



دانشکده مهندسی مکانیک
گروه جامدات

حل تحلیلی و عددی دیسک چرخان *FGM* با ضخامت متغیر تحت بارگذاری مکانیکی و حرارتی

دانشجو: سید مهدی جباری

استاد راهنما:

دکتر مهدی قنّاد

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

ماه و سال انتشار: بهمن ۱۳۹۰

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

تشکر و قدردانی:

بر خود واجب می دانم از زحمات پدر و مادر مهربانم که همواره در تحصیل علم، دانش و اخلاق مشوق اینجانب بوده اند قدردانی نمایم.

لازم است که از زحمات اساتید محترم دانشکده‌ی مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود که از محضر درس آن بزرگواران استفاده نموده‌ام، قدردانی نمایم. همچنین از استاد بزرگوار جناب آقای دکتر مهدی قناد که زحمت هدایت پایان‌نامه‌ی اینجانب بر دوش ایشان بوده است، بسیار سپاسگزارم. از خداوند متعال توفیق روزافزون این عزیزان را خواستارم.

سید مهدی جباری

تعهد نامه

اینجانب سید مهدی جباری دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی مکانیک - طراحی کاربردی دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه حل تحلیلی و عددی دیسک چرخان FGM با ضخامت متغیر تحت بارگذاری مکانیکی و حرارتی تحت راهنمایی دکتر مهدی قنّاد متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ: ۱۳۹۰/۱۲/۱۵

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده

دیسک دوار به علت کاربردهای فراوانی که در صنعت دارد، از دیرباز موضوع تحقیقات و مطالعات متعددی بوده است. از میان کاربردهای دیسک دوار می توان به دیسک های توربین گاز، فلایویل ها، چرخ دنده ها و دیسک های ترمز و ... اشاره کرد. از این رو ارائه ی فرمول های تحلیلی در کنار نرم افزارهای کاربردی می تواند کمک شایانی در طراحی های بهینه دیسک ها در صنایع مختلف داشته باشد.

در این پژوهش با استفاده از تئوری الاستیسیته ی مستوی و بر مبنای شرایط تنش صفحه ای، معادله ی ترموالاستیک حاکم بر حسب جابجایی برای دیسک با ضخامت متغیر ناهمگن چرخان، با خواص وابسته به دما و شعاع دیسک، ارائه شده است. در مدل سازی مواد FG و پروفیل تغییرات ضخامت دو تابع نمایی و توانی بکار گرفته شده و معادله ی حاکم حل شده است. در مواردی که توابع نمایی برای تابع توزیع خواص یا پروفیل انتخاب می شود، معادله ی انتقال حرارت حاکم بر دیسک دارای حل دقیق نمی باشد برای این منظور در این موارد از روشهای تحلیلی و نیمه تحلیلی استفاده شده است و نتایج برای اعتبار سنجی با حل عددی مقایسه شده است. با استفاده از نتایج بدست آمده تاثیر هریک از بارگذاریهای مکانیکی و حرارتی در دیسک ها با توجه به خواص آن بررسی می شود.

نتایج بدست آمده نشان دهنده ی این مطلب است که افزایش ضخامت در شعاع داخلی دیسک و استفاده از مواد FG بطوریکه مقدار خواص در راستای شعاع افزایش یابد، سبب کاهش تنش بیشینه ناشی از بارگذاری حرارتی و دورانی می شود، ولی افزایش تنش بیشینه ناشی از فشار داخلی را بهمراه دارد. همچنین مقدار تنش بیشینه محاسبه شده در توابع توانی به کار گرفته شده در توزیع خواص و پروفیل در بارگذاری حرارتی و دورانی کمتر از توانی نمایی بوده ولی در مورد فشار داخلی بیشتر از توانی نمایی می باشد.

فهرست مطالب

۱- مقدمه	۲
۱- ۱ کلیات	۲
۱- ۲ معرفی مواد <i>FG</i>	۳
۱- ۳ تاریخچه ی پژوهش در زمینه ی دیسک های چرخان	۱۱
۱- ۴ اهداف و تعریف مسئله	۱۳
۲- تحلیل ترموالاستیک دیسک چرخان با ضخامت ثابت	۱۹
۱- ۲ مقدمه	۱۹
۲- ۲ معادله ی عمومی حاکم بر دیسک چرخان	۱۹
۲- ۳ حل ترموالاستیک دیسک همگن با ضخامت ثابت	۲۷
۲- ۴ بررسی نتایج حل دیسک همگن با ضخامت ثابت	۳۲
۲- ۵ حل ترموالاستیک دیسک ناهمگن با ضخامت ثابت	۳۷
۲- ۶ بررسی نتایج حل دیسک ناهمگن با ضخامت ثابت	۴۵
۲- ۷ جمع بندی	۵۳
۳- تحلیل ترموالاستیک دیسک همگن چرخان با ضخامت متغیر	۵۹
۱- ۳ مقدمه	۵۹
۲- ۳ حل تحلیلی دیسک همگن با پروفیل توانی	۶۵
۳- ۳ بررسی نتایج حل دیسک همگن با تابع ضخامت توانی	۷۳
۳- ۴ حل تحلیلی دیسک همگن با تابع ضخامت نمایی	۸۰

۳- ۵	بررسی نتایج حل دیسک ناهمگن با تابع ضخامت نمایی	۸۶
۳- ۶	جمع بندی	۹۶
۴ -	تحلیل ترموالاستیک دیسک ناهمگن چرخان با ضخامت متغیر	۱۰۱
۴- ۱	مقدمه	۱۰۱
۴- ۲	حل دیسک با ضخامت متغیر توانی FG با توزیع توانی	۱۰۲
۴- ۳	بررسی نتایج حل دیسک ناهمگن توانی با تابع ضخامت توانی	۱۱۰
۴- ۴	حل دیسک FG با ضخامت متغیر با تابع نمایی و توزیع خواص نمایی	۱۱۶
۴- ۵	بررسی نتایج حل دیسک ناهمگن با توزیع خواص نمایی با تابع ضخامت نمایی	۱۲۱
۴- ۶	حل دیسک ناهمگن با توزیع خواص نمایی و تابع ضخامت توانی	۱۲۵
۴- ۷	بررسی نتایج حل دیسک ناهمگن با توزیع خواص نمایی با تابع ضخامت توانی	۱۲۸
۴- ۸	حل دیسک ناهمگن با توزیع خواص توانی با تابع ضخامت نمایی	۱۳۲
۴- ۹	بررسی نتایج حل دیسک ناهمگن با توزیع خواص توانی با تابع ضخامت نمایی	۱۳۴
۴- ۱۰	جمع بندی	۱۳۸
۵ -	نتیجه گیری	۱۴۳
۵- ۱	خلاصه مطالب ارائه شده در این پژوهش	۱۴۳
۵- ۲	نتیجه گیری	۱۴۴
۵- ۳	زمینه های ادامه پژوهش	۱۴۷
۶ -	پیوست	۱۵۰
۶- ۱	پیوست A: حل دقیق دیسک ناهمگن با ضخامت متغیر با استفاده از معادلات بلترامی - میشل	۱۵۰

- ۶-۲ پیوست *B*: حل دیسک با ضخامت متغیر با استفاده توابع فوق هندسی ۱۵۷
- ۶-۳ پیوست *C*: معادله ی حاکم بر دیسک با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی ۱۵۹
- ۷- مراجع ۱۶۵

فهرست اشکال و نمودار ها

- شکل ۱-۱: ساختار FG در صدف ۴
- شکل ۲-۱: نواحی قابل تعریف در مواد FG ۷
- شکل ۳-۱: نحوه ی تغییرات خواص در تابع توزیع توانی ۹
- شکل ۴-۱: نحوه ی تغییرات خواص در تابع توزیع نمایی ۱۰
- شکل ۵-۱: مختصات وگره های تعریف شده برای المان حرارتی $Plane 77$ ۱۵
- شکل ۶-۱: نحوه ی شبکه بندی دیسک همگن فولادی ۱۷
- شکل ۱-۲: بارگذاری در دیسک با ضخامت ثابت ۳۰
- شکل ۲-۲: مقایسه ی توزیع جابجایی شعاعی حل تحلیلی با حل عددی (دیسک همگن با ضخامت ثابت) ۳۳
- شکل ۳-۲: مقایسه ی توزیع تنش شعاعی حل تحلیلی با حل عددی (دیسک همگن با ضخامت ثابت) ۳۳
- شکل ۴-۲: مقایسه ی توزیع تنش محیطی حل تحلیلی با حل عددی (دیسک همگن با ضخامت ثابت) ۳۴
- شکل ۵-۲: نحوه ی توزیع جابجایی شعاعی در بارگذاریهای مختلف (دیسک همگن با ضخامت ثابت) ۳۴
- شکل ۶-۲: نحوه ی توزیع تنش شعاعی در بارگذاریهای مختلف (دیسک همگن با ضخامت ثابت) ۳۵
- شکل ۷-۲: نحوه ی توزیع تنش محیطی در بارگذاریهای مختلف (دیسک همگن با ضخامت ثابت) ۳۶
- شکل ۸-۲: مقایسه ی نتایج جابجایی شعاعی حل تحلیلی با حل عددی ($n=0.75$) ۴۵
- شکل ۹-۲: مقایسه ی توزیع تنش شعاعی در حل تحلیلی با حل عددی ($n=0.75$) ۴۶
- شکل ۱۰-۲: مقایسه ی توزیع تنش محیطی در حل تحلیلی با حل عددی ($n=0.75$) ۴۶
- شکل ۱۱-۲: نحوه ی توزیع جابجایی شعاعی در بارگذاریهای مختلف ($n=0.5$) ۴۷
- شکل ۱۲-۲: نحوه ی توزیع تنش شعاعی در بارگذاریهای مختلف ($n=0.5$) ۴۸
- شکل ۱۳-۲: نحوه ی توزیع تنش محیطی در بارگذاریهای مختلف ($n=0.5$) ۴۹

- شکل ۲-۱۴ : توزیع دما در دیسک ناهمگن با ضخامت ثابت ۵۰
- شکل ۲-۱۵ : توزیع جابجایی شعاعی در دیسک ناهمگن با ضخامت ثابت ۵۱
- شکل ۲-۱۶ : توزیع تنش شعاعی در دیسک ناهمگن با ضخامت ثابت ۵۱
- شکل ۲-۱۷ : توزیع تنش محیطی در دیسک ناهمگن با ضخامت ثابت ۵۲
- شکل ۳-۱ : دیسک توربین گاز واحدهای نیروگاه گازی V94 ساخت شرکت آنسالدور ۵۹
- شکل ۳-۲ : چرخ کورتیس در توربین بخار ۶۰
- شکل ۳-۳ : نمایش پروفیل ضخامت توانی به ازای نسبت ضخامت های مختلف ۶۱
- شکل ۳-۴ : نمایش پروفیل ضخامت نمایی به ازای نسبت ضخامت های مختلف ۶۳
- شکل ۳-۵ : تاثیر پارامتر q در پروفیل ضخامت سهموی ($m=2$) ۶۴
- شکل ۳-۶ : تاثیر پارامتر q در پروفیل ضخامت سهموی ($m=2$) ۶۴
- شکل ۳-۷ : تاثیر پارامتر m در پروفیل ضخامت سهموی ($q=0.5$) ۶۵
- شکل ۳-۸ : بارگذاری در دیسک با ضخامت متغیر ۷۱
- شکل ۳-۹ : توزیع جابجایی شعاعی در دیسک همگن با پروفیل توانی ($h_i/h_o=2$) ۷۴
- شکل ۳-۱۰ : توزیع تنش شعاعی در دیسک همگن با پروفیل توانی ($h_i/h_o=2$) ۷۵
- شکل ۳-۱۱ : توزیع تنش محیطی در دیسک همگن با پروفیل توانی ($h_i/h_o=2$) ۷۵
- شکل ۳-۱۲ : نحوه ی توزیع جابجایی شعاعی در بارگذاریهای مختلف ($h_i/h_o=2$) ۷۶
- شکل ۳-۱۳ : نحوه ی توزیع تنش شعاعی در بارگذاریهای مختلف ($h_i/h_o=2$) ۷۷
- شکل ۳-۱۴ : نحوه ی توزیع تنش محیطی در بارگذاریهای مختلف ($h_i/h_o=2$) ۷۸
- شکل ۳-۱۵ : تاثیر نسبت ضخامت بر توزیع جابجایی شعاعی دیسک همگن ۷۹
- شکل ۳-۱۶ : تاثیر نسبت ضخامت بر توزیع تنش شعاعی دیسک همگن ۷۹
- شکل ۳-۱۷ : تاثیر نسبت ضخامت بر توزیع تنش محیطی دیسک همگن ۸۰

- شکل ۳-۱۸ : نمودار توابع انتگرال نمایی (مرجع [۳۰]) ۸۲
- شکل ۳-۱۹: نحوه ی تبدیل دیسک به حلقه های با ضخامت ثابت ۸۳
- شکل ۳-۲۰: بررسی استقلال از حلقه ها برای دیسک همگن با تابع ضخامت نمایی ($h_i/h_o=2$) ۸۷
- شکل ۳-۲۱: توزیع جابجایی شعاعی در دیسک همگن با پروفیل نمایی ($h_i/h_o=2$) ۸۷
- شکل ۳-۲۲: توزیع تنش شعاعی در دیسک همگن با پروفیل نمایی ($h_i/h_o=2$) ۸۸
- شکل ۳-۲۳: توزیع تنش محیطی در دیسک همگن با پروفیل نمایی ($h_i/h_o=2$) ۸۸
- شکل ۳-۲۴: نحوه ی توزیع جابجایی شعاعی در بارگذاریهای مختلف ($h_i/h_o=2$) ۸۹
- شکل ۳-۲۵: نحوه ی توزیع تنش شعاعی در بارگذاریهای مختلف ($h_i/h_o=2$) ۹۰
- شکل ۳-۲۶: نحوه ی توزیع تنش محیطی در بارگذاریهای مختلف ($h_i/h_o=2$) ۹۰
- شکل ۳-۲۷: نحوه ی توزیع جابجایی شعاعی در دیسک همگن با پروفیل نمایی ۹۱
- شکل ۳-۲۸: نحوه ی توزیع تنش شعاعی در دیسک همگن با پروفیل نمایی ۹۲
- شکل ۳-۲۹: نحوه ی توزیع تنش محیطی در دیسک همگن با پروفیل نمایی ۹۲
- شکل ۳-۳۰: مقایسه ی پروفیل های ضخامت نمایی و توانی ۹۳
- شکل ۳-۳۱: مقایسه توزیع جابجایی شعاعی در پروفیل ضخامت نمایی و توانی ۹۴
- شکل ۳-۳۲: مقایسه مقادیر تنش شعاعی در پروفیل ضخامت نمایی و توانی ۹۴
- شکل ۳-۳۳: مقایسه مقادیر تنش محیطی در پروفیل ضخامت نمایی و توانی ۹۵
- شکل ۴-۱: توزیع جابجایی شعاعی در روش تحلیلی و روش عددی دیسک FG توانی با پروفیل توانی ۱۱۱
- شکل ۴-۲: توزیع تنش شعاعی در روش تحلیلی و روش عددی دیسک FG توانی با پروفیل توانی ۱۱۱
- شکل ۴-۳: توزیع تنش محیطی در روش تحلیلی و روش عددی دیسک FG توانی با پروفیل توانی ۱۱۲
- شکل ۴-۴: نمایش تاثیر ثابت ناهمگنی در جابجایی شعاعی دیسک با پروفیل توانی ($h_i/h_o=2$) ۱۱۳
- شکل ۴-۵: نمایش تاثیر ثابت ناهمگنی در تنش شعاعی دیسک با پروفیل توانی ($h_i/h_o=2$) ۱۱۳

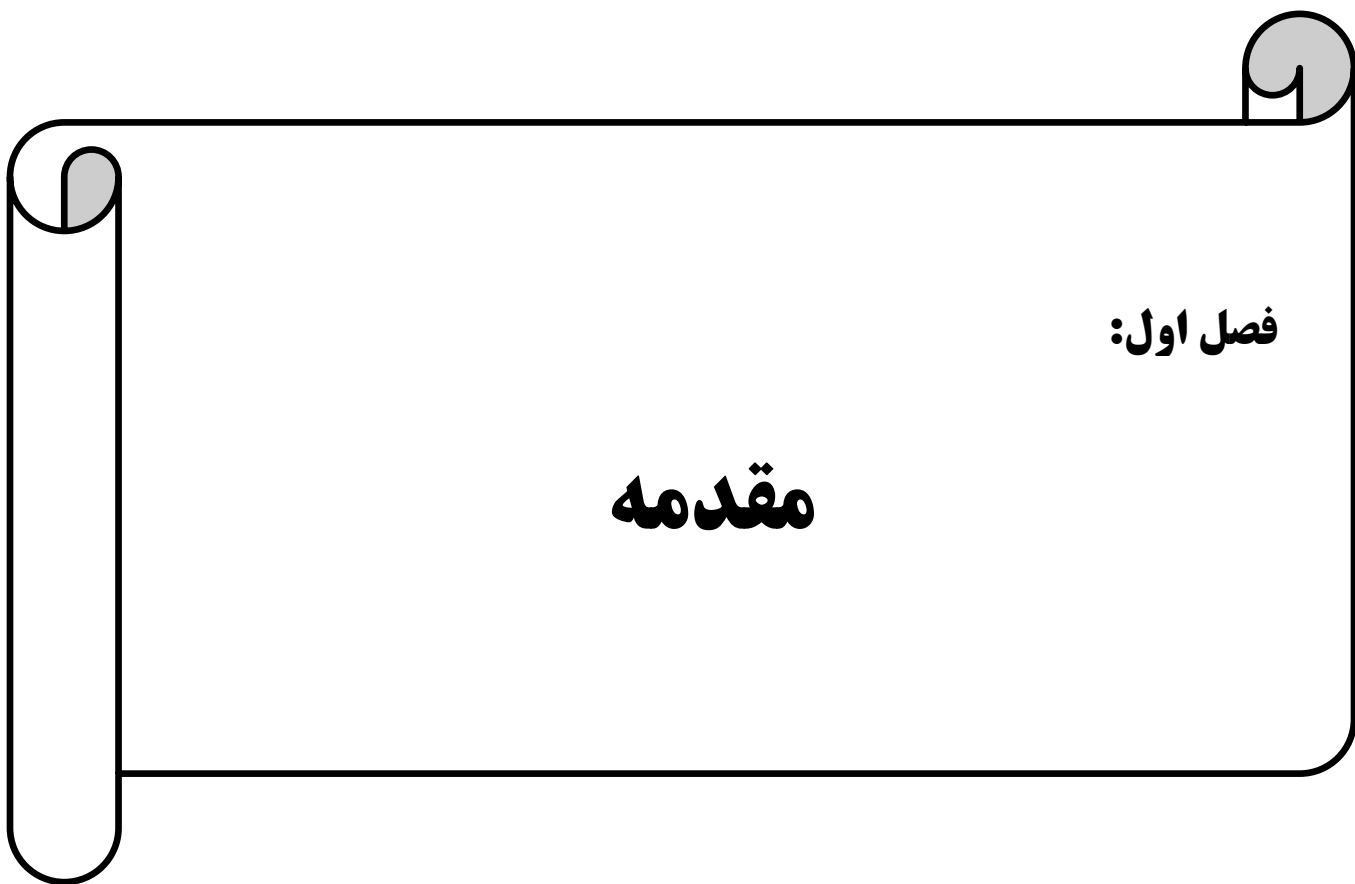
- شکل ۴-۶: نمایش تاثیر ثابت ناهمگنی در تنش محیطی دیسک با پروفیل توانی ($h_i/h_o=2$)..... ۱۱۴
- شکل ۴-۷: نمایش تاثیر ثابت ناهمگنی در جابجایی شعاعی دیسک با پروفیل توانی ($h_i/h_o=0.2$)..... ۱۱۵
- شکل ۴-۸: نمایش تاثیر ثابت ناهمگنی در تنش شعاعی دیسک با پروفیل توانی ($h_i/h_o=0.2$)..... ۱۱۵
- شکل ۴-۹: نمایش تاثیر ثابت ناهمگنی در تنش محیطی دیسک با پروفیل توانی ($h_i/h_o=0.2$)..... ۱۱۶
- شکل ۴-۱۰: مقایسه ی نتایج جابجایی شعاعی با حل عددی ($n=0.3, h_i/h_o=2$)..... ۱۲۲
- شکل ۴-۱۱: مقایسه ی نتایج تنش شعاعی با حل عددی ($n=0.3, h_i/h_o=2$)..... ۱۲۲
- شکل ۴-۱۲: مقایسه ی نتایج تنش محیطی با حل عددی ($n=0.3, h_i/h_o=2$)..... ۱۲۳
- شکل ۴-۱۳: توزیع جابجایی شعاعی در دیسک با پروفیل نمایی و تابع توزیع خواص نمایی ($h_i/h_o=2$)..... ۱۲۳
- شکل ۴-۱۴: توزیع تنش شعاعی در دیسک با پروفیل نمایی و تابع توزیع خواص نمایی ($h_i/h_o=2$)..... ۱۲۴
- شکل ۴-۱۵: توزیع تنش محیطی در دیسک با پروفیل نمایی و تابع توزیع خواص نمایی ($h_i/h_o=2$)..... ۱۲۴
- شکل ۴-۱۶: بررسی استقلال از تعداد حلقهها در دیسک ناهمگن..... ۱۲۹
- شکل ۴-۱۷: مقایسه ی توزیع جابجایی شعاعی در دیسک FG توانی با پروفیل نمایی با روش عددی..... ۱۲۹
- شکل ۴-۱۸: مقایسه ی توزیع تنش شعاعی در دیسک FG توانی با پروفیل نمایی با روش عددی..... ۱۳۰
- شکل ۴-۱۹: مقایسه ی توزیع تنش محیطی در دیسک FG توانی با پروفیل نمایی با روش عددی..... ۱۳۰
- شکل ۴-۲۰: توزیع جابجایی شعاعی در دیسک با پروفیل نمایی و تابع توزیع خواص توانی ($h_i/h_o=2$)..... ۱۳۱
- شکل ۴-۲۱: توزیع تنش شعاعی در دیسک با پروفیل نمایی و تابع توزیع خواص توانی ($h_i/h_o=2$)..... ۱۳۱
- شکل ۴-۲۲: توزیع تنش محیطی در دیسک با پروفیل نمایی و تابع توزیع خواص توانی ($h_i/h_o=2$)..... ۱۳۲
- شکل ۴-۲۳: مقایسه ی توزیع جابجایی شعاعی در دیسک FG نمایی با پروفیل توانی با روش عددی..... ۱۳۵
- شکل ۴-۲۴: مقایسه ی توزیع تنش شعاعی در دیسک FG نمایی با پروفیل توانی با روش عددی..... ۱۳۵
- شکل ۴-۲۵: مقایسه ی توزیع تنش محیطی در دیسک FG نمایی با پروفیل توانی با روش عددی..... ۱۳۶
- شکل ۴-۲۶: توزیع جابجایی شعاعی در دیسک با پروفیل توانی و تابع توزیع خواص نمایی ($h_i/h_o=2$)..... ۱۳۶

شکل ۴-۲۷: توزیع تنش شعاعی در دیسک با پروفیل توانی و تابع توزیع خواص نمایی ($h_i/h_o=2$) ۱۳۷

شکل ۴-۲۸: توزیع تنش محیطی در دیسک با پروفیل توانی و تابع توزیع خواص نمایی ($h_i/h_o=2$) ۱۳۷

فهرست جداول

- جدول ۱-۱: خواص فیزیکی و مکانیکی دیسک همگن فولادی ۱۳
- جدول ۲-۱: خواص هندسی دیسک های مدل سازی شده ۱۳
- جدول ۳-۱: بارگذاری اعمالی در تمامی دیسک ها ۱۴
- جدول ۴-۱: بررسی تغییرات تعداد المانها با نتایج حاصل از حل عددی ۱۶
- جدول ۱-۲: حل پارامتریک دیسک ها با ضخامت ثابت ۵۴
- جدول ۲-۲: نتایج حاصل از تحلیل در دیسک با ضخامت ثابت ۵۵
- جدول ۱-۳: حل پارامتریک دیسک همگن با پروفیل توانی ۹۶
- جدول ۲-۳: نتایج حل دیسک همگن با پروفیل توانی به تفکیک بارگذاری ۹۷
- جدول ۳-۳: نتایج حل دیسک همگن با پروفیل نمایی به تفکیک بارگذاری ۹۸
- جدول ۱-۴: حل پارامتریک دیسک ناهمگن توانی با پروفیل توانی ۱۳۸
- جدول ۲-۴: تنش معادل در دیسکهای FG به تفکیک ماده، پروفیل و بارگذاری ۱۴۰
- جدول ۱-۵: روشهای به کار گرفته شده برای هر نوع از دیسک ها در این پژوهش ۱۴۳
- جدول ۲-۵: تنش معادل در لایه داخلی به تفکیک بارگذاری ۱۴۶
- جدول ۱-۶: ضرایب معادله ی دیفرانسیل حاکم به ازای پروفیل و توزیع خواص متفاوت ۱۵۷



مقدمه

فصل اول:

۱-۱ کلیات

دیسک دوار به علت کاربردهای فراوانی که در صنعت دارد، از دیرباز موضوع تحقیقات و مطالعات متعددی بوده است. از میان کاربردهای دیسک دوار می توان به دیسک های توربین گاز اشاره کرد. دیسک توربین گاز اغلب در گرادیان های دمایی بالا و سرعت های زاویه ای زیادی کار می کند. سرعت زاویه ای بالا باعث ایجاد نیروی گریز از مرکز بزرگی در دیسک شده و همزمان با آن، دمای بسیار زیاد، منجر به کاهش مقاومت ماده سازنده دیسک می شود که این به نوبه خود، تغییر شکل زیادی را در دیسک دوار ایجاد می کند. که وجود قید در تجهیزات فوق موجب تولید تنش در آن ها شده که این تنش در نهایت موجب ایجاد ترک و شکست در آن ها می شود. از این رو مطالعه در زمینه ی دیسک های دوار به منظور کاهش تنش ها ضروری خواهد بود.

یکی از راه های کاهش تنش های حرارتی انتخاب مواد مناسب در دیسک ها می باشد. با توجه به کاهش مقاومت مکانیکی مواد فلزی در دماهای بالا، مواد انتخاب شده در دیسک ها می بایست علاوه بر حفظ خواص مکانیکی قابلیت تحمل تنش های مکانیک را داشته باشد که چنین خاصیتی در یک ماده ی همگن وجود ندارد لذا برای حل این مشکل می بایست سراغ مواد ناهمگن و کامپوزیتی رفت. با توجه به ظهور نسل جدیدی از مواد کامپوزیتی موسوم به مواد *FG* که برای کاهش تنش های حرارتی طراحی و ساخته شده، در این پژوهش از این مواد برای کاهش تنش ها استفاده می شود.

در قسمت اول این فصل به معرفی و بیان تاریخچه ای از این مواد پرداخته شده و نحوه ی مدل سازی آن با استفاده از روابط ریاضی بیان می شود.

در قسمت دوم تاریخچه ی مختصری از کارهای تحقیقاتی انجام شده بر روی دیسک ها بیان می شود و خط مشی این پژوهش مشخص می شود. همچنین برای یکنواختی در تحلیل های انجام شده، خواص ثابتی برای دیسک ها

تعیین می شود. در پایان نیز از نرم افزار اجزای محدودی که برای کنترل حل های انجام شده و اعتبارسنجی به نتایج از آن استفاده می شود معرفی و نحوه ی مدل سازی در آن بیان می شود.

۱ - ۲ معرفی مواد *FG*

پیشرفت تجهیزات مکانیکی نیازمند تولید موادی با قابلیت تحمل تنش های حرارتی و مکانیکی در شرایط خاص است. اخیراً استفاده از مواد با ساختار ناهمگن در شاخه های مختلف مهندسی گسترش یافته است. این مواد یا به طور مستقیم از طبیعت (مانند یاقوت) بدست می آیند یا به صورت مصنوعی (مانند کامپوزیت های تقویت شده با فیبر) ساخته می شوند. یکی از مشکلات موجود در مواد ناهمگن مرکب تحت بارهای حرارتی و مکانیکی، ایجاد تنش پسماند در مرز مشترک مواد سازنده است که بدلیل رفتار متفاوت لایه های سازنده تحت شرایط فوق اتفاق می افتد. این تنش های پسماند در موارد متعدد سبب ایجاد ترک و در پاره ای از اوقات سبب لایه لایه شدن مواد می شود. از این رو نسل جدید مواد مرکب موسوم به *FGM* معرفی شدند.

FGM ها نسل جدیدی از مواد مرکب هستند که در آن ها خواص میکروسکوپییک ماده با توزیع غیریکنواخت، هموار و پیوسته ای از ترکیب مواد سازنده اصلی آن تغییر می کند. این تغییرات ممکن است در یک بعد و یا در چند بعد باشد. به عنوان مثال در ورق های حائل حرارتی که ترکیبی از سرامیک و فلز هستند، دو سطح سرامیکی و فلزی خالص وجود دارد که بین این دو سطح ترکیبی دلخواه از این دو ماده ساختار مورد نظر را تولید می نماید. در این صورت خصوصیات حرارتی و مکانیکی ماده به صورت پیوسته تغییر می کند. فاز سرامیکی مقاومت ماده در برابر حرارت را افزایش می دهد و فاز فلزی وظیفه ی انتقال حرارت را دارد [۱].

مهم ترین حسن استفاده از این مواد آن است که همه ی خواص مورد نیاز (مانند انعطاف پذیری و مقاومت در برابر حرارت) بدون اینکه یکی از آن ها سبب تضعیف دیگری شود در آن ها وجود دارد. فلزات شکل پذیری، استحکام

زیاد و قابلیت ماشین کاری دارند و از طرف دیگر سرامیک ها دارای خواصی مانند مقاومت زیاد در برابر حرارت و خوردگی هستند. بنابراین کاربرد مرسوم این مواد ترکیب فلز و سرامیک است.

کاربرد گسترده‌ی این مواد مرهون تغییرات تدریجی خصوصیات آن است، چرا که در مقایسه با مواد کامپوزیتی لایه‌لایه، مشکل عدم تطابق خصوصیات مکانیکی در محل اتصال لایه ها وجود ندارد. این عدم تطابق در مواد لایه-ای، باعث افزایش تمایل به جدا شدن لایه ها در اثر بارگذاری های شدید حرارتی خواهد شد. ضمناً احتمال ایجاد ترک ها در محل اتصال لایه ها و گسترش آنها در مقاطع ضعیف تر ماده وجود دارد. علاوه بر این، به علت متفاوت بودن ضریب انبساط حرارتی لایه‌ها، وجود تنش های پسماند اجتناب ناپذیر خواهد بود. تغییرات تدریجی خواص باعث کاهش تنش های حرارتی، تنش های پسماند و ضرایب تمرکز تنش می شود. از این رو این مواد می توانند در شرایط سخت مقاومت بیشتری نسبت به کامپوزیت های هم رده‌ی خود داشته باشد. کاربردهای *FGM* در علوم پیشرفته، صنایع نظامی، تجهیزات فضایی، مهندسی پزشکی، تجهیزات هسته ای، الکترونیک و غیره به صورت قابل توجهی در حال پیشرفت است، به گونه ای که به یکی از ده تکنولوژی برتر کشور ژاپن تبدیل شده است.



شکل ۱-۱: ساختار *FG* در صدف

مفهوم *FGM* در محیط زیست، گیاهان و موجودات از سالیان بسیار دور وجود داشته است که مورد توجه محققین و دانشمندان قرار نگرفته است. صدف، خیزران و نارگیل مثال های خوبی از مواد *FG* هستند. خیزران و صدف هر دو، در نزدیکی سطح خارجی سفت و در داخل نرم هستند. (شکل ۱-۱) بعلاوه خیزران دارای صفات

ممتاز دیگر مانند وزن کم، الاستیسیته و سفتی مناسب است، که ناشی از تغییر مرحله‌ای منحنی حفره‌های موجود در ساختمان آن است.

محل اتصال نارگیل به شاخه‌ی درخت نیز دارای ساختار مدرج است، وقتی نارگیل توسط باد تکان می‌خورد، یک سوم محل اتصال آن به شاخه به نرمی تکان می‌خورد و بقیه‌ی آن در مقابل باد مقاومت می‌کند، که این مقاومت جز با ساختار *FG* میسر نیست. این موضوع ساده نقش مهمی در محیط زیست اطراف درخت نارگیل دارد و مانع آسیب رسانی به موجودات می‌شود.

همچنین مثال‌های متعدد دیگر (مانند بعضی از مفاصل بدن انسان، گیاهان موجود بر روی سطوح لغزنده و غیره) که نشانگر مفهوم *FGM* در محیط زیست هستند، وجود دارد که قابل بحث و بررسی هستند. اما مفهوم *FGM* در دهه‌ی ۷۰ قرن نوزدهم در بعضی از مقالات به صورت تئوری دیده می‌شود ولی به عنوان نسل جدیدی از مواد معرفی نشده است. فعالیت متمرکز و تخصصی بر روی *FGM* از سال ۱۹۸۴ شروع شد. حوالی سال ۱۹۸۴-۱۹۸۵ دو محقق (هوا فضا و مواد پیشرفته) در مورد رویایشان برای ساخت بدنه‌ی سفینه‌ی فضایی در یک ساختمان قدیمی دانشگاهی صحبت می‌کردند. سطح خارجی بدنه این سفینه که در شرایط دمایی بسیار بالا (حدود ۱۷۰۰ درجه سانتی‌گراد) قرار دارد نیازمند موادی با مقاومت حرارتی بالا است. از طرفی بین سطوح داخلی و خارجی بدنه اختلاف دمایی زیاد (حدود ۱۰۰۰ درجه سانتی‌گراد) وجود دارد که نیازمند ماده‌ای با تحمل مکانیکی و هدایت حرارتی زیاد است، از آنجایی که ماده‌ای که توانایی تحمل این شرایط را داشته باشد، وجود نداشت آنها به فکر راه حلی برای این مشکل افتادند و توانستند مفهوم *FGM* را برای ساخت بدنه‌ی این سفینه معرفی کنند. در طرح آن‌ها برای سطح خارجی از سرامیک‌های مقاوم با قابلیت تحمل دمای بالا و برای سطح داخلی از موادی با قابلیت هدایت حرارتی بالا استفاده شده بود، که درصد ترکیبات بین دو سطح سرامیکی و فلزی به صورت تدریجی تغییر می‌کرد.

با این تحقیق، پژوهش در زمینه‌ی *FGM* شروع شد. در سال ۱۹۸۷ تحقیق *FGM* برای پروژه‌ی عظیم وزارت علوم شروع شد. در فاصله‌ی سال‌های ۱۹۸۷ تا ۱۹۹۱ پروژه‌ای با نام "تحقیق و پژوهش برای توسعه و تعمیم مفهوم *FGM* در آزادسازی تنش‌های حرارتی" توسط تعداد زیادی از محققین دانشگاه‌ها، آزمایشگاه‌ها و شرکت‌ها انجام شد. آنها به طور دقیق بر روی روش‌های توسعه و فرآیندهای مختلف (مانند طراحی مواد، روش‌های تولید و تحلیل) بحث کردند. سرانجام این همکاری‌ها ساخت یک نمونه *FGM* با قابلیت آزادسازی تنش حرارتی ساخته شد.

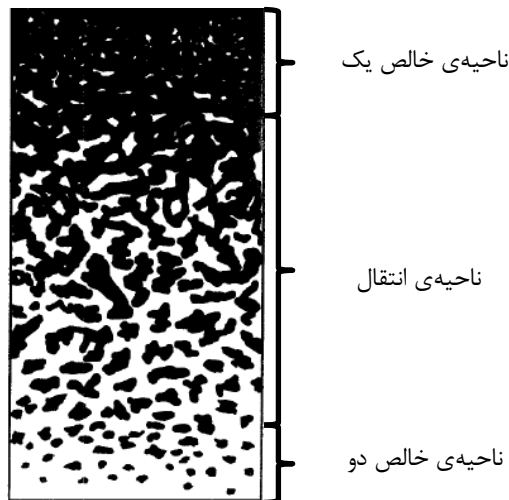
در سال ۱۹۹۰ اولین کنفرانس بین‌المللی در شهر سندای برگزار شد. در سال ۱۹۹۲ *FGM* در تکنولوژی‌های مختلف کشور ژاپن استفاده شد. در سال ۱۹۹۳ دومین پروژه‌ی *FGM* در زمینه‌ی تبدیل انرژی شروع شد که تا سال ۱۹۹۸ به طول انجامید. بدین ترتیب تا سال ۲۰۰۱ شش سمینار بین‌المللی در زمینه‌ی *FGM* برگزار شد که نشانگر اهمیت این موضوع بود. این چنین بود که *FGM* به یکی از ده تکنولوژی برتر کشور ژاپن تبدیل شد و توانست نظر جهانیان را به خود جلب کند [۲].

۱ - ۲ - ۱ معرفی معادلات حاکم بر مواد *FG*

با توجه به پیشرفت علم و اتوماسیون شدن فرآیند طراحی مهندسی، مهم‌ترین بخش در طراحی، شبیه‌سازی طرح مورد نظر است. این فرآیند شامل مدل‌سازی، تحلیل و بهینه‌سازی است. در مسائل، با توجه به شرایط مسئله و هندسه‌ی موجود مدل‌سازی انجام شده و پس از تحلیل مدل، بهینه‌سازی می‌شود. از این رو برای رسیدن به طرح بهینه نیاز به یک مدل مناسب الزامی است. *FGM*‌ها نیز به عنوان مواد قابل کاربرد در صنعت، نیازمند یک مدل مناسب می‌باشد. مشکل اساسی در طراحی *FGM* جدا از انتخاب مواد، طراحی تابع ترکیبات است. این تابع می‌بایست به گونه‌ای طراحی شود که خواص حرارتی، فیزیکی و مکانیکی در *FGM* حاوی دو ماده‌ی ثابت بهینه شود، که این امر نیازمند تعریف و بهینه‌سازی‌های تابع توزیع ترکیبات است. مشکل بعدی در این مواد پیش‌بینی رفتار *FGM* پس از ساخت و در شرایط بارگذاری است، که این مشکل با استفاده از

مدل‌های تحلیلی و تئوری قابل حل است. از این رو یک روش مدل سازی مناسب برای طراحی *FGM* می بایست تعریف شود.

همانطور که بیان شد *FGM* ها موادی هستند که ساختار ریزدانه‌ای آن‌ها از یک جهت به جهت دیگر به طور پیوسته یا لایه لایه تغییر می کند. این تغییر ساختار بر روی خواص ترموفیزیکی مواد تاثیر مستقیم می گذارد. در نواحی خالص تعیین خواص ترموفیزیکی آسان است ولی پیچیدگی این موضوع در نواحی انتقال (ناحیه ای که ذرات دو ماده وجود دارد به گونه ای یکی از مواد زمینه است و ذرات دیگری در آن پخش شده است) می باشد. (شکل ۲-۱)



شکل ۲-۱: نواحی قابل تعریف در مواد *FG*

در ناحیه انتقال وجود ساختار شبکه‌ای باعث اهمیت موضوع می شود به گونه‌ای مطالعات زیادی برای بررسی خواص در این ناحیه انجام شده است و در نتیجه‌ی این مطالعات عموماً دو نوع نگرش برای این ناحیه بیان می-شود:

۱- تحلیل شکست ذره‌ای برای ساختار شبکه ای

۲- تحلیل شکست به طور لایه لایه ی مجزا.

با اتمام این مطالعات نتایج خوبی برای توصیف ناحیه‌ی انتقال مدرج بیان شد، که نشان می‌دهد در این ناحیه خواص با درصد حجمی ذرات تشکیل دهنده‌ی هر جزء رابطه‌ی مستقیم دارد [۳].

با توجه به مرجع [۴] تعیین خواص ترمو فیزیکی مواد ناهمگن با استفاده از قانون مخلوط‌ها امکان پذیر است. اگرچه این قانون برای مواد نیمه کمی قابل استفاده است ولی در موارد متعددی برای مواد ناهمگن به کار رفته است برای مثال فآن و دیگران از قانون مخلوط‌ها برای پیش بینی خواص مکانیکی فاز مرکب استفاده کردند. قانون مخلوط‌ها خواص مکانیکی را برای هر درصد حجمی، هر شکل ذرات و هر توزیع فاز تعیین می‌کند که این تعیین خواص نتایج قابل قبولی در برابر نتایج تجربی داشته است. بدین ترتیب با استفاده از خواص مکانیکی هر یک از اجزا (A و B) می‌توان خواص مکانیکی کل مخلوط را به دست آورد.

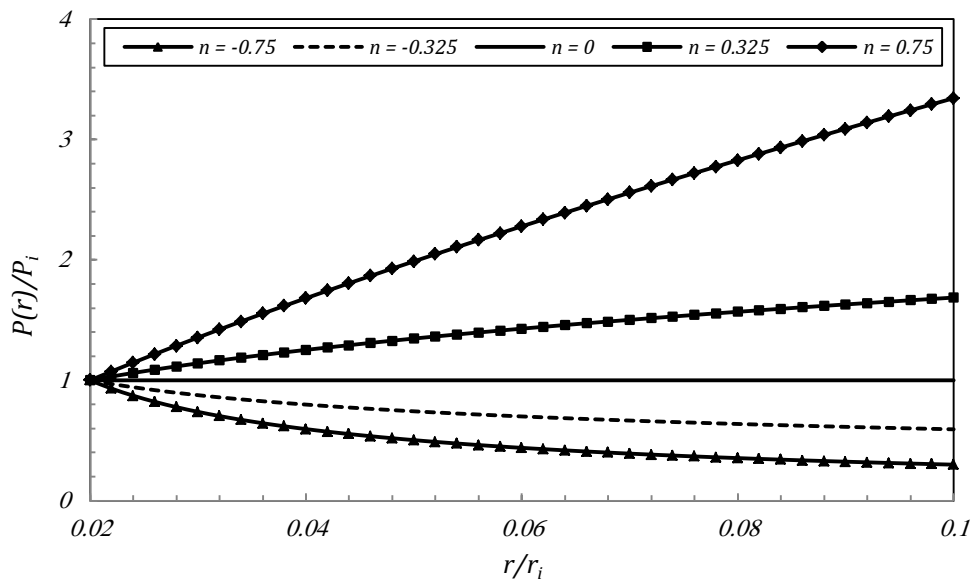
مدل‌های FGM عموماً نیاز به فرض توزیع در راستای معین دارند، این راستا در واقع همان جهت مدرج بودن ساختار ریزدانه‌ای ماده است. اگر در یک FGM که از دو ماده‌ی A و B ساخته شده و در جهت محور X مدرج است برای تعیین خواص را در راستای محور x می‌بایست درصد حجمی در مکان مورد نظر معلوم باشد تا بتوان از قانون مخلوط‌ها خواص در آن راستا تعیین شود. از این رو نیاز به تعریف تابع دیگری به نام درصد حجمی مکانی می‌باشد که این تابع می‌بایست تابعی ساده با توانایی ایجاد تقعر رو به بالا و پایین باشد.

در این پژوهش برای مدل‌سازی ناحیه‌ی انتقال، از دو تابع پر کاربرد در مختصات استوانه‌ای استفاده می‌شود. در ادامه به اختصار این توابع معرفی شده است:

الف) تابع توانی: این تابع به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P(r) = P_i \left(\frac{r}{r_i} \right)^n \quad (1-1)$$

که در آن شعاع داخلی، P_i خواص در شعاع داخلی و n ثابت ناهمگنی می باشد. شکل ۳-۱ نحوه تغییرات خواص در این مدل را به ازای مقادیر مختلف ثابت ناهمگنی نشان داده شده است:



شکل ۳-۱: نحوه ی تغییرات خواص در تابع توزیع توانی

ملاحظه می شود به ازای مقادیر مثبت n تغییرات خواص صعودی و برای مقادیر منفی آن تغییرات نزولی خواهند بود. بعبارت دیگر برای مقادیر مثبت n پروفیل تغییرات ضخامت سهموی و برای مقادیر منفی آن پروفیل تغییرات ضخامت هذلولوی است. با توجه به افزایش خواص به شکل صعودی در n های مثبت در این قسمت می - بایست محدوده ی قابل قبولی انتخاب شود که به خواصی با مقدار زیاد نزدیک نشود. از این رو برای n محدوده ی ۰/۷۵ تا -۰/۷۵ توصیه می شود.

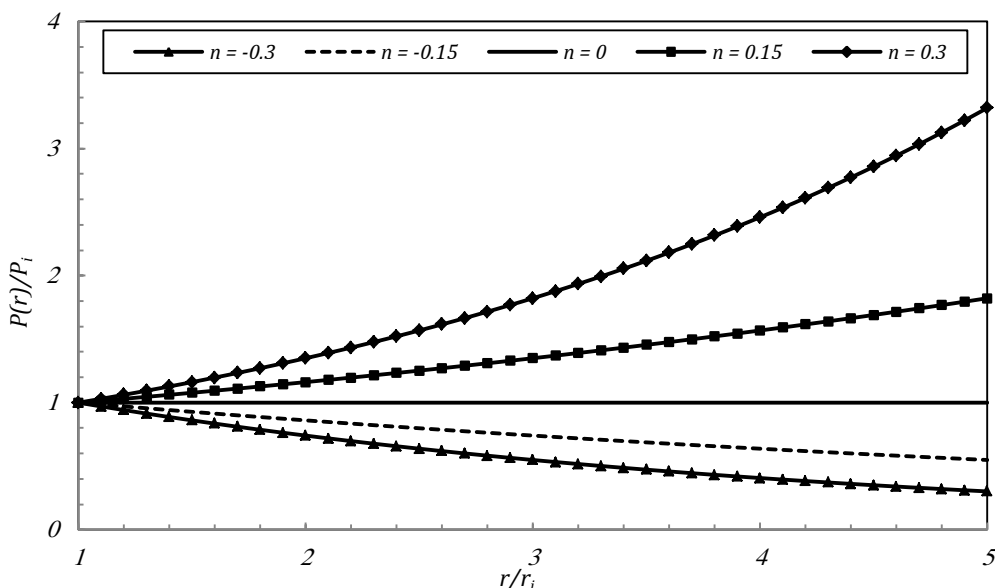
(ب) **تابع نمایی:** این تابع به صورت زیر تعریف می شود:

$$P(r) = P^* e^{\bar{n}r} \quad (۲-۱)$$

که در آن:

$$P^* = P_i e^{-n} \quad , \quad \bar{n} = \frac{n}{r_i} \quad (3-1)$$

می‌باشد و r_i شعاع داخلی، P_i خواص در شعاع داخلی و n ثابت ناهمگنی می‌باشد. برای سادگی در نوشتن معادلات از علامت‌های P^* و \bar{n} استفاده شده است که مفهوم فیزیکی خاصی ندارند. شکل ۴-۱ نحوه‌ی تغییرات خواص در این مدل را به ازای مقادیر مختلف ثابت ناهمگنی نشان داده شده است:



شکل ۴-۱: نحوه‌ی تغییرات خواص در تابع توزیع نمایی

ملاحظه می‌شود به ازای مقادیر مثبت n تغییرات خواص صعودی و برای مقادیر منفی آن تغییرات نزولی خواهند بود. همچنین مشابه تابع توزیع توانی در اینجا نیز می‌بایست n در محدوده‌ی $0/3$ تا $-0/3$ انتخاب شود.

در این پژوهش برای دو تابع توزیع توانی و نمایی دیسک‌های متعددی با توابع ضخامت مختلف تحلیل می‌شوند. تفاوت عمده‌ی این دو تابع در نحوه‌ی تغییرات خواص است بطوریکه در تابع توزیع توانی نمودار به صورت مقعر بوده و در تابع نمایی به صورت محدب تغییر می‌کند.

۱ - ۳ تاریخچه ی پژوهش در زمینه ی دیسک های چرخان

اولین مطالعات موجود در زمینه ی دیسک های چرخان در کتاب تئوری الاستیسیته تیمو شنکو ارائه شده است [۵]. در این کتاب معادلات حاکم بر دیسک ایزوتروپ با ضخامت متغیر تحت دوران با سرعت زاویه ای ثابت بر مبنای جابجایی مورد بررسی قرار گرفته شده و برای یک حالت خاص تحلیل شده است. با توجه با اهمیت دیسک ها در صنایع مختلف در عموم مقالات به بررسی ناهمگنی، تاثیر پروفیل ها و حل ترموالاستیک پرداخته می شود. می توان شروع تحقیقات را در سال ۱۹۶۸ تانگ تعیین کرد که به بررسی تنش های حرارتی در دیسک های ناهمگن دوار پرداخته است. سوچی و ندا به بررسی تنش های حرارتی حالت-دائم در یک صفحه ی متشکل از مواد FG و ارائه ی یک ساختار بهینه برای مواد FG برای کاهش تنش های حرارتی پرداخته اند [۶]. اوباتا و دیگران به محاسبه ی توزیع تنش های حرارتی حاصل از توزیع دمایی در امتداد ضخامت صفحه و بدست آوردن رابطه ای بین نسبت حجمی و توزیع دمایی و تنش های حرارتی پرداختند [۷]. تاناکا و دیگران ترکیب آنالیز حساسیت مستقیم و روش های بهینه سازی آنالیز المان محدود برای ارائه ی روش ترموالاستیسیته برای کاهش تنش های حرارتی در مواد FG را ارائه نمودند [۸، ۹]. تانیگاوا مرور جامع بر آنالیز ترموالاستیسیته ی مواد FG داشته است [۱۰]. پاروین و دیگران با استفاده از فرمول های المان محدود برای آنالیز ترموالاستیسیته ی انتقال دمایی متقارن محوری برای سیلندر سرامیکی-فلزی FG را حل نمودند [۱۱]. زیمرمان و لوتز با استفاده از سری فروبینیوس تنش های حرارتی در یک سیلندر دایروی FG با اعمال حرارت یکنواخت را محاسبه نمودند [۱۲]. چانگ و باراتا با استفاده از روش بسط مجانبی به تحلیل سه بعدی تغییر شکل یک صفحه ی بیضوی از مواد FG پرداخته اند [۱۳]. سانکنار و زنگ حل ترموالاستیسیته برای تیر دوبعدی FG که در آن ثابت های ترموالاستیسیته در جهت ضخامت متغیر است، ارائه نمودند [۱۴]. ول و باترا تحلیل سه بعدی ترموالاستیسیته ی صفحه ی مستطیلی که خواص مواد آن با بسط سری تیلور و سری های توانی بیان شده است را ارائه کردند [۱۵، ۱۶]. آن ها توانستند یک حل دقیق برای تحلیل سه بعدی تنش های حرارتی حالت دائم برای صفحه ی مستطیلی با یک

تکیه گاه ساده ارائه دهند. کویان و دیگران با استفاده از روش گالرکین برای محاسبه‌ی تغییر شکل ترمو الاستیسیته استاتیک برای یک صفحه از مواد FG حل عددی ارائه کردند [۱۷]. ارسال و آکیس حل بسته برای دیسک و شفت های ساخته شده از مواد FG با توزیع توانی و سهموی را ارائه نمودند [۱۸]. نقدآبادی و دیگران دیسک های ساخته شده از مواد FG با تابع توزیع توانی تحت گرادیان حرارتی را با روش نیمه تحلیلی ترموالاستیک تحلیل نمودند [۱۹]. در داخل کشور نیز تحقیقات متعدد در این زمینه انجام و پایان نامه های متعددی ارائه شده است که در غالب فعالیت ها از روش های عددی برای حالات خاص برای حل این مسئله ارائه شده است.

در سال های اخیر نیز تحقیقات گسترده ای در دیسک های چرخان با ضخامت متغیر تحت گرادیان های حرارتی انجام شده است. در سال ۲۰۰۸ بیات و دیگران تنش های مکانیکی و حرارتی در دیسک با ضخامت متغیر FG و بارگذاری متقارن را با استفاده از روش حلقه حلقه نمودن محاسبه نمودند [۲۰]. سپس حجتی و جعفری دو نمونه حل تحلیلی برای دیسک با ضخامت متغیر و دانسیته‌ی متغیر را در راستای شعاع ارائه نمودند [۲۱].

در سال ۲۰۰۹ بیات و دیگران حل ترموالاستیک برای دیسک های ساخته شده از مواد FG را بر پایه تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول با استفاده از روش لایه بندی حلقوی ارائه دادند [۲۲]. در سال ۲۰۱۰ اشرف و زنگور برای حالت خاصی از دیسک های ناهمگن با ضخامت متغیر حل دقیق ارائه نمودند [۲۳]. سپس نای و بارتا با استفاده از تابع تنش، دیسک با ضخامت متغیر FG توخالی تحت بارگذاری حرارتی خطی را تحلیل نمودند [۲۴]. در سال ۲۰۱۱ نیز متین و دیگران با استفاده از تابع تنش برای دیسک با ضخامت متغیر FG تحت بارگذاری مکانیکی و میدان حرارتی فرضی، حل دقیق ارائه نمودند [۲۵].

در این پژوهش حل ترموالاستیک دقیق برای دیسک با تغییرات ضخامت توانی و تابع توزیع توانی ارائه می شود که مشابه مرجع [۲۵] بوده با این تفاوت که در این مرجع میدان توزیع دما به صورت خطی در نظر گرفته شده ولی در اینجا حل به صورت ترموالاستیک کوپل ارائه می شود که تاکنون برای این دیسک ها ارائه نشده است.

برای دیسک‌های نمایی که در آن‌ها یا تابع توزیع یا نحوه‌ی تغییرات ضخامت نمایی است، با استفاده از روش‌های تحلیلی و نیمه تحلیلی حل ارائه می‌شود که مشابه آن در هیچ یک از مراجع تاکنون آورده نشده است. همچنین معادلات حاکم بر دیسک بر پایه تئوری‌های مختلف استخراج می‌شود و در حالت خاص معادلات حل می‌شوند. در هر گام از تحلیل نیز به منظور کنترل حل و رابطه‌های بدست آمده، نتایج با حل عددی توسط نرم افزارهای اجزا محدود مقایسه می‌شود.

۱ - ۴ اهداف و تعریف مسئله

در این پژوهش با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی و بر مبنای شرایط تنش صفحه‌ای، معادله‌ی ترموالاستیک حاکم بر دیسک ناهمگن چرخان با خواص وابسته به دما و مکان استخراج می‌گردد و برای حالات خاص که شامل نحوه‌ی تغییرات هندسه و خواص می‌باشد مسئله حل می‌شود و نتایج آن ارائه می‌گردد. با توجه به اینکه در مقاطع مختلف دیسک‌هایی با شرایط متفاوت تحلیل می‌شود، به منظور مقایسه‌ی بهتر نتایج از یک خواص ثابت در تمامی تحلیل‌ها استفاده می‌شود، که در جداول زیر خواص این دیسک‌ها آورده شده است:

جدول ۱-۱: خواص فیزیکی و مکانیکی دیسک همگن فولادی

ضریب هدایت حرارتی ($W/m\ ^\circ C$)	چگالی (kg/m^3)	ضریب انبساط ($10^{-6}\ ^\circ C$)	مدول الاستیسیته (GPa)
۲۰	۷۸۰۰	۱۲	۲۰۰

جدول ۲-۱: خواص هندسی دیسک‌های مدل سازی شده

ضخامت خارجی (mm)	شعاع خارجی (mm)	شعاع داخلی (mm)
۱۰	۱۰۰	۲۰

همان‌طور که بیان شد، دیسک مورد تحلیل در این پژوهش، تحت بارگذاری حرارتی و مکانیکی قرار دارد، که بارگذاری حرارتی ناشی از گرادیان دما در راستای شعاع و بارگذاری مکانیکی شامل دوران و فشار داخلی می‌باشد که مقادیر آن برای یک حالت خاص به تفکیک در جدول زیر آمده است:

جدول ۱-۳: بارگذاری اعمالی در تمامی دیسک‌ها

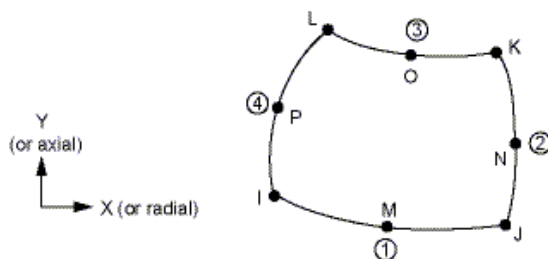
بارگذاری مکانیکی		بارگذاری حرارتی	
فشار داخلی (MPa)	سرعت دوران (rpm)	دما در لایه‌ی خارجی (°C)	دما در لایه‌ی داخلی (°C)
۴۰	۱۰۰۰	۱۰۰	۲۵

در هر گام نیز به منظور اطمینان از فرآیند حل تحلیلی با استفاده از حل عددی مسئله تحلیل و با نتایج تحلیلی مقایسه می‌شود. در این پژوهش برای حل عددی از نرم‌افزار انسیس استفاده شده است. انسیس نرم‌افزاری است که با وجود به‌بازار آمدن نرم‌افزارهای تحلیلی پیچیده‌ای مانند کتیا و آباکیوس، هنوز جایگاه و کاربرد خود را به همان شکل سابق حفظ کرده است. پایه‌گذاری نرم‌افزار انسیس در سال ۱۹۷۱ توسط شرکت سوون‌سون انجام گرفت. امروز نرم‌افزار انسیس، نرم‌افزار کامپیوتری چندمنظوره بسیار پیشرفته اجزای محدود محسوب و شامل بیش از یکصد هزار خطوط کد می‌باشد. از میان توانایی‌های مهم انسیس می‌توان به انجام تحلیل‌های استاتیکی، دینامیکی، انتقال حرارت، جریان سیال و الکترومغناطیس اشاره کرد. یکی از مزایای این نرم‌افزار مجهز بودن به رابط نموداری است که باعث سهولت کار می‌شود و همچنین دسترسی سریع به توابع برنامه، دستورات، مدارک و مراجع اصلی نرم‌افزار را فراهم می‌سازد [۲۶].

