

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
وَالْحَمْدُ لِلَّهِ رَبِّ الْعَالَمِينَ



دانشکده مهندسی مکانیک
گروه طراحی کاربردی

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

تحلیل ارتعاشات عرضی یک تیر تیموشنکو ویسکوالاستیک تحت حرکت محوری با روش اغتشاشات (multiple scale)

دانشجو:

حمیده صدیقی

استاد راهنما

دکتر حمیدرضا ایک چی

بهمن ماه 1390

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مکانیک

گروه جامدات

پایان نامه کارشناسی ارشد خانم

تحت عنوان: تحلیل ارتعاشات عرضی یک تیر تیموشنکو ویسکوالاستیک تحت حرکت محوری با روش اغتشاشات (multiple scale)

در تاریخ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد مورد ارزیابی و با درجه مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور	امضاء	اساتید راهنما
			دکتر حمیدرضا ایک چی

امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :
			نام و نام خانوادگی :
			نام و نام خانوادگی :
			نام و نام خانوادگی :

c d

با درود فراوان به روح پر فتوح پدر بزرگوارم و

سپاس بیکران بر همدلی و همراهی و همگامی مادر دلسوز و مهربانم

که سجده ی ایثارش گل محبت را در وجودم پروراند .

و با تقدیر و تشکر شایسته از استاد فرهیخته و فرزانه جناب آقای

دکتر ایپک چی

که با نکته های دلاویز و گفته های بلند ، صحیفه های سخن را علم پرور نمود

و همواره راهنما و راه گشای نگارنده در اتمام واکمال پایان نامه بوده است.

معلما مقامت ز عرش برتر باد همیشه توسن اندیشه ات مظفر باد

b a

تعهد نامه

اینجانب حمیده صدیقی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مکانیک- طراحی کاربردی دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه "تحلیل ارتعاشات عرضی یک تیر تیموشنکو ویسکوالاستیک تحت حرکت محوری با روش اغتشاشات (multiple scale)" تحت راهنمایی جناب آقای دکتر ایپک چی متعهد می شوم .

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا «Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ 1390/11/12

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .

چکیده

در این تحقیق ارتعاشات عرضی یک تیر تیموشنکو ویسکوالاستیک تحت حرکت محوری با روش اغتشاشات، مورد ارزیابی قرار گرفته است. برای توصیف رفتار ویسکوالاستیک از مدل استاندارد جامد خطی که در آن از مشتق مادی زمانی استفاده شده است، کمک گرفته شده است. جنس تیر در برش از مدل ویسکوالاستیک پیروی می‌کند و در فشار تراکم ناپذیر است. سرعت محوری به صورت متوسط ثابت با تغییرات هارمونیک کوچک مشخص شده است و معادلات حاکم بر تیر از قانون دوم نیوتن استخراج شده است. روش مقیاس‌های چندگانه و تعیین شرایط حل‌پذیری در حالت مودال و رزونانس پارامتریک برای حل معادلات به کار برده شده است. تاثیر اعمال تئوری تیموشنکو بر تیرهای ویسکوالاستیک، تأثیر پارامترهای ویسکو بر رفتار سازه، تاثیر سرعت بر پاسخ تیر، محاسبه سرعت بحرانی، تفاوت خیز سازه در حالت ویسکوالاستیک با حالت الاستیک از جمله نتایج ارائه شده در این تحقیق است. نتایج نشان می‌دهد، خیز تیر در حالت ویسکوالاستیک کمتر از حالت الاستیک است.

کلمات کلیدی:

تیر ویسکوالاستیک – سرعت محوری – مدل استاندارد جامد خطی - تئوری اغتشاشات

فهرست

صفحه	عنوان
3	فصل اول: کلیات و مرور مطالب
4	1-1-1- مقدمه ای بر مواد ویسکوالاستیک
4	2-1-1- خزش
5	3-1-1- رهايش
6	4-1-1- معرفی مدل های خطی ویسکوالاستیک
7	1-4-1-1- مدل کلوین
8	2-4-1-1- مدل ماکسول
9	3-4-1-1- مدل استاندارد جامد خطی
9	5-1-1- معادلات حاکم بر مواد ویسکوالاستیک
9	1-5-1-1- معادلات بنیادین تنش به شکل انتگرالی
10	2-5-1-1- معادلات بنیادین تنش به شکل دیفرانسیلی
12	6-1-1- فرضیات متداول در ویسکوالاستیسیته
13	7-1-1- تئوری تیرها
14	1-7-1-1- تئوری اولر برنولی
15	2-7-1-1- تئوری تیموشنکو
17	8-1-1-1- مروری بر ارتعاشات عرضی و پایداری تیرهای متحرک محوری
28	1-8-1-1- جمع بندی
29	فصل دوم: استخراج و حل معادلات حاکم
30	1-2-1- مقدمه
30	2-2-1- استخراج معادلات حرکت
34	3-2-1- بی بعدسازی معادلات
37	4-2-1- تحلیل با روش (multiple scale)
39	1-4-2-1- شرط مرزی تیر
40	5-2-1-1- حالت مودال
40	1-5-2-1- آنالیز مودال برای معادلات مرتبه صفر
43	2-5-2-1- آنالیز مودال برای معادلات مرتبه یک
52	6-2-1-1- رزونانس پارامتریک اصلی
53	1-6-2-1- تحلیل مرتبه صفر رزونانس پارامتریک اصلی
53	2-6-2-1- تحلیل مرتبه یک رزونانس پارامتریک اصلی

58	7-2- تعیین سرعت بحرانی
60	8-2- جمع بندی
61	فصل سوم: بررسی نتایج
62	1-3- مقدمه
62	2-3- حالت مودال
62	1-2-3- بررسی پاسخ مکانی تیر
63	2-2-3- بررسی پاسخ زمانی تیر
71	3-2-3- بررسی فرکانس طبیعی بی بعد
76	4-2-3- بررسی زمان رهائش
76	3-3- حالت رزونانس پارامتریک اصلی
76	1-3-3- بررسی پارامتر انحرافی μ
77	2-3-3- بررسی پاسخ مکانی تیر
79	3-3-3- بررسی پاسخ زمانی تیر
80	4-3-3- بررسی زمان رهائش
80	4-3- بررسی سرعت بحرانی
85	5-3- اعتبار سنجی
85	6-3- جمع بندی
86	فصل چهارم: نتیجه گیری و پیشنهادات
90	پیوست
91	پیوست الف: سینماتیک محیط پیوسته
91	الف-1- توصیف مادی یا لاگرانژی
91	الف-2- توصیف فضایی
92	الف-3- مشتق مادی
93	پیوست ب: مقدمه ای بر تئوری اغتشاشات
94	ب-1- تعریف مرتبه یک عبارت
94	ب-2- تعریف سری مجانبی: Asymptotic expansion
96	ب-3- روش Multiple scale
98	ب-4- شرایط حل پذیری
103	مراجع

فهرست اشکال

عنوان	صفحه
شکل (1-1). رفتار ماده ویسکوالاستیک در خزش	5
شکل (1-2). رفتار ماده ویسکوالاستیک در رهایش	5
شکل (1-3). مدل مواد الاستیک.	6
شکل (1-4). مدل مواد ویسکوز	7
شکل (1-5). مدل کلویین	7
شکل (1-6). مدل ماکسول	8
شکل (1-7). مدل استاندارد جامد خطی	9
شکل (1-8). حالت تنش	11
شکل (1-9). المان برش خورده تیر اولر برنولی.	14
شکل (1-10). شماتیک تیر و بارگذاری آن.	15
شکل (2-1). مدل فیزیکی تیر متحرک محوری	31
شکل (2-2). شماتیک روش Bisection	43
شکل (3-1). شکل مود در زمان های مختلف در حالت مودال	63
شکل (3-2). پاسخ زمانی تیر در نقطه وسط برای مدل های مختلف	64
شکل (3-3). پاسخ زمانی تیر در $\alpha = 0.1$ برای مدل های مختلف	64
شکل (3-4). بررسی پاسخ زمانی تحت کشش های محوری مختلف	65
شکل (3-5). تاثیر سرعت محوری بر پاسخ زمانی در وسط تیر	66
شکل (3-6). بررسی تاثیر دامنه نوسانات سرعت بر پاسخ زمانی در وسط تیر	66
شکل (3-7). بررسی تاثیر پهنای تیر بر پاسخ زمانی در وسط تیر	67
شکل (3-8). بررسی تاثیر عمق تیر بر پاسخ زمانی در وسط تیر	68
شکل (3-9). بررسی تاثیر دانسیته بر پاسخ زمانی در وسط تیر	68
شکل (3-10). بررسی تاثیر ضریب ویسکوالاستیک بر پاسخ زمانی در وسط تیر	69
شکل (3-11). بررسی تاثیر مدول الاستیسیته $E1$ بر پاسخ زمانی در وسط تیر	70
شکل (3-12). بررسی تاثیر مدول الاستیسیته $E2$ بر پاسخ زمانی در وسط تیر	71
شکل (3-13). بررسی تاثیر ضریب ویسکوزیته بر فرکانس طبیعی	71
شکل (3-14). بررسی تاثیر مدول الاستیسیته $E1$ بر فرکانس طبیعی	72

- شکل (3-15). تاثیر مدول استاندارد $E2$ بر فرکانس طبیعی 72
- شکل (3-16). تاثیر دانسیته بر فرکانس طبیعی 73
- شکل (3-17). تاثیر ضخامت بر فرکانس طبیعی 73
- شکل (3-18). تاثیر پهنای تیر بر فرکانس طبیعی 74
- شکل (3-19). تاثیر سرعت محوری بر فرکانس طبیعی 74
- شکل (3-20). بررسی تاثیر دامنه نوسانات سرعت بر فرکانس طبیعی 75
- شکل (3-21). تاثیر کشش محوری بر فرکانس 75
- شکل (3-22). جابجایی نقطه وسط نسبت به زمان رهایش در حالت مودال $T0 = 1$ 76
- شکل (3-23). تغییرات پاسخ بر حسب μ در وسط تیر در زمان $T0 = 0.5$ 77
- شکل (3-24). شکل مود در زمان های مختلف در حالت رزونانس پارامتریک اصلی 78
- شکل (3-25). پاسخ زمانی در وسط تیر برای مدل های مختلف در حالت رزونانس پارامتریک اصلی 79
- شکل (3-26). جابجایی نقطه وسط نسبت به زمان رهایش در حالت رزونانس پارامتریک $T0 = 1$ 80
- شکل (3-27). تاثیر دانسیته بر سرعت بحرانی 81
- شکل (3-28). تاثیر کشش محوری بر سرعت بحرانی 81
- شکل (3-29). تاثیر مدول الاستیسیته $E1$ بر سرعت بحرانی 82
- شکل (3-30). تاثیر مدول الاستیسیته $E2$ بر سرعت بحرانی 83
- شکل (3-31). بررسی تاثیر ضریب ویسکوالاستیک بر سرعت بحرانی 83
- شکل (3-32). تاثیر عمق تیر بر سرعت بحرانی 84
- شکل (3-33). تاثیر پهنای تیر بر سرعت بحرانی 84

فهرست جداول

- جدول (1-1). جدول ضرایب پایداری 19
- جدول (1-3). مشخصات تیر 62

علائم و اختصارات

σ	تنش
Φ	چرخش مقطع تیر
V	خیز صفحه خنثی
ρ	دانسیتة
γ_0	سرعت متوسط ثابت
A	سطح مقطع
α	شتاب زاویه ای
h	ضخامت
v	ضریب پواسون
K	ضریب تصحیح برشی
η	ضریب ویسکوزیته
ω	فرکانس طبیعی
ε	پارامتر اغتشاش
P	کشش اولیه محوری
E	مدول الاستیسیتة
k	مدول بالک
G	مدول برشی
I	ممان اینرسی
M	ممان خمشی
Q	نیروی برشی

پیشگفتار

تیرها یکی از سازه‌های خمشی مهم مورد بررسی در مقاومت مصالح هستند که در مهندسی مکانیک و نیز در مهندسی عمران کاربردهای فراوانی دارند. تیرهای متحرک محوری نیز در بسیاری از وسایل مهندسی مانند تسمه‌های انتقال قدرت، اره‌ها، بازوی ربات‌ها و کابل‌های آنتن هوایی کاربرد دارند. با توجه به این که طیف بسیار گسترده‌ای از مواد پیرامون ما در حوزه‌ی ویسکوالاستیک قرار دارند و شناخت رفتار مکانیکی این مواد به دلیل رفتار متفاوت نسبت به مواد الاستیک از اهمیت بالایی برخوردار است، لذا فصل اول به معرفی تئوری تیرها، روابط آن‌ها در حالت الاستیک و ویسکوالاستیک و به معرفی مدل‌های خطی ویسکوالاستیک که برای توصیف رفتار تیر از آن استفاده می‌شود، پرداخته شده است. برای تیرهای متحرک یک سرعت بحرانی تعریف می‌شود که برای سرعت‌های بالاتر از آن ناپایداری‌های دینامیکی رخ می‌دهد. لذا در بررسی دینامیکی چنین سیستم‌هایی، پاسخ و پایداری دینامیکی مربوط به ارتعاشات عرضی حائز اهمیت می‌باشد لذا در این فصل مروری بر تحقیقات انجام شده در مورد ارتعاشات عرضی و پایداری تیرهای متحرک محوری، نیز انجام شده است. تحقیقات در مورد تیرهای متحرک محوری از سال 1973 که آقایان پاکدمیرلی و اوز ارتعاشات عرضی تیرهای الاستیک متحرک محوری با سرعت‌های وابسته به زمان را بررسی کرده‌اند، تا سال 2010 که آقای چن پایداری تیر تیموشنکو ویسکوالاستیک متحرک محوری را در رزونانس پارامتریک اصلی و مجموع تعیین کرده است، ادامه دارد. تحلیل ارتعاشی و پایداری تیرهای متحرک با تئوری اغتشاشات انجام می‌شود. با مرور مقالات، نتیجه می‌شود که در اکثر آن‌ها از تئوری اولر استفاده شده است، و از تئوری تیموشنکو که رفتار واقعی تری را از تیر ارائه می‌دهد، بسیار کم استفاده شده است. لذا تیر را با تئوری تیموشنکو در نظر گرفته و برای توصیف رفتار ویسکوالاستیک از مدل استاندارد که مدل کامل تری نسبت به کلوبین است، بهره گرفته شده است. در فصل دوم معادلات حاکم بر تیر استخراج و پس از بی بعد سازی، روش مقیاس‌های چندگانه¹ بر معادلات اعمال شده و سپس با استفاده از شرایط حل‌پذیری، پاسخ تیر

¹ Multiple scale

تعیین شده است. در فصل سوم نتایج تحلیل شده و نتیجه اعمال تئوری تیموشنکو بر تیرهای ویسکوالاستیک، تأثیر پارامترهای ویسکو بر رفتار سازه، تاثیر سرعت بر پاسخ تیر، محاسبه سرعت بحرانی، تفاوت خیز سازه در حالت ویسکوالاستیک با حالت الاستیک بررسی شده است. در فصل چهارم نتیجه‌گیری و پیشنهادها مطرح شده است.

c d

فصل اول: کلیات و مرور مطالب

b a

1-1- مقدمه ای بر مواد ویسکوالاستیک

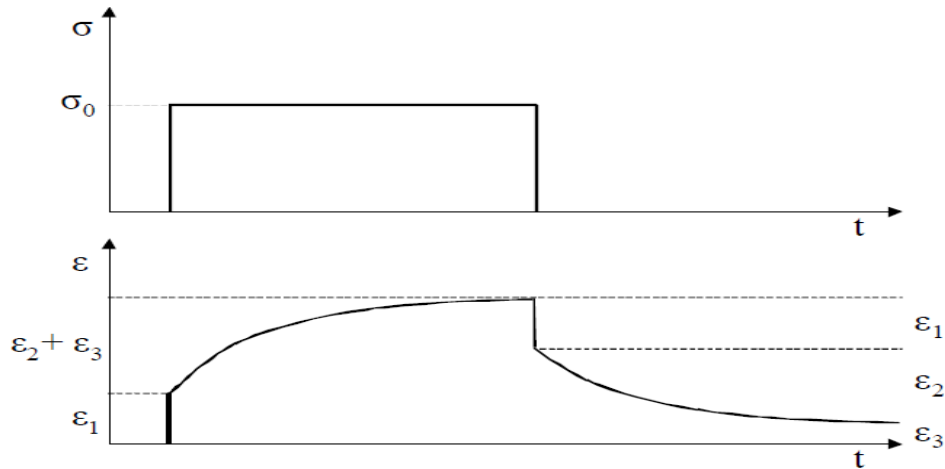
ویسکوالاستیک خاصیتی از ماده است، که معرف رفتار الاستیک و ویسکوز ماده هنگام تغییر شکل است. مواد ویسکوز، در مقابل جریان برشی از خود مقاومت نشان داده و با اعمال تنش همراه با زمان به صورت خطی تغییر شکل می‌دهند. مواد الاستیک با اعمال تنش به صورت آنی تغییر شکل می‌دهند و به سرعت با حذف تنش به شکل اولیه خود بر می‌گردند. مواد ویسکوالاستیک هر دو این خصوصیات را دارا بوده و رابطه بین تنش و کرنش آن‌ها تابع زمان است. دو تابع مهم در ویسکوالاستیسیته، کامپلینس خزشی و مدول رهایش می‌باشد، که تغییر شکل ویسکوالاستیک را ارائه می‌دهند و از تست‌های خزش و رهایش بدست می‌آیند [1].

1-2- خزش

در ماده الاستیک پس از بارگذاری آنی، تغییر شکل نیز به صورت آنی صورت خواهد گرفت و زمانی که بار از روی جسم برداشته می‌شود، تغییر شکل به صورت آنی و کامل حذف می‌شود. ولی در مواد ویسکوالاستیک ابتدا با بارگذاری آنی تغییر شکل (ϵ_1) نیز به صورت آنی صورت خواهد گرفت و سپس رشد آهسته تغییر شکل ماده تحت تنش ثابت وجود دارد در واقع اگر تنش ثابت به ماده اعمال شود کرنش با زمان افزایش می‌یابد. در مرحله باربرداری ابتدا کرنش ϵ_1 به طور آنی حذف می‌گردد و پس از آن کرنش به تدریج کاهش می‌یابد. بنابراین خزش رشد تدریجی کرنش تحت تنش ثابت است. کرنش تست خزش را می‌توان به فرم زیر تعریف نمود.

$$\epsilon(t) = \sigma_0 \cdot J(t) \quad (1 - 1)$$

که $J(t)$ کامپلینس خزش نامیده می‌شود.



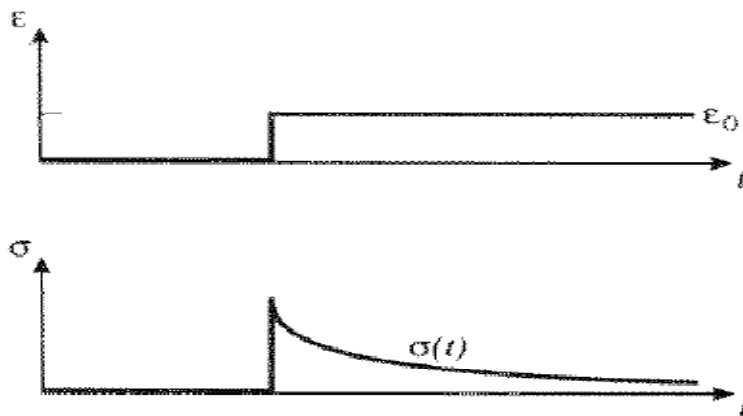
شکل (1-1). رفتار ماده ویسکوالاستیک در خزش [1]

3-1- رهایش

اگر در جسم ویسکوالاستیک کرنش آنی ایجاد گردد، ابتدا تنش ثابتی در جسم ایجاد خواهد شد و پس از آن تنش به صورت تدریجی کاهش می‌یابد. تنش تست رهایش را می‌توان به فرم زیر تعریف نمود.

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 G(t) \quad (2-1)$$

که $G(t)$ مدول رهایش نامیده می‌شود.



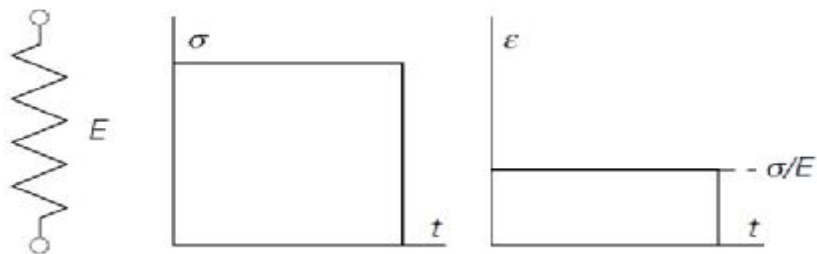
شکل (1-2). رفتار ماده ویسکوالاستیک در رهایش. [1]

1-4- معرفی مدل های خطی ویسکوالاستیک

در این قسمت برخی از مدل های بنیادین که می توانند برخی از جنبه های رفتاری مواد ویسکوالاستیک را توصیف کنند، ارائه شده است. هر چند که این مدل های ساده نمی توانند رفتار واقعی مواد را بیان کنند ولی برای بدست آوردن درک فیزیکی از پدیده های خزش، رهاش و روابط بین تنش و کرنش در مواد ویسکوالاستیک بسیار مفید هستند. ویسکوالاستیسیته خطی به طور معمول به صورت ترکیب اجزاء الاستیک و ویسکوز بیان شده و از فنر و دمپر به ترتیب برای ارائه ی پاسخ ایده آل الاستیک و ویسکوز استفاده می شود. جامد ایده آل از قانون هوک پیروی می کند. قانون هوک بیان می کند که تنش نسبت خطی با تغییر شکل دارد که به این نسبت خطی ثابت مدول الاستیسیته گفته می شود.

$$\sigma = E\varepsilon \quad (1-3)$$

مواد الاستیک را می توان با المان فنر مدل کرد و نشان داد که در برابر تنش ثابت، تغییر شکل ثابتی از خود نشان می دهند. پاسخ به صورت آنی و بدون وابستگی به زمان است و مرحله بازیافت¹ بعد از حذف تنش به طور آنی و کامل انجام می شود.



شکل (1-3). مدل مواد الاستیک. [1]

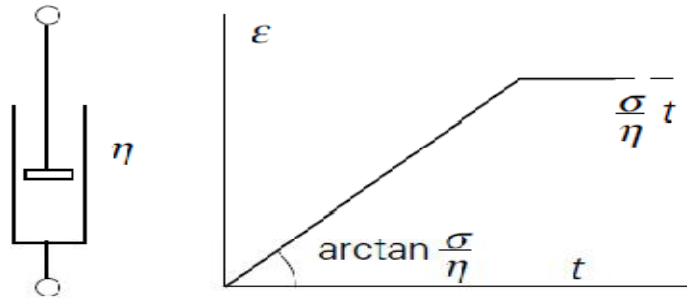
¹ Recovery

فصل اول: کلیات و مرور مطالب

در مورد سیال ایده‌آل قانون نیوتن برقرار است. قانون نیوتن بیان می‌کند که تنش در سیال با نرخ تغییر شکل رابطه خطی دارد و نسبت ثابت را ویسکوزیته (η) می‌نامد بنابراین می‌توان نوشت:

$$\sigma = \eta \dot{\epsilon} \quad (4-1)$$

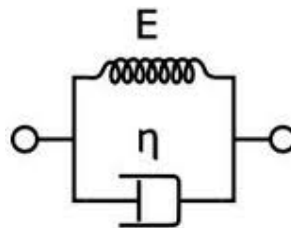
مواد ویسکوز را می‌توان با المان دمپر مدل کرد. پاسخ به صورت آنی اتفاق نمی‌افتد بلکه تغییر شکل وابسته به زمان است و مرحله بازیافت¹ بعد از حذف تنش وجود ندارد.



شکل (4-1). مدل مواد ویسکوز. [1]

1-4-1- مدل کلوین

ساده ترین مدل مکانیک برای توصیف رفتار ویسکو الاستیک از دو المان، یک فنر برای رفتار الاستیک و یک دمپر برای توصیف رفتار ویسکوز تشکیل شده است. شکل (5-1) شماتیک آن را نشان می‌دهد.



شکل (5-1). مدل کلوین [1]

¹ Recovery

رابطه تنش کرنش برای این مدل به شکل $p^E \sigma = q^E \varepsilon$ است، که اپراتورهای ویسکوالاستیک p^E , q^E به صورت زیر است:

$$p^E = 1, q^E = E + \eta \frac{d}{dt} \quad (5 - 1)$$

یا:

$$\sigma = \left(E + \eta \frac{d}{dt} \right) \varepsilon \quad (6 - 1)$$

1-4-2- مدل ماکسول:

این مدل شامل یک المان فنر و دمپر است که به صورت سری قرار گرفته است (شکل 6-1).



شکل (6-1). مدل ماکسول [1]

رابطه تنش کرنش برای این مدل به شکل $p^E \sigma = q^E \varepsilon$ است، که اپراتورهای ویسکوالاستیک p^E , q^E به صورت زیر است:

$$p^E = \frac{E}{\eta} + \frac{d}{dt} \quad (7 - 1)$$

$$q^E = E \frac{d}{dt}$$

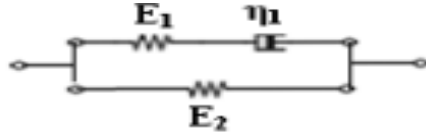
یا

$$E \dot{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\tau} + \dot{\sigma} \quad (8 - 1)$$

$$\tau = \frac{\eta}{E}$$

1-4-3- مدل استاندارد جامد خطی

این مدل شامل یک المان فنر است که موازی با المان ماکسول قرار دارد (شکل 7-1).



شکل (7-1). مدل استاندارد جامد خطی. [1]

رابطه تنش کرنش برای این مدل به شکل $p^E \sigma = q^E \varepsilon$ است، که اپراتورهای ویسکوالاستیک p^E , q^E به صورت زیر است:

$$p^E = \eta_1 \frac{d}{dt} + E_1, \quad q^E = \eta_1 (E_1 + E_2) \frac{d}{dt} + E_1 E_2 \quad (9-1)$$

یا

$$\left(\frac{d}{dt} + \frac{E_1}{\eta_1} \right) \sigma = \left[(E_1 + E_2) \frac{d}{dt} + \frac{E_1}{\eta_1} \right] \varepsilon \quad (10-1)$$

مدل استاندارد را با فرض این که $E_1 \rightarrow \infty$ ، $E_2 \neq 0$ باشد، می توان به مدل کلومین و اگر $E_2 = 0$ ، $E_1 \neq 0$ باشد، را به مدل ماکسول تبدیل کرد.

1-5-1- معادلات حاکم بر مواد ویسکوالاستیک

در این بخش معادلات بنیادین به شکل انتگرالی و دیفرانسیلی بیان شده است.

1-5-1-1 معادلات بنیادین تنش به شکل انتگرالی

رابطه‌ی تنش - کرنش در یک ماده‌ی ویسکوالاستیک، ایزوتروپیک به صورت زیر است:

$$\sigma_{ij} = 2 \int_{-\infty}^t G(t-\theta) d\varepsilon_{ij}(\theta) + \delta_{ij} \int_{-\infty}^t \left(k(t-\theta) - \frac{2}{3} G(t-\theta) \right) d\Delta(\theta) \quad (11-1)$$

در معادله‌ی بالا Δ به معنای اثر¹ تانسور کرنش ε_{ij} و $k - \frac{2}{3}G = I$ ضریب لامه می‌باشد.

تبدیل لاپلاس معادله‌ی فوق به صورت زیر است:

$$\sigma_{ij}(s) = 2sG(s)\varepsilon_{ij}(s) + \delta_{ij} \left(k(s) - \frac{2}{3}G(s) \right) \Delta(s) \quad (12-1)$$

1-5-2- معادلات بنیادین تنش به شکل دیفرانسیلی

معادلات بنیادین برای یک ماده‌ی ایزوتروپیک که پاسخش به مشتقات تنش و کرنش وابسته است، به صورت دیفرانسیلی زیر نوشته می‌شود:

$$F(\sigma, \dot{\sigma}, \ddot{\sigma}, \dots, \varepsilon, \dot{\varepsilon}, \ddot{\varepsilon}, \dots) = 0 \quad (13-1)$$

به طوری که تنش و کرنش وابسته به زمان است. شکل اپراتوری معادله‌ی فوق به صورت زیر است:

$$P(D)\sigma_{ij}(t) = Q(D)\varepsilon_{ij}(t) \quad (14-1)$$

که σ_{ij} عناصر تانسور تنش و ε_{ij} تانسور کرنش است. اپراتورهای $P(D), Q(D)$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$P(D) = \sum_{r=0}^N P^r \frac{\partial^r}{\partial t^r} \quad (15-1)$$

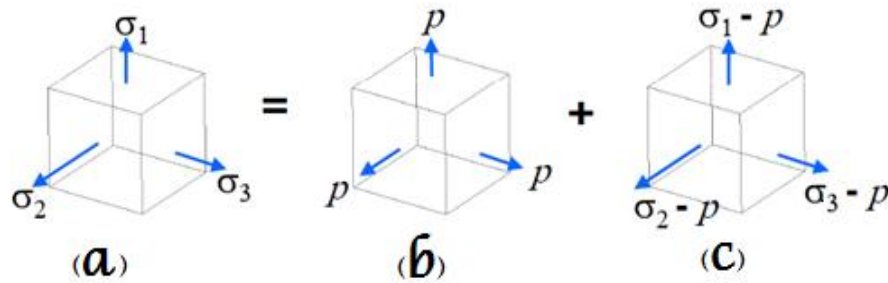
$$Q(D) = \sum_{r=0}^N Q^r \frac{\partial^r}{\partial t^r}$$

شرایط خطی بودن معادلات لازم می‌دارد که P^r, Q^r مستقل از زمان باشند ولی در حالت کلی P^r, Q^r می‌تواند تابع زمان نیز باشد. با ترکیب مناسب از ضرایب در معادله‌ی اپراتوری ذکر شده در بالا، می‌توان رفتار یک ماده‌ی ویسکوالاستیک را تا حد امکان شبیه سازی کند.

¹ Trace

فصل اول: کلیات و مرور مطالب

به منظور توصیف رفتار ویسکوالاستیک یک سیستم تحت کشش چند محوره تفکیک قسمت برش¹ و قسمت اتساعی² تنش مرسوم است. این قاعده به سبب پاسخ متفاوت مواد ویسکوالاستیک به برش و اتساع (یا بالک) می باشد. به عبارت دیگر، انواع مختلف تنش، پاسخهای متفاوتی را تولید می کنند.



شکل (8-1). (a) حالت تنش (b) تنش هیدرواستاتیک که فقط تغییر حجم ایجاد می کند (c) تنش انحرافی

که فقط منجر به تغییر شکل می شود [2].

اگر عضوهای برش و اتساع در معادله‌ی اپراتوری از هم جدا شوند، نتیجه می شود:

$$P_1 \sigma_{ij} = Q_1 \varepsilon_{ij} \quad \text{deviatoric} \quad (16-1)$$

$$P_2 \sigma_{ij} = Q_2 \varepsilon_{ij} \quad \text{dilatational}$$

همچنین P_1, P_2, Q_1, Q_2 اپراتورهایی به شکل زیر هستند که با توجه به مدل انتخاب شده برای ماده‌ی ویسکوالاستیک تعیین می شوند.

$$P_0 + P_1 \frac{\partial}{\partial t} + P_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots \quad (17-1)$$

به کمک روابط می توان نوشت:

$$\sigma_{ij} = 2G \varepsilon_{ij} = G \gamma_{ij} \quad \rightarrow \quad 2G = \frac{Q_1}{P_1} \quad \rightarrow \quad G = \frac{1}{2} \left(\frac{Q_1}{P_1} \right) \quad (18-1)$$

¹ Deviatoric

² Dilatational

$$P_2 \sigma_{ii} = Q_2 \varepsilon_{ii} \quad 3k = \frac{Q_2}{P_2} \quad \rightarrow \quad k = \frac{1}{3} \left(\frac{Q_2}{P_2} \right)$$

مدول الاستیسیته و ضریب پواسون دارای روابط زیر با مدول برشی و مدول بالک می‌باشند.

$$E = \frac{9kG}{3k + G}$$

(۱ - ۱۹)

$$\nu = \frac{3k - 2G}{6k + 2G}$$

با جایگذاری مقادیر k, G بر حسب P, Q در عبارات فوق، مدول الاستیسیته و ضریب پواسون به شکل اپراتوری بدست می‌آیند [2].

