

الله أكبر



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده برق و رباتیک

گروه کنترل

# بررسی پایداری سیستمهای فیدبکی کسری غیر خطی

دانشجو: احمد حاجی پور

استاد راهنما

دکتر حیدر طوسیان شانديز

استاد مشاور

دکتر حسین مروی

رساله دکتری جهت اخذ درجه دکتری

تیرماه ۱۳۸۸



دانشگاه گجرات

تعمیرت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره ۱۱

شماره: ۶۳۷، ۲۰۲۰

تاریخ: ۸۸/۴/۳۱

ویرایش: —

بسمه تعالی

صور تجلسه دفاع از رساله دکتری (ph.D)

بدینوسیله گواهی می شود آقای احمد حاجی پور دانشجوی دکتری رشته کنترل

ورودی سال ۸۳ در تاریخ ۸۸/۴/۳۱ از رساله خود با عنوان:

بررسی پایداری سیستم های فیدبکی کسری غیر خطی

دفاع و با اخذ ..... به درجه : ..... نائل گردید .

<input type="checkbox"/> الف) درجه عالی : نمره ۲۰-۱۹	<input checked="" type="checkbox"/> ب) درجه بسیار خوب : نمره ۱۸/۹۹-۱۷
<input type="checkbox"/> ج) درجه خوب : نمره ۱۶/۹۹-۱۵	<input type="checkbox"/> د) غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد
<input type="checkbox"/> ز) رساله نیاز به اصلاحات دارد	

ردیف	هیئت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
	دکتر طریقت	استاد راهنما	استاد داور	
	دکتر مراد	استاد راهنما / مشاور	استاد داور	
	دکتر —	استاد راهنما / مشاور		
	دکتر نایح	استاد مدعو داخلی / خارجی	دانشیار	
	دکتر هدایت ظریف	استاد مدعو داخلی / خارجی	استاد داور	
	دکتر رحیم	استاد مدعو داخلی / خارجی	استاد داور	
	دکتر پیرز	استاد مدعو داخلی / خارجی	دانشیار	
	دکتر سرزمی	سرپرست (نماینده) تحصیلات تکمیلی دانشکده	استاد داور	

مدیر محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه

حسن تأیید مراتب فوق مقرر فرمائید اقدامات لازم بعمل آید .

رئیس دانشکده و رئیس هیأت داوران :

تاریخ و امضاء

تقدیم بہ:

عشق

## تقدیر و تشکر

در ابتدای کار بر خود لازم می دانم از خانواده عزیزم که در لحظه لحظه انجام این کار یار و یاور من بودند؛ از مادرم و همسر بزرگوارم تشکر و قدردانی نمایم.

از استاد راهنمای خود جناب آقای دکتر حیدر طوسیان شاندیز و همچنین استاد مشاور جناب آقای دکتر حسین مروی که مشکل گشای من در انجام پروژه بوده اند، تشکر می نمایم.

از اساتید ارزیاب بزرگوار جناب آقای دکتر ناصر پریز، جناب آقای دکتر ابوالفضل رنجبرنوعی، جناب آقای دکتر محمد مهدی فاتح و جناب آقای دکتر محمد حدادظریف و نماینده محترم تحصیلات تکمیلی جناب آقای دکتر امیدرضا معروضی که با وجود گرفتاریهای فراوان قبول زحمت کرده و در جلسه دفاعیه شرکت کرده و با پیشنهادات خود مرا در تدوین بهتر پایان نامه یاری نموده اند، سپاسگزارم.

در انتها از کلیه کسانی که در هر گام از اجرای این تحقیق به من کمک کرده اند و من را مدیون خود ساخته اند، تشکر نموده و برای ایشان آرزوی موفقیت و بهروزی روزافزون دارم.

احمد حاجی پور

تیر ۱۳۸۸

اینجانب احمد حاجی پور تایید می نمایم که مطالب مندرج در این رساله نتیجه تحقیقات خودم بوده و در صورت استفاده از نتایج دیگران، مرجع آن را ذکر نموده ام.

کلیه حقوق مادی مترتب از نتایج مطالعات، آزمایشات و نوآوری ناشی از تحقیق موضوع این رساله متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد.

تیر ۱۳۸۸

## تعهد نامه

اینجانب انجمن جهانی برق دانشجوی دوره کارشناسی ارشد / دکتری رشته برق - کنترل  
مستفاده کننده برق دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه / رساله بررسی تأثیر پارامترهای سیستمی  
روی عملکرد فن تحت راهنمایی دکتر محمد علی سلیمان متعهد می شوم .

- تحقیقات در این پایان نامه / رساله توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه / رساله تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه / رساله تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه / رساله رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه / رساله ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها ) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه / رساله ، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ: ۸۸/۶/۳۱  
امضای دانشجو

### مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است ) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه / رساله بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

\* متن این صفحه نیز باید در ابتدای نسخه های تکثیر شده پایان نامه / رساله وجود داشته باشد .

## چکیده

در این رساله، ابتداء به معرفی علم محاسبات کسری و تعاریف مختلف اپراتورهای مرتبه کسری پرداخته شده و در ادامه خصوصیات و مشخصات سیستمهای توصیف شده با معادلات کسری بیان شده است. از فصول میانی به بعد سعی شده است که به سوالات مطرح شده در زمینه پایداری سیستمهای مرتبه کسری خطی و غیرخطی تا حد امکان پاسخ مناسبی داده شود. بحث تحلیل پایداری سیستمهای مرتبه کسری غیرخطی ( سیستمهای لوره ) برای اولین بار در این رساله انجام شده است و سعی شده که قضیه پایداری پوپوف به سیستمهای مرتبه کسری غیرخطی فیدبکی ( لوره ) تعمیم داده شود.

**کلمات کلیدی:** سیستمهای فیدبکی مرتبه کسری غیرخطی، پایداری، سیستم لوره، پایداری میتاگ لفلر، پایداری لیاپانوفی، محک پوپوف تعمیم یافته، محک دایره.



## فصل اول

مقدمه ..... ۱

### فصل دوم

۱-۲ مقدمه ..... ۷

۲-۲ توابع اولیه اپراتورهای مرتبه کسری ..... ۷

۱-۲-۲ تابع گاما ..... ۷

۲-۲-۲ تابع بتا ..... ۹

۳-۲-۲ تابع گامای ناقص ..... ۹

۴-۲-۲ تابع خطا ..... ۹

۵-۲-۲ تابع میتاگ لفلر ..... ۱۰

۳-۲ انتگرال و مشتق از مرتبه کسری ..... ۱۲

۱-۳-۲ انتگرال و مشتق کسری ریمان - لیوویل ..... ۱۲

۲-۳-۲ انتگرال و مشتق مرتبه کسری گرانولد - لتنیف ..... ۱۳

۴-۲ تبدیل لاپلاس مشتق و انتگرال از مرتبه کسری ..... ۱۵

۱-۴-۲ تبدیل لاپلاس انتگرال کسری ..... ۱۶

۲-۴-۲ تبدیل لاپلاس مشتق کسری ریمان - لیوویل ..... ۱۶

۳-۴-۲ تبدیل لاپلاس مشتق کسری کاپوتو ..... ۱۶

۴-۴-۲ تبدیل لاپلاس مشتق کسری گرانولد - لتنیف ..... ۱۶

۵-۴-۲ تبدیل فوریه مشتق و انتگرال ..... ۱۶

۵-۲ مثال‌هایی از مشتقات مرتبه کسری برخی از توابع مشهور ..... ۱۶

### فصل سوم

۱-۳ مقدمه ..... ۲۰

۲-۳ آنالیز معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری ..... ۲۰

۳-۳ وجود و یکتایی پاسخ معادله دیفرانسیل مرتبه کسری غیر خطی ..... ۲۱

۴-۳ یافتن پاسخ معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری خطی ..... ۲۴

۵-۳ یافتن پاسخ عددی معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری غیرخطی ..... ۲۸

۱-۵-۳ مقدمه‌ای بر روش آدومین ..... ۲۸

۲-۵-۳ ساختار کلی روش تجزیه آدومین ..... ۲۹

۳-۵-۳ پیاده‌سازی روش آدومین بر روی معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری غیرخطی ..... ۳۰

## فصل چهارم

- ۳۶..... ۱-۴ مقدمه
- ۳۶..... ۲-۴ مدل‌های متفاوت برای یک سیستم
- ۳۶..... ۱-۲-۴ مدل پیوسته
- ۳۷..... ۲-۲-۴ مدل‌های گسسته
- ۳۸..... ۳-۲-۴ مدل‌های ورودی و خروجی
- ۳۹..... ۴-۲-۴ تحقق فضای حالتی
- ۳۹..... ۳-۴ ارتباط بین تحقق فضای حالتی و فرم تابع تبدیل در سیستم‌های مرتبه مضروب
- ۴۰..... ۴-۴ کنترل پذیری و رویت پذیری

## فصل پنجم

- ۴۳..... ۱-۵ مقدمه
- ۴۳..... ۲-۵ روش مستقیم بررسی پایداری
- ۴۴..... ۳-۵ روش‌های غیر مستقیم بررسی پایداری
- ۴۴..... ۱-۳-۵ تحلیل پایداری با استفاده از ریشه‌های معادله مشخصه تابع تبدیل
- ۵۶..... ۲-۳-۵ مشخصه  $LMI$  پایداری سیستم‌های کسری

## فصل ششم

- ۶۹..... ۱-۶ مقدمه
- ۶۹..... ۲-۶ تحلیل پایداری سیستم‌های غیرخطی کسری به روش خطی سازی
- ۷۵..... ۳-۶ پایداری میتاگ- لفلر سیستم‌های دینامیکی غیرخطی کسری
- ۷۵..... ۱-۳-۶ سیستم‌های وابسته به زمان کسری
- ۷۸..... ۲-۳-۶ پایداری میتاگ- لفلر
- ۷۸..... ۳-۳-۶ روش مستقیم لیاپانف توسعه یافته مرتبه کسری
- ۸۱..... ۴-۳-۶ روش مستقیم لیاپانف کسری با استفاده از توابع کلاس  $k$

## فصل هفتم

- ۸۸..... ۱-۷ مقدمه

- ۲-۷ آنالیز پایداری ورودی - خروجی سیستمهای غیرخطی کسری فیدبکی..... ۸۹
- ۱-۲-۷ استفاده از قضیه ۱-۷ برای سیستمهای غیرخطی کسری..... ۹۷
- ۱-۲-۷ استفاده از محک دایره برای سیستمهای غیرخطی کسری ..... ۱۰۳
- نتیجه گیری و پیشنهادات..... ۱۰۷
- منابع ..... ۱۱۰

## فهرست شکل ها

- شکل ۲-۱ تابع میتاگ- لفلر به ازاء مقادیر مختلف  $\alpha$  ..... ۱۰
- شکل ۲-۲ دایره: تابع  $y = x$ ، مثلث: مشتق مرتبه اول، مربع: مشتق مرتبه  $\alpha$  تابع  $y = x$  ..... ۱۷
- شکل ۳-۱ پاسخ عددی معادله دیفرانسیل مثال ۳-۴ ..... ۳۴
- شکل ۵-۱ سطح ریمان برای  $\omega = s^{\frac{1}{3}}$  ..... ۴۵
- شکل ۵-۲ صفحات مختلف ریمان برای  $\omega = s^{\frac{1}{3}}$  ..... ۴۶
- شکل ۵-۳ مقدار تابع  $f(s)$  برای  $b=1$  و  $\alpha = 1/\pi$  ..... ۴۸
- شکل ۵-۴ مقدار تابع  $f(s)$  برای  $b=1$  و  $\alpha = 4/\pi$  ..... ۴۹
- شکل ۵-۵ مسیر نایکوئیست ..... ۵۲
- شکل ۵-۶ منحنی نایکوئیست ..... ۵۳
- شکل ۵-۷ منحنی نایکوئیست ..... ۵۵
- شکل ۵-۸ . محدوده پایداری  $D_s$  وابسته به مرتبه  $\alpha$  و مقدار  $|\arg(\text{spec}(A))|$  ..... ۵۷
- شکل ۵-۹ . محدوده پایداری برای الف (  $0 < \alpha < 1$  ) ب (  $1 < \alpha < 2$  ) ..... ۵۸
- شکل ۵-۱۰ . محدوده پایداری  $D'_s$  بر اساس مرتبه کسری  $\alpha$  و  $|\arg(\text{spec}(A))|$  ..... ۶۱
- شکل ۵-۱۱  $F_\alpha$  تابعی از  $|\theta|$  و  $|\theta_f|$  و محدوده پایداری نتیجه شده ..... ۶۲
- شکل ۵-۱۲  $F'_\alpha$  تابعی از  $|\theta|$  و  $|\theta_f|$  و محدوده پایداری نتیجه شده ..... ۶۳
- شکل ۵-۱۳ . محدوده پایداری  $D''_s$  تعیین شده با قضیه بر اساس مرتبه کسری  $\alpha$  و  $|\theta|$  ..... ۶۵
- شکل ۶-۱ متغیرهای حالت سیستم، نقطه  $o$  پایدار است هرگاه  $c > \frac{a}{2}$  ..... ۷۳
- شکل ۶-۲ متغیرهای حالت سیستم، نقطه  $o$  ناپایدار است هرگاه  $c < \frac{a}{2}$  ..... ۷۴
- شکل ۶-۳ متغیرهای حالت سیستم، نقاط  $c^+$  و  $c^-$  پایدار هستند هرگاه  $c > \frac{a}{2}, b > c + 3a - \frac{2a^2}{c} > 0$  ..... ۷۴
- شکل ۶-۴ جواب  $x(t)$  سیستم برای  $\alpha = 0.1, 0.5, 0.9$  که  $x(0) = 1$  می باشد ..... ۸۶
- شکل ۷-۱ سیستم لوره: سیستم حلقه همراه با غیرخطی بدون حافظه  $\phi$  و سیستم خطی  $L$  ..... ۸۹
- شکل ۷-۲ سیستم  $S$  ..... ۸۹
- شکل ۷-۳ . محدوده پایداری برای الف (  $0 < \alpha < 1$  ) ب (  $1 < \alpha < 2$  ) ..... ۹۰

- شکل ۴-۷ مشخصه ورودی و خروجی غیرخطی  $\phi$  ..... ۹۷
- شکل ۵-۷ مکان هندسی پوپوف (---) و خط راست پوپوف (...) ..... ۹۸
- شکل ۶-۷ مکان هندسی پوپوف  $L'(---)$  و  $L(j\omega)$  رسم شده برای  $0 \leq \alpha \leq 2$  ..... ۹۹
- شکل ۷-۷ مکان هندسی پوپوف (لگاریتمی)  $L'(---)$  و  $L(j\omega)$  رسم شده برای  $0 \leq \alpha \leq 2$  ..... ۱۰۰
- شکل ۸-۷ نمودارهای حالت  $x(t)$  به ازای  $\alpha = 0.4, 0.8, 1.8$  (پایدار) و  $\alpha = 2$  (ناپایدار) ..... ۱۰۰
- شکل ۹-۷ مشخصه ورودی-خروجی غیرخطی  $\phi$  واقع در یک قطاع ..... ۱۰۱
- شکل ۱۰-۷ تبدیل حلقه ..... ۱۰۱
- شکل ۱۱-۷ مکان هندسی پوپوف (لگاریتمی)  $L_1'(---)$  از  $L_1(j\omega)$  رسم شده برای  $0 \leq \alpha \leq 2$  ..... ۱۰۲
- شکل ۱۲-۷ نمودار نایکوئیست  $L(j\omega)$  بدست آمده برای  $0 \leq \alpha \leq 2$  با گام ۰.۲ و  $\alpha = 1.59$  ..... ۱۰۳
- شکل ۱۳-۷ نمودار نایکوئیست  $L(---)$  و دایره بدون محور برای غیر خطی واقع در قطاع ..... ۱۰۴
- شکل ۱۴-۷ نمودار پوپوف برای مثال ۲-۷ با  $\delta = 1$  ..... ۱۰۵
- شکل ۱۵-۷ نمودارهای حالت  $x_1(t), x_2(t)$  به ازای  $\alpha = 0.6, 0.8, 1$  (پایدار) و  $\alpha = 1.1$  (ناپایدار) ..... ۱۰۶

# فصل اول

مقدمه

## تاریخچه

حساب کسری<sup>۱</sup> را می توان یک علم جدید و قدیم نامید چرا که تا سالهای اخیر، اکثر محققان از وجود چنین علمی آگاه نبوده و اغلب دانشمندان به تازگی این علم را در تحقیقات خود مدنظر قرار داده اند. این علم در حقیقت زاییده سال ۱۶۹۵ میلادی می باشد. در این سال هوپیتال<sup>۲</sup> در نامه ای خواستار توجیه معنای  $\frac{d^n y(t)}{dt^n}$  وقتی  $n = \frac{1}{2}$  باشد، شد و لایپ نیتز<sup>۳</sup> در پاسخ، رابطه نزدیک بین مشتقات و سریهای نامتناهی واگرا را مطرح کرد و نوشت:

« اگر چه سریهای واگرا و هندسی رابطه دوری با هم دارند، در سریهای واگرا تنها مجاز به استفاده از توانهای صحیح مثبت و منفی هستیم و تا به حال استفاده از توانهای کسری را نداشته ایم.» او ادامه می دهد: «  $d^{\frac{1}{2}}x$  مساوی  $x\sqrt{\frac{dx}{x}}$  می باشد.» و اظهار می دارد: «این یک پارادوکس آشکار از چیزی است که روزی نتایج مفیدی خواهد داشت.»

پس از مطرح شدن این موضوع ریاضیدانان زیادی سعی در بسط و گسترش حساب کسری نمودند که از این جمله می توان به تحقیقات اولر<sup>۴</sup> در سال ۱۷۳۰ و لاپلاس<sup>۵</sup> در سال ۱۸۱۲ اشاره کرد. در سال ۱۸۱۹ ، لاکرو<sup>۶</sup>، در کتاب هفتصد صفحه ای خود، دو صفحه را به مبحث مشتق از مرتبه دلخواه اختصاص داد. در سال ۱۸۲۳، آبل<sup>۷</sup>، اولین کاربرد حساب دیفرانسیل کسری را در مسایل فیزیکی ( در مساله tautochrone که مسأله تعیین یک منحنی است به قسمی که اگر جسمی تحت تاثیر نیروی جاذبه

---

<sup>۱</sup> Fractional Calculus

<sup>۲</sup> Hoptial

<sup>۳</sup> Leibniz

<sup>۴</sup> Euler

<sup>۵</sup> Laplace

<sup>۶</sup> Lacroix

<sup>۷</sup> Abel

بدون اصطکاک روی آن بلغزد، زمان حرکت آن مستقل از نقطه شروع حرکت باشد) ارائه داد. و البته این مسأله را حل نکرد.

لیوویل<sup>۸</sup> (۱۸۳۲) و ریمان<sup>۹</sup> (۱۸۴۷) از دیگر ریاضیدانانی بودند که تحقیقاتی را بر روی حساب کسری انجام داده و تعاریفی را نیز ارائه دادند که در بخشهای بعدی به تفصیل به آنها پرداخته خواهد شد.

در سال ۱۸۸۴، لوران<sup>۱۰</sup> نظریه عملگرهای تعمیم یافته  $D^v$  با  $v$  حقیقی را منتشر کرد و با انتگرال گیری و مشتق گیری از مرتبه دلخواه مواجه شد. و در سال ۱۹۸۲ نیز هوی ساید<sup>۱۱</sup> مشتقات از مرتبه کسری را در توسعه نظریه خط انتقال خود به کار برد. در سال ۱۹۳۶، جمانت<sup>۱۲</sup> نظریه انتقال هوی ساید را ادامه داد و از مشتقات مرتبه کسری در خاصیت کشسانی استفاده کرد.

در سال ۱۹۷۴، راس<sup>۱۳</sup>، اولین کنفرانس دیفرانسیل و انتگرال از مرتبه کسری و کاربردهای آن را برگزار کرد و دومین و سومین کنفرانس در این زمینه در سال ۱۹۸۴ در گلاسکو و ۱۹۸۹ در توکیو برگزار شد. در سال ۱۹۹۳، کنت میلر<sup>۱۴</sup> و راس کتاب مقدمه ای بر دیفرانسیل و انتگرال و معادلات دیفرانسیل از مرتبه کسری را ارائه دادند. در سال ۱۹۹۷، کولوانکار<sup>۱۵</sup> در پایان نامه دکترای خود به مطالعه در مورد ارتباط بین فراکتالها و حساب دیفرانسیل و انتگرال از مرتبه کسری پرداخت. در سال ۲۰۰۰، هیلفر<sup>۱۶</sup> کتابی با عنوان کاربردهایی از دیفرانسیل و انتگرال از مرتبه کسری در فیزیک را منتشر کرد.

در سال ۲۰۰۳ اولین سمپوزیم با موضوعیت حساب کسری در شیکاگو برگزار گردید. این سمپوزیم بخشی از کنفرانس تکنیک طراحی مهندسی، ASME ۲۰۰۳ بود. سه کنفرانس برگزار شده قبلی در مورد حساب کسری به جنبه های ریاضی موضوع توجه داشته و در حقیقت کنفرانسهایی ریاضی بودند، اما

---

<sup>۸</sup> Liouville

<sup>۹</sup> Riemann

<sup>۱۰</sup> Laurent

<sup>۱۱</sup> Heaviside

<sup>۱۲</sup> Gemant

<sup>۱۳</sup> Ross

<sup>۱۴</sup> Miller

<sup>۱۵</sup> Kolwanker

<sup>۱۶</sup> Hilfer



سمپوزیم شیکاگو با هدف توجه بیشتر به کاربردهای این علم برگزار گردید. پس از این سمپوزیوم، کنفرانسها و سمپوزیومهای متعددی در زمینه دیفرانسیل کسری و کاربردهای آن برگزار گردیده که از این میان می توان به اولین کنفرانس IFAC در زمینه دیفرانسیل کسری و کاربردهای آن در شهر بوردو فرانسه (۲۰۰۴) و دومین سمپوزیوم FDTA در هلند و در شهر آیندهوون (۲۰۰۵) اشاره کرد. تحقیقات در مورد کاربرد حساب کسری در ابتدای مسیر خود قرار دارد و هم اکنون تیمهای کاری متفاوتی در دنیا مشغول مطالعه و تحقیق برای بسط و گسترش این شاخه نوظهور با قدمت ۳۰۰ (!) ساله می باشند.

در حوزه کنترل سیستمهای دینامیکی، کنترل کننده های مرتبه کسری از قبیل کنترل کننده های CRONE, PID, TID و کنترل کننده پس فاز و پیش فاز برای افزایش عملکرد و مقاوم بودن در سیستمهای کنترلی حلقه بسته پیاده سازی شده اند. به طور کلی در حوزه توصیف مدل سیستمها، معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری، قابلیت توصیف بهتر و دقیق تر سیستمهای واقعی را در اختیار محققان قرار می دهند و در حوزه کنترل سیستمها نیز، کنترلهای مرتبه کسری از انعطاف پذیری بیشتری نسبت به کنترلهای کلاسیک برخوردار می باشند.

اگرچه مسئله پایداری یکی از مسائل حیاتی برای سیستمهای مرتبه کسری می باشد، بخاطر پیچیده بودن روابط، مقالات خیلی کمی در این زمینه وجود دارد. بحث پایداری لیاپانوفی سیستمهای غیر خطی کسری در سال ۲۰۰۹ مطرح شده است. در این رساله، ابتدا به معرفی علم محاسبات کسری و تعاریف مختلف اپراتورهای مرتبه کسری پرداخته شده است و در ادامه خصوصیات و مشخصات سیستمهای توصیف شده با معادلات کسری که تعمیمی از سیستمهای توصیف شده با معادلات مرتبه صحیح می باشند بیان شده است. در فصل پنجم، پایداری سیستمهای مرتبه کسری خطی مطرح شده است. در فصل ششم، به پایداری سیستمهای مرتبه کسری غیرخطی پرداخته شده است و سعی شده است پایداری

آنها با استفاده از معیار لیاپانف بررسی شود. در فصل آخر بررسی پایداری سیستمهای مرتبه کسری فیدبکی غیرخطی، که موضوع اصلی این رساله است، با استفاده از محک پوپوف تعمیم یافته ارائه شده است.

## فصل دوم

مشتق و انتگرال از مرتبه کسری

## ۲-۱- مقدمه

همه ما براساس گفته‌ها و آموخته‌های دوره‌های ابتدایی تحصیل، توان را علامت کوچکی می‌دانیم که لزوماً ضرب پی در پی یک مقدار عددی را به همراه خواهد داشت این مفهوم در نوع خود قابل درک و به کار بردن است؛ اما این تعریف ریاضی، وقتی که توان‌هایی با مقادیر غیر صحیح در نظر گرفته شود، می‌تواند کاملاً پیچیده باشد.

در حالی که تقریباً هر کسی می‌تواند صحت رابطه  $x^3 = x \times x \times x$  را تأیید کند. اما کمتر کسی است که درک درستی از  $x^{3.4}$  یا  $e^\pi$  داشته باشد. اما عبارات فوق را می‌توان از طریق بسط سری‌های بی‌نهایت محاسبه کرد.

اگر چه انتگرال و مشتق، دارای تعاریف پیچیده‌تری نسبت به توان هستند، اما باز هم می‌توان معانی فیزیکی قابل درک و نسبتاً ساده‌ای را برای عملگر مشتق و یا انتگرال متصور شد و یا حتی با پذیرش برخی محدودیت‌ها (مانند پیوستگی تابع) تعداد متناهی ( $n$  بار) عمل انتگرال‌گیری را می‌توان به آسانی انجام داد. اما سؤالی که در یک ذهن کنجکاو ایجاد می‌شود آن است که اگر  $n$  به اعداد صحیح محدود نباشد چگونه می‌توان  $n$  انتگرال‌گیری را انجام داد؟

در اولین نگاه، نمی‌توان مفهوم فیزیکی یا ریاضی خاصی را به این موضوع اختصاص داد اما در این فصل نشان داده می‌شود که محاسبات کسری از همان تعاریف سنتی ریاضیات حاصل می‌شود و حتی می‌توان تعبیر فیزیکی نیز برای آن متصور شد.

قبل از ورود به بحث حساب کسری لازم است چند تعریف ابتدایی از تابع گاما و تابع بتا و ... انجام گیرد.

## ۲-۲- توابع اولیه اپراتورهای مرتبه کسری

### ۲-۲-۱- تابع گاما

در ساده‌ترین تفسیر، تابع گاما، تابع فاکتوریل توسعه یافته برای تمام اعداد حقیقی می‌باشد. تابع گاما را براساس روابط ریاضی می‌توان به صورت رابطه (۱-۲) تعریف کرد [۱]:

$$\forall x \in R; \Gamma(x) = \int_0^x t^{x-1} e^{-t} dt \quad (1-2)$$

علاوه بر تعریف فوق، تابع گاما، دارای یک تعریف حدی به صورت رابطه (۲-۲) می‌باشد [۲].

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)} \quad (2-2)$$

با مشتق‌گیری از عبارت  $t^x e^{-1}$  که عبارت زیر انتگرال تابع گاما می‌باشد، می‌توان رابطه (۳-۲) را نتیجه گرفت [۳].

$$\frac{d}{dt}(t^x e^{-1}) = x t^{x-1} e^{-1} - t^x e^{-1} \quad (3-2)$$

با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه (۳-۲) می‌توان چنین نتیجه گرفت که [۳]:

$$\int_0^{\infty} \frac{d}{dt}(t^x e^{-1}) dt = \int_0^{\infty} x t^{x-1} e^{-1} dt - \int_0^{\infty} t^x e^{-1} dt = x \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-1} dt - \int_0^{\infty} t^x e^{-1} dt \quad (4-2)$$

$$\left[ t^x e^{-1} \right]_0^{\infty} = 0 = x \Gamma(x) - \Gamma(x+1)$$

رابطه (۴-۲) یکی از خواص مهم تابع گاما را بیان می‌کند یعنی [۳]:

$$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x) \quad (5-2)$$

تابع گاما را می‌توان به صورت رابطه (۶-۲) نیز برای هر  $x \in R$  تعریف کرد [۵، ۴، ۱].

$$\begin{cases} \Gamma(1) = 1 \\ \Gamma(x+1) = x \Gamma(x) \end{cases} \quad (6-2)$$

رابطه (۶-۲)، معادل تعریف فاکتوریل برای اعداد طبیعی می‌باشد. بنابراین برای هر عدد حقیقی مثبت  $x$  می‌توان گفت [۱]:

$$x! = \Gamma(x+1) \quad (7-2)$$

### ۲-۲-۲- تابع بتا

این تابع به عنوان انتگرال اولر شکل اول نیز شناخته می‌شود. تابع بتا وابستگی بسیار زیادی به تابع گاما دارد و به صورت زیر تعریف می‌شود [۱].

$$\beta(p, q) = \int_0^1 (1-u)^{p-1} u^{q-1} du = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad , p, q \in R^+ \quad (۸-۲)$$

### ۳-۲-۲- تابع گامای ناقص

از بین توابع متعالی که در حساب کسری مورد استفاده قرار می‌گیرند، تابع گامای ناقص و توابع مربوط به آن از اهمیت ویژه‌ای برخوردار هستند. تابع گامای ناقص را می‌توان به صورت رابطه (۹-۲) نمایش داد [۲].

$$\gamma^*(v, x) = e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(v+k+1)} \quad (۹-۲)$$

تابع گامای ناقص، یک تابع کامل، هم نسبت به  $x$  و هم نسبت به  $v$  است. به عبارت دیگر، در تمام نقاط، تحلیلی است. اگر  $\text{Re}(x) > 0$  باشد، آن گاه تابع گامای ناقص را می‌توان به صورت رابطه انتگرالی (۱۰-۲) بیان کرد [۲].

$$\gamma^*(v, x) = \frac{1}{\Gamma(v)x^v} \int_0^x t^{v-1} e^{-t} dt \quad (۱۰-۲)$$

### ۴-۲-۲- تابع خطا

در کنار معرفی توابع گاما و بتا، معرفی تابع خطا، به عنوان یکی از توابعی که ارتباط نزدیکی با توابع فوق دارد، امری ضروری به نظر می‌رسد. تابع خطا که در حساب کسری به کرات مورد استفاده قرار می‌گیرد، به صورت رابطه (۱۱-۲) قابل تعریف است [۵].

$$\text{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (۱۱-۲)$$

تابع خطا را می‌توان با استفاده از تابع گامای ناقص به صورت رابطه (۱۲-۲) معرفی نمود [۲].

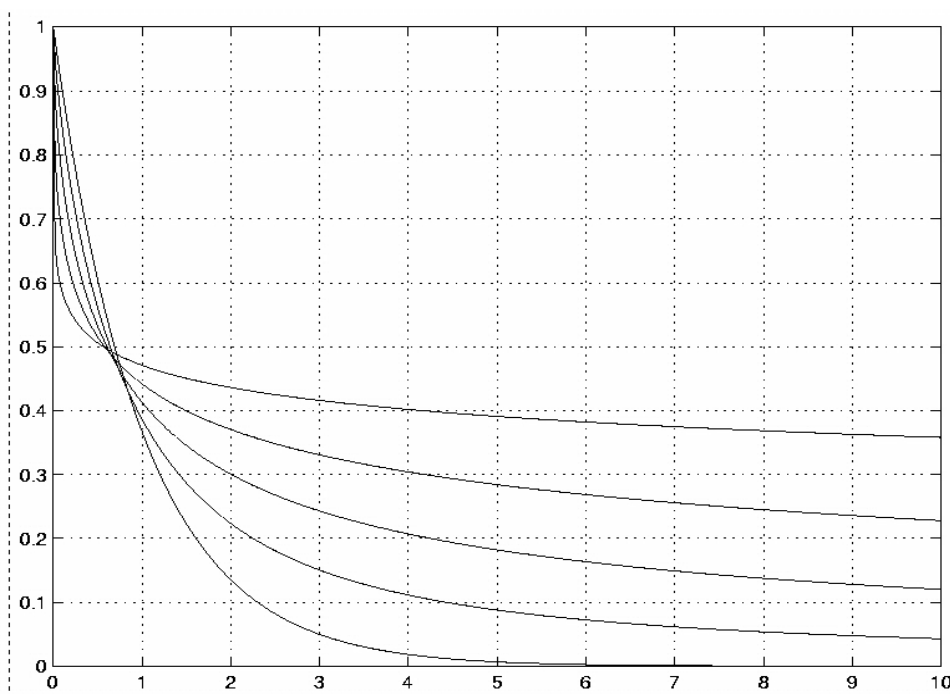
$$Erf(x) = x\gamma^*(0.5, x^2) \quad (12-2)$$

### ۵-۲-۲- تابع میتاگ - لفلر<sup>۱۷</sup>

همان طور که می‌دانیم، تابع نمایی،  $e^{-x}$ ، در تئوری معادلات دیفرانسیل معمولی (مرتبه صحیح) نقش مهمی ایفا می‌کند. تعمیم یک پارامتری این تابع، به صورت رابطه (۱۳-۲) توسط جی.ام. میتاگ لفلر تعریف شده و مورد مطالعه قرار گرفت [۵،۱].

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0 \quad (13-2)$$

به ازاء  $\alpha = 1$ ، تابع میتاگ- لفلر، همان تابع نمایی عادی خواهد بود. شکل (۱-۲) تابع میتاگ لفلر را به ازاء مقادیر مختلف  $\alpha$  نشان می‌دهد.