دیسک بررسی شده از این پژوهش، تحت گرادیان حرارتی و فشار داخلی قرار دارد که با سرعت زاویه‌ای ثابتی در حال چرخش است. در نتیجه تنش‌های موجود در دیسک از نوع تنش‌های حرارتی و مکانیکی است که نتیجه نهایی، باید ترکیبی از هر دو نوع این تنش‌ها باشد. از طرفی انسیس نمی‌تواند تنش‌های حرارتی و مکانیکی را با

هم تعریف کند. به عنوان مثال در تحلیل میله تحت فشار که تحت گرادیان حرارتی نیز هست، باید بدین صورت عمل شود که ابتدا دمای تک تک گره‌ها را به آن وارد کنیم و سپس با بارگذاری مکانیکی، میله را تحلیل کنیم. اشکالات زیادی در سر راه این شیوه کار وجود دارد. مثلاً اگر هندسه شکل مورد بررسی پیچیده باشد یا تعداد گره‌ها زیاد شود، وارد کردن دمای هر گره در عمل امکان پذیر نیست. برای حل این مشکل روش دیگری را برای حل این نوع مسائل استفاده می‌کنیم. ابتدا مسئله را بدون در نظر گرفتن نیروهای مکانیکی، به صورت حرارتی حل می‌کنیم. یعنی حتی المان بندی ما نیز المان بندی حرارتی است. حل چنین مسئله ای در انسیس بسیار آسان است و با وارد کردن دمای دو سر جسم، می‌توان دما را در هر نقطه ای از آن به دست آورد. در این صورت با اعمال شرایط مرزی حرارتی، می‌توانیم دمای تمامی گره‌ها را درسازه به دست آوریم. هنگامی که دماها به دست آمد، مسأله را با همین شکلی که دارد، از نظر نوع المان تغییر می‌دهیم. باید دقت شود که همه ویژگی‌های مسئله در این تغییر ثابت می‌ماند و حتی نوع مش بندی نیز تغییری نمی‌کند. تنها تفاوت ایجاد شده، تبدیل المان حرارتی به المان مکانیکی است، به مجموعه فرآیند های فوق آنالیز کوپل می‌گویند. [۲۶]

برای مدل سازی در نرم افزار با توجه به شرایط متقارن محوری موجود در مدل از آنالیز کوپل دو بعدی با شرایط تقارن محوری استفاده می‌شود. بدین منظور برای حل حرارتی از المان هشت گره‌ای چهار گوشه‌ای *Plane 77* در شرایط متقارن محوری استفاده شده است که تنها درجه ی آزادی آن دما می باشد، شکل زیر هندسه ی المان و مختصات آن را نشان داده است:



شکل ۱-۵: مختصات و گره های تعریف شده برای المان حرارتی *Plane 77*

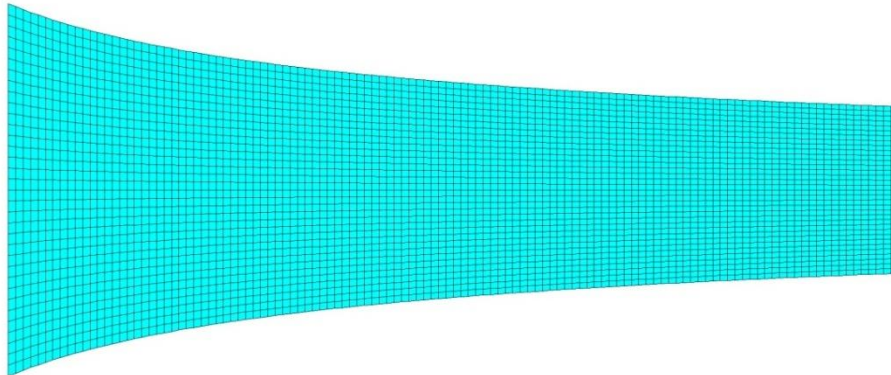
با توجه به اینکه انتخاب المان حل مکانیکی، وابسته به المان حل حرارتی می باشد از المان *Solid 183* در شرایط متقارن محوری استفاده می شود، که هندسه ی المان مطابق شکل ۱-۵ می باشد و درجات آزادی آن در مختصات استوانه‌ای ، در راستای z و r می باشد. به منظور رسیدن به دقت مناسب در حل عددی یک دیسک *FG* با ضخامت متغیر تحت شرایط ترموالاستیک برای شبکه‌ها با تعداد المانهای متفاوت حل می‌شود و با استفاده از استقلال شبکه نقطه‌ی بهینه از نظر خطای محاسباتی انتخاب و مسائل تمامی فصول با استفاده از این شبکه تحلیل می‌شود. در جدول ۱-۴ جدول ۱-۴: بررسی تغییرات تعداد المانها با نتایج حاصل از حل عددی نتایج حاصل از تغییرات شبکه در دیسک مذکور آورده شده است.

جدول ۱-۴: بررسی تغییرات تعداد المانها با نتایج حاصل از حل عددی

ردیف	تعداد گره‌ها	تعداد المان‌ها	جابجایی شعاعی بیشینه (mm)	تنش معادل بیشینه (MPa)
۱	۵۶۹	۱۶۰	۰/۱۳۸۸۳	۴۰۷/۸۰
۲	۶۹۱	۲۰۰	۰/۱۳۸۸۳	۴۰۶/۶۳
۳	۲۵۸۱	۸۰۰	۰/۱۳۸۸۳	۴۰۸/۴۶
۴	۷۴۸۱	۲۴۰۰	۰/۱۳۸۸۳	۴۰۸/۵۷
۵	۱۴۷۸۱	۴۸۰۰	۰/۱۳۸۸۳	۴۰۸/۶۴
۶	۲۴۴۸۱	۸۰۰۰	۰/۱۳۸۸۳	۴۰۸/۶۷

نتایج جدول فوق نشان می‌دهد که تعداد شبکه‌ها بر مقدار جابجایی بدست آمده در حل عددی تاثیر بسیار ناچیزی دارند. ولی برای تنشها تاثیر تعداد شبکه‌ها بر روی نتایج محسوس است که این تغییرات برای شبکه‌های بالای ۱۰۰۰ دارای شیب کندتری می باشد بطوریکه تنشها در شبکه‌ی ۴۸۰۰ المانی با شبکه‌ی ۸۰۰۰ المانی نزدیک می‌باشد. از این رو برای کاهش خطای افزایش المانها از شبکه‌ی ۴۸۰۰ المانی استفاده می‌شود که دقت قابل قبولی در نتایج دارد.

با توجه به جدول ۴-۱ هندسه‌ی دیسک با ضخامت متغیر با استفاده از المانهای مربعی شکل شبکه بندی شده که با هندسه‌ی دیسک سازگار است و از این رو خطای تغییرات المان با توجه به هندسه‌ی نامتعارف به حداقل رسیده که این موضوع سبب کاهش خطا در روش عددی می‌شود. شکل ۶-۱ نحوه‌ی شبکه بندی دیسک با ضخامت متغیر را در نرم افزار انسیس نشان می‌دهد.



شکل ۶-۱: نحوه‌ی شبکه بندی دیسک همگن فولادی

پس از اعمال شرایط مرزی و رعایت الگوریتم حل کوپل مدل سازی و حل عددی به اتمام می‌رسد و نتایج را برای خط مرکزی دیسک در ۴۰ نقطه استخراج نموده و با حل بدست آمده در هر گام مقایسه خواهد شد.

فصل دوم:

تحليل ترمو الاستيك ديسك چرخان با ضخامت ثابت

۲- ۱ مقدمه

دیسک‌های با ضخامت ثابت نوع خاصی از دیسک‌های با ضخامت متغیر می‌باشند که خود به تنهایی محدوده‌ی وسیعی از کاربردهای دیسک را پوشش می‌دهد. در این بخش به بررسی این نوع از دیسک‌ها تحت بارگذاری حرارتی و مکانیکی پرداخته می‌شود.

در قسمت اول به منظور شروع مطالعات در زمینه‌ی دیسک‌ها فرمول‌بندی کاملی با استفاده از تئوری الاستیسته‌ی مستوی در حالت عمومی برای تمامی دیسک‌ها ارائه می‌گردد که قابلیت تعمیم پذیری برای انواع دیسک‌ها با مواد و هندسه‌های مختلف را دارد. هم‌چنین با استفاده از معادلات انتقال حرارت، معادله‌ی حاکم بر توزیع دما در دیسک‌ها در شرایط یکنواخت معرفی می‌گردد.

در قسمت دوم با استفاده از ساده‌سازی معادلات قسمت اول، دیسک همگن تحت بارگذاری مکانیکی و حرارتی حل می‌شود و حل دقیقی برای آن ارائه می‌شود. به منظور کنترل از نحوه‌ی تحلیل‌های انجام شده در این پژوهش، نتایج حاصله با نتایج حاصل از مدلسازی در نرم افزار مقایسه می‌شود. در پایان نیز تاثیر هر یک از بارگذاری‌ها در نتایج حاصل از حل بررسی خواهد شد.

در قسمت سوم دیسک ساخته شده از مواد FG با استفاده از تابع توانی تحلیل می‌شود و حل دقیقی برای آن ارائه می‌گردد و نتایج در هر بارگذاری به طور مجزا بررسی می‌شود. در پایان نیز تاثیر ثابت ناهمگنی تابع توزیع مواد، در نتایج حاصل نشان داده شده و روند تغییرات تجزیه و تحلیل خواهد شد.

۲- ۲ معادله‌ی عمومی حاکم بر دیسک چرخان

در مقالات و کتب مهندسی مکانیک عموماً از دو روش ذیل برای نوشتن معادله‌ی حاکم برای مسائل مختلف استفاده می‌شود:

۱- معادلات ناویر (Navier equations)

۲- معادلات بلترامی میشل (Beltrami – Michel equations)

در معادلات ناویر که در این پژوهش از آن‌ها استفاده شده است، ابتدا با استفاده از قانون دوم نیوتن معادله‌ی تعادل در سیستم نوشته شده و با استفاده از آن رابطه‌ی تنش‌ها با یکدیگر بدست می‌آید، سپس با استفاده از روابط رفتاری ماده و سینماتیک رابطه‌ی تنش‌ها با جابجایی‌ها بدست آمده و پس از جایگذاری این روابط در معادله‌ی تعادل، معادله‌ی حاکم دیسک بر حسب جابجایی محاسبه و حل می‌شود. در صورتی که شرایط مرزی بر حسب تنش‌ها باشند با استفاده از روابط سینماتیک و رفتاری این شرایط به جابجایی تبدیل شده و مسئله حل می‌شود به این روش، حل بسته (Closed Form) می‌گویند.

در معادلات بلترامی میشل که در پیوست A به تفصیل به آن اشاره شده است، با استفاده از معادله‌ی تعادل، معادله‌ی حاکم بر حسب تنش حل شده و بقیه‌ی مشخصه‌های مکانیکی از تنش‌های محاسبه شده در حل بدست می‌آید.

در ادامه معادلات حاکم بر دیسک با ضخامت متغیر با خواص ناهمگن وابسته به دما و شعاع با استفاده از روش ناویر بدست می‌آید.

۲-۲-۱ معادلات تعادل در دیسک با ضخامت متغیر

معادلات تعادل در دیسک با ضخامت متغیر و در مختصات استوانه‌ای در حالت کلی صورت زیر می‌باشد: [۵]

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (rh(r)\sigma_r) \right) + \frac{h(r)}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{h(r)\sigma_\theta}{r} + h(r)F_r = 0 \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (rh(r)\tau_{r\theta}) \right) + h(r) \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{h(r)}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{h(r)\tau_{r\theta}}{r} = 0 \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (rh(r)\tau_{rz}) \right) + \frac{h(r)}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + h(r) \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + h(r)F_z = 0 \end{cases} \quad (1-2)$$

این معادلات در شرایط متقارن محوری که می بایست در هندسه، بارگذاری و خواص فیزیکی و مکانیکی صادق باشد، به صورت زیر ساده می شوند:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (rh(r)\sigma_r) \right) - h(r) \frac{\sigma_\theta}{r} + h(r)F_r = 0 \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (rh(r)\tau_{rz}) \right) + h(r) \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + h(r)F_z = 0 \end{cases} \quad (2-2)$$

با توجه به برابر نبودن تعداد معلومات و مجهولات در دستگاه معادلات فوق، حل دقیقی برای این دستگاه وجود ندارد. لذا می بایست ابتدا وابستگی بین دو معادله از بین رفته تا بتوان با استفاده از روشهای حل معادلات خطی، حل تحلیلی برای آن ارائه شود.

برای اولین بار در سال ۱۸۵۲ میلادی، لامه با استفاده از تئوری الاستیستهی مستوی برای استوانه های جدار ضخیم این دستگاه را حل نمود. در این تئوری فرض می شود، مقاطع صاف و عمود پس از بارگذاری صاف و عمود باقی بماند که این فرض باعث صفر شدن کرنشهای برشی در صفحه می شود. صفر بودن کرنشهای برشی نیز صفر بودن تنش های برشی را نتیجه می دهد، بنابراین معادله ی (۲-۱) نیز به شکل زیر ساده می شود:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (rh(r)\sigma_r) \right) - h(r) \frac{\sigma_\theta}{r} + h(r)F_r = 0 \\ h(r) \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + h(r)F_z = 0 \end{cases} \quad (3-2)$$

در غیاب نیروهای حجمی در راستای z از جمله اثرات گرانش زمین، می توان F_z را برابر صفر فرض کرد. بنابراین معادله ی دوم به شکل زیر ساده می شود:

$$h(r) \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \rightarrow \sigma_z = cte \quad (4-2)$$

ملاحظه می شود که معادله‌ی (۲-۴) رفتار تنش را در ضخامت دیسک رصد می کند و نشان می دهد تنش در راستای ضخامت ثابت است. بنابراین نتیجه می شود:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (rh(r)\sigma_r) \right) - h(r) \frac{\sigma_\theta}{r} + h(r)F_r = 0 \\ \sigma_z = cte \end{cases} \quad (۵-۲)$$

با توجه به ضخامت کم دیسک نسبت به شعاع آن و سطح آزاد بودن سطوح فوقانی دیسک، تنش در راستای ضخامت نسبت به تنش های در راستای شعاع و محیط قابل چشم پوشی است، بنابراین مقدار تنش در راستای ضخامت صفر فرض می شود. به عبارت دیگر مسئله با شرایط تنش صفحه ای (*Plane Stress*) تحلیل خواهد شد. بنابراین معادله‌ی دوم از دستگاه معادله‌ی فوق حذف می شود.

برای دیسک چرخان با فرض اینکه تنها نیروی حجمی وارد بر دیسک در راستای شعاع، نیروی گریز از مرکز باشد، می توان مقدار F_r را برابر $\rho(r,T)r\omega^2$ در نظر گرفت. بنابراین معادله‌ی حاکم به شکل زیر تبدیل می شود:

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (rh(r)\sigma_r) \right) - h(r) \frac{\sigma_\theta}{r} + rh(r)\rho(r,T)\omega^2 = 0 \quad (۶-۲)$$

که در آن چگالی دیسک وابسته به دما و مکان ذرات دیسک می باشد. همچنین ω سرعت زاویه ای ثابتی است که دیسک حول محور مرکزی خود می چرخد.

۲ - ۲ - ۲ روابط سینماتیک در دیسک ناهمگن

در حالت کلی تغییر شکل ها در یک سیستم ناشی از شرایط مکانیکی و حرارتی اعمال شده به آن می باشد بنابراین کرنش های موجود در سیستم دارای دو پارامتر مکانیکی و حرارتی می باشند، از طرفی در حوزه‌ی

الاستیک کرنش مکانیکی دارای یک مولفه‌ی الاستیک خواهد بود، بنابراین برای دیسک در شرایط ترموالاستیک رابطه‌ی زیر حاکم است:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^T \quad (۷-۲)$$

که در آن ε^e کرنش الاستیک و ε^T کرنش حرارتی می باشد. در تئوری الاستیسیته‌ی مستوی روابط سینماتیک با فرض تغییر شکل های بسیار کوچک، به شکل زیر می باشد:

$$\begin{cases} \varepsilon_r^e = \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \varepsilon_\theta^e = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \\ \varepsilon_z^e = \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{cases} \quad (۸-۲)$$

در آن u_r جابجایی شعاعی، u_θ جابجایی محیطی و u_z جابجایی در راستای محور z می باشد. این روابط در شرایط متقارن محوری به شکل زیر ساده می شوند:

$$\begin{cases} \varepsilon_r^e = \frac{du_r}{dr} \\ \varepsilon_\theta^e = \frac{u_r}{r} \\ \varepsilon_z^e = \frac{du_z}{dz} \end{cases} \quad (۹-۲)$$

با فرض اینکه گرادیان حرارتی ناشی از اختلاف دما در راستای شعاع باشد، کرنش حرارتی نیز فقط در راستای شعاع بوده و مقدار آن از رابطه‌ی زیر قابل محاسبه است:

$$\varepsilon^T = \alpha(r, T)(T(r) - T_{ref}) = \alpha(r, T)\Delta T(r) \quad (۱۰-۲)$$

که در آن $\alpha(r, T)$ ضریب انبساط بوده و می تواند تابعی از شعاع و دما باشد. همچنین $T(r)$ تابع توزیع دما و T_{ref} دمای مرجع می باشد.

۲-۲-۳ معادلات رفتاری در دیسک ناهمگن

در حالت کلی با توجه به روابط لامه، معادلات رفتاری در هر ماده به شکل زیر خواهد بود: [۲۷]

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk}^e + 2\mu \varepsilon_{ij}^e - (3\lambda + 2\mu) \delta_{ij} \varepsilon^T \quad (۱۱-۲)$$

که در آن λ و μ ثوابت لامه بوده و از رابطه‌ی زیر قابل محاسبه هستند:

$$\lambda = \frac{\nu E(r, T)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \mu = \frac{E(r, T)}{2(1+\nu)} \quad (۱۲-۲)$$

که $E(r, T)$ مدول الاستیسیته وابسته به زمان و شعاع می باشد. همچنین ν ضریب پواسون است و با توجه به اینکه در دما و شعاع‌های مختلف تغییرات نامحسوسی دارد، لذا مقدار آن در تمامی شرایط حرارتی و مکانی ثابت فرض می شود. با جایگذاری روابط فوق در (۱۱-۲) بدست می‌آید:

$$\sigma_i = \frac{E(r, T)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ (1-\nu)\varepsilon_i + \nu(\varepsilon_j + \varepsilon_k) \right\} - \frac{E(r, T)}{(1-2\nu)} \varepsilon^T \quad (۱۳-۲)$$

با بسط معادله‌ی فوق، می توان رابطه‌ی تنش‌ها با کرنش‌ها را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \end{Bmatrix} = \frac{E(r, T)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu \\ \nu & (1-\nu) & \nu \\ \nu & \nu & (1-\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r^e \\ \varepsilon_\theta^e \\ \varepsilon_z^e \end{Bmatrix} - \frac{E(r, T)\alpha(r, T)\Delta T(r)}{(1-2\nu)} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (۱۴-۲)$$

با توجه به فرض تنش صفحه ای می توان کرنش در راستای ضخامت را بر حسب کرنش‌های شعاعی و محیطی محاسبه نمود:

$$\sigma_z = 0 \rightarrow \left\{ (1-\nu)\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_\theta + \varepsilon_r) \right\} - (1+\nu)\varepsilon^T = 0 \rightarrow \varepsilon_z = \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \varepsilon^T - \frac{\nu}{(1-\nu)} (\varepsilon_\theta + \varepsilon_r) \quad (۱۵-۲)$$

با جایگذاری عبارت فوق در (۱۳-۲) رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}\sigma_i &= \frac{E(r,T)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ (1-\nu)\varepsilon_i + \nu \left(\varepsilon_j + \left(\frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \varepsilon^T - \frac{\nu}{(1-\nu)} (\varepsilon_i + \varepsilon_j) \right) \right) \right\} - \frac{E(r,T)}{(1-2\nu)} \varepsilon^T \\ &= \frac{E(r,T)}{(1-\nu^2)} \{ \varepsilon_i + \nu \varepsilon_j \} - \frac{E(r,T)}{(1-\nu)} \varepsilon^T\end{aligned}\quad (۱۶-۲)$$

با بسط معادلات فوق و با استفاده از (۹-۲) و (۱۱-۲)، می‌توان رابطه‌ی تنش‌ها را بر حسب جابجایی به صورت زیر ساده نمود:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} = \frac{E(r,T)}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{du_r}{dr} \\ \frac{u_r}{r} \end{Bmatrix} - \frac{E(r,T)\alpha(r,T)\Delta T(r)}{(1-\nu)} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}\quad (۱۷-۲)$$

حال با قراردادن رابطه‌ی فوق در معادله‌ی (۶-۲) معادله تعادل بر حسب جابجایی بدست می‌آید، که پس از ساده‌سازی به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$A_1 \frac{d^2 u_r}{dr^2} + A_2 \frac{du_r}{dr} + A_3 u_r + A_4 = 0\quad (۱۸-۲)$$

که در آن:

$$A_1 = rh(r)E(r,T)$$

$$A_2 = \frac{d}{dr}(rh(r)E(r,T))$$

$$A_3 = -\frac{h(r)E(r,T)}{r} + \nu \frac{d}{dr}(h(r)E(r,T))\quad (۱۹-۲)$$

$$A_4 = r(1+\nu) \left\{ (1-\nu)h(r)\rho(r,T)r\omega^2 - \frac{d}{dr}(h(r)E(r,T)\alpha(r,T)\Delta T(r)) \right\}$$

می‌باشد. این معادله را به صورت اشتورم لیویل نیز می‌توان نوشت که به شکل زیر خواهد بود:

$$\frac{d}{dr} \left(A_1 \frac{du_r}{dr} \right) + A_3 u + A_4 = 0\quad (۲۰-۲)$$

معادله‌ی فوق برای حل نیاز به دو شرط مرزی دارد که با توجه به نوع معادله می‌بایست از نوع جابجایی یا مشتقات آن باشد.

۲-۲-۴ معادله انتقال حرارت در دیسک ناهمگن با ضخامت متغیر

اگر یک المان در مختصات استوانه‌ای در نظر بگیریم، در زمان ثابت (شرایط یکنواخت) و با فرض اینکه که تولید حرارت وجود نداشته باشد، با توجه به قانون اول ترمودینامیک می‌بایست شار ورودی و خروجی در این المان ثابت باشد. با فرض متقارن محوری بودن در بارگذاری و عدم وجود گرادیان دما در راستای ضخامت فقط شار در راستای شعاع وجود دارد، از این رو داریم:

$$q_r = q_{r+dr} \quad (21-2)$$

که در آن شار حرارتی بوده و از رابطه‌ی زیر قابل محاسبه است:

$$q_r = -k(r,T)A \frac{dT}{dr} = -k(r,T)[h(r)rd\theta] \frac{dT}{dr} \quad (22-2)$$

که در آن $k(r,T)$ ضریب هدایت حرارتی می‌باشد و مشابه خواص قبلی وابسته به مکان و دما می‌باشد. از طرفی با توجه به بسط تیلور داریم:

$$q_{r+dr} = q_r + \frac{dq_r}{dr}dr = q_r + \frac{d}{dr} \left(k(r,T) \{h(r)rd\theta\} \frac{dT}{dr} \right) dr \quad (23-2)$$

با ساده سازی روابط فوق، خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dr} \left(k(r,T)h(r)r \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad (24-2)$$

معادله‌ی (۲۴-۲)، معادله‌ی انتقال حرارت دیسک در حالت کلی می‌باشد. با دوبار انتگرال گیری از این معادله خواهیم داشت:

$$T(r) = c_1 \int_{r_i}^r \frac{dr}{rh(r)k(r,T)} + c_2 \quad (25-2)$$

برای بدست آوردن تابع توزیع دما نیاز به دو شرط مرزی از جنس دما یا مشتقات آن نظیر شار حرارتی می باشد. اگر شرایط مرزی به گونه ای باشد که سطح داخلی در معرض دمای T_i و سطح خارجی در معرض دمای T_o قرار داشته باشد، توزیع دما در دیسک به صورت زیر خواهد بود:

$$T(r) = T_i \left(1 - \frac{\int_{r_i}^r \frac{dr}{rh(r)k(r,T)}}{\int_{r_i}^{r_o} \frac{dr}{rh(r)k(r,T)}} \right) + T_o \left(\frac{\int_{r_i}^r \frac{dr}{rh(r)k(r,T)}}{\int_{r_i}^{r_o} \frac{dr}{rh(r)k(r,T)}} \right) \quad (26-2)$$

با توجه به اینکه در معادله ی کرنش حرارتی عبارت $\Delta T(r)$ را داریم می بایست معادله ی فوق به صورت $\Delta T(r)$ تبدیل شود. برای سادگی دمای مرجع را برابر دمای سطح داخلی در نظر می گیریم:

$$\text{if } T_{ref} = T_i \Rightarrow \Delta T(r) = (T_o - T_i) \left(\frac{\int_{r_i}^r \frac{dr}{rh(r)k(r,T)}}{\int_{r_i}^{r_o} \frac{dr}{rh(r)k(r,T)}} \right) \quad (27-2)$$

۲-۳ حل ترموالاستیک دیسک همگن با ضخامت ثابت

در بخش قبل معادله ی حاکم بر دیسک با ضخامت متغیر در حالت کلی بدست آمد که برای مواد ناهمگن وابسته به دما به صورت معادله ی (۱۸-۲) ارائه شد. در این قسمت به ساده ترین حالت آن معادله که دیسک همگن با ضخامت ثابت است پرداخته می شود.

با توجه به اینکه ضخامت در تمامی نقاط دیسک ثابت می باشد لذا عبارت ضخامت از طرفین معادله (۱۸-۲) حذف می شود. بدیهی است که در ماده ی همگن خواصی از قبیل مدول الاستیسیته، چگالی، ضریب انبساط و هدایت حرارتی در تمامی مکانها ثابت هستند، بنابراین عبارات مربوط به آنها ثابت فرض می شوند. بدین ترتیب ضرایب معادله ی دیفرانسیل (۱۹-۲) با ساده سازی به شکل زیر تبدیل می شود.

$$\begin{aligned}
 A_1 &= r^2 \\
 A_2 &= r \\
 A_3 &= -1
 \end{aligned}
 \tag{۲۸-۲}$$

$$A_4 = r^2(1+\nu) \left\{ \frac{(1-\nu)\rho_0 r \omega^2}{E_0} - \alpha_0 \frac{d}{dr} (\Delta T(r)) \right\}$$

که در آن E_0 مدول الاستیسیته، ρ_0 چگالی و α_0 ضریب انبساط حرارتی است که در تمامی نقاط دیسک ثابت می باشد.

۲-۳-۱ حل حرارتی

معادله‌ی توزیع در دیسک همگن با ضخامت ثابت با توجه به (۲۷-۲) به شکل زیر ساده می شود:

$$\Delta T(r) = \left(\frac{\int_{r_i}^r \frac{dr}{r}}{\int_{r_i}^{r_o} \frac{dr}{r}} \right) (T_o - T_i)
 \tag{۲۹-۲}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\Delta T(r) = \left(\frac{(T_o - T_i)}{(\ln(r_o) - \ln(r_i))} \right) (\ln(r) - \ln(r_i))
 \tag{۳۰-۲}$$

و

$$\frac{d(\Delta T(r))}{dr} = \frac{1}{r} \left(\frac{(T_o - T_i)}{(\ln(r_o) - \ln(r_i))} \right)
 \tag{۳۱-۲}$$

می باشد. با جایگذاری (۳۱-۲) در (۲۸-۲) خواهیم داشت:

$$A_4 = r(1+\nu) \left\{ \frac{(1-\nu)\rho_0 r^2 \omega^2}{E_0} - \frac{\alpha_0 (T_o - T_i)}{\ln(r_o) - \ln(r_i)} \right\}
 \tag{۳۲-۲}$$

بنابراین معادله‌ی ترموالاستیک دیفرانسیل حاکم بر دیسک همگن با ضخامت ثابت، به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$r^2 \frac{d^2 u_r}{dr^2} + r \frac{du_r}{dr} - u_r = F(r) \quad (۳۳-۲)$$

که در آن:

$$F(r) = -r(1+\nu) \left[\frac{(1-\nu)\rho_0 r^2 \omega^2}{E_0} - \frac{\alpha_0 (T_o - T_i)}{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)} \right] \quad (۳۴-۲)$$

می‌باشد. معادله‌ی (۳۳-۲)، معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم ناهمگن با ضرایب متغیر می‌باشد.

۲ - ۳ - ۲ حل تحلیلی

معادله‌ی (۳۳-۲) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r u_r) \right] = \frac{F(r)}{r^2} \quad (۳۵-۲)$$

با دوبار انتگرال‌گیری از معادله فوق خواهیم داشت:

$$u_r = \frac{1}{r} \int \left[r \int \frac{F(r)}{r^2} dr \right] dr + C_1 r + \frac{C_2}{r} \quad (۳۶-۲)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \int \left[r \int \frac{F(r)}{r^2} dr \right] dr &= \frac{-1}{r} \int \left[\frac{(1-\nu^2)\rho_0 r^3 \omega^2}{2E_0} + \frac{\alpha_0 (1+\nu)(T_o - T_i)}{(\ln(r_o) - \ln(r_i))} r \ln(r) \right] dr \\ &= -\frac{(1-\nu^2)\rho_0 r^3 \omega^2}{8E_0} + \frac{\alpha_0 (1+\nu)(T_o - T_i)}{2(\ln(r_o) - \ln(r_i))} r \ln(r) \end{aligned} \quad (۳۷-۲)$$

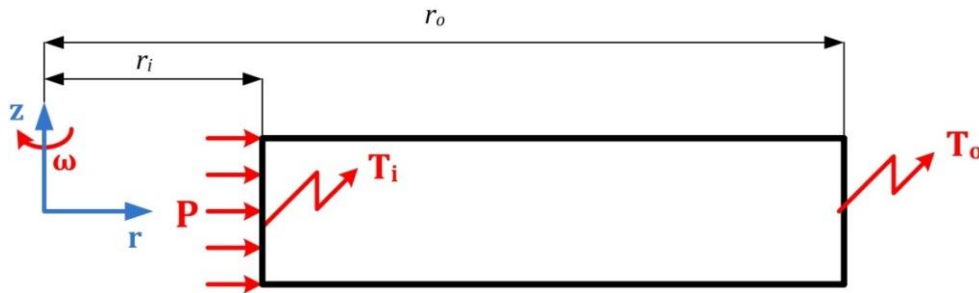
می باشد. بنابراین حل کلی مسئله نیز به شکل زیر خواهد بود:

$$u_r = C_1 r + \frac{C_2}{r} + \frac{(\nu^2 - 1)\rho_0 \omega^2}{8E_0} r^3 + \frac{\alpha_0 (1 + \nu)(T_o - T_i)}{2 \ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)} r \ln(r) \quad (38-2)$$

معادله ی فوق دارای دو ثابت مجهول می باشد. بنابراین برای حل نیاز به دو شرط مرزی دارد که در قسمت بعدی به آن پرداخته می شود.

۲ - ۳ - ۳ شرایط مرزی

دیسک مورد بحث در این پژوهش تحت گرادیان حرارتی، فشار داخلی و دوران می باشد که شکل زیر جزئیات آن را نمایش می دهد:



شکل ۱-۲: بارگذاری در دیسک با ضخامت ثابت

با توجه به شکل ۱-۲ شرایط مرزی دیسک در لایه ی داخلی و خارجی به شکل زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} \sigma_r \Big|_{r=r_i} = -P \\ \sigma_r \Big|_{r=r_o} = 0 \end{cases} \quad (39-2)$$

با توجه به معادله (۱۷-۲) داریم:

$$\sigma_r = \frac{E_0}{(1 - \nu^2)} \left(\frac{du_r}{dr} + \nu \frac{u_r}{r} - \alpha_0 (1 + \nu) \Delta T(r) \right) \quad (40-2)$$

$$u_r = C_1 r + \frac{C_2}{r} + \frac{(\nu^2 - 1)\rho_0 \omega^2}{8E_0} r^3 + \frac{\alpha_0(1+\nu)(T_o - T_i)}{2\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)} r \ln(r) \quad (41-2)$$

$$\Delta T(r) = \frac{(T_o - T_i)}{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)} \ln\left(\frac{r}{r_i}\right)$$

برای سادگی در تحلیل می توان تابع جابجایی شعاعی را به شکل زیر نوشت:

$$u_r = C_1 r + \frac{C_2}{r} + D_1 r^3 + D_2 r \ln(r) \quad (42-2)$$

بدین ترتیب مشتق آن برابر است با:

$$\frac{du_r}{dr} = C_1 - \frac{C_2}{r^2} + 3D_1 r^2 + D_2 (\ln(r) + 1) \quad (43-2)$$

با جایگذاری روابط فوق در (40-2) تابع تنش شعاعی به شکل زیر ساده می شود:

$$\sigma_r = \frac{E_0}{(1-\nu^2)} \left(\begin{aligned} & \left((1+\nu)C_1 - \frac{(1-\nu)C_2}{r^2} + (3+\nu)D_1 r^2 + D_2(1+\nu)\ln(r) \right) \\ & - \frac{\alpha_0(1+\nu)(T_o - T_i)}{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)} \ln\left(\frac{r}{r_i}\right) \end{aligned} \right) \quad (44-2)$$

بنابراین شرایط مرزی به شکل زیر تبدیل می شود:

$$\begin{aligned} \sigma_r \Big|_{r=r_i} &= \frac{E_0}{(1-\nu^2)} \left((1+\nu)C_1 - \frac{(1-\nu)C_2}{r_i^2} + (3+\nu)D_1 r_i^2 + D_2(1+\nu)\ln(r_i) + A_2 \right) = -P \\ \sigma_r \Big|_{r=r_o} &= \frac{E_0}{(1-\nu^2)} \left((1+\nu)C_1 - \frac{(1-\nu)C_2}{r_o^2} + (3+\nu)D_1 r_o^2 + D_2(1+\nu)\ln(r_o) + A_2 \right) = 0 \end{aligned} \quad (45-2)$$

که به صورت دستگاه معادلات زیر خواهد بود:

$$\begin{bmatrix} (1+\nu) & -\frac{(1-\nu)}{r_i^2} \\ (1+\nu) & -\frac{(1-\nu)}{r_o^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{P(1-\nu^2)}{E_0} + (3+\nu)D_1r_i^2 + D_2(1+\nu)\ln(r_i) + A_2 \\ (3+\nu)D_1r_o^2 + D_2(1+\nu)\ln(r_o) + D_2 - \alpha_0(1+\nu)(T_o - T_i) \end{Bmatrix} \quad (46-2)$$

که با حل دستگاه معادلات خطی C_1 و C_2 به شکل زیر بدست می آیند:

$$C_1 = \frac{(r_o r_i)^2}{(1+\nu)(r_o^2 - r_i^2)} \begin{Bmatrix} \frac{1}{r_i^2} [(3+\nu)D_1r_o^2 + D_2(1+\nu)\ln(r_o) + D_2 - \alpha_0(1+\nu)(T_o - T_i)] \\ -\frac{1}{r_o^2} \left[\frac{P(1-\nu^2)}{E_0} + (3+\nu)D_1r_i^2 + D_2(1+\nu)\ln(r_i) + D_2 \right] \end{Bmatrix} \quad (47-2)$$

$$C_2 = \frac{-(r_o r_i)^2}{(1-\nu)(r_o^2 - r_i^2)} \left\{ \frac{P(1-\nu^2)}{E_0} + (3+\nu)D_1(r_i^2 - r_o^2) + D_2(1+\nu)\ln\left(\frac{r_i}{r_o}\right) - \alpha_0(1+\nu)(T_o - T_i) \right\}$$

که در آن:

$$D_1 = \frac{(\nu^2 - 1)\rho_0\omega^2}{8E_0}$$

$$D_2 = \frac{\alpha_0(1+\nu)(T_o - T_i)}{2\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)} \quad (48-2)$$

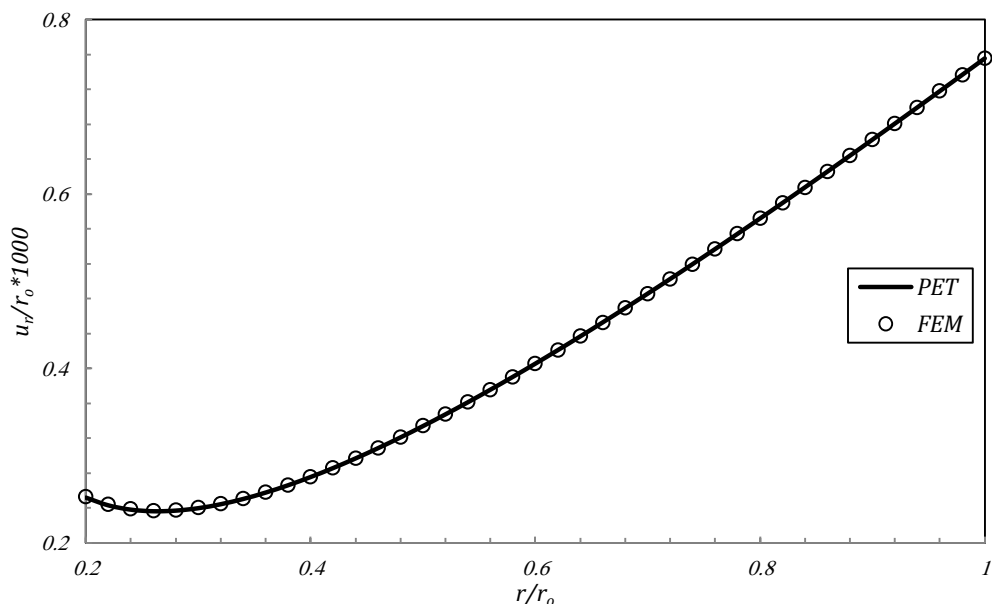
می باشد.

۲-۴ بررسی نتایج حل دیسک همگن با ضخامت ثابت

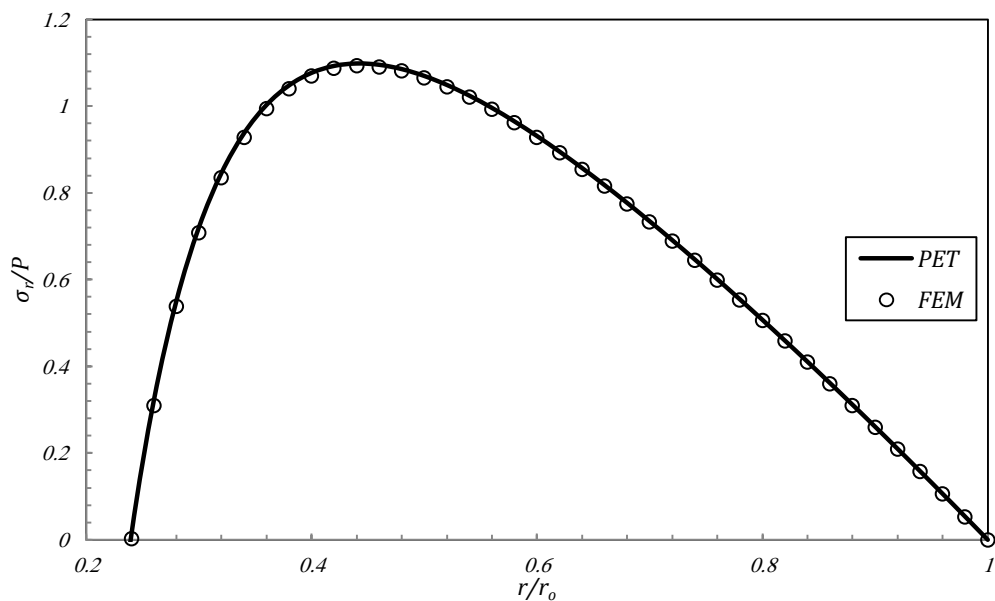
در قسمت قبل حل پارامتریک برای دیسک همگن با ضخامت ثابت ارائه گردید. با توجه به اینکه از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی استفاده شده است، بنابراین حل ارائه شده حل دقیق می باشد. در این بخش به ارائه نتایج حاصل از تحلیل در قسمت قبل با توجه به جدول های ۱-۱ تا ۱-۳ پرداخته می شود:

۲-۴-۱ مقایسه نتایج با حل عددی

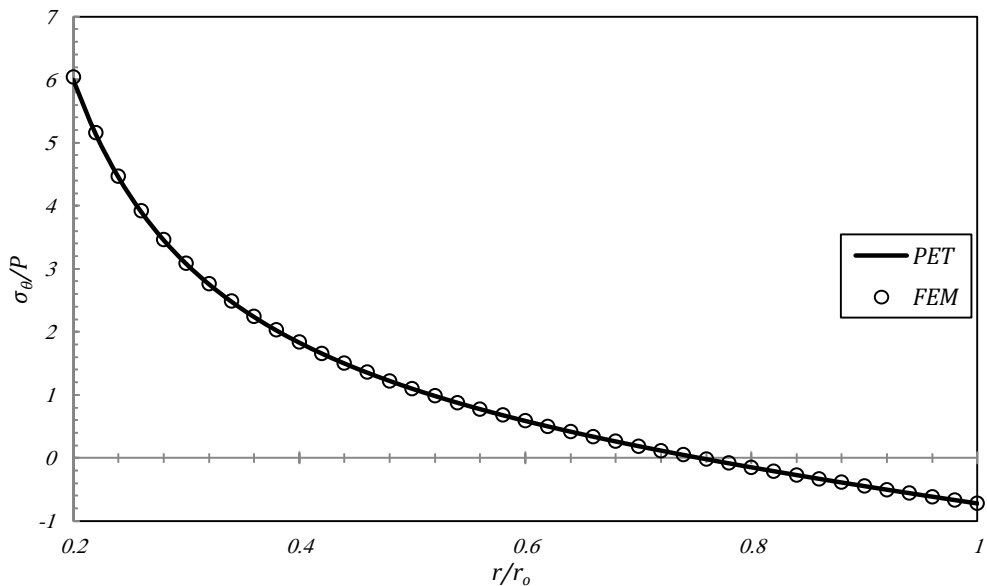
همانطور که بیان شد حل تحلیل بر پایه فرمولبندی ناویر، از هر حل موجود دقت بیشتری دارد، ولی برای کنترل نتایج بدست آمده آنرا با حل عددی مقایسه و در صورت انطباق به بررسی نمودارهای بدست آمده پرداخته شود. شکل‌های (۲-۲) تا (۴-۲) به مقایسه حل عددی و حل تحلیلی می‌پردازد:



شکل ۲-۲: مقایسه ی توزیع جابجایی شعاعی حل تحلیلی با حل عددی (دیسک همگن با ضخامت ثابت)



شکل ۲-۳: مقایسه ی توزیع تنش شعاعی حل تحلیلی با حل عددی (دیسک همگن با ضخامت ثابت)

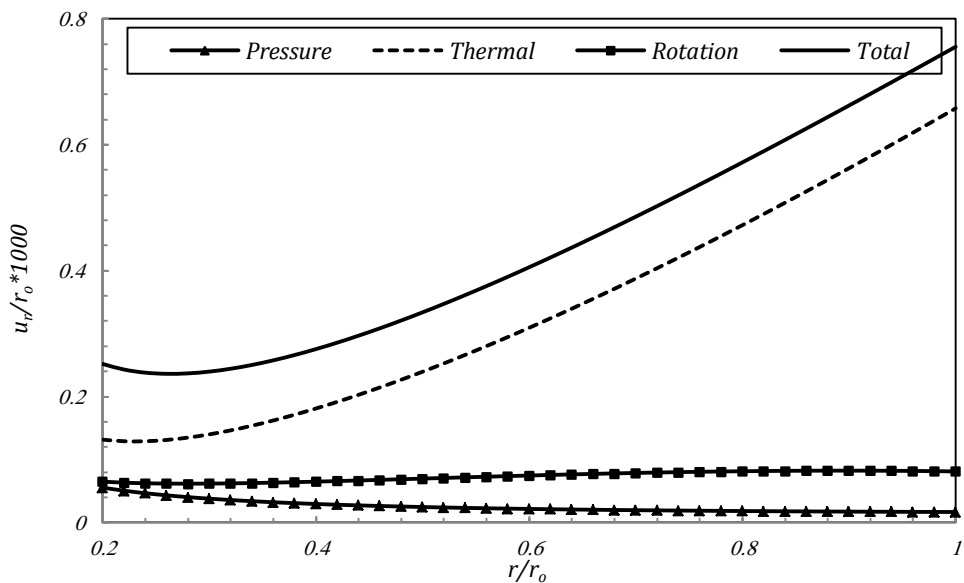


شکل ۲-۴: مقایسه ی توزیع تنش محیطی حل تحلیلی با حل عددی (دیسک همگن با ضخامت ثابت)

نتایج ارائه شده در نمودارها به خوبی انطباق حل تحلیلی و عددی را نشان می دهد.

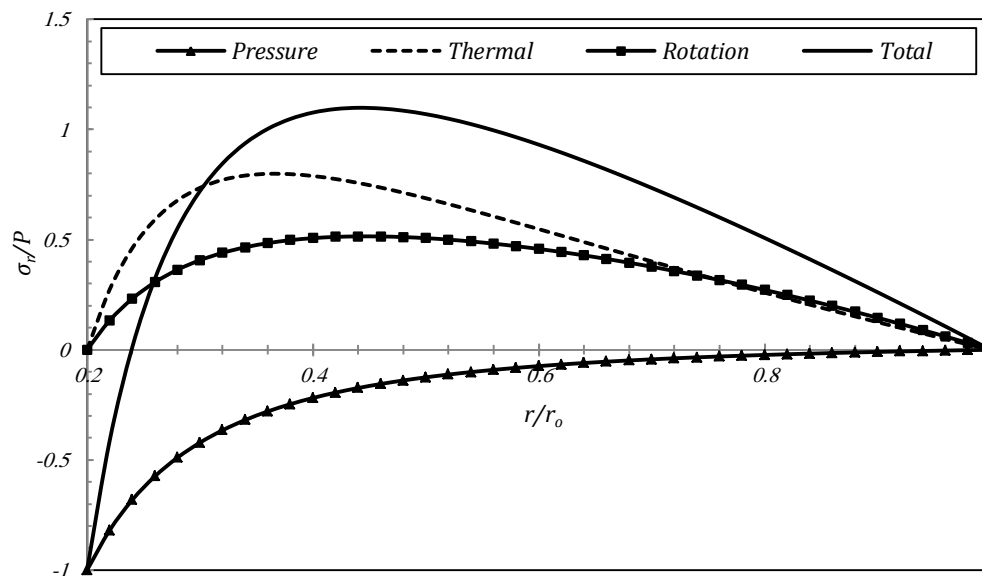
۲-۴-۲ بررسی تاثیر هر بارگذاری در توزیع مشخصه های مکانیکی

شکل ۲-۵ تغییرات جابجایی شعاعی را در راستای شعاع نشان می دهد:



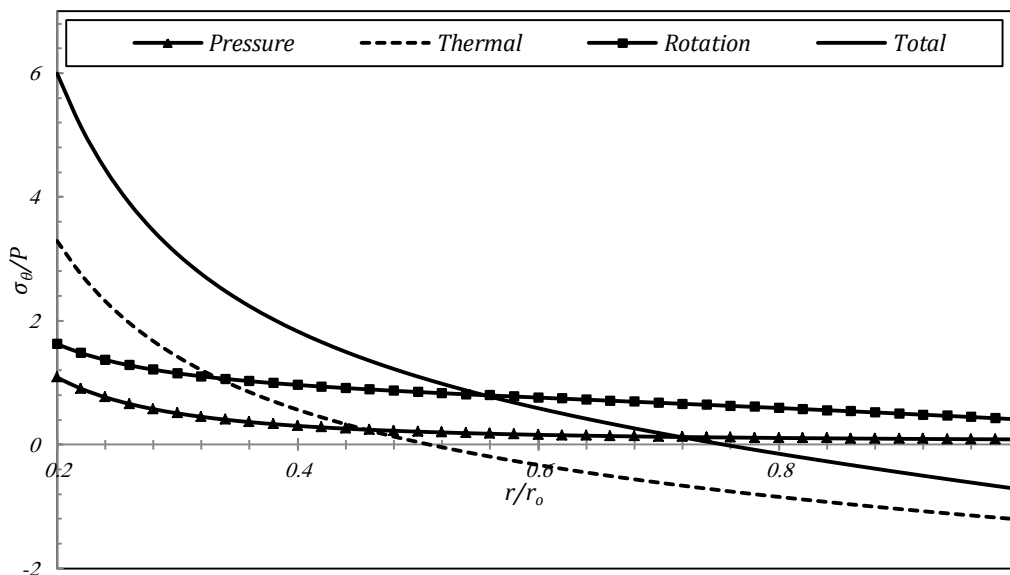
شکل ۲-۵: نحوه ی توزیع جابجایی شعاعی در بارگذاریهای مختلف (دیسک همگن با ضخامت ثابت)

در شکل ۲-۵ مشاهده می‌شود که قدرمطلق جابجایی ناشی از گرادیان حرارتی بر بارگذاریهای دیگر غلبه دارد. با توجه به اینکه دما در دیسک با افزایش شعاع افزایش می‌یابد، تغییرات جابجایی ناشی از گرادیان حرارتی به صورت صعودی رفتار می‌کند. در بارگذاری ناشی از دوران تغییرات جابجایی شعاعی در لایه‌های داخلی دیسک نزولی، سپس تا نواحی نزدیک به دیسک صعودی شده و دوباره تغییرات به شکل نزولی تغییر وضع می‌دهد. با توجه به اینکه نیروی گریز از مرکز به دو عامل جرم و شعاع وابسته است این تغییرات منطقی به نظر می‌رسد بطوریکه عامل شعاع باعث صعودی شدن تغییرات شده و عامل کاهش جرم بین لایه‌های مجاور که در سطوح داخلی و خارجی اتفاق می‌افتد سبب نزولی شدن رابطه می‌شود. بنابراین نمودار جابجایی دارای یک مینیمم نسبی و یک بیشینه نسبی می‌باشد. تغییرات جابجایی شعاعی ناشی از فشار داخلی، در کل دیسک با افزایش شعاع کاهش می‌یابد بنابراین در لایه‌های داخلی مقدار آن بیشینه است. با جمع کردن تمامی جابجایی‌های شعاعی ناشی از بارگذاریها ملاحظه می‌شود، در غالب لایه‌ها تغییرات به صورت صعودی می‌باشد، فقط در لایه های داخلی گرادیان جابجایی شعاعی ناشی از فشار بر جابجایی کل غلبه دارد و رفتار کلی نزولی می‌باشد. شکل ۲-۶ توزیع تنش شعاعی نرمال را در راستای شعاع نشان می‌دهد:



شکل ۲-۶: نحوه ی توزیع تنش شعاعی در بارگذاریهای مختلف (دیسک همگن با ضخامت ثابت)

در شکل ۲-۶، مشاهده می‌شود که تنش‌های شعاعی ناشی از گرادیان حرارتی و دوران رفتاری مشابه دارد. با توجه به سطح آزاد بودن سطوح دیسک در شعاع داخلی و خارجی، در این دو ناحیه تنش صفر بوده و بقیه لایه‌ها تحت کشش ناشی از جابجایی شعاعی می‌باشد بنابراین تنش بیشینه در لایه‌های میانی رخ می‌دهد. در تنش ناشی از فشار داخلی، نحوه‌ی تغییرات قدر مطلق تنش به صورت نزولی می‌باشد به گونه‌ای که فشار داخلی تمامی لایه‌ها را تحت فشار قرار می‌دهد. با استفاده از جمع آثار رفتار برآیند نیروها به شکلی است که لایه‌های داخلی تحت فشار و لایه‌های خارجی تحت کشش قرار دارد. نکته‌ی قابل توجه در تنش شعاعی این است که برخلاف نتایج جابجایی شعاعی، بارگذاری ناشی از گرادیان حرارت بارگذاری غالب نمی‌باشد و هر یک از بارگذاری‌ها سهم مساوی در تغییرات تنش شعاعی داشته است. شکل ۲-۷ توزیع تنش شعاعی نرمال را در راستای شعاع نشان می‌دهد:



شکل ۲-۷: نحوه‌ی توزیع تنش محیطی در بارگذاری‌های مختلف (دیسک همگن با ضخامت ثابت)

شکل ۲-۷ نشان می‌دهد که تنش محیطی ناشی از گرادیان حرارتی، تنش محیطی غالب می‌باشد و رفتاری تنش‌های محیطی تمامی بارگذاری‌های تحت تاثیر این بارگذاری می‌باشد. در بارگذاری ناشی از گرادیان حرارتی لایه‌های داخلی تحت کشش و لایه‌های بیرونی تحت فشار قرار دارد و محل تغییر نوع تنش در $r/r_0=0.5$ می‌باشد.

باشد. از طرفی با توجه به اینکه در بارگذاریهای ناشی از فشار و دوران همواره تنش محیطی کششی می باشد، در بارگذاری عمومی محل تغییر تنش از کشش به فشار به $r/r_o=0.75$ انتقال می یابد.

۲-۵ حل ترموالاستیک دیسک ناهمگن با ضخامت ثابت

اگر توزیع خواص ماده ناهمگن FG با استفاده از تابع توانی در نظر گرفته شود، معادله تغییرات خواص در راستای شعاع به شکل زیر خواهد بود:

$$E(r) = E_i \left(\frac{r}{r_i} \right)^n, \rho(r) = \rho_i \left(\frac{r}{r_i} \right)^n, \alpha(r) = \alpha_i \left(\frac{r}{r_i} \right)^n, k(r) = k_i \left(\frac{r}{r_i} \right)^n \quad (۴۹-۲)$$

که در آن E_i مدول الاستیسیته، ρ_i چگالی در، α_i ضریب انبساط حرارتی و k_i ضریب هدایت حرارتی در شعاع داخلی r_i می باشد. با توجه به رابطه (۲۹-۲) ضرایب معادله دیفرانسیل به شکل زیر تبدیل می شود:

$$\begin{aligned} A_1 &= r^2 \\ A_2 &= (1+n)r \\ A_3 &= n\nu - 1 \\ A_4 &= r(1+\nu) \left\{ \frac{(1-\nu)\rho_i r^2 \omega^2}{E_i} - \frac{\alpha_i r^n}{r_i^n} \left(r \frac{d}{dr} (\Delta T(r)) + 2n\Delta T(r) \right) \right\} \end{aligned} \quad (۵۰-۲)$$

۲-۵-۱ حل حرارتی

معادله توزیع دما با توجه به رابطه ارائه شده در قسمت قبل، به شکل زیر می باشد:

$$\Delta T(r) = (T_o - T_i) \left(\frac{\int_{r_i}^r \frac{dr}{rk(r)}}{\int_{r_i}^{r_o} \frac{dr}{rk(r)}} \right) \quad (۵۱-۲)$$

اگر به تابع توزیع دما دقت کنیم مشاهده می شود که انتگرال زیر در آن تکرار شده است که حاصل این انتگرال برای دیسک ساخته شده از مواد FG با تابع توزیع توانی به شکل زیر خواهد بود:

$$\int \frac{dr}{rk(r)} = \frac{r_i^n}{k_i} \int \frac{dr}{r^{n+1}} = -\frac{r_i^n}{nk_i} r^{-n} \quad (n \neq 0) \quad (52-2)$$

بنابراین معادله ی توزیع دما به شکل زیر تبدیل خواهد شد:

$$\Delta T(r) = \left(\frac{(T_o - T_i)}{(r_o^{-n} - r_i^{-n})} \right) (r^{-n} - r_i^{-n}) \quad (53-2)$$

که مشتق عبارت فوق به شکل زیر خواهد بود:

$$\frac{d(\Delta T(r))}{dr} = \left(-\frac{n(T_o - T_i)}{(r_o^{-n} - r_i^{-n})} \right) r^{-(n+1)} \quad (54-2)$$

که با جایگذاری روابط فوق در A_4 و ساده سازی رابطه ی زیر بدست می آید:

$$A_4 = r(1+\nu) \left\{ \frac{(1-\nu)\rho_i r^2 \omega^2}{E_i} - \left(\frac{(T_o - T_i)\alpha_i r_i^{-n} r^n}{(r_o^{-n} - r_i^{-n})} \right) (nr^{-n} - 2nr_i^{-n}) \right\} \quad (55-2)$$

بنابراین معادله ی دیفرانسیل حاکم بر دیسک با ضخامت ثابت برای مواد ناهمگن FG با استفاده از شرایط تنش صفحه ای به شکل زیر خواهد بود:

$$r^2 \frac{d^2 u_r}{dr^2} + (1+n)r \frac{du_r}{dr} + (n\nu-1)u_r = F(r) \quad (56-2)$$

که در آن:

$$F(r) = -r(1+\nu) \left\{ \frac{(1-\nu)\rho_i r^2 \omega^2}{E_i} - \left(\frac{(T_o - T_i)\alpha_i r_i^{-n} r^n}{(r_o^{-n} - r_i^{-n})} \right) (nr^{-n} - 2nr_i^{-n}) \right\} \quad (57-2)$$

می باشد. معادله ی فوق یک معادله ی ناهمگن می باشد و حل آن شامل دو حل خصوصی و عمومی می باشد:

$$u_r = u_r^h + u_r^p \quad (58-2)$$

۲ - ۵ - ۲ حل عمومی

اگر جمله خصوصی معادله ی (۲-۵۶) حذف شود، معادله ی حاکم به صورت همگن زیر تبدیل خواهد شد:

$$r^2 \frac{d^2 u_r}{dr^2} + (1+n)r \frac{du_r}{dr} + (n\nu-1)u_r = 0 \quad (۲-۵۹)$$

معادله ی فوق یک معادله ی اویلر - کشی است که اگر در معادله ی فوق به جای u_r عبارت r^λ قرار دهیم معادله ی مشخصه ی زیر بدست می آید:

$$\lambda^2 + n\lambda + (n\nu-1) = 0 \quad (۲-۶۰)$$

ریشه های معادله ی چند جمله ای درجه ی دوم فوق عبارت است:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-n \pm \sqrt{\Delta}) \quad (۲-۶۱)$$

که در آن:

$$\Delta = n^2 - 4n\nu + 4 \quad (۲-۶۲)$$

می باشد. با توجه به اینکه همواره ν بین صفر و $\frac{1}{2}$ می باشد عبارت $16(\nu^2 - 1)$ همواره کوچکتر از صفر می -

باشد بنابراین عبارت Δ همواره مثبت یا منفی است. با جایگذاری $n=0$ ملاحظه می شود که Δ عدد مثبتی می -

باشد لذا عبارت Δ به ازای تمامی مقادیر n همواره عدد مثبتی خواهد بود در نتیجه λ همواره مقدار حقیقی

خواهد داشت. بنابراین حل عمومی معادله ی حاکم بر دیسک ناهمگن با ضخامت ثابت به شکل زیر خواهد بود:

$$u_r = C_1 r^{\lambda_1} + C_2 r^{\lambda_2} \quad (۲-۶۳)$$

۲ - ۵ - ۳ حل خصوصی

عامل ناهمگنی در معادله‌ی دیفرانسیل حاکم ناشی از دو عامل سرعت زاویه‌ای و گرادیان حرارتی می باشد. با توجه به کوپل نبودن این دو عامل در معادله‌ی حاکم، می توان تاثیر عامل ناهمگنی را برای هر یک به صورت مجزا بررسی نمود. بنابراین معادله‌ی حاکم به شکل زیر تبدیل خواهد شد:

$$r^2 \frac{d^2 u_r}{dr^2} + (1+n)r \frac{du_r}{dr} + (n\nu-1)u_r = F_{rotation}(r) + F_{thermal}(r) \quad (۶۴-۲)$$

که در آن $F_{rotation}(r)$ عامل ناهمگنی ناشی از دوران که مقدار آن برابر است با:

$$F_{rotation}(r) = \frac{(\nu^2 - 1)\rho_i \omega^2}{E_i} r^3 \quad (۶۵-۲)$$

و $F_{thermal}(r)$ عامل ناهمگنی ناشی از گرادیان حرارتی که مقدار آن برابر است با:

$$F_{thermal}(r) = \left(\frac{(T_o - T_i)(1+\nu)}{(r_o^{-n} - r_i^{-n})} \alpha_i r_i^{-n} \right) (nr - 2nr_i^{-n} r^{n+1}) \quad (۶۶-۲)$$

بنابراین می توان حل خصوصی ناشی از این دو عامل را به صورت زیر نوشت و برای هر حالت به صورت مجزا محاسبه نمود:

$$u_r^p = u_r^p|_{rotation} + u_r^p|_{thermal} \quad (۶۷-۲)$$

محاسبه‌ی حل خصوصی ناشی از دوران: با توجه به رابطه‌ی (۶۵-۲) می توان حل خصوصی را چند جمله‌ای از مرتبه‌ی سه فرض کرد:

$$u_r^p|_{rotation} = \sum_{j=0}^3 B_j r^j \quad (۶۸-۲)$$

با جایگذاری رابطه‌ی فوق در معادله‌ی (۶۴-۲) و با فرض $F_{thermal}(r) = 0$ خواهیم داشت:

$$B_0 = B_1 = B_2 = 0, B_3 = \frac{(\nu^2 - 1)\rho_i \omega^2}{(8 + (3 + \nu)n)E_i} \quad (69-2)$$

بنابراین:

$$u_r^p \Big|_{rotation} = \frac{(\nu^2 - 1)\rho_i \omega^2 r^3}{(8 + (3 + \nu)n)E_i} \quad (70-2)$$

محاسبه ی حل خصوصی ناشی از گرادیان حرارتی: جمله مربوط به گرادیان حرارتی دارای عامل r^{1-m} می باشد لذا تشخیص حل آن به شکل عادی امکان پذیر نمی باشد. بنابراین برای محاسبه ی حل خصوصی با توجه به حل عمومی از روش لاگرانژ استفاده می کنیم [29]. برای سادگی می توان حل خصوصی ناشی از گرادیان حرارتی را به شکل زیر تعریف کرد:

$$F'_{thermal}(r) = \frac{1}{r}(G_1 + G_2 r^n) \quad (71-2)$$

که در آن:

$$G_1 = \frac{(T_o - T_i)(1 + \nu)\alpha_i}{(r_o^{-n} - r_i^{-n})} nr_i^{-n}, G_2 = \frac{-(T_o - T_i)(1 + \nu)\alpha_i}{(r_o^{-n} - r_i^{-n})} 2nr_i^{-(2n+m)} \quad (72-2)$$

می باشد. قابل ذکر است چون از روش لاگرانژ در این قسمت استفاده شده است معادله ی دیفرانسیل به صورت استاندارد نوشته شده است و تمامی معادله به r^2 تقسیم شده است. بنابراین از علامت $F'_{thermal}(r)$ استفاده شده است: با توجه به روش لاگرانژ می توان با استفاده از حل عمومی معادله، حل خصوصی آن را بدست آورد. بنابراین حل خصوصی ناشی از گرادیان دما را به صورت زیر نوشته می شود:

$$u_r^p \Big|_{thermal} = \vartheta_1(r)r^{\lambda_1} + \vartheta_2(r)r^{\lambda_2} \quad (73-2)$$

که با حل دستگاه معادله ی زیر $\vartheta_1(r)$ و $\vartheta_2(r)$ محاسبه می شوند:

$$\begin{cases} \mathcal{G}_1'(r)r^{\lambda_1} + \mathcal{G}_2'(r)r^{\lambda_2} = 0 \\ \mathcal{G}_1'(r)\lambda_1 r^{\lambda_1-1} + \mathcal{G}_2'(r)\lambda_2 r^{\lambda_2-1} = \frac{1}{r}(D_1 + D_2 r^n) \end{cases} \quad (74-2)$$

با جایگذاری معادله‌ی اول در معادله‌ی دوم دستگاه روابط زیر بدست می‌آید:

$$\mathcal{G}_2'(r) = \frac{r^{-\lambda_2}(G_1 + G_2 r^n)}{(\lambda_2 - \lambda_1)}, \mathcal{G}_1'(r) = -\frac{r^{-\lambda_1}(G_1 + G_2 r^n)}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \quad (75-2)$$

و با انتگرال گیری مقادیر $\mathcal{G}_1(r)$ و $\mathcal{G}_2(r)$ به شکل زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1(r) &= \frac{-1}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \int [G_1 r^{-\lambda_1} + G_2 r^{n-\lambda_1}] dr = \frac{-1}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \left[\frac{G_1 r^{1-\lambda_1}}{(1-\lambda_1)} + \frac{G_2 r^{1+n-\lambda_1}}{(1-\lambda_1+n)} \right] + C_1' \\ \mathcal{G}_2(r) &= \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \int [G_1 r^{-\lambda_2} + G_2 r^{n-\lambda_2}] dr = \frac{-1}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \left[\frac{G_1 r^{1-\lambda_2}}{(1-\lambda_2)} + \frac{G_2 r^{1+n-\lambda_2}}{(1-\lambda_2+n)} \right] + C_2' \end{aligned} \quad (76-2)$$

با ترکیب ثوابت فوق با ثوابت همگن، حل خصوصی ناشی از گرادیان حرارتی به شکل زیر تبدیل خواهد شد:

$$u_r^p |_{thermal} = \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \left[-\frac{G_1 r}{(1-\lambda_1)} - \frac{G_2 r^{1+n}}{(1-\lambda_1+n)} + \frac{G_1 r}{(1-\lambda_2)} + \frac{G_2 r^{1+n}}{(1-\lambda_2+n)} \right] \quad (77-2)$$

پس از ساده سازی نتیجه زیر حاصل می‌گردد:

$$u_r^p |_{thermal} = \left(\frac{1}{(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)} \right) G_1 r + \left(\frac{1}{(1-\lambda_1+n)(1-\lambda_2+n)} \right) G_2 r^{1+n} \quad (78-2)$$

حال با جایگذاری ثوابت و مقادیر λ_i در معادله‌ی فوق رابطه جابجایی شعاعی به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$u_r^p |_{thermal} = \frac{(T_o - T_i)(1+\nu)\alpha_i}{(r_o^{-n} - r_i^{-n})} \left\{ \left(\frac{-r_i^{-n}}{1+\nu} \right) r - \left(\frac{2nr_i^{-2n}}{2n^2 + n(3+\nu)} \right) r^{1+n} \right\} \quad (79-2)$$

بنابراین حل خصوصی معادله به شکل زیر بدست می‌آید:

$$u_r^p = u_r^p \Big|_{rotation} + u_r^p \Big|_{thermal}$$

$$= \frac{(\nu^2 - 1)\rho_i \omega^2 r^3}{(8 + (3 + \nu)n)E_i} + \frac{(T_o - T_i)(1 + \nu)\alpha_i}{(r_o^{-n} - r_i^{-n})} \left\{ \left(\frac{-r_i^{-n}}{1 + \nu} \right) r - \left(\frac{2nr_i^{-2n}}{2n^2 + n(3 + \nu)} \right) r^{1+n} \right\} \quad (۸۰-۲)$$

و حل کلی مسئله نیز به شکل زیر خواهد بود:

$$u_r = C_1 r^{\frac{1}{2}(-n + \sqrt{n^2 - 4n\nu + 4})} + C_2 r^{\frac{1}{2}(-n - \sqrt{n^2 - 4n\nu + 4})} + \frac{(\nu^2 - 1)\rho_i \omega^2 r^3}{(8 + (3 + \nu)n)E_i} +$$

$$\frac{(T_o - T_i)(1 + \nu)\alpha_i}{(r_o^{-n} - r_i^{-n})} \left\{ \left(\frac{-r_i^{-n}}{1 + \nu} \right) r - \left(\frac{2nr_i^{-2n}}{2n^2 + n(3 + \nu)} \right) r^{1+n} \right\} \quad (۸۱-۲)$$

معادله ی فوق دارای دو ثابت مجهول می باشد بنابراین دو شرط مرزی مورد نیاز است.

