

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده مهندسی مکانیک  
گروه طراحی کاربردی

# حل ریاضی وب ویسکوالاستیک متحرک محوری تحت فشار عرضی به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول

دانشجو:

**روح‌الله درزی نفت‌چالی**

استاد راهنما:

**دکتر حمیدرضا ایک چی**

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

زمستان ۱۳۹۰

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده : مکانیک

گروه : طراحی کاربردی

پایان نامه کارشناسی ارشد آقای روح‌الله درزی نفت‌چالی

تحت عنوان:

حل ریاضی وب ویسکوالاستیک متحرک محوری تحت فشار عرضی  
به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول

در تاریخ ..... توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد  
مورد ارزیابی و با درجه ..... مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور	امضاء	اساتید راهنما
			نام و نام خانوادگی : دکتر حمیدرضا ایبک‌چی

امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
	نام و نام خانوادگی : دکتر سید هادی قادری		نام و نام خانوادگی : دکتر امیر جلالی
			نام و نام خانوادگی : دکتر حبیب احمدی
			نام و نام خانوادگی :
			نام و نام خانوادگی :

«اثری» کوچک است، خیلی کوچک و شاید هیچ!

اما به یاد عهد قدیم و رسم ادب

تقدیم می شود به:

آنانکه وجودشان برایم همه مهر بود و وجودم برایشان همه رنج

تقدیم به **مهربانترین پدر و صبورترین مادر**

آنان که توانشان رفت تا توانا شوم

مویشان سپید گشت تا روسفید شوم

و راستی قامت در شکستگی قامتشان بقا یافت

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین

پشتیبان است و محبت‌های بی دریغشان که هرگز فروکش نمی کند.

و تقدیم به استاد و برادر بزرگوارم **جناب آقای دکتر حمیدرضا ایپک چی** و تمام

آزاد مردانی که نیک می اندیشند و عقل و منطق را پیشه خود نموده و جز رضای الهی و

پیشرفت و سعادت جامعه، هدفی ندارند.

## تشکر و قدردانی

سپاس بی‌کران پروردگار یکتا را که هستی‌مان بخشید و به طریق علم و دانش رهنمونمان شد و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود و خوشه‌چینی از علم و معرفت را روزیمان ساخت. به امید آنکه توفیق یابم جز خدمت به خلق او نکوشم.

اعتراف می‌کنم که نه زبان شکر تو را دارم و نه توان تشکر از بندگان تو؛ اما بر حسب وظیفه، بر خود لازم می‌دانم از زحمات پدر و مادر عزیزم که در تمام دوران تحصیل همواره مشوق و پشتیبان اینجانب بوده‌اند کمال تشکر را بنمایم. خدایا! نه می‌توانم موهایشان را که در راه عزت من سفید شد، سیاه کنم و نه برای دست‌های پینه‌بسته‌شان که ثمره تلاش برای افتخار من است، مرهمی دارم. پس توفیقم ده که هر لحظه شکر گزارشان باشم و ثانیه‌ثانیه عمرم را در عصای دست بودنشان بگذرانم.

همچنین از زحمات استاد ارجمند و شایسته، جناب آقای دکتر حمیدرضا ایپک‌چی که مسلماً این پایان‌نامه بدون راهنمایی‌ها و نقطه‌نظرات ارزنده ایشان راه به جایی نمی‌برد، کمال تشکر و سپاسگزاری را دارم و امیدوارم در لحظه‌لحظه زندگیشان پروردگار متعال یاورشان باشد. آرزویم این است لحظه‌ای از عمر خود را پیرو راه ایشان باشم و بتوانم روزی، تنها بخش کوچکی از زحمات ایشان را جبران نمایم.

از زحمات و راهنمایی‌های تک‌تک اعضای خانواده‌ام که در تمام جنبه‌های عاطفی، مادی، علمی و معنوی پشتیبان اینجانب بوده‌اند، کمال تشکر و سپاسگزاری را دارم.

در نهایت از کلیه اساتید محترم، دانشجویان گرامی دانشگاه صنعتی شاهرود و کلیه دوستان صمیمی و مهربانم که به نوعی از وجودشان بهره‌مند شدم سپاسگزارم.

با آرزوی موفقیت و بهروزی برای همه عزیزان

روح‌الله درزی نفت‌چالی

## تعهد نامه

اینجانب روح الله درزی نفت چالی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی مکانیک- گرایش طراحی کاربردی دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه حل ریاضی وب ویسکوالاستیک متحرک محوری تحت فشار عرضی به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول تحت راهنمایی جناب آقای دکتر حمیدرضا ایپک چی متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهش های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

### تاریخ

### امضای دانشجو

### مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است ) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

\* متن این صفحه نیز باید در ابتدای نسخه های تکثیر شده پایان نامه وجود داشته باشد .

## چکیده

در این پایان‌نامه، به حل ریاضی معادلات حاکم بر ارتعاشات وب ویسکوالاستیک متحرک محوری نازک تحت فشار عرضی ثابت پرداخته شده است. وب مورد بررسی که تحت کشش یکنواخت در دو انتها می‌باشد، بین دو جفت غلتک دو ردیفه با سرعت ثابت حرکت می‌کند. معادلات حاکم بر سیستم که یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی می‌باشند، با استفاده از اصل هامیلتون و بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول استخراج شده‌اند. رفتار وب ویسکوالاستیک، بصورت مدل زنر در برش و الاستیک در بالک در نظر گرفته شده است. پس از لاپلاس‌گیری از معادلات، با استفاده از روش لایه مرزی، حل تحلیلی مسئله در فضای لاپلاس تعیین شده است. برای انتقال پاسخ‌ها به حوزه زمان، از قضیه مانده‌ها کمک گرفته شده است. بر اساس روش نیمه‌تحلیلی ارائه شده پاسخ کلی مسئله، سرعت بحرانی و فرکانس‌های طبیعی، به ازای مقادیر اولیه مفروض تعیین شدند. اثر پارامترهای مختلفی چون ضخامت، خواص ویسکوالاستیک، چگالی و سرعت انتقال وب بر پاسخ سیستم نیز بررسی شده است.

کلمات کلیدی:

وب ویسکوالاستیک متحرک محوری- تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول- اصل هامیلتون- روش

لایه مرزی- قضیه مانده‌ها

## لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

1. Darzi-Naftchali R., Eipakchi H.R., "Natural frequencies determination of axially moving viscoelastic plates based on first-order shear deformation theory". 20<sup>th</sup> Annual International Conference on Mechanical Engineering-ISME2012, 16-18 May, 2012, School of Mechanical Eng., Shiraz University, Shiraz, Iran, **submitted**.

۲- درزی نفتچالی ر.، ایپکچی ح.ر.، (۱۳۹۰)، "تعیین سرعت بحرانی ورق‌های ویسکوالاستیک متحرک محوری بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول". مجموعه مقالات اولین کنفرانس بین‌المللی آکوستیک و ارتعاشات، ص ۸۴، تهران، دانشگاه صنعتی امیرکبیر.

۳- درزی نفتچالی ر.، ایپکچی ح.ر.، (۱۳۹۰)، "تعیین سرعت بحرانی ورق‌های الاستیک متحرک محوری بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول". مجموعه مقالات اولین کنفرانس بین‌المللی آکوستیک و ارتعاشات، ص ۱۰۸، تهران، دانشگاه صنعتی امیرکبیر.



## فهرست مطالب

عنوان	صفحه
تقدیم .....	ج
تشکر و قدردانی .....	د
چکیده .....	و
لیست مقالات مستخرج از پایان نامه .....	ز
فهرست اشکال .....	ل
فهرست جداول .....	ن
فهرست علائم .....	س
مقدمه .....	ا
<b>فصل ۱. رفتار ویسکوالاستیک خطی</b> .....	۳
۱-۱ مقدمه .....	۴
۲-۱ مواد ویسکوالاستیک .....	۴
۱-۲-۱ رفتار ماده الاستیک .....	۵
۲-۲-۱ رفتار ویسکوز سیالات .....	۵
۳-۲-۱ ماده ویسکوالاستیک .....	۵
۳-۱ خصوصیات مواد ویسکوالاستیک .....	۶
۴-۱ تاریخچه مختصری از مواد ویسکوالاستیک .....	۷
۵-۱ رفتار ویسکوالاستیک خطی .....	۸
۶-۱ تحلیل چندبعدی تنش ویسکوالاستیک خطی .....	۱۰
۷-۱ معرفی مدل‌های رئولوژیکی کاربردی در شبیه‌سازی رفتار ویسکوالاستیک خطی پیوستارهای متحرک .....	۱۳
۸-۱ فرضیات متداول در تحلیل تنش مواد ویسکوالاستیک در اتساع .....	۱۵
۹-۱ جمع‌بندی .....	۱۶
<b>فصل ۲. بررسی سازه‌های متحرک محوری</b> .....	۱۷
۱-۲ مقدمه .....	۱۸
۲-۲ معرفی برخی از پیوستارهای متحرک .....	۱۸
۳-۲ پیوستارهای متحرک .....	۱۹
۴-۲ مروری بر کارهای انجام شده در زمینه ارتعاشات پیوستارهای متحرک .....	۲۲