شکل ۲۲- تابع میتاگ- لفلر به ازاء مقادیر مختلف  $\alpha$  [۶]

<sup>۱۷</sup> Mittag - Leffler

به ازاء مقادیر صحیح  $\alpha$ ، تابع میتاگ - لفلر یک پارامتری، به توابعی آشنا تبدیل خواهد شد [۲].

$$E_0(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$E_1(x) = e^x \quad (۱۴-۲)$$

$$E_2(x) = \cosh(\sqrt{x})$$

$$E_3(x) = \frac{1}{3} \left[ e^{x^{\frac{1}{3}}} + 2e^{\frac{x-\frac{1}{3}}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x^{\frac{1}{3}}\right) \right]$$

$$E_4(x) = \frac{1}{2} \left[ \cos(x^{\frac{1}{4}}) + \cosh(x^{\frac{1}{4}}) \right]$$

تابع میتاگ - لفلر براساس دو آرگومان نیز قابل بیان می‌باشد. این تابع را اولین بار آگاروال<sup>۱۸</sup> به صورت رابطه (۱۵-۲) معرفی کرد [۲].

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(ak + \beta)}, \quad \alpha, \beta > 0 \quad (۱۵-۲)$$

تابع دو پارامتری میتاگ - لفلر نیز در حالتی که  $\alpha$  و  $\beta$ ، اعداد صحیح را اختیار کنند، تبدیل به توابع مشخص و آشنا خواهد شد [۲].

$$E_{1,1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x \quad (۱۶-۲)$$

$$E_{1,2}(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$

$$E_{2,1}(x) = \cos(\sqrt{x})$$

$$E_{2,2}(x) = \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$$

---

<sup>۱۸</sup> - Agarwal



ذکر این مطلب ضروری به نظر می‌رسد که اگر در تابع دو پارامتری میتاگ - لفلر،  $\beta = 1$  در نظر گرفته شود، این تابع، تبدیل به یک تابع یک پارامتری میتاگ - لفلر خواهد شد [۲].

$$E_{\alpha,1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = E_{\alpha}(x) \quad (17-2)$$

در ادامه بحث، به معرفی مشتق و انتگرال از مرتبه کسری با استفاده از مطالب بیان شده خواهیم پرداخت.

## ۲-۳- انتگرال و مشتق از مرتبه کسری

### ۲-۳-۱- انتگرال و مشتق کسری ریمان - لیوویل<sup>۱۹</sup> [۳]

همان طور که در مقدمه اشاره شد، مفهوم انتگرال و مشتق کسری، از انتگرال و مشتق صحیح منتج می‌شود. با فرض قابل تعریف بودن تابع  $f(x)$  در بازه  $x > 0$  می‌توان انتگرال رابطه (۲-۱۸) را تعریف کرد:

$$(If)(x) = \int_0^x f(t) dt \quad (18-2)$$

با تکرار عمل انتگرال‌گیری از رابطه (۲-۱۸)، رابطه (۲-۱۹)، حاصل خواهد شد.

$$(I^2 f)(x) = \int_0^x (If)(t) dt = \int_0^x \left( \int_0^t f(s) ds \right) dt \quad (19-2)$$

با تکرار این روند انتگرال‌های از درجات بالاتر قابل حصول است. انتگرال‌گیری مکرر  $(I^n f)(x)$  را می‌توان به صورت رابطه (۲-۲۰) به یک عمل انتگرال‌گیری کاهش داد. این رابطه، با استفاده از استقراء، قابل اثبات است.

$$(I^n f)(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t) dt, \quad n \in N \quad x > 0 \quad (20-2)$$

فرمول (۲-۲۰)، به فرمول کوشی معروف است. در این رابطه،  $n$  به اعداد صحیح مثبت محدود می‌شود و اولین عامل محدودکننده در این فرمول وجود تابع فاکتوریل می‌باشد که برای اعداد غیر صحیح بی‌معنی

<sup>۱۹</sup> - Riemann- Liouville

است. اما با توجه به تعریف تابع فاکتوریل اعداد غیر صحیح با همان تابع گاما، این محدودیت برطرف می شود و با استفاده از تابع گاما به جای تابع فاکتوریل، می توان قید  $n \in N$  را به  $n \in R^+$  تغییر داد.

$${}_a I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad \alpha \in R^+ \quad t > 0 \quad (21-2)$$

فرمول (21-2) به تعریف ریمان - لیوویل انتگرال مرتبه کسری معروف است و به صورت های دیگری نیز نمایش داده می شود:

$${}_a D_t^{-\alpha} f(t) = {}_a I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad \alpha \in R^+ t > 0 \quad (22-2)$$

ریمان و لیوویل برای یافتن مشتق مرتبه کسری یک تابع، فرمول (23-2) را با استفاده از رابطه انتگرال مرتبه کسری (21-2) و در حالت  $\alpha > 0$  به دست آوردند.

$${}_a D_t^{-\alpha} f(t) = D^m I^{m-\alpha} f(t) = \frac{d^m}{dt^m} \left[ \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-m+t}} dt \right] \quad (23-2)$$

$m$ ، یک عدد طبیعی است که باید در شرط  $m-1 < \alpha < m$  صدق کند.

### 2-3-2- انتگرال و مشتق مرتبه کسری گرانوالد - لتنیف<sup>۲۰</sup> [۳]

از آن جا که فرمول مشتق مرتبه کسری ریمان - لیوویل با ایده انتگرال گیری مکرر از یک تابع به دست آمده بود؛ ایده دنبال کردن دیدگاهی مشابه، برای به دست آوردن فرمول مشتق، نیز به ذهن برخی از ریاضیدان خطور کرد. گرانولد و لتنیف از پیشتازان این ایده بودند. این دو ریاضیدان، برای یافتن تعریف مناسب مشتق مرتبه کسری، از تعریف مشتق مرتبه اول استفاده کردند [۱]:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (24-2)$$

<sup>۲۰</sup> - Grunwald- Letnikov

با اعمال مجدد تعریف مشتق، به رابطه (۲۴-۲)، رابطه (۲۵-۲) حاصل خواهد شد.

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

$$= \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{\lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{f(x+h_1+h_2) - f(x+h_1)}{h_2} - \lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{f(x+h_2) - f(x)}{h_2}}{h_1} \quad (25-2)$$

با انتخاب  $h = h_1 = h_2$ ، می‌توان چنین نتیجه گرفت که :

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2} \quad (26-2)$$

و با ادامه این روند، رابطه (۲۷-۲) را می‌توان برای محاسبه مشتقات مکرر یک تابع به دست آورد.

$$D^n f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} f(x-mh), \quad n \in \mathbb{N} \quad (27-2)$$

این فرمول را می‌توان برای مقادیر غیر صحیح  $n$  نیز به کار برد، به شرط آن که ضرایب  $\binom{n}{m}$  به جای

تعریف شدن از طریق تابع فاکتوریل، با استفاده از تابع گاما تعریف شود. بنابراین مشتق مرتبه کسری را می‌توان به صورت رابطه (۲۸-۲) تعریف کرد.

$$D^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{m=0}^{\frac{t-a}{h}} (-1)^m \frac{\Gamma(\alpha+1)}{m! \Gamma(\alpha-m+1)} f(x-mh) \quad (28-2)$$

حد بالایی حاصل جمع، در رابطه فوق باید به سمت بی‌نهایت میل کند و عبارت  $\frac{t-a}{h}$  این خصوصیت را

دارد ( $t$  و  $a$  به ترتیب حد بالا و پایین مشتق‌گیری هستند). همانطور که فرمول انتگرال مرتبه کسری

ریمل - لیوویل، در تعریف مشتق مرتبه کسری نیز مورد استفاده قرار گرفت، فرمول مشتق گراندول -

لتینکف را نیز می‌توان برای انتگرال‌گیری مرتبه کسری مورد استفاده قرار داد. ساده‌ترین تغییر برای

استفاده از این فرمول در انتگرال‌گیری، استفاده از آن برای  $\alpha < 0$  می‌باشد. در این حالت باید عبارت

را در رابطه (۲۸-۲) جایگذاری نمود این عبارت با استفاده از تابع گاما قابل تعریف است.

$$\binom{-\alpha}{m} = (-1)^m \frac{\Gamma(\alpha + m)}{m! \Gamma(\alpha)} \quad (29-2)$$

با توجه به رابطه (۲۹-۲)، فرمول انتگرال‌گیری مرتبه کسری گرانولد - لتینکف به صورت (۳۰-۲) حاصل خواهد شد.

$$D^{-\alpha} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} h^\alpha \cdot \sum_{m=0}^{\frac{t-a}{h}} \frac{\Gamma(\alpha + m)}{m! \Gamma(\alpha)} f(x - mh) \quad (30-2)$$

حال این سؤال مطرح است که با توجه به وجود دو تعریف مختلف برای انتگرال‌گیری و مشتق‌گیری مرتبه کسری، آیا این دو تعریف با یکدیگر معادل هستند؟

اثبات ریاضی مشروحه در زمینه معادل بودن دو تعریف فوق وجود دارد ([۲]) که از بیان این اثبات صرف نظر می‌شود. اما ساده‌ترین راه بری نشان دادن تشابه دو تعریف، مقایسه نتایج عددی حاصل از فرمول‌های گرانولد - لتینکف و حل تحلیلی حاصل از فرمول‌های ریمان - لیوویل می‌باشد که اگر چه این کار برای توابع خاص انجام می‌شود و نمی‌توان از این روش، کل توابع را مورد آزمایش قرار داد اما برای تفهیم موضوع معادل بودن این دو روش مفید است.

## ۲-۴- تبدیل لاپلاس مشتق و انتگرال از مرتبه کسری

برای حل معادلات دیفرانسیل از مرتبه کسری نیاز به روشهایی مشابه روش حل معادلات دیفرانسیل عادی داریم. یکی از این روشها استفاده از تبدیلهای متداول، مانند تبدیل لاپلاس است. در اینجا به تبدیل لاپلاس و فوریه فرمولهای مختلف بیان شده، برای مشتق و انتگرال کسری به طور خلاصه اشاره می‌کنیم:

### ۲-۴-۱ تبدیل لاپلاس انتگرال کسری:

$$L\{I^\alpha f(t)\} = s^{-\alpha} F(s) \quad (31-2)$$

۲-۴-۲ تبدیل لاپلاس مشتق کسری ریمان - لیوویل:

$$L\{D_t^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [D_t^{\alpha-k-1} f(t)]_{t=0}, \quad m-1 \leq \alpha < m, \quad m \in N \quad (32-2)$$

۲-۴-۳ تبدیل لاپلاس مشتق کسری کاپوتو<sup>۲۱</sup>:

$$L\{D^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), \quad m-1 < \alpha < m, \quad m \in N \quad (33-2)$$

۲-۴-۴ تبدیل لاپلاس مشتق کسری گرانولد - لتنیکیف:

$$L\{D_t^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) \quad (34-2)$$

۲-۴-۵ تبدیل فوریه مشتق و انتگرال:

$$F\left\{I^\alpha f(t)\right\} = F\left\{\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right\} \cdot F\{f(t)\} = (j\omega)^{-\alpha} F(\omega) \quad (35-2)$$

$$F\{D^\alpha f(t)\} = F\{D^m I^{m-\alpha} f(t)\} = (j\omega)^\alpha F(\omega)$$

## ۲-۵- مثال‌هایی از مشتقات مرتبه کسری برخی از توابع مشهور [۷]

جهت آشنایی بیشتر با کاربرد فرمول‌های ارائه شده و هم چنین درک تفاوت این نوع از مشتقات با مشتقات مرتبه صحیح، در این بخش، مشتق مرتبه کسری برخی از توابع ساده و در عین حال پرکاربرد مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

به عنوان اولین مثال، محاسبه مشتق مرتبه کسری تابع  $t > 0, g(t) = t^\mu$  مدنظر است  
 $(m-1 \leq \alpha < m, m \in N)$ .

<sup>۲۱</sup> - Caputo

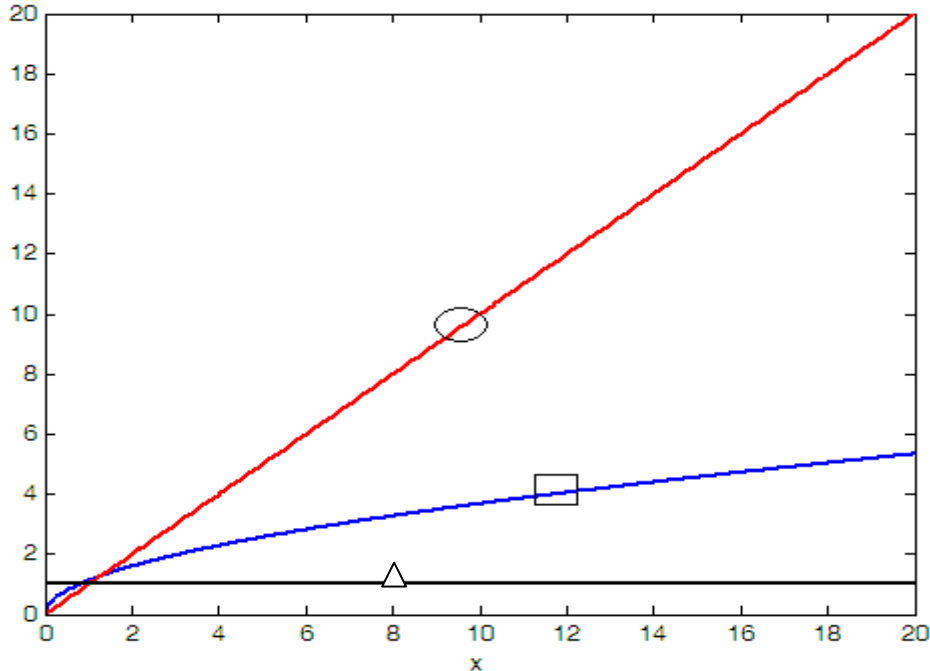
$$D_i^\alpha(t^\mu) = D^m \left[ D_i^{-(m-\alpha)}(t^\mu) \right] = D^m \left[ \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+m-\alpha+1)} t^{\mu+m-\alpha} \right] \quad (36-2)$$

$$= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+n-\alpha+1)} \frac{\Gamma(\mu+n-\alpha+1)}{\Gamma(\mu-\alpha+1)} t^{\mu-\alpha} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\alpha+1)} t^{\mu-\alpha}$$

با توجه به رابطه محاسبه شده برای مشتق مرتبه  $\alpha$  از تابع  $f(t) = t^\mu, t > 0$  می‌توان مشاهده کرد که چنانچه تابع  $(f(t) = c)$ ، مشتق مرتبه  $\alpha$  آن به صورت رابطه (۳۷-۲) خواهد بود.

$$D_i^{\frac{1}{2}} f(t) = \frac{c\Gamma(1)}{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)} t^{-\frac{1}{2}} = \frac{c}{\sqrt{\pi t}} \quad (37-2)$$

بنابراین ملاحظه می‌شود که مشتق مرتبه کسری یک تابع ثابت، برخلاف مشتق مرتبه صحیح آن، صفر نشده و حتی به متغیر  $t$  بستگی خواهد داشت. برای درک بهتر تفاوت میان مشتقات مرتبه صحیح و مرتبه کسری در شکل (۲-۲)، مشتق مرتبه اول و مشتق مرتبه  $\frac{1}{2}$  تابع  $y = x$  نشان داده شده است.



شکل ۲-۲ دایره: تابع  $y = x$ ، مثلث: مشتق مرتبه اول، مربع: مشتق مرتبه  $\alpha$  تابع  $y = x$

در ادامه مشتق کسری تابع  $f(x) = e^{at}$ ، محاسبه می‌شود. در این مثال، ابتدا انتگرال مرتبه کسری تابع را محاسبه نموده و سپس با استفاده از فرمول ریمان - لیوویل، مشتق مرتبه کسری آن به دست خواهد آمد.

$$D^{-\beta}(e^{at}) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} e^{a\tau} d\tau, \beta > 0 \quad (38-2)$$

با تغییر متغیر  $\eta = t - \tau$  می‌توان رابطه فوق را به فرم رابطه (39-2) بازنویسی کرد.

$$D^{-\beta}(e^{at}) = \frac{e^{at}}{\Gamma(\beta)} \int_0^t \eta^{\beta-1} e^{-a\eta} d\eta = t^\beta e^{at} \gamma^*(\beta, at) \quad (39-2)$$

بنابراین مشتق مرتبه کسری تابع  $f(t) = e^{at}$ ، با استفاده از تعریف ریمان - لیوویل به صورت رابطه (40-2) خواهد بود.

$$D^\beta(e^{at}) = \frac{d^m}{dt^m} D^{-(m-\beta)} e^{at} = \frac{d^m}{dt^m} t^\beta e^{at} \gamma^*(\beta, at) \quad (40-2)$$

با محاسبه مشتق مرتبه صحیح فوق، رابطه (41-2) حاصل خواهد شد.

$$D^\beta(e^{at}) = t^{-\beta} e^{at} \gamma^*(\beta, at) \quad (41-2)$$

# فصل سوم

معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری



### ۳-۱- مقدمه

در این فصل، نخست برخی از مفاهیم ریاضی که در ادامه رساله، مورد استفاده قرار خواهد گرفت، یادآوری می‌شود. سپس بعضی از ویژگی‌های اساسی پاسخ معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری، مانند وجود<sup>۲۲</sup>، یکتایی<sup>۲۳</sup>، وابستگی پاسخ نسبت به شرایط اولیه بررسی می‌گردد. این ویژگی‌ها برای تحلیل معادله حالت  $D^{(\alpha)}x(t) = f(t, x)$  که مدل ریاضی مناسبی برای توصیف سیستم‌های فیزیکی است، بسیار سودمند و پرکاربرد است. در تحلیل یک سیستم و بررسی رفتار آن، پاسخ به سؤالاتی مانند این که آیا معادله دیفرانسیل توصیف‌کننده سیستم اصولاً دارای جواب است؟ آیا این جواب، تنها جواب سیستم است و یا با مجموعه‌ای از جواب‌ها روبرو هستیم؟ و سؤالاتی از این دست، مهم و ضروری بوده و گام اول در تحلیل یک سیستم به شمار می‌رود. در این فصل، همچنین سعی خواهد شد بررسی اجمالی در مورد روش‌های یافتن پاسخ معادلات مرتبه کسری خطی و معادلات مرتبه کسری غیرخطی ارائه شود. در فصل‌های آتی از پاسخ‌های حاصل از این روش‌ها جهت بررسی رفتار سیستم و تجزیه و تحلیل آن استفاده خواهد شد.

### ۳-۲- آنالیز معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری

معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری، معادلات دیفرانسیلی هستند که شامل اپراتور مشتق مرتبه کسری با تعاریف پیشگفته باشند. در حالت کلی، معادله دیفرانسیل یک سیستم غیرخطی مرتبه کسری را می‌توان به صورت رابطه (۳-۱) در نظر گرفت که این معادله با داشتن تعداد مکفی از شرایط اولیه، دارای جواب خواهد بود [۸].

$$D^{(\alpha)}x(t) = f(t, x(t)) \quad (1-3)$$

---

<sup>۲۲</sup> Existence

<sup>۲۳</sup> Uniqueness

در ادامه بدون از دست دادن کلیت، فرض می‌شود که  $t_0 = 0$  باشد. شرایط اولیه مرتبط با معادله (۱-۳) به شکل استاندارد رابطه (۲-۳) خواهد بود [۸].

$$\frac{d^{\alpha-k}}{dt^{\alpha-k}} x(t) \Big|_{t=0^+} = b_k, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad m-1 \leq \alpha < m \quad (2-3)$$

در قسمت‌های قبلی به این نکته اشاره شد که برای پرهیز از برخورد با مشتقات مرتبه کسری شرایط اولیه در معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری، که مفهوم فیزیکی خاصی برای آن نمی‌توان یافت، از تعریف مشتق کاپوتو استفاده می‌شود براساس تعریف مشتق مرتبه کسری کاپوتو سیستم رابطه (۱-۳) را می‌توان به صورت رابطه (۳-۳) بازنویسی کرد [۹].

$$D^{(\alpha)}(x(t) - T_{m-1}[x(t)]) = f(t, x(t)) \quad (3-3)$$

در این معادله  $T_{m-1}[x(t)]$  چند جمله‌ای تیلور  $x-1$ ، از مرتبه  $m-1$ ، به مرکزیت نقطه صفر خواهد بود. کاپوتو، نشان داد که با تغییر شکل معادله مرتبه کسری به صورت فوق شرایط اولیه این معادله، به صورت (۴-۳) قابل بیان است [۹].

$$x^{(k)}(0) = y_0^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1 \quad (4-3)$$

با استفاده از روش تبدیل لاپلاس، می‌توان اثبات کرد که در صورت خطی بودن معادله دیفرانسیل مرتبه کسری  $(D^{(\alpha)}x(t) = A(t)x(t))$  پاسخ این معادله، منحصر به فرد می‌باشد. به دلیل ساده بودن، از بیان آن خودداری می‌شود اما این اثبات در مرجع [۲] بیان شده است در ادامه، با استفاده از برخی از مفروضات، مسأله منحصر به فرد بودن پاسخ معادله غیر خطی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

### ۳-۳- وجود و یکتایی پاسخ معادله دیفرانسیل مرتبه کسری غیر خطی

در بحث وجود و یکتایی پاسخ‌های معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری، نتایج ذیل را که به صورت چند قضیه و کاملاً شبیه به قضایای مرتبط با معادلات دیفرانسیل مرتبه صحیح است، می‌توان اثبات کرد.

در این بخش، معادله دیفرانسیل مرتبه کسری، براساس آن چه در رابطه (۳-۳) بیان شد به صورت رابطه (۵-۳) در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{cases} D^\alpha (x(t) - T_{m-1}[x(t)]) = f(t, x(t)) \\ x^{(k)}(0) = x_0^{(k)}, k = 0, 1, \dots, m-1 \end{cases} \quad (5-3)$$

قبل از بیان قضایای وجود و یکتایی پاسخ معادله دیفرانسیل، لازم است تا قضیه ۳-۱ و لم ۳-۱ که در اثبات قضایای بعدی نقش خواهد داشت بیان شوند.

قضیه ۳-۱ [۱۰]: اگر  $U$  یک زیر مجموعه بسته غیرتهی از یک فضای باناخ  $E$  و سری  $\sum_{n=0}^{\infty} \eta_n$  با شرط  $\eta_n \geq 0$  به ازاء تمام  $n$  همگرا باشد و فرض کنیم که نگاشت  $A: U \rightarrow U$  شرط نامساوی زیر را برآورده سازد.

$$\forall n \in \mathbb{N}; u, v \in U; \|A^n u - A^n v\| \leq \alpha_n \|u - v\| \quad (6-3)$$

آن گاه برای  $A$ ، یک نقطه ثابت  $u^*$  قابل تعریف است که به ازاء هر  $u_0 \in U$  سری  $\sum_{n=1}^{\infty} A^n u_0$  به نقطه ثابت  $u^*$  همگرا می‌شود.

لم ۳-۱ [۱۱]: اگر تابع  $f$  پیوسته باشد آنگاه (۵-۳)، هم ارز یک معادله انتگرالی غیر خطی نوع دوم ولترا<sup>۲۴</sup> خواهد بود.

$$x(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^{(k)}(0)}{k!} t^k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau, \quad m-1 < \alpha \leq m \quad (7-3)$$

به عبارت دیگر هر پاسخ معادله ولترای رابطه (۷-۳)، راه‌حل مسأله نیز خواهد بود و بالعکس در معادله (۷-۳) اگر  $0 < \alpha < 1$  باشد، معادله ولترا را به صورت هسته تکین ضعیف و اگر  $\alpha \geq 1$  باشد، به صورت هسته منظم<sup>۲۵</sup> می‌نامند.

<sup>۲۴</sup> -Second Kind of Nonlinear Volterra Integral Equation

<sup>۲۵</sup> Regular Kernel of Volterra Integral Equation

قضیه ۳-۲ [۱۲] (وجود جواب): اگر تابع  $f: D \rightarrow R$  با دامنه  $D = [0, \chi^*] \times [t_0 - \gamma, t_0 + \gamma]$

باشد که در این دامنه  $\chi^* > 0$  و  $\gamma > 0$  با تعریف  $\chi = \min \left\{ \chi^*, \left( \frac{\gamma \Gamma(\alpha + 1)}{\|f\|_x} \right)^{1/\alpha} \right\}$  آن گاه تابع

$y: [0, \chi] \rightarrow R$  پاسخ معادله (۳-۵) با شرایط اولیه مورد اشاره در این رابطه خواهد بود.

قضیه ۳-۳ (یکتایی) [۱۰]: اگر تابع  $f: D \rightarrow R$  با دامنه  $D = [0, \chi^*] \times [t_0 - \gamma, t_0 + \gamma]$  که در این دامنه

$\chi^* > 0$  و  $\gamma > 0$  است، تابعی محدود در بازه  $D$  باشد و شرایط لیب شیتز را برآورده کند، به عبارت دیگر:

$$|f(t, y) - f(t, z)| \leq L|y - z| \quad (۳-۸)$$

در این حالت، با در نظر گرفتن  $\chi$ ، مانند تعریف قضیه ۳-۳، حداکثر یک تابع  $y: [0, \chi] \rightarrow R$  به عنوان پاسخ معادله (۳-۵)، با شرایط اولیه مذکور وجود دارد.

نکته [۱۰]: اگر فرض لیب شیتز بودن تابع  $f(t)$ ، وجود نداشته باشد، معادله دیفرانسیل مرتبه کسری

مورد نظر، لزوماً پاسخ منحصر به فرد نخواهد داشت به عنوان مثال چنانچه معادله دیفرانسیل مرتبه

کسری رابطه (۳-۹) در نظر گرفته شود، تابع سمت راست این معادله دیفرانسیل پیوسته است اما شرط

لیب شیتز را برآورده نمی کند به وضوح مشخص است که یک پاسخ برای این معادله، پاسخ صفر خواهد بود.

$$\begin{cases} D^q x(t) = x^k(t) \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad (۳-۹)$$

از طرف دیگر با فرض  $P_j(t) = t^j$  و با محاسبه مشتق مرتبه کسری این تابع، که در فصل قبل به آن اشاره

شد، می توان گفت :

$$D^q P_j(t) = \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1-q)} P_{j-q}(t) \quad (۳-۱۰)$$

بنابراین تابع  $x(t) = \left( \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1-q)} x^j \right)^{1/k}$  با  $j = \frac{q}{1-k}$  نیز پاسخهای معادله مورد نظر خواهد بود .

همان گونه که مشاهده می‌شود عدم وجود شرط لیپ‌شیتز، در این مثال، منجر به حصول پاسخ‌های مختلف برای معادله دیفرانسیل خواهد شد.

قضیه ۳-۴ (وابستگی پاسخ‌ها به شرایط اولیه) [۱۳]: اگر تابع  $f(f_1, \dots, f_n): D \rightarrow R$  با شرایط قضیه ۳-۳ باشد و با فرض این که  $\bar{x}(t)$  پاسخ معادله دیفرانسیل مرتبه کسری رابطه (۳-۵) با شرایط اولیه  $x_i^{(k)}(0) = c_k^i$  که  $0 \leq k \leq m_i$  و  $1 \leq i \leq n$  و  $m_i \leq \alpha \leq m_i + 1$  باشد و  $\bar{y}(t)$  پاسخ همان معادله دیفرانسیل با شرایط اولیه  $y_i^{(k)}(0) = d_k^i$  باشد آن گاه:

$$|x_i(t) - y_i(t)| \leq \|\bar{T} - \bar{T}'\| E_{\alpha_i}(It^{\alpha_i}) \quad (۱۱-۳)$$

که  $\bar{T}(t) = (T_1(t), \dots, T_n(t))$  و  $\bar{T}'(t) = (T_1'(t), \dots, T_n'(t))$  و  $T_i = \sum_{k=1}^{m_i} c_k^i \frac{t^k}{k!}$  می‌باشد و  $T_i' = \sum_{k=1}^{m_i} d_k^i \frac{t^k}{k!}$  است.

با توجه به قضیه فوق، پاسخ‌های معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری، به شرایط اولیه معادله بستگی داشته و چنانچه یک معادله دیفرانسیل مرتبه کسری با شرایط اولیه‌های متفاوت حل شود، به هر میزان که شرایط اولیه‌ها از یکدیگر فاصله بیشتری داشته باشند پاسخ‌ها نیز می‌تواند اختلاف بیشتری با یکدیگر داشته باشند.

### ۳-۴- یافتن پاسخ معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری خطی [۷]

یکی از مفیدترین و آسان‌ترین ابزارهای حل معادلات دیفرانسیل، ابزار تبدیل لاپلاس می‌باشد چرا که استفاده از این روش منجر به تبدیل شدن معادله دیفرانسیل، به چند جمله‌ای جبری خواهد شد و کلیه عملیاتی که به عنوان یافتن جواب معادله دیفرانسیل انجام می‌گیرد، بر روی چند جمله‌ای تبدیل یافته اعمال می‌شود اما مشکل استفاده از تبدیل لاپلاس، به عنوان ابزار حل معادله دیفرانسیل، یافتن لاپلاس معکوس جواب حاصل از چند جمله‌ای می‌باشد که در صورت فائق آمدن بر این مشکل از این تبدیل به آسانی می‌توان استفاده کرد.

از آن جایی که تبدیل لاپلاس در اپراتورهای مرتبه کسری (شامل مشتق و انتگرال مرتبه کسری) قابل تعریف بوده ، بنابراین این ابزار مفید و ساده را می توان برای یافتن پاسخ معادلات مرتبه کسری استفاده کرد. در ادامه سعی می شود با ذکر چند مثال، کاربرد تبدیل لاپلاس در حل معادلات دیفرانسیل تشریح شود. جهت یادآوری مجدد، فرمول تبدیل لاپلاس مشتق کسری یک تابع به صورت رابطه (۱۲-۳) است .

$$L\{ {}_0 D_t^\alpha f(t) \} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [ {}_0 D_t^{\alpha-k-1} f(t) ]_{t=0}, n-1 \leq \alpha < n, n \in N \quad (12-3)$$

مثال ۳-۱: برای یافتن پاسخ معادله رابطه (۱۳-۳)

$$\begin{aligned} {}_0 D_t^{\frac{1}{2}} f(t) + af(t) &= 0, t > 0 \\ \left[ {}_0 D_t^{\frac{1}{2}} f(t) \right]_{t=0} &= c \end{aligned} \quad (13-3)$$

با اعمال اپراتور لاپلاس به طرفین معادله، رابطه (۱۴-۳) حاصل می شود.

$$s^{\frac{1}{2}} F(s) - \left[ {}_0 D_t^{\frac{1}{2}} f(t) \right]_{t=0} + aF(s) = 0 \quad (14-3)$$

حال با استفاده از شرایط اولیه مسأله می توان پاسخ معادله را در حوزه لاپلاس محاسبه کرد.

$$F(s) = \frac{c}{s^{\frac{1}{2}} + a} \quad (15-3)$$

با محاسبه معکوس تبدیل لاپلاس رابطه اخیر که به ایجاد تابع میتاگ - لفلر دو پارامتری خواهد انجامید، می توان پاسخ معادله دیفرانسیل مرتبه کسری رابطه (۱۵-۳) را در حوزه زمان محاسبه کرد.

$$f(t) = ct^{-\frac{1}{2}} E_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \left( -at^{\frac{1}{2}} \right) \quad (16-3)$$

با فرض  $a=1$  و با توجه به نمایش سری تابع میتاگ - لفلر دو پارامتری پاسخ فوق را می توان با استفاده از تابع خطا به شکل رابطه (۱۷-۳) بیان کرد.

$$f(t) = c \left( \frac{1}{\sqrt{\pi t}} - e^t \operatorname{erfc}(\sqrt{t}) \right) \quad (17-3)$$

مثال ۲-۳: در این مثال معادله غیرهمگن رابطه (۱۸-۳) در نظر گرفته شده است

$${}_0D_t^Q f(t) + {}_0D_t^q f(t) = h(t) \quad (18-3)$$

با فرض  $0 < q < Q < 1$  و با اعمال اپراتور لاپلاس به دو طرف معادله فوق رابطه (۱۹-۳) حاصل می‌شود.

$$(s^Q + s^q)F(s) = c + H(s) \quad (19-3)$$

در رابطه فوق  $c = [{}_0D_t^{Q-1} f(t) + {}_0D_t^{q-1} f(t)]_{t=0}$  می‌باشد و پاسخ این معادله به صورت رابطه (۲۰-۳) قابل محاسبه است.

$$F(s) = \frac{c + H(s)}{s^Q + s^q} = \frac{c + H(s)}{s^q (s^{Q-q} + 1)} = (c + H(s)) \frac{s^{-q}}{s^{Q-q} + 1} \quad (20-3)$$

با در نظر گرفتن تبدیل لاپلاس تابع  $t^{ak-\beta-1} E_{a,\beta}^{(k)}(\pm at^\alpha)$

$$L\{t^{ak+\beta-1} E_{a,\beta}^{(k)}(\pm at^\alpha)\} = \frac{k! s^{a-\beta}}{(s^\alpha \pm a)^{k+1}} \quad (21-3)$$

و با قراردادن  $\beta = Q$  و  $\alpha = Q - q$  پاسخ حوزه زمان معادله (۱۸-۳) به صورت رابطه (۲۲-۳) حاصل خواهد شد.

$$f(t) = cG(t) + \int_0^t G(t-\tau)h(\tau)d\tau \quad (22-3)$$

که در معادله (۲۲-۳)  $G(t) = t^{Q-1} E_{Q-q,Q}(-t^{Q-q})$  می‌باشد.

