



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مکانیک

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک
گرایش تبدیل انرژی

عنوان:

تحلیل انتقال حرارت دوبعدی یک ماده هدفمند استوانه ای شکل به روش حل معکوس

نگارش:

بیتا خرقانی

اساتید راهنما :

دکتر محمد جواد مغربی

دکتر احد ضابط

استاد مشاور :

دکتر علی عباس نژاد

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

فهرست عناوین

صفحه

فصل ۱: مقدمه

- ۱-۱. پیشگفتار ۱
۲-۱. مروری بر کارهای گذشته ۱
۳-۱. تاریخچه مواد هدفمند ۶

فصل ۲: آشنایی با مواد هدفمند

- ۱-۲. مروری بر مواد هدفمند ۸
۲-۲. کاربرد مواد هدفمند ۸
۳-۲. روشهای ساخت مواد هدفمند ۱۴
۴-۲. مدلسازی مواد هدفمند ۱۸
۱-۴-۲. مدل توزیع نسبت حجمی بر اساس قاعده توانی ۱۸
۲-۴-۲. مدل توزیع سیگموند ۲۰
۳-۴-۲. مدل توزیع نمایی ۲۱
۵-۲. روشهای اعمال تغییرات خواص مواد ۲۲
۱-۵-۲. استفاده از انتگرال تحلیلی در امتداد ضخامت ۲۲
۲-۵-۲. انتگرال گیری عددی (گوسی) در امتداد ضخامت ۲۳
۳-۵-۲. مدلسازی مواد هدفمند بصورت مواد غیرهمگن ارتوتروپیک ۲۳
۴-۵-۲. تقسیم لایه ساخته شده از ماده‌ی هدفمند به لایه‌های همگن شده ۲۳

فصل ۳: مسائل معکوس حرارتی

- ۱-۳. آشنایی با مسائل معکوس حرارتی ۲۵
۲-۳. تاریخچه مسائل معکوس حرارتی ۲۶
۳-۳. دسته بندی مسائل معکوس حرارتی ۲۸
۴-۳. حل مسائل معکوس حرارتی ۲۹
۵-۳. طبقه بندی روش ها ۳۰
۶-۳. ارزیابی روش های مسائل معکوس هدایت ۳۲
۷-۳. کاربرد روش های معکوس در مهندسی ۳۳
۸-۳. مثال هایی از مسائل معکوس ۳۶
۹-۳. چرا IHCP مشکل است ۴۵

	فصل ۴: روش تفاضل محدود فشرده و ارزیابی برنامه
۴۶	۱-۴. حل معادله انتقال حرارت به روش تفاضل محدود
۴۸	۲-۴. تقریب مشتق اول مکانی
۵۲	۳-۴. تقریب مشتق دوم مکانی
۵۴	۴-۴. محاسبه رابطه مشتق اول مکانی برای مسئله موجود
۵۹	۵-۴. محاسبه روابط مشتق دوم مکانی برای مسئله موجود
۶۳	۶-۴. روش محاسبه مشتقات مرتبه اول زمانی
	فصل ۵: شبیه سازی مستقیم و معکوس حرارتی
۶۶	۱-۵. بررسی شرایط حرارتی حاکم بر مسئله
۶۹	۲-۵. حل تحلیلی مسئله برای شرایط خاص
۷۳	۳-۵. تشریح مسئله و شرایط حاکم بر آن
۷۴	۴-۵. نحوه اعمال شرایط مرزی اضافی
	فصل ۶: ارزیابی تحلیلی برنامه کامپیوتری
۷۶	۱-۶. شبیه سازی مسئله با یک تابع ریاضی
	فصل ۷: تحلیل و ارزیابی تجربی برنامه کامپیوتری
۸۷	۱-۷. حل یک مسئله واقعی
۸۹	۲-۷. توضیح پیرامون برنامه کامپیوتری
۹۱	۳-۷. داده های تجربی
۹۲	۴-۷. نتایج حاصل از داده های تجربی
۱۰۱	نتیجه گیری و پیشنهادات
۱۰۲	فهرست مراجع و مؤاخذ

فهرست اشکال

صفحه

- شکل ۲-۱. مقایسه خواص کامپوزیت های لایه ای و هدفمند ۹
- شکل ۲-۲. روشهای تولید مواد هدفمند ۱۴
- شکل ۲-۳. ساختار پیوسته و مرحله ای مواد هدفمند ۱۵
- شکل ۲-۴. پروسه گرمادهی میکروویو در دمای بالا ۱۷
- شکل ۲-۵. گرادیان تغییرات در جهت شعاعی برای استوانه هدفمند ۱۹
- شکل ۲-۶. پروفیل های نسبت سرامیک برای استوانه هدفمند. ۲۰
- شکل ۲-۷. مدل استوانه هدفمند ۲۱
- شکل ۲-۸. تقسیم شعاعی دامنه به زیر دامنه های کوچکتر ۲۴
- شکل ۳-۱. نمایی از یک جسم بازگرداننده شده ۳۶
- شکل ۳-۲. دمای اندازه گیری شده در زمان های گسسته ۳۷
- شکل ۳-۳. نمایش شار حرارتی محاسبه شده سطح ۳۸
- شکل ۳-۴. تقسیم یک سنسور داخلی IHCP به مسئله مستقیم و معکوس
- شکل ۳-۵. صفحه کامپوزیت با چندین سنسور دمایی ۴۱
- شکل ۳-۶. شار حرارتی سطح به عنوان تابعی از مکان برای یک صفحه تخت ۴۴
- شکل ۴-۱. تخمین مشتق مکانی اول برای $f(r) = r^5$ ۵۶
- شکل ۴-۲. تخمین مشتق مکانی اول برای $f(r) = e^{r^2}$ ۵۷
- شکل ۴-۳. تخمین مشتق مکانی اول برای $f(r) = \sin(r^3)$ ۵۸
- شکل ۴-۴. تخمین مشتق مکانی دوم برای $f(r) = e^{r^2}$ ۶۰
- شکل ۴-۵. تخمین مشتق مکانی دوم برای $f(r) = r^3$ ۶۱
- شکل ۴-۶. تخمین مشتق مکانی دوم برای $f(r) = \cos(r^2)$ ۶۲
- شکل ۵-۱. شکل شماتیک هندسه مسئله ۷۳
- شکل ۶-۱. گراف دما در راستاهای شعاعی و طولی ۷۷
- شکل ۶-۲. خطوط دما ثابت پس از گذشت ۵ ثانیه ۷۹
- شکل ۶-۳. خطوط دما ثابت پس از گذشت ۲۰ ثانیه ۷۹
- شکل ۶-۴. خطوط دما ثابت پس از گذشت ۴۰ ثانیه ۸۰
- شکل ۶-۵. توزیع دما پس از گذشت ۷۰ ثانیه ۸۰
- شکل ۶-۶. نمودار مربوط به دمای سطح پس از ۵ ثانیه ۸۱
- شکل ۶-۷. نمودار مربوط به دمای سطح پس از ۱۰ ثانیه ۸۲
- شکل ۶-۸. نمودار مربوط به دما در $x = 3/2$ میلی متري ۸۳

- شکل ۶-۹. نمودار مربوط به دما در $x = 1/73$ میلی متر. ۸۴
- شکل ۶-۱۰. نمودار دماهای مرکز در لحظه شروع مربوط به حل مستقیم و معکوس ۸۵
- شکل ۶-۱۱. نمودار جذر حداقل مربعات خطا برای نقاط روی سطح ۸۶
- شکل ۶-۱۲. نمودار جذر حداقل مربعات خطا برای نقاط روی $x = 3/4$ میلی متر ۸۶
- شکل ۷-۱. محل قرارگیری سنسورها و فواصل آنها ۸۷
- شکل ۷-۲. دمای درونیایی شده برای لایه اول ۸۸
- شکل ۷-۳. دمای درونیایی شده برای لایه دوم ۸۹
- شکل ۷-۴. دمای درونیایی شده برای لایه سوم ۸۹
- شکل ۷-۵. کانتور دما برای کلیه نقاط در لحظه ۵ ثانیه ۹۲
- شکل ۷-۶. کانتور دما برای کلیه نقاط در لحظه ۱۰ ثانیه ۹۲
- شکل ۷-۷. کانتور دما برای کلیه نقاط در لحظه ۳۰ ثانیه ۹۳
- شکل ۷-۸. کانتور دما برای کلیه نقاط در لحظه ۷۰ ثانیه ۹۳
- شکل ۷-۹. دما برای لایه اول به صورت تجربی و محاسبه شده از روش معکوس ۹۴
- شکل ۷-۱۰. دما برای لایه دوم به صورت تجربی و محاسبه شده از روش معکوس ۹۴
- شکل ۷-۱۱. دما برای لایه سوم به صورت تجربی و محاسبه شده از روش معکوس ۹۵
- شکل ۷-۱۲. درصد خطا میان دما به صورت تجربی و حل معکوس لایه اول ۹۵
- شکل ۷-۱۳. درصد خطا میان دما به صورت تجربی و حل معکوس لایه دوم ۹۶
- شکل ۷-۱۴. درصد خطا میان دما به صورت تجربی و حل معکوس لایه سوم ۹۶
- شکل ۷-۱۵. دما برای $R = 9/2$ میلی متر به صورت تابعی از داده های تجربی و حل معکوس ۹۷
- شکل ۷-۱۶. نمودار خطا میان داده های تابعی از داده های تجربی و حل معکوس ۹۷
- شکل ۷-۱۷. دما برای $R = 19/2$ میلی متر به صورت تابعی از داده های تجربی و حل معکوس ۹۸
- شکل ۷-۱۸. نمودار خطا میان داده های تابعی از داده های تجربی و حل معکوس ۹۸
- شکل ۷-۱۹. دما برای $R = 29/7$ میلی متر به صورت تابعی از داده های تجربی و حل معکوس ۹۹
- شکل ۷-۲۰. نمودار خطا میان داده های تابعی از داده های تجربی و حل معکوس ۹۹
- شکل ۷-۲۱. دما برای بین لایه دوم و سوم به صورت تابعی از داده های تجربی و حل معکوس ۱۰۰

فهرست جداول

صفحه

.....۵۱.....	جدول ۴-۱. مرتبه خطاها در محاسبه مشتقات مرتبه اول
.....۶۳.....	جدول ۴-۲. مراحل مورد نیاز جهت محاسبه مشتق اول زمانی
.....۸۸.....	جدول ۷-۱. خواص لایه های ماده هدفمند
.....۹۱.....	جدول ۷-۲. داده های تجربی دما - زمان برای ماده هدفمند

چکیده

در این پایان نامه با استفاده از روش تفاضل محدود فشرده^۱، به شبیه سازی معادله انتقال حرارت دو بعدی گذرا در یک ماده هدفمند استوانه ای شکل پرداخته ایم. بدین منظور با فرض معلوم بودن تاریخچه دما در دو لایه داخلی و خارجی و همچنین شرط آدیاباتیک در مرکز استوانه به تحلیل انتقال حرارت و محاسبه و تعیین شرایط مرزی مورد نیاز جهت حصول به شرط اولیه تأمین کننده این توزیع دما می پردازیم. معادلات تفاضلی بکار رفته جهت شبیه سازی جملات دیفرانسیلی در محاسبه مشتقات مکانی اول و دوم (در راستای طول و شعاع میله) از روش ارائه شده توسط لی لی^۲ جایگزین شده است. همچنین برای توسعه محاسبات در دامنه زمان از روش رانچ - کوتای مرتبه سوم استفاده می شود. سپس با تشکیل ماتریسهای مربوط به هر کدام از گره های در نظر گرفته شده، نسبت به بدست آوردن توزیع دما در جسم در هر لحظه از زمان اقدام می گردد. کد کامپیوتری نوشته شده به زبان MATLAB، در دو مرحله مورد ارزیابی قرار گرفت. در مرحله نخست برای ارزیابی داده های شبیه سازی استفاده شد، و جوابها با داده های دقیق مقایسه گردیدند. در مرحله دوم، کد نوشته شده برای داده های تجربی ارزیابی شد.

در حل مسئله به روش مستقیم با برگرداندن زمان به لحظه آغازین، دما در محور جسم محاسبه گردید. در خاتمه نیز دمای محور استوانه ای شکل در حل مستقیم و معکوس با یکدیگر مقایسه شدند. در تمامی مراحل خطاها محاسبه و با استفاده از نمودارهای مناسب ترسیم گردیده اند.

نتایج به دست آمده از تحلیل در بقیه لایه ها با مقادیر تجربی در لایه های مذکور مقایسه شده است. نتایج نشان می دهد که میزان خطا حدود ۰.۵٪ می باشد که قابل قبول به نظر می رسد

¹ Compact Finite Difference

² Lele

۱- پیشگفتار

در انجام عملیات مهندسی بر روی اجسام یا اعمال شرایط مختلف در فرآیند تولید می‌توان در نهایت به محصولی با خواص فیزیکی و ظاهری مورد نظر دست یافت، در بسیاری از فرآیندها تفاوت نحوه اعمال شرایط می‌تواند به تولید محصولاتی با خواص مختلف بیانجامد، در انجام عملیات حرارتی بر روی اجسام این تغییرات به وضوح در خواص محصول به دست آمده تأثیرگذار می‌باشد.

بنابراین نحوه اعمال بار و شرایط مرزی حرارتی بر روی خواص کاربردی مواد از جمله سختی، چقرمگی، استحکام و سایر خواص اساسی آن تأثیر می‌گذارد. در چنین حالتی به دلیل وجود اختلاف دمای زیاد بین ماده مذکور و محیط اطراف آن علاوه بر تبادل حرارت جابجایی، تبادل تشعشعی نیز وجود داشته و عموماً نمی‌توان از آن در محاسبات حرارتی مربوطه صرف نظر کرد.

۱-۲ مروری بر کارهای گذشته

روش المان‌های مرزی برای مواد هدفمند در تحقیقی که توسط Glaucio و همکارانش انجام شده، مورد بررسی قرار گرفته است. این عملیات روی پتانسیل مسائل (حالت پایدار و گذرا) برای مواد ناهمگن متمرکز شده است. تابع گرین (GF) برای این مواد همانند مواد همگن مورد استفاده قرار می‌گیرد اما ترم گرادیان ماده نیز به آن اضافه می‌گردد.

حل عددی با استفاده از تقریب‌های گالرکین^۱ مورد استفاده قرار گرفته است. چند مثال در این زمینه حل شده و نتایج تست مسائل و نمودارها نشان دهنده صحت آنها در مقایسه با جواب‌های تحلیلی می‌باشد. برای مواد لایه‌ای، این روش امکان جوابی با دقت بالا و مؤثر برای انواع مسائل با شرایط انتگرال مرزی، مانند بهینه‌سازی شکل، مرزهای متحرک و ساختارهایی با اندازه کوچک را پیشنهاد می‌کند. [۱]

Sladek و همکارانش در تحقیقی دیگر انتقال حرارت گذرا در یک ماده هدفمند یک بعدی با روش انتگرال مرزی را مورد بررسی قرار دادند، این روش بر اساس معادلات انتگرال مرزی و تخمین دما به روش حداقل مربعات و شار حرارتی می‌باشد. مسئله مقدار شرط اولیه با روش تبدیل لاپلاس حل شده و الگوریتم‌های

¹ Galerkin

Stehfest و Papoulis برای لاپلاس معکوس عددی استفاده شده است تا جوابهای وابسته به زمان حاصل گردد. در این روش ثوابت ماده به صورت وابسته به مکان، می تواند برای مدل سازی ماده هدفمند در یک زیر دامنه مدور که معادله انتگرال مرزی محلی به آن وابسته است، به کار روند. از آنجا که تمام توابع اولیه در روش حاضر منظم هستند، هیچ روش خاصی برای محاسبه محاسبه انتگرال مورد نیاز نمی باشد. [۲]

Kyung و همکارانش به صورت سه بعدی تحلیل ترمومکانیکی برای مواد هدفمند در یک کامپوزیت که ساختار آن شامل لایه های سرامیک، ماده هدفمند و فلز می باشد را مورد بررسی داده اند. فرض شده است خواص مواد در لایه ماده هدفمند وابسته به دما هستند و به صورت پیوسته در راستای ضخامت بر اساس توزیع قانون توان^۱ در بخش های حجمی سرامیک و فلز تغییر می کند. مدل اجزای محدود با ۱۸ گره در المان های جسم در نظر گرفته شده است تا تحلیل تغییرات خواص ماده و میدان دما در جهت ضخامت با دقت بیشتری انجام گردد.

دما در هر گره با حل معادله ترمومکانیک به دست می آید. برای گسسته سازی زمان، روش کرائک – نیکلسون مورد استفاده قرار گرفته و در نتایج عددی رفتار دمایی ماده هدفمند بر اساس نرخ تغییر ضخامت، توزیع حجمی و پارامترهای هندسی سیستم تحلیل شده است.

نتایج به دست آمده نشان می دهد، صفحه ای که تنها از ماده هدفمند تشکیل شده، نسبت به صفحات سرامیک و فلز، بسیار پایدارتر است.

گرادیان دمایی بحرانی هنگامی که نرخ ضخامت زیاد می شود، افزایش یافته و هنگامی که کسر حجمی افزایش می یابد، ساختار در محیط حرارتی پایدار می شود. [۳]

Sladek و همکارانش در تحقیقی دیگر انتقال حررات گذرا در یک ماده هدفمند سه بعدی غیرایزوتروپیک با محورهای متقارن را به روش Petrov-Galerkin مورد بررسی قرار داده اند، این روش برای تحلیل انتقال حرارت گذرا در یک جسم سه بعدی متقارن با ناهمگونی پیوسته و خواص غیرایزوتروپیک مورد استفاده قرار می گیرد. روش معادله انتگرال مرزی محلی با تقریب برای میدان های تغییرات مکانی و روش

² Power- Low

تبدیل لاپلاس در رابطه با تغییرات مکانی برای تحلیل انتقال حرارت گذار در یک ماده هدفمند با خصوصیات فوق مورد استفاده قرار گرفته است. مسئله مقدار شرط اولیه با کمک تبدیل لاپلاس در دامنه مورد نظر حل شده و سپس لاپلاس معکوس عددی جهت به دست آوردن یک حل وابسته به زمان استفاده شده است. [۴]

انتقال حرارت گذرا برای یک ماده هدفمند در مختصات کارتیزین به صورت دوبعدی با روش ترکیبی -DQ FE توسط گلبهار و همکارانش بررسی شده است. در این روش برای گسسته سازی مشتقات مکانی روش FE و برای گسسته سازی مشتقات زمانی روش DQ به کار گرفته شده است، روش حل نسبت به گام زمانی حساس نمی باشد.

مثال های مختلفی برای مواد هدفمند با ضخامت ناچیز با این روش حل شده است، نتایج نشان دهنده سرعت بالای همگرایی در این روش و مطابقت با سایر روش های عددی می باشد، هم چنین می توان در این روش از المان های کمتری استفاده نمود. [۵]

همچنین در یک تحقیق دیگر انتقال حرارت گذرا به روش معکوس به صورت سه بعدی در مختصات کارتیزین برای یک ماده هدفمند توسط گلبهار و همکارانش تحلیل شده که این ارزیابی جهت تخمین شار حرارتی مجهول برای یک صفحه با ضخامت ناچیز از یک ماده هدفمند انجام شده است. برای این منظور روش گرادیان مزدوج به همراه یک معادله الحاقی برای مسئله در نظر گرفته شده است و دقت روش معکوس با شبیه سازی داده های حقیقی و شرایط مرزی متفاوت و مواد با خواص مختلف بررسی شده است. نتایج حاصله دقت بالایی را برای تخمین شار حرارتی نشان می دهد. [۶]

آزادی و همکارش در پژوهشی تحلیل ترموالاستیک و انتقال حرارت گذرای غیر خطی در یک ماده استوانه ای شکل هدفمند با ضخامت ناچیز و خواص متفاوت وابسته به دما را با روش Hermitian transfinite element مورد بررسی قرار دادند. در تحقیق های پیشین وابستگی به دما در خواص مواد در تحلیل گذرای ترموالاستیک مورد توجه قرار نگرفته بود، بر اساس این وابستگی، نتایج معادلات FEM حاکم بر انتقال

حرارت گذرا به شدت غیرخطی می شوند. بنابراین در تمام تحلیل های اجزا محدود که قبلاً در این زمینه انجام شده است، المان های لاگرانژی مورد استفاده قرار گرفته اند.

تغییرات زمانی در متغیرهای دما، جابجایی و تنش به کمک لاپلاس معکوس عددی به دست آمده است. در نهایت نتایج به دست آمده بر اساس در نظر گرفتن خواص ماده وابسته به دما، با نتایج مربوط به عدم وابستگی به دما مقایسه شده اند. علاوه بر این توزیع دما و تنش های شعاعی در برابر زمان، پارامترهای هندسی مورد بررسی قرار گرفتند.

نتایج نشان می دهد که اثر عدم وابستگی به زمان قابل توجه می باشد. [۷]

فرمول المان استوانه ای جدیدی برای ساختار المان محدود استوانه های توخالی از مواد هدفمند توسط تقی پور و همکارانش پیشنهاد شده است. مدل توزیع قانون پاور^۲ برای اجزای سازنده ماده در جهت ضخامت استفاده شده است. بر اساس تغییر ویژگی ها در استوانه های هدفمند، تحلیل آنها با استفاده از فرمول های رایج دشوار است. در این روش علاوه بر ساده سازی فرآیند مدل سازی و تحلیل استوانه های هدفمند، ساختار اجزا محدود بر اساس طراحی المان های جدید استوانه ای استوار است. المان های جدید استوانه ای اجازه تغییر خواص را در راستای ضخامت می دهند که نتیجه آن کاهش المان های مورد نیاز و حذف نیاز به مش در امتداد مقطع استوانه هدفمند می باشد.

نتایج نشان دهنده دقت بالا و تطابق بسیار خوب با روش های رایج اجزا محدود است. [۸]

مقایسه تحلیلی انتقال حرارت پایدار در پره های توربین گازی که از مواد هدفمند و TBC^۱ ساخته شده اند توسط Coomar و همکارش انجام گردید. برای این منظور یک مدل از پره توربین گازی با هندسه ایرفویل در نظر گرفته شده و الگوریتم اجزا محدود برای به دست آوردن جواب غیرخطی و پایدار معادله حرارت تحت شرایط مرزی جابجایی و تابش استفاده شده است.

نتایج نشان دهنده اثر مهم تابش در مدل سازی و همچنین تأثیر دمای گاز خارجی در افزایش انتقال حرارت پره می باشد. علاوه بر این مشاهده شد که پره هایی از ماده هدفمند که شامل ۷۰٪ سرامیک هستند، اثر

^۱Thermal Barrier Coating

سردسازی بهتری نسبت به پره‌هایی که از مواد TBC ساخته شده اند، دارند.[۹]

اثرات اعوجاج حرارتی در انواع مختلف صفحه‌های فشرده از مواد هدفمند توسط Zenkour و همکارش بررسی شده و جهت این کار تئوری تغییر شکل برشی سینوسی برای مطالعه اثر اعوجاج در مواد هدفمند به کار گرفته شده است.

خواص ماده و ضرایب انبساط دمایی صفحه فشرده، در راستای ضخامت بر اساس توزیع قانون پاور و کسر حجمی فرض شده اند. لایه هسته ماده هم چنان همگن و از یک ماده ایزوتروپیک در نظر گرفته شده است. انواع مختلفی از صفحات فشرده متقارن در این مورد در نظر گرفته شده اند. معادله پایداری صفحات فشرده از مواد هدفمند شامل اثرات دمایی نیز می شود.

بارهای حرارتی یکسان، خطی و غیر خطی در راستای ضخامت در نظر گرفته شده اند. مثال های عددی شامل اثرات گرادیانی، نرخ تغییر صفحه، نرخ ضخامت، نوع اعمال بار و نوع صفحه فشرده می شود.

صفحات ناهمگن به صورت صفحات فشرده از ماده هدفمند در نظر گرفته شده اند. لایه بالایی و لایه پایینی صفحه از ماده $(Ti\ 6Al\ 4V+ZrO_2)$ ساخته شده در حالی که هسته همچنان از ماده ZrO_2 تشکیل شده است. نتایج زیر پس از انجام تحقیق حاصل شده اند :

دمای اعوجاج بحرانی هنگامی که نرخ ضخامت جانبی زیاد می شود، کاهش می یابد. دمای بحرانی هنگامی که به نمونه دارای تغییرات غیر خطی می باشد، در راستای ضخامت با افزایش جز کرنش برشی افزایش می یابد و با افزایش ضخامت هسته صفحه فشرده، دمای بحرانی کاهش می یابد.[۱۰]

۱-۳ تاریخچه مواد هدفمند

مواد هدفمند در ابتدا در سال ۱۹۸۴ توسط گروهی از دانشمندان در دانشگاه سندائی ژاپن به عنوان یک ماده برای روکش‌های حرارتی قابل استفاده در کاربردهای فضایی و راکتورهای گداخت معرفی شد.

اجزای سازه‌ای که همزمان در میدان‌های مکانیکی، حرارتی و مغناطیسی عمل می‌کنند، روز به روز افزایش می‌یابند و به علت کاربرد عملی گسترده آن در زمینه‌های گوناگون مانند شاتل‌های فضایی، هواپیماهای مافوق صوت، موشک‌ها و راکت‌ها در سال‌های اخیر مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته‌است. امروزه استفاده از مواد مرکب در صنایع مختلف از جایگاه مهمی برخوردار است. حالت بهینه‌ی کامپوزیت‌ها، مواد هدفمند هستند که در سال‌های اخیر مورد توجه ویژه‌ای بوده‌اند. از سوی دیگر در کامپوزیت‌های لایه‌ای، انتقال ناگهانی خصوصیات مواد از یک لایه به لایه دیگر باعث ایجاد تنش‌های نامطلوب بین لایه‌ای در فصل مشترک لایه‌ها می‌شود که این تنش‌ها می‌توانند باعث تغییر شکل پلاستیک، ایجاد ترک و گاهی جدایش لایه‌ها شوند. این اثرات نامطلوب می‌توانند با استفاده از مواد هدفمند مرتفع شوند. مواد هدفمند در واقع، مواد جدید با ویژگی‌های انتخاب شده از مواد پایه بوده که برخی از خواص ماده در آنها بهینه شده است. خواص بی‌نظیر این مواد از طرفی به علت خاصیت کامپوزیتی آنها و از طرف دیگر به دلیل تغییرات تدریجی خواص در فصل مشترک این مواد بوده که این خود باعث کاهش تنش‌های پسماند و تمرکز تنش در فصول مشترک می‌شود. از نکات بسیار برجسته این مواد بهینه نمودن تغییرات تنش در آنها با تغییر مناسب پروفیل تغییرات مواد ساختاری است، بنابراین می‌توان گفت مواد هدفمند، موادی کامپوزیتی می‌باشند که از نظر میکروسکوپی غیر همگن بوده و خصوصیات ساختاری شامل نوع توزیع و اندازه فازها، به‌طور تدریجی از سطحی به سطح دیگر تغییر می‌کند و همین تغییر تدریجی منجر به تغییر تدریجی و پیوسته خواص آنها می‌شود. خواص ماده از قبیل مدول یانگ، ضریب انبساط حرارتی و یا ضریب هدایت حرارتی و غیره طبق تابعی خاص در یک یا چند بعد تغییر می‌کنند. این کار با تغییر در کسر حجمی مواد تشکیل دهنده و ریز ساختار آنها ممکن خواهد بود. دستیابی به چندین ویژگی دلخواه، مقاومت مکانیکی بالا همزمان با مقاومت حرارتی بالا و استحکام در برابر خوردگی و شکست باعث شده است این مواد بطور وسیعی در صنایع هوا و

فضا، صنایع خودروسازی، صنعت نفت و مخازن استوانه‌ای و پوسته‌های محافظ حرارتی در راکتورها و سازه‌های هوافضایی بکار برده شوند. توزیع تنش در مخازن استوانه‌ای ساخته شده از مواد هدفمند، به نوع مواد و نحوه‌ی توزیع خواص آن وابسته است که می‌توان از آنها برای کنترل توزیع تنش و دما استفاده نمود. با اینکه مواد هدفمند در ابتدا، برای مصارف هوافضا طراحی و ساخته شدند اما در حال حاضر در بسیاری از زمینه‌ها مانند لوله‌های مبدل حرارتی، پره توربین‌های گازی، صنایع نظامی، ابزار برش صنعتی، قطعات موتور راکت، ساخت اندام‌های مصنوعی بدن انسان از قبیل دندان و استخوان مصنوعی، فیبرهای نوری کاربرد پیدا کرده‌اند. در ایمپلنت‌های دندانی برای دستیابی به یک توزیع تنش بهینه در سطح مشترک استخوان ایمپلنت، ناشی از بارهای وارده استفاده می‌شود. در پره توربین‌های گازی نیز با ساخت پره‌هایی از این نوع که جنس آن در نواحی سطوح خارجی، سرامیک و در نواحی داخلی از فلز است، این امکان وجود خواهد داشت تا بتوان همزمان از خواص مثبت سرامیک و فلز استفاده نمود. سرامیک به‌عنوان سد حرارتی از خوردگی و اکسیداسیون فلز محافظت کرده و در عین حال چقرمگی و استحکام پره توسط قسمت فلزی داخلی فراهم خواهد شد. در نواحی مابین سطوح داخلی و خارجی نیز جنس و در نتیجه خواص ماده بطورپیوسته تغییر خواهد کرد. با استفاده از این مواد در ساخت پره توربین گازی، به دلیل توانایی مقاومت بالای این مواد در مقابل حرارت، دمای ورودی به توربین قابل افزایش بوده که به تبع آن راندمان توربین افزایش خواهد یافت.

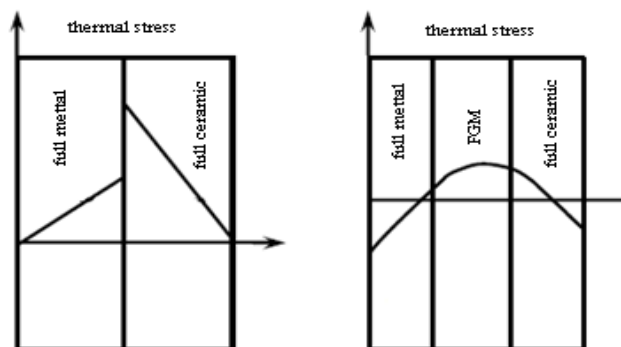
۱-۲ : مروری بر مواد هدفمند

برای دست یافتن به خاصیت‌های متفاوت در نقاط و جهات مختلف یک جسم ، می‌توان از مواد مختلف در ساخت آن استفاده کرد. کامپوزیت‌ها موادی هستند که بدین منظور طراحی شدند. در مواد کامپوزیت لایه‌ای هم با تغییر در ضخامت لایه‌ها و مواد تشکیل دهنده آنها می‌توان به مشخصات مکانیکی بهینه و دلخواهی دست یافت. پس از آن به منظور مرتفع کردن معایب کامپوزیتها، مانند تمرکز تنش و جدایش در مرز مشترک لایه ها مواد پیشرفته‌تری که دارای تغییرات پیوسته و تدریجی بودند طراحی شدند. این مواد که در آنها تغییرات به صورت تابعی پیوسته بود به مواد هدفمند معروف شده‌اند.

