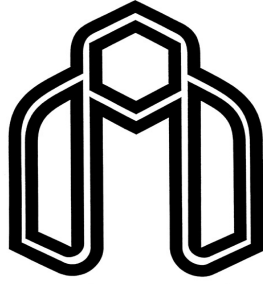


صلى الله عليه وسلم



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مهندسی مکانیک

پایان نامه کارشناسی ارشد تبدیل انرژی

بررسی جریان محوری و انتقال گرما در حلقوی چرخان

نگارش :

احسان صمصامی

استاد راهنما :

دکتر علی جباری مقدم

استاد مشاور :

دکتر محمود نوروزی

بهمن ۱۳۹۰



دانشکده مهندسی مکانیک
گروه حرارت و سیالات

پایان نامه کارشناسی ارشد آقای احسان صمصامی
تحت عنوان: بررسی جریان و انتقال حرارت در حلقوی چرخان

در تاریخ ۱۳۹۰ / ۱۱ / ۹ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد تبدیل انرژی
مورد ارزیابی و با درجه بسیار خوب مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور	امضاء	استاد راهنما
	دکتر محمود نوروزی		دکتر علی جباری مقدم

امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
	دکتر محمد حسن کیهانی		دکتر محمد محسن شاه مردان
			دکتر محسن نظری

تقدیم به پدر و مادرم

به امید اینکه همواره سپاسگزار ایشان باشم.

تشکر و قدردانی

از آقای دکتر علی جباری مقدم که راهنمایی این پایان نامه را بر عهده داشتند، تشکر و قدردانی می‌نمایم. همچنین از آقای دکتر محمود نوروزی که به عنوان استاد مشاور اینجانب را یاری نمودند، سپاسگزارم.

تعهد نامه

اینجانب احسان صمصامی، دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی مکانیک (تبدیل انرژی)، دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه بررسی جریان و انتقال حرارت در حلقوی چرخان تحت راهنمایی دکتر علی جباری مقدم، متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا «Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

امضای دانشجو

تاریخ

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده :

جریان و انتقال حرارت در سیالات بین دو استوانه ی هم مرکز که یکی یا هر دو دارای حرکت دورانی حول محور استوانه ها هستند، همراه با تغذیه سیال عمود بر سطح مقطع استوانه ها، که رژیمی مرکب از حرکت های محوری و دورانی سیال را به وجود می آورد، از بعد علمی و فنی دارای اهمیت بسیاری است. جریان هایی به این صورت، در بسیاری از سیستم های مکانیکی، مانند یاتاقان ها، موتورهای الکتریکی با تهویه محوری (جریان هوا بین روتور و استاتور)، مبدل های حرارتی دوار، مته های چاه های نفت و ... کاربرد دارند.

در این تحقیق سعی شده است که با شبیه سازی شرایط یک سیستم صنعتی (رولیک های خنک شونده با آب مورد استفاده در صنعت فولاد)، جریان آرامی از سیال که ابتدا وارد یک لوله (استوانه داخلی) و سپس وارد یک حلقوی با دیواره خارجی داغ در حال دوران می شود، مدل سازی شده و شرایط تغییرات دمایی و نرخ انتقال حرارت در طول جریان بررسی شود. بررسی ترموفلوئید چنین سیستمی، با حداقل تغییرات نسبت به هندسه سیستم صنعتی و شرایط مرزی آن تا حد امکان، از جنبه های جدید پژوهشی این تحقیق است.

فصل های اول و دوم به مروری بر تحقیقات انجام شده پیشین و معرفی مسأله و معادلات حاکم اختصاص دارد. در فصل سوم یک روش حل تحلیلی برای حل معادلات مومنوم سه بعدی در ناحیه توسعه یافته هیدرودینامیکی جریان و یک روش برای حل معادله انتقال حرارت در ناحیه توسعه یافته هیدرودینامیکی - در حال توسعه دمایی، ارائه شده است. بخش عمده کار که به روش عددی است، به صورت یک مدل جامع برای کل جریان می باشد که روش آن در فصل چهارم و نتایج آن در فصل پنجم ارائه شده است.

نتایج این تحقیق نشان می دهد که در سرعت های دورانی پایین، چرخش دیواره حلقوی تاثیر ناچیزی روی نرخ انتقال حرارت دارد. همچنین تاثیر این چرخش روی پروفیل جریان محوری نیز کم است که این تاثیر در نواحی ورودی جریان نسبت به ناحیه توسعه یافته چشم گیرتر می باشد.

کلمات کلیدی :

جریان آرام، حلقوی ، دوار، جابجایی، انتقال حرارت، جریان محوری، حل عددی

مقالات استخراج شده از پایان نامه:

- 1- Jabbari Moghadam A., Norouzi M., Samsami E., (2012), “ Numerical Investigation Of Laminar Flow In An Annulus With Rotating Outer Wall & Axial Water Inlet”, ISME2012, Shiraz.
- 2- Jabbari Moghadam A., Samsami E., (2012), “ Numerical Investigation Of Forced Convective Heat Transfer In An Annulus With Rotating Outer Wall With Axial Water Inlet ”, ISME2012, Shiraz.

فهرست مطالب

فصل اول : مقدمه	۱
۱ - ۱: دیباچه	۲
۲ - ۱: مروری بر تحقیقات انجام شده پیشین	۳
۱ - ۲ - ۱ : روش های حل عددی معادله ناویر استوکس	۳
۲ - ۲ - ۱ : روش های حل عددی معادلات ناویر استوکس بر حسب متغیرهای اولیه	۵
۳ - ۲ - ۱ : انتقال حرارت در داخل استوانه های افقی	۷
۱ - ۲ - ۳ - ۱ : ضریب انتقال حرارت در داخل استوانه های افقی ثابت	۷
۲ - ۳ - ۲ - ۱ : جریان و انتقال حرارت در لوله های دوار	۸
۴ - ۲ - ۱ : جریان سیال و انتقال حرارت در یک استوانه ی دوار با جریان هوای ورودی	۹
۵ - ۲ - ۱ : جریان و انتقال حرارت بین دو استوانه ی دارای حرکت دورانی نسبت به یکدیگر	۱۰
۳ - ۱ : معرفی مساله و اهداف تحقیق حاضر	۱۲
فصل دوم : معرفی مسأله و معادلات حاکم	۱۴
۱ - ۲ : انتقال حرارت جابجایی	۱۵
۲ - ۲ : قانون پایستگی جرم	۱۵
۳ - ۲ : معادلات اندازه حرکت	۱۶
۴ - ۲ : قانون اول ترمودینامیک	۱۸

فصل سوم : مروری بر نتایج موجود حل های تحلیلی قبلی و حل بخشی از مسأله به روش تحلیلی ۲۱

۳ - ۱ : معادلات دیفرانسیل انرژی برای جریان درون کانالهای مدور متقارن ۲۲

۳ - ۲ : انتقال گرما در جریان توسعه یافته ۲۳

۳ - ۳ : لوله دایروی با پروفیل های کاملاً توسعه یافته سرعت و درجه حرارت ۲۵

۳ - ۴ : معرفی چند مورد از حل های تحلیلی موجود برای برخی شرایط خاص ۲۶

۳ - ۴ - ۱ : اثر تغییرات شار حرارتی روی محیط ۲۶

۳ - ۴ - ۲ : حلقوی با پروفیل سرعت و درجه حرارت کاملاً توسعه یافته و گرمایش غیرمتقارن ۲۷

۳ - ۴ - ۳ : جریان در حال توسعه گرمایی در کانال دایروی ۲۹

۳ - ۴ - ۴ : جریان در حال توسعه گرمایی و هیدرولیکی ۳۳

۳ - ۵ : معرفی شرایط در نظر گرفته شده برای حل تحلیلی مساله حاضر ۳۳

۳ - ۶ : حل تحلیلی معادلات مومنوم ۳۴

۳ - ۷ : حل تحلیلی معادله انتقال حرارت ۳۶

فصل چهارم : حل مسأله به روش عددی ۴۱

۴ - ۱ : حل عددی معادلات مومنوم ۴۲

۴ - ۱ - ۱ : مقدمه ۴۲

۴ - ۱ - ۲ : الگوریتم های عددی ۴۲

۴ - ۱ - ۳ : تراکم پذیری مصنوعی ۴۳

۴ - ۱ - ۴ : شبکه جا به جا شده ۴۵

۴ - ۱ - ۵ : روش علامتگذاری و سلول ۴۷

- ۴ - ۲ : حل عددی معادله انتقال حرارت ۵۰.....
- ۴ - ۲ - ۱ : گسسته سازی ۵۱.....
- ۴ - ۲ - ۲ : روش تکراری گاوس - سایدل نقطه به نقطه..... ۵۳.....
- فصل پنجم : نتایج و بحث روی آن** ۵۴.....
- ۵ - ۱ : نتایج به دست آمده از بخش حل تحلیلی ۵۵.....
- ۵ - ۱ - ۱ : محدودیت های موجود ۵۵.....
- ۵ - ۱ - ۲ : یک نمونه حل سری برای شرایط خاص جریانی و شرایط خاص مرزی ۵۶.....
- ۵ - ۲ : نتایج به دست آمده از حل عددی معادلات مومنتوم ۵۷.....
- ۵ - ۲ - ۱ : بررسی اعتبار حل عددی ۶۰.....
- ۵ - ۲ - ۲ : بررسی وابستگی حل عددی به شبکه ۶۱.....
- ۵ - ۳ : نتایج به دست آمده از حل عددی معادله انتقال حرارت ۶۲.....
- ۵ - ۳ - ۱ : نتایج حالت اول (جابجایی هوا - شار حرارتی ثابت - جابجایی هوا) ۶۳.....
- ۵ - ۳ - ۲ : نتایج حالت دوم (جابجایی هوا - دما ثابت - جابجایی هوا) ۷۰.....
- ۵ - ۴ : بحث و نتیجه گیری ۷۶.....
- ۵ - ۵ : پیشنهاداتی برای تحقیقات آینده ۷۷.....
- پیوست..... ۷۸.....
- مراجع ۷۹.....

فهرست شکل ها

- شکل (۱ - ۱) : هندسه جریان و شرایط مرزی ۱۲
- شکل (۱ - ۲) : قانون اول ترمودینامیک برای حجم کنترل ۱۸
- شکل (۱ - ۳) : انتقال حرارت در ناحیه ورودی یک لوله با دیواره های دما ثابت ۳۱
- شکل (۲ - ۳) : انتقال حرارت در ناحیه ورودی یک لوله با شار گرمایی یکنواخت در دیواره ها ۳۲
- شکل (۳ - ۳) : هندسه جریان و شرایط مرزی ۳۴
- شکل (۱ - ۴) : شبکه های اولیه و ثانویه در یک مختصات دو بعدی ۴۶
- شکل (۲ - ۴) : شبکه های اولیه و ثانویه در یک مختصات دو بعدی ۴۹
- شکل (۳ - ۴) : نقاط مربوط به شبکه ۵ نقطه ای ۵۱
- شکل (۴ - ۴) : نقاط مربوط به شبکه ۹ نقطه ای ۵۲
- شکل (۱ - ۵) : تغییرات دما در حلقوی با فاصله شعاعی از محور در $z/Dh=32.2$ و $Re_a = 300, Re_r = 105$ ۵۷
- شکل (۲ - ۵) : کانتورهای سرعت محوری در $Re_a = 300, Re_r = 105$ ۵۸
- شکل (۳ - ۵) : کانتورهای سرعت محوری در $Re_a = 300, Re_r = 1600$ ۵۸
- شکل (۴ - ۵) : کانتورهای سرعت محوری برای $Re_a = 300, Re_r = 105$ ۵۹
- شکل (۵ - ۵) : کانتورهای سرعت دورانی برای $Re_a = 300, Re_r = 1600$ ۵۹
- شکل (۶ - ۵) : منحنی های سرعت محوری در مقاطع مختلف حلقوی برای $Re_a = 300, Re_r = 105$ ۶۰
- شکل (۷ - ۵) : مقایسه پاسخ های تحلیلی و عددی برای سرعت محوری در ناحیه توسعه یافته برای $Re_a = 300, Re_r = 105$ ۶۱
- شکل (۸ - ۵) : شکل شماتیک هندسه مسأله به همراه شرایط مرزی ۶۳
- شکل (۹ - ۵) : پروفیل دما در استوانه داخلی و حلقوی برای شرط مرزی (جابجایی هوا - شار حرارتی ثابت - جابجایی هوا) ۶۴
- شکل (۱۰ - ۵) : منحنی های تغییرات دمای بالک جریان در طول حلقوی ۶۵
- شکل (۱۱ - ۵) : منحنی های تغییرات دمای بالک جریان در طول استوانه داخلی ۶۵
- شکل (۱۲ - ۵) : منحنی های تغییرات عدد ناسلت در طول استوانه داخلی ۶۶

- شکل (۵ - ۱۳) : منحنی های تغییرات عدد ناسلت جریان (متناظر سطح داخلی) در طول حلقوی (ناحیه اول).....۶۷
- شکل (۵ - ۱۴) : منحنی های تغییرات عدد ناسلت جریان (متناظر سطح خارجی) در طول حلقوی (ناحیه اول).....۶۷
- شکل (۵ - ۱۵) : منحنی های تغییرات عدد ناسلت جریان (متناظر سطح داخلی) در طول حلقوی (ناحیه دوم).....۶۸
- شکل (۵ - ۱۶) : منحنی های تغییرات عدد ناسلت جریان (متناظر سطح خارجی) در طول حلقوی (ناحیه دوم).....۶۸
- شکل (۵ - ۱۷) : منحنی های تغییرات عدد ناسلت جریان (متناظر سطح داخلی) در طول حلقوی (ناحیه سوم).....۶۹
- شکل (۵ - ۱۸) : منحنی های تغییرات عدد ناسلت جریان (متناظر سطح خارجی) در طول حلقوی (ناحیه سوم).....۶۹
- شکل (۵ - ۱۹) : پروفیل دما در استوانه داخلی و حلقوی برای شرط مرزی (جابجایی هوا - دما ثابت - جابجایی هوا)۷۰
- شکل (۵ - ۲۰) : منحنی های تغییرات دمای بالک جریان در طول حلقوی۷۱
- شکل (۵ - ۲۱) : منحنی های تغییرات دمای بالک جریان در طول استوانه داخلی۷۱
- شکل (۵ - ۲۲) : منحنی های تغییرات عدد ناسلت در طول استوانه داخلی۷۲
- شکل (۵ - ۲۳) : منحنی های تغییرات عدد ناسلت جریان (متناظر سطح داخلی) در طول حلقوی (ناحیه اول)۷۳
- شکل (۵ - ۲۴) : منحنی های تغییرات عدد ناسلت جریان (متناظر سطح خارجی) در طول حلقوی (ناحیه اول)۷۳
- شکل (۵ - ۲۵) : منحنی های تغییرات عدد ناسلت جریان (متناظر سطح داخلی) در طول حلقوی (ناحیه دوم)۷۴
- شکل (۵ - ۲۶) : منحنی های تغییرات عدد ناسلت جریان (متناظر سطح خارجی) در طول حلقوی (ناحیه دوم)۷۴
- شکل (۵ - ۲۷) : منحنی های تغییرات عدد ناسلت جریان (متناظر سطح داخلی) در طول حلقوی (ناحیه سوم).....۷۵
- شکل (۵ - ۲۸) : منحنی های تغییرات عدد ناسلت جریان (متناظر سطح خارجی) در طول حلقوی (ناحیه سوم).....۷۵
- شکل (۵ - ۲۹) : منحنی های دمای بالک جریان داخلی و خارجی۷۶

فهرست جداول

- جدول (۱ - ۱) : روابط مربوط به ضرایب انتقال حرارت در استوانه های دوار [۲۲] ۹
- جدول (۱ - ۳) : حل شار ثابت حلقوی در شرایط سرعت و دمای کاملا توسعه یافته [۲۸] ۲۹
- جدول (۲ - ۳) : مقادیر ویژه و ثابت های حل گراتز (لوله با دیواره دما ثابت) [۲۸] ۳۱
- جدول (۱ - ۵) : درصد اختلاف مقدار مولفه سرعت محوری در گره های مشترک دو شبکه ۶۲

فهرست علائم

علائم یونانی		سطح مقطع حلقوی	A
ضریب نفوذ حرارتی	α	ضریب گرمایی ویژه	C_p
ضریب انبساط گرمایی	β	قطر هیدرولیکی	D_h
مولفه زاویه ای	θ	قطر داخلی حلقوی	D_i
ویسکوزیته	μ	قطر خارجی حلقوی	D_o
چگالی	ρ	عدد اکرت	Ec
تراکم‌پذیری مصنوعی	τ	نبروهای خارجی	F
ویسکوزیته سینماتیک	ν	طول حلقوی	L
تابع عمومی لزجت	φ	جرم موجود در حجم کنترل	m_{cv}
سرعت زاویه ای	Ω	دبی جرمی	\dot{m}
		عدد ناسلت	Nu
		فشار	p
		عدد پکلت	Pe
		عدد پرائتل	Pr
		فاصله شعاعی	r
		عدد رینولدز	Re
		رینولدز محوری	Re_a
		رینولدز دورانی	Re_r
		زمان	t
		دما	T
		دمای بالک	T_b
		دمای دیواره درونی	T_{inner}
		دمای دیواره بیرونی	T_{outer}
		دمای دیواره درونی	T_{w1}
		دمای دیواره بیرونی	T_{w2}
		سرعت متوسط	U
		سرعت شعاعی	v_r
		سرعت دورانی	v_θ
		سرعت محوری	v_z
		فاصله محوری از ورودی	z

فصل اول :

مقدمه

۱ - ۱ : دیباچه

عملکرد مطلوب بسترهای داغ مورد استفاده در صنایع در شرایط کارکردی، وابسته به عملکرد بهینه و رعایت حداقل توقفات خط تولید است. یکی از پارامترهای مهم عملکردی، حداکثر دمای مجاز یاتاقان یا بلبرینگ موجود در سیستم می باشد. در بسیاری از این سیستمها از جریان آب به عنوان سیال خنک کننده برای کنترل دما استفاده می شود. یک نمونه، رولر های خنک شونده با آب مورد استفاده در ایستگاههای ریخته گری فولاد می باشد. جریان سیال در این رولرها را می توان با جریان توسعه یافته ی درون یک استوانه و سپس جریان در حال توسعه در یک حلقوی با دیواره خارجی در حال دوران مدل کرد. برای این مدل سازی، با یک مساله جریان داخلی سه بعدی روبرو هستیم و معادلات مومنوم و معادله انرژی را در مختصات استوانه ای پیش روی خواهیم داشت.

مسلماً دینامیک و انتقال حرارت جریان های داخلی، به ویژه در هندسه های استوانه ای با شرایط متفاوت، موضوع تحقیقات بسیاری بوده اند. در این فصل به صورت خلاصه به برخی از تحقیقات انجام شده قبلی در این زمینه به صورت تجربی یا عددی، خصوصاً در کانالهای با حرکت دورانی حول محور، همچنین روش های عددی حل معادلات ناویر استوکس در مختصات مختلف اشاره می شود. در فصل سوم برخی از حل های تحلیلی برای شرایط خاص هم معرفی خواهند شد.

۱ - ۲: مروری بر تحقیقات انجام شده پیشین

۱ - ۲ - ۱: روش های حل عددی معادله ناویر استوکس

مطالعات گسترده عددی صورت گرفته با استفاده از معادلات ناویر استوکس، برای حل مسائل جریان را می توان به فراهم شدن امکان عمومی استفاده از کامپیوتر دیجیتال از دهه ۶۰ میلادی نسبت داد. با این حال روش های عددی اولیه به کار برده شده در مورد سیالات لزج تراکم ناپذیر، عمدتاً بر پایه فرمولاسیون دو بعدی تابع جریان - ورتیسیته بودند. این روند در سال ۱۹۶۳ به وسیله فرام^۱ و هارلو^۲ آغاز شد که یک روش تفاضل پیشروی صریح بر پایه فرمولاسیون تابع جریان - ورتیسیته ی مسائل جریان لزج، طراحی کردند [۱]. کاواگوچی^۳ با استفاده از تفاضل مرکزی، یک سری حل عددی برای مساله جریان در حفره مربعی با درپوش متحرک در محدوده رینولدز ۰ تا ۶۴ به دست آورد [۲]. بارگراف^۴ در سال ۱۹۶۶، با تغییر دادن روند تکرار کاواگوچی به حل های همگرا در رینولدزهای بالاتر دست یافت [۳]. ذیب^۵ و همکارانش در ۱۹۸۵، معادله انتقال ورتیسیته را برای جریان های با عدد مارانگونی^۶ بالا در حفره مربعی دوبعدی حل کردند. آنها جریان سیال را برای اعداد پرانتل مختلف و اعداد رینولدز تا ۵۰۰۰۰ مورد بررسی قرار دادند [۴]. بعدها رمنان^۷ و کرپلا^۸ با استفاده از روش چند شبکه ای، جابجایی طبیعی در یک کانال عمودی را مطالعه و بررسی کردند [۵].

محدودیت اصلی فرمولاسیون تابع جریان - ورتیسیته این است که فقط در مختصات دوبعدی قابل استفاده است. برای جریان های سه بعدی تابع جریان به صورت پتانسیل برداری عمومیت داده می شود.

-
- 1- Fromm
 - 2 - Harlow
 - 3 -Kawaguti
 - 4 - Burggraf
 - 5 - Zebib
 - 6 - Marangoni
 - 7 - Ramanan
 - 8 - Korpella

عزیز^۱ و هلامس^۲ در ۱۹۶۷ فرمولاسیون ورتیسیته - پتانسیل برداری سه بعدی را با تبدیل کردن معادلات ناویر استوکس به معادلات ورتیسیته و پتانسیل برداری معرفی کردند. با استفاده از این روش، آنها جوابی برای جابجایی طبیعی سه بعدی در کانال با حل ۳ معادله انتقال ورتیسیته به وسیله روش ای - دی - آی^۳، و حل سه معادله پواسون به وسیله روش های تکرار برای سه مولفه پتانسیل برداری، پیدا کردند [۶]. در ۱۹۷۳ مالینسون^۴ حلی برای جابجایی طبیعی سه بعدی در کانال با استفاده از فرمولاسیون ورتیسیته - پتانسیل جریان و یک روش گذرای مجازی^۵ مشابه روش تراکم پذیری مصنوعی چورین ارائه کرد [۷].

دنیس^۶ و همکارانش در سال ۱۹۷۹ جریان در حفره با درپوش متحرک را با فرموله کردن مساله مساله بر حسب سرعت و ورتیسیته مطالعه کردند و برای مقادیر رینولدز تا ۱۰۰، حل هایی ارائه دادند. در سال ۱۹۸۷ اسوالد^۷ و همکارانش همین مساله را با همین فرمول بندی، با الگوریتم حذفی گاوس، به منظور حل معادلات پواسون برای به دست آوردن مولفه های سرعت، بررسی کردند. همچنین از یک روش ای - دی - آی اصلاح شده برای حل معادلات انتقال ورتیسیته استفاده کردند [۸]. در روش های سرعت و ورتیسیته، همانند روش های ورتیسیته - پتانسیل، نیاز به حل ۶ معادله برای دستیابی به ۶ مجهول است (سه مولفه سرعت و سه مولفه ورتیسیته).

1 - Aziz
2 - Hellums
3 - ADI
4 - Mallinson
5 - False Transient
6 - Dennis
7 - Osswald

۱ - ۲ - ۲ : روش های حل عددی معادلات ناویر استوکس بر حسب متغیرهای اولیه

توسعه روش های عددی بر حسب متغیرهای اولیه^۱ را نیز می توان به بعد از دهه ۶۰ میلادی نسبت داد. کارهای هارلو^۲ و ولش^۳ در سال ۱۹۶۵، پیشگام تحقیقات با استفاده از این روش ها بود که معادله پواسون فشار را برای به دست آوردن فشار بسط داد و بعد از آن برای به دست آوردن میدان سرعت حل نمود [۹]. چورین^۴ در سال ۱۹۶۷ روش تراکم پذیری مصنوعی^۵ را با اضافه کردن کردن یک مشتق زمانی فشار تقسیم بر یک ثابت بزرگ، به معادله پیوستگی تراکم ناپذیر پیشنهاد کرد تا بدین وسیله امکان استفاده از روش های استاندارد تراکم پذیر مهیا شود. با استفاده از این روش، چورین مساله انتقال حرارت جابجایی پایدار سه بعدی در یک لایه مایع که از زیر تحت حرارت است را بررسی نمود [۱۰]. سال بعد چورین یک روش پروجکشن برای حل مساله جابجایی سه بعدی در متغیرهای اولیه پیشنهاد کرد. پاتانکار^۶ و اسپالدینگ^۷، با پذیرفتن برخی مفاهیم پیشنهاد شده در مطالعات یاد شده، یک فرمولاسیون ضمنی بر حسب متغیرهای اولیه پیشنهاد کردند [۱۱]. بابو^۸ و کرپلا^۹، یک روش مستقیم سریع در حوزه های مستطیلی غیر یکنواخت، برای حل معادله پواسون فشار در مختصات کارتیزین، ابداع کردند و سپس سرعت و دما را بر حسب متغیرهای اولیه در حفره مکعبی محاسبه نمودند [۱۲].

مزیت فرمولاسیون متغیرهای اولیه، سر راست بودن آن و این واقعیت است که تنها به محاسبه چهار متغیر نیاز است (سه مولفه سرعت و فشار). با این حال مشکل عمده در این فرمولاسیون، همگرایی ضعیف مساله نیومن در معادله پواسون فشار است. برایلی^{۱۰} دلیل این مشکل را تشخیص داد؛ ممکن است میدان فشار به صورت گسسته سازی شده، شرط اضافی انتگرال کلی از قضیه گرین

1- primitive variables

2 - Harlow

3 - Welch

4 - Chorin

5 - Artificial Compressibility

6 - Patankar

7 - Spalding

8 - Babu

9 - Korpela

10 - Briley

را برآورده نکند. وی چاره ای برای این مشکل به صورت اضافه کردن یک ترم به ترم اصلی معادله پواسون در همه نقاط شبکه، به طوری که شرط قابل حل بودن را در شکل گسسته سازی شده ارضا کند، پیشنهاد کرد [۱۳].

روش های حل برای معادلات ناویر استوکس تراکم ناپذیر، که بر پایه شبکه های سنتی غیر جابجا شده هستند و تمام متغیرها در مرکز سلول تعریف می شوند، ممکن است نوسانات نادرستی در میدان فشار ایجاد کنند. یکی از دلایل اصلی این است که یک گسسته سازی سراسر معادله پیوستگی، پایستگی جرم در سلول را اجبار نمی کند و باعث از بین رفتن پیوستگی میدان فشار در شبکه های مجاور می شود. برای جلوگیری از این امر، ژانگ^۱ و استریت^۲ یک روش عددی در شبکه غیر جابجا شده با تعریف شار حجمی در وجه متناظر سلول، اضافه شده به مولفه های سرعت در مرکز سلول، ابداع کردند [۱۴].

بیشتر مطالعات عددی معادلات ناویر استوکس تراکم ناپذیر، در مختصات کارتیزین بوده اند. در مختصات استوانه ای سه بعدی، شرط های مرزی پرپدیوک، ساختار ساده ماتریس را با دو المان اضافی در گوشه ها به هم می ریزند. استریکورد^۳ و ناگل^۴ سیلندرهای حاوی سیال، تحت حرکت دورانی یا مخروطی را با حل معادلات ناویر استوکس تراکم ناپذیر سه بعدی و معادله پیوستگی (به جای تبدیل شده آن به معادله فشار) در دستگاه مختصات استوانه ای، مورد تحقیق قرار دادند. آنها تقریب های تفاضل محدود را برای مشتقات شعاعی و محوری به کار بردند اما برای جهت زاویه ای از سری های فوریه استفاده کردند [۱۵].

در سال های اخیر روش های پروجکشن بر پایه روش تجزیه هاج^۵، پرترفدار شده اند. این روش ابتدا توسط چورین برای تفاضل محدود توصیف شد؛ به این صورت که ابتدا میدان سرعت از معادلات مومنوم بدون توجه به ترم فشار تخمین زده می شود. سپس برای اینکه شرط دیورژانس صفر برای

1 - Zang
2- Street
3 - Strikwerda
4 - Nagel
5 - Hodge

سیال تراکم ناپذیر ارضا شود، از این تخمین برای حل معادله پواسون و به دست آوردن فشار در همان مرتبه زمانی استفاده می شود. شرط مرزی نیومن همگن برای فشار مورد استفاده قرار گرفت. این روش از مرتبه اول دقت در زمان است. به خاطر ماهیت ضمنی این روش، شرایط مرزی برای فشار باعث فقدان دقت در حل نهایی می شود [۱۶]. فرتین^۱ و همکارانش این مشکل عدم دقت را با استفاده از یک روش صریح حل کردند.