- ۲-۴-۱ ارتعاشات ورق ویسکوالاستیک ..... ۲۳
- ۲-۴-۲ ورق‌های تحت جرم و بار متحرک ..... ۲۴
- ۲-۴-۳ تیرهای ویسکوالاستیک متحرک محوری ..... ۲۶
- ۲-۴-۴ ورق‌های الاستیک متحرک محوری ..... ۲۸
- ۲-۴-۵ پیوستارهای ویسکوالاستیک متحرک محوری ..... ۳۰
- ۲-۴-۶ مروری بر کاربرد تئوریهای تغییر شکل برشی در ارتعاشات ورقها ..... ۳۴
- ۲-۵ جمع‌بندی ..... ۳۷

### فصل ۳. استخراج معادلات حرکت ..... ۳۸

- ۳-۱ مقدمه ..... ۳۹
- ۳-۲ استخراج معادلات حاکم بر ارتعاشات وب الاستیک متحرک محوری بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول ..... ۳۹
- ۳-۲-۱ میدان جابجایی ..... ۴۰
- ۳-۲-۲ منته‌های تنش ..... ۴۱
- ۳-۲-۳ محاسبه انرژی کرنشی وب الاستیک متحرک ..... ۴۳
- ۳-۲-۴ محاسبه انرژی جنبشی وب الاستیک متحرک ..... ۴۳
- ۳-۲-۵ محاسبه کار حاصل از نیروهای خارجی اعمالی ..... ۴۴
- ۳-۲-۶ استخراج معادله حاکم بر وب الاستیک متحرک با استفاده از اصل هامیلتون... ۴۵
- ۳-۳ تعمیم معادلات استخراج شده به وب‌های ویسکوالاستیک متحرک محوری ..... ۴۶
- ۳-۴ معادلات حاکم بر وب الاستیک متحرک محوری با فرض نسبت طول به عرض بزرگ ۵۰ ..... ۵۱
- ۳-۵ جمع‌بندی ..... ۵۱

### فصل ۴. حل تحلیلی ..... ۵۲

- ۴-۱ مقدمه ..... ۵۳
- ۴-۲ بی‌بعدسازی معادلات ..... ۵۳
- ۴-۳ تبدیل لاپلاس ..... ۵۵
- ۴-۴ شرایط مرزی مسئله ..... ۵۷
- ۴-۵ تعیین پاسخ دینامیکی به کمک روش MAE در فضای لاپلاس ..... ۵۷
- ۴-۶ تبدیل معکوس لاپلاس برای حل‌های بدست آمده ..... ۶۴
- ۴-۶-۱ تعیین پاسخ استاتیکی وب ویسکوالاستیک متحرک ..... ۶۵
- ۴-۶-۲ تعیین سرعت بحرانی وب ویسکوالاستیک متحرک محوری ..... ۶۶
- ۴-۶-۳ تعیین فرکانس طبیعی وب ویسکوالاستیک متحرک محوری ..... ۶۷
- ۴-۶-۴ تعیین پاسخ استاتیکی وب الاستیک متحرک محوری ..... ۶۹

۷۰	..... ۱۰-۴ جمع بندی
۷۱	..... فصل ۵. بررسی نتایج
۷۲	..... ۱-۵ مقدمه
۷۲	..... ۲-۵ پاسخ کلی سیستم به ازای مقادیر اولیه
۷۳	..... ۱-۲-۵ بررسی جابجایی محوری
۷۵	..... ۲-۲-۵ بررسی خیز عرضی
۷۷	..... ۳-۵ بررسی اثر پارامترهای مختلف بر میدان جابجایی کلی سیستم
۷۷	..... ۱-۳-۵ بررسی اثر ضخامت وب
۷۹	..... ۲-۳-۵ بررسی اثر خصوصیات ویسکوالاستیک
۸۴	..... ۳-۳-۵ بررسی اثر چگالی
۸۶	..... ۴-۳-۵ بررسی اثر سرعت انتقال محوری
۸۸	..... ۴-۵ بررسی سرعت بحرانی سیستم
۸۹	..... ۱-۴-۵ بررسی اثر ویسکوزیته بر سرعت‌های بحرانی وب ویسکوالاستیک
۹۰	..... ۲-۴-۵ بررسی اثر لاغری بر سرعت‌های بحرانی وب ویسکوالاستیک متحرک
۹۲	..... ۵-۵ بررسی فرکانس‌های طبیعی سیستم
۹۲	..... ۱-۵-۵ بررسی اثر ویسکوزیته بر فرکانس‌های طبیعی وب ویسکوالاستیک
۹۳	..... ۶-۵ جمع بندی
۹۴	..... فصل ۶. نتیجه گیری و پیشنهادها
۹۵	..... ۱-۶ مقدمه
۹۵	..... ۲-۶ نتایج
۹۷	..... ۳-۶ پیشنهادها
۹۹	..... پیوست الف- اصول ویسکوالاستیسیته خطی و مدل‌های وابسته
۹۹	..... الف- ۱ تعیین خصوصیات مکانیکی مواد ویسکوالاستیک
۱۰۳	..... الف- ۲ اصل جمع آثار بولتزمن
۱۰۴	..... الف- ۳ اصل تناظر
۱۰۵	..... الف- ۴ معرفی مدل‌های رئولوژیکی در مدل‌سازی رفتار ویسکوالاستیک خطی وب
۱۱۴	..... پیوست ب- بررسی تئوری‌های ورق
۱۱۴	..... ب- ۱- طبقه بندی ورق از نظر ضخامت و تغییر شکل
۱۱۴	..... ب- ۲- مروری بر تئوری‌های بررسی رفتار ورق‌ها
۱۱۷	..... ب- ۳- تئوری کلاسیک (کیرشهف) ورق (CPT)
۱۱۹	..... ب- ۴- تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول (FSDT)

۱۲۲	ب- ۵- تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم (TSDT).....
۱۲۴	پیوست ج- مقدمه‌ای بر تئوری اغتشاشات و مسایل لایه مرزی.....
۱۲۴	ج- ۱- مقدمه.....
۱۲۵	ج- ۲- ماهیت تئوری اغتشاشات.....
۱۲۶	ج- ۳- اغتشاشات پارامتری.....
۱۲۶	ج- ۴- سری مجانبی.....
۱۲۷	ج- ۵- حل معادلات جبری (معادله مرتبه دوم).....
۱۳۱	ج- ۶- مسائل لایه مرزی.....
۱۳۲	ج- ۶- ۱ بررسی یک مثال ساده.....
۱۳۵	ج- ۶- ۲ روش multiple scale.....
۱۳۶	ج- ۶- ۳ روش حل MAE.....
۱۴۳	مراجع.....
۱۴۹	Abstract.....

## فهرست اشکال

صفحه	عنوان
۹	شکل (۱-۱) منحنی تنش- کرنش برای مواد الاستیک خطی و غیر خطی
۹	شکل (۲-۱) نمودار تنش- کرنش برای مواد ویسکوز خطی و ویسکوز غیر خطی
۱۴	شکل (۳-۱) مدل زلزله دو نوع دوم
۳۲	شکل (۱-۲) مدل رئولوژیکی دوبعدی
۳۹	شکل (۱-۳) شماتیک وب متحرک تحت فشار عرضی ثابت $P_0$ و کشش ثابت $T_0$
۴۱	شکل (۲-۳) الف- میدان جابجایی و ب- نحوه چرخش المان در FSDT
۷۴	شکل (۱-۵) جابجایی محوری حل کلی صفحه میانی در زمانهای مختلف بر حسب مکان بی بعد
۷۵	شکل (۲-۵) جابجایی محوری کلی در نقاط مختلف $x^* = 0, 0.1, 0.5, 0.9, 1$ در زمان $t^*_{=1}$ بر حسب $Z$
۷۶	شکل (۳-۵) خیز عرضی حل کلی در مکانهای مختلف $x^* = 0, 0.1, 0.5, 0.9, 1$ بر حسب زمان بی بعد
۷۶	شکل (۴-۵) خیز عرضی حل کلی در زمانهای مختلف بر حسب مکان بی بعد
۷۷	شکل (۵-۵) تأثیر تغییرات ضخامت بر جابجایی عرضی وب ویسکوالاستیک متحرک محوری در $t^* = 10$
۷۸	شکل (۶-۵) تأثیر ضخامت بر جابجایی عرضی نقطه میانی وب ویسکوالاستیک متحرک بر حسب زمان بی بعد
۷۹	شکل (۷-۵) تأثیر تغییرات ضخامت بر جابجایی محوری وب ویسکوالاستیک متحرک محوری در $t^* = 14$
۸۰	شکل (۸-۵) تأثیر تغییرات زمان رهایش بر جابجایی عرضی وب ویسکوالاستیک متحرک محوری در $t^* = 10$
۸۱	شکل (۹-۵) تأثیر زمان رهایش بر جابجایی محوری صفحه میانی وب ویسکوالاستیک متحرک در $t^* = 18$
۸۲	شکل (۱۰-۵) تأثیر پارامتر $E_2$ بر خیز عرضی وب ویسکوالاستیک متحرک محوری در $t^* = t^*_s$
۸۲	شکل (۱۱-۵) تأثیر پارامتر $E_2$ بر پاسخ خیز عرضی مرکز وب بر حسب زمان بی بعد
۸۳	شکل (۱۲-۵) تأثیر پارامتر $E_2$ بر جابجایی محوری وب ویسکوالاستیک متحرک محوری در $t^* = t^*_s$

