

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده فنی مهندسی

گروه مکانیک

تأثیر میرایی ترموالاستیک بر ارتعاشات جانبی ورق میکرو دایروی دوآر

دانشجو : مهدی داوری

استاد راهنما :

دکتر اردشیر کرمی محمدی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

بهمن ماه ۹۰

تشکر و قدر دانی:

با سپاس از خداوند متعال که به ما نعمت آموختن ارزانی داد. شایسته است از زحمات دکتر اردشیر کرمی محمدی که در طول تحقیق و تدوین پایان نامه، اینجانب را راهنمایی کردند و حمایت های همه جانبه همسرم که همواره پشتیبان اینجانب بودند تقدیر و تشکر نمایم.

تأثیر میرایی ترموالاستیک بر ارتعاشات جانبی ورق میکرو دایروی دوآر

چکیده :

میرایی ترموالاستیک^۱ مهمترین عامل اتلاف انرژی سازه های مرتعش از جمله تشدید کننده ها^۲ در مقیاس میکرو و نانو در دمای اتاق می باشد. بررسی جنبه های مختلف این پدیده مبنای بسیاری از پژوهش های اخیر محققین و دانشمندان قرار گرفته است. در این پایان نامه معادلات حاکم کوپل شده ترموالاستیک برای ارتعاشات متقارن محوری جانبی ورق میکرو دایروی با سرعت زاویه ای ثابت حول محور مرکزی آن بدست آمده و سپس به بررسی این پدیده در ورق میکرو دایروی دوآر با روش المان محدود^۳ به کمک نرم افزار ANSYS پرداخته شده است. دقت نتایج بدست آمده در حالت بدون دوران با نتایج بدست آمده توسط دیگر محققان مقایسه خواهد شد. سپس اثر چرخش، دما و ابعاد ورق بر روی میرایی ترموالاستیک برای ورق میکرو دایروی دوآر بررسی خواهد شد.

کلمات کلیدی : میرایی ترموالاستیک، ضریب کیفیت^۴، سیستم های میکرومکانیک^۵، ورق میکرو دایروی دوآر^۶، ارتعاشات جانبی^۷

-
- 1 Thermoelastic Damping
 - 2 Resonators
 - 3 Finite element
 - 4 Quality factor
 - 5 MEMS
 - 6 Rotating Micro Circular Plate
 - 7 Out- of-plane vibration

فهرست مطالب

چکیده

فصل ۱ مقدمه ای بر میرایی ترموالاستیک و پیشینه تحقیق

۲	۱-۱	میرایی ترموالاستیک
۴	۲-۱	پیشینه تحقیق
۱۲	۳-۱	هدف

فصل ۲ روش اجزای محدود

۱۴	۱-۲	روش اجزای محدود به کمک ANSYS
۱۴	۱-۱-۲	استخراج ماتریس های سازه ای
۱۹	۲-۱-۲	استخراج ماتریس های میرایی
۲۲	۳-۱-۲	معادلات گرمایی
۲۲	۱-۳-۱-۲	اصول جریان گرمایی
۲۵	۲-۳-۱-۲	استخراج ماتریس های جریان گرمایی
۲۸	۴-۱-۲	lumped ماتریس
۲۸	۱-۴-۱-۲	عملیات قطری سازی برای المان هایی با مرتبه تابع شکل پایین
۲۹	۲-۴-۱-۲	عملیات قطری سازی برای المان هایی با مرتبه تابع شکل بالا
۳۰	۵-۱-۲	معادلات اساسی ترموالاستیک
۳۲	۶-۱-۲	استخراج ماتریس های ترموالاستیک
۳۴	۲-۲	زبان پارامتری نرم افزار Ansys و ساخت ماکرو

فصل ۳

- ۳۸ استخراج معادلات حرکت
- ۳۹ معادلات حرکت جانبی ورق میکرو دایروی دوار
- ۴۵ معادله هدایت گرمایی

فصل ۴ نتایج

- ۵۱ ۱-۴ مقدمه
- ۵۲ ۲-۴ میرایی ترموالاستیک برای ورق میکرو دایروی توپر بدون چرخش
- ۵۸ ۳-۴ میرایی ترموالاستیک برای ورق میکرو دایروی توخالی دوآر

فصل ۵ نتیجه گیری و پیشنهادات برای مطالعات آینده

- ۶۷ ۱-۵ بحث و نتیجه گیری
- ۶۸ ۲-۵ مطالعات آینده
- ۶۹ منابع و مراجع

فهرست شکل ها

- ۳-۱ توزیع دما در یک تشدید کننده مرتعش ۳
- ۲-۱: مقادیر مختلف ضریب کیفیت به ازای فرکانس بار محوری اعمال شده ۸
- ۳-۱: معکوس ضریب کیفیت برای رینگ دوآر با شعاع ۳ mm و مقادیر مختلف ضخامت ۱۱
- $b)\Omega = 4.0e5 \text{ rpm}, \quad a)\Omega = 4.0e3 \text{ rpm}$
- c) مقایسه بین دو حالت $\Omega = 4.0e3 \text{ rpm}$ و $\Omega = 4.0e5 \text{ rpm}$
- ۴-۱: میرایی ترموالاستیک بر حسب ضخامت با نسبت ثابت $a/h=50$ برای ورق میکرو ۱۱
- دایروی در دمای ۲۹۳k ۱۱
- ۱-۲: هندسه المان PLANE223 ۳۶
- ۲-۲: هندسه المان SOLID226 ۳۶
- ۱-۳: تصویر شماتیک از دیسک دایروی و سیستم مختصات ۳۸
- ۱-۴: شکل مد متقارن محوری اول برای ورق میکرو دایروی توپر با شرایط مرزی گیردار ۵۲
- ۲-۴ معکوس ضریب کیفیت بر حسب ضخامت در دماهای مختلف برای شرایط مرزی گیردار ($a = 500\mu\text{m}$) (الف) مرجع [۳۲] (ب) نتایج روش عددی ۵۴
- ۳-۴ معکوس ضریب کیفیت بر حسب ضخامت با نسبت ثابت شعاع به ضخامت ($a/h = 50$) ۵۶
- برای مد های اول تا سوم (الف) مرجع [۳۲] (ب) نتایج روش عددی
- ۴-۴- شکل مد متقارن محوری برای ورق میکرو دایروی تو خالی با شرایط مرزی گیردار
- در راستای شعاعی (الف) مد اول (ب) مد دوم (ج) مد سوم ۵۹

۵-۴ تغییرات فرکانس طبیعی اول و دوم و سوم بر حسب ضخامت با نسبت ثابت

۶۰ شعاع به ضخامت $(a/h = 50)$

۶-۴ معکوس ضریب کیفیت بر حسب ضخامت با نسبت ثابت شعاع به ضخامت $(a/h = 50)$

۶۱ برای مد های اول تا سوم

۶۲ ۷-۴ تغییرات فرکانس اول ، دوم و سوم بر حسب سرعت دورانی برای دیسک با ضخامت $1\mu\text{m}$

۶۳ ۸-۴ معکوس ضریب کیفیت بر حسب ضخامت برای سرعت های زاویه ای متفاوت (مد اول)

۶۴ ۹-۴ معکوس ضریب کیفیت بر حسب سرعت دورانی برای مدهای اول ، دوم و سوم

۶۵ ۱۰-۴ معکوس ضریب کیفیت بر حسب سرعت دورانی در دماهای مختلف برای مد اول

فهرست جداول

- ۵۳ ۱-۴ مشخصات مکانیکی و گرمایی سیلیکون در دما های مختلف
- ۵۵ ۲-۴ ضخامت بحرانی برای $a/h = 50$ و مقایسه با نتایج آقای سان و زهر

فصل ۱

مقدمه ای بر میرایی ترموالاستیک و پیشینه تحقیق

✓ میرایی ترموالاستیک

✓ پیشینه تحقیق

✓ هدف

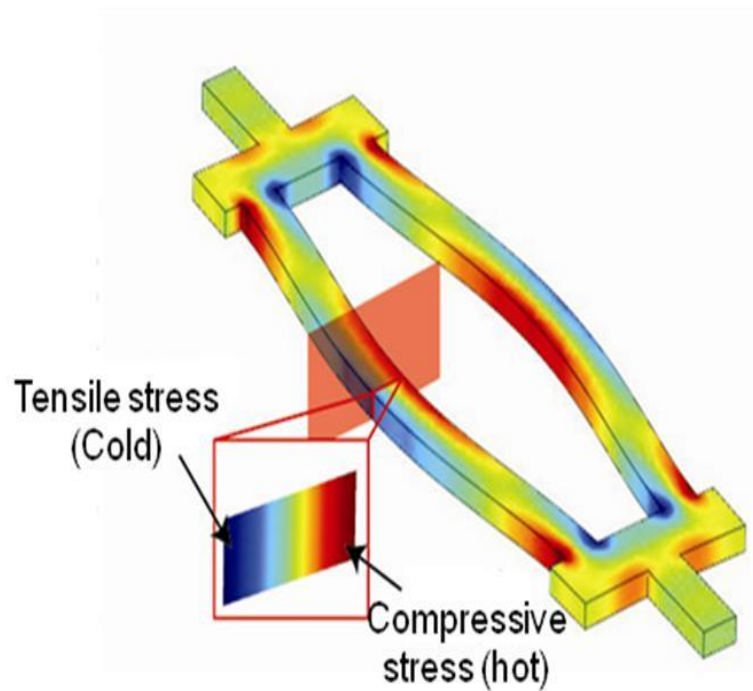
مقدمه

۱-۱ میرایی ترموالاستیک

به طور کلی اتلافات در سازه های مرتعش را می توان به دو دسته تقسیم کرد: میرایی داخلی و میرایی خارجی. میرایی خارجی به شرایط مرزی وابسته است و در اکثر موارد با جابجایی مناسب می توان آن را حذف یا کمینه کرد تا قابل اغماض شود. اما میرایی داخلی تنها به جنس و مشخصات هندسی سازه وابسته است. بنابراین کمینه کردن اثر مکانیزم های داخلی نسبت به مکانیزم های خارجی از اهمیت بیشتری برخوردار است. میرایی ترموالاستیک از مهمترین اتلافات داخلی محسوب می شود و اهمیت آن زمانی آشکار شد که دانشمندان به ساخت سازه هایی در ابعاد میکرو و نانو روی آوردند.

هر سازه ی الاستیک در حال ارتعاش، مدام در حال فشرده شدن و کش آمدن است که این دو با هم رخ می دهد. پس در هر سازه مرتعشی دو ناحیه فشرده و کشیده وجود دارد. میرایی ترموالاستیک از جریان گرمایی که بین این دو ناحیه بوجود می آید ناشی می شود. در واقع در اثر فشرده گی دما افزایش پیدا کرده و همچنین در اثر کش آمدن دما کاهش می یابد، و این امر باعث پدید آمدن یک گرادیان دمایی بین دو ناحیه فشرده و کشیده می شود. در طی این فرآیند سازه به سمت تعادل دمایی میل می کند و انرژی به صورت جریان گرمایی بازگشت ناپذیر نمی تواند در سازه ذخیره شود و

موجب افزایش آنتروپی سیستم می شود. افزایش آنتروپی سیستم اتلاف انرژی را به دنبال دارد. اتلاف انرژی ای را که بدین صورت رخ می دهد میرایی ترمو الاستیک می نامند.



شکل ۱-۱ توزیع دما در یک تشدید کننده مرتعش

دما در زمان مشخصه τ_R به تعادل می رسد البته تا زمانی که فرکانس نوسانات ω باقی بماند. در بازه فرکانسی پایین $\tau_R \leq \omega^{-1}$ ارتعاشات تقریباً هم دما^۱ است و اتلاف انرژی ناچیز است و همچنین در بازه فرکانسی بالا $\tau_R \geq \omega^{-1}$ اتلافات کم می باشد و ارتعاشات آدیاباتیک فرض می شود.

زمانی که $\tau_R \approx \omega^{-1}$ تنش و کرنش خارج از فاز می باشند و بیشینه اصطکاک داخلی رخ می دهد. به این نقطه به اصطلاح پیک دبی^۲ گفته می شود.

-
- 1 Iso Thermal
 - 2 Debye peak

۱-۲ پیشینه تحقیق

نخست زئر [۲۱] به اصطکاک داخلی مواد جامد پرداخت و میرایی ترموالاستیک را برای اولین بار مطرح کرد. او تیر همگن ایزوتروپیک را مورد بررسی قرار داد و توانست فرم تقریبی و تحلیلی از ضریب کیفیت ارائه دهد. بری [۳] فلز برنج α را مورد آزمایش قرار داد و از تئوری که زئر داده بود استفاده کرد و به این نتیجه رسید که در دمای اتاق میرایی تابعی از فرکانس می باشد. روژاست [۴] به اثر میرایی ترموالاستیک در تیرهای تشدید کننده سیلیکونی در مقیاس میکرو پی برد. او تیر های مورد آزمایش را بدور از میرایی بیرونی و در خلا در بازه ی دمایی ۳۰۰ تا ۴۰۰ درجه کلون و در فرکانس های بین ۰/۰۸ تا ۱/۶ مگاهرتز مورد آزمایش قرار داد. نتایج آزمایشات تطابق خوبی با تئوری زئر داشتند. یاسومورا [۵] همان کار روژاست را انجام داد اما این بار او از نیترات سلیکون و کریستال-سیلیکون برای میکرو رزوناتورها در دمای اتاق استفاده کرد و توانست به نتایج مشابهی با کار روژاست برسد. لیفشیتز و روکس [۶] به اصلاح کارهای زئر برای تیر نازک با سطح مقطع مستطیلی پرداختند. آنها با در نظر گرفتن پروسه میرایی ترموالاستیک به عنوان اصلیتترین مکانیزم اتلاف در سیستم های میکرو و نانو با استفاده از معادلات خطی ترموالاستیک توانستند عبارت دقیق تری را برای ضریب کیفیت بدست آورند. همچنین آنان در کار خود آزمایشاتی در مورد ضریب کیفیت آرسناید ژرمانیم و سیلیکون انجام دادند و مشاهده کردند که ضریب کیفیت بعد از پیک دبای با افزایش ابعاد سازه کاهش پیدا می کند. استریکار و همکارانش [۷] به توسعه مدل زئر با در نظر گرفتن ریزدانه های پلی سیلیکون پرداختند. آنها به این نتیجه رسیدند که برای ساخت میکروتیرهای تشدید کننده در محدوده فرکانسی گیگا هرتز سیلیکون تک کریستال نسبت به سیلیکون ریزدانه عملکرد بهتری از خود نشان می دهد. دوول [۸] به مقایسه مقادیر تئوری و مقادیر آزمایشگاهی ضریب کیفیت پرداخت و نشان داد که مدل زئر به خوبی می تواند اثر ابعاد تیر و مشخصات ماده بر روی ضریب کیفیت را شرح دهد. دوول و همکاران [۹] به کار آزمایشگاهی بر روی میکرو ژيروسکوپها پرداختند. آنها پی

بردند که نوع طراحی و ماده بکارگرفته شده تاثیر بسزایی در این میرایی دارند. آنها در انجام آزمایشات خود تاثیر دیگر میرایی ها را مینیمم کرده بودند. هوستون [۱۰] بر روی سازه هایی که دارای شکل مدهای غیر صفر بودند کار کرد. مدل میرایی ترموالاستیک او بر اساس مشاهداتی بود که در آن مدهای تشدید سازه های الاستیک در اکثر مواقع دارای مولفه خمشی بودند. همچنین ضریب اشتراک انرژی خمشی را تعیین کرد و آن را در مدل زرن برای میرایی استوانه باریک در حالت خمش خالص بکار برد و به این نتیجه رسید که این میرایی برای میکرو سازه ها با ساختار سیلیکونی بسیار مهم است و این اهمیت نیز برای سازه ها تا مقیاس ۵۰ نانومتر نیز وجود دارد. استارزوسکی و خیساوا [۱۱] میرایی ترموالاستیک را در میکرو و نانو تیرها با در نظر گرفتن سرعت محدود برای انتقال حرارت بوسیله یک سری معادلات انتقال حرارت هیپربولیک بررسی کردند.

سدیتو و همکاران [۱۲] مدل کلاسیک میرایی ترموالاستیک را با در نظر گرفتن یک تحریک الکترواستاتیکی دلخواه بهبود بخشیدند. مرتبه های بالای فرکانس های تحریک که در نوسانات ناشی از طبیعت غیر خطی نیروی استاتیکی ظاهر می شوند نیز در مدل اصلاح شده در نظر گرفته شدند. آنها با روش انرژی یک تیر با تغییر شکل بزرگ با میرایی فیلم فشاری از سیال و میرایی ترموالاستیک را در نظر گرفته و ضرایب کیفیت را برای حالت های متفاوت محاسبه کردند.

نایفه و یونس [۱۳] یک مدل تحلیلی برای ضریب کیفیت یک میکرو صفحه مستطیلی با اعمال بار الکترواستاتیکی و بدون آن ارائه کردند. آنها با جدا کردن معادله کوپل شده هدایت حرارتی از معادله ارتعاشی صفحه به حل مسئله پرداختند. همچنین آنها از روش اغتشاشات^۱ برای بدست آوردن ضریب کیفیت در قالب یک عبارت تحلیلی کمک گرفتند و کارهای خود را با نتایج زرن و لیفشیتز مقایسه کردند.

پرابهاکار و همکارانش [۱۴] مدلی دو بعدی برای میرایی ترموالاستیک ارائه دادند و تئوری یک بعدی زنر و لیفشیتز را بهبود بخشیدند. برای حل معادله دو بعدی هدایت حرارتی از روش تابع گرین استفاده کردند و ضریب کیفیت را به صورت سری نامحدود محاسبه نمودند. آنها اثرات مختلفی همانند هندسه تیر فرکانس طبیعی شکل مدهای خمشی شرایط مرزی را بر روی ضریب کیفیت میکرو تیر تشدید کننده سیلیکونی تک کریستالی بررسی کردند. خطای بدست آمده با مدل یک بعدی بین ۲ تا ۸۰ درصد گزارش شد.

یای و متین [۱۵] با استفاده از روش اجزای محدود فرمولبندی خاصی را برای میرایی ترموالاستیک میکرو تیرهای تشدید کننده ارائه دادند. آنها با استفاده از روش اغتشاشات در حل معادله دینامیکی تیر و هدایت حرارتی به معادله مقدار ویژه خطی رسیدند. سپس این معادله را برای تیری با تکیه گاه ساده با روش اجزای محدود حل کردند و نتایج بدست آمده را با نتایج تحلیلی زنر و لیفشیتز مقایسه کردند. آنها نیز همانند دیگران به تاثیر عوامل مختلف بر روی ضریب کیفیت پرداختند.

اوکاموتو و همکاران [۱۶] به کار آزمایشگاهی پرداختند و تاثیر دما بر میرایی ترموالاستیک را بررسی کردند. آنها به این نتیجه رسیدند که برای میکرو تیر یک سر گیردار از جنس ژرمانیم آرسنیک در دمای ۵۰ درجه کلوین میرایی ترموالاستیک کمینه می شود. دلیل آن را اینگونه توجیه کردند که در دمای ۵۰ درجه کلوین گرادیان دمای بوجود آمده در اثر میرایی با توزیع گرمایی خنثی می شود و این بدان معنا بود که می توان با تغییر دما حساسیت حسگرهای تشدید کننده را بهبود بخشید.