۲-۲ : کاربرد مواد هدفمند

همانطور که اشاره شد، انتقال ناگهانی در ترکیب و خواص مواد در داخل یک جزء که تحت اثر تنش داخلی و یا خارجی می‌باشد به شدت مخرب است چرا که، اغلب به تمرکز تنش موضعی تند منجر می‌گردد و این در حالی است که با دوری از این وضعیت، یعنی با انتقال تدریجی از یک ماده به دیگر، تمرکز تنش به میزان زیادی کاهش می‌یابد و این ملاحظه در واقع زیربنای استفاده از مواد با تغییر تدریجی می‌باشد. در مورد ساختار تدریجی فلز و سرامیک نیز می‌توان گفت که چنین ماده‌ای می‌تواند وظایف ناسازگار با یکدیگر مثل مقاومت در برابر حرارت و خوردگی سرامیکها و استحکام بالا و سفتی و قابلیت ماشینکاری فلزات را یکجا دارا باشد. بطور کلی در مورد مواد هدفمند می‌توان زمینه‌های کاربردی دیگر آنها را مورد بررسی قرار داد. تغییرات پیوسته در این مواد آنها را از مواد مرکب متعارف متمایز می‌سازد، به طوری که به‌عنوان مثال در کامپوزیت‌های الیافی در معرض بارهای حرارتی بالا، ترک ابتدا در مرز الیاف ایجاد می‌شود و سپس در لایه‌ها و مقاطع ضعیف تر منتشر می‌گردد، وقتی مواد غیر مشابهی مانند فلزات و سرامیک‌ها با هم در ساختار یک سازه استفاده می‌شوند، به دلیل ضرایب انبساطی حرارتی متفاوتشان، در معرض حرارت دچار تنش‌های داخلی می‌شوند. این ناسازگاری‌ها باعث ایجاد تنش در سطوح مشترک می‌شود و در این نواحی ترک ریشه می‌زند. ولی می‌توان با اعمال گرادیان دلخواه در پروفیل تغییرات مواد هدفمند نقاط ماکزیمم تنش را کنترل کرد. رشد ترک در مواد هدفمند به‌گونه دیگر رخ می‌دهد تا آنجا که می‌توان با بررسی تاثیر گرادیان بر رفتار

ترک، ترک را در مسیر دلخواه هدایت و متوقف کرد. امروزه این مسئله توجه بسیاری از محققان را در زمینه مکانیک شکست به خود جلب کرده است. مسئله‌ی دیگر بوجود آمدن تنش‌های پسماند به علت تفاوت در ضریب انبساط حرارتی در مواد مرکب متعارف می‌باشد، که استفاده از تغییرات تدریجی مواد بجای تغییرات ناگهانی می‌تواند این مشکل را مرتفع سازد. در شکل (۱-۲) نحوه توزیع تنش‌های حرارتی در فصل مشترک بین دو جزء ماده مرکب نشان داده شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود تغییرات توزیع تنش حرارتی در فصل مشترک دو لایه سرامیک و فلز سریع می‌باشد و باعث تمرکز تنش و بوجود آمدن تنش‌های پسماند شده که به نوبه خود باعث بروز مشکلات بعدی از جمله جدا شدن لایه‌ها از همدیگر می‌گردد. نحوه‌ی تغییرات توزیع تنش حرارتی در مواد هدفمند نیز نشان داده شده که دارای تغییرات ملایم‌تری به دلیل توزیع تدریجی خواص مواد می‌باشد و منجر به کاهش تنش‌های پسماند و همچنین کاهش تمرکز تنش در فصل مشترک اجزاء تشکیل دهنده می‌گردد.



شکل ۲- ۱ مقایسه خواص کامپوزیت‌های لایه‌ای و هدفمند

علاوه بر کاهش تنش‌های حرارتی، نقاط بحرانی که در محدوده آنها تنش‌ها به حداکثر میزان خود می‌رسند، قابل تشخیص و کنترل می‌گردند. استحکام باندهای موجود در میان جامدات غیرمتشابه مثل فلز و سرامیک را می‌توان با کاهش فواصل و توسط تغییرات تدریجی پیوسته یا گام به گام در ترکیب، در مقایسه با سطوح با تغییرات سریع، افزایش داد. این باعث افزایش نیروی محرکه لازم برای رشد ترک و در نهایت منجر به تاخیر در پدیده شکست و تسلیم ماده می‌شود.

صنایع هوا - فضا :

مفهوم هدقمند در اصل برای این زمینه ابداع گردید. مواد هدقمند دو ویژگی متضاد هم از قبیل رسانایی حرارتی و خاصیت حایل حرارتی را در یک ماده فراهم می کنند. در حال حاضر، این تکنولوژی ما را قادر به تولید مواد سبک، مستحکم ، بادوام و قابل انطباق با طیف گسترده ای از زمینه های مختلف از قبیل ، مواد ساختمانی، مواد تبدیل انرژی و ... نموده است. به خصوص یک تکنولوژی حیاتی برای ساخت موشک ها و ایستگاه های فضایی شده است. این مواد قابل استفاده در دیواره ی بیرونی فضاپیما و بخش هایی از موتور موشک می باشند. رایج ترین نوع مواد هدقمند برای کاربردهای هوافضا از دو فاز سرامیک و فلز با یک ریز ساختار که به صورت پیوسته درجه بندی شده اند تشکیل شده است. ماده سرامیک مقاومت دمایی بالایی را به خاطر رسانایی گرمایی کم دارا می باشد و از طرفی ماده فلزی چکش خوار، از شکستگی یا ترک به خاطر تنش حرارتی ممانعت به عمل می آورد. این نوع از مواد هدقمند در زمینه پوشش محافظ حرارتی بکار می - رود و می تواند باعث کاهش تنش های داخلی و افزایش عمر پوشش شود.

پره های توربین و نازل ها :

گذرگاه های سرد کننده داخلی و پوشش های حائل حرارتی، امروزه برای کنترل دمای فلزات در پره های توربین های گازی مورد استفاده قرار می گیرند. مواد هدقمند که معمولاً ترکیبی از فلز و سرامیک هستند، برای استفاده در توربین های گازی پیشنهاد شده اند، زیرا به دلیل داشتن گرادیان تغییرات پیوسته، تحت بارهای حرارتی بادوام تر می باشند.

افزایش دمای ورودی توربین (TET) همیشه یک هدف طراحی برای توربین های گازی بوده است، زیرا افزایش (TET) سبب افزایش خروجی شده و بازده را بهبود می بخشد. اگرچه در دمای بالاتر از ۹۰۰ درجه سانتی گراد، مشکلات خوردگی اهمیت می یابد و باید پوشش های محافظ حرارتی مورد استفاده قرار گیرند. پوشش های حائل حرارتی برپایه ی سرامیک (TBS) برای بهبود محافظت پره های فلزی در محیط های با دمای بسیار بالا مورد استفاده قرار می گیرند. به خوبی مشخص شده است، استفاده از پوشش های TBS

می تواند سبب مشکلات ناپایداری فاز، ناپایداری حرارتی و مشکلات مربوط به آن در دماهای بالا و محیط های خوردنده شود.

TBC همچنین در سیکل های حرارتی به دلیل عدم انطباق انبساط حرارتی با بستر سوپر آلیاژها یا به دلیل ضربه و فرسایش که به وسیله ی ذرات، در گازهای احتراق با سرعت بالا ایجاد می گردد، تمایل به خرد شدن دارند.

از آنجا که مواد TBC در پره های توربین امروزی بسیار متداول هستند، مواد هدقمند دسته ی نسبتاً جدید از موادی هستند که می توانند بدون مشکلات فوق در محیط هایی با درجه حرارت بالا عمل نمایند و به عنوان موادی با پتانسیل بالا برای ساخت پره های توربین گازی در نظر گرفته شوند. معمولاً مواد هدقمند مواد مرکبی هستند که از ترکیب سرامیک و فلز ساخته شده اند، در این مواد کسر حجمی فلز و سرامیک به صورت لایه، لایه تغییر می کند، بنابراین خواص مکانیکی جسم به صورت هموار و پیوسته از طریق حجم آن تغییر می کند، بر خلاف حالت TBC که تنها با بخش فلزی پوشش داده شده اند.

سرامیک، مقاومت حرارتی بالایی ایجاد می نماید و ضریب انبساط حرارتی آن نیز کوچک است، بنابراین برای شار حرارتی داده شده، تنش ها و کرنش های حرارتی کمتری را تحمل می کند. در همین زمان، جزء تشکیل دهنده ی انعطاف پذیر فلزی، مانع شکستگی بر اثر تنش های ناشی از شوک های حرارتی ناگهانی می شود. تغییرات هموار گرادیان خواص مواد، مشکلات عدم تطابق را برطرف می نماید.

به خاطر این دلایل، مواد هدقمند بهتر از مواد TBC در رابطه با دست یافتن به پایداری هستند. از آنجا که انتقال حرارت در لنت احتراق، نازلها و پره های دیسک توربین های گازی بسیار مورد توجه می باشد، استفاده از مواد هدقمند در این کاربردها بسیار مفید خواهد بود. [۱۱]

مواد صنعتی :

به تازگی برنامه های کاربردی بسیاری، در رابطه با مواد هدقمند به اجرا در آمده است. یک مثال آن ابزارهای شکل دهی است. از آنجا که محصولات اخیر، به دلیل افزایش استحکام و مقاومت حرارتی و سختی برای برش

و شکل دهی سخت تر شده اند، تقاضای مواد جدید برای ابزارهای صنعتی در حال رشد است. در این زمینه ، به هر دو مورد مقاومت به سایش و سختی نیازمندیم. بنابراین می توان گفت مواد هدفمند راه حلی برای دست یابی به این خصوصیات می باشند.

علاوه بر این، به عنوان نیاز برای برش خشک و عدم استفاده از مایع برش، گسترش روغن کاری داخلی و ابزارهایی با مقاومت حرارتی بالا انتظار می رود.

تولید آزمایشی ابزارهای صنعتی با این مواد با موفقیت انجام شده است، استفاده از الماس (در قسمت خارجی) و فولاد (در قسمت داخلی) و تولید ابزارهایی با سرعت بالا در هر شکلی در حال توسعه می باشد.

اپتوالکترونیک :

امروزه تغییرات زیادی در وسایل ارتباطی حاصل شده است. در حال حاضر ابزارهای ارتباطی که از فیبر نوری استفاده می کنند، نیازمند پیشرفت در راستای افزایش حجم اطلاعات می باشند. برای این منظور یک ایده سیستم ارتباطی طول موج نوری مرکب است که از فیلترهای نوری به خصوص با استفاده از ضریب شکست تدریجی استفاده می کند. این روش ساختاری است که از ضریب شکست جهت انتقال موج به طور پیوسته و همراه با تغییر فرکانس و طول موج استفاده می کند.

با استفاده از فیلتر، می توان تا حدودی مانع شکست های غیر ضروری شد. استفاده از مواد هدفمند برای فیبرهای نوری پلاستیکی می تواند انتقال با سرعت بالا فراهم نماید، در نتیجه می توان سیستم ارتباطات نوری را در سطح منازل شخصی نیز گسترش داد.

مواد تولید کننده انرژی :

امروزه مشکلات زیست محیطی ایجاد شده که علل و عوامل مختلفی سبب ایجاد آنها گردیده اند، که به عنوان مثال می توان از دی اکسید کربن، دیوکسین و سوراخ شدن لایه ازن نام برد.

مشکل دیگر ، تولید مواد غیر ضروری در زندگی روزمره می باشد. قدرت تولید شده از مواد ترموالکتریک ، توجه عموم را برای بهره برداری مؤثر از این مواد به عنوان تولید کننده انرژی جلب کرده است. انتظار می رود مواد ترموالکتریک در سیستم های تولید برق مورد استفاده قرار گیرند. در گذشته تنها یک نوع ماده در ناحیه هایی با دمای بسیار بالا یا پایین مورد استفاده قرار می گرفت؛ با این حال ، با توابع گرادیانی ، یک تابع مناسب در منطقه ی دمایی مناسب آن مورد استفاده قرار خواهد گرفت، در نتیجه یک سیستم با کارایی بالا به دست خواهد آمد.

می توان گفت مواد هدقمند در این زمینه نیز کاربردی هستند. هدف مطالعه ی مواد انرژی زا، برای تولید مواد ترموالکتریک کارآمد ، ممکن است به سایر تکنولوژی ها از مسائل ایتوالکتریک و تبدیل انرژی خورشیدی و لیزر به کار گرفته شود.

مواد بیومکانیک :

بدن ما از ۲۰۶ استخوان تشکیل شده که برخی از آنها مغز و اندام ها را پوشش می دهند و ایجاد ناراحتی در آنها سبب مشکلاتی خواهد شد. برای حل این مشکلات، مواد جدیدی که می توانند جایگزین استخوان و مفاصل شده و عمر طولانی داشته باشند مورد نظر هستند. نه تنها سختی زیاد و مقاومت در برابر خوردگی بلکه سازگاری بیولوژیکی و بی ضرر بودن نیز بسیار مهم می باشند. ساختار مواد هدقمند قابل انطباق با استخوان های مفاصل و دندان های مصنوعی است.

تکنولوژی ساختار گرادیانی برای پیشگیری از سرطان نیز مورد استفاده قرار می گیرد. به عنوان مثال یکی از این مطالعات تقویت ساختار کلاژن و استفاده از تکنولوژی گرادیانی است.

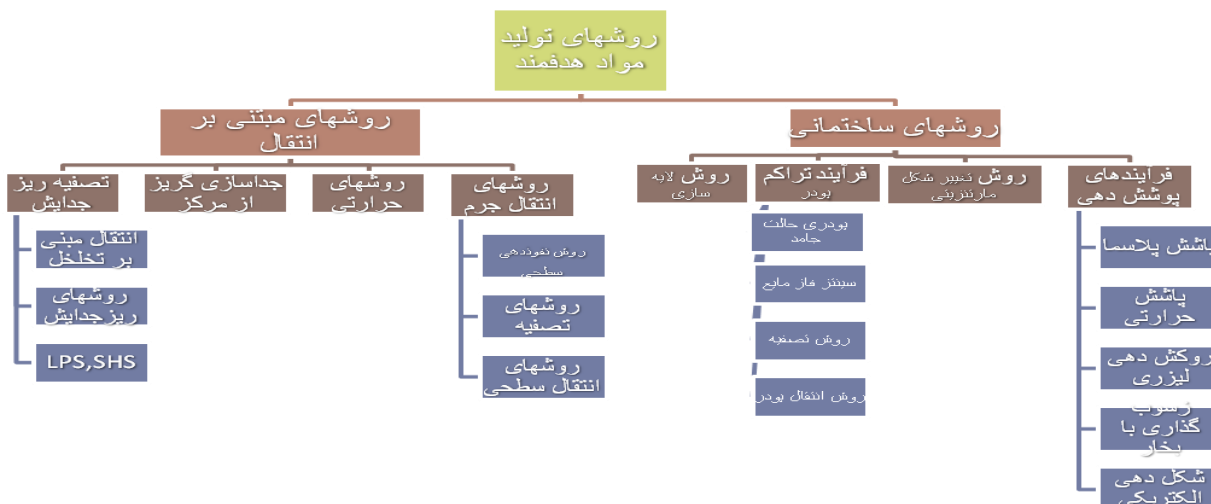
سایر کاربردها :

تلفن همراه یکی از ابزارهای ارتباطی آسان است که در حال کوچکتر و باریک تر شدن می باشد. تکنولوژی هدقمند در این زمینه نیز کاربردی است. برای به حداقل رساندن اندازه و ارتباط مؤثر تکنولوژی گذردهی گرادیانی در هنگام تولید قسمت های مختلف می تواند استفاده می شود.

به طور مشابه، در زمینه های دیگر از قبیل حوزه های الکترونیک و شیمی مواد هدفمند قابل کاربری هستند. فیبرهای نوری ساخته شده از پلیمر های کاملاً فلوئوردار گسترش یافته اند، هم چنین با تحقیقات ممکن است مواد جدیدی با توابع جدید در سطح تکنولوژی نانو و به صورت گرادیانی ایجاد گردند.

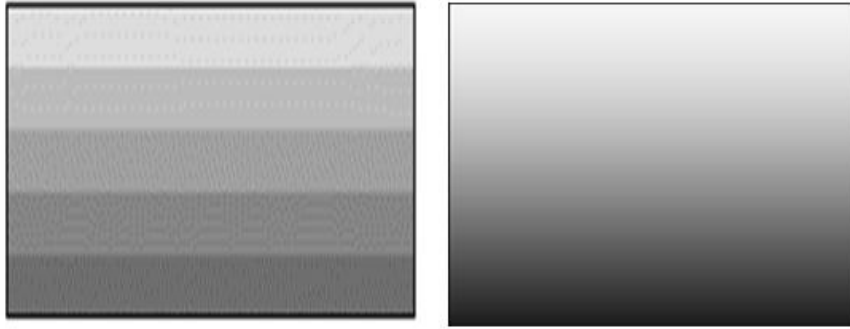
۲-۳: روشهای ساخت مواد هدفمند

ایده اصلی ساختارهای لایه‌ای ابتدا در سال ۱۹۷۲ برای کامپوزیت ها و مواد پلیمری ارائه شد. با این وجود تا سال ۱۹۸۰ بررسی و تحقیق واقعی پیرامون چگونگی ساخت و ارزیابی ساختار های طبقه‌ای وجود نداشت. به طور معمول این چنین ساختارهایی به سختی ساخته می شوند و حفظ تنوع ترکیبی به وسیله روش‌های مرسوم بسیار سخت و یک پروسه زمان‌بر می باشد. با گسترش کاربرد مواد هدفمند، روش‌های تولید این مواد نیز توسعه پیدا کردند. نمودار زیر روش‌های موجود برای ساخت مواد هدفمند را نشان می‌دهد.



شکل ۲-۲: روشهای تولید مواد هدفمند

در ساده ترین مواد هدفمند، دو جزء ماده مختلف به طور پیوسته از یکی به دیگری تغییر می کند. همچنین اجزای مواد می توانند به صورت غیر پیوسته و مرحله به مرحله تغییر کنند. هر دوی این حالات از نظر ساختاری هدفمند در نظر گرفته می شوند. شکل (۲-۳)



شکل ۲- ۳: ساختار پیوسته و مرحله‌ای مواد هدفمند

جزء فلزی مواد هدفمند می‌تواند آلومینیوم، مس، کرم، نیکل و یا سرب باشد. قسمت سرامیک نیز می‌تواند از جنس سرامیک بدون اکسید و فلز مانند SiC , Si_3N_4 ، سرامیک‌های بدون اکسید با فلز TiC , ZrC ، سرامیک‌های با اکسید بدون فلز SiO_2 و یا سرامیک‌های با اکسید با فلز Al_2O_3 و ZrO_2 انتخاب شود. روش‌های تولید مواد هدفمند بطور کلی به دو دسته تقسیم می‌شوند. در روش اول مواد هدفمند، بصورت لایه لایه ساخته می‌شوند. بنابراین این روش تولید را روش ساختمانی می‌نامند، چرا که در ابتدا با استفاده از روش‌های نوین کامپیوتری، مدل فضائی تغییرات تدریجی خواص مواد، مدل شده سپس هدفمند ساخته می‌شود. اساس روش دوم فرآیندهای تولید بر پایه پدیده‌های انتقال طبیعی می‌باشد. در این روش از جریان سیال انتشار اتمی در اثر انتقال حرارت برای ایجاد تغییرات تدریجی در ریزساختارهای مواد استفاده می‌شود. به‌طور طبیعی پدیده‌های تفکیکی وجود دارند که برای ایجاد تغییرات تدریجی مناسب به کار گرفته می‌شوند. اگر این فرآیند از لحاظ کمی کنترل شوند، تغییرات تدریجی در یک محدوده باریک از ساختار امکان‌پذیر می‌گردد. پدیده‌های انتقال که به عنوان اساس روش دوم تولید مواد هدفمند تلقی می‌شوند، در فرآیند تولیدی مواد به روش ساختمانی نیز مدنظر قرار می‌گیرند. چرا که در اینجا نیز باعث تغییرات تدریجی خواص مواد در بین لایه‌ها می‌گردند. بنابراین در نظر گرفتن پارامترهای سرعت یا زمان تقریبی انتشار، در هر یک از پدیده‌های انتقال سیال، انتقال حرارت و انتقال جرم، از مسائل مهم در زمینه تولید مواد هدفمند می‌-

باشد. بسته به روش انتخاب شده برای تولید ماده هدفمند با کنترل همه پارامترهای اشاره شده می‌توان توزیع نهایی مواد مورد نظر و در نتیجه خواص مکانیکی و فیزیکی نهایی را پیش‌بینی و ایجاد نمود. در فرآیندهای ساختمانی، تغییرات تدریجی به وسیله ایجاد و انباشتن لایه‌هایی با خواص متغیر تدریجی بوجود می‌آیند.

مزیت عمده این روش این است که هیچ محدودیتی برای ایجاد خواص متغیر بصورت تدریجی وجود ندارد. بنابراین انعطاف‌پذیری روش تولید، طراح را در زمینه بهینه‌سازی پروفیل توزیع بیشتر یاری می‌رساند. این در حالی است که فرآیندهای مبتنی بر پدیده‌های انتقال از چنین انعطاف‌پذیری برخوردار نیستند. روشی که

برای طراحی مواد هدفمند به کار گرفته می‌شود وابسته به کلاس تولیدی که مورد استفاده قرار می‌گیرد، می‌باشد. به عنوان مثال در روش تولیدی به کمک روش‌های ساختمانی، طراحی تغییرات تدریجی بطور کامل بسته به نوع اجزا تشکیل‌دهنده و تنش‌هایی که پس از سرد شدن در قطعه ایجاد می‌شود صورت می‌پذیرد، در نهایت پس از شکل‌گیری لایه‌ها به کمک پدیده‌های انتقال، تغییرات تدریجی در خواص ایجاد می‌گردد. پروسه ساخت مواد با ساختار لایه‌ای و حفظ تنوع ترکیبی آنها به وسیله روش‌های مرسوم بسیار سخت و یک پروسه زمان‌بر می‌باشد. خصوصیات آنها در دماها و زمان‌های لازم، با نفوذ داخلی، زمخت شدن و واکنش‌های شیمیایی به تنزل می‌گراید. این پروسه با گرمادهی ماکروویو به‌طور موثر به دست می‌آید. شکل (۲-۲) پروسه گرمادهی ماکروویو زینترینگ را برای فولاد نشان می‌دهد. امواج ماکروویو بخشی از طیف الکترو مغناطیس دارای بسامد ۳۰۰ تا ۳۰۰۰۰۰ مگاهرتز و طول موج ۰/۰۰۱ تا ۱ در هوا هستند. در این طیف بین دی‌الکتریک و مادون قرمز قرار دارند. این امواج بر خلاف اشعه ایکس و گاما به دلیل بسامد پایین قادر به شکستن پیوندهای شیمیایی و آسیب رساندن به مولکول‌ها نیستند. امواج ماکروویو همانند نور در خط مستقیم سیر می‌کند و توسط اجسام مختلف جذب، منتقل یا منعکس می‌شوند. این امواج به طور انتخابی پودر فلز را گرم نموده و در مواجهه با حجم فلز در دمای اتاق منعکس می‌شود. در واقع پودر فلز امواج را جذب و توده فلز آن را منعکس می‌کند. قطعات فولاد و چدن در میدان ماکروویو در زمان ۲-۳ دقیقه با

استفاده از یک پودر لحیم به هم متصل شده‌اند. همچنانکه توسط آزمایشات ریز ساختاری نمونه مشخص شده است، اتصال تقریباً کامل است. این پروسه یک پروسه تک مرحله ای با زمان زینترینگ ۱۰ دقیقه می باشد. زمان کوتاه پروسه نشان می دهد ترکیب آن پیش زینتر شده بوده که این ترکیب تا بخش های پایانی فرایند حفظ می شود. این کار می تواند تا اتصال فلز با سرامیک ادامه یابد و همچنین به توسعه پوشش های سرامیکی روی فلزات یا پوشش های فلزی روی سرامیک ها بینجامد.



شکل ۲- ۴: پروسه ی گرمادهی میکروویو در دمای بالا

بطور کلی از روشهای متداول تولید مواد هدفمند موارد زیر را می توان اشاره کرد.

۱- پاشش پلاسما

۲- فرآیند متراکم سازی پودر

۳- فرآیندهای روکش دهی

۴- روکش لیزر

۵- ته نشینی و جداسازی گریز از مرکز

۶- رسوب دهی پاشش گرمایی

قبل از ساخت ماده هدفمند باید مشخص شود که فلز و سرامیک به چه صورتی توزیع شده است، در بعضی مقاله ها هدف یافتن یک پروفیل با توجه به کمینه کردن یک کمیت است. در مواقع دیگر پروفیل توزیع فلز و

سرامیک انتخاب می‌شود و یک پارامتر برای اهداف بهینه یا کمینه کردن یک کمیت در آن در نظر گرفته می‌شود.

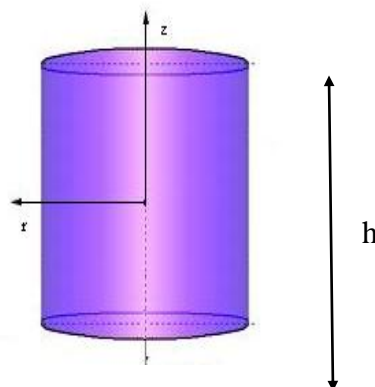
۴-۲: مدلسازی مواد هدفمند

با گذشت زمان کمی از تاریخ ابداع مواد هدفمند، بدلیل اهمیت و کاربردی بودن این مواد، مدل‌های مختلفی برای اعمال تغییرات گرادیان و طراحی مواد هدفمند ارائه شدند. البته ترکیب نمودن دو ماده مختلف با پروفیلی کاملاً مشخص برای ساخت مواد هدفمند سخت و غیر عملی می‌باشد. در این قسمت به معرفی پروفیل‌های مختلف که در مدلسازی این مواد مورد استفاده قرار گرفته‌اند می‌پردازیم.

۲-۴-۱: مدل توزیع نسبت حجمی بر اساس قاعده توانی

در این مدل با فرض اینکه نسبت حجمی مواد تشکیل‌دهنده سازه تنها در یک جهت تغییر می‌نماید، بطور مثال در جهت شعاع در شکل (۴-۴)، پروفیل تغییرات خواص مکانیکی در امتداد r بصورت چندجمله‌ای درجه p در نظر گرفته می‌شود. کسر حجمی در راستای شعاعی می‌تواند بصورت معادلات زیر بیان شود. v_c کسر حجمی سرامیک و v_m کسر حجمی فلز می‌باشد. p توان نسبت اجزای سازنده نامیده می‌شود.

$$v_c(r) = \left[\frac{r}{R} \right]^p, \quad v_m(r) = 1 - v_c(r) \quad (1-2)$$



شکل ۲-۵: گرادیان تغییرات درجهت شعاعی برای استوانه هدفمند

با بکاربردن رابطه‌ی (۱-۲) طیف گسترده‌ای از پروفیل‌های ترکیبی بوسیله‌ی تغییر در مقدار p بدست می‌آیند. برای مقدار $p = 0$ ماده کاملاً فلزی می‌باشد. همانطور که مشاهده می‌کنید در $r = 0$ نیز این اتفاق می‌افتد.

افتد و برای $r = R$ ماده کاملاً سرامیکی می‌باشد. سطحی که کاملاً سرامیکی می‌باشد معمولاً تحت افزایش دما یا شار حرارتی می‌باشد. نسبت حجمی فلز و سرامیک در امتداد شعاعی بصورت زیر می‌باشند.

$$p(r) = \frac{(p_m p_c - P_m^2)(1 - v_c^{1/3} + v_c) + P_m^2}{p_c + (p_m - p_c)v_c^{1/3}} \quad (2-2)$$

$$p(r) = v_m p_m + v_c p_c$$

برای تمام مقادیر p مقدار نسبت حجمی مواد تشکیل دهنده در جهت شعاعی بین صفر و یک تغییر می‌کند.

شکل (۲-۶) پروفیل‌های مربوط به توزیع حجمی سرامیک را در جهت شعاع نشان می‌دهد. لی و

همکاران [۱۲] در سال ۱۹۹۹ از این پروفیل برای مدلسازی تغییرات مدول الاستیسیته و نسبت پواسن در

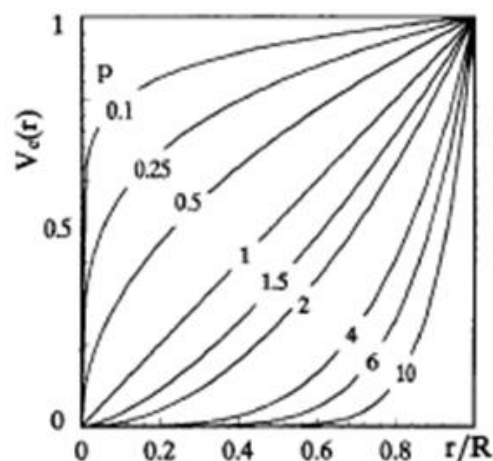
استوانه جامد با ترک دایروی در مرکز و استوانه‌ی جدار ضخیم با ترک لبه‌ای استفاده کردند. اگر ماده

هدفمند مورد نظر متشکل از چند ماده باشد در آنصورت پروفیل تغییرات خواص مکانیکی در امتداد Z

بصورت کلی‌تر زیر بیان می‌شود:

$$P(r) = \sum_i P_i v_{i(r)} \quad (3-2)$$

در رابطه‌ی (۳-۴)، P_i بیانگر خصوصیات i امین ماده و $v_{i(r)}$ نسبت حجمی آن می‌باشد.



شکل ۲-۶: پروفیل‌های نسبت سرامیک برای استوانه هدفمند [۱۲]

۲-۴-۲: مدل توزیع سیگموند

در مواردی که ماده‌ی هدفمند چندلایه مورد بررسی قرار می‌گیرد، بدلیل وجود تمرکز تنش در مرز بین لایه‌ها مدل توزیع نسبت حجمی با قاعده‌ی توانی فوق‌قادر به مدلسازی مناسب تغییرات شدید خصوصیات مواد در مرز دو لایه‌ی مختلف نخواهد بود. بنابراین چانگ و چی در سال ۲۰۰۱ استفاده از مدل سیگموند، تابعی مرکب از دو تابع توانی (۲-۴)، را ارائه کردند.

$$f_1(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^p \quad 0 \leq z \leq h/2$$

$$f_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^p \quad -h/2 \leq z \leq 0$$
(۴-۲)

بر این اساس با تعریف این دو تابع و با استفاده از اصل ترکیب بطور مثال تغییرات مدول الاستیسیته در امتداد ضخامت ماده‌ی هدفمند دو لایه بصورت توابع زیر بدست می‌آید.

$$E(z) = f_1(z)E_1 + (1 - f_1(z))^p E_1 \quad 0 \leq z \leq h/2$$

$$f_2(z) = f_2(z)E_1 - (1 - f_2(z))^p E_2 \quad -h/2 \leq z \leq 0$$
(۵-۲)

این مدل مناسب برای مواد هدفمند دو لایه می‌باشد.

۲-۴-۳: مدل توزیع نمایی

در این مدل فرض می‌شود که خواص مواد هدفمند در امتداد ضخامت آن بصورت تابع نمایی تغییر نمایند. این مدل اغلب در روشهای تحلیلی بکار می‌رود.

$$C_{ij} = C_{ij}^0 e^{\lambda z}$$
(۶-۲)

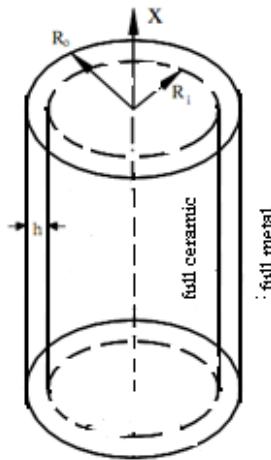
در رابطه‌ی (۱) C_{ij}^0 و λ مقادیری ثابت هستند که پروفیل تغییرات مواد در امتداد شعاع را بیان می‌نمایند. λ ثابت ناهمگنی مادی در امتداد ضخامت نامیده می‌شود. روسو و تیپر^۱ [۱۳]، در سال ۲۰۰۲ این مدل را

¹ Rousseau and Tippur

استفاده کردند. این مدل در استوانه‌های هدفمند کاربرد فراوانی داشته است. توتونکو^۱ [۱۴]، در سال ۲۰۰۶ با استفاده از این مدل، حل تحلیلی را برای استوانه هدفمند جدار ضخیم استفاده کرد.

$$\phi_{(r)} = \Phi_0 (\zeta + R)^\beta \quad (۷-۲)$$

در رابطه‌ی (۷-۴)، ϕ بیانگر خصوصیات استوانه هدفمند و ζ پارامتر در امتداد شعاع (ضخامت) استوانه می‌باشد. که R شعاع صفحه‌ی میانی استوانه است. همچنین Φ_0 و β مقادیری ثابت هستند که پروفیل تغییرات مواد در امتداد شعاع را بیان می‌نمایند. β ثابت ناهمگنی مادی در امتداد ضخامت نامیده می‌شود.



