

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده مهندسی مکانیک
گروه مکانیک سیالات

مدل سازی سه بعدی جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در حال توسعه در کانال مستطیلی

علی جلالی

استاد راهنما:

دکتر محمد حسن کیهانی

استاد مشاور:

دکتر محمود نوروزی

رساله دکتری جهت اخذ درجه دکتری

شهریور ۹۱

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده: مهندسی مکانیک

گروه: حرارت و سیالات

رساله دکتری آقای علی جلالی

تحت عنوان: "مدلسازی سه بعدی جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در حال توسعه در کانال مستطیلی"

در تاریخ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک دکتری مورد ارزیابی و با درجه مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور	امضاء	اساتید راهنما
	دکتر محمود نوروزی		دکتر محمد حسن کیهانی

امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
			دکتر داود دومیری گنجی
			دکتر فرهاد طالبی
			دکتر محمد محسن شاه مردان
			دکتر پوریا اکبرزاده

تقدیم با عشق و احترام بہ

پدر و مادر دلسوز و نزر کووار

و

ہمسرفداکار و کرامیم

تشکر و قدردانی:

در پایان این تحقیق به منزله آیه شریفه

« **من له يشكر المخلوق، له يشكر الخالق** »

بر خود واجب می‌دانم از زحمات دلسوزانه استاد گرامیم جناب آقای دکتر محمدحسن کیهانی که در تمامی مراحل تحصیل اینجانب، مرا یاری نموده و همچنین از زحمات استاد مشاور اینجانب جناب آقای دکتر محمود نوروزی که به حق در به ثمر رسیدن این پایان نامه نقش بسزایی داشتند کمال تشکر و قدردانی را ابراز نمایم. از زحمات دیگر عزیزانی که هر کدام در انجام موفقیت-آمیز این تحقیق نقش داشته و هر نحوی مرا یاری نموده تا بتوانم به مراحل ترقی نائل آیم، صمیمانه تشکر می‌نمایم.

تعهد نامه

اینجانب علی جلالی دانشجوی دوره دکتری رشته مهندسی مکانیک - تبدیل انرژی دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده رساله "مدل سازی سه بعدی جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در حال توسعه در کانال مستطیلی" تحت راهنمایی دکتر محمد حسن کیهانی متعهد می‌شوم:

- نتایج ارائه شده در این رساله حاصل مطالعات علمی و عملی اینجانب بوده، و از صحت و اصالت برخوردار است.

- در خصوص استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.

- مطالب مندرج در این رساله را اینجانب یا فرد دیگری به منظور اخذ هیچ نوع مدرک یا امتیازی تاکنون به هیچ مرجعی تسلیم نکرده است.

- کلیه حقوق معنوی این اثر به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد و مقالات مستخرج از این رساله با ذکر نام "دانشگاه صنعتی شاهرود" و یا (Shahrood University Of Technology) به چاپ خواهد رسید.

- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی رساله تاثیر گذار بوده اند در مقالات مستخرج از رساله رعایت خواهد شد.

- در خصوص استفاده از موجودات زنده یا بافتهای آنها برای انجام رساله، کلیه ضوابط و اصول اخلاقی مربوطه رعایت شده است.

- در کلیه مراحل انجام این رساله و در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته و یا از آن استفاده شده است، اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاقی و انسانی رعایت شده است.

تاریخ

نام و امضاء دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد و بدون اخذ اجازه کتبی از دانشگاه قابل واگذاری به شخص ثالث نیست.
- استفاده از اطلاعات و نتایج این رساله بدون ذکر مرجع مجاز نیست.

چکیده:

در تحقیق حاضر، مدل سازی سه بعدی جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در حال توسعه در کانال های مستطیلی با استفاده از معادلات متشکله غیر خطی مدنظر قرار گرفته است. به علت وجود خواص فیزیکی متفاوت سیالات ویسکوالاستیک با سیالات نیوتنی، برخی پدیده های خاص در جریان این گونه سیالات اتفاق می افتد که معادلات حاکم بر سیالات نیوتنی قادر به مدل سازی صحیح جریان این سیالات و پدیده های واقع در آنها نمی باشد. از این رو جهت تحلیل و مدل سازی این سیالات، معادلات متشکله گوناگونی پیشنهاد شده است که در تحقیق پیش رو از برخی از آنها استفاده شده است. یکی از پدیده های متفاوت در جریان سیالات ویسکوالاستیک، تشکیل جریان های ثانویه در مقاطع عمود بر جریان اصلی کانال های غیردایروی می باشد که انتظار می رود این جریان های ثانویه با بالا بردن شدت جریان های عرضی در کانال، باعث افزایش انتقال حرارت و جرم در جریان سیال شوند. تاکنون تحقیقات بی شماری در زمینه جریان سیال ویسکوالاستیک در هندسه ها و شرایط متفاوت با استفاده از روش های عددی، تحلیلی و یا تجربی انجام شده است ولی اکثر تحقیقات انجام شده معطوف به ناحیه توسعه یافته جریان می باشد و از ناحیه در حال توسعه جریان تحقیق جامعی منتشر نشده است. از این رو علاوه بر حل سه بعدی جریان، تحلیل و بررسی ناحیه در حال توسعه نیز به صورت خاص مدنظر قرار گرفته است.

لازم بذکر است که با توجه به اینکه گروه کثیری از سیالات ویسکوالاستیک، مذاب های پلیمری می باشند و در این حالت تفاوت دمایی زیادی در جریان سیال مشاهده می شود و همچنین با توجه به حساسیت برخی خواص مواد ویسکوالاستیک به دما، حل معادله انرژی به همراه معادلات جریان لازم به نظر می رسد. از طرف دیگر برخی از خواص سیال همچون لزجت، ضریب رسانش حرارتی، ظرفیت حرارتی ویژه و همچنین ضریب آسودگی از تنش، تابعی از دما در نظر گرفته شده و با تغییرات دما در نقاط مختلف کانال تغییر می کنند. از این رو در تحقیق حاضر علاوه بر حل همزمان معادله انتقال حرارت به همراه معادلات جریان، برخی از خواص سیال نیز به صورت تابعی از دما در نظر گرفته شده-

اند. البته در نهایت سعی شده است با تعریف دمایی میانگین به عنوان دمای مرجع و محاسبه کمیت-های فوق در این دما، خطای موجود از فرض ثابت بودن کمیت‌ها را به حداقل رسانده و از تعریف تابع دمایی برای کمیت‌های مذکور صرف‌نظر شود. همچنین در قسمتی از این تحقیق با در نظر گرفتن وابستگی دانسیته سیال به دما، اثر جابجایی آزاد نیز در مکانیزم انتقال حرارت بررسی شده است.

جهت مدل‌سازی عبارت تنش از معادله متشکله فن تین تر که یک معادله غیر خطی بوده و شامل اثرات الاستیک و نازک شونده‌گی ویسکوزیته می‌باشد، استفاده شده است. لازم به ذکر است که در تحقیق حاضر، عدم تطابق شرایط حاکم با شرایط اولدریود احراز شده که در این صورت جریان‌های ثانویه قادر به مدل‌سازی می‌باشند. همچنین در این تحقیق از معادلات متشکله دیگری نیز جهت مدل‌سازی عبارت تنش استفاده شده است که در ادامه توضیحات در مورد این معادلات متشکله و نتایج بدست آمده از آنها بحث خواهد شد.

معادلات حاکم بر مسئله مورد نظر، معادلات بقا به همراه معادله متشکله بوده که گسسته‌سازی این معادلات با استفاده از روش تفاضل محدود و بر روی یک شبکه جابجاشده صورت پذیرفته است. در این حالت برای رهایی از تعریف شرط مرزی فشار، مقادیر فشار را بر روی شبکه داخلی تعریف نموده که در این صورت نیازی به تعریف شرط مرزی برای فشار در مسئله به وجود نمی‌آید. بقیه مقادیر و پارامترهای مسئله نیز به صورت مشترک بر روی شبکه داخلی و خارجی تعریف می‌شوند. پس از گسسته‌سازی، جهت حل معادلات حاکمه از روش تراکم‌پذیری مصنوعی که در نهایت منجر به حل صریح معادلات می‌گردد و یک ارتباط دوطرفه بین معادلات پیوستگی و مومنتوم برقرار می‌نماید، استفاده شده است. این روش که مخصوص حل معادلات در حالت دائم می‌باشد، با اضافه نمودن یک ترم متغیر با زمان به معادلات، آنها را در ظاهر به صورت گذرا تبدیل نموده ولی در نهایت با رسیدن به حل دائم مسئله، ترم‌های اضافه شده به سمت صفر میل کرده و جواب دائم مسئله که مورد نظر این تحقیق می‌باشد به دست می‌آید.

شرایط مرزی هیدرودینامیکی و حرارتی مسئله بر روی مرزهای ورودی و خروجی، دیواره‌ها و همچنین مرزهای تقارن طبق اصول مکانیک سیالات و انتقال حرارت در نظر گرفته شده است و همچنین مسئله با دو شرط مرزی حرارتی دمای دیواره ثابت و شار حرارتی ثابت به دیواره‌ها، مورد بررسی قرار گرفته است.

همانطور که گفته شد، حل جریان ویسکوالاستیک در حال توسعه جزو نوآوری‌های انجام شده در این تحقیق می‌باشد و علاوه بر آن حل همزمان معادله انرژی به همراه معادلات جریان و فرض خواص تابع دما و همچنین بررسی اثر مکانیزم جابجایی آزاد در انتقال حرارت جریان سیال نیز از دیگر نوآوری‌های انجام شده در این تحقیق به حساب می‌آید. لازم به ذکر است که علاوه بر نتایج مربوط به محدوده در حال توسعه، اثر برخی از پارامترهای بی‌بعد بر جریان و انتقال حرارت نیز مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج از تطابق خوبی با نتایج تحقیقات دیگر در این زمینه برخوردار می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: جریان سیال ویسکوالاستیک، مدل‌سازی سه بعدی، ناحیه در حال توسعه، کمیت-های وابسته به دما، مدل فن تین تنر.

لیست مقالات مستخرج از رساله

مقالات منتشر شده در مجلات

۱. جلالی، ع، کیهانی، م، نوروزی، م، "مدل سازی سه بعدی اثر ناحیه ورودی در جریان سیال ویسکوالاستیک در کانال مستطیلی"، مجله علمی و پژوهشی مهندسی مکانیک مدرس، دوره ۱۱، شماره ۲، تابستان ۱۳۹۰، صص ۲۷-۳۷.

۲. جلالی، ع، کیهانی، م، نوروزی، م، "مدل سازی عددی جریان آرام و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در یک کانال مستطیلی به همراه اثرات ناحیه ورودی"، مجله علمی پژوهشی مکانیک سازه ها و شاره ها، دوره ۱، شماره ۲، پاییز ۱۳۹۰، صص ۶۹-۷۹.

۳. جلالی، ع، کیهانی، م، "مدل سازی جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در حال توسعه در یک کانال مستطیلی"، مجله علمی و پژوهشی مکانیک و هوافضا امام حسین(ع)، در حال چاپ.

4. **Jalali, A., Hulsén, M.A., Norouzi, M., Kayhani, M.H., "Numerical simulation of 3D viscoelastic developing flow and heat transfer in a rectangular duct with a nonlinear constitutive equation", Korea-Australia Rheology Journal, Revises submitted.**

کنگره های بین المللی

۵. جلالی، ع، کیهانی، م، نوروزی، م، "مدل سازی عددی سه بعدی جریان سیال ویسکوالاستیک در حال توسعه در یک کانال مستطیلی"، نوزدهمین همایش سالانه مهندسی مکانیک، دانشگاه بیرجند، اردیبهشت ۱۳۹۰.

فصل اول: مقدمه

۲ ۱-۱- مقدمه
۳ ۲-۱- منشا فیزیکی رفتار سیالات ویسکوالاستیک
۶ ۳-۱- معادلات متشکله
۹ ۱-۳-۱- معادلات متشکله ویسکوالاستیک
۱۹ ۴-۱- مروری بر تحقیقات انجام شده
۳۸ ۵-۱- تحقیق حاضر
۳۹ ۶-۱- ضرورت انجام این تحقیق
۴۰ ۷-۱- جنبه‌های نوآوری
۴۱ ۸-۱- رئوس مطالب

فصل دوم: معادلات حاکم

۴۴ ۱-۲- مقدمه
۴۴ ۲-۲- معادلات حاکم
۴۴ ۱-۲-۲- معادلات بقا
۴۷ ۲-۲-۲- معادله متشکله
۵۰ ۳-۲-۲- پارامترهای بی‌بعد
۵۶ ۴-۲-۲- کمیت‌های متغیر با دما
۵۷ ۳-۲- قضیه اولدروید
۵۸ ۴-۲- مکانیزم تشکیل جریان‌های ثانویه

فصل سوم: روش عددی

۶۳ ۱-۳- مقدمه
۶۳ ۲-۳- روش عددی
۶۷ ۳-۳- گسسته سازی معادلات حاکمه
۶۸ ۱-۳-۳- صورت گسسته معادلات حاکم
۷۶ ۴-۳- شرایط مرزی
۷۷ ۱-۴-۳- شرایط مرزی جریان
۸۰ ۲-۴-۳- شرایط مرزی انتقال حرارت
۸۴ ۵-۳- شرایط اولیه
۸۶ ۶-۳- خطای محاسباتی
۸۸ ۷-۳- الگوریتم حل

فصل چهارم: نتایج عددی

۹۳ ۱-۴- مقدمه
۹۳ ۲-۴- شرایط و الگوی همگرایی
۹۵ ۳-۴- استقلال حل از شبکه
۹۷ ۴-۴- ارزیابی صحت نتایج
۱۰۲ ۵-۴- نتایج میدان جریان
۱۰۲ ۱-۵-۴- جریان خزشی
۱۰۳ ۲-۵-۴- ناپایداری
۱۰۵ ۳-۵-۴- جریان اینرسی
۱۴۵ ۶-۴- انتقال حرارت

۱۴۵۱-۶-۴- بررسی میدان دما و انتقال حرارت.
۱۷۰۲-۶-۴- بررسی اثرات جابجایی آزاد همزمان با جابجایی اجباری.
۱۷۸۳-۶-۴- محاسبه خواص سیال در دمای مرجع.

فصل پنجم: نتیجه گیری

۱۸۶۱-۵- مقدمه.
۱۸۶۲-۵- نتایج جریان.
۱۸۶۱-۲-۵- اثر پارمترهای مادی سیال بر اختلاف تنش نرمال و شدت جریانهای عرضی.
۱۸۹۲-۲-۵- بررسی الگو و جهت چرخش جریانهای ثانویه.
۱۹۰۳-۵- نتایج انتقال حرارت.
۱۹۱۱-۳-۵- حالت اعمال شرط مرزی دمای دیواره ثابت.
۱۹۳۲-۳-۵- حالت اعمال شرط مرزی شار ثابت.
۱۹۴۳-۳-۵- بررسی اثرات جابجایی آزاد همزمان با جابجایی اجباری.
۱۹۴۴-۳-۵- محاسبه خواص سیال در دمای مرجع.
۱۹۶۴-۵- پیشنهادات.
۱۹۸مراجع.

- شکل (۱-۱): نمایی شماتیک از یک ماده پلیمری (پلی اتیلن) خطی و شاخه‌دار [۱] ۳
- شکل (۲-۱): هندسه و شبکه‌بندی مورد استفاده در تحقیقات داری و همکارانش [۳۳] ۲۳
- شکل (۳-۱): هندسه مورد بررسی در تحقیقات یاماموتو و همکارانش [۶۹] ۳۰
- شکل (۴-۱): هندسه مورد بررسی در تحقیقات بوتابا و همکارانش [۹۱] ۳۶
- شکل (۵-۱): نمایی شماتیک از هندسه مورد بررسی در تحقیق حاضر ۳۹
- شکل (۱-۲) - نحوه تغییرات ویسکوزیته و اختلاف تنش نرمال اول حاصل از مدل PTT و همچنین مذاب پلی‌اتیلن با دانسیته کم (LDPE) [۱۱۱] ۴۷
- شکل (۱-۳): نمایی عرضی از شبکه‌بندی دامنه محاسبات و تعریف مقادیر بر روی نودهای مربوطه ۶۷
- شکل (۱-۴): نمونه‌ای از نحوه همگرایی جواب‌ها ۹۵
- شکل (۲-۴): سرعت محوری و شدت جریان‌های عرضی در راستای کانال در مدل‌سازی با استفاده از جریان خزشی مدل سیال مرتبه دو و جریان نیوتنی ۹۸
- شکل (۳-۴): سرعت محوری و شدت جریان‌های ثانویه برای سیال نیوتنی و همچنین با استفاده از معادله فن تین در حالت صفر بودن $\lambda, \xi, \varepsilon$ ۹۹
- شکل (۴-۴): تاثیرات عدد وایزنبرگ بر شدت جریان‌های ثانویه در تحقیق حاضر و نتایج ارائه شده در مراجع [۴۳، ۵۳] ۱۰۰
- شکل (۵-۴): جریان‌های ثانویه در $1/4$ مقطع کانال در نسبت‌های مختلف ابعاد کانال ۱۰۱
- شکل (۶-۴): تاثیرات ثابت زمانی بر شدت جریان‌های ثانویه در جریان خزشی سیال *MPTT* ۱۰۳
- شکل (۷-۴): تاثیر افزایش اختلاف تنش‌های نرمال بر ناپایداری جریان در مدل کریمینال اریکسون فیلیبی ۱۰۴
- شکل (۸-۴): پروفیل سرعت محوری در مقاطع مختلف کانال در حالت $Re=10, AR=1$ ۱۰۵

- شکل (۴-۹): سطوح سرعت محوری بی‌بعد در مقاطع مختلف کانال در حالت $Re=10$, $AR=1$ ۱۰۶
- شکل (۴-۱۰): تغییرات سرعت محوری در محور مرکزی کانال ۱۰۷
- شکل (۴-۱۱): تغییرات سرعت بیشینه سیال در نسبت ابعاد مختلف کانال در اعداد رینولدز و همچنین قطر هیدرولیکی یکسان ۱۰۸
- شکل (۴-۱۲): سطوح سرعت محوری در ناحیه توسعه یافته در نسبت ابعاد مختلف کانال ۱۰۸
- شکل (۴-۱۳): کانتور سرعت‌های عرضی و محوری بی‌بعد در کل مقطع کانال در ناحیه توسعه یافته هیدرودینامیکی ۱۰۹
- شکل (۴-۱۴): کانتور تنش برشی τ_{xy} در یک مقطع از جریان توسعه یافته به ازای مقادیر مختلف λ ۱۱۲
- شکل (۴-۱۵): کانتور تنش عمودی τ_{zz} در یک مقطع از جریان توسعه یافته به ازای مقادیر مختلف λ ۱۱۲
- شکل (۴-۱۶): کانتور تنش نرمال و تنش برشی نیوتنی و پلیمری در یک چهارم از مقطع کانال در ناحیه جریان توسعه یافته ۱۱۴
- شکل (۴-۱۷): کانتور اختلاف تنش نرمال اول بی‌بعد در یک مقطع از جریان توسعه یافته به ازای مقادیر مختلف λ ۱۱۵
- شکل (۴-۱۸): کانتور اختلاف تنش نرمال دوم بی‌بعد در یک مقطع از جریان توسعه یافته به ازای مقادیر مختلف λ ۱۱۶
- شکل (۴-۱۹): مقادیر متوسط اختلاف تنش‌های نرمال در طول کانال به ازای مقادیر مختلف λ ۱۱۷
- شکل (۴-۲۰): کانتور اختلاف تنش نرمال اول و دوم در یک مقطع از جریان توسعه یافته در نسبت‌های مختلف سطح مقطع کانال ۱۱۸
- شکل (۴-۲۱): کانتور اختلاف تنش نرمال اول بی‌بعد در یک مقطع از جریان توسعه یافته به ازای مقادیر مختلف λ_1 ۱۲۰
- شکل (۴-۲۲): کانتور اختلاف تنش نرمال دوم بی‌بعد در یک مقطع از جریان توسعه یافته به ازای مقادیر مختلف CN_1 در ناحیه توسعه یافته جریان ۱۲۰

- شکل (۴-۲۳): کانتور اختلاف تنش نرمال دوم بی‌بعد در یک مقطع از جریان توسعه یافته به‌ازای ۱۲۱ مقادیر مختلف CN_2 در ناحیه توسعه یافته جریان
- شکل (۴-۲۴): جهت چرخش جریان‌های ثانویه گزارش شده در تحقیق سیرجالا [۱۱۶] و تحقیق حاضر ۱۲۲
- شکل (۴-۲۵): کانتور اختلاف تنش نرمال دوم بی‌بعد در یک مقطع از جریان توسعه یافته به‌ازای ۱۲۳ مقادیر مختلف β
- شکل (۴-۲۶): کانتور اختلاف تنش نرمال دوم بی‌بعد در یک مقطع از جریان توسعه یافته به‌ازای ۱۲۴ مقادیر مختلف α
- شکل (۴-۲۷): کانتورهای نرخ برش تعمیم یافته در مقاطع مختلف کانال ۱۲۵
- شکل (۴-۲۸): تغییرات جریان‌های عرضی در ناحیه در حال توسعه جریان $AR = 1$ ۱۲۸
- شکل (۴-۲۹): تغییرات جریان‌های عرضی در ناحیه در حال توسعه جریان $AR = 2$ ۱۲۹
- شکل (۴-۳۰): تغییرات اختلاف تنش نرمال دوم بی‌بعد در ناحیه در حال توسعه جریان $AR = 1$ ۱۳۰
- شکل (۴-۳۱): تغییرات میدان فشار بی‌بعد در مقاطع عرضی کانال در ناحیه در حال توسعه جریان ۱۳۲
- شکل (۴-۳۲): تغییرات افت فشار در راستای محور کانال در نسبت ابعاد مختلف سطح مقطع ۱۳۲
- شکل (۴-۳۳): جریان‌های ثانویه در $1/4$ مقطع کانال در نسبت ابعاد مختلف ۱۳۴
- شکل (۴-۳۴): جریان‌های ثانویه در کل مقطع کانال (a) تحقیق حاضر (b) تحقیق دولی [۶۵] ۱۳۵
- شکل (۴-۳۵): جهت چرخش جریان‌های ثانویه در $1/4$ مقطع کانال در نسبت ابعاد مختلف ۱۳۷
- شکل (۴-۳۶): تغییرات شدت جریان‌های عرضی در راستای محور کانال به‌ازای تغییرات λ ۱۳۸
- شکل (۴-۳۷): تغییرات شدت جریان‌های عرضی در راستای محور کانال به‌ازای تغییرات ε ۱۳۹
- شکل (۴-۳۸): تغییرات شدت جریان‌های عرضی در راستای محور کانال به‌ازای تغییرات ξ ۱۴۰
- شکل (۴-۳۹): توزیع شدت جریان‌های ثانویه در مقطع $z^* = 0.9$ به‌ازای مقادیر مختلف λ ۱۴۱

- شکل (۴-۴۰): تغییرات شدت جریان‌های عرضی در راستای محور کانال به‌ازای تغییرات β ۱۴۱
- شکل (۴-۴۱): تغییرات شدت جریان‌های عرضی در راستای محور کانال به‌ازای تغییرات λ ۱۴۲
- شکل (۴-۴۲): تغییرات شدت جریان‌های عرضی در راستای محور کانال به‌ازای تغییرات α ۱۴۲
- شکل (۴-۴۳): تغییرات شدت جریان‌های عرضی در راستای محور کانال به‌ازای تغییرات CN_1 ۱۴۳
- شکل (۴-۴۴): تغییرات شدت جریان‌های عرضی در راستای محور کانال به‌ازای تغییرات CN_2 ۱۴۴
- شکل (۴-۴۵): تغییرات دمای متوسط سیال به‌ازای تغییرات عدد Pr در حالت $Br > 0$ و اعمال شرط مرزی T ۱۴۶
- شکل (۴-۴۶): تغییرات دمای متوسط سیال به‌ازای تغییرات عدد Pr در حالت $Br > 0$ و اعمال شرط مرزی H_2 ۱۴۷
- شکل (۴-۴۷): تغییرات دمای متوسط سیال و همچنین دمای دیواره‌ها به‌ازای $Br = 0$ و b تفاضل آنها در راستای کانال در حالت $Br \geq 0$ و اعمال شرط مرزی H_2 ۱۴۸
- شکل (۴-۴۸): تغییرات میدان دمای بی‌بعد در مقاطع مختلف کانال در حالت سرمایش $Br < 0$ و اعمال شرط مرزی T ۱۴۹
- شکل (۴-۴۹): تغییرات میدان دمای بی‌بعد در مقاطع مختلف کانال در حالت گرمایش $Br > 0$ و اعمال شرط مرزی T ۱۴۹
- شکل (۴-۵۰): تغییرات میدان دمای بی‌بعد در مقاطع مختلف کانال در حالت $Br > 0$ و اعمال شرط مرزی H_2 ۱۵۱
- شکل (۴-۵۱): تغییرات میدان دما در مقاطع مختلف کانال در حالت $Br < 0$ و اعمال شرط مرزی H_2 ۱۵۱
- شکل (۴-۵۲): میزان انتقال حرارت از دیواره‌ها در شرایط مرزی حرارتی T و (a) حالت گرمایش (b) حالت سرمایش ۱۵۲
- شکل (۴-۵۳): کانتورهای (a) مقدار تلفات ویسکوز حاصل از کار میدان تنش و (b) مقدار ذخیره انرژی $\alpha = 0.9$ به‌ازای ۱۵۴

- شکل (۴-۵۴): تغییرات متوسط تلفات ویسکوز حاصل از کار میدان تنش و همچنین متوسط مقدار ۱۵۴ ذخیره انرژی در راستای کانال به ازای $\alpha = 0.9$
- شکل (۴-۵۵): سطوح دمای بی‌بعد به ازای اعداد برینکمن مختلف در حالت گرمایش و شرط مرزی T ۱۵۶ در مقطع $z^* = 3$
- شکل (۴-۵۶): دمای میانگین بی‌بعد سیال در راستای کانال به ازای اعداد برینکمن مختلف در حالت گرمایش و شرط مرزی T ۱۵۶
- شکل (۴-۵۷): سطوح دمای بی‌بعد به ازای اعداد برینکمن مختلف در حالت سرمایش و شرط مرزی T ۱۵۷ در مقطع توسعه یافته
- شکل (۴-۵۸): دمای میانگین بی‌بعد سیال در راستای کانال به ازای اعداد برینکمن مختلف در حالت سرمایش و شرط مرزی T ۱۵۸
- شکل (۴-۵۹): سطوح دمای بی‌بعد به ازای اعداد برینکمن مختلف در حالت گرمایش و شرط مرزی ۱۵۹ در مقطع توسعه یافته H_2
- شکل (۴-۶۰): دمای میانگین بی‌بعد سیال در راستای کانال به ازای اعداد برینکمن مختلف در حالت گرمایش و شرط مرزی H_2 ۱۵۹
- شکل (۴-۶۱): سطوح دمای بی‌بعد به ازای اعداد برینکمن مختلف در حالت سرمایش و شرط مرزی ۱۶۰ در مقطع $z^* = 3$ H_2
- شکل (۴-۶۲): دمای میانگین بی‌بعد سیال در راستای کانال به ازای اعداد برینکمن مختلف در حالت سرمایش و شرط مرزی H_2 ۱۶۱
- شکل (۴-۶۳): سطوح دما بی‌بعد در مقاطع مختلف کانال در حالت گرمایش و شرط مرزی T با فرض دیواره عایق ۱۶۲
- شکل (۴-۶۴): عدد ناسلت متوسط محیطی برای سیال نیوتنی در حالت اعمال شرط مرزی T و H_2 ۱۶۴
- شکل (۴-۶۵): عدد ناسلت متوسط محیطی حاصل از مدل‌سازی جریان سیال ویسکوالاستیک در حالت گرمایش و اعمال شرط مرزی T ۱۶۶

- شکل (۴-۶۶): عدد ناسلت متوسط محیطی حاصل از مدل‌سازی جریان سیال ویسکوالاستیک در حالت ۱۶۶
 سرمایه‌ش و اعمال شرط مرزی T
- شکل (۴-۶۷): عدد ناسلت متوسط محیطی حاصل از مدل‌سازی جریان سیال ویسکوالاستیک در حالت ۱۶۷
 گرمایش و اعمال شرط مرزی H_2
- شکل (۴-۶۸): عدد ناسلت متوسط محیطی حاصل از مدل‌سازی جریان سیال ویسکوالاستیک در حالت ۱۶۸
 سرمایه‌ش و اعمال شرط مرزی H_2
- شکل (۴-۶۹): عدد ناسلت متوسط محیطی حاصل از مدل‌سازی جریان سیال ویسکوالاستیک در حالت ۱۶۹
 سرمایه‌ش و اعمال شرط مرزی T در نسبت ابعاد مختلف مقطع کانال
- شکل (۴-۷۰): عدد ناسلت متوسط محیطی حاصل از مدل‌سازی جریان سیال ویسکوالاستیک در حالت ۱۷۰
 سرمایه‌ش و اعمال شرط مرزی حرارتی T و دیوار عایق
- شکل (۴-۷۱): کانتورهای دمای بی‌بعد سیال در مقاطع مشابه و اعمال شرایط مرزی T در حالت وجود
 جابجایی آزاد و عدم وجود جابجایی آزاد در اعداد گراشف مختلف
- شکل (۴-۷۲): جریان‌های ثانویه سیال در مقطعی مشابه و اعمال شرایط مرزی T در حالت وجود
 جابجایی آزاد و عدم وجود جابجایی آزاد
- شکل (۴-۷۳): شدت جریان‌های ثانویه در راستای کانال در حالت اعمال شرایط مرزی T در حالت
 جابجایی مرکب در اعداد گراشف مختلف و همچنین عدم وجود جابجایی آزاد
- شکل (۴-۷۴): مقادیر متوسط و بی‌بعد کار نیروی تنش، کار ترم جابجایی سرعت محوری و همچنین
 کار ترم‌های جابجایی سرعت‌های عرضی u و v در حالت شرایط مرزی T
- شکل (۴-۷۵): نحوه تغییرات خواص سیال نسبت به دما در یک مقطع عرضی و در راستای کانال در
 حالت اعمال شرط T ، a ویسکوزیته و ثابت زمانی b ضریب رسانش c ظرفیت حرارتی
- شکل (۴-۷۶): نحوه تغییرات خواص سیال نسبت به دما در راستای کانال و همچنین در حالت تعریف
 دمای مرجع در حالت اعمال شرط مرزی T
- شکل (۴-۷۷): نحوه تغییرات سرعت محوری، شدت جریان‌های ثانویه و عدد ناسلت در حالت تعریف
 تابع دمایی و $Br < 0$ و همچنین در حالت تعریف دمای مرجع

- جدول (۱-۱): مقادیر توابع f_c و f_d به ازای معادلات متشکله مختلف ۱۴
- جدول (۱-۲): جهت چرخش جریان‌های ثانویه و همچنین معادلات متشکله مورد استفاده در تحقیقات پیشین [۸۷] ۶۱
- جدول (۱-۴): مقادیر پایه فرض شده برای کمیت‌های مورد نظر در مدل فن تین تنر ۹۵
- جدول (۲-۴): مقادیر خطا و زمان محاسبه برای شبکه‌بندی‌های مختلف ۹۶
- جدول (۳-۴): شبکه‌بندی‌های مورد استفاده به ازای نسبت ابعاد مختلف سطح مقطع ۹۷
- جدول (۴-۴): تاثیر ثابت زمانی بر مقدار بیشینه اختلاف تنش‌های نرمال اول و دوم و شدت جریان‌های ثانویه در ناحیه توسعه یافته در جریان خزشی سیال $MPTT$ ۱۰۳
- جدول (۵-۴): تغییر طول ناحیه توسعه‌یافتگی هیدرودینامیکی به ازای تغییرات عدد رینولدز ۱۰۷
- جدول (۶-۴): مقادیر پایه فرض شده برای پارامترهای مورد استفاده در معادله متشکله کریمینال اریکسون فیلی ۱۱۸
- جدول (۷-۴): مقادیر بیشینه اختلاف تنش نرمال دوم در ناحیه توسعه یافته به ازای تغییرات α و β ۱۲۴
- جدول (۸-۴): مقادیر افت فشار متوسط در ناحیه توسعه یافته به ازای مقادیر مختلف زمان آسودگی ۱۳۳
- جدول (۹-۴): عدد ناسلت محیطی در محدوده توسعه یافته در حالت اعمال شرط مرزی T در حالت جابجایی مرکب به ازای اعداد گراشف مختلف ۱۷۶
- جدول (۱۰-۴): شدت جریان‌های ثانویه و عدد ناسلت محیطی متوسط در محدوده توسعه یافته در حالت اعمال شرط مرزی T و H_2 به ازای مقادیر مختلف ثابت زمانی ۱۷۷
- جدول (۱۱-۴): شدت جریان‌های ثانویه و عدد ناسلت محیطی متوسط در محدوده توسعه یافته در حالت اعمال شرط مرزی T به ازای مقادیر مختلف پارامترهای مادی ۱۷۷

فهرست علائم

$\frac{m}{s}$ ، z, y, x سرعت سیال در راستاهای	w, v, u
میدان فشار سیال، Pa	P
میدان دمای سیال، K	T
سرعت بی بعد سیال در راستاهای z, y, x	w^*, v^*, u^*
میدان فشار بی بعد	P^*
میدان دما بی بعد	T^*
سرعت مشخصه، $\frac{m}{s}$	W_{ref}
قطر هیدرولیکی (طول مشخصه)، m	D_h
زمان، s	t
دمای دیواره، K	T_w
دمای متوسط دیواره، K	T_{w_m}
دمای ورودی سیال، K	T_{in}
دمای میانگین سیال در هر مقطع، K	T_m
دمای مرجع سیال جهت محاسبه خواص وابسته به دما، K	T_{ref}
ظرفیت حرارتی ویژه $J/Kg.k$	C_p
ضریب رسانش $W/m.k$	k
ضریب جابجایی $W/m^2.k$	h
شار حرارتی W/m^2	q''
اختلاف تنش نرمال اول و دوم Pa	N_2, N_1
ضرایب اختلاف تنش نرمال اول و دوم، $Pa.s^2$	Ψ_2, Ψ_1

عدد رینولدز	Re
عدد پراتل	Pr
عدد ناسلت جریان در حالت اعمال شار حرارتی ثابت	Nu_T
عدد ناسلت جریان در حالت دمای دیواره ثابت	Nu_q
عدد ناسلت متوسط محیطی در حالت دمای دیواره ثابت	Nu_{Tm}
عدد ناسلت متوسط محیطی در حالت اعمال شار حرارتی ثابت	Nu_{qm}
عدد پکلت	Pe = Re . Pr
عدد برینکمن در حالت دمای دیواره ثابت	Br_T
عدد برینکمن جریان در حالت اعمال شار حرارتی ثابت	Br_q
عدد وایزنبرگ	Wi
عدد گرافش	Gr
عدد فرود	Fr
عدد دبورا	De
عدد گراتز	Gz
توان پاورلا	n
بیانگر منبع انرژی در معادله انرژی	S
انرژی داخلی سیال، J / Kg	e
آنتالپی سیال، J / Kg	h
بیشینه شدت جریان‌های عرضی / ثانویه	S_{Max}
طول توسعه یافتگی هیدرودینامیکی	L_e[*]
طول و عرض مقطع کانال، m	b, a
نسبت ابعاد سطح مقطع کانال	AR

تراکم پذیری مصنوعی سیال	c
شمارنده‌های دستگاه مختصات بترتیب در راستاهای z, y, x	k, j, i
نیروهای حجمی، N	F
مقدار اختلاف کمیت‌های مورد محاسبه در دو تکرار پیاپی	Residual
علائم یونانی	
ویسکوزیته نیوتنی، $Pa \cdot s$	η_N
ویسکوزیته سیال در نرخ برش صفر، $Pa \cdot s$	η_0
ویسکوزیته متشکل نیوتنی در نرخ برش صفر، $Pa \cdot s$	η_{m_0}
ویسکوزیته سیال در نرخ برش بی‌نهایت، $Pa \cdot s$	η_∞
ویسکوزیته حلال در معادله متشکله گزیکس، $Pa \cdot s$	η_s
نسبت ویسکوزیته حلال به ویسکوزیته کل در معادله متشکله گزیکس	β
چگالی سیال $\frac{Kg}{m^3}$	ρ
زمان آسودگی s	λ
پارامترهای مادی معادله متشکله فن تین تر	ξ, ε
نرخ برش تعمیم یافته s^{-1}	$\dot{\gamma}$
تانسور تنش کلی سیال	σ^*
تانسور تنش پلیمری در حالت بی‌بعد	τ^*
تانسور تنش پلیمری Pa	τ
تانسور تغییر شکل s^{-1}	D
تانسور نرخ برش s^{-1}	γ
مشتق زمانی همرفتی پاد همبسته اول، s^{-1} و دوم تانسور نرخ برش، s^{-2}	$\gamma_{(2)}, \gamma_{(1)}$

مشتق زمانی همرفتی پاد همبسته اول و دوم تانسور تنش	$\tau_{(2)}, \tau_{(1)}$
ضرایب اختلاف تنش نرمال دوم در معادله متشکله کریمینال اریکسون	C_{N1}, C_{N1}
لاپلاسین	Δ
گرادیان	∇
ضریب پویایی محلول در معادله متشکله گزیکس	α
نسبت ضریب هدایت به ظرفیت حرارتی در معادله انرژی	α
نسبت تلفات کار میدان تنش به مقدار ذخیره انرژی در معادله انرژی	α
گام مکانی شبکه به ترتیب در راستاهای z, y, x	$\Delta z, \Delta y, \Delta x$
گام زمانی حل	Δt

فصل اول

مقدمه

۱-۱- مقدمه

در این فصل مقدمه‌ای بر سیالات ویسکوالاستیک و ساختار ملکولی آنها و علت اصلی پیدایش خواص و پدیده‌های متفاوت در آنها بیان خواهد شد. در ادامه به معادلات و مدل‌های پیشنهادی جهت مدل-سازی عددی این سیالات در هندسه‌های مختلف به همراه توضیحی مختصر در مورد هر مدل اشاره خواهد شد. پس از آن خلاصه‌ای از تحقیقات پیشین انجام شده در زمینه جریان سیالات ویسکوالاستیک در کانال‌ها که ارتباط بیشتری با موضوع این تحقیق دارند را بیان کرده و در نهایت به توضیحات اجمالی در مورد تحقیق پیش‌رو، محدودیت‌ها و فرضیات انجام شده، جنبه‌های نوآوری و لزوم انجام آن اشاره خواهیم کرد.

با رشد صنعت و گسترش سیالات مورد استفاده، محققین با سیالاتی برخورد کردند که قوانین موجود حاکم بر سیالات نیوتونی در مورد آنها صادق نبوده و پدیده‌های متفاوتی از جمله وجود جریان‌های ثانویه، دارا بودن تنش تسلیم، بالا آمدن سیال از میله چرخان و ... نسبت به سیالات نیوتونی در آنها اتفاق می‌افتد [۱]. از این‌رو شاخه‌ای جدید از علم مکانیک سیالات به نام رئولوژی^۱ که در آن به صورت خاص، مباحث پیرامون سیالات غیر نیوتونی بحث می‌شود بوجود آمد. با گسترش علم رئولوژی، سیالات غیر نیوتونی به گروه‌های بیشتری تقسیم شدند که سیالات ویسکوالاستیک^۲ یکی از شاخه‌های اصلی آنها بوده و همانطور که از نام آن مشخص است تلفیقی از خاصیت‌های ویسکوز و الاستیک را دارا می‌باشد.

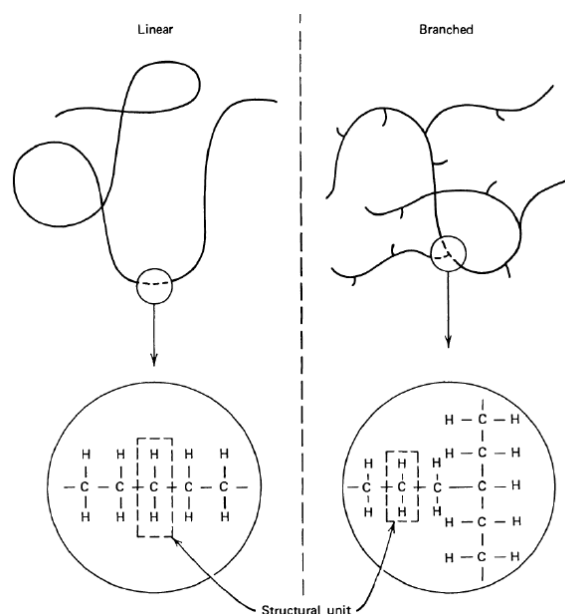
سیالات ویسکوالاستیک کاربرد بسیار وسیعی در صنعت بخصوص صنایع پتروشیمی و پلیمری، صنایع غذایی و نظامی و ... دارا بوده و مذاب‌ها و محلول‌های پلیمری به عنوان یکی از پرکاربردترین این سیالات ذکر می‌شود [۲].

¹ - Rheology

² - Viscoelastic Fluid

۱-۲- منشا فیزیکی رفتار سیالات ویسکوالاستیک

در حقیقت علت اصلی رفتارهای متفاوت سیالات غیر نیوتنی، ساختار متفاوت ملکولی آنها می-باشد. پلیمرها اکثرا درشت ملکول بوده و ذرات آنها از رشته‌های طویل و یا چند شاخه تشکیل شده است و این مطلب باعث افزایش بسیار زیاد وزن ملکولی آنها شده و همچنین خواص شبیه خواص الاستیک در جامدات در آنها ایجاد می‌کند. همانطور که در شکل (۱-۱) دیده می‌شود، ملکول خطی و شاخه دار پلی‌اتیلن از بسط‌های چند گروهه کربن و هیدروژن تشکیل شده است. به طور کلی در سیالات غیر نیوتنی وزن ملکولی بالاتر از ۱۰۰۰۰ می‌باشد و این در حالی است که وزن ملکولی سیالات نیوتنی کمتر از ۱۰۰۰ است [۱]. در مواد پلیمری معمولا ملکول‌ها دارای آرایش ثابتی نیستند و ممکن است آرایش آنها در شرایط قرارگیری مختلف و حتی با زمان نیز تغییر کند. این تغییر آرایش موجب تغییر خواصی نظیر ویسکوزیته می‌شود و چون این تغییر آرایش بطور آنی انجام نمی‌شود، لذا سبب وابستگی تغییر شکل‌های سیال به زمان می‌گردد. زیرا در ساختار ملکولی نیروهای بین اتمی مانند فنرهایی عمل می‌کنند که قادرند به ماده در حین تغییر آرایش، رفتار الاستیک نیز بدهند. به عبارت دیگر ماده از خود رفتار ویسکوالاستیک نشان می‌دهد.



شکل (۱-۱): نمایی شماتیک از یک ماده پلیمری (پلی اتیلن) خطی و شاخه‌دار [۱]

در محلول‌های غلیظ و مذاب‌های پلیمری دارای وزن ملکولی بالا، شواهد قابل ملاحظه‌ای وجود دارد که نشان می‌دهد رفتار رئولوژیکی این مواد تحت تاثیر کنش‌های متقابل بسیار شدید ملکول‌ها است. این تاثیرات به قدری قوی هستند که گاهی رفتارهای مشابه با لاستیک‌های دارای پیوند عرضی را از خود نمایش می‌دهند. این مشاهدات منجر به بیان فرضیه‌ای شد که در آن نقاط کنش ملکول‌ها به عنوان محل‌های به هم گره‌خوردگی ملکولی در نظر گرفته می‌شد. لذا می‌توان رشته‌های پلیمری را بصورت شبکه‌ای در نظر گرفت که در این نقاط دارای اتصالات موقتی است. وجود این شبکه موقتی سبب بروز رفتارهای الاستیک (شبیه لاستیک) در محدوده‌های زمانی کوتاه می‌شود. همچنین ایجاد تغییر شکل در این مواد موجب از بین رفتن نقاط اتصال و کاهش لزجت می‌شود، بنابراین در شدت-های برش بالا چگالی گره‌خوردگی‌ها و در نتیجه لزجت ماده کمتر است. همچنین از آنجا که نقاط گره‌خوردگی انعطاف پذیر هستند و پیوندهای بین اتم‌های شبکه نیز نقش المان الاستیک را دارند، لذا در مجموع خاصیت الاستیک شبکه بالا می‌باشد. بنابراین رفتار الاستیک این پلیمرها نسبت به محلول‌های رقیق پلیمری بیشتر است [۳].

پیچیدگی بسیار بالای رفتار پلیمرها سبب می‌شود که نتوان کل خواص رئولوژیکی این مواد را با یک خاصیت بیان نمود و برای این منظور حداقل به یک خاصیت الاستیک و یک خاصیت ویسکوز نیاز است. تکنیک‌های مورد استفاده جهت اندازه‌گیری خواص رئولوژیکی تا حد زیادی تابع مشخصات کلی ماده مورد مطالعه هستند. از این نظر می‌توان مواد پلیمری را به گروه‌های زیر تقسیم بندی نمود: [۳]

- ۱- مایعات ویسکوالاستیک دارای ویسکوزیته پایین (محلول‌های پلیمری رقیق)
- ۲- مایعات ویسکوالاستیک دارای ویسکوزیته بالا (محلول‌های غلیظ و مذاب‌های پلیمری)
- ۳- جامدات ویسکوالاستیک نرم، یعنی پلیمرهایی که به میزان کمی شبکه‌ای (الاستومر) یا تا حدی کریستالی شده‌اند و در دمایی بالاتر از نقطه شیشه‌ای شدن خود قرار دارند.
- ۴- جامدات ویسکوالاستیک سخت مانند یک پلیمر شیشه‌ای با یک شبکه مستحکم

البته گاهی اوقات این گروه‌ها با هم تداخل پیدا می‌کنند و به عبارت دیگر تکنیک‌هایی یافت می‌شود که می‌توانند چند گروه از تقسیم‌بندی‌های فوق را با هم تلفیق نمایند.

همانطور که گفته شد درشت ملکول و رشته‌ای بودن سیالات ویسکوالاستیک باعث بوجود آمدن اختلاف بین تنش‌های نرمال و در پی آن وقوع برخی پدیده‌های خاص در آن‌ها می‌شود. حال اگر در یک جریان برشی ساده، جهت اصلی جریان را جهت ۱ و جهت تغییرات کمیت‌ها را جهت ۲ و جهت دیگر را ۳ فرض نماییم، داریم [۱]:

$$N_1 = \sigma_{11} - \sigma_{22} \quad (1-1)$$

$$N_2 = \sigma_{22} - \sigma_{33} \quad (2-1)$$

که به N_1 اختلاف تنش نرمال اول و N_2 اختلاف تنش نرمال دوم می‌گویند و همچنین σ_{ii} ، مولفه-های تانسور تنش در راستاهای بیان شده می‌باشد. در حقیقت این اختلاف تنش‌ها در جریان برشی ساده سیالات نیوتنی صفر بوده ولی در سیالات غیر نیوتنی منشا ایجاد پدیده‌های خاصی از قبیل بالا رفتن سیال ویسکوالاستیک از میله چرخان، تشکیل جریان‌های ثانویه، سیفون بدون لوله، تورم جریان خروجی از لوله و ... که در مراجع [۴، ۵، ۶] به تفصیل اشاره شده است، می‌شود.

به علت افزایش موارد استفاده از سیالات ویسکوالاستیک در صنعت، نیاز به تحلیل خواص و رفتارهای این سیالات در هندسه‌های مختلف نیز افزایش یافته است. در ضمن تحلیل سه بعدی جریان سیالات ویسکوالاستیک به علت دستیابی به میدان‌های سرعت و تنش در هندسه‌های متفاوت نیز ضروری به نظر می‌رسد. زیرا که با داشتن این اطلاعات می‌توان ابزارها و یا محصولات با کیفیت بالاتری را در فرآیند شکل‌دهی این مواد تولید کرد. بدین منظور معادلات متشکله گوناگونی جهت مدل‌سازی ترم تنش این سیالات پیشنهاد شده است که هر کدام بنا به محدودیت‌های موجود در شرایط خاصی و به منظور بررسی برخی پدیده‌ها توصیه می‌شود. در ذیل به معرفی و توضیح برخی از معادلات متشکله پیشنهادی می‌پردازیم.

۳-۱- معادلات متشکله

در جریان سیال نیوتنی، تنش سیال فقط تابعی از تغییر شکل سیال با اعمال ضریبی ثابت به نام ویسکوزیته می باشد که معادله (۳-۱) بیانگر این رابطه می باشد [۷].

$$\sigma = \eta_0 \dot{\gamma} \quad (3-1)$$

در حالیکه σ تانسور تنش سیال، η_0 ویسکوزیته و $\dot{\gamma}$ تانسور نرخ برش سیال بوده و به شکل زیر تعریف می شود.

$$\dot{\gamma} = \nabla V + \nabla V^T \quad (4-1)$$

و در آن V بردار سرعت و بالانویس T معرف وارون تانسور^۱ می باشد. در این حالت ویسکوزیته سیال عددی ثابت بوده و در تمامی حالات بدون تغییر باقی می ماند. ولی در حالتی که یک سیال غیر نیوتنی تحت یک تنش قرار می گیرد، از خود تغییر شکل نشان می دهد. تغییر شکل ابتدایی سیال به مرور زمان ادامه می یابد که البته به علت تغییرات همزمان ویسکوزیته سیال غیر نیوتنی تحت اعمال تنش، مدل این تغییر شکل نیز تغییر می نماید. در این حالت نسبت تانسور تنش به تانسور تغییر شکل سیال را مدول آرامش^۲ می گویند و بوسیله رابطه (۵-۱) تعریف می شود [۸]:

$$G(t) = \frac{\sigma(t)}{\dot{\gamma}} \quad (5-1)$$

در مدت زمانهای کوتاه تغییر شکل، مدول آرامش به مقدار ثابتی می رسد که این وابستگی خطی تنش به کرنش را ویسکوالاستیسیته^۳ خطی^۳ می گویند. با افزایش تغییر شکل، مدول آرامش به شکل زیر تغییر می یابد [۸].

$$G(t, \dot{\gamma}) = \frac{\sigma(t, \dot{\gamma})}{\dot{\gamma}} \quad (6-1)$$

¹ -Transpose

² -Relaxation modulus

³ - Linear Viscoelasticity

که در این حالت، مدول آرامش تابعی از زمان و کرنش می‌باشد و به آن رفتار ویسکوالاستیک غیر خطی^۱ می‌گویند. ویسکوالاستیسیتی در حقیقت علت اصلی رفتار غیر خطی سیالات ویسکوالاستیک از قبیل نازک شوندگی تنش^۲، وجود اختلاف تنش نرمال، تورم جریان خروجی کانال و ... می‌باشد که معادلات متشکله می‌بایست قادر به مدل‌سازی آن باشند.

در دهه‌های اخیر تعداد زیادی از معادلات متشکله جهت مدل‌سازی رفتارهای ویسکوالاستیک غیرخطی جریان پلیمرهای مذاب و محلول پیشنهاد شده‌اند. در حالت تئوری می‌توان تعداد بی‌شماری معادله متشکله به صورت رابطه‌ای بین بسط مشتقات یا انتگرال‌های تنش و کرنش بیان نمود که تنها بخشی از آنها می‌توانند بیانگر رابطه تنش در حالت واقعی باشند. به طور کلی این مدل‌ها را می‌توان به دو گروه اصلی معادلات دیفرانسیلی^۳ و معادلات انتگرالی^۴ تقسیم‌بندی کرد. معادله متشکله دیفرانسیلی اکثراً به صورت تابعی دیفرانسیلی از مشتقات تانسور تنش و نرخ تغییر شکل می‌باشد و در معادله متشکله انتگرالی، تابع تنش اکثراً به صورت انتگرالی از نرخ برش و تغییرات قبلی آن بیان می‌شود که این معادلات نسبت به معادلات دیفرانسیلی دارای ثابت‌های زمانی بیشتری بوده و قابلیت تطبیق بیشتری با جریان را از خود نشان می‌دهد. از طرف دیگر معادلات انتگرالی بسیار پیچیده بوده و استفاده از آن در روش‌های عددی چندان آسان نمی‌باشد. ولی معادلات متشکله دیفرانسیلی قابلیت سازگاری بیشتری با روش‌های عددی در هنگام مدل‌سازی جریان سیالات ویسکوالاستیک از خود نشان می‌دهد. از این‌رو بنا به ذات معادلات انتگرالی، از آنها بیشتر در مدل‌سازی جریان‌های غیر دائم استفاده می‌شود.

¹ - Non-linear viscoelastic behavior

² -Shear thinning

³ -Differential form equation

⁴ -integral form equation

یکی از ساده‌ترین مدل‌های پیشنهادی که فقط قادر به مدل‌سازی پدیده نازک‌شوندگی برش^۱ در سیال ویسکوالاستیک می‌باشد، مدل‌های تعمیم یافته نیوتنی^۲ می‌باشند که در این مدل تنها ویسکوزیته تابعی از نرخ برش بوده و بصورت رابطه (۷-۱) نشان داده می‌شود [۹].

$$\eta = f(\dot{\gamma}) \quad (7-1)$$

که در آن، $\dot{\gamma}$ نرخ برش تعمیم یافته^۳ بوده و به شکل معادله (۸-۱) تعریف می‌شود.

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\frac{I}{2} \text{tr}(\gamma \cdot \dot{\gamma})} \quad (8-1)$$

که منظور از I ، مجموع عناصر روی قطر اصلی ماتریس می‌باشد.

جهت توصیف وابستگی ویسکوزیته به نرخ برش، معادلات گوناگونی توصیه شده است که از آن جمله مدل پاورلا^۴ به شکل رابطه (۹-۱) می‌باشد که در آن ویسکوزیته بصورت تابعی نمایی از نرخ برش در نظر گرفته می‌شود.

$$\eta = m \dot{\gamma}^{n-1} \quad (9-1)$$

که در آن m ضریب ثابت و n توان پاورلا می‌باشد. اگر $n < 1$ باشد به سیال نازک شونده برشی^۵ و اگر $n > 1$ باشد به آن کلفت شونده برشی^۶ و یا سیال دیلاتانت^۷ می‌گویند. البته در اکثر مواقع برای مذاب‌های پلیمری n بین ۰,۱۵ تا ۰,۶ می‌باشد. مدل دیگری که می‌تواند بیانگر رابطه بین ویسکوزیته و نرخ برش باشد، مدل کاریویاسودا^۸ است که به شکل زیر تعریف می‌شود [۱]:

¹ - Shear thinning

² - generalized Newtonian model

³ - generalized shear rate

⁴ - Power law

⁵ - Shear thinning Fluid

⁶ - Shear thickening Fluid

⁷ - Dilatant

⁸ - Carreau Yasuda

$$\frac{\eta - \eta_{\infty}}{\eta_0 - \eta_{\infty}} = \left[1 + (\lambda \dot{\gamma})^a \right]^{\frac{n-1}{a}} \quad (10-1)$$

که در آن η_0 ویسکوزیته سیال در نرخ برش صفر، η_{∞} ویسکوزیته سیال در نرخ برش بینهایت، λ ثابت زمانی و n توان پاورلا می‌باشد. همچنین پارامتر بی‌بعد a بیانگر ناحیه انتقال از نرخ برش صفر به ناحیه پاورلا می‌باشد و در اکثر موارد معادل ۲ در نظر گرفته می‌شود.

در جریان دائم سیالات پلیمری که اثرات الاستیک چندان مهم نمی‌باشند، معادلات متشکله تعمیم‌یافته نیوتنی می‌توانند جهت اهداف طراحی و مهندسی مورد استفاده قرار گیرند. در این حالات مهمترین مشخصه رئولوژیکی مورد نظر برای این مذاب‌های پلیمری، وابستگی ویسکوزیته آنها به نرخ برش می‌باشد.

۱-۳-۱- معادلات متشکله ویسکوالاستیک

معادلات متشکله خطی، ساده‌ترین عبارت برای بیان برخی جریان‌های وابسته به زمان سیالات ویسکوالاستیک می‌باشد. این معادلات بیشتر در زمان‌هایی که سیال از حالت اولیه خود تغییرات زیاد و سریعی نداشته باشد، قابل استفاده می‌باشد. مدل ماکسول^۱ یکی از مدل‌های پایه در این گروه می‌باشد که می‌توان به صورت تلفیقی از یک جامد الاستیک (قانون هوک) و یک سیال ویسکوز (قانون نیوتن) به شکل رابطه (۱۱-۱) بیان شود [۴]:

$$\sigma + \lambda_0 \frac{\partial \sigma}{\partial t} = -\eta_0 \dot{\gamma} \quad (11-1)$$

که در آن λ_0 ثابت زمانی می‌باشد. برای یک جریان دائم که هیچ تغییرات تنشی در بعد زمان اتفاق نمی‌افتد، معادله فوق یک رفتار نیوتنی را پیش بینی می‌کند و هنگامی که ترم تنش شامل تغییرات سریعی باشد معادله فوق به قانون هوک تمایل بیشتری پیدا می‌کند. معادلات خطی دیگری بر پایه تلفیق خواص جامدات خطی و سیالات نیوتنی پیشنهاد شده است که از آن جمله می‌توان به معادلات

¹ - Maxwell

کلوین-ویت^۱، برگرز^۲، جفریز^۳ و ... اشاره کرد که به تفصیل در مرجع [۴] به آنها پرداخته شده است. در حالت کلی بنا به شرایط بیان شده توسط اولدروید^۴ که از مکانیک محیط پیوسته بدست آمده است، معادلات متشکله پیشنهادی جهت مدل سازی تنش سیالات ویسکوالاستیک می بایست دارای شرایط زیر باشند [۱۰]:

۱. اصل قطعیت تنش: تنش در یک جزء بر اساس تاریخچه حرکت آن بیان می شود.
 ۲. اصل اثر موضعی: در تعیین تنش یک نقطه مادی تنها حرکت در همسایگی کوچک آن مهم است و حرکت اجزاء خارج از همسایگی تاثیری در آن ندارد.
 ۳. اصل ناوردایی مختصات: تانسور تنش و تاریخچه حرکت جسم مستقل از ناظر است.
 ۴. اصل عدم تغییر تحت حرکت صلب الحاقی: مدل بایستی مستقل از حرکت مطلق جسم باشد.
- هر چند که مدل های ویسکوالاستیک خطی روابط دیفرانسیلی ساده ای را بین تنش و نرخ برش پیش بیان می کنند، اما این مدل ها برخی از اصول فوق را نقض کرده و علاوه بر آن قادر به مدل سازی برخی از خواص سیالات ویسکوالاستیک مانند وجود اختلاف تنش نرمال و همچنین وابستگی ویسکوزیته به نرخ برش نمی باشند. از این رو معادلات متشکله جدیدی که بعضا دارای مشکلات فوق نبوده و قابلیت بیشتری در مدل سازی پدیده های واقع در سیالات ویسکوالاستیک دارند، پیشنهاد شدند [۹].

یکی از معروف ترین مدل های غیر خطی پیشنهادی جهت تبیین رفتار سیالات ویسکوالاستیک، خانواده مدل های اولدروید می باشد که در حالت کلی به صورت زیر نشان داده می شود [۱، ۱۱].

¹ - Kelvin- Voigt

² - Burgers

³ - Jeffreys

⁴ - Oldroyd

$$\begin{aligned} \tau + \lambda_1 \tau_{(1)} + \frac{\lambda_3}{2} (\tau \gamma_{(1)} + \gamma_{(1)} \tau) + \frac{\lambda_5}{2} [\text{tr}(\tau)] \gamma_{(1)} + \frac{\lambda_6}{2} [\text{tr}(\tau \gamma_{(1)})] I = \\ - \eta_0 \left(\gamma_{(1)} + \lambda_2 \gamma_{(2)} + \lambda_4 \gamma_{(1)}^2 + \frac{\lambda_7}{2} [\text{tr}(\gamma_{(1)}^2)] I \right) \end{aligned} \quad (12-1)$$

که در آن λ_i ضرایب معادله، $\gamma_{(1)}$ ، $\gamma^{(1)}$ به ترتیب مشتقات زمانی همرفتی همبسته^۱ و پاد همبسته^۲ ماتریس نرخ برش و $\tau_{(1)}$ ، $\tau^{(1)}$ به ترتیب مشتقات زمانی همرفتی همبسته و پاد همبسته ماتریس تنش می‌باشند و در حالت کلی اگر A را به عنوان ماتریسی دلخواه فرض نماییم، $A_{(i)}$ و $A^{(i)}$ ماتریس‌های مشتقات زمانی همرفتی همبسته و مشتقات زمانی همرفتی پاد همبسته ماتریس A از مرتبه i هستند که به شکل زیر تعریف می‌شوند [۱]:

$$\gamma^{(1)} = \nabla V + (\nabla V)^T \quad (1-13-1)$$

$$\gamma_{(1)} = \nabla V + (\nabla V)^T \quad (2-13-1)$$

$$\tau^{(1)} = \frac{D\tau}{Dt} + \left\{ (\nabla V) \cdot \tau + \tau \cdot (\nabla V)^T \right\} \quad (3-13-1)$$

$$\tau_{(1)} = \frac{D\tau}{Dt} - \left\{ (\nabla V)^T \cdot \tau + \tau \cdot (\nabla V) \right\} \quad (4-13-1)$$

$$A^{(n)} = \frac{DA^{(n-1)}}{Dt} + \left\{ (\nabla V) \cdot A^{(n-1)} + A^{(n-1)} \cdot (\nabla V)^T \right\} \quad (5-13-1)$$

$$A_{(n)} = \frac{DA_{(n-1)}}{Dt} - \left\{ (\nabla V)^T \cdot A_{(n-1)} + A_{(n-1)} \cdot (\nabla V) \right\} \quad (6-13-1)$$

مدل ۸ ثابته اولدروید قادر به ارائه رفتار بسیار کاملی از یک سیال ویسکوالاستیک است ولی بسیار پیچیده بوده و ناپایداری عددی آن بالا می‌باشد. این مدل در صورت صفر بودن بعضی از ضرایب آن به مدل‌های ساده‌تری تبدیل می‌شود که مدل‌های اولدروید- A و اولدروید- B از همه معروفتر بوده و به ترتیب با روابط (۱۴-۱) و (۱۵-۱) تعریف می‌شوند [۱].

¹ - Covariant Convected Derivative of the Tensor

² - Contra variant Convected Derivative of the Tensor

$$\tau + \lambda_1 \tau^{(1)} = -\eta_0 (\gamma^{(1)} + \lambda_2 \gamma^{(2)}) \quad (14-1)$$

$$\tau + \lambda_1 \tau_{(1)} = -\eta_0 (\gamma_{(1)} + \lambda_2 \gamma_{(2)}) \quad (15-1)$$

این دو مدل بخوبی اصول مکانیک محیط‌های پیوسته را ارضا می‌کنند اما در زمینه تعیین تنش-های نرمال دوم دارای ضعف‌هایی هستند. رابطه (۱۴-۱)، معادله متشکله مدل اولدریود- A بوده که در آن ثابت تنش نرمال دوم قرینه ثابت تنش نرمال اول است در صورتیکه در اکثر سیالات ویسکوالاستیک اختلاف تنش نرمال دوم حداکثر ۱۰٪ اختلاف تنش نرمال اول است به همین دلیل این مدل در اکثر موارد مناسب نبوده و تنها در مواد بسیار خاصی که در آنها مقدار Ψ_2 به بزرگی Ψ_1 می‌باشد، پاسخ صحیحی ارائه می‌دهد. در مدل اولدریود- B نیز ثابت تنش نرمال اول وجود داشته اما ثابت تنش نرمال دوم برابر صفر است ($\Psi_2 = 0$ و $\Psi_1 > 0$) که در اینصورت جریان‌های ثانویه قادر به مدل‌سازی نمی‌باشند و فقط در برخی از سیالات ویسکوالاستیک که مقدار Ψ_2 بسیار کوچکی دارند، می‌توان از مدل اولدریود- B به عنوان معادله متشکله مناسب استفاده نمود.

معادلات متشکله دیگری با بسط معادله ماکسول و بر پایه تعریف مختصات همگرد^۱ نیز بدست

آمده‌اند که می‌توان به معادله متشکله سیال مرتبه دو^۲ به شکل معادله (۱-۱۶-۱) اشاره کرد [۱].

$$\tau = \eta_0 \gamma_{(1)} + \frac{I}{2} \Psi_{1,0} \gamma_{(2)} + \Psi_{2,0} (\gamma_{(1)} \cdot \gamma_{(1)}) \quad (1-16-1)$$

که در آن $\Psi_{1,0}$ و $\Psi_{2,0}$ به ترتیب ضرایب اختلاف تنش نرمال اول و دوم در حالت تنش برشی صفر بوده که به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\Psi_{1,0} = \frac{N_{1,0}}{\dot{\gamma}^2} = \frac{\tau_{11} - \tau_{22}}{\dot{\gamma}^2} \quad (2-16-1)$$

$$\Psi_{2,0} = \frac{N_{2,0}}{\dot{\gamma}^2} = \frac{\tau_{22} - \tau_{33}}{\dot{\gamma}^2} \quad (3-16-1)$$

¹ - Co rotating frame of reference

² - Second order fluid (SOF)

حال اگر ضرایب معادله سیال مرتبه دو مانند $\Psi_{1,0}$ و $\Psi_{2,0}$ و η_0 را به عنوان توابعی از نرخ برش تعریف نماییم، در این حالت این معادله به معادله کریمینال اریکسون فیلبی^۱ تبدیل می‌شود که برای مدل-سازی جریان‌های پلیمری در حالت جریان برشی دائم نیز قابل به استفاده خواهد بود [۱].

$$\tau = \eta(\dot{\gamma})\gamma_{(1)} + \frac{1}{2}\psi_1(\dot{\gamma})\gamma_{(2)} + \psi_2(\dot{\gamma})\gamma_{(1)}\cdot\gamma_{(1)} \quad (17-1)$$

در رابطه فوق η ویسکوزیته، ψ_1 ثابت اختلاف تنش نرمال اول، ψ_2 ثابت اختلاف تنش نرمال دوم، $\dot{\gamma}$ نرخ برش تعمیم یافته بوده و با استفاده از معادلات پیشنهادی توسط کاریو یاسودا^۲ از روابط زیر تعیین می‌شوند [۱].

$$\dot{\gamma} = \sqrt{2tr(D^2)} \quad (1-18-1)$$

$$\eta(\dot{\gamma}) = \eta_\infty + (\eta_0 - \eta_\infty) \times (1 + (\lambda \times \dot{\gamma})^a)^{\frac{n-1}{a}} \quad (2-18-1)$$

$$\psi_1(\dot{\gamma}) = 2 \times \lambda \times (\eta_0 - \eta_\infty) \times (1 + (\lambda \times \dot{\gamma})^a)^{\frac{n-1}{a}} \quad (3-18-1)$$

که در آن D تانسور نرخ تغییر شکل بوده و مقدار $\psi_2(\dot{\gamma})$ را می‌توان تابعی خطی از ویسکوزیته یا اختلاف تنش نرمال اول به شکل رابطه (۴-۱۸-۱) تعریف نمود.

$$\psi_2(\dot{\gamma}) = f(\eta(\dot{\gamma})) \quad Or \quad \psi_2(\dot{\gamma}) = f(\psi_1(\dot{\gamma})) \quad (4-18-1)$$

از جمله مزایای این مدل می‌توان به امکان استفاده مستقیم توابع رئولوژیک وابسته به نرخ برش در مدل اشاره نمود. استفاده از این مدل در مصارف صنعتی رایج می‌باشد. لازم به ذکر است که معادله کریمینال اریکسون فیلبی قادر به مدل‌سازی رفتارهای تابع زمان سیالات ویسکوالاستیک

¹ - Criminale Erickson Filbey (CEF)

² -Carreau-Yasuda

نمی‌باشد [۱]. همچنین با استفاده از یک مختصات مرجع همگرد و مشتقات زمان فوق همرفتی^۱، مدل فوق همرفتی ماکسول^۲ که قادر به تحلیل جریان‌های وابسته به زمان سیالات ویسکوالاستیک می‌باشد، تبدیل می‌شود [۱].

$$\tau + \lambda_0 \tau_{(t)} = -\eta_0 \dot{\gamma}_{(t)} \quad (19-1)$$

چندین مدل دیگر بر پایه مدل ماکسول که هرکدام قادر به مدل‌سازی یک یا دو پدیده غیر خطی مرتبط با جریان سیالات ویسکوالاستیک می‌باشد شکل گرفته است که می‌توان آنها را در شکل کلی زیر نشان داد [۸].

$$\tau + f_c \left(\tau, \frac{\tau_{(t)}}{2} \right) + \frac{I}{\lambda} \tau + f_d(\tau) = G \dot{\gamma}_{(t)} \quad (20-1)$$

که f_c و f_d به ترتیب بیانگر نرخ تشکیل^۳ و نرخ زوال تنش^۴ بوده و در مدل‌های مختلف به شکل جدول (۱-۱) تعریف می‌شوند [۸].

جدول (۱-۱): مقادیر توابع f_c و f_d به ازای معادلات متشکله مختلف

پارامترها	f_d	f_c	مدل
a	-	$a \left(\frac{I}{2} \dot{\gamma}_{(t)} : \dot{\gamma}_{(t)} \right)$	وایت - متزنر ^۵
α, G	-	$\frac{\alpha}{3G} \dot{\gamma}_{(t)} : \tau (\tau + GI)$	لارسن ^۶
α, λ, G	$\frac{\alpha}{\lambda G} \tau \cdot \tau$	-	گزیکس ^۷
$\varepsilon, \lambda, \xi, G$	$\frac{I}{\lambda} \left(I + \frac{\varepsilon}{G} tr(\tau) \right) (\tau - I)$	$\frac{\xi}{2} (\dot{\gamma}_{(t)} \cdot \tau + \tau \cdot \dot{\gamma}_{(t)})$	فن تین تنر ^۸

¹ - Upper convected time derivative

² - Upper convected Maxwell (UCM)

³ - Rate of stress build up

⁴ - Rate of stress decay

⁵ - White - Metzner

⁶ - Larsen

⁷ - Geisekus

⁸ - Phan-Thien tanner

مدل وایت - متزنر یک مدل نسبتاً ساده بوده ولی قادر به مدل‌سازی اختلاف تنش نرمال دوم نمی‌باشد و همچنین مدل لارسن نیز در اکثر جریان‌ها نتایج منطقی را پیش بینی کرده ولی اختلاف تنش نرمال دوم را معادل صفر ارزیابی می‌کند [۸].

مدل گزیکس نیز یکی از بهترین مدل‌ها در مدل‌سازی جریان‌های برشی بوده ولی در جریان‌های طولی^۱ در هندسه‌های پیچیده نتایج خوبی را ارائه نمی‌دهد [۸]. با جاگذاری مقادیر f_c و f_d در معادله (۲۰-۱)، معادله متشکله گزیکس به صورت رابطه (۲۱-۱) نشان داده می‌شود [۱۲].

$$\tau_p + \lambda_h \tau_{p(l)} + \alpha \frac{\lambda_h}{\eta_p} (\tau_p \cdot \tau_p) = \eta_p \gamma_{(l)} \quad (21-1)$$

که در آن η_p ویسکوزیته محلول، λ_h زمان آسودگی^۲ محلول و α ضریب پویایی^۳ محلول می‌باشد. لازم بذکر است که در این مدل فقط تنش الاستیک در معادله منظور شده است و تنش ویسکوز به صورت جدا در معادله ممنتوم آورده شده است.

مدل فن تین نیز یکی از بهترین مدل‌هایی می‌باشد که در اکثر جریان‌ها، نتایج منطقی ارائه می‌دهد. این مدل بر اساس تئوری شبکه بدست آمده و برای مدل‌سازی مذاب‌های پلیمری پیشنهاد شده است [۸]. با جاگذاری مقادیر f_c و f_d در معادله (۲۰-۱)، صورت عمومی این معادله به شکل زیر نشان داده می‌شود [۱۳]:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= -pI + 2(I - \beta)\eta_0 D_{ij} + \tau_{ij} \\ \lambda \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} + \nabla \cdot (V\tau) \right) &= 2\mu\beta\eta_0 D + \lambda(L\tau + \tau L^T) - g\tau \\ g &= I + \frac{\lambda\varepsilon}{\eta_{m0}} \text{tr}(\tau), \quad \beta = \frac{\eta_{m0}}{\eta_0} = I, \quad L = \nabla V^T - \xi D \\ \mu &= \frac{\eta_m}{\eta_{m0}} = \frac{I + \xi(2 - \xi)\lambda^2 \dot{\gamma}^2}{(I + \lambda^2 \dot{\gamma}^2)^{\left(\frac{I-n}{2}\right)}}, \quad \dot{\gamma} = \sqrt{2 \text{tr} D^2} \end{aligned} \quad (22-1)$$

^۱ - Elongational flow (Free shear flow)

^۲ - Relaxation time

^۳ - Mobility parameter

که در آن ε و ξ پارامتر مادی، λ زمان آسودگی از تنش، $\dot{\gamma}$ نرخ برش تعمیم یافته، n توان پاورلا، η_0 ویسکوزیته سیال در نرخ برش صفر، η_{m0} توزیع ویسکوزیته ملکولی در نرخ برش صفر و D تانسور نرخ تغییر شکل می‌باشد. این مدل در حالت‌هایی خاص به مدل‌های دیگری از همین خانواده تبدیل می‌شود [۱۳]:

- اگر $\xi = 0$ ، $\beta = 1$ و $\eta_0 = \eta_m = \eta_{m0}$ باشد، این مدل به مدل ساده شده فن تین تر^۱ تبدیل می‌شود.

- اگر $\beta = 1$ باشد و $\eta_m \neq \eta_{m0}$ باشد، مدل بهبود یافته فن تین تر^۲ بدست می‌آید. این مدل برای محلول‌های پلیمری کاربرد دارد.

- اگر $\beta = 1$ و $\eta_0 = \eta_m = \eta_{m0}$ باشد، خود مدل فن تین تر بدست می‌آید. این در واقع حالتی از مدل بهبود یافته فن تین تر است که برای یک مذاب پلیمری و نه محلول پلیمری ارائه شده است.

علاوه بر معادلات فوق، معادلات متشکله دیگری نیز جهت مدل‌سازی ترم تنش سیالات ویسکوالاستیک پیشنهاد شده‌اند که از آن میان می‌توان به موارد زیر نیز اشاره کرد.

مدل راینر-ریولین^۳ یکی از مدل‌های غیر خطی ساده برای بررسی جریان‌های برشی سیالات ویسکوالاستیک است. در این مدل بر خلاف مدل اولدریوید- B ، مقدار اختلاف تنش‌های نرمال اول صفر لحاظ شده، اما اختلاف تنش‌های نرمال دوم وجود دارد. به همین دلیل این مدل قادر به پیش‌بینی پدیده‌های ناشی از وجود اختلاف تنش‌های نرمال دوم مانند تشکیل جریان‌های ثانویه در کانال‌های غیر مدور بوده ولی پاسخ‌های آن چندان فیزیکی نمی‌باشد. بدین لحاظ استفاده از این مدل عملاً به پدیده شناسی اختلاف تنش نرمال دوم محدود شده است. معادله متشکله این مدل در حالت کلی به شکل معادله (۱-۲۳-۱) می‌باشد [۱]:

¹ - Simplified Phan-Thien-Tanner Model (SPTT)

² - Modified Phan-Thien-Tanner Model (MPTT)

³ - Reiner-Rivlin

$$\tau = -\eta(II, III)D - \Psi_2(II, III)D \cdot D \quad (1-23-1)$$

که در آن، D تانسور نرخ تغییر شکل، η ویسکوزیته و Ψ_2 ثابت اختلاف تنش نرمال دوم است. همچنین مقادیر II و III ناوردایی‌های تانسور تغییر شکل بوده و به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$II = tr(D^2) \quad (2-23-1)$$

$$III = tr(D^3) \quad (3-23-1)$$

یکی دیگر از مدل‌های دیفرانسیلی موجود مدل دامبل^۱ است. این مدل بر اساس تئوری سینتیک ملکولی برای محلول‌های رقیق پلیمری بدست آمده است که در آن تنش ماده بصورت مجموعی از تنش پلیمری و نیوتنی به صورت معادله (۱-۲۴-۱) ارائه می‌شود [۱۴].

$$\tau = \tau_p + \tau_s \quad (1-24-1)$$

که در آن تنش نیوتنی بر اساس رابطه نیوتن و تنش پلیمری بر اساس رابطه (۲-۲۴-۱) پیشنهاد می‌شود.

$$Z\tau_p + \lambda_h(\tau_{p(l)} - \tau_p - \frac{b}{b+2}nkT\delta) \frac{D \ln Z}{Dt} = -\frac{b}{b+2}nkT\lambda_h\gamma \quad (2-24-1)$$

در رابطه فوق λ_h ثابت زمانی و Z تابعی از ناوردایی اول تانسور نرخ برش بوده و به شکل معادله (۱-۲۴-۳) تعریف می‌شود.

$$Z = 1 + \frac{3}{b} \left(\frac{b}{b+2} - \frac{tr(\tau_p)}{3nkT} \right) \quad (3-24-1)$$

که در آن b نسبت انرژی پتانسیل بین ملکولی به انرژی حرارتی است. مدل دامبل، مدل بسیار مناسبی جهت مدل‌سازی کشیدگی و تغییر شکل ملکول‌ها در اثر جریان محلول می‌باشد [۱۵].

¹ - Dumbbell model

یکی دیگر از مدل‌های موجود، مدل دیفرانسیلی بسط‌یافته پوم پوم^۱ [۱۶، ۱۷] می‌باشد که به صورت معادله (۲۵-۱) نشان داده شده است.

$$V \cdot \nabla \tau - \nabla V^T \cdot \tau - \tau \cdot \nabla V + \lambda(\tau)^{-1} \cdot \tau = 2GD$$

$$\lambda(\tau)^{-1} = \frac{I}{\lambda_b} \left(\frac{\alpha}{G} \tau + F(\tau)I + G(F(\tau) - 1)\tau^{-1} \right) \quad (25-1)$$

$$F(\tau) = 2re^{\mu(\Lambda-1)} \left(I - \frac{I}{\Lambda} \right) + \frac{I}{\Lambda^2} \left(I - \frac{\alpha Tr(\tau \cdot \tau)}{3G^2} \right), \quad \Lambda = \sqrt{I + \frac{Tr(\tau)}{3G}}$$

معادلات متشکله دیگری نیز از نوع دیفرانسیلی و انتگرالی پیشنهاد شده است که هر کدام قادر به مدل‌سازی پدیده‌های خاصی از سیالات ویسکوالاستیک می‌باشد و به تفصیل در مراجع [۱، ۱۸، ۱۹] بیان شده است. علاوه بر مدل‌های بیان شده، معادله متشکله دیفرانسیلی را می‌توان بصورت تلفیقی از چند معادله متشکله به صورت معادله (۲۶-۱) اختیار نمود.

$$\tau = \sum_{i=1}^m \tau_i \quad (26-1)$$

که در این حالت بیان می‌شود که پاسخ‌های مواد پلیمری تلفیقی از پاسخ ملکول‌های مختلف با خواص متفاوت می‌باشد.

در مدل‌سازی جریان یک سیال ویسکوالاستیک، در ابتدا می‌بایست خواص اصلی سیال مشخص شوند. در روند اندازه‌گیری خواص سیال ویسکوالاستیک که به آزمایشات رئومتر^۲ معروف می‌باشند، خواص سیال از قبیل تغییرات ویسکوزیته نسبت به نرخ برش، ثابت‌های زمانی و ضرایب اختلاف تنش نرمال اول و دوم نسبت به نرخ برش مشخص می‌شوند [۲۰، ۲۱]. همچنین با توجه به اینکه علاوه بر مذاب‌های پلیمری، محلول‌های پلیمری نیز قسمت عمده‌ای از سیالات ویسکوالاستیک را شامل می‌شوند، در این موارد می‌بایست نسبت ویسکوزیته محلول^۳ به ویسکوزیته حلال^۱ نیز تعیین گردد. پس

¹ - eXtended Pom Pom (XPP)

² - Rheometry Experiments

³ - Solution Viscosity

از مشخص شدن خواص سیال، با توجه به هندسه مورد بررسی و همچنین خواص سیال می‌توان از بین معادلات متشکله پیشنهادی، مناسب‌ترین مدل را به شکلی که در جریان مورد نظر، کارایی بالاتری از خود نشان دهد، انتخاب نمود. چرا که تاکنون هیچ معادله متشکله‌ای که قادر به مدل‌سازی تمامی پدیده‌های ویسکوالاستیک بوده و جهت استفاده در تمامی جریان‌های سیالات ویسکوالاستیک مناسب باشد پیشنهاد نشده است و تمامی آنها در جریان‌ها و حالات خاصی جواب‌های منطقی می‌دهند. به عنوان مثال برخی از معادلات متشکله فقط برای مدل‌سازی محلول‌های رقیق پلیمری توصیه می‌شوند و یا برخی دیگر از معادلات متشکله موجود، در مدل‌سازی جریان‌های برشی^۲ و یا جریان‌های طولی جواب‌های قابل قبولی ارائه نمی‌دهند. از این‌رو بررسی مدل‌های موجود بنا بر خواص سیال مورد نظر و همچنین هندسه مورد بررسی جهت انتخاب مدل مناسب لازم به نظر می‌رسد.

در این تحقیق بنا به هندسه مورد بررسی و شرایط موجود، معادله متشکله بهبود یافته فن تین تر جهت مدل‌سازی ترم تنش مورد استفاده قرار گرفته است که در فصل ۲ به تفصیل در مورد آن توضیحاتی ارائه خواهد شد.

۱-۴- مروری بر تحقیقات انجام شده

در اولین تحقیقات انجام شده در این زمینه، گرین و ریولین^۳ [۲۲] به بررسی و مدل‌سازی جریان‌های ثانویه تشکیل شده حاصل از اختلاف تنش نرمال دوم در جریان سیال ویسکوالاستیک پرداختند. ایشان در تحقیقاتشان از مدل راینر-ریولین جهت مدل‌سازی تنش استفاده کردند و از آنجا که در این مدل تنها اثر اختلاف تنش‌های نرمال دوم پیش‌بینی شده و اثر اختلاف تنش‌های نرمال اول صفر فرض شده است، لذا پاسخ‌های آن چندان با واقعیت سازگار نمی‌باشد.

¹ - Solvent Viscosity

² - Shear flow

³ - A. E. Green and R. S. Rivlin

در تحقیقات دیگری نیز، وجود جریان‌های ثانویه در جریان سیال ویسکوالاستیک در کانال‌های غیر دایروی با استفاده از روش‌های تئوری توسط اریکسون^۱ و همکارانش [۲۳] گزارش شده بود. در تحقیقاتی که توسط ویلر^۲ و همکارانش [۲۴] با استفاده از مدل پاورلا در سال ۱۹۶۵ انجام شده است، جریان‌های ثانویه ضعیفی مشاهده شده است که به نظر می‌رسد این جریان‌های ثانویه حاصل از خطای عددی در این تحقیق باشد و با صرف‌نظر از آنها، جریان مستقیم‌الخط^۳ به نظر می‌رسد. ایشان در ادامه تحقیقاتشان [۲۵] با استفاده از روش پرتونگاری^۴، به بررسی پروفیل سرعت در جریان سیال ویسکوالاستیک پرداختند که نتایج بدست آمده، نتایج قبلی آنها را تایید می‌نمود. در همان سال گزیکس [۲۶] به بررسی جریان‌های ثانویه در کانال‌های بیضوی پرداخت و در ادامه محققین دیگری جریان سیال ویسکوالاستیک و جریان‌های ثانویه را در کانال‌های مستطیلی مدل‌سازی نمودند که در تمامی آنها جریان‌های ثانویه از نواحی با تنش برشی زیاد به سمت نواحی با تنش برشی کم جریان می‌یابد و همچنین طبق نتایج ارائه شده در تحقیقات ایشان، در کانال‌هایی با سطح مقطع بیضوی، چهار جریان ثانویه و در کانال‌های مستطیلی، هشت جریان ثانویه شکل می‌گیرد.

در سال ۱۹۷۴ دادسون^۵ و همکارانش [۲۷] به بررسی جریان‌های ثانویه واقع در جریان سیال ویسکوالاستیک در کانال‌های مستطیلی با استفاده از مدل کریمینال اریکسون فیلیبی و با فرض مقدار ثابت اختلاف تنش نرمال دوم پرداختند و در ادامه با استفاده از تجهیزات آزمایشگاهی محلول ویسکوالاستیک بدست آمده را که حاوی ترکیب چند ماده خاص بوده، مورد بررسی قرار دادند که تطابق رضایت‌بخشی از مقایسه نتایج آزمایشگاهی و مدل‌سازی عددی در مورد مقادیر فشار و دبی گزارش شده است اما مقدار پیش بینی شده برای شدت جریان‌های ثانویه دارای خطای قابل توجهی بود.

¹ - J. L. Eriksen

² - J. A. Wheeler

³ - rectilinear

⁴ - optical diagnostic

⁵ - A. G. Dodson

تانسند^۱ و همکارانش [۲۸] نیز با استفاده از مدل کریمینال اریکسون فیلیبی و روش حساب اختلالات، جریان سیال ویسکوالاستیک را در کانال‌های مستطیلی مورد مطالعه قرار دادند و همچنین در یک تحقیق آزمایشگاهی، جریان ۶ سیال ویسکوالاستیک مختلف را بررسی نمودند که در هر ۶ مورد، ۸ جریان ثانویه در کل سطح مقطع کانال مستطیلی گزارش شده است که شدت جریان‌های ثانویه با مقدار اختلاف تنش نرمال دوم رابطه مستقیم داشته و تغییر علامت آن به تغییر جهت جریان‌های ثانویه منجر می‌شود.

در سال ۱۹۷۷ در مقاله‌ای با عنوان معادله متشکله جدید بدست آمده از تئوری شبکه که توسط فن تین و تنر^۲ [۲۹] به چاپ رسیده است مدل جدیدی از سیالات ویسکوالاستیک تحت عنوان مدل فن-تین-تنر معرفی شد. این مدل یک مدل غیر خطی بوده که به طور همزمان اختلاف تنش نرمال اول و دوم در آن غیر صفر بوده و همچنین دارای رفتار باریک‌شوندگی نسبت به نرخ برش برای توابع ویسکومتریکی می‌باشد. ضمناً با استفاده از این مدل اختلاف تنش‌های نرمال اول و دوم و همچنین جریان‌های ثانویه نیز قابل رویت می‌باشند. از این زمان به بعد به علت کامل بودن نسبی این مدل در برابر مدل‌های موجود دیگر، تحقیقات زیادی در زمینه سیالات ویسکوالاستیک با استفاده از این مدل نیز صورت پذیرفته است.