راشد و الاتا [۱۷] میرایی ترموالاستیک ارتعاشات محوری تیری متشکل از دو لایه متفاوت را بررسی کردند و متوجه شدند که هرچه لایه روی تیر نازکتر باشد میرایی کمتر است.

سرا و بونالدی [۱۸] با استفاده از روش اجزای محدود فرمولبندی بر اساس یک شکل ضعیف مساله مقدار مرزی برای ترموالاستیسیته کاملا کوپل شده ارائه دادند. با انتگرال گیری روی تابع اتلافی که بدست آورده بودند در یک سیکل نوسانی می توان میرایی ترموالاستیک را بدست آورد. آنها با استفاده

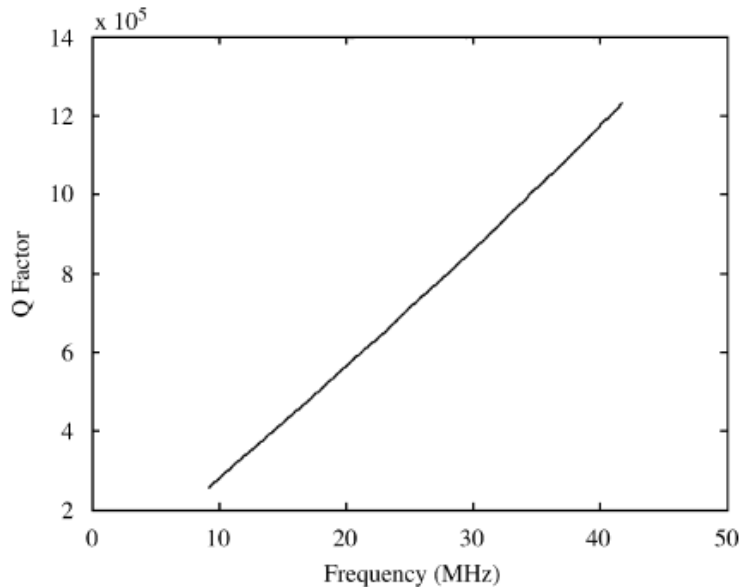
از اصل تغییرات بایوت در ترموالاستیسیته شکل فیزیکی تابع اتلاف را نشان دادند. همچنین معادلات کوپل شده المان محدود را با تغییرات کوچک هارمونیکی مکانی و دمایی و با در نظر گرفتن تعادل ترمودینامیکی بدست آوردند. در این فرمول بندی دو المان در نظر گرفته شده بود. المان اول، المان ۸ گره ای جدیدی بود که بر اساس تئوری ورق ریسر و-میندلین که هم بر سازه های نسبتا ضخیم و هم بر سازه های نازک کاربرد دارد، بنا شده بود. المان دوم، المان ۲۰ گره ای از نوع ترموالاستیک ایزو پارامتریک سه بعدی بود که برای مدل کردن سازه های حجیم مناسب است. آنها نیز به مقایسه رفتار این دو المان در یک تیر نازک پرداختند.

مچکالف و همکاران [۱۹] به این موضوع پی بردند که مهمترین میرایی در یک تشدید کننده میکرومکانیکی با ضخامت ۱/۵ میکرومتر میرایی ترموالاستیک است. آنها با قراردادن دو تشدید کننده در دو فرکانس متفاوت ۴۶۰ و ۵۱۰ کیلو هرتز در خلا ضریب کیفیت را پایین آوردند و با تغییرات دما از ۱۲۰ تا ۴۰۰ درجه کلون به این نتیجه رسیدند که میرایی و ضریب کیفیت این دو تشدید کننده در دو آهنگ متفاوت افزایش می یابد که با تئوری زرنر هم خوانی دارد.

رضازاده و همکاران [۲۰] معادلات ترموالاستیک میکرو تیر خازنی یک تشدیدکننده را با مدل هدایت گرمایی غیر فوریه ای بدست آوردند. در این مطالعه آنان فرض کردند که هدایت گرمایی در دو راستای طولی و عرضی صورت می گیرد. ضریب کیفیت ترموالاستیک را در دو حالت از مدل هدایت حرارتی یک بعدی سهموی مقایسه کردند و دریافتند که دو حالت مذکور با یک بعدی سهموی انطباق خوبی دارد. همچنین آنها تاثیر اندازه و ابعاد را بر ضریب کیفیت بررسی کردند و ضخامت بحرانی بدست آمده را با نتایج تحلیلی مقایسه کردند. از طرفی تاثیر ولتاژ توقف را بر ضریب کیفیت مورد بررسی قرار دادند و به این نتیجه رسیدند که ولتاژ توقف ضریب کیفیت را کاهش می دهد.

کومار وهاکو [۲۱] به این نتیجه رسیدند که راه حلی برای کاهش میرایی ترموالاستیک وجود ندارد تاثیر نیروی محوری پسماند میکرو تیر را بر این میرایی مورد بررسی قرار دادند و به این نتیجه

رسیدند که افزایش نیروی محوری هم باعث افزایش فرکانس طبیعی می شود و هم ضریب کیفیت را افزایش می دهد بنابراین آنها برای کنترل این میرایی تغییر در نیروی محوری را پیشنهاد داده اند.



شکل ۱-۲: مقادیر مختلف ضریب کیفیت به ازای فرکانس بار محوری اعمال شده [۲۱]

استریکار [۲۲] به رابطه بین فرکانس و میرایی ترمو الاستیک در میکرو تیر اولر برنولی که از سه لایه متفاوت تشکیل شده بود در دو حالت سرامیک-سرامیک و سرامیک-فلز پرداختند. و همچنین تاثیر نوع ماده و نسبت حجمی آنها را مورد بررسی قرار داده و به این نتیجه رسیدند که میکرو تیرهایی که از سیلیسیم و کاربید سیلیسیم ساخته شده اند و با طلا نقره مس یا آلومینیوم آبکاری شده اند میرایی بیشتری نسبت به نوع بدون آبکاری آن میکرو تیرها دارند. همچنین میکرو تیرهایی که از سیلیسیم ساخته شده اند و با کاربید سیلیسیم پوشش داده شده اند در نمودار میرایی آنها قله بزرگتری دیده می شود که با افزایش نسبت حجمی کاربید سیلیسیم به سیلیسیم این قله ها افزایش می یابند. همچنین استریکال و سایریم برای تیر دولایه کار مشابه ای انجام دادند.

ژانگ و تورنر [۲۳] نیز به میرایی ترمو الاستیک طولی یک تیر با در نظر گرفتن شرط مرزی دما ثابت و عایق بندی پرداختند.

چوبی و همکاران [۲۴] یک پوسته نیم کروی را بررسی کردند و تاثیر پارامترهای مختلف از جمله شعاع و ضخامت شعاعی را بر روی ضریب کیفیت بررسی کردند.

هائو و همکاران [۲۵] به محاسبه میرایی ترمو الاستیک تشدید کننده های میکرو مکانیکی با استفاده از روش انرژی گرمایی پرداختند. آنها انرژی گرمایی را در هر سیکل نوسانی محاسبه کردند. روش انرژی گرمایی در مقایسه با روش فرکانس-مختلط مقادیر مختلط نداشته و می توان آن را در نرم افزار انسیس اجرا کرد. نتایج بدست آمده با نتایج حاصله از چندین روش دیگر انطباق خوبی دارد. این روش را می توان برای هندسه های پیچیده نیز توسعه داد.

مندز و همکاران [۲۶] میرایی ترمو الاستیک تیر یک سر گیردار را با در نظر گرفتن ترمهای خطی و غیر خطی آن شبیه سازی عددی کرده و با یکدیگر مقایسه کردند. نتایج با فرض جابجایی های بزرگ، سخت شوندگی و کاهش زمان تاخیر برای دامنه نوسانات را نشان میدهد.

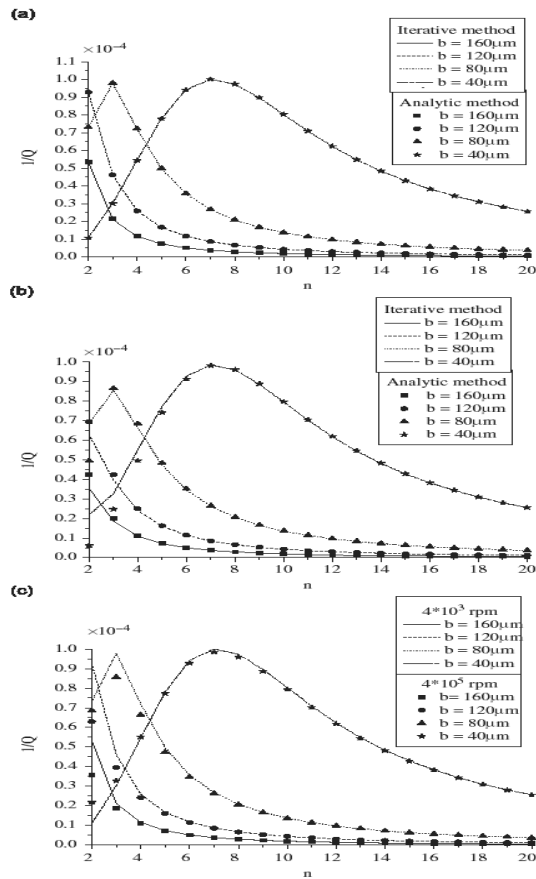
چوبی و همکاران [۲۷] فرمولبندی اجزای محدود برای یک مساله کاملا کلی ترمو الاستیک ارائه دادند. از آنجایی که حل مقادیر ویژه بسیار پیچیده و زمان بر است، یک ایده کاهش مدل در اینجا ارائه کردند که کارایی محاسبات را بالا می برد در نهایت حل خود را با نتایج تحلیلی مقایسه کردند.

یای [۲۸] نیز با استفاده از روش اجزای محدود به میرایی ترمو الاستیک تشدید کننده های میکرو مکانیکی پرداخته است. او از روش اغتشاشات برای بدست آوردن معادله مقدار ویژه خطی استفاده کرده است. این آنالیز همچنین شامل روش فوریه برای کاهش ابعاد مسئله و بهبود کارایی محاسبات می باشد. این روش در ابتدا برای تیری با تکیه گاه ساده به کار رفته است و نتیجه آن با کار زهر مقایسه شده است سپس روش مذکور برای رینگ تشدید کننده سیلیکونی به طور سه بعدی توسعه داده شد. همچنین نتایج نشان می دهد که در نمودار ضریب کیفیت بر حسب ضخامت شعاعی رینگ قله ی ماکزیمی وجود دارد.

سان و همکاران [۲۹] میرایی ترموالاستیک میکروتیری را که تحت گرمایش یک باریکه لیزر قرار داشت بررسی کرده و با یک روش عددی تحلیلی مبتنی بر تبدیل لاپلاس مساله خود را حل کرده و برای صحه گذاری از نرم افزار فملب^۱ استفاده کردند و همچنین ممان و خیز گرمایی را بدست آوردند. آنها به بررسی موارد دیگری از جمله ابعاد و میزان تابش لیزر بر روی میرایی پرداختند و در پایان آن را با میرایی سیال مقایسه کردند. کیم و همکاران [۳۰] ضریب کیفیت رینگ دواری را با در نظر گرفتن ارتعاشات درون صفحه ای محاسبه کردند. آنها پروفیل دما را با فرضی که برای خمش رینگ در نظر گرفتند و با حل معادله هدایت گرمایی بدست آوردند. سپس با داشتن توزیع دما معادله حرکت مدل را بدست آوردند و براساس آن مقادیر ویژه را بدست آوردند سپس با تحلیل مقدار ویژه برای ارتعاشات فرکانس طبیعی، ضریب کیفیت را محاسبه کردند.

یانگ و همکاران [۳۱] ژيروسکوپ دوشاخه ساخته شده از لایه‌های سیلیکون SOI را مورد آزمایش قرار دادند. آنها نیز از روش عددی که همان روش انرژی گرمایی بود نیز استفاده کردند.

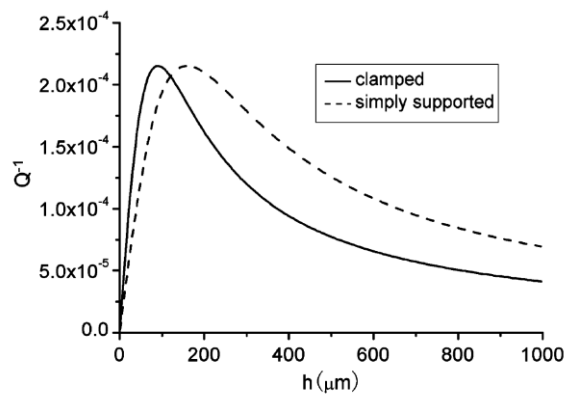
سان و تومیوه [۳۲] به استخراج معادلات ارتعاشی متقارن محوری دیسک دایروی با کوپلینگ ترموالاستیک پرداختند و توانستند میرایی ترموالاستیک را در قالب یک عبارت بیان کنند. همچنین به بررسی اثر دمای محیط، شرایط مرزی و ابعاد ورق بر میرایی ترموالاستیک نیز پرداختند.



شکل ۳-۱: معکوس ضریب کیفیت برای رینگ دوار با شعاع ۳mm و مقادیر مختلف ضخامت (a) $\Omega =$

$\Omega =$ و $\Omega = 4.0e3 \text{ rpm}$ (b) $\Omega = 4.0e5 \text{ rpm}$ (c) مقایسه بین دو حالت $\Omega = 4.0e3 \text{ rpm}$ و

[30] $4.0e5 \text{ rpm}$



شکل ۴-۱ میرایی ترموالاستیک بر حسب ضخامت با نسبت ثابت شعاع به ضخامت $a/h=50$ برای ورق دایروی در

دمای 293 K [32]

۱-۳ هدف

همان طور که در قسمت ۱-۲ اشاره شد معادلات حرکت حاکم بر سیستم با در نظر گرفتن میرایی ترموالاستیک برای ورق دایروی بدون چرخش قبلا بدست آمده است. در این پایانامه با افزودن چرخش به سیستم ابتدا معادلات حرکت ورق میکرو دایروی دوار را بدست آورده و سپس به بررسی تاثیر عوامل مختلف از جمله ابعاد ورق، دما و مخصوصا اثر دوران بر ضریب کیفیت میکرو ورق دایروی دوار به عنوان یک تشدیدگر پرداخته خواهد شد. به همین منظور مسئله مورد نظر را با استفاده از روش المان محدود و به کمک زبان کد نویسی APDL نرم افزار ANSYS مدل کرده و نتایج مورد نظر را استخراج می کنیم.

فصل ۲

روش اجزای محدود

روش اجزای محدود به کمک ANSYS

✓ استخراج ماتریس های سازه ای

✓ استخراج ماتریس های میرایی

✓ معادلات گرمایی

✓ ماتریس lumped

✓ استخراج ماتریس های ترمو الاستیک

زبان پارامتری نرم افزار Ansys و ساخت ماکرو

۱-۲ روش اجزای محدود به کمک نرم افزار انسیس [۳۳]

در این فصل به استخراج ماتریس های سیستم توسط نرم افزار ANSYS پرداخته خواهد شد. برای بدست آوردن معادله اساسی سیستم نیاز به استخراج ماتریس سازه ای^۱، ماتریس میرایی^۲ و ماتریس جریان گرمایی^۳ سیستم می باشد که در ادامه به آن پرداخته شده است.

۱-۱-۲ استخراج ماتریس های سازه ای

اصل کار مجازی^۴ بر این است که با تغییرات مجازی خیلی کوچک در انرژی کرنشی سیستم می بایست به همان مقدار تغییرات در کار خارجی حین اعمال نیرو به دنبال داشته باشد به عبارت دیگر:

$$U = \delta V \quad (1-2)$$

که در آن

$$U = U_1 + U_2: \text{انرژی کرنشی}^5 \text{ (کار داخلی)}$$

$$V = V_1 + V_2 + V_3: \text{ کار خارجی}$$

δ : عملگر مجازی می باشد.

انرژی کرنشی مجازی عبارتست از:

$$\delta U_1 = \int_{VOL} \{\delta \varepsilon\} \{\sigma\} d(VOL)^T \quad (2-2)$$

که در آن

-
- 1 Structural Matrices
 - 2 Damping Matrices
 - 3 Heat Flow Matrices
 - 4 Virtual work
 - 5 Strain energy

$\{\varepsilon\}$: بردار کرنش

$\{\sigma\}$: بردار تنش

VOL: حجم المان می باشد.

با فرض هندسه خطی و مواد خطی استخراج معادلات را ادامه می دهیم با تلفیق معادله ۱-۳ و ۲-۳ خواهیم داشت :

$$\delta U_1 = \int_{VOL} \{\delta\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} - \{\delta\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon^{th}\} d(VOL) \quad (3-2)$$

کرنش را می توان به صورت زیر به وسیله جابجایی گره ای نیز بیان کرد:

$$\{\varepsilon\} = [B] \{U\} \quad (4-2)$$

که در آن

$[B]$: ماتریس کرنش-جابجایی بر پایه توابع شکل^۱ المان

$\{u\}$: بردار جابجایی گره ای

با تلفیق معادلات ۳-۳ و ۳-۴ و با توجه به اینکه تغییرات $\{u\}$ نمی تواند بیشتر از حجم باشد، داریم:

$$\delta U_1 = \{\delta U\}^T \int_{VOL} [B]^T [D] [B] d(VOL) \{U\} - \{\delta U\}^T \int_{VOL} [B]^T [D] \{\varepsilon^{th}\} d(VOL) \quad (5-2)$$

فرم دیگر انرژی کرنشی مجازی وقتی است که سطح در مقابل یک مقاومت گسترده به عنوان سختی فندانسیون^۲

جابجا می شود. می توان نوشت:

1 shape functions
2 foundation stiffness

$$\delta U_2 = \int_{area_f} \{\delta W_n\}^T \{\sigma\} d(area_f) \quad (6-2)$$

که در آن

$\{W_n\}$: جابجایی عمود بر سطح

$\{\sigma\}$: تنش منتقل شده به وسیله سطح

$area_f$: سطح مقاومت گسترده

$\{W_n\}$ و $\{\sigma\}$ معمولاً فقط یک عبارت غیر صفر دارند. جابجایی عمودی بر حسب جابجایی گره ای به صورت زیر می باشد:

$$\{W_n\} = [N_n]\{U\} \quad (7-2)$$

که

$[N_n]$: ماتریس توابع شکل برای جابجایی عمود بر سطح می باشد.

تنش $\{\sigma\}$ عبارت است از:

$$\sigma = K\{W_n\} \quad (8-2)$$

که در آن k سختی فندانسیون نیرو بر طول بر واحد سطح می باشد.

با تلفیق معادلات 6-2 و 8-2 و با فرض ثابت بودن k در سرتاسر سطح داریم:

$$\delta U_2 = \{\delta u\}^T k \int_{area_f} [N_n]^T [N_n] d(area_f) \{u\} \quad (9-2)$$

در ادامه به کار مجازی خارجی پرداخته خواهد شد. در ابتدا عوامل اینرسی را بررسی می کنیم:

$$\delta V_1 = - \int_{VOL} \{\delta W\}^T \frac{\{F^a\}}{VOL} d(VOL) \quad (10-2)$$

که

$\{W\}$: بردار جابجایی نقاط اصلی

$\{F^a\}$: بردار نیروی شتاب دالمبرت^۱ می باشد.

