

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک

رشته مهندسی مکانیک گرایش طراحی کاربردی

رساله دکتری

تحلیل ترموالاستیک ورق‌های نامحدود کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های
کربنی تابعی دارای گشودگی بیضوی تحت بار کششی یکنواخت

نگارنده: وحید ضیغمی

استاد راهنما:

دکتر محمد جعفری

اسفند ۱۴۰۰

شماره: ۱۲۲ / ۱۴۰۱

تاریخ: ۱۴۰۱ / ۳ / ۱۰

ویرایش:

باسمه تعالی



مدیریت تحصیلات تکمیلی

پیوست شماره ۲

دانشکده: مهندسی مکانیک و مکاترونیک

گروه: جامدات و طراحی کاربردی

رساله دکتری آقای وحید ضیغمی

تحت عنوان: تحلیل ترموالاستیک ورقهای نامحدود کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تابعی دارای گشودگی

بیضوی تحت بار کششی یکنواخت

در تاریخ ۱۴۰۰/۱۲/۰۵ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک رساله دکتری ارزیابی گردید و با درجه

عالی مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید راهنما
	نام و نام خانوادگی: دکتر محمد جعفری

امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید ناظر
	نام و نام خانوادگی: دکتر سید مهدی حسینی فراش		نام و نام خانوادگی: دکتر مهدی قناد کپتونی
			نام و نام خانوادگی: دکتر علیرضا شاطرزاده
			نام و نام خانوادگی: دکتر محمد شرعیات

تقدیم اثر

به همسر م:

که سایه مهربانش سایه ساز زندگی من می باشد، او که اسوه شکیبایی و بردباری است و دشواری های مسیر را برایم آسان نمود. بسیاری از زمان هایی که صرف این رساله گردید تعلق دارد به ایشان که همواره متحمل زحمت بود و تکیه گاه من در مواجهه با مشکلات، و وجودش مایه دلگرمی من می باشد.

به یاد پدرم و مادرم،

غروب کردند اما عاشقانه ایستادگی و مهر در عرصه زندگی را به من آموختند.

آفتاب محبتتان در قلمم تا ابد پابرجاست.

سپاس و قدردانی

باسپاس و قدردانی شایسته از استاد فرهیخته جناب آقای دکتر محمد جعفری (استاد راهنما)

که همواره راهنما و راه‌گشای بنده در به نتیجه رساندن این رساله بوده است.

همیشه به یاد خواهم داشت در روزهای سخت که در مسیر این رساله وجود داشت کلام کرم و همراهی بی‌بدیل شما را هکشتای مسیر بود.

پایان نامه

اینجانب وحید ضیغمی دانش‌آموخته دوره دکتری رشته مهندسی مکانیک-طراحی کاربردی دانشکده مهندسی مکانیک و مکترونیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده رساله تحلیل ترموالاستیک ورق‌های نامحدود کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تابعی دارای گشودگی بیضوی تحت بار کششی یکنواخت تحت راهنمایی دکتر محمد جعفری متعهد می‌شوم.

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان‌نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود . استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان‌نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

پیچیدگی ساختاری صنایع با تکنولوژی برتر اغلب با ترکیبی از بارهای حرارتی، مکانیکی و ضعف‌های هندسی به خطر می‌افتد. استفاده از مواد نسل جدید و مهندسی ساختار مواد از جمله تکنیک‌هایی است که مهندسان برای از بین بردن این اثرات به کار می‌برند. در این رساله، با توسعه روش متغیر مختلط لخنیتسکی بر اساس استفاده از تابع نگاشت، مفهوم مواد تابعی و تابع تحلیلی در قالب سری لوران، یک راه حل جامع به منظور تحلیل ترموالاستیک ورق کامپوزیتی تقویت شده با توزیع تابعی نانولوله کربنی که دارای گشودگی بیضوی در مرکز است، استخراج شده است. نانورق کامپوزیتی بدلیل نوع چیدمان نانولوله‌های کربنی نامتقارن است و تحت تنش کششی دو محوره و شار حرارتی یکنواخت از راه دور قرار می‌گیرد. فرضیات مساله شامل تنش صفحه‌ای، عاری بودن مرز گشودگی از بار خارجی، عایق بودن مرز گشودگی و بی‌نهایت بودن ورق نانوکامپوزیتی است. همچنین شرایط مرزی مکانیکی و نیومن برای مساله لحاظ شده است. از مقایسه نتایج حاصل از قانون اختلاط ساده توسعه یافته و نتایج شبیه‌سازی دینامیک مولکولی موجود برای تخمین دقیق خواص مواد تابعی در راستای ضخامت استفاده شده است. برای اعتبارسنجی روش حل شده از انطباق با نتایج حل اجزای محدود در نرم افزار آباکوس و همچنین نتایج تحلیل الاستیک کامپوزیت چندلایه نامتقارن در مراجع استفاده شده است. اثر خواص مواد نانورق تابعی، شرایط شار حرارتی و دو پارامتر مؤثر بر شکل سوراخ بیضوی بررسی شده است. در طول تجزیه و تحلیل پارامتری حاضر، نتایج به وضوح نشان می‌دهند که پارامترها هر یک ابزار قابل اعتمادی را برای طراحان فراهم می‌کنند تا بر نتایج تنش و گشتاور تأثیر بگذارند و تنش‌های نامطلوب را به حداقل برسانند. بدلیل جامع بودن روش تحلیلی، از آن می‌توان برای تحلیل مسائل مشابه تحلیل الاستیک، حرارتی و ترموالاستیک در صفحات تابعی و کامپوزیت‌های چند لایه نامتقارن نیز استفاده کرد.

کلمات کلیدی: نانورق تابعی سوراخدار، روش متغیر مختلط، تحلیل ترموالاستیک، ورق نانوکامپوزیت نامتقارن

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

- 1- Zeighami, V., Jafari, M. Thermal stress analysis of perforated unsymmetric FG-CNTRC plate using a general analytical solution. *Thin-Walled Structures*. (2022). <https://doi.org/10.1016/j.tws.2022.108956>
- 2- Zeighami, V., Jafari, M. A closed-form solution for thermoelastic stress analysis of perforated asymmetric functionally graded nanocomposite plates. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. (2022). <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2022.103251>
- 3- Zeighami, V., Jafari, M. Stress analysis of perforated composite plates reinforced with carbon nanotubes with different distributions. *Emergent Materials*. (2021). <https://doi.org/10.1007/s42247-021-00191-9>

فهرست مطالب

ک	فهرست جداول
ل	فهرست اشکال
ن	فهرست نشانه‌ها
۱	فصل ۱: پیشینه پژوهش
۲	۱-۱ دیباچه
۴	۲-۱ آرمان پژوهش و انگاره‌ها
۶	۳-۱ قالب‌بندی رساله نگارش شده
۷	۴-۱ نانولوله‌های کربنی
۹	۵-۱ کامپوزیت‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی
۱۰	۶-۱ نانو کامپوزیت‌های تابعی
۱۲	۷-۱ صفحات دارای گشودگی
۱۲	۱-۷-۱ تحلیل تنش در صفحات همسانگرد دارای گشودگی
۱۴	۲-۷-۱ تحلیل تنش در صفحات ناهمسانگرد دارای گشودگی
۱۷	فصل ۲: روابط حاکم بر روش حل تحلیلی
۱۸	۱-۲ دیباچه
۱۸	۲-۲ مفروضات حاکم بر مساله
۱۹	۳-۲ خواص مواد ورق کامپوزیتی تقویت شده با توزیع تابعی نانولوله‌های کربنی
۲۲	۴-۲ روابط حاکم بر نانوورق تابعی
۲۲	۱-۴-۲ مفروضات
۲۳	۲-۴-۲ میدان جابه‌جایی و کرنش

۲۴	روابط ساختاری تنش- کرنش در نانورق تک لایه.....
۲۶	۴-۴-۲ معادلات ساختاری نانورق تابعی.....
۳۲	۵-۴-۲ مطالعه اثر میدان دمایی بر نانورق تابعی.....
۳۷	۵-۲ نگاشت همنوا.....
۳۹	۶-۲ محاسبه توابع پتانسیل مختلط در صفحه نگاشت.....
۳۹	۱-۶-۲ حل عمومی توابع پتانسیل.....
۴۶	۲-۶-۲ تابع پتانسیل ناشی از کشش در بی‌نهایت در ورق سوراخدار.....
۴۸	۳-۶-۲ تابع پتانسیل ناشی از شار حرارتی یکنواخت در بی‌نهایت در ورق سوراخدار.....
۵۰	۷-۲ الگوریتم حل تحلیلی حاکم.....
۵۲	۸-۲ خواص مواد.....
۵۴	۹-۲ اعتبارسنجی روابط.....

فصل ۳: تحلیل نتایج تنش حرارتی

۶۱	
۶۲	۱-۳ دیباچه.....
۶۲	۲-۳ نتایج.....
۶۳	۱-۲-۳ تاثیر کسر حجمی نانولوله‌های کربنی.....
۶۵	۲-۲-۳ تاثیر زاویه چینش نانولوله‌های کربنی (α).....
۷۰	۳-۲-۳ تاثیر زاویه شار حرارتی (γ).....
۷۵	۴-۲-۳ تاثیر کشیدگی گشودگی (e).....
۷۹	۵-۲-۳ تاثیر زاویه چرخش گشودگی (β).....
۸۳	۳-۳ نتیجه‌گیری.....

فصل ۴: تحلیل نتایج ترموالاستیک

۸۵	
۸۶	۱-۴ دیباچه.....

۲-۴ نتایج ۸۶

۱-۲-۴ تاثیر کسر حجمی نانولوله‌های کربنی ۸۷

۲-۲-۴ تاثیر زاویه چینش نانولوله‌های کربنی (α) ۸۹

۳-۲-۴ تاثیر زاویه شار حرارتی (γ) ۹۷

۴-۲-۴ تاثیر زاویه چرخش گشودگی (β) ۱۰۰

۳-۴ نتیجه‌گیری ۱۰۲

فصل ۵ نتیجه‌گیری ۱۰۳

۱-۵ نتیجه‌گیری ۱۰۴

۲-۵ پژوهش‌های آتی ۱۰۵

مراجع ۱۰۶

فهرست جداول

- جدول ۱-۲: خواص مواد بستر پلیمری نانورق کامپوزیتی ۵۲
- جدول ۲-۲: خواص مواد نانولوله‌های کربنی تک جداره ۵۲

فهرست اشکال

- شکل (۱-۲): نانورق تابعی دارای گشودگی بیضوی تحت تنش کششی دو محوره و شار حرارتی یکنواخت ۱۹
- شکل (۲-۲): هندسه قبل و بعد از تغییر شکل یک لبه از نانورق تحت فرضیات تئوری کیرشهف .. ۲۲
- شکل (۳-۲): مدل شماتیک یک ماده تابعی (الف) تغییر پیوسته کسر حجمی (ب) تغییر قطعه‌ای کسر حجمی ۲۵
- شکل (۴-۲): نگاشت هم‌نوا ۳۸
- شکل (۵-۲): ناحیه محدود s^+ و نامحدود s^- اطراف ناحیه s گشودگی ۴۳
- شکل (۶-۲): هندسه و ساختار مش‌بندی در نرم‌افزار آباکوس ۵۵
- شکل (۷-۲): نمودار همگرایی منته‌ت‌ن‌ش تحت بارگذاری کششی بر اساس مش‌بندی اطراف گشودگی دایروی ۵۶
- شکل (۸-۲): نمودار همگرایی منته‌ت‌ن‌ش تحت بارگذاری حرارتی بر اساس مش‌بندی اطراف گشودگی دایروی ۵۶
- شکل (۹-۲): مقایسه منته‌ت‌ن‌های تنش و گشتاور اطراف گشودگی دایروی حاصل از حل حاضر و حل اجزای محدود تحت بار کششی یکنواخت ۵۷
- شکل (۱۰-۲): مقایسه منته‌ت‌ن‌های تنش و گشتاور حرارتی اطراف گشودگی دایروی به دست آمده از حل حاضر و حل اجزای محدود تحت شار حرارتی یکنواخت ۵۹
- شکل (۱۱-۲): مقایسه منته‌ت‌ن‌های تنش و گشتاور الاستیک اطراف گشودگی دایروی در کامپوزیت چندلایه نامتقارن $[45/-45]_T$ به دست آمده از حل حاضر و مرجع [۱۰۳] ۵۹
- شکل (۱-۳): منته‌ت‌ن‌های تنش و گشتاور حرارتی اطراف گشودگی دایروی نانورق تابعی در کسر حجمی‌های متفاوت ۶۴
- شکل (۲-۳): تاثیر زاویه چینش نانولوله‌های کربنی (α) بر منته‌ت‌ن‌های تنش و گشتاور حرارتی در کشیدگی‌های متفاوت (e) ۶۷
- شکل (۳-۳): تاثیر زاویه چینش نانولوله‌های کربنی (α) بر منته‌ت‌ن‌های تنش و گشتاور حرارتی در زوایای مختلف شار حرارتی (γ) ۶۸
- شکل (۴-۳): تاثیر زاویه چینش نانولوله‌های کربنی (α) بر منته‌ت‌ن‌های تنش و گشتاور حرارتی در زوایای مختلف چرخش گشودگی (β) ۶۹
- شکل (۵-۳): تاثیر زاویه اعمال شار حرارتی (γ) بر منته‌ت‌ن‌های تنش و گشتاور حرارتی در کشیدگی‌های متفاوت (e) ۷۲
- شکل (۶-۳): تاثیر زاویه اعمال شار حرارتی (γ) بر منته‌ت‌ن‌های تنش و گشتاور حرارتی در زوایای مختلف نانولوله‌های کربنی (α) ۷۳

شکل (۷-۳): تاثیر زاویه اعمال شار حرارتی (γ) بر منته‌های تنش و گشتاور حرارتی در زوایای مختلف چرخش گشودگی (β)	۷۴
شکل (۸-۳): تاثیر کشیدگی گشودگی (e) بر منته‌های تنش و گشتاور حرارتی در زوایای مختلف نانولوله‌های کربنی (α)	۷۶
شکل (۹-۳): تاثیر کشیدگی گشودگی (e) بر منته‌های تنش و گشتاور حرارتی در زوایای مختلف شار حرارتی (γ)	۷۷
شکل (۱۰-۳): تاثیر کشیدگی گشودگی (e) بر منته‌های تنش و گشتاور حرارتی در زوایای مختلف چرخش گشودگی (β)	۷۸
شکل (۱۱-۳): تاثیر کشیدگی گشودگی (e) بر منته‌های تنش و گشتاور حرارتی در زوایای مختلف نانولوله‌های کربنی (α)	۸۰
شکل (۱۲-۳): تاثیر کشیدگی گشودگی (e) بر منته‌های تنش و گشتاور حرارتی در زوایای مختلف شار حرارتی (γ)	۸۱
شکل (۱۳-۳): تاثیر کشیدگی گشودگی (e) بر منته‌های تنش و گشتاور حرارتی در زوایای مختلف چرخش گشودگی (β)	۸۲
شکل (۱-۴): منته‌های تنش و گشتاور ترموالاستیک اطراف گشودگی دایروی نانورق تابعی در کسر حجمی‌های متفاوت	۸۸
شکل (۲-۴): تاثیر زاویه چینش نانولوله‌های کربنی (α) بر منته‌های تنش و گشتاور ترموالاستیک بی‌بعد در کشیدگی‌های متفاوت (e)	۹۰
شکل (۳-۴): توزیع منته‌های تنش و گشتاور بی‌بعد ترموالاستیک اطراف گشودگی بیضوی ($e = 0.5, 1, 1.5$) در نانورق تابعی ($\alpha = \gamma = 90^\circ$ و $\beta = 0^\circ$)	۹۱
شکل (۴-۴): تاثیر زاویه چینش نانولوله‌های کربنی (α) بر منته‌های تنش و گشتاور ترموالاستیک بی‌بعد در زوایای مختلف شار حرارتی (γ)	۹۳
شکل (۵-۴): توزیع منته‌های تنش و گشتاور بی‌بعد ترموالاستیک اطراف گشودگی دایروی در نانورق تابعی ($\alpha = 90^\circ$ و $\gamma = 0^\circ; 45^\circ; 90^\circ$)	۹۴
شکل (۶-۴): تاثیر زاویه چینش نانولوله‌های کربنی (α) بر منته‌های تنش و گشتاور ترموالاستیک بی‌بعد در زوایای مختلف چرخش گشودگی (β)	۹۶
شکل (۷-۴): تاثیر زاویه اعمال شار حرارتی (γ) بر منته‌های تنش و گشتاور ترموالاستیک بی‌بعد در کشیدگی‌های متفاوت (e)	۹۸
شکل (۸-۴): تاثیر زاویه اعمال شار حرارتی (γ) بر منته‌های تنش و گشتاور ترموالاستیک بی‌بعد در زوایای مختلف چرخش گشودگی (β)	۹۹
شکل (۹-۴): تاثیر زاویه چرخش گشودگی (β) بر منته‌های تنش و گشتاور ترموالاستیک بی‌بعد در کشیدگی‌های متفاوت (e)	۱۰۱

فهرست نمادها

$E_{11}(z); E_{22}(z), G_{12}(z), G_{13}(z), G_{23}(z)$	مدول‌های الاستیک و برشی نانوصفحه تابعی
z	مختصات در جهت ضخامت
$E_{11}^{CNT}, E_{11}^{CNT}, E_m$	مدول الاستیک نانولوله‌های کربنی و بستر پلیمری
G_{12}^{CNT}, G_m	مدول برشی نانولوله‌های کربنی و بستر پلیمری
V_{CNT}, V_m	کسر حجمی نانولوله‌های کربنی و بستر پلیمری
$\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$	ضرایب تاثیر نانولوله‌های کربنی
h	ضخامت نانورق تابعی
ω_{CNT}	کسر جرمی نانولوله‌های کربنی
ρ^{CNT}, ρ^m	چگالی نانولوله‌های کربنی و بستر پلیمری
$\alpha_{11}^{CNT}; \alpha_{22}^{CNT}, \alpha^m, \alpha_{11}; \alpha_{22}$	ضرایب انبساط حرارتی نانولوله‌های کربنی، بستر پلیمری و نانورق تابعی
$\nu_{12}^{CNT}, \nu^m, \nu_{12}(z)$	نسبت پواسون نانولوله‌های کربنی، بستر پلیمری و نانورق تابعی
$K_i^{CNT}, K^m, K_i \ (i = 11, 22)$	ضرایب هدایت حرارتی نانولوله‌های کربنی، بستر پلیمری و نانورق تابعی
l	نسبت طول به قطر نانولوله‌های کربنی L/d
R_k	مقاومت حرارتی بین نانولوله-های کربنی و بستر پلیمری
Z	مختصات مختلط (سیستم مختصات در صفحه ζ)
$\delta_{1l}, \delta_{2l} \ (l = 1, 2, 3, 4, t)$	ثوابت تابع نگاشت
$\tau_l \ (l = 1, 2, 3, 4, t)$	پارامترهای مختلط
λ	ثابت تابع نگاشت
e	کشیدگی گشودگی
$\zeta = e^{i\theta}$	دایره واحد
$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$	مولفه‌های تنش
$\varepsilon_{xx}^0, \varepsilon_{xx}^0, \gamma_{xx}^0$	مولفه‌های کرنش صفحه میانی
k_{xx}, k_{yy}, k_{xy}	مولفه‌های انحنای صفحه
$\alpha_{xx}, \alpha_{yy}, \alpha_{xy}$	ضرایب انبساط حرارتی انتتال یافته نانورق تابعی
$\overline{Q}_{ij}^{(z)}$	ماتریس سفتی کاهش یافته انتقال یافته وابسته به ضخامت
$N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}, M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}$	منتجه‌های تنش و شگتاور در نانورق تابعی
A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}	ماتریس سفتی کششی، ماتریس سفتی کوپل کشش - خمش، ماتریس سفتی خمشی
$N_x^{Th}, N_y^{Th}, N_{xy}^{Th}, M_x^{Th}, M_y^{Th}, M_{xy}^{Th}$	مولفه‌های نیرو و منتجه گشتاور حرارتی
T	گرادیان دمایی
$\Lambda_{1j}, \Lambda_{2j}, \Lambda_{3j}, \Lambda_1^{Th}, \Lambda_2^{Th}, \Lambda_3^{Th}, \Lambda_7^{Th}, \Lambda_8^{Th}, \Lambda_9^{Th}$	ضرایب ثابت برای کرنش‌های صفحه میانی

$\Lambda_{4j}, \Lambda_{5j}, \Lambda_{6j}, \Lambda_4^{Th}, \Lambda_5^{Th}, \Lambda_6^{Th}, \Lambda_{10}^{Th}, \Lambda_{11}^{Th}, \Lambda_{12}^{Th}$	ضرایب ثابت برای گشتاور
Q_{xx}, Q_{yy}	مولفه‌های نیروهای عرضی صفحه
q_i	بردار شار حرارتی
$u_0; v_0, w_0$	جابه‌جایی‌های درون صفحه و عرضی
ϕ_j, ϕ_t	تابع پتانسیل نهایی تنش و تنش حرارتی
$X_n(\Gamma), Y_n(\Gamma)$	نیروهای درون صفحه‌ای
$M_n(\Gamma)$	گشتاور در جهت عمود بر محیط سوراخ (گشتاور خمشی)
$M_{nt}(\Gamma)$	گشتاور در جهت مماس بر محیط سوراخ (گشتاور خمشی)
$Q_n(\Gamma)$	نیروهای عرضی عمود بر مرز سوراخ
$p(\Gamma)$	انتگرال نیروی عرضی
$m(\Gamma)$	گشتاور خمشی نرمال در محیط گشودگی
S, S_t	ماتریس شرایط مرزی مکانیکی
d, d_t	ماتریس شرایط مرزی جابه‌جایی
$\psi_{1t}(\zeta_t); \Psi_{1t}(\zeta_t); \Psi_1(\zeta_t),$ $\psi_{2t}(\zeta_t); \Psi_{2t}(\zeta_t); \Psi_2(\zeta_t)$	توابع هولومورفیک در نواحی داخلی و بیرونی گشودگی
$\varsigma, \varsigma_t, \kappa, k_t$	ضرایب ثابت
$\alpha, \gamma, \beta, \theta$	زاویه چینش نانولوله‌های کربنی، زاویه شار حرارتی، زاویه چرخش گشودگی و موقعیت زاویه‌ای نقاط مستقر در لبه گشودگی CNT
$\phi_t'^\infty$	تابع تنش برای ورق بدون گشودگی که در معرض شار حرارتی ثابت است
$\phi_t'^m$	تابع تنش برای ورق دارای گشودگی

فصل ۱: پیشینه پژوهش

۱-۱ دیباچه

با توجه به نقش مهمی که تمرکز تنش در شکست سازه‌های مهندسی دارد در علوم تحلیل تنش و طراحی، شناسایی و مطالعه محل‌هایی که امکان شکست سازه‌ها از آن ناحیه زیاد است از اهمیت بالایی برخوردار است. استفاده از نسل جدید مواد، مهندسی ساختار مواد و به حداقل رساندن اثرات ضعف‌های هندسی از جمله تکنیک‌هایی است که طراحان برای از بین بردن این اثرات به کار می‌برند. استفاده از مواد نسل جدید علاوه بر آنکه نیاز به شناخت دقیق خواص آن‌ها دارد، نیازمند آگاهی از تاثیرگذاری بر سایر مواد که در ترکیب با آنها قرار خواهند گرفت نیز می‌باشد. با پیمودن این دو گام زمینه برای استفاده از این مواد در ساختارهای واقعی و نیز بررسی عملکردهای مختلف آنها در سازه‌های مهندسی مهیا می‌گردد.

مهندسی ساختار مواد نیز عموماً در مواد تابعی و کامپوزیت‌ها نمود فراوانی دارد. زیرا زمانیکه درصد هستیم با استفاده از تغییر در ساختار به صفحات با ویژگی‌های مد نظر دست یابیم معادلات ساختاری اولیه پاسخگوی تحلیل رفتارهای مختلف این نوع از مواد نخواهد بود. پیچیده شدن معادلات ساختاری به دنبال خود روش‌های ساخت متفاوت و پیچیده که نیازمند دقت بالایی دارند، پیچیده شدن مدل‌های ریاضی در حل مسائل گوناگون این دسته از مواد و ... را در پی دارد.

از جمله نواقص هندسی که در صفحات، قطعات و سازه‌های مهندسی وجود دارد ناپیوستگی‌های هندسی مانند گشودگی است. گشودگی‌ها که عمدتاً بدلیل نیاز عملیاتی در سازه‌ها به کار گرفته می‌شوند از مهمترین چالش‌های آن سازه نیز خواهد بود. اهمیت وجود گشودگی‌ها از آن جهت است که طراحان در ساختارهای مهندسی و بسته به محل به کارگیری ورق به دلایلی همچون امکان دسترسی آسان به تجهیزات و سرویس آن‌ها، متصل کردن دو ورق به یکدیگر با استفاده از پیچ یا پرچ، ایجاد مسیر برای سیال خنک‌کننده در قطعاتی که در معرض دماهای بالا قرار می‌گیرند، طراحی پنجره هواپیماها، انتقال جریان گازهای داغ در سیستم‌های موشکی از طریق نازل، عبور دادن

کابل‌های برق و شیلنگ‌های هیدرولیک در قطعات یا سازه‌هایی که تحت بارهای ترکیبی قرار دارند، کاهش وزن و ... ناگزیر از به کارگیری آن‌ها هستند. بنابراین اهمیت بررسی تنش‌های اطراف گشودگی به منظور ایجاد ضرایب اطمینان نسبت به تنش‌های مجاز در سازه‌های با نیاز ایمنی بالا بر همه طراحان آشکار است.

بنابراین این حضور گسترده ورق‌ها در صنایع گوناگون مانند نظامی، هوافضا، دریایی، هسته‌ای، حمل و نقلی و ... علاوه برآنکه مطالعه رفتارهای مکانیکی آن‌ها تحت بارگذاری‌های ترکیبی را ضروری می‌نماید، استفاده از نسل جدید مواد، به کارگیری تکنیک مهندسی ساختار مواد تحت شرایط مختلف و نیز در سازه‌های با هندسه صنعتی را ناگزیر می‌نماید.

کامپوزیت‌ها که در گام اول می‌توانند به صورت تک لایه‌های ناهمسانگرد مورد استفاده قرار گیرند از این ویژگی برخوردار هستند که بتوان با چندلایه کردن آن‌ها و به کارگیری تکنیک‌های چیدمان لایه‌ها خواص متفاوت‌تر و گاهی استحکام بیشتری را نسبت به یک تک لایه با همان ضخامت ارائه دهند. از سویی اضافه کردن مفهوم مواد تابعی به دانش کامپوزیت‌ها امکان به کارگیری توزیع تابعی و اختلاط پیوسته فاز تقویت کننده در بسترهای مختلف را ارائه می‌دهد. نانوکامپوزیت‌های تقویت شده با توزیع تابعی نانولوله‌های کربنی، تحقیقات طیف گسترده‌ای از دانشمندان، مهندسان و طراحان محصولات را به خود اختصاص داده است. به طوریکه صنایع انرژی، نظامی، الکترونیکی و تجهیزات پزشکی این نسل جدید و مهم از کامپوزیت‌های به سرعت در حال رشد و با کارایی بالا را وارد چرخه کاربردی خود کرده‌اند. این قبیل سازه‌ها اغلب تحت بارهای ترکیبی مکانیکی-حرارتی قرار می‌گیرند و تجربه‌های شکست در سازه‌های حساس بیانگر نقش بسیار مهم عواملی مثل گشودگی در آن می‌باشد. از آنجایی که وجود گشودگی در این سازه‌های ساخته شده از نسل جدید مواد و با این نوع از بارگذاری تاکنون مورد مطالعه قرار نگرفته است بنابراین بررسی تاثیر گشودگی در آن‌ها از اهمیت بسزایی برخوردار است. با توجه به اینکه ساختار ماده در نظر گرفته شده به صورت تابعی است بنابراین

نمی‌توان به تحلیل یک تک لایه بسنده کرده و می‌بایست به کمک تئوری‌های مناسب، نانورق تابعی مورد مطالعه قرار گیرد.

در کنار روش‌های آزمایشگاهی، روش‌های تحلیلی بدلیل استوار بودن بر روابط دقیق ریاضی ضریب اطمینان بالایی را برای تحلیل بوجود می‌آورد. پژوهش‌های علمی صورت پذیرفته غالباً مسائل مربوط به بارگذاری‌های مکانیکی برای صفحات همسانگرد و ناهمسانگرد دارای گشودگی را شامل می‌شود. در خصوص بارگذاری حرارتی تحقیقات معطوف به صفحات همسانگرد و ناهمسانگرد تک لایه دارای گشودگی بوده است. از اینرو مطالعه‌ای برای صفحات کامپوزیتی تقویت شده با توزیع تابعی نانولوله های کربنی که شکل توزیع نامتقارن است صورت پذیرفته است. علاوه بر این تاکنون در زمینه حل همزمان بارگذاری ترکیبی مکانیکی-حرارتی برای صفحات دارای گشودگی بررسی تحلیلی صورت پذیرفته است. توزیع نامتقارن نانولوله‌ها که نانوکامپوزیت نامتقارن را نتیجه می‌دهد باعث ایجاد کوپل کشش-خمش و همچنین خمش در معادلات می‌گردد. حضور بار حرارتی که نانورق تابعی دارای گشودگی را در معرض اثر قرار می‌دهد باعث ایجاد شرایط ناهمگن در معادلات ساختاری می‌گردد. اضافه شدن بار کششی در این شرایط نیز مسیر رسیدن به یک حل جامع که پاسخی به شرایط ترموالاستیک برای مساله حاضر باشد را با دشواری مواجه می‌نماید.

از اینرو در این رساله مساله تحلیل ترموالاستیک کامپوزیت‌های تقویت شده با توزیع تابعی نانولوله‌های کربنی دارای گشودگی بیضوی در مرکز که تحت بارهای مکانیکی و حرارتی قرار دارند موضوع حل تحلیلی به منظور نیل به مقادیر نتیجه‌های تنش و گشتاور اطراف گشودگی قرار گرفته است.

۲-۱ آرمان پژوهش و انگاره‌ها

با توجه به مطالب بیان شده در بخش ۱-۱، در این رساله ورق نامحدود کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی و داری گشودگی بیضوی در مرکز که تحت بارهای ترکیبی کششی و حرارتی قرار دارد مورد بررسی قرار گرفته است. از نانولوله‌های کربنی تک جداره به عنوان فاز تقویت کننده بستر

پلیمری استفاده شده است. خواص مواد نانولوله‌های کربنی ناهمسانگرد در نظر گرفته شده است، همچنین سه کسر جرمی متفاوت از نانولوله‌های کربنی در نظر گرفته شده است که به شکل غیر یکنواخت و غیر تصادفی در بستر پلیمری توزیع می‌شود. به عبارت دیگر برای اینکه مساله در حالت جامع‌تری بررسی گردد از شکل توزیع نامتقارن نانولوله‌های کربنی در راستای ضخامت استفاده شده است. بدین معنا که با در نظر گرفتن خط مرکزی نانورق کامپوزیتی، کسر جرمی توزیع شده در دو طرف آن در درجه اول غیرمتقارن و در درجه دوم پیوسته تابعی است. این حالت باعث می‌شود که نانورق کامپوزیتی از علاوه بر ویژگی ناهمسانگردی دارای ویژگی نامتقارن بودن نیز باشد. همانطور که میدانیم کامپوزیت‌های نامتقارن کوپل کشش-خمش و خمش در صفحه را منجر می‌شوند که از جنبه معادلات ساختاری در روابط ریاضی پیچیدگی‌ها و تفاوت‌های زیادی را نسبت به مسائل همسانگرد یا ناهمسانگرد متقارن ایجاد می‌نماید. همچنین توزیع تابعی نانولوله‌های کربنی در راستای ضخامت باعث می‌شود علاوه بر آنکه جابه‌جایی‌ها در راستای ضخامت پیوسته هستند، تنش‌ها نیز در این راستا به شکل پیوسته تغییر یابند. همچنین برای نانولوله‌های کربنی پارامتر مربوط به جهت‌گیری زاویه‌ای تعریف شده است. با توجه به اینکه خواص مواد نانورق بسته به موقعیت قرارگیری در راستای ضخامت تغییر می‌کند بنابراین برای به دست آوردن روابط خواص مواد وابسته به ضخامت از قانون اختلاط ساده استفاده شده است. از آنجایی که خواص مواد حاصل از این قانون با خواص محاسبه شده از شبیه‌سازی دینامیک مولکولی متفاوت است بنابراین اثر واقعی حضور نانولوله‌های کربنی در بستر پلیمری را از طریق تطبیق خواص حاصل از دو روش محاسبه کرده و تحت عنوان ضرایب تاثیر نانولوله‌های کربنی در قانون اختلاط گنجانده شده است، از اینرو می‌توان گفت در این مساله از قانون اختلاط توسعه یافته استفاده شده است.

نانورق کامپوزیتی دارای یک گشودگی بیضوی شکل در مرکز است که جهت‌گیری گشودگی نسبت به محور افق قابل کنترل است. اطراف گشودگی مورد نظر عایق در نظر گرفته شده است و مرز آن از بار خارجی آزاد است. برای اینکه بتوان از اثر گشودگی در دور دست صرف نظر کرد ابعاد گشودگی

نسبت به ابعاد ورق به اندازه‌ای کوچک در نظر گرفته شده است که ورق نامحدود در نظر گرفته شود. نانورق کامپوزیتی دارای گشودگی تحت بارگذاری ترکیبی مکانیکی-حرارتی است. بارگذاری مکانیکی به صورت تنش یکنواخت دو محوره در بی‌نهایت قرار دارد. بار حرارتی نیز که به صورت شار یکنواخت است در جهت دلخواه بر نانورق و در بی‌نهایت وارد می‌شود.

۱-۳ قالب بندی رساله نگارش شده

ساختار کلی این رساله در قالب ۴ فصل به رشته نگارش در آمده است. در فصل اول، "پیشینه پژوهش"، اهمیت کامپوزیت‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی به عنوان نسل جدید مواد و نقش گشودگی‌ها در سازه‌های مختلف از منظر طراحی و عملکردی بیان شده است. در ادامه تاریخچه کوتاهی از نانولوله‌های کربنی، پژوهش‌های صورت پذیرفته بر خواص نانولوله‌های کربنی، استفاده از نانولوله‌های کربنی به عنوان تقویت‌کننده در بسترهای پلیمری، خواص مواد کامپوزیت‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی، رفتارهای مکانیکی نانوکامپوزیت‌ها و پیشینه مسائل مرتبط با صفحات دارای گشودگی تحت بارگذاری‌های مکانیکی و حرارتی گنجانده شده است. در فصل دوم روابط لازم برای تحلیل ترموالاستیک کامپوزیت تقویت شده با نانولوله‌های کربنی دارای گشودگی بیضوی و تحت بار کششی یکنواخت استخراج شده است. در فصل سوم به تحلیل نتایج منته‌های تش و گشتاور حرارتی نمودارهای اطراف گشودگی دایروی و بیضوی پرداخته شده است. در تحلیل نتایج، پارامترهای گوناگونی که مرتبط با خواص مواد نانورق کامپوزیت، شکل و جهت‌گیری هندسه گشودگی و جهت‌گیری بارگذاری حرارتی می‌باشند و بر توزیع منته‌های تنش و گشتاور حرارتی اطراف گشودگی موثر هستند مورد مطالعه قرار گرفته است. در فصل چهارم نتایج تحلیل ترموالاستیک در قالب نمودارهای بی‌بعد از منته‌های تنش و گشتاور اطراف گشودگی با در نظر گرفتن پارامترهای موثر بر توزیع منته‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. در فصل پنجم نتیجه‌گیری نهایی بیان شده و پیشنهادات پژوهش‌های آتی ارائه گردیده است.

۴-۱ نانولوله‌های کربنی

با اختراع میکروسکوپ تول زنی پیمایشی در اوایل ۱۹۸۰ میلادی علوم مرتبط با مقیاس نانو پا به عرصه وجود گذاشت. این توسعه، سبب کشف فولرن^۱ در سال ۱۹۸۶ [۱] شد. نانولوله‌های کربنی چند سال بعد به طور کاملاً اتفاقی توسط سامیو ایجیما در سال ۱۹۹۱ کشف شدند [۲] او در آزمایشگاه شرکت NEC ژاپن مشغول مطالعه نمونه‌های فولرن بوسیله میکروسکوپ الکترونی پویشی بود که در حین مطالعه ساختارهای استوانه‌ای شکلی همانند صفحات گرافیت مشاهده نمود. وی ابتدا این ساختار را نوعی فولرن تصور نمود که در یک جهت کشیده شده است ولی بعد متوجه شده این ساختارها خواصی متفاوت از فولرن‌ها دارند و آن‌ها را نانولوله‌های کربنی نامید. اولین نانولوله‌های کشف شده نانولوله‌های کربنی چند جداره^۲ بودند اندکی پس از کشف آنها بود که نانولوله‌های کربنی تک جداره^۳ با روش تخلیه قوس الکتریکی در سال ۱۹۹۳ توسط ایجیما و همکارانش [۳] سنتز شدند. اورنی و همکاران [۴] حالت‌های ارتعاشی فرکانس پایین و استحکام ساختاری^۴ نانولوله‌های بلند متشکل از ۱۰۰، ۲۰۰ و ۴۰۰ اتم را مورد مطالعه قرار دادند. وانگ و همکاران [۵] با استفاده از یک میکروسکوپ نیرو اتمی^۵ به روش اندازه‌گیری مستقیم ثابت سختی^۶ قوس نانولوله‌های کربنی چند جداره را در یک انتها در سال ۱۹۹۷ کشف کردند، آنها همچنین متوسط مدول یانگ ۱,۲۸ TPa را برای نانولوله‌های کربنی گزارش کردند. لو [۶] با استفاده از یک مدل تجربی گزارش داد که مدول الاستیسیته نانولوله‌های کربنی نزدیک به ۱ TPa است و مستقل از نوع و قطر نانولوله می‌باشد. ناتسوکی و همکاران [۷] براساس پیوند مکانیک مولکولی و مکانیک جامدات یک روش تئوری برای پیش‌بینی خواص الاستیک نانولوله‌های کربنی ارائه دادند. ژانگ و ژائو [۸] بر اساس قانون کلاسیک کوشی-بورن، یک روش محاسباتی جدید برای پیش‌بینی مدول یانگ نانولوله‌های کربنی معرفی کردند. ژانگ و شن

^۱ Fullerene

^۲ Multi-Walled Carbon Nanotube

^۳ Single-Walled Carbon Nanotube

^۴ Structural Rigidity

^۵ Atomic Force Microscope (AFM)

^۶ Toughness

[۹] بر پایه اندازه‌گیری مستقیم از دینامیک مولکولی متوجه شدند که نانولوله‌های کربنی تک جداره خاصیت ناهمسانگرد وابسته به دما دارند. بیان و همکاران [۱۰] با استفاده از مفهوم میدان نیروی مولکولی و روش انرژی مولکولی خواص الاستیک و حرارتی نانولوله‌های کربنی را مطالعه کردند. در این چند دهه، استفاده از نانولوله‌های کربنی آنقدر فراگیر شده است که پژوهش‌هایی در خصوص شرایط زیست محیطی و درجه سمی بودن این نسل از مواد صورت پذیرفته است [۱۱، ۱۲]. پژوهش‌های بسیار دیگری نیز به روش‌های مختلف به شناسایی خواص مواد نانولوله‌های کربنی پرداخته‌اند [۱۳]. مطالعات جامع انجام شده نشان می‌دهد نانولوله‌های کربنی مدول ینگ در محدوده ۱,۵ TPa و هدایت حرارتی آن‌ها تا $5000 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ می‌رسد [۱۴].

نانولوله‌های کربنی به دلیل ساختار منحصر به فرد، هندسه و خواص آنها کاربرد فراوانی در ذخیره سازی انرژی الکترون‌های مولکولی، مواد حرارتی، مواد ساختاری، الکتریکی رسانایی، زیست پزشکی، فیلتر هوا و آب دارند. این ساختار منحصر به فرد خواص مکانیکی بهبود یافته و پوششی با مقاومت سایشی فوق‌العاده ارائه می‌دهند [۱۵]. از اینرو شرکت‌های بسیاری در سرتاسر دنیا با بکارگیری رویکردهای مختلف از جمله سه تکنیک اصلی تخلیه قوس الکتریکی^۱، فرسایش لیزری^۲ و رسوب بخار شیمیایی^۳ به تولید و تجاری سازی نانولوله‌های کربنی پرداخته‌اند [۱۶، ۱۷]. خواص مواد شگفت‌انگیزی که نانولوله‌های کربنی از آن برخوردار هستند باعث شده است تا به سرعت کاربردهای صنعتی مهمی همچون تقویت پلیمرهای کامپوزیتی و رفع معایب موجود در کامپوزیت‌های معمولی، توسعه فناوری‌های مرتبط با نمایشگرها، استفاده در کاربردهای مرتبط با حسگرها^۴، استفاده در سلول‌های خورشیدی نسل سوم، استفاده در باتری‌های لیتیوم یونی، استفاده در خازن‌های الکتروشیمیایی و استفاده در صنایع پزشکی پیدا کنند [۱۸-۲۷]. همچنین کاربرد بسیار مهم دیگر نانولوله‌های کربنی استفاده از آن‌ها به صورت مستقیم شده در بسترهای پلیمری به منظور دستیابی به

¹ Arc Discharge

² Laser Ablation

³ Chemical Vapor Deposition (CVD)

⁴ Sensing Applications

مدول یانگ و استحکام بالاتر است. چراکه توزیع تصادفی نانولوله‌های کربنی تا کسر جرمی معینی باعث بهبود خواص نانوکامپوزیت حاصل می‌گردد و برای دستیابی به خواص بهتر از تکنیک توزیع نانولوله‌های کربنی به شکل مستقیم در بستر پلیمری استفاده می‌شود [۲۸].