در ادامه تحقیقات، جریان سیال ویسکوالاستیک در حالت سه‌بعدی و در هندسه‌های پیچیده‌تری نیز مورد بررسی قرار گرفت. در این مورد می‌توان به تحقیق کوچران^۳ و همکارانش [۳۰] در سال ۱۹۸۱ اشاره نمود. ایشان در تحقیقات خود به بررسی رفتار سیالات نیوتنی و ویسکوالاستیک در کانال‌های مختلفی با هندسه‌های پیچیده با استفاده از مدل‌سازی عددی و مشاهده جریان پرداختند. هارتنت^۴ و همکارانش نیز [۳۱] به بررسی جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در کانال‌های مستطیلی با نسبت ابعاد ۲ پرداختند. ایشان در روند تحقیقاتشان به افزایش انتقال حرارت به علت

¹ - P. Townsend

² - N. Phan Thien, R.I. Tanner

³ - T. Cochrane

⁴ - J. P. Hartnett

وجود جریان‌های ثانویه پی‌بردند. در تحقیق تجربی دیگری، رائو^۱ [۳۲] جریان سیال ویسکوالاستیک در یک کانال مستطیلی با نسبت ابعاد ۵ را مورد بررسی قرار داد که نتایج حاصل از تحقیق ایشان افزایش ۲۵ درصدی در مقدار عدد ناسلت را نشان می‌دهد.

در تحقیقی که در سال ۱۹۸۹ توسط داربی^۲ و همکارانش [۳۳] انجام شده است، بررسی یک محلول پلیمری پلی‌اتیلن^۳ در دو حالت رقیق^۴ و غلیظ^۵ در حال توسعه در یک کانال مدنظر قرار گرفته است. در این تحقیق به منظور مدل‌سازی تنش، از مدل ترکیبی ماکسول^۶ که یک مدل غیر خطی می‌باشد استفاده شده است و همچنین مدل‌سازی در حالت دوبعدی صورت پذیرفته است که در نتیجه هیچ اطلاعاتی در مورد جریان‌های ثانویه بدست نیامده است و تنها مولفه‌های سرعت و تنش در این حالت گزارش شده است. علاوه بر این در این تحقیق مطلبی با عنوان تغییر در نوع معادله دیفرانسیل جریان در حال توسعه بیان شده است. به گفته این محققین در جریان در حال توسعه، با تغییر شرایط جریان، امکان تغییر نوع معادله مشخصه جریان وجود دارد که به منظور انتخاب راه حل مناسب برای حل، می‌بایست به این موضوع نیز توجه داشت. هندسه مورد استفاده و همچنین نحوه شبکه بندی در تحقیق ایشان در شکل (۱-۲) آورده شده است.

¹ - B. K. Rao

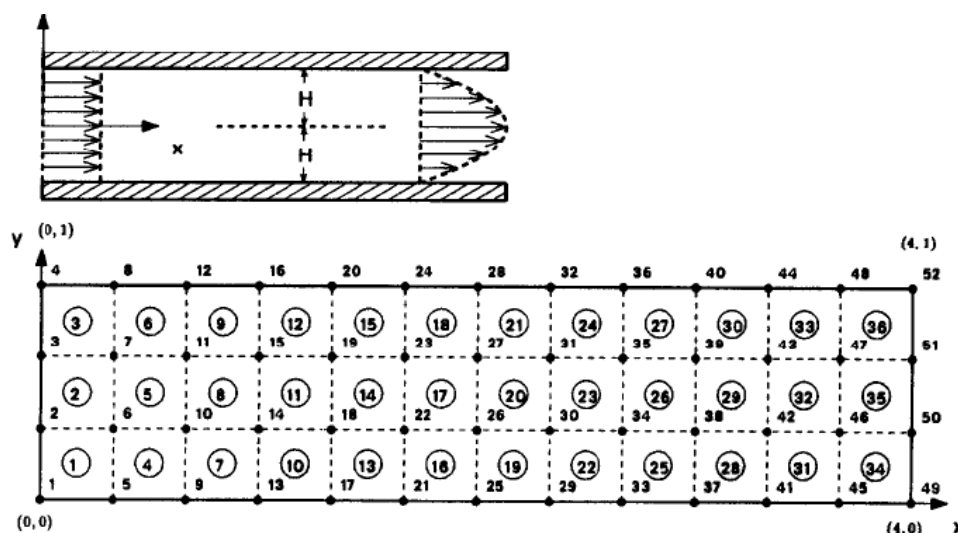
² - Ronald Darby

³ - polyethylene

⁴ - Low density polyethylene (LDPE)

⁵ - High density polyethylene (HDPE)

⁶ - mixed convected Maxwell



شکل (۱-۲): هندسه و شبکه‌بندی مورد استفاده در تحقیقات داری و همکارانش [۳۳]

در تحقیقی دیگر که توسط همین گروه [۳۴] به چاپ رسیده است، با استفاده از نتایج تحقیق قبلی، تنها انتقال حرارت در دو سیال پلیمری رقیق و غلیظ با همان شرایط پیشین مورد بررسی قرار گرفته است. در این تحقیق خواص سیال به صورت متغیر و تابع نمایی از دما در نظر گرفته شده است. ضمناً به منظور اعمال شرایط مرزی حرارتی، دمای دیواره‌ها به صورت معکوس عدد برینکمن در نظر گرفته شده است. جروانگ^۱ و همکارانش [۳۵] در سال ۱۹۹۱ بررسی و تحلیل یک محلول ویسکوالاستیک حاوی ۲٪ ویسکارین در حلال آب را به صورت عددی و تجربی مدنظر قرار دادند. در تحلیل عددی ایشان که با استفاده از معادله متشکله کریمینال اریکسون فیلیبی و روش تحلیل المان محدود^۲ صورت پذیرفته است، نحوه تشکیل و قدرت جریان‌های ثانویه مدنظر قرار گرفته است. طبق گزارشات ایشان در کانال‌هایی با مقاطع مربع و یا کانال‌های مستطیلی با نسبت اضلاع کم، ۲ جریان ثانویه در هر یک چهارم سطح مقطع کانال دیده می‌شود. این در حالیست که برای کانال‌هایی با نسبت اضلاع بیشتر از ۱۶، تعداد گردابه‌ها به سه عدد افزایش می‌یابد. علاوه بر این ایشان دریافتند که در نسبت دبی‌های پایین، جریان‌های ثانویه تاثیر بسزایی در افت فشار سیال ندارند ولی در دبی‌های بالاتر این اثر قابل اهمیت می‌باشد.

^۱ - B. Gervang

^۲ - Finite element method

در تحقیقی که توسط موری^۱ و همکارانش [۳۶] در سال ۱۹۹۳ به چاپ رسیده است، سیال ویسکوالاستیک در حالت سه بعدی و غیر دائم در یک کانال همگرا مربعی مورد بررسی قرار گرفته است. در ادامه یاماموتو^۲ و همکارانش [۳۷] به بررسی جریان سیال ویسکوالاستیک در حالت سه بعدی و غیر دائم بین دو صفحه همگرا پرداختند. همچنین تحقیقات متعددی در زمینه ناپایداری سیالات ویسکوالاستیک در حالت سه بعدی توسط چیبا^۳ [۳۸،۳۹،۴۰] و مکینلی^۴ [۴۱] و کیم^۵ [۴۲] و محققین دیگری انجام شده است.

در سال ۱۹۹۵ در تحقیقی که توسط ژو^۶ و همکارانش [۴۳] با استفاده از مدل پیشنهادی فن تین تنر به چاپ رسیده است، مدل سازی عددی جریان های ثانویه در کانال های صاف با استفاده از روش حجم محدود مورد مطالعه قرار گرفت. در این تحقیق به منظور حل معادلات وابسته پیوستگی و ممنوم از روش حجم محدود ضمنی استفاده شده است. بدین صورت که معادلات در ابتدا با استفاده از یک الگوریتم جداسازی شده و در نتیجه معادله ممنوم به معادله پواسون تبدیل می شود. در انتهای هر مرحله، جواب های بدست آمده از حل معادلات پواسون و پیوستگی می بایست در معادله اولیه ممنوم که یک ترم پخش مصنوعی^۷ به طرفین آن اضافه شده است، صدق نماید. در نهایت نتایج بدست آمده از این تحقیق با نتایج تحقیق جروانگ و همکارانش [۳۵] در مورد الگو و قدرت جریان های ثانویه تشکیل شده تطابق خوبی نشان می دهد. از دیگر نتایج بدست آمده از این تحقیق، موثر بودن قدرت جریان های ثانویه به عنوان پارامتر مهم در مدل سازی می باشد و همچنین وجود جریان های ثانویه بسیار وابسته به نرخ جریان اولیه، خاصیت الاستیک سیال و در نهایت اختلاف تنش های نرمال اول و دوم می باشد.

¹ - N.Mori

² - T.Yamamoto

³ - K. Chiba

⁴ - G.H. McKinley

⁵ - J.-H. Kim

⁶ - Xue

⁷ - Artificial diffusion

در تحقیق دیگری ناساچ^۱ و همکارانش [۴۴]، انتقال حرارت اجباری در جریان سیال ویسکوالاستیک در یک کانال مستطیلی را مورد مطالعه قرار دادند و در ادامه همین تحقیق [۴۵]، انتقال حرارت آزاد جریان سیال ویسکوالاستیک در همان کانال را که دو دیواره جانبی آدیاباتیک و شار حرارتی ثابتی از دیواره‌های بالایی و پایینی به سیال منتقل می‌شود را مورد مطالعه قرار دادند.

دبات^۲ و همکارانش [۴۶] با استفاده از روش‌های تجربی به مشاهده و بررسی جریان‌های ثانویه پرداختند و همچنین در تحقیقی دیگر [۴۷] جریان سیال ویسکوالاستیک را با استفاده از معادله متشکله گریکس مدل‌سازی نمودند که هماهنگی خوبی بین نتایج بدست آمده از دو تحقیق گزارش شده است.

طالبی [۴۸] در سال ۱۹۹۸ در قالب رساله دکتری خویش، با استفاده از معادله متشکله کریمینال اریکسون فیلیبی، جریان توسعه یافته سیالات ویسکوالاستیک را در مجاری مستطیلی مدل‌سازی نمود. در تحقیق ایشان که با استفاده از روش گسسته‌سازی تفاضل محدود و روش حل ADI انجام شده است، مطالبی از قبیل تشکیل جریان‌های ثانویه در نسبت ابعاد مختلف کانال، اثر ضرایب معادله متشکله بر شدت ضرایب اختلاف تنش نرمال اول و دوم و همچنین اثر جریان‌های ثانویه بر افت فشار و دبی عبوری سیال مورد بررسی قرار گرفته است. وی همچنین با استفاده از شرایط مرزی حرارتی دما ثابت و شار ثابت و یکنواخت در مقطع، بررسی کاملی بر روی میزان انتقال حرارت جریان توسعه یافته سیال ویسکوالاستیک در کانال‌های مستطیل انجام داده است.

تو^۳ و همکارانش [۴۹] با استفاده از تجهیزات آزمایشگاهی به بررسی جریان و انتقال حرارت دو محلول پلیمری در یک لوله پرداختند. در بررسی‌های ایشان که در حالت آشفته جریان صورت پذیرفته است، علاوه بر غلظت محلول و نرخ جریان، نوع محلول و قطر لوله نیز از عوامل موثر بر طول ورودی جریان و مقدار عدد ناسلت بیان شده است. پایور^۴ [۵۰] نیز در یک مدل‌سازی عددی و

¹ - M. F. Naccache

² - Debbaut

³ - KEN H. TOH

⁴ - P. PAYVAR

استفاده از معادله متشکله کریمینال اریکسون فیلیبی، عوامل موثر بر افزایش انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در یک کانال مستطیلی را بررسی نمود.

کیهارا^۱ و همکارانش [۵۱] نیز مدل‌سازی عددی یک سیال ویسکوالاستیک را در یک کانال همگرا به صورت سه بعدی مورد بررسی قرار دادند. در این مدل‌سازی که با استفاده از روش قطع وابستگی^۲ و همچنین روش توابع جریمه^۳ صورت پذیرفته است، از معادله متشکله فان تین تر به منظور مدل‌سازی ترم تنش استفاده شده است. در نهایت از مقایسه نتایج بدست آمده برای میدان‌های تنش در نرخ برشی $5.41 S^{-1}$ با نتایج تجربی و همچنین نتایج بدست آمده از مدل‌سازی عددی با مدل ویسکوزیته کامل در نرخ برش $120 S^{-1}$ توافق خوبی حاصل شده است.

ژو و همکارانش [۵۲] با استفاده از یک مدل‌سازی سه بعدی و با استفاده از معادلات متشکله فن تین تر و ماکسول فوق همرفتی، به بررسی دقت روش‌های عددی در مدل‌سازی جریان سیال ویسکوالاستیک در لبه‌های تیز و گوشه‌ها پرداختند.

شریف [۵۳] نیز در قالب رساله دکتری خویش با استفاده از یک مدل‌سازی عددی به بررسی جریان سیال ویسکوالاستیک در کانال‌های مستطیلی پرداخته است. در تحقیق ایشان که با استفاده از روش حجم محدود^۴ صورت پذیرفته است، جهت مدل‌سازی ترم تنش از معادله متشکله فن تین تر استفاده شده است. ایشان در تحقیقاتشان با استفاده از روش جداسازی تنش الاستیک و ویسکوزیته^۵، محاسبات مشخصه‌های جریان را از محاسبات تنش جداسازی نموده و نشان دادند که در مدل بهبود یافته فن تین تر در اعداد وایزبرگ بالا، شدت جریان‌های ثانویه مستقل از عدد وایزبرگ می‌باشد. همچنین ایشان تاثیر عدد رینولدز بر جریان‌های ثانویه را بررسی نمودند که دریافتند در اعداد رینولدز بالا، در هر یک چهارم کانال، ۸ جریان ثانویه تشکیل می‌شود.

¹ - S. KIHARA

² - decoupled method

³ - penalty function methods

⁴ - Finite volume method

⁵ - elastic-viscous-split-stress (Evss)

در مقاله‌ای که در سال ۲۰۰۰ توسط پینهو^۱ و همکارانش [۵۴] به چاپ رسیده است، حل تحلیلی جریان سیال ویسکوالاستیک در یک کانال با شرایط توسعه یافته هیدرودینامیکی در حالت جابجایی اجباری مدنظر قرار گرفته است. در این تحقیق که با استفاده از معادله مشخصه ساده شده فن تین انجام شده است، نتایج بدست آمده در حالت اعمال شار ثابت حرارتی به دیواره‌ها و با در نظر گرفتن اتلافات لزجتی ارائه شده و با مراجع دیگر مورد مقایسه قرار گرفته است.

هانگ سوهن^۲ و همکارانش [۵۵] نیز به بررسی جریان و انتقال حرارت یک سیال ویسکوالاستیک در یک کانال مستطیلی با نسبت اضلاع ۲:۱ پرداختند. در این تحقیق که با استفاده از معادله متشکله رایبر ریولین انجام شده است، اثرات وابستگی ویسکوزیته و نیروی شناوری^۳ به دما و همچنین الگو و نحوه تشکیل جریان‌های ثانویه که عامل اصلی آن اختلاف تنش‌های نرمال دوم است و تاثیر بسزایی در افزایش انتقال حرارت دارد، مورد بررسی قرار گرفته است. در این تحقیق تحلیل حرارتی سیال ویسکوالاستیک با شرایط حرارتی شار ثابت نیز مورد مطالعه قرار گرفته که در نهایت هماهنگی خوبی بین نتایج این تحقیق و نتایج تجربی حاصل شده است.

در سال ۲۰۰۱ سیلین^۴ [۵۶]، با استفاده از روش‌های تحلیلی و عددی به بررسی جریان‌های ثانویه در کانال‌های با مقطع مستطیلی پرداخت. وی نشان داد که عدد دבורا تاثیر چندانی در شدت جریان‌های ثانویه ندارد، اما در اعداد دבורا بزرگ جریان تمایل زیادی به ناپایداری از خود نشان می‌دهد. الوس^۵ و همکارانش [۵۷] نیز به بررسی و تحلیل یک سیال ویسکوالاستیک در یک کانال و لوله مستقیم پرداختند. در تحلیل ایشان که به صورت تحلیلی و با استفاده از معادله متشکله فن تین تر و با فرض ضریب تنش خطی صورت پذیرفته است، سرعت محوری در راستای کانال و تنش‌های مربوطه مورد بررسی قرار گرفته است. در تحقیق ایشان همچنین سه تابع مادی برای تابع تک وجه فن تین

¹ - F.T. Pinho

² - Chang-Hyun Sohn

³ - Buoyancy Force

⁴ - Siline

⁵ - Manuel A. Alves

تنر برای جریان کوئت نیز فرض شده است که در نهایت دریافتند که مکان و موقعیت نقاط ماکزیمم تنش در نمودار تنش-نرخ برش بستگی به شرایط و وجود حالت دائم حل در کانال و لوله دارد.

اکیلدیز^۱ [۵۸] در سال ۲۰۰۱ با استفاده از مدل بهبود یافته فن تین تنر به بررسی پراکندگی ماده حل شونده در جریان پویزوله^۲ یک سیال ویسکوالاستیک پرداخت و نشان داد که این پراکندگی به میزان عدد دبور و وابستگی زیادی دارد. محققین دیگری از جمله تانگام^۳ [۵۹]، خریث^۴ [۶۰]، اسلوی^۵ [۶۱]، سانوو^۶ [۶۲]، تام^۷ [۶۳] و بوهلن^۸ [۶۴] نیز هرکدام به بررسی پدیده‌ای خاص از جریان جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در هندسه‌های گوناگون و با استفاده از معادلات متشکله متنوعی پرداختند.

در سال ۲۰۰۲، دولی^۹ [۶۵] در قالب رساله دکتری خویش، با استفاده از تجهیزات آزمایشگاهی به بررسی تجربی جریان سیال ویسکوالاستیک در کانال‌های مستطیلی با چند سطح مقطع متفاوت پرداخته است. ایشان با استفاده از یک دستگاه اکستروژن ترکیبی^{۱۰}، چند لایه مختلف از سیال ویسکوالاستیک با رنگ‌های متفاوت را به درون یک کانال مستطیلی تزریق کرده که در این صورت به علت رنگ متفاوت لایه‌ها، جریان‌های گردابی تشکیل شده در کانال قابل مشاهده می‌باشند.

در تحقیقی که در سال ۲۰۰۲ توسط کولهو^{۱۱} و همکارانش [۶۶] به چاپ رسیده است، مدل-سازی جریان آرام توسعه یافته در حالت جابجایی اجباری در یک کانال صاف با استفاده از مدل ساده شده فان تین تنر مورد بررسی قرار گرفته است. در این تحقیق که با استفاده از روش تحلیلی و با مقداری ساده‌سازی و تقریب انجام شده است، خواص سیال در طول لوله ثابت در نظر گرفته شده

¹ - Akyildiz

² - Poiseuille

³ - Thangam

⁴ - Gerrit

⁵ - Esselaoui

⁶ - Sunwoo

⁷ - Tomé

⁸ - Bohlen

⁹ - Dooley

¹⁰ - Co- Extrusion

¹¹ - P.M. Coelho

است و تعادل حرارتی بین جابجایی محوری و هدایت شعاعی با ناچیز فرض نمودن اثرات لزجت اعمال شده است. در حالی دیگر که در همین تحقیق بررسی شده است، حل دقیق همین مسئله، با در نظر گرفتن تعادل بین اتلافات لزجت و هدایت حرارتی شعاعی و با ناچیز فرض نمودن جابجایی حرارتی در راستای محور مد نظر قرار گرفته است. در تحقیق دیگر که توسط همین گروه [۶۷] در سال ۲۰۰۳ منتشر شده است، حل تحلیلی یک سیال ویسکوالاستیک در یک کانال صاف که از نظر هیدرودینامیکی توسعه یافته و از نظر حرارتی در حال توسعه می‌باشد، مد نظر قرار گرفته است. در این تحقیق به منظور مدل‌سازی ترم تنش از معادله متشکله فان تین-تنر و جهت حل معادلات از روش جداسازی متغیرها^۱ و روش رانج کوتاه^۲ استفاده شده است. لازم به ذکر است که شرایط مرزی حرارتی مورد استفاده در این تحقیق دو نوع شرط اعمال دمای دیواره و همچنین اعمال شار حرارتی می‌باشد. نتایج بدست آمده از این تحقیق در قالب اثرات جریان اصلی و اتلافات ویسکوز برروی دمای سیال و عدد ناسلت ارائه شده است.

در سال ۲۰۰۳ لتلیر^۳ [۶۸] جریان غیر دائمی سیال ویسکوالاستیک را با استفاده از مدل گرین-ریولین^۴ در مجاری بسته مستقیم بررسی نمود. لتلیر نشان داد که شدت جریان‌های ثانویه در محدوده محدوده ویسکوالاستیک خطی با مقداری بیشتر از مرتبه سوم خواص الاستیک سیال متناسب است. از دیگر نتایج جالب توجه این تحقیق، بررسی جریان‌های ثانویه در مقاطع مختلف است. وی پارامتری را برای مشخص کردن میزان انحراف شکل مقطع کانال از حالت مدور تعریف نمود. این پارامتر بر اساس نگاشت تبدیل شکل مقطع به دایره تعریف شده و عددی بین صفر و یک است به نحوی که برای دایره کامل برابر صفر و با افزایش میزان انحراف شکل از دایره به سمت یک میل می‌کند. ایشان نشان دادند که با افزایش این پارامتر بر شدت جریان‌های ثانویه افزوده می‌شود به نحوی که در حالت مربعی، شدت جریان‌های ثانویه ۳۷۷ برابر بزرگتر از حالت نزدیک به دایره است. به عبارت دیگر در یک کانال

¹ - separation of variables

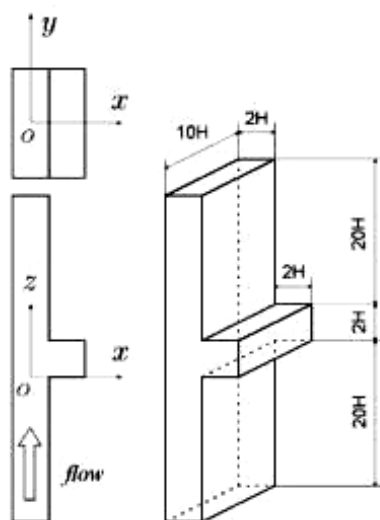
² - Runge-Kutta methods

³ - Letelier

⁴ - Green-Rivlin

با مقطع چهار ضلعی با اضلاع خمیده، هر چقدر گوشه‌ها نوک تیزتر باشند، شدت جریان‌های ثانویه بیشتر است. این موضوع نشان می‌دهد که شرط تشکیل جریان‌های ثانویه، وجود گوشه‌ها در مقطع کانال است و در یک کانال با مقطع دایره چنین جریان‌هایی ایجاد نمی‌شود.

در تحقیقی که در سال ۲۰۰۳ توسط یاماموتو^۱ و همکارانش [۶۹] به چاپ رسیده است، تحلیل سه بعدی جریان سیال ویسکوالاستیک در یک کانال مستطیلی به همراه یک حفره واقع در آن با استفاده از معادله متشکله فان تین تیر به دو روش عددی و تجربی مورد بررسی قرار گرفته است. ایشان دریافتند که در هندسه مورد بررسی که در شکل (۳-۱) نشان داده شده است، در اعداد وایزبرگ بالا، جریان به صورت مارپیچ‌گونه‌ای به سمت صفحه میانی کانال حرکت می‌کند که این موضوع نیز در تحقیق تجربی آنها مشاهده شده است.



شکل (۳-۱): هندسه مورد بررسی در تحقیقات یاماموتو و همکارانش [۶۹]

در تحقیق دیگری که در سال ۲۰۰۳ به چاپ رسیده است، کروز^۲ و همکارانش [۷۰] به بررسی جریان توربولانس سیال ویسکوالاستیک در یک لوله با مدل‌های توربولانسی $k-\epsilon$ پرداختند. در این تحقیق که هدف اصلی آن کاهش ضریب درگ سیال عبوری از لوله می‌باشد، مدل مورد استفاده یک مدل غیر خطی بوده که با استفاده از مولفه‌های توربولانسی تصحیح شده است. نتایج بدست آمده از

¹ - Takehiro Yamamoto

² -D.O.A. Cruz

این تحقیق، خصوصاً در مورد ضرایب درگ و سرعت متوسط با نتایج تجربی مورد مقایسه قرار گرفته است که در مورد نتایج مربوط به انرژی جنبشی توربولانسی تطابق خوبی به چشم نمی‌خورد ولی مدل قادر به شناسایی موقعیت نقطه راس منحنی انرژی توربولانسی و نرخ اتلاف انرژی می‌باشد. لازم بذکر است که ایشان در ادامه تحقیقات خود [۷۱]، در مقاله‌ای که در سال ۲۰۰۵ منتشر کرده‌اند، به حل تحلیلی یک سیال ویسکوالاستیک توسعه یافته در یک کانال با استفاده از مدل‌های فن تین تر و مدل غیر خطی توسعه محدود^۱ پرداخته‌اند. در تحقیقی که توسط الوس^۲ و همکارانش [۷۲] انجام شده است، مدل‌سازی عددی سیال ویسکوالاستیک در حالت دو بعدی در یک کانال با انقباض ناگهانی با استفاده از معادله متشکله فن تین تر و اولدروید- B مدنظر قرار گرفته است. در این مدل‌سازی که در اعداد رینولدز پایین و در مقابل در گستره وسیعی از اعداد دورا^۳ صورت پذیرفته، به منظور گسسته‌سازی معادلات حاکم از روش حجم محدود استفاده شده است. طبق گزارشات ایشان در کانال‌های انقباضی دارای تقارن محوری (لوله‌های انقباضی) افزایش گردابه‌ها با افزایش عدد دبرا برای هر دو مدل فن تین تر و اولدروید- B حادث می‌شود ولی در کانال‌های انقباضی صفحه‌ای، فقط افزایش گردابه‌ها را می‌توان در مدل‌سازی با استفاده از مدل فن تین تر مشاهده نمود.

الیویرا^۴ و همکارانش [۷۳] در تحقیق که در سال ۲۰۰۴ به چاپ رسیده است، حل نیمه تحلیلی یک سیال ویسکوالاستیک با شرایط دمایی در حال توسعه را مدنظر قرار دادند. در مدل‌سازی ایشان که با استفاده از معادله متشکله غیر خطی توسعه محدود صورت گرفته است، شرایط حرارتی مشخص بودن دمایی دیواره و مشخص بودن شار اعمالی به دیواره به عنوان شرایط مرزی اعمال شده است.

در تحقیقی که توسط نویرگا^۵ و همکارانش [۷۴] در سال ۲۰۰۴ به چاپ رسیده است، تحلیل و بررسی جریان یک سیال ویسکوالاستیک در حال توسعه که خواص آن وابسته به دما می‌باشد، در یک

¹ - finitely extensible nonlinear elastic(FENE-P)

² - M.A. Alves

³ - Debora Number

⁴ - Oliveira

⁵ - J.M. N_obrega

کانال مستطیلی مد نظر قرار گرفته است. در این پژوهش به منظور مدل‌سازی تنش از مدل ساده شده فن تین تر استفاده شده است. ایشان در مدل خود کمیت‌های ضریب انتقال حرارت، ویسکوزیته و زمان آسودگی را تابع دما فرض نموده و در پایان تحقیق خود روشی را به عنوان دما معادل پیشنهاد نمودند که در آن وابستگی کمتر کمیت‌هایی مانند ضریب اصطکاک و عدد ناسلت را به اتلافات لزجی منجر می‌شود. به علت ساده‌سازی‌های انجام شده در مدل ساده شده فن تین تر، برخی از پدیده‌های واقع در سیالات ویسکوالاستیک از قبیل جریان‌های ثانویه قابل مشاهده نمی‌باشد. البته بیشتر تمرکز ایشان در این تحقیق معطوف به شرایط حرارتی و تغییرات عدد برینکمن و ناسلت می‌باشد و از جریان‌های ثانویه و پروفیل‌های سرعت و فشار در میدان حل هیچ گزارشی ارائه نشده است. طبق نتایج بدست آمده از این تحقیق، عدد ناسلت جریان از مقدار ماکزیمم خود در دهانه کانال شروع شده و با پیشروی در راستای کانال و تشکیل لایه مرزی از مقدار آن کاسته می‌شود.

مصطفاییان و همکارانش [۷۵] نیز با استفاده از روش تحلیلی جریان سیال ویسکوالاستیک بین دو استوانه هم‌محور را با استفاده از معادله متشکله گزیکس مورد بررسی قرار دادند. در سال ۲۰۰۶ هاشم‌آبادی و همکارانش [۷۶] به بررسی اثرات انحنای گوشه‌ها بر جریان‌های ثانویه در کانال‌های مربعی با استفاده از مدل رایزر ریولین پرداختند. آنها در تحقیقاتشان نشان دادند که با افزایش شعاع انحنای گوشه‌ها یا به عبارت دیگر نزدیک‌شدن مقطع چهارگوش به مقطع دایره‌ای از قدرت جریان‌های ثانویه کاسته شده که در نهایت در مقاطع دایروی هیچ جریان ثانویه‌ای وجود ندارد. همچنین آنها نشان دادند که با وجود اثر اختلاف تنش نرمال دوم منفی بر شدت جریان‌های ثانویه، تاثیر این خاصیت بر افت فشار کانال بسیار اندک است.

در تحقیقی که در سال ۲۰۰۶ توسط رسند^۱ و همکارانش [۷۷] منتشر شده است، مدل‌سازی عددی چهار محلول پلیمری در یک کانال صاف در حالت آشفته و همچنین اندازه‌گیری تجربی تنش-های نرمال رینولدزی مورد بررسی قرار گرفته است. طبق گزارشات ارائه شده در این تحقیق، با اینکه

¹ - P.R. Resende

بهبود کمی در نتایج مربوط به ضریب اصطکاک، سرعت متوسط و انرژی جنبشی توربولانسی نسبت به تحقیق قبل دیده می‌شود، اما مدل توربولانسی جدید قادر به تشخیص افزایش هماهنگی مربوط به کاهش ضریب درگ می‌باشد.

در مقاله‌ای که در سال ۲۰۰۶ توسط افونسو^۱ و همکارانش [۷۸] منتشر شده است، جریان سه-بعدی یک سیال ویسکوالاستیک در یک کانال مستطیلی که دارای انقباض ناگهانی می‌باشد، با استفاده از مدل فن تین تنر مورد بررسی قرار گرفته است. در این تحقیق که تمامی ضرایب معادله متشکله فن تین تنر حضور داشته، جریان‌های ثانویه به خوبی قابل رویت می‌باشند.

پینهو^۲ و همکارانش [۷۹] نیز در سال ۲۰۰۶ با استفاده از معادله متشکله فن تین تنر، به بررسی جریان وانتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک بین دو دایره هم مرکز با اعمال شار حرارتی ثابت به دو دیواره پرداخت. در تحقیقات ایشان که به صورت دو بعدی صورت پذیرفته است، اکثر تمرکز و نتایج ارائه شده معطوف به تاثیرات عدد برینکمن و تلفات ویسکوز بر انتقال حرارت می‌باشد. تحقیقات دیگری در زمینه جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در هندسه‌های گوناگون و با استفاده از معادلات متشکله و همچنین روش‌های متنوعی به چاپ رسیده است که از آن جمله می‌توان به تحقیقات سیراکو^۳ [۸۰]، لی^۴ [۸۱]، کورتل^۵ [۸۲]، آگویو^۶ [۸۳]، پاول^۷ [۸۴] و حسن پور [۸۵] اشاره نمود.

در سال ۲۰۰۷ سارامیتو^۸ [۸۶] معادله متشکله جدیدی که حالت بسط داده معادلات اولدریود و بینگهام می‌باشد را به منظور مدل‌سازی سیالات الاستوویسکوپلاستیک^۹ معرفی کرد. مدل فیزیکی این معادله به صورت تلفیقی از یک فنر، دو دمپر متفاوت و یک منبع برای اعمال تنش اولیه ثابت می‌-

¹ - A. Afonso

² -Pinho

³ - Sirakov

⁴ - Lee

⁵ - Cortell

⁶ - Aguayo

⁷ - Poole

⁸ - Pierre Saramito

⁹ - elastoviscoplastic fluid

باشد. برطبق گزارشات ایشان جریان‌هایی مانند جریان برشی ساده و جریان محوری نوسانی برشی با این مدل مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. علاوه بر آن این مدل در تحلیل سیالاتی مانند فوم‌های مایع و سوسپانسیون‌ها و خون نتایج قابل قبولی را ارائه می‌دهد.

در سال ۲۰۰۸ یو^۱ و همکارانش [۸۷] با استفاده از محاسبات تحلیلی و نیز مدل‌سازی عددی به بررسی عوامل تشکیل و جهت چرخش جریان‌های ثانویه در جریان سیالات ویسکوالاستیک در کانال‌های مستطیلی پرداختند. در تحقیقات ایشان که با استفاده از معادله متشکله گزیکس انجام شده است، اختلاف تنش نرمال دوم و همچنین عدم تقارن محوری جریان عامل اصلی بوجود آمدن جریان-های ثانویه بیان شده است. در ادامه ایشان بر اساس نسبت ثابت اختلاف تنش نرمال دوم به ویسکوزیته شرط دیگری را مطرح نمودند و نشان دادند که در جریان سیال ویسکوالاستیک جهت چرخش گردابه‌ها به مشتق نسبت ضریب اختلاف تنش نرمال دوم به ویسکوزیته وابسته می‌باشد.

جنیدی [۸۸] نیز در سال ۲۰۰۸، در تحقیقی تحلیلی به بررسی جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در کانال‌های مدور با استفاده از مدل اولدروید- B و سیال مرتبه ۲ پرداخت. در تحقیقات ایشان که با استفاده از روش حساب اختلالات و نرم افزار میپیل^۲ و در حالت دوبعدی انجام شده است، نتایجی برای مشخصه‌های جریان و شدت انتقال حرارت در حالت‌های مختلف ارائه شده است. الویرا^۳ و همکارانش [۸۹] در ادامه تحقیقاتشان در مقاله‌ای که در سال ۲۰۰۹ به چاپ رسیده است، به بررسی و تحلیل سیال ویسکوالاستیک در یک جمع‌کننده جریان پرداختند. در این تحقیق که به صورت عددی و با استفاده از معادله متشکله‌های فن تین تر و مدل ماکسول فوق همرفتی صورت پذیرفته است، جریان از سه منفذ وارد شده و پس از اختلاط با یکدیگر از یک منفذ خارج می‌شود. در تحقیقات ایشان دو نوع پایداری گزارش شده است. در حالت اول جریان به صورت متقارن است و در حالت دائم باقی می‌ماند ولی در اعداد دبرا بالا، جریان به صورت ناپایدار و نوسانی با زمان

¹ - Yue

² - Maple

³ - Oliveira

تبدیل می‌شود. در تحقیقاتی از ایشان که با مدل ماکسول فوق همرفتی انجام شده است، اثر پارامترهای هندسی مانند عرض دهانه‌های ورودی و همچنین نرخ جریان ورودی بر شروع ناپایداری و عدم تقارن بررسی شده است و همچنین ایشان دریافتند که در جریان‌های ورودی با نرخ بالا، عدد دبرا بحرانی مستقل از سرعت متوسط ورودی بوده اما بطور غیر یکنواخت به عرض دهانه‌های ورودی وابسته می‌باشد.

در تحقیقی که در سال ۲۰۰۹ توسط پاول^۱ و همکارانش [۹۰] منتشر شده است، مدل‌سازی عددی جریان خزشی سیال ویسکوالاستیک در یک کانال به همراه انبساط ناگهانی بررسی شده است. در این تحقیق به منظور مدل‌سازی تنش از مدل غیر خطی ماکسول فوق همرفتی استفاده شده است. طبق نتایج گزارش شده این تحقیق که بین نسبت انبساط‌های ۱٫۲۵ تا ۳۲ صورت پذیرفته است، در نسبت انبساط‌های بیشتر از ۴، جریان اصلی متأثر از جریان پایین دست بوده و نسبت انبساط تاثیر چندانی بر کمیت‌های مورد بررسی ندارد. ولی در نسبت انبساط‌های کمتر از ۳، تقابل عدد دبرا و نسبت انبساط باعث عدم یکنواختی در تغییر کمیت‌ها شده است. در سال ۲۰۰۹ بوتابا^۲ و همکارانش [۹۱] در یک پژوهش به بررسی پایداری جریان سه بعدی سیال نیوتنی و ویسکوالاستیک در یک کانال مربعی خمیده پرداختند. در تحقیق آنها به منظور مدل‌سازی تنش از مدل فن تین تر استفاده شده است که اکثر تمرکز این پژوهش معطوف به پایداری و گردابه‌های دین^۳ می‌باشد. ایشان به منظور نشان دادن اثرات عدد دین^۴ که تقابل نیروهای گریز از مرکز و لزجت می‌باشد و به صورت معادله (۱-۲۷) تعریف می‌شود بر جریان‌های ثانویه، مدل‌سازی خود را در سه عدد دین متفاوت انجام دادند. لازم به ذکر است ایشان هندسه مورد بررسی خود را که در شکل (۱-۴) نشان داده شده است به سه قسمت متفاوت تقسیم کرده و هر قسمت را با استفاده از دستگاه مختصات مناسب تحلیل نموده‌اند. شرایط ورودی جریان، شرایط توسعه یافته در نظر گرفته شده است.

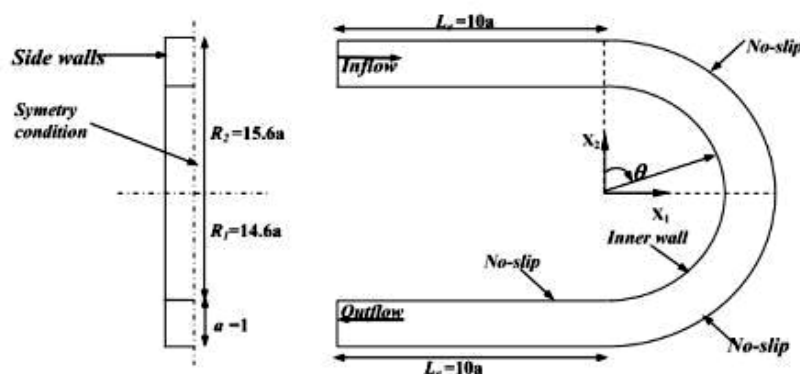
¹ - R.J. Poole

² - Mohammed Boutabaa

³ - Dean vortices

⁴ - Dean number

$$D_n = Re \sqrt{a/R} \quad (27-1)$$



شکل (۴-۱): هندسه مورد بررسی در تحقیقات بوتابا و همکارانش [۹۱]

اسکودیر^۱ و همکارانش [۹۲] با استفاده از دستگاه سنجش لیزر داپلر^۲، به بررسی تجربی میدان جریان آشفته دو محلول پلیمری در یک کانال مستطیلی پرداختند. در تحقیق ایشان که در یک مقطع تست دوبعدی انجام شده است، کمیت‌هایی از جمله تنشهای رینولدزی و تنش‌های عمودی و برشی و همچنین عوامل موثر بر کاهش ضریب درگ مورد بررسی قرار گرفته است.

پرس^۳ و همکارانش [۹۳] نیز در یک مدل‌سازی سه‌بعدی و با استفاده از روش حجم محدود، به بررسی اثرات جریان‌های ثانویه در افزایش قابلیت انتقال حرارت در جریان توسعه یافته سیال ویسکوالاستیک پرداختند. در تحقیق ایشان که بر روی یک کانال با نسبت ابعاد ۲ و همچنین اعمال شار حرارتی ثابت به دیواره‌های آن انجام شده است، اثرات مکانیزم جابجایی آزاد نیز بر مقدار عدد ناسلت در جریان سیال بررسی شده است.

نوروزی [۹۴] در سال ۲۰۱۰ در قالب رساله دکتری خویش و همچنین مقالات منتشر شده توسط ایشان و همکارانش [۹۵،۹۶،۹۷،۹۸،۹۹] به بررسی عددی و تحلیلی جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در کانال‌های خمیده با استفاده از معادله متشکله کریمینال اریکسون فیلیپ پرداخته است. در تحقیق ایشان که در دو حالت ایستا و چرخان کانال انجام شده است، هدف اصلی

¹ - Escudier

² - laser Doppler anemometry

³ - Peres

شناخت بهتر اثرات خواص ویسکوالاستیک بر جریان این سیالات معرفی شده است. همچنین در تحقیق ایشان با استفاده از روش مرتبه بزرگی^۱ رابطه‌ای تحلیلی برای تعادل نیروها در ناحیه هسته جریان در کانال خمیده ارائه شده است که این مطلب به شناخت بهتر اثر نیروهای موثر به میدان جریان کمک می‌کند. همچنین در این تحقیق برای اولین بار با استفاده از همین روش روابط تحلیلی برای میدان جریان خزشی^۲ سیال مرتبه دو در کانال‌های خمیده با مقطع چهار گوش ارائه شده است. نتایج ارائه شده توسط ایشان در قسمت‌های مشترک، هماهنگی خوبی با تحقیقات ارائه شده توسط دیگر محققین دارد. سوسا^۳ و همکارانش [۱۰۰] در سال ۲۰۱۰ با استفاده از تجهیزات آزمایشگاهی و روش مشاهده جریان به بررسی جریان سیال ویسکوالاستیک در کانال‌های مربعی دارای انقباض ناگهانی پرداختند. در این تحقیق که در نسبت انقباض‌های متفاوتی انجام شده است، محققین به بررسی اثرات افزایش خواص الاستیک بر اندازه گردابه‌ها و همچنین اثرات عدد دبور بر ناپایداری جریان پرداختند. در تحقیقی دیگر [۱۰۱] که توسط همین گروه در سال ۲۰۱۱ منتشر شده است، تمامی موارد و مشخصه‌های مورد بررسی در تحقیق قبل، به ازای هندسه‌ای متفاوت و در حالت انبساط ناگهانی کانال مدنظر قرار گرفت است. تحقیقات دیگری نیز تاکنون در زمینه جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در هندسه‌های متفاوت و با استفاده از معادلات متشکله و روشهای گوناگونی انجام شده است که از آن جمله می‌توان به تحقیقات ژیکو^۴ [۱۰۲]، بابا الاهی [۱۰۳]، یانگ^۵ [۱۰۴]، ساجید^۶ [۱۰۵]، پارک^۷ [۱۰۶]، رایت^۸ [۱۰۷]، مو^۹ [۱۰۸] و سیگنر^{۱۰} [۱۰۹] که در زمینه-زمینه‌های بیشتری به تحقیق حاضر شبیه می‌باشند، اشاره نمود.

¹ -Order of magnitude

² -Creeping flow

³ - Sousa

⁴ - Xikui

⁵ - Yang

⁶ - Sajid

⁷ - Park

⁸ - Wright

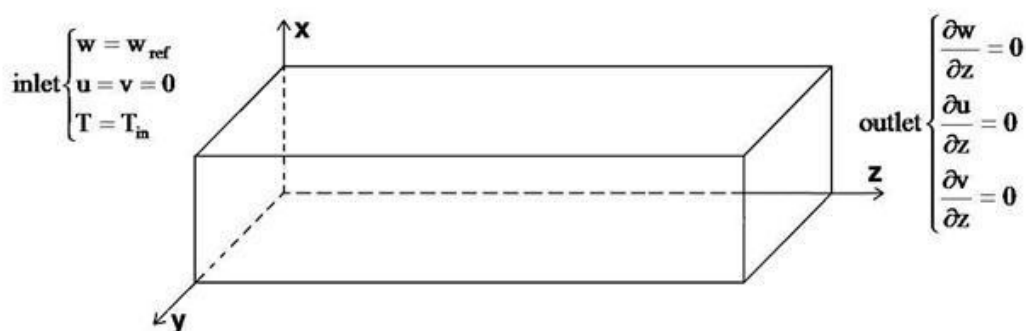
⁹ - Mua

¹⁰ - Siginer

۵-۱- تحقیق حاضر

با توجه به مطالب بیان شده، تاکنون تحقیق کاملی در مورد جریان و انتقال حرارت در حال توسعه سیالات ویسکوالاستیک در حالت سه بعدی ارائه نشده است و تحقیقات انجام شده در حد مطالب فوق خلاصه می‌شود. از طرف دیگر بنا به اینکه بعضی خواص سیال تابع دما بوده و به نظر می‌رسد در جریان برخی از سیالات ویسکوالاستیک اختلاف دمایی زیادی وجود داشته باشد [۱۱۰]، حل معادله انرژی در حال توسعه به همراه خواص متغیر با دما به همراه معادلات جریان لازم به نظر می‌رسد که این مطلب هم در اکثر تحقیقات فوق دیده نمی‌شود. بدین منظور در تحقیق حاضر مدل‌سازی جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در حالت سه بعدی در کانال‌های مستطیلی که در آن هم میدان جریان و هم انتقال حرارت در حال توسعه در نظر گرفته شده است، با استفاده از معادلات متشکله غیر خطی بالاخص معادله متشکله بهبود یافته فن تین تر مد نظر قرار گرفته است.

شرایط مرزی جریان و دما در ورودی کانال به صورت یکنواخت فرض شده است که با پیشروی جریان در طول کانال و اثر گذاری شرایط مرزی، رفته رفته جریان به حالت توسعه یافتگی می‌رسد. از موارد قابل ذکر دیگر وابستگی برخی از پارامترهای جریان به دما و همچنین در نظر گرفتن اثر جابجایی آزاد در قسمتی از این تحقیق می‌باشد. زیرا بنا بر دلایل بیان شده حل همزمان معادله انرژی به همراه معادلات جریان و همچنین فرض برخی خواص تابع دما، لازم به نظر می‌رسد. ضمناً در تحقیق پیش‌رو معادله انرژی در دو حالت دمایی دیواره ثابت و فرض شار حرارتی ثابت حل شده است. به علت تقارن موجود در هندسه مورد بررسی و همچنین صرفه‌جویی در هزینه محاسبات، فضای محاسباتی به یک چهارم هندسه اولیه کاهش داده شده و در این صورت شرایط مرزی تقارن به همراه بقیه شرایط مرزی به خوبی اعمال شده است. هندسه مورد بررسی و همچنین برخی از شرایط کلی جریان در شکل (۵-۱) نشان داده شده است. لازم به ذکر است که هندسه اولیه مورد بررسی در این تحقیق، کانالی با ابعاد سطح مقطع $5 \times 5 \text{ cm}$ و طول 100 cm می‌باشد.



شکل (۵-۱): نمایی شماتیک از هندسه مورد بررسی در تحقیق حاضر

با توجه به سه بعدی بودن دامنه حل و همچنین قابلیت معادلات متشکلکه مورد استفاده در دسترسی به یک جریان غیر مستقیم الخط، در تمامی حالات بررسی شده جریان‌های ثانویه که یکی از پدیده‌های منحصر به فرد جریان سیال ویسکوالاستیک در مجاری غیر دایروی می‌باشد قابل مدل-سازی و مشاهده می‌باشند. در این تحقیق علاوه بر بررسی جریان و انتقال حرارت در ناحیه در حال توسعه و توسعه یافته، تاثیر برخی از پارامترهای جریان و همچنین پارامترهای اثر گذار در معادله متشکلکه، بر جریان و انتقال حرارت بررسی شده است.

۱-۶- ضرورت انجام این تحقیق

با توجه به گسترش روزافزون موارد استفاده از سیالات غیر نیوتنی بالاخص سیالات ویسکوالاستیک که مذاب‌ها و محلول‌های پلیمری نیز گروه عمده‌ای از آنها می‌باشد و همچنین فیزیک متفاوت این سیالات و در پی آن وقوع برخی پدیده‌های خاص در جریان آنها، شناخت کامل جریان و همچنین پدیده‌های واقع در این سیالات در هندسه‌های متفاوت ضروری به نظر می‌رسد. از طرف دیگر جریان در مجاری صاف با سطح مقطع غیر دایروی یکی از جریان‌های پایه و مهم در مبحث مکانیک سیالات محسوب می‌شود. مطلب قابل ذکر دیگر این است که در برخی از صنایع مربوط به سیالات ویسکوالاستیک از قبیل تجهیزات مربوط به تزریق و انتقال مواد پلیمری، طول و زمان کافی برای رسیدن سیال به ناحیه توسعه یافته وجود ندارد و در این حالت جریان در طول کانال، در حال توسعه می‌باشد. بدین لحاظ شناخت کامل میداین سرعت و دما و تنش در ناحیه در حال توسعه جهت

ساخت و طراحی ابزار مناسب به منظور دستیابی به محصولات با کیفیت بالاتر که از آن جمله می‌توان به از بین بردن نقاط تمرکز تنش در روند تولید محصولات اشاره نمود، لازم به نظر می‌رسد. ضمناً در اکثر موارد صنعتی، در جریان مواد ویسکوالاستیک تغییرات دما و انتقال حرارت هم مشاهده می‌شود که لزوم حل همزمان معادلات انرژی به همراه معادلات جریان تاکید می‌شود که در برخی از تحقیقات پیشین به این موضوع کمتر توجه شده است. با توجه به مطالب فوق و همچنین پیچیدگی تحلیل سیالات ویسکوالاستیک و نبودن تحقیقی جامع در زمینه مورد نظر این تحقیق، ضرورت انجام این تحقیق واضح به نظر می‌رسد.

۱-۷- جنبه‌های نوآوری

تاکنون تحقیقات زیادی در زمینه جریان سیال ویسکوالاستیک در هندسه‌های مختلف و با استفاده از معادلات متشکله گوناگونی انجام شده است ولی به عنوان تفاوت و جنبه‌های نوآوری انجام شده در این تحقیق با تحقیقات گذشته، می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

✓ اکثر تحقیقات انجام شده در زمینه سیالات ویسکوالاستیک، معطوف به ناحیه توسعه یافته می‌باشد که در این تحقیق علاوه بر ناحیه توسعه یافته، اثرات ناحیه ورودی و ناحیه در حال توسعه نیز مدنظر قرار گرفته است.

✓ به علت فقدان امکانات سخت افزاری مناسب، قسمت عمده‌ای از تحقیقات پیشین در حالت دوبعدی انجام شده است که یا ناحیه در حال توسعه را شامل نمی‌شود یا قادر به مدل‌سازی جریان‌های ثانویه نمی‌باشند. ولی در این تحقیق معادلات و ناحیه حل کاملاً سه بعدی فرض شده است.

✓ در اکثر تحقیقات پیشین، معادلات جریان به عنوان هدف اصلی تحقیق انتخاب شده است ولی در این تحقیق معادله انرژی نیز در دو حالت دمای دیواره ثابت و شار حرارتی ثابت به همراه معادلات جریان مورد تحلیل قرار گرفته است.

✓ یکی دیگر از مزیت‌های این تحقیق، فرض خواص به صورت تابعی از دما و همچنین بررسی اثر جابجایی آزاد در مکانیزم انتقال حرارت می‌باشد که در تحقیقات گذشته این موضوع کمتر مشاهده می‌شود.

✓ از دیگر مزیت‌های این تحقیق استفاده از معادله متشکله فن تین تر در مدل‌سازی ترم تنش می‌باشد که یکی از بهترین معادلات پیشنهادی می‌باشد. لازم به ذکر است که در تعدادی از تحقیقات عددی که در زمینه انتقال حرارت سیالات ویسکوالاستیک صورت پذیرفته است، از معادلات متشکله‌ای استفاده شده است که فقط در محدوده جریان‌های ویسکومتریکی اعتبار-سنجی شده‌اند که اکثر این معادلات منجر به نتایج غیر فیزیکی در حالت‌های واقعی می‌شوند [۱۱۱]، که این مطلب یکی دیگر از دلایل استفاده از معادله متشکله فن تین تر در تحقیق حاضر می‌باشد. ضمناً در این تحقیق از چند معادله متشکله دیگر نیز جهت مدل‌سازی ترم تنش استفاده شده است که به نتایج آنها در فصل‌های بعد اشاره شده است.

۸-۱- رئوس مطالب

در ذیل مروری اجمالی بر مطالب بیان شده در فصل‌های بعد آمده است.

در فصل دوم، معادلات حاکم بر مسئله در حالت کلی به همراه معادلات متشکله مورد استفاده معرفی خواهند شد و بعد از آن، پارامترهای مورد استفاده جهت بی‌بعد سازی معادلات حاکم و متشکله و همچنین اعداد بی‌بعد اثرگذار بر جریان و انتقال حرارت را معرفی می‌نماییم و پس از آن معادلات حاکم در حالت بی‌بعد گزارش شده و ترم‌های آنها معرفی می‌شوند. در نهایت به بیان چند قضیه معروف در مورد جریان سیالات ویسکوالاستیک و همچنین مکانیزم تشکیل جریان‌های ثانویه اشاره می‌نماییم.

در فصل سوم محدودیت‌های معادلات حاکم بر مسئله در گسسته‌سازی و حل و همچنین چگونگی رفع آنها بیان خواهد شد. در ادامه این فصل، روش‌های عددی مورد استفاده جهت گسسته-

سازی و حل معادلات حاکم، نحوه شبکه بندی و فضای محاسباتی و همچنین شرایط مرزی و اولیه اعمال شده بر مسئله جهت حل معادلات حاکم و الگوریتم حل بیان خواهد شد. و در نهایت به توضیح خطای محاسباتی موجود در نتایج بدست آمده می پردازیم.

در فصل چهارم به ارایه نتایج حاصل از حل عددی جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در حال توسعه در کانالهای مستطیلی صاف پرداخته می شود. البته قبل از ارایه نتایج، بررسی استقلال حل از شبکه و نحوه ارزیابی صحت نتایج بیان خواهد شد. در این فصل نتایج مربوط به جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک با استفاده از معادلات متشکله فن تین تر مورد استفاده در این تحقیق گزارش می شود. در ادامه هم اشاره ای به نتایج بدست آمده از تحلیل مسئله با معادلات متشکله دیگر می شود. و نهایتاً در فصل پنجم خلاصه ای از نتایج کلی بدست آمده از این تحقیق، نتیجه گیری و بیان ایده ها و راه کارهای پیشنهادی جهت تحقیق های آینده بیان خواهد شد.

فصل دوم

معادلات حاکم

۲-۱- مقدمه

در این فصل معادلات حاکم بر مسئله مورد نظر در حالت کلی ارائه شده و همچنین توضیحاتی در مورد معادلات متشکله مورد استفاده نیز بیان می‌شود. در ادامه، پارامترهای مورد استفاده جهت بی‌بعد سازی معادلات و همچنین اعداد بی‌بعد مهم و اثر گذار در جریان معرفی شده و معادلات حاکم در حالت بی‌بعد ارائه می‌شوند. در ادامه نیز توضیحاتی در مورد هر یک از ترم‌های معادلات و همچنین اثر آنها در جریان و انتقال حرارت بیان می‌شود. در پایان این فصل چند قضیه معروف در مورد جریان سیالات ویسکوالاستیک و همچنین مکانیزم تشکیل جریان‌های ثانویه نیز به اختصار بیان خواهد شد.

۲-۲- معادلات حاکم

۲-۲-۱- معادلات بقا

همانطور که پیشتر بیان شد، سیالات ویسکوالاستیک شاخه‌ای از سیالات غیر نیوتنی بوده که به طور همزمان دارای خواص جامد الاستیک و سیال ویسکوز می‌باشد. طبق اصول اولیه مکانیک سیالات، معادلات حاکم بر هر جریان سیال پیوسته‌ای صرفنظر از نوع آن، معادلات بقای جرم، ممنتوم، و بقای انرژی می‌باشد که در حالت کلی به صورت زیر بیان می‌شوند.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) = 0 \quad (1-2)$$

$$\frac{\partial (\rho V)}{\partial t} + \rho V \cdot \nabla V = -\nabla P + \nabla \cdot \sigma + F \quad (2-2)$$

$$\frac{\partial (\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e V) = \nabla \cdot (k \nabla T) + \sigma : \nabla V + S \quad (3-2)$$

در معادلات فوق V بردار سرعت، P میدان فشار، σ تانسور تنش، k ضریب رسانش، ρ چگالی سیال،

T میدان دمای سیال و e انرژی داخلی سیال می‌باشد. و همچنین در معادله پیوستگی، $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ تغییرات

چگالی نسبت به زمان، $\nabla \cdot (\rho V)$ نرخ ورود و خروج جرم بر واحد زمان و سطح از مرزها می‌باشد. در

معادله ممنتوم، $\frac{\partial V}{\partial t}$ تغییرات سرعت و چگالی نسبت به زمان یا همان شتاب غیر دائم^۱، $V \cdot \nabla V$ شتاب همرفتی^۲ سیال، ∇P گرادیان فشار سیال، $\nabla \cdot \sigma$ گرادیان نیروهای سطحی دیگر مانند تنش و F معرف نیروهای حجمی سیال می‌باشد. در معادله انرژی، $\frac{\partial(\rho e)}{\partial t}$ تغییرات انرژی داخلی نسبت به زمان، $\nabla \cdot (\rho e V)$ نرخ جریان حرارت^۳، $\nabla \cdot (k \nabla T)$ نرخ پخش حرارت^۴، $\sigma : \nabla V$ کار انجام شده توسط میدان تنش و S هم معرف منابع حرارتی دیگر در سیال می‌باشد.

مطلب قابل ذکر دیگر در معادله انرژی، عدم تاثیرگذاری میدان فشار و همچنین عدم وجود ترم مضروب سرعت در گرادیان تنش می‌باشد. علت این مطلب را می‌توان این‌گونه بیان نمود که اگر معادله ممنتوم در راستای x, y, z را بترتیب در سرعت‌های u, v, w ضرب کرده و سه معادله حاصل را با هم جمع نماییم، معادله پایستگی انرژی جنبشی ایجاد می‌شود که با کسر این معادله از معادله پایستگی انرژی در حالت کلی، معادله پایستگی انرژی داخلی که همان معادله (۲-۳) می‌باشد، بدست می‌آید.

در پژوهش مورد نظر، جریان دائمی و تراکم ناپذیر سیال ویسکوالاستیک مورد بررسی قرار گرفته است که در این صورت ترم‌های گذرا و همچنین ترم‌های مربوط به تغییرات چگالی سیال صفر می‌شود. از طرف دیگر در حالت کلی از تمامی نیروهای حجمی و همچنین نیروی گرانش نیز صرف-نظر شده است. با معادل‌سازی:

$$e = h + \frac{P}{\rho} \quad (۴-۲)$$

$$h = CT \quad (۵-۲)$$

¹ - Unsteady acceleration

² - Convective acceleration

³ - Convection term of heat

⁴ - Diffusion term of heat

که در آن C ظرفیت حرارتی ویژه سیال می‌باشد و همچنین ساده‌سازی و حذف ترم‌های معادل صفر، معادلات حاکم به صورت زیر بازنویسی می‌شوند.

$$\nabla \cdot V = 0 \quad (۶-۲)$$

$$\rho V \cdot \nabla V = -\nabla P + \nabla \cdot \sigma \quad (۷-۲)$$

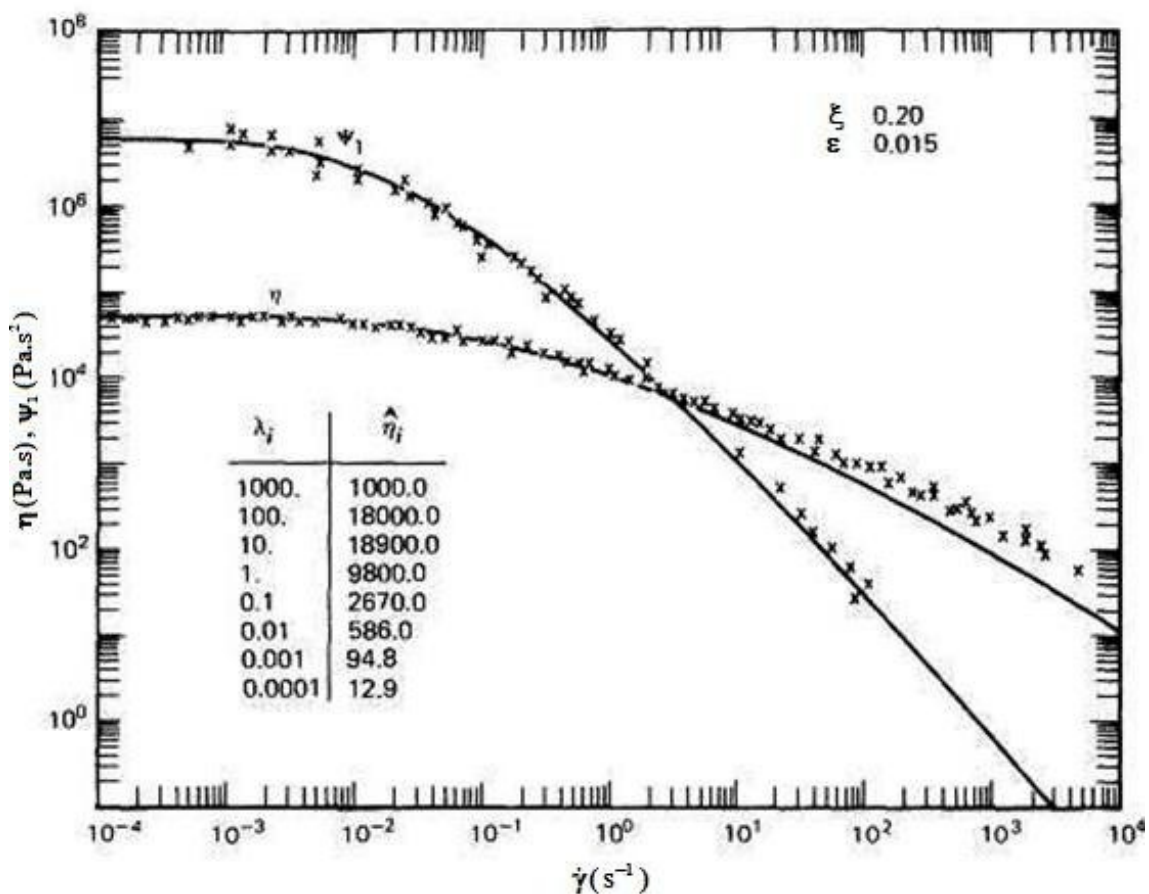
$$\rho c V \cdot \nabla T = \nabla \cdot (k \nabla T) + \sigma : \nabla V \quad (۸-۲)$$

همانطور که در معادلات فوق دیده می‌شود، تنها تفاوت بین سیالات نیوتنی و ویسکوالاستیک از نظر معادلات حاکم، مدل‌سازی و تخمین ترم تنش موجود در معادلات می‌باشد. چنانچه در فصل ۱ به تفصیل به آن پرداخته شد، در سیالات نیوتنی، تنش سیال تنها با نرخ تغییر شکل سیال رابطه داشته و این ارتباط با اعمال ضریبی ثابت با عنوان ویسکوزیته، در قالب معادله نیوتن بیان می‌شود. ولی در مورد سیال ویسکوالاستیک علاوه بر اینکه ویسکوزیته می‌تواند تابعی از نرخ برش باشد، تنش سیال نیز تابعی از توان‌های مختلف نرخ برش و همچنین تابعی از برخی خواص الاستیک سیال می‌باشد. ضمناً در بعضی مواقع تغییرات تنش در زمان‌های پیشین هم می‌تواند بر مقادیر آن در زمان حال اثر گذار باشد. در مدل‌سازی جریان سیال ویسکوالاستیک بنا به مدل انتخابی که بیانگر رابطه بین تنش و متغیرهای دیگر می‌باشد، نحوه مدل‌سازی تنش و ارتباط دادن آن با سایر مقادیر تفاوت پیدا می‌کند که در بخش قبل انواع معادلات متشکله و نقاط قوت و ضعف هر کدام به صورت خلاصه بیان گردید.

در این تحقیق از معادلات متشکله خانواده فن تین تر، کریمینال اریکسون فیلبی و گزیکس جهت مدل‌سازی ترم تنش استفاده شده است که البته هدف اصلی این تحقیق مدل‌سازی با استفاده از معادله بهبود یافته فن تین تر می‌باشد و از این‌رو تمرکز بیشتری در توضیحات و ارایه نتایج با این مدل شده است. حال با ارایه توضیحات بیشتری به بررسی این مدل‌ها می‌پردازیم.

۲-۲-۲- معادله متشکله

مدل فن تین تنر یکی از کامل‌ترین مدل‌های پیشنهادی جهت مدل‌سازی ترم تنش سیالات ویسکوالاستیک بوده که بر اساس تئوری شبکه بدست آمده است. در این مدل علاوه بر غیر صفر بودن مقادیر اختلاف تنش نرمال اول و دوم، رفتار باریک شونده‌گی نسبت به نرخ برش برای اختلاف تنش‌های نرمال اول و دوم و همچنین ویسکوزیته مشاهده می‌شود که این مطلب در شکل (۱-۲) نشان داده شده است.



شکل (۱-۲) - نحوه تغییرات ویسکوزیته و اختلاف تنش نرمال اول حاصل از مدل PTT و همچنین مذاب پلی‌اتیلن با دانسیته کم (LDPE) [۱۱۲]

این مدل قابلیت بالایی در مدل‌سازی جریان‌های طولی دارد و همچنین به علت عدم تطبیق با شرایط اولدروید، در مدل‌سازی با این روش جریان‌های گردابی نیز قابل مشاهده می‌باشند. معادله متشکله این مدل در رابطه (۹-۲) نشان داده شده است.

$$\sigma = 2(1 - \beta)\eta_0 D + \tau$$

$$\lambda \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} + \nabla \cdot (V\tau) \right) = 2\mu\beta\eta_0 D + \lambda(L\tau + \tau L^T) - f(tr(\tau))\tau$$

$$\beta = \frac{\eta_{m0}}{\eta_0}, \quad L = \nabla V^T - \xi D \quad (9-2)$$

$$\mu = \frac{1 + \xi(2 - \xi)\lambda^2 \dot{\gamma}^2}{(1 + \Gamma^2 \dot{\gamma}^2)^{(1-n)/2}}, \quad \dot{\gamma} = \sqrt{2 tr D^2}$$

که در معادله فوق، σ تنش کلی سیال، ε و ξ پارامتر مادی، λ زمان آسودگی از تنش، $\dot{\gamma}$ نرخ برش تعمیم یافته^۱ و D تانسور نرخ تغییر شکل می‌باشد. این مدل در دو فرض متفاوت برای $f(tr(\tau))$ به دو حالت $PTTa$ و $PTTb$ تبدیل می‌شود که این دو فرض به ترتیب در معادلات (۲-۱۰-۱) و (۲-۱۰-۲) نشان داده شده است.

$$f(tr(\tau)) = \text{Exp}\left(\frac{\lambda\varepsilon}{\eta_{m0}} tr(\tau)\right) \quad (1-10-2)$$

$$f(tr(\tau)) = 1 + \frac{\lambda\varepsilon}{\eta_{m0}} tr(\tau) \quad (2-10-2)$$

در این تحقیق از مدل $PTTb$ جهت مدل‌سازی ترم تنش استفاده شده است ولی در ادامه این تحقیق به علت جلوگیری از پیچیدگی در نوشتار از ذکر زیرنویس b خودداری شده است. مدل فن تین تنر در حالت‌های زیر به مدل‌های دیگری از این خانواده تبدیل می‌شود:

$$\beta = 1 \quad \text{مدل بهبود یافته فن تین تنر } MPTT$$

$$\beta = 1, \mu = 1 \quad \text{مدل فن تین تنر } PTT$$

$$\beta = 1, \mu = 1, \xi = 0 \quad \text{مدل ساده شده فن تین تنر } SPTT$$

البته در خانواده مدل فن تین تنر، سه حالت موجود می‌باشد که در صورت ایجاد هر کدام از این شرایط، جریان مستقیم خط بوده و جریان‌های گردابی شکل نمی‌گیرد. این سه حالت به صورت زیر می‌باشد.

¹ - generalized shear rate

- ۱- در حالتی که $Wi = 0$ باشد که این حالت معادل صفر بودن خواص الاستیک است.
- ۲- در حالتی که $\zeta = 0$ باشد که این حالت اختلاف تنش نرمال دوم برابر صفر می‌شود.
- ۳- در حالتی که $\varepsilon = 0$ باشد که این حالت اختلاف تنش نرمال دوم، ضریب ثابتی از ویسکوزیته می‌باشد.

مدل مورد استفاده دیگر در این تحقیق، مدل تعمیم یافته کریمینال اریکسون فیلی می‌باشد. مشابه مدل اولدریوید، این مدل نیز از دسته مدل‌هایی است که بر اساس اصول مکانیک محیط‌های پیوسته و با استفاده از دستگاه مختصات همرفتی بدست آمده است. معادله متشکله این مدل به صورت زیر می‌باشد.

$$\tau = \eta(\dot{\gamma})\gamma_{(1)} - \frac{I}{2}\psi_1(\dot{\gamma})\gamma_{(2)}(\dot{\gamma}) + \psi_2(\dot{\gamma})(\gamma_{(1)} \cdot \gamma_{(1)})$$

$$\gamma_{(1)} = (\nabla V + \nabla V^T) \quad (11-2)$$

$$\gamma_{(2)} = \frac{D\gamma_{(1)}}{Dt} - (\nabla V^T \cdot \gamma_{(1)} + \gamma_{(1)} \cdot \nabla V)$$

که در آن ∇V تانسور گرادیان سرعت، ∇V^T ترانپوز^۱ گرادیان سرعت، η ویسکوزیته سیال، ψ_1, ψ_2 به ترتیب ضرایب اختلاف تنش های نرمال اول و دوم و $\gamma_{(1)}$ و $\gamma_{(2)}$ به ترتیب مشتق زمانی همرفتی پاد همبسته اول و دوم تانسور نرخ برش می‌باشند. همانطور که در معادلات فوق دیده می‌شود، ترم اول معادله مربوط به تنش ویسکوز و ترم‌های دوم و سوم را تنش‌های الاستیک ماده تشکیل می‌دهند که برای تعریف توابع ویسکومتریکی از معادلات کاریو یاسودا^۲ به صورت زیر استفاده شده است.

$$\eta(\dot{\gamma}) = \eta_\infty + (\eta_0 - \eta_\infty) \times (I + (\lambda \times \dot{\gamma})^a)^{\frac{n-1}{a}} \quad (12-2)$$

$$\psi_1(\dot{\gamma}) = 2 \times \lambda_1 \times (\eta_0 - \eta_\infty) \times (I + (\lambda \times \dot{\gamma})^a)^{\frac{n-1}{a}} \quad (13-2)$$

$$\psi_2(\dot{\gamma}) = C_{N1} - C_{N2}\eta(\dot{\gamma}) \quad (14-2)$$

¹ - Transpose

² -Carreau-Yasuda

که در آن $\dot{\gamma}$ نرخ برش تعمیم یافته، η_0 ویسکوزیته سیال در نرخ برش صفر، η_∞ ویسکوزیته سیال در نرخ برش بینهایت و C_{NI} و C_{N2} متغیرهایی برای تعیین ضرایب اختلاف تنش نرمال دوم می‌باشند. یکی دیگر از معادلات متشکله مورد استفاده در این تحقیق، مدل گزیکس می‌باشد. این مدل نیز بر مبنای دیدگاه ملکولی بدست آمد و قادر به ارائه رفتار پاورلا برای مقادیر ویسکوزیته و ضرایب اختلاف تنش نرمال اول و دوم می‌باشد. معادله متشکله این مدل در رابطه (۲-۱۵) نشان داده شده است.

$$\tau + \lambda_h \tau_{p(1)} + \alpha \frac{\lambda_h}{\eta_p} (\tau_p \cdot \tau_p) = \eta_p \gamma_{(1)} \quad (15-2)$$

$$\gamma_{(1)} = (\nabla V + \nabla V^T)$$

که در آن η_p ویسکوزیته محلول، τ_p تنش پلیمری، λ_h زمان آسودگی^۱ محلول، α ضریب پویایی^۲ محلول می‌باشد. همان‌طور که گفته شد در این مدل فقط تنش الاستیک در معادله متشکله منظور شده است و تنش ویسکوز به صورت جدا در معادله ممنتوم آورده شده است.

۲-۲-۳- پارامترهای بی‌بعد

در تمامی مدل‌سازی‌های عددی جریان سیال ویسکوالاستیک، جهت دستیابی به حل کامل مسئله می‌بایست معادلات بقا همراه معادله متشکله به صورت همزمان حل شوند. در ابتدای حل، جهت بی‌بعد سازی معادلات، پارامترهای پایه همان‌طور که در روابط زیر نشان داده شده‌اند مورد استفاده قرار گرفته‌اند.

¹ - Relaxation time

² - Mobility parameter

$$\begin{aligned}
D_h &= \frac{2ab}{a+b}, \quad x^* = \frac{x}{D_h}, \quad y^* = \frac{y}{D_h}, \quad z^* = \frac{z}{D_h} \\
u^* &= \frac{u}{W_{ref}}, \quad v^* = \frac{v}{W_{ref}}, \quad w^* = \frac{w}{W_{ref}}, \quad P^* = \frac{PD_h}{\eta_0 W_{ref}} \\
\tau^* &= \frac{\tau D_h}{\eta_0 W_{ref}}, \quad \gamma_{(1)}^* = \gamma_{(1)} \frac{D_h}{W_{ref}}, \quad \gamma_{(2)}^* = \gamma_{(2)} \left(\frac{D_h}{W_{ref}} \right)^2 \\
\psi_1^* &= \psi_1 \frac{W_{ref}}{\eta_0 D_h}, \quad \psi_2^* = \psi_2 \frac{W_{ref}}{\eta_0 D_h}, \quad Re = \frac{\rho W_{ref} D_h}{\eta_0}, \quad Wi = \frac{\lambda W_{ref}}{D_h} \\
Br_T &= \frac{\eta_0 W_{ref}^2}{k(T_{in} - T_w)}, \quad Br_q = -\frac{\eta_0 W_{ref}^2}{D_h q''}, \quad Pr = \frac{\eta_0}{\rho \alpha}, \quad pe = Re Pr, \quad Gz = \frac{Pe}{z^*} \\
Nu &= \frac{h D_h}{k}, \quad \alpha = \frac{k}{\rho c}, \quad T_T^* = \frac{T - T_w}{T_{in} - T_w}, \quad T_q^* = \frac{T - T_{in}}{D_h q'' / k}
\end{aligned} \tag{۱۶-۲}$$

که در روابط فوق D_h معرف قطر هیدرولیکی، b, a طول و عرض مقطع کانال، z, y, x جهت‌های دستگاه کارتزین، D_h قطر هیدرولیکی، w, v, u معرف سرعت سیال در راستاهای z, y, x ، W_{ref} سرعت مرجع سیال، η_0 ویسکوزیته سیال در نرخ برش صفر، P میدان فشار سیال، τ میدان تنش سیال، $\gamma_{(2)}, \gamma_{(1)}$ مشتق زمانی همرفتی پاد همبسته اول و دوم تانسور نرخ برش، ψ_2, ψ_1 بترتیب ضرایب اختلاف تنش های نرمال اول و دوم، Re عدد رینولدز که بیانگر نسبت نیروهای اینرسی به ویسکوز می‌باشد، Wi عدد وایزنبرگ که نسبت نیروی ناشی از خاصیت الاستیک به نیروی حاصل از ویسکوزیته سیال تعریف می‌شود. Br_T عدد برینکمن که بیانگر نسبت تلفات ویسکوز بر انتقال حرارت در حالت دمای دیواره ثابت، Br_q عدد برینکمن در حالت شار ثابت، Pr عدد پرانتل که نسبت طول توسعه یافتگی حرارتی به طول توسعه یافتگی هیدرودینامیکی می‌باشد. Pe عدد پکلت^۱ که نسبت نرخ جابجایی^۲ به نفوذ حرارت، Gz عدد گراتز^۳، Nu عدد ناسلت، α نسبت ضریب هدایت به ظرفیت حرارتی، T_T معرف دمای سیال در حالت دمای دیواره ثابت و T_q معرف دمای سیال در حالت شار

^۱ -Peclet Number

^۲ - Advection

^۳ - Graetz number

حرارتی ثابت می‌باشد. لازم به توضیح است که در تمامی روابط فوق منظور از ذکر کمیت‌ها به همراه بالا نویسی *، مقادیر بی‌بعد آن کمیت می‌باشد.

با جاگذاری روابط فوق به عنوان شکل بی‌بعد کمیت‌ها و ضرایب مربوط به آنها در معادلات حاکمه و همچنین مرتب‌سازی و تعریف چند پارامتر بی‌بعد جدید، دستگاه معادلات حاکم بر مسئله در حالت بدون بعد به صورت زیر بازنویسی می‌شوند.

$$\nabla V^* = 0 \quad (17-2)$$

$$V^* \cdot \nabla V^* = \frac{1}{Re} (-\nabla P^* + \nabla \cdot \sigma^*) \quad (18-2)$$

$$V^* \cdot \nabla T^* = \frac{1}{Re \cdot Pr} (\nabla^2 T^* + Br(\sigma^* : \nabla V^*)) \quad (19-2)$$

$$\sigma^* = 2(1-\beta)D^* + \tau^*$$

$$g\tau^* + Wi(V^* \cdot \nabla \tau^* - L^* \tau^* + \tau^* L^{T*}) = 2\mu D^*$$

$$\beta = \frac{\eta_{m0}}{\eta_0}, \quad We = \frac{\lambda w_{ref}}{D_h}, \quad L^* = \nabla V^{*T} - \xi D^* \quad (20-2)$$

$$g = 1 + \frac{\lambda \xi}{\eta_{m0}} tr(\tau) \quad , \quad \mu = \frac{1 + \xi(2 - \xi)\lambda^2 \dot{\gamma}^2}{(1 + \Gamma^2 \dot{\gamma}^2)^{(1-n)/2}}$$

در معادله (۱۹-۲) سمت چپ معادله معرف ترم جابجایی حرارت، ترم اول سمت راست، معرف ترم نفوذ حرارت و عبارت دوم بیانگر کار نیروی تنش می‌باشد که این ترم معمولاً در جریان سیال ویسکوالاستیک به عنوان یک منبع تولید حرارت عمل می‌کند. در جریان سیال نیوتنی، این ترم اکثراً مثبت بوده و نقش یک تلف‌کننده حرارتی را ایفا می‌کند، از این‌رو به تلفات لزجت معروف شده است. در جریان سیال ویسکوالاستیک ممکن است این ترم بطور موضعی دارای مقدار منفی باشد که بیانگر

ذخیره انرژی در بخش الاستیک سیال می‌باشد [۱۱۳].

همچنین معادلات متشکله کریمینال اریکسون فیلیبی و گزیکس در حالت بی‌بعد به ترتیب در معادلات (۲۱-۲) و (۲۲-۲) نشان داده می‌شوند.

$$\begin{aligned}\tau^* &= \gamma_{(1)}^* - \frac{I}{2} \psi_1^* \gamma_{(2)}^* + \psi_2^* (\gamma_{(1)}^* \cdot \gamma_{(1)}^*) \\ \gamma_{(1)}^* &= (\nabla V^* + \nabla V^{T*}) \\ \gamma_{(2)}^* &= \frac{D\gamma_{(1)}^*}{Dt^*} - (\nabla V^{T*} \cdot \gamma_{(1)}^* + \gamma_{(1)}^* \cdot \nabla V^*) \\ \psi_1^* &= 2 \times \lambda \times (\eta_0 - \eta_\infty) \times (1 + (\lambda \times \dot{\gamma})^a) \times \left(\frac{W_{ref}}{\eta_0 \times D_h} \right) \\ \psi_2^* &= C_{N1} - C_{N2} \eta(\dot{\gamma})^*\end{aligned}\tag{۲۱-۲}$$

$$\begin{aligned}\tau_p^* &= -Wi(\tau_{(1)}^* + \alpha(\tau_p^* \cdot \tau_p^*)) + \gamma_{(1)}^* \\ \gamma_{(1)}^* &= (\nabla V^* + \nabla V^{T*}) \\ Wi &= \frac{\lambda_h W_{ref}}{D_h}\end{aligned}\tag{۲۲-۲}$$

که در آن τ_p^* معرف تنش بی‌بعد پلیمری می‌باشد. لازم بذکر است که در معادله متشکله گزیکس به علت جدا بودن ترم تنش پلیمری از تنش ویسکوز، می‌بایست یک ترم به صورت $\frac{\beta}{1-\beta} \nabla^2 V^*$ که بیانگر اثر تنش پلیمری می‌باشد، به سمت راست معادله ممنتوم اضافه گردد که در این حالت معادله ممنتوم مورد استفاده در مدل‌سازی با معادله متشکله گزیکس به شکل معادله (۲۳-۲) نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned}V^* \cdot \nabla V^* &= \frac{I}{Re} \left(-\nabla P^* + \frac{\beta}{1-\beta} \nabla^2 V^* + \nabla \cdot \tau_p^* \right) \\ \beta &= \frac{\eta_s}{\eta}, \quad \eta = \eta_s + \eta_p\end{aligned}\tag{۲۳-۲}$$

که در آن η_p ویسکوزیته پلیمری، η_s ویسکوزیته حلال و β نسبت ویسکوزیته حلال به ویسکوزیته کل می‌باشد.

با جاگذاری معادله متشکله بهبود یافته فن تین تر در حالت بی‌بعد، بسط معادلات حاکم بر مسئله مورد نظر در حالت دائم و تراکم ناپذیر و در غیاب نیروهای خارجی به صورت زیر بازنویسی می‌شوند.