1-6- فرضیات متداول در ویسکوالاستیسیته

در حل مسائل تحلیل تنش در حوزه‌ی ویسکوالاستیک، اغلب اعمال فرض‌هایی بر روی خصوصیات ماده ضروری است. با توجه به اینکه جمع آوری اطلاعات وابسته به زمان برای خصوصیات ویسکوالاستیک مشکل و زمان‌بر است بنابراین اغلب برای ماده‌ی ویسکوالاستیک یکی از خصوصیات مدول برشی $G(t)$ یا مدول یانگ $E(t)$ تعریف می‌شود و نه هر دو. مدول دیگر بر اساس یکی از فرضیات زیر تعیین می‌شود. این فرضیات را می‌توان بر اساس مطالب بخش قبلی و بدین صورت توضیح داد که پاسخ برخی از مواد ویسکوالاستیک در برش متفاوت از پاسخ آن‌ها در اتساع (بالک) می‌باشد؛ از این رو در حالی که پاسخ در برش ویسکوالاستیک است پاسخ در اتساع می‌تواند به صورت الاستیک باشد. این فرضیات به ترتیب: تراکم ناپذیری، رفتار الاستیک در بالک و مدول تناسبی بالک و برشی می‌باشد. که هرکدام از این فرضیات مقدار خاصی را برای مدول بالک یا ضریب پواسون به صورت زیر تعیین می‌کنند:

1- **تراکم ناپذیری:** برای تغییر شکل‌های کوچک در حوزه‌ی مسائل الاستیک خطی، در حالت تراکم ناپذیری، مقدار ضریب پواسون برابر با 0.5 یا مدول بالک بی‌نهایت است. تحت شرایط مشابه ضریب پواسون

فصل اول: کلیات و مرور مطالب

نیز برای یک ماده‌ی ویسکوالاستیک تراکم‌ناپذیر، برابر با 0.5 و $k(t) = \infty$ (مدول بالک) می‌باشد. بدیهی است که این فرض همچنین دلالت بر این دارد که کرنش‌های اتساعی صفر است.

2- **الاستیک در بالک:** در این حالت مدول بالک، مقدار ثابت k_0 را داشته و $k(t) = k_0 H(t)$ می‌باشد، که $H(t)$ تابع پله است. این فرض بر این اساس است که تغییرات مدول بالک نسبت به مدول برشی، با دما و زمان بسیار کم است. در این حالت ضریب پواسون تابعی از زمان است.

3- **مدول تناسبی بالک و برشی:** در این حالت فرض می‌شود که نسبت مدول بالک به برشی مقدار ثابتی باشد به طوری که $k(t) = c_1 G(t)$ که c_1 مقداری ثابت است. بنابراین در این حالت فرض می‌شود که وابستگی زمانی دو مدول شبیه و با هم متناسب اند. صحت این فرض به شدت وابسته به دماست.

البته در بعضی منابع این فرض را به عنوان رفتار شبه ویسکوالاستیک در برش و اتساع و آن را معادل با فرض ضریب پواسون ثابت در نظر گرفته اند [3].

1-7- تئوری تیرها

تیرها یکی از سازه‌های مهم مورد بررسی در مقاومت مصالح هستند، که در مهندسی مکانیک و نیز در مهندسی عمران کاربردهای فراوانی دارند. تیر عبارت است از یک عضو با مقطع منشوری که ابعاد سطح مقطع آن در مقایسه با طول آن ناچیز است و تحت بارهای عرضی، محوری و یا ممان خمشی می‌تواند قرار بگیرد، در مورد مسائل تیرها تئوری‌های مختلفی توسط نظریه پردازان علم مقاومت مصالح طرح و مبنای کار قرار گرفته‌اند، که از این جمله‌اند [4]:

(1) تئوری تیراولر برنولی

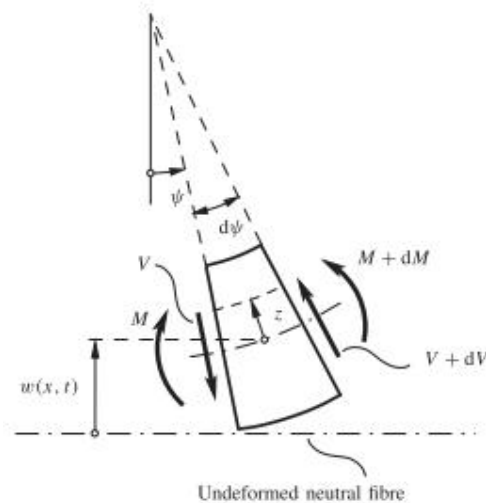
(2) تئوری تیر تیموشنکو

1-7-1- تئوری اولر برنولی

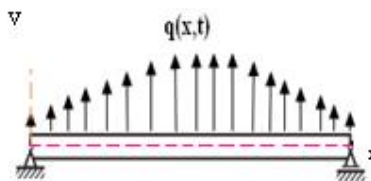
این تئوری یک ساده سازی از تئوری الاستیسیته خطی است که اولین بار حدود سال 1750 مطرح شد، ولی تا هنگام پیشرفت برج ایفل و چرخ فریس در اواخر قرن نوزدهم مورد استفاده وسیع قرار نگرفت و به سرعت به عنوان عاملی در انقلاب صنعتی دوم مبدل شد. پس از آن آنالیزهای دیگری مانند تئوری صفحه و آنالیز المان محدود شکل گرفت، ولی سادگی تئوری تیر آن را به ابزاری مهم در علم، مخصوصاً مهندسی مکانیک و ساختمان تبدیل ساخت. این تئوری دارای فرضیات زیر می باشد:

- صفحات عمود بر محور تیر پس از اعمال لنگر خمشی صفحه باقی می ماند.
- پس از اعمال خمش، کرنشها به صورت خطی از محور خنثی تغییر می کنند.

معادله تیر اولر برنولی در حالت الاستیک



شکل (1-9). المان برش خورده تیر اولر برنولی [4].



شکل (10-1). شماتیک تیر و بارگذاری آن [4].

با توجه به شکل های (9-1)، (10-1) و قانون دوم نیوتن می توان نوشت :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) + \rho A \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = q(x) \quad (20-1)$$

V خیز تیر، E مدل الاستیسیته و I ممان اینرسی دوم سطح می باشد.

معادله تیر اولر برنولی در حالت ویسکوالاستیک

برای یک ماده ویسکوالاستیک، معادله بنیادین به شکل $\sigma = p^E \varepsilon$ است. در این مرحله ابتدا باید نوع رفتار ماده را در برش و فشار تعریف کرد تا مقادیر مدول الاستیسیته و مدول برشی تعیین شود. به عنوان مثال برای ماده ای که در برش ویسکوالاستیک و در فشار تراکم ناپذیر است ($k = \infty, \nu = 0.5$) طبق معادله (10-2) معادله تیر به صورت:

$$\frac{3}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(q^E I \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \rho A \frac{\partial^2 (p^E w)}{\partial t^2} = p^E (q(x, t)) \quad (21-1)$$

لذا معادله تیر اولر برنولی در حالت ویسکوالاستیک به صورت فوق در می آید و می توان آن را برای هر مدل خطی تعمیم داد.

1-7-2- تئوری تیموشنکو

تئوری تیر تیموشنکو توسط دانشمند اکرایی-روسی بنام استفان تیموشنکو در اوایل قرن بیستم مطرح گردید. این مدل اثرات مربوط به تغییر شکل برشی و ممان اینرسی چرخشی را در نظر گرفته و برای تشریح خصوصیات تیرهای کوتاه، تیرهای کامپوزیتی ساندویچی و تیرهای در معرض تحریک فرکانس بالا وقتی طول موج به ضخامت تیر میل می کند، مناسب است. معادله مربوط به این تئوری از مرتبه چهار است ولی

برخلاف تئوری عمومی تیر (تئوری اولر برنولی) یک جمله مرتبه دوم جزئی نیز دارد. از لحاظ فیزیکی، در نظر گرفتن این جمله اضافی در تغییر شکل، سختی تیر را به صورت موثر کاهش می‌دهد؛ در نتیجه تغییر شکل تحت بار استاتیک افزایش یافته، مقادیر فرکانس‌ها مربوط به شرایط مرزی مفروض کاهش و اثرات عرضی برای فرکانس‌های بالا، زمانی که طول موج کاهش می‌یابد قابل توجه می‌شود.

در این تئوری فرض می‌شود که یک مقطع مسطح که در ابتدا عمود بر محور خنثی است مسطح باقی مانده ولی به دلیل تغییر شکل‌های برشی، این مقطع عمود بر محور خنثی باقی نمی‌ماند. اگر مدول برشی مربوط به ماده تیر به بینهایت میل کند ماده از لحاظ برشی صلب شود و نیز اگر ممان اینرسی چرخشی صرف نظر شود، تئوری تیر تیموشنکو با تئوری کلاسیک تیر مطابقت کامل پیدا می‌کند. این مدل برای تیرهای کوتاه، کامپوزیتی ساندویچی و تیرهای در معرض تحریک فرکانس بالا وقتی طول موج به ضخامت تیر میل می‌کند مناسب است. این تئوری دارای فرضیات زیر می‌باشد:

- اثر برش در فرمول بندی وارد می‌شود.
- مقاطع مسطح که در ابتدا عمود بر محور خنثی می‌باشند، بعد از تغییر شکل نیز مسطح باقی می‌مانند.
- مقاطع مسطح که در ابتدا عمود بر محور خنثی می‌باشند، در حالت کلی بعد از تغییر شکل عمود باقی نمی‌مانند.

معادله تیر تیموشنکو در حالت الاستیک

باتوجه به شکل (10-1) و قانون دوم نیوتن معادله تیری تحت بار گسترده عرضی به صورت زیر است:

$$\frac{dQ}{dx} = -\rho A \ddot{V} + q(x, t) \quad (1-22)$$

$$Q = \frac{dM}{dx} - \rho I \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad (1-23)$$

که در آن Q نیروی برشی، V خیز صفحه خنثی، M ممان خمشی، Φ چرخش مقطع تیر و K ضریب تصحیح برشی است. رابطه ممان و نیروی برشی با خیز و چرخش به شکل زیر است:

$$M = EI \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad Q = KAG \left(\Phi - \frac{\partial V}{\partial x} \right) \quad (24 - 1)$$

از روابط (1 - 22) تا (1 - 24) نتیجه می شود:

$$KAG \left(\Phi - \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \rho I \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) = 0 \quad (25 - 1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[KAG \left(\Phi - \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right] + \rho A \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = q(x, t)$$

معادله تیر تیموشنکو در حالت ویسکوالاستیک

همانطور که برای تئوری اولر برنولی نیز ذکر شد برای ماده ای که در برش ویسکوالاستیک و در فشار تراکم ناپذیر است معادلات حرکت به صورت دو معادله کوپل به هم هست که با حل آن‌ها، خیز و چرخش

تیر تعیین می شود:

$$\rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} (p^E w) - \frac{1}{2} KA \frac{\partial}{\partial x} \left[q^E \left(\Phi - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] = p^E q(x, t) \quad (26 - 1)$$

$$\frac{1}{2} KA \left[q^E \left(\Phi - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + \rho I \frac{\partial^2}{\partial t^2} (p^E \Phi) - \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(q^E I \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) = 0 \quad (27 - 1)$$

8-1- مروری بر ارتعاشات عرضی و پایداری تیرهای متحرک محوری

تیرهای متحرک محوری در بسیاری از وسایل مهندسی مانند تسمه‌های انتقال قدرت، اره‌ها، بازوی ربات‌ها و کابل‌های آنتن هوایی کاربرد دارند. برای تیرهای متحرک یک سرعت بحرانی تعریف می‌شود که برای سرعت‌های بالاتر از آن ناپایداری‌های دینامیکی رخ می‌دهد. لذا تعیین سرعت بحرانی، حائز اهمیت می‌باشد. در اکثر مقالات بررسی شده، ارتعاشات عرضی تیر و پایداری آن در حالت رزونانس پارامتریک اصلی و مجموع بررسی شده‌است، بنابراین ابتدا مفهوم این پارامترها و روش‌های بررسی پایداری به صورت خلاصه بیان می‌شود.

تعریف: رزونانس پارامتریک اصلی¹

رزونانس پارامتریک اصلی هنگامی که فرکانس نوسانات سرعت دو برابر فرکانس طبیعی سیستم‌های طبیعی باشد، اتفاق می‌افتد [5].

$$\omega = 2\omega_n + \varepsilon\mu \quad (28 - 1)$$

پارامتر انحرافی μ^2 به عنوان کمیتی که مقدار انحراف از $2\omega_n$ را نشان می‌دهد، معرفی شده است.

تعریف: رزونانس پارامتریک مجموع

رزونانس پارامتریک مجموع هنگامی که فرکانس نوسانات سرعت برابر مجموع هر دو فرکانس طبیعی سیستم باشد، اتفاق می‌افتد [5].

$$\omega = \omega_n + \omega_m + \varepsilon\mu \quad (29 - 1)$$

پارامتر انحرافی μ به عنوان کمیتی که مقدار انحراف از $\omega_n + \omega_m$ را نشان می‌دهد، معرفی شده است.

تعریف: پایداری تیرهای متحرک محوری

در اکثر مقالات بررسی شده پایداری تیر با معیار Routh-Herwitz تعیین شده و سرعت بحرانی تیر و تاثیر پارامترهای مختلف بر سرعت بحرانی تعیین شده است. بر اساس این معیار برای یک چند جمله ای با درجه n به شکل [6]:

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 \quad (30 - 1)$$

حال جدولی با $n+1$ سطر و ستون به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

¹ Principle parametric resonance

² Detuning

فصل اول: کلیات و مرور مطالب

جدول (1-1). جدول ضرایب پایداری

a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...
a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	...
b_1	b_2	b_3	...
c_1	c_2	c_3	...
⋮	⋮	⋮	⋮

که b_i و c_i به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$b_i = \frac{a_{n-1} \times a_{n-2i} - a_n \times a_{n-2i-1}}{a_{n-1}} \Big|_{i=1..(n-2)} \quad (31 - 1)$$

$$c_i = \frac{b_1 \times a_{n-2i-1} - a_{n-1} \times b_{i+1}}{b_1} \Big|_{i=1..(n-2)}$$

شرط پایداری اینگونه بیان می‌شود که هیچگونه تغییر علامتی در ستون اول نباید حاصل شود زیرا تعداد تغییر علامت‌ها به معنی تعداد قطب‌های غیر منفی می‌باشد که باعث ناپایداری سیستم می‌گردد [5].

آقایان پاکدمیرلی و اوز [7] پاسخ دینامیکی یک تیر تحت کشش الاستیک متحرک محوری را بررسی کرده‌اند. شرایط مرزی را به صورت تکیه گاه ساده، تیر را با تئوری اولر برنولی و سرعت وابسته به زمان فرض شده‌است، که به صورت متوسط ثابت با تغییرات هارمونیک است. معادله حرکت با روش اغتشاشات حل شده است. مرزهای پایداری با شرایط حل‌پذیری به دست آمده است. هنگامی که فرکانس نوسانات سرعت و یا تفاوت بین دو فرکانس طبیعی نزدیک به صفر بوده هیچ پایداری در تئوری اغتشاشات مرتبه اول یافت نمی‌شود.

آقایان چن و یانگ [8] پایداری ارتعاش پارامتریک عرضی یک تیر ویسکوالاستیک متحرک محوری را بررسی کرده‌اند. معادلات حاکم از قانون دوم نیوتن، و رابطه کرنش جابجایی، روابط بنیادین کلونین و روابط هندسی معرفی شده‌اند. وقتی سرعت اصلی ثابت باشد به این معنی که تغییرات هارمونیک سرعت متوسط کوچک است و معادلات حاکم می‌توانند به صورت یک سیستم ژيروسکوپ پیوسته تحت تحریک کوچک پارامتریک دوره‌ای و شرایط استهلاک ملاحظه شود. روش *multiple scale* به صورت مستقیم برای معادلات حاکم بدون گسستگی به کار گرفته شده‌است. شرایط پایداری برای حالت ترکیبی و رزونانس اصلی پارامتریک بدست آمده‌است. مرزهای پایداری از شرایط حل پذیری بدست آمده‌اند.

آقایان چن و یانگ [9] پایداری رزونانس پارامتریک اصلی در ارتعاش عرضی تیر ویسکوالاستیک با سرعت محوری ضربه ای را بررسی کرده اند. معادلات حاکم بر ارتعاش عرضی از قوانین بنیادین دینامیک و روابط هندسی استخراج شده‌اند. شرایط مرزی تکیه گاه ساده و مدل ویسکوالاستیک، کلونین و سرعت متوسط ثابت با تغییرات کوچک در نظر گرفته شده است. کشش تیر با یک کشش متوسط در سر تا سر تیر فرض شده- است. با یک فرض مشخص برای ارتعاش عرضی تیر ویسکوالاستیک غیر خطی متحرک محوری، معادله با مشتق جزئی به یک معادله دیفرانسیلی جزئی انتگرالی کاهش یافته است. روش *multiple scale* برای محاسبه پاسخ حالت پایدار به کار گرفته شده است. یک حل بسته¹ برای دامنه ارتعاشات از روش شرایط حل پذیری با حذف جملات سکولار² استخراج شده است. پایداری تعادل مستقیم³ و پاسخ غیر صفر⁴ با استفاده از تئوری پایداری خطی لیاپانوف⁵ آنالیز شده است. مثال‌های عددی برای مشخص کردن تاثیرات سرعت ضربه ای، ویسکوزیته و مقایسه نتایج بدست آمده از دو معادله ارائه شده است.

¹ Close form

² Secular

³ straight equilibrium

⁴ non trivial

⁵ Lyapanov

آقایان لی و اوه [10] پایداری دینامیکی یک تیر ویسکوالاستیک متحرک محوری تحت کشش را بررسی کرده‌اند، که برای تحلیل از یک مدل المان فرضی¹ بهره گرفته‌اند. استخراج معادلات حاکم با استفاده از اصل هامیلتون است. سفتی دینامیکی دقیق که ماتریس فرضی المان نامیده می‌شود برای تعمیم یک مدل المان فرضی برای ارتعاش عرضی یک تیر ویسکوالاستیک متحرک محوری تحت نیروی محوری تعمیم داده شده است. ماده ویسکوالاستیک با یک شکل کلی توسط انتگرال‌های پی در پی² معادلات بنیادین ارائه شده است. شرایط مرزی تکیه گاه ساده و مدل ویسکوالاستیک، کلونین و سرعت انتقال تیر ثابت فرض شده است. دقت بالا در مدل المان فرضی با مقایسه اولین مقدار با حل تحلیلی است. تاثیرات ویسکوالاستیک و سرعت حرکت روی دینامیک و پایداری تیر متحرک به صورت عددی نیز بررسی شده‌است. تاثیر ویسکوزیته با از بین بردن دومین منطقه پایدار که ممکن است بعد از منطقه واگرایی، اگر تیر ویسکوالاستیک باقی بماند ظاهر شود، بدست می‌آید. به عنوان یک نتیجه تنها اولین مود طبیعی تیر ویسکوالاستیک متحرک را ناپایدار می‌کند. در حالی که برای تیر الاستیک خالص یک لرزش دوگانه کوپل ناپایداری را بوجود می‌آورد.

آقایان یانگ و چن [11] آشفتگی³ و انشعاب⁴ یک تیر ویسکوالاستیک متحرک محوری را بررسی کرده‌اند. مدل ویسکوالاستیک کلونین، سرعت انتقال، تابع زمان و ثابت با تغییرات هارمونیک حول یک مقدار ثابت و شرایط مرزی تکیه گاه ساده در نظر گرفته شده است. لاگرانژین کرنش برای محاسبه هندسه غیر خطی تیر استفاده شده است. معادلات مشتق جزئی غیر خطی حاکم بر حرکت عرضی تیر از قانون دوم نیوتن بدست آمده است. روش گالرکین برای ساده کردن معادلات حاکم به یک سری معادلات دیفرانسیل معمولی به کار گرفته شده است. با استفاده از نگاشت پوانکاره⁵ رفتار دینامیکی بر اساس حل عددی معادلات معمولی مشخص شده‌است. دیاگرام دوگانه برای نمونه ای که سرعت متوسط محوری، دامنه نوسانات سرعت ویسکوالاستیک دینامیکی تغییر می‌کند، در حالی که دیگر پارامترها ثابت هستند ارائه شده‌است. تشریح

¹ spectral element

² hereditary integral

³ Chaos

⁴ Bifurcation

⁵ Poincare

فصل اول: کلیات و مرور مطالب

کننده لیپانوف برای مشخص کردن اغتشاشات محاسبه شده است. از شبیه سازی عددی مشخص می شود که در ارتعاش عرضی تیر ویسکوالاستیک متحرک محوری حرکت پرئودیک، شبه پرئودیک و اغتشاشی اتفاق می افتد.

آقایان چن و یانگ [12] ارتعاش و پایداری برای یک تیر ویسکوالاستیک متحرک محوری مقید شده با تکیه گاه ساده و فنر پیچشی را بررسی کرده اند. یک روش برای استخراج فرکانس های طبیعی و شکل مودها از شرایط مرزی داده شده برای تیر الاستیک در حالت حرکت با سرعت ثابت، پیشنهاد داده شده است. برای تیری که از مدل کلومین پیروی می کند، تاثیرات ویسکوالاستیک بر روی ارتعاش آزاد با روش multiple scale و شبیه سازی عددی تحلیل شده است. هنگامی که سرعت محوری با تغییرات هارمونیک و ثابت ماندن سرعت اصلی مشخص می شود، شرایط پایداری برای تیر ویسکوالاستیک متحرک محوری دارای شتاب محوری با رزونانس پارامتریک بررسی شده است. مثال عددی تاثیرات سفتی قیده ها را نشان می دهد.

آقایان چن و یانگ [13] پایداری ارتعاش پارامتریک عرضی تیرهای ویسکوالاستیک متحرک محوری را بررسی کرده اند. معادلات حاکم از قانون دوم نیوتن، اصل بر هم نهی بولتزمن و روابط هندسی استخراج شده اند. هنگامی که سرعت متوسط ثابت همراه با تغییرات هارمونیک کوچک باشد، معادلات حاکم می توانند به عنوان سیستم ژيروسکوپ پیوسته همراه با تحریک پارامتریک دوره ای کوچک و شرایط استهلاک مورد بحث قرار گیرند. روش multiple scale به طور مستقیم برای معادلات حاکم به کار گرفته شده است. شرایط مرزی به صورت تکیه گاه ساده و گیردار بررسی شده اند. شرایط پایداری برای رزونانس پارامتریک اصلی و ترکیبی بدست آمده اند. مرزهای ناپایداری از شرایط حل پذیری بدست آمده اند.

آقایان یانگ و چن [14] ارتعاش اجباری غیر خطی تیر ویسکوالاستیک متحرک محوری که با ارتعاش پایه تحریک شده است را بررسی کرده اند. دستگاه معادلات غیر خطی مشتق جزئی حرکت عرضی از معادلات دینامیکی روابط بنیادین و روابط هندسی استخراج شده است. مدل ویسکوالاستیک، کلومین در نظر گرفته

فصل اول: کلیات و مرور مطالب

شده، سیستم تحت شرایط غیر همگن بوده و حرکت پایه به صورت ارتعاش پریودیک کسینوسی فرض شده است. با استناد به فرض کشیدگی شبه استاتیکی، معادلات مشتق جزئی غیر خطی به معادلات دیفرانسیل جزئی انتگرالی کاهش یافته است. روش multiple scale به صورت مستقیم برای معادلات حاکم بر هر دو نوع غیر خطی به کار گرفته شده است. دامنه نوسانات نزدیک به رزونانس حالت پایدار توسط شرایط حل پذیری با حذف جملات سکولار تحلیل شده اند. نتایج عددی برای نشان دادن سهم دامنه ارتعاش پایه، ویسکوزیته و غیر خطی بودن دامنه پاسخ برای اولین و دومین مود ارائه شده اند.

آقایان دینگ و چن [15] پایداری تیر متحرک محوری ویسکوالاستیک را بررسی کرده اند. در روابط بنیادین ویسکوالاستیک مشتق زمانی مادی استفاده شده است. روش multiple scale به طور مستقیم برای معادلات حاکم بدون ناپیوستگی به کار رفته است. هنگامی که سرعت محوری به صورت سرعت متوسط ثابت با تغییرات هارمونیک ساده در نظر گرفته می شود شرایط پایداری برای تیر ویسکوالاستیک متحرک محوری که با تکیه گاه ساده همراه با فنر های پیچشی مقید شده در رزونانس پارامتریک، ارائه شده است. روش تفاضلات محدود¹ برای حل عددی معادلات تیر ویسکوالاستیک متحرک محوری با تکیه گاه گیردار برای ناحیه پایدار در رزونانس پارامتریک اصلی تعمیم داده شده است. محاسبات عددی نتایج تحلیلی را تایید می کنند. مثال های عددی تاثیرات سفتی قیدها، سرعت محوری و ویسکوزیته را نشان می دهد.

آقای قایش و خانم بالار [16] ارتعاش پارامتریک غیر خطی و پایداری تیر های متحرک محوری را با تئوری ریلی بررسی کرده اند. معادلات مشتق جزئی حرکت برای دامنه ارتعاشات بزرگ، به کمک روابط دینامیکی هندسی و روابط بنیادین استخراج شده اند. رفتار ویسکو الاستیک با مدل کلونین توصیف شده است. سرعت محوری شامل یک مقدار اصلی همراه با تغییرات هارمونیک کوچک فرض شده است. با اعمال روش multiple scale به صورت مستقیم برای معادلات حرکت و بررسی شرایط حل پذیری، فرکانس های خطی و غیر خطی و شکل موده های سیستم به صورت تحلیلی فرموله شده اند. با وجود استهلاک دامنه حرکت به صورت نمایی

¹ Finite difference

وابسته به زمان دیده می‌شود و به عنوان یک نتیجه فرکانس طبیعی غیر خطی سیستم وابسته به زمان خواهد بود. برای یک نمونه رزونانس بررسی شرایط حل‌پذیری و معیار Routh-Herwitz شرایط پایداری به صورت تحلیلی تعمیم داده شد و به صورت یکسان تاثیر پارامترهای سیستم روی رفتار ارتعاشی، پایداری و همچنین نقاط مرزی انشعابی همراه با مطالعه پارامتریک بررسی شده‌اند.

آقای تنگ و همکاران [17] فرکانس های طبیعی، شکل مودها و سرعت بحرانی تیرهای متحرک محوری در شرایط مرزی مختلف را بر اساس مدل تیموشنکو تحلیل کرده‌اند. معادلات دیفرانسیل حرکت از قانون دوم نیوتن استخراج شده‌است. تاثیر پارامترهای مختلف به ترتیب سرعت محوری، اینرسی دورانی، تغییر شکل برشی¹، در حالی که سایر پارامترها ثابت هستند، بررسی شده‌است. بعضی از مثال های عددی برای مقایسه فرکانس های طبیعی برای چهار مدل تیر تیموشنکو، مدل ریلی، مدل برشی و مدل اولر برنولی ارائه کرده‌اند. سرعت بحرانی برای شرایط مرزی مختلف بدست آمده و با نتایج عددی مقایسه کرده‌اند.

آقایان پاکدمیرلی و اوز [18] ارتعاش عرضی تیرهای اولربرنولی متحرک محوری با تکیه گاه ساده را بررسی کرده‌اند. سرعت محوری تیر را متغیر با زمان (به صورت متوسط ثابت همراه با تغییرات هارمونیک) همراه با استهلاك ویسکوز فرض نموده‌اند. شرایط مرزی به صورت تکیه گاه ساده فرض شده است. توابع ویژه تیرهای متحرک با تعداد بی نهایت مود مورد بررسی قرار گرفته‌است. روش multiple scale به صورت مستقیم برای حل معادلات مشتق جزئی به کار گرفته شده‌است. یک تحلیل با جزئیات درباره رزونانس به اندازه چهار مود ارتعاش انجام شده‌است. تحلیل پایداری برای هر نوع از رزونانس بحث شده است.

آقای قایش و همکاران [19] ارتعاشات و پایداری تیرهای متحرک محوری لایه ای کامپوزیت را به صورت تحلیلی و با روش multiple scale بررسی کرده‌اند. شرایط مرزی را برای تیر با تکیه گاه ساده فرض شده و بررسی برای دو نمونه هنگامی که سرعت آن ثابت و هنگامی که سرعت متغیر با زمان دارد، انجام شده‌است. تمام لایه ها چگالی و ضخامت یکسان و همگی از مواد ارتوتروپیک یکسان ساخته شده‌اند. بر اساس تئوری

¹ shear deformation

فصل اول: کلیات و مرور مطالب

کلاسیک تیر لایه‌ای، معادلات حرکت را برای سرعت وابسته به زمان با استفاده از قانون دوم نیوتن و روابط بنیادین بدست آورده‌اند. روش $multiple\ scale$ را به صورت مستقیم برای بدست آوردن معادلات حرکت و فرکانس های طبیعی یک سیستم به کار گرفته شده است. مرزهای پایداری یک سیستم نزدیک به رزونانس از ارضای شرایط حل پذیری و معیار Routh-Herwitz بدست آمده است. در نهایت یک مطالعه پارامتریک که تاثیر نوع لایه‌ها و ساختار آن بعلاوه سرعت متوسط و دامنه نوسانات سرعت روی پاسخ ارتعاشی، فرکانس طبیعی و مرزهای پایداری سیستم را مشخص می‌کند انجام شده است. شبیه سازی عددی برای دو نمونه پلیمر گرافیت و پلیمر شیشه با زاویه‌های مختلف انجام شده است.

آقایان چن و ونگ [20] از روش اغتشاشات مجانبی¹ برای بررسی پایداری تیر ویسکو الاستیک متحرک محوری استفاده کرده اند. در روابط بنیادین ویسکو الاستیک از مشتق زمانی استفاده شده است. سرعت محوری با تغییرات هارمونیک ساده و ثابت ماندن سرعت متوسط مشخص شده است. روش کوادراتور دیفرانسیلی² برای حل عددی معادلات تیر ویسکو الاستیک متحرک با تکیه گاه ساده استفاده شده است. مرزهای پایداری به صورت عددی در رزونانس پارامتریک مجموع و رزونانس پارامتریک اصلی واقع شده اند. مثال‌های عددی تاثیرات ویسکوزیته تیر و سرعت محوری را نشان می‌دهند. محاسبات عددی صحت نتایج تحلیلی را در رزونانس پارامتریک اصلی را به اثبات می‌رساند.

آقایان چن و ونگ [21] پایداری یک تیر متحرک محوری ویسکو الاستیک که با مدل استاندارد جامد خطی مدل شده است را بررسی کرده اند. مشتق مادی زمانی در روابط بنیادین ویسکو الاستیک استفاده شده است. شرایط ناپایداری برای حالت ترکیبی و رزونانس پارامتریک اصلی با روش تحلیلی مجانبی مشخص شده است. روش کوادراتور دیفرانسیلی برای حل عددی معادلات با مشتقات جزئی حرکت عرضی تیر ویسکو الاستیک متحرک محوری تعمیم داده شده است. شرایط پایداری به صورت عددی در دامنه تحریک و

¹Asymptotic perturbation

²Differential Quadrature

صفحه فرکانس تحریک قرار گرفته‌اند. شبیه‌سازی عددی تاثیرات ویسکوزیته، سفتی و سرعت متوسط را نشان می‌دهد.

آقای یانگ و همکاران [22] یک حل تقریبی برای تیر تیموشنکو ویسکوالاستیک تحت فرکانس تحریک چندگانه ارائه کرده‌اند. معادلات حاکم بر ارتعاش عرضی تیر از قانون دوم نیوتن و روابط بنیادین کلومین و کرنش لاگرانژی استخراج شده‌اند که بر اساس روش گالرکین ساده شده یک عبارتی به معادلات دیفرانسیل معمولی کاهش پیدا کرده‌اند و توسط روش multiple scale حل شده‌اند. شرایط مرزی تکیه گاه ساده و سرعت متوسط ثابت فرض شده‌است. سه نمونه شامل نمونه رزونانس سوپر هارمونیک، رزونانس ساب هارمونیک و رزونانس ترکیبی مطالعه شده‌است. حل تقریبی ارتعاش عرضی تیر بدست آمده‌است. حل عددی با روش رانج کوتای مرتبه چهار برای مقایسه با نتایج تحلیلی استفاده شده‌است و نشان می‌دهد که حل‌های تقریبی در توافق خوبی با نتایج عددی هستند.

