۱-۷) را پایدارسازی نماییم؛

بدین منظور تغییر متغیرهای زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \eta_1 = x_2 \\ \eta_2 = x_3 \\ u_{a_1} = x_1^2 - 2x_1 + u_1 + 2u_2 \\ u_{a_2} = 2x_1 + x_2 - x_3 - u_1 - u_2 \end{cases} \quad (22-7)$$

با تغییر متغیرهای در نظر گرفته شده، سیستم (۲۱-۷) تبدیل به رابطه زیر می‌شود.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 + x_1 + \eta_1 - 2\eta_2 \\ \dot{\eta}_1 = u_{a_1} \\ \dot{\eta}_2 = u_{a_2} \end{cases} \quad (23-7)$$

بنابراین برای استفاده از شرایط قضیه ۱-۷ می‌توان روابط زیر را در نظر گرفت.

$$\begin{cases} \Phi_{11}(x_1) = -x_1^2 \\ \Phi_{12}(x_1) = x_1 \end{cases} \quad (24-7)$$

با استفاده از قضیه ۱-۷، می‌توان قوانین کنترل پسخور حالت را بصورت زیر بدست آورد.

$$u_{a_1} = -x_1[2x_1^2 + (k_{11} + 2)x_1 + 1] - 2x_1(\eta_1 - 2\eta_2) - k_{11}\eta_1 \quad ; \quad k_{11} > 0 \quad (25-7)$$

$$u_{a_2} = x_1(x_1 + k_{12} + 3) + \eta_1 - (k_{12} + 2)\eta_2 \quad ; \quad k_{12} > 0 \quad (26-7)$$

با توجه به روابط فوق و تغییر متغیرهایی که در نظر گرفتیم، می‌توان قوانین کنترل پسخور حالت

نهایی و همچنین تابع لیاپانوف سیستم (۲۱-۷) را از روابط زیر بدست آورد.

$$u_1 = x_1(x_1 + 2) + 2(\eta_1 - \eta_2) - u_{a_1} - 2u_{a_2} \quad (27-7)$$

$$u_2 = -x_1^2 - \eta_1 + \eta_2 + u_{a_1} + u_{a_2} \quad (28-7)$$

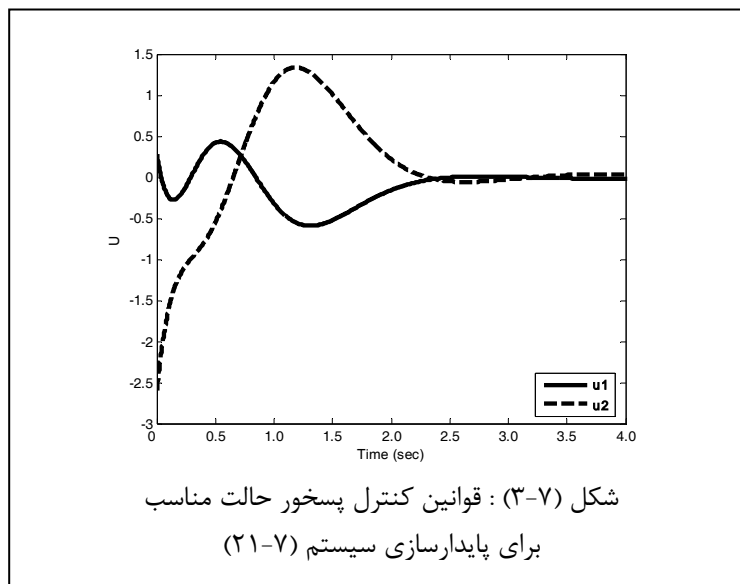
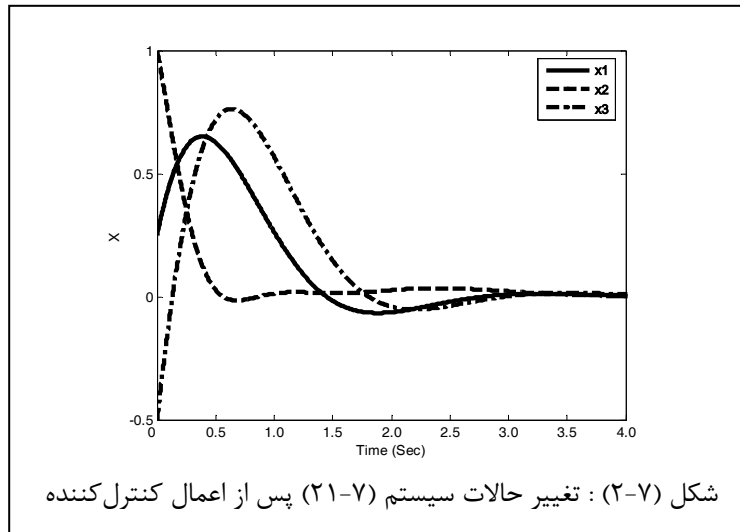
$$V(x_1, \eta_1, \eta_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}(\eta_1 + x_1^2)^2 + \frac{1}{2}(\eta_2 - x_1)^2 \quad (29-7)$$

شکل (۲-۷) تغییر حالات سیستم (۲۱-۷) پس از اعمال کنترل‌کننده پسخور حالت را نشان

می‌دهد. شکل (۳-۷) قوانین پسخور حالت لازم برای انجام عمل پایدارسازی را نشان می‌دهد.

تمامی شکلها به ازای  $k_{11} = 1, k_{12} = 2$  رسم شده‌اند.

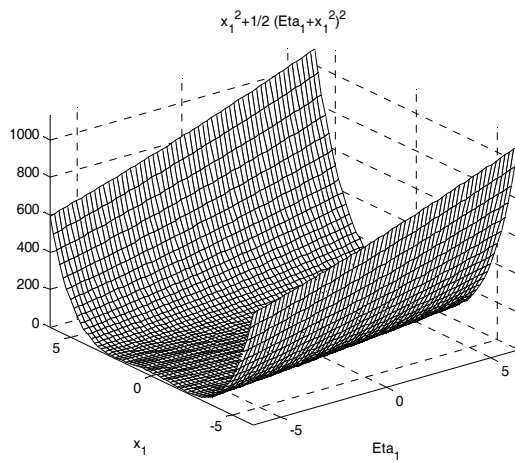
شکل (۴-۷) تابع لیاپانوف سیستم (۲۱-۷) را به ازای تغییرات حالات آن نشان می‌دهد.



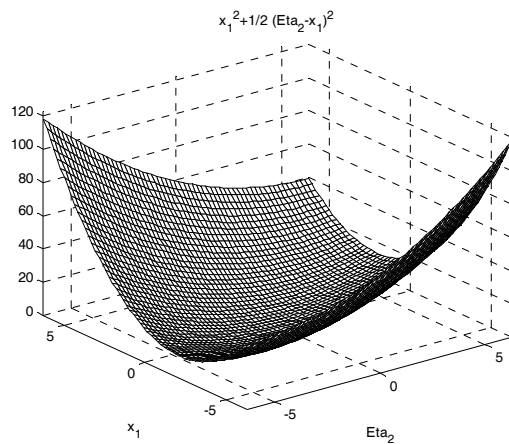
### ۲-۳-۷ ردیابی ورودی پله مثال ۱-۷

حال فرض می‌کنیم سیستم (۲۱-۷) بخواهد ورودی پله را ردیابی کند. حالت  $x_2$  را به عنوان خروجی سیستم در نظر گرفته که می‌خواهیم پاسخ پله را ردیابی کند. در اینصورت می‌توان تغییر متغیرهای زیر را در نظر گرفت:

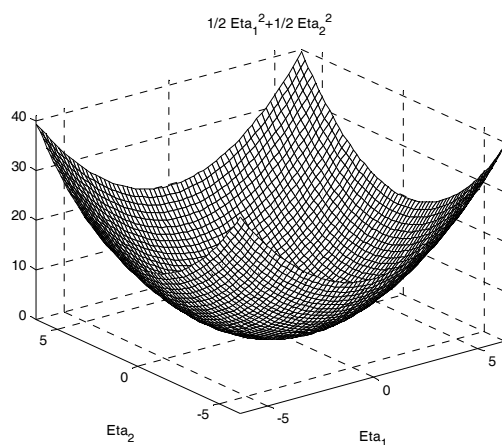




الف. تابع لیپانوف بر حسب تغییرات  $x_1$  و  $\eta_1$



ب. تابع لیپانوف بر حسب تغییرات  $x_1$  و  $\eta_2$



پ. تابع لیپانوف بر حسب تغییرات  $\eta_1$  و  $\eta_2$

شکل (۷-۴): تابع لیپانوف سیستم (۷-۲۱)

$$\begin{cases} x = x_1 \\ \eta_1 = 1 - x_2 \\ \eta_2 = x_3 \end{cases} \quad (30-7)$$

با تغییر متغیرهای انجام شده سیستم (۲۱-۷) به روابط زیر تبدیل می شود که حالت خاصی از سیستمهایی است که می توان به کمک قضیه ۷-۱ آنها را پایدارساز نمود.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 + x_1 + 1 - \eta_1 - 2\eta_2 \\ \dot{\eta}_1 = u_{a1} \\ \dot{\eta}_2 = u_{a2} \end{cases} \quad (31-7)$$

که در آن:

$$\begin{cases} u_{a1} = x_1^2 - 2x_1 + u_1 + 2u_2 \\ u_{a2} = 2x_1 + 1 - \eta_1 - \eta_2 - u_1 - u_2 \end{cases} \quad (32-7)$$

حال برای اینکه شرایط قضیه برآورده شود، می توانیم توابع زیر را انتخاب نماییم:

$$\begin{cases} \Phi_{11}(x_1) = x_1^2 + 1 \\ \Phi_{12}(x_1) = x_1 \end{cases} \quad (33-7)$$

با استفاده از قضیه ۷-۱، می توان قوانین کنترل پسخور حالت را بصورت زیر بدست آورد.

$$u_{a1} = x_1[2x_1^2 + (k_{11} + 2)x_1 + 3] - 2x_1(\eta_1 + 2\eta_2) + k_{11}(1 - \eta_1) \quad ; \quad k_{11} > 0 \quad (34-7)$$

$$u_{a2} = x_1(x_1 - k_{12} + 3) + 1 - \eta_1 - (k_{12} + 2)\eta_2 \quad ; \quad k_{12} > 0 \quad (35-7)$$

با توجه به روابط فوق و تغییر متغیرهایی که در نظر گرفتیم، می توان قوانین کنترل پسخور حالت

نهایی و همچنین تابع لیاپانوف سیستم (۳۱-۷) را از روابط زیر بدست آورد.

$$u_1 = x_1(x_1 + 2) - 2(\eta_1 + \eta_2 - 1) - u_{a1} - 2u_{a2} \quad (36-7)$$

$$u_2 = -x_1^2 - 1 + \eta_1 + \eta_2 + u_{a1} + u_{a2} \quad (37-7)$$

$$V(x_1, \eta_1, \eta_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}(\eta_1 - 1 - x_1^2)^2 + \frac{1}{2}(\eta_2 - x_1)^2 \quad (38-7)$$

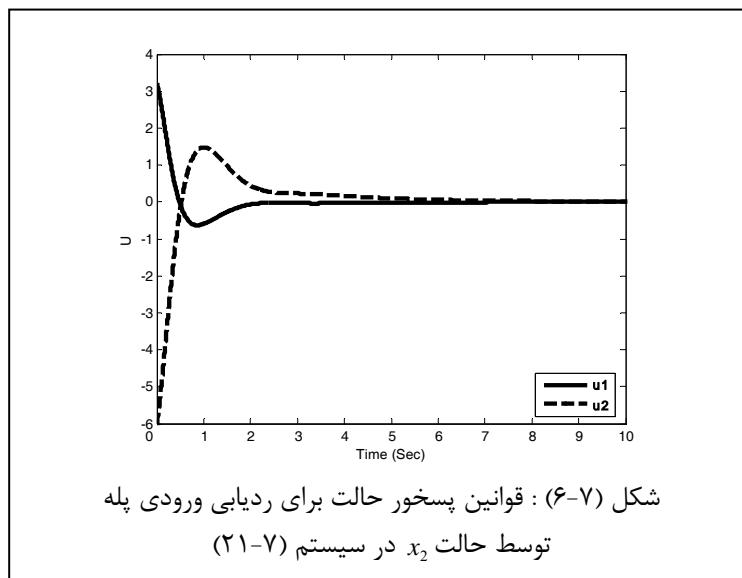
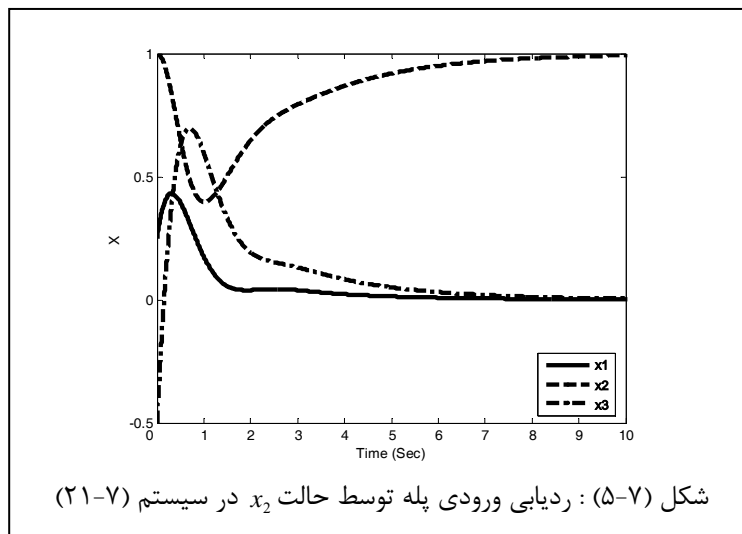
شکل (۵-۷) تغییر حالات سیستم (۲۱-۷) پس از اعمال کنترل کننده پسخور حالت را نشان

می دهد. شکل (۶-۷) قوانین پسخور حالت لازم برای انجام عمل پایدارسازی سیستم (۳۱-۷) و

در نتیجه ردیابی ورودی پله توسط سیستم (۷-۲۱) را نشان می‌دهد. تمامی شکلها به ازای  $k_{11} = 1, k_{12} = 2$  رسم شده‌اند.

همانگونه که در شکلها دیده می‌شود، حالت  $x_2$  پس از گذشت مدت زمان بسیار کوتاه، ورودی پله را ردیابی می‌کند؛ البته عمل ردیابی با یک سیگنال کنترل محدود انجام می‌پذیرد که این امر نشانگر کاربردی و در نتیجه مؤثر بودن روش پیشنهادی می‌باشد.

\*



## مثال ۲-۷

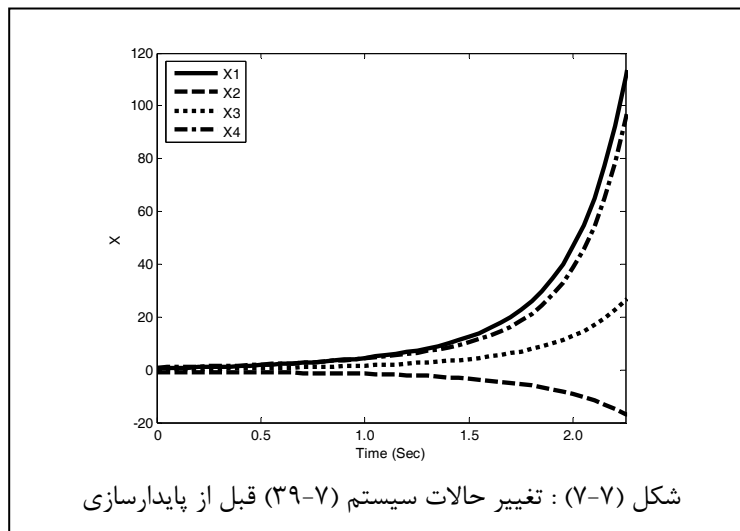
مطابق رابطه زیر، سیستمی را با دو ورودی در نظر می‌گیریم.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2^2 + x_3 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_3 + x_4 \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_3 + u_1 - u_2 \\ \dot{x}_4 = x_2^2 + x_4 + u_1 \end{cases} \quad (۳۹-۷)$$

که حالت خاصی از سیستمهایی است که با رابطه (۱-۷) بیان می‌شوند.

همانگونه که در شکل (۷-۷) دیده می‌شود، حالات این سیستم پس از طی مدت زمان کوتاهی

ناپایدار گشته و سیستم به سمت ناپایداری پیش می‌رود.



## ۳-۳-۷ پایدارسازی حالات سیستم مثال ۲-۷

اکنون می‌خواهیم با استفاده از روش پسگام تعمیم‌یافته، سیستم (۳۹-۷) را پایدارسازی نماییم؛

بدین منظور تغییر متغیرهای زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \eta_1 = x_3 \\ \eta_2 = x_4 \\ u_{a_1} = x_1 - x_3 + u_1 - u_2 \\ u_{a_2} = x_2^2 + x_4 + u_1 \end{cases} \quad (40-7)$$

با تغییر متغیرهای در نظر گرفته شده، سیستم (۳۹-۷) تبدیل به رابطه زیر می‌شود.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2^2 + \eta_1 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - \eta_1 + \eta_2 \\ \dot{\eta}_1 = u_{a_1} \\ \dot{\eta}_2 = u_{a_2} \end{cases} \quad (41-7)$$

بنابراین برای استفاده از شرایط قضیه ۷-۱ می‌توان روابط زیر را در نظر گرفت.

$$\begin{cases} \Phi_{11}(x_1, x_2) = -2x_1 - x_2^2 \\ \Phi_{12}(x_1, x_2) = 0 \\ \Phi_{21}(x_1, x_2) = -x_1 \\ \Phi_{22}(x_1, x_2) = -x_2 \end{cases} \quad (42-7)$$

با استفاده از قضیه ۷-۱، می‌توان قوانین کنترل پسخور حالت را بصورت زیر بدست آورد.

$$(43-7)$$

$$u_{a_1} = x_1(2x_2 - 3 - 2k_{11} - k_{21}) - (k_{11} + 3)x_2^2 + \eta_1(2x_2 - 3 - k_{11} - k_{21}) + x_2(1 - 2\eta_2) ; k_{11}, k_{21} > 0$$

$$u_{a_2} = x_1 - (1 + k_{22})x_2 + \eta_1 - (1 + k_{12} + k_{22})\eta_2 ; k_{12}, k_{22} > 0 \quad (44-7)$$

با توجه به روابط فوق و تغییر متغیرهایی که در نظر گرفتیم، می‌توان قوانین کنترل پسخور حالت

نهایی و همچنین تابع لیاپانوف سیستم (۳۹-۷) را از روابط زیر بدست آورد.

$$u_1 = -x_2^2 - \eta_2 + u_{a_2} \quad (45-7)$$

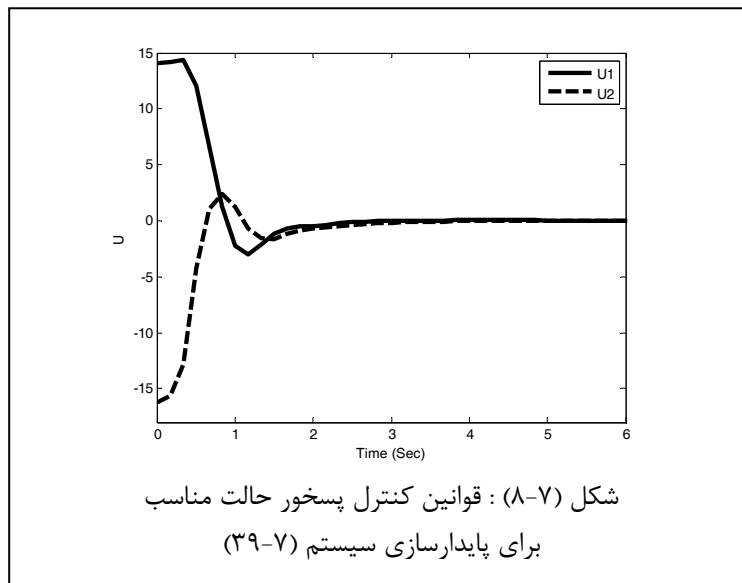
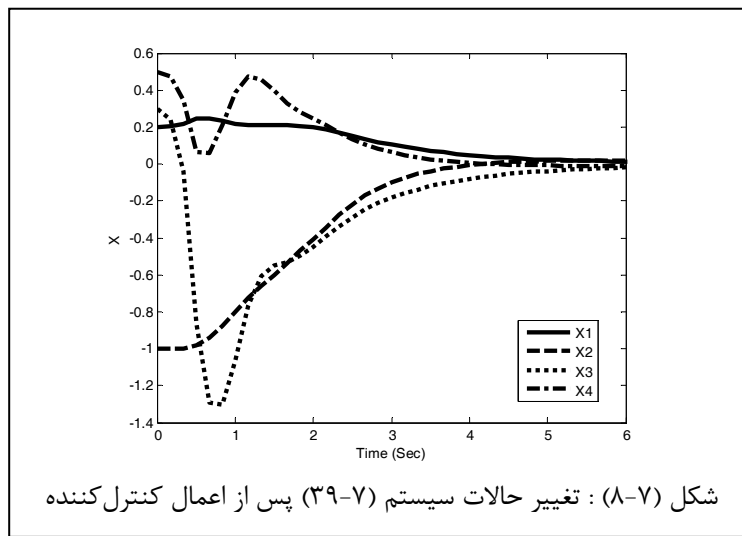
$$u_2 = x_1 - x_2^2 - \eta_1 - \eta_2 - u_{a_1} + u_{a_2} \quad (46-7)$$

$$V(x_1, x_2, \eta_1, \eta_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}(\eta_1 + 2x_1 + x_2^2)^2 + \frac{1}{2}(\eta_1 + x_1)^2 + \frac{1}{2}\eta_2^2 + \frac{1}{2}(\eta_2 + x_2)^2 \quad (47-7)$$

شکل (۸-۷) تغییر حالات سیستم (۳۹-۷) پس از اعمال کنترل کننده پسخور حالت را نشان می‌دهد. شکل (۹-۷) قوانین پسخور حالت لازم برای انجام عمل پایدارسازی را نشان می‌دهد.