با توجه به قانون دوم نیوتن داریم:

$$\frac{\{F^a\}}{VOL} = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{W\} \quad (11-2)$$

که در آن

ρ : دانسیته

t : زمان

جابجایی داخلی المان بر حسب جابجایی گره ای عبارتست از:

$$\{W\} = [N]\{u\} \quad (12-2)$$

که $[N]$ ماتریس توابع شکل می باشد. با تلفیق معادلات ۱۰-۲، ۱۱-۲ و ۱۲-۲ و با فرض ثابت ماندن چگالی در سرتاسر حجم داریم:

$$\delta V_1 = -\{\delta u\}^T \rho \int_{VOL} [N]^T [N] d(VOL) \frac{\delta^2}{\delta t^2} \{u\} \quad (13-2)$$

فرمول بندی بردار نیروی فشاری با معادله زیر آغاز می شود:

$$\delta V_2 = \int_{area_p} \{\delta W_n\}^T \{P\} d(area_p) \quad (14-2)$$

که

$\{P\}$: بردار فشار اعمالی (که معمولا شامل فقط یک عبارت غیر صفر می باشد)

¹D'Alembert

$area_p$: سطح اعمال فشار می باشد.

با تلفیق معادلات ۱۲-۲ و ۱۴-۲ داریم:

$$\delta V_2 = \{\delta u\}^T \int_{area_p} [N_n] \{P\} d(area_p) \quad (15-2)$$

کار نیرو های گره ای اعمالی بر المان به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\delta V_3 = \{\delta u\}^T \{F_e^{nd}\} \quad (16-2)$$

که

$\{F_e^{nd}\}$: نیرو های گره ای اعمالی بر المان می باشد.

در نهایت با تلفیق معادلات ۱-۲، ۵-۲، ۹-۲، ۱۳-۲، ۱۵-۲ و ۱۶-۲ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & \{\delta u\}^T \int_{VOL} [B]^T [D] [B] d(VOL) \{u\} - \{\delta u\}^T \int_{VOL} [B]^T [D] \{\varepsilon^{th}\} d(VOL) + \\ & \{\delta u\}^T \int_{area_f} [N_n]^T [N_n] d(area_f) \{u\} = -\{\delta u\}^T \rho \int_{VOL} [N]^T [N] d(VOL) \frac{\delta^2}{\delta t^2} \{u\} + \\ & \{\delta u\}^T \int_{area_p} [N_n]^T \{P\} d(area_p) + \{\delta u\}^T \{F_e^{nd}\} \end{aligned} \quad (17-2)$$

با توجه به اینکه در تمامی جملات معادله $\{\delta u\}^T$ وجود دارد، شرایط می بایست معادله ۱۷-۲ را ارضا کند به صورت زیر کاهش می یابد:

$$\{[K_e] + [K_e^f]\} \{u\} - \{F_e^{th}\} = [M_e] \{\ddot{u}\} + \{F_e^{pr}\} + \{F_e^{nd}\} \quad (18-2)$$

که در آن

$$[K_e] = \int_{VOL} [B]^T [D] [B] d(VOL)$$

: ماتریس سختی المان

$$[K_e^f] = K \int_{area_f} [N_n]^T [N_n] d(area_f)$$

$$\{F_e^{th}\} = \int_{VOL} [B]^T [D] [\varepsilon^{th}] d(VOL)$$

$$[M_e] = \rho \int_{VOL} [N]^T [N] d(VOL)$$

$$\{\ddot{u}\} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{u\}$$

$$\{F_e^{pr}\} = \int_{area_p} [N_n]^T \{P\} d(area_p)$$

معادله ۲-۱۸ ، معادله تعادل بر روی یک المان مبنا را نشان میدهد.

۲-۱-۲ استخراج ماتریس های میرایی

فرم کلی ماتریس میرایی به صورت زیر می باشد :

$$[C] = \alpha[M] + (\beta + \beta_c)[K] + \sum_{j=1}^{N_m} \left[\left(\beta_j^m + \frac{2}{\Omega} \beta_j^\xi \right) [K_j] \right] + \sum_{K=1}^{N_e} [C_K] + [C_\xi] \quad (۱۹-۲)$$

که

$[C]$: ماتریس میرایی سازه ای

α : ضریب ماتریس جرمی

$[M]$: ماتریس جرم سازه ای

β : ضریب ماتریس سختی

β_c : ضریب متغییر ماتریس سختی

$[K]$: ماتریس سختی سازه ای

N_m : تعداد جنس

β_j^m : ضریب ماتریس سختی برای جنس j ام

β_j^ξ : ماتریس ضرایب ثابت سختی (مستقل از فرکانس) برای جنس j ام

Ω : فرکانس تحریک دایروی

K_j : قسمتی از ماتریس سختی سازه ای متعلق به جنس j ام

N_e : تعداد المان های با میرایی مشخص شده

C_K : ماتریس میرایی المان

C_ξ : ماتریس میرایی وابسته به المان

توجه شود که ماتریس سختی $[K]$ ممکن است شامل پلاستیسیته و یا اثر جابجایی های بزرگ باشد.

در سازه های دوآر ، شامل اثرات میرایی و یا نرمی ناشی از دوران نیز می باشد.

C_ξ را می توان از ξ^d به صورت زیر بدست آورد :

$$\{\phi_i\}^T [C_\xi] \{\phi_i\} = 2\xi_i^d \omega_i \quad (20-2)$$

که در آن

ξ_i^d : نسبت میرایی برای شکل مد i ام

$\{\phi_i\}$: شکل مد i ام

$\omega_i = 2\pi f_i$: فرکانس طبیعی دایره ای مربوط به شکل مد i ام

f_i : فرکانس طبیعی مربوط به شکل مد i ام

نسبت میرایی ξ_i^d تشکیل شده از :

$$\xi_i^d = \xi + \xi_i^m \quad (21-2)$$

که

ξ : نسبت میرایی ثابت

ξ_i^m : نسبت میرایی مدال برای شکل مد i ام

در حقیقت ξ_i^d به صورت مستقیم استفاده می شود. C_ξ هرگز به صورت صریح بدست نمی آید.

β_c برای بدست آوردن نسبت میرایی ثابت بدون در نظر گرفتن فرکانس کاربرد دارد. نسبت میرایی از

نسبت بین میرایی بحرانی به میرایی حقیقی (فعلی) بدست می آید.

ضریب ماتریس سختی بر حسب نسبت میرایی به صورت زیر بدست می آید :

$$\beta_c = \frac{\xi}{\pi f} = \frac{2}{\Omega} \xi \quad (22-2)$$

که در آن

ξ : نسبت میرایی ثابت

Ω : فرکانس دایره ای تحریک در محدوده ی بین Ω_B و Ω_E

$$\Omega_B = 2\pi f_B$$

$$\Omega_E = 2\pi f_E$$

f_B : فرکانس شروع

f_E : فرکانس پایان می باشد.

۳-۱-۲ معادلات گرمایی

۱-۳-۱-۲ اصول جریان گرمایی

قانون اول ترمو دینامیک بر اصل بقای انرژی گرمایی نهاده شده است . این قانون برای یک حجم کنترلی دیفرانسیلی^۱ به صورت زیر بیان می شود :

$$\rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \{V\}^T \{L\}^T \right) + \{L\}^T \{q\} = \ddot{q} \quad (23-2)$$

که در آن

ρ : چگالی

C : گرمای ویژه

دما : $T = T(x, y, z, t)$

زمان : t

$$\{L\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right\} \text{ بردار عملگر}$$

$\{q\}$: بردار شار حرارتی

\ddot{q} : نرخ تولید گرما بر واحد حجم

$$\{V\} = \left\{ \begin{array}{c} V_x \\ V_y \\ V_z \end{array} \right\} \text{ بردار سرعت برای جرم حرارت انتقالی}$$

برای درک بهتر ترم های $\{L\}$ و $\{L\}^T$ را به ترتیب با نماد های $\nabla \cdot$ و ∇ نشان می دهیم که ∇ نمایانگر عملگر گرادیان^۱ و $\nabla \cdot$ نمایانگر عملگر دیورژانس^۲ می باشد.

حال می توان از قانون فوریه برای مرتبط ساختن بردار شار حرارتی با گرادیان دمایی استفاده کرد :

$$\{q\} = -[D][L]^T \quad (24-2)$$

که

$$[D] = \begin{bmatrix} K_{XX} & 0 & 0 \\ 0 & K_{YY} & 0 \\ 0 & 0 & K_{ZZ} \end{bmatrix} \quad (25-2)$$

با تلفیق معادلات ۲۳-۲ و ۲۴-۲ داریم :

$$\rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \{V\}^T \{L\}^T \right) = \{L\}^T ([D] \{L\}^T) + \ddot{q} \quad (26-2)$$

و با بسط معادله ۲۶-۲ داریم :

$$\rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t} + V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_y \frac{\partial T}{\partial y} + V_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \ddot{q} + \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (27-2)$$

در اینجا به سه شرط مرزی می پردازیم. با فرض اینکه تمام المان را پوشش دهند:

۱- دمای مشخص شده در تمام سطح S_1

$$T = T^* \quad (28-2)$$

۲- جریان گرمایی مشخص شده در تمام سطح S_2

$$\{q\}^T \{\eta\} = -q^* \quad (29-2)$$

که در آن

1 grad operator
2 Divergence operator

{η} بردار واحد عمودی

q* : جریان گرمایی مشخص شده می باشد.

۳-جریان همرفت مشخص شده در تمام سطح S₃

$$\{q\}^T \{\eta\} = h_f(T_S - T_B) \quad (30-2)$$

که

h_f : ثابت فیلم^۱ که در دمای میانگین $(T_B + T_S)/2$ سنجیده شده است .

T_B: دمای حجمی مجاور سیال

T_S: دمای سطح مدل

با تلفیق معادله ۲-۲۴ با معادلات ۲-۳۰ و ۲-۲۹ داریم :

$$\{\eta\}^T [D] \{L\}^T = q \quad (31-2)$$

$$\{\eta\}^T [D] \{L\}^T = h_f(T_B - T) \quad (32-2)$$

اگر معادله ۲-۲۶ در تغییرات کوچک دما ضرب کرده و در تمام سطح المان انتگرال گیری شود و با معادلات ۲-۳۱ و ۲-۳۲ تلفیق شود، داریم :

$$\int_{VOL} \left(\rho c \delta T \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \{V\}^T \{L\}^T \right) + \{L\}^T (\delta T) ([D] \{L\}^T) \right) d(VOL) = \int_{S_2} \delta T q^* d(S_2) + \int_{S_3} \delta T h_f (T_B - T) d(S_3) + \int_{VOL} \delta T \ddot{q} d(VOL) \quad (33-2)$$

(K_{zz} و K_{yy} ، K_{xx}) ضرایب هدایت حرارتی به ترتیب در راستاهای (X ، Y و Z) می باشند.

۲-۳-۱-۲ استخراج ماتریس های جریان گرمایی

1 film coefficient

متغیر دما نسبت به مکان و زمان تغییر می کند. این وابستگی را می توان به صورت زیر جدا کرد :

$$T = \{N\}^T \{T_e\} \quad (۳۴-۲)$$

که

$$T = T(x, y, z, t) \text{ دما}$$

$$\{N\} = \{N(x, y, z)\} \text{ توابع شکل المان}$$

$$\{T_e\} = \{T_e(t)\} \text{ بردار دمای گره ای المان}$$

بنابراین مشتق زمانی معادله ۳۴-۲ بصورت زیر می باشد :

$$\dot{T} = \frac{\partial T}{\partial t} = \{N\}^T \{\dot{T}_e\} \quad (۳۵-۲)$$

و همچنین

$$\delta T = \{\delta T_e\}^T \{N\} \quad (۳۶-۲)$$

اپراتور $\{L\}^T$ به صورت زیر تعریف می شود :

$$\{L\}^T = [B] \{T_e\} \quad (۳۷-۲)$$

که

$$[B] = \{L\} \{N\}^T \quad (۳۸-۲)$$

هم اکنون می توان با ترکیب معادله ۳۰-۲ با معادلات ۳۵-۲ تا ۳۸-۲ عبارت زیر را بدست آورد :

$$\begin{aligned} & \int_{VOL} \rho c \{\delta T_e\}^T \{N\} \{N\}^T \{\dot{T}_e\} d(VOL) + \int_{VOL} \rho c \{\delta T_e\}^T \{N\} \{V\}^T [B] \{T_e\} d(VOL) + \\ & \int_{VOL} \{\delta T_e\}^T [B]^T [D] [B] \{T_e\} d(VOL) = \int_{S_2} \{\delta T_e\}^T \{N\} q^* d(S_2) + \int_{S_3} \{\delta T_e\}^T \{N\} h_f (T_B - \\ & \{N\}^T \{T_e\}) d(S_3) + \int_{VOL} \{\delta T_e\}^T \{N\} \ddot{q} d(VOL) \end{aligned} \quad (۳۹-۲)$$

معادله بالا معادله اساسی جریان گرما می باشد.

فرض می شود چگالی در سرتاسر حجم المان ثابت می باشد. به عبارت دیگر c و \ddot{q} می توانند در المان تغییر کنند. در نهایت $\{T_e\}$ ، $\{\dot{T}_e\}$ و $\{\delta T_e\}$ مقادیر گره ای هستند و در سرتاسر المان بدون تغییر می مانند و می توانند از انتگرال خارج شوند. حال می توان تمام عبارات معادله را در بردار دلخواه $\{\delta T_e\}$ ضرب کرد و با این کار عبارت $\{\delta T_e\}^T$ از معادله حذف خواهد شد و می توان معادله را بصورت زیر نوشت:

$$[C_e^t]\{\dot{T}_e\} + ([K_e^{tm}] + [K_e^{tb}] + [K_e^{tc}])\{T_e\} = \{Q_e\} + \{Q_e^c\} + \{Q_e^g\} \quad (40-2)$$

که

$$[C_e^t] = \rho \int_{VOL} c \{N\} \{N\}^T d(VOL)$$

ماتریس گرمای ویژه المان (میرایی گرمایی)

$$[K_e^{tm}] = \rho \int_{VOL} c \{N\} \{V\}^T [B] d(VOL)$$

ماتریس ضرایب هدایت انتقالی جرم المان

$$[K_e^{tb}] = \int_{VOL} [B]^T [D] [B] d(VOL)$$

ماتریس ضرایب هدایت نفوذی المان

$$[K_e^{tc}] = \int_{S_3} h_f \{N\} \{N\}^T d(S_3)$$

ماتریس ضرایب هدایت همرفت از سطح المان

$$\{Q_e^f\} = \int_{S_2} \{N\} q^* d(S_2)$$

بردار شار گرمایی المان

$$\{Q_e^c\} = \int_{S_3} T_B h_f \{N\} d(S_3)$$

بردار جریان گرمایی همرفت از سطح المان

$$\{Q_e^g\} = \int_{VOL} \ddot{q} \{N\} d(VOL)$$

بردار نیرو گرمایی تولید شده در المان

چند نکته در مورد ماتریس ها و بردارهای ذکر شده:

۱. ماتریس $[K_e^{tm}]$ متقارن نمی باشد

۲. ماتریس $[K_e^{tc}]$ اغلب قطری می شود که در قسمت ۳-۴ عملیات قطری سازی توضیح

داده شده است

۲-۱-۴ ماتریس لامپدا^۱

می توان ماتریس های جرمی و یا ماتریس های حرارتی خاصی بعضی از المان ها را کاهش داد و طی عملیات لامپینگ به ماتریس قطری تبدیل کرد.

روش هایی که برای قطری سازی استفاده می شود وابسته به مرتبه تابع شکل المان می باشد. که ماتریس جرمی مثالی برای این روش می باشد.

۱-۴-۱-۲ عملیات قطری سازی برای المان هایی با مرتبه تابع شکل پایین

برای المان ها با مرتبه پایین (خطی یا غیر خطی) ماتریس قطری را می توان با جمع کردن سطر ها (و یا ستون ها) بدست آورد. مراحل انجام کار به شرح ذیل می باشد:

۱- محاسبه ماتریس جرم به روش معمول

۲- محاسبه

$$S(i) = \sum_{j=1}^n M_e(i, j) \quad \text{for } i = 1 \dots n \quad (41-2)$$

که n تعداد درجه آزادی المان می باشد.

۳- جایگذاری :

$$M_e(i, j) = 0 \quad \text{for } i \neq j \quad (42-2)$$

$$M_e(i, j) = S(i) \text{ for } i..n \quad (43-2)$$

۲-۴-۱-۲ عملیات قطری سازی برای المان هایی با مرتبه تابع شکل بالا

برای المانهایی با مرتبه ی بالا روشی توسط آقای هینتون به صورت زیر پیشنهاد شده است:

۱- محاسبه ماتریس جرم به روش معمول

۲- محاسبه :

$$S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_e(i, j) \quad (۴۴-۲)$$

$$D = \sum_{i=1}^n M_e(i, i) \quad (۴۵-۲)$$

۳- جایگذاری :

$$M_e(i, j) = 0 \quad \text{if } i \neq j \quad (۴۶-۲)$$

$$M_e(i, i) = \frac{S}{D} M_e(i, i) \quad (۴۷-۲)$$

توجه شود که در این روش موارد زیر قطعی می باشد :

۱- جرم المان محفوظ می ماند.

۲- ماتریس جرمی المان معین مثبت می باشد .

این امکان وجود دارد که اگر عملیات قطری سازی با روش قبل یعنی جمع ساده سطر یا ستون ها برای المان های مرتبه بالا انجام شود ، ماتریس نهایی جرمی مثبت معین نباشد.

۵-۱-۲ معادلات اساسی ترموالاستیک

معادلات اساسی کوپل شده ترموالاستیک [۳۴] به شرح ذیل می باشد :

$$\{\varepsilon\} = [D]^{-1}\{\sigma\} + \{\alpha\}\Delta T \quad (48-2)$$

$$S = \{\alpha\}^T\{\sigma\} + \frac{\rho C_p}{T_0}\Delta T \quad (49-2)$$

که در آن

$$\{\varepsilon\} = [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \varepsilon_{xy} \ \varepsilon_{yz} \ \varepsilon_{xz}]$$

$$\{\sigma\} = [\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \sigma_{xy} \ \sigma_{yz} \ \sigma_{xz}]$$

$$\Delta T = T - T_{ref}$$

T : دمای در جریان

$$T_0 = T_{ref} + T_{off} \text{ دمای مطلق مرجع}$$

T_{ref} : دمای مرجع

T_{off} : دمای آفست از صفر مطلق به صفر

$[D]$: ماتریس سختی الاستیک

$$[D]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/E_x & -\nu_{xy}/E_x & -\nu_{xz}/E_x & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{yx}/E_y & 1/E_y & -\nu_{yz}/E_y & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{zx}/E_z & -\nu_{zy}/E_z & 1/E_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{yz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{xz} \end{bmatrix}$$

$$\{\alpha\} = [\alpha_x \ \alpha_y \ \alpha_z \ 0 \ 0 \ 0]^T \text{ بردار ضرایب نفوذ حرارتی}$$

ρ : دانسیته

C_p : ضریب گرمای ویژه در فشار یا تنش ثابت

S : دانسیته انترپیی¹ می باشد.