- شکل (۵-۱۳) تأثیر پارامتر  $E_2$  بر جابجایی محوری کلی وب ویسکوالاستیک متحرک در  
 ۸۴ .....  $x^* = 0.5$  و  $t^* = 1$
- شکل (۵-۱۴) تأثیر چگالی بر خیز عرضی وب ویسکوالاستیک متحرک محوری  
 ۸۵ ..... در  $t^* = 17$
- شکل (۵-۱۵) تأثیر چگالی بر خیز عرضی مرکز وب بر حسب زمان بی بعد .....  
 ۸۵
- شکل (۵-۱۶) تأثیر چگالی بر جابجایی محوری صفحه میانی وب ویسکوالاستیک  
 متحرک محوری در  $t^* = 17$  .....  
 ۸۶
- شکل (۵-۱۷) تأثیر سرعت انتقال بر خیز عرضی وب ویسکوالاستیک متحرک محوری  
 در  $t^* = 13$  .....  
 ۸۷
- شکل (۵-۱۸) تأثیر سرعت انتقال بر خیز عرضی مرکز وب بر حسب زمان بی بعد .....  
 ۸۷
- شکل (۵-۱۹) تأثیر سرعت انتقال بر جابجایی محوری صفحه میانی وب ویسکوالاستیک  
 متحرک در  $t^* = 13$  .....  
 ۸۸
- شکل (۵-۲۰) بررسی اثر ویسکوزیته بر سه سرعت بحرانی بی بعد اول وب  
 ویسکوالاستیک متحرک .....  
 ۸۹
- شکل (۵-۲۱) بررسی اثر زمان رهائش بر سرعت بحرانی وب ویسکوالاستیک متحرک .....  
 ۹۰
- شکل (۵-۲۲) بررسی اثر زمان رهائش بر سرعت بحرانی وب ویسکوالاستیک متحرک .....  
 ۹۰
- شکل (۵-۲۳) بررسی اثر لاغری بر چهار سرعت بحرانی بی بعد اول وب ویسکوالاستیک  
 متحرک .....  
 ۹۱
- شکل (۵-۲۴) سرعت بحرانی برای نسبت‌های مختلف لاغری وب .....  
 ۹۱
- شکل (۵-۲۵) بررسی اثر ویسکوزیته بر سه فرکانس طبیعی بی بعد اول وب  
 ویسکوالاستیک متحرک .....  
 ۹۲

## فهرست جداول

صفحه

عنوان

---

جدول (۱-۵) مقادیر اولیه انتخابی برای خصوصیات ماده، هندسه و بارگذاری ..... ۷۲

## فهرست علائم

### علائم انگلیسی

ماتریس‌های ضرایب در حالت یک‌بعدی	$[A_i]$	ماتریس‌های ضرایب در حالت دوبعدی	$[A_i]'$
ماتریس‌های ضرایب	$[B_i]$	ماتریس‌های ضرایب حالت الاستیک	$[\bar{A}_i]$
تابع کامپلینس خزشی بالک	$B(t)$	عرض ورق	$b$
کامپلینس خزش	$C_{cp}(t), C(t)$	سرعت انتقال وب متحرک، ثابت حقیقی در قضیه مانده‌ها	$c$
ثوابت	$C_i$	کامپلینس خزش لاستیک و شیشه	$C_g, C_r$
اپراتور مشتق زمانی	$D$	تابع کامپلینس کششی	$D(t)$
مساحت سطح المان انتخابی	$dA$	حجم المان انتخابی	$dV$
مدول رهایش لاستیک و شیشه	$E_g, E_r$	جرم المان انتخابی	$dm$
سختی فنرها در مدل‌های رئولوژیکی	$E_1, E_2$	مدول رهایش کششی	$E_{rel}(t), E(t)$
مدول اتلاف	$E''(\omega)$	مدول ذخیره‌سازی	$E'(\omega)$
بردار نیرو، بردار نیرو در فضای لاپلاس	$\{F\}, \{f\}$	مدول کشش (یانگ)	$E$
مدول رهایش برشی	$G(t)$	مدول برشی	$G$
تابع پله	$H(t)$	ضخامت وب مورد مطالعه	$h$
مدول بالک	$K$	تابع کامپلینس خزشی	$J(t)$
ضریب تصحیح برشی	$K_s$	مدول رهایش بالک	$K(t)$
مقادیر ویژه	$m_i$	طول وب، تبدیل لاپلاس، لاگرانژین	$L$
فشار عرضی ثابت	$P_0$	ثوابت وابسته به مدل رئولوژیکی	$p_r, q_r$
مختصه زمانی	$t$	متغیر لاپلاس	$s$
نیروی کشش، انرژی جنبشی	$T$	پارامترهای اختیاری در بی‌بعد کردن	$h_0, t_0$
مؤلفه‌های نیروی کشش واحد حجم	$T_{0z}, T_{0x}$	نیروی کشش محوری واحد حجم	$T_0$
سرعت کلی یک المان جرم	$\bar{V}$	چگالی و مقدار کل انرژی کرنشی	$U_s, \bar{U}_s$
مؤلفه‌های جابجایی	$u, v, w$	مؤلفه‌های سرعت یک المان انتخابی	$V_x, V_y, V_z$



توابع مجهول از بعد چرخش	$u_1, v_1$	مؤلفه‌های جابجایی صفحه میانی	$u_0, v_0, w_0$
مجموع کار حاصل از نیروهای خارجی	W	کار حاصل از $T_0$ و $P_0$	$W_2, W_1$
مختصه‌های طولی، جانبی و عرضی وب	x,y,z	بردار جابجایی و لاپلاس آن	$\{Y\}, \{y\}$
نقاط تکین (قطب‌های تابع)	$Z_i$	بردار ویژه مربوط به مقدار ویژه $m_i$	$\{A_j\}, \{V_j\}$
تابع دلخواه در فضای لاپلاس	F(s)	مقدار مانده در قضیه کوشی	Res
منتجه‌های تنش		$N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y$	

### نمادهای یونانی

پارامتر بی‌بعد کوچک، کرنش، نرخ کرنش	$\dot{\epsilon}, \epsilon$	تنش نرمال، نرخ تنش	$\dot{\sigma}, \sigma$
متغیر سریع حل داخلی در مرز راست	$\xi$	ویسکوزیته برشی، متغیر سریع حل داخلی در مرز چپ	$\eta$
فرکانس طبیعی بی‌بعد	$\omega$	مقادیر ویژه	$\beta_i$
تنش‌های برشی	$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	تنش‌های نرمال	$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$
کرنش‌های برشی	$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	کرنش‌های نرمال	$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$
ضریب اتلاف	$\eta(\omega)$	اولین ضریب لامه	$\lambda$
ضریب پواسون	$\nu$	زمان رهایش، تنش برشی	$\tau$
اپراتور مشتق جزئی	$\partial$	نماد تغییرات تابعی (وریشن)	$\delta$
چرخش نسبت به محورهای X و Y	$\phi_x, \psi_x, \phi_y, \psi_y$	دانسیته حجمی	$\rho$

### بالانویس

معرف بخش انحرافی تنش و کرنش	d	حالت بی‌بعد پارمترها، ضرایب و معادلات	*
حل خارجی	O	حل داخلی	i
		حل کلی	c

### زیرنویس

حل خصوصی	p	حل عمومی (همگن)	g
----------	---	-----------------	---

## مقدمه

پیوستار<sup>۱</sup>های متحرک در کاربردهای صنعتی مختلفی از جمله: تسمه‌های انتقال قدرت، تسمه‌های انتقال بار، تیغه‌ی اره‌های نواری، سیستم‌های پروسه ساخت ورق‌ها، فرآیند ساخت و نقاشی روی پارچه و نوارهای منسوجات طی ساخت و فرآوری قابل مشاهده می‌باشند. در برخی از این سازه‌های متحرک، سرعت محوری حتی تا ۵۰ متر بر ثانیه می‌رسد. بنابراین برای اطمینان از کارکرد سیستم در شرایط پایدار، بررسی دینامیکی چنین سیستم‌هایی حائز اهمیت می‌باشد.