گدا^۲ در قالب المان محدود با به حساب آوردن گرادیان فشار از مرحله قبلی زمانی در محاسبه میدان سرعت تخمینی، بهبودی در روش ایجاد کرد. متعاقباً مرحله پروجکشن با حل معادله پواسون برای به دست آوردن یک متغیر واسطه که در واقع اختلاف فشار بین مرحله جاری و مرحله قبل از آن است، انجام می شد [۱۷]. این روش بهبود یافته بعدها در قالب تفاضل محدود و با استفاده از روش کرانک - نیکلسون برای گسسته سازی زمان توسط ون کان^۳ مورد استفاده قرار گرفت.

۱ - ۲ - ۳ : انتقال حرارت در داخل استوانه های افقی

۱ - ۲ - ۳ - ۱ : ضریب انتقال حرارت در داخل استوانه های افقی ثابت

محققان زیادی در مورد انتقال حرارت جابجایی در استوانه های افقی مطالعه کرده اند. در مورد استوانه ثابت با جریان محوری روابط متعددی مطرح شده است. از جمله رابطه دیتوس و بولتر^۴ برای لوله های دراز و با قطر کم و پرانتل بین ۰٫۷ تا ۱۲۰ و رینولدز محوری بین ۱۰۰۰۰ تا ۱۲۰۰۰۰، ([۱۸] و [۱۹]) :

$$Nu = 0.023Pr^{0.4}Re_a^{0.8} \quad (1-1)$$

1 - Fortin
 2 - Goda
 3 - Van Kan
 4 - Dittus & Boelter

رابطه کلبورن^۱ برای $L/D > 60$ و پرانتل بین ۰,۷ تا ۱۰۰ و رینولدز محوری بین ۱۰۰۰۰ تا ۱۲۰۰۰۰، [۲۰] :

$$Nu = 0.023Pr^{1/3}Re_a^{0.8} \quad (۲-۱)$$

رابطه مک آدامز^۲ برای $2 < L/D < 20$ و پرانتل بین ۰,۷ تا ۱۰۰ و رینولدز محوری بین ۱۰۰۰۰ تا ۱۲۰۰۰۰، [۲۱] :

$$Nu = 0.023Pr^{1/3}Re_a^{0.8}[1 + (D/L)^{0.7}] \quad (۳-۱)$$

و روابط متعدد دیگری که در مراجع مختلف به آنها اشاره شده است.

۱-۲-۳ : جریان و انتقال حرارت در لوله های دوار

جریان و انتقال حرارت در لوله های دوار بدون جریان محوری توسط افراد زیادی مورد تحقیق قرار گرفته است و تاثیر دوران بر انتقال حرارت بررسی شده است. بسیاری از محققان به این نتیجه رسیده اند که برای سرعت های دورانی پایین، دوران اثر قابل توجهی بر ضریب انتقال حرارت ندارد؛ با این حال در سرعت های دورانی بالا، جابجایی اجباری ناشی از دوران موثر می شود و عدد ناسلت متوسط اغلب به صورت روابطی به صورت $Nu = aRe_r^b$ پیشنهاد می شود. برخی روابط مربوط به ضرایب انتقال حرارت در استوانه های دوار در جدول ۱-۱ ذکر شده اند.

1 - Colburn
2 - McAdams

جدول ۱ - ۱ : روابط مربوط به ضرایب انتقال حرارت در استوانه های دوار [۲۲]

<i>author</i>	<i>Validity criteria</i>	<i>Correlation</i>
Anderson & Saunders	$Re > 1.09 Gr^{0.5}$	$Nu = 0.1Re^{0.66}$
Etemad	$8000 < Re < 65400$	$Nu = 0.076Re^{0.7}$
Kays & Bjorklund	$600 < Re < 50000$	$Nu = 0.095Re^{0.66}$
Becker	$800 < Re < 10^5$	$Nu = 0.133(Re)^{2/3}(Pr)^{1/3}$
Kendoush	$1000 < Re < 10000$	$Nu = 0.6366(RePr)^{0.5}$
Ozerdem	$2000 < Re < 40000$	$Nu = 0.3186Re^{0.571}$
Shimada et al.	$300 < Re < 3000$	$Nu = 0.046[Re^2 + 8Gr]^{0.35}$

۱ - ۲ - ۴ : جریان سیال و انتقال حرارت در یک استوانه ی دوار با جریان هوای ورودی

وقتی جریان سیال وارد یک استوانه ی در حال گردش می شود نیروهای مماسی بین سیال و دیواره ی در حال گردش باعث ایجاد جریاناتی می شوند که خصوصیات متفاوتی نسبت به جریان در لوله ی ثابت دارند. پدلی^۱ از اولین کسانی بود که روی ناپایدار شدن جریان هاگن - پوزولی تحت دوران دیواره بحث کرد. تحقیقات او به وسیله ی تحقیقات آزمایشگاهی دیگران نیز تأیید شد. ماکروت^۲ با استفاده از حل های عددی مقادیر بحرانی جریاناتی که در حال ناپایدار شدن هستند را پیشنهاد کرد [۲۲].

افراد دیگری در مورد جریان مغشوش ورودی به کانالهای دوار تحقیق کردند. تحقیقات افرادی چون لوی^۳، وایت^۴، شوخین^۵، بوریسنکو^۶، موکارامی^۷ بیانگر این بود که وقتی جریان به صورت مغشوش وارد استوانه ی در حال گردش می شود، این گردش، موج زدن و بی ثباتی ناشی از

1 - Pedley
2 - Mackrodt
3 - Levy
4 - White
5- Shchukhin
6 - Borisenko
7 - Mukarami

توربولانس را تعدیل می کند و این تعدیل و کاهش، با افزایش سرعت دوران بیشتر می شود. در واقع دوران شکل جریان را به سمت جریان آرام می برد.

اما در مورد انتقال حرارت در استوانه های دوار همراه با جریان محوری کارهای محدودی انجام شده است. برخی از تحقیقات نشان داد که دوران اثر ناپایدار کننده روی جریان آرام دارد که آن را به سمت اغتشاش می برد و موجب افزایش ضریب انتقال حرارت جابجایی می شود. همچنین تحقیقات بعدی نشان داد که در صورتی که جریان به صورت مغشوش وارد شود، دوران انتقال حرارت را کم می کند.

با وجود این با مطالعه نتیجه تحقیقات صورت گرفته، ملاحظه می گردد که این نتایج تنها قلمرو محدودی از مسایل را تحت پوشش قرار می دهند و در ارائه روابطی که عدد ناسلت جریان را به مقادیر رینولدز محوری و رینولدز دورانی مربوط کنند، ناتوانند.

۱ - ۲ - ۵ : جریان و انتقال حرارت بین دو استوانه ی دارای حرکت دورانی نسبت به یکدیگر

جریان و انتقال حرارت در سیالات بین دو استوانه ی هم مرکز که یکی یا هر دو دارای حرکت دورانی حول محور استوانه ها هستند، همراه با تغذیه سیال عمود بر سطح مقطع استوانه ها، که رژیمی مرکب از حرکت های محوری و دورانی سیال را به وجود می آورد، از بعد علمی و فنی دارای اهمیت بسیاری است. جریانهایی به این صورت در بسیاری از سیستم های مکانیکی مانند یاتاقان ها، موتورهای الکتریکی با تهویه محوری (جریان هوا بین روتور و استاتور)، مبدل های حرارتی دوار، مته های چاه های نفت و ... کاربرد دارند.

بیشتر تحقیقات صورت گرفته در مورد ترکیب جریان های محوری و دورانی در فضای بین دو استوانه، مربوط به سی سال اخیر است. یکی از اولین تحقیقات گسترده صورت گرفته توسط گزلی^۱ انجام شده است. ماشین مورد استفاده وی یک موتور الکتریکی اصلاح شده و سیال مورد آزمایش هوا

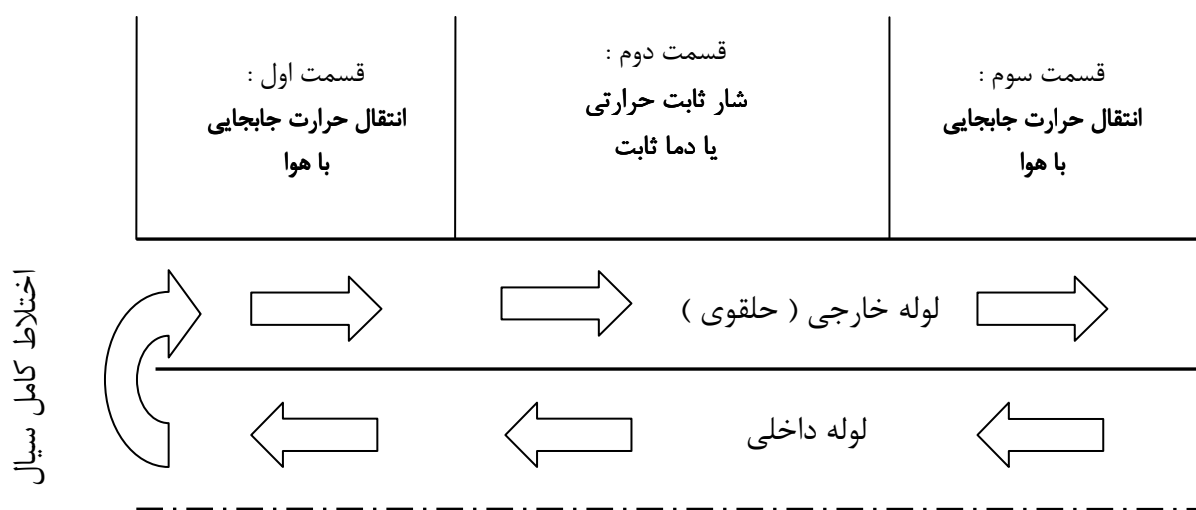
1 - Gazley

بود. کی^۱ و الگار^۲ تاثیر جریان محوری بر یک سیستم تیلور - کوئت با شرایط دما ثابت را به صورت آزمایشگاهی بررسی کردند که در آن فقط استوانه داخلی دارای دوران بود. نتایج آنها به طور خاص حاکی از وجود چهار رژیم جریانی مختلف بسته به عدد رینولدز محوری ورودی (که خود وابسته به اندازه گپ بین دو استوانه و دبی جریان ورودی است) و مقدار عدد تیلور بود: جریان های آرام یا مغشوش، با یا بدون گردابه های تیلور [۲۳]. بکر^۳ و کی برای حلقوی بین استوانه داخلی دوار و تحت شار حرارتی و استوانه خارجی با دمای کمتر، برای رنج وسیعی از سرعت های دورانی و دبی محوری، به اندازه گیری تغییرات دما پرداختند. آنها همچنین نمودارهای اعداد ناسلت را بر حسب عدد تیلور ارائه کردند. عدد تیلور به صورت $Ta = \frac{\rho^2 \Omega^2 [(R_o + R_i)/2] (R_o - R_i)^3}{\mu^2}$ تعریف می شود. نتایج آنها نشان داد که اعداد ناسلت تا رسیدن عدد تیلور به یک مقدار بحرانی و ظاهر شدن گردابه های تیلور، نسبت به تغییرات عدد تیلور تغییر چندانی ندارند [۲۴]. کوزای^۴ و اسکات به صورت آزمایشگاهی جریان مغشوش هوا بین استوانه داخلی عایق و استوانه خارجی تحت شار حرارتی را مورد مطالعه قرار دادند. آنها روابطی برای اعداد ناسلت بر حسب یک پارامتر فیزیکی جدید که پارامتر چرخش (N) نامیده شد، بنا نهادند [۲۵]. این پارامتر اثر جریان های محوری و چرخشی را ترکیب می کند. این پارامتر به صورت نسبت سرعت خطی دوران استوانه داخلی (ωR_i) به سرعت متوسط جریان محوری تعریف می شود. لی^۵ و مینکوویچ^۶ اثر نسبت اندازه گپ بین دو استوانه، به تفاضل شعاع های داخلی و خارجی را بر جریان بررسی کردند و نشان دادند که با افزایش این نسبت انتقال حرارت افزایش می یابد [۲۶].

1 - Kaye
2 - Elgar
3 - Becker
4 - Kuzay
3 - Scott
5 - Lee
6 - Mynkowycz

۱ - ۳ : معرفی مساله و اهداف تحقیق حاضر

در این تحقیق جریان آب درون حلقوی دوار و انتقال گرما از سطح حلقوی به آب درون آن که دارای حرکت محوری توام با چرخش می باشد، به صورت عددی مدل سازی شده و اثر پارامترهای مختلف بر جریان آرام داخلی، پروفیل های سرعت و دما و نرخ انتقال حرارت جابجایی بررسی می گردد. ضمناً آب قبل از ورود به حلقوی به صورت توسعه یافته هیدرودینامیکی وارد استوانه داخلی شده و در انتهای استوانه داخلی وارد حلقوی می شود. مساله حالت پایدار در نظر گرفته شده و با توجه به اینکه دمای سطح استوانه داخلی که تابع فاصله محوری است در ابتدا مجهول است، معادلات انرژی در استوانه داخلی و فضای حلقوی بین دو استوانه به صورت پیوسته به هم حل می شود. دیواره استوانه داخلی و خارجی نازک فرض می شود و از انتقال حرارت در راستای محوری در دیواره استوانه ها صرف نظر می شود. در شکل ۱ - ۱ هندسه جریان و شرایط مرزی به صورت شماتیک نشان داده شده است :



شکل ۱ - ۱ : هندسه جریان و شرایط مرزی

همچنین یک روش حل تحلیلی برای مساله یاد شده، برای ناحیه (توسعه یافته هیدرودینامیکی - در حال توسعه دمایی) جریان در حلقوی، ارائه می شود.

اهداف این تحقیق عبارت اند از : ۱ - محاسبه میزان گرمای منتقل شده به آب. ۲ - محاسبه دمای آب خروجی از سیستم. ۳ - تعیین اثر سرعت چرخشی رولر بر دمای آب. ۴ - محاسبه حداکثر شار حرارتی قابل اعمال در ناحیه شار حرارتی ثابت (با رعایت محدودیت حداکثر دما)

فصل دوم :

معادلات حاکم

۲ - ۱ : انتقال حرارت جابجایی

انتقال حرارت جابجایی و یا به زبان ساده تر همرفت، عبارت است از مطالعه فرآیند انتقال حرارت تحت تاثیر جریان سیال. پیشرفت انتقال حرارت همرفت در سال های اخیر به خاطر تمایل دانشمندان به فهم و پیش بینی این نکته بوده است که چگونه یک سیال به عنوان حمل کننده یا نوار نقاله برای انرژی و ماده عمل می کند.

انتقال گرمای جابجایی مشخصاً علمی در فصل مشترک دو حوزه قدیمی تر است : انتقال گرما و مکانیک سیالات. به همین علت مطالعه هرگونه مساله انتقال گرمای همرفت باید بر اساس فهم کامل اصول اولیه انتقال حرارت و مکانیک سیالات انجام گیرد.

قبل از مرور اصول اولیه انتقال حرارت جابجایی، بازنگری مجدد رابطه تاریخی انتقال حرارت و مکانیک سیالات در فصل مشترک آنها که ما همرفت می خوانیم، ارزشمند است. دو حوزه انتقال حرارت و مکانیک سیالات، به ویژه در صد سال گذشته، یک رابطه همزیستی را تجربه کرده اند. مثال های این همزیستی را می توان به فراوانی در تاریخچه تئوری لایه مرزی و جابجایی طبیعی پیدا کرد.

۲ - ۲ : قانون پایستگی جرم

اولین اصلی که مورد بررسی قرار می دهیم بدون شک قدیمی ترین آن ها است . پایستگی جرم در یک سامانه بسته یا پیوستگی جرم در یک حجم کنترل. از ترمودینامیک به یاد می آوریم که قانون پایستگی جرم برای یک حجم کنترل به صورت زیر نوشته می شود [۲۷] :

$$\frac{\partial M_{cv}}{\partial t} = \sum_{\text{ورودی}} \dot{m} - \sum_{\text{خروجی}} \dot{m} \quad (۱ - ۲)$$

که در آن M_{cv} جرم موجود در حجم کنترل در هر لحظه و \dot{m} دبی جرمی در ورودی ها و خروجی های حجم کنترل است. اگر رابطه کلی بالا را باز کرده و برای یک المان کوچک در میدان جریان بنویسیم نهایتاً معادله برداری زیر را خواهیم داشت :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot V = 0 \quad (2-2)$$

$\frac{D}{Dt}$ اپراتور مشتق اساسی است که به دفعات در انتقال حرارت مورد استفاده قرار می گیرد. برای سیالات تراکم ناپذیر رابطه پایستگی جرم به شکل زیر در می آید :

$$\nabla \cdot V = 0 \quad (3-2)$$

که در مختصات استوانه ای که مورد استفاده ما می باشد، به صورت ذیل در می آید :

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (4-2)$$

هرگاه جریان متقارن محوری باشد (که در مساله ما نیز چنین است)، چون $\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0$ ، خواهیم داشت :

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (5-2)$$

۲-۳ : معادلات اندازه حرکت

برای تعادل نیروها در حجم کنترل، در یک لحظه خاص باید رابطه زیر برقرار باشد :

$$\frac{\partial}{\partial t} (Mv_n)_{cv} = \sum F_n + \sum_{\text{ورودی}} \dot{m} v_n - \sum_{\text{خروجی}} \dot{m} v_n \quad (6-2)$$

که در آن n جهتی است که تحلیل در آن جهت انجام می شود و v_n و F_n مؤلفه های سرعت و نیروهای سیال در راستای n هستند . رابطه ۲-۶ به عنوان اصل اندازه حرکت (مومنتوم) و یا تئوری اندازه حرکت شناخته می شود . اساساً این رابطه فرمول بندی قانون دوم نیوتن برای حجم کنترل است که در آن علاوه بر عبارت های مربوط به نیرو و جرم \times شتاب ، اثر مربوط به ورود شار اندازه حرکت به داخل حجم کنترل و واکنش مربوط به خروج شار اندازه حرکت از حجم کنترل نیز

در نظر گرفته شده اند. اگر رابطه کلی بالا را باز کرده و برای یک المان کوچک در میدان جریان

بنویسیم پس از یک سری عملیات نهایتاً معادله برداری زیر را خواهیم داشت [۲۷] :

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + \mathbf{F} \quad (۷-۲)$$

که در آن \mathbf{F} بردار نیروی حجمی در واحد حجم و \mathbf{V} بردار سرعت است. رابطه بالا را برای مختصات

استوانه ای به صورت ذیل خواهیم داشت :

$$(۸-۲)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \\ = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left\{ \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right\} + F_r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \\ = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left\{ \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right\} + F_\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\ = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left\{ \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right\} + F_z \end{aligned}$$

برای جریان متقارن محوری و پایدار، بدون نیروهای حجمی، معادلات ۲ - ۸ را به صورت زیر

خواهیم داشت :

$$(۹-۲)$$

$$\rho \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left\{ \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right\}$$

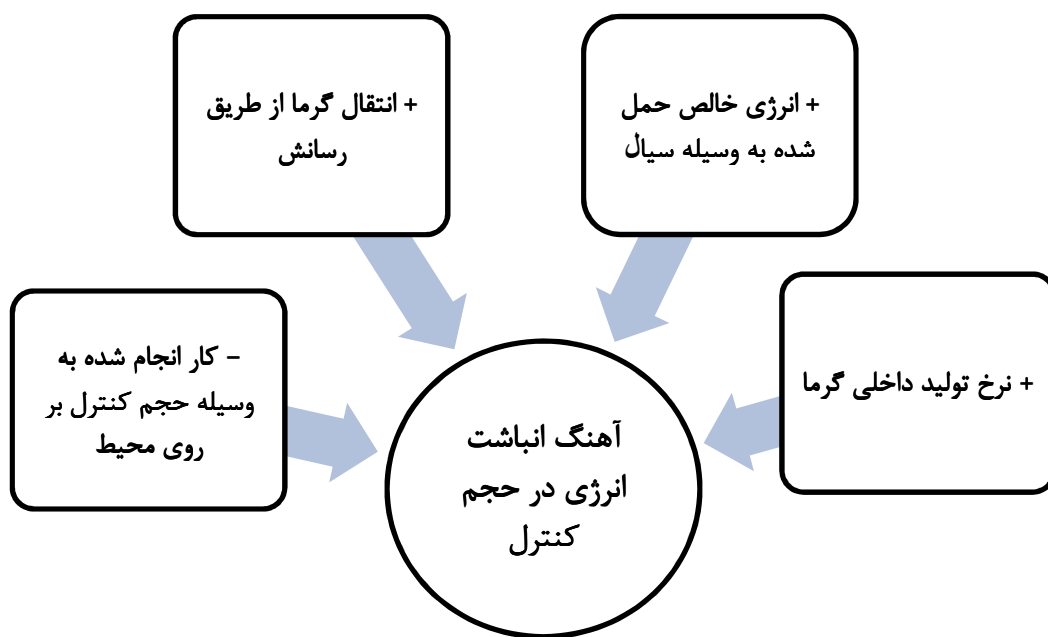
$$\rho \left(v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) = \mu \left\{ \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right\}$$

$$\rho \left(v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left\{ \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right\}$$

۲ - ۴ : قانون اول ترمودینامیک

دو اصلی که پیشتر به آنها اشاره شد (قانون پایستگی جرم وموازنه نیروها) در بیشتر مواقع برای حل قسمت مربوط به جریان در مسائل جابجایی کافی هستند. در این مرحله چهار معادله (معادله پایستگی جرم به علاوه سه معادله موازنه نیروها) برای تعیین چهار مجهول (سه مولفه بردار سرعت به علاوه فشار) وجود دارند. فقط مسائلی که جریان طبیعی (جابجایی آزاد) نیز در آنها دخیل است از این قاعده مستثنی هستند. البته در مورد تمام مسائل جابجایی قسمت مربوط به انتقال گرما به حل توزیع دما در جریان سیال نیاز دارد؛ به ویژه در مناطق نزدیک به سطح جسم جامدی که در معرض شار سیال حامل گرما است. معادله اضافی که برای این منظور مورد نیاز است، قانون اول ترمودینامیک یا معادله انرژی می باشد.

قانون اول ترمودینامیک را به صورت شکل ۲ - ۲ می توان نشان داد :



شکل (۲ - ۲) : قانون اول ترمودینامیک برای حجم کنترل

قانون اول ترمودینامیک بر حسب دما به شکل زیر به دست می آید [۲۷] :

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + q''' + \beta T \frac{DP}{Dt} + \mu \Phi \quad (۱۰-۲)$$

Φ تابع اتلاف لزجت و β ضریب انبساط گرمایی است ($\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P$) که برای مایع تراکم

ناپذیر ($\beta = 0$)، اگر تولید گرمای داخلی نداشته باشیم ($q''' = 0$)، معادله انرژی برای سیال

تراکم ناپذیر به صورت زیر خواهد بود :

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \mu \Phi \quad (۱۱-۲)$$

معادله ۱۱-۲ را در مختصات استوانه ای به صورت زیر خواهیم داشت:

$$(۱۲-۲)$$

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k \left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \mu \Phi$$

و تابع عمومی لزجت :

$$(۱۳-۲)$$

$$\begin{aligned} \Phi = 2 & \left[\left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right]^2 \\ & + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right]^2 + \left[\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right]^2 - (2/3)(\nabla \cdot V)^2 \end{aligned}$$

اگر چگالی تغییر قابل ملاحظه ای در میدان جریان نداشته باشد، آنگاه $\nabla \cdot V = 0$ و آخرین

عبارت سمت راست در معادلات ۱۳-۲ حذف می شود و خواهیم داشت :

$$(۱۴-۲)$$

$$\begin{aligned} \Phi = 2 & \left[\left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right]^2 \\ & + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right]^2 + \left[\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right]^2 \end{aligned}$$

که بدیهی است برای سیالات تراکم ناپذیر معادله ۲ - ۱۴ قابل استفاده می باشد.

فصل سوم :

مروری بر نتایج موجود حل های تحلیلی قبلی و حل بخشی از مسأله به روش تحلیلی

۱ - ۳ : معادلات دیفرانسیل انرژی برای جریان درون کانالهای مدور متقارن

در فصل دوم معادله انرژی برای سیال تراکم ناپذیر با خواص ثابت در مختصات استوانه ای با

معادلات ۲ - ۱۲ و ۲ - ۱۴ معرفی شد. همان معادله به صورت مرتب شده به صورت زیر است :

(۱ - ۳)

$$\rho c_p \left[\frac{\partial T}{\partial t} + (V \cdot \nabla) T \right] = k \nabla^2 T + \mu [2(\epsilon_{rr}^2 + \epsilon_{\theta\theta}^2 + \epsilon_{zz}^2) + \epsilon_{\theta z}^2 + \epsilon_{rz}^2 + \epsilon_{r\theta}^2]$$

$$\epsilon_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r}$$

$$\epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\epsilon_{\theta z} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z}$$

$$\epsilon_{rz} = \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}$$

$$\epsilon_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}$$

برای جریان پایدار متقارن محوری و با صرف نظر از ترم های تلفات، معادله انرژی را به صورت زیر

خواهیم داشت :

$$\frac{1}{\alpha} \left[u \frac{\partial T}{\partial r} + v \frac{\partial T}{\partial z} \right] = \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (۲ - ۳)$$

$$u = v_r \quad , \quad v = v_z$$

۳ - ۲ : انتقال گرما در جریان توسعه یافته

در ناحیه توسعه یافته هیدرودینامیکی $v_r = 0, v_z = v_z(r)$ ، پس :

$$\frac{1}{\alpha} [v_z(r) \frac{\partial T}{\partial z}] = \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (۳ - ۳)$$

قبل از اینکه بیشتر به این معادله پردازیم باید توجه داشته باشیم که مساله کلیدی در انتقال گرما در کانال، به نحوه ارتباط بین اختلاف دمای دیواره - جریان و نرخ انتقال گرمای دیواره - جریان (یا تغییرات طولی دمای جریان) خلاصه می شود. بدون از دست دادن کلیت حل یک لوله به شعاع r_0 در نظر می گیریم که سیالی با سرعت متوسط محوری U وارد آن می شود. از ترمودینامیک مهندسی می دانیم که کل گرمای منتقل شده از دیواره به سیال $(q'' 2\pi r_0 dz)$ در افزایش انتالپی منعکس می شود. از قانون اول ترمودینامیک برای حجم کنترلی به طول Z خواهیم داشت :

$$q'' 2\pi r_0 dz = \dot{m}(h_{z+dz} - h_z) \quad (۴ - ۳)$$

با فرض سیال به عنوان گاز کامل $(dh = c_p dT_m)$ یا سیال تراکم ناپذیر با تغییرات فشار ناچیز، از رابطه بالا خواهیم داشت :

$$\frac{dT_m}{dz} = \frac{2}{r_0} \frac{q''}{\rho c_p U} \quad (۵ - ۳)$$

T_m دمای بالک یا دمای توده ای یا دمای متوسط سیال نامیده می شود. مطمئناً باید رابطه ای بین

دما در هر نقطه سطح مقطع $T(x,r)$ و دمای متوسط سیال وجود داشته باشد. قانون اول

ترمودینامیک را دوباره می نویسیم :

$$q'' \cdot 2\pi r_0 dz = d \iint \rho u c_p T dA \quad (۶ - ۳)$$

از ترکیب ۳ - ۵ و ۳ - ۶ رابطه ای برای محاسبه T_m به دست می آوریم

$$T_m \rho c_p U A = \iint \rho u c_p T dA \quad (۷-۳)$$

اگر خواص سیال ثابت باشند، رابطه بالا به صورت زیر درمی آید:

$$T_m = \frac{1}{\pi r_0^2 U} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} u T r dr d\theta \quad (۸-۳)$$

حال می خواهیم رابطه ای بین q'' و اختلاف دمای دیواره - سیال به دست آوریم. به صورت

قراردادی مقدار $\Delta T = T_0 - T_m$ را به عنوان اختلاف دمای دیواره - سیال در نظر می گیریم.