آقای تنگ و همکاران [23] ارتعاش غیر خطی تحت تحریک ضعیف و قوی را برای تیر متحرک محوری بر اساس مدل تیموشنکو بررسی کرده‌اند. معادله حرکت را از قانون دوم نیوتن با احتساب هندسه غیر خطی که در اثر کشیدگی محدود تیر ایجاد می‌شود، استخراج شده‌است. شرایط مرزی تکیه گاه ساده فرض شده‌است. با استفاده از روش multiple scale رزونانس اولیه، تحریک‌های دارای بسامد غیر مشابه¹، رزونانس سوپرهارمونیک و ساب هارمونیک را بررسی شده‌است. با مثال‌های عددی تاثیر بعضی از پارامتر مانند سرعت محوری، دامنه تحریک خارجی و غیر خطی بودن را که روی دامنه پاسخ برای اولین و دومین مود موثر بوده، ارائه شده‌است.

آقای چن و همکاران [24] پایداری دینامیکی در رزونانس پارامتریک تیر تیموشنکو ویسکوالاستیک متحرک محوری را بررسی کرده‌اند. با استفاده از تئوری تیر تیموشنکو، تاثیرات برش عرضی و اینرسی دورانی نیز به

¹ Noncylindrical excitation

فصل اول: کلیات و مرور مطالب

حساب آمده‌است. خواص تیر از مدل کلونین که در آن مشتق مادی¹ به کار گرفته شده، پیروی می‌کند. سرعت محوری با تغییرات هارمونیک ساده و ثابت ماندن سرعت متوسط مشخص شده‌است. شرایط مرزی به صورت تکیه گاه ساده در نظر گرفته شده‌است. معادلات حاکم توسط قانون دوم نیوتن و اصل ممان اینرسی دورانی اولر و روابط بنیادین، استخراج شده‌اند. روش multiple scale برای معادلاتی که در شرایط حل‌پذیری رزونانس پارامتریک اصلی و مجموع برقرار شده‌اند، به کار گرفته شده‌است. شرایط کافی و مناسب برای پایداری با معیار Routh-Herwitz استخراج شده‌اند.

آقای قایش و خانم بالار [25] ارتعاش پارامتریک غیرخطی و پایداری یک تیر تیموشنکو متحرک محوری را برای دو مدل دینامیکی بررسی کرده‌اند. اولین مدل با در نظر گرفتن تنها جابجایی عرضی و دومین نوع با در نظر گرفتن هر دو مدل جابجایی طولی و عرضی است. سرعت متوسط ثابت با تغییرات هارمونیک کوچک است. مجموعه معادلات با مشتقات جزئی غیر خطی هر دو مدل با استفاده از روش انرژی استخراج شده‌اند. روش multiple scale برای هر دو مدل به کار گرفته شده است و با استفاده از معادلات مرتبه اول معادلات شکل مودها و فرکانس های طبیعی بدست آمده‌اند. سپس برای معادلاتی بر طبق مرتبه ϵ ، شرایط حل پذیری برای رزونانس نمونه‌ها بررسی شده‌اند و مرزهای پایداری به صورت تحلیلی همراه با معیار Routh-Herwitz بدست آمده‌اند.

آقای یانگ و همکاران [26] پایداری دینامیکی را در ارتعاش پارامتریک عرضی یک تیر تحت کشش متحرک محوری را که با مدل تیموشنکو روی تکیه گاه ساده فرض شده‌است، بررسی کرده‌اند. سرعت محوری به صورت نوسانات هارمونیک حول سرعت متوسط فرض شده‌است. روش گالرکین برای ساده کردن معادلات حاکم به یک سری معادلات دیفرانسیل المان محدود منجر شده است. روش متوسط گیری برای تحلیل پایداری پدیده‌های ایجاد شده با رزونانس ترکیبی و ساب هارمونیک به کار گرفته شده‌است. مثال‌های عددی

¹ Material derivative

تأثیر سرعت متوسط محوری، سفتی خمشی، اینرسی دورانی و مدول برشی را روی شرایط پایداری را نشان می‌دهند.

1-8-1- جمع بندی

با توجه به کاربردهای فراوان تیرهای متحرک محوری، بررسی پاسخ و پایداری دینامیکی مربوط به آن‌ها در ارتعاشات عرضی حائز اهمیت می‌باشد. تحقیقات زیادی در مورد ارتعاشات عرضی تیرها در حالت الاستیک و ویسکوالاستیک انجام شده‌است. برای تیرهای الاستیک متحرک محوری، ارتعاش تیرهای متحرک محوری که سرعت وابسته به زمان داشته، ارتعاش پارامتریک غیر خطی با تئوری تیموشنکو با دو مدل با در نظر گرفتن جابجایی عرضی و طولی و بدون در نظر گرفتن جابجایی طولی، ارتعاش پارامتریک غیر خطی تحت فرکانس تحریک ضعیف و قوی ارائه شده‌است و برای تیرهای ویسکوالاستیک متحرک محوری، ارتعاشات آزاد با تکیه گاه‌های ساده و هیبریدی، ارتعاش پارامتریک غیر خطی تیر با تئوری ریلی ارائه شده‌است. در اکثر تحقیقات ارائه شده، پایداری تیرهای متحرک محوری اعم از الاستیک و ویسکو الاستیک بحث شده است ولی هیچ کدام تحلیل ارتعاشی این نوع تیرها را بررسی نکرده‌اند. اکثر آن‌ها با تئوری اولر و مدل ویسکوالاستیک خطی کلوین تیر را تحلیل کرده‌اند، لذا با تئوری تیموشنکو که برای توصیف رفتار تیر واقعی‌تر بوده و برای توصیف رفتار ویسکوالاستیک از مدل استاندارد که مدل کامل‌تری نسبت به مدل کلوین می‌باشد، استفاده کمتری شده‌است. همچنین تحلیل ارتعاشی مرتبه یک معادلات در حالت مودال و رزونانس پارامتریک اصلی، تعیین سرعت بحرانی، بررسی اثر پارامترهای هندسی و ویسکوالاستیک بر فرکانس طبیعی و سرعت بحرانی از جنبه‌های جدید این تحقیق می‌باشد.

c d

فصل دوم: استخراج و حل معادلات حاکم

b a

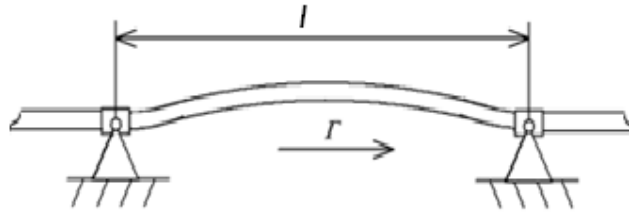
2-1- مقدمه

در این بخش معادلات حرکت تیر تیموشنکو متحرک محوری با استفاده از قانون دوم نیوتن و اصل ممان اینرسی دورانی اولر استخراج شده و با روش اغتشاشات (multiple scale) حل شده است. فرضیات زیر در استخراج معادلات در نظر گرفته شده است:

1. بارگذاری، محوری است.
2. تکیه گاه، ساده فرض می شود.
3. مدل ماده، استاندارد خطی است.
4. کرنش ها کوچک فرض می شوند.
5. کشش یا سرعت، متغیر فرض می شود.
6. تیر با تئوری تیموشنکو تعریف می شود.
7. سطح مقطع تیر، ثابت و مستطیلی است.

2-2- استخراج معادلات حرکت

یک تیر متحرک محوری یکنواخت تیموشنکو با چگالی ρ و سطح مقطع A ممان اینرسی I کشش اولیه محوری P مد نظر است که با سرعت وابسته به زمان $\Gamma(T)$ بین دو تکیه گاه ساده به فاصله l حرکت می کند. هنگامی که تاثیرات اینرسی دورانی و تغییر شکل برشی در نظر گرفته می شود ارتعاشات خمشی با دو متغیری که وابسته به محور مختصات X و زمان T به نام های جابجایی عرضی $V(X, T)$ و شیب منحنی خیز $\phi(X, T)$ که ناشی از تغییر شکل برشی تنها است، می تواند توصیف شود.



شکل (2-1). مدل فیزیکی تیر متحرک محوری [26]

در این حالت برای به حساب آوردن اتلاف انرژی در حرکت یکنواخت از مشتق مادی زمانی (لاگرانژی) استفاده می شود [27].

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T} + \Gamma \frac{\partial}{\partial X} \quad (1-2)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{\partial^2}{\partial T^2} + 2\Gamma \frac{\partial}{\partial X} \frac{\partial}{\partial T} + \Gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial \Gamma}{\partial T} \frac{\partial}{\partial X} \quad (2-2)$$

با به کارگیری قانون دوم نیوتن در جهت جابجایی عرضی نتیجه می شود [26]:

$$\sum F = m * a \quad \rightarrow \quad \rho A \ddot{V} = P V_{,XX} - Q_{,X} \quad (3-2)$$

با توجه به اینکه از مشتق مادی زمانی استفاده می شود:

$$\rho A \left(V_{,TT} + 2 \Gamma V_{,XT} + \dot{\Gamma} V_{,X} + \Gamma^2 V_{,XX} \right) = P V_{,XX} - Q_{,X} \quad (4-2)$$

که $Q(X, T)$ نیروی برشی است. قانون مومنتوم زاویه ای اولر منجر به معادله :

$$\sum M = I * \alpha \quad \rightarrow \quad \rho I \Phi_{,TT} = M_{,X} - Q \quad (5-2)$$

که α شتاب زاویه ای و $M(X, T)$ به عنوان ممان خمشی تعریف می شود :

$$M = \int \int \sigma z dA = \int E \epsilon z dA = \int E \frac{\partial \Phi}{\partial X} z^2 dA = EI \frac{\partial \Phi}{\partial X} \quad (6-2)$$

فصل دوم: استخراج و حل معادلات حاکم

که ممان اینرسی سطح بوده و به صورت $\iint z^2 dA$ تعریف می‌شود. همچنین E مدول الاستیک و ϵ کرنش است که به صورت

$$\epsilon = z \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (7-2)$$

برای ماده ای که رفتار آن در فشار تراکم ناپذیر و در برش ویسکوالاستیک است می‌توان نوشت [3]:

$$k = \infty, \quad \nu = 0.5 \quad (8-2)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad G = \frac{q^E}{2p^E} \quad (9-2)$$

بنابراین از معادله (6-2) نتیجه می‌شود:

$$M = \frac{3q^E}{2p^E} I \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (10-2)$$

تغییر شکل برشی و نیروی برشی با روابط زیر تعریف می‌شود:

$$\theta(X, T) = \phi(X, T) - V_{,X} \quad (11-2)$$

$$Q = kAG(\phi(X, T) - V_{,X}) = KA \frac{q^E}{2p^E} (\phi - V_{,X}) \quad (12-2)$$

لذا معادلات (4-2) و (5-2) به صورت زیر در می‌آیند:

$$\begin{aligned} \rho A (V_{,TT} + 2 \Gamma V_{,XT} + \dot{\Gamma} V_{,X} + \Gamma^2 V_{,XX}) \\ = P V_{,XX} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^E}{2p^E} KA (\phi - V_{,X}) \right) \end{aligned} \quad (13-2)$$

$$\rho I \Phi_{,TT} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{3q^E}{2p^E} I \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) - \frac{q^E}{2p^E} KA (\phi - V_{,X}) \quad (14-2)$$

با ضرب طرفین معادلات را در p^E نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \rho A (p^E) (V_{,TT} + 2 \Gamma V_{,XT} + \dot{\Gamma} V_{,X} + \Gamma^2 V_{,XX}) \\ = P (p^E V_{,XX}) - \frac{1}{2} KA \frac{\partial}{\partial x} (q^E (\phi - V_{,X})) \end{aligned} \quad (15-2)$$

$$\rho I (p^E \phi_{,TT}) = \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial x} (q^E I \frac{\partial \phi}{\partial x}) - \frac{1}{2} kA (q^E (\phi - V_{,X})) \quad (16-2)$$

ایراتورهای ویسکوالاستیک برای مدل استاندارد جامدخطی رابطه (1 - 7) با اعمال مشتق مادی زمانی به صورت:

$$p^E = \eta_1 \frac{d}{dt} + E_1 = \left(\eta_1 \frac{\partial}{\partial T} + \eta_1 \Gamma \frac{\partial}{\partial X} + E_1 \right) \quad (17-2)$$

$$\begin{aligned} q^E = \eta_1 (E_1 + E_2) \frac{d}{dt} + E_1 E_2 = \eta_1 (E_1 + E_2) \left(\frac{\partial}{\partial T} + \Gamma \frac{\partial}{\partial X} \right) + E_1 E_2 \\ = \left(\eta_1 E_0 \frac{\partial}{\partial T} + \eta_1 E_0 \Gamma \frac{\partial}{\partial X} + E_3 \right) \end{aligned} \quad (18-2)$$

$$E_0 = (E_1 + E_2) \quad , \quad E_3 = E_1 E_2 \quad (19-2)$$

با اعمال پارامترهای ذکر شده در معادلات (15-2) و (19-2)، معادلات ذیل حاصل می شود:

$$\begin{aligned} \rho A \left(\eta_1 \frac{\partial}{\partial T} + \eta_1 \Gamma \frac{\partial}{\partial X} + E_1 \right) (V_{,TT} + 2 \Gamma V_{,XT} + \dot{\Gamma} V_{,X} + \Gamma^2 V_{,XX}) \\ - P \left(\eta_1 \frac{\partial}{\partial T} + \eta_1 \Gamma \frac{\partial}{\partial X} + E_1 \right) (V_{,XX}) \\ + \frac{1}{2} kA \left(\eta_1 E_0 \frac{\partial}{\partial T} + \eta_1 E_0 \Gamma \frac{\partial}{\partial X} + E_3 \right) (\phi_{,X} - V_{,XX}) = 0 \end{aligned} \quad (20-2)$$

$$\begin{aligned} \rho I \left(\eta_1 \frac{\partial}{\partial T} + \eta_1 \Gamma \frac{\partial}{\partial X} + E_1 \right) (\phi_{,TT}) \\ - \frac{3}{2} I \left(\eta_1 E_0 \frac{\partial}{\partial T} + \eta_1 E_0 \Gamma \frac{\partial}{\partial X} + E_3 \right) (\phi_{,XX}) \\ + \frac{1}{2} kA \left(\eta_1 E_0 \frac{\partial}{\partial T} + \eta_1 E_0 \Gamma \frac{\partial}{\partial X} + E_3 \right) (\phi - V_{,X}) = 0 \end{aligned} \quad (21-2)$$

با ساده سازی معادلات فوق :

$$\begin{aligned}
 & 2\rho A \eta_1 V_{,TTT} + 2\rho A E_1 V_{,TT} + 6\rho A \Gamma \eta_1 V_{,XTT} \\
 & + \left(6\rho A \Gamma^2 \eta_1 - 2P\eta_1 - KA\eta_1 E_0 \right) V_{,XXT} \\
 & + \left(2\rho A \Gamma^3 \eta_1 - KA\eta_1 \Gamma E_0 - 2P\Gamma\eta_1 \right) V_{,XXX} \\
 & + \left(-2PE_1 + 2\rho A \Gamma^2 E_1 - KA E_3 \right) V_{,XX} + 2\rho A \eta_1 \ddot{\Gamma} V_{,X} \quad (22-2) \\
 & + 6\rho A \Gamma \eta_1 \dot{\Gamma} V_{,XX} + 6\rho A \eta_1 \dot{\Gamma} V_{,XT} + 2\rho A E_1 \dot{\Gamma} V_{,X} \\
 & + KA\eta_1 \Gamma E_0 \phi_{,XX} + KA E_3 \phi_{,X} + KA\eta_1 E_0 \phi_{,XT} \\
 & + 4\rho A \Gamma E_1 V_{,XT} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 2\rho I \eta_1 \phi_{,TTT} + 2\rho I E_1 \phi_{,TT} + 2\rho I \eta_1 \Gamma \phi_{,XTT} - 3I \eta_1 E_0 \phi_{,XXT} \\
 & + KA\eta_1 E_0 \phi_{,T} - 3IE_3 \phi_{,XX} - 3I \eta_1 \Gamma E_0 \phi_{,XXX} + KAE_3 \phi \quad (23-2) \\
 & + KA\eta_1 \Gamma E_0 \phi_{,X} - KA\eta_1 E_0 V_{,XT} - KA\eta_1 \Gamma E_0 V_{,XX} \\
 & - KAE_3 V_{,X} = 0
 \end{aligned}$$

معادلات (22-2) و (23-2) یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی با ضرایب متغیر (وابسته به زمان) است.

2-3- بی بعدسازی معادلات

برای بی بعد سازی معادلات پارامترهای بی بعد زیر معرفی می‌شود:

$$t^* = \frac{T}{t_0}, \quad x^* = \frac{X}{l}, \quad V^* = \frac{V}{h_0}, \quad \varepsilon = \frac{h_0}{l} \quad (24-2)$$

لذا معادلات (22-2) و (23-2) به صورت زیر ساده می‌شوند:

$$\begin{aligned}
 & 2\rho A \eta_1 \frac{h_0}{t_0^3} V^*_{,t^*t^*t^*} + 2\rho A E_1 \frac{h_0}{t_0^2} V^*_{,t^*t^*} + 6\rho A \Gamma \eta_1 \frac{h_0}{l t_0^2} V^*_{,x^*t^*t^*} \\
 & + \left(6\rho A \Gamma^2 \eta_1 - 2P\eta_1 - KA\eta_1 E_0 \right) \frac{h_0}{l^2 t_0^2} V^*_{,x^*x^*t^*} \\
 & + \left(2\rho A \Gamma^3 \eta_1 - KA\eta_1 \Gamma E_0 - 2P\Gamma \eta_1 \right) \frac{h_0}{l^3} V^*_{,x^*x^*x^*} \\
 & + \left(-2PE_1 + 2\rho A \Gamma^2 E_1 - KA E_3 \right) \frac{h_0}{l^2} V^*_{,x^*x^*} \\
 & + 2\rho A \eta_1 \frac{h_0}{l t_0^2} \Gamma_{,t^*t^*} V^*_{,x^*} + 6\rho A \Gamma \eta_1 \frac{h_0}{l^2 t_0} \Gamma_{,t^*} V^*_{,x^*x^*} \\
 & + 6\rho A \eta_1 \frac{h_0}{l t_0^2} \Gamma_{,t^*} V^*_{,x^*t^*} + 2\rho A E_1 \frac{h_0}{l t_0} \Gamma_{,t^*} V^*_{,x^*} \\
 & + 4\rho A \Gamma E_1 \frac{h_0}{l t_0} V^*_{,x^*t^*} + KA\eta_1 \Gamma E_0 \frac{1}{l^2} \phi^*_{,x^*x^*} \\
 & + KA E_3 \frac{1}{l} \phi^*_{,x^*} + KA\eta_1 E_0 \frac{1}{l t_0} \phi^*_{,x^*t^*} = 0
 \end{aligned} \tag{۲۵-۲}$$

$$\begin{aligned}
 & 2\rho I \eta_1 \frac{1}{t_0^3} \phi^*_{,t^*t^*t^*} + 2\rho I E_1 \frac{1}{t_0^2} \phi^*_{,t^*t^*} + 2\rho I \Gamma \eta_1 \frac{1}{l t_0^2} \phi^*_{,x^*t^*t^*} \\
 & - 3I \eta_1 E_0 \frac{1}{l^2 t_0} \phi^*_{,x^*x^*t^*} + KA\eta_1 E_0 \frac{1}{t_0} \phi^*_{,t^*} \\
 & - 3I E_3 \frac{1}{l^2} \phi^*_{,x^*x^*} - 3I \Gamma \eta_1 E_0 \frac{1}{l^3} \phi^*_{,x^*x^*x^*} + KA E_3 \phi^* \\
 & + KA\eta_1 \Gamma E_0 \frac{1}{l} \phi^*_{,x^*} - KA\eta_1 E_0 \frac{h_0}{l t_0} V^*_{,x^*t^*} \\
 & - KA\eta_1 \Gamma E_0 \frac{h_0}{l^2} V^*_{,x^*x^*} - KA E_3 \frac{h_0}{l} V^*_{,x^*} = 0
 \end{aligned} \tag{۲۶-۲}$$

علاوه بر پارامترهای بی بعد (24-2) پارامترهای زیر نیز که در معادلات فوق ظاهر شده اند معرفی می شوند:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{t}_0 &= \frac{\mathbf{h}_0}{\Gamma_0}, \quad e = \frac{\rho}{E_2} \left(\frac{\mathbf{h}_0}{\mathbf{t}_0} \right)^2, \quad \gamma^* = \frac{\Gamma}{\Gamma_0}, \quad \tau_0 = \frac{\eta_1}{E_1}, \\
 \tau^* &= \frac{\tau_0}{\varepsilon t_0}, \quad \mathbf{P}^* = \frac{\mathbf{P}}{A E_2}, \quad \mathbf{G}^* = \frac{E_1}{E_2} + 1, \\
 \mathbf{r}^* &= \frac{A \mathbf{h}_0^2}{I}, \quad x^* = \eta \varepsilon, \quad \omega^* = \omega t_0
 \end{aligned} \tag{۲۷-۲}$$

فصل دوم: استخراج و حل معادلات حاکم

کمیت هایی که * مشخص شده‌اند، بی بعد هستند. به این ترتیب معادلات (25-2) و (26-2) به صورت زیر تبدیل می‌شوند:

$$\begin{aligned}
 & 2e\tau^*\varepsilon V^*_{,t^*t^*t^*} + 2eV^*_{,t^*t^*} + 6e\tau^*\gamma^*\varepsilon V^*_{,\eta t^*t^*} \\
 & + (6e\tau^*\gamma^{*2}\varepsilon - 2P^*\tau^*\varepsilon - K\tau^*G^*\varepsilon) V^*_{,\eta\eta t^*} \\
 & + (2e\tau^*\gamma^{*3}\varepsilon - 2P^*\tau^*\gamma^*\varepsilon - K\tau^*\gamma^*G^*\varepsilon) V^*_{,\eta\eta\eta} \\
 & + (-2P^* + 2e\gamma^{*2} - K) V^*_{,\eta\eta} + (2e\tau^*\varepsilon\gamma^*_{,t^*t^*} \\
 & + 2e\gamma^*_{,t^*}) V^*_{,\eta} + 6e\tau^*\gamma^*\varepsilon\gamma^*_{,t^*} V^*_{,\eta\eta} \\
 & + 6e\tau^*\varepsilon\gamma^*_{,t^*} V^*_{,\eta t^*} + 4e\gamma^* V^*_{,\eta t^*} \\
 & + K\tau^*\gamma^*G^*\varepsilon\phi^*_{,\eta\eta} + K\phi^*_{,\eta} + K\tau^*G^*\varepsilon\phi^*_{,\eta t^*} = 0
 \end{aligned} \tag{۲۸-۲}$$

$$\begin{aligned}
 & 2e\tau^*r^*\varepsilon\phi^*_{,t^*t^*t^*} + 2er^*\phi^*_{,t^*t^*} + 2e\tau^*r^*\gamma^*\varepsilon\phi^*_{,\eta t^*t^*} \\
 & - 3G^*\tau^*r^*\varepsilon\phi^*_{,\eta\eta t^*} + KG^*\tau^*\varepsilon\phi^*_{,t^*} - 3r^*\phi^*_{,\eta\eta} \\
 & - 3G^*\tau^*r^*\varepsilon\gamma^*\phi^*_{,\eta\eta\eta} + K\phi^*_{,\eta} + KG^*\tau^*\gamma^*\varepsilon\phi^*_{,\eta} \\
 & - KG^*\tau^*\varepsilon V^*_{,\eta t^*} - KG^*\tau^*\gamma^*\varepsilon V^*_{,\eta\eta} - K V^*_{,\eta} = 0
 \end{aligned} \tag{۲۹-۲}$$

معادلات (28-2) و (29-2) شکل بی بعد معادلات حاکم (22-2) و (23-2) می‌باشند.

4-2- تحلیل با روش (multiple scale)

سرعت تیر به صورت یک مقدار متوسط همراه با تغییرات هارمونیک کوچک در نظر گرفته می‌شود.

$$\gamma^* = 1 + \varepsilon \frac{\gamma_1}{\gamma_0} \sin(\omega^* t^*) \quad (30-2)$$

که γ_0 سرعت متوسط ثابت، $\varepsilon \gamma_1$ و ω^* به ترتیب دامنه و فرکانس نوسانات سرعت محوری است که همه به شکل بی بعد می‌باشند.

برای حل معادلات کوپل (28-2) و (29-2) از روش multiple scale در تئوری اغتشاشات استفاده شده است. حل معادلات فوق به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$V^*(\eta, t^*; \varepsilon) = v_0(\eta, T_0, T_1) + \varepsilon v_1(\eta, T_0, T_1) + O(\varepsilon^2) \quad (31-2)$$

$$\phi^*(\eta, t^*; \varepsilon) = \phi_0(\eta, T_0, T_1) + \varepsilon \phi_1(\eta, T_0, T_1) + O(\varepsilon^2) \quad (32-2)$$

که $T_1 = \varepsilon t^*$ و $T_0 = t^*$ بر این اساس

$$\frac{\partial}{\partial t^*} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + O(\varepsilon^2),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^{*2}} = \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} + O(\varepsilon^2), \quad (33-2)$$

$$\frac{\partial^3}{\partial t^{*3}} = \frac{\partial^3}{\partial T_0^3} + 3\varepsilon \frac{\partial^3}{\partial T_0^2 \partial T_1} + O(\varepsilon^2)$$

با جایگذاری روابط (31-2) تا (33-2) در معادلات (28-2) و (29-2) و جداسازی معادلات بر اساس ضرایب

ε^0 و ε^1 معادلات زیر حاصل می‌شود:

معادلات مرتبه صفر:

$$2e \frac{\partial^2 v_0}{\partial T_0^2} + 4e \frac{\partial^2 v_0}{\partial \eta \partial T_0} + K \frac{\partial \phi_0}{\partial \eta} + (-2P^* + 2e - K) \frac{\partial^2 v_0}{\partial \eta^2} = 0 \quad (34-2)$$

$$2e \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial T_0^2} - 3r^* \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial \eta^2} + K \phi_0 - K \frac{\partial v_0}{\partial \eta} = 0 \quad (35-2)$$

معادلات مرتبه 1:

$$\begin{aligned} 2e \frac{\partial^2 v_1}{\partial T_0^2} + 4e \frac{\partial^2 v_1}{\partial \eta \partial T_0} + K \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} + (-2P^* + 2e - K) \frac{\partial^2 v_1}{\partial \eta^2} \\ = (-6e\tau^* + KG^*\tau^* + 2P^*\tau^*) \frac{\partial^3 v_0}{\partial \eta^2 \partial T_0} - 6e\tau^* \frac{\partial^3 v_0}{\partial \eta \partial T_0^2} \\ - 4e \frac{\partial^2 v_0}{\partial \eta \partial T_1} - \frac{4e \gamma_1}{\gamma_0} \sin(\omega^* T_0) \frac{\partial^2 v_0}{\partial \eta \partial T_0} \\ + (-2e\tau^* + KG^*\tau^* + 2P^*\tau^*) \frac{\partial^3 v_0}{\partial \eta^3} \\ - \frac{4e \gamma_1}{\gamma_0} \sin(\omega^* T_0) \frac{\partial^2 v_0}{\partial \eta^2} - \frac{2e \gamma_1}{\gamma_0} \cos(\omega^* T_0) \omega^* \frac{\partial^3 v_0}{\partial \eta^2 \partial T_0} \\ - 4e \frac{\partial^2 v_0}{\partial T_0 \partial T_1} - KG^*\tau^* \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial \eta \partial T_0} - KG^*\tau^* \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial \eta^2} \end{aligned} \quad (36-2)$$

$$\begin{aligned} 2e \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial T_0^2} - 3r^* \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \eta^2} + K \phi_1 - K \frac{\partial v_1}{\partial \eta} \\ = 3G^*\tau^*r^* \frac{\partial^3 \phi_0}{\partial \eta^3} - KG^*\tau^* \frac{\partial \phi_0}{\partial \eta} - 2er^*\tau^* \frac{\partial^3 \phi_0}{\partial \eta \partial T_0^2} \\ - 4er^* \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial T_1 \partial T_0} - 3\tau^*r^*e \frac{\partial^3 \phi_0}{\partial T_0^3} - KG^*\tau^* \frac{\partial \phi_0}{\partial T_0} \\ + 3G^*\tau^*r^* \frac{\partial^3 \phi_0}{\partial \eta^2 \partial T_0} + KG^*\tau^* \frac{\partial^2 v_0}{\partial \eta^2} + KG^*\tau^* \frac{\partial^2 v_0}{\partial \eta \partial T_0} \end{aligned} \quad (37-2)$$

2-4-1- شرط مرزی تیر

برای تیر با تکیه گاه ساده شرط مرزی به صورت:

$$\begin{cases} V|_0^l = 0 \\ M|_0^l = 0 \end{cases} \quad (38-2)$$

که با بی بعد سازی شرط مرزی‌ها برای خیز

$$V(X=0, X=l) = 0 \quad \rightarrow \quad V^*(x^*=0, x^*=1) = 0 \quad (39-2)$$

با اعمال روش multiple scale بر معادله فوق

$$(v_0 + \varepsilon v_1)|_0^{1/\varepsilon} = 0 \quad (40-2)$$

و برای ممان خمشی با توجه به رابطه (10-2) نتیجه می‌شود:

$$M = \frac{3}{2} \cdot I \cdot q^E \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) |_0^l = 0 \quad \rightarrow \quad q^E \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) |_0^l = 0 \quad (41-2)$$

$$\rightarrow \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) |_0^l = 0$$

و با اعمال روش multiple scale بر معادله فوق:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\phi_0 + \varepsilon \phi_1) = 0 \quad (42-2)$$

با جداسازی جملات مرتبه صفر و یک ε ، شرایط مرزی در این مرتبه‌ها به صورت زیر خواهد بود:

$$O(\varepsilon^0) \begin{cases} v_0|_0^{1/\varepsilon} = 0 \\ \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial \eta} \right) |_0^{1/\varepsilon} = 0 \end{cases} \quad (43-2)$$

$$O(\varepsilon^1) \begin{cases} v_1|_0^{1/\varepsilon} = 0 \\ \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} \right) |_0^{1/\varepsilon} = 0 \end{cases} \quad (44-2)$$

2-5- حالت مودال

این حالت در صورتی رخ می‌دهد، که $\omega^* = \omega_n$ باشد.

پاسخ تیر (شکل مود) به صورت یک سری یکنواخت از پارامتر ε در نظر گرفته می‌شود و با تفکیک معادلات مرتبه صفر و یک، به حل مساله پرداخته می‌شود. بنابراین:

$$\begin{pmatrix} V^* \\ \phi^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \\ \phi_0 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} v_1 \\ \phi_1 \end{pmatrix} \quad (45-2)$$

که v_0, v_1, ϕ_0, ϕ_1 توابعی مجهول بوده که باید تعیین شوند.