۵-۱ کامپوزیت‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی

همانطور که در بخش ۴-۱ ذکر گردید نانولوله‌های کربنی دارای خواص برجسته‌ای از استحکام، کشش، هدایت الکتریکی، هدایت حرارتی، انبساط حرارتی، انتشار الکترون و نسبت ابعادی بالا هستند. همچنین بسته به مقدار دیواره‌های گرافنی به دلیل نسبت طول به قطر زیاد، برتری قابل توجهی از سایر مواد تقویت کننده دارند [۲۹]. از جمله آنکه مدول الاستیک آنها بیش از ۱ TPa و استحکام کششی آنها بیش از ۱۵۰ GPa است، این ویژگی آنها را چندین برابر سفت‌تر و قوی‌تر از فولاد می‌کند در حالی که سه تا پنج برابر سبک‌تر از فولاد هستند [۳۰-۳۲]. از اینرو در پژوهش‌های مختلفی خواص مواد و رفتارهای مکانیکی کامپوزیت‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی بررسی شده است. نانولوله‌های کربنی به عنوان تقویت کننده به شدت بر روی خواص نانوکامپوزیت حاصل تأثیر می‌گذارد [۳۳]. به همین دلیل نانولوله‌های کربنی چشم انداز بالایی برای توسعه خواص الکتریکی، مکانیکی و فیزیکی پلیمرها دارند [۳۴، ۳۵]. گوجنی و همکاران [۳۶] بهبود مدول الاستیک و استحکام کششی را در حفظ شکل‌پذیری نانوکامپوزیت اپوکسی را در حضور کسر جرمی پایینی از نانولوله‌های کربنی گزارش کردند. وی‌چن و همکاران [۳۷] کامپوزیت پلی‌اورتان^۱ تقویت شده با نانولوله‌های کربنی را مورد مطالعه قرار دادند آن‌ها دریافتند که استحکام و مدول الاستیک نانوکامپوزیت با افزودن حداکثر ۹،۳٪ کسر وزنی نانولوله‌های کربنی افزایش یافته است. لی‌یان و همکاران [۳۸] خواص نانوکامپوزیت‌های اپوکسی با توزیع هم‌تراز نانولوله‌های کربنی را بررسی کردند که نتیجه نشان می‌دهد ضرایب اصطکاک و نرخ سایش نانوکامپوزیت‌های اپوکسی در مقایسه با

^۱ Polyurethane (PU)

اپوکسی خالص کمتر است. ماسار و همکاران [۳۹] خواص الکتریکی و مکانیکی نانوکامپوزیت پلی متیل متاکریلات^۱ و پلی استایرن^۲ با افزودن ۰,۱ تا ۱۰ درصد کسر حجمی نانولوله‌های کربنی را مورد مطالعه قرار دادند، نتایج آن‌ها حاکی از بهبود استحکام و پایداری حرارتی بود. در تمام تحقیقات انجام شده، توزیع همتراز نانولوله‌های کربنی در کامپوزیت‌ها برای توسعه خواص کامپوزیت‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی بسیار مهم است. این پژوهش‌ها تأیید کرده که رفتار مکانیکی مانند سختی، استحکام کششی، مقاومت فشاری و خواص الکتریکی نانوکامپوزیت‌ها به طور قابل توجهی با گنجاندن کسر حجمی پایینی از نانولوله‌ای کربنی بهبود می‌یابد.

کامپوزیت‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی به‌عنوان مواد چند منظوره برای کاربرد در طیف گسترده‌ای از صنایع مانند نیروی هوایی، نظامی، هوافضا و کاربردهای الکترونیکی مورد توجه قرار گرفته است و البته هنوز کارهای زیادی برای انجام وجود دارد.

۱-۶ نانوکامپوزیت‌های تابعی

تیرها، صفحات و پوسته‌ها به‌عنوان اجزای اساسی، به‌طور گسترده در انواع مختلف سازه‌های مهندسی مورد استفاده قرار می‌گیرند [۴۰]. بسیاری از تولیدات در بسیاری از زمینه‌های صنعتی مانند ساخت و ساز، هوانوردی، معماری دریایی و غیره از این اجزا ساخته می‌شوند. در شرایط عملی، این عناصر ساختاری در طول عمر مفید خود در معرض اشکال مختلف بارگذاری قرار می‌گیرند. برای جلوگیری از آسیب ناشی از ترک‌ها، پوسیدگی، خستگی و ... در سازه، توسعه تجزیه و تحلیل رفتارهای مختلف مکانیکی آنها و قضاوت در مورد اینکه آیا آنها توانایی خوب کار کردن را دارند بسیار حائز اهمیت است. همچنین نیازهای جدید در حوزه‌های با تکنولوژی بالا مهندسان و محققان این زمینه را به سمت استفاده از مواد نسل جدید و همچنین روش‌های مختلف توسعه خواص آن‌ها سوق داده است. همانطور که می‌دانیم با آنکه کامپوزیت‌ها دارای ویژگی‌های مادی برجسته‌ای هستند، اما تحت

¹ Polymethyl Methacrylate (PMMA)

² Polystyrene (PS)

شرایط کاری خاص با پدیده ترک، لایه لایه شدن و در مرحله آخر شکست فایبرها مواجه می‌شوند [۴۱]. در این حالت مواد کامپوزیتی در معرض تغییر شدید خواص در سطح مشترک قرار می‌گیرند که می‌تواند منجر به شکست سازه شود. برای غلبه بر این مشکل، مفهوم مواد تابعی توسط نینو [۴۲] ارائه شد. این مواد اتصال لایه‌ای را با اتصال تابعی جایگزین می‌کنند که منجر به انتقال صاف خواص از یک ماده به ماده دیگر می‌شود. این ویژگی می‌تواند مشکلات اتصال مانند غلظت تنش و چسبندگی ضعیف را از بین ببرد [۴۳]. بنابراین، این نوع از ساختارهای کامپوزیتی می‌تواند در صنایع مانند هوافضا، دفاع و ... استفاده شود [۴۴]. اولین بار شن ایده استفاده از مفهوم مواد تابعی را برای توزیع تابعی نانولوله‌های کربنی در راستای ضخامت مطرح کرد. این امر باعث شد که کامپوزیت یک عامل تقویت کننده رضایت بخش با ویژگی قابل طراحی به دست آورد، به طوری که تحقیقات کامپوزیت تقویت شده با توزیع تابعی نانولوله‌های کربنی^۱ (نانوکامپوزیت تابعی) در دهه‌های اخیر رایج شده است. بنابراین نانوکامپوزیت تابعی یک نانو ماده جدید است که موضوع رفتارهای مختلف مکانیکی آن به دلیل خواص مکانیکی و الکتریکی عالی، به یک موضوع داغ در رشته‌های مختلف علوم و مهندسی تبدیل شده است. مفهوم نانوکامپوزیت‌های تابعی برای اولین بار توسط شن [۴۵] با توزیع غیریکنواخت نانولوله‌های کربنی در یک ماتریس همسانگرد مطرح گردید. طی یک ده گذشته تحقیقات گسترده‌ای در زمینه مطالعه رفتار مکانیکی نانوکامپوزیت‌های تابعی با ساختار تیر، صفحه و پوسته شکل گرفته است. این تحقیقات بیشتر معطوف به بررسی رفتار خمش و ارتعاش آزاد [۴۶-۴۹]، رفتار دینامیکی [۵۰، ۵۱]، کماتش و پساکمانش [۵۲، ۵۳]، پاسخ ضربه [۵۴] و رفتارهای حرارتی [۵۵، ۵۶] تحت بارگذاری‌ها و شرایط مرزی مختلف بوده است. اخیراً پژوهش‌هایی در خصوص ارتعاشات نانوکامپوزیت‌های تابعی دارای گشودگی [۵۷] و بررسی خواص مکانیکی نانوکامپوزیت‌های پیچ و مهره شده [۵۸] صورت پذیرفته است.

¹ Functionally Graded Carbon Nanotube Reinforced Composite (FG-CNTRC)

۱-۷ صفحات دارای گشودگی

اولین راه حل تحلیلی برای مسئله ترک در الاستیسیته خطی بیش از یک قرن پیش توسط انگلیس^۱ به دست آمد. در مقاله‌ای که در سال ۱۹۱۳ منتشر شد، انگلیس [۵۹] از مختصات بیضوی برای حل مسئله الاستیک دو بعدی یک سوراخ بیضوی در یک صفحه الاستیک همگن بی‌نهایت که تحت بارگذاری کششی یکنواخت از راه دور بود استفاده کرد. او با میل دادن محور فرعی سوراخ بیضوی به سمت صفر، میدان الاستیک را در اطراف یک ترک مستقیم با طول محدود به دست آورد و متوجه شد که تنش کششی در نوک ترک نامحدود است. علاقه به توسعه رویکردهای ریاضی برای تجزیه و تحلیل و حل مسائل ترک الاستیک چندین دهه بعد تنها پس از ارائه معیارهای نظری مبتنی بر الاستیسیته خطی برای پایداری ترک تشدید شد. موشخلیشویلی^۲ [۶۰] بر پایه روش متغیر مختلط شیوه حلی برای مسائل مقدار مرزی صفحات همسانگرد در الاستیسیته دو بعدی ارائه کرد. ساوین^۳ [۶۱] با استفاده از روش متغیر مختلط، صفحات همسانگرد نامحدود حاوی گشودگی‌های دایروی و بیضوی را مورد مطالعه قرار داد. فلورنس^۴ و گودیر^۵ [۶۲] نیز بر پایه روش متغیر مختلط مسائل مقدار مرزی صفحات همسانگرد در ترموالاستیسیته دو بعدی را مورد مطالعه قرار دادند.

۱-۷-۱ تحلیل تنش در صفحات همسانگرد دارای گشودگی

بر اساس روش متغیر مختلط، تنش‌های حرارتی در یک ورق همسانگرد با گشودگی بیضوی و همچنین دارای ترک توسط فلورنس و گودیر [۶۳، ۶۴] محاسبه گردید. درسیویچ^۶ [۶۵] با استفاده از نگاشت مناسب و محاسبه توابع پتانسیل مختلط، حل فلورنس و گودیر را برای گشودگی‌های غیر

¹ Inglis

² Muskhelishvili

³ Savin

⁴ Florence

⁵ Goodier

⁶ Deresiewicz

دایروی بسط داد. تاکیوتی^۱ و همکاران [۶۶] توزیع تنش در اطراف گشودگی دایروی در ورق‌های مستطیلی شکل را با استفاده از روش متغیر مختلط به دست آوردند. بر اساس تئوری دو بعدی ترموالاستیسیته، میدان تنش حرارتی در نزدیکی نوک یک ترک که به لحاظ حرارتی عایق بود در یک محیط همسانگرد نیمه نامتناهی و تحت جریان گرمای یکنواخت حالت پایدار توسط سکین^۲ [۶۷] مورد مطالعه قرار گرفت. هاسبه^۳ و همکاران [۶۸] با استفاده از روش متغیر مختلط، تابع نگاشت کسری و روش نابجایی یک مسئله ترموالاستیک برای یک صفحه بی‌نهایت با یک ترک، که خود از انتهای یک ترک اولیه خطی رخ می‌دهد و تحت یک جریان حرارتی یکنواخت در جهت دلخواه قرار داشت را تجزیه و تحلیل کردند. از هاسبه پژوهش‌های زیادی در خصوص تجزیه و تحلیل مسائل مرتبط با ترک و گشودگی‌ها منتشر شده است که با توسعه روش‌های حل ارائه شده است. از جمله آنکه برای یک صفحه نامحدود و همسانگرد دارای گشودگی بیضوی که ترک‌هایی متقارن در اطراف گشودگی آن وجود داشت تنش حرارتی و ضرایب شدت تنش توسط هاسبه و همکاران [۶۹] محاسبه شد. همچنین در سال ۲۰۰۵ هاسبه و همکاران [۷۰] برای یک صفحه الاستیک و همسانگرد دارای گشودگی روش متغیر مختلط را به کار گرفتند تا حل ترموالاستیک دوبعدی را تحت شار حرارتی یکنواخت و یا منبع حرارتی نقطه‌ای ارائه دهند. در سال ۲۰۱۰ هاسبه و همکاران [۷۱] تنش‌های حرارتی حاصل از اعمال جریان الکتریکی یکنواخت از راه دور به یک صفحه نامحدود دارای گشودگی بیضوی با ترک لبه‌ای را از طریق به کارگیری تابع نگاشت و روش متغیر مختلط، محاسبه کردند. جعفری و همکاران [۷۲] تاثیر پارامترهای مهم در تنش‌های حرارتی اطراف گشودگی عایق با هندسه شبه مستطیلی و مثلی در یک صفحه فلزی نامحدود را با توسعه روش گودیر و فلورنس مورد مطالعه قرار دادند. هاسبه و همکاران [۷۳] تجزیه و تحلیل تنش‌های اطراف یک ترک در مواد الاستیک فرومغناطیسی و پارامغناطیسی نرم تحت شدت میدان مغناطیسی یکنواخت با به کارگیری روش

¹ Takeuti

² Sekine

³ Hasebe

۱-۷-۲ تحلیل تنش در صفحات ناهمسانگرد دارای گشودگی

با توجه به کاربرد و افزایش به کارگیری از مواد ناهمسانگرد در ساختارهای مختلف تجزیه و تحلیل تنش در اطراف صفحات ناهمسانگرد دارای گشودگی نیز از اهمیت بالایی برخوردار شد. لخنیتسکی^۱ [۷۴] تئوری‌های ارائه شده را برای تجزیه و تحلیل صفحات ناهمسانگرد حاوی گشودگی گسترش داد. چن^۲ [۷۵] تنش‌های اطراف گشودگی عایق بیضوی در صفحه ارتوتروپیک که تحت شار حرارتی یکنواخت قرار داشت را با استفاده از روش متغیر مختلط به دست آورد. تنش‌های حرارتی اطراف گشودگی در یک صفحه ناهمسانگرد برپایه فرمولبندی اشترو^۳، توسط هووا [۷۶] صورت پذیرفت. تارن و وانگ^۴ [۷۷] با گسترش روش متغیر مختلط لخنیتسکی و در نظر گرفتن شرایط مرزی نیومن و دیرکله حل جامعی برای تنش‌های حرارتی صفحات ناهمسانگرد دارای گشودگی و ترک ارائه دادند. کین^۵ [۷۸] تنش‌های اطراف گشودگی با هندسه مختلف در یک صفحه ترموپیزوالکتریک را تحت بارهای حرارتی یکنواخت، نقطه‌ای و دمای ناپیوسته با استفاده از فرمول اشترو و استفاده از نگاشت هم‌نوا محاسبه کرد. چاو^۶ و همکاران [۷۹، ۸۰] صفحه نامحدود ناهمسانگرد حاوی گشودگی بیضوی، دایروی و شبه دایروی تحت جریان حرارتی یکنواخت را با استفاده از فرمول‌بندی اشترو مورد مطالعه تنش‌های اطراف گشودگی قرار دادند. ژانگ^۷ و همکاران [۸۱] با استفاده از حل دقیق یک صفحه تابعی دارای گشودگی که خواص مواد آن در راستای شعاعی تغییر می‌کرد را مورد مطالعه قرار دادند. لی و کاردوماتیس^۸ [۸۲] انشعاب ترک‌ها در حضور بارهای حرارتی و مکانیکی برای محیط‌های ناهمسانگرد عمومی با استفاده از گسترش تئوری فرمالیسم نابجایی اشترو، به ترموالاستیسیته در

¹ Lekhnitskii

² Chen

³ Hwu

⁴ Tarn and Wang

⁵ Qin

⁶ Chao

⁷ Zhang

⁸ Li and Kardomateas

نمادگذاری ماتریس، مورد بررسی قرار دادند. بهولار و وگنر [۸۳] با فرض تنش صفحه‌ای تنش‌های حرارتی اطراف گشودگی بیضی شکل در یک صفحه ناهمسانگرد به کمک روش متغیر مختلط مورد مطالعه قرار دادند. رسولی و جعفری [۸۴] با توسعه روش متغیر مختلط لخنیتسکی و با استفاده از تکنیک نگاشت همنوا، توزیع تنش را حول گشودگی بیضوی در صفحه ناهمسانگرد نامحدود تحت شار حرارتی یکنواخت به دست آوردند. مطالعه گسترش ترک گشودگی در کامپوزیت‌های چندلایه تحت بارگذاری ترکیبی مکانیکی و حرارتی و تاثیر آن در تمرکز تنش و شکست توسط مور و همکاران [۸۵] صورت پذیرفت. جعفری و جعفری [۸۶-۸۸] تحلیل تنش حرارتی اطراف گشودگی با اشکال مثلثی، مستطیلی و چندضلعی را در صفحه اورتوتروپیک بی‌نهایت مورد بررسی قرار دادند.

تجزیه و تحلیل یک صفحه الاستیک ارتوتروپیک بی‌نهایت دارای سوراخ و نیم صفحه الاستیک ارتوتروپیک با ترک لبه مایل که در معرض شار حرارتی یکنواخت است توسط هاسبه و همکاران مطالعه گردید [۸۹، ۹۰]. تنش‌های حرارتی اطراف گشودگی‌های چندضلعی در کامپوزیت‌های چند لایه متقارن توسط بیاتی و خرمی‌شاد [۹۱] با به کارگیری روش متغیر مختلط مورد مطالعه قرار گرفت، در این تحقیق با توجه به چیدمان متقارن کامپوزیت چندلایه ماتریس کوپلینگ خمش-کشش صفر بوده و ماتریس خمش نیز بدلیل عدم وجود گشتاور خارجی از همان ابتدا صفر در نظر گرفته شده است. بنابراین با تطبیق معادلات ساختاری چندلایه به معادلات ساختاری تک لایه اورتوتروپیک به مطالعه تنش‌های اطراف گشودگی پرداخته شده است. تنش‌های اطراف گشودگی در کامپوزیت چندلایه نامتقارن ناشی از بارکشی یکنواخت در دوردست توسط اوکادگونکر^۱ [۹۲] مورد مطالعه قرار گرفته است. با نگاهی به پژوهش‌های صورت پذیرفته مشاهده می‌شود که در زمینه کامپوزیت‌های چندلایه نامتقارن تاکنون تحلیلی در خصوص تنش‌های حرارتی و تنش‌های ناشی از بار ترکیبی مکانیکی حرارتی صورت نپذیرفته است. حضور بارحرارتی خود باعث ناهمگن شدن روابط حاصل از معادلات سازگاری و معادلات تعادل می‌گردد از سویی ساختار کامپوزیت چندلایه به شکل نامتقارن

¹ Ukadgaonker

نیز ترم‌های منته‌جه تنش و گشتاور حرارتی را به بخش ناهمگن معادلات می‌افزاید. از سویی با توجه به اهمیت کامپوزیت‌های تقویت شده با توزیع تابعی نانولوله‌های کربنی انتخاب نانوکامپوزیت تابعی با توزیع غیرمتمقارن نانولوله‌های کربنی علاوه بر اینکه امکان تحلیل برای صفحات نانوکامپوزیتی نامتمقارن را فراهم می‌آورد ساختار حل حاصل را برای مواد تابعی نیز قابل استفاده می‌نماید.

فصل ۲ : روابط حاکم بر روش حل تحلیلی

۲-۱ دیباچه

تحلیل ترموالاستیک صفحات کامپوزیتی تقویت شده با توزیع تابعی نانولوله‌های کربنی مستلزم استخراج معادلات مرتبط با خواص مواد نانورق، معادلات بنیادی، حل میدان دمایی، تعریف تابع نگاشت مناسب و حل توابع پتانسل حرارتی و مکانیکی است. در این فصل بر پایه روش متغیر مختلط لختیسیکی، استفاده ترکیبی از مفهوم مواد تابعی و تئوری کلاسیک صفحات چندلایه، تابع نگاشت و تابع تحلیلی بر اساس سری لوران، یک راه حل جامع تحلیلی برای مطالعه نانورق ناهمگن نامتقارن با ابعاد بی‌نهایت، دارای گشودگی بیضوی و تحت بارهای حرارتی و مکانیکی استخراج می‌شود.

۲-۲ مفروضات حاکم بر مساله

برای استخراج معادلات در آنالیز ترموالاستیک نانورق، فرضیاتی به شکل زیر برای مساله در نظر گرفته شده است.

❖ ورق ناهمگن، ناهمسانگرد و الاستیک خطی در نظر گرفته شده است که قانون عمومی هوک را ارضا می‌کند.

❖ مسأله در حالت استاتیکی، تنش صفحه‌ای و با تغییر شکل‌های کوچک مد نظر است.

❖ از ترکیب مفهوم مواد تابعی به همراه فرضیات تئوری کلاسیک صفحات چندلایه و همچنین حالت معکوس قانون عمومی هوک استفاده شده است.

❖ ابعاد نانورق نسبت به ابعاد گشودگی به اندازه‌ای بزرگ در نظر گرفته شده است که بتوان ورق را بی‌نهایت در نظر گرفت و از اثر وجود گشودگی در دوردست صرف نظر کرد.

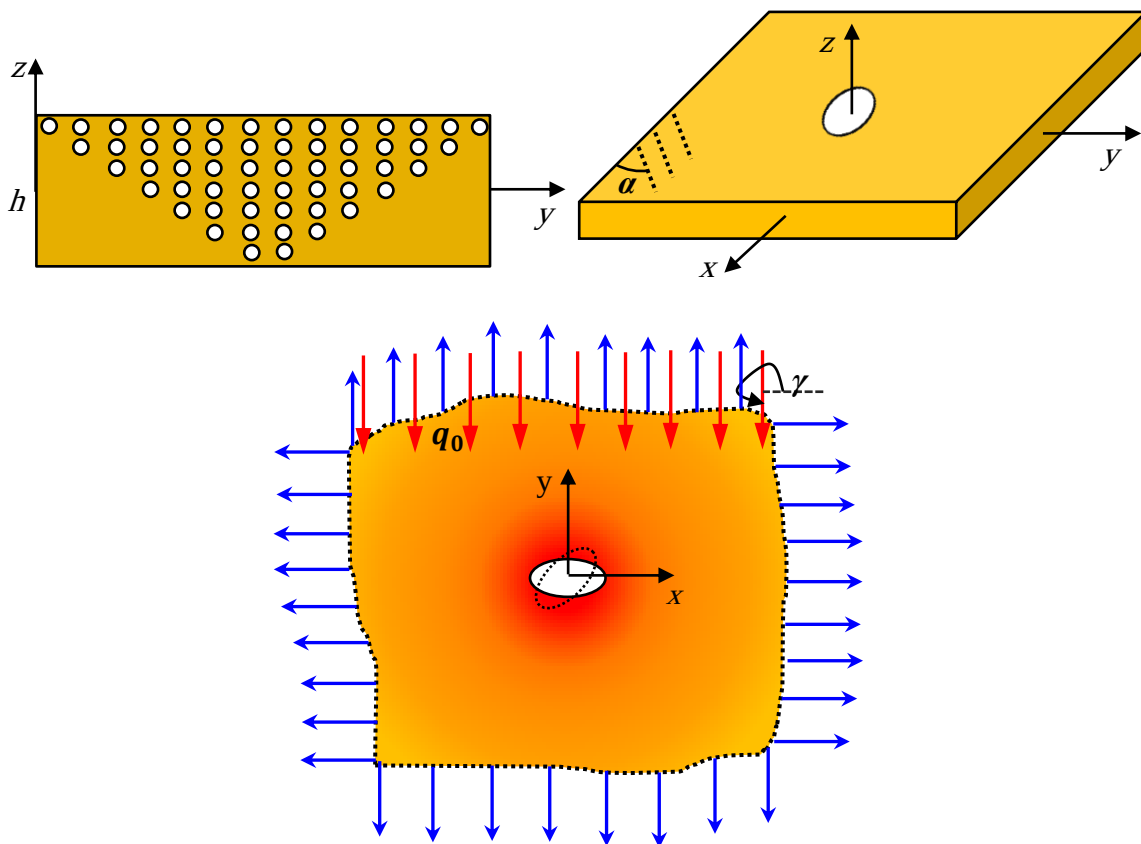
❖ از شرط مرزی نیومن استفاده شده است و به منظور همگن شدن شرط مرزی نیومن از ویژگی عایق بودن دیواره گشودگی استفاده شده است.

❖ در مرز گشودگی هیچ گونه بار خارجی وجود ندارد.

❖ نانورق در دور دست، تحت تنش کششی دو محوره و شار حرارتی یکنواخت قرار دارد.

۳-۲ خواص مواد ورق کامپوزیتی تقویت شده با توزیع تابعی نانولوله‌های کربنی

شکل (۱-۲) ورق کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی را، که در ادامه نانورق نامیده می‌شود، نشان می‌دهد. ضخامت ورق h در نظر گرفته شده است. نانولوله‌های کربنی در راستای ضخامت دارای توزیع تابعی می‌باشند. α زاویه چینش نانولوله‌های کربنی نسبت به محور x است. ورق دارای گشودگی بیضی شکل با زاویه چرخش β نسبت به محور x است که تحت تنش کششی دو محوره در بی نهایت و همچنین شار حرارتی یکنواخت با زاویه γ نسبت به محور x قرار دارد. نانورق، مخلوطی از نانولوله‌های کربنی تک جداره و یک بستر همگن است. به همین دلیل ابتدا خواص مواد مؤثر نانورق را تعیین می‌کنیم. بر اساس قانون اختلاط توسعه یافته، مدول الاستیک و برشی مؤثر نانورق را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:



شکل (۱-۲): نانورق تابعی دارای گشودگی بیضوی تحت تنش کششی دو محوره و شار حرارتی یکنواخت

$$E_{11}(z) = E_m + (\mathcal{G}_1 E_{11}^{CNT} - E_m) V_{CNT}(z)$$

$$E_{22}(z) = \mathcal{G}_2 \frac{E_m E_{22}^{CNT}}{E_m + (E_{22}^{CNT} - E_m) V_{CNT}(z)} V_{CNT}(z) \quad (1-2)$$

$$G_{12}(z) = \mathcal{G}_3 \frac{G_m G_{12}^{CNT}}{G_m + (G_{12}^{CNT} - E_m) V_{CNT}(z)} V_{CNT}(z)$$

در رابطه (۱-۲)، z فاصله از صفحه میانی $x-y$ است که در مرکز نانورق قرار دارد. $E_{11}(z)$ ، $E_{22}(z)$ و $G_{12}(z)$ به ترتیب مدول‌های یانگ و برشی می‌باشند. $(G_{12}^{CNT}, E_{22}^{CNT}, E_{11}^{CNT})$ و (G_m, E_m) نیز به ترتیب خواص مواد نانولوله‌های کربنی و بستر پلیمری می‌باشند. $\mathcal{G}_j$ ($j = 1, 2, 3$) ضریب اثر نانولوله‌های کربنی نامیده می‌شوند. برای بدست آوردن این ضرایب از انطباق خواص نانولوله‌های کربنی که از طریق شبیه‌سازی دینامیک مولکولی بدست آمده و نتایج حاصل از قانون اختلاط ساده استفاده شده است. $V_{CNT}(z)$ کسر حجمی نانولوله‌های کربنی در فاصله z از صفحه میانی است و مطابق رابطه زیر [۴۵] باعث توزیع تابعی شکل نانولوله‌های کربنی در راستای ضخامت به شکل نامتقارن می‌گردد.

$$V_{CNT}(z) = \left(0.5 + \frac{z}{h}\right) 2 V_{CNT}^* \quad (2-2)$$

در رابطه بالا V_{CNT}^* تمام میزان کسر حجمی نانولوله‌های کربنی استفاده شده در بستر نانورق است و از مقدار کسر جرمی نانولوله‌های کربنی (ω_{CNT}) در نظر گرفته شده برای ترکیب با بستر پلیمری طبق رابطه زیر به دست می‌آید:

$$V_{CNT}^* = \frac{\omega_{CNT}}{\omega_{CNT} + \left(\frac{\rho^{CNT}}{\rho^m}\right) - \left(\frac{\rho^{CNT}}{\rho^m}\right) \omega_{CNT}} \quad (3-2)$$

در مساله حاضر سه کسر جرمی با مقادیر $(\omega_{CNT} = 0.146, 0.21, 0.34)$ در نظر گرفته شده است تا تاثیر افزوده شدن نانولوله‌های کربنی نیز مورد مطالعه قرار گیرد. چگالی نانولوله‌های کربنی $\rho_{CNT} = 1.4 \text{ gr/cm}^3$ و چگالی بستر پلیمری نیز $\rho_m = 1.15 \text{ gr/cm}^3$ می‌باشد. به طور مشابه ضرایب

انبساط حرارتی نانورق (α_{11} و α_{22} که به ترتیب در جهت‌های طولی و عرضی می‌باشند)، نسبت پواسون ν_{12} و چگالی ρ نانورق کامپوزیتی به شکل زیر به دست می‌آیند [۴۵].

$$\alpha_{11}(z) = \alpha^m - (\alpha^m - \alpha_{11}^{CNT}) V_{CNT}(z) \quad (۴-۲)$$

$$\alpha_{22}(z) = (1 + \nu_{12}^{CNT}) V_{CNT}(z) \alpha_{22}^{CNT} + (1 + \nu^m) V_m \alpha^m - \nu_{12}(z) \alpha_{11}(z)$$

$$\nu_{12}(z) = \nu^m + (\nu^m - \nu_{12}^{CNT}) V_{CNT}(z) \quad (۵-۲)$$

$$\rho(z) = \rho^m + (\rho^m - \rho^{CNT}) V_{CNT}(z) \quad (۶-۲)$$

در روابط (۴-۲) تا (۶-۲) α^m و ρ^m ضریب انبساط حرارتی و چگالی بستر پلیمری و α_{11}^{CNT} ، α_{22}^{CNT} و ρ^{CNT} ضرایب انبساط حرارتی و چگالی نانولوله‌های کربنی می‌باشند. ضرایب هدایت حرارتی نانورق کامپوزیتی از روابط زیر حاصل می‌شود [۹۳]:

$$\frac{K_i}{K^m} = 1 + (1 + 2z) C_i, \quad C_i = \frac{9V_{CNT}^*}{3} \times \frac{\frac{K_i^{CNT}}{K^m}}{\iota + \frac{2a_k}{d} \frac{K_i^{CNT}}{K^m}}, \quad (i = 11, 22), \quad a_k = R_k K^m \quad (۷-۲)$$

در رابطه (۷-۲)، K_i^{CNT} و K^m به ترتیب ضرایب هدایت حرارتی نانولوله‌های کربنی و بستر پلیمری می‌باشند، R_k مقاومت حرارتی بین نانولوله‌های کربنی و بستر پلیمری می‌باشد که مقدار آن برابر $8.3 \times 10^{-8} \text{ m}^2 \text{ K/W}$ در نظر گرفته شده است. ι نسبت ابعادی نانولوله‌های کربنی است و از رابطه

$$\iota = \frac{L_{CNT}}{d_{CNT}} \text{ حاصل می‌شود.}$$

۲-۴ روابط حاکم بر نانورق تابعی

۲-۴-۱ مفروضات

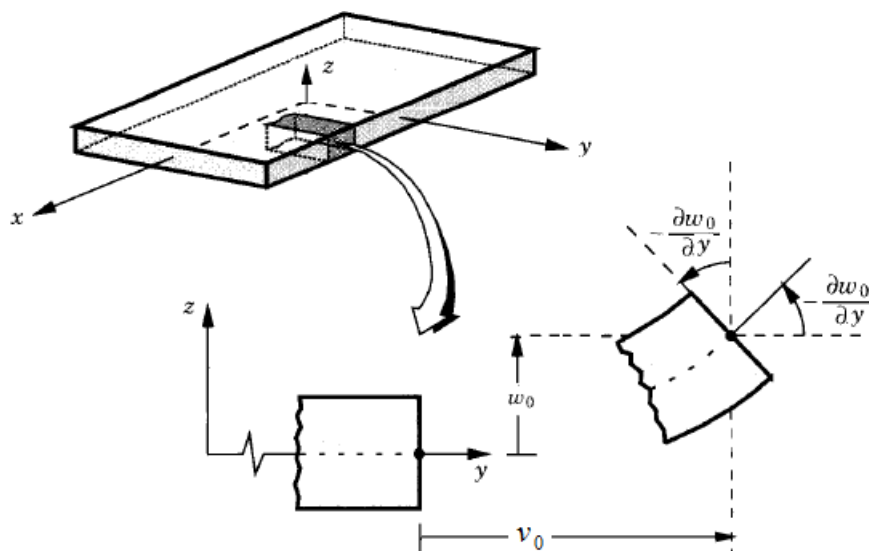
از آنجا که نانورق مطرح شده در این مساله حالت سه بعدی و در راستای ضخامت توزیع پیوسته تابعی دارد بنابراین از تئوری تک لایه معادل در قالب تعمیم تئوری کلاسیک صفحات چندلایه، برای حالت تابعی پیوسته، که خود توسعه یافته تئوری کیرشهف صفحات می باشد و بر اساس فرضیات زیر بنا نهاده شده است، استفاده می گردد [۹۴]:

۱- خطوط مستقیم عمود بر سطح مقطع (خطوط عمود بر سطح میانی) قبل از تغییر شکل، بعد از تغییر شکل نیز مستقیم باقی می ماند.

۲- خطوط عمود بر سطح میانی، بعد از تغییر شکل بدون کشیدگی باقی می ماند.

۳- خطوط عمود بر سطح مقطع به گونه ای دارای چرخش می شوند که بعد از تغییر شکل نیز عمود بر سطح مقطع باقی می ماند.

خط عمود بر سطح مقطع قبل و بعد از تغییر شکل، مطابق شکل (۲-۲) می باشد:



شکل (۲-۲): هندسه قبل و بعد از تغییر شکل یک لبه از نانورق تحت فرضیات تئوری کیرشهف

بنابراین با استفاده از تئوری کلاسیک صفحات چندلایه که حالتی از تئوری تک لایه معادل است و مفروضات بیان شده در بالا که در مورد سینماتیک تغییر شکل یا حالت تنش در راستای ضخامت است، مساله سه بعدی نانوورق مطرح شده را به یک مساله دو بعدی تبدیل می‌نماییم. فرضیات تئوری ذکر شده در واقع به معنای نادیده گرفتن اثرات برشی عرضی و برشی نرمال است. به این شکل که ۲ فرض اول بیانگر این است که جابه‌جایی‌های عرضی مستقل از ضخامت هستند و نتیجه آن صفر شدن کرنش‌های نرمال عرضی است ($\epsilon_{zz} = 0$). فرض سوم نیز باعث صفر شدن کرنش‌های برشی عرضی می‌گردد ($\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$). در نهایت نتیجه فیزیکی آن این است که تغییر شکل‌های حاصل کاملاً ناشی از خم شدن و کشش درون صفحه خواهد بود.

۲-۴-۲ میدان جابه‌جایی و کرنش

بر اساس تئوری کلاسیک صفحات چندلایه و با توجه به شکل (۲-۲) که بیانگر استوار بودن تئوری مذکور بر میدان جابه‌جایی است، خواهیم داشت [۹۴]:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w(x, y) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (۸-۲)$$

همانطور که از رابطه (۸-۲) مشخص است، از آنجایی که جابه‌جایی‌های صفحه میانی قابل دستیابی است بنابراین جابه‌جایی‌های هر نقطه با مختصات (x, y, z) در مدل سه بعدی نانوورق تابعی قابل محاسبه خواهد بود.

با توجه به مفروضات بیان شده در بخش ۲-۲ و معادله (۸-۲) رابطه میان کرنش‌ها و جابه‌جایی‌ها به شکل زیر قابل بیان است.

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \{\varepsilon^0\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix}, \quad \{\kappa\} = \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (9-2)$$

در رابطه بالا ($\varepsilon_{xx}^0, \varepsilon_{yy}^0$ و γ_{xy}^0) کرنش‌های غشائی و (κ_{xx}, κ_{yy} و κ_{xy}) کرنش‌های خمشی یا انحنای صفحه میانی نامیده می‌شوند.

۳-۴-۲ روابط ساختاری تنش-کرنش در نانوورق تک لایه

طبق تعریف انجام شده در بخش ۲-۴-۱ تمامی مولفه‌های کرنش‌های عرضی ($\varepsilon_{yz}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{zz}$) صفر هستند، بنابراین برای لایه‌ای به فاصله z از صفحه میانی نانوورق تابعی، که به عنوان یک تک لایه اورتوتروپیک شناخته می‌شود، رابطه تنش و کرنش در مختصات اصلی مواد از طریق معادله ساختاری زیر حاصل می‌شود [۹۵]:

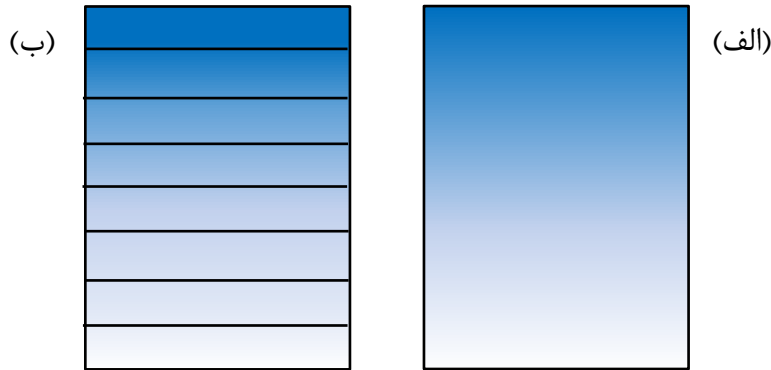
$$\{\sigma\}_{on}^{(z)} = [Q_{ij}]_{on}^{(z)} \left\{ \{\varepsilon^0\}^{(z)} + z \{\kappa\} - \{\varepsilon^T\}_{on}^{(z)} \right\} \quad (10-2)$$

به طوریکه:

$$\{\varepsilon^T\}_{on}^{(z)} = \begin{Bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \\ 0 \end{Bmatrix}^{(z)} \times T \quad (11-2)$$

تغییرات کسر حجمی نانولوله‌های کربنی در راستای ضخامت مطابق شکل (۲-۳) به صورت پیوسته (و نه قطعه‌ای) است. بنابراین در روابط (۲-۱۰) و (۲-۱۱) بالانویس $^{(z)}$ بیانگر وابسته بودن به مختصات در راستای ضخامت است. $Q_{ij}^{(z)}$ ماتریس سفتی کاهش یافته تنش صفحه‌ای است. اندیس on بیانگر

مختصات محلی است. $(\varepsilon^T, \varepsilon, \sigma)$ به ترتیب مولفه‌های تنش، کرنش و کرنش حرارتی در راستای مختصات محلی (راستای اصلی مواد- X_1, X_2, X_3) هستند. α_{11} و α_{22} ضرایب انبساط حرارتی وابسته به ضخامت به ترتیب در راستای X_1 و X_2 هستند.



شکل (۳-۲): مدل شماتیک یک ماده تابعی (الف) تغییر پیوسته کسر حجمی (ب) تغییر قطعه‌ای کسر حجمی

مولفه‌های ماتریس سفتی کاهش یافته تنش صفحه‌ای، Q_{ij} ، که به عنوان ثابت‌های مهندسی شناخته می‌شوند با جایگذاری روابط (۱-۲) و (۵-۲) در روابط (۱۲-۲) محاسبه می‌شوند:

$$Q_{11}(z) = \frac{E_{11}(z)}{1 - \nu_{12}(z)\nu_{21}(z)}, \quad Q_{22}(z) = \frac{E_{22}(z)}{1 - \nu_{12}(z)\nu_{21}(z)}, \quad Q_{66}(z) = G_{12}(z), \quad (12-2)$$

$$Q_{12}(z) = \frac{\nu_{21}(z)E_{22}(z)}{1 - \nu_{12}(z)\nu_{21}(z)}, \quad Q_{16} = Q_{26} = 0$$

همانطور که ذکر گردید، نانورق تابعی از صفحات تک لایه اورتوتروپیک پیوسته تشکیل شده است که این تک لایه‌ها هم بدلیل تغییرات کسر حجمی و هم زاویه چینش نانولوله‌های کربنی در سیستم مختصات ماده اصلی قرار دارند. بنابراین معادلات ساختاری هر تک لایه باید بر اساس سیستم مختصات نانورق تابعی که همان سیستم مختصات عمومی (x, y, z) است بیان گردد. با انتقال روابط تنش و کرنش به سیستم مختصات عمومی نانورق تابعی، مولفه‌های تنش $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy})$ بر اساس مولفه‌های کرنش $(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy})$ به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\{\sigma\}_{off}^{(z)} = [\bar{Q}_{ij}]_{off}^{(z)} \left\langle \{\varepsilon^0\}^{(z)} + z \{\kappa\} - \{\varepsilon^T\}_{off}^{(z)} \right\rangle \quad (13-2)$$

که در آن:

$$\left[\overline{Q}_{ij} \right]_{off}^{(z)} = [L] \left[Q_{ij} \right]_{on}^{(z)} [L]^t, \quad [L] = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & \sin 2\alpha \\ \frac{1}{2} \sin 2\alpha & -\frac{1}{2} \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix} \quad (۱۴-۲)$$

$$\left\{ \varepsilon^T \right\}_{off}^{(z)} = \begin{Bmatrix} \alpha_{xx} \\ \alpha_{yy} \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix}_{off}^{(z)} \times T, \quad \begin{Bmatrix} \alpha_{xx} \\ \alpha_{yy} \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix}_{off}^{(z)} = \begin{Bmatrix} \alpha_{11} \cos^2 \alpha + \alpha_{22} \sin^2 \alpha \\ \alpha_{11} \sin^2 \alpha + \alpha_{22} \cos^2 \alpha \\ 2(\alpha_{11} - \alpha_{22}) \sin \alpha \cos \alpha \end{Bmatrix} \quad (۱۵-۲)$$

در رابطه بالا، $\left[\overline{Q}_{ij} \right]_{off}^{(z)}$ ماتریس سفتی کاهش یافته انتقال یافته و $\left\{ \overline{\alpha} \right\}_{off}^{(z)}$ ضرایب انبساط حرارتی انتقال یافته می‌باشند. بالا نویس^t نیز به معنای ترانهاد ماتریس است.