تمامی شکلها به ازای  $k_{11} = 5$  ,  $k_{21} = 1$  ,  $k_{12} = 10$  ,  $k_{22} = 10$  رسم شده‌اند.

شکل (۱۰-۷) تابع لیاپانوف سیستم (۳۹-۷) را به ازای تغییرات حالات آن نشان می‌دهد.





## ۸-۱ مقدمه

قبل از پیدایش تئوری آشوب، دانشمندان چنین فکر می‌کردند که اگر معادلات یک سیستم و شرایط اولیه مشخص باشند، بطور یقین می‌توان خروجی سیستم را بدست آورد. اگر آشفتگی در خروجی سیستم مشاهده می‌شد، دلیل آن را نویز وارده به سیستم و یا ناتوانی رایانه‌های نسل قدیم در محاسبات می‌دانستند. با پیدایش نسل جدید رایانه‌ها و افزایش قدرت محاسبه در آنها، مشکل بیش از پیش جدی شد؛ زیرا رایانه‌های پرتوان با حل معادلات غیرخطی و رسم پاسخ آنها برای مدت طولانی، دیگر جایی برای توجیه مساله باقی نمی‌گذاشتند. از این‌رو در سالهای اخیر تحقیقات بسیاری در این زمینه صورت گرفته است [62-52].

این مطالعات سوالاتی را در مورد کاربردهای عملی آشوب مطرح می‌کرد. یکی از جوابهای ممکن کنترل رفتار آشوبناک به شکلی است که بتوان آن را پیش‌بینی کرد. اخیراً مثالهایی از فواید بالقوه رفتار آشوبناک شناخته شده‌اند و این امر مهندسان و متخصصان علوم کاربردی را به توجه بیشتر به آشوب وا می‌دارد.

## ۸-۲ تاریخچه آشوب

تئوری آشوب برای نخستین بار در فعالیتهای هواشناسی و توسط ریاضی‌دان و هواشناس دانشگاه MIT به نام ادوارد لورنز<sup>۱</sup> کشف شد [62]. هر چند بسیاری از دانشمندان به تحقیق در مورد بعضی از مسائل مربوط به آشوب در سیستمهای غیرخطی پرداختند، ولی هیچکدام بطور جدی وارد این مساله نشدند. لورنز برای نخستین بار جذب‌کننده‌های آشوبی<sup>۲</sup> را کشف کرد. او در سالهای بعد ادعا کرد که حساسیت شدید به شرایط اولیه باعث غیر قابل پیش‌بینی شدن آنها می‌شود. وی با ساده

---

1. Edward Lorenz

2. Chaotic Attractors برای آشنایی بیشتر با جذب‌کننده‌های آشوبی به [62] مراجعه کنید.



کردن سیستمهای در اختیار، به معادلاتی دست یافت که اصطلاحاً معادلات لورنز نامیده می‌شود. در بخشهای بعدی با مفهوم و پاسخ این معادلات بیشتر آشنا می‌شویم.

برای توضیح ایده لورنز در خصوص وابستگی شدید یک سیستم به شرایط اولیه، می‌توان از نگاشتهای تک‌بعدهی بصورت زیر استفاده نمود تا با مفهوم نقاط ثابت جاذب، دافع، پایدار و آشوبی آشنا شویم.

### ۳-۸ نگاشت تک‌بعدهی

یک نگاشت از مجموعه  $S$  بر روی خودش را در نظر بگیرید. چنانچه این نگاشت چندین بار تکرار شود، یک سیستم دینامیکی یا معادله دیفرانسیل زمان گسسته بصورت زیر را تولید می‌کند.

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (1-8)$$

در رابطه فوق، زمان مقادیری بصورت زیر را اختیار می‌کند.

$$t = x_n \quad ; \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2-8)$$

فرض کنید  $f: S \rightarrow S$  نگاشت مورد نظر بوده و  $f^{(n)}$  را حاصل ترکیب  $n$  بار  $f$  با خودش در نظر می‌گیریم. در این صورت روابط زیر برقرار است.

$$f^{(1)} = f, \quad f^{(2)} = fof, \quad f^{(3)} = fofof, \quad f^{(4)} = fofofof, \dots \quad (3-8)$$

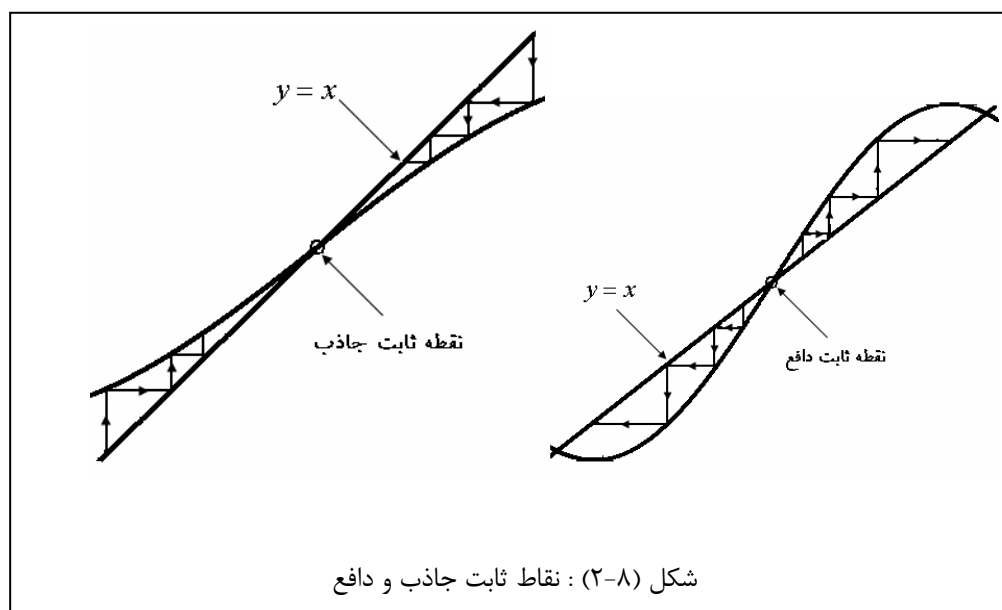
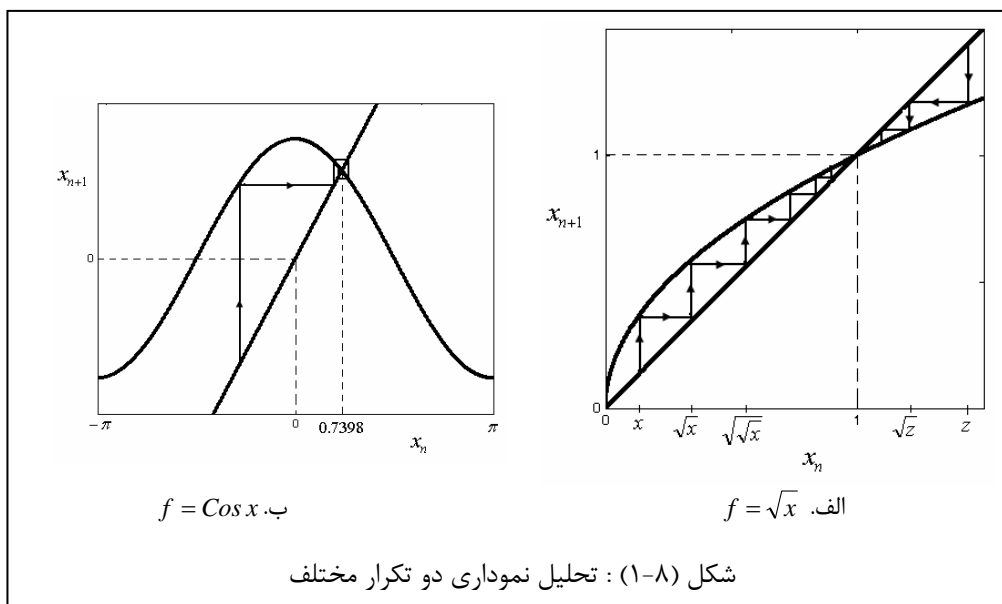
اگر  $S = \mathbb{R}$ ، این نگاشت تک‌بعدهی است. برای  $x \in S$  مجموعه  $\{x, f(x), f^{(2)}(x), \dots\}$  مدار  $x$  نامیده می‌شود.

یک روش ساده برای مطالعه دینامیک تک‌بعدهی، تحلیل روی نمودار است؛ این روش امکان پیش‌بینی رفتار کیفی مدارها را از روش ترسیم یک تابع فراهم می‌کند.

برای محاسبه مدار یک نقطه  $x$  تحت تکرار  $f$ ، ابتدا نیمساز ربع اول و سوم، خط  $y = x$ ، را رسم نموده و سپس روش زیر را تکرار می‌نماییم. از نقطه  $(x, x)$  خطی عمودی، به موازات محور قائم بر نمودار  $f$  رسم می‌نماییم و سپس به دنبال آن خطی افقی به نیمساز  $y = x$  رسم می‌کنیم؛ بدین

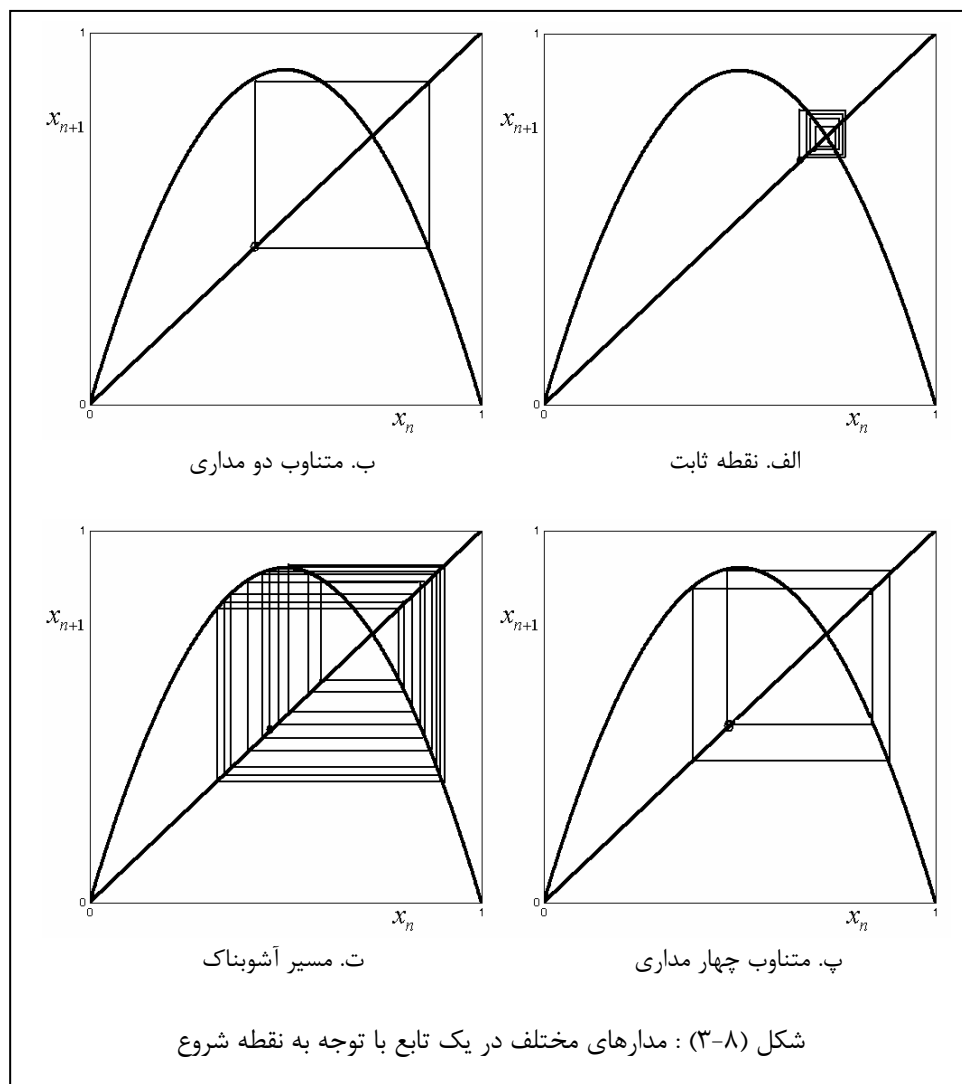
صورت به نقطه  $(f(x), f(x))$  می‌رسیم و با تکرار این فرآیند نقطه  $(f^{(2)}(x), f^{(2)}(x))$  بدست می‌آید. با ادامه این کار مدار  $x$  را در امتداد قطر مشاهده می‌کنیم.

شکل (۱-۸) نشان‌دهنده تحلیل نموداری برای دو تکرار می‌باشد. شکل (۱-۸-الف) با شروع از دو نقطه مختلف برای  $f = \sqrt{x}$  و شکل (۱-۸-ب) با شروع از یک نقطه برای  $f = \cos x$  رسم شده است.



همانگونه که در شکل (۱-۸-الف) پیداست مدار با شروع از هر دو نقطه به سمت  $(1,1)$  و در شکل (۱-۸-ب) مدار به سمت  $(0.7398, 0.7398)$  کشیده می‌شوند. بطور کلی روش تحلیل ترسیمی این

امکان را به ما می‌دهد تا بفهمیم که چرا یک نقطه ثابت جاذب و یا دافع است. بطور کلی اگر  $x_0$  را نقطه ثابت فرض کنیم، نقطه ثابت جاذب کننده است اگر و فقط اگر  $|f'(x_0)| < 1$  و این نقطه دفع کننده است اگر و فقط اگر  $|f'(x_0)| > 1$ . شکل (۳-۸) جزئیات بیشتری را در این مورد نشان می‌دهد. حال می‌خواهیم در یک تکرار  $f$  وابستگی شرایط کاری را به نقطه شروع، بررسی کنیم. بدین منظور شکل (۳-۸) را در نظر می‌گیریم.



همانگونه که در شکل مشخص است، تمامی شکلها برای یک تکرار  $f$  رسم شده‌اند؛ اما با توجه به نقطه شروع مدار، عملکردهای متفاوتی بدست می‌آید. در شکل (۳-۸ الف) با توجه به نقطه شروع به یک نقطه ثابت جاذب می‌رسیم. در شکل (۳-۸ ب) و (۳-۸ پ) مسیر یک چرخه متناوب بوده که

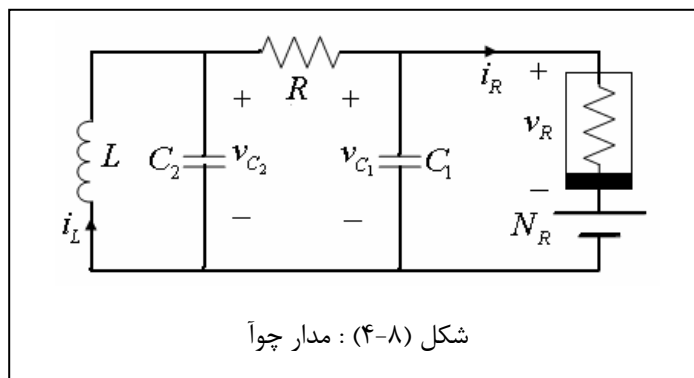
در شکل (۸-۳-ب) پس از دو تکرار و در شکل (۸-۳-پ) پس از چهار تکرار به جای اول خود می‌رسیم و اگر بخواهیم این چرخه را ادامه دهیم، این تکرارها نیز ادامه می‌یابد. شکل (۸-۳-ت) با تمامی شکل‌های قبلی تفاوت دارد زیرا نه متناوب است و نه به سمت نقطه ثابتی جذب و یا از آن دفع می‌گردد و فقط رفتاری غیرمنظم و در عین حال دارای نظم دارد که این امر مفهوم پدیده آشوب می‌باشد که با توجه به این تفسیر ساده، می‌توان علت اعتقاد لورنز به وجود آشوب و غیرقابل پیش‌بینی شدن سیستم‌هایی که وابستگی شدید به شرایط اولیه دارند را دریافت.

## ۸-۴ چند نمونه عملی از آشوب در سیستم‌ها<sup>۱</sup>

در این بخش هدف معرفی چند نمونه عملی از سیستم‌هایی می‌باشد که با توجه به ساختار آنها رفتاری آشوبناک دارند. سیستم‌های مورد بحث از سیستم‌های الکتریکی، مکانیکی و معادلات لورنز انتخاب شده‌اند.