مثال ۳-۳: در این مثال، سعی خواهد شد برای معادله دیفرانسیل مرتبه کسری غیرهمگن (۲۳-۳) تحت شرایط اولیه غیر صفر پاسخ مناسب ارائه شود.

$$\begin{cases} {}_0D_t^\alpha y(t) - \lambda y(t) = h(t), t > 0 \\ [{}_0D_t^{\alpha-k} y(t)]_{t=0} = b_k, k = 1, 2, \dots, n, n-1 \leq \alpha \leq n \end{cases} \quad (23-3)$$

گام اول، محاسبه تبدیل لاپلاس معادله خواهد بود.

$$s^\alpha Y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[ {}_0 D_t^{\alpha-k-1} y(t) \right]_{t=0} - \lambda Y(s) = H(s) \quad (24-3)$$

با توجه به شرایط اولیه مسأله، می‌توان رابطه (۲۵-۳) را نتیجه گرفت.

$$(s^\alpha - \lambda) Y(s) = H(s) + \sum_{k=1}^n b_k s^{k-1} \quad (25-3)$$

بنابراین :

$$Y(s) = \frac{H(s)}{s^\alpha - \lambda} + \sum_{k=1}^n b_k \frac{s^{k-1}}{s^\alpha - \lambda} \quad (26-3)$$

با استفاده از تبدیل لاپلاس تابع میتاگ - لفلر می‌توان معکوس تبدیل لاپلاس تابع  $Y(s)$  را محاسبه کرد .

$$y(t) = \sum_{k=1}^n b_k t^{\alpha-k} E_{\alpha, \alpha-k+1}(\lambda t^\alpha) + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda(t-\tau)^\alpha) h(\tau) d\tau \quad (27-3)$$



## ۳-۵- یافتن پاسخ عددی معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری غیرخطی

### ۳-۵-۱- مقدمه‌ای بر روش آدومین<sup>۲۶</sup>

به طور معمول، برای محاسبه جواب‌های واقعی و عینی مسائل مختلف فیزیکی از دستگاه‌های معادلات دینامیکی که توسط معادلات دیفرانسیل معمولی، جزئی، تصادفی و یا معادلات انتگرال و انتگرو - دیفرانسیل مدل‌سازی می‌شوند، استفاده می‌شود. بدیهی است که در حالت کلی، ممکن است این دستگاه‌ها شامل جملات غیرخطی پیچیده پارامترهای تصادفی، داده‌ها و یا شرایط مرزی خاصی باشند. تکنیک‌های خطی‌سازی و اختلالات جزئی، روش‌های معمول و معقولی برای حل معادلات غیر خطی هستند [۸، ۱۴ و ۱۵ و ۱۶]، اما استفاده مداوم از آن‌ها، برای حل مسائل غیرخطی، ممکن است در تعداد مراحل کم، نمایش درستی از جواب واقعی مسأله را به دست ندهد و به عبارت دیگر، ممکن است جوابی متفاوت با رفتار فیزیکی واقعی مسأله حاصل شود. به علاوه فرآیندهای خطی‌سازی در شرایط خاصی، مسأله اصلی را به یک مسأله متفاوت تبدیل می‌کند و استفاده از نظریه اختلالات جزئی نیز فقط وقتی معقول به نظر می‌رسد که تأثیرات جمله غیرخطی و یا پارامترهای تصادفی، بسیار ناچیز باشد در مورد روش‌های گسسته سازی و محاسبات عددی نیز مشکلاتی هم چون افزایش زمان محاسباتی، نیاز به سخت افزار یا نرم افزار خاص، افزایش خطاهای محاسبه (به خصوص در مسائل غیرخطی بزرگ) و ... مطرح است. لذا به منظور حل مسائل غیرخطی مرزی با فرم‌های غیرخطی قوی و متغیرهای تصادفی، نیاز به روش جدیدی است که بر مبنای خطی‌سازی، تکنیک‌های خطی‌سازی آماری، فرض فرم غیرخطی ضعیف و... استوار نباشد و به علاوه جواب تحلیلی برای مسأله ارائه دهد .

روش تجزیه آدومین که در اوائل دهه ۱۹۸۰ ابداع شد بر مبنای فرضیات ذکر شده استوار است. محور کلی کارهای آدومین بر روی معادلات دیفرانسیل تصادفی و معادلات با مشتقات جزئی در میدان‌های مختلط و

---

<sup>۲۶</sup> Adomian

شرایط مرزی غیرخطی استوار است آن چه در این رساله به آن پرداخته می‌شود، توسعه روش تجزیه آدومین برای یافتن پاسخ معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری غیرخطی در حالت کلی است.

### ۳-۵-۲- ساختار کلی روش تجزیه آدومین [۱۷]

معادله (۲۸-۳)،

$$Ax = y \quad (28-3)$$

در حالت کلی یک معادله غیرخطی که در آن  $A$  یک عملگر، از فضای باناخ  $V$  به  $V$  و  $y$ ، یک تابع معلوم در  $V$  است. هدف، تعیین  $x \in V$  است که در معادله (۲۸-۳) صدق کند. با این فرض که این معادله برای هر  $y \in V$  دارای یک جواب یکتا است و هم چنین با فرض این که عملگر  $A$  دارای جملات خطی و غیرخطی باشد جمله خطی  $A$ ، به صورت  $L+R$  قابل تجزیه است که  $L$  یک عملگر معکوس‌پذیر و  $R$  قسمت باقیمانده عملگر خطی است. اگر  $N$  نیز قسمت غیرخطی عملگر  $A$  باشد، در مجموع عملگر  $A$  را می‌توان به صورت رابطه (۲۹-۳) تجزیه نمود.

$$A = L + R + N \quad (29-3)$$

با این فرضیات معادله (۲۹-۳) را می‌توان به صورت رابطه (۳۰-۳) بازنویسی کرد.

$$Lx + Rx + Nx = y \quad (30-3)$$

به فرض آن که  $L^{-1}$ ، معکوس عملگر  $L$  باشد، آن گاه جواب معادله (۲۸-۳) از رابطه (۳۱-۳) قابل استحصال است.

$$x = L^{-1}y - L^{-1}Rx - L^{-1}Nx \quad (31-3)$$

روش تجزیه آدومین عبارت است از نمایش  $x$ ، به صورت سری  $x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$  و تجزیه قسمت غیرخطی

عملگر  $A$  به صورت  $Nx = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ .  $A_n$  ها چند جمله‌ای‌هایی از  $x_0, x_1, \dots, x_n$  هستند که به نام مبدع این

روش، چند جمله‌ای‌های آدومین نامیده می‌شوند. اگر شکل صریحی برای چند جمله‌ای‌های آدومین وجود داشته باشد (یعنی با توجه به بخش غیر خطی  $N$ ،  $A_n$  ها را بتوان به صورت توابعی از  $x_0, x_1, \dots, x_n$  به دست آورد) آنگاه معادله (۳-۳۱) به صورت رابطه (۳-۳۲) قابل بازنویسی خواهد بود.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = L^{-1}y - L^{-1}R\left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n\right) - L^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n\right) \quad (3-32)$$

اکنون با فرض  $x_0 = L^{-1}y$ ، دیگر جملات سری  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  با استفاده از الگوریتم زیر معین می‌گردد.

$$\begin{aligned} x_1 &= -L^{-1}Rx_0 - L^{-1}A_0 \\ x_2 &= -L^{-1}Rx_1 - L^{-1}A_1 \\ &\dots \\ x_n &= -L^{-1}Rx_{n-1} - L^{-1}A_{n-1} \end{aligned} \quad (3-33)$$

لذا مادامی که  $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$  معین باشند تمامی مؤلفه‌های  $x$  (جواب مسأله)، قابل محاسبه خواهد بود.

تقریب  $n$  جمله‌ای  $\varphi_n$  را برای جواب  $x$  می‌توان چنین تعریف کرد:

$$\varphi_n = \sum_{t=0}^n x_t, \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = x \quad (3-34)$$

ساختار کلی این روش، تا این مرحله، به راحتی می‌تواند در عمل پیاده‌سازی شود تنها موضوع حائز اهمیت

در این روش، محاسبه چند جمله‌ای‌های آدومین با استفاده از رابطه  $Nx = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$  می‌باشد در بخش آتی

روش محاسبه این چند جمله‌ای‌ها و حل معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری غیرخطی، با استفاده از روش آدومین مورد بررسی قرار می‌گیرد.

### ۳-۵-۳- پیاده‌سازی روش آدومین بر روی معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری غیرخطی

در این قسمت، یافتن پاسخ عددی، برای معادلات حالت یک سیستم غیرخطی با رابطه (۳-۳۵)، مد نظر است.

$$D^{\alpha_i} x_i(t) = f_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad x_i^{(k)}(0) = c_k^i, \quad 0 \leq k \leq [\alpha_i] \quad (3-35)$$

که در این رابطه  $1 \leq i \leq n$  و  $\alpha_i \in R$  می باشد تابع  $f$ ، می تواند تابع خطی یا غیر خطی از  $t$  و  $x_1, \dots, x_n$  باشد.

با اعمال اپراتور انتگرال مرتبه  $\alpha_i$  ام، به دوطرف معادله (۳-۳۵) می توان نتیجه گرفت که :

$$x_i = \sum_{k=0}^{[\alpha_i]} c_k^j \frac{t^k}{k!} + I^{\alpha_i} f_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad 1 \leq i \leq n \quad (3-36)$$

در ادامه، پاسخ معادله فوق، با استفاده از روش آدومین محاسبه خواهد شد. همان طور که قبلاً اشاره شد با فرض:

$$x_i = \sum_{m=0}^{\infty} x_{im} \quad (3-37)$$

و

$$f_i(t, x_1, \dots, x_n) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{im} \quad (3-38)$$

که  $A_{im}$  ها همان چند جمله ای های آدومین است که به  $x_{10}, \dots, x_{1m}$  و  $x_{20}, \dots, x_{2m}$  و  $x_{n0}, \dots, x_{nm}$  وابسته می باشد و با توجه به رابطه (۳-۳۶) می توان چنین نتیجه گرفت که:

$$\sum_{m=0}^{\infty} x_{im} = \sum_{k=0}^{[\alpha_i]} c_k^j \frac{t^k}{k!} + I^{\alpha_i} \sum_{m=0}^{\infty} A_{im}(x_{10}, \dots, x_{1m}, \dots, x_{n0}, \dots, x_{nm}), \quad 1 \leq i \leq n \quad (3-39)$$

معادله فوق را می توان به شکل معادله (۳-۴۰) بازنویسی کرد

$$x_{i0} = \sum_{k=0}^{[\alpha_i]} c_k^j \frac{t^k}{k!} \quad (3-40)$$

$$x_{i,m+1} = I^{\alpha_i} A_{im}(x_{10}, \dots, x_{1m}, \dots, x_{n0}, \dots, x_{nm}), \quad 1 \leq i \leq n, \quad m = 0, 1, \dots$$

برای محاسبه چند جمله ای های آدومین موجود در رابطه فوق با اعمال پارامتر  $\lambda^m$  در رابطه (۳-۳۸)، می توان چنین نتیجه گرفت که :

$$f_i\left(t, \sum_{m=0}^{\infty} x_{1m} \lambda^m, \dots, \sum_{m=0}^{\infty} x_{nm} \lambda^m\right) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{im} \lambda^m \quad (3-41)$$

با تعریف  $x_{i\lambda}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} x_{im}(t) \lambda^m$  به صورت می‌توان گفت :

$$A_{im} = \frac{1}{m!} \left[ \frac{d^m}{d\lambda^m} f_{i\lambda}(x_1, \dots, x_n) \right]_{\lambda=0} \quad (42-3)$$

که در این معادله  $f_{i\lambda}(x_1, \dots, x_n) = f_i(t, x_{1\lambda}, \dots, x_{n\lambda})$  است .

بنابراین با در نظر گرفتن معادلات (3-41) و (3-42)، می‌توان چند جمله‌ای‌های آدومین را از رابطه (3-3) محاسبه کرد.

$$A_{im} = \frac{1}{m!} \frac{d^m}{d\lambda^m} [f_i(t, x_{1\lambda}, \dots, x_{n\lambda})]_{\lambda=0} = \frac{1}{m!} \frac{d^m}{d\lambda^m} \left[ f_i \left( t, \sum_{m=0}^{\infty} x_{1m} \lambda^m, \dots, \sum_{m=0}^{\infty} x_{nm} \lambda^m \right) \right]_{\lambda=0} \quad (43-3)$$

$$A_{im} = \left[ \frac{1}{m!} \frac{d^m}{d\lambda^m} f_i \left( t, \sum_{m=0}^{\infty} x_{1m} \lambda^m, \dots, \sum_{m=0}^{\infty} x_{nm} \lambda^m \right) \right]_{\lambda=0}$$

با محاسبه چند جمله‌ای‌های آدومین، الگوریتم یافتن پاسخ معادله غیرخطی مرتبه کسری (3-35) حاصل می‌شود که این الگوریتم را می‌توان به صورت رابطه (3-44) بیان کرد.

$$x_{i0} = \sum_{k=0}^{[\alpha_i]} c_k^i \frac{t^k}{k!} \quad (44-3)$$

$$x_{i,m+1} = I^{\alpha_i} \left[ \frac{1}{m!} \frac{d^m}{d\lambda^m} f_i \left( t, \sum_{m=0}^{\infty} x_{1m} \lambda^m, \dots, \sum_{m=0}^{\infty} x_{nm} \lambda^m \right) \right]_{\lambda=0}, \quad m = 0, 1, \dots$$

برای یافتن پاسخ تقریبی  $x_i$  می‌توان با برش دادن سری  $x_i = \sum_{m=0}^{k-1} x_{im}$  پاسخ را محاسبه کرد.

مثال 3-4: در این مثال هدف یافتن پاسخ‌های دستگاه معادلات غیرخطی (3-45) با استفاده از روش آدومین است.

$$\begin{cases} D^\alpha x_1 = x_1^2 + x_2 \\ D^\beta x_2 = x_2 \cos x_1 \end{cases}, x_1(0) = 0, x_2(0) = 1, \alpha, \beta \in (0, 1) \quad (45-3)$$

این سیستم یک نقطه تعادل دارد. به منظور حل سیستم بالا، با توجه به مطالب گفته شده داریم:

$$f_1(\bar{x}) = x_1^2 + x_2 = \sum_{j=0}^{\infty} A_{1j} \quad (46-3)$$

$$f_2(\bar{x}) = x_2 \cos x_1 = \sum_{j=0}^{\infty} A_{2j}$$

براساس روابط گفته شده، چند جمله‌ای‌های آدومین، برای  $i = 1, 2$  و  $j = 0, 1, \dots$  مطابق زیر با استفاده از

نرم افزار Mathematica قابل محاسبه است .

$$A_{10} = y_{10}^2 + y_{20}$$

$$A_{11} = 2y_{10}y_{11} + y_{21}$$

$$A_{12} = y_{11}^2 + 2y_{10}y_{12} + y_{22}$$

$$A_{13} = 2y_{11}y_{12} + 2y_{10}y_{13} + y_{23}$$

$$A_{14} = y_{12}^2 + 2y_{11}y_{13} + 2y_{10}y_{14} + y_{24}$$

9

$$A_{20} = y_{20} \cos y_{10}$$

$$A_{21} = -y_{11}y_{20} \sin y_{10} + y_{21} \cos y_{10},$$

$$A_{22} = \frac{1}{2}y_{11}^2y_{20} \cos y_{10} - y_{12}y_{20} \sin y_{10} - y_{11}y_{21} \sin y_{10} + y_{21} \cos y_{10},$$

$$A_{23} = \frac{1}{6}((y_{11}^3y_{20} \sin y_{10} - 6y_{11}y_{12} \sin y_{10} - 6y_{13} \sin y_{10})y_{20}$$

$$- 3(y_{11}^2 \cos y_{10} + y_{12} \sin y_{10})y_{21} - 6y_{11}y_{22} \sin y_{10} + 6y_{23} \cos y_{10}),$$

.

.

.

از طرف دیگر

$$\begin{cases} x_{10} = 0 \\ x_{1,m+1} = I^\alpha A_{1m} \end{cases}, \begin{cases} x_{20} = 1 \\ x_{2,m+1} = I^\beta A_{2m} \end{cases}, m = 0, 1, \dots$$

بنابراین متغیرهای حالت مد نظر را می‌توان به صورت رابطه (47-3) محاسبه کرد .

$$x_{11} = I^\alpha A_{10} = \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}, x_{21} = -I^\beta A_{20} = \frac{x^\beta}{\Gamma(\beta + 1)}. \quad (47-3)$$

بخش های بعدی به صورت زیر خواهد بود

$$x_{12} = I^\alpha A_{11} = I^\alpha \frac{x^\beta}{\Gamma(\beta+1)} = \frac{x^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)},$$

$$x_{22} = I^\beta A_{21} = I^\beta \frac{x^\beta}{\Gamma(\beta+1)} = \frac{x^{2\beta}}{\Gamma(2\beta+1)},$$

$$x_{13} = I^\alpha A_{12} = \frac{\Gamma(2\alpha+1)x^{3\alpha}}{[\Gamma(\alpha+1)]^2\Gamma(3\alpha+1)} + \frac{x^{\alpha+2\beta}}{\Gamma(\alpha+2\beta+1)},$$

$$x_{23} = I^\beta A_{22} = -\frac{\Gamma(2\alpha+1)x^{2\alpha+\beta}}{[\Gamma(\alpha+1)]^2\Gamma(2\alpha+\beta+1)} + \frac{x^{3\beta}}{\Gamma(3\beta+1)}.$$

با جایگذاری مقادیر به دست آمده، می‌توان چند جمله‌ای‌های گام بعدی و به تبع آن متغیرهای  $x_{14}$  و

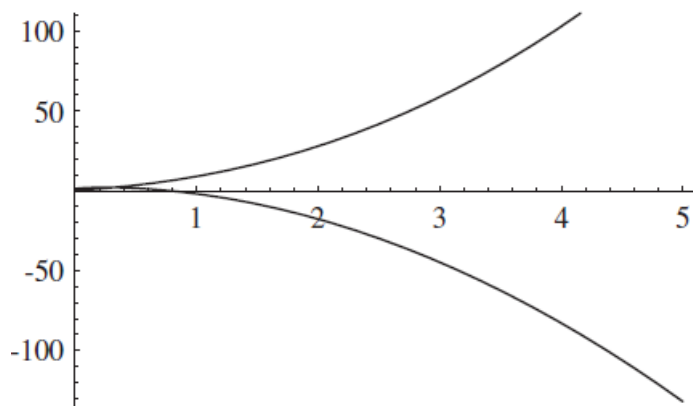
$x_{24}$  را به دست آورد با ادامه این روند به صورت تکراری و تا رسیدن به دقت دلخواه، می‌توان پاسخ

نهایی  $x_i$  ها را محاسبه کرد.

$$x_1 = \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{x^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \frac{\Gamma(2\alpha+1)x^{3\alpha}}{[\Gamma(\alpha+1)]^2\Gamma(3\alpha+1)} + \frac{x^{\alpha+2\beta}}{\Gamma(\alpha+2\beta+1)} + \dots,$$

$$x_2 = 1 + \frac{x^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + \frac{x^{2\beta}}{\Gamma(2\beta+1)} - \frac{\Gamma(2\alpha+1)x^{2\alpha+\beta}}{[\Gamma(\alpha+1)]^2\Gamma(2\alpha+\beta+1)} + \frac{x^{3\beta}}{\Gamma(3\beta+1)} + \dots,$$

در شکل (۱-۳)، متغیرهای  $x_1$ ،  $x_2$  به ازاء مقادیر  $\alpha = 0.5$ ،  $\beta = 0.3$  و رسم شده است.



شکل ۱-۳ پاسخ عددی معادله دیفرانسیل مثال ۳-۴ [۱۷]

## فصل چهارم

### سیستم‌های مرتبه کسری



## ۴-۱ مقدمه

در این بخش سیستم‌هایی که با معادلات مرتبه کسری توصیف می‌شوند را آنالیز کرده و به بررسی برخی از عملگرهای کنترلی که از اپراتورهای کسری حاصل می‌شوند می‌پردازیم. این آنالیز مانند سیستم‌های از مرتبه طبیعی، در حوزه‌های مختلفی (زمان، لاپلاس و تبدیل  $Z$ ) انجام خواهد گرفت. در ادامه کنترل پذیری، رویت پذیری سیستم نیز بررسی خواهد شد.

## ۴-۲- مدلهای متفاوت برای یک سیستم

### ۴-۲-۱- مدل پیوسته

معادله یک سیستم دینامیکی از مرتبه کسری را می‌توان به فرم رابطه (۴-۱) نمایش داد [۱۸].

$$H(D^{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n})(y_1, y_2, \dots, y_l) = G(D^{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m})(u_1, u_2, \dots, u_k) \quad (4-1)$$

که  $y_i$  و  $u_i$  توابعی از زمان بوده و  $H$  و  $G$  یک قانون ترکیبی از عملگر مشتق کسری می‌باشد.

برای سیستم‌های یک متغیره و غیرمتغیر با زمان، معادله فوق به صورت رابطه (۴-۲) حاصل خواهد شد.

$$H(D^{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n})y(t) = G(D^{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m})u(t) \quad (4-2)$$

که در این رابطه اگر،  $H(D^{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n}) = \sum_{k=0}^n \alpha_k D^{\alpha_k}$  و  $G(D^{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m}) = \sum_{k=0}^m b_k D^{\beta_k}$ ،  $(a_k, b_k \in R)$  تعریف

شوند، آنگاه شکل گسترده رابطه (۴-۲) به صورت رابطه (۴-۳) بیان می‌گردد و سیستم، خطی متغیر با زمان خواهد بود.

$$a_n D^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} D^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots + a_0 D^{\alpha_0} y(t) = b_m D^{\beta_m} u(t) + b_{m-1} D^{\beta_{m-1}} u(t) + \dots + b_0 D^{\beta_0} u(t) \quad (4-3)$$

سیستمهای به شکل رابطه (۳-۴) را می توان به دو نوع سیستم مختلف تقسیم کرد. این دو نوع سیستم، سیستمهای با مرتبه مضروب<sup>۲۷</sup> و سیستمهای با مرتبه گویا هستند که این سیستمها را می توانیم به فرم زیر تعریف کنیم.

تعریف ۴-۱: یک سیستم، سیستمی از مرتبه مضروب است چنانچه رتبه تمامی مشتقات معادلات

دیفرانسیل سیستم، ضربی از یک رتبه خاص  $\alpha$  باشد. [۱۸]

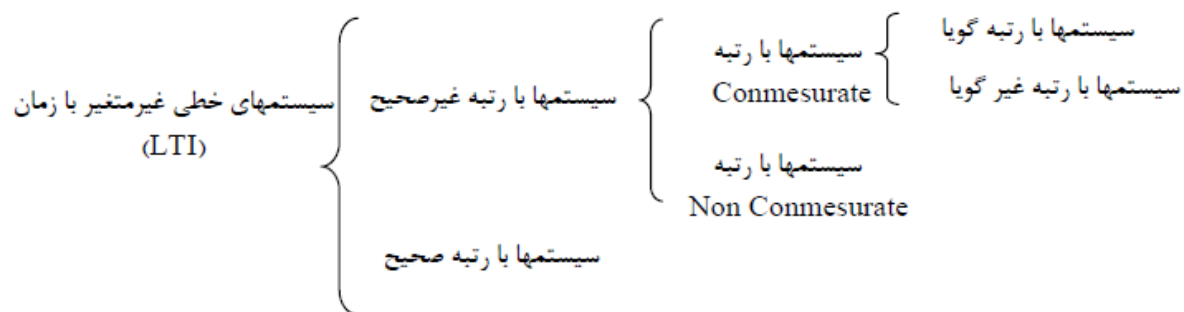
با این تعریف، سیستم رابطه (۳-۴) با شرط  $\alpha \in R^+$  ،  $k \in Z^+$  و  $\alpha_k = \beta = k\alpha$  سیستمی مضروب خواهد بود و معادلات دیفرانسیل سیستم (۳-۴) به صورت رابطه (۴-۴) حاصل خواهد شد.

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k D^{k\alpha} y(t) = \sum_{k=0}^n b_k D^{k\alpha} u(t) \quad (4-4)$$

تعریف ۴-۲: یک سیستم را سیستمی از مرتبه گویا نامند اگر این سیستم یک سیستم مضروب باشد و

علاوه بر آن شرط  $\alpha = \frac{1}{q}$  و  $q \in Z^+$  را نیز داشته باشد. [۱۸]

بنابراین با توجه به تعاریف فوق، سیستمهای خطی غیرمتغیر با زمان را می توان به صورت زیر کلاس بندی کرد.



<sup>۲۷</sup> - Conmesurate

#### ۴-۲-۲- مدلهای گسسته

با استفاده از تعاریف گرانولد - لتیکف برای مشتقات کسری، سیستمهایی با مدلهای گسسته و مرتبه

کسری را به طور کلی با معادلات دیفرنس می توان بیان کرد [۱۸].

$$a_n \Delta_h^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} \Delta_h^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots + a_0 \Delta_h^{\alpha_0} y(t) = b_m \Delta_h^{\beta_m} u(t) + b_{m-1} \Delta_h^{\beta_{m-1}} u(t) + \dots + b_0 \Delta_h^{\beta_0} u(t) \quad (۵-۴)$$

$\Delta_h^{\alpha_k}$  یک اپراتور دیفرانس از رتبه  $k$  با گام  $h$  می باشد که می توان به صورت رابطه (۴-۶) آن را تعریف کرد.

$$\Delta_h^{\alpha_n} y(ih) = h^{-\alpha_k} (y(ih) - y(ih-h))^{\alpha_k} = \sum_{l=0}^i (-1)^l \binom{\alpha_k}{l} y(yh-lh) \quad (۶-۴)$$

#### ۴-۲-۳- مدلهای ورودی و خروجی

با اعمال تبدیل لاپلاس به رابطه (۴-۳) و با فرض شرایط اولیه صفر و یا با اعمال تبدیل  $Z$  به رابطه (۴-۴)

(۵) مدل کسری ورودی و خروجی سیستم حاصل می شود. مدل ورودی و خروجی حاصل از مدلهای

پیوسته و گسسته به ترتیب به فرم رابطه های (۴-۷) و (۴-۸) خواهد بود. [۱۸]

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^{\beta_m} + b_{m-1} s^{\beta_{m-1}} + \dots + b_0 s^{\beta_0}}{a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0 s^{\alpha_0}} \quad (۷-۴)$$

$$G(z) = \frac{b_m (w(z^{-1}))^{\beta_m} + b_{m-1} (w(z^{-1}))^{\beta_{m-1}} + \dots + b_0 (w(z^{-1}))^{\beta_0}}{a_n (w(z^{-1}))^{\alpha_n} + a_{n-1} (w(z^{-1}))^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0 (w(z^{-1}))^{\alpha_0}} \quad (۸-۴)$$

که  $w(z^{-1})$  تبدیل  $Z$  عملگر  $\Delta_h^1$  است.

همانطور که در عبارات قبلی مشاهده شد، یک سیستم کسری در حوزه لاپلاس، تابع تبدیل پیوسته غیر

گویا یا تابع گسسته نامحدود دارد، چرا که فقط هنگامی که  $\alpha_k \in R$  باشد، تعداد معدودی از ضرایب

$(-1)^l \binom{\alpha_k}{l}$  مخالف صفر خواهد بود.

در سیستم‌های پیوسته با مرتبه مضروب، تابع تبدیل سیستم، به صورت رابطه (۹-۴) خواهد بود و می‌توان با تغییر متغیر  $\lambda = s^\alpha$  آن را به صورت یک تابع گویا مانند رابطه (۱۰-۴) تبدیل کرد.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{k=0}^m a_k (s^\alpha)^k}{\sum_{k=0}^n b_k (s^\alpha)^k} \quad (9-4)$$

$$H(\lambda) = \frac{\sum_{k=0}^m a_k \lambda^k}{\sum_{k=0}^n b_k \lambda^k} \quad (10-4)$$

#### ۴-۲-۴ تحقق فضای حالتی

تحقق فضای حالتی سیستم‌های چند متغیره به شکل رابطه (۱۱-۴) بیان می‌شود [۱۸].

$$\begin{cases} D^\alpha X = AX + Bu \\ y = CX + Du \end{cases} \quad (11-4)$$

که  $\alpha = [\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n]$  و  $u \in R^p$  بردار ورودی  $X \in R^q$  بردار حالت،  $y \in R^r$  بردار خروجی،  $A \in R^{q \times q}$  ماتریس حالت،  $B \in R^{q \times p}$  ماتریس ورودی،  $C \in R^{r \times q}$  ماتریس انتقال مستقیم می‌باشد.

#### ۳-۳- ارتباط بین تحقق فضای حالتی و فرم تابع تبدیل در سیستم‌های مرتبه مضروب

برای سیستم تک متغیره با مرتبه مضروب که تحقق فضای حالتی آن به فرم رابطه (۱۱-۴) است، با اعمال تبدیل لاپلاس و استفاده از تعریف کاپوتو برای مشتقات کسری می‌توان رابطه (۱۲-۴) را نتیجه گرفت. [۱۸]

$$Y(s) = G(s)U(s) = C(s^\alpha I - A)^{-1}B + D \quad (12-4)$$

به عبارت دیگر حالت‌های سیستم را می‌توان به صورت رابطه (۴-۱۳) محاسبه کرد.

$$x(t) = L^{-1}\{X(s)\} = L^{-1}\{(s^\alpha I - A)^{-1}BU(s) + (s^\alpha I - A)^{-1}x(0)\} \quad (14-4)$$

با تعریف  $\Phi(t) = L^{-1}\{(s^\alpha I - A)^{-1}\}, t \geq 0$  می‌توان نتیجه گرفت که :

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \Phi(t) * [Bu(I)] = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t + \tau)Bu(\tau)d\tau \quad (15-4)$$

که  $\Phi(t)$  را ماتریس گذار حالت می‌نامند. ماتریس گذار حالت را می‌توان مشابه روال به دست آوردن این ماتریس در سیستم‌های خطی مرتبه صحیح، با استفاده از رابطه (۴-۱۶) محاسبه کرد.

$$\Phi(t) = E_\alpha(At^\alpha) \quad (16-4)$$

#### ۴-۴- کنترل پذیری و رویت پذیری

شرایط کنترل پذیری و رویت پذیری برای سیستم‌هایی از مرتبه مضروب را می‌توان در مرجع [۱۹] بدون اثبات مشاهده کرد. اثبات این شرایط با روشی مشابه با روش اثبات این شرایط برای سیستم‌های با رتبه صحیح بیان می‌شود. بنابراین در این قسمت تنها به بیان تعریف کنترل پذیری و رویت پذیری سیستمها می‌پردازیم.

تعریف ۴-۳ سیستمی را کنترل پذیر گوئیم اگر اعمال یک بردار کنترل، باعث بردن سیستم از حالت اولیه  $x(t_0)$  به حالت نهایی  $x(t_f)$  در زمان محدود شود [۲۰، ۲۱].

شرایط کنترل پذیری برای سیستمهای مرتبه کسری و مرتبه صحیح یکسان می باشد. در سیستمهای مرتبه کسری غیر متغیر با زمان خطی ماتریس کنترل پذیری به صورت  $C = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$  تعریف می شود و این سیستمها در صورتی کنترل پذیر است که ماتریس  $C$ ، از مرتبه کامل باشد [۱۸].

تعریف ۴-۴ یک سیستم مشاهده پذیر است اگر هر حالت  $x(t_0)$  سیستم را بتوان با مشاهده  $y(t)$  در یک بازه محدود تعیین کرد [۲۰، ۲۱].

شرایط مشاهده پذیری برای سیستمهای مرتبه کسری و مرتبه صحیح یکسان می باشد. در سیستمهای مرتبه کسری غیر متغیر با زمان خطی ماتریس مشاهده پذیری به صورت  $O = [C \ CA \ CA^2 \ \dots \ CA^{n-1}]^T$  تعریف می شود و این سیستمها در صورتی مشاهده پذیر هستند که ماتریس  $O$ ، از مرتبه کامل باشد [۱۸].

## فصل پنجم

پایداری سیستم‌های مرتبه کسری خطی

## ۵-۱- مقدمه

نظریه پایداری، نقشی اساسی و مفهومی بسیار مهم و پرکاربرد در مهندسی سیستم‌ها دارد و مسائل مختلفی در خصوص پایداری در سیستم‌های دینامیکی مطرح می‌شود. در این فصل، مسأله پایداری نقاط تعادل یک سیستم مرتبه کسری خطی مورد بررسی قرار می‌گیرد. مدل فضای حالتی سیستم‌های خطی مرتبه کسری، به شکل معادله (۵-۱) قابل توصیف است.

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases} \quad (۵-۱)$$

معادله (۵-۱)، کلی‌ترین شکل مدل فضای حالتی یک سیستم مرتبه کسری خطی است. روش دیگری که برای نمایش یک سیستم مرتبه کسری خطی وجود دارد، فرم تابع تبدیلی آن است که با داشتن معادله دیفرانسیل ورودی - خروجی و استفاده از تبدیل لاپلاس می‌توان این شکل از نمایش سیستم‌های مرتبه کسری خطی را به دست آورد که در فصل قبل بررسی شد.

در حالت خاص، در سیستم‌های مرتبه کسری خطی و نامتغیر با زمان ( $D^\alpha x(t) = Ax(t)$ ) که دارای نقطه تعادل  $x = 0$  می‌باشند، پایداری نقطه تعادل را می‌توان به کمک موقعیت مکانی مقادیر ویژه ماتریس  $A$  بیان کرد که در این فصل به طور مفصل به توضیح این موضوع پرداخته می‌شود. هم چنین استفاده از اصل آرگومان برای تحلیل پایداری سیستم‌های مرتبه کسری خطی مورد بررسی قرار می‌گیرد. در آخرین بخش، روش توصیفی  $LMI$ <sup>۲۸</sup> برای بررسی پایداری سیستم‌های خطی ارائه خواهد شد.

---

<sup>۲۸</sup> Linear Matrix Inequalities



## ۵-۲- روش مستقیم بررسی پایداری

در حالت کلی، مطالعه پایداری سیستم‌ها، با مطالعه پاسخ‌های معادلات دیفرانسیلی که آن‌ها را توصیف می‌کنند امکان‌پذیر می‌باشد. بنابراین با یافتن پاسخ سیستم مرتبه کسری خطی نامتغیر با زمان، می‌توان در مورد رفتار حالات سیستم و همگرایی مسیرهای حالات به سمت بی‌نهایت (ناپایداری سیستم) اظهار نظر کرد. مثال‌هایی از حل مستقیم معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری خطی در فصل پیشین آمده است در این مثال‌ها با داشتن پاسخ سیستم، که همان پاسخ معادله دیفرانسیل مرتبه کسری خطی می‌باشد و با سوق دادن زمان به سمت بی‌نهایت، می‌توان در مورد رفتار حالت دائمی این معادلات دیفرانسیل که می‌تواند توصیف یک سیستم مرتبه کسری باشد اظهار نظر کرد.