شکل ۲-۷: مدل استوانه هدفمند [۱۵]

بطور مشخص، برای استوانه‌ی هدفمند با ترکیب سرامیک و فلز، روابط مربوط به شرایط سرحدی برای سازگار نمودن مقادیر ثابت Φ_0 و β بصورت زیر نتیجه می‌شوند.

$$\begin{aligned} \Phi_{(r)} \Big|_{\zeta=-h/2} &= \Phi_0 (R_i)^\beta = \Phi_{ceramic} \\ \Phi_{(r)} \Big|_{\zeta=+h/2} &= \Phi_0 (R_o)^\beta = \Phi_{metal} \end{aligned} \quad (۸-۲)$$

علت اصلی استفاده از این مدل در تحلیل استوانه‌های هدفمند سهولت مدلسازی، ساده شدن معادلات نهایی و بررسی سریعتر تغییرات خواص بر رفتار استوانه‌های هدفمند می‌باشد. استفاده از این مدل با وجود سادگی دارای این محدودیت می‌باشد که نمی‌توان پروفیل‌های متنوع ترکیب مواد را با آن بررسی نمود.

¹ Tutuncu

۲-۵: روش‌های اعمال تغییرات خواص مواد

هدف از تحلیل مواد هدفمند یافتن بهینه‌ای از مواد (مناسب‌ترین پروفیل) بمنظور کمینه کردن تنش‌های حرارتی و کنترل نقاط با رفتارهای مخاطره‌آمیز در آنها می‌اشد. در مواد هدفمند خواص در امتداد ضخامت بطور پیوسته تغییر می‌کنند. روش‌های مختلفی جهت اعمال این تغییرات در حین تحلیل‌های مختلف سازه‌های ساخته‌شده از مواد هدفمند وجود دارد تا اثرات این تغییرات بر رفتار سازه تحت بارهای وارده بررسی گردد. این روش‌ها عبارتند از:

۲-۵-۱: استفاده از انتگرال تحلیلی در امتداد ضخامت

استفاده از انتگرال تحلیلی در امتداد ضخامت بدین معناست که در تحلیل سازه‌های هدفمند بتوان معادلات (اجزای محدود و یا تحلیلی) حاکم را طوری دسته‌بندی و جداسازی نمود که در نهایت این امکان فراهم آید تا بتوان ضمن انتگرال‌گیری صریح در امتداد ضخامت پارامتر مربوط به آن را از معادلات حذف نمود.

$$F = \int f(x, y, z) dv$$

$$F = \int \sum_v f_1(x, y) f_2(z) dV = \iint \sum f(x, y) \int f(z) dz dA = \sum \iint f(x, y) dA \quad (۲-۹)$$

در نتیجه در روابط باقیمانده نیازی به انتگرال‌گیری عددی در امتداد ضخامت وجود ندارد. استفاده از انتگرال‌گیری صریح در امتداد ضخامت علاوه بر ساده‌سازی معادلات نهایی موجب می‌شود تا اثرات تغییرات شدید خصوصیات مواد هدفمند بخصوص در نزدیکی سطح آزاد آن، بطور واضح در محاسبات لحاظ شود. استفاده از این روش توزیع تنش در امتداد ضخامت را بطور دقیق مدل‌سازی می‌نماید. بطوریکه برای مقادیر بزرگ و کوچک η در مدل‌سازی که تغییرات شدید تنش در نزدیکی سطح آزاد وجود دارد، با این روش قابل محاسبه می‌باشد.

۲-۵-۲: انتگرال‌گیری عددی (گوسی) در امتداد ضخامت

برای مواردی که نمی‌توان از انتگرال‌گیری صریح در امتداد ضخامت استفاده نمود، استفاده از انتگرال‌گیری عددی مرتبه‌ی بالا برای لحاظ کردن تغییرات خواص مواد هدفمند در محاسبات ضروری می‌باشد. استفاده از

انتگرال گیری عددی مرتبه‌ی بالا ضمن افزایش تعداد محاسبات مورد نیاز، برای موادی که تغییرات شدید خواص در امتداد ضخامت وجود دارد قادر به مدل‌سازی واقعی این تغییرات نمی‌باشد. ضمن اینکه نتایج حل وابسته به مرتبه‌ی انتگرال گیری در امتداد ضخامت خواهد بود.

۲-۵-۳: مدل‌سازی مواد هدفمند بصورت مواد غیرهمگن ارتوتروپیک

دورودلا و آیتا^۱ در سال ۲۰۰۰ برای تحلیل دیسک چرخان ساخته شده از مواد هدفمند آنرا بصورت ماده‌ای غیرهمگن و ارتوتروپیک فرض کردند. در این روش آنها دیسک هدفمند را با لایه‌های مختلف الیاف تقویت شده جایگزین نموده و سپس مسئله‌ی تنش صفحه‌ای با تقارن محوری را حل نمودند.

۲-۵-۴: تقسیم لایه ساخته شده از ماده‌ی FG به لایه‌های همگن شده

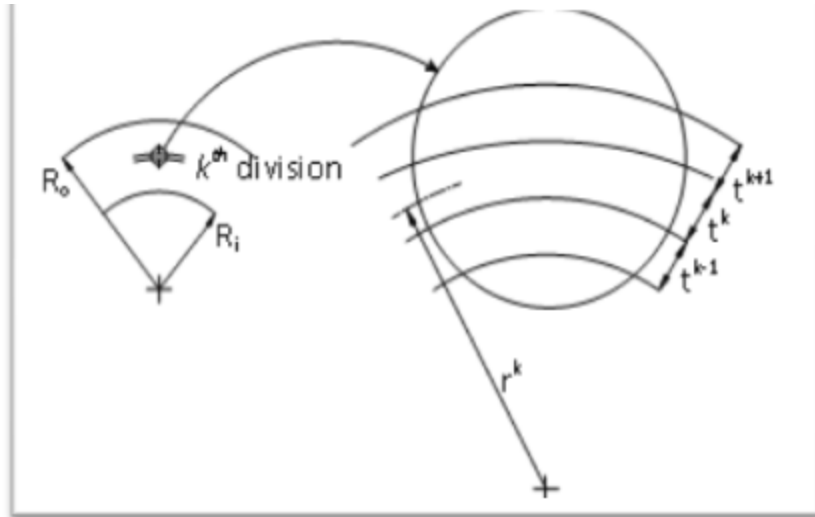
نقدآبادی^۲ و همکاران [۱۶]، یک استوانه جدار ضخیم با طول محدود و شعاع داخل R_i و شعاع خارجی R_o تحت فشار داخلی و بارگذاری حرارتی در نظر گرفتند. در سطح داخلی استوانه ماده‌ی ۱ و در سطح خارجی آن ماده‌ی ۲ را داریم.

گرادیان تغییرات مواد در جهت شعاعی می‌باشد و معادلات الاستیسیته حاکم با استفاده از سری توانی فوریه در جهت محور طولی استوانه، به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل شده‌اند. معادله‌ی ترموالاستیک حاکم یک ODE همراه با ضرایبی است که تابعی از R می‌باشند. حل این دستگاه معادلات با ضرائب نا ثابت بسیار پیچیده و تقریباً غیر ممکن می‌باشد.

برای حل این دستگاه آنها دامنه در راستای شعاعی را به دامنه‌های کوچکتری تقسیم کردند که خصوصیت‌های ترمودینامیکی در هر زیر دامنه ثابت و برابر مقدار میانی هر لایه فرض شده‌اند.

¹ Durodola and Attia

² Naghdabadi



شکل ۲-۸: تقسیم شعاعی دامنه به زیر دامنه‌های کوچکتر

بنابراین معادلات حاکم در هر زیر دامنه یک مجموعه ODE با ضرائب ثابت هستند. با اعمال شرایط پیوستگی در مرز مشترک زیر دامنه‌ها و شرایط مرزی کلی مسئله، یک دستگاه معادله جبر خطی بدست می‌آید که با حل این معادلات پاسخ ترموالاستیک برای استوانه هدفمند جدار ضخیم با طول محدود بدست می‌آید.

۳-۱: آشنایی با مسائل معکوس حرارتی

توسعه کامپیوتر و ابزار محاسباتی، رشد روش‌های عددی را برای مدل‌سازی پدیده‌های فیزیکی تسریع کرده است. برای مدل‌سازی یک پدیده فیزیکی به یک مدل ریاضی و یک روش حل نیاز است. مدل‌سازی مسائل هدایت حرارتی نیز، مانند دیگر پدیده‌های فیزیکی با حل معادلات حاکم امکان پذیر است. برای حل مسائل هدایت حرارتی به اطلاعات زیر نیاز داریم:

- هندسه ناحیه حل
- شرایط اولیه
- شرایط مرزی
- خواص ترموفیزیکی
- محل و قدرت ترم‌های منبع

پس از حل معادلات حاکم توزیع دما در داخل ناحیه حل به دست می‌آید. این نوع مسائل را مسائل مستقیم حرارتی می‌گوییم. روش‌های حل مسائل مستقیم از سال‌ها پیش توسعه یافته‌اند. این روش‌ها شامل حل مسائلی با هندسه پیچیده و مسائل غیرخطی نیز می‌گردند. علاوه بر این پایداری و یکتایی این روش‌ها نیز بررسی شده است. روش‌های اولیه عمدتاً بر مبنای حل‌های تحلیلی بوده‌اند. این روش‌ها بیشتر برای مسائل خطی و با هندسه‌های ساده قابل استفاده هستند. بر عکس روش‌های عددی دارای این محدودیت نبوده و برای کاربردهای مهندسی بیشتر مورد توجه هستند.

دسته‌ی دیگر از این مسائل که در دهه‌های اخیر مورد توجه قرار گرفته‌اند، مسائل معکوس حرارتی هستند. در این نوع مسائل یک یا تعدادی از اطلاعات مورد نیاز برای حل مستقیم، دارای مقدار معلومی نمی‌باشند، و ما قصد داریم از طریق اندازه‌گیری دما در یک یا چند نقطه از ناحیه‌ی مورد نظر، به تخمین مقادیر مجهول بپردازیم.

به طور کلی می‌توان گفت که در مسائل مستقیم حرارتی، علت (شار حرارتی، هندسه و ...) معلوم، و هدف یافتن معلول (میدان دما) می‌باشد. اما در مسائل معکوس حرارتی، معلول (دما در بخش‌ها و یا تمام میدان) معلوم می‌باشد، و هدف یافتن علت (شار حرارتی، هندسه و ...) است.

۳-۲: تاریخچه مسائل معکوس حرارتی

شروع تحقیقات بر روی موضوع انتقال حرارت معکوس را می‌توان دهه ۱۹۵۰ دانست. یکی از اولین مطالعات در زمینه ی مسائل معکوس حرارتی توسط گیدت (۱۹۵۵) در مورد انتقال حرارت در سطح داخلی لوله ی تفنگ انجام شد. در همین سال ها، مقاله ای روسی توسط شوماکوف [۱۷] در مورد مسائل انتقال حرارت معکوس به ثبت رسید. یکی از قدیمی‌ترین مقالات در این زمینه، توسط استولز [۱۸] گزارش شده است. نویسندگان در این مقاله، نرخ انتقال حرارت در فرآیند آب دهی اجسام با هندسه ی ساده و محدود را محاسبه کرده است. میرسپاسی [۱۹،۲۰] این کار را با روشی مشابه برای اجسام نیمه بی نهایت از طریق عددی و گرافیکی انجام داده است. آغاز سفرهای فضایی از اواخر دهه ی ۱۹۵۰ انگیزه ی مهمی برای گسترش کاربردها و تحقیقات در زمینه IHCP^۱ شد. به عنوان مثال محاسبه ی نرخ انتقال حرارت در اثر گرمایش آیرودینامیکی بر روی دماغه ی موشک ها و یا اجسامی که وارد جو زمین می‌شوند از قبیل نازل ها، شیپوره ی موشک ها و ... از جمله مباحث مورد توجه بود [۲۱،۲۲،۲۳]. یک طی مقالاتی [۲۴،۲۵] در دهه ی ۱۹۶۰ مفاهیم و روش‌هایی را برای تخمین شار حرارتی از طریق اندازه گیری دما ارائه داد که در آنها امکان استفاده از گام زمانی کوچکتری نسبت به روش استولز امکان پذیر بود. در مرجع [۲۹] می‌توان تاریخچه ی کاملی از انواع روش‌های معکوس و به کارگیری آنها در مسائل مختلف یافت.

یکی دیگر از روش‌های به کار گرفته شده برای حل مسائل معکوس، روش بهینه سازی است. در مرجع [۲۵] تاریخچه و مجموعه ای از روش‌های بهینه سازی که در حل مسائل معکوس به کار می‌روند، آمده است. یکی از این روش‌ها روش گرادیان مزدوج است که به طور گسترده ای در مسائل بهینه سازی مورد استفاده قرار گرفته است. ایفانوف [۲۷، ۲۸]

¹Inverse Heat Conduction Problem

یکی از نکاتی که در این روش حائز اهمیت است، نحوه‌ی محاسبه‌ی تابعی است که می‌خواهیم بهینه نماییم. روش‌های متعددی برای محاسبه‌ی گرادیان تابع هدف در روش گرادیان مزدوج وجود دارد. پارک و چانگ (۱۹۹۹) دو روش مشتق‌گیری مستقیم و استفاده از معادله‌ی الحاقی برای محاسبه‌ی گرادیان در روش گرادیان مزدوج را با هم مقایسه کرده‌اند. در این مقاله نتیجه گرفته‌اند که اگر چه روش مشتق‌گیری معمولی آسان و دقیق است، اما مدت زمان بیشتری را برای محاسبه طلب می‌کند. در عوض به دست آوردن گرادیان از طریق تشکیل معادله‌ی الحاقی می‌تواند زمان محاسبه را کاهش دهد، هر چند که به دست آوردن روابط مورد نیاز، دارای پیچیدگی‌های ریاضی می‌باشد. جارنی و دیگران [۲۹] مسئله‌ی انتقال حرارت هدایتی معکوس در حالت چند بعدی را با استفاده از روش گرادیان مزدوج و معادله‌ی الحاقی بررسی کرده‌اند. هوانگ [۳۰] مسئله‌ی تخمین شار حرارتی را برای یک جسم سه بعدی، در حالتی که شار به صورت پیوسته روی مرز تغییر می‌کند را بررسی کرد. زینگ جیانگ [۳۱] مقایسه‌ای بین روش‌های موجود IHCP انجام داد و همچنین اثر دینامیکی ترموکوپل را بر محاسبات انتقال حرارت معکوس مورد تحلیل قرار داد. وودبری و کوانپنگ [۳۲] یک مسئله‌ی IHCP مرزی را با تغییر فاز برتی محیط متخلخل یا تاقان‌های مرطوب مورد ارزیابی قرار دادند. شیدفر هم در مقالاتی به بررسی تکنیک‌های ریاضی حل IHCP پرداخت [۳۳، ۳۴]. دکتر کوثری همراه با چندتن از دانشجویان کاربردهایی را در زمینه‌های هدایت حرارتی معکوس در نازل موشک [۴۳]، تخمین مکان و تصویر بهینه‌ی مرز مسیرهای خنک‌کاری در پره‌های توربین گاز [۴۴]، تخمین درجه حرارت ورودی یک کانال [۴۵]، همچنین حل مسئله‌ی معکوس با استفاده از روش تخمین متوالی توابع و تقابل دو گانه‌ی المان‌های مرزی [۴۶] و روش شبه نیوتن یا میزان متغییر (VMM) [۴۷] بررسی کرده است.

۳-۳: دسته بندی مسائل معکوس حرارتی

به دلیل کاربرد گسترده‌ی مسائل معکوس حرارتی در علوم و صنعت، توسعه‌ی دسته بندی این گونه مسائل مهم است. در یک دسته بندی مسائل معکوس حرارتی به دو دسته زیر تقسیم می‌شود:

▪ مسائل تخمین پارامتر

▪ مسائل تخمین تابع

در مسائل تخمین پارامتر، هدف تخمین پارامترها، ثابت ها و یا خواص ترموفیزیکی مانند رسانش گرمایی و یا ظرفیت گرمایی ویژه است. در حالی که در مسائل تخمین تابع، هدف تخمین یک تابع مانند شار حرارتی سطحی و یا رسانش تماسی در سطح مشترک است که با زمان و یا مکان تغییر می کند.

مسائل معکوس حرارتی را همچنین می توان با توجه به طبیعت مسئله به صورت زیر طبقه بندی نمود:

▪ مسائل معکوس هدایت حرارتی

▪ مسائل معکوس جابجایی (آزاد یا اجباری)

▪ مسائل معکوس تشعشع سطحی

▪ مسائل معکوس تشعشع در محیط های مؤثر در تشعشع

▪ مسائل معکوس هدایت و تشعشع همزمان

▪ مسائل معکوس جابجایی و هدایت همزمان

▪ مسائل معکوس تغییر فاز (ذوب یا انجماد)

یک دسته بندی دیگر می توان برای مسائل معکوس هدایتی بر پایه ی نوع مشخصه ی سببی تخمینی در نظر گرفت که توسط کزدوبا معرفی شد :

▪ مسائل تخمین پارامتر

▪ مسائل تخمین شرط مرزی

▪ مسائل تخمین شرایط اولیه

▪ مسائل تخمین هندسه ی ناحیه حل

▪ مسائل دیگر

مسائل تخمین پارامتر، شامل مسائلی می شوند که هدف آنها تخمین یک یا چند پارامتر است. این پارامترها معمولاً خواص فیزیکی یک جسم مانند ضریب هدایت حرارتی، چگالی، ظرفیت گرمایی ویژه، ضریب نفوذ

حرارتی و ... می باشند. این نوع مسائل معمولاً غیرخطی هستند. مسائل تخمین شرط مرزی از پرکاربردترین مسائل مورد استفاده در مسائل معکوس هدایت حرارتی هستند، زیرا در اکثر مسائل، تخمین شار حرارتی سطحی از روی اندازه گیری دما در داخل جسم مرود توجه می باشد. در برخی مسائل از این نوع هم هدف یافتن شرط مرزی دما است.

مسائل تخمین شرایط اولیه کمتر از مسائل مورد بررسی قرار گرفته اند، زیرا نسبت به دیگر مسائل معکوس کاربرد کمتری دارند.

مسائل تخمین هندسه نیز هنگامی که هندسه ناحیه حل کاملاً مشخص نیست و یا به دنبال هندسه بهینه برای یک مسئله خاص باشیم، مطرح می شوند.

۳-۴: حل مسائل معکوس حرارتی

همان طور که اشاره شد، مسائل معکوس از دیدگاه ریاضی جزء دسته مسائل ناهنجار هستند. بنابراین برای حل این گونه مسائل می بایست روش های خاصی به کار گرفته شود.

وجود جواب برای مسائل معکوس حرارتی را می توان با استدلال فیزیکی مسئله بررسی کرد. اما یکتایی جواب تنها برای تعدادی از مسائل به صورت ریاضی اثبات شده است، (بک (۱۹۸۵) و الیفانوف (۱۹۹۴)). همچنین مسائل معکوس نسبت به خطاهای اندازه گیری و اغتشاشات در ورودی ها و داده های مسئله بسیار حساس هستند و به همین دلیل بایستی روش های خاصی را برای یافتن جواب این گونه مسائل به کار برد. برای حل این مشکل تیخونوف و آرسنین [۳۵] روش منظم سازی را ارائه دادند که در آن به منظور کاهش اثر خطاهای ناشی از اندازه گیری دما، جمله هایی به معادله تخمین افزوده می شود.

الیفانوف نیز روش منظم سازی تکراری را ارائه داد که در آن بهبود جواب مسئله در یک روند تکراری و متوالی انجام می پذیرد. در این روش معیار توقف روند تکرار بر اساس پایداری جواب نسبت به خطای موجود در داده های ورودی تعیین می شود.

۳-۵: طبقه بندی روش ها

روش هایی که برای حل مسائل معکوس هدایت به کار می روند به طرق مختلف طبقه بندی می شوند.

یک طبقه بندی مربوط به توانمندی روش برای حل مسائل اعم از مسائل غیرخطی و خطی است. به عنوان مثال روش تخمین تابع و منظم سازی¹ را می توان برای مسائل غیرخطی نیز به کار برد، در حالی که روش هایی مانند تبدیل لاپلاس منحصراً برای مسائل خطی به کار می روند.

روش دیگر طبقه بندی بر اساس روش به دست آوردن جواب معادله ی هدایت حرارتی است، مانند روش دوهامل، تفاضل محدود، اجزای محدود، حجم محدود و روش دوهامل تنها برای مسائل خطی کاربرد دارد در حالی که دیگر روش های ذکر شده در مسائل غیرخطی نیز می توانند استفاده شوند.

دامنه ی زمانی در مسائل انتقال حرارت هدایت معکوس را می توان به عنوان معیاری برای طبقه بندی در نظر گرفت. در این تقسیم بندی روش های IHCP به دو گروه تقسیم می شوند:

۱- روش های متوالی

۲- روش های تمام دامنه

این نوع تقسیم بندی مهم ترین نوع تقسیم بندی روش های IHCP است. هر کدام از روش هایی که قبلاً ذکر شد دارای مزایا و معایب مربوط به خود هستند. در روش های متوالی ، مؤلفه های شار حرارتی به تصویرگام به گام و یکی پس از دیگری تخمین زده می شوند. دو روش از این دسته ، یکی روش تطابق دقیق یا استولز است و دیگری روش تخمین متوالی تابع می باشد. در روش اول دماهای به دست آمده از سنسور برابر با دمای اندازه محاسبه شده قرار می گیرند و محاسبات انجام می شود. این روش از نظر محاسباتی بسیار سریع و آسان است اما مشکل آن، این است که نسبت به خطاهای اندازه گیری بسیار حساس و در نتیجه ناپایدار است. در روش دوم از چند دمای اندازه گیری شده در زمان های آینده نیز برای تخمین شار حرارتی در زمان حال استفاده می شود. این روش که توسط یک ارائه شد بر خلاف روش اول به خطاهای اندازه گیری حساسیت کمتری دارد و می توان گام های زمانی کوچکتری را برای اندازه گیری دما به کار برد. استفاده از گام های زمانی کوچک این امکان را به ما می دهد که اطلاعات بیشتری از تغییرات شار حرارتی در طول زمان به دست آوریم.

¹ regularization

روش تمام دامنه، روشی کارآمد است که از تمام دماهای اندازه گیری شده به طور همزمان استفاده می کند و تمام مؤلفه های شار حرارتی در زمان های مختلف را با یکدیگر و به طور همزمان تخمین می زند. این روش به خاطر امکان استفاده از گام های زمانی کوچک مناسب است، اما حجم محاسبات آن در مقایسه با روش متوالی خیلی بیشتر است. روش های بهینه سازی از دسته روش های تمام دامنه هستند.

طبقه بندی دیگری که برای حل مسائل معکوس هدایت به کار می رود، بر اساس ابعاد مسئله ی معکوس است. اگر هدف مسئله تخمین تنها یک شار حرارتی باشد، مسئله یک بعدی است. در روش دوهامل ابعاد فیزیکی مسئله تأثیری در نحوه ی حل ندارد؛ بدین معنی که اگر هدف، تخمین تنها یک شار حرارتی باشد، روال حل برای اجسام یک، دو و سه بعدی یکسان است. اگر هدف تخمین دو یا چند شار حرارتی با استفاده از روش دوهامل باشد، مسئله چند بعدی است. اگر از روش هایی همچون تفاضل محدود، اجزا محدود و یا ... در مسائل غیر خطی استفاده شود، تعداد مختصات فضایی که برای تحلیل فیزیکی انتقال حرارت هدایت در جسم به کار می رود، بعد مسئله را تعیین می کند.

۳-۶: ارزیابی روش های مسائل معکوس هدایت

به منظور ارزیابی روش های به کار گرفته شده در IHCP باید معیارهایی در نظر گرفت:

۱- کمیت پیش بینی شده در صورتی که داده های اندازه گیری شده دارای دقت بالایی باشند، می بایست دقیق باشند.

۲- روش می بایست نسبت به خطاهای اندازه گیری پایدار باشد (حساسیت نداشته باشد).

۳- روش می بایست دارای پایه های آماری باشد و اجازه دهد تا توزیع های آماری متنوعی برای خطاهای اندازه گیری وجود داشته باشد.

۴- روش نباید نیازمند این باشد که داده های اندازه گیری از قبل هموار شده باشند.

۵- روش می بایست برای گام های زمانی کوچک پایدار باشد، این عمل باعث دقت بهتر در تغییرات زمانی کمیت مجهول می شود.

۶- روش می بایست امکان بهره گیری از چندین سنسور را در اختیار ما قرار دهد.

۷- روش نباید نیازمند مشتقات اول پیوسته ی مجهول باشد، اگر چه روش باید قادر باشد تا توابعی را که دارای ناپیوستگی هستند، بازیابی کند.

۸- دانستن زمان شروع دقیق کاربرد شار حرارتی سطح یا ترم چشمه مجهول نباید مورد نیاز باشد. معمولاً زمان ابتدای اعمال شار حرارتی هم زمان با زمان اندازه گیری دما توسط سنسور نیست. همچنین زمان دقیق تغییرات ناگهانی شار حرارتی نیز برای ما معلوم نیست.

۹- روش نباید به تعداد مشخصی از داده‌های اندازه گیری محدود باشد.

۱۰- روش می بایست قادر باشد تا در موقعیت های فیزیکی پیچیده شامل جامدهای مرکب، مرزهای محرک، خواص وابسته ی زمانی انتقال حرارت جابجایی یا تشعشعی، مدل های ترکیبی از انتقال حرارت، مسائل چند بعدی و هندسه‌های غیر متعارف عمل کند.

۱۱- روش می بایست جهت برنامه نویسی کامپیوتری ساده باشد.

۱۲- هزینه محاسبات می بایست متعادل باشد.

۱۳- روش نباید به گونه ای باشد که کاربر برای بهره گیری از آن در اجسام با هندسه‌های مختلف نیازمند مهارت بالایی باشد.

۱۴- روش باید قادر به گسترش به بیش از یک مجهول باشد.

۳-۷: کاربرد روش‌های معکوس در مهندسی

در سال های اخیر روش‌های معکوس کاربرد زیادی در صنایع یافته‌اند. محققین دانشگاهی و صنعتی، مسائل مختلف مدل سازی، آنالیز و توسعه ی روش‌های عددی نوین را مورد توجه قرار داده‌اند. کاربرد روش‌های معکوس در مسائل حرارتی را به سه دسته ی زیر می توان تقسیم کرد:

۱- کاربرد در مسائل تعیین و شناخت

۲- کاربرد در مسائل طراحی

۳- کاربردهای کنترلی

متداول ترین کاربرد مسائل معکوس مربوط به دسته ی اول می باشد. این نوع مسائل شامل تحلیل و آنالیز داده های تجربی می باشند. در این دسته از مسائل هدف تعیین یک تابع و یا ثابت می باشد که اندازه گیری مستقیم آن مشکل یا غیر عملی است.

دسته ی دوم مسائل که شامل مسائل طراحی می باشند معمولاً شامل اندازه گیری نمی باشند. بلکه رسیدن به یک طراحی و یا بهینه سازی یک طرح از طریق مینیمم کردن یک تابع تعریف کننده ی یک مسئله معکوس (تابع هدف)، می باشد. به عنوان مثال می توان به مسئله ی استفان اشاره کرد.

در بعضی مواقع انجماد با سرعت خاص مورد نظر می باشد. با تعیین شرط مرزی مجهول، می توان سرعت انجماد مورد نظر را تأمین کرد. کاربردهای دیگر این گونه مسائل را می توان در شاخه های مختلف مهندسی نظیر مسائل تصفیه [۳۶]، محاسبه ی اتلاف مواد [۳۷]، یافتن خوردگی در سطح [۳۸]، مشاهده نمود. مسائل کنترلی سومین دسته از مسائل معکوس می باشند. در این نوع مسائل هدف تعیین علت (پارامتر کنترل کننده) یا اندازه گیری یک متغیر می باشد. در بسیاری از مسائل از این نوع، باید یک مسئله معکوس را حل نمود.

یکی از متداولترین کاربردهای مسائل معکوس تعیین شرط مرزی مجهول و یا تخمین یک پارامتر می باشد. به عنوان نمونه می توان به تعیین ضرایب جابجایی اشاره نمود. تعیین این ضرایب نیاز به تعیین دمای سطحی،

دمای سیال و شار حرارتی با توجه به رابطه ی زیر دارد:

$$q = h (T_s - T_a) \quad ۱-۳$$

که T_a و T_s به ترتیب دماهای سطحی و سیال بوده و q شار حرارتی می باشد. تعیین ضرایب حرارتی با استفاده از رابطه بالا نیاز به اندازه گیری دمای سطح دارد. دماهای اندازه گیری شده به وسیله ی دماسنجی که بر روی سطح قرار دارد حاوی خطای بالایی است. این خطا در مواردی که سرعت سیال بالا باشد، افزایش می یابد. راه مناسبتر برای محاسبه، استفاده از یک روش معکوس می باشد.

در مقاله ی استولز یک روش برای تعیین ضریب انتقال حرارت، زمانی که راهی برای قرار دادن دماسنج داخل جسم وجود ندارد، ارائه گردیده است. در این روش جسم مورد نظر را در داخل یک فلز مایع با نقطه انجماد پایین غوطه ور می کنند. در نتیجه یک لایه از فلز روی جسم به وجود می آید. ضریب انتقال حرارت مجهول را می توان با حل یک مسئله ی استفان برای سطح خارجی به دست آورد. این روش برای اجسام بسیار نازک نیز کاربرد دارد.

مثال دیگر این کاربرد، تخمین شار حرارتی بر روی دیواره ی یک کوره است [۳۹]. با فرض انتقال حرارت یک بعدی می توان شار حرارتی را به دست آورد. در مرجع [۴۰] یک کاربرد دیگر این نوع مسائل، جهت تعیین دمای سطحی یک ترک در لوله ی دارای نشت، بررسی شده است. کاربرد دیگر روش، برای کنترل فرآیند گرم کردن یک جسم داخل کوره می باشد [۴۱].

انتقال حرارت در اجسام متخلخل کاربرد دیگر روش های معکوس است. مسائل مورد بررسی در اجسام متخلخل، تعیین شرط مرزی مجهول یا خواص ترموفیزیکی است. کاربردهای مختلف مسائل معکوس در زمینه متالوژی را می توان به صورت زیر خلاصه کرد:

۱- کنترل فرآیند گرم کردن یک جسم داخل کوره

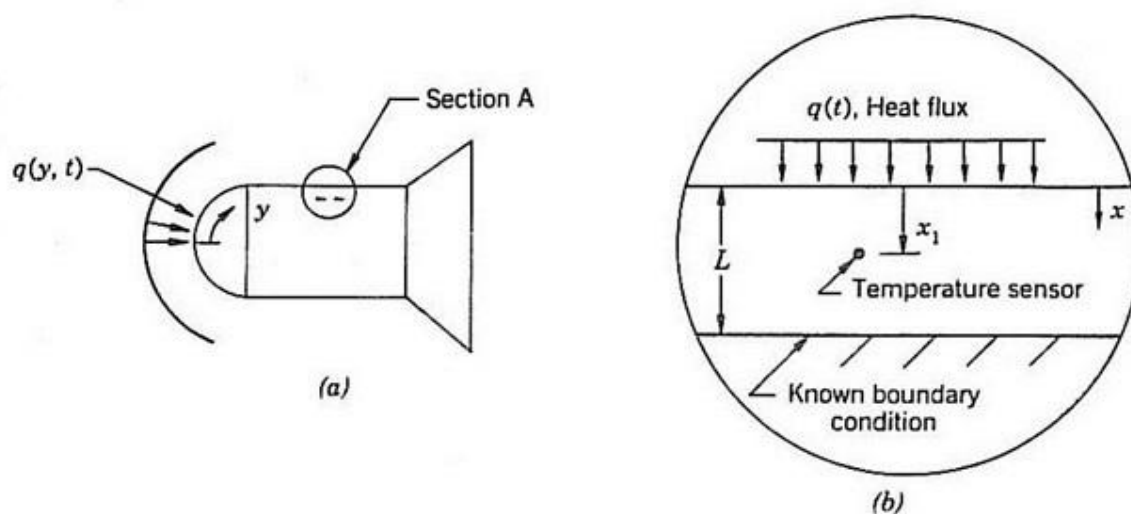
۲- مدل سازی فرآیند سرد سازی فولاد به منظور رسیدن به دمای سطحی مورد نظر

۳- مدل سازی فرآیند کربنیزه کردن فولاد و بررسی نفوذ کربن در فولاد

مثال هایی که در زمینه ی روش معکوس بیان گردید، نشان می دهد که بسیاری از آنها شامل تعیین یک شرط مرزی مجهول می باشد. در واقع تعیین خواص ترموفیزیکی که یکی دیگر از کاربردهای روش معکوس است، در بسیاری از مواقع با روش های دیگر امکان پذیر است. یکی دیگر از کاربردهای روش های معکوس تعیین قابلیت نفوذ یک جسم جامد است. نفوذ در یک جسم جامد بسیار کند صورت می گیرد و معمولاً به حالت پایدار نمی رسد، در این حالت نیز روش های معکوس می توانند به کار گرفته شوند. کاربردهای دیگر از روش های معکوس در مرجع [۴۲] بررسی شده اند.