### ۸-۴-۱ آشوب در مدارهای الکتریکی

در سال‌های اخیر، سیستم‌های الکترونیکی غیرخطی متنوعی ساخته و یا بصورت نظری توصیف شده‌اند که رفتار آشوبناک از خود نشان می‌دهند. بعضی از این رفتار که ناشی از نویز قلمداد می‌شوند، مثالهایی واقعی از آشوب در طبیعت داخلی آنها می‌باشند.



۱. در نگارش قسمت‌هایی از این بخش از [63] استفاده شده است.

یکی از این مدارها، مدار چوآ است که در شکل (۴-۸) نشان داده شده است. مدار چوآ یک مدار  $RLC$  مرتبه سه با چهار عنصر خطی شامل دو خازن، یک مقاومت و یک سلف می‌باشد که فقط یک عنصر مقاومت غیرخطی دارد.

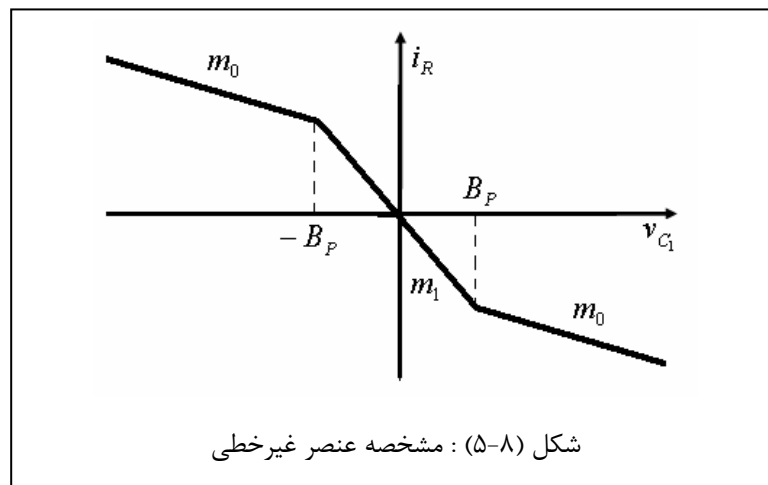
معادلات حالت مدار چوآ بصورت روابط (۴-۸) می‌باشد.

$$\begin{cases} C_1 \dot{v}_{C_1} = G(v_{C_2} - v_{C_1}) - f(v_{C_1}) \\ C_2 \dot{v}_{C_2} = G(v_{C_1} - v_{C_2}) + i_L \\ Li_L = v_{C_2} \end{cases} \quad (۴-۸)$$

که در آن  $G = 1/R$  و مشخصه سه قطعه‌ای  $v_{C_1} - i$  از عنصر غیرخطی بصورت زیر تعریف می‌گردد.

$$f(v_{C_1}) = m_0 v_{C_1} + \frac{1}{2} (m_1 - m_0) [|v_{C_1} + B_p| - |v_{C_1} - B_p|] \quad (۵-۸)$$

این ارتباط در شکل (۵-۸) بصورت ترسیمی نشان داده شده است.



همانطوریکه در شکل دیده می‌شود، شیبها در نواحی بیرونی  $m_0$  و در ناحیه داخلی  $m_1$  می‌باشد. نقاط شکست نمودار برابر  $\pm B_p$  است. معادلات (۴-۸) یک سیستم کاملاً مستقل و بدون دریافت سیگنال ورودی را نشان می‌دهد. از آنجا که این سیستم دارای چهار عنصر خطی غیرفعال می‌باشد، لذا برای نوسان و رفتار آشوبناک باید از محلی تامین انرژی نماید که مسؤولیت این کار بر عهده مقاومت غیرخطی فعال می‌باشد که در مدار بصورت یک باتری نشان داده شده است.

مدار چوآ به آسانی و با هزینه پایین با استفاده از قطعات الکتریکی استاندارد ساخته می‌شود و توانایی ایجاد پدیده‌هایی نظیر آشوب و چرخه حدی<sup>۱</sup> را دارد. این مدار اولین سیستم فیزیکی است که رفتار نظری آن با شبیه‌سازی کامپیوتری و نتایج تجربی سازگاری دارد.

همانطوریکه مدار  $RLC$  موازی کلاسیک، ساده‌ترین سیستم فیزیکی است که توانایی مدل‌سازی نوسانات یک سیستم را دارد، مدار چوآ ساده‌ترین سیستم برای دیدن پدیده‌های غیر متناوب در سیستم‌های غیرخطی می‌باشد. مدار چوآ ساده‌ترین حالت ممکن از این جهت است که رفتار آشوبناک نمی‌تواند در یک مدار مستقل مدل‌سازی شده با فضای حالت غیرخطی با کمتر از سه عنصر ذخیره انرژی، خازن و سلف، و در حالت کلی حداقل یک عنصر غیرخطی فعال برای داشتن نوسانات نیاز است. معادلات (۴-۸) را می‌توان بصورت روابط زیر و بدون بعد بازنویسی نمود.

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha[y - x - f(x)] \\ \dot{y} = x - y - z \\ \dot{z} = -\beta y \end{cases} \quad (۶-۸)$$

که در آن:

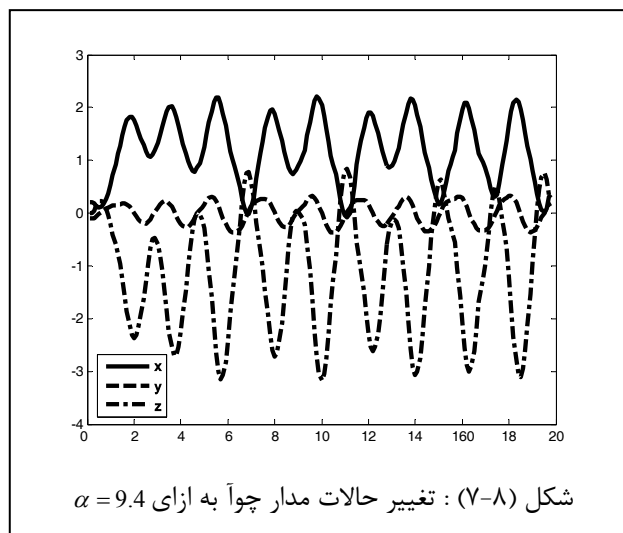
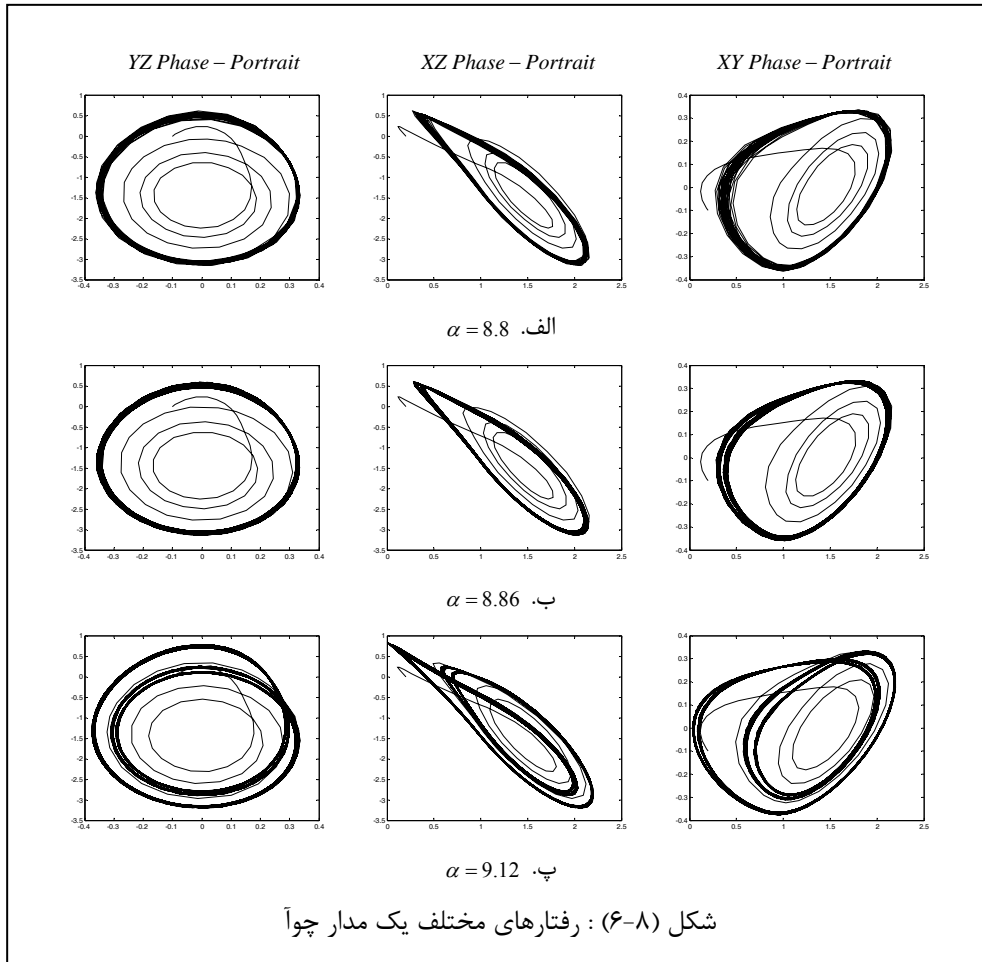
$$x = \frac{v_{C_1}}{B_p}, \quad y = \frac{v_{C_2}}{B_p}, \quad z = \frac{i_L}{GB_p}, \quad \alpha = \frac{C_2}{C_1}, \quad \beta = \frac{C_2}{G^2 L} \quad (۷-۸)$$

$$f(x) = bx + \frac{1}{2}(a-b)[|x+1| - |x-1|] ; \quad a = \frac{m_1}{G}, \quad b = \frac{m_0}{G}$$

حال می‌توان با مقدار دهی به پارامترهای  $a, b, \alpha$  و  $\beta$  حالات مختلف رفتاری را در این سیستم را مشاهده کرد. فرض کنید  $\beta = 16, a = 8/7, b = -5/7$  و انتخاب شوند و برای  $\alpha$  مقادیر مختلف که نتایج آن در شکل‌های زیر آورده شده است.

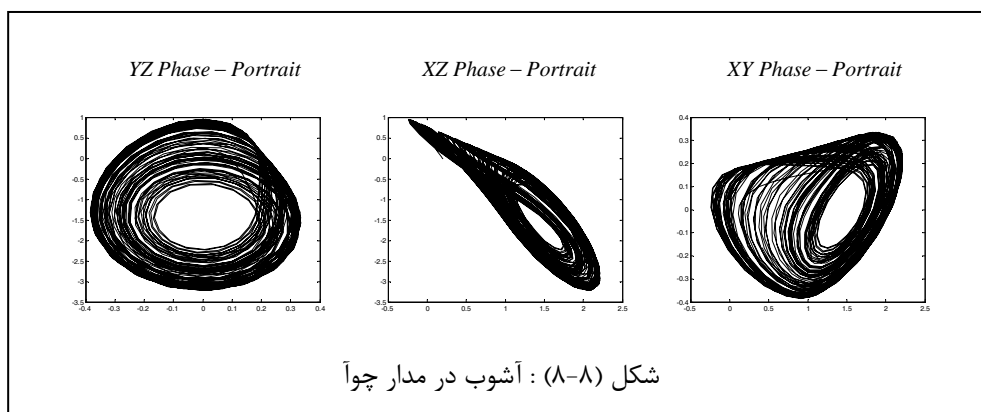
شکل (۶-۸-الف) برای  $\alpha = 8.8$  رسم شده است که همانگونه که در شکل دیده می‌شود دوره تناوب تک‌حلقه‌ای برای تمامی نمودارهای صفحه فاز ترسیم شده وجود دارد و این در حالیست که در

شکل (۶-۸) ب) با  $\alpha = 8.86$ ، دوره تناوب دوحلقه‌ای و در شکل (۶-۸) پ) با  $\alpha = 9.12$ ، دوره تناوب چهارحلقه‌ای است.



شکل (۷-۸) تغییر حالات سیستم به ازای  $\alpha = 9.4$  را نشان می‌دهد. همانگونه که در شکلها پیداست، حالات سیستم به سمت مقدار ثابتی نمی‌روند یا ناپایدار نمی‌گردند، متناوب هم نیستند و در کل حالت بی‌نظمی دارند ولی داخل این بی‌نظمی یک شبه تناوب دیده می‌شود که این همان مفهوم آشوب است. در واقع می‌توان آشوب را در یک عبارت بصورت مجموعه منظمی از نامنظمی‌ها تعریف نمود.

شکل (۸-۸) نمودارهای صفحه فاز مدار چوآ که بیانگر آشوب است را نشان می‌دهد. تمامی این شکلها برای مدت زمان  $200 \text{ Sec}$  شبیه‌سازی شده‌اند.



### ۸-۴-۲ آشوب در سیستمهای مکانیکی

در این بخش سیستمهای با اصطکاک خشک که با معادلات دیفرانسیل زیر بیان می‌شوند را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + h(x)\frac{dx}{dt} + f(x) = 0 \quad (۸-۸)$$

$f(x)$  نیروی برگشتی و  $h(x)\frac{dx}{dt}$  میرایی سیستم است. با قرار دادن روابط

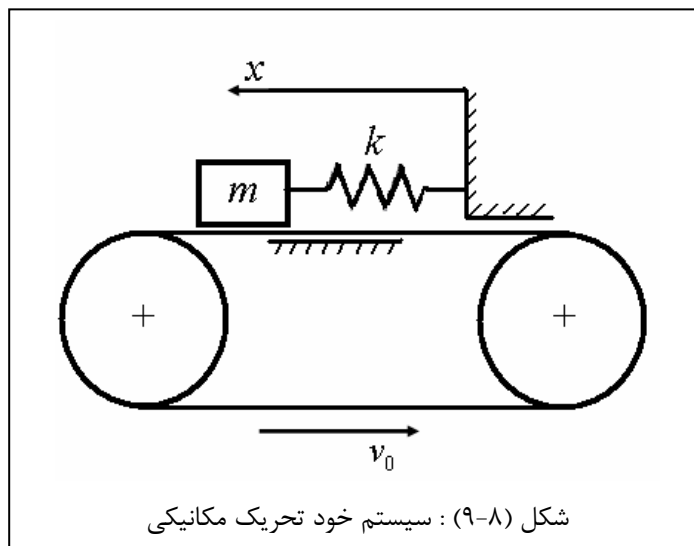
و  $U = \int f(s)ds$  در معادله (۸-۸) رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\frac{d}{dt}(T + U) = -h(x)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \quad (۹-۸)$$



اگر  $h(x) \geq 0$ ، آنگاه انرژی  $E = T + U$  به شکل یکنواخت و با نوسانات آزاد سیستم کاهش می‌یابد و سیستم به شکل مجانبی به موقعیت تعادلی می‌رسد؛ البته با فرض اینکه  $U$  یک مقدار حداقلی داشته باشد. با این حال در بسیاری از مسائل ارتعاشات  $h(x)$  فقط مقادیر مثبت را نگرفته و مقادیر منفی را نیز قبول می‌کند. بنابراین انرژی سیستم لزوماً بصورت یکنواخت کاهش نیافته و بلکه ممکن است افزایش نیز یابد.

حال به یک مثال ساده از یک سیستم مکانیکی که در آن اصطکاک در ناحیه نشان داده شده در شکل (۸-۹)، منفی است، توجه کنید.



جرم  $m$  با یک فنر با ضریب  $k$  بر روی تسمه‌ای که با سرعت یکنواخت  $v_0$  در حرکت است، نگه داشته شده است. نیروی اعمالی روی بار توسط تسمه، تابع بسیار پیچیده‌ای از سرعت نسبی تسمه و جرم است. اگر جابجایی بار را با  $x$  و سرعت آن را با  $dx/dt$  نمایش دهیم، آنگاه نیروی اعمالی روی جرم  $m$  (اصطکاک خشک) تابعی از سرعت نسبی بصورت  $v = dx/dt - v_0$  است که با استفاده از رابطه  $F(dx/dt - v_0)$  نشان داده می‌شود.

اگر ضریب الاستیسیته را با  $k$  نمایش دهیم و تمام نیروهای اصطکاک باقیمانده عمل‌کننده در این سیستم؛ برای مثال مقاومت هوا یا اصطکاک داخلی فنرها، مورد توجه قرار گیرد، آنگاه معادله حرکت جرم  $m$  بصورت زیر نوشته می‌شود.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx + F(v) = 0 \quad (10-8)$$

$F(v) = F(dx/dt - v_0)$  تابع مشخص کننده نیروی اصطکاک به سرعت نسبی  $v$  است. بسط  $F$

بصورت سری در حوالی مقدار  $v_0$  و با در نظر گرفتن فقط جمله اول آن، عبارتست از:

$$F\left(\frac{dx}{dt} - v_0\right) = F(-v_0) + \frac{dx}{dt} \frac{dF}{dv_0} + \dots \quad (11-8)$$

با در نظر گرفتن رابطه (11-8)، رابطه (12-8) به معادله حرکت زیر تبدیل می گردد.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \left(b - \frac{dF}{dv_0}\right) \frac{dx}{dt} + kx = -F(-v_0) \quad (12-8)$$

جمله ثابت در سمت راست فقط سبب یک جابجایی در موقعیت تعادل با مقدار  $-F(v_0)/k$  در

جهت حرکت تسمه می شود. با تغییر متغیر  $y = x + F(v_0)/k$  معادله (12-8) تبدیل به معادله زیر می گردد.

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \left(\beta - \frac{dF}{dv_0}\right) \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = 0 \quad (13-8)$$

که در آن  $\omega_0^2 = k/m$  و  $\beta = b/m$ .

بنابراین با  $\beta - dF/dv_0 < 0$  نقطه تعادل  $y = 0$  ناپایدار است. اگر  $dF/dv_0 = -\delta y^2 + \alpha$  که

مشخصه اصطکاک سطوح جامد است، به معادله واندرپیل زیر دست می یابیم.

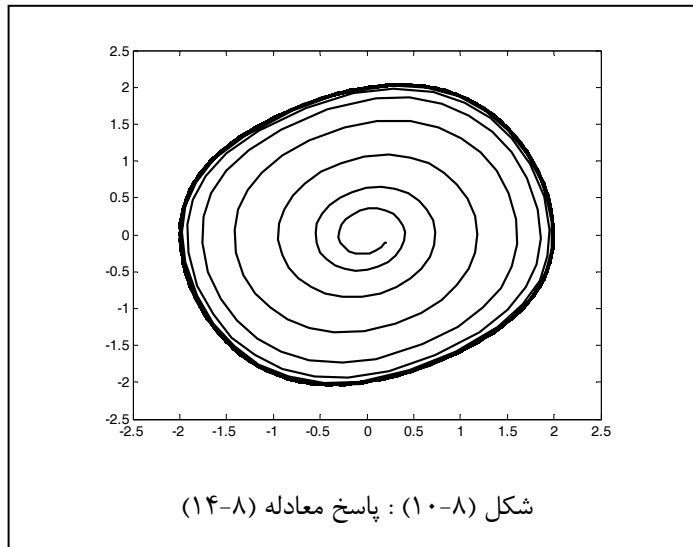
$$\frac{d^2 y}{dt^2} + (\delta y^2 - \gamma) \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = 0 \quad (14-8)$$

که در آن  $\gamma = \alpha - \beta$ .