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0 \quad (24-2)$$

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} = \frac{1}{Re} \left(-\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \sigma_{xx}^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \sigma_{xy}^*}{\partial y^*} + \frac{\partial \sigma_{xz}^*}{\partial z^*} \right)$$

$$u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial v^*}{\partial z^*} = \frac{1}{Re} \left(-\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{\partial \sigma_{yx}^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \sigma_{yy}^*}{\partial y^*} + \frac{\partial \sigma_{yz}^*}{\partial z^*} \right) \quad (25-2)$$

$$u^* \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial w^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = \frac{1}{Re} \left(-\frac{\partial p^*}{\partial z^*} + \frac{\partial \sigma_{zx}^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \sigma_{zy}^*}{\partial y^*} + \frac{\partial \sigma_{zz}^*}{\partial z^*} \right)$$

$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} = \frac{1}{Re.Pr} \left(\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^2} + \right.$$

$$Br \left(\sigma_{xx}^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \sigma_{xy}^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \sigma_{xz}^* \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + \sigma_{yx}^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \sigma_{yy}^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \sigma_{yz}^* \frac{\partial w^*}{\partial y^*} + \right.$$

$$\left. \sigma_{zx}^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \sigma_{zy}^* \frac{\partial v^*}{\partial z^*} + \sigma_{zz}^* \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right) \quad (26-2)$$

و همچنین معادله متشکله بهبود یافته فن تین تر به ازای هر درایه به صورت معادلات (27-2) تا

(27-9) نوشته می شود.

$$g\tau_{xx}^* + Wi \left(u^* \frac{\partial \tau_{xx}^*}{\partial x} + v^* \frac{\partial \tau_{xx}^*}{\partial y} + w^* \frac{\partial \tau_{xx}^*}{\partial z} - (L^* \tau^*)_{xx} + (\tau^* L^{T^*})_{xx} \right) = 2\mu \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \quad (1-27-2)$$

$$g\tau_{xy}^* + Wi \left(u^* \frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial x} + v^* \frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial y} + w^* \frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial z} - (L^* \tau^*)_{xy} + (\tau^* L^{T^*})_{xy} \right) = \mu \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right) \quad (2-27-2)$$

$$g\tau_{xz}^* + Wi \left(u^* \frac{\partial \tau_{xz}^*}{\partial x} + v^* \frac{\partial \tau_{xz}^*}{\partial y} + w^* \frac{\partial \tau_{xz}^*}{\partial z} - (L^* \tau^*)_{xz} + (\tau^* L^{T^*})_{xz} \right) = \mu \left(\frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial x^*} \right) \quad (3-27-2)$$

$$g\tau_{yx}^* + Wi \left(u^* \frac{\partial \tau_{yx}^*}{\partial x} + v^* \frac{\partial \tau_{yx}^*}{\partial y} + w^* \frac{\partial \tau_{yx}^*}{\partial z} - (L^* \tau^*)_{yx} + (\tau^* L^{T^*})_{yx} \right) = \mu \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right) \quad (4-27-2)$$

$$g\tau_{yy}^* + Wi \left(u^* \frac{\partial \tau_{yy}^*}{\partial x} + v^* \frac{\partial \tau_{yy}^*}{\partial y} + w^* \frac{\partial \tau_{yy}^*}{\partial z} - (L^* \tau^*)_{yy} + (\tau^* L^{T^*})_{yy} \right) = 2\mu \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \quad (5-27-2)$$

$$g\tau_{yz}^* + Wi \left(u^* \frac{\partial \tau_{yz}^*}{\partial x} + v^* \frac{\partial \tau_{yz}^*}{\partial y} + w^* \frac{\partial \tau_{yz}^*}{\partial z} - (L^* \tau^*)_{yz} + (\tau^* L^{T^*})_{yz} \right) = \mu \left(\frac{\partial v^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial y^*} \right) \quad (6-27-2)$$

$$g\tau_{zx}^* + Wi(u^* \frac{\partial \tau_{zx}^*}{\partial x} + v^* \frac{\partial \tau_{zx}^*}{\partial y} + w^* \frac{\partial \tau_{zx}^*}{\partial z} - (L^* \tau^*)_{zx} + (\tau^* L^T)_{zx}) = \mu(\frac{\partial w^*}{\partial x^*} + \frac{\partial u^*}{\partial z^*}) \quad (7-27-2)$$

$$g\tau_{zy}^* + Wi(u^* \frac{\partial \tau_{zy}^*}{\partial x} + v^* \frac{\partial \tau_{zy}^*}{\partial y} + w^* \frac{\partial \tau_{zy}^*}{\partial z} - (L^* \tau^*)_{zy} + (\tau^* L^T)_{zy}) = \mu(\frac{\partial w^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial z^*}) \quad (8-27-2)$$

$$g\tau_{zz}^* + Wi(u^* \frac{\partial \tau_{zz}^*}{\partial x} + v^* \frac{\partial \tau_{zz}^*}{\partial y} + w^* \frac{\partial \tau_{zz}^*}{\partial z} - (L^* \tau^*)_{zz} + (\tau^* L^T)_{zz}) = 2\mu \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \quad (9-27-2)$$

که در آن ترم‌های معادله متشکله به صورت زیر نوشته می‌شوند.

$$(L^* \tau^*)_{xx} = \tau_{xx}^* (\frac{\partial u^*}{\partial x^*} - \zeta \frac{\partial u^*}{\partial x^*}) + \tau_{xy}^* (\frac{\partial u^*}{\partial y^*} - \zeta (\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*})) + \tau_{xz}^* (\frac{\partial u^*}{\partial z^*} - \zeta (\frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial x^*})) \quad (1-28-2)$$

$$(L^* \tau^*)_{xy} = \tau_{xy}^* (\frac{\partial u^*}{\partial x^*} - \zeta \frac{\partial u^*}{\partial x^*}) + \tau_{yy}^* (\frac{\partial u^*}{\partial y^*} - \zeta (\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*})) + \tau_{yz}^* (\frac{\partial u^*}{\partial z^*} - \zeta (\frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial x^*})) \quad (2-28-2)$$

$$(L^* \tau^*)_{xz} = \tau_{xz}^* (\frac{\partial u^*}{\partial x^*} - \zeta \frac{\partial u^*}{\partial x^*}) + \tau_{yz}^* (\frac{\partial u^*}{\partial y^*} - \zeta (\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*})) + \tau_{zz}^* (\frac{\partial u^*}{\partial z^*} - \zeta (\frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial x^*})) \quad (3-28-2)$$

$$(L^* \tau^*)_{yx} = \tau_{xx}^* (\frac{\partial v^*}{\partial x^*} - \zeta (\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*})) + \tau_{yx}^* (\frac{\partial v^*}{\partial y^*} - \zeta \frac{\partial v^*}{\partial y^*}) + \tau_{xz}^* (\frac{\partial v^*}{\partial z^*} - \zeta (\frac{\partial v^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial y^*})) \quad (4-28-2)$$

$$(L^* \tau^*)_{yy} = \tau_{xy}^* (\frac{\partial v^*}{\partial x^*} - \zeta (\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*})) + \tau_{yy}^* (\frac{\partial v^*}{\partial y^*} - \zeta \frac{\partial v^*}{\partial y^*}) + \tau_{yz}^* (\frac{\partial v^*}{\partial z^*} - \zeta (\frac{\partial v^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial y^*})) \quad (5-28-2)$$

$$(L^* \tau^*)_{yz} = \tau_{xz}^* (\frac{\partial v^*}{\partial x^*} - \zeta (\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*})) + \tau_{yz}^* (\frac{\partial v^*}{\partial y^*} - \zeta \frac{\partial v^*}{\partial y^*}) + \tau_{zz}^* (\frac{\partial v^*}{\partial z^*} - \zeta (\frac{\partial v^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial y^*})) \quad (6-28-2)$$

$$(L^* \tau^*)_{zx} = \tau_{xx}^* (\frac{\partial w^*}{\partial x^*} - \zeta (\frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial x^*})) + \tau_{xy}^* (\frac{\partial w^*}{\partial y^*} - \zeta (\frac{\partial v^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial y^*})) + \tau_{xz}^* (\frac{\partial w^*}{\partial z^*} - \zeta \frac{\partial w^*}{\partial z^*}) \quad (7-28-2)$$

$$(L^* \tau^*)_{zy} = \tau_{xy}^* (\frac{\partial w^*}{\partial x^*} - \zeta (\frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial x^*})) + \tau_{yy}^* (\frac{\partial w^*}{\partial y^*} - \zeta (\frac{\partial v^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial y^*})) + \tau_{yz}^* (\frac{\partial w^*}{\partial z^*} - \zeta \frac{\partial w^*}{\partial z^*}) \quad (8-28-2)$$

$$(L^* \tau^*)_{zz} = \tau_{xz}^* (\frac{\partial w^*}{\partial x^*} - \zeta (\frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial x^*})) + \tau_{yz}^* (\frac{\partial w^*}{\partial y^*} - \zeta (\frac{\partial v^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial y^*})) + \tau_{zz}^* (\frac{\partial w^*}{\partial z^*} - \zeta \frac{\partial w^*}{\partial z^*}) \quad (9-28-2)$$

و همچنین بسط بقیه ترم‌های معادله متشکله به صورت روابط (1-29-2) تا (9-21-2) نوشته

می‌شود.

$$\begin{aligned}
(\tau^* L^T)_{xx} &= \tau_{xx}^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} - \zeta \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right) + \tau_{xy}^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} - \frac{\zeta}{2} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right) \right) + \tau_{xz}^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial z^*} - \frac{\zeta}{2} \left(\frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial x^*} \right) \right) & (1-29-2) \\
(\tau^* L^T)_{xy} &= \tau_{xx}^* \left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*} - \frac{\zeta}{2} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right) \right) + \tau_{xy}^* \left(\frac{\partial v^*}{\partial y^*} - \zeta \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) + \tau_{xz}^* \left(\frac{\partial v^*}{\partial z^*} - \frac{\zeta}{2} \left(\frac{\partial v^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial y^*} \right) \right) & (2-29-2) \\
(\tau^* L^T)_{xz} &= \tau_{xx}^* \left(\frac{\partial w^*}{\partial x^*} - \frac{\zeta}{2} \left(\frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial x^*} \right) \right) + \tau_{xy}^* \left(\frac{\partial w^*}{\partial y^*} - \frac{\zeta}{2} \left(\frac{\partial v^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial y^*} \right) \right) + \tau_{xz}^* \left(\frac{\partial w^*}{\partial z^*} - \zeta \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right) & (3-29-2) \\
(\tau^* L^T)_{yx} &= \tau_{xy}^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} - \zeta \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right) + \tau_{yy}^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} - \frac{\zeta}{2} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right) \right) + \tau_{yz}^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial z^*} - \frac{\zeta}{2} \left(\frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial x^*} \right) \right) & (4-29-2) \\
(\tau^* L^T)_{yy} &= \tau_{xy}^* \left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*} - \frac{\zeta}{2} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right) \right) + \tau_{yy}^* \left(\frac{\partial v^*}{\partial y^*} - \zeta \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) + \tau_{yz}^* \left(\frac{\partial v^*}{\partial z^*} - \frac{\zeta}{2} \left(\frac{\partial v^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial y^*} \right) \right) & (5-29-2) \\
(\tau^* L^T)_{yz} &= \tau_{xy}^* \left(\frac{\partial w^*}{\partial x^*} - \frac{\zeta}{2} \left(\frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial x^*} \right) \right) + \tau_{yy}^* \left(\frac{\partial w^*}{\partial y^*} - \frac{\zeta}{2} \left(\frac{\partial v^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial y^*} \right) \right) + \tau_{yz}^* \left(\frac{\partial w^*}{\partial z^*} - \zeta \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right) & (6-29-2) \\
(\tau^* L^T)_{zx} &= \tau_{xz}^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} - \zeta \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right) + \tau_{yz}^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} - \frac{\zeta}{2} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right) \right) + \tau_{zz}^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial z^*} - \frac{\zeta}{2} \left(\frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial x^*} \right) \right) & (7-29-2) \\
(\tau^* L^T)_{zy} &= \tau_{xz}^* \left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*} - \frac{\zeta}{2} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right) \right) + \tau_{yz}^* \left(\frac{\partial v^*}{\partial y^*} - \zeta \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) + \tau_{zz}^* \left(\frac{\partial v^*}{\partial z^*} - \frac{\zeta}{2} \left(\frac{\partial v^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial y^*} \right) \right) & (8-29-2) \\
(\tau^* L^T)_{zz} &= \tau_{xz}^* \left(\frac{\partial w^*}{\partial x^*} - \frac{\zeta}{2} \left(\frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial x^*} \right) \right) + \tau_{yz}^* \left(\frac{\partial w^*}{\partial y^*} - \frac{\zeta}{2} \left(\frac{\partial v^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial y^*} \right) \right) + \tau_{zz}^* \left(\frac{\partial w^*}{\partial z^*} - \zeta \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right) & (9-29-2)
\end{aligned}$$

لازم به ذکر است که معادلات فوق همگی ضمنی بوده و حل آن در حالت نشان داده شده ممکن نمی‌باشد. بدین لحاظ با استفاده از روش‌های عددی تغییراتی در معادلات حاکم داده شده که در ظاهر به معادلات صریح تبدیل شوند. در مورد روش‌های عددی مورد استفاده و همچنین شرایط حاکم، در فصل بعد به تفصیل بحث خواهد شد.

۴-۲-۲- کمیت‌های متغیر با دما

همانطور که گفته شد در این تحقیق برخی از پارامترهای جریان از قبیل ویسکوزیته، ظرفیت حرارتی ویژه، ثابت زمانی و همچنین ضریب رسانش به صورت توابعی از دما فرض شده‌اند. توابع مفروض با استفاده از مرجع [۱۱۴] که همگی توابعی بدست آمده از مقادیر تجربی مربوط به فرآیند

یک پلیمر واقعی می‌باشد در نظر گرفته شده اند. این توابع در حالت بعددار به شکل معادلات (۲-۳۰) تا (۲-۳۳) نشان داده شده است.

$$\eta(T) = \eta_0 a(T), \quad a(T) = \text{Exp}\left[\alpha\left(\frac{1}{T + 273.15} - \frac{1}{T_{in} + 273.15}\right)\right] \quad (۲-۳۰)$$

$$\lambda(T) = \lambda_0 a(T) \quad (۲-۳۱)$$

$$k(T) = k_0 (k_0^* + k_s^* T) \quad (۲-۳۲)$$

$$C_p(T) = C_{p0} (C_{p0}^* + C_{ps}^* T) \quad (۲-۳۳)$$

لازم بذکر است که دمای مذکور در معادلات فوق دمای بعددار بوده که در روند محاسبات این مطلب لحاظ شده است. بدین منظور بعد از محاسبه مقادیر جدید، همه این مقادیر به منظور استفاده در معادلات دیگر و ادامه حل به شکل بدون بعد تبدیل می‌شوند. البته در انتهای نتایج ارائه شده، سعی شده بجای استفاده از این معادلات، دمایی میانگین به عنوان دمای مرجع ارائه شود که با محاسبه خواص در آن دما، از حل معادلات فوق صرفنظر شود.

۲-۳- قضیه اولدروید

همانطور که پیشتر بیان شد به علت وجود اختلاف تنش نرمال دوم، در جریان سیال ویسکوالاستیک در کانال‌های غیر دایروی، جریان‌های ثانویه‌ای عمود بر جریان اصلی کانال شکل می‌گیرد. این جریان‌های ثانویه که منجر به افزایش شدت جریان‌های عرضی در مقطع کانال می‌شود، پیش‌بینی می‌شود که با تشکیل آنها، شدت انتقال حرارت و جرم نیز در راستای حرکت جریان افزایش یابد. بدین لحاظ تحلیل و بررسی آنها در این تحقیق مدنظر قرار گرفته است. در سال ۱۹۶۵، اولدروید [۱۱۱] شرایطی را بیان کرد که در صورت وجود این شرایط در جریان سیالات ویسکوالاستیک، هیچ

جریان ثانویه‌ای در مقطع عمودی جریان اتفاق نمی‌افتد و یا به عبارت دیگر جریان مستقیم الخط^۱ می‌شود. این شرایط از قرار زیر است.

- در جریان‌های متقارن محوری و جریان‌های صفحه‌ای، هیچ جریان ثانویه‌ای تشکیل نمی‌شود.
- اگر در جریان سیال ویسکوالاستیک، اختلاف تنش نرمال دوم صفر باشد هیچ جریان ثانویه‌ای اتفاق نمی‌افتد و جریان مستقیم الخط می‌باشد که در این حالت در مدل‌های اولدروید- B و مدل ساده شده فن تین اتفاق می‌افتد.
- اگر در مدل‌سازی جریان سیال ویسکوالاستیک، ضرایب اختلاف تنش نرمال دوم و ویسکوزیته هر دو ثابت باشند که در این صورت هم جریان مستقیم الخط اتفاق می‌افتد. حالت فوق در معادله متشکله بهبود یافته فن تین در حالت $g = 1$ و $n = 1$ قابل رویت می‌باشد.
- و حالت نهایی اینکه اگر اختلاف تنش نرمال دوم ضریب ثابتی از تغییرات ویسکوز بر حسب نرخ برش تعمیم یافته باشد که در این حالت هم در مدل فن تین در صورتیکه $g = 1$ باشد اتفاق می‌افتد.

در تمامی حالات جریان سیال ویسکوالاستیک، یکی از شرایط فوق شرط کافی برای مستقیم الخط بودن جریان و عدم تشکیل جریان‌های ثانویه می‌باشد. حال با استفاده از معادلات حاکمه به بیان علل و مکانیزم تشکیل جریان‌های ثانویه می‌پردازیم.

۲-۴- مکانیزم تشکیل جریان‌های ثانویه

با فرض جریان توسعه‌یافته و با صرفنظر از اینرسی و دیگر نیروهای حجمی، معادله ممنتوم در راستای x و y به صورت زیر ساده می‌شود [۸۷]:

$$0 = -\nabla p + \eta_s \nabla v^2 + \nabla \cdot \tau_p$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad v = (u, v), \quad \tau_p = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} \end{bmatrix} \quad (۲-۳۴)$$

^۱ -Rectilinear

حال فرض می‌نماییم که τ_p^* نشانگر تانسور تنش در محورهای اصلی باشد، در این صورت خواهیم داشت:

$$\tau_p^* = \begin{bmatrix} \tau_{22} & 0 \\ 0 & \tau_{33} \end{bmatrix} = \tau_{33} I + \begin{bmatrix} \Psi_2 \dot{\gamma}^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (35-2)$$

که در آن I تانسور واحد و $\dot{\gamma} = \sqrt{w_x^2 + w_y^2}$ می باشد. حال تانسور تنش را می توان به صورت معادله (36-2) بازنویسی نمود:

$$\tau_p = R \cdot \tau_p^* \cdot R^T = \tau_{33} I + \begin{bmatrix} \Psi_2 w_x^2 & \Psi_2 w_x w_y \\ \Psi_2 w_x w_y & \Psi_2 w_y^2 \end{bmatrix} \quad (36-2)$$

که در آن R تانسور چرخش بوده و به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$R = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (37-2)$$

و φ زاویه بین تانسور تنش و محورهای اصلی می باشد. با تعریف $\tilde{p} = p - \tau_{33}$ و جاگذاری تنش به شکل معادله (36-2)، معادله ممنتوم به صورت زیر بازنویسی خواهد شد.

$$\begin{aligned} 0 &= -\nabla \tilde{p} + \eta_s \nabla^2 v + f \\ f &= \nabla \cdot (\tau_p - \tau_{33} I) = \nabla \cdot \begin{pmatrix} \Psi_2 w_x^2 & \Psi_2 w_x w_y \\ \Psi_2 w_x w_y & \Psi_2 w_y^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (38-2)$$

و همچنین معادله ممنتوم در جهت z به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \nabla \cdot (\eta_s \nabla w) \quad (39-2)$$

حال با توجه به معادله (38-2)، جریان‌های ثانویه وابسته به یک نیروی خارجی که به علت وجود اختلاف تنش نرمال دوم می‌باشد، نوشته شده است. در این حالت اگر f را به عنوان یک نیروی پایستار فرض نماییم داریم $C = \nabla \times f = 0$ که در این شرایط کار انجام شده توسط نیروی f در هر

سیکل بسته صفر می شود که این بدان معنی است که هیچ جریان ثانویه ای باقی نمی ماند و نهایتاً همه آنها حذف می شوند. حال اگر فرض نماییم [۸۷]:

$$C = \nabla \times f = \nabla M \times \nabla W \quad (۴۰-۲)$$

$$M = \nabla \cdot (\psi_2(\dot{\gamma}) \nabla W)$$

همچنین با تعریف پارامتری دیگر با عنوان $\theta(\dot{\gamma})$ به صورت معادله (۴۱-۲) خواهیم داشت.

$$\theta(\dot{\gamma}) = \frac{\psi_2(\dot{\gamma})}{\eta_s(\dot{\gamma})} \quad (۴۱-۲)$$

$$M = \theta(\dot{\gamma}) \frac{\partial p}{\partial z} + \eta_s(\dot{\gamma}) \theta'(\dot{\gamma}) \nabla \dot{\gamma} \cdot \nabla W \quad (۴۲-۲)$$

که در آن $\frac{\partial p}{\partial z}$ از معادله ممنوم در جهت z در آن جاگذاری شده است.

معادله (۴۲-۲) دو شرط کافی برای مستقیم بودن جریان و یا به عبارت دیگر عدم وجود جریان-

های ثانویه را در مسیر جریان بیان می نماید. در حالت اول اگر ψ_2 ضریبی ثابت از μ باشد، $\theta'(\dot{\gamma})$ برابر با صفر می شود و در نهایت C صفر شده و هیچ جریان ثانویه ای تشکیل نمی شود که این یکی از شرایط اولدروید [۱۱۱] می باشد. حالت دیگر در هندسه های متقارن محوری مانند مقاطع مدور اتفاق می افتد که در آنها M تنها تابعی از $\dot{\gamma}$ است. در این حالت تمامی بردارهای ∇M و $\nabla \dot{\gamma}$ و ∇W در راستای قطری می باشند که ضرب خارجی آنها برابر صفر بوده و C در نهایت صفر می شود [۸۷]. نکته حائز اهمیت دیگر اینست که بر خلاف تصوره های پیشین تنها عامل اثرگذار بر جهت چرخش جریان-های ثانویه علامت ضریب اختلاف تنش نرمال دوم نمی باشد. همانطور که در تحقیق جروانگ [۳۵] نیز اشاره شده، در برخی از حالات گزارش شده در تحقیق، علی رغم تغییر علامت اختلاف تنش نرمال دوم، در جهت چرخش جریان های ثانویه هیچ تغییری ایجاد نمی شود. در جریان سیال ویسکوالاستیک در مقاطع مستطیلی، در حد یک چهارم کانال دو جریان ثانویه تشکیل می شود که جهت چرخش آنها می تواند از سمت دیواره به سمت گوشه کانال و یا بالعکس باشد. در واقع عامل اصلی اثرگذار بر جهت چرخش جریان های ثانویه، نحوه تغییرات پارامتر $\theta(\dot{\gamma})$ نسبت به تغییرات $\dot{\gamma}$ می باشد. همانطور که در

مرجع [۸۷] اشاره شده است، مثبت یا منفی بودن $\theta'(\dot{\gamma})$ می‌تواند جهت چرخش جریان‌های ثانویه در جریان سیال ویسکوالاستیک در مقاطع غیر دایروی در کانال‌های صاف را تعیین نماید. تطبیق این قضیه با نتایج ارائه شده در تحقیقات پیشین در جدول زیر نشان داده شده است.

جدول (۲-۱): جهت چرخش جریان‌های ثانویه و همچنین معادلات متشکله مورد استفاده در تحقیقات پیشین [۸۷]

جریان‌های ثانویه به سمت گوشه؟	$\theta'(\dot{\gamma})$	$\eta_s(\dot{\gamma})$	$\psi_2(\dot{\gamma})$	معادله متشکله	مرجع
بله	> 0	$\eta_s' = 0$	$\psi_2' > 0$	<i>Reiner-Rivlin</i>	گرین [۲۲]
بله	> 0	$\eta_s \propto \dot{\gamma}^{n-1}$	$\psi_2 = 0.0031$	<i>Reiner-Rivlin</i>	جاو [۱۱۵]
خیر	< 0	$n = 0.7$	$\psi_2 = -0.0031$		
بله	> 0	$\eta_s \propto \dot{\gamma}^{n-1}, n = 0.8$	$\psi_2(\dot{\gamma}) = 0.0031$	<i>Reiner-Rivlin</i>	هاشم‌آبادی [۷۶]
بله	> 0	$\eta_s' < 0$	$\psi_2 > 0, \psi_2' = 0$	<i>CEF</i>	دادسون [۲۷]
بله	> 0	$\eta_s' < 0$	$\psi_2 = 0.001 - k\eta_s$	<i>CEF</i>	تانسند [۲۸]
بله	> 0	$\eta_s \propto \dot{\gamma}^{n-1}$	$\psi_2 = c\dot{\gamma}^m$	<i>CEF</i>	مایدو [۱۱۵]
بله	> 0	$\eta_s \propto \dot{\gamma}^{n-1}$	$\psi_2 = c\dot{\gamma}^m$	<i>CEF</i>	سیرجالا [۱۱۷]
بله	< 0				
بله	> 0	$\eta_s' < 0$	$\psi_2 < 0$	<i>MPTT</i>	ژو [۴۳]
خیر	> 0	$\eta_s' < 0$	$\psi_2 < 0$	<i>PTT</i>	تانو [۱۱۸]
بله	> 0	$\eta_s' < 0$	$\psi_2 < 0$	<i>Giesekus</i>	دیبات [۴۷]
بله	> 0	$\eta_s' < 0$	$\psi_2 < 0$	<i>Leonov</i>	سیلین [۵۶]

در تحقیق حاضر نیز مطلب فوق بررسی شده و تطبیق کامل نتایج بدست آمده با این قضیه احراز شده است.

فصل سوم

روش عددی

۳-۱- مقدمه

کلیه موارد بحث شده در این فصل پیرامون نحوه گسسته‌سازی و حل معادلات حاکم و روش‌های استفاده شده در این خصوص می‌باشد. به این ترتیب در ابتدای فصل مشکلات معادلات حاکم از نظر روش‌های عددی بیان شده و در ادامه روش‌های موجود و همچنین روش مورد استفاده در این تحقیق جهت رفع این مشکلات ارائه می‌گردد. در مرحله بعد ضمن تشریح شبکه‌بندی دامنه حل و تعریف پارامترهای موجود در هر شبکه، توضیحاتی در مورد نحوه گسسته‌سازی معادلات بر روی دامنه حل و همچنین صورت گسسته معادلات حاکم ارائه گردیده و در نهایت به بیان شرایط مرزی هیدرودینامیکی و حرارتی حاکم بر مسئله، شرایط اولیه مورد استفاده جهت حل معادلات، حداکثر خطای محاسباتی و همچنین الگوریتم کلی حل مسئله پرداخته می‌شود.

۳-۲- روش عددی

با توجه به معادلات حاکم بر مسئله که در فصل قبل پیرامون آنها مطالبی ارائه گردید، به علت بررسی مسئله در حالت دائم، همگی معادلات بصورت ضمنی می‌باشند. در این حالت حل معادلات غیر خطی که در آن متغیرهای سرعت و فشار و دما به صورت مشترک در تمامی معادلات وجود داشته و همچنین معادلات دارای ناپایداری عددی بالایی می‌باشند، چندان ممکن نمی‌باشد. معمولاً در حل عددی جریان‌های دائم، سعی می‌شود با تغییراتی در شکل ظاهری معادلات، بتوان آنها را به صورت شبه گذرا تبدیل کرد تا با استفاده از روش‌های تکرار پذیر، پایداری حل مسئله را افزایش داده و همچنین روند دستیابی به حل دائم مسئله را سهل‌تر نمایند. از طرف دیگر با توجه به معادلات حاکم بر مسئله در می‌یابیم که یک ارتباط ناقص در معادلات حاکم وجود دارد. بدین معنی که در معادله ممنتوم ترم‌های سرعت و فشار وجود داشته ولی در معادلات پیوستگی و انرژی مقدار فشار استاتیک سیال هیچ اثرگذاری مستقیمی ندارد. از طرف دیگر در معادلات غیر دائم نیز، ترم‌های گذرای سرعت و دما در معادلات حاکمه به چشم می‌خورد و هیچ ترمی که مبین تغییرات فشار نسبت به زمان باشد در

معادلات حاکمه وجود ندارد. بدین ترتیب محاسبه فشار استاتیک مسایل به صورت صریح و با استفاده از روش‌های تکرار پذیر مقدور نمی‌باشد.

در روش‌های عددی حل مسائل، تکنیک‌هایی جهت تغییری ظاهری در معادلات حاکمه و افزودن ترم فشار گذرا به معادلات حاکم وجود دارد. یکی از روش‌های موجود استفاده از معادله پواسون^۱ برای دستیابی به مقادیر فشار می‌باشد. در این روش از هر کدام معادلات ممنتوم مشتقی نسبت به راستای مربوطه‌ی خود گرفته می‌شود و هر سه معادله با هم جمع می‌شود. بعد از ساده‌سازی و فاکتورگیری از ترم‌های همسان در معادله تشکیل شده، معادله‌ای بر حسب مشتقات مرتبه دو مقادیر فشار در یک طرف و مقادیر سرعت و مشتقات آن در طرف دیگر بدست می‌آید که به معادله پواسون مشهور است. روش دیگر در فائق آمدن بر مشکل عدم وجود ترم گذرای فشار در معادلات، استفاده از روش تراکم پذیری مصنوعی می‌باشد. این روش که از طرف چورین^۲ [۱۱۹] و در سال ۱۹۶۷ پیشنهاد شده است مربوط به حل معادلات دائم می‌باشد. در این روش ترم‌های گذرای $\frac{\partial P}{\partial t}$, $\frac{\partial T}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$ به ترتیب به معادلات ممنتوم در سه جهت x و y و z و معادله انرژی و معادله پیوستگی افزوده می‌شود. البته می‌توان معادلات را در حالت بی‌بعد به کار گرفت و یا ضریبی جهت هم بعد و هم مرتبه سازی آنها اختیار نمود. معادلات حاکم پس از افزودن ترم‌های گذرا در حالت بی‌بعد به شکل زیر نشان داده می‌شوند.

$$c \times \frac{\partial p^*}{\partial t^*} + \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i^*} = 0 \quad (1-3)$$

$$\frac{\partial u_i^*}{\partial t^*} + \frac{\partial (u_i^* u_j^*)}{\partial x_j^*} = \frac{1}{Re} \left(-\frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \frac{\partial \tau_{ij}^*}{\partial x_j^*} \right) \quad (2-3)$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + u_i^* \frac{\partial T^*}{\partial x_i^*} = \frac{1}{Re \cdot Pr} \left(\frac{\partial^2 T^*}{\partial x_j^{*2}} + Br(\sigma_{ij}^* \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i^*}) \right) \quad (3-3)$$

¹ - Poisson's Equations

² - Chorin

که در آن c تراکم پذیری مصنوعی^۱ سیال می باشد که با توجه به معادلات حالت می توان رابطه ای برای آن بر حسب مقادیر فشار و چگالی به صورت زیر تعریف نمود [۱۱۹]:

$$c = \frac{1}{a^2}, \quad a^2 = \frac{p}{\rho} \quad (۴-۳)$$

که در نهایت معادله پیوستگی به صورت معادله (۳-۵) بازنویسی می شود.

$$\frac{\partial p^*}{\partial t^*} + a^2 \cdot \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i^*} = 0 \quad (۵-۳)$$

که مقدار a را می توان طبق شرایط مسئله و محدودیت های همگرایی اختیار نمود.

در این حالت تمامی معادلات حاکم در ظاهر به صورت گذرا با زمان می باشند. با حل معادلات حاکم با استفاده از روش های گام به جلو^۲ در بازه زمانی مصنوعی و در نهایت دستیابی به حل دائم مسئله، تمامی ترم های اضافه شده به معادلات که بیانگر تغییرات پارامتر مورد نظر با زمان می باشد به سمت صفر میل کرده و حل دائم مسئله در حالت اولیه که مدنظر این تحقیق نیز می باشد، حاصل می شود. لازم به ذکر است که به علت تغییرات در معادلات حاکمه، حل گذرای بدست آمده از این روش چندان قابل اطمینان و صحیح نمی باشد و تنها حل دائم مسئله به علت صفر بودن مقادیر اضافه شده به معادلات قابل استفاده می باشد.

در این روش علاوه بر ایجاد یک رابطه دوطرفه بین معادلات ممنوم و پیوستگی و همچنین ایجاد ترم گذاری فشار، معادلات به روش تکرار حل می شوند که انجام آن با پردازنده های شخصی که قادر به انجام پردازش موازی اطلاعات با سرعت بسیار بالایی هم نمی باشند، ممکن می باشد. لازم بذکر است که معادلات ممنوم حاکم بر مسئله در ابتدا از نوع معادلات بیضوی^۳ بوده که با استفاده از روش

^۱ - Artificial Compressibility

^۲ - Marching method

^۳ - Elliptic Differential equation

تراکم پذیری مصنوعی به حالت سهموی^۱ تبدیل شده که در این حالت برای حل معادلات به شرایط اولیه نیز نیاز می‌باشد.

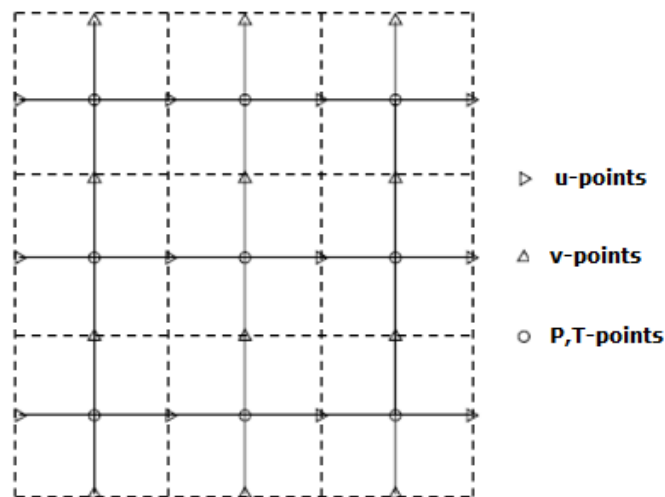
مشکل دیگر در حل معادلات حاکمه عدم وجود شرط مرزی مناسب برای فشار بر روی مرزهای جامد و حتی مرزهای ورودی و خروجی می‌باشد. زیرا معمولاً در مدل‌سازی‌های عددی انجام شده، شرط مرزی مناسبی برای فشار که اولاً اعمال آن در روش عددی ممکن بوده و ثانیاً تعبیر فیزیکی مناسبی برای آن بتوان در نظر گرفت موجود نمی‌باشد. از این‌رو برای فائق آمدن بر این مشکل نیز در این تحقیق از روش شبکه جابجا شده^۲ استفاده گردیده است. بدین منظور دامنه محاسبات با استفاده از دو شبکه مجزا سلول‌بندی می‌شوند. این شبکه‌بندی می‌تواند با استفاده از روش‌های متفاوتی صورت پذیرد. به عنوان مثال می‌توان یکی از شبکه‌ها را به اندازه نصف فاصله طولی و عرضی و ارتفاعی هر سلول، از شبکه اولیه انتقال داد که در این حالت بین هر دو سلول شبکه اولیه، یک سلول از شبکه ثانویه قرار می‌گیرد. لازم به ذکر است که مرزهای ناحیه محاسباتی همگی بر روی شبکه ثانویه قرار می‌گیرند. البته روش‌های دیگری هم جهت تولید شبکه جابجا شده وجود دارد ولی در این تحقیق از این روش جهت شبکه بندی دامنه حل استفاده شده است. در این حالت می‌توان متغیرها و کمیت‌های موجود در مسئله را بر روی شبکه اولیه و یا ثانویه و یا تلفیقی از هر دوی این شبکه‌ها تعریف نمود. لازم به ذکر است که جهت اجتناب از کسری شدن شمارنده‌ها، تمامی شمارنده‌ها در عدد ۲ ضرب شده و در این حالت شمارنده‌های زوج مربوط به شبکه اولیه و شمارنده‌های فرد مربوط به شبکه ثانویه می‌باشد.

در این تحقیق سرعت در جهت x بر روی گره‌های $u(2i+1, 2j, 2k)$ ، سرعت در جهت y بر روی گره‌های $v(2i, 2j+1, 2k)$ و سرعت در جهت z بر روی گره‌های $w(2i, 2j, 2k+1)$ قرار گرفته و بقیه کمیت‌ها از جمله فشار، تنش، دما و گرادیان‌های تمامی کمیت‌ها همگی بر روی گره‌های زوج $(2i, 2j, 2k)$ تعریف می‌شوند.

¹ - Parabolic Differential equation

² - Staggered grid

با توجه به اینکه فشار بر روی شبکه داخلی تعریف شده و در معادلات حاکم فاقد مشتق مرتبه دوم است و از طرفی قرارگیری مرزها بر روی شبکه خارجی، می‌توان گسسته‌سازی معادلات را به نحوی انجام داد که نیازی به تعریف شرط مرزی برای فشار نباشد. در شکل (۳-۱) نمایی از شبکه‌بندی دامنه حل و همچنین تعریف مقادیر بر روی نودهای مربوطه، نشان داده شده است.



شکل (۳-۱): نمایی عرضی از شبکه‌بندی دامنه محاسبات و تعریف مقادیر بر روی نودهای مربوطه

با توجه به تقارن هندسه مورد بررسی در این تحقیق در دو راستای x و y از طرفی کاهش هزینه‌های محاسباتی، فضای محاسباتی به یک‌چهارم دامنه حل کاهش می‌شود که در این حالت به جای دو دیواره موجود در راستای x و y دو مرز تقارن در این جهت‌ها ایجاد می‌گردد. از این رو با توجه به شبکه‌بندی استفاده شده، مرزهای ورودی و دیواره‌ها بر روی شمارنده‌های ۳ در جهت مربوطه و مرزهای خروجی و تقارن بر روی شمارنده‌های $2n+3$ قرار گرفته است.

۳-۳- گسسته سازی معادلات حاکمه

تاکنون روش‌های متفاوتی جهت گسسته‌سازی معادلات حاکمه مورد استفاده در مدل‌سازی‌های عددی پیشنهاد شده است که هر کدام بنا به قابلیت‌های موجود و شرایط مدل‌سازی، در حالت‌های خاصی قابل به استفاده بوده و منجر به روند حل کوتاهتر، پایداری عددی بیشتر و ... می‌شود. از میان

روش‌های موجود، روش اختلاف محدود^۱ کاربرد ساده‌تری داشته و تاکنون در مسایل مربوط به جریان‌های تراکم ناپذیر دائمی عملکرد خوبی از خود نشان داده است. در این تحقیق نیز از این روش جهت گسسته‌سازی معادلات حاکمه استفاده شده و از تقریب تفاضل محدود پیشرو مرتبه اول^۲ برای مشتقات زمانی و از تقریب تفاضل محدود مرکزی^۳ مرتبه دوم برای مشتقات مکانی^۴ درجه اول و دوم مورد استفاده قرار گرفته است.

۳-۳-۱- صورت گسسته معادلات حاکم

همانطور که در بخش‌های پیشین بیان شد، معادلات حاکم بر این مسئله، معادلات پیوستگی، ممنوم، انرژی و معادله متشکله می‌باشد. بنابر روش‌های عددی مورد استفاده و تعریف هر یک از پارامترها بر شبکه مورد نظر، صورت گسسته معادلات با استفاده از روش تفاضل محدود و تقریب‌های بیان شده به شکل معادلات (۳-۶) تا (۳-۱۰) می‌باشد. شایان ذکر است که همه مقادیر زیر بی‌بعد بوده و به علت جلوگیری از پیچیدگی نوشتاری از آوردن بالانویس * برای آنها صرف‌نظر شده است.

$$\left. \frac{\partial p}{\partial t} \right|_{(2i,2j,2k)} + a^2 \left(\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(2i,2j,2k)} + \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{(2i,2j,2k)} + \left. \frac{\partial w}{\partial z} \right|_{(2i,2j,2k)} \right) = 0 \quad (۳-۶)$$

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{(2i+1,2j,2k)} + \left. \frac{\partial u^2}{\partial x} \right|_{(2i+1,2j,2k)} + \left. \frac{\partial(uv)}{\partial y} \right|_{(2i+1,2j,2k)} + \left. \frac{\partial(uw)}{\partial z} \right|_{(2i+1,2j,2k)} = \\ & \frac{1}{Re} \left(- \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{(2i+1,2j,2k)} + \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{(2i+1,2j,2k)} + \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{(2i+1,2j,2k)} + \left. \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right|_{(2i+1,2j,2k)} + \right. \\ & \left. \left. \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \right|_{(2i+1,2j,2k)} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right|_{(2i+1,2j,2k)} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right|_{(2i+1,2j,2k)} \end{aligned} \quad (۳-۷)$$

^۱ - Finite difference

^۲ - Forward difference

^۳ - Central difference

^۴ - Forward-Time Central-Space (FTCS)

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{(2i,2j+1,2k)} + \left. \frac{\partial(uv)}{\partial x} \right|_{(2i,2j+1,2k)} + \left. \frac{\partial v^2}{\partial y} \right|_{(2i,2j+1,2k)} + \left. \frac{\partial(wv)}{\partial z} \right|_{(2i,2j+1,2k)} = \\ & \frac{1}{Re} \left(- \left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{(2i,2j+1,2k)} + \left. \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right|_{(2i,2j+1,2k)} + \left. \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right|_{(2i,2j+1,2k)} + \left. \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right|_{(2i,2j+1,2k)} + \right. \\ & \left. \left. \left. \left. \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} \right|_{(2i,2j+1,2k)} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \right|_{(2i,2j+1,2k)} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} \right|_{(2i,2j+1,2k)} \right) \end{aligned} \quad (۸-۳)$$

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{(2i,2j,2k+1)} + \left. \frac{\partial(uw)}{\partial x} \right|_{(2i,2j,2k+1)} + \left. \frac{\partial(vw)}{\partial y} \right|_{(2i,2j,2k+1)} + \left. \frac{\partial w^2}{\partial z} \right|_{(2i,2j,2k+1)} = \\ & \frac{1}{Re} \left(- \left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{(2i,2j,2k+1)} + \left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{(2i,2j,2k+1)} + \left. \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right|_{(2i,2j,2k+1)} + \left. \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right|_{(2i,2j,2k+1)} + \right. \\ & \left. \left. \left. \left. \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} \right|_{(2i,2j,2k+1)} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} \right|_{(2i,2j,2k+1)} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right|_{(2i,2j,2k+1)} \right) \end{aligned} \quad (۹-۳)$$

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{(2i,2j,2k)} + u \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{(2i,2j,2k)} + v \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{(2i,2j,2k)} + w \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{(2i,2j,2k)} = \\ & \frac{1}{Re.Pr} \left(\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{(2i,2j,2k)} + \left. \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right|_{(2i,2j,2k)} + \left. \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right|_{(2i,2j,2k)} + Br(\sigma_{xx} \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(2i,2j,2k)} + \right. \\ & \left. \left. \left. \left. \sigma_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{(2i,2j,2k)} + \sigma_{xz} \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{(2i,2j,2k)} + \sigma_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(2i,2j,2k)} + \sigma_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{(2i,2j,2k)} + \right. \\ & \left. \left. \left. \left. \sigma_{yz} \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{(2i,2j,2k)} + \sigma_{zx} \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{(2i,2j,2k)} + \sigma_{zy} \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{(2i,2j,2k)} + \sigma_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} \right|_{(2i,2j,2k)} \right) \end{aligned} \quad (۱۰-۳)$$

که در معادلات فوق، بسط ترم‌های معادله پیوستگی بر روی گره‌های $(2i,2j,2k)$ به صورت معادلات (۱-۱۱-۳) تا (۴-۱۱-۳) می‌باشد.

$$\left. \frac{\partial p}{\partial t} \right|_{(2i,2j,2k)} = \frac{p^{n+1}(2i,2j,2k) - p^n(2i,2j,2k)}{\Delta t} \quad (۱-۱۱-۳)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(2i,2j,2k)} = \frac{u^n(2i+1,2j,2k) - u^n(2i-1,2j,2k)}{\Delta x} \quad (۲-۱۱-۳)$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{(2i,2j,2k)} = \frac{v^n(2i,2j+1,2k) - v^n(2i,2j-1,2k)}{\Delta y} \quad (۳-۱۱-۳)$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial z} \right|_{(2i,2j,2k)} = \frac{w^n(2i,2j,2k+1) - w^n(2i,2j,2k-1)}{\Delta z} \quad (۴-۱۱-۳)$$

و همچنین بسط ترم‌های معادله ممنوم در جهت x بر روی گره‌های $(2i+1,2j,2k)$ به صورت معادلات (۱-۱۲-۳) تا (۱۱-۱۲-۳) می‌باشد.

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{(2i+1,2j,2k)} = \frac{u^{n+1}(2i+1,2j,2k) - u^n(2i+1,2j,2k)}{\Delta t} \quad (۱-۱۲-۳)$$

$$\left. \frac{\partial u^2}{\partial x} \right|_{(2i+1,2j,2k)} = \frac{\left(\frac{(u^n(2i+3,2j,2k) + u^n(2i+1,2j,2k))^2}{4} \right) - \left(\frac{(u^n(2i+1,2j,2k) + u^n(2i-1,2j,2k))^2}{4} \right)}{\Delta x} \quad (۲-۱۲-۳)$$

$$\left. \frac{\partial uv}{\partial y} \right|_{(2i+1,2j,2k)} = \left[\frac{\left(\frac{(u^n(2i+1,2j,2k) + u^n(2i+1,2j-2,2k)) \times (v^n(2i,2j-1,2k) + v^n(2i+2,2j-1,2k))}{4} \right) - \left(\frac{(u^n(2i+1,2j,2k) + u^n(2i+1,2j+2,2k)) \times (v^n(2i,2j+1,2k) + v^n(2i+2,2j+1,2k))}{4} \right)}{\Delta y} \right] \quad (۳-۱۲-۳)$$

$$\left. \frac{\partial uw}{\partial z} \right|_{(2i+1,2j,2k)} = \left[\frac{\left(\frac{(u^n(2i+1,2j,2k) + u^n(2i+1,2j,2k+2)) \times (w^n(2i,2j,2k+1) + w^n(2i+2,2j,2k+1))}{4} \right) - \left(\frac{(u^n(2i+1,2j,2k) + u^n(2i+1,2j,2k-2)) \times (w^n(2i,2j,2k-1) + w^n(2i+2,2j,2k-1))}{4} \right)}{\Delta z} \right] \quad (۴-۱۲-۳)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{(2i+1,2j,2k)} = \frac{p^n(2i+2,2j,2k) - p^n(2i,2j,2k)}{\Delta x} \quad (۵-۱۲-۳)$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{(2i+1,2j,2k)} = \frac{u^n(2i-1,2j,2k) - 2u^n(2i+1,2j,2k) + u^n(2i+3,2j,2k)}{(\Delta x)^2} \quad (۶-۱۲-۳)$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{(2i+1,2j,2k)} = \frac{u^n(2i+1,2j-2,2k) - 2u^n(2i+1,2j,2k) + u^n(2i+1,2j+2,2k)}{(\Delta y)^2} \quad (۷-۱۲-۳)$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right|_{(2i+1,2j,2k)} = \frac{u^n(2i+1,2j,2k-2) - 2u^n(2i+1,2j,2k) + u^n(2i+1,2j,2k+2)}{(\Delta z)^2} \quad (۸-۱۲-۳)$$

$$\left. \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \right|_{(2i+1,2j,2k)} = \frac{\tau^n_{xx}(2i+2,2j,2k) - \tau^n_{xx}(2i,2j,2k)}{\Delta x} \quad (۹-۱۲-۳)$$

$$\left. \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right|_{(2i+1,2j,2k)} = \frac{\tau^n_{yx}(2i+2,2j+2,2k) + \tau^n_{yx}(2i,2j+2,2k) - \tau^n_{yx}(2i,2j-2,2k) - \tau^n_{yx}(2i+2,2j-2,2k)}{4\Delta y} \quad (۱۰-۱۲-۳)$$

$$\left. \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right|_{(2i+1,2j,2k)} = \frac{\tau^n_{zx}(2i+2,2j,2k+2) + \tau^n_{zx}(2i,2j,2k+2) - \tau^n_{zx}(2i,2j,2k-2) - \tau^n_{zx}(2i+2,2j,2k-2)}{4\Delta z} \quad (۱۱-۱۲-۳)$$

و همچنین، بسط ترم‌های معادله ممنوم در جهت y بر روی گره‌های $(2i, 2j+1, 2k)$ به صورت معادلات (۱-۱۳-۳) تا (۱۱-۱۳-۳) می‌باشد.

$$\left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{(2i, 2j+1, 2k)} = \frac{v^{n+1}(2i, 2j+1, 2k) - v^n(2i, 2j+1, 2k)}{\Delta t} \quad (۱-۱۳-۳)$$

$$\left. \frac{\partial v^2}{\partial y} \right|_{(2i, 2j+1, 2k)} = \frac{\left((v^n(2i, 2j+3, 2k) + v^n(2i, 2j+1, 2k))^2 / 4 \right) - \left((v^n(2i, 2j+1, 2k) + v^n(2i, 2j-1, 2k))^2 / 4 \right)}{\Delta y} \quad (۲-۱۳-۳)$$

$$\left. \frac{\partial uv}{\partial x} \right|_{(2i, 2j+1, 2k)} = \frac{\left((u^n(2i+1, 2j, 2k) + u^n(2i+1, 2j+2, 2k)) \times (v^n(2i, 2j+1, 2k) + v^n(2i+2, 2j+1, 2k)) \right) / 4 - \left((u^n(2i-1, 2j, 2k) + u^n(2i-1, 2j+2, 2k)) \times (v^n(2i, 2j+1, 2k) + v^n(2i-2, 2j+1, 2k)) \right) / 4}{\Delta x} \quad (۳-۱۳-۳)$$

$$\left. \frac{\partial wv}{\partial z} \right|_{(2i, 2j+1, 2k)} = \frac{\left((w^n(2i, 2j, 2k+1) + w^n(2i, 2j+2, 2k+1)) \times (v^n(2i, 2j+1, 2k) + v^n(2i, 2j+1, 2k+2)) \right) / 4 - \left((w^n(2i, 2j, 2k-1) + w^n(2i, 2j+2, 2k-1)) \times (v^n(2i, 2j+1, 2k) + v^n(2i, 2j+1, 2k-2)) \right) / 4}{\Delta z} \quad (۴-۱۳-۳)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{(2i, 2j+1, 2k)} = \frac{p^n(2i, 2j+2, 2k) - p^n(2i, 2j, 2k)}{\Delta y} \quad (۵-۱۳-۳)$$

$$\left. \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right|_{(2i, 2j+1, 2k)} = \frac{v^n(2i, 2j-1, 2k) - 2v^n(2i, 2j+1, 2k) + v^n(2i, 2j+3, 2k)}{(\Delta y)^2} \quad (۶-۱۳-۳)$$

$$\left. \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right|_{(2i, 2j+1, 2k)} = \frac{v^n(2i+2, 2j+1, 2k) - 2v^n(2i, 2j+1, 2k) + v^n(2i-2, 2j+1, 2k)}{(\Delta x)^2} \quad (۷-۱۳-۳)$$

$$\left. \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right|_{(2i, 2j+1, 2k)} = \frac{v^n(2i, 2j+1, 2k+2) - 2v^n(2i, 2j+1, 2k) + v^n(2i, 2j+1, 2k-2)}{(\Delta z)^2} \quad (۸-۱۳-۳)$$

$$\left. \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right|_{(2i, 2j+1, 2k)} = \frac{\tau^n_{yy}(2i, 2j+2, 2k) - \tau^n_{yy}(2i, 2j, 2k)}{\Delta y} \quad (۹-۱۳-۳)$$

$$\left. \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right|_{(2i, 2j+1, 2k)} = \frac{\tau^n_{xy}(2i+2, 2j+2, 2k) + \tau^n_{xy}(2i+2, 2j, 2k) - \tau^n_{xy}(2i-2, 2j, 2k) - \tau^n_{xy}(2i-2, 2j+2, 2k)}{4\Delta x} \quad (۱۰-۱۳-۳)$$

$$\left. \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right|_{(2i, 2j+1, 2k)} = \frac{\tau^n_{zy}(2i, 2j+2, 2k+2) + \tau^n_{zy}(2i, 2j, 2k+2) - \tau^n_{zy}(2i, 2j, 2k-2) - \tau^n_{zy}(2i, 2j+2, 2k-2)}{4\Delta z} \quad (۱۱-۱۳-۳)$$

و همچنین، بسط ترم‌های معادله ممنوم در جهت z بر روی نودهای $(2i, 2j, 2k+1)$ به صورت معادلات (۱-۱۴-۳) تا (۱۱-۱۴-۳) می‌باشد.

$$\left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{(2i,2j,2k+1)} = \frac{w^{n+1}(2i,2j,2k+1) - w^n(2i,2j,2k+1)}{\Delta t} \quad (1-14-3)$$

$$\left. \frac{\partial w^2}{\partial z} \right|_{(2i,2j,2k+1)} = \frac{\left((w^n(2i,2j,2k+3) + w^n(2i,2j,2k+1))^2 / 4 \right) - \left((w^n(2i,2j,2k+1) + w^n(2i,2j,2k-1))^2 / 4 \right)}{\Delta z} \quad (2-14-3)$$

$$\left. \frac{\partial uw}{\partial x} \right|_{(2i,2j,2k+1)} = \frac{\left((u^n(2i+1,2j,2k+2) + u^n(2i+1,2j,2k)) \times (w^n(2i,2j,2k+1) + w^n(2i+2,2j,2k+1)) \right) / 4 - \left((u^n(2i-1,2j,2k+2) + u^n(2i-1,2j,2k+2)) \times (w^n(2i,2j,2k+1) + w^n(2i-2,2j,2k+1)) \right) / 4}{\Delta x} \quad (3-14-3)$$

$$\left. \frac{\partial wv}{\partial y} \right|_{(2i,2j,2k+1)} = \frac{\left((w^n(2i,2j,2k+1) + w^n(2i,2j+2,2k+1)) \times (v^n(2i,2j+1,2k+2) + v^n(2i,2j+1,2k)) \right) / 4 - \left((w^n(2i,2j,2k+1) + w^n(2i,2j-2,2k+1)) \times (v^n(2i,2j-1,2k+2) + v^n(2i,2j-1,2k)) \right) / 4}{\Delta y} \quad (4-14-3)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{(2i,2j,2k+1)} = \frac{p^n(2i,2j,2k+2) - p^n(2i,2j,2k)}{\Delta z} \quad (5-14-3)$$

$$\left. \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right|_{(2i,2j,2k+1)} = \frac{w^n(2i,2j,2k-1) - 2w^n(2i,2j,2k+1) + w^n(2i,2j,2k+3)}{(\Delta z)^2} \quad (6-14-3)$$

$$\left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{(2i,2j,2k+1)} = \frac{w^n(2i+2,2j,2k+1) - 2w^n(2i,2j,2k+1) + w^n(2i-2,2j,2k+1)}{(\Delta x)^2} \quad (7-14-3)$$

$$\left. \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right|_{(2i,2j,2k+1)} = \frac{w^n(2i,2j+2,2k+1) - 2w^n(2i,2j,2k+1) + w^n(2i,2j-2,2k+1)}{(\Delta y)^2} \quad (8-14-3)$$

$$\left. \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right|_{(2i,2j,2k+1)} = \frac{\tau^n_{zz}(2i,2j,2k+2) - \tau^n_{zz}(2i,2j,2k)}{\Delta z} \quad (9-14-3)$$

$$\left. \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \right|_{(2i,2j,2k+1)} = \frac{\tau^n_{xz}(2i+2,2j,2k+2) + \tau^n_{xz}(2i+2,2j,2k) - \tau^n_{xz}(2i-2,2j,2k) - \tau^n_{xz}(2i-2,2j,2k+2)}{4\Delta x} \quad (10-14-3)$$

$$\left. \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right|_{(2i,2j,2k+1)} = \frac{\tau^n_{yz}(2i,2j+2,2k+2) + \tau^n_{yz}(2i,2j+2,2k) - \tau^n_{yz}(2i,2j-2,2k) - \tau^n_{yz}(2i,2j-2,2k+2)}{4\Delta y} \quad (11-14-3)$$

بسط ترم‌های معادله انرژی نیز بر روی گره‌های $(2i,2j,2k)$ در روابط (3-15-1) تا (3-15-16) نشان داده شده است.

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{(2i,2j,2k)} = \frac{T^{n+1}(2i,2j,2k) - T^n(2i,2j,2k)}{\Delta t} \quad (1-15-3)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{(2i,2j,2k)} = \frac{u^n(2i+1,2j,2k) + u^n(2i-1,2j,2k)}{2} \times \frac{T^n(2i+2,2j,2k) - T^n(2i-2,2j,2k)}{2\Delta x} \quad (2-15-3)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{(2i,2j,2k)} = \frac{v^n(2i,2j+1,2k) + v^n(2i,2j-1,2k)}{2} \times \frac{T^n(2i,2j+2,2k) - T^n(2i,2j-2,2k)}{2\Delta y} \quad (3-15-3)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{(2i,2j,2k)} = \frac{w^n(2i,2j,2k+1) + w^n(2i,2j,2k-1)}{2} \times \frac{T^n(2i,2j,2k+2) - T^n(2i,2j,2k-2)}{2\Delta z} \quad (4-15-3)$$

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{(2i,2j,2k)} = \frac{T^n(2i+2,2j,2k) - 2T^n(2i,2j,2k) + T^n(2i-2,2j,2k)}{(\Delta x)^2} \quad (5-15-3)$$

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right|_{(2i,2j,2k)} = \frac{T^n(2i,2j+2,2k) - 2T^n(2i,2j,2k) + T^n(2i,2j-2,2k)}{(\Delta y)^2} \quad (6-15-3)$$

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right|_{(2i,2j,2k)} = \frac{T^n(2i,2j,2k+2) - 2T^n(2i,2j,2k) + T^n(2i,2j,2k-2)}{(\Delta z)^2} \quad (7-15-3)$$

$$\left. \sigma_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(2i,2j,2k)} = \sigma_{xx}^n(2i,2j,2k) \times \frac{u^n(2i+1,2j,2k) - u^n(2i-1,2j,2k)}{\Delta x} \quad (8-15-3)$$

$$\left. \sigma_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{(2i,2j,2k)} = \sigma_{xy}^n(2i,2j,2k) \times \frac{v^n(2i+2,2j+1,2k) + v^n(2i+2,2j-1,2k) - v^n(2i-2,2j+1,2k) - v^n(2i-2,2j-1,2k)}{4\Delta x} \quad (9-15-3)$$

$$\left. \sigma_{xz} \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{(2i,2j,2k)} = \sigma_{xz}^n(2i,2j,2k) \times \frac{w^n(2i+2,2j,2k+1) + w^n(2i+2,2j,2k-1) - w^n(2i-2,2j,2k+1) - w^n(2i-2,2j,2k-1)}{4\Delta x} \quad (10-15-3)$$

$$\left. \sigma_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(2i,2j,2k)} = \sigma_{yx}^n(2i,2j,2k) \times \frac{u^n(2i+1,2j+2,2k) + u^n(2i-1,2j+2,2k) - u^n(2i+1,2j-2,2k) - u^n(2i-1,2j-2,2k)}{4\Delta y} \quad (11-15-3)$$

$$\left. \sigma_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{(2i,2j,2k)} = \sigma_{yy}^n(2i,2j,2k) \times \frac{v^n(2i,2j+1,2k) - v^n(2i,2j-1,2k)}{\Delta y} \quad (12-15-3)$$

$$\sigma_{yz} \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{(2i,2j,2k)} = \sigma_{yz}^n(2i,2j,2k) \times \frac{w^n(2i,2j+2,2k+1) + w^n(2i,2j+2,2k-1) - w^n(2i,2j-2,2k+1) - w^n(2i,2j-2,2k-1)}{4\Delta y} \quad (13-15-3)$$

$$\sigma_{zx} \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{(2i,2j,2k)} = \sigma_{zx}^n(2i,2j,2k) \times \frac{u^n(2i+1,2j,2k+2) + u^n(2i-1,2j,2k+2) - u^n(2i+1,2j,2k-2) - u^n(2i-1,2j,2k-2)}{4\Delta z} \quad (14-15-3)$$

$$\sigma_{zy} \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{(2i,2j,2k)} = \sigma_{zy}^n(2i,2j,2k) \times \frac{v^n(2i,2j+1,2k+2) + v^n(2i,2j-1,2k+2) - v^n(2i,2j+1,2k-2) - v^n(2i,2j-1,2k-2)}{4\Delta z} \quad (15-15-3)$$

$$\sigma_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{(2i,2j,2k)} = \sigma_{zz}^n(2i,2j,2k) \times \frac{w^n(2i,2j,2k+1) - w^n(2i,2j,2k-1)}{\Delta z} \quad (16-15-3)$$

لازم به ذکر است که کار نیروی تنش موجود در معادلات فوق، شامل کار میدان فشار و تنش ویسکوز نیز می باشد. همچنین صورت گسسته معادلات وابستگی مقادیر جریان به دما به صورت زیر می باشد.

$$\eta_{(2i,2j,2k)}(T) = \eta_0 a_{(2i,2j,2k)}(T) = \eta_0 \times \exp\left[\alpha \left(\frac{1}{T(2i,2j,2k) + 273.15} - \frac{1}{T_{in} + 273.15} \right)\right] \quad (16-3)$$

$$\lambda_{(2i,2j,2k)}(T) = \lambda_0 a_{(2i,2j,2k)}(T) = \lambda_0 \times \exp\left[\alpha \left(\frac{1}{T(2i,2j,2k) + 273.15} - \frac{1}{T_{in} + 273.15} \right)\right] \quad (17-3)$$

$$k_{(2i,2j,2k)}(T) = k_0 (k_0^* + k_s T(2i,2j,2k)) \quad (18-3)$$

$$C_{p(2i,2j,2k)}(T) = C_{p0} (C_{p0} + C_{ps} T(2i,2j,2k)) \quad (19-3)$$

لازم به ذکر است که در تعریف برخی از اعداد بی بعد از جمله Wi, Br, Pr, Re پارامترهایی موثر

بوده که با دما تغییر می کنند و در نهایت باعث تغییر این اعداد بی بعد در طول دامنه محاسباتی می شوند. از طرفی دیگر این کمیت ها همگی تعریفی کلی داشته و معمولاً برای یک جریان خاص بدون تغییر در هندسه، ثابت می باشند. از این رو برای رهایی از این مشکل همانطور که در معادلات (۳-۲۰-۲۰) تا (۳-۲۰-۱۰) نشان داده شده است، برای کمیت های فوق دو مقدار موضعی و عمومی تعریف کرده

که مقدار موضعی آنها بر حسب دما در نقاط مختلف دامنه حل تغییر کرده که البته معنای فیزیکی خاصی نداشته ولی مقدار عمومی آنها که بیانگر کمیت فوق برای جریان اصلی می باشد، بر پایه مقادیر ابتدایی کمیتها تعریف شده و در طول کانال هیچ تغییر نمی یابد.

$$Re_{General} = \frac{\rho w_{ref} D_h}{\eta_0} \quad (1-20-3)$$

$$Re_{local}(2i,2j,2k) = \frac{\rho w D_h}{\eta(T)_{(2i,2j,2k)}} \quad (2-20-3)$$

$$Wi_{General} = \frac{\lambda_0 W_{ref}}{D_h} \quad (3-20-3)$$

$$Wi_{local}(2i,2j,2k) = \frac{\lambda(T)_{(2i,2j,2k)} w}{D_h} \quad (4-20-3)$$

$$Br_{T General} = \frac{\eta_0 w_{ref}^2}{k(T_{in} - T_w)} \quad (5-20-3)$$

$$Br_{T local}(2i,2j,2k) = \frac{\eta(T)_{(2i,2j,2k)} w^2}{k(T)_{(2i,2j,2k)} (T_{in} - T_w)} \quad (6-20-3)$$

$$Br_{q General} = \frac{\eta_0 w_{ref}^2}{D_h q''} \quad (7-20-3)$$

$$Br_{q Local}(2i,2j,2k) = \frac{\eta(T)_{(2i,2j,2k)} w^2}{D_h q''} \quad (8-20-3)$$

$$Pr_{General} = \frac{\eta_0}{\rho \alpha_0} \quad (9-20-3)$$

$$Pr_{Local}(2i,2j,2k) = \frac{\eta(T)_{(2i,2j,2k)}}{\rho \alpha(T)_{(2i,2j,2k)}} \quad (10-20-3)$$

باید توجه داشت که منظور از تمامی مقادیر بی بعد ذکر شده در معادلات، مقادیر عمومی می باشد و به علت جلوگیری از پیچیدگی نوشتار، از ذکر زیر نویس General صرف نظر شده است.

با توجه به معادلات متشکله مورد استفاده، ترم تنش در معادلات ممنتوم و انرژی به صورت‌های مختلفی مدل‌سازی می‌شوند. ترم تنش نیوتنی که در نهایت منجر به لاپلاسیان^۱ میدان سرعت شده، نقش موثری را در افزایش پایداری عددی کد کامپیوتری ایفا می‌کند از این رو در تمام معادلات متشکله مورد استفاده در این تحقیق با استفاده از روش جداسازی تنش الاستیک ویسکوز^۲ که در مرجع [۵۳] نیز از این روش استفاده شده است، سعی بر جداسازی ترم تنش الاستیک از تنش ویسکوز شده است. به عبارت ساده‌تر تنش کلی سیال را به صورت مجموع تنش پلیمری و تنش ویسکوز به صورت معادله (۳-۲۱) در نظر می‌گیریم.

$$\sigma_{ij} = \tau_{N_{ij}} + \tau_{p_{ij}} \quad (۳-۲۱)$$

که در آن تنش پلیمری با استفاده از معادله متشکله تعریف شده و تنش ویسکوز نیز با استفاده از معادله متشکله نیوتن محاسبه می‌شود.

در مورد تنش‌های حاصله از معادلات متشکله کریمینال اریکسون فیلی و گزیکس هم وضعیت مشابهی برقرار است و گسسته‌سازی آنها به همین شکل صورت می‌پذیرد.

۳-۴- شرایط مرزی

معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسئله مورد نظر که در مطالب بیان شده، به تفصیل مورد بررسی قرار گرفت، دارای گروهی از جواب‌هایی می‌باشد که همگی در معادله اصلی صادق می‌باشند. جهت دستیابی به جواب منحصر به فرد مسئله مورد نظر، می‌بایست شرایط مرزی حاکم بر مسئله را در جواب‌های بدست آمده اعمال نماییم. به طور کلی شرایط مرزی بیانگر حالت جریان در مجاور مرزها و

^۱ -Laplacian

^۲ - Elastic viscous split stress(Evss)

تاثیر گذاری محیط اطراف به جریان سیال بوده که به سه صورت کلی دیریشله^۱، نیومن^۲ و رابین^۳ موجود می‌باشند.

در تحقیق حاضر بنا بر شرایط جریان و همچنین مرزهای فرض شده در اطراف فضای محاسباتی تلفیقی از شرایط مرزی دیریشله و نیومن به شرح زیر حاکم می‌باشد.

۳-۴-۱- شرایط مرزی جریان

همانطور که گفته شد، در این تحقیق هم میدان جریان و هم میدان دما به صورت در حال توسعه در نظر گرفته شده است. از این رو میدان سرعت در ورودی کانال با میدان سرعت در مقاطع بعدی کاملاً متفاوت می‌باشد. فرضیات متفاوتی برای میدان سرعت در ورودی به کانال قابل تصور می‌باشد که البته برای بعضی از این موارد، توجیه فیزیکی مناسبی موجود نمی‌باشد. در این تحقیق، شرط ورودی سرعت یکنواخت برای سرعت محوری و سرعت صفر برای سرعت در جهت‌های عرضی فرض شده است. در حقیقت این فرض معادل ورود جریان آزاد یک سوپه در ابتدای کانال می‌باشد. با توجه به کاهش فضای محاسباتی به یک‌چهارم هندسه اولیه، و در پی آن ایجاد دو مرز تقارن، می‌بایست شرایط مرزی مناسبی برای مرزهای تقارن نیز تعریف شود. با توجه به خاصیت آینه‌ای موجود در مرزهای تقارن، سرعت نودهای روی مرز در جهت عمود بر صفحه تقارن صفر و در جهت‌های موازی با صفحه تقارن برابر با نود مجاور مرز منظور شده است. بر روی دیواره‌ها هم شرط مرزی عدم لغزش که برای این تحقیق شرط مناسبی می‌باشد رعایت شده است. با توجه به در نظر گرفتن طول کافی برای کانال و در پی آن فرض توسعه یافتگی جریان و انتقال حرارت در خروجی کانال تغییرات سرعت در سه جهت نسبت به محور کانال صفر منظور شده است. شرط‌های مرزی اعمال شده برای سرعت در تمامی مرزها، در روابط (۳-۲۲-۱) تا (۳-۲۲-۶) نشان داده شده است.

¹ - Dirichlet

² - Neumann

³ - Robin

$$u(0, :, :) = 0, v(0^-, :, :) = -v(0^+, :, :), w(0^-, :, :) = -w(0^+, :, :) \quad x=0 \quad \text{صفحه } (1-22-3)$$

$$u(:, 0^-, :) = -u(:, 0^+, :), v(:, 0, :) = 0, w(:, 0^-, :) = -w(:, 0^+, :) \quad y=0 \quad \text{صفحه } (2-22-3)$$

$$u(a, :, :) = 0, v(a^+, :, :) = v(a^-, :, :), w(a^+, :, :) = w(a^-, :, :) \quad x=a \quad \text{صفحه تقارن } (3-22-3)$$

$$u(:, b^+, :) = u(:, b^-, :), v(:, b, :) = 0, w(:, b^+, :) = w(:, b^-, :) \quad y=b \quad \text{صفحه تقارن } (4-22-3)$$

$$u(:, :, 0^-) = -u(:, :, 0^+), v(:, :, 0^-) = -v(:, :, 0^+), w(0, :, :) = w_{in} \quad z=0 \quad \text{ورودی } (5-22-3)$$

$$u(:, :, l^+) = u(:, :, l^-), v(:, :, l^+) = v(:, :, l^-), w(:, :, l^+) = w(:, :, l^-) \quad z=l \quad \text{خروجی } (6-22-3)$$

که در معادلات فوق، منظور از ذکر پارامترها با بالانویس $+$ ، $-$ بترتیب نودهای مجاور قبلی و بعدی دیواره می باشد.

در اینجا مجددا یادآوری می نماییم که تمامی مرزها بر روی شمارنده های فرد قرار دارند و در مورد کمیت هایی که تعریف آنها بر روی شمارنده های زوج می باشد، شرایط مرزی را می بایست با استفاده از نودهای مجاور اعمال نمود. از این رو لازم است بعضی از گره ها در خارج از هندسه مورد بررسی نیز تعریف شوند. در حقیقت این گره ها که شمارنده های 2 و $2n+4$ را به خود اختصاص می دهند تنها روشی به منظور دستیابی به تعریفی صحیح برای شرایط مرزی بر روی مرزها می باشد و در عمل این نودها هیچ تعبیر فیزیکی نداشته و در فیزیک مسئله و جواب های بدست آمده هیچ تغییری ایجاد نمی کنند. به عنوان مثال همانطور که از رابطه $(2-22-3)$ مشخص است، بنا به شرط مرزی عدم لغزش سرعت در راستای محور x بر روی دیواره $y=0$ برابر با صفر است ولی با توجه به اینکه مرزها بر روی شمارنده های فرد قرار گرفته و همانطور که پیشتر گفته شد، تعریف سرعت در راستای محور x بر روی شمارنده های زوج محور y انجام شده است، پس امکان تعریف مستقیم شرط مرزی برای سرعت در جهت محور x بر روی مرز جامد $y=0$ وجود ندارد. از این رو با تعریف یک گره مجازی قبل از مرزهای سیستم و برابر قرار دادن سرعت آن با منفی سرعت گره متقارن آن داخل سیستم، سرعت بر روی مرز جامد از نظر محاسباتی برابر صفر خواهد شد.

با توجه به تعریف مستقیم مقدار تنش بر روی فضای محاسباتی، تعریف شرط مرزی برای این کمیت نیز لازم به نظر می‌رسد. از این‌رو با توجه به وجود جریان آزاد در مرز ورودی سیستم، تنش سیال در ورودی کانال در تمامی جهت‌ها صفر منظور شده است. بر روی دیواره‌های جامد به علت موجود نبودن شرط مرزی مناسبی برای تنش که از نظر فیزیکی نیز قابل توجیه باشد، شرط مرزی تنش با استفاده از مولفه‌های آن از جمله گرادیان سرعت و نرخ برش تعریف شده است. در اینجا مجدداً یادآوریم می‌کنیم که با توجه به شبکه مورد استفاده در این تحقیق، هیچ نیازی به تعریف شروط مرزی فشار بر روی دیواره‌ها و یا مرزهای ورودی و خروجی احساس نبوده و میدان فشار در کانال با استفاده از معادله پیوستگی تشکیل شده و در معادله ممنوم تصحیح می‌شود.

بر روی مرزهای تقارن همانطور که در مرجع [۱۱۴] نیز بیان شده است، مولفه‌های تنش در راستای عمود بر مرز بصورت متقارن و مخالف جهت در دو طرف مرز در نظر گرفته شده است و مولفه‌های تنش موازی با مرز تقارن، بصورت متقارن و هم جهت در دو طرف مرز در نظر گرفته شده است. در خروجی کانال نیز شرط توسعه یافتگی برای تمامی مولفه‌های تنش نیز اعمال شده است. شروط مرزی در نظر گرفته شده برای مولفه‌های تنش در مرزهای محاسباتی در روابط (۳-۲۳-۱) تا (۳-۲۳-۶) نشان داده شده است.

تعریف با استفاده از شروط مرزی سرعت و رابطه آن با تنش بر حسب معادله

$$\text{متشکله} \quad x=0$$

تعریف با استفاده از شروط مرزی سرعت و رابطه آن با تنش بر حسب معادله

$$\text{متشکله} \quad y=0$$

$\tau_{xy}(a^+, :, :) = -\tau_{xy}(a^-, :, :)$, $\tau_{xz}(a^+, :, :) = -\tau_{xz}(a^-, :, :)$, $\tau_{xx}(a^+, :, :) = \tau_{xx}(a^-, :, :)$ صفحه تقارن (۳-۲۳-۳)

$$\tau_{yy}(a^+, :, :) = \tau_{yy}(a^-, :, :)$$
, $\tau_{yz}(a^+, :, :) = \tau_{yz}(a^-, :, :)$, $\tau_{zz}(a^+, :, :) = \tau_{zz}(a^-, :, :)$, $x=a$

$\tau_{xy}(:, b^+, :) = -\tau_{xy}(:, b^-, :)$, $\tau_{yz}(:, b^+, :) = -\tau_{yz}(:, b^-, :)$, $\tau_{xx}(:, b^+, :) = \tau_{xx}(:, b^-, :)$, صفحه تقارن (۴-۲۳-۳)

$$\tau_{xz}(:, b^+, :) = \tau_{xz}(:, b^-, :)$$
, $\tau_{yy}(:, b^+, :) = \tau_{yy}(:, b^-, :)$, $\tau_{zz}(:, b^+, :) = \tau_{zz}(:, b^-, :)$, $y=b$

$$\begin{aligned} \tau_{xx}(:, :, 0^-) &= -\tau_{xx}(:, :, 0^+), \tau_{xy}(:, :, 0^-) = -\tau_{xy}(:, :, 0^+), \tau_{xz}(:, :, 0^-) = -\tau_{xz}(:, :, 0^+), & \text{ورودی (۳-۲۳-۵)} \\ \tau_{yy}(:, :, 0^-) &= -\tau_{yy}(:, :, 0^+), \tau_{yz}(:, :, 0^-) = -\tau_{yz}(:, :, 0^+), \tau_{zz}(:, :, 0^-) = -\tau_{zz}(:, :, 0^+), & z = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xx}(:, :, l^+) &= \tau_{xx}(:, :, l^-), \tau_{xy}(:, :, l^+) = \tau_{xy}(:, :, l^-), \tau_{xz}(:, :, l^+) = \tau_{xz}(:, :, l^-), & \text{خروجی (۳-۲۳-۶)} \\ \tau_{yy}(:, :, l^+) &= \tau_{yy}(:, :, l^-), \tau_{yz}(:, :, l^+) = \tau_{yz}(:, :, l^-), \tau_{zz}(:, :, l^+) = \tau_{zz}(:, :, l^-), & z = l \end{aligned}$$

لازم بذکر است که در بعضی از موارد، احتیاج به تعریف گرادیان‌های سرعت بر روی گره‌های مجاور مرزهای سیستم نیز بوجود می‌آید که این عمل نیز با توجه به تعریف گره‌های مجازی در اطراف مرزها، با استفاده از عمگر اختلاف محدود مرکزی امکان‌پذیر می‌باشد.

۳-۴-۲- شرایط مرزی انتقال حرارت

تاکنون شروط مرزی مربوطه و مورد استفاده در معادلات پیوستگی و ممنوم بیان شد. جهت دستیابی به حل منحصر به فرد معادله انرژی نیز می‌بایست شروط مرزی در مرزهای دامنه محاسباتی برای دما نیز مشخص شوند. در کانال‌های مستطیلی که چهار دیواره ثابت وجود دارد، شرایط مرزی حرارتی متفاوتی برای دیواره‌ها متصور می‌باشد. به عنوان مثال می‌توان هر چهار دیواره را با دمای ثابت که برابر و یا غیر برابر هستند محدود نمود که در حالت اختصار این شرط مرزی حرارتی را با نماد T نشان می‌دهند. در حالتی دیگر، یک شار حرارتی ثابت محوری به دیواره‌ها اعمال شده و همچنین دمای دیواره‌ها به صورت محیطی ثابت فرض می‌شود که این شرط مرزی حرارتی نیز به شرط H_1 معروف می‌باشد. این شرط مرزی حالتی رایج در مدل‌سازی مسائل مهندسی از جمله گرمایش مقاومتهای الکتریکی، گرمایش هسته‌ای، مبدل‌های حرارتی جریان معکوس و ... می‌باشد. در حالتی دیگر می‌توان یک شار حرارتی که هم از نظر محوری و هم از نظر محیطی یکنواخت باشد، به دیواره‌ها اعمال نمود که در اختصار به شرط مرزی حرارتی H_2 معروف می‌باشد [۱۲۱، ۱۲۰]. در این تحقیق نیز در اکثر موارد از شرایط مرزی حرارتی T و H_2 استفاده شده است که در هر مورد از ارائه نتایج، به شرط حرارتی مورد استفاده نیز اشاره خواهد شد.

شرط مرزی T از نوع دیریشله بوده و اعمال آن بر روی مرزهای سیستم به راحتی صورت می‌پذیرد. دمای دیواره‌های جامد در دو حالت بیشتر از دمای ورودی سیال و دیگری کمتر از دمای ورودی سیال که در حالت اول منجر به گرمایش سیال و در حالت دوم منجر به سرد شدن سیال می‌شود، در نظر گرفته شده است. دمای مرزهای تقارن نیز همانند قبل با توجه به خاصیت آینه‌ای اعمال شده است. در این صورت با توجه به پارامترهای بی‌بعد اعمال شده در حالت دما ثابت، دمای اعمالی بر روی مرزها به همراه شرایط مرزی آنها در روابط (۳-۲۴-۱) تا (۳-۲۴-۶) قابل مشاهده می‌باشد.

$$T = T_{Wall} \quad \& \quad T^* = \frac{T - T_{Wall}}{T_{in} - T_{Wall}} \rightarrow T_{wall}^* = 0 \quad x=0 \text{ صفحه (۳-۲۴-۱)}$$

$$T^*(2, :, :) = 2T_{Wall_x}^* - T^*(4, :, :)$$

$$T^*(a^+, :, :) = T^*(a^-, :, :) \quad x=a \text{ صفحه تقارن (۳-۲۴-۲)}$$

$$T = T_{Wall} \quad \& \quad T^* = \frac{T - T_{Wall}}{T_{in} - T_{Wall}} \rightarrow T_{wall}^* = 0 \quad y=0 \text{ صفحه (۳-۲۴-۳)}$$

$$T^*(:, 2, :) = 2T_{Wall_y}^* - T^*(:, 4, :)$$

$$T^*(:, b^+, :) = T^*(:, b^-, :) \quad y=b \text{ صفحه تقارن (۳-۲۴-۴)}$$

$$T = T_{in} \quad \& \quad T^* = \frac{T - T_{Wall}}{T_{in} - T_{Wall}} \rightarrow T_{in}^* = 1 \quad z=0 \text{ ورودی (۳-۲۴-۵)}$$

$$T^*(:, :, 0^-) = 2T_{in}^* - T^*(:, :, 0^+)$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial z} = 0 \rightarrow T^*(:, :, l^+) = T^*(:, :, l^-) \quad z=l \text{ خروجی (۳-۲۴-۶)}$$

لازم بذکر است که در این حالت نیز مقادیر دما همگی بر روی نودهای زوج سیستم تعریف می‌شود در حالی که تمامی مرزها بر روی نودهای فرد قرار دارند. در این صورت اعمال شروط مرزی دما

ثابت نیز بر روی مرزهای سیستم با بهره‌گیری از دمای تعریف شده برای نودهای مجازی مجاور مرز ممکن خواهد بود.

در حالت اعمال شار حرارتی ثابت به دیواره‌ها، شرط H_2 ، شرط مرزی سیستم از نوع نیومن خواهد بود که در این حالت گرادیان دما در جهت عمود بر مرز موجود می‌باشد. حال با تقریب مرکزی اختلاف محدود بر روی مرزهای جامد و برابر قرار دادن آن با شار حرارتی اعمالی به مرزها، می‌توان شرط مرزی قابل اعمال بر روی مرزهای جامد ناحیه محاسباتی را بدست آورد که این مطلب در روابط (۳-۲۵-۱) و (۳-۲۵-۴) دیده می‌شود. شرط مرزی بر روی دیواره‌های تقارن و همچنین ورودی کانال نیز همانند حالت قبل، قابل اعمال خواهد بود.

$$T^*(a^+, :, :) = T^*(a^-, :, :) \quad x=a \text{ صفحه تقارن (۳-۲۵-۱)}$$

$$T^*(:, b^+, :) = T^*(:, b^-, :) \quad y=b \text{ صفحه تقارن (۳-۲۵-۲)}$$

$$q'' = -k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{wall} \rightarrow q'' = -k \frac{T(0^+, :, :) - T(0^-, :, :)}{\Delta x}$$

$$\rightarrow T(0^-, :, :) = -\frac{q'' \Delta x}{k} + T(0^+, :, :) \quad x=0 \text{ صفحه (۳-۲۵-۳)}$$

$$T^* = \frac{T - T_{in}}{q'' D_h / k}, \quad \rightarrow T^*(2, :, :) = \Delta x^* + T^*(4, :, :)$$

$$q'' = -k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{wall} \rightarrow q'' = -k \frac{T(:, 0^+, :) - T(:, 0^-, :)}{\Delta y}$$

$$\rightarrow T(:, 0^-, :) = \frac{q'' \Delta y}{k} + T(:, 0^+, :) \quad y=0 \text{ صفحه (۳-۲۵-۴)}$$

$$T^* = \frac{T - T_{in}}{q'' D_h / k}, \quad \rightarrow T^*(:, 2, :) = \Delta y^* + T^*(:, 4, :)$$

می‌بایست توجه داشت که در حالت انتقال حرارت از دیواره به سیال، q مثبت در نظر گرفته شده است. یکی از تفاوت‌های قابل توجه این حالت با حالت‌های در نظر گرفته شده قبلی، شرط مرزی حرارتی در خروجی کانال می‌باشد زیرا با اعمال شار حرارتی ثابت به دیواره‌های کانال، بر خلاف حالت‌های قبلی، جریان در کانال هیچ موقع به حالت دائم حرارتی که در آن تغییرات دما نسبت به محور کانال صفر باشد، نمی‌رسد. بنابراین فرض حالت توسعه یافته‌ی حرارتی برای مرز خروجی کانال، فرض نامناسبی می‌باشد. در این حالت دو شرط مرزی برای خروجی کانال مفروض می‌باشد. در حالت اول با فرض کل کانال به عنوان یک حجم کنترل و اعمال قانون بقای انرژی، می‌توان شرط مرزی مناسب برای خروجی کانال را بدست آورد که البته این شرط با صرف نظر از تلفات ویسکوز و فرض صفر بودن عدد برینکمن صادق است. حالت دیگر که در برخی مراجع از جمله مرجع [۵۵] نیز پیشنهاد شده و در این تحقیق هم از این شرط مرزی استفاده شده است، فرض صفر بودن مشتق دوم دما در خروجی کانال می‌باشد که با اعمال این شرط مرزی هم جواب‌های قابل قبولی بدست خواهد آمد. لازم بذکر است که با اعمال این شرط و در حالت صفر نبودن عدد برینکمن، تغییرات دمای متوسط سیال در راستای کانال هیچگاه به مقداری ثابت نخواهد رسید و مقدار گرادیان لحظه‌ای دمای متوسط سیال تابعی از عدد برینکمن سیال خواهد بود. شرایط مرزی حرارتی مناسب برای ورودی و خروجی کانال در حالت شار ثابت به همراه نحوه اعمال این شرایط در روابط (۳-۲۶-۱) و (۳-۲۶-۲) نشان داده شده است.

$$T = T_{in} \quad \& \quad T^* = \frac{T - T_{in}}{q'' D_h / k} \rightarrow T_{in}^* = 0 \quad (۳-۲۶-۱) \text{ ورودی}$$

$$T^*(:, :, 2) = 2T_{in}^* - T^*(:, :, 4) \quad z = 0$$

$$\dot{Q} = \dot{m}c\Delta t$$

$$\rightarrow T_{out} = \frac{q'' \times S}{\dot{m}c} + T_{in}, \dot{m} = \rho A w_{ref}, A = \frac{a}{2} \times \frac{b}{2}, S = \left(\frac{a}{2} \times l\right) + \left(\frac{b}{2} \times l\right)$$

$$\rightarrow T_{out} = \frac{q'' \times l \times \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)}{\rho \frac{a}{2} \times \frac{b}{2} w_{ref} c} + T_{in}, T^* = \frac{T - T_{in}}{q'' D_h / k} \quad (3-26-2 الف) \text{ خروجی}$$

$$z = l$$

$$\rightarrow T^*_{out} = 4l^* / Re.Pr$$

$$\rightarrow T^*(\cdot, \cdot, l^+) = 2(4 \times l^* / Re.Pr) - T^*(\cdot, \cdot, l^-)$$

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial z^2} = 0 \rightarrow T^*(\cdot, \cdot, l^+) = 2T^*(\cdot, \cdot, l^-) - T^*(\cdot, \cdot, l^{--}) \quad (3-26-2 ب) \text{ خروجی}$$

$$z = l$$

۳-۵- شرایط اولیه

همانطور که گفته شد در تحقیق حاضر جریان سیال ویسکوالاستیک در حالت دائم مد نظر قرار گرفته است ولی با توجه به روش عددی مورد استفاده و تبدیل معادلات به شکل ظاهرا گذرا اعمال شرایط اولیه مناسب جهت شروع حل لازم می‌باشد. البته لازم بذکر است که ترم زمان موجود در معادلات و همچنین ترم‌های اضافه شده به معادلات حاکمه، ارزش و معنی فیزیکی نداشته و صرفا یک روش عددی برای رسیدن به جواب‌های حالت پایدار مسئله بوده و شبیه به یک کاتالیزور عددی عمل می‌کنند که در نتایج بدست آمده هیچ تاثیری نداشته و در پایان از معادلات حذف می‌شوند.

با توجه به روش به کار برده شده و همچنین بررسی‌های انجام شده بر روی نتایج، شرایط اولیه فرض شده هیچ تاثیری در نتایج حالت دائم سیستم ندارند ولی فرض بعضی از شرایط اولیه که توجیه فیزیکی نداشته و یا از حالت دائم سیستم اختلاف زیادی دارند، باعث واگرایی جواب‌ها و یا همگرایی معادلات به مقادیر غیر منطقی جواب‌های معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسئله می‌شود. از این رو می‌بایست در فرض شرایط اولیه برای کلیه کمیت‌ها دقت کافی مدنظر قرار گیرد تا شرایط اولیه فرض شده باعث همگرایی مسئله به جواب‌های غیر قابل قبول و یا واگرایی جواب‌ها نشود. بهترین روش به

منظور افزایش اطمینان از همگرایی جواب‌ها به مقادیر قابل قبول، تغییر تدریجی کمیت‌ها از حالت اولیه و فرض جواب بدست آمده از نتایج قبلی به عنوان شرایط اولیه جدید می‌باشد که در این تحقیق نیز از این روش استفاده شده است. بدیهی است این روش باعث افزایش هزینه محاسبات انجام شده جهت رسیدن به جواب‌های مورد نظر شده ولی همگرایی و صحت نتایج بدست آمده را تضمین می‌نماید. ضمناً در بعضی شرایط هم به علت غیر خطی بودن معادلات و در پی آن تمایل مقادیر خروجی به واگرایی، ناگزیر به استفاده از این روش می‌باشیم.

با در نظر گرفتن مطالب بیان شده مقادیر اولیه صفر برای سرعت در جهت‌های عرضی و مقدار یک برای سرعت محوری فرض شده است. دمای نقاط مختلف کانال در دو شرط مرزی دما ثابت و شار حرارتی ثابت در حالت اولیه یک فرض شده است. لازم بذکر است که تمامی مقادیر اولیه فرض شده برای سیستم بی‌بعد می‌باشد. مقادیر اولیه کمیت‌هایی از جمله ویسکوزیته، ضریب رسانش، ظرفیت حرارتی ویژه و ضریب آسودگی تنش که با تغییرات دما در طول کانال تغییر می‌کنند، برابر با مقدار آنها در دمای ورودی کانال در نظر گرفته شده است. شرایط اولیه مفروض برای حل این مسئله در روابط (۲۷-۳) نشان داده شده است.

$$\begin{aligned} u^*(\cdot, \cdot, \cdot)|_{t=0} &= 0, \quad v^*(\cdot, \cdot, \cdot)|_{t=0} = 0, \quad w^*(\cdot, \cdot, \cdot)|_{t=0} = 1 \\ T^*(\cdot, \cdot, \cdot)|_{t=0} &= 1, \quad k(\cdot, \cdot, \cdot)|_{t=0} = k_o, \quad \lambda(\cdot, \cdot, \cdot)|_{t=0} = \lambda_o \\ Cp(\cdot, \cdot, \cdot)|_{t=0} &= C_{p_o}, \quad \eta(\cdot, \cdot, \cdot)|_{t=0} = \eta_o \end{aligned} \quad (27-3)$$

بدیهی است که شرایط اولیه بیان شده بهترین شرایط اولیه از نظر نگارنده برای تحقیق مورد نظر بوده و شرط عدم اثر گذاری این شرایط بر نتایج حالت دائم و همچنین همگرایی جواب‌ها به مقادیر صحیح و قابل قبول در تمامی حالت‌های گزارش شده مورد بررسی قرار گرفته و صحت آن تایید شده است.