یکی از مهمترین مسایل در بررسی وب<sup>۲</sup>های متحرک محوری، مدلسازی ماده آن می‌باشد که از دو دیدگاه خصوصیات و مدل فیزیکی قابل بررسی است. در بسیاری از مطالعاتی که تاکنون بر دینامیک وب‌های متحرک محوری انجام شده، خصوصیات مواد به صورت الاستیک در نظر گرفته شده است. این فرض که منجر به یک ساده‌سازی در مدل ریاضی مسئله می‌شود، در برخی از موادی که در عمل ملاحظه می‌شوند، مورد قبول می‌باشد. اما امروزه با پیشرفت تکنولوژی و ظهور مواد جدید، پیوستارهایی از جنس مواد پلیمری و مواد مرکب تولید می‌شوند که بسیاری از این مواد به طور ذاتی رفتارهای ویسکوالاستیک از خود نشان می‌دهند و باید این رفتار آنها با معادلات رفتاری مناسب مدل شود. از طرف دیگر، در مدلسازی وب‌های متحرک محوری می‌توان از مدل‌های یک‌بعدی و یا دوبعدی استفاده کرد. استفاده از تئوری‌های رشته و تیر متحرک، نشان داده است، این ساده‌سازی در اکثر موارد نتایج قانع کننده‌ای می‌دهد. اما در بسیاری از موارد دیگر، مانند وقتی که پهنای ورق، خصوصیات اورتوتروپیکی سیستم، تغییر در توزیع بار در راستای عرض ورق، ورق‌های کامپوزیتی و نقاط تکیه‌گاهی مورد ملاحظه باشد، این ساده‌سازیها رضایت‌بخش نمی‌باشند و برای بررسی‌های دینامیکی، استفاده از تئوری ورق ضروری می‌نماید. در کل از نظر پدیدارشناختی، رفتار وب‌ها مشابه سازه‌های یک‌بعدی است، اما از نظر ساختاری، مدل‌های دوبعدی، ساختار سازه‌ای و جهت‌گیری وب

---

1. Continua  
2. Web

مورد مطالعه را بهتر نشان می‌دهند.

در این پایان‌نامه، به حل ریاضی معادلات حاکم بر وب ویسکوالاستیک متحرک محوری بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول پرداخته می‌شود. وب مورد بررسی تحت فشار عرضی و نیروی کشش یکنواخت بوده و با سرعت ثابت بین دو غلتک دوردیفه حرکت می‌کند. رفتار سیستم از نظر پدیدار شناختی، یک‌بعدی و از نظر ساختاری، دوبعدی در نظر گرفته می‌شود. استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول در وب ویسکوالاستیک متحرک، از جنبه‌های نوآوری این تحقیق می‌باشد.

پایان‌نامه حاضر دارای ساختار کلی زیر می‌باشد:

در فصل اول به معرفی مواد ویسکوالاستیک، توصیف رفتار ویسکوالاستیک خطی، بیان معادلات بنیادین تنش- کرنش و معرفی مختصر مدل‌های رئولوژیکی مورد استفاده در مدلسازی پیوستارهای متحرک پرداخته می‌شود. فصل دوم به معرفی پیوستارهای متحرک و مرور برخی مقالات منتشر شده در زمینه‌های مرتبط با آنها و تئوری تغییر شکل برشی می‌پردازد. در فصل سوم، بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و با استفاده از اصل هامیلتون، معادلات حاکم بر ارتعاشات وب الاستیک متحرک محوری با خیز کوچک در حالت دوبعدی می‌شوند. سپس با در نظر گرفتن مدل زبر نوع دوم جهت توصیف رفتار ویسکوالاستیک وب متحرک در برش و رفتار الاستیک در اتساع، با استفاده از شکل دیفرانسیلی معادلات بنیادین، معادلات مذکور برای وب ویسکوالاستیک متحرک تعمیم داده می‌شوند. در فصل چهارم به حل ریاضی معادلات استخراج شده در فضای لاپلاس و با استفاده از روش MAE پرداخته می‌شود. سپس پاسخ‌های بدست آمده با استفاده از قضیه مانده‌ها به فضای زمان برگردانده می‌شوند. در انتهای این فصل روش‌های تعیین سرعت بحرانی و فرکانس‌های طبیعی سیستم بررسی می‌شود. در فصل پنجم به بیان و بررسی نتایج مسئله پرداخته می‌شود. اثر پارامترهای مختلف ماده، هندسه و سرعت انتقال وب بر رفتار سیستم مورد مطالعه قرار می‌گیرد. نتایج و پیشنهادهای این تحقیق در فصل پایانی ارائه خواهند شد.

فصل اول

رقارو يسكو الاستيك خطى

## ۱-۱ مقدمه

جهت بررسی هر ماده‌ای، آشنایی با ساختار، خصوصیات و رفتار آن، ضروری می‌نماید. از این رو، در این فصل، ابتدا به معرفی مواد ویسکوالاستیک و خصوصیات آنها پرداخته می‌شود. در ادامه پس از توصیف رفتار ویسکوالاستیک خطی، معادلات بنیادین تنش- کرنش این مواد در شکل دیفرانسیلی بیان می‌گردند. در پایان، به معرفی مختصر مدل‌های رئولوژیکی مورد استفاده در مدلسازی پیوستارهای ویسکوالاستیک متحرک و بیان فرضیات متداول در تحلیل تنش مواد ویسکوالاستیک، پرداخته می‌شود.

## ۲-۱ مواد ویسکوالاستیک

پلیمرهای غیر متبلور مانند پلاستیک‌ها و رزینهای مصنوعی می‌توانند اغلب به عنوان موادی که رفتار ویسکوالاستیک از خود نشان می‌دهند در نظر گرفته شوند. همچنین رفتار مواد متشکل از الیاف مثل ابریشم، رایون، سلولز و همچنین شیشه‌ها، سرامیک‌ها، بیومتریال<sup>۱</sup>ها مثل پوست و ماهیچه‌ها، غیر فلزات و همچنین فلزات در دماهای بالا می‌توانند با مدل‌های ویسکوالاستیک خطی بیان شوند. هر چند در گذشته به ندرت موادی با مشخصات ذکر شده یافت می‌شد، اما امروزه مطالعه و توسعه تئوری ویسکوالاستیک خطی از اهمیت خاصی برخوردار گشته است.

حالت جامد الاستیک و سیال ویسکوز، به عنوان دو نوع از مواد ایده‌آل می‌باشند که تقریباً در شرایط محدودی قابل مشاهده‌اند. همانطور که از نام ماده ویسکوالاستیک مشخص است، این مواد ترکیبی از مواد الاستیک و مواد ویسکوز می‌باشند. از این رو در این قسمت به معرفی مختصر هر کدام از این مواد پرداخته می‌شود.

---

1. Bio-Material

### ۱-۲-۱ رفتار ماده الاستیک [1]

طبق تعریف، ماده الاستیک ماده‌ای است که تغییر شکل آن در اثر اعمال نیروی خارجی، بعد از حذف نیرو قابل برگشت می‌باشد. در چنین حالتی، پارامترهای مرتبط (تنش، کرنش و ...) با زمان تغییر نمی‌کنند و تعاریف استاتیکی جهت بررسی مسائل در نظر گرفته می‌شوند. ولی برای مواد ویسکوالاستیک، پارامترهای مزبور به صورت تابعی از زمان، تعمیم داده می‌شوند.

برای مواد الاستیک رابطه تنش-کرنش به صورت معادله (۱-۱) می‌باشد:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (1-1)$$

$E$  مدول کشش (یانگ) است که عکس کامپلیننس<sup>۱</sup> کشش ( $D$ ) می‌باشد ( $E = \frac{1}{D}$ ).

### ۲-۲-۱ رفتار ویسکوز سیالات [2]

ویسکوز، به ماده‌ای اطلاق می‌شود که تحت اعمال بار خارجی جریان (حرکت) پیدا می‌کند. یکی از مهمترین اندازه‌گیری‌های مهندسی، سنجش ویسکوزیته<sup>۲</sup> سیال می‌باشد. در حالت جریان پایا، این کمیت به صورت نسبت تنش برشی به نرخ برش تعریف می‌شود:

$$\eta = \frac{\tau}{\dot{\varepsilon}} \quad (2-1)$$

$\eta$  ویسکوزیته<sup>۳</sup> برشی (نیوتنی) سیال می‌باشد که برای سیالات نیوتنی، ویسکوزیته مقداری ثابت (دارای واحد Pa.s) و فقط تابع دما است.  $\dot{\varepsilon}$  و  $\tau$  به ترتیب نرخ برش و تنش برشی می‌باشد.