$\{\varepsilon\}$ و ΔT را به عنوان متغیرهای مستقل در نظر می گیریم. از قانون دوم ترمودینامیک انتروپی را بر

حسب دانسیته گرما بدست آورده و در فرمول ۴۹-۲ جایگزین می کنیم :

$$Q = T_0 S \quad (50-2)$$

بنابراین داریم :

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} - \{\beta\}\Delta T \quad (51-2)$$

$$Q = T_0\{\beta\}^T\{\varepsilon\} + \rho C_v \Delta T \quad (52-2)$$

که در آن

$$\{\beta\} = [D]\{\alpha\} \quad \text{بردار ضرایب ترموالاستیک}$$

$$C_v = C_p - \frac{T_0}{\rho} \{\alpha\}^T \{\beta\} \quad \text{گرمای ویژه در حجم ثابت}$$

با جایگذاری Q از معادله ۵۲-۲ در معادله جریان گرمایی ۲۳-۲ داریم :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = T_0\{\beta\}^T \frac{\partial\{\varepsilon\}}{\partial t} + \rho C_v \frac{\partial(\Delta T)}{\partial t} - [K]\nabla^2 T \quad (53-2)$$

که در آن

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & K_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & K_{zz} \end{bmatrix} \quad \text{ماتریس ضریب هدایت گرمایی می باشد.}$$

۲-۱-۶ استخراج ماتریس های ترموالاستیک

تا اینجا توانستیم معادله ماتریسی تنشی حرکت ۱۸-۲ و معادله ماتریسی بقای جریان گرمایی کوپل

شده با معادلات اساسی ترموالاستیک ۴۰-۲ را بدست آوریم . معادلات فوق به هم وابسته می باشند

بنابراین حل سیستم با حل همزمان معادلات فوق امکان پذیر می باشد. از کنار هم قرار دادن معادلات

فوق معادله ماتریسی المان محدود سیستم بصورت زیر به دست می آید :

$$\begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{u}\} \\ \{\dot{T}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C] & [0] \\ [C^{tu}] & [C^t] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{T\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K] & [K^{ut}] \\ [0] & [K^t] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{T\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F\} \\ \{Q\} \end{Bmatrix} \quad (۵۴-۲)$$

که در آن

$[M]$: ماتریس جرمی (معادله ۱۸-۲)

$[C]$: ماتریس میرایی سازه ای (که در قسمت ۲-۳ به آن اشاره شد)

$[K]$: ماتریس سختی (معادله ۱۸-۲)

$\{u\}$: بردار جابجایی

$\{F\}$: مجموع نیروهای گره ای المان (تعریف شده در معادله ۱۶-۲) و بردار فشار المان (تعریف شده

در معادله ۱۸-۲)

$[C^t]$: ماتریس گرمای ویژه (معادله ۴۰-۲)

$[K^t]$: ماتریس نفوذ هدایت حرارتی (معادله ۴۰-۲)

$$[K^{ut}] = - \int_{VOL} [B]^T \{\beta\} (\{N\}^T) d(VOL) \quad \text{ماتریس سختی ترموالاستیک}$$

$\{T\}$: بردار دما

$\{Q\}$: بردار های جریان همرفتی سطحی و مجموع نیروهای تولید گرما (معادله ۴۰-۲)

$[B]$: ماتریس کرنش-جابجایی (معادله ۴-۲)

{N} : توابع شکل

$$[C^{tu}] = -T0[K^{ut}]T \quad \text{ماتریس میرایی ترموالاستیک}$$

می باشند.

انرژی کل سیستم برابر است با

$$U_t = \frac{1}{4} \int_{VOL} \{\sigma\}^T \{\varepsilon\}^* d(VOL) \quad (55-2)$$

که

{ε}* : کرنش کل که شامل مقادیر حقیقی و موهومی باهم می باشد.

قسمت حقیقی معادله بالا بیانگر میانگین انرژی کرنشی ذخیره شده و قسمت موهومی بیانگر میانگین

انرژی کرنشی از دست رفته به سبب میرایی ترموالاستیک می باشد. کیفیت میرایی ترموالاستیک با

پارامتری به نام ضریب کیفیت Q به صورت زیر بیان می شود:

$$Q^{-1} = \frac{\sum_{j=1}^{N_e} Im(U_t)}{\sum_{j=1}^{N_e} Re(U_t)} \quad (56-2)$$

که N_e تعداد المان های ترموالاستیک می باشد.

۲-۲ زبان پارامتری نرم افزار Ansys و ساخت ماکرو [۳۴]

زبان طراحی پارامتری نرم افزار (APDL)^۱ به خصوص در مورد ساخت ماکرو در حل مسائلی نظیر بهینه سازی طراحی ، بهینه سازی مش ، بهینه سازی توپولوژی و کارکرد با پارامترها در طول یک مسئله کاربرد دارد . این قابلیت با کاربرد آن با ساخت ماکرو به نوعی محیط نیمه فعالی از یک محیط برنامه نویسی را می تواند تولید کند. از جمله قابلیت های این زبان می توان به موارد زیر اشاره نمود :

۱- محاسبات ریاضی به کمک دستورات موجود ، کارکرد با آرایه ها ، رشته ها ، کارکترها و ...

۲- تولید دستورات شرطی

۳- تولید حلقه های تکراری

لازم به ذکر است کاربرد این پارامترها به همراه دستورات مربوطه بسیار به موارد موجود در محیط برنامه نویسی فرترن^۲ شبیه است .

برای هریک از گراف های بدست آمده در فصل ۴ یک برنامه مجزا در محیط APDL نوشته شده است .

در این برنامه ها برای مدل کردن ورق از المان های PLANE223 و SOLID226 استفاده شده است.

المان PLANE223 شامل ۸ گره و ۴ درجه آزادی در هر گره (جابجایی در راستای x و y ، دما و ولتاژ) می باشد و المان SOLID226 شامل ۲۰ گره و ۵ درجه آزادی (جابجایی در راستای x و y و z ، دما و ولتاژ) در هر گره می باشد . خصوصیات و قابلیت های این دو المان مشابه هم می باشد.

قابلیت ساختاری دو المان فقط الاستیک بودن است که شامل تغییر شکل های بزرگ، اثرات تنش سختی و اثرات پیش تنش می باشد به علاوه انبساط حرارتی (قابلیت های حرارتی ساختاری)، شامل

1 APDL (ANSYS Parametric Design Language)

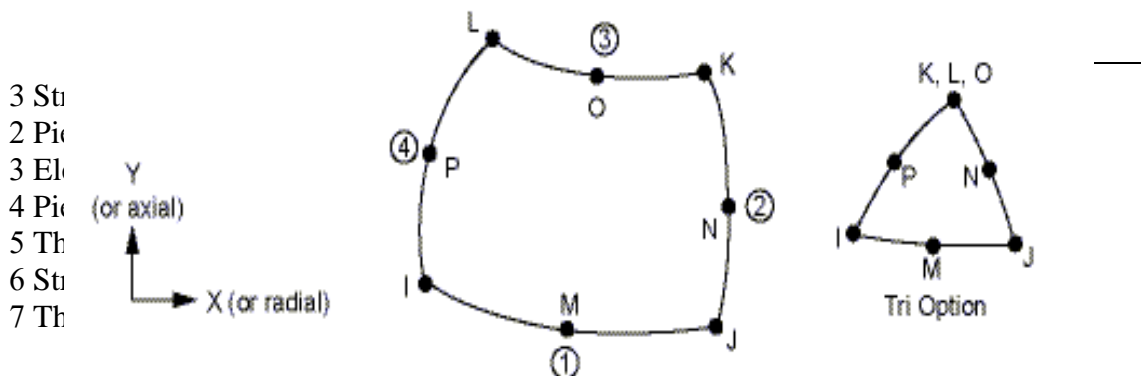
2 FORTRAN

اثر پیزو کالوریک در آنالیز دینامیکی می باشد. اثر کوریولیس برای آنالیزها با درجات آزادی سازه ای قابل دستیابی است.

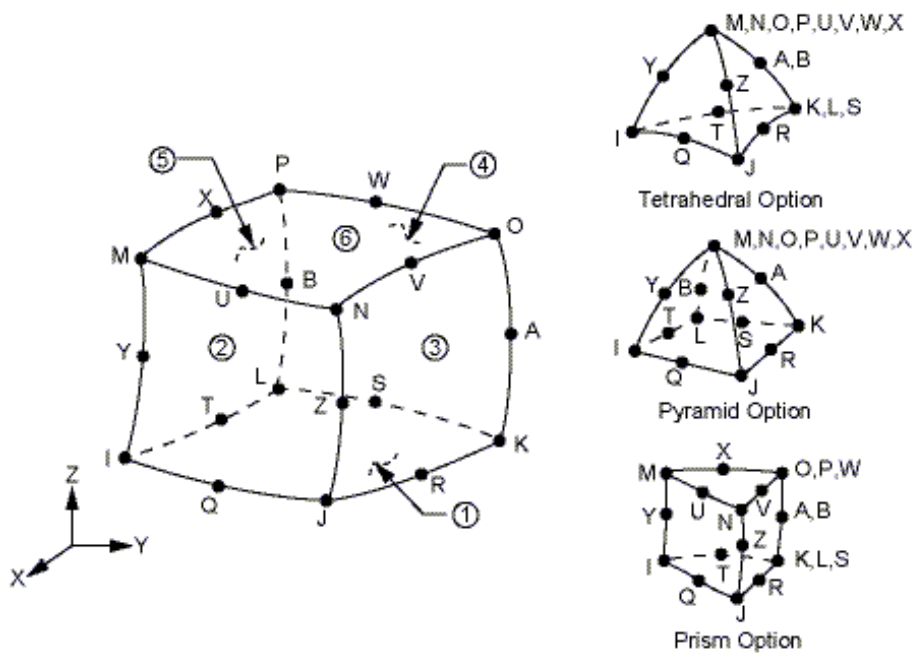
المان های PLANE 223 و SOLID226 در تحلیل های زیر کاربرد دارد :

- سازه ای - گرمایی^۱
- پیزورزیستیو^۲
- الکترو الاستیک^۳
- پیزو الکتریک^۴
- الکتریکی-گرمایی^۵
- ترموالکتریک-سازه ای^۶
- پیزوالکتریک-گرمایی^۷

با توجه به مطالب بالا و چون تحلیل ترموالاستیک یک تحلیل سازه ای-گرمایی می باشد، بنابراین بهترین انتخاب برای این تحلیل المان های PLANE 223 و SOLID226 می باشند.



شكل ١-٢ هندسه المان PLANE 223



شكل ٢-٢ هندسه المان SOLID 226

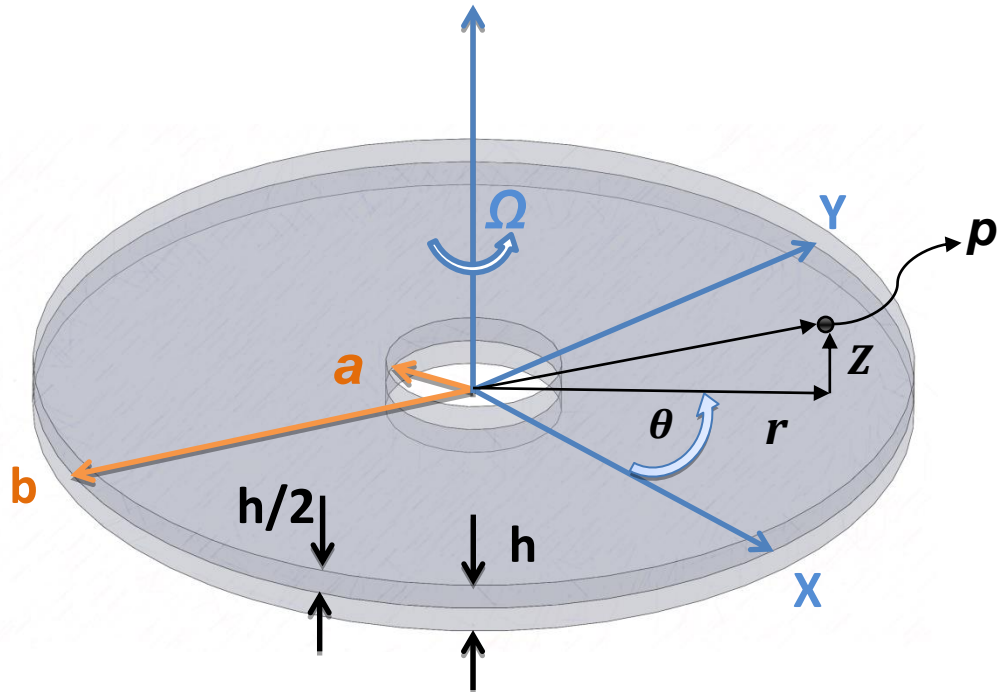
فصل ۳

✓ استخراج معادله ارتعاشی با میرایی ترموالاستیک برای ورق میکرو

دایروی دوآر

استخراج معادلات حرکت

Z



شکل ۳-۱ تصویر شماتیک از میکرو دیسک دایروی و سیستم مختصات

در این قسمت به بررسی و استخراج معادلات حرکت دیسک دایروی دوار با کوپلینگ ترموالاستیک

می پردازیم. برای ساده سازی معادلات از تئوری ورق کریشهوف^۱ استفاده شده است [۳۶]

الف) تنش عمودی σ_{zz} نسبت به تنش های اصلی قابل اغماض می باشد یعنی $\sigma_{zz} = 0$.

ب) خطوط المان عمود بر سطح میانی قبل از تغییر شکل، بر سطح فشرده شده بعد از تغییر شکل

عمود باقی می ماند بنابراین از تغییر فرم برشی مربوطه می توان صرف نظر کرد به عبارت دیگر

$$\varepsilon_{rz} = \varepsilon_{\theta z} = 0$$

ج) برای ارتعاشات کوچک، تغییر طول المان در امتداد عمود بر سطح میانی را می توان نادیده گرفت،

به عبارت دیگر

$$\varepsilon_{zz} = 0$$

معادله حرکت جانبی ورق میکرو دایروی دوار

1 Kirchhoff–Love plate theory

همانطور که در شکل ۲ نشان داده شده است ورق دایروی دارای ضخامت یکسان h ، شعاع داخلی a و شعاع بیرونی b می باشد. در اینجا از سیستم مختصات استوانه ای که مرکز آن منطبق بر مرکز ورق می باشد استفاده شده است. صفحه خنثی منطبق بر صفحه (r, θ) و محور z عمود بر این صفحه می باشد. در حالت تعادل ورق بدون تنش و کرنش، و دمای سرتاسر ورق نیز همان دمای محیط یعنی T_0 است. در حالت کلی میدان دما تابعی از زمان و مختصات (r, θ, z) می باشد. دیسک با سرعت زاویه ای ثابت Ω حول محور عمود بر دیسک (محور z) دوران می کند. موقیعت نقطه P با مختصه شعاعی r ، مختصه مماسی θ و مختصه جانبی z تعریف می شود. بنابراین جابجایی نقطه P در راستای شعاعی، مماسی و z را می توان به صورت زیر نوشت.

$$u_r = u - z \frac{\partial w}{\partial r}, \quad u_\theta = v - z \frac{\partial w}{r \partial \theta}, \quad u_z = w \quad (1-3)$$

که u و v و w به ترتیب جابجایی شعاعی، مماسی و انتقالی نقطه ای در صفحه میانی دیسک می باشند و تابعی از زمان و مختصات r, θ می باشند.

انرژی جنبشی بر حسب مکان و سرعت چرخش نشان داده می شود. بردار مکان نقطه p عبارت است از:

$$r = (r + u_r)e_r + u_\theta e_\theta + u_z e_z \quad (2-3)$$

که (e_r, e_θ, e_z) بردارهای یکه به ترتیب در جهت (r, θ, z) می باشند.

سرعت زاویه ای دیسک با رابطه زیر داده شده است:

$$\omega = \Omega e_z \quad (3-3)$$

بردار سرعت نقطه p به صورت زیر تعریف می شود [۳۵]

$$V = V_p - zV_b \quad (4-3)$$

V_p : بردار سرعت درون صفحه ای^۱

V_b : بردار سرعت ناشی از خمش^۲

$$V_p = \left[\frac{\partial u}{\partial t} - v\Omega \right] e_r + \left[\frac{\partial v}{\partial t} + (r + u)\Omega \right] e_\theta + \frac{\partial w}{\partial t} e_z \quad (۵-۳)$$

$$V_b = \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial r} + \Omega \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right] e_r - \left[\frac{\partial^2 w}{r \partial t \partial \theta} + \Omega \frac{\partial w}{\partial r} \right] e_\theta \quad (۶-۳)$$

انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل دیسک با استفاده از روابط زیر تعیین می شوند:

$$T = \frac{1}{2} \rho h \int_A V_p \cdot V_p dA \quad (۷-۳)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_A \varepsilon^T \sigma dA \quad (۸-۳)$$

که ε بردار کرنش و σ بردار تنش می باشند. با استفاده از تئوری کرنش ون کارمن^۳ بردار کرنش به

شکل زیر نمایش داده می شود:

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_p^L + \varepsilon_p^N \\ \varepsilon_b^L \end{Bmatrix} \quad (۹-۳)$$

که L و N نشان دهنده ترم های خطی و غیر خطی می باشند و داریم [۳۵]

$$\varepsilon_p^L = \left\{ \frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial v}{r \partial \theta} + \frac{u}{r}, \frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right\}^T \quad (۱۰-۳)$$

$$\varepsilon_p^N = \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2, \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{r \partial \theta} \right)^2, \frac{\partial w}{\partial r} \cdot \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right\}^T \quad (۱۱-۳)$$

$$\varepsilon_b^L = \left\{ -\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, -\left(\frac{\partial w}{r \partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} \right), -2 \left(\frac{\partial^2 w}{r \partial r \partial \theta} - \frac{\partial w}{r^2 \partial \theta} \right) \right\}^T \quad (۱۲-۳)$$

می توان بردار تنش را به صورت زیر تعریف کرد :

-
- 1 inplane
 - 2 bending
 - 3 Von Karman

$$\sigma = D\varepsilon^L \quad (13-3)$$

که در آن ماتریس D و بردارهای ε^L , σ عبارت اند از:

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_p \\ \sigma_b \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon^L = \begin{Bmatrix} \varepsilon_p^L \\ \varepsilon_b^L \end{Bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_p & 0 \\ 0 & D_b \end{bmatrix} \quad (14-3)$$

لازم به ذکر است که σ_p بردار نیروهای داخلی خطی شده و σ_b بردار مومنتوم داخلی است.

$$\sigma_p = \{q_r \quad q_\theta \quad q_{r\theta}\}^T, \quad \sigma_b = \{m_r \quad m_\theta \quad m_{r\theta}\}^T \quad (15-3)$$

و همچنین D_p و D_b عبارتند از:

$$D_p = D_0 \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}, \quad D_b = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (16-3)$$

که در آن D صلبیت کششی^۱ و D_0 صلبیت خمشی^۲ می باشد:

$$D_0 = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (17-3)$$

q_r , q_θ و $q_{r\theta}$ بردار نیروهای داخلی خطی شده بر واحد طول و m_r , m_θ و $m_{r\theta}$ بردار مومنتوم داخلی بر واحد طول می باشد [۳۵].

$$q_r = D_0 \left[\frac{\partial u}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial v}{r \partial \theta} + \frac{u}{r} \right) \right] \quad (18-3)$$

$$q_\theta = D_0 \left[\nu \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{r \partial \theta} + \frac{u}{r} \right] \quad (19-3)$$

$$q_{r\theta} = \frac{1-\nu}{2} D_0 \left[\frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right] \quad (20-3)$$

$$m_r = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right) \right] \quad (21-3)$$

-
- 1 Extensible rigidity
2 Bending rigidity

$$m_{\theta} = -D \left[\nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right) \right] \quad (22-3)$$

$$m_{r\theta} = -\frac{1-\nu}{2} D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right] \quad (23-3)$$