بنابر این برای ضریب انتقال گرما داریم:

$$h = \frac{q''}{T_0 - T_m} = \frac{k \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=r_0}}{T_0 - T_m} \quad (۹-۳)$$

حال به رابطه ۳ - ۳ باز می گردیم. رابطه ۳ - ۳ تعادلی بین مقدار بیشینه سه عامل ممکنه نشان

می دهد: همرفت طولی، رسانش شعاعی و رسانش طولی. مقیاس های این سه عامل عبارت اند از:

<u>جابجایی</u>	<u>هدایت</u>	
	شعاعی	طولی
$\frac{U}{\alpha} \left(\frac{q''}{D \rho c_p U} \right)$	$\frac{\Delta T}{D^2}$	$\frac{1}{z} \frac{q''}{D \rho c_p U}$

که در آن از رابطه ۳ - ۵ برای به دست آوردن تشابه $\frac{\partial T}{\partial z} \sim \frac{q''}{D \rho (cp) U}$ استفاده شده است. از

میان سه عامل فوق رسانش شعاعی همیشه حاضر خواهد بود زیرا بدون آن انتقال گرمایی در لوله

وجود نخواهد داشت. با ضرب کردن مقیاس ها در $\frac{D^2}{\Delta T}$ و استفاده از تعریف ضریب انتقال گرما

$$h = \frac{q''}{\Delta T}$$

خواهیم داشت:

<u>جابجایی</u>	<u>هدایت</u>	
	شعاعی	طولی
$\frac{hD}{k}$	1	$\left(\frac{hD}{k} \right)^2 \left(\frac{\alpha}{UD} \right)^2$

از مقایسه مقیاس رسانش طولی با مقیاس جابجایی نتیجه می گیریم که برای اعداد پکلت بزرگ $Pe = \frac{UD}{\alpha} \gg 1$ ، رسانش طولی قابل چشم پوشی است. سپس از تعادل بین همرفت و رسانش شعاعی نتیجه می گیریم که عدد ناسلت، ثابتی از مرتبه ۱ است. این مقیاس برای عدد ناسلت به وسیله حل های دقیقتر هم تایید شده است. در این گستره پکلت ($Pe \gg 1$) معادله انرژی به صورت زیر در می آید :

$$\frac{1}{\alpha} \left[u(r) \frac{\partial T}{\partial z} \right] = \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (3 - 10)$$

نکته قابل ذکر این است که فرض ما مبنی بر برابر بودن مقیاس $\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}$ با مقیاس $\frac{D^2}{\Delta T}$ در

ناحیه ورودی گرمایی در دهانه کانال صحیح نیست. چون در این ناحیه مقیاس $\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}$ برابر با $\frac{\Delta T}{\delta_T^2}$ است. ($\delta_T \ll D$).

۳ - ۳ : لوله دایروی با پروفیل های کاملاً توسعه یافته سرعت و درجه حرارت

تجسم یک پروفیل دمایی توسعه یافته دور از مدخل لوله تا حدی دشوارتر از پروفیل سرعت توسعه یافته است. با این حال تحت شرایط معدودی می توان امکان وجود یک پروفیل بی بعد دمایی که در طول لوله بدون تغییر می ماند را بررسی کرد. اکثر مولفین معیار توسعه یافتگی دمایی را به صورت زیر تعریف کرده اند :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{T - T_0}{T_m - T_0} \right) = 0 \quad (3 - 11)$$

با استفاده از این رابطه می توان معادله ۳ - ۱۰ را برای جریان در لوله برای برخی شرایط مرزی مانند دیواره با دمای یکنواخت یا شار حرارتی یکنواخت در دیواره، به صورت یک معادله دیفرانسیل معمولی مستقیماً نسبت به r انتگرال گیری و حل نمود. این حل ها پیچیدگی چندانی ندارد و در مراجع مختلف بیان شده است. با استفاده از این حل ها مقدار ناسلت برای جریان کاملاً توسعه یافته

در لوله با شرط شار حرارتی ثابت در دیواره برابر ۴,۳۶۴ و برای شرط دمای یکنواخت در دیواره ۳,۶۵۷ به دست می آید.

۳-۴ : معرفی چند مورد از حل های تحلیلی موجود برای برخی شرایط خاص

محققین مختلف در گذشته برای برخی شرایط خاص یا برای برخی کاربردهای خاص روش ها و حل هایی برای مساله انتقال حرارت متقارن محوری پیشنهاد کرده اند که مروری بر برخی از آنها در اینجا مفید به نظر می رسد.

۳-۴-۱ : اثر تغییرات شار حرارتی روی محیط

در بعضی موارد توزیع شار حرارتی در محیط لوله ممکن است به صورت غیر یکنواخت باشد (مثلا تعدادی لوله که از یک سو در معرض شار حرارتی تشعشعی باشند)، که در این صورت منجر به (hot spots) روی سطح لوله می شود. اگر دیواره لوله ضخیم و به اندازه کافی هادی باشد، هدایت پیرامونی این مشکل را حل می کند اما برای لوله های جدار نازک مشکل جدی تر است. مساله جریان آرام در لوله با شرایط توسعه یافته شار ثابت در جهت محوری و شار متغیر دلخواه در پیرامون، توسط رینولدز بررسی شد. معادله متناظر به صورت زیر است :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = \frac{u}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{u}{\alpha} \frac{dT_m}{dz} \quad (3-12)$$

یک مورد نمونه، تغییرات شار حرارتی به صورت کسینوسی است (با توجه به اینکه بسیاری از مسائل حرارتی غیر یکنواخت حداقل با تغییرات کسینوسی قابل تخمین هستند) [۲۸]. برای مثال اگر $q''(\theta) = q_a(1 + b \cos(\theta))$ ، عدد ناسلت محلی خواهد بود :

$$Nu(\theta) = \frac{1+b \cos(\theta)}{\frac{11}{48} + \frac{1}{2}b \cos(\theta)} \quad (3-13)$$

۳- ۴- ۲ : حلقوی با پروفیل سرعت و درجه حرارت کاملا توسعه یافته و گرمایش غیرمتقارن

انتقال حرارت در حلقوی یک مساله قابل توجه است و از لحاظ فنی نیز به لحاظ اینکه هردو سطح به صورت مستقل از هم می توانند تحت شرایط حرارتی مختلف قرار گیرند، دارای اهمیت است. اگر بررسی خود را محدود به نواحی دور از ورودی کنیم، دوباره مثل لوله شرایط حرارتی خاصی وجود دارد که مهمتر هستند زیرا می توانند باعث ایجاد پروفیل های دمایی توسعه یافته بشوند (نرخ حرارت ثابت در واحد طول اما شار مستقلا تعریف شده برای سطوح داخلی و خارجی و همچنین دمایی ثابت اما مستقلا تعریف شده برای دو سطح). مسائل با این شرایط به صورت کامل حل شده اما ما در اینجا فقط مساله نرخ حرارت ثابت را بررسی می کنیم.

معادله انرژی برای نرخ ثابت انتقال حرارت محوری همانند لوله دایروی به صورت ذیل است :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{v_z}{\alpha} \left(\frac{dT_m}{dz} \right) \quad (3-14)$$

ابتدا سرعت باید جایگذاری شود که به صورت زیر به دست می آید :

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right\} \quad (3-15)$$

$$\rightarrow u = \frac{\partial p}{\mu} \left(\frac{r^2}{4} \right) + C \ln(r) + D \quad (3-16)$$

$$C = \frac{\frac{\partial p}{\partial z} (D_i^2 - D_o^2)}{16\mu \ln\left(\frac{D_o}{D_i}\right)} \quad (3-17)$$

$$D = \frac{-\frac{\partial p}{\partial z}}{16\mu} D_i^2 - \ln\left(\frac{D_i}{2}\right) \left(\frac{M(D_i^2 - D_o^2)}{16\mu \ln\left(\frac{D_o}{D_i}\right)} \right)$$

اگر $r^* = \frac{r_i}{r_o}$ و V را سرعت متوسط در نظر بگیریم :

$$\frac{u}{V} = \frac{2}{M} \left[1 - \left(\frac{r}{r_o}\right)^2 + B \ln \left(\frac{r}{r_o}\right) \right] \quad (3 - 18)$$

$$B = \frac{r^{*2} - 1}{\ln(r^*)} \quad ; \quad M = 1 + r^{*2} - B$$

با جایگذاری پروفیل سرعت در معادله انرژی خواهیم داشت :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{2V}{\alpha M} \left[1 - \left(\frac{r}{r_o}\right)^2 + B \ln \left(\frac{r}{r_o}\right) \right] = \frac{dT_m}{dx} \quad (3 - 19)$$

مانند مورد لوله دایروی این معادله مستقیماً قابل انتگرال گیری است. شار حرارتی در هر یک از دو دیواره، گرادین دما در آن سطح را مشخص می کند که این شرایط مرزی لازم را فراهم می کند. با این وجود نیازی به حل معادله برای هر کاربرد خاص یا شرایط مرزی خاص نیست. خطی بودن معادله انرژی این ایده را به ذهن می دهد که می توان از روش های جمع آثار به نحو موثری استفاده نمود. در واقع تنها داشتن دو حل برای دو مساله اصلی ضروری است و دیگر حل ها با استفاده از این حل ها و همچنین روش های جمع آثار به دست می آیند. این دو حل اصلی عبارت اند از (حرارت در سطح خارجی و عایق در سطح داخلی) و برعکس آن.

اگر شار حرارتی روی سطوح داخلی و خارجی را با q_i'' و q_o'' نشان دهیم، ضرایب انتقال حرارت روی سطوح داخلی و خارجی به این صورت تعریف می شوند :

$$q_i'' = h_i(T_i - T_m) \quad , \quad q_o'' = h_o(T_o - T_m) \quad (3 - 20)$$

و اعداد ناسلت متناظر نیز به صورت ذیل خواهند بود :

$$Nu_i = \frac{h_i D_h}{k} \quad , \quad Nu_o = \frac{h_o D_h}{k} \quad (3 - 21)$$

اگر Nu_{ii} را عدد ناسلت لوله داخلی در زمانی که فقط لوله داخلی تحت حرارت است بنامیم و

Nu_{oo} را عدد ناسلت لوله خارجی در زمانی که فقط لوله خارجی تحت حرارت است بنامیم ،

می توانیم ضرایب تاثیر (θ_i^*, θ_o^*) را که از حل های اساسی به دست می آیند طوری تعریف کنیم که اعداد ناسلت برای مسائل غیر متقارن به صورت ذیل به دست بیایند :

$$Nu_i = \frac{Nu_{ii}}{1 - \left(\frac{q_o''}{q_i''}\right)\theta_i^*}, \quad Nu_o = \frac{Nu_{oo}}{1 - \left(\frac{q_i''}{q_o''}\right)\theta_o^*} \quad (3 - 22)$$

جدول (۳ - ۱) : حل شار ثابت حلقوی در شرایط سرعت و دمای کاملا توسعه یافته [۲۸]

r^*	Nu_{ii}	Nu_{oo}	θ_i^*	θ_o^*
0	∞	4.364	∞	0
0.05	17.81	4.792	2.180	0.0294
0.10	11.91	4.834	1.383	0.0562
0.20	8.499	4.883	0.905	0.1041
0.40	6.583	4.979	0.603	0.1823
0.60	5.912	5.099	0.473	0.2455
0.80	5.580	5.240	0.401	0.2990
1.0	5.385	5.385	0.346	0.3460

۳ - ۴ - ۳ : جریان در حال توسعه گرمایی در کانال دایروی

در گام بعدی سیالات با پراختل بالا را در نظر گرفته و توجه مان را بر ناحیه ای از کانال که در گستره $X < x < X_T$ قرار دارد متمرکز می کنیم. (X و X_T به ترتیب طول ورودی هیدرودینامیکی و دمایی). در این ناحیه پروفیل سرعت کاملا توسعه یافته است اما پروفیل دما هنوز در حال توسعه می باشد. با صرف نظر از رسانش محوری ($Pe \gg 1$) معادله ای که باید حل شود معادله ۳ - ۱۰ است. این مساله برای اولین بار توسط گراتز^۱ در سال ۱۸۸۳ حل شد و به نام مساله گراتز مشهور است. این مساله به صورت ذیل بیان می شود :

(۲۳ - ۳)

$$\frac{1}{2} (1 - r_*^2) \frac{\partial \theta_*}{\partial x_*} = \frac{\partial^2 \theta_*}{\partial r_*^2} + \frac{1}{r_*} \frac{\partial \theta_*}{\partial r_*}$$

$$\theta_* = 0 \quad \text{at } r_* = 1$$

$$\frac{\partial \theta_*}{\partial r_*} = 0 \quad \text{at } r_* = 0$$

$$\theta_* = 1 \quad \text{at } x_* = 0$$

$$\theta_* = \frac{T - T_0}{T_{IN} - T_0}, \quad r_* = \frac{r}{r_0}, \quad x_* = \frac{x/D}{\text{Re}_D \text{Pr}}$$

برای شرط مرزی دمای دیواره یکنواخت و دمای ورودی ثابت، معادله انرژی با استفاده از جداسازی متغیرها به دو معادله دیفرانسیل معمولی تقسیم می شود که یکی از نوع اشتورم-لیوویل است و حل آن با استفاده از سری بی نهایت به دست می آید. در نهایت حل معادله که سری گراتز نامیده می شود به صورت زیر است [۲۷] :

(۲۴ - ۳)

$$\theta_{*m} = \frac{T_m - T_0}{T_{IN} - T_0} = 8 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G_n}{\lambda_n^2} \exp(-2\lambda_n^2 x_*)$$

$$\text{Nu}_x = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} G_n \exp(-2\lambda_n^2 x_*)}{2 \sum_{n=0}^{\infty} (G_n / \lambda_n^2) \exp(-2\lambda_n^2 x_*)}$$

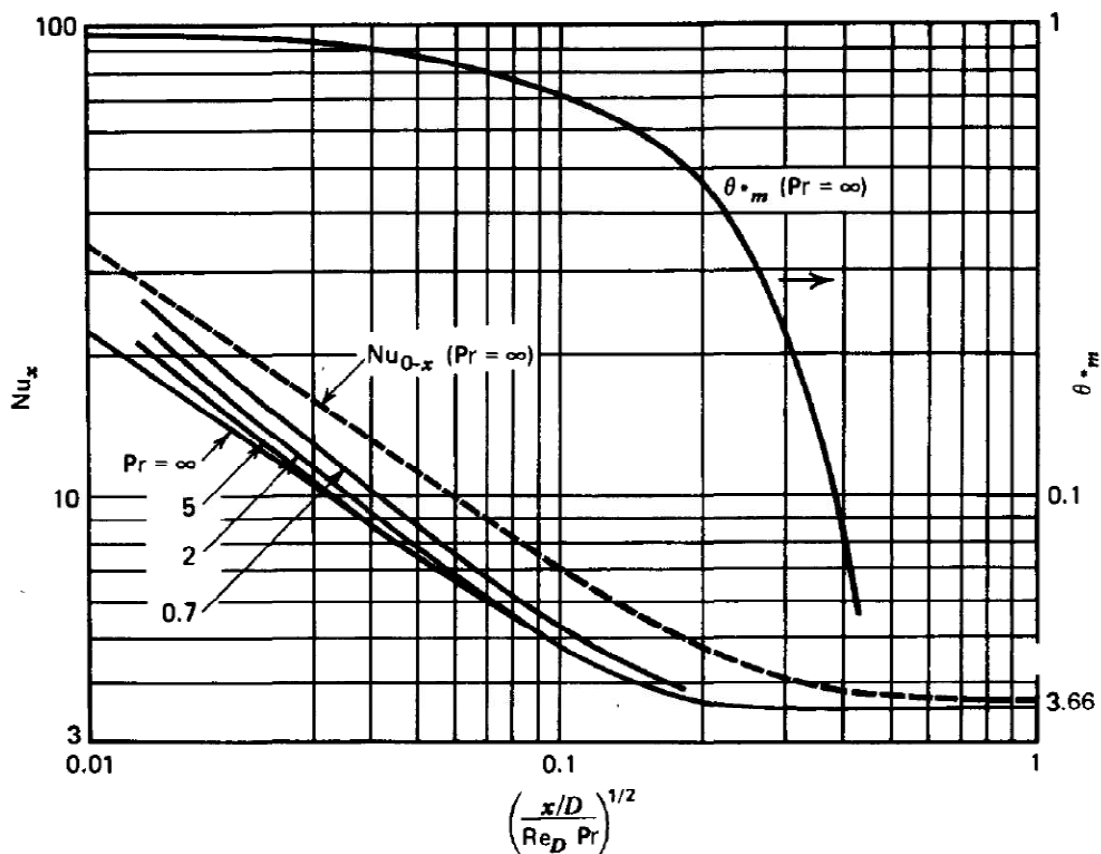
$$\text{Nu}_{0-x} = \frac{1}{4x_*} \ln \frac{1}{\theta_{*m}}$$

پنج عبارت اول مقادیر ویژه و ثابت های سری یاد شده در جدول ۳ - ۲ آمده اند.

جدول (۳-۲) : مقادیر ویژه و ثابت های حل گرانتز (لوله با دیواره دما ثابت) [۲۷]

n	λ_n	G_n
0	2.704	0.7488
1	6.679	0.5438
2	10.673	0.4629
3	14.671	0.4154
4	18.67	0.3829
5	22.67	0.3587

در تصویر ۳-۱، منحنی هایی که با برجسب $Pr = \infty$ مشخص شده اند، مربوط به ۳-۲۴ هستند.



شکل (۳-۱) : انتقال حرارت در ناحیه ورودی یک لوله با دیواره های دما ثابت [۲۷]

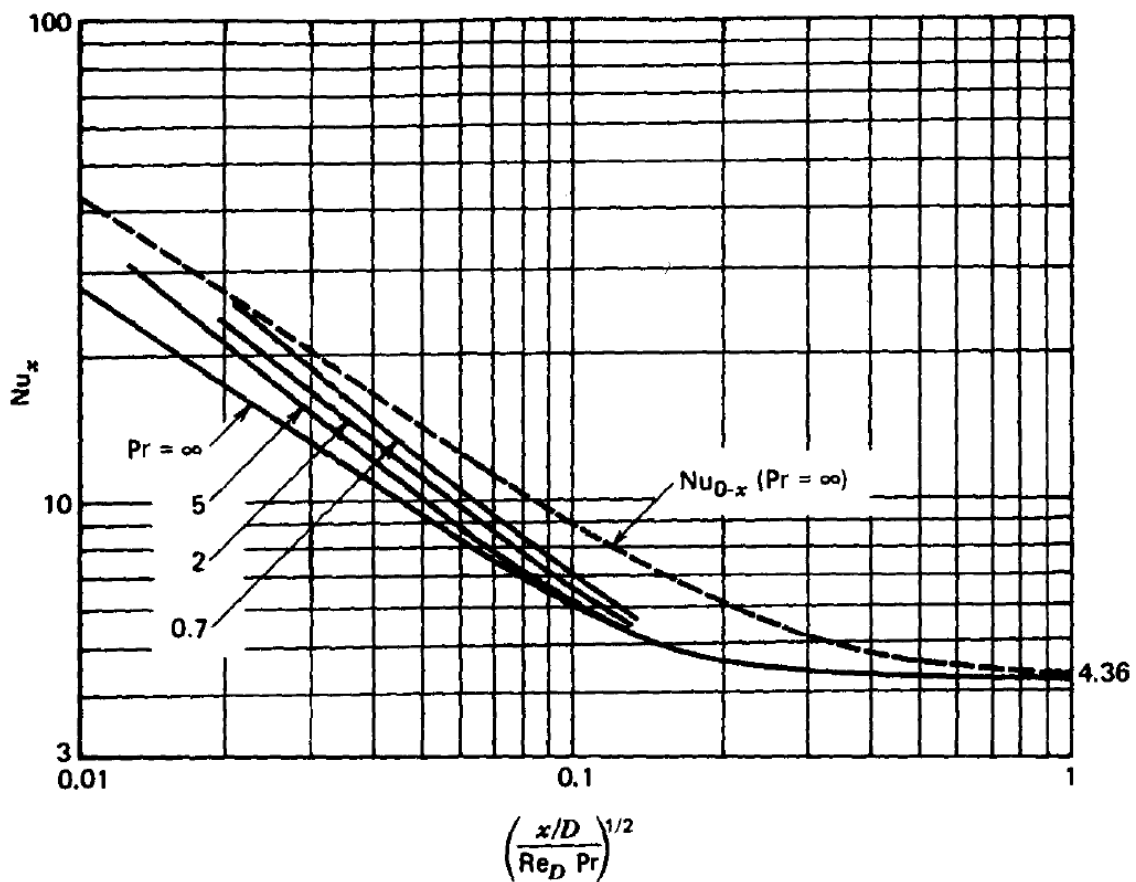
همچنین روابط زیر که به نام حل لوک مشهورند بعدها به جای حل گراتز توصیه شدند [۲۷].

(۳ - ۲۵)

$$Nu_x = \begin{cases} 1.077x_*^{-1/3} - 0.7, & x_* \leq 0.01 \\ 3.657 + 6.874(10^3x_*)^{-0.488} \exp(-57.2x_*), & x_* > 0.01 \end{cases}$$

$$Nu_{0-x} = \begin{cases} 1.615x_*^{-1/3} - 0.7, & x_* \leq 0.005 \\ 1.615x_*^{-1/3} - 0.2, & 0.005 < x_* < 0.03 \\ 3.657 + 0.0499/x_*, & x_* \geq 0.03 \end{cases}$$

با استفاده از روش مشابه می توان همین مساله را برای شرط مرزی شار گرمایی یکنواخت هم حل کرد.



شکل (۳ - ۲): انتقال حرارت در ناحیه ورودی یک لوله با شار گرمایی یکنواخت در دیواره ها [۲۷]

۳-۴-۴ : جریان در حال توسعه گرمایی و هیدرولیکی

واقعی ترین و در عین حال سخت ترین حالت مساله جریان در لوله، در ناحیه ای است که هیچکدام از پروفیل های دما و سرعت توسعه یافته نیستند. یکی از کاربردهای مهم این مساله در بیشینه کردن نرخ انتقال گرما (انتقال گرما در واحد حجم) در هنگام کوچک کردن ساختار مبدل های گرمایی است. کاربرد دیگر آن در زیست شناسی و در آسیب شناسی تارهای صوتی می باشد. تصویر ۳-۱ چندین حل پراوتل محدود برای عدد ناسلت محلی در ناحیه ورودی لوله ای با دمای ثابت دیواره را نشان می دهد. رابطه ای که هم ناحیه ورودی و هم ناحیه توسعه یافته را پوشش می دهد، به وسیله چرچیل و ازو به صورت زیر ارائه شده است :

(۳-۲۶)

$$\frac{Nu_x}{4.364[1 + (Gz/29.6)^2]^{1/6}} = \left[1 + \left(\frac{Gz/19.04}{[1 + (Pr/0.0207)^{2/3}]^{1/2} [1 + (Gz/29.6)^2]^{1/3}} \right)^{3/2} \right]^{1/3}$$

$$Nu_x = q''D/k[T_0(x) - T_m(x)]$$

$$Gz = \pi/(4x_*)$$

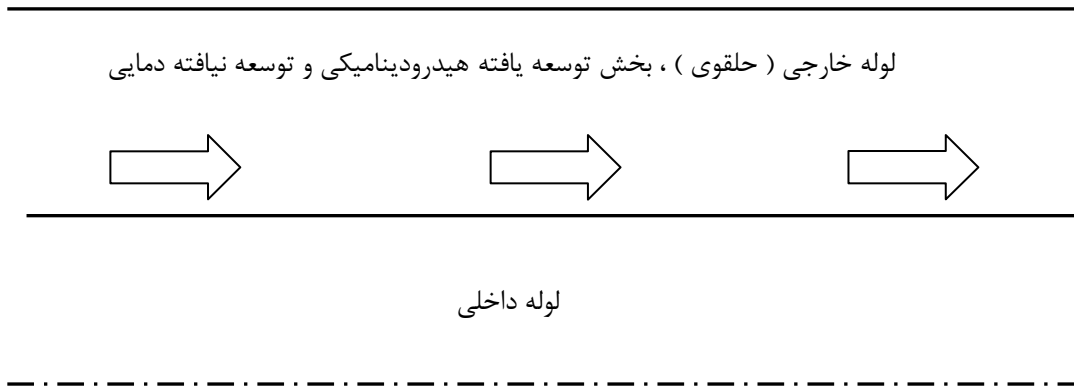
این حل حداکثر حدود ۵ درصد با نتایج عددی به دست آمده برای $Pr=0.7$ و $Pr=10$ اختلاف دارد.

۳-۵ : معرفی شرایط در نظر گرفته شده برای حل تحلیلی مساله حاضر

در بخش ۲-۱ هندسه کلی مساله مورد بحث ما و شرایط جریان توضیح داده شد. چون حل تحلیلی معادلات ناویر استوکس سه بعدی به صورت کامل، به علت وجود پیچیدگی های فراوان ممکن نیست، در اینجا تنها برای بخشی از جریان در حلقوی که از نظر هیدرودینامیکی توسعه یافته

ولی از نظر دمایی توسعه نیافته است، معادلات مومنوم و معادله انرژی را مورد حل و بحث قرار خواهیم داد.