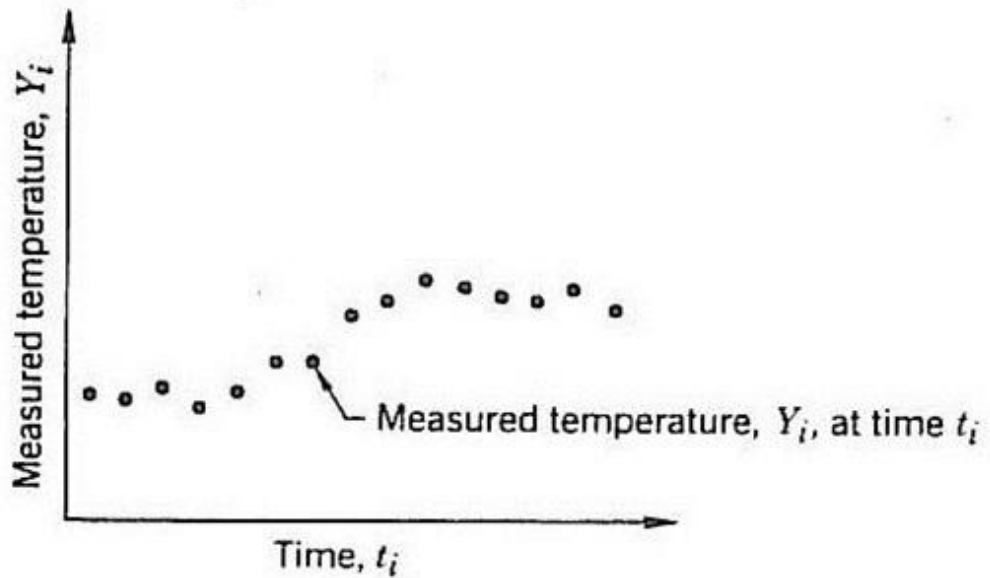
۳-۸: مثال هایی از مسائل معکوس

یکی از مثال های IHCP ، تخمین تاریخچه ی تجربی حرارت دادن به وسیله ی یک شاتل یا موشکی است که از فضا به جو زمین باز می گردد. شار حرارتی در سطح حرارت دیده مورد نیاز است. تصویر زیر، یک جسم بازگردانده شده و یک بخش بزرگ شده از پوسته ی آن را نمایش می دهد.



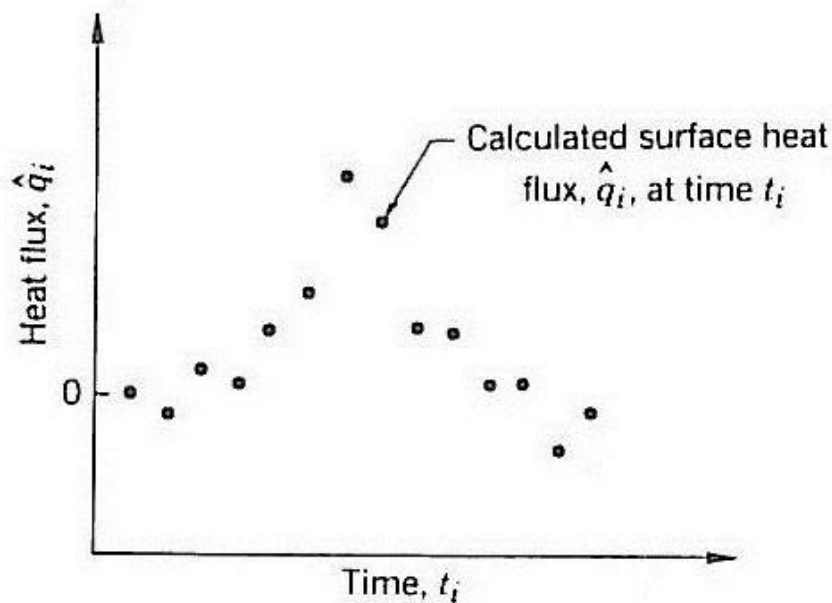
تصویر ۳-۱ : (a) نمایی از یک جسم بازگردانده شده (b) قسمت A

از آنجا که شار حرارتی (مشخص شده با q) به طور کلی ممکن است تابعی از هر دو متغیر، مکان y و زمان t باشد، این گونه در نظر گرفته می شود که هدایت عرضی در مقایسه با جریان حرارتی که عمود بر سطح است ناچیز می باشد، بنابراین سطح اصلی شار حرارتی، تابعی از زمان در نظر گرفته می شود. در تصویر ۳-۲ اندازه گیری های دمایی از سنسورهای داخلی که در موقعیت x_1 قرار دارند به دست آمده اند. اندازه گیری ها در زمان های t_1, t_2, t_3, \dots یا به طور کلی در زمان t_i به دست آمده و دمای اندازه گیری شده به صورت Y_i مشخص شده است.



تصویر ۲-۳ : دمای اندازه گیری شده در زمان های گسسته

یک سطح فرضی شار حرارتی، مشخص شده با \hat{q}_1 در ارتباط با زمان t_i که درجه حرارت متناظر با آن Y_i اندازه گیری شده است. مقدار واقعی شار حرارتی سطح با q_i مشخص می گردد. تاریخچه شار حرارتی سطح می تواند یک تابع زمان تک متغیره دلخواه مانند $q(t)$ باشد، که نماینده ی مقدار تخمینی $q(t)$ در زمان t_i است. در حالت کلی شار حرارتی می تواند به طور ناگهانی افزایش یا کاهش یابد و یا مثبت و منفی باشد که مقادیر منفی تلفات گرما از سطح را نشان می دهد. (تصویر ۳-۳)



تصویر ۲-۲ : نمایش شار حرارتی محاسبه شده مطح

منبع حرارت در روش IHCP بی اهمیت است. منبع همرفت شامل سیال هایی با دمای بالا می باشد که در رآکتور مبدل حرارتی ، در بالای سطوح بازگرداننده ی چرخ ها یا در راستای پره های توربین، جریان دارد. حرارت هم چنین می تواند از هر منبعی تابش شود و یا از طریق رسانش از یک جسم مجاور که در تماس دمایی با مرز مسئله می باشد، انتقال یابد.

برای تخمین تاریخچه شار حرارتی، لازم است یک مدل ریاضی از فرآیند انتقال حرارت داشته باشیم، برای مثال در مورد چرخ بازگرداننده که در تصویر یک نشان داده شده بود، فرض شده است که بخشی از پوسته که از یک ماده همگن و ایزوتروپیک ساخته شده و تقریباً با یک صفحه تخت تقریب زده شده است. یک مدل ریاضی ممکن برای دما (T) در این صفحه عبارتست از :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad ۲-۳$$

$$T(x, 0) = T_0(x) \quad ۳-۳$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{at } x = L \quad ۴-۳a$$

$$T(x_1, t_i) = Y_i \quad ۴-۳b$$

هدف تخمین شار حرارتی سطح در زمان های t_i از رابطه ی زیر است:

$$q(t_i) = -k \frac{\partial T(x, t_i)}{\partial x} \quad \text{at } x = 0 \quad ۵-۳$$

این مسئله کاملاً با مسئله ی مستقیم متفاوت است، شرط مرزی در $x = 0$ مشخص نشده است و به جای آن تاریخچه ی دمای اندازه گیری شده در یک یا موقعیت های بیشتر داخلی داده شده است. بنابراین مشکل در این است که دماهای اندازه گیری شده تنها در زمان های مجزا به دست آمده اند و به شدت دارای خطا می باشند.

مشخصاً اندازه گیری های داخلی شامل اطلاعات بسیار کمتری از مسائل مستقیم کلاسیک هستند که شرایط سطح پیوسته است و روابط دارای خطای کمتری می باشند.

ضریب هدایت حرارتی (k)، چگالی (ρ) و گرمای ویژه (c) توابع مشخصی از دما در نظر گرفته می شوند. اگر یکی از این خواص حرارتی با دما تغییر کند IHCP غیرخطی خواهد شد. همچنین توزیع دمای داخلی $T_0(x)$ مشخص است. در نظر گرفته می شود که سنسور خطای اندازه گیری ناچیزی دارد. ضخامت صفحه L مشخص بوده و بدون خطا در نظر گرفته می شود.

شرط مرزی عایق به وسیله ی معادله ۳-۳ مشخص شده که فقط یکی از شروطی است که می توانست در $x=L$ تعیین شود. همچنین می تواند در این مرز شرط جابجایی یا تابش قرار داده شود. برای یک IHCP با یک شار حرارتی، نا مشخص، تنها کافیسیت که شرط مرزی در $x=L$ مشخص باشد. برای یک ضریب انتقال حرارت وابسته به دما (h) همچنین برای شرط تابش، مسئله معکوس حرارتی غیرخطی می شود.

برای حالت یک تاریخچه ی دمای داخلی، مسئله می تواند به دو مسئله ی مجزا تقسیم شود. یک مسئله مستقیم همانگونه که در تصویر ۴ نشان داده شده است.

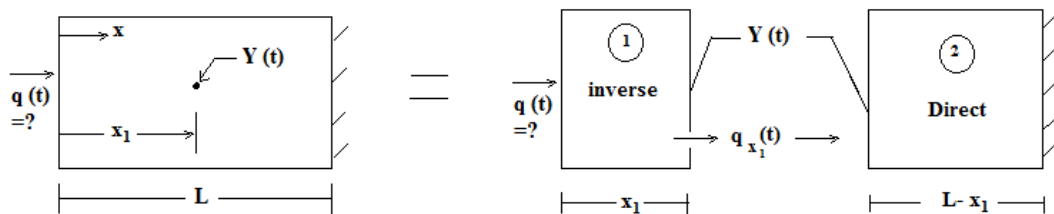
آن بخش جسم از $x = x_1$ تا L (بخش دوم) می تواند به عنوان یک مسئله ی مستقیم تحلیل شود چون در هر دو مرز، شرایط مرزی مشخص است:

$$T(t) = Y(t) \quad \text{at } x = x_1, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{at } x = L$$

از مسئله مستقیم شار حرارتی در $x = x_1$ می‌تواند مشخص گردد، با توزیع دما در $x_1 \leq x \leq L$ و استفاده از

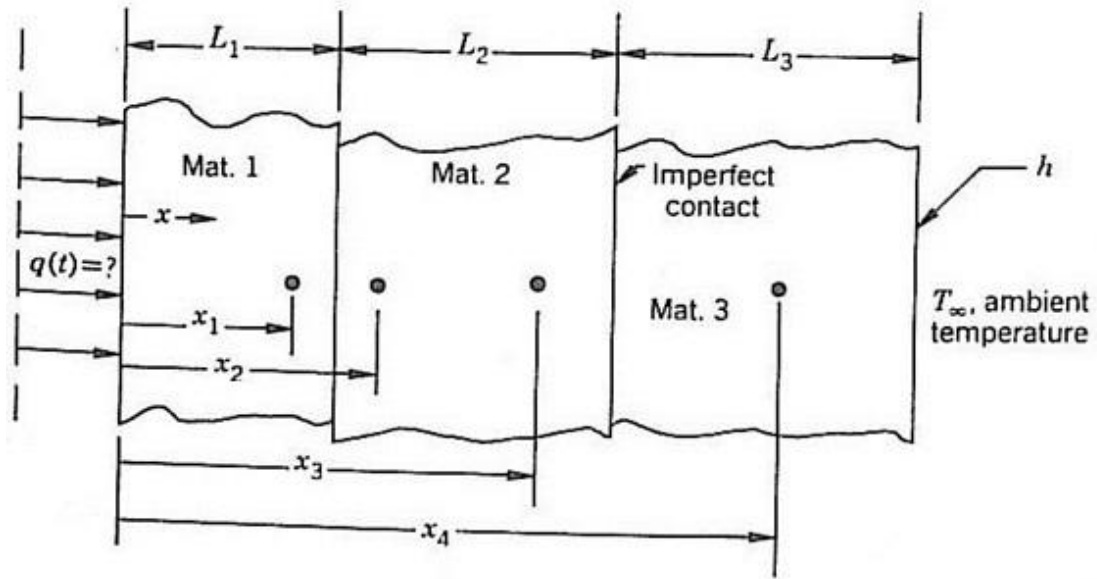
$$q_{x_1}(t) = -k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=x_1} \quad ۶-۳$$

همین مقدار شار حرارتی باید جسم یک را در $0 \leq x \leq x_1$ ترک کرده باشد. در نتیجه در جسم یک، دو شرط در $x = x_1$ مشخص شده است و هیچ شرطی در $x = 0$ مشخص نشده؛ چنین مجموعه‌ای از شرایط مرزی برای معادله‌ی هدایت حرارتی گذرا در ارتباط با مسائل ریاضی بد حالت می‌باشد.



شکل ۴-۳: تقسیم یک سنسور داخلی IHCP به یک مسئله مستقیم و یک مسئله معکوس

IHCP برای یک سطح با شار حرارتی نامشخص می‌تواند از جنبه‌های زیادی پیچیده باشد، برخی از آنها در تصویر ۵-۳ نشان داده شده‌اند. چهار سنسور دمایی وجود دارد که زیربخش‌های ساده آن در تصویر ۴-۳ نشان داده شده است، به این دلیل که شار حرارتی محاسبه شده که باید یک بخش را ترک کند در حالت کلی با شار حرارتی که وارد بخش دیگر می‌شود برابر نیست. مشکل دیگر این است که جسم مرکب از سه ماده متفاوت می‌باشد که ممکن است در تماس کامل یا به صورت ناقص به یکدیگر متصل شده باشند. به علاوه صفحه ممکن است کاملاً تخت نبوده و قسمتی از دیواره‌ی استوانه‌ای تصویر باشد. یک حل رضایت بخش مسئله‌ی معکوس هدایت حرارتی باید توانایی پاسخ به هر یک از این فاکتورهای پیچیدگی را داشته باشد.



تصویر ۳-۵: صفحه کامپوزیت با چندین منسور دمایی

مسائل دیگری از تخمین تابع معکوس

مسائل مختلف دیگری وجود دارند که در رابطه با مسئله هدایت حرارتی معکوس می باشند. IHCP شامل تخمین شار حرارت سطحی تابع زمان با به کارگیری تاریخچه ی اندازه گیری دمای داخلی است. اگر خواص حرارتی مستقل از دما بوده و شرایط مرزی مشخص باشند، یک مسئله ی خطی است، یک مسئله ی مرتبط شامل شرط مرزی همرفت:

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=x_0} = h[T_{\infty}(t) - T(0,t)] \quad ۷-۳$$

اگر ضریب انتقال حرارت h به صورت ثابت یا تابعی از زمان مشخص باشد، تخمین دمای محیط $T_{\infty}(t)$ از دماهای اندازه گیری شده داخلی، یک مسئله ی تخمین تابع معکوس خطی خواهد بود. اگر h تابعی مشخص از T باشد، مسئله معکوس غیرخطی خواهد شد.

مسئله ی تابع تخمین مهم دیگر در رابطه با معادله ۷-۳ محاسبه h به عنوان تابعی از زمان است. این یک مسئله ی غیرخطی است حتی اگر معادله دیفرانسیل خطی باشد. محاسبه ی ضریب انتقال حرارت گذرا یک تکنیک مهم است و به عنوان مثال برای بررسی منحنی جوشش کامل مورد استفاده قرار می گیرد. یک ضریب هدایت تماسی $h_c(t)$ برای مدل سازی تماس ناقص استفاده می شود. برای روابط در تصویر ۳-۵، شار حرارتی مرتبط با h_c عبارتست از :

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{(x=L_1+L_2)^-} = h_c [T \Big|_{(x=L_1+L_2)^-} - T \Big|_{(x=L_1+L_2)^+}] = -k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{(x=L_1+L_2)^+} \quad ۸-۳$$

علامت + بدین معناست که از خصوصیات ماده ی سوم باید استفاده کرد و علامت - نشان دهنده ی استفاده از ماده ی دوم است. مسئله ی تخمین $h_c(t)$ بسیار شبیه ضریب انتقال حرارت جابجایی است. گرماگیر یا گرمازا بودن واکنش شیمیایی که در داخل ماده رخ می دهد می تواند مقدار نامشخصی داشته باشد. همچنین می تواند یک منبع انرژی ناشی از گرمایش الکتریکی یا یک منبع هسته ای یا گرمای اصطکاکی باشد. در این موارد یک شرح مناسب از معادله برای هندسه ی یک صفحه ی یک بعدی عبارتست از :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + g(x, t) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad ۹-۳$$

که $g(x, t)$ ترم حجمی منبع انرژی است. اگر g تنها تابعی از زمان باشد در این صورت تخمین $g(t)$ از مقادیر دماهای داخلی تقریباً شبیه IHCP یک بعدی است. اگر معادله 1.8 خطی بوده و شرایط مرزی هم خطی باشند، تخمین $g(t)$ یک مسئله ی خطی خواهد بود. گرچه اگر $k = k(t)$ مسئله ی تخمین $g(t)$ غیرخطی خواهد شد. اگر g تابعی از x, t باشد، مسئله ی تخمین $g(x, t)$ شبیه مسائل IHCP دو بعدی خواهد بود.

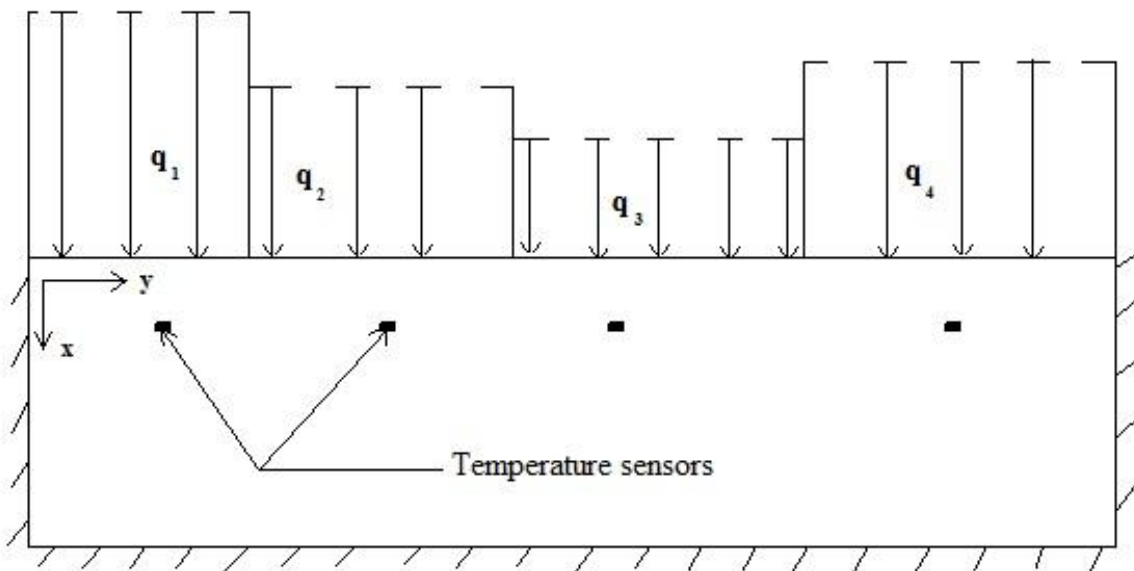
مسائل معکوس تخمین دوبعدی که توجه زیاد ریاضیدانان را به خود جلب کرده است، مسائل کوشی نامیده می شود و برای معادله لاپلاس دوبعدی و مسائل میزان شرط اولیه برای معادله حرارت بازگشتی کاربرد دارند. یکی از نمونه های مسائل کوشی، معادله ی زیر است:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad ۱۰-۳$$

در معادله ی فوق شرایط مرزی به طور کامل مشخص نشده اما مقدار اندازه گیری شده برخی از دماهای داخلی داده شده است.

هدف به دست آوردن تخمینی از $T(x, y)$ برای تمام دامنه ای است که مرزها را نیز شامل می گردد. یک مثال از مسئله ی معادله ی حرارت بازگشتی ، محاسبه ی توزیع دمای اولیه $T_0(x)$ در یک جسم محدود می باشد که شرایط مرزی و برخی اندازه های دمای داخلی آن داده شده است. اگر توابع بیشتری به طور همزمان محاسبه گردند، مسائل معکوس بسیار پیچیده تر می شوند. برای مثال در مدل سازی تخمین تصویر ۳-۵ ، شار حرارتی $q(t)$ در مرز چپ جسم و $T_{\infty}(t)$ در سمت راست، ممکن است شامل تخمین مدل سازی توابع دو زمانه گردد.

اگر شار حرارتی سطح تابعی از مکان در راستای سطح باشد، همانگونه که در تصویر ۳-۶ نشان داده شده است، تعدادی از مؤلفه های شار حرارتی، به طور تخمینی مدل سازی خواهند شد ، که این یک مسئله ی IHCP دو بعدی می باشد.



تصویر ۳-۶ : شار حرارتی سطح به عنوان تابعی از مکان برای یک صفحه تخت

۳-۹: چرا IHCP مشکل است

مسئله ی هدایت حرارتی معکوس دشوار است زیرا به شدت نسبت به خطای اندازه گیری حساس است. این مشکلات به ویژه در تلاش برای به دست آوردن بیشترین اطلاعات ممکن از داده ها وجود دارند. برای مسائل IHCP یک بعدی وقتی مقادیر اجزای منحنی q تخمین زده می شوند، به حداکثر رساندن مقدار اطلاعات بر گام های زمانی کوچک بین مقادیر q_i دلالت می کند. (تصویر ۳-۳)

اگرچه غالباً استفاده از گام های زمانی کوچک سبب ناپایداری در حل IHCP خواهد شد، مگر اینکه محدودیت هایی اعمال گردد.

توجه به شرط گام زمانی کوچک در مسائل IHCP در مقایسه با حل عددی معادله هدایت حرارتی اثر معکوسی دارد. در حالت دوم، مسئله ی پایداری اغلب با کاهش اندازه ی گام زمانی می تواند اصلاح شود.

۴-۱ حل معادله انتقال حرارت به روش تفاضل محدود

در این پروژه برآنیم که شرایط مطلوب دمایی در کوره را به گونه ای محاسبه نماییم که در صورت اعمال آن بر جسم، با فیزیک استوانه ای توزیع دمائی خاصی نسبت به زمان در مرکز جسم استوانه ای داشته باشیم، برای این منظور مسئله را باید به صورت معکوس حل نموده تا شرایط مناسب را بتوان محاسبه نمود. بنابراین مسئله معکوس ما دارای شرایط مرزی و اولیه زیر می باشد:

$$\text{معادله حاکم مسئله : } \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right]$$

$$\text{شرایط مرزی : } \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0$$

$$T(x, r=0, t) = \tau(x, t)$$

$$\text{شرایط اولیه : } T(x, r, t=0) = T_0(x, r)$$

در روش تفاضل محدود، شیوه اصلی حل مسائل جایگذاری معادلات دیفرانسیلی با جملات تفاضلی و استفاده از آنها بجای جملات اصلی در حل مسئله می باشد، به همین خاطر نیازمندیم روابطی با دقت مناسب برای جایگذاری بجای عبارات $\frac{\partial T}{\partial t}$ ، $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ ، $\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}$ ، $\frac{\partial T}{\partial r}$ در حل ارائه دهیم. در روشهای کلاسیک تفاضل محدود، روابط ارائه شده جهت این جایگذاری ها معمولاً ساده بوده و به شکلهای زیر می باشند.

1- FTCS :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \frac{T_{j+1}^n - 2T_j^n + T_{j-1}^n}{\Delta r^2} = L_{rr}(T_j^n)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2} = L_{xx}(T_i^n)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{T_{j+1}^n + T_{j-1}^n}{2\Delta r}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t}$$

2- Dufort-Frank :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \frac{T_{j-1}^n - (T_j^{n-1} + T_j^{n+1}) + T_{j+1}^n}{\Delta r^2}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i-1}^n - (T_i^{n-1} + T_i^{n+1}) + T_{i+1}^n}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t}$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{T_{j+1}^n - T_{j-1}^n}{2\Delta r}$$

3- Crank-Nikolson :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = L_{rr} \left(\frac{T_j^n - T_j^{n+1}}{2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = L_{xx} \left(\frac{T_i^n - T_i^{n+1}}{2} \right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{T_{j+1}^n - T_{j-1}^n}{\Delta r}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t}$$

4- Three-Level, Fully Implicit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = L_{rr} (T_j^{n+1})$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = L_{xx} (T_i^{n+1})$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{2}{3} \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} - \frac{1}{2} \frac{T_{i,j}^n - T_{i,j}^{n-1}}{\Delta t}$$

که مرتبه خطای معادلات فوق حداکثر از مرتبه چهارم در داخل ناحیه مورد بررسی بوده و در ابتدا و انتهای مرز در حال بررسی این میزان کمتر نیز می‌گردد، با توجه به تعداد تقسیمات انجام شده و تعداد گره بندی های انجام شده برای این مسئله میزان دقت حاصله از این روشها قابل استفاده برای مسئله ما نبوده و باید با روشی مناسب تر به حل مسئله پرداخت.

لذا در حل این مسئله با استفاده از روش ارائه شده توسط لی لی که شرح آن ذیلاً ارائه می‌گردد خواهیم پرداخت.

۲-۴ تقریب مشتق اول مکانی

در روش های عادی تفاضل محدود، برای به دست آوردن مشتق اول تابعی مانند f در نقاط مختلف

دامنه آن $\frac{df}{dx}|_{(x=x_i)}$ از مقادیر نقاط حول هر گره استفاده می گردد و در محاسبه این مقدار با دقت های

مرتبه دوم و چهارم از نقاط (f_{j-1}, f_j, f_{j+1}) و همچنین $(f_{j-2}, f_{j-1}, f_j, f_{j+1}, f_{j+2})$ بهره گرفته می شود.

در روش به کار برده شده در اینجا مقدار f'_j دیگر تنها با توجه به مقدار تابع در نقاط حول آن محاسبه نمی

گردد بلکه از رابطه ای که در آن تمام مقادیر گره ها دخالت دارند بهره برده و مقدار آن محاسبه می شود. این

رابطه با استفاده از رابطه ای که به فرم زیر بیان می شود به دست می آید:

$$\beta f'_{i-2} + \alpha f'_{i-1} + f'_i + \alpha f'_{i+2} = c \frac{f_{i+3} - f_{i-3}}{6h} + b \frac{f_{i+2} - f_{i-2}}{4h} + a \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \quad ۱-۴$$

نسبت بین ضرایب β, α, c, b, a به وسیله مقایسه این رابطه با سری تیلور با دقت های مورد نیاز و دلخواه

بدست آورده و محاسبه می گردد و اولین جمله ای که با سری تیلور بسط داده شده مطابقت نداشته باشد، به

عنوان مرتبه خطای معادله مطرح می گردد.

با توجه به مرتبه خطا، رابطه بین پارامترها به شرح ذیل می باشند:

$$a + b + c = 1 + 2\alpha + 2\beta \quad \text{خطا از مرتبه دوم}$$

$$a + 2^2 b + 3^2 c = 2 \frac{3!}{2!} (\alpha + 2^2 \beta) \quad \text{خطا از مرتبه چهارم}$$

$$a + 24b + 34c = 2 \frac{5!}{4!} (\alpha + 2^4 \beta) \quad \text{خطا از مرتبه ششم}$$

$$a + 2^6 b + 3^8 c = 2 \frac{9!}{8!} (\alpha + 2^8 \beta) \quad \text{خطا از مرتبه هشتم}$$

$$a + 2^8 b + 3^8 c = 2 \frac{9!}{8!} (\alpha + 2^8 \beta) \quad \text{خطا از مرتبه دهم}$$

در صورتی که رابطه (۴-۱) را در کل دامنه برای هر یک از گره ها بازنویسی کنیم، معادلات بدست آمده را می توان به صورت یک سیستم خطی معادلات بازنویسی و حل نمود که این سیستم معادلات خطی به صورت یک ماتریس پنج قطری ظاهر می گردد (در صورتی که β صفر نباشد).

در نقاط نزدیک به ابتدا و انتهای مرز، دیگر قادر به استفاده از رابطه (۴-۱) نمی باشیم و لذا روابط ساده تری در این قسمت ها مورد استفاده قرار می گیرند. در صورتی که $\beta = 0$ فرض شود، ماتریس به فرم یک ماتریس سه قطری تبدیل می گردد که میزان خطای آن در ابتدا و انتها از مرتبه چهارم می باشد در صورتی که برای ادامه کار، $c = 0$ در نظر گرفته شود، روابطی بر حسب پارامتر α به دست می آیند که با دقت از مرتبه چهارم در مرزها به بیان روابط تفاضلی می پردازند، برای این حالت داریم:

$$\beta = 0, a = \frac{2}{3}(\alpha + 2), b = \frac{1}{3}(4\alpha - 1), c = 0 \quad 2-4$$

در صورتی که $\alpha \rightarrow 0$ روابط بدست آمده تبدیل به معادلات تفاضل محدود مرکزی^۵ می گردند، همچنین به ازای $\alpha = \frac{1}{6}$ معادلات کلاسیک پده^۶ به دست می آیند، به ازای $\alpha = \frac{1}{3}$ ضرایب موجود در خطاهای مرتبه چهارم حذف شده و دقت و میزان خطا در مرتبه ششم می گردند و ضرایب مربوطه به فرم زیر تبدیل می شوند:

$$\beta = 0, \alpha = \frac{1}{3}, a = \frac{14}{19}, b = \frac{1}{9}, c = 0 \quad 4-3$$

روش های حل مسائل به ازای $\alpha = \frac{1}{3}$ و $\alpha = \frac{1}{6}$ توسط کولاتز^۷ ارائه شده اند.

به ازای $\beta = 0$ و مقادیر $c \neq 0$ دسته ای از پاسخ ها بدست می آیند که در آن ها مرتبه خطای به دست آمده از درجه شش می باشد و برای ثوابت داریم:

⁵ Central Difference

⁶ Pade

⁷ Collatz

$$\beta = 0, a = \frac{1}{6}(\alpha + 9), b = \frac{1}{15}(32\alpha - 9), c = \frac{1}{10}(-3\alpha + 1) \quad 4-4$$

در این حالت در صورت انتخاب $\alpha = \frac{1}{8}$ مرتبه خطای حاصله از رتبه هشتم بوده و دقت بالاتری در مسئله قابل دستیابی می‌باشد.

ماتریس‌های پنج قطری در حل مسئله، با فرض $\beta \neq 0$ به دست می‌آیند که a و b در آن‌ها به سه پارامتر وابسته می‌باشد.

$$a = \frac{1}{3}(4 + 2\alpha - 16\beta + 5c)$$

$$b = \frac{1}{3}(-1 + 4\alpha + 22\beta - 8c) \quad 5-4$$

برای بدست آوردن رابطه‌ای با میزان خطایی از مرتبه ششم، روابطی با دو متغیر می‌توان داشت که به شکل زیر قابل نمایش می‌باشند:

$$a = \frac{1}{6}(9 + \alpha - 20\beta)$$

$$b = \frac{1}{15}(-9 + 32\alpha + 62\beta)$$

$$c = \frac{1}{10}(1 - \alpha + 12\beta) \quad 6-4$$

که پاسخ‌های بدست آمده برای ماتریس سه قطری با دقت خطای از مرتبه شش در مراحل قبل، زیرمجموعه‌ای از رابطه بالا می‌باشد. همچنین در صورت قرار دادن $\beta \neq 0, c = 0$ در رابطه بالا، رابطه‌ای با مرتبه خطای شش به فرم زیر به دست می‌آید:

$$\beta = \frac{1}{12}(-1 + 3\alpha), a = \frac{2}{9}(8 - \alpha), b = \frac{1}{18}(-17 + 57\alpha), c = 0 \quad 7-4$$

این دسته از پاسخ‌ها با داشتن حد $\beta \rightarrow 0$ و $\alpha = \frac{1}{3}$ مرتبه خطایی برابر شش دارند.

