

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک

پایان نامه کارشناسی ارشد تبدیل انرژی

حل تحلیلی برای جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در کانال های مستطیلی مستقیم

نگارنده:

امیر جعفری

استاد راهنما

دکتر محمد حسن کیهانی

استاد مشاور

دکتر محمود نوروزی

اسفند ۱۴۰۰

در این صفحه صورت جلسه دفاع را قرار دهید. لازم است پس از صحافی این صفحه مجدداً توسط دانشکده مهر گردد و استاد راهنما با امضای خود اصلاحات پایان نامه را تایید کند.

تقدیم اثر

تقدیم به پدر و مادر عزیزم که در تمام مراحل زندگی یار و یاور من بوده اند.

تشکر و قدردانی

پاس بی کران پروردگار یکتا را که هستی مان بخشید و به طریق علم و دانش

رهنمونمان شد و به ہمیشی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود و خوشه چینی از

علم و معرفت را روزیمان ساخت.

تعمدنامه

اینجانب **امیر جعفری** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی مکانیک/تبدیل انرژی دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه حل تحلیلی برای جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در کانال های مستطیلی مستقیم تحت راهنمایی **دکتر محمد حسن کیهانی** متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود . استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده

در مطالعه حاضر جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک گذرنده از کانال‌های مستطیلی مستقیم، تحت شار حرارتی ثابت بر دیواره‌ها و در ناحیه کاملاً توسعه‌یافته هیدرودینامیکی و حرارتی به‌صورت تحلیلی مورد بررسی قرار گرفته است. معادله ساختاری مورد استفاده جهت مدل‌سازی سیال ویسکوالاستیک مورد مطالعه، مدل غیرخطی FENE-P می‌باشد که از جمله مدل‌های محبوب جهت مدل‌سازی محلول‌های رقیق پلیمری محسوب می‌شود. در این مطالعه جهت حل میدان جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک FENE-P از روش انتگرالی ریتز استفاده شده که در زیرمجموعه روش‌های حساب تغییرات برای حل معادلات مشتقات جزئی قرار می‌گیرد. مقایسه نتایج به‌دست آمده برای میدان جریان با مطالعات پیشین مؤید کارآمدی و دقت بالای روش ریتز می‌باشد. همچنین استفاده از ریتز مرتبه چهارم برای دقت چهار رقم اعشار کفایت می‌کند. پس از حل میدان جریان سیال ویسکوالاستیک FENE-P، تاثیر پارامترهای بی‌بعدی از جمله عدد دبورا، پارامتر قابلیت کشش مدل و نسبت ابعاد مقطع کانال بر توزیع سرعت بررسی شده‌اند. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش عدد دبورا و کاهش پارامتر قابلیت کشش مدل، به‌دلیل تشدید رفتار رقیق‌شوندگی سیال سرعت ماکزیمم در مرکز کانال افزایش می‌یابد. همچنین افزایش نسبت ابعاد مقطع کانال منجر به کاهش سرعت ماکزیمم خواهد شد. با تقسیم توزیع سرعت به‌دست آمده نسبت به سرعت متوسط مشخص شد که با افزایش عدد دبورا یا کاهش پارامتر قابلیت کشش مدل، به‌دلیل افزایش خاصیت رقیق‌شوندگی سیال ویسکوالاستیک، ویسکوزیته کاهش می‌یابد که این امر منجر به مسطح‌تر شدن پروفیل سرعت در هسته جریان (در مجاورت مرکز کانال) خواهد شد. در حل معادله انرژی با در نظر گرفتن تلفات ویسکوز علاوه بر پارامترهای بی‌بعد ذکر شده، تاثیر عدد بی‌بعد برینکمن نیز بر انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک FENE-P مورد تحلیل و بررسی قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش عدد دبورا و کاهش پارامتر قابلیت کشش مدل، میزان تلفات ویسکوز در مجاورت دیواره‌های کانال افزایش می‌یابد. برای اعداد برینکمن مثبت که حرارت از دیواره‌ها به سیال منتقل می‌شود، با افزایش عدد دبورا و کاهش پارامتر قابلیت کشش مدل، دمای میانگین سیال کاهش می‌یابد که این امر منجر به کاهش عدد ناسلت نیز خواهد شد. اما برای اعداد برینکمن منفی که حرارت از سیال به دیواره‌ها منتقل می‌شود، با افزایش عدد دبورا و کاهش پارامتر قابلیت کشش مدل، دمای میانگین و عدد ناسلت افزایش خواهند یافت. همچنین نتایج نشان می‌دهد که با افزایش عدد برینکمن مثبت و منفی در یک عدد دبورا و پارامتر قابلیت کشش مشخص، عدد ناسلت به ترتیب کاهش و افزایش خواهد یافت.

کلمات کلیدی: سیال ویسکوالاستیک، مدل FENE-P، کانال مستطیلی مستقیم، روش ریتز، شار حرارتی ثابت، تلفات ویسکوز

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

۱-

۲-

۳-

فهرست مطالب

ج	فهرست جداول
د	فهرست اشکال
و	فهرست علائم
۱	فصل ۱: مقدمه
۲	۱-۱ مقدمه
۴	۲-۱ پیشینه پژوهش
۱۱	۳-۱ معرفی تحقیق حاضر
۱۲	۴-۱ ضرورت‌ها و کاربردها
۱۳	۵-۱ مروری بر فصل‌های پایان نامه
۱۵	فصل ۲: فیزیک مسئله
۱۶	۱-۲ مقدمه
۱۶	۲-۲ معادلات حاکم
۱۶	۱-۲-۲ مدل FENE-P
۲۳	۳-۲ بی‌بعدسازی
۲۹	فصل ۳: روش حل
۳۰	۱-۳ مقدمه
۳۰	۲-۳ روش ریتز
۳۱	۱-۲-۳ حل معادله مومنتوم با استفاده از روش ریتز

۳-۲-۲ حل معادله انرژی با استفاده از روش ریتز ۳۶

۳۹

فصل ۴: نتایج و بحث

۴-۱ مقدمه ۴۰

۴-۲ نتایج حاصل از حل معادله مومنتوم ۴۰

۴-۲-۱ حل اولیه (حل نیوتنی) ۴۰

۴-۲-۲ جریان FENE-P ۴۴

۴-۳ نتایج حاصل از حل معادله انرژی ۶۰

۴-۳-۱ حالت $Br = 0$ ۶۴

۴-۳-۲ حالت $Br > 0$ ۶۹

۴-۳-۳ حالت $Br < 0$ ۸۳

۹۹

فصل ۵: نتیجه گیری

۵-۱ مقدمه ۱۰۰

۵-۲ خلاصه نتایج ۱۰۰

۵-۳ پیشنهادات ۱۰۱

۱۰۲

مراجع

فهرست جداول

جدول ۴-۱: نسبت سرعت ماکزیمم به سرعت متوسط برای حل نیوتنی	۴۲
جدول ۴-۲: مقادیر حاصل از حل تحلیلی معادله مومنتوم به ازای $L^2 = 100$	۴۸
جدول ۴-۳: مقادیر حاصل از حل تحلیلی معادله مومنتوم به ازای $De = 2$	۴۸
جدول ۴-۴: اعتبارسنجی نتایج حاصل از حل معادله انرژی برای جریان نیوتنی به ازای $Br = 0$	۶۰
جدول ۴-۵: مقادیر حاصل از حل تحلیلی معادله انرژی به ازای $Br = 0$ و $L^2 = 100$	۶۵
جدول ۴-۶: مقادیر حاصل از حل تحلیلی معادله انرژی به ازای $Br = 0$ و $De = 2$	۶۵
جدول ۴-۷: مقادیر حاصل از حل تحلیلی معادله انرژی به ازای $Br = 1$ و $L^2 = 100$	۷۰
جدول ۴-۸: مقادیر حاصل از حل تحلیلی معادله انرژی به ازای $Br = 1$ و $De = 2$	۷۰
جدول ۴-۹: مقادیر حاصل از حل تحلیلی معادله انرژی به ازای $Br = 2$ و $L^2 = 100$	۷۱
جدول ۴-۱۰: مقادیر حاصل از حل تحلیلی معادله انرژی به ازای $Br = 2$ و $De = 2$	۷۱
جدول ۴-۱۱: مقادیر حاصل از حل تحلیلی معادله انرژی به ازای $Br = 5$ و $L^2 = 100$	۷۲
جدول ۴-۱۲: مقادیر حاصل از حل تحلیلی معادله انرژی به ازای $Br = 5$ و $De = 2$	۷۲
جدول ۴-۱۳: مقادیر حاصل از حل تحلیلی معادله انرژی به ازای $Br = 10$ و $L^2 = 100$	۷۳
جدول ۴-۱۴: مقادیر حاصل از حل تحلیلی معادله انرژی به ازای $Br = 10$ و $De = 2$	۷۳
جدول ۴-۱۵: مقادیر حاصل از حل تحلیلی معادله انرژی به ازای $Br = -1$ و $L^2 = 100$	۸۴
جدول ۴-۱۶: مقادیر حاصل از حل تحلیلی معادله انرژی به ازای $Br = -1$ و $De = 2$	۸۴
جدول ۴-۱۷: مقادیر حاصل از حل تحلیلی معادله انرژی به ازای $Br = -2$ و $L^2 = 100$	۸۵
جدول ۴-۱۸: مقادیر حاصل از حل تحلیلی معادله انرژی به ازای $Br = -2$ و $De = 2$	۸۵
جدول ۴-۱۹: مقادیر حاصل از حل تحلیلی معادله انرژی به ازای $Br = -5$ و $L^2 = 100$	۸۶
جدول ۴-۲۰: مقادیر حاصل از حل تحلیلی معادله انرژی به ازای $Br = -5$ و $De = 2$	۸۶
جدول ۴-۲۱: مقادیر حاصل از حل تحلیلی معادله انرژی به ازای $Br = -10$ و $L^2 = 100$	۸۷
جدول ۴-۲۲: مقادیر حاصل از حل تحلیلی معادله انرژی به ازای $Br = -10$ و $De = 2$	۸۷

فهرست اشکال

- شکل ۱-۱: منحنی‌های تنش برشی در برابر نرخ برش برای سیالات غیرنیوتنی مستقل از زمان ۳
- شکل ۲-۱: منحنی‌های تنش برشی در برابر نرخ برش برای سیالات غیرنیوتنی تابع زمان ۳
- شکل ۳-۱: نمای کلی از هندسه مورد مطالعه ۱۲
- شکل ۱-۴: اعتبارسنجی نتایج حاصل از حل اولیه (حل نیوتنی) ۴۱
- شکل ۲-۴: توزیع سرعت حل اولیه (حل نیوتنی) ۴۳
- شکل ۳-۴: اعتبارسنجی جریان سیال FENE-P ۴۵
- شکل ۴-۴: بررسی نسبت ابعاد مقطع انتخاب شده برای اعتبارسنجی جریان سیال FENE-P ۴۶
- شکل ۵-۴: توزیع سرعت جریان سیال FENE-P به ازای $L^2 = 100$ و $\kappa = 2$ ۵۰
- شکل ۶-۴: توزیع سرعت جریان سیال FENE-P به ازای $De = 2$ و $\kappa = 2$ ۵۱
- شکل ۷-۴: توزیع سرعت (نسبت سرعت به سرعت متوسط) جریان سیال FENE-P به ازای $L^2 = 100$ ۵۳
- شکل ۸-۴: توزیع سرعت (نسبت سرعت به سرعت متوسط) جریان سیال FENE-P به ازای $De = 2$ ۵۴
- شکل ۹-۴: پروفیل‌های سرعت جریان سیال FENE-P بر روی صفحات تقارن به ازای $L^2 = 100$ و $\kappa = 2$ ۵۵
- شکل ۱۰-۴: پروفیل‌های سرعت جریان سیال FENE-P بر روی صفحات تقارن به ازای $De = 2$ و $\kappa = 2$ ۵۶
- شکل ۱۱-۴: توزیع ضریب $C_f \cdot Re$ بر روی دیواره‌های کانال به ازای $L^2 = 100$ و $\kappa = 2$ ۵۸
- شکل ۱۲-۴: توزیع ضریب $C_f \cdot Re$ بر روی دیواره‌های کانال به ازای $De = 2$ و $\kappa = 2$ ۵۹
- شکل ۱۳-۴: توزیع تلفات ویسکوز برای جریان سیال FENE-P به ازای $L^2 = 100$ و $\kappa = 2$ ۶۲
- شکل ۱۴-۴: توزیع تلفات ویسکوز برای جریان سیال FENE-P به ازای $De = 2$ و $\kappa = 2$ ۶۳
- شکل ۱۵-۴: توزیع دما برای جریان سیال FENE-P به ازای $L^2 = 100$ و $Br = 0$ و $\kappa = 2$ ۶۷
- شکل ۱۶-۴: توزیع دما برای جریان سیال FENE-P به ازای $De = 2$ و $Br = 0$ و $\kappa = 2$ ۶۸
- شکل ۱۷-۴: توزیع دما برای جریان سیال FENE-P به ازای $L^2 = 100$ و $Br = 1$ و $\kappa = 2$ ۷۵
- شکل ۱۸-۴: توزیع دما برای جریان سیال FENE-P به ازای $De = 2$ و $Br = 1$ و $\kappa = 2$ ۷۶
- شکل ۱۹-۴: توزیع دما برای جریان سیال FENE-P به ازای $L^2 = 100$ و $Br = 2$ و $\kappa = 2$ ۷۷
- شکل ۲۰-۴: توزیع دما برای جریان سیال FENE-P به ازای $De = 2$ و $Br = 2$ و $\kappa = 2$ ۷۸
- شکل ۲۱-۴: توزیع دما برای جریان سیال FENE-P به ازای $L^2 = 100$ و $Br = 5$ و $\kappa = 2$ ۷۹
- شکل ۲۲-۴: توزیع دما برای جریان سیال FENE-P به ازای $De = 2$ و $Br = 5$ و $\kappa = 2$ ۸۰
- شکل ۲۳-۴: توزیع دما برای جریان سیال FENE-P به ازای $L^2 = 100$ و $Br = 10$ و $\kappa = 2$ ۸۱
- شکل ۲۴-۴: توزیع دما برای جریان سیال FENE-P به ازای $De = 2$ و $Br = 10$ و $\kappa = 2$ ۸۲
- شکل ۲۵-۴: توزیع دما برای جریان سیال FENE-P به ازای $L^2 = 100$ و $Br = -1$ و $\kappa = 2$ ۸۹
- شکل ۲۶-۴: توزیع دما برای جریان سیال FENE-P به ازای $De = 2$ و $Br = -1$ و $\kappa = 2$ ۹۰

- شکل ۴-۲۷: توزیع دما برای جریان سیال FENE-P به‌ازای $L^2 = 100$ و $Br = -2$ و $\kappa = 2$ ۹۱
- شکل ۴-۲۸: توزیع دما برای جریان سیال FENE-P به‌ازای $De = 2$ و $Br = -2$ و $\kappa = 2$ ۹۲
- شکل ۴-۲۹: توزیع دما برای جریان سیال FENE-P به‌ازای $L^2 = 100$ و $Br = -5$ و $\kappa = 2$ ۹۳
- شکل ۴-۳۰: توزیع دما برای جریان سیال FENE-P به‌ازای $De = 2$ و $Br = -5$ و $\kappa = 2$ ۹۴
- شکل ۴-۳۱: توزیع دما برای جریان سیال FENE-P به‌ازای $L^2 = 100$ و $Br = -10$ و $\kappa = 2$ ۹۵
- شکل ۴-۳۲: توزیع دما برای جریان سیال FENE-P به‌ازای $De = 2$ و $Br = -10$ و $\kappa = 2$ ۹۶
- شکل ۴-۳۳: تغییرات عدد ناسلت برحسب عدد برینکمن به‌ازای $L^2 = 100$ و $\kappa = 2$ ۹۸

فهرست علائم

m^2	مساحت کل مقطع کانال	A_t
m^2	مساحت یک چهارم مقطع کانال	A
	پارامتری ثابت در مدل FENE-P	a
	ضرایب ریتز معادله مومنتوم	a_i
	عدد برینکمن	Br
	پارامتری ثابت در مدل FENE-P	b
	ضرایب ریتز معادله انرژی	b_i
	پارامتری ثابت در معادله انرژی	C
	ضریب اصطکاک پوسته‌ای	C_f
$j / kg.k$	ظرفیت گرمایی ویژه در فشار ثابت	c_p
m	قطر لوله	D
	عدد دبورا	De
m	قطر هیدرولیکی	d_h
N	نیروی فنر	F^c
	تابع بی‌بعد در مدل FENE-P	f
N / m	ثابت فنر	H
$W / m^2 K$	ضریب انتقال حرارت جابجایی	h
W / mK	ضریب انتقال حرارت هدایتی	k
	پارامتر قابلیت کشش مدل FENE-P	L^2
m	نصف طول مقطع کانال	M
kg / s	دبی جرمی	$\dot{m}$
m	نصف عرض مقطع کانال	N
	عدد ناسلت	Nu
m	محیط کل مقطع کانال	P_t
m	محیط یک چهارم مقطع کانال	P
Pa	فشار جریان	p
m	بردار اتصال دو انتهای وزنه‌های دمبل شکل	Q
m	طول ماکزیمم فنر	Q_0
m	طول تعادل فنر	Q_e

W / m^2	شار حرارتی	q''
	عدد رینولدز	Re
K	دما	T
s	زمان	t
m / s	سرعت ماکزیمم سیال نیوتنی داخل لوله مستقیم	U_0
m / s	سرعت در راستای طولی	u
m / s	بردار سرعت جریان	V
	گرادیان فشار بی بعد شده در مرجع [۲۷]	X

علائم یونانی

	پارامتر ثابت مربوط به تابع f	α
	پارامتر ثابت مربوط به تابع f	β
Pa / s	تلفات ویسکوز	ϕ
$1 / s$	نرخ برش تعمیم یافته	$\dot{\gamma}$
$Pa.s$	ویسکوزیته پلیمر	η_p
	نسبت ابعاد مقطع کانال	κ
s	زمان رهایی از تنش	λ
kg / m^3	چگالی	ρ
Pa	تنش	τ
	تابع ریتز	ψ

زیرنویس ها

توده ای-متوسط	b
مقدار بحرانی	cr
میانگین	m
مرتب ریتز	i
گام حل مسئله	$iter$
شماره المان	j
دیواره	w
راستای جریان	x

y راستای طول مقطع کانال
 z راستای عرض مقطع کانال

بالانویس‌ها

T ترانهاده
 ∇ مشتق فوق همرفتی
 $\sim$ کمیت بعددار

فصل ۱ : مقدمه

۱-۱ مقدمه

جریان و انتقال حرارت داخل لوله‌ها و کانال‌ها همواره به عنوان یک مسئله کلاسیک و اساسی در علم مکانیک سیالات و انتقال حرارت، مورد توجه بسیاری از محققین بوده است. امروزه بررسی دینامیک سیالات و انتقال حرارت جریان‌های آرام و آشسته در کانال‌هایی با مقاطع غیردایروی به دلیل کاربرد گسترده آن‌ها در موارد مختلف از جمله مبدل‌های حرارتی فشرده^۱ از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. آنالیز هیدرودینامیک و انتقال حرارت جریان در کانال‌هایی با مقاطع غیردایروی به مراتب پیچیده‌تر از لوله‌ها می‌باشد. به عنوان مثال برای این نوع کانال‌ها، در ناحیه کاملاً توسعه‌یافته هیدرودینامیکی و حرارتی، تحلیل ضریب اصطکاک و انتقال حرارت باید به صورت دوبعدی انجام شود، حال آن که معمولاً برای لوله‌ها این تحلیل به شکل یک‌بعدی صورت می‌گیرد. لازم به ذکر است که برای کانال‌هایی با مقاطع غیردایروی در ناحیه در حال توسعه، این تحلیل‌ها به صورت سه‌بعدی انجام خواهد گرفت. عمده مطالعات پیشین در این زمینه معطوف به سیالات نیوتنی بوده که در قالب مطالعات آزمایشگاهی و حل‌های عددی و تحلیلی، توسط بسیاری از محققین انجام شده است. با توجه به کاربرد وسیع انواع سیالات غیرنیوتنی در زمینه‌های مختلف، بررسی جریان و انتقال حرارت این دسته از سیالات از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

سیال نیوتنی سیالی است که در آن تنش برشی بدون هیچ‌گونه رفتار تسلیم‌گونه‌ای، تنها رابطه‌ای خطی با نرخ برش دارد. بر این اساس سیال غیرنیوتنی را می‌توان به سادگی به صورت سیالی که فاقد رفتار نیوتنی است، تعریف نمود. سیالات غیرنیوتنی به سه گروه کلی سیالات مستقل از زمان، وابسته به زمان و ویسکوالاستیک تقسیم می‌شوند.

سیالات غیرنیوتنی مستقل از زمان سیالاتی هستند که در آن‌ها تنش برشی تنها تابعی غیرخطی از نرخ برش است. یعنی در این سیالات ویسکوزیته تنها تابعی از نرخ برش می‌باشد. این گروه از سیالات خود به دو دسته کلی سیالات دارا و فاقد تنش تسلیم تقسیم می‌شوند. در موادی که دارای تنش تسلیم هستند شرط جریان ماده، رسیدن تنش به حد مشخصی برای شروع سیلان آن می‌باشد. این دسته از سیالات غیرنیوتنی مستقل از زمان که دارای تنش تسلیم هستند، خود به دو دسته پلاستیک بینگهام^۲ و پلاستیک هرشل-بالکلی^۳ تقسیم می‌شود که در دسته اول ویسکوزیته مقداری ثابت است، اما در دسته دوم ویسکوزیته با افزایش نرخ برش، کاهش می‌یابد. سیالاتی که فاقد تنش تسلیم هستند نیز به دو دسته سیالات شبه‌پلاستیک^۴ (رقیق‌شونده^۵) و دایلاتنت^۶ (غلیظ‌شونده^۷) تقسیم می‌شوند که در آن‌ها ویسکوزیته با افزایش نرخ برش به ترتیب کاهش و افزایش می‌یابد. در شکل ۱-۱، منحنی‌های تنش برشی در برابر نرخ برش برای سیالات غیر نیوتنی مستقل از زمان نمایش داده شده است.

¹ Compact heat exchanger

² Bingham plastic

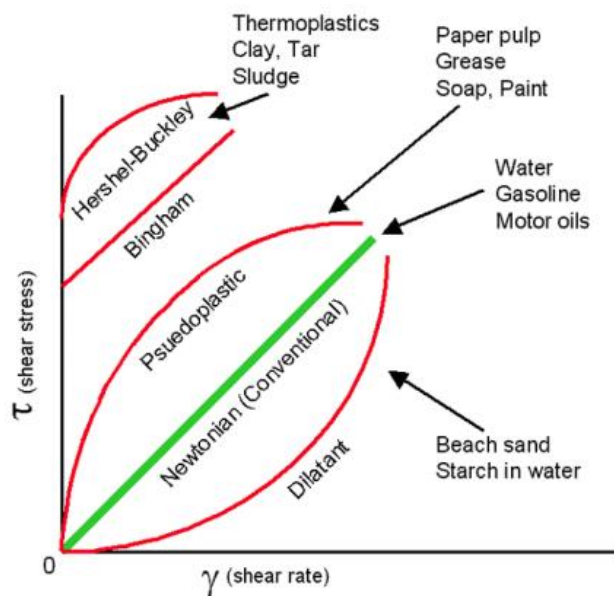
³ Herschel bulkley

⁴ Psuedoplastic

⁵ Shear thinning

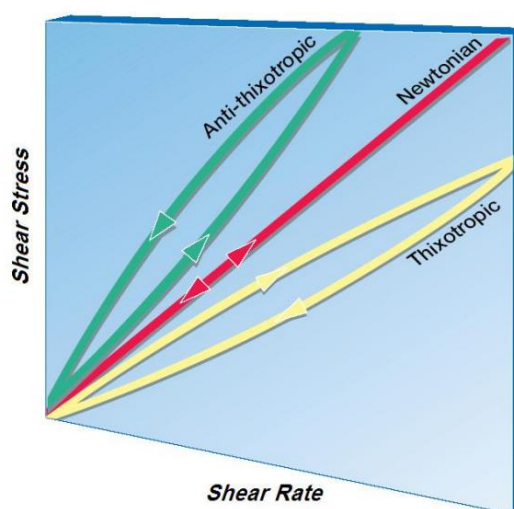
⁶ Dilatant

⁷ Shear thickening



شکل ۱-۱: منحنی‌های تنش برشی در برابر نرخ برش برای سیالات غیرنیوتنی مستقل از زمان

سیالات غیرنیوتنی تابع زمان سیالاتی هستند که در آن‌ها ویسکوزیته علاوه بر این که تابعی از نرخ برش هست، تابعی از زمان نیز می‌باشد. به‌طور کلی این گروه از مواد به دو دسته سیالات تیکسوتروپیک و سیالات رئوپکتیک (آنتی تیکسوتروپیک) تقسیم می‌شوند. در سیالات تیکسوتروپیک، اگر ماده تحت یک نرخ برش ثابت و دمای معین قرار داده شود، تنش برشی یک کاهش برگشت‌پذیر نسبت به زمان پیدا خواهد کرد و با گذشت زمان ویسکوزیته کاهش می‌یابد. در سیالات رئوپکتیک این رفتار کاملاً برعکس مواد تیکسوتروپیک می‌باشد. شکل ۱-۲، منحنی‌های تنش برشی در برابر نرخ برش را برای سیالات غیرنیوتنی تابع زمان نشان می‌دهد.



شکل ۱-۲: منحنی‌های تنش برشی در برابر نرخ برش برای سیالات غیرنیوتنی تابع زمان

مواد ویسکوالاستیک^۱ موادی هستند که به طور توأمان خواص ویسکوز و الاستیک را دارا می‌باشند. از آن‌جا که در سیالات تنش تابعی از نرخ برش و در جامدات تابعی از خود برش است، لذا این مواد دارای خواص همزمان جامد و سیال می‌باشند. در سیالات و جامدات ویسکوالاستیک، سهم ویسکوز نسبت به سهم الاستیک به ترتیب بیشتر و کمتر می‌باشد. مواد ویسکوالاستیک ویژگی‌هایی دارند که آن‌ها را از سایر مواد مجزا می‌کنند. برخی از این ویژگی‌ها عبارتند از:

- ۱- دارای زمان‌هایی از تنش هستند.
- ۲- دارای ثابت زمانی تاخیر هستند. (ماده دارای حافظه می‌باشد)
- ۳- سهم ویسکوز آن‌ها غالباً غیرخطی و از نوع شبه‌پلاستیک (رقیق شونده) است.
- ۴- دارای اختلاف تنش نرمال اول و دوم هستند.
- ۵- ویسکوزیته کشسان قابل توجهی دارند.

تاکنون معادلات ساختاری متنوعی جهت مدل‌سازی رفتار مواد ویسکوالاستیک ارائه شده‌اند. مدل ساختاری FENE-P^۲ یکی از مدل‌های غیرخطی مهم، جهت بررسی رفتار مواد ویسکوالاستیک می‌باشد که برای محلول‌های رقیق پلیمری به‌دست آمده است، اما می‌تواند به محلول‌های نیمه‌رقیق نیز نسبت داده شود. این مدل که از تئوری مولکولی حاصل می‌شود بیان می‌کند که بین مولکول‌های پلیمری علاوه بر نیروهای ویسکوز، نیروهای الاستیک غیرخطی نیز وجود دارند. در واقع مولکول‌های پلیمر به صورت وزنه‌های دمبل شکل^۳ مدل شده‌اند و با فنرهایی به یکدیگر متصل می‌باشند که از قانون فنرهای خطی (قانون هوک) تبعیت نمی‌کنند. این مدل یکی از معدود مدل‌های پلیمری است که در شبیه‌سازی دینامیک سیالات مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۲-۱ پیشینه پژوهش

مطالعه انتقال حرارت جریان آرام سیالات نیوتنی داخل کانال‌های بسته نخستین بار توسط گراتز [۱] و سپس به‌طور مستقل توسط ناسلت [۲] مورد بررسی قرار گرفت. آن‌ها با فرض اینکه دمای سیال خارج از لوله و نیز دمای دیواره دو مقدار ثابت و غیریکسان هستند، توزیع دمای سیال نیوتنی در لوله‌ای به شعاع R را به‌دست آوردند. شاه و لندن [۳] گزارش‌های مفصلی را در مورد انتقال حرارت جابجایی سیالات نیوتنی بین دو صفحه موازی و انواع کانال‌های مستقیم با مقاطع دایروی، مستطیلی، مثلثی و بیضوی ارائه دادند. پس از آن، حل‌های متعددی در ارتباط با این مسائل در کارهای گذشته ارائه شده است که گزارش و نتایج آن‌ها در کتاب‌های انتقال حرارت جابجایی [۴، ۵] موجود می‌باشد. بارلتا و پولویرنتی [۶] حلی تحلیلی را برای انتقال حرارت جابجایی اجباری جریان اسلاگ^۴ در کانال‌های

¹ Viscoelastic material

² Finitely extensible nonlinear elastic

³ Dumbbell beads

⁴ Slug flow

مستطیلی و با در نظر گرفتن تلفات ویسکوز ارائه دادند. آن‌ها ۸ نوع شرط مرزی مختلف که مربوط به شارهای حرارتی یکنواخت اعمال شده بر دیواره‌ها می‌باشند را جهت به دست آوردن دمای بی‌بعد و عدد ناسلت موضعی بررسی کردند. همچنین با صرف نظر کردن از هدایت حرارتی محوری و استفاده از روش جمع آثار^۱، یک حل تحلیلی برای ناحیه ورودی کانال ارائه شده است. گاهی در حالت شار ثابت فرض می‌شود که دمای دیواره در هر مقطع از کانال ثابت بوده و فقط در راستای جریان تغییر می‌کند. در این حالت می‌توان ادعا کرد که مسئله دارای شرط مرزی حرارتی نوع H1 می‌باشد. اما برای شرط مرزی حرارتی نوع H2 این ساده‌سازی برای دمای دیواره در نظر گرفته نمی‌شود. ژائو و هارتنت [۷] حلی تحلیلی را برای انتقال حرارت جریان اسلاگ در کانال‌های مستطیلی ارائه دادند. آن‌ها با حل معادله انرژی در ناحیه کاملاً توسعه یافته حرارتی، پروفیل دما را برای شرط مرزی حرارتی نوع H2، در حالی که یک دیواره تحت گرمایش قرار دارد به دست آوردند. سپس با استفاده از روش جمع آثار، پروفیل دما و عدد ناسلت را برای تعداد بیشتری از دیواره‌های گرم شده بررسی کردند. شاه‌مردان و همکاران [۸] به حل تحلیلی انتقال حرارت جابجایی در کانال‌های مستطیلی پرداختند و عدد ناسلت موضعی و میانگین را به صورت تابعی از نسبت ابعاد مقطع کانال به دست آوردند. آن‌ها حل خود را برای هر دو نوع شرط مرزی حرارتی H1 و H2، که مربوط به انتقال حرارت کاملاً توسعه یافته تحت شار حرارتی ثابت بر دیواره‌ها می‌باشد، ارائه دادند. نوآوری اصلی این مطالعه، ارائه یک قید فیزیکی جدید برای حل مسئله نیومن^۲، در آنالیز بی‌بعد شده‌ی مربوط به شرط مرزی حرارتی نوع H2 می‌باشد. ربینسکی و همکاران [۹] دو راه حل تحلیلی را برای ضریب اصطکاک فانیگ^۳ و عدد ناسلت جریان آرام و کاملاً توسعه یافته، در کانال‌های کوچک مستقیم با مقطع مستطیلی، بدون در نظر گرفتن تلفات ویسکوز، ارائه دادند. آن‌ها با در نظر گرفتن شرط مرزی حرارتی نوع H1، راه‌حل‌های تحلیلی را برای پروفیل‌های سرعت و دما در قالب دو عبارت صریح به دست آوردند که عبارت اول یک حل مجانبی برای جریان آرام بین صفحات موازی است و عبارت دوم یک سری به شدت همگرا می‌باشد که با افزایش نسبت ابعاد مقطع کانال این سری به سمت صفر میل خواهد کرد. نوروزی و همکاران [۱۰] برای اولین بار با استفاده از روش بسط محدود، حلی تحلیلی را برای انتقال حرارت جابجایی در کانال‌هایی با مقطع مثلث متساوی‌الاضلاع ارائه دادند. در این مطالعه اثر تلفات ویسکوز بر توزیع دما در نظر گرفته شده است. آن‌ها عدد ناسلت را به صورت تابعی از عدد برینکمن استخراج کرده و ثابت کردند که در عدد برینکمن صفر، دمای ماکزیمم و عدد ناسلت در مرکز کانال به ترتیب برابر ۵/۹ و ۲۸/۹ خواهد شد. یووانیزوک [۱۱] حلی تحلیلی را برای انتقال حرارت جابجایی اجباری جریان آرام نیوتنی با خواص ثابت داخل لوله ارائه داد. او با در نظر گرفتن تلفات ویسکوز و با فرض اینکه جریان کاملاً توسعه یافته هیدرودینامیکی و حرارتی است، ۲ نوع شرط مرزی شار حرارتی ثابت و دمای دیواره ثابت را بررسی کرد و توزیع دما و عدد ناسلت را به صورت تابعی از عدد برینکمن به دست آورد. نتایج نشان داد که اثر تلفات ویسکوز برای اعداد برینکمن بزرگتر از یک بسیار چشمگیر می‌باشد.

¹ Superposition principle

³ Fanning friction factor

² Neumann problem

بررسی جریان و انتقال حرارت سیالات غیرنیوتنی به‌ویژه خانواده ویسکوالاستیک ها در کانال‌هایی با مقاطع مختلف همواره مورد توجه محققین بوده است. دادسون و همکاران [۱۲] با استفاده از مدل CEF^۱ به بررسی جریان‌های ثانویه^۲ ایجاد شده در سیالات ویسکوالاستیک، داخل کانال‌های مستطیلی پرداختند. آن‌ها در ادامه محلول ویسکوالاستیک به‌دست آمده را که حاوی ترکیب چند ماده خاص بود در آزمایشگاه مطالعه کردند و هماهنگی خوبی را بین نتایج آزمایشگاهی و مدل‌سازی عددی گزارش دادند. در همین زمینه تانسند و همکاران [۱۳] با استفاده از مدل CEF و روش حساب اختلال‌ها، جریان سیال ویسکوالاستیک را در کانال‌های مستطیلی مطالعه کردند. آن‌ها همچنین در تحقیق آزمایشگاهی، جریان شش سیال ویسکوالاستیک مختلف را بررسی کردند که در هر شش مورد، هشت جریان ثانویه در مقطع کانال مستطیلی گزارش شده است. آن‌ها همچنین دریافتند که شدت جریان‌های ثانویه با اختلاف تنش نرمال دوم رابطه‌ای مستقیم دارد. اوبرین و همکاران [۱۴] به بررسی حرکت نوسانی مستقیم‌الخط سیالات اولدروید^۳ تحت گرادیان فشار، با ویسکوزیته‌ی دینامیکی پیچیده، در کانال‌های مستطیلی مستقیم پرداختند. حل‌های مربوط به جریان سیال ویسکوالاستیک خطی، به‌صورت تابعی از عدد استوکس، نسبت ابعاد مقطع و دو ثابت زمانی اولدروید ارائه شد. آن‌ها حل عددی را با استفاده از روش‌های تفاضل محدود انجام داده و همچنین پیشنهادهایی برای اندازه‌گیری خواص مواد ویسکوالاستیک ارائه دادند. هارتنت و کاستیک [۱۵] به بررسی جریان‌های آرام و آشفته نیوتنی و غیرنیوتنی، در کانال‌های مستطیلی پرداختند. آن‌ها شرایط مرزی حرارتی مختلفی را بررسی کرده و نتایج را برای ناحیه در حال توسعه و کاملاً توسعه‌یافته هیدرودینامیکی و حرارتی ارائه دادند. در این مطالعه برای تحلیل جریان‌های غیرنیوتنی از مدل پاورلو^۴ استفاده شد و نتایج به‌ازای شاخص‌های مختلف این مدل ارائه گردید. ژائو و هارتنت [۱۶] به بررسی عددی جریان‌های ثانویه‌ی مربوط به سیال راینر-ریولین^۵، در کانال‌هایی با مقاطع مربعی و مستطیلی پرداختند. روش‌های تفاضل محدود جهت به‌دست آوردن جریان اولیه^۶، جریان ثانویه و ضریب اصطکاک به‌کار گرفته شد. اثر اختلاف تنش نرمال دوم، عدد رینولدز و نسبت ابعاد مقطع کانال بر شدت جریان‌های ثانویه مورد بررسی قرار گرفت. آن‌ها به این نتیجه رسیدند که اثر جریان ثانویه بر نرخ جریان اولیه و ضریب اصطکاک قابل اغماض است. ژو و همکاران [۱۷] با استفاده از روش حجم محدود و افزودن عبارتی به نام فشار مصنوعی به دو سمت معادله مومنوم، جریان سیال ویسکوالاستیک را در کانال‌های مستطیلی مطالعه کردند. لازم به ذکر است که آن‌ها به منظور مدل‌سازی عبارت تنش از شکل بهبود یافته مدل PTT^۷ استفاده کردند. محجوب و همکاران [۱۸] با استفاده از مدل پاورلو به حل عددی جریان‌های غیرنیوتنی در میکروکانال‌های مستطیلی پرداختند. جریان پایا و آرام در نظر گرفته شد و شرط‌های مرزی لغزشی بر روی دیواره‌ها لحاظ شده است. آن‌ها مسئله را به ازای شاخص‌های مختلف پاورلو و نسبت ابعاد مختلف مقطع کانال حل کرده و نشان دادند که اثر سرعت لغزشی بر سیالات دایلاتنت بسیار مشهودتر از سیالات شبه‌پلاستیک می‌باشد. همچنین

¹ Criminale-Ericksen-Filbey

² Secondary flow

³ Oldroyd fluids

⁴ Power law model

⁵ Reiner-Rivlin fluid

⁶ Primary flow

⁷ Phan-Thien-Tanner

نتایج نشان داد که افزایش شاخص پاورلو منجر به بالارفتن عدد رینولدز و ضریب اصطکاک می‌شود. نوروزی و همکاران [۱۹] به بررسی عددی جریان و انتقال حرارت جابجایی اجباری و توام در سیالات CEF پرداختند. آن‌ها تاثیر جریان‌های ثانویه را بر انتقال حرارت جابجایی اجباری و آزاد مورد بررسی قرار دادند و توزیع سرعت، دما، فشار و جریان‌های ثانویه را به‌دست آوردند. نتایج نشان داد که نیروی شناوری نسبت به اختلاف تنش نرمال دوم، اثر بیشتری بر تولید جریان‌های ثانویه و انتقال حرارت دارد. پرز و همکاران [۲۰] با غیر صفر در نظر گرفتن اختلاف تنش نرمال دوم و استفاده از مدل ساختاری PTT، حلی عددی را جهت بررسی اثر جریان‌های ثانویه بر افزایش انتقال حرارت، در جریان ویسکوالاستیک گذرنده از کانال مستطیلی ارائه دادند. آن‌ها شار حرارتی اعمال شده بر دیواره‌ها را ثابت در نظر گرفتند و اثر جابجایی آزاد را هم بر روند انتقال حرارت لحاظ کردند. نتایج حاکی از افزایش اعداد ناسلت موضعی و میانگین و به تبع آن افزایش انتقال حرارت برای جریان ویسکوالاستیک می‌باشد. منشا اصلی این افزایش، خواص رئولوژیکی^۱ سیال، به‌خصوص خاصیت رقیق‌شوندگی و همچنین وجود جریان‌های ثانویه می‌باشد. همچنین آن‌ها با بررسی تاثیر نیروی شناوری بر انتقال حرارت نشان دادند که اثر نیروی شناوری با افزایش اختلاف تنش نرمال دوم کاهش می‌یابد. جلالی و همکاران [۲۱] با استفاده از مدل PTT، به شبیه‌سازی عددی جریان ویسکوالاستیک در حال توسعه، در کانال‌های مستطیلی پرداختند. آن‌ها توانستند اثر ناحیه ورودی را به صورت سه‌بعدی ارزیابی کنند. در این پژوهش شرایط اولدریوید در نظر گرفته شد و جریان‌های گردابی آشکارسازی شدند. آن‌ها به این نتیجه رسیدند که در مقاطع آغازین کانال و تا رسیدن جریان به حالت کاملاً توسعه‌یافته، جریان‌های ثانویه شکل نمی‌گیرند، درحالی‌که شدت جریان‌های عرضی در این ناحیه بسیار بیشتر از ناحیه کاملاً توسعه‌یافته می‌باشد. همچنین آن‌ها دریافتند که با افزایش خواص الاستیک، بر شدت اختلاف تنش نرمال دوم و در نتیجه جریان‌های عرضی افزوده می‌شود و این افزایش در ناحیه کاملاً توسعه‌یافته بیشتر قابل مشاهده است. نوروزی و همکاران [۲۲] با استفاده از مدل CEF حل دقیقی را برای جریان خزشی و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک، در کانال‌های خمیده با مقطع مستطیلی ارائه دادند. آن‌ها مواردی نظیر سرعت محوری، نرخ جریان، نسبت مقاومت جریان^۲، توزیع فشار، میدان تنش و عدد ناسلت را به‌دست آوردند و اثر پارامترهایی مانند نسبت ابعاد مقطع کانال، نسبت خمیدگی^۳ و اختلاف تنش‌های نرمال اول و دوم را بر جریان و انتقال حرارت سیال مورد نظر بررسی کردند. نتو فیتو و همکاران [۲۳] به بررسی جریان‌های نیوتنی و غیرنیوتنی پاورلو، در سه‌راه^۴ مربوط به کانال‌های مستطیلی پرداختند. آن‌ها با تغییر شاخص مدل پاورلو در محدوده ۰/۲ الی ۱/۲۵، رفتار رقیق‌شوندگی و غلیظ‌شوندگی جریان را ارزیابی کردند. نتایج به‌دست آمده برای جریان‌های نیوتنی و غیرنیوتنی، تاثیر عدد رینولدز را بر پروفیل‌های سرعت در نقاط مختلف کانال نشان می‌دهد. همچنین برای حالتی که فشار اعمال شده بر خروجی‌ها یکسان باشد، تاثیر رفتار رقیق‌شوندگی و غلیظ‌شوندگی بر نسبت نرخ جریان بین ورودی و خروجی‌ها نشان داده شده است. دامیانو و همکاران [۲۴] با فرض اینکه لغزش روی دیواره‌ها اتفاق می‌افتد، به

¹ Rheological properties

² Flow resistance ratio

³ Curvature ratio

⁴ T junction

بررسی عددی جریان پوازی^۱ مربوط به سیال هرشل-بالکلی، در کانال‌های مستطیلی پرداختند. آن‌ها چهار رژیم جریان را برای سه فشار بحرانی مختلف مورد بررسی قرار دادند. در ابتدا فرض شد که هیچ لغزشی وجود ندارد، سپس حالتی را در نظر گرفتند که لغزش فقط بر روی میانه دیوار عریض‌تر اتفاق می‌افتد، بعد از آن حالتی را مد نظر قرار دادند که لغزش تا اندازه‌ای بر روی دو دیوار اعمال می‌شود و در نهایت حالتی را بررسی کردند که لغزش متغیر در همه‌جا اتفاق می‌افتد. همچنین آن‌ها نتایج را برای محدوده وسیعی از عدد بینگهام، عدد لغزش، توان‌های مختلف پاورلو و نسبت ابعاد مختلف مقطع کانال مورد ارزیابی قرار دادند. ریبیئرو و همکاران [۲۵] با استفاده از مدل اولدروید-بی^۲ به بررسی عددی و آزمایشگاهی جریان سیال ویسکوالاستیک گذرنده از یک سیلندر محبوس شده داخل کانال مستطیلی پرداختند. در این پژوهش جریان از حالت خزشی تا شروع حالت وابسته به زمان مورد ارزیابی قرار گرفته است. آن‌ها سه سیال ویسکوالاستیک که شامل یک سیال رقیق‌شونده و دو سیال باگر^۳ است را بررسی کرده و نتایج به‌دست آمده را با نتایج عددی و آزمایشگاهی مربوط به سیالات نیوتنی اعتبارسنجی کردند. برای سیال رقیق‌شونده در محدوده عدد دبورای^۴ ۰/۲۵ الی ۰/۹۹، بالاتر از یک عدد دبورای بحرانی (که بستگی به نسبت ابعاد مقطع کانال دارد)، ناپایداری‌های الاستیک در بالادست جریان سیلندر مشاهده می‌شود. در مقابل برای سیالات باگر، جریان در بالادست و پایین‌دست سیلندر متقارن باقی می‌ماند.