شرط مرزی دما ثابت در دیواره



شکل (۳ - ۳) : هندسه جریان و شرایط مرزی بخش حل تحلیلی مسأله

۳ - ۶ : حل تحلیلی معادلات مومنوم

در قسمت توسعه یافته هیدرودینامیکی با توجه به وجود تقارن محوری و صفر بودن مولفه شعاعی سرعت جریان، همچنین ثابت بودن پروفیل سرعت در طول جریان، معادلات مومنوم به صورت زیر در می آیند :

(۳ - ۲۷)

$$1 - \rho \left(\frac{v_{\theta}^2}{r} \right) = \frac{\partial p}{\partial r}$$

$$2 - 0 = \left\{ \frac{\partial^2 v_{\theta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} - \frac{v_{\theta}}{r^2} \right\} = \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_{\theta}) \right\}$$

$$3 - 0 = - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left\{ \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right\}$$

با شروع حل از معادله دوم خواهیم داشت :

$$(2) \rightarrow \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) \right\} = 0 \rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) = C_1 \rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) = C_1 r \rightarrow rv_\theta = \frac{C_1 r^2}{2} + C_2 \rightarrow v_\theta = \frac{C_1 r}{2} + \frac{C_2}{r}$$

با داشتن شرایط مرزی به صورت زیر

$$BC: \left\{ r = \frac{Di}{2} \rightarrow v_\theta = 0, \quad r = \frac{Do}{2} \rightarrow v_\theta = \frac{Do \omega}{2} \right\}$$

خواهیم داشت :

$$\rightarrow v_\theta = \frac{D_o^2 \omega}{(D_i^2 - D_o^2)} \left(-r + \frac{D_i^2}{4r} \right) \quad (28-3)$$

همچنین از معادله اول مومنوم و رابطه ۲۸-۳ خواهیم داشت :

(۲۹-۳)

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho M^2 r \left(\frac{D_i^2}{4r^2} - 1 \right)^2 \rightarrow p = \rho M^2 \left(-\frac{D_i^4}{32r^2} - \frac{D_i^2}{2} \ln(r) + \frac{r^2}{2} \right) + f(z)$$

$$\rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} = f'(z)$$

$$M = \frac{D_o^2 \omega}{(D_i^2 - D_o^2)}$$

نهایتاً از معادله سوم مومنوم خواهیم داشت :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \left\{ \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right\} = K = \text{ثابت} \quad (30-3)$$

تابع \mathbf{r} تابع \mathbf{z}

$$\frac{\partial p}{\partial z} = f'(z) = K \rightarrow f(z) = Kz + C_1$$

$$\frac{K}{\mu} r = \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) \rightarrow r \frac{dv_z}{dr} = \frac{K}{2\mu} r^2 + C \rightarrow \frac{dv_z}{dr} = \frac{K}{2\mu} r + \frac{C}{r} \rightarrow$$

$$\rightarrow v_z = \frac{K}{4\mu} r^2 + C \ln(r) + D \quad (31-3)$$

با داشتن شرایط مرزی به صورت زیر :

$$BC: \left\{ r = \frac{Di}{2} \rightarrow v_z = 0, \quad r = \frac{Do}{2} \rightarrow v_z = 0 \right\}$$

خواهیم داشت :

$$C = \frac{K(D_i^2 - D_o^2)}{16\mu \ln\left(\frac{D_o}{D_i}\right)} \quad (32-3)$$

$$D = \frac{-K}{16\mu} D_i^2 - \ln\left(\frac{D_i}{2}\right) \frac{K(D_i^2 - D_o^2)}{16\mu \ln\left(\frac{D_o}{D_i}\right)}$$

توزیع فشار نیز به صورت زیر به دست می آید :

$$P = \rho \left\{ \frac{D_o^2 \omega}{(D_i^2 - D_o^2)} \right\}^2 \left(-\frac{D_i^4}{32r^2} - \frac{D_i^2}{2} \ln(r) + \frac{r^2}{2} \right) + Kz + C_1 \quad (33-3)$$

۷-۳ : حل تحلیلی معادله انتقال حرارت

معادله کلی انتقال حرارت به صورت ۳-۱ معرفی شد. در مسأله ما به دلیل تقارن محوری، $\frac{\partial}{\partial \theta}$

صفر است. همچنین به دلیل فرض توسعه یافتگی هیدرودینامیکی v_r و $\frac{\partial v_z}{\partial z}$ نیز صفر می شوند و

با توجه به شرایط مساله ما چون ($Pe \gg 1$)، رسانش طولی نیز قابل صرف نظر است. پس

معادله به صورت زیر ساده خواهد شد :

$$\rho c_p \left(v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \mu \left[\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right)^2 + \frac{\partial v_z^2}{\partial r} \right] \quad (34-3)$$

و برای سادگی کاربرد شکل بی بعد معادله ۳-۳۴ را به صورت زیر خواهیم داشت :

$$\bar{v}_z \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{Pr Re} \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} \right) + \frac{Ec}{Re} \underbrace{\left[\left(\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{r}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial \bar{r}} - \frac{\bar{v}_\theta}{\bar{r}} \right)^2 \right]}_{f(r)} \quad (35-3)$$

$$\frac{k}{\rho c_p U (D_o - D_i)} = \frac{1}{Pr} \frac{1}{Re} \quad \left(Re = \frac{\rho U (D_o - D_i)}{\mu}, \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha} \right)$$

$$\frac{\mu U}{\rho c_p (T_{w1} - T_{in}) (D_o - D_i)} = Ec \cdot \frac{1}{Re}$$

(۳۶-۳)

$$\bar{T} = \frac{T - T_{in}}{T_{w1} - T_{in}}, \quad \bar{T}_{w2} = \frac{T_{w2} - T_{in}}{T_{w1} - T_{in}}, \quad \bar{T}_{w1} = \frac{T_{w1} - T_{in}}{T_{w1} - T_{in}} = 1, \quad \bar{T}_{in} = \frac{T_{in} - T_{in}}{T_{w1} - T_{in}} = 0$$

$$\bar{T} = \frac{T-T_{in}}{T_{w1}-T_{in}} \quad \bar{z} = \frac{z}{D_o-D_i} \quad , \quad \bar{r} = \frac{r}{D_o-D_i} \quad , \quad \bar{p} = \frac{p}{\rho U^2} \quad , \quad (37-3)$$

$$U = \frac{\dot{m}}{A} \quad , \quad \bar{v}_r = \frac{v_r}{U} \quad , \quad \bar{v}_\theta = \frac{v_\theta}{U} \quad , \quad \bar{v}_z = \frac{v_z}{U}$$

$$\bar{T})_{\bar{r}=1} = \frac{D_i}{2(D_o-D_i)} = 1 \quad (38-3)$$

$$\bar{T})_{\bar{r}=0} = \frac{D_o}{2(D_o-D_i)} = \frac{T_{w2}-T_{in}}{T_{w1}-T_{in}} \quad (39-3)$$

$$\bar{T})_{\bar{z}=0} \quad (40-3)$$

$$\bar{T}(\bar{r}, \bar{z}) = \bar{W}(\bar{r}, \bar{z}) + \bar{V}(\bar{r}) \quad \text{با فرض}$$

خواهیم داشت :

$$\bar{v}_z \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{RePr} \left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{r}} \right) + \frac{Ec}{Re} \left[\underbrace{\left(\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{r}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial \bar{r}} - \frac{\bar{v}_\theta}{\bar{r}} \right)^2}_{f(r)} \right] \quad (41-3)$$

$$\bar{T})_{\bar{z}=0} = 0 \quad \rightarrow \quad \bar{W}(\bar{r}, 0) + \bar{V}(\bar{r}) = 0 \quad (42-3)$$

$$\bar{T})_{\bar{r}=1} = \frac{D_i}{2(D_o-D_i)} = 1 \quad \rightarrow \quad \bar{W}\left(\frac{D_i}{2(D_o-D_i)}, \bar{z}\right) + \bar{V}\left(\frac{D_i}{2(D_o-D_i)}\right) = 1 \quad (43-3)$$

$$\bar{T})_{\bar{r}=0} = \frac{D_o}{2(D_o-D_i)} = 0 \quad \rightarrow \quad \bar{W}\left(\frac{D_o}{2(D_o-D_i)}, \bar{z}\right) + \bar{V}\left(\frac{D_o}{2(D_o-D_i)}\right) = \frac{T_{w2}-T_{in}}{T_{w1}-T_{in}} \quad (44-3)$$

برای به دست آوردن V خواهیم داشت :

$$\frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{r}} \right) + Ec f(\bar{r}) = 0 \quad (45-3)$$

$$\bar{V}\left(\frac{D_i}{2(D_o-D_i)}\right) = 1 \quad (46-3)$$

$$\bar{V}\left(\frac{D_o}{2(D_o-D_i)}\right) = \frac{T_{w2}-T_{in}}{T_{w1}-T_{in}} \quad (47-3)$$

با فرض $\frac{d\bar{V}}{d\bar{r}} = \bar{H}(\bar{r})$ خواهیم داشت:

$$\frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}} \bar{H} \right) + Ec f(\bar{r}) = 0 \quad (48-3)$$

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}} \bar{H} = -Ec Pr f(\bar{r}) \quad (49-3)$$

$$\bar{H} = \exp\left(-\int \frac{1}{\bar{r}} d\bar{r}\right) \left[\int -Ec Pr f(\bar{r}) \exp\left(\int \frac{1}{\bar{r}} d\bar{r}\right) d\bar{r} + C_1 \right] \quad (50-3)$$

$$\bar{H} = \frac{1}{\bar{r}} \left[\int -Ec Pr f(\bar{r}) \bar{r} d\bar{r} + C_1 \right] \quad (51-3)$$

$$f(\bar{r}) = \left[\left(\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{r}}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial \bar{r}} - \frac{\bar{v}_\theta}{\bar{r}}\right)^2 \right] \quad (52-3)$$

همچنین از قسمت قبل داشتیم :

$$\bar{v}_z = \left(\frac{K}{4\mu v}\right) (D_o - D_i)^2 \bar{r}^2 + \frac{C}{v} \ln((D_o - D_i)\bar{r}) + \frac{D}{v} \quad (53-3)$$

$$M = \frac{\partial p}{\partial z} \quad (54-3)$$

$$C = \frac{M(D_i^2 - D_o^2)}{16\mu \ln\left(\frac{D_o}{D_i}\right)} \quad (55-3)$$

$$D = \frac{-M}{16\mu} D_i^2 - \ln\left(\frac{D_i}{2}\right) \left(\frac{M(D_i^2 - D_o^2)}{16\mu \ln\left(\frac{D_o}{D_i}\right)}\right) \quad (56-3)$$

و نهایتاً

$$\bar{V}(\bar{r}) = \int \bar{H}(\bar{r}) d\bar{r} + C_2 \quad (57-3)$$

با توجه به شرایط مرزی ذیل CI و $C2$ به دست می آیند.

$$\bar{V}\left(\frac{D_i}{2(D_o - D_i)}\right) = 1 \quad (58-3)$$

$$\bar{V}\left(\frac{D_o}{2(D_o - D_i)}\right) = \frac{T_{w2} - T_{in}}{T_{w1} - T_{in}} \quad (59-3)$$

برای به دست آوردن W معادله و شرایط مرزی زیر را خواهیم داشت :

$$Re \bar{v}_z \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{r}} \right) \quad (60-3)$$

$$\bar{W}(\bar{r}, 0) = -\bar{V}(\bar{r}) \quad (61-3)$$

$$\bar{W}\left(\frac{D_i}{2(D_o - D_i)}, \bar{z}\right) = 0 \quad (62-3)$$

$$\bar{W}\left(\frac{D_o}{2(D_o - D_i)}, \bar{z}\right) = 0 \quad (63-3)$$

اگر W را به صورت زیر در نظر بگیریم :

$$W = \bar{R}(\bar{r})\bar{Z}(\bar{z}) \quad (۳-۶۴)$$

آنگاه :

$$Re \bar{v}_z \bar{R} \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{Pr} \left(\bar{Z} \frac{\partial^2 \bar{R}}{\partial \bar{r}^2} + \bar{Z} \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial R}{\partial \bar{r}} \right) \quad (۳-۶۵)$$

با تقسیم معادله بالا بر $Re \bar{R}(\bar{r})\bar{Z}(\bar{z})$ داریم :

$$\frac{\frac{\partial \bar{Z}}{\partial \bar{z}}}{\bar{Z}} = \frac{1}{\bar{v}_z} \frac{\partial^2 \bar{R}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial R}{\partial \bar{r}} = -\lambda^2 \quad (۳-۶۶)$$

اکنون از معادله ۳-۶۶ و شرایط مرزی ۳-۶۲ و ۳-۶۳ برای به دست آوردن $\bar{R}(\bar{r})$ ، معادله و

شرایط مرزی ذیل را خواهیم داشت :

$$\frac{\partial^2 \bar{R}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{R}}{\partial \bar{r}} = -\lambda^2 \bar{v}_z \bar{R} Pr Re \quad (۳-۶۷)$$

$$\bar{R} \left(\frac{D_i}{2(D_o - D_i)} \right) = 0$$

$$\bar{R} \left(\frac{D_o}{2(D_o - D_i)} \right) = 0$$

با مقایسه معادله ۳-۶۷ با فرم کلی اشتورم لیوویل^۱ که به صورت ذیل می باشد :

$$\frac{d}{dx} \left(p \frac{dy}{dx} \right) + (q + \lambda s)y = 0 \quad (۳-۶۸)$$

p ، q و s که در معادله ۳-۶۸ توابع x هستند ، برای معادله ۳-۶۷ به صورت زیر خواهند بود :

$$P(\bar{r}) = \bar{r} \quad , \quad q(r) = 0 \quad , \quad s(r) = \frac{\bar{r}}{\bar{v}_z Pr Re}$$

معادله ۳-۶۷ یک معادله دیفرانسیل همگن با ضرایب غیر ثابت است که با استفاده از روش

سری ها حل شده است و مقادیر ویژه و توابع ویژه متناظر آنها (\bar{R}_n) به دست می آیند.

همچنین برای به دست آوردن $\bar{Z}(\bar{z})$ معادله ذیل را خواهیم داشت :

$$\frac{\partial \bar{Z}}{\partial \bar{z}} + \lambda^2 \bar{Z} = 0 \quad (۳-۶۹)$$

1 - Sturm - Liouville

از این معادله \bar{Z} به صورت زیر به دست می آید.

$$\bar{Z} = C e^{-\lambda^2 \bar{z}} \quad (70-3)$$

پس در نهایت با توجه به معادله ۳ - ۶۴ خواهیم داشت :

$$W(\bar{r}, \bar{z}) = \sum D_n \bar{R}_n(\bar{r}) \bar{Z}_n(\bar{z}) \quad (71-3)$$

اکنون برای به دست آوردن ضرایب D_n از شرط مرزی باقیمانده (۳ - ۶۱) استفاده می شود. تابع

$\bar{V}(\bar{r})$ هم از محاسبات قبلی به دست آمده بود. پس:

$$\bar{W}(\bar{r}, 0) + \bar{V}(\bar{r}) = 1 \quad \rightarrow \quad 1 - \bar{V}(\bar{r}) = \sum D_n \bar{R}_n(\bar{r}) \quad (72-3)$$

$$D_n = \frac{\frac{D_o}{D_i} \int_{\frac{D_o}{D_i}}^{\frac{2(D_o-D_i)}{D_i}} (1-\bar{V}(\bar{r})) s(\bar{r}) \bar{R}_n(\bar{r}) d\bar{r}}{\frac{D_o}{2(D_o-D_i)} \int_{\frac{D_o}{D_i}}^{\frac{2(D_o-D_i)}{D_i}} s(\bar{r}) (\bar{R}_n(\bar{r}))^2 d\bar{r}} \quad (73-3)$$

و در نهایت :

$$\bar{T}(\bar{r}, \bar{z}) = \bar{W}(\bar{r}, \bar{z}) + \bar{V}(\bar{r}) \quad (74-3)$$

فصل چهارم :

روش عددی

۴ - ۱ : حل عددی معادلات مومنتوم

۴ - ۱ - ۱ : مقدمه

معادلات ناویر استوکس تراکم ناپذیر با لزجت ثابت در فصل دوم معرفی و در مختصات استوانه ای به وسیله معادله ۲ - ۹ بیان شد. استفاده از حالت تراکم ناپذیر معادلات ناویر استوکس، نیازمند توجه ویژه به گسسته سازی قلمرو، شرایط مرزی و روشهای حل است. معادلات حاکم ترکیبی از یک دستگاه معادلات مخلوط بیضوی - سهموی است که همزمان حل می شود. سرعت و فشار مجهول این معادلات هستند. در این تحقیق از روش عددی تفاضل محدود برای تحلیل جریان استفاده شده است.

۴ - ۱ - ۲ : الگوریتم های عددی

از نظر فیزیکی مسائل را می توان به حالت های دائم یا غیر دائم دسته بندی کرد. روشن است که در مسائل جریان دائم، جمله های تابع زمان از معادلات حاکم حذف می شوند. در هر حال بنا بر ملاحظات محاسبات عددی، معادلات ناویر استوکس جریان دائم را در حالت کلی از روش شبه گذرا حل می کنیم. در این روش با افزودن یک جمله غیر فیزیکی تابع زمان به معادله پیوستگی، دستگاه معادلات غیر دائمی تشکیل می شود. به دنبال آن شکل غیر دائم معادلات را به صورت عددی حل می کنیم. واضح است که زمان در اینجا نقش مراحل تکرار را بازی می کند و ارزش فیزیکی ندارد. در نتیجه جواب های مراحل مختلف تکرار، از نظر فیزیکی بی معنی هستند و تنها وسیله ای برای رسیدن به جواب حالت دائم می باشند. بنابراین می توان چنین نتیجه گرفت که روش های عددی برای جریان های دائم و غیر دائم مشابه اند.

در اینجا ذکر چند نکته مناسب به نظر می رسد. اولاً در مسائل غیر دائم، شرایط اولیه باید از نظر فیزیکی درست و نسبتاً دقیق باشند، در حالی که مسائل جریان دائم را با هر گونه شرایط اولیه

اختیاری می توان آغاز کرد. ثانیاً در مسائل غیر دائم، گام زمانی عددی باید با زمان فیزیکی و تغییراتی که در دوره زمانی پیش می آید همساز باشد. از سوی دیگر همان گونه که پیشتر گفتیم، جواب های مسائل دائم در مراحل میانی از نظر فیزیکی معنی ندارند و از این رو در حل های حالت دائم، بزرگترین گام زمانی را که تحلیل پایداری مجاز می داند می توان به کار برد.

بین معادله پیوستگی و معادلات مومنوم از نظر فشار هیچگونه ارتباط مستقیمی وجود ندارد. برای ایجاد ارتباط بین این معادلات عملیات ریاضی لازم است. برای انجام این کار دو روش پیشنهاد شده است. یکی از روشها افزودن جمله فشار تابع زمان به معادله پیوستگی است که به آن روش تراکم پذیری مصنوعی^۱ می گویند و روش دیگر ایجاد تغییراتی در معادلات مومنوم و پیوستگی است که حاصل آن معادله پواسون برای فشار است. شایان ذکر است که مشکل یاد شده برای معادله ناویر استوکس تراکم پذیر مطرح نیست، زیرا از طریق جرم مخصوص که در معادلات پیوستگی و مومنوم ظاهر می شود، ارتباط بین معادلات برقرار است. همچنین مشخص کردن شرط مرزی فشار غیر ممکن است. برای غلبه بر این مشکل، روش خاصی را باید معرفی کرد.

۴ - ۱ - ۳ : تراکم پذیری مصنوعی

در این تحقیق از روش تراکم پذیری مصنوعی استفاده شده است. کاربرد این روش برای جریان دائمی سیالات تراکم ناپذیر بوده و از سوی چورین^۲ معرفی شده است. در این روش معادله پیوستگی با درج یک عبارت تابع زمان برای فشار به فرم زیر در می آید [۲۹]:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\tau} \nabla \cdot V = 0 \quad (۱ - ۴)$$

در رابطه فوق τ ، تراکم پذیری مصنوعی سیال است. با توجه به معادله حالت، تراکم پذیری را به "شبه سرعت صوت"^۱ و یک جرم مخصوص مصنوعی^۲ با استفاده از روابط زیر می توان مربوط کرد:

1- Artificial Compressibility
2- Chorin

$$\tau = \frac{1}{a^2} \quad (2-4)$$

$$a^2 = \frac{p}{\rho} \quad (3-4)$$

در روابط فوق همه متغیرها به صورت بی بعد تعریف شده‌اند. با توجه به روابط ۴-۱ و ۴-۲

معادله پیوستگی به فرم نهایی زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + a^2 \nabla \cdot V = 0 \quad (4-4)$$

گفتنی است که در حالت حدی، وقتی که به حالت دائم می‌رسیم، ($t \rightarrow \infty$)، معادله ۴-۴

به صورت معادله پیوستگی تراکم‌ناپذیر، ساده می‌شود. (چون در حالت دائم $\frac{\partial p}{\partial t}$ برابر صفر شده

است). بنابراین معادلات ناویر استوکس تراکم‌ناپذیر حالت دائم درمختصات استوانه‌ای در شکل

شبه گذرا به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + a^2 \left[\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] \quad (5-4)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + \frac{\partial v_r^2}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{v_r^2}{r} - \frac{v_\theta^2}{r} + \frac{\partial(v_r v_z)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(v_r v_\theta)}{\partial \theta} = \quad (6-4)$$

$$\frac{1}{\text{Re}} \left\{ \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right\}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta^2}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\partial(v_z v_\theta)}{\partial z} + \frac{\partial(v_r v_\theta)}{\partial r} + \frac{2}{r} v_r v_\theta \right) \\ & = \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z^2}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(v_z v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(v_z v_r)}{\partial r} + \frac{v_z v_r}{r} \right) \\ & = \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right\} \end{aligned}$$

1- pseudo speed of sound
2- artificial density

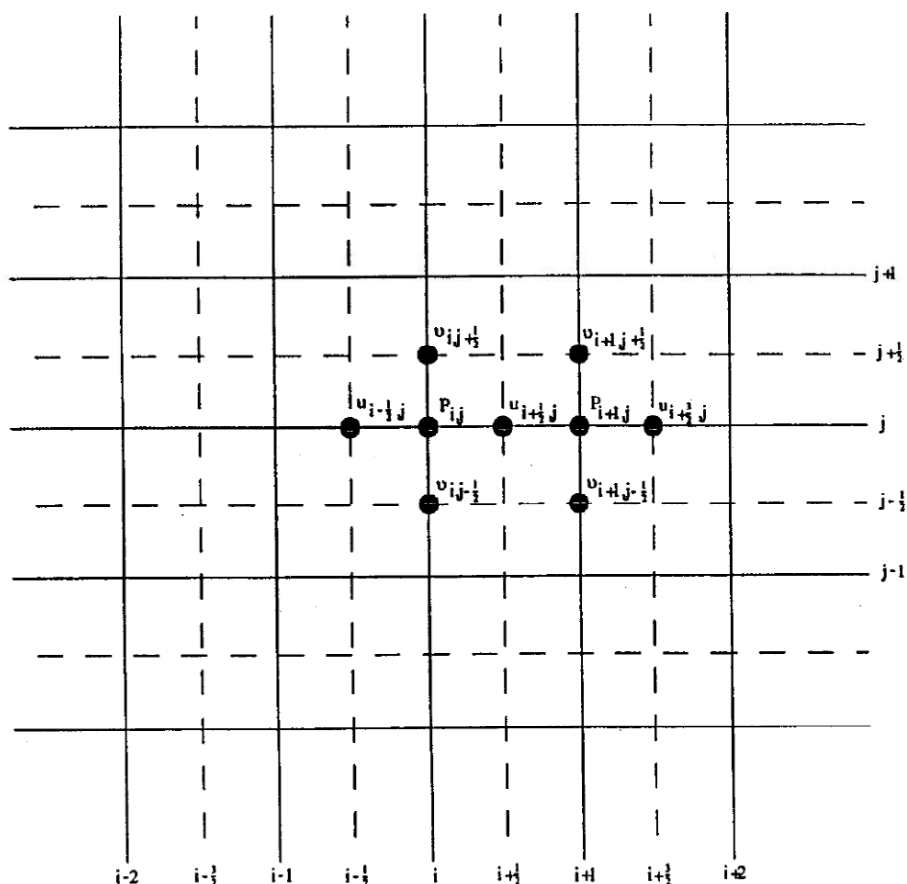
معادلات ۴-۵ و ۴-۶ بی بعد هستند و علامت بی بعد بودن (*) حذف شده است. علاوه بر کمیت‌های بی بعدی که قبلاً معرفی شد، از مقادیر زیر نیز استفاده شده است.

$$a^{*2} = \frac{p^*}{\rho^*}, \quad \rho^* = \frac{\rho}{\rho_\infty} \quad (4-7)$$

بسته به نوع شبکه انتخابی، حل عددی دستگاه معادلات ۴-۵ و ۴-۶ به دو دسته تقسیم می‌شود. حل با شبکه یکنواخت و حل با شبکه جابجا شده، که در این تحقیق از شبکه جابجا شده برای حل استفاده شده است.

۴-۱-۴ : شبکه جابجا شده

در مسائلی که در آنها قوانین حاکم را به ترتیب حل می‌کنیم، بهتر است فرمول بندی‌های تفاضل محدود را به صورتی بنویسیم که برای شبکه بندی موسوم به شبکه جابجا شده مناسب باشد. این روش امکان به هم جفت کردن متغیرها را فراهم می‌کند و پایداری را بهبود می‌بخشد. شبکه جابجا شده را به روش‌های مختلف می‌توان ساخت. مثلاً شبکه را می‌توان در امتداد یکی از خطوط مختصات به اندازه نصف فاصله دو نقطه و یا در امتداد قطر جا به جا کرد. نمونه‌ای از شبکه جابجا شده که در اغلب مسائل استفاده می‌شود در شکل ۴-۱ نشان داده شده است. از آنجا که از دو شبکه منطبق بر هم استفاده می‌شود، آنها را شبکه‌های اولیه و ثانویه می‌نامیم. نقاط شبکه اولیه را با i و j که برای شبکه‌های استاندارد به کار می‌رود نشان می‌دهیم، در حالی که شبکه ثانویه را با فواصل نصف مشخص می‌کنیم. در شکل ۴-۱ شبکه اولیه با خط پر و شبکه ثانویه با خط چین نشان داده شده است.



شکل (۴ - ۱) : شبکه های اولیه و ثانویه در یک مختصات دو بعدی [۲۹]

متغیرهای مختلفی را به نقاط شبکه اولیه و ثانویه مرتبط می کنیم. برای مثال در مورد معادلات ناویر استوکس تراکم ناپذیر که موضوع بحث ما است، در حالت دو بعدی، مولفه های u و v سرعت و فشار (p) مجهول های مساله هستند. نمونه ای از تخصیص متغیرها به نقاط مختلف شبکه به این صورت است که فشار را در گره های شبکه اولیه تعریف می کنیم و مولفه های سرعت را روی سطوح شبکه ثانویه انتخاب می کنیم. به عبارت دقیقتر مولفه X سرعت (u) را در فاصله میانی بین دو گره و در Y مشابه به شبکه اولیه انتخاب می کنیم. مولفه Y سرعت (v) را به روش مشابه تعیین می کنیم. متغیرهای جریان در شکل ۴ - ۱ نشان داده شده اند. به طور کلی اعمال شرط مرزی فیزیکی مناسب برای فشار استاتیکی یکی از دشواری های مربوط به روش های عددی مختلف محسوب می شود. معمولاً برای این منظور از شرط مرزی نیومن همگن برای فشار بر روی دیواره ها

استفاده می شود. خوشبختانه گسسته سازی تفاضل محدود معادلات حاکم بر روی شبکه جابجا شده را می توان به نحوی انجام داد که بی نیاز به استفاده از این شرط مرزی باشد. از آنجا که مرزها بر روی شبکه ثانویه تعریف می شوند و فشار بر روی شبکه اولیه اختصاص یافته و در معادلات حاکم فاقد مشتق مرتبه دوم است، در اینجا نیازی به اعمال شرط مرزی برای فشار نیست.