۴-۴-۲ معادلات ساختاری نانورق تابعی

معادلات ساختاری ترموالاستیک که منته‌های تنش و گشتاور را به کرنش‌های نانورق تابعی مرتبط می‌کند به شکل زیر بیان می‌گردد [۹۴]:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} & M_{xx} \\ N_{yy} & M_{yy} \\ N_{xy} & M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} [1 \quad z] dz \quad (۱۶-۲)$$

با جایگذاری رابطه (۱۳-۲) در معادلات (۱۶-۲) خواهیم داشت:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N^T \\ M^T \end{Bmatrix} \quad (۱۷-۲)$$

که A_{ij} ، B_{ij} و D_{ij} به ترتیب ماتریس سفتی کششی، ترکیب سفتی کششی-خمشی و سفتی خمشی نامیده می‌شوند و از رابطه زیر قابل محاسبه هستند:

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} \overline{Q}_{ij} (1, z, z^2) dz \quad (۱۸-۲)$$

همچنین N^T و M^T منته‌های نیروی حرارتی هستند که از رابطه زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} N^T \\ M^T \end{Bmatrix} = [E \quad R] T(x, y), \quad [E \quad R] = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij} \{ \bar{\alpha} \} (1, z) dz \quad (19-2)$$

رابطه (۱۷-۲) قانون عمومی هوک نامیده می‌شود که منته‌های تنش و گشتاور را به کرنش‌ها و انحنای صفحه میانی مرتبط می‌کند. با اعمال وارونگی در قانون عمومی هوک می‌توان کرنش‌های صفحه میانی و منته‌های گشتاور را بر حسب منته‌های تنش و انحنای صفحه میانی به شکل زیر محاسبه کرد [۹۶]:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A^* & B^* \\ -B^{*t} & D^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N + N^T \\ \kappa \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ M^T \end{Bmatrix} \quad (20-2)$$

در رابطه فوق A_{ij}^* ، B_{ij}^* و D_{ij}^* طبق روابط وارون شده به ماتریس‌های سفتی کششی، ترکیب سفتی کششی - خمشی و سفتی خمشی مرتبط می‌شوند:

$$A_{ij}^* = A_{ij}^{-1} \quad B_{ij}^* = -A_{ij}^{-1} B_{ij} \quad D_{ij}^* = D_{ij} - B_{ij} A_{ij}^{-1} B_{ij} \quad (21-2)$$

برای ادامه منته‌های تنش را بر حسب تابع تنش $U(x, y)$ مطابق رابطه زیر در نظر می‌گیریم:

$$N_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad N_{yy} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad N_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \quad (22-2)$$

معادلات تعادل و معادلات سازگاری کرنش - جابه‌جایی برای حالت تنش صفحه‌ای مطابق روابط زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x^0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y^0}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}^0}{\partial x \partial y} \quad (23-2)$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = 0$$

با جایگذاری روابط تنش، بر حسب تابع تنش مطابق رابطه (۲۲-۲)، و روابط انحنای صفحه میانی، بر حسب جابه‌جایی عرضی صفحه میانی از رابطه (۹-۲)، در رابطه (۲۰-۲) خواهیم داشت:

$$\varepsilon_{xx}^0 = A_{11}^* \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + A_{12}^* \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - A_{16}^* \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - B_{11}^* \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - B_{12}^* \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - 2B_{16}^* \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \\ + A_{11}^* N_x^T + A_{12}^* N_y^T + A_{16}^* N_{xy}^T$$

$$\varepsilon_{yy}^0 = A_{12}^* \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + A_{22}^* \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - A_{26}^* \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - B_{21}^* \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - B_{22}^* \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - 2B_{26}^* \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \\ + A_{12}^* N_x^T + A_{22}^* N_y^T + A_{26}^* N_{xy}^T$$

$$\gamma_{xy}^0 = A_{16}^* \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + A_{26}^* \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - A_{66}^* \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - B_{61}^* \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - B_{62}^* \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - 2B_{66}^* \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \\ + A_{16}^* N_x^T + A_{26}^* N_y^T + A_{66}^* N_{xy}^T$$

(۲۴-۲)

$$M_{xx} = -B_{11}^* \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - B_{21}^* \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + B_{61}^* \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - D_{11}^* \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - D_{12}^* \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - 2D_{16}^* \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \\ - B_{11}^* N_x^T - B_{21}^* N_y^T - B_{61}^* N_{xy}^T - M_x^T$$

$$M_{yy} = -B_{12}^* \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - B_{22}^* \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + B_{62}^* \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - D_{12}^* \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - D_{22}^* \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - 2D_{26}^* \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \\ - B_{12}^* N_x^T - B_{22}^* N_y^T - B_{62}^* N_{xy}^T - M_y^T$$

$$M_{xy} = -B_{16}^* \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - B_{26}^* \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + B_{66}^* \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - D_{16}^* \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - D_{26}^* \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - 2D_{66}^* \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \\ - B_{16}^* N_x^T - B_{26}^* N_y^T - B_{66}^* N_{xy}^T - M_{xy}^T$$

با جایگذاری روابط (۲۴-۲) در معادلات (۲۳-۲)، دو دسته معادله به شکل زیر خواهیم داشت:

$$A_{11}^* \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} + A_{12}^* \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} - A_{16}^* \frac{\partial^4 U}{\partial x \partial y^3} - B_{11}^* \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} - B_{12}^* \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} - 2B_{16}^* \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} \\ + A_{11}^* \frac{\partial^2 N_x^T}{\partial y^2} + A_{12}^* \frac{\partial^2 N_y^T}{\partial y^2} + A_{16}^* \frac{\partial^2 N_{xy}^T}{\partial y^2}$$

$$A_{12}^* \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + A_{22}^* \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} - A_{26}^* \frac{\partial^4 U}{\partial x^3 \partial y} - B_{21}^* \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - B_{22}^* \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} - 2B_{26}^* \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} \\ + A_{12}^* \frac{\partial^2 N_x^T}{\partial x^2} + A_{22}^* \frac{\partial^2 N_y^T}{\partial x^2} + A_{26}^* \frac{\partial^2 N_{xy}^T}{\partial x^2}$$

(۲۵-۲)

$$-A_{16}^* \frac{\partial^4 U}{\partial x \partial y^3} - A_{26}^* \frac{\partial^4 U}{\partial x^3 \partial y} + A_{66}^* \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + B_{61}^* \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} + B_{62}^* \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} + 2B_{66}^* \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} \\ - A_{16}^* \frac{\partial^2 N_x^T}{\partial x \partial y} - A_{26}^* \frac{\partial^2 N_y^T}{\partial x \partial y} - A_{66}^* \frac{\partial^2 N_{xy}^T}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\begin{aligned}
& -B_{11}^* \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} - B_{21}^* \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + B_{61}^* \frac{\partial^4 U}{\partial x^3 \partial y} - D_{11}^* \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - D_{12}^* \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} - 2D_{16}^* \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} \\
& -B_{11}^* \frac{\partial^2 N_x^T}{\partial x^2} - B_{21}^* \frac{\partial^2 N_y^T}{\partial x^2} - B_{61}^* \frac{\partial^2 N_{xy}^T}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_x^T}{\partial x^2} \\
& -B_{12}^* \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} - B_{22}^* \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + B_{62}^* \frac{\partial^4 U}{\partial x \partial y^3} - D_{12}^* \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22}^* \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} - 2D_{26}^* \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} \\
& -B_{12}^* \frac{\partial^2 N_x^T}{\partial y^2} - B_{22}^* \frac{\partial^2 N_y^T}{\partial y^2} - B_{62}^* \frac{\partial^2 N_{xy}^T}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 M_y^T}{\partial y^2} \\
& -2B_{16}^* \frac{\partial^4 U}{\partial x \partial y^3} - 2B_{26}^* \frac{\partial^4 U}{\partial x^3 \partial y} + 2B_{66}^* \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} - 2D_{16}^* \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} - 2D_{26}^* \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} \\
& -4D_{66}^* \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} - 2B_{16}^* \frac{\partial^2 N_x^T}{\partial x \partial y} - 2B_{26}^* \frac{\partial^2 N_y^T}{\partial x \partial y} - 2B_{66}^* \frac{\partial^2 N_{xy}^T}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^T}{\partial x \partial y} = 0
\end{aligned}$$

با مرتب‌سازی معادلات (۲-۲۵) بر حسب U و w_0 خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
C_{A^*} U - C_{B^*} w_0 &= -A_{11}^* \frac{\partial^2 N_x^T}{\partial y^2} - A_{12}^* \frac{\partial^2 N_y^T}{\partial y^2} - A_{16}^* \frac{\partial^2 N_{xy}^T}{\partial y^2} \\
& -A_{12}^* \frac{\partial^2 N_x^T}{\partial x^2} - A_{22}^* \frac{\partial^2 N_y^T}{\partial x^2} - A_{26}^* \frac{\partial^2 N_{xy}^T}{\partial x^2} \\
& +A_{16}^* \frac{\partial^2 N_x^T}{\partial x \partial y} + A_{26}^* \frac{\partial^2 N_y^T}{\partial x \partial y} + A_{66}^* \frac{\partial^2 N_{xy}^T}{\partial x \partial y} \\
C_{B^*} U + C_{D^*} w_0 &= -B_{11}^* \frac{\partial^2 N_x^T}{\partial x^2} - B_{21}^* \frac{\partial^2 N_y^T}{\partial x^2} - B_{61}^* \frac{\partial^2 N_{xy}^T}{\partial x^2} \\
& -B_{12}^* \frac{\partial^2 N_x^T}{\partial y^2} - B_{22}^* \frac{\partial^2 N_y^T}{\partial y^2} - B_{62}^* \frac{\partial^2 N_{xy}^T}{\partial y^2} \\
& -2B_{16}^* \frac{\partial^2 N_x^T}{\partial x \partial y} - 2B_{26}^* \frac{\partial^2 N_y^T}{\partial x \partial y} - 2B_{66}^* \frac{\partial^2 N_{xy}^T}{\partial x \partial y} \\
& -\frac{\partial^2 M_x^T}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_y^T}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^T}{\partial x \partial y}
\end{aligned} \tag{۲-۲۶}$$

در رابطه (۲-۲۶) ضرایب C_{A^*} ، C_{B^*} و C_{D^*} از رابطه (۲-۲۷) محاسبه خواهند شد.

$$\begin{aligned}
C_{A^*} &= A_{11}^* \frac{\partial^4}{\partial y^4} - 2A_{16}^* \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + (2A_{12}^* + A_{66}^*) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - 2A_{26}^* \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + A_{22}^* \frac{\partial^4}{\partial x^4} \\
C_{B^*} &= B_{12}^* \frac{\partial^4}{\partial y^4} + (2B_{16}^* - B_{62}^*) \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + (B_{11}^* + B_{22}^* - 2B_{66}^*) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \\
& + (2B_{26}^* - B_{61}^*) \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + B_{21}^* \frac{\partial^4}{\partial x^4}
\end{aligned} \tag{۲-۲۷}$$

$$C_{D^*} = D_{22}^* \frac{\partial^4}{\partial y^4} + 4D_{26}^* \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + 2(D_{12}^* + 2D_{66}^*) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{16}^* \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + D_{11}^* \frac{\partial^4}{\partial x^4}$$

با جایگذاری رابطه (۱۹-۲) در رابطه (۲۶-۲)، معادلات (۲۸-۲) و (۲۹-۲) به شکل زیر حاصل خواهد شد:

$$C_{A^*} U - C_{B^*} w_0 = EA^* \left[-\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} \right]^t \quad (28-2)$$

$$C_{B^*} U + C_{D^*} w_0 = (EB^* + R) \left[-\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} \right]^t \quad (29-2)$$

حل کلی معادلات فوق به شکل زیر است:

$$U = U^{(g)} + U^{(p)} \quad (30-2)$$

$$w_0 = w_0^{(g)} + w_0^{(p)}$$

برای حل همگن معادلات (۲۸-۲) و (۲۹-۲) خواهیم داشت:

$$C_{A^*} U^{(h)} - C_{B^*} w_0^{(h)} = 0 \quad (31-2)$$

$$C_{B^*} U^{(h)} + C_{D^*} w_0^{(h)} = 0$$

با حل معادله (۳۱-۲)، معادلات (۳۲-۲) و (۳۳-۲) بر حسب U و w_0 به صورت زیر حاصل خواهد شد:

$$(C_{A^*} C_{D^*} + C_{B^*} C_{B^*}) U^{(h)} = 0 \quad (32-2)$$

$$(C_{A^*} C_{D^*} + C_{B^*} C_{B^*}) w_0^{(h)} = 0 \quad (33-2)$$

ضرایب معادلات فوق ثابت هستند بنابراین حل معادله (۳۲-۲) یا (۳۳-۲) پاسخی به صورت $U^{(h)}(Z) = U^{(h)}(x + \tau_j y)$ یا $w_0^{(h)}(Z) = w_0^{(h)}(x + \tau_j y)$ خواهد داشت [۷۴]. لذا با در نظر

گرفتن معادله (۳۲-۲) خواهیم داشت:

$$(c_{A^*}(\tau_j)c_{D^*}(\tau_j)+c_{B^*}^2(\tau_j))\frac{\partial^8 U^{(h)}}{\partial Z^8}=0 \quad (34-2)$$

که در آن ضرایب c_{A^*} ، c_{B^*} و c_{D^*} به شکل زیر هستند:

$$\begin{aligned} c_{A^*} &= A_{11}^* \tau_j^4 - 2A_{16}^* \tau_j^3 + (2A_{12}^* + A_{66}^*) \tau_j^2 - 2A_{26}^* \tau_j + A_{22}^* \\ c_{B^*} &= B_{12}^* \tau_j^4 + (2B_{16}^* - B_{62}^*) \tau_j^3 + (B_{11}^* + B_{22}^* - 2B_{66}^*) \tau_j^2 + (2B_{26}^* - B_{61}^*) \tau_j + B_{21}^* \\ c_{D^*} &= D_{22}^* \tau_j^4 + 4D_{26}^* \tau_j^3 + 2(D_{12}^* + 2D_{66}^*) \tau_j^2 + 4D_{16}^* \tau_j + D_{11}^* \tau_j \end{aligned} \quad (35-2)$$

معادله مشخصه با صفر در نظر گرفتن بخش داخل پرانتز رابطه (34-2)، به شکل زیر خواهد بود:

$$c_{A^*}(\tau_j)c_{D^*}(\tau_j)+c_{B^*}^2(\tau_j)=0 \quad (36-2)$$

با حل معادله (36-2)، 4 جفت ریشه مختلط مزدوج τ_j و $\bar{\tau}_j$ ($j=1, 2, 3, 4$) حاصل خواهد شد.

در این مرحله تابع پتانسیل ϕ_j را بر حسب تابع تنش U_j تعریف می‌کنیم:

$$\phi_j = \frac{dU_j(Z_j)}{dZ_j} \quad (37-2)$$

همچنین رابطه $w_0^{(h)}$ با $U^{(h)}$ با در نظر گرفتن $\chi_j(\tau_j) = \frac{c_{A^*}}{c_{B^*}}$ مطابق رابطه (38-2) بازنویسی

می‌شود:

$$\sum_{j=1}^4 w_{0j}^{(h)}(Z_j) = \sum_{j=1}^4 \chi_j(\tau_j) U_j^{(h)}(Z_j) \quad (38-2)$$

با در نظر گرفتن رابطه بالا، رابطه (30-2) به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$U = 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^4 U_j^{(g)}(Z_j) + U^{(p)} \quad (39-2)$$

$$w_0 = 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^4 \chi_j(\tau_j) U_j^{(h)}(Z_j) + w_0^{(p)}$$

با جایگذاری روابط (37-2) و (39-2) در روابط منتهی‌های تنش، رابطه (22-2)، و همچنین روابط

انحنای صفحه میانی، رابطه (9-2)، خواهیم داشت:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^4 \left\{ \tau_j^2 \quad 1 \quad -\tau_j \quad -\chi_j(\tau_j) \quad -\chi_j(\tau_j)\tau_j^2 \quad -2\chi_j(\tau_j)\tau_j \right\}^t \phi'_j(Z_j) \\ \left[\frac{\partial^2 U^{(p)}}{\partial y^2} \quad \frac{\partial^2 U^{(p)}}{\partial x^2} \quad \frac{-\partial^2 U^{(p)}}{\partial x \partial y} \quad -\frac{\partial^2 w_0^{(p)}}{\partial x^2} \quad -\frac{\partial^2 w_0^{(p)}}{\partial y^2} \quad -2\frac{\partial^2 w_0^{(p)}}{\partial x \partial y} \right]^t \end{Bmatrix} \quad (40-2)$$

تا این مرحله پاسخ مربوط به حل همگن مساله ترموالاستیک نانوورق تابعی حاصل شده است. برای تکمیل مساله باید جواب خصوصی معادلات نیز محاسبه گردد. بدین منظور می‌بایست روابط مربوط به تاثیر میدان دمایی (شار حرارتی ثابت) در معادلات استخراج گردد.

۲-۴-۵ مطالعه اثر میدان دمایی بر نانوورق تابعی

برای وارد کردن اثر شار حرارتی یکنواخت بر نانوورق تابعی از قانون هدایت گرمایی که تحت عنوان قانون فوریه شناخته می‌شود استفاده می‌نماییم. مطابق حالت دیفرانسیلی قانون فوریه، شار حرارتی یکنواخت وارد شده بر یک محیط معادل حاصلضرب ضریب هدایت حرارتی و مقدار منفی گرادیان میدان دمایی است. با توجه به اینکه محیط اثر شار حرارتی نانوورق تابعی، که مطابق بخش ۲-۳ یک ماده ناهمگن است، می‌باشد بنابراین میدان دمایی $T(x, y)$ باید در قالب یک تابع تحلیلی مطابق رابطه زیر از قانون فوریه پیروی نماید [۹۷]:

$$q_i = -K_{ij} T_{,j} \quad (41-2)$$

در رابطه بالا K_{ij} تانسور مرتبه دو ضرایب هدایت حرارتی معادل نانوورق تابعی در دستگاه مختصات عمومی و تانسوری متقارن است که از رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$K_{ij} = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \bar{K}_i dz \quad (42-2)$$

$\bar{K}_i$ نیز ضرایب هدایت حرارتی وابسته به ضخامت ورق نانوتابعی در دستگاه مختصات عمومی و بر اساس ماتریس انتقال از ضرایب هدایت حرارتی وابسته به ضخامت در دستگاه مختصات اصلی مواد

مطابق شکل زیر به دست می آید:

$$\bar{K}_x = \cos^2(\alpha)K_{11} + \sin^2(\alpha)K_{22} ,$$

$$\bar{K}_y = \sin^2(\alpha)K_{11} + \cos^2(\alpha)K_{22} , \quad (43-2)$$

$$\bar{K}_{xy} = \frac{1}{2} \sin(2\alpha)(K_{11} - K_{22}) ,$$

در رابطه فوق، K_{11} و K_{22} از رابطه (۷-۲) حاصل می شوند. با توجه به اینکه نانورق تابعی فاقد منبع حرارتی داخلی است، خواهیم داشت:

$$\nabla q_i = 0 \quad (44-2)$$

با جایگذاری مدل ریاضی تاثیر شار حرارتی یکنواخت از رابطه (۲-۴۱) در معادله (۲-۴۴)، معادله حرارتی حاکم بر نانورق تابعی مطابق رابطه (۲-۴۵) بدست می آید:

$$K_{xx} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + K_{yy} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + 2K_{xy} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} = 0 \quad (45-2)$$

حل کلی معادله (۲-۴۵) در قالب $T = F_t(x + \tau_t y)$ خواهد بود که در آن τ_t ریشه معادله مشخصه زیر خواهد بود:

$$K_{yy} \tau_t^2 + 2K_{xy} \tau_t + K_{xx} = 0 \quad (46-2)$$

با در نظر گرفتن اینکه ماتریس ضرایب هدایت حرارتی مثبت معین و معکوس پذیر است، $(K_{xx} K_{yy} > K_{xy}^2)$ [۹۸]، معادله مشخصه (۲-۴۶) دارای یک جفت ریشه مختلط است که ریشه با قسمت موهومی مثبت مطابق رابطه زیر مورد نظر خواهد بود:

$$\tau_t = \frac{-K_{xy} + i \sqrt{K_{xx} K_{yy} - K_{xy}^2}}{K_{yy}} \quad (47-2)$$

پاسخ کلی معادله (۲-۴۵) به صورت زیر بیان می شود:

$$T = U_t(Z_t) + \overline{U_t(Z_t)} = 2 \operatorname{Re} \langle U_t(Z_t) \rangle , \quad Z_t = x + \tau_t y \quad U_t(Z_t) = F_t''(Z_t) \quad (48-2)$$

با جایگذاری رابطه (۲-۴۸) در معادله (۲-۴۱) مولفه های شار حرارتی به صورت زیر محاسبه می شود:

$$q_1 = 2 \operatorname{Re}(\tau_t K_t U'_t(Z_t)) \quad (49-2)$$

$$q_2 = -2 \operatorname{Re}(K_t U'_t(Z_t))$$

که در آن:

$$K_t = i \sqrt{K_{xx} K_{yy} - K_{xy}^2} \quad (50-2)$$

در نهایت با جایگذاری پاسخ کلی بدست آمده (۴۸-۲) در روابط (۲۸-۲) و (۲۹-۲)، جواب خصوصی توابع U و w_0 مطابق رابطه زیر محاسبه خواهد شد:

$$U^{(p)} = 2 \operatorname{Re} \langle \mu_1 U''_t(Z_t) \rangle \quad (51-2)$$

$$w_0^{(p)} = 2 \operatorname{Re} \langle \mu_2 U''_t(Z_t) \rangle$$

که μ_1 و μ_2 مطابق رابطه زیر خواهند بود:

$$\mu_1 = \frac{1}{c_{A^*}(\tau_t) c_{D^*}(\tau_t) + c_{B^*}^2(\tau_t)} \left(c_{D^*}(\tau_t) E A^* \begin{bmatrix} -\tau_t^2 \\ -1 \\ \tau_t \end{bmatrix} + c_{B^*}(\tau_t) (E B^* + R) \begin{bmatrix} -1 \\ -\tau_t^2 \\ -2\tau_t \end{bmatrix} \right) \quad (52-2)$$

$$\mu_2 = \frac{1}{c_{A^*}(\tau_t) c_{D^*}(\tau_t) + c_{B^*}^2(\tau_t)} \left(-c_{B^*}(\tau_t) E A^* \begin{bmatrix} -\tau_t^2 \\ -1 \\ \tau_t \end{bmatrix} + c_{A^*}(\tau_t) (E B^* + R) \begin{bmatrix} -1 \\ -\tau_t^2 \\ -2\tau_t \end{bmatrix} \right)$$

با در نظر گرفتن رابطه $\phi_t = \frac{dU^{(p)}(Z_t)}{dZ_t}$ و جایگذاری در رابطه (۴۰-۲)، نتیجه‌های تنش و انحنای

صفحه میانی به شکل زیر محاسبه خواهد شد:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^4 \begin{Bmatrix} \tau_j^2 \\ 1 \\ -\tau_j \\ -\chi_j(\tau_j) \\ -\chi_j(\tau_j) \tau_j^2 \\ -2\chi_j(\tau_j) \tau_j \end{Bmatrix} \phi'_j(Z_j) + 2 \operatorname{Re} \begin{Bmatrix} \mu_1 \tau_t^2 \\ \mu_1 \\ -\mu_1 \tau_t \\ -\mu_2 \\ -\mu_2 \tau_t^2 \\ -2\mu_2 \tau_t \end{Bmatrix} \phi'_t(Z_t) \quad (53-2)$$

هم اکنون با جایگذاری رابطه (۵۳-۲) در رابطه (۲۰-۲) کرنش‌های صفحه میانی و نتیجه‌های گشتاور

بر حسب توابع ϕ'_t و ϕ'_j حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx}^0 &= 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^4 \Lambda_{1j}(\tau_j) \phi_j'(Z_j) + 2 \operatorname{Re} \left\langle \left(\Lambda_1^{Th} + \Lambda_7^{Th} \right) \phi_t'(Z_t) \right\rangle \\
\varepsilon_{yy}^0 &= 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^4 \Lambda_{2j}(\tau_j) \phi_j'(Z_j) + 2 \operatorname{Re} \left\langle \left(\Lambda_2^{Th} + \Lambda_8^{Th} \right) \phi_t'(Z_t) \right\rangle \\
\gamma_{xy}^0 &= 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^4 \Lambda_{3j}(\tau_j) \phi_j'(Z_j) + 2 \operatorname{Re} \left\langle \left(\Lambda_3^{Th} + \Lambda_9^{Th} \right) \phi_t'(Z_t) \right\rangle \\
M_{xx} &= 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^4 \Lambda_{4j}(\tau_j) \phi_j'(Z_j) + 2 \operatorname{Re} \left\langle \left(\Lambda_4^{Th} + \Lambda_{10}^{Th} \right) \phi_t'(Z_t) \right\rangle \\
M_{yy} &= 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^4 \Lambda_{5j}(\tau_j) \phi_j'(Z_j) + 2 \operatorname{Re} \left\langle \left(\Lambda_5^{Th} + \Lambda_{11}^{Th} \right) \phi_t'(Z_t) \right\rangle \\
M_{xy} &= 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^4 \Lambda_{6j}(\tau_j) \phi_j'(Z_j) + 2 \operatorname{Re} \left\langle \left(\Lambda_6^{Th} + \Lambda_{12}^{Th} \right) \phi_t'(Z_t) \right\rangle
\end{aligned}
\tag{۵۴-۲}$$

در رابطه بالا، ضرایب Λ_{ij} و Λ_l^{Th} ، $(j=1-4, l=1-12, i=1-6)$ ، مطابق روابط زیر هستند:

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{c} \Lambda_{1j} \\ \Lambda_{2j} \\ \Lambda_{3j} \\ \Lambda_{4j} \\ \Lambda_{5j} \\ \Lambda_{6j} \end{array} \right\} &= \left[\begin{array}{cccccc} A_{11}^* & A_{12}^* & A_{16}^* & B_{11}^* & B_{12}^* & B_{16}^* \\ A_{12}^* & A_{22}^* & A_{26}^* & B_{12}^* & B_{22}^* & B_{26}^* \\ A_{16}^* & A_{26}^* & A_{66}^* & B_{16}^* & B_{26}^* & B_{66}^* \\ -B_{11}^* & -B_{21}^* & -B_{16}^* & D_{11}^* & D_{12}^* & D_{16}^* \\ -B_{12}^* & -B_{22}^* & -B_{26}^* & D_{12}^* & D_{22}^* & D_{26}^* \\ -B_{16}^* & -B_{26}^* & -B_{66}^* & D_{16}^* & D_{26}^* & D_{66}^* \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \tau_j^2 \\ 1 \\ -\tau_j \\ -\chi_j(\tau_j) \\ -\chi_j(\tau_j)\tau_j^2 \\ -2\chi_j(\tau_j)\tau_j \end{array} \right\} \\
\left\{ \begin{array}{c} \Lambda_1^{Th} \\ \Lambda_2^{Th} \\ \Lambda_3^{Th} \\ \Lambda_4^{Th} \\ \Lambda_5^{Th} \\ \Lambda_6^{Th} \end{array} \right\} &= \left[\begin{array}{cccccc} A_{11}^* & A_{12}^* & A_{16}^* & B_{11}^* & B_{12}^* & B_{16}^* \\ A_{12}^* & A_{22}^* & A_{26}^* & B_{12}^* & B_{22}^* & B_{26}^* \\ A_{16}^* & A_{26}^* & A_{66}^* & B_{16}^* & B_{26}^* & B_{66}^* \\ -B_{11}^* & -B_{21}^* & -B_{16}^* & D_{11}^* & D_{12}^* & D_{16}^* \\ -B_{12}^* & -B_{22}^* & -B_{26}^* & D_{12}^* & D_{22}^* & D_{26}^* \\ -B_{16}^* & -B_{26}^* & -B_{66}^* & D_{16}^* & D_{26}^* & D_{66}^* \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \mu_1 \tau_t^2 \\ \mu_1 \\ -\mu_1 \tau_t \\ -\mu_2 \\ -\mu_2 \tau_t^2 \\ -2\mu_2 \tau_t \end{array} \right\} \\
\left\{ \begin{array}{c} \Lambda_7^{Th} \\ \Lambda_8^{Th} \\ \Lambda_9^{Th} \\ \Lambda_{10}^{Th} \\ \Lambda_{11}^{Th} \\ \Lambda_{12}^{Th} \end{array} \right\} &= \left[\begin{array}{cccccc} A_{11}^* & A_{12}^* & A_{16}^* & B_{11}^* & B_{12}^* & B_{16}^* \\ A_{12}^* & A_{22}^* & A_{26}^* & B_{12}^* & B_{22}^* & B_{26}^* \\ A_{16}^* & A_{26}^* & A_{66}^* & B_{16}^* & B_{26}^* & B_{66}^* \\ -B_{11}^* & -B_{21}^* & -B_{16}^* & D_{11}^* & D_{12}^* & D_{16}^* \\ -B_{12}^* & -B_{22}^* & -B_{26}^* & D_{12}^* & D_{22}^* & D_{26}^* \\ -B_{16}^* & -B_{26}^* & -B_{66}^* & D_{16}^* & D_{26}^* & D_{66}^* \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_{12} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ R_1 \\ R_2 \\ R_{12} \end{array} \right\}
\end{aligned}
\tag{۵۵-۲}$$

مولفه‌های نیروی برش عرضی، در نتیجه معادله تعادل این نیروها، از طریق رابطه زیر به یکدیگر مرتبط می‌شوند:

$$\frac{\partial Q_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yy}}{\partial y} = 0 \quad (56-2)$$

همچنین از طریق تعادل گشتاوری، مولفه‌های نیروی برشی عرضی مطابق روابط زیر با منته‌های گشتاور مرتبط خواهند شد [۹۲]:

$$Q_{xx} = \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad (57-2)$$

$$Q_{yy} = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y}$$

مولفه‌های نیروی برشی عرضی را می‌توان با جایگذاری روابط مربوط به منته‌های گشتاور از رابطه (۵۴-۲) در رابطه (۵۷-۲) برحسب توابع پتانسیل معرفی شده به دست آورد:

$$Q_{xx} = 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^4 (\Lambda_{4j} + \tau_j \Lambda_{6j}) \phi_j'' + 2 \operatorname{Re} \left[\left\langle (\Lambda_4^{Th} + \Lambda_{10}^{Th}) + \tau_t (\Lambda_6^{Th} + \Lambda_{12}^{Th}) \right\rangle \phi_t'' \right] \quad (58-2)$$

$$Q_{yy} = 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^4 (\Lambda_{6j} + \tau_j \Lambda_{5j}) \phi_j'' + 2 \operatorname{Re} \left[\left\langle (\Lambda_6^{Th} + \Lambda_{12}^{Th}) + \tau_t (\Lambda_5^{Th} + \Lambda_{11}^{Th}) \right\rangle \phi_t'' \right]$$

با جایگذاری روابط (۵۸-۲) در (۵۶-۲) روابط زیر برای ثابت‌های معرفی شده برقرار خواهد شد:

$$\Lambda_{4j} + 2\tau_j \Lambda_{6j} + \tau_j^2 \Lambda_{5j} = 0 \quad (59-2)$$

$$(\Lambda_4^{Th} + \Lambda_{10}^{Th}) + 2\tau_t (\Lambda_6^{Th} + \Lambda_{12}^{Th}) + \tau_t^2 (\Lambda_5^{Th} + \Lambda_{11}^{Th}) = 0$$

از طریق روابط (۵۴-۲) جابه‌جایی‌های صفحه میانی u_0 و v_0 و از ترکیب روابط (۵۱-۲) و (۳۹-۲) w_0 برحسب توابع پتانسیل بدست می‌آیند:

$$u_0 = 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^4 \Lambda_{1j} \phi_j(Z_j) + 2 \operatorname{Re} \left\langle (\Lambda_1^{Th} + \Lambda_7^{Th}) \phi_t(Z_t) \right\rangle$$

$$v_0 = 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^4 \frac{\Lambda_{2j}}{\tau_j} \phi_j(Z_j) + 2 \operatorname{Re} \left\langle \frac{(\Lambda_2^{Th} + \Lambda_8^{Th})}{\tau_t} \phi_t(Z_t) \right\rangle \quad (60-2)$$

$$w_0 = 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^4 \tau_j \int \phi_j(Z_j) + 2 \operatorname{Re} \left\langle \mu_2 \int \phi_t(Z_t) \right\rangle$$

نظر به اینکه ورق در نظر گرفته شده دارای فرضیات صلبیت است بنابراین چرخش حول محور z

وجود نخواهد داشت، از اینرو با اعمال رابطه ریاضی عدم چرخش، $\frac{\partial u_0}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial x}$ ، به رابطه زیر خواهیم

رسید:

$$\left(\frac{\Lambda_{2j}}{\tau_j} - \tau_j \Lambda_{1j} \right) \phi'_j(Z_j) + \left\langle \left(\frac{\Lambda_2^{Th} + \Lambda_8^{Th}}{\tau_t} \right) - \tau_t (\Lambda_1^{Th} + \Lambda_7^{Th}) \right\rangle \phi'_t(Z_t) = 0 \quad (61-2)$$

۵-۲ نگاشت همنوا

به منظور نگاشتن ناحیه بی‌نهایت خارج از گشودگی در ورق نانوتابعی به ناحیه بیرون دایره واحد از نگاشت همنوا مطابق شکل (۴-۲) استفاده می‌کنیم. تابع نگاشت در نظر گرفته شده بدین منظور که روش تحلیلی مربوطه به گشودگی دایره‌ای را به گشودگی بیضوی بسط می‌دهد و فرمول انتگرال کوشی را ساده می‌نماید، مطابق رابطه زیر تعریف می‌شود:

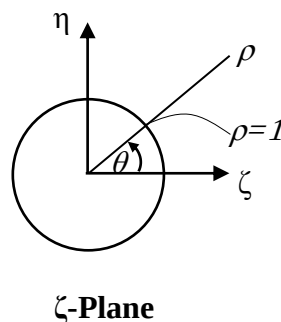
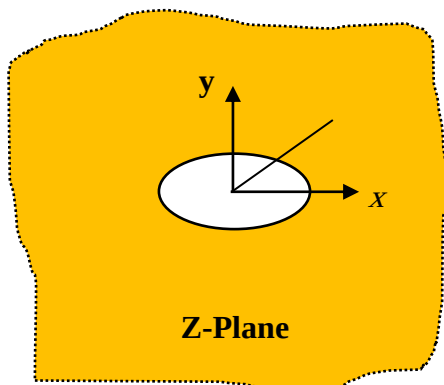
$$Z_l = x + \tau_l y, \quad l = j, t, \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad (62-2)$$

در رابطه بالا مقادیر ویژه τ_k همان ریشه‌های معادلات مشخصه (۳۶-۲) و (۴۶-۲) می‌باشند. x و y نیز در صفحه گشودگی بوده و نقاط روی مرز گشودگی را به دایره‌ای به شعاع واحد می‌نگارد که به شکل زیر تعریف می‌گردند:

$$x = \lambda \cos \theta \quad (63-2)$$

$$y = \lambda e \sin \theta$$

در رابطه بالا λ پارامتری است که به منظور تعیین اندازه گشودگی استفاده می‌شود و در مساله حاضر برابر ۱ در نظر گرفته شده است. θ موقعیت زاویه گشودگی است. e بیانگر کشیدگی ($e > 1$) یا فشردگی ($e < 1$) گشودگی در راستای محور y است و تبدیل شکل گشودگی از دایروی به بیضوی از طریق همین پارامتر خواهد بود.



شکل (۴-۲): نگاشت همنوا

همانطور که گفته شد رابطه (۶۲-۲) برای نگاشت نقاط روی مرز گشودگی بر مرز دایره واحد استفاده می‌شود. برای نقاط خارج از مرز گشودگی از متغیر مختلط ζ به صورت زیر استفاده می‌شود:

$$\zeta = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (۶۴-۲)$$

با توجه به اینکه دایره با شعاع واحد در نظر گرفته شده است بنابراین در رابطه بالا $\rho = 1$ است، همچنین i در روابط این بخش همان واحد موهومی است که دارای خاصیت $i^2 = -1, i = \sqrt{-1}$ است. از طرفی رابطه اویلر که با استفاده از بسط تیلور در آنالیز مختلط بین تابع نمایی مختلط و توابع مثلثاتی ارتباط برقرار می‌کند به شکل زیر است:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (۶۵-۲)$$

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

از روابط (۶۵-۲) و (۶۴-۲)، توابع مثلثاتی $\sin$ و $\cos$ بر حسب متغیر مختلط ζ بیان می‌گردند:

$$\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}(\zeta + \zeta^{-1}) \quad (۶۶-۲)$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = \frac{-i}{2}(\zeta - \zeta^{-1})$$

با جایگذاری روابط (۶۶-۲) در (۶۳-۲)، x و y بر حسب متغیر مختلط ζ بدست می‌آیند:

$$x = \frac{\lambda}{2}(\zeta + \zeta^{-1}) \quad (۶۷-۲)$$

$$y = \frac{-i\lambda}{2}(e\zeta - e\zeta^{-1})$$

با توجه به اینکه تاثیر پارامتر چرخش گشودگی نیز مورد مطالعه قرار خواهد گرفت، برای اعمال زاویه چرخش از ماتریس دوران زیر استفاده می‌نماییم.

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad (68-2)$$

در ماتریس دوران فوق، β زاویه چرخش گشودگی نسبت به محور x می‌باشد. با جایگذاری روابط (67-2) در رابطه (68-2) خواهیم داشت:

$$X = \frac{\lambda}{2} \langle (\cos \beta + ie \sin \beta) \zeta + (\cos \beta - ie \sin \beta) \zeta^{-1} \rangle \quad (69-2)$$

$$Y = \frac{\lambda}{2} \langle (\sin \beta - ie \cos \beta) \zeta + (\sin \beta + ie \cos \beta) \zeta^{-1} \rangle$$

با جایگذاری روابط (69-2) در (62-2) و مرتب‌سازی آن در نهایت تابع پتانسیل نهایی بر حسب متغیر مختلط ζ حاصل می‌شود:

$$Z_l = W(\zeta_l) = \delta_{1l} \zeta_l + \delta_{2l} \zeta_l^{-1},$$

$$\delta_{1l} = \frac{\lambda}{2} \langle (1 - ie \tau_l) \cos \beta + (ie + \tau_l) \sin \beta \rangle \quad l = 1, 2, 3, 4, t \quad (70-2)$$

$$\delta_{2l} = \frac{\lambda}{2} \langle (1 + ie \tau_l) \cos \beta + (-ie + \tau_l) \sin \beta \rangle$$

۲-۶ محاسبه توابع پتانسیل مختلط در صفحه نگاشت

۲-۶-۱ حل عمومی توابع پتانسیل

بدلیل بارگذاری در بی‌نهایت و به منظور به دست آوردن حل تنش اطراف گشودگی مولفه‌های تنش و بار اعمال شده اطراف گشودگی در جهت نرمال n در نظر گرفته می‌شود. از همین رو و نیز به منظور اعمال شرایط مرزی، نیروهای درون صفحه‌ای $Y_n(\Gamma); X_n(\Gamma)$ ، گشتاورهای خمشی و پیچشی $M_{nt}(\Gamma); M_n(\Gamma)$ و نیروی برشی عرضی $Q_n(\Gamma)$ در واحد طول و در امتداد مرزهای گشودگی معرفی می‌شوند [۶۱].