مدل FENE-P یکی از مهم‌ترین معادلات ساختاری غیرخطی جهت مدل‌سازی سیالات ویسکوالاستیک می‌باشد که در سال‌های اخیر مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است. پورند و کراچت [۲۶] با استفاده از مدل FENE-P، خواص رئولوژیکی محلول رقیق پلی‌اکریل‌آمید^۵ را در جریان‌های برشی و کشسانی تفسیر و اندازه‌گیری کردند. آن‌ها با به‌کار بردن یک زمان رهایی از تنش، تطابق مناسبی بین مدل FENE-P و خواص اندازه‌گیری شده در آزمایشگاه ایجاد کردند. اولیویرا و همکاران [۲۷] با استفاده از مدل FENE-P حل دقیقی را برای جریان کاملاً توسعه‌یافته، مستقیم‌الخط و غیرخطی سیال ویسکوالاستیک، بین دو صفحه و داخل لوله ارائه دادند. آن‌ها ثابت کردند که به‌دلیل اثر الاستیسیته و رقیق‌شوندگی سیال، برای عددهای دبورای کمتر از حد بحرانی (که بستگی به پارامتر قابلیت کشش مدل دارد)، تنش نرمال با الاستیسیته افزایش می‌یابد. نتیجه بسیار مهم این مطالعه آن است که به‌دلیل اثر رقیق‌شوندگی، با افزایش عدد دבורا و همچنین کاهش پارامتر قابلیت کشش^۶ مدل، پروفیل‌های سرعت مسطح‌تر می‌شوند که این امر منجر به نرخ جریان بالاتر برای افت فشار یکسان خواهد شد. اولیویرا و همکاران [۲۸] با استفاده از مدل FENE-P، حلی نیمه‌تحلیلی را جهت بررسی مسئله گرمایی مدخل ورودی لوله‌ها و کانال‌ها، برای جریان‌هایی با ویسکوزیته بالا و دارای خواص ویسکوالاستیک ارائه دادند. آن‌ها دو نوع شرط مرزی دمای دیواره ثابت و شار حرارتی ثابت اعمال شده بر دیواره‌ها را با در نظر گرفتن تلفات ویسکوز مورد بررسی قرار دادند. در این مطالعه اثر همزمان تلفات ویسکوز و الاستیسیته بر عدد ناسلت بررسی شد و نتایج نشان داد که تلفات ویسکوز سبب کاهش عدد

¹ Poiseuille flow

² Oldroyd-B model

³ Boger fluid

⁴ Deborah number

⁵ Polyacrylamide

⁶ Extensibility parameter

ناسلت می‌شود. در مقابل، الاستیسیته سیال که با عدد وایزنبرگ^۱ اندازه‌گیری می‌شود سبب افزایش عدد ناسلت خواهد شد، در واقع با افزایش عدد وایزنبرگ عدد ناسلت نیز افزایش می‌یابد. کروز و همکاران [۲۹] به بررسی تحلیلی جریان‌های کاملاً توسعه‌یافته مربوط به دو سیال ویسکوالاستیک دارای حلال نیوتنی، در لوله‌ها و کانال‌ها پرداختند. آن‌ها از دو مدل ساختاری PTT و FENE-P جهت مدل‌سازی سیالات ویسکوالاستیک استفاده کردند. در این مطالعه به‌طور مفصل در مورد حل سیال PTT داخل لوله بحث شده و راه حل‌های نهایی برای موارد دیگر ارائه شده است. باتالر [۳۰] به بررسی عددی جریان و انتقال حرارت سیال تراکم‌ناپذیر FENE-P بر روی یک صفحه‌ی غیر هم‌دما پرداخت. در این مطالعه اثر تشعشع حرارتی در معادله انرژی لحاظ شده است. او تغییرات دمای سطح بی‌بعد شده و همچنین مشخصه‌های انتقال حرارت با پارامترهای فیزیکی مختلف را گزارش کرده است. دو حالت در این مطالعه مورد بررسی قرار گرفته است، حالت اول صفحه با دمای سطح تعیین شده و حالت دوم صفحه با شار حرارتی اعمال شده به آن. نتایج نشان داد که به کار بردن تشعشع حرارتی منجر به افزایش توزیع دما در جریان می‌شود. خزر و همکاران [۳۱] جهت بررسی تاثیر سهم حلال بر انتقال حرارت، به مطالعه عددی انتقال حرارت سیالات ویسکوالاستیک FENE-P، در کانال‌های دایروی و غیردایروی پرداختند. آن‌ها با فرض این که پارامترهای مدل مستقل از دما هستند، مسئله را در غیاب تلفات ویسکوز و تحت شار حرارتی ثابت بررسی کردند. نتایج نشان داد که افزایش پارامتر قابلیت کشش مدل منجر به کاهش عدد ناسلت می‌شود. همچنین افزایش غلظت پلیمر، نرخ انتقال حرارت را در سیالات FENE-P بالا می‌برد. آن‌ها در این مطالعه برای نخستین بار توزیع عدد ناسلت را در ناحیه کاملاً توسعه‌یافته، برای سیالات FENE-P دارای سهم حلال، در کانال‌هایی با مقاطع دایروی و غیردایروی به‌دست آوردند. فیلالی و همکاران [۳۲] با استفاده از روش المان محدود، به بررسی اثر سهم حلال بر میدان جریان و انتقال حرارت سیال FENE-P در حال توسعه حرارتی، بین دو صفحه موازی و ثابت پرداختند. در این مطالعه شار حرارتی اعمال شده بر دیواره‌ها ثابت فرض شده و از تلفات ویسکوز چشم‌پوشی شده است. نتایج به‌دست آمده نشان می‌دهد که افزایش عدد وایزنبرگ و پارامتر قابلیت کشش مدل، به‌ترتیب منجر به افزایش و کاهش عدد ناسلت می‌شود و همچنین افزایش غلظت پلیمر، نرخ انتقال حرارت را بالا می‌برد. بارانوفسکی [۳۳] حلی تحلیلی را برای جریان پایای سیال FENE-P، تحت شرایط مرزی لغزشی، داخل کانال ارائه داد. او دو نوع شرط مرزی لغزشی را بررسی کرد و در رابطه با جریان پوازی صفحه‌ای، فرمول‌های صریحی را برای میدان سرعت، میدان تنش و تانسور پیکربندی^۲ مدل ارائه داد. دقتی و همکاران [۳۴] با در نظر گرفتن تلفات ویسکوز و در حالت دما ثابت، حلی تحلیلی را برای جابجایی حرارتی جریان FENE-P، داخل لوله و بین دو صفحه ارائه دادند. برای به‌دست آوردن توزیع دما بین دو صفحه و داخل لوله، به ترتیب از تابع HeunT و سری فروبنیوس^۳ استفاده شده است. آن‌ها اثرات الاستیسیته، عدد برینکمن و پارامتر قابلیت کشش مدل را بر جابجایی حرارتی بررسی کردند. نتایج نشان داد که به‌طور کلی افزایش عدد برینکمن سبب کاهش عدد ناسلت و بالا رفتن دمای مرکزی

¹ Weissenberg number

³ Frobenius series

² Configuration tensor

می‌شود. نوآوری اصلی این مطالعه، نشان دادن ارتباطی قوی بین عدد ناسلت و عدد برینکمن و همچنین بین دمای مرکزی و عدد برینکمن می‌باشد. پاشازاده و جعفری [۳۵] رویکرد جدیدی را جهت به‌دست آوردن حل‌های عددی و تحلیلی، برای جریان‌های ویسکوالاستیکی که از مدل غیرخطی FENE-P تبعیت می‌کنند ارائه دادند. این مطالعه برای یک کانال دوبعدی و همچنین یک لوله سه‌بعدی و در ناحیه کاملاً توسعه‌یافته انجام شده است. آن‌ها اثر پارامترهای بی‌بعدی مانند عدد وایزنبرگ و پارامتر قابلیت کشش مدل را بر تنش‌های نرمال و برشی و پروفیل سرعت بررسی کردند. نتایج نشان داد که با توجه به خاصیت رقیق‌شوندگی جریان FENE-P، با افزایش عدد وایزنبرگ، پروفیل‌های سرعت مسطح‌تر می‌شوند. لانجو [۳۶] به بررسی عددی و شبیه‌سازی رفتار سیالات ویسکوالاستیک در میکروکانال‌ها و نانوکanal‌ها پرداخت. او رفتار جریان‌های ویسکوالاستیک در کانال‌های سه‌بعدی خمیده را با استفاده از مدل FENE-P مورد بررسی قرار داد. در اعداد وایزنبرگ نسبتاً بالا، ناپایداری ویسکوالاستیک^۱ و آشفتگی الاستیک^۲، از روی نوسان میدان سرعت، خطوط جریان^۳، الگوهای جریان ثانویه و شدت آن‌ها توصیف شدند. نتایج نشان داد که سطح آشفتگی الاستیک با نسبت ویسکوزیته کاهش و با پارامتر قابلیت کشش مدل افزایش می‌یابد. بیلال‌خان و همکاران [۳۷] به صورت عددی، به بررسی جریان و انتقال حرارت مربوط به یک سیلندر چرخان که در جریان سیال FENE-P غوطه‌ور است پرداختند. در این پدیده نوع خاصی از ناپایداری به نام ناپایداری الاستیک اینرسی^۴ مشاهده می‌شود. با افزایش عدد وایزنبرگ، عدد رینولدز و پارامتر قابلیت کشش مدل، تمایل به شروع این ناپایداری افزایش خواهد یافت. نتایج به‌دست آمده نشان داد که افزایش عدد رینولدز سبب بالا رفتن عدد ناسلت میانگین می‌شود، درحالی‌که با افزایش عدد وایزنبرگ، پارامتر قابلیت کشش مدل و نرخ دوران سیلندر، این عدد کاهش خواهد یافت. آن‌ها ادعا کردند که صرف‌نظر از نوع سیال (نیوتنی یا ویسکوالاستیک)، با افزایش نرخ دوران سیلندر، ضرایب لیفت و درگ به ترتیب افزایش و کاهش می‌یابند.

در سال‌های اخیر روش ریتز^۵ به‌عنوان یک روش کاربردی و قدرتمند، جهت تحلیل سریع و دقیق جریان در مسائل مختلف، مورد توجه برخی از محققین قرار گرفته است. وانگ [۳۸] جریان‌های ویسکوز نوسانی را با استفاده از روش انتگرالی ریتز حل کرده و این روش را بسیار قوی و کارآمد معرفی کرده است. در این مطالعه کانال‌هایی با مقاطع بیضوی و مثلث متساوی‌الساقین مورد بررسی قرار گرفته است. او ادعا کرد که جریان ناپایا، وابسته به فرکانس بی‌بعد شده و نسبت ابعاد مقطع کانال می‌باشد. همچنین ممکن است در فرکانس‌های پایین، جریان شبه‌پایا در نظر گرفته شود. مجدداً وانگ [۳۹] با استفاده از روش ریتز به بررسی جریان لغزشی در نوع خاصی از کانال‌های بیضوی^۶ (کانال‌هایی که مشابه کانال مستطیلی با گوشه‌های گرد شده هستند) پرداخت. به‌طور کلی پانزده جمله از رابطه ریتز برای دقت چهار رقم اعشار کفایت می‌کند. او ادعا کرد که روش ریتز به‌کار رفته برای جریان لغزشی نمی‌تواند جریان‌های غیرلغزشی را مدل کند، زیرا در جریان‌های غیرلغزشی بر خلاف جریان‌های لغزشی، توابع

¹ Viscoelastic instability

² Elastic turbulence

³ Streamlines

⁴ Inertio-Elastic instability

⁵ Ritz method

⁶ Super-elliptic ducts

ریتز بر روی مرزها برابر صفر می‌باشند. نتایج این مطالعه نشان داد که با افزایش لغزش (درحالی‌که پارامترهای دیگر ثابت باشند) و نسبت ابعاد مقطع کانال، سرعت متوسط نیز افزایش می‌یابد. همچنین وانگ [۴۰] با استفاده از روش ریتز به بررسی جریان‌های لغزشی در میکروکانال‌های خمیده پرداخت. او ادعا کرد که لغزش سطحی کانال‌های خمیده، نه تنها باعث بالا رفتن نرخ جریان می‌شود، بلکه سبب انتقال سرعت ماکزیمم به سمت مرز خارجی و سرعت مینیمم به سمت مرز داخلی خواهد شد. نوروزی و همکاران [۴۱] با استفاده از روش ریتز به تحلیل جریان‌های ویسکوپلاستیک گذرنده از کانال‌های مستطیلی پرداختند. جریان مواد بینگهام داخل کانال‌های مستطیلی به وسیله یک ناحیه پلاگ^۱ در وسط کانال و چهار ناحیه مرده^۲ در مجاورت گوشه‌های کانال مشخص می‌شود. در این نواحی به دلیل تنش برشی کم، ماده تسلیم نمی‌شود و با افزایش عدد بینگهام این نواحی رشد می‌کنند. پس از اعتبارسنجی نتایج به دست آمده مشخص شد که روش ریتز می‌تواند موقعیت نواحی یاد شده را به دقت بررسی کند. در این مطالعه عدد بینگهام بحرانی که در آن، ناحیه پلاگ و نواحی مرده به هم می‌رسند، به ازای نسبت ابعاد مختلف مقطع کانال ارائه شده است.

۳-۱ معرفی تحقیق حاضر

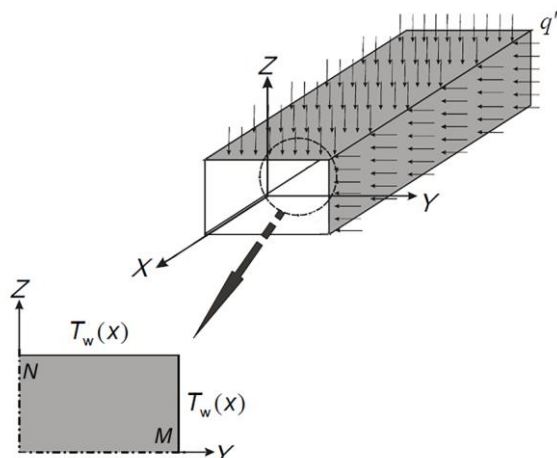
هدف از این مطالعه، ارائه حلی تحلیلی برای جریان و انتقال حرارت جابجایی اجباری سیالات ویسکوالاستیک گذرنده از کانال‌های مستطیلی مستقیم، در ناحیه کاملاً توسعه یافته هیدرودینامیکی و حرارتی می‌باشد. در این مطالعه شار حرارتی اعمال شده بر دیواره‌های کانال ثابت در نظر گرفته شده و اثر تلفات ویسکوز هم در حل مورد نظر لحاظ خواهد شد. به دلیل تقارن موجود در هندسه کانال، حل‌ها به ازای یک چهارم کانال ارائه شده‌اند. در روند بررسی جریان پیشنهاد می‌شود که سیال ویسکوالاستیک دارای اختلاف تنش نرمال دوم نباشد، زیرا در غیر این صورت سیال دارای جریان‌های ثانویه شده و میدان جریان سه بعدی می‌شود و حل‌های مربوط به جریان‌های مستقیم الخط معتبر نخواهد بود. لذا معادله ساختاری پیشنهادی جهت تحلیل این مسئله، مدل غیرخطی FENE-P می‌باشد که از جمله مدل‌های محبوب برای مدل‌سازی محلول‌های رقیق پلیمری محسوب می‌شود. در این مطالعه توزیع سرعت و توزیع دمای بی‌بعد برای سیالات FENE-P ارائه شده و همچنین تاثیر پارامترهای بی‌بعدی مانند عدد دبور (De)، پارامتر قابلیت کشش مدل (L^2)، عدد برینکمن (Br) و نسبت ابعاد مقطع کانال (κ) بر میدان جریان و انتقال حرارت جابجایی اجباری بررسی شده است. سه نسبت ابعاد مقطع کانال ۲، ۳ و ۴ در این تحقیق مورد مطالعه قرار می‌گیرند. همچنین در تحلیل جریان و انتقال حرارت، توزیع تلفات ویسکوز و اعداد ناسلت به ازای پارامترهای بی‌بعد ذکر شده، بررسی شده‌اند. روش مورد استفاده جهت حل میدان جریان و انتقال حرارت، روش انتگرالی ریتز می‌باشد که در زیرمجموعه روش‌های حساب

¹ Plug region

² Dead zone

تغییرات^۱ برای حل معادلات مشتقات جزئی قرار می‌گیرد.

اکثر مطالعاتی که در گذشته برای جریان‌های نیوتنی و غیرنیوتنی در کانال‌هایی با مقاطع غیردایروی انجام شده، محدود به حل‌های عددی بوده‌اند. یافتن حلی تحلیلی برای جریان و انتقال حرارت جابجایی اجباری کاملاً توسعه‌یافته سیالات FENE-P، درون کانال‌هایی مستقیم با مقطع مستطیلی و تحت شار حرارتی ثابت، با استفاده از روش ریتز، برای نخستین بار صورت گرفته است. شکل ۱-۳، نمای کلی از هندسه کانال مورد نظر را نشان می‌دهد.



شکل ۱-۳: نمای کلی از هندسه مورد مطالعه

۴-۱ ضرورت‌ها و کاربردها

در سال‌های اخیر به دلیل کاربرد وسیع سیالات ویسکوالاستیک در زمینه‌های متنوع از جمله بیوتکنولوژی، داروسازی، پزشکی، صنایع پردازش شیمیایی، صنایع غذایی، مرکب و رنگ‌سازی، کنترل ارتعاشات، تزریق مذاب‌های پلیمری و ...، آنالیز رفتار این مواد و بررسی جریان و انتقال حرارت آن‌ها مورد توجه بسیاری از محققین بوده است.

امروزه مطالعه رفتار جریان سیالات نیوتنی و غیرنیوتنی در میکروکانال‌ها، به دلیل اهمیت جریان و انتقال حرارت در مقیاس کوچک، بسیار حائز اهمیت می‌باشد. اکثر میکروکانال‌ها دارای مقاطع غیردایروی بوده و قطر هیدرولیکی آن‌ها کمتر از یک میلی‌متر می‌باشد. در واقع این کانال‌ها مبدل‌های حرارتی بسیار کوچک و کارآمدی هستند که با تلفیق برخی ویژگی‌ها مانند نسبت ابعاد مناسب، ضریب انتقال حرارت بالا، حجم سیال مورد نیاز اندک و وزن و ابعاد کوچک، ابزار بسیار مهمی در زمینه مقاصد انتقال حرارت و کنترل جریان به‌شمار می‌آیند. میکروکانال‌ها کاربردهای وسیعی در زمینه‌های گوناگون از جمله مهندسی پزشکی، اتومبیل‌سازی و هوافضا، راکتورهای شیمیایی، میکروچیپ‌ها، سلول‌های سوختی و ... دارند. پیکربندی پایه‌ای میکروکانال‌ها به شکل مستطیل، شبه‌مستطیل، مثلث، ذوزنقه‌ای

¹ Calculus of variations

و ... می‌باشد. با توجه به این‌که مقاطع مستطیلی یکی از مقاطع پرکاربرد در میکروکانال‌ها می‌باشند، بررسی جریان و انتقال حرارت انواع سیالات در کانال‌های مستطیلی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. از دیگر کاربردهای کانال‌های مستطیلی می‌توان به کانال‌های فرایند تزریق پلاستیک^۱، سیستم‌های خنک‌کاری الکترونیکی و مبدل‌های حرارتی فشرده اشاره کرد.

۱-۵ مروری بر فصل‌های پایان نامه

این پایان‌نامه از یک فصل به‌عنوان مقدمه و چهار فصل اصلی تشکیل شده است. همچنین در انتها قسمتی به‌عنوان معرفی مراجع ارائه خواهد شد. در فصل دوم ابتدا معادله ساختاری FENE-P بررسی می‌شود، سپس با استفاده از این مدل، معادلات حاکم بر جریان و انتقال حرارت و نحوه بی‌بعدسازی آن‌ها تحلیل خواهند شد. تا حد امکان اثبات روابط به‌دست آمده ارائه می‌شود. در فصل سوم با استفاده از روش ریتز، به حل معادلات جریان و انتقال حرارت به‌دست آمده می‌پردازیم. در فصل چهارم اعتبارسنجی‌های لازم و همچنین نتایج حاصل از حل تحلیلی به‌ازای پارامترهای بی‌بعد مختلف ارائه می‌شوند. در فصل پنجم نتایج حاصل از مطالعه حاضر به‌صورت کلی و به‌طور خلاصه بیان می‌شوند. همچنین پیشنهاداتی جهت ارتقای سطح کیفی این مطالعه و پیشبرد مطالعات آتی در این زمینه ارائه خواهند شد.

¹ Injection moulding

فصل ۲: فیزیک مسند

۲-۱ مقدمه

در این فصل با استفاده از معادله ساختاری FENE-P و معادلات سه گانه حاکم بر مسئله یعنی معادلات پیوستگی، مومنتوم و انرژی، معادلات جریان و انتقال حرارت استخراج می‌شوند. تا حد امکان روابط مربوط به مدل غیرخطی FENE-P ارائه شده‌اند. سپس با استفاده از پارامترهای بی‌بعد تعریف شده، معادلات جریان و انتقال حرارت بی‌بعد می‌شوند. همچنین رابطه‌ای برای تلفات ویسکوز و عدد ناسلت ارائه خواهد شد.

۲-۲ معادلات حاکم

در ابتدا لازم است فرض‌های حاکم بر مسئله بیان شوند. این فرضیات عبارتند از:

- ۱- جریان تراکم‌ناپذیر می‌باشد.
 - ۲- خواص فیزیکی سیال ثابت و مستقل از دما می‌باشند.
 - ۳- جریان پایا فرض می‌شود.
 - ۴- جریان مستقیم‌الخط می‌باشد. به عبارتی جریان دوبعدی بوده و بردار سرعت تنها در راستای طولی دارای مولفه غیر صفر می‌باشد.
 - ۵- جریان از نظر هیدرودینامیکی و حرارتی کاملاً توسعه‌یافته می‌باشد.
- معادلات سه‌گانه مورد استفاده جهت حل جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در کانال‌های مستطیلی مستقیم، معادلات پیوستگی، مومنتوم و انرژی می‌باشند که در ادامه به ترتیب آمده‌اند:
- $$\tilde{\nabla} \cdot \tilde{V} = 0 \quad (۱-۲)$$
- $$\rho \tilde{V} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{V} = -\tilde{\nabla} \tilde{p} + \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\tau} \quad (۲-۲)$$
- $$\rho c_p \tilde{V} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{T} = k \tilde{\nabla}^2 \tilde{T} + \tilde{\phi} \quad (۳-۲)$$
- در روابط بالا $\tilde{V}$ بردار سرعت، ρ چگالی، $\tilde{p}$ فشار، $\tilde{\tau}$ تانسور تنش، c_p ظرفیت گرمایی ویژه در فشار ثابت، $\tilde{T}$ دما، k ضریب انتقال حرارت هدایتی، $\tilde{\phi}$ تلفات ویسکوز و $\tilde{\nabla}$ عملگر گرادیان می‌باشد. لازم به ذکر است که با توجه به هندسه کانال مورد مطالعه، تمامی معادلات در دستگاه مختصات دکارتی بیان می‌شوند. همچنین با توجه به فرض تراکم‌ناپذیری جریان، معادله پیوستگی خودبه‌خود ارضا خواهد شد.

۲-۲-۱ مدل FENE-P

در این قسمت معادله ساختاری مربوط به مدل غیرخطی FENE-P بررسی می‌شود و از آن جهت تعیین تانسور تنش استفاده خواهد شد. این مدل حاصل از یک نظریه جنبشی می‌باشد که از مدل الاستیک غیرخطی دمبل پیروی کرده و می‌توان آن را به محلول‌های رقیق و نیمه‌رقیق پلیمری نسبت داد و برای توصیف خواص رئولوژیکی مواد به کار برد. به عبارتی در این مدل مولکول‌های پلیمر به صورت وزنه‌های دمبل شکل مدل شده‌اند و با فنرهایی به یکدیگر متصل می‌باشند که از قانون فنرهای خطی (قانون

هوک) تبعیت نمی‌کند. برد و همکاران [۴۲] با استفاده از تقریب پترلین معادله ساختاری FENE-P را بر حسب تانسور تنش اضافی به‌دست آوردند. در این قسمت مطابق مطالعه‌ی چیلکات و رالیسون [۴۳]، با شکلی از مدل FENE-P که برحسب تانسور پیکربندی (A) بیان می‌شود، کار خواهد شد. تانسور پیکربندی مدل به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$A \equiv 3 \frac{\langle QQ \rangle}{Q_e^2} \quad (۴-۲)$$

که در آن Q بردار اتصال دو انتهای وزنه‌های دمبل شکل، Q_e طول تعادل فنر و عملگر $\langle . \rangle$ بیان‌گر میانگین یک کمیت در فضا می‌باشد. نیروی اتصال‌دهنده داخل یک زنجیره مولکولی (نیروی فنر) در نسخه اولیه مدل FENE به شکل زیر بیان شد:

$$F^c = \frac{H}{1 - (Q \cdot Q) / Q_0^2} Q \quad (۵-۲)$$

که در آن H ثابت فنر و Q_0 ماکزیمم طول فنر ممکن می‌باشد. پترلین با به‌کار بردن تقریبی برای نیروی فنر، رابطه (۵-۲) به فرم ساده زیر بیان کرد [۴۲]:

$$F^c \approx \frac{H}{1 - \langle Q \cdot Q \rangle / Q_0^2} Q \equiv fHQ \quad (۶-۲)$$

که در آن f یک تابع بی‌بعد می‌باشد. با استفاده از تعریف تانسور پیکربندی مدل در رابطه (۴-۲)، استنباط می‌شود که تابع f به‌کار رفته در رابطه (۶-۲) وابسته به تریس^۱ تانسور پیکربندی (trA) می‌باشد.

$$f \equiv f(trA) = \frac{L^2}{L^2 - trA} \quad (۷-۲)$$

در رابطه فوق L^2 پارامتر قابلیت کشش مدل که به‌صورت مربع نسبت طول ماکزیمم به طول تعادل فنر تعریف می‌شود:

$$L^2 \equiv 3 \frac{Q_0^2}{Q_e^2} \quad (۸-۲)$$

همچنین برد و همکاران [۴۲] رابطه زیر را نیز برای پارامتر قابلیت کشش مدل مطرح کردند:

$$L^2 = b + 3 \quad (۹-۲)$$

$$b \equiv \frac{HQ_0^2}{KT} \quad (۱۰-۲)$$

که در رابطه فوق K ثابت بولتزمن می‌باشد. جهت به‌دست آوردن رابطه‌ای تکاملی برای تانسور پیکربندی مدل، می‌توان رابطه زیر را بیان کرد [۴۲، ۲۶]:

$$\overset{\nabla}{A} = -\frac{1}{\lambda} (fA - aI) \quad (۱۱-۲)$$

که در آن λ زمان رهایی از تنش، a پارامتری ثابت و I ماتریس همانی می‌باشد. نماد ∇ در رابطه فوق بیان‌گر مشتق فوق همرفتی می‌باشد که به شکل رابطه (۱۲-۲) تعریف می‌شود:

^۱ Trace

$$\overset{\nabla}{A} = \frac{DA}{D\tilde{t}} - A.\tilde{\nabla}\tilde{V} - \tilde{\nabla}\tilde{V}^T.A \quad (۱۲-۲)$$

در رابطه فوق $\frac{D}{Dt}$ مشتق مادی و بالانویس T عملگر ترانهاده می باشد. رابطه فوق را می توان به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\overset{\nabla}{A} = \frac{\partial A}{\partial \tilde{t}} + \tilde{V}.\tilde{\nabla}A - A.\tilde{\nabla}\tilde{V} - \tilde{\nabla}\tilde{V}^T.A \quad (۱۳-۲)$$

با استفاده از رابطه زیر می توان تانسور پیکربندی مدل را به تنش پلیمری ارتباط داد:

$$\tilde{\tau} = \frac{\eta_p}{\lambda} (fA - aI) \quad (۱۴-۲)$$

که در آن η_p ویسکوزیته پلیمر می باشد. بنابراین با مقایسه روابط (۱۱-۲) و (۱۴-۲) می توان نوشت:

$$\overset{\nabla}{A} = -\frac{\tilde{\tau}}{\eta_p} \quad (۱۵-۲)$$

پارامتر ثابت a به کار رفته در روابط فوق، یک پارامتر مستقل محسوب نمی شود و وابسته به پارامتر قابلیت کشش مدل می باشد.

$$a = \frac{1}{1 - \frac{3}{L^2}} = \frac{b+3}{b} = 1 + \frac{3KT}{HQ_0^2} \quad (۱۶-۲)$$

گاهی برای سادگی بیشتر مدل FENE-P، با فرض این که L^2 عدد بزرگی باشد، پارامتر a را برابر یک در نظر می گیرند. اما در این مطالعه به دلیل این که محدوده متنوعی از مقادیر L^2 در نظر گرفته شده است، پارامتر a نامساوی یک می باشد و در محاسبات به کار گرفته خواهد شد. به طور کلی برای هر تابعی مانند f می توان نوشت:

$$(f \overset{\nabla}{A}) = f(\overset{\nabla}{A}) + A \frac{Df}{D\tilde{t}} \quad (۱۷-۲)$$

با توجه به فرضیات مطرح شده در ابتدای این فصل می توان ثابت کرد که مشتق مادی تابع f برابر صفر می باشد. بنابراین رابطه فوق به شکل زیر ساده می شود:

$$(f \overset{\nabla}{A}) = f \overset{\nabla}{A} \quad (۱۸-۲)$$

با اعمال عملگر مشتق فوق همرفتی بر رابطه (۱۴-۲) و استفاده از رابطه (۱۸-۲)، می توان نوشت:

$$\tilde{\tau} = \frac{\eta_p}{\lambda} ((f \overset{\nabla}{A}) - a \overset{\nabla}{I}) = \frac{\eta_p}{\lambda} (f \overset{\nabla}{A} - a \overset{\nabla}{I}) \quad (۱۹-۲)$$

که در آن $\overset{\nabla}{I}$ به شکل زیر محاسبه می شود:

$$\overset{\nabla}{I} = \frac{DI}{D\tilde{t}} - I.\tilde{\nabla}\tilde{V} - \tilde{\nabla}\tilde{V}^T.I = -\tilde{\nabla}\tilde{V} - \tilde{\nabla}\tilde{V}^T = -(\tilde{\nabla}\tilde{V} + \tilde{\nabla}\tilde{V}^T) \quad (۲۰-۲)$$

از طرفی نرخ تغییر شکل به صورت زیر تعریف می شود:

$$\tilde{D} = 1/2(\tilde{\nabla}\tilde{V} + \tilde{\nabla}\tilde{V}^T) \quad (۲۱-۲)$$

با مقایسه دو رابطه اخیر می توان نتیجه گرفت که:

$$\overset{\nabla}{I} = -2\tilde{D} \quad (22-2)$$

با جایگذاری روابط (۱۵-۲) و (۲۲-۲) در رابطه (۱۹-۲)، شکل نهایی مدل اصلاح شده FENE-P به شکل زیر به دست می آید:

$$\tilde{\tau} = \frac{\eta_p}{\lambda} \left(f \left(-\frac{\tilde{\tau}}{\eta_p} \right) + 2a\tilde{D} \right) \xrightarrow{\times \lambda} \lambda \tilde{\tau} + f \tilde{\tau} = 2a\eta_p \tilde{D} \quad (23-2)$$

با اعمال عملگر تریس بر رابطه (۱۴-۲)، تابع f بر حسب تانسور تنش به دست می آید.

$$tr \tilde{\tau} = \frac{\eta_p}{\lambda} (ftrA - 3a) \xrightarrow{\times \frac{\lambda}{\eta_p}} ftrA = 3a + \frac{\lambda}{\eta_p} tr \tilde{\tau} \quad (24-2)$$

همچنین رابطه (۷-۲) را می توان به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$f = \frac{L^2}{L^2 - trA} \rightarrow fL^2 - ftrA = L^2 \rightarrow L^2(f - 1) = ftrA \xrightarrow{+L^2} f = 1 + \frac{ftrA}{L^2} \quad (25-2)$$

با جایگذاری رابطه (۲۴-۲) در رابطه (۲۵-۲) شکل نهایی تابع f به دست می آید:

$$f = 1 + \frac{3a + \frac{\lambda}{\eta_p} tr \tilde{\tau}}{L^2} \quad (26-2)$$

در مرحله بعد با استفاده از روابط (۲۳-۲) و (۲۶-۲) ترم تنش و تابع f به دست می آید. برای این منظور ابتدا لازم است مشتق فوق همرفتی تانسور تنش را به دست آورد.

$$\overset{\nabla}{\tilde{\tau}} = \frac{D\tilde{\tau}}{Dt} - \tilde{\tau} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{V} - \tilde{\nabla} \tilde{V}^T \cdot \tilde{\tau} \xrightarrow{\frac{D\tilde{\tau}}{Dt} = 0} \overset{\nabla}{\tilde{\tau}} = -\tilde{\tau} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{V} - \tilde{\nabla} \tilde{V}^T \cdot \tilde{\tau} \quad (27-2)$$

حال باید رابطه فوق به صورت تانسور بسط داده شود.

$$\overset{\nabla}{\tilde{\tau}} = - \begin{pmatrix} \tilde{\tau}_{xx} & \tilde{\tau}_{xy} & \tilde{\tau}_{xz} \\ \tilde{\tau}_{yx} & \tilde{\tau}_{yy} & \tilde{\tau}_{yz} \\ \tilde{\tau}_{zx} & \tilde{\tau}_{zy} & \tilde{\tau}_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} & \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} & \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} & \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} & \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{y}} \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} & \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{z}} & \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} & \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} & \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} & \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} & \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{z}} \\ \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} & \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{y}} & \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\tau}_{xx} & \tilde{\tau}_{xy} & \tilde{\tau}_{xz} \\ \tilde{\tau}_{yx} & \tilde{\tau}_{yy} & \tilde{\tau}_{yz} \\ \tilde{\tau}_{zx} & \tilde{\tau}_{zy} & \tilde{\tau}_{zz} \end{pmatrix} \quad (28-2)$$

با اعمال فرضیات ذکر شده در ابتدای فصل، رابطه فوق به شکل زیر ساده می شود:

$$\overset{\nabla}{\tilde{\tau}} = - \begin{pmatrix} \tilde{\tau}_{xx} & \tilde{\tau}_{xy} & \tilde{\tau}_{xz} \\ \tilde{\tau}_{yx} & \tilde{\tau}_{yy} & \tilde{\tau}_{yz} \\ \tilde{\tau}_{zx} & \tilde{\tau}_{zy} & \tilde{\tau}_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} & 0 & 0 \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} & \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\tau}_{xx} & \tilde{\tau}_{xy} & \tilde{\tau}_{xz} \\ \tilde{\tau}_{yx} & \tilde{\tau}_{yy} & \tilde{\tau}_{yz} \\ \tilde{\tau}_{zx} & \tilde{\tau}_{zy} & \tilde{\tau}_{zz} \end{pmatrix} \quad (29-2)$$

در نهایت مشتق فوق همرفتی تانسور تنش به شکل زیر حاصل می‌شود:

$$\nabla \tilde{\tau} = - \begin{pmatrix} 2(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \tilde{\tau}_{xy} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \tilde{\tau}_{xz}) & \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \tilde{\tau}_{yy} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \tilde{\tau}_{zy} & \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \tilde{\tau}_{yz} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \tilde{\tau}_{zz} \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \tilde{\tau}_{yy} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \tilde{\tau}_{yz} & 0 & 0 \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \tilde{\tau}_{zy} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \tilde{\tau}_{zz} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (30-2)$$

همچنین نرخ تغییر شکل به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\tilde{D} = \frac{1}{2}(\tilde{\nabla} \tilde{V} + \tilde{\nabla} \tilde{V}^T) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} & \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} & 0 & 0 \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (31-2)$$

با جایگذاری رابطه (30-2) و (31-2) در رابطه (23-2) معادله زیر حال می‌شود:

$$-\lambda \begin{pmatrix} 2(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \tilde{\tau}_{xy} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \tilde{\tau}_{xz}) & \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \tilde{\tau}_{yy} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \tilde{\tau}_{zy} & \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \tilde{\tau}_{yz} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \tilde{\tau}_{zz} \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \tilde{\tau}_{yy} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \tilde{\tau}_{yz} & 0 & 0 \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \tilde{\tau}_{zy} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \tilde{\tau}_{zz} & 0 & 0 \end{pmatrix} + \quad (32-2)$$

$$f \begin{pmatrix} \tilde{\tau}_{xx} & \tilde{\tau}_{xy} & \tilde{\tau}_{xz} \\ \tilde{\tau}_{yx} & \tilde{\tau}_{yy} & \tilde{\tau}_{yz} \\ \tilde{\tau}_{zx} & \tilde{\tau}_{zy} & \tilde{\tau}_{zz} \end{pmatrix} = a\eta_p \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} & \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} & 0 & 0 \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

از معادله فوق، ۹ رابطه حاصل می‌شود که در ادامه بررسی خواهند شد.

$$f \tilde{\tau}_{yz} = 0 \rightarrow \tilde{\tau}_{yz} = 0 \quad (33-2)$$

$$f \tilde{\tau}_{zy} = 0 \rightarrow \tilde{\tau}_{zy} = 0 \quad (34-2)$$

$$f \tilde{\tau}_{yy} = 0 \rightarrow \tilde{\tau}_{yy} = 0 \quad (35-2)$$

$$f \tilde{\tau}_{zz} = 0 \rightarrow \tilde{\tau}_{zz} = 0 \quad (36-2)$$

$$-2\lambda(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \tilde{\tau}_{xy} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \tilde{\tau}_{xz}) + f \tilde{\tau}_{xx} = 0 \rightarrow f \tilde{\tau}_{xx} = 2\lambda(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \tilde{\tau}_{xy} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \tilde{\tau}_{xz}) \quad (37-2)$$

$$-\lambda(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \tilde{\tau}_{yy} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \tilde{\tau}_{zy}) + f \tilde{\tau}_{xy} = a\eta_p \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \rightarrow f \tilde{\tau}_{xy} = a\eta_p \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \quad (38-2)$$

$$-\lambda\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \tilde{\tau}_{yy} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \tilde{\tau}_{yz}\right) + f \tilde{\tau}_{yx} = a\eta_p \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \rightarrow f \tilde{\tau}_{yx} = a\eta_p \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \quad (39-2)$$

$$-\lambda\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \tilde{\tau}_{yz} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \tilde{\tau}_{zz}\right) + f \tilde{\tau}_{xz} = a\eta_p \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \rightarrow f \tilde{\tau}_{xz} = a\eta_p \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \quad (40-2)$$

$$-\lambda\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \tilde{\tau}_{zy} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \tilde{\tau}_{zz}\right) + f \tilde{\tau}_{zx} = a\eta_p \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \rightarrow f \tilde{\tau}_{zx} = a\eta_p \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \quad (41-2)$$

با توجه به روابط فوق و برابر بودن برخی تنش‌ها با یکدیگر، مقارن بودن تانسور تنش مشخص می‌شود. حال با استفاده از رابطه (۲۶-۲) و با توجه به این که تنها یک ترم از سه مولفه واقع در قطر اصلی تانسور تنش مخالف صفر می‌باشد، می‌توان تابع f را به شکل زیر به دست آورد:

$$f = 1 + \frac{3a + \frac{\lambda}{\eta_p} \text{tr} \tilde{\tau}}{L^2} \xrightarrow{\text{tr} \tilde{\tau} = \tilde{\tau}_{xx}} f = 1 + \frac{3a + \frac{\lambda}{\eta_p} \tilde{\tau}_{xx}}{L^2} \quad (42-2)$$

معادله مومنتوم نشان داده شده در رابطه (۲-۲)، در مختصات دکارتی به شکل زیر بسط داده می‌شود:

$$\rho(\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}}) = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \left(\frac{\partial \tilde{\tau}_{xx}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{yx}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{zx}}{\partial \tilde{z}}\right) \quad (43-2)$$

$$\rho(\tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{z}}) = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} + \left(\frac{\partial \tilde{\tau}_{xy}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{yy}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{zy}}{\partial \tilde{z}}\right) \quad (44-2)$$

$$\rho(\tilde{u} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{y}} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}}) = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} + \left(\frac{\partial \tilde{\tau}_{xz}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{yz}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{zz}}{\partial \tilde{z}}\right) \quad (45-2)$$

با اعمال فرضیات ذکر شده در ابتدای فصل و همچنین روابطی که با استفاده از مدل FENE-P برای تانسور تنش به دست آمد، سه رابطه اخیر به شکل زیر ساده می‌شوند:

$$\frac{\partial \tilde{\tau}_{yx}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{zx}}{\partial \tilde{z}} = \frac{d\tilde{p}}{d\tilde{x}} \quad (46-2)$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} = 0 \quad (47-2)$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} = 0 \quad (48-2)$$

معادله انرژی نشان داده شده در رابطه (۳-۲)، در مختصات دکارتی به شکل زیر بسط داده می‌شود:

$$\rho c_p (\tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}}) = k \left(\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{z}^2} \right) + \tilde{\phi} \quad (49-2)$$

با اعمال فرضیات ذکر شده در ابتدای فصل معادله انرژی به شکل زیر ساده می‌شود:

$$\rho c_p \tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} = k \left(\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{z}^2} \right) + \tilde{\phi} \quad (50-2)$$

رابطه‌ای که برای محاسبه عبارت تلفات ویسکوز استفاده می‌شود به شکل زیر می‌باشد:

$$\tilde{\phi} = \tilde{\tau} : \tilde{\nabla} \tilde{V} \quad (51-2)$$

عملگر : در رابطه فوق به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{\tau} : \tilde{\nabla} \tilde{V} = \text{tr} \{ \tilde{\tau} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{V} \} \quad (52-2)$$

بنابراین برای محاسبه عبارت تلفات ویسکوز ابتدا لازم است حاصل ضرب تانسور تنش در گرادیان سرعت را به دست آورد.

$$\tilde{\tau} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{V} = \begin{pmatrix} \tilde{\tau}_{xx} & \tilde{\tau}_{xy} & \tilde{\tau}_{xz} \\ \tilde{\tau}_{yx} & \tilde{\tau}_{yy} & \tilde{\tau}_{yz} \\ \tilde{\tau}_{zx} & \tilde{\tau}_{zy} & \tilde{\tau}_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} & \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} & \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} & \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} & \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{y}} \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} & \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{z}} & \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\tau}_{xx} & \tilde{\tau}_{xy} & \tilde{\tau}_{xz} \\ \tilde{\tau}_{yx} & 0 & 0 \\ \tilde{\tau}_{zx} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} & 0 & 0 \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \quad (53-2)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\tau}_{xy} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} + \tilde{\tau}_{xz} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

با توجه به سه رابطه اخیر عبارت زیر حاصل می شود:

$$\tilde{\phi} = \tilde{\tau}_{xy} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} + \tilde{\tau}_{xz} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \quad (54-2)$$

با جایگذاری روابط (2-38) و (2-40) در رابطه فوق، شکل نهایی عبارت تلفات ویسکوز به دست می آید.

$$\tilde{\phi} = \frac{a\eta_p}{f} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \cdot \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} + \frac{a\eta_p}{f} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} = \frac{a\eta_p}{f} \left[\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \right)^2 \right] \quad (55-2)$$

با استفاده از حجم کنترل دیفرانسیلی واقع بر مجرای جریان، رابطه ای برای گرادیان طولی دمای میانگین به دست می آید.

$$q'' \tilde{P} d\tilde{x} + a\eta_p \iint_{\tilde{A}} \frac{1}{f} \left[\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \right)^2 \right] d\tilde{A} d\tilde{x} = \tilde{m} d\tilde{h} \quad (56-2)$$

$$\xrightarrow{\frac{\tilde{m} = \rho \tilde{A} \tilde{u}_b}{d\tilde{h} = c_p d\tilde{T}_m}} q'' \tilde{P} d\tilde{x} + a\eta_p \iint_{\tilde{A}} \frac{1}{f} \left[\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \right)^2 \right] d\tilde{A} d\tilde{x} = \rho \tilde{A} \tilde{u}_b c_p d\tilde{T}_m$$

$$\xrightarrow{\div \rho \tilde{A} \tilde{u}_b c_p d\tilde{x}} \frac{d\tilde{T}_m}{d\tilde{x}} = \frac{q'' \tilde{P}}{\rho \tilde{A} \tilde{u}_b c_p} + \frac{a\eta_p}{\rho \tilde{A} \tilde{u}_b c_p} \iint_{\tilde{A}} \frac{1}{f} \left[\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \right)^2 \right] d\tilde{A} = cte$$

که در آن $\tilde{T}_m$ دمای میانگین^۱، q'' شار حرارتی اعمال شده بر دیواره ها، $\tilde{P}$ محیط یک چهارم مقطع کانال، $\tilde{A}$ مساحت یک چهارم مقطع کانال، $\tilde{h}$ آنتالپی، $\tilde{m}$ دبی جرمی و $\tilde{u}_b$ سرعت متوسط^۲ می باشد.