در رابطه (۳-۴) با فرض $\alpha = \frac{4}{9}$ به مرتبه خطایی برابر هشت دست پیدا می‌کنیم که مقدار ضریب برابرند با:

$$\alpha = \frac{4}{9}, \beta = \frac{1}{36}, a = \frac{40}{29}, b = \frac{25}{54}, c = 0 \quad 8-4$$

در صورت انتخاب $\beta = \frac{1}{20}(-3+8\alpha)$ در رابطه (۴-۶) یک دسته پارامتر با دقت خطا از مرتبه هشتم تولید

می گردد که به فرم زیر می باشند:

$$\beta = \frac{1}{20}(-3+8\alpha), a = \frac{1}{6}(12-7\alpha), b = \frac{1}{150}(56\alpha-183), c = \frac{1}{50}(9\alpha-4) \quad ۹-۴$$

در صورت قرار دادن $\alpha = \frac{1}{2}$ در رابطه (۴-۹) دقت خطای مرتبه ده به دست می آید که بالاترین میزان دقت

بدست آورده در این روش می باشد و پارامترهای مربوطه برابر مقادیر ذیل می گردند:

$$\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{20}, a = \frac{17}{12}, b = \frac{101}{150}, c = \frac{1}{100} \quad ۱۰-۴$$

میزان دقت روابط فوق در جدول (۴-۱) ارائه شده است.

جدول (۴-۱) مرتبه خطاها در محاسبه مشتقات مرتبه اول در روش تفاضل محدود فشرده

Scheme	Truncation error
2-2	$\frac{4}{5!}(3\alpha-1)h^4 f^{(5)}$
3-2	$\frac{4}{7!}h^6 f^{(7)}$
4-2	$\frac{12}{7!}(-8\alpha+3)h^6 f^{(7)}$
$\alpha = \frac{3}{8}, 4-2$	$\frac{-36}{9!}h^8 f^{(9)}$
5-2	$\frac{4}{5}(-1+3\alpha-12\beta+10c)h^4 f^{(5)}$
6-2	$\frac{12}{7!}(3-8\alpha+20\beta)h^6 f^{(7)}$
7-2	$\frac{4}{7!}(-9\alpha-4)h^6 f^{(7)}$
8-2	$\frac{-16}{9!}h^8 f^{(9)}$
9-2	$\frac{144}{9!}(2\alpha-1)h^8 f^{(9)}$
10-2	$\frac{144}{11!}h^{10} f^{(11)}$

۳-۴ تقریب مشتق دوم مکانی

نحوه بدست آوردن روابط مربوط به تقریب مشتق مکانی دوم توسط لی لی^۱ همانند روش به کاررفته برای مشتق اول مکانی می‌باشد، بدین منظور بار دیگر رابطه را این بار برای مشتق مکانی رتبه دوم بازنویسی می‌کنیم.

$$\beta f_{i-2}'' + \alpha f_{i-1}'' + f_i'' + \alpha f_{i+1}'' + \beta f_{i+2}'' = c \frac{f_{i+3} - 2f_i + f_{i-3}}{9h^2} + b \frac{f_{i+2} - 2f_i + f_{i-2}}{4h^2} + a \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} \quad ۱۱-۴$$

که در رابطه فوق f_j'' نشاندهنده تقریب مشتق مکانی مرتبه دوم در گره i می‌باشد، رابطه بین ضرایب c, b, a و همچنین β, α با مقایسه این روابط با سری تیلور با مرتبه های مختلف به دست می‌آید. که این روابط مطابق معادلات زیر بدست آمده‌اند:

$$a + b + c = 1 + 2\alpha + 2\beta \quad \text{خطا از مرتبه دوم}$$

$$a + 2^2 b + 3^2 c = \frac{4!}{2!} (\alpha + 2^2 \beta) \quad \text{خطا از مرتبه چهارم}$$

$$a + 24b + 34c = \frac{6!}{4!} (\alpha + 2^4 \beta) \quad \text{خطا از مرتبه ششم}$$

$$a + 2^6 b + 3^6 c = \frac{8!}{6!} (\alpha + 2^6 \beta) \quad \text{خطا از مرتبه هشتم}$$

$$a + 2^8 b + 3^8 c = \frac{10!}{8!} (\alpha + 2^8 \beta) \quad \text{خطا از مرتبه دهم}$$

هر چند شکل روابط بدست آمده در این حالت نیز بسیار شبیه روابط بدست آمده برای مشتق اول می‌باشد اما ضرایب سمت راست معادله با یکدیگر متفاوتند.

همانند حالت قبل، در ابتدا و انتهای مرز دامنه، باید از روابط ساده تری جهت شبیه سازی جملات دیفرانسیلی استفاده نمود.

با فرض $c = 0, \beta = 0$ دسته‌ای از ضرایب که به یک پارامتر وابسته‌اند به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\beta = 0, c = 0, a = \frac{4}{3}(1 - \alpha), b = \frac{1}{3}(-1 + 10\alpha) \quad ۱۲-۴$$

^۱Lele

همانگونه که در بالا دیده می شده، با فرض $\alpha \rightarrow 0$ معادلات به فرم معادلات کلاسیک تفاضل مرکزی^۱ با

مرتبه خطای چهارم در می آیند. به ازای $\alpha = \frac{1}{10}$ روابط کلاسیک پده^۲ به دست می آیند.

همچنین به ازای $\alpha = \frac{1}{11}$ معادلات سه قطری با دقت خطا از مرتبه شش به دست می آید.

$$\alpha = \frac{2}{11}, \beta = 0, a = \frac{12}{11}, b = \frac{3}{11}, c = 0 \quad ۱۳-۴$$

یک گروه متشکل از جواب های با دو پارامتر را می توان با فرض $c \neq 0, \beta \neq 0$ به دست آورد که به شکل زیر نمایش داده می شوند.

$$a = \frac{1}{3}(4 - 4\alpha - 40\beta + 5c) \quad ۱۴-۴$$

$$b = \frac{1}{3}(-1 + 10\alpha + 46\beta - 8c)$$

این رابطه می تواند به فرم رابطه ای بر حسب دو گروه تابع و از مرتبه ششم برای خطا و یا گروه متشکل از یک متغیر با میزان دقت از مرتبه هشتم در آید که گروه با دو پارامتر به فرم ذیل نمایش داده می شود:

$$a = \frac{6 - 9\alpha - 12\beta}{4}$$

$$b = \frac{-3 + 24\alpha - 6\beta}{5} \quad ۱۵-۴$$

$$c = \frac{2 - 11\alpha + 124\beta}{20}$$

^۱Central Difference

^۲Pade

و در حالتی که مرتبه خطا را از درجه هشتم مد نظر داشته باشیم، می توان نوشت:

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{38\alpha - 9}{214} \\ a &= \frac{696 - 1191\alpha}{428} \\ b &= \frac{2454\alpha - 294}{535} \\ c &= \frac{1179\alpha - 344}{2140}\end{aligned}$$

۱۶-۴

که جواب خاصی با دقت خطای مرتبه هشتم با فرض $c = 0$, $\alpha = \frac{344}{1179}$ توسط کولاتز^۱ نیز ارائه شده است.

برای حالت با مرتبه خطا از درجه دهم خواهیم داشت.

$$\alpha = \frac{344}{899}, \beta = \frac{43}{1798}, a = \frac{1065}{1798}, b = \frac{1038}{899}, c = \frac{79}{1798}$$

۱۷-۴

با توجه به آنچه در محاسبه مقادیر مشتق مکانی اول و دوم آمد، اکنون سعی می نماییم برای استفاده از روش تفاضل محدود فشرده، روابط مورد نیاز جهت کد نویسی و استفاده جهت حل مسئله معکوس حرارتی را به دست آورده و آنگاه با استفاده از آن ها و ترکیب روابط بین مشتقات مرتبه اول و دوم سمت راست معادله را بازسازی و تحلیل نماییم و آنگاه با استفاده از رابطه ارائه شده مشتق اول زمانی، به تحلیل مسئله در دامنه های زمانی و مکانی آن بپردازیم.

۴-۴ محاسبه رابطه مشتق اول مکانی برای مسئله موجود

همانگونه که در شرح روش عمومی حل معادلات دیفرانسیلی آمد، در این حل ها از روش ارائه شده لی لی بهره گرفته شده است، در این روش براساس روابط ارائه شده در بخش قبل با در نظر گرفتن $\beta = 0$ روابط به فرم زیر نوشته می شوند.

$$\alpha f'_{i-1} + f'_i + \alpha f'_{i+1} = \frac{\alpha + 2}{3\Delta x} (f_{i+1} - f_{i-1}) + \frac{4\alpha - 1}{12\Delta x} (f_{i+2} - f_{i2})$$

۱۸-۴

که در آن $((\prime))$ نشان دهنده مشتق و i نشاندهنده شماره گره مورد نظر می باشد.

^۱Collatz

با قرار دادن $\alpha = \frac{1}{3}$ و یا $\alpha = \frac{1}{4}$ همانگونه که در قسمت قبل آورده شده، مشتقات پاسخی با دقت خطای از مرتبه چهارم و یا ششم پیدا می‌کنند.

همانگونه که مشاهده می‌شود در رابطه نوشته شده برای مشتق در هر نقطه با اندیس i ، معادله به دست آمده شامل روابطی با مقادیر تابع در گره های مجاور می‌باشد. برای دو گره ابتدایی و انتهایی این رابطه برقرار نبوده و باید برای این چهار گره، روابط دیگری به کار برد و از رابطه های توضیح داده شده در این قسمت برای گره های داخلی استفاده نمود.

در ابتدا و انتهای مرز جسم از رابطه یک طرفه (غیر مرکزی) جهت معرفی مشتق اول استفاده می‌گردد:

$$i = 0 \quad f'_0 + 2f'_1 = \frac{1}{2\Delta x}(-5f_0 + 4f_1 + f_2) \quad ۱۹-۴$$

$$i = I \quad f'_I + 2f'_{I-1} = \frac{1}{2\Delta x}(5f_I - 4f_{I-1} - f_{I-2})$$

که دقت این روابط، از مرتبه سوم می‌باشد.

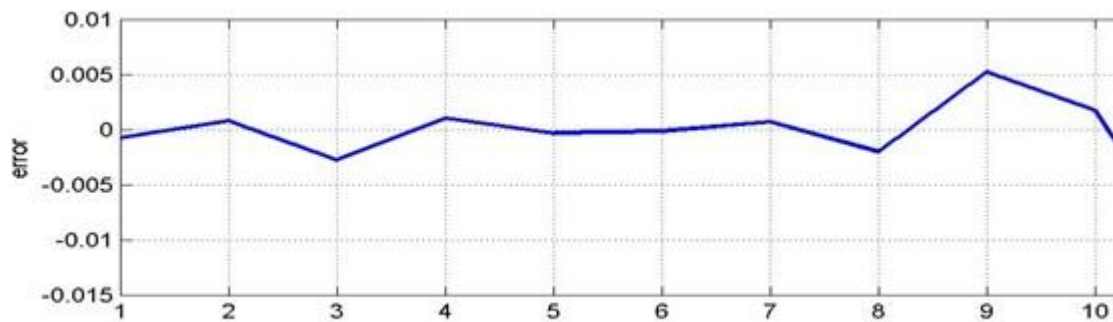
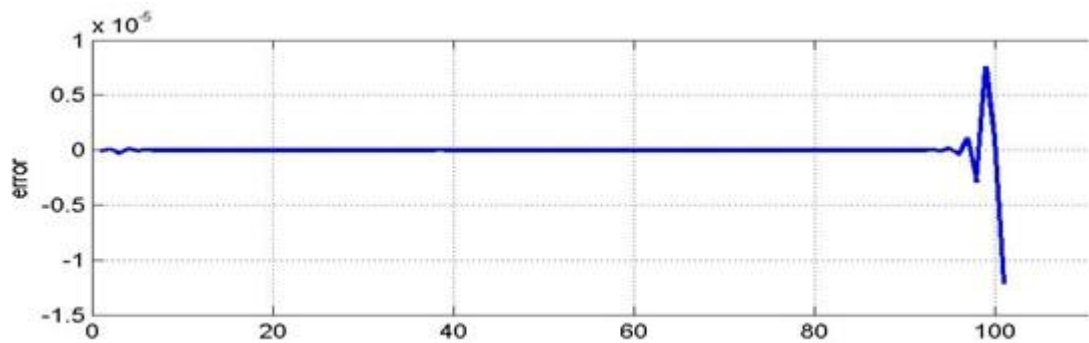
در نقاط مجاور مرزهای جسم، ($i = 1, i = I - 1$) از فرم کلی رابطه ارائه شده، بهره گرفته می‌شده و

جهت حذف جملات خارج از محدوده، $\alpha = \frac{1}{6}$ مورد استفاده قرار می‌گیرد برای نقاط ($i = 2, i = I - 2$) جهت پایدارتر شدن و نیز همگرایی جواب ها، پیشنهاد شده به جای استفاده مستقیم از α ، در معادله از پارامتر α' به صورت زیر استفاده گردد:

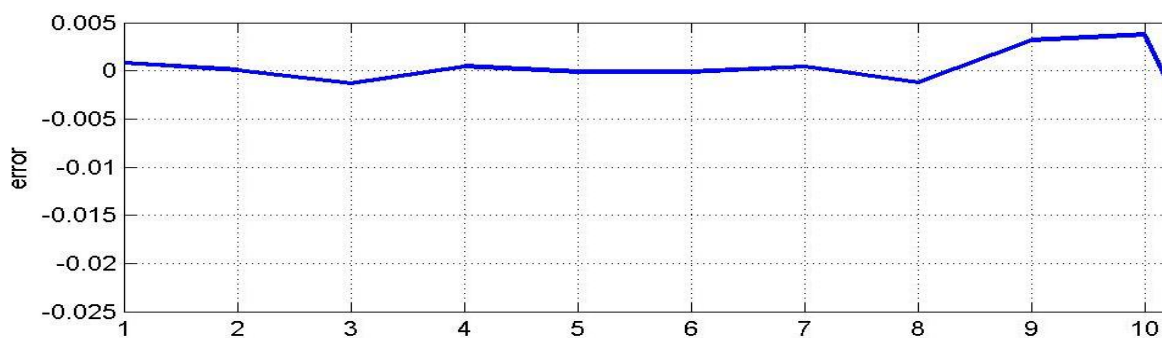
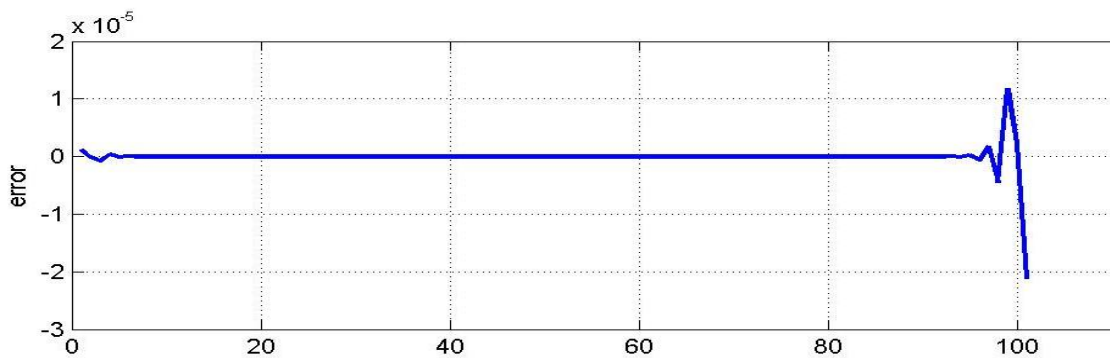
$$\alpha' = (16\alpha + 32)/(40\alpha - 1) \quad ۲۰-۴$$

در کد برنامه ارائه شده جهت حل مسئله موجود از این مقدار برای گره های ($i = 2, i = I - 2$) مورد استفاده قرار گرفته است.

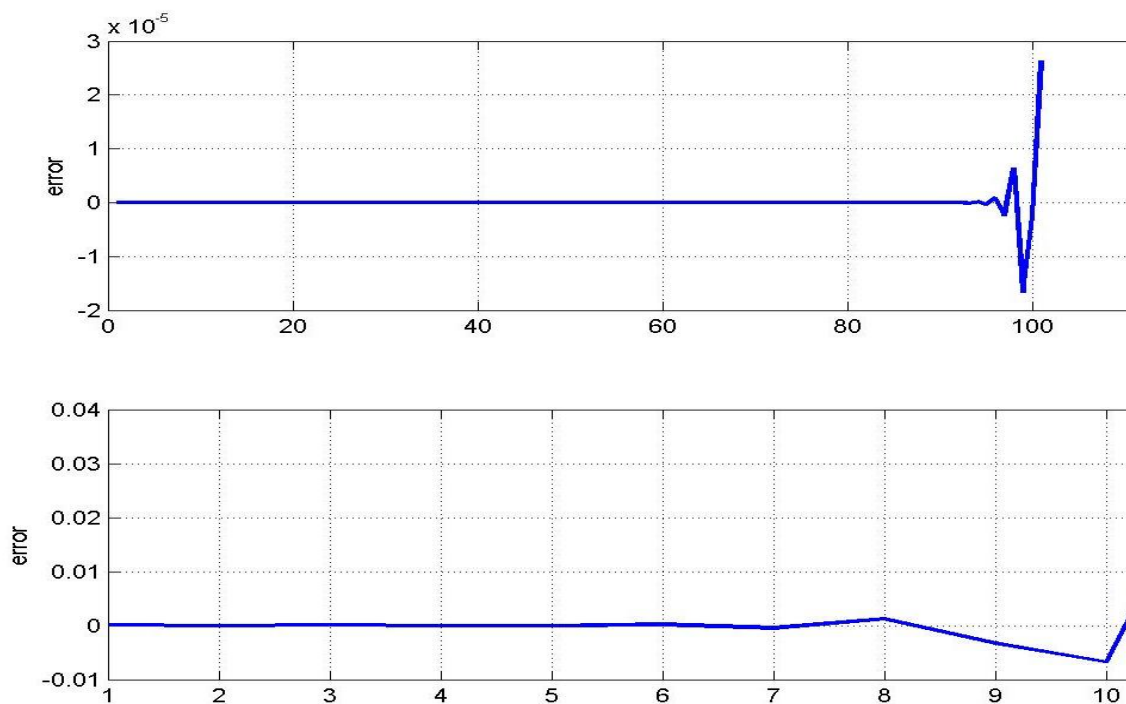
میزان دقت کد نوشته شده با استفاده از این روش برای مشتق اول برای چند تابع مختلف در شکل (۴-۱) و (۴-۲) و (۴-۳) نمایش داده شده است.



شکل ۴-۱ تخمین مشتق مکانی مرتبه اول به کمک روش تفاضلات محدود فشرده برای تابع $f(r) = r^5$ ، تغییرات I از صفر تا یک می باشد که در شکل بالا به صد قسمت و در شکل پایین به ده قسمت تقسیم شده است.



شکل ۴-۲ تخمین مشتق مکانی مرتبه اول به کمک روش تفاضلات محدود فشرده برای تابع $f(r) = e^{r^2}$ ، تغییرات Γ از صفر تا یک می باشد که در شکل بالا به صد قسمت و در شکل پایین به ده قسمت تقسیم شده است.



شکل ۳-۴ تخمین مشتق مکانی مرتبه اول به کمک روش تفاضلات محدود فشرده برای تابع

$f(r) = \sin(r^3)$ ، تغییرات r از صفر تا یک می‌باشد که در شکل بالا به صد قسمت و در شکل پایین به

ده قسمت تقسیم شده است.

۴-۵ محاسبه روابط مشتق دوم مکانی برای مسئله موجود

برای بدست آوردن رابطه مربوط به مشتق دوم مکانی نیز، با استفاده از روابط ذکر شده در قسمت قبل با فرض $\beta = 0$ داریم:

$$\alpha f_{i-1}'' + f_i'' + \alpha f_{i+1}'' = \frac{4(1-\alpha)}{3\Delta x^2} (f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}) + \frac{10\alpha-1}{12\Delta x^2} (f_{i-2} - 2f_i + f_{i+2}) \quad ۲۱-۴$$

برای این حالت، در مرزهای ابتدایی و انتهایی مسئله می‌توان نوشت:

$$i=0 \quad f_0'' + 11f_1'' = \frac{1}{\Delta x^2} (13f_0 - 27f_1 + 15f_2 - f_3) \quad ۲۲-۴$$

$$i=I \quad f_I'' + 11f_{I-1}'' = \frac{1}{\Delta x^2} (13f_I - 27f_{I-1} + 15f_{I-2} - f_{I-3})$$

با مشتق گیری از دو طرف رابطه مرزی برای مشتقات مرتبه اول که در قسمت (3-4) حاصل شد، به دست می‌آید:

$$f_0'' + 2f_1'' = \frac{1}{2\Delta x} (-5f_0' + 4f_1' + f_2') \quad ۲۳-۴$$

که می‌توان آن را به صورت رابطه زیر ساده کرد.

$$f_0'' + 2f_1'' = \frac{-3}{\Delta x} f_0' + \frac{1}{2\Delta x} (f_0' + 4f_1' + f_2') \quad ۲۴-۴$$

و با استفاده از $\alpha = \frac{1}{4}$ خواهیم داشت:

$$f_0'' + 2f_1'' = \frac{-3}{\Delta x} \frac{df}{dx} \Big|_{x=0} - \frac{3}{2\Delta x^2} (f_0 - f_2) \quad ۲۵-۴$$

که رابطه فوق برای دهانه ورودی مسائل به کار می‌رود، خاصیت رابطه بالا این است که یکی از شرط

مرزهای مسئله را ($\frac{df}{dx} \Big|_{x=0} = 0$) در دهانه ورودی (که در اینجا همان مرکز استوانه می‌باشد) نیز ارضا می

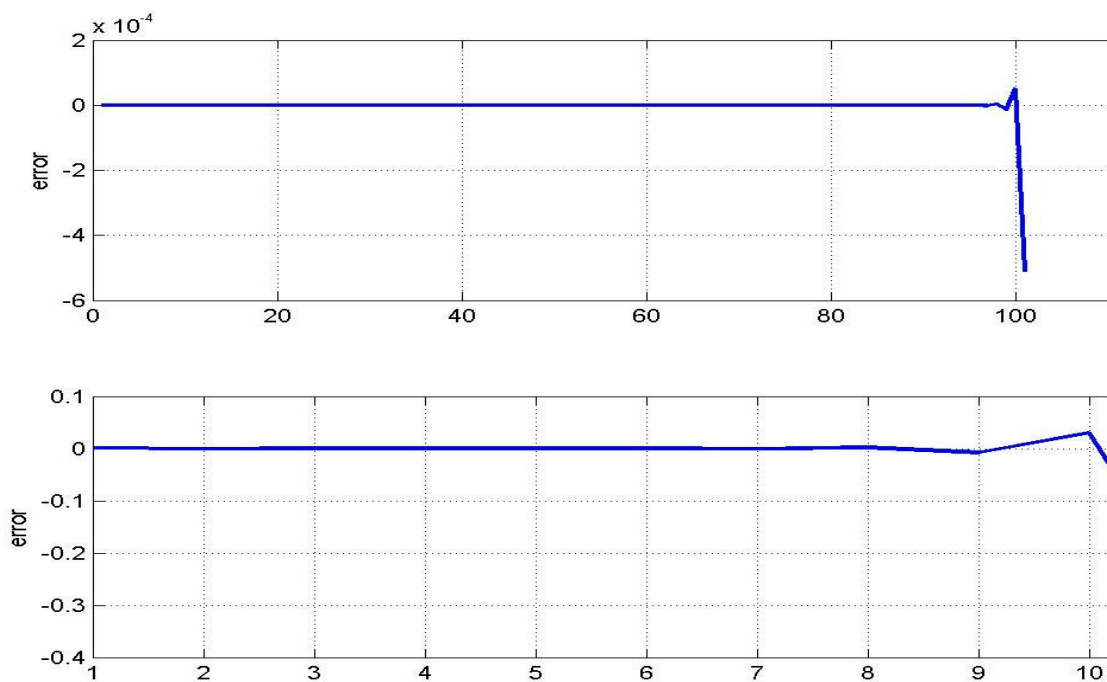
کند. در صورتی که شرط مرزی از نوع نیومن را در قسمت انتهایی مسئله داشتیم، می‌توانستیم این رابطه را

به فرم زیر مورد استفاده قرار دهیم:

$$f_I'' + 2f_{I-1}'' = \frac{3}{\Delta x} \frac{df}{dx} \Big|_{x=Lx} - \frac{3}{2\Delta x^2} (f_I - f_{I-1}) \quad ۲۶-۴$$

در نقاط مجاور گره های مرزی، روابط را با در نظر گرفتن $\alpha = \frac{1}{10}$ مورد استفاده قرار می

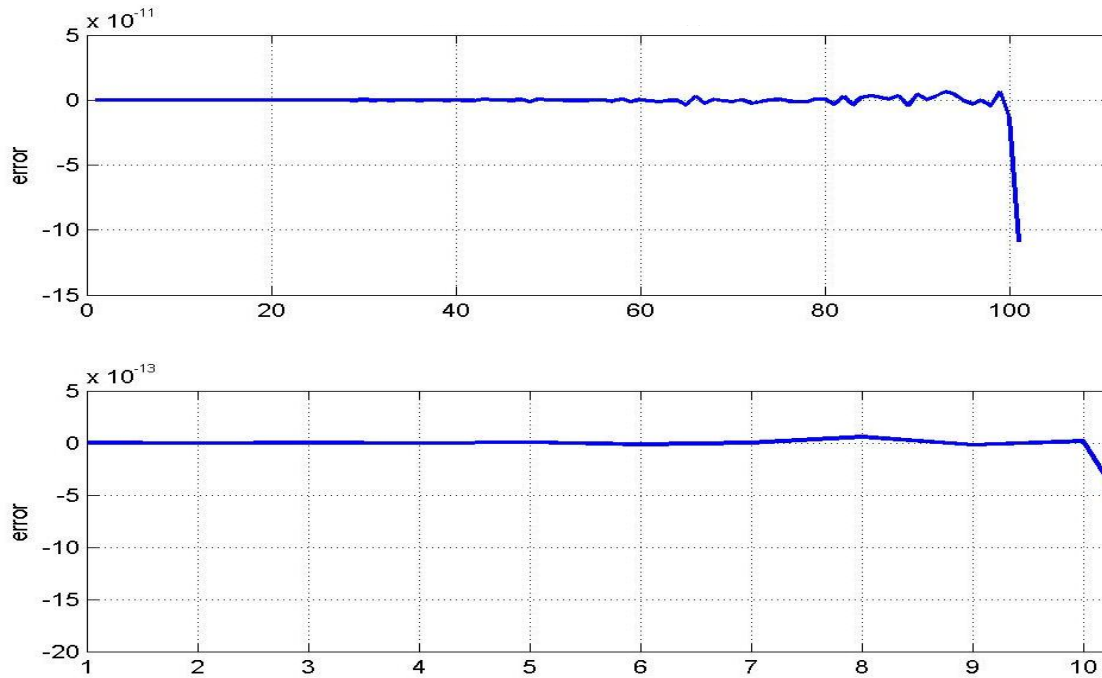
دهیم، بدین ترتیب جملاتی که شامل دامنه نمی شوند، از معادلات حذف می شوند و معادله حاصله در دستگاه مورد استفاده قرار می گیرند. میزان دقت کد نوشته شده با استفاده از این روش برای مشتق دوم به ازای چند تابع مختلف در شکل (۴-۴) و (۵-۴) و (۶-۴) نمایش داده شده است.



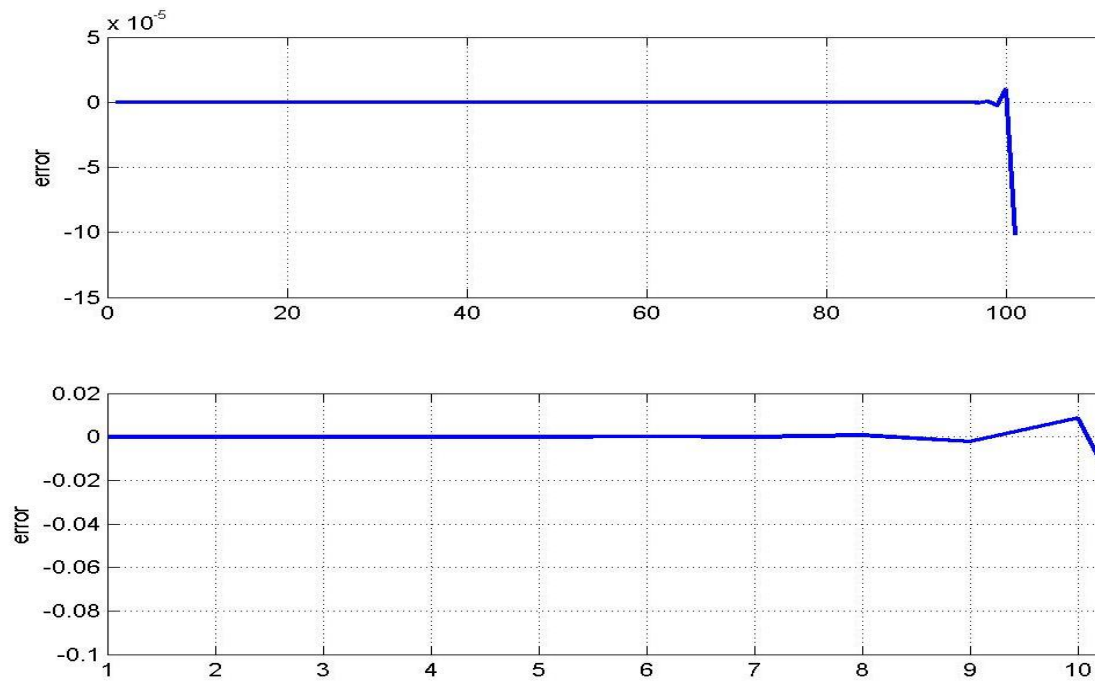
شکل ۴-۴ تخمین مشتق مکانی مرتبه دوم به کمک روش تفاضلات محدود فشرده برای تابع

$f(r) = \exp(r^2)$ ، تغییرات Γ از صفر تا یک می باشد که در شکل بالا به صد قسمت و در شکل پایین

به ده قسمت تقسیم شده است.



شکل ۴-۵ تخمین مشتق مکانی مرتبه دوم به کمک روش تفاضلات محدود فشرده برای تابع $f(r) = r^3$ ، تغییرات Γ از صفر تا یک می‌باشد که در شکل بالا به صد قسمت و در شکل پایین به ده قسمت تقسیم شده است.



شکل ۴-۶ تخمین مشتق مکانی مرتبه دوم به کمک روش تفاضلات محدود فشرده برای تابع

$f(r) = \cos(r^2)$ ، تغییرات r از صفر تا یک می‌باشد که در شکل بالا به صد قسمت و در شکل پایین

به ده قسمت تقسیم شده است.