به دلیل پیچیدگی یافتن پاسخ برای معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری، حتی در حالت خطی نامتغیر با زمان، که ناشی از پیچیدگی در یافتن معکوس تبدیل لاپلاس است روش مستقیم، مقبولیت چندانی به عنوان روشی برای بررسی پایداری این نوع سیستم‌ها ندارد.

## ۵-۳- روش‌های غیر مستقیم بررسی پایداری

### ۵-۳-۱ تحلیل پایداری با استفاده از ریشه‌های معادله مشخصه تابع تبدیل

روش دیگر تحلیل پایداری سیستم‌های مرتبه کسری خطی نامتغیر با زمان، استفاده از تحلیل ریشه‌های معادله مشخصه این سیستم‌ها می‌باشد. در این بخش، پایداری سیستم‌های خطی با مرتبه غیرصحیح مورد بررسی قرار می‌گیرد و از آن جایی که سیستم‌های مرتبه کسری خطی، زیر مجموعه این سیستم‌ها است تمام مطالبی که بیان خواهد شد، در سیستم‌های مرتبه کسری خطی نیز صادق است.

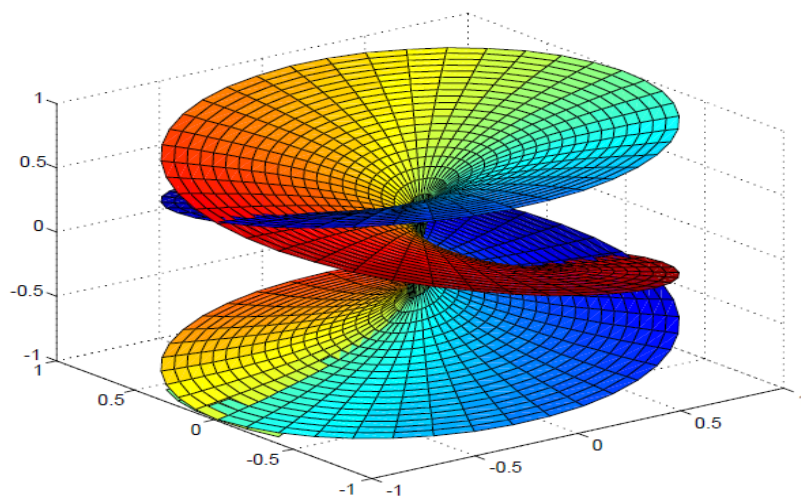
برای استفاده از این روش لازم است به خاطر داشته باشیم، که عبارت  $a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0 s^{\alpha_0}$  (که  $\alpha_i \in R$ ) یک تابع چند مقدار از متغیر مختلط  $s$  می باشد که دامنه این تابع به صورت سطوح ریمانی خواهد بود که شامل تعدادی صفحه می باشد. تعداد این صفحات، فقط زمانی که  $\alpha_i \in Q^+$  باشد محدود خواهد بود. درحالی که  $\alpha_i \in Q^+$ ، مقدار  $\alpha_i$  را به صورت  $\alpha_i = \frac{1}{q_i}$  در نظر می گیریم که  $q \in Z^+$  و  $q$  صفحه از سطوح ریمانی را می توان با استفاده از رابطه (۲-۵) تعیین کرد [۱۸].

$$s = |s|e^{j\Phi}, (2k+1)\pi < \Phi < (2k+3)\pi, k = -1, 0, \dots, q-2 \quad (2-5)$$

در حالتی که  $k = -1$  باشد، از تمام صفحات ممکن بر روی سطح ریمان، صفحه اصلی در نظر گرفته شده است. اگر فرض کنیم  $w = s^\alpha$ ، این صفحات بر روی ناحیه ای از صفحه  $w$  تصویر می شوند که به صورت رابطه (۳-۵) تعریف می شود.

$$w = |w|e^{i\theta}, \alpha(2k+1)\pi < \theta < \alpha(2k+3)\pi \quad (3-5)$$

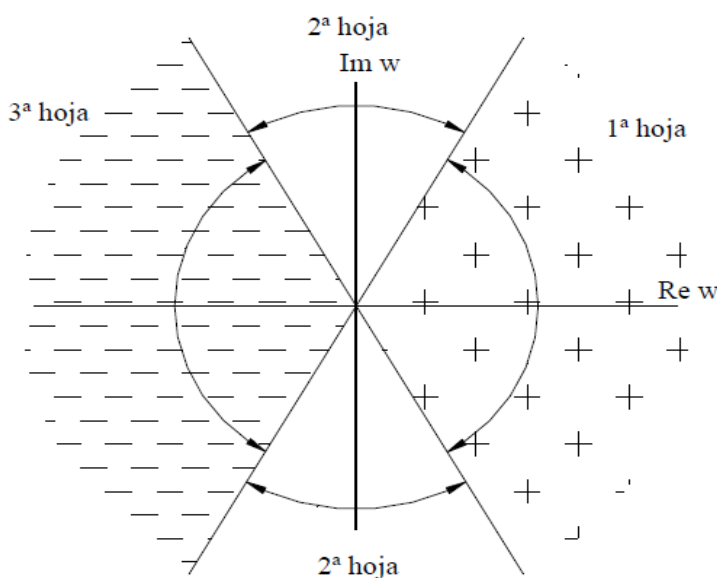
شکل (۱-۵) سطوح ریمانی که نشان دهنده انتقال هستند را نشان می دهد.



شکل ۱-۵ سطح ریمان برای  $w = s^{\frac{1}{3}}$  [۱۸]

در شکل (۲-۵) ناحیه هایی از صفحه مختلط  $w$  که حاصل هر صفحه از سطح ریمانی می باشد نشان داده شده است که این سه صفحه حاصل معادلات (۴-۵) است.

$$\begin{aligned} k = -1; & -\pi < \arg(s) < \pi \\ k = 0; & \pi < \arg(s) < 3\pi \\ k = 1; & 3\pi < \arg(s) < 5\pi \end{aligned} \quad (۴-۵)$$



شکل ۲-۵ صفحات مختلف ریمان برای  $w = s^{\frac{1}{3}}$  [۱۸]

بنابراین معادله‌ای به فرم  $a_n s^{a_n} + a_{n-1} s^{a_{n-1}} + \dots + a_0 s^{a_0}$  که در حالت کلی  $(\alpha_i \in R^+, i = \alpha, \dots, n)$  یک چند جمله‌ای نیست و بی‌نهایت ریشه خواهد داشت (چرا که در این حالت، بی‌نهایت صفحه در سطوح ریمانی وجود خواهد داشت) که تنها تعداد محدودی از این ریشه‌ها در صفحه اصلی ( $k = -1$ ) سطح ریمانی قرار دارند. می‌توان ثابت کرد که ریشه‌هایی که بر روی صفحات فرعی سطح ریمان قرار دارند، پاسخ‌هایی را باعث می‌شوند که این پاسخ‌ها همیشه به طور یکنواخت کاهشی خواهند بود به عبارت دیگر این ریشه‌ها، نشان دهنده وجود پاسخ‌هایی بدون نوسان است که هنگامی که  $t \rightarrow \infty$  میل کند، این پاسخ‌ها به سمت صفر میل خواهند کرد. بنابراین فقط ریشه‌هایی که در صفحه اصلی سطح ریمان هستند

می‌توانند باعث پاسخ‌هایی با دینامیک‌های متفاوت، مانند پاسخ‌های نوسانی میراشونده، پاسخ‌های نوسانی با دامنه ثابت و پاسخ‌های نوسانی با دامنه افزایشی یا کاهش‌ی یکنواخت شوند.

به عنوان مثالی دیگر، جواب‌های معادله  $s^\alpha - b = 0$  را می‌توان به صورت رابطه (۵-۵) به دست آورد [۱۸].

$$s = (-b)^{\frac{1}{\alpha}} = |b|^{\frac{1}{\alpha}} \angle \frac{\arg(b) + 2\pi l}{\alpha}, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5-5)$$

از مجموع این ریشه‌ها، فقط ریشه‌هایی که شرط  $\left| \frac{\arg(b) + 2\pi l}{\alpha} \right| < \pi$  را برآورده کنند، بر روی صفحه اصلی ریمان قرار خواهند داشت. ریشه‌هایی که در صفحه اصلی ریمان قرار دارند را ریشه‌های ساختاردار<sup>۲۹</sup> یا ریشه‌های وابسته<sup>۳۰</sup> می‌نامند.

مثال ۱-۵: در تابع  $f(s) = \frac{1}{s^\alpha + b}$ ,  $\alpha = \frac{1}{\pi}$ ,  $b \in R^+$  ریشه‌های مخرج، با رابطه (۶-۵) مشخص می‌شود [۱۸].

$$s_l = (-b)^\pi |l| = |b|^\pi \angle \pi(\pi + 2\pi l), \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6-5)$$

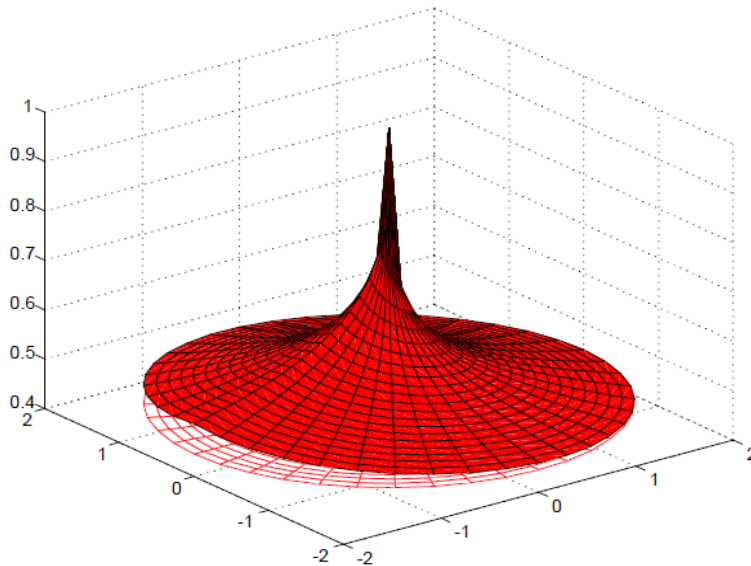
برای آن که ریشه‌های این معادله در صفحه اصلی ریمان قرار گیرند باید شرط  $|\arg(s_l)| < \pi$  را برآورده کنند.

$$|\arg(s_l)| < \pi \rightarrow |\pi(\pi + 2\pi l)| < \pi \rightarrow |\pi(1 + 2l)| < 1 \quad (7-5)$$

<sup>۲۹</sup> -Structural Roots

<sup>۳۰</sup> -Relevant Roots

همان طور که مشاهده می‌شود، هیچ مقدار  $l$  برای رسیدن به این شرط وجود ندارد. بنابراین این معادله، دارای ریشه‌های ساختاردار نخواهد بود. این مسأله را می‌توان در شکل (۳-۵) برای  $b=1$  مشاهده کرد. در این شکل می‌توان دید که به طور تحلیلی برای هر  $s$ ،  $|\arg(s)| < \pi$  می‌باشد، بنابراین تابع دارای یک ماکزیمم در  $s = 0+0j$  می‌باشد، در این تابع نقطه  $s^\alpha = -1$  یک قطب نیست اما یک شاخه<sup>۳۱</sup> است.



شکل ۳-۵ مقدار تابع  $f(s)$  برای  $b=1$  و  $\alpha = 1/\pi$  [۱۸]

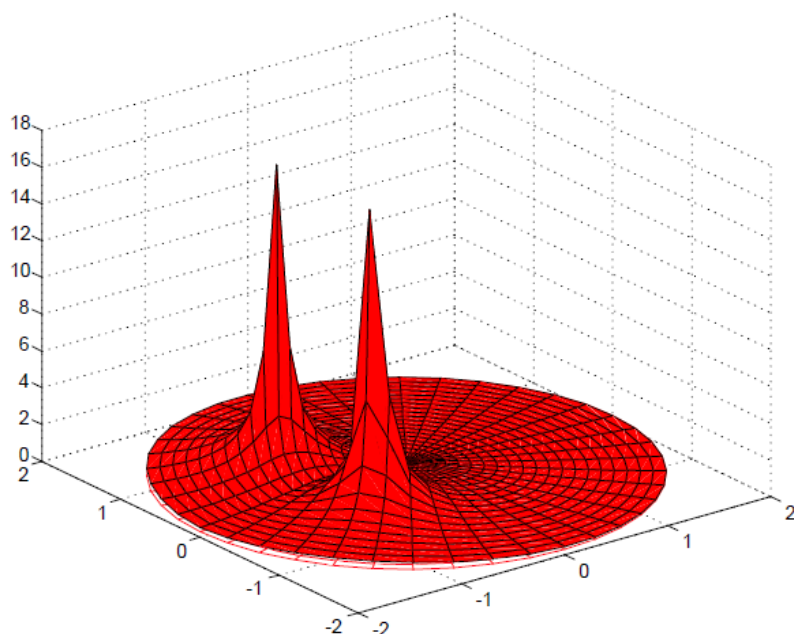
حال تابع مثال ۱-۵، برای حالت  $\alpha = \frac{4}{\pi}$  را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. شرطی که ریشه‌های این تابع

باید برآورده سازند تا بر روی صفحه اصلی ریمان باشند در رابطه (۸-۵) بیان شده است. [۱۸]

$$\frac{|\pi + 2\pi l|}{4} < 1 \rightarrow l = 0, l = -1 \quad (۸-۵)$$

که در این نقاط  $\angle s_0 = \frac{\pi^2}{4}$  و  $\angle s_{-1} = -\frac{\pi^2}{4}$  می‌باشد. در شکل (۴-۵) می‌توان مشاهده کرد که تابع دو قطب در  $s_0$  و  $s_{-1}$  دارد.

<sup>۳۱</sup> -Branch



شکل ۴-۵ مقدار تابع  $f(s)$  برای  $b=1$  و  $\alpha=4/\pi$  [۱۸]

با توجه به مطالب گفته شده، شرایط پایداری سیستم‌های مرتبه کسری خطی نامتغیر با زمان را می‌توان به صورت زیر تبیین کرد.

### شرایط پایداری

در حالت کلی می‌توان گفت یک سیستم مرتبه کسری خطی نامتغیر با زمان، با تابع انتقال غیرگویای

برای ورودی‌های محدود پایدار است (پایداری BIBO) اگر و فقط اگر شرط رابطه (۹-۵)

برقرار باشد [۲۰].

$$\forall s, \exists M; \operatorname{Re}(s) \geq 0 \rightarrow |G(s)| \leq M \quad (۹-۵)$$

شرط فوق در صورتی برقرار خواهد بود که تمام ریشه‌های  $Q(s)$  در صفحه اصلی ریمان بوده و ریشه‌های  $P(s)$  قسمت حقیقی منفی نداشته باشند.

برای سیستم‌های از مرتبه مضروب که مخرج آن‌ها یک چند جمله‌ای با متغیر مختلط  $\lambda = s^\alpha$  است، شرط پایداری را می‌توان به صورت رابطه (۵-۱۰) بیان کرد [۱۸].

$$|\arg(\lambda_i)| > \alpha \frac{\pi}{2} \quad (۵-۱۰)$$

$\lambda_i$  ریشه‌های چند جمله‌ای مخرج  $G(s)$  می‌باشند. در حالت خاص و برای  $a=1$  این شرط تبدیل به همان شرط پایداری برای سیستم‌های خطی مرتبه صحیح می‌شود.

$$\forall \lambda_i, Q(\lambda) = 0 \rightarrow |\arg(\lambda_i)| > \frac{\pi}{2} \quad (۵-۱۱)$$

### تفاوت بررسی پایداری سیستم‌های مرتبه صحیح خطی و سیستم‌های مرتبه کسری خطی

با توجه به مطالب گفته شده می‌توان چنین نتیجه گرفت که:

- چنانچه ضرایب معادله مشخصه سیستم، همگی هم علامت باشند، شرط لازم و کافی برای تضمین پایداری ایجاد نمی‌کنند.
- تعداد ریشه‌های چند جمله‌ای، که در صفحه اصلی سطح ریمان واقع هستند، بستگی به توان‌های بالاتر متغیر مختلط در معادله چند جمله‌ای ندارد (در سیستم‌های خطی مرتبه صحیح، توان بالا تعداد ریشه‌ها را نشان می‌دهد).

در حال حاضر برای سیستم‌های کسری، تکنیکی مانند تکنیک‌های راث و جوری که در سیستم‌های خطی به کار گرفته می‌شود، وجود ندارد که بتواند پایداری این سیستم‌ها را به راحتی تحلیل کند تنها روش موجود برای حالت خاصی از این سیستم‌ها (سیستم‌های خطی مرتبه گویا)، تحلیل هندسی مختلط،

براساس اصل آرگومان می‌باشد. این تکنیک اطلاعاتی راجع به تعداد نقاط تکین تابع با مشاهده و ارزیابی آرگومان تابع در اختیار تحلیلگر قرار می‌دهد.

در این روش، اصل آرگومان، بر منحنی‌های شناخته شده‌ای مانند مسیر نایکوئیست اعمال می‌شود. پایداری سیستم را می‌توان با تعیین تعداد چرخش منحنی منتج شده، حول مبدأ تعیین کرد برای تعیین پایداری حلقه بسته کفایت بررسی شود که آیا منحنی نایکوئیست نقطه  $(-1, j0)$  را دور می‌زند یا خیر.

### ۵-۳-۱-۱ کاربرد اصل آرگومان برای مطالعه پایداری سیستم‌های مرتبه گویا

سیستم مورد مطالعه، سیستم حلقه بسته با فیدبک واحد و با تابع تبدیل حلقه  $G(s)$  به شکل رابطه (۵-۱۲) است [۱۸].

$$G(s) = \frac{1}{a_n s^{n\alpha} + a_{n-1} s^{n-\alpha} + \dots + a_1 s^\alpha + a_0}, \alpha = \frac{1}{q}, n \in R^+ \quad (۱۲-۵)$$

با در نظر گرفتن  $\lambda = s^\alpha$  می‌توان  $G(\lambda)$  را ایجاد کرد و شرایط (۵-۱۱) را بر روی آن آزمایش نمود از طرف دیگر، پایداری این سیستم را می‌توان با ارزیابی تابع  $G(\lambda)$  بر روی مسیر  $\Gamma$  که در صفحه  $\lambda$  تعریف می‌شود بررسی کرد (شکل ۵-۵)

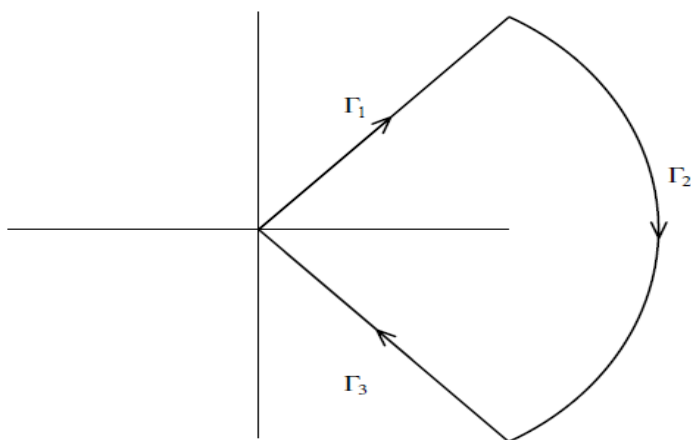
$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$$

$$\Gamma_1 : \arg(\lambda) = -\alpha \frac{\pi}{2}, |\lambda| \in [0, \infty)$$

$$\Gamma_2 : \lambda = \lim_{R \rightarrow \infty} R e^{j\Phi}, \Phi \in (-\alpha \frac{\pi}{2}, \alpha \frac{\pi}{2}) \quad (۱۲-۵)$$

$$\Gamma_3 : \arg(\lambda) = \alpha \frac{\pi}{2}, |\lambda| \in (\infty, 0)$$





شکل ۵-۵ مسیر نایکوئیست [۱۸]

اگر تابع تبدیل به شکل رابطه (۱۳-۵) باشد.

$$H(s) = \frac{1}{a_n s^{\frac{p_n}{q_n}} + a_{n-1} s^{\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}} + \dots + a_1 s^{\frac{p_1}{q_1}} + a_0}, p_1, q_1 \in Z^+, \frac{p_n}{q_n} > \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} > \dots > \frac{p_1}{q_1} \quad (13-5)$$

روال مشابهی را می‌توان اعمال کرد. در این حالت، تابع تبدیلی به صورت  $H(\lambda)$  حاصل می‌شود که  $\lambda = \frac{1}{q}$

و  $q = m.c.m(q_n, q_{n-1}, \dots, q_1)$  (کوچک‌ترین مضرب مشترک بین  $q_i$  ها) است. در ادامه، برای روشن شدن

چگونگی استفاده از این روش مثال‌هایی بیان می‌شود.

مثال ۲-۵: سیستم حلقه بسته با فیدبک واحد و تابع تبدیل حلقه  $G(s) = \frac{1}{s^{2/3} - s^{1/2} - 1/2}$  در

نظر گرفته شود. با جایگذاری  $\lambda = s^{1/6}$ ، تابع  $G(\lambda)$ ، به صورت رابطه (۱۳-۵) حاصل خواهد شد [۱۸].

$$\lambda = s^{1/6} \rightarrow G(\lambda) = \frac{1}{\lambda^4 - \lambda^3 - 1/2} \quad (14-5)$$

مسیر نایکوئیست  $\Gamma$ ، در صفحه مختلط  $\lambda$ ، به صورت روابط (۱۵-۵) خواهد بود

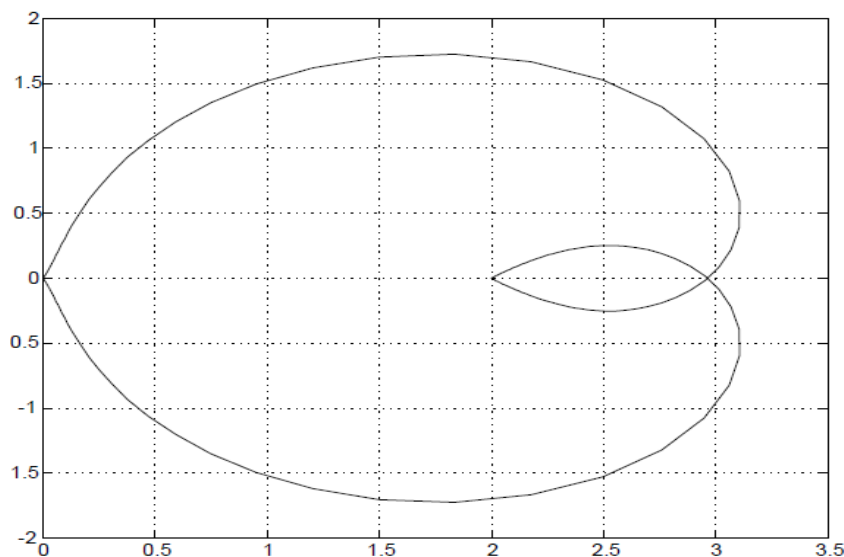
$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \quad (15-5)$$

$$\Gamma_1 : \arg(\lambda) = -\frac{\pi}{12}, |\lambda| \in [0, \infty)$$

$$\Gamma_2 : \lambda = \lim_{R \rightarrow \infty} R.e^{j\phi}, \phi \in \left(-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\right)$$

$$\Gamma_3 : \arg(\lambda) = \frac{\pi}{12}, |\lambda| \in (\infty, 0)$$

با سنجش تابع بر روی مسیر ناکوئیسیت تعریف شده در صفحه اصلی ریمان، منحنی نایکوئیسیت شکل (۵-۶) حاصل خواهد شد.



شکل ۵-۶ منحنی نایکوئیسیت [۱۸]

در این شکل می توان مشاهده کرد که منحنی به دست آمده، نقطه  $(-1, j0)$  را محصور نمی کند، بنابراین سیستم حلقه بسته پایدار است و هیچ مقدار  $k > 0$  برای ناپایداری سیستم وجود ندارد. با ارزیابی تابع نیز نتایج مشابهی حاصل خواهد شد:

ریشه‌های معادله مشخصه تابع تبدیل،

$$\lambda_{3,4} = -0.5891 \pm 0.7441j = 0.9491 \angle \pm 2.2404 \quad \text{و} \quad \lambda_{1,2} = 1.0891 \pm 0.6923j = 1.2905 \angle \pm 0.5662$$

می‌باشند، بنابراین :

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= (\lambda_{1,2})^6 = 4.6188 \angle \pm 3.3975, \quad |\arg(s_{1,2})| > \pi \\ s_{3,4} &= (\lambda_{3,4})^6 = 0.7308 \angle \pm 13.4423, \quad |\arg(s_{3,4})| > \pi \end{aligned} \quad (16-5)$$

همان طور که مشاهده می‌شود، هیچ ریشه ساختار داری در معادله مشخصه وجود ندارد (چرا که ریشه‌های ساختار دار، ریشه‌هایی است که در صفحه اصلی ریمان با شرط  $|\arg(s)| < \pi$  وجود داشته باشند) و این موضوع نشان‌دهنده پایداری سیستم حلقه بسته سیستم مورد مطالعه است.

مثال ۳-۵ : در این مثال به بررسی پایداری سیستم حلقه بسته با فیدبک واحد با تابع تبدیل حلقه

$$G(s) = \frac{1}{s - s^{1/2} + 1.25} \quad \text{پرداخته می‌شود. با توجه به آن چه گفته شد: [۱۸]}$$

$$\lambda = s^2 \rightarrow G(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2 - 2\lambda + 1.25} \quad (17-5)$$

با تعریف مسیر نایکوئیست به صورت ۱۸-۵، تحلیل پایداری ادامه می‌یابد:

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \quad (18-5)$$

$$\Gamma_1 : \arg(\lambda) = -\frac{\pi}{4}, |\lambda| \in [0, \infty)$$

$$\Gamma_2 : \lambda = \lim_{R \rightarrow \infty} R e^{j\phi}, \phi \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Gamma_3 : \arg(\lambda) = \frac{\pi}{4}, |\lambda| \in (\infty, 0)$$

همان طور که در شکل (۷-۵) مشاهده می‌شود منحنی حاصل به ازاء  $k > 0.75$  دو بار نقطه  $(-1, j0)$  را

در جهت منفی دور زده است؛ بنابراین  $G(\lambda)$  دو قطب ناپایدار دارد،  $\lambda_{1,2} = 1 \pm 0.5j$  و  $\arg(\lambda) < \frac{\pi}{4}$ .

بنابراین می‌توان چنین استدلال کرد که این سیستم برای  $k > 0.75$  پایدار بوده و برای  $k < 0.75$

سیستم حلقه بسته ناپایدار است، چرا که دو ریشه ساختاردار آن در سمت راست صفحه مختلط قرار دارند

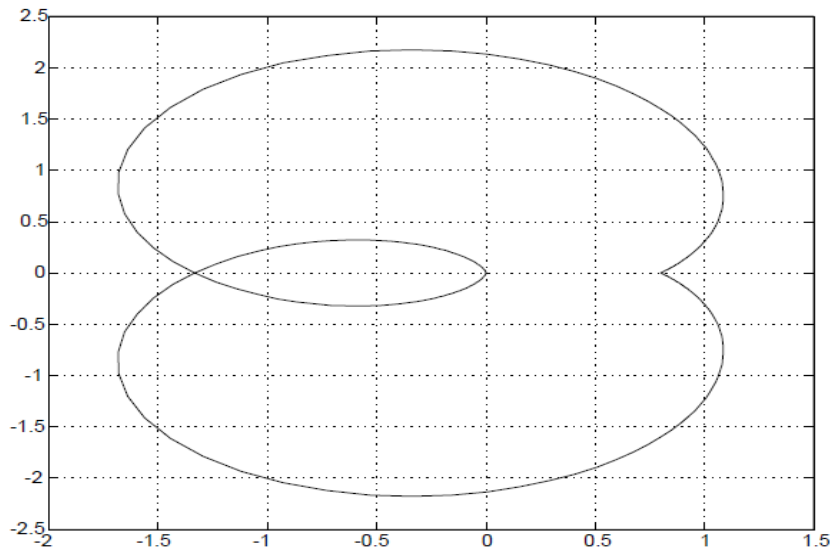
به بیان دیگر، ریشه‌های چند جمله‌ای  $Q(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1.25 + k$  برای  $k = 1$ ،  $\lambda_{1,2} = 1 \pm 1.118j$

می‌باشد و قطب‌های ساختاردار  $G(s)$  عبارتند از :

$$s_{1,2} = (\lambda_{1,2})^2 = 2.25 \angle \pm 0.9273$$

(۱۸-۵)

$$|\arg(s)| < \frac{\pi}{2}$$



شکل ۷-۵ منحنی نایکوئیست

## ۵-۳-۲ مشخصه LMI پایداری سیستمهای کسری [۲۲]

در این بخش شرایط پایداری LMI برای سیستمهای کسری که در آن ها  $1 < \alpha < 2$  و  $0 < \alpha < 1$  است بررسی می شود.

سیستم خطی نامتغیر با زمان با مرتبه گویا در فرم فضای حالت به صورت زیر می تواند توصیف شود:

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (۱۹-۵)$$

که  $A \in R^{M \times M}$ ،  $B \in R^{M \times 1}$  و  $C \in R^{1 \times M}$  می باشد. آنالیز پایداری سیستم (۱۹-۵) توسط متیگن<sup>۳۲</sup> با قضیه زیر بیان می شود.

قضیه ۵-۱: [۲۳] سیستم مستقل از زمان

$$D^\alpha x(t) = Ax(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (۲۰-۵)$$

پایدار مجانبی است اگر و فقط اگر  $|\arg(\text{spec}(A))| > \alpha \frac{\pi}{2}$  که  $\text{spec}(A)$  مجموعه مقادیر ویژه  $A$

می باشد. همچنین بردار حالت  $x(t)$  به سمت صفر میل می کند و شرط:

$$\|x(t)\| < Nt^{-\alpha}, \quad t > 0, \quad \alpha > 0 \quad (۲۱-۵)$$

را برآورده می کند.

پایداری نمایی برای بررسی پایداری سیستم های کسری نمی تواند استفاده شود. یک تعریف جدید به صورت زیر معرفی می شود.

تعریف ۵-۱: پایداری  $t^{-\gamma}$

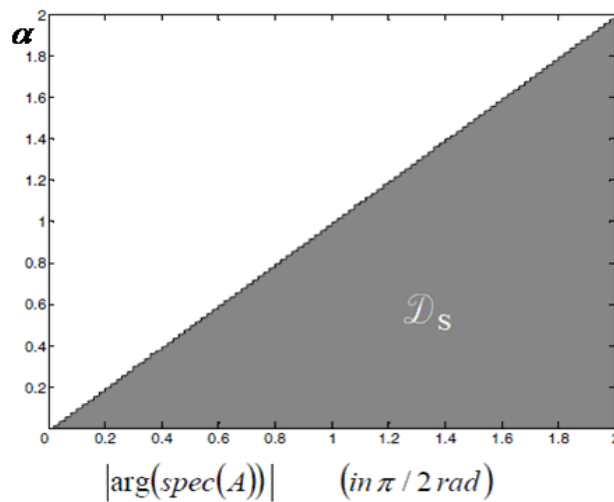
مسیر  $x(t) = 0$  از سیستم  $\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} = f(t, x(t))$  پایدار مجانبی  $t^{-\gamma}$  می باشد اگر شرط پایداری مجانبی

یکنواخت برآورده شود و اگر یک مقدار مثبت حقیقی وجود داشته باشد بطوریکه:

<sup>۳۲</sup> -Matignon

$$\forall \|x(t_0)\| \leq c, \exists Q(x(t_0)) \Rightarrow \forall t \geq t_0, \|x(t)\| \leq Qt^{-\gamma} \quad (22-5)$$

پایداری  $t^{-\gamma}$  برای بررسی پایداری مجانبی سیستم های کسری استفاده می شود. از آنجا که اجزاء تشکیل دهنده  $x(t)$  به آهستگی به سمت صفر میل می کنند، سیستم های مرتبه کسری به سیستم های با حافظه طولانی معروف هستند. بسط قضیه ۵-۱ برای  $1 < \alpha < 2$  در [۲۴] داده شده است. شکل (۵-۸) محدوده پایداری  $D_s$  یک سیستم مرتبه کسری وابسته به مرتبه  $\alpha$  و مقدار  $|\arg(\text{spec}(A))|$  را نشان می دهد.



شکل ۵-۸. محدوده پایداری  $D_s$  وابسته به مرتبه  $\alpha$  و مقدار  $|\arg(\text{spec}(A))|$  [۲۲]

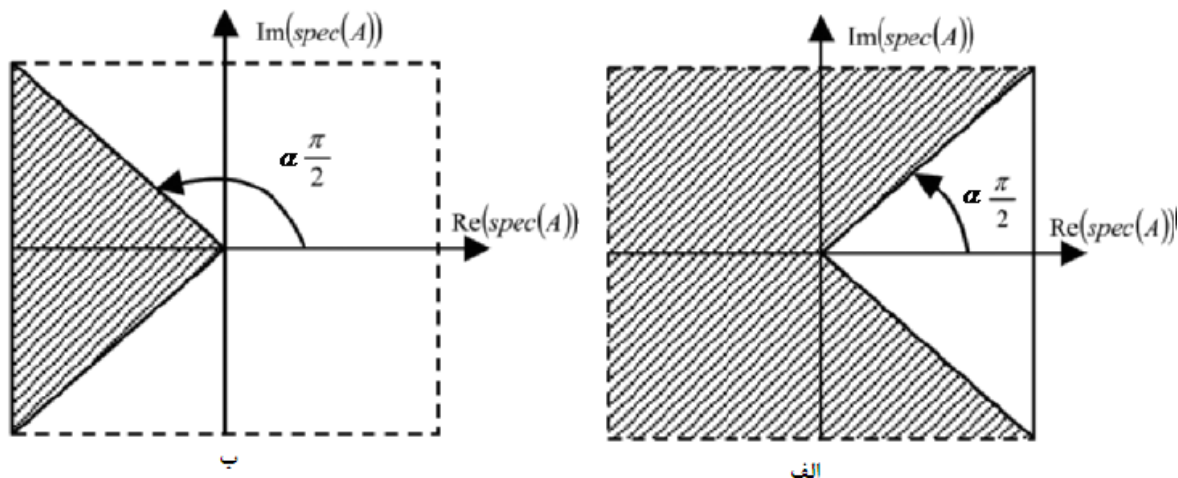
### ۵-۳-۲-۱ پایداری سیستم های کسری: طرح های توصیفی LMI

یک LMI به شکل زیر می باشد [۲۵].