۴ - ۱ - ۵ : روش علامتگذاری و سلول^۱ :

فرمولبندی بسیار مناسب در شبکه جابجا شده، روش علامتگذاری و سلول است که توسط هارلو و ولج^۲ ابداع شده است. کاربرد این روش برای شبکه جابجا شده روی معادلات ناویر استوکس نشان داده می شود. در فرمول بندی صریح این مساله، از تقریب مرتبه اول برای مشتق زمان و تقریب مرکزی مرتبه دوم برای مشتق های مکان استفاده شده است. معادله پیوستگی که در ۴ - ۴ داده شده است، در مختصات دو بعدی کارتزین برای نقطه (i, j) معادله تفاضل محدود زیر را می دهد.

$$\frac{P_{i,j}^{n+1} - P_{i,j}^n}{\Delta t} + a^2 \left[\frac{u_{i+1/2,j}^{n+1} - u_{i-1/2,j}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{v_{i,j+1/2}^{n+1} - v_{i,j-1/2}^{n+1}}{\Delta y} \right] = 0 \quad (4-8)$$

باید دانست که مولفه های سرعت در مقطع زمانی n+1 داده شده اند. البته مشکلی به وجود نمی آید زیرا برای پیدا کردن u و v در مقطع زمانی n+1، نخست معادله مومنتوم را حل می کنیم. در پی آن، معادله پیوستگی را برای فشار حل می کنیم. مولفه X معادله مومنتوم در روی شبکه ثانویه برای نقطه (j, i+1/2) اعمال می شود که نتیجه زیر را می دهد :

¹ - Marker and Cell Method

² - Harlow & Welch

(۹ - ۴)

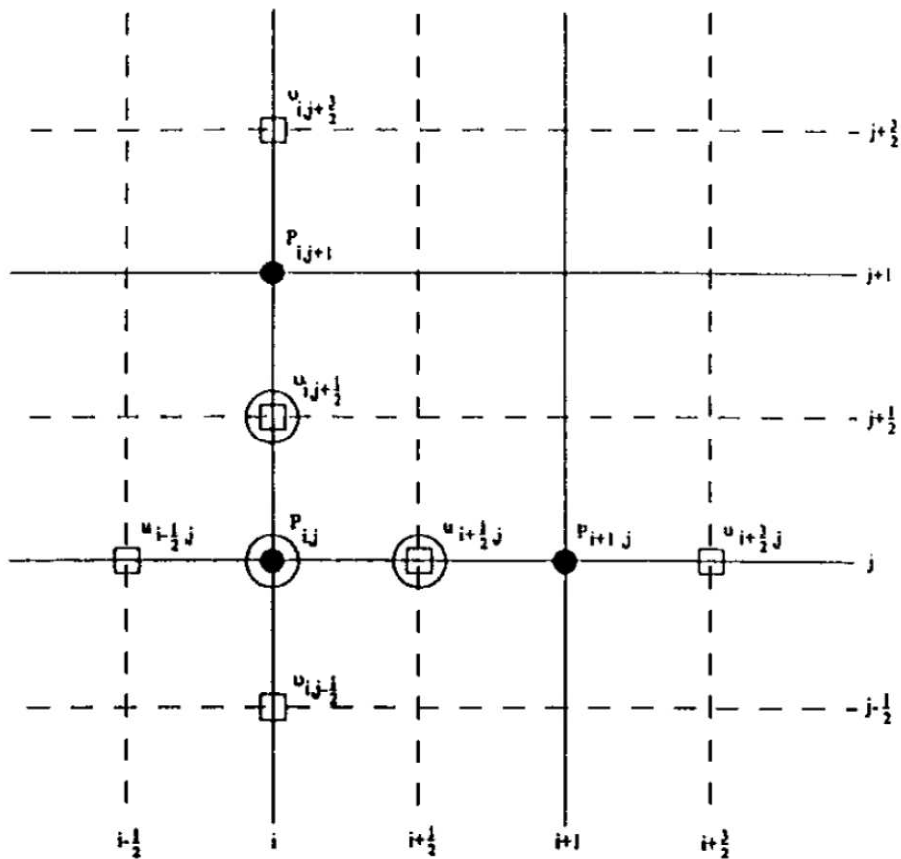
$$\begin{aligned} & \frac{u_{i+1/2,j}^{n+1} - u_{i+1/2,j}^n}{\Delta t} + \frac{P_{i+1,j}^n - P_{i,j}^n}{\Delta x} + \frac{(u^2)_{i+1,j}^n - (u^2)_{i,j}^n}{\Delta x} \\ & + \frac{(uv)_{i+1/2,j+1/2}^n - (uv)_{i+1/2,j-1/2}^n}{\Delta y} \\ & = \frac{1}{\text{Re}} \frac{u_{i-1/2,j}^n - 2u_{i+1/2,j}^n + u_{i+3/2,j}^n}{(\Delta x)^2} \\ & + \frac{1}{\text{Re}} \frac{2u_{i+1/2,j-1}^n - 2u_{i+1/2,j}^n + u_{i+1/2,j+1}^n}{(\Delta y)^2} \end{aligned}$$

به همین ترتیب مولفه y مومنتوم در نقطه $(i, j+1/2)$ اعمال می شود که نتیجه آن به صورت زیر

است :

(۱۰ - ۴)

$$\begin{aligned} & \frac{v_{i,j+1/2}^{n+1} - v_{i,j+1/2}^n}{\Delta t} + \frac{(uv)_{i+1/2,j+1/2}^n - (uv)_{i-1/2,j+1/2}^n}{\Delta x} + \frac{P_{i,j+1}^n - P_{i,j}^n}{\Delta y} \\ & + \frac{(v^2)_{i,j+1}^n - (v^2)_{i,j}^n}{\Delta y} \\ & = \frac{1}{\text{Re}} \frac{v_{i-1,j+1/2}^n - 2v_{i,j+1/2}^n + v_{i+1,j+1/2}^n}{(\Delta x)^2} \\ & + \frac{1}{\text{Re}} \frac{v_{i,j-1/2}^n - 2v_{i,j+1/2}^n + v_{i,j+3/2}^n}{(\Delta y)^2} \end{aligned}$$



شکل (۴-۲): شبکه های اولیه و ثانویه در یک مختصات دو بعدی [۲۹]

از آنجا که مولفه های سرعت تنها بر روی شبکه ثانویه معلومند، کلیه مقادیری که بر حسب نقاط شبکه اولیه آمده اند باید بر حسب مقادیر تقریبی آنها در شبکه ثانویه داده شوند. برای این منظور از تقریبهای زیر استفاده می شود [۲۹]:

$$(u^2)_{i+1,j} = \frac{1}{4} [u_{i+3/2,j} + u_{i+1/2,j}]^2 \quad (۴-۱۱)$$

$$(u^2)_{i,j} = \frac{1}{4} [u_{i+1/2,j} + u_{i-1/2,j}]^2$$

$$(v^2)_{i,j+1} = \frac{1}{4} [v_{i,j+3/2} + v_{i,j+1/2}]^2$$

$$(v^2)_{i,j} = \frac{1}{4} [v_{i,j+1/2} + v_{i,j-1/2}]^2$$

$$(uv)_{i+1/2,j+1/2} = \frac{1}{4} [u_{i+1/2,j} + u_{i+1/2,j+1}] [v_{i,j+1/2} + v_{i+1,j+1/2}]$$

$$(uv)_{i+1/2,j-1/2} = \frac{1}{4} [u_{i+1/2,j} + u_{i+1/2,j-1}] [v_{i,j-1/2} + v_{i+1,j-1/2}]$$

$$(uv)_{i-1/2,j+1/2} = \frac{1}{4} [u_{i-1/2,j} + u_{i-1/2,j+1}] [v_{i,j+1/2} + v_{i-1,j+1/2}]$$

در این تحقیق نیز معادلات حاکم بصورت صریح گسسته سازی شده اند و تقریب مرکزی مرتبه دوم برای مشتقات مکانی در مختصات استوانه ای سه بعدی و تقریب پیشروی مرتبه اول برای مشتق زمان به کار گرفته شده است. در اینجا از شبکه جابجا شده استفاده شده و پارامترهای جریان مطابق روش علامتگذاری و سلول بر روی گره های محاسباتی اختصاص یافته اند. همچنین برای اصلاح فشار استاتیکی در طی گامهای زمانی تحلیل، از روش تراکم پذیری مصنوعی استفاده شده است. ضمناً در لوله داخلی چون آب به صورت توسعه یافته وارد می شود احتیاجی به حل عددی معادلات مومنوم نیست، چون حل تحلیلی موجود است.

در لوله خارجی (حلقوی)، در دیواره داخلی شرط عدم لغزش خواهیم داشت و در دیواره خارجی مولفه سرعت زاویه ای غیر صفر و بقیه مولفه ها صفرند. همچنین در ورودی فقط مولفه سرعت محوری را خواهیم داشت و در خروجی شرط توسعه یافتگی هیدرودینامیکی در راستای محوری را داریم.

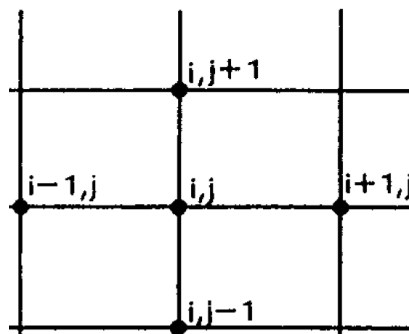
۴ - ۲ : حل عددی معادله انتقال حرارت

همانطور که قبلاً اشاره شد آب قبل از ورود به حلقوی به صورت توسعه یافته هیدرودینامیکی وارد استوانه داخلی شده و در انتهای استوانه داخلی وارد حلقوی می شود. مساله حالت پایدار در نظر گرفته شده و با توجه به اینکه دمای سطح استوانه داخلی که تابع فاصله محوری است در ابتدا مجهول است، معادلات انرژی در استوانه داخلی و فضای حلقوی بین دو استوانه به صورت پیوسته به هم حل می شود. یعنی ابتدا معادله انرژی در لوله داخلی و حلقوی با یک فرض اولیه برای دمای دیواره استوانه داخلی حل می شود و سپس حدس اولیه با نوشتن معادله انتقال حرارت بین سطح

داخلی و یک ردیف گره بالاتر و یک ردیف گره پایین تر از آن، اصلاح می شود و این روند آنقدر تکرار می شود تا دمای سطح داخلی با تقریب خوبی مشخص شود. دیواره استوانه داخلی و خارجی نازک فرض می شود و از انتقال حرارت در راستای محوری در دیواره استوانه ها صرف نظر می شود.

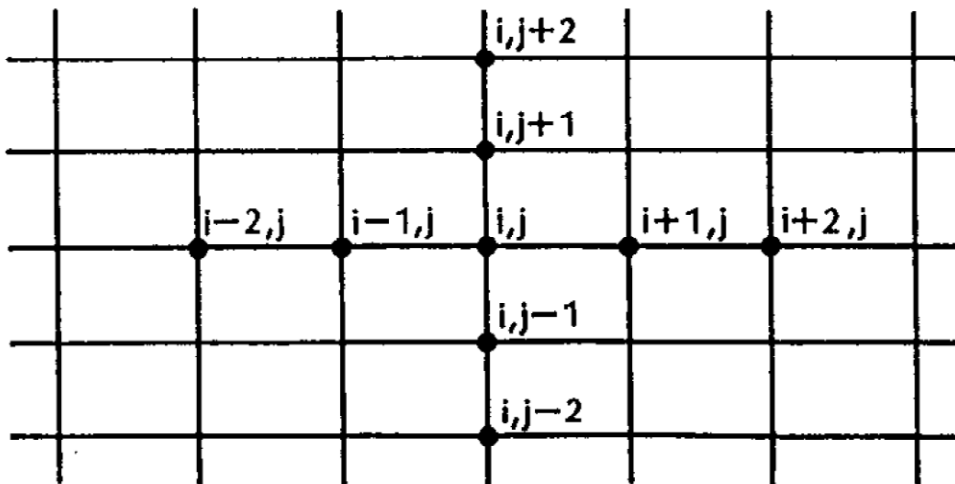
۴ - ۲ - ۱ : گسسته سازی

برای حل عددی معادله انتقال حرارت از روش گسسته سازی تفاضل محدود استفاده شده است. از بین فرمولبندیهای مختلف موجود، از فرمولبندی (پنج نقطه) بیشتر استفاده می شود. در این روش از تفاضل مرکزی استفاده می شود که از دقت مرتبه دوم برخوردار است. نقاط مربوط به شبکه این فرمولبندی در شکل ۴ - ۳ نشان داده شده اند.



شکل (۴ - ۳) : نقاط مربوط به شبکه ۵ نقطه ای [۲۹]

فرمولبندی با مرتبه بالاتر، فرمولبندی ۹ نقطه ای است که در آن تقریب مرتبه چهارم مشتقها به کار می رود. نقاط مربوط به شبکه این فرمولبندی در شکل ۴ - ۴ نشان داده شده اند.



شکل (۴-۴): نقاط مربوط به شبکه ۹ نقطه ای [۲۹]

یکی از دشواریهای آشکار این فرمولبندی، به کار بردن شرایط مرزی است. بنابراین در مسائلی که به دقت بالا نیاز دارند، راه آسانتر این است که به جای معادله ۹ نقطه ای با دقت مرتبه چهارم، از معادله ۵ نقطه ای با شبکه ریزتر استفاده شود. به همین دلیل در حل معادله انرژی از فرمولبندی ۵ نقطه ای استفاده شده است. از سوی دیگر همانطور که در بخش ۳-۲ اشاره شد، برای اعداد پکلت بزرگ، رسانش طولی قابل چشم پوشی است. این امر در مورد شرایط مساله ما نیز صدق می کند. بنابراین معادله ۳-۱ با حذف جملات شامل گرادیان نسبت به θ و صرف نظر از احتساب رسانش طولی به صورت زیر خواهد بود:

$$\bar{v}_z \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} + \bar{v}_r \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} = \frac{1}{\text{PrRe}} \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} \right) + \quad (4-11)$$

$$+ \frac{Ec}{\text{Re}} \left[2 \left(\frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{\bar{v}_r}{r} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} + \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial r} - \frac{\bar{v}_\theta}{r} \right)^2 \right]$$

فرم گسسته تفاضل محدود معادله بالا به صورت رابطه ۴-۱۲ در می آید.

$$\begin{aligned}
& Vz(i, j, k) \frac{T(i, j, k+1) - T(i, j, k-1)}{2(dz)} + Vr(i, j, k) \frac{T(i, j+1, k) - T(i, j-1, k)}{2(dr)} = \quad (۴ - ۱۲) \\
& = \frac{1}{PrRe} \left\{ \frac{T(i, j+1, k) - 2 * T(i, j, k) + T(i, j-1, k)}{(dr)^2} + \frac{T(i, j+1, k) - T(i, j-1, k)}{r(j) * 2(dr)} \right\} \\
& \quad + \frac{Ec}{Re} \left\{ 2 \left(\frac{Vr(i, j+1, k) - Vr(i, j-1, k)}{2(dr)} \right)^2 \right. \\
& \quad + 2 \left(\frac{Vz(i, j, k+1) - Vz(i, j, k-1)}{2(dz)} \right)^2 + \left(\frac{Vz(i, j+1, k) - Vz(i, j-1, k)}{2(dr)} \right)^2 \\
& \quad + \left(\frac{Vt(i, j, k+1) - Vt(i, j, k-1)}{2(dz)} \right)^2 + \left(\frac{Vt(i, j+1, k) - Vt(i, j-1, k)}{2(dr)} \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{Vt(i, j, k)}{r(j)} \right)^2 \right\}
\end{aligned}$$

معادله ۴ - ۱۲ نیز بی بعد است و علامت بی بعد بودن متغیرها حذف شده است.

۴ - ۲ - ۲: روش تکراری گاوس - سایدل نقطه به نقطه

در این روش به محض مشخص شدن مقدار کمیتها، از آنها برای محاسبه مقادیر نقاط مجاور آن استفاده می شود. این امر باعث افزایش چشمگیر همگرایی این روش در مقایسه با روش ژاکوبی می شود (تقریباً ۱۰۰ درصد). روش در صورتی پایدار است که در ماتریس ضرایب، اجزا با بزرگترین مقدار قدر مطلق، روی قطر اصلی قرار گیرند. الگوریتم حل عددی معادله انتقال حرارت به صورت پیوسته در شبکه استوانه داخلی و حلقوی، در پیوست آمده است.

فصل پنجم :

نتایج

۵ - ۱ : نتایج به دست آمده از بخش حل تحلیلی

روش حل تحلیلی معادله انتقال حرارت در فصل سوم به طور مشروح مورد بررسی قرار گرفت. در این بخش ضمن اشاره به محدودیت های موجود در مورد حل، نتایج آن ارائه می شود.

۵ - ۱ - ۱ : محدودیت های موجود

همان طور که قبلاً اشاره شد، معادله اشتورم لیویل $3 - 67$ با کمک استفاده از سری ها حل شد و مقادیر ویژه به دست آمدند. اما تمامی مقادیر ویژه به دست آمده قابل استفاده نیستند و در مورد مسأله ما، فقط مقادیر ویژه مثبت حقیقی برای تولید سری مورد نظر مناسبند. از سوی دیگر برای به دست آوردن مقادیر ویژه مناسب به تعدادی که برای تولید سری جواب با دقت مطلوب کافی باشند، باید مرتبه سری را تا حد زیادی بالا برد تا تعداد مقادیر ویژه به دست آمده نیز بیشتر شود؛ که این عمل احتیاج به رایانه ها و نرم افزارهای ریاضی قوی دارد. در این تحقیق از نرم افزار MAPLE استفاده شده که در حال حاضر مناسب ترین نرم افزار برای این گونه محاسبات به نظر می رسد، اما خود با محدودیت هایی از لحاظ حجم عملیات ریاضی (مخصوصاً در صورت کاربرد روی رایانه های شخصی) مواجه است. با وجود چنین محدودیت هایی، به دست آوردن یک حل تحلیلی جامع سه بعدی برای معادله $3 - 35$ میسر نشده است، اما برای برخی شرایط خاص جریانی یا شرایط خاص مرزی، با جایگذاری مقادیر عددی، منحنی های به دست آمده تطابق خوبی با حل عددی داشته اند که یک نمونه از آن در اینجا بیان می شود. شایان ذکر است که شاید به لحاظ عملی این گونه نمونه ها با کاربری محدود، کاربرد زیادی نداشته باشند اما به لحاظ تکنیک حل ریاضی مورد استفاده، بتوانند نقطه شروعی برای به دست آوردن حل های جامع تحلیلی برای مسائل مشابه باشند.

۵ - ۱ - ۲ : یک نمونه حل سری برای شرایط خاص جریانی و شرایط خاص مرزی

معادله ۳ - ۳۵ برای شرایط $Pr = 2.3$, $Re_a = 300$, $Re_r = 105$ و شرایط مرزی

دمایی $T_{outer} = 400k$, $T_{inner} = 360k$, $T_{inlet} = 300k$ حل شده که نتیجه آن در

قسمت توسعه یافته هیدرودینامیکی (در مسأله ما $z/D_h = 32.2$) به صورت معادله ای برای

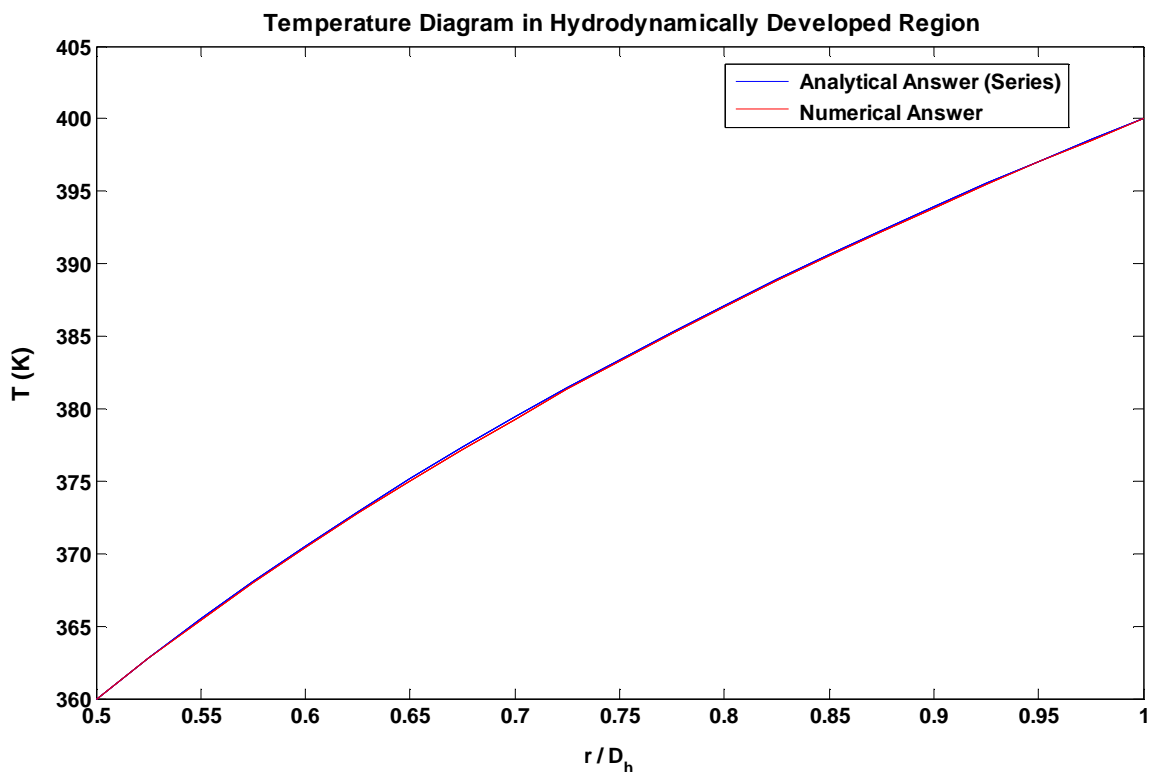
منحنی تغییرات دما با شعاع به صورت زیر به دست آمده است.

(۵ - ۱)

$$T = -\frac{1}{r^2} (6.00000000010^{-20} (7.12960658510^{13} r^4 - 1.666666666610^{21} r^2 + 3.68477667010^{16} r^6 - 5.95609822610^{19} r^9 + 6.23546998410^{18} r^8 - 3.48775651010^{26} r^{35} + 1.19231492310^{26} r^{36} - 3.31374508910^{25} r^{37} + 7.19711822310^{24} r^{38} - 9.61796694410^{20} \ln(r) r^2 - 5.36827149210^{17} r^7 + 7.89422992710^9 - 1.92642617110^{15} r^5 - 1.63341978710^{12} r^3 + 8.51962672810^{26} r^{34} - 8.40054364010^{27} r^{29} + 6.87369127110^{27} r^{30} - 4.98352732610^{27} r^{31} + 3.18032617410^{27} r^{32} - 1.77148004510^{27} r^{33} + 4.78339920410^{20} r^{10} - 3.28363325110^{21} r^{11} + 1.95117616710^{22} r^{12} - 1.01354467610^{23} r^{13} + 4.63858174210^{23} r^{14} - 1.88206079310^{24} r^{15} + 6.80395385610^{24} r^{16} - 2.20042389910^{25} r^{17} + 6.38623093810^{25} r^{18} - 1.66741223010^{26} r^{19} + 3.92371157810^{26} r^{20} - 8.33216690410^{26} r^{21} + 1.59790023410^{27} r^{22} - 2.76808209910^{27} r^{23} + 4.33050169810^{27} r^{24} - 6.11365751310^{27} r^{25} + 7.77877386210^{27} r^{26} - 8.90351550410^{27} r^{27} + 9.14459574410^{27} r^{28} + 1.03976189810^8 \ln(r)^2 r^2 + 1.19207877410^{23} r^{40} - 6.07234276410^{21} r^{41} - 1.14653717010^{24} r^{39})) + 300.$$

در شکل ۵ - ۱ این نتیجه با منحنی حاصل از حل عددی معادله انتقال حرارت مقایسه شده است و

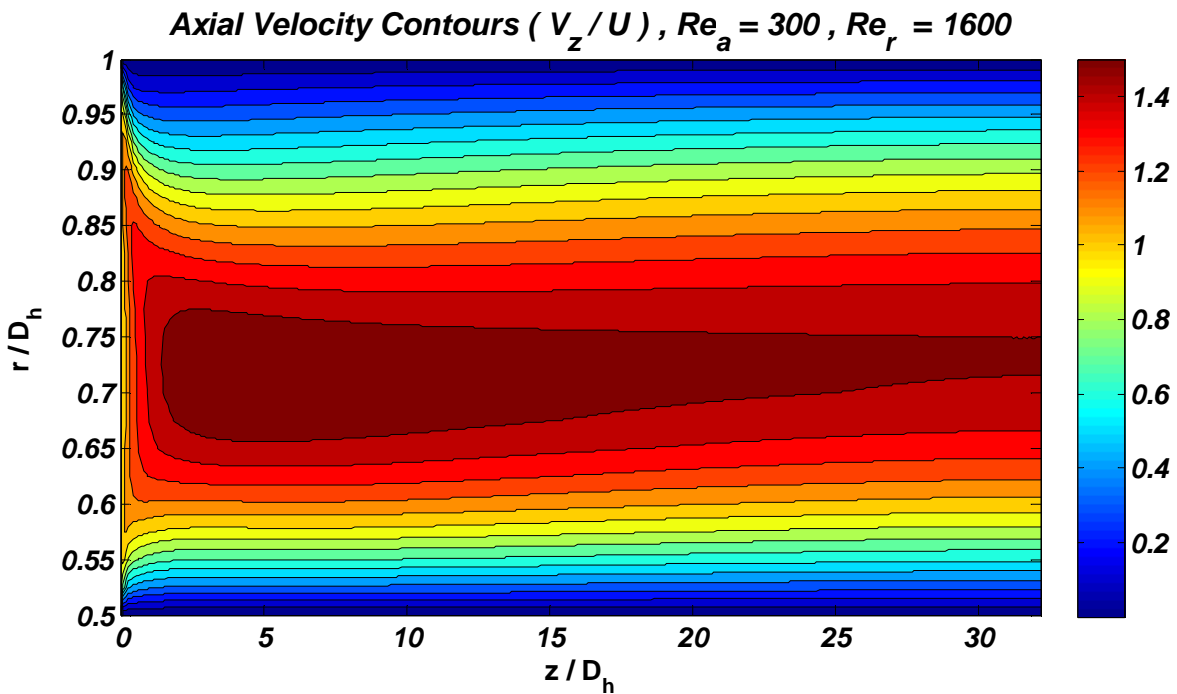
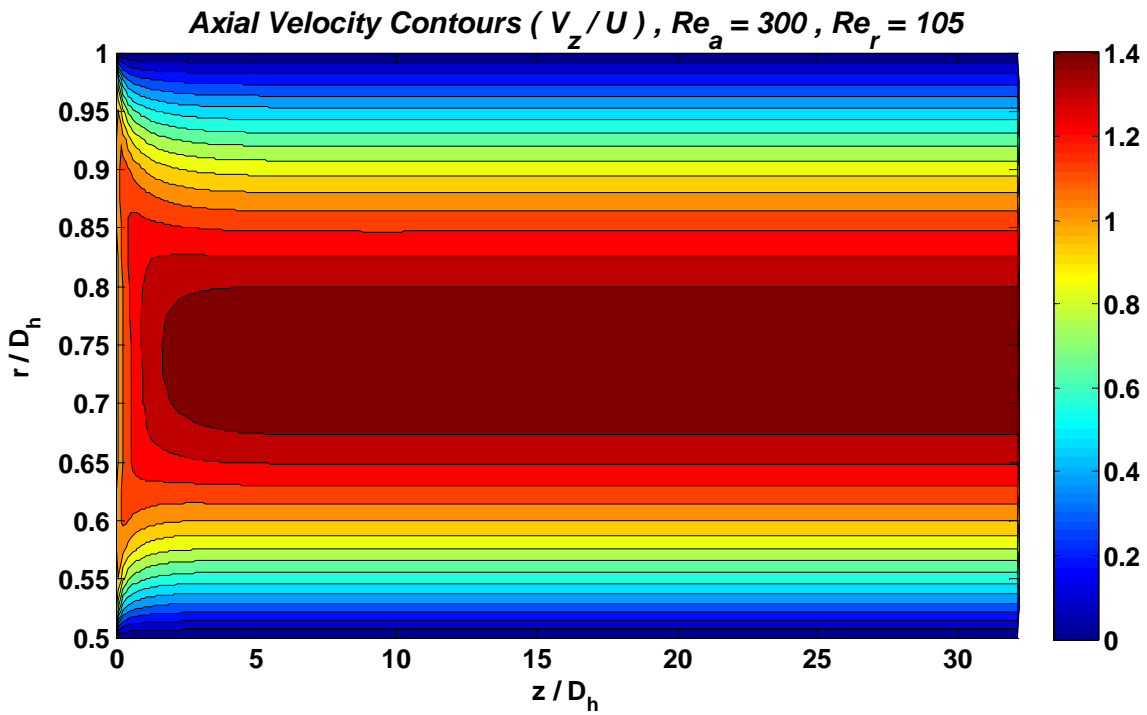
هماهنگی زیادی بین دو نتیجه مشهود است.