### ۳-۲-۱ ماده ویسکوالاستیک [3]

ماده ویسکوالاستیک ماده‌ای است که هر دو رفتار الاستیک و ویسکوز را با هم نشان می‌دهد. در واقع در مواد ویسکوالاستیک، ویسکوزیته یک پدیده اتلاف کننده را به ماده الاستیک اضافه می‌کند.

---

1. Compliance  
2. Viscosity  
3. Shear Viscosity

عموماً برای نشان دادن چنین رفتاری از مدول مختلط<sup>۱</sup> استفاده می‌شود که در ادامه بیان می‌گردد.

### ۳-۱ خصوصیات مواد ویسکوالاستیک ([4] و [3])

مواد ویسکوالاستیک دارای رفتاری بین مواد الاستیک و ویسکوز می‌باشند. با این وجود، تمایز بین جامد (ماده الاستیک) و سیال (ماده ویسکوز)، یک تمایز مطلق بین دو نوع ماده نمی‌باشد. در واقع این تمایز بر اساس مقایسه زمان رهاش و زمان مشاهده<sup>۲</sup> صورت می‌گیرد. در محیط واقعی، بسیاری از مواد، به نوعی از این رفتارهای ایده‌آل انحراف دارند. یعنی، رفتار ویسکوالاستیک در اکثر مواد وجود دارد، ولی انحراف از حالت الاستیک در برخی موارد، مثل فلزات، استخوان و سنگها، ناچیز و در برخی دیگر، مانند پلیمرها، چوبها و نسوج بدن، زیاد می‌باشد. در مواد ویسکوالاستیک، بر خلاف مواد الاستیک، رابطه تنش- کرنش (یا در واقع خواص ماده) تابع زمان می‌باشد. حالت میرایی ویسکو-الاستیک در بسیاری از مواد پلیمری و شیشه‌ای بروز پیدا می‌کند و مکانیسم دمپینگ داخلی آن، برای افزایش میرایی، به منظور کاهش ارتعاشات و سر و صدا بسیار مهم می‌باشد. میرایی از رهاش<sup>۳</sup> و بازگشت<sup>۴</sup> شبکه پلیمر بعد از تغییر شکل ناشی می‌شود.

از آنجا که مواد ویسکوالاستیک هر دو رفتار الاستیک و ویسکوز را با هم نشان می‌دهند، دارای ویژگی‌های منحصر بفردی می‌باشند. برای مثال، در حالی که تحت تنش ثابت قرار گرفته‌اند، علاوه بر اینکه یک جابجایی آنی را تحمل می‌کنند، در یک محدوده زمانی دچار خزش<sup>۵</sup> نیز می‌شوند. مفاهیم خزش و رهاش در پیوست (الف) توضیح داده می‌شوند.

رابطه میان تنش و کرنش برای مواد ویسکوالاستیک خطی، به کمک رابطه زیر بیان می‌گردد:

$$\sigma(t) = E \varepsilon(t) + \int_0^t g(t-\tau) \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (1-1)$$

1. Complex Modulus
2. Time of Observation
3. Relaxation
4. Recovery
5. Creep

که  $\sigma(t)$  تنش،  $\varepsilon(t)$  کرنش و تابع اصلی  $g(t-\tau)$  تابع رهایش می‌باشند. معادله (۱-۱) همان اصل جمع آثار بولتزمن<sup>۱</sup> می‌باشد که در پیوست (الف) توضیح داده می‌شود.

تبدیل لاپلاس رابطه (۱-۱) به شکل زیر می‌باشد:

$$\bar{\sigma}(s) = s\bar{E}(s)\bar{\varepsilon}(s) \quad (۲-۱)$$

با جایگذاری  $s = j\omega$  در معادله فوق، مدول مختلط در حوزه فرکانس به صورت زیر حاصل می‌-

شود:

$$E^* = E'(\omega) + jE''(\omega) = j\omega\bar{E}(\omega) \quad (۳-۱)$$

که در آن مؤلفه حقیقی  $E'(\omega)$  مدول ذخیره‌سازی<sup>۲</sup> (مدول الاستیک یا سختی<sup>۳</sup>) و مؤلفه مختلط  $E''(\omega)$  مدول اتلاف (مدول ویسکوز یا مدول دمپینگ<sup>۴</sup>) نامیده می‌شوند. ضریب اتلاف<sup>۵</sup> به صورت کمیت بی‌بعدی تعریف می‌شود که از تقسیم ترم موهومی مدول مختلط بر ترم حقیقی آن بدست می‌آید:

$$\eta(\omega) = \frac{E''(\omega)}{E'(\omega)} \quad (۴-۱)$$

ضریب اتلاف، متوسط انرژی تلف شده در ماده ویسکوالاستیک بر رادیان را نسبت به انرژی ذخیره شده، تحت بار سینوسی بیان می‌کند [3].

## ۴-۱ تاریخچه مختصری از مواد ویسکوالاستیک

تولید و توسعه پلیمرهای ترکیبی، تقریباً از ۷۰ سال پیش آغاز شده است. موفقیت‌های تجاری محصولات دارای مبنای پلیمری به گونه‌ای بود که ظرف مدت ۲۰ سال، این مواد از محصولات ترکیبی فلزی پیشی گرفته است. دانش پلیمری به صورت ۵ تکنولوژی جداگانه زیر، پیشنهاد شده است: (۱) پلاستیک، (۲) الاستیک و الاستومتر، (۳) فیبرها، (۴) پرداخت کارهای سطحی و (۵) پوششهای محافظتی.

1. Boltzman's Superposition Principle
2. Storage Modulus
3. Elastic or Stiffness Modulus
4. Viscous or Damping Modulus
5. Loss Factor



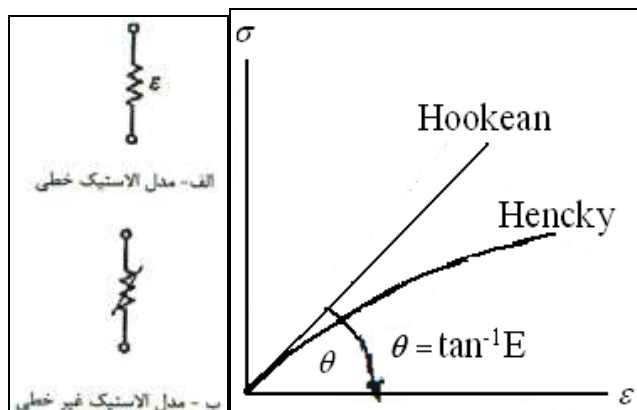
در سالهای اخیر، بدلیل قیمت پایین، پروسه‌ی ساخت راحت، وزن کم، مقاومت در برابر خوردگی و فواید مهم دیگر، پلیمرها به عنوان مواد سازه‌های مهندسی بکار گرفته شده‌اند [5]. مفاهیم ابتدایی دمپینگ و روش‌های مشخص کردن خصوصیات آن توسط نشیف<sup>1</sup> [6] توصیف شده است. نشیف خصوصیات مواد ویسکوالاستیک را، با استفاده از مدول مختلط در حوزه فرکانس بیان کرد. جدول محاسباتی دمایی برای نشان دادن چنین داده‌هایی در منحنی اصلی که برای کاربردهای عملی راحت‌تر است، توسط جونز<sup>2</sup> [7] ارائه شد. سان<sup>3</sup> و لو<sup>4</sup> [8] مدل‌های دمپینگ سنتی شامل ماکسول، کلونین و زنر را بازبینی کردند. کریستن سن<sup>5</sup> [9] تئوری ویسکوالاستیک را در حوزه زمان و با استفاده از تابع رهایش مطرح کرد. این بیان حوزه زمان، قابل تبدیل به حوزه فرکانسی می‌باشد و در نتیجه می‌توان به مدول مختلط رسید. بگلی<sup>6</sup> و تورویک<sup>7</sup> [10] برای توسعه مدل‌های دمپینگ سنتی کوشیدند، اما نتیجه آن یک مدل فرکانسی خیلی پیچیده بود. زیرا پنج پارامتر داشت که باید از انطباق نمودار با داده‌های آزمایشگاهی بدست می‌آمدند. همچنین بدلیل وجود مجموعه‌ای از ماتریس‌های پیچیده، تبدیل مدل به حوزه زمان نیز مشکل بود. یکی از مشکلات اصلی این پایان‌نامه نیز انتقال پاسخ‌ها از حوزه لاپلاس به حوزه زمان می‌باشد.