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0 \quad (23-5)$$

که  $x \in R^m$  است و ماتریس  $F_i = F_i^T \in R^{n \times n}, i=0, \dots, m$  متقارن می باشد. LMI نقش مهمی در تئوری کنترل از دهه ۱۹۶۰ به خاطر شکل خاصش بازی می کند.

دلیل اصلی که منجر به  $LMI$  می شود محدب بودن مجموعه بهینه سازی شده است. بطور خلاصه یک مجموعه محدب است اگر برای هر دو نقطه متعلق به مجموعه، خط متصل شده بین آنها نیز در مجموعه باشد [۲۶]. شکل (۵-۹) محدوده پایداری سیستم کسری برای دو مقدار مختلف  $\alpha$  را نشان می دهد.



شکل ۵-۹. محدوده پایداری برای الف)  $0 < \alpha < 1$  ب)  $1 < \alpha < 2$  [۲۲]

چون محدوده پایداری سیستم مرتبه کسری با مرتبه  $1 \leq \alpha < 2$  یک مجموعه محدب است، روشهای  $LMI$  مختلفی برای پیدا کردن چنین ناحیه ای قبلاً بسط داده شده است. وجود مقادیر ویژه ماتریس در قطاع زاویه ای از نیم صفحه مختلط سمت چپ لازم است که واقعاً بررسی شود. بنابراین قضیه زیر براساس  $LMI$  برای پایداری یک سیستم مرتبه کسری با مرتبه  $1 \leq \alpha < 2$  بیان می شود:

قضیه ۵-۲: سیستم کسری توصیف شده با معادله ۵-۱۹ و مرتبه  $1 \leq \alpha < 2$  پایدار مجانبی است اگر و فقط اگر یک ماتریس  $P \in R^{M \times M}$  وجود داشته باشد، بطوریکه:

$$\begin{pmatrix} (A^T P + PA) \sin(\alpha \frac{\pi}{2}) & (A^T P - PA) \cos(\alpha \frac{\pi}{2}) \\ (PA - A^T P) \cos(\alpha \frac{\pi}{2}) & (A^T P + PA) \sin(\alpha \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} < 0 \quad (۲۴-۵)$$

این نتیجه مستقیماً براساس روش های بیان شده در [۲۵] بدست آمده است.

هنگامی که  $0 < \alpha < 1$  باشد شکل ۵-۱۰ (الف) نشان می دهد که محدوده پایداری محدب نیست. لذا مشخصه اش با استفاده از  $LMI$  نمی تواند مستقیماً بدست آید. بخش های زیر سه روش برای بدست آوردن چنین  $LMI$  را معرفی می کنند.

الف) قضیه پایداری کسری بر اساس یک تبدیل جبری از سیستم

پایداری لیاپانف

موفقیت  $LMI$  ها در تئوری کنترل اساساً از کارایی و شکل منحصر به فرد روش دوم لیاپانف، که به صورت زیر خلاصه شده است، ناشی می شود.

سیستم مستقل از زمان

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (25-5)$$

پایدار مجانبی است اگر یک تابع  $V(x(t)) > 0$  وجود داشته باشد بطوریکه رابطه زیر برقرار باشد

$$\frac{d}{dt}V(t) < 0, \quad \forall t \geq t_0$$

اگر تابع  $V(t) = x^T(t)Px(t), P > 0, P \in R^{M \times M}$  باشد قضیه زیر می تواند بیان شود.

قضیه ۵-۳: سیستم مرتبه صحیح (۵-۲۵) پایدار نمایی است اگر ماتریس مثبت معین  $P \in S$  وجود

داشته باشد،  $S$  یک ماتریس متقارن است، به طوری که  $A^T P + PA < 0$ .

قضیه ۵-۳ ارضاء می شود اگر و فقط اگر مقادیر ویژه  $A$  در نیمه چپ صفحه مختلط قرار گیرند.

سیستم مرتبه صحیح معادل

به منظور استفاده از روش لیاپانف برای سیستمهای مرتبه کسری و همچنین بسط آن به  $0 < \alpha < 1$ ، یک

سیستم مرتبه صحیح معادل با سیستم مستقل از زمان توصیف شده با (۵-۲۰) بدست می آید.

با تبدیل لاپلاس گیری از (۵-۲۰) داریم:

$$s^\alpha X(s) = AX(s) + I^{1-\alpha} x_0 \quad (26-5)$$



فرض کنید که  $\alpha = \frac{m}{q}, (m, q) \in N^2$  باشد. رابطه (۲۷-۵) بدیهی است.

$$s^m X(s) = s^{m-\alpha} s^\alpha X(s), \quad (27-5)$$

با جایگذاری  $s^\alpha X(s)$  در (۲۶-۵) و خواص تبدیل لاپلاس کسری رابطه (۲۸-۵) را داریم

$$s^m X(s) = A^q X(s) + \sum_{i=1}^q A^{i-1} I^{1-\alpha} x_0 s^{m-i\alpha} \quad (28-5)$$

با معکوس لاپلاس گیری از طرفین معادله (۲۸-۵)، رابطه (۲۹-۵) بدست می آید.

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^m x(t) = A^q x(t) + \sum_{i=1}^q A^{i-1} I^{1-\alpha} x_0 \delta^{m-i\alpha} \quad (29-5)$$

که توصیف فضای حالت معادله (۲۹-۵) به صورت زیر می باشد.

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = A_f z(t) + B_f \Delta(t) \\ x(t) = C_f z(t) \end{cases} \quad (30-5)$$

که :

$$B_f = \begin{pmatrix} 1 & A & \dots & A^{q-1} \\ & & & 0 \end{pmatrix}, A_f = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & A^{\frac{1}{\alpha}} \\ A^{\frac{1}{\alpha}} & & 0 & 0 \\ & & & \cdot \\ & & & \cdot \\ & & & \cdot \\ 0 & & A^{\frac{1}{\alpha}} & 0 \end{bmatrix} \quad (31-5)$$

$$C_f = (0 \quad \dots \quad 0 \quad 1), \Delta^T(t) = I^{1-\alpha} x_0 (\delta^{m-\alpha} \quad \delta^{m-2\alpha} \quad \dots \quad \delta).$$

اکنون روش پایداری لیاپانف برای سیستم مرتبه صحیح (۳۰-۵) جهت تعیین پایداری سیستم مرتبه

کسری (۲۰-۵) می تواند استفاده شود. قضیه ۵-۵، جهت استفاده از قضیه ۴-۵ برای ماتریس  $A_f$  به

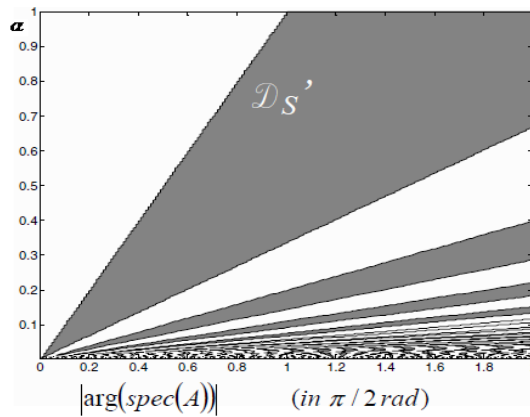
صورت زیر بیان می شود ( توجه شود که  $A_f < 0$  اگر و فقط اگر  $A^{\frac{1}{\alpha}} < 0$ ).

قضیه ۵-۵ (شرط کافی): سیستم مرتبه کسری (۲۰-۵) پایدار  $t^{-\gamma}$  است اگر ماتریس  $P > 0, P \in R^{M \times M}$

$$\text{وجود داشته باشد بطوریکه } P + P \left( A^{\frac{1}{\alpha}} \right)^T < 0 \text{ باشد.}$$

اعتبار شرط پایداری

شکل (۱۰-۵) محدوده پایداری  $D'_S$  یک سیستم مرتبه کسری توصیف شده با استفاده از قضیه ۵-۵ را بر اساس  $\alpha$  و  $|\arg(\text{spec}(A))|$  بیان می کند. مقایسه بین شکل (۸-۵) و شکل (۱۰-۵) نشان می دهد که تمام محدوده پایداری با این قضیه شناسایی نمی شود. بنابراین قضیه ۵-۵ یک شرط کافی است و لازم نیست.



شکل ۱۰-۵. محدوده پایداری  $D'_S$  بر اساس مرتبه کسری  $\alpha$  و  $|\arg(\text{spec}(A))|$  [۲۲]

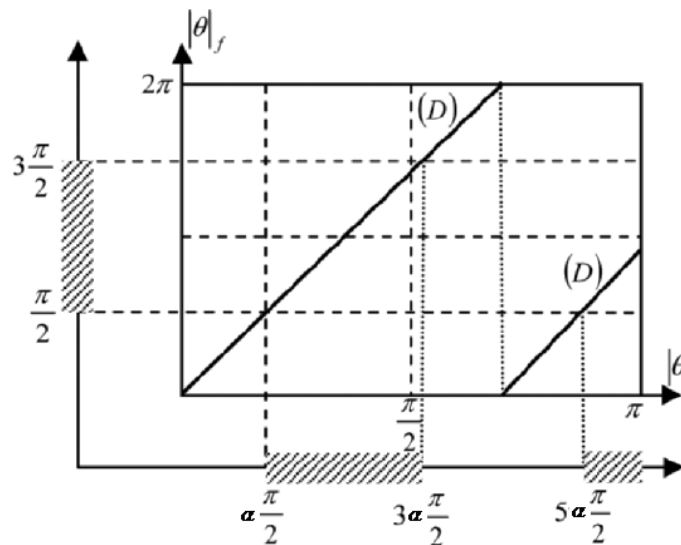
سیستم (۲۰-۵) و سیستم (۳۰-۵) رفتاری کاملاً مشابه دارند. همچنین، تبدیلات داده شده با استفاده از روابط (۲۷-۵) تا (۲۹-۵) یک ماتریس  $A_f$  تولید می کند که مقادیر ویژه اش خارج نیم صفحه سمت چپ مختلط می باشند. مدهای ناپایدار تولید شده بوسیله صفرهای تولید شده با ماتریس  $B_f \Delta(t)$  حذف می شوند که این به پاسخ پایدار با شرایط اولیه غیر صفر منجر می شود. به خاطر چنین وضعیتی، روش منطبق بر آنالیز مقادیر ویژه ماتریس  $A_f$  می تواند فقط شرایط پایداری را تولید کند.

به منظور آنالیز چنین محافظه کاری، فرض کنید  $\theta_f$  آرگومان یک مقدار ویژه ماتریس  $A^{\frac{1}{\alpha}}$  و  $\theta$  آرگومان مقدار ویژه سیستم  $A$  باشد. خط  $(D)$  در شکل (۵-۱۱) تابع  $F_\alpha$  را نشان می دهد که  $|\theta|$  را به  $|\theta_f|$  بر اساس  $\alpha$  متصل می کند.

$$[0, \pi] \rightarrow [0, 2\pi]$$

$$F_\alpha : x \rightarrow \frac{1}{\alpha} x$$

(۳۲-۵)



شکل ۵-۱۱  $F_\alpha$  تابعی از  $|\theta|$  و  $|\theta_f|$  و محدوده پایداری نتیجه شده [۲۲]

ب) قضیه پایداری بر اساس آنالیز هندسی محدوده پایداری

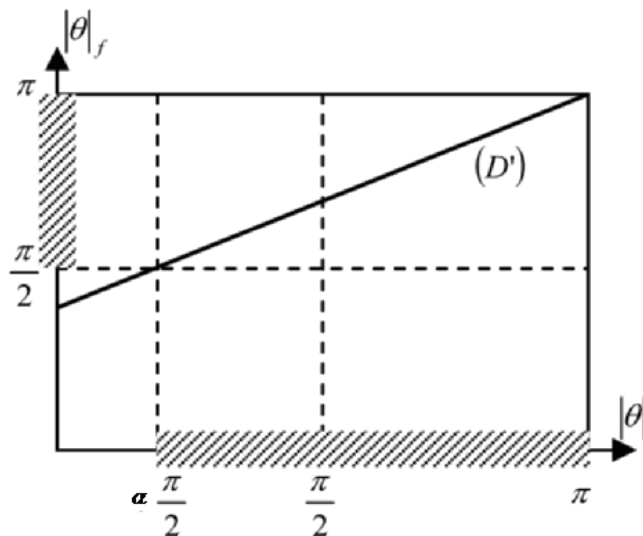
مشخصات کل محدوده پایداری

به منظور توصیف تمام محدوده پایداری  $D_s$ ، لازم است تابعی که هر  $\lambda \in D_s$  را به  $\lambda'$  (که متعلق به ناحیه محدبی از صفحه مختلط می باشد) متصل می کند تعریف کنیم. این ناحیه محدب ممکن است نیم صفحه سمت چپ صفحه مختلط باشد که مشخصه اش از طریق  $LMI$  در قضیه ۴-۵ بدست آمد. این تابع به صورت زیر می تواند تعریف شود:

$$[0, \pi] \rightarrow [0, 2\pi]$$

$$F'_\alpha: x \rightarrow \frac{1}{2-\alpha}x + \frac{1-\alpha}{2-\alpha}\pi \quad (33-5)$$

که با استفاده از خط  $(D')$  در شکل (۱۲-۵) نشان داده می شود.



شکل ۱۲-۵  $F'_\alpha$  تابعی از  $|\theta|$  و  $|\theta_f|$  و محدوده پایداری نتیجه شده [۲۲]

سیستم مرتبه صحیح معادل

با استفاده از  $F'_\alpha$  تعریف شده در (۳۳-۵)، تشخیص پایداری سیستم مرتبه کسری از طریق آنالیز پایداری

سیستم مرتبه صحیح معادل امکان پذیر است.

فرض کنید  $a = e^{j\beta}$ ، که  $j$  متغیر مختلط و  $\beta \in [0, \pi]$  می باشند. از آنجا که  $\beta = -j \ln(a)$  است می

توان رابطه زیر را نتیجه گرفت.

اگر

$$b = -(-a)^{\frac{1}{2-\alpha}}$$

آنگاه

$$\arg(b) = F'_\alpha(\arg(a)) \quad (34-5)$$

خواهد شد. بنابراین  $\arg(a) \in \left] \alpha \frac{\pi}{2}, \pi \right]$  است اگر  $\arg\left(-(-a)^{\frac{1}{2-\alpha}}\right) \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right]$  باشد. بنابراین پایداری

سیستم (۲۰-۵) با استفاده از قضیه ۴-۵ جهت سیستم مرتبه صحیح با ماتریس انتقال حالت  $-(-A)^{\frac{1}{2-\alpha}}$  قابل بررسی است.

قضیه ۶-۵: سیستم مرتبه کسری (۲۰-۵) پایدار  $t^{-\alpha}$  است اگر و فقط اگر یک ماتریس معین مثبت  $P \in S$  وجود داشته باشد بطوریکه نامساوی (۳۵-۵) برقرار باشد.

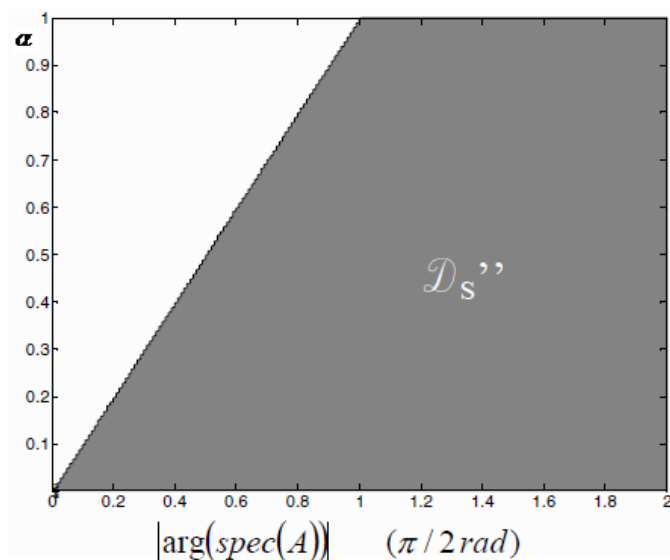
$$\left( -(-A)^{\frac{1}{2-\alpha}} \right)^T P + P \left( -(-A)^{\frac{1}{2-\alpha}} \right) < 0 \quad (۳۵-۵)$$

از آنجا که  $-(-A)^{\frac{1}{2-\alpha}}$  یک ماتریس مختلط می باشد، لازم است که قضیه ۶-۵ هنگام استفاده از حل کننده  $LMI$  کمی تغییر داده شود. بنابراین  $LMI$  بصورت (۳۶-۵) خواهد بود:

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re}\left(-(-A)^{\frac{1}{2-\alpha}}\right)^T P + P \operatorname{Re}\left(-(-A)^{\frac{1}{2-\alpha}}\right) & \operatorname{Im}\left(-(-A)^{\frac{1}{2-\alpha}}\right)^T P + P \operatorname{Im}\left(-(-A)^{\frac{1}{2-\alpha}}\right) \\ \operatorname{Im}\left(-(-A)^{\frac{1}{2-\alpha}}\right)^T P + P \operatorname{Im}\left(-(-A)^{\frac{1}{2-\alpha}}\right) & \operatorname{Re}\left(-(-A)^{\frac{1}{2-\alpha}}\right)^T P + P \operatorname{Re}\left(-(-A)^{\frac{1}{2-\alpha}}\right) \end{pmatrix} < 0 \quad (۳۶-۵)$$

اعتبار روش

شکل (۱۳-۵) محدوده پایداری  $D_s''$  را با استفاده از قضیه ۶-۵، بر اساس مقادیر  $\alpha$  و  $|\theta|$  نشان می دهد.



شکل ۵-۱۳. محدوده پایداری  $D_s''$  تعیین شده با قضیه بر اساس مرتبه کسری  $\alpha$  و  $|\theta|$  [۲۲]

هنگام مقایسه شکل (۵-۱۳) با شکل (۵-۸)، مشخص است که  $D_s'' = D_s$  خواهد بود. لذا این معیار تنها شرط کافی نیست بلکه شرط لازم برای تشخیص پایداری سیستم مرتبه کسری نیز می باشد.

### ج) معیار پایداری بر اساس مشخصه محدوده ناپایداری

تعریف مسأله

این مسئله بر این حقیقت بدیهی استوار است که یک سیستم کسری پایدار است اگر و فقط اگر ناپایدار نباشد. برای سیستم (۵-۱۹) مشخص است که مقادیر ویژه  $A$  در محدوده پایداری قرار می گیرند اگر و فقط اگر آنها در محدوده ناپایداری محذب واقع نشوند.

مشخصه کل محدوده ناپایداری

فرض کنید  $D_u$  محدوده ناپایداری شکل را نشان دهد. واضح است که  $\lambda \in C$  متعلق به  $D_u$  است اگر و فقط اگر آن متعلق به هر دو ناحیه  $D_{u1}$  و  $D_{u2}$  تعریف شده به صورت زیر باشد.

$$D_{u1} = \left\{ \lambda \in C \operatorname{Re} \left( \lambda \exp \left( j(1-\alpha) \frac{\pi}{2} \right) \right) \geq 0 \right\} \quad (۵-۳۷)$$

$$D_{u2} = \left\{ \lambda \in C \operatorname{Re} \left( \lambda \exp(j(\alpha-1)\frac{\pi}{2}) \right) \geq 0 \right\} \quad (38-5)$$

بنابراین  $\lambda$  در  $D_{u2}$  قرار دارد اگر و فقط اگر نامساوی (39-5) برقرار باشد.

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \left( \lambda \exp(j(1-\alpha)\frac{\pi}{2}) \right) \geq 0 \\ \operatorname{Re} \left( \lambda \exp(j(\alpha-1)\frac{\pi}{2}) \right) \geq 0 \end{cases} \quad (39-5)$$

یا اگر و فقط اگر رابطه زیر برقرار باشد.

$$\begin{cases} \lambda \exp(j(1-\alpha)\frac{\pi}{2}) + \left( \lambda \exp(j(1-\alpha)\frac{\pi}{2}) \right)^* \geq 0, \\ \lambda \exp(j(\alpha-1)\frac{\pi}{2}) + \left( \lambda \exp(j(\alpha-1)\frac{\pi}{2}) \right)^* \geq 0 \end{cases} \quad (40-5)$$

که می تواند همانند زیر نوشته شود:

$$\begin{cases} \lambda r + \lambda^* r^* \geq 0 \\ \lambda r^* + \lambda^* r \geq 0 \end{cases} \quad (41-5)$$

که  $r = \sin\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right) + j\cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)$  می باشد. بنابراین سیستم کسری پایدار  $t^{-\gamma}$  است اگر و فقط اگر

$$\exists \lambda \in D_{u2}, q \in C^n : (\lambda I - A)q = 0, q \neq 0 \quad (42-5)$$

یا اگر و فقط اگر

$$\exists \lambda \in C, q \in C^n, \begin{cases} \lambda r + \lambda^* r^* \geq 0 \\ \lambda r^* + \lambda^* r \geq 0 \end{cases} : (\lambda I - A)q = 0, q \neq 0 \quad (43-5)$$

باشد. از آنجا که برای بعضی مقادیر  $\lambda \in \operatorname{spec}(A)$ ،  $\lambda^* \in \operatorname{spec}(A)$  و چون که  $D_{u1}$  و  $D_{u2}$  نسبت به

قسمت حقیقی صفحه مختلط قرینه می باشند، شرط (43-5) به صورت زیر می شود:

$$\exists \lambda_1 \in \operatorname{spec}(A), \lambda_1 \in D_{u1} \Leftrightarrow \exists \lambda_2 \in \operatorname{spec}(A), \lambda_2 \in D_{u2} \quad (44-5)$$

و سیستم کسری پایدار  $t^{-\gamma}$  است اگر و فقط اگر رابطه زیر برقرار باشد.

$$\exists \lambda \in C, q \in C^n, \lambda r + \lambda^* r^* \geq 0 : (\lambda I - A)q = 0, q \neq 0 \quad (45-5)$$

اکنون می توان از لم داده شده در زیر استفاده کرد:

لم ۵-۱: یک بردار  $p = \lambda q \neq 0$  برای مقادیری که  $\lambda + \lambda^* \geq 0$  است وجود دارد اگر و فقط اگر  $pq^* + qp^* \geq 0$  باشد.

با بکاربردن رابطه (۴۳-۵)، سیستم کسری پایدار  $t^{-\gamma}$  است اگر و فقط اگر

$$\exists p = \lambda r q \neq 0, q \in C^n, pq^* + qp^* \geq 0 : (\lambda I - A)q = 0, q \neq 0, \quad (46-5)$$

یا اگر و فقط اگر

$$\exists q \neq 0, q \in C^n, \lambda r p q^* + q q^* \lambda^* r^* \geq 0 : (\lambda I - A)q = 0. \quad (47-5)$$

باشد. چون  $\lambda q = Aq$  است، سیستم کسری پایدار  $t^{-\gamma}$  است اگر و فقط اگر

$$\exists q \neq 0, q \in C^n, r A q q^* + q q^* A^T r^* \geq 0. \quad (48-5)$$

قضیه ۵-۷: سیستم پایدار  $t^{-\gamma}$  است اگر و فقط اگر وجود نداشته باشد هیچ ماتریس مرتبه غیر منفی

$Q \in C^{n \times n}$  بطوریکه رابطه

$$\begin{pmatrix} (AQ + QA^T) \sin(\alpha \frac{\pi}{2}) & (AQ - QA^T) \cos(\alpha \frac{\pi}{2}) \\ (AQ - QA^T) \cos(\alpha \frac{\pi}{2}) & (AQ + QA^T) \sin(\alpha \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} \geq 0 \quad (48-5)$$

برقرار باشد.



## فصل ششم

پایداری سیستم‌های مرتبه کسری غیرخطی

## ۱-۶ مقدمه

همانند سیستم های مرتبه صحیح، در سیستمهای مرتبه کسری نیز، تحلیل مدل های خطی سیستم ها، به مراتب ساده تر و دقیق تر از مدل های غیرخطی خواهد بود. بنابراین معمولاً در بررسی سیستمهای غیرخطی مرتبه کسری نیز، چنانچه امکان پذیر باشد، سعی می شود با خطی کردن سیستم، حول نقطه کار نامی، به تحلیل مدل خطی حاصل پرداخته شود. این شیوه تحلیل، از مرسوم ترین و مفیدترین شیوه های تحلیل مهندسی است و هرگاه چنین امکانی وجود داشته باشد، بدون هیچ پرسشی، این کار انجام می شود. لیکن خطی سازی، به تنهایی نمی تواند پاسخگوی نیاز مهندسین باشد زیرا دو محدودیت اصلی در این روش وجود دارد. نخست آن که به دلیل تقریبی بودن خطی سازی، در مجاورت نقطه کار، فقط می توان رفتار محلی سیستم را در مجاورت نقطه کار پیش بینی کرد و نمی توان رفتار غیرمحلی سیستم را در نقاط دور از نقطه کار، و یا رفتار جامع سیستم را در تمام فضای حالت پیش بینی نمود [۲۷].

نکته دیگر آن که دینامیک سیستم غیر خطی، به مراتب غنی تر از دینامیک سیستم خطی است، زیرا پدیده های اساساً غیرخطی مانند نقاط تعادل چندگانه و ... وجود دارند که فقط در حضور غیرخطی گری امکان حضور می یابند و از این رو با مدل های خطی، قابل توصیف و یا حتی قابل پیش بینی نیستند. در این فصل از رساله، تلاش شده است تا روش غیر مستقیم و مستقیم لیاپانف و پایداری میتاگ لفلر، برای تحلیل سیستمهای غیرخطی مرتبه غیر صحیح تعمیم داده شود.

## ۲-۶ تحلیل پایداری سیستمهای غیرخطی کسری به روش خطی سازی ( لیاپانف غیرمستقیم )

قضیه ۱-۶ : سیستم مرتبه کسری غیرخطی (۱-۶) را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} D^{\alpha_1} x_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ D^{\alpha_2} x_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \cdot \\ \cdot \\ D^{\alpha_n} x_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad (1-6)$$

که  $\alpha_i \in (0,1)$ ,  $i=1,2,\dots,n$  هست. فرض کنید  $X^{eq} = (x_1^{eq}, x_2^{eq}, \dots, x_n^{eq})$  نقطه تعادل سیستم است

به طوریکه  $f_i(x_1^{eq}, x_2^{eq}, \dots, x_n^{eq}) = 0$  باشد و  $A = \frac{\partial f}{\partial X} \Big|_{X^{eq}}$ ,  $f = [f_1, f_2, \dots, f_n]$  ماتریس ژاکوبین در

نقطه تعادل  $X^{eq}$  است، آنگاه نقطه تعادل  $X^{eq}$  پایدار مجانبی است هرگاه  $\frac{\alpha_m \pi}{2} > |arg(eig(A))|$  باشد

که  $\alpha_m = \max(\alpha_i), i=1,2,\dots,n$  می باشد.

اثبات :

برای ارزیابی پایداری مجانبی سیستم مورد مطالعه، یک همسایگی از نقطه تعادل در نظر گرفته می شود.

$$x_i(t) = x_i^{eq} + \varepsilon_i(t), \quad i=1,2,\dots,n \quad (2-6)$$

که  $\varepsilon_i(t)$ ، اغتشاشی حول نقطه تعادل خواهد بود که در رابطه زیر صدق می کند.

$$D^{\alpha_i} \varepsilon_i(t) = f_i(x_1^{eq} + \varepsilon_1, x_2^{eq} + \varepsilon_2, \dots, x_n^{eq} + \varepsilon_n) \quad (3-6)$$

اما با استفاده از بسط تیلور روابط زیر را داریم

$$f_i(x_1^{eq} + \varepsilon_1, x_2^{eq} + \varepsilon_2, \dots, x_n^{eq} + \varepsilon_n); \quad f_i(x_1^{eq}, x_2^{eq}, \dots, x_n^{eq}) + \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \Big|_{eq} \cdot \varepsilon_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \Big|_{eq} \cdot \varepsilon_2 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \Big|_{eq} \cdot \varepsilon_n$$

$$\Rightarrow f_i(x_1^{eq} + \varepsilon_1, x_2^{eq} + \varepsilon_2, \dots, x_n^{eq} + \varepsilon_n); \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \Big|_{eq} \varepsilon_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \Big|_{eq} \varepsilon_2 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \Big|_{eq} \varepsilon_n$$

$$D^{\alpha_i} \varepsilon_i(t); \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \Big|_{eq} \varepsilon_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \Big|_{eq} \varepsilon_2 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \Big|_{eq} \varepsilon_n, \quad i=1,2,\dots,n.$$

چون  $f_i(x_1^{eq}, x_2^{eq}, \dots, x_n^{eq}) = 0$  می باشد، پس در نتیجه سیستم زیر را داریم.

$$\begin{bmatrix} \frac{d^{\alpha_1} x_1}{dt^{\alpha_1}} \\ \frac{d^{\alpha_2} x_2}{dt^{\alpha_2}} \\ \vdots \\ \frac{d^{\alpha_n} x_n}{dt^{\alpha_n}} \end{bmatrix} = J\varepsilon \quad (4-6)$$

که

$$a_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{eq}, i, j = 1, 2, \dots, n. \quad \text{و} \quad J = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n]^T$$

می باشند. با بکاربردن قضیه ۵-۱، مشابه  $t^{-\alpha_m}$ ،  $\varepsilon(t)$  کاهشی است اگر  $\frac{\alpha_m \pi}{2} > |arg(eig(A))|$  باشد،

که این پایداری مجانبی نقطه تعادل  $X^{eq}$  سیستم کسری غیرخطی (۶-۱) را برآورده می کند.

مثال ۶-۱: برای آشنایی بیشتر با روش معرفی شده، در این قسمت آنالیز دینامیکی سیستم کسری

غیرخطی *Chen* را بررسی می کنیم.

سیستم مرتبه کسری *Chen* به صورت معادله (۶-۵) می باشد [۲۸].

$$\begin{cases} \frac{d^{\alpha_1} x_1}{dt^{\alpha_1}} = a(x_2 - x_1) \\ \frac{d^{\alpha_2} x_2}{dt^{\alpha_2}} = (c - a)x_1 - x_1 x_3 + cx_2 \\ \frac{d^{\alpha_3} x_3}{dt^{\alpha_3}} = x_1 x_2 - bx_3 \end{cases} \quad (5-6)$$

$a, b, c$  مقادیر حقیقی هستند و  $0 < \alpha_i < 1, i = 1, 2, 3$  می باشد. معادله فوق یک جذب کننده آشوبی

با پارامترهای  $a = 35, b = 3$  و  $c = 28$  و  $\alpha = (0.985, 0.99, 0.98)$  دارد.

بدیهی است که اگر  $a > 2c$  باشد سیستم (۵-۶) فقط یک نقطه تعادل در  $O(0,0,0)$  دارد و اگر  $a < 2c$

باشد سیستم (۵-۶) سه نقطه تعادل در  $O = (0,0,0)$ ،  $C^+ = (\sqrt{(2c-a)b}, \sqrt{(2c-a)b}, 2c-a)$  و

$$C^- = (-\sqrt{(2c-a)b}, -\sqrt{(2c-a)b}, 2c-a) \text{ خواهد داشت.}$$

قضیه ۶-۲ الف) نقطه تعادل  $O$  پایدار مجانبی است هرگاه رابطه زیر برقرار باشد.

$$\begin{cases} b > 0 \\ a > 2c > 0 \end{cases} \quad (۶-۶)$$

ب) نقاط تعادل  $C^+$  و  $C^-$  پایدار مجانبی هستند هرگاه شرایط (۷-۶) برآورده شود.

$$\begin{cases} c > \frac{a}{2} > 0 \\ (a+b-c)c - 2a(2c-a) > 0 \end{cases} \quad (۷-۶)$$

اثبات الف).

$$A_O = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ c-a & c & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \quad (۸-۶)$$

$A_O$  ماتریس ژاکوبین سیستم در نقطه تعادل  $O$  می باشد و مقادیر ویژه آن عبارتند از

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(a-c) \pm \sqrt{c^2 - 3a^2 + 6ac}}{2}, \lambda_3 = -b. \quad (۹-۶)$$

$\lambda_{1,2} \leq 0$  و  $\lambda_3 \leq 0$  می باشند هرگاه  $a > 2c > 0$  و  $b > 0$  باشند. بنابراین

است که در آن  $\alpha_M = \max(\alpha_i \leq 1), 1 \leq i \leq 3$  می باشد. لذا نقطه

تعادل  $O$  پایدار مجانبی است.