2-5-1- آنالیز مودال برای معادلات مرتبه صفر

برای حل معادلات کوپل (2-34) و (2-35) خیز تیر و چرخش به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$v_0(\eta, T_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_0(\eta) e^{i\omega_n T_0}, \quad \phi_0(\eta, T_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_0(\eta) e^{i\omega_n T_0} \quad (46-2)$$

هنگامی که مود n ام تحریک می‌شود اثر این جمله در مقایسه با سایر جملات، بسیار زیاد است بنابراین فقط جمله n ام به عنوان پاسخ در نظر گرفته می‌شود. با جایگذاری (2-46) در (2-34) و (2-35) یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی با ضرایب ثابت حاصل می‌شود. حل این معادلات به شکل زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \vartheta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} e^{\beta\eta} \quad (47-2)$$

با جایگذاری (2-47) در این دستگاه نتیجه می‌شود:

$$-2eA_1\omega_n^2 + 4ei\omega_n A_1 + K\beta A_2 + (-2P^* + 2e - K)\beta^2 A_1 = 0 \quad (48-2)$$

$$-2eA_1\omega_n^2 - K\beta A_1 - 3r^*\beta^2 A_2 + KA_2 = 0$$

با توجه به این که مساله فوق، یک مساله مقدار ویژه است، لذا از یکی از معادلات فوق، پارامتر A_1 را بر حسب پارامتر A_2 تعیین و در معادله دیگر جایگزین می‌شود که نتیجه آن، معادله مشخصه سیستم است:

$$\begin{aligned}
 ax = & (3r^*K - 6r^*e + 6r^*P^*)\beta^4 - 12r^*e\beta^3i\omega_n \\
 & + (2Ke - 2KP^* + 2eKr^*\omega_n^2 - 4e^2r^*\omega_n^2 + 4er^*P^*\omega_n^2 \\
 & + 6r^*e\omega_n^2)\beta^2 + (4Kei\omega_n - 8e^2i\omega_n^3)\beta - 2Ke\omega_n^2 \\
 & + 4e^2r^*\omega_n^4
 \end{aligned} \quad (49-2)$$

معادله مشخصه چهار ریشه بر حسب ω_n دارد. به ازای هر ریشه، یک بردار ویژه به شکل زیر قابل تعیین است.

$$V_1 = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{K\beta}{-2e\omega_n^2 + 4e\beta i\omega_n - \beta^2 K + 2\beta^2 e - 2\beta^2 P^*} \right) A_2 \\ A_2 \end{pmatrix} \quad (50-2)$$

$$\text{for } A_2 = 1 \rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} \frac{K\beta}{-2e\omega_n^2 + 4e\beta i\omega_n - \beta^2 K + 2\beta^2 e - 2\beta^2 P^*} \\ 1 \end{pmatrix}$$

پاسخ سیستم عبارتست از:

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} v_0 \\ \phi_0 \end{Bmatrix} = & c_1 V_1|_{\beta=\beta_1} e^{i\beta_1 \eta} e^{i\omega_n T_0} + c_2 V_1|_{\beta=\beta_2} e^{i\beta_2 \eta} e^{i\omega_n T_0} \\
 & + c_3 V_1|_{\beta=\beta_3} e^{i\beta_3 \eta} e^{i\omega_n T_0} + c_4 V_1|_{\beta=\beta_4} e^{i\beta_4 \eta} e^{i\omega_n T_0}
 \end{aligned} \quad (51-2)$$

که c_1 تا c_4 ثابت هایی بر حسب T_1 هستند و از شرایط مرزی به دست می آیند.

با اعمال شرایط مرزی مرتبه صفر معادلات (2-43) به رابطه (2-51)، چهار معادله همگن حاصل می شود. این معادلات در صورتی حل غیر صفر دارند که دترمینان ضرایب مجهولات، صفر باشد. این دترمینان، منجر به یک رابطه بین ω_n و $\beta_i, i = 1..4$ می شود. با توجه به این که β_i تابع ω_n است یک معادله بر حسب ω_n به دست می آید که با حل آن، می توان ω_n را به دست آورد. در این صورت، از چهار معادله فوق، فقط سه معادله، مستقل بوده و می توان c_2 تا c_4 را بر حسب c_1 به دست آورد.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} V_0 \\ \phi_0 \end{Bmatrix} = \mathbf{C}(\mathbf{T}_1) & [\{V_1|\beta=\beta_1\}e^{i\beta_1\eta} + \{V_1|\beta=\beta_2\}e^{i\beta_2\eta} + \{V_1|\beta=\beta_3\}e^{i\beta_3\eta} \\ & + \{V_1|\beta=\beta_4\}e^{i\beta_4\eta}]e^{i\omega_n T_0} \end{aligned} \quad (52-2)$$

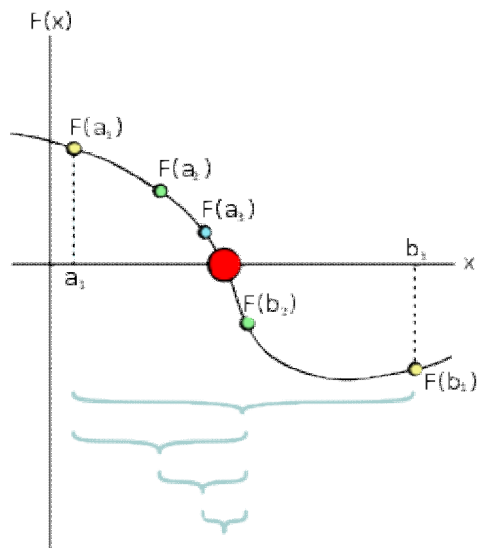
الف) تعیین فرکانس طبیعی تیر

هر چند از نظر تئوری، به کمک رابطه (2-49) می توان فرکانس طبیعی را تعیین کرد ولی به علت پیچیدگی شکل ریشه های معادله مشخصه و بالا بودن حجم محاسبات، عملاً امکان محاسبه فرکانس طبیعی با این روش وجود ندارد. در عوض معادله مشخصه و دترمینان ضرایب، همزمان به صورت عددی حل می شوند. برای انجام حل عددی از روش نصف کردن¹ استفاده شده است.

روش نصف کردن

این روش، یک روش ریاضی در ریشه یابی است که به صورت تکرار هر بازه نصف شده و سپس یک بازه جایگزین انتخاب می شود. برای حل لازم است، تابع $f(x) = 0$ در بازه (a, b) پیوسته و تعریف شده باشد و $f(a)$ و $f(b)$ مختلف علامه بوده لذا تابع f باید در این بازه حداقل یک ریشه داشته باشد. در هر گام، در این روش نقطه میانی بازه به صورت $c = \frac{a+b}{2}$ تعریف شده، حال مقدار تابع را در نقطه میانی بازه تعیین کرده، اگر $f(a) < 0$ ، $f(c)$ ، بازه جدید به صورت (a, c) در می آید در غیر اینصورت بازه جدید (b, c) خواهد شد. در این روش در هر مرحله طول بازه 50% کاهش پیدا می کند و تا جایی ادامه پیدا می کند تا طول بازه به اندازه کافی کوچک شود. در این پروژه نیز از همین روش استفاده شد. به این صورت که بین کوچکترین بازه از اعدادی که در دترمینان ماتریس ضرایب صدق می کنند روش نصف کردن اعمال می شود تا جایی که مقدار ریشه بدست آمده از تلورانس در نظر گرفته شده، کوچکتر باشد [29].

¹ Bisection



شکل (2-2). شماتیک روش Bisection [29].

2-5-2- آنالیز مودال برای معادلات مرتبه یک

در این حالت ابتدا معادلات (2-46) را به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$v_0(\eta, T_0, T_1) = \sum_{n=1}^{\infty} C(T_1) \varphi_0(\eta) e^{i\omega_n T_0}, \quad (2-53)$$

$$\phi_0(\eta, T_0, T_1) = \sum_{n=1}^{\infty} C(T_1) \vartheta_0(\eta) e^{i\omega_n T_0}$$

همچنین

$$v_1(\eta, T_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_1(\eta) e^{i\omega_n T_0}, \quad \phi_1(\eta, T_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_1(\eta) e^{i\omega_n T_0} \quad (2-54)$$

که اولین قدم تعیین $C(T_1)$ است، تا قسمت غیر همگن معادلات مرتبه یک معلوم شود.

تعیین $C(T_1)$

در این قسمت با استفاده از شرایط حل پذیری تابع $C(T_1)$ تعیین می‌شود به این صورت که دو تابع الحاقی ψ_1, ψ_2 در معادلات مرتبه صفر ضرب نموده و دو معادله با هم جمع شده و انتگرال گرفته می‌شود. در این حالت چون سیستم خود الحاق نیست لذا با دستگاه معادلات سروکار داشته و نمی‌توان به جای توابع الحاقی از شکل مودها استفاده نمود. معادلات مرتبه صفر با توجه به رابطه (53-2) به صورت زیر در می‌آید [5]:

$$\begin{aligned} \psi_1 \times (-2P^* + 2e - K) \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \eta^2} + 4ei\omega_n \frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta} - 2e\omega_n^2 \varphi_0 + K \frac{\partial \vartheta_0}{\partial \eta} \\ = 0 : Eq_1 \end{aligned} \quad (55-2)$$

$$\psi_2 \times -3r^* \frac{\partial^2 \vartheta_0}{\partial \eta^2} + (K - 2e\omega_n^2) \vartheta_0 - K \frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta} = 0 : Eq_2 \quad (56-2)$$

که ϑ_0, φ_0 قسمت‌های مکانی جواب مرتبه صفر، خیز و چرخش تیر هستند.

ضرایبی برای ساده سازی در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} a_1 = (-2P^* + 2e - K), \quad a_2 = 4ei\omega_n, \\ a_3 = -2e\omega_n^2, \quad b_1 = -3r^*, \\ b_2 = K - 2e\omega_n^2 \end{aligned} \quad (57-2)$$

با جایگذاری عبارات زیر در عبارات معادلات (55-2) و (56-2) نتیجه می‌شود:

$$\psi_1 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \eta^2} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\psi_1 \frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} \varphi_0 \right) + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \eta^2} \varphi_0$$

$$\psi_1 \frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} (\psi_1 \varphi_0) - \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} \varphi_0$$

$$\psi_1 \frac{\partial \vartheta_0}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} (\psi_1 \vartheta_0) - \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} \vartheta_0 \quad (58-2)$$

$$\psi_2 \frac{\partial^2 \vartheta_0}{\partial \eta^2} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\psi_2 \frac{\partial \vartheta_0}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial \eta} \vartheta_0 \right) + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \eta^2} \vartheta_0$$

$$\psi_2 \frac{\partial \vartheta_0}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} (\psi_2 \vartheta_0) - \frac{\partial \psi_2}{\partial \eta} \vartheta_0$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{1/\varepsilon} (\psi_1 \times Eq_1 + \psi_2 \times Eq_2) d\eta \\ &= \int_0^{1/\varepsilon} \left(a_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \eta^2} \varphi_0 - a_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} \varphi_0 - K \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} \vartheta_0 \right. \\ & \quad \left. + b_1 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \eta^2} \vartheta_0 + K \frac{\partial \psi_2}{\partial \eta} \varphi_0 + b_2 \psi_2 \vartheta_0 + a_3 \psi_1 \varphi_0 \right) d\eta \quad (59-2) \\ & \quad + \left[a_1 \left(\psi_1 \frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta} - \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} \varphi_0 \right) + a_2 \psi_1 \varphi_0 + K \psi_1 \vartheta_0 \right. \\ & \quad \left. + b_1 \left(\psi_2 \frac{\partial \vartheta_0}{\partial \eta} - \frac{\partial \psi_2}{\partial \eta} \vartheta_0 \right) - K \psi_2 \varphi_0 \right] \Big|_0^{1/\varepsilon} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{1/\varepsilon} (\psi_1 \times Eq_1 + \psi_2 \times Eq_2) d\eta \\ &= \int_0^{1/\varepsilon} \left(a_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \eta^2} - a_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} + K \frac{\partial \psi_2}{\partial \eta} + a_3 \psi_1 \right) \varphi_0 d\eta \\ & \quad + \int_0^{1/\varepsilon} \left(-K \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} + b_1 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \eta^2} + b_2 \psi_2 \right) \vartheta_0 d\eta \quad (60-2) \\ & \quad + a_1 \psi_1 \frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta} \Big|_0^{1/\varepsilon} + \left(-a_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} + a_2 \psi_1 - K \psi_2 \right) \varphi_0 \Big|_0^{1/\varepsilon} \\ & \quad + \left(K \psi_1 - b_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial \eta} \right) \vartheta_0 \Big|_0^{1/\varepsilon} + b_1 \psi_2 \frac{\partial \vartheta_0}{\partial \eta} \Big|_0^{1/\varepsilon} = 0 \end{aligned}$$

با توجه به معادله بالا توابع ψ_1, ψ_2 باید به ازای تمام مقادیر φ_0, ϑ_0 برقرار باشند لذا ضرایب آن ها در انتگرال برابر با صفر انتخاب می شود.

$$\left(a_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \eta^2} - a_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} + K \frac{\partial \psi_2}{\partial \eta} + a_3 \psi_1 \right) \varphi_0 = 0 \quad (61-2)$$

$$\left(-K \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} + b_1 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \eta^2} + b_2 \psi_2 \right) \vartheta_0 = 0$$

با توجه به شرایط مرزی تیر معادله (43-2) شرط مرزی های φ_0 و $b_1 \psi_2 \frac{\partial \vartheta_0}{\partial \eta}$ و $(-a_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} + a_2 \psi_1 - K \psi_2) \varphi_0$ ارضا می شوند لذا برای برقراری دو شرط مرزی دیگر باید روابط زیر برقرار باشد:

$$a_1 \psi_1 \frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta} \Big|_0^1 = 0 \quad \rightarrow \quad \psi_1 \Big|_0^{1/\varepsilon} = 0 \quad (62-2)$$

$$\left(K \psi_1 - b_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial \eta} \right) \vartheta_0 \Big|_0^1 = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial \eta} \Big|_0^{1/\varepsilon} = 0$$

حال برای حل معادلات کوپل (61-2) با شرط مرزی های (62-2) به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} e^{m\eta} \quad (63-2)$$

با نوشتن مساله به صورت ماتریسی و تعیین بردار ویژه آن:

$$[A_3] \psi'' + [A_2] \psi' + [A_1] \psi = (0) \quad (64-2)$$

که ماتریس های ضرایب به صورت:

$$[A_3] = \begin{bmatrix} a_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{b}_1 \end{bmatrix}, \quad [A_2] = \begin{bmatrix} -a_2 & K \\ -K & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad [A_1] = \begin{bmatrix} a_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} \quad (65-2)$$

است. لذا با توجه به این که این مساله نیز به صورت یک مساله مقدار ویژه می باشد، بردار ویژه آن:

$$V_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{b}_1 m^2 + \mathbf{b}_2}{Km} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} v_2 \quad (66-2)$$

است. دترمینان ماتریس ضرایب از درجه چهار بوده که از حل آن چهار مقدار برای m بدست می‌آید.

$$ax = m^4 a_1 b_1 \pm m^3 a_2 b_1 + (a_1 b_2 + a_3 b_1 + K^2) m^2 a_1 b_2 - m a_2 b_2 + a_3 b_2 \quad (۶۷-۲)$$

حل مساله به صورت:

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = (c_1 \{V_1 |_{m=m_1}\} e^{m_1 \eta} + c_2 \{V_1 |_{m=m_2}\} e^{m_2 \eta} + c_3 \{V_1 |_{m=m_3}\} e^{m_3 \eta} + c_4 \{V_1 |_{m=m_4}\} e^{m_4 \eta}) \quad (۶۸-۲)$$

با اعمال شرایط مرزی توابع الحاقی می‌توان ثابت‌های دیگر را بر حسب یک ثابت مشابه رابطه (52-2) بدست آورد.

پس از تعیین توابع الحاقی، این توابع در معادلات مرتبه یک به صورت زیر:

$$\int_0^{1/\varepsilon} (\psi_1 \times Eq_3 + \psi_2 \times Eq_4) d\eta = \int_0^{1/\varepsilon} (\psi_1 \times f_1 + \psi_2 \times f_2) d\eta \quad (۶۹-۲)$$

ضرب و انتگرال‌گیری می‌شود. Eq_3, Eq_4 طرف چپ معادلات مرتبه اول می‌باشند. با توجه به روابط

(36-2)، (37-2) و (54-2) به صورت زیر است:

$$(-2P^* + 2e - K) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \eta^2} + 4ei\omega_n \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} - 2e\omega_n^2 v_1 + K \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \eta} : Eq_3 \quad (۷۰-۲)$$

$$3r^* \frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial \eta^2} + (K - 2e\omega_n^2) \vartheta_1 - K \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} : Eq_4$$

طرف چپ معادله (69-2) به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{1/\varepsilon} (\psi_1 \times Eq_3 + \psi_2 \times Eq_4) d\eta \\
 &= \int_0^{1/\varepsilon} \left(a_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \eta^2} - a_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} + K \frac{\partial \psi_2}{\partial \eta} + a_3 \psi_1 \right) \varphi_1 d\eta \\
 & \quad + \int_0^{1/\varepsilon} \left(-K \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} + b_1 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \eta^2} + b_2 \psi_2 \right) \vartheta_1 d\eta + a_1 \psi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} \Big|_0^{1/\varepsilon} \quad (71-2) \\
 & + \left(-a_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} + a_2 \psi_1 - K \psi_2 \right) \varphi_1 \Big|_0^{1/\varepsilon} + \left(K \psi_1 - b_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial \eta} \right) \vartheta_1 \Big|_0^{1/\varepsilon} \\
 & + b_1 \psi_2 \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \eta} \Big|_0^{1/\varepsilon}
 \end{aligned}$$

عبارتهای داخل انتگرال برابر با صفر است چون ضرایب φ_1, ϑ_1 با ضرایب φ_0, ϑ_0 در قسمت قبل برابر است.

عبارات خارج شده از انتگرال فوق به صورت زیر:

$$\begin{aligned}
 & \left(-a_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} + a_2 \psi_1 - K \psi_2 \right) \varphi_1 \Big|_0^{1/\varepsilon} = 0 \quad \text{زیرا} \quad \varphi_1 \Big|_0^{1/\varepsilon} = 0 \\
 & a_1 \psi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} \Big|_0^{1/\varepsilon} = 0 \quad \text{زیرا} \quad \psi_1 \Big|_0^{1/\varepsilon} = 0 \quad (72-2) \\
 & \left(K \psi_1 - b_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial \eta} \right) \vartheta_1 \Big|_0^{1/\varepsilon} = 0 \quad \text{زیرا} \quad \left(K \psi_1 - b_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial \eta} \right) \Big|_0^{1/\varepsilon} = 0 \\
 & b_1 \psi_2 \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \eta} \Big|_0^{1/\varepsilon} = 0
 \end{aligned}$$

در رابطه (69-2) شامل جملات سکولار موجود در قسمت ناهمگن معادلات مرتبه یک است. زیرا

از $\mathbf{C}(\mathbf{T}_1)$ صفر کردن جملات سکولار بدست می‌آید.

جملات سکولار در حالت مودال

جملات سکولار باعث واگرایی پاسخ در زمان های طولانی می شود. در حالت مودال تمام جملاتی که ضریبی از $e^{\pm i\omega T_0}$ باشد، سکولار هستند. جملات هارمونیک در حالت مودال به صورت زیر محاسبه می شوند. به عنوان مثال:

$$\begin{aligned} \frac{4e\gamma_1}{\gamma_0} \sin(\omega^* T_0) \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \eta^2} &= \frac{4e\gamma_1}{\gamma_0} \left(\frac{e^{i\omega^* T_0} - e^{-i\omega^* T_0}}{2i} \right) \left[\mathbf{C}(\mathbf{T}_1) \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \eta^2} e^{i\omega_n T_0} \right] \\ &= -\frac{2e\gamma_1}{\gamma_0} i \left[\mathbf{C}(\mathbf{T}_1) \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \eta^2} \{ e^{iT_0(\omega^* + \omega_n)} + e^{iT_0(\omega^* - \omega_n)} \} \right] \quad (73-2) \\ &= -\frac{2e\gamma_1}{\gamma_0} i \left[\mathbf{C}(\mathbf{T}_1) \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \eta^2} \{ e^{2i\omega_n T_0} + 1 \} \right] \end{aligned}$$

لذا تمام جملات هارمونیک در حالت مودال غیر سکولار و تمام جملات غیر هارمونیک سکولار هستند.

بنابراین

$$\begin{aligned} f_1 : & \left[(-2e\tau^* + KG^*\tau^* + 2P^*\tau^*) \frac{\partial^3 \varphi_0}{\partial \eta^3} \right. \\ & + ((-6e + KG^* + 2P^*) i\omega_n \tau^*) \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \eta^2} + 6e\tau^* \omega_n^2 \frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta} \\ & \left. - KG^*\tau^* \frac{\partial^2 \vartheta_0}{\partial \eta^2} - KG^*\tau^* \frac{\partial^2 \vartheta_0}{\partial \eta^2} - KG^*\tau^* i\omega_n \frac{\partial \vartheta_0}{\partial \eta} \right] \mathbf{C}(\mathbf{T}_1) \\ & + \left[-4e \frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta} \pm 4ei\omega_n \varphi_0 \right] \frac{d\mathbf{C}(\mathbf{T}_1)}{d\mathbf{T}_1} \quad (74-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2 : & \left[3G^*\tau^* r^* \frac{\partial^3 \vartheta_0}{\partial \eta^3} + 3G^*\tau^* r^* i\omega_n \frac{\partial^2 \vartheta_0}{\partial \eta^2} (-KG^*\tau^* + 2er^*\tau^* \omega_n^2) \frac{\partial \vartheta_0}{\partial \eta} \right. \\ & + (-3\tau^* r^* e i\omega_n^3 - KG^*\tau^* i\omega_n) \vartheta_0 + KG^*\tau^* \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \eta^2} \\ & \left. + KG^*\tau^* i\omega_n \frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta} \right] \mathbf{C}(\mathbf{T}_1) + [-4er^* i\omega_n \vartheta_0] \frac{d\mathbf{C}(\mathbf{T}_1)}{d\mathbf{T}_1} : \quad (75-2) \end{aligned}$$

ضرایب عبارت f_1 به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$\begin{aligned} d_1 &= (-2e + KG^* + 2P^*)\tau^*, \\ d_2 &= (-6e + KG^* + 2P^*)\tau^*, \\ d_3 &= 6e\tau^*\omega_n^2, \quad d_4 = 2e\tau^*i\omega_n^3, \quad d_5 = -KG^*\tau^*, \\ d_6 &= -KG^*\tau^*i\omega_n \end{aligned} \tag{۷۶-۲}$$

ضریب عبارت f_2 نیز:

$$\begin{aligned} s_1 &= 3G^*\tau^*r^*, \quad s_2 = 3G^*\tau^*r^*i\omega_n, \\ s_3 &= 2\tau^*r^*e\omega_n^2 - KG^*\tau^*, \\ s_4 &= 2\tau^*r^*e i\omega_n^3 - KG^*\tau^*i\omega_n, \quad s_5 = KG^*\tau^*, \\ s_6 &= KG^*\tau^*i\omega_n, \quad s_7 = -4er^*i\omega_n \end{aligned} \tag{۷۷-۲}$$

لذا طرف راست معادله (69-2) به صورت:

$$\begin{aligned} &\int_0^{1/\varepsilon} (\psi_1 \times f_1 + \psi_2 \times f_2) d\eta \\ &= \int_0^{1/\varepsilon} \left\{ \left[\psi_1 \left(d_1 \frac{\partial^3 \varphi_0}{\partial \eta^3} + d_2 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \eta^2} + d_3 \frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta} + d_4 \varphi_0 \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + d_5 \frac{\partial^2 \vartheta_0}{\partial \eta^2} + d_6 \frac{\partial \vartheta_0}{\partial \eta} \right) \right. \\ &\quad \left. + \psi_2 \left(s_1 \frac{\partial^3 \vartheta_0}{\partial \eta^3} + s_2 \frac{\partial^2 \vartheta_0}{\partial \eta^2} + s_3 \frac{\partial \vartheta_0}{\partial \eta} + s_4 \vartheta_0 + s_5 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \eta^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + s_6 \frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta} \right) \right] \mathbf{C}(\mathbf{T}_1) \\ &\quad + \left[\psi_1 \left(-4ei\omega_n \varphi_0 - 4e \frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta} \right) \right. \\ &\quad \left. + \psi_2 s_7 \vartheta_0 \right] \frac{d\mathbf{C}(\mathbf{T}_1)}{dT_1} \Big\} e^{i\omega_n T_0} d\eta \end{aligned} \tag{۷۸-۲}$$

لذا با انتگرال گیری معادله زیر حاصل می شود:

$$\left[\frac{d\mathbf{C}(\mathbf{T}_1)}{dT_1} + \kappa \mathbf{C}(\mathbf{T}_1) \right] e^{i\omega_n T_0} = \mathbf{0} \quad (79-2)$$

$$\kappa = \frac{Q}{W} \quad (80-2)$$

$$Q = \int_0^{1/\varepsilon} \left[\psi_1 \left(d_1 \frac{\partial^3 \varphi_0}{\partial \eta^3} + d_2 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \eta^2} + d_3 \frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta} + d_4 \varphi_0 + d_5 \frac{\partial^2 \vartheta_0}{\partial \eta^2} + d_6 \frac{\partial \vartheta_0}{\partial \eta} \right) + \psi_2 \left(s_1 \frac{\partial^3 \vartheta_0}{\partial \eta^3} + s_2 \frac{\partial^2 \vartheta_0}{\partial \eta^2} + s_3 \frac{\partial \vartheta_0}{\partial \eta} + s_4 \vartheta_0 + s_5 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \eta^2} + s_6 \frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta} \right) \right] d\eta \quad (81-2)$$

$$W = \int_0^{1/\varepsilon} \left(\psi_1 \left(-4ei\omega_n \varphi_0 - 4e \frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta} \right) + \psi_2 s_7 \vartheta_0 \right) d\eta \quad (82-2)$$

$$\frac{d\mathbf{C}(\mathbf{T}_1)}{dT_1} + \kappa \mathbf{C}(\mathbf{T}_1) = \mathbf{0} \quad (83-2)$$

معادله (83-2) یک معادله خطی مرتبه اول می باشد، که با حل آن $\mathbf{C}(\mathbf{T}_1)$ تعیین می شود.

با تعیین $\mathbf{C}(\mathbf{T}_1)$ معادلات (36-2) و (37-2) که دو معادله کوپل غیرهمگن بوده را می توان حل کرد. جواب

عمومی این معادلات که به شکل معادله (54-2) است، همانند مرتبه صفر تعیین می شود. در حالت مودال

همانطور که بیان شد چون تمام جملات هارمونیک غیرسکولار هستند، جواب خصوصی به شکل

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ \phi_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A1_n(\eta) \\ B1_n(\eta) \end{Bmatrix} \Big|_{n=1...4} e^{2i\omega_n T_0} + \begin{Bmatrix} A2_n(\eta) \\ B2_n(\eta) \end{Bmatrix} \Big|_{n=1...4} \quad (84-2)$$

در نظر گرفته می شود. جملات $\{A1_n(\eta), B1_n(\eta), A2_n(\eta), B2_n(\eta)\}$ در معادلات مرتبه یک جایگزین

شده و به صورت دو معادله مرتبه دو در می آیند که برای این دو معادله نیز جواب خصوصی و عمومی تعیین

می‌شود. در نهایت مجموع این پاسخ با پاسخ عمومی کلی معادله جمع شده و شرط مرزی روی آن‌ها اعمال می‌شود (معادله (2-44)) تا ثابت‌ها در هر کدام از جواب‌های عمومی تعیین شود به صورت زیر:

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ \phi_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_g \\ \phi_g \end{Bmatrix} e^{i\omega_n T_0} + \begin{Bmatrix} A1_n(\eta) \\ B1_n(\eta) \end{Bmatrix} \Big|_{n=1\dots 4} e^{2i\omega_n T_0} + \begin{Bmatrix} A2_n(\eta) \\ B2_n(\eta) \end{Bmatrix} \Big|_{n=1\dots 4} \quad (85-2)$$

شرط مرزی خیز

$$\begin{cases} v_g|_{\eta=0} = 0 \\ v_g|_{\eta=1/\varepsilon} = 0 \end{cases} \begin{cases} A1(\eta)|_{\eta=0} = 0 \\ A2(\eta)|_{\eta=0} = 0 \end{cases} \begin{cases} A1(\eta)|_{\eta=1/\varepsilon} = 0 \\ A2(\eta)|_{\eta=1/\varepsilon} = 0 \end{cases} \quad (86-2)$$

شرط مرزی چرخش با توجه به معادله (2-44) و معادله (2-54) به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} \Big|_0^{1/\varepsilon} = 0 \quad (87-2)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi_g}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = 0 \\ \frac{\partial \phi_g}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1/\varepsilon} = 0 \end{cases} \quad (88-2)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial B1(\eta)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = 0 \\ \frac{\partial B2(\eta)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = 0 \end{cases} \begin{cases} \frac{\partial B1(\eta)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1/\varepsilon} = 0 \\ \frac{\partial B2(\eta)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1/\varepsilon} = 0 \end{cases}$$

لذا توابع $\{A1(\eta), B1(\eta), A2(\eta), B2(\eta)\}$ تعیین می‌شوند. پاسخ کلی تیر طبق معادله (2-45) برای

مجموع مرتبه صفر و یک تعیین می‌شود.

2-6- رزونانس پارامتریک اصلی

با اعمال روش straight forward بر معادلات بی‌بعد، عبارات $e^{i\omega t^*}$, $e^{i(\omega+\omega^*)t^*}$, $e^{i(\omega-\omega^*)t^*}$ ظاهر

می‌شوند که جملات سکولار ایجاد می‌کنند. هنگامی که $\omega \sim 1$ باشد، رزونانس اصلی یا اولیه روی می‌دهد.

بقیه رزونانس‌ها (مثلاً $\omega \sim \frac{1}{2}$) رزونانس‌های ثانویه نامیده می‌شوند. در این حالت نیز اگر $\omega + \omega^* = \pm \omega$

باشد رزونانس پارامتریک ثانویه رخ می‌دهد.

2-6-1- تحلیل مرتبه صفر رزونانس پارامتریک اصلی

با توجه به این که معادلات مرتبه صفر (2-35) و (2-36) معادلات همگن هستند لذا تحلیل مرتبه صفر در این حالت با حالت مودال یکی است.

2-6-2- تحلیل مرتبه یک رزونانس پارامتریک اصلی

در این حالت نیز خیز و چرخش تیر به شکل زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$v_0(\eta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C(T_1) \varphi_0(\eta) e^{i\omega_n T_0} + \overline{C(T_1)} \overline{\varphi_0(\eta)} e^{-i\omega_n T_0} \quad (2-89)$$

$$\phi_0(\eta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C(T_1) \vartheta_0(\eta) e^{i\omega_n T_0} + \overline{C(T_1)} \overline{\vartheta_0(\eta)} e^{-i\omega_n T_0}$$

که $C(T_1)$ باید تعیین شود.

تعیین $C(T_1)$

در این قسمت نیز معادلات مرتبه صفر در توابع الحاقی ضرب شده و از مجموع آن‌ها انتگرال گیری می‌شود که با توجه به یکی بودن معادلات مرتبه صفر در حالت مودال و رزونانس، توابع الحاقی در این حالت با حالت مودال، برابر است. پس از تعیین توابع الحاقی طبق معادله (2-68) طرف چپ معادله (قسمت همگن معادلات مرتبه یک) با حالت مودال یکی است (2-69). برای تعیین f_1, f_2 در این حالت باید ابتدا جملات سکولار تعیین شوند. در این حالت نیز تمام جملات غیر هارمونیک سکولار هستند، ولی جملات هارمونیک باید بررسی شوند. برای این منظور به شکل نمایی نوشته شده و یکی از جملات آن بررسی شده است:

$$\begin{aligned}
 & \frac{4e\gamma_1}{\gamma_0} \sin(\omega^*T_0) \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \eta^2} \\
 &= \frac{4e\gamma_1}{\gamma_0} \left(\frac{e^{i\omega^*T_0} - e^{-i\omega^*T_0}}{2i} \right) \left[\mathbf{C}(T_1) \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \eta^2} e^{i\omega_n T_0} \right. \\
 & \quad \left. + \overline{\mathbf{C}(T_1)} \frac{\partial^2 \overline{\varphi_0}}{\partial \eta^2} e^{-i\omega_n T_0} \right] \quad (90-2) \\
 &= -\frac{2e\gamma_1}{\gamma_0} i \left[\mathbf{C}(T_1) \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \eta^2} e^{3i\omega_n T_0} e^{i\mu T_1} \right. \\
 & \quad \left. + \overline{\mathbf{C}(T_1)} \frac{\partial^2 \overline{\varphi_0}}{\partial \eta^2} e^{i\omega_n T_0} e^{i\mu T_1} \right]
 \end{aligned}$$

با نوشتن عبارت هارمونیک به شکل نمایی، چهار جمله بدست می‌آید که چون هر دو دسته جمله در نهایت به یک معادله ختم می‌شود لذا به صورت فوق در نظر گرفته می‌شوند.

بنابراین هر عبارت هارمونیک به دو قسمت سکولار و غیر سکولار تقسیم می‌شود که قسمت سکولار آن در حالت رزونانس پارامتریک اصلی به صورت مزدوج مختلط در می‌آید.