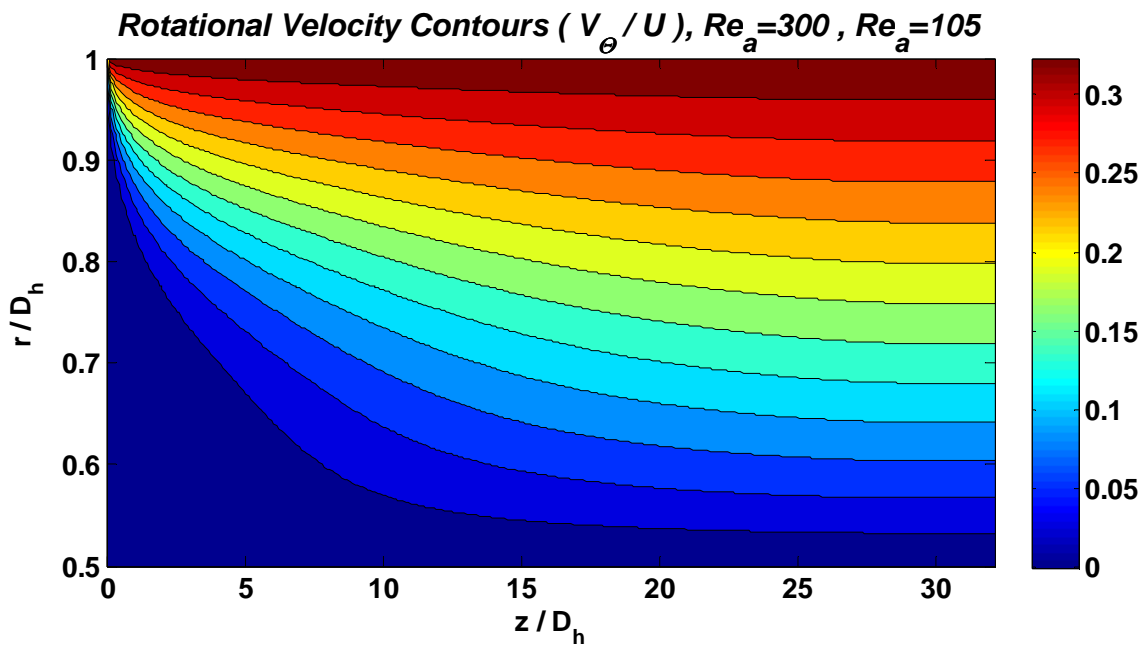


شکل (۵ - ۱) : تغییرات دما در حلقوی با فاصله شعاعی از محور در $Re_a = 300$, $Re_r = 105$ و $z/D_h=32.2$

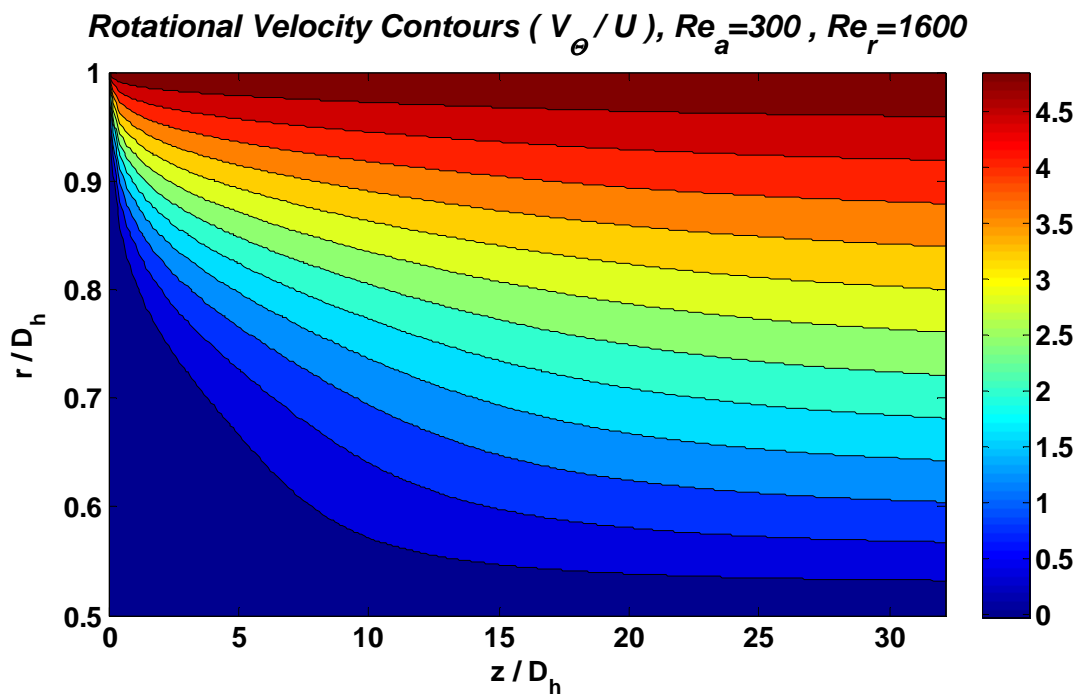
۵ - ۲ : نتایج به دست آمده از حل عددی معادلات مومنتوم

معادلات مومنتوم سه بعدی برای جریان محوری داخل حلقوی با سرعت ورودی ثابت، همراه با دوران استوانه خارجی تحت شرایط رینولدز محوری برابر ۳۰۰ و سرعت های دورانی و به تبع آن رینولدزهای دورانی مختلف حل شده اند. همچنین معادلات یاد شده تحت شرایط سرعت دورانی $\Omega = 0.2$ و رینولدز دورانی ۱۰۵ برای سرعت های محوری ورودی متفاوت حل شده اند و پروفیل های سه بعدی سرعت محوری، سرعت دورانی و سرعت شعاعی در طول حلقوی به دست آمده اند. در شکل های ۵ - ۲ و ۵ - ۳ کانتورهای سرعت محوری و در شکل های ۵ - ۴ و ۵ - ۵ کانتورهای سرعت دورانی نمایش داده شده اند. همچنین برای نمایش بهتر تغییرات منحنی سرعت محوری در طول حلقوی، در شکل ۵ - ۶ منحنی های سرعت محوری در مقاطع مختلف نشان داده شده اند.

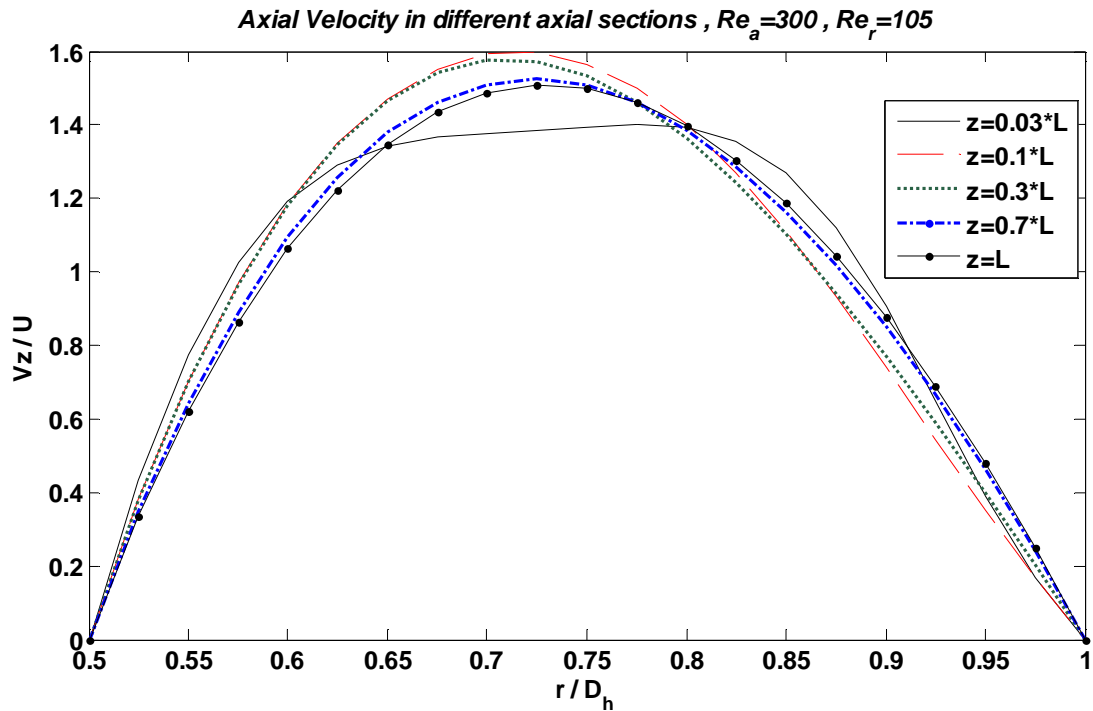




شکل (۴ - ۵) : کانتورهای سرعت محوری برای $Re_a = 300$, $Re_r = 105$



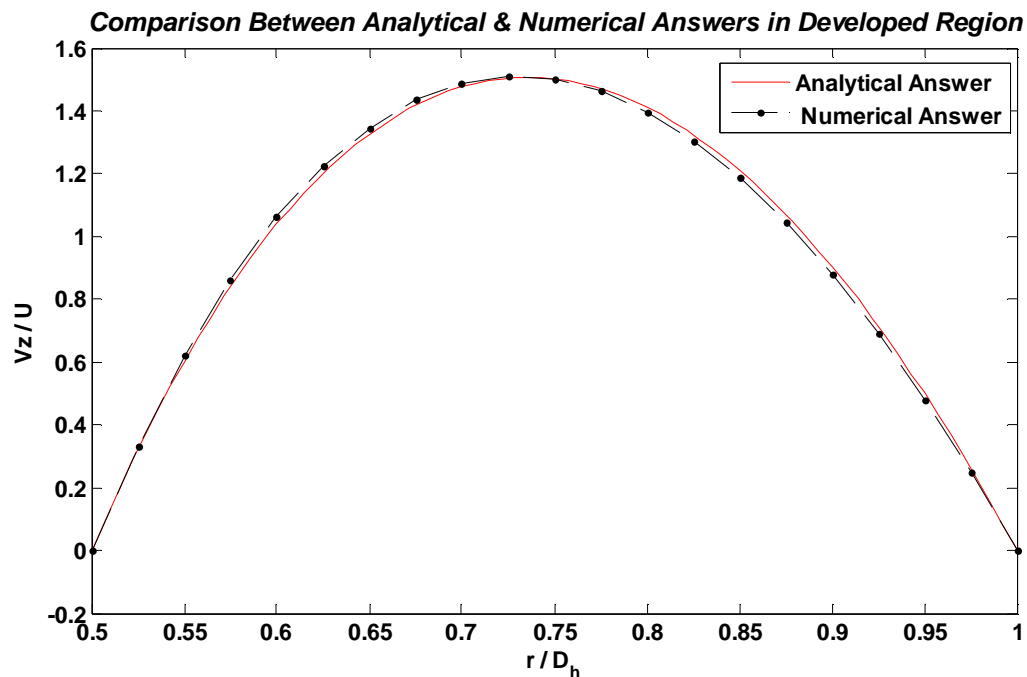
شکل (۵ - ۵) : کانتورهای سرعت دورانی برای $Re_a = 300$, $Re_r = 1600$



شکل (۵ - ۶) : منحنی های سرعت محوری در مقاطع مختلف حلقوی برای $Re_a = 300$, $Re_r = 105$

۵ - ۲ - ۱ : بررسی اعتبار حل عددی

برای تایید اعتبار کد حل عددی برای هندسه و شرایط مرزی مورد نظر، منحنی سرعت محوری در قسمت توسعه یافته (انتهای حلقوی) از حل عددی و حل تحلیلی از فصل سوم (معادلات ۳ - ۳۱ و ۳ - ۳۲) با هم مقایسه شده اند. در شکل ۵ - ۷ از این مقایسه همبستگی خوبی بین دو جواب مشاهده می شود.



شکل (۷ - ۵) : مقایسه پاسخ های تحلیلی و عددی برای سرعت محوری در ناحیه توسعه یافته برای

$$Re_a = 300 , Re_r = 105$$

۵ - ۲ - ۲ : بررسی عدم وابستگی نتایج حل عددی به شبکه

برای بررسی عدم وابستگی حل عددی به تعداد گره های شبکه، نتایج حل عددی معادلات مومنوموم برای سه نوع شبکه (21×351) و (17×281) و (13×211) با هم مقایسه شده اند. درصد تفاوت مولفه سرعت محوری در گره های مشترک، در حل عددی برای این سه شبکه، در جدول ۵ - ۱ نمایش داده شده است. با توجه به این جدول، عدم وابستگی نتایج حل عددی به شبکه در صورت استفاده از شبکه (21×351) تا حد خوبی استنباط می شود.

جدول ۵ - ۱ : درصد اختلاف مقدار مولفه سرعت محوری در گره های مشترک دو شبکه

درصد تفاوت دو شبکه	ماکزیمم تفاوت :	متوسط تفاوت :
۲۱ × ۳۵۱ با ۱۷ × ۲۸۱	۰,۹۹۵۱ %	۰,۱۱۲۰ %
۱۷ × ۲۸۱ با ۱۳ × ۲۱۱	۲,۰۴۳۶ %	۰,۹۱۴۴ %

۵ - ۳ : نتایج به دست آمده از حل عددی معادله انتقال حرارت

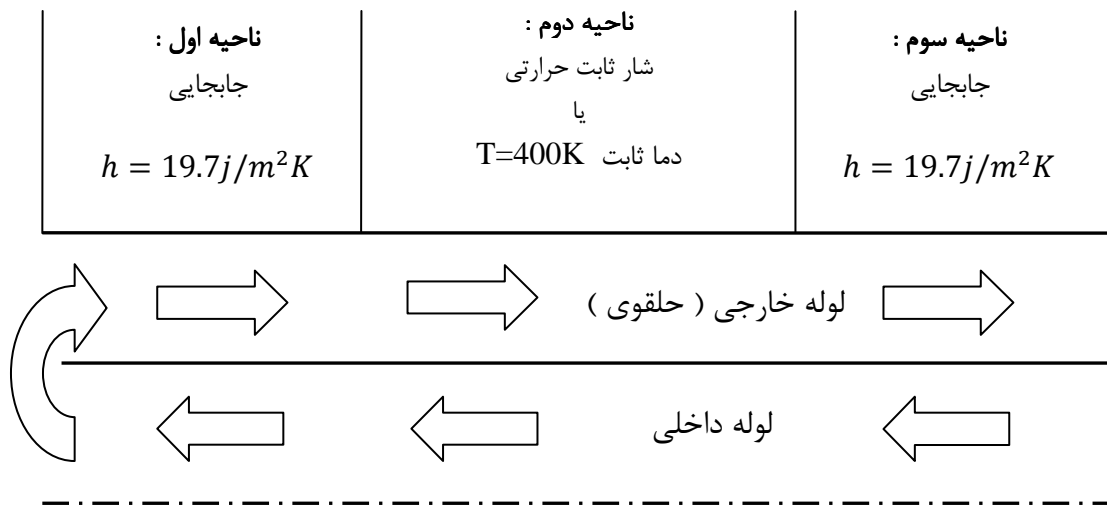
هندسه مسأله در فصل اول (بخش ۱ - ۳) توضیح داده شد. طول حلقوی ۴۵۰ میلیمتر، قطر خارجی آن ۲۸ میلی متر و قطر داخلی ۱۴ میلی متر می باشد. برای قسمت های ابتدایی و انتهایی حلقوی (طول هر یک ۱۱۵ میلی متر) که شرط مرزی جابجایی از طریق جریان آرام هوا در خارج حلقوی (عمود بر محور) داریم، ضریب جابجایی هوا با استفاده از رابطه چرچیل^۱ و برنستین^۲ که برای محدوده وسیعی از مقادیر رینولدز و پرانتل معتبر است، به دست می آید. رابطه ذکر شده برای ناسلت متوسط کلی به صورت ذیل است [۳۰] :

$$\overline{Nu}_D = 0.3 + \frac{0.62Re_D^{1/2}Pr^{1/3}}{[1+(0.4/Pr)^{2/3}]^{1/4}} \left[1 + \left(\frac{Re_D}{282000} \right)^{5/8} \right]^{4/5} \quad (۲-۵)$$

این رابطه برای جریان هوا در دمای ۳۴۰ k و با سرعت ۱ m/s ، ($Pr = 0.7$ و $Re_D = 1400$)، \overline{Nu}_D برابر ۱۸,۹ را نتیجه می دهد.

حال با این شرایط شکل ۵ - ۸ را که شبیه شکل ۲ - ۱ (به علاوه شرایط مرزی دمایی) است، به صورت ذیل خواهیم داشت:

^۱ - Churchill
^۲ - Bernstein

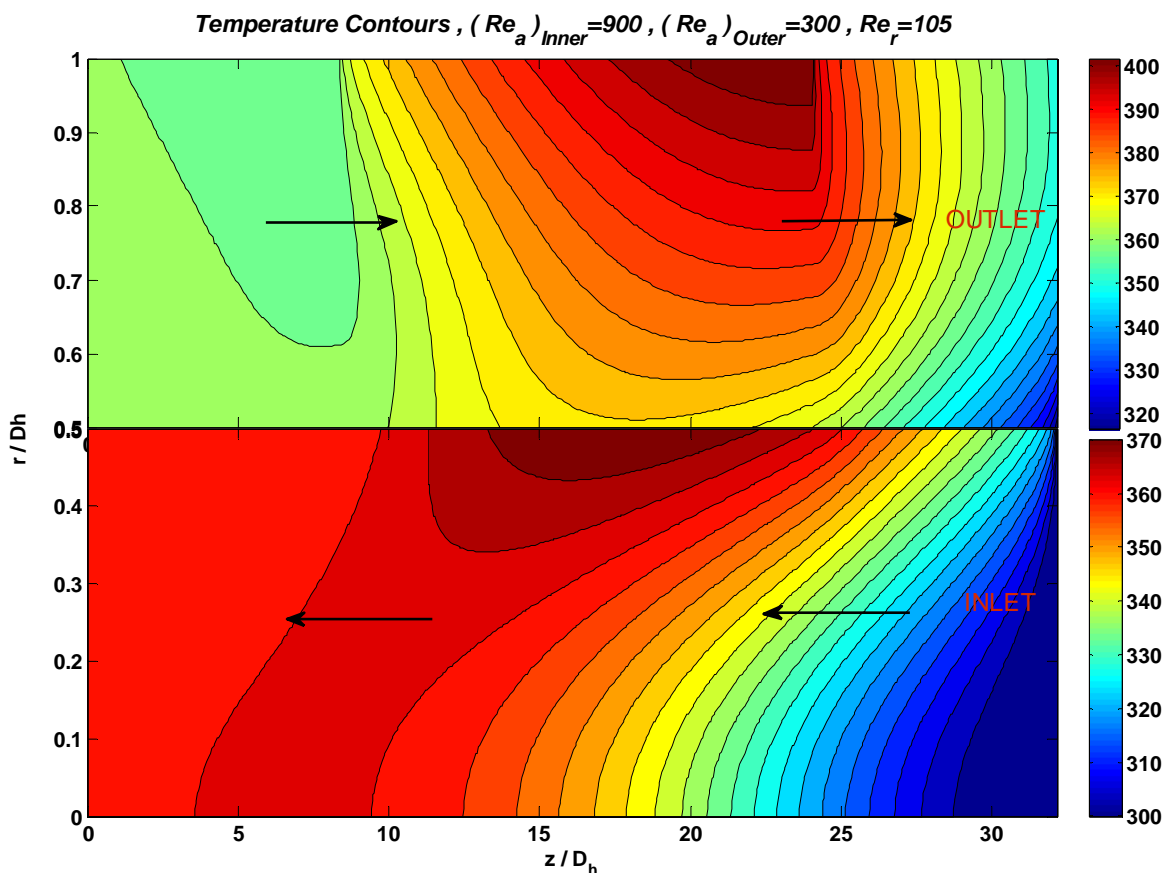


شکل (۵ - ۸) : شکل شماتیک هندسه مسأله به همراه شرایط مرزی

همانطور که در شکل ۵ - ۸ هم نمایش داده شده است، مسأله برای دو حالت شار حرارتی ثابت در ناحیه دوم و دما ثابت در ناحیه دوم حل شده و نتایج دو حالت به تفکیک ارائه شده است. بدیهی است که شرایط مرزی در ناحیه اول و سوم برای هر دو حالت یکسانند.

۵ - ۳ - ۱: نتایج حالت اول (جابجایی هوا - شار حرارتی ثابت - جابجایی هوا)

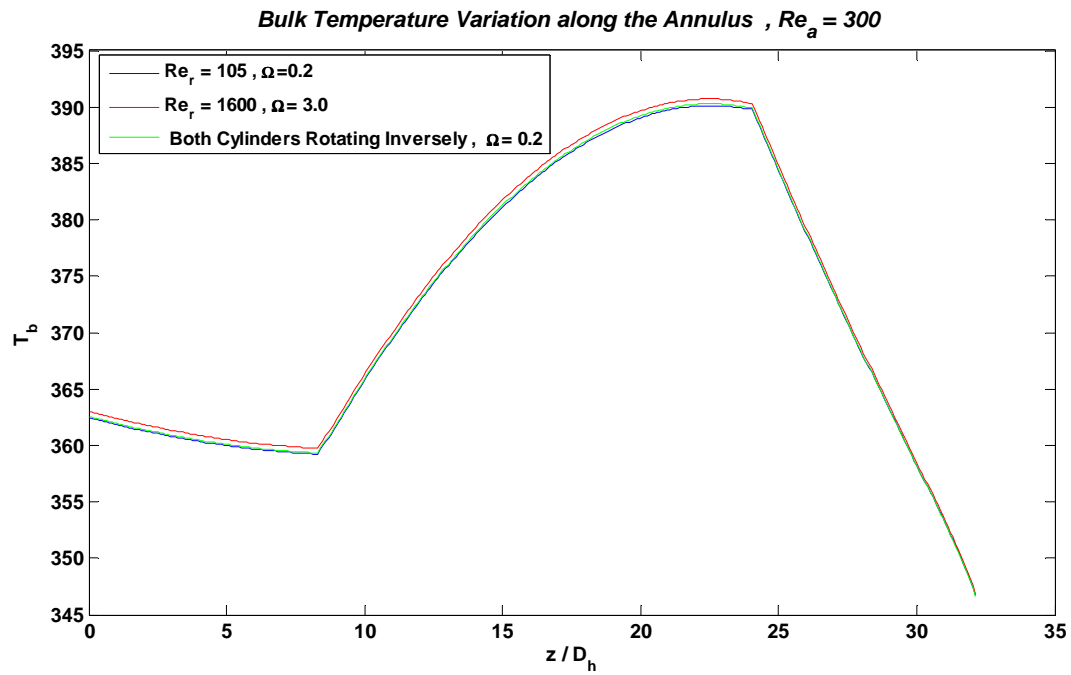
دمای سیال ورودی به استوانه داخلی 300 K می باشد. محدودیت برای مقدار شار حرارتی به صورت محدودیت حداکثر دمای آب وجود دارد که نباید بیشتر از دمای اشباع آب در فشار کاری مورد نظر بشود. برای فشار کاری مورد نظر ما ($4 - 5 \text{ bar}$)، حداکثر دمای مجاز (با ضریب اطمینان)، 405 K در نظر گرفته شده است. بنابراین با معیار قرار دادن این حداکثر دما، به صورت سعی و خطا برای مقادیر مختلف شار حرارتی، پروفیل دما در استوانه داخلی و حلقوی به دست می آید و حداکثر دمای تولید شده با دمای حداکثر معیار مقایسه شده و نهایتاً حداکثر شار حرارتی قابل اعمال به این صورت محاسبه می شود. این مقدار بعد از سعی و خطا، 2500 W/m^2 به دست آمده است. در شکل ۵ - ۹ پروفیل دما در استوانه داخلی و استوانه خارجی (حلقوی) نمایش داده شده است. فلش ها جهت جریان را مشخص می کنند.



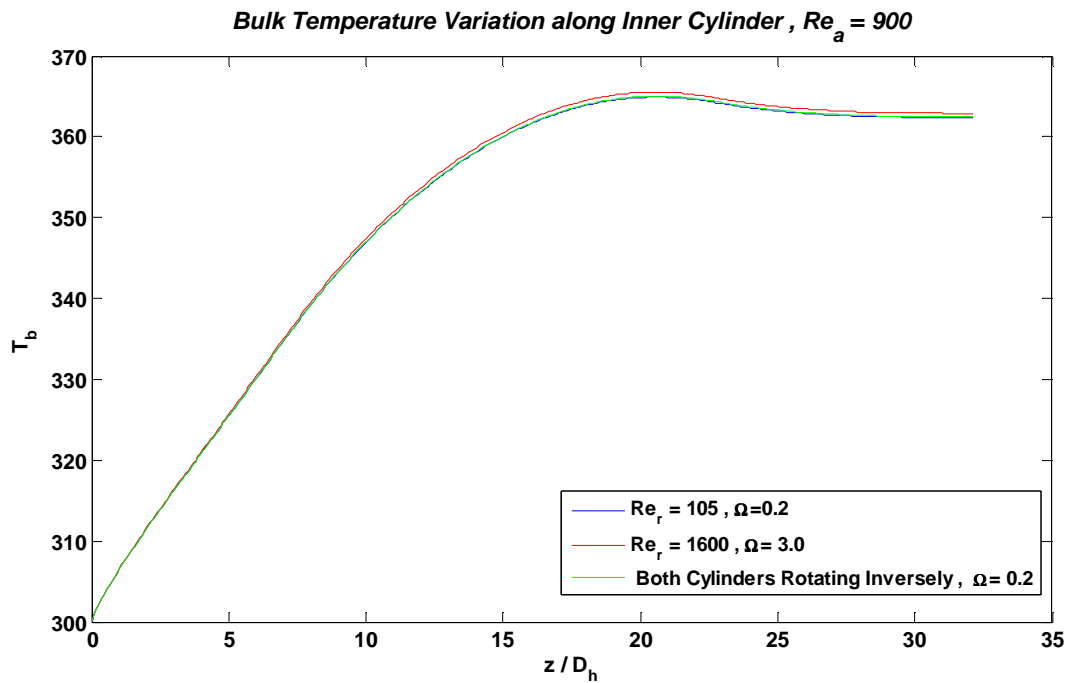
شکل (۵ - ۹) : پروفیل دما در استوانه داخلی و حلقوی برای شرط مرزی (جابجایی هوا - شار حرارتی ثابت - جابجایی هوا)

با شرایط مرزی دمایی یاد شده، و برای سه حالت رینولدز دورانی برابر ۱۰۵ ($\Omega = 0, 2$)، رینولدز دورانی برابر ۱۶۰۰ ($\Omega = 3$)، و حالت هر دو استوانه در حال دوران ($\Omega = 0, 2$)، نتایج به دست آمده در شکل های ۵ - ۱۰ تا ۵ - ۱۸ نشان داده شده است. ضریب انتقال حرارت جابجایی از

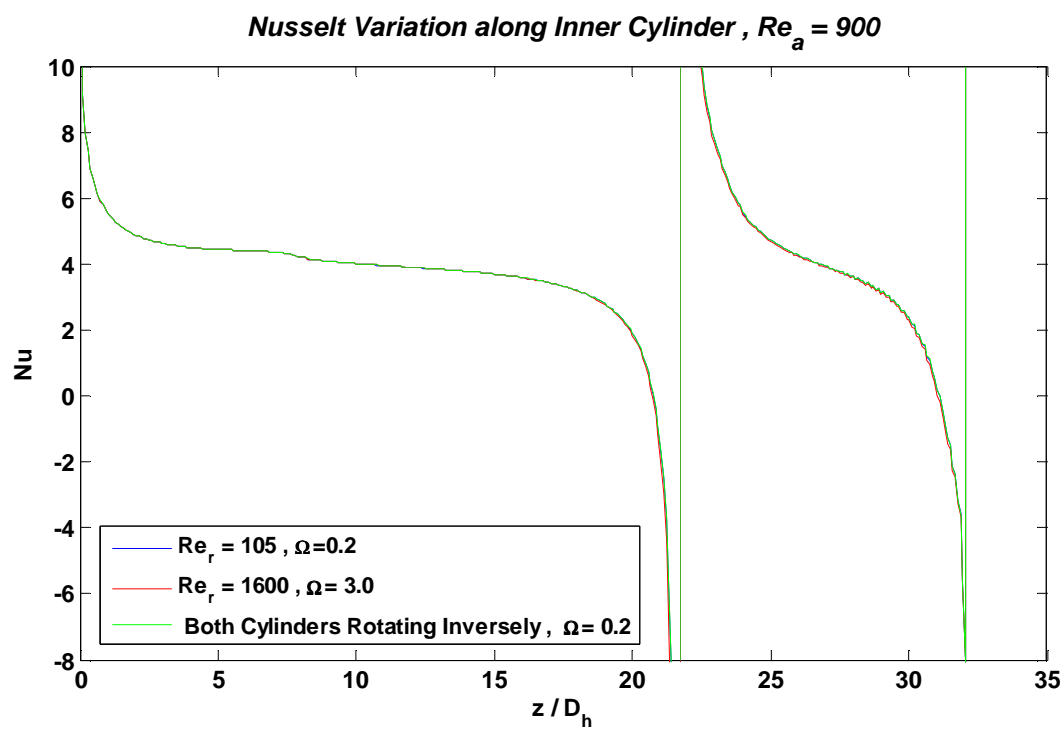
$$Nu = \frac{hD_h}{k} \text{ و به دست آمده و } 3 - 9$$