۳-۶- خطای محاسباتی

در این تحقیق نیز همانند تمامی مدل‌سازی‌های عددی نتایج بدست آمده مقداری با نتایج حل دقیق تفاوت داشته که این تفاوت حاصل از خطای عددی می‌باشد. البته لازم بذکر است که در بعضی از مسائل، از جمله تحقیق حاضر، حل دقیق وجود نداشته و حل عددی ناگزیر به نظر می‌رسد. فقط می‌بایست در حل عددی سعی در از بین بردن منابع خطا و یا حداقل نمودن آنها شود.

دو خطای رایج در محاسبات عددی، خطای کوتاه‌سازی و یا همان ترانکیشن^۱ و دیگری خطای رندسازی^۲ می‌باشد. عامل بوجود آمدن خطای کوتاه‌سازی، جایگزینی برخی از ترم‌های موجود در معادلات حاکم بر مسئله با تعداد جملات متناهی از فرم‌های گسسته آنها مانند بسط تیلور می‌باشد. با توجه به اینکه در مدل‌سازی‌های عددی مجبور به جایگزینی عبارت‌های پیوسته معادلات حاکمه بوسیله بسط‌های گسسته آنها بر روی شبکه محاسباتی و سلول‌های ایجاد شده می‌باشیم، در تمامی تحقیقات انجام شده بوسیله مدل‌سازی‌های عددی این خطا ناگزیر به نظر می‌رسد ولی می‌توان با استفاده از برخی روش‌های موجود، مقدار این خطا را کاهش داد. با توجه به جایگزینی معادلات حاکمه بوسیله مقدار متناهی از جملات بسط تیلور، بدیهی به نظر می‌رسد که با افزایش جملات مورد استفاده از این سری می‌توان تفاوت بین مقدار اصلی کمیت و مقدار تخمین زده شده آن را کاهش داد. البته با توجه به افزایش توان جملات موجود در سری، انتخاب تعداد بیشتری از جملات باعث پیچیده‌تر شدن مدل‌سازی و در پی آن افزایش ناپایداری حل شود. مطلب اثر گذار دیگر بر خطای کوتاه‌سازی، اندازه سلول‌های محاسباتی می‌باشد. با توجه به ثابت بودن فضای محاسباتی با افزایش تعداد سلول‌های مورد استفاده می‌توان اندازه سلول‌ها را کاهش داد که این عمل در نهایت به کاهش خطای کوتاه‌سازی منجر می‌شود. البته باید توجه داشت که افزایش تعداد سلول‌ها باعث افزایش خطای رندسازی شده که در ادامه بیشتر راجع به آن توضیح داده می‌شود.

^۱ -Truncation

^۲ -Round-off

همانطور که گفته شد در این تحقیق از روش تفاضل محدود جهت گسسته‌سازی معادلات استفاده شده است و با توجه به تخمین جملات مشتق مرتبه اول نواحی مرزی با تفاضل محدود پیش-رو و پس‌رو که جملات موثر در خطای کوتاه‌سازی آنها از مرتبه اول اندازه سلول‌های شبکه بوده و همچنین استفاده از تفاضل محدود مرکزی برای تخمین جملات مشتق مرتبه اول و بالاتر که جملات موثر در کوتاه‌سازی آنها از مرتبه دوم اندازه سلول‌های شبکه می‌باشد، حداکثر خطای حاصل از این موضوع، وابسته به سایز شبکه و کمتر از توان دوم آن می‌باشد.

دیگر خطای موجود در محاسبات عددی خطای رندسازی می‌باشد که منبع اصلی این خطا رند کردن اعداد اعشاری مورد استفاده در محاسبات توسط پردازنده می‌باشد. به عبارت دیگر هرچه اعداد اعشاری با دقت بیشتری مورد استفاده قرار گیرند خطای رندسازی اثر کمتری در محاسبات خواهد داشت. البته بر عکس خطای کوتاه‌سازی، مقدار این خطا با تعداد سلول‌های شبکه رابطه مستقیم دارد و با افزایش نودهای محاسباتی، مقدار این خطا افزایش می‌یابد. چرا که با افزایش نودها، مقدار محاسبات عددی مربوط به کل شبکه بیشتر شده و در حقیقت تعداد منابع ایجاد خطای رندسازی بیشتر می‌شود. البته با توجه به اینکه در تحقیق حاضر از نرم افزار متلب¹ جهت انجام محاسبات استفاده شده و همچنین فرمت اعشاری دقیق² با دقت 10^{-16} برای اعداد در نظر گرفته شده است، لذا حداکثر خطای رندسازی در هر عملیات انجام شده، کمتر از 10^{-16} بوده که در مقیاس بزرگی اعداد مورد محاسبه، قابل صرف نظر کردن می‌باشد. با توجه به اثر معکوس تعداد نودهای محاسباتی بر خطای کوتاه‌سازی و اثر مستقیم و ناچیز آن بر خطای رندسازی، انتظار آن می‌رود که در این تحقیق با افزایش تعداد سلول‌های شبکه، مقدار خطای کلی محاسبات کاهش یابد که البته این عمل باعث افزایش هزینه محاسبات می‌شود. بدین منظور شبکه‌های محاسباتی متفاوتی مورد بررسی قرار گرفته که از میان آنها شبکه بهینه انتخاب شده است. در فصل بعد توضیحات بیشتری در این زمینه ارائه خواهد شد.

¹ - Matlab Software

² - Format Long

۳-۷- الگوریتم حل

با توجه به مطالب بیان شده تاکنون، روند مدل‌سازی عددی استفاده شده در این تحقیق به تفصیل مورد بررسی قرار گرفته و معادلات حاکم، نحوه گسسته‌سازی آنها و همچنین روش عددی مورد استفاده و شرایط مرزی آنها ارائه شده است. جهت انجام محاسبات ریاضی و حل معادلات گسسته، برنامه‌ای با استفاده از نرم افزار متلب تهیه شده است که در این قسمت به صورت کلی به روند انجام محاسبات و ترتیب مراحل انجام شده (الگوریتم حل^۱) در این برنامه اشاره خواهیم کرد.

روند انجام محاسبات در کد تهیه شده در این تحقیق به شرح زیر است.

۱- وارد نمودن اطلاعات هندسی و مقادیر مربوط به کمیت‌ها

در ابتدای اجرای برنامه می‌بایست ابعاد شبکه، تعداد نودهای محاسباتی، ابعاد نودهای محاسباتی، مقدار مربوط به خواص هیدرودینامیکی و حرارتی سیال از قبیل ویسکوزیته، ضریب هدایت، ... و همچنین شرایط جریان ورودی کانال از قبیل دما و سرعت ورودی تعیین شوند. با مشخص شدن این مقادیر، همه کمیت‌ها با استفاده از تعاریف مربوطه بی‌بعد شده و برخی از پارامترها و اعداد بی‌بعد اثر گذار در جریان و انتقال حرارت از قبیل عدد رینولدز، پرانتل و .. محاسبه می‌شوند. پس از آن برخی از پارامترهای مربوط به روش عددی مورد استفاده از قبیل گام زمانی، سرعت صوت مصنوعی، خطای مجاز محاسبات و ... تعیین می‌شوند.

۲- اعمال شرایط اولیه

علی‌رغم تمرکز تحقیق به حل دائم مسئله مورد نظر، با توجه به روش استفاده شده در این تحقیق می‌بایست شرایط اولیه جهت شروع حل نیز تعیین شوند که تعیین این شرایط با توجه به مطالب بیان شده در قسمت‌های مربوطه انجام می‌پذیرد.

¹-Algorithm

❖ حلقه اصلی برنامه

۳- محاسبه برخی از پارامترهای مورد نیاز از جمله سرعت و گرادیان‌های مربوط به آنها بر روی

شبکه اولیه (نودهای زوج)

از آنجا که در روند حل نیاز به استفاده از مقدار برخی پارامترها و یا مشتق آنها در شبکه‌های ابتدایی و ثانویه می‌باشد، از این‌رو می‌بایست مقدار آنها بر روی هر دو شبکه موجود باشد. با توجه به اینکه تعریف اولیه هر پارامتر تنها بر روی یکی از دو شبکه موجود می‌باشد، می‌بایست مقدار برخی پارامترهای مورد نیاز را بر روی شبکه دیگر نیز محاسبه نماییم.

۴- محاسبه و برآورد برخی از پارامترها در نودهای مجازی خارج از دامنه حل. همانطور که در بخش (۲-۳) به تفصیل بیان شد، با توجه به وجود دو شبکه حل و همچنین به منظور قابلیت اعمال شرایط مرزی، می‌بایست برخی از پارامترها در نودهای مجازی خارج از دامنه حل نیز تعریف شوند.

۵- محاسبه تانسور نرخ برش با استفاده از مقادیر گرادیان سرعت بر روی شبکه اولیه.

۶- محاسبه برخی از جملات مربوط به معادله متشکله از جمله حاصل ضرب سرعت در تانسور تنش. در این قسمت با استفاده از زیر برنامه‌های تهیه شده در نرم افزار متلب، برخی از مقادیر مربوط به معادلات حاکمه از جمله ترم‌های موجود در معادله متشکله، نرخ برش تعمیم‌یافته، توابع ویسکومتریک و ... به صورت جداگانه و با فراخوانی مقادیر اثرگذار در آنها محاسبه می‌شود.

۷- محاسبه تنش پلیمری.

در این قسمت تانسور تنش پلیمری با توجه به تعریف آن در معادله متشکله و با استفاده از ترم‌های تشکیل دهنده آن که در قسمت‌های قبل مورد محاسبه قرار گرفته اند، تعیین می‌شود.

۸- محاسبه تنش پلیمری در نودهای مجازی

با توجه به دلایل بیان شده در قسمت‌های قبل، مقدار تنش در نودهای مجازی خارج از شبکه محاسباتی جهت اعمال شرایط مرزی تنش نیز محاسبه می‌شود.

۹ - حل معادله ممنوم

در این قسمت در ابتدا جملات تشکیل دهنده معادلات ممنوم با استفاده از مقادیر پارامترهای مربوط در گام زمانی فعلی محاسبه شده و پس از آن با استفاده از گسسته‌سازی انجام شده بر روی معادلات ممنوم، مقادیر مربوط به سرعت‌ها در سه جهت x, y, z در گام زمانی جدید با استفاده از مقادیر تعریف شده در گام زمانی قبلی محاسبه می‌شود.

۱۰ - اعمال شرایط مرزی سرعت

در این قسمت شرایط مرزی سرعت در مرزهای ورودی و خروجی، دیواره‌ها و مرزهای تقارن با استفاده از مقادیر جدید بدست آمده و با توجه به مطالب بیان شده در قسمت مربوط به شرایط مرزی اعمال می‌شود.

۱۱ - حل معادله پیوستگی

در این قسمت با استفاده از مقادیر جدید بدست آمده برای میدان سرعت در گام زمانی جدید و مقادیر فشار در گام زمانی قبلی، معادله پیوستگی حل شده و میدان فشار در گام زمانی جدید محاسبه می‌شود.

۱۲ - حل معادله انرژی

در این قسمت در ابتدا جملات تشکیل دهنده معادله انرژی از قبیل کار میدان تنش، ترم نفوذ حرارتی، ترم جابجایی حرارتی و ... با استفاده از مقادیر مربوط به سرعت و تنش در گام زمانی جدید و مقادیر مربوط به دما در گام زمانی فعلی حساب شده و پس از آن با استفاده از گسسته‌سازی انجام شده بر روی معادله انرژی، مقادیر مربوط به میدان دما در گام زمانی جدید محاسبه می‌شود.

۱۳ - اعمال شرایط مرزی دما

در این قسمت بنا به شرایط مرزی در نظر گرفته شده برای دما (شرایط مرزی حرارتی T یا H_2) این شرایط بنا به توضیحات داده شده بر روی مقادیر مرزی اعمال می‌شوند.

۱۴ - محاسبه مقادیر جدید پارامترهای جریان و انتقال حرارت وابسته به دما

در این قسمت مقادیر جدید پارامترهایی که مقدار آنها وابسته به دما بوده از قبیل ویسکوزیته، ضریب هدایت حرارتی و ... با استفاده از توابع در نظر گرفته برای آنها نسبت به میدان دمای جدید بدست آمده، محاسبه می‌شوند.

۱۵ - محاسبه مقدار باقیمانده

با استفاده از مقادیر بدست آمده برای پارامترهای جریان و انتقال حرارت (فشار، سرعت، دما) در گام زمانی جدید و مقادیر مربوط به آنها در گام زمانی قبلی، مقدار تفاوت بین آنها که همان خطای این مقادیر از حالت دائم حل می‌باشد، محاسبه می‌شود.

۱۶ - ترسیم نمودار همگرایی

به منظور رویت روند همگرایی برنامه در زمان اجرا، مقادیر باقیمانده معادلات نسبت به گام زمانی بر روی یک نمودار ترسیم می‌گردد.

۱۷ - سنجش مقادیر باقیمانده با معیارهای همگرایی

در این قسمت مقادیر باقیمانده محاسبه شده با معیارهای همگرایی در نظر گرفته شده که همان دقت قابل قبول محاسبات می‌باشند، سنجیده شده و در صورت ارضای آنها، جواب‌های بدست آمده به عنوان جواب‌های قابل قبول معرفی می‌شوند و در صورت رد آنها، این جواب‌ها به عنوان حدس‌های اولیه برای شروع محاسبات در گام زمانی جدید در نظر گرفته شده و محاسبات به ابتدای گام ۳ برمی‌گردد و از ابتدای این مرحله محاسبات مجدداً انجام شده و تا جاییکه دقت محاسبات به حد قابل قبول برسد، این روند ادامه می‌یابد.

❖ پایان حلقه اصلی برنامه

۱۸ - پایان

فصل چهارم

نتایج عددی

۴-۱- مقدمه

در این فصل، نتایج بدست آمده از مدل‌سازی عددی برای جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در حال توسعه در کانال‌های مستطیلی که با استفاده از سه معادله متشکله، فن تین تر، کریمینال اریکسون فیلیبی و گزیکس مدل‌سازی شده‌اند، ارائه خواهد شد. در ابتدای این فصل شرایط اعمال شده به منظور میل به جواب قابل قبول مسئله آورده شده است. در ادامه به منظور دستیابی به شبکه‌بندی مناسب دامنه محاسباتی، استقلال حل از شبکه بررسی شده و میزان خطا و هزینه محاسباتی مربوط به هر شبکه ارایه شده است و در نهایت شبکه‌بندی بهینه انتخاب شده است. در ادامه فصل و قبل از ارایه نتایج این تحقیق، صحت و درستی نتایج بدست آمده با استفاده از معیارهای موجود و همچنین تحقیقات پیشین در حالت‌های ممکن ارزیابی می‌گردد و پس از آن به ارایه نتایج بدست آمده از این تحقیق در دو مبحث جریان و انتقال حرارت سیال می‌پردازیم. لازم بذکر است که در هر مورد مشخصه‌های میداین جریان و انتقال حرارت ارایه شده و مقادیر اثر گذار بر این مشخصه‌ها نیز مورد بررسی قرار می‌گیرند.

۴-۲- شرایط و الگوی همگرایی

همانطور که در فصل‌های پیشین بیان شد، در این تحقیق با تبدیل معادلات به صورت شبه گذرا، از روش تکرار برای حل معادلات استفاده شده است. بدین صورت که در هر تکرار، تمامی معادلات پیوستگی، ممنوم، انرژی و معادلات متشکله مورد حل قرار می‌گیرند و نتایج بدست آمده از آنها که همان مقادیر مربوط به میدان فشار، میدان سرعت، میدان دما و میدان تنش می‌باشد با مقادیر بدست آمده از حل در تکرار قبلی مقایسه می‌شوند. در صورتی که مقدار تفاوت آنها کمتر از مقدار خطای قابل قبول در نظر گرفته شده باشد، جواب این تکرار به عنوان جواب مسئله مورد قبول واقع می‌شود و در صورتی که تفاوت آنها بیشتر از خطای مورد قبول باشد، جواب‌های بدست آمده به عنوان فرض اولیه برای تکرار بعدی انتخاب می‌شوند و این روند تا رسیدن به جواب‌های قابل قبول تکرار می‌شود. در

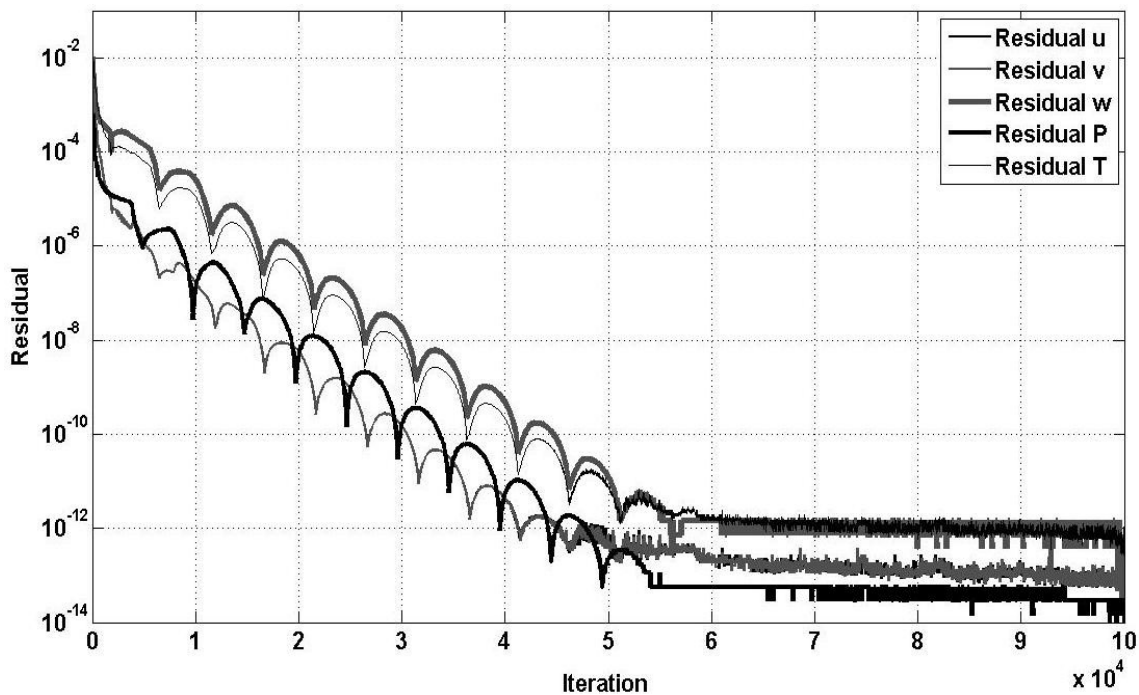
تحقیق مورد نظر مقدار تفاوت در جواب‌های بدست آمده از دو تکرار متوالی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$Residual(A) = \text{Max} \left(\frac{A^{n+1}(:, :, :) - A^n(:, :, :)}{\Delta t} \right) \quad (1-4)$$

که در آن بالانویس $(n+1)$ مربوط به نتایج حاصل از حل فعلی و بالانویس (n) مربوط به مقایسه حاصل از حل تکرار قبل می‌باشد و منظور از A پارامتر مورد نظر و Δt مقدار گام زمانی مجازی حل می‌باشد. علت تقسیم کردن مقدار تفاوت بین جواب‌ها به مقدار Δt هم اینست که در معادلات مربوط به آن مقادیر تمامی جملات در Δt ضرب شده اند. با توجه به کمتر از یک بودن مقدار Δt با این کار هم می‌توان دقت جواب‌ها را بالا برده و هم اثر ضرب شدن جملات در Δt از بین می‌رود. در این حالت مقدار خطای مجاز برای جواب‌های همه معادلات حاکمه، مقدار 10^{-8} در نظر گرفته شده است که با توجه به بزرگی اعداد مورد استفاده در این تحقیق مقدار بسیار مناسبی به نظر می‌رسد. البته با توجه به اینکه در این تحقیق بعضی از معادلات حاکمه، غیر خطی می‌باشند روند همگرایی معادلات به جواب‌های قابل قبول، روندی یکنوا نیست. همانطور که در شکل (1-4) مقدار باقیمانده هر معادله در هر گام زمانی یا به عبارت دیگر روند همگرایی معادلات نشان داده شده است، معادلات حاکمه روندی نوسانی در همگرایی به جواب‌های قابل قبول از خود نشان می‌دهند و لازم به ذکر است که با اندک تغییری در برخی مقادیر مفروض، جواب‌های معادلات کاملاً واگرا می‌شوند. بدین منظور و همانطور که پیشتر به این مطلب اشاره کردیم جهت اعمال تغییرات در یک کمیت، این عمل را بصورت تدریجی انجام داده و جواب‌های هر مرحله را به عنوان فرض اولیه برای مرحله بعد انتخاب می‌نماییم. مقادیر پایه فرض شده برای کمیت‌های مورد نظر به همراه نمونه‌ای از نحوه همگرایی جواب‌ها در جدول (1-4) و شکل (1-4) نشان داده شده است.

جدول (۴-۱): مقادیر پایه فرض شده برای کمیت‌های مورد نظر در مدل فن تین تنر

β	ξ	ε	n	$\rho (kg/m^3)$	$\lambda_0 (s)$	$W_{ref} (m/s)$	$D_n (m)$
1	0.2	0.1	2	1000	0.0135	0.1	0.1
$T_{in} (^{\circ}k)$	k_0^*	$k_0 W / (mk)$	$\alpha (k)$	$C_{p_s}^* 1 / (^{\circ}C)$	$C_{p_0}^*$	$C_{p_0} J / (kgK)$	$k_s^* 1 / (^{\circ}C)$
303.15	0.7753	0.08	1720	-0.00112	1.2122	0.04	0.00118



شکل (۴-۱): نمونه‌ای از نحوه همگرایی جواب‌ها

۴-۳- استقلال حل از شبکه

یکی از مطالب قابل توجه دیگر که قبل از دستیابی به جواب‌ها در هر مدل‌سازی عددی می‌بایست به آن پرداخته شود، استقلال جواب‌های بدست آمده از شبکه بندی دامنه محاسباتی می‌باشد. به عبارت دیگر نظر به اینکه در حل عددی دامنه حل را به شبکه‌های کوچکتری تقسیم بندی کرده و سپس معادلات حاکم بر مسئله را در این فضاهاى کوچکتر که معروف به سلول می‌باشند بررسی می‌-

نماییم و این عمل صرفاً یک روش در دستیابی به جواب کلی مسئله می‌باشد، نباید اندازه و مدل این سلول‌ها تاثیری در جواب نهایی مسئله ایجاد نماید. در این تحقیق بنا به هندسه مورد بررسی که یک استوانه مستطیلی می‌باشد، بدیهی است که بهترین نوع شبکه بندی برای این دامنه، شبکه بندی با سلول‌های مستطیلی می‌باشد. از این‌رو در تمامی حالات مدل‌سازی در این تحقیق از شبکه‌هایی با نودهای مکعب مستطیل استفاده شده است.

همانطور که در فصل قبل اشاره شده ریز کردن اندازه سلول‌های محاسباتی و در پی آن افزایش تعداد سلول‌ها باعث افزایش خطای رندسازی و کاهش خطای کوتاه سازی می‌شود و از طرف دیگر به علت افزایش تعداد شبکه، تعداد محاسبات لازم و همچنین هزینه محاسباتی نیز افزایش پیدا می‌کند. از این‌رو فضای محاسباتی در این تحقیق با شبکه‌بندی با سایزهای متفاوت مورد تحلیل قرار گرفت تا شبکه مناسبی که اولاً مقدار خطای عددی آن در حد خطای قابل قبول باشد و همچنین به ازای آن هزینه محاسباتی افزایش چندانی نداشته باشد، انتخاب شود. همانطور که در جدول (۴-۲) دیده می‌شود پنج شبکه مختلف جهت شبکه‌بندی دامنه محاسباتی مورد بررسی قرار گرفت که از میان آنها سه شبکه ابتدایی خطای زیادی در جواب‌ها ایجاد می‌کنند و کوچک کردن اندازه سلول‌های شبکه باعث افزایش دقت جواب‌ها می‌شود. ولی در تغییر شبکه از N_3 به N_4 و N_4 به N_5 تغییر زیادی در دقت جواب‌ها حاصل نشد، ولی در عوض هزینه محاسبات به نحو چشمگیری افزایش پیدا می‌کند. با توجه به اینکه خطای حاصل از شبکه‌بندی N_3 برای این محاسبات قابل قبول بوده و از طرف دیگر افزایش تعداد سلول‌ها هزینه محاسبات را به نحو زیادی بالا می‌برد، این شبکه به عنوان شبکه بهینه در تمامی محاسبات مورد استفاده واقع شده است. شایان ذکر است که مقدار خطا بر حسب قانون بقای جرم و با استفاده از معادله پیوستگی سنجیده شده است.

جدول (۴-۲): مقادیر خطا و زمان محاسبه برای شبکه‌بندی‌های مختلف

شبکه	تعداد سلول‌های شبکه	درصد خطا	زمان محاسبه ($Second * GHz$)
N_1	$24 \times 24 \times 204$	۵,۱۲	۲۱۸۸۸۰

۵۵۲۹۶۰	۱,۱۰۲	۴۴×۴۴×۲۰۴	N_2
۱۳۸۲۴۰۰	۰,۵۶	۶۴×۶۴×۳۰۴	N_3
۲۵۲۷۶۰۰	۰,۲۳۶	۸۴×۸۴×۴۰۴	N_4
۳۸۲۹۴۲۰	۰,۱۲۵	۱۰۴×۱۰۴×۵۰۴	N_5

ضمناً در مدل‌سازی انجام شده در این تحقیق با نسبت‌های متفاوت سطح مقطع نیز، تمامی محدودیت‌ها و شرایط لازم در انتخاب صحیح شبکه مناسب رعایت شده است و در نهایت شبکه‌بندی مورد استفاده در هر نسبت ابعاد در جدول (۳-۴) نشان داده شده است. نکته مهم دیگر در شبکه‌بندی دامنه محاسباتی توجه کردن به اندازه گام‌های مکانی نسبت به گام زمانی جهت جلوگیری از واگرایی جواب‌ها در روش حل صریح می‌باشد.

جدول (۳-۴): شبکه‌بندی‌های مورد استفاده به ازای نسبت ابعاد مختلف سطح مقطع

نسبت اضلاع	۱	۲	۴
شبکه‌بندی مورد استفاده	۶۴×۶۴×۳۰۴	۶۴×۸۴×۳۰۴	۶۰×۱۰۰×۴۰۴
نسبت اضلاع	۶	۱۲	۱۶
شبکه‌بندی مورد استفاده	۶۰×۱۲۰×۴۰۴	۴۰×۱۶۰×۵۰۴	۴۰×۲۰۰×۵۰۴

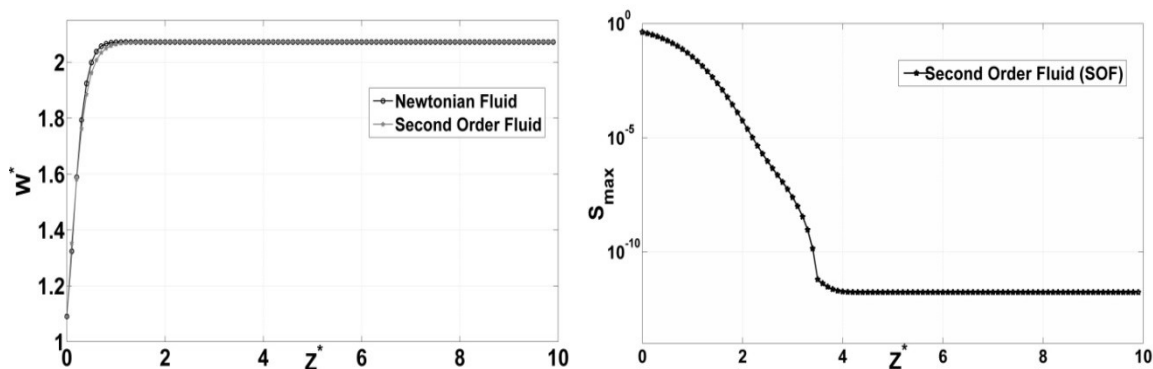
در تمامی مدل‌های انتخابی در شبکه بندی دامنه حل، سعی بر آن شده است که نسبت ابعاد سلول‌ها از ۳ بیشتر نشود.

۴-۴- ارزیابی صحت نتایج

در این تحقیق نیز بنا به روند موجود برای کلیه مدل‌سازی‌های عددی، می‌بایست صحت نتایج بدست آمده مورد ارزیابی قرار گیرند. زیرا که در مدل‌سازی‌های عددی با انتخاب روشی نامناسب برای حل و یا گسسته‌سازی نادرست معادلات و یا فرض مقادیر نامناسب برای کمیت‌های موجود می‌تواند جواب‌ها را به سمت جواب‌های غیر قابل قبول همگرا نماید و از طرف دیگر جهت استفاده دیگر محققین از نتایج گزارش شده این امر ضروری به نظر می‌رسد. از این‌رو نتایج بدست‌آمده در این تحقیق در زمینه‌های مشترک با نتایج عددی ارائه شده توسط تحقیقات دیگر، قضایا و روش‌های موجود و یا نتایج آزمایشگاهی ارائه شده مورد مقایسه قرار گرفته است که نتایج آن ارائه می‌گردد.

یکی از روش‌های صحت‌سنجی نتایج، بررسی برقرار بودن قضیه گزیکس^۱ برای جریان خزشی^۲ سیال مرتبه دوم است. بر اساس قضیه گزیکس حل جریان ویسکوالاستیک در اعداد رینولدز بسیار پایین با استفاده از مدل سیال مرتبه دو در حالت $\psi_2 = \frac{-\psi_1}{2}$ می‌بایست با نتایج حاصل از سیال نیوتنی برابر باشد [۱].

همانطور که در شکل (۲-۴) مشخص است، نتایج بدست آمده برای سرعت محوری از این تحقیق برای جریان خزشی ($Re = 0.000001$) سیال مرتبه دو با حل حاصل از سیال نیوتنی برابری می‌کند و همچنین، شدت جریان‌های عرضی در ناحیه توسعه یافته برای جریان سیال مرتبه دو در حد 10^{-13} کاهش می‌یابد که در مورد سیال نیوتنی هم‌چنین شرایطی پیش‌بینی می‌شود که در نهایت این مطلب تطبیق نتایج با قضیه گزیکس را نشان می‌دهد.



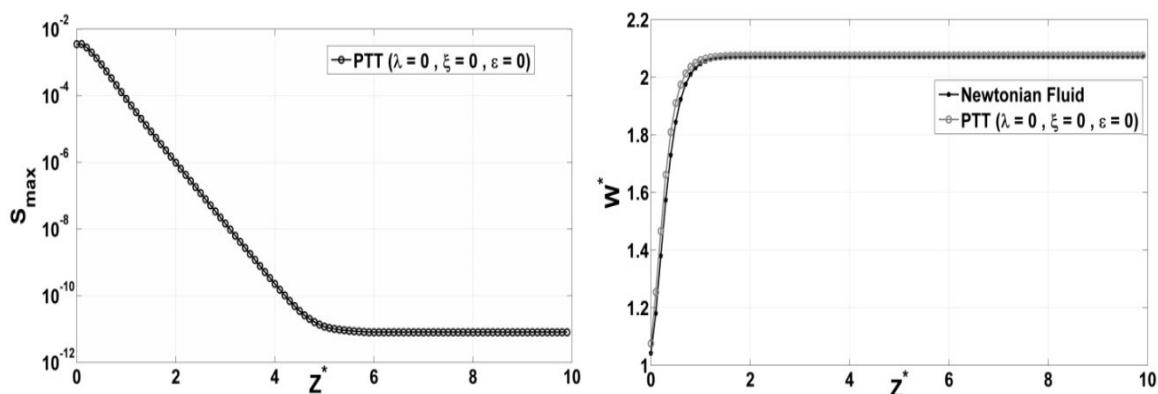
شکل (۲-۴): سرعت محوری و شدت جریان‌های عرضی در راستای کانال در مدل‌سازی با استفاده از جریان خزشی مدل سیال مرتبه دو و جریان نیوتنی

حالت دیگر ارزیابی نتایج، مقایسه نتایج حاصل از مدل‌سازی با معادله متشکله فن تین تر در حالت صفر بودن ثابت زمانی و پارامترهای مادی با نتایج سیال نیوتنی می‌باشد چراکه در مدل فن تین تر با قرار دادن $\lambda, \xi, \varepsilon$ برابر صفر و همچنین $\eta_0 = \eta_\infty$ ، این مدل به مدل نیوتنی تبدیل می‌شود [۴۳]. در این حالت می‌توان جواب‌های بدست‌آمده از این کد را با جواب‌های دیگر مراجع و همچنین جواب‌های حاصل از حل جریان سیال نیوتنی در کانال‌های مستطیلی مقایسه نمود. همانطور

¹ - Giesekus law

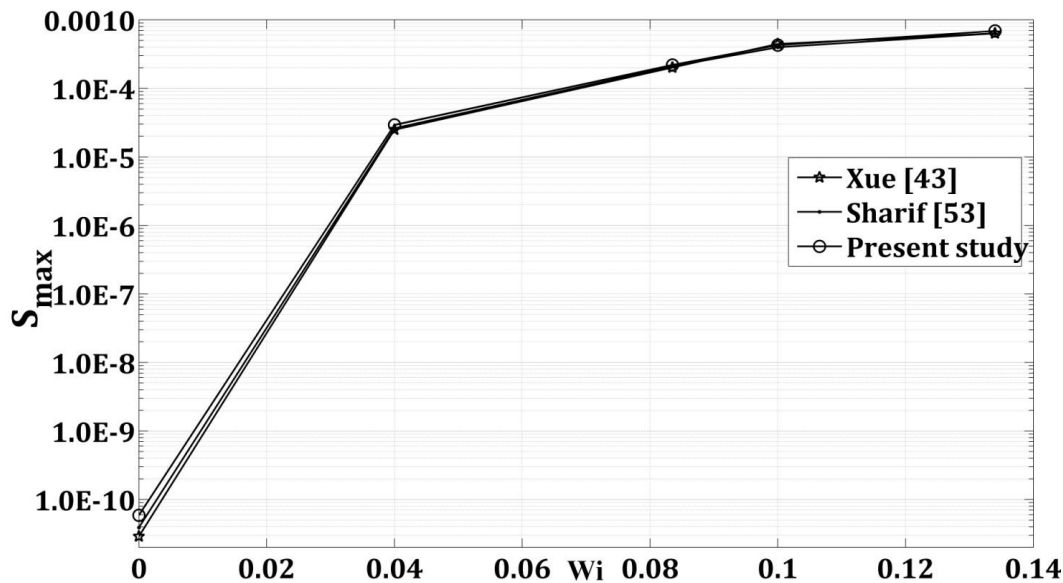
² - Creeping flow

که در شکل (۳-۴) دیده می‌شود، در این حالت شدت جریان‌های ثانویه به سمت صفر میل کرده و همچنین سرعت محوری سیال شبیه جریان سیال نیوتنی می‌شود.



شکل (۳-۴): سرعت محوری و شدت جریان‌های ثانویه برای سیال نیوتنی و همچنین با استفاده از معادله فن تین تر در حالت صفر بودن $\lambda, \xi, \varepsilon$

نتایج بدست‌آمده در این تحقیق نیز در قسمت‌های مشابه، با نتایج ارائه شده توسط ژو [۴۳] و شریف [۵۳] نیز مورد مقایسه قرار گرفته است. در تحقیق ایشان شدت جریان‌های ثانویه در ناحیه توسعه یافته بر حسب تغییرات عدد وایزنبرگ بررسی شده است. با توجه به اینکه در این تحقیق، تحلیل در حالت سه‌بعدی انجام شده است و نتایج بدست‌آمده نواحی در حال توسعه و توسعه یافته را نیز شامل می‌شوند، با مقایسه نتایج ارائه شده در تحقیق ایشان و نتایج بدست‌آمده از این تحقیق در ناحیه توسعه یافته و پارامترهای مشابه تحقیق ایشان، تطابق نشان داده شده در شکل (۴-۴) حاصل شده است. لازم به ذکر است که در تحقیق ایشان شدت جریان‌های ثانویه بصورت معادله (۴-۸) تعریف شده است.

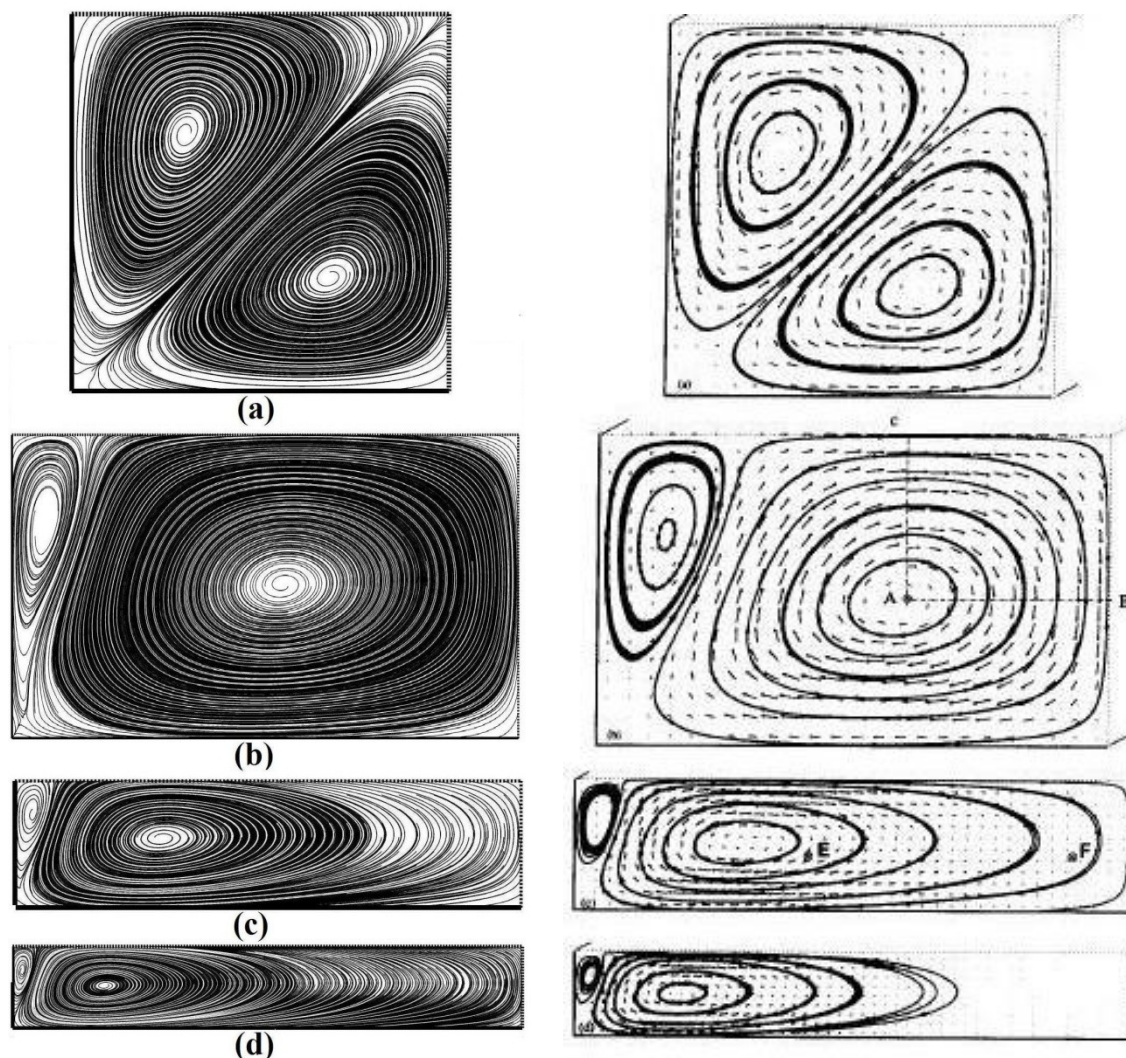


شکل (۴-۴): تاثیرات عدد وایزنبرگ بر شدت جریان‌های ثانویه در تحقیق حاضر و نتایج ارائه شده در مراجع [۵۳،۴۳]

همچنین در نتایج ارائه شده در تحقیق ایشان، اثر پارامترهایی همچون ε , ξ , n نیز به شدت جریان‌های ثانویه در ناحیه توسعه یافته بررسی شده است که در این زمینه هم تطابق خوبی حاصل شده است. لازم به ذکر است نتایج بدست‌آمده از این تحقیق در حالت سه‌بعدی نیز در حالت‌های مشابه با نتایج تحقیق شریف [۵۳] مورد مقایسه قرار گرفته است. البته به علت انجام فرض‌های غیر یکسان برای ورودی کانال در دو تحقیق، نتایج مربوط به ناحیه در حال توسعه گزارش شده در تحقیق شریف با نتایج بدست‌آمده از این تحقیق در ناحیه در حال توسعه متفاوت بوده ولی همانطور که بیان شد، نتایج مربوط به ناحیه توسعه یافته در دو تحقیق دارای تطابق خوبی می‌باشند.

همانطور که در شکل (۴-۵) نشان داده شده است نتایج بدست‌آمده در زمینه تشکیل جریان‌های ثانویه در مقاطع مستطیلی با نسبت اضلاع مختلف نیز در این تحقیق و نتایج ارائه شده توسط ژو [۴۳] و شریف [۵۳] که با استفاده از معادله متشکله فن تین تر و پارامترهای مادی یکسان انجام شده است، تطابق خوبی را نشان می‌دهد. در جریان سیال ویسکوالاستیک در کانال‌های مستطیلی در هر یک چهارم مقطع کانال دو جریان ثانویه شکل می‌گیرد که با افزایش نسبت ابعاد سطح مقطع کانال، گردابه نزدیک به ضلع بزرگتر، به سمت ضلع کوچکتر گسترش یافته و باعث تضعیف گردابه

کوچکتر و در نهایت حذف آن می‌شود به نحوی که در کانال‌هایی با نسبت ابعاد بیشتر، تنها یک گردابه در هر یک چهارم سطح مقطع کانال قابل رویت می‌باشد.



تحقیق حاضر

ژو و همکاران [۴۳]

شکل (۴-۵): جریان‌های ثانویه در $1/4$ مقطع کانال در نسبت‌های مختلف ابعاد

$$a) \frac{a}{b} = 1, \quad b) \frac{a}{b} = 1.56, \quad c) \frac{a}{b} = 4, \quad d) \frac{a}{b} = 6.25$$

نتایج بدست آمده از این تحقیق در زمینه انتقال حرارت نیز در زمینه‌های مشابه با دیگر نتایج ارائه شده توسط محققین، مورد مقایسه قرار گرفته است. که از آن جمله می‌توان به مقایسه عدد ناسلت در دو حالت دما و شار ثابت اشاره نمود. البته همانطور که پیشتر گفته شد، به علت تمرکز اکثر تحقیقات پیشین بر روی ناحیه توسعه یافته و در دست نبودن تحقیقی جامع مربوط به ناحیه در حال

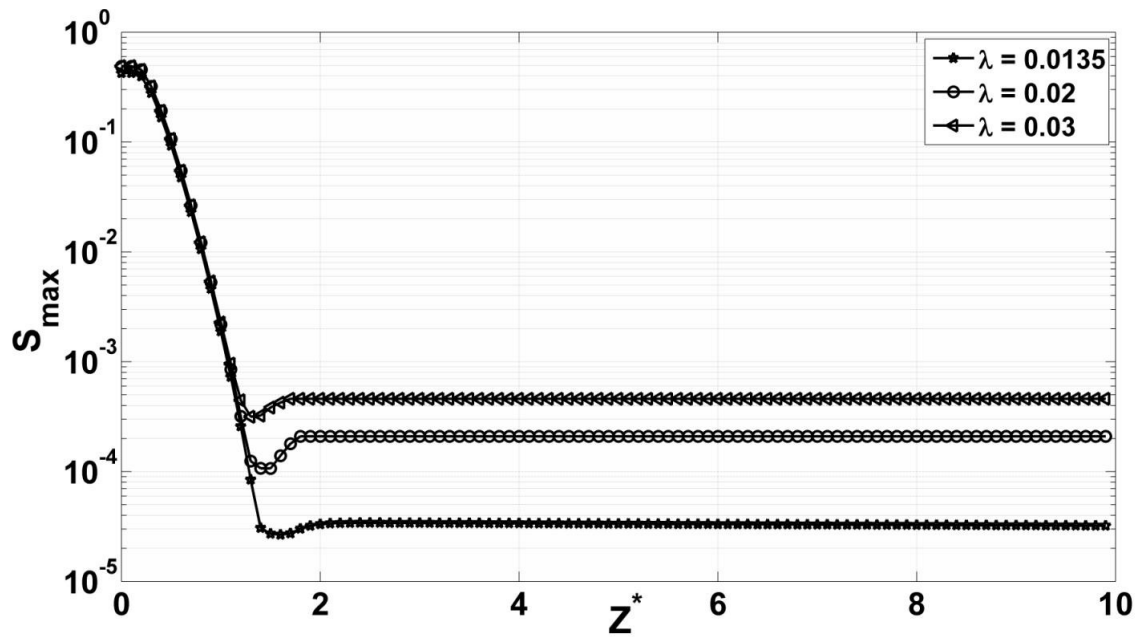
توسعه، نتایج مربوط به ناحیه توسعه یافته در این تحقیق با عدد ناسلت ارائه شده در تحقیقات شاه و لندن [۱۲۰] و نوروزی [۹۴] مورد مقایسه قرار گرفته است و همانطور که ادامه فصل و در قسمت مربوطه ارائه شده است، نتایج از تطابق خوبی برخوردار می‌باشند.

۵-۴ - نتایج میدان جریان

۴-۵-۱- جریان خزشی

در این تحقیق در ابتدا جریان خزشی سیال با استفاده از معادله متشکله فن تین تر بررسی می‌شود. بدین منظور عدد رینولدز جریان به حد قابل توجهی کاهش یافته و در این حالت اثر پارامترهای مادی و ثابت زمانی بر اختلاف تنش‌های نرمال و شدت جریان‌های عرضی و همچنین افت فشار مورد تحلیل قرار می‌گیرند.

همانطور که در شکل (۴-۶) و جدول (۴-۴) مشاهده می‌شود، در جریان خزشی سیال فن تین تر، افزایش ثابت زمانی λ و در پی آن پارامترهای مادی ϵ , ξ ، باعث افزایش اختلاف تنش‌های نرمال و در پی آن شدت جریان‌های عرضی در مقطع کانال می‌شود. از طرف دیگر با مقایسه نتایج جریان خزشی و نتایج جریان اینرسی در حالت برابر بودن تمامی پارامترهای مادی و ثابت زمانی، جریان درمی‌یابیم که در جریان خزشی سیال ویسکوالاستیک در عین توسعه سریع‌تر میدان جریان، شدت اختلاف تنش‌های نرمال و جریان‌های عرضی نیز در حدود چند برابر این کمیت‌ها در جریان اینرسی می‌باشد که علت این مطلب هم کم شدن اثر ترم جابجایی سرعت محوری در مقایسه با ترم مولفه‌های تنش در معادله ممنتوم می‌باشد. از طرف دیگر همانطور که در شکل (۴-۶) دیده می‌شود، در نمودار شدت جریان‌های عرضی جریان خزشی سیال ویسکوالاستیک بر خلاف جریان اینرسی، هیچ پرشی در راستای نمودار اتفاق نمی‌افتد که علت این مطلب هم افزایش تاثیر میدان تنش نسبت به نیروهای اینرسی جریان می‌باشد.



شکل (۴-۶): تاثیرات ثابت زمانی بر شدت جریان‌های ثانویه در جریان خزشی سیال $MPTT$

جدول (۴-۴): تاثیر ثابت زمانی بر مقدار بیشینه اختلاف تنش‌های نرمال اول و دوم و شدت

جریان‌های ثانویه در ناحیه توسعه یافته در جریان خزشی سیال $MPTT$

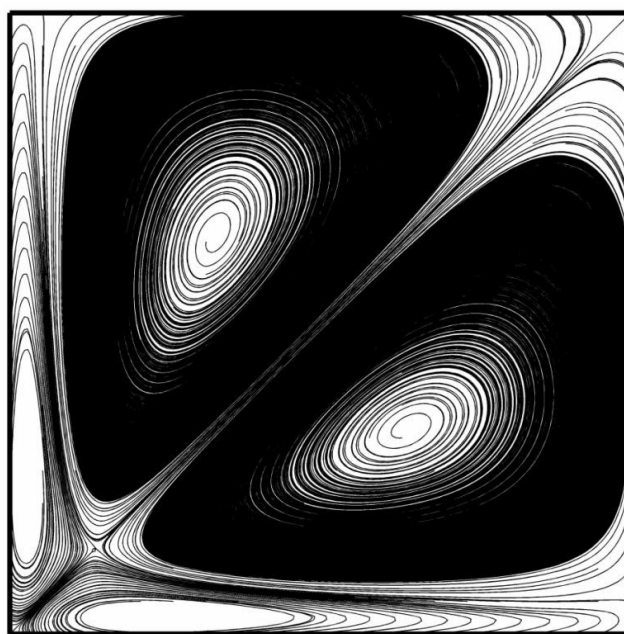
0.03	0.025	0.02	0.0135	λ
0.01539	0.00953	0.00469	0.00146	$Max(N_1^*)$
0.01187	0.00723	0.00362	0.00113	$Max(N_2^*)$
$4.857e-4$	$3.752e-4$	$2.241e-4$	$3.538e-5$	S_{Max}

لازم به ذکر است که در مدل‌سازی انجام شده با استفاده از معادله متشکله فن تین تر در حالت جریان خزشی، هیچ جریان ثانویه‌ای در ناحیه در حال توسعه تشکیل نمی‌شود. با رسیدن به ناحیه توسعه یافته، در هر یک چهارم کانال، دو جریان ثانویه شکل گرفته و تا پایان کانال ادامه می‌یابند که در ادامه فصل، توضیحات بیشتری در این مورد ارائه خواهد شد.

۴-۵-۲- ناپایداری

در اکثر مدل‌های ویسکوالاستیک، با افزایش خواص الاستیک سیال، ترم مربوط به تنش الاستیک سیال افزایش یافته و در پی آن فعالیت جریان‌های عرضی سیال بیشتر می‌شود و با افزایش

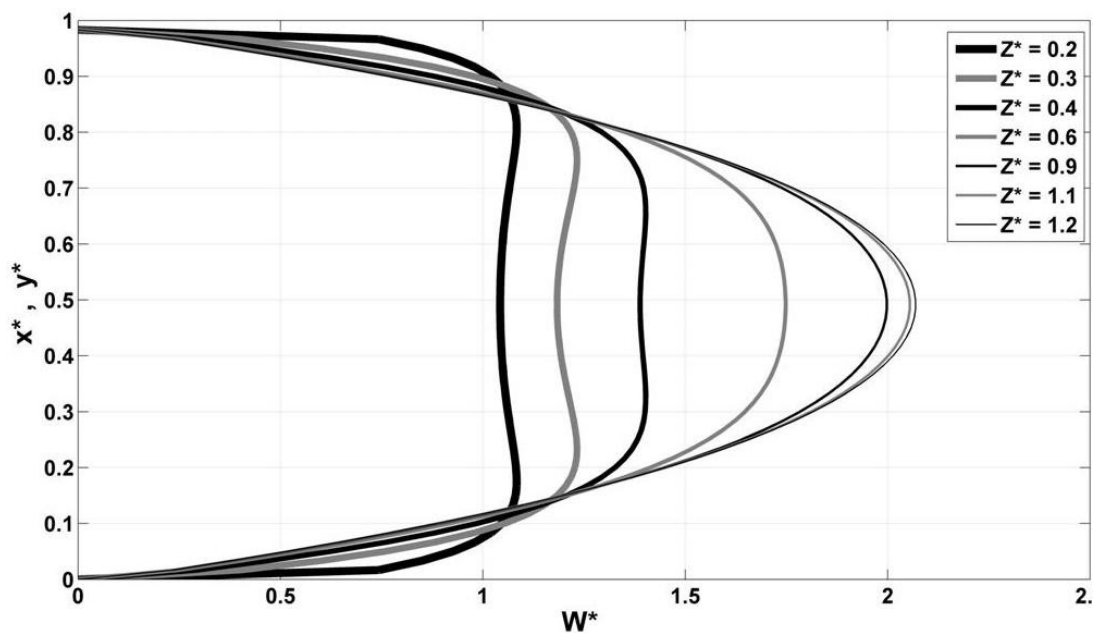
شدت جریان‌های عرضی، کد به سمت ناپایداری میل می‌نماید. البته با تغییر برخی از پارامترها می‌توان کد را به وضعیت پایدارتری تبدیل نمود که به عنوان مثال در این تحقیق از روش جداسازی تنش‌های نیوتنی از پلیمری و همچنین از تغییر گام به گام و تدریجی خواص جهت بالا بردن پایداری حل استفاده شده است که البته این روش‌ها هم تا محدوده خاصی از پارامترهای الاستیک کارساز می‌باشند. لازم به ذکر است که در تحقیق حاضر به علت سه بعدی بودن دامنه حل و همچنین غیر خطی بودن معادلات متشکله مورد استفاده، کد کامپیوتری ناپایداری نسبتاً بالایی داشته و از این‌رو افزایش خواص الاستیک تنها تا مقدار خاصی امکان پذیر می‌باشد. به‌عنوان مثال در مدل‌سازی جریان سیال ویسکوالاستیک در کانال‌های مستطیلی صاف با استفاده از مدل کریمینال اریکسون فیلیبی، با افزایش مقدار اختلاف تنش نرمال اول و همچنین افزایش مقدار اختلاف تنش نرمال دوم، جریان به سمت ناپایداری میل می‌نماید. به نحوی که در قسمت توسعه یافته کانال، علاوه بر دو جریان ثانویه موجود در هر یک چهارم کانال دو جریان دیگر شروع به تشکیل شدن می‌نماید این مطلب در شکل (۷-۴) نشان داده شده است.



شکل (۷-۴): تاثیر افزایش اختلاف تنش‌های نرمال بر ناپایداری جریان در مدل کریمینال اریکسون فیلیبی

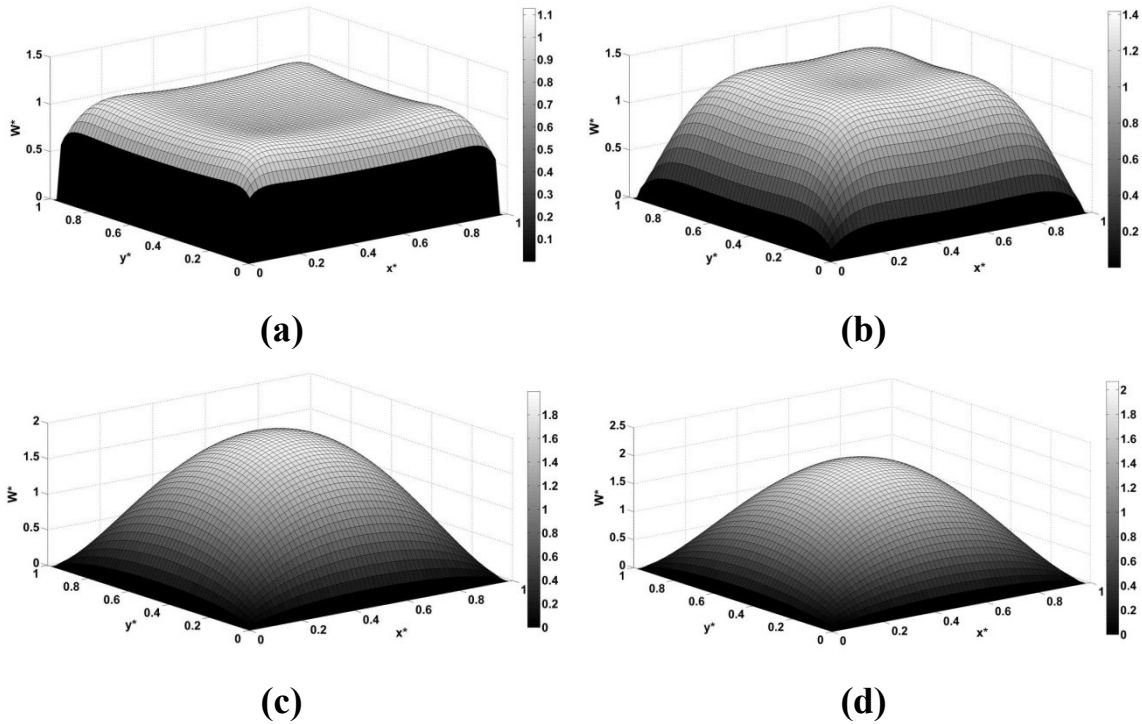
۴-۵-۳- جریان اینرسی

همانطور که در فصول قبلی بیان شد با فرض جریان یکنواخت^۱ در ورودی کانال، جریان از حالت یکنواخت وارد کانال شده و با پیشروی در کانال و تشکیل لایه مرزی، به حالت توسعه یافته خود نزدیک می‌شود. با توجه به شکل‌های (۴-۸) و (۴-۹) درمی‌یابیم که در مقاطع اولیه کانال پروفیل سرعت محوری دایما در حال تغییر بوده و به علت اثر گذاری شرایط عدم لغزش دیواره‌ها بر روی سرعت محوری، از ممنتوم اطراف دیواره‌ها کاسته شده و به ممنتوم سیال در نواحی مرکز کانال افزوده می‌شود. در این حالت سرعت بیشینه که روی نواحی مرکزی کانال اتفاق می‌افتد، دایما در حال افزایش می‌باشد. با رسیدن جریان به ناحیه توسعه یافته، پروفیل سرعت به حالتی دائمی رسیده و تا انتهای کانال بدون تغییر باقی می‌ماند.



شکل (۴-۸): پروفیل سرعت محوری در مقاطع مختلف کانال در حالت $Re=10$, $AR=1$

^۱ -Free stream

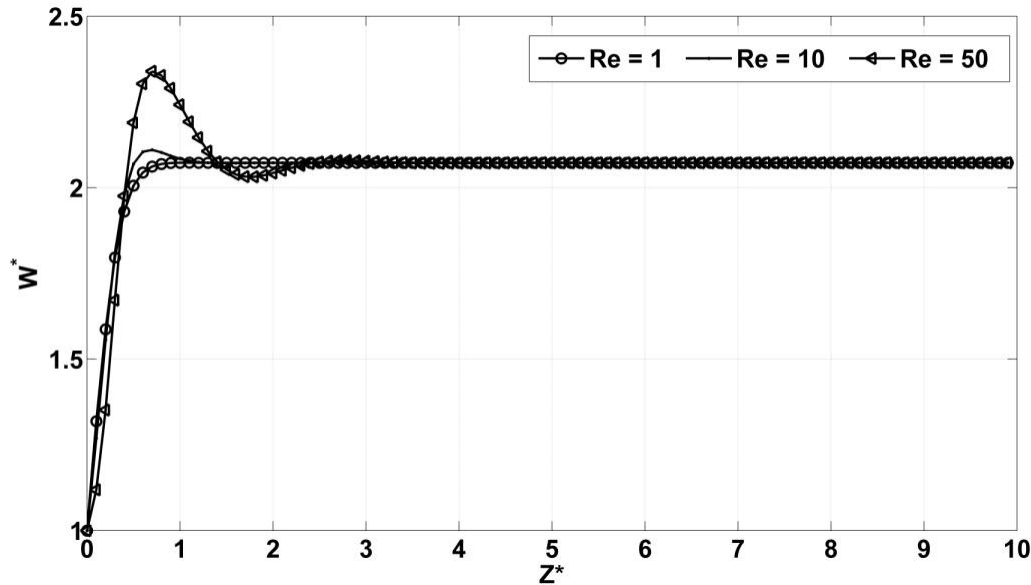


شکل (۴-۹): سطوح سرعت محوری بی بعد در مقاطع مختلف کانال در حالت $Re=10$, $AR=1$

$$a) z^* = 0.2, \quad b) z^* = 0.4 \quad c) z^* = 0.9, \quad d) z^* = 1.2$$

سرعت محوری بی بعد سیال در روی خط مرکزی کانال نیز از مقدار یک در دهانه ورودی شروع شده و در راستای کانال به علت تشکیل لایه مرزی و در پی آن کم شدن ممنوم عبوری از نواحی اطراف دیواره‌ها، افزایش می‌یابد. این افزایش تا نواحی توسعه یافتگی جریان ادامه می‌یابد. قبل از کامل شدن لایه مرزی و رسیدن جریان به ناحیه توسعه یافته، سرعت روی محور مرکزی کانال مقداری افزایش می‌یابد که علت آن رسیدن دو لایه مرزی در اطراف دیواره‌ها به یکدیگر و افزایش ممنوم سیال در نواحی مرکزی کانال به علت این تداخل می‌باشد. البته با کاهش عدد رینولدز و کم اثر شدن نیروی اینرسی سیال، این افزایش مجدد در مقدار سرعت محوری نیز کاهش می‌یابد. همانطور که در شکل (۴-۱۰) دیده می‌شود طول توسعه یافتگی جریان که به ناحیه ورودی جریان تا رسیدن به حالت توسعه یافته اطلاق می‌شود، شدیداً تابع عدد رینولدز بوده با افزایش عدد رینولدز ناحیه توسعه یافتگی جریان به مقاطع جلوتر کانال منتقل می‌شود زیرا که با افزایش عدد رینولدز، المان‌های سیال فرصت کمتری برای اثر پذیری از شرایط مرزی داشته و تکمیل و رشد لایه مرزی در فاصله بیشتری از لبه

ابتدایی کانال به طول می‌انجامد. طول توسعه یافتگی هیدرودینامیکی در چند عدد رینولدز در جدول (۴-۵) نشان داده شده است.

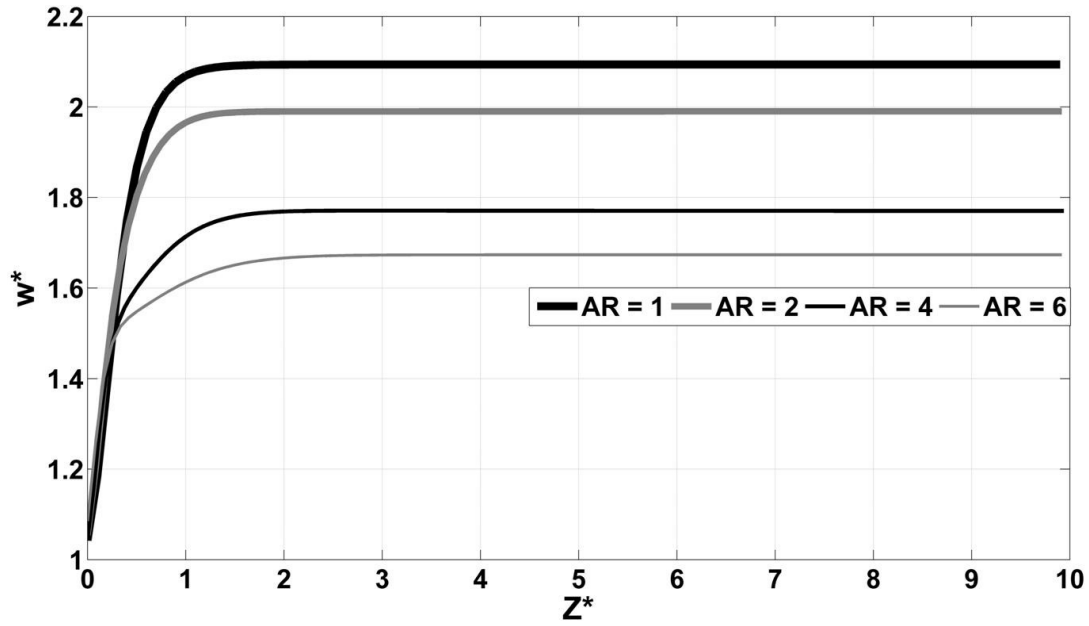


شکل (۴-۱۰): تغییرات سرعت محوری در محور مرکزی کانال

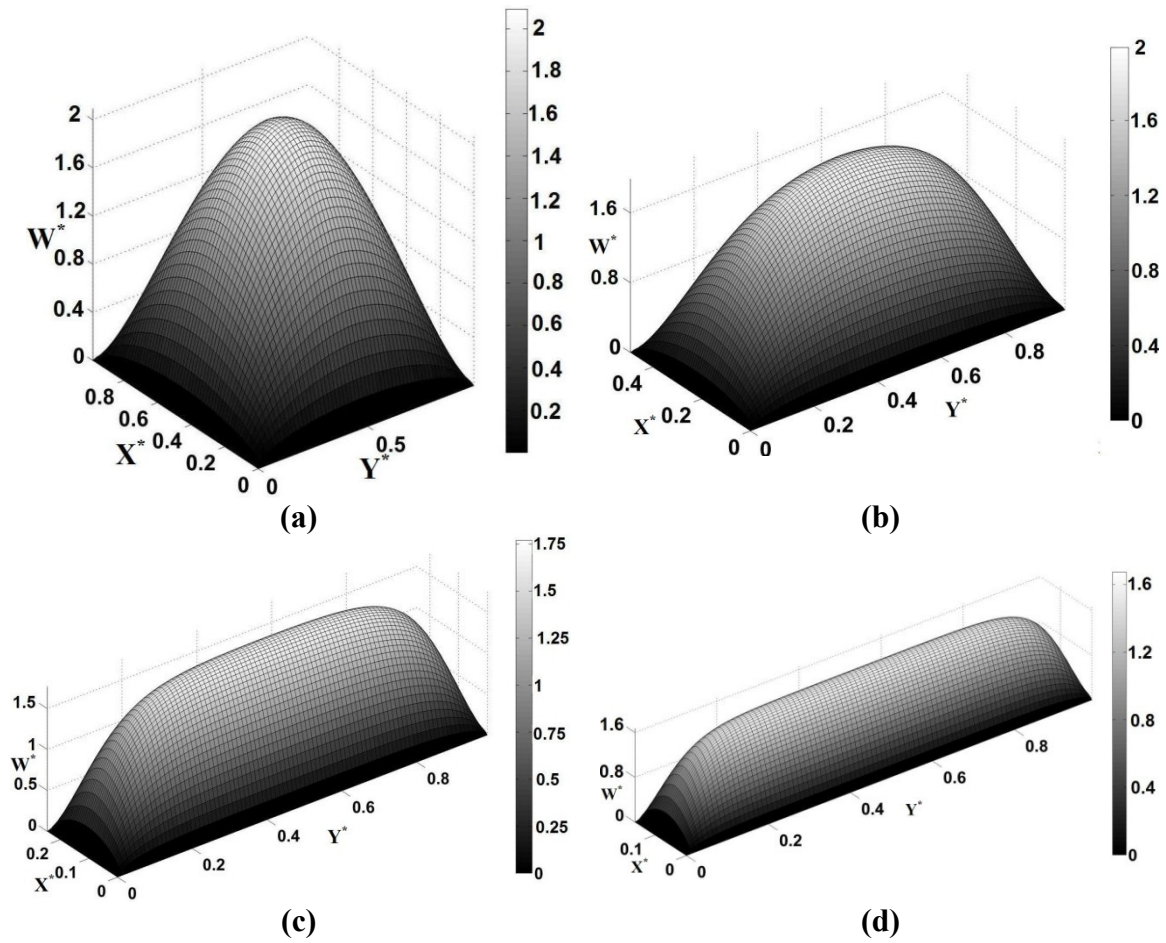
جدول (۴-۵): تغییر طول ناحیه توسعه یافتگی هیدرودینامیکی به ازای تغییرات عدد رینولدز

۶۵	۵۰	۱۰	۵	۱	۰,۰۰۰۱	Re
۳,۸	۲,۳	۱,۷	۱,۵	۱,۲	۱,۰۸	Le^*

در حالت‌های برابری ابعاد سطح مقطع کانال، مقدار و تغییرات سرعت‌های عرضی u, v کاملاً با هم برابر بوده و همچنین رشد لایه مرزی در دو راستای x, y با یک نرخ صورت می‌پذیرد. با افزایش نسبت ابعاد مقطع کانال، لایه مرزی در بعد کوچکتر مقطع، زودتر کامل شده ولی در راستای دیگر به علت فاصله بیشتر دو دیواره از یکدیگر، تکمیل شدن لایه مرزی در فاصله بیشتری به طول می‌انجامد. در حالت کلی همانطور که در شکل (۴-۱۱) نشان داده شده است، با افزایش نسبت ابعاد سطح مقطع کانال و با فرض ثابت بودن قطر هیدرولیکی و عدد رینولدز جریان، سرعت بیشینه جریان کاهش می‌یابد. این مطلب در شکل (۴-۱۲) نیز قابل مشاهده می‌باشد.



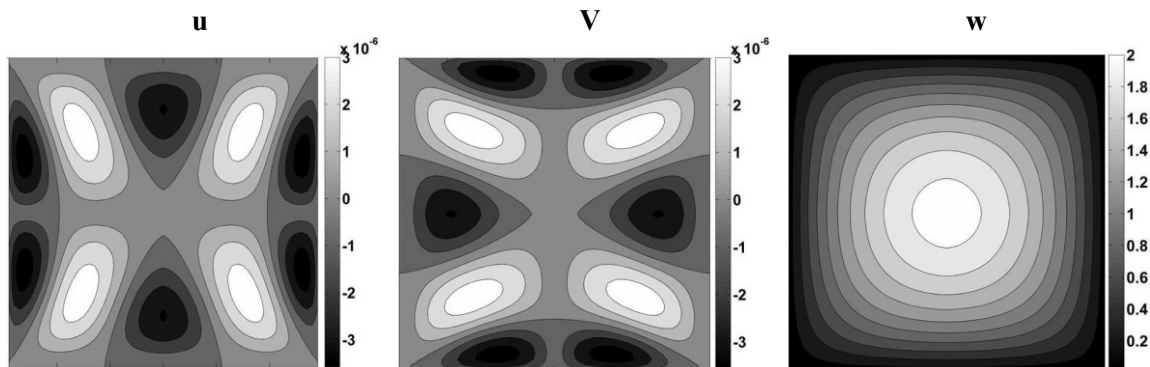
شکل (۴-۱۱): تغییرات سرعت بیشینه سیال در نسبت ابعاد مختلف کانال در اعداد رینولدز و همچنین قطر هیدرولیکی یکسان



شکل (۴-۱۲): سطوح سرعت محوری در ناحیه توسعه یافته در نسبت ابعاد مختلف کانال

a) $AR=1$, b) $AR=2$, c) $AR=4$, d) $AR=6.25$

کانتورهای سرعت عرضی u, v و سرعت محوری نیز در یک مقطع در ناحیه توسعه یافته در شکل (۴-۱۳) نشان داده شده است. همانطور که بیان شد، مقدار و نحوه تغییرات سرعت‌های عرضی در مقطعی که نسبت ابعاد یکسان دارند با هم برابر بوده ولی از نظر جهت، به میزان 90° درجه با یکدیگر متفاوت می‌باشند.



شکل (۴-۱۳): کانتور سرعت‌های عرضی و محوری بی‌بعد در کل مقطع کانال در ناحیه توسعه یافته هیدرودینامیکی

نکته حائز اهمیت دیگر، اندازه و بزرگی سرعت‌های عرضی نسبت به سرعت محوری می‌باشد. در جریان‌های سیال‌های نیوتنی، سرعت عرضی سیال در مقاطع توسعه یافته متمایل به صفر می‌باشد ولی در جریان سیال‌های ویسکوالاستیک، به علت وجود خواص متفاوت این سرعت‌های عرضی صفر نبوده و اندازه و بزرگی آنها به خواص ماده ویسکوالاستیک وابسته می‌باشد که البته این مقادیر با افزایش خواص الاستیک افزایش می‌یابند.

یکی از خواص ویژه و وجه تمایز سیالات ویسکوالاستیک با سیالات نیوتنی، وجود اختلاف بین تنش‌های نرمال در این سیالات می‌باشد. بدین معنی که در جریان سیالات نیوتنی، تنش‌های نرمال (تنش روی قطر اصلی ماتریس تنش) یا صفر بوده و یا در صورت غیر صفر بودن مقدار آنها با هم برابر می‌باشد که در این صورت هم اختلاف بین این مقادیر صفر می‌باشد. ولی در مورد سیالات ویسکوالاستیک، به علت خواص فیزیکی متفاوت آنها، تنش‌های نرمال یکسان نبوده و مقادیر این تنش‌ها چه از نظر علامت و چه از نظر بزرگی با یکدیگر متفاوت می‌باشند که این اختلاف بین تنش‌های نرمال، خود عامل بروز برخی از پدیده‌های خاص در جریان این سیالات می‌باشد. در مدل‌سازی

جریان سیال ویسکوالاستیک با استفاده از معادله متشکله $MPTT$ ، با توجه به معادله (۲-۹)، تنش‌های نرمال در سه راستای x, y, z ، به صورت زیر بازنویسی می‌شوند.

$$\tau_{xx}^* = \left(-W \varrho u^* \frac{\partial \tau_{xx}^*}{\partial x} + v^* \frac{\partial \tau_{xx}^*}{\partial y} + w^* \frac{\partial \tau_{xx}^*}{\partial z} - (L^* \tau^*)_{xx} + (\tau^* L^{T^*})_{xx} + 2\mu \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right) / g \quad (1-2-4)$$

$$\tau_{yy}^* = \left(-W \varrho u^* \frac{\partial \tau_{yy}^*}{\partial x} + v^* \frac{\partial \tau_{yy}^*}{\partial y} + w^* \frac{\partial \tau_{yy}^*}{\partial z} - (L^* \tau^*)_{yy} + (\tau^* L^{T^*})_{yy} + 2\mu \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) / g \quad (2-2-4)$$

$$\tau_{zz}^* = \left(-W \varrho u^* \frac{\partial \tau_{zz}^*}{\partial x} + v^* \frac{\partial \tau_{zz}^*}{\partial y} + w^* \frac{\partial \tau_{zz}^*}{\partial z} - (L^* \tau^*)_{zz} + (\tau^* L^{T^*})_{zz} + 2\mu \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right) / g \quad (3-2-4)$$

که با توجه به تعریف اختلاف تنش‌های نرمال اول و دوم به صورت روابط (۱-۱) و (۲-۱)، رابطه بین این مقادیر و پارامترهای مادی سیال و همچنین نرخ برش در ناحیه در حال توسعه جریان سه بعدی به شکل زیر می‌باشد.

$$N_1 = \tau_{zz}^* - \tau_{xx}^* = \left(\left(-W \varrho u^* \frac{\partial \tau_{zz}^*}{\partial x} + v^* \frac{\partial \tau_{zz}^*}{\partial y} + w^* \frac{\partial \tau_{zz}^*}{\partial z} - (L^* \tau^*)_{zz} + (\tau^* L^{T^*})_{zz} + 2\mu \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right) - \left(-W \varrho u^* \frac{\partial \tau_{xx}^*}{\partial x} + v^* \frac{\partial \tau_{xx}^*}{\partial y} + w^* \frac{\partial \tau_{xx}^*}{\partial z} - (L^* \tau^*)_{xx} + (\tau^* L^{T^*})_{xx} + 2\mu \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right) \right) / g \quad (1-3-4)$$

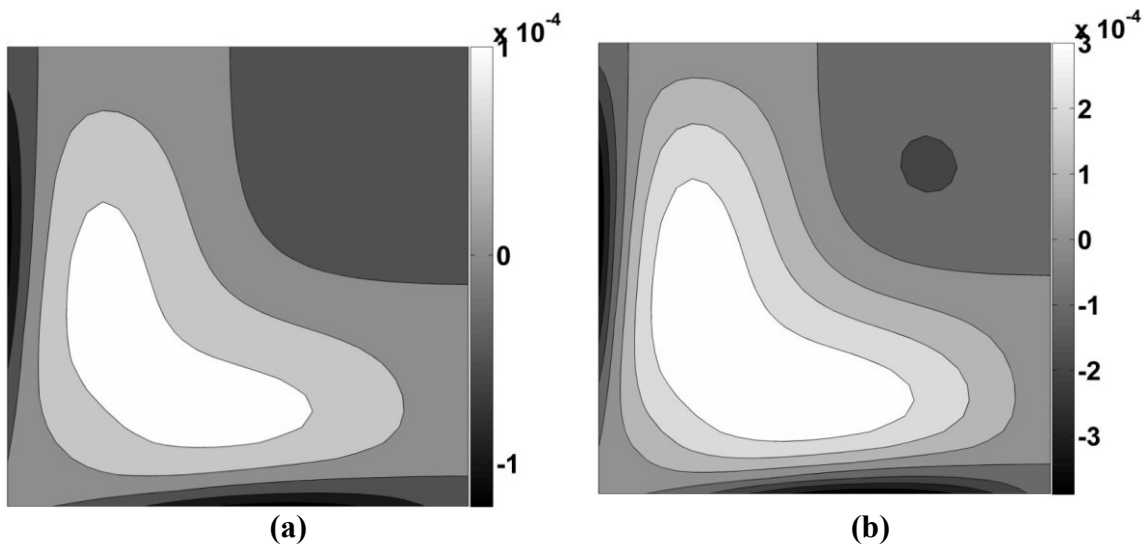
$$N_2 = \tau_{xx}^* - \tau_{yy}^* = \left(\left(-W \varrho u^* \frac{\partial \tau_{xx}^*}{\partial x} + v^* \frac{\partial \tau_{xx}^*}{\partial y} + w^* \frac{\partial \tau_{xx}^*}{\partial z} - (L^* \tau^*)_{xx} + (\tau^* L^{T^*})_{xx} + 2\mu \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right) - \left(-W \varrho u^* \frac{\partial \tau_{yy}^*}{\partial x} + v^* \frac{\partial \tau_{yy}^*}{\partial y} + w^* \frac{\partial \tau_{yy}^*}{\partial z} - (L^* \tau^*)_{yy} + (\tau^* L^{T^*})_{yy} + 2\mu \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) \right) / g \quad (2-3-4)$$

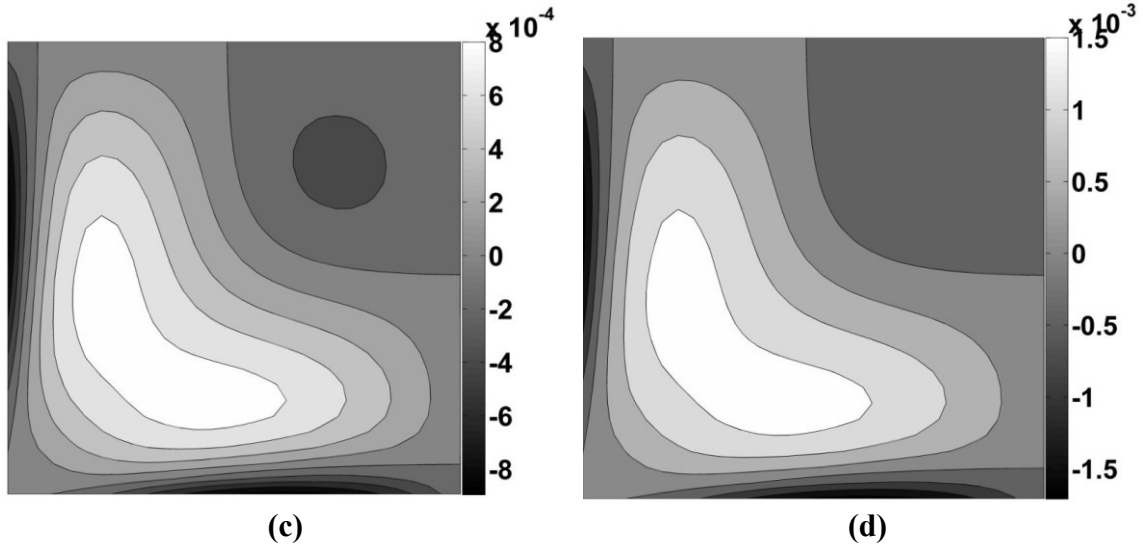
همانطور که در معادلات فوق دیده می‌شود، به علت سه‌بعدی بودن دامنه حل و در حال توسعه بودن جریان و همچنین صورت پیچیده وابستگی تنش به مقادیر مربوطه، امکان ساده‌سازی و مشخص کردن رابطه مستقیم پارامترهای مادی و اختلاف تنش نرمال اول و دوم فراهم نمی‌باشد. در عین حال رابطه این اختلاف تنش نرمال‌ها و مقادیر مادی مدل در جریان ساده برشی را می‌توان به شکل زیر خلاصه نمود [۴۳]:

$$N_1 \approx \frac{2\lambda}{g} \eta(\dot{\gamma}) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (1-4-4)$$

$$N_2 \approx \frac{\xi\lambda}{g} \eta(\dot{\gamma}) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (2-4-4)$$

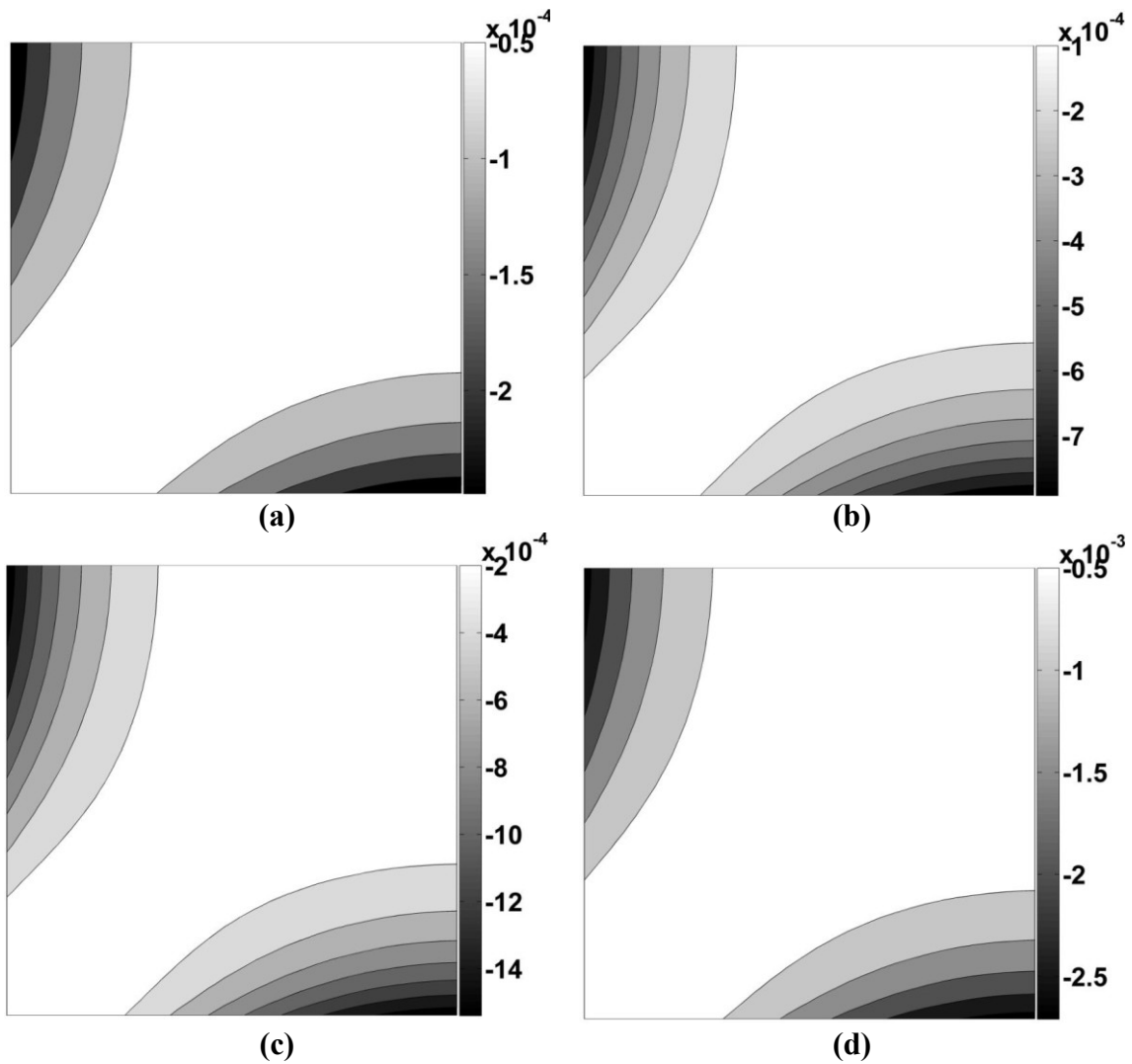
همانطور که در روابط فوق دیده می‌شود، پارامتر مادی g و همچنین ثابت زمانی λ در میزان اختلاف تنش نرمال اول و دوم موثر می‌باشند و با توجه به معادله (۲-۴-۴)، در می‌یابیم که تنها پارامتر مستقل اثر گذار بر اختلاف تنش نرمال دوم، پارامتر مادی ξ خواهد بود. این کمیت‌ها علاوه بر تنش‌های نرمال، مقدار تنش‌های برشی سیال را تحت اثر خود قرار می‌دهند. همانطور که در شکل (۱۴-۴) و (۱۵-۴) دیده می‌شود، با افزایش مقدار ثابت زمانی λ ، مقادیر تنش‌های برشی و همچنین تنش‌های نرمال ماده افزایش می‌یابد که البته وضع برای مقادیر مادی ε ، ξ نیز به همین منوال خواهد بود. لازم به ذکر است که روابط (۱-۴-۴) و (۲-۴-۴) مربوط به جریان برشی ساده بوده که انتظار می‌رود نحوه اثرگذاری این پارامترها هم در جریان مورد نظر به همین صورت باشد.