نیروهای درون صفحه‌ای $X_n(\Gamma)$ و $Y_n(\Gamma)$ مطابق رابطه زیر به منته‌های تنش مرتبط می‌شوند:

$$X_n = N_{xx} \cos(n, x) + N_{xy} \cos(n, y) \quad (71-2)$$

$$Y_n = N_{xy} \cos(n, x) + N_{yy} \cos(n, y)$$

گشتاورهای خمشی و پیچشی $M_n(\Gamma)$ ؛ $M_{nt}(\Gamma)$ و نیروی برشی عرضی $Q_n(\Gamma)$ نیز طی رابطه‌های زیر به منته‌های گشتاور و نیروهای برش عرضی مرتبط می‌شوند.

$$M_n = M_{xx} \cos^2(n, x) + M_{yy} \cos^2(n, y) + 2M_{xy} \cos(n, x) \cos(n, y)$$

$$M_{nt} = (M_{yy} - M_{xx}) \cos(n, x) \cos(n, y) + M_{xy} [\cos^2(n, x) - \cos^2(n, y)] \quad (72-2)$$

$$Q_n = Q_{xx} \cos(n, x) + Q_{yy} \cos(n, y)$$

زاویه میان بردار نرمال روی لبه سوراخ و محور x با θ نمایش داده می‌شود، بنابراین خواهیم داشت:

$$\cos(n, x) = \cos \theta = \frac{dy}{d\Gamma}, \quad \cos(n, y) = \sin \theta = -\frac{dx}{d\Gamma} \quad (73-2)$$

نیروی عرضی یکپارچه و گشتاور خمشی در امتداد مرز گشودگی از روابط زیر به دست می‌آیند [۹۲]:

$$M_n = -m(\Gamma)$$

$$\int_0^\Gamma \left(Q_n + \frac{\partial}{\partial \Gamma} M_{nt} \right) d\Gamma = -p(\Gamma) \quad (74-2)$$

در نهایت با جایگذاری روابط (۷۲-۲) در روابط (۷۴-۲) و استفاده از رابطه (۷۳-۲) معادلات زیر برای گشتاور خمشی و نیروی عرضی در امتداد مرز گشودگی و بر حسب منته‌های تنش و گشتاور به دست می‌آید:

$$M_{xx} \cos^2 \theta + M_{yy} \sin^2 \theta + 2M_{xy} \sin \theta \cos \theta = -m(\Gamma) \quad (75-2)$$

$$(M_{yy} - M_{xx}) \cos \theta \sin \theta + M_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + f = -p(\Gamma) \quad (76-2)$$

در مرحله اول با ضرب رابطه (۷۵-۲) در $\sin \theta$ و ضرب رابطه (۷۶-۲) در $\cos \theta$ و سپس جمع روابط حاصل و در مرحله دوم با ضرب رابطه (۷۵-۲) در $\cos \theta$ و ضرب رابطه (۷۶-۲) در $\sin \theta$ و سپس

تفریق روابط حاصل خواهیم داشت [۹۲]:

$$(M_{xy} + f)dy - M_{yy}dx = m dx - p dy \quad (۷۷-۲)$$

$$M_{xx}dy - (M_{xy} - f)dx = -m dy - p dx \quad (۷۸-۲)$$

هم اکنون می‌توان با قرار دادن منته‌های تنش و گشتاور از روابط (۷۳-۲) و (۵۴-۲) در روابط (۷۱-۲)، (۷۷-۲) و (۷۸-۲) شرایط مرزی مساله را بر حسب ϕ'_t و ϕ'_j به دست آورد:

$$\begin{aligned} X_n d\Gamma &= \left[2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^4 \tau_j^2 \phi_j^{(h)}(Z_j) + 2 \operatorname{Re} \left\{ \mu_1 \tau_t^2 \phi_t^{(p)}(Z_t) \right\} \right] dy \\ &+ \left[2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^4 \tau_j \phi_j^{(h)}(Z_j) + 2 \operatorname{Re} \left\{ \mu_1 \tau_t \phi_t^{(p)}(Z_t) \right\} \right] dx \\ -Y_n d\Gamma &= \left[2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^4 \tau_j \phi_j^{(h)}(Z_j) + 2 \operatorname{Re} \left\{ \mu_1 \tau_t \phi_t^{(p)}(Z_t) \right\} \right] dy \\ &\left[2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^4 \phi_j^{(h)}(Z_j) + 2 \operatorname{Re} \left\{ \mu_1 \phi_t^{(p)}(Z_t) \right\} \right] dx \\ -m dy - p dx &= \left[2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^4 \Lambda_{4j} \phi'_j(Z_j) + 2 \operatorname{Re} \left\{ (\Lambda_4^{Th} + \Lambda_{10}^{Th}) \phi'_t(Z_t) \right\} \right] dy \\ &- \left[2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^4 (2\Lambda_{6j} + \tau_j \Lambda_{5j}) \phi'_j(Z_j) \right. \\ &\quad \left. + 2 \operatorname{Re} \left\{ \left[2(\Lambda_6^{Th} + \Lambda_{12}^{Th}) + \tau_t (\Lambda_5^{Th} + \Lambda_{11}^{Th}) \right] \phi'_t(Z_t) \right\} \right] dx \\ m dx - p dy &= - \left[2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^4 \tau_j \Lambda_{5j} \phi'_j(Z_j) + 2 \operatorname{Re} \left\{ \tau_t (\Lambda_5^{Th} + \Lambda_{11}^{Th}) \phi'_t(Z_t) \right\} \right] dy \\ &- \left[2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^4 \Lambda_{5j} \phi'_j(Z_j) + 2 \operatorname{Re} \left\{ (\Lambda_5^{Th} + \Lambda_{11}^{Th}) \phi'_t(Z_t) \right\} \right] dx \end{aligned} \quad (۷۹-۲)$$

با انتگرال‌گیری از روابط فوق شرایط مرزی بر حسب توابع پتانسیل ϕ_j و ϕ_t به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \int_0^\Gamma X_n d\Gamma &= 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^4 \tau_j \phi_j(Z_j) + 2 \operatorname{Re} \left\{ \mu_1 \tau_t \phi_t(Z_t) \right\} \\ \int_0^\Gamma -Y_n d\Gamma &= 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^4 \phi_j(Z_j) + 2 \operatorname{Re} \left\{ \mu_1 \phi_t(Z_t) \right\} \\ \int_0^\Gamma (m dy + p dx) &= 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^4 \frac{\Lambda_{4j}}{\tau_j} \phi_j(Z_j) + 2 \operatorname{Re} \left\{ \left(\frac{\Lambda_4^{Th} + \Lambda_{10}^{Th}}{\tau_t} \right) \phi_t(Z_t) \right\} \\ - \int_0^\Gamma (m dx - p dy) &= 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^4 \Lambda_{5j} \phi_j(Z_j) + 2 \operatorname{Re} \left\{ (\Lambda_5^{Th} + \Lambda_{11}^{Th}) \phi_t(Z_t) \right\} \end{aligned} \quad (۸۰-۲)$$

به منظور ساده‌تر نمودن ساختار فرمولی، شرایط مرزی مکانیکی سطح گشودگی (s) که طبق روابط (۸۰-۲) بدست آمده است همچنین شرایط مرزی جابه‌جایی با توجه به روابط (۶۰-۲) و (۶۱-۲) در قالب ساختار ماتریسی به شکل زیر بیان می‌گردند [۷۷]:

$$S\phi + \overline{S\phi} + S_t\phi_t + \overline{S_t\phi_t} = P \quad (۸۱-۲)$$

در روابط فوق، خط بالای عبارات به معنای مزدوج عبارت است. ماتریس‌های S ، S_t و ϕ مطابق رابطه زیر هستند:

$$S(:j) = \begin{bmatrix} \tau_j \\ 1 \\ \frac{\Lambda_{4j}}{\tau_j} \\ \Lambda_{5j} \end{bmatrix}; j=1-4, \quad S_t = \begin{bmatrix} \mu_1 \tau_t \\ \mu_1 \\ \frac{\Lambda_4^{Th} + \Lambda_{10}^{Th}}{\tau_t} \\ \Lambda_5^{Th} + \Lambda_{11}^{Th} \end{bmatrix}, \quad \phi = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix}, \quad (۸۲-۲)$$

در رابطه (۸۱-۲) بردار P نیروهای عرضی و غشائی وارد بر لبه گشودگی هستند اما از آنجا که طبق مفروضات بیان شده در بخش ۲-۲ مرز گشودگی عاری از هرگونه کشش است بنابراین سمت راست معادلات (۸۱-۲) صفر خواهد بود.

با توجه به اینکه شار حرارتی ثابت و مشخص q_0 در سطح نانورق برقرار است و با در نظر گرفتن بردار نرمال روی گشودگی $n = (n_1, n_2, 0)$ ، شرط مرزی نیومن به شکل زیر برقرار خواهد بود [۷۷]:

$$q_1 n_1 + q_2 n_2 = q_0 \quad (۸۳-۲)$$

با انتگرال‌گیری از رابطه فوق در طول منحنی گشودگی و اعمال فرض لحاظ شده در بخش ۲-۲ که در آن مرز گشودگی (s) عایق در نظر گرفته شده است خواهیم داشت:

$$\phi'_t(Z_t) - \overline{\phi'_t(Z_t)} = 0 \quad Z_t \in s \quad (۸۴-۲)$$

رویکرد رایج برای پیدا کردن توابع پتانسیل در مسائلی که در آن محیط بی‌نهایت در نظر گرفته شده است و بارگذاری نیز در بی‌نهایت اعمال شده است، این است که از طریق جمع آثار ابتدا حل محیط نامتناهی بدون سوراخ تعیین شود و سپس راه‌حل مناسبی برای مساله سوراخ در نظر گرفته می‌شود

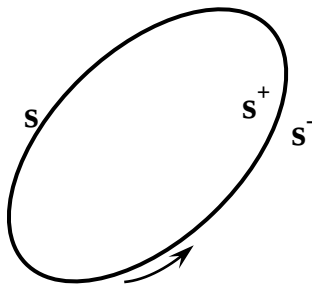
به طوریکه شرایط مرزی تعیین شده برآورده شود. در حل حاضر و در این بخش با استفاده توابع تحلیلی و در قالب سوری لوران برای مساله ترموالاستیک ورق نانو کامپوزیت تابعی که دارای ویژگی نامتقارن در راستای ضخامت نیز است یک راه حل جامع برای محاسبه توابع پتانسیل ارائه می گردد. همانطور که در بخش ۲-۵ ذکر گردید با استفاده از تابع نگاشت زیر می توان بخش های بیرونی s در صفحه Z_t را به بخش بیرونی دایره واحد، $\sigma = e^{i\theta}$ ، در صفحه ζ_t نگاشت:

$$Z_t = W_t(\zeta_t), \quad (۸۵-۲)$$

با در نظر گرفتن نقطه $\zeta_t = \sigma$ شرایط مرزی دمایی در صفحه نگاشت به شکل زیر خواهد شد:

$$\phi'_t(\sigma) - \overline{\phi'_t(\sigma)} = 0 \quad (۸۶-۲)$$

با توجه به اینکه محیط حل این مساله که نانوورق تابعی است و در مرکز به دلیل گشودگی دارای نقاط تکینگی است بنابراین تابع ϕ'_t باید در نقاط $|\sigma| > 1$ ، $\sigma = e^{i\theta}$ ، تحلیلی باشد. از همین رو تابع ϕ'_t را به دو تابع $\psi_{1t}(\zeta_t)$ و $\psi_{2t}(\zeta_t)$ که به ترتیب در نواحی s^+ و s^- ، مطابق شکل (۲-۵)، یا $|\sigma| < 1$ و $|\sigma| > 1$ تحلیلی هستند جداسازی می نماییم [۶۰]:



شکل (۲-۵): ناحیه محدود s^+ و نامحدود s^- اطراف ناحیه s گشودگی

همانطور که مشاهده می شود جهت مثبت s به گونه ای است که ناحیه s^+ در سمت چپ قرار می گیرد.

$$\phi'_t(\zeta_t) = \psi_{1t}(\zeta_t) + \psi_{2t}(\zeta_t) \quad (۸۷-۲)$$

همچنین با توجه به تعریف بالا $\psi_{1t}(\sigma)$ شرط مرزی $\psi_{1t}(\zeta_t)$ است که در محیط داخلی دایره واحد تحلیلی است و $\psi_{2t}(\sigma)$ شرط مرزی $\psi_{2t}(\zeta_t)$ است که در محیط خارجی دایره واحد تحلیلی است. هم اکنون با جایگذاری رابطه (۲-۸۷) در رابطه (۲-۸۶)، ضرب طرفین رابطه حاصل در عبارت

$\frac{1}{2\pi i (\sigma - \zeta_t)}$ و انتگرال گیری حول دایره واحد خواهیم داشت [۶۰]:

$$\frac{1}{2\pi i} \left(\oint \frac{\psi_{1t}(\sigma)}{\sigma - \zeta_t} d\sigma + \oint \frac{\psi_{2t}(\sigma)}{\sigma - \zeta_t} d\sigma - \oint \frac{\overline{\psi_{1t}(\sigma)}}{\sigma - \zeta_t} d\sigma - \oint \frac{\overline{\psi_{2t}(\sigma)}}{\sigma - \zeta_t} d\sigma \right) = 0 \quad (۸۸-۲)$$

برای حل عبارت بالا از فرمول انتگرال کوشی در قالب‌های زیر استفاده می‌شود [۹۹]:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_s \frac{f(\sigma)}{t - z} dt = f(z) \quad \text{for } z \text{ in } s^+ \quad \begin{array}{l} \text{توابع تحلیلی در } s^+ \text{ و پیوسته} \\ \text{در } s^+ + s \end{array} \quad (۸۹-۲)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_s \frac{f(\sigma)}{t - z} dt = 0 \quad \text{for } z \text{ in } s^-$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_s \frac{f(\sigma)}{t - z} dt = -f(z) + f(\infty) \quad \text{for } z \text{ in } s^- \quad \begin{array}{l} \text{توابع تحلیلی در } s^- \text{ و پیوسته} \\ \text{در } s^- + s \end{array} \quad (۹۰-۲)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_s \frac{f(\sigma)}{t - z} dt = f(\infty) \quad \text{for } z \text{ in } s^+$$

با لحاظ کردن $\bar{\sigma} = \sigma^{-1}$ برای دایره واحد در نهایت حل رابطه (۸۸-۲) به شکل زیر خواهد بود [۶۰]:

$$\psi_{2t}(\zeta) = \bar{\psi}_{1t}(\zeta^{-1}) + \bar{\psi}_{1t}(0) - \psi_{2t}(\infty) \quad (۹۱-۲)$$

از آنجا که مرز گشودگی عایق در نظر گرفته شده است بنابراین مقادیر ثابت $\bar{\psi}_{1t}(0) - \psi_{2t}(\infty)$ با جایگذاری روابط (۹۱-۲) و (۸۷-۲) در رابطه (۸۶-۲) صفر خواهد شد در نتیجه $\phi'_t(\zeta_t)$ به صورت رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\phi'_t(\zeta_t) = \psi_{1t}(\zeta_t) + \bar{\psi}_{1t}(\zeta^{-1}) \quad (۹۲-۲)$$

با به دست آوردن $\phi'_t(\zeta_t)$ ، شکل کلی تابع پتانسیل مختلط ϕ که بتواند شرایط مرزی مکانیکی را برآورده می‌کند، تعیین خواهد شد. بدین منظور دوباره در نظر می‌گیریم که با استفاده از تابع نگاشت زیر می‌توان بخش‌های بیرونی s در صفحه Z_I را به بخش بیرونی دایره واحد، $\sigma = e^{i\theta}$ ، در صفحه ζ_t نگاشت:

$$Z_l = W_l(\zeta_l), \quad l = 1, 2, 3, 4, t \quad (93-2)$$

شرایط مرزی مکانیکی (۲-۸۱) در صفحه نگاشت ζ_l به شکل زیر خواهد بود:

$$S\phi(\sigma) + \overline{S\phi(\sigma)} + S_t\phi_t(\sigma) + \overline{S_t\phi_t(\sigma)} = 0 \quad (94-2)$$

در مسائل ترموالاستیک تابع تحلیلی $\phi_t'(\zeta_t)$ را می‌توان در حالت کلی و به‌طور منحصر به فرد با سری لوران که شامل عبارت ζ_t^{-1} است، نشان داد. از آنجا که تابع $\phi_t(\zeta_t)$ انتگرال $\phi_t'(\zeta_t)$ است بنابراین شامل عبارت چند مقداره $\log \zeta_t$ خواهد بود. بنابراین برای تابع $\phi_t(\zeta_t)$ می‌توان عبارت زیر را در نظر گرفت:

$$\phi_t(\zeta_t) = \Psi_{1t}(\zeta_t) + \Psi_{2t}(\zeta_t) + \zeta_t \log \zeta_t \quad (95-2)$$

به‌طوریکه $\Psi_{1t}(\zeta_t)$ در محیط داخلی دایره واحد و $\Psi_{2t}(\zeta_t)$ در محیط خارجی دایره واحد تحلیلی هستند. همچنین ضریب ζ_t بعد از مشخص شدن $\phi_t'(\zeta_t)$ و انتگرال‌گیری از آن به دست می‌آید. حالت کلی تابع پتانسیل $\phi(\zeta)$ را نیز به همین صورت در نظر می‌گیریم:

$$\phi(\zeta) = \Psi_1(\zeta) + \Psi_2(\zeta) + \zeta \log \zeta \quad (96-2)$$

در رابطه بالا نیز $\Psi_1(\zeta)$ و $\Psi_2(\zeta)$ به ترتیب در محیط داخلی و خارجی دایره واحد تحلیلی هستند. با جایگذاری روابط (۲-۹۵) و (۲-۹۶) در شرایط مرزی مکانیکی (۲-۹۴) خواهیم داشت:

$$S\Psi_1(\sigma) + \overline{S\Psi_1(\sigma)} + \overline{S\Psi_2(\sigma)} + S_t\Psi_{1t}(\sigma) + \overline{S_t\Psi_{2t}(\sigma)} + S_t\Psi_{2t}(\sigma) + \overline{S_t\Psi_{1t}(\sigma)} = 0 \quad (97-2)$$

$$S\zeta \log \sigma + \overline{S\zeta \log \sigma} + S_t\zeta_t \log \sigma + \overline{S_t\zeta_t \log \sigma} = 0 \quad (98-2)$$

با ضرب رابطه (۲-۹۷) در عبارت $\frac{1}{2\pi i(\sigma - \zeta_t)}$ ، انتگرال حول دایره واحد و در نهایت استفاده از فرمول انتگرال کوشی خواهیم داشت:

$$S\Psi_2(\sigma) = -\overline{S\Psi_1(\zeta^{-1})} - S_t\Psi_{2t}(\zeta) - \overline{S_t\Psi_{1t}(\zeta^{-1})} + S\Psi_2(\infty) + \overline{S\Psi_1(0)} + S_t\Psi_{2t}(\infty) + \overline{S_t\Psi_{1t}(0)} \quad (99-2)$$

با توجه به اینکه مرز گشودگی از فاقد بارگذاری خارجی است بنابراین با جایگذاری رابطه (۲-۹۹) در (۲-۹۷) عبارت‌های ثابت $S\Psi_2(\infty) + \overline{S\Psi_1(0)} + S_t\Psi_{2t}(\infty) + \overline{S_t\Psi_{1t}(0)}$ صفر خواهند شد و خواهیم

داشت:

$$\Psi_2(\sigma) = -S^{-1}\bar{S}\bar{\Psi}_1(\zeta^{-1}) - S^{-1}S_t\Psi_{2t}(\zeta) - S^{-1}\bar{S}_t\bar{\Psi}_{1t}(\zeta^{-1}) \quad (100-2)$$

هم‌اکنون با جایگذاری رابطه (۱۰۰-۲) در (۹۶-۲) حالت کلی تابع پتانسیل مختلط به شکل زیر حاصل می‌شود:

$$\phi(\zeta) = \Psi_1(\zeta) - S^{-1}\bar{S}\bar{\Psi}_1(\zeta^{-1}) - S^{-1}S_t\Psi_{2t}(\zeta) - S^{-1}\bar{S}_t\bar{\Psi}_{1t}(\zeta^{-1}) + \zeta \log \zeta \quad (101-2)$$

برای به دست آوردن ضریب ζ در عبارت بالا باید رابطه (۹۸-۲) را با در نظر داشتن اینکه در دایره واحد $\log \bar{\sigma} = -\log \sigma$ است، به شکل زیر بازنویسی کرد [۷۷]:

$$S\zeta - \bar{S}\bar{\zeta} = S_t\zeta_t - \bar{S}_t\bar{\zeta}_t \quad (102-2)$$

شرایط مرزی جابه‌جایی در صفحه نگاشت ζ نیز به همین روش شرایط زیر را برای مساله ترموالاستیک حاکم خواهد کرد.

$$d\zeta - \bar{d}\bar{\zeta} = d_t\zeta_t - \bar{d}_t\bar{\zeta}_t \quad (103-2)$$

با ترکیب روابط (۱۰۲-۲) و (۱۰۳-۲) ضریب ζ مطابق رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\zeta = S^{-1}(\bar{X}^{-1} - X^{-1})(\zeta_t d_t - \bar{\zeta}_t \bar{d}_t) + d^{-1}(\bar{X} - X)(\zeta_t S_t - \bar{\zeta}_t \bar{S}_t), \quad X = d S^{-1} \quad (104-2)$$

۲-۶-۲ تابع پتانسیل ناشی از کشش در بی‌نهایت در ورق سوراخدار

نانوورق تابعی در فاصله دور از مرکز آن تحت تاثیر تنش N_{xx}^∞ می‌باشد، تابع پتانسیل مختلط برای این شرایط بارگذاری در یک ورق بی‌نهایت بدون گشودگی در مرکز آن به شکل زیر است [۱۰۰]:

$$\phi^\infty = \Omega \times Z_j \quad (105-2)$$

تابع پتانسیل Ω با جایگذاری رابطه (۱۰۵-۲) در روابط منته‌های تنش و گشتاور ((۵۳-۲) و ((۵۴-۲)، رابطه (۶۱-۲) و شرط مرزی هشتم به دست می‌آید. شرط مرزی هشتم نیز با اطمینان از یکتا شدن جابه‌جایی‌های خارج از صفحه حاصل می‌شود [۱۰۱]. این یکتایی نیز نتیجه برابری

جابه‌جایی‌های خارج از صفحه در دایره واحد در دو نقطه صفر و 2π است، به طوریکه $w(0) = w(2\pi)$.

بنابراین تابع پتانسیل Ω از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\Omega = \begin{bmatrix} \frac{\Lambda_{2j}(\tau_j)}{\tau_j} - \tau_l \Lambda_{1j}(\tau_l) \\ \tau_j^2 \\ 1 \\ \tau_j \\ \Lambda_{4l}(\tau_j) \\ \Lambda_{5l}(\tau_j) \\ \Lambda_{6l}(\tau_j) \\ \Lambda_{5l}(\tau_j) \delta_{2j} \end{bmatrix}_{8 \times 8}^{-1} \times \begin{bmatrix} 0 \\ N_{xx}^\infty \\ N_{yy}^\infty \\ N_{xy}^\infty \\ M_{xx}^\infty \\ M_{yy}^\infty \\ M_{xy}^\infty \\ 0 \end{bmatrix} \quad (۱۰۶-۲)$$

با جایگذاری تابع نگاشت (۷۰-۲) در رابطه (۱۰۵-۲)، تابع پتانسیل ϕ^∞ در صفحه نگاشت ζ_j به

شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$\phi_j^\infty = \Omega \times (\delta_{1j} \zeta + \delta_{2j} \zeta^{-1}) \quad (۱۰۷-۲)$$

با توجه به اینکه بدلیل وجود گشودگی در ورق یک اغتشاش هندسی بوجود آمده است بنابراین یک عبارت اصلاحی در قالب تابع پتانسیل $\phi_j^m(\zeta)$ که در نواحی $|\sigma| > 1$ تحلیلی است به تابع تنش مکانیکی ϕ_j^∞ اضافه می‌شود. تعریف انجام شده برای $\phi_j^m(\zeta)$ با تعریف انجام شده برای $\Psi_2(\zeta)$ که در رابطه (۹۶-۲) معرفی گردید مطابقت دارد. بنابراین با محاسبه $\Psi_1(\zeta)$ می‌توان تابع پتانسیل مکانیکی را محاسبه کرد. همانطور که در توضیحات رابطه (۹۶-۲) ذکر گردید، $\Psi_1(\zeta)$ در محیط داخلی دایره واحد تحلیلی است. بنابراین در رابطه (۱۰۷-۲) با حذف عبارتی که این ویژگی را ندارد خواهیم داشت [۱۰۲]:

$$\Psi_1(\zeta) = \Omega \times \delta_{1j} \zeta \quad (۱۰۸-۲)$$

۲-۶-۳ تابع پتانسیل ناشی از شار حرارتی یکنواخت در بی‌نهایت در ورق سوراخدار

وقتی شار حرارتی یکنواخت به یک ورق ناهمسانگرد بدون گشودگی اعمال می‌شود معادله تابع پتانسیل دمایی به شکل زیر خواهد بود [۷۷]:

$$\phi_t' = \Omega_t \times Z_t \quad (۱۰۹-۲)$$

ضریب Ω_t با جایگذاری رابطه (۱۰۹-۲) در (۴۹-۲) در معادله به شکل زیر به دست می‌آید:

$$\Omega_t = \frac{\cos \gamma + \bar{\tau}_t \sin \gamma}{K_t (\tau_t - \bar{\tau}_t)} q_0 \quad (۱۱۰-۲)$$

تابع پتانسیل دمایی خطی در رابطه (۱۰۹-۲) هیچگونه تنشی در نانورق کامپوزیت ایجاد نمی‌کند. اما بدلیل حضور گشودگی در مرکز ورق، این میدان دمایی خطی دچار آشفتگی می‌شود و علاوه بر میدان دمایی ϕ_t' ، یک تابع پتانسیل تنش دمایی که در خارج از دایره واحد تحلیلی است در صفحه نگاشت ζ_t بر ورق دارای گشودگی افزوده می‌شود:

$$\phi_t' = \phi_t'^{\infty} + \phi_t'^m \quad (۱۱۱-۲)$$

با در نظر گرفتن تابع نگاشت و رابطه (۱۰۹-۲)، رابطه (۱۱۱-۲) به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$\phi_t' = \Omega_t \delta_{1t} \zeta_t + \Omega_t \delta_{2t} \zeta_t^{-1} + \phi_t'^m \quad (۱۱۲-۲)$$

با مقایسه رابطه فوق با روابط (۸۷-۲) و (۹۲-۲) تابع $\psi_{1t}(\zeta_t)$ به شکل زیر به دست می‌آید:

$$\psi_{1t}(\zeta_t) = \Omega_t \delta_{1t} \zeta_t \quad (۱۱۳-۲)$$

در نتیجه بر اساس رابطه (۹۲-۲) تابع ϕ_t' به شکل زیر خواهد شد:

$$\phi_t' = \Omega_t \delta_{1t} \zeta_t + \overline{\Omega_t \delta_{1t} \zeta_t}^{-1} \quad (۱۱۴-۲)$$

با آشفته شدن جریان حرارتی یکنواخت توسط گشودگی، مولفه‌های تنش در بی‌نهایت صفر باقی می‌مانند. همچنین از آنجا که $\phi_t'^{\infty}$ بیانگر میدان دمایی، بدلیل شار حرارتی یکنواخت در ورق بی‌نهایت و بدون آشفتگی، است بنابراین حضور آن در ورق صرفاً باعث تغییر شکل می‌شود و

هیچ گونه تنش را منجر نمی شود. بنابراین برای تعیین تنش های حرارتی لازم است که مقدار ϕ_t^m محاسبه شود. با جایگذاری مقدار ϕ_t^{∞} از رابطه (۲-۱۱۴) در رابطه (۲-۱۱۲) مقدار ϕ_t^m به شکل زیر محاسبه می شود:

$$\phi_t^m = -(\Omega_t \delta_{2t} - \overline{\Omega_t \delta_{1t}}) \zeta_t^{-1} \quad (۲-۱۱۵)$$

همانطور که از رابطه (۲-۱۰۱) پیدا است، برای داشتن تابع پتانسیل نهایی نیاز است تا ضریب ζ محاسبه شود. این ضریب بر اساس رابطه (۲-۱۰۴) به ضریب ζ_t وابسته است. بدین منظور بر اساس رابطه (۲-۹۵) می بایست مقدار ϕ_t محاسبه گردد. با در نظر گرفتن $\phi_t = \int \phi_t' \frac{dZ_t}{d\zeta} d\zeta$ خواهیم داشت:

$$\phi_t = \frac{1}{2} (\Omega_t \delta_{1t}^2 \zeta_t^2 + \overline{\Omega_t \delta_{1t} \delta_{2t}} \zeta_t^{-2}) - \delta_{1t} (\Omega_t \delta_{2t} - \overline{\Omega_t \delta_{1t}}) \log \zeta_t \quad (۲-۱۱۶)$$

با مقایسه رابطه بالا با رابطه (۲-۹۵) ζ_t مطابق رابطه زیر خواهد بود:

$$\zeta_t = -\delta_{1t} (\Omega_t \delta_{2t} - \overline{\Omega_t \delta_{1t}}) \quad (۲-۱۱۷)$$

با جایگذاری مقدار ζ_t از رابطه بالا در رابطه (۲-۱۰۴) مقدار ζ نیز محاسبه می شود. به روش یکسان با انتگرال گیری از رابطه (۲-۱۱۵)، ϕ_t^m مطابق رابطه زیر به دست خواهد آمد:

$$\phi_t^m = -\frac{\delta_{2t}}{2} (\Omega_t \delta_{2t} - \overline{\Omega_t \delta_{1t}}) \zeta_t^{-2} - \delta_{1t} (\Omega_t \delta_{2t} - \overline{\Omega_t \delta_{1t}}) \log \zeta_t \quad (۲-۱۱۸)$$

با مقایسه روابط (۲-۱۱۸) و (۲-۹۵) با یکدیگر، توابع $\Psi_{1t}(\zeta_t)$ و $\Psi_{2t}(\zeta_t)$ ، با در نظر گرفتن ناحیه تحلیلی بودن، به شکل زیر محاسبه می شوند.

$$\Psi_{1t}(\zeta_t) = 0, \quad \Psi_{2t}(\zeta_t) = -\frac{\delta_{2t}}{2} (\Omega_t \delta_{2t} - \overline{\Omega_t \delta_{1t}}) \zeta_t^{-2} \quad (۲-۱۱۹)$$

اینک با جایگذاری روابط (۲-۱۰۸) و (۲-۱۱۹) در رابطه (۲-۱۰۱)، $\phi(\zeta)$ نیز به دست می آید:

$$\phi(\zeta) = \delta_{1j} \Omega \zeta - S^{-1} \bar{S} (\overline{\delta_{1j} \Omega}) \zeta^{-1} + \frac{\delta_{2t}}{2} S^{-1} S_t (\Omega_t \delta_{2t} - \overline{\Omega_t \delta_{1t}}) \zeta^{-2} + \zeta \log \zeta \quad (۲-۱۲۰)$$

اکنون با جایگذاری توابع پتانسیل محاسبه شده مطابق روابط (۲-۱۲۰) و (۲-۱۱۸) در روابط (۲-۵۳)

و (۵۴-۲) می‌توان مقادیر نتیجه‌های تنش و گشتاور اطراف گشودگی را محاسبه و تحلیل کرد.

۲-۷ الگوریتم حل تحلیلی حاکم

همانطور که مسیر استخراج معادلات نشان می‌دهد ویژگی‌های حاکم بر مساله پیچیدگی‌های متفاوتی بر حل آن حاکم کرد. ویژگی‌هایی شامل تابعی بودن خواص در راستای ضخامت، حضور بار حرارتی که باعث ناهمگن شدن معادلات اصلی می‌گردد، نامتقارن بودن نانو کامپوزیت به دلیل شکل خاص توزیع نانولوله‌های کربنی که در نهایت باعث ایجاد کوپل کشش-خمش، کشش-برش و خمش-پیچش در ورق مورد مطالعه می‌شود و همچنین اعمال ترکیبی بار حرارتی و کششی که نیازمند حل توابع پتانسیل جداگانه برای هر کدام و در عین حال استفاده از تک رابطه واحد برای تابع تنش نهایی است. الگوریتم پیاده‌سازی شده برای مساله تشریح شده به شکل زیر است:

- ۱- بدست آوردن روابط مربوط به خواص مواد نانوورق تابعی شامل روابط (۱-۲) تا (۷-۲)
- ۲- به دست آوردن ماتریس سفتی کشش کاهش یافته انتقال یافته از رابطه (۱۴-۲)
- ۳- محاسبه ضرایب انبساط حرارتی از رابطه (۱۵-۲)
- ۴- تعیین ماتریس‌های سفتی کشش، کوپل کشش-خمش و خمش با استفاده از روابط (۱۸-۲)
- ۵- محاسبه ضرایب نتیجه‌های نیروهای حرارتی (E و R) از روابط (۱۹-۲)
- ۶- تعیین معکوس ماتریس‌های سفتی از روابط (۲۱-۲)
- ۷- تعیین ریشه‌های معادله مشخصه مربوط به حل همگن از رابطه (۳۶-۲)
- ۸- تعیین ریشه معادله مشخصه مربوط به حل ناهمگن از رابطه (۴۶-۲)
- ۹- محاسبه ضریب K_t از رابطه (۵۰-۲)
- ۱۰- محاسبه ضرایب μ_1 و μ_2 مطابق روابط (۵۲-۲)
- ۱۱- به دست آوردن مقدار ضرایب Λ_{ij} و Λ_l^{Th} از روابط (۵۵-۲)

- ۱۲- تعیین تابع نگاشت مناسب برای شکل گشودگی با در نظر گرفتن پارامترهای e و β مربوط به هندسه و نحوه قرارگیری آن بر اساس رابطه (۷۰-۲)
- ۱۳- تشکیل ماتریس‌های S ، S_t ، d و d_t مطابق روابط (۸۲-۲)
- ۱۴- محاسبه تابع پتانسیل مکانیکی مربوط به بار کششی در بی‌نهایت بر اساس رابطه (۱۰۶-۲)
- ۱۵- محاسبه تابع پتانسیل $\Psi_1(\zeta)$ مربوط به بار کششی بر اساس رابطه (۱۰۸-۲)
- ۱۶- محاسبه تابع پتانسیل Ω_t از رابطه (۱۱۰-۲)
- ۱۷- محاسبه تابع پتانسیل ϕ_t^m از رابطه (۱۱۸-۲)
- ۱۸- محاسبه $\Psi_{2t}(\zeta_t)$ از رابطه (۱۱۹-۲)
- ۱۹- محاسبه تابع پتانسیل $\phi(\zeta)$ از رابطه (۱۲۰-۲)
- ۲۰- محاسبه منته‌های تنش و گشتاور بر اساس روابط (۵۳-۲) و (۵۴-۲)

۸-۲ خواص مواد

پلی متیل متاکریلات^۱ با نام اختصاری PMMA به عنوان فاز بستر نانوکامپوزیت انتخاب شده است.

خواص مکانیکی این پلیمر در دمای محیط و مطابق جدول ۱-۲ در نظر گرفته شده است.

جدول ۱-۲: خواص مواد بستر پلیمری نانورق کامپوزیتی

$C_p \left(\frac{J}{Kg.K} \right)$	$K^m \left(\frac{W}{m.K} \right)$	$\rho^m \left(\frac{Kg}{m^3} \right)$	ν^m	$\alpha^m \left(10^{-6} \frac{1}{K} \right)$	$E_m \text{ (GPa)}$
۱۴۶۶	۵	۱۱۵۰	۰٫۳۴	۴۵٫۰	۲٫۵

نانولوله‌های کربنی تک جداره به عنوان تقویت کننده بستر پلیمری در نظر گرفته شده‌اند. تمام خواص

مواد و ضخامت موثر نانولوله‌های کربنی تک جداره مورد استفاده مطابق جدول ۲-۲ انتخاب شده است.

جدول ۲-۲: خواص مواد نانولوله‌های کربنی تک جداره

E_{11}^{CNT}	۵٫۶۴۶۶	(TPa)
E_{22}^{CNT}	۷٫۰۸۰۰	(TPa)
G_{12}^{CNT}	۱٫۹۴۴۵	(TPa)
α_{11}^{CNT}	۳٫۴۵۸۴	$(10^{-6} \frac{1}{K})$
α_{22}^{CNT}	۵٫۱۶۸۲	$(10^{-6} \frac{1}{K})$
ν_{12}^{CNT}	۰٫۱۷۵	-
ρ^m	۱۴۰۰	$(\frac{Kg}{m^3})$
K_{11}^{CNT}	۳۰۰۰	$(\frac{W}{m.K})$
K_{22}^{CNT}	۱۰۰	$(\frac{W}{m.K})$
C_p	۱۱۰۰	$(\frac{J}{Kg.K})$

همانطور که در بخش ۳-۲ مشاهده می‌گردد برای محاسبه خواص مواد مطابق قانون توسعه یافته

اختلاط نیاز است تا ضرایب تاثیر نانولوله‌های کربنی ϑ_j ($j = 1, 2, 3$) تعیین گردند. بدین منظور از

^۱ Poly (methyl methacrylate)

تطبیق مدول‌های یانگ E_{11} ، E_{22} و G_{12} محاسبه شده از قانون اختلاط ساده با مقادیر گزارش شده توسط هن و ایلپوت که از طریق شبیه‌سازی دینامیک مولکولی به دست آمده‌اند، استفاده شده است. بر همین اساس مقادیر ضرایب تاثیر نانولوله‌های کربنی برای کسر حجمی ۱۲ درصد نانولوله‌های کربنی $\vartheta_1 = 0.137$ ، $\vartheta_2 = 1.022$ ، کسر حجمی ۱۷ درصد $\vartheta_1 = 0.142$ ، $\vartheta_2 = 1.626$ و کسر حجمی ۲۸ درصد $\vartheta_1 = 0.141$ ، $\vartheta_2 = 1.58$ است. همچنین در تمامی کسر حجمی‌ها $\vartheta_3 = 0.7\vartheta_2$ خواهد بود.

۹-۲ اعتبار سنجی روابط

به منظور اطمینان از درستی روابط استخراج شده حل تحلیلی حاضر، از شبیه سازی مساله در نرم افزار اجزای محدود آباکوس^۱ و اعتبار سنجی با نتایج تحلیل الاستیک کامپوزیت چندلایه نامتقارن [۱۰۳] استفاده شده است. از آنجا که مساله حاضر با صفر لحاظ کردن شار حرارتی قادر به محاسبه تنش های اطراف گشودگی ناشی از بار کششی و با صفر کردن بار کششی نیز قادر به محاسبه تنش های حرارتی ناشی از شار حرارتی یکنواخت است بنابراین درستی نتایج توزیع تنش اطراف گشودگی دایروی برای هر دو حالت مورد بررسی قرار گرفته است.

به منظور مدل سازی ورق نانوکامپوزیت تابعی در نرم افزار اجزای محدود آباکوس، ابتدا با جایگذاری رابطه (۳-۲) در (۱-۲) و (۴-۲) تا (۷-۲) خواص مواد ورق نانو تابعی بر اساس تابعی از متغیر z به دست می آید. سپس به منظور حفظ تغییر پیوسته مواد در راستای ضخامت و با استفاده از نرم افزار متلب^۲ خواص نانوورق تابعی به صورت ۳۰ تک لایه محاسبه می گردد و این خواص محاسبه شده در مدلسازی آباکوس استفاده می شود. زاویه نانولوله های کربنی صفر در نظر گرفته شده است. به منظور بی نهایت در نظر گرفتن ورق، نسبت ابعاد سوراخ دایروی به ابعاد ورق کمتر از ۱ به ۲۰ گرفته شده است. شار حرارتی به مقدار ۲۰ وات بر متر مربع از لبه بالای ورق وارد می شود و به منظور ایجاد حالت پایدار همین مقدار شار از لبه پایینی ورق خارج می شود، این حالت زاویه شار $\gamma=270^\circ$ درجه در حل تحلیلی را شبیه سازی می نماید. برای حالت کششی نیز ورق در دو لبه کناری تحت بار کششی واحد قرار می گیرد. از تکنیک مش زنی ساخت یافته^۳ برای مش بندی مدل اسفاده شده است. با استفاده از پارتیشن بندی مناسب خطوط بین دو نقطه وسط اضلاع روبه رو و همچنین قطره های ورق به عنوان خطوط پارتیشن بندی مورد استفاده قرار می گیرند. علاوه بر این به منظور امکان افزایش تعداد المان ها

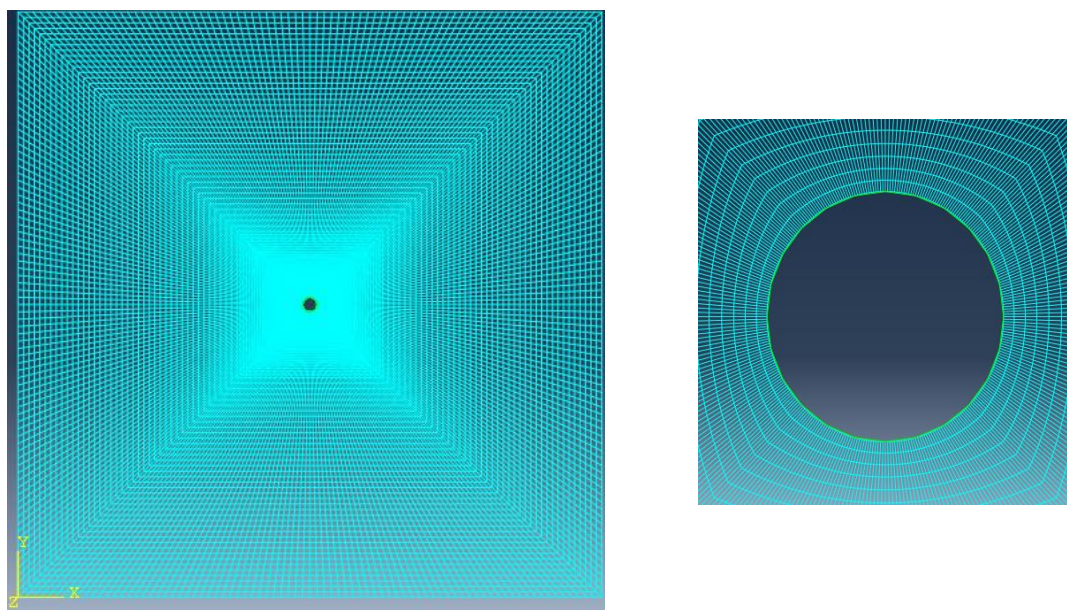
¹ Abaqus

² Matlab

³ Structured

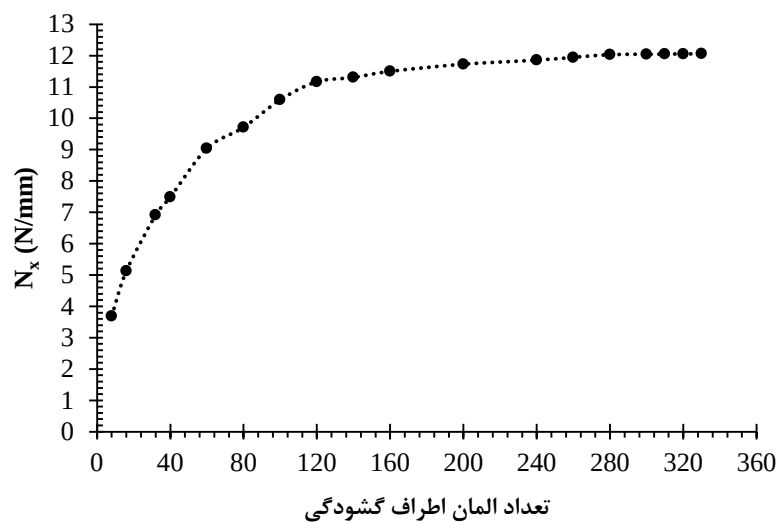
در اطراف گشودگی، با استفاده از یک ترسیم مربعی فضای اطراف گشودگی از سایر بخش‌های ورق جدا می‌شود، از همین طریق مش‌بندی اطراف گشودگی ریزتر از نقاط دورتر از گشودگی در نظر گرفته شده است. همچنین شکل المان‌ها از نوع مربع^۱ (با قابلیت ایجاد المان مثلثی در بخش‌های مورد نیاز آباکوس) استفاده شده است. شکل (۶-۲) نحوه مش‌بندی در نرم‌افزار آباکوس را نمایش می‌دهد.