شکل (۵ - ۱۰) : منحنی های تغییرات دمای بالک جریان در طول حلقوی

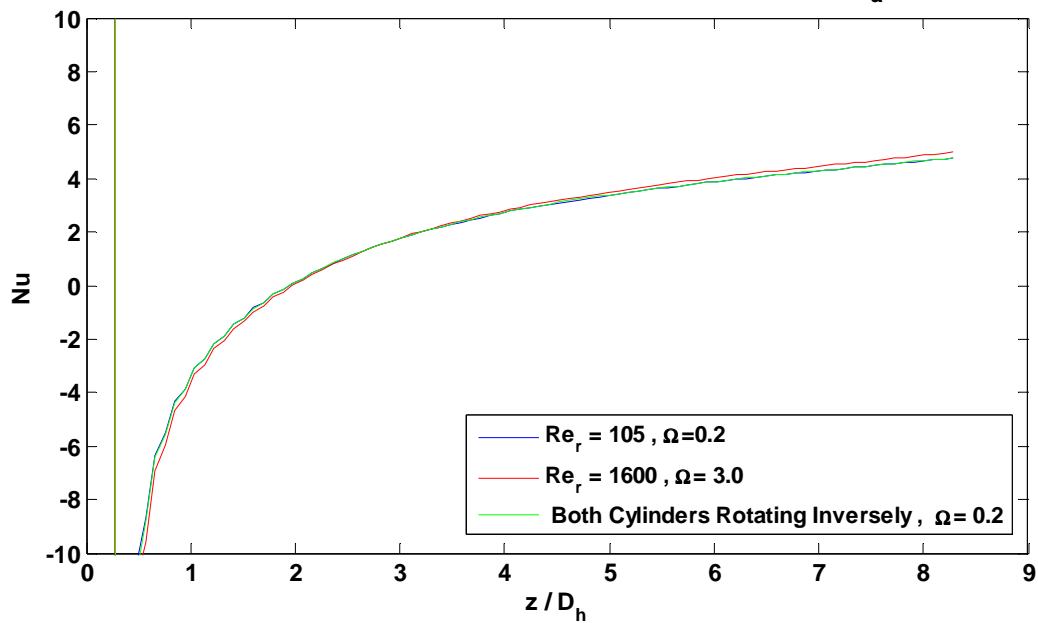


شکل (۵ - ۱۱) : منحنی های تغییرات دمای بالک جریان در طول استوانه داخلی



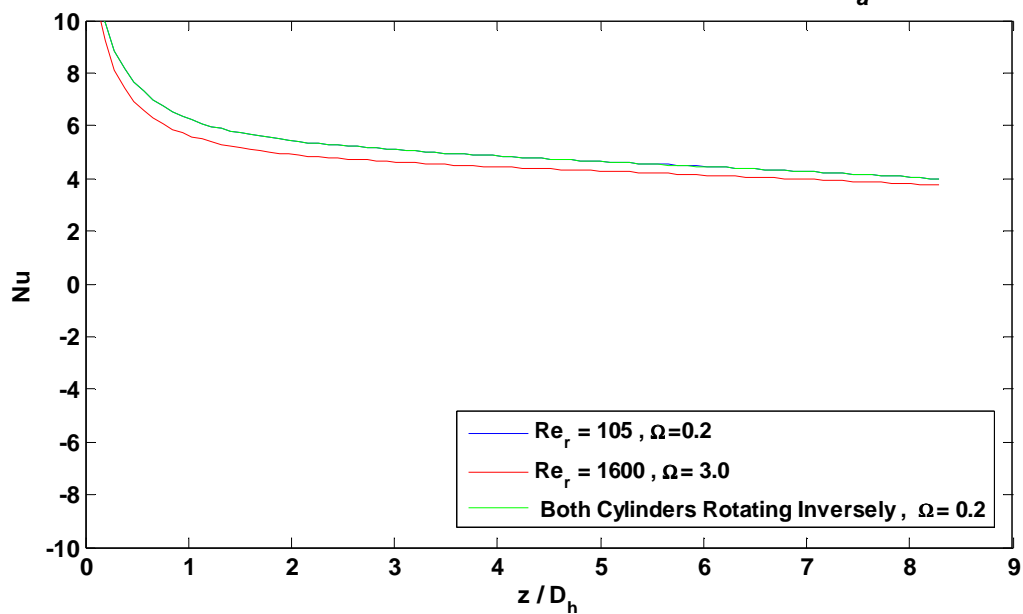
شکل (۵ - ۱۲) : منحنی های تغییرات عدد ناسلت در طول استوانه داخلی

Inner Wall Nusselt Variation along Annulus (part 1) , $Re_a = 300$



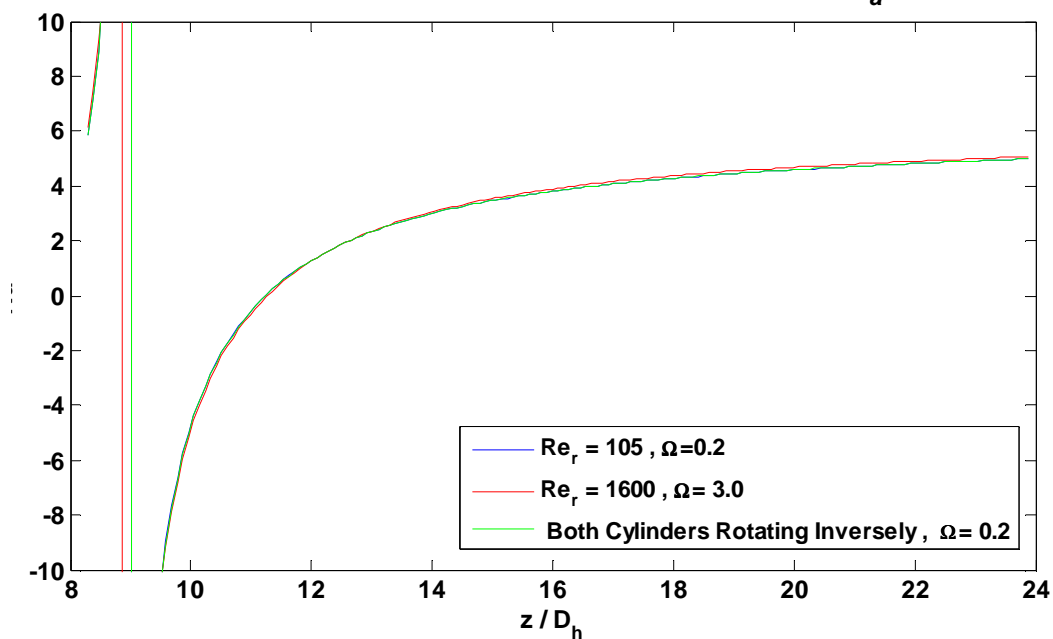
شکل (۵ - ۱۳) : منحنی های تغییرات عدد ناسلت جریان (متناظر سطح داخلی) در طول حلقوی (ناحیه اول)

Outer Wall Nusselt Variation along Annulus (part 1) , $Re_a = 300$



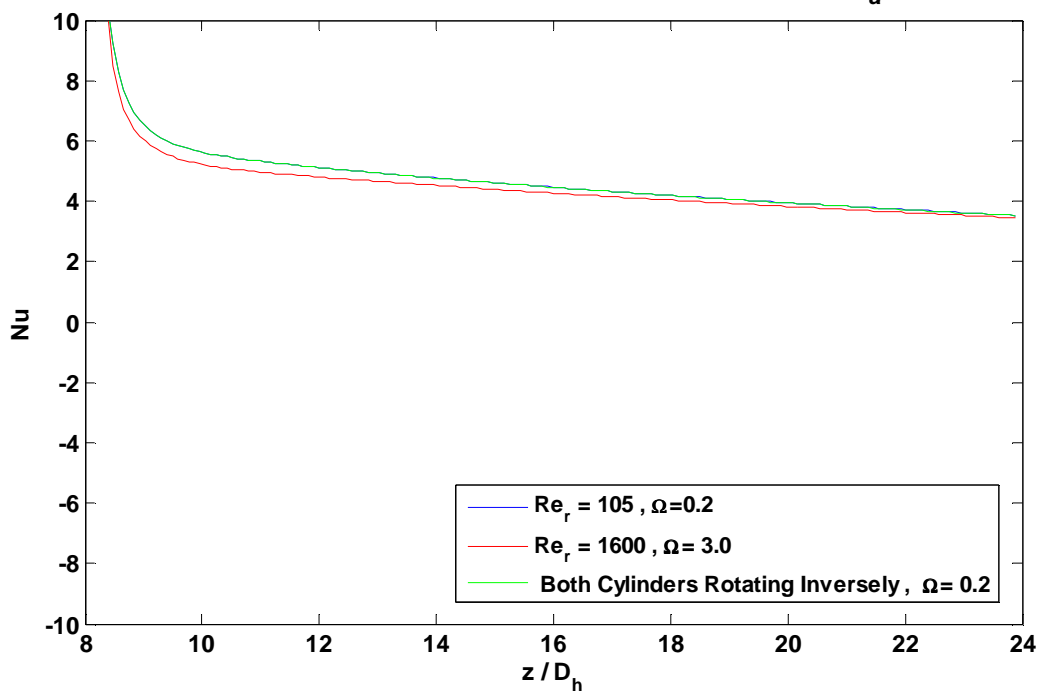
شکل (۵ - ۱۴) : منحنی های تغییرات عدد ناسلت جریان (متناظر سطح خارجی) در طول حلقوی (ناحیه اول)

Inner Wall Nusselt Variation along Annulus (part 2) , $Re_a = 300$



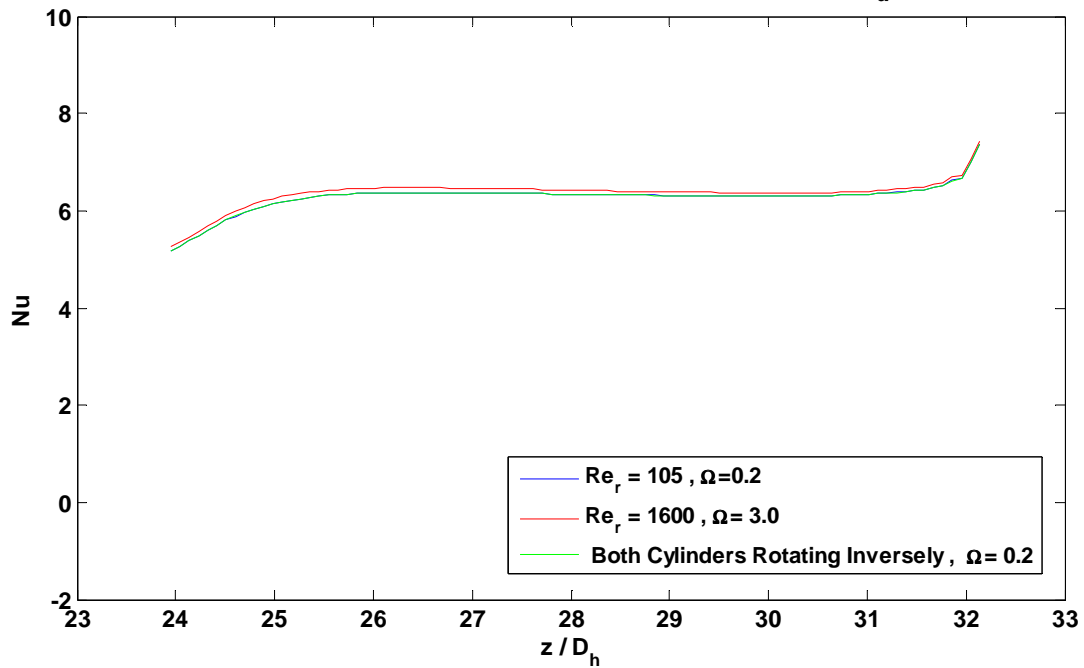
شکل (۵ - ۱۵) : منحنی های تغییرات عدد ناسلت جریان (متناظر سطح داخلی) در طول حلقوی (ناحیه دوم)

Outer Wall Nusselt Variation along Annulus (part 2) , $Re_a = 300$



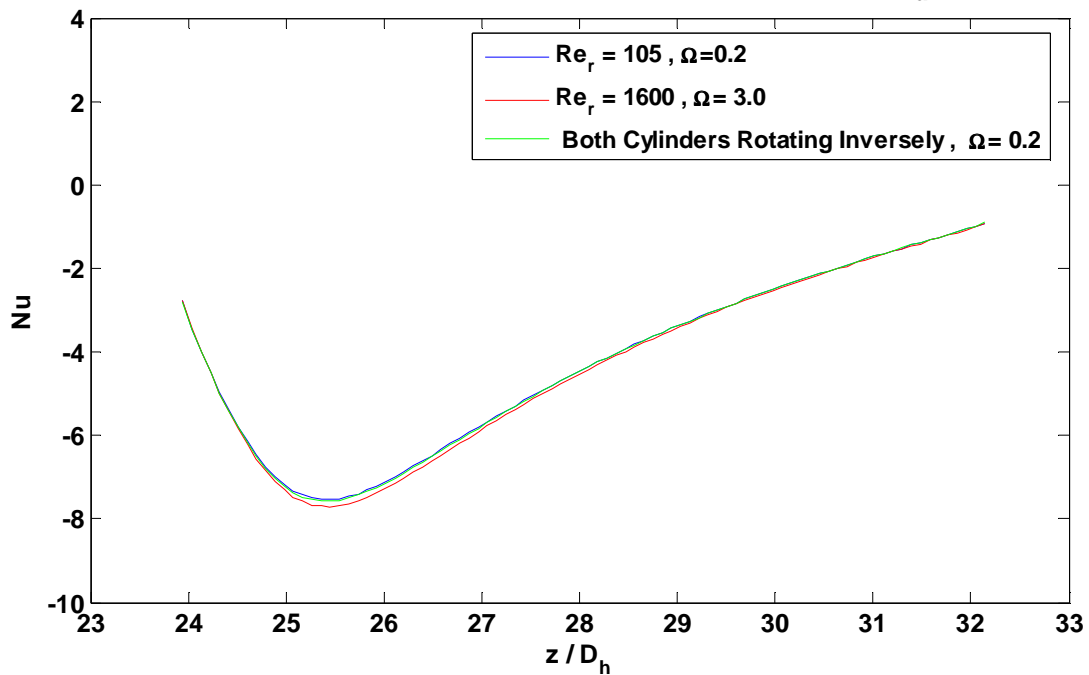
شکل (۵ - ۱۶) : منحنی های تغییرات عدد ناسلت جریان (متناظر سطح خارجی) در طول حلقوی (ناحیه دوم)

Inner Wall Nusselt Variation along Annulus (part 3) , $Re_a = 300$



شکل (۵ - ۱۷) : منحنی های تغییرات عدد ناسلت جریان (متناظر سطح داخلی) در طول حلقوی (ناحیه سوم)

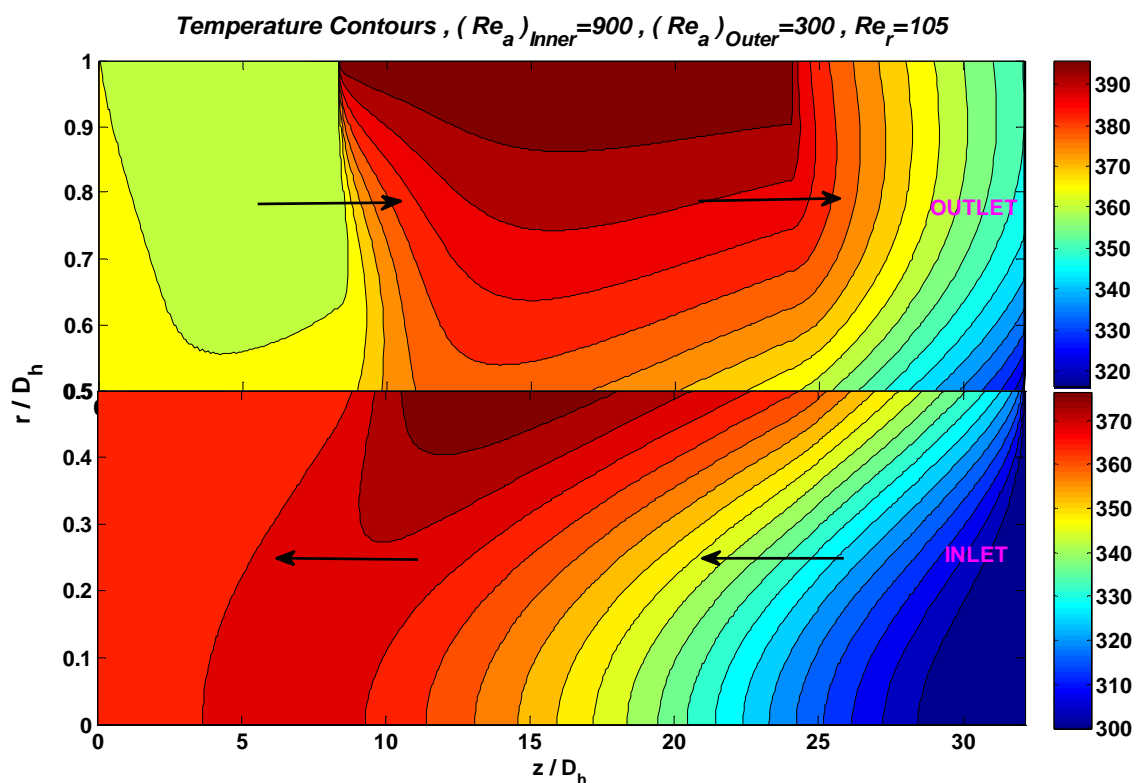
Outer Wall Nusselt Variation along Annulus (part 3) , $Re_a = 300$



(۵ - ۱۸) : منحنی های تغییرات عدد ناسلت جریان (متناظر سطح خارجی) در طول حلقوی (ناحیه سوم)

۵ - ۳ - ۲ : نتایج حالت دوم (جابجایی هوا - دما ثابت - جابجایی هوا)

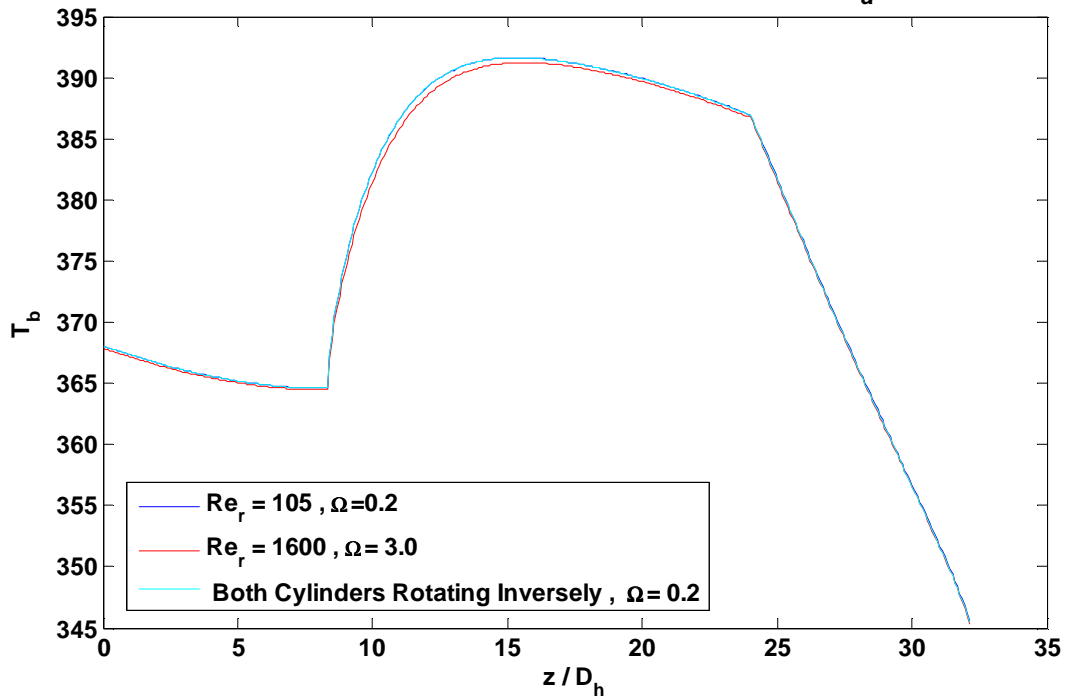
دمای سیال ورودی به استوانه داخلی مانند حالت قبلی 300 K می باشد. تفاوت شرایط مرزی با حالت قبل در ناحیه دوم است که به جای شار ثابت حرارتی، شرط مرزی دما ثابت برابر 400 K (حد اکثر دمای مجاز) است. در شکل ۵ - ۱۹ پروفیل دما در استوانه داخلی و استوانه خارجی (حلقوی) نمایش داده شده است. فلش ها جهت جریان را مشخص می کنند.



شکل (۵ - ۱۹) : پروفیل دما در استوانه داخلی و حلقوی برای شرط مرزی (جابجایی هوا - دما ثابت - جابجایی هوا)

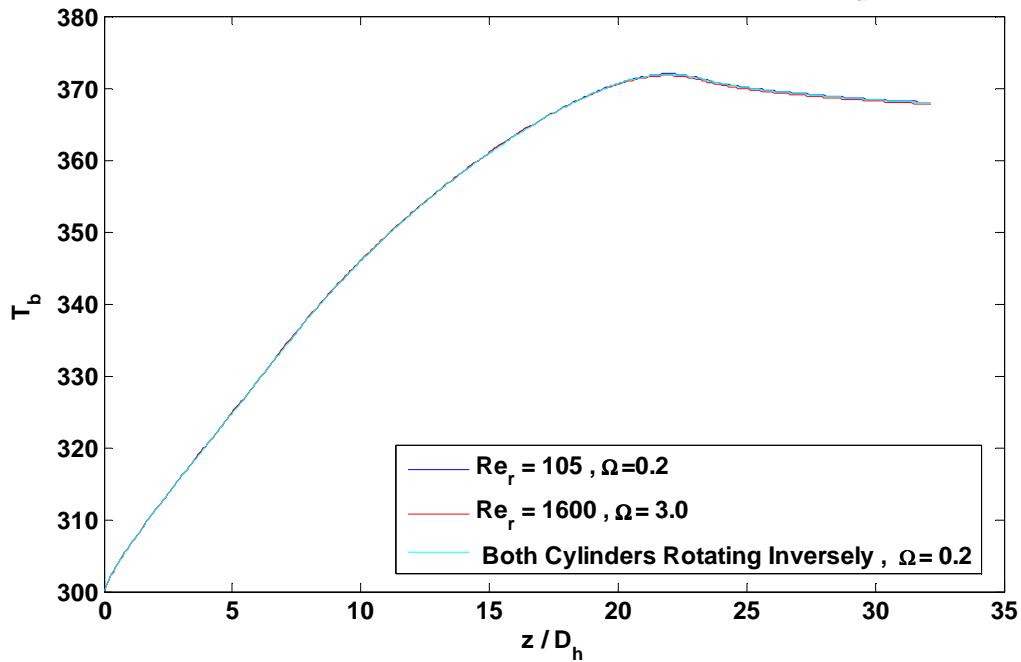
با شرایط مرزی دمایی یاد شده، و برای سه حالت رینولدز دورانی برابر 105 ($\Omega = 0, 2$)، رینولدز دورانی برابر 1600 ($\Omega = 3$)، و حالت هر دو استوانه در حال دوران ($\Omega = 0, 2$)، نتایج به دست آمده در شکل های ۵ - ۲۰ تا ۵ - ۲۸ نشان داده شده است.

Bulk Temperature Variation along the Annulus , $Re_a = 300$

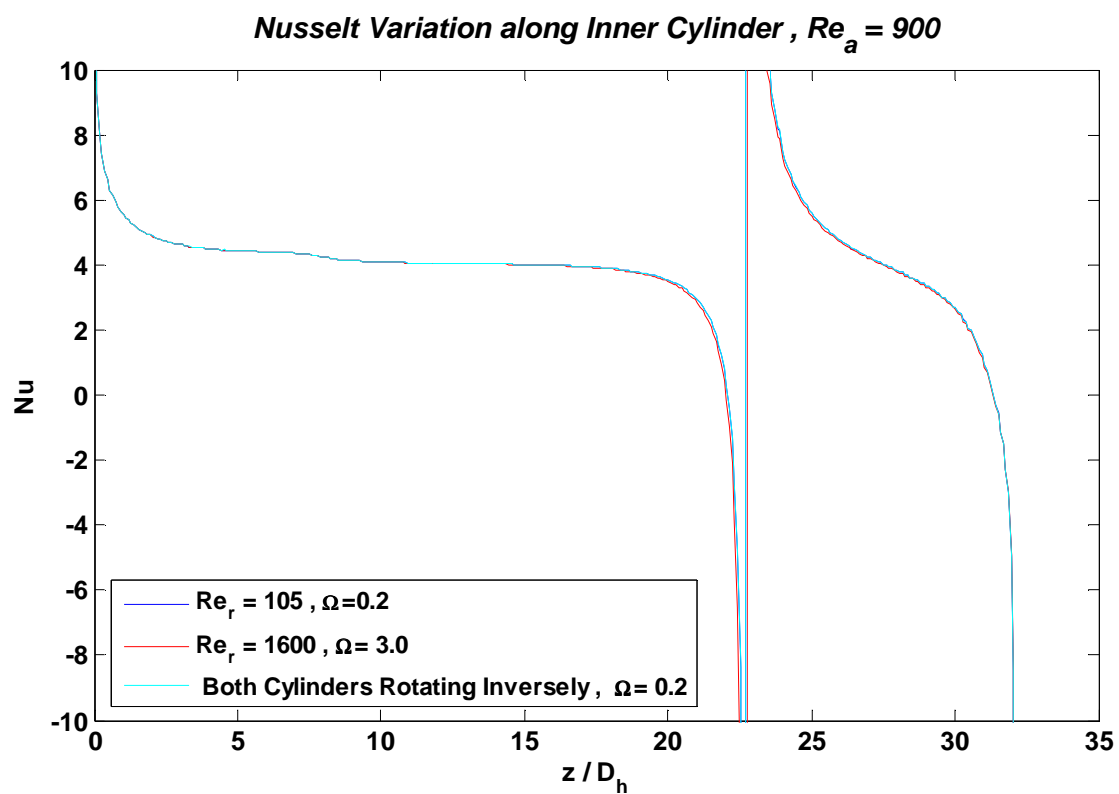


شکل (۲۰ - ۵) : منحنی های تغییرات دمای بالک جریان در طول حلقوی

Bulk Temperature Variation along Inner Cylinder , $Re_a = 900$

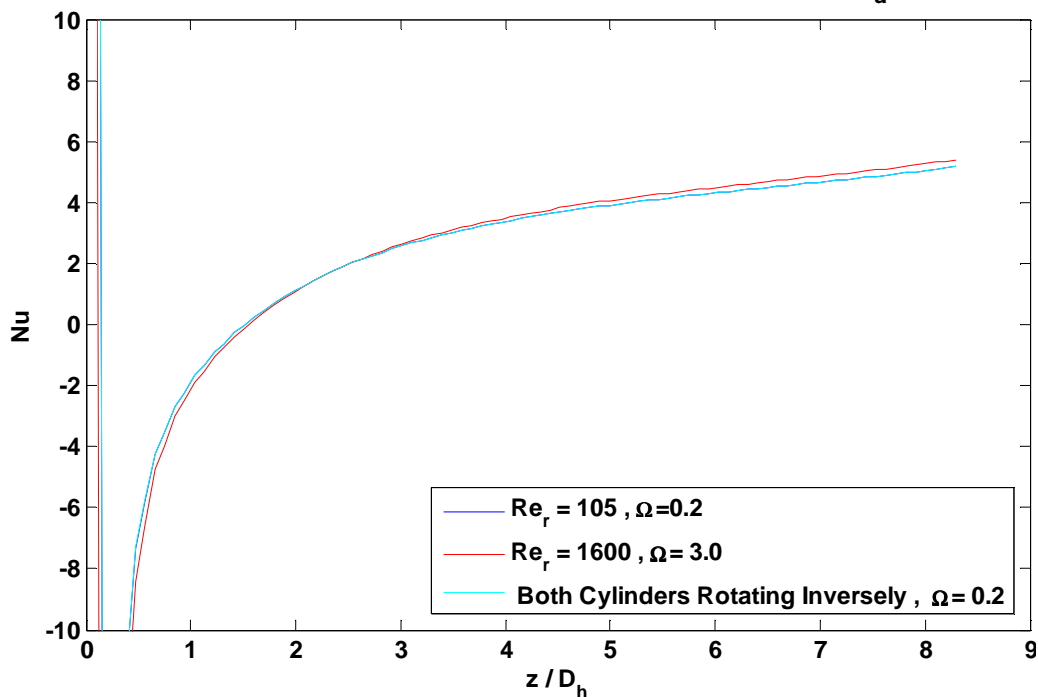


شکل (۲۱ - ۵) : منحنی های تغییرات دمای بالک جریان در طول استوانه داخلی



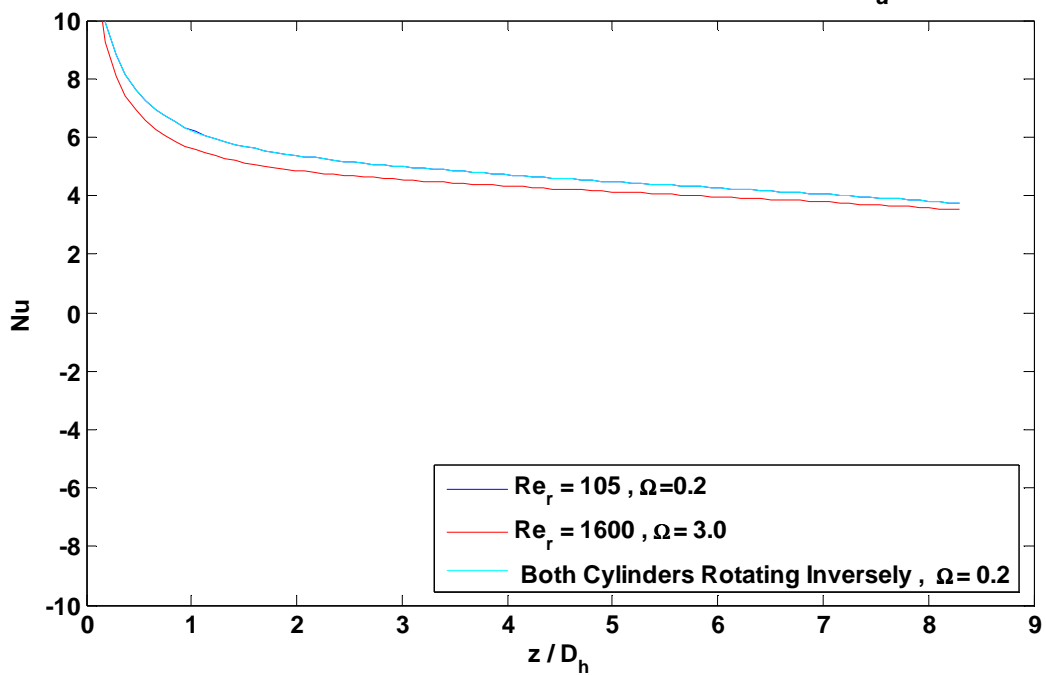
شکل (۵ - ۲۲) : منحنی های تغییرات عدد ناسلت در طول استوانه داخلی