شکل (۴-۱۴): کانتور تنش برشی τ_{xy} در یک مقطع از جریان توسعه یافته به ازای مقادیر مختلف λ

a) $\lambda = 0.0135$, b) $\lambda = 0.02$, c) $\lambda = 0.025$, d) $\lambda = 0.03$

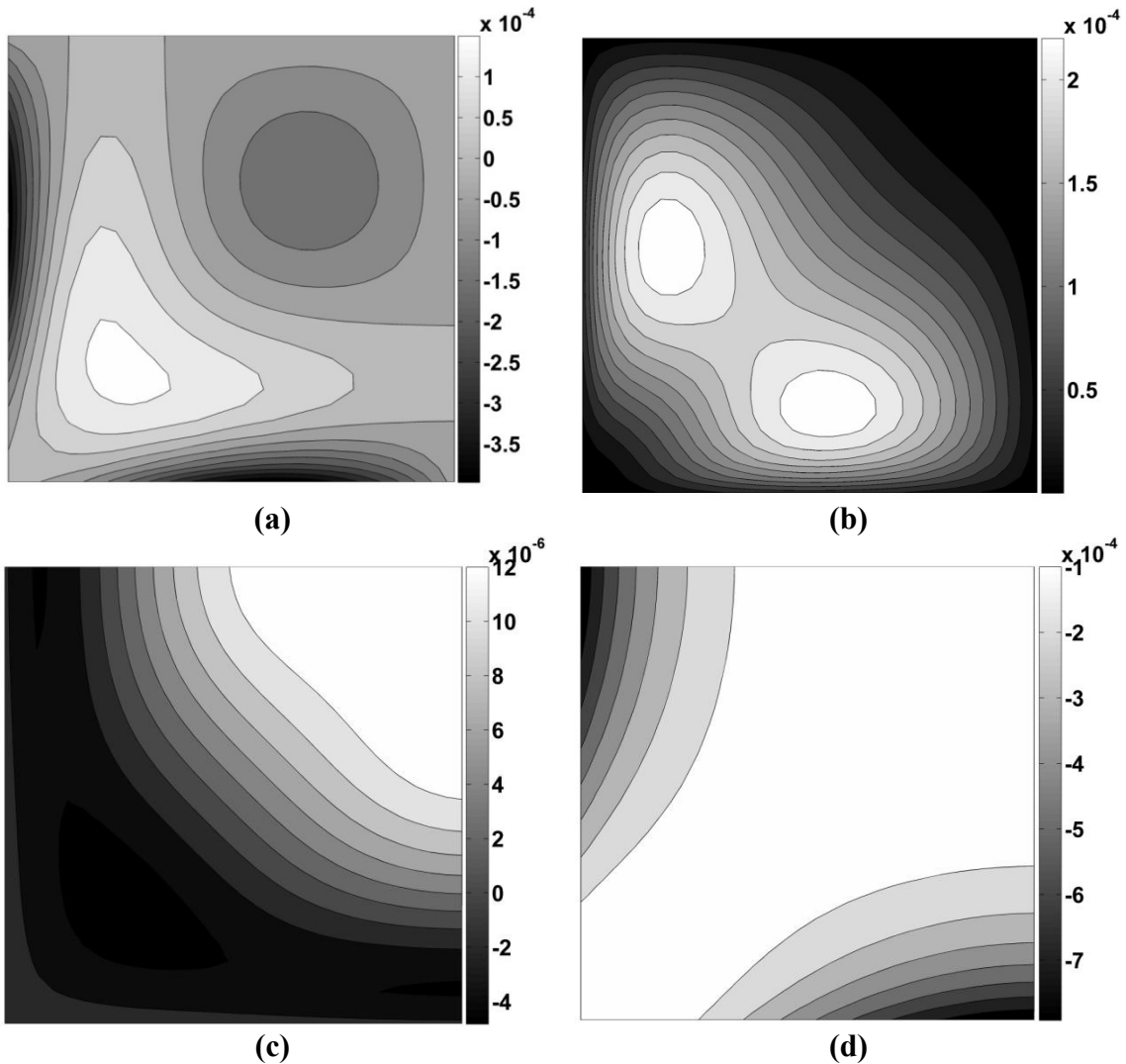


شکل (۴-۱۵): کانتور تنش عمودی τ_{zz} در یک مقطع از جریان توسعه یافته به ازای مقادیر مختلف λ

a) $\lambda = 0.0135$, b) $\lambda = 0.02$, c) $\lambda = 0.025$, d) $\lambda = 0.03$

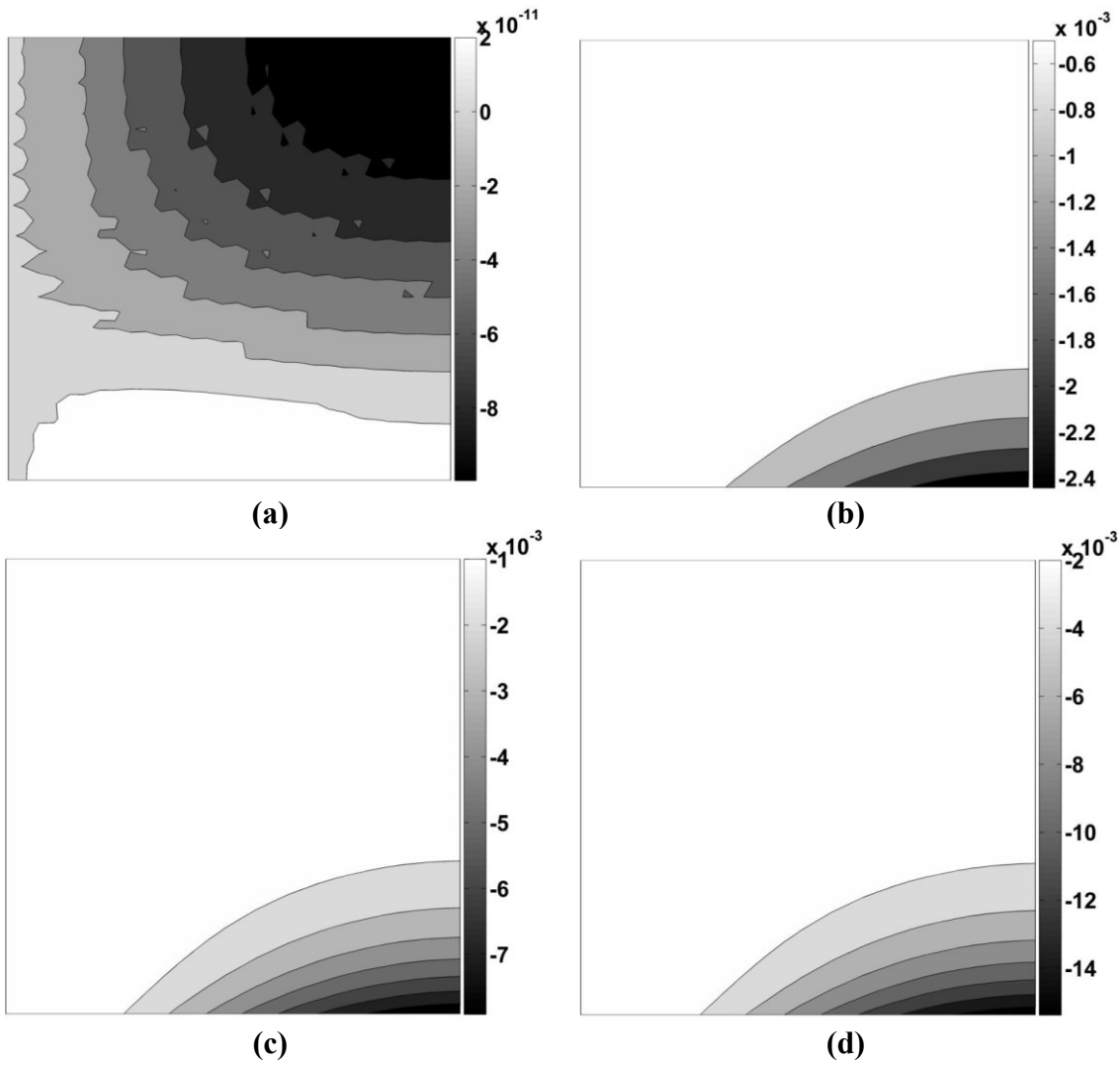
مطلب قابل تامل دیگر در این نمودارها، بیشتر بودن تنش‌های برشی و همچنین تنش‌های نرمال در اطراف دیواره‌های کانال نسبت به مرکز کانال بوده که علت این مطلب نیز بیشتر بودن نرخ برش در این نواحی می‌باشد [۱۱۸]. با رسم مقادیر متوسط تنش‌های عمودی و برشی سیال در راستای کانال نیز درمی‌یابیم که افزایش خواص الاستیک باعث افزایش تنش‌های نرمال و همچنین تنش‌های برشی در نواحی توسعه‌یافته کانال می‌شود که البته این افزایش در نواحی ابتدایی کانال و در حال توسعه هم وجود داشته که به علت شدت بالای تنش‌ها در این نواحی، این تغییرات چندان محسوس نمی‌باشد. از طرف دیگر اختلاف تنش‌های نرمال اول و دوم نیز با افزایش خواص الاستیک افزایش می‌یابند. در حقیقت افزایش خواص الاستیک به معنی بیشتر شدن مدول الاستیک ماده و نزدیکتر شدن خواص ماده به سمت جامد ویسکوالاستیک می‌باشد. لازم به ذکر است که با افزایش کمیت‌های مادی و خواص الاستیک، ناپایداری حل در مدل‌سازی عددی جریان این سیالات بیشتر شده و همگرایی جواب‌ها دشوارتر می‌شود که البته در بعضی موارد دستیابی به جواب همگرا و صحیح مسئله امکان‌پذیر نمی‌باشد.

همانطور که در مطالب پیشین بیان شد، در این تحقیق جهت بالا بردن پایداری حل، سعی در جدا سازی تنش نیوتنی از تنش پلیمری با استفاده از روش $EVSS$ شده است. در شکل (۴-۱۶) میزان تنش نیوتنی و تنش پلیمری در یک مقطع یکسان نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، علاوه بر توزیع کاملاً متفاوت تنش‌های نیوتنی و پلیمری در مقطع کانال، سهم تنش پلیمری بیشتر از تنش نیوتنی بوده که البته این تفاوت برای تنش‌های مختلف و همچنین با تغییر خواص سیال و خواص الاستیک ماده تغییر خواهد کرد. لازم به یادآوری است که خود تنش پلیمری، تلفیقی از خاصیت ویسکوز و خاصیت الاستیک ماده می‌باشد. مطلب قابل ذکر دیگر، توزیع کیفی متفاوت تنش‌ها در سطح مقطع کانال می‌باشد. به عبارت دیگر توزیع تنش برشی نیوتنی در اطراف دیواره‌ها بر خلاف تنش پلیمری بیشینه می‌باشد.

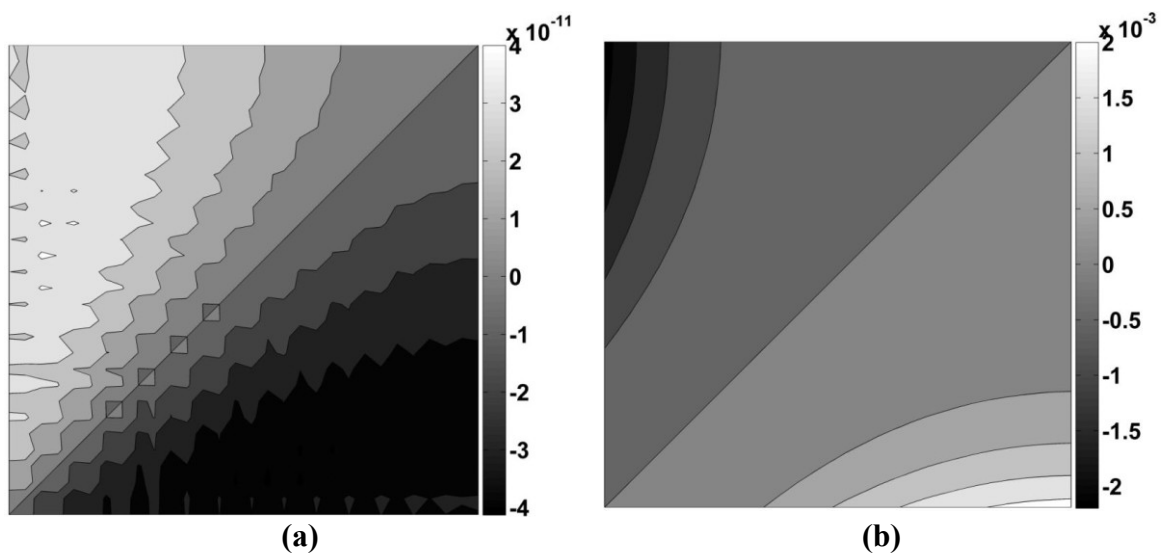


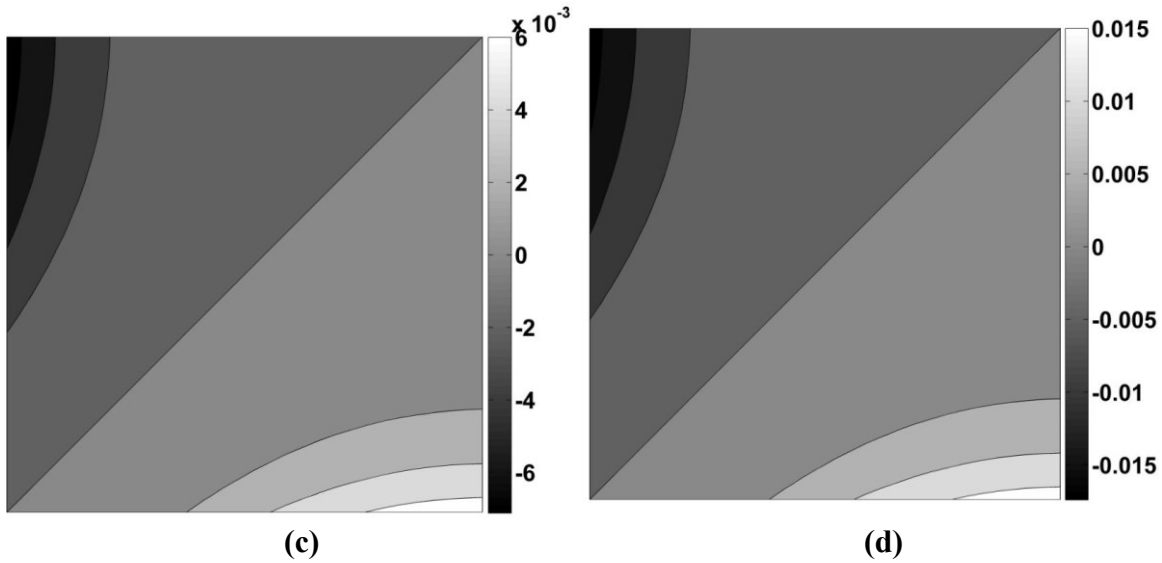
شکل (۴-۱۶): کانتور تنش نرمال و تنش برشی نیوتنی و پلیمری در یک چهارم از مقطع کانال در ناحیه جریان توسعه یافته (a) تنش برشی نیوتنی، (b) تنش برشی پلیمری، (c) تنش نرمال نیوتنی و (d) تنش نرمال پلیمری

همانطور که در شکل‌های (۴-۱۷) و (۴-۱۸) دیده می‌شود و در مرجع [۱۱۸] نیز بیان شده است، اختلاف تنش‌های نرمال اول و دوم نیز در اطراف دیواره‌ها، مقادیر بیشتری نسبت به نواحی مرکزی کانال دارا می‌باشند. همچنین با افزایش پارامتر ε و زمان آسودگی λ ، مقادیر اختلاف تنش نرمال اول و دوم نیز افزایش می‌یابند. از طرف دیگر پارامتر مادی κ نیز بر مقادیر اختلاف تنش نرمال دوم اثرگذار بوده و همچنین بر خلاف جریان برشی ساده که روابط اختلاف تنش نرمال اول و پارامترهای مادی سیال در معادله مربوطه (۴-۴-۱) نشان داده شده است، افزایش این پارامتر تا حدی باعث افزایش اختلاف تنش نرمال اول نیز می‌شود.



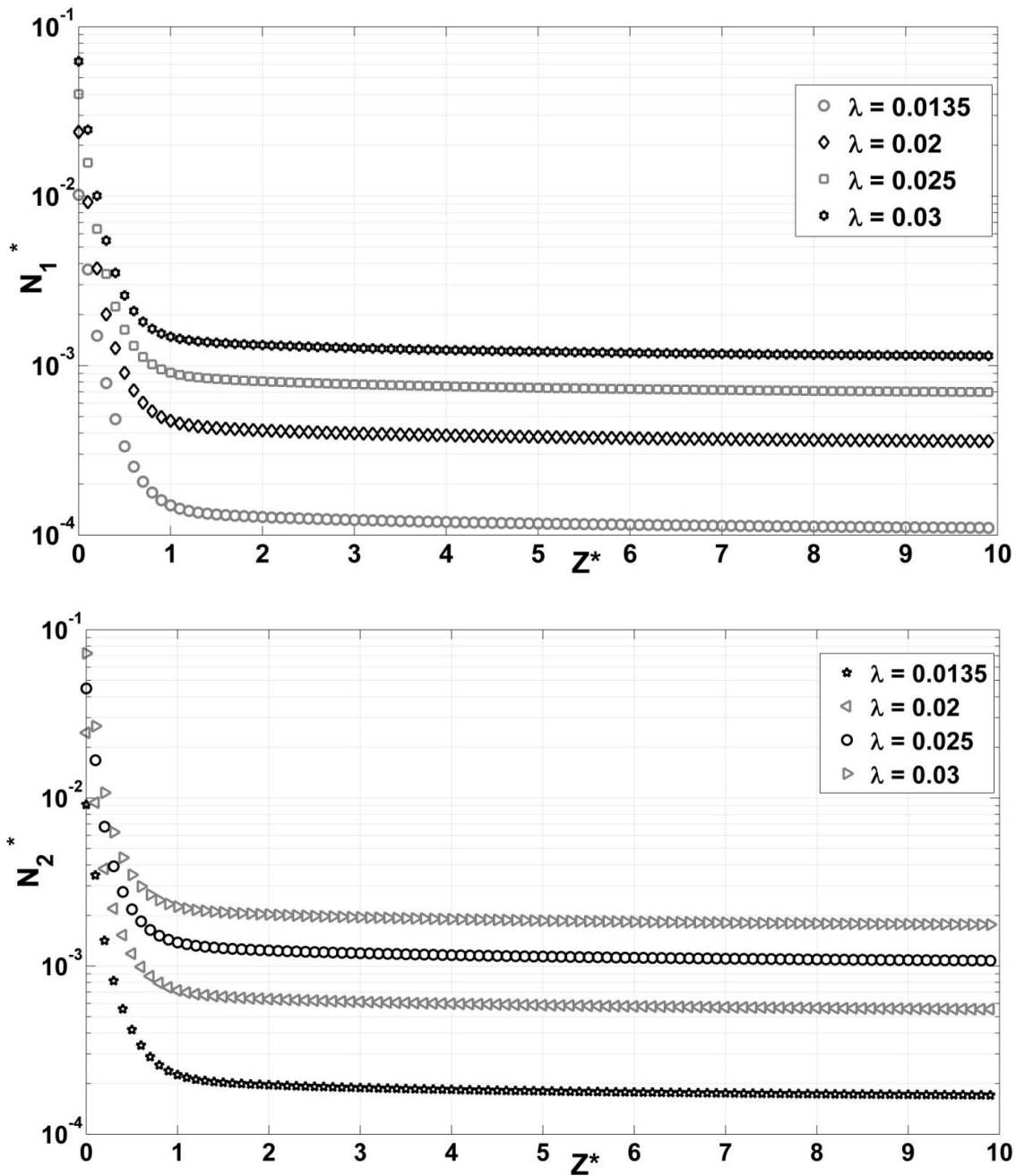
شکل (۴-۱۷): کانتور اختلاف تنش نرمال اول بی بعد در یک مقطع از جریان توسعه یافته به ازای مقادیر مختلف λ
a) Newtonian Fluid , *b) $\lambda = 0.0135$* , *c) $\lambda = 0.02$* , *d) $\lambda = 0.03$*





شکل (۴-۱۸): کانتور اختلاف تنش نرمال دوم بی‌بعد در یک مقطع از جریان توسعه یافته به‌ازای مقادیر مختلف λ
 $a) Newtonian Fluid$, $b) \lambda = 0.0135$, $c) \lambda = 0.02$, $d) \lambda = 0.03$

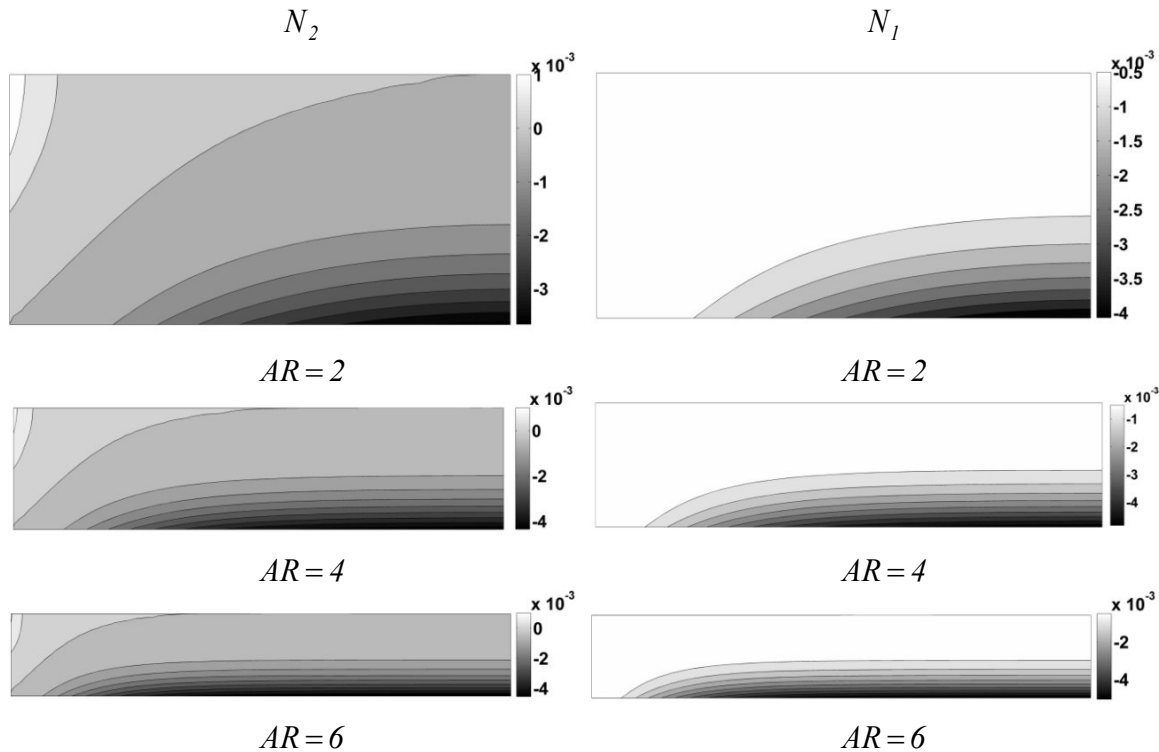
در راستای محور کانال نیز، مقادیر اختلاف تنش نرمال اول و دوم در اوایل کانال و در ناحیه در حال توسعه بدلیل شدت بالای تغییرات تمامی کمیت‌ها در راستای محور کانال، شدت بالایی داشته ولی با پیشروی در راستای کانال و شکل‌گیری لایه مرزی از شدت این مقادیر بخصوص در اطراف دیواره‌ها کاسته شده و با تکمیل لایه مرزی و رسیدن به ناحیه توسعه یافته هیدرودینامیکی، این کمیت‌ها به مقادیر ثابتی رسیده و تا انتهای کانال نسبتاً بدون تغییر باقی می‌مانند. این مطلب در شکل (۴-۱۹) مشاهده می‌شود.



شکل (۴-۱۹): مقادیر متوسط اختلاف تنش‌های نرمال اول و دوم در طول کانال به‌ازای مقادیر مختلف λ

در نسبت‌های مختلف ابعاد سطح مقطع کانال نیز توزیع اختلاف تنش نرمال اول و دوم در سطح مقطع به همین شکل بوده و در اطراف دیواره‌ها از شدت بیشتری نسبت به نواحی مرکزی کانال برخوردار می‌باشند. این مطلب به ازای نسبت ابعاد سطح مقطع ۴، در مرجع [۴۳] نیز بیان شده است که با نتایج بدست آمده در این تحقیق از نظر کیفی کاملاً تطابق دارد. همانطور که در شکل (۴-۲۰) دیده می‌شود، با افزایش نسبت ابعاد سطح مقطع، شدت اختلاف تنش‌ها در اطراف دیواره بزرگتر رشد

پیدا کرده و به سمت دیواره کوچکتر پیش می‌رود. همچنین با این افزایش، نسبت اختلاف تنش نرمال دوم به اختلاف تنش نرمال اول نیز افزایش پیدا می‌نماید.



شکل (۴-۲۰): کانتور اختلاف تنش نرمال اول و دوم در یک مقطع از جریان توسعه یافته در نسبت‌های مختلف سطح مقطع کانال

همانطور که پیشتر بیان شد، در این تحقیق جریان سیال ویسکوالاستیک سه بعدی با استفاده از معادلات متشکله کریمینال اریکسون فیلیبی و گزیکس نیز مدل‌سازی شده است که البته به صورت محدودتر به نتایج به دست آمده از آنها در بعضی موارد اشاره می‌نماییم.

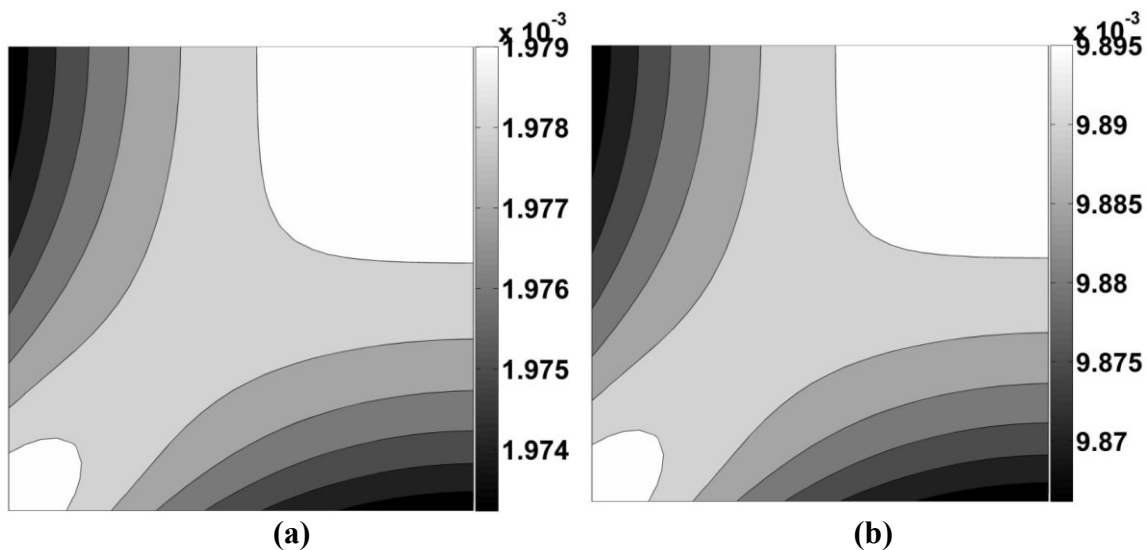
مقادیر پایه فرض شده برای پارامترهای مورد استفاده در معادله متشکله کریمینال اریکسون فیلیبی که توابع ویسکومتریک آن بر اساس معادلات کاریو یاسودا تعریف شده است، به صورت زیر می‌باشد.

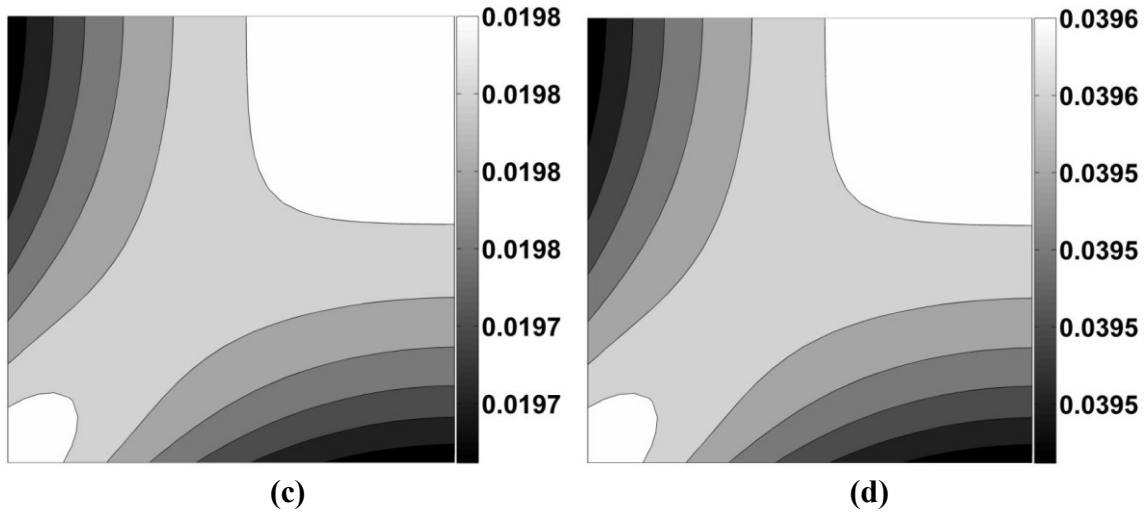
جدول (۴-۶): مقادیر پایه فرض شده برای پارامترهای مورد استفاده در معادله متشکله کریمینال اریکسون فیلیبی

CN_1	CN_2	a	n	λ_0	λ_1	η_∞	η_0
0.0001	0.0015	2	0.65	0.015	0.01	0.01	1

که در آن ثابت زمانی λ و ضرایب CN_1 ، CN_2 مقادیر اثر گذار بر تنش‌های نرمال و برشی و در نهایت اختلاف تنش نرمال اول و دوم و شدت جریان‌های ثانویه می‌باشند.

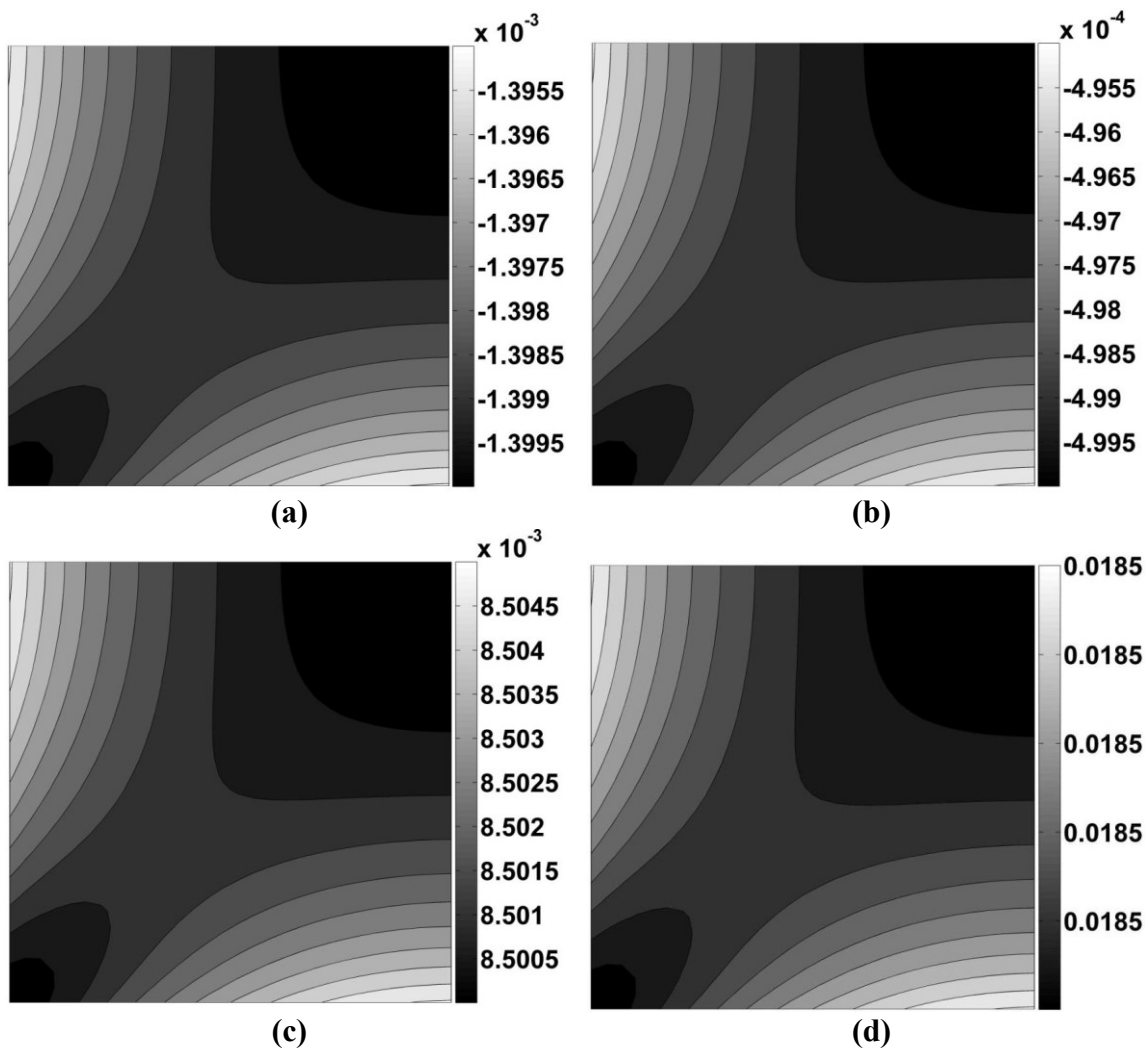
همانطور که در شکل‌های (۴-۲۱) تا (۴-۲۳) نشان داده شده است، افزایش ثابت زمانی λ_1 باعث افزایش خواص الاستیک و همچنین مقادیر اختلاف تنش نرمال اول می‌شود ولی بر مقدار ویسکوزیته و اختلاف تنش نرمال دوم اثرگذار نمی‌باشد. زیرا طبق تعریف معادله متشکله کریمینال اربکسون فیلیبی، مقادیر ثابت زمانی λ و λ_1 ضرایب ترم گرادیان تنش نبوده و هیچ عملکردی به عنوان زمان رهایی از تنش نخواهند داشت. ضرایب CN_1 و CN_2 نیز اثر یکنوایی بر مقدار اختلاف تنش نرمال دوم نخواهند گذاشت. در ابتدا با افزایش هر کدام از این ضرایب از مقدار اختلاف تنش نرمال دوم کاسته شده ولی با افزایش مجدد آنها اختلاف تنش نرمال دوم افزایش می‌یابد. این افزایش مجدد با تغییر علامت اختلاف تنش نرمال دوم همراه خواهد بود که البته باعث تغییر در جهت چرخش جریان‌های ثانویه و همچنین الگوی تشکیل این جریان‌ها خواهد شد. لازم بذکر است که تغییرات این ضرایب بر مقدار اختلاف تنش نرمال اول اثر نداشته و این پارامتر مستقل از این دو ضریب خواهد بود. البته شایان ذکر است که در تمامی شکل‌های نشان داده شده، گرادیان متغیرهای مورد نظر در مقطع نشان داده شده چندان شدید نبوده و تغییرات آنها در مقاطع عرضی کانال نسبتاً ناچیز می‌باشد.





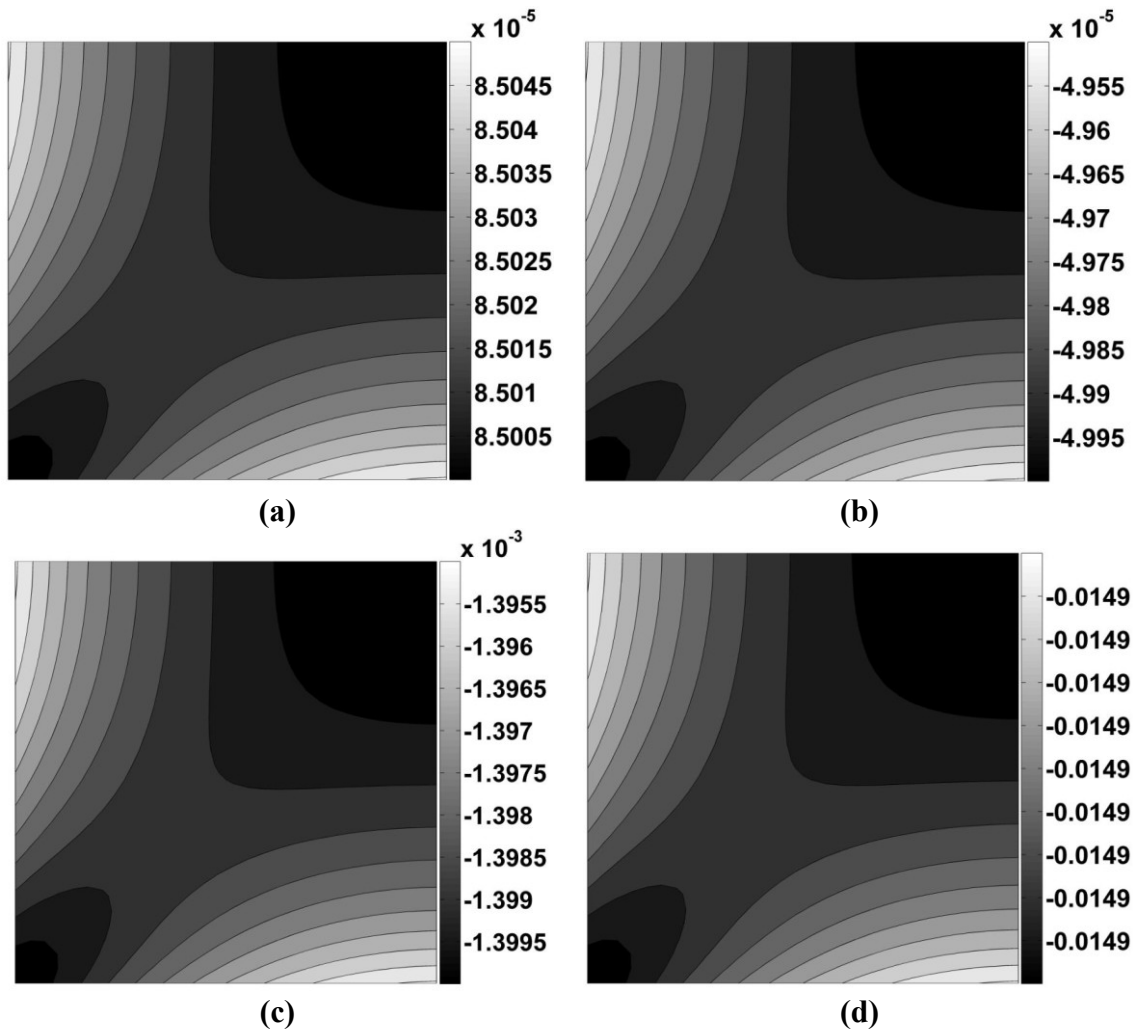
شکل (۴-۲۱): کانتور اختلاف تنش نرمال اول بی بعد در یک مقطع از جریان توسعه یافته به ازای مقادیر مختلف λ_1

a) $\lambda_1 = 0.001$, b) $\lambda_1 = 0.005$, c) $\lambda_1 = 0.01$, d) $\lambda_1 = 0.02$



شکل (۴-۲۲): کانتور اختلاف تنش نرمال دوم بی بعد در یک مقطع از جریان توسعه یافته به ازای مقادیر مختلف CN_1

در ناحیه توسعه یافته جریان a) $CN_1 = 0.0001$, b) $CN_1 = 0.001$, c) $CN_1 = 0.01$, d) $CN_1 = 0.02$



شکل (۴-۲۳): کانتور اختلاف تنش نرمال دوم بی‌بعد در یک مقطع از جریان توسعه یافته به‌ازای مقادیر مختلف CN_2 در ناحیه توسعه یافته جریان $a) CN_2 = 0.000015$, $b) CN_2 = 0.00015$, $c) CN_2 = 0.0015$, $d) CN_2 = 0.015$

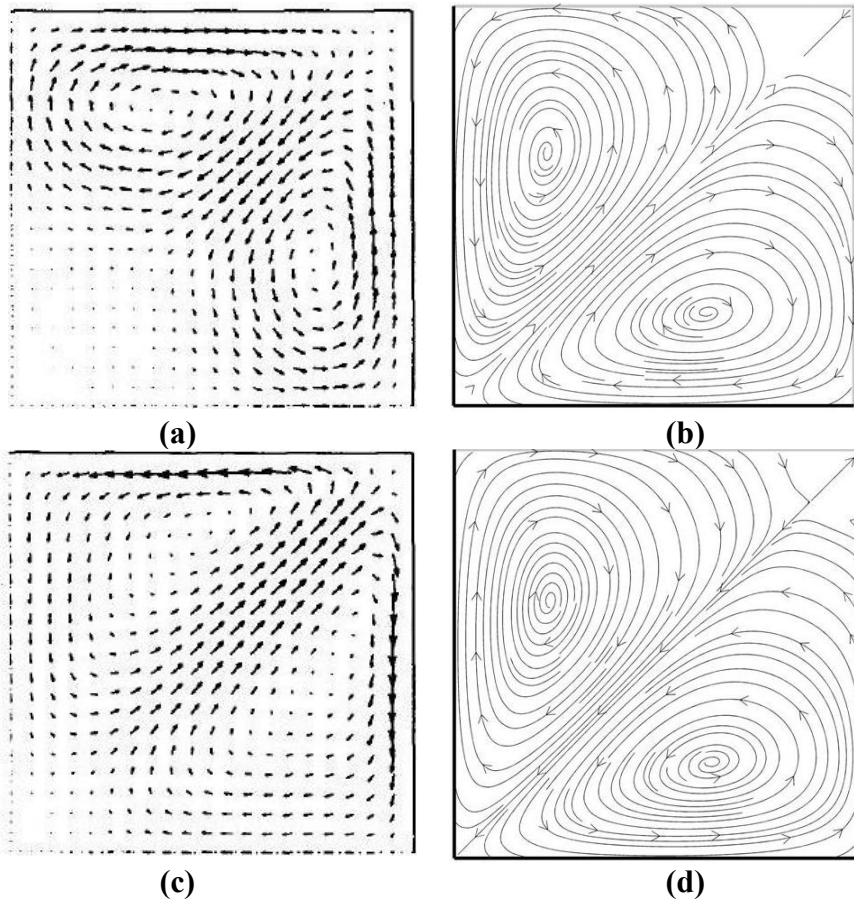
به منظور صحت‌سنجی نتایج بدست آمده از این تحقیق در زمینه جریان‌های ثانویه در مدل-سازي با استفاده از معادله متشکله کریمینال اریکسون فیلیبی، توابع ویسکومتریکی به صورت نمایی که مشابه تحقیق انجام شده توسط سیرجالا [۱۱۷] می‌باشد، همانند معادلات (۴-۵) تا (۴-۷) نیز فرض شده است.

$$\eta(\dot{\gamma}) = K\dot{\gamma}^{n-1} \quad (۴-۵)$$

$$\Psi_1(\dot{\gamma}) = C_1\dot{\gamma}^{m_1} \quad (۴-۶)$$

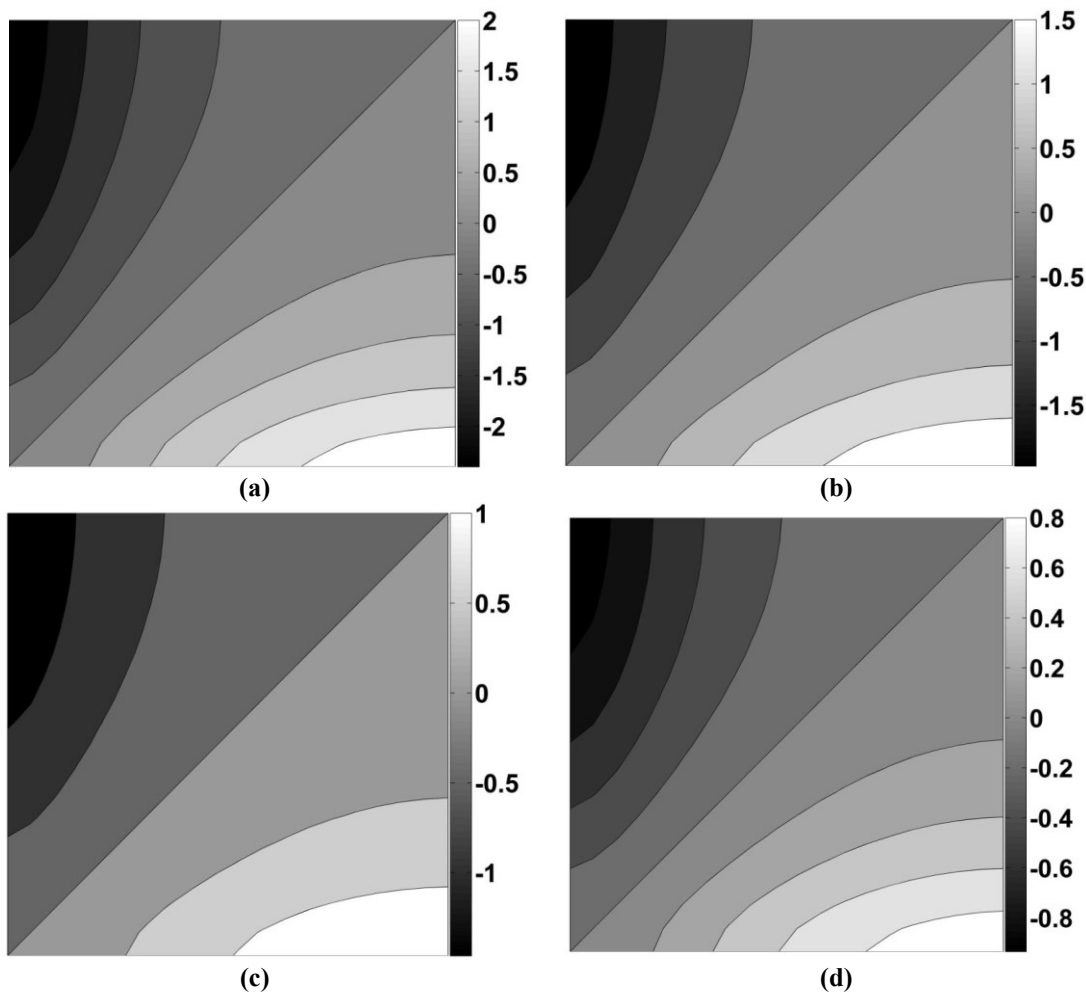
$$\Psi_2(\dot{\gamma}) = C_2\dot{\gamma}^{m_2} \quad (۴-۷)$$

که در آن K, C_1, C_2 به ترتیب ضرایب ویسکوزیته و اختلاف تنش‌های نرمال اول و دوم و همچنین n, m توان‌های پاورلا برای ویسکوزیته و تنش‌های نرمال می‌باشند. یکی از موارد بررسی شده در این مقاله، جهت چرخش گردابه‌ها بر حسب مقادیر متفاوت C_2, C_1, m می‌باشد که در حالتی خاص که جهت چرخش گردابه‌ها با هم متفاوت بوده بررسی شده‌اند. با توجه به نتایج بدست آمده در این مقاله و همچنین نتایج ارائه شده در مرجع [۸۷]، در حقیقت می‌توان شرط کلی $\frac{\partial}{\partial \dot{\gamma}} \left(\frac{\Psi_2(\dot{\gamma})}{\eta(\dot{\gamma})} \right) > 0$ و یا $\frac{\partial}{\partial \dot{\gamma}} \left(\frac{\Psi_2(\dot{\gamma})}{\eta(\dot{\gamma})} \right) < 0$ را به منظور تعیین جهت چرخش گردابه‌ها بیان نمود. جهت گردابه‌های حاصل از تحقیق حاضر و تحقیق سیرجالا در شرایط یکسان در شکل (۴-۲۴) نشان داده شده است. البته می‌بایست توجه شود که در تحقیق سیرجالا یک چهارم بالایی سمت راست کانال و در تحقیق حاضر یک چهارم پایینی سمت چپ کانال به عنوان دامنه محاسباتی مدنظر قرار گرفته است.



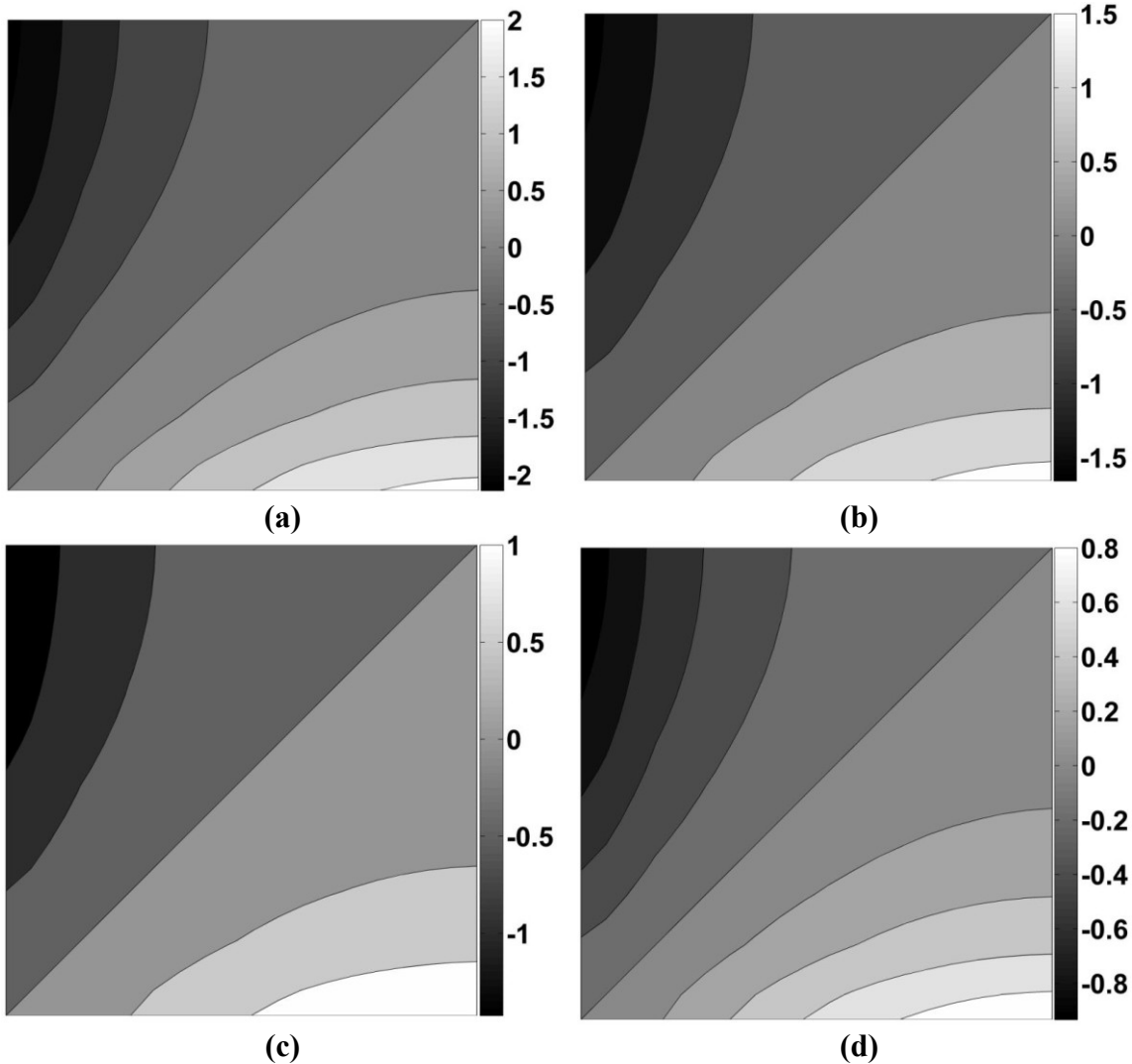
شکل (۴-۲۴): جهت چرخش جریان‌های ثانویه گزارش شده در تحقیق سیرجالا [۱۱۷] و تحقیق حاضر
 a) Syrjala $m = -1.5, C_1 = 2, C_2 = -0.2$, b) Present study $m = -1.5, C_1 = 2, C_2 = -0.2$
 c) Syrjala $m = 0, C_1 = 2, C_2 = -0.2$, d) Present study $m = 0, C_1 = 2, C_2 = -0.2$

یکی دیگر از معادلات متشکله‌ای که از آن به منظور مدل‌سازی جریان سیال ویسکوالاستیک در کانال مستطیلی در این تحقیق استفاده شده است، معادله متشکله گزیکس می‌باشد. در این معادله متشکله نیز ثابت زمانی λ و همچنین ضرایب α ، β بر مقادیر تنش‌های نرمال و همچنین اختلاف تنش‌های نرمال اول و دوم اثر گذار می‌باشند. در حقیقت با افزایش β درصد ویسکوزیته حلال (ماده نیوتنی) به ویسکوزیته کل ماده بیشتر شده و در نتیجه خواص ماده به سمت خواص سیال ویسکوز پیش می‌رود. از این رو خواص الاستیک کم شده و اختلاف تنش نرمال دوم کاهش می‌یابد. از طرف دیگر با افزایش α که در حقیقت تاثیر معکوس بر مقدار ثابت زمانی λ دارد، مقدار خواص الاستیک کم شده و در نهایت مقدار اختلاف تنش نرمال دوم کم می‌شود. این مطلب که در شکل‌های (۴-۲۵) و (۴-۲۶) نشان داده شده است، هماهنگی خوبی با نتایج ارائه شده در مراجع [۴۶] و [۸۷] دارا می‌باشد.



شکل (۴-۲۵): کانتور اختلاف تنش نرمال دوم بی‌بعد در یک مقطع از جریان توسعه یافته به‌ازای مقادیر مختلف β

$$a) \beta=0.1, \quad b) \beta=0.2, \quad c) \beta=0.5, \quad d) \beta=0.9$$



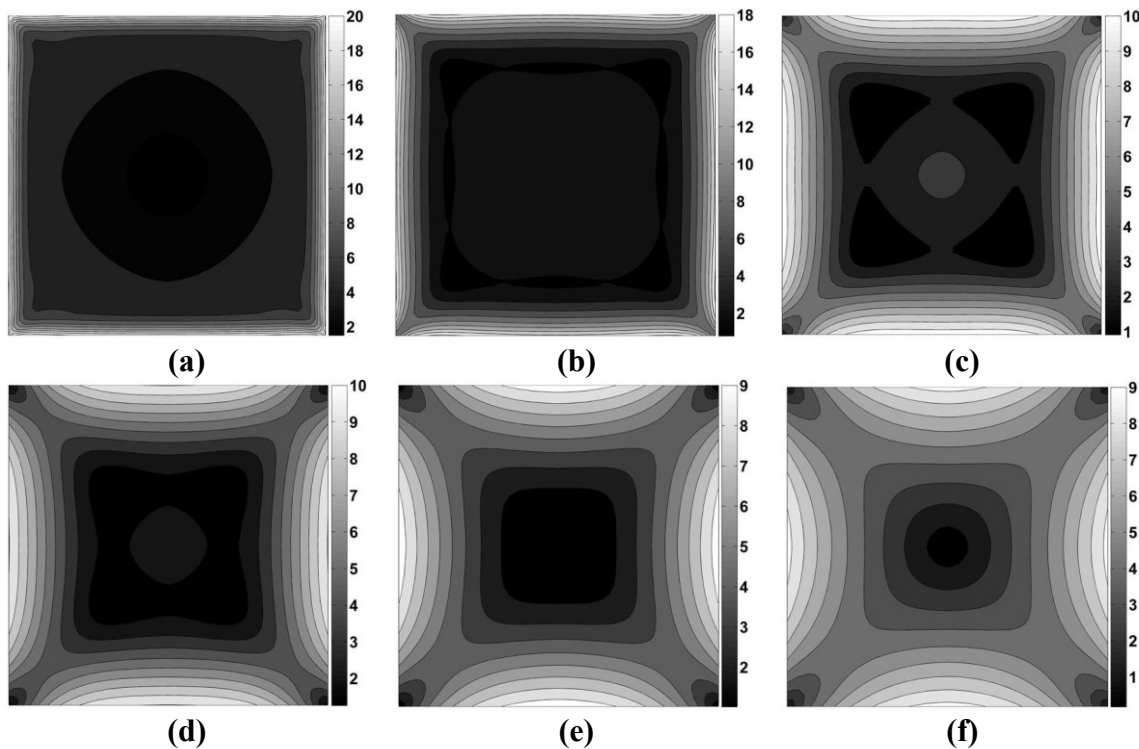
شکل (۴-۲۶): کانتور اختلاف تنش نرمال دوم بی بعد در یک مقطع از جریان توسعه یافته به ازای مقادیر مختلف α
 a) $\alpha=0.2$, b) $\alpha=0.6$, c) $\alpha=0.8$, d) $\alpha=1$

جدول (۴-۲۷): مقادیر بیشینه اختلاف تنش نرمال دوم در ناحیه توسعه یافته به ازای تغییرات α و β

0.8	0.6	0.2	0.1	0.01	α
1.05	1.54	2.21	3.16	5.27	$Max(N_2)$
0.9	0.5	0.2	0.1	0.01	β
0.93	1.42	1.91	2.54	4.82	$Max(N_2)$

یکی دیگر از ویژگی‌های مهم معادله متشکله فن تین تر، قابلیت مدل‌سازی خاصیت باریک شوندگی ویسکوزیته نسبت به نرخ برش سیال می‌باشد که در فصل ۲ هم به آن اشاره شده است. به عبارت دیگر با افزایش نرخ برش در بعضی از سیالات ویسکوالاستیک، تعدادی از پیوندها در بین

شاخه‌ها و زنجیره‌های این ماکروملکول‌ها شکسته شده و از ویسکوزیته سیال کاسته می‌شود. مدل-سازی این پدیده با استفاده از معادله متشکله بهبود یافته فن تین تر ممکن می‌باشد. در جریان سیال ویسکوالاستیک در کانال مستطیلی به علت وجود مرزهای جامد در اطراف کانال، نرخ برش و نهایتاً تنش برشی در اطراف دیواره‌ها جامد بیشینه بوده و مقدار کمینه آن در مرکز کانال می‌باشد [۱۱۸، ۸۷]. همچنین با پیشروی در راستای کانال از شدت نرخ برش در کل مقطع کانال کاسته شده و با رسیدن به ناحیه توسعه یافته هیدرودینامیکی، این کمیت به توزیع ثابتی رسیده و تا پایان کانال بدون تغییر باقی می‌ماند. این مطلب در شکل (۴-۲۷) نشان داده شده است.



شکل (۴-۲۷): کانتورهای نرخ برش تعمیم یافته در مقاطع مختلف کانال

$$a) z^* = 0.2, \quad b) z^* = 0.3, \quad c) z^* = 0.5, \quad d) z^* = 0.6, \quad e) z^* = 0.8, \quad f) z^* = 1.5$$

همانطور که در بخش (۲-۴) به تفصیل بیان شد، وجود اختلاف تنش نرمال در جریان سیال ویسکوالاستیک در کانال‌های غیر مدور، باعث شکل‌گیری جریان‌های گردابی عمود بر جریان اصلی سیال می‌شود. در حقیقت عامل اصلی تشکیل این جریان‌های ثانویه، عدم تقارن قطری المان تنش عمودی در جریان سیال ویسکوالاستیک می‌باشد. در جریان سیال ویسکوالاستیک در کانال‌های غیر

دایروی در ناحیه توسعه یافته به تناسب نسبت ابعاد سطح مقطع و همچنین هندسه جریان (لوله‌های صاف و یا منحنی^۱) حداقل ۸ جریان ثانویه شکل می‌گیرد که قدرت و شدت چرخش این جریان‌های گردابی به خواص فیزیکی و الاستیک سیال بستگی دارد. لازم به ذکر است که پیش‌بینی می‌شود وجود این جریان‌های ثانویه باعث افزایش انتقال حرارت و جرم در راستای حرکت سیال و از طرف دیگر با افزایش تحرکات عرضی در مقطع کانال، باعث افزایش افت فشار در کانال می‌شود. به منظور بررسی شدت جریان‌های ثانویه نسبت به جریان اصلی سیال، پارامتری را با عنوان S_{Max} و به شکل معادله (۸-۴) تعریف می‌نماییم که مقدار این پارامتر، بیشینه شدت جریان‌های عرضی نسبت به جریان اصلی در یک مقطع از کانال را نشان می‌دهد. البته لازم به ذکر است که در حالت کلی بزرگی این پارامتر، شدت جریان‌های عرضی را نشان می‌دهد و در تمامی موارد لزومی بر وجود جریان‌های ثانویه نمی‌باشد.

$$S_{Max} = \text{Max}(\sqrt{u^2 + v^2}) \Big|_{\text{Cross section}} \quad (8-4)$$

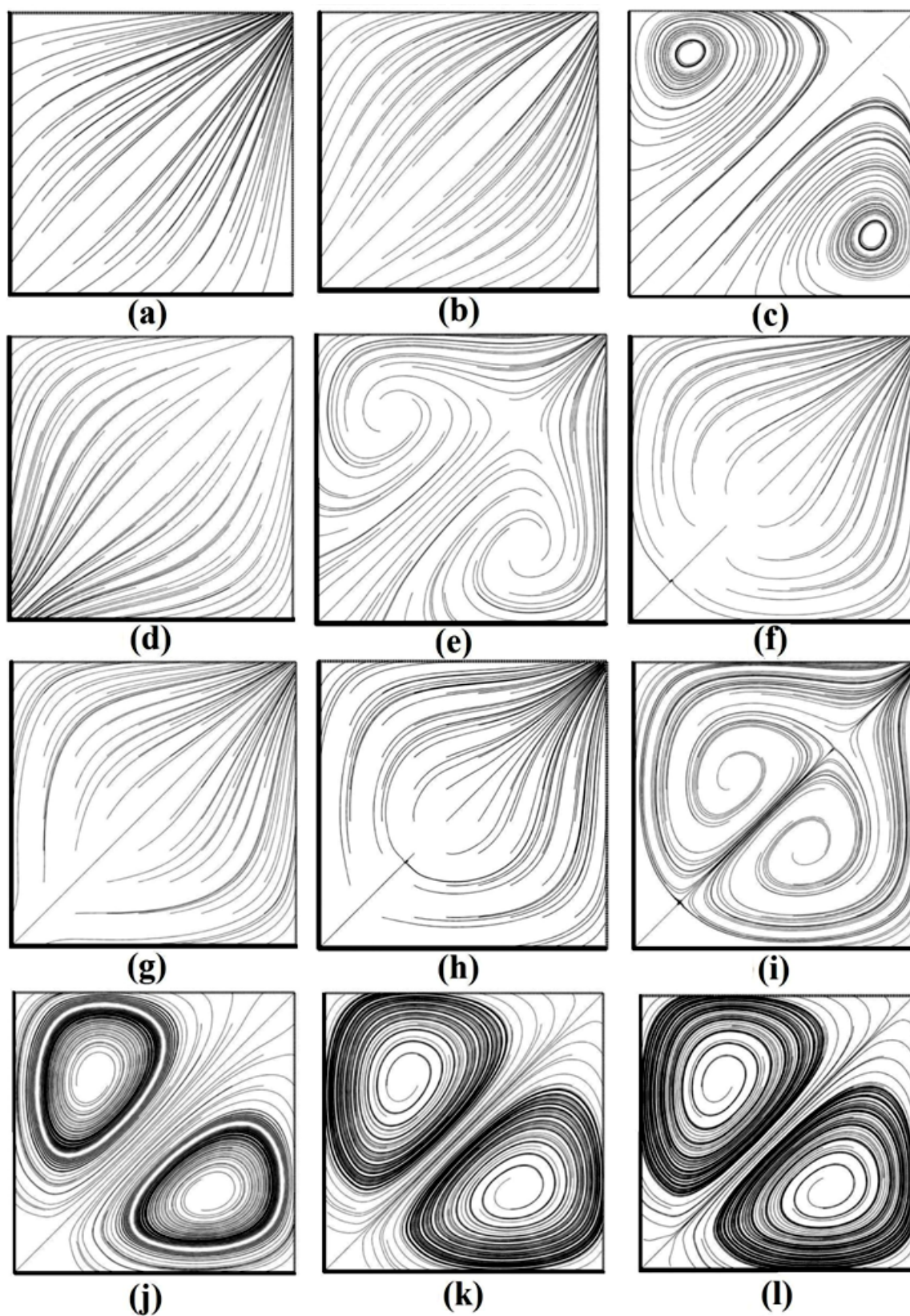
که در آن، u و v سرعت‌های عرضی در حالت بی‌بعد می‌باشند.

در شکل (۴-۲۸) الگوی جریان‌های عرضی در مقاطع عمودی کانال از ابتدای دهانه ورودی تا ناحیه توسعه یافته هیدرودینامیکی رسم شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، در نواحی ابتدایی کانال و تا رسیدن جریان به ناحیه توسعه یافته هیدرودینامیکی، علی‌رغم شدت بالای جریان‌های عرضی، هیچ جریان ثانویه‌ای شکل نمی‌گیرد. علت اصلی این مطلب گرادیان شدید تمامی کمیت‌ها در ناحیه در حال توسعه و همچنین رشد لایه مرزی و تغییرات مداوم پروفیل سرعت در مقاطع عرضی کانال می‌باشد. زیرا در این ناحیه لایه مرزی رفته رفته ضخیم‌تر شده و این مطلب باعث کم شدن ممنوم سیال در اطراف دیواره‌ها و به تبع آن تغییرات شدید سرعت در راستاهای x, y می‌شود. به همین سبب در این ناحیه هیچ الگوی خاصی برای جریان‌های عرضی شکل نمی‌گیرد. البته همانطور

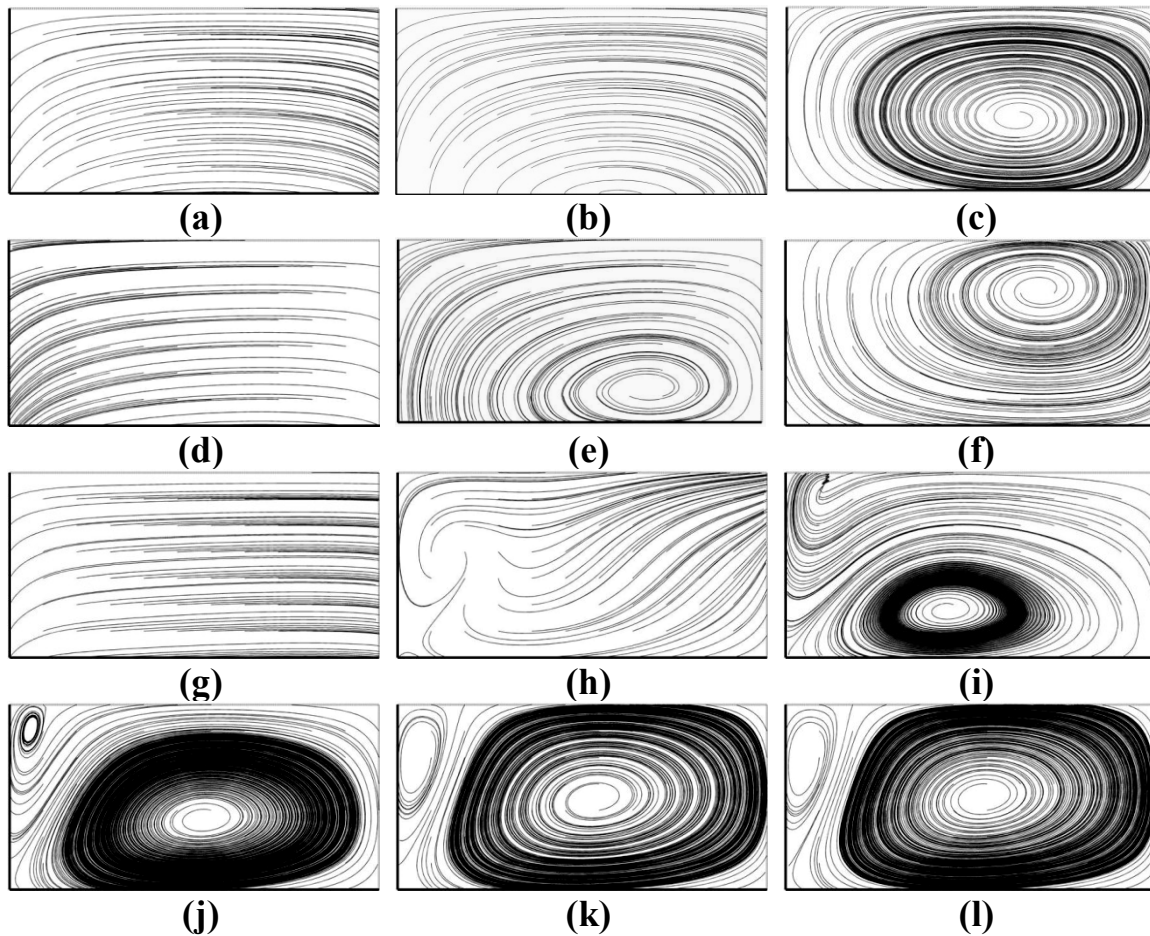
¹-Curve pipe

که در نتایج مربوط به جریان‌های عرضی در دو نسبت مختلف ابعاد سطح مقطع، در شکل‌های (۴-۲۸) و (۴-۲۹) دیده می‌شود، در دو مقطع از ناحیه در حال توسعه جریان، هسته‌هایی از جریان‌های ثانویه شروع به شکل‌گیری می‌نمایند ولی به علت تغییرات دائم مولفه‌های جریان، الگوی جریان‌های ثانویه توسط جریان اصلی از بین رفته و هیچ جریان ثانویه‌ای شکل نمی‌گیرد تا در نهایت با رسیدن به محدوده توسعه یافتگی جریان، جریان‌های ثانویه شروع به شکل‌گیری کرده و پس از تشکیل کامل آنها تا انتهای کانال بدون تغییر باقی می‌مانند.

در حقیقت در مقطع یک کانال زمانی که پروفیل توزیع فشار و تنش شکل می‌گیرد، به علت وجود اختلاف تنش‌های نرمال دوم و عدم تقارن قطری در المان تنش، یک نیروی چرخشی به المان وارد می‌شود. در این حالت مکانیزم ممنوم وارد عمل شده و با ایجاد یک حرکت چرخشی در عین حرکت رو به جلو سیال و ایجاد یک ممنوم اضافی که در ازای این حرکت چرخشی ایجاد می‌شود، توازن را در معادله ممنوم ایجاد کرده و قانون بقای اندازه حرکت نیز ارضا می‌شود [۱۱۸].



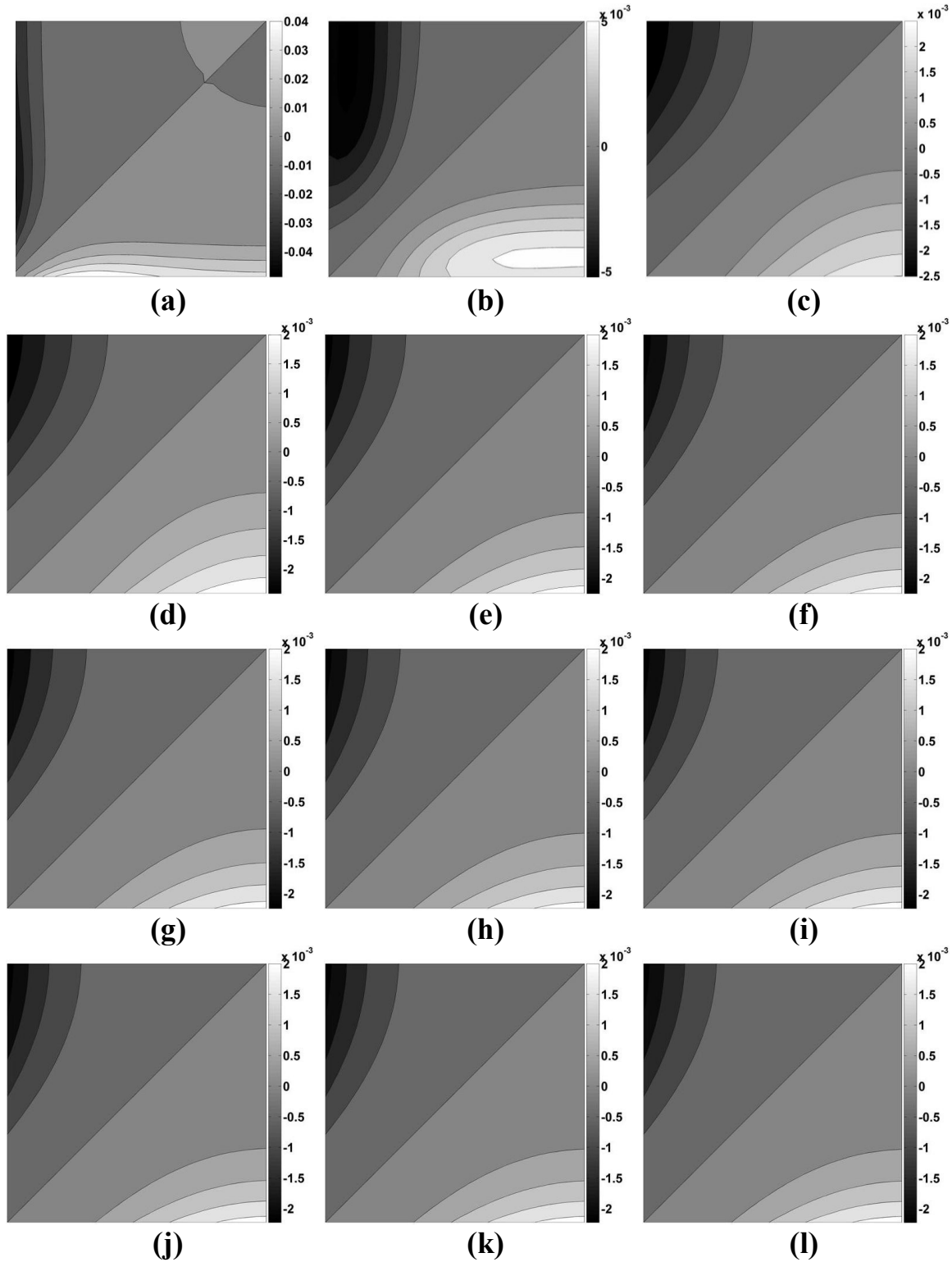
شکل (۴-۲۸): تغییرات جریان‌های عرضی در ناحیه در حال توسعه جریان $AR=1$
 $a)z^*=0.3, b)z^*=0.5, c)z^*=0.9, d)z^*=1, e)z^*=1.7, f)z^*=1.8$
 $g)z^*=1.9, h)z^*=2.9, i)z^*=3, j)z^*=3.2, k)z^*=3.4, l)z^*=3.5$



شکل (۴-۲۹): تغییرات جریان‌های عرضی در ناحیه در حال توسعه جریان $AR=2$
 $a)z^*=0.6, b)z^*=0.7, c)z^*=0.8, d)z^*=1.3, e)z^*=1.5, f)z^*=1.6$
 $g)z^*=2, h)z^*=2.3, i)z^*=2.4, j)z^*=2.7, k)z^*=3.2, l)z^*=3.2$

روند تغییرات اختلاف تنش نرمال دوم که در حقیقت عامل اصلی بوجود آمدن جریان‌های ثانویه می‌باشد، دقیقاً در همان مقاطع مربوط به جریان‌های عرضی در شکل (۴-۳۰) نشان داده شده است. همانطور که دیده می‌شود، از ابتدای کانال الگوی اختلاف تنش نرمال دوم در مقاطع عرضی کانال دائماً در حال تغییر می‌باشد و با رسیدن به مقطعی که در آنها هسته‌هایی از جریان‌های ثانویه شکل می‌گیرد (مقاطع (c) و (e))، اختلاف تنش نرمال دوم به الگوی اصلی خود که مولد جریان‌های ثانویه می‌باشد، می‌رسد. ولی همانطور که بیان شد به علت تغییرات دائم کمیت‌های جریان و لایه مرزی، این توزیع اختلاف تنش نرمال دوم تا رسیدن به ناحیه توسعه یافته موفق به تشکیل جریان‌های ثانویه نمی‌باشد و هسته‌های بوجود آمده توسط جریان اصلی از بین می‌روند. در نهایت با رسیدن جریان به

ناحیه توسعه یافته، توزیع اختلاف تنش نرمال دوم به حالت نهایی خود رسیده و تا انتهای کانال هیچ تغییری در شدت و الگوی آن ایجاد نمی‌شود.

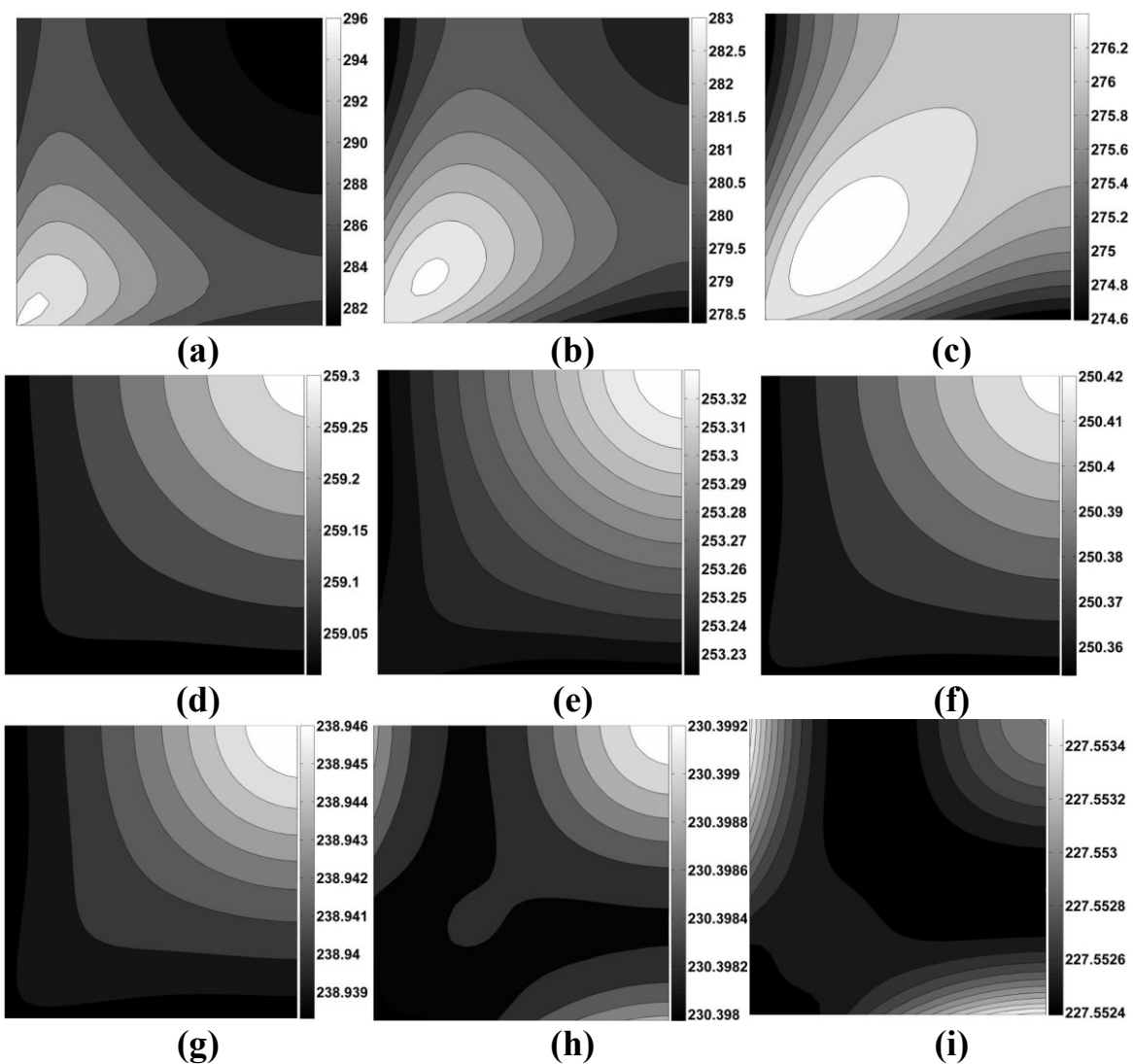


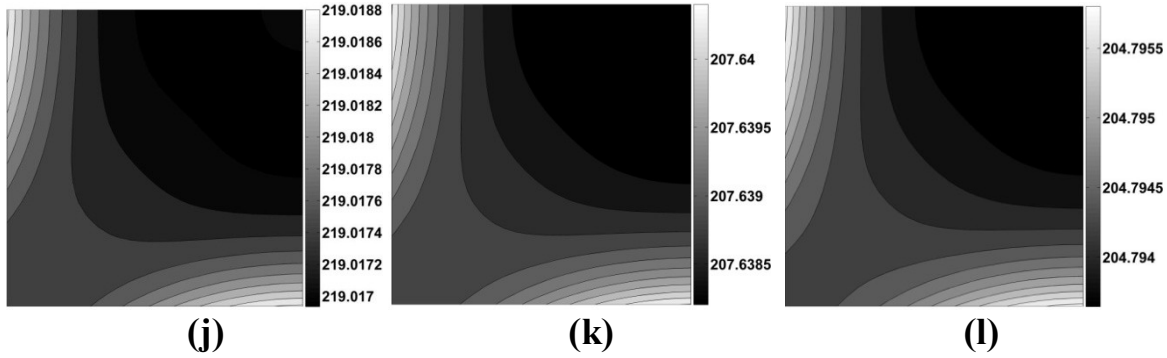
شکل (۴-۳۰): تغییرات اختلاف تنش نرمال دوم بی بعد در ناحیه در حال توسعه جریان $AR=1$

$$a) z^* = 0.3, \quad b) z^* = 0.5, \quad c) z^* = 0.9, \quad d) z^* = 1, \quad e) z^* = 1.7, \quad f) z^* = 1.8$$

$$g) z^* = 1.9, \quad h) z^* = 2.9, \quad i) z^* = 3, \quad j) z^* = 3.2, \quad k) z^* = 3.4, \quad l) z^* = 3.5$$

پروفیل فشار نیز از ابتدای کانال دایما در حال تغییر بوده و تا انتهای کانال نیز این تغییرات ادامه پیدا می‌کند. البته با رسیدن به ناحیه توسعه‌یافته، الگوی توزیع فشار در مقاطع عرضی کانال به شکل ثابتی رسیده و فقط در شدت آن تغییراتی رخ خواهد داد. همچنین با وجود تغییرات در مقدار متوسط فشار در راستای کانال، از شدت تغییرات آن در مقاطع عرضی کاسته می‌شود و در ناحیه توسعه یافته، گرادیان فشار عرضی به حدود $1e^{-6}$ مقدار متوسط آن در مقطع می‌رسد. این موضوع در شکل (۴-۳۱) نشان داده شده است.



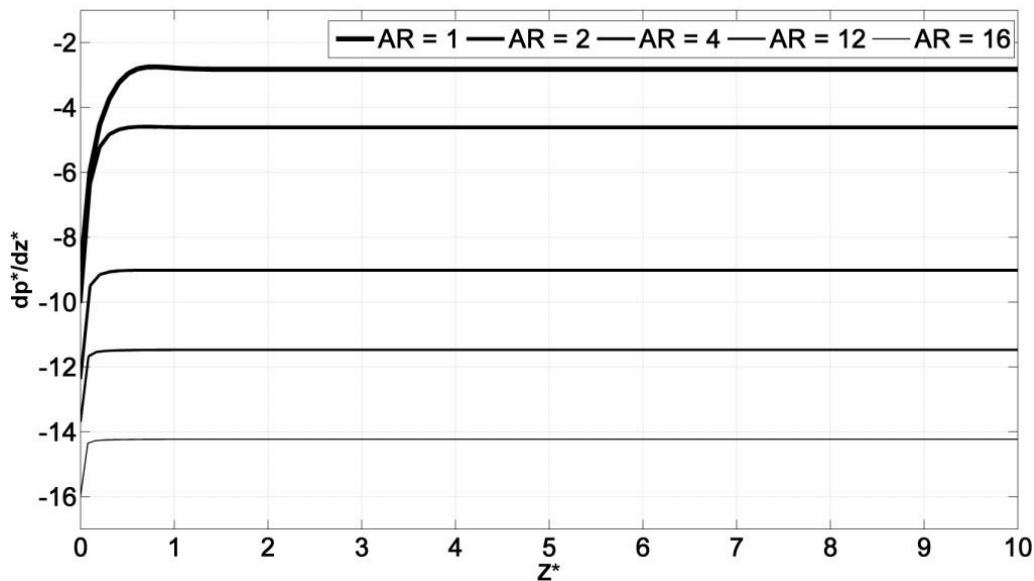


شکل (۴-۳۱): تغییرات میدان فشار بی بعد در مقاطع عرضی کانال در ناحیه در حال توسعه جریان

$$a) z^* = 0.3, \quad b) z^* = 0.5, \quad c) z^* = 0.9, \quad d) z^* = 1, \quad e) z^* = 1.7, \quad f) z^* = 1.8$$

$$g) z^* = 1.9, \quad h) z^* = 2.9, \quad i) z^* = 3, \quad j) z^* = 3.2, \quad k) z^* = 3.4, \quad l) z^* = 3.5$$

مقدار افت فشار استاتیکی هم در راستای کانال تا حدی مشابه تغییرات سرعت محوری می باشد. بدین صورت که در ابتدای کانال - ناحیه در حال توسعه - به علت شدت بالای حرکات عرضی، مقادیر افت فشار شدت بیشتری داشته و با پیشروی در راستای کانال و رسیدن به ناحیه توسعه یافته از شدت افت فشار کاسته شده و در نهایت در ناحیه توسعه یافته به مقدار ثابتی رسیده و تا انتهای کانال به همین نحو باقی می ماند. البته همانطور که در مورد جریان سیال نیوتنی هم صادق است، افت فشار متوسط سیال در مقطعی با ابعاد برابر، کمترین میزان بوده و با افزایش نسبت ابعاد سطح مقطع کانال و دور شدن از حالت مربعی سطح مقطع، مقدار افت فشار شدت بیشتری پیدا خواهد کرد. این مطلب در شکل (۴-۳۲) قابل مشاهده خواهد بود.