می خواهیم ترم دمایی را وارد کنیم [۳۲] پس داریم:

$$(\sigma_r)_T = -\frac{E}{1-\nu} \alpha_T \vartheta \quad (24-3)$$

$$(\sigma_{\theta})_T = -\frac{E}{1-\nu} \alpha_T \vartheta \quad (25-3)$$

که در آن

$$\vartheta = T - T_0 \quad (26-3)$$

بنابراین نیرو بر واحد طول برابر است با :

$$(q_r)_T = -\frac{Eh}{1-\nu} \alpha_T \vartheta \quad , \quad (q_{\theta})_T = -\frac{Eh}{1-\nu} \alpha_T \vartheta \quad (27-3)$$

بنابراین معادلات ۱۸-۲ تا ۲۰-۲ را می توان به صورت زیر اصلاح کرد :

$$q_r = D_0 \left[\frac{\partial u}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial v}{r \partial \theta} + \frac{u}{r} \right) - (1 + \nu) \alpha_T \vartheta \right] \quad (28-3)$$

$$q_{\theta} = D_0 \left[\nu \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{r \partial \theta} + \frac{u}{r} - (1 + \nu) \alpha_T \vartheta \right] \quad (29-3)$$

$$q_{r\theta} = \frac{1-\nu}{2} D_0 \left[\frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right] \quad (30-3)$$

محاسبه ممان ناشی از ترم دمایی ϑ

$$(m_r)_T = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_r z dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} -\frac{E}{1-\nu} \alpha_T \vartheta z dz \quad (31-3)$$

$$(m_r)_T = -D [(1 + \nu) \alpha_T M_T] \quad (32-3)$$

$$M_T = \frac{12}{h^3} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \vartheta z dz \quad (33-3)$$

که M_T ممنتوم گرمایی¹ نام گذاری میشود

و همینطور داریم:

$$(m_\theta)_T = -D[(1 + \nu)\alpha_T M_T] \quad (34-3)$$

بنابراین معادلات ۳-۲۱ تا ۳-۲۳ را می توان به صورت زیر اصلاح کرد :

$$m_r = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right) + (1 + \nu)\alpha_T M_T \right] \quad (35-3)$$

$$m_\theta = -D \left[\nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right) + (1 + \nu)\alpha_T M_T \right] \quad (36-3)$$

$$m_{r\theta} = -\frac{1-\nu}{2} D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right] \quad (37-3)$$

کار نیروهای غیر پایستار را نیز می توان به صورت زیر نوشت :

$$W_{nc} = \int_A (P_r u + P_\theta v + P_z w) dA \quad (38-3)$$

با استفاده از انرژی جنبشی رابطه (۷-۳)، انرژی پتانسیل رابطه (۸-۳) و کار نیروهای غیر پایستار رابطه

(۳۸-۳)، اصل هامیلتون ، معادلات حرکت و شرایط مرزی را به صورت زیر بدست خواهد آمد :

$$\rho h \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\Omega \frac{\partial v}{\partial t} - \Omega^2 u \right] - \frac{\partial q_r}{\partial r} - \frac{\partial q_{r\theta}}{r \partial \theta} - \frac{q_r - q_\theta}{r} = \rho h \Omega^2 r + p_r \quad (39-3)$$

$$\rho h \left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2\Omega \frac{\partial u}{\partial t} - \Omega^2 v \right] - \frac{\partial q_\theta}{r \partial \theta} - \frac{\partial q_{r\theta}}{\partial r} - 2 \frac{q_{r\theta}}{r} = p_\theta \quad (40-3)$$

$$\rho h \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] + D \nabla^4 w + D(1 + \nu)\alpha_T \nabla^2 M_T - \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(q_r \frac{\partial w}{\partial r} + q_{r\theta} \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(q_{r\theta} \frac{\partial w}{\partial r} + q_\theta \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right) = p_z \quad (41-3)$$

1 Thermal moment

که در آن

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r\partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \theta^2} \quad (42-3)$$

و شرایط مرزی به صورت زیر بدست می آید :

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0, \quad r = a \quad (43-3)$$

$$q_r = 0, \quad q_{r\theta} = 0, \quad m_r = 0, \quad -D \frac{\partial \nabla^2 w}{\partial r} + \frac{\partial m_{r\theta}}{r\partial \theta} = 0, \quad r = b \quad (45-3)$$

از معادلات بدست آمده کاملاً مشخص است معادلات ۳-۳۹، ۳-۴۰ و ۳-۴۱ به ترتیب معادلات حرکت در سه راستای شعاعی، مماسی و جانبی است. معادلات حرکت در راستای شعاعی و مماسی خطی است اما معادله ارتعاشات جانبی به صورت غیر خطی بدست آمده است. جالب توجه است که سه معادله بدست آمده کاملاً به هم وابسته می باشند. به عبارت دیگر جابجایی در راستای جانبی متاثر از جابجایی در راستای شعاعی و مماسی است. با در نظر گرفتن کار نیروهای غیر پایستار صفر معادلات ۳-۳۹ تا ۳-۴۱ بصورت زیر بدست می آیند:

$$\rho h \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\Omega \frac{\partial v}{\partial t} - \Omega^2 u \right] - \frac{\partial q_r}{\partial r} - \frac{\partial q_{r\theta}}{r\partial \theta} - \frac{q_r - q_\theta}{r} = \rho h \Omega^2 r \quad (46-3)$$

$$\rho h \left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2\Omega \frac{\partial u}{\partial t} - \Omega^2 v \right] - \frac{\partial q_\theta}{r\partial \theta} - \frac{\partial q_{r\theta}}{\partial r} - 2 \frac{q_{r\theta}}{r} = 0 \quad (47-3)$$

$$\rho h \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) + D \nabla^4 w + D(1+v)\alpha_T \nabla^2 M_T - \frac{\partial}{r\partial r} \left(r q_r \frac{\partial w}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{r\partial \theta} \left(q_\theta \frac{\partial w}{r\partial \theta} \right) = 0 \quad (48-3)$$

معادله هدایت گرمایی

معادله هدایت گرمایی برای صفحه دایره ای شامل عبارت کوپل شده ترموالاستیک [۳۲]:

$$k\nabla^2\vartheta + k\frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2} = \rho c_v\frac{\partial\vartheta}{\partial t} - \beta T_0 z\frac{\partial(\nabla^2 w)}{\partial t} \quad (۴۹-۳)$$

که در آن $\beta = E\alpha_T/(1 - 2\nu)$ مدول دمایی^۱، k هدایت گرمایی^۲، c_v گرمای ویژه^۳ در حجم ثابت و α_T ضریب انبساط دمایی^۴ می باشند. دقت شود گرادیان دمایی سطح مقطع در راستای ضخامت ورق به مراتب بیشتر از گرادیان دمایی در راستای شعاعی می باشد. بنابراین ما در اینجا از عبارت $\nabla^2\vartheta$ در معادله انتقال گرما صرفنظر می کنیم [۳۲]. بنابراین:

$$k\frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2} = \rho c_v\frac{\partial\vartheta}{\partial t} - \beta T_0 z\frac{\partial(\nabla^2 w)}{\partial t} \quad (۵۰-۳)$$

برای صفحه دایره ای متقارن محوری^۵، جابجائی ها و همچنین دما به θ وابسته نمی باشد، یعنی $\frac{\partial}{\partial\theta} = 0$ بنابراین داریم:

$$2) \rho h \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\Omega \frac{\partial v}{\partial t} - \Omega^2 u \right] - \frac{\partial q_r}{\partial r} - \frac{q_r - q_\theta}{r} = \rho h \Omega^2 r \quad (۵۱-۳)$$

$$3) \rho h \left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2\Omega \frac{\partial u}{\partial t} - \Omega^2 v \right] - \frac{\partial q_{r\theta}}{\partial r} - 2 \frac{q_{r\theta}}{r} = 0 \quad (۵۲-۳)$$

$$4) \rho h \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) + D \nabla^4 w + D(1 + \nu) \alpha_T \nabla^2 M_T - \frac{\partial}{r \partial r} \left(r q_r \frac{\partial w}{\partial r} \right) = 0 \quad (۵۳-۳)$$

$$5) k \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} = \rho c_v \frac{\partial \vartheta}{\partial t} - \beta T_0 z \frac{\partial (\nabla^2 w)}{\partial t} \quad (۵۴-۳)$$

که در آن

-
- 1 thermal modulus
 - 2 thermal conductivity
 - 3 specific heat
 - 4 coefficient of thermal expansion
 - 5 axisymmetric

$$q_r = D_0 \left[\frac{\partial u}{\partial r} + \nu \frac{u}{r} - (1 + \nu) \alpha_T \vartheta \right] \quad (55-3)$$

$$q_\theta = D_0 \left[\nu \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} - (1 + \nu) \alpha_T \vartheta \right] \quad (56-3)$$

$$q_{r\theta} = \frac{1-\nu}{2} D_0 \left[\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right] \quad (57-3)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} \quad , \quad \nabla^4 = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} \right) \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} \right) \quad (58-3)$$

و شرایط مرزی بصورت زیر می باشد :

$$u = 0 \quad , \quad v = 0 \quad , \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad , \quad r = a \quad (59-3)$$

$$m_r = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + (1 + \nu) \alpha_T M_T \right] = 0 \quad , \quad r = b \quad (60-3)$$

$$-D \frac{\partial \nabla^2 w}{\partial r} = 0 \quad , \quad r = b \quad (61-3)$$

$$q_r = D_0 \left[\frac{\partial u}{\partial r} + \nu \frac{u}{r} - (1 + \nu) \alpha_T \vartheta \right] = 0 \quad , \quad r = b \quad (62-3)$$

$$q_{r\theta} = \frac{1-\nu}{2} D_0 \left[\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right] = 0 \quad , \quad r = b \quad (63-3)$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial z} = 0 \quad , \quad z = \pm h/2 \quad (64-3)$$

با جایگذاری q_r ، q_θ و $q_{r\theta}$ به ترتیب از معادلات ۵۵-۳ ، ۵۶-۳ و ۵۷-۳ در معادلات ۵۱-۳ و ۵۲-۳ داریم :

$$\rho h \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\Omega \frac{\partial v}{\partial t} - \Omega^2 u \right] - D_0 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{r \partial r} - \frac{u}{r^2} - (1 + \nu) \alpha_T \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right] = \rho h \Omega^2 r \quad (65-3)$$

$$\rho h \left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2\Omega \frac{\partial u}{\partial t} - \Omega^2 v \right] - \frac{1-\nu}{2} D_0 \left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial v}{r \partial r} - \frac{v}{r^2} \right] = 0 \quad (66-3)$$

که با توجه به فرضی که در قبل کردیم از عبارت $\frac{\partial \vartheta}{\partial r}$ صرفنظر می کنیم بنابراین معادله ۶۵-۳ را می

توان بصورت زیر نوشت :

$$\rho h \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\Omega \frac{\partial v}{\partial t} - \Omega^2 u \right] - D_0 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{r \partial r} - \frac{u}{r^2} \right] = \rho h \Omega^2 r \quad (۶۷-۳)$$

با حل معادلات ۶۶-۳ و ۶۷-۳ و جایگذاری u, v در معادلات ۵۵-۳ و ۵۶-۳ خواهیم داشت :

$$q_r = \frac{3+\nu}{8} \rho h \Omega^2 (b^2 - r^2) + \frac{\rho \Omega^2 a^2 (1-\nu^2) [b^2(3+\nu) - a^2(1+\nu)]}{8\{a^2(1-\nu) + b^2(1+\nu)\}} h \left(\frac{b^2}{r^2} - 1 \right) \quad (۶۸-۳)$$

$$q_\theta = \frac{\rho h \Omega^2}{8} [(3 + \nu)R^2 - (1 + 3\nu)r^2] - \frac{\rho \Omega^2 a^2 (1-\nu^2) [b^2(3+\nu) - a^2(1+\nu)]}{8\{a^2(1-\nu) + b^2(1+\nu)\}} h \left(\frac{b^2}{r^2} - 1 \right) \quad (۶۹-۳)$$

برای حل معادله ۵۴-۳ ، فرض می کنیم [۳۲]

$$w(r, t) = w_0(r) e^{i\omega t} , \vartheta(r, z, t) = \vartheta_0(r, z) e^{i\omega t} \quad (۷۰-۳)$$

با جایگذاری داریم :

$$-\rho h \omega^2 w_0 + D \nabla^4 w_0 + D(1 + \nu) \alpha_T \nabla^2 M_{T_0} - \frac{\partial}{r \partial r} \left(r q_r \frac{\partial w_0}{\partial r} \right) = 0 \quad (۷۱-۳)$$

$$k \frac{\partial^2 \vartheta_0}{\partial z^2} = i \omega \rho c_v \vartheta_0 - i \omega \beta T_0 z \nabla^2 w_0 \quad (۷۲-۳)$$

با حل معادله بالا داریم :

$$\vartheta_0 - \frac{\beta T_0}{\rho c_v} z \nabla^2 w_0 = A \sin(mz) + B \cos(mz) \quad (۷۳-۳)$$

که در آن

$$m = \sqrt{-\frac{i \omega \rho c_v}{k}} = (1 - i) \sqrt{\frac{\omega \rho c_v}{2k}} \quad (۷۴-۳)$$

با توجه به شرایط مرزی داریم :

$$\frac{\partial \vartheta_0}{\partial z} = 0 , z = \pm h/2 \quad (۷۵-۳)$$

$$A = -\frac{\beta T_0}{\rho c_v} \frac{1}{m \cos(mh/2)} \nabla^2 w_0 , B = 0. \quad (۷۶-۳)$$

بنابراین داریم :

$$\vartheta_0(r, z) = -\frac{\beta T_0}{\rho c_v} \nabla^2 w_0 \left(z - \frac{\sin(mz)}{m \cos(mh/2)} \right) \quad (77-3)$$

همچنین داریم :

$$M_{T_0} = \frac{12}{h^3} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \vartheta_0 z dz \quad (78-3)$$

که در آن:

$$M_{T_0} = \Delta_M (1 + f(\omega)) \nabla^2 w_0 \quad (79-3)$$

$$\Delta_M = \frac{\beta T_0}{\rho c_v}, \quad f(\omega) = \frac{24}{m^3 h^3} \left(\frac{mh}{2} - \tan\left(\frac{mh}{2}\right) \right) \quad (80-3)$$

معادله نهایی به فرم زیر بدست می آید :

$$D_\omega \nabla^4 w_0 - \rho h \omega^2 w_0 - \frac{d}{r dr} \left(r q_r \frac{dw_0}{dr} \right) = 0 \quad (81-3)$$

که در آن

$$D_\omega = D [1 + \Delta_D (1 + f(\omega))], \quad \Delta_D = (1 + \nu) \alpha_T \Delta_M = \frac{(1 + \nu) \alpha_T \beta T_0}{\rho c_v} \quad (82-3)$$

$$q_r = \frac{3 + \nu}{8} \rho h \Omega^2 (b^2 - r^2) + \frac{\rho h \Omega^2 a^2 (1 - \nu^2) [b^2 (3 + \nu) - a^2 (1 + \nu)]}{8 \{a^2 (1 - \nu) + b^2 (1 + \nu)\}} \left(\frac{b^2}{r^2} - 1 \right) \quad (83-3)$$

$$\frac{dq_r}{dr} = -\frac{3 + \nu}{4} \rho h \Omega^2 r - \frac{\rho h \Omega^2 a^2 b^2 (1 - \nu^2) [b^2 (3 + \nu) - a^2 (1 + \nu)]}{4 \{a^2 (1 - \nu) + b^2 (1 + \nu)\}} \left(\frac{1}{r^3} \right) \quad (84-3)$$

و همچنین شرایط مرزی نهایی به صورت زیر بدست می آید :

$$w_0 = 0, \quad \frac{dw_0}{dr} = 0, \quad r = a \quad (85-3)$$

$$-D \frac{d^2 w_0}{dr^2} = 0, \quad r = b \quad (86-3)$$

$$m_r = -D \left[\frac{d^2 w_0}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw_0}{dr} + \Delta_D (1 + f(\omega)) \nabla^2 w_0 \right] = 0 \quad , r = b \quad (87-3)$$

$$D_\omega \frac{d^4 w_0}{dr^4} + \frac{2D_\omega}{r} \frac{d^3 w_0}{dr^3} - \left(q_r + \frac{D_\omega}{r^2} \right) \frac{d^2 w_0}{dr^2} + \left(\frac{D_\omega}{r^3} - \frac{q_r}{r} - \frac{dq_r}{dr} \right) \frac{dw_0}{dr} - \rho h \omega^2 w_0 = 0 \quad (88-3)$$

برای بی بعد سازی متغیر ها داریم : $W = \frac{w}{h}$, $0 \leq R = \frac{r-a}{b-a} \leq 1$

با جایگذاری در معادلات ۸۸-۳ داریم :

$$\begin{aligned} \frac{d^4 W}{dR^4} + \frac{2(b-a)}{(b-a)R+a} \frac{d^3 W}{dR^3} - \left((b-a)^2 q_R + \frac{D_\omega (b-a)^2}{((b-a)R+a)^2} \right) \frac{1}{D_\omega} \frac{d^2 W}{dR^2} + \left(\frac{D_\omega (b-a)^3}{((b-a)R+a)^3} - \right. \\ \left. \frac{(b-a)^3}{(b-a)R+a} q_R - (b-a)^2 \frac{dq_R}{dR} \right) \frac{1}{D_\omega} \frac{dW}{dR} - \frac{\rho h (b-a)^4 \omega^2}{D_\omega} W = 0 \end{aligned} \quad (89-3)$$

و شرایط مرزی به صورت زیر بدست می آید :

$$W = 0, \quad \frac{dW}{dR} = 0 \quad , R = 0 \quad (90-3)$$

$$-D \frac{d^3 W}{dR^3} = \frac{d^3 W}{dR^3} + \left(\frac{b-a}{(b-a)R+a} \right) \frac{d^2 W}{dR^2} - \left(\frac{b-a}{(b-a)R+a} \right)^2 \frac{dW}{dR} = 0 \quad , R = 1 \quad (91-3)$$

$$\begin{aligned} m_r = -D \left[\frac{d^2 W}{(b-a)^2 dR^2} + \frac{\nu}{(b-a)((b-a)R+a)} \frac{dW}{dR} + \Delta_D (1 + f(\omega)) \nabla^2 W \right] = \left(\frac{\Delta_D (1+f(\omega))+1}{(b-a)} \right) \frac{d^2 W}{dR^2} + \\ \left(\frac{\Delta_D (1+f(\omega))+\nu}{(b-a)R+a} \right) \frac{dW}{dR} = 0 \quad , R = 1 \end{aligned} \quad (92-3)$$

معادله ۸۹-۳ معادله دیفرانسیلی ارتعاشی با میرایی ترموالاستیک برای ورق میکرو دایروی دوآر می باشد. مشاهده می شود که با اضافه شدن چرخش به سیستم ، رفتار سیستم از حالت خطی به غیر خطی تغییر می یابد. بدست آوردن حل تحلیلی برای معادله غیر خطی فوق دشوار است. و می بایست با روش های عددی بدنبال جواب تقریبی برای آن بود.