۴-۶ روش محاسبه مشتقات مرتبه اول زمانی

جهت محاسبه مشتقات زمانی از مرتبه اول، از روش رانگ-کوتای مرتبه سوم که توسط وری به دست آمده در حل مسئله استفاده گردیده است. در این روش، جهت بدست آوردن مشتقات زمانی، مسئله را به حالت زیر فرض می‌نمائیم:

$$\frac{du}{dt} = R(u) \quad ۴-۲۷$$

که برای حل معادله، رسیدن از هر مرحله زمانی به مرحله بعد، در سه زیر مرحله مطابق جدول زیر اقدام می‌شود

جدول ۴-۲ مراحل مورد نیاز جهت محاسبه مشتق اول زمانی به روش رانگ-کوتا با دقت از مرتبه سوم

Time	First Location	Second Location
t^n	u^n	$R(u^n)$
$t' = t^n + c_1 \Delta t$	$u' = u^n + c_1 \Delta t R$	$R'(u')$
$t'' = t' + (c_2 + d_2) \Delta t$	$u'' = u' + (c_2 R' + d_2 R) \Delta t$	$R''(u'')$
$t^{n+1} = t^n + \Delta t$	$u^{n+1} = u'' + (c_3 R'' + d_3 R') \Delta t$	

همانگونه که در جدول (۴-۲) ملاحظه می‌شود، برای هر مرحله از افزایش به میزان Δt در زمان، نیازمند محاسبه طرف راست معادله (R) در سه زیر مرحله زمانی داریم. در هر یک از این مرحله‌ها، زمان به میزان $(c_i + d_i) \Delta t$ افزایش می‌یابد و u ها با یک ترکیب خطی از روابط بین R با یکدیگر جمع می‌گردد. ضرایب مورد استفاده c_i و d_i در این روش، به وسیله بسط ضرایب سری تیلور برای R' و R'' به دست می‌آیند. آنها مطابق روابط زیر قابل محاسبه هستند:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 + d_1 + d_2 + d_3 = 1 \\ c_1 c_2 + c_3 \left[\frac{d_2}{c_2} \left(1 + \frac{d_3}{c_3} \right) + c_2 \left(1 + \frac{d_2}{c_2} \right) \right] = \frac{1}{2} \\ c_1^2 c_2 + c_3 \left[c_1 + c_2 \left(1 + \frac{d_2}{c_2} \right) \right]^2 + c_1^2 d_3 = \frac{1}{3} \\ c_1 c_2 c_3 = \frac{1}{6} \end{cases}$$

۲۸-۴

جهت حل معادلات فوق با فرض $d_1 = 0$ می توان پاسخهای زیر را برای معادلات فوق بکار برد:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{8}{15} & d_1 &= 0 \\ c_2 &= \frac{5}{12} & d_2 &= -\frac{17}{60} \\ c_3 &= \frac{3}{4} & d_3 &= -\frac{5}{12} \end{aligned}$$

حال با داشتن روابط بین مشتقات مکانی اول و دوم نسبت به مقادیر تابع در همان زمان و نحوه محاسبه مقادیر تابع در زمان های بعد، می توان نسبت به محاسبه مقادیر تابع بر اساس رابطه دیفرانسیلی موجود و شرایط اولیه و مرزی داده شده پرداخت.

با توجه به اینکه ممکن است تعداد نقاط داده شده در دامنه مربوطه، به تعداد گره های موجود در برنامه نباشد، لذا با استفاده از یک الگوریتم درونیابی، مقادیر مورد نیاز بر اساس داده های خوانده شده درونیابی و محاسبه می گردند و برای محاسبات مورد استفاده قرار می گیرند.

نظر به اینکه در به دست آوردن معادلات مربوط به T ، شرط $\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0$ اعمال گردیده است لذا

نگرانی در خصوص محاسبات در $r=0$ با توجه به شکل معادله دیفرانسیلی انتقال حرارت حاکم بر مسئله وجود ندارد. حال با شروع از لحظه صفر و داشتن شرط اولیه، نسبت به محاسبه مشتقات مکانی و محاسبه

RHS معادله اقدام می گردد، سپس به محاسبه $\frac{dT}{dt}$ بر اساس روش ارائه شده در سه زیر مرحله می پردازیم،

در هر گام مقدار دمای نقاط مرکزی جسم، بر اساس مقدار وارد شده برای شرط مرزی در $r=0$ به تابع اعمال می گردد و این عمل تا رسیدن به انتهای دامنه زمانی فرآیند ادامه می یابد، در نهایت با داشتن دما در کلیه

گره ها در خلال دامنه زمانی ، قادر به به دست آوردن و تعقیب تغییرات دمائی جسم می باشیم. با استفاده از داشتن تاریخچه تغییرات دما در انتهی دامنه مورد بررسی ($t=R$) می توان به محاسبه دمای مربوط به محیط کوره پرداخت و دمای کوره را بر اساس محاسبات به دست آمده تنظیم نمود.

۱-۵ بررسی شرایط حرارتی حاکم بر مسئله

برای به دست آوردن شرایط مرزی که باید بر مسئله اعمال گردد تا بتوان به شرایط مطلوب در ماده دست یافت، ابتدا مسئله را به صورت معکوس حل می‌نماییم. بدین منظور فرض می‌کنیم تاریخچه دما در مرکز نمونه استوانه‌ای شکل نسبت به زمان مشخص می‌باشد که این توزیع را می‌توان از هند بوکهای متالورژی به دست آورد.

در این فصل برای حل مسئله دو بعدی انتقال حرارت به روش معکوس و با کمک روش تفاضلات محدود فشرده، ابتدا شرایط حاکم بر مسئله بررسی می‌گردد. در این گذر به بیان ریاضیات حاکم بر مسئله می‌پردازیم. سپس در فصل آینده با به کارگیری داده‌های تحلیلی و تجربی به حل مسئله خواهیم پرداخت. همچنین برای اعمال شرایط اولیه می‌توان با فرض یکنواخت بودن دما در تمام مقطع نمونه شروع به حل مسئله به روش تفاضلات محدود نمود.

با توجه به به تغییرات دما در دو راستای طولی و شعاعی میله و اینکه دما با گذشت زمان دارای تغییر است، لذا توزیع درجه حرارت به صورت زیر خواهد بود:

$$T = T(x, r, t)$$

قابل ذکر است که شرط اولیه توزیع ثابتی را در تمامی نقاط معرفی می‌نماید و تاریخچه عملیات حرارتی در مرکز $T = T(x, r = 0, t)$ و برابری دما در ابتدا و انتهای به همراه صفر بودن نرخ تغییرات درجه حرارت در مرکز با توجه به عدم حضور منبع حرارتی در محور مرکزی $\frac{\partial T}{\partial r}(x, r = 0, t)$ به عنوان شرط مرزی برای مسئله حال حاضر معرفی می‌گردند.

معادله انتقال حرارت دوبعدی گذرا در دستگاه مختصات استوانه‌ای که در حل از آن استفاده می‌گردد به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right] \quad ۱-۵$$

که در آن α خاصیت پخش گرمایی^۸ است، که به صورت نسبت رسانندگی گرمایی به ظرفیت گرمایی تعریف می‌گردد و برای حل در مورد ماده هدفمند برای هر لایه با توجه به اجزای آن در نظر گرفته می‌شود. دو روش متداول برای محاسبه خواص مواد هدفمند وجود دارد، مدل پیوسته و مدل میکرومکانیسم^۲. در روش پیوسته یک تابع تحلیلی مانند تابع اکپرانشیالی برای توضیح تغییرات پیوسته خواص مواد هدفمند به کار می‌رود. در روش میکرومکانیسم خواص ماده تنها بر اساس توزیع کسر حجمی در فازهای هدفمند محاسبه می‌شود. در هر دو مدل ظرفیت گرمایی مؤثر (ρC) بر اساس قانون مخلوط ها از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\rho c = \rho_1 c_1 V_1 + \rho_2 c_2 V_2 \quad 2-5$$

که زیروند ۱ و ۲ مقادیر خواص را در فازهای ۱ و ۲ نمایش می‌دهد. V_1 و V_2 به ترتیب کسر حجمی فازهای ۱ و ۲ هستند، از طرفی داریم:

$$V_2 = 1 - V_1 \quad 3-5$$

در مدل میکرومکانیسم ناخالصی ها به صورت کروی در نظر گرفته شده و فرض می‌شود به صورت کروی توزیع شده اند. علاوه بر این فرض می‌شود از مواد همگن ساخته شده اند.

بنابراین ضریب هدایت مؤثر (k) از رابطه زیر که توسط Hatta و Taya [۴۹] بیان شده محاسبه می‌شود:

$$\frac{k - k_1}{k_2 - k_1} = \frac{V_2}{1 + (1 - V_2)(k_2 - k_1)/k_1} \quad 4-5$$

شرایط مرزی معادله (۱-۵) را در حل به روش معکوس می‌توان چنین در نظر گرفت:

⁸ Thermal Diffusivity
² micro mechanism

الف) شرط مرزی دیریکله^۱ برای مرکز نمونه

$$T(x, r = 0, t) = \tau(t)$$

۵- ۵

که در آن $\tau(t)$ تابعی معلوم می‌باشد این تابع از آزمایشات و نتایج عملی به دست آمده و به عنوان اولین شرط مرزی در مسئله اعمال خواهد شد.

ب) عدم حضور منبع حرارتی در مرکز میله

از دیگر شرایط مرزی حاکم بر مسئله صفر بودن نرخ تغییرات درجه حرارت در مرکز میله با توجه به عدم حضور منبع حرارتی در مرکز است و لذا داریم:

$$\frac{\partial T}{\partial r}(x, r = 0, t) = 0$$

۶- ۵

این شرط هنگام حل مسئله انتقال حرارت در $r = 0$ با توجه به اینکه r در مخرج کسر واقع شده نسبت به ساده سازی مسئله کمک می‌نماید.

با توجه به معادله در نظر گرفته شده، وابستگی مسئله به مکان از مرتبه دوم بوده و برای آن در قسمتهای بالا شرایط مرزی کافی ارائه گردیده است. با توجه به وابستگی مسئله به زمان در معادله که از مرتبه اول می‌باشد، نیاز به داشتن یک شرط اولیه در مسئله می‌باشیم که با توجه به شرایط محیط عملیات حرارتی (یعنی گرم کردن محیط تا درجه حرارت مشخص و نگه داشتن محیط برای درک شرایط یکنواخت) توزیع یکنواختی در جسم در نظر گرفته می‌شود. بنابراین:

$$T(x, r, t = 0) = T_0$$

۷-۵

چنانچه پس از رسیدن درجه حرارت به میزان مشخصی، به سرعت عملیات حرارتی خنک کاری را شروع نماییم باید اطلاعات کافی از توزیع دما داشته باشیم و این توزیع را به عنوان شرط اولیه لحاظ کنیم.

^۱Dirichlit Boundary Condition

حال با داشتن معادله حاکم بر مسئله و شرایط مرزی و اولیه باید نسبت به حل آن اقدام نموده و با بدست آوردن توزیع دمای محیط، شرط مرزی مربوط به مسئله اصلی را به دست آورد. این روش برای به دست آوردن توزیع درجه حرارت محیط، $T_{\infty}(t)$ به عنوان روش معکوس در نظر گرفته می‌شود.

۵-۲ حل تحلیلی مسئله برای شرایط خاص

به منظور حل مسئله حاضر حل تحلیلی وجود نداشته و باید با استفاده از روشهای عددی به حل آن پرداخت. تنها در صورتی که در فرض مسئله فرضیاتی جهت ساده سازی انجام دهیم می‌توان حل تحلیلی برای آن به شرح ذیل ارائه داد.

این فرضیات عبارتند از:

- ۱- صرف نظر نمودن از تشعشع بین جسم و محیط اطراف
- ۲- یکنواخت فرض نمودن توزیع دما در جسم در لحظه شروع حل مسئله
- ۳- ثابت بودن دمای محیط طی انجام تبادل حرارت
- ۴- ضریب انتقال حرارت با محیط بسیار زیاد است
- ۵- تغییرات دما در راستای x (طول میله) و φ (تغییرات زاویه ای) صفر است
- ۶- جسم همگن فرض می‌شود

لذا با توجه به فرضیات مطرح شده، معادله (۵-۱) به شکل زیر ساده می‌گردد:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\alpha}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad ۸-۵$$

برای حل مسئله متغیر جدیدی به نام θ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\theta = T - T_{\infty} \quad ۹-۵$$

شرایط مرزی و اولیه به صورت زیر نشان داده می‌شوند:

$$BC : \theta(0,t) = \theta_0 = T_0 - T_\infty$$

$$BC : \frac{\partial \theta(0,t)}{\partial r} = 0 \quad 10-5$$

$$IC : \theta(r,0) = 0$$

برای حل مسئله جوابها را به صورت $\theta(r,t) = X(r) \cdot \tau(t)$ در نظر گرفته و با جایگذاری در معادله اصلی داریم:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dX}{dr} \right) + \lambda^2 r X = 0$$

$$\frac{dX(0)}{dr} = 0 \quad 11-5$$

$$X(r=R) = 0$$

$$\frac{d\tau}{dt} + \alpha \lambda^2 \tau = 0 \quad 12-5$$

در جائیکه λ مقدار ثابتی است. این مقدار ثابت در نتیجه جداسازی متغیرها و رسیدن به یک تساوی معادله دیفرانسیل تفکیک پذیر حاصل می‌گردد. نظر به اینکه r و t دو متغیر مستقل هستند، تساوی مذکور تنها وقتی برقرار است که هریک از معادلات دیفرانسیل برابر با یک عدد ثابت همچون λ باشد.

توجه به این امر ضروری است که λ^2 مقداری منفی است. چرا که معادلات (11-5) و (12-5) به ازای مقادیر $\lambda^2 = 0$ یا $\lambda^2 > 0$ ، به جوابی بدیهی می‌رسند که مورد نظر ما نیست.

لذا برای حالت (11-5) داریم:

$$\varphi_n = J_0(\lambda_n r) \quad 13-5$$

که در آن φ_n معرف بردارهای ویژه میباشد و صفرهای معادله فوق معرف مقادیر ویژه هستند:

$$J_0(\lambda_n r) = 0 \quad 14-5$$

حل مربوط به معادله (12-5) عبارت است از:

$$\tau_n(t) = C_n e^{-a\lambda^2 t} \quad 15-5$$

بنابراین حل معادله به صورت زیر است :

$$\theta(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-a\lambda^2 t} J_0(\lambda_n r) \quad ۱۶-۵$$

که در آن

$$a_n = A_n C_n \quad ۱۷-۵$$

و با قراردادن مقدار اولیه در معادله (۱۶-۵) داریم :

$$\theta_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\lambda_n r) \quad ۱۸-۵$$

که معادله فوق یک معادله بسل-فوریه می‌باشد که در آن J_0 ، تابع بسل از نوع اول و از مرتبه صفر می‌باشد. همچنین در معادله (۱۶-۵) ضریب a_n یک حالت خاص برای معادله $T(r) = \theta_0$ می‌باشد و به این صورت به دست می‌آید :

$$a_n = \frac{2\theta_0}{(\lambda_n R) J_1(\lambda_n R)} \quad ۱۹-۵$$

که در این معادله نیز J_1 ، تابع بسل نوع اول و از مرتبه یک می‌باشد.

حال با قراردادن معادله (۱۹-۵) در (۱۶-۵) توزیع دما در جسم به صورت زیر به دست می‌آید :

$$\frac{T(r,t) - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-a\lambda^2 t} J_0(\lambda_n r)}{(\lambda_n R) J_1(\lambda_n R)} \quad ۲۰-۵$$

در صورتی که برای این مسئله میزان انتقال حرارت را بسیار بزرگ فرض نکنیم حل مسئله بدین صورت در می‌آید :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right)$$

$$IC : \theta(r,0) = \theta_0$$

$$BC : \frac{\partial \theta(0,t)}{\partial r} = 0 \quad 21-5$$

$$BC : -k \frac{\partial \theta(R,t)}{\partial r} = h\theta(R,t)$$

با قراردادن $\theta(r,t) = R(r) \cdot \tau(t)$ خواهیم داشت :

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \lambda^2 r R = 0$$

$$\frac{dR(R)}{dr} + \frac{h}{k} R(R) = 0 \quad 22-5$$

$$\frac{dR(0)}{dr} = 0$$

$$R_n(r) = A_n \varphi_n(r)$$

$$\varphi_n(r) = J_0(\lambda_n r) \quad 23-5$$

و صفرهای معادله عبارتند از :

$$(\lambda_n R) J_1(\lambda_n R) + Bi \cdot J_0(\lambda_n R) = 0 \quad 24-5$$

در حالیکه $Bi = \frac{hr}{k}$ و همچنین خواهیم داشت :

$$a_n = \frac{2\theta_0 Bi}{(\lambda_n R^2 + Bi^2) J_0(\lambda_n R)} \quad 25-5$$

و بالاخره داریم :

$$\frac{T(r,t) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = 2Bi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-a_n^2 t} J_0(\lambda_n r)}{(\lambda_n^2 R^2 + Bi^2) J_0(\lambda_n R)} \quad 26-5$$

در دو حالت فوق، با فرض ثابت بودن دمای محیط و صرف نظر از تشعشع و داشتن نحوه خنک شدن مرکز جسم، به صورت تحلیلی توزیع دما را محاسبه نمودیم. از مقدار به دست آمده برای T_∞ و نیز شرایط انتهایی مسئله $T(r, t_{end})$ می‌توان به عنوان شرایط مرزی و اولیه جدید مورد استفاده قرارگیرند. اما در عمل فرض ثابت بودن دمای محیط فرض درستی نبوده و قابل اعمال بر مسئله نیست. علاوه بر اینها در حالت واقعی ما تنها در یک راستا تغییرات دما با گذشت زمان نداریم بلکه این امر در راستاهای دیگر نیز روی می‌دهد. به

همین منظور برای به دست آوردن پاسخ های واقعی نیاز به اعمال این شرایط بر مسئله با روشهای عددی می‌باشیم. که در این فصل و فصل آینده به بررسی آنها خواهیم پرداخت.

۳-۵ تشریح مسئله و شرایط حاکم بر آن

معادله انتقال حرارت حاکم بر مسئله و نیز شرایط مرزی و اولیه مربوط به آن به فرم زیر هستند:

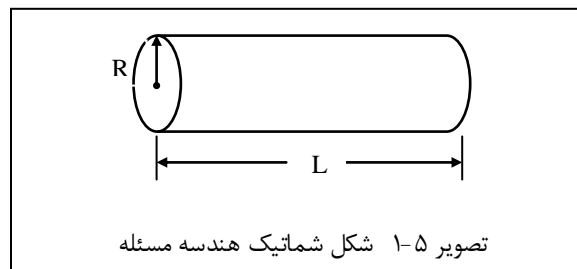
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right] \quad -5$$

۲۷

$$\begin{aligned} T(x, r, t = 0) &= T_0 \\ T(x, r = 0, t) &= \tau(x, t) \\ \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=0} &= 0 \end{aligned} \quad -5$$

۲۸

همچنین معادله انتقال حرارت فوق در دامنه ای که به صورت شماتیک در شکل زیر نشان داده شده است، با استفاده از روش تفاضلات محدود فشرده حل می‌گردد.



برای حل معادله انتقال حرارت (۳-۵) کد کامپیوتری در محیط برنامه نویسی MATLAB نوشته شده و در دو مرحله مورد ارزیابی قرار گرفت.

در مرحله نخست که در فصل ۴ به توضیح آن پرداخته ایم، از داده های تحلیلی بهره جسته ایم. بدین صورت که با کمک تابعی ریاضی که تمامی شرایط و ضوابط مسئله را ارضاء نماید، توزیع دما در محور جسم

استوانه ای شکل را در لحظه نخست داریم. حال با در اختیار داشتن این اطلاعات و همچنین معرفی تعداد تقسیمات در راستای X و R که در برنامه با $\dim X$ و $\dim r$ مشخص شده اند و نیز بیان فواصل زمانی (dt) ، حل آغاز می‌گردد.

سپس با گذشت زمان معلوم (به عنوان مثال ۷۰ ثانیه) توزیع دما در سطح بدست می‌آید (حل معکوس). حال با استفاده از این داده ها و برگرداندن زمان به لحظه آغازین، دما در محور مرکزی را محاسبه می‌نماییم (حل مستقیم). در نهایت نیز دماها در حل معکوس و مستقیم برای محور جسم با یکدیگر مقایسه شده و با محاسبه و ترسیم نمودارهای خطا می‌توان صحت و دقت کد نوشته شده را ارزیابی نمود.

در مرحله دوم که در فصل ۶ شرح داده شده است، با بکارگیری تاریخچه دمایی در مرکز جسم که از داده های، به انجام مراحل فوق پرداخته ایم.

شایان ذکر می‌داند، از مزیت‌های روش حل معکوس آن است که پس از حل و رسیدن به جواب، با استفاده از این اطلاعات و حل مسئله به روش مستقیم می‌توان به مقایسه داده ها در نقطه شروع و لحظه آغازین پرداخت. این امر ما را در تخمین دقت جوابها و همچنین تأیید صحت آنها یاری می‌نماید.

۴-۵ نحوه اعمال شرایط مرزی اضافی

جهت اضافه نمودن شرایط مرزی اضافی برای در نظر گرفتن اثر لایه های مختلف در رابطه با مواد هدفمند از روشی که در ادامه به بررسی آن خواهیم پرداخت استفاده می‌کنیم.

اگر معادله مورد نظر را به صورت یک بعدی در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$Ax = B \quad 29-5$$

که در این معادله ماتریس A ، ماتریس ضرایب، B ماتریس معلومات و x مجهول ما می‌باشد. حال اگر یک

شرط اضافه مانند $x_c = \alpha$ به معادله بیفزاییم، برای به دست آوردن جوابی یکتا از روش زیر استفاده

می‌کنیم:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i & i = 1, 2, \dots, n \\ x_c = \alpha & 1 < c < n \end{cases} \quad ۳۰-۵$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq c}}^n a_{ij}x_j + x_c a_{i-c} = b_i \quad ۳۱-۵$$

حال معادله جدید را که به صورت زیر می‌باشد حل می‌نماییم :

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq c}}^n a_{ij}x_j = b_i - a_{ic}\alpha \quad ۳۲-۵$$

۱-۶ شبیه سازی مسئله با یک تابع ریاضی

در این قسمت با کمک یک تابع ریاضی که در معادله انتقال حرارت دو بعدی در دستگاه مختصات استوانه ای با فرض همگن بودن نمونه صدق کند و همچنین کلیه شرایط اولیه و مرزی را ارضا نماید به شبیه سازی مسئله می پردازیم و در ادامه برنامه کامپیوتری که به کمک نرم افزار MATLAB نوشته شده است به همراه نتایج و نمودارهای حاصل را می آوریم.

همانگونه که در فصل گذشته توضیح داده شد معادله دیفرانسیل حاکم بر مسئله به صورت زیر است :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right] \quad ۱-۶$$

همچنین شرایط مرزی و اولیه حاکم بر مسئله عبارتند از :

$$\begin{aligned} T(x, r, t=0) &= T_0 \\ T(x, r=0, t) &= \tau(x, t) \\ \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=0} &= 0 \end{aligned} \quad ۲-۶$$

با توجه به معادلات (۱-۶) و (۲-۶) نیازمند تابع ریاضی هستیم که این معادلات را ارضا نماید. برای این منظور تابع زیر را در نظر می گیریم :

$$T(x, r, t) = kr^2 + 4kt + e^{-t} \sin x + C \quad ۳-۶$$

با فرض $\alpha = 1$ و با به کارگیری معادله (۳-۶) در معادله انتقال حرارت (۱-۶) دو طرف معادله با یکدیگر برابر خواهند بود علاوه بر اینکه معادله (۳-۶) در کلیه شروط (۲-۶) صادق است.

آنچه که در خصوص معادله (۳-۶) لازم به ذکر می داند آن است که تغییرات دما در راستای x پریودیک است، یعنی دما در ابتدا و انتهای میله با یکدیگر برابر بوده و این در حالی است که در طول میله شاهد تغییرات دما هستیم ولی با گذشت زمان نسبت طولانی، این تغییرات دما در راستای طول و در سطح خارجی میله حذف می گردد که در عمل و واقعیت نیز چنین است.

دیگر آنکه C و k مقادیر ثابتند، به طوری که با مقدار دهی به ثابت C ما در واقع دمای گره ها را در لحظه شروع داریم و با مقدار دهی مثبت یا منفی به ثابت k ، ما شاهد به ترتیب افزایش یا کاهش دما با

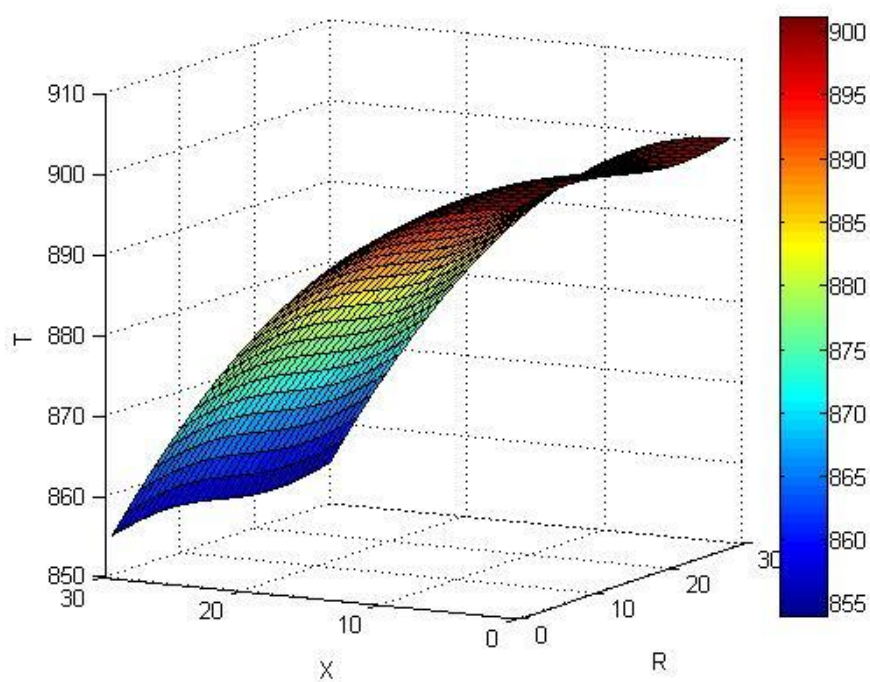
گذشت زمان خواهیم بود. انتخاب مقدار k در برنامه حائز اهمیت زیرا انتخاب مقادیر بزرگ یا کوچک برای آن موجب اختلافات زیاد یا کم در راستای r با گذشت زمان خواهد شد که همین امر در مواردی موجب واگرایی برنامه و در مواردی دیگر موجب افزایش مقادیر خطا می‌گردد. در برنامه $C=900$ و $k=-0.05$ در نظر گرفته شده است.

تغییرات در راستای شعاعی از صفر تا سی است که به ۳۰ قسمت تقسیم شده و نیز تغییرات در راستای طول (x) از صفر تا 2π است که به ۳۰ قسمت تقسیم گردیده است. لذا در مجموع در هر تکرار محاسبات برای دویست گره انجام می‌گیرد.

همچنین در نمودارهای مربوط به محاسبه خطای دمای محاسباتی برنامه با دمای منتج از تابع برای گرهها از رابطه جذر حداقل مربعات خطا استفاده شده است.

در پایان نیز به منظور بررسی صحت پاسخهای بدست آمده، پس از آنکه با گذشت زمانی معین دماهای سطح را بدست آوردیم، با داشتن این دماها به حل مستقیم می‌پردازیم و دمای مرکز میله را بدست می‌آوریم. حال این دما را با دمایی که در ابتدا برای مرکز داشتیم مقایسه می‌کنیم که این امر یکی از ویژگی‌های مهم روش حل عددی در مسائل معکوس می‌باشد.

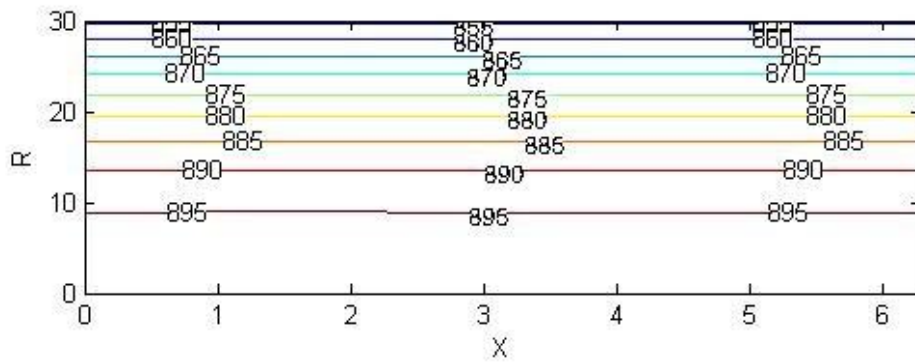
در شکل (۶-۱) شاهد توزیع دما در سراسر نقاط جسم مورد نظر در لحظه شروع ($t=0$) هستیم. این موضوع با کمک رابطه (۳-۶) و قراردادن $k=-0.05$ بدست آمده. همانگونه که بیان شد تعداد تقسیمات در راستای x برابر با ۳۰ و در راستای r برابر ۳۰ در نظر گرفته شده است.



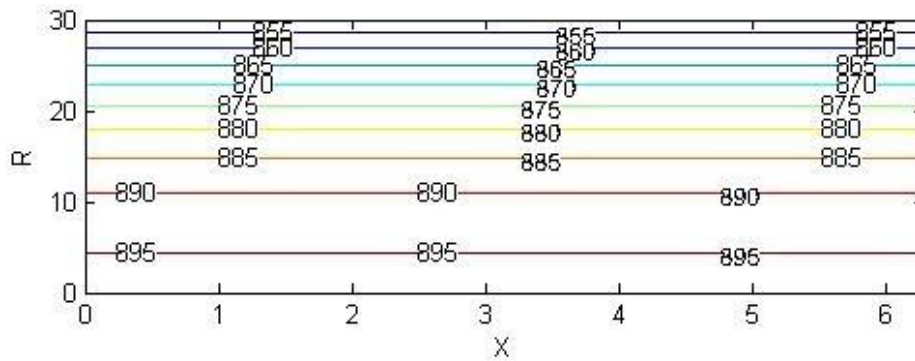
شکل ۱-۶ گراف دما در راستاهای شعاعی (R) و طولی (X) در لحظه شروع ($t=0$)

سپس در شکلهای (۲-۶) ، (۳-۶) و (۴-۶) خطوط دما ثابت با گذشت زمانهای ۵ ، ۲۰ و ۴۰ ثانیه ترسیم شده اند. در نهایت نیز توزیع دما در شکل (۵-۶) با گذشت ۷۰ ثانیه از لحظه شروع ملاحظه می شود. همانگونه که در واقعیت نیز انتظار می رود، با گذشت زمان شاهد یکنواختی دما در سراسر قطعه می باشیم ولی اینکه رسیدن به این هم دمایی با چه نرخ و چه مدت زمانی روی دهد بستگی به تابعی دارد که در داده های تحلیلی از آن بهره جسته ایم. (معادله (۳-۶) ولی آنچه که بیش از همه در انتخاب این تابع اهمیت دارد ، صادق بودن آن برای کلیه فرضیات حاکم بر مسئله است.

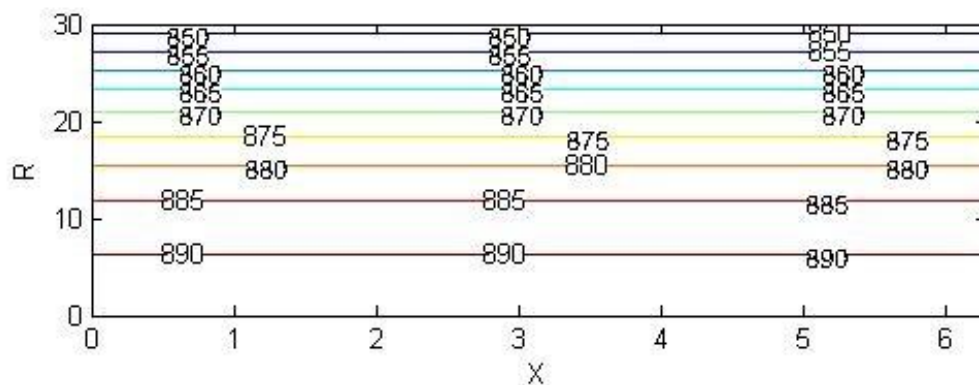
در اشکال مذکور محور x بر اساس تغییرات آن $0 < x < 2\pi$ و محور r بر اساس تعداد گره ها در همان راستا (۳۰ گره) مدرج شده اند.