ضرایب جملات سکولار که از جملات هارمونیک ایجاد می‌شود:

$$\begin{aligned}
 f_1: & \left[(-2e\tau^* + KG^*\tau^* + 2P^*\tau^*) \frac{\partial^3 \varphi_0}{\partial \eta^3} \right. \\
 & \quad + ((-6e + KG^* + 2P^*) i\omega_n \tau^*) \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \eta^2} + 6e\tau^* \omega_n^2 \frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta} \\
 & \quad \left. - KG^*\tau^* \frac{\partial^2 \vartheta_0}{\partial \eta^2} - KG^*\tau^* \frac{\partial^2 \vartheta_0}{\partial \eta^2} - KG^*\tau^* i\omega_n \frac{\partial \vartheta_0}{\partial \eta} \right] \mathbf{C}(T_1) \quad (91-2) \\
 & \quad + \left[\frac{2e\gamma_1}{\gamma_0} i \frac{\partial^2 \overline{\varphi_0}}{\partial \eta^2} + \frac{2e\gamma_1}{\gamma_0} i(\omega_n + 1) \frac{\partial \overline{\varphi_0}}{\partial \eta} \right] \overline{\mathbf{C}(T_1)} e^{i\mu T_1} \\
 & \quad + \left[-4e \frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta} - 4ei\omega_n \varphi_0 \right] \frac{d\mathbf{C}(T_1)}{dT_1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_2: & \left[3G^* \tau^* r^* \frac{\partial^3 \vartheta_0}{\partial \eta^3} + 3G^* \tau^* r^* i \omega_n \frac{\partial^2 \vartheta_0}{\partial \eta^2} (-KG^* \tau^* + 2er^* \tau^* \omega_n^2) \frac{\partial \vartheta_0}{\partial \eta} \right. \\
 & + (-3\tau^* r^* e i \omega_n^3 - KG^* \tau^* i \omega_n) \vartheta_0 + KG^* \tau^* \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \eta^2} \\
 & \left. + KG^* \tau^* i \omega_n \frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta} \right] \mathbf{C}(\mathbf{T}_1) + [-4er^* i \omega_n \vartheta_0] \frac{d\mathbf{C}(\mathbf{T}_1)}{d\mathbf{T}_1}
 \end{aligned} \quad (92-2)$$

در این حالت نیز همان ضرایبی که برای ساده سازی در حالت مودال در نظر گرفته شده بود استفاده شده است (76-2) و (77-2).

لذا طرف راست معادله (69-2) در حالت رزونانس پارامتریک اصلی به صورت:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{1/\varepsilon} (\psi_1 \times f_1 + \psi_2 \times f_2) d\eta \\
 & = \int_0^{1/\varepsilon} \left\{ \left[\psi_1 \left(d_1 \frac{\partial^3 \varphi_0}{\partial \eta^3} + d_2 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \eta^2} + d_3 \frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta} + d_4 \varphi_0 \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. + d_5 \frac{\partial^2 \vartheta_0}{\partial \eta^2} + d_6 \frac{\partial \vartheta_0}{\partial \eta} \right) \right. \\
 & \left. + \psi_2 \left(s_1 \frac{\partial^3 \vartheta_0}{\partial \eta^3} + s_2 \frac{\partial^2 \vartheta_0}{\partial \eta^2} + s_3 \frac{\partial \vartheta_0}{\partial \eta} + s_4 \vartheta_0 + s_5 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \eta^2} \right. \right. \\
 & \left. \left. + s_6 \frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta} \right) \right] \mathbf{C}(\mathbf{T}_1) \\
 & + \left[\psi_1 \left(\frac{2e \gamma_1}{\gamma_0} i \frac{\partial^2 \overline{\varphi_0}}{\partial \eta^2} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{2e \gamma_1}{\gamma_0} i (\omega_n + 1) \frac{\partial \overline{\varphi_0}}{\partial \eta} \right) \right] \overline{\mathbf{C}(\mathbf{T}_1)} e^{i\mu \mathbf{T}_1} \\
 & + \left[\psi_1 \left(-4ei \omega_n \varphi_0 - 4e \frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta} \right) \right. \\
 & \left. + \psi_2 s_7 \vartheta_0 \right] \frac{d\mathbf{C}(\mathbf{T}_1)}{d\mathbf{T}_1} \Big\} d\eta
 \end{aligned} \quad (93-2)$$

فصل دوم: استخراج و حل معادلات حاکم

بوده و با انتگرال گیری معادله فوق و طبق معادلات (74-2) و (75-2) معادله زیر حاصل می شود:

$$\frac{dC(T_1)}{dT_1} + \kappa C(T_1) + \overline{\beta C(T_1)} e^{i\mu T_1} = 0 \quad (94-2)$$

که

$$\beta = \frac{\int_0^{1/\varepsilon} \psi_1 \frac{2e\gamma_1}{\gamma_0} i \left(\frac{\partial^2 \overline{\varphi_0}}{\partial \eta^2} + (\omega_n + 1) \frac{\partial \overline{\varphi_0}}{\partial \eta} \right) d\eta}{\int_0^{1/\varepsilon} \left[\psi_1 \left(-4ei\omega_n \varphi_0 - 4e \frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta} \right) + \psi_2 s_7 \vartheta_0 \right] d\eta} \quad (95-2)$$

اگر $C(T_1)$ به صورت زیر در نظر گرفته شود:

$$C(T_1) = a_n(T_1) e^{i\beta_1(T_1)} \quad (96-2)$$

و در معادله (94-2) جایگزین گردد:

$$\left(\dot{a}_n + a_n i\beta_1 + (\xi - \zeta) a_n \right) e^{i\beta_1} + \overline{\beta a_n} e^{i\mu T_1} e^{-i\beta_1} = 0 \quad (97-2)$$

با فرض:

$$i\beta_1 = i(\mu T_1 - \beta_1) \quad \rightarrow \quad \beta_1 = \frac{\mu T_1}{2} \quad (98-2)$$

نتیجه می شود

$$\left(\dot{a}_n + \left(\alpha + i \frac{\mu}{2} \right) a_n + \overline{\beta a_n} \right) e^{i \frac{\mu T_1}{2}} = 0 \quad (99-2)$$

اگر بخش های حقیقی و موهومی a_n بصورت زیر تعریف شود:

$$a_n = p(T_1) + iq(T_1) \quad (100-2)$$

معادله (99-2) به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$\dot{p}(T_1) + i\dot{q}(T_1) + \left(\alpha + i\frac{\mu}{2}\right) * (p(T_1) + iq(T_1)) + \quad (101-2)$$

$$\beta(p(T_1) - iq(T_1)) = 0$$

حال اگر اجزای حقیقی و موهومی معادله فوق جدا شود:

$$p(T_1) + \operatorname{Re}(\alpha + \beta)p(T_1) - \left(\frac{\mu}{2} + \operatorname{Im}(\alpha + \beta)\right)q(T_1) = 0 \quad (102-2)$$

$$\dot{q}(T_1) + \left(\frac{\mu}{2} + \operatorname{Im}(\alpha + \beta)\right)p(T_1) + \operatorname{Re}(\alpha + \beta)q(T_1) = 0$$

با حل این دو معادله و با فرض شرط اولیه:

$$p(T_1)|_{T_1=0} = 0 \quad (103-2)$$

یک ثابت بر حسب ثابت دیگر تعیین شده و در نهایت $C(T_1)$ تعیین می‌شود.

با تعیین $C(T_1)$ معادلات (36-2) و (37-2) که دو معادله کوپل غیرهمگن بوده را می‌توان حل کرد. جواب عمومی این معادلات که مشابه معادلات (54-2) است، همانند مرتبه صفر حالت مودال تعیین می‌شود. جواب خصوصی با توجه به معادله (90-2) به شکل

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ \phi_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A1_n(\eta) \\ B1_n(\eta) \end{Bmatrix} \Big|_{n=1...4} e^{3i\omega_n T_0} e^{i\mu T_1} \quad (104-2)$$

در نظر گرفته می‌شود. جملات $\{A1_n(\eta), B1_n(\eta)\}$ در معادلات مرتبه یک جایگزین شده و همانند حالت مودال به صورت دو معادله مرتبه دو در می‌آیند که برای این دو معادله نیز جواب خصوصی و عمومی تعیین می‌شود. در نهایت مجموع این پاسخ با پاسخ عمومی کلی معادله جمع شده و شرط مرزی روی آن‌ها اعمال می‌شود (معادله (44-2)) تا ثابت‌ها در هر کدام از جواب‌های عمومی تعیین شود. به صورت زیر:

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ \phi_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_g \\ \phi_g \end{Bmatrix} e^{i\omega_n T_0} + \begin{Bmatrix} A1_n(\eta) \\ B1_n(\eta) \end{Bmatrix} \Big|_{n=1\dots 4} e^{3i\omega_n T_0} e^{i\mu T_1} \quad (105-2)$$

$$\begin{cases} v_g|_{\eta=0} = 0 \\ v_g|_{\eta=1/\varepsilon} = 0 \end{cases} \begin{cases} A1(\eta)|_{\eta=0} = 0 \\ B1(\eta)|_{\eta=1/\varepsilon} = 0 \end{cases} \quad (106-2)$$

شرط مرزی چرخش با توجه به معادله (44-2) و معادله (54-2) به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} \Big|_0^{1/\varepsilon} = 0 \quad (107-2)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi_g}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = 0 \\ \frac{\partial \phi_g}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1/\varepsilon} = 0 \end{cases} \quad (108-2)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial B1(\eta)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = 0 \\ \frac{\partial B1(\eta)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1/\varepsilon} = 0 \end{cases}$$

بنابراین توابع $\{A1(\eta), B1\}$ تعیین می‌شوند. پاسخ کلی تیر طبق معادله (45-2) برای مجموع مرتبه صفر و یک تعیین می‌شود.

7-2- تعیین سرعت بحرانی

در این حالت سرعت تیر را ثابت فرض کرده و برای تعیین سرعت بحرانی متوسط از روش حل موج استفاده شده است. ابتدا معادلات بی بعد شده (22-2) و (23-2) را به صورت ماتریسی نوشته که به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned} & [A_{10}] \frac{\partial^3 y}{\partial t^{*3}} + [A_9] \frac{\partial^2 y}{\partial t^{*2}} + [A_8] \frac{\partial y}{\partial t^*} + [A_7] \frac{\partial^3 y}{\partial \eta \partial t^{*2}} + [A_6] \frac{\partial^3 y}{\partial \eta^2 \partial t^*} \\ & + [A_5] \frac{\partial^2 y}{\partial \eta \partial t^*} + [A_4] \frac{\partial^3 y}{\partial \eta^3} + [A_3] \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} + [A_2] \frac{\partial y}{\partial \eta} + [A_1] y \\ & = \{f\} \end{aligned} \quad (109-2)$$

$$\begin{aligned} \{y\} &= \begin{Bmatrix} v \\ \phi \end{Bmatrix}, \quad [A_{10}] = \begin{bmatrix} 2\tau^* e\varepsilon & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2\tau^* r^* e\varepsilon \end{bmatrix}, \quad [A_9] = \begin{bmatrix} 2e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2er^* \end{bmatrix} \\ [A_8] &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & K\tau^* G^* \varepsilon \end{bmatrix}, [A_7] = \begin{bmatrix} 6\tau^* \gamma^* e\varepsilon & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2\tau^* \gamma^* r^* e\varepsilon \end{bmatrix} \\ [A_6] &= \begin{bmatrix} 6\tau^* \gamma^* e\varepsilon - 2P^* \tau^* \varepsilon - K\tau^* G^* \varepsilon & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -3\tau^* r^* G^* e\varepsilon \end{bmatrix} \\ [A_5] &= \begin{bmatrix} 4\gamma^* e & K\tau^* G^* \varepsilon \\ -K\tau^* G^* \varepsilon & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (110-2) \\ [A_4] &= \begin{bmatrix} 2\tau^* \gamma^{*3} e\varepsilon - 2P^* \tau^* \gamma^* \varepsilon - K\gamma^* \tau^* G^* \varepsilon & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -3\gamma^* \tau^* r^* G^* e\varepsilon \end{bmatrix} \\ [A_3] &= \begin{bmatrix} -2P^* - K + 2\gamma^* e & K\tau^* G^* \varepsilon \gamma^* \\ -K\tau^* G^* \varepsilon \gamma^* & -3r^* \end{bmatrix}, [A_2] = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & K \\ -K & K\gamma^* \tau^* G^* \varepsilon \end{bmatrix} \\ [A_1] &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & K \end{bmatrix} \end{aligned}$$

با تغییر متغیر $X = \eta - \gamma^* t^*$ دستگاه معادلات مختصات به یک نقطه از تیر متحرک متصل می‌شود. لذا معادلات

مشتق جزئی فوق به دستگاه معادلات معمولی تبدیل می‌شوند. با تغییر متغیر فوق :

$$\frac{\partial}{\partial t^*} = \frac{\partial}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial t^*} = -\gamma^* \frac{\partial}{\partial t^*}, \quad \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial X} \quad (111-2)$$

$$\mathbf{B}_3 \frac{\partial^3 y}{\partial X^3} + \mathbf{B}_2 \frac{\partial^2 y}{\partial X^2} + \mathbf{B}_1 \frac{\partial y}{\partial X} + \mathbf{B}_0 y = \mathbf{0} \quad (112-2)$$

$$\mathbf{B}_3 = -\mathbf{A}_{10} \gamma^{*3} + \mathbf{A}_7 \gamma^{*2} - \mathbf{A}_6 \gamma^*, \quad \mathbf{B}_2 = \mathbf{A}_9 \gamma^{*2} - \mathbf{A}_5 \gamma^* + \mathbf{A}_3 \quad (113-2)$$

$$\mathbf{B}_1 = -\mathbf{A}_8 \gamma^* + \mathbf{A}_2, \quad \mathbf{B}_0 = \mathbf{A}_1$$

با در نظر گرفتن پاسخ معادله فوق به صورت $\{y^*\} = \{V\} e^{mX}$ و جایگذاری آن در معادله فوق معادله

مشخصه سیستم به صورت $[\mathbf{B}_3 m^3 + \mathbf{B}_2 m^2 + \mathbf{B}_1 m + \mathbf{B}_0] \{V_1\} = \mathbf{0}$ بدست می‌آید. هر کدام از ضرایب m

در معادله مشخصه را برای γ^* حل کرده و در یک بردار در نظر گرفته می‌شود. با توجه به این که شرط پایداری این است که مقادیر m در پاسخ عمومی جزء حقیقی داشته باشد یعنی ریشه موهومی خالص نباشد از میان این ریشه‌ها کوچکترینشان که این شرط را ارضا کند به عنوان سرعت بحرانی در نظر گرفته می‌شود.

2-8- جمع بندی

در این فصل معادلات حاکم بر تیر تیموشنکوی ویسکوالاستیک متحرک محوری استخراج شد و پس از بی بعد سازی و اعمال روش multiple scale مرتبه یک، معادلات مرتبه صفر و یک تعیین شد. برای حل مرتبه یک آن با استفاده از توابع الحاقی شرط حل‌پذیری مورد نیاز بدست آمد و پاسخ تیر برای دو حالت مودال و رزونانس پارامتریک اصلی تعیین شد.

c d

فصل سوم: بررسی نتایج

b a

3-1-1- مقدمه

برای بررسی اثر پارامترهای هندسی و ویسکوالاستیک بر پاسخ، فرکانس طبیعی و سرعت بحرانی، روابط ذکر شده در بخش های قبل، به کمک نرم افزار Maple برای موارد خاص، محاسبه شده است. مشخصات تیر مطابق جدول (1-3) است.

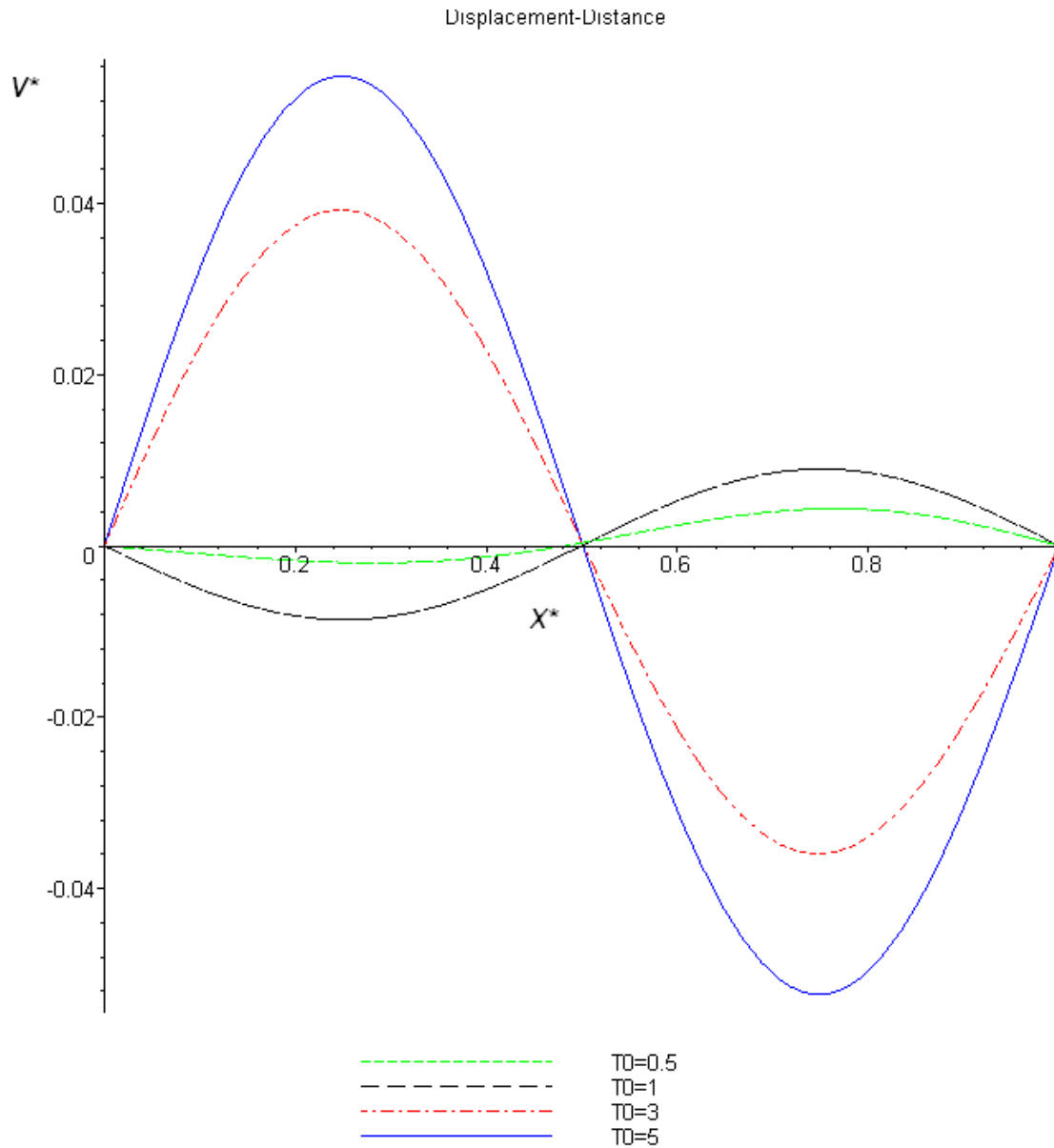
جدول (1-3). مشخصات تیر

$l=1(m)$	طول
$b=0.04(m)$	پهنا
$h=0.004(m)$	عمق
$\rho=7800(kg/m^3)$	دانسیته
$P=100(N)$	نیروی کشش اولیه
$K=0.83$	ضریب تصحیح برشی
$E_1=1e10, E_2=0.33e10 (Pa)$	مدول استاندارد
$\eta_1 = 0.25e9(Pa.s)$	ضریب ویسکوزیته
$\gamma_0 = 0.5$	سرعت متوسط
$\frac{\gamma_1}{\gamma_0} = 0.5$	دامنه نوسانات سرعت

3-2-2- حالت مودال

3-2-1- بررسی پاسخ مکانی تیر

شکل (1-3) شکل مود تیر را در زمان های $\{T_0 = 0.5, 1, 3, 5\}$ برای این تیر در حالت مودال نشان می‌دهد.

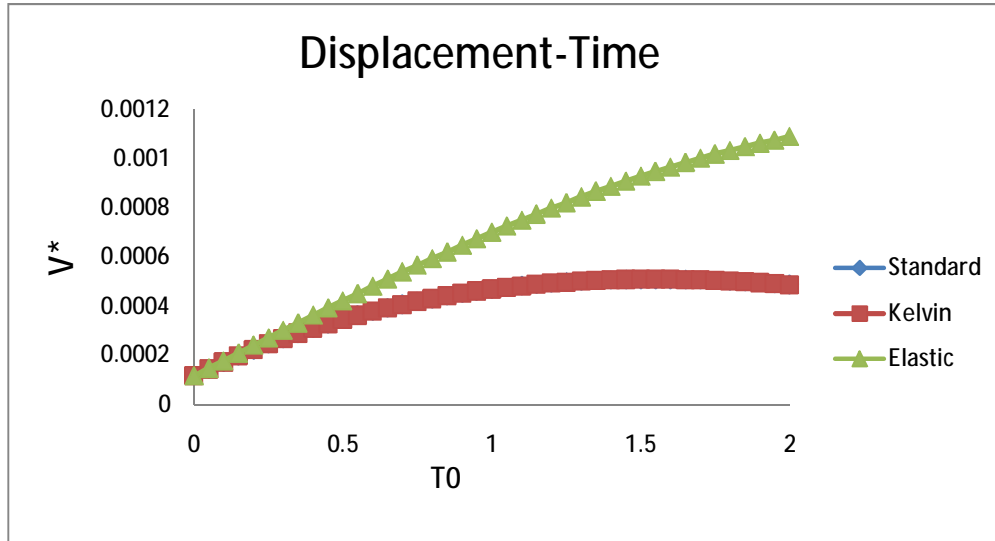


شکل (3-1). شکل مود در زمان های مختلف در حالت مودال

همانطور که مشاهده می شود، پاسخ مکانی در حالت مودال با گذشت زمان افزایش می یابد.

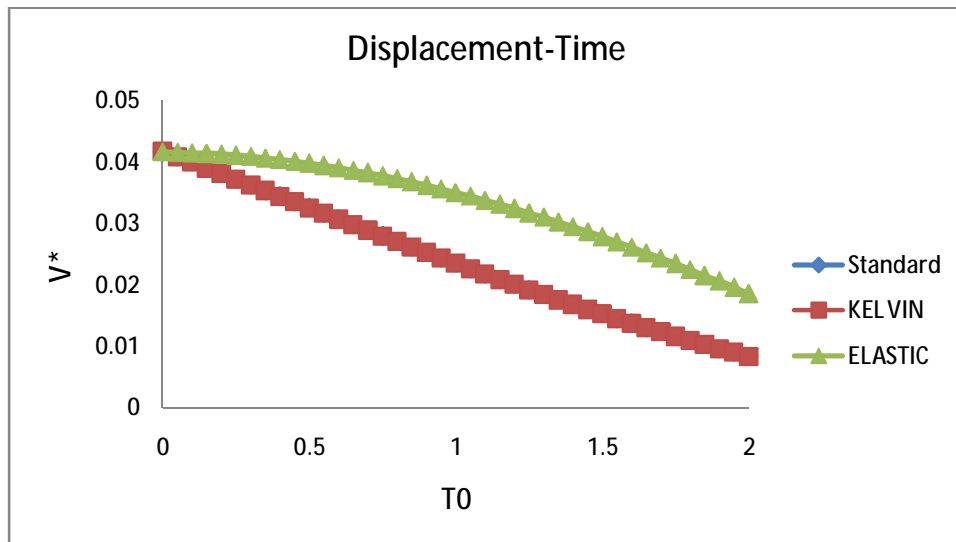
3-2-2- بررسی پاسخی زمانی تیر

شکل (3-2) پاسخی زمانی تیر را در نقطه وسط برای مدل های استاندارد و کلویین و حالت الاستیک نشان می دهد. در این نمودار، جابجایی بر حسب ضخامت تیر بی بعد شده است.



شکل (3-2). پاسخ زمانی تیر در نقطه وسط برای مدل‌های مختلف

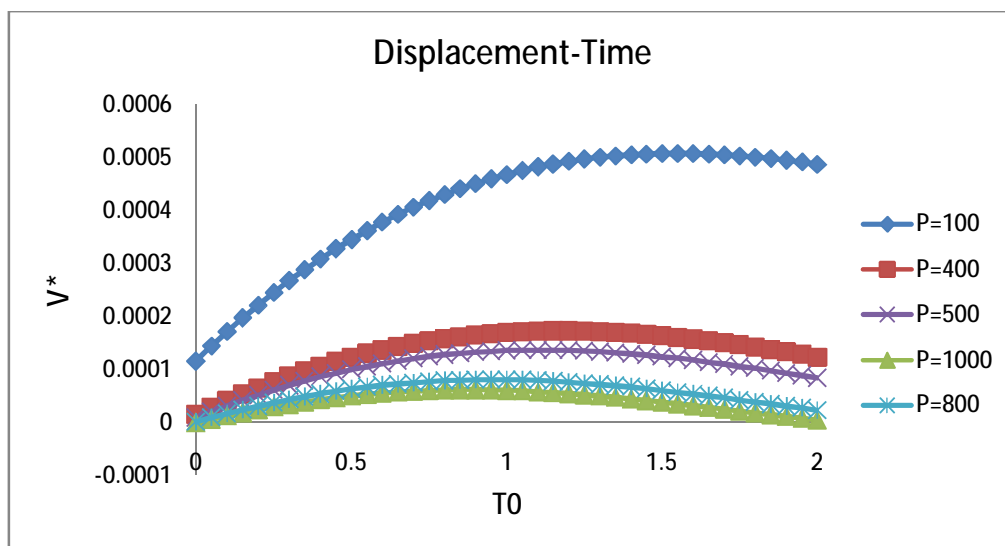
با توجه به شکل فوق، پاسخ این تیر برای مدل‌های کلویین و استاندارد بسیار نزدیک به هم می‌باشد. همچنین خیز در حالت الاستیک در این نقطه بیشتر از حالت ویسکو آن می‌باشد. در شکل (3-3) پاسخ این تیر برای نقطه ($x^* = 0.1$) یعنی نزدیک مرز رسم شده است.



شکل (3-3). پاسخ زمانی تیر در ($x^* = 0.1$) برای مدل‌های مختلف

بررسی تاثیر کشش محوری بر پاسخ زمانی تیر

شکل (3-4) تاثیر کشش محوری بر پاسخ زمانی در وسط تیر را نشان می‌دهد.

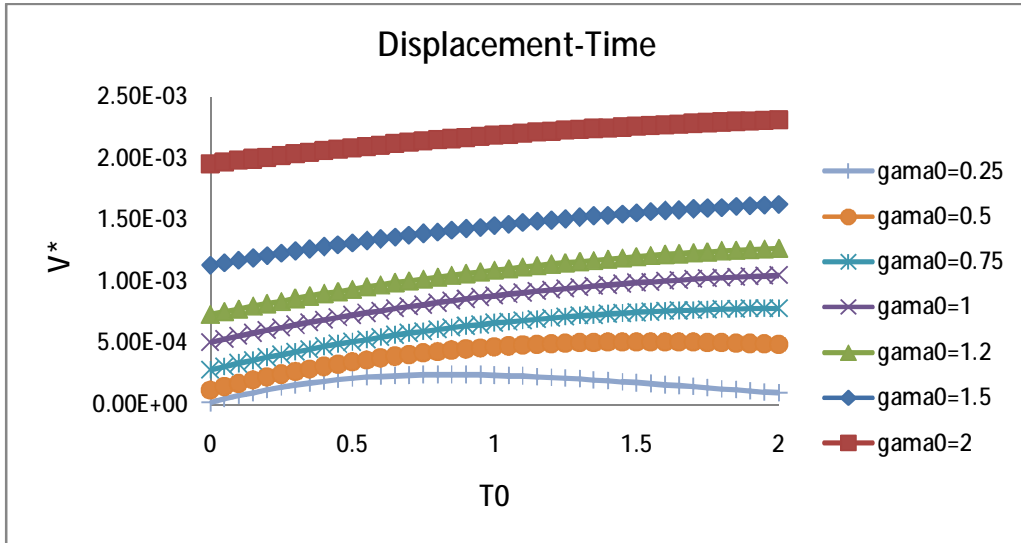


شکل (3-4). بررسی پاسخ زمانی تحت کشش های محوری مختلف (نیرو بر حسب نیوتن است)

همانطور که مشاهده می شود و انتظار می‌رود، افزایش کشش محوری خیز تیر را کاهش می‌دهد.

بررسی تاثیر سرعت متوسط بر پاسخ زمانی تیر

شکل (3-5) تاثیر سرعت محوری بر پاسخ زمانی تیر در وسط تیر را نشان می‌دهد.

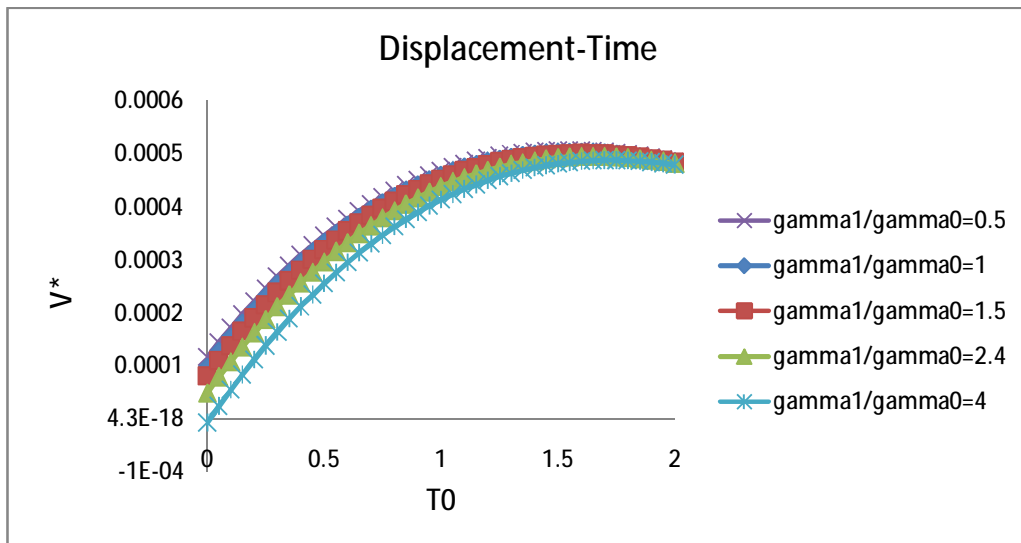


شکل (3-5). تاثیر سرعت محوری بر پاسخ زمانی در وسط تیر

با توجه به شکل فوق افزایش سرعت متوسط، افزایش خیز تیر را به همراه دارد.

بررسی تاثیر دامنه نوسانات سرعت بر پاسخ زمانی تیر

شکل (3-6) تاثیر دامنه نوسانات سرعت بر پاسخ زمانی تیر در وسط آن را نمایش می‌دهد.

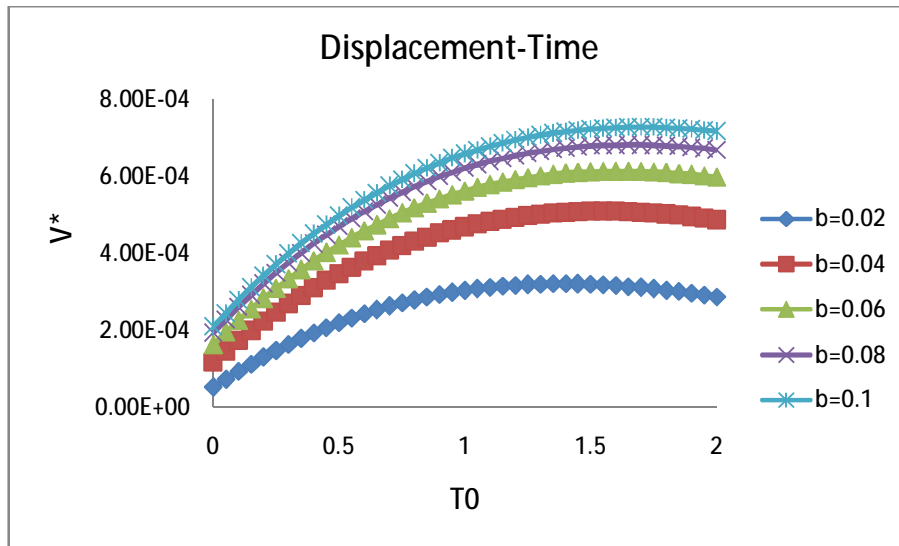


شکل (3-6). بررسی تاثیر دامنه نوسانات سرعت بر پاسخ زمانی در وسط تیر

همانطور که مشاهده می شود افزایش دامنه نوسانات سرعت، افزایش خیز تیر را به همراه دارد، که با افزایش آن از شدت آن کاسته می شود.