برای مشخص شدن شرایط همگرایی مساله بر مبنای اندازه مش در اطراف گشودگی دایروی، نتایج بیشترین مقادیر منته‌های تنش تحت بارگذاری کششی و حرارتی حول گشودگی استخراج شده است. بر همین اساس نمودار همگرایی برای حالت کشش تک محور و همچنین بارگذاری حرارتی در شکل (۷-۲) و شکل (۸-۲) ترسیم شده است. همانطور که مشاهده می‌شود از ۲۸۰ المان به بعد میزان تغییرات منته‌های تنش در هر دو نمودار متوقف می‌شود. بنابراین تعداد المان‌ها در اطراف گشودگی برای تامین همگرایی تا ۲۸۰ المان در نظر گرفته شده است.

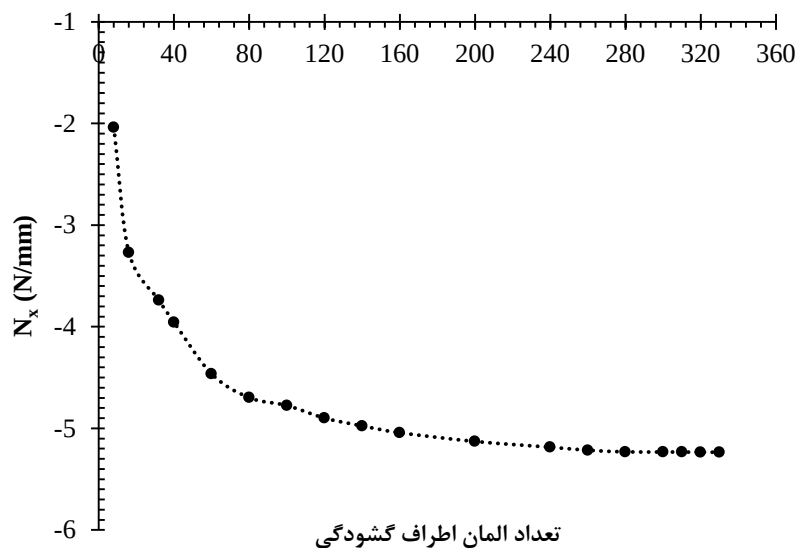


شکل (۶-۲): هندسه و ساختار مش‌بندی در نرم‌افزار آباکوس

¹ Quad-dominated

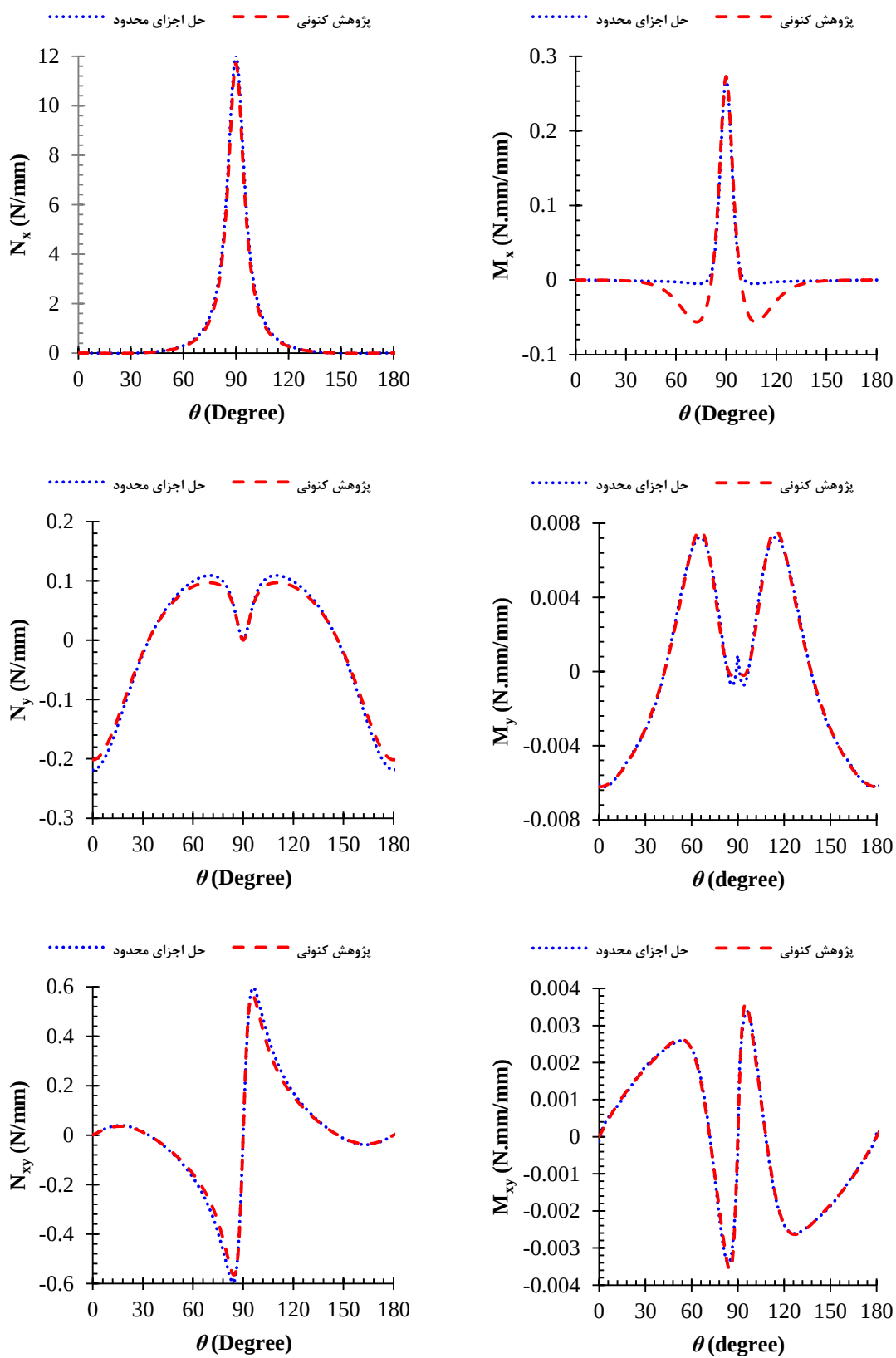


شکل (۷-۲): نمودار همگرایی منته تنش تحت بارگذاری کششی بر اساس مش‌بندی اطراف گشودگی دایروی



شکل (۸-۲): نمودار همگرایی منته تنش تحت بارگذاری حرارتی بر اساس مش‌بندی اطراف گشودگی دایروی

بر اساس تحلیل انجام شده با نرم‌افزار المان محدود آباکوس، در شکل (۹-۲) مقایسه‌ای بین پاسخ منته‌های تنش و گشتاور به دست آمده از حل حاضر و حل اجزای محدود انجام شده است. این حل برای بار کششی یکنواخت انجام شده است. کسر حجمی نانولوله‌های کربنی ۰,۱۷ در نظر گرفته شده است. همانطور که مشاهده می‌شود نتایج حاصل از هر دو حل از انطباق مناسبی برخوردار هستند، این تطابق نتایج در نقاط اکسترمم برای منته تنش N_x و منته گشتاور M_x از دقت مناسبی برخوردار است.



شکل (۲-۹): مقایسه منته‌های تنش و گشتاور اطراف گشودگی دایروی
حاصل از حل حاضر و حل اجزای محدود تحت بار کششی یکنواخت

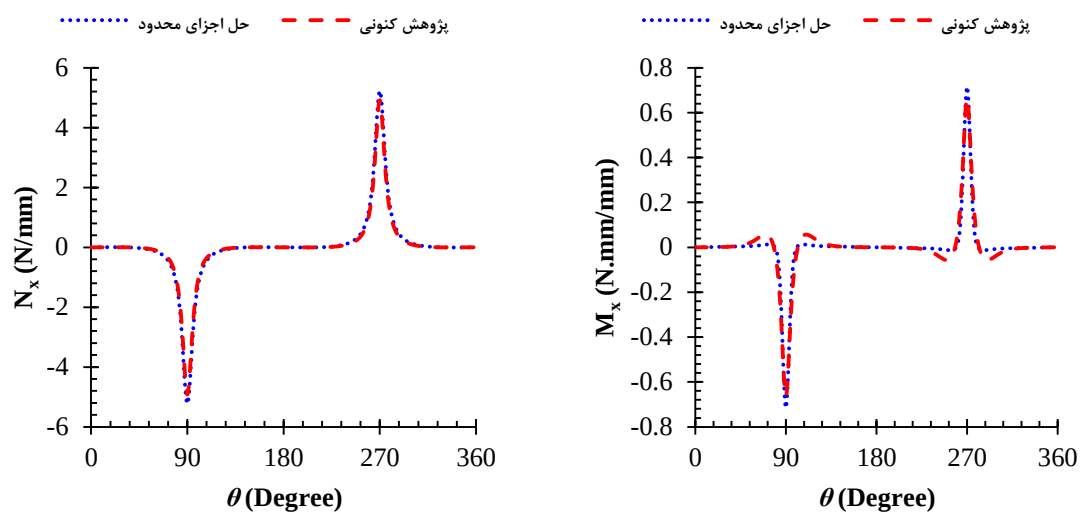
نمودار مقایسه‌ای برای نتیجه‌های تنش و گشتاور حرارتی برای نتایج حاصل از حل تحلیلی و نتایج استخراج شده از حل اجزای محدود نیز در شکل (۲-۱۰) قابل مشاهده است. نتایج حاصل برای نتیجه های تنش حرارتی و نتیجه های گشتاور حرارتی با دقت قابل قبولی بر هم منطبق می باشند.

بر پایه توسعه روش متغیر مختلط، چن و شن [۱۰۳] توزیع نتیجه‌های تنش و گشتاور اطراف گشودگی دایروی در یک صفحه کامپوزیتی نامتقارن را محاسبه کردند. با ساده سازی روابط مربوط به محاسبه ماتریس‌های کشش، کوپل کشش-خمش و خمش و همچنین ماتریس سفتی کاهش یافته انتقال یافته از حالت تابعی به حالت چندلایه، در شکل (۲-۱۱) مقایسه نتایج تحلیل الاستیک حل حاضر با نتایج حل تحلیلی ارائه شده در مرجع [۱۰۳] برای یک کامپوزیت چندلایه (گرافیت BMI) نامتقارن [45/-45]T انجام شده است. همانطور که مشاهده می‌شود نتایج حاصل کاملاً بر یکدیگر منطبق هستند.

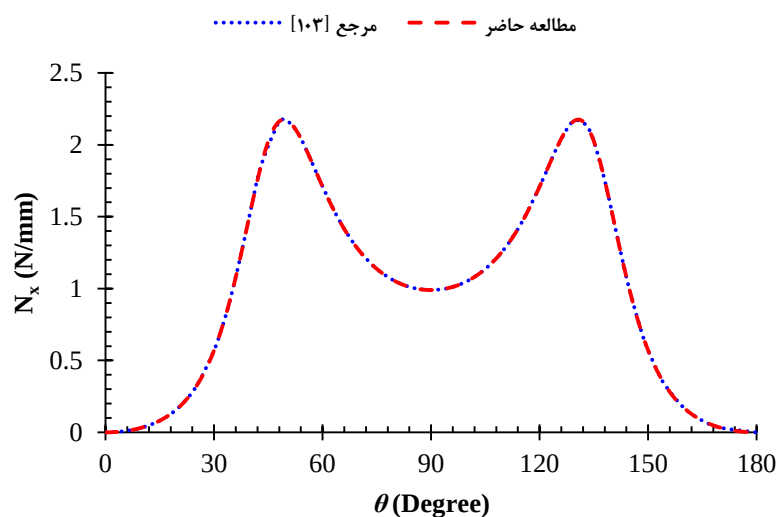
چالش‌های پیش روی شبیه‌سازی انجام شده شامل موارد ذیل می‌باشد.

➤ خواص مواد در حل تحلیلی به صورت وابسته به پارامتر z در نظر گرفته شده است و محاسبه ماتریس‌های سفتی کششی، ترکیب سفتی کششی-خمشی و سفتی خمشی (رابطه (۲-۱۸)) به صورت مستقیم نسبت به این پارامتر انتگرال‌گیری شده است. اما در شبیه‌سازی اجزای محدود به منظور تغییرات نرم خواص مواد در راستای ضخامت، فرض شده است ۳۰ تک لایه داریم. خواص ۳۰ تک لایه بر اساس روابط (۲-۱) تا (۲-۷) و کدنویسی انجام شده در متلب محاسبه شده و به ماژول مربوط به خواص مواد در نرم‌افزار آباکوس معرفی شده است.

➤ تعداد اجزای مورد نیاز اطراف گشودگی به منظور همگرایی ۲۸۰ المان می‌باشد و این مساله زمان و فضای زیادی از رایانه اشغال می‌کند. هر اشتباهی در مقادیر اولیه ورودی و یا سایر شرایط و همچنین اجراهای مختلف به منظور رسیدن به تعداد مش مورد لازم، نیازمند تکرار اجرای برنامه و صرف زمان خواهد بود.



شکل (۲-۱۰): مقایسه منته‌های تنش و گشتاور حرارتی اطراف گشودگی دایروی به دست آمده از حل حاضر و حل اجزای محدود تحت شار حرارتی یکنواخت



شکل (۲-۱۱): مقایسه منته‌های تنش و گشتاور الاستیک اطراف گشودگی دایروی در کامپوزیت چندلایه نامتقارن $[45/-45]_T$ به دست آمده از حل حاضر و مرجع [۱۰۳]

فصل ۳ : تحلیل نتایج تنش حرارتی

۳-۱ دیباچه

مهمترین عامل در رشد علوم مربوط به نسل جدید مواد رسیدن به صفحات با استحکام بالا به منظور کاربردهای مختلف است. در طراحی این صفحات آگاهی از بیشترین مقدار تنش که تحت بارگذاری مختلف در صفحه ایجاد می‌شود برای طراحان از اهمیت بسزایی برخوردار است. از سویی شناخت تاثیر عوامل مختلف بر توزیع تنش نیز خود می‌تواند در کمینه کردن این تنش‌ها کمک شایانی نماید. با توجه به اینکه معادلات استخراج شده برای تحلیل ترموالاستیک در حالتیکه بارگذاری کششی حذف گردد، نتایج تنش‌های حرارتی برای ورق نانوتابعی نامتقارن را ارائه خواهد نمود و معادلات مربوط به تحلیل حرارتی نیز قبلاً در پژوهشی ارائه نشده است. در این بخش به بررسی تنش‌های حرارتی حاصل از شار حرارتی یکنواخت و تاثیر عوامل مختلف بر آن‌ها خواهیم پرداخت.

۳-۲ نتایج

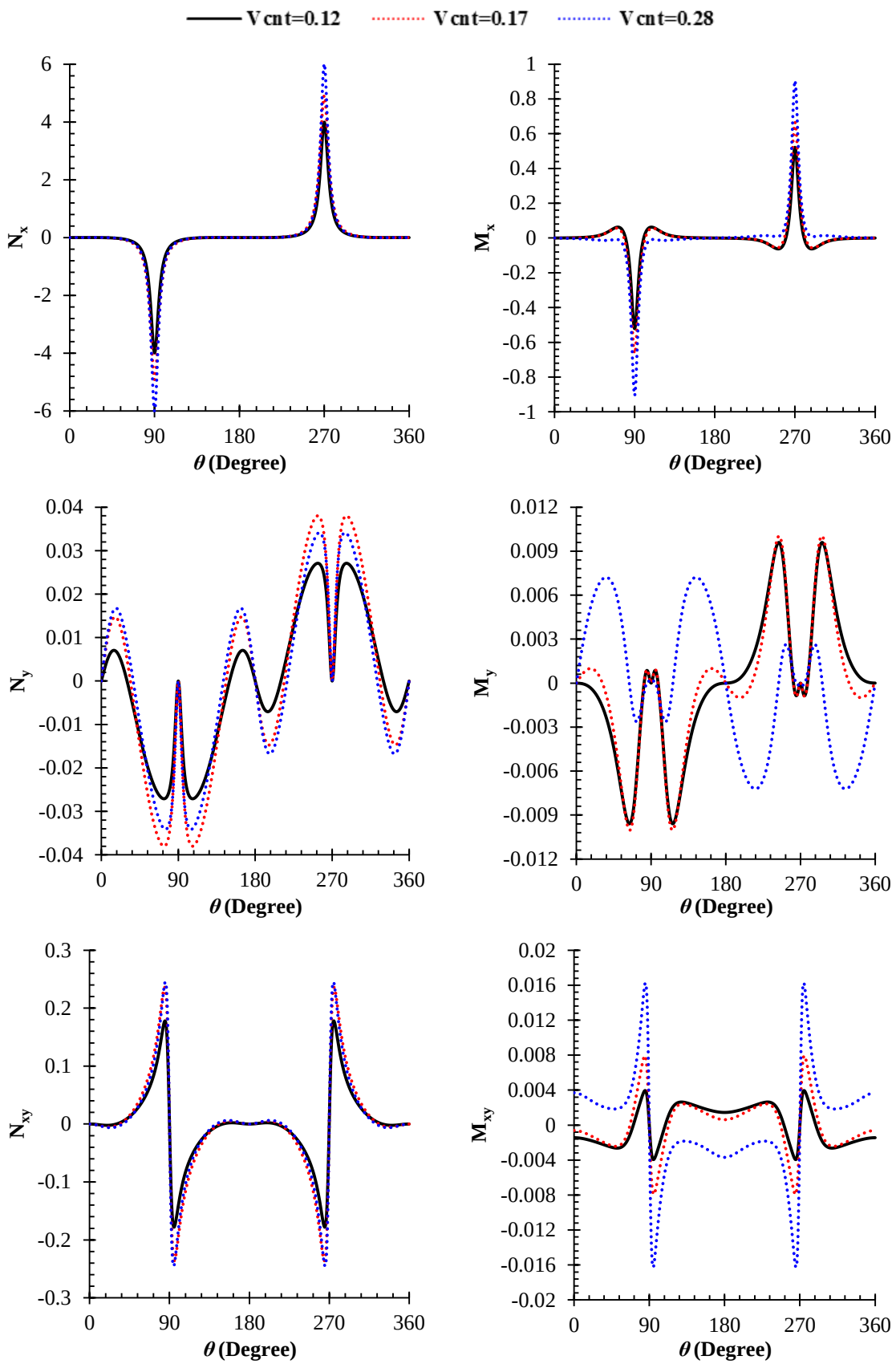
در طراحی صفحات، بیشترین تنش ایجاد شده در صفحه و به حداقل رساندن مقدار آن حائز اهمیت است. همانطور که گفته شد، از آنجا که منبع حرارتی در ورق وجود ندارد، بیشترین تنش ایجاد شده در ورق در ناحیه حول گشودگی اتفاق می‌افتد.

در این فصل، پارامترهایی که بر خاصیت ماده، شرایط بارگذاری و هندسه گشودگی تاثیر می‌گذارند و در نتایج منته‌های تنش و گشتاور حرارتی، ناشی از اعمال شار حرارتی ثابت $q_0 = 10 \text{ watt/m}^2$ ، موثر هستند مورد بررسی قرار می‌گیرند. این پارامترها به ترتیب عبارتند از کسر حجمی نانولوله‌های کربنی (V_{CNT}^*)؛ زاویه چینش نانولوله‌های کربنی (α)، زاویه اعمال شار حرارتی (γ)، زاویه چرخش گشودگی (β) و کشیدگی گشودگی (e). در ادامه نگارش این رساله از بیشینه بیشترین مقدار مولفه‌های منته‌های تنش و گشتاور حرارتی با عنوان تنش و گشتاور نامطلوب و از کمینه آن با نام تنش و گشتاور مطلوب یاد می‌شود. واحد منته‌های تنش N/mm و واحد منته‌های گشتاور

می‌باشد و به منظور خلوت بودن محور نمودارها از ذکر واحد منته‌های تنش و گشتاور $N.mm/mm$ در محور عمودی اجتناب شده است. همچنین مقادیر پیش‌فرض پارامترهای متغیر زمانی که تاثیر سایر پارامترها مطالعه می‌شود عبارتند از $V_{CNT}^* = 0.12$ ، $\alpha = 0^\circ$ ، $\beta = 0^\circ$ ، $\gamma = 270^\circ$ و $e = 1$ ، مگر در حالتی که تاثیر یکی از پارامترهای فوق را بر توزیع منته‌های تنش و گشتاور مورد مطالعه قرار دهیم که در این صورت مقدار آن متفاوت خواهد بود.

۳-۲-۱ تاثیر کسر حجمی نانولوله‌های کربنی

تاثیر کسر حجمی نانولوله‌های کربنی بر توزیع منته‌های تنش و گشتاور حرارتی در اطراف گشودگی دایروی ورق نانوکامپوزیت تابعی در شکل (۳-۱) نشان داده شده است. در این شکل θ بیانگر موقعیت زاویه‌ای هر نقطه رو مرز گشودگی نسبت به محور افقی بر حسب درجه است. بر اساس مشاهدات یک توزیع متقارن در توزیع منته‌های تنش و گشتاور اطراف گشودگی مشاهده می‌شود. در میان منته‌های تنش و گشتاور، N_x و M_x نسبت به سایر مولفه‌ها بیشترین مقدار بیشینه را دارا می‌باشد. بر همین اساس در کسر حجمی‌های مختلف تنش و گشتاور نامطلوب اطراف گشودگی در $\theta = 90^\circ, 270^\circ$ حاصل می‌شود. بیشینه منته تنش N_x و منته گشتاور M_x در نیمه بالایی گشودگی حالت فشاری و در نیمه پایینی گشودگی به شکل کششی ظاهر می‌شوند به طوریکه مقادیر منته مذکور در دو قسمت بالایی و پایینی گشودگی نسبت به یکدیگر قرینه هستند. با افزایش کسر حجمی نانولوله‌های کربنی یک افزایش قابل ملاحظه‌ای در میزان منته‌های تنش و اکثر منته‌های گشتاور ایجاد می‌شود. به طوریکه با افزایش کسر حجمی نانولوله‌های کربنی از 0.17 به 0.28 بیش از 20% به میزان منته تنش N_x و منته گشتاور M_x افزوده می‌شود.



شکل (۱-۳): منته‌های تنش و گشتاور حرارتی اطراف گشودگی دایروی نانورق تابعی در کسر حجمی‌های متفاوت

همچنین افزایش کسر حجمی نانولوله‌های کربنی از 0.12 به 0.17 تاثیر بیشتری را بر منته‌های تنش نسبت به منته‌های گشتاور دارد در حالیکه افزایش آن از 0.17 به 0.28 باعث تغییرات بیشتر در منته‌های گشتاور می‌شود. از اینرو از میان کسر حجمی‌های مختلف، کسر حجمی 0.12 تنش‌های مطلوب را بوجود می‌آورد و کسر حجمی 0.28 تنش و گشتاور نامطلوب را منجر می‌شود. مشاهدات شکل (۱-۳) نشان می‌دهد که افزایش کسر حجمی نانولوله‌های کربنی بجز منته گشتاور M_y در سایر منته‌های تنش و گشتاور باعث تغییر روند توزیع در اطراف گشودگی نمی‌شود و درصد کسر حجمی نانولوله‌های کربنی باعث تغییر موقعیت زاویه‌ای منته‌های تنش و گشتاور بیشینه و کمینه نمی‌شود.

۳-۲-۲ تاثیر زاویه چینش نانولوله‌های کربنی (α)

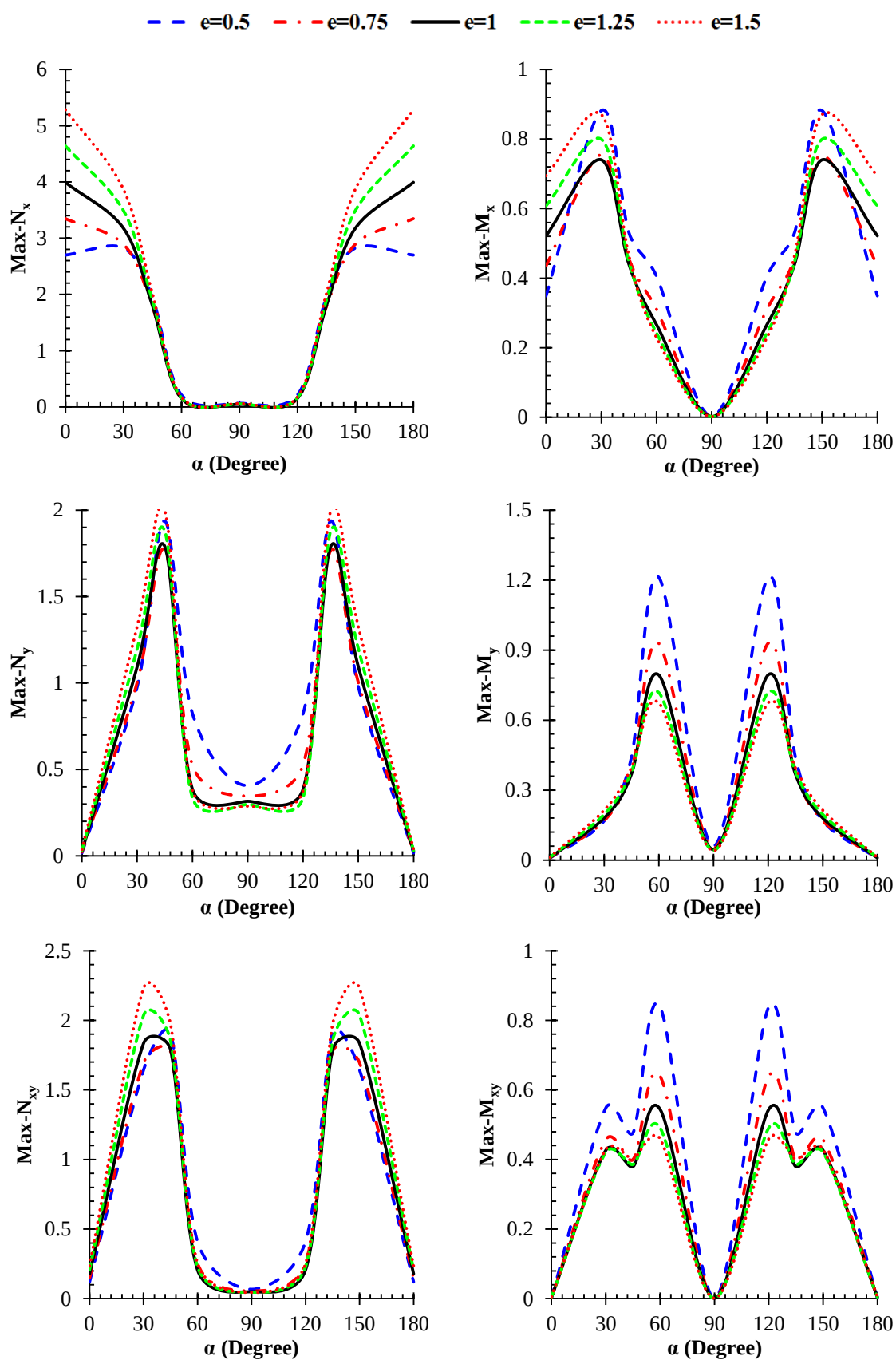
تاثیر زاویه چینش نانولوله‌های کربنی (α) بر بیشینه قدرمطلق منته‌های تنش و گشتاور حرارتی با در نظر گرفتن مقادیر مختلف برای پارامترهای کشیدگی گشودگی (e)، زاویه شار حرارتی (γ) و زاویه چرخش گشودگی (β) در شکل (۲-۳) تا شکل (۴-۳) نمایش داده شده است.

در شکل (۲-۳) تاثیر زاویه چینش نانولوله‌های کربنی (α) بر بیشینه قدرمطلق منته‌های تنش و گشتاور حرارتی در مقادیر مختلف کشیدگی گشودگی (e) مورد بررسی قرار گرفته است. روند تغییرات بیشینه منته‌ها با افزایش مقدار کشیدگی (e) تقریباً یکسان است. بنابراین زاویه‌ای از چینش نانولوله‌های کربنی (α) که باعث مقادیر بیشینه یا کمینه در میان بیشترین منته‌ها می‌شود با تغییرات کشیدگی دچار تغییر نمی‌شود. در تمامی مقادیر کشیدگی، کمترین مقدار از بیشینه منته تنش حرارتی N_x در $\alpha = 90^\circ$ حاصل می‌شود و بیشترین مقدار بیشینه آن در $\alpha = 0^\circ$. این شرایط برای کمترین و بیشترین مقدار بیشینه منته گشتاور حرارتی M_x نیز یکسان است. از طرفی چون بیشترین مقدار بیشینه‌های منته تنش N_y و N_{xy} که در زاویه $\alpha = 30^\circ$ یا $\alpha = 45^\circ$ حاصل می‌شود از مقادیر متناظر آن برای N_x در زاویه $\alpha = 0^\circ$ کمتر است بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که

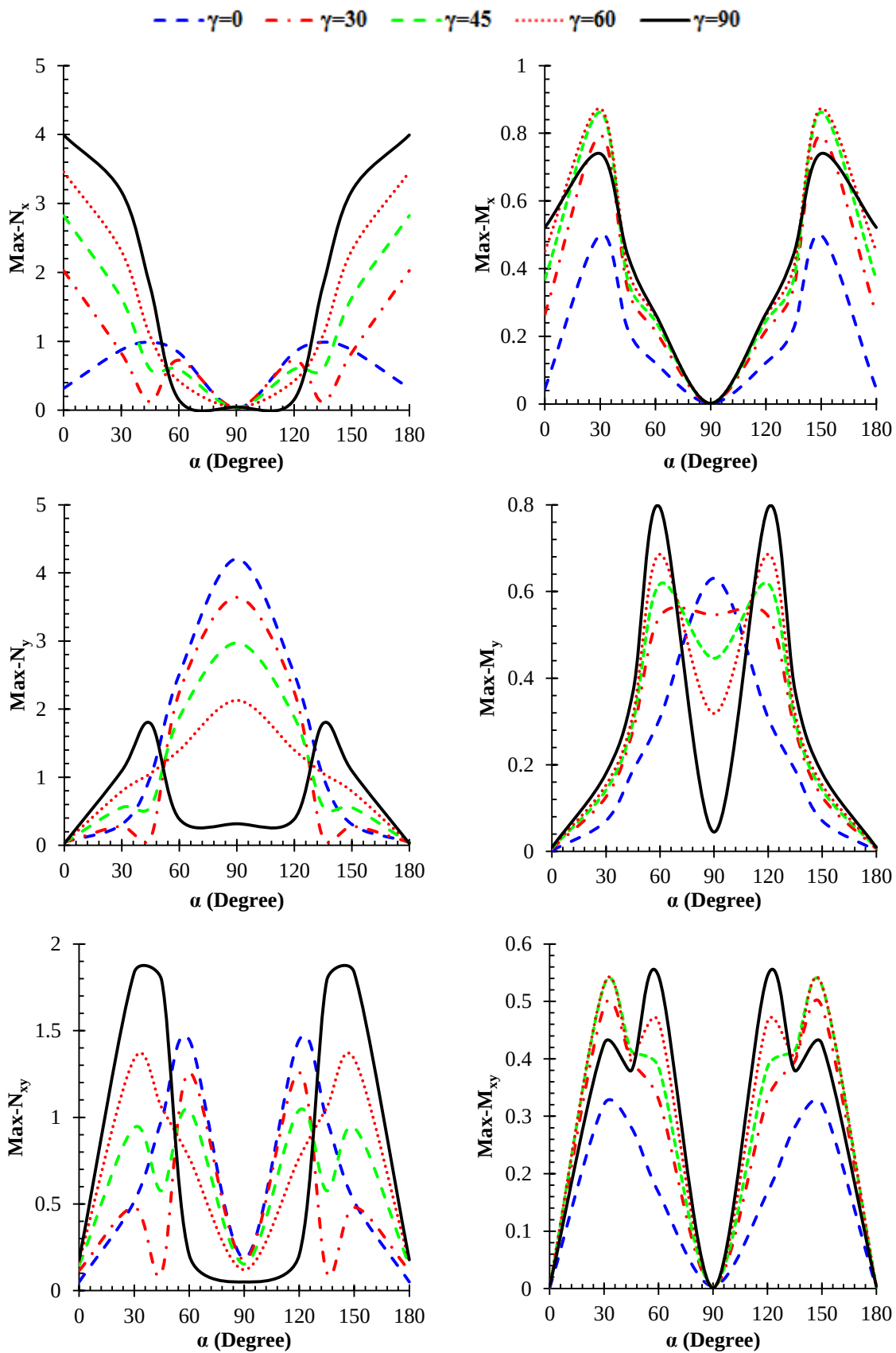
زاویه $\alpha = 0^\circ$ تنش نامطلوب را منجر می‌شود. همچنین تنش و گشتاور مطلوب در $\alpha = 90^\circ$ بوجود می‌آید. همچنین مشاهده می‌شود که در برخی از زوایای نانولوله‌های کربنی تغییرات مقدار کشیدگی در مقدار منته‌های تنش و گشتاور حرارتی بسیار اثر گذارتر از سایر زوایای نانولوله‌های کربنی است. با تغییر مقدار گشودگی در اطراف $\alpha = 90^\circ$ ، تغییرات منته‌های تنش و گشتاور بسیار محدود است. تاثیر زاویه چینش نانولوله‌های کربنی (α) بر بیشینه قدرمطلق منته‌های تنش و گشتاور حرارتی در مقادیر مختلف زاویه اعمال شار حرارتی (γ) در شکل (۳-۳) مورد بررسی قرار گرفته است. همانطور که مشاهده می‌شود تنش و گشتاور مطلوب زمانی حاصل می‌شود که زاویه نانولوله‌های کربنی و زاویه اعمال شار حرارتی همراستا و برابر $\alpha = \gamma = 90^\circ$ باشند.

همانطور که در این شکل مشاهده می‌شود تنش و گشتاور مطلوب زمانی حاصل می‌شود که زاویه نانولوله‌های کربنی و زاویه اعمال شار حرارتی همراستا و برابر $\alpha = \gamma = 90^\circ$ باشند. از سویی زمانیکه زاویه اعمال شار حرارتی $\gamma = 90^\circ$ و $\alpha = 0^\circ$ یا بالعکس باشد، تنش نامطلوب حاصل می‌شود.

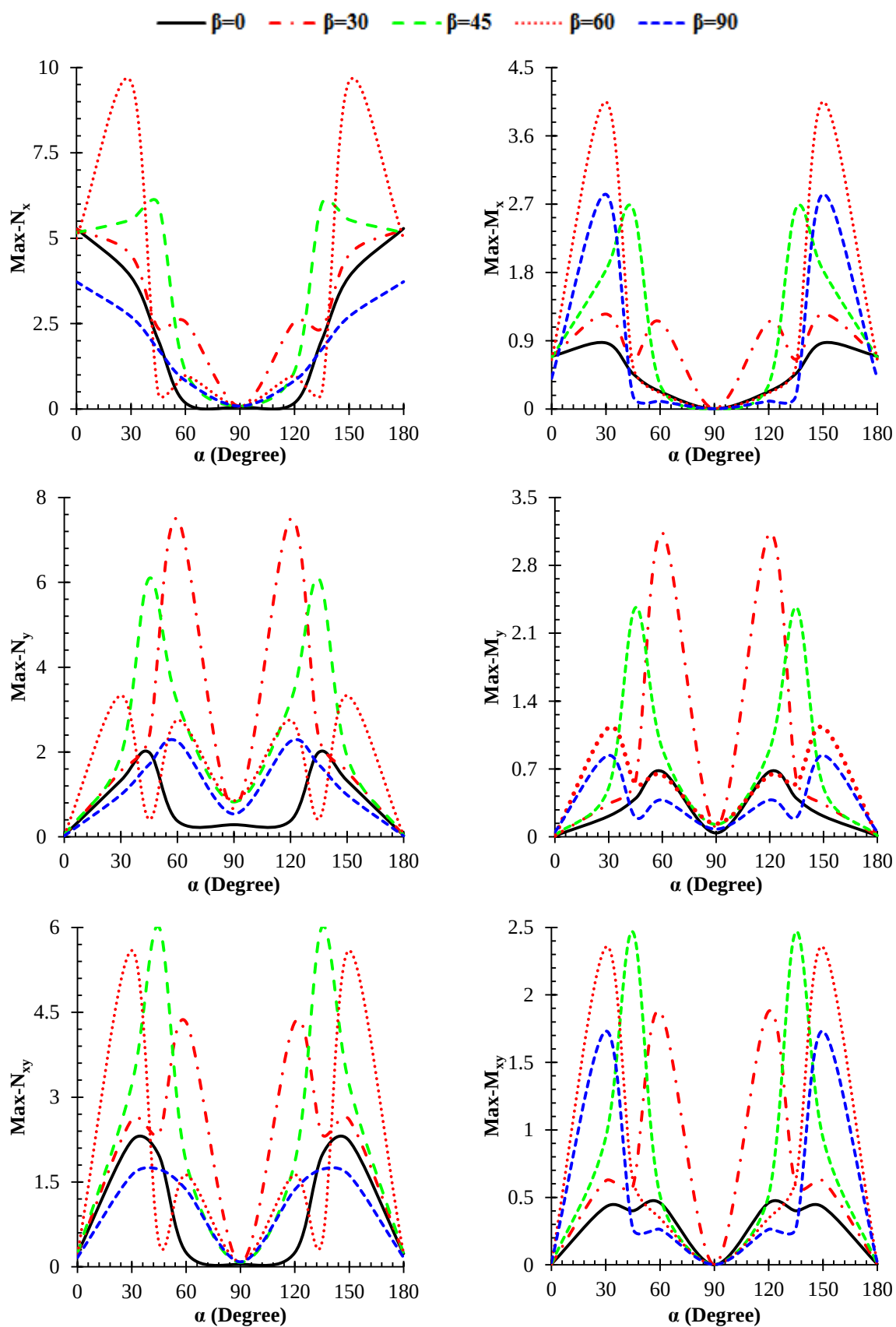
شکل (۴-۳) تاثیر زاویه چینش نانولوله‌های کربنی (α) بر بیشینه قدرمطلق منته‌های تنش و گشتاور حرارتی در مقادیر مختلف زاویه چرخش گشودگی (β) را برای کشیدگی $e = 1.5$ نمایش می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود زاویه چرخش گشودگی (β) در مقایسه با سایر پارامترهای بررسی شده یک تاثیر قابل توجه در تغییرات منته‌های تنش و گشتاور حرارتی در زوایای مختلف نانولوله‌های کربنی (α) دارد، به طوریکه اگر زاویه نانولوله‌های کربنی متفاوت از $\alpha = 0^\circ$ یا $\alpha = 90^\circ$ باشد انتخاب زاویه چرخش باید با دقت بیشتری انجام شود چراکه انتخاب نامناسب زاویه چرخش می‌تواند منجر به طراحی غیرایمن گردد. این شکل همچنین نشان می‌دهد وقتیکه زاویه نانولوله‌های کربنی $\alpha = 90^\circ$ باشد تنش و گشتاور مطلوب در تمامی زوایای چرخش حاصل می‌شود.