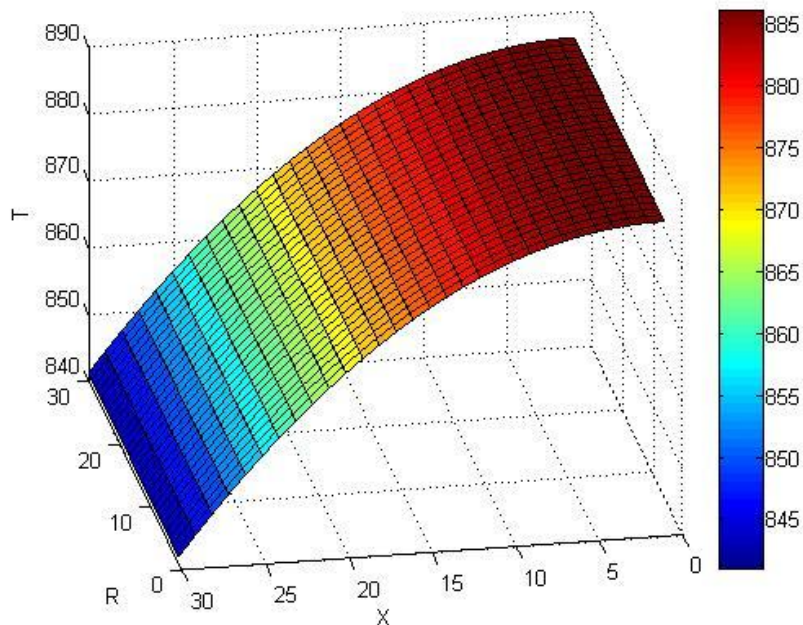
شکل ۶-۲: خطوط دما ثابت پس از گذشت ۵ ثانیه با در نظر گرفتن راستاهای طولی و شعاعی



شکل ۶-۳: خطوط دما ثابت پس از گذشت ۲۰ ثانیه با در نظر گرفتن راستاهای طولی و شعاعی



شکل ۶-۴: خطوط دما ثابت پس از گذشت ۴۰ ثانیه با در نظر گرفتن راستاهای طولی و شعاعی

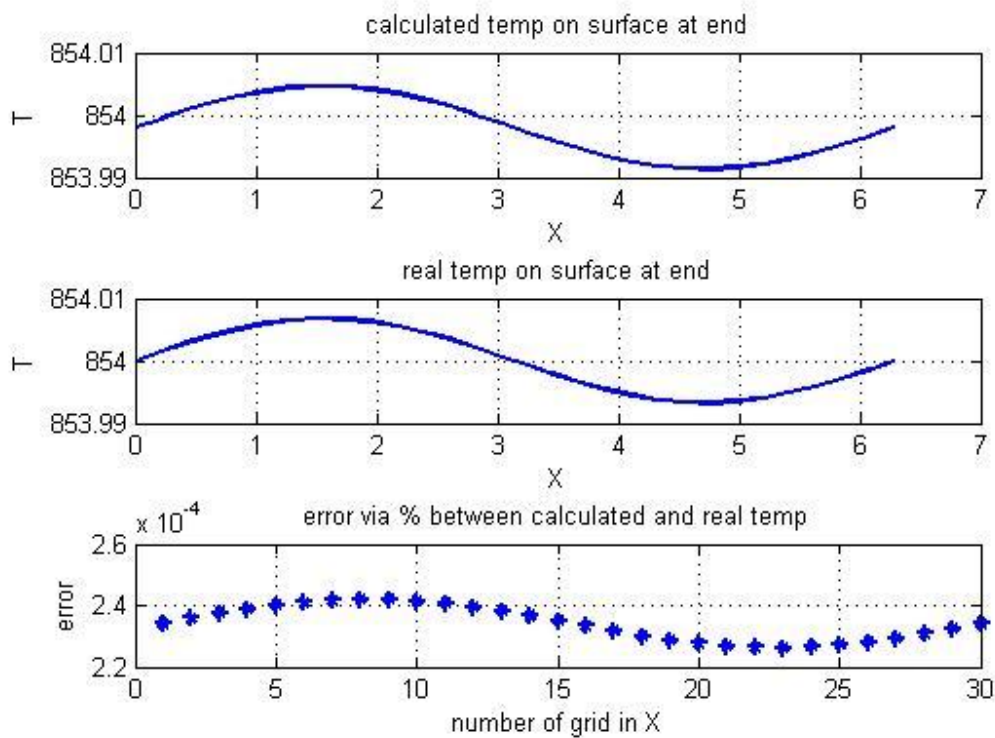


شکل ۵-۶ توزیع دما پس از گذشت ۷۰ ثانیه با در نظر گرفتن راستاهای طولی و شعاعی

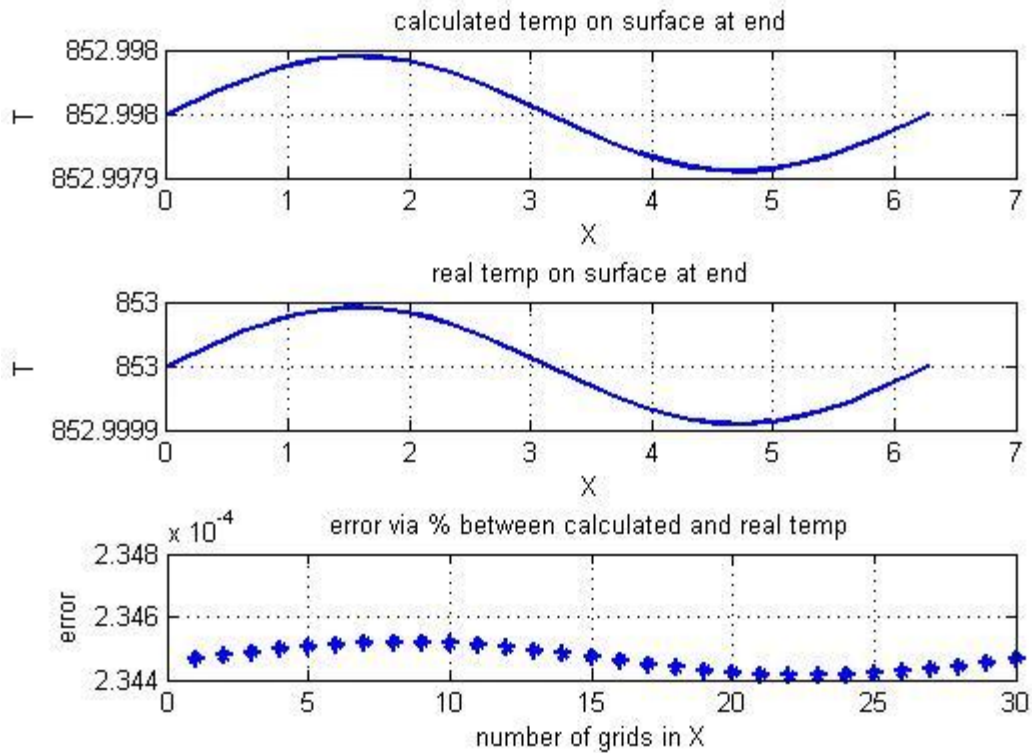
در مرحله بعد به منظور بررسی صحت داده های خروجی برنامه، به محاسبه درصد خطای ناشی از دماهای بدست آمده از تابع تحلیلی با دماهای خروجی برنامه نوشته شده پرداخته ایم.

برای این منظور با گذشت زمان ۵ و ۱۰ ثانیه، دماهای سطح ($r=R$) در راستای طولی میله با کمک نتایج حاصل از برنامه کامپیوتری و تابع تحلیلی، محاسبه و مقایسه شده اند. این موضوع در شکل‌های (۶-۶) الف ب ج) و (۷-۶) الف ب ج) نشان داده شده است. در شکل (الف) نتایج حاصل از برنامه کامپیوتری، در شکل (ب) دماهای حاصل از تابع تحلیلی و در شکل (ج) درصد خطاهای آن دو ترسیم شده اند.

همانگونه که انتظار می‌رود با توجه به تجمع خطاها از مراحل قبل، شاهد افزایش درصد خطا با گذشت زمان هستیم. ولی خطاها از مراتب بسیار خوبی (10^{-4}) برخوردار هستند که این امر خود نیز تأییدی بر برنامه نوشته شده است.



شکل ۶-۶ الف-ب-ج) نمودار مربوط به دمای سطح ($r=R$ و در راستای X) پس از گذشت ۵ ثانیه با استفاده از مقادیر بدست آمده از برنامه و تابع تحلیلی و سپس محاسبه درصد خطای این دو با یکدیگر

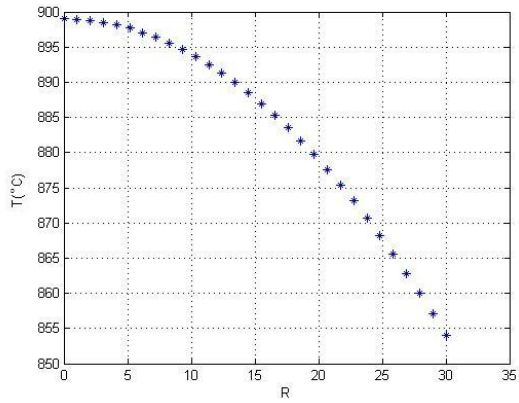


شکل ۶-۷ (الف-ب-ج) نمودار مربوط به دمای سطح ($r=R$ و در راستای X) پس از گذشت ۱۰ ثانیه با استفاده از مقادیر بدست آمده از برنامه و تابع تحلیلی و سپس محاسبه درصد خطای این دو با یکدیگر

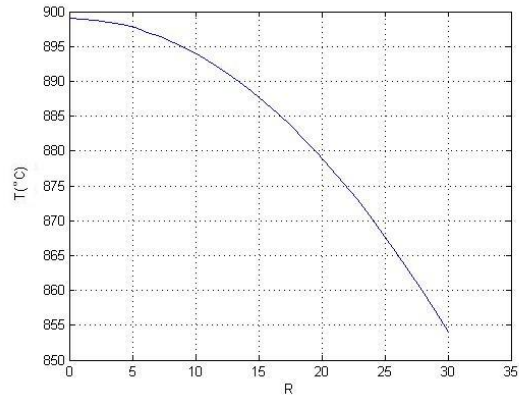
اکنون به منظور بررسی دقیق تر توزیع دما، به محاسبه و تجزیه و تحلیل دماهای محاسبه شده در راستای r و در X های ثابت می پردازیم. لذا در دو زمان $t=5s$ و $t=70s$ و در راستاهای $x=3/2$ (شکل های ۶-۷) و $x=1/73$ (شکل های ۸-۶) برای کلیه r ها، دماها ترسیم شده اند.

همانگونه که انتظار می رود در این نمودارها شیب دما برای همه تقریباً ثابت است و آنچه که در آنها متفاوت است دما در زمانهای مختلف برای $r=0$ است.

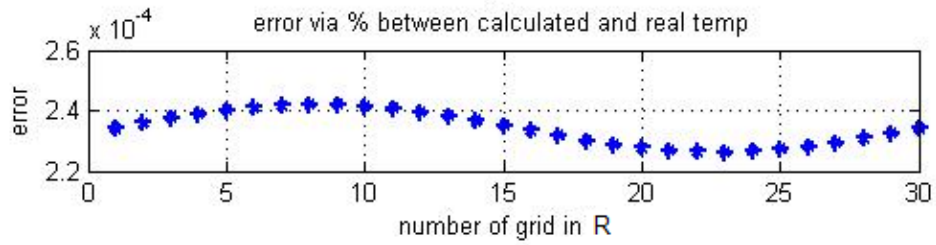
در کلیه اشکال مذکور، شکل (الف) مربوط به دماهای بدست آمده از برنامه کامپیوتری، شکل (ب) دماهای همان نقاط حاصل از تابع تحلیلی و شکل (ج) به محاسبه درصد خطای این دو دما پرداخته است. توجه داریم که راستای طولی در نمودارها بیانگر تعداد تقسیمات در راستی r می باشد. علاوه بر اینکه در این مرحله از محاسبات نیز بازه های زمانی $dt=0.01$ در نظر گرفته شده است.



(ب)

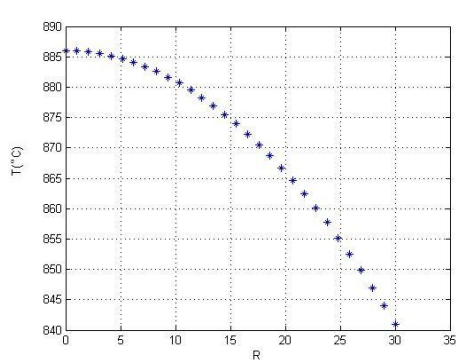


(الف)

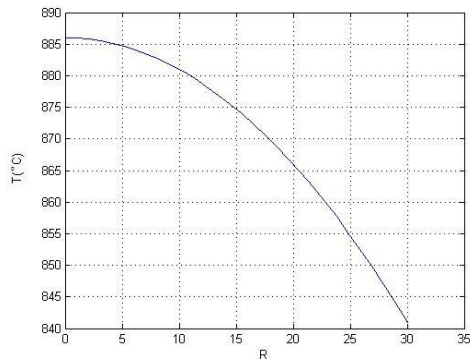


(ج)

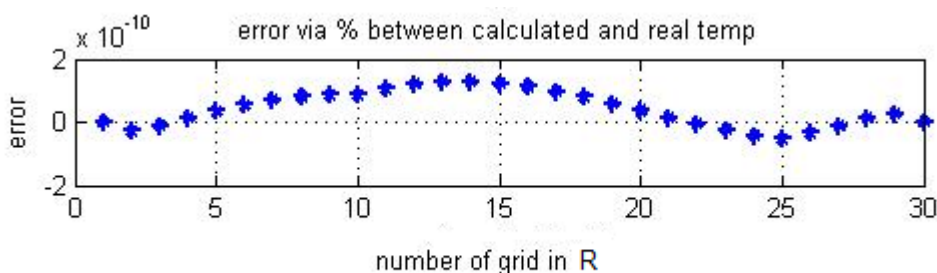
شکل ۶-۸ (الف ب ج) نمودار مربوط به دما در $x = 3/2$ و در r های مختلف ، پس از گذشت ۵ ثانیه با استفاده از مقادیر بدست آمده از برنامه و تابع تحلیلی و سپس محاسبه درصد خطای این دو با یکدیگر



(ب)



(الف)

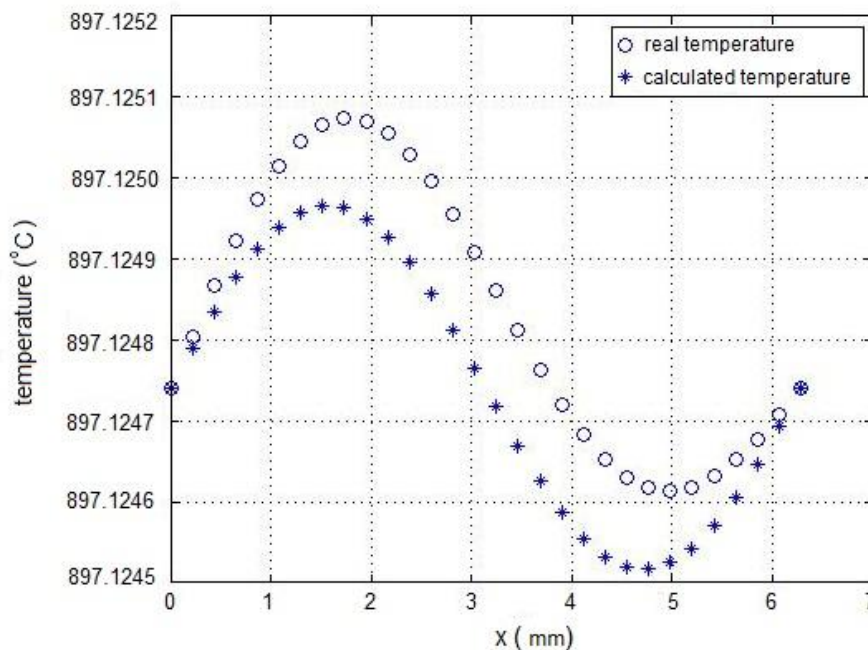


(ج)

شکل ۶-۹ (الف ب ج) نمودار مربوط به دما در $x = 1/73$ و در r های مختلف ، پس از گذشت ۷۰ ثانیه با استفاده از مقادیر بدست آمده از برنامه و تابع تحلیلی و سپس محاسبه درصد خطای این دو با یکدیگر

یکی از ویژگی های حل مسائل معکوس حرارتی آن است که به منظور یافتن تأییدی بر صحت و دقت جوابها، مسئله را در پایان به صورت مستقیم حل میکنیم. به این صورت که پس از یافتن دماهای مطلوب در سطح قطعه پس از زمان معین (در این مسئله ۷۰ ثانیه) از این اطلاعات به عنوان داده های اولیه برای حل مسئله مستقیم استفاده می نماییم. با بازگرداندن زمان به لحظه نخست، دماهای محور مرکزی جسم استوانه ای شکل را می یابیم. حال به مقایسه این دما (حاصل از حل مستقیم) با دماهای نخستین در محور مرکزی جسم برای شروع حل معکوس می پردازیم. این موضوع در شکل (۶-۹) نمایش داده شده اند. با توجه به اینکه دماها پریودیک فرض شده اند ، این امر در شکل نیز به وضوح دیده می شود.

لازم به ذکر است راستای طولی مربوط به بازه تغییرات x می باشد. $(0 < x < 2\pi)$

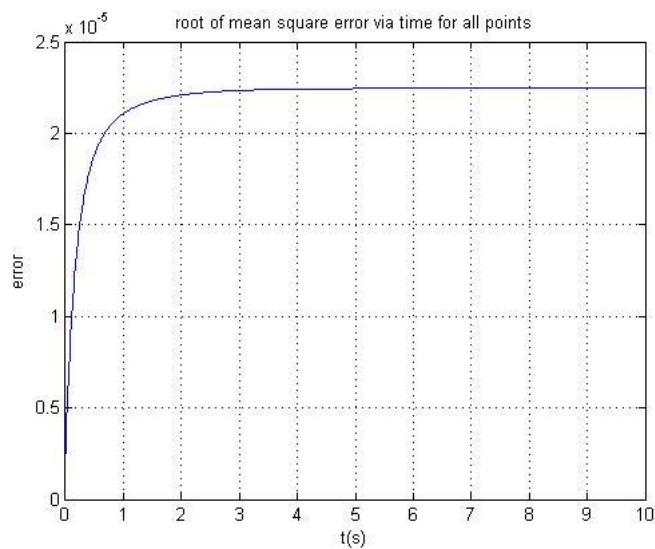


شکل ۶-۱۰ نمودار دماهای مرکز در لحظه شروع (*) مربوط به حل معکوس با دماهای بدست آمده از حل مستقیم (O) در مرکز میله

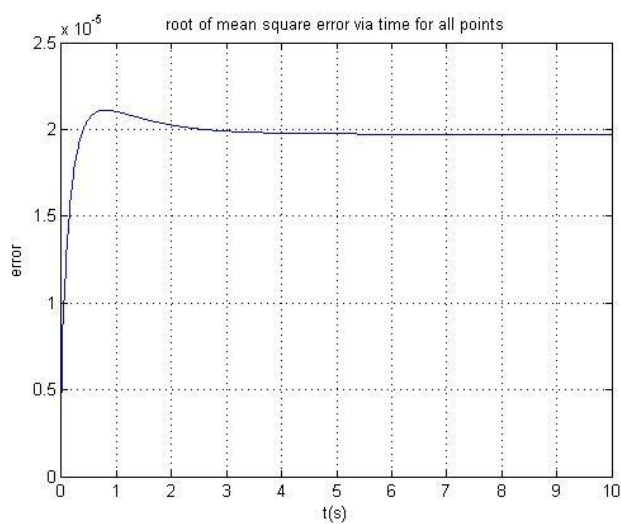
در آخرین مرحله از این فصل به منظور تکمیل محاسبات و تصویر دقیق تری از نتایج حاصل از برنامه نوشته شده، به ترسیم نمودارهای جذر حداقل مربعات خطا پرداخته ایم.

لذا در شکل (۶-۱۱) نمودار جذر حداقل مربعات خطا برای کلیه نقاط روی سطح با گذشت زمان ترسیم شده است. به منظور ترسیم این شکل، پس از یافتن دماهای سطح در هر بار تکرار، این دماها نسبت به دماها در تکرار قبل سنجیده می‌شوند. در ابتدا با توجه به تجمع خطاها در مراحل قبل با افزایش خطا مواجه هستیم ولی با گذشت زمان این سیر صعودی تقریباً تبدیل به خط با شیب صفر میشود. این امر حاکی از تغییرات دما با زمان و یکنواخت شدن این تغییرات است. (همانگونه که در واقعیت انتظار داریم).

این موضوع در شکل (۶-۱۲) نیز برای نقاط واقع در $x = 3/4$ و $x = 2$ های مختلف محاسبه و ترسیم شده است. در کلیه این شکلها محور طولی بیانگر تعداد تکرار در حوزه زمان است.



شکل ۶-۱۱ نمودار جذر حداقل مربعات خطا برای کلیه نقاط روی سطح با گذشت زمان

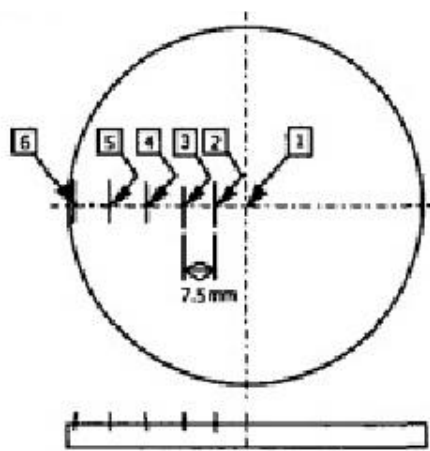


شکل ۶-۱۲ نمودار جذر حداقل مربعات خطا برای نقاط روی $X=3/4$ سطح با گذشت زمان

۱-۷ حل یک مسئله واقعی

در این فصل برآنیم تا با استفاده از روش عددی تفاضلات محدود فشرده و برنامه کامپیوتری ارائه شده در فصل های پیشین، به حل یک مسئله با استفاده از داده های واقعی، که از اندازه گیری دمای یک استوانه در خلال فرآیند سرد کردن جسم بدست آمده است پرداخته و به محاسبه شرایط مرزی برای مسئله معکوس آن پردازیم.

داده های واقعی که در حل این مسئله مورد استفاده قرار گرفته اند در ادامه این فصل آورده شده اند. داده های مورد نظر با استفاده از مقاله ای که توسط chia و همکارانش^{۴۸} نوشته شده استخراج شده است. ماده هدفمند مورد استفاده شامل سه لایه می باشد. ساختار لایه اول از نیکل، لایه دوم شامل ۷۵٪ نیکل و ۲۵٪ زرکونیوم و لایه آخر تنها از زرکونیوم تشکیل شده و خواص ماده در هر لایه یکسان می باشد. هندسه مورد بررسی استوانه ای به شعاع ۴۰ میلی متر و ارتفاع ۶ میلی متر می باشد. در شکل زیر سطح استوانه و محل قرار گیری سنسورها و فواصل آنها قابل مشاهده است.



تصویر ۱-۷: محل قرارگیری سنسورها و فواصل آنها [۴۸]

برای به دست آوردن خواص لایه ای که شامل هر دو ماده می باشد از روشی که در فصل های گذشته به آن اشاره شد استفاده کرده ایم:

$$\rho c = \rho_1 c_1 V_1 + \rho_2 c_2 V_2$$

۱-۷

$$V_2 = 1 - V_1$$

۲-۷

زیروند ۱ و ۲ مقادیر خواص را در فازهای ۱ و ۲ نمایش می دهد. V_2 و V_1 به ترتیب کسر حجمی فازهای ۱ و ۲ هستند.

در مدل میکرومکانیسم ناخالصی ها به صورت کروی در نظر گرفته شده و فرض می شود به صورت کروی توزیع شده اند. علاوه بر این فرض می شود از مواد همگن ساخته شده اند.

بنابراین ضریب مؤثر (k) از رابطه زیر که توسط $Hatta$ و $Taya$ بیان شده محاسبه می شود:

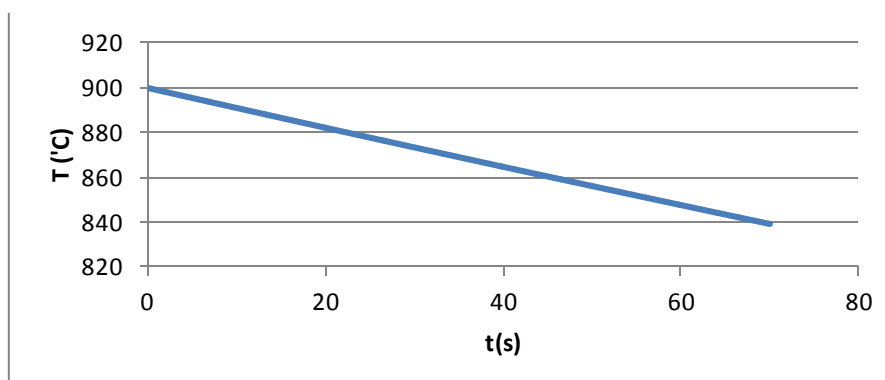
$$\frac{k - k_1}{k_2 - k_1} = \frac{V_2}{1 + (1 - V_2)(k_2 - k_1)/k_1}$$

۳-۷

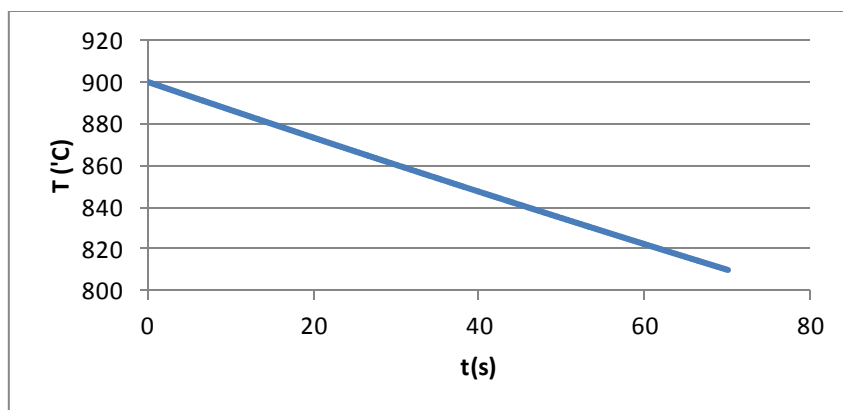
خواص حرارتی دو ماده نیکل و زرکونیوم در جدول زیر ارائه شده است:

جدول ۷-۱ خواص لایه های ماده هدفمند

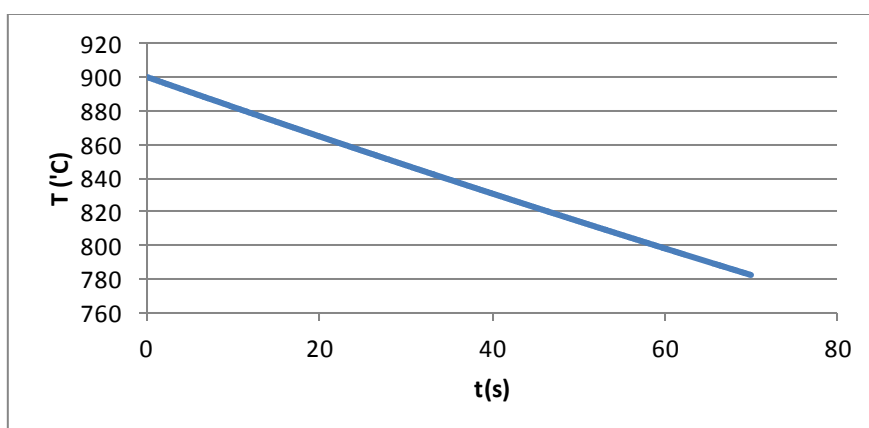
material	$\alpha(\frac{m^2}{s})$	$k(\frac{W}{m.K})$
Ni	23×10^{-6}	90.70
75% Ni, 25% Zr	19.18×10^{-6}	51.73
Zr	12.8×10^{-6}	22.6



تصویر ۲-۷: دمای درونیایی شده برای لایه اول



تصویر ۳-۷ : دمای درونیابی شده برای لایه دوم



تصویر ۴-۷ : دمای درونیابی شده برای لایه سوم

۲-۷ توضیح پیرامون برنامه کامپیوتری

در این قسمت توضیحاتی در خصوص برنامه کامپیوتری که برای حل ارائه شده و به نظر لازم می‌رسد ارائه می‌گردد. در گام نخست همانگونه که ملاحظه می‌شود داده‌های تجربی $T(t)$ ارائه شده برای لایه‌های مختلف نسبت به راستای طول میله (محور x) بدون تغییر می‌باشند که این امر در حالتی که از طول میله در مقابل قطر آن صرف‌نظر نمی‌گردد و در لحظات نخستین صادق نمی‌باشد.

در برنامه، داده های تجربی از یک فایل متنی خوانده می شود که این فایل نیز قبل از اجرای برنامه می بایست به همراه فایل برنامه در شاخه work نرم افزار MATLAB ذخیره گردد و سپس می توان به این فایل متنی داده های دیگری را اضافه یا کم نمود و یا اینکه آن را تغییر داد.

همچنین در برنامه با توجه به اینکه پخشندگی گرمایی (α) برای تمامی نقاط در یک لایه خاص ثابت است، لذا در برنامه مقدار آن از جداول انتقال حرارت، در نظر گرفته شده که برای سایر موارد می توان با مراجعه به برنامه مقدار آن را برای مواد دیگر تغییر داد.

توجه شود که (α) ، قابلیت هر ماده را برای رسانش انرژی گرمایی نسبت به قابلیت آن برای ذخیره انرژی گرمایی را می سنجد. مواد با (α) بزرگ در برابر تغییرات گرمایی محیط سریعاً واکنش نشان می دهند، در حالی که مواد با (α) کوچک با کندی بیشتری پاسخ می دهند و زمان بیشتری طول می کشد تا به حالت جدید تعادلی برسند. این امر در نتایج برنامه کامپیوتری ارائه شده نیز مشهود است.

در برنامه حاضر تغییرات در راستای طول $(0 \leq x \leq 2\pi)$ بوده که به ۴۰ قسمت تقسیم شده و تغییرات در راستای شعاع $(0 \leq r \leq 1)$ است و به ۴۰ قسمت تقسیم شده، به عبارت دیگر محاسبات برای ۱۶۰۰ گره انجام می پذیرد.

۳-۷ داده های تجربی

در جدول زیر داده های تجربی که به عنوان فایل ورودی در این قسمت برنامه از آنها استفاده شده است

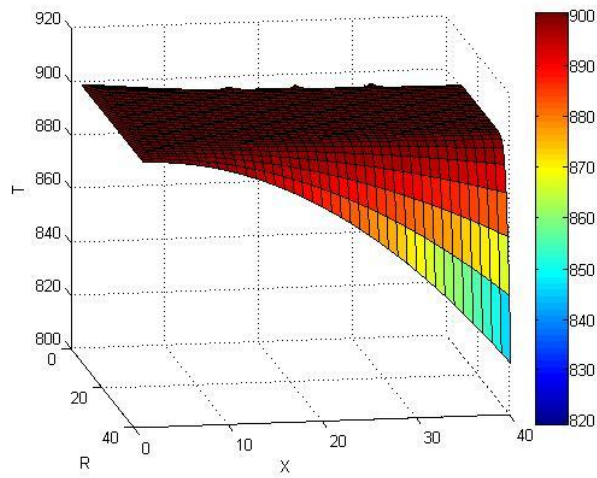
، ملاحظه می شود.