۲ - ۵ - ۴ اعمال شرایط مرزی

برای ساده سازی عبارات، معادله ی جابجایی به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$u_r = C_1 r^{\lambda_1} + C_2 r^{\lambda_2} + D_1 r^3 + D_2 r^{1+n} + D_3 r \quad (۸۲-۲)$$

بدین ترتیب مشتق آن برابر است با:

$$\frac{du_r}{dr} = C_1 \lambda_1 r^{\lambda_1 - 1} + C_2 \lambda_2 r^{\lambda_2 - 1} + 3D_1 r^2 + (1 + n)D_2 r^n + D_3 \quad (۸۳-۲)$$

با توجه به شکل (۱-۲) دیسک تحت فشار داخلی قرار دارد. شرایط مرزی مطابق رابطه ی (۳۹-۲) برحسب

تنش ها می باشد. بنابراین با توجه به معادله (۱۷-۲) و روابط فوق تنش شعاعی به شکل زیر تبدیل می شود:

$$\sigma_r = \frac{E_i r^n}{(1 - \nu^2) r_i^n} \left((\lambda_1 + \nu)C_1 r^{\lambda_1 - 1} + (\lambda_2 + \nu)C_2 r^{\lambda_2 - 1} + (3 + \nu)D_1 r^2 + D_2 (1 + \nu + n)r^n \right)$$

$$\left((1 + \nu)D_3 - \left(\frac{(T_o - T_i)(1 + \nu)\alpha_0 r^n}{(r_o^{-n} - r_i^{-n})r_i^n} \right) (r^{-n} - r_i^{-n}) \right) \quad (۸۴-۲)$$

بنابراین شرایط مرزی به شکل زیر تبدیل می شود:

$$\sigma_r \Big|_{r=r_i} = \frac{E_i}{(1-\nu^2)} \left((\lambda_1 + \nu)C_1 r_i^{\lambda_1 - 1} + (\lambda_2 + \nu)C_2 r_i^{\lambda_2 - 1} + (3 + \nu)D_1 r_i^2 \right) = -P$$

$$\sigma_r \Big|_{r=r_o} = \frac{E_i r_o^n}{(1-\nu^2) r_i^n} \left((\lambda_1 + \nu)C_1 r_o^{\lambda_1 - 1} + (\lambda_2 + \nu)C_2 r_o^{\lambda_2 - 1} + (3 + \nu)D_1 r_o^2 \right. \\ \left. + D_2(1 + \nu + n)r_o^n + (1 + \nu)D_3 - \alpha_0(1 + \nu) \left(\frac{r_o}{r_i} \right)^n (T_o - T_i) \right) = 0 \quad (۸۵-۲)$$

که به صورت دستگاه معادلات زیر خواهد بود:

$$\begin{bmatrix} (\lambda_1 + \nu)r_i^{\lambda_1 - 1} & (\lambda_2 + \nu)r_i^{\lambda_2 - 1} \\ (\lambda_1 + \nu)r_o^{\lambda_1 - 1} & (\lambda_2 + \nu)r_o^{\lambda_2 - 1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{P(1-\nu^2)}{E_i} + (3 + \nu)D_1 r_i^2 + D_2(1 + n + \nu)r_i^n - (1 + \nu)D_3 \\ (3 + \nu)D_1 r_o^2 + D_2(1 + n + \nu)r_o^n - \alpha_0 \left(\frac{r_o}{r_i} \right)^n (1 + \nu)(T_o - T_i) - (1 + \nu)D_3 \end{Bmatrix} \quad (۸۶-۲)$$

با حل دستگاه معادلات خطی C_1 و C_2 به شکل زیر بدست می آیند:

$$C_1 = \frac{r_o r_i}{(\lambda_1 + \nu)(r_o^{\lambda_2} r_i^{\lambda_1} - r_o^{\lambda_1} r_i^{\lambda_2})} \times$$

$$\begin{Bmatrix} r_i^{\lambda_2 - 1} \left[(3 + \nu)D_1 r_o^2 + D_2(1 + \nu + n)r_o^n - \alpha_0(1 + \nu) \left(\frac{r_o}{r_i} \right)^n (T_o - T_i) + (1 + \nu)D_3 \right] \\ -r_o^{\lambda_2 - 1} \left[\frac{P(1-\nu^2)}{E_i} + (3 + \nu)D_1 r_i^2 + D_2(1 + \nu + n)r_i^n + (1 + \nu)D_3 \right] \end{Bmatrix} \quad (۸۷-۲)$$

$$C_2 = \frac{r_o r_i}{(\lambda_2 + \nu)(r_o^{\lambda_2} r_i^{\lambda_1} - r_o^{\lambda_1} r_i^{\lambda_2})} \times$$

$$\begin{Bmatrix} r_o^{\lambda_1 - 1} \left[\frac{P(1-\nu^2)}{E_i} + (3 + \nu)D_1 r_i^2 + D_2(1 + \nu + n)r_i^n + (1 + \nu)D_3 \right] \\ -r_i^{\lambda_1 - 1} \left[(3 + \nu)D_1 r_o^2 + D_2(1 + \nu + n)r_o^n - \alpha_0(1 + \nu) \left(\frac{r_o}{r_i} \right)^n (T_o - T_i) + (1 + \nu)D_3 \right] \end{Bmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-n \pm \sqrt{n^2 - 4n\nu + 4} \right)$$

$$D_1 = \frac{(\nu^2 - 1)\rho_i \omega^2}{(8 + (3 + \nu)n)E_i}$$

$$D_2 = \frac{(T_o - T_i)(1 + \nu)\alpha_i \left(\frac{-2nr_i^{-2n}}{2n^2 + n(3 + \nu)} \right)}{(r_o^{-n} - r_i^{-n})}$$

$$D_3 = \frac{(T_o - T_i)(1 + \nu)\alpha_i \left(\frac{-r_i^{-n}}{1 + \nu} \right)}{(r_o^{-n} - r_i^{-n})}$$
(۸۸-۲)

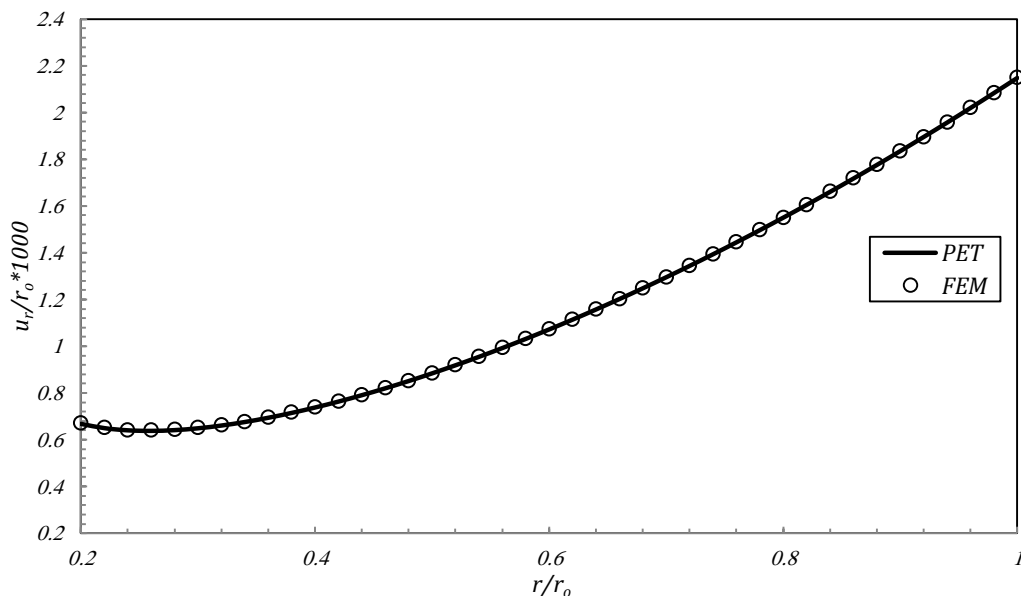
با جایگذاری روابط فوق در (۸۲-۲) معادله‌ی جابجایی محاسبه می‌شود.

۲-۶ بررسی نتایج حل دیسک ناهمگن با ضخامت ثابت

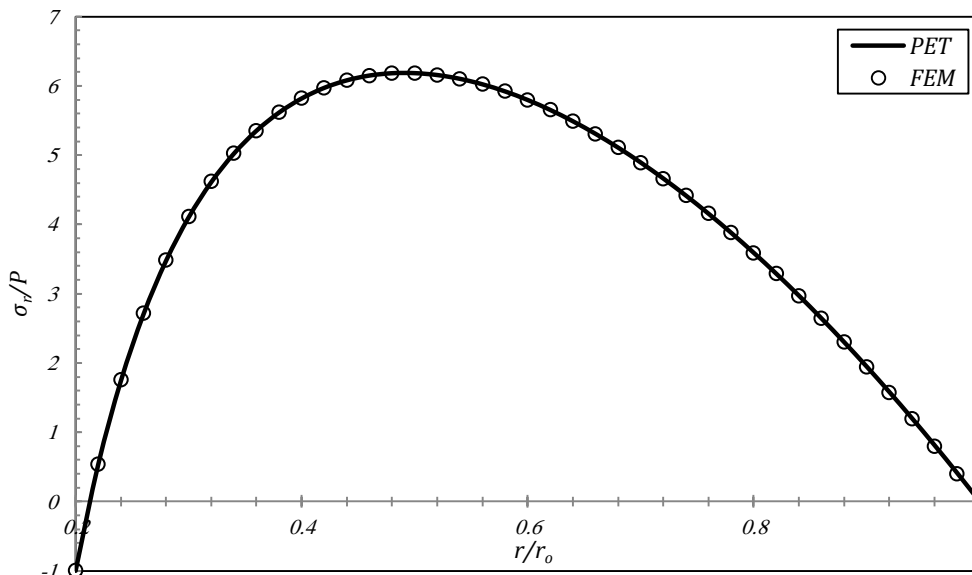
در این بخش با توجه به حل پارامتریک ارائه شده برای دیسک ناهمگن *FG* با ضخامت ثابت و جدول‌های ۱-۱ تا

۱-۳ به بررسی نتایج حاصل از تحلیل عددی پرداخته می‌شود.

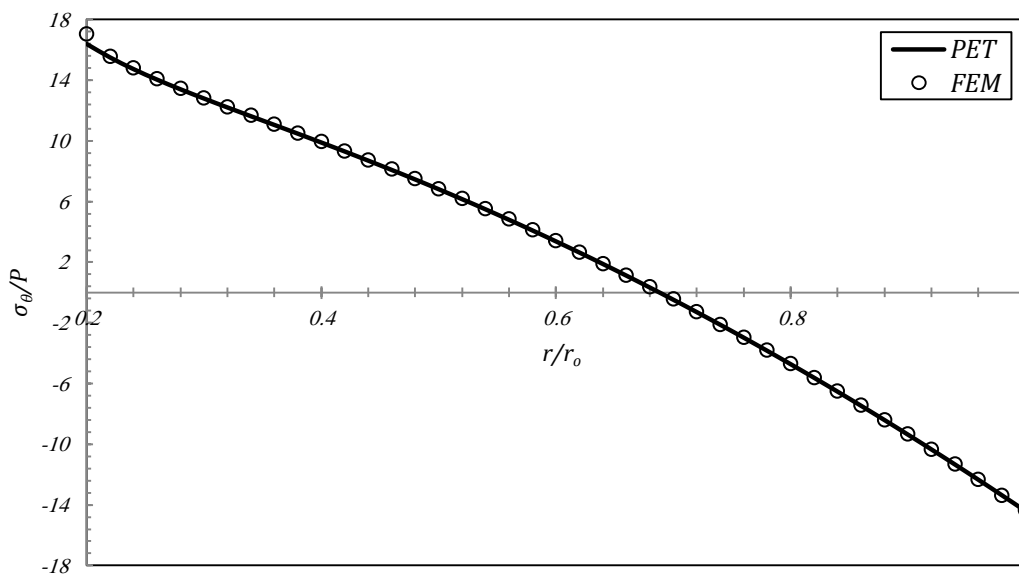
۲-۶-۱ مقایسه نتایج با حل عددی



شکل ۲-۸: مقایسه‌ی نتایج جابجایی شعاعی حل تحلیلی با حل عددی ($n=0.75$)



شکل ۹-۲: مقایسه ی توزیع تنش شعاعی در حل تحلیلی با حل عددی ($n=0.75$)



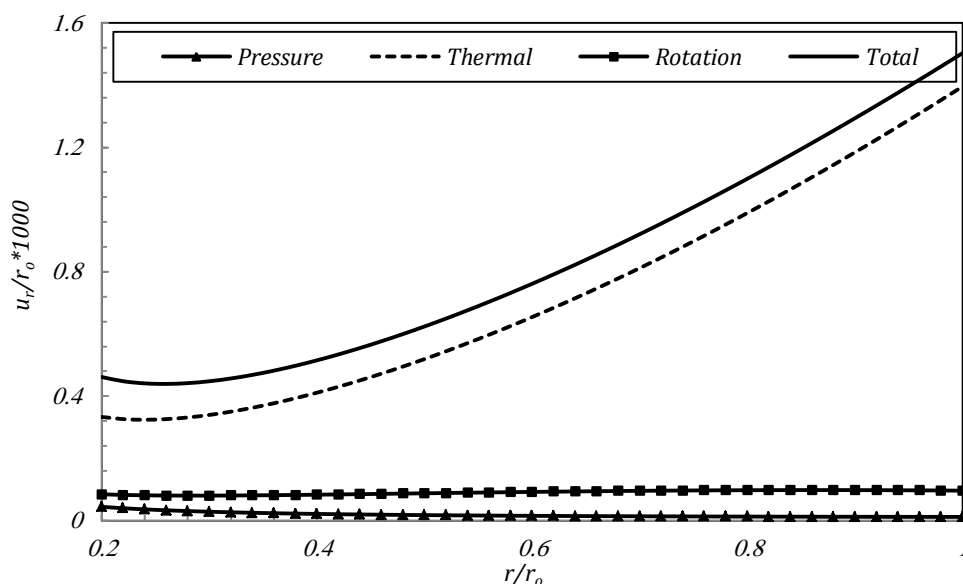
شکل ۱۰-۲: مقایسه ی توزیع تنش محیطی در حل تحلیلی با حل عددی ($n=0.75$)

شکل های ارائه شده، به مقایسه حل عددی و حل تحلیلی می پردازد. لازم به ذکر است که در نرم افزارهای اجزای محدود موجود هنوز بخشی برای مواد FG تعریف نشده است برای مدل سازی ماده FG می بایست دیسک را به حلقه هایی با خواص ثابت تبدیل کنیم و گره ها را در مرزها بر یکدیگر منطبق کنیم. با توجه به اینکه همواره

برای بررسی بهتر می بایست حالتی تحلیل شود که امکان خطا بیشتر باشد بنابراین دیسک با ثابت ناهمگنی 0.75 که بیشترین خطا را در مدلسازی خواهد داشت، انتخاب شده است.

۲-۶-۲ بررسی تاثیر هر بار گذاری در توزیع مشخصه های مکانیکی

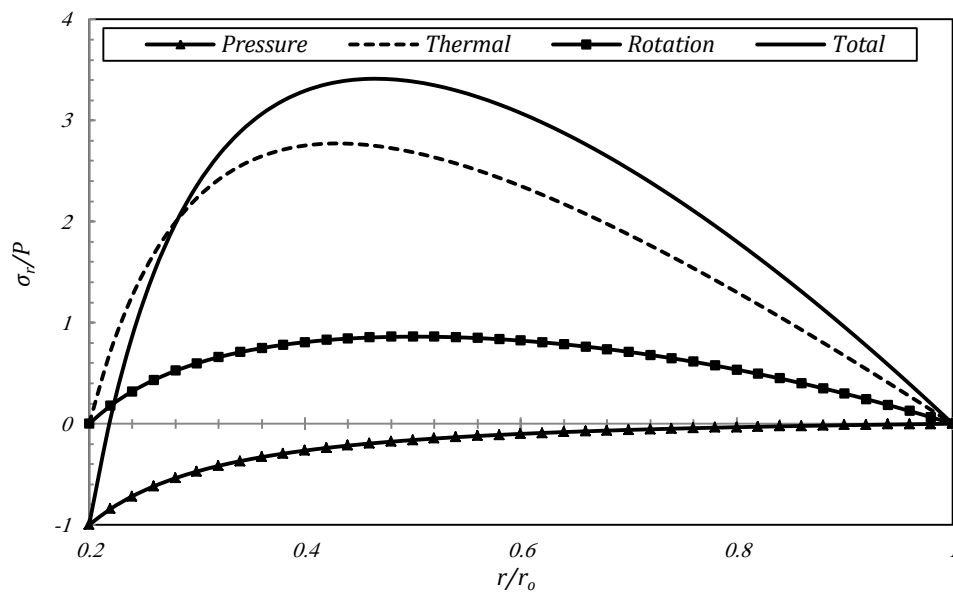
با مراجعه به روابط (۲-۸۲)، (۲-۸۷) و (۲-۸۸) مشاهده می شود که هر یک از بارگذاری ها به صورت مستقل تاثیر در جابجایی شعاعی از آن دارد. بنابراین می توان روابط را برای هر یک از بارگذاری ها بصورت جداگانه نوشته و از اصل جمع آثار برای آن ها استفاده کرد. در این بخش برای بررسی تاثیر هر یک از بارگذاری های در نتایج بدست آمده ماده ی ناهمگن با $n=0.5$ انتخاب می شود. شکل ۲-۱۱ تغییرات جابجایی شعاعی را در راستای شعاع نشان می دهد:



شکل ۲-۱۱: نحوه ی توزیع جابجایی شعاعی در بارگذاری های مختلف ($n=0.5$)

در شکل ۲-۱۱ مشاهده می شود مشابه دیسک همگن در توزیع جابجایی شعاعی، گرادیان حرارتی بر بارگذاری های دیگر غلبه دارد. در بارگذاری ناشی از گرادیان حرارتی جابجایی شعاعی با افزایش شعاع رابطه ی مستقیم دارد لذا جابجایی شعاع نیز صعودی اکید می باشد. در بارگذاری ناشی از دوران در بیشتر نقاط نحوه ی تغییرات جابجایی نزولی می باشد ولی در نواحی نزدیک به سطح داخلی و خارجی دیسک رفتار جابجایی شعاعی

دیسک چرخان نزولی خواهد بود که به دلیل کاهش نیروی گریز از مرکز در این نواحی با توجه به کاهش جرم لایه‌های مجاور می‌باشد. در جابجایی ناشی از فشار داخلی، نمودار به صورت نزولی تغییر می‌کند، بطوریکه در لایه‌های داخلی مقدار آن بیشینه است. با توجه به اصل جمع آثار تغییرات جابجایی‌های شعاعی ناشی از بارگذاریها به صورت صعودی می‌باشد، فقط در محدوده‌ی بسیار کوچکی از دیسک گرادیان جابجایی شعاعی ناشی از فشار بر جابجایی کل غلبه دارد و رفتار نزولی می‌باشد. شکل ۲-۱۲ توزیع تنش نرمال شعاعی را در راستای شعاع بی بعد نشان می‌دهد:



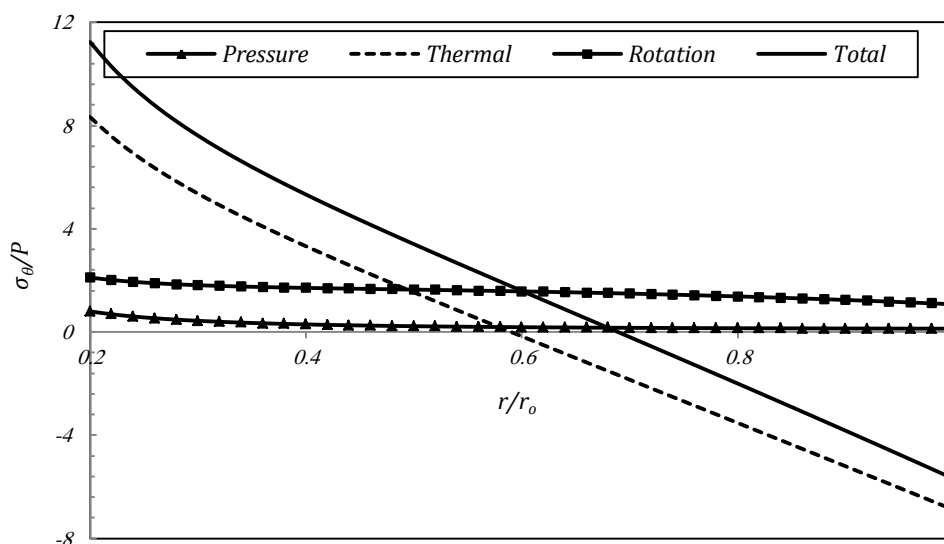
شکل ۲-۱۲: نحوه‌ی توزیع تنش شعاعی در بارگذاریهای مختلف ($n=0.5$)

در شکل ۲-۱۲ مشاهده می‌شود مشابه جابجایی شعاعی، تنش‌های شعاعی ناشی از گرادیان حرارتی و دوران رفتاری مشابه دارد و تمامی لایه‌ها تحت تنش شعاعی کششی ناشی از جابجایی شعاعی می‌باشد. در تنش شعاعی ناشی از فشار داخلی، نحوه‌ی تغییرات قدر مطلق تنش به صورت نزولی می‌باشد به گونه‌ای که تاثیر فشار داخلی در لایه‌های داخلی بیشتر و با افزایش شعاع کمتر می‌شود.

با استفاده از جمع آثار رفتار برآیند نیروها به شکلی است که لایه‌های داخلی تحت فشار و لایه‌های خارجی تحت کشش قرار دارد و ناحیه‌ای که لایه‌ها تحت فشار می‌باشد نسبت به لایه‌هایی که تحت کشش هستند

بسیار کوچک است (حدود ۱/۵ درصد). با قرار دادن نمودار جابجایی شعاعی و تنش شعاعی کنار یکدیگر ملاحظه می‌شود ناحیه‌ای که تحت فشار می‌باشد گرادیان جابجایی شعاعی نیز نزولی می‌باشد. بیشترین مقدار تنش فشاری مطابق انتظار در لایه داخلی و برابر فشار داخلی می‌باشد. بیشترین مقدار تنش کششی در لایه میانی و در $r/r_o=0.46$ رخ می‌دهد.

شکل ۲-۱۳ توزیع تنش نرمال محیطی را در راستای شعاع بی بعد نشان می‌دهد:

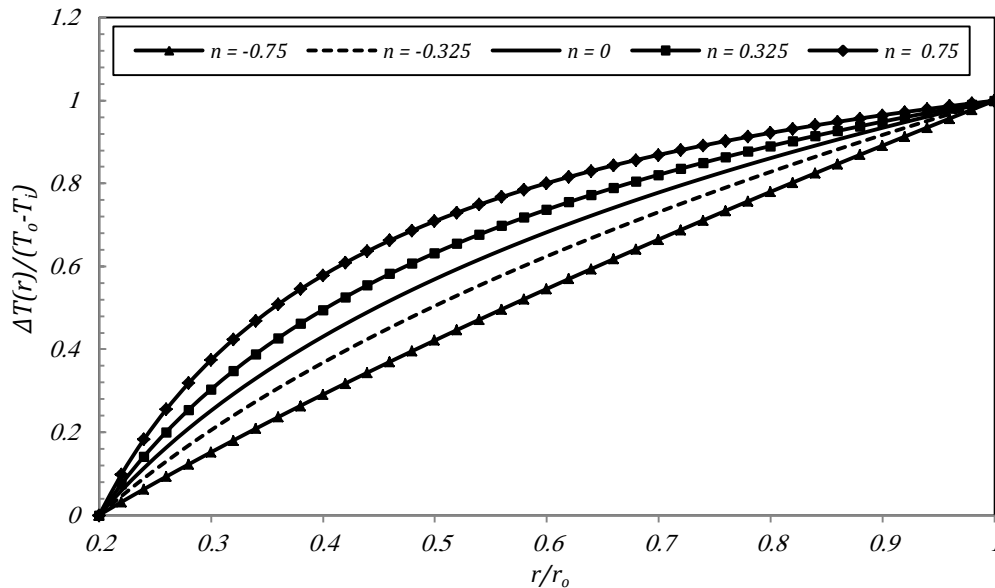


شکل ۲-۱۳: نحوه ی توزیع تنش محیطی در بارگذاریهای مختلف ($n=0.5$)

شکل ۲-۱۳ نشان می‌دهد مشابه دیسک همگن تنش محیطی ناشی از گرادیان حرارتی، تنش محیطی غالب می‌باشد و رفتار تنشهای محیطی تمامی بارگذاری های تحت تاثیر این بارگذاری می‌باشد. در بارگذاری ناشی از گرادیان حرارتی لایه های داخلی تحت کشش و لایه های بیرونی تحت فشار قرار دارد و محل تغییر نوع تنش از کششی به فشاری در $r/r_o=0.6$ می‌باشد.

۲-۶-۳ بررسی تاثیر توزیع خواص در توزیع مشخصه های مکانیکی

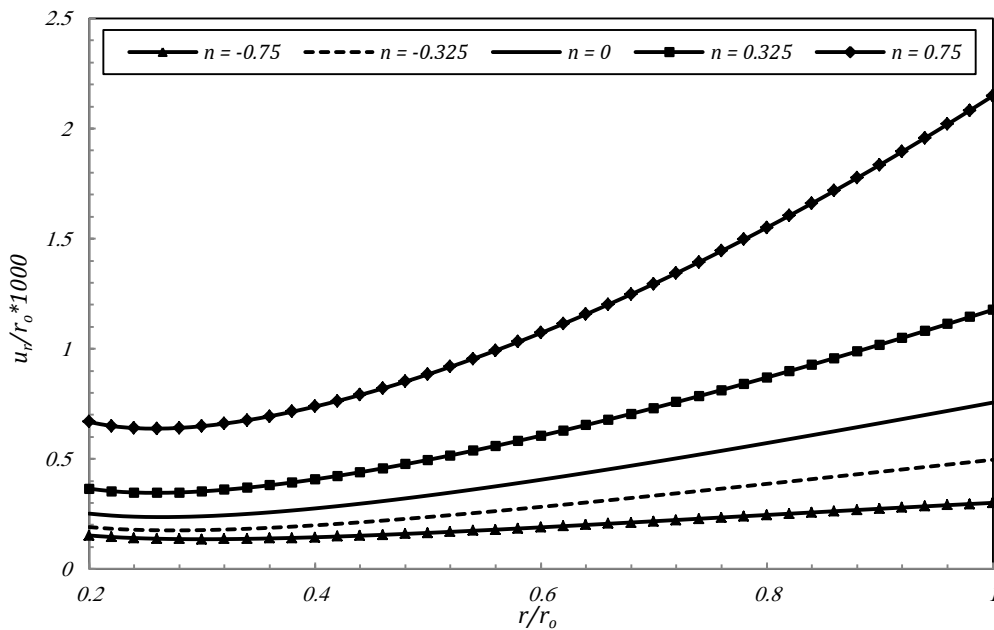
در قسمت های قبل در یک ماده ی خاص نتایج مورد بررسی قرار گرفت در این قسمت تحت حضور تمامی بارگذاریهای اعمال شده در این پژوهش مورد بررسی قرار می گیرد. نحوه تغییرات خواص در ماده FG همان طور که در حل پارامتریک بدان اشاره شد در تمامی مولفه ها نظیر مدول الاستیسیته، ضریب هدایت، چگالی و ضریب انبساط می باشد بنابراین تمامی نتایج موثر از نحوه ی تغییرات می باشد که حل ارائه شده موید این مطلب می باشد. برای مقایسه بهتر نتایج، ابتدا توزیع دما که از حل معادله ی انتقال حرارت بدست می آید بررسی خواهد شد. شکل ۲-۱۴ توزیع نرمال دما را به ازای ثابت های ناهمگنی مختلف نشان می دهد:



شکل ۲-۱۴: توزیع دما در دیسک ناهمگن با ضخامت ثابت

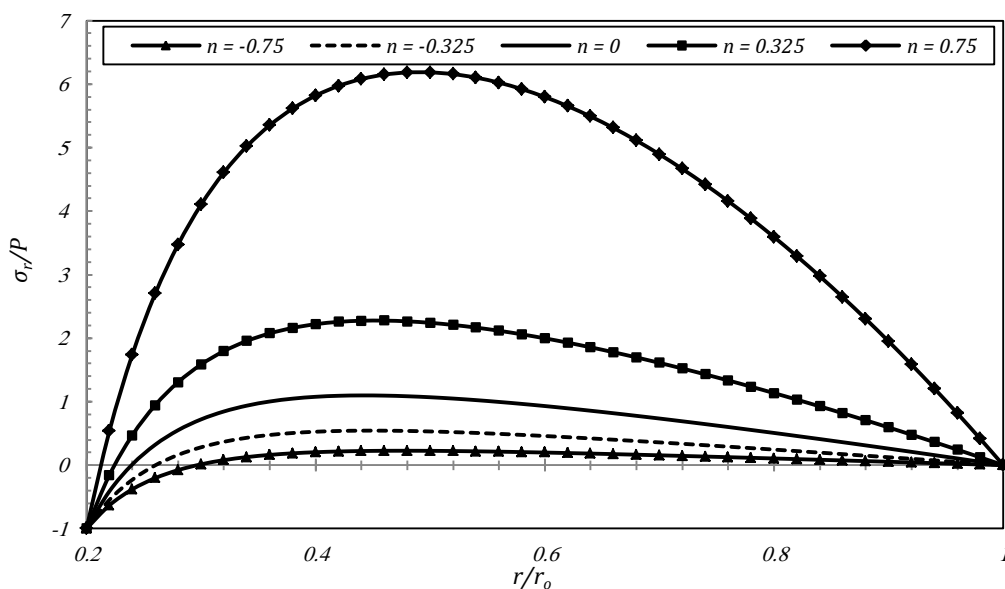
با توجه به این موضوع که با افزایش n ضریب هدایت در لایه های خارجی افزایش می یابد، بنابراین ملاحظه می شود گرادیان حرارتی در لایه های داخلی بیشتر است که این موضوع به علت این است که با افزایش ضریب هدایت بین لایه های بیرونی شار حرارتی بیشتر است بنابراین دمای لایه ها به یکدیگر نزدیکتر است که این موضوع می تواند در توزیع توابع تنش و جابجایی تاثیر مستقیم داشته باشد

شکل ۲-۱۵: توزیع نرمال جابجایی شعاعی را به ازای ثابت های ناهمگنی مختلف نشان می دهد:



شکل ۱۵-۲: توزیع جابجایی شعاعی در دیسک ناهمگن با ضخامت ثابت

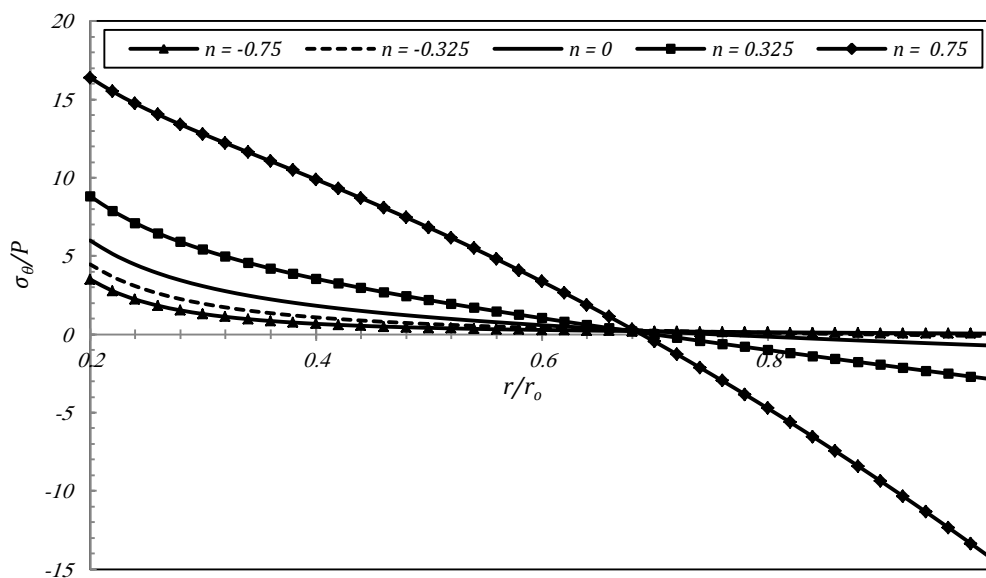
شکل ۱۵-۲ نشان می‌دهد که با افزایش ثابت ناهمگنی مقدار جابجایی شعاعی در تمامی نقاط دیسک افزایش می‌یابد که این موضوع می‌تواند به علت افزایش ضریب انبساط طولی به ازای افزایش ثابت ناهمگنی باشد. شکل ۱۶-۲ توزیع نرمال تنش شعاعی را به ازای ثابت‌های ناهمگنی مختلف را نشان می‌دهد:



شکل ۱۶-۲: توزیع تنش شعاعی در دیسک ناهمگن با ضخامت ثابت

در شکل ۱۶-۲ مشاهده می شود نحوه ی تغییرات تنش شعاعی به ازای تمامی مقادیر n ثابت است ولی مقدار بیشینه آن با توجه به ثابت ناهمگنی تغییر می کند. در n های منفی تنش شعاعی بیشینه کمتر و در n های مثبت بیشتر از مقدار آن در ماده ی همگن می باشد. همچنین در n های منفی قدر مطلق بیشینه تنش در شعاع داخلی دیسک می باشد در حالیکه برای دیسک های همگن و ناهمگن با n مثبت قدر مطلق مقدار بیشینه در لایه های میانی دیسک می باشد.

نکته ی قابل توجه دیگر در شکل ۱۶-۲ اینست که در n های منفی اثر فشار بر گرادیان حرارتی غلبه می کند و باعث می شود تنش های حرارتی بیشتر آزاد شود که این موضوع سبب بزرگتر شدن ناحیه ی تحت فشار می شود. شکل ۱۷-۲ توزیع نرمال تنش محیطی را به ازای ثابت های ناهمگنی مختلف نشان می دهد:



شکل ۱۷-۲: توزیع تنش محیطی در دیسک ناهمگن با ضخامت ثابت

در تنش محیطی مشابه تنش شعاعی به ازای افزایش n مقدار آن افزایش و به ازای کاهش n مقدار آن کاهش می یابد. بنابراین می توان نتیجه گرفت ماده ی FG با ثابت ناهمگنی منفی قابلیت آزاد سازی تنش های حرارتی بیشتری نسبت به مقادیر مثبت آن خواهد داشت.

۲-۷ جمع بندی

در این بخش ابتدا برای دیسک در حالت کلی به روش ناویر معادلات استخراج شدند، سپس برای دو حالت دیسک همگن و ناهمگن FG با ضخامت ثابت معادلات ساده سازی و مسائل با یک دیسک خاص حل و نتایج آن بررسی شد.

نکته‌ی قابل توجه در استخراج معادلات این بود که حل حرارتی دیسک همگن و ناهمگن با یکدیگر متفاوت است و با قرار دادن n برابر صفر حل همگن از حل ناهمگن استخراج نمی شود. همچنین معادلات نشان داد که اصل جمع آثار برای بارگذاریهای مختلف در دیسکهای همگن و ناهمگن با ضخامت ثابت صادق می باشد. جدول ۱-۲ به اختصار نتایج جابجایی شعاعی بدست آمده در این بخش را نشان می دهد:

جدول ۱-۲: حل پارامتریک دیسک ها با ضخامت ثابت

$u_r = C_1 r + \frac{C_2}{r} + \left(\frac{(\nu^2 - 1) \rho_0 \omega^2}{8E_0} \right) r^3 + \left(\frac{\alpha_0 (1 + \nu) (T_o - T_i)}{2(\ln(r_o) - \ln(r_i))} \right) r \ln(r)$		دیسک همگن
$C_1 = \frac{(r_o r_i)^2}{(1 + \nu)(r_o^2 - r_i^2)} \times \left(\frac{\alpha_0 (1 + \nu)^2 (T_o - T_i)}{2(\ln(r_o) - \ln(r_i))} \left(\frac{\ln(r_o)}{r_i^2} - \frac{\ln(r_i)}{r_o^2} \right) + \frac{\alpha_0 (1 + \nu) (T_o - T_i)}{2(\ln(r_o) - \ln(r_i))} \left(\frac{1}{r_i^2} - \frac{1}{r_o^2} \right) - \frac{\alpha_0 (1 + \nu) (T_o - T_i)}{r_i^2} \right)$	$C_2 = \frac{(r_o r_i)^2}{(1 - \nu)(r_o^2 - r_i^2)} \times \left\{ \frac{\alpha_0 (1 + \nu)^2 (T_o - T_i)}{2} + \alpha_0 (1 + \nu) (T_o - T_i) \right\}$	گرادیان حرارتی
$C_1 = -\frac{P(1 - \nu^2)(r_o r_i)^2}{E_0 r_o^2 (1 + \nu)(r_o^2 - r_i^2)}$	$C_2 = \frac{-P(1 - \nu^2)(r_o r_i)^2}{E_0 (1 - \nu)(r_o^2 - r_i^2)}$	فشار داخلی
$C_1 = -\frac{(1 - \nu) \rho_0 \omega^2 (r_o^4 - r_i^4)}{8E_0 (r_o^2 - r_i^2)}$	$C_2 = \frac{(1 + \nu)(3 + \nu) \rho_0 \omega^2 (r_o r_i)^2}{8E_0}$	دوران
$u_r = C_1 r^{\frac{1}{2}(-n + \sqrt{n^2 - 4n\nu + 4})} + C_2 r^{\frac{1}{2}(-n - \sqrt{n^2 - 4n\nu + 4})} + \left(\frac{(\nu^2 - 1) \rho_i \omega^2}{(8 + (3 + \nu)n) E_i} \right) r^3 - \left(\frac{-2nr_i^{-2n} (1 + \nu) \alpha_i (T_o - T_i)}{(2n^2 + n(3 + \nu))(r_o^{-n} - r_i^{-n})} \right) r^{1+n} - \left(\frac{(T_o - T_i)(1 + \nu) \alpha_i r_i^{-n}}{(1 + \nu)(r_o^{-n} - r_i^{-n})} \right) r$		دیسک ناهمگن
$C_1 = \frac{r_o r_i}{(\lambda_1 + \nu)(r_o^{\lambda_2} r_i^{\lambda_1} - r_o^{\lambda_1} r_i^{\lambda_2})} \times \left[\begin{array}{l} r_i^{\lambda_2 - 1} \left[\frac{(T_o - T_i)(1 + \nu) \alpha_i}{(r_o^{-n} - r_i^{-n})} \left(\frac{-2nr_i^{-2n}}{2n^2 + n(3 + \nu)} \right) (1 + \nu + n) r_o^n \right. \\ \left. - \alpha_0 (1 + \nu) \left(\frac{r_o}{r_i} \right)^n (T_o - T_i) + (1 + \nu) \frac{(T_o - T_i)(1 + \nu) \alpha_i}{(r_o^{-n} - r_i^{-n})} \left(\frac{-r_i^{-n}}{1 + \nu} \right) \right] \\ - r_o^{\lambda_2 - 1} \left[\frac{(T_o - T_i)(1 + \nu) \alpha_i}{(r_o^{-n} - r_i^{-n})} \left(\frac{-2nr_i^{-2n}}{2n^2 + n(3 + \nu)} \right) (1 + \nu + n) r_i^n \right. \\ \left. + (1 + \nu) \frac{(T_o - T_i)(1 + \nu) \alpha_i}{(r_o^{-n} - r_i^{-n})} \left(\frac{-r_i^{-n}}{1 + \nu} \right) \right] \end{array} \right]$	$C_2 = \frac{r_o r_i}{(\lambda_2 + \nu)(r_o^{\lambda_2} r_i^{\lambda_1} - r_o^{\lambda_1} r_i^{\lambda_2})} \times \left[\begin{array}{l} r_o^{\lambda_1 - 1} \left[\frac{(T_o - T_i)(1 + \nu) \alpha_i}{(r_o^{-n} - r_i^{-n})} \left(\frac{-2nr_i^{-2n}}{2n^2 + n(3 + \nu)} \right) (1 + \nu + n) r_i^n \right. \\ \left. + (1 + \nu) \frac{(T_o - T_i)(1 + \nu) \alpha_i}{(r_o^{-n} - r_i^{-n})} \left(\frac{-r_i^{-n}}{1 + \nu} \right) \right] \\ - r_i^{\lambda_1 - 1} \left[\frac{(T_o - T_i)(1 + \nu) \alpha_i}{(r_o^{-n} - r_i^{-n})} \left(\frac{-2nr_i^{-2n}}{2n^2 + n(3 + \nu)} \right) (1 + \nu + n) r_o^n \right. \\ \left. - \alpha_0 (1 + \nu) \left(\frac{r_o}{r_i} \right)^n (T_o - T_i) + (1 + \nu) \frac{(T_o - T_i)(1 + \nu) \alpha_i}{(r_o^{-n} - r_i^{-n})} \left(\frac{-r_i^{-n}}{1 + \nu} \right) \right] \end{array} \right]$	گرادیان حرارتی
$C_1 = -\frac{Pr_o r_i (1 - \nu^2) r_o^{\lambda_2 - 1}}{(\lambda_1 + \nu) E_i (r_o^{\lambda_2} r_i^{\lambda_1} - r_o^{\lambda_1} r_i^{\lambda_2})}$	$C_2 = \frac{Pr_o r_i (1 - \nu^2) r_o^{\lambda_1 - 1}}{(\lambda_2 + \nu) E_i (r_o^{\lambda_2} r_i^{\lambda_1} - r_o^{\lambda_1} r_i^{\lambda_2})}$	فشار داخلی
$C_1 = \frac{r_o r_i (\nu^2 - 1) \rho_i \omega^2 (3 + \nu) (r_o^2 r_i^{\lambda_2 - 1} - r_o^{\lambda_2 - 1} r_i^2)}{(\lambda_1 + \nu) (8 + (3 + \nu)n) E_i (r_o^{\lambda_2} r_i^{\lambda_1} - r_o^{\lambda_1} r_i^{\lambda_2})}$	$C_2 = \frac{r_o r_i (\nu^2 - 1) \rho_i \omega^2 (3 + \nu) (r_o^{\lambda_1 - 1} r_i^2 - r_i^{\lambda_1 - 1} r_o^2)}{(\lambda_2 + \nu) (8 + (3 + \nu)n) E_i (r_o^{\lambda_2} r_i^{\lambda_1} - r_o^{\lambda_1} r_i^{\lambda_2})}$	دوران

جدول ۲-۲ نتایج تحلیل‌های انجام شده به تفکیک بارگذاری را نشان می‌دهد.

جدول ۲-۲: نتایج حاصل از تحلیل در دیسک با ضخامت ثابت

تنش معادل بیشینه		جابجایی بیشینه		نوع بارگذاری	
مقدار [MPa]	شعاع [mm]	مقدار [mm]	شعاع [mm]		
۳۴/۲	۲۰	۰/۰۲۱	۱۰۰	گرادیان حرارتی	$n = -0.75$
۹۰/۸	۲۰	۰/۰۰۳	۱۰۰	فشار داخلی	
۴۲/۴	۲۰	۰/۰۰۶	۹۲	دوران	
۱۶۴/۲	۲۰	۰/۰۳۰	۱۰۰	مجموع	
۱۳۱/۶	۲۰	۰/۰۶۶	۱۰۰	گرادیان حرارتی	$n = 0$
۷۲/۲	۲۰	۰/۰۰۱۶	۱۰۰	فشار داخلی	
۶۴/۹	۲۰	۰/۰۰۸	۸۸	دوران	
۲۶۲/۱	۲۰	۰/۰۷۵	۱۰۰	مجموع	
۵۳۳/۵	۲۰	۰/۲۰۳	۱۰۰	گرادیان حرارتی	$n = 0.75$
۵۸/۴	۲۰	۰/۰۰۱	۱۰۰	فشار داخلی	
۹۵/۴	۲۰	۰/۰۱۱	۸۴	دوران	
۶۷۶/۷	۲۰	۰/۲۱۵	۱۰۰	مجموع	

در جدول ۲-۲ تنش معادل بیشینه با استفاده از تئوری فون میزز و جابجایی بیشینه در دیسک‌های با ضخامت ثابت آورده شده است همچنین محل واقع شدن مقدار بیشینه به تفکیک بارگذارها و ثوابت ناهمگنی آورده شده است.

در بارگذاری حرارتی همواره مقدار بیشینه تنش معادل در شعاع داخلی و مقدار بیشینه جابجایی در شعاع خارجی مشاهده می شود. همچنین با افزایش n مقدار تنش معادل و جابجایی شعاعی افزایش می یابد. بنابراین برای آزاد سازی تنش های حرارتی توصیه می شود از دیسکهای FG با ثابت منفی استفاده شود. در دیسک تحت فشار داخلی مشابه حالت قبل همواره مقدار بیشینه تنش معادل در شعاع داخلی و مقدار بیشینه جابجایی در شعاع خارجی می باشد، ولی بر خلاف دیسک تحت گرادیان حرارتی با افزایش n مقدار تنش معادل و جابجایی شعاعی کاهش می یابد. این موضوع با توجه به این نکته است که در n های مثبت خواص مکانیکی در لایه‌های میانی دیسک بیشتر شده است. در دیسک چرخان مقدار بیشینه تنش معادل همواره در شعاع داخلی و مقدار بیشینه جابجایی با توجه به مقدار n در نقاطی نزدیک سطح خارجی اتفاق می افتد که محل آن با افزایش n از سطح خارجی دور می شود. همچنین در دیسکهای چرخان رابطه‌ی n با مقادیر تنش معادل و جابجایی شعاعی به صورت مستقیم می باشد که به دلیل افزایش نیروی گریز از مرکز است که رابطه‌ی مستقیم با دانسیته دارد.

با جمع بندی مطالب فوق می توان نتیجه گرفت که در دیسک های چرخان تحت بارگذاری حرارتی بدون فشار داخلی مانند دیسک‌های توربین گاز بهتر است از مواد FG با n های منفی استفاده شود ولی برای دیسک های چرخان تحت گرادیان حرارتی و فشار داخلی نظیر فلاپویلها و دیسک های جازنی شده می بایست با در نظر گرفتن پارامترهای دیگر ماده FG مناسب انتخاب شود.

نقطه‌ی مشترک تمامی دیسکهای تحلیل شده در این بخش اینست که تنش بیشینه همواره در شعاع داخلی دیسک رخ می دهد. در این بخش سعی شد با تغییر جنس تنش را در این ناحیه کاهش داد که نتایج آن ارائه

گردید. راه دیگر برای کاهش تنش در شعاع داخلی افزایش ضخامت در این ناحیه است که در بخش آینده به بررسی این موضوع پرداخته می‌شود.

فصل سوم:

تحلیل ترموالاستیک دیسک همگن چرخان با ضخامت متغیر

۳- ۱ مقدمه

در فصل گذشته دیسک‌های با ضخامت ثابت بررسی شد با توجه به اینکه تنش همواره در شعاع داخلی بیشینه بود پیشنهاد شد که در شعاع داخلی ضخامت دیسک افزایش یابد. افزایش ضخامت در شعاع داخلی می‌بایست به گونه‌ای باشد که سبب ایجاد تمرکز تنش نشود بنابراین می‌بایست پروفیلی برای تغییرات ضخامت طراحی شود. دیسک‌های موجود در صنعت دارای پروفیل‌های متفاوت در راستای شعاع می‌باشد. شکل ۱-۳ دیسک توربین گاز که دارای پروفیل ضخامت متغیر در راستای شعاع می‌باشد را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که در شعاع‌های داخلی ضخامت بیشتری برای دیسک انتخاب شده است:



شکل ۱-۳: دیسک توربین گاز واحدهای نیروگاه گازی ۷۹۴ ساخت شرکت آنسالدور

دیسک‌های توربین گاز تحت گرادیان حرارتی بسیار زیاد قرار داند و عموماً با سرعت بین ۳۰۰۰ تا ۵۴۰۰ دور در دقیقه می‌چرخند. نمونه‌ی دیگر از دیسک‌ها با ضخامت متغیر چرخ کورتیس در توربین‌های بخار می‌باشد که این دیسک عموماً با سرعت ۳۰۰۰ دور در دقیقه می‌چرخند و تحت گرادیان حرارتی کمتری نسبت به دیسک‌های توربین گاز قرار دارند ولی بر خلاف دیسک‌های توربین گاز بر روی شفت جازنی می‌شوند. بنابراین علاوه بر دوران و گرادیان حرارتی تحت فشار داخلی قرار دارد. شکل ۲-۳ نمونه‌ای از چرخ کورتیس را در توربین بخار نمایش می‌دهد:



شکل ۳-۲: چرخ کورتیس در توربین بخار

از این رو برای دیسک با ضخامت متغیر می بایست تابعی برای پروفیل آن ها در راستای شعاع تعیین نموده که بتوان حالات مختلف آن را مورد بررسی قرار داد. این پروفیل می بایست دامنه وسیعی از پروفیل ها را با پارامترهای خود کنترل نماید. هم چنین از توابع استاندارد استفاده شود که معادلات دیفرانسیل حاکم را پیچیده نکند. در این بخش سه نمونه از پروفیل های موجود در مقاله ها مورد بررسی قرار می گیرد که این سه دسته عبارتند از:

۱- پروفیل توانی

۲- پروفیل نمایی

۳- پروفیل سهموی

۳-۱-۱ پروفیل توانی

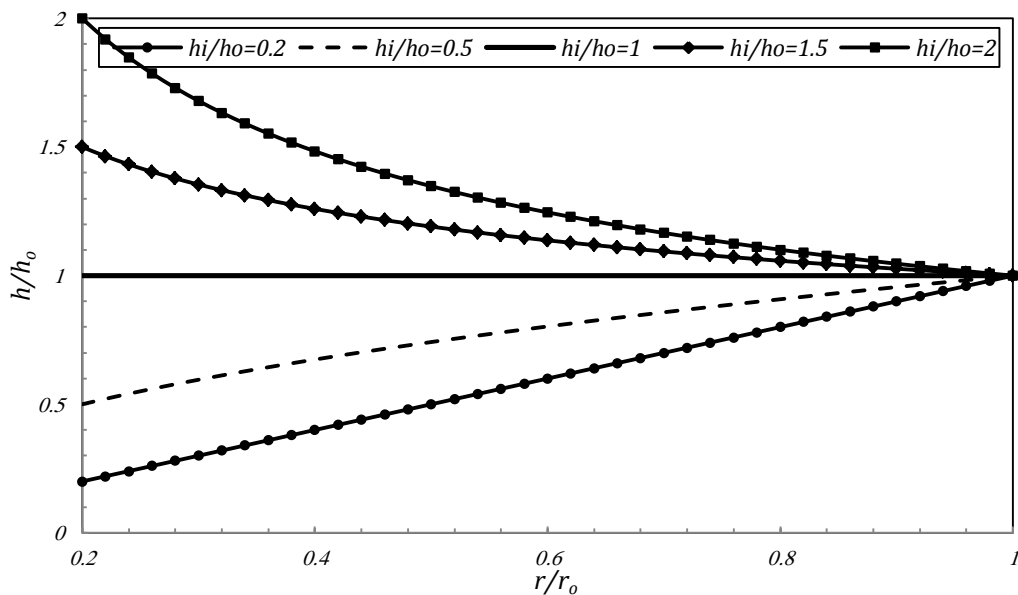
مزیت عمده‌ی این تابع اینست که در مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری بسیار مناسب‌تر از پروفیل‌های دیگر می‌باشد. معادله‌ی پروفیل توانی به شکل زیر می‌باشد:

$$h(r) = h_o \left(\frac{r}{r_o} \right)^m \quad (1-3)$$

که در آن m نحوه‌ی تغییرات تابع ضخامت و h_o ضخامت در لایه‌ی خارجی می‌باشد. بدیهی است که برای مقادیر مثبت m پروفیل سهموی و برای مقادیر منفی m پروفیل هذلولوی خواهد بود. همچنین می‌توان m را با توجه به ضخامت دیسک در شعاع داخلی محاسبه نمود:

$$m = \frac{\ln\left(\frac{h_i}{h_o}\right)}{\ln\left(\frac{r_i}{r_o}\right)} \quad (2-3)$$

که در آن h_i ضخامت در شعاع داخلی، r_o شعاع خارجی و r_i شعاع داخلی می‌باشد. با توجه به اینکه r_i/r_o همواره بین صفر و یک می‌باشد بنابراین لگاریتم طبیعی آن منفی است پس می‌توان نتیجه گرفت که به ازای h_i/h_o کوچکتر از یک m مثبت (پروفیل سهموی) و برای h_i/h_o بزرگتر از یک m منفی (پروفیل هذلولوی) خواهد بود. شکل ۳-۳ تاثیر نسبت‌های ضخامت مختلف را در دیسک مدل سازی شده، بر تابع پروفیل آن نشان می‌دهد:



شکل ۳-۳: نمایش پروفیل ضخامت توانی به ازای نسبت ضخامت‌های مختلف

لازم به ذکر است همانطور که در بخش قبل بیان شد هدف از استفاده از دیسک با ضخامت متغیر کاهش تنش در شعاع داخلی است که یکی از روش های پیشنهادی افزایش ضخامت در شعاع داخلی است. با توجه به این توضیح صرفاً جهت تکمیل مطالعات دیسک های با h_i/h_o کوچکتر از یک نیز تحلیل خواهند شد.