اثبات ب): ماتریسهای ژاکوبین سیستم در نقاط  $C^+$  و  $C^-$  عبارتند از:

$$A_{C^+} = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ -c & c & -\sqrt{(2c-a)b} \\ \sqrt{(2c-a)b} & \sqrt{(2c-a)b} & -b \end{bmatrix} \quad (۱۰-۶)$$

$$A_{C^-} = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ -c & c & \sqrt{(2c-a)b} \\ -\sqrt{(2c-a)b} & -\sqrt{(2c-a)b} & -b \end{bmatrix} \quad (11-6)$$

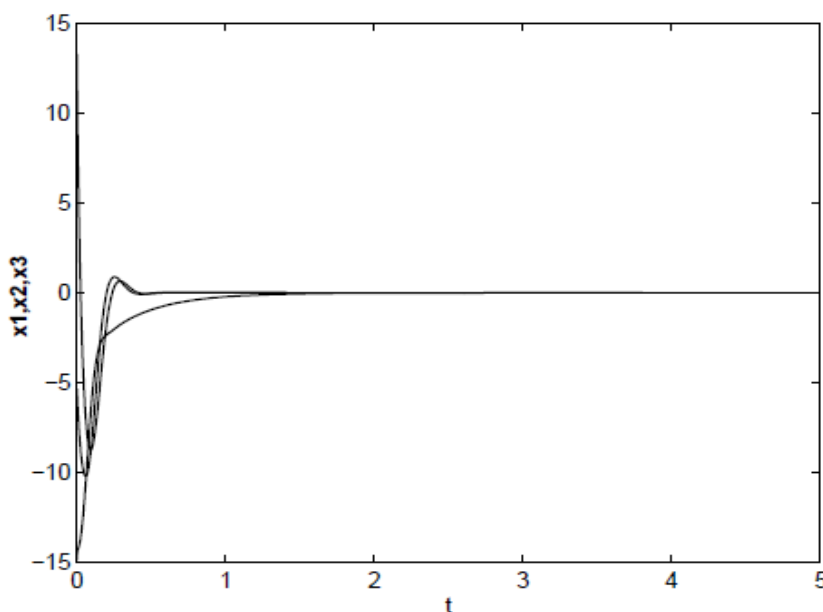
معادله مشخصه آنها به صورت  $f(\lambda) = \lambda^3 + U\lambda^2 + V\lambda + W = 0$  می باشد. که  $U = a+b-c$  ،  $V = bc$  ،

و  $W = 2ab(2c-a)$  می باشند. با توجه به معیار راث-هورویتز مقادیر ویژه همگی منفی هستند هرگاه

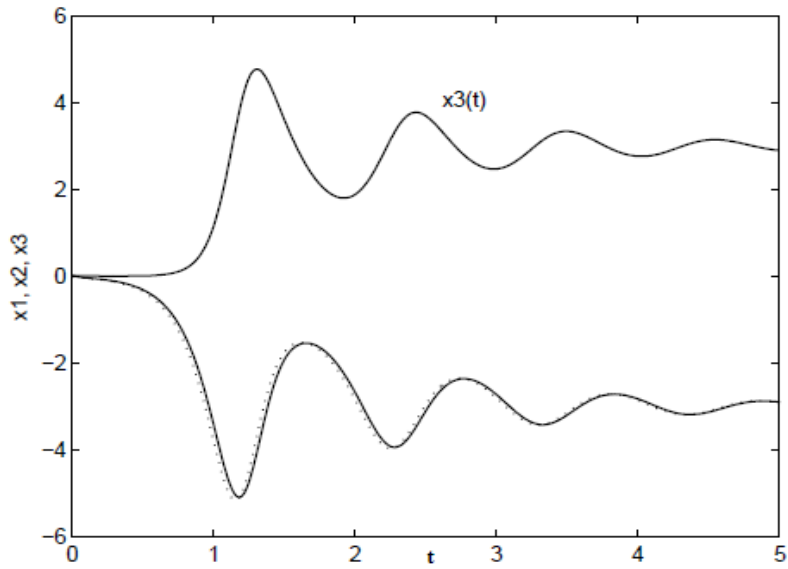
$$\begin{cases} c > \frac{a}{2} > 0 \\ b > c + 3a - \frac{2a^2}{c} > 0 \end{cases} \quad (12-6)$$

باشد. که معادله (12-6) شرط پایداری نقاط  $C^+$  و  $C^-$  را برآورده می کند. نتایج عددی در شکل‌های (6-6)

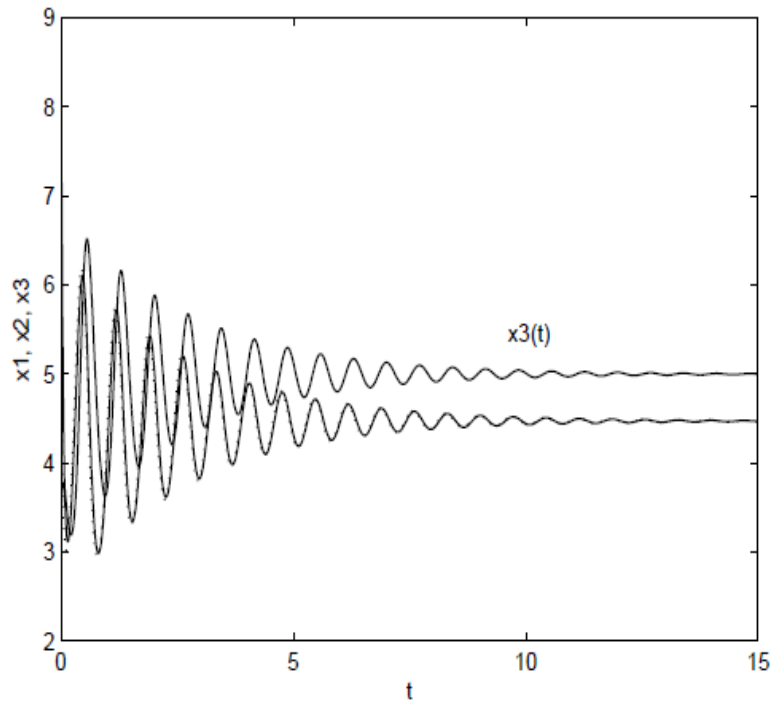
(1) تا (6-3) موید همین مطالب است.



شکل 6-1 متغیرهای حالت سیستم، نقطه  $0$  پایدار است هرگاه  $c > \frac{a}{2}$



شکل ۲-۶ متغیرهای حالت سیستم، نقطه  $O$  ناپایدار است هرگاه  $c < \frac{a}{2}$



شکل ۳-۶ متغیرهای حالت سیستم، نقاط  $C^+$  و  $C^-$  پایدار هستند هرگاه  $c > \frac{a}{2} > 0, b > c + 3a - \frac{2a^2}{c} > 0$

## ۳-۶ پایداری میتاگ - لفلر سیستمهای دینامیکی غیرخطی کسری [۳۴]

در سیستمهای غیر خطی، روش دوم لیاپانف روشی جهت آنالیز پایداری سیستمها بدون حل معادله دیفرانسیل آنها ارائه می دهد. ایده کلی این روش این است که نشان می دهد سیستم پایدار است اگر تابع لیاپانف برای سیستم وجود داشته باشد. روش مستقیم لیاپانف یک شرط کافی برای نشان دادن پایداری سیستمهای غیرخطی است، این بدان معنی است که سیستم ممکن است هنوز پایدار باشد حتی اگر تابع لیاپانفی جهت بررسی پایداری سیستم پیدا نشود.

اخیراً، محاسبات کسری برای آنالیز پایداری سیستمهای غیرخطی معرفی شده است، برای مثال در مراجع [۳۳،۳۲،۳۱،۳۰،۲۹] روشهای مرتبه صحیح آنالیز پایداری برای سیستمهای دینامیکی مرتبه کسری توسعه داده شده است. برای بسط کاربردهای محاسبات کسری به سیستمهای غیر خطی کسری، آقای یان لی<sup>۳۳</sup> و چن<sup>۳۴</sup> (۲۰۰۹) روش پایداری میتاگ - لفلر و روش مستقیم لیاپانف کسری را همراه با دید قوی به دانش تئوری سیستم و محاسبات کسری ارائه دادند. در این بخش ابتدا روش مستقیم لیاپانف کسری و پایداری میتاگ - لفلر سیستمهای وابسته به زمان را بررسی می شود. سپس کاربرد سیستمهای مرتبه کسری ریمان - لیویل با استفاده از سیستمهای مرتبه کسری کاپوتو بسط داده خواهد شد. در انتها اصل مقایسه کسری و چندین نامساوی کسری دیگر برای کاربرد در محاسبات کسری توسعه داده می شود.

### ۳-۶-۱ سیستم های وابسته به زمان کسری

سیستم وابسته به زمان کاپوتو یا ریمان - لیویل کسری زیر را در نظر بگیرید:

$${}_{t_0} D_t^\alpha x(t) = f(x,t) \quad (۱۳-۶)$$

---

<sup>۳۳</sup> Yan Li

<sup>۳۴</sup> Chen



که شرایط اولیه  $x(t_0)$  می باشد،  $D$  هر دو عملگر کاپوتو و ریمان - لیویل کسری را نشان می دهد.  $\alpha \in (0,1)$  و  $f: [t_0, \infty] \times \Omega \rightarrow R^n$  تابعی قطعه پیوسته در  $t$  و لپشیتز محلی در  $x$  می باشد.

نقطه تعادل (۱۳-۶) به صورت زیر تعریف می شود:

تعریف ۱-۶: ثابت  $x_0$  نقطه تعادل سیستم دینامیکی کسری (۱۳-۶) است اگر و فقط اگر  $f(t, x_0) = {}_{t_0}D_t^\alpha x_0$  باشد.

بدون از دست دادن کلیت موضوع، فرض کنید که نقطه  $x = 0$  نقطه تعادل باشد.

۱-۳-۶-۱ شرط لپ شیتز و سیستم های وابسته به زمان کسری کاپوتو

این حقیقت که  $f(x, t)$  محدود محلی و لپشیتز محلی در  $x$  است وجود و یکتایی جواب سیستم مرتبه کسری (۱۳-۶) را تضمین می کند. در قسمت بعد رابطه بین شرط لپ شیتز و سیستم مرتبه کسری وابسته به زمان را مطالعه می کنیم.

لم ۱-۶: برای تابع  $f(t, x)$  پیوسته حقیقی در (۱۳-۶)، رابطه (۱۴-۶) برقرار است

$$\| {}_{t_0}D_t^{-\alpha} f(t, x(t)) \| \leq {}_{t_0}D_t^{-\alpha} \| f(t, x(t)) \| \quad (14-6)$$

که  $\alpha \geq 0$  و  $\| \cdot \|$  علامت نرم می باشد.

اثبات: از تعریف انتگرال کسری و خواص نرم رابطه (۱۵-۶) بدست می آید.

$$\begin{aligned} \| {}_{t_0}D_t^{-\alpha} f(t, x(t)) \| &= \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{f(\tau, x(\tau))}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau \right\| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{\| f(\tau, x(\tau)) \|}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau = {}_{t_0}D_t^{-\alpha} \| f(t, x(t)) \| \end{aligned} \quad (15-6)$$

قضیه ۳-۶. در معادله (۱۳-۶)، با فرض اینکه  ${}_{t_0}D_t^\alpha = {}_{t_0}^C D_t^\alpha$  باشد. اگر  $x = 0$  یک نقطه تعادل سیستم (

۱۳-۶) باشد،  $f$  لپشیتز بر  $x$  با ثابت لپشیتز  $l$  و قطعه پیوسته نسبت به  $t$  می باشد، آنگاه جواب معادله (۱۳-۶) رابطه زیر را تضمین می کند.

$$\| x(t) \| \leq \| x(t_0) \| E_\alpha(l(t-t_0)^\alpha), \quad \alpha \in (0,1) \quad (16-6)$$

اثبات: بعد از انتگرال کسری  ${}_t D_t^{-\alpha}$  از دو طرف معادله (۶-۱۳)، رابطه (۶-۱۷) از لم ۶-۱ و شرط لیب شیتز بدست می آید.

$$\begin{aligned} \|x(t)\| - \|x(t_0)\| &\leq \|x(t) - x(t_0)\| = \left\| {}_t D_t^{-\alpha} f(t, x(t)) \right\| \\ &\leq {}_t D_t^{-\alpha} \|f(t, x(t))\| \leq l_{t_0} \|x(t)\| \end{aligned} \quad (۶-۱۷)$$

با استفاده از تابع غیر منفی  $M(t)$  نامساوی (۶-۱۷) به رابطه (۶-۱۸) تبدیل می شود.

$$\|x(t)\| - \|x(t_0)\| = l_{t_0} D_t^{-\alpha} \|x(t)\| - M(t) \quad (۶-۱۸)$$

با تبدیل لاپلاس گیری از طرفین رابطه (۶-۱۸) داریم:

$$\|x(s)\| = \frac{\|x(t_0)\| - s^\alpha M(s)}{s^\alpha - 1} \quad (۶-۱۹)$$

با معکوس لاپلاس گیری از (۶-۱۹) رابطه زیر نتیجه می شود.

$$\|x(t)\| = \|x(t_0)\| E_\alpha(l(t-t_0)^\alpha) - M(t) * [t^{-1} E_{\alpha,0}(l(t-t_0)^\alpha)] \quad (۶-۲۰)$$

که \* عملگر کانولوشن و  $\frac{dE_\alpha(l(t-t_0)^\alpha)}{dt} \geq 0$  می باشند. در نتیجه رابطه (۶-۲۱) را

خواهیم داشت.

$$\|x(t)\| \leq \|x(t_0)\| E_\alpha(l(t-t_0)^\alpha) \quad (۶-۲۰)$$

### ۶-۳-۲ پایداری میتاگ- لفلر

پایداری لیاپانف ابزار مهمی برای بررسی پایداری سیستمهای غیرخطی ارائه می دهد. ابتدا روش مستقیم لیاپانف مطرح می شود، که شامل پیدا کردن تابع لیاپانف برای سیستم غیرخطی داده شده است. اگر چنین تابعی وجود داشته باشد، سیستم پایدار است. توجه شود که روش مستقیم لیاپانف شرط کافی است، که این بدان معنی است که اگر نتوان تابع لیاپانفی برای نتیجه گیری در مورد پایداری سیستم پیدا کرد، سیستم ممکن است هنوز پایدار باشد و نمی توان ادعا کرد که سیستم ناپایدار است. در این قسمت روش مستقیم لیاپانف را بوسیله در نظر گرفتن یکی نشدن عملگرهای مرتبه کسری توسعه می دهیم. به

این معنی، که سیستم های غیرخطی خودشان می توانند مرتبه کسری داشته باشند و تابع لیاپانف می تواند تابع کسری زمانی باشد. اجازه دهید که ابتدا پایداری در حالت میتاگ - لفلر را تعریف کنیم.

تعریف ۲-۶ ( تعریف پایداری میتاگ- لفلر ) . جواب (۱۳-۶) پایدار میتاگ لفلر است اگر رابطه (۲۱-۶) برقرار باشد.

$$\|x(t)\| \leq \{m[x(t_0)]E_\alpha(-\lambda(t-t_0)^\alpha)\}^b \quad (21-6)$$

که  $t_0$  زمان اولیه ،  $\alpha \in (0,1)$  ،  $\lambda > 0$  ،  $b > 0$  ،  $m(x) \geq 0$  ،  $m(0) = 0$  ، و  $m(x)$  لپ شیتیز بر  $x \in B \in R^n$  با ثابت لپ شیتز  $m_0$  می باشند.

### ۳-۳-۶ روش مستقیم لیاپانف توسعه یافته مرتبه کسری

در این قسمت روش مستقیم لیاپانف که منجر به پایداری میتاگ - لفلر می شود ارائه خواهد شد. قضیه ۴-۶. فرض کنید  $x=0$  یک نقطه تعادل سیستم (۱۳-۶) باشد و  $D \subset R^n$  محدوده شامل نقطه تعادل باشد. فرض کنید  $V(t,x(t)): [0,\infty) \times D \rightarrow R$  یک تابع مشتق پذیر پیوسته و لپ شیتز محلی نسبت به  $x$  باشد بطوریکه روابط زیر برقرار باشد.

$$\alpha_1 \|x\|^a \leq V(t,x(t)) \leq \alpha_2 \|x\|^{ab} \quad (22-6)$$

$${}_0^C D_t^\beta V(t,x(t)) \leq -\alpha_3 \|x\|^{ab} \quad (23-6)$$

که  $t \geq 0, x \in D, \beta \in (0,1)$  و  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  و  $a, b$  ثابتهای مثبت اختیاری می باشند، آنگاه  $x=0$  پایدار میتاگ - لفلر می باشد. اگر فرض بر کل  $R^n$  باشد، آنگاه  $x=0$  پایدار میتاگ- لفلر کلی است.

اثبات. از معادله (۲۲-۶) و (۲۳-۶) رابطه (۲۴-۶)

$${}_0^C D_t^\beta V(t,x(t)) \leq -\frac{\alpha_3}{\alpha_2} V(t,x(t)) \quad (24-6)$$

بدست می آید. با استفاده از تابع غیرمنفی  $M(t)$  نامساوی (۲۴-۶) به رابطه (۲۵-۶) تبدیل می شود.

$${}_0^C D_t^\beta V(t,x(t)) + M(t) = -\alpha_3 \alpha_2^{-1} V(t,x(t)) \quad (25-6)$$

با تبدیل لاپلاس گیری از طرفین معادله (۲۵-۶) معادله (۲۶-۶) را خواهیم داشت.

$$s^\beta V(s) - V(0)s^{\beta-1} + M(s) = -\alpha_3 \alpha_2^{-1} V(s) \quad (26-6)$$

که  $V(0) = V(0, x(0))$  و  $V(s) = L\{V(t, x(t))\}$  می باشند. از (۲۶-۶) رابطه زیر نتیجه می شود:

$$V(s) = \frac{V(0)s^{\beta-1} - M(s)}{s^\beta + \frac{\alpha_3}{\alpha_2}} \quad (27-6)$$

اگر  $x(0) = 0$ ، برای مثال  $V(0) = 0$ ، از حل (۱۳-۶)  $x = 0$  می شود. اگر  $x(0) \neq 0$  باشد،  $V(0) > 0$

می شود. چون  $V(t, x(t))$  لپ شیتز محلی نسبت به  $x$  می باشد، از قضیه وجود و یکتایی مرتبه کسری

و معکوس لاپلاس جواب معادله (۲۵-۶) :

$$V(t) = V(0)E_\beta\left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}t^\beta\right) - M(t) * [t^{\beta-1}E_{\beta,\beta}\left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}t^\beta\right)] \quad (26-6)$$

می شود. چون  $t^{\beta-1}$  و  $E_{\beta,\beta}\left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}t^\beta\right)$  هر دو توابع غیر منفی می باشند لذا

$$V(t) \leq V(0)E_\beta\left(-\alpha_3 \alpha_2^{-1} t^\beta\right) \quad (27-6)$$

خواهد بود. با جایگذاری این معادله در (۲۲-۶) معادله

$$\|x(t)\| \leq \left[ \frac{V(0)}{\alpha_1} E_\beta\left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_2} t^\beta\right) \right]^{\frac{1}{a}} \quad (28-6)$$

بدست می آید، که  $\frac{V(0)}{\alpha_1} > 0$  برای  $x(0) \neq 0$  می باشد. فرض کنید

$$m = \frac{V(0)}{\alpha_1} = \frac{V(0, x(0))}{\alpha_1} \geq 0 \quad (29-6)$$

باشد، لذا

$$\|x(t)\| \leq \left[ m E_\beta\left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_2} t^\beta\right) \right]^{\frac{1}{a}} \quad (30-6)$$

می شود، که  $m = 0$  می شود اگر و فقط  $x(0) = 0$  باشد. چون  $V(t, x(t))$  لیپ شیتز نسبت به  $x$  است

و  $V(0, x(0)) = 0$  می باشد اگر و فقط اگر  $x(0) = 0$  باشد، پس  $m = \frac{V(0, x(0))}{\alpha_1}$  لیپ شیتز نسبت به

$x(0)$  بوده و  $m(0) = 0$  می شود، که این به معنی پایداری میتاگ لفلر سیستم خواهد بود.

لم ۶-۲. فرض کنید  $\beta \in (0, 1)$  و  $M(0) \geq 0$  باشد آنگاه

$${}_0^c D_t^\beta M(t) \leq {}_0 D_t^\beta M(t) \quad (۳۱-۶)$$

می شود. که  $D$  و  ${}^c D$  به ترتیب عملگرهای ریمان - لیویل و کاپوتو کسری می باشد.

اثبات. با استفاده از ترکیب عملگرهای کسری [۳۳] معادله (۳۲-۶) بدست می آید.

$${}_0^c D_t^\beta M(t) = {}_0 D_t^{\beta-1} \frac{d}{dt} M(t) = {}_0 D_t^\beta M(t) - \frac{M(0)t^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} \quad (۳۲-۶)$$

چون  $\beta \in (0, 1)$  و  $M(0) \geq 0$  می باشد لذا  ${}_0^c D_t^\beta M(t) \leq {}_0 D_t^\beta M(t)$  خواهد شد.

قضیه ۶-۵ فرض کنید که فرضیات قضیه ۶-۴ بجز جایگذاری  ${}_0^c D_t^\beta$  با  ${}_0 D_t^\beta$  برآورده شود، آنگاه رابطه زیر را خواهیم داشت:

$$\|x(t)\| \leq \left[ \frac{V(0)}{\alpha_1} E_\beta \left( -\frac{\alpha_3}{\alpha_2} t^\beta \right) \right]^{\frac{1}{a}} \quad (۳۳-۶)$$

اثبات. از لم ۶-۲ و از اینکه  $V(t, x) \geq 0$  و  ${}_0^c D_t^\beta V(t, x(t)) \leq {}_0 D_t^\beta V(t, x(t))$  است، رابطه

$${}_0^c D_t^\beta V(t, x(t)) \leq {}_0 D_t^\beta V(t, x(t)) \leq -\alpha_3 \|x\|^{ab} \quad (۳۴-۶)$$

برآورده خواهد شد. مشابه اثبات قضیه ۶-۴ رابطه (۳۳-۶) نتیجه می شود.

قضیه ۶-۶ برای سیستم مرتبه کسری، که  ${}_t D_t^\alpha = {}_0 D_t^\alpha$  است و  $f(t, x)$  شرط لیپ شیتز با ثابت لیپ

شیتز  $l > 0$  را برآورده می کند، فرض کنید که تابع لیاپانف  $V(t, x)$  شرایط زیر را داشته باشد:

$$\alpha_1 \|x\|^a \leq V(t, x) \leq \alpha_2 \|x\| \quad (۳۵-۶)$$

$$\dot{V}(t, x) \leq -\alpha_3 \|x\| \quad (۳۶-۶)$$

که  $\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, a$  ثابت های مثبت هستند و  $\dot{V}(t, x) = \frac{dV(t, x)}{dt}$  می باشد. آنگاه رابطه زیر برقرار خواهد بود:

$$\|x(t)\| \leq \left[ \frac{V(0, x(0))}{\alpha_1} E_{1-\alpha} \left( -\frac{\alpha_3}{\alpha_2} t^{1-\alpha} \right) \right]^{\frac{1}{a}} \quad (37-6)$$

اثبات. از معادله (35-6) و (36-6)، قضیه 3-6 و لم 1-6 می توان فهمید که:

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^{1-\alpha} V(t, x) &= {}_0^C D_t^{-\alpha} \dot{V}(t, x) \leq -\alpha_3 {}_0^C D_t^{-\alpha} \|x\| \\ &\leq -\alpha_3 t^{-1} {}_0^C D_t^{-\alpha} \|f(t, x)\| \leq -\alpha_3 t^{-1} \|{}_0^C D_t^{-\alpha} f(t, x)\| = -\alpha_3 t^{-1} \|x\| \end{aligned} \quad (38-6)$$

که  $[{}_0^C D_t^{\alpha-1} x(t)]_{t=0} = 0$  است. بنابراین رابطه (37-6) می تواند با استفاده از قضیه 4-6 بدست آید.

### 4-3-6 روش مستقیم لیاپانف کسری با استفاده از توابع کلاس $k$

در این بخش، توابع کلاس  $k$  برای آنالیز روش مستقیم لیاپانف کسری بکار برده می شود.

تعریف 3-6 یک تابع پیوسته  $\alpha: [0, t) \rightarrow [0, \infty)$  متعلق به کلاس  $k$  است، اگر و فقط اگر اکیداً افزایشی باشد و  $\alpha(0) = 0$  باشد.

لم 3-6 (اصل مقایسه کسری) فرض کنید  $x(0) = y(0)$  بوده و  $\beta \in (0, 1)$  و  ${}_0^C D_t^\beta x(t) \geq {}_0^C D_t^\beta y(t)$  باشد، آنگاه  $x(t) \geq y(t)$  خواهد بود.

اثبات. از اینکه  ${}_0^C D_t^\beta x(t) \geq {}_0^C D_t^\beta y(t)$  می توان نتیجه گرفت که تابع غیر منفی  $m(t)$  وجود دارد که رابطه زیر را برآورده کند:

$${}_0^C D_t^\beta x(t) = m(t) + {}_0^C D_t^\beta y(t) \quad (39-6)$$

با تبدیل لاپلاس گیری از معادله (39-6) معادله

$$s^\beta X(s) - s^{\beta-1} x(0) = M(s) + s^\beta Y(s) - s^{\beta-1} y(0) \quad (40-6)$$

بدست می آید. از اینکه  $x(0) = y(0)$  می توان رابطه زیر را نتیجه گرفت.

$$X(s) = s^{-\beta} M(s) + Y(s) \quad (41-6)$$

با معکوس لاپلاس گیری از معادله قبلی رابطه

$$x(t) = {}_0 D_t^{-\beta} m(t) + y(t) \quad (42-6)$$

بدست می آید. از اینکه  $m(t) \geq 0$  است  $x(t) \geq y(t)$  نتیجه می شود.

قضیه ۶-۷ فرض کنید  $x=0$  نقطه تعادل سیستم وابسته به زمان مرتبه کسری (۶-۱۳) باشد. و تابع

لیاپانف  $V(t, x(t))$  و توابع کلاس  $k$   $\alpha_i$  ( $i=1,2,3$ ) وجود داشته باشد که روابط زیر را برآورده کند:

$$\alpha_1 \|x\| \leq V(t, x) \leq \alpha_2 \|x\| \quad (43-6)$$

$${}_0^c D_t^\beta V(t, x(t)) \leq -\alpha_3 \|x\| \quad (44-6)$$

آنگاه نقطه تعادل سیستم (۶-۱۳) پایدار مجانبی است.

اثبات. از (۶-۴۳) و (۶-۴۴) می توان رابطه زیر را نتیجه گرفت

$${}_0^c D_t^\beta V \leq -\alpha_3 (\alpha_2^{-1}(V)) \quad (45-6)$$

از لم ۶-۳ و از  $V(t, x) \geq 0$  می توان

$$V(t, x(t)) \leq V(0, x(0)) \quad (46-6)$$

را نتیجه گرفت.

حالت ۱: فرض کنید که یک ثابت  $t_1 \geq 0$  وجود داشته باشد که  $V(t_1, x(t_1)) = 0$  را برآورده سازد، از

رابطه (۶-۴۳)  $x(t_1) = 0$  نتیجه می شود. پس از اینکه  $x=0$  نقطه تعادل سیستم (۶-۱۳) است

$x(t) = 0$  برای  $t \geq t_1$  خواهد بود.

حالت ۲. فرض کنید که یک ثابت مثبت  $\varepsilon$  وجود دارد بطوریکه  $t \geq 0, V(t, x) \geq \varepsilon$  باشد آنگاه از

$V(t, x) \leq V(0, x(0))$  رابطه زیر را نتیجه می گیریم:

$$0 < \varepsilon \leq V(t, x) \leq V(0, x(0)), t \geq 0 \quad (47-6)$$

با جایگذاری (۴۷-۶) در (۴۶-۶) رابطه زیر را داریم :

$$-\alpha_3(\alpha_2^{-1}(V(t,x))) \leq -\alpha_3(\alpha_2^{-1}(\varepsilon)) = -\frac{\alpha_3(\alpha_2^{-1}(\varepsilon))}{V(0,x(0))} V(0,x(0)) \leq -lV(t,x) \quad (۴۸-۶)$$

که  $0 < l = \frac{\alpha_3(\alpha_2^{-1}(\varepsilon))}{g(0)}$  می باشد. پس رابطه

$${}_0^c D_t^\beta V(t,x(t)) \leq -\alpha_3(\alpha_2^{-1}(V(t,x))) \leq -lV(t,x) \quad (۴۹-۶)$$

را نتیجه می گیریم. از اثبات مشابه در قضیه ۴-۶ به رابطه

$$V(t,x) \leq V(0,x(0))E_\beta(-lt^\beta) \quad (۵۰-۶)$$

می رسمیم، که متناقض با فرض  $V(t,x) \geq \varepsilon$  می باشد.

بر اساس مباحث حالت‌های ۱ و ۲ رابطه زیر را خواهیم داشت:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(t,x) = 0 \quad (۵۱-۶)$$

از (۴۳-۶) نتیجه می گیریم که

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad (۵۲-۶)$$

قضیه ۸-۶ اگر فرضیات قضیه ۷-۶ بجز جایگذاری  ${}_0^c D_t^\beta$  با  ${}_0 D_t^\beta$  برآورده شود، آنگاه  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$  خواهد شد.

اثبات. از لم ۲-۶ و از اینکه  $V(t,x) \geq 0$  است، رابطه  $V(t,x(t)) \leq {}_0 D_t^\beta V(t,x(t))$  بدست می آید، که این رابطه

$${}_0^c D_t^\beta V(t,x(t)) \leq {}_0 D_t^\beta V(t,x(t)) \leq -\alpha_3 \|x\| \quad (۵۳-۶)$$

را برآورده خواهد کرد. مشابه اثبات قضیه ۷-۶  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$  خواهد شد.

مثال ۲-۶ سیستم دینامیکی با معادلات کسری زیر را در نظر بگیرید:



$${}_0^c D_t^\alpha x(t) = -\int_0^t g(\tau, x) d\tau + h(t, x) \quad (54-6)$$

که  $g(t, x) \geq 0, x(0) > 0, \alpha \in (0, 1)$  و

$$h(t, x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \int_0^t g(\tau, x) & x = 0 \end{cases} \quad (55-6)$$

می باشد. نقطه تعادل  $x = 0$  پایدار مجانبی است.

اثبات. از تعریف ۶-۱ و اینکه  $-\int_0^t g(\tau, 0) d\tau + h(t, 0) = 0$  می باشد، نتیجه می گیریم که  $x = 0$  نقطه

تعادل سیستم (۵۵-۶) می باشد. فرض کنید که تابع لیپانف انتخابی  $V(x) = x^2$  باشد، از  $x(0) > 0$  و

$x = 0$  نتیجه می گیریم که  $dV(x)/dx = 2x \geq 0$ ، که تساوی برقرار خواهد بود اگر و فقط اگر  $x = 0$

باشد. علاوه بر این، از اینکه  $g(t, x) \geq 0$  است رابطه  $\frac{d\left[\int_0^t g(\tau, x) d\tau\right]}{dt} \geq 0$  برقرار خواهد بود. بنابراین،

$$\frac{dV(x)}{dt} = 2x {}_0^c D_t^{1-\alpha} \left[ -\int_0^t g(\tau, x) d\tau + h(t, x) \right] \leq 0 \quad (56-6)$$

است، که مساوی برقرار خواهد بود اگر و فقط اگر  $x(t) = 0$  باشد. اگر مقدار مثبت ثابت  $\varepsilon > 0$  وجود

داشته باشد، بطوریکه  $\|x(t)\| \geq \varepsilon$  برای همه  $t \geq 0$  برقرار باشد. از اینکه  $V(x) = x^2 = \|x\|^2$  محدود است

نتیجه می گیریم که ثابت مثبت  $\alpha_3$  وجود دارد که رابطه

$$\frac{dV(x)}{dt} \leq -\alpha_3 \|x\|^2 \quad (57-6)$$

را ارضا کند. پس با استفاده از روش مستقیم لیپانف، رابطه

$$\|x(t)\| \leq \sqrt{x(0)} e^{(-\frac{1}{2}\alpha_3 t)} \quad (58-6)$$

را خواهیم داشت. که فرض  $\|x(t)\| \geq \varepsilon$  برای  $t \geq 0$  را نقض می کند. بنابراین، نقطه تعادل  $x = 0$  پایدار

مجانبی است.