شکل (۴-۳۲): تغییرات افت فشار در راستای محور کانال در نسبت ابعاد مختلف سطح مقطع

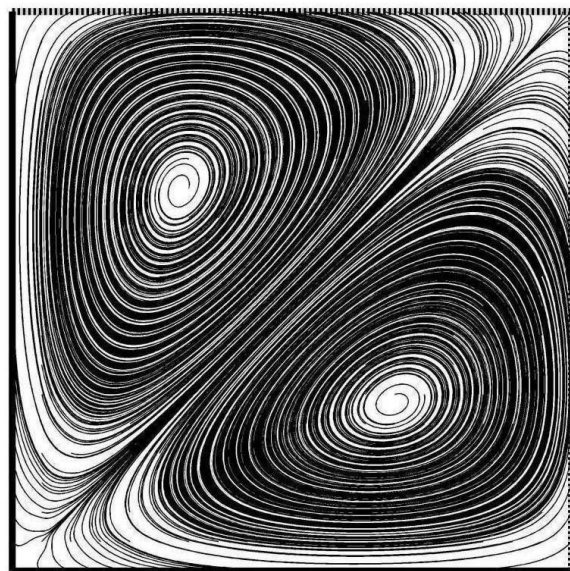
با افزایش خواص الاستیک و در پی آن افزایش شدت جریان‌های عرضی نیز مقدار افت فشار شدت بیشتری پیدا خواهد کرد که البته این مقدار در مقایسه با مقادیر اولیه افت فشار در مقاطع اولیه کانال چندان قابل ملاحظه نمی‌باشد. مقادیر افت فشار متوسط در ناحیه توسعه یافته به ازای مقادیر مختلف زمان آسودگی در جدول (۸-۴) نشان داده شده است.

جدول (۸-۴): مقادیر افت فشار متوسط در ناحیه توسعه یافته به ازای مقادیر مختلف زمان آسودگی

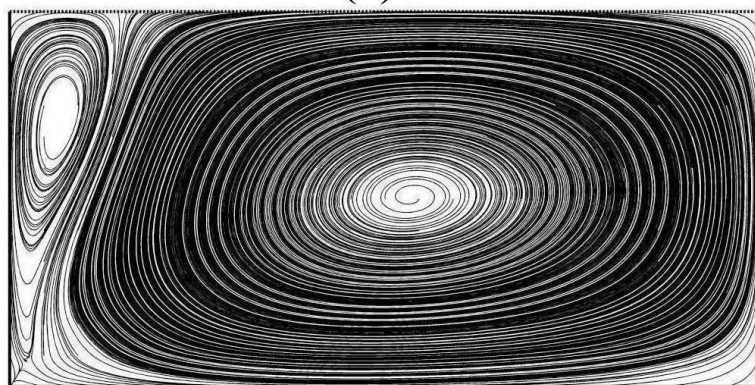
0.03	0.02	0.0135	0.01	0.0075	0.005	λ
-2.831	-2.8284	-2.825	-2.8215	-2.82	-2.8186	$\left. \frac{dp^*}{dz^*} \right _{Fully\ developed}$

در مدل‌سازی جریان سیال ویسکوالاستیک در کانال‌های مستطیلی که در آن عدم تطبیق با شرایط اولدریوید احراز شده است، با رسیدن جریان به ناحیه توسعه یافته، در هر یک چهارم کانال دو جریان ثانویه شکل می‌گیرد که البته قدرت و الگوی تشکیل این جریان‌های ثانویه وابستگی زیادی به پارامترهای مادی سیال و همچنین نسبت ابعاد سطح مقطع کانال دارد. همانطور که در شکل (۴-۳۳) دیده می‌شود، در ناحیه توسعه یافته کانال‌هایی با سطح مقطع مربعی، در هر یک چهارم مقطع کانال دو جریان ثانویه کاملاً متقارن و یک شکل ایجاد می‌شود که جهت چرخش آنها با یکدیگر متفاوت می‌باشد. با افزایش نسبت ابعاد سطح مقطع کانال، گردابه‌ها از حالت تقارن خارج شده و گردابه نزدیک به ضلع بزرگتر، به سمت ضلع کوچکتر گسترش یافته و باعث تضعیف گردابه کوچکتر و در نهایت حذف آن می‌شود به نحوی که در کانال‌هایی با نسبت ابعاد بیشتر، تنها یک گردابه در هر یک چهارم سطح مقطع کانال قابل رویت می‌باشد. این مطلب تطابق خوبی را با نتایج ارائه شده در مرجع [۳۵]، [۴۳] و [۵۳] نشان می‌دهد.

در تحقیق دولی [۶۵] نیز که به روش تجربی و با استفاده از دستگاه اکستروژن صورت پذیرفته است، با درهم پیچیدگی لایه‌های تزریق شده سیال ویسکوالاستیک، هشت جریان ثانویه در مقطع خروجی کانال مشاهده و گزارش شده است که با نتایج ارائه شده در تحقیق حاضر هماهنگی کاملی دارد.



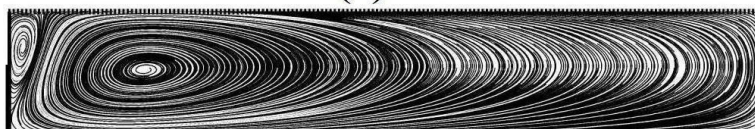
(a)



(b)



(c)



(d)



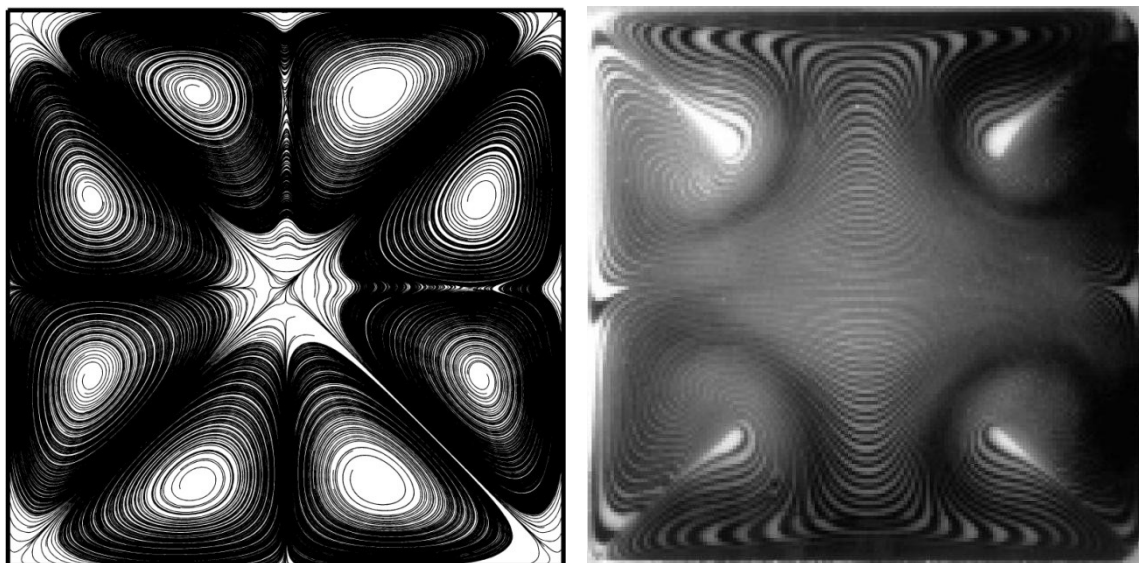
(e)



(f)

شکل (۴-۳۳): جریان‌های ثانویه در $1/4$ مقطع کانال در نسبت ابعاد مختلف

a) $AR=1$, b) $AR=2$, c) $AR=4$, d) $AR=6.25$, e) $AR=12$, f) $AR=16$



(a)

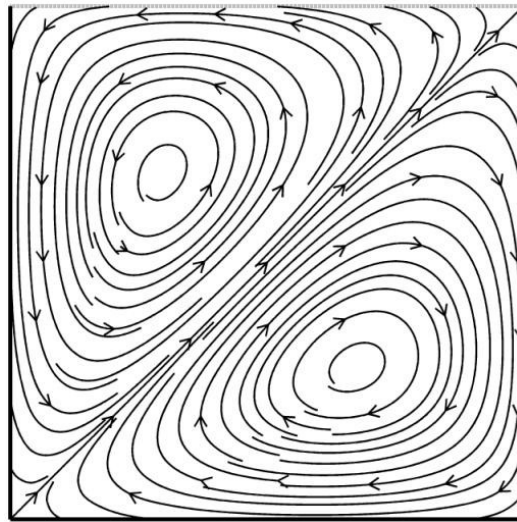
(b)

شکل (۴-۳۴): جریان‌های ثانویه در کل مقطع کانال (a) تحقیق حاضر (b) تحقیق دولی [۶۵]

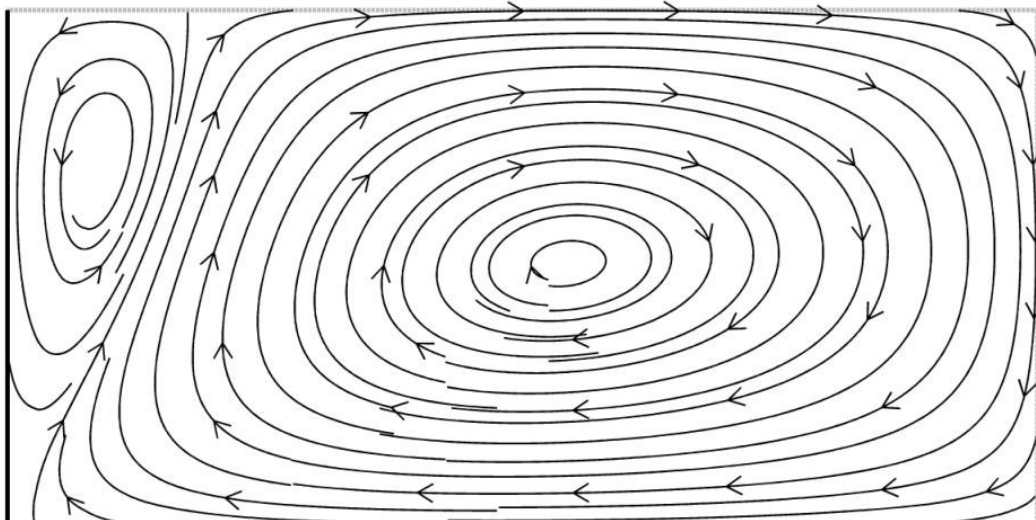
جهت چرخش این جریان‌های ثانویه نیز همانطور که پیشتر بیان شد، وابسته به جهت تغییرات نسبت ضریب اختلاف تنش نرمال دوم به ویسکوزیته سیال می‌باشد. به نحوی که اگر این تغییرات روندی افزایش داشته باشد و یا به عبارت دیگر، مقدار مشتق عبارت $\frac{\Psi_2(\dot{\gamma})}{\eta(\dot{\gamma})}$ نسبت به نرخ برش تعمیم‌یافته مثبت باشد، جهت چرخش جریان‌های ثانویه از دیواره به سمت گوشه کانال و سپس به سمت مرکز کانال می‌باشد و این روند ادامه می‌یابد. ولی اگر تغییرات کمیت مذکور روندی کاهشی داشته باشد و مشتق آن منفی باشد، چرخش جریان‌های ثانویه در جهت عکس صورت خواهد پذیرفت. نکته بسیار مهم اینست که قانون فوق مستقل از علامت گرادیان فشار سیال می‌باشد و در جریان‌های مکشی و یا دمشی قانون فوق صادق می‌باشد. به عنوان مثال اگر در جریان سیال ویسکوالاستیک با گرادیان فشار منفی، سیال در حال حرکت به جلو، از سمت دیواره به گوشه و سپس در جهت مرکز کانال حرکت مارپیچ‌گونه‌ای داشته باشد، با برعکس شدن جهت گرادیان فشار و ایجاد عمل مکش، جریان در مسیر رفته بر نخواهد گشت و مسیر دیگری را برای برگشت طی خواهد کرد [۸۷].

در مدل‌سازی جریان با استفاده از معادلات متشکله فن تین تر و گزیکس، مقدار مشتق ضریب اختلاف تنش نرمال دوم نسبت به ویسکوزیته، همواره مثبت بوده و در نتیجه جهت چرخش جریان-

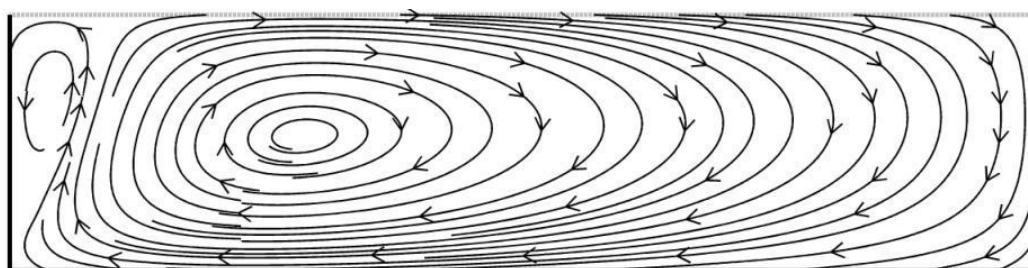
های ثانویه در جهت مذکور خواهد بود که این مطلب برای مدل فن تین تر در شکل (۴-۳۵) نشان داده شده است. ولی در مدل سازی با استفاده از معادله متشکله کریمینال اریکسون فیلیبی که فرض توابع ویسکومتریک با استفاده از توابع پاورلا و یا کاریو یاسودا انجام شده باشد، چرخش گردابه ها در هر دو جهت صورت می پذیرد که این مطلب به مقدار کمیت های این معادله متشکله بستگی خواهد داشت و با تغییر این کمیت ها هم جهت چرخش جریان های ثانویه و هم در مواردی الگوی تشکیل آنها تغییر خواهد کرد.



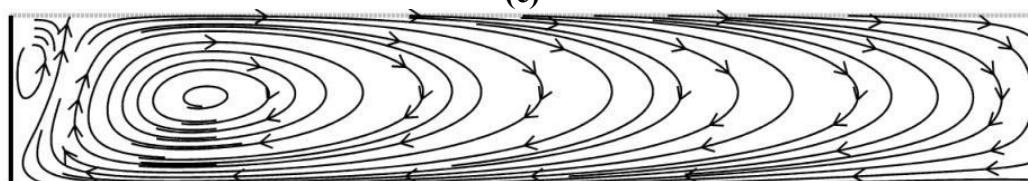
(a)



(b)



(c)



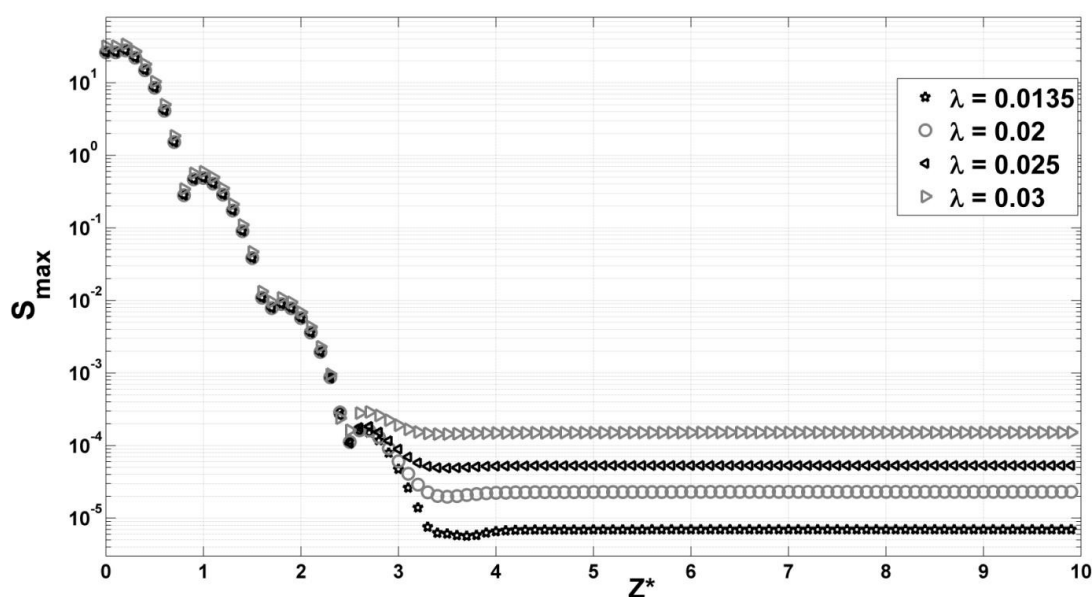
(d)

شکل (۴-۳۵): جهت چرخش جریان‌های ثانویه در $1/4$ مقطع کانال در نسبت ابعاد مختلف

$$a) AR=1, \quad b) AR=2, \quad c) AR=4, \quad d) AR=6.25$$

همانطور که بیان شد، یکی از پارامترهایی که وجود آن برای تشکیل جریان‌های ثانویه لازم و مقدار آن بر شدت این گردابه‌ها اثرگذار می‌باشد، مقدار اختلاف تنش نرمال دوم می‌باشد و چنانچه در معادله (۴-۴-۲) نشان داده شده است، مقادیر پارامترهای مادی و همچنین زمان آسودگی از تنش سیال ویسکوالاستیک، اثر گذار در مقدار اختلاف تنش نرمال دوم و در پی آن موثر در شدت جریان‌های عرضی می‌باشند. از این رو شدت جریان‌های عرضی به ازای مقادیر مختلف این پارامترها مورد بررسی قرار گرفته است. همانطور که در شکل (۴-۳۶) مشاهده می‌شود، شدت جریان‌های عرضی در مقاطع اولیه کانال - ناحیه در حال توسعه - بسیار بالا و در حدود 0.4 شدت جریان اصلی سیال می‌باشد ولی با این حال هیچ جریان ثانویه‌ای در این ناحیه شکل نمی‌گیرد. با پیشروی در راستای کانال و افزایش ضخامت لایه مرزی، از شدت این جریان‌ها کاسته شده و با رسیدن جریان به حالت توسعه یافتگی و تشکیل جریان‌های ثانویه، شدت این جریان‌ها به مقدار ثابتی رسیده و تا انتهای کانال با همین شدت ادامه می‌یابد. البته همانطور که در نمودارهای مربوط به شدت جریان‌های عرضی مشاهده می‌شود، در ناحیه در حال توسعه در دو نقطه نمودار از الگوی خود خارج شده و مقداری پرش دارد. با مقایسه این نمودارها با شکل (۴-۲۸) در می‌یابیم که دقیقاً در این مقاطع هسته‌هایی از جریان ثانویه شکل گرفته ولی در مقاطع بعد توسط جریان اصلی از بین می‌رود که این مطلب دلیل پرش نمودار در

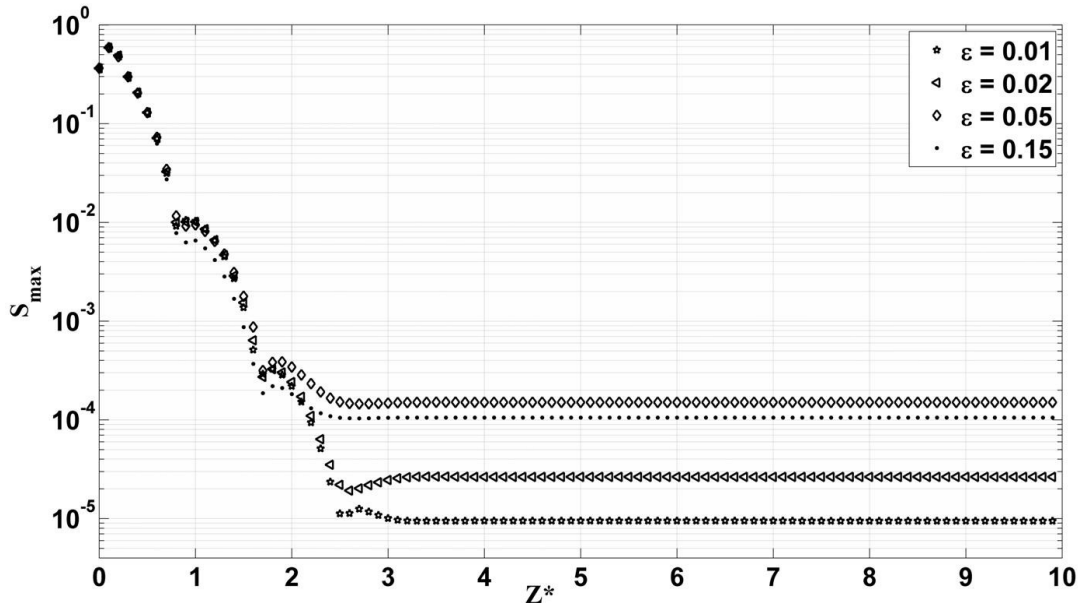
این مقاطع می‌باشد. نکته قابل ذکر دیگر افزایش شدت جریان‌های عرضی و همچنین جریان‌های ثانویه با افزایش زمان آسودگی از تنش می‌باشد. علت این مطلب افزایش خواص الاستیک ماده با افزایش زمان آسودگی از تنش و از طرف دیگر به علت خاصیت نازک‌شوندگی ویسکوزیته نسبت به نرخ برش در مواد ویسکوالاستیک می‌باشد [۴۳]. از طرف دیگر به ازای مقادیر کم ثابت زمانی، هم مقدار اختلاف تنش نرمال دوم ناچیز بوده و هم اختلاف تنش نرمال دوم به سمت تعریف ضریب ثابتی از ویسکوزیته نزدیک می‌شود که در نهایت باعث کاهش شدت جریان‌های عرضی می‌شود. لازم به ذکر است که این تغییرات در ناحیه در حال توسعه هم رخ می‌دهد ولی به علت شدت بالای جریان‌های عرضی در این ناحیه، این تغییرات چندان قابل ملاحظه نمی‌باشد. این مطلب در شکل (۴-۳۶) نشان داده شده است.



شکل (۴-۳۶): تغییرات شدت جریان‌های عرضی در راستای محور کانال به‌ازای تغییرات λ

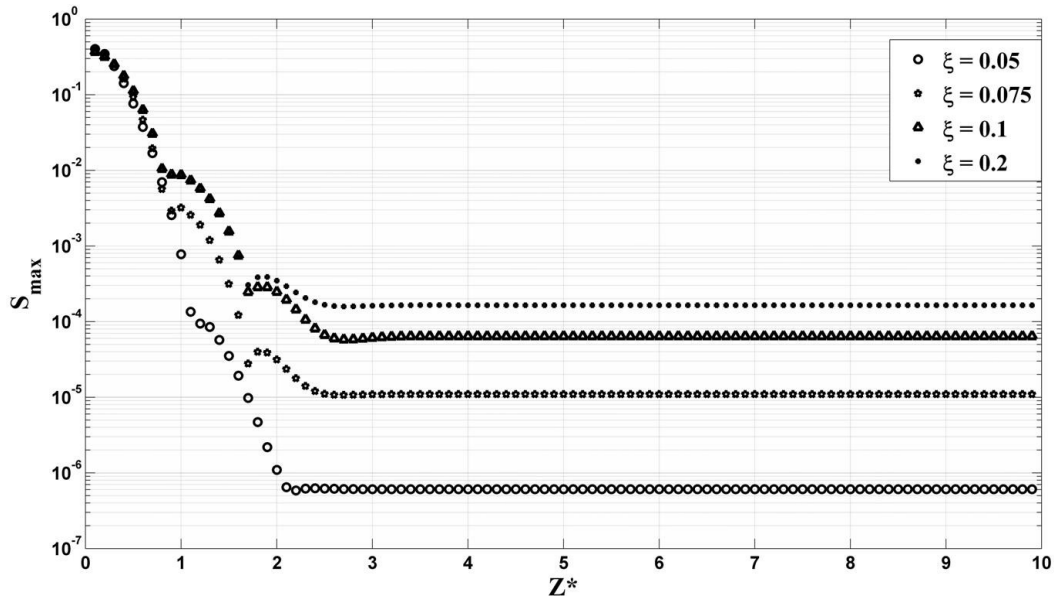
همانطور که در شکل (۴-۳۷) نشان داده شده است، پارامتر مادی ε یکی دیگر از پارامترهای مادی اثر گذار بر مقدار اختلاف تنش نرمال دوم و همچنین شدت جریان‌های ثانویه می‌باشد. در حالتی که مقدار ε ناچیز است، مقدار پارامتر g به سمت یک میل کرده و شرایط اولدریود حادث می‌شود. از این‌رو جریان‌های ثانویه بسیار ضعیف شده و کم از کم بین می‌روند. اما با افزایش مقدار ε ،

مقدار پارامتر g از یک بیشتر شده و همچنین خاصیت باریک شونده سیال تقویت می‌شود که در پی آن مقدار اختلاف تنش نرمال دوم و همچنین شدت جریان‌های عرضی افزایش می‌یابد.



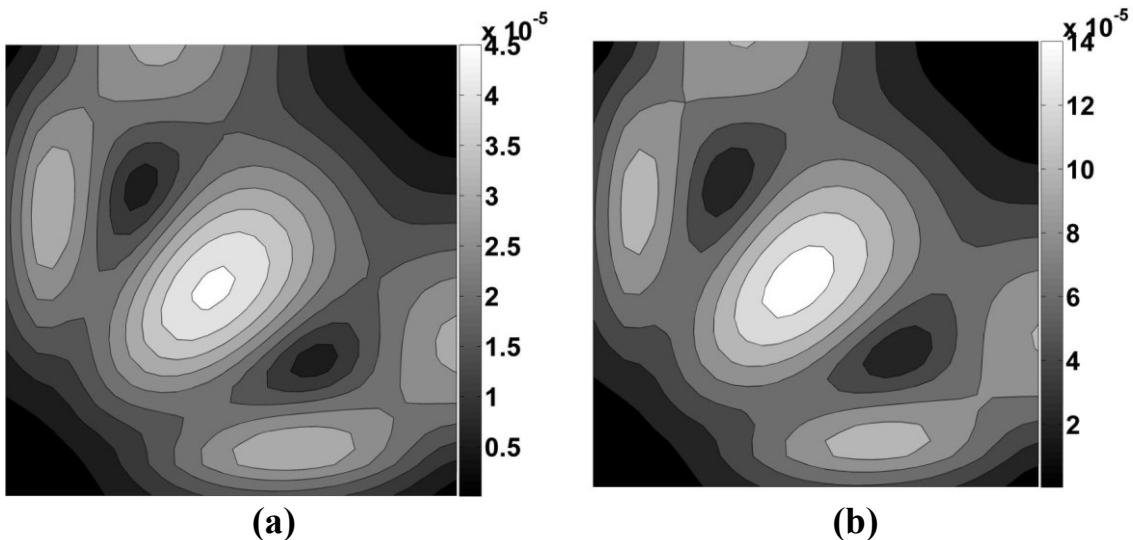
شکل (۴-۳۷): تغییرات شدت جریان‌های عرضی در راستای محور کانال به‌ازای تغییرات ε

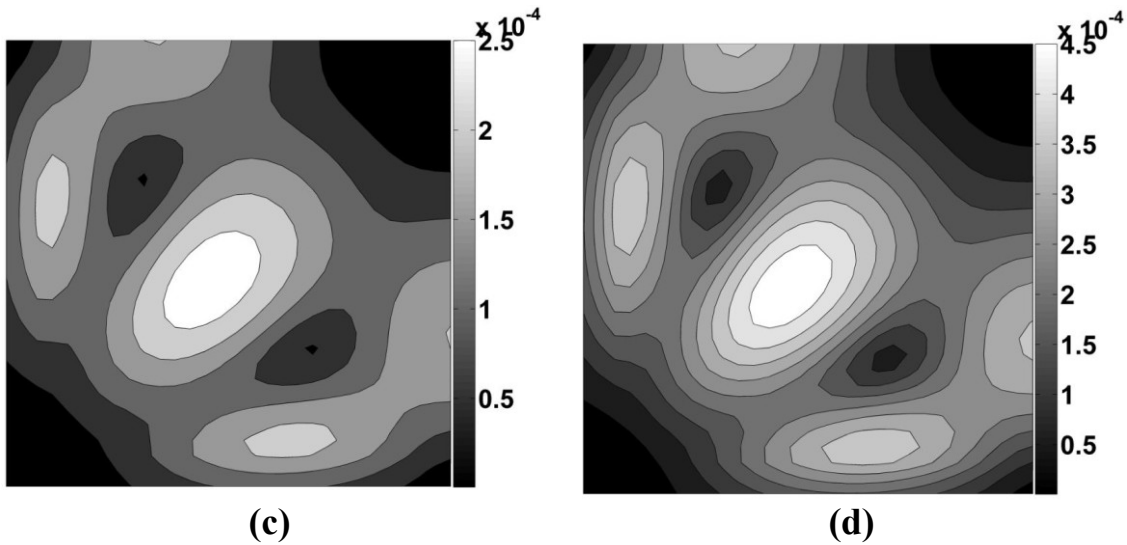
از آنجایی که پارامتر مادی ε اثر مستقیمی بر اختلاف تنش نرمال دوم در مدل‌سازی با استفاده از مدل فن تین‌تر دارد و همانطور که در شکل (۴-۳۸) نشان داده شده است، افزایش پارامتر مادی ε نیز باعث افزایش شدت جریان‌های ثانویه می‌شود. از طرف دیگر این پارامتر تا حدی بر ویسکوزیته سیال نیز اثرگذار می‌باشد. به صورت کلی، افزایش ویسکوزیته سیال در حالی که خواص الاستیک ثابت فرض شود (به عنوان مثال با افزایش مقدار ویسکوزیته ماده در نرخ برش صفر)، باعث ضعیف شدن جریان‌های ثانویه می‌شود. از این رو با افزایش پارامتر مادی ε ، هم خواص الاستیک ماده افزایش پیدا کرده و هم مقداری ویسکوزیته ماده کاهش پیدا می‌نماید که در نهایت باعث افزایش شدت جریان‌های ثانویه می‌شود.



شکل (۴-۳۸): تغییرات شدت جریان‌های عرضی در راستای محور کانال به‌ازای تغییرات ξ

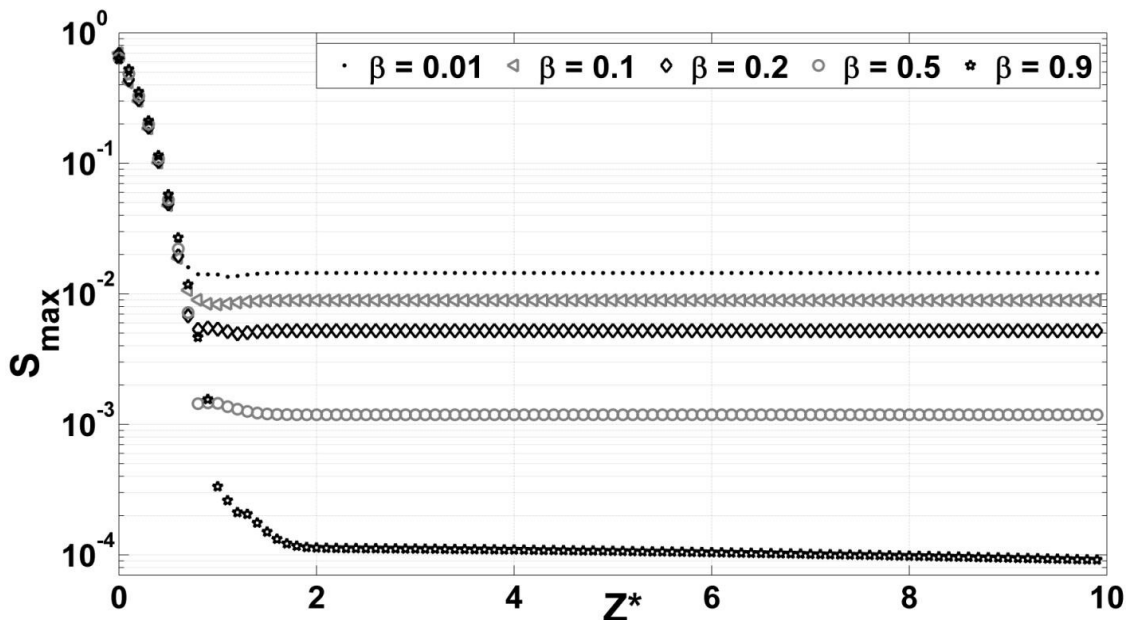
توزیع شدت جریان‌های ثانویه در ناحیه توسعه یافته در مقطع $z^* = 0.9$ به ازای مقادیر مختلف زمان آسودگی در شکل (۴-۳۹) نشان داده شده است. همانطور که پیشتر بیان شد، یکی از خواص مهم سیالات ویسکوالاستیک که در مدل‌سازی با استفاده از معادله متشکله فن تین تر هم مشاهده می‌شود، خاصیت رقیق‌شوندگی سیال نسبت به نرخ برش می‌باشد. در اطراف دیواره‌های جامد به دلیل بالاتر بودن نرخ برش، ویسکوزیته سیال مقدار کمتری داشته و از این رو شدت جریان‌های ثانویه نسبت به مرکز کانال بیشتر است. از طرف دیگر با افزایش مقدار زمان آسودگی، بدون تغییر در الگوی این کمیت، بر شدت جریان‌های ثانویه در کل مقطع افزوده می‌شود.





شکل (۴-۳۹): توزیع شدت جریان‌های ثانویه در مقطع $z^* = 0.9$ به‌ازای مقادیر مختلف λ
 $a) \lambda = 0.0135, \quad b) \lambda = 0.02, \quad c) \lambda = 0.025, \quad d) \lambda = 0.03$

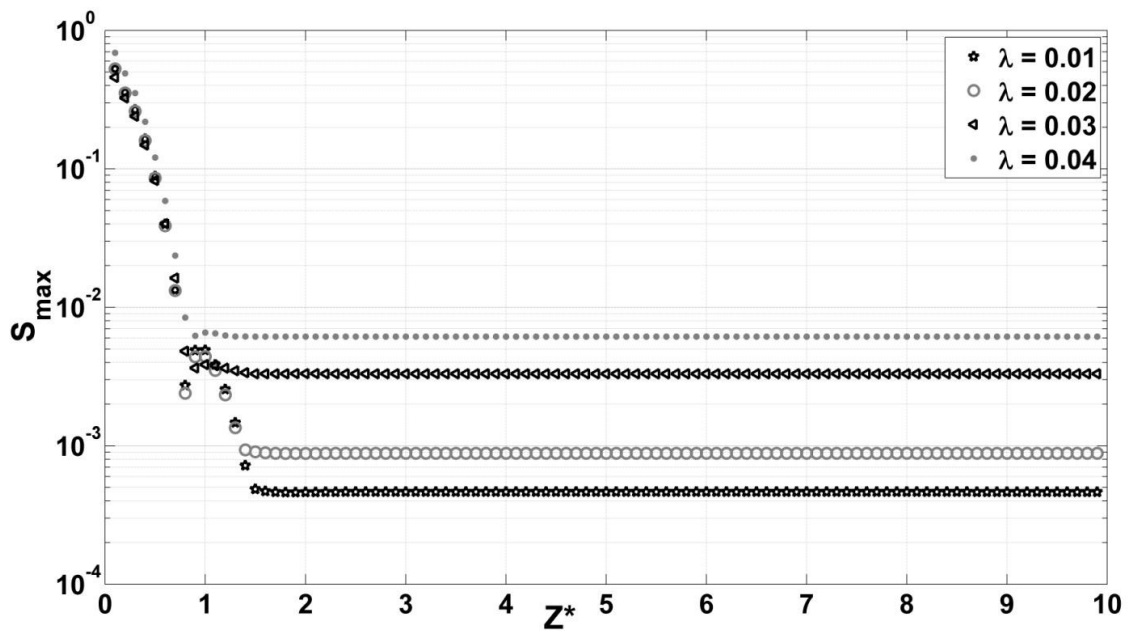
در مدل‌سازی با استفاده از معادله متشکله گزیکس نیز پارامترهایی چون α, β, λ بر شدت جریان‌های ثانویه اثرگذار می‌باشد. همانطور که در شکل (۴-۴۰) دیده می‌شود، با افزایش مقدار β ، درصد لزجت حلال (ماده نیوتنی) به لزجت کل بیشتر شده و در پی آن خواص الاستیک ماده کاهش یافته و اختلاف تنش نرمال دوم و شدت جریان‌های ثانویه کاهش می‌یابد.



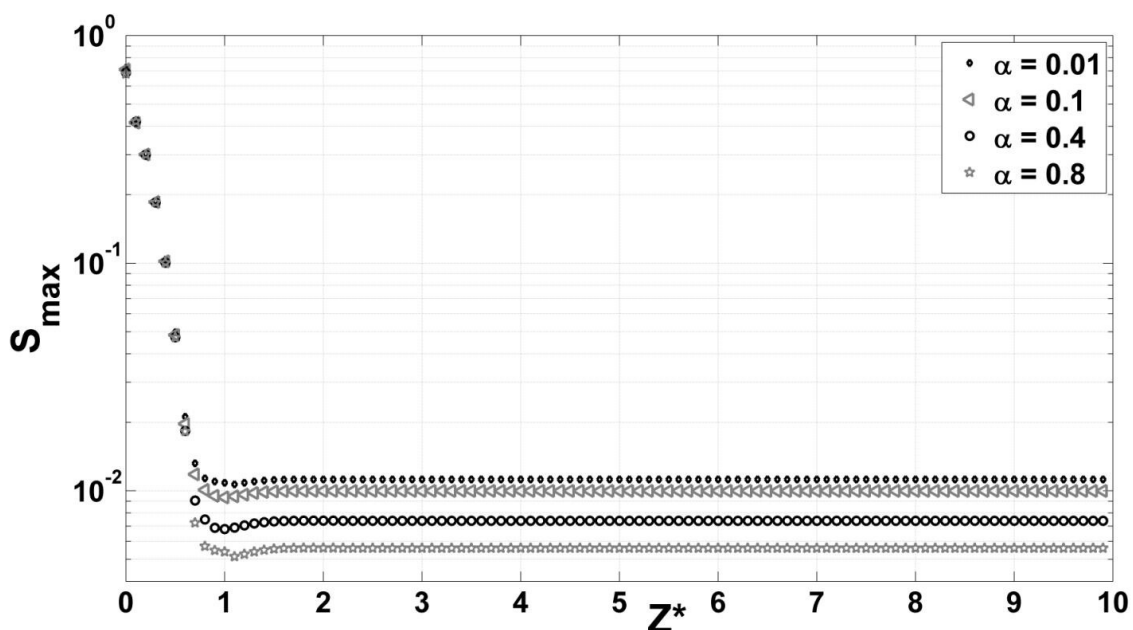
شکل (۴-۴۰): تغییرات شدت جریان‌های عرضی در راستای محور کانال به‌ازای تغییرات β

در معادله متشکله گزیکس نیز همچون مدل فن تین تنر، زمان آسودگی از تنش تاثیر مستقیمی بر

خواص الاستیک و شدت جریان‌های ثانویه دارد به نحوی که با افزایش مقدار زمان آسودگی از تنش، خواص الاستیک ماده تقویت شده و در نتیجه اختلاف تنش نرمال دوم و شدت جریان‌های ثانویه افزایش می‌یابد. ولی به علت تاثیر معکوس پارامتر α بر زمان آسودگی از تنش، با افزایش مقدار α ، زمان آسودگی از تنش کاهش یافته و در نتیجه شدت جریان‌های ثانویه کاهش می‌یابد. این مطلب در شکل‌های (۴-۴۱) و (۴-۴۲) نشان داده شده است.

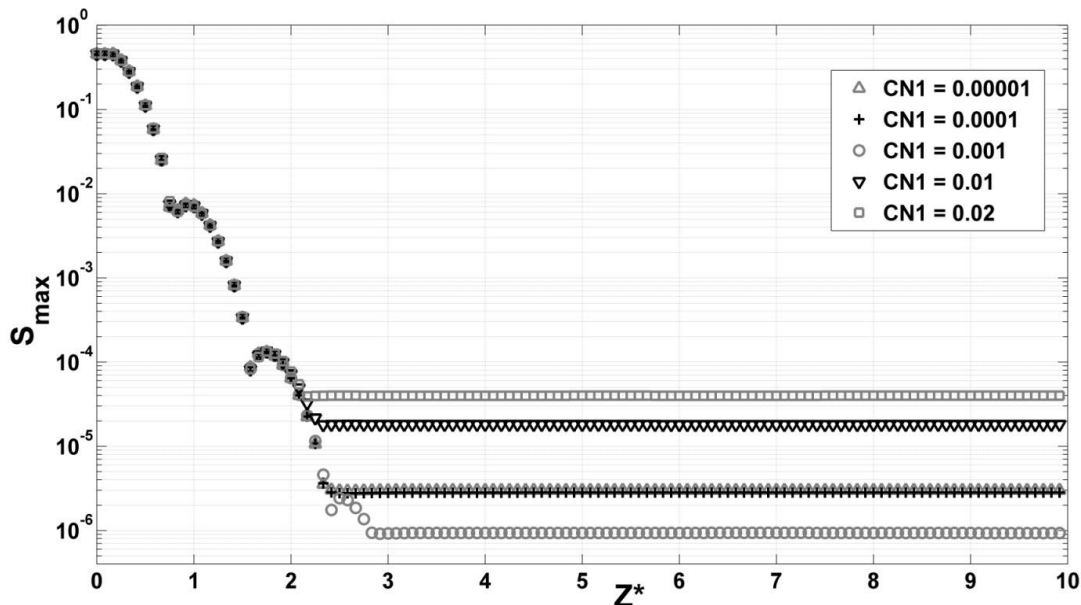


شکل (۴-۴۱): تغییرات شدت جریان‌های عرضی در راستای محور کانال به‌ازای تغییرات λ

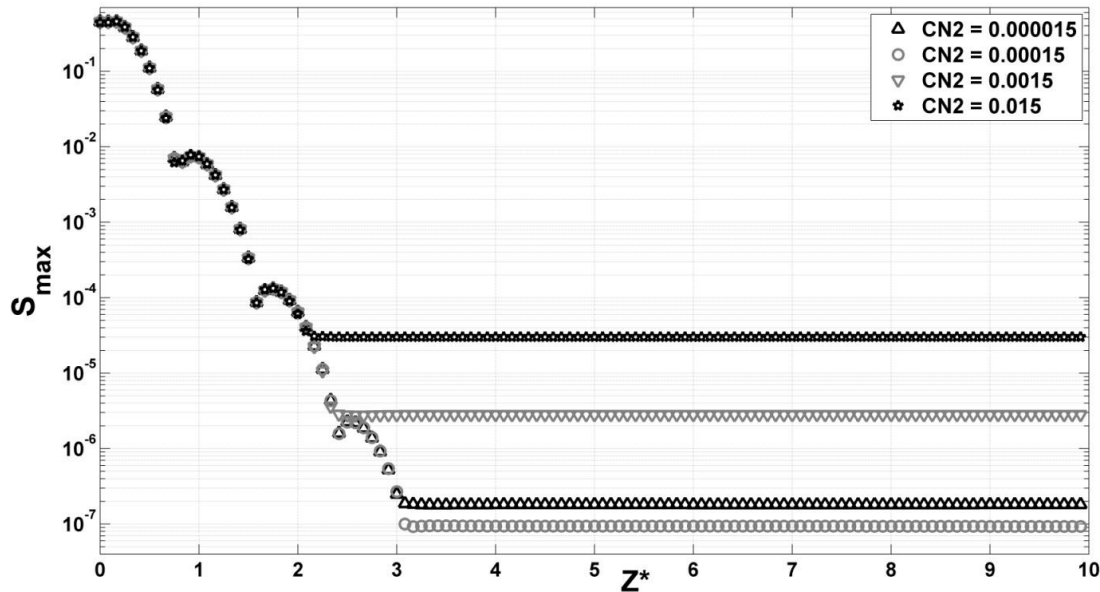


شکل (۴-۴۲): تغییرات شدت جریان‌های عرضی در راستای محور کانال به‌ازای تغییرات α

در مدل‌سازی جریان سیال ویسکوالاستیک با معادله متشکله کریمینال اریکسون فیلیبی نیز همانطور که در شکل‌های (۴۳-۴) و (۴۴-۴) نشان داده شده است، ضرایب CN_1, CN_2 بر مقدار اختلاف تنش‌های نرمال و همچنین شدت جریان‌های ثانویه اثرگذار می‌باشند ولی ثابت زمانی λ و همچنین λ_1 تاثیر چندانی بر شدت جریان‌های ثانویه نخواهند گذاشت. زیرا همانطور که بیان شد، این ثوابت زمانی ضرایب ترم گرادیان تنش در معادله متشکله نبوده و هیچ عملکردی به عنوان زمان رهایی از تنش نخواهند داشت. تغییرات ضرایب CN_1, CN_2 نیز اثر یکنوایی بر مقدار اختلاف تنش نرمال دوم و در پی آن شدت جریان‌های ثانویه ندارند. همانطور که دیده می‌شود، در ابتدا با افزایش CN_1 ، شدت جریان‌های ثانویه کاهش یافته ولی بعد از آن، افزایش مجدد در مقدار ضریب CN_1 باعث افزایش شدت جریان‌های ثانویه شده و این روند ادامه پیدا می‌کند. در مورد ضریب CN_2 هم نیز وضعیت مشابهی حاکم می‌باشد و افزایش این ضریب باعث افزایش یک‌سویه در شدت جریان‌های عرضی نمی‌شود. در حقیقت علت اصلی این مطلب اثر گذاری هم‌زمان مقدار عرض از مبدا CN_1 و طول از مبدا CN_2 در مقدار نهایی اختلاف تنش نرمال دوم می‌باشد.



شکل (۴۳-۴): تغییرات شدت جریان‌های عرضی در راستای محور کانال به‌ازای تغییرات CN_1



شکل (۴-۴۴): تغییرات شدت جریان‌های عرضی در راستای محور کانال به‌ازای تغییرات CN_2

در فصل دوم و در قسمت معادلات حاکم بر مسئله، ترم مربوط به نیروهای خارجی در معادله ممنتوم تا کنون صفر منظور شده است ولی در حقیقت یکی از نیروهای موجود و اثرگذار بر میدان جریان و بالاخص انتقال حرارت، نیروی گرانش می‌باشد. در این قسمت معادله ممنتوم با در نظر گرفتن ترم نیروی گرانش ولی با فرض جریان هم‌دما^۱ بازنویسی شده و مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این حالت معادلات پیوستگی، انرژی و ممنتوم در راستاهای z, y و همچنین معادله متشکله تغییری نکرده ولی معادله ممنتوم در راستای x به صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} = \frac{1}{Re} \left(-\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \sigma_{xx}^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \sigma_{xy}^*}{\partial y^*} + \frac{\partial \sigma_{xz}^*}{\partial z^*} \right) - \frac{1}{Fr} \quad (۹-۴)$$

$$Fr = \frac{w_{ref}^2}{D_h g}$$

که در آن Fr عدد فرود بوده و بیانگر نسبت نیروی اینرسی به نیروی گرانش می‌باشد. طبق نتایج بدست آمده از این حالت، به علت اثر یکسان ترم نیروی گرانش بر تمامی عناصر سیال، این نیرو تغییری خاصی در مکانیزم جریان اصلی و همچنین جریان‌های ثانویه ایجاد نخواهد کرد و خطوط جریان در این حالت کاملاً مشابه حالت قبل خواهد بود.

^۱ - Isoterm

لازم بذکر است که صرف در نظر گرفتن معادله ممنوم و فرض جریان هم‌دما در این قسمت، باعث وارد شدن اثرات جابجایی آزاد در مکانیزم انتقال حرارت نخواهد شد و در میدان جریان نیز تغییر خاصی ایجاد نمی‌کند. البته در ادامه این فصل مکانیزم جابجایی آزاد علاوه بر جابجایی اجباری و اثر آن بر میدان جریان و انتقال حرارت بررسی خواهد شد.

۴-۶- انتقال حرارت

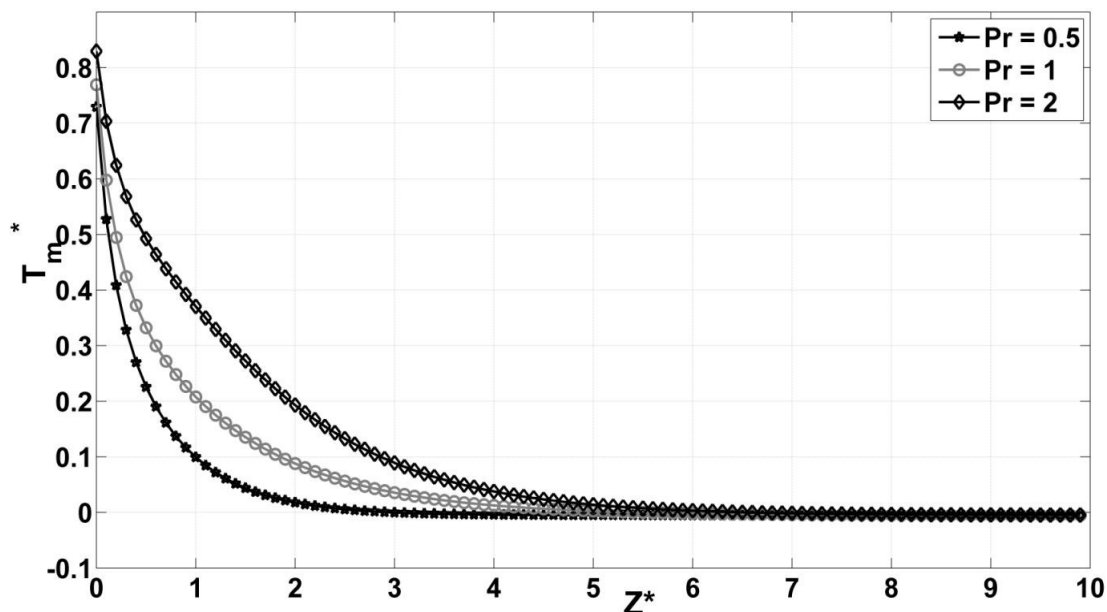
همانطور که پیشتر بیان شد، در این تحقیق معادله انرژی به همراه دیگر معادلات حاکمه با دو شرط مرزی دمای دیواره ثابت (T) و همچنین اعمال شار حرارتی محیطی ثابت به دیواره‌ها (H_2) مورد تحلیل قرار گرفته است. از طرف دیگر، وابستگی برخی از پارامترهای جریان به دما و در نظر گرفتن آنها به صورت تابعی از دما، حل همزمان معادلات حاکمه به همراه معادله انرژی را ناگزیر می‌سازد. از این‌رو همانطور که در فصول قبلی توضیح داده شد، معادلات جریان و انتقال حرارت به صورت همزمان حل شده و نتایج بدست آمده در شرایط مرزی حرارتی اعمال شده به صورت مجزا ارائه می‌شود.

۴-۶-۱- بررسی میدان دما و انتقال حرارت

اولین شرط مرزی حرارتی مورد استفاده، اعمال دمای ثابت به دیواره‌ها و یا همان شرط مرزی T می‌باشد. در این حالت سیال ویسکوالاستیک با دمای ثابتی وارد کانال شده و پس از تماس با دیواره‌ها که دمای آنها بیشتر (حالت گرمایش) و یا کمتر (حالت سرمایش) از دمای ورودی سیال می‌باشد، دمای سیال رفته رفته تغییر کرده و به دمای دیواره‌ها نزدیک می‌شود. در این حالت پس از ورود سیال به کانال و به علت وجود گرادیان بین دمای ورودی سیال و دمای دیواره‌ها، لایه مرزی حرارتی رفته رفته شکل گرفته و با پیشروی در راستای کانال به ضخامت آن افزوده می‌شود تا جاییکه لایه مرزی کامل شده و دمای سیال تا انتهای کانال هیچ تغییری پیدا نمی‌کند. لازم به ذکر است که در این بین لایه مرزی هیدرودینامیکی هم شکل گرفته و در حال تکامل می‌باشد. نسبت ضخامت لایه مرزی

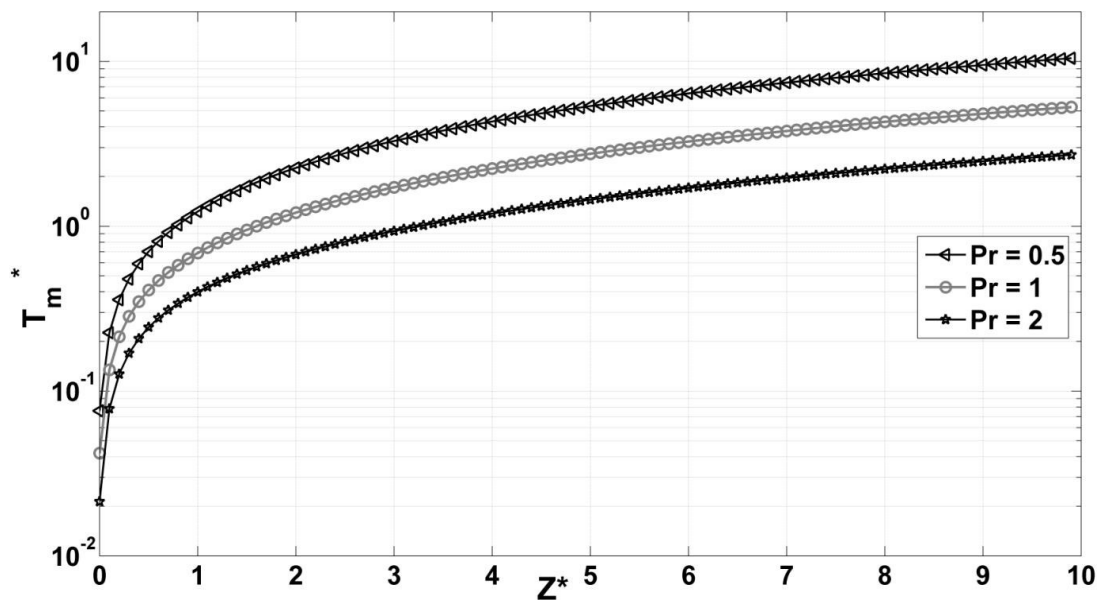
حرارتی به لایه مرزی هیدرودینامیکی بستگی به عدد پراتل سیال دارد و با بیشتر شدن عدد پراتل، نسبت ضخامت لایه مرزی هیدرودینامیکی به لایه مرزی حرارتی رشد یافته و در پی آن طول توسعه یافتگی هیدرودینامیکی کمتر از طول توسعه یافتگی حرارتی می‌شود.

در حالت اعمال شرط مرزی T ، در هر دو حالت سرمایش و گرمایش و به ازای تمامی اعداد پراتل، در ابتدای کانال و در محدوده در حال توسعه جریان، علی‌رغم عدم حضور جریان‌های ثانویه و بدلیل بالا بودن جریان‌های عرضی، گرادیان دما بسیار شدیدتر از ناحیه توسعه یافته می‌باشد. این روند با تشکیل لایه مرزی کاهش یافته و با پیشروی در راستای کانال به مقدار ثابتی می‌رسد. البته لازم به ذکر است که مقدار عدد برینکمن که علامت آن قرارگیری سیال در حالت سرمایش و یا گرمایش را نشان می‌دهد، در چگونگی تغییرات دمای متوسط سیال در راستای کانال و همچنین مقدار دمای متوسط سیال در ناحیه توسعه یافته موثر بوده که در ادامه به این مطلب نیز پرداخته می‌شود. عدد پراتل نیز بر نحوه تغییرات دما در راستای و همچنین مقاطع عمودی کانال اثرگذار می‌باشد. با افزایش عدد پراتل از شدت گرادیان دما در راستای کانال کاسته شده و پروفیل دما در فاصله بیشتری از دهانه ورودی کانال به حالت یکنواخت می‌رسد. این مطلب در شکل (۴-۴۵) قابل مشاهده می‌باشد.



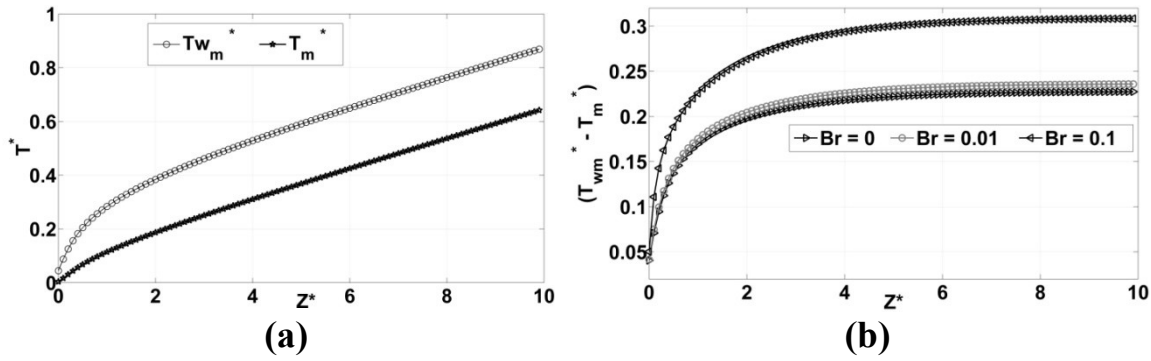
شکل (۴-۴۵): تغییرات دمای متوسط سیال به ازای تغییرات عدد Pr در حالت $Br > 0$ و اعمال شرط مرزی T

در حالت اعمال شرط مرزی H_2 و گرمایش سیال نیز، دمای سیال در ابتدای کانال از مقدار اولیه خود شروع شده و با دریافت حرارت از دیواره‌ها بر مقدار آن افزوده می‌شود که این روند افزایشی تا پایان کانال ادامه می‌یابد و فقط با پیشروی در راستای کانال از شدت آن کاسته می‌شود. با افزایش عدد پرانتل نیز به علت بیشتر شدن ناحیه در حال توسعه حرارتی در ابتدای کانال، از شدت افزایش دما در این ناحیه کاسته می‌شود.



شکل (۴-۴۶): تغییرات دمای متوسط سیال به ازای تغییرات عدد Pr در حالت $Br > 0$ و اعمال شرط مرزی H_2

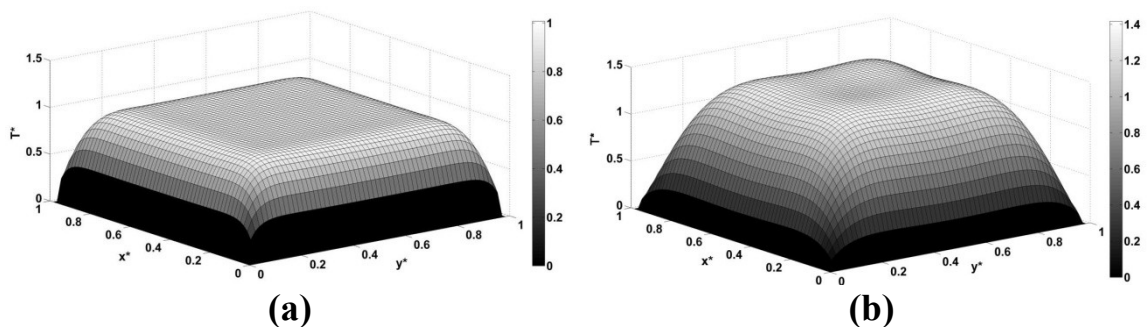
در حالت اعمال شار حرارتی محوری و محیطی ثابت به کانال یا به عبارت دیگر شرایط مرزی H_2 نیز همانند حالت قبلی، در ابتدای کانال گرادیان دما بسیار شدید بوده و با پیشروی در راستای کانال از این شدت کاسته می‌شود. البته با این تفاوت که در این شرایط، هیچگاه متوسط دمای سیال در مقاطع عرضی کانال به حالت یکنواخت نمی‌رسد و شرط توسعه یافتگی دما برای این حالت، صفر بودن گرادیان دمای متوسط سیال و دمای دیواره می‌باشد [۱۲۰]. این مطلب در حالت گرمایش سیال و به ازای عدد برینکمن صفر و همچنین برای تفاضل دمای میانگین سیال و دیواره به ازای چند عدد برینکمن در شکل (۴-۴۷) نشان داده شده است.

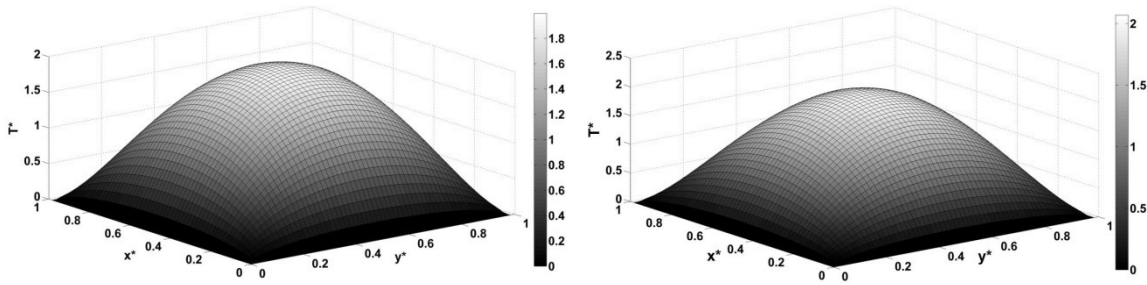


شکل (۴-۴۷): (a) تغییرات دمای متوسط سیال و همچنین دمای دیواره‌ها به ازای $Br = 0$ و (b) تفاضل آنها در راستای کانال در حالت $Br \geq 0$ و اعمال شرط مرزی H_2

در شکل‌های (۴۸-۴) و (۴۹-۴) نیز سطوح دما در مقاطع مختلف کانال در یک عدد پرانتل و در شرط مرزی حرارتی T نشان داده شده است. در حالت سرمایش کانال و به ازای اعداد برینکمن منفی، پروفیل دمای بی‌بعد سیال از حالت یکنواخت در دهانه ورودی کانال شروع شده و پس از انتقال حرارت با دیواره‌ها رفته رفته به حالت نهایی و توسعه یافته خود می‌رسد که در این حالت یک توازن حرارتی بین گرمای ایجاد شده توسط تلفات ویسکوز و حرارت منتقل شده به دیواره‌ها ایجاد شده و تا پایان کانال با همین الگو و شدت ادامه می‌یابد.

در حالت گرمایش سیال و به ازای برخی از اعداد برینکمن بزرگتر که فعالیت ترم تنش حائز اهمیت می‌باشد، علی‌رغم اینکه دمای ورودی سیال پایین‌تر از دمای دیواره‌ها بوده و در ابتدای کانال حرارت از دیواره‌ها به سیال منتقل می‌شود، در مقاطع میانی کانال به علت فعالیت ترم تنش به عنوان یک منبع حرارتی، دمای میانگین سیال از دمای دیواره‌ها بالاتر رفته و این مطلب باعث تغییر در الگوی پروفیل دمای سیال و همچنین تغییر علامت دمای متوسط سیال از مقادیر مثبت به مقادیر منفی می‌شود.



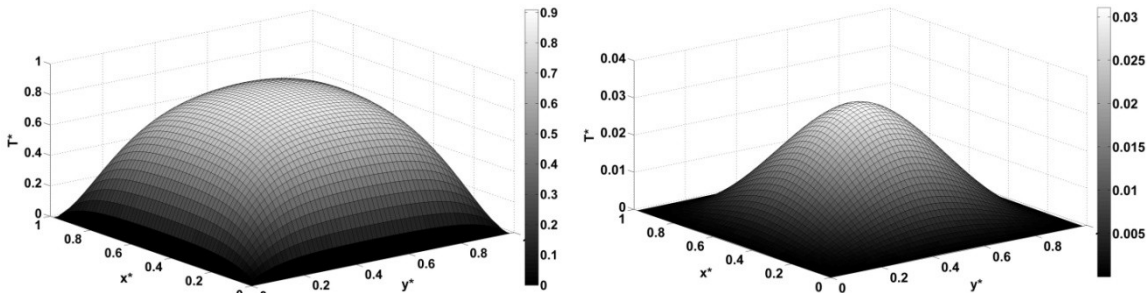


(c)

(d)

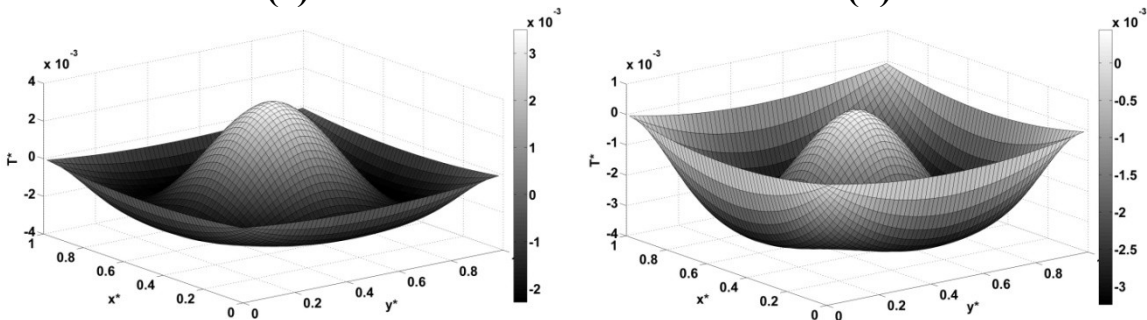
شکل (۴-۴۸): تغییرات میدان دمای بی‌بعد در مقاطع مختلف کانال در حالت سرمایش $Br < 0$ و اعمال شرط

مرزی T و $a) z^* = 0.2, b) z^* = 0.4, c) z^* = 0.9, d) z^* = 1$



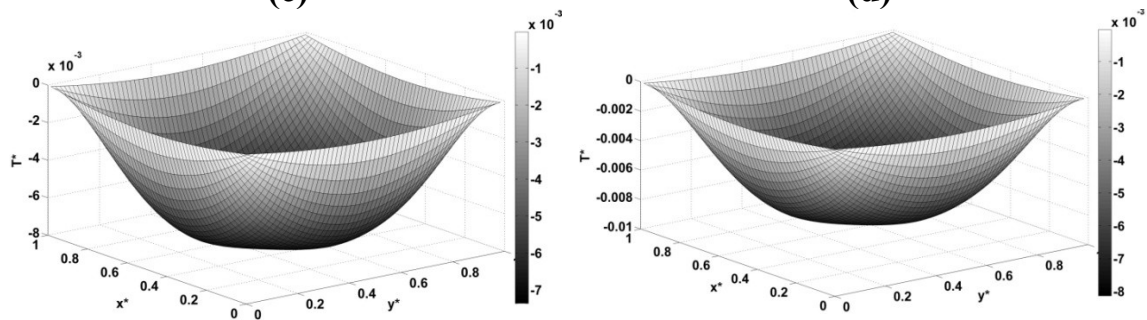
(a)

(b)



(c)

(d)



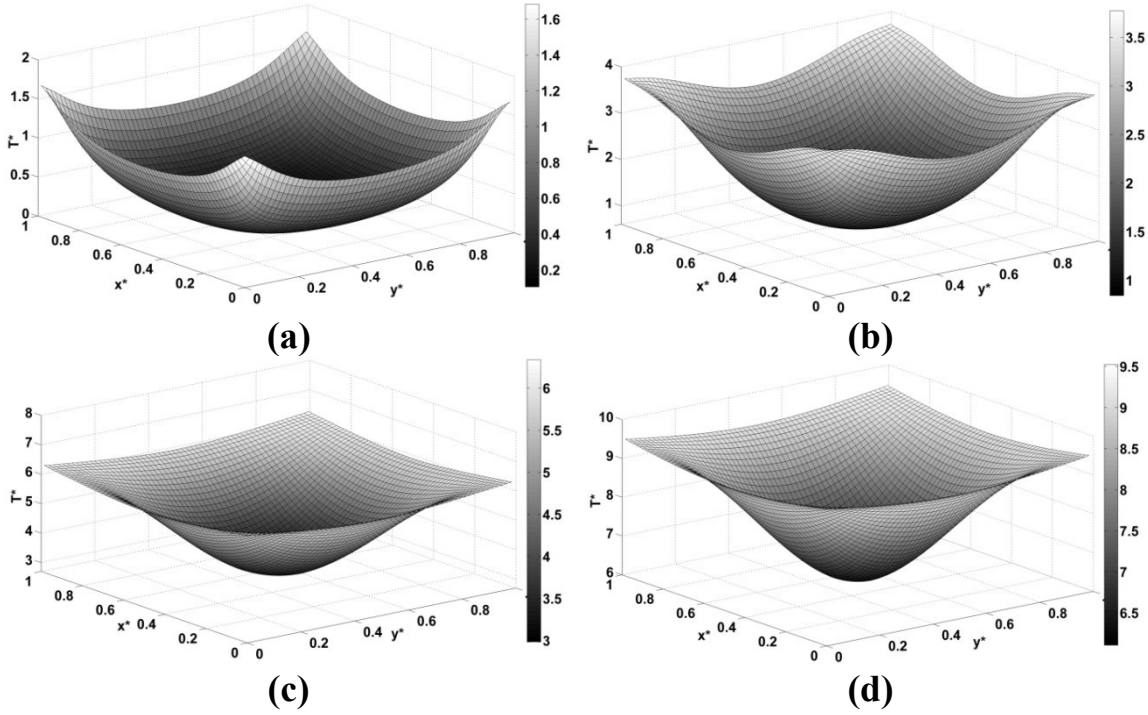
(e)

(f)

شکل (۴-۴۹): تغییرات میدان دمای بی‌بعد در مقاطع مختلف کانال در حالت گرمایش $Br > 0$ و اعمال شرط

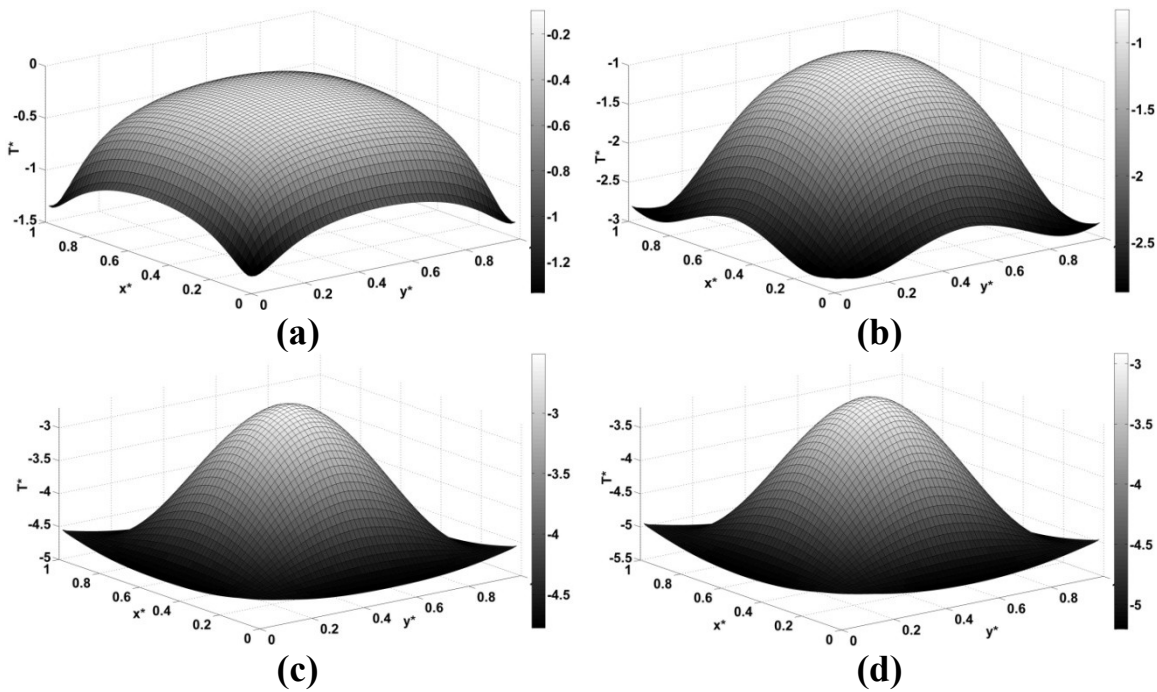
مرزی T و $a) z^* = 0.3, b) z^* = 2.5, c) z^* = 3.3, d) z^* = 3.5, e) z^* = 5, f) z^* = 9$

در شکل‌های (۴-۵۰) و (۴-۵۱) نیز سطوح دما در مقاطع مختلف کانال در یک عدد پرانتل و در شرط مرزی حرارتی H_2 نشان داده شده است. در حالت گرمایش سیال، پروفیل دما از حالت یکنواخت در دهانه ورودی کانال آغاز شده و با پیشروی در راستای کانال و دریافت حرارت از دیواره‌ها و همچنین فعالیت هم‌زمان ترم تنش، دمای سیال افزایش یافته تا جاییکه پروفیل دما به حالت توسعه یافته خود که در قسمت قبل توضیح داده شده رسیده و بعد از آن با حفظ الگوی پروفیل دما، فقط شدت آن افزایش می‌یابد. در حالت سرمایش سیال وضع به نحو دیگری می‌باشد. در اعداد برینکمن کوچک، فعالیت ترم تنش در مقایسه با میزان حرارت منتقل شده از سیال به دیواره‌ها ناچیز بوده و با پیشروی در راستای کانال، دمای سیال رفته رفته کاهش یافته و پروفیل سیال به حالت دائم خود می‌رسد. ولی در اعداد برینکمن بزرگتر همانطور که در شکل (۴-۵۱) نشان داده شده است، مقدار حرارت تولید شده به ازای فعالیت ترم تنش از میزان حرارت منتقل شده به دیواره‌ها بیشتر بوده و علی‌رغم انتقال حرارت از سیال، دمای بی‌بعد منفی بوده و این به معنای افزایش دمای سیال در راستای کانال می‌باشد. نکته مهم دیگری که در حالت سرمایش سیال می‌توان به آن اشاره نمود، عدم تغییر علامت دمای بی‌بعد سیال در راستای کانال می‌باشد. بدین معنی که در حالت اعمال شرط مرزی T و حالت گرمایش سیال، به‌ازای بعضی از اعداد برینکمن، در ابتدای کانال دمای بی‌بعد سیال مثبت بوده و حرارت از دیواره‌ها به سیال منتقل می‌شود ولی با پیشروی در راستای کانال و فعالیت ترم تنش، دمای سیال از دمای دیواره‌ها بالاتر رفته و دمای بی‌بعد سیال منفی می‌شود. ولی در حالت اعمال شرط مرزی H_2 ، در اعداد برینکمن بالاتر، از همان ابتدای کانال دمای بی‌بعد سیال منفی شده و علی‌رغم انتقال حرارت از طرف سیال به دیواره‌ها، دمای سیال نیز افزایش می‌یابد.



شکل (۴-۵): تغییرات میدان دمای بی‌بعد در مقاطع مختلف کانال در حالت $Br > 0$ و اعمال شرط مرزی H_2

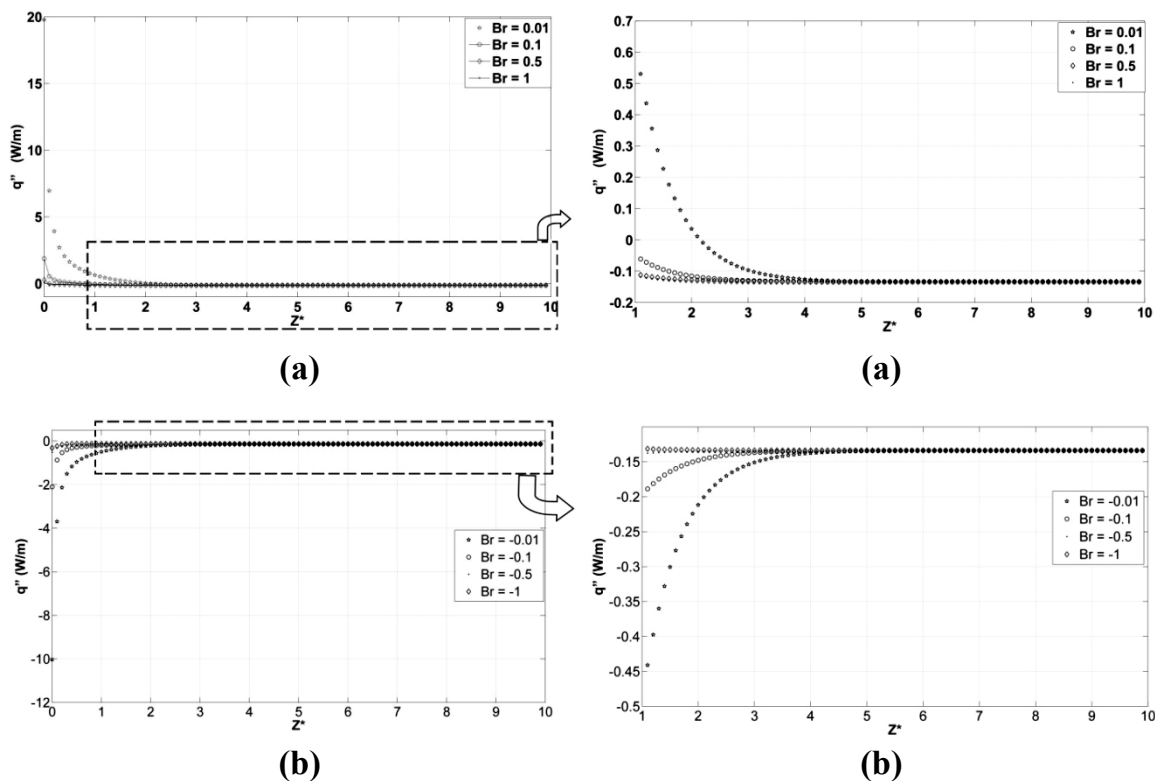
$a) z^* = 0.2, \quad b) z^* = 0.4, \quad c) z^* = 0.9, \quad d) z^* = 1$



شکل (۴-۵): تغییرات میدان دما در مقاطع مختلف کانال در حالت $Br < 0$ و اعمال شرط مرزی H_2

$a) z^* = 0.2, \quad b) z^* = 0.4, \quad c) z^* = 0.9, \quad d) z^* = 1$

با اعمال شرط مرزی حرارتی T ، در مقاطع اولیه کانال، لایه های کمتری از سیال در مجاورت دیواره ها متأثر از دمای دیواره ها بوده و بدین جهت تغییرات دما در این مقاطع بسیار شدیدتر می باشد. با گذر از مقاطع اولیه، لایه های میانی سیال نیز تحت تاثیر دمای دیواره ها قرار گرفته و از این رو پروفیل دما در این مقاطع مقداری متعادل تر می شود. در شرایط مرزی حرارتی T تا رسیدن به ناحیه توسعه یافته، این پروفیل پیوسته تغییر کرده و در ناحیه توسعه یافته به حالت یکنواخت می رسد و در ادامه تا پایان کانال به همین نحو باقی می ماند. ولی در شرایط مرزی H_2 ، پروفیل دما تا انتهای کانال پیوسته تغییر می نماید، البته بعد از رسیدن به ناحیه توسعه یافته فرضی، دیگر در الگوی دما تغییری ایجاد نشده و فقط تا پایان کانال مقدار آن تغییر می یابد. از این رو در حالت اعمال شرایط مرزی T که در مقاطع اولیه کانال پروفیل دما گرادیان عرضی بیشتری دارد، مقدار انتقال حرارت سیال با دیواره های جانبی بیشتر می باشد و در مقاطع بعدی با ضخیم تر شدن لایه مرزی، از این شدت کاسته شده و در نهایت به حالت یکنواختی می رسد. این مطلب در حالت های سرمایش و گرمایش کانال در شکل (۴-۵۲) نشان داده شده است.



شکل (۴-۵۲): میزان انتقال حرارت از دیواره ها در شرایط مرزی حرارتی T و (a) حالت گرمایش (b) حالت سرمایش

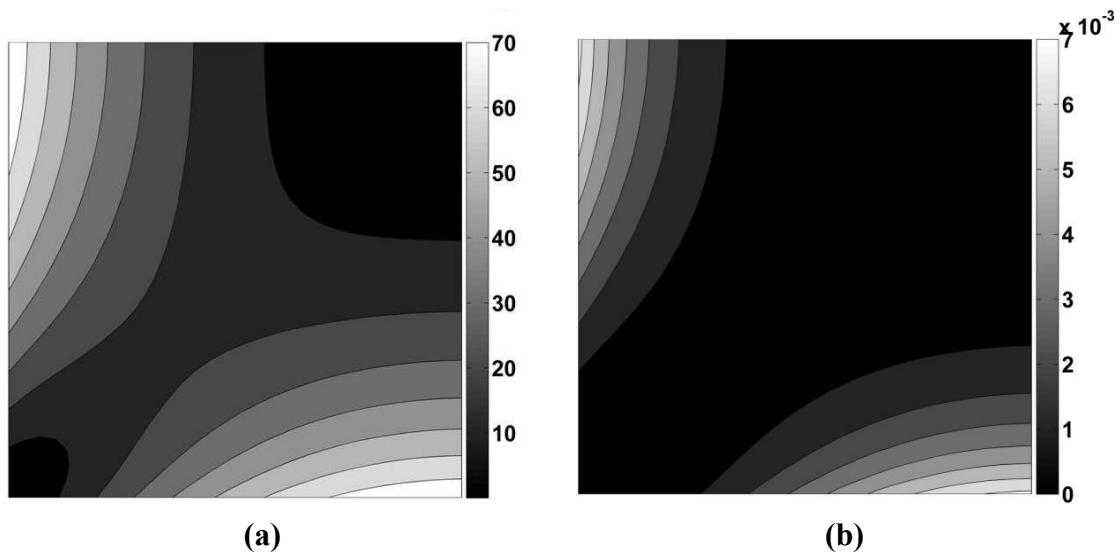
مطلب قابل ذکر دیگر، تغییر جهت انتقال حرارت در راستای کانال می‌باشد. علی‌رغم اینکه در حالت گرمایش ($Br > 0$) دمای ورودی سیال کمتر از دمای دیواره‌ها می‌باشد و در مقاطع اولیه کانال حرارت از سمت دیواره‌ها به سمت سیال انتقال می‌یابد، ولی با پیشروی در راستای کانال و فعالیت ترم کار میدان تنش، سیال گرمتر از دیواره‌ها شده و جهت انتقال حرارت تغییر می‌یابد که باعث منفی شدن علامت انتقال حرارت در راستای کانال می‌شود. البته بزرگی عدد برینکمن نیز بر این مطلب اثرگذاری مستقیم دارد. در حالت سرمایش ($Br < 0$)، به علت اینکه از همان ابتدای کانال انتقال حرارت از سمت سیال به دیواره‌ها می‌باشد، هیچ تغییر جهتی در انتقال حرارت رخ نخواهد داد و صرفاً تغییرات عدد برینکمن، شدت انتقال حرارت در ابتدای کانال را تغییر خواهد داد.

در شکل (۴-۵۲)، نحوه اثرگذاری عدد برینکمن نیز بر انتقال حرارت از دیواره‌ها مشاهده می‌شود. همانطور که پیشتر بیان شد، عدد برینکمن ضریب ترم کار میدان تنش در معادله انرژی می‌باشد. از طرف دیگر میدان تنش در مواد ویسکوالاستیک متشکل از دو قسمت اتلاف کننده ویسکوز و قسمت الاستیک که ذخیره کننده انرژی می‌باشد. به عبارت دیگر، ترم کار نیروی تنش در معادله انرژی به دو قسمت کار نیروی ویسکوز که با تغییرات دما رابطه داشته و دیگر ترم ذخیره کننده انرژی که هیچ اثری بر میدان دما سیال نخواهد داشت و انرژی ذخیره شده را در زمانی دیگر آزاد خواهد کرد، تبدیل شده که در این صورت معادله انرژی به صورت معادله (۴-۱۰) بازنویسی می‌شود [۹۳].

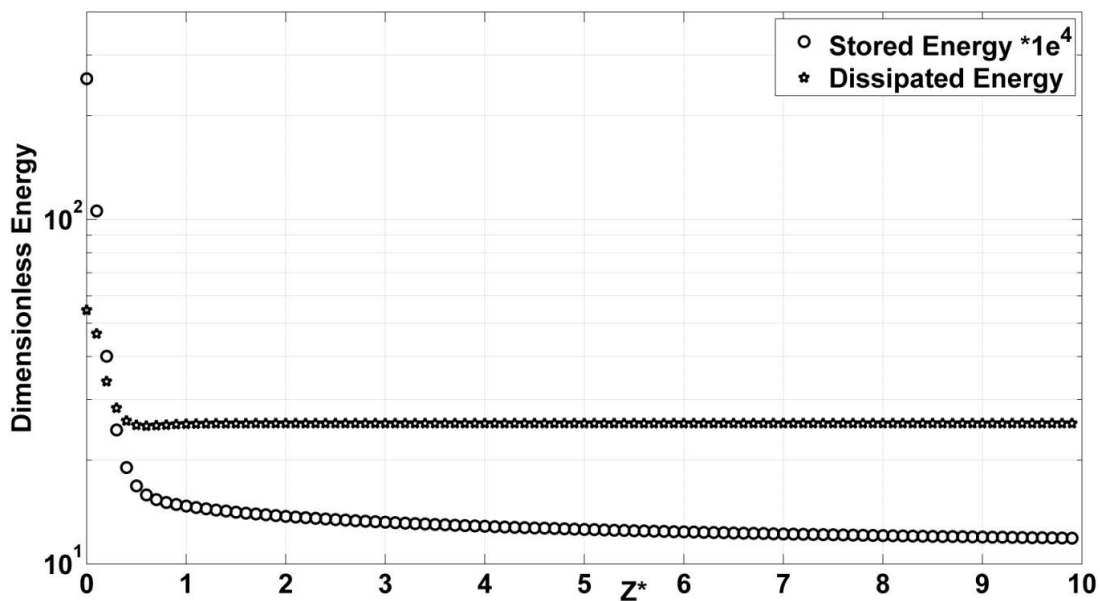
$$u_j^* \frac{\partial T^*}{\partial x_j^*} = \frac{1}{Re.Pr} \left(\frac{\partial^2 T^*}{\partial x_j^{*2}} + Br(\alpha \sigma_{ij}^* \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i^*} + \frac{1-\alpha}{2wi} \times g \times \sigma_{jj}^*) \right) \quad (۴-۱۰)$$

که در سمت راست معادله اولین ترم ضرب شده در α ، ترم تلفات ویسکوز حاصل از میدان تنش و عبارت دیگر، مقدار ذخیره انرژی می‌باشد. مقدار ضریب α ، مقداری بین صفر تا یک می‌باشد که یک بودن آن به معنای صفر بودن مقدار ذخیره انرژی و تلف شدن کل کار میدان تنش و از طرف دیگر صفر بودن مقدار α ، بیانگر ذخیره شدن کل کار میدان تنش پلیمری می‌باشد. در اکثر مواد ویسکوالاستیک با توجه به زیاد بودن ویسکوزیته سیال، اثرگذاری ضریب α بسیار کم بوده و سهم

قسمت ویسکوز در کار میدان تنش بسیار بیشتر از سهم قسمت الاستیک می‌باشد [۶۰]. از این رو در اکثر شبیه‌سازی‌های عددی جریان ویسکوالاستیک، مقدار α را برابر یک فرض نموده و از مقدار ناچیز ذخیره انرژی صرف‌نظر می‌نمایند [۱۲۲، ۸۰]. در شکل (۴-۵۳) و (۴-۵۴) کانتورهای مقدار تلفات ویسکوز حاصل از کار میدان تنش و همچنین مقدار ذخیره انرژی به ازای $\alpha = 0.9$ و نیز نحوه تغییرات متوسط آنها در راستای کانال نشان داده شده است.