۳-۱-۲ پروفیل نمایی

معادله ی پروفیل نمایی به شکل زیر می باشد:

$$h(r) = h^* e^{mr} \quad (۳-۳)$$

که در آن:

$$h^* = h_o e^{-mr_o} \quad (۴-۳)$$

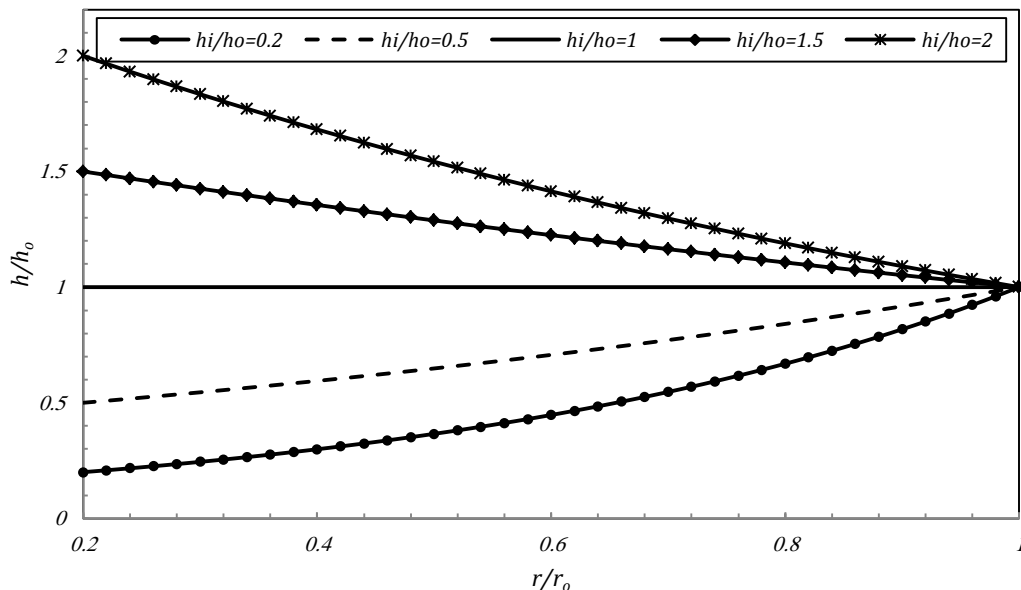
می باشد که h_o ضخامت در لایه ی خارجی می باشد. m نحوه ی تغییرات را در راستای شعاع بررسی می کند که می تواند وابسته به مقادیر ضخامت در خارج و داخل دیسک باشد. با توجه به معلوم بودن ضخامت در لایه ی داخلی m را می توان محاسبه نمود:

$$m = \frac{\ln\left(\frac{h_o}{h_i}\right)}{r_o - r_i} \quad (۵-۳)$$

بنابراین داریم:

$$h(r) = h_o e^{\ln\left(\frac{h_i}{h_o}\right)\left(\frac{r-r_o}{r_i-r_o}\right)} \quad (۶-۳)$$

شکل ۳-۴ نحوه ی تغییرات ضخامت را در تابع پروفیل نمایی نشان می دهد:



شکل ۳-۴: نمایش پروفیل ضخامت نمایی به ازای نسبت ضخامت های مختلف

ملاحظه می شود که در تمامی نسبت های ضخامت، رفتار پروفیل به صورت مقعر می باشد.

۳-۱-۳ پروفیل سهموی

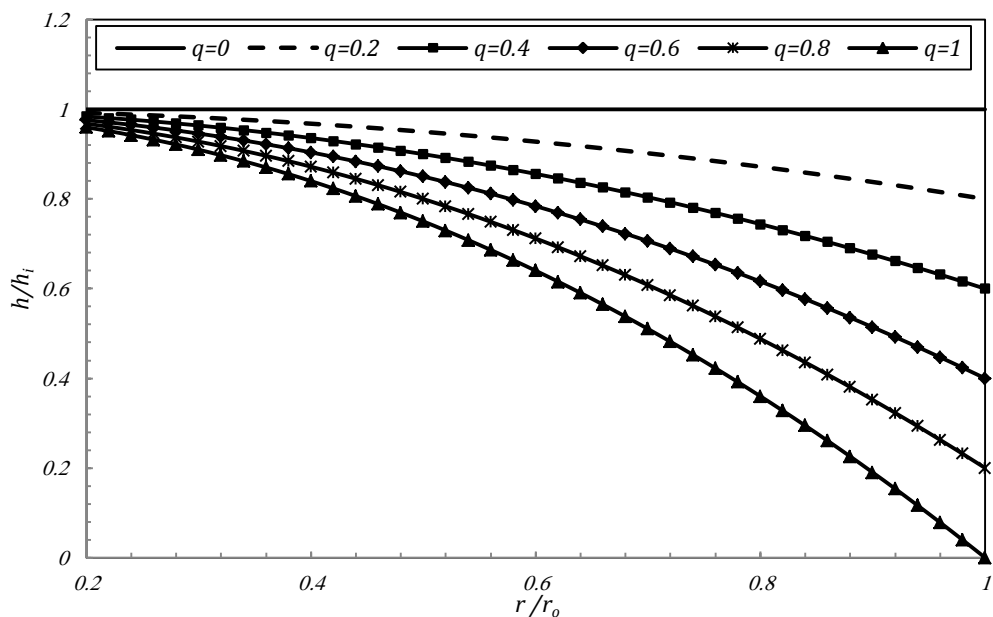
در دو قسمت قبل به بررسی پروفیل های نمایی و توانی پرداخته شد. اگر چه این دو پروفیل مشکلات پیچیده برای حل معادلات ایجاد نمی کند ولی عیب اساسی آن ها این است که برای هر نسبت ضخامت فقط یک منحنی منطبق می کند. در واقع کنترلی بر نحوه تغییرات نخواهند داشت. در مرجع [۲۰] برای رفع این مشکل پروفیلی ارائه شده است که به روش نیمه تحلیلی دیسک FG حل شده است. معادله ی این پروفیل که همواره پروفیل سهموی برای دیسک ارائه می دهد، به شکل زیر می باشد:

$$h(r) = h^* \left(1 - q \left(\frac{r}{r_o} \right)^m \right) \quad (7-3)$$

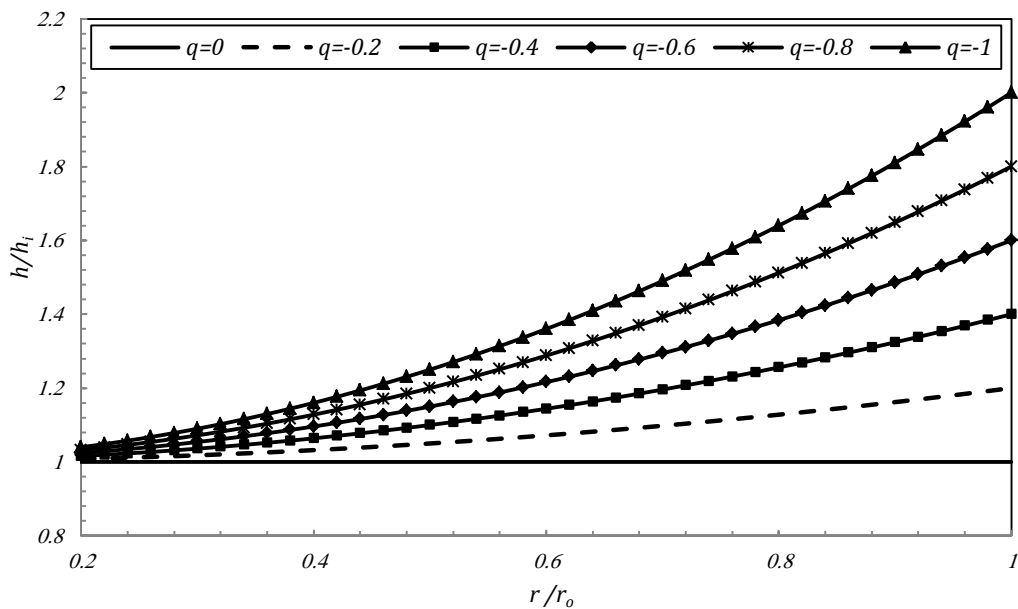
که در آن q و m پارامتر های هندسی هستند. q شیب خطی پروفیل و m نوع پروفیل را از لحاظ تقعر و تحدب تعیین می کند که برای مقادیر $m > 1$ منحنی محدب، برای مقادیر $m < 1$ منحنی مقعر می باشد. بدیهی است که

اگر m برابر یک باشد منحنی به صورت خط و در صورتی که q یا m برابر صفر باشند دیسکی با ضخامت ثابت خواهیم داشت. از طرفی نیز قابل ملاحظه است که h^* ضخامت پروفیل در شعاع صفر است.

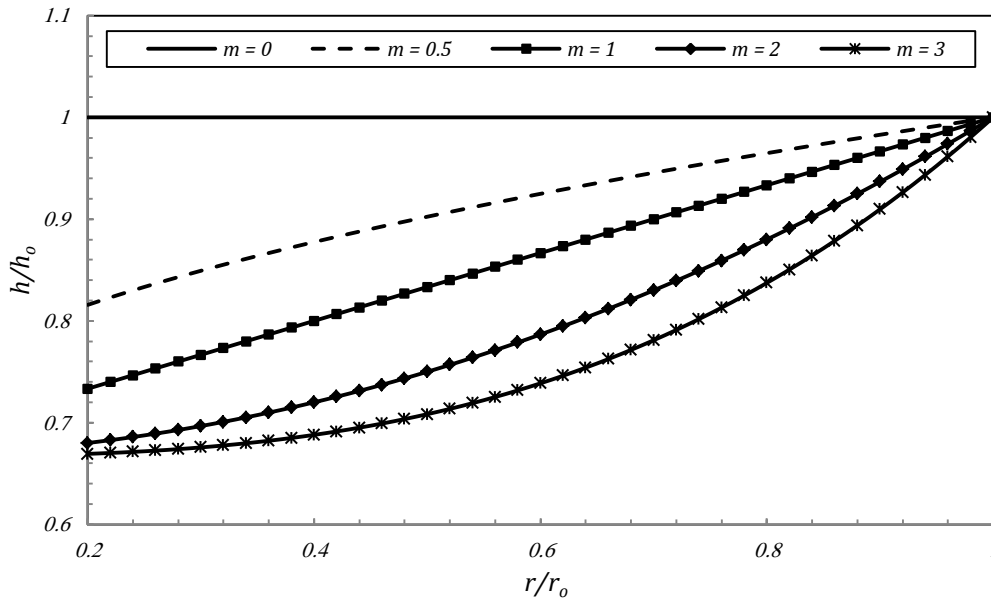
شکل‌های ۳-۵ تا ۳-۷ تاثیر پارامترهای مختلف را در دیسک جدول ۳-۱ روی تابع ضخامت سهموی آن مشخص می‌کند:



شکل ۳-۵: تاثیر پارامتر q در پروفیل ضخامت سهموی ($m=2$)



شکل ۳-۶: تاثیر پارامتر q در پروفیل ضخامت سهموی ($m=2$)



شکل ۳-۷: تاثیر پارامتر m در پروفیل ضخامت سهموی ($q=0.5$)

اگرچه پروفیل سهموی قابلیت زیادی در تحلیل دیسک‌ها با ضخامت متغیر دارد ولی با توجه به اینکه در این پژوهش سعی می‌شود مسائل تحلیلی حل شوند، لذا فقط برای دو تابع توانی و نمایی تحت شرایط ترموالاستیک مسائل تحلیل و نتایج بدست آمده با یکدیگر مقایسه خواهد شد.

۳-۲ حل تحلیلی دیسک همگن با پروفیل توانی

با توجه به توضیحات ارائه شده در بخش قبل در این بخش به بررسی تحلیل دیسک همگن با ضخامت متغیر پرداخته می‌شود و نتایج با حالت همگن مقایسه خواهد شد.

۳-۲-۱ بدست آوردن معادله‌ی حاکم برای دیسک همگن با پروفیل توانی

در فصل دوم معادلات حاکم بر دیسک در حالت عمومی ارائه گردیدند، با توجه به اینکه حل تحلیلی وابسته به تابع تغییرات خواص و پروفیل ضخامت می‌باشد. از این‌رو ارائه‌ی حل عمومی که توانایی تحلیل تمامی دیسک‌ها را داشته باشد مقدور نمی‌باشد و می‌بایست هر مسئله با انتخاب فرضیات معادله‌ی حاکم استخراج شده و حل آن ارائه شود. در مواد همگن خواص فیزیکی و مکانیکی فقط وابسته به دما می‌باشد که در این پژوهش از تغییرات خواص وابسته به دما صرف‌نظر می‌شود و خواص فیزیکی و مکانیکی در تمامی شرایط ثابت فرض می‌شود. با

توجه به اینکه در ماده‌ی همگن خواصی از قبیل مدول الاستیسیته، چگالی، ضریب انبساط و هدایت حرارتی در تمامی مکان‌ها ثابت هستند، عبارات مربوط به این خواص که در معادله‌ی کلی وابسته به دما و مکان بودند، ثابت فرض می‌شوند. بدین ترتیب ضرایب معادله‌ی دیفرانسیل با ساده‌سازی به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= rh(r) \\
 A_2 &= \frac{d}{dr}(rh(r)) \\
 A_3 &= \frac{h(r)}{r} + \nu \frac{d}{dr}(h(r)) \\
 A_4 &= r(1+\nu) \left\{ \frac{(1-\nu)h(r)\rho_0 r \omega^2}{E_0} - \alpha_0 \frac{d}{dr}(h(r)\Delta T(r)) \right\}
 \end{aligned} \tag{۸-۳}$$

اگر پروفیل توانی که در معادله‌ی (۲-۳) تابع آن آمده است برای ضخامت انتخاب شود روابط فوق به شکل زیر تبدیل خواهند شد. لازم به ذکر است که طرفین معادله‌ی دیفرانسیل در $\frac{r}{h(r)}$ ضرب شده است:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= r^2 \\
 A_2 &= (1+m)r \\
 A_3 &= m\nu - 1 \\
 A_4 &= r(1+\nu) \left\{ \frac{(1-\nu)\rho_0 r^2 \omega^2}{E_0} - \alpha_0 r \frac{d}{dr}(\Delta T(r)) - m\alpha_0 \Delta T(r) \right\}
 \end{aligned} \tag{۹-۳}$$

با توجه به مجهول بودن تابع توزیع دما برای بررسی معادله دیفرانسیل لازم است ابتدا معادله‌ی توزیع دما در دیسک همگن با ضخامت توانی بدست آید.

۳ - ۲ - ۲ حل حرارتی

معادله‌ی توزیع دما در دیسک همگن با ضخامت متغیر در حالت کلی به شکل زیر می‌باشد:

$$\Delta T(r) = \left(\frac{\int_{r_i}^r \frac{dr}{rh(r)}}{\int_{r_i}^{r_o} \frac{dr}{rh(r)}} \right) (T_o - T_i) \tag{۱۰-۳}$$

مشاهده می‌شود که انتگرال زیر در رابطه‌ی فوق تکرار شده است:

$$\int \frac{dr}{rh(r)} \quad (11-3)$$

که حاصل این انتگرال برای تابع پروفیل توانی به شکل زیر خواهد بود:

$$\int \frac{dr}{rh(r)} = \begin{cases} -\frac{r_o^m}{mh_o} r^{-m} & (m \neq 0) \\ \frac{\ln(r)}{h_o} & (m = 0) \end{cases} \quad (12-3)$$

با توجه به اینکه در این قسمت دیسک با ضخامت متغیر مسئله‌ی موردنظر می‌باشد لذا $m \neq 0$ فرض می‌شود.

بنابراین معادله‌ی توزیع دما برای به شکل زیر تبدیل خواهد شد:

$$\Delta T(r) = \left(\frac{T_o - T_i}{(r_o^{-m} - r_i^{-m})} \right) (r^{-m} - r_i^{-m}) \quad (13-3)$$

مشتق عبارت فوق به شکل زیر خواهد بود:

$$\frac{d(\Delta T(r))}{dr} = \left(-\frac{m(T_o - T_i)}{(r_o^{-m} - r_i^{-m})} \right) r^{-(m+1)} \quad (14-3)$$

با جایگذاری روابط فوق در (۹-۳) عامل ناهمگنی معادله به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$A_4 = r(1+\nu) \left\{ \frac{(1-\nu)\rho_0 r^2 \omega^2}{E_0} + \frac{m\alpha_0 r_i^{-m} (T_o - T_i)}{(r_o^{-m} - r_i^{-m})} \right\} \quad (15-3)$$

بنابراین معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر دیسک همگن با تابع ضخامت توانی به شکل زیر خواهد بود:

$$r^2 \frac{d^2 u_r}{dr^2} + (1+m)r \frac{du_r}{dr} + (m\nu-1)u_r = F(r) \quad (16-3)$$

که در آن:

$$F(r) = -r(1+\nu) \left\{ \frac{(1-\nu)\rho_0 r^2 \omega^2}{E_0} + \frac{m\alpha_0 r_i^{-m} (T_o - T_i)}{(r_o^{-m} - r_i^{-m})} \right\} \quad (17-3)$$

می باشد. این معادله از نوع معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم ناهمگن با ضرایب متغیر می باشد.

۳ - ۲ - ۳ حل عمومی

معادله‌ی (۳-۱۶) یک معادله‌ی ناهمگن می باشد بنابراین حل آن شامل دو حل خصوصی و عمومی می باشد. اگر

در معادله‌ی (۳-۱۶) عبارت $F(r)$ برابر صفر باشد معادله به صورت همگن زیر تبدیل خواهد شد:

$$r^2 \frac{d^2 u_r}{dr^2} + (1+m)r \frac{du_r}{dr} + (m\nu-1)u_r = 0 \quad (18-3)$$

معادله‌ی فوق از نوع معادله‌ی اوپلر-کشی است. اگر در معادله‌ی فوق به جای u_r عبارت r^λ قرار دهیم معادله‌ی

مشخصه‌ی زیر بدست می آید:

$$\lambda^2 + m\lambda + (m\nu-1) = 0 \quad (19-3)$$

ریشه‌های معادله‌ی چند جمله‌ای درجه‌ی دوم فوق عبارت است:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-m \pm \sqrt{\Delta}) \quad (20-3)$$

که در آن:

$$\Delta = m^2 - 4m\nu + 4 \quad (21-3)$$

می باشد. بدیهی است که معادله‌ی فوق برای مقادیر مختلف Δ ممکن است دارای ریشه‌های حقیقی یا مختلط

باشد، ولی با توجه به اینکه در مکانیک جامدات همواره ν بین صفر و $\frac{1}{2}$ می باشد عبارت $16(\nu^2 - 1)$ همواره

کوچکتر از صفر بوده، بنابراین Δ همواره عدد مثبتی خواهد بود در نتیجه λ همواره مقدار حقیقی خواهد

داشت. بنابراین با توجه به حقیقی بودن تمامی ریشه‌ها، حل معادله‌ی (۳-۱۸) به شکل زیر خواهد بود:

$$u_r = C_1 r^{\lambda_1} + C_2 r^{\lambda_2} \quad (22-3)$$

که $\lambda_{1,2}$ از معادله‌ی (۲۰-۳) بدست می‌آید و تابعی از ضریب پواسون و توان تابع پروفیل خواهد بود.

۳ - ۲ - ۴ حل خصوصی

عامل ناهمگنی در معادله‌ی دیفرانسیل حاکم ناشی از دو عامل سرعت زاویه‌ای و گرادیان حرارتی می‌باشد. با توجه به اینکه پارامتر کوپل کننده بین این دو عامل وجود ندارد می‌توان تاثیر عامل ناهمگنی را برای هر یک به صورت مجزا بررسی نمود. لذا داریم:

$$r^2 \frac{d^2 u_r}{dr^2} + (1+m)r \frac{du_r}{dr} + (m\nu-1)u_r = F_{rotation}(r) + F_{thermal}(r) \quad (23-3)$$

که در آن $F_{rotation}(r)$ عامل ناهمگنی ناشی از دوران که مقدار آن برابر است با:

$$F_{rotation}(r) = \frac{(\nu^2 - 1)\rho_0 r^3 \omega^2}{E_0} \quad (24-3)$$

و $F_{thermal}(r)$ عامل ناهمگنی ناشی از گرادیان حرارتی که مقدار آن برابر است با:

$$F_{thermal}(r) = \frac{m\alpha_0(1+\nu)(T_o - T_i)}{r_i^m(r_o^{-m} - r_i^{-m})} r \quad (25-3)$$

بنابراین می‌توان حل خصوصی ناشی از این دو عامل را به صورت زیر نوشت و برای هر حالت به صورت مجزا محاسبه نمود:

$$u_r^p = u_r^p|_{rotation} + u_r^p|_{thermal} \quad (26-3)$$

محاسبه‌ی حل خصوصی ناشی از دوران: اگر به معادله‌ی (۲۴-۳) توجه کنیم ملاحظه می‌شود که با فرض حل چند جمله‌ای از مرتبه‌ی ۳ زیر می‌توان معادله‌ی جابجایی ناشی از عامل ناهمگنی دوران را محاسبه نمود:

$$u_r^p \Big|_{rotation} = \sum_{j=0}^3 B_j r^j \quad (27-3)$$

با جایگذاری معادله ی فوق در معادله ی (۲۴-۳) و با فرض $F_{thermal}(r) = 0$ خواهیم داشت:

$$B_0 = B_1 = B_2 = 0, B_3 = \frac{(\nu^2 - 1)\rho_0 \omega^2}{(8 + (3 + \nu)m)E_0} \quad (28-3)$$

بنابراین:

$$u_r^p \Big|_{rotation} = \frac{(\nu^2 - 1)\rho_0 \omega^2 r^3}{(8 + (3 + \nu)m)E_0} \quad (29-3)$$

محاسبه ی حل خصوصی ناشی از گرادیان حرارتی: جمله مربوط به گرادیان حرارتی معادله ی چند جمله

ای مرتبه یک می باشد که با فرض همین درجه برای تابع پاسخ مقدار آن قابل محاسبه است:

$$u_r^p \Big|_{thermal} = B_1' r + B_0' \quad (30-3)$$

با جایگذاری معادله ی فوق در معادله ی (۲۵-۳) و با فرض $F_{rotation}(r) = 0$ نتیجه زیر حاصل می شود:

$$B_0' = 0, B_1' = -\frac{\alpha_0 r_o^m (T_o - T_i)}{(r_o^m - r_i^m)} \quad (31-3)$$

بنابراین:

$$u_r^p \Big|_{thermal} = -\frac{\alpha_0 r_o^m (T_o - T_i)}{(r_o^m - r_i^m)} r, (m \neq 0) \quad (32-3)$$

می باشد. با توجه به معادلات (۲۶-۳)، (۲۹-۳) و (۳۲-۳) حل خصوصی به شکل زیر خواهد بود:

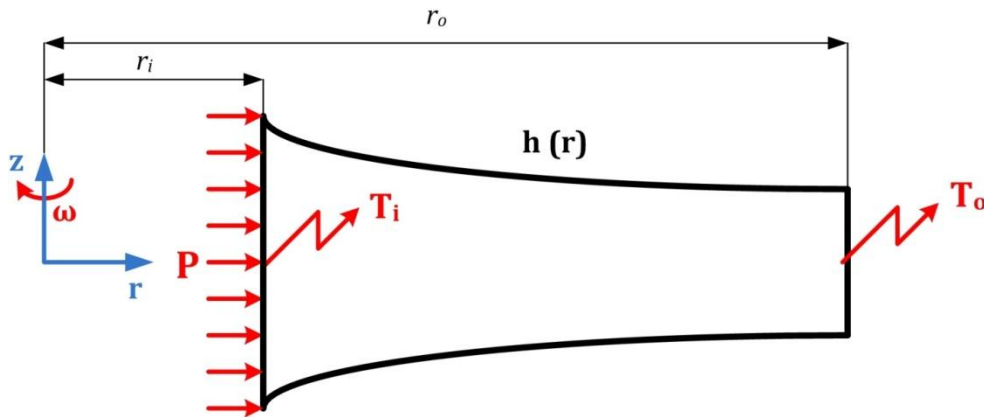
$$u_r^p = u_r^p \Big|_{rotation} + u_r^p \Big|_{thermal} = \frac{(\nu^2 - 1)\rho_0 \omega^2}{(8 + (3 + \nu)m)E_0} r^3 - \frac{\alpha_0 r_o^m (T_o - T_i)}{(r_o^m - r_i^m)} r, (m \neq 0) \quad (33-3)$$

و حل کلی مسئله نیز به شکل زیر خواهد بود:

$$u_r = C_1 r^{\frac{1}{2}(-m+\sqrt{m^2-4mv+4})} + C_2 r^{\frac{1}{2}(-m-\sqrt{m^2-4mv+4})} + \frac{(\nu^2-1)\rho_0\omega^2}{(8+(3+\nu)m)E_0} r^3 - \frac{\alpha_0 r_o^m (T_o - T_i)}{(r_o^m - r_i^m)} r \quad (34-3)$$

۳-۲-۵ اعمال شرایط مرزی

دیسک با ضخامت متغیر مورد بررسی در این پژوهش تحت شرایطی مطابق شکل ۸-۳ می‌باشد:



شکل ۸-۳: بارگذاری در دیسک با ضخامت متغیر

لذا شرایط مرزی آن به شکل زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} \sigma_r |_{r=r_i} = -P \\ \sigma_r |_{r=r_o} = 0 \end{cases} \quad (35-3)$$

از طرفی با توجه به معادله (۲-۱۷) داریم:

$$\sigma_r = \frac{E_0}{(1-\nu^2)} \left(\frac{du_r}{dr} + \nu \frac{u_r}{r} - \alpha_0 (1+\nu) \Delta T(r) \right) \quad (36-3)$$

با جایگذاری روابط (۳-۱۳) و (۳-۳۴) در رابطه‌ی فوق خواهیم داشت:

$$\begin{cases} u_r = C_1 r^{\frac{1}{2}(-m+\sqrt{m^2-4m\nu+4})} + C_2 r^{\frac{1}{2}(-m-\sqrt{m^2-4m\nu+4})} + \frac{(\nu^2-1)\rho_0\omega^2}{(8+(3+\nu)m)E_0} r^3 - \frac{\alpha_0 r_o^m (T_o - T_i)}{(r_o^m - r_i^m)} r \\ \Delta T(r) = \left(\frac{(T_o - T_i)}{(r_o^{-m} - r_i^{-m})} \right) (r^{-m} - r_i^{-m}) \end{cases} \quad (37-3)$$

برای سادگی در تحلیل می توان تابع جابجایی شعاعی را به شکل زیر نوشت:

$$u_r = C_1 r^{\lambda_1} + C_2 r^{\lambda_2} + D_1 r^3 + D_2 r \quad (38-3)$$

با مشتق گیری از این رابطه داریم:

$$\frac{du_r}{dr} = C_1 \lambda_1 r^{\lambda_1-1} + C_2 \lambda_2 r^{\lambda_2-1} + 3D_1 r^2 + D_2 \quad (39-3)$$

با جایگذاری روابط فوق در (36-3) تابع تنش شعاعی به شکل زیر ساده می شود:

$$\sigma_r = \frac{E_0}{(1-\nu^2)} \left(\begin{aligned} &((\lambda_1 + \nu)C_1 r^{\lambda_1-1} + (\lambda_2 + \nu)C_2 r^{\lambda_2-1} + (3+\nu)D_1 r^2 + D_2(1+\nu)) \\ &- \alpha_0(1+\nu) \left(\frac{(T_o - T_i)}{(r_o^{-m} - r_i^{-m})} \right) (r^{-m} - r_i^{-m}) \end{aligned} \right) \quad (40-3)$$

بنابراین شرایط مرزی به شکل زیر تبدیل می شود:

$$\begin{aligned} \sigma_r \Big|_{r=r_i} &= \frac{E_0}{(1-\nu^2)} \left((\lambda_1 + \nu)C_1 r_i^{\lambda_1-1} + (\lambda_2 + \nu)C_2 r_i^{\lambda_2-1} + (3+\nu)D_1 r_i^2 + D_2(1+\nu) \right) = -P \\ \sigma_r \Big|_{r=r_o} &= \frac{E_0}{(1-\nu^2)} \left((\lambda_1 + \nu)C_1 r_o^{\lambda_1-1} + (\lambda_2 + \nu)C_2 r_o^{\lambda_2-1} + (3+\nu)D_1 r_o^2 + D_2(1+\nu) \right) = 0 \end{aligned} \quad (41-3)$$

که به صورت دستگاه معادلات زیر خواهد بود:

$$\begin{bmatrix} (\lambda_1 + \nu)r_i^{\lambda_1-1} & (\lambda_2 + \nu)r_i^{\lambda_2-1} \\ (\lambda_1 + \nu)r_o^{\lambda_1-1} & (\lambda_2 + \nu)r_o^{\lambda_2-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{P(1-\nu^2)}{E_0} + (3+\nu)D_1 r_i^2 + D_2(1+\nu) \\ (3+\nu)D_1 r_o^2 + D_2(1+\nu) - \alpha_0(1+\nu)(T_o - T_i) \end{Bmatrix} \quad (42-3)$$

با حل دستگاه معادلات خطی C_1 و C_2 به شکل زیر بدست می آیند:

$$C_1 = \frac{r_o r_i}{(\lambda_1 + \nu)(r_o^{\lambda_2} r_i^{\lambda_1} - r_o^{\lambda_1} r_i^{\lambda_2})} \left\{ \begin{array}{l} r_i^{\lambda_2 - 1} \left[(3 + \nu) D_1 r_o^2 + D_2 (1 + \nu) - \alpha_0 (1 + \nu) (T_o - T_i) \right] \\ - r_o^{\lambda_2 - 1} \left[\frac{P(1 - \nu^2)}{E_0} + (3 + \nu) D_1 r_i^2 + D_2 (1 + \nu) \right] \end{array} \right\} \quad (43-3)$$

$$C_2 = \frac{r_o r_i}{(\lambda_2 + \nu)(r_o^{\lambda_2} r_i^{\lambda_1} - r_o^{\lambda_1} r_i^{\lambda_2})} \left\{ \begin{array}{l} r_o^{\lambda_1 - 1} \left[\frac{P(1 - \nu^2)}{E_0} + (3 + \nu) D_1 r_i^2 + D_2 (1 + \nu) \right] \\ - r_i^{\lambda_1 - 1} \left[(3 + \nu) D_1 r_o^2 + D_2 (1 + \nu) - \alpha_0 (1 + \nu) (T_o - T_i) \right] \end{array} \right\}$$

که در آن:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-m \pm \sqrt{m^2 - 4m\nu + 4} \right)$$

$$D_1 = \frac{(\nu^2 - 1) \rho_0 \omega^2}{(8 + (3 + \nu)m) E_0} \quad (44-3)$$

$$D_2 = \frac{\alpha_0 r_o^m (T_o - T_i)}{(r_o^m - r_i^m)}$$

می‌باشد. با جایگذاری معادلات فوق در (34-3) معادله‌ی جابجایی محاسبه می‌شود با معلوم بودن تابع جابجایی می‌توان توزیع تنش‌ها و کرنش‌ها را محاسبه نمود.

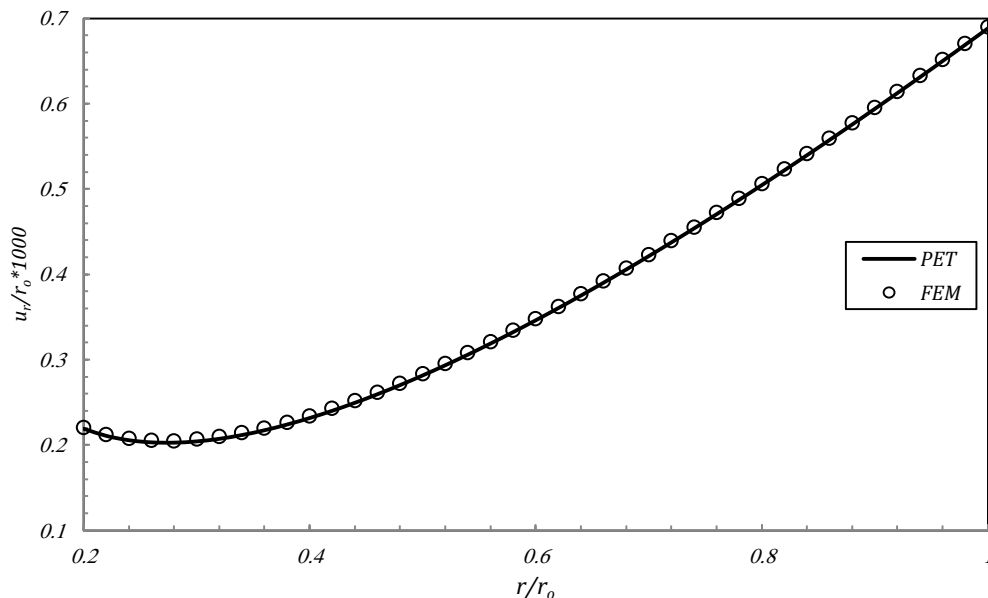
۳ - ۳ بررسی نتایج حل دیسک همگن با تابع ضخامت توانی

در این قسمت به بررسی یک نمونه از این دیسک فولادی همگن با تابع ضخامت توانی مطابق جداول ۱-۱ و ۱-۱ و ۲ و با توجه به شرایط مرزی مطابق جدول ۱-۳ پرداخته می‌شود. ابتدا نتایج بدست آمده از حل تحلیلی با حل عددی مقایسه می‌شود. سپس تاثیر هر یک از بارگذاری‌ها در نتایج حاصل بررسی شده و نقش هر یک از بارگذاری‌ها بر مشخصه‌های مکانیکی سیستم بیان می‌شود. در پایان نیز پروفیل‌های مختلف دیسک تحلیل شده و نتایج آن ارائه می‌شود.

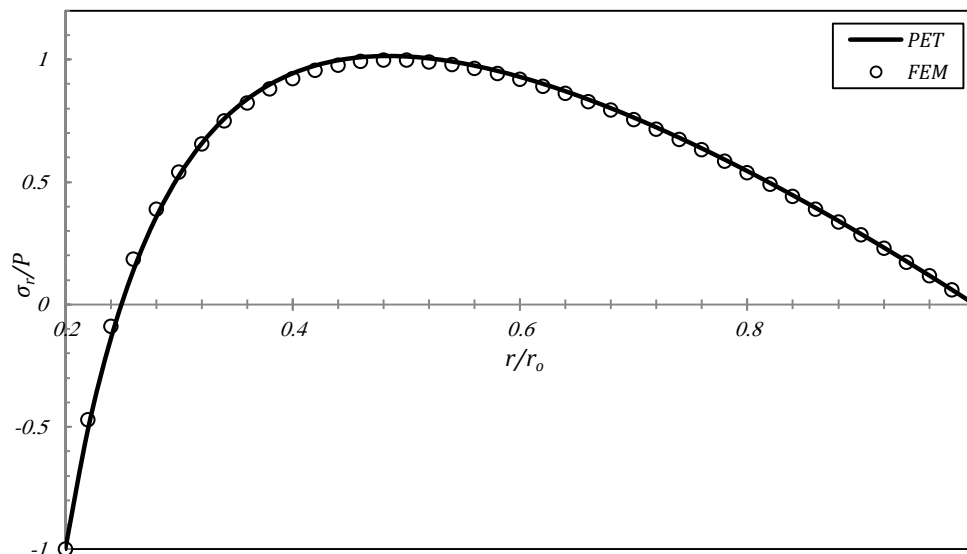
۳ - ۳ - ۱ مقایسه نتایج با حل عددی

در فصل دوم بیان شد که برای بررسی نتایج حاصل تحلیلی به منظور کسب اطمینان از فرضیات در نظر گرفته شده بهتر است نتایج با حل عددی مقایسه شود. این موضوع در دیسک های با ضخامت متغیر چون امکان دارد که از فرض تنش صفحه‌ای دورتر شویم، حساستر می باشد.

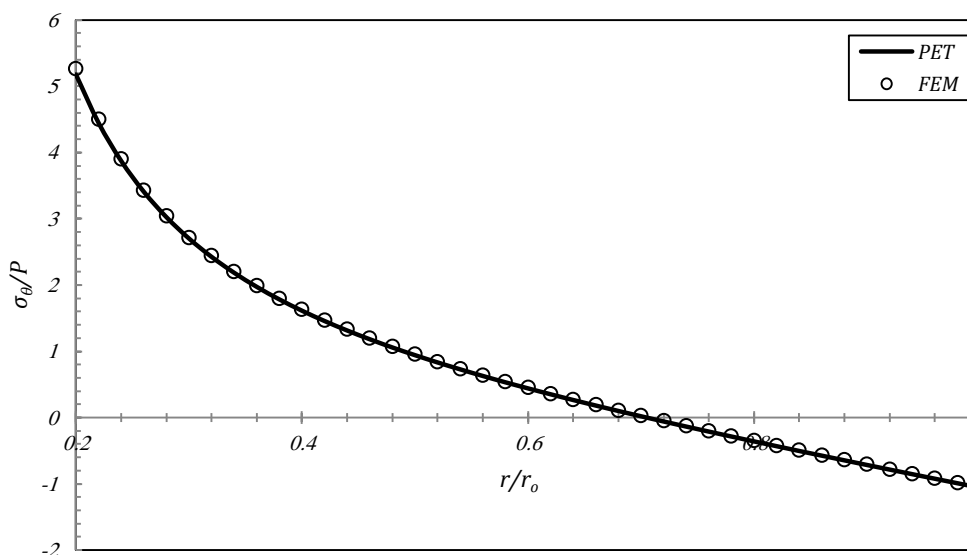
در این قسمت با توجه به در نظر گرفتن بحرانی‌ترین شرایط دیسک با بیشترین نسبت ضخامت ($h_i/h_o=2$) با نرم افزار انسیس مدل سازی می شود و نتایج آن با حل عددی مقایسه می شود. قابل ذکر است در نرم‌افزار انسیس با نوشتن کد می توان پروفیل‌های مختلف را ایجاد نمود. شکل‌های ۳-۹ تا ۳-۱۱ نتایج بدست آمده در تنش‌ها و جابجایی شعاعی با استفاده از دو روش را نمایش می‌دهند:



شکل ۳-۹: توزیع جابجایی شعاعی در دیسک همگن با پروفیل توانی ($h_i/h_o=2$)



شکل ۳-۱۰: توزیع تنش شعاعی در دیسک همگن با پروفیل توانی ($h_i/h_o=2$)



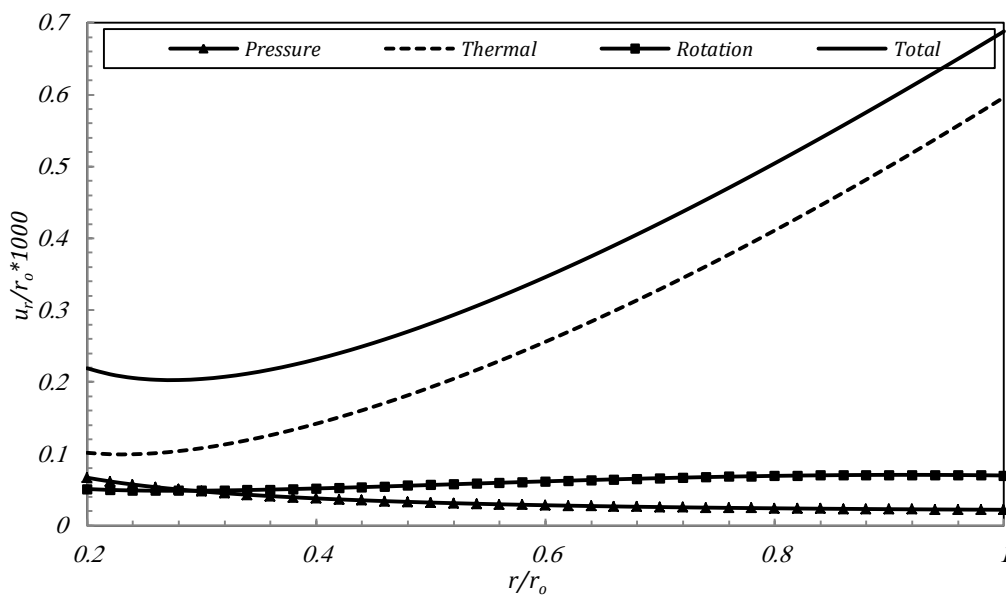
شکل ۳-۱۱: توزیع تنش محیطی در دیسک همگن با پروفیل توانی ($h_i/h_o=2$)

بیشترین خطا در جابجایی شعاعی ۱/۳ درصد، در تنش شعاعی ۷/۲ درصد و در تنش محیطی ۸/۹ درصد می-
 باشد اگرچه انطباق نتایج بین حل تحلیلی و عددی مشابه فصل قبل با خطای بسیار کم مشاهده نمی شود ولی
 با توجه به افزایش ضخامت در لایه‌های داخلی و امکان ایجاد تنش در راستای z ، دقت نتایج بدست آمده قابل

قبول می‌باشد. همچنین نحوه‌ی تغییرات مشخصه‌های مکانیکی سیستم در دو حل ارائه شده مشابه یکدیگر می‌باشد.

۳-۳-۲ بررسی تاثیر بار گذاری ها در توزیع مشخصه های مکانیکی

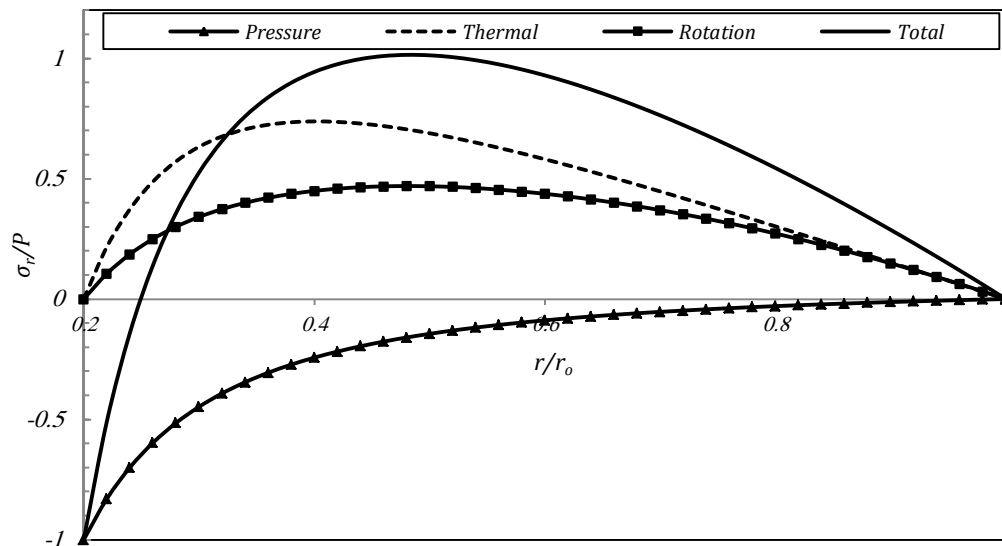
در روابط ارائه شده برای دیسک همگن با تابع ضخامت توانی مشاهده شد که هر یک از بارگذاری‌ها به صورت مستقل، تاثیر در جابجایی شعاعی و تنش های منتج از آن دارد. بنابراین می‌توان روابط را برای هر یک از بارگذاری‌ها بصورت جداگانه نوشته و از اصل جمع آثار برای آن‌ها استفاده کرد. شکل ۳-۱۲ تغییرات جابجایی شعاعی را در راستای شعاع نشان می‌دهد:



شکل ۳-۱۲: نحوه‌ی توزیع جابجایی شعاعی در بارگذاری‌های مختلف ($h_i/h_o=2$)

ملاحظه می‌شود که در این حالت نیز قدرمطلق جابجایی ناشی از گرادیان حرارتی بر بارگذاری‌های دیگر غلبه دارد. با توجه به اینکه دما در دیسک با افزایش شعاع افزایش می‌یابد، تغییرات جابجایی ناشی از گرادیان حرارتی به صورت صعودی رفتار می‌کند. بنابراین جابجایی شعاعی حاصل از بارگذاری عمومی نیز از این رفتار تبعیت می‌کند فقط در لایه‌های داخلی دیسک برهم‌کنش بارگذاری‌ها سبب شده است که تغییرات به شکل نزولی بوده

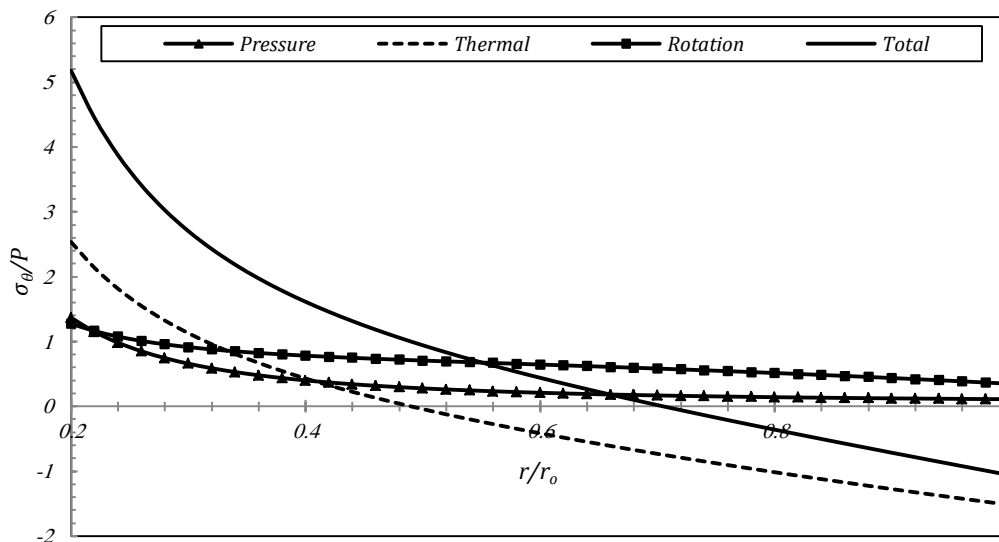
و با افزایش شعاع دوباره گرادیان حرارتی بارگذاری غالب دیسک می‌شود. شکل ۳-۱۳ توزیع تنش شعاعی نرمال را در راستای شعاع نشان می‌دهد:



شکل ۳-۱۳: نحوه ی توزیع تنش شعاعی در بارگذاریهای مختلف ($h_i/h_o=2$)

تغییرات تنش شعاعی در بارگذاری حرارتی و گریز از مرکز رفتاری مشابه دارد که این موضوع با توجه صفر بودن تنش شعاعی در شعاع داخلی و خارجی دیسک است و با توجه به مثبت بودن جابجایی شعاعی بقیه لایه‌ها تحت تاثیر کشش ناشی از این عامل است بنابراین تنش بیشینه در لایه‌های میانی رخ می‌دهد. در بارگذاری فشاری نیز تمام دیسک تحت فشار است که با افزایش شعاع و نزدیک شدن به سطح آزاد این فشار کاهش می‌یابد.

با استفاده از جمع آثار رفتار برآیند نیروها به شکلی است که لایه‌های داخلی تحت فشار و لایه‌های خارجی تحت کشش قرار دارد. بیشترین مقدار تنش فشاری در لایه‌ی داخلی و بیشترین مقدار تنش کششی در لایه میانی و در $r/r_o=0.48$ رخ می‌دهد. نکته‌ی قابل توجه در تنش شعاعی این است که بر خلاف نتایج جابجایی شعاعی، بارگذاری ناشی از گرادیان حرارت بارگذاری غالب نمی‌باشد و هر یک از بارگذاری‌ها سهم مساوی در تغییرات تنش شعاعی داشته است. شکل ۳-۱۴ توزیع تنش شعاعی نرمال را در راستای شعاع نشان می‌دهد:



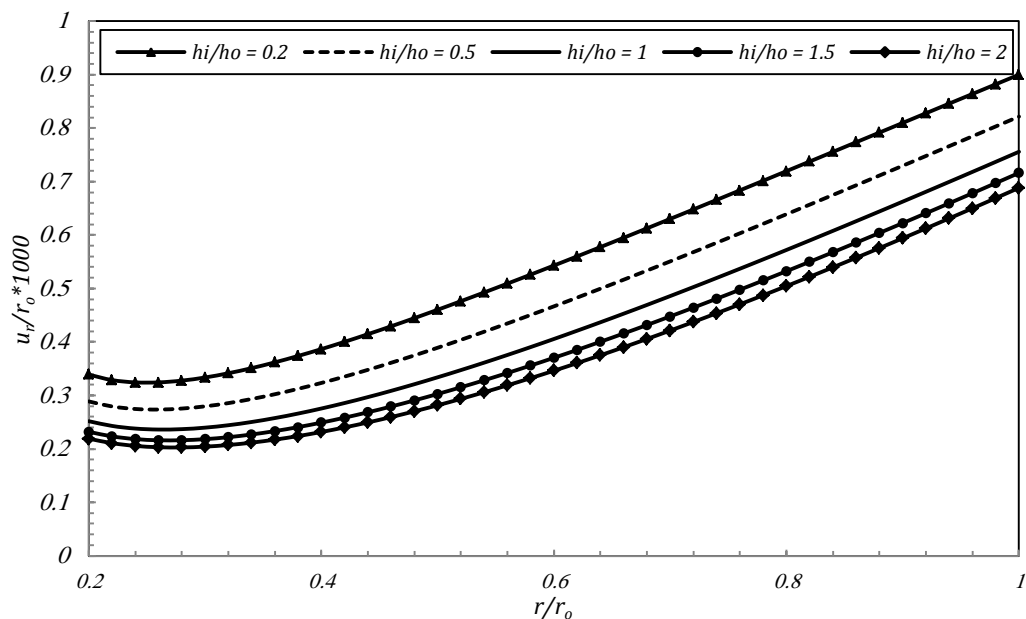
شکل ۳-۱۴: نحوه ی توزیع تنش محیطی در بارگذاریهای مختلف ($h_i/h_o=2$)

در شکل ۳-۱۴ ملاحظه می شود مشابه جابجایی شعاعی، بارگذاری حرارتی عامل غالب می باشد و رفتار تنشهای محیطی تمامی بارگذاری های تحت تاثیر این بارگذاری می باشد. البته این موضوع با افزایش شعاع بیشتر می شود که ناشی از افزایش اختلاف جابجایی شعاعی ناشی از گرادیان حرارتی از جابجایی های دیگر است. همچنین مشهود است که در بارگذاریهای ناشی از فشار و دوران همواره تنش محیطی کششی می باشد، ولی در بارگذاری عمومی در لایه های خارجی تنش محیطی از کششی به فشاری تغییر وضع می دهد.

۳-۳-۳ بررسی تاثیر نسبت ضخامت های مختلف در توزیع مشخصه های مکانیکی

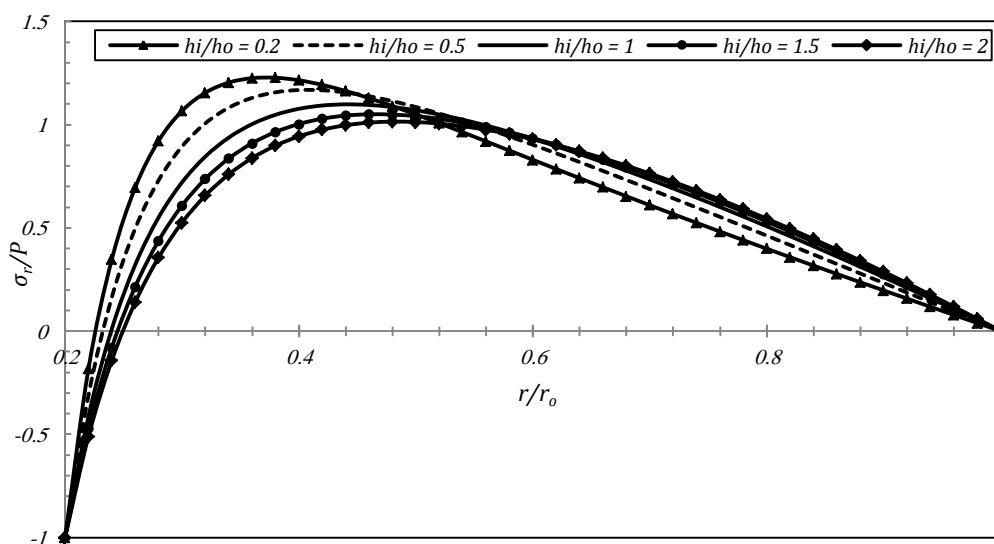
در قسمت های قبل نتایج اعتبارسنجی شده و تاثیر هریک از بارگذاری ها بررسی شدند. در این قسمت به بررسی تاثیر نسبت ضخامت های مختلف در کاهش یا افزایش تنش ها پرداخته می شود و نتایج کاربردی از آن استخراج می شود.

شکل ۳-۱۵: توزیع جابجایی شعاعی را به ازای نسبت های مختلف ضخامت نشان می دهد:



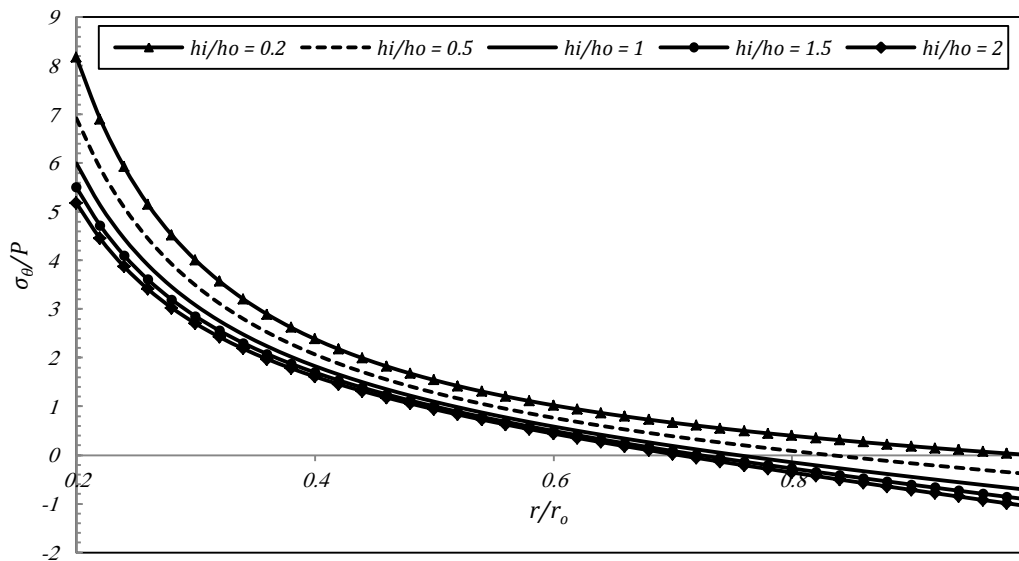
شکل ۳-۱۵: تاثیر نسبت ضخامت بر توزیع جابجایی شعاعی دیسک همگن

با افزایش نسبت ضخامت جابجایی شعاعی کاهش می‌یابد که این موضوع می‌تواند به علت افزایش صلبیت دیسک در لایه‌های داخلی با توجه به افزایش ضخامت باشد. البته با توجه به اینکه در جابجایی شعاعی نیروی غالب متاثر از بارگذاری حرارتی می‌باشد، نیاز به نتایج تفکیکی در هر بارگذاری می‌باشد که در قسمت جمع-بندی به آن پرداخته می‌شود. شکل ۳-۱۶ توزیع تنش نرمال شعاعی را در راستای شعاع دیسک نمایش می‌دهد.



شکل ۳-۱۶: تاثیر نسبت ضخامت بر توزیع تنش شعاعی دیسک همگن

از نمودار ارائه شده در شکل ۳-۱۶ دو نکته‌ی مثبت استخراج می‌شود. اول اینکه با افزایش نسبت ضخامت مقدار بیشینه تنش شعاعی در لایه‌ها کاهش می‌یابد. دوم اینکه محل تنش بیشینه شعاعی در دیسک از شعاع داخلی که نقطه بحرانی تنش می‌باشد فاصله می‌گیرد، که مجموع این دو موضوع برای طراحی دیسک از دیدگاه مقاومت مصالح شرایط بهتری را ایجاد می‌کند. شکل ۳-۱۷ توزیع تنش نرمال محیطی را در راستای شعاع دیسک نمایش می‌دهد.



شکل ۳-۱۷: تاثیر نسبت ضخامت بر توزیع تنش محیطی دیسک همگن

شکل ۳-۱۷ نشان می‌دهد که با افزایش نسبت ضخامت تنش‌های محیطی نسبت به حالت قبل کمتر می‌شود. همچنین مشهود است که کاهش ضخامت در لایه‌ی داخلی تنش را با شیب بیشتری افزایش می‌دهد که مطابق انتظار می‌باشد.

۳-۴ حل تحلیلی دیسک همگن با تابع ضخامت نمایی

در این قسمت برای تابع ضخامت از پروفیل نمایی استفاده می‌شود و مشابه قسمت قبل مواد همگن در نظر گرفته می‌شود بنابراین معادله‌ی بدست آمده در فصل دوم برای دیسک‌ها با اعمال تابع ضخامت ساده‌سازی و ثابت‌های تعریف شده، به شکل زیر تبدیل خواهند شد:

$$\begin{aligned}
A_1 &= r^2 \\
A_2 &= (1+mr)r \\
A_3 &= mvr - 1 \\
A_4 &= r^2(1+v) \left\{ \frac{(1-v)\rho_0 r \omega^2}{E_0} - \alpha_0 \left(\frac{d}{dr}(\Delta T(r)) + m\Delta T(r) \right) \right\}
\end{aligned} \tag{۴۵-۳}$$

با توجه به اینکه برای حل معادله‌ی ابتدا می‌بایست حل حرارتی انجام شود در گام اول حل حرارتی برای دیسک همگن با تابع ضخامت نمایی محاسبه خواهد شد.

۳-۴-۱ حل حرارتی

برای حل حرارتی دیسک همگن با ضخامت متغیر ابتدا می‌بایست انتگرال زیر را حل کرد:

$$\int \frac{dr}{rh(r)} \tag{۴۶-۳}$$

با جای‌گذاری تابع پروفیل نمایی، انتگرال زیر به شکل زیر تبدیل خواهد شد:

$$\frac{1}{h^*} \int \frac{dr}{re^{mr}} \tag{۴۷-۳}$$

با توجه به مرجع [۲۸] حاصل انتگرال فوق را به شکل زیر می‌باشد:

$$\frac{1}{h^*} \int \frac{dr}{re^{mr}} = \frac{-1}{h^*} \zeta_1(mr) \tag{۴۸-۳}$$

که در آن:

$$\zeta_\beta(r) = \int_1^\infty \frac{e^{-tr}}{t^\beta} dt \quad (\beta = 1, 2, \dots; r > 0) \tag{۴۹-۳}$$

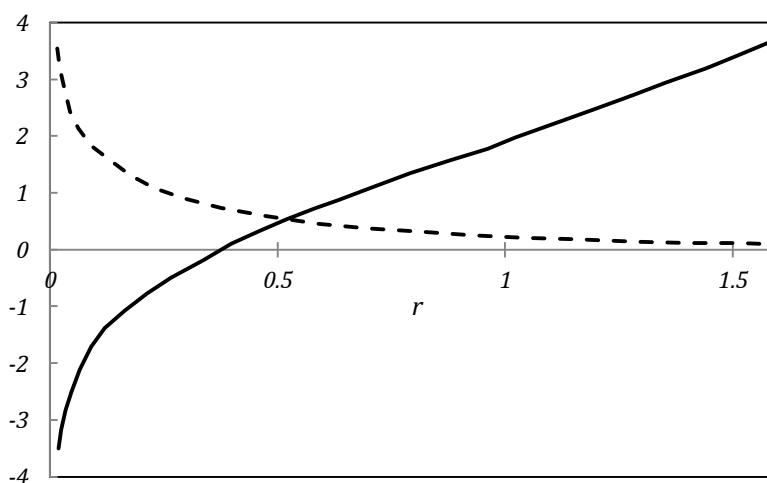
می‌باشد. با جای‌گذاری روابط فوق به جای انتگرال‌ها در معادله‌ی توزیع دما خواهیم داشت:

$$\Delta T(r) = (T_o - T_i) \left(\frac{\zeta_1(mr) - \zeta_1(mr_i)}{\zeta_1(mr_o) - \zeta_1(mr_i)} \right) \tag{۵۰-۳}$$

مقادیر تابع $\zeta_1(mr)$ با ازای مقادیر $m > 0$ حقیقی و به ازای مقادیر $m < 0$ مختلط بوده و از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\zeta_1(-r) = -\zeta_1(r) \mp i\pi, \quad \zeta_1(r) = -\int_{-r}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (51-3)$$

نمودار زیر نحوه‌ی تغییرات این دو تابع را به ازای مقادیر موجود، نمایش می‌دهد:



شکل ۳-۱۸: نمودار توابع انتگرال نمایی (مرجع [۳۰])

قابل ذکر است که تمامی مقادیر توابع انتگرال نمایی در جداول ریاضیات آمده است.