شکل (۳-۲): تاثیر زاویه چینش نانولوله‌های کربنی (α) بر منتجه‌های تنش و گشتاور حرارتی در کشیدگی‌های متفاوت (e)



شکل (۳-۳): تاثیر زاویه چینش نانولوله‌های کربنی (α) بر منتجه‌های تنش و گشتاور حرارتی در زوایای مختلف شار حرارتی (γ)



شکل (۳-۴): تاثیر زاویه چینش نانولوله‌های کربنی (α) بر منته‌های تنش و گشتاور حرارتی در زوایای مختلف چرخش گشودگی (β)

۳-۲-۳ تاثیر زاویه شار حرارتی (γ)

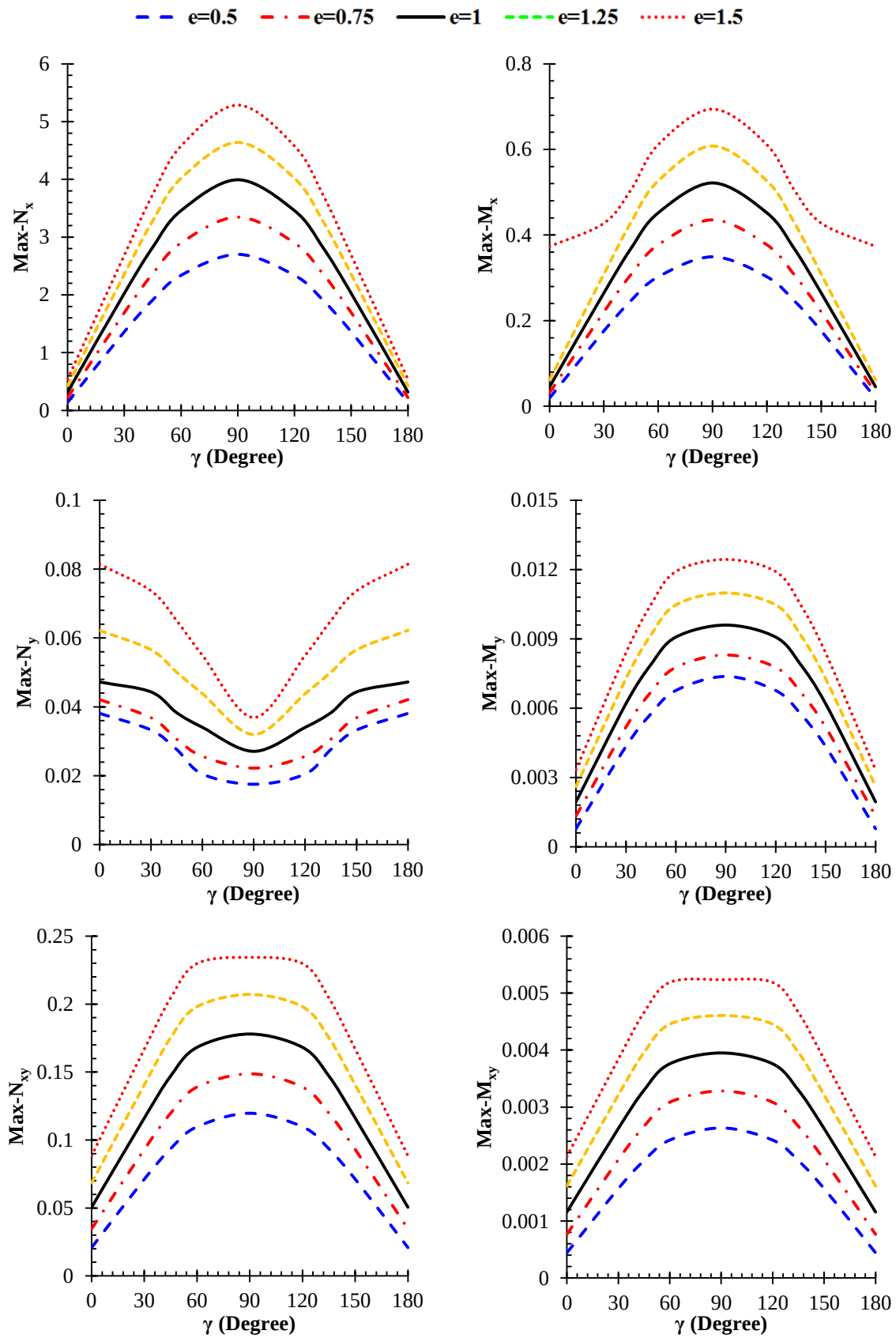
شکل (۵-۳) تا شکل (۷-۳) بیانگر تاثیر زاویه شار حرارتی (γ) بر بیشینه قدرمطلق منته‌های تنش و گشتاور حرارتی با در نظر گرفتن مقادیر مختلف برای پارامترهای کشیدگی گشودگی (e)، زاویه نانولوله‌های کربنی (α) و زاویه چرخش گشودگی (β) است.

همانطور که در شکل (۵-۳) مشاهده می‌شود، اگرچه تغییرات مقدار کشیدگی گشودگی (e) مقادیر بیشینه قدرمطلق منته‌های تنش و گشتاور حرارتی را تغییر می‌دهد، اما زاویه شار حرارتی که منجر به این مقادیر می‌شود بدون تغییر می‌ماند. در نتیجه در تمامی مقادیر کشیدگی، تنش و گشتاور مطلوب و نامطلوب به ترتیب در زاویه شار $\gamma = 0^\circ$ و $\gamma = 90^\circ$ به دست می‌آید. همچنین تغییرات منته‌های تنش و گشتاور نسبت به زاویه شار $\gamma = 90^\circ$ متقارن هستند. به طوریکه این تغییرات برای بیشترین مقادیر منته‌ها (N_y بجز N_y) از $\gamma = 0^\circ$ تا $\gamma = 90^\circ$ با افزایش و از $\gamma = 90^\circ$ تا $\gamma = 180^\circ$ با کاهش همراه است و برای N_y برعکس است.

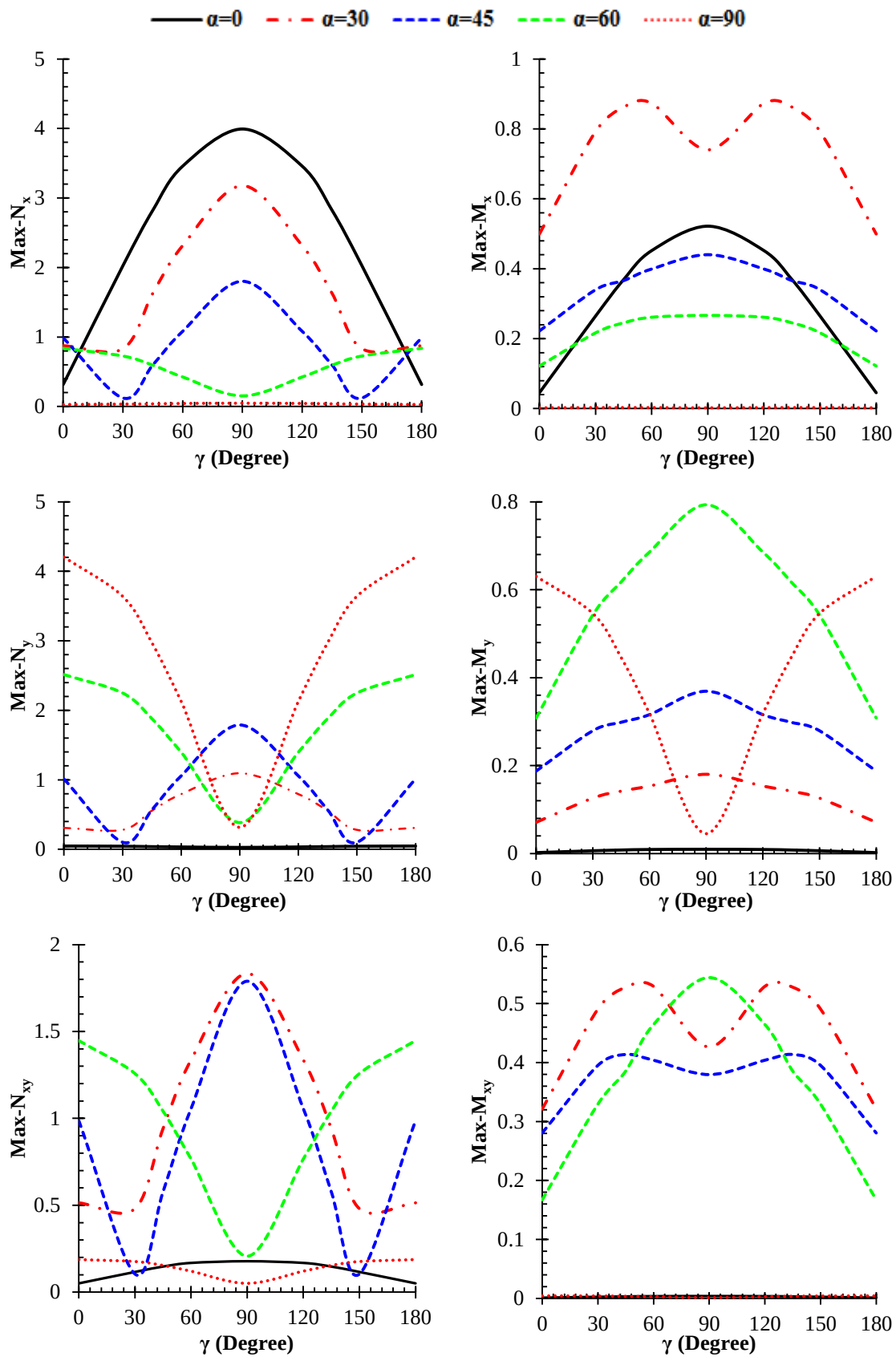
مطابق شکل (۶-۳) اگر زاویه نانولوله‌های کربنی $\alpha = 0^\circ$ باشد در زاویه شار حرارتی $\gamma = 90^\circ$ بیشترین مقدار برای منته‌های تنش N_x و گشتاور M_x حاصل می‌شود. با تغییر زاویه نانولوله‌های کربنی، علاوه بر تغییر کمترین و بیشترین مقادیر بیشینه‌های قدر مطلق منته‌های تنش و گشتاور، زاویه شار حرارتی که این مقادیر را منجر می‌شود تغییر می‌نماید. به عبارت دیگر تغییر زاویه نانولوله‌های کربنی باعث تغییر روند در تغییرات منته‌های تنش و گشتاور در زوایای شار مختلف می‌شود. رفتار مقارنی برای تغییرات منته‌های تنش و گشتاور نسبت به زاویه شار حرارتی مشاهده می‌شود. اگر $\alpha = 90^\circ$ باشد آنگاه بیشترین مقدار در مقادیر بیشینه منته تنش N_y در زاویه شار $\gamma = 0^\circ$ ثبت می‌شود در حالیکه این شرایط باعث ایجاد کمترین مقادیر در بیشینه منته‌های تنش N_x و N_{xy} می‌شود. با همه این اوصاف شرایط مطلوب به لحاظ منته‌های تنش در $\gamma = 0^\circ$ و $\alpha = 45^\circ$ حاصل می‌شود، اما $\alpha = \gamma = 90^\circ$ شرایط بهینه‌تری به لحاظ مطلوب شدن منته‌های تنش

و گشتاور فراهم می‌آورد.

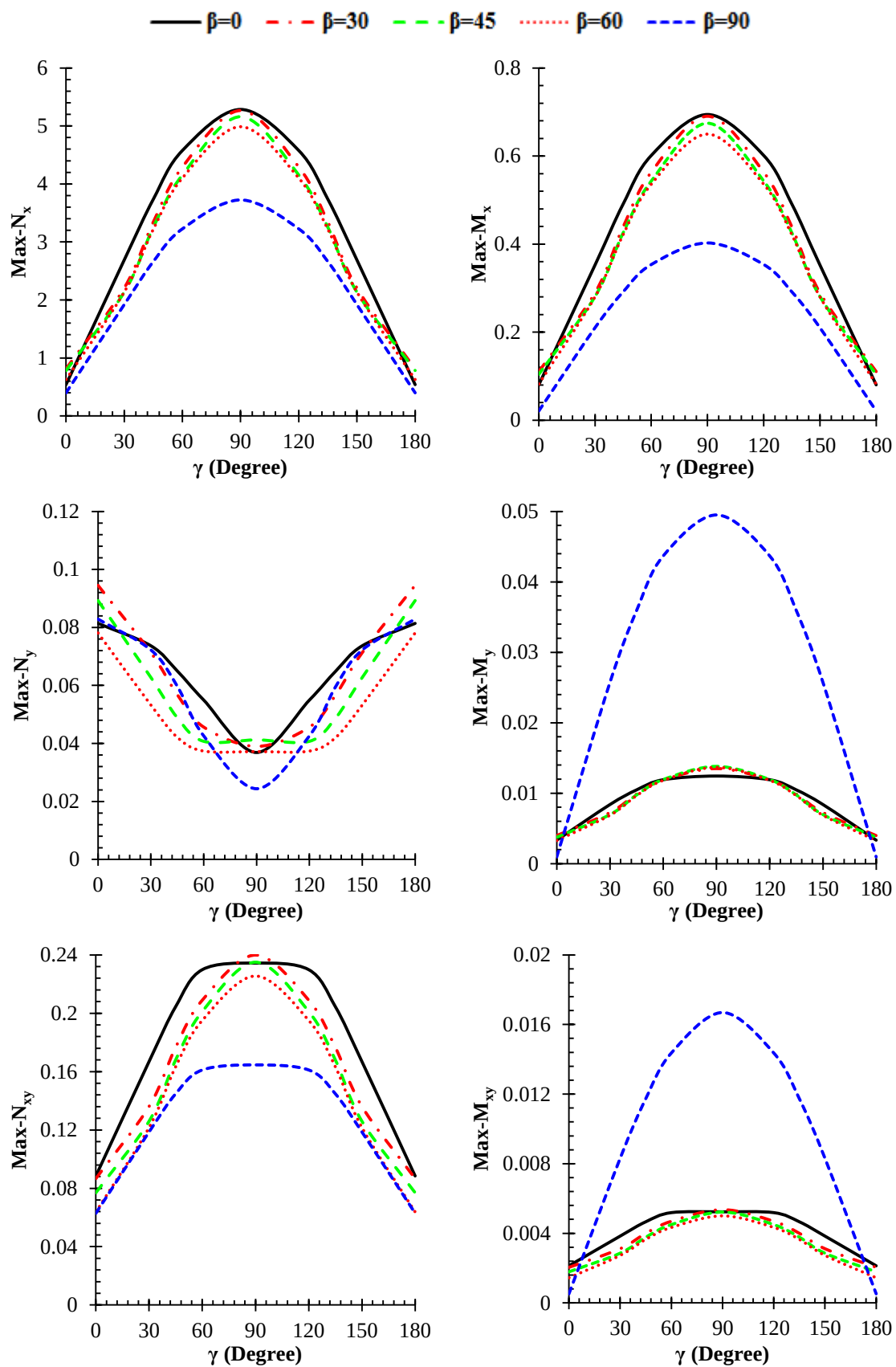
شکل (۷-۳) روند تغییرات بیشترین مقدار قدرمطلق منته‌های تنش و گشتاور حرارتی را برای گشودگی بیضوی با کشیدگی $e = 1.5$ نسبت به زاویه شار حرارتی (γ) در زوایای مختلف چرخش گشودگی (β) نشان می‌دهد. نتایج بیانگر این است که افزایش زاویه شار حرارتی باعث افزایش بیشینه منته‌های تنش و گشتاور (N_x, N_{xy} و M_x, M_{xy}) در تمامی زوایای چرخش گشودگی می‌شود. وقتی زاویه شار حرارتی $\gamma = 90^\circ$ است پیشنهاد می‌شود که گشودگی به اندازه 90° نسبت به محور x چرخش داشته باشد، در این حالت منته‌های تنش و گشتاور برای شرایط مذکور مطلوب می‌شوند. با این وجود در حالت کلی وقتی زاویه شار $\gamma = 0^\circ$ و گشودگی بیضوی به اندازه $\beta = 90^\circ$ نسبت به محور x می‌چرخد تنش و گشتاور مطلوب حاصل می‌شود.



شکل (۵-۳): تاثیر زاویه اعمال شار حرارتی (γ) بر منتهی‌های تنش و گشتاور حرارتی در کشیدگی‌های متفاوت (e)



شکل (۳-۶): تاثیر زاویه اعمال شار حرارتی (γ) بر منته‌های تنش و گشتاور حرارتی در زوایای مختلف نانولوله‌های کربنی (α)



شکل (۷-۳): تاثیر زاویه اعمال شار حرارتی (γ) بر منته‌های تنش و گشتاور حرارتی در زوایای مختلف چرخش گشودگی (β)

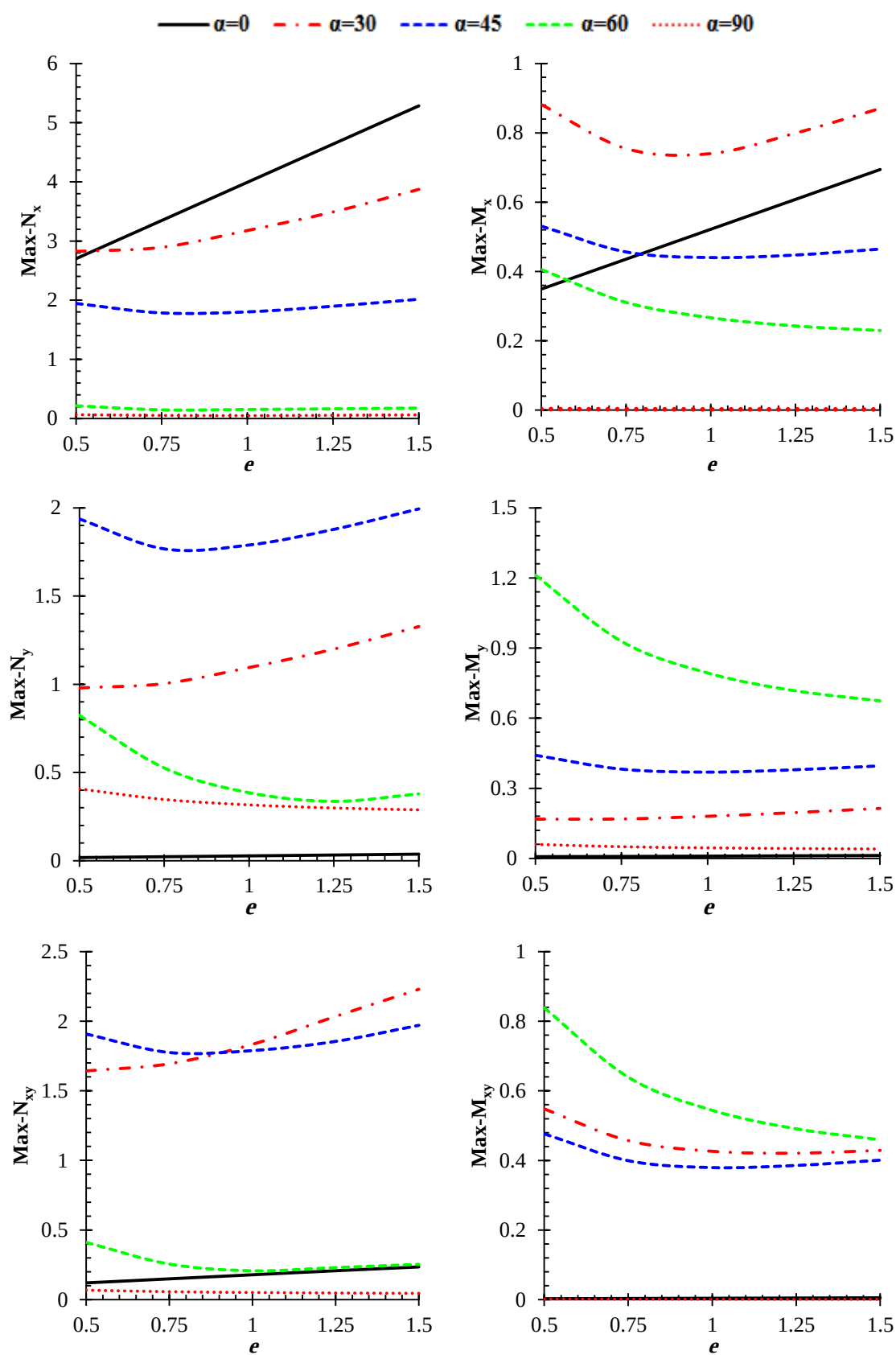
۳-۲-۴ تاثیر کشیدگی گشودگی (e)

شکل (۸-۳) تا شکل (۹-۳) بیانگر تاثیر کشیدگی گشودگی (e) بر بیشینه قدرمطلق منته‌های تنش و گشتاور حرارتی با در نظر گرفتن مقادیر مختلف برای پارامترهای زاویه نانولوله‌های کربنی (α)، زاویه شار حرارتی (γ) و زاویه چرخش گشودگی (β) است.

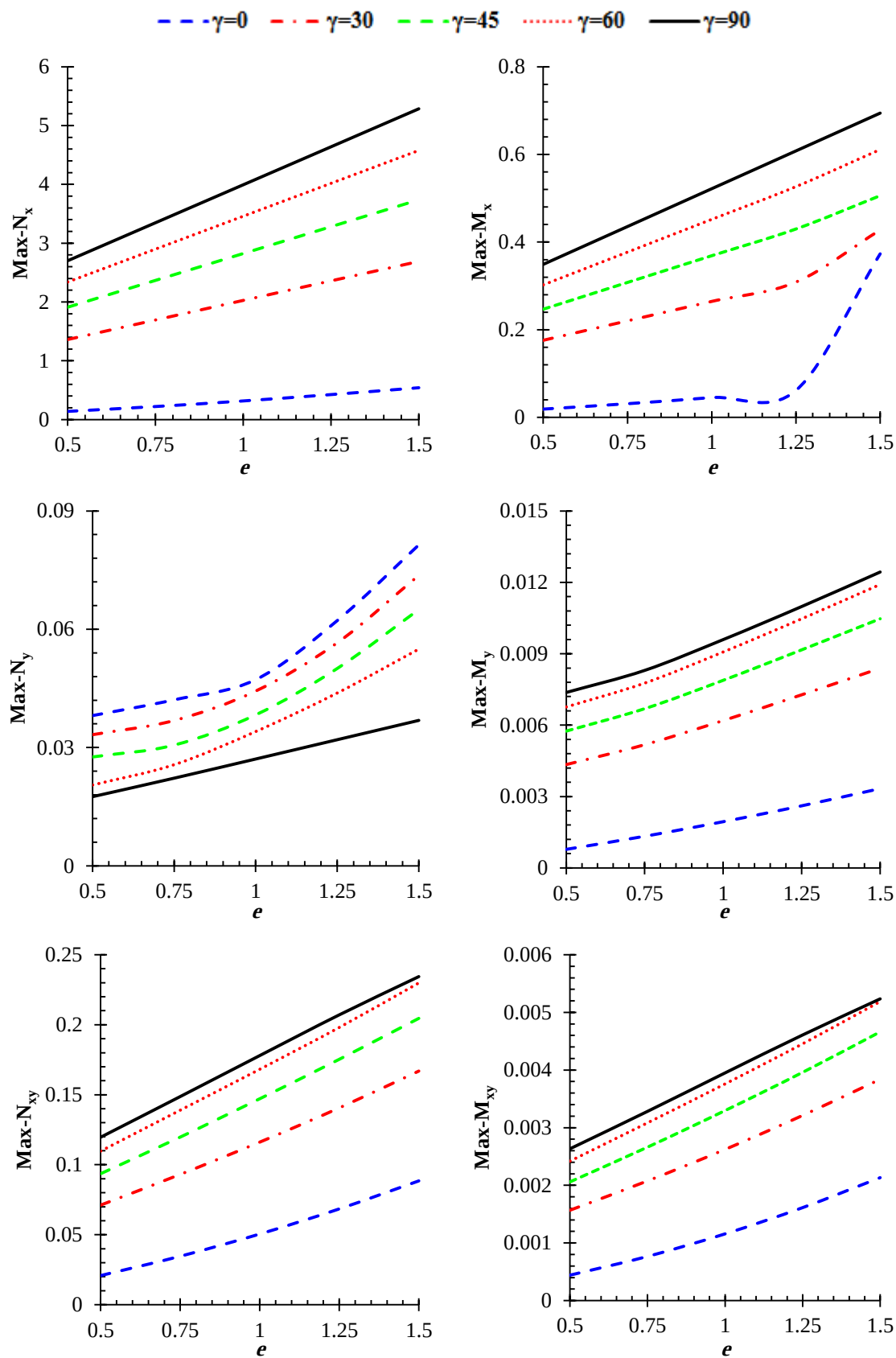
همانطور که در شکل (۸-۳) مشاهده می‌شود، در تمامی مقادیر کشیدگی و قتیکه زاویه نانولوله‌های کربنی $\alpha = 90^\circ$ است منته‌های تنش و گشتاور حرارتی در حالت مطلوب خواهند بود. و قتیکه زاویه نانولوله‌های کربنی $\alpha = 0^\circ$ تغییرات منته‌های تنش و گشتاور بر حسب e خطی است. زاویه نانولوله‌های کربنی بر روند صعودی یا نزولی تغییرات منته‌های تنش و گشتاور بر حسب کشیدگی تاثیر می‌گذارد.

شکل (۹-۳) تاثیر کشیدگی گشودگی (e) بر بیشینه قدرمطلق منته‌های تنش و گشتاور حرارتی در مقادیر مختلف زاویه شار حرارتی (γ) را نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود در تمام کشیدگی‌ها با افزایش زاویه شار حرارتی، منته‌های تنش (N_x و N_{xy}) و گشتاور (M_x ، M_y و M_{xy}) افزایش می‌یابد اما منته تنش N_y کاهش می‌یابد. در بیشتر منته‌های تنش و گشتاور یک رفتار خطی مشاهده می‌شود. البته همانطور که در شکل (۹-۳) مشاهده می‌شود، این رفتار به زاویه شار حرارتی بستگی دارد. علاوه بر این افزایش میزان کشیدگی باعث افزایش میزان منته‌های تنش و گشتاور حرارتی در تمامی زوایای شار حرارتی می‌گردد.

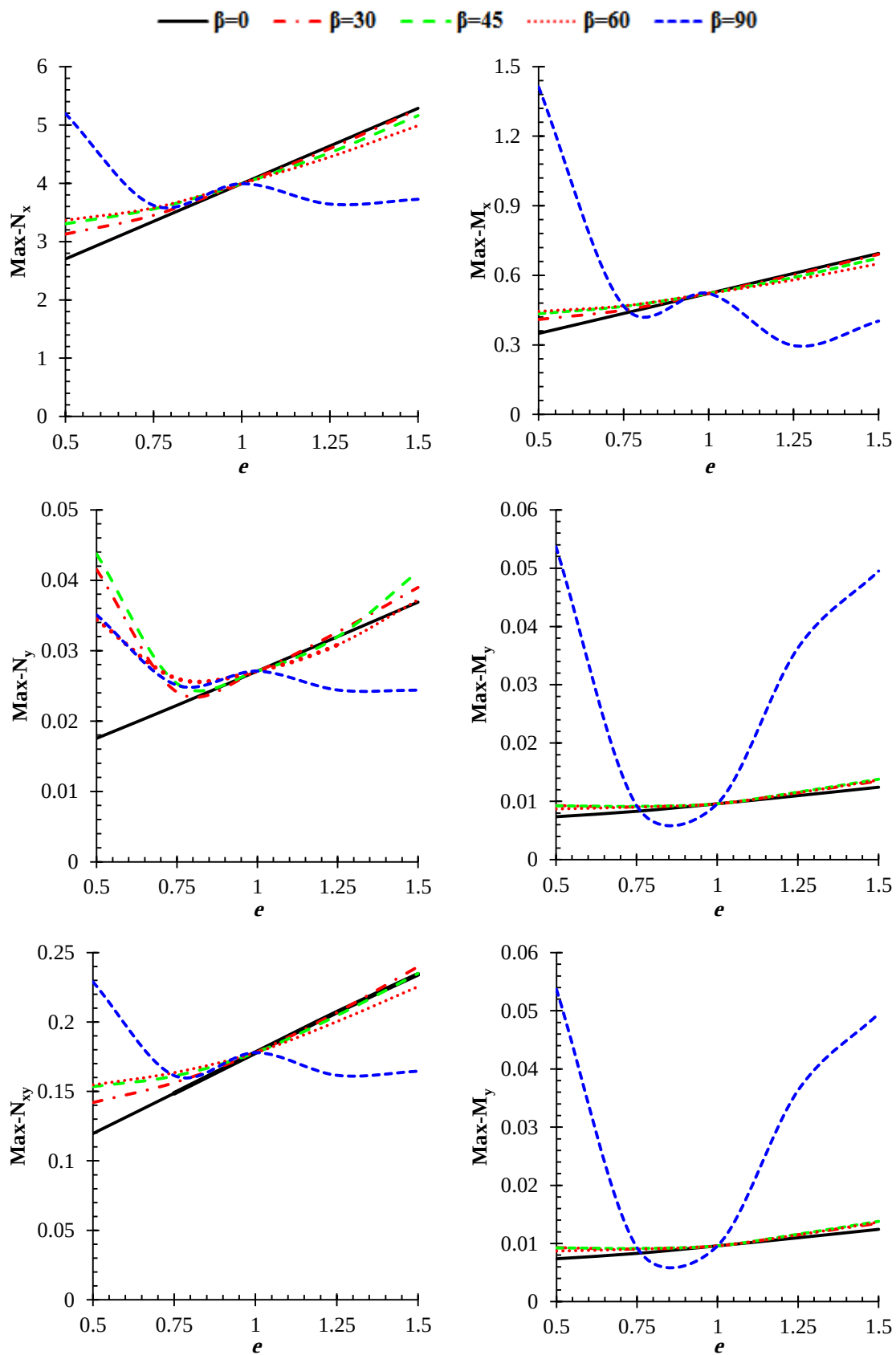
مشاهدات شکل (۹-۳) نشان می‌دهد که برای دستیابی به حالت مطلوب و قتیکه کشیدگی گشودگی بزرگتر از ۱ است ($e > 1$) می‌بایست گشودگی به اندازه $\beta = 90^\circ$ بچرخد و در کشیدگی‌های کمتر از ۱ ($e < 1$) برای دوری از حالت نامطلوب گشودگی نباید چرخش 90° داشته باشد. روند تغییرات منته‌ها بر حسب کشیدگی و قتیکه $\beta = 90^\circ$ است با سایر زوایا چرخش گشودگی متفاوت است.



شکل (۸-۳): تاثیر کشیدگی گشودگی (e) بر منته‌های تنش و گشتاور حرارتی در زوایای مختلف نانولوله‌های کربنی (α)



شکل (۹-۳): تاثیر کشیدگی گشودگی (e) بر منته‌های تنش و گشتاور حرارتی
در زوایای مختلف شار حرارتی (γ)



شکل (۳-۱۰): تاثیر کشیدگی گشودگی (e) بر منته‌های تنش و گشتاور حرارتی در زوایای مختلف چرخش گشودگی (β)

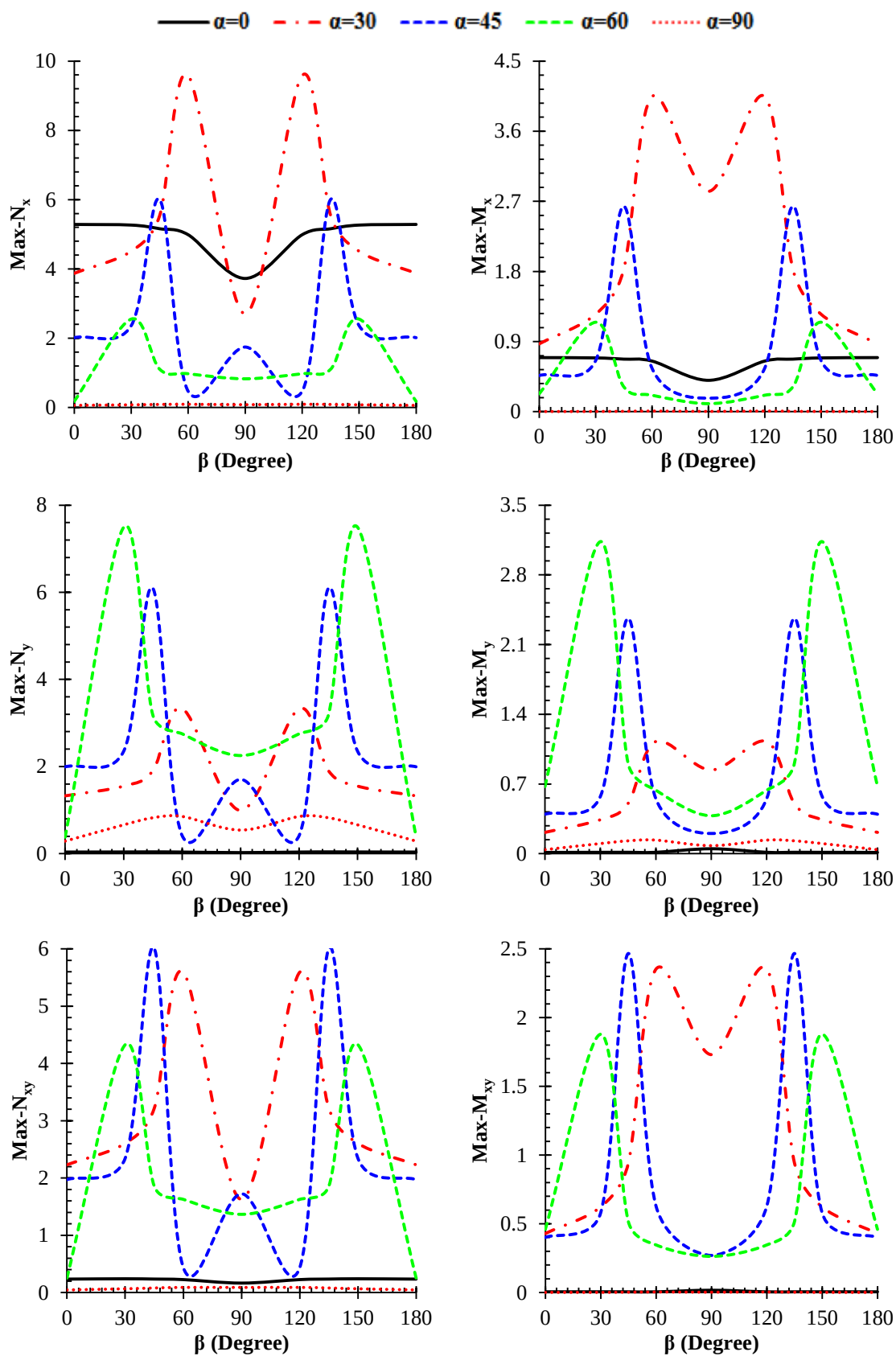
۳-۲-۵ تاثیر زاویه چرخش گشودگی (β)

شکل (۱۱-۳) و شکل (۱۲-۳) بیانگر تاثیر چرخش گشودگی (β) بر بیشینه قدرمطلق منته‌های تنش و گشتاور حرارتی با در نظر گرفتن مقادیر مختلف برای پارامترهای زاویه نانولوله‌های کربنی (α)، زاویه شار حرارتی (γ) با کشیدگی $e = 1.5$ و شکل (۱۳-۳) بیانگر تغییرات نسبت به زاویه چرخش (β) در مقادیر مختلف کشیدگی گشودگی (e) است.

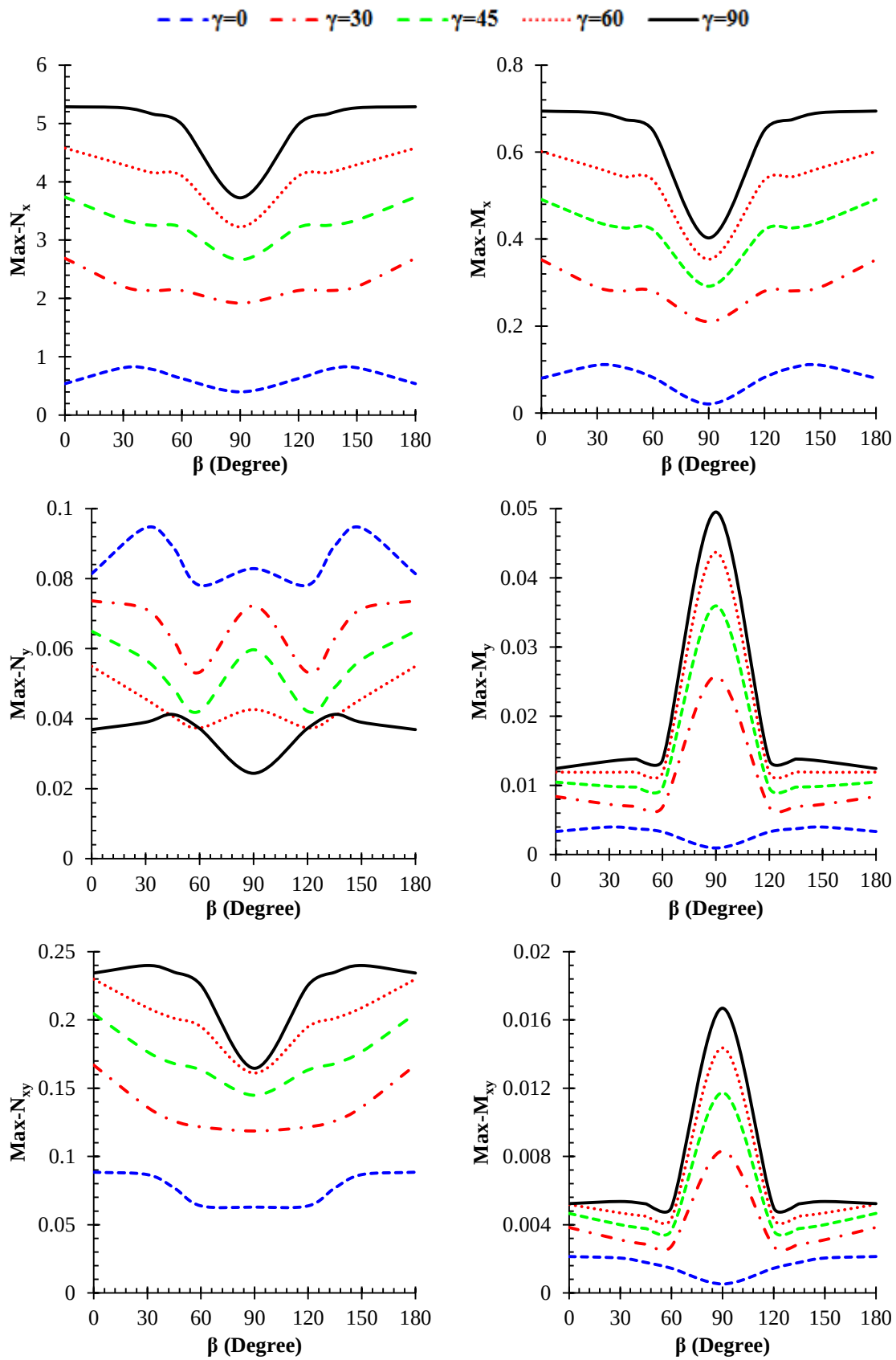
همانطور که در شکل (۱۱-۳) مشاهده می‌شود، دستیابی به تنش و گشتاور مطلوب و نامطلوب در هر زاویه چرخش (β) کاملاً به انتخاب زاویه نانولوله‌های کربنی (α) وابسته است. برای تمامی زوایای چرخش تنش و گشتاور مطلوب در $\alpha = 90^\circ$ حاصل می‌شود. زمانی که زاویه چرخش گشودگی $\beta = 60^\circ$ باشد اگر زاویه نانولوله‌های کربنی $\alpha = 30^\circ$ باشد بیشترین مقادیر منته‌های تنش N_x و گشتاور M_x بوجود می‌آید در حالیکه بیشترین میزان منته‌های تنش N_y و گشتاور M_y وقتی بوجود می‌آید که $\beta = 30^\circ$ و $\alpha = 60^\circ$ انتخاب شده باشد و بیشترین میزان منته‌های تنش N_{xy} و گشتاور M_{xy} نیز در شرایط $\beta = 30^\circ$ و $\alpha = 45^\circ$ حاصل می‌شود.

مطابق شکل (۱۲-۳)، در تمامی زوایای چرخش، بیشترین مقدار منته‌های تنش و گشتاور با افزایش زاویه اعمال شار حرارتی افزایش می‌یابند. اگر گشودگی با زاویه $\beta = 90^\circ$ نسبت به محور x قرار گیرد، در تمامی زوایای شار حرارتی تنش و گشتاور مطلوب حاصل می‌شود. در تمامی زوایای چرخش گشودگی تنش و گشتاور نامطلوب با زاویه شار حرارتی $\gamma = 90^\circ$ در ارتباط هستند.

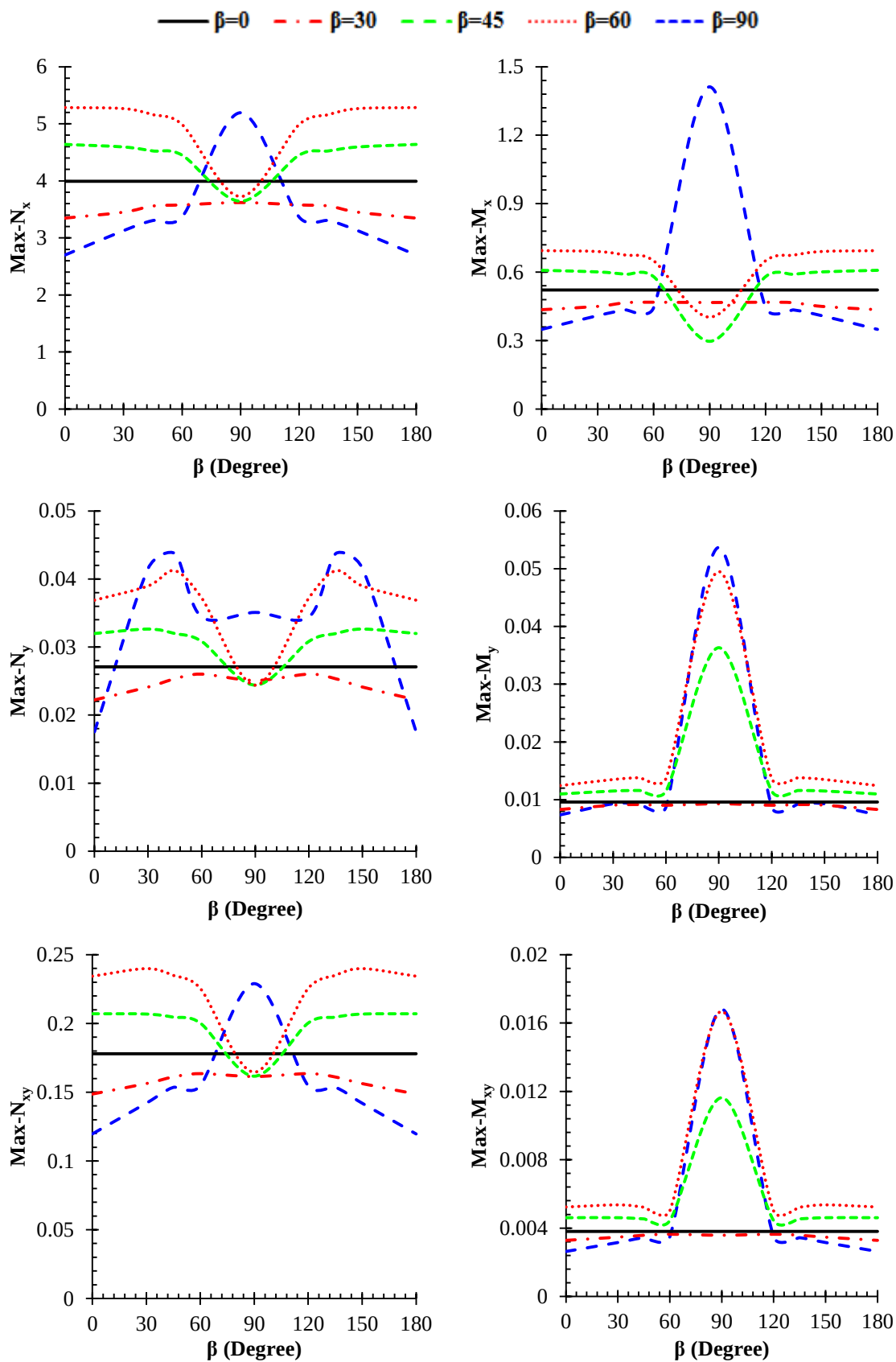
مطابق شکل (۱۳-۳) وقتی کشیدگی گشودگی از ۱ بیشتر می‌شود ($e > 1$)، چرخش گشودگی به اندازه $\beta = 90^\circ$ منجر به حالت مطلوب می‌شود. به عبارت دیگر برای یک نانووَرَق تابعی با گشودگی بیضوی با کشیدگی $e > 1$ ، فقط در زاویه چرخش $\beta = 90^\circ$ مقادیر بیشینه منته‌های تنش و گشتاور از مقادیر متناظر در گشودگی دایروی کمتر است. برای تمام مقادیر کشیدگی یک رفتار متقارن در تغییرات بیشینه منته‌های تنش و گشتاور نسبت به چرخش گشودگی مشاهده می‌شود.