فصل ۴

نتایج بدست آمده

✓ مقدمه

✓ میرایی ترموالاستیک برای ورق میکرو دایروی توپر بدون چرخش

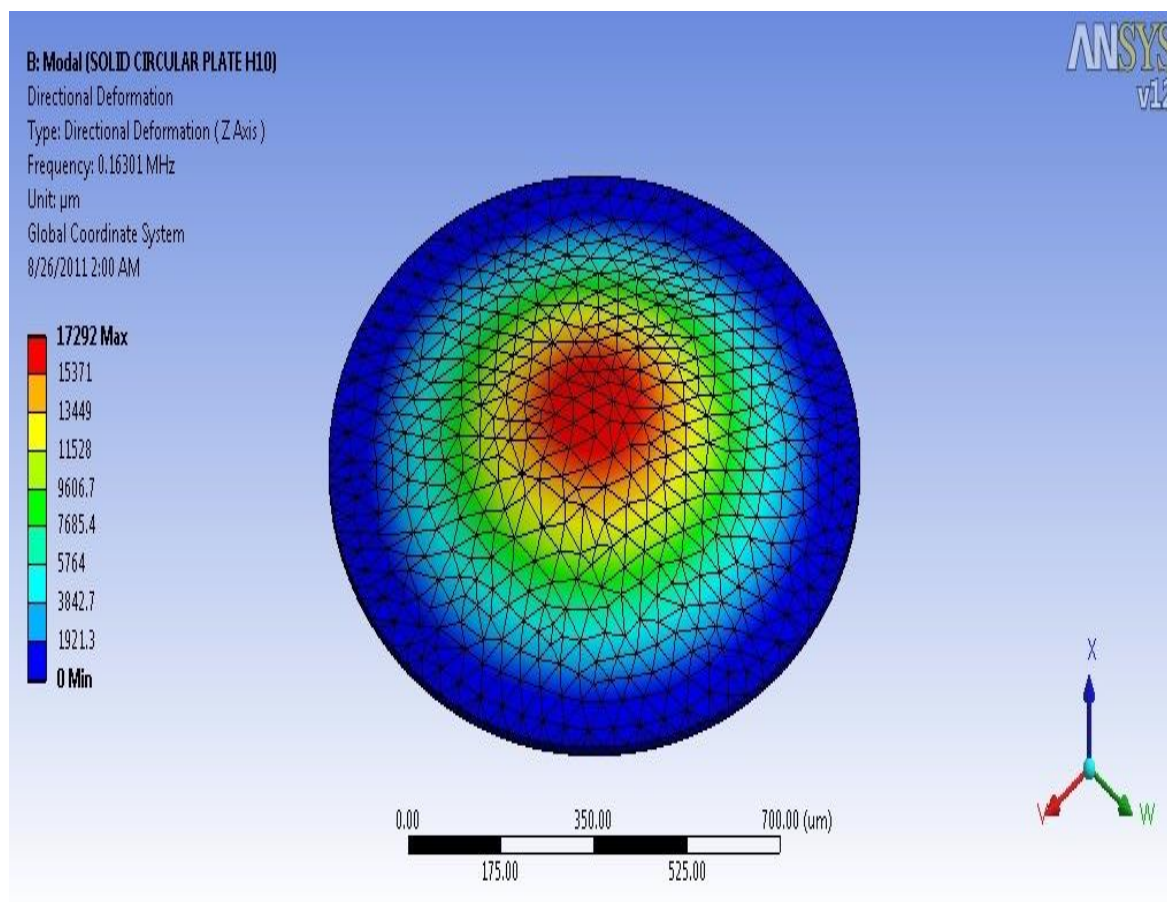
✓ میرایی ترموالاستیک برای ورق میکرو دایروی توخالی دوآر

۴-۱ مقدمه

قابل ذکر است معادلات حرکت ورق میکرو دایروی دوآر با کوپلینگ ترموالاستیک غیر خطی است و تا کنون داده و روشی برای حل معادلات حرکت ورق میکرو دایروی دوآر با کوپلینگ ترموالاستیک ارائه نشده است. بنابراین فقط می توان روش حل ارائه شده در این پایان نامه را با نتایج آقای سان برای دیسک در حالت بدون چرخش مقایسه نمود. به همین منظور در این فصل در ابتدا برای تصدیق روش حل با نتایج آقای زهر [۱۰۲] و سان [۳۲] رابطه بین Q^{-1} و ضخامت ورق برای مد اول در حالت بدون دوران برای دیسک توپر استخراج شده است. و سپس به استخراج و بررسی روابط بین Q^{-1} و سرعت زاویه ای، ضخامت برای دیسک دوآر می پردازیم.

در اینجا داده ها را در سه دمای ۱۲۰ ، ۲۰۰ ، ۲۹۳ درجه کلوین بدست می آوریم. مشخصات سیلیکون در دما های فوق در جدول ۴-۱ آمده است. کاملاً واضح است که E ، k ، C و α_T وابسته به دما می باشند و در دماهای مختلف مقادیر مختلفی به خود گرفته اند. باید توجه داشت تغییرات دما ناشی از ارتعاشات ترموالاستیک بسیار ناچیز بوده ($1 \ll K$) بنابراین می توان خصوصیات ماده را حین این ارتعاشات ثابت فرض کرد.

۲-۴ میرایی ترموالاستیک برای ورق میکرو دایروی توپر بدون چرخش



شکل ۴-۱: شکل مد متقارن محوری اول برای ورق میکرو دایروی توپر با شرایط مرزی گیردار

در این قسمت به بررسی میرایی ورق میکرو دایروی توپر که در شعاع a کاملاً گیردار و جابجایی محدود در مرکز می پردازیم و سپس داده های بدست آمده را با داده های تحلیلی آقای زرنر [۲۱] و سان [۳۲] مقایسه می کنیم. به همین منظور داده های ورودی را دقیقاً مطابق داده های آقای سان در نظر می گیریم.

در شکل ۴-۱ شکل مد اول متقارن محوری دیسک توپر در فرکانس اول آن یعنی 0.163 مگا هرتز آمده است. شعاع دیسک 500 میکرومتر و ضخامت آن 20 میکرومتر می باشد. دیسک در حالت تعادل بدون تنش بدون کرنش و هم دما با محیط می باشد. نقاط آبی کمترین خیز و نقاط قرمز بیشترین خیز را نشان می دهند.

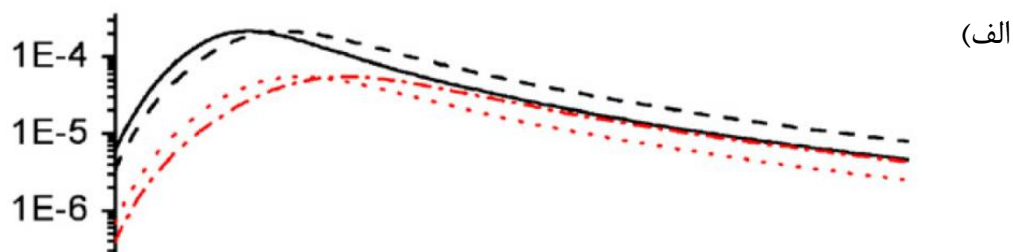
جدول ۱-۴ مشخصات مکانیکی و گرمایی سیلیکون در دما های مختلف [۳۲]

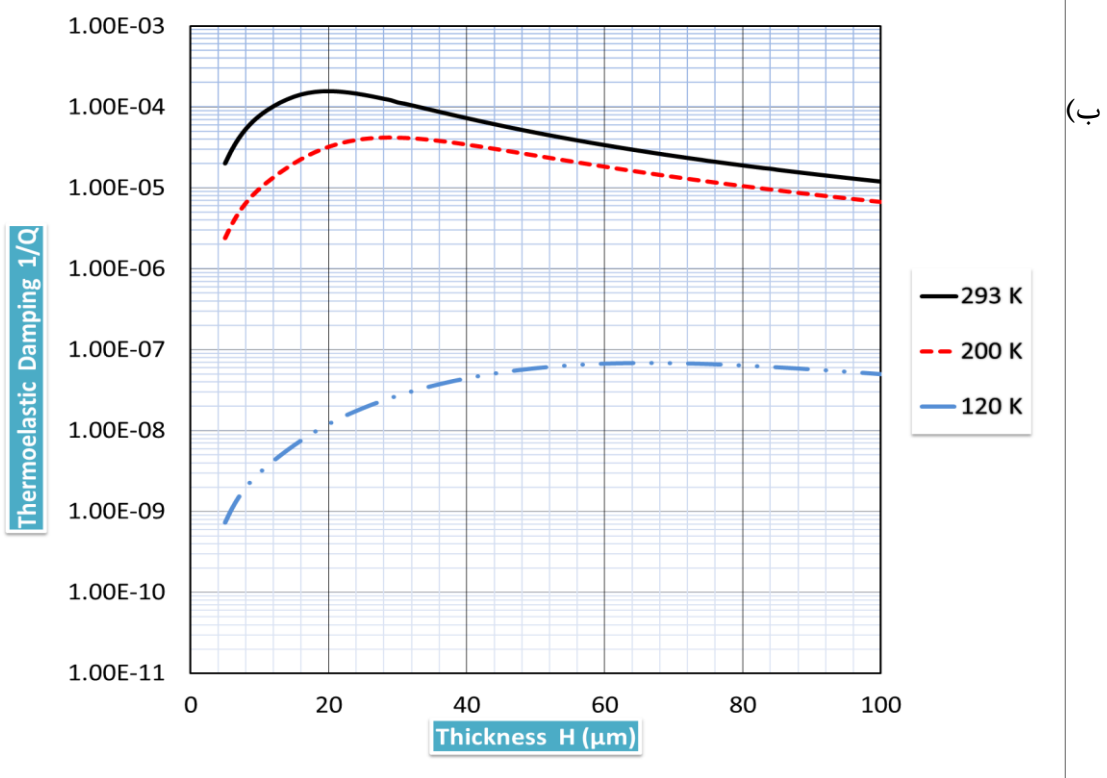
مشخصات مواد	واحد (μMKSV)	120 K	200 K	293 K
مدول یانگ	MPa	1.69e5	1.669e5	1.659e5
ضریب پواسون	-	0.22	0.22	0.22
چگالی	$\text{Kg}/(\mu\text{m})^3$	2.33e-15	2.33e-15	2.33e-15
ضریب هدایت حرارتی	$\text{pW}/(\mu\text{m} * \text{K})$	8.76e8	2.66e8	1.56e8
گرمای ویژه	$\text{pJ}/(\text{Kg} * \text{K})$	3.28e14	5.57e14	7.13e14
ضریب نفوذ حرارتی	$1/\text{K}$	-0.057e-6	1.406e-6	2.59e-6

نتایج بدست آمده در شکل های ۲-۴ ، ۳-۴ و همچنین جدول ۲-۴ ارائه شده است .

نتایج بدست آمده حاکی از آن است که با افزایش ضخامت ورق میرایی ترموالاستیک افزایش یافته و سپس کاهش می یابد . این روند در دماهای مختلف وجود دارد ولی مشاهده می شود که در دماهای بالا تغییرات میرایی ترموالاستیک محسوس تر می شود و در دماهای پایین این تغییرات به صفر تمایل می یابد. همچنین با افزایش دما ضخامت بحرانی که در آن میرایی به اوج خود میرسد ، کاهش می یابد.

شکل ۲-۴ تغییرات میرایی ترموالاستیک نسبت به ضخامت برای شرایط مرزی گیردار و ساده در دماهای ۱۲۰، ۲۰۰ و ۲۹۳ درجه کلوین، را نشان می دهد.





شکل ۲-۴ معکوس ضریب کیفیت بر حسب ضخامت در دما های مختلف برای شرایط مرزی گیردار
 (الف) مرجع [۳۲] (ب) نتایج روش عددی ($a = 500\mu m$)

همانطور که در شکل ۲-۴ مشاهده می شود میرایی با افزایش ابعاد ورق ابتدا افزایش و سپس کاهش می یابد. و با کاهش دما اثر ابعاد ورق بر میرایی کاهش یافته و بیشینه میرایی در ضخامت های بیشتر اتفاق می افتد.

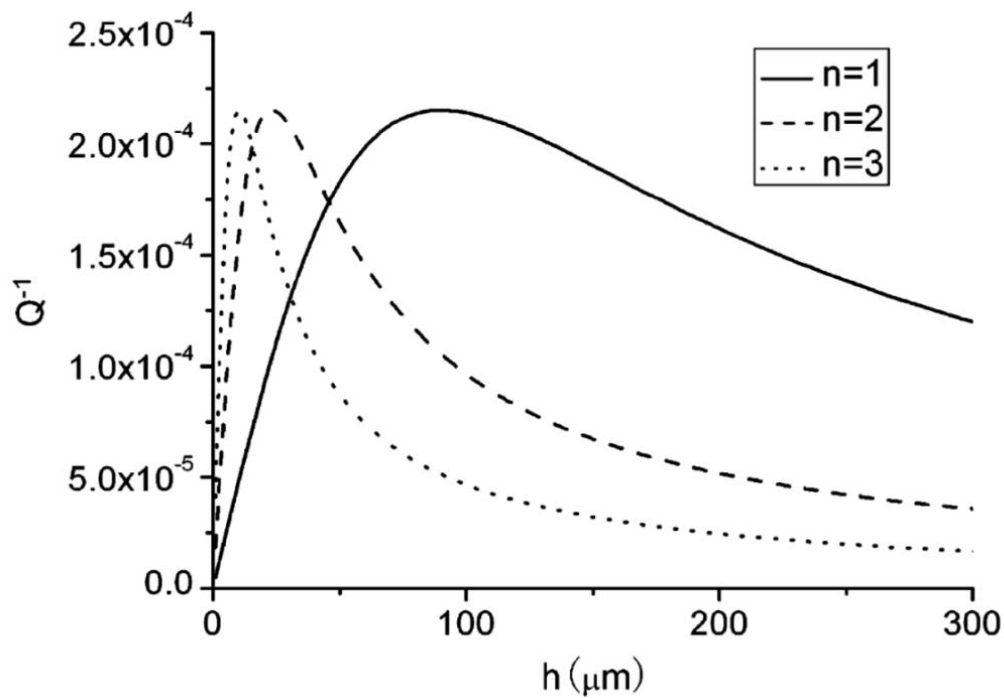
در شکل ۲-۴ (ب) مشابه شکل ۲-۴ (الف) تغییرات میرایی ترموالاستیک نسبت به ضخامت برای شرایط مرزی گیردار در دماهای ۱۲۰، ۲۰۰ و ۲۹۳ درجه کلون که توسط Ansys بدست آمده، نشان داده شده است.

با مقایسه گراف شکل ۲-۴ (ب) با گراف شکل ۲-۴ (الف) برای شرایط مرزی گیر دار می توان تطابق خوبی بین گراف ها مشاهده کرد و خطایی کمتر از $1.1e-5$ برای آن قائل شد. همچنین در جدول ۲-۴ به مقایسه نتایج بدست آمده برای ضخامت بحرانی با نتایج تحلیلی آقای زرنر [۲۰۱] و سان [۳۲] پرداخته شده است .

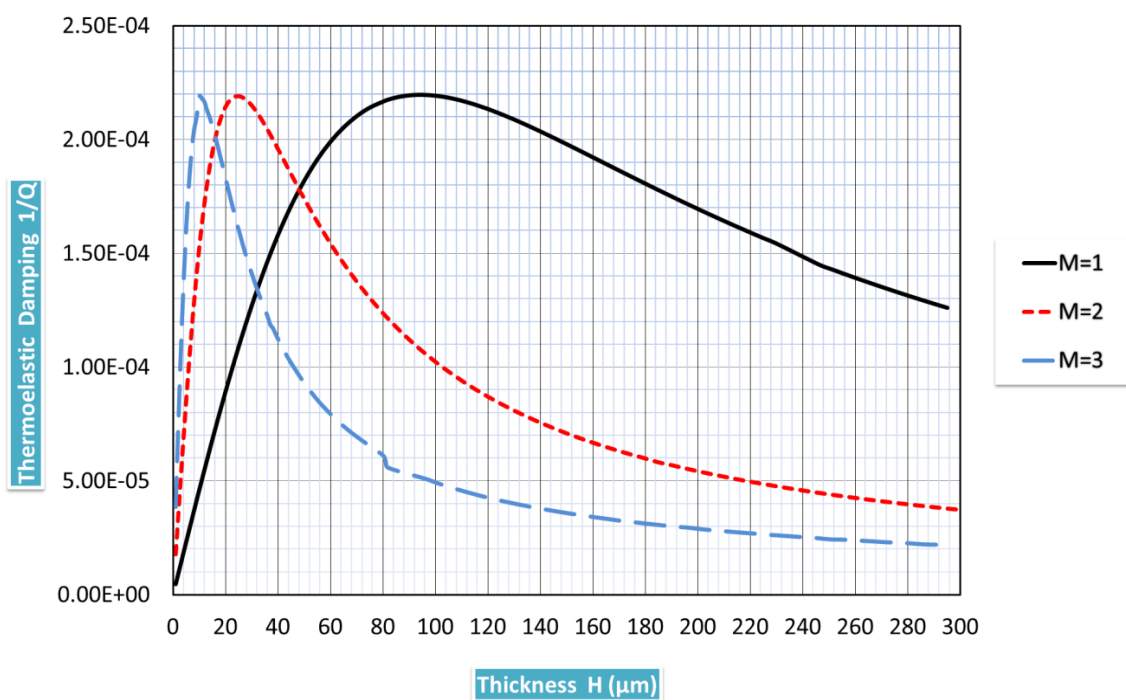
جدول ۲-۴ ضخامت بحرانی برای $a/h = 50$ و مقایسه با نتایج آقای سان و زرنر

دما $T_0(K)$	۱۲۰	۲۰۰	۲۹۳
نتایج آقای زرنر	۱۰۹۹	۱۹۷,۷	۸۹,۹۹
نتایج آقای سان	۱۱۰۲	۱۹۸,۲	۹۰,۲۴
روش عددی	۱۱۰۹	۲۰۲,۸	۹۳,۵
خطا (%)	۰/۹۱-۰/۶۳	۲/۵۷-۲/۳۲	۳/۹-۳/۶

(الف)



(ب)



شکل ۳-۴ معکوس ضریب کیفیت بر حسب ضخامت با نسبت ثابت شعاع به ضخامت ($a/h = 50$) برای مد های اول تا

سوم (الف) مرجع [۳۲] (ب) نتایج روش عددی

شکل ۳-۴ الف) تغییرات میرایی ترموالاستیک نسبت به ضخامت با نسبت ثابت شعاع به

ضخامت ($a/h = 50$) در دمای ۲۹۳ درجه کلوین برای مد های اول تا سوم، که توسط سان بدست

آمده است را نشان می دهد. همانطور که مشاهده می شود که روند تغییر میرایی نسبت به ضخامت با تغییر فرکانس، تغییر نمی یابد.

در شکل ۳-۴ ب) مشابه شکل ۳-۴ الف) تغییرات میرایی ترموالاستیک نسبت به ضخامت با نسبت ثابت شعاع به ضخامت ($a/h = 50$) در دمای ۲۹۳ درجه کلوین برای مد های اول تا سوم، که توسط Ansys بدست آمده، نشان داده شده است.