مثال ۶-۳ سیستم مرتبه کسری کاپوتو

$${}_0^C D_t^\alpha x(t) = -x^3(t) \quad (59-6)$$

که  $\alpha \in (0,1)$  و  $x(0) \neq 0$  شرط اولیه است را در نظر بگیرید. نقطه تعادل  $x = 0$  پایدار مجانبی است. اثبات. تابع لیاپانف  $V(x) = x^4$  را در نظر بگیرید، که  $\dot{V}(x(t)) = 4x^3(t)\dot{x}(t)$  می باشد. برای ثابت اختیاری  $\varepsilon$ ، رابطه زیر را داریم:

$$\int_t^{t+\varepsilon} x^3(\tau)\dot{x}(\tau)d\tau = \frac{1}{4}[x^4(t+\varepsilon) - x^4(t)] \quad (60-6)$$

علاوه بر این، با بکار بردن عملگر مرتبه کسری ریمن - لیویل  ${}_0 D_t^{1-\alpha}$  به سیستم (59-6)، از قانون لیبنیتز داریم:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -{}_0 D_t^{1-\alpha} x^3(t) = \frac{-1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} x^3(\tau) d\tau \\ &= \frac{-1}{\Gamma(\alpha)} \left[ \frac{x^3(0)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \right]_{t=\tau} + \frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-2} x^3(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (61-6)$$

از  $x(0) \neq 0$  و  $x = 0$  نتیجه می گیریم که برای تمام  $t \in (0, +\infty)$ ،  $x(0)x(t) > 0$  خواهد شد. می توان اثبات کرد که برای تمام  $t \geq 0$ ،  $x(0)x(t) \leq x^2(0)$  می باشد. با ضرب  $x(0)$  در دو طرف (61-6)، از اینکه  $x(0)x(t) \leq x^2(0)$  می باشد، رابطه

$$x(0)\dot{x}(t) \leq \frac{-x^4(0)t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \quad (62-6)$$

نتیجه گرفته می شود. با استفاده از معادله قبلی و  $x(0)x(t) > 0$  برای همه  $t \in (0, +\infty)$  در رابطه (62-6)،

$$\int_t^{t+\varepsilon} x^3(\tau)\dot{x}(\tau)d\tau = \frac{1}{4}[x^4(t+\varepsilon) - x^4(t)] < 0 \quad (63-6)$$

نتیجه می شود. بنابراین  $V(x) = x^4(t)$  یک تابع کاهشی می باشد. فرض کنید که ثابت مثبت  $\xi$  وجود دارد که  $x(0)x(t) \geq \xi$  را برای همه  $t \geq 0$  برآورده کند، آنگاه

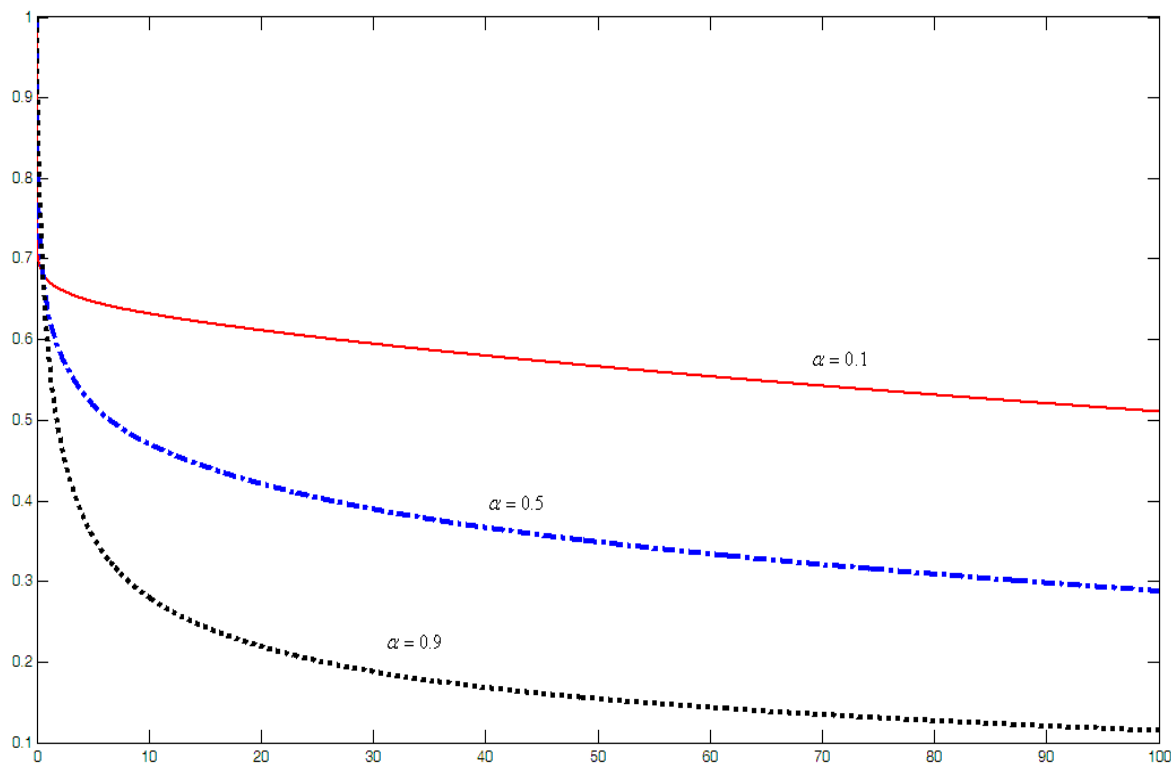
$$\begin{aligned}
{}_0^C D_t^\alpha V &= {}_0^C D_t^{\alpha-1} 4x^3 \dot{x} \leq \frac{4\xi^3}{x^4(0)} {}_0^C D_t^{\alpha-1} x(0) \dot{x} \\
&\leq \frac{-4\xi^3}{\Gamma(\alpha)} {}_0^C D_t^{\alpha-1} t^{\alpha-1} = -4\xi^3 = \frac{-4\xi^3}{x^4(0)} x^4(0) \leq -\alpha_3 V,
\end{aligned}
\tag{۶۴-۶}$$

می شود که  $\alpha_3 = \frac{4\xi^3}{x^4(0)} > 0$  می باشد. از قضیه ۴-۶ رابطه  $\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} x^4(t) = 0$  را

نتیجه می گیریم. که فرض  $\xi > x(0)x(t)$  را نقض می کند. بنابراین، نقطه تعادل  $x = 0$  پایدار مجانبی

است. حل  $x(t)$  سیستم (۶-۵۹) برای  $\alpha = 0.1, 0.5, 0.9$  در شکل (۶-۴) نشان داده شده است که صحت

مطالب فوق را تأیید می کند.



شکل ۴-۶ جواب  $x(t)$  سیستم برای  $\alpha = 0.1, 0.5, 0.9$  که  $x(0) = 1$  می باشد.

## فصل هفتم

پایداری سیستم‌های حلقه بسته فیدبکی

کسری غیرخطی

## ۱-۷ مقدمه

بعضی از سیستمهای غیر خطی را می توان به شکل اتصال پسخور یک سیستم دینامیکی خطی و یک عنصر غیرخطی مطابق شکل ۱-۷ در نظر گرفت نحوه نمایش سیستم کاملاً به اجزای موجود در آن وابسته است، برای مثال در حالتی که غیر خطی گری موجود در سیستم کنترل تنها ناشی از غیرخطی گری محرک/ حسگر می باشد، هیچ مشکلی در نمایش سیستم به صورت پسخور شکل (۱-۷) وجود ندارد؛ لیکن در حالتیهای دیگر، این نمایش کمی پیچیده تر است. اکنون ورودی خارجی را به شکل  $r = 0$  در نظر می گیریم و رفتار سیستم بدون ورودی را که با معادلات ذیل بیان می شود، مطالعه می کنیم:

$$\begin{cases} D^\alpha X = AX + Bu \\ y = CX \\ u = -\phi(t, y) \end{cases} \quad (1-7)$$

که  $\alpha = [\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n]$  و  $u \in R$ ، ورودی  $X \in R^q$ ، بردار حالت،  $y \in R$  خروجی،  $A \in R^{q \times q}$  ماتریس حالت،  $B \in R^{q \times 1}$ ، ماتریس ورودی،  $C \in R^{1 \times p}$ ، ماتریس انتقال مستقیم می باشد. ضمناً زوج  $(A, B)$  کنترل پذیر و زوج  $(A, C)$  نیز رؤیت پذیر می باشد که فرض کنترل پذیری و رؤیت پذیری ما را مطمئن می سازد که  $\{A, B, C\}$ ، تحقق کمین  $L(s)$  است. تابع تبدیل سیستم خطی کسری به صورت زیر بیان می شود:

$$L(s) = C(s^\alpha I - A)^{-1} B \quad (2-7)$$

همچنین تابع  $\phi: [0, \infty) \times R \rightarrow R$  نیز غیرخطی گری بدون حافظه و احتمالاً متغیر با زمان است که نسبت به  $t$  پیوسته قطعه ای و نسبت به  $y$  لیپ شیتز محلی می باشد. غیر خطی گری  $\phi(\cdot, \cdot)$  نیز باید شرط قطاعی را برآورده کند.

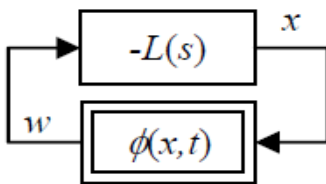
تعریف ۱-۷ تابع غیر خطی  $\phi: [0, \infty) \times R \rightarrow R$  شرط قطاعی را برآورده می کند اگر ثابتهای  $b, a, k_2, k_1$

( با شرط  $k_2 > k_1$  و  $a < 0 < b$  ) چنان وجود داشته باشد که:

$$k_1 y \leq \phi(t, y) \leq k_2 y, \quad \forall t \geq 0, \forall y \in [a, b] \quad (3-7)$$

چنانچه شرط (3-7) به ازای جمیع مقادیر  $y \in (-\infty, \infty)$  برقرار باشد گوییم شرط قطاعی به طور جامع برقرار است. اگر عبارت به طور جامع برقرار باشد، گوییم  $\phi(\dots)$  به قطاع  $[k_1, k_2]$  تعلق دارد.

در دهه ۱۹۶۰، پوپوف و همکارانش چندین ابزار مفید برای آنالیز سیستمهای لوره<sup>۳۵</sup> ( شکل ۱-۷ ) را پیشنهاد دادند.

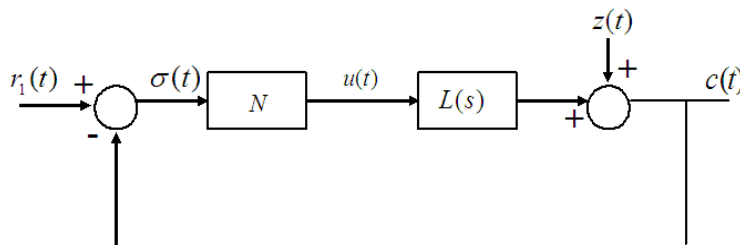


شکل ۱-۷ سیستم لوره: سیستم حلقه همراه با غیرخطی بدون حافظه  $\phi$  و سیستم خطی  $L$

در این قسمت از معیاری مشابه با معیار پوپوف<sup>۳۶</sup> برای مطالعه پایداری سیستمهای حلقه بسته غیرخطی با یک قسمت خطی کسری استفاده می کنیم.

## ۲-۷ آنالیز پایداری ورودی - خروجی سیستمهای غیرخطی کسری فیدبکی

سیستم فیدبکی  $S$  یک ورودی، یک خروجی که در شکل ۲-۷ نشان داده شده است را در نظر بگیرید. عنصر غیرخطی، بدون حافظه و مستقل از زمان است.



شکل ۲-۷ سیستم  $S$

<sup>۳۵</sup> Lore

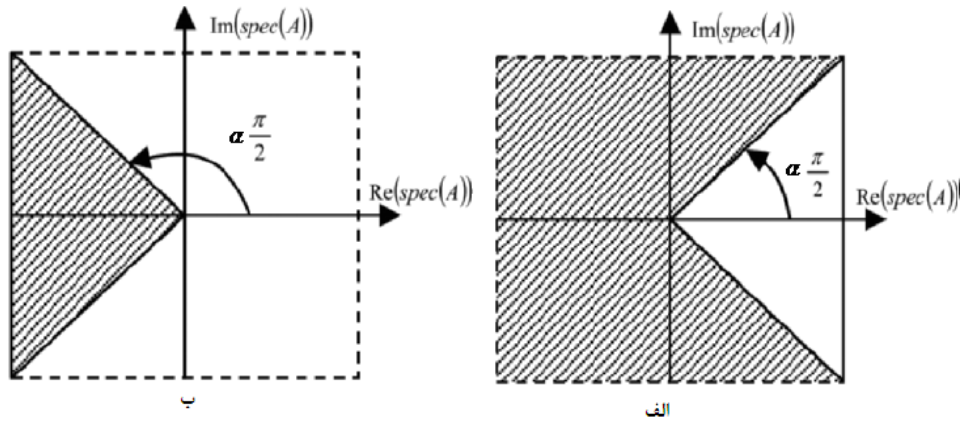
<sup>۳۶</sup> Popov

فرض ۱:

غیرخطی  $N$  در شرط قطاعی صدق می کند و  $\phi(\sigma(t)) = u(t)$  می باشد.

فرض ۲:

فرض می شود که سیستم کسری خطی، مستقل از زمان، مشاهده پذیر و کنترل پذیر است و با تابع تبدیل  $L(s)$  توصیف می شود.  $L(s)$  فقط در محدوده پایداری شکل ۳-۷ دارای قطب است.



شکل ۳-۷. محدوده پایداری برای الف (  $0 < \alpha < 1$  ) ب (  $1 < \alpha < 2$  )

فرض ۳:

$r(t)$  سیگنال ورودی سیستم و مشتق آن  $\dot{r}(t)$  برای تمام  $t \geq 0$  محدود می باشد.

قضیه ۷-۱:

در صورتی که فرضیات ۱، ۲، ۳ برقرار باشند و ورودی سیستم  $S$  و مشتق آن محدود باشند، خروجی محدود می شود اگر

الف) غیرخطی در محدوده  $[0, k]$  برای پایداری مطلق و در محدوده  $[\varepsilon, k]$  ( $\varepsilon > 0$  مقدار کوچک دلخواه) برای پایداری بحرانی واقع شود.

ب) یک مقدار حقیقی  $q$  و یک مقدار مثبت  $\delta$  وجود دارد بطوریکه برای همه  $\omega \geq 0$ ، نامساوی زیر برآورده شود

$$\operatorname{Re}\{(1 + j\omega q)L(j\omega)\} + \frac{1}{k} \geq \delta > 0 \quad (4-7)$$

تبصره: بدون از دست دادن کلیت موضوع، قضیه فقط برای

$$1- \text{پایداری مطلق } L(s)$$

$$2- 0 \leq q \leq \infty$$

3- غیرخطی  $\phi(\sigma)$  در محدوده کاهش یافته  $[\varepsilon, k - \varepsilon]$ ، که

$$\varepsilon \leq \frac{\phi(\sigma)}{\sigma} \leq k - \varepsilon \quad \forall \sigma \neq 0 \quad (5-7)$$

است. اثبات می شود.

برای اثبات قضیه از دو لم کمکی زیر استفاده می کنیم.

لم ۱-۷: اگر سه تابع حقیقی  $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$  در محدوده  $L_2(0, \infty)$  واقع شوند، و اگر تبدیلات فوریه آنها با معادله زیر به هم مربوط شوند

$$F_1(j\omega) = H(j\omega)F_3(j\omega) + F_2(j\omega) \quad (6-7)$$

که  $\operatorname{Re}H(j\omega) \geq \beta > 0 \quad \forall \omega \geq 0$  است، آنگاه نامساوی زیر برقرار خواهد بود.

$$-\int_0^\infty f_1(t)f_3(t)dt \leq \frac{1}{4\beta} \int_0^\infty [f_2(t)]^2 dt \quad (7-7)$$

اثبات لم فوق در مرجع [۳۶] بیان شده است.

لم ۲-۷: اگر یک سیستم پایدار  $S$  همه شرایط قضیه ۱-۷ را برآورده کند، آنگاه نامساوی زیر برای  $\alpha > 0$ ، به اندازه کافی کوچک، برقرار می باشد.



$$\left(\int_0^t e^{2\alpha\tau} u^2(\tau) d\tau\right)^{1/2} \leq \left[\frac{1}{\delta^2} \int_0^t e^{2\alpha\tau} [r(\tau) - z(\tau) + q(\dot{r}(\tau) - \dot{z}(\tau))]^2 d\tau + \frac{2q}{\delta} \int_0^{\sigma(0)} \phi(\sigma) d\sigma\right]^{1/2} \quad \forall t \geq 0 \quad (8-7)$$

اثبات قضیه :

با توجه به تبصره ها، قضیه ۷-۱ لازم است که فقط برای  $L(s)$  با پایداری مطلق و  $0 \leq q \leq \infty$  اثبات شود. فرض کنید  $l(t)$  پاسخ ضربه  $L(s)$  باشد. سیستم  $S$  به صورت زیر توصیف می شود.

$$\sigma(t) = r(t) - z(t) - \int_0^t l(t-\tau) u(\tau) d\tau \quad (9-7)$$

که با معادله زیر معادل است.

$$\sigma(t) = r(t) - z(t) - \int_0^t e^{\alpha(t-\tau)} l(t-\tau) e^{-\alpha(t-\tau)} u(\tau) d\tau \quad (10-7)$$

با استفاده از نامساوی مثلث و نامساوی شوارتز، نامساوی زیر را داریم.

$$|\sigma(t)| \leq |r(t) - z(t)| + \left(\int_0^\infty e^{3\alpha x} l^2(x) dx\right)^{1/2} e^{-\alpha t} \left(\int_0^t e^{2\alpha\tau} u^2(\tau) d\tau\right)^{1/2} \quad (11-7)$$

با استفاده از نامساوی (۷-۸) و از لم ۷-۲ نامساوی زیر را خواهیم داشت:

$$|\sigma(t)| \leq |r(t) - z(t)| + \left(\int_0^\infty e^{3\alpha x} l^2(x) dx\right)^{1/2} \left[\frac{1}{\delta^2} \int_0^t e^{-2\alpha(t-\tau)} [r(\tau) - z(\tau) + q(\dot{r}(\tau) - \dot{z}(\tau))]^2 d\tau + \frac{2q}{\delta} e^{-2\alpha t} \int_0^{\sigma(0)} \phi(\sigma) d\sigma\right]^{1/2} \quad (12-7)$$

چون  $L(s)$  پایدار مطلق است پس ثابت های  $K_1$  و  $K_2$  وجود دارند بطوریکه  $|l(t)| \leq K_1 e^{-K_2 t}$  باشد. بنابراین وجود دارد یک  $\alpha$ ،  $0 < \alpha < K_2$ ، بطوریکه

$$\int_0^\infty e^{2\alpha x} l^2(x) dx \leq A < \infty \quad (13-7)$$

می شود. انتگرال دوم محدود می شود چون آن کانولوشن یک سیستم خطی اکیداً پایدار با یک ورودی محدود است (  $z(t), \dot{z}(t)$  هر دو محدود می باشند). در نتیجه سمت راست نامساوی (۷-۱۲) برای همه  $t \geq 0$  محدود می شود. بنابراین

$$|\sigma(t)| \leq B < \infty \quad \forall t \geq 0 \quad (14-7)$$

می شود که این محدود بودن خروجی  $c(t)$  را تضمین می کند.

اثبات لم ۷-۲:

با مشتق گیری از معادله (۷-۹) رابطه (۷-۱۵) بدست می آید.

$$\dot{\sigma}(t) = [\dot{r}(t) - \dot{z}(t)] - \int_0^t \dot{l}(t-\tau)u(\tau)d\tau - l(0)u(t) \quad (۷-۱۵)$$

متغیرهای  $u(t)$  و  $r(t), z(t), \dot{r}(t), \dot{z}(t)$  در  $T$  برش داده می شوند و با  $u_T(t)$  و  $r_T(t), z_T(t), \dot{r}_T(t), \dot{z}_T(t)$

نمایش داده می شوند. پس  $\sigma_T(t)$  و  $\dot{\sigma}_T(t)$  با معادلات زیر تعریف می شوند.

$$\sigma_T(t) = r_T(t) - z_T(t) - \int_0^t l(t-\tau)u_T(\tau)d\tau \quad (۷-۱۶)$$

$$\dot{\sigma}_T(t) = [\dot{r}_T(t) - \dot{z}_T(t)] - \int_0^t \dot{l}(t-\tau)u_T(\tau)d\tau - l(0)u_T(t) \quad (۷-۱۷)$$

توجه کنید که  $\sigma_T(t)$  و  $\dot{\sigma}_T(t)$  عیناً برای  $t > T$  صفر نیستند اما نامساوی های زیر را تضمین می کنند.

$$|\sigma_T(t)| \leq K_3 e^{-K_2 t}, \quad \forall t > T, \quad |\dot{\sigma}_T(t)| \leq K_4 e^{-K_2 t}, \quad \forall t > T \quad (۷-۱۸)$$

که ثابت های مثبت هستند و  $K_2$  در  $|l(t)| \leq K_1 e^{-K_2 t}$  تعریف شده است. معادلات (۷-۱۶) و

(۷-۱۷) معادله (۷-۱۹) را نتیجه می دهند.

$$\begin{aligned} -\sigma_T(t) - q\dot{\sigma}_T(t) &= -[r_T(t) - z_T(t) + q(\dot{r}_T(t) - \dot{z}_T(t))] \\ &+ \int_0^t [l(t-\tau) + ql(t-\tau)]u_T(\tau)d\tau + ql(0)u_T(t) \end{aligned} \quad (۷-۱۹)$$

با اضافه کردن  $(1/k - \gamma)u_T(t)$  و ضرب  $e^{\alpha t}$  ( $0 < \alpha < K_2$ ) به طرفین معادله بالا، رابطه (۷-۲۰)

بدست می آید.

(۷-۲۰)

$$\begin{aligned} [-\sigma_T(t) - q\dot{\sigma}_T(t) + (\frac{1}{k} - \gamma)u_T(t)]e^{\alpha t} &= -[r_T(t) - z_T(t) + q(\dot{r}_T(t) - \dot{z}_T(t))]e^{\alpha t} \\ &+ \int_0^t e^{\alpha(t-\tau)} [l(t-\tau) + ql(t-\tau)]e^{\alpha\tau} u_T(\tau)d\tau \\ &+ ql(0)e^{\alpha t} u_T(t) + (\frac{1}{k} - \gamma)e^{\alpha t} u_T(t) \end{aligned}$$

با تعریف

$$\begin{aligned} f_1(t) &= [-\sigma_T(t) - q\dot{\sigma}_T(t) + (\frac{1}{k} - \gamma)u_T(t)]e^{\alpha t} \\ f_2(t) &= [-r_T(t) - z_T(t) + q(\dot{r}_T(t) - \dot{z}_T(t))]e^{\alpha t} \end{aligned} \quad (21-7)$$

و جایگذاری آنها در معادله (۲۰-۷)، معادله زیر بدست می آید.

$$\begin{aligned} f_1(t) &= f_2(t) + \int_0^t e^{\alpha(t-\tau)} [l(t-\tau) + q\dot{l}(t-\tau)] e^{\alpha\tau} u_T(\tau) d\tau \\ &\quad + ql(0)e^{\alpha t} u_T(t) + (\frac{1}{k} - \gamma)e^{\alpha t} u_T(t) \end{aligned} \quad (22-7)$$

از آنجایی که همه بخشهای (۲۲-۷) بخاطر کوتاه کردن در زمان  $T$  در محدوده  $L_2(0, \infty)$  واقع هستند، با تبدیل فوریه گرفتن از (۲۲-۷) معادله (۲۳-۷) را داریم.

$$F_1(j\omega) = F_2(j\omega) + \left\{ [1 + q(j\omega - \alpha)]L(j\omega - \alpha) + \frac{1}{k} - \gamma \right\} U_T(j\omega - \alpha) \quad (23-7)$$

معادله (۲۳-۷) شرایط لم ۱-۷ را با  $\beta = \delta - \gamma$  تأمین می کند اگر

$$\operatorname{Re}\{[1 + q(j\omega - \alpha)]L(j\omega - \alpha)\} + \frac{1}{k} - \gamma \geq \delta - \gamma > 0 \quad (24-7)$$

برقرار شود. پس

$$-\int_0^\infty f_1(t)u_T(t)e^{\alpha t} dt \leq \frac{1}{4(\delta - \gamma)} \int_0^\infty [f_2(t)]^2 dt \quad (25-7)$$

با جایگذاری  $f_1(t)$  و  $f_2(t)$  در (۲۵-۷) و استفاده از این حقیقت که توابع کوتاه شده اند، رابطه زیر

را داریم.

$$\int_0^T \left( \sigma(t) - \frac{u(t)}{k} \right) u(t) e^{2\alpha t} dt + q \int_0^T \dot{\sigma}(t) u(t) e^{2\alpha t} dt \quad (26-7)$$

$$+ \gamma \int_0^T e^{2\alpha t} u^2(t) dt \leq \frac{1}{4(\delta - \gamma)} \int_0^T e^{2\alpha t} [r(t) - z(t) + q(\dot{r}(t) - \dot{z}(t))]^2 dt$$

اگر سمت راست نامساوی را با  $C(T)$  نمایش دهیم و با در نظر گرفتن اینکه  $u(t) = \phi(\sigma(t))$  است و انتگرال گیری جزء به جزء از  $\int_0^T \dot{\sigma}(t) u(t) e^{2\alpha t} dt$  و اضافه کردن  $q \int_0^T \phi(\sigma) d\sigma$  به دو طرف نامساوی بالا، رابطه زیر را خواهیم داشت.

$$\int_0^T \left( \sigma - \frac{\phi(\sigma)}{k} \right) \phi(\sigma) e^{2\alpha t} dt + q e^{2\alpha T} \int_0^{\sigma(T)} \phi(\sigma) d\sigma - 2q\alpha \int_0^T e^{3\alpha t} \left[ \int_0^{\sigma(t)} \phi(\sigma) d\sigma \right] dt \quad (27-7)$$

$$+ \gamma \int_0^T e^{2\alpha t} u^2(t) dt \leq C(T) + q \int_0^{\sigma(0)} \phi(\sigma) d\sigma$$

چون  $\phi(\sigma)$  در یک ناحیه کاهش یافته  $[\varepsilon, k - \varepsilon]$  قرار دارد، ملاحظه می شود که

$$\int_0^{\sigma(t)} \phi(\sigma) d\sigma \leq \frac{k}{2} \sigma^2(t) \quad (28-7)$$

$$\frac{\varepsilon^2}{k} \sigma^2 \leq \left( \sigma - \frac{\phi(\sigma)}{k} \right) \phi(\sigma)$$

نامساوی (27-7) با استفاده از معادله (28-7) و حذف کمیت مثبت  $q e^{2\alpha T} \int_0^{\sigma(T)} \phi(\sigma) d\sigma$  از سمت چپ معادله (27-7)، با اطمینان بیشتری برقرار می باشد.

$$\frac{1}{\gamma} \int_0^T e^{2\alpha t} \left[ \frac{\varepsilon^2}{k} - kq\alpha \right] \sigma^2(t) dt + \int_0^T e^{3\alpha t} u^2(t) dt \leq \quad (29-7)$$

$$\frac{1}{4\gamma(\delta - \gamma)} \int_0^T e^{2\alpha t} [r(t) - z(t) + q(\dot{r}(t) - \dot{z}(t))]^2 dt + \frac{q}{\gamma} \int_0^{\sigma(0)} \phi(\sigma) d\sigma$$

با انتخاب  $\gamma = \delta/2$ ، از آنجا که  $\gamma$  مقدار کوچکی ( $0 < \gamma < \delta$ ) است، سمت راست نامساوی

مینیمم می شود. پس

$$\frac{2}{\delta} \int_0^T e^{2\alpha t} \left[ \frac{\varepsilon^2}{k} - kq\alpha \right] \sigma^2(t) dt + \int_0^T e^{2\alpha t} u^2(t) dt \leq \quad (30-7)$$

$$\frac{1}{\delta^2} \int_0^T e^{2\alpha t} [r(t) - z(t) + q(\dot{r}(t) - \dot{z}(t))]^2 dt + \frac{2q}{\delta} \int_0^{\sigma(0)} \phi(\sigma) d\sigma$$

$I_1$  را به صورت زیر نامگذاری می کنیم.

$$I_1 = \int_0^T e^{2\alpha t} \left[ \frac{\varepsilon^2}{k} - kq\alpha \right] \sigma^2(t) dt \quad (31-7)$$

اگر برای  $\alpha > 0$ ،  $\varepsilon^2/k - kq\alpha \geq 0$  باشد آنگاه  $I_1 \geq 0$  خواهد بود و می تواند از سمت چپ نامساوی (30-7) حذف شود. برای هر  $\varepsilon > 0, q < \infty, k < \infty$  می توان یک مقدار  $\alpha$  به اندازه کافی کوچک یافت بطوریکه نامساوی زیر برقرار باشد.

$$0 < \alpha \leq \frac{\varepsilon^2}{qk^2} \quad (32-7)$$

در نتیجه نامساوی (30-7) به صورت زیر می شود.

$$\left( \int_0^t e^{2\alpha\tau} u^2(\tau) d\tau \right)^{1/2} \leq \left[ \frac{1}{\delta^2} \int_0^t e^{2\alpha\tau} [r(\tau) - z(\tau) + q(\dot{r}(\tau) - \dot{z}(\tau))]^2 d\tau + \frac{2q}{\delta} \int_0^{\sigma(0)} \phi(\sigma) d\sigma \right]^{1/2} \quad \forall T \geq 0 \quad (33-7)$$

که این اثبات لم ۲-۷ را کامل می کند.

نکته:

از اثبات قضیه ۱-۷ برای بررسی پایداری مطلق حل سیستم شکل ۱-۷ می توان استفاده کرد. برای

این منظور در (۱۰-۷)،  $r(t) \equiv 0$  قرار دهید. بنابراین از (۱۰-۷) نتیجه می شود که سیستم

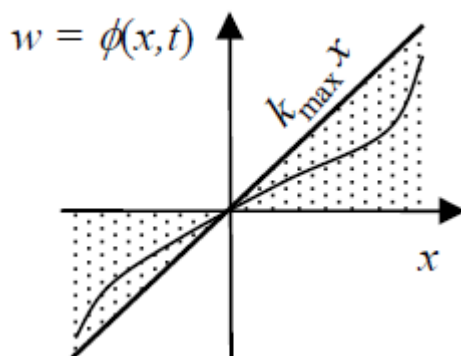
شکل ۱-۷ بطور مجانبی پایدار نمایی است.

### ۱-۲-۷ استفاده از قضیه ۱-۷ برای سیستمهای غیرخطی کسری

از قضیه ۱-۷ می توان برای آنالیز پایداری سیستمهای حلقه بسته که به سیستمهای لوره معروف هستند و به وسیله یک سیستم خطی  $L$  که به یک غیرخطی بدون حافظه  $\phi$  متصل است استفاده کرد. غیر خطی شکل ۴-۷ می تواند وابسته به زمان باشد و همانند زیر بیان می شود.

(۳۴-۷)

$$0 \leq \phi(x, t) \leq k_{\max} x$$



شکل ۴-۷ مشخصه ورودی و خروجی غیرخطی  $\phi$  [۲۷]

قضیه ۱-۷ را می توان تعمیمی از قضیه پایداری نایکوئست برای سیستمهای غیرخطی کسری دانست که برای اعمال آن بایستی صحت موارد زیر بررسی شود:

۱-  $L(s)$  پایدار باشد.

۲- غیرخطی گری بدون حافظه  $\phi$  در شرط قطاعی صدق کند.

برای بررسی پایداری  $L(s)$  کسری می توان از مباحث مطرح شده در فصل چهارم رساله استفاده کرد. با

استفاده از قضیه ۱-۷ معیار مجانبی پوپوف تعمیم یافته را می توان به صورت زیر بیان کرد.

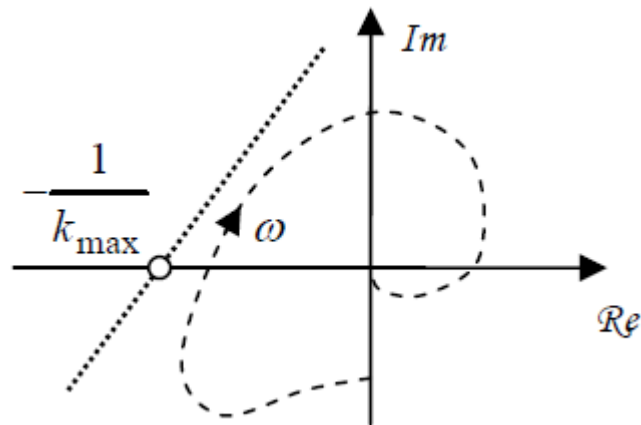
معیار مجانبی پوپوف تعمیم یافته: معیار پوپوف تعمیم یافته پایداری سیستم لوره را تضمین می کند که اگر یک عدد حقیقی  $q$  وجود داشته باشد بطوریکه  $L$  و  $\phi$  نامساوی زیر را برآورده کنند:

$$\operatorname{Re}\{(1 + j\omega q)L(j\omega)\} + \frac{1}{k_{\max}} \geq 0 \quad \forall \omega \geq 0, \quad (35-7)$$

یا

$$\omega \operatorname{Im}\{L(j\omega)\} \leq \frac{\operatorname{Re}\{L(j\omega)\} + \frac{1}{k_{\max}}}{q} \quad \forall \omega \geq 0. \quad (36-7)$$

نوع گرافیکی معادله (35-7) در شکل (5-7) نشان داده شده است. معیار فوق پایداری سیستم لوره را تضمین می کند که اگر مکان هندسی پوپوف  $L'$ ، با یک قسمت حقیقی  $\operatorname{Re}\{L'(j\omega)\}$  و یک قسمت موهومی  $\omega \operatorname{Im}\{L'(j\omega)\}$ ، در سمت راست خط مستقیم که از نقطه  $(-1/k_{\max}, 0)$  با شیب  $1/\eta$  می گذرد واقع باشد.



شکل 5-7 مکان هندسی پوپوف (---) و خط راست پوپوف (...)