جدول ۲-۷ داده های تجربی دما - زمان برای ماده هدفمند

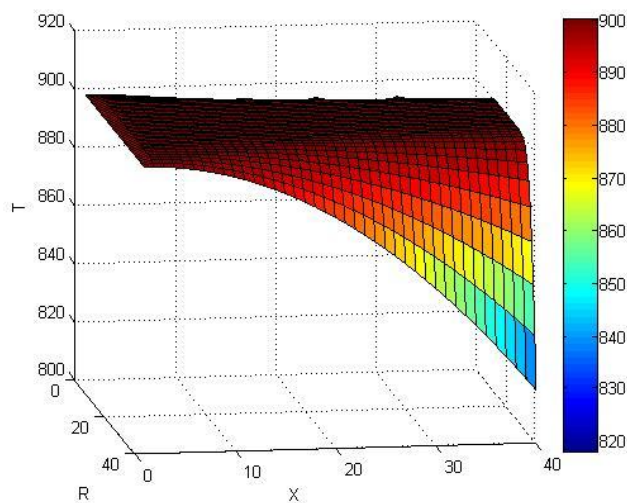
Time	Temperature (Lyer1)	Time	Temperature (Layer2)	Time	Temperature (Lyer3)
0	900	0	900	0	900
5	891	5	893	5	895
10	882	10	886	10	882
15	873	15	879	15	886
20	864	20	873	20	882
25	856	25	867	25	878
30	848	30	860	30	873
35	839	35	854	35	869
40	831	40	848	40	865
45	822	45	841	45	860
50	814	50	835	50	856
55	806	55	829	55	852
60	798	60	822	60	848
65	790	65	816	65	843
70	782	70	810	70	839

۴-۷ نتایج حاصل از داده های تجربی

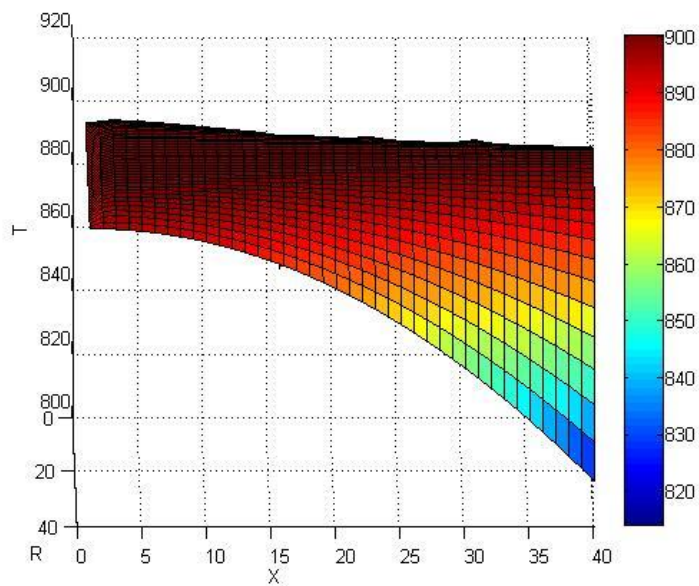
در ادامه نتایج بدست آمده از حل به کمک داده های تجربی برای جهت بررسی و مقایسه آورده شده اند.



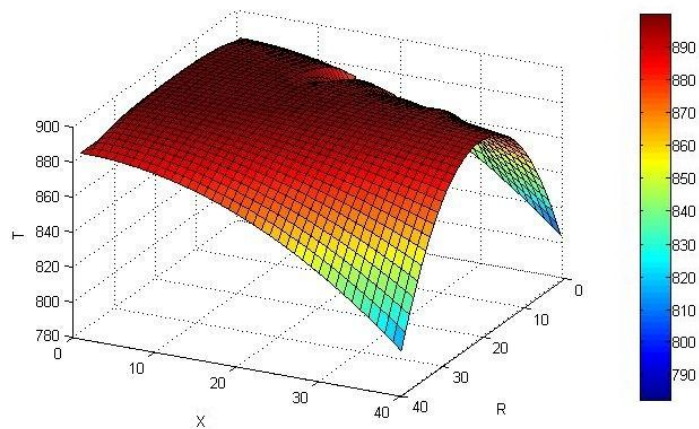
تصویر ۵-۷ کانتور دما برای کلیه نقاط در لحظه ($t=5$ s)



تصویر ۶-۷ کانتور دما برای کلیه نقاط در لحظه ($t=10$ s)



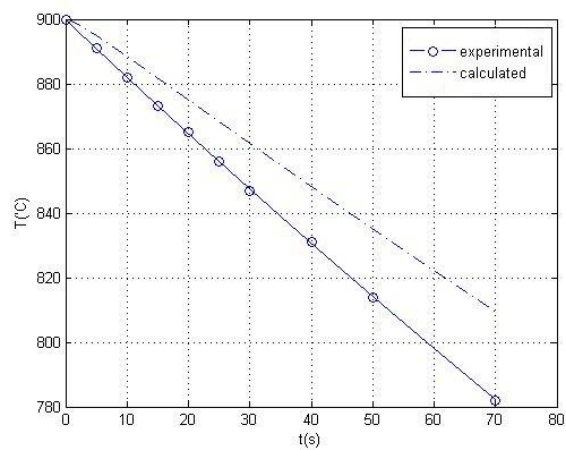
تصویر ۷-۷ کانطور دما برای کلیه نقاط در لحظه (t=30 s)



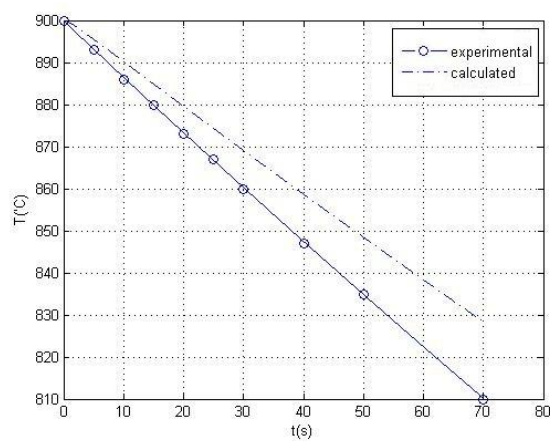
تصویر ۸-۷ کانطور دما برای کلیه نقاط در لحظه (t=70 s)

در ادامه نیز به منظور ارائه صحت محاسبات در روش حل معکوس به کمک کد نوشته شده، پس از گذشت زمان ۷۰ ثانیه به حل مستقیم مسئله پرداخته ایم. آنگاه با قراردادن این دماها به عنوان دماهای نخست و

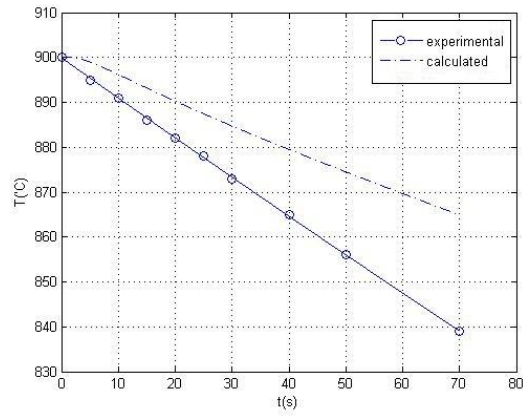
برگرداندن زمان به صفر دما در لایه های مختلف را یافتیم و درصد خطای دماها در حل مستقیم و معکوس با یکدیگر مقایسه و ترسیم گردیدند.



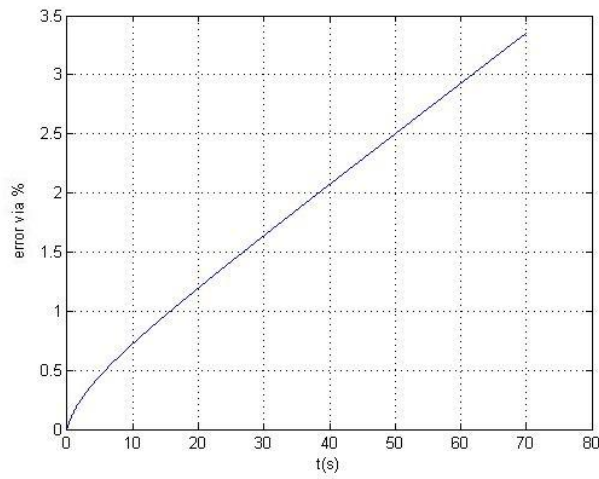
تصویر ۷-۹ دما برای لایه اول به صورت تجربی و محاسبه شده از حل معکوس



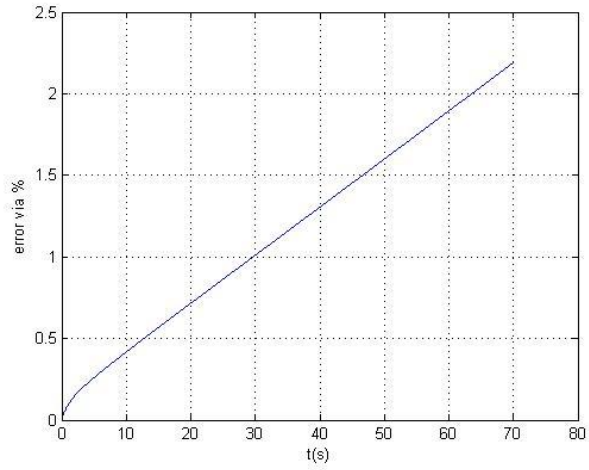
تصویر ۷-۱۰ دما برای لایه دوم به صورت تجربی و محاسبه شده از حل معکوس



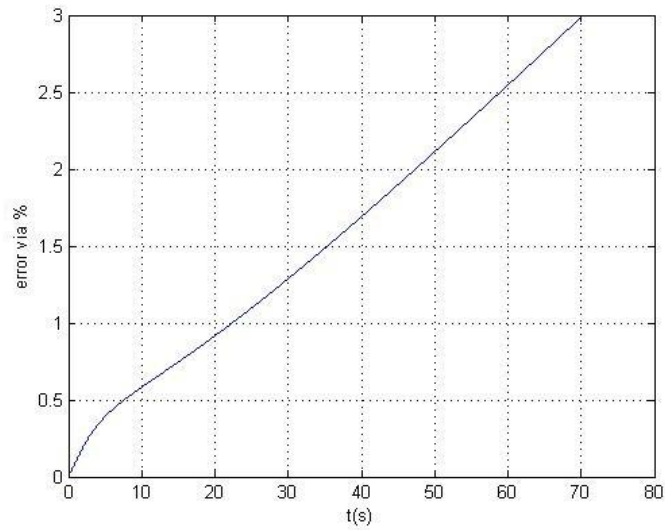
تصویر ۱۱-۷ دما برای لایه سوم به صورت تجربی و محاسبه شده از حل معکوس



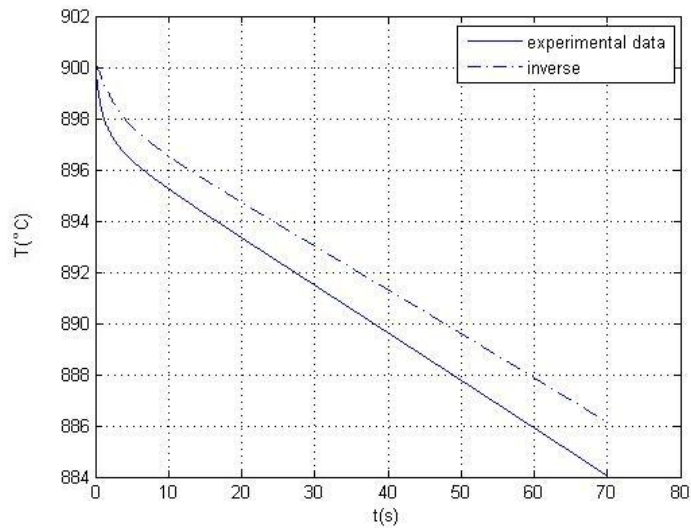
تصویر ۱۲-۷ درصد خطا میان دما به صورت تجربی و محاسبه شده از حل معکوس برای لایه اول



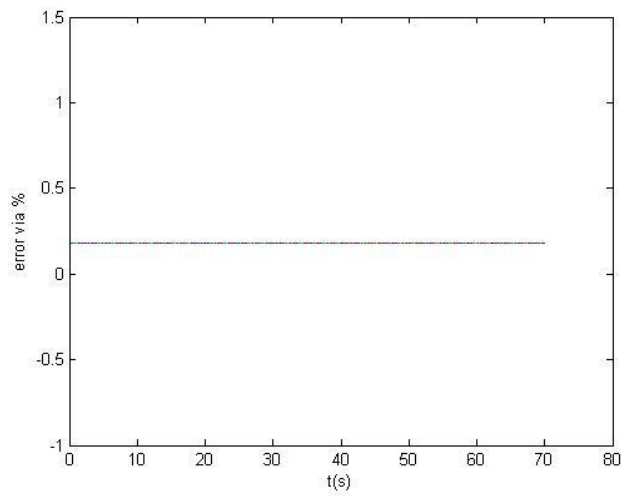
تصویر ۷-۱۳ درصد خطا میان دما به صورت تجربی و محاسبه شده از حل معکوس برای لایه دوم



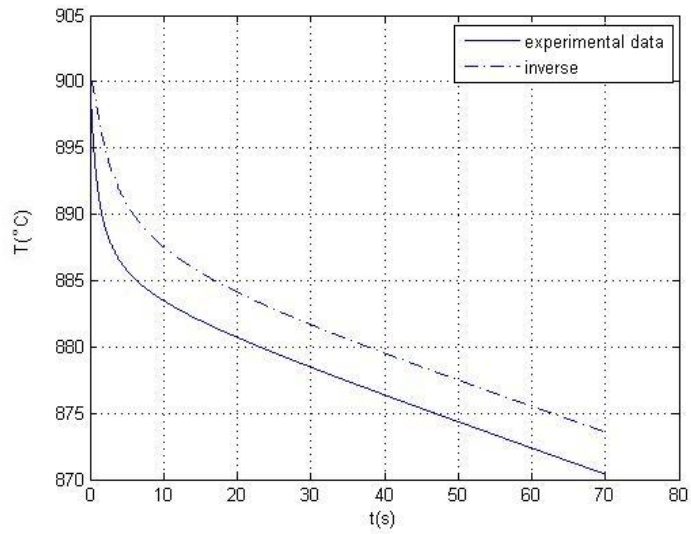
تصویر ۷-۱۴ درصد خطا میان دما به صورت تجربی و محاسبه شده از حل معکوس برای لایه سوم



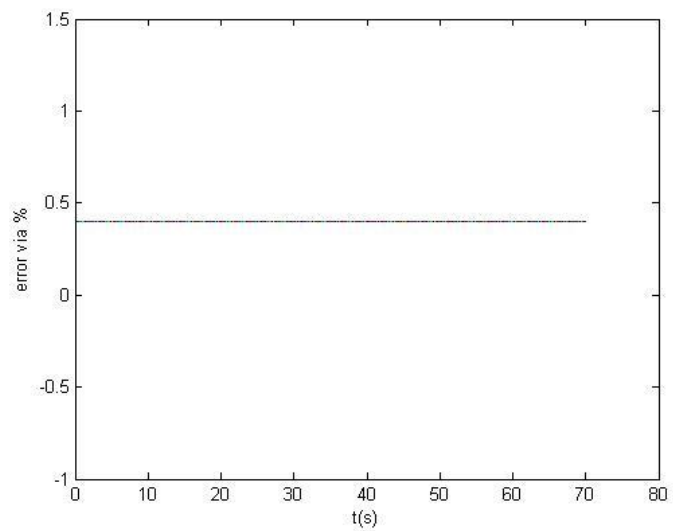
تصویر ۷-۱۵ دما برای $R = 9/2$ میلی متر به صورت تابعی از داده های تجربی و محاسبه شده از حل معکوس



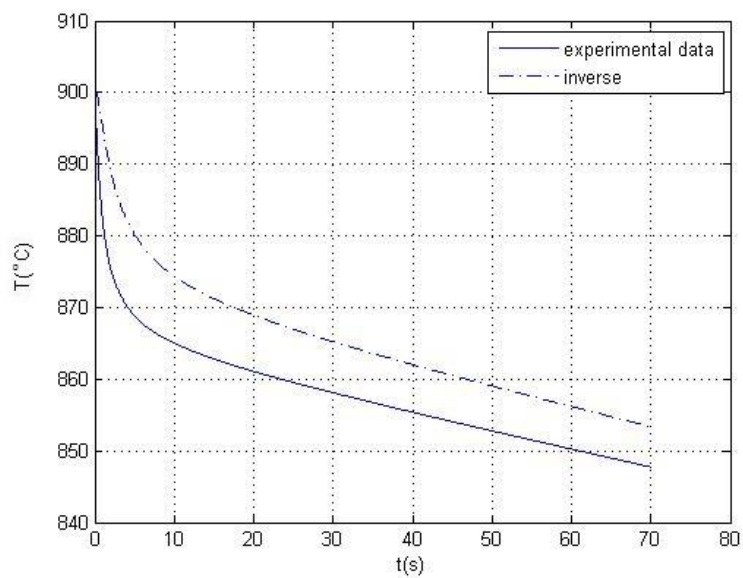
تصویر ۷-۱۶ نمودار خطا میان داده های تابعی از داده های تجربی و محاسبه شده از حل معکوس



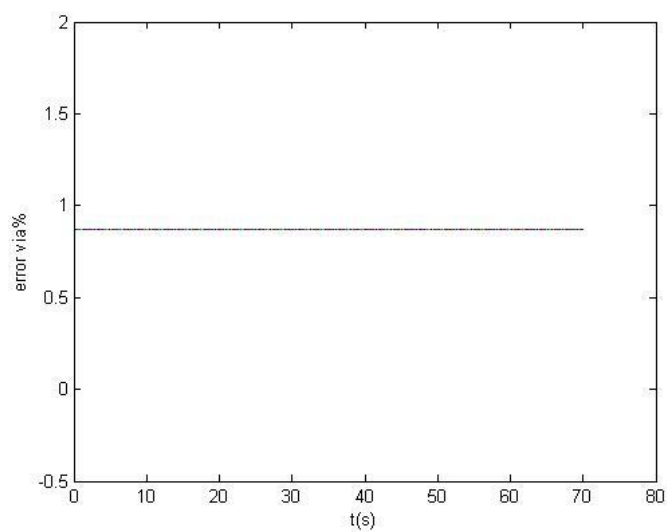
تصویر ۱۷-۷ دما برای $R=19/5$ میلی متر به صورت تابعی از داده های تجربی و محاسبه شده از حل معکوس



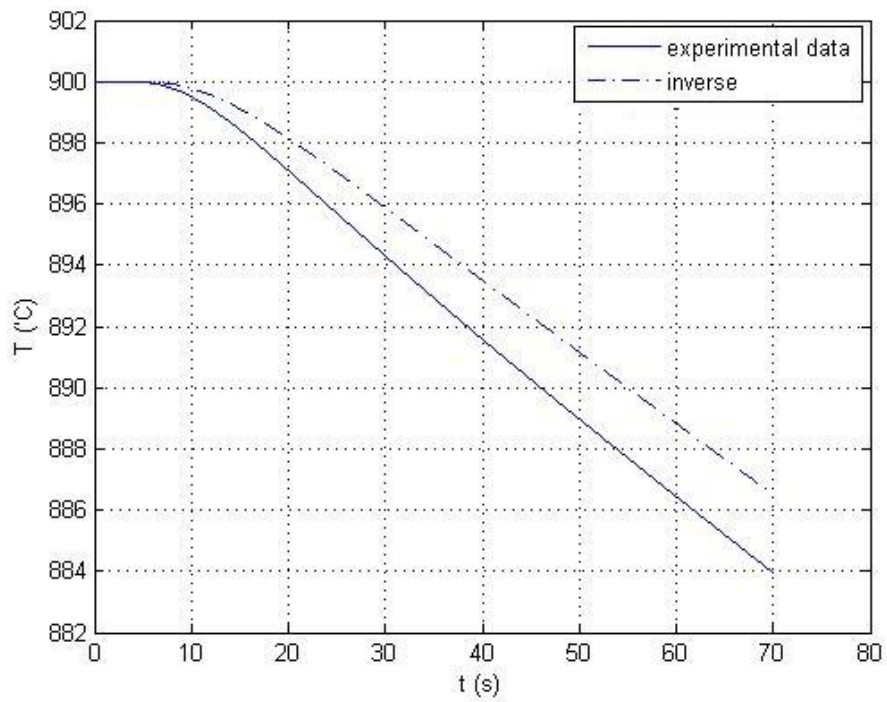
تصویر ۱۸-۷ نمودار خطا میان داده های تابعی از داده های تجربی و محاسبه شده از حل معکوس



تصویر ۱۹-۷ دما برای $R=29/7$ میلی متر به صورت تابعی از داده های تجربی و محاسبه شده از حل معکوس



تصویر ۲۰-۷ نمودار خطا میان داده های تابعی از داده های تجربی و محاسبه شده از حل معکوس



تصویر ۲۱-۷ دما برای لایه میان دوم و سوم به صورت تابع تحلیلی شده از داده های تجربی و محاسبه شده از حل معکوس

نتیجه گیری و پیشنهادات

اکنون در انتهای این پایان نامه به بیان نتایج حاصل پرداخته و در ادامه پیشنهاداتی نیز جهت ادامه عنوان می گردد.

مشاهده می شود که با گذشت زمان خطا افزایش می یابد که ناشی از اضافه شدن خطای محاسبات عددی با گذشت زمان می باشد، از طرفی برای لایه هایی که سنسور دمایی وجود نداشت با استفاده از یک تابع تحلیلی دماها با توجه به نمودار عبوری از داده ها تخمین زده شد که این امر می تواند بر خطای محاسبات بیفزاید.

در کلیه مراحل کوشش شد تا با استفاده از تاریخچه دما در لایه های مختلف استوانه و به روش حل معکوس، دما را متناسب با آن بدست آوریم و از آنجا که این تغییرات دما برحسب زمان ناشی از تغییرات دما بر حسب زمان در مرکز جسم است می توان اینگونه برداشت کرد که چنانچه شار گرمایی به گونه ای محاسبه گردد تا چنین تغییرات دمایی را در سطح میله ایجاد نماید به یقین در سراسر جسم تا مرکز، دما به گونه ای تغییر خواهد کرد که ساختار مورد نظر حاصل خواهد شد. برای تحقق این امر در گام های بعد می توان با نوشتن معادلات انتقال حرارت تشعشع و هدایت از سطح جسم تا محیط اطراف به این مهم دست یافت.

به عنوان پیشنهاد همانطور که می دانیم α با تغییرات دما تغییر می کند لذا در واقعیت با گذشت زمان با تغییرات آن مواجه هستیم به همین منظور با محاسبه آن برای زمانها در دماهای مختلف و جاگذاری در معادلات و تغییرات در برنامه کامپیوتری و محاسبه مجدد معادله انتقال حرارت می توان به نتایج دقیق تر و جدید تری دست یافت.

و در خاتمه و در کلی ترین حالت ممکن مسئله را برای یک جسم سه بعدی حل کرد که نیازمند حل معادلات پیچیده انتقال حرارت و سپس نوشتن برنامه کامپیوتری جهت محاسبات پیشرفته است که یقیناً دست نیافتنی نبوده و با سعی و تلاش امری ممکن خواهد بود.

Abstract

In this paper, a compact finite difference is used to solve the two-dimensional transient heat transfer equation in a cylindrical domain of a functionally graded material. By considering the temperature –time histories in some internal layers pertaining to FG layers and specifying the adiabatic condition in the center of cylinder, the inverse analysis is performed for whole of the domain including the external layer. The solution at the external layer is regarded as a boundary condition which can be imposed practically in heat treatment experiment.

The numerical results obtained for the layers appeared between the FG layers have been compared with experimental results. The experimental results are obtained using the curve fitting approach from the time –history results of the FG layers. The absolute of the maximum difference between the numerical results and the experimental one at each time step within the whole domain is regarded as a global error. It is a function of time and proportional to it. The results for temperature time histories at computational nodes are compared with that of experiments obtained using the curve fitting techniques from the measured data. The overall behavior is close together. The differences are due to experimental errors, approximations encountered and numerical errors.

- [1] Glaucio H. Paulino , Alok Sutradhar , L. J. Gray, 2002, Boundary Element Methods for Functionally Graded Materials, International Association for Boundary Element Methods, UT Austin, May 28-30.
- [2] J.Sladak ,V.Sladak, Ch.Zhang, 2003,Transient heat conduction analysis in functionally graded materials by the meshless local boundary integral equation method, Computational Materials Science 28,494-504.
- [3] Kyung- Su, Ji-Hawn Kim, 2006, Three-dimensional thermomechanical buckling analysis for functionally graded composite plates, Composite Structure 73, 413-422.
- [4] J.Sladek , V.Sladek, Ch.Hellmich , J. Eb, 2007, erhardsteiner, Heat conduction analysis of 3-D axisymmetric and anisotropic FGM bodies by meshless Petrov – Galerkin method , Comput. Mech. 39 , 323-333.
- [5] M.R Golbahar Haghighi, M.Eghtesad, P.Malekzadeh , 2008, Copled DQ –FE methods for two dimensional transient heat transfer analysis of functionally graded material, Energy Conversion and Management 49 , 995-1001.
- [6] M.R Golbahar Haghighi, M.Eghtesad, P.Malekzadeh , D.S.Necsulescu , 2009, Three – dimensional inverse transient heat transfer analysis of thick functionally graded plates, Energy Conversion and Management 50 , 450-457.
- [7] Mohammad Azadi , Mahboobeh Azadi, 2009, Nonlinear transient heat transfer and thermoelastic analysis of thick – walled FGM cylinder with temperature – dependet material properties using Hermitian transfinite element, Journal of Mechanical Science and Technology 23, 2635-2644.
- [8] A.M. Zenkour , M. Sobhy, 2010, Thermal buckling of various types of FGM sandwich plates, Composite Structures 93, 93-102.
- [9] Nilanjan Coomar, Ravikiran Kadoli, 2010, Comparative analysis if state heat transfer in TBC and functionally graded air cooled gas turbine blade, sadhana 35, 1-17.
- [10] Afshin Taghvaeipour, Mohammad Bonakdar, M.T. Ahmadian, 2011, Application of a new cylindrical element formulation in finite element structural analysis of FGM hollow cylinders, Finite Elements in Analysis and Design.
- [11] Karnataka, Surathkal, Srinivasnagar, 2010, Comparative analysis of steady sate heat transfer in a TBC and functionally graded air cooled gas turbine blade. Sadhana Vol.35, part1.
- [12] F.Z. Li, C.F. Shih , A. Needleman, 1985, A comparison of methods for calculating energy release rates, Engng Fracture Mech. 21 , 405–421.

- [13] *Rousseau, C.E. , Tippur, H.V.* 2002, Evaluation of Crack-tip Fields and stress intensity factors in Functionally Graded *Thick* Rectangular Plates, *AIAA Journal* 40, 1421–1433
- [14] *Tutuncu, Naki and Ozturk, Murat,* 2001 ,*Exact solutions for stresses in functionally graded pressure vessels*, *Composites: Part B* 32 ,683-686.
- [15] J.F. Durodola and O. Attia, 2000, Deformation and stresses in FG rotating disks, *Compos Sci Technol* 60, 987–995.
- [16] M. Ruhi, A. Angoshtari and R. Naghdabadi, 2005, Thermoelastic analysis of thick-walled finite-length cylinders of functionally graded materials, *J Thermal Stresses* 28 , 391–408.
- [17] N.V.Shumakov, 1957, A Method for the Experimental Study of the Process of Heating in Solid Body, *Soviet Physics Technical Physics* ,Vol.2,771-775.
- [18] G. Jr. Stolz, 1960, Numerical Solution to an Inverse Problem of Heat Conduction for Simple Shape, *J. Heat Transfer*, Vol.82, 20-26.
- [19] T.J. Mirsepassi, 1959, Heat-Transfer Charts of Time-Variable Boundary Conditions, *Br Chem.Eng.*4, 130-136.
- [20] T.J. Mirsepassi, 1959, Graphical Evaluation of a Convolution Integral, *Math. Tables Other Aides Comput.*13, 202-212.
- [21] B.F. Blackwell, 1986, A New Iterative Technique for Solving the Implicit Finite Difference Equation for the Inverse Problem of Heat Conduction, unpublished technical report, Sandia Laboratories, Albuquerque.
- [22] B.F. Blackwell, 1981, An Efficient Technique for the numerical Solution for the One Dimensional Inverse Problem of Heat Conduction, *Heat Transfer.*4,229-239.
- [23] M. Imber, 1973, A Temperature Extrapolation Method for hollow Cylinders, *AIAA J.*11, 117-118.
- [24] J.V. Beck, 1962, Calculation of Surface Heat Flux from an Internal Temperature History, *ASME paper* 62 HT-40.
- [25] J.V. Beck, 1968, Surface Heat Flux Determination Using an Internal Method, *Nucl.Eng. Des*, Vol.7, 170-178.
- [26] J.V. Beck, B. Blackwell, 1985, C.R. Clair, *Inverse Heat Conduction ill-Posed Problem*, A Wiley.
- [27] O.M. Alifanov, 1974, Solution of an Inverse Problem of Heat Conduction by Iteration Method, *J.Eng, Physics.*26, 471-476.
- [28] O.M. Alifanov, 1994, *Inverse Heat Transfer Problems*, Springer Verlag, Berlin.

- [29] Y. Jarny, M.N. Ozisk, J.P. Bardon, 1991, A General Optimization Method Using Adjoint Equation for Solving Multi Dimensional Inverse Heat Conduction, *Int.J. Heat & Mass Transfer*.34, 2911-2919.
- [30] Cheng-Hung Huang, Shao-Pie Wang, 1999, A Three Dimensional Inverse Heat Conduction Problem in Estimating Surface Heat Flux by Conjugate Gradient, *Int.J. Heat & Mass Transfer*.42, 3387-3408.
- [31] Xiang Xue, 2003, Improvement of Heat Conductance Estimation with Applications to Metal Casting, Department of Mechanical Engineering, Mississippi State.
- [32] K.A. Woodbury, Quanoeng Ke, 1999, A Boundary Inverse Heat Conduction Problem With Phase Change for Moisture-Bearing Porous Medium, Conference on Inverse Problem in Engineering, June 13-18, Port Ludlow.
- [33] Abdollah Shidfar, Ali Zakeri, 2005, A numerical technique for backward inverse heat conduction problem in one-dimensional space, *Applied Mathematics and Computation*.171, 1016-1024.
- [34] A. Shidfar, G.R. Karmali, J. Damirchi, 2006, An inverse heat conduction problem with a nonlinear source term, *Nonlinear Analysis*.65, 615-621.
- [35] A.N. Tikhonov, V.Y. Arsenin, 1977, *Solution of Ill-Posed Problems*, Winston & Sons, Washington.
- [36] A. Chakib, T. Ghemires, A. Nachuui, 2002, An Optimal Shape Design Formulation for Inhomogeneous dam Problems, *Mathematical Methods Appl, Sci*.25, 473-489.4
- [37] L. Rondi, 1999, Optimal Stability Estimates for Determination of Defect by Electrostatic Measurements, *Inverse Problems*.15, 1193-1212.
- [38] Y.C. Hon, Z. Wu, 2000, A Numerical Computation for Inverse Boundary determination Problem, *Engrg. Anal. Bound. Elem.*24, 599-606.
- [39] K.J. Shorek, 1993, Applying The Least Squares Adjustment Technique for Solving Inverse Boundary Heat Conduction Problems, *Numerical Method in Thermal Problems*.
- [40] T.R. Hsu, N.S. Sun, G.G. Chen, 1992, Finite Element Formulation for Two- Dimensional Inverse Heat Conduction Analysis, *Journal of Heat Transfer*.114, 553-557.
- [41] A.N. Thikhonov, V.D. Kalner, V.B. Glasko, 1990, *Mathematical Modeling of Technology Processes and Inverse Problems in Mathematical Engineering*, Mashinostroieni-Moscow.
- [42] K. Kurpisz, A.J. Newak, 1995, *Inverse Thermal Problems*, Computational Mechanics Publications.

[43] اسدا... روشنایی ده، ۱۳۷۲، تحلیل مسئله هدایت حرارتی معکوس غیر خطی در نازل موشک با استفاده از روش اجزا محدود، پایان نامه کارشناسی ارشد دانشکده فنی تهران.

[44] حمیدرضا قدمیاری، ۱۳۸۳، تخمین مکان و شکل بهینه مرز مسیره‌های خنک کاری در پره های توربین گازی به روش هدایت حرارتی معکوس، پایان نامه کارشناسی ارشد دانشکده فنی تهران.

[45] علی دولت آبادی، ۱۳۸۱، تحلیل معکوس جهت تخمین درجه حرارت ورودی یک کانال با سطح موازی، پایان نامه کارشناسی ارشد دانشکده فنی تهران.

[46] علی بهبهانی نیا، ۱۳۷۹، حل مسئله هدایت حرارتی معکوس با استفاده از روش تخمین متوالی توابع و تقابل دوگانه المان های مرزی، پایان نامه دکترای دانشکده فنی تهران.

[47] علیرضا پور شقاقی، ۱۳۸۴، حل مسئله هدایت حرارتی معکوس با استفاده از روش میزان متغیر، ، پایان نامه دکترای دانشکده فنی تهران.

[48] C.T. Chia, K.A. Khor, H.W. Ng, L. Fu, 2001, Thermal Shock Characteristics of Functionally Graded Thermal Barrier Coatings, Published by ASM International, Materials Park, Ohio.

[49] Hatta H, Taya M, 1985, Effective thermal conductivity of misprinted short fiber composite Appl Phys 58, 2478-2486