## ۱-۵ رفتار ویسکوالاستیک خطی ([11] و [12])

بسیاری از فلزات قبل از اینکه از محدوده رفتار تناسبی خارج شوند، رفتار کاملاً الاستیک خطی از خود نشان می‌دهند. در حالت کلی، رفتار الاستیک خطی (و در نتیجه قانون هوک) برای کرنش‌های کوچک معتبر می‌باشد. در شکل (۱-۱) منحنی تنش-کرنش برای مواد هوکی<sup>۸</sup> (الاستیک خطی) و

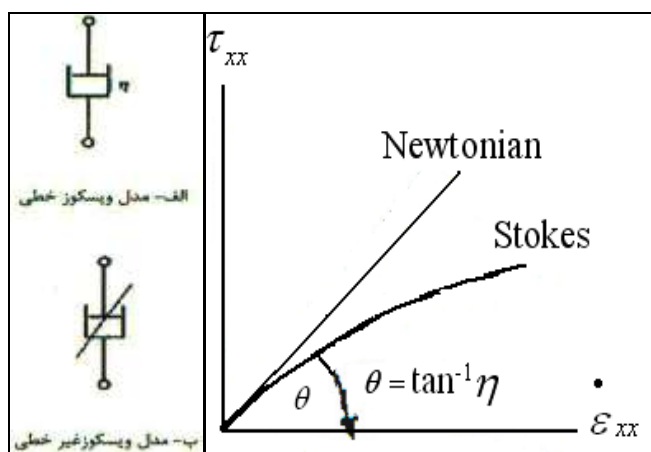
- 
1. Nashif
  2. Jones
  3. Sun
  4. Lu
  5. Christensen
  6. Bagley
  7. Torvik
  8. Hookean

هنکی<sup>۱</sup> (الاستیک غیرخطی) رسم شده است.



شکل (۱-۱) منحنی تنش- کرنش برای مواد الاستیک خطی و غیرخطی [11]

نظیر مواد الاستیک، یک ماده ویسکوز خطی، ماده نیوتنی نامیده می‌شود و برای مدلسازی آن از دمپر استفاده می‌شود. برای مواد ویسکوز نیز در حالت کلی، رفتار ویسکوز خطی (و در نتیجه قانون نیوتن) برای نرخ جریان نسبتاً کم برقرار می‌باشد. در شکل (۲-۱) مواد نیوتنی و استوکس<sup>۲</sup> (شبه ویسکوز یا غیرنیوتنی) نشان داده شده‌اند. از آنجا که این مدلها رفتار سیلان جریان سیالات را بیان می‌کنند، مدل‌های رئولوژیکال<sup>۳</sup> نیز خوانده می‌شوند.



شکل (۲-۱) نمودار تنش- کرنش برای مواد ویسکوز خطی و ویسکوز غیر خطی [11]

1. Hencky
2. Stokes
3. Reological Models

مواد ویسکوالاستیک موادی هستند که دارای خصوصیات الاستیک و ویسکوز به صورت ترکیبی می‌باشند (که لزوماً خطی نمی‌باشند). به عنوان مثال فلزات یا حتی سنگها در دماهای بالا و پلاستیک‌ها در دمای اتاق چنین رفتاری از خود نشان می‌دهند. برای مطالعه رفتار چنین موادی، از ترکیب فنرها و دمپرها استفاده می‌شود. اگر ماده رفتاری، بین الاستیک خطی (رفتار هوکی) و ویسکوز خطی (رفتار نیوتنی) از خود نشان دهد، چنین رفتاری را ویسکوالاستیک خطی نامند و جهت توصیف آن از مدل‌های شامل فنر و دمپر خطی استفاده می‌کنند. معادلات رفتاری این مدل‌ها به صورت دیفرانسیل خطی می‌باشند. اما اگر رفتار ماده حالتی بین الاستیک غیرخطی (رفتار هنکی) و ویسکوز غیرخطی (رفتار استوکسی) باشد، آن را رفتار ویسکوالاستیک غیرخطی نامیده و با فنر و دمپر غیرخطی توصیف می‌کنند.

این روش بررسی رفتار یک ماده که بر اساس ایده‌آل‌سازی مشاهدات تغییر شکل‌های ماکروسکوپی بنا شده است، «پدیده‌شناسی»<sup>۱</sup> نامیده می‌شود. [11]

## ۶-۱ تحلیل چندبعدی تنش ویسکوالاستیک خطی [4]

طراحی یک قطعه که می‌تواند عضوی از یک سازه یا ماشین باشد، نیازمند تحلیل توزیع تنش و کرنش در آن عضو می‌باشد. بدون در نظر گرفتن اثرات دمایی و گرمایی، برای هر لحظه، تنش‌ها و تغییر شکل‌ها در هر نقطه از نمونه، باید معادلات تعادل و رفتاری را به صورت هم‌زمان ارضا نمایند. ترکیب شدن اثر حافظه<sup>۲</sup> (سابقه بارگذاری) ماده ویسکوالاستیک با معادله رفتاری آن که توسط اصل جمع آثار بولتزمن بیان می‌شود، سبب می‌گردد تا حل مسائل ویسکوالاستیک نسبت به حالت الاستیک خالص، بسیار پیچیده‌تر گردد. با این وجود، در بسیاری از موقعیت‌ها، می‌توان با اعمال تبدیل لاپلاس، مسئله ویسکوالاستیک را به الاستیک تبدیل کرد. این ایده همان اصل تناظر<sup>۳</sup> می‌باشد که در

---

1. Phenomenological Aspects  
2. Memory Effect  
3. Correspondence Principle

پیوست (الف) توضیح داده می‌شود.

بیان معادلات بنیادین تنش- کرنش در مواد ویسکوالاستیک، به دو شکل کلی امکان‌پذیر می‌باشد: انتگرالی و دیفرانسیلی. در ادامه به بیان روش دیفرانسیلی پرداخته می‌شود.

معادله ساختاری برای یک ماده ایزوتروپ که پاسخ آن به مشتقات تنش و کرنش نیز حساس است، به صورت کلی زیر نوشته می‌شود:

$$f(\sigma, \dot{\sigma}, \ddot{\sigma}, \dots, \gamma, \dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \dots) = 0 \quad (5-1)$$

که در آن، تنش و کرنش به وابسته به زمان می‌باشند. در این حالت، اثر حافظه با این مشتقات بیان می‌گردد. به شکل فشرده‌تر می‌توان نوشت:

$$P\sigma = Q\gamma \Leftrightarrow P(D)\sigma_{ij}(t) = Q(D)\gamma_{ij}(t) \quad (6-1)$$

که در آن P و Q به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$P(D) = \sum_{r=0} p_r \frac{\partial^r}{\partial t^r} \quad (7-1)$$

$$Q(D) = \sum_{r=0} q_r \frac{\partial^r}{\partial t^r}$$

$D = \frac{d}{dt}$  و  $p_r$  و  $q_r$  ثابت می‌باشد که به مدل رئولوژیکی انتخابی وابسته‌اند.

مرسوم است جهت توصیف رفتار ویسکوالاستیک یک سیستم تحت کشش چند محوری، اثر مؤلفه برشی (تغییر شکل، اعوجاج یا انحرافی<sup>۱</sup>) را از مؤلفه تغییر حجم خالص (بالک یا اتساع<sup>۲</sup>) جدا کنند. این قاعده به دلیل پاسخ متفاوت ماده ویسکوالاستیک به برش در برابر حالت اتساع یا بالک، می‌باشد. بطور خلاصه، با توجه به اینکه در حالت سه‌بعدی چند ثابت مکانیکی در روابط وجود دارد، تعمیم رابطه اصل بولتزمن به حالت ویسکوالاستیک دشوار می‌باشد، از این رو، جهت رفع این مشکل مؤلفه‌های تنش و کرنش را به دو بخش گفته شده در فوق تقسیم می‌کنند. با توجه به این نکته، مؤلفه‌های انحرافی و اتساعی را می‌توان به صورت زیر جدا کرد:

1. Deviatoric
2. Dilatational

$$\begin{aligned} P_1 \sigma_{ij}^d(t) &= Q_1 \gamma_{ij}^d(t) \\ P_2 \sigma_{ii}(t) &= Q_2 \gamma_{ii}(t) \end{aligned} \quad (8-1)$$

بالانویس  $d$  معرف بخش انحرافی و  $P_1, P_2, Q_1$  و  $Q_2$  اپراتورهایی به شکل کلی زیر می‌باشند:

$$P_1 = p_0 + p_1 \frac{\partial}{\partial t} + p_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots + p_n \frac{\partial^n}{\partial t^n} \quad (9-1)$$

$G$  و  $K$  که به ترتیب مدول رهايش برش<sup>1</sup> و بالک<sup>2</sup> می‌باشند، بصورت زیر تعیین می‌شوند:

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{2} \left( \frac{Q_1}{P_1} \right) \\ K &= \frac{1}{3} \left( \frac{Q_2}{P_2} \right) \end{aligned} \quad (10-1)$$