در صورتی که جریان کاملاً توسعه یافته حرارتی باشد رابطه زیر برای کانال های بسته برقرار است:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left(\frac{\tilde{T} - \tilde{T}_w}{\tilde{T}_m - \tilde{T}_w} \right) = 0 \quad (57-2)$$

که در آن $\tilde{T}_w$ دمای دیواره کانال می باشد. با بسط رابطه فوق، رابطه زیر حاصل می شود:

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} - \frac{\partial \tilde{T}_w}{\partial \tilde{x}} - \left(\frac{\tilde{T} - \tilde{T}_w}{\tilde{T}_m - \tilde{T}_w} \right) \left(\frac{\partial \tilde{T}_m}{\partial \tilde{x}} - \frac{\partial \tilde{T}_w}{\partial \tilde{x}} \right) = 0 \quad (58-2)$$

¹ Mean temperature

² Bulk velocity

شار حرارتی اعمال شده بر دیواره‌ها ثابت فرض شده و در ناحیه کاملاً توسعه یافته حرارتی، ضریب انتقال حرارت جابجایی مقدار ثابتی است، بنابراین رابطه زیر برقرار است:

$$q'' = h(\tilde{T}_w - \tilde{T}_m) \rightarrow \tilde{T}_w - \tilde{T}_m = cte \rightarrow \frac{\partial \tilde{T}_w}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial \tilde{T}_m}{\partial \tilde{x}} \quad (۵۹-۲)$$

با استفاده از چهار رابطه اخیر نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} = \frac{d\tilde{T}_m}{d\tilde{x}} = \frac{d\tilde{T}_w}{d\tilde{x}} = \frac{q''\tilde{P}}{\rho\tilde{A}\tilde{u}_b c_p} + \frac{a\eta_p}{\rho\tilde{A}\tilde{u}_b c_p} \iint_{\tilde{A}} \frac{1}{f} \left[\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \right)^2 \right] d\tilde{A} = cte \quad (۶۰-۲)$$

با جایگذاری رابطه فوق و رابطه (۵۵-۲) در رابطه (۵۰-۲)، شکل نهایی معادله انرژی به دست می‌آید.

$$k \left(\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{z}^2} \right) + \frac{a\eta_p}{f} \left[\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \right)^2 \right] = \quad (۶۱-۲)$$

$$\rho c_p \tilde{u} \left\{ \frac{q''\tilde{P}}{\rho\tilde{A}\tilde{u}_b c_p} + \frac{a\eta_p}{\rho\tilde{A}\tilde{u}_b c_p} \iint_{\tilde{A}} \frac{1}{f} \left[\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \right)^2 \right] d\tilde{A} \right\}$$

۳-۲ بی بعدسازی

در این قسمت با معرفی پارامترهای بی بعدی که در ادامه آمده‌اند، تمامی معادلات لازم به صورت بی بعد بازنویسی شده تا در نهایت با استفاده از این پارامترها و روابطی که برای تانسور تنش به دست آمده، شکل ساده و بی بعد شده‌ی معادله مومنتوم و انرژی حاصل شود. همچنین شرایط مرزی لازم برای حل معادلات مومنتوم و انرژی ارائه می‌شوند. در نهایت هم رابطه‌ای برای ضریب اصطکاک موضعی و عدد ناسلت استخراج خواهد شد.

$$\begin{aligned} d_h &= \frac{4\tilde{A}_t}{\tilde{P}_t} = \frac{4(4\tilde{A})}{4\tilde{P}} = \frac{4\tilde{M}\tilde{N}}{\tilde{M} + \tilde{N}} & P &= \frac{\tilde{P}}{d_h} & p &= \frac{d_h}{\eta_p U_0} \tilde{p} \\ y &= \frac{\tilde{y}}{d_h} & A &= \frac{\tilde{A}}{d_h^2} & De &= \frac{\lambda U_0}{d_h} \\ z &= \frac{\tilde{z}}{d_h} & u &= \frac{\tilde{u}}{U_0} & T &= \frac{\tilde{T} - \tilde{T}_w}{q'' \frac{d_h}{k}} \\ M &= \frac{\tilde{M}}{d_h} & u_b &= \frac{\tilde{u}_b}{U_0} & Br &= \frac{\eta_p U_0^2}{d_h q''} \\ N &= \frac{\tilde{N}}{d_h} & \dot{\gamma} &= \frac{d_h}{U_0} \tilde{\gamma} & Re &= \frac{\rho \tilde{u}_b d_h}{\eta_p} \\ \kappa &= \frac{\tilde{M}}{\tilde{N}} & \tau &= \frac{d_h}{\eta_p U_0} \tilde{\tau} \end{aligned} \quad (۶۲-۲)$$

در رابطه فوق، d_h قطر هیدرولیکی، $\tilde{A}_t$ مساحت کل مقطع کانال، $\tilde{P}_t$ محیط کل مقطع کانال، $\tilde{M}$ نصف طول مقطع کانال، $\tilde{N}$ نصف عرض مقطع کانال، κ نسبت ابعاد مقطع کانال، $\tilde{\gamma}$ نرخ برش تعمیم یافته، De عدد دבורا، Br عدد برینکمن، Re عدد رینولدز و U_0 سرعت ماکزیمم سیال نیوتنی داخل لوله

مستقیم با قطر هیدرولیکی برابر و تحت گرادیان فشار مشابه با این مسئله است و به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$U_0 = -\frac{D^2}{16\eta_p} \frac{d\tilde{p}}{d\tilde{x}} \xrightarrow{d_h=D} U_0 = -\frac{d_h^2}{16\eta_p} \frac{d\tilde{p}}{d\tilde{x}} \quad (۶۳-۲)$$

که در آن D قطر لوله می‌باشد.

با استفاده از پارامترهای بی‌بعد تعریف شده، معادله مومنتوم ذکر شده در رابطه (۶۶-۲) به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$\frac{\eta_p U_0}{d_h^2} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\eta_p U_0}{d_h^2} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = -16 \frac{\eta_p U_0}{d_h^2} \rightarrow \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = -16 \quad (۶۴-۲)$$

روابط (۳۸-۲) الی (۴۱-۲) به شکل زیر بی‌بعد می‌شوند:

$$\frac{\eta_p U_0}{d_h} \tau_{xy} = \frac{a\eta_p U_0}{f} \frac{\partial u}{d_h \partial y} \rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{a}{f} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (۶۵-۲)$$

$$\frac{\eta_p U_0}{d_h} \tau_{xz} = \frac{a\eta_p U_0}{f} \frac{\partial u}{d_h \partial z} \rightarrow \tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{a}{f} \frac{\partial u}{\partial z} \quad (۶۶-۲)$$

برای تنش نرمال ارائه شده در رابطه (۳۷-۲) می‌توان نوشت:

$$\frac{\eta_p U_0}{d_h} \tau_{xx} = \frac{2\lambda}{f} \left[\frac{U_0}{d_h} \cdot \frac{\eta_p U_0}{d_h} \frac{\partial u}{\partial y} \tau_{xy} + \frac{U_0}{d_h} \cdot \frac{\eta_p U_0}{d_h} \frac{\partial u}{\partial z} \tau_{xz} \right] \quad (۶۷-۲)$$

$$\tau_{xx} = \frac{2De}{f} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \tau_{xy} + \frac{\partial u}{\partial z} \tau_{xz} \right)$$

تابع f بیان شده در رابطه (۴۲-۲) را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$f = 1 + \frac{\lambda}{\eta_p L^2} \cdot \frac{\eta_p U_0}{d_h} \tau_{xx} + \frac{3a}{L^2} = \alpha \tau_{xx} + \beta$$

$$\alpha = \frac{De}{L^2} \quad (۶۸-۲)$$

$$\beta = 1 + \frac{3a}{L^2}$$

با جایگذاری رابطه فوق و روابط (۶۵-۲) و (۶۶-۲) در رابطه (۶۷-۲)، معادله‌ی درجه سومی برای تنش نرمال به‌دست می‌آید.

$$\tau_{xx} = \frac{2aDe}{(\alpha \tau_{xx} + \beta)^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (۶۹-۲)$$

$$\alpha^2 \tau_{xx}^3 + 2\alpha\beta \tau_{xx}^2 + \beta^2 \tau_{xx} = 2aDe \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right]$$

با حل معادله درجه سوم فوق با استفاده از نرم‌افزار میپل و یافتن ریشه حقیقی آن، می‌توان تنش نرمال

را بر حسب پارامترهای ثابت α, β, De, a ، $\frac{\partial u}{\partial y}$ و $\frac{\partial u}{\partial z}$ به‌دست آورد. با جایگذاری تنش نرمال به‌دست

آمده در رابطه (۶۸-۲)، تابع f نیز برحسب پارامترهای ذکر شده حاصل می‌شود.

با جایگذاری روابط (۶۵-۲) و (۶۶-۲) در رابطه (۶۴-۲)، معادله مومنتوم بازنویسی می‌شود.

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a}{f} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{a}{f} \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -16 \quad (۷۰-۲)$$

با بسط رابطه (۷۰-۲) می‌توان شکل ساده و بی‌بعد شده‌ی معادله مومنتوم را به‌دست آورد.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = F(y, z) \quad (۷۱-۲)$$

$$F(y, z) = f \left[-\frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{16}{a} \right] \quad (۷۲-۲)$$

$$g = \frac{1}{f} \quad (۷۳-۲)$$

لازم به ذکر است که رابطه (۷۲-۲) به کمک نرم‌افزارهای میپل و متلب به‌دست آمده است.

شرایط مرزی بی‌بعد شده برای حل معادله مومنتوم به شرح زیر می‌باشند:

$$\text{at } y=0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (۷۴-۲)$$

$$\text{at } y=M \rightarrow u=0 \quad (۷۵-۲)$$

$$\text{at } z=0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (۷۶-۲)$$

$$\text{at } z=N \rightarrow u=0 \quad (۷۷-۲)$$

برای جریان آرام داخل کانال‌ها می‌توان ضریب اصطکاک موضعی را به شکل زیر تعریف کرد:

$$C_f = \frac{\tilde{\tau}_w}{\frac{1}{2} \rho \tilde{u}_b^2} \quad (۷۸-۲)$$

با استفاده از پارامترهای بی‌بعد تعریف شده می‌توان نوشت:

$$C_f = \frac{\frac{\eta_p U_0}{d_h} \tau_w}{\frac{1}{2} \rho U_0 u_b \tilde{u}_b} = \frac{2\tau_w}{\text{Re} u_b} \quad (۷۹-۲)$$

$$C_f \cdot \text{Re} = \frac{2\tau_w}{u_b} \quad (۸۰-۲)$$

در رابطه (۷۸-۲) تنش دیواره به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{\tau}_w = \frac{a\eta_p}{f} \tilde{\gamma} \quad (۸۱-۲)$$

که در آن $\tilde{\gamma}$ نرخ برش تعمیم یافته می‌باشد و با توجه به فرضیات مسئله به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{\gamma} = \sqrt{\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \right)^2} \quad (۸۲-۲)$$

در نهایت با استفاده از پارامترهای بی بعد ذکر شده تنش دیواره بی بعد به دست خواهد آمد:

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} \quad (۸۳-۲)$$

$$\tau_w = \frac{a}{f} \dot{\gamma} \quad (۸۴-۲)$$

با استفاده از پارامترهای بی بعد تعریف شده، برای بی بعد کردن رابطه (۶۱-۲) به شکل زیر عمل می شود:

$$\frac{k}{d_h^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(q'' \frac{d_h}{k} T + \tilde{T}_w \right) \right] + \frac{k}{d_h^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(q'' \frac{d_h}{k} T + \tilde{T}_w \right) \right] + \frac{a \eta_p U_0^2}{f d_h^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] =$$

$$\rho c_p U_0 u \left[\frac{q'' d_h P}{\rho d_h^2 A U_0 u_b c_p} + \frac{a \eta_p U_0^2 d_h^2}{\rho d_h^4 A U_0 u_b c_p} \iint_A \frac{1}{f} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dA \right] \quad (۸۵-۲)$$

$$\frac{q''}{d_h} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \frac{a \eta_p U_0^2}{f d_h^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] =$$

$$\frac{q'' P}{d_h A u_b} u + \frac{a \eta_p U_0^2}{d_h^2 A u_b} u \iint_A \frac{1}{f} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dA \quad (۸۶-۲)$$

$$\xrightarrow{\times \frac{d_h}{q''}} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \frac{a}{f} Br \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] =$$

$$\frac{P}{A} \frac{u}{u_b} + \frac{a}{A} Br \frac{u}{u_b} \iint_A \frac{1}{f} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dA \quad (۸۷-۲)$$

برای $\frac{1}{A}$ و $\frac{P}{A}$ موجود در رابطه فوق می توان نوشت:

$$\frac{P}{A} = \frac{\tilde{P}}{\tilde{A}} = \frac{\tilde{P} \cdot d_h}{\tilde{A}} = \frac{(\tilde{M} + \tilde{N}) \cdot \frac{4 \tilde{M} \tilde{N}}{(\tilde{M} + \tilde{N})}}{\tilde{M} \tilde{N}} = 4$$

$$\frac{1}{A} = \frac{d_h^2}{\tilde{A}} = \frac{16(\tilde{M} \tilde{N})^2}{(\tilde{M} + \tilde{N})^2 \cdot \tilde{M} \tilde{N}} = \frac{16 \tilde{M} \tilde{N}}{(\tilde{M} + \tilde{N})^2} \xrightarrow{\kappa = \frac{\tilde{M}}{\tilde{N}}} \frac{1}{A} = \frac{16(\kappa \tilde{N}) \tilde{N}}{(\kappa \tilde{N} + \tilde{N})^2} = \frac{16 \kappa}{(\kappa + 1)^2} \quad (۸۸-۲)$$

$$\frac{1}{A} = \frac{d_h^2}{\tilde{A}} = \frac{16(\tilde{M} \tilde{N})^2}{(\tilde{M} + \tilde{N})^2 \cdot \tilde{M} \tilde{N}} = \frac{16 \tilde{M} \tilde{N}}{(\tilde{M} + \tilde{N})^2} \xrightarrow{\kappa = \frac{\tilde{M}}{\tilde{N}}} \frac{1}{A} = \frac{16(\kappa \tilde{N}) \tilde{N}}{(\kappa \tilde{N} + \tilde{N})^2} = \frac{16 \kappa}{(\kappa + 1)^2} \quad (۸۹-۲)$$

بنابراین شکل ساده و بی شده معادله انرژی به صورت زیر می باشد:

$$\left[\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] = G(y, z) \quad (۹۰-۲)$$

$$G(y, z) = (4 + C Br) \frac{u}{u_b} - \frac{a}{f} Br \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (۹۱-۲)$$

$$C = \frac{16 \kappa a}{(\kappa + 1)^2} \iint_A \frac{1}{f} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dA \quad (۹۲-۲)$$

شرایط مرزی بی بعد شده برای حل معادله انرژی به شرح زیر می باشند:

$$\text{at } y=0 \rightarrow \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad (93-2)$$

$$\text{at } y=M \rightarrow T=0 \quad (94-2)$$

$$\text{at } z=0 \rightarrow \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad (95-2)$$

$$\text{at } z=N \rightarrow T=0 \quad (96-2)$$

در ادامه جهت استخراج رابطه ای برای عدد ناسلت، با استفاده از تعریف آن می توان نوشت:

$$Nu = \frac{h.d_h}{k} \quad (97-2)$$

طبق رابطه فوق ابتدا باید رابطه ای برای ضریب جابجایی حرارتی به دست آورد.

$$q'' = h(\tilde{T}_w - \tilde{T}_m) \rightarrow h = \frac{q''}{(\tilde{T}_w - \tilde{T}_m)} = - \frac{q''}{(\tilde{T}_m - \tilde{T}_w)} \quad (98-2)$$

با استفاده از تعریف دمای بی بعد شده می توان نوشت:

$$T_m = \frac{\tilde{T}_m - \tilde{T}_w}{q'' \frac{d_h}{k}} \rightarrow \tilde{T}_m - \tilde{T}_w = q'' \frac{d_h}{k} T_m \quad (99-2)$$

با جایگذاری رابطه فوق در رابطه (۹۸-۲)، ضریب جابجایی حرارتی به شکل زیر به دست می آید:

$$h = - \frac{q''}{(\tilde{T}_m - \tilde{T}_w)} = - \frac{k}{d_h T_m} \quad (100-2)$$

با جایگذاری رابطه فوق در رابطه (۹۷-۲)، عدد ناسلت به شکل زیر استخراج می شود:

$$Nu = \frac{h.d_h}{k} = - \frac{1}{T_m} \quad (101-2)$$

دمای میانگین طبق رابطه زیر تعریف می شود:

$$\tilde{T}_m = \frac{1}{\rho c_p \tilde{u}_b \tilde{A}} \iint_A \rho c_p \tilde{u} \tilde{T} d\tilde{A} \quad (102-2)$$

با استفاده از پارامترهای بی بعد شده، برای بی بعد کردن دمای میانگین به شکل زیر عمل می شود:

$$q'' \frac{d_h}{k} T_m + \tilde{T}_w = \frac{1}{U_0 u_b d_h^2 A} \iint_A U_0 u (q'' \frac{d_h}{k} T + \tilde{T}_w) d_h^2 dA \quad (103-2)$$

$$q'' \frac{d_h}{k} T_m + \tilde{T}_w = \frac{1}{u_b A} \iint_A q'' \frac{d_h}{k} u T dA + \frac{1}{u_b A} \iint_A u \tilde{T}_w dA$$

سرعت متوسط به شکل زیر تعریف می شود:

$$\tilde{u}_b = \frac{1}{\tilde{A}} \iint_A \tilde{u} d\tilde{A} \quad (104-2)$$

با استفاده از پارامترهای بی بعد شده، برای بی بعد کردن سرعت متوسط می توان نوشت:

$$U_0 u_b = \frac{1}{d_h^2 A} \iint_A U_0 u d_h^2 dA \xrightarrow{\div U_0 u_b} 1 = \frac{1}{A} \iint_A \frac{u}{u_b} dA \quad (105-2)$$

با استفاده از رابطه (۱۰۵-۲) می توان نتیجه گرفت که:

$$\frac{1}{u_b A} \iint_A u \tilde{T}_w dA = \tilde{T}_w \quad (۱۰۶-۲)$$

با استفاده از رابطه فوق می توان رابطه (۱۰۳-۲) را به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$q'' \frac{d_h}{k} T_m + \tilde{T}_w = \frac{q'' d_h}{k A} \iint_A \frac{u}{u_b} T dA + \tilde{T}_w \rightarrow T_m = \frac{1}{A} \iint_A \frac{u}{u_b} T dA \quad (۱۰۷-۲)$$

بنابراین شکل نهایی رابطه ناسلت به صورت زیر استخراج می شود:

$$Nu = -\frac{1}{T_m} = -\frac{1}{\frac{1}{A} \iint_A \frac{u}{u_b} T dA} \quad (۱۰۸-۲)$$

فصل ۳: روش حل

۳-۱ مقدمه

در این فصل نحوه‌ی حل معادلات مومنتوم و انرژی که در فصل قبل شکل بی‌بعد شده آن‌ها به‌دست آمد، بررسی خواهد شد. روش مورد استفاده جهت حل این معادلات، روش انتگرالی ریتز می‌باشد که در زیرمجموعه روش‌های حساب تغییرات برای حل معادلات مشتقات جزئی قرار می‌گیرد. پس از توضیح اجمالی در مورد روش ریتز، ابتدا این روش را برای رابطه (۲-۷۱) به‌کار برده و سپس با توجه به توزیع جریان به‌دست آمده، می‌توان روش ریتز را جهت به‌دست آوردن توزیع دما برای رابطه (۲-۹۰) به‌کار برد. چون خواص فیزیکی سیال ثابت و مستقل از دما هستند، معادلات مومنتوم و انرژی به‌صورت جداگانه حل می‌شوند. لازم به ذکر است که جهت به‌دست آوردن جواب‌های حاصل از اعمال روش ریتز بر معادلات ذکر شده، از نرم‌افزار متلب استفاده شده است که نتایج حاصل از آن در فصل بعد نمایش داده خواهد شد.

۳-۲ روش ریتز

روش ریتز یک روش کارآمد و قدرتمند جهت یافتن پاسخ‌های تقریبی برای مسائل مقدار مرزی می‌باشد. این روش که به افتخار والتر ریتز^۱ نامگذاری شده است به نام‌های رایلی-ریتز^۲ و ریتز-گالرکین^۳ نیز شهرت دارد. بعدها آریاچی [۴۴] توانست ضمن بررسی این روش برای مسائل دائم یک‌بعدی و دوبعدی، حلی تقریبی را برای معادله پواسون^۴ ارائه دهد. این روش در زیرمجموعه روش‌های حساب تغییرات قرار می‌گیرد و کاربردهای فراوانی در مسائل اجزاء محدود دارد. در روش ریتز پاسخ نهایی یک مسئله را به‌صورت یک دنباله همگرا به شکل زیر در نظر می‌گیرند [۴۱]:

$$u(y, z) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i (\psi(y, z))^i = a_1 \psi(y, z) + a_2 \psi^2(y, z) + a_3 \psi^3(y, z) + \dots \quad (۱-۳)$$

در واقع عبارت فوق یک سری توانی می‌باشد که به تعداد i پارامتر وابسته بوده و تابع ψ باید به‌ازای تمام مقادیر i شرایط مرزی مسئله را ارضا کند. بنابراین با توجه به شرایط مرزی مسئله مورد نظر، می‌توان توابع متنوعی را به ψ اختصاص داد. در مسائل فیزیکی معمولاً رفتار کلی جواب مورد نظر مشخص می‌باشد، بنابراین با توجه به طبیعت مسئله می‌توان از توابعی ویژه مانند چندجمله‌ای، دایره‌ای، هذلولی و استوانه‌ای استفاده کرد.

اگر در رابطه فوق $\psi(y, z)$ به‌عنوان یک عبارت حاصل‌ضرب شامل تابعی منحصر از y و تابعی دیگر منحصر از z فرض شود، یعنی:

$$\psi(y, z) = Y(y).Z(z) \quad (۲-۳)$$

آنگاه $Y(y)$ و $Z(z)$ را می‌توان به نحوی ایجاد نمود که $Y(y)$ تنها شرایط مرزی در جهت y و $Z(z)$ تنها شرایط مرزی در جهت z را ارضا کند. بر این اساس می‌توان رابطه (۳-۱) را به شکل رابطه (۳-۳)

^۱ Walther Ritz

^۲ Rayleigh-Ritz

^۳ Ritz-Galerkin

^۴ Poisson's equation

بازنویسی کرد.

$$u(y, z) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i [Y(y).Z(z)]^i = a_1 [Y(y).Z(z)] + a_2 [Y(y).Z(z)]^2 + a_3 [Y(y).Z(z)]^3 + \dots \quad (3-3)$$

از کاربردهای مهم روش ریتز حل معادلات حاکم غیرخطی در مسائل مختلف می‌باشد. در این گونه مسائل با در نظر گرفتن معادله حاکم (مثلا معادله مومنتوم) به عنوان معادله اوایلر^۱ فرمولاسیون تغییراتی و جایگذاری رابطه (۱-۳) در این معادله، یک دستگاه i معادله، i مجهولی تشکیل می‌شود که با حل این دستگاه ضرایب ریتز $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ به دست می‌آیند. با توجه به معلوم بودن تابع ψ ، با جایگذاری این ضرایب در رابطه (۱-۳)، $u(y, z)$ به دست خواهد آمد.

لازم به ذکر است که همگرایی حل مسئله مورد نظر تا حد زیادی به انتخاب تابع ψ وابسته است، به طوری که اگر تابع مناسبی برای ψ در نظر گرفته شود، تنها استفاده از چند جمله اول رابطه (۱-۳) پاسخی با دقت بالا و خطای کم ارائه خواهد داد.

۳-۲-۱ حل معادله مومنتوم با استفاده از روش ریتز

پیش از بررسی حل معادله مومنتوم، مجددا یادآوری می‌شود که در رابطه (۱-۳)، ضرایب ریتز a_i ضرایب ریتز و ψ تابع معلومی است که شرایط مرزی مسئله را ارضا کند. در این مطالعه برای انتخاب تابع ψ ، پس از بررسی توابع چندجمله‌ای، مشابه حل‌هایی که در گذشته انجام شده است، و دریافت پاسخ‌های نامطلوب از این توابع، پروفیل سرعت جریان سیال نیوتنی داخل کانالی مستقیم با مقطع مستطیلی به عنوان تابع ψ در نظر گرفته شد که انتخاب مناسبی می‌باشد. بنابراین برای تابع ψ رابطه زیر بیان می‌شود [۴۵]:

$$\tilde{\psi} = \frac{-16\tilde{M}^2}{\pi^3\eta_p} \cdot \left(\frac{d\tilde{p}}{d\tilde{x}} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} \cdot \cos\left(\frac{2n-1}{2\tilde{M}}\right)\pi\tilde{y} \right\} \cdot \left(1 - \frac{\cosh\left(\frac{(2n-1)\pi}{2\tilde{M}}\right)\tilde{z}}{\cosh\left(\frac{(2n-1)\pi\tilde{N}}{2\tilde{M}}\right)} \right) \quad (4-3)$$

با استفاده از پارامترهای بی بعد تعریف شده در رابطه (۲-۶۲) می‌توان رابطه فوق را به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\psi = \frac{256M^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} \cdot \cos\left(\frac{2n-1}{2M}\right)\pi y \right\} \cdot \left(1 - \frac{\cosh\left(\frac{2n-1}{2M}\right)\pi z}{\cosh\left(\frac{2n-1}{2M}\right)\pi N} \right) \quad (5-3)$$

بدیهی است که رابطه فوق به ازای تمام مقادیر i (رابطه ۱-۳)، شرایط مرزی ارائه شده در روابط (۲-۷۴) الی (۲-۷۷) را ارضا می‌کند. لازم به ذکر است که پس از بررسی روش ریتز تا مرتبه ۱۰، مشخص شد که استفاده از چهار جمله اول رابطه (۱-۳) برای به دست آوردن جوابی با دقت چهار رقم اعشار کفایت می‌کند. بنابراین در ادامه برای حل مسئله از ریتز مرتبه چهارم استفاده خواهد شد.

^۱ Euler equation

معادله مومنتوم ارائه شده در رابطه (۷۱-۲) به دلیل وجود عبارت‌هایی که در سمت راست معادله می‌باشند، غیرخطی می‌باشد. با در نظر گرفتن این رابطه به عنوان معادله اویلر فرمولاسیون تغییراتی می‌توان نوشت:

$$\delta I = \iint_A \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - F(y, z) \right) \delta u dy dz = 0 \quad (۶-۳)$$

در رابطه فوق δI بیان گر تغییرات فانکشنال^۱ مربوط به معادله مومنتوم می‌باشد. همچنین طبق رابطه (۱-۳) می‌توان u و δu را به شکل زیر تعریف کرد:

$$u = a_1 \psi + a_2 \psi^2 + a_3 \psi^3 + a_4 \psi^4 \quad (۷-۳)$$

$$\delta u = \delta a_1 \psi + \delta a_2 \psi^2 + \delta a_3 \psi^3 + \delta a_4 \psi^4 \quad (۸-۳)$$

رابطه (۸-۳) بیان می‌کند که تغییرات u نسبت به ضرایب ریتز چگونه باشد که رابطه (۶-۳) برقرار شود. در واقع شرط لازم برای وجود اکسترمم در یک فانکشنال این است که تغییرات آن برابر صفر باشد. با جایگذاری روابط (۷-۳) و (۸-۳) در رابطه (۶-۳) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} & \delta a_1 \iint_A \left(\frac{\partial^2 (a_1 \psi + a_2 \psi^2 + a_3 \psi^3 + a_4 \psi^4)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (a_1 \psi + a_2 \psi^2 + a_3 \psi^3 + a_4 \psi^4)}{\partial z^2} - F(y, z) \right) \psi dy dz + \\ & \delta a_2 \iint_A \left(\frac{\partial^2 (a_1 \psi + a_2 \psi^2 + a_3 \psi^3 + a_4 \psi^4)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (a_1 \psi + a_2 \psi^2 + a_3 \psi^3 + a_4 \psi^4)}{\partial z^2} - F(y, z) \right) \psi^2 dy dz + \\ & \delta a_3 \iint_A \left(\frac{\partial^2 (a_1 \psi + a_2 \psi^2 + a_3 \psi^3 + a_4 \psi^4)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (a_1 \psi + a_2 \psi^2 + a_3 \psi^3 + a_4 \psi^4)}{\partial z^2} - F(y, z) \right) \psi^3 dy dz + \\ & \delta a_4 \iint_A \left(\frac{\partial^2 (a_1 \psi + a_2 \psi^2 + a_3 \psi^3 + a_4 \psi^4)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (a_1 \psi + a_2 \psi^2 + a_3 \psi^3 + a_4 \psi^4)}{\partial z^2} - F(y, z) \right) \psi^4 dy dz = 0 \end{aligned} \quad (۹-۳)$$

در رابطه فوق δa_i ها متغیر مستقل و دلخواه می‌باشند و شرط این که تساوی این رابطه برقرار باشد این است که تک تک جملات برابر صفر شوند.

$$\begin{aligned} & \iint_A \left(\frac{\partial^2 (a_1 \psi + a_2 \psi^2 + a_3 \psi^3 + a_4 \psi^4)}{\partial y^2} \right) \psi dy dz + \iint_A \left(\frac{\partial^2 (a_1 \psi + a_2 \psi^2 + a_3 \psi^3 + a_4 \psi^4)}{\partial z^2} \right) \psi dy dz = \\ & \iint_A F(y, z) \psi dy dz \end{aligned} \quad (۱۰-۳)$$

$$\begin{aligned} & \iint_A \left(\frac{\partial^2 (a_1 \psi + a_2 \psi^2 + a_3 \psi^3 + a_4 \psi^4)}{\partial y^2} \right) \psi^2 dy dz + \iint_A \left(\frac{\partial^2 (a_1 \psi + a_2 \psi^2 + a_3 \psi^3 + a_4 \psi^4)}{\partial z^2} \right) \psi^2 dy dz = \\ & \iint_A F(y, z) \psi^2 dy dz \end{aligned} \quad (۱۱-۳)$$

$$\begin{aligned} & \iint_A \left(\frac{\partial^2 (a_1 \psi + a_2 \psi^2 + a_3 \psi^3 + a_4 \psi^4)}{\partial y^2} \right) \psi^3 dy dz + \iint_A \left(\frac{\partial^2 (a_1 \psi + a_2 \psi^2 + a_3 \psi^3 + a_4 \psi^4)}{\partial z^2} \right) \psi^3 dy dz = \\ & \iint_A F(y, z) \psi^3 dy dz \end{aligned} \quad (۱۲-۳)$$

^۱ Functional

$$\iint_A \left(\frac{\partial^2 (a_1 \psi + a_2 \psi^2 + a_3 \psi^3 + a_4 \psi^4)}{\partial y^2} \right) \cdot \psi^4 dydz + \iint_A \left(\frac{\partial^2 (a_1 \psi + a_2 \psi^2 + a_3 \psi^3 + a_4 \psi^4)}{\partial z^2} \right) \cdot \psi^4 dydz = \iint_A F(y, z) \cdot \psi^4 dydz \quad (۱۳-۳)$$

جهت ساده‌سازی معادلات، می‌توان مشتقات تابع ψ موجود در روابط فوق را به شکل زیر تعریف کرد:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \psi_y & \frac{\partial \psi^3}{\partial y} &= 3\psi^2 \psi_y \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= \psi_{yy} & \frac{\partial^2 \psi^3}{\partial y^2} &= 3(2\psi \psi_y^2 + \psi^2 \psi_{yy}) \\ \frac{\partial \psi^2}{\partial y} &= 2\psi \psi_y & \frac{\partial \psi^4}{\partial y} &= 4\psi^3 \psi_y \\ \frac{\partial^2 \psi^2}{\partial y^2} &= 2(\psi_y^2 + \psi \psi_{yy}) & \frac{\partial^2 \psi^4}{\partial y^2} &= 4(3\psi^2 \psi_y^2 + \psi^3 \psi_{yy}) \end{aligned} \quad (۱۴-۳)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial z} &= \psi_z & \frac{\partial \psi^3}{\partial z} &= 3\psi^2 \psi_z \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} &= \psi_{zz} & \frac{\partial^2 \psi^3}{\partial z^2} &= 3(2\psi \psi_z^2 + \psi^2 \psi_{zz}) \\ \frac{\partial \psi^2}{\partial z} &= 2\psi \psi_z & \frac{\partial \psi^4}{\partial z} &= 4\psi^3 \psi_z \\ \frac{\partial^2 \psi^2}{\partial z^2} &= 2(\psi_z^2 + \psi \psi_{zz}) & \frac{\partial^2 \psi^4}{\partial z^2} &= 4(3\psi^2 \psi_z^2 + \psi^3 \psi_{zz}) \end{aligned} \quad (۱۵-۳)$$

در نهایت با اعمال مشتقات مربوطه می‌توان روابط (۱۰-۳) الی (۱۳-۳) را به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} a_1 \iint_A \psi (\psi_{yy} + \psi_{zz}) dydz + a_2 \iint_A 2\psi (\psi_y^2 + \psi_z^2 + \psi (\psi_{yy} + \psi_{zz})) dydz + \\ a_3 \iint_A 3\psi (2\psi (\psi_y^2 + \psi_z^2) + \psi^2 (\psi_{yy} + \psi_{zz})) dydz + \\ a_4 \iint_A 4\psi (3\psi^2 (\psi_y^2 + \psi_z^2) + \psi^3 (\psi_{yy} + \psi_{zz})) dydz = \iint_A F(y, z) \cdot \psi dydz \end{aligned} \quad (۱۶-۳)$$

$$\begin{aligned} a_1 \iint_A \psi^2 (\psi_{yy} + \psi_{zz}) dydz + a_2 \iint_A 2\psi^2 (\psi_y^2 + \psi_z^2 + \psi (\psi_{yy} + \psi_{zz})) dydz + \\ a_3 \iint_A 3\psi^2 (2\psi (\psi_y^2 + \psi_z^2) + \psi^2 (\psi_{yy} + \psi_{zz})) dydz + \\ a_4 \iint_A 4\psi^2 (3\psi^2 (\psi_y^2 + \psi_z^2) + \psi^3 (\psi_{yy} + \psi_{zz})) dydz = \iint_A F(y, z) \cdot \psi^2 dydz \end{aligned} \quad (۱۷-۳)$$

$$a_1 \iint_A \psi^3 (\psi_{yy} + \psi_{zz}) dydz + a_2 \iint_A 2\psi^3 (\psi_y^2 + \psi_z^2 + \psi (\psi_{yy} + \psi_{zz})) dydz +$$

$$a_3 \iint_A 3\psi^3 (2\psi (\psi_y^2 + \psi_z^2) + \psi^2 (\psi_{yy} + \psi_{zz})) dydz + \quad (۱۸-۳)$$

$$a_4 \iint_A 4\psi^3 (3\psi^2 (\psi_y^2 + \psi_z^2) + \psi^3 (\psi_{yy} + \psi_{zz})) dydz = \iint_A F(y, z) \psi^3 dydz$$

$$a_1 \iint_A \psi^4 (\psi_{yy} + \psi_{zz}) dydz + a_2 \iint_A 2\psi^4 (\psi_y^2 + \psi_z^2 + \psi (\psi_{yy} + \psi_{zz})) dydz +$$

$$a_3 \iint_A 3\psi^4 (2\psi (\psi_y^2 + \psi_z^2) + \psi^2 (\psi_{yy} + \psi_{zz})) dydz + \quad (۱۹-۳)$$

$$a_4 \iint_A 4\psi^4 (3\psi^2 (\psi_y^2 + \psi_z^2) + \psi^3 (\psi_{yy} + \psi_{zz})) dydz = \iint_A F(y, z) \psi^4 dydz$$

کاملاً مشخص است که روابط (۱۶-۳) الی (۱۹-۳)، یک دستگاه معادلات به شکل زیر را تشکیل می‌دهد:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} \quad (۲۰-۳)$$

با حل دستگاه معادلات تشکیل شده ضرایب ریتز حاصل می‌شوند. سپس می‌توان با استفاده از این ضرایب و تابع معلوم ψ پروفیل سرعت را به دست آورد.

پس از شبکه‌بندی مناسب مقطع مستطیلی کانال، می‌توان انتگرال هر تابع دلخواه را در یک ناحیه محاسباتی دوبعدی به شکل زیر محاسبه کرد:

$$\iint_A F(y, z) dydz = \sum_j F(y_j, z_j) \Delta A_j \quad (۲۱-۳)$$

در رابطه فوق (y_j, z_j) و ΔA_j به ترتیب بیان گر مختصات مرکز و مساحت هر المان می‌باشند. لازم به ذکر است که تمام انتگرال‌های دوگانه موجود در این مطالعه با استفاده از رابطه (۲۱-۳) محاسبه می‌شوند.

همانطور که پیشتر ذکر شد، عبارت $F(y, z)$ موجود در رابطه (۷۱-۲)، به دلیل داشتن درجات مختلفی از مشتقات مرتبه اول و دوم u نسبت به y و z ، سبب غیرخطی شدن معادله مومنوم می‌شود. بنابراین لازم است که این معادله در یک حلقه تکرار حل شود. در ابتدا با فرض این که جریان سیال گذرنده از کانال مستطیلی نیوتنی باشد، یک حل اولیه برای معادله مومنوم به دست می‌آید. با این فرض رابطه (۷۲-۲) یک عدد ثابت شده و معادله مومنوم به شکل زیر ساده می‌شود:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -16 \quad (۲۲-۳)$$

با اعمال روش ریتز بر معادله خطی فوق با استفاده از روابط (۱۶-۳) الی (۱۹-۳)، دستگاه معادلات تشکیل شده حل می‌شود و ضرایب ریتز به دست می‌آیند. با توجه به ماهیت تابع ψ که پروفیل سرعت

جریان سیال نیوتنی داخل کانالی مستقیم با مقطع مستطیلی در نظر گرفته شده و همچنین رابطه (۲۲-۳) که معادله مومنتوم مربوط به سیال نیوتنی داخل کانال مستطیلی است، انتظار می‌رود که طبق رابطه (۷-۳) ضریب a_1 حدوداً برابر یک، و ضرایب دیگر مقادیر کوچک و نزدیک به صفر داشته باشند. با حل معادله (۲۲-۳) ضرایب ریتز برای نسبت ابعاد مقطع ۲، به شکل زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1.0002 \\ a_2 &= -8.4018 \times 10^{-4} \\ a_3 &= 0.0013 \\ a_4 &= -6.1052 \times 10^{-4} \end{aligned} \quad (23-3)$$

همان‌طور که مشخص است جواب‌های به دست آمده برای حل اولیه با پیش‌بینی‌های صورت گرفته تطابق دارند. در فصل بعد اعتبارسنجی مربوط به حل جریان سیال نیوتنی داخل کانال مستطیلی با استفاده از روش ریتز ارائه خواهد شد.

با به دست آمدن ضرایب ریتز حاصل از حل نیوتنی، می‌توان عبارت $F(y, z)$ موجود در رابطه (۷۱-۲) را که شامل مشتقات سرعت و تعدادی پارامتر ثابت از جمله عدد دبورا، پارامتر قابلیت کشش مدل و ضریب ثابت a می‌باشد محاسبه کرد. حال مشابه گام اول با اعمال روش ریتز بر روی معادله مومنتوم، ضرایب ریتز جدیدی تولید می‌شوند. در واقع هر دو سمت معادله (۷۱-۲) شامل ضرایب ریتز می‌باشند که برای سمت راست از ضرایب ریتز گام قبلی استفاده شده و با استفاده از آن‌ها ضرایب ریتز گام جدید (سمت چپ) حاصل می‌شوند. این روند تا جایی ادامه می‌یابد که ضرایب ریتز و پروفیل سرعت بهینه و همگرا شوند.

معیار همگرایی برای حل معادله مومنتوم به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$Error = \frac{\max |u_{iter} - u_{iter-1}|}{\max(u_{iter})} < 0.001 \quad (24-3)$$

که در آن $iter$ بیان‌گر گام حل مسئله می‌باشد. لازم به ذکر است که با افزایش عدد دبورا و همچنین کاهش پارامتر قابلیت کشش مدل، رفتار غیرخطی مسئله تشدید شده و پاسخ‌ها از حل نیوتنی (حل اولیه) دورتر می‌شوند، بنابراین مسئله در تعداد تکرار بیشتری حل شده و همگرایی دیرتر اتفاق خواهد افتاد. بدیهی است که با میل کردن عدد دبورا به سمت صفر و پارامتر قابلیت کشش مدل به سمت بی‌نهایت، پاسخ‌ها به حل نیوتنی نزدیک شده و همگرایی به سرعت اتفاق می‌افتد.

لازم به ذکر است که دو مورد در همگرایی یا واگرایی پاسخ‌های این مسئله موثر می‌باشند:

۱- تابع $1/\eta$ که جهت اعمال روش ریتز انتخاب می‌شود.

۲- حل اولیه معادله مومنتوم، حل مناسبی باشد.

۳-۲-۲ حل معادله انرژی با استفاده از روش ریتز

در ابتدا مجدداً یادآوری می‌شود که چون در این مطالعه خواص فیزیکی سیال ثابت و مستقل از دما فرض شده‌اند، بنابراین معادلات مومنوم و انرژی به صورت جداگانه حل می‌شوند. طبق رابطه (۲-۹۱)، عبارت $G(y, z)$ موجود در رابطه (۲-۹۰)، بر حسب سرعت و مشتقات آن، سرعت متوسط و تعدادی پارامتر ثابت از جمله عدد برینکمن، ضریب ثابت a و ضریب ثابت C می‌باشد. با توجه به معلوم شدن پروفیل سرعت در قسمت قبل، سمت راست معادله انرژی محاسبه می‌شود، بنابراین برخلاف معادله مومنوم، معادله انرژی ارائه شده در رابطه (۲-۹۰)، یک معادله خطی می‌باشد که جهت حل آن نیاز به حلقه تکرار نیست.

تابع ψ انتخاب شده در رابطه (۳-۵)، شرایط مرزی حرارتی ارائه شده در روابط (۲-۹۳) الی (۲-۹۶) را ارضا می‌کند، بنابراین برای حل معادله انرژی از تابع ψ مرحله قبل استفاده خواهد شد. همچنین استفاده از ریتز مرتبه چهارم برای حل این معادله نیز کفایت می‌کند. مشابه قسمت قبل با در نظر گرفتن رابطه (۲-۹۰) به عنوان معادله اویلر فرمولاسیون تغییراتی می‌توان نوشت:

$$\delta I = \iint_A \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - G(y, z) \right) \delta T dy dz = 0 \quad (۳-۲۵)$$

در رابطه فوق δI بیان گر تغییرات فانکشنال مربوط به معادله انرژی می‌باشد. همچنین طبق رابطه (۳-۱) می‌توان T و δT را به شکل زیر تعریف کرد:

$$T = b_1 \psi + b_2 \psi^2 + b_3 \psi^3 + b_4 \psi^4 \quad (۳-۲۶)$$

$$\delta T = \delta b_1 \psi + \delta b_2 \psi^2 + \delta b_3 \psi^3 + \delta b_4 \psi^4 \quad (۳-۲۷)$$

در روابط فوق b_i ها بیان گر ضرایب ریتز مربوط به معادله انرژی می‌باشد. همچنین رابطه (۳-۲۷) بیان می‌کند که تغییرات T نسبت به ضرایب ریتز چگونه باشد که رابطه (۳-۲۵) برقرار شود. با جایگذاری روابط (۳-۲۶) و (۳-۲۷) در رابطه (۳-۲۵) و همچنین استفاده از روابط (۳-۱۴) و (۳-۱۵)، روابط زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned} & b_1 \iint_A \psi (\psi_{yy} + \psi_{zz}) dy dz + b_2 \iint_A 2\psi (\psi_y^2 + \psi_z^2 + \psi (\psi_{yy} + \psi_{zz})) dy dz + \\ & b_3 \iint_A 3\psi (2\psi (\psi_y^2 + \psi_z^2) + \psi^2 (\psi_{yy} + \psi_{zz})) dy dz + \\ & b_4 \iint_A 4\psi (3\psi^2 (\psi_y^2 + \psi_z^2) + \psi^3 (\psi_{yy} + \psi_{zz})) dy dz = \iint_A G(y, z) \psi dy dz \end{aligned} \quad (۳-۲۸)$$

$$\begin{aligned}
& b_1 \iint_A \psi^2 (\psi_{yy} + \psi_{zz}) dydz + b_2 \iint_A 2\psi^2 (\psi_y^2 + \psi_z^2 + \psi (\psi_{yy} + \psi_{zz})) dydz + \\
& b_3 \iint_A 3\psi^2 (2\psi (\psi_y^2 + \psi_z^2) + \psi^2 (\psi_{yy} + \psi_{zz})) dydz + \quad (29-3) \\
& b_4 \iint_A 4\psi^2 (3\psi^2 (\psi_y^2 + \psi_z^2) + \psi^3 (\psi_{yy} + \psi_{zz})) dydz = \iint_A G(y, z) \cdot \psi^2 dydz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& b_1 \iint_A \psi^3 (\psi_{yy} + \psi_{zz}) dydz + b_2 \iint_A 2\psi^3 (\psi_y^2 + \psi_z^2 + \psi (\psi_{yy} + \psi_{zz})) dydz + \\
& b_3 \iint_A 3\psi^3 (2\psi (\psi_y^2 + \psi_z^2) + \psi^2 (\psi_{yy} + \psi_{zz})) dydz + \quad (30-3) \\
& b_4 \iint_A 4\psi^3 (3\psi^2 (\psi_y^2 + \psi_z^2) + \psi^3 (\psi_{yy} + \psi_{zz})) dydz = \iint_A G(y, z) \cdot \psi^3 dydz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& b_1 \iint_A \psi^4 (\psi_{yy} + \psi_{zz}) dydz + b_2 \iint_A 2\psi^4 (\psi_y^2 + \psi_z^2 + \psi (\psi_{yy} + \psi_{zz})) dydz + \\
& b_3 \iint_A 3\psi^4 (2\psi (\psi_y^2 + \psi_z^2) + \psi^2 (\psi_{yy} + \psi_{zz})) dydz + \quad (31-3) \\
& b_4 \iint_A 4\psi^4 (3\psi^2 (\psi_y^2 + \psi_z^2) + \psi^3 (\psi_{yy} + \psi_{zz})) dydz = \iint_A G(y, z) \cdot \psi^4 dydz
\end{aligned}$$

روابط فوق دستگاه معادلاتی به شکل زیر تشکیل می دهند:

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \\ G_4 \end{bmatrix} \quad (32-3)$$

جهت محاسبه انتگرال ها از رابطه (31-3) استفاده می شود. سپس با حل دستگاه معادلات فوق ضرایب ریتز حاصل می شوند. با استفاده از ضرایب ریتز به دست آمده و همچنین تابع معلوم ψ ، می توان طبق رابطه (3-26)، پروفیل دما را به دست آورد.