معادله واندرپیل (14-8) حالت خاصی از معادله (8-8) است. طبق قضیه پوانکاره - بندیکسون

تنها جواب ممکن معادله (14-8) یک چرخه حدی می باشد. که این چرخه در شکل (8-10) نشان

داده شده است.

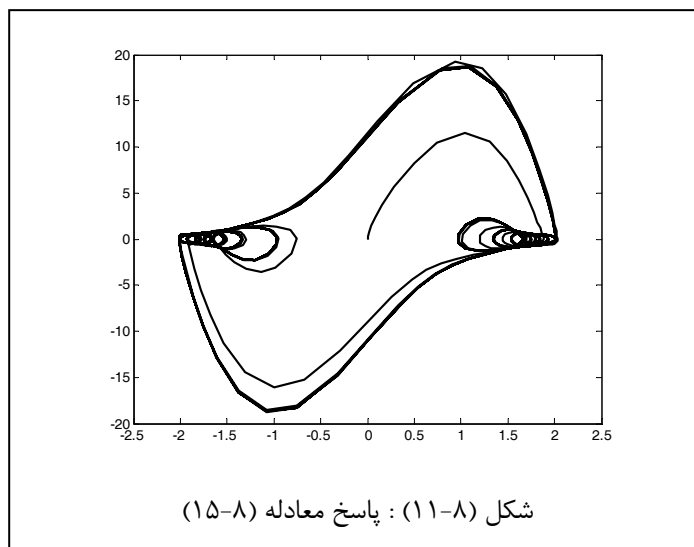


رفتار آشوبناک در معادله واندرپیل که توسط یک منبع بیرونی تحریک می‌گردد، اتفاق می‌افتد. بدین منظور سیستم خود تحریک را بصورت زیر در نظر بگیرید. وقتی سیستم تحت تحریک یک ورودی بیرونی با نوسانات متناوب با فرکانس  $\Omega$  باشد، ممکن است تحت شرایط خاص جواب دهد.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu\omega(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + \omega_0^2x = p\cos(\Omega t) \quad (۸-۱۵)$$

برای مقادیر  $\mu = 5$ ،  $\omega_0 = 1$ ،  $\omega = 2.457$ ،  $p = 17$  و  $\Omega = 4$  پاسخ سیستم در شکل (۸-۱۱) نشان

داده شده است. همانگونه که در شکل دیده می‌شود، سیستم دارای چرخه حدی می‌باشد.



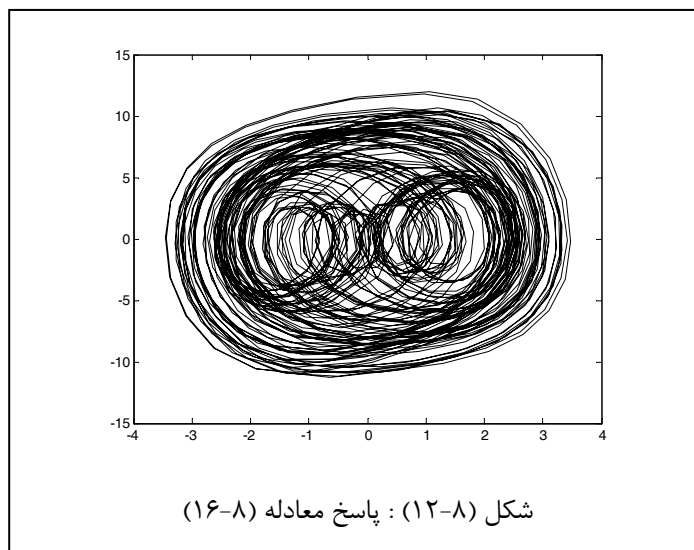
حال می‌خواهیم تاثیر جمله کوچک  $cx^3$  را در رفتار معادله ببینیم؛ بدین منظور با تغییراتی معادله

(۸-۱۵) را بصورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + bx + cx^3 = p\cos(\Omega t) \quad (۸-۱۶)$$

برای مقادیر  $a=0.2, b=0, c=1, p=17$  و  $\Omega=4$  پاسخ آشوبناک سیستم (۸-۱۶) در شکل

(۸-۱۲) نشان داده شده است.



بنابراین دیده می‌شود که با تغییر کوچکی در شرایط، یک سیستم می‌تواند رفتارهای متفاوتی از

خود نشان دهد.

### ۸-۴-۳ معادلات لورنز

همانطوریکه در ابتدای این گفتار بیان شد، ادوارد لورنز نخستین کسی بود که با مطالعات خود

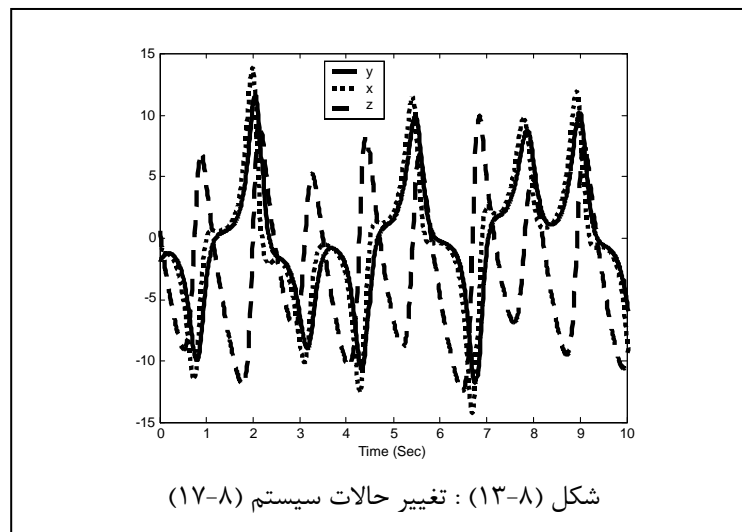
پدیده آشوب را از دید اختلال و ناتوانی رایانه‌های نسل قدیم به یک پدیده طبیعی و ناشی از ذات

سیستمها نسبت داد و با مطالعات بر روی سیستمهای مختلف، موفق به فرمولبندی این پدیده شد.

وی با ساده کردن سیستمهای در اختیار، به معادلاتی دست یافت که اصطلاحاً معادلات لورنز نامیده می‌شود. اساس کار وی مدل‌سازی فرآیند انتقال حرارت بود که نهایتاً به معادلات زیر دست یافت [41].

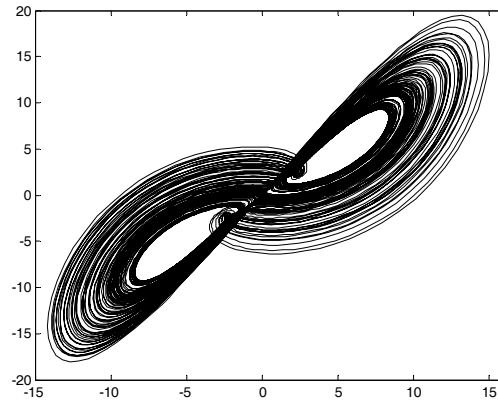
$$\begin{cases} \dot{x} = -10x + 10y \\ \dot{y} = -xz - y \\ \dot{z} = xy - z - R \end{cases} \quad (17-8)$$

که در آن  $R = R_0 + u$  عدد رایلی<sup>۱</sup> و  $R_0$  ضریب عملکرد<sup>۲</sup> و  $u$  سیگنال کنترلی می‌باشد. اگر  $R_0 = 28$  و  $u = 0$  انتخاب شود، در اینصورت سیستم (۱۷-۸)، یک سیستم آشوبی بوده و دارای سه حالت ناپایدار می‌باشد که در شکل (۱۳-۸) نشان داده شده است.

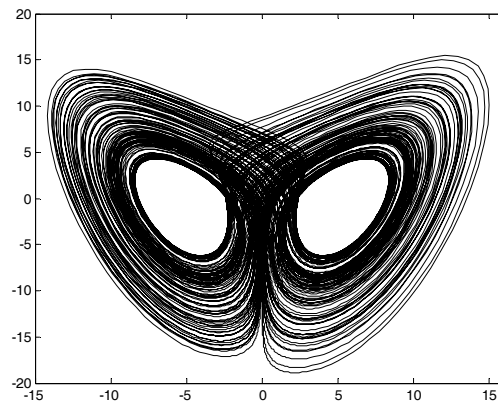


شکل (۱۴-۸) نمودارهای صفحه-فاز سیستم (۱۷-۸) را برای مدت  $t = 250 \text{ Sec}$  نشان می‌دهد. همانطور که در شکل دیده می‌شود، سیستم (۱۷-۸) بشدت آشوبی می‌باشد. شکل (۱۵-۸) نمودار سه‌بعدی صفحه-فاز سیستم (۱۷-۸) را برای مدت  $t = 250 \text{ Sec}$  نشان می‌دهد.

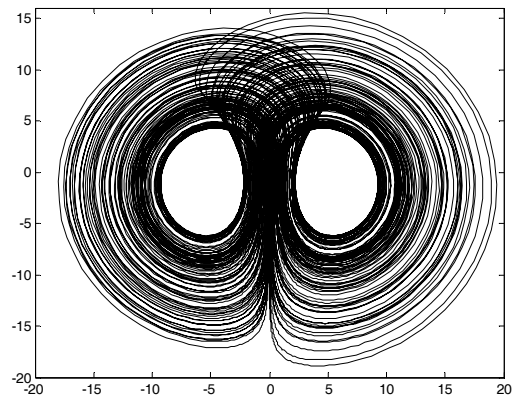
- 
1. Rayleigh (Reynolds) Number
  2. Operation Value



الف. *XY Phase – Portrait*

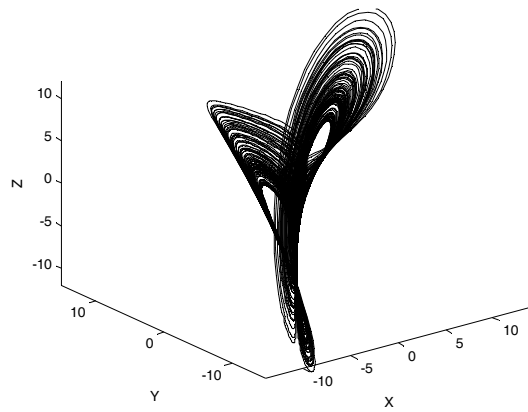


ب. *XZ Phase – Portrait*



پ. *YZ Phase – Portrait*

شکل (۸-۱۴) : نمودارهای دوبعدی صفحه- فاز سیستم (۸-۱۷)  
در  $t = 250 \text{ Sec}$



شکل (۸-۱۵) : نمودار سه بعدی صفحه- فاز سیستم (۸-۱۷)  
در  $t = 250 \text{ Sec}$





## ۱-۹ مقدمه

در فصلهای پیشین در مورد روش پسگام تعمیم یافته و کاربرد آن در کنترل سیستمهای غیرخطی یک ورودی - یک خروجی و چند ورودی - چند خروجی صحبت شد و با ذکر چند مثال کارآیی این روش مورد بحث قرار گرفت. در این فصل می خواهیم از این روش در مورد کنترل سیستمهای آشوبناک استفاده کنیم؛ بدین منظور دو سیستم آشوبی که یکی از آنها *SISO* و دیگری *MIMO* است را انتخاب کرده ایم.

در هر یک از دو سیستم مذکور، کنترل را از دو دیدگاه؛ یکی پایدارسازی حالات سیستم و دیگری ردیابی ورودی پله انجام داده و با شبیه سازیهای انجام شده کاربرد روش پسگام تعمیم یافته را به اثبات رسانده ایم.

## ۲-۹ کنترل آشوب در یک سیستم *SISO*

در این مورد معادلات لورنز (۸-۱۷) را در نظر می گیریم. برای اینکه سیستم مورد نظر را به حالت کلی رابطه (۵-۱) تبدیل کنیم، باید تغییر متغیرهای زیر را انجام دهیم.

$$\begin{cases} x_1 = y - x \\ x_2 = y \\ x_3 = z \end{cases} \quad (۱-۹)$$

در این صورت رابطه (۹-۱) به رابطه زیر تبدیل می شود.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -10x_1 - x_2 + x_3(x_1 - x_2) \\ \dot{x}_2 = -x_2 + x_3(x_1 - x_2) \\ \dot{x}_3 = -x_2(x_1 - x_2) - x_3 - 28 - u \end{cases} \quad (۲-۹)$$

حال برای سیستم (۹-۲) شبیه سازی را در دو مرحله انجام می دهیم. ابتدا حالات سیستم را پایدار کرده و سپس به مساله ردیابی می پردازیم.

## ۹-۲-۱ پایدارسازی حالات سیستم

برای اینکه از قضیه ۵-۱ استفاده کنیم، کفایت روابط زیر را در نظر بگیریم.

$$\Phi_1(x_1, x_2) = \frac{x_2}{x_1 - x_2} \quad (۳-۹)$$

$$\Phi_2(x_1, x_2) = 0 \quad (۴-۹)$$

با توجه به روابط قضیه ۵-۱، قانون کنترل پسخور حالت و تابع لیاپانوف سیستم (۹-۲)، از روابط زیر بدست می‌آیند.

$$u = -\frac{x_2}{(x_1 - x_2)^2} \dot{x}_1 - \frac{x_1}{(x_1 - x_2)^2} \dot{x}_2 + x_1(x_1 - x_2) + k_1(x_3 - \frac{x_2}{x_1 - x_2}) + (k_2 - 1)x_3 - 28 \quad (۵-۹)$$

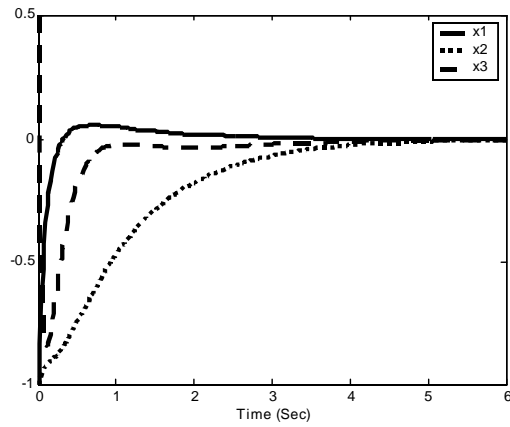
$$V(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 + \frac{1}{2}\left(x_3 + \frac{x_2}{x_1 - x_2}\right)^2 \quad (۶-۹)$$

تاثیر اعمال تابع کنترل پسخور حالت به سیستم (۹-۲) در شکل (۹-۱) نشان داده شده است. شکل (۹-۱-الف) حالت‌های سیستم پس از پایدارسازی و شکل (۹-۱-ب) تابع کنترل پسخور حالت لازم برای پایدارسازی را نمایش می‌دهد.

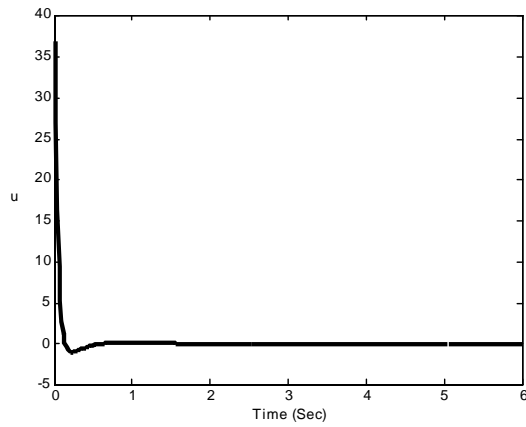
شکل (۹-۲) نمودار سه‌بعدی صفحه- فاز سیستم (۹-۲) را پس از پایدارسازی و برای مدت  $t = 250 \text{ Sec}$  نشان می‌دهد. تمامی شکلها به ازای  $k_1 = 0.5$  و  $k_2 = 4$  رسم شده است.

شکل (۹-۳) نمودارهای دوبعدی صفحه- فاز سیستم (۹-۲) را پس از پایدارسازی و برای مدت  $t = 250 \text{ Sec}$  نشان می‌دهد. شکل (۹-۳-الف) تغییر حالات  $x_1$  و  $x_2$ ، شکل (۹-۳-ب) تغییر حالات  $x_1$  و  $x_3$  و شکل (۹-۳-پ) تغییر حالات  $x_2$  و  $x_3$  را نشان می‌دهد. تمامی شکلها به ازای  $k_1 = 0.5$  و  $k_2 = 4$  رسم شده است.

شکل (۹-۴) تابع لیاپانوف سیستم را نشان می‌دهد. شکل (۹-۴-الف) تغییرات تابع لیاپانوف بر حسب تغییر حالات  $x_1$  و  $x_2$ ، شکل (۹-۴-ب) تغییرات تابع لیاپانوف بر حسب تغییر حالات  $x_1$  و  $x_3$  و شکل (۹-۴-پ) تغییرات تابع لیاپانوف بر حسب تغییر حالات  $x_2$  و  $x_3$  را نشان می‌دهد.