برای ماده الاستیک، رابطه مدول کشش و نسبت پواسون بر حسب مدول رهايش بالک و برشی به

صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} E &= \frac{9KG}{3K + G} \\ \nu &= \frac{3K - 2G}{6K + 2G} \end{aligned} \quad (11-1)$$

با توجه به معادله (10-1)، معادله (11-1) را، برای ماده ویسکوالاستیک، می‌توان به صورت زیر

بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} E &= \frac{3Q_1Q_2}{P_2Q_1 + 2P_1Q_2} = \frac{Q^E}{P^E} \\ \nu &= \frac{P_1Q_2 - P_2Q_1}{P_2Q_1 + 2P_1Q_2} = \frac{Q^\nu}{P^\nu} \end{aligned} \quad (12-1)$$

همچنین با اعمال اصل تناظر روی معادله (11-1)، برای حالت ویسکوالاستیک نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \bar{E}(s) &= \frac{9\bar{K}(s)\bar{G}(s)}{3\bar{K}(s) + \bar{G}(s)} \\ s\bar{\nu}(s) &= \frac{3\bar{K}(s) - 2\bar{G}(s)}{6\bar{K}(s) + 2\bar{G}(s)} \end{aligned} \quad (13-1)$$

- 
1. Shear Relaxation Moduli
  2. Bulk Relaxation Moduli

در فصل سوم این پایان‌نامه، با استفاده از بیان دیفرانسیلی، معادلات حاکم بر وب الاستیک به حالت ویسکوالاستیک تعمیم داده می‌شوند.

همانطور که قبلاً نیز گفته شد، پاسخ مواد ویسکوالاستیک در برش می‌تواند متفاوت از پاسخ آن در اتساع باشد. پس وقتی پاسخ در برش ویسکوالاستیک است، در اتساع می‌تواند الاستیک باشد. البته واضح است که در این شرایط تحلیل مسائل چندمحوری با حالت‌های تک‌محوری و برش ساده متفاوت خواهد بود [4].

## ۷-۱ معرفی مدل‌های رئولوژیکی کاربردی در شبیه‌سازی رفتار ویسکوالاستیک

### خطی پیوستارهای متحرک

مدلسازی پاسخ به تحریک مکانیکی مواد ویسکوالاستیک، توسط مواد الاستیک و ویسکوز، از قبیل فنر و دمپر انجام می‌شود. استفاده از این مدل‌های مکانیکی خطی، ساده‌ترین حالت جهت تفسیر رفتار ویسکوالاستیسیته مواد می‌باشد. فنر رفتار ناگهانی (الاستیک) پاسخ و دمپر حالت تطبیقی (اتلافی) سیستم را شبیه‌سازی می‌کند [11]. ذکر این نکته ضروری است که بیان رفتار ویسکوالاستیک توسط فنر و دمپر، دلیلی بر اینکه این المان‌ها، مکانیسم‌های ملکولی ناشی از رفتار رهائش واقعی مواد را منعکس کنند، نمی‌باشند. با این حال بسیاری از مدل‌ها وجود دارند که رفتار آنها به رفتار ویسکوالاستیک مواد نزدیک می‌باشد [12].

ترکیب‌های ساده فنر و دمپر خطی به صورت سری، مدل ماکسول<sup>۱</sup> و به صورت موازی، مدل کلونین-ویت<sup>۲</sup> را تشکیل می‌دهند. اما جهت ارائه یک توصیف بهتر از رفتار مواد ویسکوالاستیک، تعداد بیشتری از این اعضا را نیز با هم ترکیب می‌کنند.

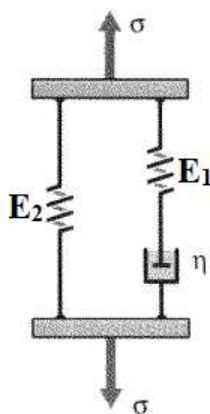
در تحلیل‌های استاتیکی، از مدل‌های چهار پارامتری برگرز<sup>۳</sup> استفاده می‌شود. با استفاده از این

---

1. Maxwell  
2. Kelvin-Voigt  
3. Burgers

مدل، پدیده‌های اساسی قابل مشاهده در ورق‌ها، مانند رهایش تنش، رهایش کرنش و کرنش پلاستیک را می‌توان توصیف کرد. با این وجود، در تحلیل‌های دینامیکی، تمام این پدیده‌ها ضروری نمی‌باشند. به عنوان مثال، در طی تولید ورق‌ها که صفحات وب با سرعت‌های بالاتر از ۳۰۰۰ متر بر دقیقه در حرکتند، در یک بازه‌ی زمانی کوچک، می‌توان فرض کرد کرنش‌های پایدار ایجاد نمی‌شود. برای مدلسازی وب‌ها در این حالت، می‌توان از مدل‌های رئولوژیکی سه پارامتری مانند مدل‌های جامد خطی استاندارد<sup>۱</sup> (یا مدل جامد زنر<sup>۲</sup>) استفاده کرد [13]. البته مدل‌های معرفی شده در فوق می‌توانند به صورت نامتناهی با هم ترکیب شوند، تا تأثیرات دیگری از جمله تأثیر خزش ابتدایی را نیز نشان دهند. همه این مدل‌ها از معادلات مرتبه اول خطی پیروی می‌کنند [3]. ولی با زیاد شدن تعداد المانها، حل معادلات حاکم نیز مشکل‌تر خواهد شد.

در این پایان‌نامه، جهت توصیف رفتار ویسکوالاستیک وب متحرک در برش، از مدل زنر نوع دوم (شکل ماکسول) استفاده می‌شود. این مدل مطابق شکل (۱-۳)، از ترکیب موازی یک فنر خطی با مدل ماکسول تشکیل می‌شود.



شکل (۱-۳) مدل زنر نوع دوم

در این مدل، تنش‌های اعمالی به کل سیستم برابر است با مجموع تنش فنر و ماکسول. رابطه

1. Standard Linear Solid Model  
2. Zener's Solid

تنش - کرنش در این مدل برابر است با:

$$\frac{\eta}{E_1} \frac{d\sigma(t)}{dt} + \sigma = \frac{\eta}{E_1} (E_1 + E_2) \frac{d\varepsilon(t)}{dt} + E_2 \varepsilon \quad (14-1)$$

پاسخ این مدل به تست رهایش:

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 [E_2 + E_1 e^{\frac{-E_1}{\eta} t}] \quad (15-1)$$

پاسخ این مدل به تست خزش:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_1 + E_2} \left[ 1 + \frac{E_1}{E_2} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \right] \quad (16-1)$$

که در آن  $\tau = \frac{\eta}{E_1}$  زمان رهایش می‌باشد که بصورت زمان لازم برای رسیدن به حد نهایی تنش

تفسیر می‌شود.

روابط مربوط به سایر مدل‌های رئولوژیکی معرفی شده در این قسمت، به همراه شماتیک و

نمودارهای مربوطه، بطور مفصل در پیوست (الف) آورده شده است.

## ۸-۱ فرضیات متداول در تحلیل تنش مواد ویسکوالاستیک در اتساع [5]

از آنجا که جمع‌آوری اطلاعات وابسته به زمان مواد ویسکوالاستیک دشوار و وقت‌گیر می‌باشد، لذا جهت تحلیل آنها، معمولاً فرضیاتی در نظر گرفته می‌شود. به این ترتیب اغلب  $E(t)$  و  $G(t)$  و نه هر دوی آنها، موجود می‌باشند. از طرفی در مواد ویسکوالاستیک ایزوتروپ، دو پارامتر حل مسئله، در دو یا سه بعد لازم است. معمولاً یکی از سه فرض زیر، جهت تعیین پارامتر دیگر، در تحلیل رفتار ماده ویسکوالاستیک در اتساع، در نظر گرفته می‌شود:

### ۱- تراکم‌ناپذیری<sup>۱</sup>

ماده الاستیک را در صورتی تراکم‌ناپذیر فرض می‌کنند که تغییر شکل‌های آن کوچک و قابل صرف‌نظر باشد. در این حالت  $K = \infty$  (مدول بالک) یا  $\nu = 0.5$  می‌باشد. تحت شرایط مشابه، برای یک

1. Incompressibility



ماده تراکم‌ناپذیر ویسکوالاستیک،  $K$  را بی‌نهایت در نظر می‌گیرند. بنابراین با وجود این شرط، کرنش-های اتساعی برای ماده ویسکوالاستیک صفر می‌باشد (تغییر حجم قابل صرف‌نظر باشد).