فصل ۴: نتایج و بحث

۴-۱ مقدمه

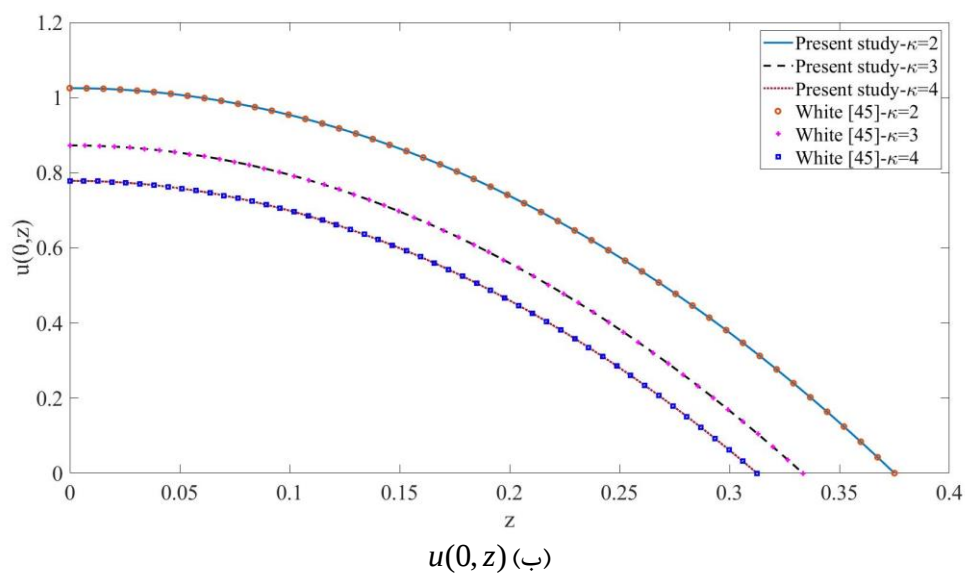
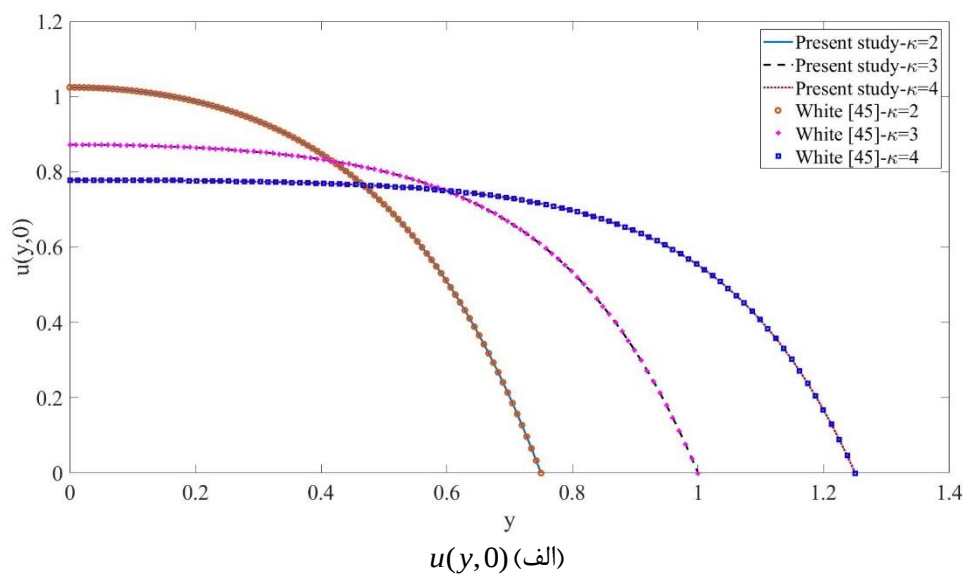
در این فصل نتایج حاصل از حل‌های انجام شده در فصل سوم، به‌ازای سه نسبت ابعاد مقطع ۲، ۳ و ۴ ارائه می‌شوند. در ابتدا توزیع سرعت بی‌بعد شده برای حل اولیه (حل جریان نیوتنی) ارائه شده و با نتایج مراجع [۳] و [۴۵] اعتبارسنجی می‌شود. سپس توزیع سرعت بی‌بعد شده برای جریان سیال FENE-P، به‌ازای مقادیر مختلفی از پارامترهای بی‌بعد عدد دوبرا و پارامتر قابلیت کشش مدل ارائه شده و تاثیر این پارامترها بر جریان سیال مورد نظر بررسی خواهند شد. برای اعتبارسنجی جریان سیال FENE-P، نسبت ابعاد مقطع کانال به سمت بی‌نهایت میل داده می‌شود، در این حالت جریان ایجاد شده باید به جریان بین دو صفحه ثابت میل پیدا کند و با نتایج مرجع [۲۷]، تطابق مناسبی داشته باشد. در قسمت بعد، توزیع دمای بی‌بعد شده و تلفات ویسکوز به‌ازای مقادیر مختلفی از پارامترهای بی‌بعد عدد برینکمن، عدد دوبرا و پارامتر قابلیت کشش مدل ترسیم می‌شوند. همچنین با استفاده از رابطه به‌دست آمده در فصل دوم، اعداد ناسلت به‌ازای پارامترهای بی‌بعد ذکر شده گزارش می‌شوند. برای اعتبارسنجی این قسمت، از نتایج مرجع [۸] استفاده خواهد شد.

۴-۲ نتایج حاصل از حل معادله مومنتوم

همانطور که در فصل قبل اشاره شد، پس از اعمال روش ریتز بر معادله مومنتوم طبق روابط (۳-۱۶) الی (۳-۱۹)، دستگاه معادلاتی تشکیل می‌شود که با حل آن ضرایب ریتز و در نتیجه توزیع سرعت حاصل می‌شود. اما به دلیل غیر خطی بودن عبارت $F(y, z)$ در معادله مومنتوم، این معادله در یک حلقه تکرار حل شده و نیاز به یک حل اولیه دارد. برای این منظور ابتدا فرض می‌شود که جریان سیال گذرنده از کانال مستطیلی، نیوتنی باشد. به دلیل اهمیت حل اولیه در به‌دست آوردن توزیع سرعت جریان سیال FENE-P، نتایج مربوط به توزیع سرعت هم برای حل اولیه (حل نیوتنی) و هم برای حل نهایی (جریان سیال FENE-P) ارائه شده و اعتبارسنجی می‌شوند.

۴-۲-۱ حل اولیه (حل نیوتنی)

شکل ۴-۱، پروفیل‌های سرعت بی‌بعد شده را که حاصل از اعمال روش ریتز بر معادله (۳-۲۲) می‌باشند، نشان می‌دهد. در این شکل، نتایج به‌ازای سه نسبت ابعاد مقطع ۲، ۳ و ۴ بر روی صفحات تقارن رسم شده و با نتایج مرجع [۴۵] اعتبارسنجی شده‌اند.



شکل ۴-۱: اعتبارسنجی نتایج حاصل از حل اولیه (حل نیوتنی)

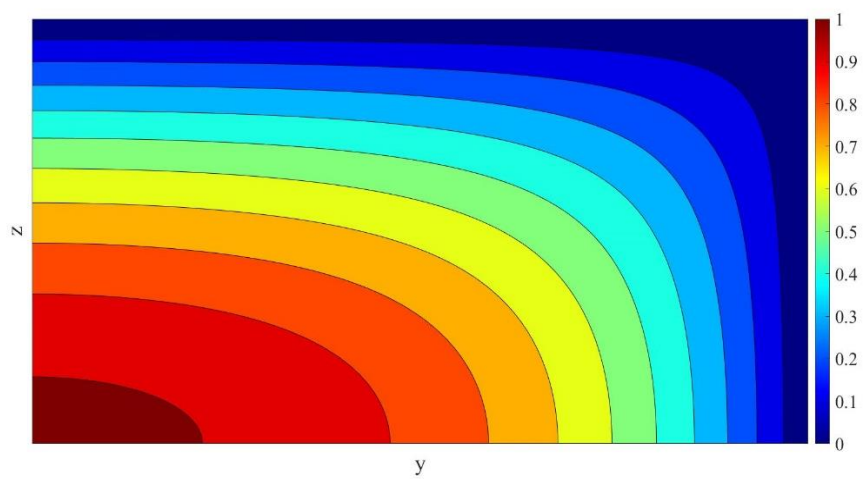
نمودارهای شکل فوق این موضوع را تایید می کنند که نتایج حاصل از حل اولیه (حل نیوتنی) که با استفاده از روش ریتز به دست آمده اند، تطابق بسیار خوبی با نتایج مرجع [۴۵] دارند. همانطور که مشخص است با افزایش نسبت ابعاد مقطع، سرعت ماکزیمم در مرکز کانال کاهش می یابد. همچنین طبق جدول ۴-۱، شاه و لندن [۳] نسبت سرعت ماکزیمم به سرعت متوسط جریان سیال نیوتنی گذرنده از کانال مستطیلی مستقیم را به ازای نسبت های ابعاد مختلف گزارش کرده اند که معیار خوبی جهت اعتبارسنجی نتایج حاصل از حل اولیه می باشد.

جدول ۴-۱: نسبت سرعت ماکزیمم به سرعت متوسط برای حل نیوتنی

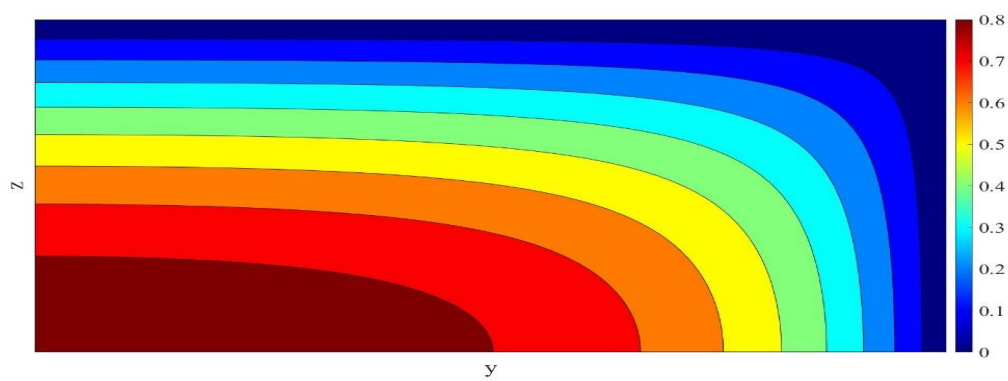
K	$\frac{u_{\max}}{u_b}$ Present Study	$\frac{u_{\max}}{u_b}$ Shah and London [3]	Error (%)
1	2.0965	2.0962	0.014
2	1.9921	1.9918	0.015
4	1.7739	1.7737	0.011
8	1.6286	1.6283	0.018
10	1.6012	1.6009	0.018

طبق جدول فوق، نتایج به دست آمده برای حل نیوتنی با استفاده از روش ریتز، تطابق بسیار خوبی با نتایج مرجع [۳] دارند. همچنین جدول ۴-۱ این موضوع را تایید می کند که با افزایش نسبت ابعاد مقطع کانال، نسبت سرعت ماکزیمم به سرعت متوسط در مرکز کانال کاهش می یابد.

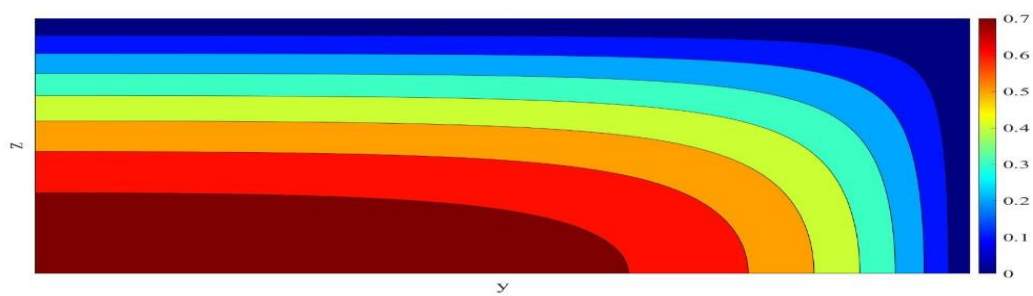
پس از اعتبارسنجی حل اولیه (حل نیوتنی)، در شکل ۴-۲ توزیع سرعت برای حل اولیه، به ازای نسبت ابعاد مقطع ۲، ۳ و ۴ نمایش داده شده است. لازم به ذکر است که به دلیل تقارن هندسه کانال مورد مطالعه، توزیع سرعت به ازای یک چهارم کانال ارائه شده است. همانطور که در شکل ۴-۲ مشخص است، با افزایش نسبت ابعاد مقطع کانال، سرعت کاهش یافته و همچنین اثر دیواره های کناری کانال بر توزیع سرعت کمتر می شود. زیرا هرچه نسبت ابعاد مقطع کانال بزرگتر شود، جریان ایجاد شده به جریان بین دو صفحه ثابت میل خواهد کرد.



(الف) $\kappa = 2$



(ب) $\kappa = 3$



(پ) $\kappa = 4$

شکل ۴-۲: توزیع سرعت حل اولیه (حل نیوتنی)

۴-۲-۲ جریان FENE-P

در این قسمت نتایج به دست آمده برای جریان FENE-P مورد بررسی قرار می گیرند. جهت اعتبارسنجی نتایج به دست آمده برای جریان سیال FENE-P، نسبت ابعاد مقطع کانال به سمت بی نهایت میل داده می شود. با انجام این کار، جریان ایجاد شده باید به جریان بین دو صفحه ثابت میل پیدا کند و با نتایج مرجع [۲۷] تطابق مناسبی داشته باشد. لازم به ذکر است که چون در مرجع [۲۷] برای بی بعد سازی سرعت از سرعت متوسط استفاده شده است، لذا جهت اعتبارسنجی جریان سیال FENE-P، نسبت سرعت به سرعت متوسط گزارش شده است.

با توجه به این که برای جریان سیال نیوتنی بین دو صفحه، نسبت سرعت ماکزیمم به سرعت متوسط برابر ۱/۵ می باشد، بنابراین جهت یافتن نسبت ابعادی که در آن جریان داخل کانال مستطیلی به جریان بین دو صفحه ثابت میل پیدا می کند، باید در حل اولیه (حل نیوتنی)، نسبت ابعاد را به اندازه ای افزایش داد تا نسبت سرعت ماکزیمم به سرعت متوسط برابر ۱/۵ شود. در این صورت می توان ادعا کرد که این نسبت ابعاد برای اعتبارسنجی جریان سیال FENE-P نیز مناسب می باشد. در نهایت مشخص شد که برای حل اولیه در نسبت ابعاد ۳۴۰، نسبت سرعت ماکزیمم به سرعت متوسط برابر ۱/۵ می شود. اولیویرا [۲۷] اثبات کرد که پروفیل سرعت جریان سیال FENE-P بین دو صفحه ثابت به شکل زیر به دست می آید:

$$u = \frac{3X}{2}(1-16z^2) \left[1 + \frac{144De^2 X^2}{a^2 L^2}(1+16z^2) \right] \quad (۱-۴)$$

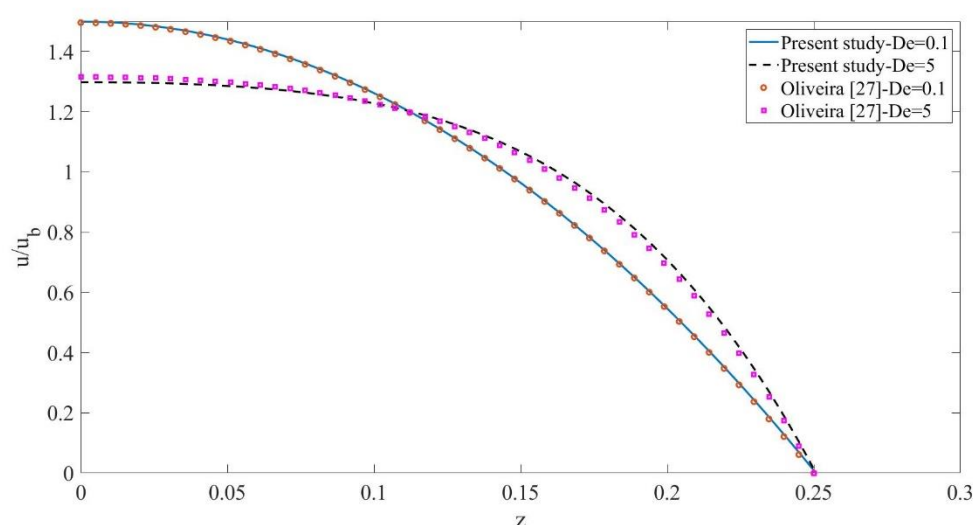
که در آن X گرادیان فشار بی بعد شده می باشد و به شکل زیر محاسبه می شود:

$$X = \frac{432^{\frac{1}{6}}(\zeta^{\frac{2}{3}} - 2^{\frac{2}{3}})}{6\varphi^{\frac{1}{2}}\zeta^{\frac{1}{3}}} \quad (۲-۴)$$

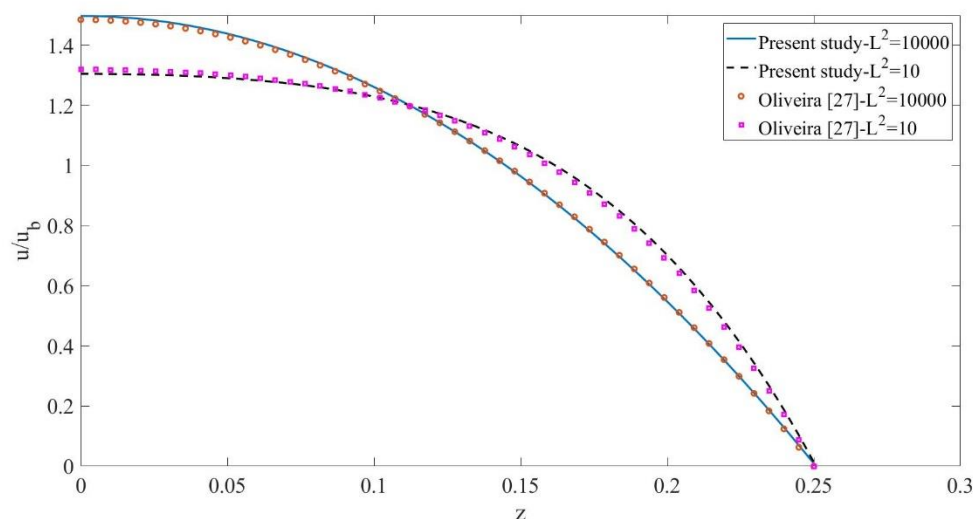
$$\zeta = (4 + 27\varphi)^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{3}{2}}\varphi^{\frac{1}{2}} \quad (۳-۴)$$

$$\varphi = \frac{864}{5} \frac{De^2}{a^2 L^2} \quad (۴-۴)$$

شکل ۳-۴، پروفیل سرعت جریان سیال FENE-P را داخل کانال مستطیلی، به ازای نسبت ابعاد مقطع ۳۴۰ نمایش می دهد که با نتایج مرجع [۲۷] اعتبارسنجی شده اند. در قسمت (الف)، پارامتر قابلیت کشش مدل ثابت در نظر گرفته شده و عدد دوبرا تغییر می کند و در قسمت (ب) این روند معکوس می باشد.



(الف) $L^2 = 100$

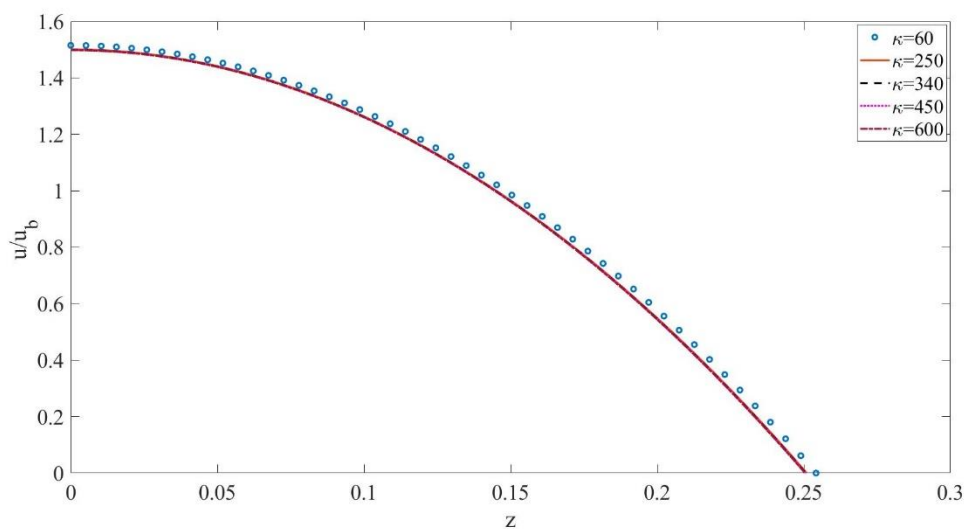


(ب) $De = 2$

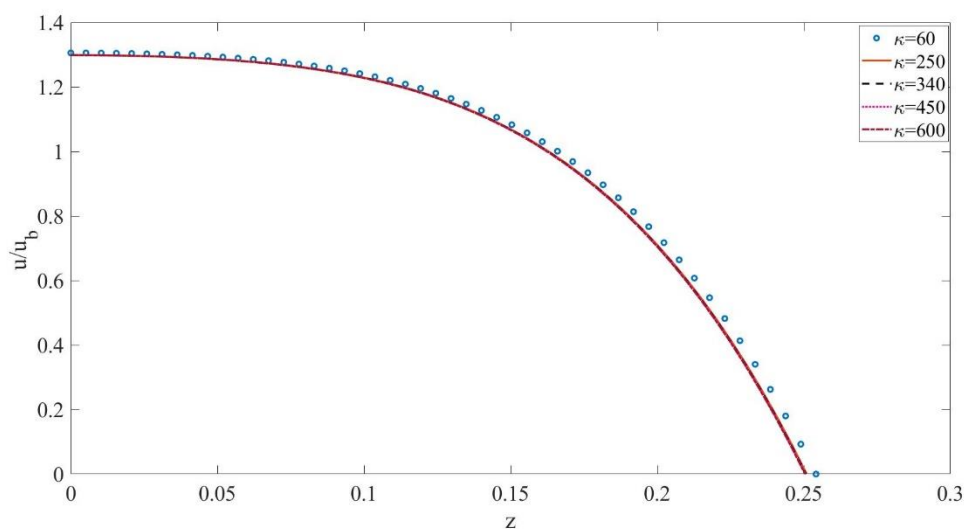
شکل ۳-۴: اعتبارسنجی جریان سیال FENE-P

شکل ۳-۴ این موضوع را تایید می کند که نتایج به دست آمده برای جریان سیال FENE-P داخل کانال مستطیلی، در حالی که نسبت ابعاد مقطع کانال به سمت بی نهایت میل کند، تطابق بسیار خوبی با نتایج مرجع [۲۷] دارند.

برای اطمینان از مناسب بودن نسبت ابعاد مقطع ۳۴۰ برای اعتبارسنجی، باید ثابت کرد که نسبت ابعادهای بالاتر، تاثیری بر روند اعتبارسنجی ندارند. شکل ۴-۴، اعتبارسنجی انجام شده در شکل ۳-۴ را به ازای نسبت ابعاد مقطع ۶۰، ۲۵۰، ۳۴۰، ۴۵۰ و ۶۰۰ نمایش می دهد.



(الف) $L^2 = 100$, $De = 0.1$



(ب) $L^2 = 100$, $De = 5$

شکل ۴-۴: بررسی نسبت ابعاد مقطع انتخاب شده برای اعتبارسنجی جریان سیال FENE-P

شکل ۴-۴ این موضوع را تایید می‌کند که نسبت ابعاد مقطع ۳۴۰، انتخاب بسیار مناسبی جهت اعتبارسنجی مطالعه حاضر با نتایج مرجع [۲۷] می‌باشد.

پس از اعتبارسنجی مطالعه حاضر، مقادیر حاصل از حل تحلیلی معادله مومنتوم ارائه شده در رابطه (۷۱-۲) با استفاده از روش ریتز در جدول‌های ۲-۴ و ۳-۴ ارائه شده‌اند. در واقع پس از اعمال روش ریتز بر معادله مومنتوم طبق روابط (۱۶-۳) الی (۱۹-۳) و حل دستگاه معادلات تشکیل شده، ضرایب ریتز طبق جداول ذکر شده به دست می‌آیند که با استفاده از این ضرایب و با توجه به معلوم بودن تابع ψ ، پروفیل سرعت طبق رابطه (۷-۳) تشکیل می‌شود.

جدول ۲-۴ ضرایب ریتز مربوط به معادله مومنتوم و همچنین سرعت ماکزیمم که در مرکز کانال ایجاد می‌شود را به ازای پارامتر قابلیت کشش ثابت $L^2 = 100$ و چهار عدد دبورای مختلف نشان می‌دهد. لازم به ذکر است که این نتایج برای سه نسبت ابعاد مقطع ۲، ۳ و ۴ به دست آمده‌اند تا تاثیر این پارامتر نیز بر نتایج بررسی شود. همانطور که مشخص است در $De = 0.1$ رفتار سیال به سیال نیوتنی نزدیک می‌باشد و نتایج به دست آمده انحراف کمی از حل نیوتنی دارند. اما با افزایش عدد دבורا این انحراف بیشتر خواهد شد. طبق جدول ۲-۴ در یک پارامتر قابلیت کشش ثابت، با افزایش عدد دבורا سرعت ماکزیمم در مرکز کانال افزایش می‌یابد که این امر در نتیجه تشدید رفتار رقیق‌شوندگی سیال می‌باشد. همچنین طبق جدول ۲-۴، در یک عدد دבורا ثابت، با افزایش نسبت ابعاد مقطع کانال سرعت ماکزیمم کاهش می‌یابد.

جدول ۳-۴ نیز پارامترهای مشابه جدول ۲-۴ را به ازای عدد دبورای ثابت $De = 2$ و چهار پارامتر قابلیت کشش متفاوت نشان می‌دهد. مشابه جدول قبل نتایج به ازای سه نسبت ابعاد مقطع مختلف گزارش شده‌اند. همانطور که مشخص است در $L^2 = 10000$ رفتار سیال به سیال نیوتنی نزدیک می‌باشد. با کاهش پارامتر قابلیت کشش مدل پاسخ‌ها از حل نیوتنی فاصله می‌گیرند. طبق جدول ۳-۴ در یک عدد دبورای ثابت، با افزایش پارامتر قابلیت کشش مدل، سرعت ماکزیمم در مرکز کانال کاهش می‌یابد. همچنین مشابه جدول قبل، در یک پارامتر قابلیت کشش ثابت، با افزایش نسبت ابعاد مقطع کانال سرعت ماکزیمم کاهش می‌یابد. طبق جداول ۲-۴ و ۳-۴، برخلاف ضریب a_3 که با توجه به نسبت ابعاد مقطع کانال مقادیر مثبت و منفی را شامل می‌شود، تمام مقادیر به دست آمده برای ضریب a_1 مثبت و برای ضرایب a_2 و a_4 منفی می‌باشند.

جدول ۴-۲: مقادیر حاصل از حل تحلیلی معادله مومنتوم به ازای $L^2 = 100$

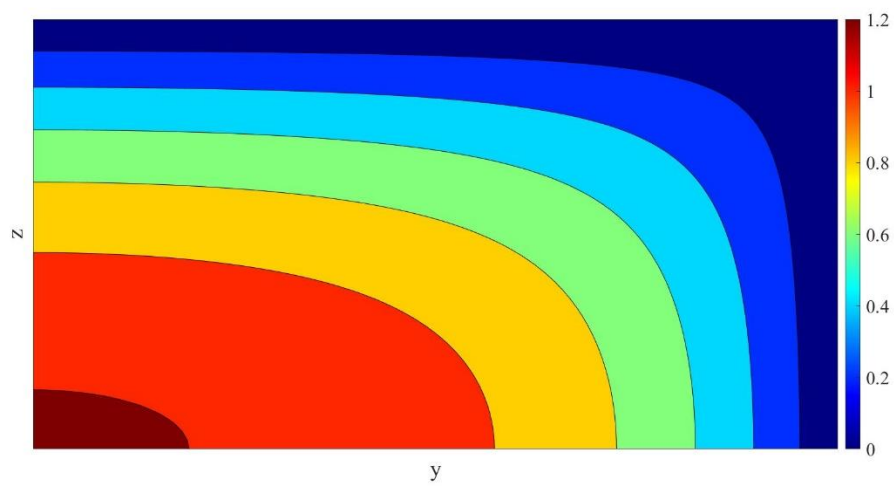
	De	a_1	a_2	a_3	a_4	$u_{\max}$
$\kappa = 2$	0.1	1.0041	-0.0030	0.0015	-0.0007	1.0268
	1	1.3778	-0.1922	0.0186	-0.0099	1.2192
	5	10.2645	-4.5125	0.1227	-0.0973	5.8047
	10	38.3875	-18.1170	0.6469	-0.5475	20.4052
$\kappa = 3$	0.1	1.0041	-0.0036	0.0024	-0.0014	0.8740
	1	1.3685	-0.2086	0.0118	-0.0122	1.0358
	5	10.1845	-5.0475	-0.0322	-0.1301	4.9466
	10	38.6198	-20.4365	0.3031	-1.0467	17.7330
$\kappa = 4$	0.1	1.0040	-0.0042	0.0035	-0.0022	0.7797
	1	1.3583	-0.2234	0.0074	-0.0134	0.9203
	5	9.9629	-5.4672	-0.1166	-0.1504	4.3321
	10	37.8356	-22.1265	0.0872	-1.4263	15.5620

جدول ۴-۳: مقادیر حاصل از حل تحلیلی معادله مومنتوم به ازای $De = 2$

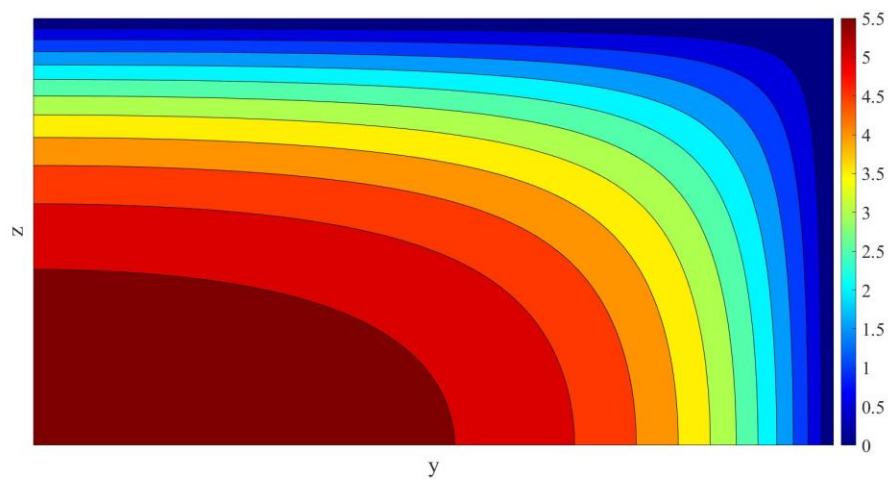
	L^2	a_1	a_2	a_3	a_4	$u_{\max}$
$\kappa = 2$	10	8.7182	-3.7588	0.0989	-0.0782	5.0071
	100	2.4751	-0.7256	0.0323	-0.0203	1.7869
	1000	1.1634	-0.0849	0.0100	-0.0049	1.1084
	10000	1.0172	-0.0099	0.0024	-0.0011	1.0334
$\kappa = 3$	10	8.6428	-4.2008	-0.0340	-0.1002	4.2622
	100	2.4478	-0.8038	0.0101	-0.0261	1.5153
	1000	1.1588	-0.0912	0.0065	-0.0057	0.9425
	10000	1.0167	-0.0108	0.0028	-0.0017	0.8796
$\kappa = 4$	10	8.4579	-4.5496	-0.1046	-0.1155	3.7350
	100	2.4118	-0.8681	-0.0021	-0.0314	1.3387
	1000	1.1539	-0.0974	0.0051	-0.0065	0.8390
	10000	1.0161	-0.0119	0.0038	-0.0026	0.7844

توزیع سرعت جریان سیال FENE-P داخل کانال مستطیلی مستقیم در شکل‌های ۴-۵ و ۴-۶ نمایش داده شده است. در شکل ۴-۵، پارامتر قابلیت کشش مدل ثابت و برابر ۱۰۰ در نظر گرفته شده و عدد دبورا تغییر می‌کند. در حالی که در شکل ۴-۶، عدد دبورا ثابت و برابر ۲ می‌باشد و پارامتر قابلیت کشش مدل متغیر است. لازم به ذکر است که این نتایج به‌زای نسبت ابعاد مقطع ۲ ارائه شده‌اند. همچنین به‌دلیل تقارن کانال مورد مطالعه، نتایج به‌زای یک چهارم کانال نمایش داده شده‌اند.

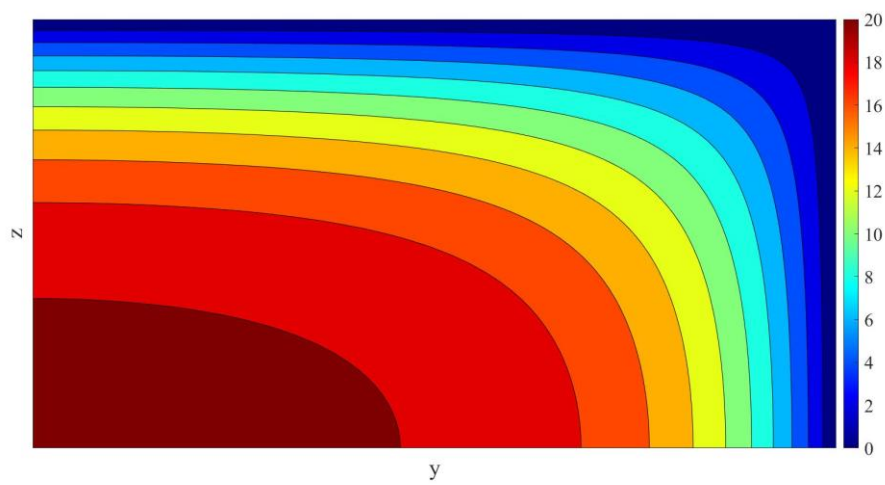
همانطور که از شکل ۴-۵ مشخص است، با افزایش عدد دبورا در یک پارامتر قابلیت کشش ثابت، سرعت ماکزیمم در مرکز کانال افزایش یافته و از حل نیوتنی فاصله می‌گیرد. در حالی که با توجه به شکل ۴-۶، این روند معکوس می‌باشد و با افزایش پارامتر قابلیت کشش مدل در یک عدد دبورا ثابت، سرعت ماکزیمم در مرکز کانال کاهش یافته و به حل نیوتنی نزدیک می‌شود. در واقع با افزایش عدد دبورا یا کاهش پارامتر قابلیت کشش مدل، عبارت‌های غیرخطی موجود در رابطه (۲-۷۲) رشد کرده و رفتار رقیق‌شوندگی سیال افزایش می‌یابد که این امر منجر به افزایش سرعت ماکزیمم در مرکز کانال می‌شود. همانطور که در بخش ۲-۳ گفته شد، برای بی‌بعدسازی سرعت از یک سیال نیوتنی استفاده شده که ویسکوزیته آن برابر ویسکوزیته در نرخ برش صفر سیال FENE-P می‌باشد. با توجه به این که سیال FENE-P ذاتاً رقیق‌شونده است، حداکثر ویسکوزیته آن برابر ویسکوزیته سیال نیوتنی ارائه شده در رابطه (۲-۶۳) می‌باشد. بنابراین با افزایش عدد دبورا یا کاهش پارامتر قابلیت کشش مدل، خاصیت رقیق‌شوندگی سیال افزایش یافته (ویسکوزیته کاهش می‌یابد) و در نتیجه سرعت افزایش خواهد یافت.



(الف) $De = 1$

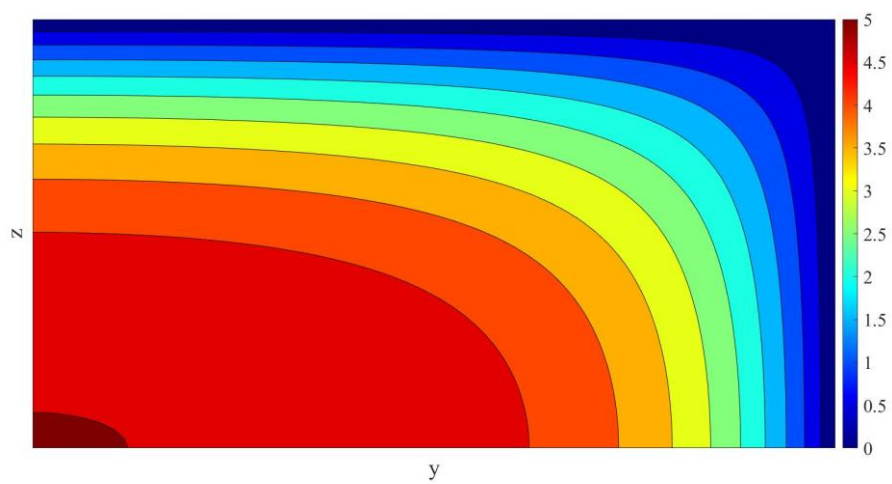


(ب) $De = 5$

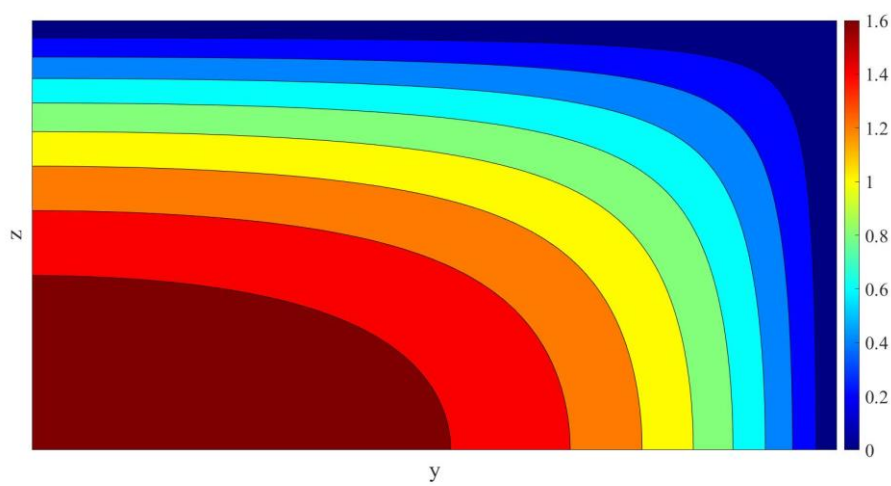


(پ) $De = 10$

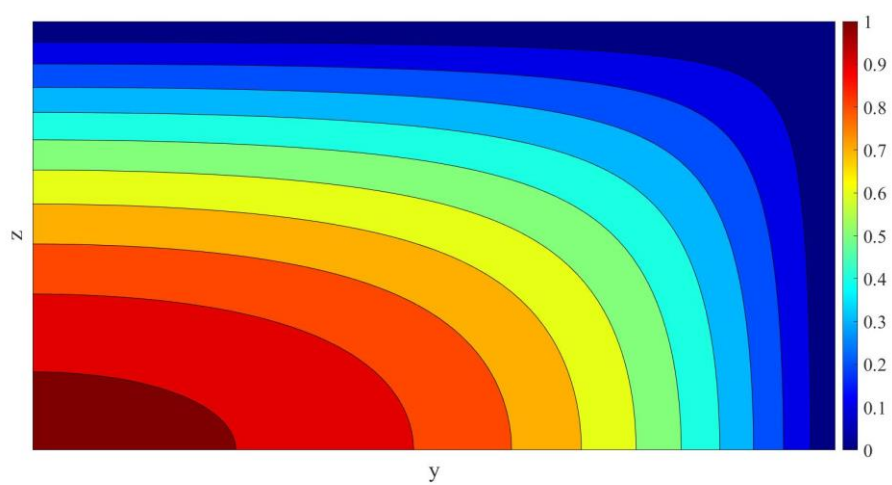
شکل ۴-۵: توزیع سرعت جریان سیال FENE-P به‌ازای $\kappa = 2$ و $L^2 = 100$



(الف) $L^2 = 10$



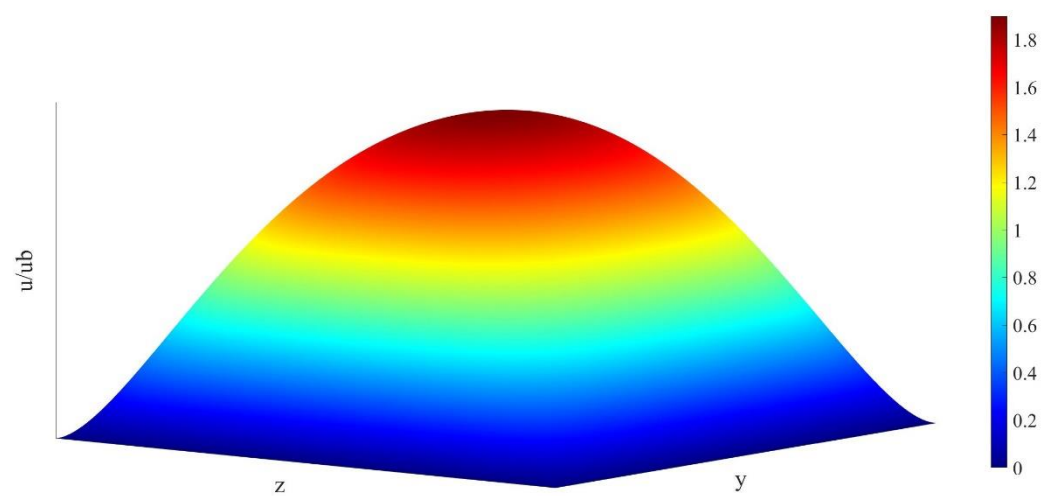
(ب) $L^2 = 100$



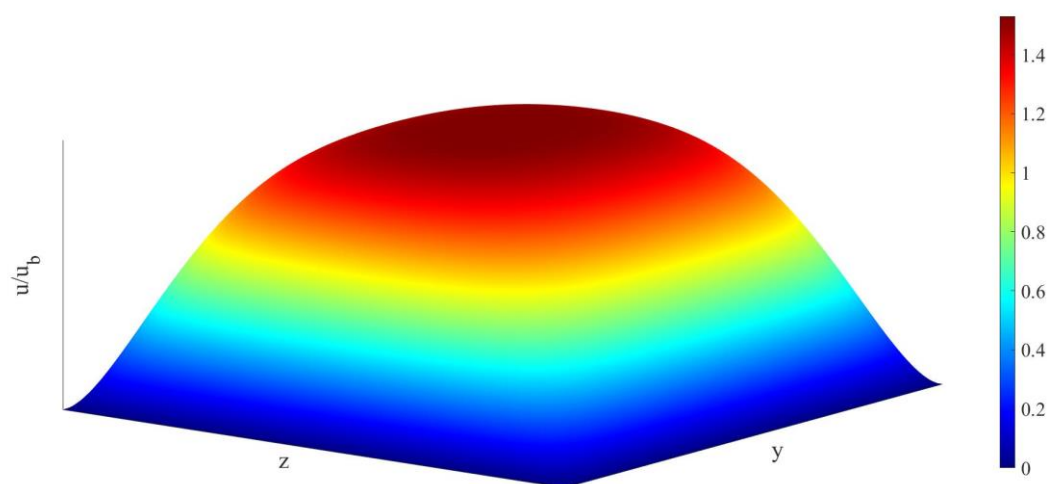
(پ) $L^2 = 10000$

شکل ۴-۶: توزیع سرعت جریان سیال FENE-P به ازای $De = 2$ و $\kappa = 2$

جهت مقایسه پذیری بهتر روند نتایج به دست آمده برای توزیع سرعت با مطالعات پیشین، مشابه مراجع [۲۷] و [۳۵]، نسبت سرعت به سرعت متوسط را برای نسبت ابعاد مقطع ۲ به دست آورده و تاثیر پارامترهای بی بعد عدد دبورا و پارامتر قابلیت کشش مدل بر توزیع سرعت بررسی خواهند شد. در شکل ۷-۴ توزیع سرعت (نسبت سرعت به سرعت متوسط) برای کل کانال و به ازای پارامتر قابلیت کشش مدل ثابت ($L^2 = 100$) و دو عدد دبورا ($De = 1, De = 10$) نمایش داده شده است. در شکل ۸-۴ نیز توزیع سرعتی مشابه با شکل ۷-۴ به ازای عدد دبورای ثابت ($De = 2$) و دو پارامتر قابلیت کشش مدل ($L^2 = 10000, L^2 = 10$) نمایش داده شده است. همچنین به منظور تشابه بیشتر با نتایج مرجع [۲۷]، در شکل های ۹-۴ و ۱۰-۴ پروفیل های سرعت (نسبت سرعت به سرعت متوسط) بر روی صفحات تقارن و به ازای اعداد دبورا و پارامترهای قابلیت کشش مدل متفاوت نمایش داده شده اند. لازم به ذکر است که در شکل های ۹-۴ و ۱۰-۴ پروفیل های سرعت به ازای یک چهارم کانال رسم شده اند. همانطور که از شکل های ۷-۴ الی ۱۰-۴ مشخص است، با افزایش عدد دبورا و کاهش پارامتر قابلیت کشش مدل، رفتار رقیق شونده سیال تشدید شده و ویسکوزیته کاهش می یابد، بنابراین پروفیل های سرعت در مرکز کانال مسطح تر می شوند که با نتایج مراجع [۲۷] و [۳۵] کاملاً تطابق دارند. در واقع با کاهش عدد دبورا و افزایش پارامتر قابلیت کشش مدل، نسبت سرعت ماکزیمم به سرعت متوسط در مرکز کانال افزایش یافته و به حل نیوتنی ($\frac{u_{max}}{u_b} = 1.9921$) نزدیک تر می شود که این امر منجر به تیزتر شدن پروفیل های سرعت در مرکز کانال خواهد شد. لازم به ذکر است که چون در وسط کانال نرخ برش کم می باشد، بنابراین ویسکوزیته بیشتر بوده و سیال سفت تر می شود، در حالی که در مجاورت دیواره های کانال این روند معکوس می باشد، به همین دلیل با فاصله گرفتن از حالت نیوتنی (افزایش عدد دبورا و کاهش پارامتر قابلیت کشش مدل) تغییرات سرعت در وسط کانال کم تر شده و پروفیل های سرعت دارای یکنواختی بیشتری می شوند.