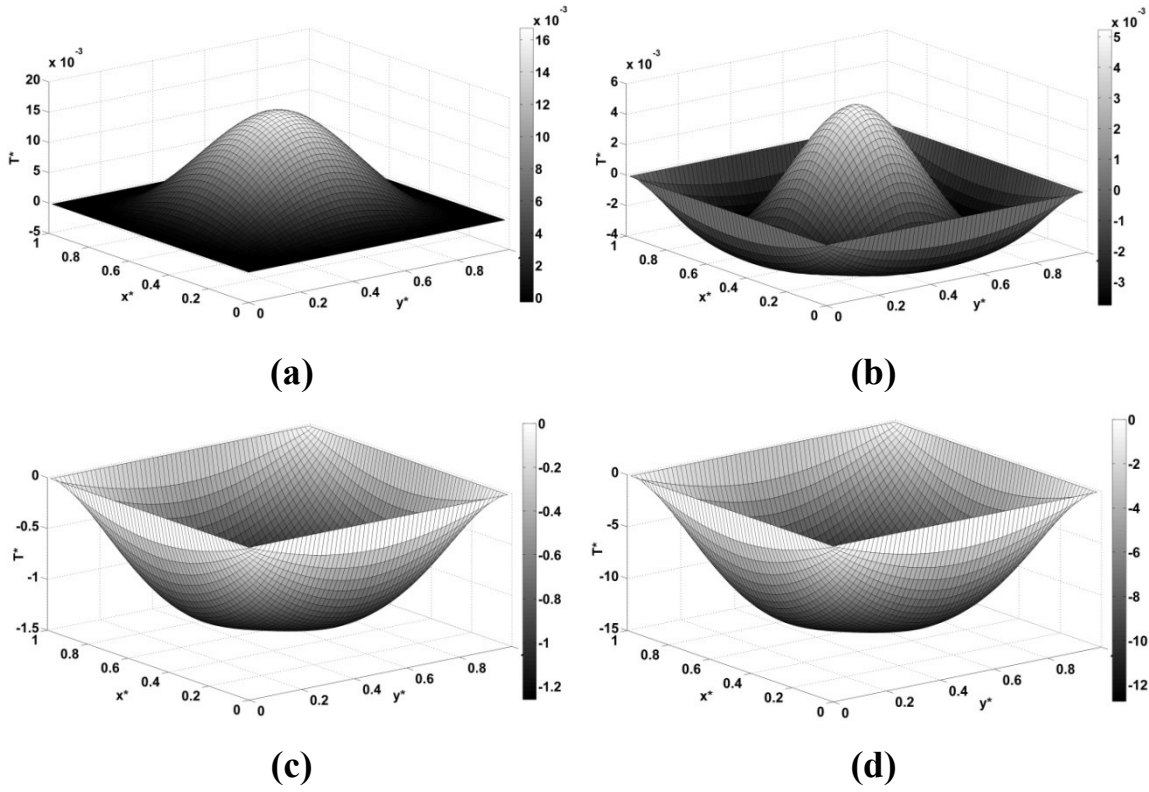
شکل (۴-۵۳): کانتورهای (a) مقدار تلفات ویسکوز حاصل از کار میدان تنش و (b) مقدار ذخیره انرژی به ازای $\alpha = 0.9$



شکل (۴-۵۴): تغییرات متوسط تلفات ویسکوز حاصل از کار میدان تنش و همچنین متوسط مقدار ذخیره انرژی در راستای کانال به ازای $\alpha = 0.9$

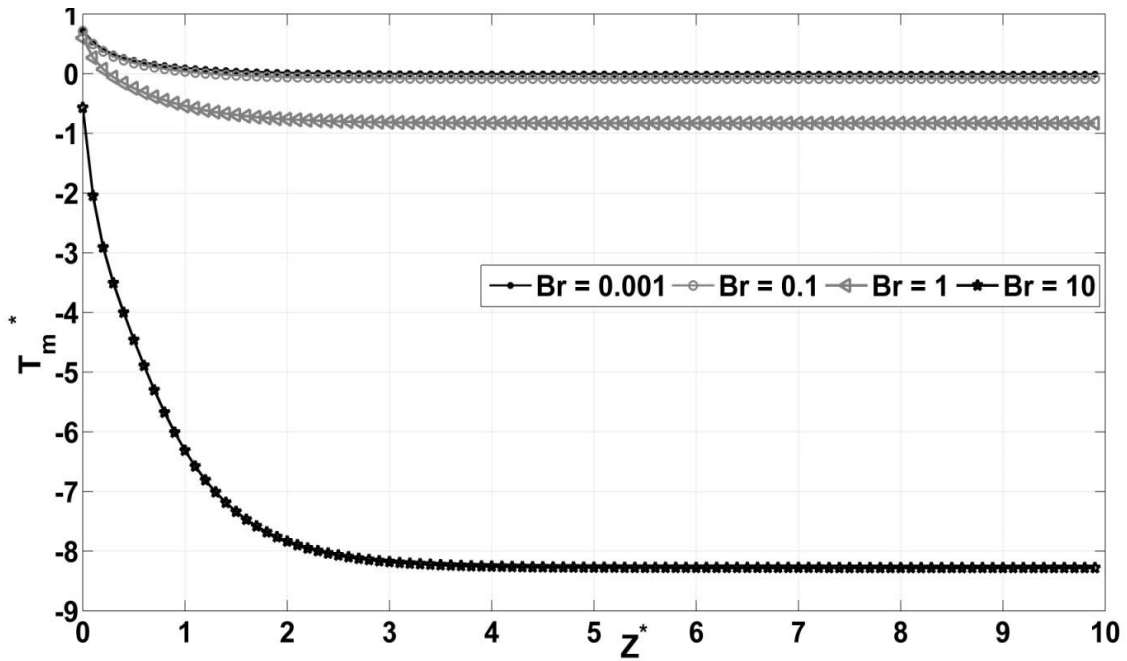
همانطور که در شکل (۴-۵۴) مشخص است، نحوه تغییرات در مقدار متوسط ذخیره و تلفات انرژی در ناحیه توسعه یافته کانال یکسان بوده و مقدار ذخیره انرژی در حدود پنج صد درصد میزان تلفات ویسکوز در کانال می‌باشد. در این صورت با صرف نظر از مقدار ذخیره انرژی و یا فرض مقداری نزدیک به یک برای پارامتر α ، در صورت افزایش عدد برینکمن، ترم کار میدان تنش باعث افزایش تلفات ویسکوز شده و به شکل یک مولد انرژی عمل می‌نماید. از طرف دیگر همانطور که پیشتر بیان شد، به علت وجود مرزهای جامد، مقدار گرادیان سرعت در اطراف دیواره‌ها بسیار بیشتر از مرکز کانال می‌باشد. از این رو سهم کار میدان ویسکوز در میدان تنش که مستقیماً متأثر از گرادیان سرعت می‌باشد، در اطراف دیواره‌ها بیشتر بوده و این مطلب با افزایش عدد برینکمن بیشتر نمایان می‌شود.

سطوح دما در حالت‌های گرمایش و سرمایش به ازای شرط مرزی حرارتی T در اعداد برینکمن متفاوت در شکل‌های (۴-۵۵) و (۴-۵۷) نشان داده شده است. در حالت اعمال شرط مرزی T و گرمایش، در اعداد برینکمن پایین، فعالیت ترم تنش هنوز اثر چندانی بر توزیع میدان دما در مقاطع میانی کانال نداشته است. ولی با افزایش عدد برینکمن، شدت فعالیت میدان تنش نیز بیشتر شده و باعث افزایش دمای سیال در مقاطع کانال و در نهایت منفی شدن دمای بی‌بعد سیال و به ازای مقادیر بزرگتر عدد برینکمن، باعث معکوس شدن انتقال حرارت می‌شود. در مقاطع بعدی کانال و به خصوص ناحیه توسعه یافته، به ازای تمامی مقادیر عدد برینکمن، فعالیت ترم تنش بر توزیع اولیه میدان دما غالب بوده و باعث منفی شدن دمای بی‌بعد سیال و انتقال حرارت معکوس می‌شود که البته این روند در اعداد برینکمن بزرگتر از همان ابتدای کانال آغاز شده و در تمامی مقاطع کانال دمای سیال بیشتر از دمای دیواره‌ها بوده و انتقال حرارت معکوس رخ خواهد داد. این مطلب در شکل (۴-۵۶) قابل ملاحظه خواهد بود.



شکل (۴-۵۵): سطوح دمای بی‌بعد به ازای اعداد برینکمن مختلف در حالت گرمایش و شرط مرزی T در مقطع

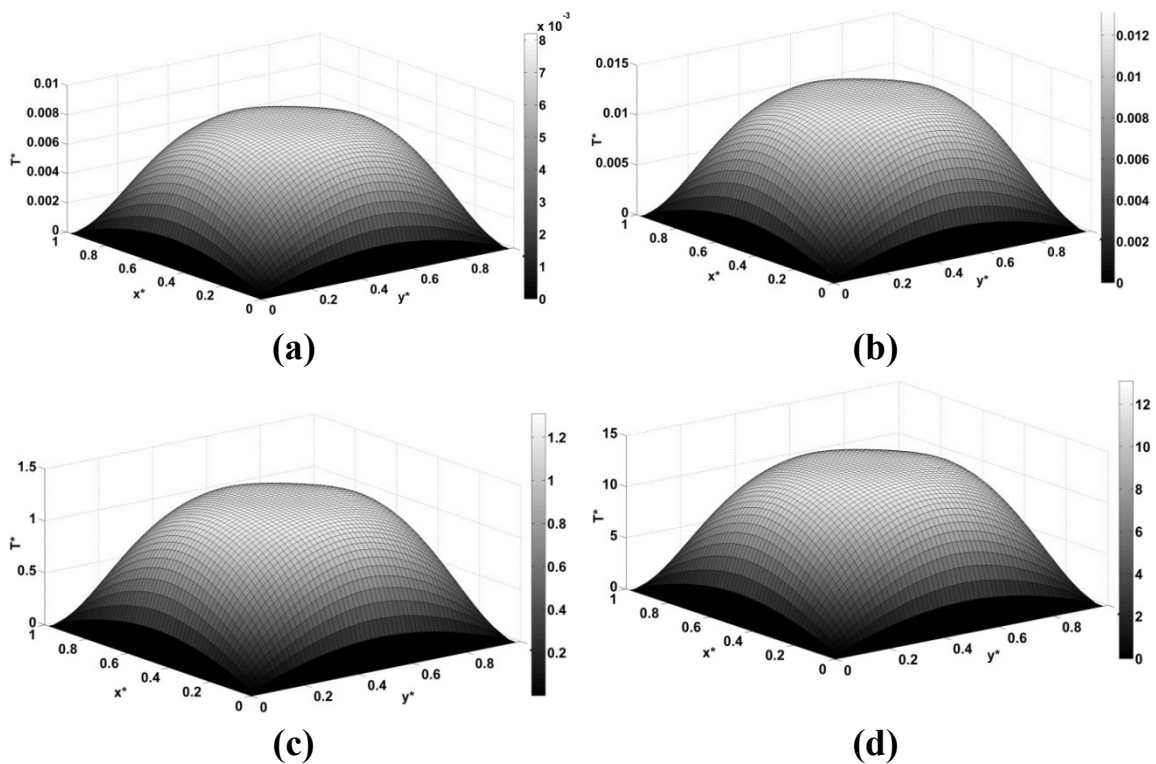
$a) Br = 0.001, b) Br = 0.1, c) Br = 1, d) Br = 10$ و $z^* = 3$



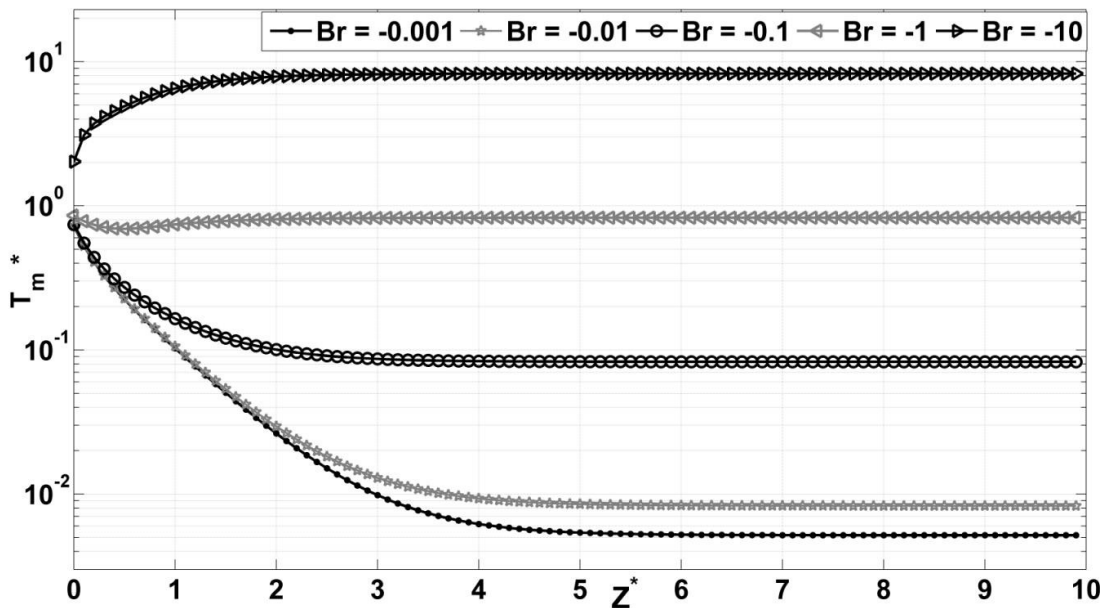
شکل (۴-۵۶): دمای میانگین بی‌بعد سیال در راستای کانال به ازای اعداد برینکمن مختلف در حالت گرمایش و شرط

مرزی T

در حالت سرمایه‌ش سیال نیز از همان ابتدای کانال دمای سیال بیشتر از دمای دیواره‌ها بوده و به ازای تمامی اعداد برینکمن، توزیع دمای بی‌بعد سیال مثبت بوده و انتقال حرارت از سمت سیال به دیواره‌ها می‌باشد. با افزایش عدد برینکمن، مقدار حرارت تولید شده توسط کار میدان تنش از میزان حرارت منتقل شده به دیواره‌ها بیشتر شده و سیال در مقطعی از کانال در حالت گرمایش قرار می‌گیرد و از آن مقطع به بعد، دمای متوسط سیال افزایش می‌یابد که در اعداد برینکمن بزرگتر از یک، این حالت از همان دهانه ورودی کانال رخ خواهد داد. این مطلب در شکل (۴-۵۸) قابل ملاحظه خواهد بود.

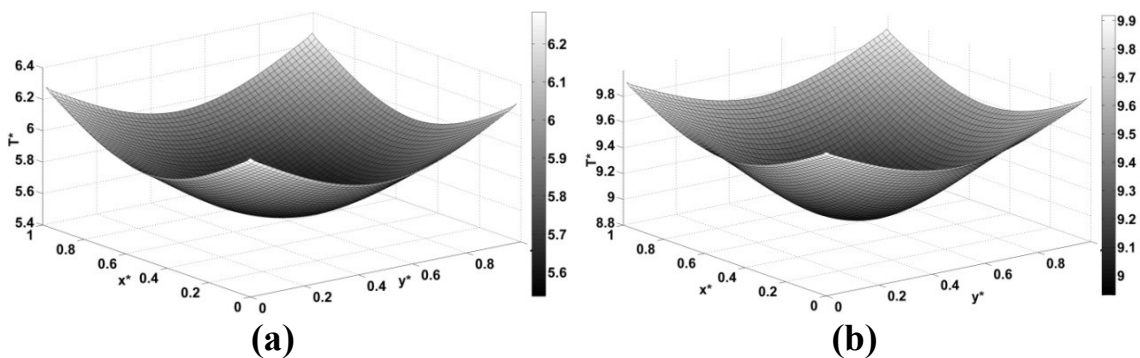


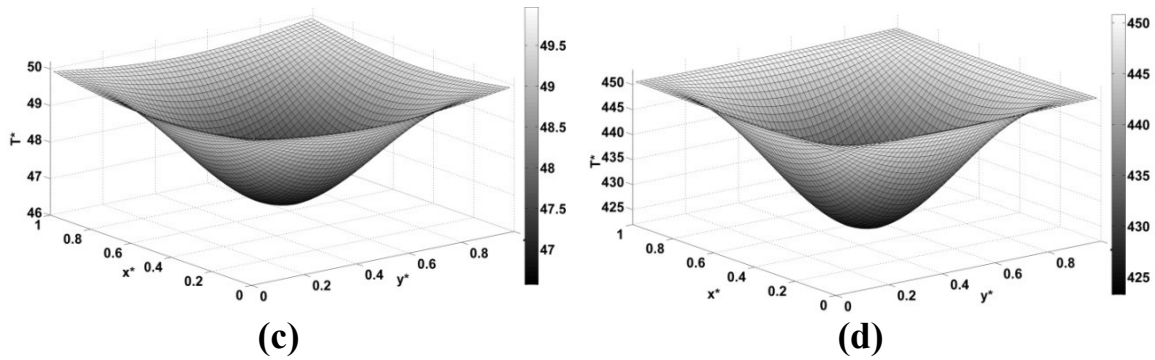
شکل (۴-۵۷): سطوح دمای بی‌بعد به ازای اعداد برینکمن مختلف در حالت سرمایه‌ش و شرط مرزی T در مقطع توسعه یافته، $a) Br = -0.001$, $b) Br = -0.01$, $c) Br = -1$, $d) Br = -10$



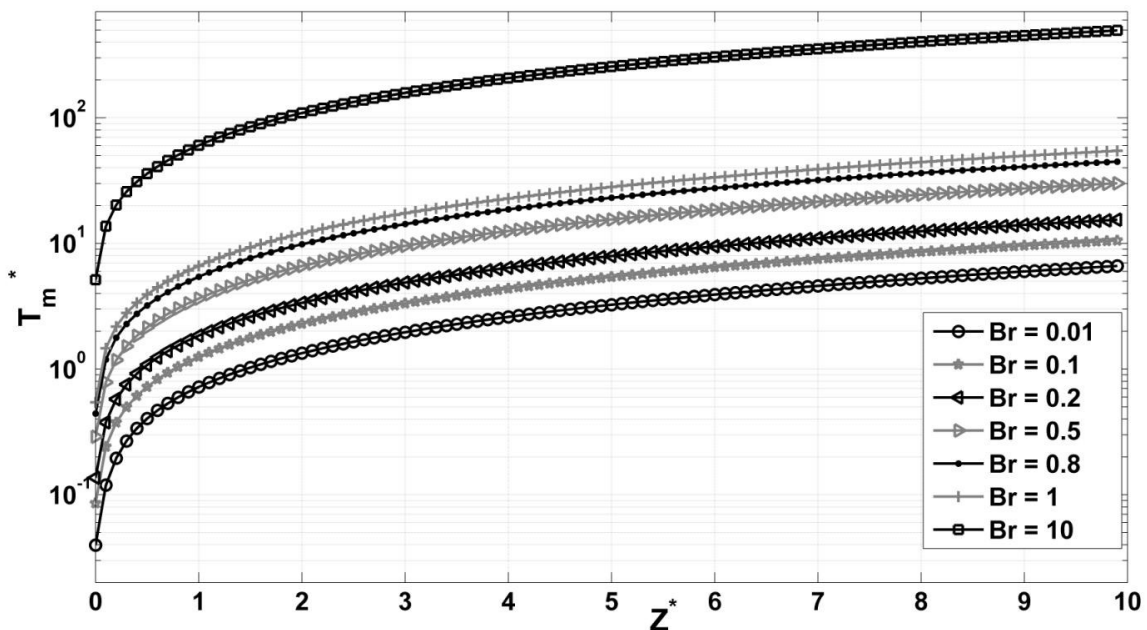
شکل (۴-۵۸): دمای میانگین بی بعد سیال در راستای کانال به ازای اعداد برینکمن مختلف در حالت سرمایش و شرط مرزی T

دمای میانگین سیال در راستای کانال و همچنین سطوح دما در حالت گرمایش سیال به ازای شرط مرزی حرارتی H_2 در اعداد برینکمن متفاوت در شکل‌های (۴-۵۹) و (۴-۶۰) نشان داده شده است. در حالت گرمایش سیال به ازای تمامی اعداد برینکمن، الگوی کلی پروفیل دما ثابت بوده و با افزایش عدد برینکمن، تنها مقدار دمای بی بعد سیال افزایش می‌یابد. نکته قابل ذکر دیگری که در شکل (۴-۵۹) قابل مشاهده می‌باشد، افزایش شدیدتر دما در اطراف دیواره‌ها در اعداد برینکمن بزرگتر می‌باشد که علت این مطلب شدیدتر بودن نرخ برش در اطراف دیواره‌ها و در پی آن افزایش کار میدان تنش در این نواحی می‌باشد.





شکل (۴-۵۹): سطوح دمای بی‌بعد به ازای اعداد برینکمن مختلف در حالت گرمایش و شرط مرزی H_2 در مقطع توسعه یافته $a) Br = 0.01$, $b) Br = 0.1$, $c) Br = 1$, $d) Br = 10$

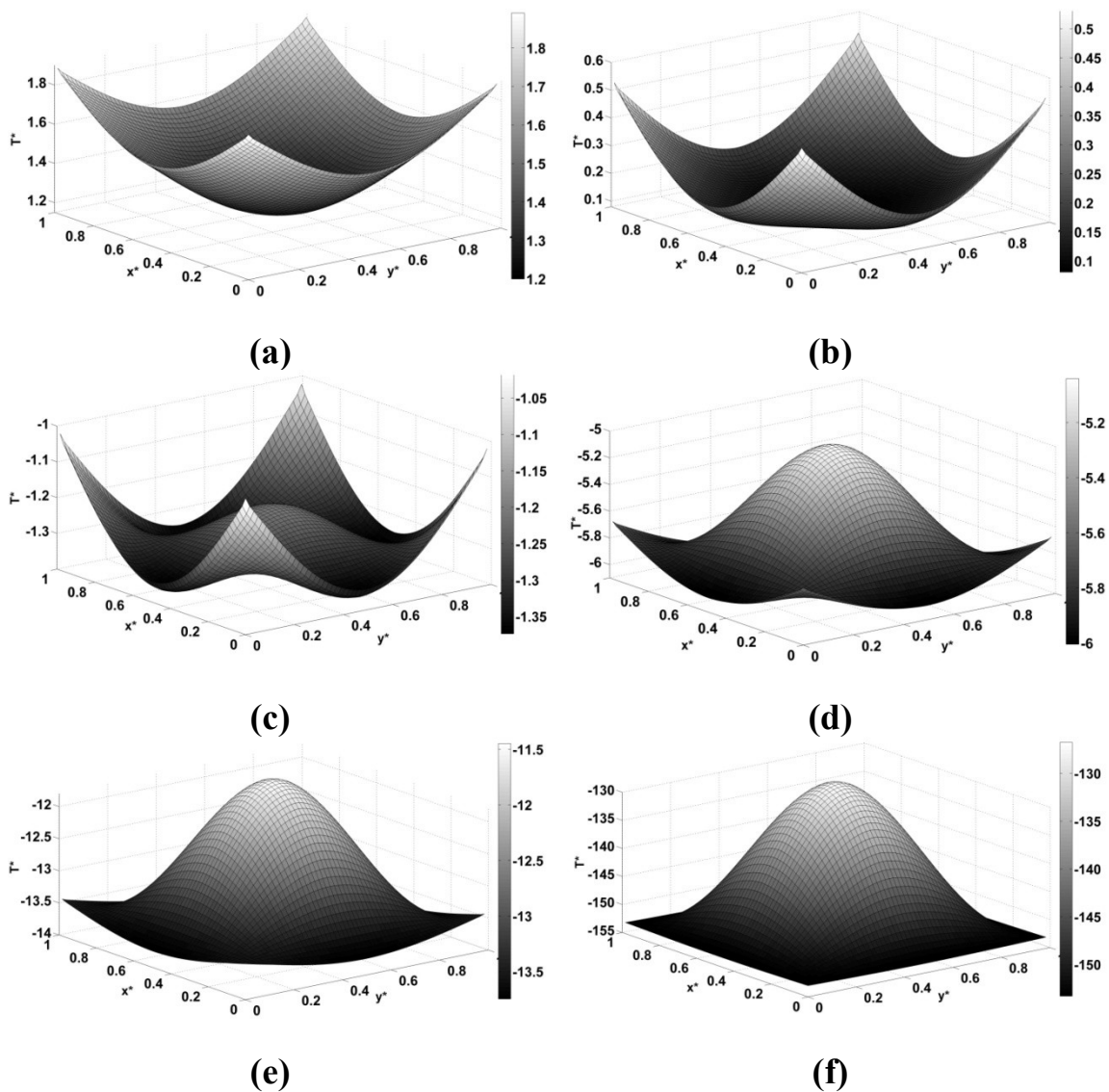


شکل (۴-۶۰): دمای میانگین بی‌بعد سیال در راستای کانال به ازای اعداد برینکمن مختلف در حالت گرمایش و شرط مرزی H_2

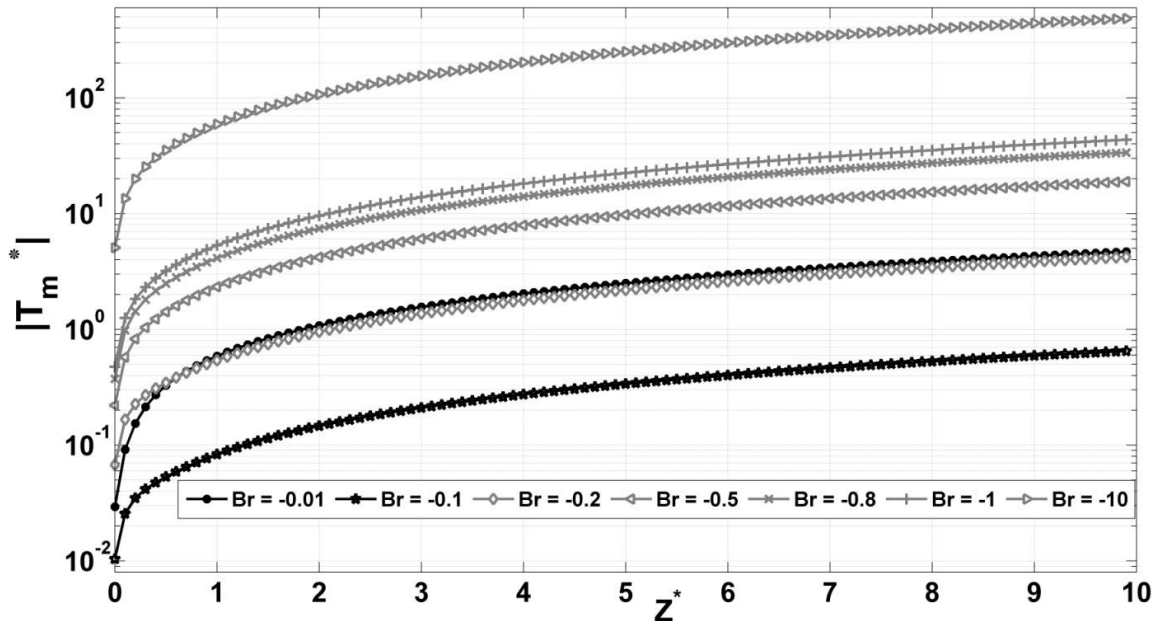
همانطور که در شکل‌های (۴-۶۱) و (۴-۶۲) مشاهده می‌شود، در حالت سرمایش سیال نیز به ازای برخی از مقادیر کم عدد برینکمن، کار میدان تنش در مقایسه با حرارت منتقل شده به دیواره‌ها چندان قابل ملاحظه نبوده و دمای بی‌بعد سیال در مقاطع مختلف کانال مثبت بوده و دمای سیال با پیشروی در راستای کانال کاهش می‌یابد. در اعداد برینکمن بزرگتر، رفته رفته کار میدان تنش در مقایسه با حرارت منتقل شده از دیواره‌ها افزایش یافته و در اعداد برینکمن بزرگتر از ۰٫۱۵، میزان حرارت تولید شده توسط میدان تنش از حرارت منتقل شده توسط دیواره‌ها بیشتر می‌شود. در این

حالت دمایی بی‌بعد سیال در مقاطع کانال منفی شده و دمایی سیال با پیشروی در راستای کانال افزایش می‌یابد.

لازم به ذکر است که نمودار دمایی میانگین بی‌بعد سیال که در شکل (۴-۶۲) ترسیم شده است، به ازای مقادیر عدد برینکمن بزرگتر از -0.1 که نمودار آنها با رنگ روشن‌تر نیز مشخص شده است، در یک منحنی ضرب شده که علت این مطلب صرفاً نمایش واضح‌تر و مناسب‌تر نتایج در نمودار لگاریتمی مذکور می‌باشد.

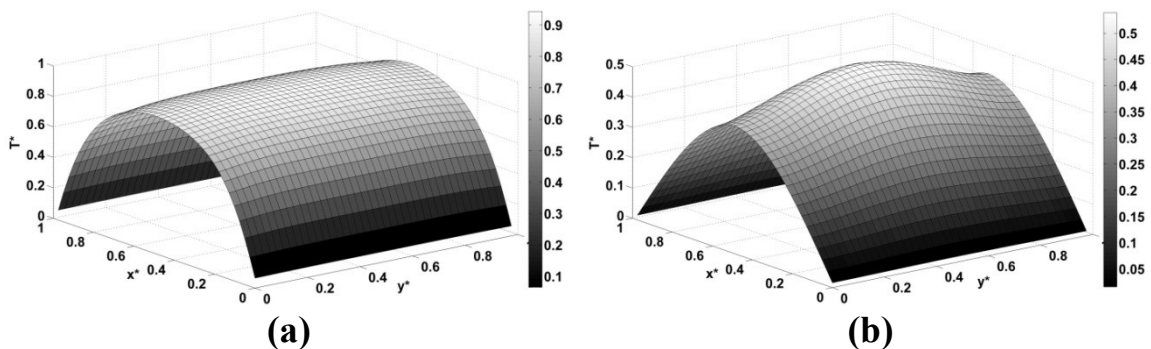


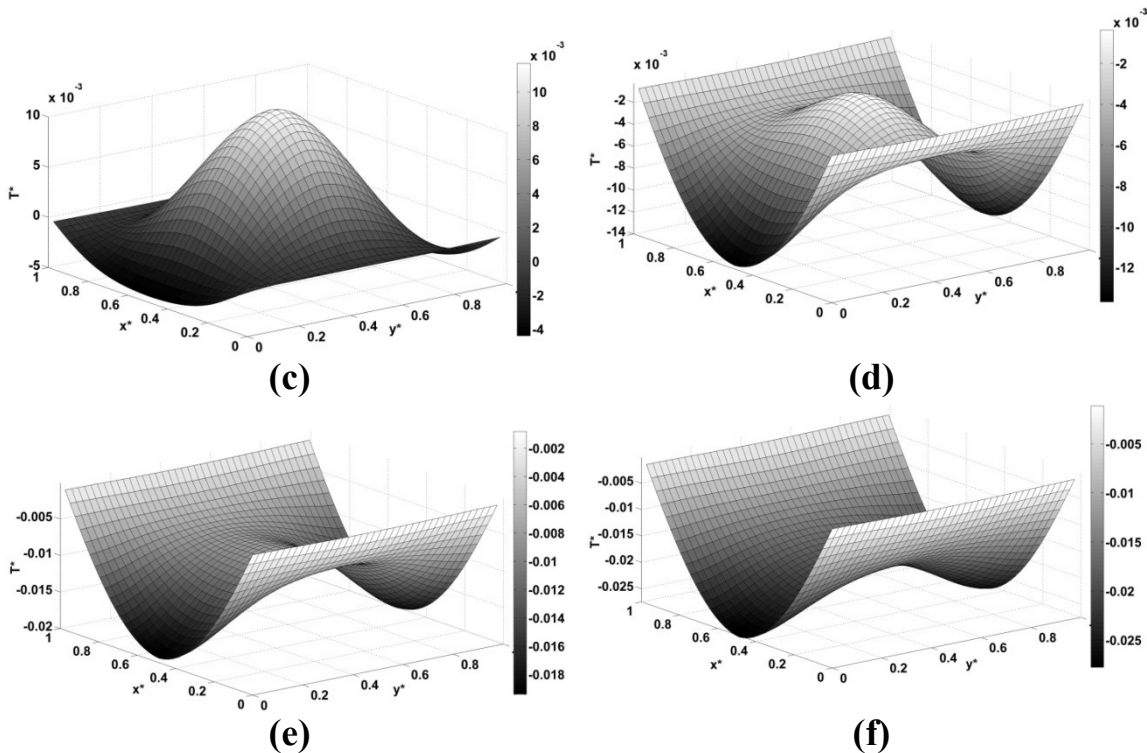
شکل (۴-۶۱): سطوح دمایی بی‌بعد به ازای اعداد برینکمن مختلف در حالت سرمایش و شرط مرزی H_2 در مقطع $a) Br = -0.01, b) Br = -0.1, c) Br = -0.2, d) Br = -0.5, e) Br = -1, f) Br = -10, z^* = 3$



شکل (۴-۶۲): دمای میانگین بی بعد سیال در راستای کانال به ازای اعداد برینکمن مختلف در حالت سرمایش و شرط مرزی H_2

حالت دیگر در اعمال شرط مرزی حرارتی T ، متفاوت بودن دمای دیواره‌ها و یا فرض عایق برای برخی از دیواره‌ها می‌باشد که تحقیق حاضر با شرط مرزی حرارتی T و فرض دو دیواره عایق نیز مورد بررسی قرار گرفته است. با فرض این شرط مرزی حرارتی که سطوح دمای آن در حالت گرمایش سیال در شکل (۴-۶۳) نشان داده شده است، به علت فعالیت ترم تنش به عنوان یک منبع حرارتی، پروفیل دما و همچنین جهت انتقال حرارت در راستای کانال رفته رفته از مقادیر مثبت به مقادیر منفی تغییر خواهد کرد که با افزایش عدد برینکمن، میزان تولید حرارت نیز بیشتر شده و تغییر علامت دمای بی بعد سیال و همچنین تغییر جهت انتقال حرارت در فواصل ابتدایی کانال رخ خواهد داد.





شکل (۴-۶۳): سطوح دما بی‌بعد در مقاطع مختلف کانال در حالت گرمایش و شرط مرزی T با فرض دیواره عایق

$$a) z^* = 0.3, b) z^* = 1, c) z^* = 4, d) z^* = 4.5, e) z^* = 5, f) z^* = 7.5$$

یکی از مسائل مهم در جریان سیالات و سیستم‌های انتقال حرارت، میزان توان سیال در انتقال حرارت با محیط پیرامون خود از طریق مرزهای سیستم می‌باشد که در بعضی از سیستم‌ها سعی در افزایش قابلیت انتقال حرارت و در برخی دیگر در جهت کاهش انتقال حرارت سیال با محیط تلاش می‌شود. در این زمینه، یکی از پارامترهای مهم که بعضاً بزرگی آن توان سیال در انتقال حرارت با محیط را نشان می‌دهد، عدد ناسلت بوده که تعریف اولیه آن به صورت معادله (۴-۱۱) می‌باشد.

$$Nu = \frac{hD_h}{k} \quad (4-11)$$

که در رابطه فوق h ضریب انتقال حرارت همرفتی سیال بوده از اعمال موازنه انرژی بر روی مرزهای جامد سیستم بدست می‌آید.

$$hA(T_m - T_w) = kA \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{wall}$$

$$\rightarrow h = \frac{k \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{wall}}{T_m - T_w} \quad (12-4)$$

که در آن T_m دمای متوسط سیال در هر مقطع، T_w دمای دیواره و k ضریب رسانش سیال می‌باشد. با قرار دادن معادله ضریب همرفتی سیال در معادله (۴-۱۱)، عدد ناسلت موضعی و با انتگرال‌گیری از آن بر روی محیط کانال، عدد ناسلت متوسط به ازای اعمال دو شرط مرزی حرارتی T و H_2 بر حسب محور مرکزی کانال به صورت معادلات (۴-۱۴-۱) و (۴-۱۴-۲) مورد محاسبه قرار می‌گیرد.

$$Nu(x, y, z) = \frac{D_h \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{wall}}{T_m - T_w} \quad (13-4)$$

$$Nu_{T_m}(z) = \frac{D_h}{p(T_m - T_w)} \int_p \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{wall} dp \quad (1-14-4)$$

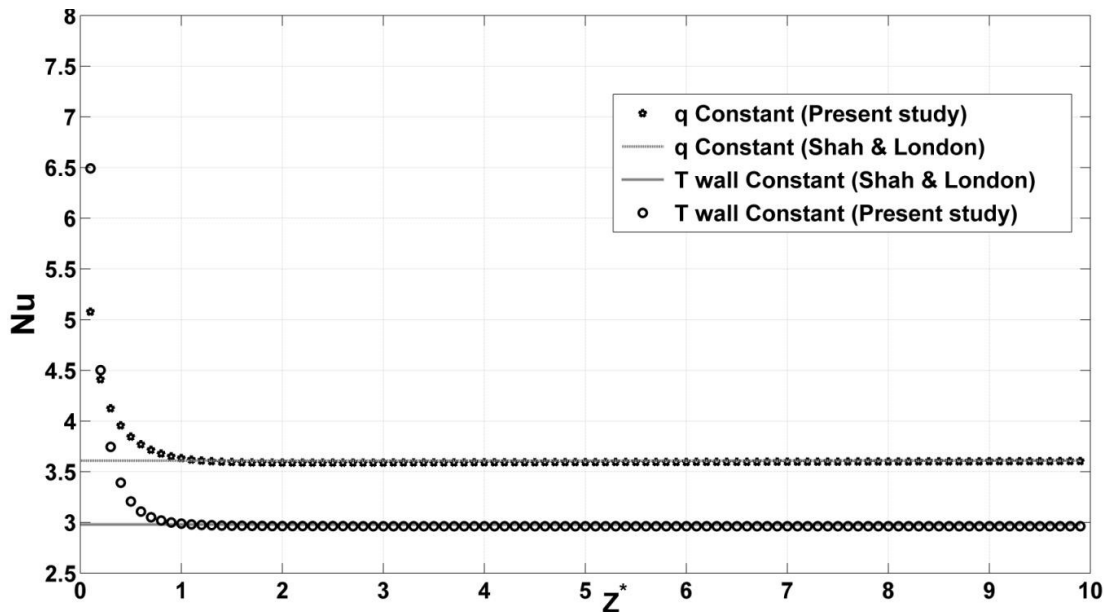
$$Nu_{q_m}(z) = \frac{D_h \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{wall}}{p} \int \frac{I}{(T_m - T_w)} dp, \quad -k \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{wall} = q'' \quad (2-14-4)$$

$$\rightarrow Nu_{q_m}(z) = \frac{D_h q''}{kp} \int_p \frac{I}{(T_w - T_m)} dp$$

که در آن p محیط کانال، Nu_{T_m} ناسلت متوسط سیال در حالت دمای دیواره ثابت و Nu_{q_m} ناسلت متوسط سیال در حالت شار حرارتی ثابت می‌باشد. البته می‌توان از مقادیر فوق در جهت محوری نیز انتگرال گرفت و عدد ناسلت متوسط برای کل دامنه حل را محاسبه نمود.

در ابتدا به منظور صحت سنجی نتایج انتقال حرارت بدست آمده از این تحقیق، هندسه مورد نظر را برای جریان سیال نیوتنی در دو حالت اعمال شرط مرزی حرارتی T و H_2 مورد تحلیل قرار داده و نتایج بدست آمده برای عدد ناسلت را با نتایج ارائه شده در مراجع دیگر که البته اکثر آنها مربوط به حالت توسعه یافتگی جریان می‌باشد، مورد ارزیابی قرار می‌دهیم.

از این رو مدل سازی جریان یک سیال نیوتنی در کانال مربعی و شرایط مرزی بیان شده با خواص ثابت و عدم وجود جابجایی آزاد با استفاده از کد کامپیوتری تهیه شده، مد نظر قرار گرفت که عدد ناسلت متوسط محیطی بدست آمده از این تحقیق و همچنین نتایج ارائه شده در مرجع [۱۲۰] در راستای کانال به ازای دو شرط مرزی H_2 و T در شکل (۴-۶۴) گزارش شده است.



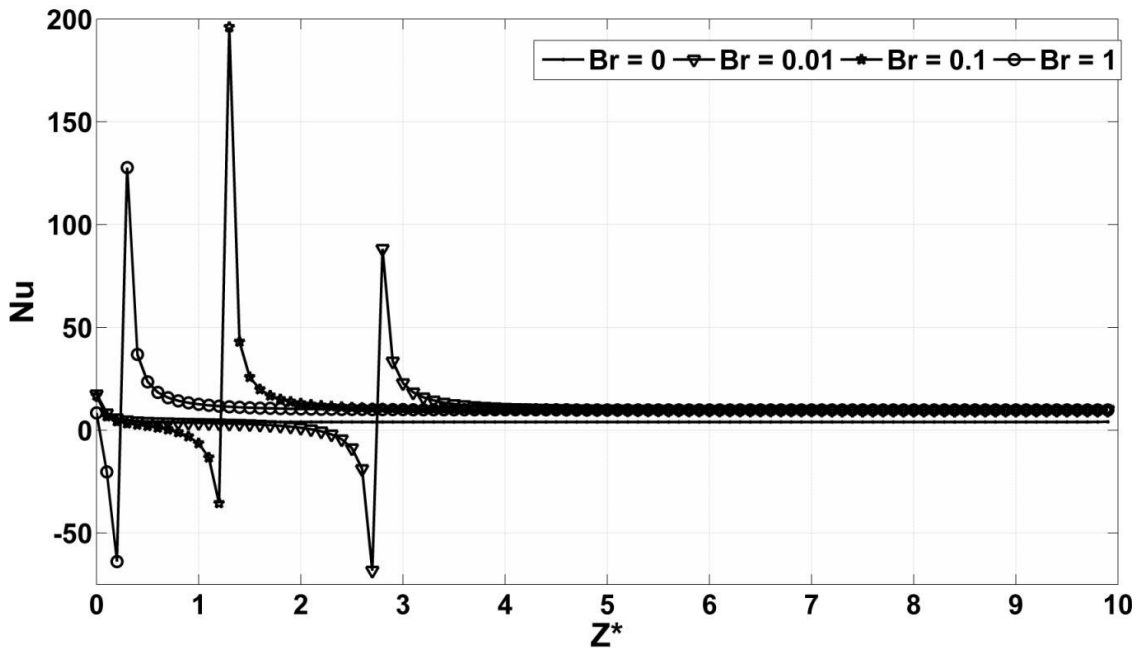
شکل (۴-۶۴): عدد ناسلت متوسط محیطی برای یک سیال نیوتنی در حالت اعمال شرط مرزی T و H_2

همانطور که در شکل (۴-۶۴) دیده می شود، عدد ناسلت بدست آمده از این تحقیق به ازای هر دو شرط مرزی T و H_2 دارای تطابق خوبی با نتایج ارائه شده توسط شاه و لندن در ناحیه توسعه یافته می باشد و حداکثر تفاوت موجود در حالت اعمال شرط مرزی T ، ۰٫۵۳ درصد و در حالت اعمال شرط مرزی H_2 ، ۰٫۲۷ درصد می باشد. البته در تحقیقات دیگری عدد ناسلت برای جریان سیال ویسکوالاستیک در هندسه ها و شرایط مرزی متفاوتی نیز ارائه شده است [۹۳] که بدلیل متفاوت شرایط مورد بررسی آنها با شرایط مفروض در این تحقیق، نتایج ارائه شده قابل مقایسه نمی باشد.

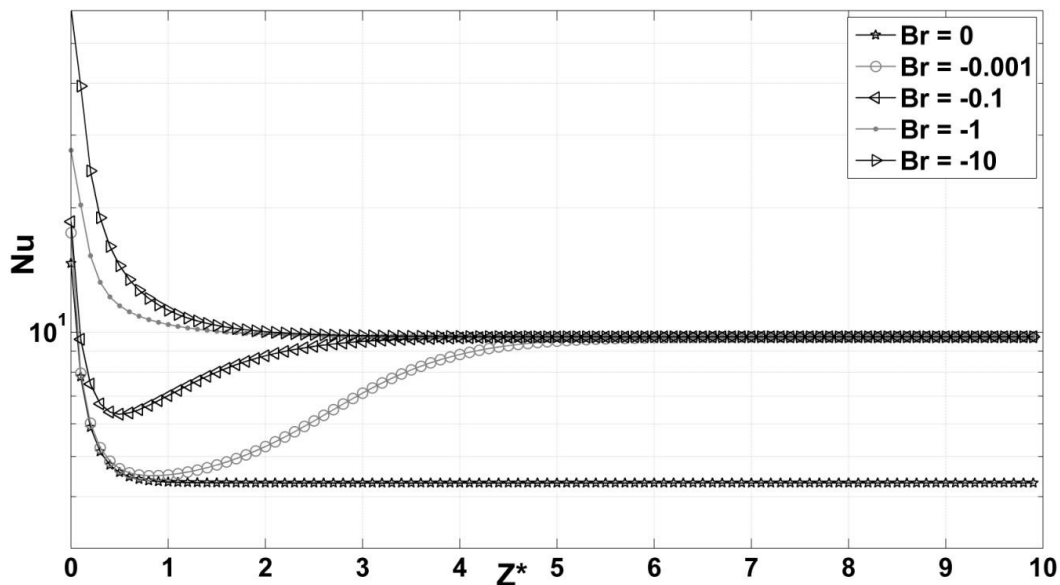
همانطور که در شکل (۴-۶۵) تا (۴-۶۸) دیده می شود، عدد ناسلت متوسط محیطی حاصل از مدل سازی جریان سیال ویسکوالاستیک در اعداد برینکمن مختلف در دو شرط مرزی حرارتی T و H_2 در دو حالت سرمایش و گرمایش کانال نشان داده شده است.

در حالت گرمایش کانال و اعمال شرط مرزی T ، همانطور که توضیحات مربوط به شکل (۴-۵۶) گفته شد، به علت فعالیت میدان تنش، در قسمتی از کانال دمای سیال از دمای دیواره‌ها بیشتر شده و انتقال حرارت معکوس رخ می‌دهد. دقیقاً در حد واسط بین عوض شدن جهت انتقال حرارت، به علت نزدیک شدن دمای متوسط سیال به دمای دیواره، مخرج عدد ناسلت به سمت صفر میل کرده و بدین صورت عدد ناسلت به سمت بی‌نهایت میل می‌نماید که بدین علت در نمودارهای عدد ناسلت مربوط به حالت گرمایش، یک پرش مشاهده شده و علامت عدد ناسلت در قبل و بعد از پرش تغییر خواهد کرد. البته با افزایش عدد برینکمن این پرش و تغییر علامت عدد ناسلت به سمت دهانه ورودی کانال متمایل شده و با ادامه این روند، از همان ابتدای کانال فعالیت ترم تنش به صورتی خواهد بود که علی‌رغم کمتر بودن دمای ورودی کانال نسبت به دمای دیواره‌ها، انتقال حرارت از سمت سیال به سمت دیواره‌ها جریان می‌یابد.

در حالتی که عدد برینکمن منفی بوده و دمای ورودی سیال بیشتر از دمای دیواره‌ها می‌باشد، از همان ابتدای کانال، سیال در حالت سرمایش قرار گرفته و با پیشروی در راستای محور اصلی کانال، موازنه حرارتی به حالتی دائم رسیده و پس از آن عدد ناسلت با مقدار ثابت ۹,۷۴ تا انتهای کانال ثابت باقی می‌ماند. علت افزایش مجدد در مقدار متوسط عدد ناسلت، فعالیت ترم مربوط به کار میدان تنش می‌باشد که با اضافه شدن حرارت تولیدی از فعالیت این ترم، عدد ناسلت افزایش می‌یابد که البته با افزایش عدد برینکمن این افزایش در عدد ناسلت در فواصل نزدیکتری نسبت به ابتدای کانال رخ می‌دهد.



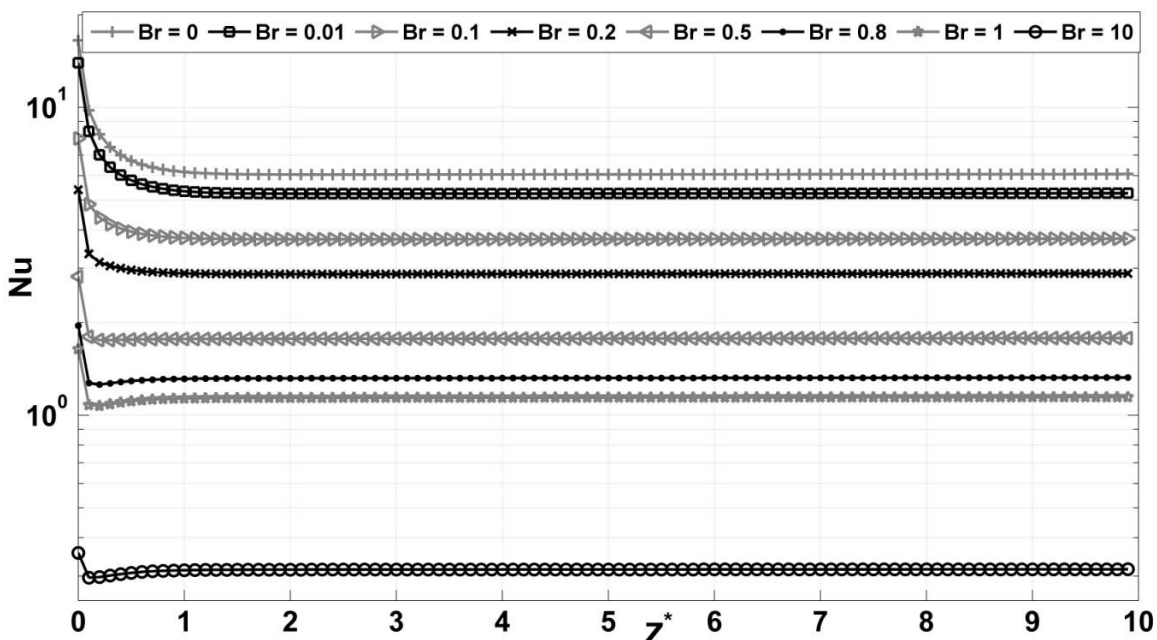
شکل (۴-۶۵): عدد ناسلت متوسط محیطی حاصل از مدل سازی جریان سیال ویسکوالاستیک در حالت گرمایش و اعمال شرط مرزی T



شکل (۴-۶۶): عدد ناسلت متوسط محیطی حاصل از مدل سازی جریان سیال ویسکوالاستیک در حالت سرمایش و اعمال شرط مرزی T

همانطور که در شکل (۴-۶۷) مشاهده می شود، در حالت اعمال شرط مرزی H_2 و گرمایش سیال، عدد ناسلت بدون هیچ پرشی در راستای کانال، از یک مقدار نسبتاً زیاد در ابتدای کانال شروع شده و با پیشروی در راستای کانال و تشکیل لایه مرزی حرارتی و هیدرودینامیکی از مقدار آن کاسته شده تا به مقدار ثابتی رسیده و تا انتهای کانال بدون تغییر باقی می ماند. البته برخلاف حالت اعمال

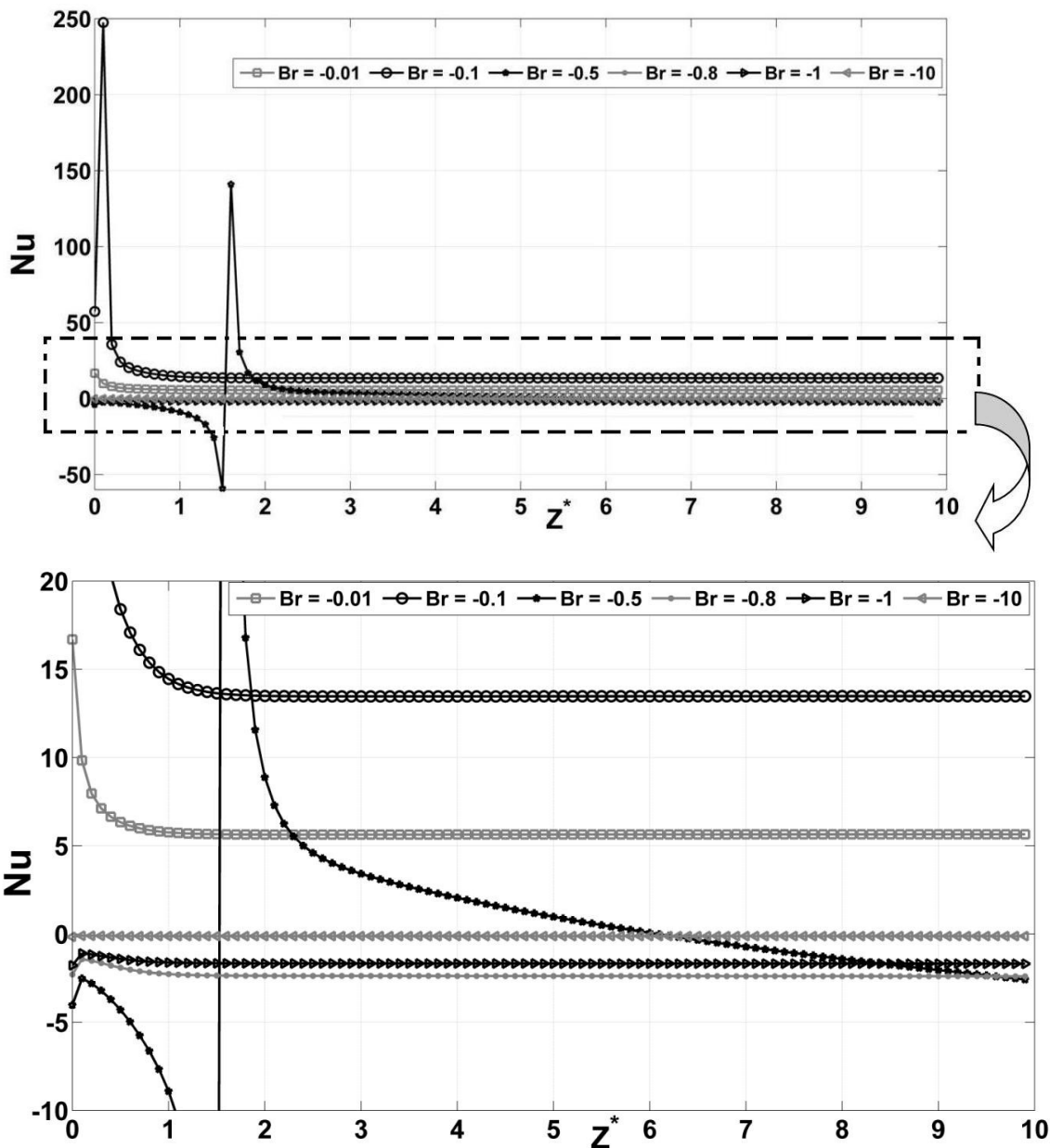
شرط مرزی T ، در این حالت هیچ افزایش مجددی در مقدار عدد ناسلت دیده نمی‌شود. در این حالت با افزایش عدد برینکمن، دمای میانگین سیال در مقاطع کانال افزایش می‌یابد و از طرف دیگر به دلیل تمرکز بیشتر اثرات کار میدان تنش در اطراف دیواره‌ها، دمای دیواره‌ها افزایش بیشتری داشته و بدین صورت اختلاف بین دمای میانگین سیال و دمای دیواره‌ها بیشتر شده که این مطلب باعث کاهش عدد ناسلت متوسط می‌شود و در اعداد برینکمن بزرگتر، عدد ناسلت متوسط به سمت صفر میل می‌نماید. از طرف دیگر با کاهش عدد برینکمن، بر مقدار عدد ناسلت افزوده می‌شود تا جایی که به سمت عدد ناسلت در حالت برینکمن برابر صفر میل می‌نماید.



شکل (۴-۶۷): عدد ناسلت متوسط محیطی حاصل از مدل‌سازی جریان سیال ویسکوالاستیک در حالت گرمایش و اعمال شرط مرزی H_2

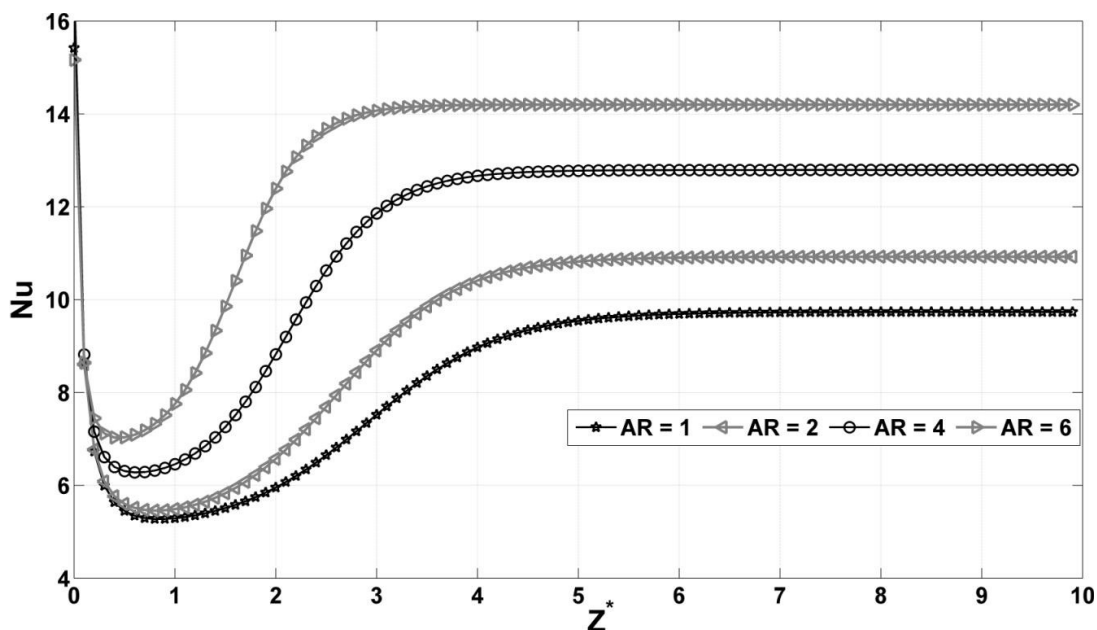
چنانچه در شکل (۴-۶۸) نشان داده شده است، در حالت اعمال شرط مرزی H_2 و سرمایش سیال، با افزایش عدد برینکمن دمای سیال اطراف دیواره‌ها و به تبع آن دمای دیواره‌ها، افزایش بیشتری نسبت به دمای میانگین سیال داشته و از این رو اختلاف بین دمای میانگین سیال و دمای دیواره‌ها کاهش یافته که این مطلب باعث افزایش عدد ناسلت می‌شود. با افزایش مجدد عدد برینکمن، اختلاف بین دمای دیواره‌ها و دمای متوسط سیال به سمت صفر میل کرده و در نهایت دمای دیواره‌ها از دمای

متوسط سیال بیشتر می‌شود که این مطلب باعث ایجاد یک پرش در نمودار عدد ناسلت و همچنین تغییر نمودار از مقادیر مثبت به مقادیر منفی خواهد شد. در اعداد برینکمن بزرگتر، این پرش به سمت دهانه ورودی کانال میل کرده و از همان ابتدای کانال شاهد مقادیر منفی برای عدد ناسلت متوسط جریان خواهیم بود. پرش در نمودار عدد ناسلت جریان سیال ویسکوالاستیک به ازای برخی مقادیر عدد برینکمن و در حالت اعمال شار حرارتی ثابت به دیواره‌ها در مرجع [۷۹] نیز گزارش شده است.



شکل (۴-۶۸): عدد ناسلت متوسط محیطی حاصل از مدل‌سازی جریان سیال ویسکوالاستیک در حالت سرمایش و اعمال شرط مرزی H_2

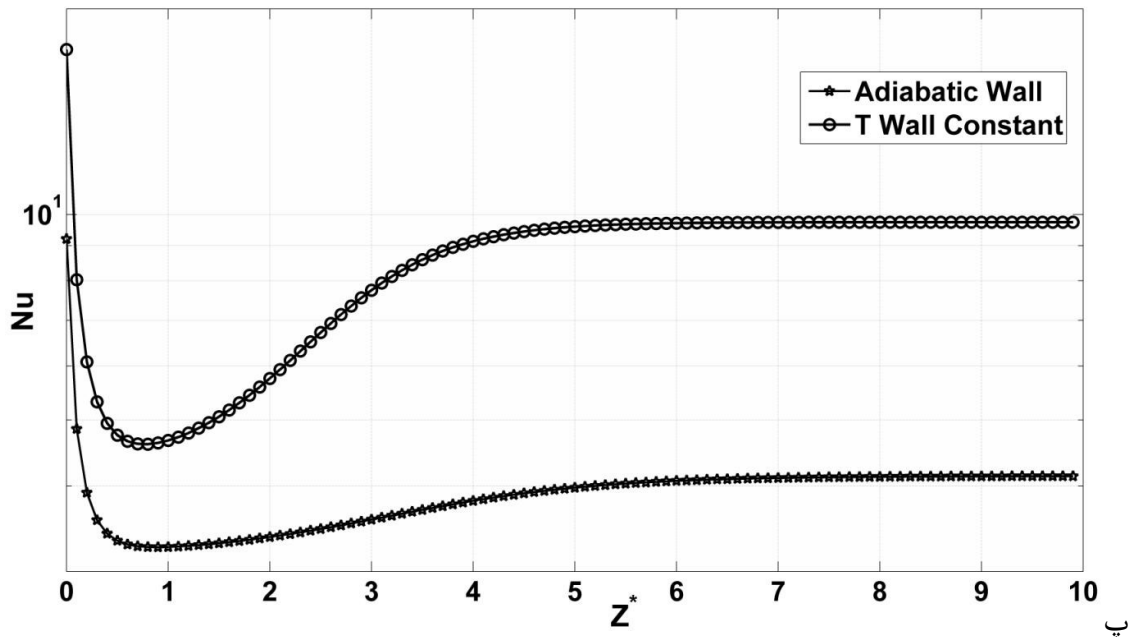
تغییرات عدد ناسلت متوسط محیطی در کانال‌های مستطیلی با نسبت ابعاد متفاوت و اعمال شرط مرزی T نیز مشابه همین حالت می‌باشد. همانطور که در شکل (۴-۶۹) دیده می‌شود، در تمامی کانال‌های مستطیلی با شرایط مرزی یکسان، نحوه تغییرات عدد ناسلت مشابه یکدیگر می‌باشد ولی با افزایش نسبت ابعاد سطح مقطع، عدد ناسلت محیطی به طور کلی افزایش می‌یابد که این مطلب نیز مشابه جریان سیال نیوتنی می‌باشد [۱۱۸، ۱۲۰]. مطلب قابل ذکر دیگر، سرعت بیشتر توسعه یافتگی به ازای نسبت ابعاد بزرگتر سطح مقطع کانال می‌باشد. بدین صورت که با افزایش نسبت ابعاد سطح مقطع، لایه مرزی حرارتی و هیدرودینامیکی در یک جهت با سرعت بیشتری رشد کرده و به حالت توسعه یافته می‌رسد. در این حالت عدد ناسلت متوسط محیطی نیز در فواصل نزدیکتری از دهانه ورودی کانال با رسیدن به حالت توسعه یافته، به حالت یکنواخت و بدون تغییر خود خواهد رسید.



شکل (۴-۶۹): عدد ناسلت متوسط محیطی حاصل از مدل‌سازی جریان سیال ویسکوالاستیک در حالت سرمایش و اعمال شرط مرزی T در نسبت ابعاد مختلف سطح مقطع کانال

از دیگر عوامل اثر گذار بر میزان انتقال حرارت در یک جریان سیال، شرایط مرزی حرارتی اعمال شده به مرزهای سیستم می‌باشد. عدد ناسلت متوسط محیطی در حالت اعمال شرط مرزی حرارتی T و همچنین حالت دمای دیواره ثابت به همراه دو دیواره عایق به ازای یک عدد برینکمن منفی (سرمایش سیال) در شکل (۴-۷۰) نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، الگوی

تغییرات عدد ناسلت محیطی در راستای کانال به ازای اعمال هر دو شرط مرزی نسبتاً مشابه می‌باشد ولی در حالت کلی، در حالت اعمال شرط مرزی حرارتی T ، مقدار متوسط عدد ناسلت محیطی در هر مقطع از حالت دیگر بیشتر است و همچنین عایق بودن یک دیواره باعث کاهش عدد ناسلت متوسط محیطی در راستای کانال شده است.



شکل (۴-۷۰): عدد ناسلت متوسط محیطی حاصل از مدل‌سازی جریان سیال ویسکوالاستیک در حالت سرمایش و اعمال شرط مرزی حرارتی T و دیوار عایق

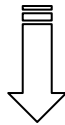
۴-۶-۲- بررسی اثرات جابجایی آزاد همزمان با جابجایی اجباری (جابجایی مرکب)

تا کنون در تمامی حالات مورد تحلیل، معادله ممنوم بدون اثر نیروی شناوری و یا به عبارت دیگر در نبود اثرات جابجایی آزاد مورد استفاده قرار گرفته است. در حالت کلی با فرض حالت هم‌دمای برای جریان سیال و یا عدم وابستگی دانسیته سیال به دمای سیال، حتی با اضافه کردن ترم نیروی گرانش در معادله ممنوم هم، تغییرات زیادی در نتایج حاصله اتفاق نمی‌افتد و حتی در شدت و تقارن موجود در جریان‌های ثانویه هم هیچ تغییر خاصی دیده نمی‌شود. حال اگر جریان هم‌دمای نباشد و دانسیته سیال را تابعی از دمای نقطه‌ای سیال در نظر بگیریم، مکانیزم جابجایی آزاد علاوه بر جابجایی اجباری وارد عمل شده و تا حدی می‌تواند الگو و شدت جریان‌های ثانویه و حتی عدد ناسلت را متاثر

نماید. برای تعریف نحوه وابستگی دانسیته سیال ویسکوالاستیک به دما از تابع پیشنهاد شده در مرجع [۹۳] که همان تقریب بوزینسک^۱ می باشد، به صورت معادله (۴-۱۶) استفاده شده است. با وارد کردن ترم نیروی گرانش در معادله ممنتوم و همچنین اعمال تغییرات فوق و در نظر گرفتن مشتقات چگالی سیال نسبت به دما، معادله ممنتوم در حالت وجود ترم نیروی شناوری به شکل معادله (۴-۱۷) بازنویسی می شود. البته لازم بذکر است که فقط در معادله ممنتوم فرض وابستگی دانسیته به دما در نظر گرفته شده و همچنین فرض وجود جابجایی آزاد فقط با اعمال شرط مرزی حرارتی T و در حالت گرمایش سیال صورت پذیرفته است.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{\rho_0} \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{il}}{\partial x_i} \right) + \rho_0 g - \rho g \quad (۴-۱۵)$$

$$\rho = \rho_0 + \beta(T - T_{in})\rho_0 \quad (۴-۱۶)$$



$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} = \frac{1}{Re} \left(-\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \tau_{il}^*}{\partial x_i^*} \right) - \frac{Gr}{Re^2} (T^* - 1) \quad (۴-۱۷)$$

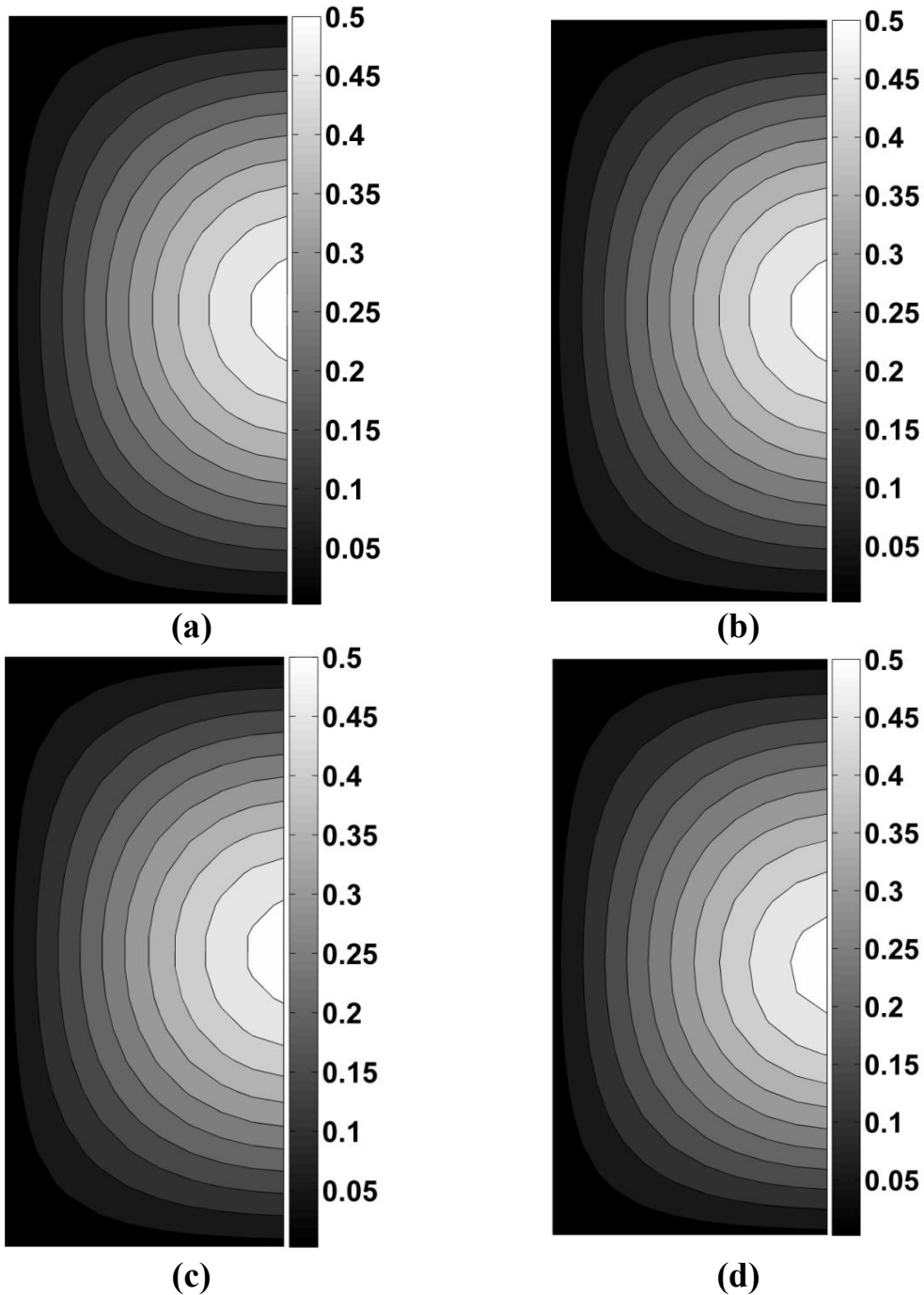
$$Gr = \frac{D_h^3 g \beta (T_{in} - T_w)}{\nu^2}, \quad Re = \frac{W_{ref} D_h}{\nu}$$

که در آن Gr عدد گراشف^۲ و معرف نسبت نیروی شناوری به نیروی ویسکوز می باشد. با حل مجدد معادلات در حالت فوق و شرط مرزی حرارتی دمای دیواره ثابت در حالت گرمایش، جواب های بدست آمده اضافه شدن اثر جابجایی آزاد را در مکانیزم انتقال حرارت نشان می دهد. شکل (۴-۷۱) کانتورهای دمای سیال در مقاطع مشابه و شرایط مرزی یکسان در حالت وجود جابجایی آزاد و اعداد گراشف مختلف و همچنین عدم وجود جابجایی آزاد را نشان می دهد. لازم به ذکر است که در حالت وجود جابجایی آزاد، جریان سیال فقط نسبت به محور x ها متقارن بوده و از این رو جریان های ثانویه و کانتورهای دما در یک دوم کانال رسم شده است.

^۱ - Boussinesq approximation

^۲ - Grashof Number

همانطور که در شکل (۴-۷۱) دیده می‌شود، با ثابت بودن شرایط مرزی دمایی و همچنین با فرض عدد برینکمن یکسان برای تمامی حالات، ترم نیروی شناوری وارد شده در معادله ممنوم، تاثیر چندانی بر معادله انرژی و همچنین الگوی میدان دما نداشته و تنها با افزایش عدد گراشف، الگوی میدان دما مقدار ناچیزی به سمت دیواره پایینی کانال جابجا می‌شود.



شکل (۴-۷۱): کانتورهای دمای بی‌بعد سیال در مقاطع مشابه و اعمال شرایط مرزی T در حالت وجود جابجایی آزاد و عدم وجود جابجایی آزاد در $Re = 10$ اعداد گراشف مختلف $a) Gr \approx 0, b) Gr = 0.1, c) Gr = 1, d) Gr = 10$

همچنین همانطور که در شکل (۴-۷۲) دیده می‌شود، ورود مکانیزم جابجایی آزاد بر الگوی تشکیل جریان‌های ثانویه نیز اثر گذاشته ولی مقدار این اثر گذاری در اعداد گراش پائین در مقایسه با بقیه ترم‌های موجود از قبیل ترم نیروی محرک جریان‌های ثانویه که همان اختلاف تنش‌های نرمال می‌باشد، چندان موثر نمی‌باشد. ولی در اعداد گراش بیشتر از یک، مکانیزم جابجایی آزاد کاملاً وارد عمل شده و حتی الگوی جریان‌های ثانویه را تحت تاثیر خود قرار می‌دهد تا جایی که در اعداد گراش بالاتر، چهار جریان گردابی موجود در یک دوم مقطع کانال، به یک جریان گردابی حاصل از جابجایی آزاد تبدیل می‌شود.



(a)



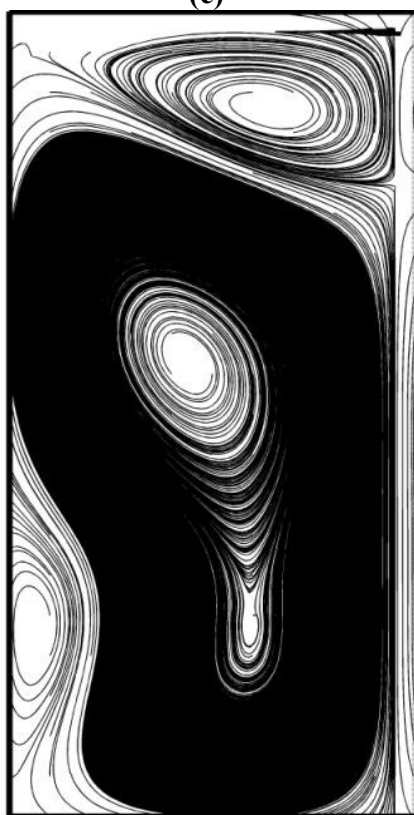
(b)



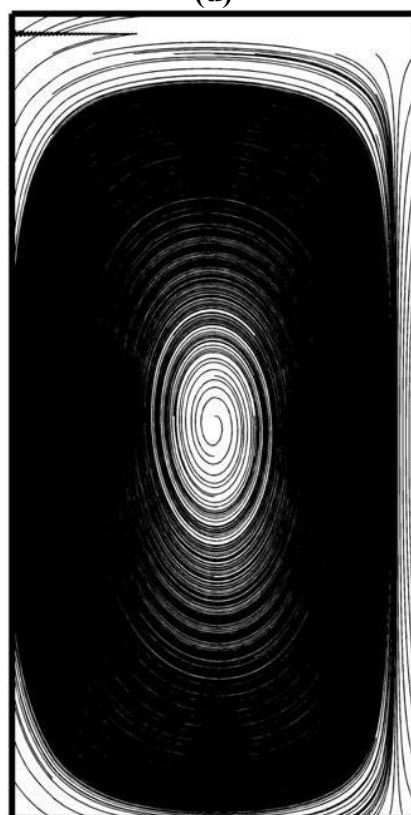
(c)



(d)



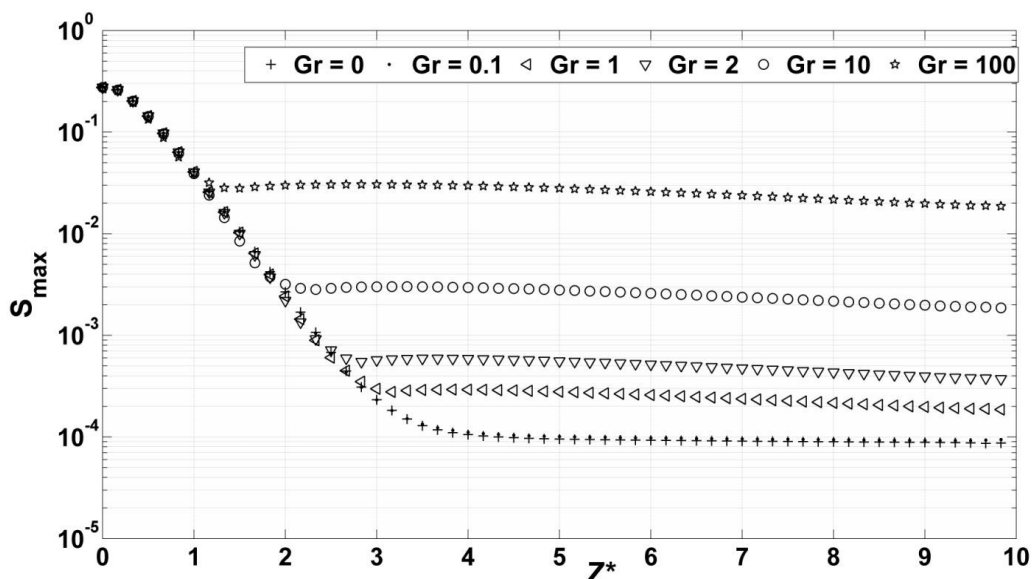
(e)



(f)

شکل (۴-۷۲): جریان‌های ثانویه سیال در مقطعی مشابه و اعمال شرایط مرزی T در حالت وجود جابجایی آزاد و عدم وجود جابجایی آزاد در $Re = 10$ و $f) Gr = 10, e) Gr = 1, d) Gr = 0.5, c) Gr = 0.2, b) Gr = 0.1, a) Gr \approx 0$

در شکل (۴-۷۳) شدت جریان‌های ثانویه و در جدول (۴-۸) عدد ناسلت بدست آمده حاصل از مدل‌سازی جریان سیال ویسکوالاستیک در حالت وجود جابجایی آزاد در اعداد گراشف مختلف و عدم وجود جابجایی آزاد نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، با افزایش عدد گراشف که تاثیر مستقیم آن در معادله ممنوم وارد خواهد شد، شدت جریان‌های ثانویه افزایش یافته و این افزایش تا حدی است که جریان‌های عرضی اولیه را که حاصل از ویسکوالاستیک بودن جریان است کاملاً تحت تاثیر قرار می‌دهد به نحوی که در اعداد گراشف بالا، چهار جریان گردابی موجود در یک دوم مقطع کانال، به یک جریان گردابی بزرگتر تبدیل شده و همچنین شدت جریان‌های عرضی به حدود پنج درصد جریان اصلی می‌رسد. البته همانطور که پیشتر بیان شد و در جدول (۴-۹) نیز قابل مشاهده می‌باشد، به علت اثرپذیری نه چندان زیاد میدان دما از تغییرات عدد گراشف، این تغییرات تاثیر زیادی بر عدد ناسلت نیز نخواهد داشت. از طرف دیگر علی‌رغم اینکه افزایش عدد گراشف باعث افزایش شدت جریان‌های ثانویه می‌شود، ولی چون خود ترم جابجایی حاصل از جریان‌های عرضی سهم زیادی در معادله انرژی نخواهد داشت، بنابراین افزایش عدد گراشف نیز تاثیر زیادی بر عدد ناسلت نمی‌گذارد. البته در حالت صرف وجود جابجایی آزاد همانطور که در مرجع [۱۲۳] نیز بیان شده است، افزایش عدد گراشف تاثیر خود را در افزایش عدد ناسلت نشان خواهد داد.



شکل (۴-۷۳): شدت جریان‌های ثانویه در راستای کانال در حالت اعمال شرایط مرزی T در حالت جابجایی مرکب در اعداد گراشف مختلف و همچنین عدم وجود جابجایی آزاد

جدول (۴-۹): عدد ناسلت محیطی در محدوده توسعه یافته در حالت اعمال شرط مرزی T در حالت جابجایی مرکب به ازای اعداد گراشف مختلف

Gr	0	0.001	0.1	1	10	100
Nu	9.74	9.748	9.76	9.781	9.788	9.83

همانطور که پیشتر بیان شد، پارامترهای مادی و الاستیک در معادله متشکله فن تین تنر و همچنین ثابت زمانی λ ، بر مقدار اختلاف تنش نرمال دوم و همچنین شدت جریان‌های ثانویه اثرگذار بوده و از این رو پیش‌بینی می‌شود که افزایش شدت جریان‌های ثانویه باعث افزایش عدد ناسلت و قابلیت انتقال حرارت بالاتر جریان سیال شود. از طرف دیگر به علت وجود ترم‌های شدیداً غیر خطی در معادلات حاکمه بویژه معادله متشکله فن تین تنر و در پی آن ناپایداری کد کامپیوتری در اثر تغییرات شدید در کمیت‌های الاستیک، دستیابی به نتایج تحلیل مورد نظر به ازای مقادیر بالای پارامترهای الاستیک چندان میسر نمی‌باشد ولی در حد امکان پارامترهای مادی و همچنین خواص الاستیک سیال افزایش داده شده و نتایج آن گزارش می‌شود که در همین حد نیز افزایش این خواص، افزایش قابلیت انتقال حرارت جریان سیال را نشان می‌دهد.

در جدول (۴-۱۰) مقادیر عدد ناسلت در حالت اعمال شرایط مرزی مختلف در ناحیه توسعه یافته به ازای مقادیر مختلف ثابت زمانی λ نشان داده شده است. همانطور که پیش‌بینی می‌شد، با افزایش ثابت زمانی که در حقیقت نماینده‌ای از خواص الاستیک ماده است، اختلاف تنش نرمال و شدت جریان‌های ثانویه افزایش یافته و در نتیجه به علت افزایش تحرکات عرضی، قابلیت انتقال حرارت ماده افزایش پیدا می‌کند. البته این افزایش در عدد ناسلت به علت تغییرات نه‌چندان زیاد خواص الاستیک، چندان چشمگیر نمی‌باشد. در حالت‌های مختلف اعمال شرایط مرزی حرارتی نیز وضع به همین منوال بوده و افزایش ثابت زمانی باعث افزایش محدود عدد ناسلت می‌شود.

جدول (۴-۱۰): شدت جریان‌های ثانویه و عدد ناسلت محیطی متوسط در محدوده توسعه یافته در حالت اعمال شرط مرزی T و H_2 به ازای مقادیر مختلف ثابت زمانی

0.03	0.025	0.02	0.0135	λ	
$1.16e-4$	$4.73e-5$	$6.22e-5$	$7.25e-6$	S_{Max}	شرط مرزی T $Br < 0$
9.813	9.787	9.771	9.741	Nu	
$1.73e-4$	$5.69e-5$	$6.74e-5$	$7.53e-6$	S_{Max}	شرط مرزی H_2 $Br = 0$
6.263	6.248	6.239	6.217	Nu	

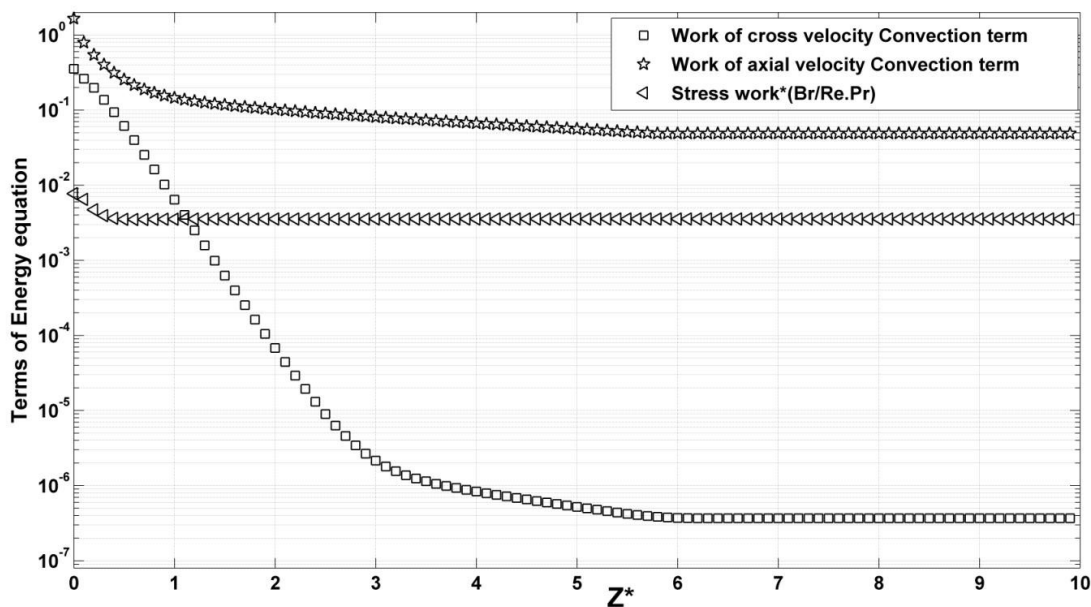
در مورد پارامترهای مادی \mathcal{E} و ξ نیز وضعیت مشابهی حاکم می‌باشد. همانطور که پیشتر بیان شد، افزایش در پارامترهای مادی \mathcal{E} و ξ باعث افزایش شدت جریان‌های ثانویه شده و از این رو با افزایش تحرکات عرضی، قابلیت انتقال حرارت سیال را در مقاطع عمودی کانال افزایش می‌دهد. در جدول (۴-۱۱)، تاثیر پارامترهای مادی بر مقادیر عدد ناسلت در ناحیه توسعه یافته جریان نشان داده شده است. لازم بذکر است که پارامتر مادی ξ تاثیر مستقیمی در مقدار اختلاف تنش نرمال دوم داشته ولی پارامتر \mathcal{E} با اثرگذاری در مقدار g ، مقدار اختلاف تنش نرمال دوم را تغییر می‌دهد.