مثال 1-7 تابع تبدیل  $L(s)$  که با یک انتگرال همراه با مرتبه کسری حقیقی تعریف می شود را در نظر بگیرد:

$$L(s) = \left(\frac{1}{s}\right)^\alpha \quad 0 \leq \alpha \leq 2 \quad (37-7)$$

مکان هندسی پوپوف  $L'$  مربوطه به صورت زیر تعریف می شود:

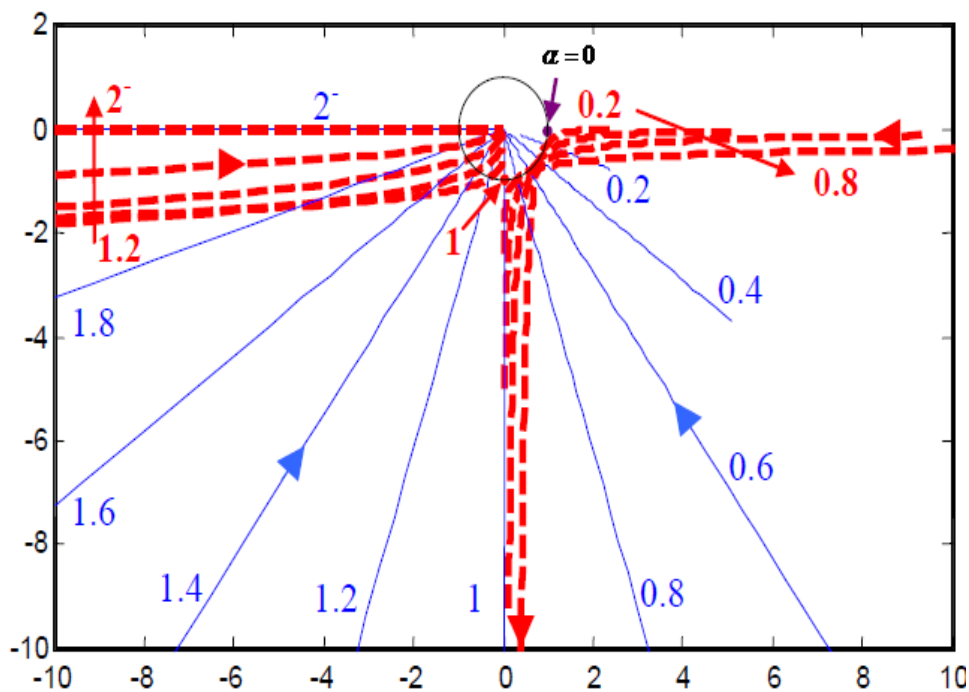
$$\operatorname{Re}\{L'\} = \left(\frac{1}{\omega}\right)^\alpha \cos\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) \quad (38-7)$$

$$\operatorname{Im}\{L'\} = -\frac{1}{\omega^{\alpha+1}} \sin\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right)$$

شکل (۶-۷) مکان هندسی پوپوف  $L'$  رسم شده در صفحه نایکوئیست برای

$\alpha \in \{0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2^-\}$  را نشان می دهد. برای برجسته کردن ناحیه اطراف

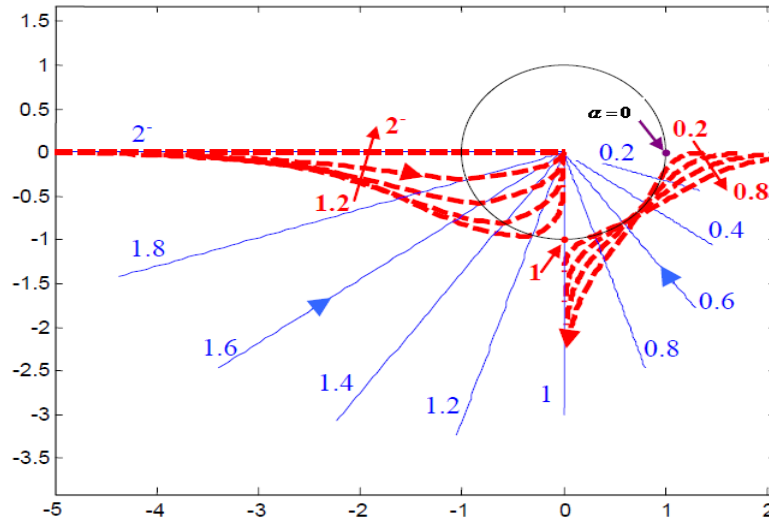
دایره واحد، مکان هندسی مشابه با مقیاس لگاریتمی در شکل (۷-۷) رسم شده است.



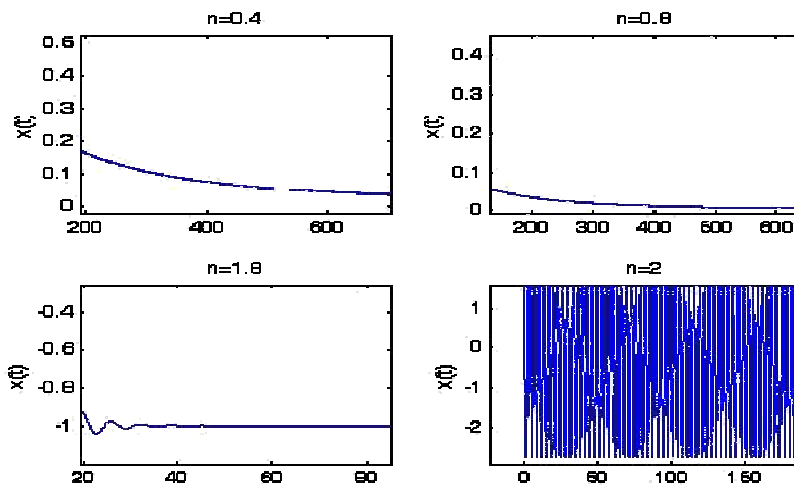
شکل ۶-۷ مکان هندسی پوپوف  $L'$  و  $L(j\omega)$  رسم شده برای  $0 \leq \alpha \leq 2$



برای  $\alpha = 0$ ، مکان هندسی  $L'$  و  $L$  برای همه  $\omega$  ها یکسان هستند (فقط نقطه  $(1,0)$ ). برای  $\alpha = 1$  و تمام  $\omega$  ها،  $L'$  نقطه  $(0,-1)$  می باشد. برای  $\alpha < 2$ ،  $\text{Im}\{L'\}$  برای همه  $\omega$  ها منفی می شود، معیار پوپوف، پایداری سیستم حلقه بسته را برای همه  $k_{\max}$  اثبات می کند. برای این منظور، شیب پارامتر  $\eta$  باید به سمت بینهایت میل کند. نتایج شبیه سازی شکل  $(\lambda-7)$ ، صحت مطالب فوق را اثبات می کند.



شکل 7-7 مکان هندسی پوپوف (لگاریتمی)  $L'(-\cdot-\cdot)$  و  $L(j\omega)$  رسم شده برای  $0 \leq \alpha \leq 2$



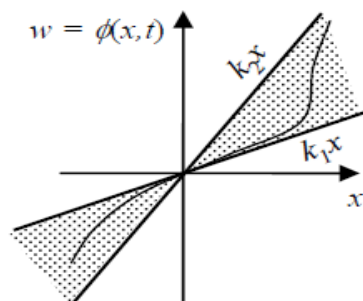
شکل 7-8 نمودارهای حالت  $x(t)$  به ازای  $\alpha = 0.4, 0.8, 1.8$  (پایدار) و  $\alpha = 2$  (ناپایدار) در حضور غیرخطی

$$\phi(x) = x^3 + x^2$$

### غیرخطی قرار گرفته در یک قطاع :

فرض کنید که غیرخطی تابع  $\phi$  در قطاعی همانند شکل (۷-۹) واقع شود که در رابطه زیر صدق می کند.

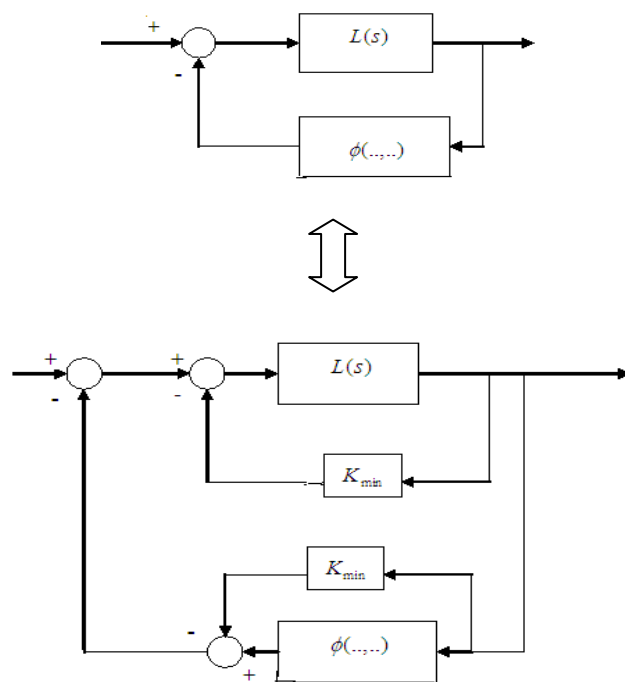
$$0 \leq k_1 x \leq \phi(x, t) \leq k_2 x \quad (۷-۳۹)$$



شکل ۷-۹ مشخصه ورودی- خروجی غیرخطی  $\phi$  واقع در یک قطاع [۲۷]

اگرچه معیار پوپوف تعمیم یافته با این نوع غیرخطی می تواند استفاده شود، ولی با تبدیل حلقه به صورت

زیر می توان دوباره غیرخطی را همانند شکل (۷-۱) ظاهر کرد. [۳۷]



شکل ۷-۱۰ تبدیل حلقه [۲۷]

گین  $k_1$  در سیستم خطی در نظر گرفته می شود و غیرخطی گری جدید با گین  $0$  و  $k_2 - k_1$  برای محاسبه در نظر گرفته خواهد شود. پس تابع تبدیل  $L_1(s)$  با  $L(s)$  همانند زیر تعریف می شود:

$$L_1(s) = \frac{L(s)}{1 + k_1 L(s)} \quad (40-7)$$

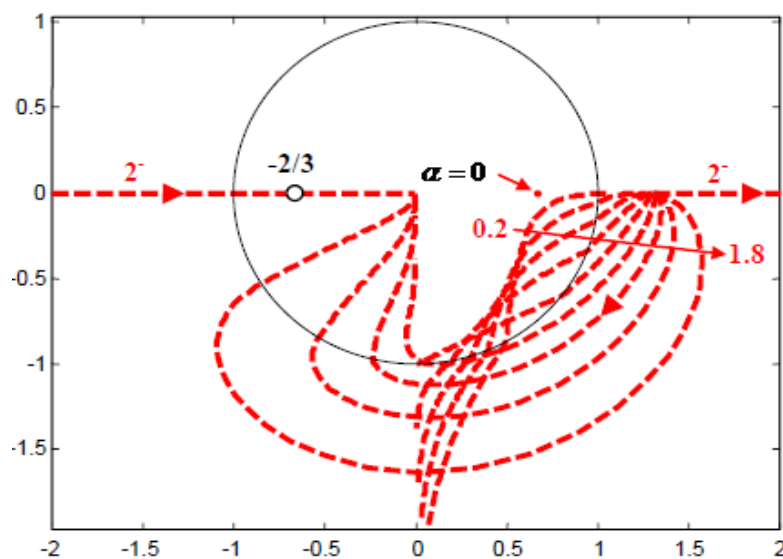
و غیرخطی جدید متناسب با رابطه (۷-۱) بصورت زیر می باشد:

$$k_{\max} = k_2 - k_1 \quad (41-7)$$

از آنجا که  $L(s)$  با رابطه (۷-۳۷) تعریف می شود، تابع تبدیل  $L_1(s)$  به صورت زیر خواهد بود:

$$L_1(s) = \frac{1}{k_1 + s^\alpha} \quad (42-7)$$

غیرخطی که گین آن ممکن است بین  $k_1 = 0.5$  و  $k_2 = 2$  تغییر کند را در نظر بگیرید. شکل (۷-۱۱) مکان هندسی پوپوف  $L_1'$  رسم شده برای  $\alpha \in \{0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2^-\}$  را نشان می دهد. بدیهی است که پایداری سیستم حلقه بسته برای  $\alpha < 2$  با پارامتر  $\eta$  که به سمت بی نهایت میل می کند تضمین می شود.



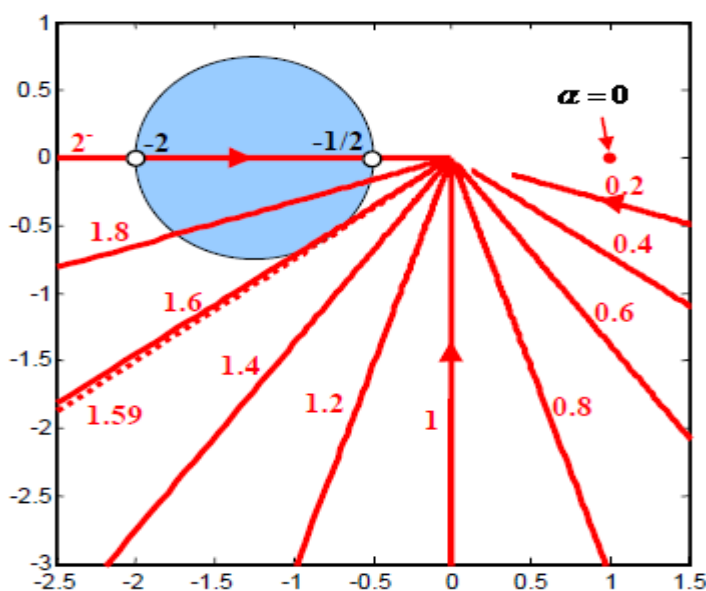
شکل ۷-۱۱ مکان هندسی پوپوف (لگاریتمی)  $L_1'(- - -)$  از  $L_1(j\omega)$  رسم شده برای  $0 \leq \alpha \leq 2$

## ۲-۲-۷ استفاده از محک دایره برای سیستمهای غیرخطی کسری

معیار دایره [۲۷] تعمیم بهتری از معیار پایداری پوپوف است این معیار ابزاری را در اختیار ما قرار می دهد که توسط آن علاوه بر بررسی پایداری سیستمهایی که در آنها تابع  $L(s)$  ناپایدار است می توان در مورد پایداری مطلق سیستمهای با بخش غیرخطی متغیر با زمان با اطمینان بحث کرد.

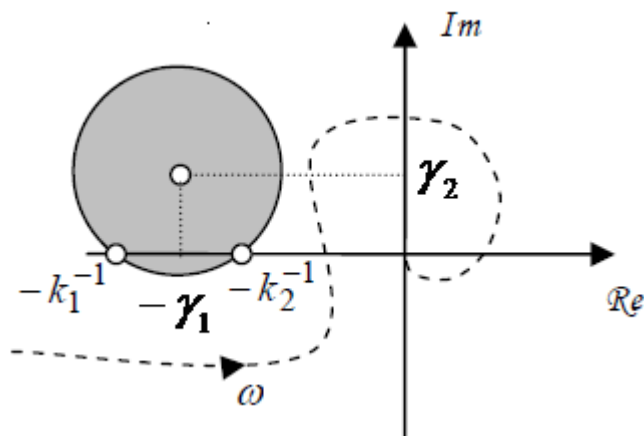
تعریف ۲-۷: دایره ای را در نظر بگیرید که دو سر یکی از قطرهای آن در نقاط  $a+0j$  و  $b+0j$  قرار داشته باشد. چنین دایره ای را، دایره  $D(a,b)$  نامگذاری می کنیم.

در مثال ۱-۷ محک دایره بیان می کند که سیستم حلقه بسته پایدار است اگر و فقط اگر نمودار نایکوئیست  $L$  داخل دایره که مرکز آن روی محور منفی و از نقاط  $(-1/k_1, 0)$  و  $(-1/k_2, 0)$  می گذرد واقع نشود. با این وجود، محک دایره نتیجه یکسانی همانند محک پوپوف ارائه نمی دهد. شکل (۱۲-۷) نشان می دهد که پایداری حلقه بسته می تواند فقط برای  $\alpha \leq 2 - 2/\pi \sin^{-1} 3/5 = 1.59$  تضمین شود.



شکل ۱۲-۷ نمودار نایکوئیست  $L(j\omega)$  بدست آمده برای  $0 \leq \alpha \leq 2$  با گام 0.2 و  $\alpha = 1.59$

خوشبختانه برای غیر خطی های یکنواخت نوع دیگری از محک پوپوف وجود دارد که بر اساس خود  $L$  واقع شده است [۳۸]. این محک پایداری سیستم حلقه بسته را وقتی که نمودار نایکوئیست  $L$  در دایره، که از نقاط  $(-1/k_1, 0)$  و  $(-1/k_2, 0)$  بگذرد و مرکز آن در نقطه  $(-\gamma_1, \gamma_2)$  باشد که  $\gamma_1$  میانگین  $1/k_1$  و  $1/k_2$  است و  $\gamma_2$  یک عدد حقیقی می باشد، واقع نشود را تضمین می کند.



شکل ۷-۱۳ نمودار نایکوئیست  $L(---)$  و دایره بدون محور<sup>۳۷</sup> برای غیر خطی واقع در قطاع

پس برای همه  $\alpha \leq 2$ ،  $\text{Im}\{L\}$  معادله (۷-۳۵) برای همه  $\omega$  ها منفی می شود در نتیجه پایداری سیستم حلقه بسته بوسیله پارامتر  $\gamma_2$  که به بینهایت میل می کند و منجر به دایره ای به شعاع بینهایت واقع بر کل نیم صفحه بالایی سمت چپ می شود تضمین می گردد.

مثال ۷-۲ سیستم کسری زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
 x_1^\alpha &= x_2 \\
 x_2^\alpha &= -\delta x_1 - x_2 + u \quad \alpha \in (0,1] \\
 y &= x_1 \\
 u &= -\phi(t, x_1)
 \end{aligned}
 \tag{۷-۴۳}$$

<sup>۳۷</sup> - off - axis

که  $\phi(\cdot)$  به قطاع  $[0, k]$  تعلق دارد. سیستم فوق را می توان به صورت شکل بلوکی (۷-۱) نمایش داد. که در آن تابع تبدیل کسری خطی با معادله (۷-۴۲) بیان می شود.

$$L(s) = \frac{1}{s^{2\alpha} + s^\alpha + \delta} \quad (۷-۴۴)$$

مکان هندسی پوپوف  $L'$  مربوطه به صورت زیر تعریف می شود:

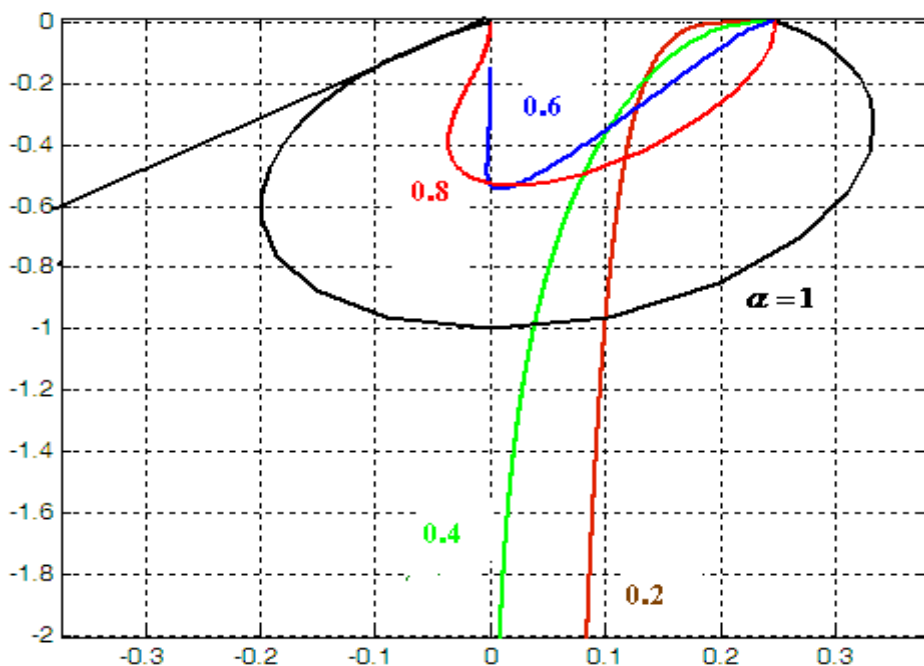
$$\operatorname{Re}\{L'\} = \frac{\omega^{2\alpha} \cos \alpha\pi + \omega^\alpha \cos \frac{\alpha\pi}{2} + \delta}{(\omega^{2\alpha} \cos \alpha\pi + \omega^\alpha \cos \frac{\alpha\pi}{2} + \delta)^2 + (\omega^{2\alpha} \sin \alpha\pi + \omega^\alpha \sin \frac{\alpha\pi}{2})^2} \quad (۷-۴۵)$$

$$(۷-۴۶)$$

$$\operatorname{Im}\{L'\} = -\frac{\omega^{2\alpha+1} \sin \alpha\pi + \omega^{\alpha+1} \sin \frac{\alpha\pi}{2}}{(\omega^{2\alpha} \cos \alpha\pi + \omega^\alpha \cos \frac{\alpha\pi}{2} + \delta)^2 + (\omega^{2\alpha} \sin \alpha\pi + \omega^\alpha \sin \frac{\alpha\pi}{2})^2}$$

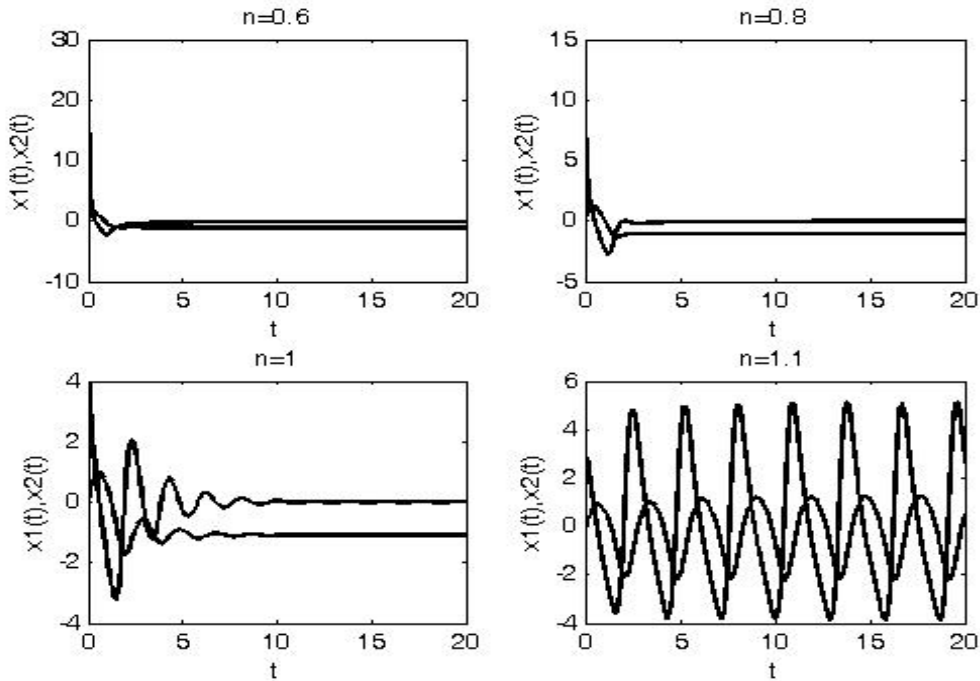
شکل (۷-۱۴) مکان هندسی پوپوف  $L'$  رسم شده در صفحه نایکوئست برای  $\alpha \in \{0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1\}$

را نشان می دهد.



شکل ۷-۱۴ نمودار پوپوف برای مثال ۷-۲ با  $\delta = 1$

برای  $\alpha \leq 1$ ،  $\text{Im}\{L'\}$  برای همه  $\omega$  ها منفی بوده و معیار پوپوف تعمیم یافته، پایداری سیستم حلقه بسته را برای همه  $k_{\max}$  ها تضمین می کند که نتایج شبیه سازی شده صحت مطالب فوق را اثبات می کند.



شکل ۷-۱۵ نمودار های حالت  $x_1(t), x_2(t)$  به ازای  $\alpha = 0.6, 0.8, 1$  (پایدار) و  $\alpha = 1.1$  (ناپایدار) در حضور

$$\delta = 1 \text{ با } \phi(x) = x^3 - 3x^2 + 6 \text{ غیرخطی}$$

بخاطر اینکه معیار پوپوف و دایره در حوزه فرکانس می باشند می توان از آنها همانند معیار نایکوئیست برای بررسی پایداری سیستمهای کسری استفاده کرد.

## نتیجه گیری و پیشنهادات



با توجه به جدید بودن بحث مورد اشاره در این رساله، فصول ابتدایی آن را به تعاریف ریاضی مربوط به اپراتورهای مرتبه کسری اختصاص دادیم. نحوه یافتن پاسخ معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری در دو کلاس خطی و غیرخطی، از دیگر مسائلی است که در این پایان نامه به آن اشاره شده است. با توجه به موضوع مدنظر تعیین شده در این رساله، بخش عمده ای از رساله، به بررسی پایداری و روش های مختلف تحلیل پایداری سیستم های مرتبه کسری اختصاص یافته است و سعی شده است با دسته بندی و طبقه بندی مقالات و تحقیقات مختلف انجام گرفته در این زمینه و افزودن برخی مطالب و روش ها، بررسی جامع و کاملی در این مورد انجام گیرد و تمامی روش های مورد قبول ارائه شده در سالیان اخیر بیان شود. به طور کلی در حوزه پایداری سیستم های مرتبه کسری، تلاش زیادی در مورد پایداری سیستمهای خطی مرتبه کسری انجام شده است و روش های متعددی نیز برای تحلیل پایداری این سیستم ها ارائه گردیده است. موضوع بررسی پایداری سیستم های مرتبه کسری غیرخطی، از موضوعاتی است که در سال ۲۰۰۹ به آن پرداخته شده است. اما بررسی پایداری سیستمهای مرتبه کسری فیدبکی غیرخطی که از یک قسمت خطی کسری و یک قسمت غیرخطی تشکیل شده برای اولین بار همراه با تعمیم معیار پوپوف برای سیستمهای کسری در این رساله انجام شده است. ارائه روشهای تحلیل پایداری فوق الذکر، می تواند برداشتن گامهای بعدی، در جهت تجزیه و تحلیل سیستمهای غیرخطی را سهل تر نماید. به نظر می رسد گشوده شدن درهای قضایای غیرخطی، بر روی سیستمهای مرتبه کسری، راه را برای پاسخ به مسائل دیگری باز خواهد کرد. مسائلی همچون:

- یافتن نقاط تعادل پایدار و ناپایدار و سیکل های حدی سیستمهای مرتبه کسری غیرخطی
- اثبات قضایای ناپایداری، پایداری جامع و سایر قضایای مرتبط با سیستمهای غیرخطی مرتبه

صحیح در سیستمهای مرتبه کسری غیر خطی

- یافتن کنترلرهای مبتنی بر معیار لیاپانف ، معیار پوپوف و معیار دایره در سیستمهای مرتبه

کسری

# مراجع

- [۱] Loverro A. (۲۰۰۴) “ Fractional Calculus: History, Definitions & Applications for Engineer ”, Dep. Of Aerospace & Mechanical Eng., Univ. of Notre Dame, USA.
- [۲]. علوی ع، (۱۳۸۲)، پایان نامه کارشناسی ارشد: " حل عددی معادلات دیفرانسیل کسری " ، دانشکده علوم پایه ، دانشگاه مازندران.
- [۳]. خاتمی ز، علیزاده ی، (۱۳۸۱) " دیفرانسیل و انتگرال از مرتبه کسری " مجله فرهنگ و اندیشه ریاضی، شماره ۲۹
- [۴] Vinagre, B.M., (۲۰۰۲) “ Historical introduction of Fractional Calculus ”, Fractional Calculus Application in Automatic Control, p۹, Las Vegas, USA.
- [۵] Debnath, L., (۲۰۰۲) “ Fractional Calculus Fundamentals ”, Dep. Of Mathematics, Univ. of Pan American, Texas, USA
- [۶] Blas M. Vinagre, (۲۰۰۲), “Fractional Calculus Fundamentals” Tutorial workshop #۲. Fractional Calculus Applications in Automatic Control and Robotics ,41<sup>st</sup> IEEE Conference on Decision and control, Las Vegas
- [۷]. مالک ه، پرین ن، (۱۳۸۶)، پایان نامه کارشناسی ارشد: " بررسی پایداری سیستمهای مرتبه کسری " ، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد
- [۸]. Gorenflo, R., (۲۰۰۴) “ Fractional Calculus: Some Numerical Methods ”, CISM Confernece, Udine, Italy
- [۹]. Ortiguira, M.D., (۲۰۰۳) “ On The Initial Conditions in Continuous Time Fractional Linear System ”, **Signal Processing, Elsvier**. ۸۳ (۱۱), pp. ۲۳۰۹-۲۳۰۱
- [۱۰]. C.T.H. Baker, (۲۰۰۰) “ **Volterra Integral Equations**”, Manchester Center for Computational Mathematics Numerical Analysis Reports, Report No.۳۶۶, Uk, Oct.
- [۱۱]. N J Ford, J Roberts & L E Shaikhet, Donetsk, (۱۹۹۷) ” Stability of a difference analogue for a nonlinear integro differential equation of convolution type”, MCCM Report pp.۳۱۲.
- [۱۲] jj Levin, (۱۹۶۳) “The asymptotic behavior of the solution of a Volterra equation”, **Proc. Amer. Math. Soc.** ۱۴, pp. ۵۳۴-۵۴۱

- [١٣] Daftardar-Gejji, V. and Jafari, H., (٢٠٠٧) “ Analysis of a system of nonautonomous fractional differential equations involving Caputo derivatives”. **J. Math. Anal. Appl.** ٣٢٨,pp.١٠٢٦-١٠٣٣.
- [١٤] Agrawal, O.P., Machado, J.A.T., Sabatier, J., (٢٠٠٤), “ **Nonlinear Dynamics** ”, Kluwer Academic Publishers, Netherlands.
- [١٥] Vinagre, B.M., Podlubny, I., Hernandez, A., Feliu, V., (٢٠٠٧) “ Some Approximations of Fractional Order Operators Used in Control Theory & Applications ”, ٤١st IEEE Conferences on Decision & Control, USA.
- [١٦] Oustaloup, A., Levron, F., Mathieu, B., Nanot, F.M., (٢٠٠٠) “ Frequency-Band Complex Non-integer Differentiator ”, **IEEE Trans. On Circuits & Systems**, Vol. ٤٧, pp. ٢٠-٣٩
- [١٧] H. Jafari, V.D. Gejji, (٢٠٠٦) “Solving a system of nonlinear fractional differential equations using Adomain decomposition”, **Journal of Mathematical Analysis & Application, Elsevier**, No.١٩٦,pp ٦٤٤-٦٥١.
- [١٨] Vinagre, B.M., Monje, C.A., Calderson, A.J., (٢٠٠٢), “ Fractional Order System & Fractional Order Control Actions ”, Fractional Calculus Application in Automatic Control, Las Vegas, USA.
- [١٩] Matignon, D., Novel, N.D., “ Some Results on Controllability & Observability of Finite Dimensional Fractional Differential Systems ”, <http://wwwsig.enst.fr/matignon>.
- [٢٠] Zadeh, L., Desoer, C.A., (١٩٦٣) “ **Linear System Theory** ”, McGraw-Hill
- [٢١] Ogata, K., (١٩٩٢) “ **System Dynamics** ”, Prentice-Hall, ٢nd
- [٢٢] Mathieu Moze, Jocelyn Sabatier, Alain Oustalop, (٢٠٠٧) “Lmi Characterization Of Fractional Systems Stability” **Nonlinear springer**. pp. ٤١٩-٤٣٤
- [٢٣] Matignon D. , (١٩٩٦) “ Stability results on fractional differential equations with applications to control processing”, Comp. Eng. Syst. Appl. multiconference, IMACS, IEEE-SMC. ٢:٩٦٣-٩٦٨
- [٢٤] Malti R, Cois O, Aoun M, Levron F, Oustaloup A, (٢٠٠٢), “Computing impulse response energy of fractional transfer function”, in the ١٥th IFAC World Congress ,Barcelona, Spain.
- [٢٥] Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V. ,(١٩٩٤),” Linear matrix inequalities in system and control theory” Volume ١٥ of Studies in Applied Mathematics, Philadelphia

- [26] Tabak D., Kuo BC., (1971), “ **Optimal Control by Mathematical Programming**” Prentice-Hall, New Jersey.
- [27] Hassan Khalil, (2002), “Nonlinear Systems”, Third Edition, Prentice Hall
- [28] Li CP, Peng GJ., (2004),” Chaos in Chens system with a fractional order”. **Chaos, Solitons and Fractals**, 20: 443-50.
- [29] Momani, S., & Hadid, S. (2004),” Lyapunov stability solutions of fractional integrodifferential equations,” **International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences**, Vol. 47, pp. 2003-2007.
- [30] Zhang, L.-g., Li, J.-m., & Chen, G.-p. (2005),” Extension of Lyapunov second method by fractional calculus” **Pure and Applied Mathematics**, Vol. 21(3), 1008-1013
- [31] Chen, Y. Q. (2006),”Ubiquitous fractional order controls?”, In Proceedings of the second IFAC workshop on fractional differentiation and its applications.
- [32] Tarasov, V. E. (2007),” Fractional derivative as fractional power of derivative,” **International Journal of Mathematics**, Vol. 14(3), pp. 281-299.
- [33] Sabatier, J. (2008),” On stability of fractional order systems,” In Plenary lecture VIII on 3rd IFAC workshop on fractional differentiation and its applications. Turkey
- [34] Yan Li , YangQuan Chen, Igor Podlubny, (2009) “Mittag-Leffler stability of fractional order nonlinear dynamic systems”, **Automatica .elsevier** , pp. 230-230
- [35] Popov, V. M., (1962), “Absolute stability of nonlinear systems of automatic control”, **Automation and Remote control**. pp. 807-810
- [36] M. Aizerman and F.R.Gantmacher, (1964), “Absolute Stability of Regulator Systems”, San Francisco: Holden-Day
- [37] Thathachar, M. A. L., M. D. Srinath and G. Krishna,(1966) ,“ Stability with nonlinearity in sector”, **IEEE Transactions on Automatic Control**, Vol. 11, n:2, pp. 311-312.
- [38] Cho, Y. S. and K. S. Narendra, (1968), ”An off-axis circle criterion for the stability of a feedback system with a single monotonic nonlinearity,” **IEEE Transactions on Automatic Control**, Vol. 13, pp. 413-416



## **Abstract**

Fractional operators mathematical formulas and Characteristics of systems described by fractional differential equations are studied.

The last sections include the stability definitions and approaches of stability analysis in linear and nonlinear fractional systems.

For the first time, in this thesis, we use extended Popov theorem to check the stability of nonlinear fractional order feedback ( Lure) systems.

**Keywords:** Fractional nonlinear feedback systems, Stability, Lure system, Mittag Leffler stability, Lyapunov stability, Extended Popov criteria, Circle criteria.