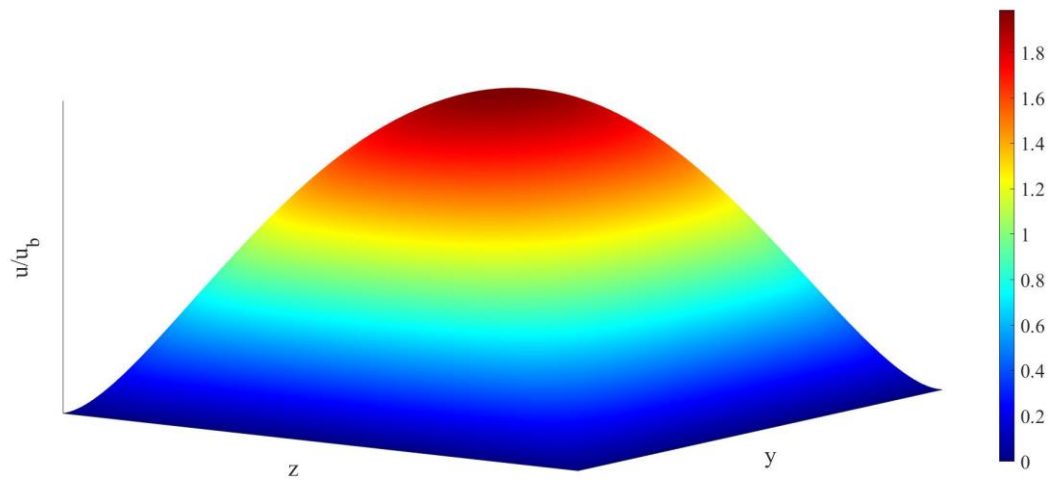


(الف) $De = 1$

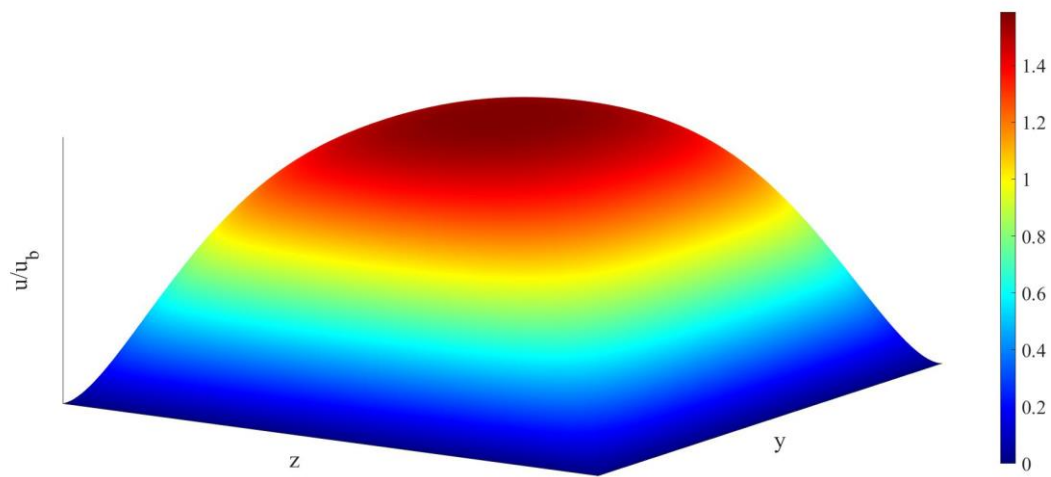


(ب) $De = 10$

شکل ۴-۷: توزیع سرعت (نسبت سرعت به سرعت متوسط) جریان سیال FENE-P به ازای $L^2 = 100$

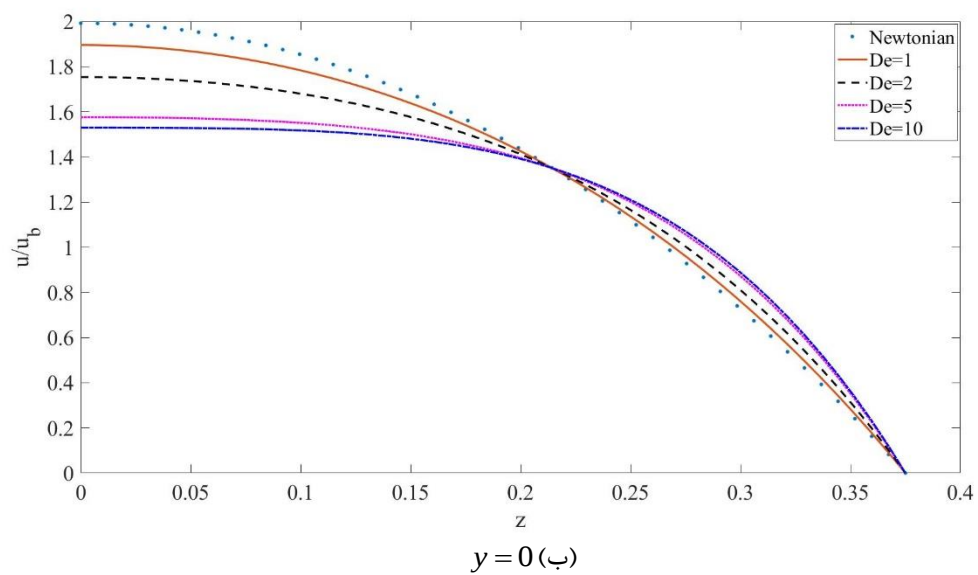
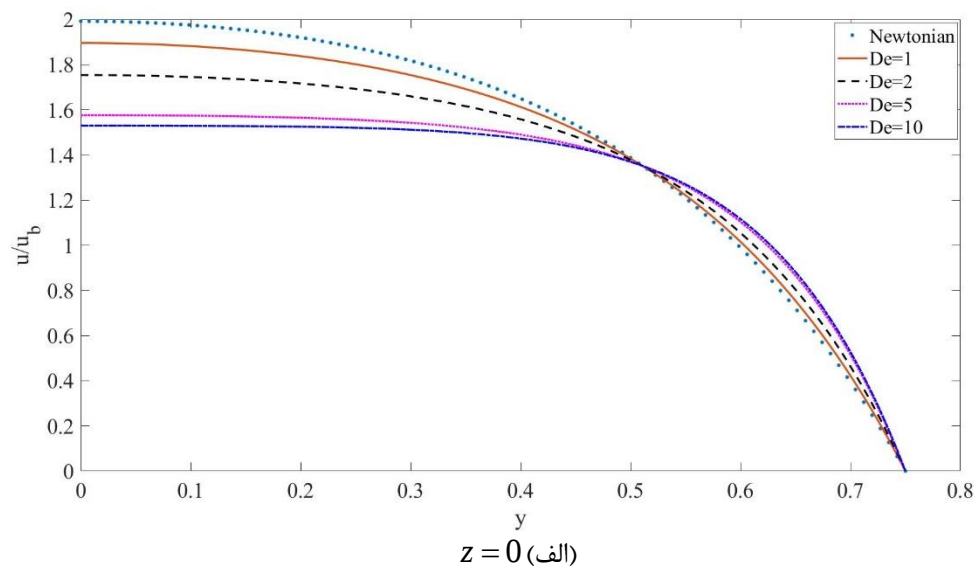


(الف) $L^2 = 10000$

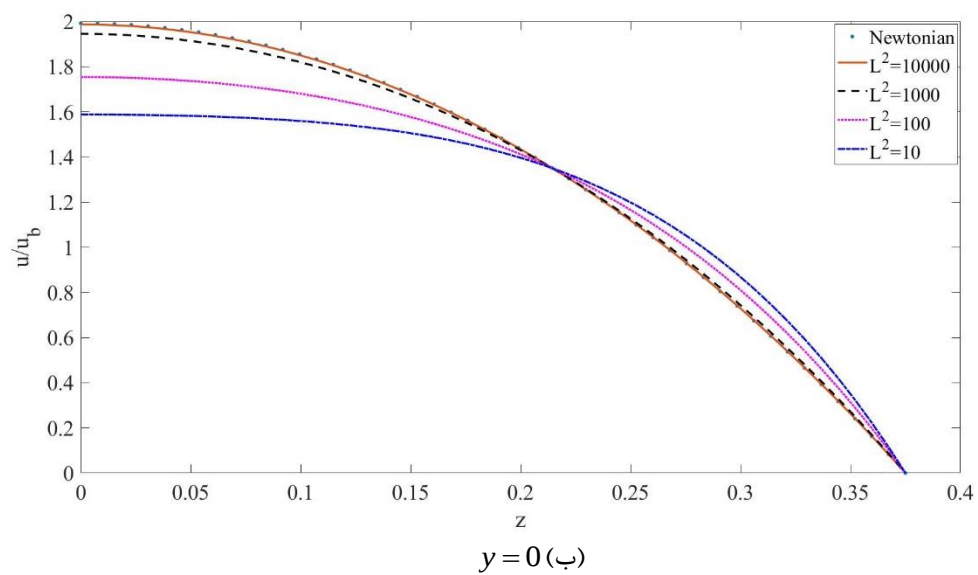
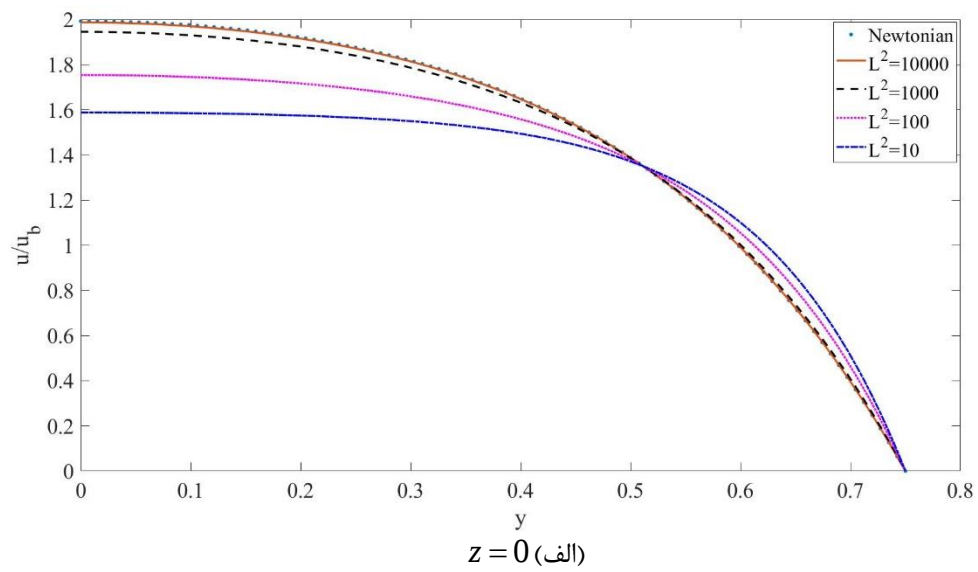


(ب) $L^2 = 10$

شکل ۴-۸: توزیع سرعت (نسبت سرعت به سرعت متوسط) جریان سیال FENE-P به ازای $De = 2$



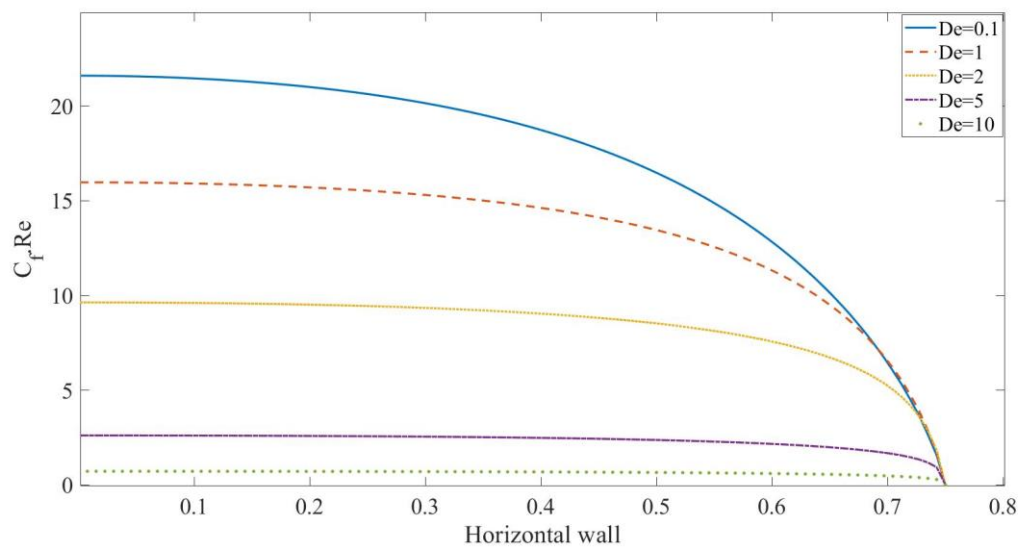
شکل ۴-۹: پروفیل‌های سرعت جریان سیال FENE-P بر روی صفحات تقارن به‌ازای $L^2 = 100$ و $\kappa = 2$



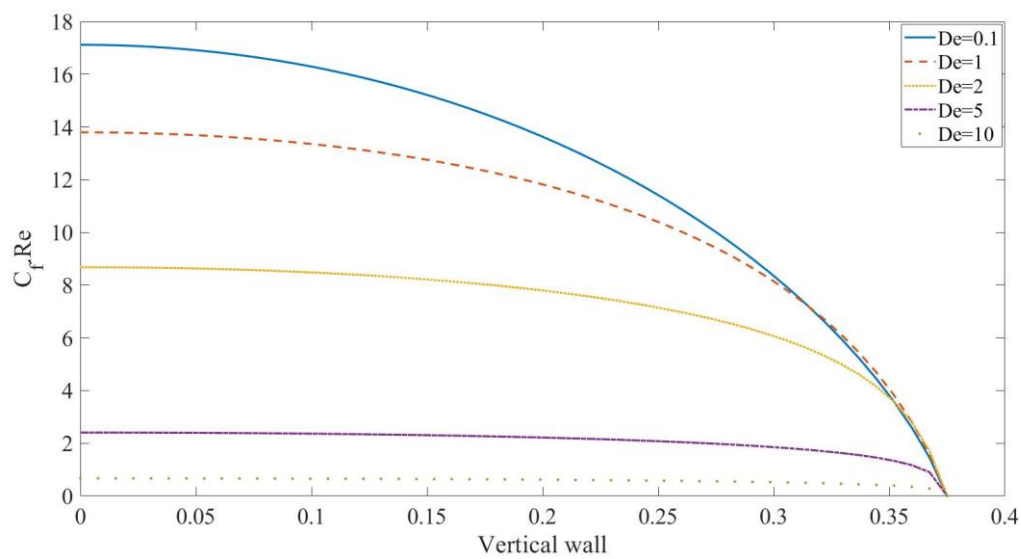
شکل ۴-۱۰: پروفیل‌های سرعت جریان سیال FENE-P بر روی صفحات تقارن به‌ازای $De = 2$ و $\kappa = 2$

شکل‌های ۱۱-۴ و ۱۲-۴ توزیع ضریب $C_f \cdot Re$ ارائه شده در رابطه (۲-۸۰) را بر روی دیواره‌های کانال نمایش می‌دهند. شکل ۱۱-۴ توزیع ضریب اصطکاک را به‌ازای پارامتر قابلیت کشش ثابت $L^2 = 100$ و پنج عدد دبورای مختلف نمایش می‌دهد. همچنین شکل ۱۲-۴ توزیع ضریب ذکر شده را به‌ازای عدد دبورای ثابت $De = 2$ و چهار پارامتر قابلیت کشش متفاوت نشان می‌دهد. لازم به ذکر است که این نتایج برای نسبت ابعاد مقطع ۲ ارائه شده‌اند. همچنین به‌دلیل تقارن هندسه کانال مورد مطالعه نتایج به‌ازای یک‌چهارم مقطع کانال نمایش داده شده‌اند.

همانطور که مشخص است با افزایش عدد دבורا در یک پارامتر قابلیت کشش ثابت، رفتار رقیق‌شوندگی سیال افزایش یافته و در نتیجه ضریب اصطکاک روی دیواره‌ها کاهش می‌یابد. اما با افزایش پارامتر قابلیت کشش مدل در یک عدد دبورای ثابت، این روند معکوس شده و ضریب اصطکاک روی دیواره‌ها افزایش می‌یابد. همچنین ذکر این نکته حائز اهمیت است که ضریب اصطکاک روی دیواره‌های افقی کانال مقادیر بیشتری را نسبت به دیواره‌های عمودی به خود اختصاص می‌دهند. زیرا دیواره‌های افقی نسبت به دیواره‌های عمودی فاصله کمتری تا هسته جریان دارند، لذا بیشترین مقدار نرخ برش و تنش در مجاورت دیواره‌های افقی می‌باشد. بنابراین طبق رابطه (۲-۸۰) می‌توان ادعا کرد که ضریب اصطکاک روی دیواره‌های افقی بیشتر است. لازم به ذکر است که بیشترین مقدار ضریب اصطکاک در مرکز دیواره‌ها می‌باشد و با نزدیک شدن به کنج‌ها مقدارش کاهش می‌یابد.

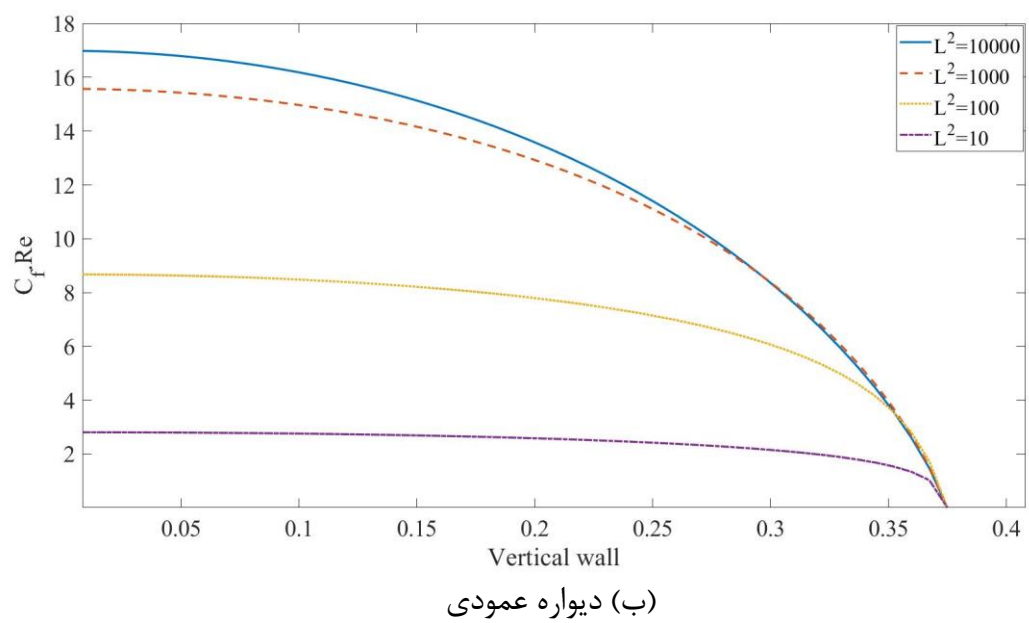
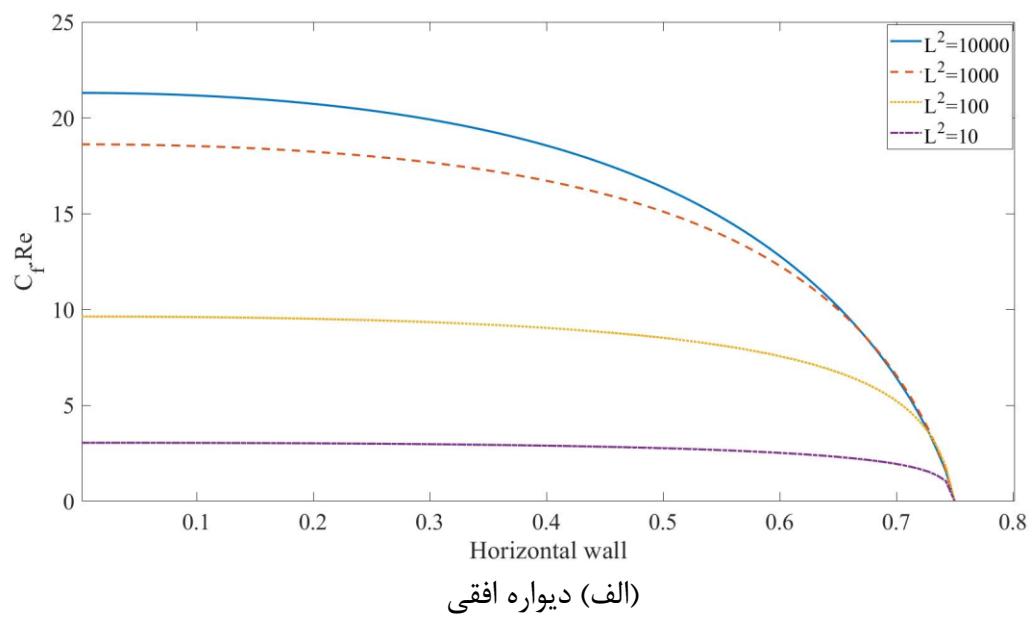


(الف) دیواره افقی



(ب) دیواره عمودی

شکل ۴-۱۱: توزیع ضریب $C_f.Re$ بر روی دیواره‌های کانال به‌ازای $L^2 = 100$ و $\kappa = 2$



شکل ۴-۱۲: توزیع ضریب $C_f \cdot Re$ بر روی دیواره‌های کانال به‌ازای $De = 2$ و $\kappa = 2$

۴-۳ نتایج حاصل از حل معادله انرژی

در ابتدا مجدداً یادآوری می‌شود که چون در این مطالعه خواص فیزیکی سیال ثابت و مستقل از دما فرض شده‌اند، بنابراین معادلات مومنتوم و انرژی مستقل از یکدیگر حل می‌شوند. با توجه به این که سمت راست معادله انرژی ارائه شده در رابطه (۲-۹۱)، شامل سرعت و مشتقات آن، سرعت متوسط و تعدادی پارامتر ثابت است، با حل معادله مومنتوم و به‌دست آوردن توزیع سرعت، سمت راست معادله انرژی تشکیل خواهد شد. بنابراین معادله انرژی ارائه شده در رابطه (۲-۹۰) بر خلاف معادله مومنتوم یک معادله خطی می‌باشد. با اعمال روش ریتز بر معادله انرژی طبق روابط (۳-۲۸) الی (۳-۳۱) و حل دستگاه معادلات تشکیل شده، ضرایب ریتز به‌دست می‌آیند و می‌توان طبق رابطه (۳-۲۶) توزیع دما را به‌دست آورد.

جهت اعتبارسنجی این قسمت از نتایج مرجع [۸] استفاده می‌شود. در این مرجع جریان سیال نیوتنی گذرنده از کانال مستطیلی مستقیم، به‌ازای نسبت ابعاد مقطع مختلف و تحت شار حرارتی ثابت بر دیواره‌ها به‌صورت تحلیلی بررسی شده است. لازم به ذکر است که در این مرجع از تلفات ویسکوز صرف‌نظر شده است. بنابراین با توجه به شرایط ذکر شده در این مرجع، معادله انرژی ارائه شده در رابطه (۲-۹۰) به شکل زیر ساده می‌شود:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 4 \frac{u}{u_b} \quad (۴-۵)$$

بدیهی است که برای تشکیل سمت راست معادله (۴-۵)، باید طبق رابطه (۳-۲۲) از توزیع سرعت جریان سیال نیوتنی داخل کانال مستطیلی استفاده کرد. با اعمال روش ریتز بر معادله فوق توزیع دما به‌دست می‌آید، سپس با استفاده از رابطه (۲-۱۰۸) می‌توان عدد ناسلت را به‌ازای نسبت ابعاد مقطع مختلف به‌دست آورد و با نتایج مرجع [۸] اعتبارسنجی نمود.

جدول ۴-۴: اعتبارسنجی نتایج حاصل از حل معادله انرژی برای جریان نیوتنی به‌ازای $Br = 0$

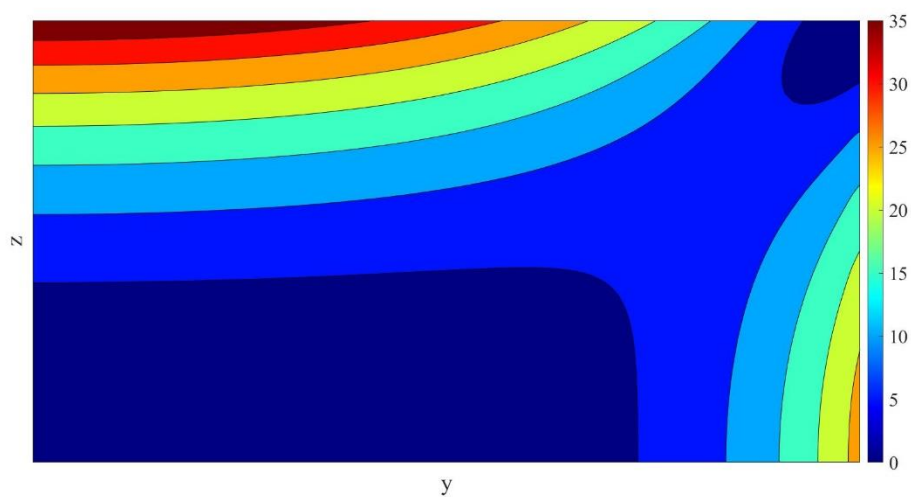
κ	Nu Present Study	Nu Shahmardan <i>et al.</i> [8]	Error (%)
1	3.6174	3.6112	0.17
2	4.1553	4.1208	0.83
3	4.8427	4.7936	1.02
4	5.3812	5.3341	0.88
8	6.5274	6.4905	0.56

طبق جدول ۴-۴، نتایج به‌دست آمده با استفاده از روش ریتز، تطابق بسیار خوبی با نتایج مرجع [۸] دارند. همچنین جدول فوق نشان می‌دهد که با افزایش نسبت ابعاد مقطع کانال، عدد ناسلت نیز افزایش می‌یابد.

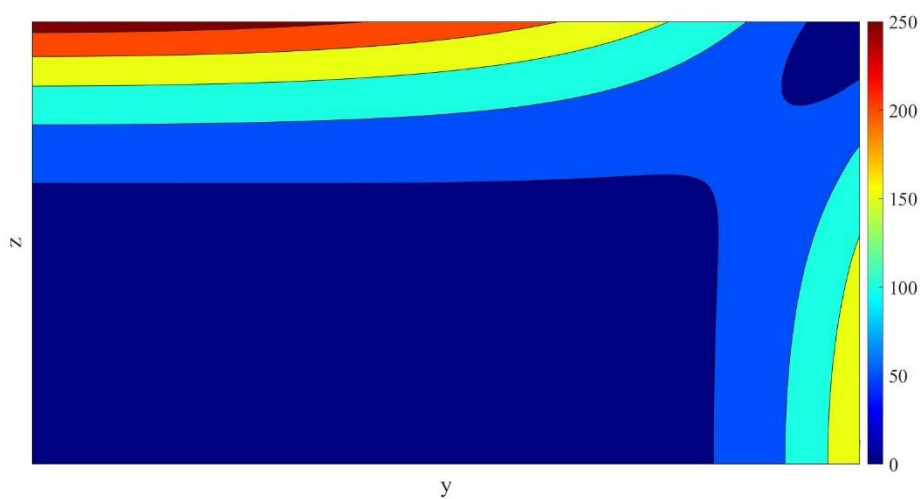
همانطور که در ادامه نشان داده خواهد شد، تلفات ویسکوز اثرات قابل توجهی بر عدد ناسلت و در نتیجه توزیع دما دارد. در شکل‌های ۴-۱۳ و ۴-۱۴ توزیع تلفات ویسکوز مربوط به جریان سیال FENE-P داخل کانال مستطیلی مستقیم نمایش داده شده است. در شکل ۴-۱۳، توزیع تلفات به‌ازای پارامتر قابلیت کشش مدل ثابت ۱۰۰ و سه عدد دبورای مختلف نمایش داده شده است. در حالی که در شکل ۴-۱۴، عدد دבורا ثابت و برابر ۲ می‌باشد و پارامتر قابلیت کشش مدل متغیر است. لازم به ذکر است که این نتایج به‌ازای نسبت ابعاد مقطع ۲ ارائه شده‌اند. همچنین به‌دلیل تقارن کانال مورد مطالعه، نتایج به‌ازای یک چهارم کانال نمایش داده شده‌اند.

طبق رابطه (۲-۵۱)، تلفات ویسکوز به‌صورت حاصل ضرب تانسوری تنش برشی و گرادیان سرعت تعریف می‌شود. بنابراین همانطور که از شکل‌ها مشخص است، بیشترین تلفات ویسکوز در مجاورت دیواره‌های کانال می‌باشد، زیرا در این نواحی گرادیان سرعت و نرخ برش بیشترین مقدار را دارند. همچنین چون در مرکز کانال نرخ برش صفر می‌باشد، با نزدیک شدن به این ناحیه، تلفات ویسکوز کاهش می‌یابد. لازم به ذکر است که تلفات ویسکوز در مجاورت دیواره افقی مقدار بیشتری نسبت به دیواره عمودی دارد، زیرا دیواره افقی نسبت به دیواره عمودی فاصله کمتری تا هسته جریان دارد، بنابراین بیشترین مقدار نرخ برش و تلفات ویسکوز در مجاورت دیواره افقی می‌باشد. همچنین چون چهار کنج کانال، بیشترین فاصله را نسبت به هسته جریان دارند، بنابراین تلفات ویسکوز در این نواحی مقدار بسیار کمی خواهد داشت.

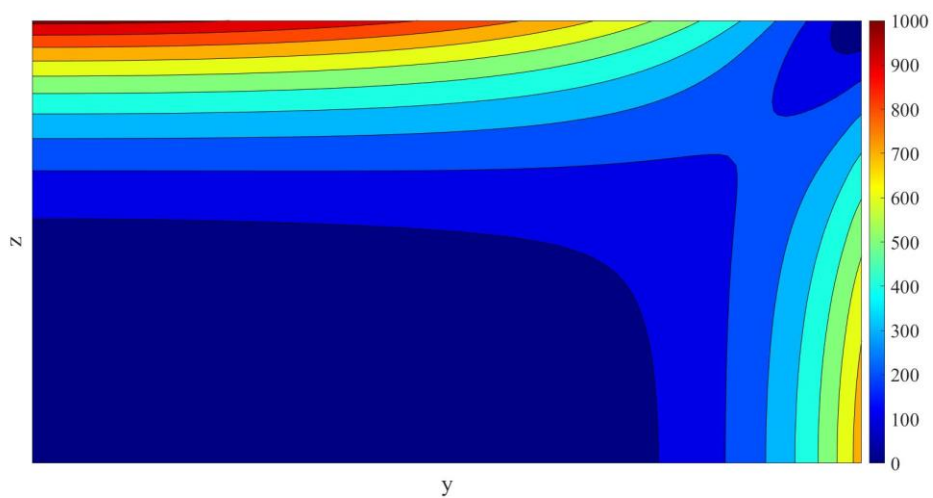
طبق شکل ۴-۱۳ در یک پارامتر قابلیت کشش ثابت، با افزایش عدد دבורا میزان تلفات ویسکوز در مجاورت دیواره‌ها افزایش می‌یابد که این اتفاق در نتیجه تشدید رفتار رقیق‌شوندگی سیال می‌باشد. اما بر خلاف این روند طبق شکل ۴-۱۴، در یک عدد دبورای ثابت، با افزایش پارامتر قابلیت کشش مدل میزان تلفات ویسکوز در مجاورت دیواره‌ها کاهش می‌یابد. در واقع با کاهش پارامتر قابلیت کشش مدل، رفتار رقیق‌شوندگی سیال تشدید می‌شود که این امر منجر به افزایش تلفات ویسکوز خواهد شد.



(الف) $De = 1$

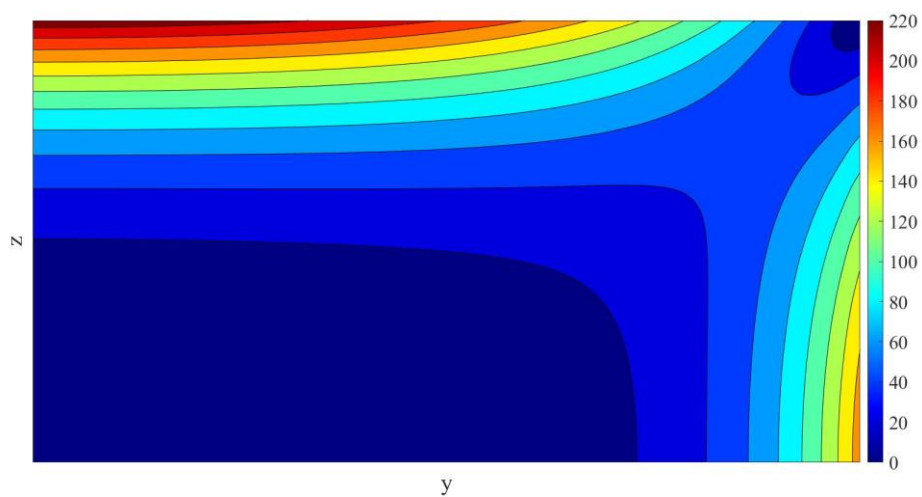


(ب) $De = 5$

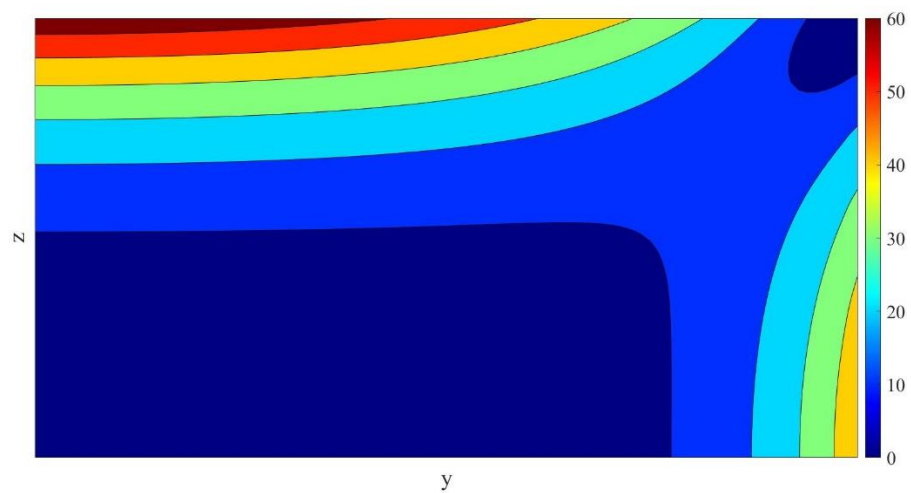


(پ) $De = 10$

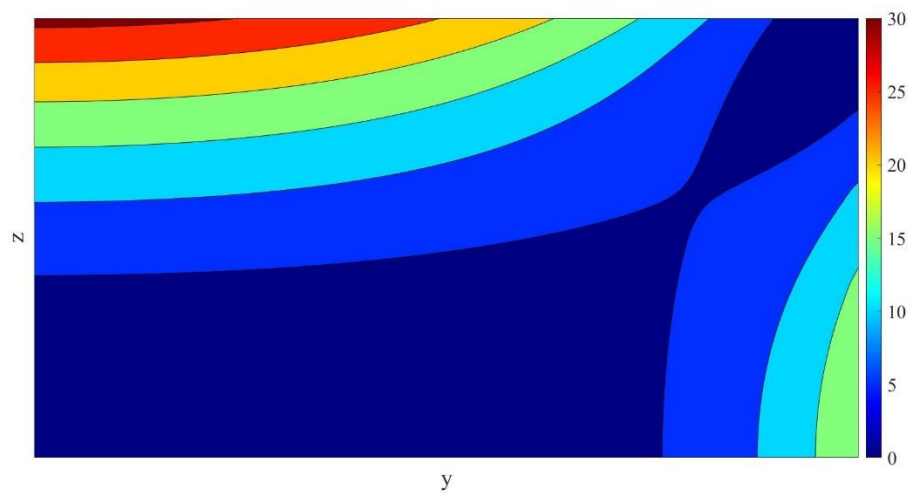
شکل ۴-۱۳: توزیع تلفات ویسکوز برای جریان سیال FENE-P به ازای $L^2 = 100$ و $\kappa = 2$



(الف) $L^2 = 10$



(ب) $L^2 = 100$



(پ) $L^2 = 10000$

شکل ۴-۱۴: توزیع تلفات ویسکوز برای جریان سیال FENE-P به ازای $De = 2$ و $\kappa = 2$

۴-۳-۱ حالت $Br = 0$

با صرف نظر کردن از تلفات ویسکوز ($Br = 0$)، معادله انرژی ارائه شده در رابطه (۲-۹۰) به شکل رابطه (۴-۵) ساده می‌شود، با این تفاوت که سمت راست این معادله با استفاده از توزیع سرعت به دست آمده برای جریان سیال FENE-P تشکیل می‌شود. جدول‌های ۴-۵ و ۴-۶ مقادیر حاصل از حل تحلیلی معادله انرژی را با صرف نظر کردن از تلفات ویسکوز نشان می‌دهند. در جدول ۴-۵ ضرایب ریتز مربوط به معادله انرژی، پارامتر C ، دمای مینیمم و عدد ناسلت به‌ازای پارامتر قابلیت کشش ثابت $L^2 = 100$ و چهار عدد دبورای مختلف ارائه شده‌اند. در جدول ۴-۶ نیز پارامترهایی مشابه با جدول قبل به‌ازای عدد دبورای ثابت $De = 2$ و چهار پارامتر قابلیت کشش متفاوت ارائه شده‌اند. لازم به ذکر است که نتایج ذکر شده در جداول، به‌ازای سه نسبت ابعاد مقطع ۲، ۳ و ۴ ارائه شده‌اند تا تاثیر این پارامتر نیز بر نتایج بررسی شود. همچنین مجدداً یادآوری می‌شود که طبق رابطه (۲-۹۲)، پارامتر C شامل انتگرال تلفات ویسکوز می‌باشد. به دلیل شار اعمال شده بر دیواره‌ها و با توجه به نحوه بی‌بعدسازی دما، بیشترین مقدار دمای بی‌بعد شده در این حالت دمای دیواره‌ها می‌باشد که مقدارش برابر صفر است، لذا دمای سیال گذرنده از کانال منفی می‌باشد. بنابراین در جداول ۴-۵ و ۴-۶ دمای مینیمم گزارش شده است که این دما در مرکز کانال ایجاد می‌شود.

طبق جدول ۴-۵ در یک پارامتر قابلیت کشش ثابت، با افزایش عدد دبورای دمای مینیمم، پارامتر C و عدد ناسلت نیز افزایش خواهند یافت. با تلفیق روابط (۲-۹۷) و (۲-۹۸)، می‌توان عدد ناسلت را به شکل زیر بیان کرد:

$$Nu = \frac{q'' d_h}{k(\tilde{T}_w - \tilde{T}_m)} \quad (۴-۶)$$

همانطور که قبلاً ذکر شد، با افزایش عدد دبورای رفتار رقیق‌شوندگی سیال تشدید می‌شود که این امر منجر به افزایش نرخ برش و در نتیجه افزایش انتقال حرارت در مجاورت دیواره‌های کانال می‌شود. بنابراین اختلاف دمای دیواره و دمای میانگین کاهش یافته و طبق رابطه (۴-۶) عدد ناسلت افزایش می‌یابد. به عبارت دیگر می‌توان اینطور بیان کرد که در این حالت با افزایش عدد دبورای، قدر مطلق دمای میانگین کاهش می‌یابد، لذا طبق رابطه (۲-۱۰۱) می‌توان ادعا کرد که عدد ناسلت افزایش خواهد یافت. جدول ۴-۶ نشان می‌دهد که در یک عدد دبورای ثابت، با افزایش پارامتر قابلیت کشش مدل دمای مینیمم، پارامتر C و عدد ناسلت کاهش می‌یابند که این امر در نتیجه تضعیف رفتار رقیق‌شوندگی سیال می‌باشد. همچنین نتایج نشان می‌دهند که در یک عدد دبورای و پارامتر قابلیت کشش ثابت، با افزایش نسبت ابعاد مقطع کانال، دمای مینیمم و عدد ناسلت نیز افزایش می‌یابند، درحالی‌که برای پارامتر C این روند معکوس می‌باشد. با توجه به جدول‌های ۴-۵ و ۴-۶ مشاهده می‌شود که تمام مقادیر به دست آمده برای ضرایب ریتز b_1 ، b_2 و b_4 منفی و برای ضریب b_3 مثبت می‌باشند.

جدول ۴-۵: مقادیر حاصل از حل تحلیلی معادله انرژی به ازای $Br = 0$ و $L^2 = 100$

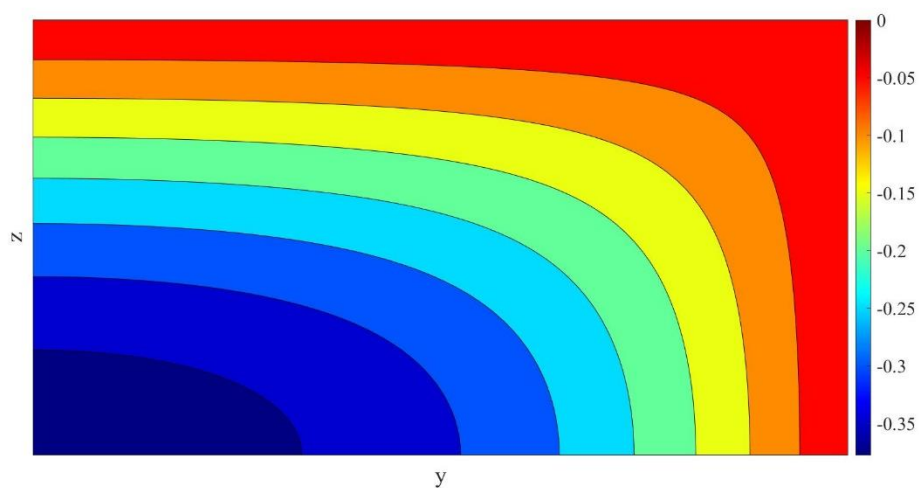
	De	b_1	b_2	b_3	b_4	C	$T_{\min}$	Nu
$\kappa = 2$	0.1	-0.2511	-0.1328	0.0176	-0.0071	8.2530	-0.3857	4.1569
	1	-0.2512	-0.1324	0.0247	-0.0069	10.3200	-0.3776	4.2764
	5	-0.2513	-0.1312	0.0484	-0.0064	60.3713	-0.3503	4.7061
	10	-0.2513	-0.1309	0.0516	-0.0061	220.0806	-0.3464	4.7708
$\kappa = 3$	0.1	-0.2509	-0.1343	0.0195	-0.0094	7.5078	-0.3135	4.8443
	1	-0.2509	-0.1339	0.0274	-0.0089	9.3232	-0.3078	4.9695
	5	-0.2510	-0.1326	0.0548	-0.0073	54.1848	-0.2877	5.4332
	10	-0.2510	-0.1323	0.0578	-0.0064	202.0033	-0.2850	5.4977
$\kappa = 4$	0.1	-0.2507	-0.1340	0.0193	-0.0099	7.0363	-0.2708	5.3828
	1	-0.2507	-0.1337	0.0280	-0.0094	8.6628	-0.2663	5.5110
	5	-0.2508	-0.1325	0.0595	-0.0078	48.9608	-0.2503	6.0015
	10	-0.2508	-0.1322	0.0628	-0.0065	182.9175	-0.2481	6.0702

جدول ۴-۶: مقادیر حاصل از حل تحلیلی معادله انرژی به ازای $Br = 0$ و $De = 2$

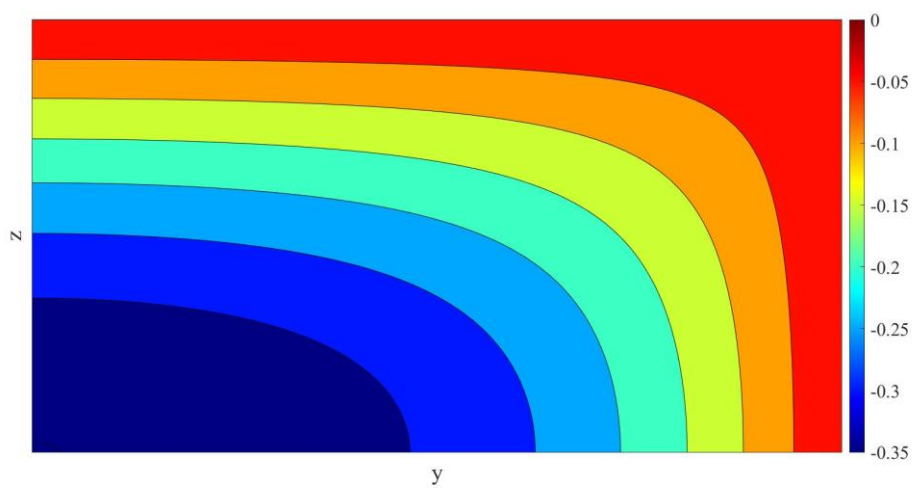
	L^2	b_1	b_2	b_3	b_4	C	$T_{\min}$	Nu
$\kappa = 2$	10	-0.2513	-0.1312	0.0476	-0.0065	51.6508	-0.3512	4.6900
	100	-0.2512	-0.1319	0.0353	-0.0067	16.4880	-0.3654	4.4618
	1000	-0.2512	-0.1326	0.0210	-0.0070	9.1250	-0.3818	4.2140
	10000	-0.2511	-0.1328	0.0179	-0.0071	8.3234	-0.3854	4.1620
$\kappa = 3$	10	-0.2510	-0.1326	0.0539	-0.0074	46.3079	-0.2884	5.4159
	100	-0.2509	-0.1333	0.0395	-0.0083	14.7803	-0.2989	5.1678
	1000	-0.2509	-0.1341	0.0233	-0.0092	8.2719	-0.3108	4.9038
	10000	-0.2509	-0.1343	0.0199	-0.0094	7.5693	-0.3133	4.8496
$\kappa = 4$	10	-0.2508	-0.1326	0.0584	-0.0079	41.8835	-0.2509	5.9826
	100	-0.2508	-0.1332	0.0417	-0.0087	13.5651	-0.2594	5.7179
	1000	-0.2507	-0.1339	0.0235	-0.0097	7.7195	-0.2687	5.4433
	10000	-0.2507	-0.1340	0.0197	-0.0099	7.0912	-0.2706	5.3881

توزیع دمای جریان سیال FENE-P داخل کانال مستطیلی مستقیم در شکل‌های ۴-۱۵ و ۴-۱۶ نمایش داده شده است. لازم به ذکر است که این نتایج به‌ازای نسبت ابعاد مقطع ۲ ارائه شده‌اند و از تلفات ویسکوز هم صرف‌نظر شده است. همچنین به دلیل تقارن هندسه کانال مورد مطالعه، نتایج به‌ازای یک‌چهارم کانال نمایش داده می‌شوند. در شکل ۴-۱۵ پارامتر قابلیت کشش مدل ثابت و برابر ۱۰۰ در نظر گرفته شده و عدد دبورا تغییر می‌کند، در حالی که در شکل ۴-۱۶ عدد دبورا ثابت و برابر ۲ می‌باشد و پارامتر قابلیت کشش مدل متغیر است.