بررسی تاثیر پهنا بر پاسخ زمانی تیر

شکل (3-7) تاثیر پهنای تیر بر پاسخ زمانی در وسط آن را نمایش می دهد.



شکل (3-7). بررسی تاثیر پهنای تیر بر پاسخ زمانی در وسط تیر (پهنا بر حسب متر)

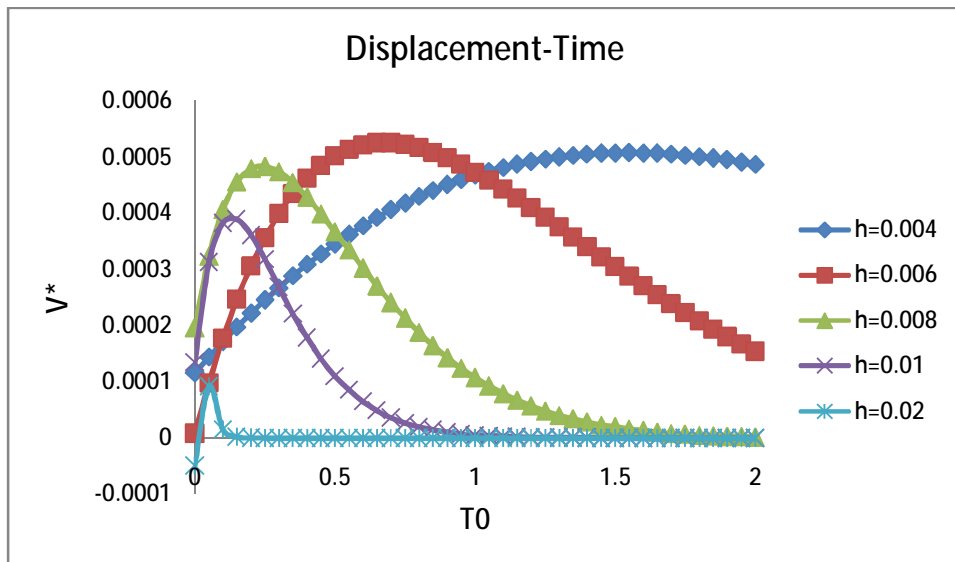
همانطور که در شکل فوق نشان داده می شود، افزایش پهنا، افزایش خیز تیر را به همراه دارد.

بررسی تاثیر ضخامت بر پاسخ زمانی تیر

شکل (3-8) تاثیر ضخامت تیر بر پاسخ زمانی آن را نشان می دهد. همانطور که در شکل زیر دیده می شود، با

افزایش اولیه ضخامت از 0.004 به 0.006 شکل نمودار خیز تغییر پیدا می کند. با ادامه افزایش ضخامت،

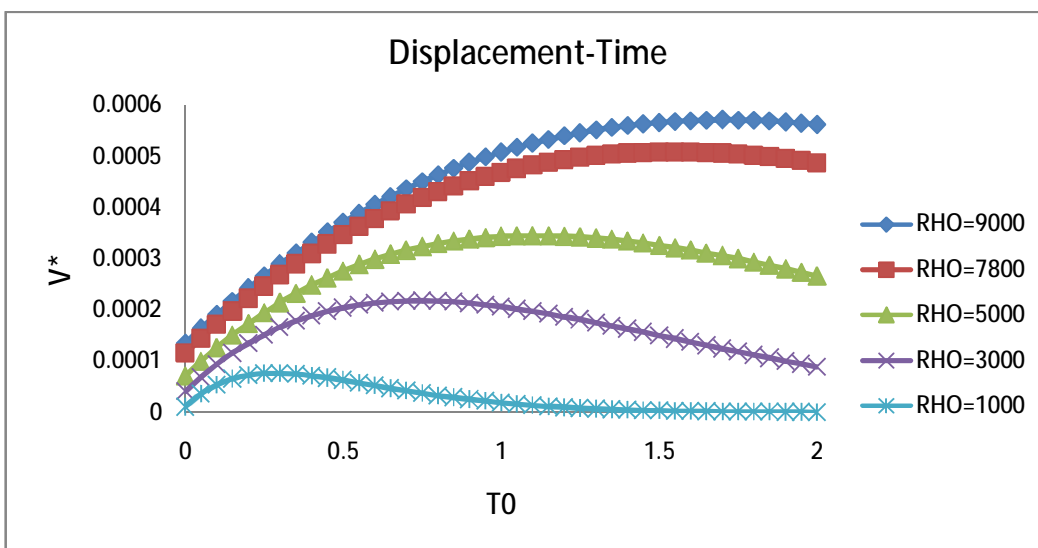
خیز تیر کاهش پیدا می کند تا جایی که با گذشت زمان ثابت می ماند.



شکل (3-8). بررسی تاثیر عمق تیر بر پاسخ زمانی در وسط تیر (عمق بر حسب متر)

بررسی تاثیر دانسیته بر پاسخ زمانی تیر

شکل (3-9) تاثیر دانسیته بر پاسخ زمانی تیر را نشان می‌دهد.

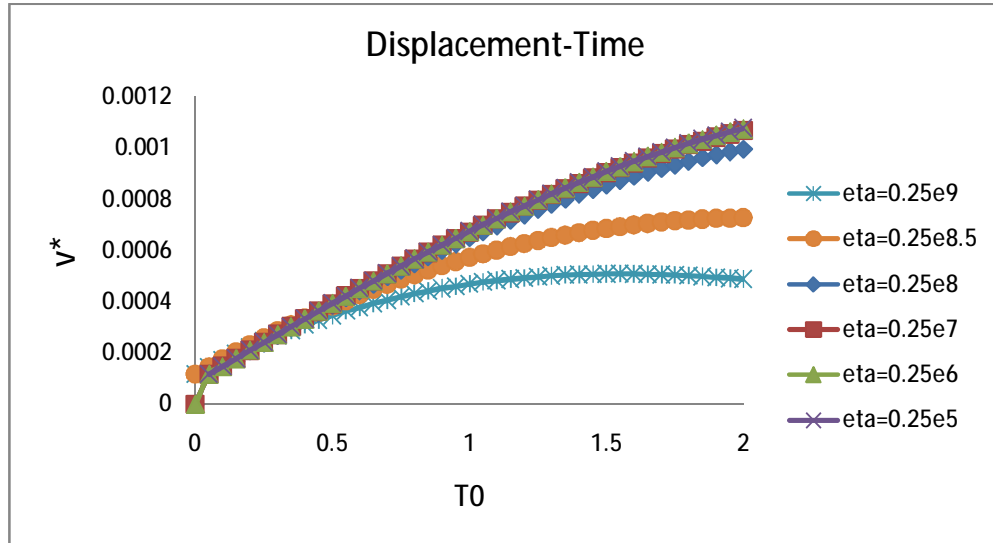


شکل (3-9). بررسی تاثیر دانسیته بر پاسخ زمانی در وسط تیر (دانسیته بر حسب کیلوگرم بر متر مکعب)

همانطور که انتظار می‌رود، افزایش دانسیته، افزایش خیز تیر نسبت به زمان در وسط آن را به همراه دارد.

بررسی تاثیر ضریب ویسکوالاستیک بر پاسخ زمانی تیر

شکل (3-10) تاثیر ضریب ویسکوالاستیک بر پاسخ زمانی تیر را نشان می‌دهد.

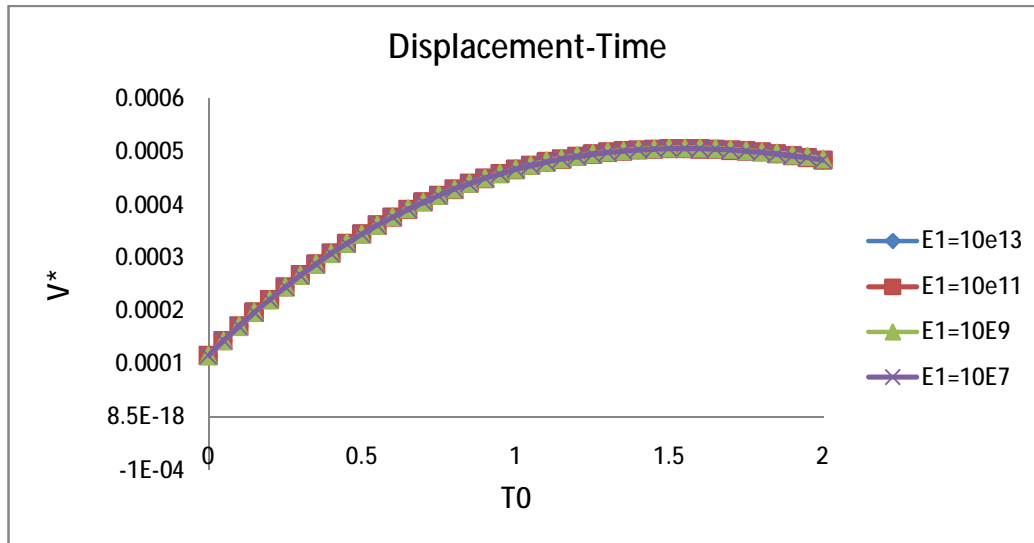


شکل (3-10). بررسی تاثیر ضریب ویسکوالاستیک بر پاسخ زمانی در وسط تیر (η بر حسب (Pa.s))

همانطور که در شکل فوق نشان داده شده، افزایش ضریب ویسکوالاستیک، کاهش خیز تیر را به همراه دارد.

بررسی تاثیر مدول الاستیسته E_1 بر پاسخ زمانی تیر

شکل (3-11) تاثیر مدول الاستیسته E_1 بر پاسخ زمانی تیر را نشان می‌دهد.

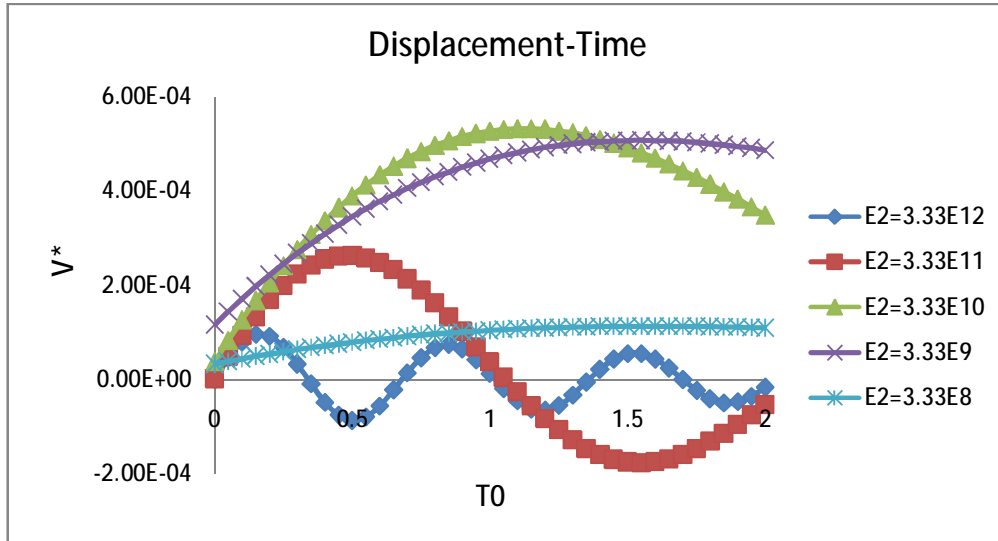


شکل (3-11). بررسی تاثیر مدول الاستیسیته E_1 بر پاسخ زمانی در وسط تیر (E_1 بر حسب Pa)

همانطور که در شکل فوق نشان داده شده، افزایش مدول الاستیسیته E_1 تاثیر چندانی بر پاسخ زمانی تیر ندارد.

بررسی تاثیر مدول الاستیسیته E_2 بر پاسخ زمانی تیر

شکل (3-12) تاثیر مدول الاستیسیته E_2 را بر پاسخ زمانی تیر را نشان می‌دهد. همانطور که در شکل فوق مشاهده می‌شود تغییر مدول الاستیسیته E_2 تاثیر زیادی بر پاسخ زمانی تیر دارد. پاسخ زمانی برای مقادیر E_2 (3.33E10, 3.33E8) به صورت خطی در می‌آید که با افزایش آن پاسخ زمانی کاهش پیدا می‌کند ولی در مقادیر (3.33E11, 3.33E12) به صورت سینوسی در می‌آید.



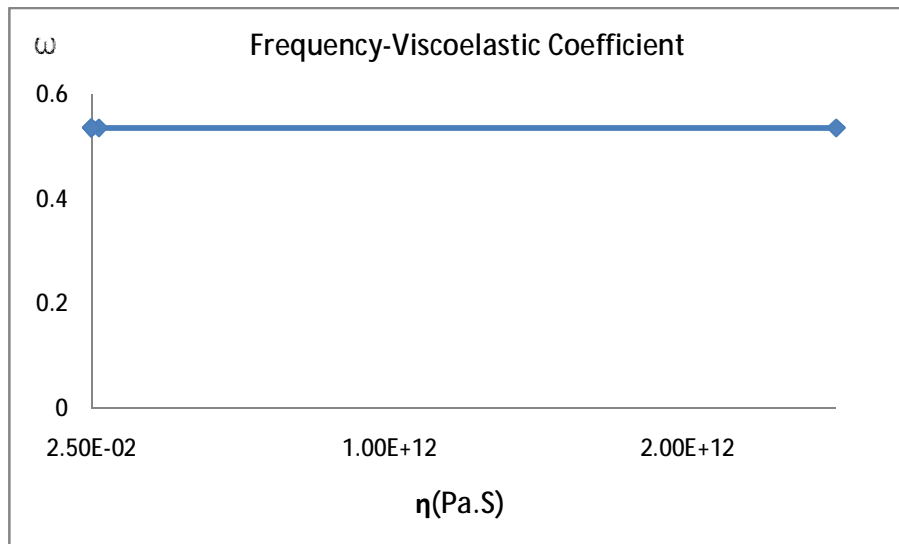
شکل (3-12). بررسی تاثیر مدول الاستیسیته E_2 بر پاسخ زمانی در وسط تیر (E_2 بر حسب Pa)

3-2-3- بررسی فرکانس طبیعی بی بعد

در این قسمت تاثیر پارامترهای ویسکوالاستیک روی فرکانسهای طبیعی بی بعد بررسی می شود.

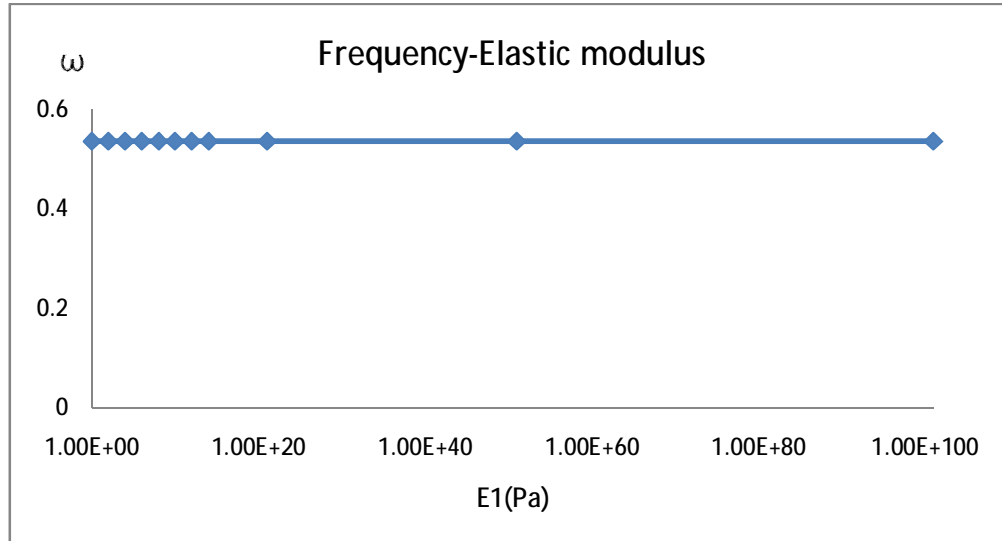
شکل های (3-13) و (3-14) تاثیر ضریب ویسکوزیته و مدول الاستیسیته E_1 بر فرکانس طبیعی را نشان

می دهد.



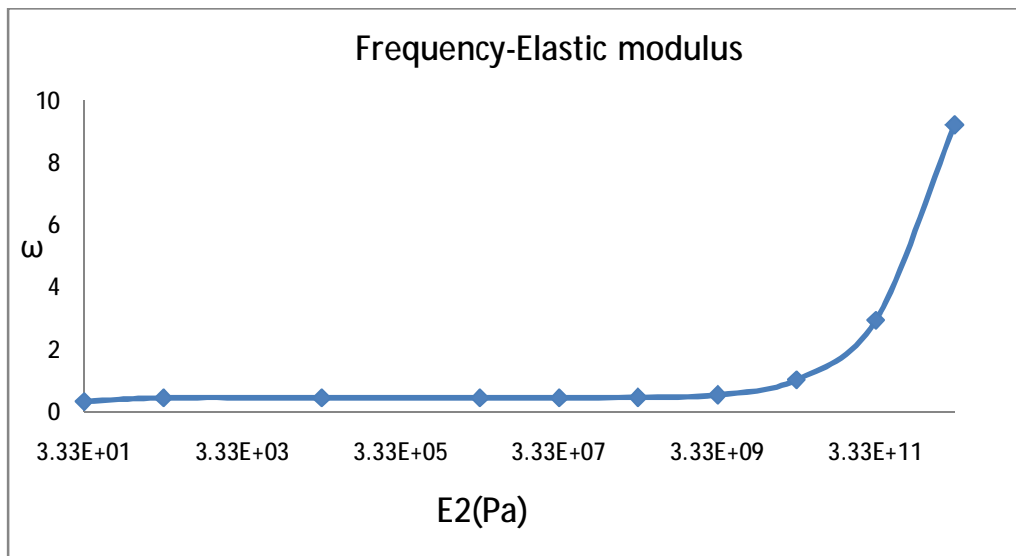
شکل (3-13). بررسی تاثیر ضریب ویسکوزیته بر فرکانس طبیعی

فصل سوم: بررسی نتایج



شکل (3-14). بررسی تاثیر مدول الاستیسته E_1 بر فرکانس طبیعی

همانطور که در شکل‌های فوق مشاهده شد، ضریب ویسکوزیته و مدول الاستیسته E_1 بر فرکانس طبیعی تاثیری ندارند. در شکل (3-15) تاثیر مدول استاندارد E_2 بر فرکانس طبیعی نمایش داده شده است.

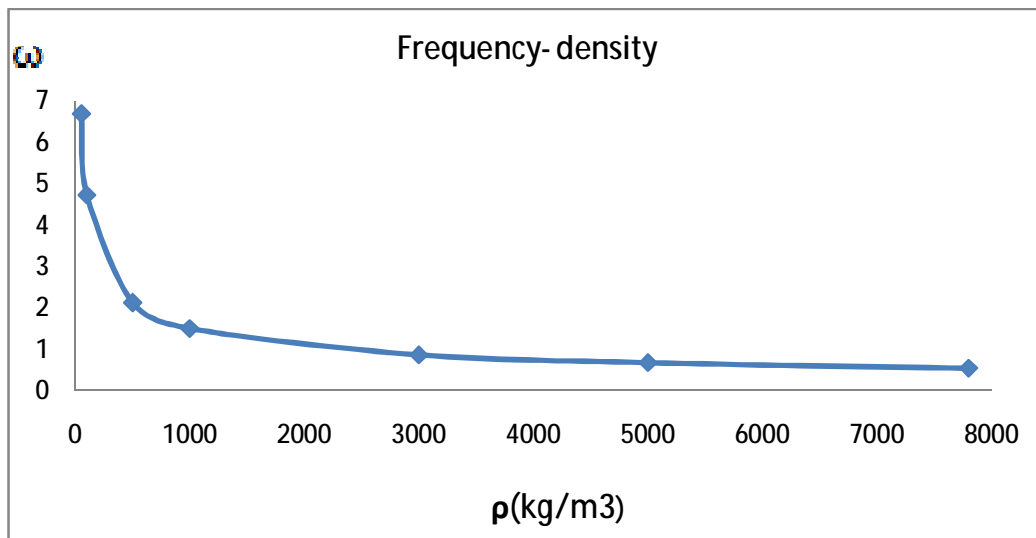


شکل (3-15). تاثیر مدول استاندارد E_2 بر فرکانس طبیعی

همانطور که مشاهده می شود با افزایش E_2 بین $(3.33E9, 3.33E12)$ باعث افزایش ناگهانی در فرکانس طبیعی شده است ولی در مقادیر پایین تر فرکانس تغییر چندانی نمی کند.

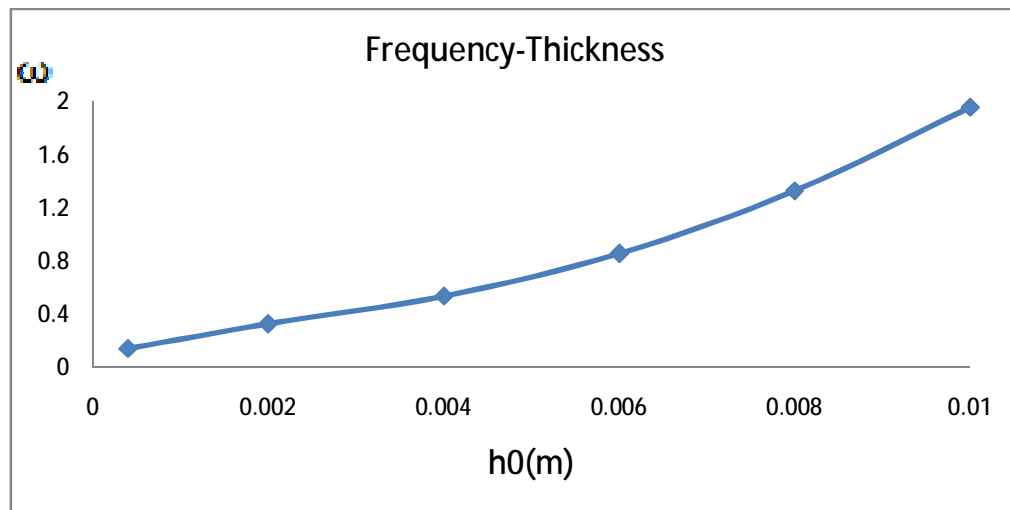
فصل سوم: بررسی نتایج

شکل (3-16) تاثیر دانسیته روی فرکانس طبیعی را نشان می‌دهد.



شکل (3-16). تاثیر دانسیته بر فرکانس طبیعی

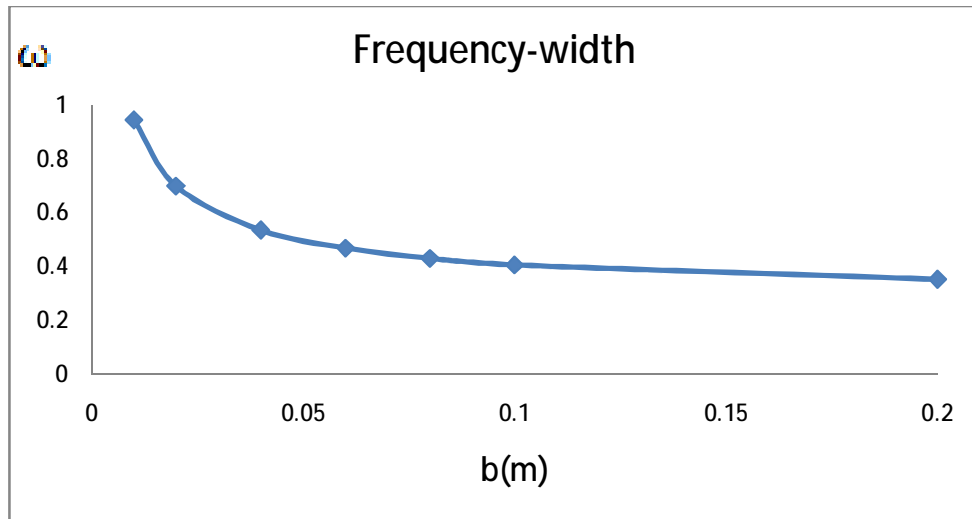
باتوجه به شکل فوق، با افزایش دانسیته، فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد. شکل (3-17) تاثیر ضخامت را بر فرکانس طبیعی نشان می‌دهد.



شکل (3-17). تاثیر ضخامت بر فرکانس طبیعی

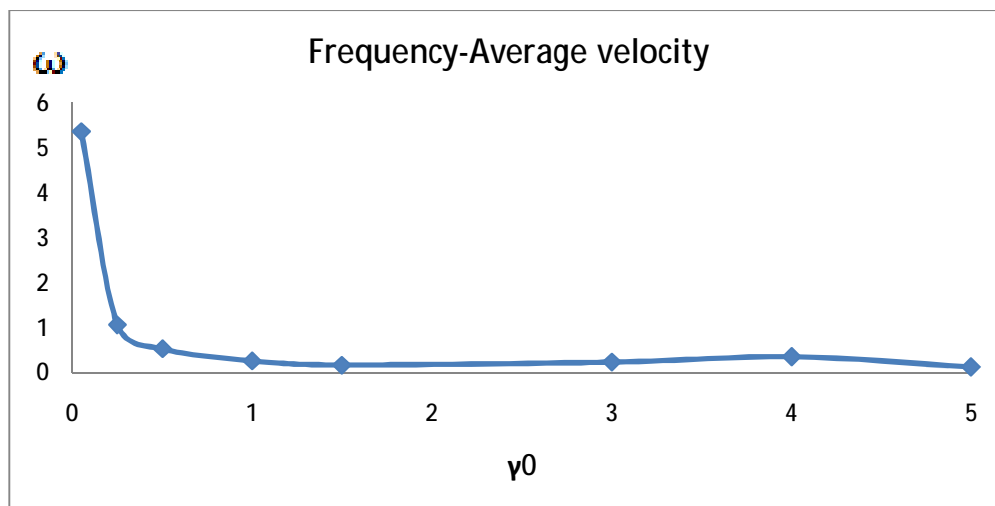
فصل سوم: بررسی نتایج

همانطور که در شکل فوق دیده می شود، افزایش ضخامت فرکانس را زیاد می کند. در شکل (3-18) تاثیر پهنا بر فرکانس طبیعی بررسی شده است.



شکل (3-18). تاثیر پهنای تیر بر فرکانس طبیعی

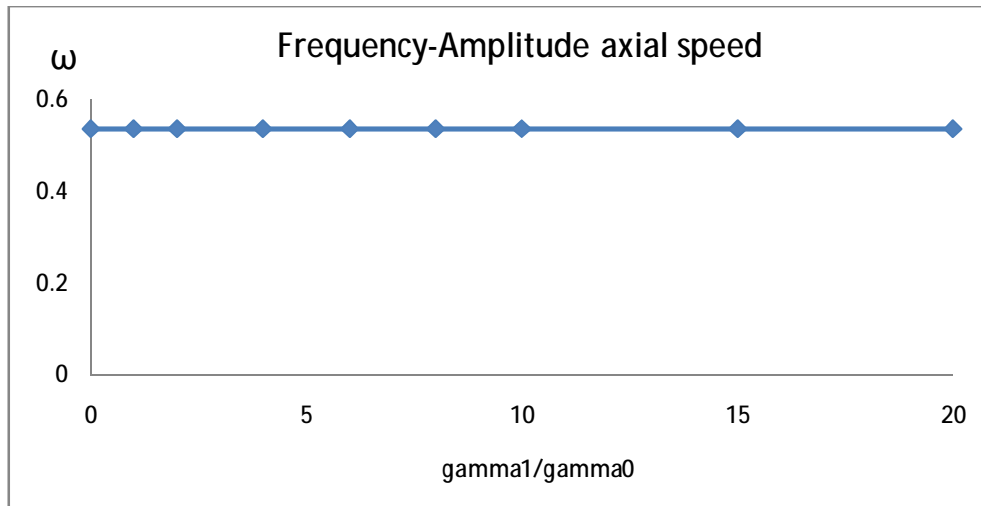
با مشاهده شکل فوق، افزایش پهنا فرکانس طبیعی را با شدت کمی کاهش می دهد. در شکل (3-19) تاثیر سرعت محوری بر فرکانس طبیعی بررسی شده است.



شکل (3-19). تاثیر سرعت محوری بر فرکانس طبیعی

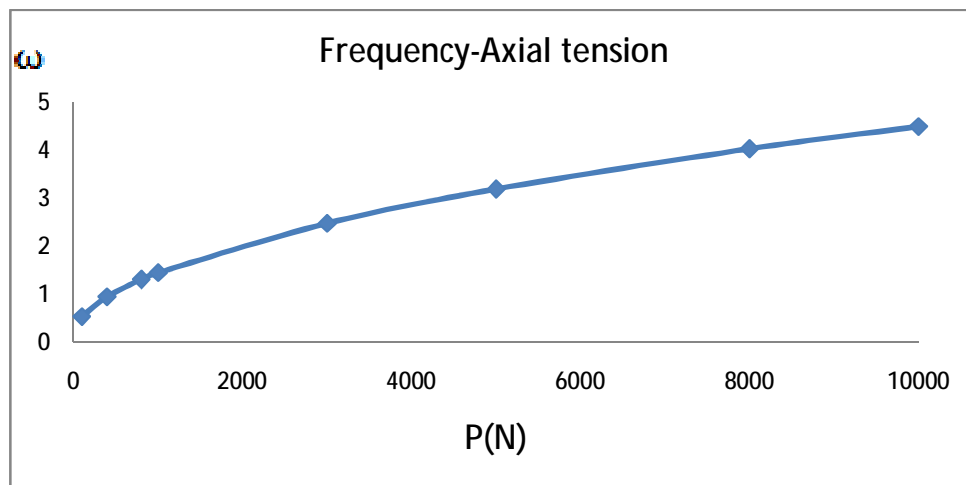
فصل سوم: بررسی نتایج

همانطور که در شکل فوق دیده می‌شود افزایش سرعت متوسط در بازه صفر تا دو باعث کاهش فرکانس طبیعی می‌شود که برای سرعت‌های بالاتر شدت آن کاهش می‌یابد. شکل (3-20) تاثیر دامنه نوسانات سرعت بر فرکانس طبیعی را نشان می‌دهد.



شکل (3-20). بررسی تاثیر دامنه نوسانات سرعت بر فرکانس طبیعی

همانطور که در شکل مشاهده می‌شود، دامنه نوسانات سرعت بر فرکانس طبیعی تاثیری ندارد. شکل (3-21) تاثیر کشش محوری را بر فرکانس طبیعی نشان می‌دهد.

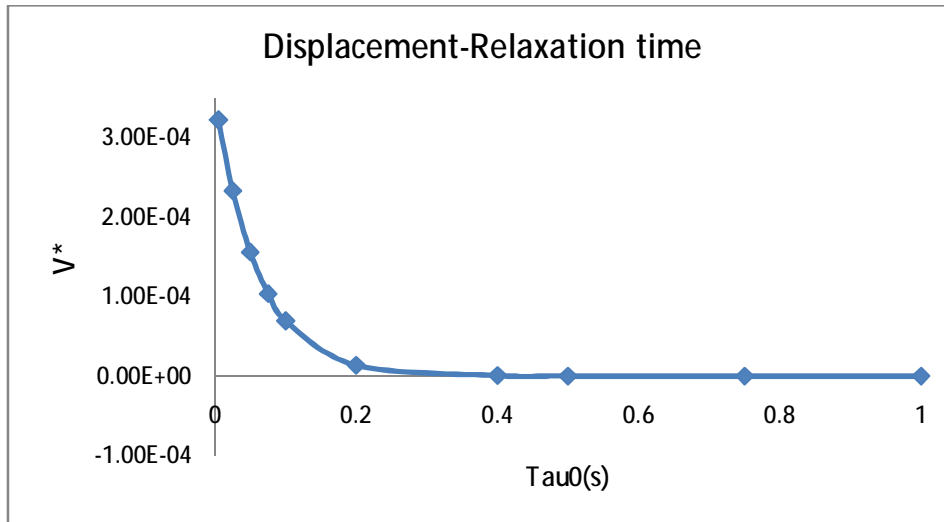


شکل (3-21). تاثیر کشش محوری بر فرکانس

با توجه به شکل فوق، افزایش کشش محوری، افزایش فرکانس طبیعی را به همراه دارد. بررسی تاثیر پارامتر-های مختلف بر فرکانس طبیعی، در حالت مودال انجام شد که برای حالت رزونانس پارامتریک اصلی نیز صادق است زیرا تحلیل مرتبه صفر و تعیین فرکانس آن با حالت مودال تفاوتی ندارد.