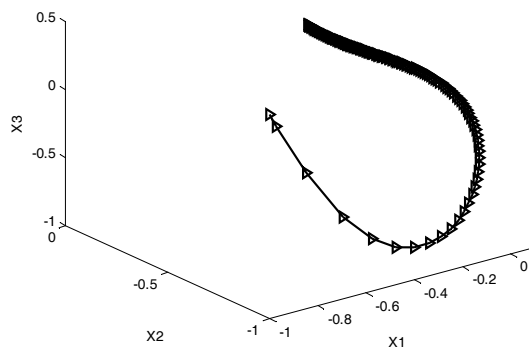


الف. تغییر حالات سیستم پس از پایدارسازی



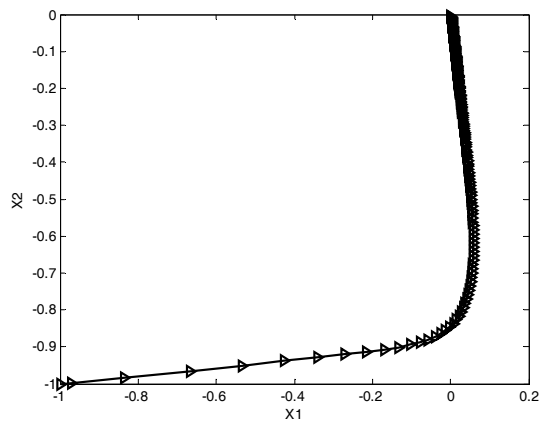
ب. سیگنال کنترل پس‌خور حالت لازم جهت پایدارسازی

شکل (۱-۹): تاثیر افزودن کنترل کننده به سیستم (۲-۹)

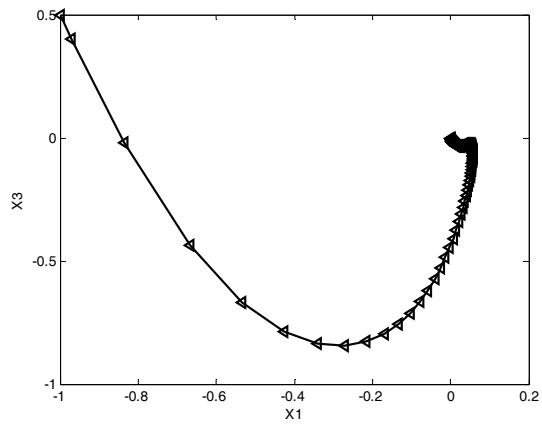


شکل (۲-۹): نمودار سه‌بعدی صفحه- فاز سیستم (۲-۹)

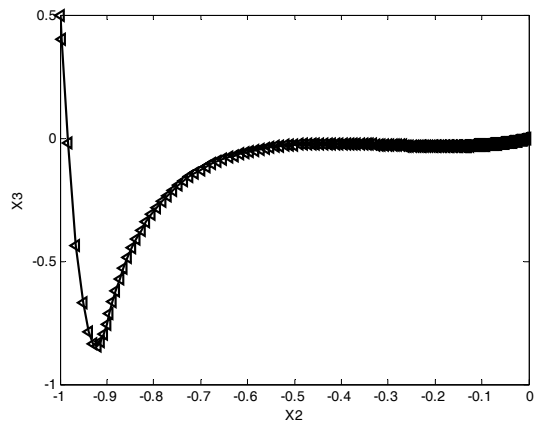
پس از پایدارسازی در  $t = 250 \text{ Sec}$



الف.  $X_1X_2$  Phase - Portrait

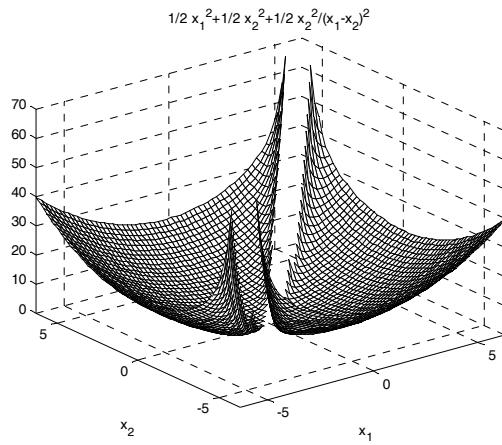


ب.  $X_1X_3$  Phase - Portrait

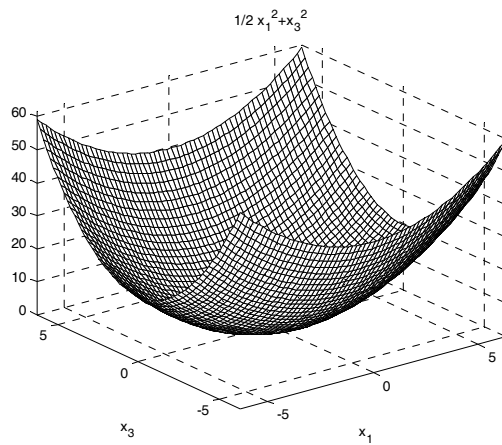


پ.  $X_2X_3$  Phase - Portrait

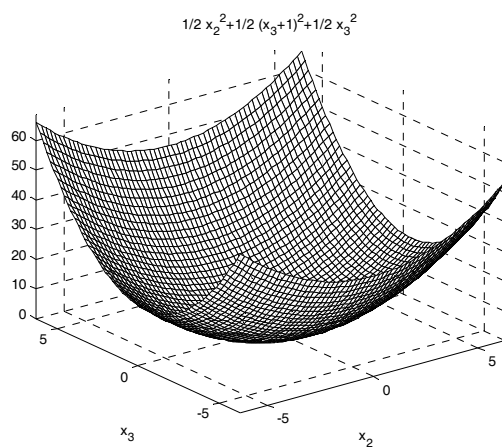
شکل (۳-۹) : نمودارهای دوبعدی صفحه- فاز سیستم (۲-۹) پس از پایدارسازی در  $t = 250 \text{ Sec}$



الف. تابع لیپانوف بر حسب تغییرات  $x_1$  و  $x_2$



ب. تابع لیپانوف بر حسب تغییرات  $x_1$  و  $x_3$



پ. تابع لیپانوف بر حسب تغییرات  $x_2$  و  $x_3$

شکل (۹-۴) : تابع لیپانوف سیستم (۹-۲)

## ۲-۲-۹ ردیابی ورودی پله

فرض کنید بخواهیم حالت  $x_2$ ، خروجی سیستم بوده و سیستم ورودی پله را ردیابی کند. در اینصورت می توان تغییر متغیرهای زیر را انجام داد.

$$\begin{cases} z_1 = x_1 \\ z_2 = 1 - x_2 \\ z_3 = x_3 \end{cases} \quad (۷-۹)$$

با این تغییر متغیرها، سیستم (۲-۹) به سیستم زیر تبدیل می شود.

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -10z_1 + z_2 - 1 + z_3(z_1 + z_2 - 1) \\ \dot{z}_2 = 1 - z_2 + z_3(z_1 + z_2 - 1) \\ \dot{z}_3 = (z_2 - 1)(z_1 + z_2 - 1) - z_3 - 28 - u \end{cases} \quad (۸-۹)$$

برای اینکه از قضیه ۵-۱ استفاده کنیم، می توان مقادیر زیر را انتخاب نمود.

$$\Phi_1(z_1, z_2) = \frac{1 - z_2}{z_1 + z_2 - 1} \quad (۹-۹)$$

$$\Phi_2(z_1, z_2) = \frac{-1}{z_1 + z_2 - 1} \quad (۱۰-۹)$$

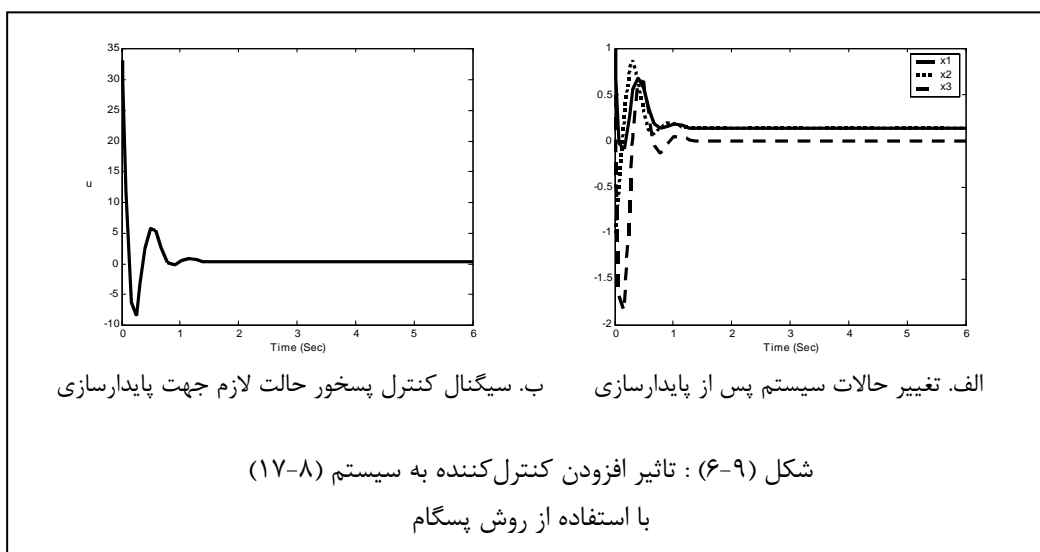
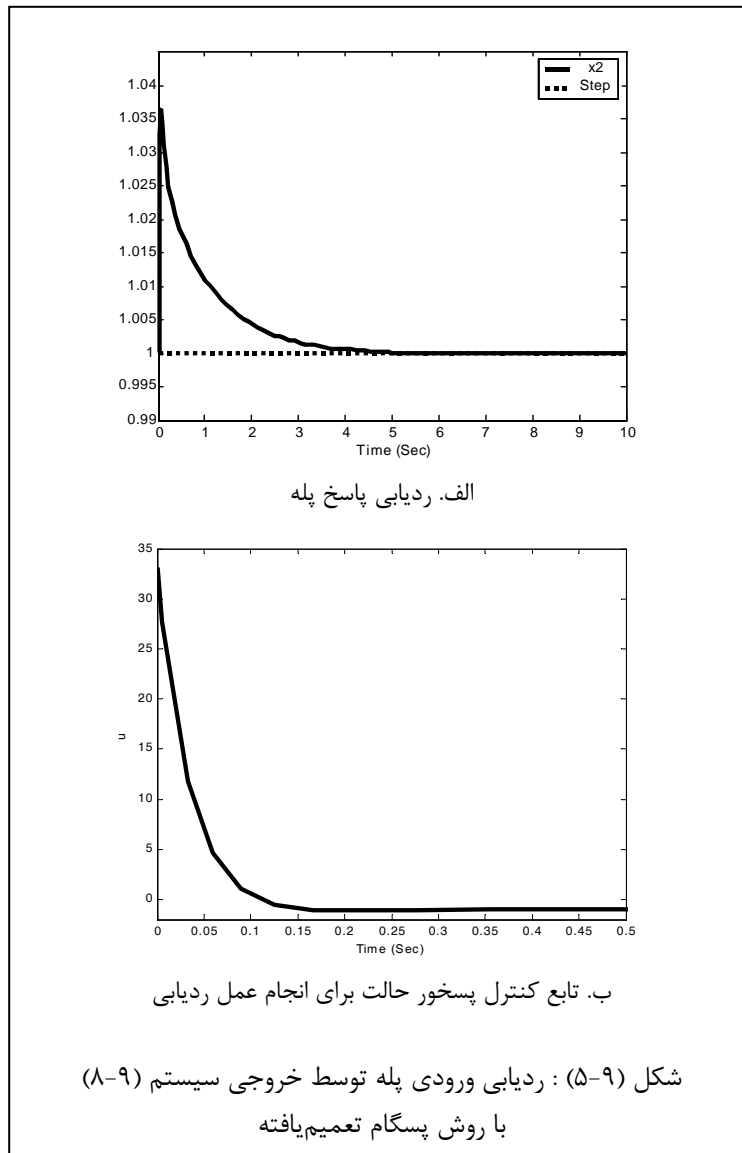
با استفاده از قضیه ۵-۱، این بار تابع کنترل پسخور حالت سیستم با استفاده از رابطه زیر بدست می آید.

$$u = \frac{r-1}{(r+w-1)^2} \dot{w} - \frac{w}{(r+w-1)^2} \dot{r} + (r+2w-1)(r+w-1) + z + 28 \\ + k_1 \left( z + \frac{w-1}{r+w-1} \right) + k_2 \left( z + \frac{1}{r+w-1} \right) \quad ; \quad k_1, k_2 > 0 \quad (۱۱-۹)$$

تاثیر اعمال تابع کنترل پسخور حالت به سیستم (۸-۹) در شکل (۵-۹) نشان داده شده است.

شکل (۵-۹-الف) حالت  $x_2$  را در مقایسه با تابع پله و شکل (۵-۹-ب) تابع کنترل پسخور حالت لازم

برای انجام عمل ردیابی را نمایش می دهد.



### ۳-۲-۹ مقایسه روش پسگام و روش پسگام تعمیم یافته

در [41] از روش پسگام برای کنترل سیستمهای آشوبی لورنز استفاده شده است. در این قسمت نتایج حاصل از روش جدید پسگام تعمیم یافته، با روش این مقاله مقایسه می شود. نتایج بدست آمده با روش پسگام و همچنین سیگنال کنترلی لازم در شکل (۶-۹) نشان داده شده است. با مقایسه شکلهای (۱-۹) و (۶-۹) که با شرایط اولیه یکسان رسم شده اند، می توان نتایج زیر را بدست آورد:

۱. در روش پسگام دو دینامیک سیستم دارای مقادیر نهایی مخالف صفر می گردند؛ در حالیکه در روش پسگام تعمیم یافته، تمامی دینامیکها به صفر میل می کنند.
۲. در روش پسگام تعمیم یافته نسبت به روش پسگام، با یک تابع کنترل پسخور حالت محدودتر حالات را پایدار می کنیم؛ در نتیجه امکان به اشباع رفتن این تابع کمتر می باشد. با توجه به نتایج حاصل از شبیه سازیها، کارایی بیشتر روش پسگام تعمیم یافته نسبت به روش پسگام به اثبات می رسد.

### ۳-۹ کنترل آشوب در یک سیستم MIMO

در این قسمت برای اثبات کارایی روش پسگام تعمیم یافته در سیستمهای MIMO، یک مثال بیان کرده و سپس با استفاده از روش پسگام تعمیم یافته آن را پایدار می کنیم. مطابق رابطه زیر، سیستمی را با دو ورودی در نظر می گیریم.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + u_1 \\ \dot{x}_3 = 3.1x_1 + x_2^2 + x_3 + u_2 \end{cases} \quad (۱۲-۹)$$

این معادلات، حالت خاصی از سیستمهایی است که با رابطه (۱-۷) بیان می شوند.



همانطور که در شکل‌های (۷-۹) ، (۸-۹) و (۹-۹) دیده می‌شود، این سیستم رفتاری آشوبناک

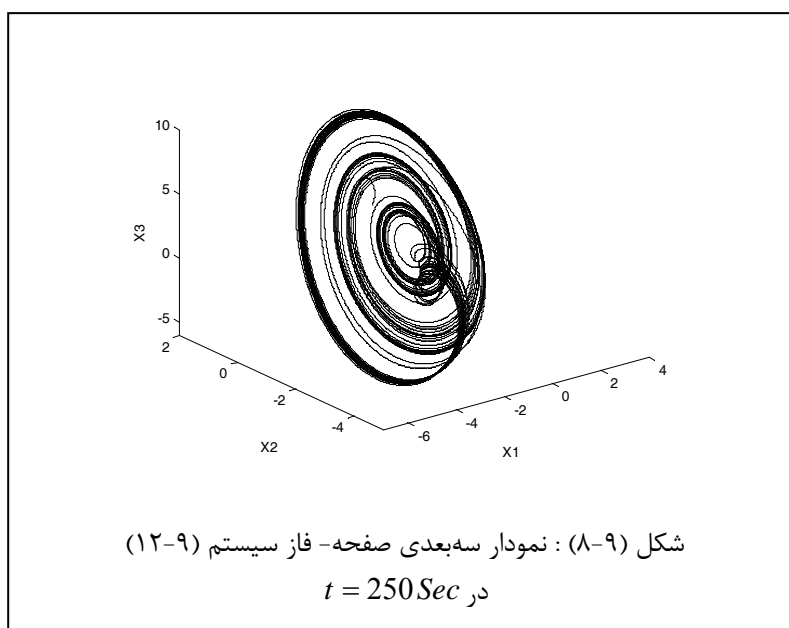
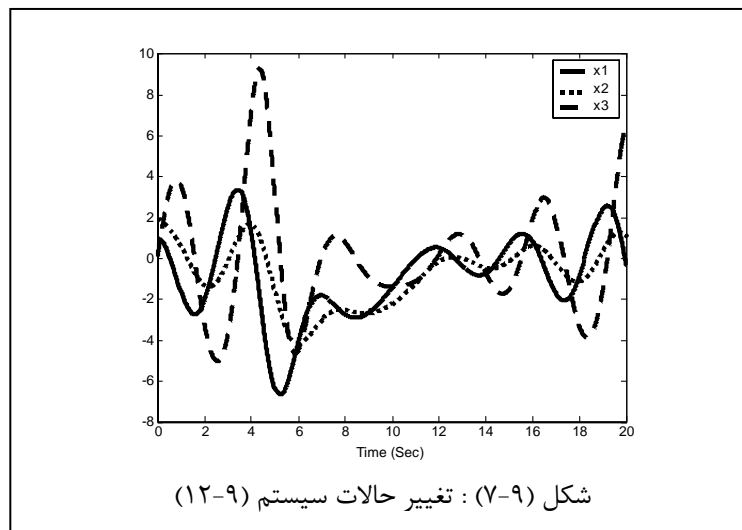
دارد؛ شکل (۷-۹) تغییر حالات سیستم (۱۲-۹) را نشان می‌دهد.

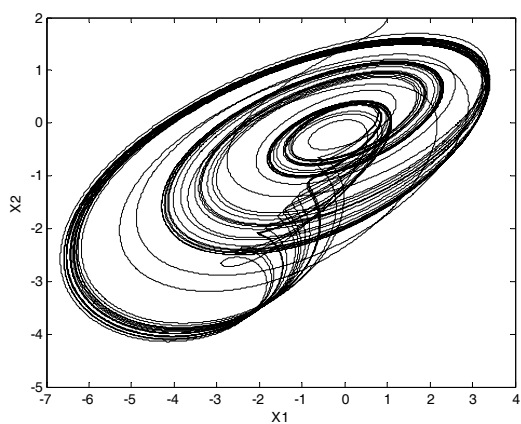
شکل (۸-۹) نمودار سه‌بعدی صفحه- فاز سیستم (۱۲-۹) و شکل (۹-۹) نمودارهای

دو بعدی صفحه- فاز سیستم (۱۲-۹) را برای مدت  $t = 250 \text{ Sec}$  نشان می‌دهد. شکل (۹-۹-الف)

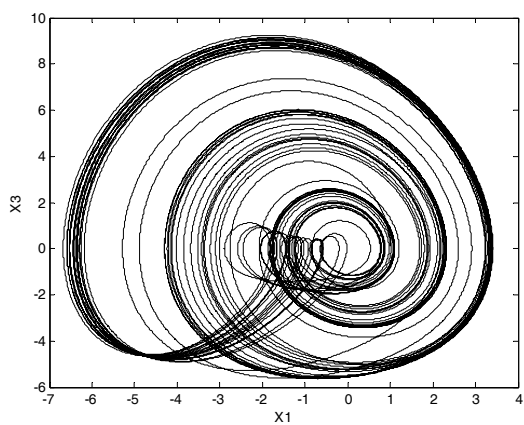
تغییر حالات  $x_1$  و  $x_2$ ، شکل (۹-۹-ب) تغییر حالات  $x_1$  و  $x_3$  و شکل (۹-۹-پ) تغییر حالات  $x_2$  و  $x_3$  را

نشان می‌دهد.

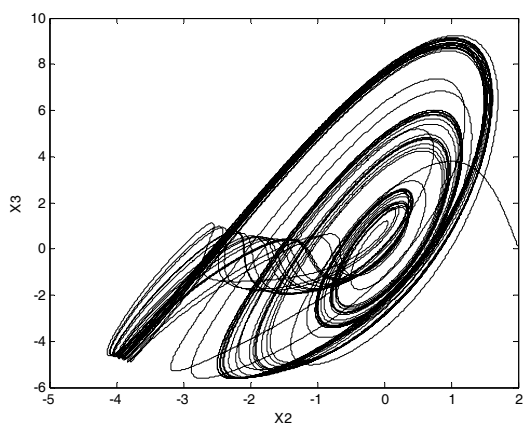




الف.  $X_1X_2$  Phase - Portrait



ب.  $X_1X_3$  Phase - Portrait



پ.  $X_2X_3$  Phase - Portrait

شکل (۹-۹): نمودارهای دوبعدی صفحه- فاز سیستم (۹-۱۲)  
در  $t = 250 \text{ Sec}$

### ۹-۳-۱ پایدارسازی حالات سیستم

اکنون می‌خواهیم با استفاده از روش پسگام تعمیم‌یافته، سیستم (۹-۱۲) را پایدار نماییم؛ بدین منظور تغییر متغیرهای زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\begin{cases} \eta_1 = x_2 \\ \eta_2 = x_3 \\ u_{a_1} = x_1 - x_2 + u_1 \\ u_{a_2} = 3.1x_1 + x_2^2 + x_3 + u_2 \end{cases} \quad (۹-۱۳)$$

بنابراین برای استفاده از شرایط قضیه ۷-۱ می‌توان روابط زیر را در نظر گرفت.

$$\Phi_{11}(x_1) = 0 \quad (۹-۱۴)$$

$$\Phi_{12}(x_1) = x_1 \quad (۹-۱۵)$$

با استفاده از قضیه ۷-۱ و تغییر متغیرهایی که داده‌ایم، می‌توان قوانین کنترل پسخور حالت و

همچنین تابع لیاپانوف سیستم (۹-۱۲) را از روابط زیر بدست آورد.

$$u_1 = -(k_{11} - 1)\eta_1 - x_1 \quad ; \quad k_{11} > 0 \quad (۹-۱۶)$$

$$u_2 = (k_{12} - 2.1)x_1 - \eta_1^2 - (k_{12} + 2)\eta_2 \quad ; \quad k_{12} > 0 \quad (۹-۱۷)$$

$$V(x_1, \eta_1, \eta_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}\eta_1^2 + \frac{1}{2}(\eta_2 - x_1)^2 \quad (۹-۱۸)$$

تاثیر اعمال تابع کنترل پسخور حالت به سیستم (۹-۱۲) در شکل (۹-۱۰) نشان داده

شده است. شکل (۹-۱۰-الف) حالت‌های سیستم پس از پایدارسازی و شکل (۹-۱۰-ب) تابع

کنترل پسخور حالت لازم برای پایدارسازی را نمایش می‌دهد.