۳-۴-۲ حل نیمه تحلیلی

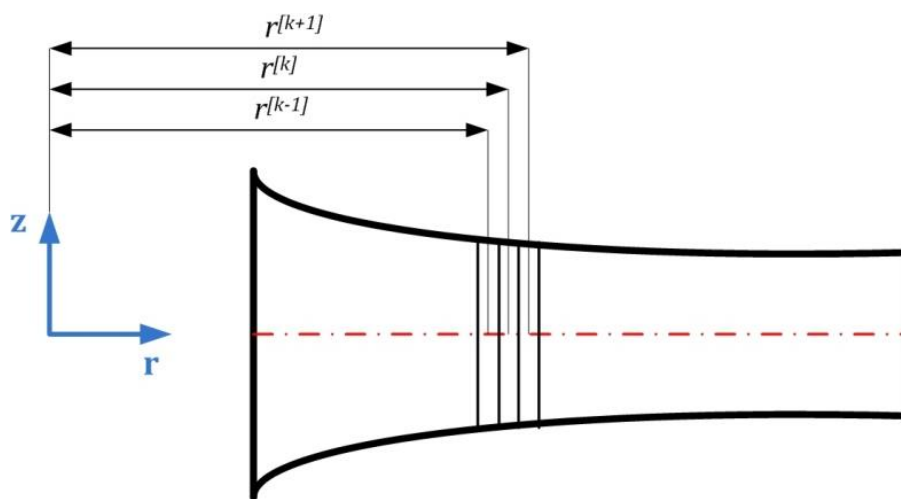
با جایگذاری روابط بدست آمده معادله‌ی ترموالاستیک حاکم بر دیسک به شکل زیر تبدیل می‌شود.

$$r^2 \frac{d^2 u_r}{dr^2} + (1+mr)r \frac{du_r}{dr} + (m\nu r - 1)u_r = F(r) \quad (52-3)$$

که در آن:

$$F(r) = -r^2(1+\nu) \left\{ \frac{(1-\nu)\rho_0 r \omega^2}{E_0} - \frac{\alpha_0 m (T_o - T_i)}{\zeta_1(mr_o) - \zeta_1(mr_i)} \left((\zeta_1(mr) - \zeta_1(mr_i)) - \frac{e^{-mr}}{mr} \right) \right\} \quad (53-3)$$

می‌باشد. معادله‌ی فوق در حالت همگن با استفاده از سری‌های فوق هندسی قابل حل می‌باشد که در پیوست B به آن پرداخته می‌شود. ولی باتوجه به اینکه در حل حرارتی تابع $(mr)_1$ که یک تابع عددی می‌باشد، وجود دارد و انتگرال‌گیری از آن مقدور نمی‌باشد نمی‌توان حل تحلیلی برای آن ارائه نمود. بنابراین برای حل ترموالاستیک نیازمند روشی عددی یا نیمه تحلیلی می‌باشیم. با توجه به اینکه در این پژوهش سعی می‌شود از روشهای تحلیلی برای تحلیل مسائل استفاده شود در این قسمت به ناچار از روشی که با فرضیاتی نزدیک به حل تحلیلی است، استفاده خواهد شد. برای داشتن روشی مناسب، مطمئن و قابل قبول از دیسک می‌بایست با استفاده از فرضیاتی قابل قبول معادله‌ی حاکم بر دیسک را به معادلات قابل حل تبدیل نمود. این فرضیات باید به گونه‌ای باشد که بتواند تغییرات ضخامت را متناسب با شعاع در نظر بگیرد. بدین منظور از تبدیل دیسک دوار با ضخامت متغیر به تعدادی حلقه با ضخامت یکسان و سپس بر هم نهی حلقه‌ها و رسیدن به توزیع جابجایی و تنش نهایی استفاده شده است. با این روش که به تفصیل آن را شرح خواهیم داد، به جای متغیر گرفتن ضخامت در کل دیسک، ضخامت هر حلقه را ثابت فرض می‌کنیم و معادله‌ی حاکم بر آن را نوشته و حل می‌کنیم. شکل ۱۹-۳ نحوه‌ی تبدیل دیسک به حلقه‌های با ضخامت و خواص ثابت را نشان می‌دهد:



شکل ۱۹-۳: نحوه‌ی تبدیل دیسک به حلقه‌های با ضخامت ثابت

برای ساده نمودن معادلات در هر حلقه ضخامت را ثابت فرض می‌کنیم بنابراین معادله‌ی ضخامت در هر حلقه به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$h^{[k]} = h^* e^{mr^{[k]}} \quad (54-3)$$

که در آن k شماره‌ی حلقه می‌باشد. با تبدیل دیسک به حلقه‌ها دیسک، معادله‌ی حاکم در هر حلقه به صورت زیر تبدیل خواهد شد.

$$A_1^{[k]} \frac{d^2 u_r^{[k]}}{dr^2} + A_2^{[k]} \frac{du_r^{[k]}}{dr} + A_3^{[k]} u_r^{[k]} + A_4^{[k]} = 0 \quad (55-3)$$

که در آن $A_i^{[k]}$ ها ضرایب ثابت می‌باشند و مطابق فرمول زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} A_1^{[k]} &= (r^{[k]})^2 \\ A_2^{[k]} &= (1 + mr^{[k]}) r^{[k]} \\ A_3^{[k]} &= m\nu r^{[k]} - 1 \\ A_4^{[k]} &= \frac{(1 - \nu^2) \rho_0 \omega^2 (r^{[k]})^3}{E_0} - \frac{\alpha_0 m (1 + \nu) (T_o - T_i) (r^{[k]})^2}{\zeta_1(mr_o) - \zeta_1(mr_i)} \left(\zeta_1(mr^{[k]}) - \zeta_1(mr_i) - \frac{e^{-mr^{[k]}}}{mr^{[k]}} \right) \end{aligned} \quad (56-3)$$

بدین ترتیب معادله‌ی حاکم از معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه دوم ناهمگن با ضرایب متغیر به معادله‌ی دیفرانسیل با ضرایب ثابت در هر حلقه تبدیل می‌شود. معادله مشخصه‌ی معادله (55-3) به شکل زیر می‌باشد:

$$A_1^{[k]} (\lambda^{[k]})^2 + A_2^{[k]} \lambda^{[k]} + A_3^{[k]} = 0 \quad (57-3)$$

با توجه به معادله‌ی مشخصه‌ی فوق معادله دیفرانسیل به ازای ضرایب مختلف دارای حل متفاوت خواهد بود:

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta^{[k]} = 0 &\rightarrow u_r^{[k]} = C_1^{[k]} e^{\lambda_1^{[k]} r} + C_2^{[k]} r e^{\lambda_2^{[k]} r} - \frac{A_4^{[k]}}{A_3^{[k]}} \\ \Delta^{[k]} \neq 0 &\rightarrow u_r^{[k]} = C_1^{[k]} e^{\lambda_1^{[k]} r} + C_2^{[k]} e^{\lambda_2^{[k]} r} - \frac{A_4^{[k]}}{A_3^{[k]}} \end{aligned} \right. \quad \frac{r^{[k-1]} + r^{[k]}}{2} < r < \frac{r^{[k]} + r^{[k+1]}}{2} \quad (58-3)$$

که در آن:

$$\lambda_{1,2}^{[k]} = \frac{-A_2^{[k]} \pm \sqrt{\Delta^{[k]}}}{2A_1^{[k]}}, \Delta^{[k]} = (A_2^{[k]})^2 - 4A_1^{[k]}A_3^{[k]} \quad (59-3)$$

می باشد.

۳ - ۴ - ۳ شرایط مرزی

اگر دیسک را به η حلقه تبدیل کنیم، در این صورت η معادله خواهیم داشت که هر یک دو ثابت مجهول دارد بنابراین 2η مجهول خواهیم داشت که به همین تعداد شرط مرزی نیاز داریم. دو شرط مرزی مشابه حل تحلیلی در شعاع داخلی و خارجی داریم که در زیر آورده شده است:

$$\sigma_r \Big|_{r=r_i} = \frac{E(r) \Big|_{r=r_i}}{(1-\nu^2)} \left[\frac{du_r^{[1]}}{dr} + \nu \frac{u_r^{[1]}}{r} \right] - \frac{E(r) \Big|_{r=r_i} \alpha(r) \Big|_{r=r_i} \Delta T^{[1]}}{(1-\nu)} = -P$$

$$\sigma_r \Big|_{r=r_o} = \frac{E(r) \Big|_{r=r_o}}{(1-\nu^2)} \left[\frac{du_r^{[\eta]}}{dr} + \nu \frac{u_r^{[\eta]}}{r} \right] - \frac{E(r) \Big|_{r=r_o} \alpha(r) \Big|_{r=r_o} \Delta T^{[\eta]}}{(1-\nu)} = 0 \quad (60-3)$$

با معلوم شدن دو ثابت مجهول به $2(\eta-1)$ شرط مرزی دیگر برای محاسبه ی ثابت های دیگر نیاز داریم. همانطور که مشخص است دیسک، دارای محیط همگن و پیوسته است، لذا برای حفظ پیوستگی، باید در مرز بین دو حلقه، نیروها، تنش ها و جابجایی ها پیوسته باشند. این شرایط که موسوم به شرایط پیوستگی می باشد در نواحی مرزی حلقه ها تعریف می شود. با توجه به اینکه تمامی مشخصه های مکانیکی در حل ناپیر، از جابجایی شعاعی بدست می آیند، بنابراین پیوستگی جابجایی شعاعی یکی از شروط اساسی می باشد. از طرفی با توجه به اینکه به پیوستگی کرنش های حرارتی و شیب تابع جابجایی در معادلات نیاز داریم پیوستگی تنش شعاعی نیز می تواند یکی دیگر از معادلات پیوستگی بین حلقه ای باشد. با توجه به اینکه تمامی عوامل موجود در تنش شعاعی در تنش محیطی وجود دارد لذا نیاز به قراردادن تنش های محیطی در شرایط پیوستگی وجود ندارد و تنش محیطی در صورت پیوستگی تنش شعاعی، پیوسته خواهد بود.

با توجه به توضیحات ارائه شده، شرایط پیوستگی به شکل زیر تعریف می شود:

$$u_r^{[k]} \Big|_{r=\frac{r^{[k]}+r^{[k+1]}}{2}} = u_r^{[k+1]} \Big|_{r=\frac{r^{[k]}+r^{[k+1]}}{2}} \quad (۶۱-۳)$$

$$\sigma_r^{[k]} \Big|_{r=\frac{r^{[k]}+r^{[k+1]}}{2}} = \sigma_r^{[k+1]} \Big|_{r=\frac{r^{[k]}+r^{[k+1]}}{2}}$$

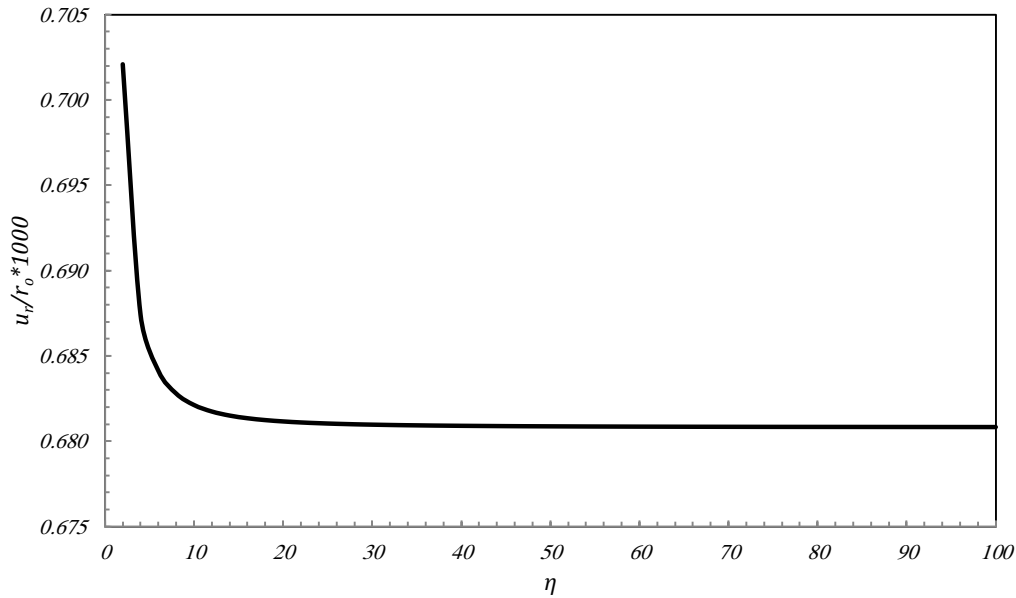
با اعمال شرایط مرزی فوق یک دستگاه معادله ی $2(\eta-1) \times 2(\eta-1)$ به وجود می آید که به همراه دو معادله ی مرزی در حلقه ی داخلی و خارجی به دستگاه معادلات $2\eta \times 2\eta$ می رسیم که با حل آن 2η ثابت مجهول محاسبه و معادلات حاکم در هر حلقه بدست می آیند

۳- ۵ بررسی نتایج حل دیسک همگن با تابع ضخامت نمایی

در این قسمت به بررسی یک نمونه از این دیسک همگن مطابق جداول ۱-۱ و ۲-۱ و با توجه به شرایط مرزی مطابق جدول ۳-۱ پرداخته می شود.

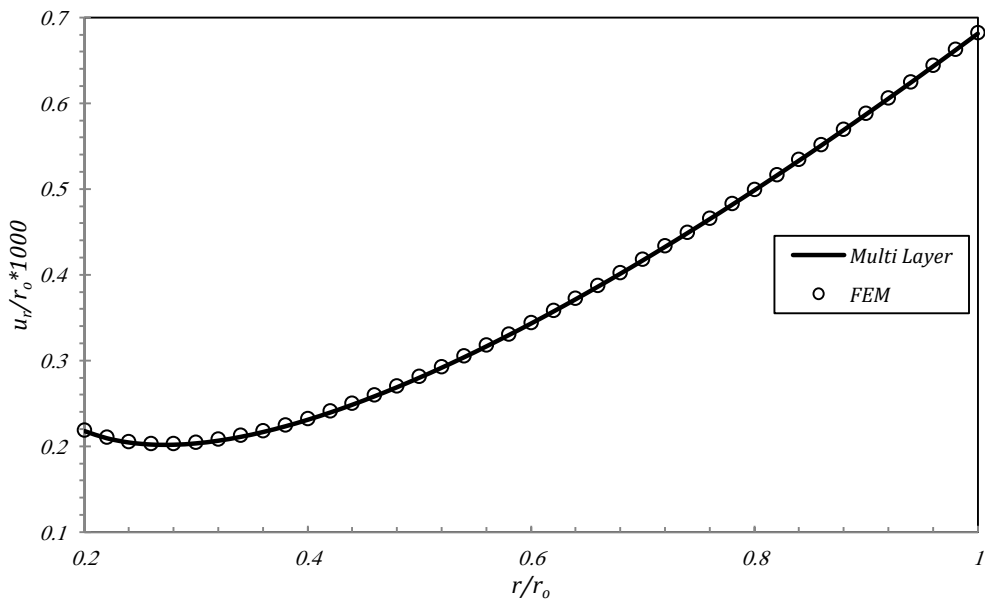
۳- ۵- ۱ بررسی اعتبار حل نیمه تحلیلی

از لحاظ معادلات حاکم هر چه تعداد حلقه ها بیشتر باشد ساده سازی به واقعیت نزدیک تر خواهد بود ولی خطای محاسباتی محدودیتی برای این نمودار نزولی خطا ایجاد می کند بطوریکه با افزایش حلقه ها خطای محاسباتی افزایش می یابد همچنین سبب افزایش حجم محاسبات خواهد شد. بنابراین برای بررسی تعداد لایه بهینه ابتدا مسئله را به ازای تعداد لایه های مختلف حل می کنیم و یکی از پارامترها را بعنوان پارامترها هدف تعیین می-کنیم و رفتار آن را با افزایش حلقه ها بررسی می کنیم. شکل ۳-۲۰ استقلال جابجایی بیشینه را در دیسک همگن از حلقه های فرضی بررسی می کند.

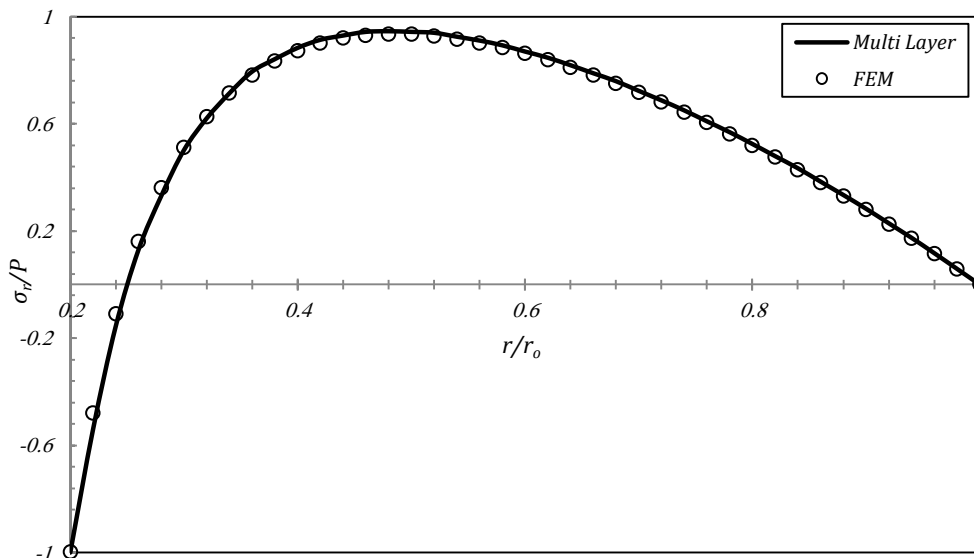


شکل ۳-۲۰: بررسی استقلال از حلقه ها برای دیسک همگن با تابع ضخامت نمایی ($h_i/h_o=2$)

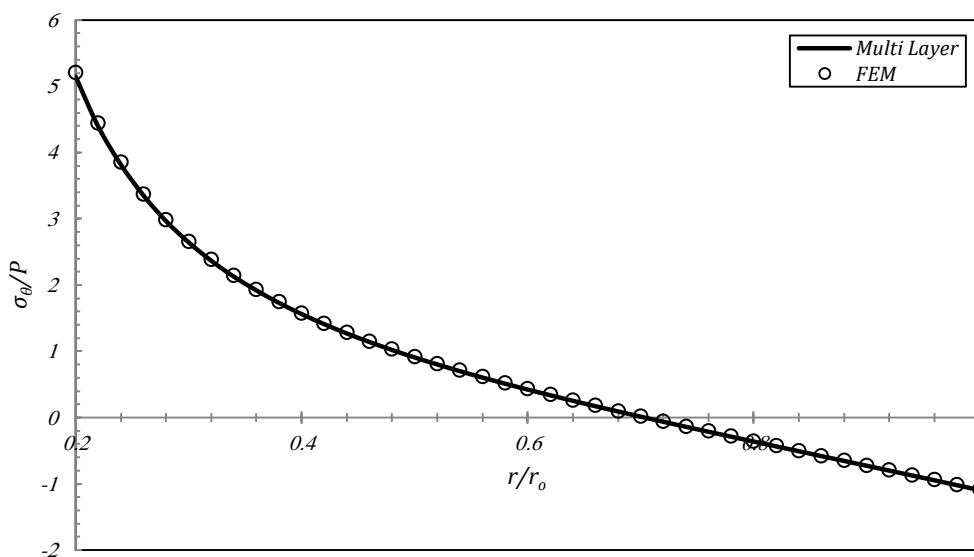
ملاحظه می شود پس از سی حلقه شیب نمودار افقی شده است، بنابراین در این قسمت از چهل حلقه برای مدل سازی دیسک استفاده شده است. شکل های زیر نتایج بدست آمده در تنش ها و جابجایی شعاعی با استفاده از دو روش را نمایش می دهند:



شکل ۳-۲۱: توزیع جابجایی شعاعی در دیسک همگن با پروفیل نمایی ($h_i/h_o=2$)



شکل ۳-۲۲: توزیع تنش شعاعی در دیسک همگن با پروفیل نمایی ($h_i/h_o=2$)



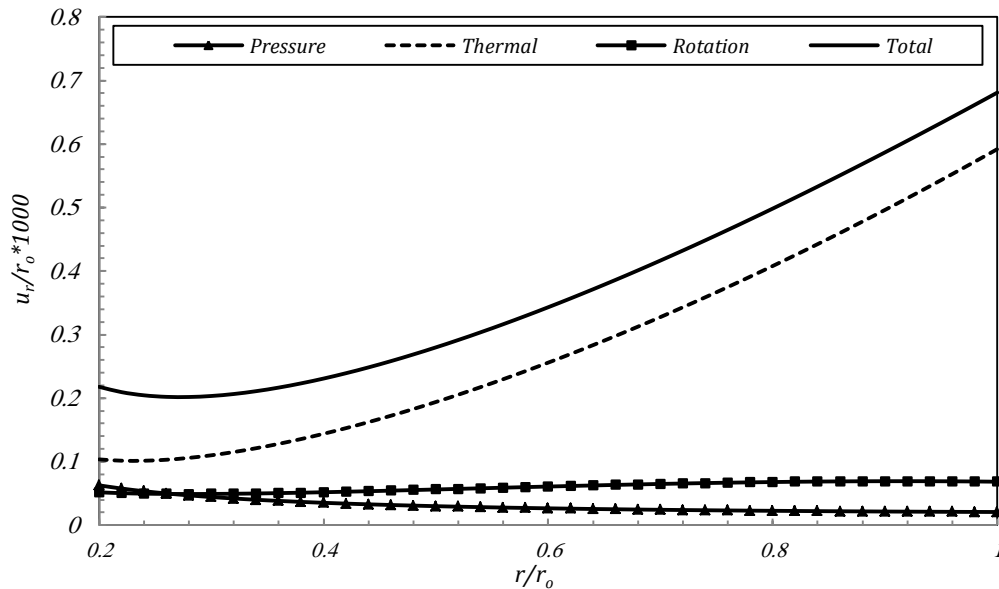
شکل ۳-۲۳: توزیع تنش محیطی در دیسک همگن با پروفیل نمایی ($h_i/h_o=2$)

در شکل‌های فوق مشاهده می‌شود که نحوه‌ی تغییرات مشخصه‌های مکانیکی در دو روش مشابه یکدیگر می‌باشند. با توجه به اینکه هر دو حل ارائه شده نیاز به اعتبار سنجی دارند می‌توان با انطباق نتایج بدست آمده را با حل دقیق در قسمت‌های گذشته پذیرفت که مدل سازی بدرستی در نرم‌افزار انجام شده است لذا حل نیمه تحلیلی نیز نتایج را بدرستی ارائه داده است.

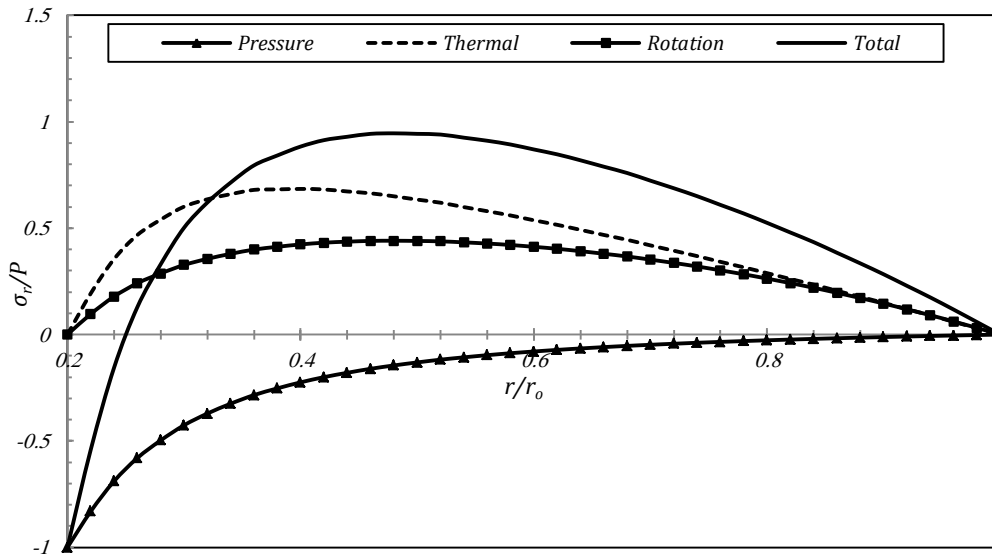
۳ - ۵ - ۲ بررسی تاثیر هر بارگذاری در توزیع مشخصه های مکانیکی

با توجه به اینکه خروجی حل نیمه تحلیلی یک تابع چند ضابطه‌ای عددی است نمی توان از روی نتایج بدست آمده در مورد تاثیر یا عدم تاثیر هریک از بارگذاری‌ها بر روی یکدیگر اظهار نظر کرد. در بخش قبل مشاهده شد که برای دیسک همگن با تابع ضخامت توانی هریک از بارگذاری‌ها به صورت مستقل تاثیر در جابجایی شعاعی و تنش های منتج از آن دارد. با توجه به اینکه تغییری در خواص وارد نشده است می توان بیان کرد که در دیسک همگن با پروفیل نمایی نیز اصل جمع آثار صادق است.

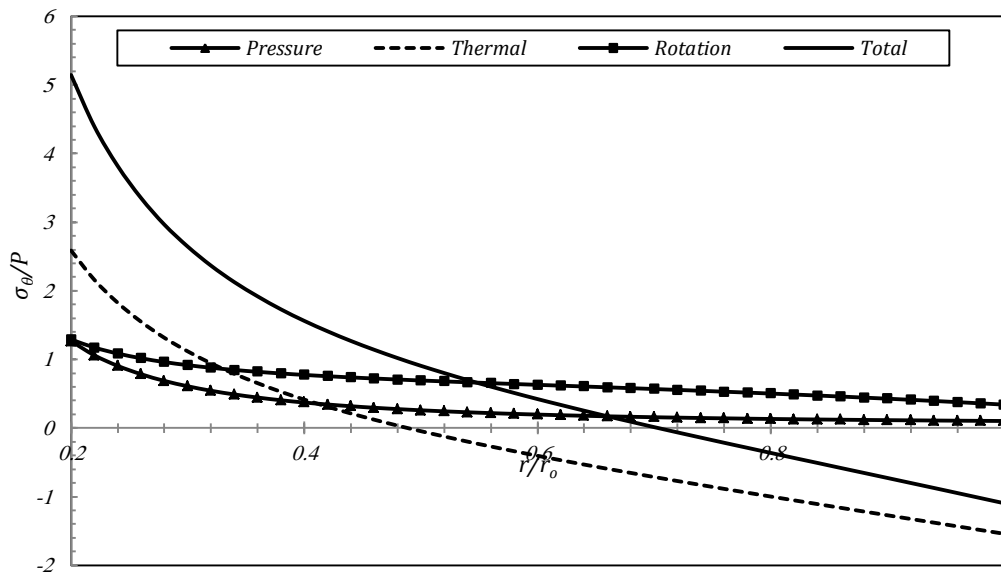
از طرفی با توجه به اینکه در بارگذاریهای اعمال شده در این بخش هیچ تغییری انجام نشده است لذا می توان انتظار داشت که تاثیر هریک از بارگذاریها مشابه پروفیل توانی باشد که در قسمت قبل نتایج آن بررسی شد. لذا جهت تکمیل مطالب ارائه شده، در اینجا فقط نمودارهای آن آورده شده است و در قسمت جمع بندی فصل با استفاده از جداول نتایج تجزیه تحلیل خواهند شد. شکل‌های زیر به نمایش تاثیر هریک از بارگذاری‌ها می پردازد:



شکل ۳-۲۴: نحوه ی توزیع جابجایی شعاعی در بارگذاریهای مختلف ($h_i/h_0=2$)



شکل ۳-۲۵: نحوه ی توزیع تنش شعاعی در بارگذاریهای مختلف ($h_i/h_0=2$)

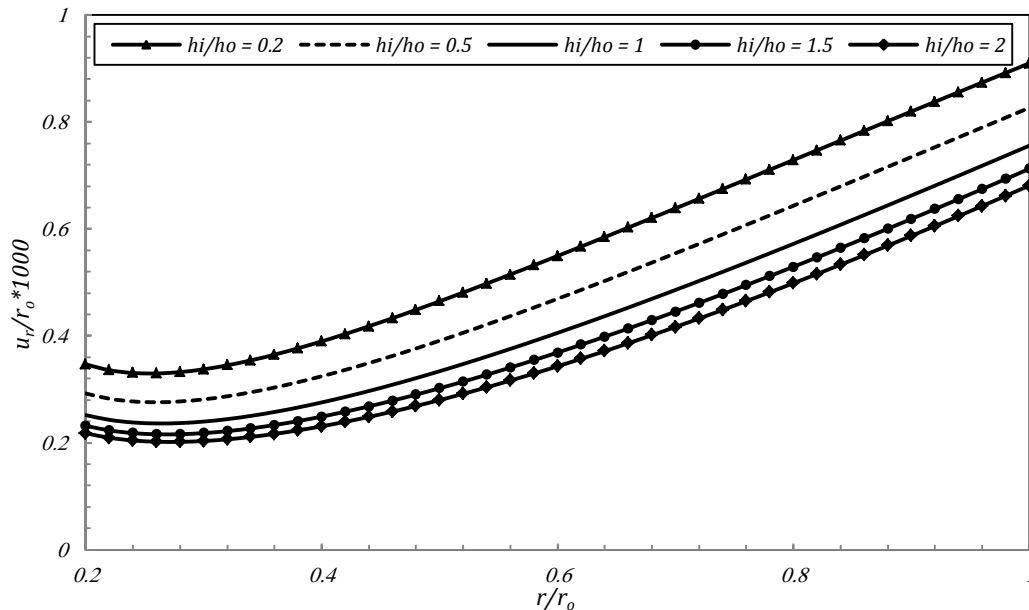


شکل ۳-۲۶: نحوه ی توزیع تنش محیطی در بارگذاریهای مختلف ($h_i/h_0=2$)

ملاحظه می شود در دیسک با ضخامت متغیر نیز بارگذاری حرارتی غالبترین بارگذاری می باشد و نحوه ی تغییرات خواص مشابه دیسک با ضخامت ثابت می باشد.

۳ - ۵ - ۳ بررسی تاثیر نسبت ضخامت دیسک در توزیع مشخصه های مکانیکی

در اینجا برای دیسک همگن با پروفیل نمایی به بررسی تاثیر نسبت ضخامت های مختلف در نتایج پرداخته می شود. شکل ۲۷-۳ توزیع جابجایی شعاعی را به ازای نسبت های مختلف ضخامت نشان می دهد:

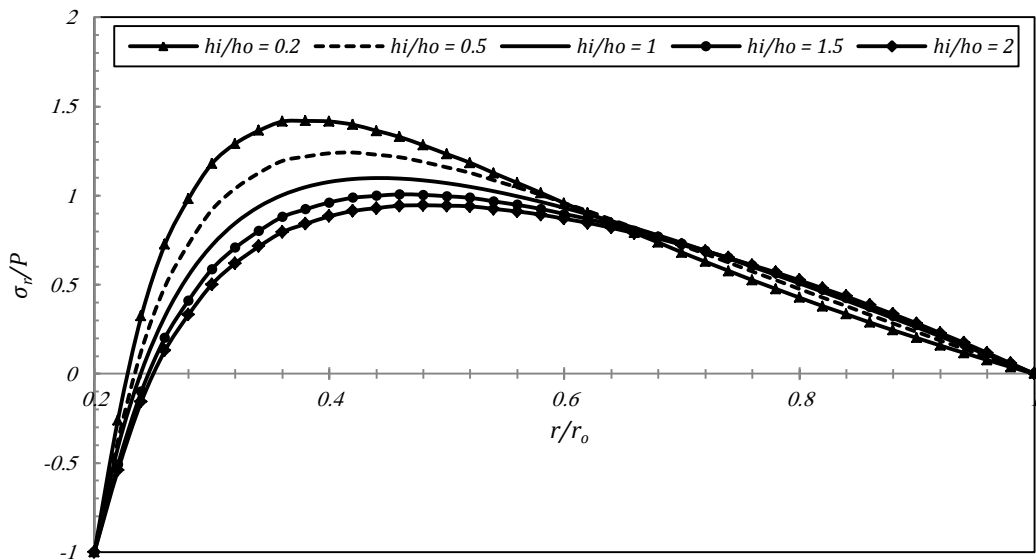


شکل ۲۷-۳: نحوه ی توزیع جابجایی شعاعی در دیسک همگن با پروفیل نمایی

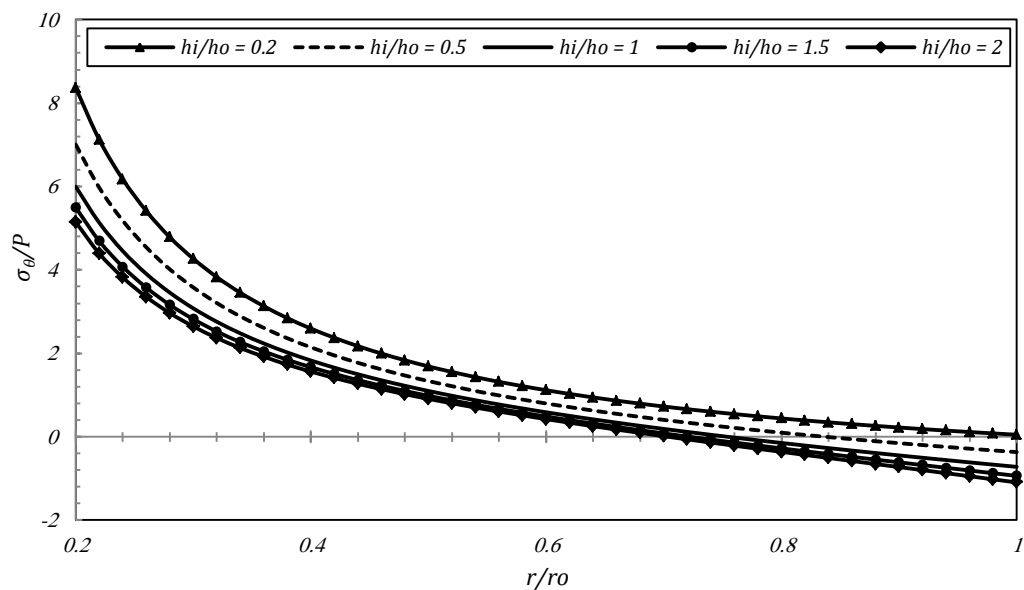
مشاهده می شود مشابه پروفیل توانی با افزایش نسبت ضخامت جابجایی شعاعی کاهش می یابد. در واقع با افزایش نسبت ضخامت، دیسک در مقابل بارگذاری مقاومتر شده و جابجایی شعاعی در آن کاهش می یابد.

نکته ی قابل توجه در دیسک با ضخامت متغیر اینست که صرف نظر از نوع پروفیل که می تواند توانی یا نمایی باشد، نحوه ی تغییرات به ازای نسبت های ضخامت متفاوت، مشابه یکدیگر بوده و نوع پروفیل فقط در مقادیر تاثیر گذار است که با توجه به اینکه معادلات از جابجایی استخراج می شود قابل پیش بینی بود که در تنش ها رفتار به این شکل باشد.

شکل های ذیل توزیع تنش نرمال شعاعی و محیطی را در راستای شعاع دیسک به ازای نسبت های ضخامت متفاوت نمایش می دهند:



شکل ۲۸-۳: نحوه ی توزیع تنش شعاعی در دیسک همگن با پروفیل نمایی

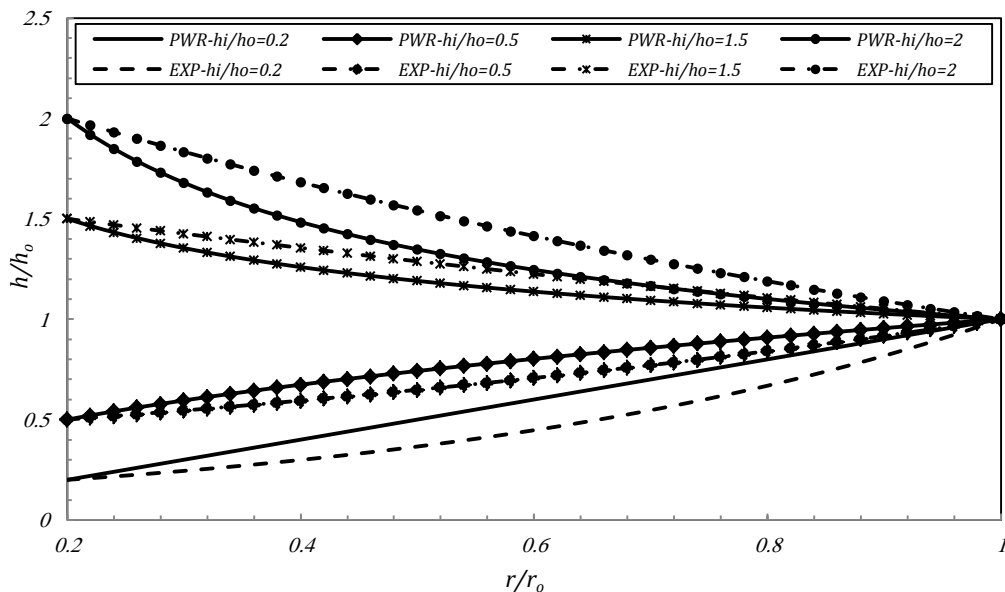


شکل ۲۹-۳: نحوه ی توزیع تنش محیطی در دیسک همگن با پروفیل نمایی

مشاهده می شود مشابه دیسک با پروفیل توانی، کاهش مقدار بیشینه تنش شعاعی و دور شدن محل تنش بیشینه شعاعی از نقطه بحرانی تنش به ازای h_i/h_o های بزرگتر از صفر اتفاق می افتد. همچنین به ازای افزایش نسبت ضخامت کاهش تنش محیطی نیز مشاهده می شود که به هدف مورد نظر نزدیک شده است. در ادامه به مقایسه دو پروفیل پرداخته می شود.

۳ - ۵ - ۴ مقایسه نتایج پروفیل توانی و نمایی

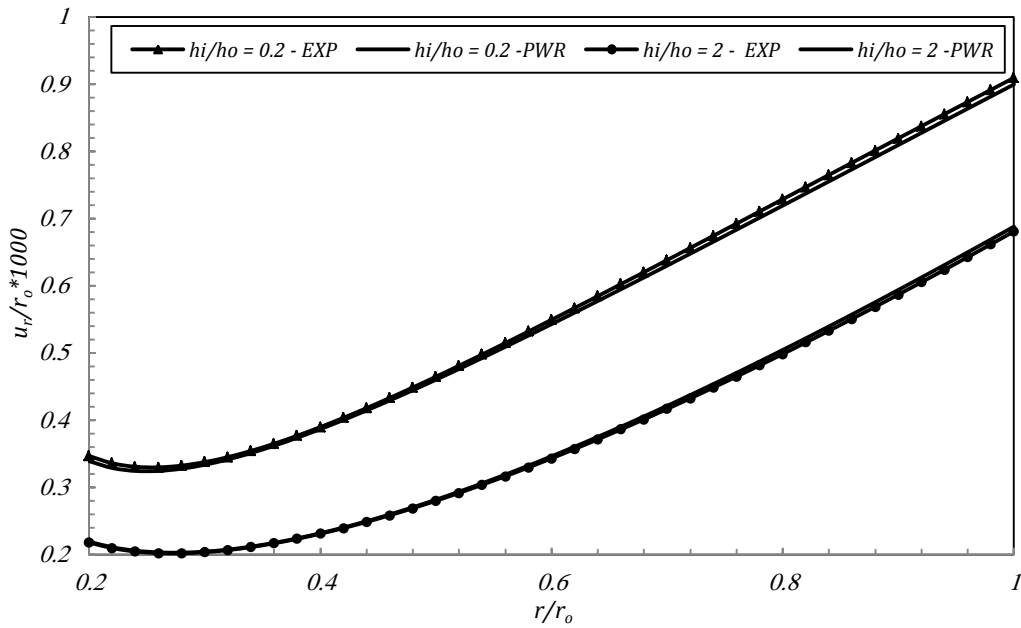
در این بخش به مقایسه دو پروفیل نمایی و توانی پرداخته می شود. فصل مشترک دو دیسک همگن بودن آنها است و وجه تمایز آن‌ها پروفیل تعریف شده بین دو ضخامت تعریف شده است. شکل ۳-۳۰ پروفیل دو تابع را در چند نسبت ضخامت مشابه نشان داده است:



شکل ۳-۳۰: مقایسه ی پروفیل های ضخامت نمایی و توانی

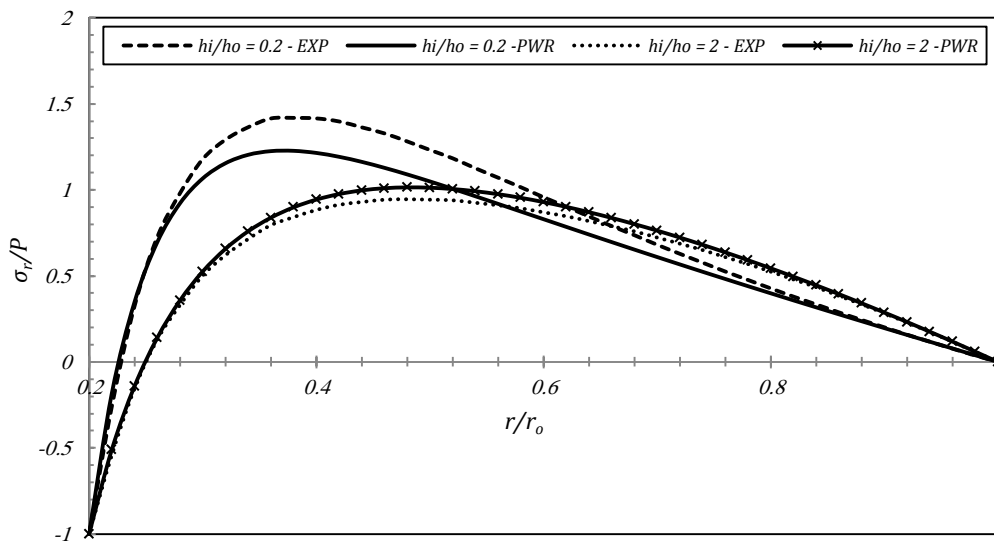
ملاحظه می شود که پروفیل ها به ازای مقادیر نسبت های مختلف دارای شیب تغییرات متفاوت نسبت به یکدیگر می باشند. در حالت کلی می توان گفت که در لایه های داخلی و میانی دارای شیب تغییرات بیشتری است.

شکل ۳-۳۱ نتایج جابجایی شعاعی را در دیسک های همگن با پروفیل توانی و نمایی نشان می دهد. جهت جلوگیری از تعدد نمودارها از نسبت ضخامت بزرگتر از یک، یک نمونه و از نسبت ضخامت کوچکتر از یک نیز یک نمونه آورده شده است:



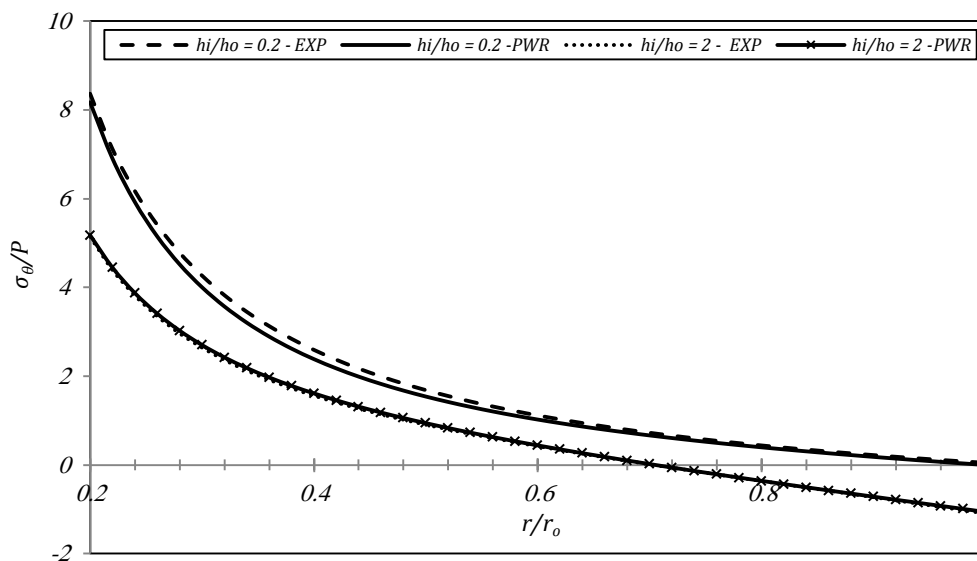
شکل ۳-۳۱: مقایسه توزیع جابجایی شعاعی در پروفیل ضخامت نمایی و توانی

ملاحظه می‌شود که پروفیل نمایی به ازای مقادیر h_i/h_o بزرگتر از یک جابجایی شعاعی کمتری نسبت به پروفیل توانی دارد و به ازای مقادیر h_i/h_o کوچکتر از یک جابجایی شعاعی بیشتری نسبت به پروفیل توانی دارد. شکل ۳-۳۲ توزیع تنش نرمال شعاعی را در دیسک های همگن با پروفیل توانی و نمایی نشان می‌دهد.



شکل ۳-۳۲: مقایسه مقادیر تنش شعاعی در پروفیل ضخامت نمایی و توانی

نتایج ارائه شده بیانگر این مطلب است که دیسک با پروفیل نمایی به ازای h_i/h_o بزرگتر از یک بیشینه تنش شعاعی کمتر و در محلی دورتر از شعاع داخلی نسبت به پروفیل توانی اتفاق می افتد که باتوجه به اینکه برای این حالت جابجایی شعاعی کمتری مشاهده می شود این روند منطقی به نظر می رسد. همچنین در پروفیل نمایی به ازای h_i/h_o کوچکتر از یک تنش شعاعی بیشتری نسبت به پروفیل توانی دارد. شکل ۳-۳۳ توزیع تنش نرمال محیطی را در دیسک های همگن با پروفیل توانی و نمایی نشان می دهد.



شکل ۳-۳۳: مقایسه مقادیر تنش محیطی در پروفیل ضخامت نمایی و توانی

شکل ۳-۳۳ نشان می دهد که مشابه تنش شعاعی در دیسک با پروفیل نمایی به ازای h_i/h_o بزرگتر از یک بیشینه تنش محیطی از پروفیل توانی کمتر می باشد که باتوجه به مطالب ارائه شده این موضوع مطلوب می باشد. بنابراین می توان نتیجه گرفت برای h_i/h_o بزرگتر از یک که کاربردی تر می باشد، پروفیل نمایی که شیب تغییرات ضخامت نرمتری دارد، مناسب تر از پروفیل توانی است. همچنین به ازای h_i/h_o کوچکتر از یک پروفیل توانی مناسب تر است که شیب نرمتری نسبت به پروفیل نمایی دارد. بنابراین می توان نتیجه گرفت که یکنواختی پروفیل رابطه مستقیم با تنش های بدست آمده دارد. لازم به ذکر است که نتیجه گیری انجام شده برای

بارگذاری عمومی می‌باشد و می‌بایست برای هر بارگذاری به تفکیک شرایط بررسی و نتایج ارائه گردند که در قسمت بعد به آن پرداخته می‌شود.

۳-۶ جمع بندی

در ابتدای این بخش به معرفی پروفیل های موجود در مقالات و کتب مهندسی پرداخته شد، سپس با توجه به نوع حل دو نوع پروفیل نمایی و توانی برای تحلیل تعیین شد.

در گام دوم دیسک همگن با تابع ضخامت توانی تحلیل و حل دقیق برای آن ارائه گردید. جدول ۱-۳ به اختصار نتایج جابجایی شعاعی بدست آمده در این بخش را نشان می‌دهد:

جدول ۱-۳: حل پارامتریک دیسک همگن با پروفیل توانی

$u_r = C_1 r^{\frac{1}{2}(-m + \sqrt{m^2 - 4m\nu + 4})} + C_2 r^{\frac{1}{2}(-m - \sqrt{m^2 - 4m\nu + 4})} + \left(\frac{(\nu^2 - 1)\rho_0 \omega^2}{(8 + (3 + \nu)m)E_0} \right) r^3 + \left(\frac{\alpha_0 r_o^m (T_o - T_i)}{(r_o^m - r_i^m)} \right) r$		دیسک همگن با پروفیل توانی
$C_1 = \frac{r_o r_i \alpha_0 (1 + \nu)(T_o - T_i)}{(\lambda_1 + \nu)(r_o^{\lambda_2} r_i^{\lambda_1} - r_o^{\lambda_1} r_i^{\lambda_2})} \times \left\{ \frac{(r_i^{\lambda_2 - 1} - r_o^{\lambda_2 - 1})}{(r_o^m - r_i^m)} r_o^m - r_i^{\lambda_2 - 1} \right\}$	$C_2 = \frac{r_o r_i \alpha_0 (1 + \nu)(T_o - T_i)}{(\lambda_2 + \nu)(r_o^{\lambda_2} r_i^{\lambda_1} - r_o^{\lambda_1} r_i^{\lambda_2})} \times \left\{ \frac{(r_o^{\lambda_1 - 1} - r_i^{\lambda_1 - 1})}{(r_o^m - r_i^m)} r_o^m + r_i^{\lambda_1 - 1} \right\}$	گرادیان حرارتی
$C_1 = -\frac{Pr_i r_o^{\lambda_2} (1 - \nu^2)}{E_0 (\lambda_1 + \nu)(r_o^{\lambda_2} r_i^{\lambda_1} - r_o^{\lambda_1} r_i^{\lambda_2})}$	$C_2 = \frac{P(1 - \nu^2)r_o^{\lambda_1} r_i}{E_0 (\lambda_2 + \nu)(r_o^{\lambda_2} r_i^{\lambda_1} - r_o^{\lambda_1} r_i^{\lambda_2})}$	فشار داخلی
$C_1 = \frac{\rho_0 \omega^2 (\nu^2 - 1)(3 + \nu)(r_i^{\lambda_2} r_o^3 - r_o^{\lambda_2} r_i^3)}{E_0 (8 + (3 + \nu)m)(\lambda_1 + \nu)(r_o^{\lambda_2} r_i^{\lambda_1} - r_o^{\lambda_1} r_i^{\lambda_2})}$	$C_2 = \frac{\rho_0 \omega^2 (\nu^2 - 1)(3 + \nu)(r_o^{\lambda_1} r_i^3 - r_i^{\lambda_1} r_o^3)}{E_0 (8 + (3 + \nu)m)(\lambda_2 + \nu)(r_o^{\lambda_2} r_i^{\lambda_1} - r_o^{\lambda_1} r_i^{\lambda_2})}$	دوران

جدول ۲-۳ نتایج حاصل از تحلیل دیسک همگن با پروفیل توانی به تفکیک بارگذاری را نشان می دهد.

جدول ۲-۳: نتایج حل دیسک همگن با پروفیل توانی به تفکیک بارگذاری

تنش معادل بیشینه		جابجایی بیشینه		نوع بارگذاری	
مقدار [MPa]	شعاع [mm]	مقدار [mm]	شعاع [mm]		
۱۹۷/۳	۲۰	۰/۰۷۸	۱۰۰	گرادیان حرارتی	$h_i/h_o=0.2$
۵۴/۸	۲۰	۰/۰۰۰۸	۱۰۰	فشار داخلی	
۱۰۷/۱	۲۰	۰/۰۱۱	۸۰	دوران	
۳۸۴/۶	۲۰	۰/۰۹۰	۱۰۰	مجموع	
۱۳۱/۶	۲۰	۰/۰۶۶	۱۰۰	گرادیان حرارتی	$h_i/h_o=1$
۷۲/۲	۲۰	۰/۰۰۱۶	۱۰۰	فشار داخلی	
۶۴/۹	۲۰	۰/۰۰۸	۸۸	دوران	
۲۶۲/۱	۲۰	۰/۰۷۵	۱۰۰	مجموع	
۱۰۱/۴	۲۰	۰/۰۵۹۶	۱۰۰	گرادیان حرارتی	$h_i/h_o=2$
۸۲/۳	۲۰	۰/۰۰۲۲	۱۰۰	فشار داخلی	
۶۰	۲۰	۰/۰۰۷۰	۹۰	دوران	
۲۲۹/۷	۲۰	۰/۰۶۸۸	۱۰۰	مجموع	

نتایج ارائه شده نشان می‌دهد برای بارگذاری‌های حرارتی و دوران افزایش ضخامت دیسک سودمند می‌باشد ولی در اعمال فشار داخلی افزایش ضخامت در لایه‌های داخلی نه تنها نمی‌تواند سودمند باشد بلکه تنش معادل را افزایش می‌دهد. برای بارگذاری عمومی هم نیز نمی‌توان با اطمینان گفت که همواره افزایش ضخامت در لایه‌ی داخلی سبب کاهش تنش می‌شود و به نقش هریک از بارگذاری‌ها مرتبط است.

جدول ۳-۳: نتایج حل دیسک همگن با پروفیل نمایی به تفکیک بارگذاری

تنش معادل بیشینه		جابجایی بیشینه		نوع بارگذاری	
مقدار [MPa]	شعاع [mm]	مقدار [mm]	شعاع [mm]		
۱۹۵/۶	۲۰	۰/۰۷۸	۱۰۰	گرادیان حرارتی	$h_i/h_o=0.2$
۵۹/۹	۲۰	۰/۰۰۰۱	۱۰۰	فشار داخلی	
۱۰۹/۶	۲۰	۰/۰۱۲	۸۰	دوران	
۳۵۵/۷	۲۰	۰/۰۹۱	۱۰۰	مجموع	
۱۳۱/۶	۲۰	۰/۰۶۶	۱۰۰	گرادیان حرارتی	$h_i/h_o=1$
۷۲/۲	۲۰	۰/۰۰۱۶	۱۰۰	فشار داخلی	
۶۴/۹	۲۰	۰/۰۰۸	۸۸	دوران	
۲۶۲/۱	۲۰	۰/۰۷۵	۱۰۰	مجموع	
۱۰۳/۱	۲۰	۰/۰۵۹	۱۰۰	گرادیان حرارتی	$h_i/h_o=2$
۷۸/۴	۲۰	۰/۰۰۲	۱۰۰	فشار داخلی	
۵۱/۴	۲۰	۰/۰۰۷	۹۰	دوران	
۲۲۷/۶	۲۰	۰/۰۶۸	۱۰۰	مجموع	

در آخرین قسمت در این فصل دیسک همگن با تابع ضخامت نمایی تحلیل و با توجه به عددی بودن حل حرارتی، با روشی نیمه تحلیلی مسئله حل گردید. در این روش دیسک با ضخامت متغیر به حلقه‌هایی پیوسته و با ضخامت ثابت تقسیم و معادلات حل گردیدند. جدول ۳-۳ به اختصار نتایج بدست آمده در این بخش را به تفکیک بارگذاری نشان می‌دهد.

نتایج ارائه شده نشان می‌دهد مشابه پروفیل توانی برای بارگذاریهای حرارتی و دوران افزایش ضخامت دیسک سبب کاهش تنش معادل شده و اعمال فشار داخلی سبب افزایش تنش معادل شده است با مقایسه تنشهای بدست آمده می‌توان برای h_i/h_o های مختلف نتایج زیر را استخراج نمود:

الف) h_i/h_o بزرگتر از یک: در این نسبت ضخامت که هدف اصلی پرداختن به این فصل می‌باشد در بارگذاری حرارتی پروفیل توانی مناسبتر از پروفیل نمایی است بطوریکه با افزایش گرادیان حرارتی از ۷۵ به ۱۷۵ درجه مجموع تنش های معادل در پروفیل توانی از پروفیل نمایی کمتر می‌شوند. ولی تحت شرایط فشار داخلی و دوران پروفیل نمایی از پروفیل توانی مناسبتر است. با توجه به این توضیحات می‌توان نتیجه گرفت که برای هر مسئله می‌بایست ابتدا مسئله تحلیل و سپس نوع دیسک انتخاب شود.

ب) h_i/h_o کوچکتر از یک: در این حالت که صرفاً جهت تکمیل مطالعات آورده شده است، تمامی نتایج عکس حالت الف می‌باشد.

در این فصل نشان داده شد که با افزایش ضخامت در لایه‌ی داخلی می‌توان تنش را در دیسک کاهش داد. در فصل قبل نیز نتیجه گرفته شد استفاده از مواد FG سبب کاهش تنش خواهد شد. بنابراین در فصل آینده به بررسی دیسک‌های با ضخامت متغیر ساخته شده از مواد FG پرداخته می‌شود.

فصل چهارم:

تحلیل ترموالاستیک دیسک ناهمگن چرخان با ضخامت متغیر

در فصل‌های گذشته به بررسی دیسک‌های با ضخامت ثابت و ضخامت متغیر پرداخته شد و در هر گام با توجه به معادله‌ی حاکم از روشهای مختلف برای حل استفاده گردید و نتایج آن ارائه گردید. نکته‌ی قابل توجه این بود که نتایج بدست آمده با توجه به نوع بارگذاری متغیر بوده و وابسته به بارگذاری غالب می‌باشد. ولی برآیند کلی نتایج در مورد کاهش تنش‌ها با افزایش ضخامت و استفاده از ماده‌ی FG مثبت بود و استفاده از این دوتکنیک تنش‌ها را تا حد زیادی کاهش داد از این رو در این فصل به بررسی ترکیب این دو تکنیک پرداخته می‌شود.

در فصل دوم، دو تابع توزیع توانی و نمایی برای مواد FG و در فصل سوم دو تابع پروفیل توانی و نمایی معرفی شدند. همان‌طور که مشاهده شد همواره در مدل‌سازی دیسک‌ها با معادلات معمول مواجه نخواهیم شد. بعنوان مثال وجود عامل نمایی در پروفیل یا خواص سبب ایجاد مشکل در حل حرارتی می‌شود و به انتگرالی منتهی می‌شود که حل دقیقی برای آن وجود ندارد. لذا همواره حل دقیقی برای معادله‌ی ترموالاستیک حاکم بر دیسک‌ها وجود نخواهد داشت و کاملاً وابسته به نتایج استخراج شده خواهد بود.