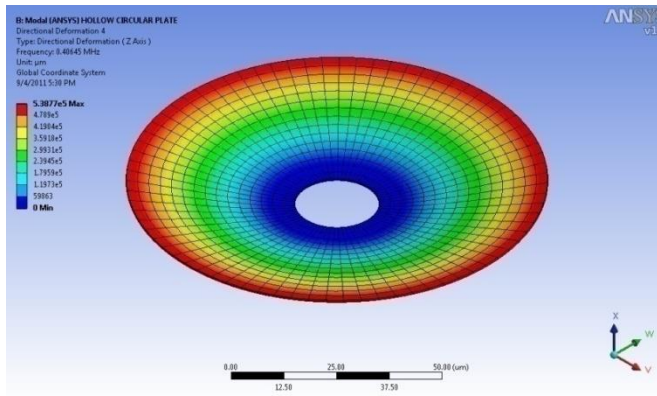
همانطور که در شکل ۳-۴ مشاهده می شود با افزایش ضخامت ورق، میرایی ترموالاستیک افزایش می یابد و سپس کاهش می یابد. بنابراین در ضخامت خاصی ماکزیمم میرایی ترموالاستیک را داریم که این ضخامت را به عنوان ضخامت بحرانی h_c می نامیم. ضخامت بحرانی با افزایش فرکانس، کاهش می یابد.

نتایج بدست آمده در شکل های ۲-۴ و ۳-۴ با نتایج آقای سان [۳۲] همخوانی دارد و می توان نتیجه گیری کرد که روش المان محدود ذکر شده در فصل ۲ به خوبی می تواند برای حل میرایی ترموالاستیک سازه ها با تقریب خوبی کاربرد داشته باشد. بنابراین از همین روش استفاده کرده و در قسمت بعدی به حل ترموالاستیک ورق دوآر می پردازیم.

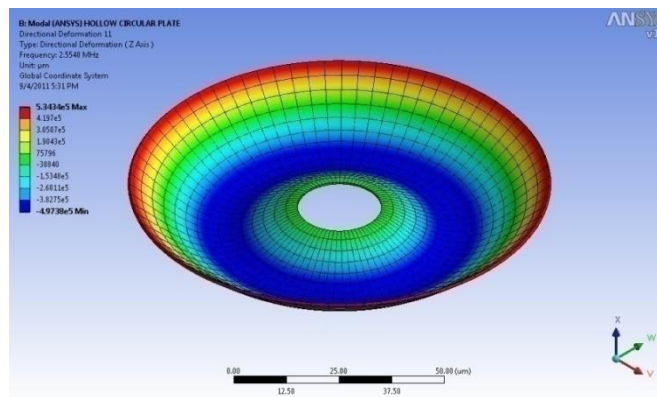
۳-۴ میرایی ترموالاستیک برای ورق میکرو دایروی دوار

در این قسمت می خواهیم به اثر چرخش در میرایی ترموالاستیک پردازیم. در فصل ۳ معادله حاکم بر ارتعاشات جانبی ورق دوار بدست آمد. ملاحظه شد که رفتار سیستم بر خلاف حالت بدون چرخش ، غیر خطی بوده و حل تحلیلی برای آن ارائه نشده است. در اینجا ورقی تاج دایره ای را که بر روی محوری نصب شده و شعاع خارجی آن آزاد می باشد ، در نظر می گیریم. محور عمود بر صفحه بوده و با سرعت دورانی ثابت Ω دوران می کند..

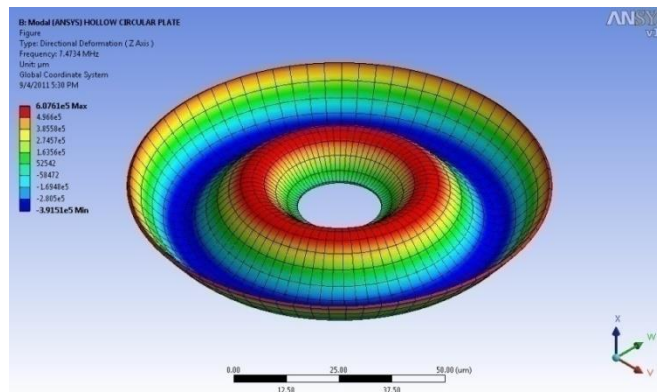
نتایج برای دیسک میکرو سیلیکونی دایروی با شعاع داخلی $a = 10\mu m$ و شعاع خارجی $b = 50\mu m$ بدست آمده است. دمای مرجع ۲۷ سانتیگراد در نظر گرفته شده است. خصوصیات مکانیکی و دمایی مطابق با جدول ۴-۱ می باشد. در ابتدا به بررسی تغییرات میرایی ترموالاستیک بر حسب ضخامت (شکل ۴-۶) می پردازیم. به همین منظور می بایست چگونگی تغییر فرکانس های طبیعی سیستم با تغییر ضخامت بررسی شود (شکل ۴-۵). در این بررسی نسبت شعاع بیرونی به ضخامت ثابت و برابر عدد دلخواه ۵۰ در نظر گرفته شده است. سپس به بررسی اثر دوران بر میرایی ترموالاستیک پرداخته خواهد شد (شکل های ۴-۸ تا ۴-۱۰) و قبل از آن چگونگی تغییر فرکانس های طبیعی سیستم با تغییر سرعت دورانی را در شکل ۴-۷ مشاهده خواهیم کرد.



(الف)



(ب)



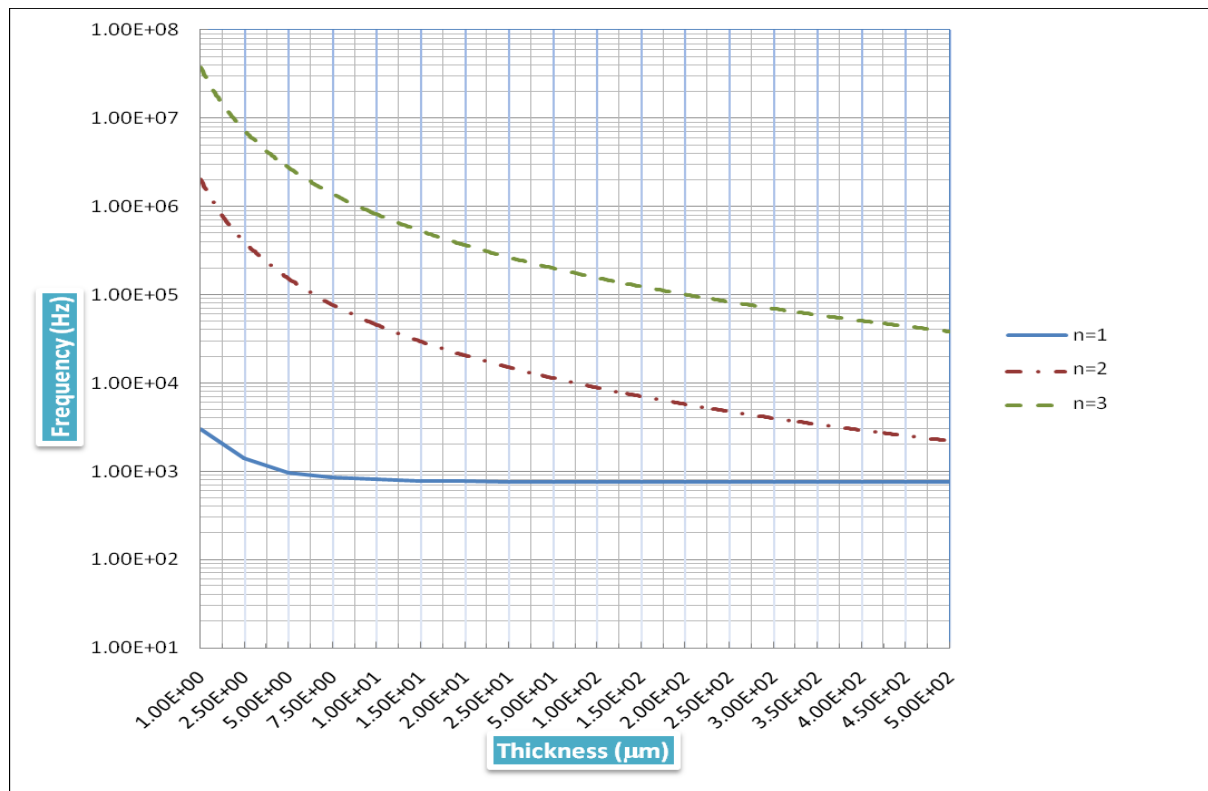
(ج)

شکل ۴-۴- شکل مد متقارن محوری برای ورق میکرو دایروی تو خالی با شرایط مرزی گیردار در راستای شعاعی الف (مد اول ب) مد دوم ج) مد سوم

در شکل ۴-۴ شکل مد اول تا سوم متقارن محوری ورق میکرو دایروی دوار که در شعاع داخلی گیردار و شعاع بیرونی آزاد می باشد ، آمده است. فرکانس های طبیعی اول تا سوم این ورق مدور به ترتیب

۰،۴۰۶، ۲،۵۵ و ۷،۴۷ مگا هرتز می باشد. . دیسک در حالت تعادل بدون تنش بدون کرنش و هم دما با محیط می باشد. نقاط آبی کمترین خیز و نقاط قرمز بیشترین خیز را نشان می دهند .

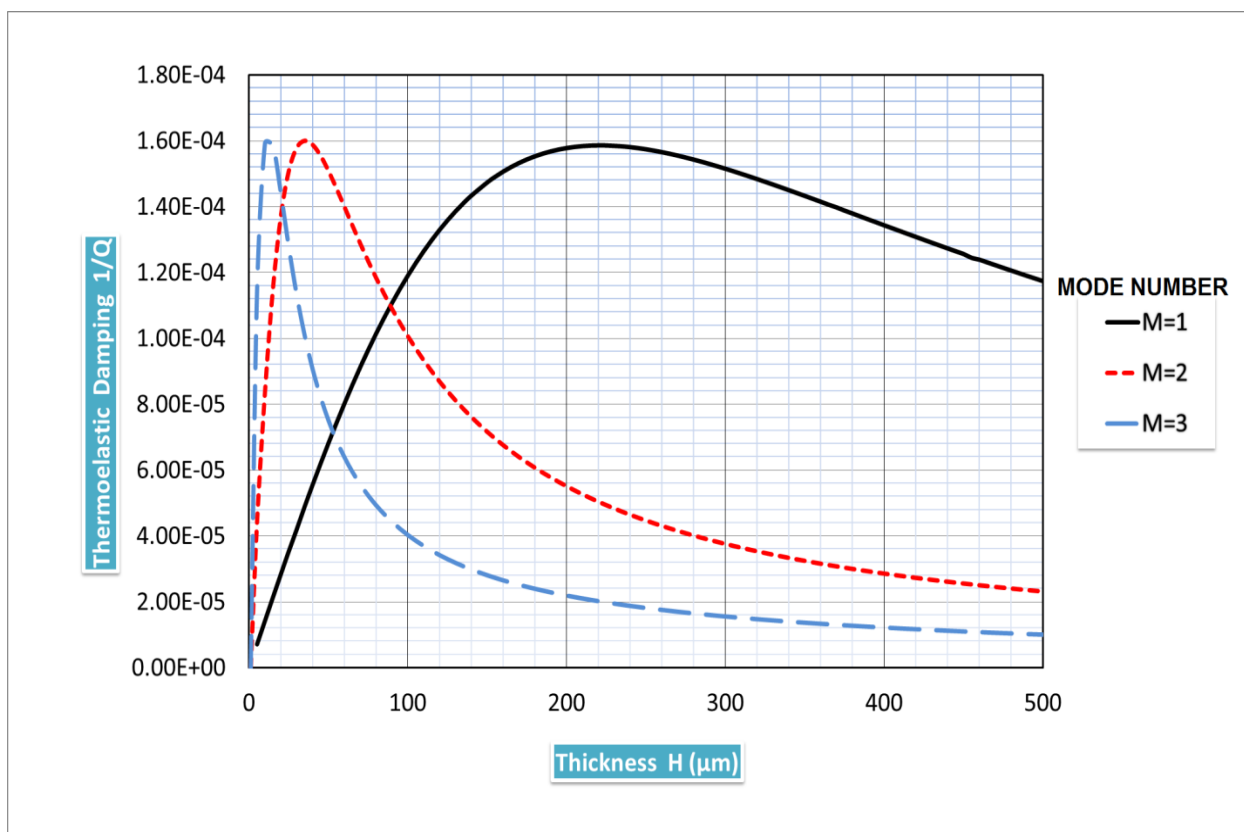
شکل ۴-۵ تغییرات فرکانس طبیعی اول و دوم و سوم بر حسب ضخامت با نسبت ثابت شعاع به ضخامت ($a/h = 50$) نشان می دهد. محور عمودی این نمودار به صورت لگاریتمی می باشد .



شکل ۴-۵ تغییرات فرکانس طبیعی اول و دوم و سوم بر حسب ضخامت با نسبت ثابت شعاع به ضخامت ($a/h = 50$)

همانطور که مشاهده می شود در شکل ۴-۵ فرکانس طبیعی سیستم با افزایش ضخامت ، کاهش می یابد. نرخ کاهش فرکانس طبیعی اول در ضخامت های پایین ، قابل ملاحظه می باشد و تقریباً از ضخامت 100μm به بعد ثابت می شود.

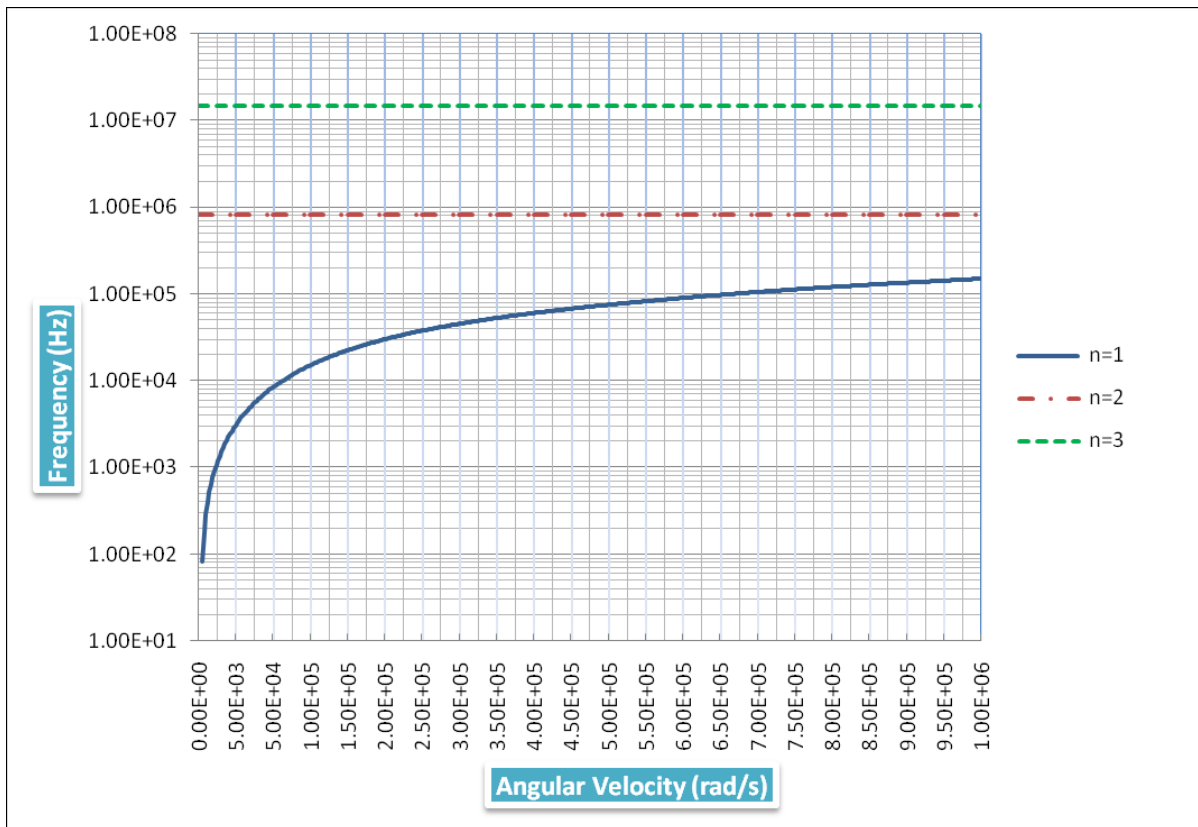
در شکل ۴-۶ معکوس ضریب کیفیت بر حسب ضخامت با نسبت ثابت شعاع به ضخامت ($a/h = 50$) برای مد های اول تا سوم آمده است.



شکل ۴-۶: معکوس ضریب کیفیت بر حسب ضخامت با نسبت ثابت شعاع به ضخامت ($a/h = 50$) برای مد های اول تا سوم

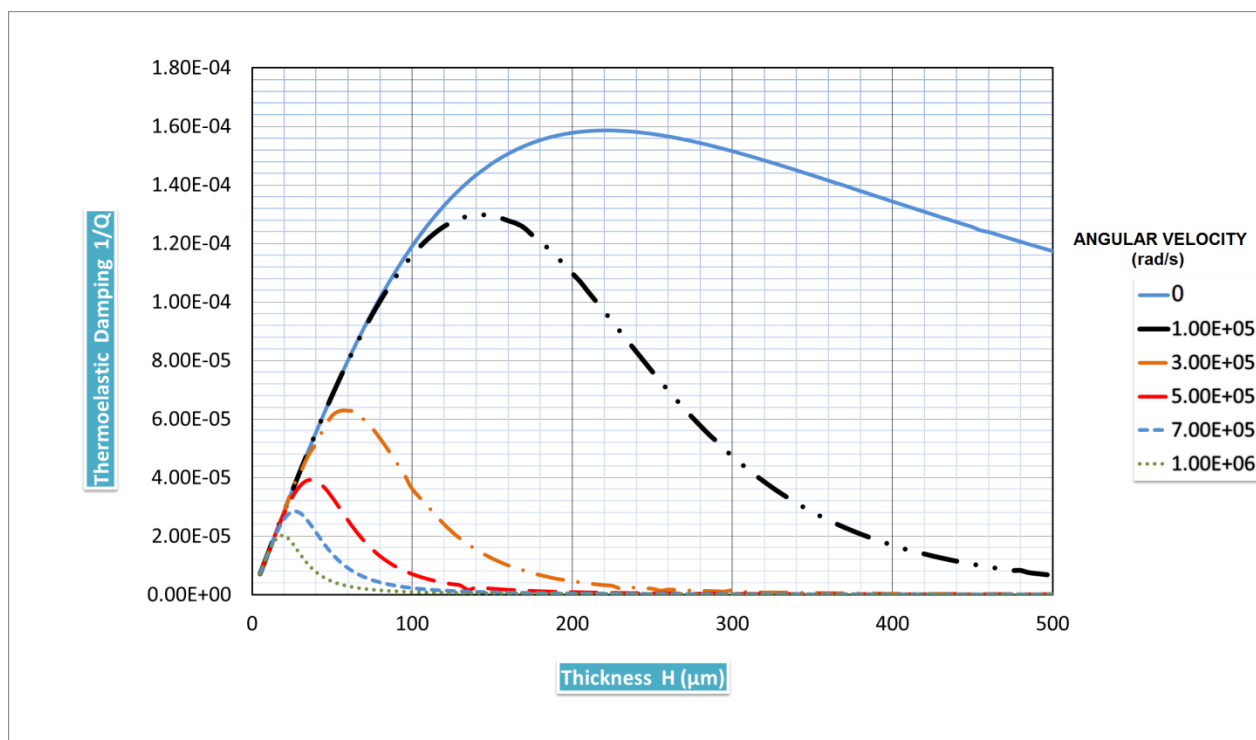
می توان مشاهده کرد که روند تغییرات میرایی منظم بوده و با افزایش ابعاد ورق میرایی افزایش می یابد تا در ضخامت مشخصی که با فرکانس نوسانات رابطه داشته، به مقدار بیشینه خود می رسد و سپس یک روند نزولی را طی می کند. در مد های اول ، دوم و سوم بیشینه میرایی یکسان می باشد و جالب توجه است که مقدار بیشینه برای مد های اول تا سوم در محدوده ابعادی میکرو اتفاق می افتد.