Inner Wall Nusselt Variation along Annulus (part 1) , $Re_a = 300$



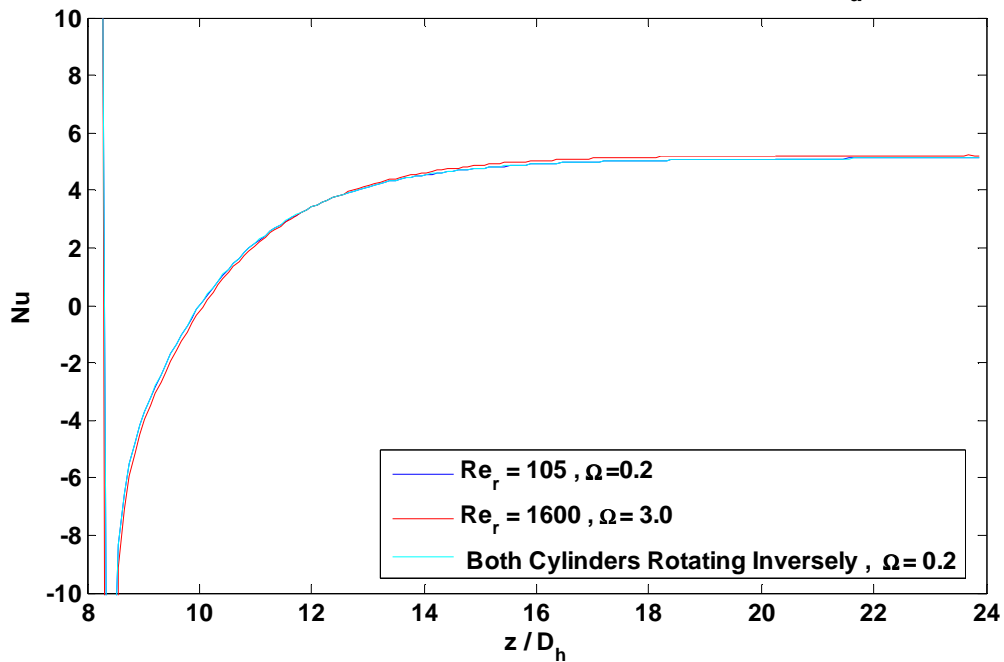
شکل (۵ - ۲۳) : منحنی های تغییرات عدد ناسلت جریان (متناظر سطح داخلی) در طول حلقوی (ناحیه اول)

Outer Wall Nusselt Variation along Annulus (part 1) , $Re_a = 300$



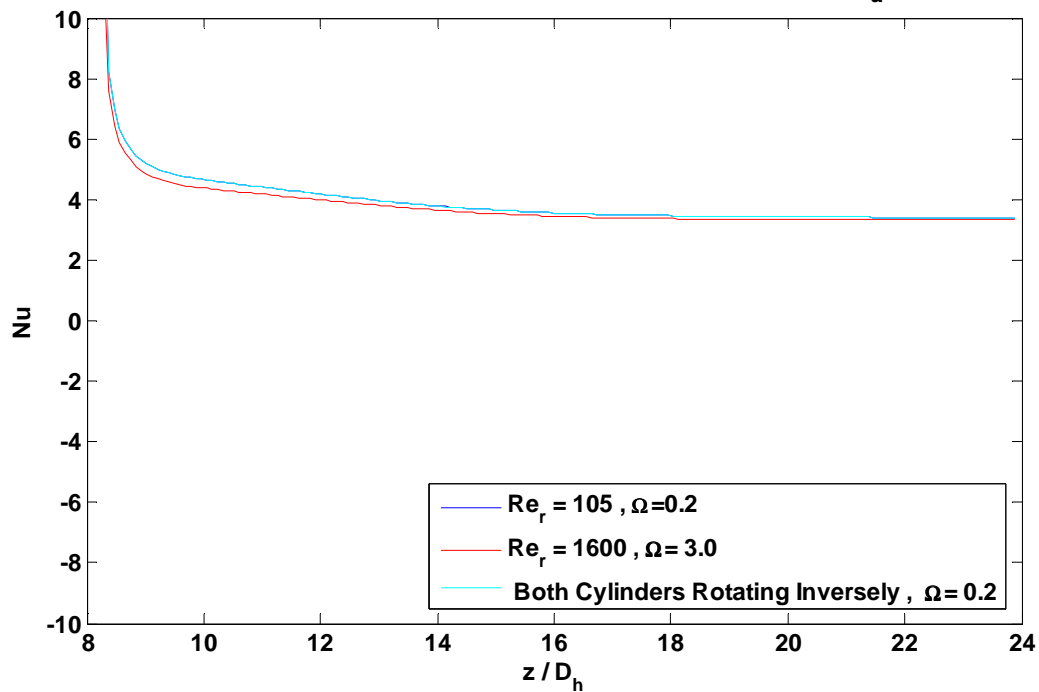
شکل (۵ - ۲۴) : منحنی های تغییرات عدد ناسلت جریان (متناظر سطح خارجی) در طول حلقوی (ناحیه اول)

Inner Wall Nusselt Variation along Annulus (part 2) , $Re_a = 300$



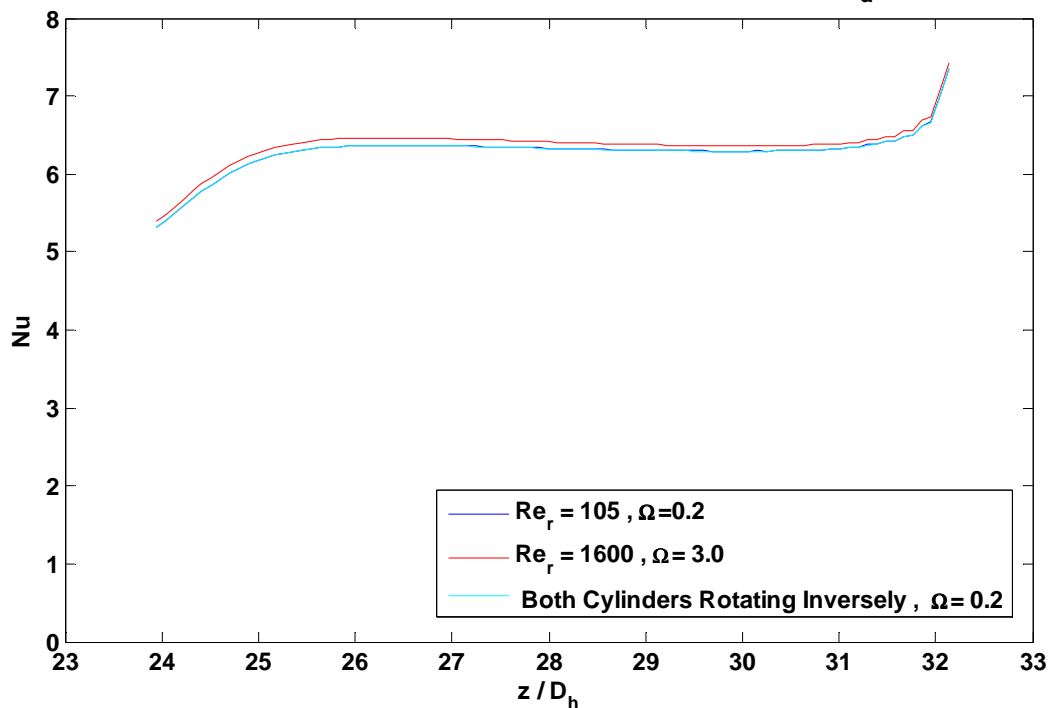
شکل (۵ - ۲۵) : منحنی های تغییرات عدد ناسلت جریان (متناظر سطح داخلی) در طول حلقوی (ناحیه دوم)

Outer Wall Nusselt Variation along Annulus (part 2) , $Re_a = 300$



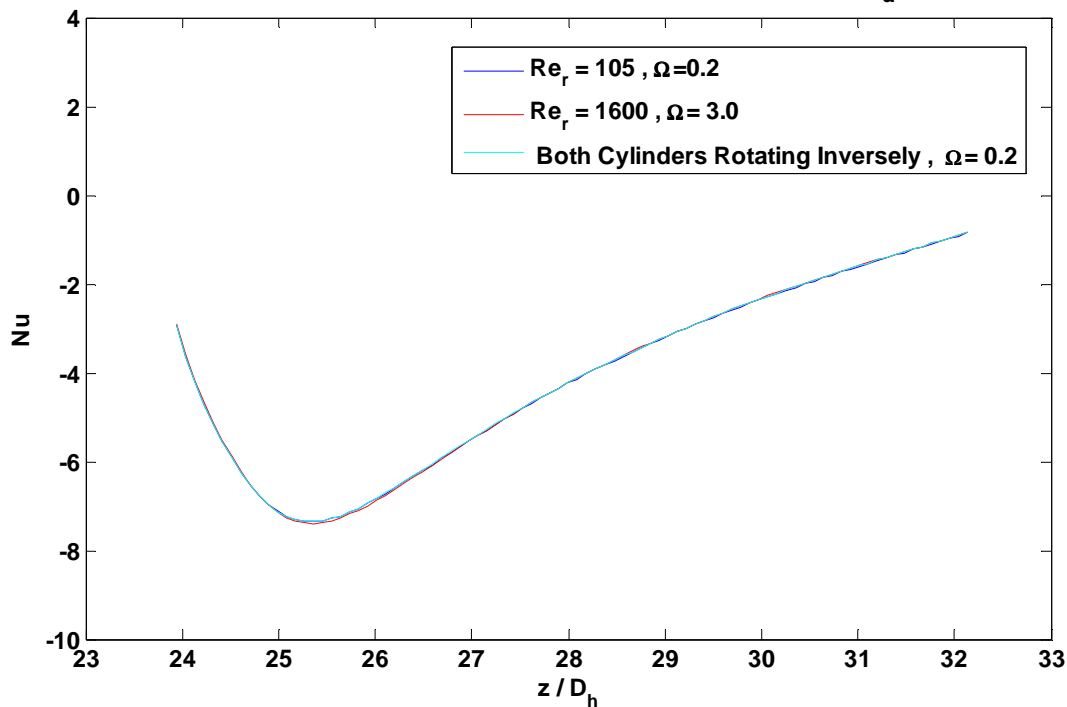
شکل (۵ - ۲۶) : منحنی های تغییرات عدد ناسلت جریان (متناظر سطح خارجی) در طول حلقوی (ناحیه دوم)

Inner Wall Nusselt Variation along Annulus (part 3) , $Re_a = 300$



شکل (۵ - ۲۷) : منحنی های تغییرات عدد ناسلت جریان (متناظر سطح داخلی) در طول حلقوی (ناحیه سوم)

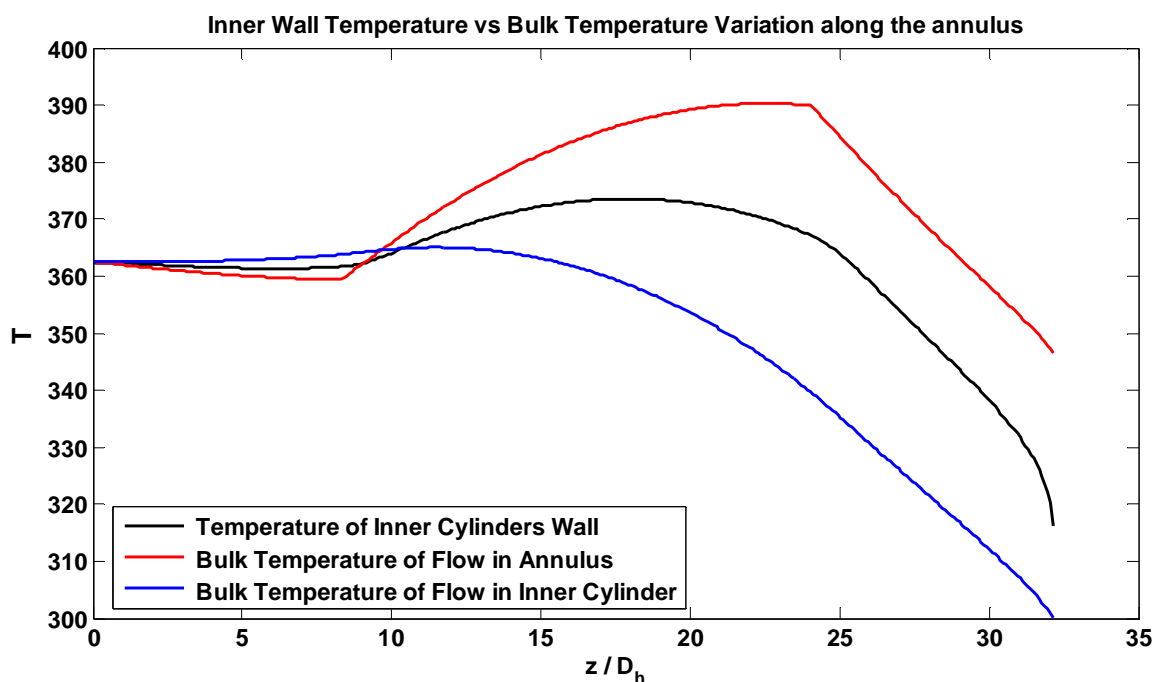
Outer Wall Nusselt Variation along Annulus (part 3) , $Re_a = 300$



شکل (۵ - ۲۸) : منحنی های تغییرات عدد ناسلت جریان (متناظر سطح خارجی) در طول حلقوی (ناحیه سوم)

۵ - ۴ : بحث و نتیجه گیری

محور افقی در نمودارهای ۵ - ۲ تا ۵ - ۵ و ۵ - ۹ تا ۵ - ۲۸، نمایشگر فاصله محوری بی بعد است. با مقایسه شکل های ۵ - ۱۳ با ۵ - ۱۴ و ۵ - ۱۵ با ۵ - ۱۶ مشاهده می شود که عدد ناسلت جریان در حلقوی، متناظر استوانه خارجی، در طول ناحیه های اول و دوم به طور پیوسته کاهش می یابد اما ناسلت متناظر سطح داخلی رفتاری کاملاً متفاوت دارد؛ ابتدا از مقدار بی نهایت مثبت به بی نهایت منفی پرش می کند (یک ناپیوستگی دارد). این ناپیوستگی مربوط به این است که دمای متوسط سیال در آن مقطع برابر دمای سطح داخلی می شود. حال در این مقطع با توجه به اینکه گرادیان دما در مجاورت دیواره داخلی صفر نیست اما اختلاف دمای متوسط با دمای سطح داخلی صفر است، ضریب انتقال حرارت جابجایی بی نهایت می شود. این رفتار به دلیل نوع تعریف این ضریب است و نه به دلایل واقعی [۳۱].



شکل (۵ - ۲۹) : منحنی های دمای بالک جریان داخلی و خارجی

همچنین در شکل ۵ - ۱۲ نیز که مربوط به جریان درون استوانه داخلی است، یک ناپیوستگی به همین صورت دیده می شود. در شکل ۵ - ۲۹، ناحیه هایی که در آنها منحنی دمای بالک جریان داخلی یا خارجی با منحنی دمای دیواره استوانه داخلی تقاطع دارد، نشان دهنده مقاطعی هستند که چنین ناپیوستگی هایی در منحنی تغییرات ناسلت، در آنها رخ می دهد.

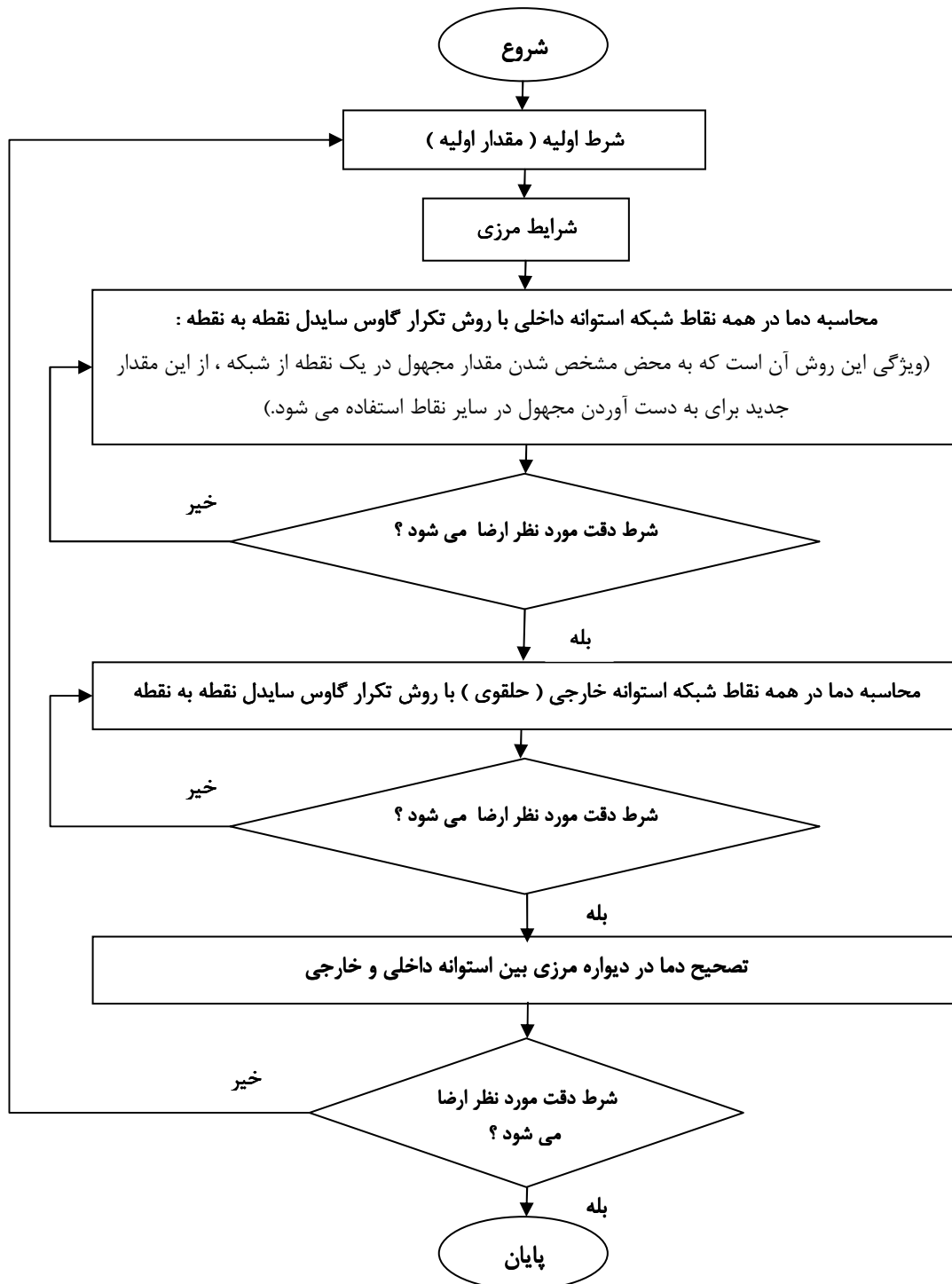
در شکل ۵ - ۱۷ و ۵ - ۲۷ دلیل افزایش ناسلت جریان در حلقوی (متناظر سطح داخلی) در انتهای حلقوی، افزایش شیب کاسته شدن دمای سطح داخلی در انتهای حلقوی است که در شکل ۵ - ۲۹ هم مشهود است.

همانطور که در تمامی نمودارهای ۵ - ۱۲ تا ۵ - ۲۷ مشهود است، در رینولدزهای دورانی پایین، دوران تاثیر ناچیزی روی ضریب انتقال حرارت دارد. همچنین با توجه به شکل های ۵ - ۲ و ۵ - ۳، در رینولدزهای دورانی پایین تاثیر دوران روی پروفیل سرعت محوری نیز کم است که این تاثیر در ناحیه ورودی حلقوی، نسبت به ناحیه توسعه یافته، چشمگیرتر است.

۵ - ۵ : پیشنهاداتی برای تحقیقات آینده

بررسی هیدرودینامیکی و انتقال حرارت جابجایی در مورد جریان مغشوش، در سیستمهای مشابه سیستم بررسی شده در این تحقیق، به لحاظ علمی و فنی مناسب به نظر می رسد. همچنین بررسی مساله با در نظر گرفتن هدایت حرارتی در طول دیواره فلز (که در این تحقیق از آن صرف نظر شد) می تواند نتایج مفیدی به دست دهد. به علاوه تلاش برای به دست آوردن روابطی برای ضریب انتقال حرارت جابجایی در هندسه های استوانه ای دوار همراه با تغذیه محوری سیال نیز مناسب به نظر می رسد.

الگوریتم حل عددی معادله انتقال حرارت در استوانه داخلی و حلقوی به صورت پیوسته



مراجع :

- [1] J. Fromm and F.H. Harlow, (1963), “ Numerical solution of the problem of vortex sheet development ”, *Physics of Fluids*, 6:975.
- [2] M. Kawaguti. (1961), “ Numerical solution of the Navier-Stokes equations for the flow in a two-dimensional cavity”. *Journal of Physical Society of Japan*, 16(11).
- [3] O.R. Burggraf. (1966), “ Analytical and numerical studies of the structure of steady separated flows”. *Journal of Fluid Mechanics*, 24:113–151.
- [4] A. Zebib, G. M. Homsy, and E. Meiburg. (1985), “ High Marangoni number convection in a squar cavity ” . *Physics of Fluids*, 28:3467–3476.
- [5] N. Ramanan and S.A. Korpela. (1990), “ Thermocapillary convection in an axisymmetric pool ”, *Computers & Fluids*, 18:205–215.
- [6] A. Aziz and J.D. Hellums. (1967), “ Numerical solution of the three-dimensional equations of motion for laminar natural convection ”, *The Physics of Fluids*, 10:314–324.
- [7] G.D. Mallinson and G. (1973), “ de Vahl Davis. The method of the false transient for the solution of coupled elliptic equations ”, *Journal of Computational Physics*, 12:435–61.
- [8] G.A. Osswald, K.N. Ghia, and U. Ghia, (1987), “ A direct algorithm for the solution of incompressible three-dimensional unsteady Navier-Stokes equations”, *AIAA Paper*, 87:1139, 1987.
- [9] F.H. Harlow and J.E. Welch, (1965), “ Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface”, *Physics of Fluids*, 8(12):2182–2188.
- [10] A.J. Chorin, (1968), “ Numerical solution of the Navier-Stokes equations ” *Mathematics of Computation*, 22(104):745–762.
- [11] S.V. Patankar and D.B. Spalding, (1972), “ A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows ”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 15:1787–1806.

- [12] V. Babu and S.A. Korpela, (1993), “ On the direct solution of Poisson’s equation on a non-uniform grid ”, *Journal of Computational Physics*, 104:93–98.
- [13] W.R. Briley, (1974), “ Numerical method for predicting three-dimensional steady viscous flow in ducts ”, *Journal of Computational Physics*, 14:8–28.
- [14] Y. Zang and R.L. Street, (1995), “ A composite multigrid method for calculating unsteady incompressible flows in geometrically complex domains ”, *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, 20:341–361.
- [15] J. C. Strikwerda and Y. M. Nagel, (1988), “ A numerical method for the incompressible Navier-Stokes equations in three-dimensional cylindrical geometry ”, *Journal of Computational Physics*, 78:64–78.
- [16] Zhu D. (2005), PhD. thesis, “ a Numerical Study of Incompressible Navier-Stokes Equations in Three-Dimensional Cylindrical Coordinates ”, Graduate School, Ohio State University.
- [17] K. Goda, (1979), “ A multistep technique with implicit difference schemes for calculating two- or three-dimensional cavity flows ”, *Journal of Computational Physics*, 30:76–95.
- [18] W.M. Kays, H.C. Perkins, 1973, “ *Internal flow in ducts* ”, McGraw-Hill Book Company, New York, pp. 7.1–7.193.
- [19] F.W. Dittus, L.M.K. Boelter, (1985), “ *Heat transfer in automobile radiators of the tubular type* ”, reprinted in: *Int. Comm. Heat Mass Transfer* 12:3–22.
- [20] A.P. Colburn, (1933), “ A method of correlating forced convection heat transfer data and a comparison with fluid friction ”, *Trans, AIChE* 29 ,174–210.
- [21] W.H. McAdams, 1954, “ *Heat Transmission* ”, McGraw-Hill Book Company, New York, p. 219.
- [22] S. Seghir-Ouali , D. Saurya , S. Harmand , O. Phillipart , D. Laloyb , (2006) , “ Convective heat transfer inside a rotating cylinder with an axial air flow ”, *International Journal of Thermal Sciences*, 45 1166–1178
- [23] Kaye, J. and Elgar, E. C., 1958, “ Modes of adiabatic and diabatic fluid flow in an annulus with an inner rotating cylinder ”, *Trans. ASME*, 80, pp. 753-765.
- [24] Sebastien Poncet, Sofia Haddadi, Stephane Viazzo, (2010), “ Numerical modeling of fluid flow and heat transfer in a narrow Taylor-Couette-Poiseuille system ”,
- [25] Kuzay, T. M. and Scott, C. J., (1977), “ Turbulent heat transfer studies in annulus with inner cylinder rotation”, *J. Heat Transfer*, 99.

[26] Lee, Y. N. and Minkowycz, W. J., 1989, “ Heat transfer characteristics of the annulus of two-coaxial cylinders with one cylinder rotating”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 32(4)

[27] A. Bejan, (2004), “ *Convective Heat Transfer* ”, third edition, John Wiley and Sons Inc., New York

[28] W.M.Kays, M.E.Crawford, (1993) “ *Convective Heat And Mass Transfer* ”, third edition, McGraw-Hill Inc.

[29] Klaus A.Hoffmann, Stive T.Chiang,(2000), “ *Computational Fluid Dynamics Volume2* ”, fourth edition, Engineering Education System, Wichita, Kansas,

[30] Incropera, Dewitt, Bergman, Lavine, (2006), “ *Fundamentals of Heat and Mass Transfer* ”, sixth edition, John Wiley and Sons Inc.

[31] J.Mitrovic & B.Maletic, (2005), “ Effect of thermal asymmetry on heat transfer in laminar annular flow ”, *Chemical Engineering & Technology*, 1144-1150

Abstract

Flow and heat transfer between two coaxial cylinders, one or both rotating, with an axial flow of fluid superimposed, which makes a combination of rotating and axial regimes, is of great importance, scientifically and technically. Such flows have a wide range of applications in mechanical systems such as bearings, asynchronous motors with axial ventilation, rotating heat exchangers, drilling of oil wells, etc.

In this study, it is tried to investigate a laminar flow of water which first enters a pipe (inner cylinder) and then enters an annulus with hot rotating outer wall, by modelling the conditions of an Industrial System (water cooled rollers used in steel industries). Also the variation of temperature and rate of heat transfer through the flow were explored. Thermo fluid survey of such a system, with minimum changes respect to main industrial system and it's boundary conditions, is one of the new investigative aspects of this study.

First and second chapters are assigned to the review of previous investigations and also introduction of this study and dominant equations. In third chapter an analytical method is proposed for solving the heat transfer equation in hydrodynamically developed – thermal developing area of flow. The major part which is done by numerical methods, is presented in the form of a comprehensive model in fourth chapter and the results are in fifth chapter.

The results show that rotation of outer wall of the annulus has insignificant effect on convective heat transfer, in low rotational speeds. In addition the influence of this rotation on axial velocity profile is little which this effect is more considerable in entrance region of annulus.

Keywords: Laminar, Rotating, Annulus, Convective, Heat transfer, axial flow, numerical.