جدول (۴-۱۱): شدت جریان‌های ثانویه و عدد ناسلت محیطی متوسط در محدوده توسعه یافته در حالت اعمال شرط مرزی T به ازای مقادیر مختلف پارامترهای مادی

0.15	0.05	0.02	0.01	\mathcal{E}	
$1.83e-4$	$1.51e-4$	$2.91e-5$	$9.53e-6$	S_{Max}	شرط مرزی T و $Br < 0$
9.746	9.739	9.731	9.726	Nu	
0.2	0.1	0.075	0.05	ξ	
$1.71e-4$	$6.06e-5$	$1.19e-5$	$6.28e-7$	S_{Max}	
9.741	9.733	9.729	9.723	Nu	

در حقیقت افزایش خواص الاستیک و در نهایت اختلاف تنش نرمال دوم، اثر خود را در افزایش تحرکات عرضی یا به عبارت دیگر افزایش میزان سرعت‌های عرضی u و v نسبت به سرعت محوری

نشان می‌دهد. با مراجعه به معادله انرژی و تحلیل بزرگی^۱ ترم‌های این معادله به ازای یک حالت خاص، درمی‌یابیم که سهم کار ترم‌های جابجایی سرعت‌های عرضی u و v در مقایسه با بقیه ترم‌ها از جمله کار ترم جابجایی سرعت محوری و همچنین کار نیروی ویسکوز همانطور که در شکل (۴-۷۴) نشان داده شده است، نسبتاً اندک و کمتر از $0,01$ درصد مقادیر متوسط آنها می‌باشد. از این رو همانطور که در قسمت‌های قبلی بیان شد، افزایش خواص الاستیک در حد تغییرات داده شده در این تحقیق، باعث افزایش چند صد برابری شدت جریان‌های عرضی نسبت به جریان محوری شده ولی بنا به دلایل بیان شده، تاثیر افزایشی چشمگیری در معادله انرژی، میدان دما و همچنین قابلیت انتقال حرارت جریان سیال نخواهد داشت.



شکل (۴-۷۴): مقادیر متوسط و بی‌بعد کار نیروی تنش، کار ترم جابجایی سرعت محوری و همچنین کار ترم‌های جابجایی سرعت‌های عرضی u و v در حالت شرایط مرزی T

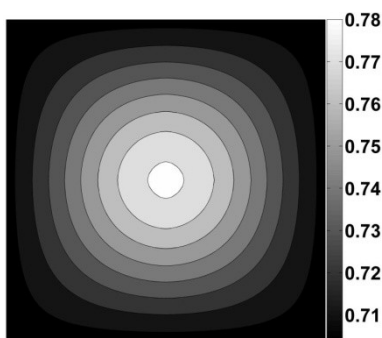
۳-۶-۴- محاسبه خواص سیال در دمای مرجع

یکی دیگر از موارد مورد تحلیل در این تحقیق، وابستگی خواص سیال به دما و همچنین نحوه و میزان تاثیر این وابستگی بر جریان سیال و خواص دیگر می‌باشد. خواص مهمی از سیال که معمولاً

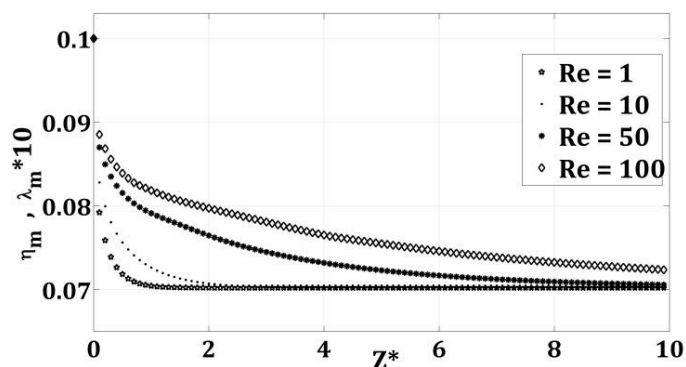
¹ - Order of magnitude

تاثیر پذیری بیشتری از تغییرات دمایی می‌پذیرد، ویسکوزیته، ظرفیت حرارتی ویژه، ثابت زمانی و همچنین ضریب رسانش و چگالی سیال می‌باشد که اثر تغییرات چگالی و افزوده شدن جابجایی آزاد در مکانیزم انتقال حرارت در مباحث قبلی مورد بررسی قرار گرفت. در این قسمت به نحوه و میزان تغییرات این خواص در جریان سیال در دو حالت اعمال شرط مرزی T و H_2 می‌پردازیم و در صورت امکان به منظور ساده‌سازی محاسبات و جلوگیری از تعریف روابط اضافی در معادلات حاکمه، دمایی میانگین برای سیال تعریف نموده که با استفاده از آن دما به عنوان دمای مرجع و محاسبه خواص در آن دما، وابستگی خواص سیال به دما تا حد قابل قبولی لحاظ شده باشد.

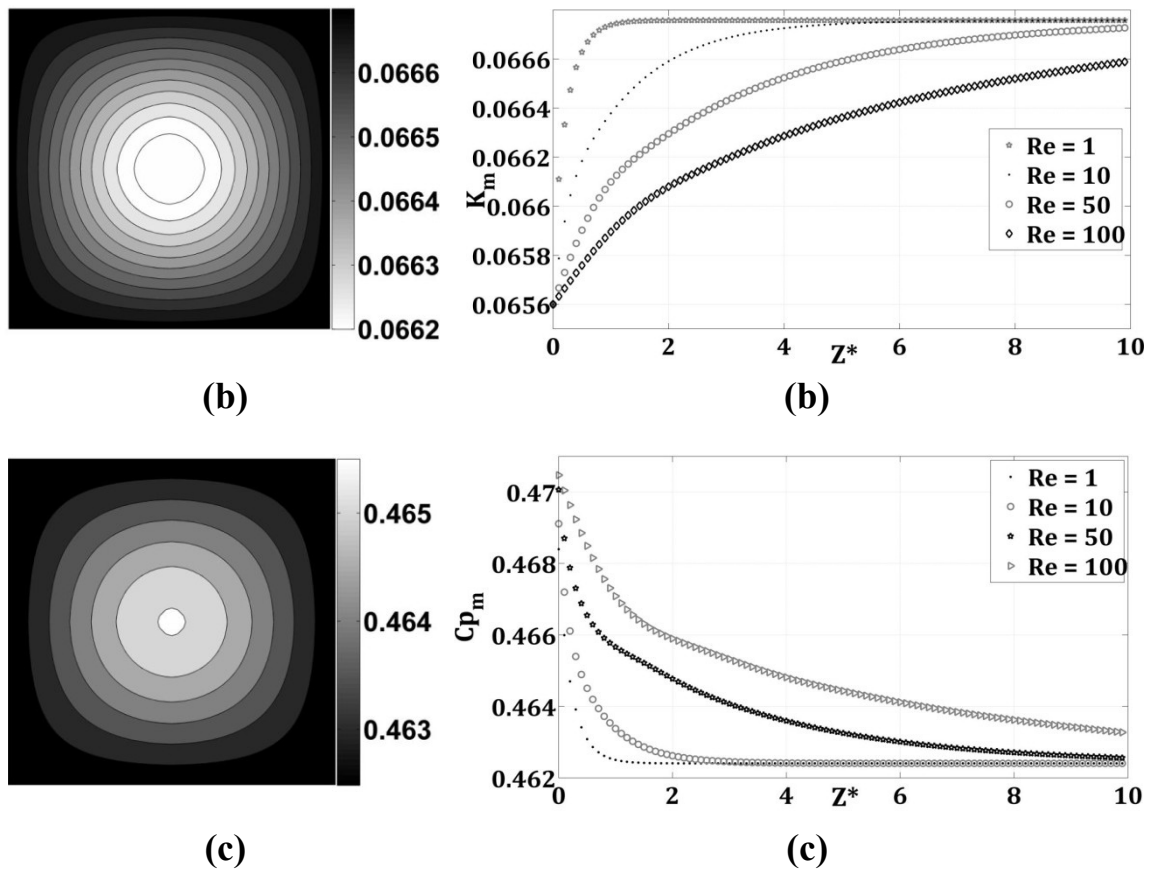
همانطور که در شکل (۴-۷۵) نشان داده شده است، نحوه تغییرات خواص ویسکوزیته، ظرفیت حرارتی ویژه، ثابت زمانی و همچنین ضریب رسانش در یک مقطع عرضی و در راستای کانال در حالت اعمال شرط مرزی T و به ازای اعداد رینولدز مختلف رسم شده است. در اعداد برینکمن بزرگتر از صفر که گرمایش سیال را نشان می‌دهد، با پیشروی در راستای کانال، دمای متوسط سیال افزایش پیدا کرده و این مطلب باعث کاهش خواصی از قبیل λ, η, C_p و همچنین افزایش مقدار ضریب جابجایی سیال می‌شود. از طرف دیگر در مقاطع عرضی کانال نیز توزیع خواص λ, η, C_p برعکس ضریب رسانش خواهد بود. بدین صورت که در اطراف دیواره‌ها به علت بالاتر بودن دما این خواص مقادیر کمتری نسبت به مرکز کانال دارا می‌باشند. البته این تغییرات و توزیع خواص در شرایط مرزی و اعداد برینکمن مختلف صورت متفاوتی از این حالت خواهند داشت.



(a)



(a)



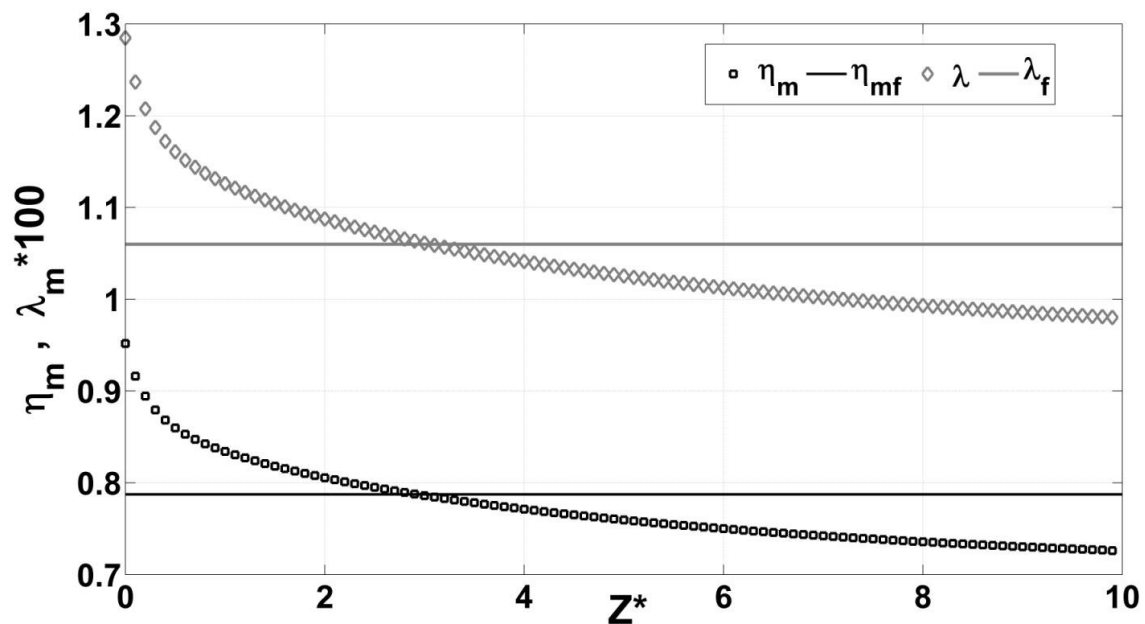
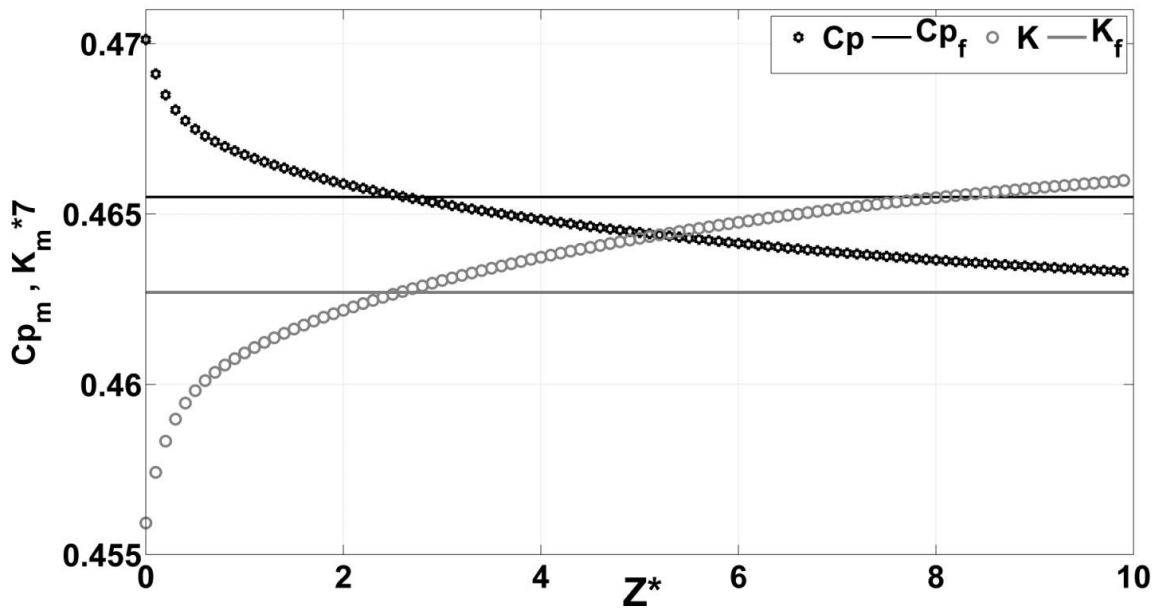
شکل (۴-۷۵): نحوه تغییرات خواص سیال نسبت به دما در یک مقطع عرضی و در راستای کانال در حالت اعمال شرط (a, T) ویسکوزیته و ثابت زمانی (b) ضریب رسانش (c) ظرفیت حرارتی

با افزایش عدد برینکمن، بر شدت تغییرات این خواص در طول کانال و همچنین مقاطع عرضی کانال افزوده می‌شود که علت اصلی این مطلب شدیدتر شدن اثر گذاری تلفات ویسکوز در راستای کانال بخصوص اطراف دیواره‌ها می‌باشد. ولی همانطور که در نمودارهای فوق دیده می‌شود، بیشترین مقدار تغییرات خواص ویسکوزیته، ظرفیت حرارتی ویژه، ثابت زمانی و همچنین ضریب رسانش در مقاطع عرضی و در طول کانال به ترتیب $۳۲,۰۸$ ، $۱,۳۹$ ، $۳۲,۰۸$ و $۲,۷۱$ درصد مقدار اولیه آنها می‌باشد که به نظر می‌رسد با تعریف دمایی میانگین به عنوان دمای مرجع برای محاسبه خواص سیال، می‌توان با پرهیز از تعریف تابع تغییرات دمایی برای این خواص، درصد خطای ناشی از فرض مقادیر ثابت برای این خواص را تا حد زیادی کاهش داد. برای تعریف دمای مرجع، چنانچه در مرجع

[۷۴] نیز اشاره شده است، می‌توان از رابطه (۴-۱۸) استفاده نمود که در این حالت تغییرات مقدار خواص فوق در راستای کانال محاسبه شده و در شکل (۴-۷۶) نشان داده شده است.

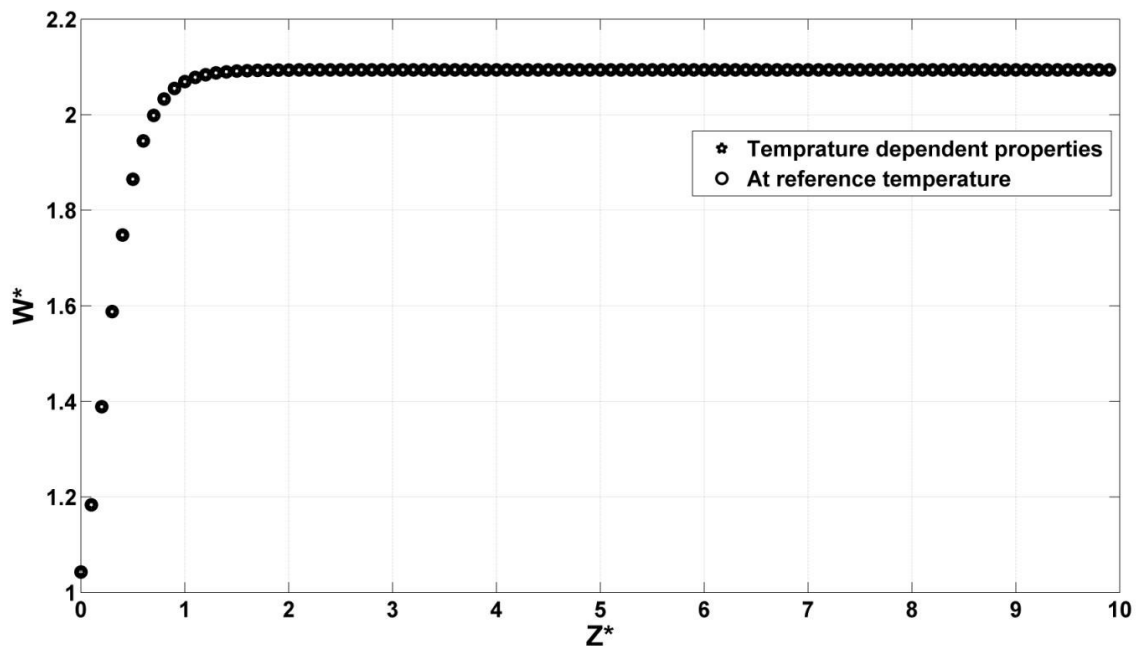
$$T_{ref} = \frac{1}{3}(T_{in} + T_{w1} + T_{w2}) \quad (۴-۱۸)$$

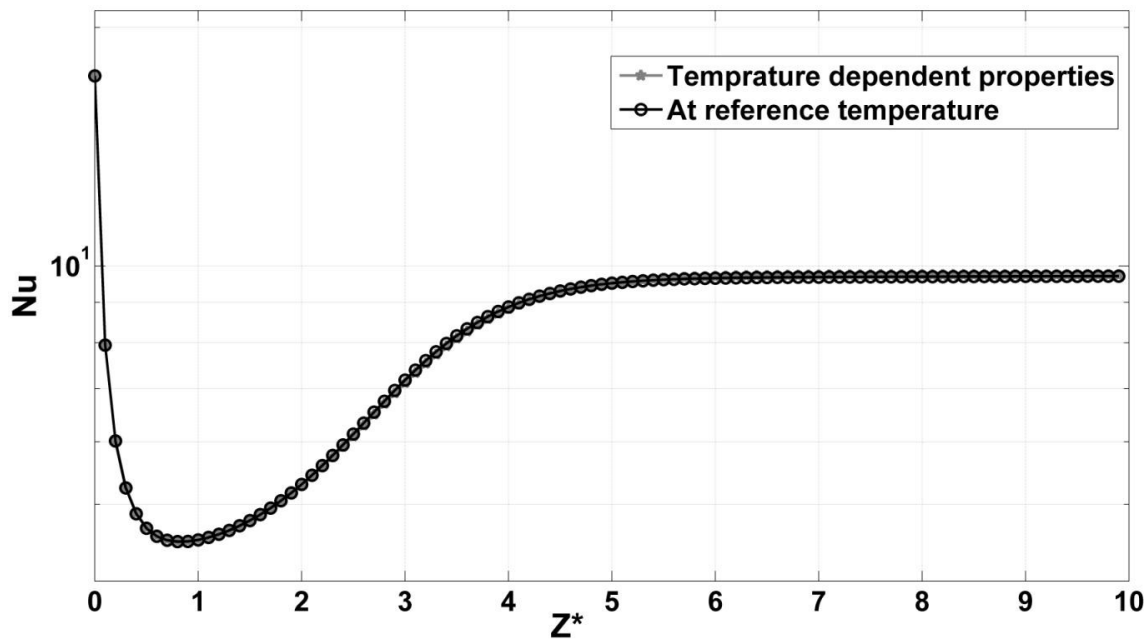
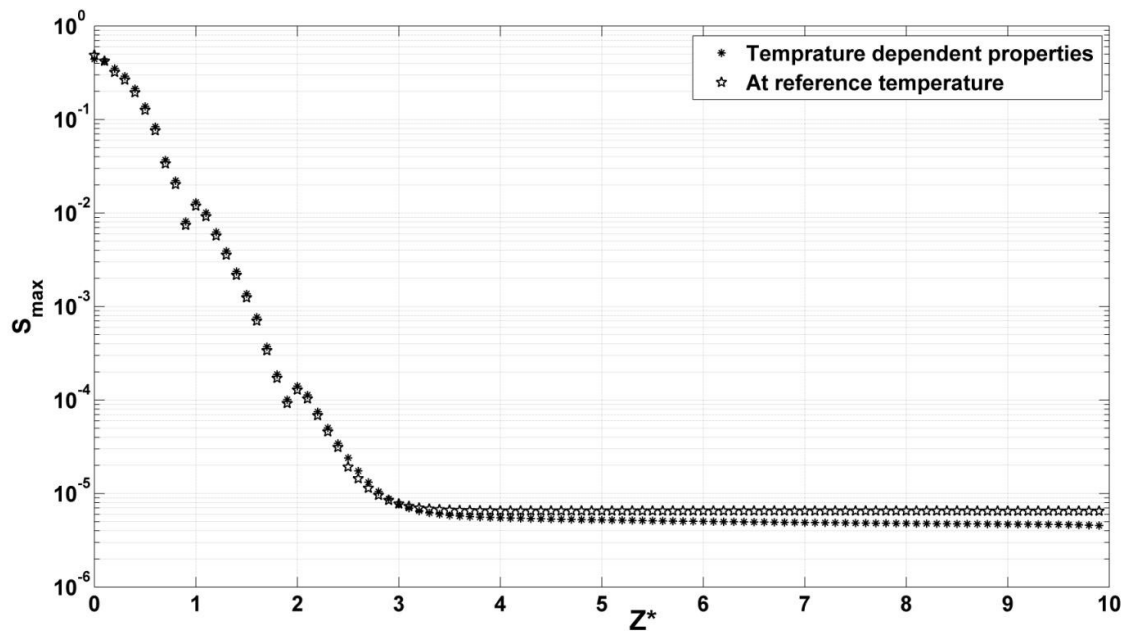
که در آن T_{in} دمای ورودی سیال و $T_{w1,2}$ دمای دو دیواره کانال می‌باشد.



شکل (۴-۷۶): نحوه تغییرات خواص سیال نسبت به دما در راستای کانال و همچنین در حالت تعریف دمای مرجع در حالت اعمال شرط مرزی T

که منظور از اندیس f ، خاصیت مورد نظر به ازای دمای مرجع T_{ref} می باشد. همانطور که در شکل (۴-۷۶) دیده می شود، حداکثر میزان اختلاف خواص فوق در حالت تعریف تابع تغییرات و در حالت دیگر با فرض دمای مرجع، به ترتیب مقدار ۱۸,۷۸ درصد برای ویسکوزیته، ۰,۹۹ درصد برای ظرفیت حرارتی ویژه، ۱۸,۷۸ درصد برای ثابت زمانی λ و همچنین مقدار ۱,۴۶ درصد برای ضریب رسانش بوده که علی رغم بالا بودن مقدار اختلاف آنها برای ویسکوزیته و همچنین ثابت زمانی، این مقدار تاثیر چندانی در نتایج محاسبات جریان سیال نخواهد داشت. بدین منظور در یک عدد برینکمن و فرض دمای میانگین برای خواص سیال با استفاده از رابطه (۴-۱۸)، میدان جریان مجددا مورد تحلیل قرار گرفته که حاصل مقایسه نتایج بدست آمده با نتایج قبلی در چند مورد در شکل (۴-۷۷) نشان داده شده است.





شکل (۴-۷۷): نحوه تغییرات سرعت محوری، شدت جریان‌های ثانویه و عدد ناسلت در حالت تعریف تابع دمایی و همچنین در حالت تعریف دمای مرجع $Br < 0$

چنانچه در نمودارهای فوق دیده می‌شود، تطابق رضایت‌بخشی در نتایج بدست‌آمده از دو تحلیل مشاهده می‌شود و حداکثر میزان تفاوت در مقادیر سرعت محوری، شدت جریان‌های ثانویه و عدد ناسلت به ترتیب ۰,۱۵، ۱,۴ و ۰,۲۹ درصد می‌باشد که این مقدار خطا در مدل‌سازی‌های عددی و با در نظر گرفتن کاهش هزینه محاسبات و سادگی حل قابل صرف‌نظر کردن می‌باشد.

در حالت اعمال شرط مرزی H_2 با توجه به اینکه در سرتاسر کانال دمای سیال در حال تغییر بوده و از طرف دیگر فعالیت ترم تنش نیز این تغییرات را افزایش می‌دهد، تعریف دمایی به عنوان دمای مرجع با خطا و تقریب بیشتری همراه خواهد بود. از این رو با اعمال معادله انرژی برای کل کانال و صرف نظر کردن از تلفات ویسکوز، می‌توان دمای خروجی سیال را همانند معادله (۴-۱۹)، به عنوان دمای مرجع در نظر گرفت. لازم به ذکر است که فرض دمای خروجی کانال به عنوان دمای مرجع، به منظور کاهش خطای تقریب در صرف نظر کردن از تلفات ویسکوز می‌باشد چرا که تلفات ویسکوز نیز به عنوان یک منبع حرارتی عمل کرده و باعث افزایش دمای سیال می‌شود.

$$T_{ref} = \frac{4 \times l * q''}{\rho \times W_{ref} \times C_p * b} + T_{in} \quad (۴-۱۹)$$

که در آن، l طول کانال، q'' شار حرارتی اعمال شده به دیواره‌ها و b طول مقطع کانال می‌باشد. با استفاده از دمای تعریفی فوق به عنوان دمای مرجع و محاسبه خواص سیال در این دما، میدان جریان مجدداً در حالت گرمایش سیال و به ازای عدد برینکمن ۱۰ مورد تحلیل قرار گرفته است که با مقایسه نتایج بدست آمده و نتایج قبلی در حالت فرض تابع دمایی برای خواص، بیشترین مقدار تفاوت در مقادیر سرعت محوری، شدت جریان‌های ثانویه و عدد ناسلت جریان به ترتیب ۰٫۲۳، ۴٫۳۵ و ۶٫۱۹ درصد می‌باشد که در مقایسه با حالت قبلی خطای بیشتری در این ساده‌سازی مشاهده می‌شود. نکته قابل ذکر دیگر اینست با فرض دمای مرجع در هر مقطع کانال و محاسبه خواص سیال به صورت موضعی در آن مقطع، مقداری از هزینه محاسبات در مقایسه با تعریف تابع دمایی کاسته شده ولی مقدار خطای ایجاد شده در نتایج در مقایسه با تعریف دمای مرجع برای کل کانال، تا حد زیادی کاهش می‌یابد. لازم به ذکر است که در حالاتی که مقدار اثر عدد برینکمن بر جریان سیال چندان قابل ملاحظه نباشد و تغییرات دمایی زیادی در راستای کانال نداشته باشیم، فرض دمای مرجع برای کل کانال نیز با دقت بالاتری همراه خواهد بود.

فصل پنجم

نتیجه گیری

۵-۱- مقدمه

در این فصل نتایج بدست آمده از مدل سازی جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در کانال مستطیلی حاصل از این تحقیق، به صورت اختصار بیان می شود. بدین منظور مطالب مورد بررسی و همچنین نتایج بدست آمده در قسمت های جدا و سرفصل های مرتبط، دسته بندی و ارائه شده است.

۵-۲- نتایج جریان

همانطور که بیان شد، در این تحقیق ترم تنش موجود در معادله تنش، با استفاده از سه معادله متشکله فن تین تر، کریمینال اریکسون فیلی و گزیکس مورد تحلیل قرار گرفته است که البته در اکثر موارد تحلیل با استفاده از معادله بهبود یافته فن تین تر مد نظر بوده است.

یکی از خواص ویژه و وجه تمایز سیالات ویسکوالاستیک با سیالات نیوتنی، وجود اختلاف بین تنش های نرمال در این سیالات می باشد که این اختلاف بین تنش های نرمال، خود عامل بروز برخی از پدیده های خاص در جریان این سیالات می باشد که از جمله می توان به تشکیل جریان های ثانویه در مقاطع عمودی کانال اشاره نمود. از این رو پارامترها و موارد اثر گذار بر مقادیر اختلاف تنش های نرمال می توانند در شدت و الگوی تشکیل این جریان های ثانویه نیز موثر باشند که بدین منظور در تحقیق حاضر این موضوع مورد بررسی قرار گرفته است. لازم به ذکر است که جهت تشکیل جریان های ثانویه در مقاطع عمودی کانال می بایست عدم تطبیق شرایط مسئله مورد نظر با شرایط بیان شده توسط اولدروید احراز شود که در تحقیق حاضر، این مسئله مورد بررسی قرار گرفته است.

۵-۲-۱- اثر پارامترهای مادی سیال بر اختلاف تنش نرمال و شدت جریان های عرضی

در مدل سازی عددی انجام شده با استفاده از معادله متشکله بهبود یافته فن تین تر، یکی از عوامل موثر و تعیین کننده در تشکیل و شدت جریان های ثانویه، مقدار اختلاف تنش نرمال دوم می باشد که پارامترهایی همچون ثابت زمانی λ و همچنین پارامترهای مادی ϵ ، ξ بر مقدار اختلاف تنش نرمال دوم و در پی آن شدت جریان های ثانویه اثر گذار می باشد. با افزایش ثابت زمانی λ ،

خواص الاستیک ماده افزایش یافته و از طرف دیگر باعث تشدید خاصیت نازک‌شوندگی ویسکوزیته نسبت به نرخ برش می‌شود. پارامتر مادی ε نیز یکی دیگر از پارامترهای مادی اثر گذار بر مقدار اختلاف تنش نرمال دوم و همچنین شدت جریان‌های ثانویه می‌باشد. در حالتی که مقدار ε ناچیز است، مقدار اختلاف تنش نرمال دوم به سمت تعریف ضریبی ثابت از ویسکوزیته سیال نزدیک می‌شود. در این صورت مقدار پارامتر g به سمت یک میل کرده و شرایط اولدریود حادث می‌شود. از این رو جریان‌های ثانویه بسیار ضعیف شده و کم کم از بین می‌روند. اما با افزایش مقدار ε ، مقدار پارامتر g از یک بیشتر شده و همچنین خاصیت باریک‌شوندگی سیال تقویت می‌شود که در پی آن مقدار اختلاف تنش نرمال دوم و همچنین شدت جریان‌های عرضی افزایش می‌یابد.

پارامتر دیگری که اثرگذاری آن بر مقدار اختلاف تنش نرمال دوم و همچنین شدت جریان‌های ثانویه در این تحقیق مورد بررسی قرار گرفته است، پارامتر مادی ξ می‌باشد. مقدار این پارامتر اثر مستقیمی بر اختلاف تنش نرمال دوم در مدل‌سازی با استفاده از مدل فن تین تر دارد، از این رو افزایش پارامتر مادی ξ نیز باعث افزایش شدت جریان‌های ثانویه می‌شود. از طرف دیگر این پارامتر تا حدی بر ویسکوزیته سیال نیز اثر گذار می‌باشد که در این حالت با افزایش پارامتر مادی ξ ، هم خواص الاستیک ماده افزایش پیدا کرده و هم مقداری ویسکوزیته ماده کاهش می‌یابد که این مطلب باعث افزایش شدت جریان‌های ثانویه می‌شود. چراکه در حالت کلی با افزایش ویسکوزیته و در صورت ثابت بودن خواص الاستیک سیال (به عنوان مثال با افزایش مقدار ویسکوزیته ماده در نرخ برش صفر)، شدت جریان‌های ثانویه کاهش می‌یابد.

لازم به ذکر است که در صورت صفر بودن هر یک از این پارامترهای مادی، خواص سیال به سمت سیال نیوتنی میل کرده و مقادیر اختلاف تنش نرمال و همچنین شدت جریان‌های ثانویه به سمت صفر میل می‌نمایند.

در مدل‌سازی با استفاده از معادله متشکله کریمینال اریکسون فیلیبی، پیشنهادهای متنوعی در استفاده از توابع ویسکومتریکی برای محاسبه خواص رئولوژیک سیال وجود دارد. در این تحقیق از

روابط کاریو یاسودا به عنوان توابع ویسکومتریکی استفاده شده است که در این حالت، پارامترهایی از قبیل $\lambda, \lambda_1, CN_1, CN_2$ بر خواص رئولوژیک اثرگذار می‌باشند. افزایش ثابت زمانی λ_1 باعث افزایش خواص الاستیک و همچنین مقادیر اختلاف تنش نرمال اول می‌شود ولی بر مقدار ویسکوزیته و اختلاف تنش نرمال دوم اثرگذار نمی‌باشد. ضرایب CN_1 و CN_2 نیز اثر یکنوایی بر مقدار اختلاف تنش نرمال دوم نخواهند گذاشت. در ابتدا با افزایش هر کدام از این ضرایب از مقدار اختلاف تنش نرمال دوم کاسته شده ولی با افزایش مجدد آنها اختلاف تنش نرمال دوم افزایش می‌یابد. این افزایش مجدد با تغییر علامت اختلاف تنش نرمال دوم همراه خواهد بود که البته باعث تغییر در جهت چرخش جریان‌های ثانویه و همچنین الگوی تشکیل این جریان‌ها خواهد شد.

در مدل‌سازی با استفاده از معادله متشکله گزیکس نیز ثابت زمانی λ و همچنین ضرایب α, β بر مقادیر تنش‌های نرمال و همچنین اختلاف تنش‌های نرمال اول و دوم اثر گذار می‌باشند. در حقیقت با افزایش β ، درصد ویسکوزیته حلال (ماده نیوتنی) به ویسکوزیته کل ماده بیشتر شده و در نتیجه خواص ماده به سمت خواص سیال ویسکوز پیش می‌رود. از این‌رو خواص الاستیک کم شده و اختلاف تنش نرمال دوم کاهش می‌یابد. از طرف دیگر با افزایش α که در حقیقت تاثیر معکوس بر مقدار ثابت زمانی λ دارد، مقدار خواص الاستیک کم شده و در نهایت مقدار اختلاف تنش نرمال دوم کم می‌شود.

در تمامی مدل‌سازی‌های انجام شده با استفاده از معادلات متشکله مذکور، به علت شدت بالای تغییرات پارامترهای جریان در ابتدای کانال، تمامی مولفه‌های تنش و همچنین مقادیر اختلاف تنش نرمال اول و دوم و شدت جریان‌های عرضی در ابتدای کانال مقادیر بالایی داشته ولی با پیشروی در راستای کانال و شکل‌گیری لایه مرزی هیدرودینامیکی، از شدت این مقادیر کاسته شده و با تکمیل لایه مرزی و رسیدن به ناحیه توسعه یافته هیدرودینامیکی، این کمیت‌ها به مقادیر ثابتی رسیده و تا انتهای کانال نسبتاً بدون تغییر باقی می‌ماند.

لازم به ذکر است که در کل مدل سازی های انجام شده در این تحقیق، افزایش پارامترهای مادی و ثابت های زمانی در معادلات متشکله مذکور، باعث افزایش خواص الاستیک و در پی افزایش اختلاف تنش های نرمال و همچنین افزایش شدت جریان های ثانویه می شود که انتظار می رود در این صورت با افزایش تحركات عرضی، قابلیت انتقال حرارت و عدد ناسلت جریان نیز افزایش پیدا کند. ولی به علت اینکه سهم کار ترم های جابجایی سرعت های عرضی u و v در مقایسه با بقیه ترم ها از جمله کار ترم جابجایی سرعت محوری و همچنین کار نیروی ویسکوز در معادله انرژی نسبتاً اندک و کمتر از 0.1 درصد مقادیر متوسط آنها می باشد، از این رو افزایش خواص الاستیک سیال در حد تغییرات داده شده در این تحقیق که باعث افزایش چند صد برابری شدت جریان های ثانویه در کانال می شود، تاثیر افزایشی چشمگیری در معادله انرژی، میدان دما و همچنین قابلیت انتقال حرارت جریان سیال نخواهد داشت.

۵-۲-۲- بررسی الگو و جهت چرخش جریان های ثانویه

یکی از نکات مهم در نتایج بدست آمده از این تحقیق، عدم تشکیل جریان های ثانویه در مقاطع اولیه کانال و تا رسیدن جریان به ناحیه توسعه یافتگی هیدرودینامیکی به رغم شدت بالای جریان های عرضی در این ناحیه می باشد. علت اصلی این مطلب گرادیان شدید تمامی کمیت ها در ناحیه در حال توسعه و همچنین رشد لایه مرزی و تغییرات مداوم پروفیل سرعت محوری و همچنین الگوی سرعت-های عرضی در مقاطع عرضی کانال می باشد. البته همانطور که در توضیحات مربوط به این قسمت بیان شد، در دو مقطع از ناحیه در حال توسعه جریان، هسته هایی از جریان های ثانویه شروع به شکل گیری می نماید ولی به علت تغییرات دائم مولفه های جریان، هسته جریان های ثانویه تشکیل شده توسط جریان اصلی از بین رفته و هیچ جریان ثانویه ای شکل نمی گیرد تا در نهایت با رسیدن به محدوده توسعه یافتگی جریان، جریان های ثانویه شروع به شکل گیری کرده و پس از تشکیل کامل آنها تا انتهای کانال بدون تغییر باقی می ماند.

در جریان توسعه یافته سیال ویسکوالاستیک در هر یک چهارم کانال دو جریان ثانویه شکل می‌گیرد که البته قدرت و الگوی تشکیل این جریان‌های ثانویه وابستگی زیادی به پارامترهای مادی سیال و همچنین نسبت ابعاد سطح مقطع کانال دارد. در کانال‌هایی با سطح مقطع مربع، در هر یک-چهارم کانال دو جریان ثانویه کاملاً متقارن و یک شکل ایجاد می‌شود که جهت چرخش آنها با یکدیگر متفاوت می‌باشد. با افزایش نسبت ابعاد سطح مقطع کانال، گردابه‌ها از حالت تقارن خارج شده و گردابه نزدیک به ضلع بزرگتر، به سمت ضلع کوچکتر گسترش یافته و باعث تضعیف گردابه کوچکتر و در نهایت حذف آن می‌شود به نحوی که در کانال‌هایی با نسبت ابعاد بیشتر، تنها یک گردابه در هر یک‌چهارم سطح مقطع کانال قابل رویت می‌باشد.

جهت چرخش این جریان‌های ثانویه نیز یکی دیگر از نکات مورد بررسی در این تحقیق می‌باشد. طبق بررسی‌های انجام شده در این تحقیق و نیز همانطور که در مراجع دیگر بیان شده است، جهت چرخش این جریان‌های ثانویه وابسته به جهت تغییرات نسبت ضریب اختلاف تنش نرمال دوم به ویسکوزیته، نسبت به نرخ برش تعمیم‌یافته سیال می‌باشد. که در صورت مثبت بودن مشتق این عبارت نسبت به نرخ برش تعمیم‌یافته، جهت چرخش جریان‌های ثانویه از دیواره به سمت گوشه کانال و سپس به سمت مرکز کانال می‌باشد و این روند ادامه می‌یابد و در حالت منفی بودن این مشتق، چرخش جریان‌های ثانویه در جهت عکس صورت خواهد پذیرفت. این مطلب در تمامی جریان‌های مکشی و یا دمشی و به ازای تمامی مقادیر نسبت ابعاد سطح مقطع کانال صادق می‌باشد. در حقیقت جهت چرخش جریان‌های ثانویه به عنوان یک مکانیزمی تعادلی در معادله ممنتوم عمل می‌کند که باعث ایجاد تعادل بین ترم‌های مختلف تنش، فشار و جابجایی جریان در معادله ممنتوم خواهد شد.

۵-۳- نتایج انتقال حرارت

همانطور که بیان شد، در این تحقیق معادله انرژی با دو شرط مرزی دمای دیواره ثابت (T) و نیز اعمال شار حرارتی محیطی ثابت به دیواره‌ها (H_2) به ازای اعداد برینکمن بزرگتر از صفر

(گرمایش سیال) و همچنین کوچکتر از صفر (سرمايش سيال)، مورد تحليل قرار گرفته است. همچنين در ابتدای تحليل برخی از خواص سيال نیز به صورتی از تابع نقطه‌ای سيال در نظر گرفته شده‌اند.

۵-۳-۱- حالت اعمال شرط مرزی دمای دیواره ثابت

در این حالت سيال ویسکوالاستیک با دمای ثابتی وارد کانال شده و پس از تماس با دیواره‌ها که دمای آنها بیشتر (حالت گرمایش) و یا کمتر (حالت سرمايش) از دمای ورودی سيال می‌باشد، دمای سيال رفته رفته تغییر کرده و به دمای دیواره‌ها نزدیک می‌شود. البته در حالت گرمایش سيال و به ازای برخی از اعداد برینکمن بزرگتر که فعالیت ترم تنش حائز اهمیت می‌باشد، علی‌رغم اینکه دمای ورودی سيال پایین‌تر از دمای دیواره‌ها بوده و در ابتدای کانال حرارت از دیواره‌ها به سيال منتقل می‌شود، در مقاطع میانی کانال به علت فعالیت ترم تنش به عنوان یک منبع حرارتی، دمای میانگین سيال از دمای دیواره‌ها نیز بالاتر رفته و این مطلب باعث تغییر در الگوی پروفیل سيال و همچنین علامت آن می‌شود. در این حالت در مقطعی از کانال که دمای میانگین سيال به دمای دیواره‌ها نزدیک شده، در نمودار عدد ناسلت متوسط جریان یک پرش رخ خواهد داد که از آن مقطع به بعد، جهت انتقال حرارت در کانال معکوس شده و عدد ناسلت متوسط محیطی سيال نیز منفی خواهد شد. در اعداد برینکمن بزرگتر، این روند از همان مقاطع ابتدای کانال آغاز شده و در تمامی مقاطع کانال دمای سيال بیشتر از دمای دیواره‌ها بوده و در این حالت دمای بی‌بعد سيال منفی شده و انتقال حرارت معکوس رخ خواهد داد.

در حالت سرمايش سيال نیز از همان ابتدای کانال دمای سيال بیشتر از دمای دیواره‌ها بوده و به ازای تمامی اعداد برینکمن، توزیع دمای بی‌بعد سيال مثبت بوده و انتقال حرارت از سمت سيال به دیواره‌ها می‌باشد. با افزایش عدد برینکمن، مقدار حرارت تولید شده توسط کار میدان تنش از میزان حرارت منتقل شده به دیواره‌ها بیشتر شده و سيال در مقطعی از کانال در حالت گرمایش قرار می‌گیرد و از آن مقطع به بعد، دمای سيال افزایش می‌یابد که در اعداد برینکمن بزرگتر از یک، این حالت

از همان دهانه ورودی کانال رخ خواهد داد. در حالت سرمایش سیال، عدد ناسلت متوسط سیال از مقادیر بالایی در ابتدای کانال شروع شده و با پیشروی در راستای کانال و شکل‌گیری لایه مرزی سیال کاهش می‌یابد که با رسیدن به ناحیه توسعه یافته، به مقداری ثابت رسیده و تا انتهای کانال بدون تغییر باقی می‌ماند. البته عدد ناسلت متوسط محیطی، قبل از رسیدن به حالت یکنواخت مقداری افزایش داشته که علت آن تقابل دو لایه مرزی و در پی آن افزایش فعالیت ترم مربوط به کار میدان تنش می‌باشد که با افزایش عدد برینکمن این افزایش در عدد ناسلت در فواصل نزدیکتری نسبت به ابتدای کانال رخ می‌دهد.

در جریان سیال ویسکوالاستیک در کانا‌های مستطیلی با شرایط مرزی یکسان، نحوه و الگوی تغییرات عدد ناسلت مشابه یکدیگر می‌باشد ولی همانطور که در بررسی‌های انجام شده در این تحقیق در حالت اعمال شرط مرزی T و حالت سرمایش کانال نیز قابل رویت است، با افزایش نسبت ابعاد سطح مقطع، عدد ناسلت محیطی به طور کلی افزایش می‌یابد که این مطلب نیز مشابه جریان سیال نیوتنی می‌باشد.

در حالت اعمال شرط مرزی T و در حالیکه دو دیواره کانال نیز عایق فرض شود، در حالت گرمایش سیال همانند حالت قبل، به علت فعالیت ترم تنش به عنوان یک منبع حرارتی، پروفیل دما و همچنین جهت انتقال حرارت در راستای کانال رفته رفته از مقادیر مثبت به مقادیر منفی تغییر خواهد کرد که با افزایش عدد برینکمن، میزان تولید حرارت نیز بیشتر شده و تغییر علامت دمای بی-بعد سیال و همچنین تغییر جهت انتقال حرارت در فواصل ابتدایی کانال رخ خواهد داد. الگوی تغییرات عدد ناسلت نیز در این حالت مشابه حالت قبل بوده با این تفاوت که عایق بودن دو دیواره باعث کاهش عدد ناسلت متوسط محیطی در راستای کانال می‌شود.

۵-۳-۲- حالت اعمال شرط مرزی شار ثابت

در حالت اعمال شرط مرزی H_2 و گرمایش سیال، پروفیل دما از حالت یکنواخت در دهانه ورودی کانال آغاز شده و با پیشروی در راستای کانال و دریافت حرارت از دیواره‌ها و همچنین فعالیت هم‌زمان ترم تنش، دمای سیال افزایش یافته تا جاییکه پروفیل دما به حالت توسعه یافته خود رسیده و بعد از آن با حفظ الگوی پروفیل دما، فقط شدت آن افزایش می‌یابد. در این حالت عدد ناسلت بدون هیچ پرشی در راستای کانال، از یک مقدار نسبتاً زیاد در ابتدای کانال شروع شده و با پیشروی در راستای کانال و تشکیل لایه مرزی حرارتی و هیدرودینامیکی از مقدار آن کاسته شده تا به مقدار ثابتی رسیده و تا انتهای کانال بدون تغییر باقی می‌ماند. با افزایش عدد برینکمن، دمای میانگین سیال در مقاطع کانال افزایش می‌یابد و از طرف دیگر به دلیل تمرکز بیشتر اثرات کار میدان تنش در اطراف دیواره‌ها، دمای دیواره‌ها افزایش بیشتری داشته و بدین‌صورت اختلاف بین دمای میانگین سیال و دمای دیواره‌ها بیشتر شده که این مطلب باعث کاهش عدد ناسلت متوسط می‌شود.

در حالت سرمایه‌گذاری سیال و در اعداد برینکمن کوچک، فعالیت ترم تنش در مقایسه با میزان حرارت منتقل شده از سیال به دیواره‌ها ناچیز بوده و با پیشروی در راستای کانال، دمای سیال رفته رفته کاهش یافته و پروفیل سیال به حالت دائم خود می‌رسد. ولی در اعداد برینکمن بزرگتر، مقدار حرارت تولید شده به ازای فعالیت ترم تنش از میزان حرارت منتقل شده به دیواره‌ها بیشتر بوده و دمای متوسط سیال با پیشروی در راستای کانال افزایش می‌یابد. در این حالت با افزایش عدد برینکمن دمای سیال اطراف دیواره‌ها و به تبع آن دمای دیواره‌ها، افزایش بیشتری نسبت به دمای میانگین سیال داشته و از این‌رو اختلاف بین دمای میانگین سیال و دمای دیواره‌ها کاهش یافته که این مطلب باعث افزایش عدد ناسلت می‌شود. با افزایش مجدد عدد برینکمن، اختلاف بین دمای دیواره‌ها و دمای متوسط سیال به سمت صفر میل کرده و در نهایت دمای دیواره‌ها از دمای متوسط سیال بیشتر می‌شود که این مطلب باعث ایجاد یک پرش در نمودار عدد ناسلت و همچنین تغییر نمودار عدد ناسلت از مقادیر مثبت به مقادیر منفی خواهد شد. در اعداد برینکمن بزرگتر، این پرش به

سمت دهانه ورودی کانال میل کرده و از همان ابتدای کانال شاهد مقادیر منفی برای عدد ناسلت متوسط جریان خواهیم بود.

۵-۳-۳- بررسی اثرات جابجایی آزاد همزمان با جابجایی اجباری (جابجایی مرکب)

در اکثر مراحل و موارد مورد بررسی در تحقیق حاضر، معادله ممنتوم بدون اثر نیروی شناوری و یا به عبارت دیگر در نبود اثرات جابجایی آزاد مورد استفاده قرار گرفته است. ولی به منظور بررسی اثرات جابجایی آزاد به همراه جابجایی اجباری در تحقیق حاضر، چگالی سیال به وسیله تقریب بوزینسک به صورت تابعی از دمای نقطه‌ای سیال در نظر گرفته شده است.

در حالت جابجایی ترکیبی، با افزایش عدد گراشف که تاثیر مستقیم آن در معادله ممنتوم وارد خواهد شد، شدت جریان‌های ثانویه افزایش یافته و این افزایش تا حدی است که جریان‌های عرضی اولیه را که حاصل از ویسکوالاستیک بودن جریان است کاملاً تحت تاثیر قرار می‌دهد به نحویکه در اعداد گراشف بالا، چهار جریان گردابی موجود در یک دوم مقطع کانال، به یک جریان گردابی بزرگتر تبدیل شده و همچنین شدت جریان‌های عرضی به حدود پنج درصد جریان اصلی می‌رسد. البته همانطور که پیشتر بیان شد، به علت اثرپذیری نه چندان زیاد میدان دما از تغییرات عدد گراشف، این تغییرات تاثیر زیادی بر عدد ناسلت نیز نخواهد داشت. از طرف دیگر علی‌رغم اینکه افزایش عدد گراشف باعث افزایش شدت جریان‌های ثانویه می‌شود، ولی چون خود ترم جابجایی حاصل از جریان-های عرضی سهم زیادی در معادله انرژی نخواهد داشت، بنابراین افزایش عدد گراشف نیز تاثیر زیادی بر عدد ناسلت نمی‌گذارد.

۵-۳-۴- محاسبه خواص سیال در دمای مرجع

یکی دیگر از موارد مورد تحلیل در این تحقیق، وابستگی خواص سیال به دما و نحوه و میزان تاثیر این وابستگی بر جریان سیال و خواص دیگر می‌باشد. در تمامی تحلیل‌های انجام شده در این تحقیق، خواصی از قبیل ویسکوزیته، ظرفیت حرارتی ویژه، ثابت زمانی و همچنین ضریب رسانش

تابعی از دما در نظر گرفته شده است و در قسمت پایانی، دمایی به عنوان دمای میانگین و مرجع پیشنهاد شده است که با محاسبه خواص در این دما و ثابت فرض نمودن آنها بتوان اولاً هزینه محاسبات را کاهش داد و از طرف دیگر مقدار خطای ایجاد شده حاصل از این تقریب در حد ناچیز و قابل صرف نظر کردن باشد.

در حالت اعمال شرط مرزی T ، با فرض دمای مرجع به صورت میانگین دمای دو دیواره و دمای ورودی سیال، و محاسبه خواص سیال در این دما، بیشینه خطای ایجاد شده از این تقریب به ترتیب مقدار ۱۸,۷۸ درصد برای ویسکوزیته، ۰,۹۹ درصد برای ظرفیت حرارتی ویژه، ۱۸,۷۸ درصد برای ثابت زمانی λ و همچنین مقدار ۱,۴۶ درصد برای ضریب رسانش بوده که البته لازم به ذکر است که این مقدار تفاوت در مقادیر مربوطه، تاثیر زیادی در نتایج میدان جریان و دما نخواهد گذاشت. بدین صورت که با مدل سازی مجدد و با فرض دمای مرجع، تطابق رضایت بخشی در نتایج بدست آمده از این حالت و همچنین فرض تابع دمایی برای خواص مشاهده می شود و حداکثر میزان تفاوت در مقادیر سرعت محوری، شدت جریان های ثانویه و عدد ناسلت بدست آمده از دو تحلیل، به ترتیب ۰,۱۵، ۰,۴ و ۰,۲۹ درصد می باشد که این مقدار خطا در مدل سازی های عددی و همچنین با در نظر گرفتن کاهش هزینه محاسبات و سادگی حل، قابل صرف نظر کردن می باشد.

در حالت اعمال شرط مرزی H_2 با توجه به اینکه در سرتاسر کانال دمای سیال در حال تغییر بوده و از طرف دیگر فعالیت ترم تنش نیز این تغییرات را افزایش می دهد، تعریف دمایی به عنوان دمای مرجع با خطا و تقریب بیشتری همراه خواهد بود. در این صورت با اعمال موازنه انرژی برای کل کانال و صرف نظر کردن از تلفات ویسکوز، دمای خروجی کانال به عنوان دمای مرجع مورد نظر قرار گرفته است که با محاسبه خواص در این دما و تحلیل مجدد مساله، بیشترین مقدار تفاوت در مقادیر سرعت محوری، شدت جریان های ثانویه و عدد ناسلت جریان به ترتیب ۰,۲۳، ۴,۳۵ و ۶,۱۹ درصد می باشد که در مقایسه با حالت قبلی خطای بیشتری در این ساده سازی مشاهده می شود. البته با کمتر

کردن ساده‌سازی و فرض دمای مرجع در هر مقطع کانال و محاسبه خواص سیال به صورت موضعی در آن مقطع، مقدار خطای ایجاد شده در نتایج در مقایسه با خطای فوق، تا حد زیادی کاهش می‌یابد.

۴-۵- پیشنهادات

در پایان این تحقیق می‌توان موارد و مسائل ذیل را به عنوان موضوعاتی پیشنهادی و همچنین نو در ادامه تحقیق در زمینه جریان و انتقال حرارت سیالات ویسکوالاستیک که با موضوع تحقیق حاضر نیز مرتبط باشد، برای ادامه تحقیقات مولف در آینده و یا به عنوان موضوعاتی پیشنهادی برای علاقمندان به فعالیت در این زمینه مطرح نمود.

✓ یکی از موضوعاتی را که می‌توان به عنوان تحقیق تکمیلی در کنار این تحقیق نیز بیان کرد، بررسی تجربی جریان و انتقال حرارت سیال در کانال‌های مستطیلی می‌باشد که بنا به خواص فیزیکی متفاوت سیالات ویسکوالاستیک، مستلزم امکانات و وسایل آزمایشگاهی خاصی برای این تحقیق می‌باشد.

✓ موضوع پیشنهادی دیگر، حل سه بعدی جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در کانال‌های مستطیلی خمیده و با استفاده از دستگاه مختصات قطبی می‌باشد که در این حالت اثرات انحنای کانال و همچنین جریان‌های گردابی حاصل از آن نیز به جریان‌های ثانویه موجود در جریان سیال ویسکوالاستیک افزوده می‌شود. .

✓ یکی از مسائل مهم در زمینه جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک، بررسی اثر گذاری افزایش خواص الاستیک بر قابلیت انتقال حرارت سیال و عدد ناسلت جریان می‌باشد. همانطور که گفته شد در این تحقیق بنا به دلایل بیان شده و واگرایی کد کامپیوتری، امکان ایجاد تغییرات زیاد در کمیت‌های الاستیک و افزایش قابل ملاحظه عدد ناسلت نمی‌باشد. ولی پیشنهاد مولف برای میل به این هدف، استفاده از روش‌های عددی پایدارتر در تهیه کد کامپیوتری و یا استفاده از نرم افزارهای شبیه‌ساز جریان سیال به عنوان مثال نرم‌افزار

کامسول^۱ و یا فلونت^۲ در حل این جریان سیال به ازای مقادیر بالای کمیت‌های الاستیک و استفاده از جواب‌های بدست آمده به عنوان شروط اولیه حل در کد کامپیوتری تهیه شده برای میل به جواب همگرای نهایی می‌باشد.

✓ به عنوان موضوعی دیگر، حل سه بعدی جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در اشکال دیگر سطح مقطع کانال و با استفاده از معادلات متشکله انتگرالی و یا دیفرانسیلی می‌تواند مدنظر قرار گیرد.

✓ بررسی جریان غیر دائم و انتقال حرارت سه بعدی سیال ویسکوالاستیک در حالت‌های آرام و یا آشفته جریان نیز یکی از پیشنهادهای مولف برای انجام تحقیقات آتی در این زمینه می‌باشد.

^۱ - Comsol

^۲ - Fluent

1. Bird, R.B., Curtiss, C.F., Armstrong, R.C and Hassager, O. (1987), "Dynamics of polymeric liquids", Volume I, JOHN WILEY & SONS, New York.
 2. Malkin, A. Y. (1994), "Rheology Fundamentals", First Edition, Chem. Tech. Publishing, Toronto.
 3. Graessley, W. W. (1974), "Advance in Polymer Science-The Entanglement Concept in Polymer Rheology", Vol. 16, First Edition, Springer, Berlin.
 4. Phan-Thien, N. (2002), "Understanding Viscoelasticity", First Edition, Springer, Berlin.
 5. Huilgol, R. R. and Phan-Thien, N. (1997), "Fluid Mechanic of Viscoelasticity", First Edition, Elsevier.
 6. Tanner, R. I. (2000), "Engineering Rheology", Second Edition, Oxford University Press, London.
۷. لی، م، رابین، د و کرمپل، ا، مترجم، شعریاف، غ. ر، (۱۳۷۸) "مقدمه‌ای بر مکانیک محیط‌های پیوسته"، انتشارات دانشگاه تربیت مدرس، تهران.
8. Macosko, C.W, (1994), "Rheology principles and measurements and applications", VCH publishers.
 9. Larson, R. G. (1988), "Constitutive Equations for Polymer Melts and Solutions", Butterworths, Boston.
 10. Oldroyd, J. G. (1950), "On the formulation of rheological equations of state", Proc. Roy.Soc., London Ser. A 200, pp. 523-541.
 11. Oldroyd, J. G. (1958), "Non-Newtonian effects in steady motion of some idealized elasticoviscous fluids", Proc. Roy.Soc., London Ser A 245, pp. 278-297.
 12. Giesekus, H. (1982), "A simple constitutive equation for polymer fluids based on the concept of deformation-dependent tensorial mobility", J. Non-Newton. Fluid, 11, pp. 69-109.
 13. Phan-Thien, N and Tanner, R. I. (1977), "A new constitutive equation derived from network theory", J. Non-Newton. Fluid, 2, pp. 353-365.
 14. Wedgewood, L. E, Bird, R. B. (1988), "From molecular models to the solution of flow problems", Ind. Eng. Chem. Res., 27, pp. 1313-1320.
 15. Armstrong, R. C. and Ishikawa, S. (1980), "A rheological equation of state for dilute solutions of nearly Hookeand umbbells", J. Rheol., 24, pp. 143-165.
 16. McLeish, T. C. B. and R. G. Larson, (1998), "Molecular constitutive equations for a class of branched polymers: The pom-pom polymer," J. Rheol. 42, pp. 81-110.
 17. Verbeeten, W.M.H., Peters, G.W.M., Baaijens, F.P.T., (2001), "Differential constitutive equations for polymer melts: the eXtended Pom-Pom model", J. Rheol. 45, pp. 823-844.

18. Schieber, J. D, Curtiss, C. F, and Bird, R. B. (1986), "Kinetic theory of polymer melts. 7. Polydispersity effects", *Ind. Eng. Chem. Fundam.*, 24, pp, 471-475.
19. Schieber, J. D. (1987), "Kinetic theory of polymer melts. VIII. Rheological properties of polydisperse mixtures", *J. ChemP. hys.*, 87, pp. 4917-4927.
۲۰. شیخی نارانی م، (۱۳۷۱)، "بررسی خواص جریان، انتقال حرارت و اختلاط سیالات غیر نیوتنی"، چاپ اول، جهاد دانشگاهی صنعتی امیر کبیر، تهران.
21. Shaw, M. T. and Macknight, W. J. (2005), "Introduction to Polymer Viscoelasticity", Third Edition, John Wiley & Sons.
22. Green, A. E. and Rivlin, R. S. (1956), "Steady flow of non-Newtonian fluids through tubes", *Q. Appl. Math.*, 14, pp. 299-308.
23. Eriksen, J.L. (1956), "Over determination of the speed in rectilinear motion of Non-Newtonian fluids", *Quart. Appl. Math. Vol. 14*, pp. 318-321.
24. Wheeler, J.A. and Wissler, E.H. (1965), "The friction factor-Reynolds number relation for the steady flow of pseudo plastic fluids through rectangular ducts", Part I, Vol. 11, pp. 207-212.
25. Wheeler, J.A. and Wissler, E.H., (1966), "Steady flow of Non-Newtonian fluids in a square duct" *Trans. Soc. Rheol. Vol. 10*, pp. 353-367.
26. Giesekus, H., (1965), "Sekundärströmungen in viskoelastischen Flüssigkeiten bei stationärer und periodischer Bewegung", *Rheol. Acta 4*, pp. 85-101.
27. Dodson, A. G., Townsend and, P. and, Walters, K. (1974), "Non-Newtonian flow in pipes of non-circular cross section", *Computer and Fluids*, 2, pp. 317-338.
28. Townsend, P., Waltersand, K. and, Waterhouse, W. M. (1976), "Secondary flows in pipes of square cross-section and the measurement of the second normal stress difference", *J. Non-Newton. Fluid*, 1, pp. 107-123.
29. Phan Thin, N. and Tanner, R.I.,(1977), "A new constitutive equation driven from network theory", *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2, pp. 353-365.
30. Cochrane, T., Walters, K., Webster, M.F. (1981), "On Newtonian and non-Newtonian flow in complex geometries", *Phil. Trans. Soc. Lond., A 301*, pp. 161-181.
31. Hartnett, J.P. and Kostic, M., (1985), "Heat transfer to a viscoelastic fluid in laminar flow through a rectangular channel", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 28, pp. 1147-1155.
32. Rao, B. K. (1989), "Laminar mixed convection heat transfer to viscoelastic fluids in a 5:1 rectangular channel" *Int. J. Heat and Fluid Flow.*, 10, 4, pp. 334-338.
33. Gaydos, R.E. and Darby, R. (1988), "Numerical simulation and change in type in the developing flow of a nonlinear viscoelastic fluid", *J. of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 29, pp. 59-79.

34. Nikoleris, T. and Darby, R., (1989), "Numerical simulation of the non-isothermal flow of a nonlinear viscoelastic fluid in a rectangular channel", *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics* 31, pp. 193-207.
35. Gervang, B. and Larsen, P. S. (1991), "Secondary flow in straight duct of rectangular cross section", *J. Non-Newton. Fluid*, 39, pp. 217-237.
36. Mori, N., Kaige, T., Nakamura, K. (1993), "Velocity measurement in the startup flow of viscoelastic fluids through contraction with rectangular cross-section", *Nihon Reoroji Gakkaishi (in Japanese)* 2, pp. 33-40.
37. Yamamoto, T., Morimoto, M., Nakamura, K. (1999), "Velocity measurement of startup flow of polymeric solutions in a planar contraction channel, *Rheol. Acta* 38, pp. 384-391.
38. Chiba, K., Sakatani, T., Nakamura, K. (1990), "Anomalous flow patterns in viscoelastic entry flow through a planar contraction" , *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 36, pp. 193-203.
39. Chiba, K., Tanaka, S., Nakamura, K. (1992), "The structure of anomalous entry flow patterns through a planar contraction", *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 42, pp. 315-322.
40. Chiba, K., Ishida, R., Nakamura, K., (1995), "Mechanism for entry flow instability through a forward-facing step channel", *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 57, pp. 271-282.
41. McKinley, G.H., Raiford, W.P., Brown, R.A., Armstrong, R.C. (1991), "Nonlinear dynamics of viscoelastic flow in axisymmetric abrupt contractions", *J. Fluid Mech.* 223, pp. 411-456.
42. Kim, J.-H., Öztekin, A., Neti, S. (2000), "Instabilities in viscoelastic flow past a square cavity", *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 90, pp. 261-281.
43. Xue, S. C., Phan-Thien, N. and, Tanner, R. I. (1995), "Numerical study of secondary flows of viscoelastic fluid in straight pipes by an implicit finite volume method", *J. Non-Newton. Fluid*, 53, pp. 191-213.
44. Naccache, M.F. and Souza Mendes, P.R. (1996), "Heat transfer to non-Newtonian fluids in laminar flow through rectangular ducts", *Int. J. Heat Fluid Flow.* Vol. 17, pp. 613-620.
45. Naccache, M.F., Souza Mendes, P.R. (1997), "Mixed convection in the laminar flow of viscoelastic liquids through rectangular ducts", *J. Thermo physics Heat Trans*, Vol. 11, pp. 98-104.
46. Debbaut, B., Avalosse T., Dooley, J. and Hughes, K. (1997), "On the development of secondary motions in straight channels induced by the second normal stress difference: experiments and simulations" *J. of Non-Newtonian Fluid Mech.*, 69, pp. 255-271.
47. Debbaut, B., Dooley, J. (1999), "Secondary motions in straight and tapered channels: Experiments and three dimensional finite element simulation with a multimode differential viscoelastic model," *J. Rheol.* 43, pp. 1525-1545.

۴۸. طالبی ف. (۱۳۷۵)، پایان نامه دکتری، "بررسی جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در مجاری مستطیلی"، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان.
49. Toh, K.H. and Ghajar, A.J. (1988), "Heat transfer in the thermal entrance region for viscoelastic fluids in turbulent pipe flows" *Int. J. Heat Mass Transfer.* , 31, 6, pp. 1261-1267.
 50. Payvar, .P (1997), "Heat transfer enhancement in laminar flow of viscoelastic fluids through rectangular ducts" *Int. Z Heat Mass Transfer.*,40, 3, pp. 74-756.
 51. Kihara, S., Gouda, T., Matsunaga, K. and Funatsu, K. (1999), "Numerical Simulation of Three-Dimensional Viscoelastic Flow Within Dies" *J. of POLYMER ENGINEERING AND SCIENCE.* 39, 1, pp. 152-163.
 52. Xue, S.-C., Tanner R.I. and Phan-Thien N. (1999), "Three-dimensional numerical simulations of viscoelastic flows- predictability and accuracy", *J. of Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* , 180, pp. 305-331.
 53. Sharif, F. (1999), "Three-dimensional finite element analysis of viscoelastic flow", PhD thesis, McMaster University.
 54. Pinho, F.T. and Oliveira, P.J. (2000), "Analysis of forced convection in pipes and channels with the simplified phan-thin tanner fluid", *Int. J. Heat Mass Transfer* 43, pp. 2273-2287.
 55. Sohn, C.H., Ahn, S.T. and Shin, S. (2000), "Heat transfer behavior of temperature-dependent viscoelastic Non-Newtonian fluid with buoyancy effect in 2:1 rectangular duct", *J. of Heat Mass Transfer.* 27, 2, pp. 159-168.
 56. Siline, M., and Leonov, A. I. (2000), "On flows of viscoelastic liquids in long channels and dies," *Int. J. Eng. Sci.* 39, pp. 415-437.
 57. Alves, M.A., Pinho, F.T. and Oliveira, P.J. (2001), "Study of steady pipe and channel flows of a single-mode Phan-Thien-Tanner fluid", *J. of Non-Newtonian Fluid Mech.* ,101, pp. 55-76.
 58. Akyildiz, F.T. (2002), "Dispersion of a solute in a Poiseuille flow of a viscoelastic fluid", *International Journal of Engineering Science* 40, pp. 859-872.
 59. Thangam, S. and Speziale, C. G. (1987), "Non-Newtonian Secondary Flows in Ducts of Rectangular Cross-Section", *J. of Acta Meehanica*, 68, pp 121-138.
 60. Gerrit, Peters G.W.M., Baaijens, F.P.T. (1997), "Modelling of non-isothermal viscoelastic flows", *J. of Non-Newtonian Fluid Mech*, 68, pp. 205-224.
 61. Esselaoui, D., Ramadane, A. and Zine, A.M. (2000), "Decoupled approach for the problem of viscoelastic fluid flow of PTT model I: continuous stresses" *J. of Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 190, pp. 543-560.
 62. Sunwoo, K.B. , Park, S.J., Lee, S.J. , Ahn, K.H. and Lee, S.J. (2001), "Numerical

- simulation of three-dimensional viscoelastic flow using the open boundary condition method in coextrusion process”, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 99, pp. 125–144.
63. Tomé, M.F., Mangiavacchi, N., Cuminato, J.A., Castelo, A. and McKee, S. (2002), “A finite difference technique for simulating unsteady viscoelastic free surface flows”, *J. of Non-Newtonian Fluid Mech.* 106 , pp. 61-106.
 64. Bohlen, T. (2002), “Parallel 3-D viscoelastic finite difference seismic modelling”, *J. of Computers & Geosciences.*, 28 , pp. 887-899.
 65. Dooley, J. (2002), “Viscoelastic Flow Effects in Multilayer Polymer Coextrusion”, PhD Thesis, Technische Universiteit Eindhoven.
 66. Coelho, P.M., Pinho, F.T. and Oliveira, P.J. (2002), “Fully developed forced convection of the Phan-Thien–Tanner fluid in ducts with a constant wall temperature”, *J. of Heat and Mass Transfer.*, 45, pp. 1413-1423.
 67. Coelho, P.M., Pinho, F.T. and Oliveira, P.J. (2003), “Thermal entry flow for a viscoelastic fluid: The Graetz problem for the PTT model”, *J. Heat and Mass Transfer* 46, pp. 3865–3880.
 68. Letelier, M. F. and Siginer, D.A. (2003), “Secondary flows of viscoelastic liquids in straight tubes”, *International Journal of Solids and Structures*, 40, pp. 5081-5095.
 69. Yamamoto, T., Ishiyama, M., Nakajima, M., Nakamura, K. and Mori, N. (2003), “Three-dimensional viscoelastic flows through a rectangular channel with a cavity”, *J. of Non-Newtonian Fluid Mech.* 114, pp. 13-31.
 70. Cruz, D.O.A. and Pinho, F.T. (2003), “Turbulent pipe flow predictions with a low Reynolds number $k-\epsilon$ model for drag reducing fluids”, *J. of Non-Newtonian Fluid Mech.*, 114 , pp. 109-148.
 71. Cruz, D.O.A. and Pinho, F.T., Oliveira, P.J. (2005), "Analytical solutions for fully developed laminar flow of some viscoelastic liquids with a Newtonian solvent contribution”, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 132, pp. 28–35.
 72. Alves, M.A. , Oliveira, P.J. and Pinho, F.T. (2003), “Numerical simulation of viscoelastic contraction flows”, *Second MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics*, pp. 826-829.
 73. Oliveira, P.J, Coelh, P.M., Pinho, F.T. (2004), "The Graetz problem with viscous dissipation for FENE-P fluids", *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 121, 69–72.
 74. Nóbrega, J.M., Pinho, F.T., Oliveira, P.J. and Carneiro, O.S. (2004), “Accounting for temperature-dependent properties in viscoelastic duct flows”, *J. Heat Mass Trans.* Vol. 47, pp. 1141-1158.
 75. Mostafaiyan, M., Khodabandehlou, K, Sharif, F. (2004), “Analysis of a viscoelastic fluid in an annulus using Giesekus model”, *J. of Non-Newtonian Fluid Mech.*, 118, pp. 49-55.
 76. Hashemabadi, S.H. and Etemad, S.Gh. (2006), “Effect of rounded corners on the secondary flow of viscoelastic fluids through non-circular ducts”, *J. of Heat and Mass*

- Transfer.,49 , pp. 1986-1990.
77. Resende, P.R., Escudier, M.P., Presti, F., Pinho, F.T. and Cruz D.O.A. (2006), "Numerical predictions and measurements of Reynolds normal stresses in turbulent pipe flow of polymers", *J. of Heat and Fluid Flow* ,27 , pp. 204-219.
 78. Afonso A., Pinho, F.T. (2006), "Numerical investigation of the velocity overshoots in the flow of viscoelastic fluids inside a smooth contraction", *J. of Non-Newtonian Fluid Mech.*, 139, pp. 1-20.
 79. Pinho, F.T. and Coelho, P.M. (2006), "Fully-developed heat transfer in annuli for viscoelastic fluids with viscous dissipation", *J. of Non-Newtonian Fluid Mech.*, 138 , pp. 7-21.
 80. Sirakov, I., Ainsler, A., Haouche, M. and Guillet, J. (2005), "Three-dimensional numerical simulation of viscoelastic contraction flows using the Pom–Pom differential constitutive model", *J. of Non-Newtonian Fluid Mech.*, 126, pp. 1633-173.
 81. Lee, P.S. and Garimella, S V. (2006), "Thermally developing flow and heat transfer in rectangular microchannels of different aspect ratios" *Intl J. Heat and Mass Transfer.*, 49, pp. 3060–3067.
 82. Cortell, R. (2006), "Effects of viscous dissipation and work done by deformation on the MHD flow and heat transfer of a viscoelastic fluid over a stretching sheet" *J. of Physics Letters A.*, 357, pp. 298-305.
 83. Aguayo, J.P., Phillips P.M., Phillips T.N., Tamaddon-Jahromi H.R., Snigerev B.A. and Webster M.F. (2007), "The numerical prediction of planar viscoelastic contraction flows using the pom–pom model and higher-order finite volume schemes", *J. of Computational Physics.*, 220, pp. 586-611
 84. Poole, R.J., Alves, M.A., Oliveira P.J. and Pinho F.T. (2007), "Plane sudden expansion flows of viscoelastic liquids" *J. of Non-Newtonian Fluid Mech.* ,146 , pp. 79-91.
 85. Hasanpour, K. and Ziaei-Rad, S. (2008) "Finite element simulation of polymer behaviour using a three-dimensional, finite deformation constitutive model" , *J. of Computers and Structures* ., 86 , pp. 1643-1655.
 86. Saramito, P. (2007), "A new constitutive equation for elastoviscoplastic fluid flows" *J. of Non Newtonian Fluid Mech.* ,145, 1, pp. 1-14.
 87. Yue, P., Dooley, J. and Feng J.J. (2008), "A general criterion for viscoelastic secondary flow in pipes of noncircular cross section", *J. Rheol.* 52(1), pp. 315-332.
۸۸. احمدی جنیدی، ا، (۱۳۸۹) پایان نامه کارشناسی ارشد، "بررسی جریان سیال و انتقال حرارت یک سیال ویسکوالاستیک در لوله خمیده " دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود.
89. Oliveira, M.S.N., Pinho, F.T., Poole, R.J., Oliveirad, P.J., Alves, M.A. (2009), "Purely elastic flow asymmetries in flow-focusing devices", *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 160, pp. 31–39.

90. Poole R.J., Pinho F.T., Alves M.A. and Oliveira P.J. (2009), "The effect of expansion ratio for creeping expansion flows of UCM fluids", *J. of Non-Newtonian Fluid Mech.*, 163, pp. 35-44.
91. Boutabaa M. , Helin L. , Mompean G. And Thais L. (2009), "Numerical study of Dean vortices in developing Newtonian and viscoelastic flows through a curved duct of square cross-section" *J. of C. R. Mecanique.*, 337, pp. 40-47.
92. Escudier M.P., Nickson A.K. and Poole R.J. (2009), "Turbulent flow of viscoelastic shear-thinning liquids through a rectangular duct: Quantification of turbulence anisotropy", *J. of Non-Newtonian Fluid Mech.* 160, pp. 2-10.
93. Peres, N., Afonso, A.M., Alves, M.A. and Pinho, F.T. (2009), "Heat transfer enhancement in laminar flow of viscoelastic fluids through a rectangular duct", *Congreso Métodos Numéricos en Ingeniería.*
۹۴. نوروزی، م.، (۱۳۸۹)، پایان نامه دکتری، " بررسی جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در مجاری خمیده دارای مقطع مستطیلی و در حالت های ایستا و چرخان"، دانشکده مهندسی مکانیک، گروه مکانیک سیالات
95. Norouzi, M., Kayhani, M.H., Shu, C. and Nobari, M.R.H. (2010), "Flow of second-order fluid in a curved duct with square cross-section", *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics.* 165, pp. 323-339.
۹۶. نوروزی م کیهانی م.ح.، حیرانی نوبری م.، احمدی جنیدی ا. ف. (۱۳۸۹) " بررسی تحلیلی اثر ثابت های زمانی سیال ویسکوالاستیک بر جریان در لوله های خمیده " مجله مکانیک و هوا فضا (مکانیک سیالات و آیرودینامیک)، جلد ۶، شماره ۱: ص ۴۱-۵۵.
97. Norouzi, M., Kayhani, M.H., Nobari, M.R.H. and Talebi, F. (2011), "Analytical investigation of viscoelastic creeping flow and heat transfer inside a curved rectangular duct", *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*", Vol. 45, pp. 53-67.
98. Norouzi, M., Kayhani, M.H., Nobari, M.R.H. and Talebi, F. (2011), "A numerical investigation of convective heat transfer of viscoelastic fluid in a curved square duct", *J. Computational Methods in Engineering*, Vol. 29, No. 2, pp. 85-101.
99. Norouzi, M., Nobari, M.R.H., Kayhani, M.H. and Talebi, F. (2012), "Instability investigation of creeping viscoelastic flow in a curved duct with rectangular cross-section", *International J. Non-Linear Mechanics*, Volume 47, Issue 1, pp. 14-25.
100. Sousa P.C., Coelho P.M. , Oliveira M.S.N. and Alves M.A. (2010), "Effect of the contraction ratio upon viscoelastic fluid flow in three-dimensional square-square contractions", *Chemical Engineering Science* 66. pp. 998-1009.
101. Sousa P.C., Coelho P.M., Oliveira M.S.N. and Alves M.A. (2011), "Laminar flow in three-dimensional square-square expansions", *J. of Non-Newtonian Fluid Mechanics.*, 166, pp. 1033-1048.

102. Xikui, L., Xianhong, H., Xuanping, W. (2010), "Numerical modelling of viscoelastic flows using equal low-order finite elements", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 199, pp. 570–581.
103. M. Babaelahi · G. Domairry · A.A. Joneidi, (2010), "Viscoelastic MHD flow boundary layer over a stretching surface with viscous and ohmic dissipations", *Meccanica*, 45, pp. 817–827.
104. Yang, D., Qin Zhu, K. (2010), "Start-up flow of a viscoelastic fluid in a pipe with a fractional Maxwell's model", *Computers and Mathematics with Applications* 60, pp. 2231–2238.
105. Sajid, M., Pop, I., Hayat, T. (2010), "Fully developed mixed convection flow of a viscoelastic fluid between permeable parallel vertical plates", *Computers and Mathematics with Applications* 59, pp. 493_498.
106. Park, H.M., Lim J.Y. (2010), "A new numerical algorithm for viscoelastic fluid flows: The grid-by-grid inversion method" *J. of Non-Newtonian Fluid Mech.*, 165, pp. 238-246.
107. Wright, G.B., Guy, R.D., Du, J., Fogelson, A.L. (2011), "A high-resolution finite-difference method for simulating two-fluid, viscoelastic gel dynamics", *J. of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 166, pp. 1137-1157.
108. Mua, Y., Zhao, G., Wu, X., Zhai, J. (2012), "Modeling and simulation of three-dimensional planar contraction flow of viscoelastic fluids with PTT, Giesekus and FENE-P constitutive models", *Applied Mathematics and Computation* 218, pp. 8429-8443.
109. Siginer, D.A., Letelier, M.F. (2012), "Laminar flow of non-linear viscoelastic fluids in straight tubes of arbitrary contour", *International Journal of Heat and Mass Transfer* 55, pp. 2731-2745.
110. Byron Bird, R. and Wiest, J.M. (1995), "Constitutive Equations for Polymeric Liquids", *J. of Annu. Rev. Fluid Mech.*, 27, pp. 169-93.
111. Oldroyd, J.G. (1965), "Some steady flows of the general elastico-viscous liquid", *Proc. R. Soc. London, Ser. A* 283, pp. 115–133.
112. Bird, R.B., Curtiss, C.F., Armstrong, R.C and Hassager, O. (1987), "Dynamics of polymeric liquids", Volume II, JOHN WILEY & SONS, New York.
113. Bird, R. B., Steward, W. E., and Lightfoot, E. N. (1960). "Transport Phenomena", First Edition, John Wiley.
114. Mark, J.E. (1996), "Physical Properties of Polymers Handbook", Institute of Physics, New York.
115. Gao, S.X. and Hartnett J.P. (1996), "Heat transfer behavior of Reiner-Rivlin fluids in rectangular ducts", *J. Heat Mass Trans.* Vol. 39, pp. 1317-1324.
116. Mai Duy, N., and Tanner, R. I. (2005), "Computing non-Newtonian fluid flow with

- radial basis function networks” *Int. J. Numer. Methods Fluids* 48, pp. 1309–1336.
117. Syrjala, S. (1998), “Laminar flow of viscoelastic fluids in rectangular duct with heat transfer: A finite element analysis”, *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, Vol. 25, No. 2, pp. 191-204.
 118. TANOUE S., NAGANAWA T. and IEMOTO Y. (2006), “Quasi-Three-Dimensional Simulation of Viscoelastic Flow through a Straight Channel with Square Cross Section”, *J. Soc. Rheol., Jpn.* 34, pp. 105–113.
 119. Chorin, A. J., (1967), “A numerical method for solving incompressible viscous flow problems”, *J. Comput. Phys.*, 2, pp. 12-26.
 120. Shah, R.K., London, A.L. (1978), “Laminar flow forced convection in ducts”, *Adv. Heat Transfer*, Suppl. I.
 121. Kakac, S., Shah, R.K., Aung, W. (1987), “Handbook of Single-Phase Convective Heat Transfer”.
 122. Wapperom P. and Hulsen M.A. (1998), “Thermodynamics of viscoelastic fluids: The temperature equation”, *J. of Society of Rheology.*, 42(5), pp. 999-1019.

۱۲۳. اسدی، م، (۱۳۸۵)، پایان نامه کارشناسی ارشد، " تحلیل عددی انتقال حرارت توأم (اجباری- طبیعی) سیال ویسکوالاستیک در کانال مستطیلی برای جریان آرام و توسعه یافته "، دانشکده مهندسی مکانیک، گروه مکانیک سیالات.

Abstract

Flow of non-Newtonian fluids in straight non-circular ducts is one of the interesting subjects for researchers since 1950, because they are often required for a wide range of industrial applications. So far, extensive researches with numerical, analytical and experimental methods with viscoelastic fluids in different geometries and using different models have been done. In some of them, just the flow equations have been solved but in others, the energy equation has been considered too. In these researches, which have done with various methods and geometries, heat transfer is in developing state, but in most of them, the flow has been assumed in the fully developed zone. Therefore, the effects of inlet region of fluid flow and heat transfer are neglected.

The current study presents a 3D numerical simulation of the developing flow and heat transfer of a viscoelastic fluid in a rectangular duct. In fully developed flow of a viscoelastic fluid in a non-circular duct, secondary flows normal to the flow direction are expected to enhance the rate of heat and mass transfer. On the other hand, some properties such as viscosity, thermal conductivity, specific heat and relaxation time of the fluid are a function of temperature. Therefore, we developed a numerical model which solves the flow and energy equations simultaneously in three dimensional form. We included several equations of state to model the temperature dependence of the fluid parameters. The current study is one of the first studies which present a 3D numerical simulation for developing viscoelastic duct flow that takes the dependency of flow parameters to the temperature into account. The rheological constitutive equation of the fluid is a common form of the Phan-Thien Tanner (PTT) model, which embodies both influences of elasticity and shear thinning in viscosity.

The governing equations are formulated explicitly by applying the artificial compressibility method and first-order forward finite difference in time and second-order central finite difference (FTCS) are used for discretization in space. The solution domain was latticed by a staggered mesh as primary and secondary grids and the marker-and-cell method is used to allocate flow variables on the staggered mesh. Considering the pressure which is defined on the internal grids and the boundaries which are located on the external grids and also absence of the

second order derivatives of pressure, the discretization can be done in a manner that does not need to define a boundary condition for pressure.

It should be noted that, the original form of the momentum equation was elliptic. With applying the artificial compressibility method, these equations will turn to the parabolic form. In this case, it is necessary to define the initial conditions. Hence, the initial velocity in transverse directions is assumed to be zero and the initial velocity in axial direction and also initial temperature assumed to be one. The initial values for other temperature dependent properties are assumed to be equal to their value at the inlet temperature. Therefore, after choosing a suitable initial condition, the equations are solved in time until converging to a steady state solution.

On the solid boundaries (walls) no slip condition is applied for velocity and a constant heat flux and also constant temperature are imposed for the temperature. Other boundary conditions at the symmetry boundaries are applied according to mirrored property. On channel input, the axial uniform velocity and temperature profiles and on the output of the channel fully developed flow assumptions are considered.

In the explicit method used in this study, after solving the governing equation with the initial value, the temperature dependent properties will be updated and the processing continue to achieve the steady state results.

In addition to report the results of flow and heat transfer in the developing region, the effect of some dimensionless parameters on the flow and heat transfer has also been investigated. The results are in a good agreement with the results reported by others in this field.

Keywords: Viscoelastic flow; 3D simulation; developing region; Temperature-dependent properties; PTT model.



**Shahrood University
of Technology**

**Shahrood University of Technology
Faculty of Mechanical Engineering**

**Numerical simulation of 3D viscoelastic developing
flow and heat transfer in the rectangular ducts**

Ali Jalali

Supervisor:

Dr. Mohammad Hasan Kayhani

Advisor:

Dr. Mahmood Norouzi

September 2012