شکل ۴-۷ تغییرات فرکانس طبیعی اول، دوم و سوم بر حسب سرعت دورانی برای دیسک با شعاع داخلی $10\mu\text{m}$ و شعاع بیرونی $50\mu\text{m}$ و ضخامت $1\mu\text{m}$ را نشان می دهد. محور عمودی این نمودار به صورت لگاریتمی می باشد .



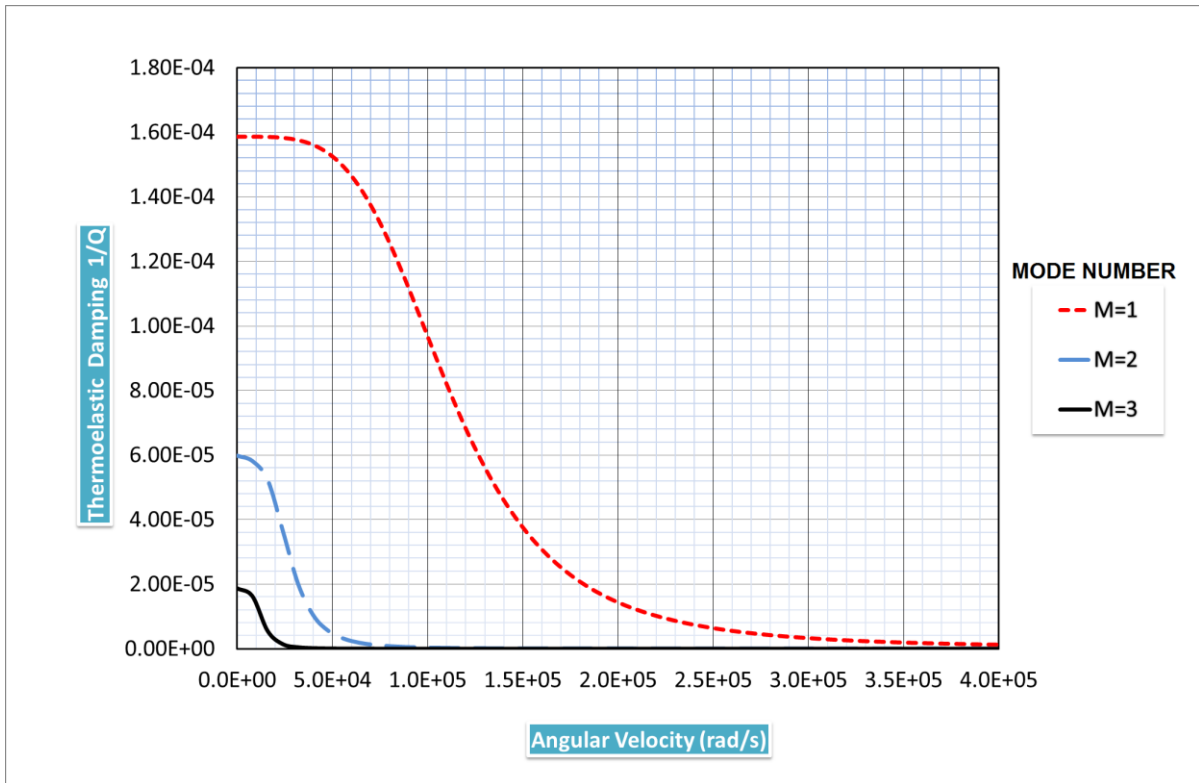
شکل ۴-۷ تغییرات فرکانس اول، دوم و سوم بر حسب سرعت دورانی برای دیسک با ضخامت $1\mu\text{m}$

همانطور که در شکل ۴-۷ مشاهده می شود فرکانس طبیعی با افزایش سرعت، افزایش می یابد. این روند بر خلاف فرکانس های دوم و سوم، در فرکانس اول محسوس می باشد.



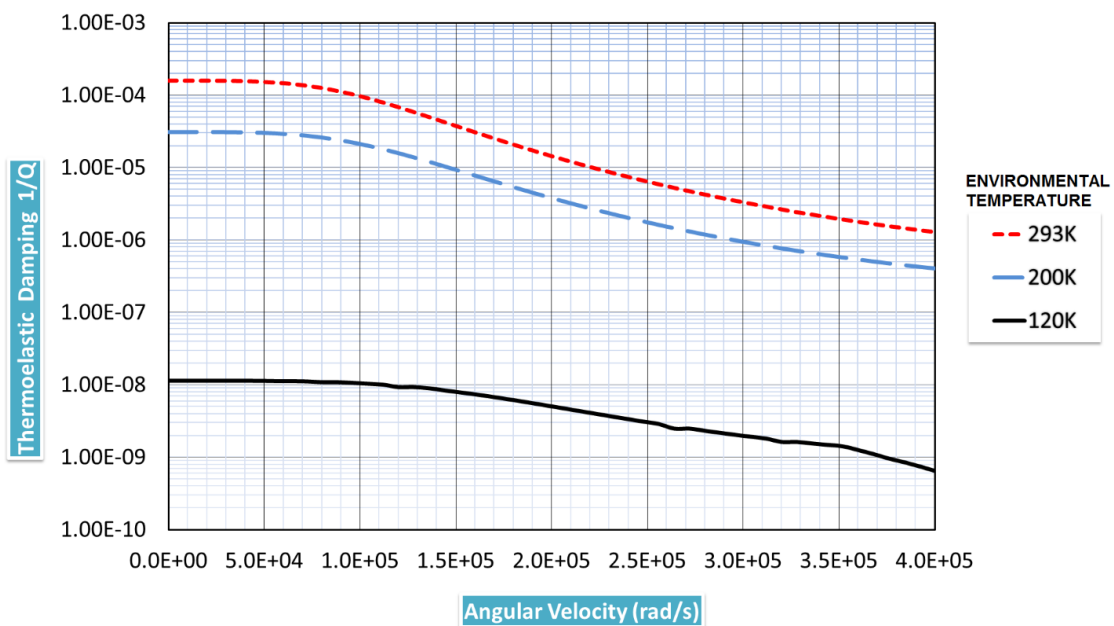
شکل ۴-۸: معکوس ضریب کیفیت بر حسب ضخامت برای سرعت های زاویه ای متفاوت (مد اول)

تغییرات میرایی نسبت به ضخامت برای مد اول با سرعت دورانی های مختلف در شکل ۴-۸ نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می شود با افزایش سرعت دورانی میرایی با روند منظمی کاهش می یابد به طوری که ضخامت بحرانی نیز به نسبت بیشینه میرایی کاهش می یابد. همچنین مشاهده می شود نرخ افزایش میرایی قبل از ضخامت بحرانی در سرعت دورانی های مختلف یکسان است. همچنین مشاهده می شود بین دو سرعت دورانی متفاوت در محدوده قابل توجه ای از ضخامت، میرایی با تغییر سرعت دورانی ثابت می ماند.



شکل ۴-۹: معکوس ضریب کیفیت بر حسب سرعت دورانی برای مدهای اول ، دوم و سوم

شکل ۴-۹ نوعی تصدیق برای شکل ۴-۸ می باشد و بگونه ای دیگر روند تغییرات میرایی ترموالاستیک نسبت به سرعت دورانی را نشان می دهد. می توان مشاهده کرد برای مد اول در سرعت های بین $0.5e5$ تا $2.0e5$ میرایی روند نزولی بیشتری دارد. به عبارت دیگر برای مد اول در سرعت های دورانی پایین و همچنین در سرعت دورانی خیلی بالا تغییرات میرایی ترموالاستیک نسبت به سرعت قابل اغماض می باشد. البته توجه شود همانطور که در شکل مشخص می باشد با افزایش مد این بازه تغییر می کند. یعنی برای مد دوم در بازه $0.7e5$ تا $0.1e6$ و برای مد سوم $0.3e5$ تا $0.1e6$ روند نزول میرایی محسوس می باشد.



شکل ۴-۱۰: معکوس ضریب کیفیت بر حسب سرعت دورانی در دماهای مختلف برای مد اول

شکل ۴-۱۰ تغییرات میرایی ترموالاستیک را نسبت به سرعت دورانی در دماهای مختلف نشان می دهد. می توان مشاهده کرد که با کاهش دما اثر سرعت بر میرایی کاهش یافته به عبارت دیگر در دماهای بالا با تغییر سرعت دورانی میرایی ترموالاستیک تغییرات بیشتری داشته و در دماهای پایین اثر سرعت قابل اغماض می باشد.

فصل ۵

نتیجه گیری و پیشنهادات برای مطالعات آینده

۵-۱ بحث و نتیجه گیری

در این پایان نامه معادله دیفرانسیلی برای ارتعاشات متقارن محوری با میرایی ترموالاستیک برای ورق میکرو دایروی دوار بدست آمد سپس با استفاده از روش اجزای محدود و به کمک نرم افزار ANSYS ضریب کیفیت محاسبه شد. برای صحنه گذاری بر روش حل نتایج بدست آمده برای ورق بدون دوران با نتایج تحلیلی سان [۳۲] مقایسه گردید. بنابراین میرایی ترموالاستیک بر حسب ضخامت در مد های اول تا سوم و همچنین میرایی ترموالاستیک بر حسب ضخامت در دما های مختلف بدست آمد و بعد از مقایسه مشاهده شد با اختلاف ناچیزی نمودار های بدست آمده با نتایج سان مطابقت دارد.

هر قطعه ای با هر هندسه ای در ابعادی خاص دارای بیشترین میرایی ترموالاستیک می باشد که علاوه بر دما، چرخش نیز بر این ابعاد تاثیر گذار می باشد. جالب توجه است که مقدار میرایی در ضخامت بحرانی و روند تغییرات میرایی برای مد های مختلف یکسان است. به عبارت دیگر با تغییر فرکانس ارتعاشی سیستم بیشینه میرایی ثابت می ماند و فقط ضخامت بحرانی است که با افزایش مد، کاهش می یابد. این روند را می توان به عنوان یک قانون برای کلیه قطعات با هر هندسه ای در ابعاد مختلف بیان کرد.

با اضافه شدن چرخش به سیستم ، میرایی رفتار متفاوتی از خود نشان می دهد. جالب توجه است که با افزایش سرعت دورانی ورق، میرایی و همچنین ضخامت بحرانی کاهش می یابد. پس سرعت یکی از عواملی است که می تواند میرایی ترموالاستیک را کاهش داده و یا حتی حذف کند. البته باید توجه داشت که دما می تواند اثر چرخش را حذف کند بطوریکه که با پایین آوردن دما اثر چرخش کم می شود.

۵-۲ مطالعات آینده

تمرکز عمده این پایان نامه بر روی رفتار ارتعاشاتی ورق میکرو دایروی دوار با کوپلینگ ترموالاستیک بود. با تغییر فرضیات مسئله، شرایط مرزی، شرایط بارگذاری و یا تغییر ماده تشکیل دهنده ورق، تحلیل انجام گرفته معتبر نبوده و یا به طور نسبی معتبر می باشد. بنابراین تحلیل می تواند کلی تر باشد تا این پارامترها را در بر داشته باشد. در ادامه برخی پیشنهادات برای کارهای آینده بیان شده است :

۱- حل معادله غیر خطی ارتعاشاتی با کوپلینگ ترموالاستیک بدست آمده در فصل ۳ به روش های تحلیلی و نیمه تحلیلی و مقایسه با نتایج عددی بدست آمده در این پایان نامه.

۲- بررسی میرایی ترموالاستیک برای مدهای غیرمتقارن محوری

۳- بررسی اثر شرایط مرزی مختلف بر روی میرایی ترموالاستیک

۴- بررسی میرایی مختلف به صورت همزمان از جمله میرایی ناشی از هوا و میرایی ترموالاستیک

۵- بررسی میرایی ترموالاستیک در بازه فرکانسی بالا

فهرست منابع و مراجع

- [1] C.Zener, (1937) "Internal friction in solids I. Theory of internal friction in reeds", **Physical Review**, 52, pp 230.
- [2] C.Zener, (1938) "Internal friction in solids II. General theory of thermoelastic internal friction", **Physical Review**, 53, pp 90
- [3] Berry B.S., (1955)" Precise investigation of the theory of damping by transverse thermal currents", **Journal of Applied Physics**, 26, pp 1221
- [4] Roszhardt R.V., (1990) "The effect of thermoelastic internal friction on the Q of micromachined silicon resonators" **Solid State Sensor and Actuator Workshop**, Hilton Head Island, SC, USA, pp 13
- [5] Yasumura K.Y., Stowe T.D., Kenny T.W., Rugar D., (1999) "Thermoelastic energy dissipation in silicon nitride microcantilever structures", **Bulletin of the American Physical Society**, 44, pp 540
- [6] Lifshitz R., Roukes M.L., (2000) "Thermoelastic damping in micro-and nano mechanical systems ", **Physical Review**, 61, PP 5600
- [7] Srikar V.T., Senturia S.D, (2002) "Thermoelastic damping in fine-grained polysilicon flexural beam resonators " **Journal of Micro electro mechanical Systems**, 11, pp 499
- [8] Duwe A.I, Weinstein M., Gorman J., Borenstein J., Ward P., (2002)" Quality factors of MEMS gyros and the role of thermoelastic damping", **Micro Electro Mechanical Systems**, The Fifteenth IEEE International Conference on, P 214, Las Vegas, NV , USA
- [9] Duwe A.I, Weinstein M., Gorman J., Borenstein J., Ward P, (2003) "Experimental study of thermoelastic damping in MEMS gyros" **Sensor and Actuator A**, 103, 1-2, pp 70
- [10] Houston B.H., Photiadis D.M., Vignola J.F., Marcus M.H., Liu X., Czaplowski D., Sekaric L., Butler J., Pehrsson P., Bucaro J.A., (2004) "Loss due to transverse thermoelastic currents in microscale resonators " **Materials Science and Engineering: A**, 370, 1-2, pp 407
- [11] Khisaeva Z.F., Ostoja- Starzewski M., (2006) "Thermoelastic damping in nanomechanical resonators with finite wave speeds", **Journal of Thermal stresses**, 29, pp 201

- [12] Wong S.J., Fox C.H.J., William S. Mc., (2006) “Thermoelastic damping of the in-plane vibration of thin silicon rings “,**Journal of Sound and Vibration**, 293, pp 266
- [13] Sudipto K. De., Aluru N.R., (2006) “Theory of thermoelastic damping in electrostatically actuated microstructures”, **Physical Review**, 74, pp 144305.
- [14] Nayfeh Ali.H., Younis Mohammad I., (2004) “Modeling and simulations of thermoelastic damping in microplates” **J. Micromech. Microeng**, 14, 12, pp 1711
- [15] Prabhakar S., Vengallatore S., (2008) “Theory of thermoelastic damping in micro mechanical resonators with two-dimensional heat conduction”, **Journal of Micro electro mechanical Systems**, 17, pp 494
- [16] Yi Yun-Bo., Matin Mohammad A., (2007) “Eigen value solution of thermoelastic damping in beam resonators using a finite element analysis”, **Journal of Vibration and Acoustics**, 129, pp 478
- [17] Okamoto Hajime., Lto Daisuke., Omitsu Kojion., Yamaguchi Hiroshi., (2008) “Thermo elastic damping in gas micromechanical resonator” **Physica Status Solidi(c)**, 5, 9, pp 2679
- [18] Mohameed Rashed., Elata Daid., (2009) “Shield-layers for reducing Thermoelastic damping in resonating silicon bars”, **Micro system Technology**, 15, 2, pp 323
- [19] Serra Enrico., Bonaldi Michele., (2008) “A finite element formulation for thermoelastic damping analysis”, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 78, 6, pp 671
- [20] Thomas H. Metcalf,a_ Bradford B. Pate, Douglas M. Photiadis, and Brian H. Houston, (2009)“Thermoelastic damping in micromechanical resonators”, **Applied physics letters**, 95, 6, pp 061903
- [21] Rezazadeh Ghader., Saeedi Vahdat Armin., Pesteii Seyed Mehdi., Farzi Bahman., (2009) “study of thermoelastic damping in capacitive micro-beam resonators using hyperbolic heat conduction model”, **Sensor & Transducers Journal**,
- [22] Kumar S., Haque M.A., (2008) “Reduction of Thermo-elastic damping with a secondary elastic field”, **Journal of Sound and Vibration**, 318, pp 423
- [23] Prabhakar Sairam., Vengallatore Srikar., (2007) “Thermoelastic damping in bilayered micromechanical beam resonators” **J. Micromech. Microeng**, 17, 3, pp 532

- [24] Choi S.Y., Na Y.H., Kim J.H., (2009) “Thermoelastic damping of in extensional hemispherical shell”, **World Academy of Science Engineering and Technology**, 56, pp198
- [25] Hao Zhili, Xu Yang., Durgam Shiva Krishna., (2009) “A thermal-energy method for calculating thermoelastic damping in micromechanical resonators”, **Journal of Sound and Vibration**, 322, pp 870
- [26] Mendaza.b.C., Paquayb S., Klapkab I., Raskina J- P., (2009) “Effect of geometrical nonlinearity on MEMS Thermoelastic damping”, **Nonlinear Analysis: Real World Application**, 10, pp 1579
- [27] Choi Jinbok., Cho Maenghyo., Rhim Jaewook., (2009) “Efficient prediction of the quality factors of micromechanical resonators”, **Journal of Sound and Vibration**, 10, 1016, pp 9
- [28] Yi Y B., (2008) “Geometric effects on thermoelastic damping in MEMS resonators”, **Journal of Sound and Vibration**, 309, pp 588
- [29] Yuxin Sun., Daining Fang b., Masumi Saka a., Ai Kahsoh c., (2008) “Laser vibrations of micro beams under different boundary conditions”, **International Journal of Solids and Structures**, 45, pp 1993
- [30] Kim Sun-Bae., Hona Young., Kim Ji-Hwan., (2010) “Thermoelastic damping effect on in-extensional vibration of rotating thin ring”, **Journal of Sound and Vibration**, 329, pp 1227
- [31] Xu Yang., Wang Ren., Shiva Ren Wang., Durgam Krishna., Hao Zhili., Vahala Linda., (2009) “Numerical models and experimental investigation of energy loss mechanisms in SOI-based tuning-fork gyroscopes” **Sensor and Actuators A**, 152, 1, pp 63
- [32] Sun Yuxin., Tohmyoh Hironori., (2009) “Thermoelastic damping of the axisymmetric vibration of circulator plate resonators”, **Journal of Sound and Vibration**, 319, pp 392
- [33] Ansys help. Release 12.01.UP 20090415 Copyright, 2009 SAS IP, Inc
- [34] Nye J.F., (1957) “physical properties of Crystals: Their Representation by Tensors and Matrices”, **Physics Today**, 10, 12, pp 26
- [35] Heo Jin Wook., Chung Jintai., (2004) “Vibration analysis of a flexible rotating disk with angular misalignment”, **Journal of Sound and Vibration**, 274, pp 821
- [36] Hagedorn P., Dasgupa A, (2007) “**Vibration and Wave in Continuous Mechanical Systems**”, Vol.1, Wiley &Son Ltd, Chichester, UK., pp 106