با توجه به اینکه دو نوع پروفیل و تابع توزیع خواص داریم، لذا چهار حالت از ترکیب تابع توزیع و پروفیل بدست می‌آید که در این فصل به بررسی این چهار حالت پرداخته می‌شود و معادله‌ی ترموالاستیک حاکم متناسب با نوع معادله با یک روش‌های تحلیلی و نیمه تحلیلی قابل قبول حل می‌شود و نتایج آن با حل عددی مقایسه شده و بر روی نتایج بدست آمده بحث خواهد شد.

در انتهای فصل نیز برای مقایسه بین چهار حالت ارائه شده، یک حالت خاص از توابع توزیع خواص و پروفیل تعریف شده و نتایج آن در جدول ارائه شده و تجزیه تحلیل شده و تحت شرایط هر بارگذاری پروفیل بهینه و تابع توزیع متناسب با آن انتخاب می‌شود.

۴-۲ حل دیسک با ضخامت متغیر توانی FG با توزیع توانی

معادله‌ی توزیع خواص و تغییرات ضخامت با استفاده از تابع توانی به شکل زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$E(r) = E_i \left(\frac{r}{r_i} \right)^n, \rho(r) = \rho_i \left(\frac{r}{r_i} \right)^n, \alpha(r) = \alpha_i \left(\frac{r}{r_i} \right)^n, k(r) = k_i \left(\frac{r}{r_i} \right)^n, h(r) = h_o \left(\frac{r}{r_o} \right)^m \quad (۱-۴)$$

که در آن E_i مدول الاستیسیته، ρ_i چگالی در، α_i ضریب انبساط حرارتی و k_i ضریب هدایت حرارتی در شعاع داخلی r_i و h_o ضخامت در شعاع خارجی می باشد. با ضرب طرفین معادله‌ی دیفرانسیل (۲-۱۹) در

$$\frac{r}{h(r)E(r)}$$

ثابت معادله به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$A_1 = r^2$$

$$A_2 = (1+m+n)r$$

$$A_3 = (n+m)v-1$$

(۲-۴)

$$A_4 = r(1+v) \left\{ \frac{(1-v)\rho_i r^2 \omega^2}{E_i} - \frac{\alpha_i r^n}{r_i^n} \left(r \frac{d}{dr} (\Delta T(r)) + (2n+m)\Delta T(r) \right) \right\}$$

با توجه به مجهول بودن تابع توزیع دما برای تحلیل می بایست ابتدا معادله انتقال حرارتی حل و پس از جایگذاری در روابط فوق حل تحلیلی برای آن ارائه شود.

۴-۲-۱ حل حرارتی

معادله‌ی توزیع دما در حالت عمومی به شکل زیر می باشد:

$$\Delta T(r) = \left(\frac{\int_{r_i}^r \frac{dr}{rh(r)k(r)}}{\int_{r_i}^{r_o} \frac{dr}{rh(r)k(r)}} \right) (T_o - T_i) \quad (۳-۴)$$

با اعمال تابع پروفیل ضخامت و توزیع خواص در رابطه‌ی فوق داریم:

$$\int \frac{dr}{rh(r)k(r)} = \frac{r_i^n r_o^m}{h_o k_i} \int \frac{dr}{r^{m+n+1}} = -\frac{r_i^n r_o^m}{(m+n)h_o k_i} r^{-(m+n)} \quad (m+n \neq 0) \quad (4-4)$$

با جایگذاری حل انتگرال فوق، در معادله‌ی توزیع دما، خواهیم داشت:

$$\Delta T(r) = \left(\frac{(T_o - T_i)}{(r_o^{-(m+n)} - r_i^{-(m+n)})} \right) (r^{-(m+n)} - r_i^{-(m+n)}) \quad (5-4)$$

که با جایگذاری عبارت فوق در A_4 و ساده سازی خواهیم داشت:

$$A_4 = r(1+\nu) \left\{ \frac{(1-\nu)\rho_i r^2 \omega^2}{E_i} - \left(\frac{(T_o - T_i)\alpha_i r_i^{-n} r^n}{(r_o^{-(m+n)} - r_i^{-(m+n)})} \right) (nr^{-(m+n)} - (2n+m)r_i^{-(m+n)}) \right\} \quad (6-4)$$

بنابراین معادله‌ی دیفرانسیل حاکم به شکل زیر خواهد بود:

$$r^2 \frac{d^2 u_r}{dr^2} + (1+m+n)r \frac{du_r}{dr} + ((m+n)\nu - 1)u_r = F(r) \quad (7-4)$$

که در آن:

$$F(r) = -r(1+\nu) \left\{ \frac{(1-\nu)\rho_i r^2 \omega^2}{E_i} - \left(\frac{(T_o - T_i)\alpha_i r_i^{-n} r^n}{(r_o^{-(m+n)} - r_i^{-(m+n)})} \right) (nr^{-(m+n)} - (2n+m)r_i^{-(m+n)}) \right\} \quad (8-4)$$

می باشد. معادله‌ی فوق یک معادله‌ی ناهمگن می باشد بنابراین حل آن شامل دو حل خصوصی و عمومی می

باشد:

$$u_r = u_r^h + u_r^p \quad (9-4)$$

در قسمت بعدی به حل معادله‌ی فوق پرداخته می شود

۴ - ۲ - ۲ حل عمومی

اگر جمله خصوصی معادله‌ی (۸-۴) را حذف کنیم، معادله‌ی حاکم به صورت همگن زیر تبدیل خواهد شد:

$$r^2 \frac{d^2 u_r}{dr^2} + (1+m+n)r \frac{du_r}{dr} + ((m+n)\nu - 1)u_r = 0 \quad (10-4)$$

معادله ی فوق مشابه دیسک همگن یک معادله ی اویلر-کشی است که اگر در معادله ی فوق به جای u_r عبارت r^λ قرار دهیم معادله ی مشخصه ی زیر بدست می آید:

$$\lambda^2 + (m+n)\lambda + ((m+n)\nu - 1) = 0 \quad (11-4)$$

ریشه های معادله ی چند جمله ای درجه ی دوم فوق عبارت است:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-(m+n) \pm \sqrt{\Delta} \right) \quad (12-4)$$

که در آن:

$$\Delta = (m+n)^2 - 4(m+n)\nu + 4 \quad (13-4)$$

می باشد. مشابه معادله ی حاکم بر دیسک همگن، عبارت Δ به ازای تمامی مقادیر $(m+n)$ همواره عدد مثبتی خواهد بود در نتیجه λ همواره مقدار حقیقی خواهد داشت. بنابراین حل عمومی معادله به شکل زیر خواهد بود:

$$u_r = C_1 r^{\lambda_1} + C_2 r^{\lambda_2} \quad (14-4)$$

۴ - ۲ - ۳ حل خصوصی

عامل ناهمگنی در معادله ی دیفرانسیل حاکم ناشی از دو عامل سرعت زاویه ای و گرادیان حرارتی می باشد. مشابه دیسک همگن می توان تاثیر عامل ناهمگنی را برای هر یک به صورت مجزا بررسی نمود. بنابراین معادله ی حاکم به شکل زیر تبدیل خواهد شد:

$$r^2 \frac{d^2 u_r}{dr^2} + (1+m+n)r \frac{du_r}{dr} + ((m+n)\nu - 1)u_r = F_{rotation}(r) + F_{thermal}(r) \quad (15-4)$$

که در آن $F_{rotation}(r)$ عامل ناهمگنی ناشی از دوران که مقدار آن برابر است با:

$$F_{rotation}(r) = \frac{(\nu^2 - 1)\rho_i \omega^2}{E_i} r^3 \quad (16-4)$$

و $F_{thermal}(r)$ عامل ناهمگنی ناشی از گرادیان حرارتی که مقدار آن برابر است با:

$$F_{thermal}(r) = \left(\frac{(T_o - T_i)(1 + \nu)}{(r_o^{-(m+n)} - r_i^{-(m+n)})} \alpha_i r_i^{-n} \right) \left(nr^{1-m} - (2n + m)r_i^{-(m+n)} r^{n+1} \right) \quad (17-4)$$

بنابراین می توان حل خصوصی ناشی از این دو عامل را به صورت زیر نوشت و برای هر حالت به صورت مجزا

محاسبه نمود:

$$u_r^p = u_r^p|_{rotation} + u_r^p|_{thermal} \quad (18-4)$$

محاسبه ی حل خصوصی ناشی از دوران: مشابه حالت دیسک همگن می توان حل خصوصی را چند جمله ای

از مرتبه ی سه فرض کرد:

$$u_r^p|_{rotation} = \sum_{j=0}^3 B_j r^j \quad (19-4)$$

با جایگذاری معادله ی فوق در معادله ی حاکم و فرض $F_{thermal}(r) = 0$ خواهیم داشت:

$$B_0 = B_1 = B_2 = 0, B_3 = \frac{(\nu^2 - 1)\rho_i \omega^2}{(8 + (3 + \nu)(m + n))E_i} \quad (20-4)$$

بنابراین:

$$u_r^p|_{rotation} = \frac{(\nu^2 - 1)\rho_i \omega^2 r^3}{(8 + (3 + \nu)(m + n))E_i} \quad (21-4)$$

محاسبه ی حل خصوصی ناشی از گرادیان حرارتی: جمله مربوط به گرادیان حرارتی دارای عامل r^{1-m} و r^{1+n} می باشد لذا تشخیص حل آن به شکل عادی امکان پذیر نمی باشد و می بایست با استفاده از حل عمومی مسئله و به روش لاگرانژ حل خصوصی بدست آید. برای سادگی می توان حل خصوصی ناشی از گرادیان حرارتی را به شکل زیر تعریف کرد قابل ذکر است چون از روش لاگرانژ در این قسمت استفاده شده است معادله ی دیفرانسیل به صورت استاندارد نوشته شده و تمامی معادله به r^2 تقسیم شده است. بنابراین از علامت $F'_{thermal}(r)$ استفاده شده است:

$$F'_{thermal}(r) = \frac{1}{r} (\chi_1 r^{-m} + \chi_2 r^n) \quad (22-4)$$

که در آن:

$$\chi_1 = \frac{(T_o - T_i)(1 + \nu)\alpha_i}{(r_o^{-(m+n)} - r_i^{-(m+n)})} nr_i^{-n}, \quad \chi_2 = \frac{-(T_o - T_i)(1 + \nu)\alpha_i}{(r_o^{-(m+n)} - r_i^{-(m+n)})} (2n + m) r_i^{-(2n+m)} \quad (23-4)$$

می باشد. با توجه به مرجع [۲۹] می توان با استفاده از حل عمومی مسئله ، حل خصوصی ناشی از گرادیان دما را به صورت زیر نوشت:

$$u_r^p|_{thermal} = \mathcal{G}_1(r)r^{\lambda_1} + \mathcal{G}_2(r)r^{\lambda_2} \quad (24-4)$$

با حل دستگاه معادله ی زیر داریم:

$$\begin{cases} \mathcal{G}_1'(r)r^{\lambda_1} + \mathcal{G}_2'(r)r^{\lambda_2} = 0 \\ \mathcal{G}_1'(r)\lambda_1 r^{\lambda_1-1} + \mathcal{G}_2'(r)\lambda_2 r^{\lambda_2-1} = \frac{1}{r} (\chi_1 r^{-m} + \chi_2 r^n) \end{cases} \quad (25-4)$$

با جایگذاری رابطه ی (۲۴-۴) در دستگاه فوق خواهیم داشت:

$$\mathcal{G}_2'(r) = \frac{r^{-\lambda_2} (\chi_1 r^{-m} + \chi_2 r^n)}{(\lambda_2 - \lambda_1)}, \quad \mathcal{G}_1'(r) = -\frac{r^{-\lambda_1} (\chi_1 r^{-m} + \chi_2 r^n)}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \quad (26-4)$$

و با انتگرال گیری مقادیر $\mathcal{Q}_1(r)$ و $\mathcal{Q}_2(r)$ به شکل زیر بدست می آیند:

$$\mathcal{Q}_1(r) = \frac{-1}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \int [\chi_1 r^{-\lambda_1 - m} + \chi_2 r^{n - \lambda_1}] dr = \frac{-1}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \left[\frac{\chi_1 r^{1 - (\lambda_1 + m)}}{(1 - (\lambda_1 + m))} + \frac{\chi_2 r^{1 + n - \lambda_1}}{(1 - \lambda_1 + n)} \right] + C_1' \quad (27-4)$$

$$\mathcal{Q}_2(r) = \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \int [\chi_1 r^{-\lambda_2 - m} + \chi_2 r^{n - \lambda_2}] dr = \frac{-1}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \left[\frac{\chi_1 r^{1 - (\lambda_2 + m)}}{(1 - (\lambda_2 + m))} + \frac{\chi_2 r^{1 + n - \lambda_2}}{(1 - \lambda_2 + n)} \right] + C_2'$$

که ثوابت فوق با ثوابت همگن ترکیب می شوند، بنابراین حل خصوصی ناشی از گرادیان حرارتی به شکل زیر تبدیل خواهد شد:

$$u_r^p |_{thermal} = \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \left[-\frac{\chi_1 r^{1-m}}{(1 - (\lambda_1 + m))} - \frac{\chi_2 r^{1+n}}{(1 - \lambda_1 + n)} + \frac{\chi_1 r^{1-m}}{(1 - (\lambda_2 + m))} + \frac{\chi_2 r^{1+n}}{(1 - \lambda_2 + n)} \right] \quad (28-4)$$

پس از ساده سازی خواهیم داشت:

$$u_r^p |_{thermal} = \left(\frac{1}{(1 - (\lambda_1 + m))(1 - (\lambda_2 + m))} \right) \chi_1 r^{1-m} + \left(\frac{1}{(1 - \lambda_1 + n)(1 - \lambda_2 + n)} \right) \chi_2 r^{1+n} \quad (29-4)$$

حال با جایگذاری ثوابت و مقادیر λ_i در معادله ی فوق داریم:

$$u_r^p |_{thermal} = \frac{(T_o - T_i)(1 + \nu)\alpha_i}{(r_o^{-(m+n)} - r_i^{-(m+n)})} \times \left\{ \left(\frac{nr_i^{-n}}{n(m-1-\nu) + m(\nu-1)} \right) r^{1-m} - \left(\frac{(2n+m)r_i^{-(2n+m)}}{2n^2 + n(3+\nu+m) + m(1+\nu)} \right) r^{1+n} \right\} \quad (30-4)$$

با توجه به معادلات (30-4) و (21-4) حل خصوصی معادله بدست می آید:

$$u_r^p = u_r^p |_{rotation} + u_r^p |_{thermal} = \frac{(\nu^2 - 1)\rho_i \omega^2 r^3}{(8 + (3 + \nu)(m + n))E_i} + \frac{(T_o - T_i)(1 + \nu)\alpha_i}{(r_o^{-(m+n)} - r_i^{-(m+n)})} \left\{ \left(\frac{nr_i^{-n}}{n(m-1-\nu) + m(\nu-1)} \right) r^{1-m} - \left(\frac{(2n+m)r_i^{-(2n+m)}}{2n^2 + n(3+\nu+m) + m(1+\nu)} \right) r^{1+n} \right\} \quad (31-4)$$

و حل کلی مسئله نیز به شکل زیر خواهد بود:

$$u_r = C_1 r^{\frac{1}{2} \left(-(m+n) + \sqrt{(m+n)^2 - 4(m+n)v+4} \right)} + C_2 r^{\frac{1}{2} \left(-(m+n) - \sqrt{(m+n)^2 - 4(m+n)v+4} \right)} + \frac{(v^2 - 1)\rho_i \omega^2 r^3}{(8 + (3+v)(m+n))E_i} + \frac{(T_o - T_i)(1+v)\alpha_i}{(r_o^{-(m+n)} - r_i^{-(m+n)})} \left\{ \left(\frac{-nr_i^{-n}}{n(m-1-v) - m(v-1)} \right) r^{1-m} - \left(\frac{(2n+m)r_i^{-(2n+m)}}{2n^2 + n(3+v+m) + m(1+v)} \right) r^{1+n} \right\} \quad (32-4)$$

معادله‌ی فوق دارای دو ثابت مجهول است بنابراین برای استخراج نتایج نیازمند دو شرط مرزی می‌باشد که در قسمت بعد به محاسبه‌ی این ثابت‌ها پرداخته می‌شود.

۴ - ۲ - ۴ اعمال شرایط مرزی

برای ساده سازی عبارات، معادله‌ی جابجایی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$u_r = C_1 r^{\lambda_1} + C_2 r^{\lambda_2} + D_1 r^3 + D_2 r^{1+n} + D_3 r^{1-m} \quad (33-4)$$

بدین ترتیب مشتق آن برابر است با:

$$\frac{du_r}{dr} = C_1 \lambda_1 r^{\lambda_1-1} + C_2 \lambda_2 r^{\lambda_2-1} + 3D_1 r^2 + (1+n)D_2 r^n + (1-m)D_3 r^{-m} \quad (34-4)$$

با توجه به شکل (۳-۸) دیسک مورد تحلیل تحت فشار داخلی قرار دارد شرایط مرزی مطابق رابطه‌ی (۳-۳۵) می‌باشد که بر حسب تنش‌ها می‌باشد. بنابراین با توجه به معادله (۲-۱۷) و روابط بالا داریم:

$$\sigma_r = \frac{E_i r^n}{(1-v^2)r_i^n} \left((\lambda_1 + v)C_1 r^{\lambda_1-1} + (\lambda_2 + v)C_2 r^{\lambda_2-1} + (3+v)D_1 r^2 + D_2(1+v+n)r^n + (1-m+v)D_3 r^{-m} - \left(\frac{(T_o - T_i)(1+v)\alpha_0 r^n}{(r_o^{-(m+n)} - r_i^{-(m+n)})r_i^n} \right) (r^{-(m+n)} - r_i^{-(m+n)}) \right) \quad (35-4)$$

با توجه به رابطه‌ی فوق شرایط مرزی به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_r|_{r=r_i} = \frac{E_i}{(1-\nu^2)} \left((\lambda_1 + \nu)C_1 r_i^{\lambda_1 - 1} + (\lambda_2 + \nu)C_2 r_i^{\lambda_2 - 1} + (3 + \nu)D_1 r_i^2 \right. \\ \left. + D_2(1 + \nu + n)r_i^n + (1 - m + \nu)D_3 r_i^{-m} \right) = -P \\ \sigma_r|_{r=r_o} = \frac{E_i r_o^n}{(1-\nu^2)r_i^n} \left((\lambda_1 + \nu)C_1 r_o^{\lambda_1 - 1} + (\lambda_2 + \nu)C_2 r_o^{\lambda_2 - 1} + (3 + \nu)D_1 r_o^2 \right. \\ \left. + D_2(1 + \nu + n)r_o^n + (1 - m + \nu)D_3 r_o^{-m} - \alpha_0(1 + \nu) \left(\frac{r_o}{r_i} \right)^n (T_o - T_i) \right) = 0 \end{array} \right. \quad (36-4)$$

که می‌توان به صورت دستگاه معادلات زیر نوشت:

$$\left[\begin{array}{cc} (\lambda_1 + \nu)r_i^{\lambda_1 - 1} & (\lambda_2 + \nu)r_i^{\lambda_2 - 1} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} C_1 \\ C_2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{P(1-\nu^2)}{E_i} + (3 + \nu)D_1 r_i^2 + D_2(1 + n + \nu)r_i^n + (1 - m + \nu)D_3 r_i^{-m} \\ (3 + \nu)D_1 r_o^2 + D_2(1 + n + \nu)r_o^n - \alpha_0 \left(\frac{r_o}{r_i} \right)^n (1 + \nu)(T_o - T_i) + (1 - m + \nu)D_3 r_o^{-m} \end{array} \right\} \quad (37-4)$$

که با حل دستگاه معادلات خطی C_1 و C_2 به شکل زیر بدست می‌آیند:

$$C_1 = \frac{r_o r_i}{(\lambda_1 + \nu)(r_o^{\lambda_2} r_i^{\lambda_1} - r_o^{\lambda_1} r_i^{\lambda_2})} \times \left\{ \begin{array}{l} r_i^{\lambda_2 - 1} \left[(3 + \nu)D_1 r_o^2 + D_2(1 + \nu + n)r_o^n - \alpha_0(1 + \nu) \left(\frac{r_o}{r_i} \right)^n (T_o - T_i) + (1 - m + \nu)D_3 r_o^{-m} \right] \\ - r_o^{\lambda_2 - 1} \left[\frac{P(1-\nu^2)}{E_0} + (3 + \nu)D_1 r_i^2 + D_2(1 + \nu + n)r_i^n + (1 - m + \nu)D_3 r_i^{-m} \right] \end{array} \right\} \quad (38-4)$$

$$C_2 = \frac{r_o r_i}{(\lambda_2 + \nu)(r_o^{\lambda_2} r_i^{\lambda_1} - r_o^{\lambda_1} r_i^{\lambda_2})} \times \left\{ \begin{array}{l} r_o^{\lambda_1 - 1} \left[\frac{P(1-\nu^2)}{E_0} + (3 + \nu)D_1 r_i^2 + D_2(1 + \nu + n)r_i^n + (1 - m + \nu)D_3 r_i^{-m} \right] \\ - r_i^{\lambda_1 - 1} \left[(3 + \nu)D_1 r_o^2 + D_2(1 + \nu + n)r_o^n - \alpha_0(1 + \nu) \left(\frac{r_o}{r_i} \right)^n (T_o - T_i) + (1 - m + \nu)D_3 r_o^{-m} \right] \end{array} \right\}$$

که در آن:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-(m+n) \pm \sqrt{(m+n)^2 - 4(m+n)v + 4} \right)$$

$$D_1 = \frac{(v^2 - 1)\rho_i \omega^2}{(8 + (3+v)(m+n))E_i}$$

$$D_2 = \frac{(T_o - T_i)(1+v)\alpha_i}{(r_o^{-(m+n)} - r_i^{-(m+n)})} \left(\frac{-(2n+m)r_i^{-(2n+m)}}{2n^2 + n(3+v+m) + m(1+v)} \right) \quad (39-4)$$

$$D_3 = \frac{(T_o - T_i)(1+v)\alpha_i}{(r_o^{-(m+n)} - r_i^{-(m+n)})} \left(\frac{-nr_i^{-n}}{n(m-1-v) - m(v-1)} \right)$$

با جایگذاری معادلات فوق در (۴-۳۶) معادله ی جابجایی محاسبه می شود با معلوم بودن تابع جابجایی می توان توزیع تنش ها و کرنش ها را محاسبه نمود. لازم به ذکر است که معادلات فوق برای شرایط $(m+n) \neq 0$ برقرار است.

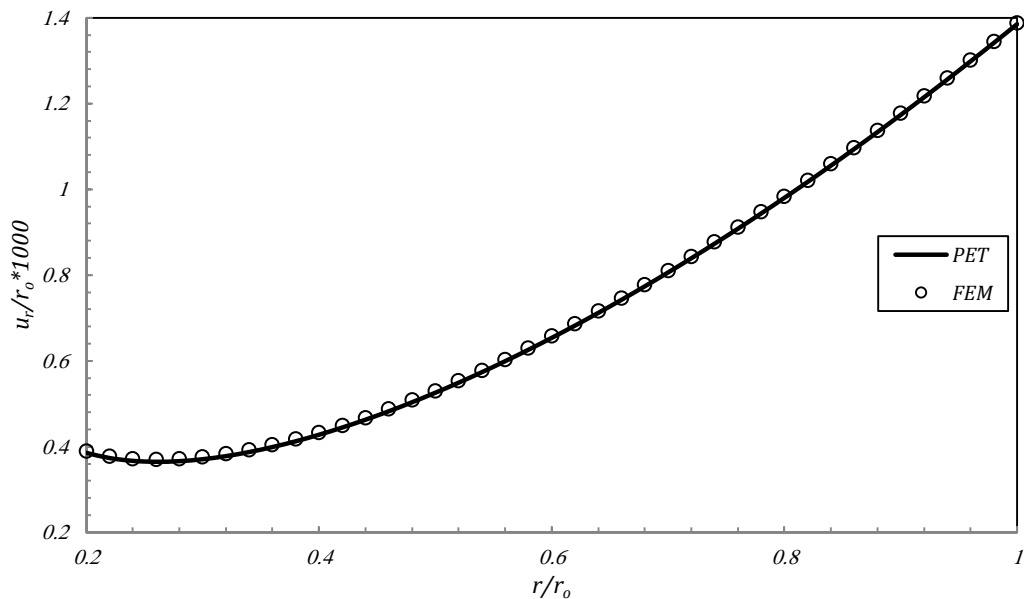
۴ - ۳ بررسی نتایج حل دیسک ناهمگن توانی با تابع ضخامت توانی

در این قسمت به بررسی نتایج حاصل از تحلیل یک نمونه دیسک ناهمگن توانی با تابع ضخامت توانی مطابق جداول ۱-۱ و ۲-۱ و با توجه به شرایط مرزی مطابق جدول ۱-۳ پرداخته می شود. ابتدا نتایج بدست آمده از حل تحلیلی با حل عددی مقایسه می شود. سپس تاثیر هر یک از بارگذاری ها در نتایج حاصل بررسی شده و نقش هر یک از بارگذاری ها بر مشخصه های مکانیکی سیستم بیان می شود. در پایان نیز پروفیل های مختلف دیسک تحلیل شده و نتایج آن ارائه می شود.

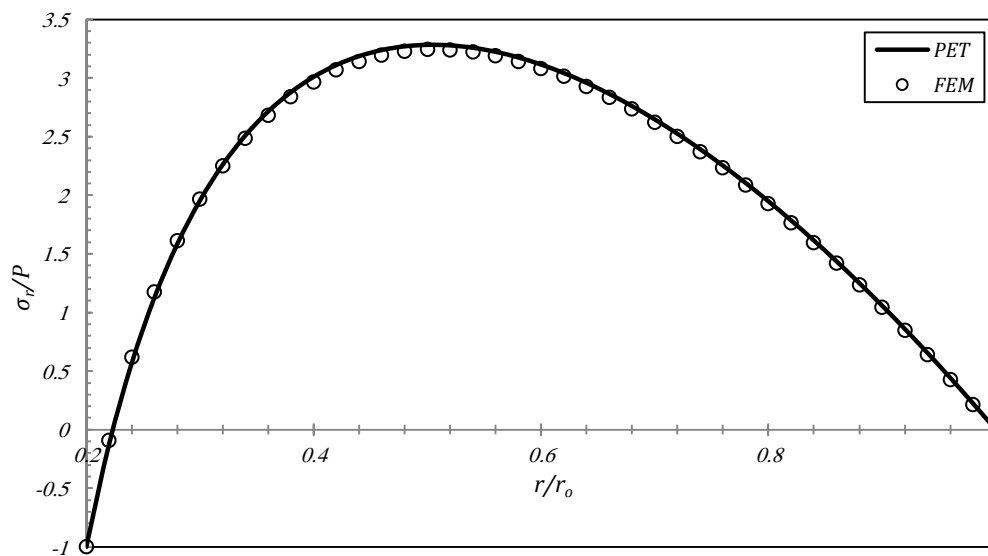
۴ - ۳ - ۱ مقایسه نتایج با حل عددی

همانطور که در فصلهای قبل بیان شد همواره به منظور اطمینان از فرضیات در نظر گرفته شده بهتر است نتایج با حل عددی مقایسه شود. مشابه فصل دو برای مدل سازی ماده FG می بایست دیسک را به حلقه هایی با خواص ثابت تبدیل کنیم و گره ها را در مرزها بر یکدیگر منطبق کنیم بدیهی است که در این حالت امکان خطای حل عددی به خاطر گسسته بودن تابع توزیع در شبکه بندی بیشتر از حل تحلیلی است. در این قسمت نمونه ای از

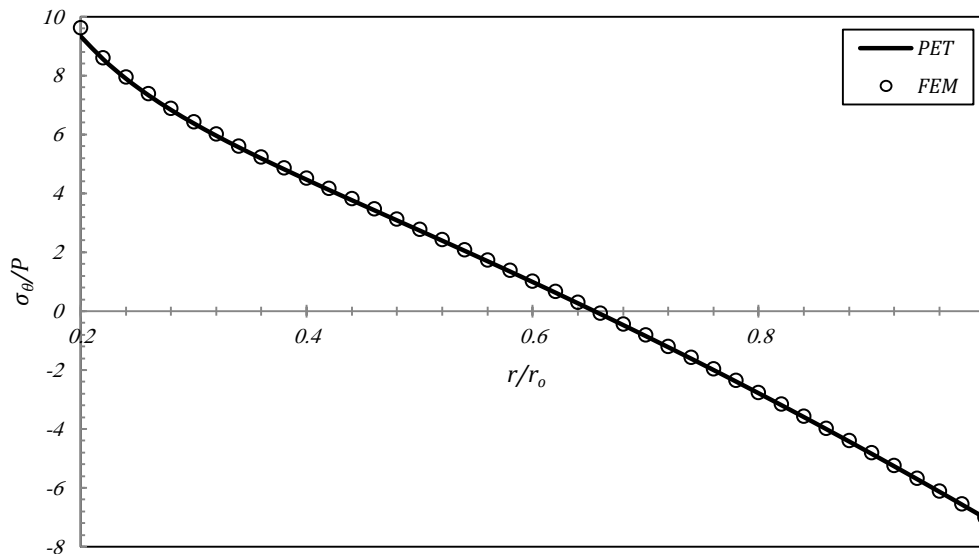
دیسک با ثابت ناهمگنی $n=0.5$ و نسبت ضخامت $h_i/h_o=2$ برای مقایسه انتخاب شده است که سعی شده است حالتی انتخاب شود که بیشترین خطا را داشته باشد. شکل های (۱-۴) تا (۳-۴) به مقایسه حل عددی و حل تحلیلی می پردازد:



شکل ۱-۴: توزیع جابجایی شعاعی در روش تحلیلی و روش عددی دیسک FG توانی با پروفیل توانی



شکل ۲-۴: توزیع تنش شعاعی در روش تحلیلی و روش عددی دیسک FG توانی با پروفیل توانی



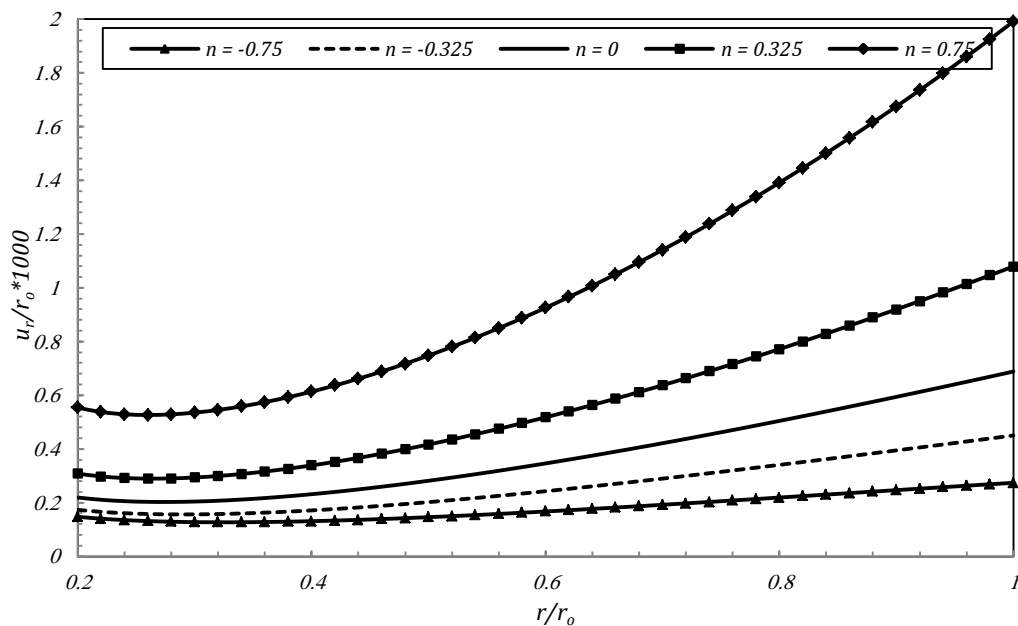
شکل ۳-۴: توزیع تنش محیطی در روش تحلیلی و روش عددی دیسک FG توانی با پروفیل توانی

نمودارهای فوق انطباق مناسبی را بین دو حل نشان می‌دهد. بطوریکه همواره خطا در بحرانی ترین نقاط کمتر از ۱/۵ درصد است که خطای قابل قبولی است. لازم به ذکر است که حل تحلیلی به ازای نسبت ضخامت به شعاع کمتر از ده صدم حل دقیق محسوب می‌شود.

۴ - ۳ - ۲ بررسی تاثیر ثابت ناهمگنی در توزیع مشخصه های مکانیکی

در قسمت قبلی نتایج با حل عددی در نرم افزار انسیس مقایسه شد و نشان داده شد که نتایج دقت مناسب دارند. با توجه به اینکه در قسمت‌های قبلی مشاهده شد که به ازای نسبت‌های ضخامت بزرگتر و کوچکتر از یک رفتارهای دیسک متفاوت می‌باشد، در این قسمت به بررسی تاثیر ثابت ناهمگنی در دیسک‌های با پروفیل توانی برای دو حالت می‌پردازیم. در انتخاب محدوده‌ی ثابت‌های ناهمگنی سعی شده است که در محدوده‌ی خواص مواد مهندسی باشد بعنوان مثال ثابت‌های ناهمگنی به گونه‌ای انتخاب شده است که مدول یانگ بین ۶۰ تا ۶۰۰ گیگا پاسکال در نظر گرفته شده است.

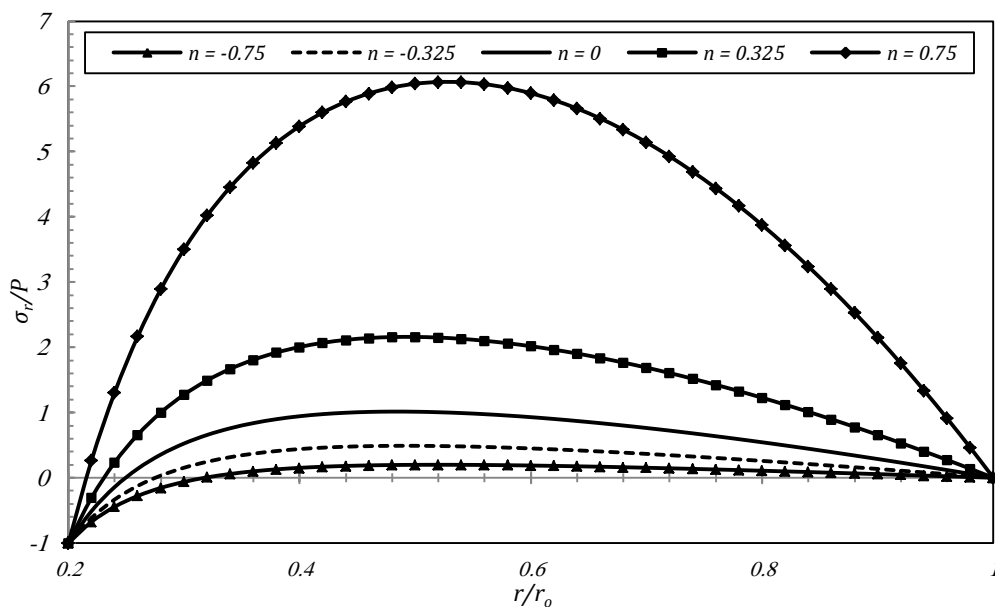
شکل ۴-۴ توزیع جابجایی شعاعی را در دیسک با پروفیل توانی به ازای $h_i/h_o=2$ نمایش می‌دهد.



شکل ۴-۴: نمایش تاثیر ثابت ناهمگنی در جابجایی شعاعی دیسک با پروفیل توانی ($h/h_0=2$)

ملاحظه می شود که با افزایش ثابت ناهمگنی مقدار جابجایی شعاعی در تمامی نقاط دیسک افزایش می یابد همچنین ناحیه ی نزولی جابجایی شعاعی بیشتر می شود یا بعبارت دیگر نقطه ی کمینه جابجایی شعاعی به لایه های میانی دیسک منتقل می شود. شکل ۴-۵ توزیع نرمال تنش شعاعی را به ازای ثابت های ناهمگنی مختلف را

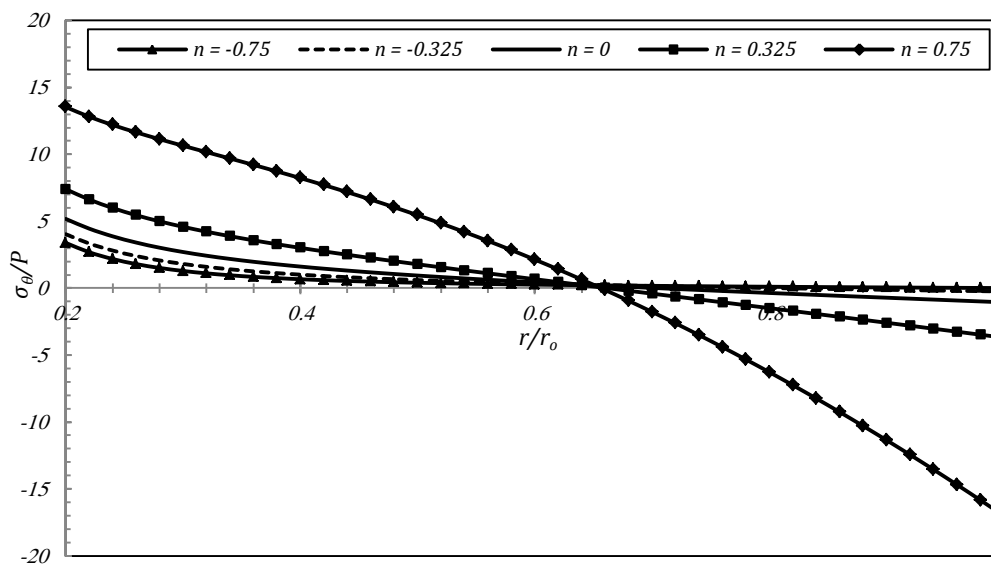
نشان می دهد:



شکل ۴-۵: نمایش تاثیر ثابت ناهمگنی در تنش شعاعی دیسک با پروفیل توانی ($h/h_0=2$)

در شکل ۴-۵ مشاهده می شود نحوه ی تغییرات تنش شعاعی به ازای تمامی مقادیر n ثابت است ولی مقدار بیشینه آن با توجه به ثابت ناهمگنی تغییر می کند. در n های منفی تنش شعاعی بیشینه کمتر و در n های مثبت بیشتر از مقدار آن در ماده ی همگن می باشد. همچنین در n های منفی قدر مطلق بیشینه تنش در شعاع داخلی دیسک می باشد در حالیکه برای دیسک های همگن و ناهمگن با n مثبت قدر مطلق مقدار بیشینه در لایه های میانی دیسک می باشد.

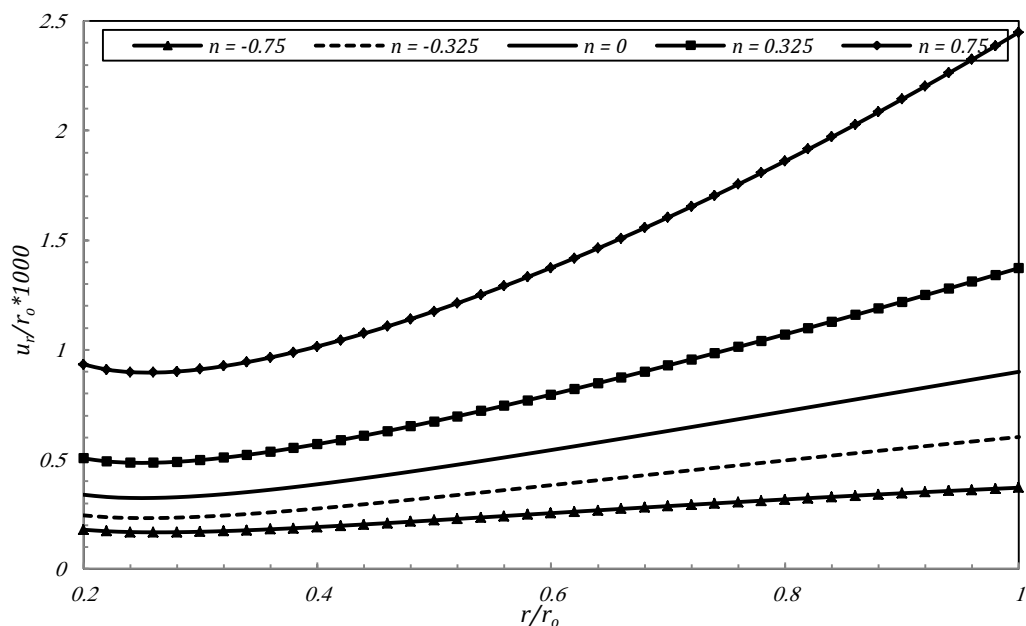
شکل ۴-۶ توزیع نرمال تنش محیطی را به ازای ثابت های ناهمگنی مختلف نشان می دهد:



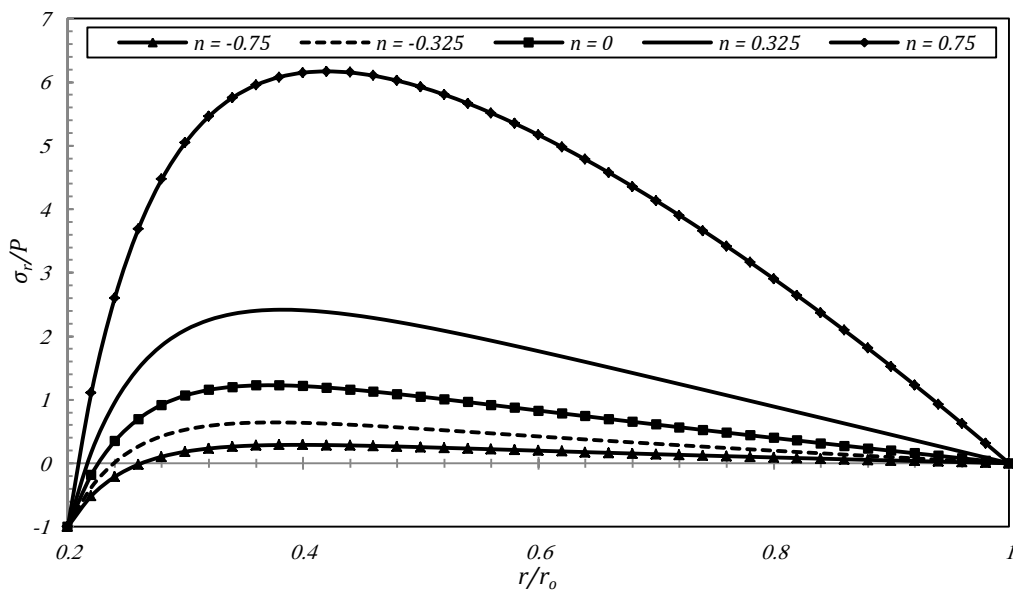
شکل ۴-۶: نمایش تاثیر ثابت ناهمگنی در تنش محیطی دیسک با پروفیل توانی ($h_i/h_o=2$)

تنش محیطی مشابه تنش شعاعی به ازای افزایش n مقدار آن افزایش و به ازای کاهش n مقدار آن کاهش می یابد. همانطور که مشاهده می شود در لایه های داخلی تنش محیطی مثبت و لایه ها تحت کشش می باشند و در لایه های خارجی تنش منفی و لایه ها تحت فشار می باشند. نکته ی قابل توجه اینست که مرز تغییر وضع تنش محیطی از کششی به فشاری در تمامی ثابت های ناهمگنی ثابت است بنابراین می توان نتیجه گرفت که این محل به خواص وابسته نیست و یک پارامتری است که به شرایط هندسی یا بارگذاری مرتبط است.

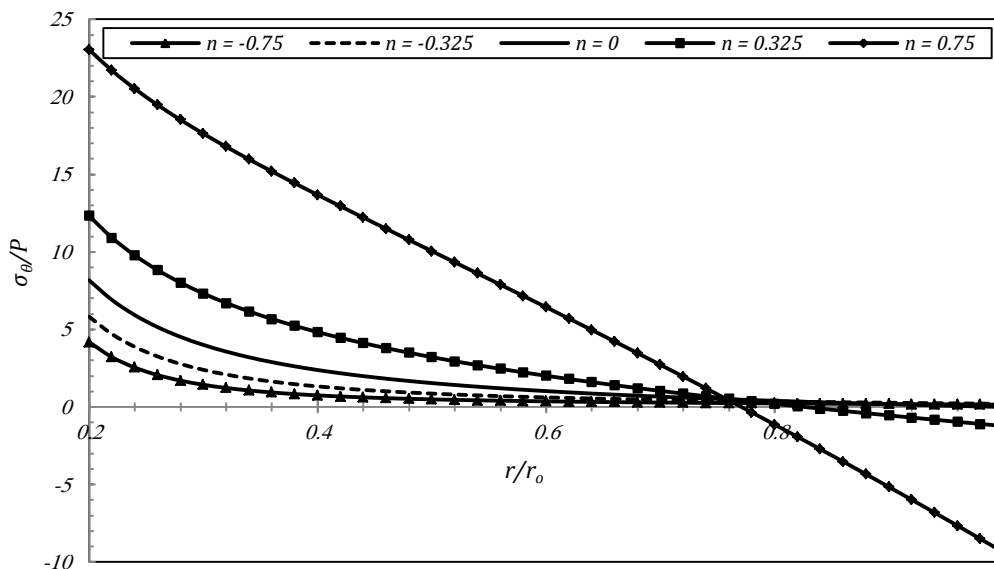
روند تغییرات در قسمت فوق برای مقادیر بزرگتر از یک نسبت ضخامت صادق است ولی برای مقادیر کوچکتر از یک می‌بایست این موضوع بررسی شود. در ادامه نتایج مربوط به نسبت ضخامت $h_i/h_o=0.2$ آورده می‌شود،



شکل ۴-۷: نمایش تاثیر ثابت ناهمگنی در جابجایی شعاعی دیسک با پروفیل توانی ($h_i/h_o=0.2$)



شکل ۴-۸: نمایش تاثیر ثابت ناهمگنی در تنش شعاعی دیسک با پروفیل توانی ($h_i/h_o=0.2$)



شکل ۹-۴: نمایش تاثیر ثابت ناهمگنی در تنش محیطی دیسک با پروفیل توانی ($h_i/h_o=0.2$)

در نمودارهای فوق مشاهده شد که روند تغییرات مشابه حالت $h_i/h_o=2$ می باشد، ولی درصد تغییرات به ازای $n=0.75$ و $n=0.325$ بسیار بیشتر از حالت $h_i/h_o=2$ است که بیشترین تنش نیز برای این حالت مشاهده می-شود.

۴-۴ حل دیسک FG با ضخامت متغیر با تابع نمایی و توزیع خواص نمایی

اگر خاصیت $P(r)$ را با استفاده از تابع نمایی مدل کنیم رابطه ی آن به شکل زیر خواهد بود:

$$P(r) = P^* e^{\bar{n}r} \quad (40-4)$$

که در آن:

$$P^* = P_i e^{-n}, \quad \bar{n} = \frac{n}{r_i} \quad (41-4)$$

که مقدار آن خاصیت در لایه ی داخلی می باشد و n ثابت ناهمگنی مواد FG می باشد. می توان در توابع فوق به جای $P(r)$ توابع مدول الاستیسیته، چگالی، ضریب انبساط حرارتی یا ضریب هدایت حرارتی قرار داد و

در معادله ی دیفرانسیل جایگذاری نمود. با انتخاب پروفیل نمایی برای ضخامت، ضرایب معادله دیفرانسیل حاکم به شکل زیر تبدیل خواهند شد:

$$\begin{aligned} A_1 &= r^2 \\ A_2 &= (1 + (m + \bar{n})r)r \\ A_3 &= (\bar{n} + m)\nu r - 1 \\ A_4 &= r^2(1 + \nu) \left\{ \frac{(1 - \nu)\rho^* r \omega^2}{E^*} - \alpha^* e^{\bar{n}r} \left(\frac{d}{dr}(\Delta T(r)) + (2\bar{n} + m)\Delta T(r) \right) \right\} \end{aligned} \quad (42-4)$$

معادله ی فوق برای حل نیازمند حل حرارتی است، بنابراین در قسمت بعد به حل آن پرداخته می شود.

۴ - ۴ - ۱ حل حرارتی

برای حل حرارتی ابتدا می بایست حاصل انتگرال زیر را بدست آورد:

$$\int \frac{dr}{rh(r)k(r)} \quad (43-4)$$

با جای گذاری خواص، انتگرال به شکل زیر تبدیل خواهد شد:

$$\frac{1}{k^* h^*} \int \frac{dr}{r e^{(m + \bar{n})r}} \quad (44-4)$$

مشابه فصل سوم می توان انتگرال فوق را به شکل زیر نوشت:

$$\frac{1}{k^* h^*} \int \frac{dr}{r e^{(m + \bar{n})r}} = \frac{-1}{k^* h^*} \zeta_1((m + \bar{n})r) \quad (45-4)$$

که در آن:

$$\zeta_\beta(r) = \int_1^\infty \frac{e^{-tr}}{t^\beta} dt \quad (\beta = 1, 2, \dots; r > 0) \quad (46-4)$$

با جایگذاری روابط فوق به جای انتگرال ها در معادله ی توزیع دما خواهیم داشت:

$$\Delta T(r) = (T_o - T_i) \left(\frac{\zeta_1((m + \bar{n})r) - \zeta_1((m + \bar{n})r_i)}{\zeta_1((m + \bar{n})r_o) - \zeta_1((m + \bar{n})r_i)} \right) \quad (47-4)$$

مقادیر تابع $\zeta_1((m + \bar{n})r)$ با ازای مقادیر $(m + \bar{n}) > 0$ حقیقی و به ازای مقادیر $(m + \bar{n}) < 0$ مختلط می-باشد.

۴ - ۴ - ۲ حل نیمه تحلیلی

با جایگذاری روابط فوق معادله‌ی حاکم بر دیسک ناهمگن به شکل زیر تبدیل خواهد شد:

$$r^2 \frac{d^2 u_r}{dr^2} + (1 + (m + \bar{n})r)r \frac{du_r}{dr} + ((\bar{n} + m)\nu r - 1)u_r = F(r) \quad (48-4)$$

که در آن:

$$F(r) = -r^2(1 + \nu) \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{(1 - \nu)\rho_0 r \omega^2}{E_0} - \frac{\alpha_0 e^{\bar{n}r} (2\bar{n} + m)(T_o - T_i)}{\zeta_1((m + \bar{n})r_o) - \zeta_1((m + \bar{n})r_i)} \right) \times \\ \left(\frac{\zeta_1((m + \bar{n})r) - \zeta_1((m + \bar{n})r_i)}{\zeta_1((m + \bar{n})r_o) - \zeta_1((m + \bar{n})r_i)} - \frac{e^{-(m + \bar{n})r}}{(2\bar{n} + m)r} \right) \end{array} \right\} \quad (49-4)$$

معادله‌ی حاکم بر دیسک با ضخامت متغیر نمایی FG با توزیع نمایی دارای حل دقیق نمی باشد ولی در حالتی که همگن است با استفاده از سری‌های فوق هندسی قابل حل می‌باشند که در پیوست B به آن اشاره شده است ولی با توجه به هدف این پژوهش برای تحلیل ترموالاستیک، از روش نیمه تحلیلی ارائه شده در فصل قبل استفاده می‌شود. در این روش به جای متغیر گرفتن خواص در کل دیسک، خواص هر حلقه را با توجه به ویژگی-های فیزیکی آن حلقه ثابت فرض می‌کنیم. اما اختلاف خواص هر حلقه با حلقه مجاور در حالت کلی همان تغییر خواصی را تداعی می‌کند که با کم کردن ضخامت حلقه‌ها و در نتیجه افزایش تعداد آن‌ها، دقت محاسبات هم زیاد خواهد شد. لازم به ذکر است که افزایش تعداد حلقه‌ها سبب ایجاد خطای محاسباتی در حل دستگاه معادلات می‌شود لذا بدست آوردن تعداد لایه‌های بهینه نیز می‌تواند ضروری خواهد بود. همان طور که در

فصل دوم بیان شد خواص متغیر در دیسک می توانند وابسته به شعاع یا دمای هر مقطع باشند که در هر حلقه، این خواص برای دمای متوسط و شعاع متوسط آن حلقه ها تعریف می شوند. در این قسمت چون خواص وابسته به دما نمی باشد فقط خواص و ضخامت بر حسب شعاع متوسط آن ها تعریف می شود. بنابراین به تعداد حلقه- های موجود خواص و ضخامت متفاوت خواهیم داشت که در نهایت به دستگاه معادلاتی می رسیم که با حل آن توزیع جابجایی و تنش ها در هر حلقه بدست آمده و در نهایت تابع توزیع تنش و جابجایی در دیسک به صورت چند ضابطه ای خواهد بود.

برای ساده نمودن معادلات در هر حلقه خواص و ضخامت را ثابت فرض می کنیم بنابراین معادله ی خواص و ضخامت در هر حلقه به شکل زیر تبدیل می شود:

$$P^{[k]} = P^* e^{\bar{n}r^{[k]}}, \quad h^{[k]} = h^* e^{mr^{[k]}} \quad (50-4)$$

که در آن k شماره ی حلقه می باشد. بنابراین معادله ی حاکم در هر حلقه به شکل زیر خواهد بود:

$$A_1^{[k]} \frac{d^2 u_r^{[k]}}{dr^2} + A_2^{[k]} \frac{du_r^{[k]}}{dr} + A_3^{[k]} u_r^{[k]} + A_4^{[k]} = 0 \quad (51-4)$$

که در آن $A_i^{[k]}$ ها ضرایب ثابت در هر حلقه می باشند:

$$\begin{aligned} A_1^{[k]} &= (r^{[k]})^2 \\ A_2^{[k]} &= (1 + (m + \bar{n})r^{[k]})r^{[k]} \\ A_3^{[k]} &= (\bar{n} + m)\nu r^{[k]} - 1 \\ A_4^{[k]} &= \frac{(1 - \nu^2)\rho^* \omega^2 (r^{[k]})^3}{E^*} - \frac{\alpha_0 e^{\bar{n}r^{[k]}} (1 + \nu)(2\bar{n} + m)(T_o - T_i)(r^{[k]})^2}{\zeta_1((m + \bar{n})r_o) - \zeta_1((m + \bar{n})r_i)} \times \\ &\quad \left(\left(\zeta_1((m + \bar{n})r^{[k]}) - \zeta_1((m + \bar{n})r_i) \right) - \frac{e^{-(m + \bar{n})r^{[k]}}}{(2\bar{n} + m)r^{[k]}} \right) \end{aligned} \quad (52-4)$$

بنابراین ضرایب معادله‌ی حاکم در هر حلقه به ثوابت زیر تبدیل خواهد شد معادله مشخصه‌ی معادله حاکم به شکل زیر خواهد بود:

$$A_1^{[k]} (\lambda^{[k]})^2 + A_2^{[k]} \lambda^{[k]} + A_3^{[k]} = 0 \quad (53-4)$$

که بنا به مقادیر عبارت $\Delta^{[k]} = (A_2^{[k]})^2 - 4A_1^{[k]}A_3^{[k]}$ دارای حل‌های زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} \Delta^{[k]} = 0 \rightarrow u_r^{[k]} = C_1^{[k]} e^{\lambda_1^{[k]} r} + C_2^{[k]} r e^{\lambda_1^{[k]} r} - \frac{A_4^{[k]}}{A_3^{[k]}} & \frac{r^{[k-1]} + r^{[k]}}{2} < r < \frac{r^{[k]} + r^{[k+1]}}{2} \\ \Delta^{[k]} \neq 0 \rightarrow u_r^{[k]} = C_1^{[k]} e^{\lambda_1^{[k]} r} + C_2^{[k]} e^{\lambda_2^{[k]} r} - \frac{A_4^{[k]}}{A_3^{[k]}} & \end{cases} \quad (54-4)$$

که در آن:

$$\lambda_{1,2}^{[k]} = \frac{-A_2^{[k]} \pm \sqrt{\Delta^{[k]}}}{2A_1^{[k]}} \quad (55-4)$$

می باشد. معادله‌ی فوق برای هر حلقه صادق است که نیاز به دو شرط برای حل دارد.

۴ - ۳ - شرایط مرزی

اگر تعداد حلقه‌ها برابر η باشد پس از نوشتن معادلات حلقه‌ها به η معادله دیفرانسیل می‌رسیم که هر یک دو ثابت مجهول دارد لذا می‌بایست 2η شرط مرزی و پیوستگی برای حل داشته باشیم. شرایط مرزی به شکل زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \sigma_r \Big|_{r=r_i} &= \frac{E(r) \Big|_{r=r_i}}{(1-\nu^2)} \left[\frac{du_r^{[1]}}{dr} + \nu \frac{u_r^{[1]}}{r} \right] - \frac{E(r) \Big|_{r=r_i} \alpha(r) \Big|_{r=r_i} \Delta T^{[1]}}{(1-\nu)} = -P \\ \sigma_r \Big|_{r=r_o} &= \frac{E(r) \Big|_{r=r_o}}{(1-\nu^2)} \left[\frac{du_r^{[\eta]}}{dr} + \nu \frac{u_r^{[\eta]}}{r} \right] - \frac{E(r) \Big|_{r=r_o} \alpha(r) \Big|_{r=r_o} \Delta T^{[\eta]}}{(1-\nu)} = 0 \end{aligned} \quad (56-4)$$

و شرایط پیوستگی مشابه فصل دوم مطابق روابط زیر خواهد بود:

$$u_r^{[k]} \Big|_{r=\frac{r^{[k]}+r^{[k+1]}}{2}} = u_r^{[k+1]} \Big|_{r=\frac{r^{[k]}+r^{[k+1]}}{2}} \quad (57-4)$$

$$\sigma_r^{[k]} \Big|_{r=\frac{r^{[k]}+r^{[k+1]}}{2}} = \sigma_r^{[k+1]} \Big|_{r=\frac{r^{[k]}+r^{[k+1]}}{2}}$$

با اعمال شرایط پیوستگی یک دستگاه معادله ی $2(\eta-1) \times 2(\eta-1)$ به وجود می آید که به همراه دو شرط مرزی در حلقه ی داخلی و خارجی به دستگاه معادلات $2\eta \times 2\eta$ می رسیم که با حل آن 2η ثابت مجهول محاسبه و رابطه جابجایی و تنش ها در هر حلقه بدست می آیند.

با در نظر گرفتن یک تابع چند ضابطه ای برای هر مشخصه می توان رابطه ی بدست آمده در حلقه را در بازه ی شعاعی تعریف شده اعمال شده قرار داد که این تابع وابسته به تعداد حلقه ها می باشد بنابراین نمی توان نتایج را به صورت یک تابع نشان داد.