3-2-4- بررسی زمان رهایش

شکل (22-3) نمودار جابجایی نقطه وسط نسبت به زمان رهایش را نشان می‌دهد.



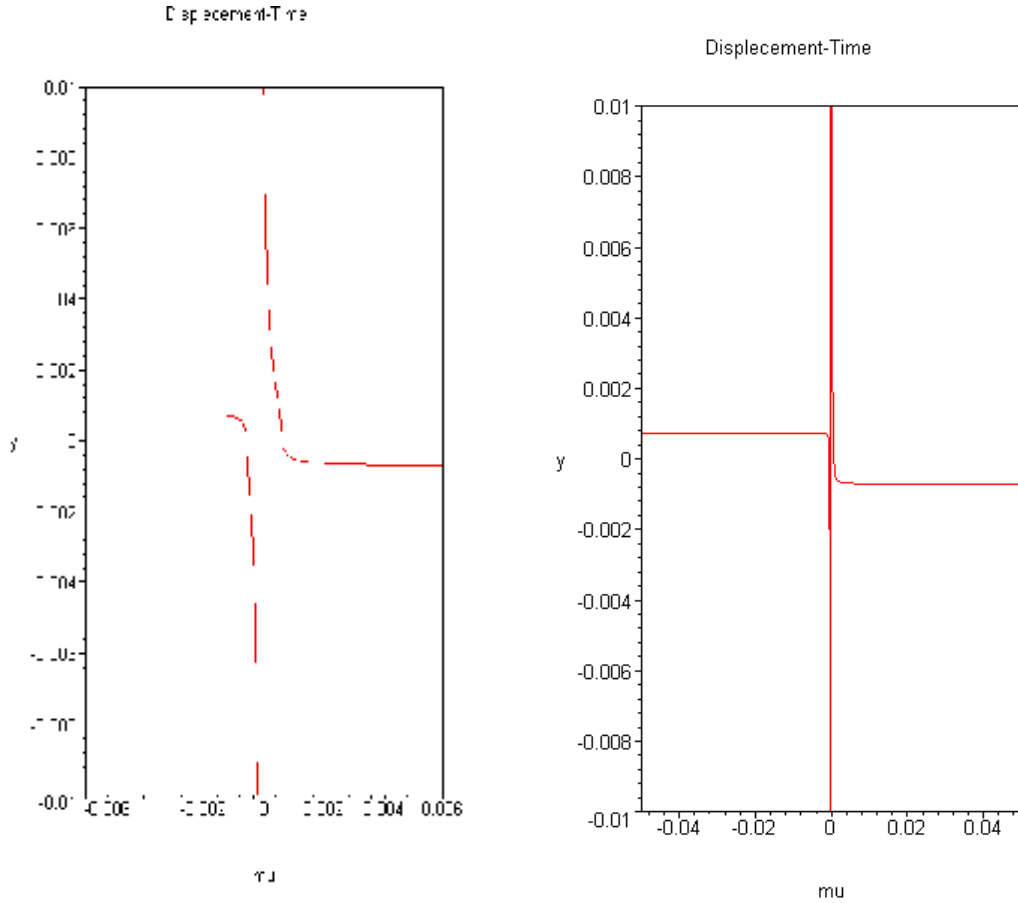
شکل (22-3). جابجایی نقطه وسط نسبت به زمان رهایش در حالت مودال ($T_0 = 1$)

با توجه به شکل فوق، با گذشت زمان رهایش جابجایی نقطه وسط در حالت مودال کاهش یافته است.

3-3-3- حالت رزونانس پارامتریک اصلی

3-3-3-1- بررسی پارامتر انحرافی μ

شکل (23-3) تغییرات پاسخ تیر در یک زمان و مکان خاص بر حسب پارامتر انحرافی (μ) را نشان می‌دهد.

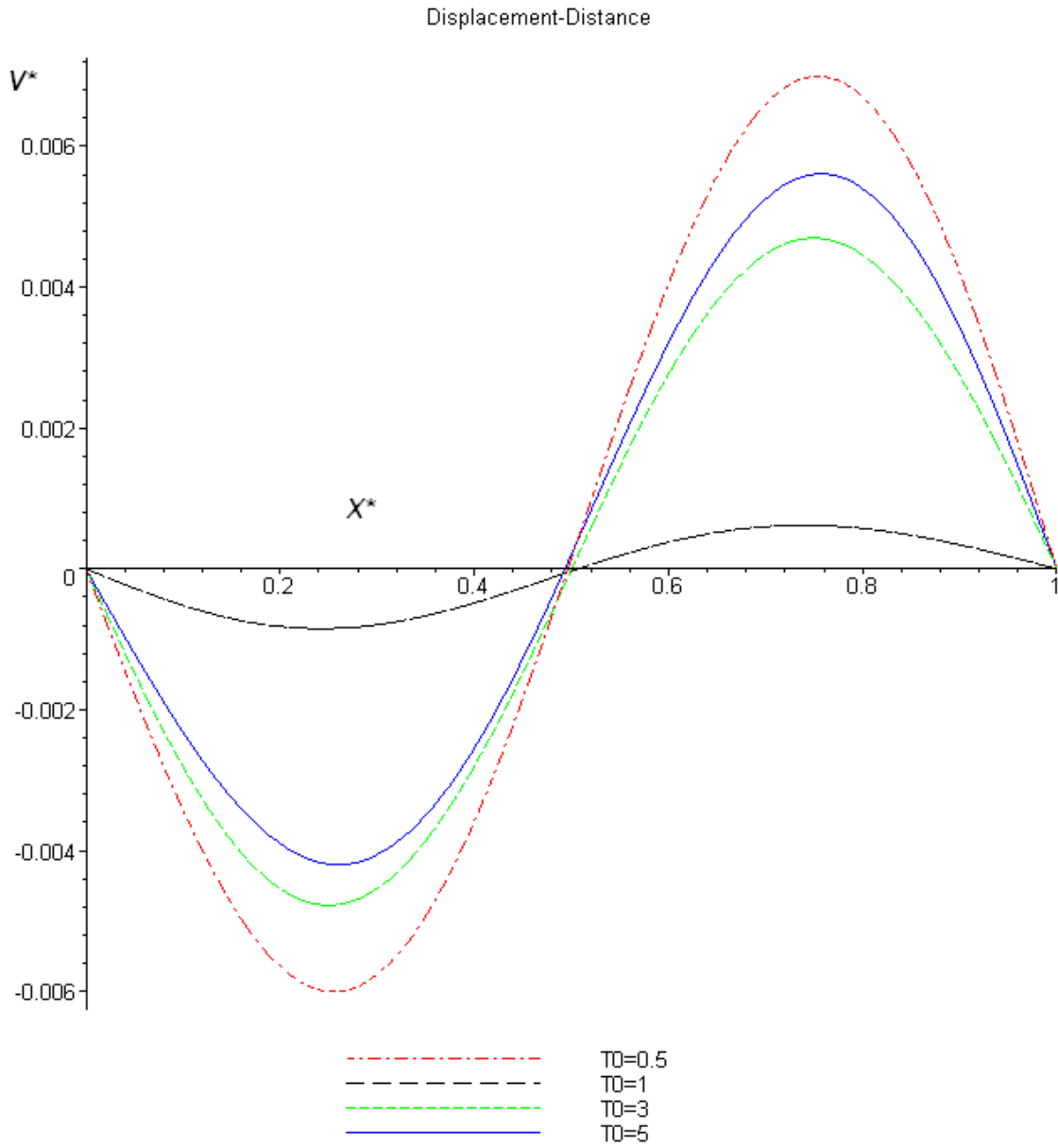


شکل (3-23). تغییرات پاسخ بر حسب μ در وسط تیر در زمان ($T_0 = 0.5$)

همانطور که مشاهده می شود نمودار سمت راست تغییرات پارامتر $0.05 > \mu > -0.05$ و نمودار سمت چپ، برای بازه $0.006 > \mu > -0.006$ رسم شده است. در هر دو نمودار در حوالی صفر تغییرات پارامتر μ زیاد است و پس از آن تقریباً ثابت می شود و نشان دهنده این است که سیستم در این ناحیه خطی است. نواحی که تغییرات آن زیاد است معرف رفتار غیر خطی سازه است.

3-3-2- بررسی پاسخ مکانی تیر

شکل (3-24) شکل مود تیر را در زمان های $\{T_0 = 0.5, 1, 3, 5\}$ برای این تیر در حالت رزونانس پارامتریک اصلی نشان می دهد.

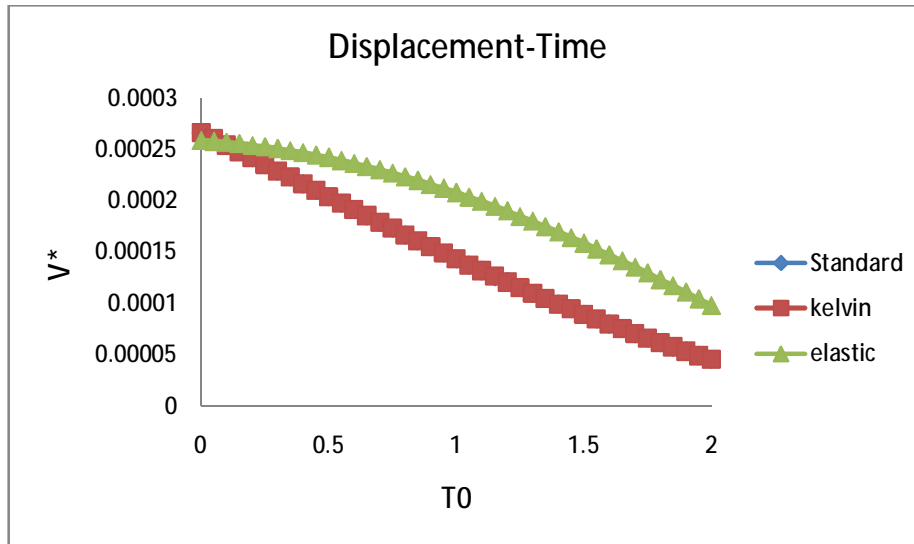


شکل (3-24). شکل نمودار در زمان های مختلف در حالت رزونانس پارامتریک اصلی

همانطور که مشاهده می شود، پاسخ مکانی در حالت رزونانس پارامتریک اصلی با گذشت زمان افزایش می یابد.

3-3-3- بررسی پاسخ زمانی تیر

شکل (3-25) پاسخ زمانی تیر را در نقطه وسط برای مدل های استاندارد و کلویین و حالت الاستیک برای رزونانس پارامتریک اصلی نشان می دهد. در این نمودار، جابجایی بر حسب ضخامت تیر بی بعد شده است.



شکل (3-25). پاسخ زمانی در وسط تیر برای مدل های مختلف در حالت رزونانس پارامتریک اصلی

همانطور که در شکل فوق مشاهده می شود همانند حالت مودال جابجایی وسط تیر نسبت به زمان در حالت ویسکوالاستیک بیشتر از حالت الاستیک می باشد.

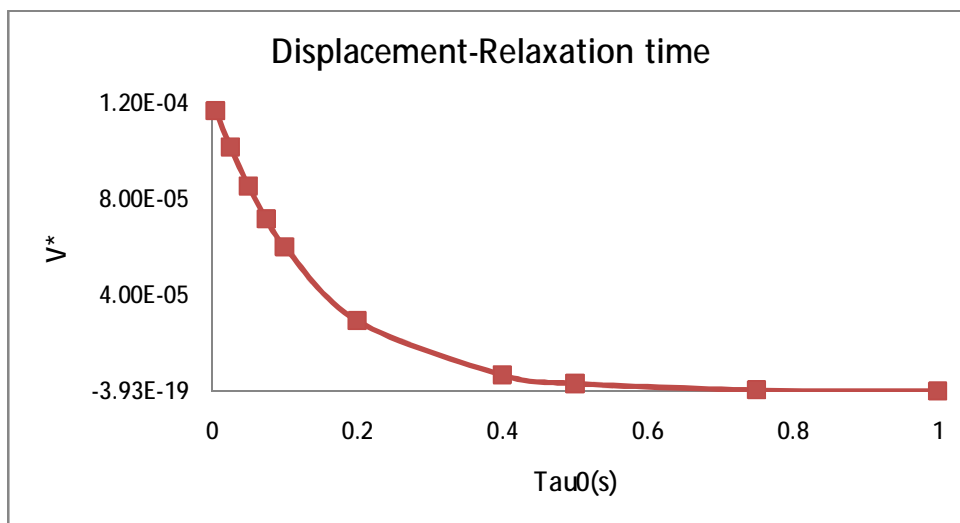
اگر برای حل معادله (2-102) شرط اولیه صفر روی هر دو تابع $\{q(T_1), p(T_1)\}$ اعمال شود و دو معادله برای یکی از ثابت ها و پارامتر μ حل شود، مقداری که برای این پارامتر به ازای شرایط اولیه صفر بدست می آید. به صورت زیر:

$$\{\mu = 0.00058473, -0.00058473\} \quad (1-3)$$

است. یا می توان گفت، فقط به ازای همین مقدار μ شرط اولیه صفر برقرار است.

3-3-4- بررسی زمان رهایش

در شکل (3-26) نمودار جابجایی نقطه وسط نسبت به زمان رهایش رسم شده است.

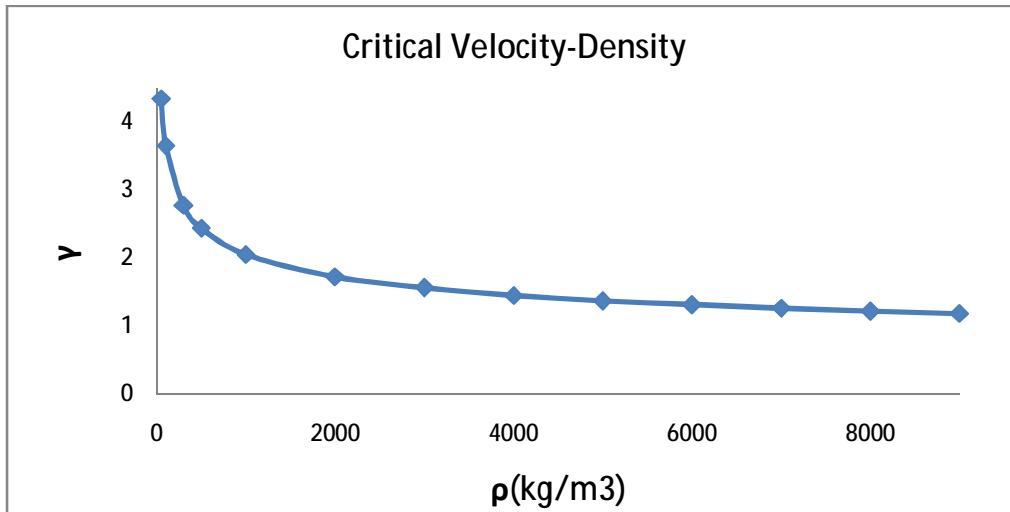


شکل (3-26). جابجایی نقطه وسط نسبت به زمان رهایش در حالت رزونانس پارامتریک ($T_0 = 1$)

با توجه به شکل با گذشت زمان رهایش جابجایی نقطه وسط در حالت رزونانس پارامتریک همانند حالت مودال کاهش یافته است.

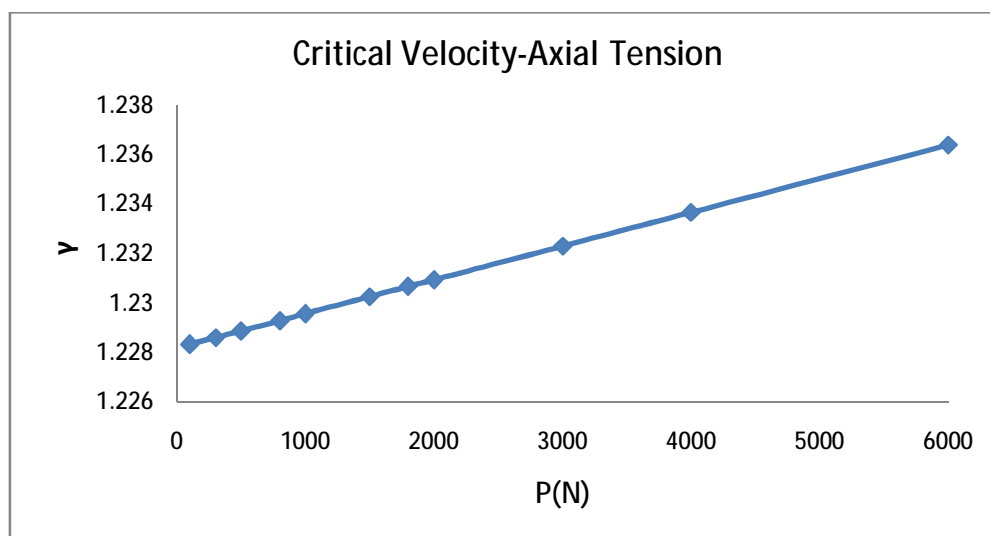
3-4- بررسی سرعت بحرانی

شکل (3-27) تاثیر دانسیته را بر سرعت بحرانی تیر نشان می‌دهد.



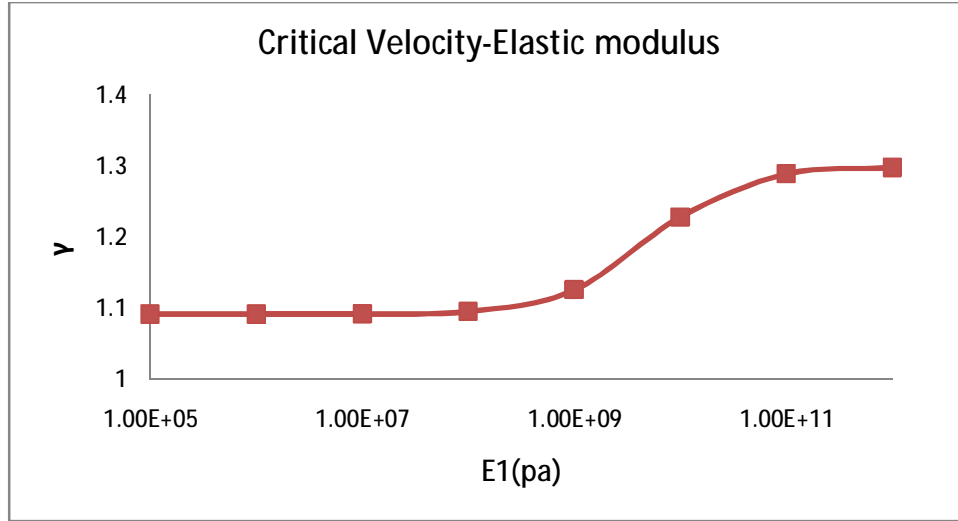
شکل (3-27). تاثیر دانسیته بر سرعت بحرانی

همانطور که در شکل فوق مشاهده می‌شود، افزایش دانسیته سرعت بحرانی را کاهش می‌دهد، که در بازه بین 4000 تا 50 شدت کاهش سرعت بحرانی بیشتر بوده ولی برای بازه بین 4000 تا 9000 بصورت یکنواخت و شدت کمتری کاهش سرعت مشاهده می‌شود. شکل (3-28) تاثیر کشش محوری را بر سرعت بحرانی نشان می‌دهد.



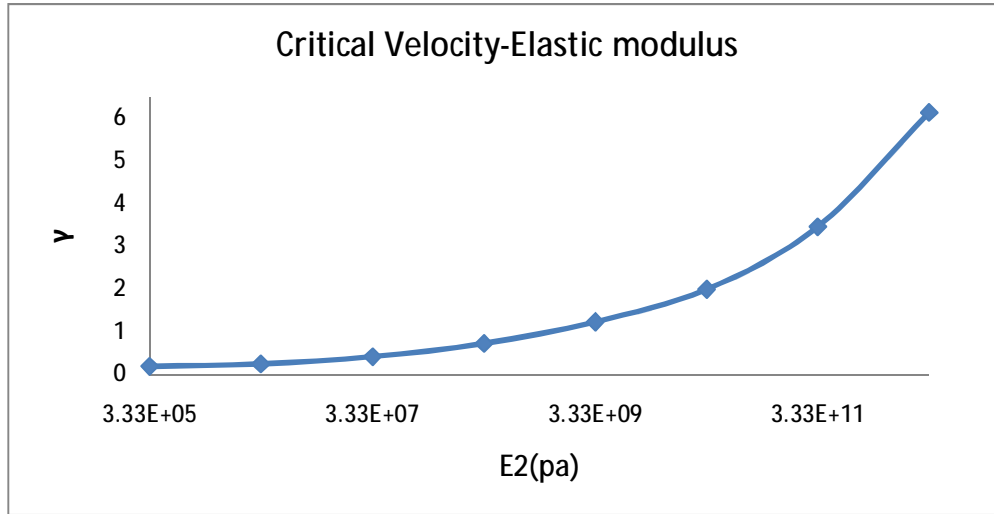
شکل (3-28). تاثیر کشش محوری بر سرعت بحرانی

همانطور که در شکل فوق مشاهده می‌شود افزایش کشش محوری، میزان سرعت بحرانی تیر را به مقدار کمی افزایش می‌دهد. در شکل (3-29) تاثیر مدول الاستیسته E_1 بر سرعت بحرانی نشان داده شده است. نمودار به صورت لگاریتمی رسم شده است.



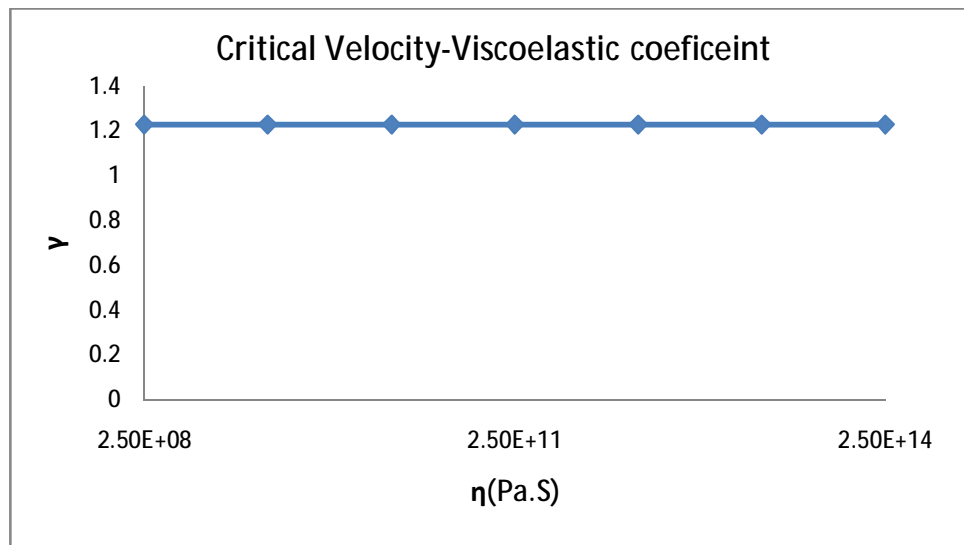
شکل (3-29). تاثیر مدول الاستیسته E_1 بر سرعت بحرانی

بررسی تاثیر مدول الاستیسته E_1 بر سرعت بحرانی در شکل فوق نشان می‌دهد، که برای E_1 بین $1e5$ تا $1e9$ سرعت بحرانی تقریباً مستقل از مدول الاستیسته E_1 است ولی برای مقادیر بین $1E9$ تا $1E12$ سرعت بحرانی تحت تاثیر مدول الاستیسته E_1 قرار گرفته و افزایش پیدا می‌کند. در شکل (3-30) تاثیر مدول الاستیسته E_2 بر سرعت بحرانی نشان داده شده است.



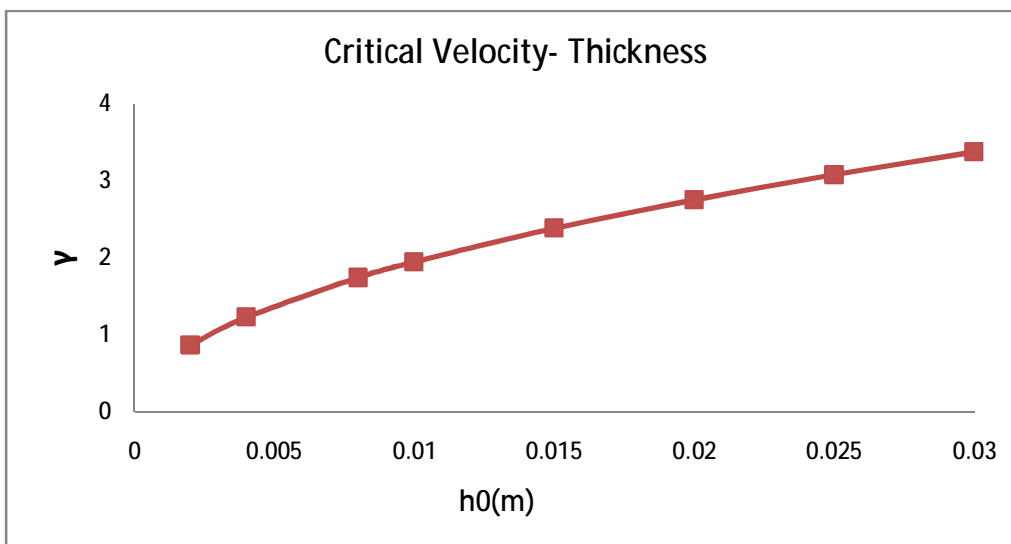
شکل (3-30). تاثیر مدول الاستیسیته E_2 بر سرعت بحرانی

با توجه به شکل با افزایش مدول الاستیسیته E_2 سرعت بحرانی به صورت یکنواخت افزایش می‌یابد. در شکل (31-2) تاثیر ضریب ویسکو الاستیک بر سرعت بحرانی نشان شده است.



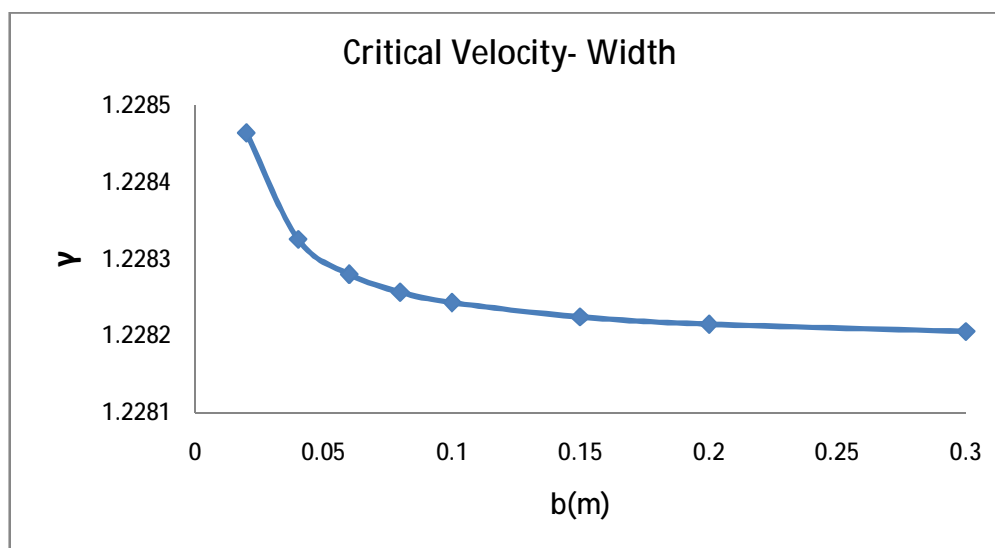
شکل (3-31). بررسی تاثیر ضریب ویسکوالاستیک بر سرعت بحرانی

همانطور که در شکل فوق مشاهده می‌شود، ضریب ویسکوالاستیک در محدوده $(0.25E8, 3.33E18)$ مستقل از سرعت بحرانی می‌باشد. در شکل (32-3) تاثیر عمق تیر بر سرعت بحرانی نشان داده شده است.



شکل (3-32). تاثیر عمق تیر بر سرعت بحرانی

همانطور که در شکل مشاهده می‌شود، افزایش یکنواخت سرعت بحرانی در ازای افزایش عمق تیر مشاهده می‌شود. در شکل (3-33) تاثیر پهنای تیر بر سرعت بحرانی نشان داده شده است.



شکل (3-33). تاثیر پهنای تیر بر سرعت بحرانی

با توجه به شکل فوق، افزایش پهنای تیر، سرعت بحرانی را به مقدار بسیار کمی کاهش می‌دهد.

3-5- اعتبار سنجی

برای اعتبار سنجی تحقیق، فرکانس طبیعی را با ساده سازی کد برای تیر تیموشنکو الاستیک ساکن بدون کشش محوری بدست آورده و با فرمول تئوری که برای تیر تیموشنکو الاستیک ساکن با تکیه‌گاه ساده (بدون کشش محوری) در مرجع [30] موجود است، مقایسه می‌شود. فرمول فرکانسی برای تیر ذکر شده

$$\omega_n^4 \frac{\rho r^2}{KG} - \omega_n^2 \left(1 + \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 r^2 \frac{E}{KG} \right) + \left(\frac{n\pi}{l} \right)^4 \alpha^2 = 0 \quad (2-3)$$

$$r^2 = \frac{I}{A}, \alpha^2 = \frac{EI}{\rho A} \quad (3-3)$$

که با جایگذاری $\eta = 0$ برای حالت الاستیک در روابط (2-8) و (2-9) در رابطه زیر

$$E = \frac{3}{2} E_2, G = \frac{1}{2} E_2 \quad (4-3)$$

بدست می‌آیند. با جایگذاری مقادیر فوق در رابطه (3-2) مقدار فرکانس طبیعی برای مود دوم برابر 36.475 بدست آمد با ساده سازی کد برنامه برای رسیدن به نوع تیر ذکر شده فرکانس طبیعی بی بعد برابر 36.475 بدست می‌آید که مطابق با مقدار تئوری آن است.

3-6- جمع بندی

در این فصل برای دو حالت مودال و رزونانس پارامتریک اصلی، شکل مود در زمان‌های مختلف و پاسخ‌های زمانی در نقاط مختلف تیر رسم و بحث شد. همچنین تاثیر پارامترهای هندسی و پارامترهای ویسکو الاستیک، کشش محوری، سرعت محوری و دامنه نوسانات سرعت نیز بر فرکانس طبیعی و سرعت بحرانی پاسخ زمانی حالت مودال بررسی شد.

c d

فصل چهارم: نتیجه گیری و پیشنهادها

b a

با توجه به کاربردهای فراوان تیر متحرک محوری معادلات حاکم بر تیر تیموشنکوی ویسکوالاستیک متحرک محوری که با مدل استاندارد جامد خطی شبیه سازی شده بود، استخراج شد. سپس با روش اغتشاشات مرتبه اول و تعیین شرط حل پذیری، معادلات مرتبه صفر و یک حل و تاثیر مجموع عوامل موثر بر این گونه تیرها، پارامترهای ویسکوالاستیک، پارامترهای هندسی، کشش محوری و دانسیته آن، بر پاسخ زمانی، شکل مودها و سرعت بحرانی این تیر بررسی شد. لذا می توان در مورد عواملی که برای طراحی و انتخاب شاخص‌هایی که در یک تیر متحرک محوری ویسکوالاستیک مورد نیاز است، بحث کرد.

سرعت تیر: با توجه به این که در این تحقیق، سرعت تیر به صورت ثابت متوسط با تغییرات هارمونیک کوچک، در نظر گرفته شده بود و با توجه به شکل‌های (3-5)، (3-19) و مشخصات تیر بحث شده، می توان سرعت متوسط مناسبی را در طراحی یک سیستم متحرک انتخاب کرد زیرا افزایش سرعت محوری باعث، افزایش خیز، افزایش فرکانس می شود. با توجه به شکل‌های (3-6) و (3-20) اگر بنا به دلایلی تغییرات اندکی در دامنه نوسانات سرعت بوجود بیاید، تغییری در فرکانس تیر مشاهده نخواهد شد و در پاسخ زمانی آن تاثیر چندانی ندارد.

پارامترهای هندسی: با توجه به شکل‌های (3-7)، (3-8)، (3-17)، (3-18)، (3-32) و (3-33) افزایش عمق باعث افزایش فرکانس، افزایش سرعت بحرانی و در خیز تیر بسیار تاثیر گذار می‌باشد و افزایش پهنا باعث افزایش خیز، کاهش فرکانس می‌شود. لذا با توجه به محدودیت‌های سیستم، این دو عامل نیز با دقت انتخاب شوند.