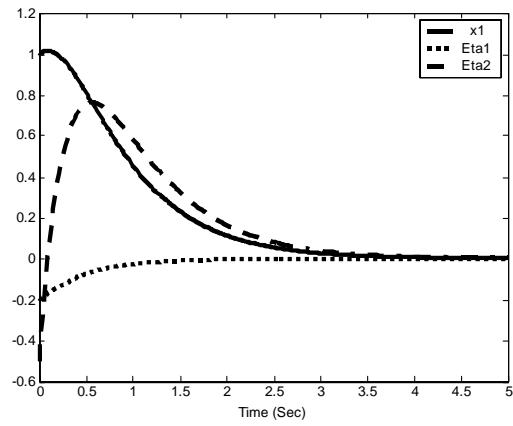
شکل (۹-۱۱) نمودار سه‌بعدی صفحه-فاز سیستم (۹-۱۲) را پس از پایدارسازی و برای

مدت  $t = 250 \text{ Sec}$  نشان می‌دهد. شکل (۹-۱۲) نمودارهای دوبعدی صفحه-فاز سیستم (۹-۱۲)

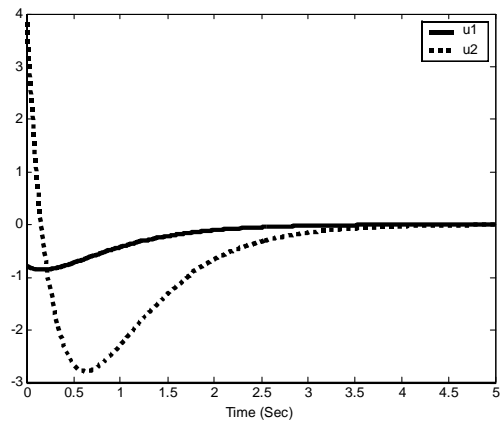
را پس از پایدارسازی و برای مدت  $t = 250 \text{ Sec}$  نشان می‌دهد. شکل (۹-۱۲-الف) تغییر حالات  $x_1$

و  $x_2$ ، شکل (۹-۱۲-ب) تغییر حالات  $x_1$  و  $x_3$  و شکل (۹-۱۲-پ) تغییر حالات  $x_2$  و  $x_3$  را نشان

می‌دهد. تمامی شکلها به ازای  $k_{11} = 2$  و  $k_{12} = 3.5$  رسم شده است.

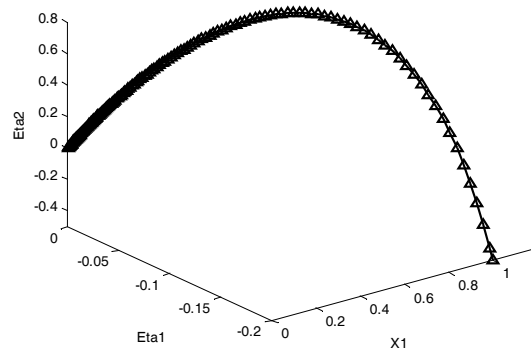


الف. تغییر حالات سیستم پس از پایدارسازی

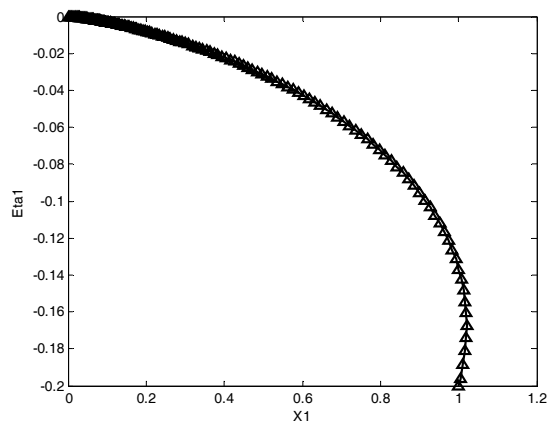


ب. سیگنالهای کنترل پسخور حالت لازم جهت پایدارسازی

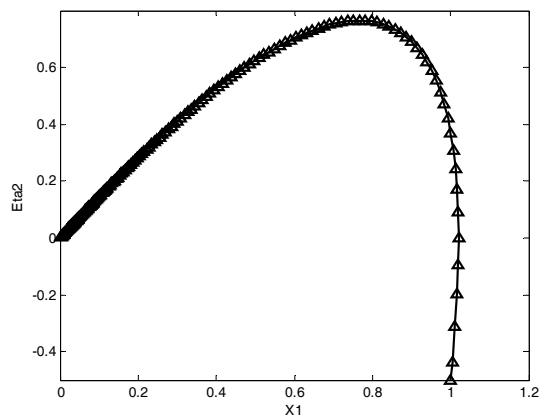
شکل (۹-۱۰): تاثیر افزودن کنترل کننده به سیستم (۹-۱۲)



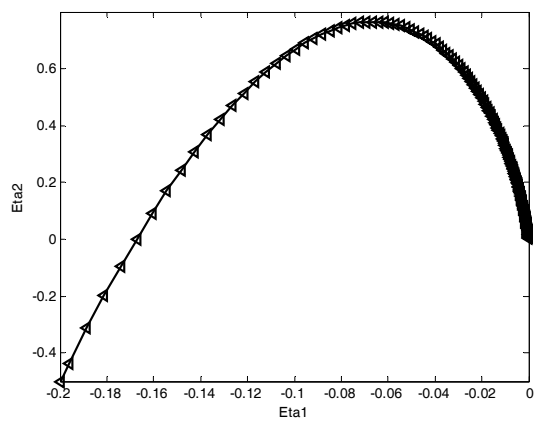
شکل (۹-۱۱): نمودار سه بعدی صفحه- فاز سیستم (۹-۱۲) پس از پایدارسازی در  $t = 250 \text{ Sec}$



الف.  $X_1, \eta_1$  Phase – Portrait

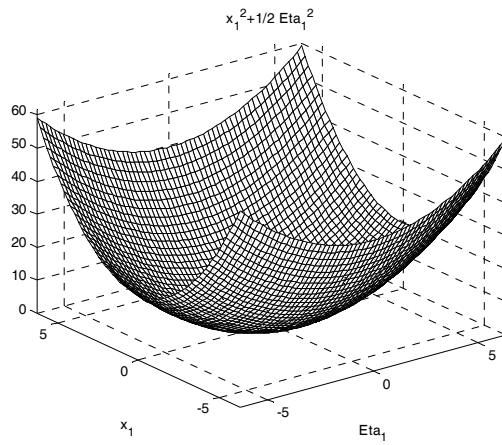


ب.  $X_1, \eta_2$  Phase – Portrait

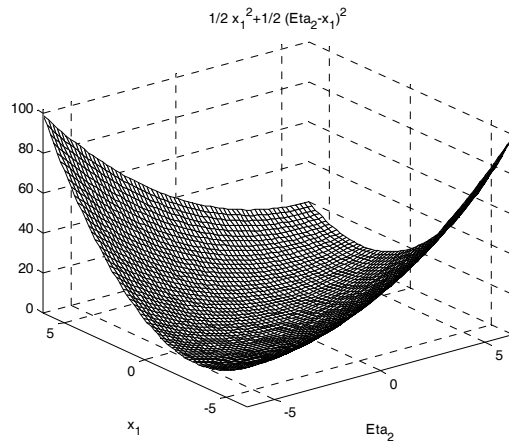


پ.  $\eta_1, \eta_2$  Phase – Portrait

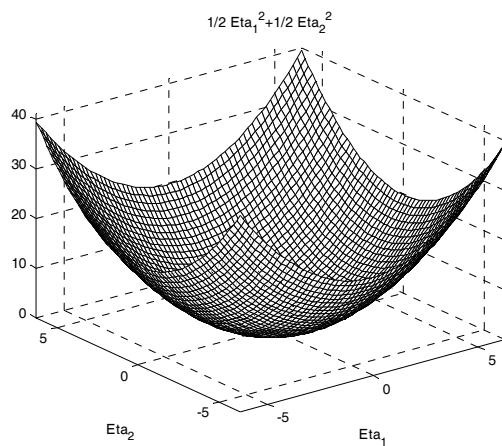
شکل (۹-۱۲): نمودارهای دوبعدی صفحه- فاز سیستم (۹-۱۲)  
 پس از پایدارسازی در  $t = 250 \text{ Sec}$



الف. تابع لیپانوف بر حسب تغییرات  $x_1$  و  $\eta_1$



ب. تابع لیپانوف بر حسب تغییرات  $x_1$  و  $\eta_2$



پ. تابع لیپانوف بر حسب تغییرات  $\eta_1$  و  $\eta_2$

شکل (۹-۱۳): تابع لیپانوف سیستم (۹-۱۲)

شکل (۹-۱۳) تابع لیاپانوف سیستم را نشان می‌دهد. شکل (۹-۱۳-الف) تغییرات تابع لیاپانوف بر حسب تغییر حالات  $x_1$  و  $\eta_1$ ، شکل (۹-۱۳-ب) تغییرات تابع لیاپانوف بر حسب تغییر حالات  $x_1$  و  $\eta_2$  و شکل (۹-۱۳-پ) تغییرات تابع لیاپانوف بر حسب تغییر حالات  $\eta_1$  و  $\eta_2$  را نشان می‌دهد.

### ۹-۳-۲ ردیابی ورودی پله

حال فرض می‌کنیم سیستم (۹-۱۲) بخواهد ورودی پله را ردیابی کند. حالت  $x_3$  را به عنوان خروجی سیستم در نظر گرفته که می‌خواهیم پاسخ پله را ردیابی کند. در اینصورت می‌توان تغییر متغیرهای زیر را در نظر گرفت.

$$\begin{cases} x = x_1 \\ \eta_1 = x_2 \\ \eta_2 = 1 - x_3 \end{cases} \quad (۹-۱۹)$$

با تغییر متغیرهای انجام‌شده سیستم (۹-۱۲) به روابط زیر تبدیل می‌شود که حالت خاصی از سیستم‌هایی است که می‌توان به کمک قضیه ۷-۱ آنها را پایدارسازی نمود.

$$\begin{cases} \dot{x} = -1 + \eta_2 \\ \dot{\eta}_1 = x - \eta_1 + u_1 \\ \dot{\eta}_2 = -3.1x - \eta_1^2 - 1 + \eta_2 - u_2 \end{cases} \quad (۹-۲۰)$$

حال برای اینکه شرایط قضیه برآورده شود، می‌توانیم توابع زیر را انتخاب نماییم.

$$\Phi_{11}(x) = 0 \quad (۷-۲۱)$$

$$\Phi_{12}(x) = 1 - x \quad (۷-۲۲)$$

در نتیجه می‌توان قوانین پسخور حالت و تابع لیاپانوف کل سیستم را از روابط زیر بدست آورد.

$$u_1 = -(k_{11} - 1)\eta_1 - x \quad ; \quad k_{11} > 0 \quad (۷-۲۳)$$

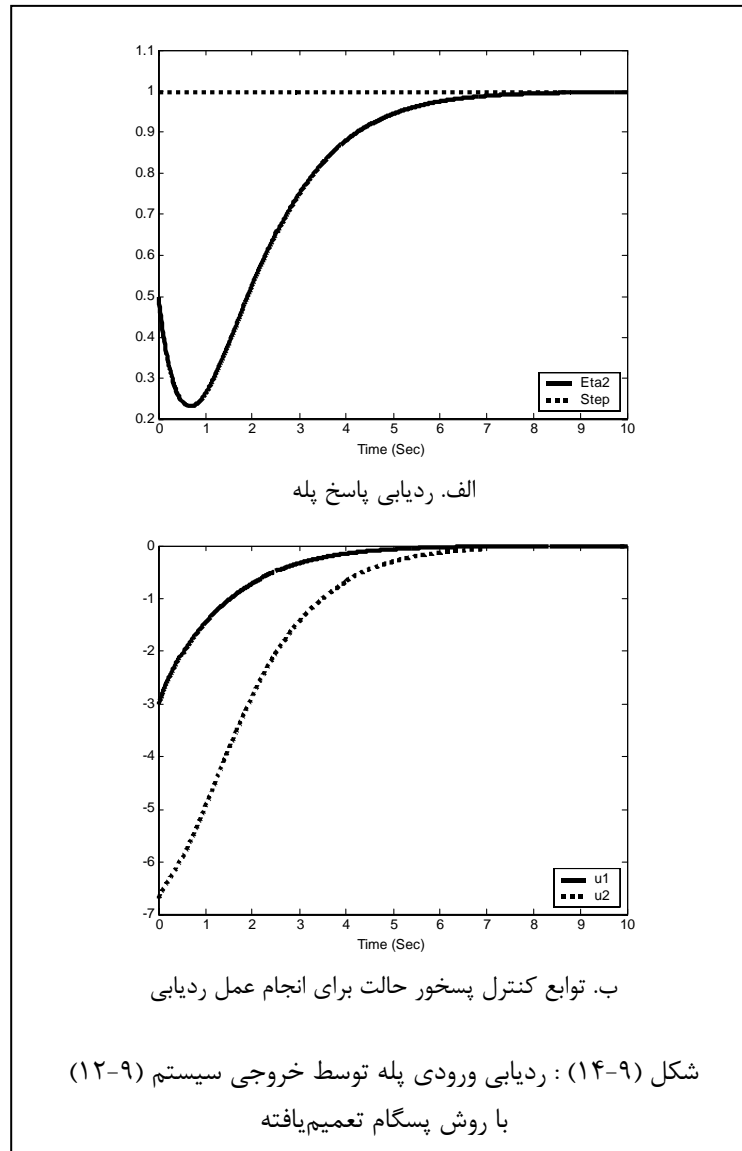
$$u_2 = (k_{12} - 3.1)x - \eta_1^2 + (k_{12} + 2)\eta_2 - (k_{12} + 2) \quad ; \quad k_{12} > 0 \quad (۷-۲۴)$$

$$V(x, \eta_1, \eta_2) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\eta_1^2 + \frac{1}{2}(\eta_2 + x - 1)^2 \quad (۷-۲۵)$$

تأثیر اعمال تابع کنترل پسخور حالت به سیستم (۲۰-۹) در شکل (۱۴-۹) نشان داده شده است.

شکل (۱۴-۹-الف) حالت  $x_3$  را در مقایسه با تابع پله و شکل (۱۴-۹-ب) توابع کنترل پسخور حالت

لازم برای انجام عمل ردیابی را نمایش می‌دهد. تمامی شکلها به ازای  $k_{11} = 2, k_{12} = 1$  رسم شده‌اند.







## ۱-۱۰ مقدمه

یکی از عواملی که پس از کنترل یک سیستم باید مد نظر قرار داد، بهبود پاسخ سیستم می باشد؛ بدین منظور می توان در طراحی یک کنترل کننده از معیارهایی مانند کاهش خطا، افزایش سرعت و ... استفاده نمود. در فصل پیش آشوب موجود در یک سیستم *SISO* و یک سیستم *MIMO* کنترل و حذف شد. در این فصل می خواهیم با استفاده از الگوریتم ژنتیک برای کاهش خطا کنترل کننده های طراحی شده در فصل پیش را بهینه نماییم.

## ۱-۲ مقدمه ای بر الگوریتم ژنتیک<sup>۱</sup>

الگوریتم ژنتیک روشی برای بهینه سازی مسائل محدود و نامحدود می باشد و بر اساس فلسفه انتخاب اصلح طبیعت بنا شده است. الگوریتم ژنتیک به صورت تکراری جمعیتی از راه حلها را اصلاح می کند تا والدینی برای فرزندان مرحله بعدی باشند. در نسلهای متوالی، جمعیت به سوی راه حل بهینه پیش می رود. از الگوریتم ژنتیک می توان در حل بسیاری از مسائل بهینه سازی که با الگوریتمهای استاندارد هم خوانی ندارند؛ مانند توابع ناپیوسته، مشتق ناپذیر، تصادفی و یا بسیار غیرخطی استفاده نمود.

الگوریتم ژنتیک برای تولید نسل بعدی از روی نسل کنونی، از سه قانون اصلی زیر تبعیت می کند:

۱. قوانین انتخاب: افرادی (والدینی) را که در جمعیت نسل بعدی شرکت می کند، انتخاب می کند.
۲. قوانین تقاطع: برای تشکیل فرزندان نسل بعد، دو والد را با هم ترکیب می کند.
۳. قوانین جهش: برای تشکیل فرزندان، تغییراتی تصادفی در والدین به وجود می آورد.

## ۱-۲-۱۰ بعضی از اصطلاحات الگوریتم ژنتیک

در این قسمت با بعضی از تعاریف مهم در کاربرد الگوریتم ژنتیک آشنا می شویم.

---

۱. در نگارش قسمتهایی از این بخش از [64] استفاده شده است.

## تعریف ۱-۱۰: تابع برازندگی<sup>۱</sup>

تابع برازندگی به تابعی گفته می‌شود که هدف از استفاده الگوریتم بهینه‌سازی آن می‌باشد. در

الگوریتمهای بهینه‌سازی استاندارد به این تابع، تابع هدف گفته می‌شود. □

## تعریف ۲-۱۰: افراد<sup>۲</sup>

هر فرد، نقطه‌ای است که می‌توان تابع برازندگی را به آن اعمال کرد. مقدار تابع برازندگی برای هر

فرد، نمره آن فرد محسوب می‌شود. یک فرد گاهی اوقات به نام ژنوم و ورودیهای بردار هر فرد، ژن نیز

نامیده می‌شوند. □

برای مثال؛ اگر تابع برازندگی بصورت زیر باشد، بردار  $(2,0,-3)$  که طول آن برابر با تعداد

متغیرهای این مساله است، یک فرد است و نمره این فرد برابر  $f(2,0,-3)=3$  است.

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1x_2 + 1)^3 + 2(x_1 + x_3)^2 \quad (1-10)$$

## تعریف ۳-۱۰: جمعیت<sup>۳</sup>

به گروهی از افراد، جمعیت گفته می‌شود؛ به عنوان مثال اگر یک تابع برازندگی دارای جمعیت

صد نفره بوده و سه متغیر داشته باشد، در این صورت جمعیت این تابع را با یک ماتریس  $100 \times 3$

نمایش می‌دهند. □

ممکن است یک فرد در یک جمعیت بیش از یک بار تکرار شده باشد؛ مثلاً اگر تابع برازندگی

$(1-10)$  تشکیل جمعیت بدهد،  $(2,0,-3)$  چند بار تکرار گردد.