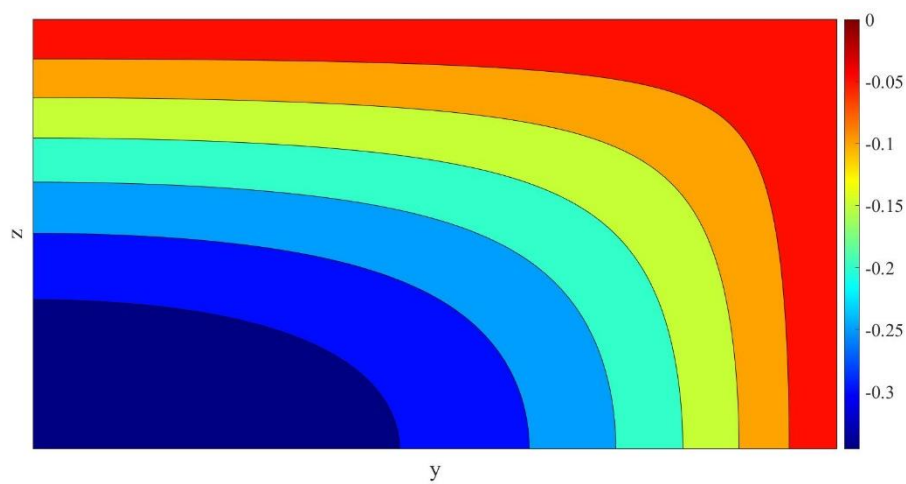
همانطور که مشخص است سیال در مجاورت دیواره دمای بالاتر و در وسط کانال دمای پایین‌تری دارد، بنابراین جهت انتقال حرارت از دیواره به سمت جریان می‌باشد. طبق شکل ۴-۱۵ با افزایش عدد دبورا دمای مینیمم افزایش می‌یابد. به عبارتی می‌توان ادعا کرد که افزایش عدد دبورا سبب تشدید رفتار رقیق‌شوندگی سیال شده که این امر منجر به کاهش اختلاف دمای دیواره و دمای میانگین سیال خواهد شد. اما با توجه به شکل ۴-۱۶ می‌توان دریافت که با افزایش پارامتر قابلیت کشش مدل، رفتار رقیق‌شوندگی سیال تضعیف شده و در نتیجه دمای مینیمم کاهش یافته و اختلاف دمای دیواره و دمای میانگین سیال افزایش خواهد یافت.



(الف) $De = 1$

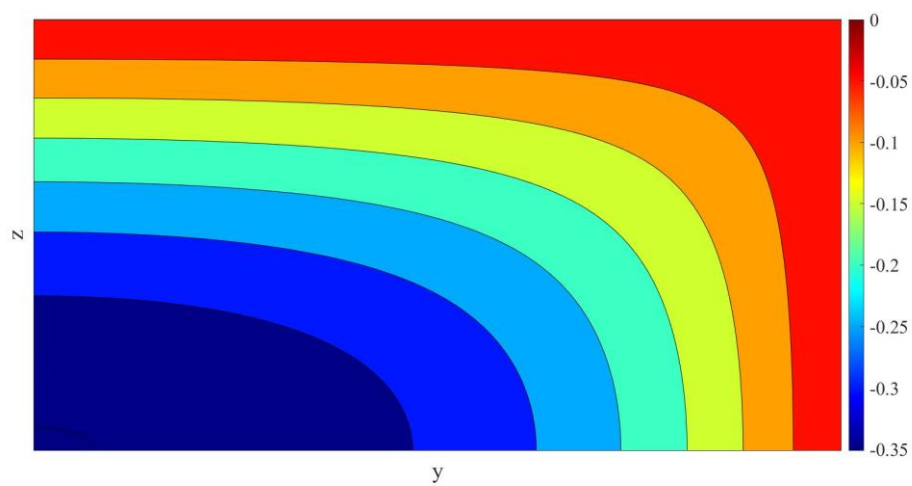


(ب) $De = 5$

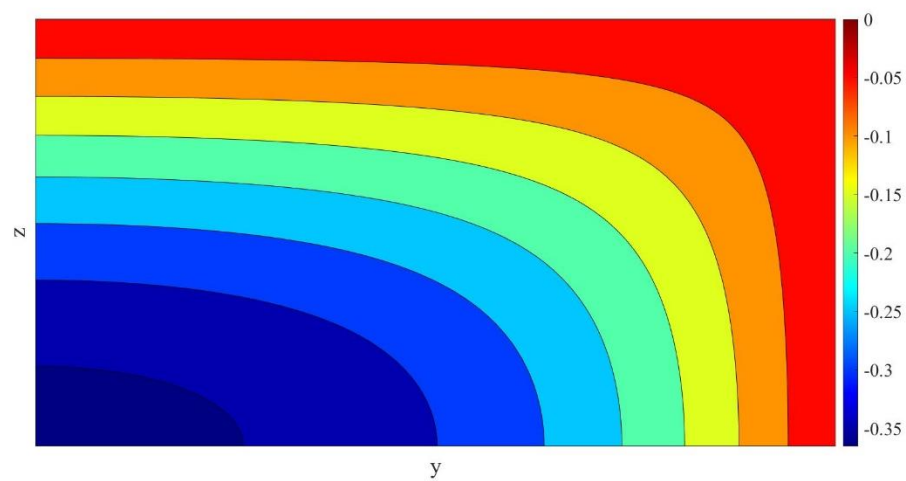


(پ) $De = 10$

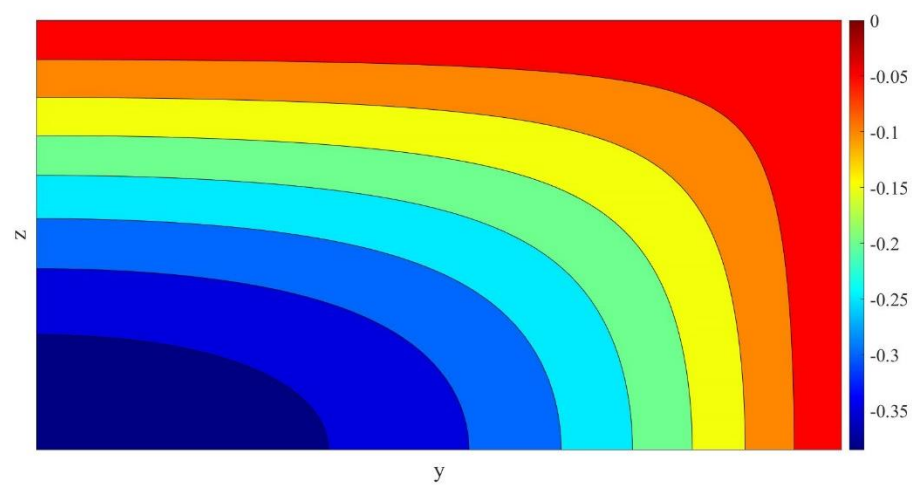
شکل ۴-۱۵: توزیع دما برای جریان سیال FENE-P به ازای $L^2 = 100$ و $Br = 0$ و $\kappa = 2$



(الف) $L^2 = 10$



(ب) $L^2 = 100$



(پ) $L^2 = 10000$

شکل ۴-۱۶: توزیع دما برای جریان سیال FENE-P به‌ازای $De = 2$ و $Br = 0$ و $\kappa = 2$

۴-۳-۲ حالت $Br > 0$

در این قسمت با در نظر گرفتن تلفات ویسکوز، نتایج حاصل از حل معادله انرژی ارائه می‌شوند. عدد بی بعد برینکمن بیانگر میزان حرارت تولید شده داخل جریان می‌باشد و اثر تلفات ویسکوز را بر انتقال حرارت مشخص می‌کند. با توجه به تعریف عدد برینکمن، مقادیر مثبت این عدد در حالت شار ثابت بیانگر گرمایش سیال می‌باشد ($T_w > T_m$). جدول‌های ۴-۷ الی ۴-۱۴ مقادیر حاصل از حل تحلیلی معادله انرژی را برای چهار عدد برینکمن مثبت ۱، ۲، ۵ و ۱۰ و سه نسبت ابعاد مقطع ۲، ۳ و ۴ ارائه می‌دهند. در جدول‌های ۴-۷، ۴-۹، ۴-۱۱ و ۴-۱۳ ضرایب ریتز مربوط به معادله انرژی، دمای مینیمم و عدد ناسلت به‌ازای پارامتر قابلیت کشش ثابت $L^2 = 100$ و چهار عدد دورای مختلف ارائه شده‌اند. در جدول‌های ۴-۸، ۴-۱۰، ۴-۱۲ و ۴-۱۴ نیز پارامترهایی مشابه با جداول قبل به‌ازای عدد دورای ثابت $De = 2$ و چهار پارامتر قابلیت کشش متفاوت گزارش شده‌اند. لازم به ذکر است که در این حالت هم مانند قسمت قبل، ماکزیمم دمای بی بعد شده، دمای دیواره‌ها می‌باشد که برابر صفر است. بنابراین در جدول‌های ذکر شده، دمای مینیمم گزارش شده است که در مرکز کانال ایجاد می‌شود.

همانطور که از جدول‌های ذکر شده مشخص است، با افزایش عدد دورا در یک پارامتر قابلیت کشش ثابت، دمای مینیمم و عدد ناسلت کاهش می‌یابند. در حالی که با افزایش پارامتر قابلیت کشش مدل در یک عدد دورای ثابت، دمای مینیمم و عدد ناسلت افزایش خواهند یافت. در واقع با افزایش عدد دورا و کاهش پارامتر قابلیت کشش مدل و در نتیجه با تشدید رفتار رقیق‌شوندگی سیال، دمای میانگین کاهش می‌یابد (قدر مطلق دمای میانگین افزایش می‌یابد)، بنابراین طبق رابطه (۲-۱۰۱) می‌توان ادعا کرد که عدد ناسلت کاهش خواهد یافت. طبق جداول ذکر شده و مشابه حالت قبل با افزایش نسبت ابعاد مقطع کانال در یک عدد دورا و پارامتر قابلیت کشش ثابت، دمای مینیمم و عدد ناسلت نیز افزایش خواهند یافت. طبق جداول ذکر شده، برخلاف ضریب b_4 که مقادیر مثبت و منفی را شامل می‌شود، تمام مقادیر به‌دست آمده برای ضریب b_3 مثبت و برای ضرایب b_1 و b_2 منفی می‌باشند.

همانطور که از جدول‌های ۴-۷ الی ۴-۱۴ مشخص است، در یک عدد دورا و پارامتر قابلیت کشش ثابت، با افزایش عدد برینکمن مثبت دمای مینیمم و عدد ناسلت کاهش می‌یابند. در واقع با افزایش عدد برینکمن و در نتیجه افزایش تلفات ویسکوز، دمای میانگین سیال کم می‌شود و اختلافش با دمای دیواره افزایش خواهد یافت، بنابراین طبق رابطه (۴-۶) می‌توان ادعا کرد که عدد ناسلت کاهش می‌یابد.

جدول ۷-۴: مقادیر حاصل از حل تحلیلی معادله انرژی به‌ازای $Br = 1$ و $L^2 = 100$

	De	b_1	b_2	b_3	b_4	$T_{\min}$	Nu
$\kappa = 2$	0.1	-0.2512	-0.6349	0.0185	-0.0072	-0.9123	1.9564
	1	-0.2514	-0.8236	0.0868	-0.0074	-1.0374	1.7459
	5	-0.2555	-5.4098	1.6042	-0.0146	-4.2331	0.4539
	10	-0.2701	-19.9497	6.2524	-0.0021	-14.5024	0.1340
$\kappa = 3$	0.1	-0.2509	-0.6363	0.0205	-0.0095	-0.6951	2.4022
	1	-0.2510	-0.8204	0.0953	-0.0074	-0.7844	2.1590
	5	-0.2539	-5.3846	1.7905	0.0331	-3.1117	0.5780
	10	-0.2663	-20.2024	6.9655	0.2716	-10.8260	0.1682
$\kappa = 4$	0.1	-0.2508	-0.6360	0.0204	-0.0101	-0.5744	2.7629
	1	-0.2508	-0.8147	0.1012	-0.0070	-0.6435	2.5000
	5	-0.2528	-5.2557	1.9340	0.0563	-2.4476	0.6981
	10	-0.2625	-19.7493	7.4831	0.4357	-8.4786	0.2041

جدول ۸-۴: مقادیر حاصل از حل تحلیلی معادله انرژی به‌ازای $Br = 1$ و $De = 2$

	L^2	b_1	b_2	b_3	b_4	$T_{\min}$	Nu
$\kappa = 2$	10	-0.2547	-4.6109	1.3436	-0.0136	-3.6727	0.5218
	100	-0.2518	-1.3878	0.2802	-0.0080	-1.4230	1.3037
	1000	-0.2513	-0.7146	0.0479	-0.0074	-0.9645	1.8633
	10000	-0.2512	-0.6413	0.0209	-0.0072	-0.9164	1.9487
$\kappa = 3$	10	-0.2533	-4.5846	1.4992	0.0249	-2.7005	0.6642
	100	-0.2514	-1.3755	0.3104	-0.0025	-1.0616	1.6338
	1000	-0.2510	-0.7138	0.0526	-0.0087	-0.7323	2.2953
	10000	-0.2509	-0.6426	0.0232	-0.0095	-0.6981	2.3934
$\kappa = 4$	10	-0.2524	-4.4769	1.6189	0.0440	-2.1287	0.8005
	100	-0.2511	-1.3547	0.3339	0.0008	-0.8582	1.9188
	1000	-0.2508	-0.7111	0.0550	-0.0088	-0.6032	2.6479
	10000	-0.2508	-0.6420	0.0233	-0.0100	-0.5767	2.7534

جدول ۴-۹: مقادیر حاصل از حل تحلیلی معادله انرژی به‌ازای $Br = 2$ و $L^2 = 100$

	De	b_1	b_2	b_3	b_4	$T_{\min}$	Nu
$\kappa = 2$	0.1	-0.2512	-1.1369	0.0193	-0.0073	-1.4388	1.2792
	1	-0.2515	-1.5148	0.1488	-0.0078	-1.6972	1.0969
	5	-0.2596	-10.6883	3.1600	-0.0228	-8.1159	0.2384
	10	-0.2890	-39.7684	12.4531	0.0019	-28.6585	0.0679
$\kappa = 3$	0.1	-0.2509	-1.1383	0.0214	-0.0097	-1.0767	1.5971
	1	-0.2511	-1.5069	0.1632	-0.0059	-1.2611	1.3791
	5	-0.2568	-10.6367	3.5261	0.0735	-5.9357	0.3052
	10	-0.2816	-40.2726	13.8732	0.5497	-21.3670	0.0854
$\kappa = 4$	0.1	-0.2508	-1.1380	0.0215	-0.0103	-0.8781	1.8584
	1	-0.2509	-1.4957	0.1744	-0.0045	-1.0206	1.6167
	5	-0.2547	-10.3788	3.8085	0.1203	-4.6450	0.3706
	10	-0.2742	-39.3663	14.9034	0.8779	-16.7091	0.1038

جدول ۴-۱۰: مقادیر حاصل از حل تحلیلی معادله انرژی به‌ازای $Br = 2$ و $De = 2$

	L^2	b_1	b_2	b_3	b_4	$T_{\min}$	Nu
$\kappa = 2$	10	-0.2582	-9.0906	2.6395	-0.0208	-6.9943	0.2763
	100	-0.2525	-2.6437	0.5251	-0.0093	-2.4805	0.7634
	1000	-0.2513	-1.2965	0.0748	-0.0077	-1.5472	1.1961
	10000	-0.2512	-1.1498	0.0239	-0.0074	-1.4475	1.2721
$\kappa = 3$	10	-0.2557	-9.0366	2.9444	0.0572	-5.1126	0.3538
	100	-0.2518	-2.6177	0.5813	0.0032	-1.8242	0.9703
	1000	-0.2510	-1.2936	0.0819	-0.0082	-1.1539	1.4983
	10000	-0.2509	-1.1508	0.0264	-0.0096	-1.0828	1.5887
$\kappa = 4$	10	-0.2540	-8.8213	3.1794	0.0958	-4.0066	0.4289
	100	-0.2513	-2.5762	0.6260	0.0104	-1.4570	1.1529
	1000	-0.2508	-1.2884	0.0866	-0.0080	-0.9376	1.7495
	10000	-0.2508	-1.1501	0.0268	-0.0102	-0.8828	1.8492

جدول ۴-۱۱: مقادیر حاصل از حل تحلیلی معادله انرژی به ازای $Br = 5$ و $L^2 = 100$

	De	b_1	b_2	b_3	b_4	$T_{\min}$	Nu
$\kappa = 2$	0.1	-0.2513	-2.6431	0.0217	-0.0076	-3.0185	0.6276
	1	-0.2521	-3.5883	0.3351	-0.0092	-3.6766	0.5186
	5	-0.2722	-26.5241	7.8273	-0.0473	-19.7643	0.0984
	10	-0.3455	-99.2246	31.0555	0.0141	-71.1268	0.0274
$\kappa = 3$	0.1	-0.2511	-2.6443	0.0242	-0.0101	-2.2214	0.7964
	1	-0.2515	-3.5665	0.3669	-0.0013	-2.6910	0.6618
	5	-0.2654	-26.3928	8.7330	0.1946	-14.4077	0.1263
	10	-0.3275	-100.4832	34.5962	1.3839	-52.9900	0.0345
$\kappa = 4$	0.1	-0.2509	-2.6439	0.0246	-0.0109	-1.7889	0.9376
	1	-0.2512	-3.5388	0.3941	0.0028	-2.1520	0.7848
	5	-0.2606	-25.7481	9.4319	0.3125	-11.2370	0.1539
	10	-0.3092	-98.2173	37.1642	2.2044	-41.4007	0.0420

جدول ۴-۱۲: مقادیر حاصل از حل تحلیلی معادله انرژی به ازای $Br = 5$ و $De = 2$

	L^2	b_1	b_2	b_3	b_4	$T_{\min}$	Nu
$\kappa = 2$	10	-0.2685	-22.5297	6.5273	-0.0422	-16.9588	0.1146
	100	-0.2544	-6.4114	1.2599	-0.0133	-5.6531	0.3403
	1000	-0.2516	-3.0424	0.1556	-0.0086	-3.2954	0.5767
	10000	-0.2513	-2.6754	0.0328	-0.0078	-3.0408	0.6231
$\kappa = 3$	10	-0.2627	-22.3926	7.2802	0.1541	-12.3489	0.1473
	100	-0.2530	-6.3443	1.3939	0.0204	-4.1120	0.4374
	1000	-0.2512	-3.0328	0.1698	-0.0066	-2.4185	0.7338
	10000	-0.2511	-2.6757	0.0362	-0.0099	-2.2372	0.7910
$\kappa = 4$	10	-0.2588	-21.8543	7.8610	0.2513	-9.6401	0.1793
	100	-0.2522	-6.2408	1.5025	0.0391	-3.2535	0.5246
	1000	-0.2510	-3.0201	0.1812	-0.0054	-1.9411	0.8670
	10000	-0.2509	-2.6741	0.0375	-0.0106	-1.8011	0.9315

جدول ۴-۱۳: مقادیر حاصل از حل تحلیلی معادله انرژی به ازای $Br = 10$ و $L^2 = 100$

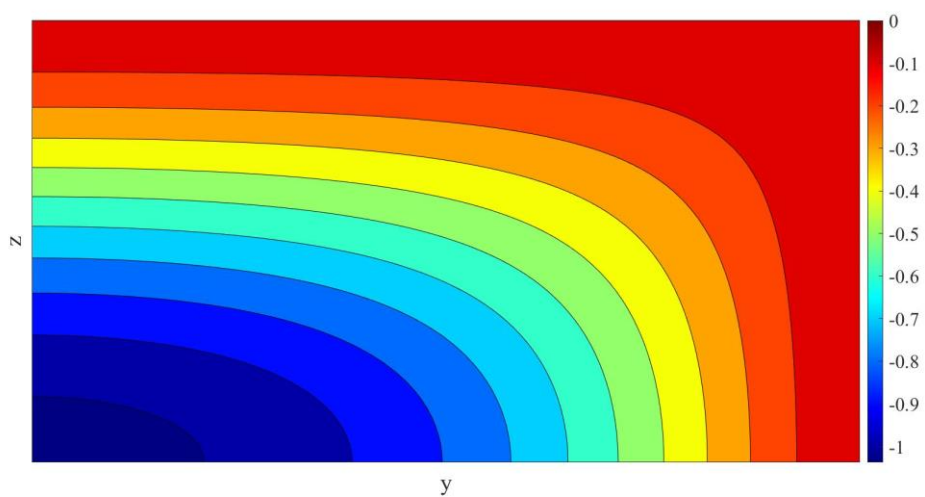
	De	b_1	b_2	b_3	b_4	$T_{\min}$	Nu
$\kappa = 2$	0.1	-0.2515	-5.1533	0.0258	-0.0080	-5.6514	0.3394
	1	-0.2529	-7.0443	0.6456	-0.0114	-6.9757	0.2760
	5	-0.2931	-52.9170	15.6061	-0.0881	-39.1784	0.0497
	10	-0.4397	-198.3183	62.0595	0.0343	-141.9073	0.0137
$\kappa = 3$	0.1	-0.2512	-5.1544	0.0289	-0.0107	-4.1292	0.4338
	1	-0.2521	-6.9991	0.7063	0.0063	-5.0742	0.3545
	5	-0.2799	-52.6531	17.4112	0.3966	-28.5277	0.0639
	10	-0.4040	-200.8341	69.1345	2.7742	-105.6950	0.0173
$\kappa = 4$	0.1	-0.2512	-5.1537	0.0299	-0.0118	-3.3070	0.5135
	1	-0.2516	-6.9439	0.7601	0.0151	-4.0376	0.4225
	5	-0.2705	-51.3637	18.8042	0.6327	-22.2238	0.0780
	10	-0.3676	-196.3024	74.2655	4.4154	-82.5532	0.0210

جدول ۴-۱۴: مقادیر حاصل از حل تحلیلی معادله انرژی به ازای $Br = 10$ و $De = 2$

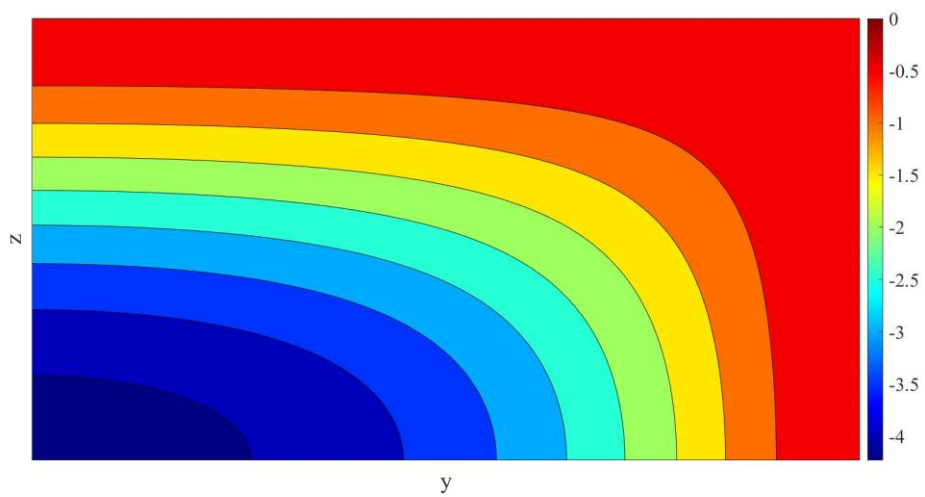
	L^2	b_1	b_2	b_3	b_4	$T_{\min}$	Nu
$\kappa = 2$	10	-0.2857	-44.9281	13.0070	-0.0779	-33.5664	0.0580
	100	-0.2575	-12.6910	2.4845	-0.0198	-10.9408	0.1769
	1000	-0.2521	-5.9521	0.2901	-0.0103	-6.2090	0.3095
	10000	-0.2515	-5.2180	0.0477	-0.0085	-5.6963	0.3368
$\kappa = 3$	10	-0.2744	-44.6527	14.5066	0.3156	-24.4094	0.0747
	100	-0.2551	-12.5553	2.7483	0.0491	-7.9251	0.2283
	1000	-0.2516	-5.9314	0.3163	-0.0041	-4.5262	0.3966
	10000	-0.2513	-5.2171	0.0526	-0.0105	-4.1611	0.4306
$\kappa = 4$	10	-0.2667	-43.5761	15.6636	0.5105	-19.0294	0.0910
	100	-0.2536	-12.3484	2.9632	0.0870	-6.2476	0.2749
	1000	-0.2513	-5.9063	0.3389	-0.0012	-3.6134	0.4710
	10000	-0.2512	-5.2142	0.0552	-0.0113	-3.3316	0.5098

توزیع دمای جریان سیال FENE-P داخل کانال مستطیلی مستقیم در شکل‌های ۴-۱۷ الی ۴-۲۴ برای چهار عدد برینکمن مثبت ۱، ۲، ۵ و ۱۰ نمایش داده شده است. لازم به ذکر است که این نتایج به‌ازای نسبت ابعاد مقطع ۲ ارائه شده‌اند. همچنین به دلیل تقارن هندسه کانال مورد مطالعه، نتایج به‌ازای یک‌چهارم کانال نمایش داده می‌شوند. در شکل‌های ۴-۱۷، ۴-۱۹، ۴-۲۱ و ۴-۲۳ پارامتر قابلیت کشش مدل ثابت و برابر ۱۰۰ در نظر گرفته شده و عدد دبورا تغییر می‌کند، در حالی‌که در شکل‌های ۴-۱۸، ۴-۲۰، ۴-۲۲ و ۴-۲۴ عدد دبورا ثابت و برابر ۲ می‌باشد و پارامتر قابلیت کشش مدل متغیر است. در این حالت نیز مانند حالت قبل، سیال در مجاورت دیواره دمای بالاتری دارد و با حرکت به سمت مرکز کانال دمای سیال کاهش می‌یابد.

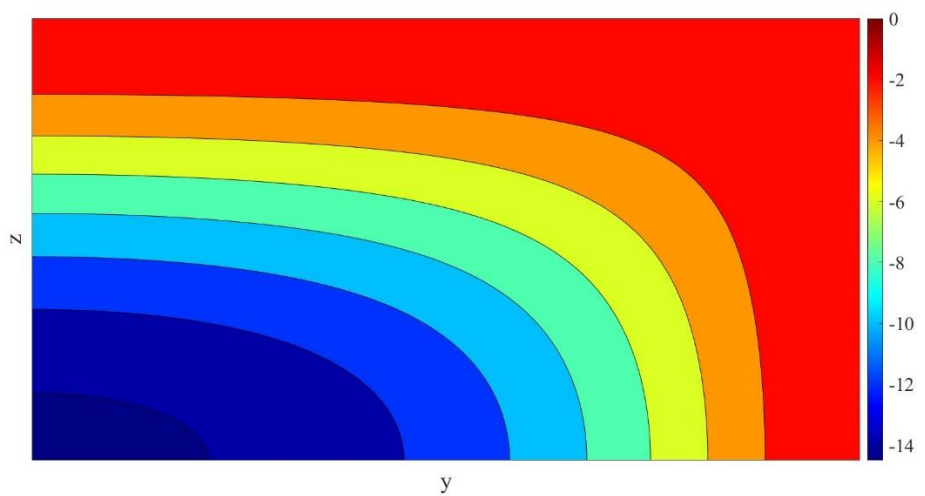
همانطور که از شکل‌ها مشخص است با افزایش عدد دبورا در یک پارامتر قابلیت کشش ثابت رفتار رقیق‌شوندگی سیال تشدید شده و دمای مینیمم کاهش می‌یابد، در حالی‌که این روند با افزایش پارامتر قابلیت کشش مدل (تضعیف رفتار رقیق‌شوندگی سیال) در یک عدد دبورای ثابت معکوس می‌باشد. در واقع با افزایش عدد دبورا و کاهش پارامتر قابلیت کشش مدل، اختلاف دمای دیواره و دمای میانگین سیال افزایش خواهد یافت. همچنین با توجه به شکل‌های ذکر شده می‌توان ادعا کرد که افزایش عدد برینکمن مثبت سبب افزایش تلفات ویسکوز سیال خواهد شد، بنابراین دمای مینیمم و در نتیجه دمای میانگین سیال کاهش خواهد یافت (قدر مطلق دمای میانگین افزایش می‌یابد). به عبارتی با افزایش عدد برینکمن مثبت گرمای کمتری به سیال منتقل می‌شود و اختلاف دمای دیواره و هسته جریان افزایش خواهد یافت.



$De = 1$ (الف)

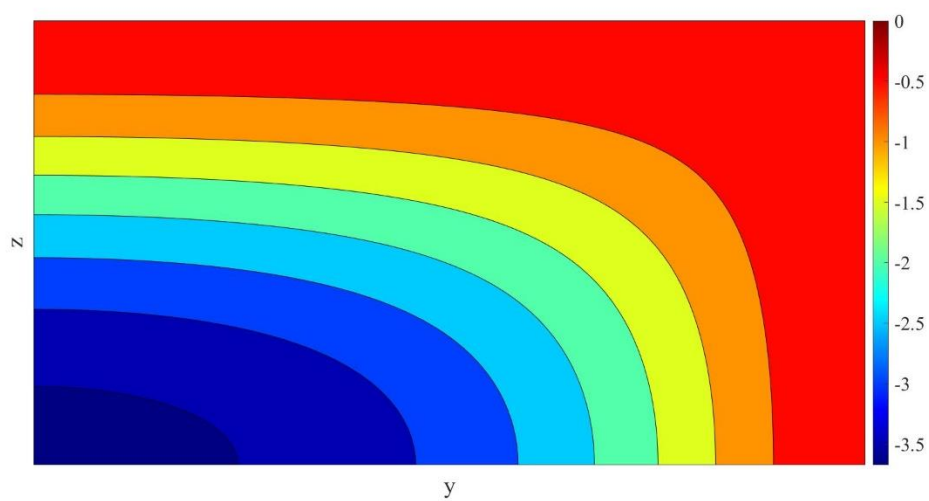


$De = 5$ (ب)

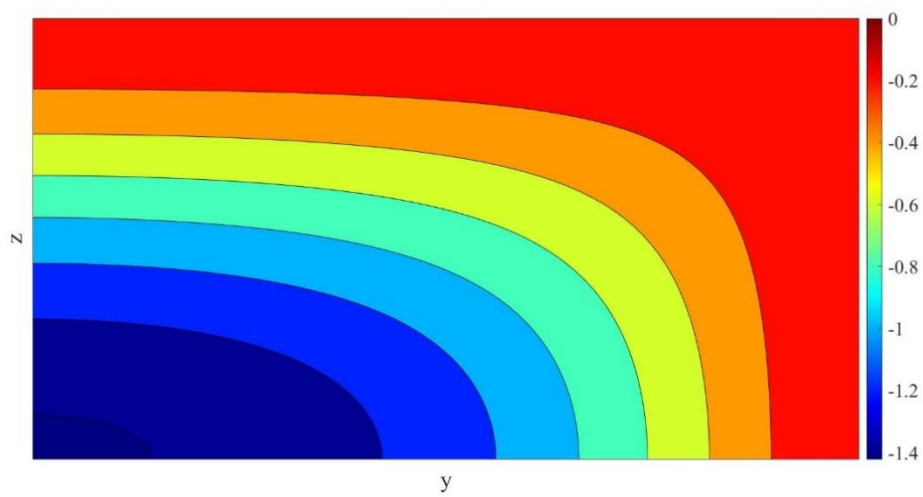


$De = 10$ (پ)

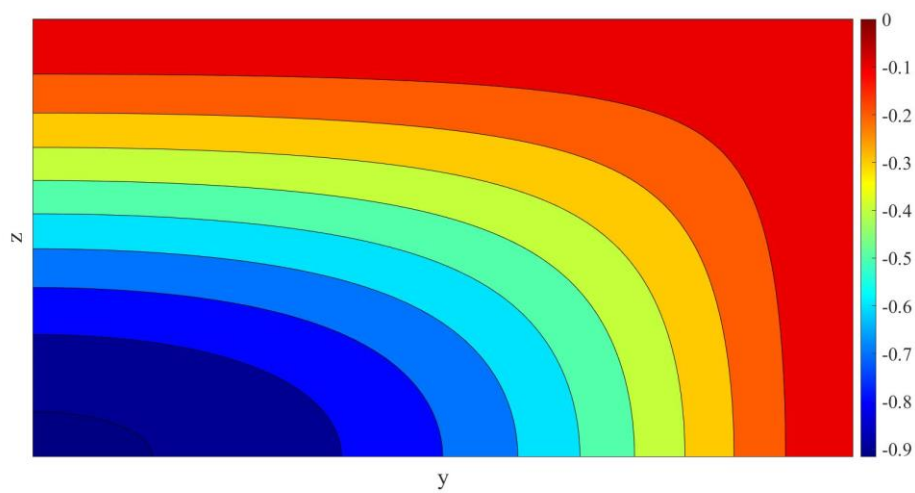
شکل ۴-۱۷: توزیع دما برای جریان سیال FENE-P به‌ازای $\kappa = 2$ و $Br = 1$ و $L^2 = 100$



(الف) $L^2 = 10$

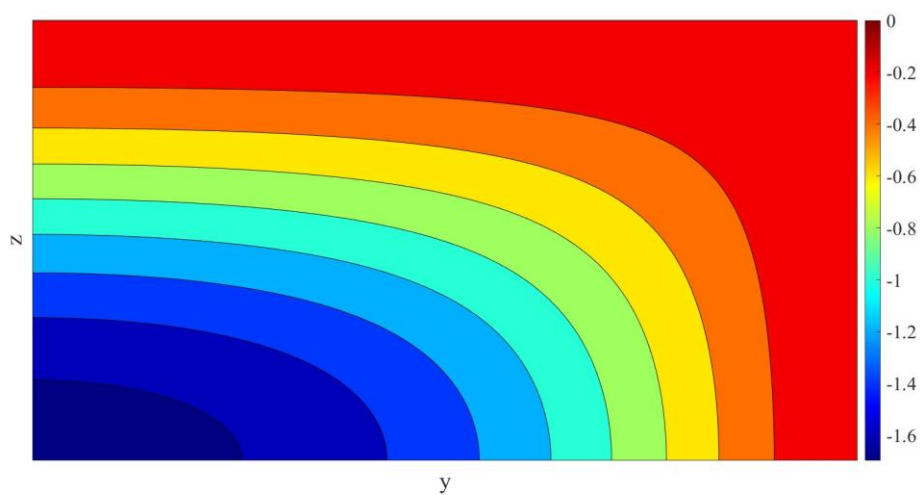


(ب) $L^2 = 100$

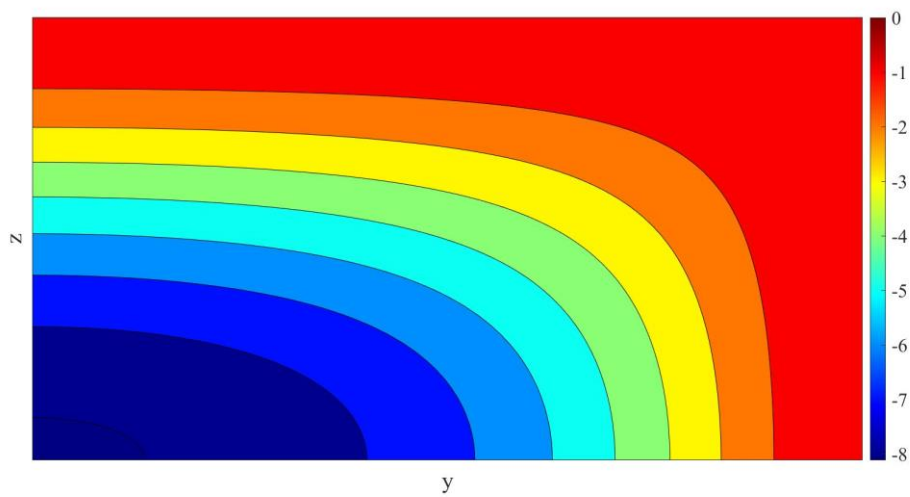


(پ) $L^2 = 10000$

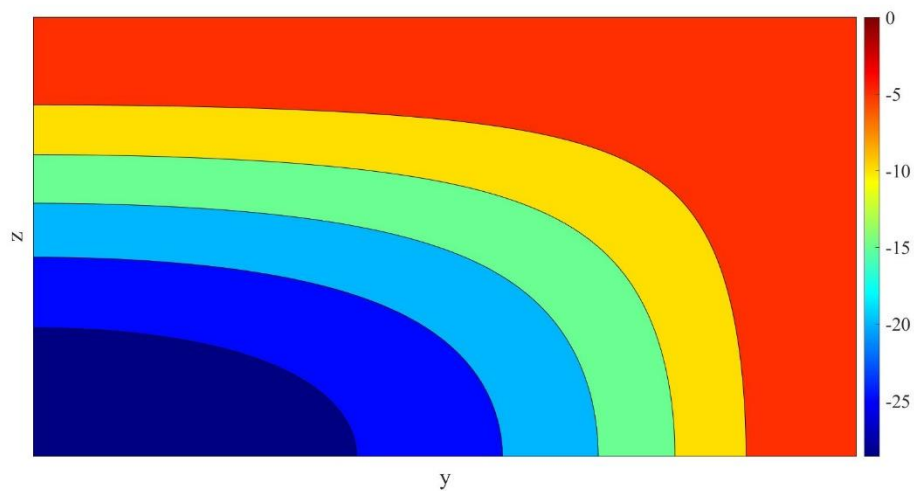
شکل ۴-۱۸: توزیع دما برای جریان سیال FENE-P به ازای $De = 2$ و $Br = 1$ و $\kappa = 2$



الف) $De=1$

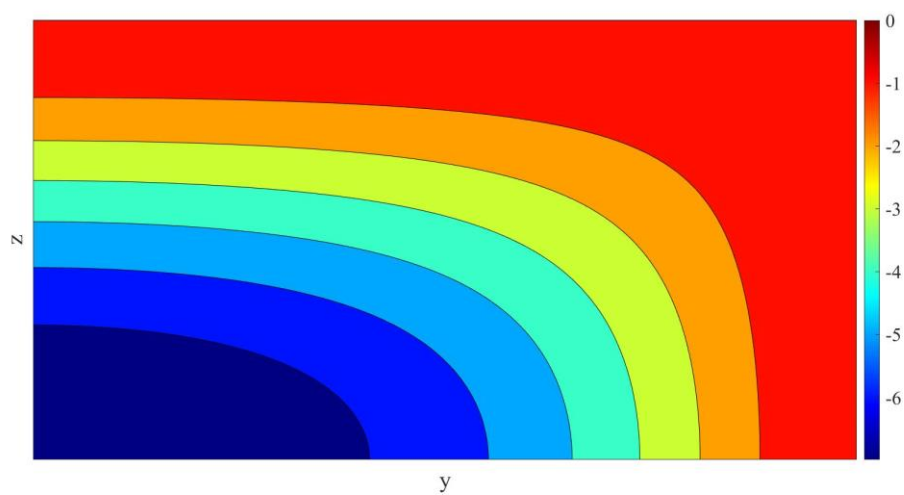


ب) $De=5$

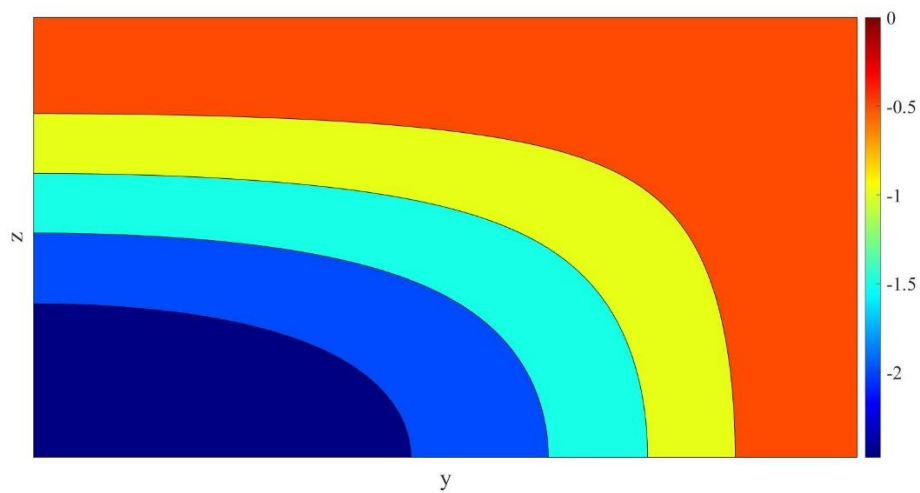


پ) $De=10$

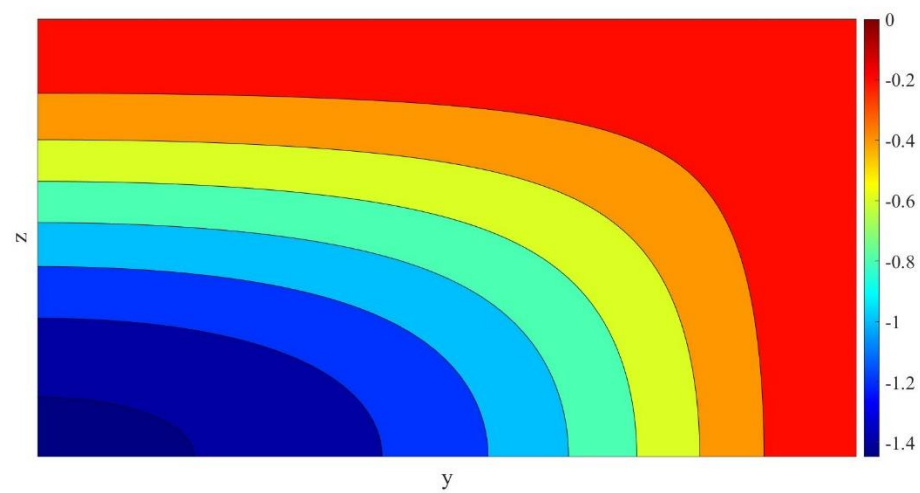
شکل ۴-۱۹: توزیع دما برای جریان سیال FENE-P به ازای $L^2 = 100$ و $Br = 2$ و $\kappa = 2$



(الف) $L^2 = 10$

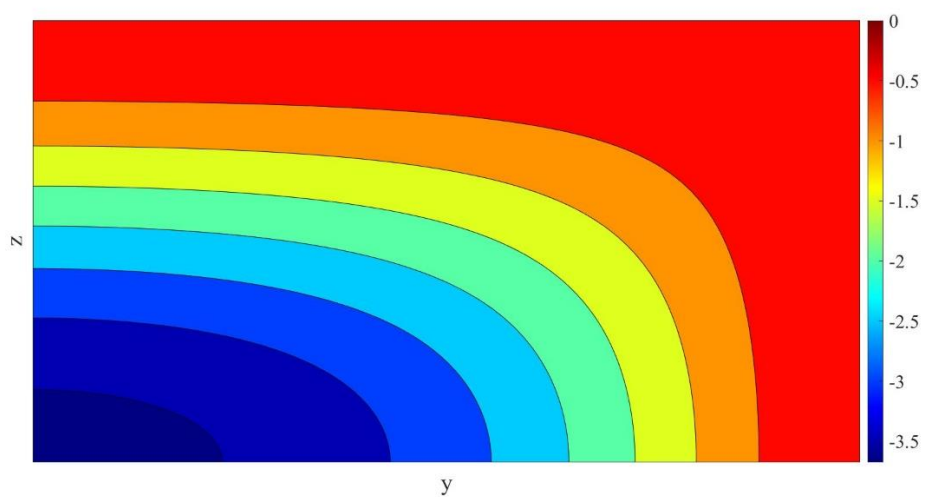


(ب) $L^2 = 100$

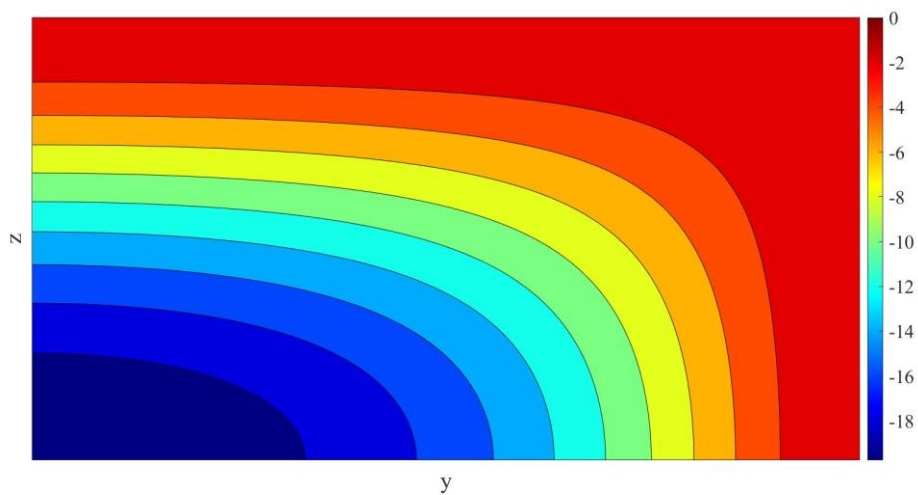


(پ) $L^2 = 10000$

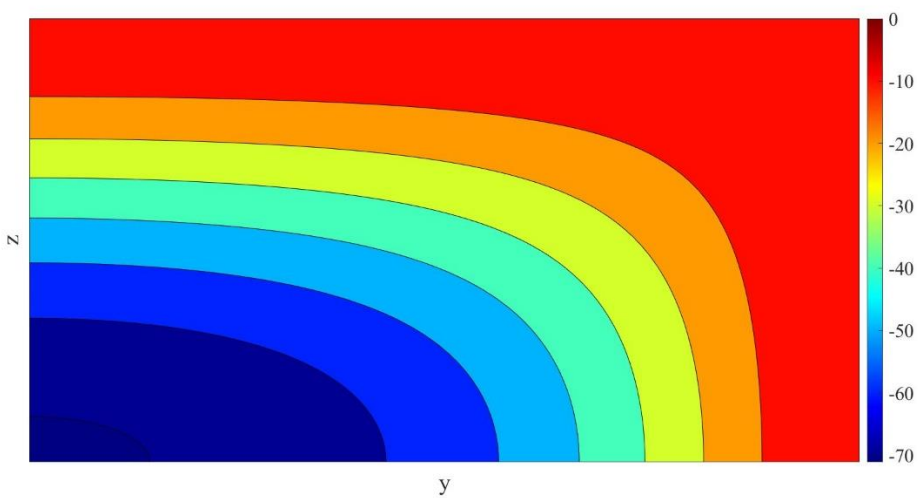
شکل ۴-۲۰: توزیع دما برای جریان سیال FENE-P به‌ازای $De = 2$ و $Br = 2$ و $\kappa = 2$