دانسیته: با توجه به شکل‌های (3-9)، (3-16) و (3-27) که افزایش دانسیته باعث کاهش خیز، فرکانس طبیعی و سرعت بحرانی می‌شود، لذا دانسیته تیر از دیگر گزینه‌هایی است که در پاسخ زمانی و فرکانس طبیعی سیستم موثر بوده و باید با بررسی جوانب انتخاب شود.

پارامترهای ویسکوالاستیک: مدل بحث شده در این تحقیق مدل استاندارد است که از موازی شدن فنری (E_2) با مدل ماکسول فرض شده است. با توجه به شکل‌های (3-10)، (3-13) و (3-31) افزایش ضریب ویسکوالاستیک باعث کاهش خیز و در فرکانس بی تاثیر می‌باشد. مدول الاستیسته E_1 (شکل‌های (3-11)، (3-14) و (3-29)) در فرکانس طبیعی و پاسخ زمانی تاثیری نداشته ولی در سرعت بحرانی افزایش آن باعث افزایش یکنواخت سرعت بحرانی می‌شود. ولی مدول الاستیسته E_2 (شکل‌های (3-12)، (3-15) و (3-30))، افزایش آن باعث افزایش فرکانس طبیعی و سرعت بحرانی می‌شود و در پاسخ زمانی بسیار تاثیرگذار می‌باشد. لذا مدول‌های الاستیسته مدل خطی که تیر طبق آن شبیه سازی شده است نیز از دیگر گزینه‌های قابل تامل هستند.

کشش محوری: افزایش کشش محوری، کاهش خیز، افزایش فرکانس طبیعی و افزایش سرعت بحرانی را به همراه دارد. لذا ایجاد یک کشش محوری مناسب برای داشتن پاسخ زمانی، فرکانس طبیعی و سرعت بحرانی قابل قبول، مورد نیاز است. (شکل‌های (3-4)، (3-21) و (3-28)).

زمان رهایش: با توجه به شکل‌های (3-22) و (3-26) افزایش زمان رهایش، برای هر دو حالت مودال و رزونانس پارامتریک، کاهش جابجایی نقطه وسط را نشان می‌دهد.

پیشنهاداتی که مطرح می شود در دو راستا می باشد:

1. پیشنهادهایی برای بهبود پاسخ ها و دقت بیشتر نتایج

- استفاده از تئوری مرتبه بالاتر اغتشاشات (مثلا مرتبه دو)
- تعیین فرکانس طبیعی با دقت بالاتر
- اعمال مشتق مادی زمانی روی چرخش تیر

2. پیشنهادهایی برای گسترش تحقیق و تعمیم آن

- بررسی شرایط مرزی مختلف و تاثیر آن بر خیز، فرکانس طبیعی و سرعت بحرانی
- بررسی تیر ویسکو الاستیک متحرک محوری با تئوری های دیگر
- مدل سازی غیر خطی ویسکو الاستیک تیر متحرک محوری
- بررسی تیر ویسکو الاستیک متحرک محوری با سرعت متغیری غیر از توابع هارمونیک
- تعیین سرعت بحرانی برای تیر ویسکو الاستیک متحرک محوری با سرعت متغیر
- بررسی مرزهای پایداری و عوامل موثر بر آن
- تحلیل عددی و مقایسه با حل تحلیلی

c d

پیوست

b a

پیوست الف: سینماتیک محیط پیوسته [28]

هنگامی که یک ذره در حال حرکت است، دما، سرعت و تانسور تنش آن ممکن است با زمان تغییر کند می‌توان این تغییرات را به دو صورت توصیف کرد.

الف-1- توصیف مادی یا لاگرانژی

مطالعه مجموعه ذرات محیط پیوسته در بافت اولیه، توصیف مادی گفته می‌شود.

اگر میدان سرعت، دما و تانسور تنش یک ذره توابعی از زمان و مختصات مادی باشند، به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\theta = \hat{\theta}(X_1, X_2, X_3, t)$$

$$v = \hat{v}(X_1, X_2, X_3, t) \quad (\text{الف-1})$$

$$T = \hat{T}(X_1, X_2, X_3, t)$$

الف-2- توصیف فضایی

مطالعه مجموعه ذرات محیط پیوسته در بافتار ثانویه که مطالعه در زمان t انجام می‌شود، توصیف فضایی یا اولری گفته می‌شود. یا به عبارت دیگر مشاهده تغییرات در یک موقعیت ثابت نیز بیان می‌شود که میدان های سرعت، دما و تانسور تنش آن به صورت زیر توصیف می‌شود:

$$\theta = \hat{\theta}(x_1, x_2, x_3, t)$$

$$v = \hat{v}(x_1, x_2, x_3, t) \quad (\text{الف-2})$$

$$T = \hat{T}(x_1, x_2, x_3, t)$$

مختصات سه گانه (x_1, x_2, x_3) موقعیت ثابت نقاط در یک فضای فیزیکی به مختصات فضایی شناخته شده است. مختصات فضایی x_i یک ذره در هر زمان وابسته به مختصات مادی X_i یک ذره است. در این توصیف،

چیزی که توصیف می‌شود تغییرات یک کمیت در یک موقعیت ثابت که تابعی از زمان است. موقعیت‌های فضایی با ذرات متفاوت در زمان‌های متفاوت اشغال شده است. بنابراین توصیف فضایی اطلاعات صریحی نسبت به تغییرات در مشخصات ذرات هنگامی که حرکت می‌کنند را نمی‌دهد. البته توصیف فضایی و مادی هر دو وابسته به زمان هستند.

الف-3- مشتق مادی

نرخ تغییرات یک کمیت را در میدان یک ذره نسبت به زمان، مشتق مادی آن کمیت گفته می‌شود. که با D/Dt نمایش داده می‌شود.

الف- هنگامی که توصیف مادی یک کمیت استفاده می‌شود.

$$\theta = \hat{\theta}(x_1, x_2, x_3, t) \quad (\text{الف-۳})$$

بنابراین

$$\frac{D\theta}{Dt} = \left(\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial t} \right)_{x_i\text{-fixed}} \quad (\text{الف-۴})$$

ب- هنگامی که توصیف فضایی یک کمیت استفاده شود.

$$\theta = \hat{\theta}(x_1, x_2, x_3, t) \quad (\text{الف-۵})$$

در واقع x_i : موقعیت ذرات ماده در زمان t ، که وابسته به مختصات مادی است.

$$\begin{aligned} \frac{D\theta}{Dt} &= \left(\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial t} \right)_{x_i\text{-fixed}} \\ &= \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial t} + \left(\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t} \right)_{x_i\text{-fixed}} \end{aligned} \quad (\text{الف-۶})$$

عبارت $\frac{\partial x_1}{\partial t}, \frac{\partial x_2}{\partial t}, \frac{\partial x_3}{\partial t}$ هنگامی که X_i ها ثابت باشند بدست می آیند، هنگامی که دستگاه مختصات

کارتزین استفاده شود، این عبارات مولفه‌های سرعت v_i از ذره X_i هستند. بنابراین، مشتق مادی در

مختصات مستطیلی به صورت:

$$\frac{D\theta}{Dt} = \frac{\partial \theta}{\partial t} + v_1 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \theta}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial \theta}{\partial x_3} \quad (\text{الف-۷})$$

یا

$$\frac{D\theta}{Dt} = \frac{\partial \theta}{\partial t} + v \cdot \nabla \theta \quad (\text{الف-۸})$$

اگر میدان دما مستقل از زمان و اگر سرعت ذره عمود بر گرادیان دما باشد آن گاه:

$$\frac{D\theta}{Dt} = 0 \quad (\text{الف-۹})$$

پیوست ب: مقدمه ای بر تئوری اغتشاشات [5]

تئوری اغتشاشات به حل معادلاتی می‌پردازد که در آن‌ها یک پارامتر کوچک ε وجود دارد. در این صورت حل مساله به صورت یک سری از ε در نظر گرفته می‌شود با جایگذاری این حل در معادله و مساوی قرار دادن جملات با توان یکسان حل تقریبی مساله بدست می‌آید. در این سری‌ها جملاتی که باعث می‌شوند در زمان‌های طولانی حل به بی‌نهایت میل کرده و واگرا شود، را جملات secular گویند، که برای حذف این جملات از دو روش Renormalization و multiple scale استفاده می‌شود.

ب-1-تعریف مرتبه یک عبارت

گوییم $f(\varepsilon)$ و $g(\varepsilon)$ هم مرتبه هستند اگر

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} = A \quad 0 < |A| < \infty \rightarrow f(\varepsilon) = O(g(\varepsilon)) \quad (\text{ب-1})$$

هر چند که از نظر ریاضی A می تواند هر عددی باشد ولی از نظر فیزیکی انتظار این است که A از مرتبه 1 باشد.

$$A = O(1) \quad (\text{ب-2})$$

به عنوان مثال در $\varepsilon \rightarrow 0$ نتیجه می شود:

$$\begin{aligned} \sin \varepsilon &= O(\varepsilon) \\ \cos \varepsilon &= O(1) \\ \frac{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}{\sin \varepsilon} &= o\left(\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\right) \end{aligned} \quad (\text{ب-3})$$

ب-2-تعریف سری مجانبی : Asymptotic expansion

گوییم عبارت $f \cong \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{w^n}$ یک سری مجانبی است اگر و فقط اگر

$$f(w) = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{a_n}{w^n} + O\left(\frac{1}{w^N}\right) \quad N \rightarrow \infty \quad (\text{ب-4})$$

یا خطای ناشی از حذف جملات مرتبه N و بعد از آن هم مرتبه با جمله n ام است.

معادله حرکت ارتعاشی یک سیستم یک درجه آزاد به صورت :

$$\frac{d^2 u^*}{dt^2} + f(u^*) = 0 \quad (\text{ب-5})$$

$$f(u^*) = k_1 u^* + k_3 u^{*3} \quad (\text{ب-6})$$

معادله (ب- 5) به معادله Duffing مشهور است. شکل بی بعد این معادله را می توان به صورت :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + u + \varepsilon u^3 = 0 \quad (\text{ب- 7})$$

در نظر گرفت که برای حل

$$u = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \dots \quad (\text{ب- 8})$$

در نظر گرفته می شود. با جایگذاری معادله (ب- 8) در معادله (ب- 7) نتیجه می شود:

$$\frac{d^2}{dt^2}(u_0 + \varepsilon u_1 + \dots) + u_0 + \varepsilon u_1 + \dots + \varepsilon(u_0 + \varepsilon u_1 + \dots)^3 = 0 \quad (\text{ب- 9})$$

حال بر اساس مرتبه های مختلف ε معادله ها حل می شود :

$$\begin{aligned} O(\varepsilon^0) \rightarrow \frac{d^2u_0}{dt^2} + u_0 = 0 \rightarrow u_0 = c_1 \sin t + c_2 \cos t \\ = a_0 \cos(t + \beta_0) \end{aligned} \quad (\text{ب- 10})$$

$$\begin{aligned} O(\varepsilon^1) \rightarrow \frac{d^2u_1}{dt^2} + u_1 + u_0^3 \rightarrow \frac{d^2u_1}{dt^2} + u_1 = -a_0^3 \cos^3(t + \beta_0)^3 \\ = -\frac{a_0^3}{4} [\cos(3t + 3\beta_0) + 3 \cos(t + \beta_0)] \end{aligned} \quad (\text{ب- 11})$$

$$u_{1g} = a_1 \cos(t + \beta_1) \quad (\text{ب- 12})$$

$$u_{1p} = A_1 \cos(3t + 3\beta_0) + B_1 t \sin(t + \beta_0) + c_1 t \cos(t + \beta_0) \quad (\text{ب- 13})$$

با جایگذاری در معادله (ب- 11) نتیجه می شود:

$$A_1 = \frac{a_0^3}{32}, B_1 = -\frac{3a_0^3}{8}, c_1 = 0 \quad (\text{ب- 14})$$

$$u_1 = a_1 \cos(t + \beta_1) + \frac{a_0^3}{32} \cos(3t + 3\beta_0) - \frac{3a_0^3}{8} t \sin(t + \beta_0) \quad (\text{ب- 15})$$

با جایگذاری در معادله (ب- 8) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} u = & a_0 \cos(t + \beta_0) \\ & + \varepsilon \left[a_1 \cos(t + \beta_1) + \frac{a_0^3}{32} \cos(3t + 3\beta_0) \right. \\ & \left. - \frac{3a_0^3}{8} t \sin(t + \beta_0) \right] \end{aligned} \quad (\text{ب- ۱۶})$$

در معادله (ب- 16) عبارت $t \sin(t + \beta_0)$ جمله secular نامیده می‌شود که عامل واگرایی سری در زمان‌های طولانی است. حذف جملات سکولار با دو روش انجام می‌شود.

ب-3- روش Multiple scale

در این روش حل به عنوان تابعی از $t, \varepsilon t, \varepsilon^2 t$ در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{aligned} u(t, \varepsilon, \varepsilon t, \varepsilon^2 t, \dots) &= u(T_0, T_1, T_2, \dots, \varepsilon) \\ T_0 = t_0, T_1 = \varepsilon t, T_2 = \varepsilon^2 t, T_n &= \varepsilon^n t \end{aligned} \quad (\text{ب- ۱۷})$$

به کمک قاعده زنجیره ای :

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} \frac{\partial T_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial T_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial T_2} \frac{\partial T_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} \quad (\text{ب- ۱۸})$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} &= \left(\frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} \right) * \left(\frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} \right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} + \dots \end{aligned} \quad (\text{ب- ۱۹})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial T_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} + u + \varepsilon u^3 = 0 \quad (\text{ب- ۲۰})$$

با جایگذاری در معادله (ب- 7) نتیجه می‌شود :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial T_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} + u + \varepsilon u^3 = 0 \quad (\text{ب- } 21)$$

$$u(T_0, T_1, \varepsilon) = u_0(T_0, T_1) + \varepsilon u_1(T_0, T_1) + \dots \quad (\text{ب- } 22)$$

با جایگذاری معادله (ب- 22) در معادله (ب- 21) نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0 \partial T_1} + u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon u_0^3 + \dots \quad (\text{ب- } 23)$$

حال همانند قبل مرتبه های مختلف را جدا کرده و معادله های آن را حل کرده :

$$O(\varepsilon^0) = \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0^2} + u_0 = 0 \rightarrow u_0 = a_0(T_1) \cos(T_0 + \beta_0(T_1)) \quad (\text{ب- } 24)$$

$$O(\varepsilon^1) = \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} + u_1 + 2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0 \partial T_1} + u_0^3 = 0 \quad (\text{ب- } 25)$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} + u_1 = -2 \frac{\partial}{\partial T_1} (-a_0 \sin(T_0 + \beta_0) - a_0^3 \cos(T_0 + \beta_0)^3) \quad (\text{ب- } 26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} + u_1 &= 2 \frac{\partial a_0}{\partial T_1} \sin(T_0 + \beta_0) \\ &+ \left(2a_0 \frac{\partial \beta_0}{\partial T_1} - \frac{3a_0^3}{4} \right) \cos(T_0 + \beta_0) - \frac{a_0^3}{4} \cos(3T_0 + 3\beta_0) \end{aligned} \quad (\text{ب- } 27)$$

$$\frac{\partial a_0}{\partial T_1} = 0 \quad (\text{ب- } 28)$$

زیرا a_0 تابع T_1 نیست .

$$2a_0 \frac{\partial \beta_0}{\partial T_1} - \frac{3a_0^3}{4} = 0 \rightarrow \beta_0 = \frac{3a_0^2}{8} T_1 + \beta_2 \quad (\text{ب- } 29)$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} + u_1 = -\frac{a_0^3}{4} \cos(3T_0 + 3\beta_0) \quad (\text{ب- } 30)$$

$$u_1 = a_1 \cos(T_0 + \beta_0) + \frac{a_0^3}{32} \cos(3T_0 + 3\beta_0) \quad (\text{ب- } 31)$$

با جایگذاری در معادله (ب-22) نتیجه می‌شود :

$$\begin{aligned}
 u = & a_0 \cos\left(t + \frac{3}{8}a_0^2 \varepsilon t + \beta_2\right) \\
 & + \varepsilon \left[a_1 \cos\left(t + \frac{3}{8}a_0^2 \varepsilon t + \beta_2\right) \right. \\
 & \left. + \frac{a_0^3}{32} \cos\left(3t + \frac{9}{8}a_0^2 \varepsilon t + 3\beta_2\right) \right]
 \end{aligned}
 \tag{ب-32}$$

ب-4- شریط حل پذیری

در استفاده از روش اغتشاشات، مثل روش multiple scale، مسائل در ادامه نیاز به حل دارند. معمولاً مسائل مرتبه اول همگن هستند، در حالی که مسائل مرتبه بالاتر خطی و غیر همگن هستند. برای مشخص کردن وابستگی مقیاس‌های آهسته، باید مسائل مرتبه بالاتر و شرایط وضع شده بررسی شده تا سری را یکنواخت کند. برای مسائل ارتعاشی غیر خطی پروسه بالا منجر به حذف ترم‌های سکولار و small divisor می‌شود. در یک سیستم یک درجه آزاد، ایجاد شرایط برای حذف ترم‌های سکولار و small divisor آسان است، زیرا تمام آنچه باید انجام شود این است که ضرایب عباراتی که ترم‌های سکولار ایجاد می‌کنند، برابر صفر در نظر گرفته شود. در حالی که سیستم‌های چند درجه آزاد هنگامی که معادلات حاکم کوپل به هم هستند، حذف کردن ترم‌های سکولار کمی پیچیده است. غیر یکنواختی در سری‌ها ارضا تمام شرایط مرزی با مشکل مواجه ساخته و منجر به ناسازگاری می‌شود. ناسازگاری با ایجاد شرایط مشخص، برطرف می‌شود. این شرایط، به حل پذیری یا سازگاری منسوب شده است. این شرایط از معادلات دیفرانسیل همگن با شرایط مرزی مختلف استخراج شده است.

حال شرایط حل پذیری را برای یک سیستم خاصی از معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول بررسی می‌شود.

$$-i(\omega - ku_0)\phi_4 + ik\rho_0\phi_1 + \frac{im\rho_0}{r}\phi_3 + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\rho_0\phi_2) = f_1(r) \quad (\text{ب-۳۳})$$

$$-i\rho_0(\omega - ku_0)\phi_1 + iu_0'\phi_2 + ik\phi_5 = f_2(r) \quad (\text{ب-۳۴})$$

$$-i\rho_0(\omega - ku_0)\phi_2 + \phi_5' = f_3(r) \quad (\text{ب-۳۵})$$

$$-i\rho_0(\omega - ku_0)\phi_3 + \frac{im}{r}\phi_5 = f_4(r) \quad (\text{ب-۳۶})$$

$$-i\rho_0(\omega - ku_0)\phi_6 + \rho_0T_0'\phi_2 + i(\gamma - 1)(\omega - ku_0)\phi_5 = f_5(r) \quad (\text{ب-۳۷})$$

$$\frac{\phi_5}{p_0} = \frac{\phi_4}{\rho_0} + \frac{\phi_6}{T_0} \quad (\text{ب-۳۸})$$

$$\phi_2 - \beta_1\phi_5 = \alpha_1 \quad \text{at} \quad r = R_1 \quad (\text{ب-۳۹})$$

$$\phi_2 - \beta_2\phi_5 = \alpha_2 \quad \text{at} \quad r = R_2 \quad (\text{ب-۴۰})$$

در حالی که، u_0, P_0, T_0, ρ_0 و $f_n(r)$ توابع معلومی از r یا $\omega, m, k, \beta_n, \alpha_n, \gamma$ وابسته به r هستند. یادآوری می شود چهار معادله، معادلات جبری هستند. در تحلیل، مسائل همگن حل غیر بدیهی دارند لذا مسائل غیر همگن تنها یک راحل دارند اگر یک شرط حل پذیری ارضا شود.

برای مشخص کردن شرط حل پذیری معادله (ب-۳۳) در ψ_1 ، معادله (ب-۳۴) در ψ_2 ، معادله (ب-۳۵) در ψ_3 ، معادله (ب-۳۶) در ψ_4 و معادله (ب-۳۷) در ψ_5 و معادله (ب-۳۸) در ψ_6 ضرب می شود. سپس نتایج معادلات را با هم جمع و انتگرال گرفته از R_1 تا R_2 تا مشتق را از ϕ_n به ψ_n تبدیل شود که بدست می آید:

$$\begin{aligned}
 & \int_{R_1}^{R_2} i\rho_0\phi_1[-\widehat{\omega}\psi_2 + k\psi_1]dr \\
 & + \int_{R_1}^{R_2} \rho_0\phi_2\left[-i\widehat{\omega}\psi_3 + u_0'\psi_2 - r\frac{d}{dr}\left(\frac{\psi_1}{r}\right) + T_0'\psi_5\right]dr \\
 & + \int_{R_1}^{R_2} i\rho_0\phi_3\left[-\widehat{\omega}\psi_4 + \frac{m}{r}\psi_1\right]dr \\
 & + \int_{R_1}^{R_2} \phi_4[-i\widehat{\omega}\psi_1 - T_0\psi_6\rho_0]dr \\
 & + \int_{R_1}^{R_2} \phi_5\left[ik\psi_2 - \psi_3' + \frac{im}{r}\psi_4 + i(\gamma - 1)\widehat{\omega}\psi_5 + T_0\psi_6\rho_0\right]dr \\
 & + \int_{R_1}^{R_2} \rho_0\phi_6[-i\widehat{\omega}\psi_5 - p_0\psi_6]dr + [\rho_0\phi_2\psi_1 + \phi_5\psi_3]_{R_1}^{R_2} \\
 & = \sum_{n=1}^5 \int_{R_1}^{R_2} \psi_n f_n dr
 \end{aligned} \tag{ب-۴۱}$$

در حالی که $\widehat{\omega} = \omega - ku_0$. برای پیدا کردن توابع الحاقی ابتدا مساله همگن $(\alpha_n = 0, f_n = 0)$. بعد از ساده سازی انتگرال به صورتی که ضرایب ϕ_n جدا شوند. زیرا معادلات الحاقی با مساوی صفر قرار دادن ضرایب هر کدام از ϕ_n ها به دست می آید. که نتیجه آن:

$$-\widehat{\omega}\psi_2 + k\psi_1 = 0 \tag{ب-۴۲}$$

$$-i\widehat{\omega}\psi_3 + u_0'\psi_2 - r\frac{d}{dr}\left(\frac{\psi_1}{r}\right) + T_0'\psi_5 = 0 \tag{ب-۴۳}$$

$$-\widehat{\omega}\psi_4 + \frac{m}{r}\psi_1 = 0 \tag{ب-۴۴}$$

$$i\widehat{\omega}\psi_1 + T_0p_0\psi_6 = 0 \tag{ب-۴۵}$$

$$ik\psi_2 - \psi_3' + \frac{im}{r}\psi_4 + i(\gamma - 1)\widehat{\omega}\psi_5 + T_0\rho_0\psi_6 = 0 \tag{ب-۴۶}$$

$$i\widehat{\omega}\psi_5 + p_0\psi_6 = 0 \tag{ب-۴۷}$$

معادلات (ب-42) تا (ب-47) معادلات الحاق شده به معادلات همگن (ب-33) تا (ب-40) هستند. برای مشخص کردن شرایط مرزی توابع الحاقی ψ_n ، $f_n = 0$ در معادله (ب-41) قرار داده شده و از معادله (ب-42) تا (ب-47) استفاده می شود. که نتیجه آن به صورت:

$$[\rho_0 \phi_2 \psi_1 + \phi_5 \psi_3]_{R_1}^{R_2} = 0 \quad (\text{ب-48})$$

است. در معادلات (ب-39) و (ب-40)، $\alpha_n = 0$ قرار داده و سپس ϕ_2 را بر حسب ϕ_5 حساب کرده و معادله فوق را به صورت زیر باز نویسی می شود:

$$[\rho_0 \beta_2 \psi_1 + \psi_3]_{r=R_1} \phi_5(R_2) - (\rho_0 \beta_2 \psi_1 + \psi_3)_{r=R_1} \phi_5(R_1) = 0 \quad (\text{ب-49})$$

برای ارضای شرایط مرزی الحاقی، هر کدام از ضرایب $\phi_5(R_1)$ و $\phi_5(R_2)$ در معادله فوق به صورت مستقل حذف می شوند. که نتیجه آن به صورت:

$$\begin{aligned} \psi_3 + \rho_0 \beta_2 \psi_1 &= 0 \quad \text{at } r = R_2 \\ \psi_3 + \rho_0 \beta_1 \psi_1 &= 0 \quad \text{at } r = R_1 \end{aligned} \quad (\text{ب-50})$$

است. بنابراین مساله همگن الحاقی با معادله (ب-42) تا (ب-47) بر طبق شرط مرزی های (ب-50) مشخص می شود. با برگشت به معادله غیر همگن، با استفاده از معادلات (ب-42) تا (ب-47) در معادله (ب-41) معادله زیر حاصل می شود:

$$[\rho_0 \phi_2 \psi_1 + \phi_5 \psi_3]_{R_1}^{R_2} = \sum_{n=1}^5 \int_{R_1}^{R_2} \psi_n f_n dr \quad (\text{ب-51})$$

با بدست آوردن ψ_3 از معادله (ب-50) بر حسب ψ_1 و تعیین ϕ_2 از (ب-39) و (ب-40) بر حسب ϕ_5 سپس معادله فوق به صورت زیر باز نویسی می شود.

$$\alpha_2 \rho_0(R_2) \psi_1(R_2) - \alpha_1 \rho_0(R_2) \psi_1(R_2) = \sum_{n=1}^5 \int_{R_1}^{R_2} \psi_n f_n dr \quad (\text{ب- ۵۲})$$

که معادله فوق شرط حل پذیری مورد نیاز است.

c d

مراجع

b a

-
- [1]. D.Roylance,2001, “**ENGINEERING VISCOELASTICITY**”,Department of Material Science and Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA 02139
- [2]. E.Riande, R.D Calleja, M.G.Prolongo, R.M .Masegosa, C.Salom (2000) , “**Polymer viscoelasticity stress and strain in practice**”, Marcel Dekker INC ,Spain.
- [3]. H. F. Brinson, L.C. Brinson, 2008, “**Polymer Engineering Science and Viscoelasticity an Introduction**”, Springer, USA.
- [4]. P. Hagerdon, A. DasGupta, 2007, “**Vibration and waves in Continuous Mechanical System**”, John Wiley & Sons, England, pp.114-150
- [5]. A. H. Nayfeh, 1973, “**Perturbation Method**”, John Wiley & Sons, USA, pp.84-445.
- [6]. علیرضا الفی، 1390، “سیستم های کنترل خطی”، چاپ ششم، انتشارات علوی فرهیخته، تهران.
- [7]. M. Pakdemirli, H.R. Öz, 1999, “vibration of an axially moving beam with time-dependent velocity”, *Journal Sound of Vibration*, 227, pp.239–257.
- [8]. L.Q. Chen, X.D. Yang, 2005, “Stability in parametric resonance of axially moving viscoelastic beams with time-dependent speed”, *Journal Sound of Vibration*, 284, pp. 879–891.
- [9]. L.Q. Chen, X.D. Yang, 2005. “Steady-state response of axially moving viscoelastic beams with pulsating speed: comparison of two nonlinear models”, *International Journal of Solids and Structures*, 42, pp.37–50.
- [10]. U. Lee, O.Hyungmi, 2005, “Dynamic of an axially moving viscoelatic beam subject to axial tension”, *International Journal of Solids and Structures*, 42, pp. 2381–2398.
- [11]. X.D. Yang, L.Q. Chen, 2005, “Bifurcation and chaos of an axially accelerating viscoelastic beam”, *Chaos, Solitons and Fractals*, 23, pp.249–258.
- [12]. L.Q. Chen, X.D. Yang, 2006, “Vibration and stability an axially moving viscoelastic beam with hybrid support”, *European Journal of Mechanics A/Solids* ,25,pp. 996–1008.

- [13]. X.D. Yang, L.Q. Chen, 2006, “Stability in parametric resonance of axially accelerating beams constituted by Boltzmann’s superposition principle”, *Journal Sound of Vibration*, 289, pp.54–65.
- [14]. X.D. Yang, L.Q. Chen, 2006, “Non-linear forced vibration of axially visco moving viscoelastic beam”, *AMSS Press*, Vol. 19, No. 4, pp.249-258.
- [15]. H. Ding, L.Q. Chen, 2008, “Stability of axially accelerating viscoelastic beams: multi scale analysis with numerical confirmation”, *European Journal of Mechanics A/Solids*, 27, pp.1108–1120.
- [16]. H.M. Ghayesh, S. Balar, 2008, “Non-linear parametric vibration and stability of axially moving viscoelastic Rayleigh beams”, *International Journal of Solids and Structures*, 45, pp. 6451–6467.
- [17]. Y.Q. Tang, L.Q. Chen, X.D. Yang, 2008, “Natural frequencies, modes and critical speed of axially moving Timoshenko beams with different boundary condition”, *International Journal of Mechanical Sciences*, 50, pp.1448–1458.
- [18]. M. Pakdemirli, H.R. Öz, 2008, “Infinite mode analysis and truncation to resonant modes of axially accelerated beam vibrations”, *Journal Sound of Vibration*, 311, pp.1052-1074.
- [19]. M.H. Ghayesh, M. Yourdkhani, S. Balar, T. Reid, 2010, “Vibration and stability of axially travelling laminated beams”, *Mathematics and Computation*, 217, pp.545–556.
- [20]. L.Q. Chen, B. Wang, 2009, “Stability of axially accelerating viscoelastic beams: asymptotic perturbation analysis and differential quadrature validation”, *European Journal of Mechanics A/Solids*, 28, pp.786–791.
- [21]. B. Wang, L.Q. Chen, 2009, “Asymptotic stability with numerical confirmation of an axially accelerating beam constituted by the standard linear solid model”, *Journal Sound of Vibration*, 328, pp.456–466.
- [22]. T. Yang, B. Fang, Y. Chen, Y. Zhen, 2009, “Approximate Solution of axially moving viscoelastic beam subject to multi-frequency excitations”, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 44, pp.230-238.

[23]. Y.Q. Tang, L.Q. Chen, X.D. Yang, 2009, "Non-linear vibration of axially moving Timoshenko beam under weak and strong external excitations", *Journal of Sound Vibration*, 320, pp. 1078–1099.

[24]. Q. Chen, Y.Q. Tang, C.W. Lim, 2010, "Dynamic stability in parametric resonance of an axially accelerating Timoshenko", *Journal Sound of Vibration*, 329, pp.547–565.

[25]. M.H. Ghayesh, S. Balar, 2010, "Non-linear parametric vibration and stability analysis for two dynamic models of axially moving Timoshenko beams", *Applied Mathematical Modelling*, 34, pp.2850–2859.

[26]. X.D. Yang, Y.Q. Tang, L.Q. Chen, C.W. Lim, 2010, "Dynamic stability of axially accelerating Timoshenko beam: Averaging method", *European Journal of Mechanics A/Solids*, 29 pp. 81–90.

[27]. E.M. Mockensturn, J. Guo, 2005, "Nonlinear vibration of parametrically excited, viscoelastic axially moving strings", *Journal of Applied Mechanics*, 72 pp.374-380.

[28]. W.M. Lai, D. Rubin, E. Krempel, 1993, "**Introduction to Continuum Mechanical**", Third edition, Pergamon Press Ltd, USA, pp.86-90.

[29]. پورپاک علی محمد، 1384، "آنالیز عددی کاربردی" چاپ پنجم، انتشارات جهاد دانشگاهی دانشکده فنی دانشگاه تهران، تهران.

[30]. S.S. Rao, 2007, "**vibration of continues systems**", Third edition, JohnWiley, USA, pp.270-410.

ABSTARCT

This research investigates the vibrations of an axially accelerating viscoelastic Timoshenko beams. The beam is viscoelastic in shear which obeys The standard linear solid model and incompressible in bulk. The axial speed is characterized by a simple harmonic variation about a constant mean speed. The governing partial-differential equations are derived from Newton's second law. The method of multiple scales is applied to the equations to establish the solvability conditions in modal analysis and principal parametric resonance. The viscoelastic beam by a parametric study, the effects of velocity, geometriy and viscoelastic parameters investigate on the time history response, natural frequency and critical velocity.