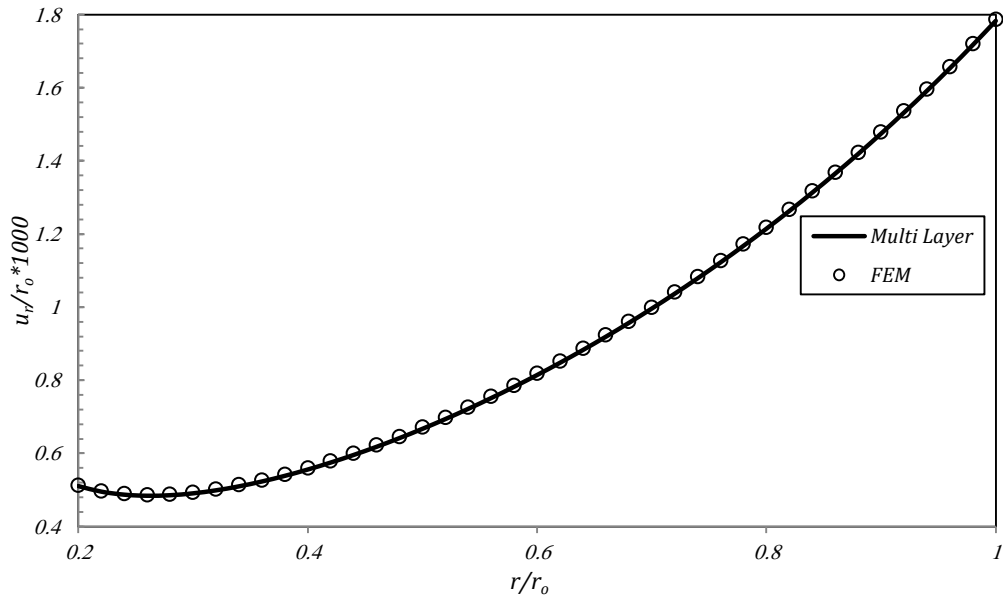
۴ - ۵ بررسی نتایج حل دیسک ناهمگن با توزیع خواص نمایی با تابع ضخامت نمایی

در این قسمت به بررسی یک نمونه دیسک ناهمگن با ضخامت متغیر پرداخته می شود. نتایج بدست آمده در این بخش برای ماده همگن در فصل سوم آورده شده است و خواص ثابت در معادلات مطابق جداول ۱-۱ و ۲-۱ انتخاب شده است و شرایط اعمالی بر دیسک با توجه به شرایط مرزی مطابق جدول ۱-۳ خواهد بود. در این بخش پس از اعتبارسنجی به حل، به بررسی تاثیر پارامترهای مختلف در نتایج پرداخته می شود.

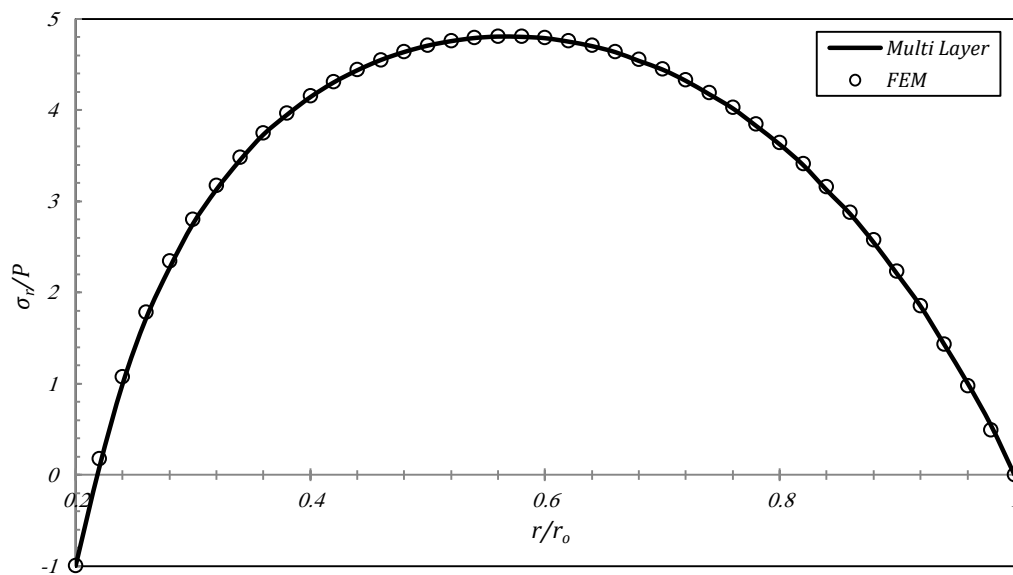
۴ - ۵ - ۱ مقایسه حل عددی با حل نیمه تحلیلی

در این بخش با استفاده از حلقه حلقه نمودن دیسک معادلات حاکم ساده سازی و حل شده اند. در این حالت نیز همان تعداد ۴۰ حلقه در نظر گرفته شده است و نتایج بر مبنای آن استخراج شده است. لازم به ذکر است که پروفیل دیسک با ضخامت متغیر به صورت کد به نرم افزار وارد شده است.

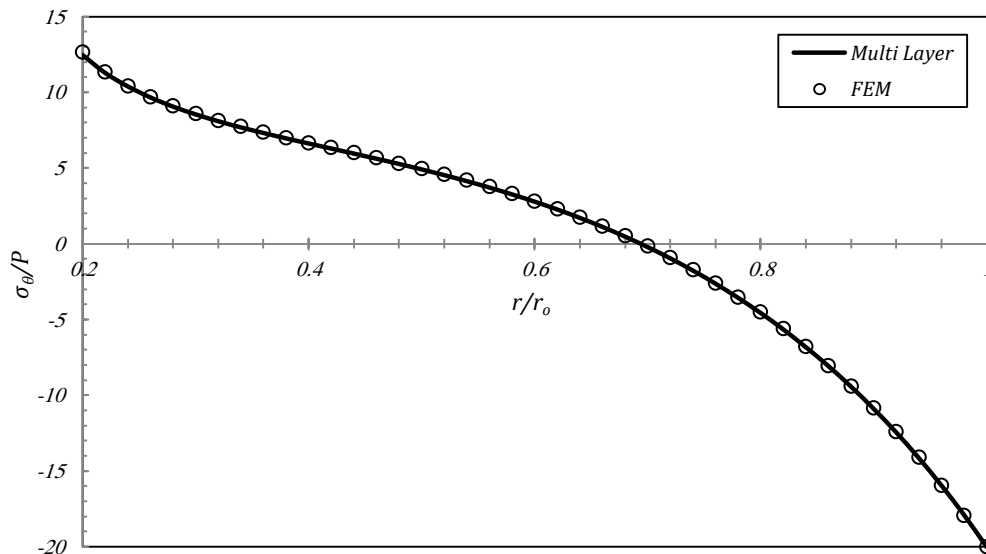
شکل‌های (۴-۱۰) تا (۴-۱۲) نتایج بدست آمده در تنش‌ها و جابجایی شعاعی با استفاده از دو روش را نمایش می‌دهند:



شکل ۴-۱۰: مقایسه ی نتایج جابجایی شعاعی با حل عددی ($n=0.3, h_r/h_o=2$)



شکل ۴-۱۱: مقایسه ی نتایج تنش شعاعی با حل عددی ($n=0.3, h_r/h_o=2$)

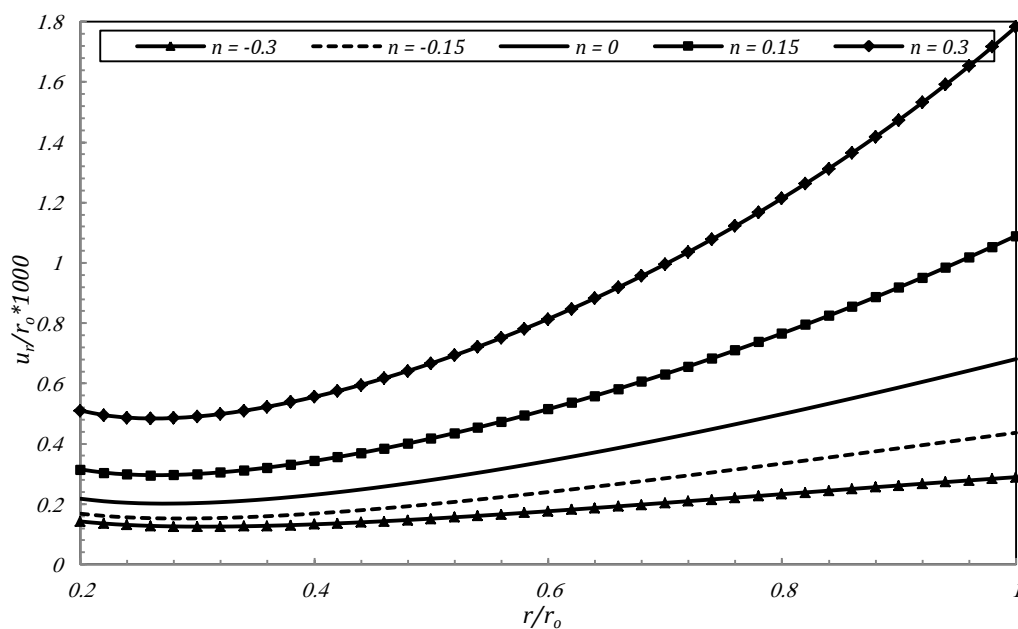


شکل ۱۲-۴: مقایسه ی نتایج تنش محیطی با حل عددی ($n=0.3, h_i/h_o=2$)

در شکل های فوق مشاهده می شود که نحوه ی تغییرات و اعداد بدست آمده در مشخصه های مکانیکی حاصل از دو روش مشابه یکدیگر می باشند.

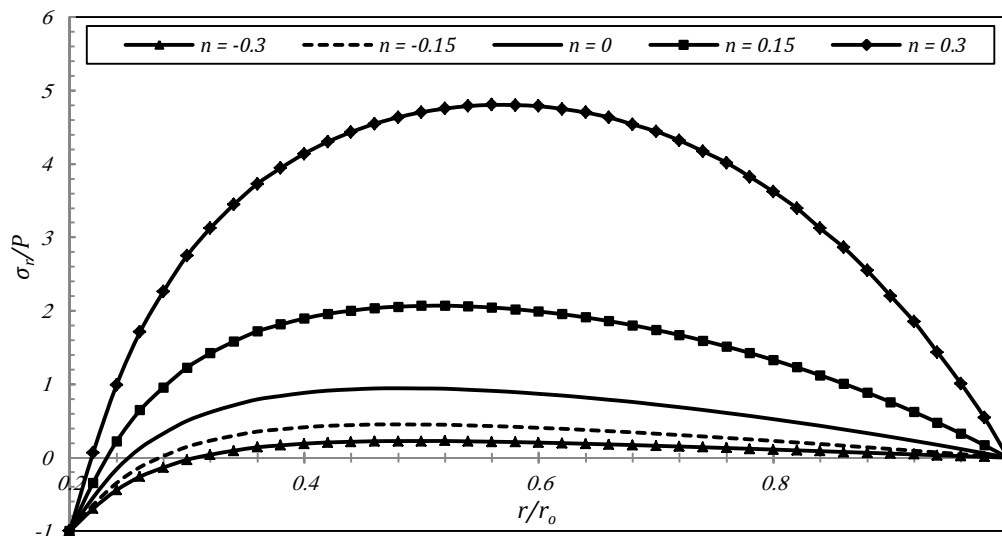
۴ - ۵ - ۲ بررسی تاثیر ثابت ناهمگنی در توزیع مشخصه های مکانیکی

شکل ۱۳-۴ تاثیر ثابت ناهمگنی را دیسک با پروفیل نمایی و با نسبت ضخامت بزرگتر از یک نشان می دهد.

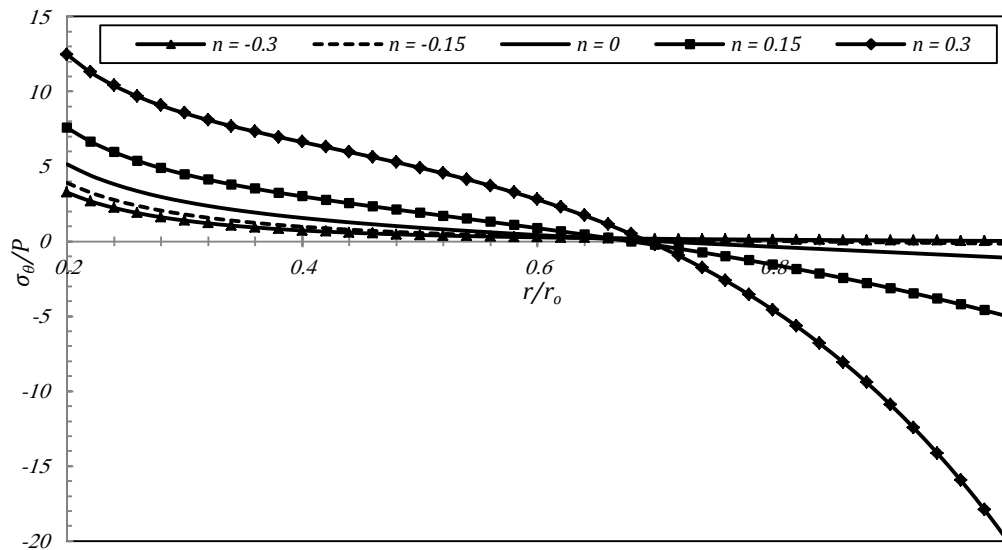


شکل ۱۳-۴: توزیع جابجایی شعاعی در دیسک با پروفیل نمایی و تابع توزیع خواص نمایی ($h_i/h_o=2$)

مشابه دیسک با پروفیل توانی، مشاهده می‌شود با افزایش n مقادیر جابجایی شعاعی نیز افزایش می‌یابد. شکل‌های زیر توزیع تنش نرمال شعاعی و محیطی را در راستای شعاع نشان می‌دهد.



شکل ۴-۱۴: توزیع تنش شعاعی در دیسک با پروفیل نمایی و تابع توزیع خواص نمایی ($h_i/h_o=2$)



شکل ۴-۱۵: توزیع تنش محیطی در دیسک با پروفیل نمایی و تابع توزیع خواص نمایی ($h_i/h_o=2$)

در این حالت نیز نحوه‌ی تغییرات مشابه دیسک با تابع ضخامت نمایی می‌باشد.

۴ - ۶ حل دیسک ناهمگن با توزیع خواص نمایی و تابع ضخامت توانی

اگر تابع خواص و پروفیل ضخامت به صورت زیر فرض شوند:

$$P(r) = P^* e^{\bar{m}r}, h(r) = h_o \left(\frac{r}{r_o} \right)^m \quad (۵۸-۴)$$

بنابراین ضرایب معادله ی حاکم به شکل زیر تبدیل می شود:

$$\begin{aligned} A_1 &= r^2 \\ A_2 &= (1 + m + \bar{n}r)r \\ A_3 &= (\bar{n}r + m)v - 1 \\ A_4 &= r(1+v) \left\{ \frac{(1-v)\rho^* r^2 \omega^2}{E^*} - \alpha^* e^{\bar{m}r} \left(r \frac{d}{dr} (\Delta T(r)) + (2\bar{n}r + m)\Delta T(r) \right) \right\} \end{aligned} \quad (۵۹-۴)$$

۴ - ۶ - ۱ حل حرارتی

در فصل دوم معادله ی حاکم بر توزیع دما بر دیسک با ضخامت متغیر در حالت کلی استخراج گردید که تا این قسمت از پژوهش سعی شده با استفاده از توابع ریاضی این معادله حل شود، ولی در این قسمت با توجه به اینکه با انتگرال های پیچیده مواجه خواهیم شد برای حل این معادله نیز از روش حلقه حلقه نمودن دیسک استفاده خواهیم کرد. معادله ی (۲-۲۳) برای دیسک مورد بحث در این بخش به شکل زیر خواهد بود :

$$\frac{d}{dr} \left((k^* e^{\bar{m}r}) \left(h_o \left(\frac{r}{r_o} \right)^m \right) r \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad (۶۰-۴)$$

با ساده سازی معادله ی فوق داریم:

$$r \frac{d^2 T}{dr^2} + [\bar{n}r + (m+1)] \frac{dT}{dr} = 0 \quad (۶۱-۴)$$

بنا به توضیحات ارائه شده در روش حلقه حلقه نمودن دیسک، معادله انتقال حرارت حاکم برای هر حلقه به صورت زیر تبدیل می شود:

$$r^{[k]} \frac{d^2 T}{dr^2} + [\bar{n}r^{[k]} + (m+1)] \frac{dT}{dr} = 0 \quad (62-4)$$

معادله‌ی فوق معادله دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم همگن با ضرایب ثابت است که همواره دارای معادله‌ی مشخصه‌ای با دو ریشه‌های حقیقی است:

$$r^{[k]} (\lambda^{[k]})^2 + [\bar{n}r^{[k]} + (m+1)] \lambda^{[k]} = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_1^{[k]} = 0 \\ \lambda_2^{[k]} = \frac{\bar{n}r^{[k]} + (m+1)}{r^{[k]}} \end{cases} \quad (63-4)$$

از این رو تابع توزیع دما به شکل زیر بدست می آید:

$$T(r)^{[k]} = C_1' + C_2' e^{\left[\frac{\bar{n}r^{[k]} + (m+1)}{r^{[k]}} \right] r} \quad (64-4)$$

بنابراین معادله‌ی گرادیان دما در هر حلقه به شکل زیر خواهد بود:

$$\Delta T(r)^{[k]} = (C_1' - T_i) + C_2' e^{\left[\frac{\bar{n}r^{[k]} + (m+1)}{r^{[k]}} \right] r} \quad (65-4)$$

اگر فرض کنیم که تعداد حلقه‌های موجود در دیسک برابر η باشد در این صورت η معادله خواهیم داشت که 2η ثابت مجهول دارد. شرایط مرزی برای توزیع دما به نحوی است که سطح داخلی در معرض دمای T_i و سطح خارجی در معرض دمای T_o قرار دارد با فرض اینکه دمای مجع برابر با دمای شعاع داخلی باشد، داریم:

$$\Delta T(r) \Big|_{r=r_i} = 0, \Delta T(r) \Big|_{r=r_o} = (T_o - T_i) \quad (66-4)$$

برای محاسبه $2(\eta-1)$ ثابت مجهول دیگر نیاز به $2(\eta-1)$ شرط پیوستگی داریم. این شرایط در معادله‌ی انتقال حرارت با توجه به وجود جمله گرادیان دما و مشتق آن به شکل زیر تعریف می شود:

$$\Delta T(r)^{[k]} \Big|_{r=\frac{r^{[k]}+r^{[k+1]}}{2}} = \Delta T(r)^{[k+1]} \Big|_{r=\frac{r^{[k]}+r^{[k+1]}}{2}} \quad (67-4)$$

$$\left[\frac{d\Delta T(r)}{dr} \right]^{[k]} \Big|_{r=\frac{r^{[k]}+r^{[k+1]}}{2}} = \left[\frac{d\Delta T(r)}{dr} \right]^{[k+1]} \Big|_{r=\frac{r^{[k]}+r^{[k+1]}}{2}}$$

که در آن:

$$\left[\frac{d\Delta T(r)}{dr} \right]^{[k]} = C_2 \left(\frac{\bar{n}r^{[k]} + (m+1)}{r^{[k]}} \right) e^{\left[\frac{\bar{n}r^{[k]} + (m+1)}{r^{[k]}} \right] r} \quad (68-4)$$

می باشد. بنابراین می توان ضرایب معادله ی حاکم در هر حلقه را به صورت زیر نوشت:

$$A_1^{[k]} = (r^{[k]})^2$$

$$A_2^{[k]} = (1+m+\bar{n}r^{[k]})r^{[k]}$$

$$A_3^{[k]} = (\bar{n}r^{[k]}+m)v-1 \quad (69-4)$$

$$A_4^{[k]} = r^{[k]}(1+v) \left\{ \frac{(1-v)\rho^*(r^{[k]})^2 \omega^2}{E^*} - \alpha^* e^{\bar{n}r^{[k]}} \left(\left(\frac{d(\Delta T)}{dr} \right)^{[k]} r^{[k]} + (2\bar{n}r^{[k]}+m)\Delta T^{[k]} \right) \right\}$$

که در آن:

$$\Delta T^{[k]} = \Delta T(r)^{[k]} \Big|_{r=r^{[k]}}$$

$$\left(\frac{d(\Delta T)}{dr} \right)^{[k]} = \left(\frac{d\Delta T(r)}{dr} \right)^{[k]} \Big|_{r=r^{[k]}} \quad (70-4)$$

می باشد. بدین ترتیب مشابه حالت قبل معادله ی حاکم از معادله ی دیفرانسیل مرتبه دوم ناهمگن با ضرایب

متغیر به معادله ی دیفرانسیل با ضرایب ثابت در هر حلقه تبدیل می شود که با حل آن برای حالات مختلف

توزیع جابجایی به شکل زیر خواهد بود:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta^{[k]} = 0 \rightarrow u_r^{[k]} = C_1^{[k]} e^{\lambda_1^{[k]} r} + C_2^{[k]} r e^{\lambda_1^{[k]} r} - \frac{A_4^{[k]}}{A_3^{[k]}} \\ \Delta^{[k]} \neq 0 \rightarrow u_r^{[k]} = C_1^{[k]} e^{\lambda_1^{[k]} r} + C_2^{[k]} e^{\lambda_2^{[k]} r} - \frac{A_4^{[k]}}{A_3^{[k]}} \end{array} \right. \quad \frac{r^{[k-1]} + r^{[k]}}{2} < r < \frac{r^{[k]} + r^{[k+1]}}{2} \quad (71-4)$$

که در آن:

$$\lambda_{1,2}^{[k]} = \frac{-A_2^{[k]} \pm \sqrt{\Delta^{[k]}}}{2A_1^{[k]}}, \quad \Delta^{[k]} = (A_2^{[k]})^2 - 4A_1^{[k]}A_3^{[k]} \quad (72-4)$$

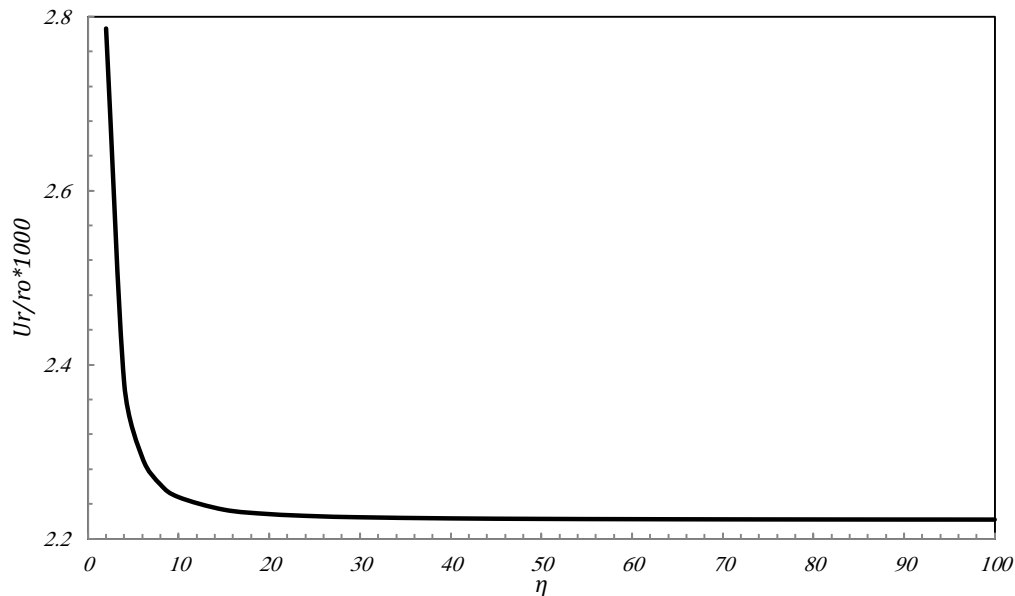
می‌باشد. معادله‌ی فوق برای هر حلقه صادق است که مشابه بخش قبل با اعمال شرایط مرزی و شرایط پیوستگی تمامی ثوابت مجهول محاسبه خواهند شد

۴-۷ بررسی نتایج حل دیسک ناهمگن با توزیع خواص نمایی با تابع ضخامت توانی

در این قسمت مشابه تمام مطالب ارائه شده، به تحلیل یک نمونه از دیسک با مشخصات ارائه شده در جداول (۱-۱) تا (۳-۱) پرداخته می‌شود.

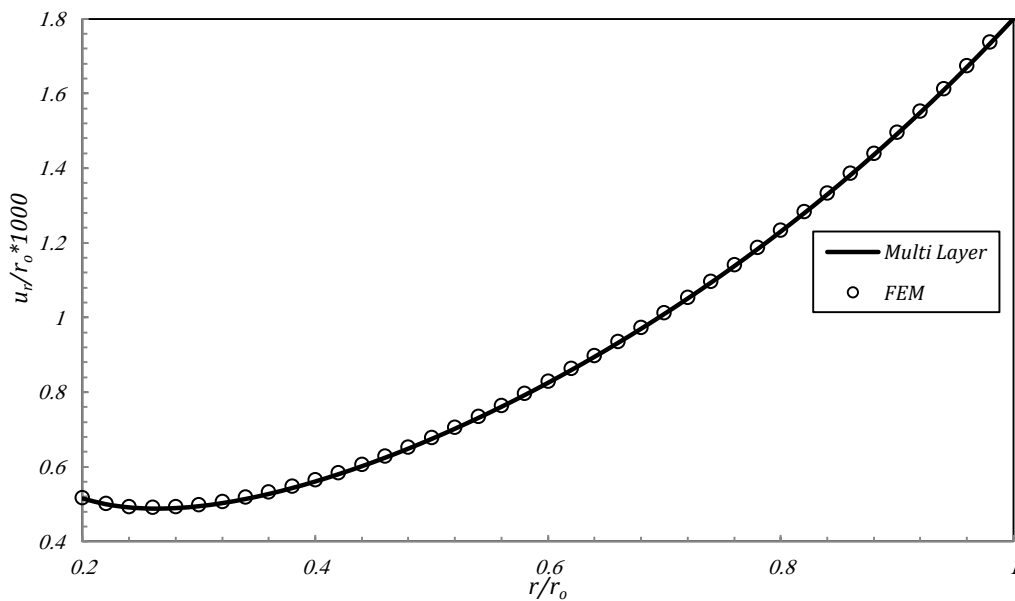
۴-۷-۱ مقایسه حل عددی با حل نیمه تحلیلی

در قسمت قبل با وجود اینکه از روش حلقه‌ای نمودن دیسک برای حل استفاده شد ولی تمامی معادلات حاکم مشابه دیسک همگن با پروفیل نمایی بود، لذا برای آن بحث بهینه سازی تعداد حلقه‌ها مطرح نگردید ولی در این بخش با توجه به اینکه در این قسمت برای حل حرارتی نیز از روش حلقه‌ای نمودن دیسک استفاده شده است، بنابراین می‌بایست ابتدا تعداد حلقه‌ها را بدست آورد. شکل ۴-۱۶ رابطه‌ی تعداد حلقه‌ها با جابجایی بیشینه در دیسک با ضخامت متغیر نمایی و برای حالت $n=0.3$ و $h_i/h_o=0.2$ ارائه شده است:

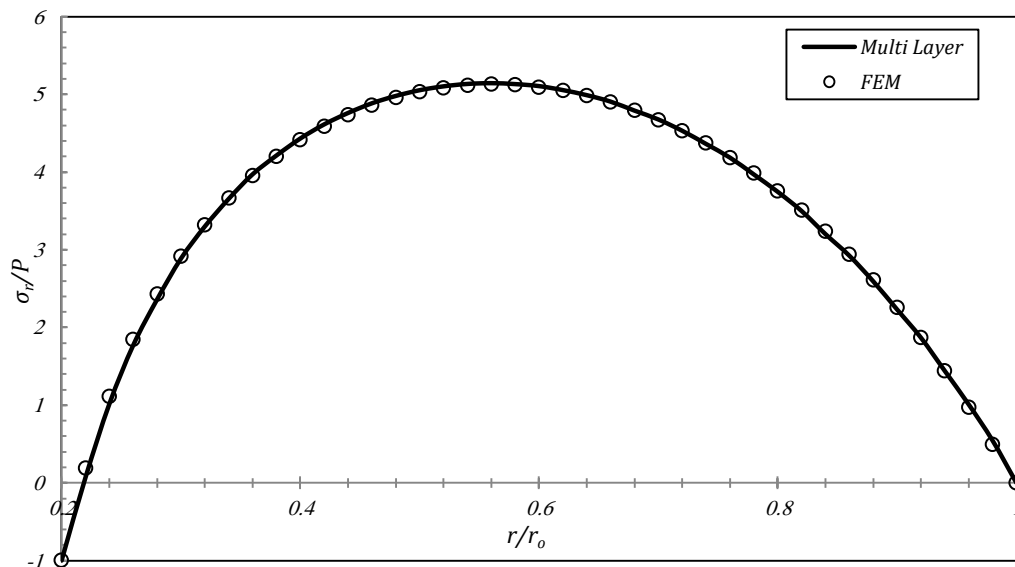


شکل ۴-۱۶: بررسی استقلال از تعداد حلقه‌ها در دیسک ناهمگن

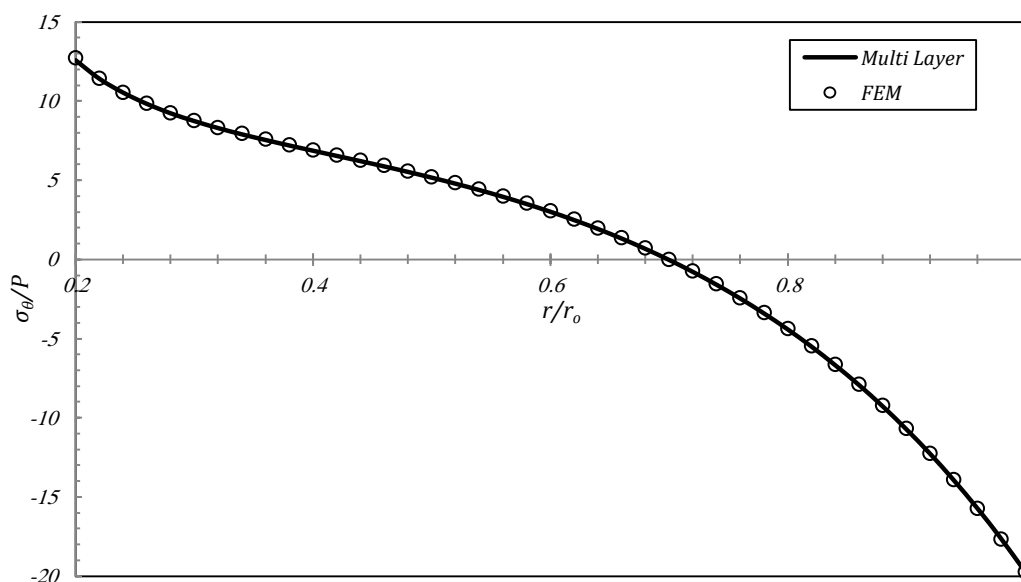
نتایج فوق نشان می‌دهد برای تعداد حلقه‌های بیشتر از ۳۰ شیب منحنی افقی شده است، بنابراین مشابه حالت قبل چهل حلقه انتخاب می‌شود. شکل ۴-۱۷ تا ۴-۱۹ به مقایسه نتایج حل نیمه تحلیلی و عددی می‌پردازد:



شکل ۴-۱۷: مقایسه ی توزیع جابجایی شعاعی در دیسک FG توانی با پروفیل نمایی با روش عددی



شکل ۴-۱۸: مقایسه ی توزیع تنش شعاعی در دیسک FG توانی با پروفیل نمایی با روش عددی

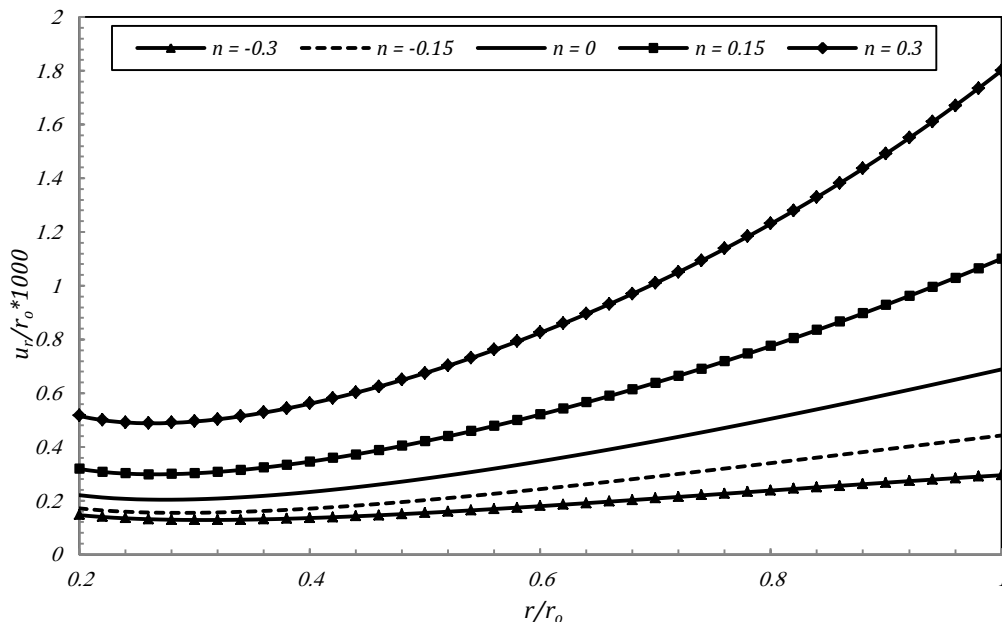


شکل ۴-۱۹: مقایسه ی توزیع تنش محیطی در دیسک FG توانی با پروفیل نمایی با روش عددی

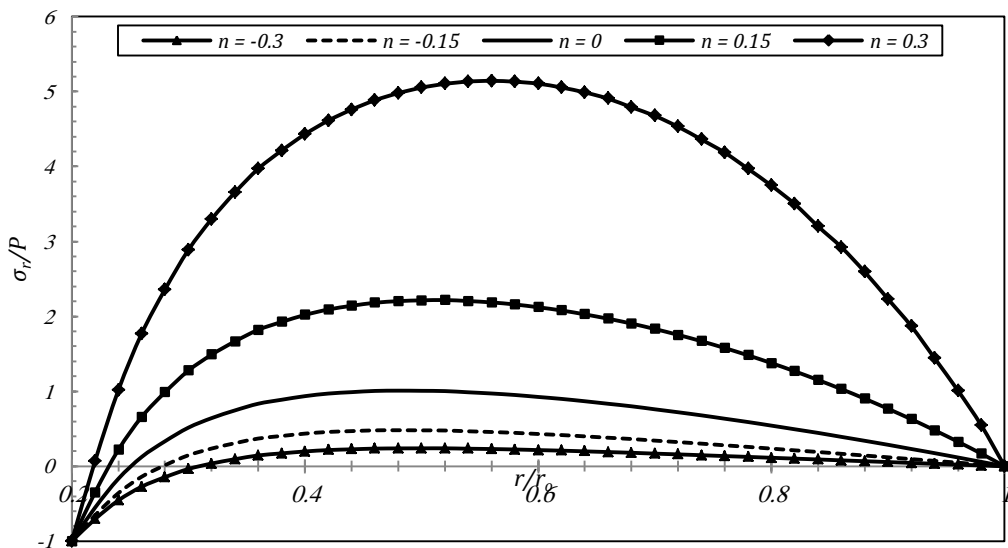
نمودارهای فوق انطباق بین حل عددی و نیمه تحلیلی را نشان می دهد. لازم به ذکر است که در حل عددی مشابه حل نیمه تحلیلی دیسک به ۴۰ ناحیه تقسیم شده که هر ناحیه دارای خواص ثابت می باشد و بصورت مجزا شبکه بندی شده است و برای پروفیل ضخامت از تعریف تابع در نرم افزار انسیس استفاده شده است.

۴-۷-۲ بررسی تاثیر ثابت ناهمگنی در توزیع مشخصه های مکانیکی

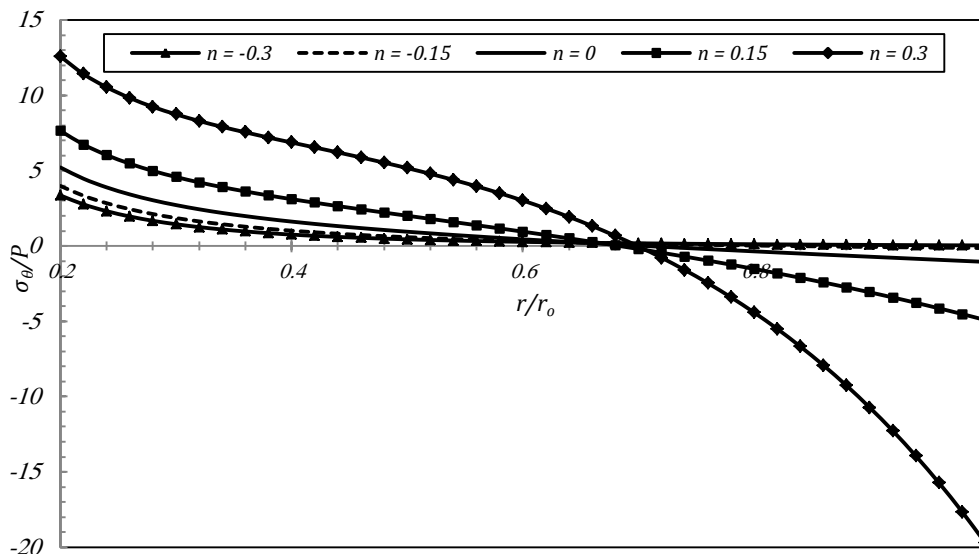
در این گام مطابق روال گذشته نتایج در دیسک بر حسب ثابت های ناهمگنی ترسیم می شود و روند تغییرات نمودارها بررسی می شود. شکل های ذیل توزیع تنش ها و جابجایی شعاعی را در راستای شعاع به ازای مقادیر مختلف ثابت ناهمگنی نمایش می دهد.



شکل ۴-۲۰: توزیع جابجایی شعاعی در دیسک با پروفیل نمایی و تابع توزیع خواص توانی ($h_i/h_o=2$)



شکل ۴-۲۱: توزیع تنش شعاعی در دیسک با پروفیل نمایی و تابع توزیع خواص توانی ($h_i/h_o=2$)



شکل ۴-۲۲: توزیع تنش محیطی در دیسک با پروفیل نمایی و تابع توزیع خواص توانی ($h_i/h_0=2$)

در این حالت نیز مشاهده می‌شود نحوه‌ی تغییرات نتایج مشابه با توجه به ثابت ناهمگنی دیسک های FG می‌باشد.

۴ - ۸ حل دیسک ناهمگن با توزیع خواص توانی با تابع ضخامت نمایی

در این قسمت تابع توزیع خواص و ضخامت به صورت زیر فرض می‌شوند:

$$P(r) = P_i \left(\frac{r}{r_i} \right)^n, h(r) = h^* e^{mr} \quad (۷۳-۴)$$

بنابراین ضرایب معادله‌ی حاکم به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} A_1 &= r^2 \\ A_2 &= (1 + mr + n)r \\ A_3 &= (n + mr)\nu - 1 \\ A_4 &= r(1 + \nu) \left\{ \frac{(1 - \nu)\rho_i r^2 \omega^2}{E_i} - \alpha_i \left(\frac{r}{r_i} \right)^n \left(r \frac{d}{dr} (\Delta T(r)) + (2n + mr)\Delta T(r) \right) \right\} \end{aligned} \quad (۷۴-۴)$$

با توجه به اینکه عامل نمایی در تابع ضخامت وجود دارد لذا حل دقیق برای آن وجود نخواهد داشت، مشابه حالت قبل با تبدیل دیسک به حلقه های ثابت تابع توزیع گرادیان دما در هر حلقه به شکل زیر خواهد بود:

$$\Delta T (r)^{[k]} = (C_1' - T_i) + C_2' e^{\left[\frac{mr^{[k]} + (n+1)}{r^{[k]}} \right] r}, \left[\frac{d\Delta T (r)}{dr} \right]^{[k]} = C_2' \left(\frac{mr^{[k]} + (n+1)}{r^{[k]}} \right) e^{\left[\frac{mr^{[k]} + (n+1)}{r^{[k]}} \right] r} \quad (75-4)$$

بنابراین معادله ی حاکم در هر حلقه به صورت زیر تبدیل خواهد شد:

$$A_1^{[k]} \frac{d^2 u_r^{[k]}}{dr^2} + A_2^{[k]} \frac{du_r^{[k]}}{dr} + A_3^{[k]} u_r^{[k]} + A_4^{[k]} = 0 \quad (76-4)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} A_1^{[k]} &= (r^{[k]})^2 \\ A_2^{[k]} &= (1+n+mr^{[k]})r^{[k]} \\ A_3^{[k]} &= (mr^{[k]}+n)\nu-1 \\ A_4^{[k]} &= r^{[k]}(1+\nu) \left\{ \frac{(1-\nu)\rho_i (r^{[k]})^2 \omega^2}{E_i} - \alpha_i \left(\frac{r^{[k]}}{r_i} \right)^n \left(\left(\frac{d(\Delta T)}{dr} \right)^{[k]} r^{[k]} + (2n+mr^{[k]})\Delta T^{[k]} \right) \right\} \end{aligned} \quad (77-4)$$

9

$$\begin{aligned} \Delta T^{[k]} &= \Delta T (r)^{[k]} \Big|_{r=r^{[k]}} \\ \left(\frac{d(\Delta T)}{dr} \right)^{[k]} &= \left(\frac{d\Delta T (r)}{dr} \right)^{[k]} \Big|_{r=r^{[k]}} \end{aligned} \quad (78-4)$$

می باشد. با حل معادله ی فوق داریم:

$$\begin{cases} \Delta^{[k]} = 0 \rightarrow u_r^{[k]} = C_1^{[k]} e^{\lambda_1^{[k]} r} + C_2^{[k]} r e^{\lambda_1^{[k]} r} - \frac{A_4^{[k]}}{A_3^{[k]}} \\ \Delta^{[k]} \neq 0 \rightarrow u_r^{[k]} = C_1^{[k]} e^{\lambda_1^{[k]} r} + C_2^{[k]} e^{\lambda_2^{[k]} r} - \frac{A_4^{[k]}}{A_3^{[k]}} \end{cases} \quad \frac{r^{[k-1]} + r^{[k]}}{2} < r < \frac{r^{[k]} + r^{[k+1]}}{2} \quad (79-4)$$

که در آن:

$$\lambda_{1,2}^{[k]} = \frac{-A_2^{[k]} \pm \sqrt{\Delta^{[k]}}}{2A_1^{[k]}}, \quad \Delta^{[k]} = (A_2^{[k]})^2 - 4A_1^{[k]}A_3^{[k]} \quad (۸۰-۴)$$

می باشد. معادله‌ی فوق برای هر حلقه صادق است که مشابه بخش قبل با اعمال شرایط مرزی و شرایط پیوستگی تمامی ثوابت مجهول محاسبه خواهند شد.

تابع به دست آمده مشابه حالات قبل از نوع چند ضابطه‌ای با توجه به تعداد حلقه‌ها می‌باشد که با توجه به پیچیدگی آن نمی‌توان شکل کلی برای آن ارائه نمود.

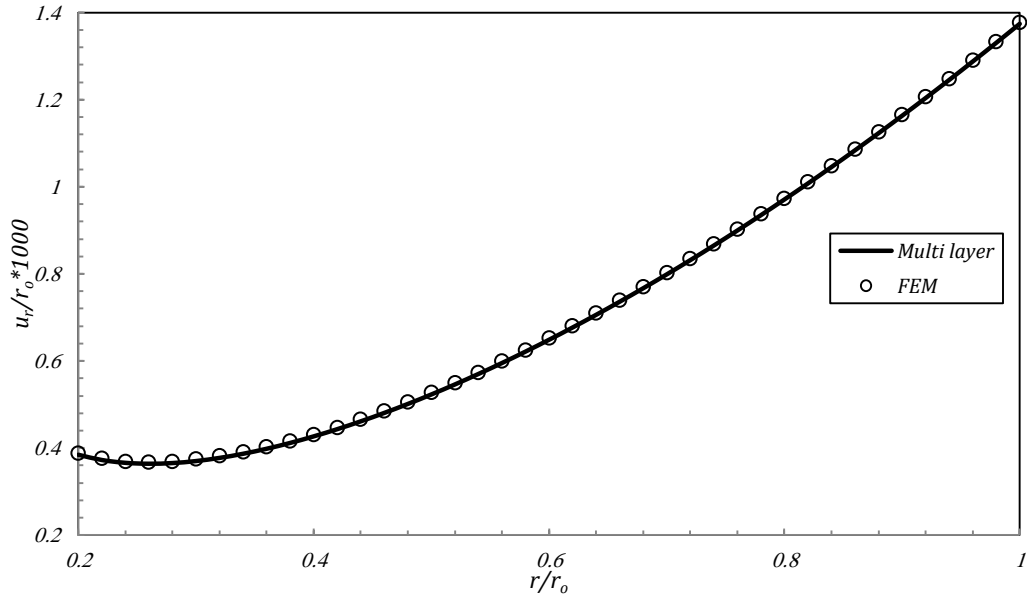
۴-۹ بررسی نتایج حل دیسک ناهمگن با توزیع خواص توانی با تابع ضخامت نمایی

در این قسمت به بررسی یک نمونه دیسک ناهمگن با تابع توزیع خواص توانی با پروفیل نمایی پرداخته می‌شود. نتایج بدست آمده در این بخش برای ماده همگن در فصل سوم آورده شده است و خواص ثابت در معادلات مطابق جداول ۱-۱ و ۲-۱ انتخاب شده است و شرایط اعمالی بر دیسک با توجه به شرایط مرزی مطابق جدول ۳-۱ خواهد بود. در انتها پس از اعتبارسنجی به حل، به بررسی تاثیر پارامترهای مختلف در نتایج پرداخته می‌شود.

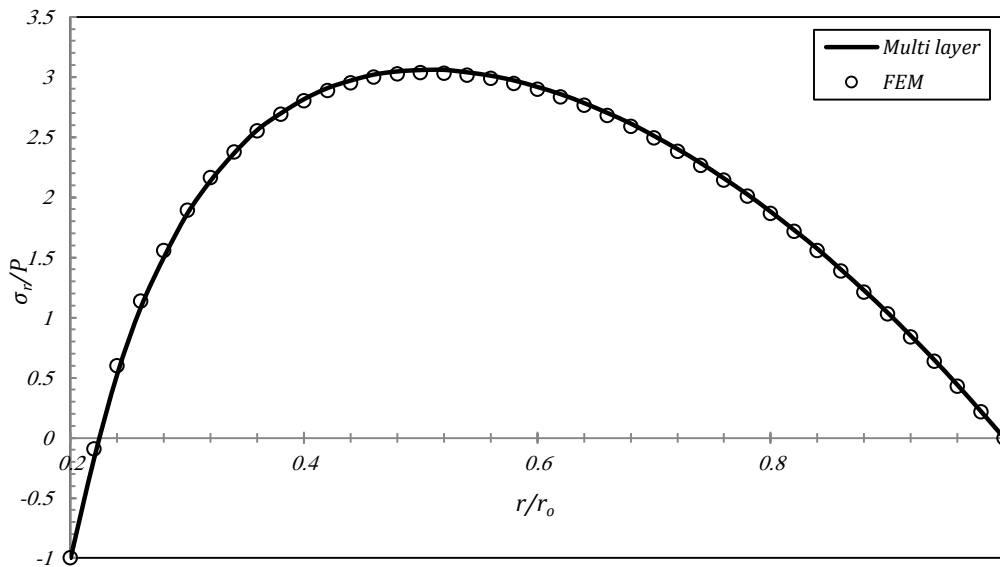
۴-۹-۱ مقایسه حل عددی با حل نیمه تحلیلی

در این مدل نیز از ۴۰ حلقه در حل نیمه تحلیلی استفاده شده است و نتایج بر مبنای آن استخراج شده است. به منظور بررسی صحت تعداد حلقه و فرضیات در نظر گرفته شده نتایج بدست آمده با حل عددی در نرم افزار انسیس مقایسه می‌شوند. لازم به ذکر است در نرم افزار انسیس نیز از چهل لایه برای مدل سازی مواد FG استفاده شده است.

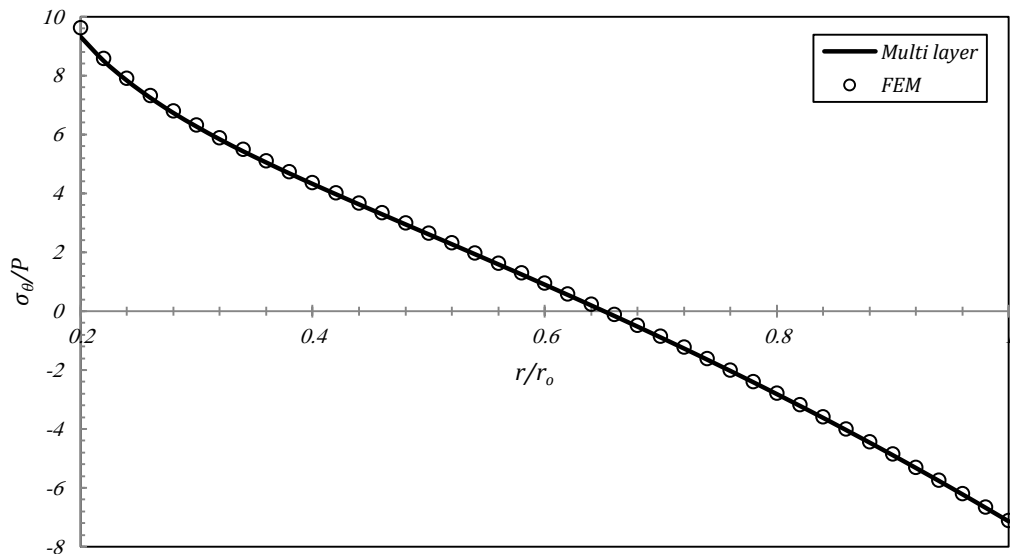
شکل‌های ۲۳-۴ تا ۲۵-۴ نتایج بدست آمده در تنش‌ها و جابجایی شعاعی با استفاده از دو روش تحلیل و عددی را نمایش می‌دهند:



شکل ۲۳-۴: مقایسه ی توزیع جابجایی شعاعی در دیسک FG نمایی با پروفیل توانی با روش عددی



شکل ۲۴-۴: مقایسه ی توزیع تنش شعاعی در دیسک FG نمایی با پروفیل توانی با روش عددی

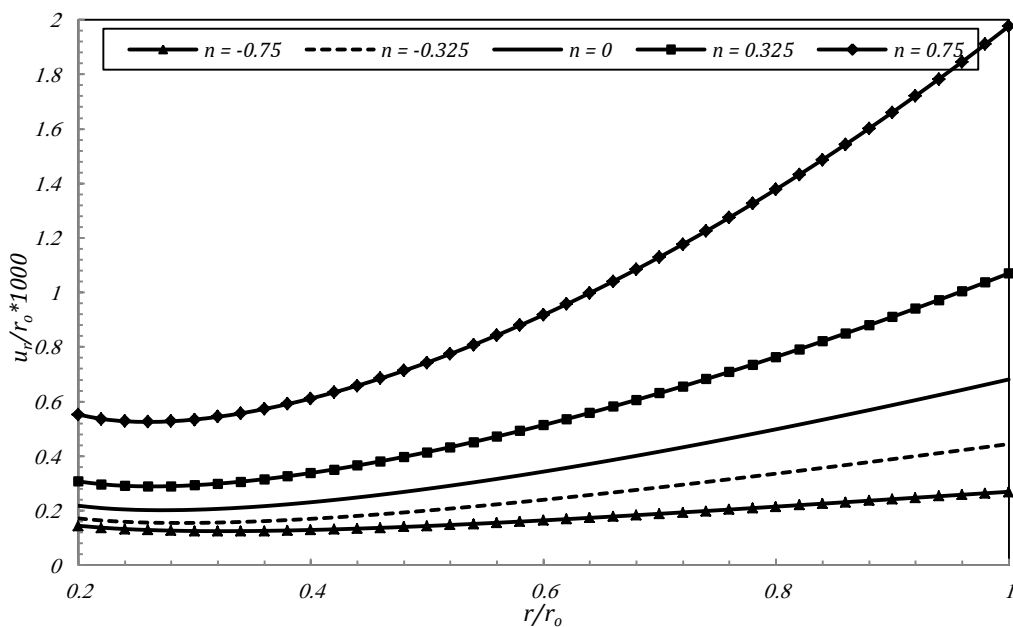


شکل ۴-۲۵: مقایسه ی توزیع تنش محیطی در دیسک FG نمایی با پروفیل توانی با روش عددی

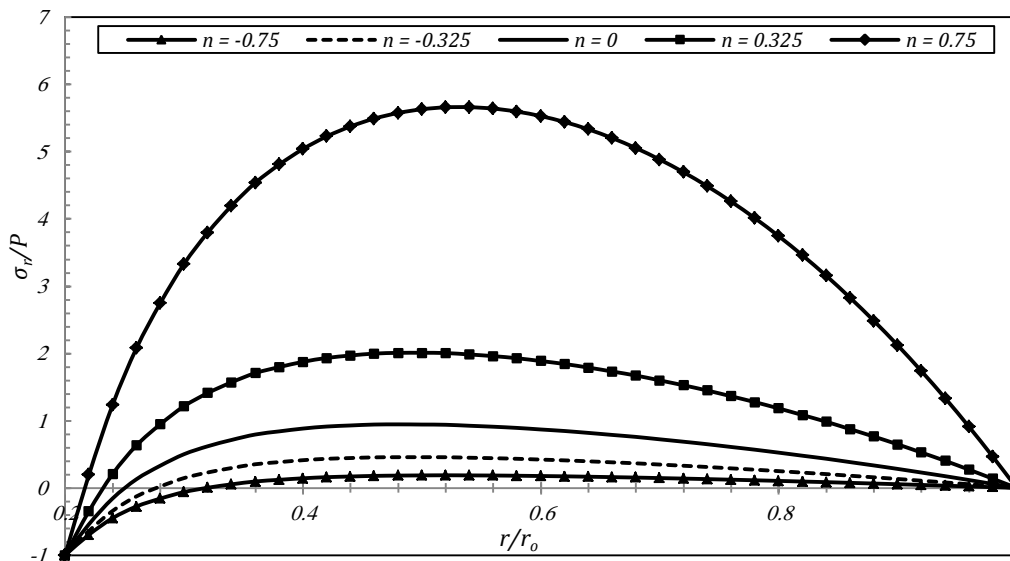
نتایج نشان داده شده، صحت حل نیمه تحلیلی را با توجه به حل عددی نمایش می دهد.

۴ - ۹ - ۲ بررسی تاثیر ثابت ناهمگنی در توزیع مشخصه های مکانیکی

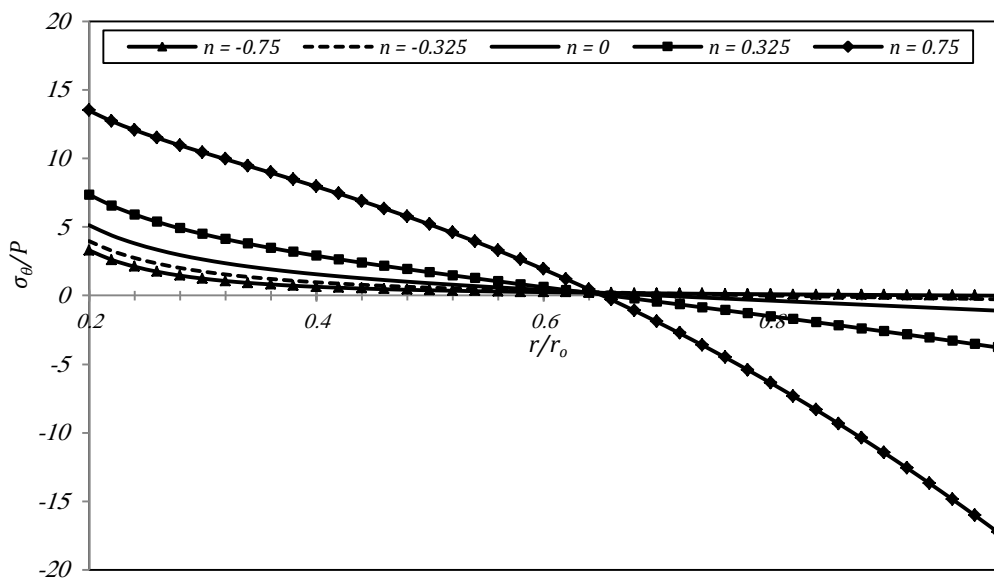
شکلهای ۴-۲۶ تا ۴-۲۸ نتایج را در راستای شعاع به ازای مقادیر مختلف ثابت ناهمگنی نمایش می دهد.



شکل ۴-۲۶: توزیع جابجایی شعاعی در دیسک با پروفیل توانی و تابع توزیع خواص نمایی ($h_i/h_o=2$)



شکل ۴-۲۷: توزیع تنش شعاعی در دیسک با پروفیل توانی و تابع توزیع خواص نمایی ($h_r/h_o=2$)



شکل ۴-۲۸: توزیع تنش محیطی در دیسک با پروفیل توانی و تابع توزیع خواص نمایی ($h_r/h_o=2$)

در این قسمت نیز نحوه‌ی تغییرات نتایج بدست آمده به ازای ثابت‌های ناهمگنی مختلف مشابه دیسک همگن می‌باشد.

۴-۱۰ جمع بندی

در این بخش سعی شد تمامی مسائل با در نظر گرفتن توابع ضخامت و خواص مختلف حل شود که در هر مرحله بنا به نوع معادله روشی برای آن ارائه گردید و نتایج در هر بخش با حل عددی مقایسه و به تفکیک ثابت ناهمگنی بیان شد.