(الف) $De = 1$

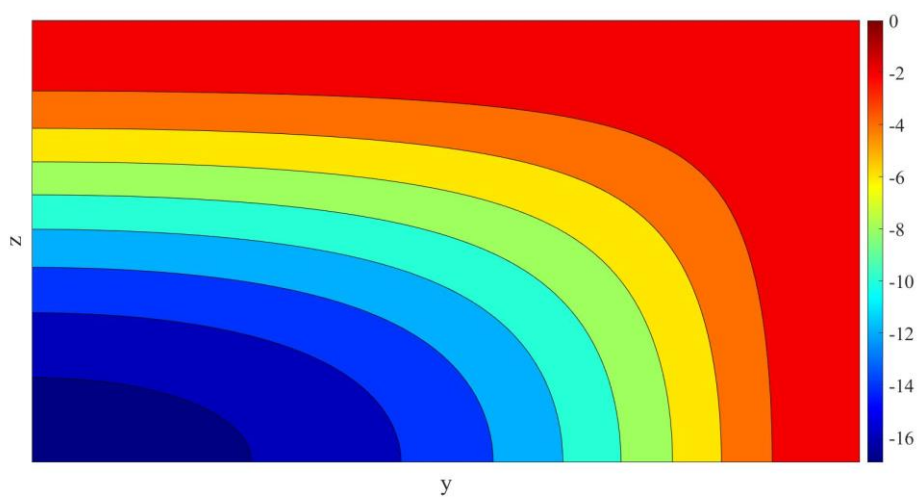


(ب) $De = 5$

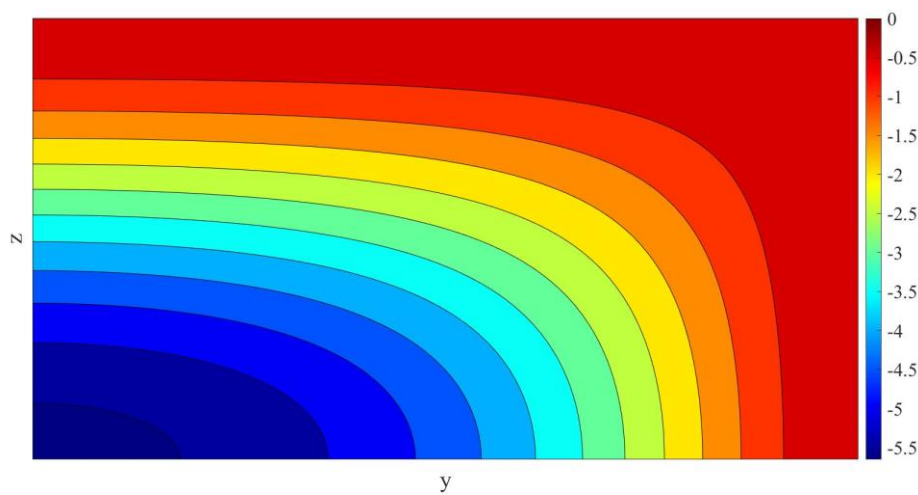


(پ) $De = 10$

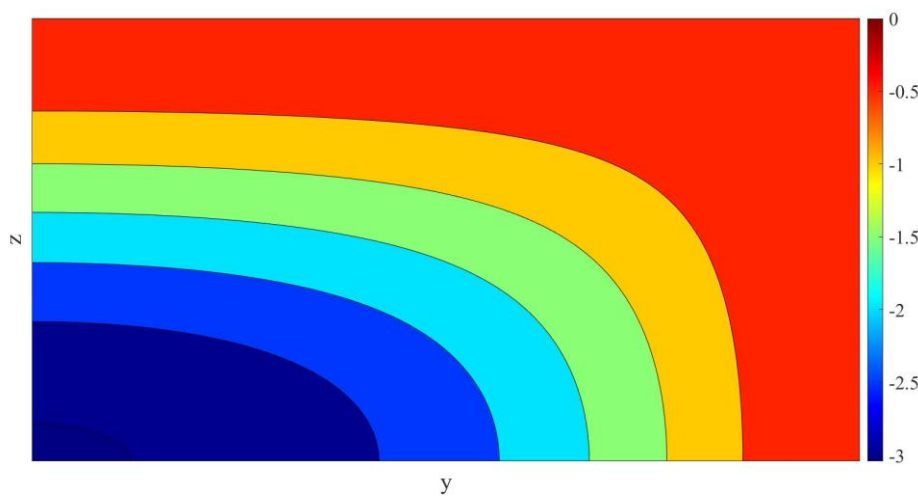
شکل ۴-۲۱: توزیع دما برای جریان سیال FENE-P به ازای $L^2 = 100$ و $Br = 5$ و $\kappa = 2$



(الف) $L^2 = 10$

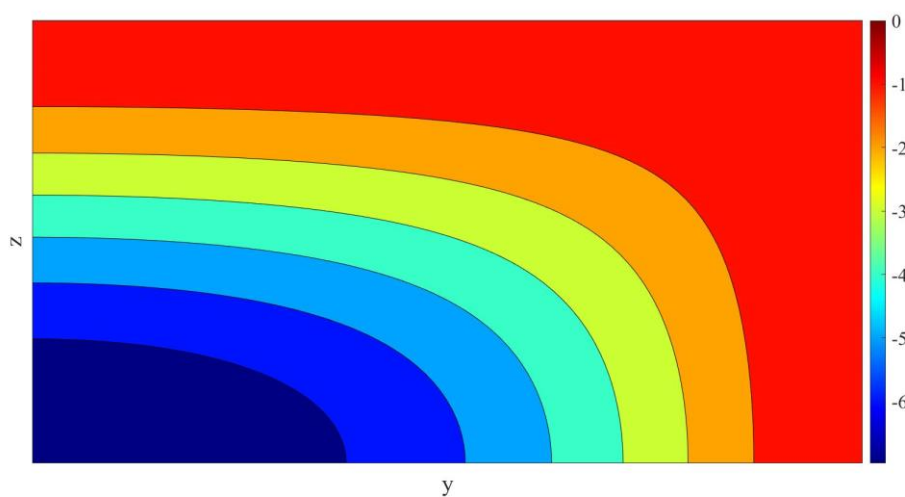


(ب) $L^2 = 100$

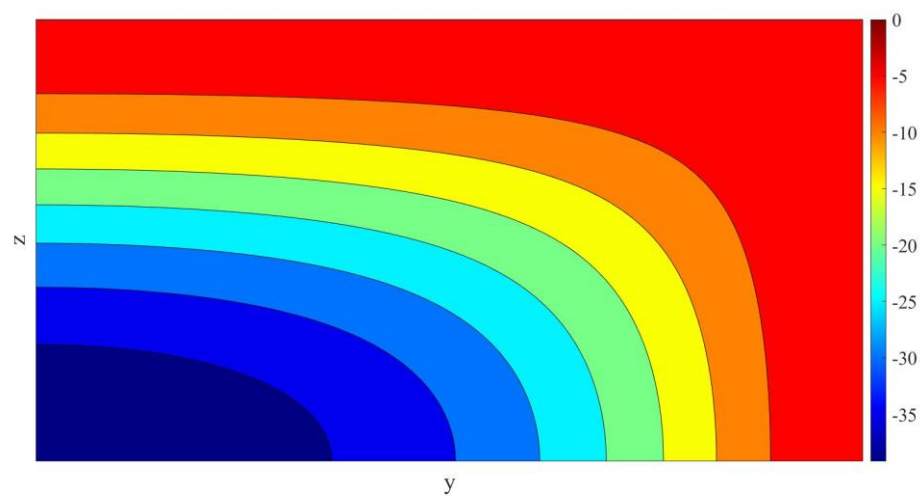


(پ) $L^2 = 10000$

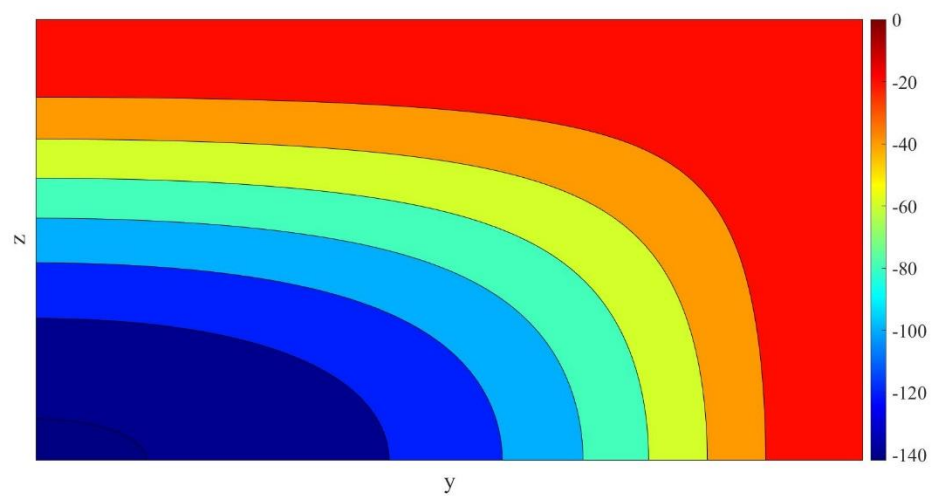
شکل ۴-۲۲: توزیع دما برای جریان سیال FENE-P به ازای $De = 2$ و $Br = 5$ و $\kappa = 2$



(الف) $De=1$

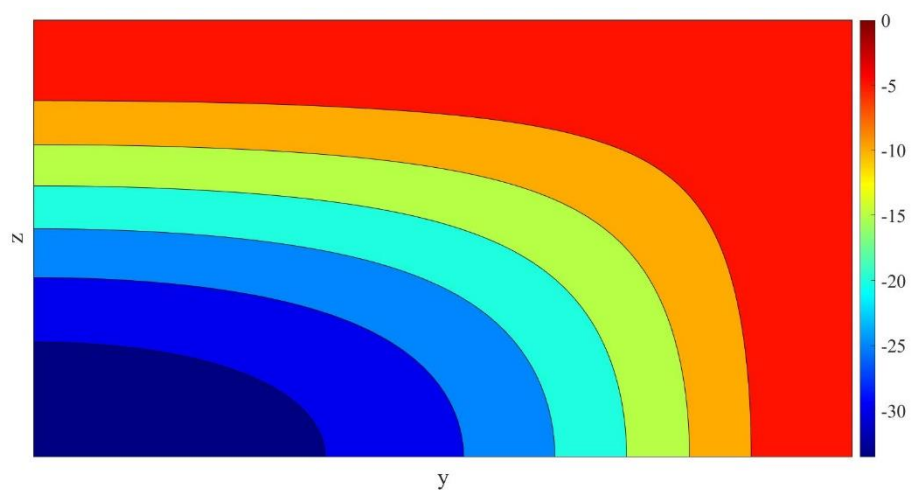


(ب) $De=5$

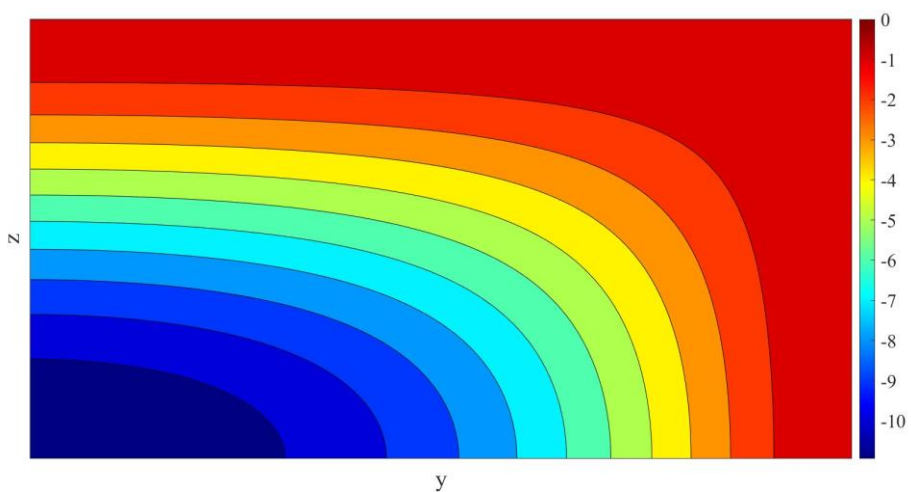


(پ) $De=10$

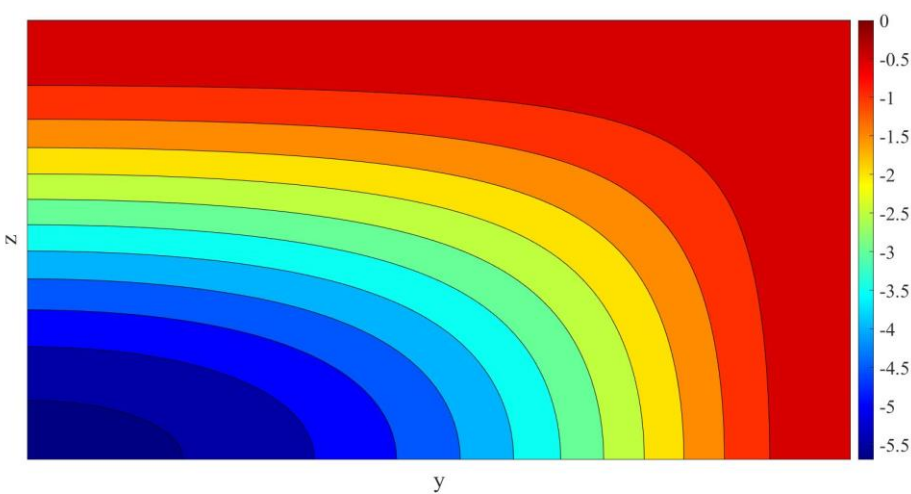
شکل ۴-۲۳: توزیع دما برای جریان سیال FENE-P به‌ازای $L^2 = 100$ و $Br = 10$ و $\kappa = 2$



(الف) $L^2 = 10$



(ب) $L^2 = 100$



(پ) $L^2 = 10000$

شکل ۴-۲۴: توزیع دما برای جریان سیال FENE-P به ازای $De = 2$ و $Br = 10$ و $\kappa = 2$

۴-۳-۳ حالت $Br < 0$

در این قسمت برخلاف حالت قبل، برای حل معادله انرژی مقادیر منفی عدد برینکمن لحاظ می‌شوند. عدد برینکمن منفی در حالت شار ثابت بیانگر سرمایه‌ی سیال می‌باشد ($T_w < T_m$). جدول‌های ۴-۱۵ الی ۴-۲۲ مقادیر حاصل از حل تحلیلی معادله انرژی را برای چهار عدد برینکمن منفی ۱-، ۲-، ۵- و ۱۰- و سه نسبت ابعاد مقطع ۲، ۳ و ۴ ارائه می‌دهند. در جدول‌های ۴-۱۵، ۴-۱۷، ۴-۱۹ و ۴-۲۱ ضرایب ریتز مربوط به معادله انرژی، دمای ماکزیمم و عدد ناسلت به‌ازای پارامتر قابلیت کشش ثابت $L^2 = 100$ و چهار عدد دبورای مختلف گزارش شده‌اند. در جدول‌های ۴-۱۶، ۴-۱۸، ۴-۲۰ و ۴-۲۲ نیز پارامترهایی مشابه با جداول قبل به‌ازای عدد دبورای ثابت $De = 2$ و چهار پارامتر قابلیت کشش متفاوت ارائه شده‌اند. لازم به ذکر است که برخلاف دو حالت قبل که دمای دیواره ماکزیمم دمای بی‌بعد شده بود، در این حالت ماکزیمم دمای بی‌بعد شده در مرکز کانال ایجاد می‌شود، در واقع در این حالت جهت شار حرارتی اعمال شده به دیواره‌ها و در نتیجه جهت انتقال حرارت معکوس خواهد شد. بنابراین در جدول‌های ذکر شده دمای ماکزیمم ارائه شده است.

همانطور که از جدول‌های ذکر شده مشخص است در این حالت بر خلاف دو حالت قبل با توجه به معکوس شدن جهت انتقال حرارت، اعداد ناسلت دارای مقادیر منفی می‌باشند. همچنین جداول نشان می‌دهند که با افزایش عدد دبورای در یک پارامتر قابلیت کشش ثابت، خاصیت رقیق‌شوندگی سیال افزایش می‌یابد و در نتیجه دمای ماکزیمم و عدد ناسلت نیز افزایش خواهند یافت. در حالی که با افزایش پارامتر قابلیت کشش مدل (کاهش خاصیت رقیق‌شوندگی سیال) در یک عدد دبورای ثابت، دمای ماکزیمم و عدد ناسلت کاهش خواهند یافت. در واقع با افزایش عدد دبورای و کاهش پارامتر قابلیت کشش مدل، دمای میانگین سیال افزایش می‌یابد، بنابراین طبق رابطه (۲-۱۰۱) عدد ناسلت افزایش خواهد یافت (قدر مطلق عدد ناسلت کاهش می‌یابد). همچنین طبق جدول‌ها برخلاف دو حالت قبل با افزایش نسبت ابعاد مقطع کانال در یک عدد دبورای و پارامتر قابلیت کشش ثابت، دمای ماکزیمم و عدد ناسلت کاهش می‌یابند. طبق جداول ذکر شده برخلاف ضرایب b_3 و b_4 که مقادیر مثبت و منفی را شامل می‌شوند، تمام مقادیر به‌دست آمده برای ضرایب b_1 و b_2 به‌ترتیب منفی و مثبت می‌باشند.

طبق جدول‌های ۴-۱۵ الی ۴-۲۲، در یک عدد دبورای و پارامتر قابلیت کشش مشخص، با افزایش عدد برینکمن منفی دمای ماکزیمم و عدد ناسلت نیز افزایش می‌یابند. در واقع با افزایش عدد برینکمن منفی، دمای میانگین سیال افزایش می‌یابد، بنابراین می‌توان طبق رابطه (۲-۱۰۱) ادعا کرد که عدد ناسلت نیز افزایش خواهد یافت (قدر مطلق عدد ناسلت کاهش می‌یابد).

جدول ۴-۱۵: مقادیر حاصل از حل تحلیلی معادله انرژی به‌ازای $Br = -1$ و $L^2 = 100$

	De	b_1	b_2	b_3	b_4	$T_{\max}$	Nu
$\kappa = 2$	0.1	-0.2511	0.3692	0.0168	-0.0070	0.1409	-33.3092
	1	-0.2510	0.5588	-0.0374	-0.0065	0.2822	-9.5166
	5	-0.2471	5.1474	-1.5073	0.0017	3.5326	-0.5623
	10	-0.2324	19.6878	-6.1492	-0.0102	13.8097	-0.1420
$\kappa = 3$	0.1	-0.2508	0.3677	0.0186	-0.0093	0.0680	-291.8994
	1	-0.2508	0.5526	-0.0405	-0.0104	0.1689	-16.4680
	5	-0.2481	5.1195	-1.6808	-0.0477	2.5363	-0.7342
	10	-0.2357	19.9379	-6.8499	-0.2845	10.2560	-0.1791
$\kappa = 4$	0.1	-0.2507	0.3679	0.0183	-0.0097	0.0328	104.0479
	1	-0.2506	0.5473	-0.0452	-0.0119	0.1108	-26.9673
	5	-0.2489	4.9906	-1.8150	-0.0718	1.9471	-0.9098
	10	-0.2392	19.4848	-7.3574	-0.4487	7.9824	-0.2188

جدول ۴-۱۶: مقادیر حاصل از حل تحلیلی معادله انرژی به‌ازای $Br = -1$ و $De = 2$

	L^2	b_1	b_2	b_3	b_4	$T_{\max}$	Nu
$\kappa = 2$	10	-0.2478	4.3485	-1.2483	0.0006	2.9703	-0.6712
	100	-0.2506	1.1241	-0.2097	-0.0054	0.6921	-3.1369
	1000	-0.2511	0.4493	-0.0059	-0.0067	0.2009	-16.1122
	10000	-0.2511	0.3757	0.0150	-0.0069	0.1457	-30.6421
$\kappa = 3$	10	-0.2486	4.3194	-1.3914	-0.0397	2.1237	-0.8801
	100	-0.2505	1.1089	-0.2314	-0.0140	0.4637	-4.4431
	1000	-0.2508	0.4456	-0.0060	-0.0097	0.1108	-35.9361
	10000	-0.2508	0.3740	0.0166	-0.0093	0.0715	-184.8813
$\kappa = 4$	10	-0.2492	4.2118	-1.5021	-0.0597	1.6270	-1.0930
	100	-0.2505	1.0883	-0.2505	-0.0183	0.3394	-5.8353
	1000	-0.2507	0.4434	-0.0081	-0.0105	0.0658	-97.7228
	10000	-0.2507	0.3740	0.0162	-0.0097	0.0355	124.9446

جدول ۱۷-۴: مقادیر حاصل از حل تحلیلی معادله انرژی به‌ازای $Br = -2$ و $L^2 = 100$

	De	b_1	b_2	b_3	b_4	$T_{\max}$	Nu
$\kappa = 2$	0.1	-0.2511	0.8713	0.0160	-0.0069	0.6674	-3.3266
	1	-0.2508	1.2500	-0.0995	-0.0060	0.9420	-2.2523
	5	-0.2429	10.4260	-3.0631	0.0099	7.4154	-0.2653
	10	-0.2136	39.5065	-12.3500	-0.0142	27.9658	-0.0699
$\kappa = 3$	0.1	-0.2508	0.8697	0.0177	-0.0091	0.4496	-4.6887
	1	-0.2507	1.2392	-0.1084	-0.0120	0.6455	-3.0991
	5	-0.2452	10.3716	-3.4164	-0.0881	5.3603	-0.3439
	10	-0.2204	40.0081	-13.7575	-0.5626	20.7970	-0.0881
$\kappa = 4$	0.1	-0.2506	0.8699	0.0172	-0.0095	0.3364	-6.0040
	1	-0.2506	1.2283	-0.1184	-0.0143	0.4879	-3.9120
	5	-0.2469	10.1137	-3.6894	-0.1358	4.1444	-0.4228
	10	-0.2275	39.1018	-14.7777	-0.8909	16.2129	-0.1075

جدول ۱۸-۴: مقادیر حاصل از حل تحلیلی معادله انرژی به‌ازای $Br = -2$ و $De = 2$

	L^2	b_1	b_2	b_3	b_4	$T_{\max}$	Nu
$\kappa = 2$	10	-0.2444	8.8282	-2.5443	0.0078	6.2918	-0.3132
	100	-0.2500	2.3800	-0.4546	-0.0041	1.7496	-1.1605
	1000	-0.2510	1.0313	-0.0328	-0.0064	0.7836	-2.7668
	10000	-0.2511	0.8843	0.0120	-0.0068	0.6768	-3.2729
$\kappa = 3$	10	-0.2463	8.7714	-2.8366	-0.0720	4.5358	-0.4070
	100	-0.2501	2.3511	-0.5022	-0.0197	1.2263	-1.5537
	1000	-0.2507	1.0254	-0.0353	-0.0102	0.5323	-3.8524
	10000	-0.2508	0.8823	0.0133	-0.0092	0.4563	-4.6078
$\kappa = 4$	10	-0.2476	8.5561	-3.0626	-0.1115	3.5049	-0.5008
	100	-0.2502	2.3099	-0.5426	-0.0279	0.9383	-1.9319
	1000	-0.2506	1.0206	-0.0396	-0.0114	0.4003	-4.8977
	10000	-0.2506	0.8820	0.0126	-0.0096	0.3416	-5.8967

جدول ۴-۱۹: مقادیر حاصل از حل تحلیلی معادله انرژی به‌ازای $Br = -5$ و $L^2 = 100$

	De	b_1	b_2	b_3	b_4	$T_{\max}$	Nu
$\kappa = 2$	0.1	-0.2510	2.3774	0.0136	-0.0066	2.2471	-0.8990
	1	-0.2503	3.3236	-0.2858	-0.0047	2.9215	-0.6846
	5	-0.2303	26.2617	-7.7304	0.0344	19.0638	-0.1027
	10	-0.1571	98.9627	-30.9524	-0.0264	70.4341	-0.0277
$\kappa = 3$	0.1	-0.2507	2.3758	0.0149	-0.0087	1.5943	-1.1865
	1	-0.2503	3.2987	-0.3121	-0.0165	2.0755	-0.9021
	5	-0.2366	26.1277	-8.6233	-0.2093	13.8323	-0.1325
	10	-0.1745	100.2187	-34.4805	-1.3968	52.4200	-0.0349
$\kappa = 4$	0.1	-0.2505	2.3758	0.0140	-0.0089	1.2473	-1.4387
	1	-0.2503	3.2714	-0.3380	-0.0217	1.6193	-1.0974
	5	-0.2410	25.4831	-9.3128	-0.3280	10.7365	-0.1623
	10	-0.1925	97.9529	-37.0385	-2.2175	40.9045	-0.0425

جدول ۴-۲۰: مقادیر حاصل از حل تحلیلی معادله انرژی به‌ازای $Br = -5$ و $De = 2$

	L^2	b_1	b_2	b_3	b_4	$T_{\max}$	Nu
$\kappa = 2$	10	-0.2340	22.2672	-6.4321	0.0292	16.2564	-0.1204
	100	-0.2481	6.1477	-1.1894	-0.0002	4.9223	-0.4015
	1000	-0.2507	2.7771	-0.1135	-0.0054	2.5318	-0.7939
	10000	-0.2510	2.4098	0.0031	-0.0064	2.2701	-0.8895
$\kappa = 3$	10	-0.2393	22.1274	-7.1724	-0.1689	11.7721	-0.1558
	100	-0.2489	6.0777	-1.3149	-0.0370	3.5142	-0.5265
	1000	-0.2505	2.7646	-0.1232	-0.0117	1.7970	-1.0473
	10000	-0.2507	2.4071	0.0035	-0.0088	1.6106	-1.1739
$\kappa = 4$	10	-0.2429	21.5892	-7.7442	-0.2671	9.1384	-0.1907
	100	-0.2494	5.9744	-1.4191	-0.0566	2.7347	-0.6425
	1000	-0.2504	2.7523	-0.1342	-0.0139	1.4037	-1.2722
	10000	-0.2505	2.4061	0.0020	-0.0092	1.2599	-1.4238

جدول ۴-۲۱: مقادیر حاصل از حل تحلیلی معادله انرژی به ازای $Br = -10$ و $L^2 = 100$

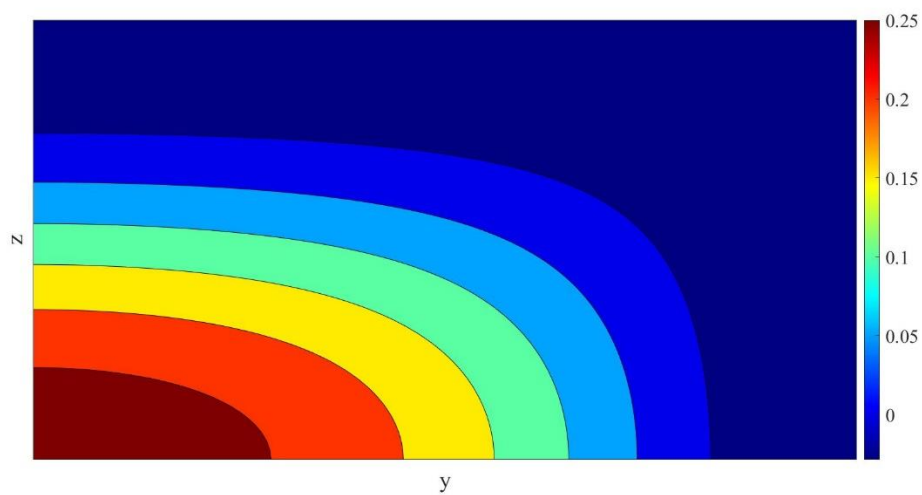
	De	b_1	b_2	b_3	b_4	$T_{\max}$	Nu
$\kappa = 2$	0.1	-0.2508	4.8877	0.0095	-0.0061	4.8800	-0.4056
	1	-0.2494	6.7795	-0.5962	-0.0024	6.2205	-0.3169
	5	-0.2094	52.6546	-15.5092	0.0752	38.4779	-0.0508
	10	-0.0628	198.0564	-61.9564	-0.0466	141.2146	-0.0138
$\kappa = 3$	0.1	-0.2505	4.8858	0.0102	-0.0081	3.5021	-0.5285
	1	-0.2497	6.7313	-0.6515	-0.0241	4.4587	-0.4135
	5	-0.2221	52.3880	-17.3015	-0.4112	27.9523	-0.0655
	10	-0.0981	200.5696	-69.0189	-2.7871	105.1250	-0.0174
$\kappa = 4$	0.1	-0.2503	4.8856	0.0087	-0.0080	2.7654	-0.6346
	1	-0.2499	6.6765	-0.7040	-0.0339	3.5049	-0.4990
	5	-0.2312	51.0987	-18.6852	-0.6482	21.7233	-0.0801
	10	-0.1341	196.0380	-74.1398	-4.4285	82.0571	-0.0212

جدول ۴-۲۲: مقادیر حاصل از حل تحلیلی معادله انرژی به ازای $Br = -10$ و $De = 2$

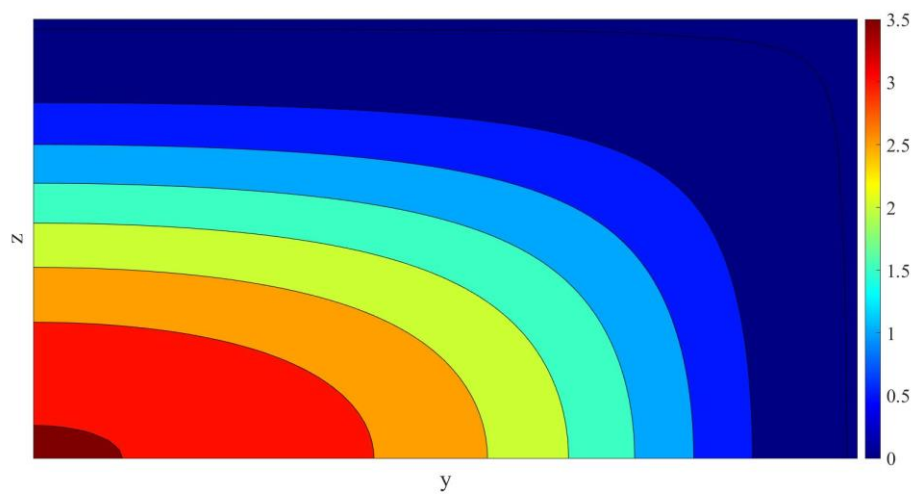
	L^2	b_1	b_2	b_3	b_4	$T_{\max}$	Nu
$\kappa = 2$	10	-0.2168	44.6657	-12.9117	0.0649	32.8639	-0.0595
	100	-0.2449	12.4273	-2.4140	0.0063	10.2100	-0.1921
	1000	-0.2503	5.6869	-0.2480	-0.0038	5.4454	-0.3628
	10000	-0.2508	4.9524	-0.0118	-0.0057	4.9256	-0.4018
$\kappa = 3$	10	-0.2276	44.3874	-14.3988	-0.3304	23.8326	-0.0768
	100	-0.2468	12.2888	-2.6693	-0.0656	7.3273	-0.2505
	1000	-0.2502	5.6633	-0.2696	-0.0143	3.9047	-0.4731
	10000	-0.2505	4.9485	-0.0128	-0.0083	3.5345	-0.5236
$\kappa = 4$	10	-0.2349	43.3109	-15.5468	-0.5262	18.5277	-0.0939
	100	-0.2479	12.0821	-2.8798	-0.1045	5.7289	-0.3042
	1000	-0.2501	5.6386	-0.2920	-0.0182	3.0761	-0.5696
	10000	-0.2503	4.9461	-0.0158	-0.0085	2.7903	-0.6288

توزیع دمای جریان سیال FENE-P داخل کانال مستطیلی مستقیم در شکل‌های ۴-۲۵ الی ۴-۳۲ برای چهار عدد برینکمن منفی ۱-، ۲-، ۵- و ۱۰- نمایش داده شده است. مشابه دو حالت قبل نتایج برای نسبت ابعاد مقطع ۲ ارائه شده‌اند و همچنین به دلیل تقارن هندسه کانال مورد مطالعه نتایج به‌ازای یک‌چهارم مقطع کانال نمایش داده شده‌اند. در شکل‌های ۴-۲۵، ۴-۲۷، ۴-۲۹ و ۴-۳۱ توزیع دما به‌ازای پارامتر قابلیت کشش ثابت $L^2 = 100$ و سه عدد دبورای مختلف ارائه شده است، در حالی که این نتایج در شکل‌های ۴-۲۶، ۴-۲۸، ۴-۳۰ و ۴-۳۲ به‌ازای عدد دبورای ثابت $De = 2$ و سه پارامتر قابلیت کشش متفاوت نمایش داده شده‌اند. در این حالت بر خلاف دو حالت قبل ($Br = 0$ و $Br > 0$) سیال در وسط کانال دمای بالاتری دارد و با حرکت به سمت دیواره‌ها دمای سیال کاهش می‌یابد. در واقع در اعداد برینکمن منفی تلفات ویسکوز و شار حرارتی ثابت اعمال شده بر دیواره‌ها در تقابل با یکدیگر هستند، بنابراین جهت انتقال حرارت بر خلاف دو حالت قبل می‌باشد (از جریان به دیواره‌ها). لذا جریان داخل کانال با سرمایش همراه است.

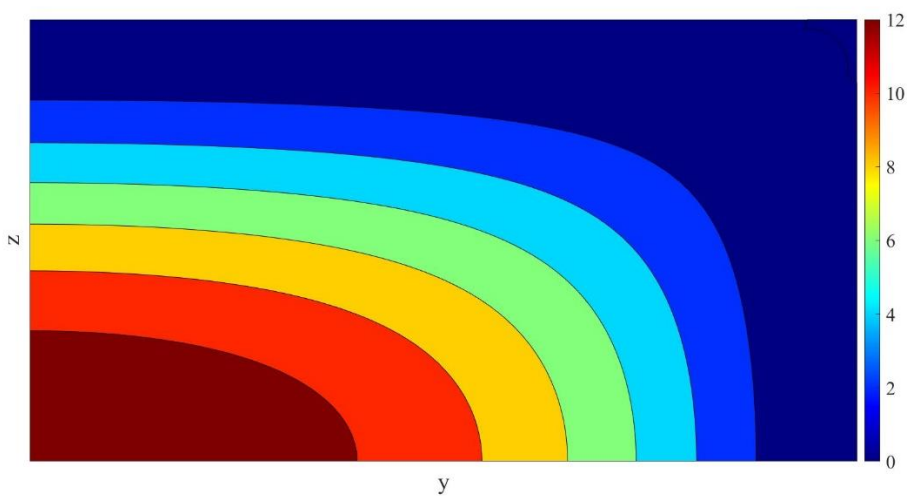
طبق شکل‌های ۴-۲۵ الی ۴-۳۲، با افزایش عدد دبورای در یک پارامتر قابلیت کشش ثابت رفتار رقیق‌شوندگی سیال تشدید می‌شود و در نتیجه دمای ماکزیمم سیال افزایش خواهد یافت، اما با افزایش پارامتر قابلیت کشش مدل (تضعیف رفتار رقیق‌شوندگی سیال) در یک عدد دبورای ثابت این روند معکوس می‌شود. لازم به ذکر است که با افزایش عدد دبورای و کاهش پارامتر قابلیت کشش مدل، اختلاف دمای میانگین سیال با دمای دیواره‌ها افزایش خواهد یافت. همچنین با توجه به شکل‌های ذکر شده می‌توان دریافت که با افزایش عدد برینکمن منفی، دمای ماکزیمم و در نتیجه دمای میانگین سیال افزایش خواهد یافت. لذا با افزایش عدد برینکمن منفی اختلاف دمای دیواره‌ها و هسته جریان افزایش می‌یابد.



(الف) $De=1$

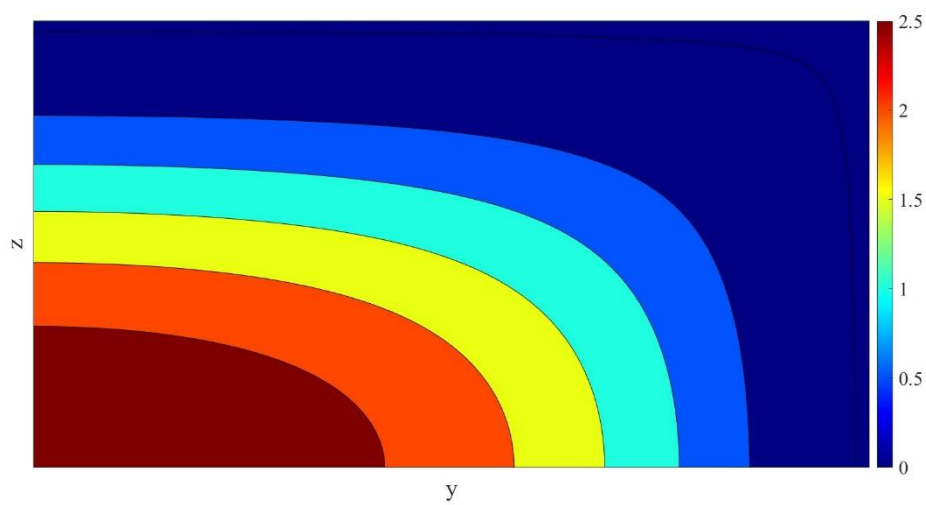


(ب) $De=5$

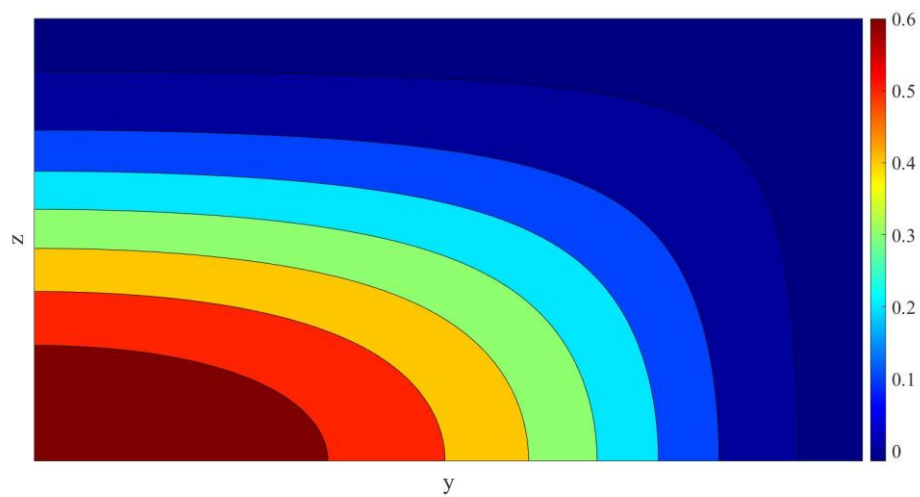


(پ) $De=10$

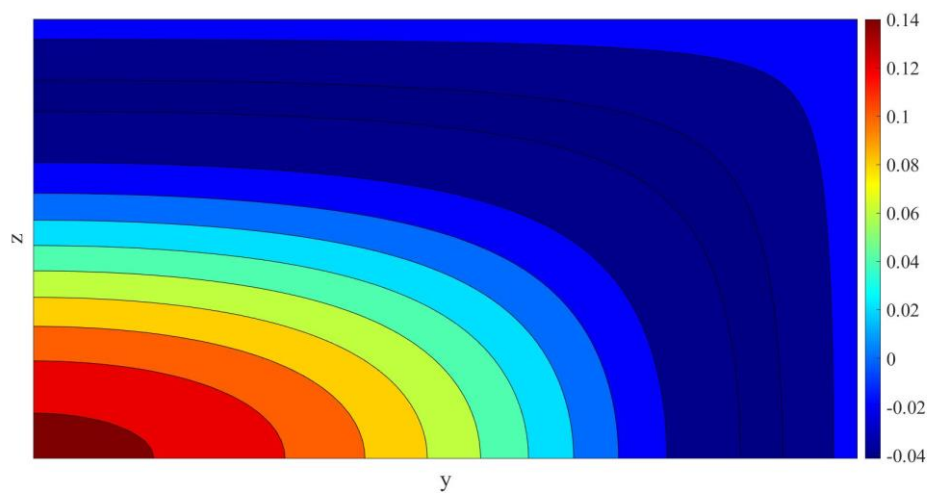
شکل ۴-۲۵: توزیع دما برای جریان سیال FENE-P به ازای $L^2 = 100$ و $Br = -1$ و $\kappa = 2$



(الف) $L^2 = 10$

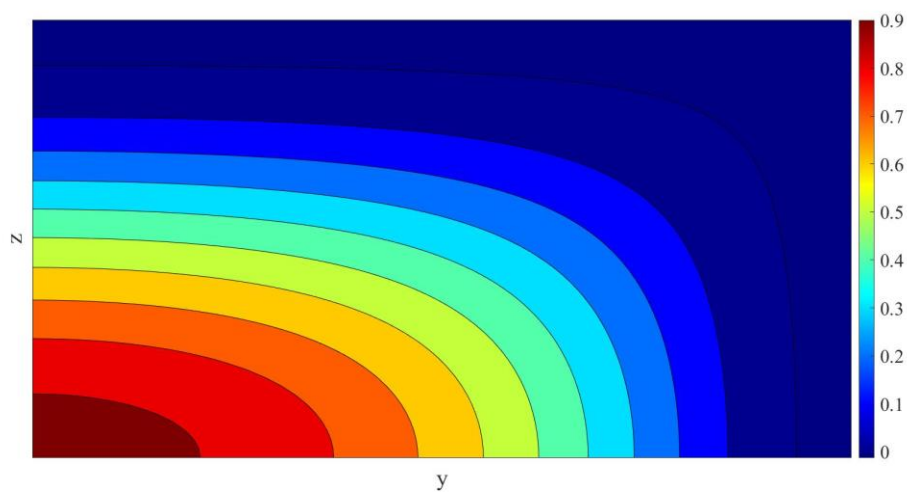


(ب) $L^2 = 100$

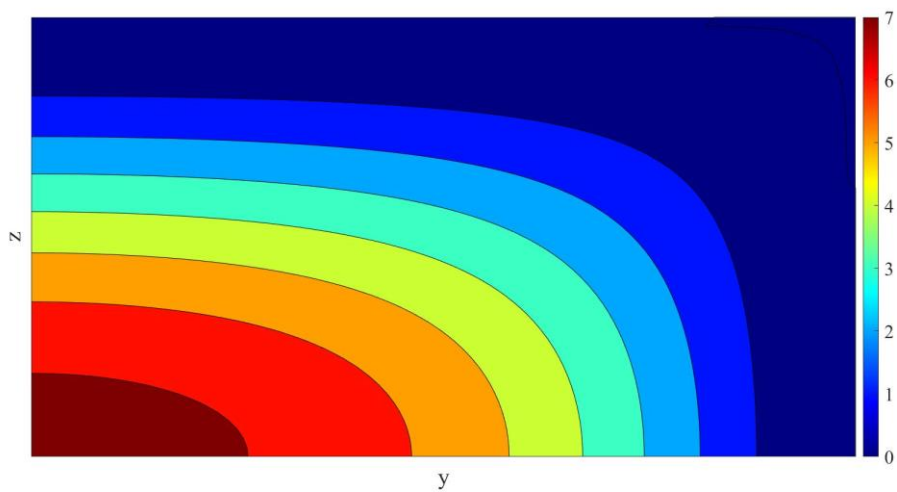


(پ) $L^2 = 10000$

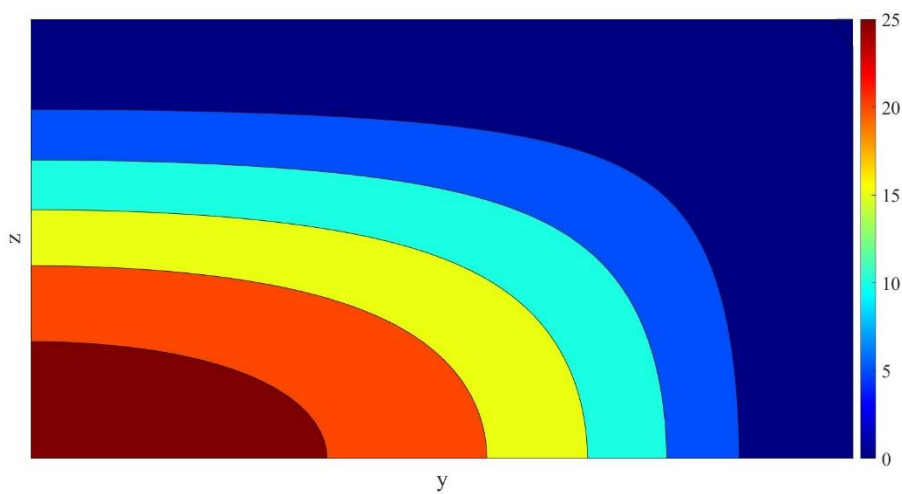
شکل ۴-۲۶: توزیع دما برای جریان سیال FENE-P به‌ازای $De = 2$ و $Br = -1$ و $\kappa = 2$