## تعریف ۴-۱۰: نسل<sup>۴</sup>

در هر مرحله با محاسباتی که بر روی جمعیت کنونی صورت می‌گیرد، جمعیت جدیدی تشکیل

می‌گردد. هر جمعیت متوالی یک نسل جدید نامیده می‌شود. □

- 
1. Fitness Function
  2. Individuals
  3. Population
  4. Generation

## تعریف ۱۰-۵: پخشی<sup>۱</sup>

به میانگین فاصله بین افراد هر جمعیت، پخشی گفته می‌شود. اگر میانگین فاصله بزرگ باشد، جمعیت دارای پخشی زیادی است. ❑

پخشی در الگوریتم ژنتیک دارای اهمیت بالایی است؛ زیرا به الگوریتم اجازه می‌دهد تا محدوده بزرگتری از فضا را جستجو کند.

## تعریف ۱۰-۶: مقادیر برازندگی و مقادیر بهترین برازندگی<sup>۲</sup>

مقدار تابع برازندگی برای یک فرد، مقدار برازندگی آن فرد نامیده می‌شود. بهترین مقدار تابع برای یک جمعیت، بهترین مقدار برازندگی نامیده می‌شود. ❑

## تعریف ۱۰-۷: والدین و فرزندان<sup>۴</sup>

الگوریتم ژنتیک برای تولید نسل بعدی، افرادی را از نسل کنونی انتخاب کرده که به آنها والدین گفته می‌شود. از والدین برای تولید نسل آینده استفاده می‌شود. نسل بعدی فرزندان خوانده می‌شود. معمولاً الگوریتم ژنتیک والدینی را انتخاب می‌کند که مقادیر برازندگی بهتری داشته باشند. ❑

## ۱۰-۲-۲ مراحل الگوریتم ژنتیک

در این قسمت به صورت خلاصه مراحل کاری الگوریتم ژنتیک را شرح داده می‌شود.

۱. الگوریتم با تولید یک جمعیت اولیه تصادفی شروع می‌شود.

---

1. Diversity

2. Fitness Values and Best Fitness Values

۳. جعبه ابزار ژنتیک در نرم‌افزار MATLAB همواره کمترین مقدار تابع را محاسبه می‌کند و لذا در این مورد بهترین مقدار برازندگی، کمترین مقدار برازندگی می‌باشد. بنابراین نرم‌افزار MATLAB فقط قادر به حل مسائلی مانند  $Min_x f(x)$  می‌باشد. اگر برای بهینه‌سازی تابع برازندگی، نیاز به حل مسائلی مانند  $Max_x f(x)$  داشته باشیم، به جای کمترین مقدار  $f(x)$ ، می‌توان بیشترین مقدار  $f(x)$  را محاسبه نمود و در واقع مساله  $Min_x [-f(x)]$  را حل نمود.

4. Parents and Children

۲. سپس الگوریتم رشته‌ای از جمعیت‌های جدید را به وجود می‌آورد. در هر مرحله، الگوریتم از افراد نسل کنونی استفاده می‌کند تا جمعیت بعدی را بسازد؛ بدین منظور الگوریتم مراحل زیر را دنبال می‌کند.
- الف. با محاسبه مقدار برازندگی، به هر عضو جمعیت نمره‌ای می‌دهد.
- ب. نمرات خام تابع را تغییر مقیاس می‌دهد (نرمالیزه می‌کند) تا در محدوده‌ای قابل استفاده‌تر قرار بگیرند.
- پ. والدین را بر اساس مقدار برازندگی‌ها انتخاب می‌کند.
- ت. تعدادی از افراد جمعیت کنونی که برازندگی بهتری دارند، به عنوان نخبه انتخاب می‌شوند و مستقیماً به نسل بعد منتقل می‌شوند.
- ث. از روی والدین، فرزندان را تولید می‌کند. فرزندان یا به صورت جهش (انجام تغییرات تصادفی روی تنها یک والد) و یا به صورت تقاطع (ترکیب دو بردار ورودی به صورت یک جفت والد) تولید می‌شوند.
- ج. جمعیت کنونی را با فرزندان جایگزین می‌کند تا نسل بعد را تولید کند.
۳. هنگامیکه یکی از معیارهای توقف اتفاق بیفتد، الگوریتم متوقف می‌شود.

### ۱۰-۳ کاربرد الگوریتم ژنتیک در بهینه‌سازی کنترل‌کننده‌های آشوب

همانگونه که در قضایای ۱-۵ و ۱-۷ مشاهده شد، در طراحی کنترل‌کننده به روش پسگام تعمیم‌یافته، دو آزادی عمل؛ یکی در انتخاب تابع پاسخ اولیه،  $\Phi$ ، دیگری در انتخاب ضرایب  $k$  داریم و لذا با تغییر آنها می‌توان پاسخهای متفاوتی بدست آورد که هر کدام برآورنده بهتری از خواسته‌ها نسبت به دیگری می‌باشد؛ کاهش خطا، افزایش سرعت، محدودتر شدن ورودی کنترلی و ... در این رساله برای تعیین تابع برازندگی یا همان تابع هدف از معیار کاهش خطا استفاده شده است ولی برنامه نوشته‌شده با تغییر اندکی قادر به محاسبه سایر توابع نیز می‌باشد.

برای رسیدن به کمترین مقدار خطا می توان از روشهای مختلفی استفاده کرد. از آنجائیکه هدف نهایی آرامش کامل حالات سیستم یعنی مقدار نهایی صفر می باشد؛ لذا مطلوب هر حالت این است که مقدار  $x_i - x_{ss} = x_i$  کوچکتر شود.

با توجه به مطالب بیان شده، تابع برازندگی در این مورد به صورت زیر می باشد.

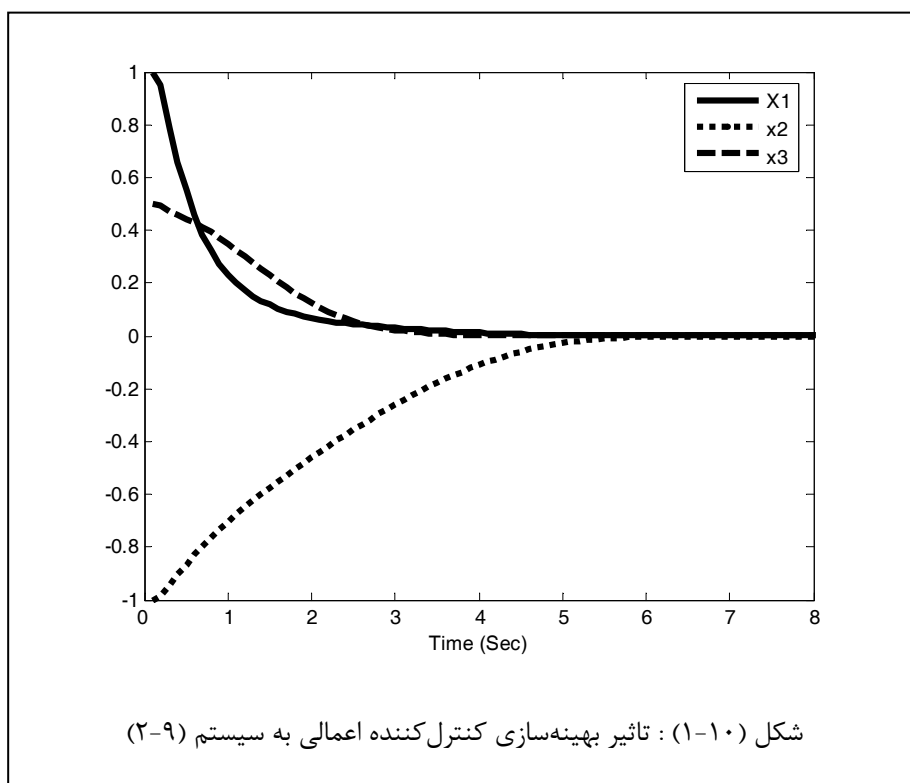
$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n \int x_i^2(t) dt} \quad (2-10)$$

جعبه افزار ژنتیک در MATLAB امکان انتخاب تعداد نسلها و جمعیت را به ما می دهد. بنابراین می خواهیم کنترل کننده های آشوب طراحی شده در فصل پیش را بهینه نماییم. در این راه ضریب  $k$  را به عنوان متغیر بهینه سازی انتخاب کرده ایم.

### ۱-۳-۱۰ بهینه سازی کنترل کننده های آشوب در سیستم SISO

تمامی شکل های فصل نهم برای کنترل سیستم (۲-۹) با فرض  $k_1 = 0.5$  و  $k_2 = 4$  رسم شده

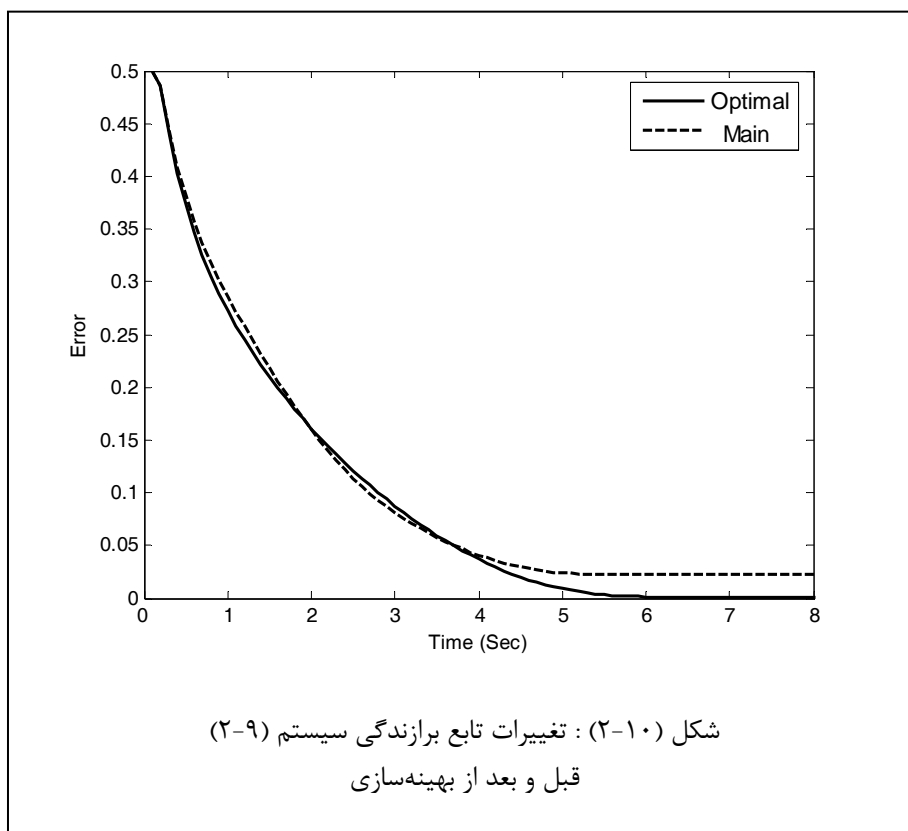
است. با بکارگیری الگوریتم نتایج بهینه عبارتند از:  $k_1 = 0.2$  و  $k_2 = 6.73$ .



شکل (۱۰-۱) تغییرات حالات سیستم (۹-۲) پس از اعمال کنترل کننده با ضرایب جدید به آن را نشان می دهد.

برای اینکه امکان مقایسه بهتری بین نتایج قبلی و نتایج حاصل از بهینه سازی فراهم گردد، تغییرات تابع برازندگی در دو حالت قبل و بعد از بهینه سازی در شکل (۱۰-۲) نشان داده شده است. همانگونه که در شکل مشاهده می شود، این تابع پس از بهینه سازی مقدار کمتری دارد. پیش از بهینه سازی تابع برازندگی دارای مقدار نهایی بوده ولی پس از بهینه سازی و پس از طی زمان نشست، تابع دارای مقدار نهایی صفر می گردد که نشانگر کارایی روش بکار گرفته شده می باشد.

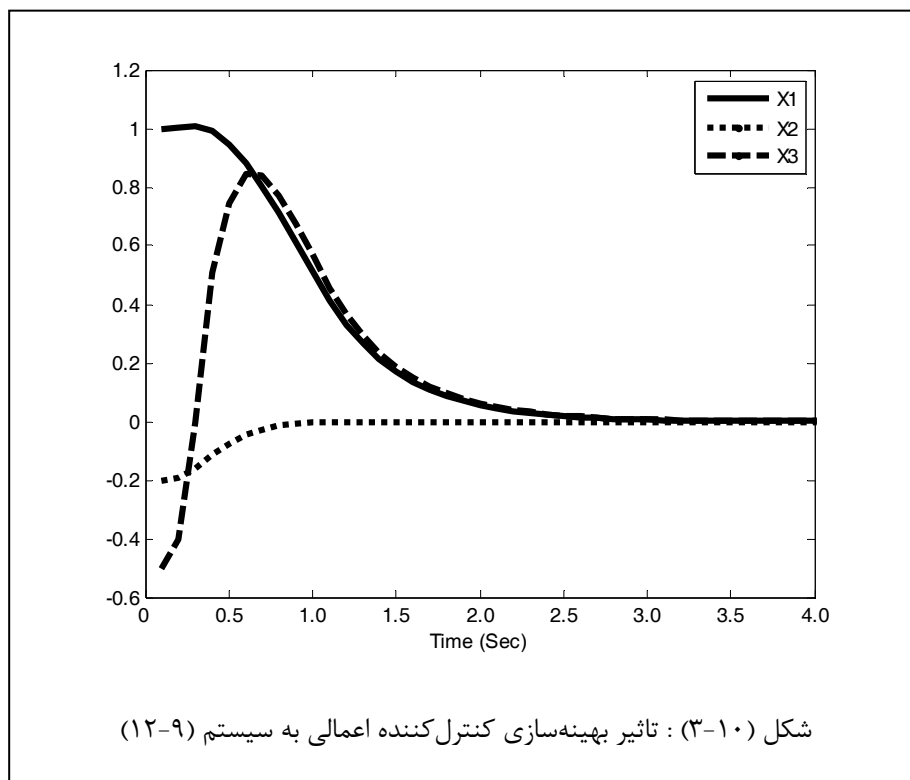
با 84 نمونه ای که در بازه زمانی 8 ثانیه انجام شده، مقدار تابع هدف پیش از بهینه سازی 2.90 و پس از آن 2.60 می باشد.



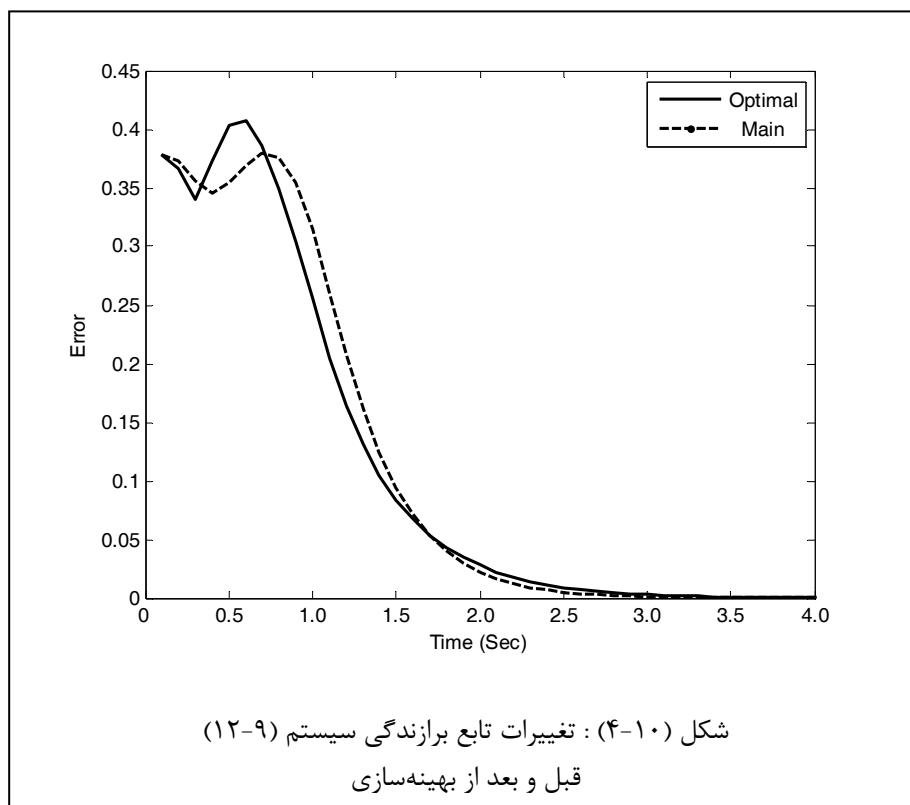
### ۱۰-۳-۲ بهینه‌سازی کنترل‌کننده‌های آشوب در سیستم MIMO

تمامی شکل‌های فصل نهم برای کنترل سیستم (۹-۱۲) با فرض  $k_{11}=2$  و  $k_{12}=3.5$  رسم شده است. با بکارگیری الگوریتم نتایج بهینه عبارتند از:  $k_{11}=5.84$  و  $k_{12}=9.98$ . شکل (۱۰-۳) تغییرات حالات سیستم (۹-۱۲) پس از اعمال کنترل‌کننده با ضرایب جدید به آن را نشان می‌دهد.

مانند قسمت قبلی شکل (۱۰-۴) امکان بررسی بیشتر مقدار تابع برازندگی پیش و پس از بهینه‌سازی را به ما می‌دهد. در شکل کارآیی روش مشخص می‌باشد. با 57 نمونه‌ای که در بازه زمانی 4 ثانیه انجام شده، مقدار تابع هدف پیش از بهینه‌سازی 1.58 و پس از آن 1.53 می‌باشد.







مانند قسمت قبلی شکل (۱۰-۴) امکان بررسی بیشتر مقدار تابع برازندگی پیش و پس از بهینه‌سازی را به ما می‌دهد. در شکل کارآیی روش مشخص می‌باشد.



## ۱-۱۱ مقدمه

با توجه به فصلهای پیشین دیدیم که چگونه می‌توان از روش پسگام تعمیم‌یافته برای کنترل کلاس خاصی از سیستمهای غیرخطی MIMO استفاده کرد. این کار را با سیستمهای غیرخطی SISO آغاز کرده و سرانجام به سیستم MIMO رسیدیم که در واقع می‌توان سیستمهای SISO را به عنوان زیرمجموعه‌ای از سیستم کلی فوق بیان کرد.

حال در این فصل ابتدا به مروری بر کارهای انجام‌شده در این رساله پرداخته و سپس به بررسی این روش از سه دیدگاه مزایا، معایب و پیشنهاداتی در جهت بهبود روش می‌پردازیم.

### ۱۱-۲ مروری بر کارهای انجام‌شده در رساله

در این رساله ابتدا تعاریف و قضایایی که برای درک مباحث غیرخطی لازم بود، تشریح شد. سپس به بیان تاریخچه‌ای از روش پسگام، مفهوم و همچنین کاربردها، مزایا و معایب آن پرداختیم. با توجه به مشکلات این روش همواره در جهت رفع این مشکلات گامهایی برداشته شده است.