شکل (۱۱-۳): تاثیر کشیدگی گشودگی (e) بر منته‌های تنش و گشتاور حرارتی
در زوایای مختلف نانولوله‌های کربنی (α)



شکل (۳-۱۲): تاثیر کشیدگی گشودگی (e) بر منته‌های تنش و گشتاور حرارتی
در زوایای مختلف شار حرارتی (γ)



شکل (۳-۱۳): تاثیر کشیدگی گشودگی (e) بر منته‌های تنش و گشتاور حرارتی در زوایای مختلف چرخش گشودگی (β)

۳-۳ نتیجه‌گیری

در این فصل نتایج نتیجه‌های تنش و گشتاور حرارتی که بر پایه حل تحلیلی ارائه شده در فصل ۴ قابل مطالعه شده بود مورد بررسی قرار گرفت. بدین منظور فرض گردید که نانووورق تابعی فقط در معرض بار حرارتی قرار دارد. با این فرض تمامی ترم‌های مربوط به بارگذاری کششی که در تابع پتانسل نهایی رابطه (۲-۱۲۰) ظاهر شده بودند صفر خواهند شد و نتایج حاصل صرفاً بیانگر نتیجه‌های تنش و گشتاور حرارتی خواهد بود. در مطالعه صورت پذیرفته تاثیر پارامترهای گوناگونی که بر نتایج تحلیلی حرارتی موثر است مورد بررسی قرار گرفت. از جمله این پارامترها عبارتند از: کسر حجمی نانولوله‌های کربنی که به طور مستقیم خواص مواد نانووورق تابعی را تحت تاثیر قرار می‌دهد، زاویه نانولوله‌های کربنی که از طریق تغییر در زاویه چینش نانولوله‌های کربنی باعث ایجاد خواص متفاوت در نانووورق تابعی می‌گردد، زاویه اعمال شار حرارتی که شرایط بارگذاری مساله را تغییر می‌دهد، و همچنین مقدار کشیدگی گشودگی که به همراه زاویه چرخش گشودگی شرایط هندسی و موقعیت زاویه‌ای گشودگی را تغییر می‌دهند. مطالعه انجام شده حاکی از آن است که انتخاب مناسب مقادیر پارامترهای ذکر شده تاثیر بسیار بالایی در ایجاد تنش‌های حرارتی مطلوب یا نامطلوب در نانووورق تابعی خواهد داشت.

فصل ۴ تحلیل نتایج ترموالاستیک

۴-۱ دیباچه

وقتی که یک ورق دارای گشودگی تحت ترکیبی از بار کششی و شار حرارتی یکنواخت قرار می گیرد به لحاظ رفتار تنش های اطراف گشودگی می تواند رفتار متفاوت از آنچه که حاصل در معرض بار کششی یا حرارتی به شکل جداگانه قرار گرفتن است از خود بروز دهد. در این حالت وقتی که اثرات تشن های حرارتی با اثرات تنش های بوجود آمده ناشی از بار کششی ترکیب می شود ضعف های هندسی مانند ترک یا گشودگی به لحاظ شرایط تحمل پذیری تنش های حاصل از اهمیت دوچندان برخوردار می شوند. همچنین در صنایع حساس عملکرد اینگونه سازه ها علاوه بر رفتار تنش می بایست از دیدگاه استفاده از نسل جدید مواد و مهندسی ساختار مواد به منظور به حداقل رساندن اثرات ضعف های هندسی که نزد طراحان اهمیت دارد مورد بررسی قرار گیرد.

در این فصل با اتکا به روابط استخراج شده برای تحلیل ترموالاستیک ورق نانو تابعی که از ویژگی ناهمسانگرد بودن و نامتقارن بودن برخوردار است به تحلیل نتایج تنش ترموالاستیک و بررسی اثرات پارامترهایی که تغییر آن ها باعث تغییر در خواص مواد، تغییر در شرایط بارگذاری و تغییر در هندسه گشودگی می شود خواهیم پرداخت.

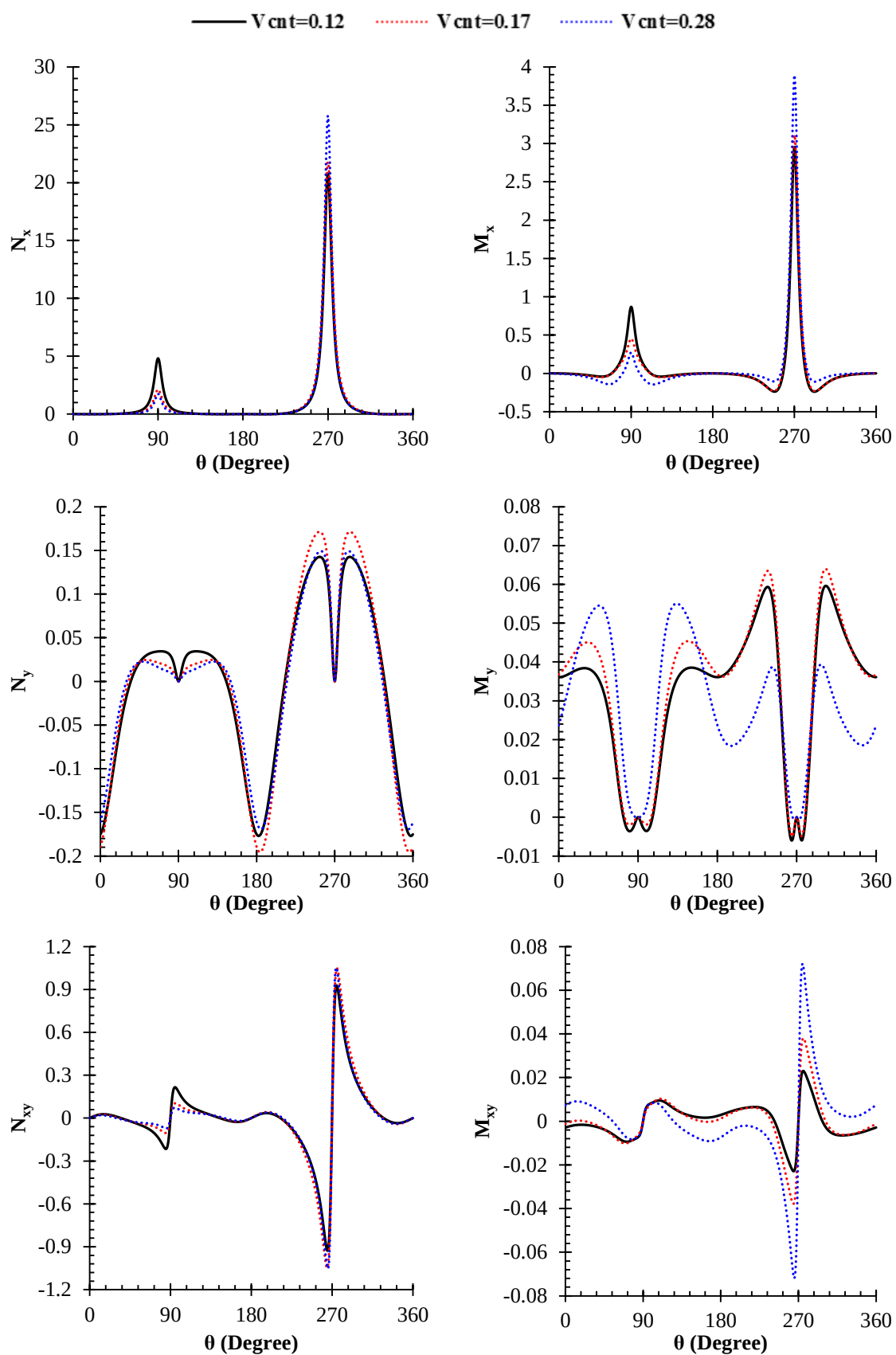
۴-۲ نتایج

در این فصل به مطالعه توزیع منتهج های تنش و گشتاور حرارتی اطراف گشودگی بیضوی در یک نانورق تابعی پرداخته شده است. نانورق تابعی تحت شار حرارتی یکنواخت به میزان $q_0 = 20 \text{ watt/m}^2$ و همچنین منتهج تنش ثابت به میزان $N_x^\infty = 1 \text{ N/mm}$ می باشد. در مطالعه صورت پذیرفته اثرات پارامترهایی همچون کسر حجمی نانولوله های کربنی (V_{CNT}^*)؛ زاویه چینش نانولوله های کربنی (α)، زاویه اعمال شار حرارتی (γ)، زاویه چرخش گشودگی (β) و کشیدگی گشودگی (e) بررسی شده است. مقادیر پیش فرض پارامترهای متغیر زمانیکه تاثیر سایر پارامترها

مطالعه می‌شود عبارتند از $V_{CNT}^* = 0.12$ ، $\alpha = 0^\circ$ ، $\beta = 0^\circ$ ، $\gamma = 270^\circ$ و $e = 1$ ، مگر در حالتیکه تاثیر یکی از پارامترهای فوق را بر توزیع منته‌های تنش و گشتاور مورد مطالعه قرار دهیم که در این صورت مقدار آن متفاوت خواهد بود. شکل‌هایی که مقدار منته‌های تنش و گشتاور بی‌بعد را نشان می‌دهد از روابط $m_i = \frac{Max(M_i)K_{xx} \times 10^{-3}}{\lambda \sqrt{A_{11}N_x^\infty q_0 \alpha_{xx} H}}$ و $n_i = \frac{Max(N_i)K_{xx} \times 10^{-3}}{\sqrt{A_{11}N_x^\infty q_0 \alpha_{xx} H}}$ حاصل می‌شود.

۴-۲-۱ تاثیر کسر حجمی نانولوله‌های کربنی

شکل (۴-۱) توزیع منته‌های تنش و گشتاور اطراف گشودگی دایروی در یک نانورق تابعی را تحت تاثیر کسر حجمی‌های متفاوت نانولوله‌های کربنی نمایش می‌دهد. همانطور که در شکل دیده می‌شود توزیع متفاوتی از منته‌ها در نیمه بالایی و پایینی گشودگی وجود دارد بطوریکه توزیع تنش و گشتاور را اطراف تمام گشودگی به شکل غیرمتمقارن در می‌آورد. اگرچه روند تغییرات در دو نیمه مشابه است اما مقادیر بیشینه‌ها و کمینه‌ها کاملاً متفاوت است. این شرایط ناشی از اعمال همزمان بارهای مکانیکی و حرارتی می‌باشد. چراکه در حضور صرفاً بار کششی نتایج در نیمه بالایی و پایین سوراخ متناوب است. اگر بار حرارتی نیز به تنهایی اعمال شود، مطابق نتایج ارائه شده در فصل ۳ توزیع منته‌ها در دو نیمه گشودگی به شکل کششی و فشاری خواهد بود. بنابراین شرایط ترموالاستیک قطعاً باعث ایجاد این شکل از توزیع منته‌ها در اطراف گشودگی شده است. با در نظر گرفتن مقادیر بیشینه منته‌های تنش و گشتاور اطراف گشودگی مشاهده می‌شود که منته N_x و M_x نسبت به سایر مولفه‌های تنش و گشتاور شرایط نامطلوب تری را بوجود می‌آورند. برای تمامی کسر حجمی‌های بررسی شده این شرایط نامطلوب در موقعیت $\theta = 90^\circ$ رخ می‌دهد. با افزایش کسر حجمی نانولوله‌های کربنی از ۰٫۱۲ به ۰٫۲۸ حدود ۲۴٪ به مقدار بیشینه منته تنش N_x و حدود ۳۱٪ به بیشینه منته گشتاور M_x افزوده می‌شود. بنابراین شرایط مطلوب و نامطلوب به ترتیب در کسر حجمی‌های ۰٫۱۲ و ۰٫۲۸ بوجود می‌آیند.

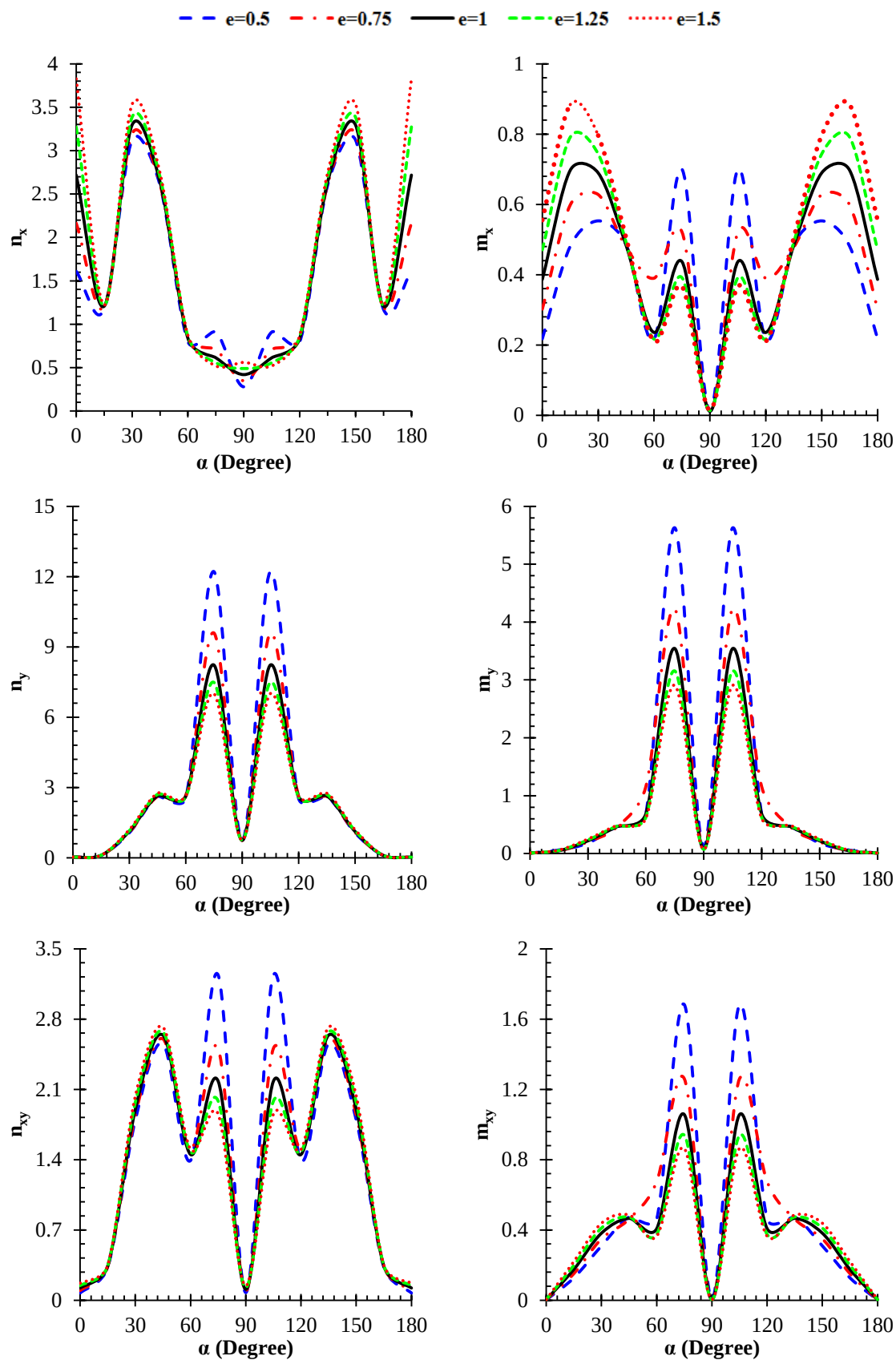


شکل (۴-۱): منته‌های تنش و گشتاور ترموالاستیک اطراف گشودگی دایروی نانورق تابعی در کسر حجمی‌های متفاوت

۲-۲-۴ تاثیر زاویه چینش نانولوله‌های کربنی (α)

شکل (۲-۴) تاثیر زاویه نانولوله‌های کربنی (α) را بر بیشینه قدر مطلق منته‌های تنش و گشتاور بی‌بعد در مقادیر مختلف کشیدگی (e) نشان می‌دهد. همانطور که در این شکل مشاهده می‌شود، زاویه نانولوله‌های کربنی تاثیر بسزایی بر منته‌های تنش و گشتاور دارد، به طوریکه انتخاب مناسب یا نامناسب آن‌ها می‌تواند منجر به ایجاد شرایط مطلوب یا نامطلوب منته‌ها در تمامی مقادیر کشیدگی شود. زاویه $\alpha = 90^\circ$ بهترین زاویه چینش نانولوله‌های کربنی به لحاظ ایجاد شرایط مطلوب برای منته‌های تنش و گشتاور می‌باشد. همچنین در $\alpha = 90^\circ$ ، n_y و m_y به ترتیب مقادیر بزرگتری نسبت به n_x ، n_{xy} و m_x ؛ m_{xy} دارند. در برخی زوایای نانولوله‌های کربنی، تغییرات کشیدگی گشودگی یک اثر قابل توجه بر منته‌ها دارد و در برخی زوایای دیگر این تاثیر ناچیز است.

بر مبنای شکل (۲-۴) در شرایط مطلوب $\alpha = 90^\circ$ و $\gamma = 90^\circ$ ، برای مقادیر مختلف کشیدگی، توزیع منته‌های نامطلوب n_y و m_y اطراف گشودگی بیضوی در شکل (۳-۴) ترسیم شده است. سه کشیدگی $e = 0.5, 1, 1.5$ با $\beta = 0^\circ$ در نظر گرفته شده است. همانطور که در شکل (۳-۴) مشاهده می‌شود منته تنش n_y یک مقدار بیشینه یکسان در موقعیت‌های زاویه‌ای $\theta = 0^\circ$ و $\theta = 180^\circ$ دارا می‌باشد. n_y نیروی فشاری است که مقدار آن با افزایش مقدار کشیدگی در گشودگی بیضوی افزایش می‌یابد. توزیع منته m_y نشان می‌دهد که در تمام مقادیر کشیدگی، مقادیر بیشینه در موقعیت‌های زاویه‌ای خاص بوجود می‌آید. علاوه بر این مقادیری نزدیک به مقادیر بیشینه در موقعیت‌های متفاوت زاویه‌ای مشاهده می‌شود. بررسی تاثیرات کشیدگی نشان می‌دهد که مقادیر کشیدگی بالا (در راستای محور x یا y) باعث می‌شود مقادیر بیشینه گشتاور به سمت محور اصلی گشودگی بیضوی متمرکز شوند. به عبارت دیگر، تمرکز منته گشتاور در امتداد قطر اصلی بیضی افزایش می‌یابد. بنابراین اگر این تمرکز گشتاور با مقادیر نزدیک به هم را عاملی نامطلوب قلمداد کنیم، می‌توان گفت که مقدار کشیدگی گشودگی یک عامل تاثیر گذار در توزیع منته گشتاور در اطراف گشودگی است.



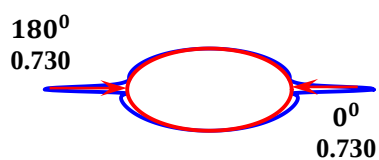
شکل (۴-۲): تاثیر زاویه چینش نانولوله‌های کربنی (α) بر منته‌های تنش و گشتاور ترموالاستیک بی‌بعد در کشیدگی‌های متفاوت (e)

→ Positive value (Tensile)

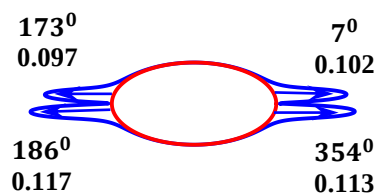
$n_y; e=0.5$

→ Negative value (Compressive)

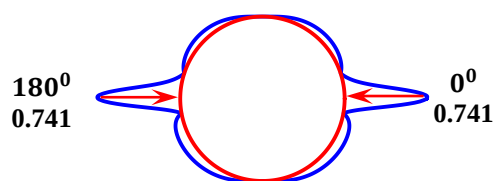
$m_y; e=0.5$



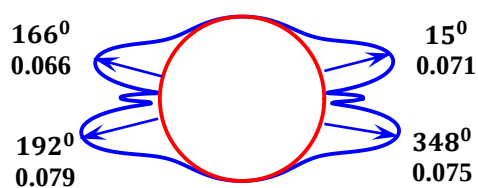
$n_y; e=1$



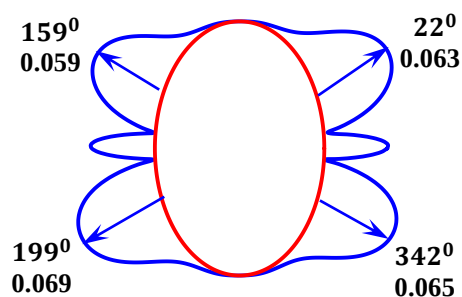
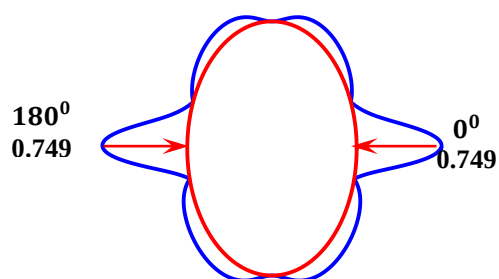
$m_y; e=1$



$n_y; e=1.5$



$m_y; e=1.5$

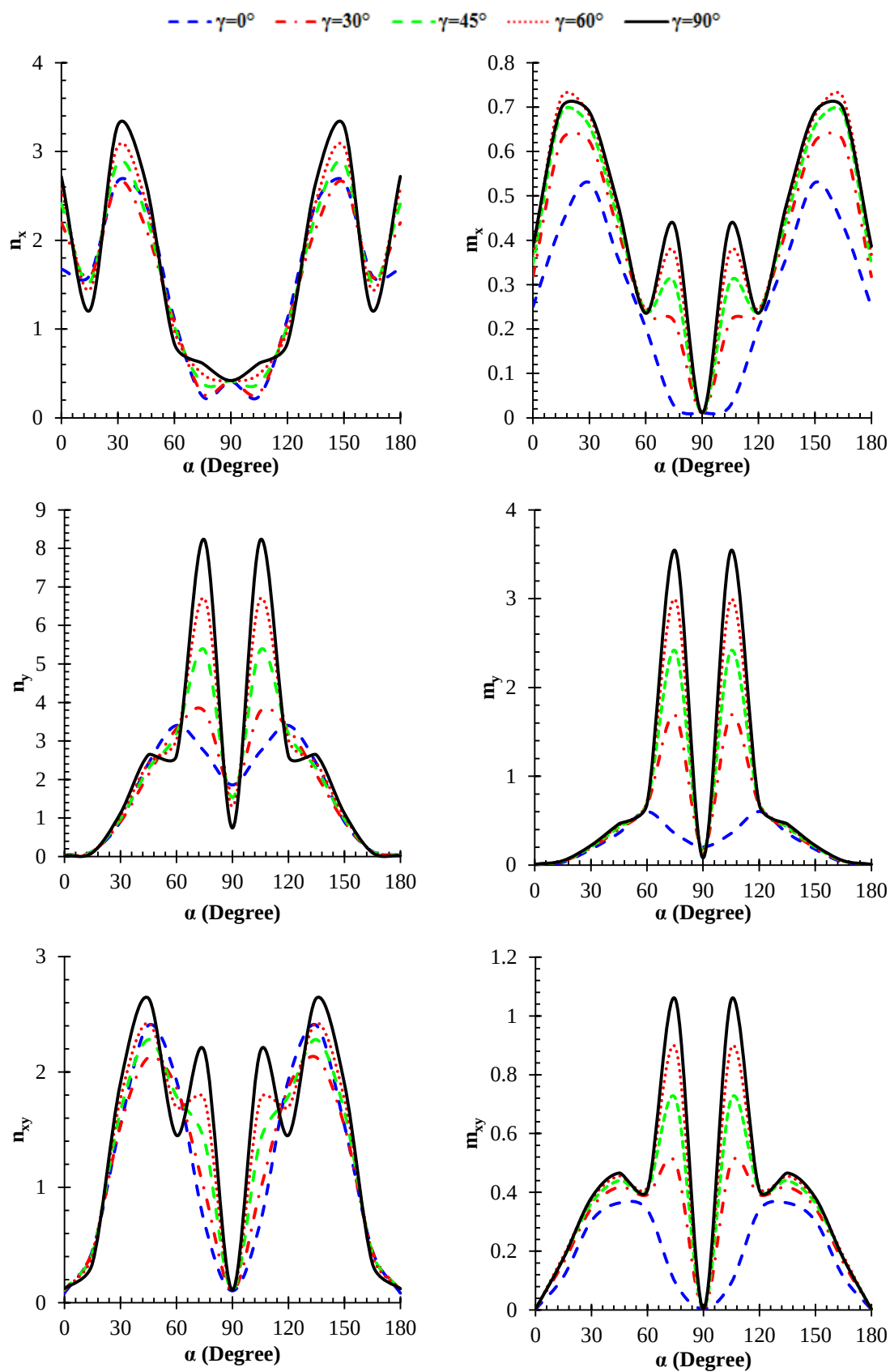


شکل (۳-۴): توزیع منته‌های تنش و گشتاور بی‌بعد ترموالاستیک اطراف گشودگی بیضوی ($e = 0.5, 1, 1.5$) در

نانوورق تابعی ($\beta = 0^\circ$ و $\alpha = \gamma = 90^\circ$)

در شکل (۴-۴) تاثیر زاویه نانولوله‌های کربنی (α) بر بیشینه قدر مطلق منته‌های تنش و گشتاور بی‌بعد در مقادیر مختلف زاویه شار حرارتی (γ) مشاهده می‌شود. همانطور که می‌توان از این شکل استنباط کرد، حالت مطلوب که به معنای رسیدن به منته‌های حداقل است، وقتی به دست می‌آیند که زاویه نانولوله‌های کربنی و زاویه شار حرارتی مقدار یکسان $\alpha = \gamma = 90^\circ$ داشته باشند. تغییر زاویه شار حرارتی باعث تغییر در روند توزیع منته‌های تنش و گشتاور نمی‌شود.

همانند شکل (۴-۳)، در زاویه نانولوله‌های کربنی $\alpha = 90^\circ$ که شرایط مطلوب را بوجود می‌آورد، توزیع منته تنش n_y و گشتاور m_y اطراف گشودگی دایروی در مقادیر مختلف زاویه شار حرارتی (γ) در شکل (۴-۵) به نمایش در آمده است. همانطور که در این شکل مشاهده می‌شود، در تمامی زوایای شار حرارتی، بیشینه n_y فشاری است و وقتی که زاویه شار حرارتی $\gamma = 0^\circ$ یا $\gamma = 45^\circ$ است بیشینه منته تنش n_y در موقعیت زاویه‌ای $\theta = 180^\circ$ حاصل و با افزایش زاویه شار به $\gamma = 90^\circ$ n_y دارای دو مقدار بیشینه یکسان در $\theta = 0^\circ$ و $\theta = 180^\circ$ می‌شود. همچنین مشاهده می‌شود که با افزایش زاویه شار حرارتی بیشینه منته تنش n_y کاهش می‌یابد، به‌طوریکه حدود ۶۰٪ کاهش در مقایسه n_y در $\gamma = 90^\circ$ نسبت به $\gamma = 0^\circ$ حاصل می‌شود. افزایش زاویه شار حرارتی یک اثر کاهشی بر منته تنش m_y دارد. این تاثیرات بیانگر کاهش بیشینه گشتاور مثبت و منفی در موقعیت‌های زاویه‌ای $\theta = 0^\circ$ و $\theta = 180^\circ$ و ایجاد گشتاور مثبت در موقعیت‌های زاویه‌ای متفاوت است، به‌طوریکه با انتخاب زاویه شار حرارتی $\gamma = 90^\circ$ گشتاور منفی حول گشودگی و اختصاصاً در زاویه $\theta = 180^\circ$ مشاهده نمی‌شود و مقادیر کمتری از گشتاورهای مقبت در موقعیت‌های زاویه بجز $\theta = 0^\circ$ و $\theta = 180^\circ$ ایجاد می‌شود.



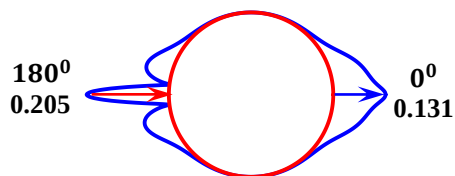
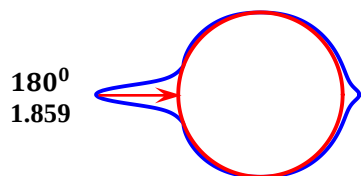
شکل (۴-۴): تاثیر زاویه چینش نانولوله‌های کربنی (α) بر منته‌های تنش و گشتاور ترموالاستیک بی‌بعد در زوایای مختلف شار حرارتی (γ)

→ Positive value (Tensile)

$n_y; \gamma=0^\circ$

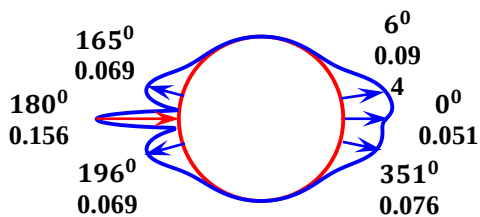
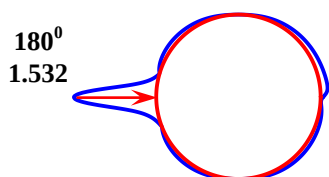
→ Negative value (Compressive)

$m_y; \gamma=0^\circ$



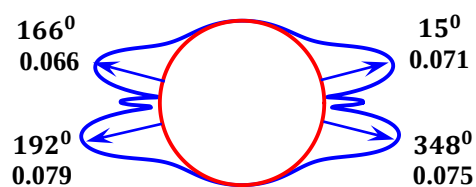
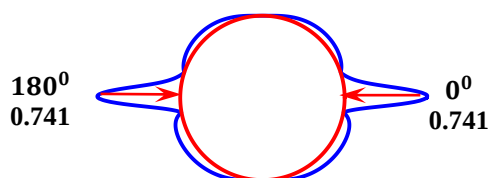
$n_y; \gamma=45^\circ$

$m_y; \gamma=45^\circ$



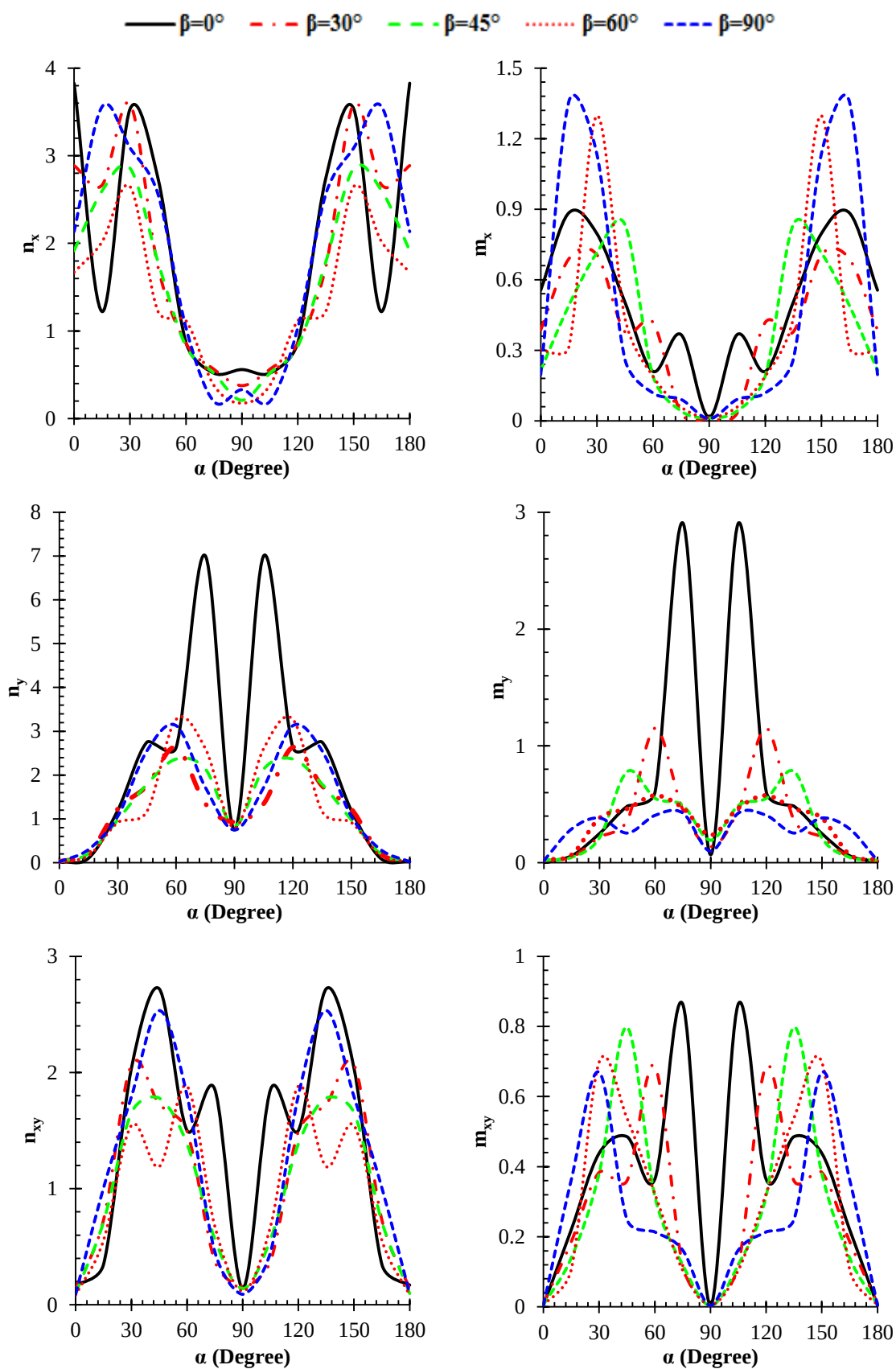
$n_y; \gamma=90^\circ$

$m_y; \gamma=90^\circ$



شکل (۴-۵): توزیع منتهجه‌های تنش و گشتاور بی‌بعد ترموالاستیک اطراف گشودگی دایروی در نانورق تابعی
($\alpha = 90^\circ$ و $\gamma = 0^\circ; 45^\circ; 90^\circ$)

شکل (۴-۶) تغییرات بیشینه قدر مطلق منته‌های تنش و گشتاور بی‌بعد را نسبت به زاویه چینش نانولوله‌های کربنی (α) در مقادیر مختلف زاویه چرخش گشودگی (β) با در نظر گرفتن گشودگی بیضوی با کشیدگی $e = 1.5$ نمایش می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود علاوه بر زاویه نانولوله‌های کربنی، چرخش گشودگی در تغییر توزیع منته‌های تنش و گشتاور موثر است. وقتی که زاویه نانولوله‌های کربنی مخالف $\alpha = 90^\circ$ است، میزان چرخش گشودگی نیاز به توجه ویژه دارد، چراکه با قرار گیری گشودگی در زوایای خاص و نامطلوب امکان ایجاد یک طراحی نایمن وجود دارد. این شکل همچنین نشان می‌دهد که در $\alpha = 90^\circ$ تنش و گشتاور مطلوب در تمامی زوایای چرخش گشودگی حاصل می‌شود.

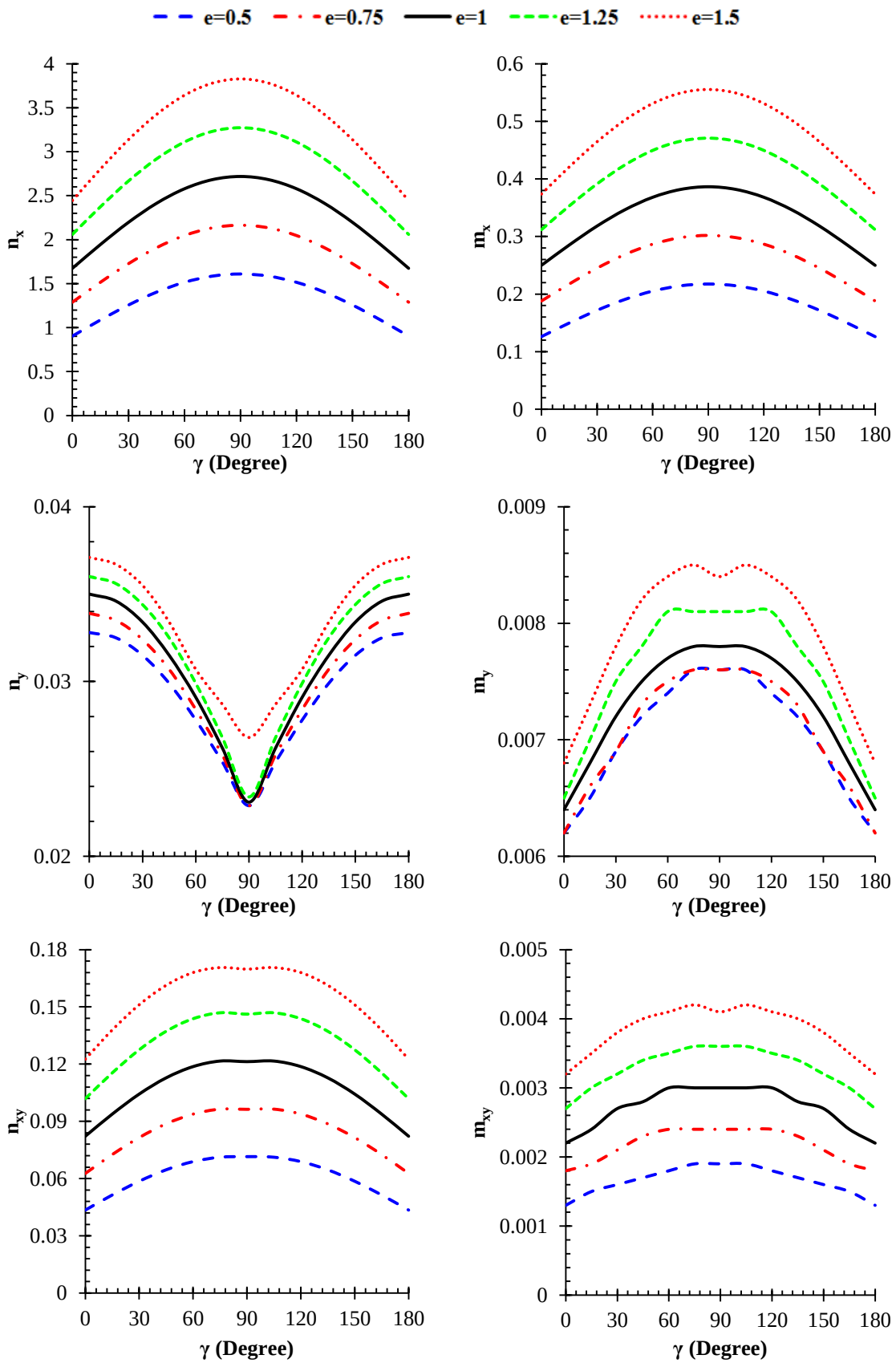


شکل (۴-۶): تاثیر زاویه چینش نانولوله‌های کربنی (α) بر منته‌های تنش و گشتاور ترموالاستیک بی‌بعد در زوایای مختلف چرخش گشودگی (β)

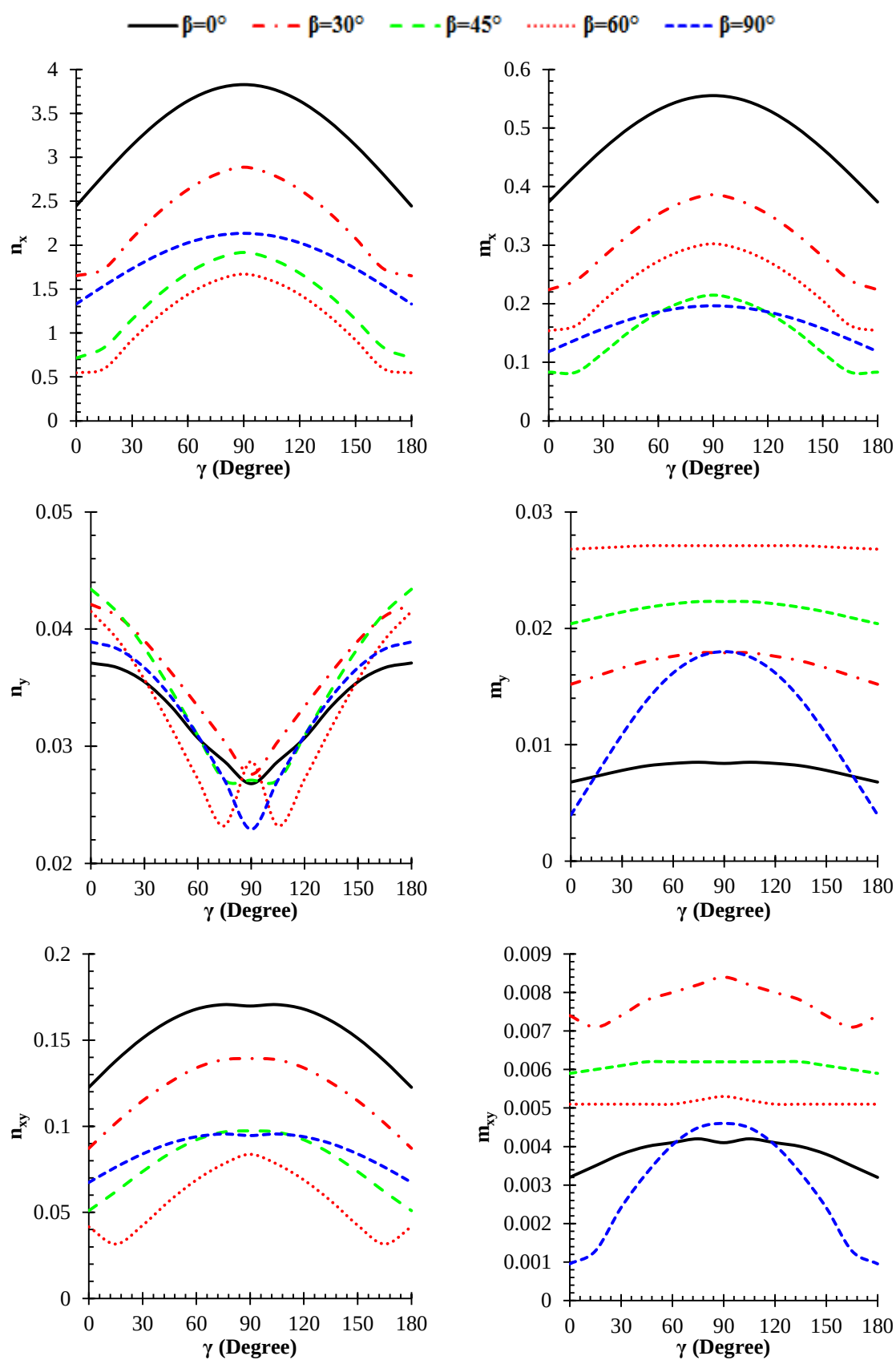
۴-۲-۳ تاثیر زاویه شار حرارتی (γ)

همانطور که در شکل (۷-۴) مشاهده می‌شود، مقادیر بیشینه قدر مطلق منته‌های تنش و گشتاور بی‌بعد بجز n_y ، در یک زاویه شار حرارتی ثابت با افزایش کشیدگی گشودگی و همچنین در یک کشیدگی ثابت گشودگی با افزایش زاویه شار حرارتی افزایش می‌یابند. n_y با افزایش زاویه شار حرارتی افزایش می‌یابد. بنابراین منته‌های تنش و گشتاور مطلوب و نامطلوب به ترتیب در زوایای شار حرارتی $\gamma = 0^\circ$ و $\gamma = 90^\circ$ حاصل می‌شود.