(الف) $De = 1$

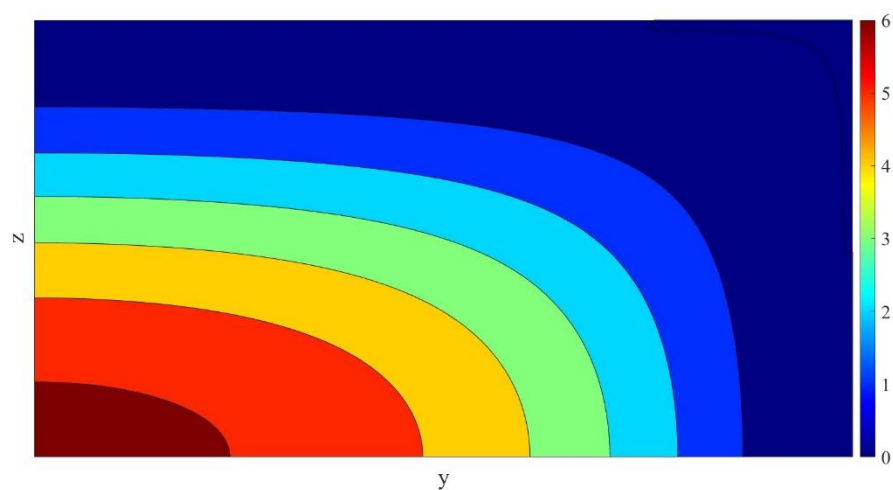


(ب) $De = 5$

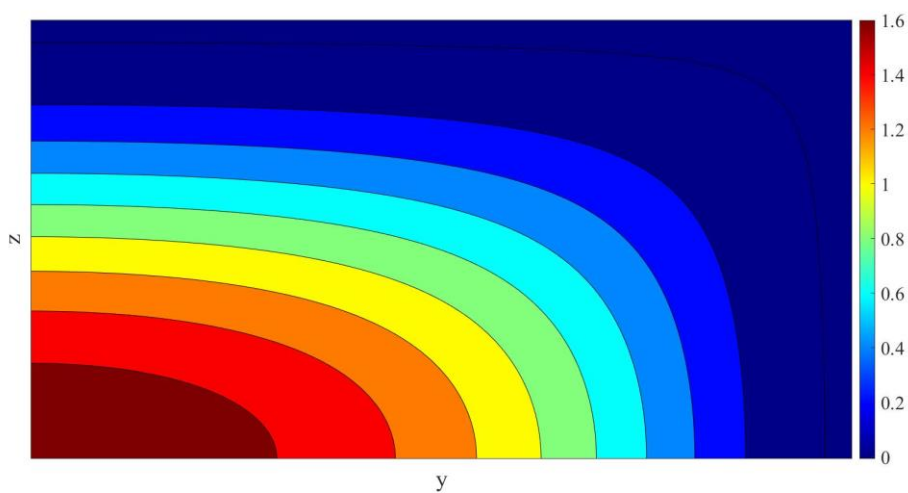


(پ) $De = 10$

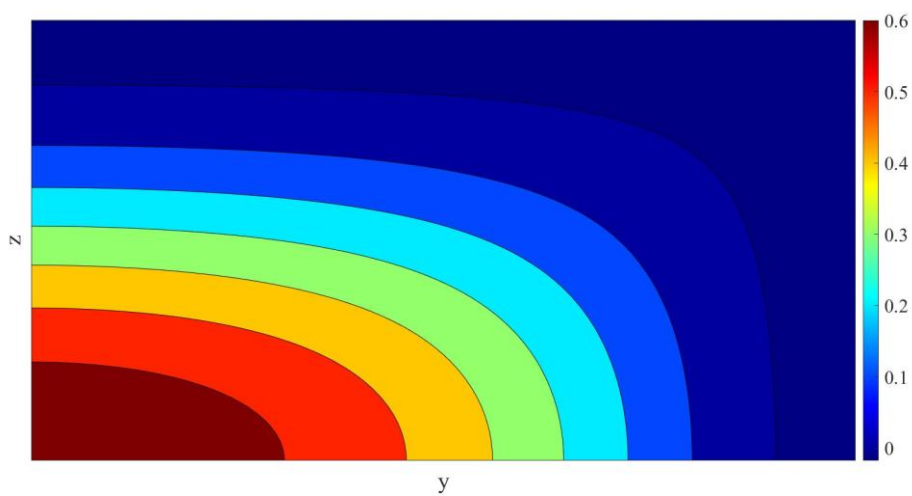
شکل ۴-۲۷: توزیع دما برای جریان سیال FENE-P به ازای $L^2 = 100$ و $Br = -2$ و $\kappa = 2$



(الف) $L^2 = 10$

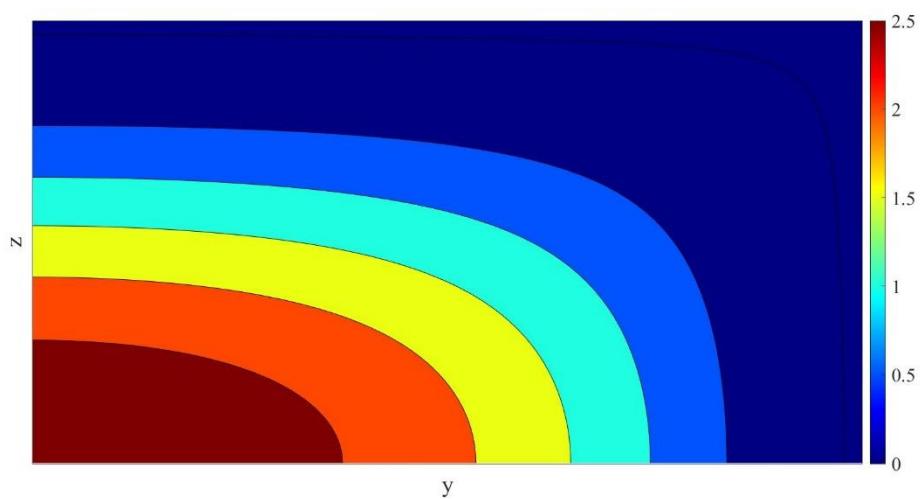


(ب) $L^2 = 100$

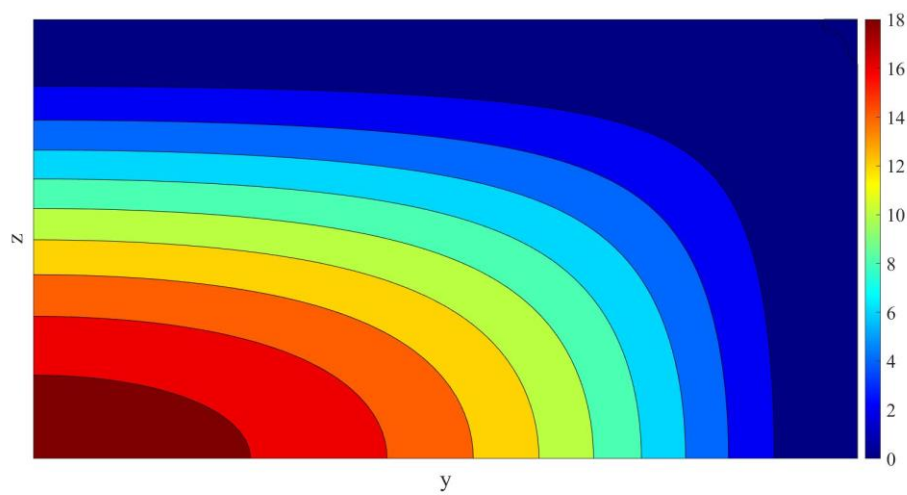


(پ) $L^2 = 10000$

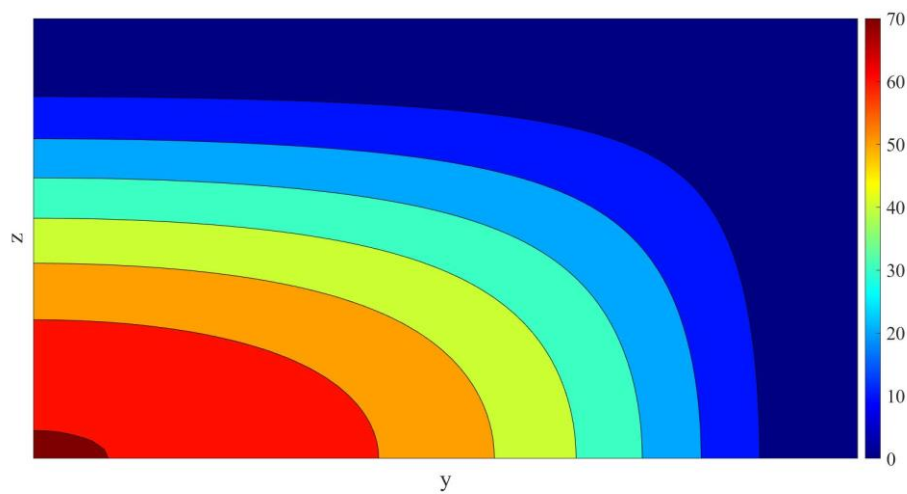
شکل ۴-۲۸: توزیع دما برای جریان سیال FENE-P به ازای $De = 2$ و $Br = -2$ و $\kappa = 2$



الف) $De = 1$

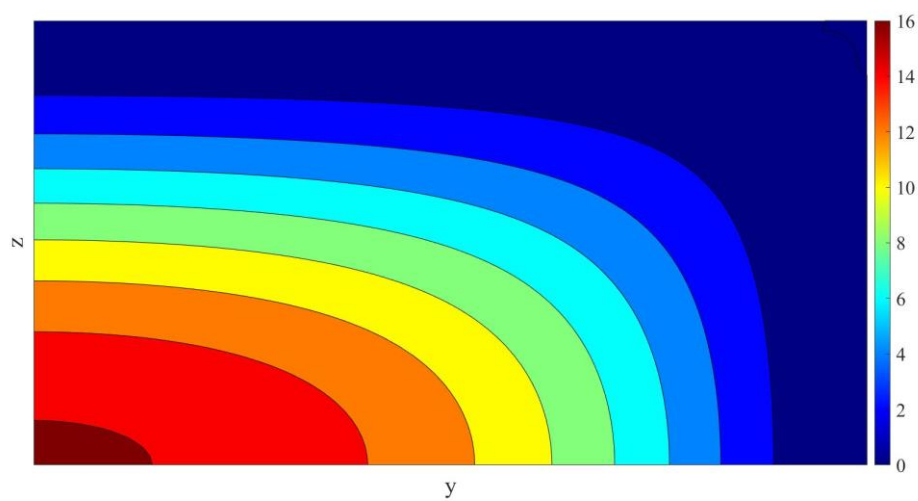


ب) $De = 5$

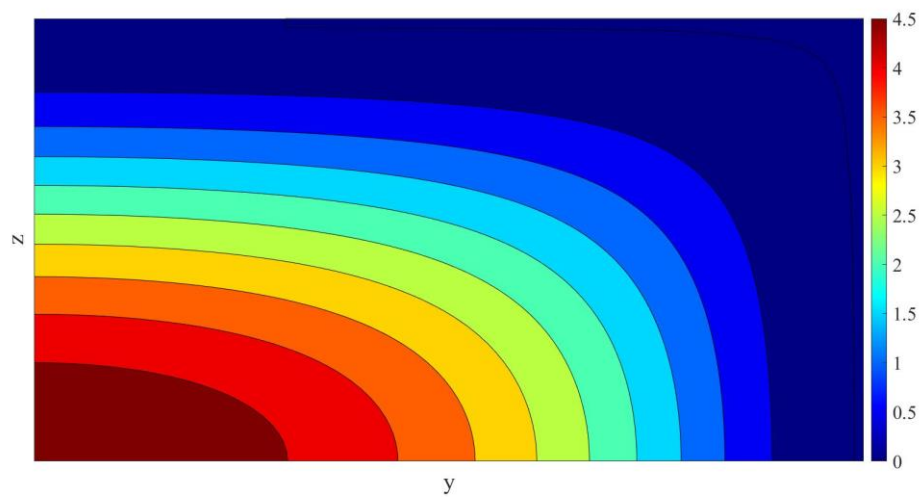


پ) $De = 10$

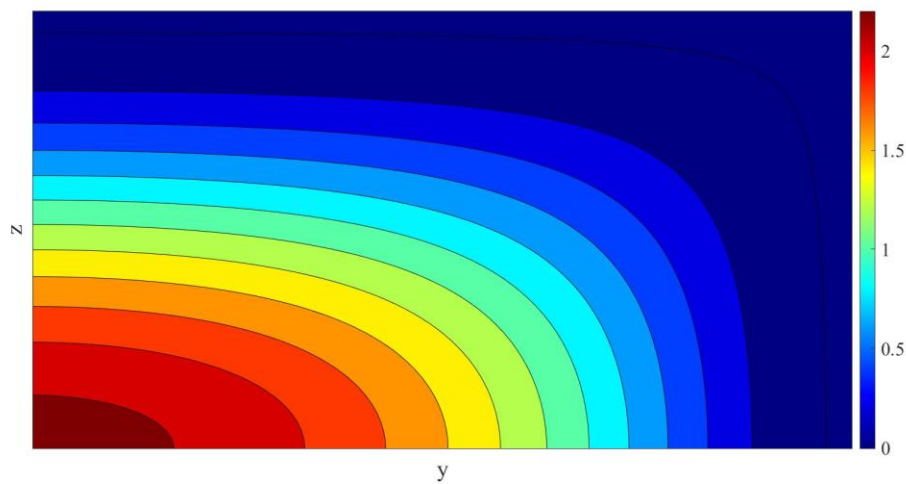
شکل ۴-۲۹: توزیع دما برای جریان سیال FENE-P به ازای $L^2 = 100$ و $Br = -5$ و $\kappa = 2$



(الف) $L^2 = 10$

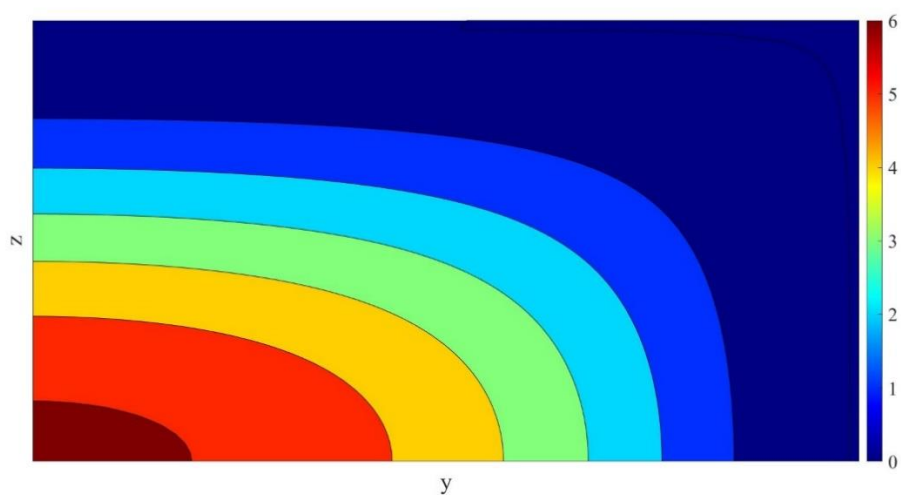


(ب) $L^2 = 100$

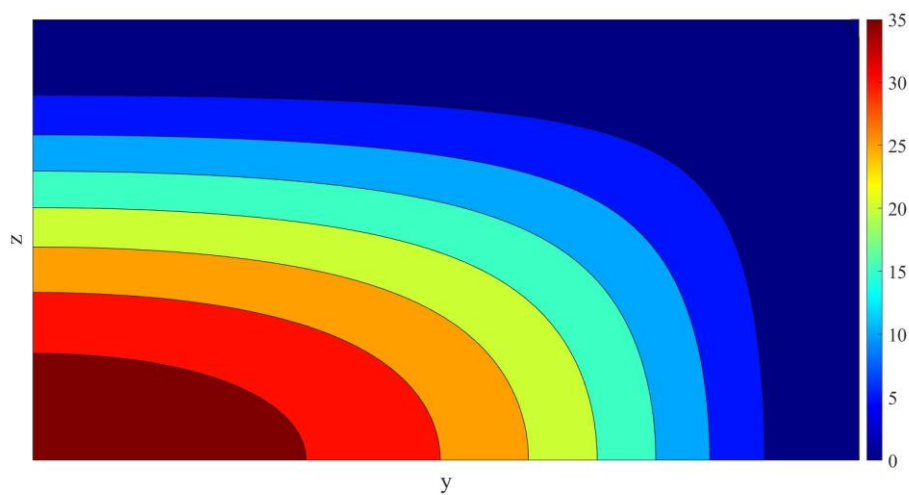


(پ) $L^2 = 10000$

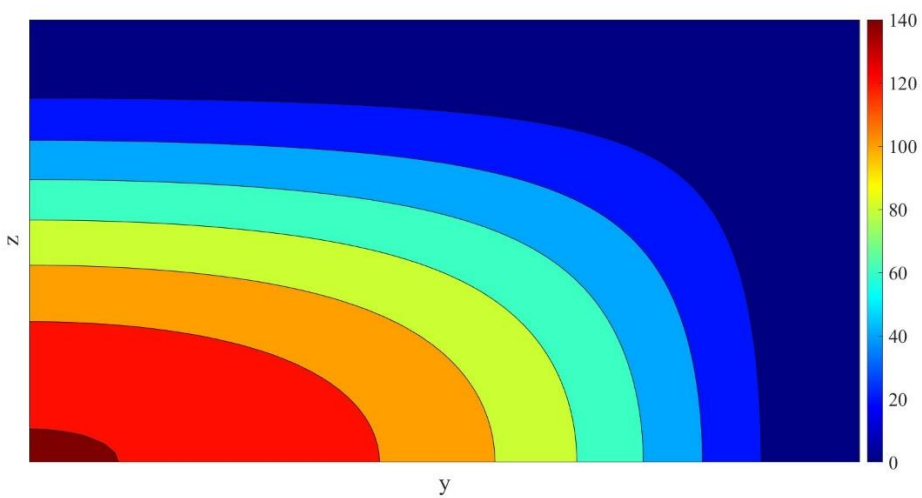
شکل ۴-۳: توزیع دما برای جریان سیال FENE-P به‌ازای $De = 2$ و $Br = -5$ و $\kappa = 2$



(الف) $De=1$

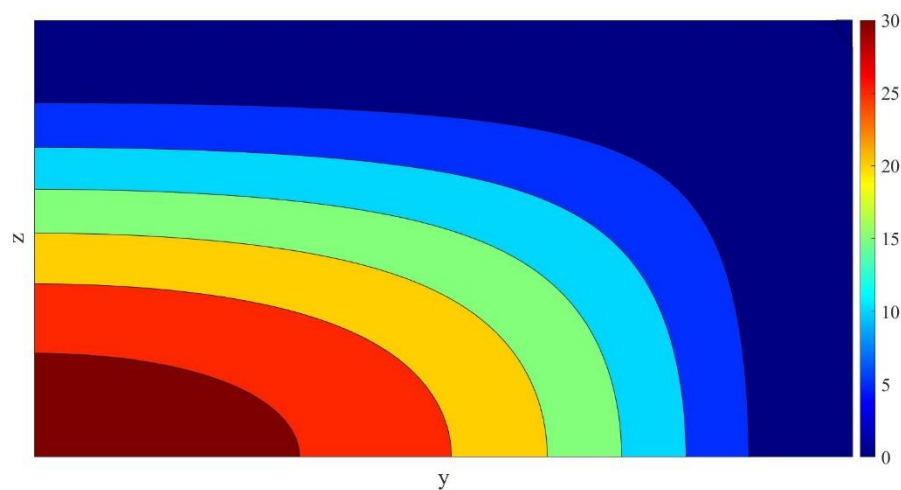


(ب) $De=5$

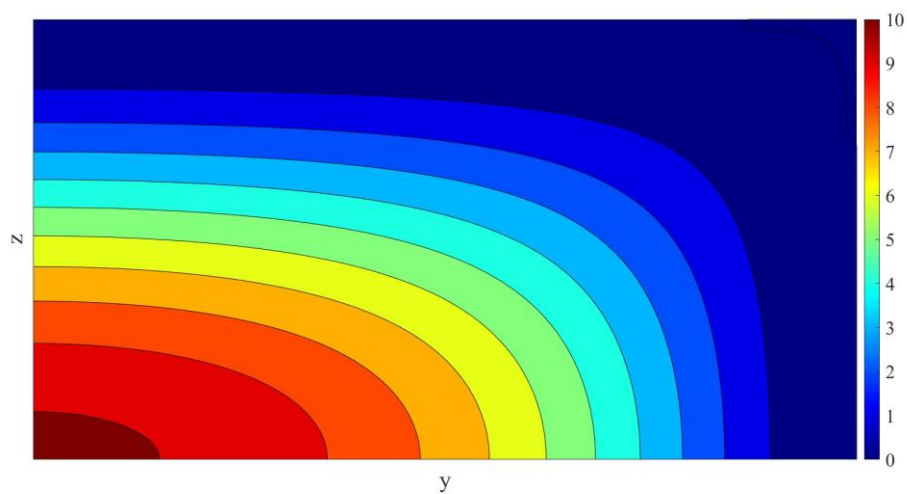


(پ) $De=10$

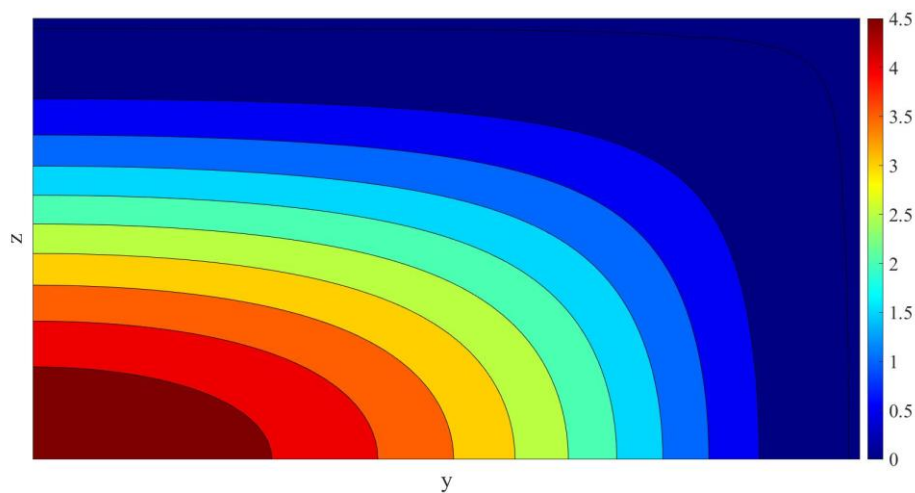
شکل ۴-۳۱: توزیع دما برای جریان سیال FENE-P به‌ازای $L^2=100$ و $Br=-10$ و $\kappa=2$



(الف) $L^2 = 10$



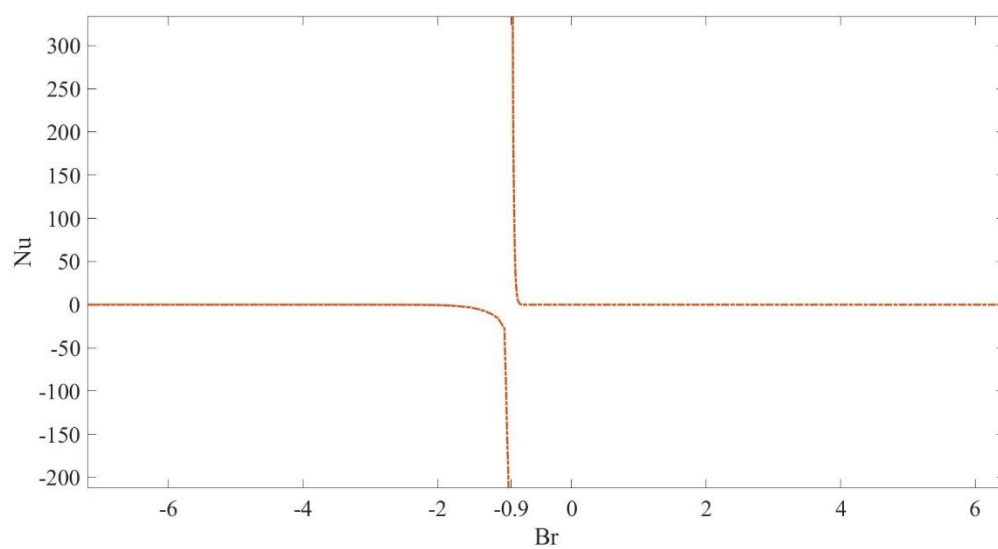
(ب) $L^2 = 100$



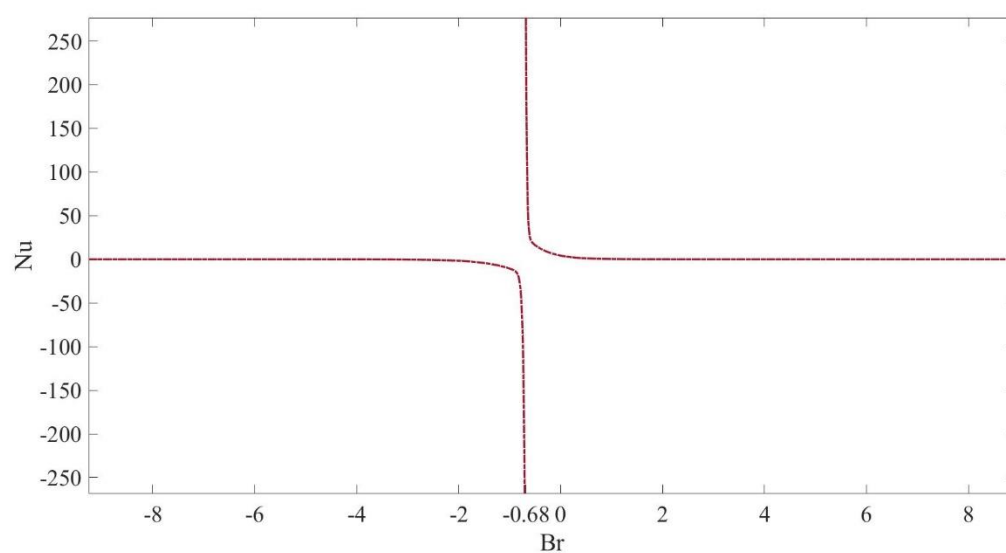
(پ) $L^2 = 10000$

شکل ۴-۳: توزیع دما برای جریان سیال FENE-P به ازای $De = 2$ و $Br = -10$ و $\kappa = 2$

در شکل ۳۳-۴ تغییرات عدد ناسلت برحسب عدد برینکمن، برای نسبت ابعاد مقطع ۲ و به ازای پارامتر قابلیت کشش ثابت $L^2 = 100$ و دو عدد دبورای $De = 0.1$ و $De = 1$ نمایش داده شده است. همانطور که مشخص است برای $De = 0.1$ در عدد برینکمن بحرانی $Br_{cr} = -0.9$ ، عدد ناسلت به سمت بی نهایت میل پیدا می کند. در حالی که برای $De = 1$ این روند در عدد برینکمن بحرانی $Br_{cr} = -0.68$ رخ خواهد داد. در واقع در عدد برینکمن بحرانی که یک نقطه تکین می باشد، مقدار دمای میانگین بسیار نزدیک به صفر می شود، بنابراین طبق رابطه (۱۰۱-۲) می توان ادعا کرد که در این نقاط عدد ناسلت به سمت بی نهایت میل خواهد کرد. همچنین طبق شکل ۳۳-۴ مشخص است که با میل کردن عدد برینکمن به سمت بی نهایت، مقدار عدد ناسلت به صفر نزدیک می شود. با تغییر علامت عدد ناسلت در عدد برینکمن بحرانی، جهت انتقال حرارت نیز تغییر خواهد کرد. طبق شکل ۳۳-۴ می توان ادعا کرد که با افزایش عدد دبورای در یک پارامتر قابلیت کشش ثابت، عدد برینکمن بحرانی افزایش خواهد یافت. اما با افزایش پارامتر قابلیت کشش مدل در یک عدد دبورای ثابت این روند معکوس خواهد بود.



De = 0.1 (الف)



De = 1 (ب)

شکل ۴-۳: تغییرات عدد ناسلت بر حسب عدد برینکمن به ازای $\kappa = 2$ و $L^2 = 100$

فصل ۵: نتیجه گیری

۵-۱ مقدمه

در این فصل ابتدا نتایج حاصل از مطالعه حاضر به طور خلاصه بیان می‌شوند، سپس پیشنهاداتی جهت ارتقای سطح کیفی این مطالعه و پیشبرد مطالعات آتی در این زمینه ارائه خواهد شد.

۵-۲ خلاصه نتایج

در این مطالعه با استفاده از روش انتگرالی ریتز به بررسی جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک گذرنده از کانال‌های مستطیلی مستقیم، تحت شار حرارتی ثابت بر دیواره‌ها پرداخته شد. جهت مدل‌سازی سیال ویسکوالاستیک از مدل FENE-P استفاده شده است. به کار بردن ریتز مرتبه چهارم برای به دست آوردن پاسخ‌هایی با دقت چهار رقم اعشار کفایت می‌کند.

پس از حل میدان جریان مشخص شد که با افزایش عدد دبورا و کاهش پارامتر قابلیت کشش مدل، رفتار رقیق‌شوندگی سیال ویسکوالاستیک تشدید شده که این امر منجر به افزایش سرعت ماکزیمم در مرکز کانال می‌شود. همچنین افزایش نسبت ابعاد مقطع کانال سبب کاهش سرعت ماکزیمم می‌شود. از دیدگاهی دیگر با تقسیم توزیع سرعت به دست آمده بر سرعت متوسط مشخص شد که با افزایش عدد دبورا و کاهش پارامتر قابلیت کشش مدل، ویسکوزیته سیال ویسکوالاستیک کاهش می‌یابد که این امر منجر به یکنواختی بیشتر توزیع سرعت در مجاورت مرکز کانال (هسته جریان) خواهد شد.

با افزودن عبارت تلفات ویسکوز به معادله انرژی تأثیر عدد برینکمن نیز بر توزیع دما بررسی شده است. با افزایش عدد دبورا و کاهش پارامتر قابلیت کشش مدل، میزان تلفات ویسکوز در مجاورت دیواره‌های کانال افزایش می‌یابد. برای مقادیر مثبت عدد برینکمن، با افزایش عدد دبورا و کاهش پارامتر قابلیت کشش مدل، دمای میانگین سیال و در نتیجه عدد ناسلت کاهش می‌یابند. اما برای مقادیر منفی عدد برینکمن، با افزایش عدد دبورا و کاهش پارامتر قابلیت کشش مدل، دمای میانگین سیال افزایش می‌یابد که این امر منجر به افزایش عدد ناسلت نیز خواهد شد. لازم به ذکر است که جهت انتقال حرارت برای اعداد برینکمن مثبت و منفی عکس یکدیگر می‌باشند. همچنین نتایج نشان داد که در یک عدد دبورا و پارامتر قابلیت کشش مشخص، با افزایش عدد برینکمن مثبت و منفی عدد ناسلت به ترتیب کاهش و افزایش خواهد یافت. لازم به ذکر است که برای مقادیر مثبت عدد برینکمن، با افزایش نسبت ابعاد مقطع کانال در یک عدد دبورا و پارامتر قابلیت کشش ثابت، عدد ناسلت نیز افزایش می‌یابد، حال آن‌که برای مقادیر منفی عدد برینکمن، این روند معکوس می‌باشد. نتایج نشان می‌دهد که با صرف‌نظر کردن از تلفات ویسکوز، افزایش عدد دبورا و کاهش پارامتر قابلیت کشش مدل منجر به افزایش عدد ناسلت خواهد شد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که اثر عدد دبورا و پارامتر قابلیت کشش مدل بر توزیع سرعت و دما، عکس یکدیگر می‌باشند. همچنین با میل کردن عدد دبورا به سمت صفر و پارامتر قابلیت کشش مدل به سمت بی‌نهایت، پاسخ‌ها به حل نیوتنی نزدیک‌تر می‌شوند.

۳-۵ پیشنهادات

جهت پیشبرد مطالعات آتی در این زمینه و همچنین ارتقای سطح کیفی این مطالعه می‌توان موارد زیر را در نظر گرفت:

* بررسی سیال ویسکوالاستیک FENE-P در هندسه‌های پیچیده‌تر مانند کانال‌های خمیده، کانال‌های انبساط ناگهانی، میکروکانال‌ها و ...

* بررسی سیال ویسکوالاستیک FENE-P داخل کانال‌های مستطیلی دما ثابت.

* انتخاب توابع مختلفی به‌عنوان تابع ψ که شرایط مرزی مسئله را ارضا کنند و مقایسه نتایج به‌دست آمده با مطالعه حاضر.

* استفاده از روش ریتز برای جریان‌های ویسکوالاستیک لغزشی.

مرجع

- [1] L. Graetz, "Ueber die Wärmeleitungsfähigkeit von Flüssigkeiten," *Ann. Phys.*, vol. 254, no. 1, pp. 79–94, 1882.
- [2] W. Nusselt, The dependence of the heat-transfer coefficient on tube length, *Zeit. VDI*, Vol. 54, pp. 1154-1158, 1910
- [3] R. K. Shah and A. L. London, *Laminar Flow Forced Convection in Ducts: A Source Book for Compact Heat Exchanger Analytical Data*, vol. Suppl. 1. 1978.
- [4] W. M. Kays and M. C. E., "Convective Heat And Mass Transfer," *McGraw-Hill, New York*, 1980.
- [5] A. Bejan, *Convection heat transfer*, 1995.
- [6] A. Barletta and B. Pulvirenti, "Forced convection with slug flow and viscous dissipation in a rectangular duct," *Int. J. Heat Mass Transf.*, vol. 43, no. 5, pp. 725–740, 2000.
- [7] S. X. Gao and J. P. Hartnett, "Analytical Nusselt number predictions for slug flow in rectangular duct," *Int. Commun. Heat Mass Transf.*, vol. 20, no. 5, pp. 751–760, 1993.
- [8] M. M. Shahmardan, M. Norouzi, M. H. Kayhani, and A. A. Delouei, "An exact analytical solution for convective heat transfer in rectangular ducts," *J. Zhejiang Univ. Sci. A*, vol. 13, no. 10, pp. 768–781, 2012.
- [9] W. Rybiński and J. Mikieliewicz, "Analytical solutions of heat transfer for laminar flow in rectangular channels," *Arch. Thermodyn.*, vol. 35, no. 4, pp. 29–42, 2014.
- [10] M. Norouzi, M. M. Shahmardan, M. Davoodi, and M. Mahmoudi, "An Exact Solution for Fluid Flow and Heat Convection through Triangular Ducts Considering the Viscous Dissipation," *AUT J. Mech. Eng. AUT*, vol. 3, no. 2, pp. 197–204, 2019.
- [11] M. U. Uwaezuoke, "Forced Convection in Circular Pipe Flow for Newtonian Fluids with Viscous Dissipation Effect on Heat Transfer," pp. 15–23, 2021.
- [12] A. G. Dodson, P. Townsend, and K. Walters, "Non-Newtonian flow in pipes of non-circular cross section," *Comput. Fluids*, vol. 2, no. 3–4, pp. 317–338, 1974.
- [13] P. Townsend, K. Walters, and W. M. Waterhouse, "Secondary flows in pipes of square cross-section and the measurement of the second normal stress difference," *J. Nonnewton. Fluid Mech.*, vol. 1, no. 2, pp. 107–123, 1976.
- [14] V. O'Brien and L. W. Ehrlich, "Rectilinear oscillatory viscoelastic flow in rectangular ducts," *J. Nonnewton. Fluid Mech.*, vol. 13, no. 1, pp. 33–45, 1983.
- [15] J. P. Hartnett and M. Kostic, "Heat Transfer to Newtonian and Non-Newtonian Fluids in Rectangular Ducts," *Adv. Heat Transf.*, vol. 19, no. C, pp. 247–356, 1989.

- [16] S. X. Gao and J. P. Hartnett, "Steady flow of non-Newtonian fluids through rectangular ducts," *Int. Commun. Heat Mass Transf.*, vol. 20, no. 2, pp. 197–210, 1993.
- [17] S. C. Xue, N. Phan-Thien, and R. I. Tanner, "Numerical study of secondary flows of viscoelastic fluid in straight pipes by an implicit finite volume method," *J. Nonnewton. Fluid Mech.*, vol. 59, no. 2–3, pp. 191–213, 1995.
- [18] M. R. Mahjoob, G. Etemad, S., and J. Thibault, "Numerical study of Non-Newtonian flow through rectangular Microchannels," *Iran. J. Chem. Eng.*, vol. 6, no. 4, pp. 44–61, 2009.
- [19] M. Norouzi and M. H. Kayhani, "Mixed and forced convection of viscoelastic materials in straight duct with rectangular cross section," vol. 7, no. 3, pp. 285–296, 2009.
- [20] N. Peres, A. Afonso, M. A. Alves, and F. T. Pinho, "Numerical simulation of heat transfer enhancement in laminar flow of viscoelastic fluids through a rectangular channel," *AIP Conf. Proc.*, vol. 1027, pp. 1444–1446, 2008.
- [21] A. Jalali, M. H. Kayhani, and M. Norouzi, "Three-Dimensional Simulation of Entrance Region effect for Viscoelastic flows in a Rectangular Duct," *Modares Mech. Eng.*, vol. 11, no. 2, pp. 27–37, 2011.
- [22] M. Norouzi, M. H. Kayhani, M. R. H. Nobari, and F. Talebi, "Analytical investigation of viscoelastic creeping flow and heat transfer inside a curved rectangular duct," *Theor. Found. Chem. Eng.*, vol. 45, no. 1, pp. 53–67, 2011.
- [23] P. Neofytou, C. Housiadas, S. G. Tsangaris, A. K. Stubos, and D. I. Fotiadis, "Newtonian and power-law fluid flow in a T-junction of rectangular ducts," *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, vol. 28, no. 2, pp. 233–256, 2014.
- [24] Y. Damianou and G. C. Georgiou, "Viscoplastic Poiseuille flow in a rectangular duct with wall slip," *J. Nonnewton. Fluid Mech.*, vol. 214, pp. 88–105, 2014.
- [25] V. M. Ribeiro, P. M. Coelho, F. T. Pinho, and M. A. Alves, "Viscoelastic fluid flow past a confined cylinder: Three-dimensional effects and stability," *Chem. Eng. Sci.*, vol. 111, pp. 364–380, 2014.
- [26] B. Purnode and M. J. Crochet, "Polymer solution characterization with the FENE-P model," *J. Nonnewton. Fluid Mech.*, vol. 77, no. 1–2, pp. 1–20, 1998.
- [27] P. J. Oliveira, "An exact solution for tube and slit flow of a FENE-P fluid," *Acta Mech.*, vol. 158, no. 3–4, pp. 157–167, 2002.
- [28] P. J. Oliveira, P. M. Coelho, and F. T. Pinho, "The Graetz problem with viscous dissipation for FENE-P fluids," *J. Nonnewton. Fluid Mech.*, vol. 121, no. 1, pp. 69–72, 2004.
- [29] D. O. A. Cruz, F. T. Pinho, and P. J. Oliveira, "Analytical solutions for fully developed laminar flow of some viscoelastic liquids with a Newtonian solvent contribution," *J. Nonnewton. Fluid Mech.*, vol. 132, no. 1–3, pp. 28–35, 2005.
- [30] R. C. Bataller, "Similarity solutions for boundary layer flow and heat transfer of a FENE-P fluid with thermal radiation," *Phys. Lett. Sect. A Gen. At. Solid State Phys.*, vol. 372, no. 14, pp. 2431–2439, 2008.

- [31] L. Khezzar, A. Filali, and M. AlShehhi, "Flow and heat transfer of FENE-P fluids in ducts of various shapes: Effect of Newtonian solvent contribution," *J. Nonnewton. Fluid Mech.*, vol. 207, pp. 7–20, 2014.
- [32] A. Filali, L. Khezzar, M. Alshehhi, and Z. Nemouchi, "Effect of solvent contribution on thermally developing flow of FENE-P fluids between parallel plates," *J. Appl. Fluid Mech.*, vol. 11, no. 1, pp. 1–9, 2018.
- [33] E. S. Baranovskii, "Analytical solutions to the FENE-P model with slip boundary conditions \ast," no. 16, pp. 12–16, 2017.
- [34] S. Z. Daghighi and M. Norouzi, "Effects of viscous dissipation on heat convection of viscoelastic flow inside isothermal channels and tubes," *Korea Aust. Rheol. J.*, vol. 30, no. 4, pp. 273–292, 2018.
- [35] S. Pashazadeh and A. Jafari, "A new approach to analytical and numerical solutions for nonlinear viscoelastic fluids," vol. 27, pp. 185–193, 2019.
- [36] L. Mei, "Numerical Simulation of Viscoelastic Flow in Micro / Nanochannels," 2019.
- [37] M. B. Khan, C. Sasmal, and R. P. Chhabra, "Flow and heat transfer characteristics of a rotating cylinder in a FENE-P type viscoelastic fluid," *J. Nonnewton. Fluid Mech.*, vol. 282, p. 104333, 2020.
- [38] C. Y. Wang, "Ritz method for oscillatory flow in ducts," *Int. J. Numer. Methods Fluids*, vol. 67, no. 5, pp. 609–615, Oct. 2011.
- [39] C. Y. Wang, "Ritz method for slip flow in super-elliptic ducts," *Eur. J. Mech. B/Fluids*, vol. 43, pp. 85–89, 2014.
- [40] C. Y. Wang, "Ritz method for slip flow in curved micro-ducts and application to the elliptic duct," *Meccanica*, vol. 51, no. 5, pp. 1069–1076, 2016.
- [41] M. Norouzi, A. Emamian, and M. Davoodi, "A new mathematical technique for analysis of internal viscoplastic flows through rectangular ducts," *J. Eng. Math.*, vol. 127, no. 1, 2021.
- [42] R. B. Bird, P. J. Dotson, and N. L. Johnson, "Polymer solution rheology based on a finitely extensible bead-spring chain model," *J. Nonnewton. Fluid Mech.*, vol. 7, no. 2–3, pp. 213–235, Jan. 1980.
- [43] M. D. Chilcott and J. M. Rallison, "Creeping flow of dilute polymer solutions past cylinders and spheres," *J. Nonnewton. Fluid Mech.*, vol. 29, no. C, pp. 381–432, Jan. 1988.
- [44] Arpaci VS (1966) Conduction heat transfer. Addison-Wesley Reading, New York
- [45] F.M. White, Viscous Fluid Flow, McGraw-Hill, New York, 1974

Abstract

In the present study the flow and heat transfer of viscoelastic fluids passing through straight rectangular ducts under constant heat flux on the walls and in the fully developed hydrodynamic and thermal region have been investigated analytically. The nonlinear constitutive equation used to model the studied viscoelastic fluid is the FENE-P model which is one of the popular models for modeling dilute polymer solutions. In this study the Ritz method is used to solve the flow field and heat transfer of viscoelastic fluid, which is subset of calculus of variations methods for solving partial differential equations. Comparison of the results obtained for the flow field with previous studies confirms the high efficiency and accuracy of the Ritz method. Also, using the fourth-order Ritz method is sufficient for the accuracy of four decimal places. After solving the FENE-P viscoelastic fluid flow field, the effect of dimensionless parameters such as Deborah number, extensibility parameter and channel cross-section aspect ratio have been investigated on velocity distribution. The results show that with increasing the Deborah number and decreasing the extensibility parameter, the maximum velocity in the center of channel increases due to the intensification of shear thinning behavior of viscoelastic fluid. Also, increasing the cross-section aspect ratio will reduce the maximum velocity. By dividing the obtained velocity distribution by its average velocity, it was found that both an increase of the Deborah number or a decrease of the extensibility parameter lead to flatter velocity profiles in the core region as a consequence of enhanced shear thinning in viscosity. In solving the energy equation by considering viscous dissipation, in addition to the mentioned dimensionless parameters, the effect of Brinkman number on heat transfer of FENE-P viscoelastic fluid has been analyzed. The results show that with increasing Deborah number and decreasing the extensibility parameter, the amount of viscous dissipation around the walls increases. For positive Brinkman numbers, where heat is transferred from the walls to the fluid, the mean temperature of the fluid decreases as the Deborah number increases and the extensibility parameter decreases, which leads to reduction in Nusselt numbers. But for negative Brinkman numbers, where heat is transferred from the fluid to the walls, this trend will be reversed. The results reveal that by increasing the positive and negative Brinkman numbers in the specific Deborah number and extensibility parameter, the Nusselt numbers will decrease and increase, respectively.

Keywords: viscoelastic fluid, FENE-P model, straight rectangular duct, Ritz method, constant heat flux, viscous dissipation



Shahrood University of
Technology

Faculty of Mechanical and Mechatronics Engineering

M.Sc. Thesis in Energy Conversion Engineering

An analytical solution for flow and heat convection of viscoelastic fluid inside the straight rectangular ducts

By: Amir Jafari

Supervisor:
Dr. Mohammadhassan Kayhani

Advisor:
Dr. Mahmood Norouzi

February 2022