در اولین بخش دیسک ناهمگن با توزیع خواص توانی با تابع ضخامت توانی تحلیل و حل دقیق برای آن ارائه گردید. جدول ۴-۱ به اختصار نتایج جابجایی شعاعی بدست آمده در این بخش را نشان می دهد:

جدول ۴-۱: حل پارامتریک دیسک ناهمگن توانی با پروفیل توانی

$u_r = C_1 r^{\frac{1}{2} \left(-(m+n) + \sqrt{(m+n)^2 - 4(m+n)\nu + 4} \right)} + C_2 r^{\frac{1}{2} \left(-(m+n) - \sqrt{(m+n)^2 - 4(m+n)\nu + 4} \right)}$ $+ \frac{(\nu^2 - 1)\rho_i \omega^2 r^3}{(8 + (3 + \nu)(m + n))E_i} + \frac{(T_o - T_i)(1 + \nu)\alpha_i}{(r_o^{-(m+n)} - r_i^{-(m+n)})} \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{-nr_i^{-n}}{(n(m-1-\nu) - m(\nu-1))} \right) r^{1-m} \\ & - \left(\frac{(2n+m)r_i^{-(2n+m)}}{(2n^2 + n(3+\nu+m) + m(1+\nu))} \right) r^{1+n} \end{aligned} \right\}$		
$C_1 = \frac{r_o r_i}{(\lambda_1 + \nu) \left(r_o^{\lambda_2} r_i^{\lambda_1} - r_o^{\lambda_1} r_i^{\lambda_2} \right)} \times \left\{ \begin{aligned} & r_i^{\lambda_2 - 1} \left[\begin{aligned} & \frac{-(2n+m)\alpha_i r_i^{-(2n+m)} r_o^n (1+\nu)(1+\nu+n)(T_o - T_i)}{(2n^2 + n(3+\nu+m) + m(1+\nu)) \left(r_o^{-(m+n)} - r_i^{-(m+n)} \right)} \right. \\ & \left. + \frac{-n\alpha_i r_i^{-n} r_o^{-m} (T_o - T_i)(1-m+\nu)}{(n(m-1-\nu) - m(\nu-1)) \left(r_o^{-(m+n)} - r_i^{-(m+n)} \right)} - \alpha_0 (1+\nu) \left(\frac{r_o}{r_i} \right)^n (T_o - T_i) \right] \\ & - r_o^{\lambda_2 - 1} \left[\begin{aligned} & \frac{-(2n+m)\alpha_i r_i^{-(n+m)} (1+\nu)(1+\nu+n)(T_o - T_i)}{(2n^2 + n(3+\nu+m) + m(1+\nu)) \left(r_o^{-(m+n)} - r_i^{-(m+n)} \right)} \right. \\ & \left. + \frac{-n\alpha_i r_i^{-(n+m)} (T_o - T_i)(1+\nu)(1-m+\nu)}{(n(m-1-\nu) - m(\nu-1)) \left(r_o^{-(m+n)} - r_i^{-(m+n)} \right)} \right] \end{aligned} \right\}$	$C_2 = \frac{r_o r_i}{(\lambda_2 + \nu) \left(r_o^{\lambda_2} r_i^{\lambda_1} - r_o^{\lambda_1} r_i^{\lambda_2} \right)} \times \left\{ \begin{aligned} & r_o^{\lambda_1 - 1} \left[\begin{aligned} & \frac{-(2n+m)\alpha_i r_i^{-(n+m)} (1+\nu)(T_o - T_i)(1+\nu+n)}{(2n^2 + n(3+\nu+m) + m(1+\nu)) \left(r_o^{-(m+n)} - r_i^{-(m+n)} \right)} \right. \\ & \left. + \frac{-n\alpha_i r_i^{-(n+m)} (T_o - T_i)(1+\nu)(1-m+\nu)}{(n(m-1-\nu) - m(\nu-1)) \left(r_o^{-(m+n)} - r_i^{-(m+n)} \right)} \right] \\ & - r_i^{\lambda_1 - 1} \left[\begin{aligned} & \frac{-(2n+m)\alpha_i r_i^{-(2n+m)} r_o^n (1+\nu)(1+\nu+n)(T_o - T_i)}{(2n^2 + n(3+\nu+m) + m(1+\nu)) \left(r_o^{-(m+n)} - r_i^{-(m+n)} \right)} \right. \\ & \left. + \frac{-n\alpha_i r_i^{-n} r_o^{-m} (T_o - T_i)(1-m+\nu)(1+\nu)}{(n(m-1-\nu) - m(\nu-1)) \left(r_o^{-(m+n)} - r_i^{-(m+n)} \right)} \right] \end{aligned} \right\}$	گرادین حرارتی
$C_1 = - \frac{r_i r_o^{\lambda_2} P(1-\nu^2)}{E_0(\lambda_1 + \nu) \left(r_o^{\lambda_2} r_i^{\lambda_1} - r_o^{\lambda_1} r_i^{\lambda_2} \right)}$	$C_2 = \frac{r_i r_o^{\lambda_1} P(1-\nu^2)}{E_0(\lambda_1 + \nu) \left(r_o^{\lambda_2} r_i^{\lambda_1} - r_o^{\lambda_1} r_i^{\lambda_2} \right)}$	فشار داخلی
$C_1 = \frac{(\nu^2 - 1)(3 + \nu)\rho_i \omega^2 r_o r_i \left(r_i^{\lambda_2 - 1} r_o^2 - r_o^{\lambda_2 - 1} r_i^2 \right)}{E_i(\lambda_1 + \nu) \left(r_o^{\lambda_2} r_i^{\lambda_1} - r_o^{\lambda_1} r_i^{\lambda_2} \right) (8 + (3 + \nu)(m + n))}$	$C_2 = - \frac{(\nu^2 - 1)(3 + \nu)\rho_i \omega^2 r_o r_i \left(r_i^{\lambda_1 - 1} r_o^2 - r_o^{\lambda_1 - 1} r_i^2 \right)}{E_i(\lambda_1 + \nu) \left(r_o^{\lambda_2} r_i^{\lambda_1} - r_o^{\lambda_1} r_i^{\lambda_2} \right) (8 + (3 + \nu)(m + n))}$	دوران

در قسمت‌های بعدی با توجه به اینکه حل پارامتریک برای معادله‌ی حاکم وجود ندارد از روش نیمه تحلیلی برای حل استفاده شد. با توجه به اینکه تابع نمایی و توانی از دو جنس متفاوت هستند نمی‌توان با توجه به ثابت ناهمگنی در مورد نتایج قضاوت نمود. برای این منظور می‌بایست برای یک نسبت خواص مشخص ثابت‌های ناهمگنی در هر تابع مشخص شده و نتایج با یکدیگر مقایسه شود. با توضیحات ذکر شده برای توابع مختلف رابطه‌ی ثابت ناهمگنی قابل محاسبه است.

همانطور که بیان شد رابطه‌ی خواص در تابع توانی به شکل زیر است:

$$P(r) = P_i \left(\frac{r}{r_i} \right)^n \quad (۸۱-۴)$$

اگر ثابت ناهمگنی مطابق رابطه زیر باشد خواص در r_i برابر P_i و در r_o برابر P_o می‌باشد:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{P_o}{P_i}\right)}{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)} \quad (۸۲-۴)$$

برای تابع نمایی نیز داریم:

$$P(r) = P_i e^{\frac{n(r-r_i)}{r_i}} \quad (۸۳-۴)$$

$$n = \frac{r_i \ln\left(\frac{P_o}{P_i}\right)}{r_o - r_i} \quad (۸۴-۴)$$

با توجه به رابطه‌های فوق برای $P_o/P_i=1.5$ ثابت ناهمگنی برای تابع توانی برابر $۰/۲۵$ و برای تابع نمایی برابر $۰/۱$ خواهد بود این مقادیر برای $P_o/P_i=0.3$ برای توابع توانی و نمایی به ترتیب $-۰/۷۵$ و $-۰/۳$ بدست می‌آید.

جدول ۲-۴ نتایج حاصل از تحلیل برای دیسک با نسبت ضخامت در شعاع داخلی به شعاع خارجی برابر ۲ به تفکیک بارگذاری را نشان می دهد.

جدول ۲-۴: تنش معادل در دیسک‌های FG به تفکیک ماده، پروفیل و بارگذاری

$P_o/P_i=1.5$	$P_o/P_i=1$	$P_o/P_i=0.3$	بارگذاری	نوع FG	نوع پروفیل
۱۶۴	۱۰۱/۴	۲۵/۰	حرارت	توانی	توانی
۷۲/۲	۸۲/۳	۱۰۳/۳	فشار		
۷۶/۲	۶۰	۳۳/۱	دوران		
۲۹۲/۸	۲۲۹/۷	۱۵۹/۳	مجموع		
۱۶۳/۸	۱۰۱/۴	۳۵/۱	حرارت	نمایی	توانی
۸۱/۸	۸۲/۳	۱۰۰/۴	فشار		
۶۱/۲	۶۰	۳۶/۵	دوران		
۳۰۱/۱	۲۲۹/۷	۱۶۹/۴	مجموع		
۱۶۶/۴	۱۰۳/۱	۲۶/۲	حرارت	توانی	نمایی
۷۲/۹	۷۸/۴	۹۸/۷	فشار		
۵۹/۲	۵۱/۴	۳۴	دوران		
۲۹۱/۹	۲۲۷/۶	۱۵۶/۵	مجموع		
۱۵۸/۳	۱۰۳/۱	۳۲/۰	حرارت	نمایی	نمایی
۷۵	۷۸/۴	۹۰/۲	فشار		
۵۹/۱	۵۱/۴	۳۵	دوران		
۲۸۶/۱	۲۲۷/۶	۱۵۴/۲	مجموع		

جدول ۲-۴ نتایج جامعی در زمینه دو تابع ضخامت و توزیع خواص ارائه داده است که می توان به تفکیک بارگذاری دیسک بهینه را انتخاب نمود:

۱- بارگذاری حرارتی: در این حالت بهترین دیسک، دیسکی با پروفیل توانی و از نوع هذلولوی است که توزیع خواص در آن بصورت توانی است. در این دیسک با افزایش خواص نسبت به لایه میانی تنش‌ها افزایش می‌یابد. نکته‌ی قابل توجه اینست که با افزایش خواص تنش‌ها بیشتر از دیسک‌های دیگر افزایش می‌یابد.

۲- بارگذاری دورانی: در این حالت بهترین دیسک، مشابه بارگذاری حرارتی است.

۳- بارگذاری فشار داخلی: در جدول ۲-۴ مشاهده می‌شود بهترین دیسک تحت فشار داخلی، با پروفیل نمایی و توزیع خواص نمایی است. ولی با این حال استفاده از ماده FG و دیسک با ضخامت متغیر تحت این بارگذاری سودمند نبوده و سبب افزایش تنش نسبت به ماده همگن شده است.

با جمع بندی مطالب ارائه شده در بندهای ۱ تا ۳ می‌توان نتیجه گرفت که افزایش ضخامت در لایه‌ی داخلی سبب کاهش تنش‌های ناشی از گرادیان حرارتی و دوران می‌شود با این حال در فشار داخلی نقش عوامل فوق سبب افزایش تنش می‌شود. لذا می‌بایست در دیسک‌های تحت فشار با رعایت ملاحظات دیسک FG و ضخامت متغیر انتخاب شود.

فصل پنجم:

نتیجه گیری

۵ - ۱ خلاصه مطالب ارائه شده در این پژوهش

در این پژوهش معادلات ترموالاستیک حاکم در دیسک استخراج گردید که در آن ضخامت و خواص متغیر فرض شدند. این معادلات برای حالات مختلف خواص و پروفیل ساده‌سازی گردید و برای دیسک چرخان تحت فشار داخلی و گرادیان دما معادلات حل و نتایج ارائه گردید. جدول ۱-۵ روش‌های به کار گرفته شده در هر فصل را به اختصار نشان داده شده است.

جدول ۱-۵: روشهای به کار گرفته شده برای هر نوع از دیسک‌ها در این پژوهش

شماره فصل	پروفیل ضخامت	ماده	روش حل معادله حرارت	روش حل معادله ترموالاستیک
۲	ضخامت ثابت	همگن	<i>Exact</i>	<i>Exact</i>
	ضخامت ثابت	<i>FG</i> توانی	<i>Exact</i>	<i>Exact</i>
۳	تابع توانی	همگن	<i>Exact</i>	<i>Exact</i>
	تابع نمایی	همگن	<i>Analytical</i>	<i>MultiLayer</i>
۴	تابع توانی	<i>FG</i> توانی	<i>Exact</i>	<i>Exact</i>
	تابع نمایی	<i>FG</i> توانی	<i>MultiLayer</i>	<i>MultiLayer</i>
	تابع توانی	<i>FG</i> نمایی	<i>MultiLayer</i>	<i>MultiLayer</i>
	تابع نمایی	<i>FG</i> نمایی	<i>Analytical</i>	<i>MultiLayer</i>

لازم به ذکر است برای معادلاتی که از تابع نمایی در مواد یا پروفیل استفاده شده است، حل تحلیلی در پیوست *B* ارائه شده است که در غیاب بارگذاری حرارتی می‌توان از آنها استفاده نمود. همچنین دیسک *FG* با توزیع

خواص توانی و پروفیل توانی با استفاده از معادلات بلترامی میشل حل شده است که توضیحات مربوط به آن در پیوست A آورده شده است.

پس از حل ارائه شده در هر گام نتایج با حل عددی در نرم افزار انسیس مقایسه شده است و در مورد خطاهای احتمالی در هر حل بحث شده است. در پایان نیز نتایج بنا به نوع پروفیل و مواد، تجزیه و تحلیل و نمودارهای آن ارائه شده است.

۵ - ۲ نتیجه گیری

در این تحقیق ابتدا نتایج دیسک همگن با ضخامت ثابت و تحت بارگذاری حرارتی و مکانیکی بررسی شد که مشاهده شد در لایه‌ی داخلی تنش در دیسک بیشینه است. از اینرو برای کاهش تنش در این ناحیه دو پیشنهاد مطرح گردید. اولی افزایش ضخامت و دیگری استفاده از مواد ناهمگن FG بود که برای هر یک از ایده‌ها چندین حالت مختلف بررسی و تحلیل شد. تحلیل نتایج حاصل از تحقیق از دو دیدگاه بررسی شده است که در ادامه ارائه می‌شود:

الف) تاثیر هر یک از بارگذاری‌ها بر مشخصه‌های مکانیکی دیسک:

در نتایج حاصل از تحلیل صرفنظر از نوع ماده و هندسه‌ی دیسک همواره جمع آثار صادق بوده و نحوه‌ی تغییرات مطابق توضیحات زیر می‌باشد:

۱- جابجایی شعاعی: قدرمطلق جابجایی ناشی از گرادیان حرارتی بر بارگذاری‌های دیگر غلبه دارد. با توجه به اینکه دما در دیسک با افزایش شعاع افزایش می‌یابد، تغییرات جابجایی ناشی از گرادیان حرارتی به صورت صعودی رفتار می‌کند. در بارگذاری ناشی از دوران تغییرات جابجایی شعاعی در لایه‌های داخلی دیسک نزولی، سپس تا نواحی نزدیک به شعاع خارجی صعودی شده و دوباره تغییرات به شکل نزولی تغییر وضع می‌دهد. با توجه به اینکه نیروی گریز از مرکز به دو عامل جرم و شعاع وابسته است این تغییرات منطقی به

نظر می‌رسد بطوریکه عامل شعاع باعث صعودی شدن تغییرات شده و عامل کاهش جرم بین لایه‌های مجاور که در سطوح داخلی و خارجی اتفاق می‌افتد سبب نزولی شدن رابطه می‌شود. بنابراین نمودار جابجایی دارای یک مینیمم نسبی و یک بیشینه نسبی می‌باشد. تغییرات جابجایی شعاعی ناشی از فشار داخلی، در کل دیسک با افزایش شعاع کاهش می‌یابد بنابراین در لایه‌های داخلی مقدار آن بیشینه است. با جمع کردن تمامی جابجایی‌های شعاعی ناشی از بارگذاریها ملاحظه می‌شود، در غالب لایه‌ها تغییرات به صورت صعودی می‌باشد، فقط در لایه های داخلی گرادیان جابجایی شعاعی ناشی از فشار بر جابجایی کل غلبه دارد و رفتار کلی نزولی می‌باشد.

۲- تنش شعاعی: تنش های شعاعی ناشی از گرادیان حرارتی و دوران رفتاری مشابه دارد. با توجه به آزاد بودن سطوح دیسک در شعاع داخلی و خارجی، در این دو ناحیه تنش صفر بوده و بقیه لایه‌ها تحت کشش ناشی از جابجایی شعاعی می‌باشد بنابراین تنش بیشینه در لایه‌های میانی رخ می‌دهد. در تنش ناشی از فشار داخلی، نحوه‌ی تغییرات قدر مطلق تنش به صورت نزولی می‌باشد به گونه‌ای که فشار داخلی تمامی لایه‌ها را تحت فشار قرار می‌دهد. با استفاده از جمع آثار رفتار برآیند نیروها به شکلی است که لایه‌های داخلی تحت فشار و لایه‌های خارجی تحت کشش قرار دارد.

۳- تنش محیطی: تنش محیطی ناشی از گرادیان حرارتی، بر بارگذاری‌های دیگر از لحاظ مقداری غلبه دارد. در بارگذاری ناشی از گرادیان حرارتی لایه های داخلی تحت کشش و لایه های بیرونی تحت فشار قرار دارد. لازم به ذکر است که تحت تمامی بارگذاریها همواره تنش محیطی در لایه‌ی داخلی بیشینه است و با توجه به صادق بودن اصل جمع آثار این ناحیه در معرض بیشترین تنش کششی قرار دارد. از طرفی با توجه به اینکه تنش محیطی از لحاظ مقداری چندین برابر تنش محیطی است لذا تنش معادل فون میزز تحت تاثیر مقدار تنش محیطی بوده و در لایه داخلی بیشینه است.

لازم به ذکر است تجزیه تحلیل‌های انجام شده بر اساس بارگذاری اعمالی مطابق جداول ۱-۱ تا ۱-۳ صورت گرفته است و برای دیسک‌های مختلف ممکن است نتایج تغییر کند. البته سعی شده است شرایط در نظر گرفته

شده، در محدوده‌ی کاربردهای صنعتی دیسک‌ها قرار گرفته باشد. با این حال با توجه به عدم وجود رفتار تعمیم پذیر در دیسک‌ها هر مسئله‌ی جدید می‌بایست با استفاده از روش‌های ذکر شده تحلیل شود.

ب) تاثیر تغییر خواص و هندسه‌ی دیسک بر مشخصه‌های مکانیکی حاصل از بارگذاری‌ها:

در این حالت نتایج بدست آمده در جدول ۵-۲ به اختصار آورده شده است:

جدول ۵-۲: تنش معادل در لایه داخلی به تفکیک بارگذاری

$\sigma_{eq} rotation$	$\sigma_{eq} pressure$	$\sigma_{eq} thermal$	P_o/P_i	ماده	h_i/h_o	پروفیل ضخامت
۶۴/۹	۷۲/۲	۱۳۱/۶	۱	همگن	۱	ضخامت ثابت
۴۲/۴	۹۰/۸	۳۴/۲	۰/۳	FG توانی	۱	ضخامت ثابت
۶۰/۰	۸۲/۳	۱۰۱/۴	۱	همگن	۲	تابع توانی
۵۱/۴	۷۸/۴	۱۰۳/۱	۰/۳	همگن	۲	تابع نمایی
۳۳/۱	۱۰۳/۳	۲۵/۰	۰/۳	FG توانی	۲	تابع توانی
۳۴/۰	۹۸/۷	۲۶/۲	۰/۳	FG توانی	۲	تابع نمایی
۳۶/۵	۱۰۰/۴	۳۵/۱	۰/۳	FG نمایی	۲	تابع توانی
۳۵/۰	۹۰/۲	۳۲/۰	۰/۳	FG نمایی	۲	تابع نمایی

نتایج حاصل نشان دهنده‌ی این است که در دیسک نمی‌توان تغییری ایجاد نمود که تمامی تنش‌های حاصل از بارگذاری‌ها را کاهش دهد، بلکه هر یک از تغییرات تأثیری مثبت در یک بارگذاری و تأثیر منفی در بارگذاری دیگر دارد. در حالت کلی می‌توان نتایج زیر را از تحلیل تنش‌ها در این پژوهش استخراج نمود:

۱- افزایش ضخامت در لایه‌ی داخلی سبب کاهش تنش ناشی از بارگذاری حرارتی و دوران می‌شود ولی افزایش تنش ناشی از فشار داخلی را به‌همراه دارد.

۲- استفاده از مواد FG بطوریکه خواص در راستای شعاع افزایش یابد مشابه افزایش ضخامت داخلی، سبب کاهش تنش ناشی از بارگذاری حرارتی و دوران و افزایش تنش حاصل از فشار داخلی می‌شود.

۳- پروفیل نمایی در بارگذاری حرارتی و دوران تنش بیشتری از پروفیل توانی دارد ولی در مورد فشار داخلی این موضوع به صورت عکس بوده و حتی از ضخامت ثابت نیز تنش بیشتری خواهد داشت.

۴- تابع توزیع خواص توانی نیز مشابه پروفیل توانی در بارگذاری حرارتی و دوران تنش بیشتری نسبت به تابع توزیع نمایی دارد.

لازم به ذکر است تمامی بندهای فوق به ازای h_i/h_o بزرگتر از یک و P_o/P_i کوچکتر از یک بدست آمده است و برای مقادیر h_i/h_o کوچکتر از یک و P_o/P_i بزرگتر از یک نتایج عکس مطالب ذکر شده خواهد بود.

۵ - ۳ زمینه های ادامه پژوهش

در این پژوهش سعی بر این بود که تمامی مطالب ارائه شده کامل بیان شود، ولی به هر حال نتایج بدست آمده نشان دهنده این مطلب است که مطالب این پژوهش نیاز به تحقیقات آتی خواهد داشت که در ادامه به چند مورد از آن‌ها اشاره خواهد شد:

۱- در فصل دوم برای سادگی از تنش برشی در صفحه r_z و تنش نرمال در راستای z صرف‌نظر شد و تمامی معادلات حاکم بر دیسک استخراج گردید. اگرچه این فرض تاحدودی منطبق بر شرایط واقعی دیسک می‌باشد ولی به هر حال خطای کمی در نتایج وارد نموده است. بنابراین پیشنهاد می‌شود با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی معادلات حل شوند. در این تئوری خطوط راست و عمود بر صفحه‌ی میانی، پس از تغییر شکل، راست باقی می‌مانند ولی الزاماً عمود نیستند، یعنی کرنش برشی و تنش برشی لحاظ می‌شود. قابل

ذکر است که معادلات بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی در پیوست C استخراج شده، که به دستگاه معادلات دیفرانسیل با ضرایب متغیر رسیده است. این دستگاه دارای حل دقیق نمی‌باشد ولی مشابه حل ارائه شده برای مخروط ناقص در [۳۱] می‌توان این دستگاه معادلات را به روش تحلیلی حل نمود که نیازمند مطالعات تکمیلی می‌باشد.

۲- همانطور که می‌دانیم خواص تمامی مواد وابسته به دمای کاری آن‌ها می‌باشد که این وابستگی می‌تواند با شیب متفاوت در هر خاصیت باشد. ولی در توابع بکار گرفته شده در این پژوهش تغییرات دما در خواص ماده در نظر گرفته نشده و برای هر دمایی خواص ثابت فرض شده‌اند. از این رو می‌توان برای تطبیق بیشتر نتایج علمی با واقعیت به خصوص برای دیسک‌های تحت گرادیان حرارتی زیاد تغییرات با دما لحاظ شود.

۳- در روش بکار گرفته شده برای تحلیل دیسک‌هایی که حل دقیق ندارند دیسک به حلقه‌هایی با ضخامت ثابت پیوسته تبدیل و معادلات برای هر حلقه ساده سازی و حل شدند. همانطور که می‌دانیم ضخامت و خواص بصورت خطی تغییر نمی‌کنند همچنین گرادیان نتایج در هر قسمت از دیسک متفاوت با یکدیگر است. برای مثال در لایه‌های داخلی گرادیان نتایج بدست آمده بیشتر از نواحی دیگر است از این رو می‌توان ضخامت لایه‌ها متناسب با خواص، ضخامت دیسک و گرادیان خواص متغیر در نظر گرفته شود که سبب کاهش خطا و زمان محاسبات خواهد شد.

پیوست ها

۶-۱ پیوست A: حل دقیق دیسک ناهمگن با ضخامت متغیر با استفاده از معادلات بلترامی -

میشل

با توجه به مطالب ارائه شده در فصل دوم می دانیم که:

$$\varepsilon_r = \frac{du_r}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} \quad (1-A)$$

با حذف u_r از روابط بالا معادله‌ی زیر برای دیسک بدست می آید که در واقع معادله‌ی سازگاری برای دیسک می‌باشد:

$$\varepsilon_\theta - \varepsilon_r + r \frac{d\varepsilon_\theta}{dr} = 0 \quad (2-A)$$

با توجه به اینکه بارگذاری حرارتی فقط در راستای شعاع است از این رو کرنش حرارتی فقط در این راستا وجود دارد و مقدار آن از رابطه‌ی زیر قابل محاسبه است:

$$\varepsilon_r^T = \alpha(r)(T(r) - T_0) = \alpha(r)\Delta T(r) \quad (3-A)$$

که در آن $\Delta T(r)$ تابع توزیع گرادیان دما بوده و با توجه به فصل دوم برای دیسک ناهمگن و با ضخامت متغیر به شکل زیر می باشد:

$$\Delta T(r) = (T_o - T_i) \left(\frac{\int_{r_i}^r \frac{dr}{rh(r)k(r,T)}}{\int_{r_i}^{r_o} \frac{dr}{rh(r)k(r,T)}} \right) \quad (4-A)$$

میدان تنش برای ماده‌ی الاستیک خطی با توجه به معادلات رفتاری ترموالاستیک به صورت زیر است:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} = \frac{E(r)}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r - \varepsilon_r^T \\ \varepsilon_\theta - \varepsilon_r^T \end{Bmatrix} \quad (5-A)$$

که این رابطه بر حسب کرنش به صورت زیر است:

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{1}{E(r)}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta) + \varepsilon_r^T \\ \varepsilon_\theta = \frac{1}{E(r)}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r) + \varepsilon_\theta^T \end{cases} \quad (6-A)$$

با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی، معادله‌ی تعادل در دیسک با در نظر گرفتن ضخامت متغیر به صورت زیر است:

$$\frac{d}{dr}(rh(r)\sigma_r) - h(r)\sigma_\theta + h(r)\rho(r)\omega^2 r^2 = 0 \quad (7-A)$$

اگر تابع فرضی زیر را در نظر بگیریم، خواهیم داشت: [۳۲]

$$\Phi(r) = rh(r)\sigma_r \quad (8-A)$$

که با توجه به رابطه‌ی (۷-۱) داریم:

$$\sigma_r = \frac{\Phi(r)}{rh(r)}, \quad \sigma_\theta = \frac{1}{h(r)} \frac{d\Phi}{dr} + \rho(r)\omega^2 r^2 \quad (9-A)$$

با جایگذاری روابط (۹-۱) و (۳-۱) در معادله‌ی (۶-۱) خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{1}{E(r)} \left\{ \frac{\Phi(r)}{rh(r)} - \nu \left(\frac{1}{h(r)} \frac{d\Phi}{dr} + \rho(r)\omega^2 r^2 \right) \right\} + \alpha(r)\Delta T(r) \\ \varepsilon_\theta = \frac{1}{E(r)} \left\{ \left(\frac{1}{h(r)} \frac{d\Phi}{dr} + \rho(r)\omega^2 r^2 \right) - \nu \frac{\Phi(r)}{rh(r)} \right\} + \alpha(r)\Delta T(r) \end{cases} \quad (10-A)$$

پس از جایگذاری روابط (۱۰-۱) در معادله‌ی سازگاری (۲-۱) داریم:

$$A_1 \frac{d^2\Phi}{dr^2} + A_2 \frac{d\Phi}{dr} + A_3\Phi + A_4 = 0 \quad (11-A)$$

که در آن:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= r^2 \\
 A_2 &= r^2 \left\{ \frac{1}{r} - \frac{\frac{d}{dr}(E(r)h(r))}{E(r)h(r)} \right\} \\
 A_3 &= r \left\{ -\frac{1}{r} + \nu \frac{\frac{d}{dr}(E(r)h(r))}{E(r)h(r)} \right\} \\
 A_4 &= h(r)r^2 \left\{ (3+\nu)\rho(r)r\omega^2 + \frac{d}{dr}(\rho(r))r^2\omega^2 + E(r)\frac{d}{dr}(\rho(r)\Delta T(r)) \right\}
 \end{aligned} \tag{۱۲-A}$$

می باشد.

برای حل یک حالت خاص از دیسک با این روش، دیسک ناهمگن FG با تابع توزیع توانی و تابع ضخامت توانی در فصل چهارم بررسی شد، در این قسمت تحلیل خواهد شد. در این دیسک توابع توزیع خواص و ضخامت به شکل زیر می باشد:

$$E(r) = E_i \left(\frac{r}{r_i} \right)^n, \rho(r) = \rho_i \left(\frac{r}{r_i} \right)^n, \alpha(r) = \alpha_i \left(\frac{r}{r_i} \right)^n, k(r) = k_i \left(\frac{r}{r_i} \right)^n, h(r) = h_o \left(\frac{r}{r_o} \right)^m \tag{۱۳-A}$$

که در آن E_i مدول الاستیسیته، ρ_i چگالی در، α_i ضریب انبساط حرارتی و k_i ضریب هدایت حرارتی در شعاع داخلی و h_o ضخامت در شعاع خارجی می باشد. با فرض توابع زیر برای خواص و ضخامت معادله ی حاکم به شکل زیر ساده می شود:

$$r^2 \frac{d^2\Phi}{dr^2} + r(1-(m+n)) \frac{d\Phi}{dr} + (\nu(m+n)-1)\Phi = F(r) \tag{۱۴-A}$$

که در آن:

$$F(r) = -\frac{h_o r^{(m+n)}}{r_o^m r_i^n} \left\{ \rho_i \omega^2 (3+\nu) r^3 + \alpha_i E_i \left(\frac{r}{r_i} \right)^n \left[r^2 \frac{d}{dr} (\Delta T(r)) + nr \Delta T(r) \right] \right\} \quad (15-A)$$

می باشد. با توجه به حل حرارتی ارائه شده در فصل چهارم، خواهیم داشت:

$$F(r) = -\frac{h_o r^{(m+n)}}{r_o^m r_i^n} \left\{ \rho_i \omega^2 (3+\nu) r^3 - \alpha_i E_i r_i^{-n} \left(\frac{T_o - T_i}{(r_o^{-(m+n)} - r_i^{-(m+n)})} \right) \right\} \times \left[mr^{-(m-1)} + nr_i^{-(m+n)} r^{n+1} \right] \quad (16-A)$$

معادله‌ی فوق یک معادله‌ی اویلر-کشی است که اگر در معادله‌ی فوق به جای $\Phi(r)$ عبارت r^λ قرار دهیم معادله‌ی مشخصه‌ی زیر بدست می آید:

$$\lambda^2 - (m+n)\lambda + ((m+n)\nu - 1) = 0 \quad (17-A)$$

و با حل معادله‌ی مشخصه داریم:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left((m+n) \pm \sqrt{\Delta} \right) \quad (18-A)$$

که در آن:

$$\Delta = (m+n)^2 - 4(m+n)\nu + 4 \quad (19-A)$$

می باشد. عبارت Δ به ازای تمامی مقادیر $(m+n)$ همواره عدد مثبتی خواهد بود در نتیجه λ همواره مقدار حقیقی خواهد داشت. بنابراین حل عمومی معادله به شکل زیر خواهد بود:

$$\Phi_H(r) = C_1 r^{\lambda_1} + C_2 r^{\lambda_2} \quad (20-A)$$

برای محاسبه‌ی حل خصوصی، از روش لاگرانژ استفاده می شود. چون از روش لاگرانژ در این قسمت استفاده شده است معادله‌ی دیفرانسیل به صورت استاندارد نوشته شده است و تمامی معادله به r^2 تقسیم شده است.

بنابراین از علامت $F'(r)$ استفاده شده است:

$$F'(r) = r^{(m+n)-1} (\chi_1 r^{-m} + \chi_2 r^n + \chi_3 r^2) \quad (21-A)$$

که در آن:

$$\chi_1 = \frac{(T_o - T_i) m \alpha_i h_o E_i}{(r_o^{-(m+n)} - r_i^{-(m+n)}) r_o^m r_i^{2n}}, \quad \chi_2 = \frac{(T_o - T_i) n r_i^{-(n+m)} \alpha_i h_o E_i}{(r_o^{-(m+n)} - r_i^{-(m+n)}) r_o^m r_i^{2n}},$$

$$\chi_3 = -\frac{h_o \rho_i (3 + \nu) \omega^2}{r_o^m r_i^n} \quad (22-A)$$

می باشد. با استفاده از حل عمومی مسئله، می توان حل خصوصی را به صورت زیر نوشت:

$$\Phi_p(r) = \mathcal{G}_1(r) r^{\lambda_1} + \mathcal{G}_2(r) r^{\lambda_2} \quad (23-A)$$

با حل دستگاه معادله ی زیر داریم:

$$\begin{cases} \mathcal{G}_1'(r) r^{\lambda_1} + \mathcal{G}_2'(r) r^{\lambda_2} = 0 \\ \mathcal{G}_1'(r) \lambda_1 r^{\lambda_1-1} + \mathcal{G}_2'(r) \lambda_2 r^{\lambda_2-1} = r^{(m+n)-1} (\chi_1 r^{-m} + \chi_2 r^n + \chi_3 r^2) \end{cases} \quad (24-A)$$

با جایگذاری معادله ی اول در معادله ی دوم خواهیم داشت:

$$\mathcal{G}_2'(r) = \frac{r^{(m+n)-\lambda_2} (\chi_1 r^{-m} + \chi_2 r^n + \chi_3 r^2)}{(\lambda_2 - \lambda_1)}, \quad \mathcal{G}_1'(r) = -\frac{r^{(m+n)-\lambda_1} (\chi_1 r^{-m} + \chi_2 r^n + \chi_3 r^2)}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \quad (25-A)$$

و با انتگرال گیری مقادیر $\mathcal{G}_1(r)$ و $\mathcal{G}_2(r)$ به شکل زیر بدست می آیند:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1(r) &= \frac{-1}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \int \left[\chi_1 r^{n-\lambda_1} + \chi_2 r^{(m+2n)-\lambda_1} + \chi_3 r^{(m+n+2)-\lambda_1} \right] dr \\ &= \frac{-1}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \left[\frac{\chi_1 r^{(1+n)-\lambda_1}}{((1+n)-\lambda_1)} + \frac{\chi_2 r^{(1+m+2n)-\lambda_1}}{((1+m+2n)-\lambda_1)} + \frac{\chi_3 r^{(m+n+3)-\lambda_1}}{((m+n+3)-\lambda_1)} \right] + C_1' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_2(r) &= \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \int \left[\chi_1 r^{n-\lambda_2} + \chi_2 r^{(m+2n)-\lambda_2} + \chi_3 r^{(m+n+2)-\lambda_2} \right] dr \\ &= \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \left[\frac{\chi_1 r^{(1+n)-\lambda_2}}{((1+n)-\lambda_2)} + \frac{\chi_2 r^{(1+m+2n)-\lambda_2}}{((1+m+2n)-\lambda_2)} + \frac{\chi_3 r^{(m+n+3)-\lambda_2}}{((m+n+3)-\lambda_2)} \right] + C_2' \end{aligned} \quad (26-A)$$

می‌توان ثوابت C_1' و C_2' را با ثوابت همگن ترکیب کرد، بنابراین برای سادگی این ثوابت از این مرحله حذف می‌شود و حل خصوصی به شکل زیر تبدیل خواهد شد:

$$\Phi_P(r) = \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \left[\begin{aligned} & \frac{\chi_1 r^{(1+n)}}{((1+n) - \lambda_2)} + \frac{\chi_2 r^{(1+m+2n)}}{((1+m+2n) - \lambda_2)} + \frac{\chi_3 r^{(m+n+3)}}{((m+n+3) - \lambda_2)} \\ & - \frac{\chi_1 r^{(1+n)}}{((1+n) - \lambda_1)} - \frac{\chi_2 r^{(1+m+2n)}}{((1+m+2n) - \lambda_1)} - \frac{\chi_3 r^{(m+n+3)}}{((m+n+3) - \lambda_1)} \end{aligned} \right] \quad (27-A)$$

پس از ساده سازی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \Phi_P(r) = & \left(\frac{1}{((1+n) - \lambda_2)((1+n) - \lambda_1)} \right) \chi_1 r^{(1+n)} + \left(\frac{1}{((m+n+3) - \lambda_2)((m+n+3) - \lambda_1)} \right) \chi_3 r^{(m+n+3)} \\ & + \left(\frac{1}{((1+m+2n) - \lambda_2)((1+m+2n) - \lambda_1)} \right) \chi_2 r^{(1+m+2n)} \end{aligned} \quad (28-A)$$

بنابراین با توجه به روابط (28-A) و (29-A) حل کلی معادله به صورت زیر خواهد بود:

$$\Phi(r) = \Phi_H(r) + \Phi_P(r) = C_1 r^{\lambda_1} + C_2 r^{\lambda_2} + D_1 r^{(1+n)} + D_2 r^{(1+m+2n)} + D_3 r^{(m+n+3)} \quad (29-A)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{1}{2} \left((m+n) \pm \sqrt{(m+n)^2 - 4(m+n)\nu + 4} \right) \\ D_1 &= \frac{(T_o - T_i) m \alpha_i h_o E_i}{((1+n) - \lambda_2)((1+n) - \lambda_1) (r_o^{-(m+n)} - r_i^{-(m+n)}) r_o^m r_i^{2n}} \\ D_2 &= \frac{(T_o - T_i) n r_i^{-(n+m)} \alpha_i h_o E_i}{((1+m+2n) - \lambda_2)((1+m+2n) - \lambda_1) (r_o^{-(m+n)} - r_i^{-(m+n)}) r_o^m r_i^{2n}} \\ D_3 &= - \frac{h_o \rho_i (3+\nu) \omega^2}{((m+n+3) - \lambda_2)((m+n+3) - \lambda_1) r_o^m r_i^n} \end{aligned} \quad (30-A)$$

می‌باشد. با توجه به شروط مرزی حاکم در این پژوهش، مطابق رابطه‌ی زیر زیر می‌توان ثابت‌های C_1 و C_2 را

بدست آورد:

$$\begin{cases} \sigma_r|_{r=r_i} = -P \\ \sigma_r|_{r=r_o} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\Phi(r_i)}{r_i h_i} = -P \\ \frac{\Phi(r_o)}{r_o h_o} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Phi(r_i) = -Pr_i h_i \\ \Phi(r_o) = 0 \end{cases} \quad (31-A)$$

با اعمال روابط فوق در رابطه ی (30-A) خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} r_i^{\lambda_1} & r_i^{\lambda_2} \\ r_o^{\lambda_1} & r_o^{\lambda_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -D_1 r_i^{(1+n)} - D_2 r_i^{(1+m+2n)} - D_3 r_i^{(m+n+3)} - Pr_i h_i \\ -D_1 r_o^{(1+n)} - D_2 r_o^{(1+m+2n)} - D_3 r_o^{(m+n+3)} \end{Bmatrix} \quad (32-A)$$

با حل دستگاه فوق ثابت ها به شکل زیر محاسبه می شوند:

$$C_1 = \frac{-1}{r_i^{\lambda_2} r_o^{\lambda_1} - r_i^{\lambda_1} r_o^{\lambda_2}} \left\{ \begin{array}{l} \left(-D_1 r_i^{(1+n)} - D_2 r_i^{(1+m+2n)} - D_3 r_i^{(m+n+3)} - Pr_i h_i \right) r_o^{\lambda_2} \\ + \left(D_1 r_o^{(1+n)} + D_2 r_o^{(1+m+2n)} + D_3 r_o^{(m+n+3)} \right) r_i^{\lambda_2} \end{array} \right\} \quad (33-A)$$

$$C_2 = \frac{1}{r_i^{\lambda_2} r_o^{\lambda_1} - r_i^{\lambda_1} r_o^{\lambda_2}} \left\{ \begin{array}{l} \left(-D_1 r_i^{(1+n)} - D_2 r_i^{(1+m+2n)} - D_3 r_i^{(m+n+3)} - Pr_i h_i \right) r_o^{\lambda_1} \\ + \left(D_1 r_o^{(1+n)} + D_2 r_o^{(1+m+2n)} + D_3 r_o^{(m+n+3)} \right) r_i^{\lambda_1} \end{array} \right\}$$

با محاسبه ثابت ها تابع $\Phi(r)$ بدست می آید و با توجه به روابط (1-A) و (9-A) می توان تنش ها و جابجایی

شعاعی را محاسبه نمود.

۶-۲ پیوست B: حل دیسک با ضخامت متغیر با استفاده توابع فوق هندسی

در فصل چهارم مشاهده شد که در حالتی که تابع نمایی در معادلات بصورت تابع پروفیل یا توزیع خواص وارد شود معادله‌ی به صورتی تبدیل می‌شود که حل دقیق نخواهد داشت. می‌توان صورت عمومی معادلات حاکم بر دیسک که تابع نمایی در آن وارد شده است را بصورت زیر نمایش داد:

$$r^2 \frac{d^2 u_r}{dr^2} + (\alpha + \beta r) r \frac{du_r}{dr} + (\beta \nu r - \gamma) u_r = F(r) \quad (1-B)$$

که در آن به ازای هر حالت مطابق جدول ۶-۱ داریم:

جدول ۶-۱: ضرایب معادله‌ی دیفرانسیل حاکم به ازای پروفیل و توزیع خواص متفاوت

γ	β	α	تابع توزیع خواص	تابع پروفیل
-1	$m + \bar{n}$	1	نمایی	نمایی
$\bar{n}\nu - 1$	m	$1 + \bar{n}$	توانی	نمایی
$m\nu - 1$	\bar{n}	$1 + m$	نمایی	توانی

حل همگن معادله دیفرانسیل همواره از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$u_r^H = C_1 e^{\left(\frac{-\alpha}{2}\right)r} r^{\left(\frac{-\beta}{2}\right)} M \left(\left[\frac{\beta(2\nu - \alpha)}{2|\alpha|} \right], \left[\frac{1}{2} \sqrt{\beta^2 - 2\beta + (1 - 4\gamma)} \right], |\alpha|r \right) + C_2 e^{\left(\frac{-\alpha}{2}\right)r} r^{\left(\frac{-\beta}{2}\right)} W \left(\left[\frac{\beta(2\nu - \alpha)}{2|\alpha|} \right], \left[\frac{1}{2} \sqrt{\beta^2 - 2\beta + (1 - 4\gamma)} \right], |\alpha|r \right) \quad (2-B)$$

$M(i, j, kr)$ و $W(i, j, kr)$ توابع موسوم به وایتاکر هستند که با توجه به توابع فوق هندسی به شکل زیر

تعریف می‌شوند:

$$M\left(i, \frac{1}{2}j, kr\right) = e^{\left(\frac{-1}{2}\right)r} r^{\left(\frac{1}{2}+j\right)} H\left(\left[\frac{1}{2}+j-i\right], [1+2j], kr\right) \quad (3-B)$$

$$W\left(i, \frac{1}{2}j, kr\right) = e^{\left(\frac{-1}{2}\right)r} r^{\left(\frac{1}{2}+j\right)} K\left(\left[\frac{1}{2}+j-i\right], [1+2j], kr\right)$$

و توابع H و K به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$H(i, j; kr) = 1 + \frac{i}{j.1!}r + \frac{i(i+1)}{j(j+1).2!}r^2 + \frac{i(i+1)(i+2)}{j(j+1)(j+2).3!}r^3 + \dots \quad (4-B)$$

$$K(i, j; kr) = \frac{1}{r} + \frac{i}{j.1!} + \frac{i(i+1)}{j(j+1).2!}r + \frac{i(i+1)(i+2)}{j(j+1)(j+2).3!}r^2 + \dots$$

با جایگذاری روابط (4-B) و (3-B) در (5-B) حل همگن برای تمامی حالاتی که تابع نمایی در معادلات وارد می‌شود بدست می‌آید.

با توجه به اینکه در تابع توزیع دما از توابع عددی استفاده می‌شود نمی‌توان از حل همگن به حل عمومی رسید ولی امکان ارائه حل عمومی برای دوران و فشار داخلی امکان پذیر می‌باشد.

۶-۳ پیوست C: معادله ی حاکم بر دیسک با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی

میدان جابجایی و تنش: در این مسئله میدان جابجایی توسط تئوری تغییر شکل برشی مدل سازی شده است. در این مدل جابجایی در راستای شعاع از تقریب مرتبه ی اول و در راستای ضخامت از تقریب مرتبه ی صفر استفاده شده است. جابجایی در راستای زاویه ای نیز با توجه به تقارن محور موجود در بارگذاری و هندسه صفر در نظر گرفته شده است.

$$\begin{cases} u_r(r, z) \\ u_\theta(r, z) \\ u_z(r, z) \end{cases} = \begin{cases} u_0(r) + z\psi(r) \\ 0 \\ w(r) + z\phi(r) \end{cases} \quad (1-C)$$

با استفاده از روابط سینماتیک (کرنش - جابجایی) برای جابه جایی های کوچک در این میدان فرضی داریم:

$$\begin{cases} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{cases} = \begin{cases} \frac{\partial u_r(r, z)}{\partial r} \\ \frac{u_r(r, z)}{r} \\ \frac{\partial u_r(r, z)}{\partial r} \\ \frac{\partial u_r(r, z)}{\partial z} + \frac{\partial u_z(r, z)}{\partial r} \end{cases}, \gamma_{\theta z} = \gamma_{r\theta} = 0 \quad (2-C)$$

که با جایگذاری (1-C) در رابطه ی فوق داریم:

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{du_0}{dr} + z \frac{d\psi}{dr} \\ \varepsilon_\theta = \frac{u_0}{r} + z \frac{\psi}{r} \\ \varepsilon_z = \phi \\ \gamma_{rz} = \psi + \frac{dw}{dr} + z \frac{d\phi}{dr} \end{cases} \quad (3-C)$$

با توجه به اینکه بارگذاری حرارتی در راستای شعاع است از این رو کرنش حرارتی فقط در این راستا وجود دارد و مقدار آن از رابطه ی زیر قابل محاسبه است:

$$\varepsilon_r^T = \alpha(r)(T(r) - T_0) = \alpha(r)\Delta T(r) \quad (4-C)$$

همچنین برای ماده ی الاستیک خطی معادلات رفتاری ترموالاستیک (رابطه ی تنش و کرنش) به صورت زیر است:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = E(r)\lambda \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r - \varepsilon_r^T \\ \varepsilon_\theta - \varepsilon_r^T \\ \varepsilon_z - \varepsilon_r^T \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (5-C)$$

که در آن $\lambda = \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ ثابت لامه می باشد.

معادلات تعادل: برای بدست آوردن معادلات تعادل به روش تئوری تغییر شکل برشی از روش انرژی استفاده می شود. در این روش تغییرات انرژی کل سیستم بنا بر اصل پایستگی انرژی صفر فرض می شود. اگر انرژی کل به صورت زیر تعریف شود:

$$\Pi = U_1 - V_1 \quad (6-C)$$

که در آن U_1 انرژی کرنشی و V_1 کار خارجی اعمالی بر سیستم باشد بنا بر اصل پایستگی انرژی کل خواهیم داشت تغییرات انرژی کل برابر صفر است:

$$\Delta\Pi = 0 \Rightarrow \delta U_1 = \delta V_1 \quad (7-C)$$

انرژی کرنشی برای یک دیسک با شرایط متقارن محوری از رابطه ی زیر بدست می آید:

$$U_1 = \int_{r_i}^{r_o} \left(\int_{-h(r)/2}^{h(r)/2} 2\pi (\sigma_r \varepsilon_r + \sigma_\theta \varepsilon_\theta + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{rz} \delta\gamma_{rz}) dz \right) r dr \quad (8-C)$$

برای محاسبه تغییرات انرژی کرنشی با جایگذاری روابط سینماتیک و رفتاری در رابطه ی انرژی کرنشی خواهیم داشت:

$$\frac{\delta U_1}{2\pi} = \int_{r_i}^{r_o} \left(\begin{aligned} & \left(-\frac{d}{dr} \int_{-h(r)/2}^{h(r)/2} r \sigma_r dz + \int_{-h(r)/2}^{h(r)/2} \sigma_\theta dz \right) \delta u_0 \\ & + \left(-\frac{d}{dr} \int_{-h(r)/2}^{h(r)/2} z r \sigma_r dz + \int_{-h(r)/2}^{h(r)/2} z \sigma_\theta dz + \int_{-h(r)/2}^{h(r)/2} r \tau_{rz} dz \right) \delta \psi \\ & - \left(\int_{-h(r)/2}^{h(r)/2} r \tau_{rz} dz \right) \delta w \\ & + \left(\frac{d}{dr} \int_{-h(r)/2}^{h(r)/2} z r \tau_{rz} dz + \int_{-h(r)/2}^{h(r)/2} r \sigma_z dz \right) \delta \phi \end{aligned} \right) dr \quad (9-C)$$

با استفاده از تعادل نیروها وگشتاور های داخلی المان داریم:

$$\begin{Bmatrix} N_r \\ N_\theta \\ N_z \end{Bmatrix} = \int_{-h(r)/2}^{h(r)/2} \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \end{Bmatrix} dz \quad (10-C)$$

$$\begin{Bmatrix} M_r \\ M_\theta \\ M_z \end{Bmatrix} = \int_{-h(r)/2}^{h(r)/2} \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \end{Bmatrix} z dz \quad (11-C)$$

$$Q_r = K \int_{-h(r)/2}^{h(r)/2} \tau_{rz} dz \quad (12-C)$$

$$M_{rz} = K \int_{-h(r)/2}^{h(r)/2} \tau_{rz} z dz \quad (13-C)$$

با جایگذاری این روابط در معادله ی انرژی کرنشی (۹-C) خواهیم داشت:

$$\frac{\delta U_1}{2\pi} = \int_{r_i}^{r_o} \left(\left(-\frac{d}{dr}(rN_r) + N_\theta \right) \delta u_0 + \left(-\frac{d}{dr}(rM_r) + M_\theta + rQ_r \right) \delta \psi \right. \\ \left. - \left(\frac{d}{dr}(rQ_r) \right) \delta w + \left(\frac{d}{dr}(rM_{rz}) + rN_z \right) \delta \phi \right) dr \quad (14-C)$$

از طرفی کار خارجی ناشی از دوران و فشار داخلی نیز با رابطه ی زیر قابل محاسبه است:

$$\frac{\delta V_1}{2\pi} = \int_{r_i}^{r_o} \left(\left(\int_{-h(r)/2}^{h(r)/2} (\rho(r)r^2\omega^2 + P) dz \right) \delta u_0 + \left(\int_{-h(r)/2}^{h(r)/2} z (\rho(r)r^2\omega^2 + P) dz \right) \delta \psi \right) dr \quad (15-C)$$

با ساده سازی روابط فوق معادله ی کار خارجی به صورت زیر ساده می شود:

$$\frac{\delta V_1}{2\pi} = \left(\int_{r_i}^{r_o} (\rho(r)r^2\omega^2 + P) h(r) dr \right) \delta u_0 \quad (16-C)$$

با استفاده اصل پایستگی انرژی (۷-C) خواهیم داشت:

$$\int_{r_i}^{r_o} \left(\left(-\frac{d}{dr}(rN_r) + N_\theta \right) \delta u_0 \right. \\ \left. + \left(-\frac{d}{dr}(rM_r) + M_\theta + rQ_r \right) \delta \psi \right. \\ \left. - \left(\frac{d}{dr}(rQ_r) \right) \delta w \right. \\ \left. + \left(\frac{d}{dr}(rM_{rz}) + rN_z \right) \delta \phi \right) dr = \left(\int_{r_i}^{r_o} (\rho(r)r^2\omega^2 + P) h(r) dr \right) \delta u_0 \quad (17-C)$$

شرط برقراری این رابطه این است که ضرایب δu_0 و $\delta \psi$ و δw و $\delta \phi$ برابر با صفر باشد:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{d}{dr}(rN_r) + N_\theta = \int_{r_i}^{r_o} (\rho(r)r^2\omega^2 + P)h(r)dr \\ -\frac{d}{dr}(rM_r) + M_\theta + rQ_r = 0 \\ \frac{d}{dr}(rQ_r) = 0 \\ \frac{d}{dr}(rM_{rz}) + rN_z = 0 \end{array} \right. \quad (18-C)$$

که این روابط به شکل ساده‌تر همان معادلات تعادل زیر هستند:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma F_r = 0 \\ \Sigma M_r = 0 \\ \Sigma F_z = 0 \\ \Sigma M_z = 0 \end{array} \right. \quad (19-C)$$

نیروها و گشتاورهای منتهی نیز با استفاده از معادلات رفتاری و سینماتیک محاسبه می‌شود.

$$\left\{ \begin{array}{l} N_r = \lambda E(r)h(r) \left[(1-\nu)\frac{du_0}{dr} + \nu\left(\frac{u_0}{r} + \phi\right) - (1+\nu)\alpha(r)\Delta T(r) \right] \\ N_\theta = \lambda E(r)h(r) \left[(1-\nu)\frac{u_0}{r} + \nu\left(\frac{du_0}{dr} + \phi\right) - (1+\nu)\alpha(r)\Delta T(r) \right] \\ N_z = \lambda E(r)h(r) \left[(1-\nu)\phi + \nu\left(\frac{u_0}{r} + \frac{du_0}{dr}\right) - (1+\nu)\alpha(r)\Delta T(r) \right] \end{array} \right. \quad (20-C)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M_r = \frac{\lambda E(r)h(r)^3}{12} \left[(1-\nu)\frac{\psi}{r} + \nu\frac{d\psi}{dr} \right] \\ M_\theta = \frac{E(r)h(r)^3}{12(1-\nu^2)} \left[(1-\nu)\frac{d\psi}{dr} + \nu\frac{\psi}{r} \right] \end{array} \right. \quad (21-C)$$

$$\begin{cases} Q_r = K \frac{E(r)h(r)}{2(1+\nu)} \left[\psi + \frac{dw}{dr} \right] \\ M_{rz} = K \frac{E(r)h(r)^3}{24(1+\nu)} \left[\frac{d\phi}{dr} \right] \end{cases} \quad (22-C)$$

با جایگذاری روابط فوق در معادلات تعادل بدست آمده، معادلات تعادل بر حسب جابجایی بدست می آید

- [1] Hasselman D.P.H., Youngblood G.E.;“Enhanced thermal stress resistance of structural ceramics with thermal conductivity gradient”. Journal of the American Ceramic Society, 61(1, 2): 49-53.
- [2] Reddy, J. N.“Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells”, theory and analysis, 2nd, CRC Press, 2004.
- [3] Markworth A.J., Ramesh K.S., Parks W.P.;“Review modeling studies applied to functionally graded materials” Journal of Materials Science 30 (1995) 2183 2193
- [4]. Fan, Tsakiroopoulos P., Miodowink A. P, Mater J.; Sci. 29 (1994) 141.
- [5] Timoshenko S. P., Goodier J. N.;“Theory of Elasticity”, McGraw-Hill, New York, 1970.
- [6] Noda N., Tsuji T.;“Steady thermal stresses in a plate of functionally gradient material with temperature-dependent properties.” Trans Jpn Soc Mech Eng Ser A 1991; 57:625–31.
- [7] Obata Y., Noda N., Tsuji T.;“Steady thermal stresses in a functionally gradient material plate. “ Trans Jpn Soc Mech Eng 1992; 58:1689–95.
- [8] Tanaka K, Tanaka Y, Enomoto K, Poterasu VF, Sugano Y.”Design of thermo elastic materials using direct sensitivity and optimization methods, reduction of thermal stresses in functionally gradient materials.” Comput Methods App. Mech Eng 1993; 106:271–84.
- [9] Tanaka K, Tanaka Y, Watanabe H, Poterasu VF, Sugano Y. “An improved solution to thermo elastic material design in functionally gradient materials: scheme to reduce thermal stresses.” Comput Methods App. Mech Eng 1993; 109:377–89.
- [10] Tanigawa Y. “Some basic thermoplastic problems for nonhomogeneous structural material.” J App. Mech 1995; 48:377–89.
- [11] Praveen GN, Chin CD, Reddy JN. “Thermo-elastic analysis of functionally graded ceramic–metal cylinder.” J Eng Mech 1999; 125:1259–67.

- [12] Zimmerman R.W., Lutz M.P.;“Thermal stresses and thermal expansion in a uniformly heated functionally graded cylinder.” *Jounal Thermo Stresses* 1999; 22:177–88.
- [13] Cheng Z.Q., Batra R.C.;“Three-dimensional thermo elastic deformations of a functionally graded elliptic plate.” *Composites B* 2000; 31: 97–106.
- [14] Sankar B.V., Tzeng J.T.;“Thermal stresses in functionally graded beams.” *Am Instit Aeron Astron-J* 2002; 40:1228–32.
- [15] Vel S.S., Batra R.C.;“Exact solution for thermo elastic deformations of functionally graded thick rectangular plates.” *Am Instit Aeron AstronJ* 2002. 40:1421–33
- [16] Vel S.S., Batra R.C.;“Exact thermo-elasticity solution for cylindrical bending deformations of functionally graded plates. *Proceedings of the IUTAM symposium on dynamics of advanced materials and smart structures*” *solid mechanics and its applications*, 2003, vol. 106 p. 429–38.
- [17] Qian L.F., Batra R.C., Chen L.M.;“Analysis o f cylindrical bending thermo elastic deformations of function ally graded plates by a mesh less local Petrov–Galerkin method.” *Computat Mech* 2004; 33:263–73.
- [18] Eraslan A.N., Akis T.;” On the plane strain and plane stress solutions of functionally graded rotating solid shaft and solid disk problems.”*Acta Mech* 2006; 181:43–63
- [19] Kordkheili S., Naghdabadi R.;” Thermo elastic analysis of a functionally graded rotating disk.” *Composite Structures* 2006; 79:508–16.
- [20] Bayat M., Saleem M., Sahari B.B., Hamouda A.M.S; “Mechanical and thermal stresses in a functionally graded rotating disk with variable thickness due to radially symmetry loads”. *International Journal of Pressure Vessels and Piping* 86 (2009) 357–372
- [21] Hojjati M. H., Jafari S.;“Semi-exact solution of elastic non-uniform thickness and density rotating disks by homotopy perturbation and Adomian’s decomposition methods. Part I: Elastic solution”; *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 85, 2008, pp. 871-878.

- [22] Bayat M, Sahari B., Saleem M., Aidy Ali, Wong S.V.;" Thermo-elastic solution of a functionally graded variable thickness rotating disk with bending based on the first-order shear deformation theory "; Thin-Walled Structures 47 (2009) 568–582
- [23] Ashraf M., Zenkour.;"Variable-Thickness Inhomogeneous Cylinders: Part I—Analytical Elastic Solutions." Applied Mathematics, 2010, 1, 481-488
- [24] Nie G.J., Batra R.C.;"Stress analysis and material tailoring in isotropic linear thermo elastic incompressible functionally graded rotating disks of variable thickness" Composite Structures 92 (2010) 720–729
- [25] Metin S.;"Stress Analysis of functionally graded discs under mechanical and thermal loads"; Indian Journal of Engineering &Material Science; Vol 18. April 2011.pp 111-118
- [۲۶] *جاهد مطلق ح، نوبان م و اشراقی م " اجزا محدود ANSYS " مرکز انتشارات دانشگاه علم و صنعت تهران ۱۳۷۹*
- [27] Sadd Martin H.;"Elasticity Theory, Applications and Numerics", Elsevier, New York, 2009.
- [28] Spiegel M.R., Lipschutz S., Liu J., Fenster S.K.;"Mathematical Handbook of Formulas and Tables", Mc Graw Hill, New York, 2009.
- [29] Bronson R.; " Differential Equations", Schaum's Outline Series,Mcgraw – Hill
- [30] Abramowitz, M., Stegun, I.; "Handbook of Mathematical Functions". New York: Dover Publications Inc., 1965.
- [31] Ghannad M., Zamani Nejad M., Rahimi G. H.;" Elastic solution of axisymmetric thick truncated conical shells based on first-order shear deformation theory". ISSN 1392 - 1207. MECHANIKA. 2009. Nr.5 (79).
- [32] Ugral S. C, Fenster S.K.; "Advanced Strength and Applied Elasticity", Elsevier, New York, 1987.

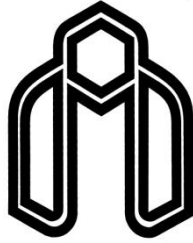
Abstract:

The rotating disk due to many applications in industry that has long been subjects of researchs and studies. The rotating disk can be used in gas turbine disks, flywheels, gears and brake disks. The analytical formulas presented in this research can help optimize the design of disks in various industries.

In this study, using the plane elasticity theory and plane stress conditions, the thermoelastic equation governing for nonhomogeneous rotating disk with variable thickness and temperature dependent properties is presented. Modeling of FG materials and changes in thickness can be used exponential and power functions and the governing equation is solved.

If the exponential function for the thickness changes or the distribution function of properties is selected, The heat transfer equation governing the disk is not an exact solution. in this conditions from semi-analytical or analytical methods have been used and for validation results. displacement and stresses have been compared to the numerical solution. Using the results under mechanical and thermal loads according to its properties and loading are examined.

The results show that increasing thickness in the inner radius of the disk and the functionally graded material, reducing the maximum stress due to thermal and rotational loading, but the maximum stress due to internal pressure is increased. It also maximum stresses of power functions in thermal and rotational loading is greater than exponential function, but at internal pressure condition the maximum stress of exponential functions is greater than power functions.



Shahrood University of Technology
Mechanic Engineering Faculty

The Analytical Solution of Nonhomogenous Disks with Variable Thickness under Mechanical and Thermal Loading

Seyed Mehdi Jabbari

Supervisor:

Dr. Mehdi Ghannad

Date: February 2012