برای گشودگی بیضوی با مقدار کشیدگی $e = 1.5$ ، روند تغییرات مقادیر بیشینه قدر مطلق منته‌های تنش و گشتاور بی‌بعد نسبت به زاویه شار حرارتی (γ) در چرخش‌های مختلف گشودگی در شکل (۸-۴) به نمایش درآمده است. در تمامی زوایای چرخش گشودگی، افزایش زاویه شار حرارتی باعث افزایش مقادیر منته‌ها بجز n_y می‌شود. بر همین اساس پیشنهاد می‌شود وقتی که شار حرارتی به صورت عمود بر لبه بالایی نانورق تابعی وارد می‌شود، گشودگی نسبت به محور x چرخیده باشد و زاویه این چرخش بر اساس الزامات فنی می‌تواند مشخص گردد. با این وجود، در حالت کلی، وقتی که شار حرارتی از لبه بالایی ورق عبور می‌نماید $\gamma = 0^\circ$ تنش و گشتاور مطلوب حاصل می‌شود.



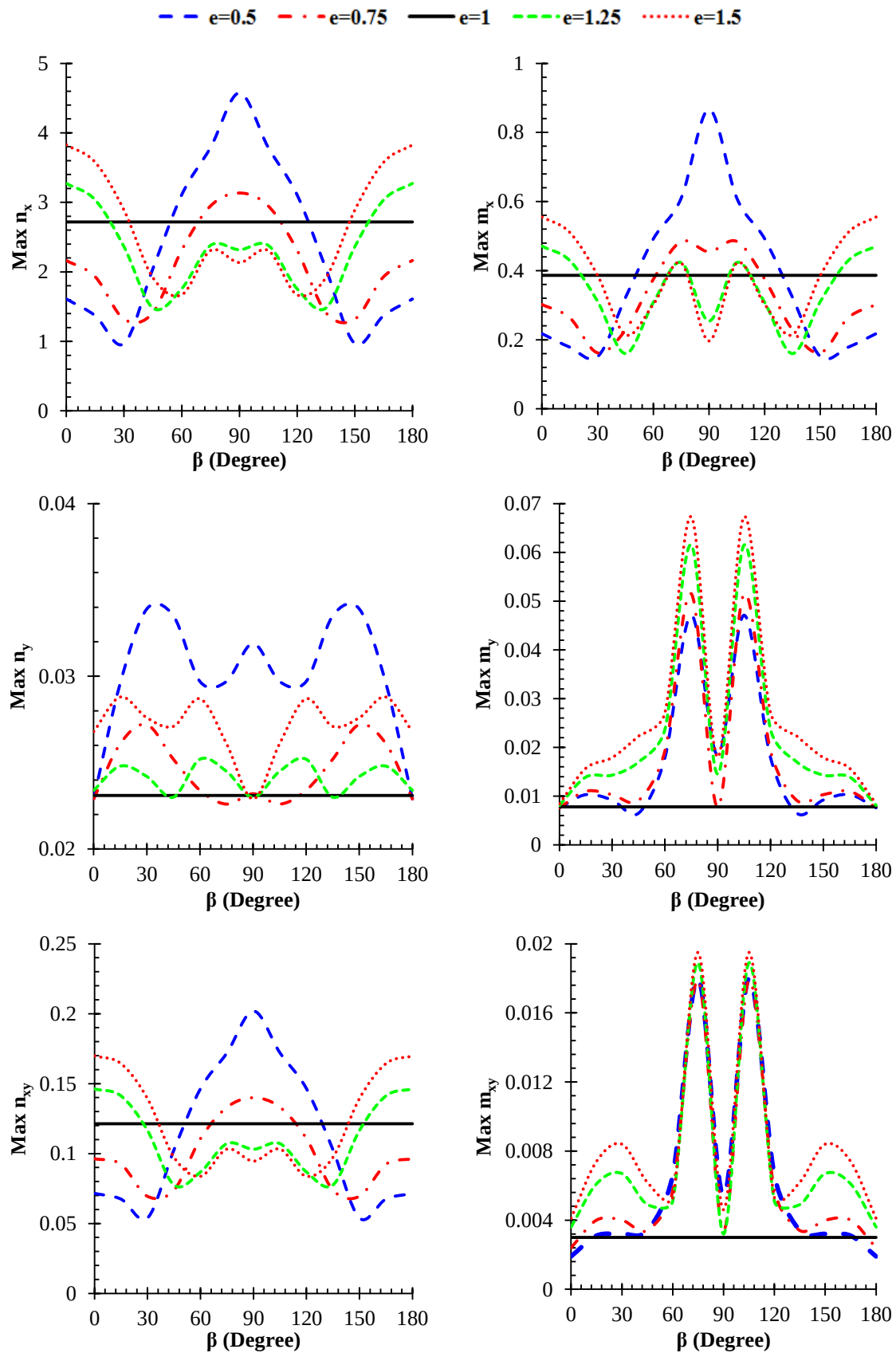
شکل (۷-۴): تاثیر زاویه اعمال شار حرارتی (γ) بر منته‌های تنش و گشتاور ترموالاستیک بی‌بعد در کشیدگی‌های متفاوت (e)



شکل (۴-۸): تاثیر زاویه اعمال شار حرارتی (γ) بر منتهجه‌های تنش و گشتاور ترموالاستیک بی‌بعد در زوایای مختلف چرخش گشودگی (β)

۴-۲-۴ تاثیر زاویه چرخش گشودگی (β)

شکل (۹-۴) بیانگر تاثیرات زاویه چرخش گشودگی (β) بر مقادیر بیشینه قدر مطلق منته‌های تنش و گشتاور بی‌بعد در مقادیر مختلف کشیدگی گشودگی (e) است. وقتی که کشیدگی کمتر از یک است ($e < 1$) یک چرخش به میزان $\beta = 90^\circ$ در گشودگی می‌تواند باعث ایجاد شرایط نامطلوب گردد. با این وجود این شرایط برای گشودگی‌های بدون چرخش $\beta = 0^\circ$ نیز زمانی که میزان کشیدگی آن‌ها بیشتر از یک است ($e > 1$) حادث می‌شود. به بیان دیگر، برای یک نانوورق تابعی دارای گشودگی بیضوی در مرکز آن اگر میزان کشیدگی گشودگی $e < 1$ باشد بهتر است که زاویه چرخش $\beta < 45^\circ$ و اگر میزان کشیدگی $e > 1$ باشد زاویه چرخش $\beta > 45^\circ$ باشد.



شکل (۹-۴): تاثیر زاویه چرخش گشودگی (β) بر منته‌های تنش و گشتاور ترموالاستیک بی‌بعد در کشیدگی‌های متفاوت (e)

۳-۴ نتیجه گیری

فرمولبندی ارائه شده در فصل دوم به منظور تحلیل ترموالاستیک ورق نانوکامپوزیت تابعی دارای گشودگی بیضوی در مرکز است. فرض شده است نانورق تابعی در معرض شار حرارتی ثابت و بارکشی در بی نهایت قرار دارد، بنابراین تاثیر همزمان بارحرارتی و بارگذاری مکانیکی بر نتیجه های تنش و گشتاور گشودگی مورد بررسی قرار گرفته است. تاثیر پارامترهای موثر، از جمله کسر حجمی نانولوله های کربنی (V_{CNT}^*)، زاویه چینش نانولوله های کربنی (α)، زاویه شار حرارتی (γ)، زاویه چرخش گشودگی (β) و مقدار کشیدگی گشودگی (e) بر توزیع نتیجه های تنش و گشتاور حول یک گشودگی بیضوی که در مرکز یک نانورق تابعی نامتقارن است برای اولین بار مورد بررسی قرار گرفته است. مهمترین نتایج حاصل عبارتند از:

- با انتخاب مناسب پارامترهای موثر، نتیجه های تنش و گشتاور حول گشودگی به طور قابل ملاحظه ای کاهش می یابند.
- با افزایش کسر حجمی نانولوله های کربنی از $V_{CNT}^* = 0.12$ تا $V_{CNT}^* = 0.28$ حدود ۲۸٪ به میزان نتیجه تنش N_x و حدود ۳۱٪ به نتیجه گشتاور M_x افزوده می شود. بنابراین افزایش کسر حجمی نانولوله های کربنی در نانوصفحات که دارای گشودگی هستند الزاما عامل موثر در استحکام ورق تلقی نخواهد شد.
- زمانی که زاویه نانولوله های کربنی و زاویه اعمال شار حرارتی برابر $\alpha = \gamma = 90^\circ$ درجه باشد، کمترین مقدار نتیجه های تنش و گشتاور ترموالاستیک بی بعد حاصل می شود.
- روند توزیع نتیجه های تنش و گشتاور با تغییر زاویه شار حرارتی دچار تغییر نخواهد شد.
- برای یک نانورق تابعی دارای گشودگی بیضوی در مرکز آن اگر میزان کشیدگی گشودگی $e < 1$ باشد بهتر است که زاویه چرخش $\beta < 45^\circ$ و اگر میزان کشیدگی $e > 1$ باشد زاویه چرخش $\beta > 45^\circ$ باشد.

فصل ۵ نتیجه گیری

۵-۱ نتیجه‌گیری

تمرکز تنش در رخدادهای شکست سازه‌های فنی از اهمیت بالایی برخوردار است. گشودگی‌های هندسی در سازه‌ها که در قالب سوراخ ایجاد می‌شود یکی از مهمترین عوامل ناپیوستگی هندسی در تمرکز تنش محسوب می‌شوند. پیشرفت نیازهای عملیاتی در صنایع با تکنولوژی بالا شناخت و به کارگیری مواد نسل جدید که استحکام بیشتری را دارا می‌باشند را منجر شده است. در این میان کامپوزیت‌های تقویت شده با توزیع تابعی نانولوله‌های کربنی با الهام از مفهوم مواد تابعی، نسل جدیدی از مواد را بوجود آورده‌اند. از سویی اگرچه صفحات کامپوزیتی متقارن می‌توانند از نقطه نظر تحلیلی بسیار مطلوب باشند اما آنها در اکثر اوقات نمی‌توانند برآورده‌کننده نیازهای طراحی در برخی کاربردها باشند. به طور مثال یک سپر حرارتی از یک طرف گرما را دریافت می‌کند و بنابراین برای محافظت مؤثر در مقابل گرما به مشخصات غیرمتقارن نیاز دارد. نمونه دیگری که نیاز به کوپلینگ دارد در تیغه-های توربین با دارای پیچش است. علاوه بر این در برخی کاربردها نیاز به افزایش سختی برشی صفحات وجود دارد که در این موارد می‌توان با جهت‌دهی مناسب لایه‌ها به نتیجه مطلوب رسید. از این رو در این رساله نانورق کامپوزیتی با توزیع تابعی و نامتقارن نانولوله‌های کربنی در راستای ضخامت که دارای یک گشودگی بیضوی در مرکز است با استفاده از روش متغیر مختلط مورد مطالعه تحلیلی قرار گرفت. نانورق تابعی در معرض شار حرارتی و بار کششی ثابت در بی‌نهایت است. با تکیه بر توسعه روابط بنیادی و روابط روش متغیر مختلط حل جامعی برای صفحات کامپوزیتی نامتقارن و تابعی به دست آمده است. در ادامه نیز بر پایه حل تحلیلی مقدار و نحوه توزیع منته‌های تنش و گشتاور حرارتی و ترموالاستیک در اطراف گشودگی دایروی و بیضوی به همراه تاثیر پارامترهای مؤثر بر آن مورد مطالعه قرار گرفت. مطالعه پارامترهای مؤثر بر منته‌های تنش و گشتاور بر پایه تاثیرگذاری آنها بر خواص مواد نانورق تابعی مانند نانولوله‌های کربنی (V_{CNT}^*)؛ زاویه چینش نانولوله‌های کربنی (α)، زاویه شار حرارتی (γ) که پارامتر مؤثر بر شرایط بارگذاری است و پارامتر

موثر بر هندسه گشودگی شامل زاویه چرخش گشودگی (β) و مقدار کشیدگی گشودگی (e) دسته‌بندی شد. تأثیر این پارامترها به طور مجزا بر بیشترین منته‌های تنش و گشتاور ایجاد شده بررسی شد. نتایج نشان داد که انتخاب مناسب و مطالعه شده پارامترهای یاد شده تأثیر بسزایی در کاهش بیشینه منته‌های تنش و گشتاور حرارتی و ترموالاستیک اطراف گشودگی دارد.

۲-۵ پژوهش‌های آتی

- ❖ بررسی منته‌های تنش و گشتاور نانورق تابعی حاوی گشودگی با اشکال مختلف تحت بارگذاری حرارتی
- ❖ بررسی منته‌های تنش و گشتاور نانورق تابعی چندلایه با چیدمان مختلف لایه‌های تابعی تحت بارگذاری ترکیبی حرارتی و مکانیکی
- ❖ بررسی منته‌های تنش و گشتاور صفحات تابعی، کامپوزیت‌های چندلایه نامتقارن تحت بارگذاری حرارتی و ترکیبی حرارتی-مکانیکی
- ❖ بررسی منته‌های تنش و گشتاور حرارتی و ترموالاستیک صفحات ساندویچی با لایه‌هایی از جنس نانورق تابعی و همچنین لایه‌های تابعی و کامپوزیت چندلایه نامتقارن
- ❖ بررسی منته‌های تنش و گشتاور صفحات تابعی، کامپوزیت‌های چندلایه نامتقارن، نانورق تابعی چندلایه با چیدمان مختلف لایه‌های تابعی و صفحات ساندویچی حاوی ترک تحت بارگذاری حرارتی و ترموالاستیک
- ❖ بررسی منته‌های تنش و گشتاور صفحات تابعی و نانورق تابعی که خواص مواد بجای ضخامت در راستای شعاعی متغیر و تابعی است.

- [1] Kroto H. W., Heath J. R., O'Brien S. C., Curl R. F., and Smalley R. E., (1985), "C₆₀: Buckminsterfullerene", *Nature*, **318**, **6042**, pp. 162-163.
- [2] Iijima S., (1991), "Helical microtubules of graphitic carbon", *Nature*, **354**, **6348**, pp. 56-58.
- [3] Iijima S. and Ichihashi T., (1993), "Single-shell carbon nanotubes of 1-nm diameter", *Nature*, **363**, **6430**, pp. 603-605.
- [4] Overney G., Zhong W., and Tomanek D., (1993), "Structural rigidity and low frequency vibrational modes of long carbon tubules", *Zeitschrift für Physik D Atoms, Molecules and Clusters*, **27**, **1**, pp. 93-96.
- [5] Wong Eric W., Sheehan Paul E., and Lieber Charles M., (1997), "Nanobeam mechanics: Elasticity, strength, and toughness of nanorods and nanotubes", *Science*, **277**, **5334**, pp. 1971-1975.
- [6] Lu J. P., (1997), "Elastic properties of single and multilayered nanotubes", *Journal of Physics and Chemistry of Solids*, **58**, **11**, pp. 1649-1652.
- [7] Natsuki T., Tantrakarn K., and Endo M., (2004), "Prediction of elastic properties for single-walled carbon nanotubes", *Carbon*, **42**, **1**, pp. 39-45.
- [8] Zhang H. W., Wang J. B., and Guo X., (2005), "Predicting the elastic properties of single-walled carbon nanotubes", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **53**, **9**, pp. 1929-1950.
- [9] Zhang C.-L. and Shen H.-S., (2006), "Temperature-dependent elastic properties of single-walled carbon nanotubes: Prediction from molecular dynamics simulation", *Applied Physics Letters*, **89**, **8**, p. 081904.
- [10] Gao M., Bian L., and Liang X., (2021), "Analysis for thermal properties and some influence parameters on carbon nanotubes by an energy method", *Applied Mathematical Modelling*, **89**, pp. 73-88.
- [11] Kostarelos K., (2008), "The long and short of carbon nanotube toxicity", *Nature Biotechnology*, **26**, **7**, pp. 774-776.
- [12] Ghiazza M., Vietti G., and Fenoglio I., (2014), "8 - Carbon Nanotubes: Properties, Applications, and Toxicity", pp. 147-174, In: **Health and Environmental Safety of Nanomaterials**, Njuguna J., Pielichowski K., and Zhu H., Woodhead Publishing, New York.
- [13] Popov V. N., (2004), "Carbon nanotubes: Properties and application", *Materials Science and Engineering: R: Reports*, **43**, **3**, pp. 61-102.
- [14] Dragoman D. and Dragoman M., (2014), "Chapter 7 - Transport Properties of Carbon Nanotubes and Graphene", pp. 151-164, In: **Carbon Nanotubes and Graphene (Second Edition)**, Tanaka K. and Iijima S., Elsevier, Oxford.

- [15] Chen W. X., Tu J. P., Wang L. Y., Gan H. Y., Xu Z. D., and Zhang X. B., (2003), "Tribological application of carbon nanotubes in a metal-based composite coating and composites", *Carbon*, **41**, 2, pp. 215-222.
- [16] Liew K. M., Yan J.-W., and Zhang L.-W., (2017), "Chapter 1 - Introduction", pp. 1-22, In: **Mechanical Behaviors of Carbon Nanotubes**, Liew K. M., Yan J.-W., and Zhang L.-W., Elsevier, Amsterdam.
- [17] Liew K. M., Yan J.-W., and Zhang L.-W., (2017), "Chapter 2 - Experimental Aspect", pp. 23-47, In: **Mechanical Behaviors of Carbon Nanotubes**, Liew K. M., Yan J.-W., and Zhang L.-W., Elsevier, Amsterdam.
- [18] Hao B. and Ma P. C., (2017), "Chapter 3 - Carbon Nanotubes for Defect Monitoring in Fiber-Reinforced Polymer Composites", pp. 71-99, In: **Industrial Applications of Carbon Nanotubes**, Peng H., Li Q., and Chen T., Elsevier, Boston.
- [19] Jiang K., (2017), "Chapter 4 - Carbon Nanotubes for Displaying", pp. 101-127, In: **Industrial Applications of Carbon Nanotubes**, Peng H., Li Q., and Chen T., Elsevier, Boston.
- [20] Zhou M., Wang Z., and Wang X., (2017), "Chapter 5 - Carbon Nanotubes for Sensing Applications", pp. 129-150, In: **Industrial Applications of Carbon Nanotubes**, Peng H., Li Q., and Chen T., Elsevier, Boston.
- [21] He S., Chen P., Sun X., and Peng H., (2017), "Chapter 6 - Stimuli-Responsive Materials From Carbon Nanotubes", pp. 151-178, In: **Industrial Applications of Carbon Nanotubes**, Peng H., Li Q., and Chen T., Elsevier, Boston.
- [22] Shen H., Liu T., Qin D., Bo X., Wang L., Wang F., Yuan Q., Wagberg T., Hu G., and Zhou M., (2017), "Chapter 7 - Wearable Carbon Nanotube Devices for Sensing", pp. 179-199, In: **Industrial Applications of Carbon Nanotubes**, Peng H., Li Q., and Chen T., Elsevier, Boston.
- [23] Grace T., Shearer C., Tune D., Yu L., Batmunkh M., Biggs M. J., Alothman Z. A., and Shapter J. G., (2017), "Chapter 8 - Use of Carbon Nanotubes in Third-Generation Solar Cells", pp. 201-249, In: **Industrial Applications of Carbon Nanotubes**, Peng H., Li Q., and Chen T., Elsevier, Boston.
- [24] Fang S., Shen L., and Zhang X., (2017), "Chapter 9 - Application of Carbon Nanotubes in Lithium-Ion Batteries", pp. 251-276, In: **Industrial Applications of Carbon Nanotubes**, Peng H., Li Q., and Chen T., Elsevier, Boston.
- [25] Zhang Y., Wu H., Cheng L., Zheng L., and Yuan W., (2017), "Chapter 10 - Carbon Nanotubes for Electrochemical Capacitors", pp. 277-321, In: **Industrial Applications of Carbon Nanotubes**, Peng H., Li Q., and Chen T., Elsevier, Boston.
- [26] Xue Y., (2017), "Chapter 11 - Carbon Nanotubes for Biomedical Applications", pp. 323-346, In: **Industrial Applications of Carbon Nanotubes**, Peng H., Li Q., and Chen T., Elsevier, Boston.
- [27] Yao Y., Li N., Lv T., and Chen T., (2017), "Chapter 12 - Carbon Nanotube Fibers for Wearable Devices", pp. 347-379, In: **Industrial Applications of Carbon Nanotubes**, Peng H., Li Q., and Chen T., Elsevier, Boston.

- [28] Kang L. X., Li D., Yong Z. Z., Zhang X. H., and Li Q., (2017), "Chapter 13 - Growth of Aligned Carbon Nanotubes and Their Applications", pp. 381-403, In: **Industrial Applications of Carbon Nanotubes**, Peng H., Li Q., and Chen T., Elsevier, Boston.
- [29] Thostenson E. T., Ren Z., and Chou T.-W., (2001), "Advances in the science and technology of carbon nanotubes and their composites: A review", **Composites Science and Technology**, **61**, 13, pp. 1899-1912.
- [30] Ruoff R. S. and Lorents D. C., (1995), "Mechanical and thermal properties of carbon nanotubes", **Carbon**, **33**, 7, pp. 925-930.
- [31] Ci L., Suhr J., Pushparaj V., Zhang X., and Ajayan P. M., (2008), "Continuous carbon nanotube reinforced composites", **Nano Letters**, **8**, 9, pp. 2762-2766.
- [32] Malekzadeh P. and Shojaee M., (2013), "Buckling analysis of quadrilateral laminated plates with carbon nanotubes reinforced composite layers", **Thin-Walled Structures**, **71**, pp. 108-118.
- [33] Thostenson E. T. and Chou T.-W., (2003), "On the elastic properties of carbon nanotube-based composites: Modelling and characterization", **Journal of Physics D: Applied Physics**, **36**, 5, pp. 573-582.
- [34] Fiedler B., Gojny F. H., Wichmann M. H. G., Nolte M. C. M., and Schulte K., (2006), "Fundamental aspects of nano-reinforced composites", **Composites Science and Technology**, **66**, 16, pp. 3115-3125.
- [35] Kim M., Park Y.-B., Okoli O. I., and Zhang C., (2009), "Processing, characterization, and modeling of carbon nanotube-reinforced multiscale composites", **Composites Science and Technology**, **69**, 3, pp. 335-342.
- [36] Gojny F. H., Wichmann M. H. G., Köpke U., Fiedler B., and Schulte K., (2004), "Carbon nanotube-reinforced epoxy-composites: enhanced stiffness and fracture toughness at low nanotube content", **Composites Science and Technology**, **64**, 15, pp. 2363-2371.
- [37] Chen W., Tao X., and Liu Y., (2006), "Carbon nanotube-reinforced polyurethane composite fibers", **Composites Science and Technology**, **66**, 15, pp. 3029-3034.
- [38] Yan L., Wang H., Wang C., Sun L., Liu D., and Zhu Y., (2013), "Friction and wear properties of aligned carbon nanotubes reinforced epoxy composites under water lubricated condition", **Wear**, **308**, 1, pp. 105-112.
- [39] Mathur R. B., Pande S., Singh B. P., and Dhami T. L., (2008), "Electrical and mechanical properties of multi-walled carbon nanotubes reinforced PMMA and PS composites", **Polymer Composites**, **29**, 7, pp. 717-727.
- [40] Chandel V. S., Wang G., and Talha M., (2020), "Advances in modelling and analysis of nano structures: A review", **Nanotechnology Reviews**, **9**, 1, pp. 230-258.
- [41] Adolfsson E. and Gudmundson P., (1997), "Thermoelastic properties in combined bending and extension of thin composite laminates with transverse matrix cracks", **International Journal of Solids and Structures**, **34**, 16, pp. 2035-2060.

- [42] Niino M. and Maeda S., (1990), "Recent development status of functionally gradient materials", *ISIJ International*, **30**, **9**, pp. 699-703.
- [43] Bharti I., Gupta N., and Gupta K., (2013), "Novel applications of functionally graded nano, optoelectronic and thermoelectric materials", *International Journal of Materials Mechanics and Manufacturing*, **1**, **3**, pp. 221-224.
- [44] Behdinan K., Moradi-Dastjerdi R., Safaei B., Qin Z., Chu F., and Hui D., (2020), "Graphene and CNT impact on heat transfer response of nanocomposite cylinders", *Nanotechnology Reviews*, **9**, **1**, pp. 41-52.
- [45] Shen H.-S., (2009), "Nonlinear bending of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates in thermal environments", *Composite Structures*, **91**, **1**, pp. 9-19.
- [46] Zhu P., Lei Z. X., and Liew K. M., (2012), "Static and free vibration analyses of carbon nanotube-reinforced composite plates using finite element method with first order shear deformation plate theory", *Composite Structures*, **94**, **4**, pp. 1450-1460.
- [47] Alibeigloo A., (2016), "Thermoelastic analysis of functionally graded carbon nanotube reinforced composite cylindrical panel embedded in piezoelectric sensor and actuator layers", *Composites Part B: Engineering*, **98**, pp. 225-243.
- [48] Golmakani M. and Zeighami V., (2018), "Nonlinear thermo-elastic bending of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates resting on elastic foundations by dynamic relaxation method", *Mechanics of Advanced Materials Structures*, **25**, **10**, pp. 868-880.
- [49] Zhao J., Choe K., Shuai C., Wang A., and Wang Q., (2019), "Free vibration analysis of functionally graded carbon nanotube reinforced composite truncated conical panels with general boundary conditions", *Composites Part B: Engineering*, **160**, pp. 225-240.
- [50] Ke L.-L., Yang J., and Kitipornchai S., (2013), "Dynamic stability of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite beams", *Mechanics of Advanced Materials Structures*, **20**, **1**, pp. 28-37.
- [51] Khoa N. D., Anh V. M., and Duc N. D., (2019), "Nonlinear dynamic response and vibration of functionally graded nanocomposite cylindrical panel reinforced by carbon nanotubes in thermal environment", *Journal of Sandwich Structures & Materials*, **23**, **3**, pp. 852-883.
- [52] García-Macías E., Rodríguez-Tembleque L., Castro-Triguero R., and Sáez A., (2017), "Buckling analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced curved panels under axial compression and shear", *Composites Part B: Engineering*, **108**, pp. 243-256.
- [53] Golmakani M. E., Esmaeilzadeh M., Sadeghian M., and Zeighami V., (2021), "Buckling analysis of CNTRC plates in the thermal environment based on combination of the incremental load technique and dynamic relaxation method", *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, **22**, **4**, pp. 316-332.
- [54] Fallah M., Daneshmehr A., Zarei H., Bisadi H., and Minak G., (2018), "Low velocity impact modeling of functionally graded carbon nanotube reinforced

- composite (FG-CNTRC) plates with arbitrary geometry and general boundary conditions", *Composite Structures*, **187**, pp. 554-565.
- [55] Shen H.-S., (2012), "Thermal buckling and postbuckling behavior of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite cylindrical shells", *Composites Part B: Engineering*, **43**, 3, pp. 1030-1038.
- [56] Duc N. D., Cong P. H., Tuan N. D., Tran P., and Thanh N. V., (2017), "Thermal and mechanical stability of functionally graded carbon nanotubes (FG CNT)-reinforced composite truncated conical shells surrounded by the elastic foundations", *Thin-Walled Structures*, **115**, pp. 300-310.
- [57] Fantuzzi N., Tornabene F., Baccocchi M., and Dimitri R., (2017), "Free vibration analysis of arbitrarily shaped Functionally Graded Carbon Nanotube-reinforced plates", *Composites Part B: Engineering*, **115**, pp. 384-408.
- [58] Tüzemen M. Ç., Salancı E., and Avcı A., (2017), "Enhancing mechanical properties of bolted carbon/epoxy nanocomposites with carbon nanotube, nanoclay, and hybrid loading", *Composites Part B: Engineering*, **128**, pp. 146-154.
- [59] Inglis C. E., (1913), "Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners", *Trans Inst Naval Archit*, **55**, pp. 219-241.
- [60] Muskhelishvili N., (1977), **"Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity"**, Noordhoff, Groningen, Netherlands.
- [61] Savin G. N., (1961), **"Stress Concentration Around Holes"**, New York: Pergamon Press.
- [62] Florence A. L. and Goodier J. N., (1959), "Thermal stress at spherical cavities and circular holes in uniform heat flow", *Journal of Applied Mechanics*, **26**, 2, pp. 293-294.
- [63] Florence A. L. and Goodier J. N., (1960), "Thermal stresses due to disturbance of uniform heat flow by an insulated ovaloid hole", *Journal of Applied Mechanics*, **27**, 4, pp. 635-639.
- [64] Goodier J. N. and Florence A. L., **"Localized thermal stress at holes, cavities, and inclusions disturbing uniform heat flow: Thermal crack propagation"**, presented at the Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics Munich, 1966.
- [65] Deresiewicz H., (1961), "Thermal stress in a plate due to disturbance of uniform heat flow by a hole of general shape", *Journal of Applied Mechanics*, **28**, 1, pp. 147-149.
- [66] Takeuti Y. and Sumi N., (1976), "Thermal stresses in rectangular plate with a circular hole based on an improved complex variable approach", *Mechanics Research Communications*, **3**, 2, pp. 133-138.
- [67] Sekine H., (1977), "Thermal stresses near tips of an insulated line crack in a semi-infinite medium under uniform heat flow", *Engineering Fracture Mechanics*, **9**, 2, pp. 499-507.

- [68] Hasebe N., Tamai K., and Nakamura T., (1986), "Analysis of kinked crack under uniform heat flow", *Journal of Engineering Mechanics*, **112**, 1, pp. 31-42.
- [69] Norio H., Hideaki I., and Takuji N., (1992), "Stress intensity factors of cracks initiating from a rhombic hole due to uniform heat flux", *Engineering Fracture Mechanics*, **42**, 2, pp. 331-337.
- [70] Hasebe N. and Wang X., (2005), "Complex variable method for thermal stress problem", *Journal of Thermal Stresses*, **28**, 6-7, pp. 595-648.
- [71] Hasebe N., Bucher C., and Heuer R., (2010), "Heat conduction and thermal stress induced by an electric current in an infinite thin plate containing an elliptical hole with an edge crack", *International Journal of Solids and Structures*, **47**, 1, pp. 138-147.
- [72] Jafari M., Nazari M. B., and Taheri Nasab A., (2016), "Study of the effective parameters on stress distribution around triangular hole in metallic plates subjected to uniform heat flux", *Journal of Thermal Stresses* **39**, 3, pp. 333-344.
- [73] Hasebe N. and Omatsu N., (2017), "Analysis of a kinked crack in soft ferromagnetic and paramagnetic elastic materials subjected to uniform magnetic field intensity", *Engineering Fracture Mechanics*, **184**, pp. 141-153.
- [74] Lekhnitskii S. G., (1969), "**Anisotropic Plates**", Gordon and Breach Science, New York.
- [75] Chen W. T., (1967), "Plane thermal stress at an insulated hole under uniform heat flow in an orthotropic medium", *Journal of Applied Mechanics*, **34**, 1, pp. 133-136.
- [76] Hwu C., (1990), "Thermal stresses in an anisotropic plate disturbed by an insulated elliptic hole or crack", *Journal of Applied Mechanics*, **57**, 4, pp. 916-922.
- [77] Tarn J.-Q. and Wang Y.-M., (1993), "Thermal stresses in anisotropic bodies with a hole or a rigid inclusion", *Journal of Thermal Stresses*, **16**, 4, pp. 455-471.
- [78] Qin Q.-H., (2000), "General solutions for thermopiezoelectrics with various holes under thermal loading", *International Journal of Solids and Structures*, **37**, 39, pp. 5561-5578.
- [79] Chao C.-K. and Gao B., (2001), "Mixed boundary-value problems of two-dimensional anisotropic thermoelasticity with elliptic boundaries", *International Journal of Solids and Structures*, **38**, 34, pp. 5975-5994.
- [80] Wang C. H. and Chao C. K., (2001), "On perturbation solutions for nearly circular inclusion problems in plane thermoelasticity", *Journal of Applied Mechanics*, **69**, 1, pp. 36-44.
- [81] Zhang X. Z., Kitipornchai S., Liew K. M., Lim C. W., and Peng L. X., (2003), "Thermal stresses around a circular hole in a functionally graded plate", *Journal of Thermal Stresses*, **26**, 4, pp. 379-390.

- [82] Li R. and Kardomateas G. A., (2005), "Thermo-elastic crack branching in general anisotropic media", *International Journal of Solids and Structures*, **42**, 3, pp. 1091-1109.
- [83] Bhullar S. K. and Wegner J. L., (2009), "Thermal stresses in a plate with hyperelliptical hole", *Journal of Engineering and Technology Research*, **1**, 8, pp. 152-170.
- [84] Rasouli M. and Jafari M., (2016), "Thermal stress analysis of infinite anisotropic plate with elliptical hole under uniform heat flux", *Journal of Thermal Stresses*, **39**, 11, pp. 1341-1355.
- [85] Moure M. M., García-Castillo S. K., Sánchez-Sáez S., Barbero E., and Barbero E. J., (2018), "Matrix cracking evolution in open-hole laminates subjected to thermo-mechanical loads", *Composite Structures*, **183**, pp. 510-520.
- [86] Jafari M. and Jafari M., (2018), "Effect of uniform heat flux on stress distribution around a triangular hole in anisotropic infinite plates", *Journal of Thermal Stresses*, **41**, 6, pp. 726-747.
- [87] Jafari M. and Jafari M., (2019), "Effect of hole geometry on the thermal stress analysis of perforated composite plate under uniform heat flux", *Journal of Composite Materials*, **53**, 8, pp. 1079-1095.
- [88] Jafari M. and Jafari M., (2019), "Thermal stress analysis of orthotropic plate containing a rectangular hole using complex variable method", *European Journal of Mechanics - A/Solids*, **73**, pp. 212-223.
- [89] Hasebe N., (2021), "Stress analysis for an orthotropic elastic half plane with an oblique edge crack and stress intensity factors", *Acta Mechanica*, **232**, 3, pp. 967-982.
- [90] Hasebe N., (2021), "Analysis for an infinite orthotropic elastic plane with a hole subjected to uniform heat flux", *Journal of Thermal Stresses*, **44**, 6, pp. 662-689.
- [91] Bayati Chaleshtari M. H. and Khoramishad H., (2022), "Investigation of the effect of cutout shape on thermal stresses in perforated multilayer composites subjected to heat flux using an analytical method", *European Journal of Mechanics - A/Solids*, **91**, p. 104412.
- [92] Ukadgaonker V. G. and Rao D. K. N., (2000), "A general solution for stress resultants and moments around holes in unsymmetric laminates", *Composite Structures*, **49**, 1, pp. 27-39.
- [93] Yang S.-Y., Ma C.-C. M., Teng C.-C., Huang Y.-W., Liao S.-H., Huang Y.-L., Tien H.-W., Lee T.-M., and Chiou K.-C., (2010), "Effect of functionalized carbon nanotubes on the thermal conductivity of epoxy composites", *Carbon*, **48**, 3, pp. 592-603.
- [94] Reddy J. N., (2003), **"Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis"**, CRC press.
- [95] Altenbach H., Altenbach J., and Kissing W., (2018), **"Mechanics of Composite Structural Elements"**, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

- [96] Shen H.-S., (2011), "**Functionally graded materials: nonlinear analysis of plates and shells**", CRC press.
- [97] Hahn D. W. and Özisik M. N., (2012), "**Heat Conduction**", third ed., John Wiley & Sons, Inc, New Jersey.
- [98] Carslaw H. S. and Jaeger J. C., "Conduction of heat in solids", Clarendon Press 1959.
- [99] Muskhelishvili N. I., (1953), "**Singular Integral Equations: Boundary Problems of Function Theory and Their Application to Mathematical Physics**", Noordhoff, Groningen, Holland.
- [100] Dave J. M. and Sharma D. S., (2018), "Stress field around rectangular hole in functionally graded plate", ***International Journal of Mechanical Sciences***, **136**, pp. **360-370**.
- [101] Dave J. M. and Sharma D. S., (2016), "Stresses and moments in through-thickness functionally graded plate weakened by circular/elliptical cut-out", ***International Journal of Mechanical Sciences***, **105**, pp. **146-157**.
- [102] Wang Y.-M. and Tarn J.-Q., (1993), "Green's functions for generalized plane problems of anisotropic bodies with a hole or a rigid inclusion", ***Journal of Applied Mechanics***, **60**, **3**, pp. **583-588**.
- [103] Chen P. and Shen Z., (2003), "Stress resultants and moments around holes in unsymmetrical composite laminates subjected to remote uniform loading", ***Mechanics Research Communications***, **30**, **1**, pp. **79-86**.

Abstract

The structural complexity of high-tech industries is often compromised by a combination of thermal, mechanical, and geometric weaknesses. New generation materials and engineering the structure of materials are among the techniques that engineers employ to eliminate these effects. In this Thesis, a comprehensive analysis solution is derived using Lekhnitskii's complex variable approach with the use of general mapping functions, the concept of functionally graded materials (FGMs), and holomorphic functions in the form of Laurent series. This general solution is used for the thermoelastic analysis of perforated functionally graded carbon nanotube-reinforced composite (FG-CNTRC) plates with elliptical hole. Nanocomposite plate is asymmetric due to the arrangement of CNT and is subjected to remote uniaxial tensile loading and constant heat flux. Following assumptions were considered to solve the problem: ¹The equivalent single-layer plate theory (classical laminated plate theory) is used for FG-CNTRC plate. ²There is no external load on the hole boundary. ³The edge of polygonal holes is considered thermal insulation. ⁴The FG-CNTRC plate is infinite. ⁵The Neumann and mechanical boundary condition was considered for the hole and problem. A refined-calibrated rule of mixtures is used to approximate the material property of FG-CNTRC plates according to gradational changes in direction of thickness and available molecular dynamics simulations results. To validate the implemented solution method, compliance with finite element solution results in Abaqus software and results of asymmetric laminated composite elastic analysis has been used. The effect of FG-CNTRC material properties, heat flux condition, and two parameters affecting the shape of the elliptical hole has been investigated. During the present parametric analysis, the results clearly show that the parameters each provide a reliable tool for designers to influence the stress and moment resultants to minimize undesirable stresses. Due to general formulation it is able to calculate thermoelastic parameters (as well as thermal and mechanical parameters, separately) for the generalized problems of the FGM plate or composite laminates with an elliptical hole.

Keywords: Perforated FG-CNTRC plate, Complex variable method (CVM), Thermoelastic analysis, Asymmetric nanocomposite plates



Shahrood University of Technology

Faculty of Mechanical and Mechatronics Engineering

Ph.D. Thesis in Mechanical Engineering - Applied Design

**Thermoelastic analysis of infinite composite plates reinforced by
functionally graded carbon nanotubes with elliptic hole
under uniform tensile load**

By:

Vahid Zeighami

Supervisor:

Dr. Mohammad Jafari

February, 2022