در ادامه با الهام از روش پسگام، روشی جدید در کنترل و تعیین تابع لیاپانوف سیستمهای غیرخطی بیان نمودیم که آن را روش پسگام تعمیم‌یافته نام نهادیم. در فصلهای مربوط به این روش، برای درک بیشتر و بررسی کارایی آن، از حالت ساده سیستمهای غیرخطی یک ورودی - یک خروجی آغاز کرده و سپس به حالت کلی‌تری که سیستم غیرخطی چند ورودی - چند خروجی است، رسیدیم.

در مراحل مختلف برای اثبات برتری‌های روش با استفاده از محیط SIMULINK نرم‌افزار MATLAB سیستمهایی را شبیه‌سازی نموده و به پاسخ مطلوب دست یافتیم. در فصل ششم چند سیستم عملی را با استفاده از این روش کنترل نموده و هر کدام از شبیه‌سازها را با یکی از روشهای موجود، مقایسه کردیم. همانطور که از شکلها و نتایج پیداست، همواره روش نوین ارائه‌شده دارای پاسخ بهتری می‌باشد.

سپس به عنوان نمونه مطالعاتی اصلی در این رساله به بررسی آشوب در سیستمهای کنترلی پرداخته و با استفاده از روش پسگام تعمیم یافته آشوب موجود در دو سیستم؛ یکی SISO و دیگری MIMO را کنترل نمودیم. کنترل این سیستمها را از دو دیدگاه پایدارسازی و ردیابی ورودی مرجع انجام دادیم.

در انتها با استفاده از الگوریتم ژنتیک، کنترل کننده طراحی شده در فصل قبل را بهینه نموده ایم.

### ۳-۱۱ مزایای روش پسگام تعمیم یافته

روش مطرح شده در این رساله دارای مزایای مختلفی می باشد که بطور خلاصه به بعضی از آنها اشاره می کنیم.

۱. این روش نسبت به روش پسگام موجود، سیستمهای بیشتری را تحت پوشش قرار می دهد و طراحی کنترل کننده و تعیین تابع لیاپانوف به صورت یک مرحله ای انجام می پذیرد که این امر در مقایسه به الگوریتم چند مرحله ای پسگام امکان خطای محاسباتی و زمان انجام عملیات را کاهش می دهد.
۲. کاربرد روش پیشنهادی در مقایسه با سایر روشها ساده تر بوده و با توجه به شبیه سازیهای انجام گرفته در مقایسه با بعضی از روشهای موجود، پاسخ قابل قبول تری داده است.
۳. در روش پیشنهادی جدید تعیین تابع لیاپانوف همزمان با پایدارسازی و به سادگی انجام می گیرد؛ بطوریکه همواره این پایداری از نوع مجانبی به مفهوم وسیع می باشد. یعنی بجای برنامه نویسی های عددی برای تعیین بزرگترین ناحیه جذب<sup>۱</sup>، می توان به سادگی با تعیین  $\Phi$  های مناسب به این خواسته دست یافت.

همانطور که در اکثر مثالها می‌بینیم،  $\Phi$  مناسب به گونه‌ای طراحی شده است که تصویر تابع لیاپانوف بر روی فضای حالات شامل تمام فضا می‌باشد.

۴. از آنجا که در این روش از کلیه حالات و تغییرات آنها نسبت به زمان پسخور گرفته و به عنوان سیگنال کنترلی به سیستم اصلی وارد می‌کنیم، لذا تغییر پارامترها در محدوده مشخص، تفاوت چندانی در پاسخ خروجی نداشته و این روش نسبت به تغییر پارامترها مقاومت<sup>۱</sup> می‌کند. البته این مساله فقط بصورت تجربی بوده و بیان واقعی این مطلب نیاز به اثبات تئوری دارد.

به عنوان مثال در سیستم ترمز هیدرولیک، اگر بخواهیم هر یک از پارامترها را تا حدود زیادی تغییر دهیم، باز اهداف ABS برآورده می‌شود. در فصل ششم این مساله توضیح داده شده است.

#### ۴-۱۱ معایب روش پسگام تعمیم‌یافته

بطور کلی هر روش دارای معایبی است؛ چرا که اگر اینگونه نباشد، دیگر تلاش برای دستیابی به روشهای جدید بی‌معنی می‌باشد. این روش مانند هر روش دیگر، دارای معایبی است که عمده این عیبها به شناخت دقیق سیستم برمی‌گردد. بعضی از این معایب روش بطور خلاصه عبارتند از:

۱. در این روش باید سیستم را بطور کامل بشناسیم؛ یعنی باید معادلات فضای حالت سیستم را بطور کامل داشته باشیم.

۲. از آنجا که در این روش از حالات سیستم پسخور می‌گیریم، بنابراین باید همواره حالات سیستم در اختیار باشند؛ به عبارت دیگر از این روش نمی‌توان در سیستمهای رؤیت‌ناپذیر<sup>۲</sup> استفاده نمود.

---

1. Robustness  
2. Non-Observable Systems

همانطور که می‌دانیم با توجه به مشکلاتی که در مدت زمان انجام هر تحقیقی روی می‌دهد و همچنین با توجه به مزایا و معایبی که هر روش دارد، برای بهبود کارکرد و افزایش کارایی روش پیشنهاداتی انجام می‌گیرد. با توجه به مسائل فوق در راستای بهبود این روش موارد زیر مطرح می‌گردد.

۱. همانطور که در بخش معایب روش دیدیم، یکی از شروط اساسی کاربرد این روش در سیستم‌های واقعی، رؤیت‌پذیری<sup>۱</sup> سیستم می‌باشد. در سیستم‌های خطی هنگامیکه حالات سیستم در اختیار نبودند با طراحی یک رؤیتگر، حالات سیستم را تخمین زده و با استفاده از حالات تخمین‌زده‌شده کنترل پسخور حالت مناسب را طراحی می‌کنیم. در سیستم‌های غیرخطی نیز می‌توان با الهام گرفتن از سیستم‌های خطی یک رؤیتگر حالات طراحی کرد؛ در این رساله روش طراحی کنترل‌کننده پسخور حالت با الهام از سیستم‌های خطی توضیح داده شده است.

۲. یکی از قسمت‌های دیگری که با انتخاب بهینه آن می‌توان در جهت کارایی بیشتر و بهتر روش گام برداشت، انتخاب  $\Phi$  بهینه می‌باشد. با انتخاب درست  $\Phi$  می‌توان همواره به پایداری مجانبی به مفهوم وسیع دست یافت. علاوه بر آن می‌توان شرایطی را تعیین نمود تا خواسته‌های مساله برآورده شود.



1. Slotine Jean-Jaques E. and Li Weiping. (1991) "*Applied Nonlinear Control*". Prentice-Hall International Editions. Adivision of Simon & Schuster Englewood Cliffs New Jersey 07632.
2. Lyapunov A. M. (1992) "The General Problem of the Stability of Motion"; *Taylor & Francis*. English Translation of the Original Publication in Russian from 1892.
3. Harkegard Ola. (2001), PHD.thesis "Flight Control Design Using Backstepping". Linkoping Studies in Science and Technology, No.875.
4. Kokotovic Petar V. (June 1992) "The joy of Feedback : Nonlinear and Adaptive". *IEEE Control Systems Magazine*, 12(3) : 7-17.
5. Kokotovic Petar V. (1999) "Constructive Nonlinear Control : Progress in the 90's" *IFAC 1999 Proceedings*, Pages 49-77,.
6. Kanellakopoulos I. , Kokotovic Petar V. and Morse A. S. (February 1992) "A Toolkit for Nonlinear Feedback Design". *System & Control Letters*, 18(2) : 83-92 ,.
7. Benaskeur Abder Rezak , Paguin Louis-Nicolas and Desbiens Andre. "Toward Industrial Process Control Applications of the Backstepping".
8. Lin J. S. and Kanellakopoulos I. (1997) "Nonlinear Design of Active". *IEEE Control Systems Magazine* 17, 45-49.
9. de Queiroz M. and Dawson D. M. (1996) "Nonlinear Control of Active Magnetic Bearings : A Backstepping Approach" *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 4(5), 545-552.
10. Baicu C. , Rahn C. and Dawson D. (1998) "Backstepping Boundary Control of Flexible Link Electrically Driven Gantry Robots" *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* 3(1), 60-66.
11. Benaskeur A. and Desbiens A. (1998) "Applications of the Adaptive Backstepping to the Stabilization of the Inverted Pendulum" *CCECE'98 Proceedings* PP. 113-116, Waterloo, Ontario.
12. Fossen T. I. And Grovlen A. (1998) "Nonlinear Output Feedback Control of Dynamically Positioned Ships Using Vectorial Observer Backstepping" *IEEE Transactions on Control Systems Technology* (6), 121-128.
13. Robertsson A. and Johansson R. (1998) "Comments on Nonlinear Output Feedback Control of Dynamically Positioned Ships Using Vectorial Observer Backstepping" *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 3(6), 439-444.



14. Yanakiev D. and Kanellakopoulos I. (1998) "Nonlinear Spacing Policies for Automated Heavy Duty Vehicles" *IEEE Transactions on Vehicular Technology*.
15. Tanner Herbert G. and Kyriakopoulos Kostas J. (October 2002), "Backstepping for Nonsmooth Systems".
16. Godhavn J. M. , Fossen T. I. and Berge S. P. (1998) "Nonlinear and Adaptive Backstepping Design for Tracking Control of Ships" *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing* 12(8), 649-670.
17. Benaskeur A. R. , Paquin L. N. and Desbiens A. (2000) "Toward Industrial Process Control Applications of the Backstepping" *Proceeding of Process Control and Instrumentation*, Glasgow.
18. Toussaint G. J. , Basar T. and Bullo E. (September 2000) "Tracking for Nonlinear Underactuated Surface Vessels with Generalized Forces" *Proceedings of the IEEE International Conference on Control Applications*, Anchorage, Alaska.
19. Mascolo Saverio "Backstepping Design for Controlling Lorenz Chaos" *Proceeding of the 36<sup>th</sup> IEEE CDC*, San Diego, CA, PP. 1500-1501.
20. Harb A. M. and Zohdy M. A. (2002) "Chaos and Bifurcation Control Using Nonlinear Recursive Controller" *Nonlinear Analysis : Modeling and Control*, Vol.7, No.2, PP. 37-34.
21. Harb M. Ahmad and Harb Bassam A. (April 2002) "Chaos Control of 3<sup>rd</sup> Order Phase-Locked Loops Using Backstepping Nonlinear Control" *Draft Manuscript*.
22. Wu S. (1987) "Chua's Circuit Family" *Proceedings of the IEEE*, 75: 1022-1032.
23. Salam F. and Sastry S. "Dynamics of the Forced Josephson Junction Circuit : The Region of Chaos" *IEEE Transactions on Circuit and Systems*, Vol.32, PP. 784-795.
24. Kennedy M. P. and Chua L. O. (1981) "Van der Pol and Chaos" *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol.33, PP. 974-980.
25. Alrifai T. Muthana, Chow Joe H. and Torrey David A. (December 1998) "A Backstepping Nonlinear Control Approach to Switched Reluctance Motors" *Proceeding of the 37<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision & Control* , Tampa, Florida USA.
26. Menon P. K. , Iragavarapu V. R. , Sweriduk G. and Ohlmeyer E. J. (1999) "Software Tools for Nonlinear Missile Autopilot Design" The American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc. with Permission.

27. Bolek Wiktor and Sasiadek Jerzy "The Backstepping Control Design for Thermal Plants".
28. Kolmanovsky Ilya V. "Application of Nonlinear Lyapunov- Based Controllers and Observers to Gasoline Direct Injection Engine Charge and Torque Control".
29. Altug Erdinc , Ostrowski James P. and Mahony Robert. "Control of a Quadrotor Helicopter Using Visual Feedback".
30. Krstic Miroslav "Backstepping for Partial Differential Equations : Making Infinite Recursions Convergent".
31. Karlsson Nikolas , Teel Andrew and Hrovat Davor (December 2001) "A Backstepping Approach to Control of Active Suspensions" *Proceedings of the 40<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control*, Orlando, Florida USA.
32. Tanner G. Herbert and Kyriakopoulos Kostas J. (May 2002) "Discontinuous Backstepping for Stabilization of Nonholonomic Mobile Robots" *Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Robotics & Automation*, Washington DC.
33. Jiang Zhong-Ping and Nijmeijer Henk "Backstepping-Based Tracking Control of Nonholonomic Chained Systems".
34. Rios-Bolivar M. and Zinober A. S. I. "Dynamical Adaptive Backstepping Control Design via Symbolic Computation".
35. Kwany H. G. , Teolis C. and Mattice M. "Variable Structure Control of Systems with Nonlinear Friction" *CDC99-REG0662*.
36. Ezal Kenan , Pan Zigang and Kokotovic Petar V. (February 2000) "Locally Optimal and Robust Backstepping Design" *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.45, N0.2.
37. Pan Zigang , Ezal Kenan , Krener Arthur J. and Kokotovic Petar V. (July 2001) "Backstepping Design with Local Optimality Matching" *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.46, No.7.
38. Krstic Miroslav "Nonlinear Backstepping Design and Application : Adaptive, Robust and Optimal".
39. "Backstepping-Based Techniques". Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology.

40. Girard Anouck (2002) "Sliding Mode Control, I/O Linearization, Integrator Backstepping and Dynamic Surface Control", Discussion #11, ME237- Control of Nonlinear Dynamic Systems, April 15<sup>th</sup>.
41. Mascolo Saverio "Backstepping Design for Controlling Lorenz Chaos" *Proceedings of the 36<sup>th</sup> IEEE CDC*, San Diego, CA, pp. 1500-1501.
42. Wang Lie-Xin "A Coures in Fuzzy Systems and Control".
43. Dorf Richard C. and Bishop Robert H. (1995) "*Modern Control Systems Includes Bibiliographical Refrence and Index*", 7<sup>th</sup> Edition, Addison-Wesley Publishing Compony, Inc.
44. Kim Sang-yoon and Hu Bambi (September 1998) "Bifurication and Transitions to Chaos in an Inverted Pendulum" *Physical Review E*. Vol.58 , No.3.
45. Wang L. K. , Leung Frank H. F. and Tam Peter K. S. (June 1998) "Lyapunov-Function-Based Design of Fuzzy Logic Controllers and It's Application on Combining Controllers" *IEEE Transactions On Industrial Electronics*, Vol.45, No.3.
46. Johansen Tor A. , Peterson Idar , Kalkkahl Jens and Ludemann Jens. "Gain-Scheduled Wheel Slip Control in Automotive Brake Systems".
47. Akbarzadeh-T. M.-R. , Emami K.-J. and Pariz N. (2002) "Adaptive Discrete-Time Fuzzy Sliding Mode Control for Anti-Lock Braking Systems" *IEEE*.
48. Nelson D. E. and Chaloo R. (October 1997) "Implementation of Fuzzy Logic for an Anti-Lock Braking System" *IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernet-ics*, Vol.4 , PP. 3680-3685, 12-15.
49. Lee Byung-Ryong and Sin Kyu-Hyun (2002) "Slip-Ratio Control of ABS Using Sliding Mode Control" *IEEE*.
50. Solyom Stefan and Rantzer Anders. "ABS Control – A Design Model and Control Structure".
51. (October 1997) Special Issue on Chaos Synchronization, Control and Applications, *IEEE Transactions on CAS to appear*.
52. Special Issue on Chaos in Nonlinear Electronic Circuits, *IEEE Transanctions On CAS*, vol.40, parts I and II, no.10, and part I, no.11,1993.
53. Ott E., Grebogi C., and Yorke J. A. (1990) "Controlling Chaos" *Physical Review Letter*, vol.64, pp. 1196-1199.

54. Gills Z., Iwata C., Roy R., Swartz I. B., and Triandaf I. (1992) "Tracking Unstable Steady States : Extending the Stability Regime of a Multimode Laser System" *Physical Review Letters*, vol.79, pp.3169-3172.
55. Braiman Y. and Goldhirsch I. (1991) "Taming Chaotic Dynamics with Weak Periodic Perturbations" *Physical Review Letters*, vol.66, pp. 2545-2548.
56. Fuh C. C. and Tung P. C. (1995) "Controlling Chaos Using Differential Geometric Approach" *Physical Review Letters*, vol.75, no.16 , pp. 2952-2955.
57. Chen G., and Dong X. (1993) "On Feedback Control of Chaotic Continuous-Time Systems" *IEEE Transactions On CAS*, part I, vol.40, no.10, pp. 591-601.
58. Pyragas K. (1992) "Continuous Control of Chaos by Self-Controlling Feedback" *Physical Letters A*, vol.170, pp. 421-428.
59. Xinghuo Y. (1996) "Controlling Lorenz Chaos" *International Journal of System Science*, vol.27, no.4, pp. 355-359.
60. Fowler T. B. (1989) "Application of Stochastic Control Tecniques to Chaotic Nonlinear Systems" *IEEE Transactions On AC*, vol.34, no.2, pp. 201-205.
61. Chen G. , Lai D. (1997) "Making a Dynamical System Chaotic : Feedback Control of Lyapunov Exponents for Discrete Time Systems" *IEEE Transactions On CAS*, Part I, vol.44, no.3, pp. 250-253.
62. Alligood Kathleen T. , Sauer Tim D. and Yorke James A. (1996) "Chaos : An Introduction to Dynamical Systems" PP. 359-362.

۶۳. توماس کاپیتا نیاک، (۱۳۸۴)، "آشوب برای مهندسين: نظريه، کاربرد و کنترل"، جمشيد بهين، کرمانشاه، دانشگاه رازی.

۶۴. جمشیدی ن، مولایی ر و ابویی مهریزی ع، (۱۳۸۷)، "آموزش کاربردی مباحث پیشرفته مهندسی برق با MATLAB"، چاپ دوم، انتشارات عابد، تهران، ص ۳۰۷.

## Abstract

Lyapunov theory was the only method to stabilize linear and nonlinear systems for a long time. Scientists knew the problems of this method after applying it in causal systems. One of the most important problems of this method is finding a control Lyapunov function. To solve this problem many methods were presented which one of them is backstepping method.

In backstepping method with feedback states and combine them in a particular equations can stabilize system and find control Lyapunov function, but one of the problem of this method is limited range of systems that this method is used for them.

In this thesis for solving this problem a new method is proposed. Because of similarity the base of new method to backstepping but expanded range of application this new method, this is called to "Generalized Backstepping Method".

To show ability of this new method to control causal systems, chaos is selected as a case study and design controller with generalized backstopping method. Two chaotic systems are selected; one of them is SISO and other is MIMO. Controlling these systems has either stabilization or tracking input reference. Simulations prove the abilities of generalized backstepping method. Finally designed controller is optimized by using genetic algorithm.

**Key Words:** Autonomous Systems, Backstepping Method, Chaos, Control Lyapunov Method, Generalized Backstepping Method, Genetic Algorithm, MIMO systems, Strictly Feedback Systems.



**Shahrood University of Technology**

Faculty Electronic and Robotic Engineering  
Control Group

*Design Optimal Controller  
for a Class of Nonlinear MIMO Systems  
Using Generalized Backstepping Method*

Student of Graduate PHD:

**Ali Reza Sahab**

Supervisor:

Dr. Mohammad Haddad Zarif

Advisor:

Prof. Dr. Abdollah Shidfar

PHD Thesis

**Date: June 2009**