## ۲- رفتار الاستیک در اتساع

در عمل، تغییرات مدول بالک ویسکوالاستیک با زمان و دما، بسیار کوچکتر از مدول برشی است. بنابراین فرض رفتار الاستیک، برای ماده ویسکوالاستیک در اتساع، معمولاً فرض مناسبی می‌باشد. از این رو در این پایان‌نامه، رفتار ماده ویسکوالاستیک وب متحرک در اتساع (فصل سوم)، الاستیک فرض می‌شود. در این حالت، ضریب پواسون تابع زمان می‌باشد.

## ۳- هم‌زمانی<sup>۱</sup> مدول بالک و برشی

در این مدل، نسبت مدول بالک به برشی یک مقدار ثابت فرض می‌شود. یعنی  $K(t) = C_1 G(t)$ . بنابراین وابستگی زمانی این دو یکسان بوده و فقط مقادیر آنها متفاوت می‌باشد. اعتبار این فرض باید در محدوده زمانی و دمایی مورد نظر، مورد بررسی دقیق قرار گیرد. در این حالت ضریب پواسون یک مقدار ثابت می‌باشد.

## ۹-۱ جمع‌بندی

در این فصل، به معرفی مواد ویسکوالاستیک، توصیف رفتار ویسکوالاستیک خطی، بیان معادلات بنیادین تنش-کرنش در شکل دیفرانسیلی، معرفی مختصر مدل‌های رئولوژیکی مورد استفاده در مدلسازی پیوستارهای متحرک و بیان فرضیات متداول در تحلیل تنش مواد ویسکوالاستیک در اتساع پرداخته شد.

در فصل سوم این پایان‌نامه، بر مبنای شکل دیفرانسیلی معادلات بنیادین تنش-کرنش، معادلات حاکم بر ارتعاشات پیوستار ویسکوالاستیک متحرک محوری استخراج می‌شود. با توجه به مطالب این فصل، رفتار ماده‌ی وب در برش مشابه مدل رئولوژیکی زلز و در اتساع الاستیک فرض خواهد شد.

---

1. Synchronous

فصل دوم

بررسی سازه‌های محرک محوری

## ۲-۱ مقدمه

امروزه پیوستارهای متحرک بطور وسیعی در کاربردهای صنعتی مختلفی از جمله انتقال قدرت و بار مشاهده می‌شوند. از این رو جهت بهره‌وری بهینه از این سازه‌ها، بررسی‌های علمی و دقیقی مطلوب می‌باشد. مشکل اصلی در بررسی این سازه‌ها، مدلسازی آنها می‌باشد. از طرفی، پیش از بررسی پیوستارهای متحرک، شناخت انواع پیوستارها ضروری می‌نماید. از این رو در این فصل ابتدا به معرفی انواع پیوستارها، کاربرد و مدلسازی پیوستارهای متحرک پرداخته می‌شود. سپس تاریخچه‌ای از حل این سازه‌ها، به اختصار بیان می‌گردد. در پایان برخی از مقالات منتشر شده در دهه اخیر و در زمینه‌های مختلف ارتعاشات ورق‌های ویسکوالاستیک ساکن، ورق‌های تحت جرم و بار متحرک، پیوستارهای الاستیک و ویسکوالاستیک متحرک محوری، تیرهای ویسکوالاستیک متحرک محوری و همچنین ارتعاشات ورق بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی<sup>۱</sup> بررسی می‌شوند.

## ۲-۲ معرفی برخی از پیوستارهای متحرک

**الف - رشته<sup>۲</sup>:** ساده‌ترین عضو مکانیکی که فقط نیروی کشش ساده را در حالت یک بعد تحمل می‌کند، رشته می‌نامند. طنابها، تارها و زنجیرها جزء رشته‌ها محسوب می‌شوند [14].

**ب - غشاء<sup>۳</sup>:** غشاء تعمیم حالت دوبعدی رشته می‌باشد (یعنی نیروی کششی را در حالت دوبعدی تحمل می‌کند). کاغذها و ورق‌های نازک جزء غشاءها می‌باشند. این دسته از پیوستارها که جزء ورقها تقسیم می‌شوند و در پیوست (ب) مفصل‌تر توضیح داده شده‌اند [14].

**ج - تیر:** اگر رشته علاوه بر نیروی کششی، نیروی فشاری و لنگر خمشی را نیز تحمل کند، آن را تیر می‌نامند [14].

---

1. Shear Deformation Theory  
2. String  
3. Membrane

د- ورق: تعمیم تیر به حالت دوبعدی را ورق گویند. بدلیل اهمیت زیاد ورقها در سازه‌های مهندسی و همچنین از آنجا که مبنای روابط مورد استفاده در این پایان‌نامه، روابط پایه‌ای ورق‌ها می‌باشد، در پیوست (ب) به تشریح این گروه از پیوستارها پرداخته شده است [14].

ه- وب: در حالت کلی، پیوستار متحرک محوری به شکل ورق نازک و مستطیل شکل مسطح با سفتی خمشی کوچک را وب می‌نامند. مسائل مرتبط با دینامیک چنین سازه‌هایی، در صنایع ساخت و رنگ‌کاری ورقها و پارچه‌ها قابل مشاهده می‌باشد. در طی پروسه‌های ساخت، سرعت انتقال وبها حتی به ۵۰ متر بر ثانیه نیز می‌رسد. تحت شرایط خاصی، چنین سرعت‌های بالایی می‌توانند منجر به ارتعاشات رزونانسی، ناپایداری یا لرزش صفحات وب شوند. این رفتارها نیز می‌توانند چین‌خوردگی و شکست وبها را در طی حرکت ایجاد کنند. تغییرات نیروی کششی وب که از ارتعاشات آن پیروی می‌کنند، می‌تواند تغییر در ضخامت ورق در حال ساخت را به همراه آورد [13].

## ۲-۳ پیوستارهای متحرک

پیوستارهای متحرک در کاربردهای صنعتی مختلفی قابل مشاهده می‌باشند. از جمله این کاربردها عبارتند از: تسمه‌های انتقال قدرت، تسمه‌های انتقال بار، تیغه‌های اره‌های نواری، سیستم‌های پروسه‌ی ساخت ورق‌ها، فرآیند ساخت و نقاشی روی پارچه، نوارهای منسوجات طی ساخت و فرآوری، لوله‌های انتقال سیالات و همچنین اشیاء مسطح که با سرعت زیادی در فضای خارج جو زمین در حرکتند.

در تمام کاربردهای صنعتی مذکور، به منظور افزایش کارایی و سرمایه‌گذاری بهینه و ارزش بهره‌وری، در دستگاهها و تاسیسات گران‌قیمت و پیچیده، سرعت انتقال ماکزیمم مطلوب می‌باشد. البته رفتار دینامیکی سیستم متحرک محوری، از دستیابی به آن جلوگیری می‌کند. بنابراین برای ورق‌های متحرک یک سرعت بحرانی تعریف می‌شود که برای سرعت‌های بالاتر از آن ناپایداری‌های دینامیکی مختلفی، اغلب به صورت واگرایی، ارتعاشات اضافی، لرزش و یا حتی شکست صفحات وب قابل

مشاهده است. سرعت بحرانی، سرعت محوری است که در آن بخش حقیقی مقادیر ویژه سیستم به صفر میل می‌کنند و سیستم دچار ناپایداری به صورت کماتش می‌شود. همانطور که پیشتر نیز گفته شد، در برخی از این سازه‌های متحرک، سرعت محوری حتی تا ۳۰۰۰ متر بر دقیقه (۵۰ متر بر ثانیه) نیز می‌رسد. بنابراین در بررسی دینامیکی چنین سیستم‌هایی، پاسخ و پایداری دینامیکی مربوط به ارتعاشات عرضی حائز اهمیت می‌باشد و برای اطمینان از کارکرد سیستم در شرایط پایداری، باید تحلیل دینامیکی کاملی از آن به عمل آید.

مهمترین مسئله در بررسی وب‌های متحرک محوری، مدلسازی ماده‌ی آن می‌باشد. این مدلسازی از دو دیدگاه قابل بررسی است. یکی از نظر خصوصیات (جنس) ماده مورد استفاده و دیگری از نظر ابعادی (مدل یا مختصه‌های در نظر گرفته شده برای مسئله).

در بسیاری از مطالعاتی که تاکنون بر دینامیک پیوستارهای متحرک محوری انجام شده، خصوصیات مواد به صورت الاستیک در نظر گرفته شده است. این فرض که منجر به یک ساده‌سازی در مدل ریاضی مسئله می‌شود، در برخی از موادی که در عمل ملاحظه می‌شوند، مورد قبول می‌باشد. اما امروزه با پیشرفت تکنولوژی و ظهور مواد جدید، پیوستارهایی از جنس مواد تقویت شده فلزی و سرامیکی، مواد پلیمری و مواد مرکب تولید می‌شوند. بسیاری از این مواد به طور ذاتی رفتارهای ویسکوالاستیک از قبیل جریان ویسکوز و نرخ کرنش وابسته به سابقه‌ی بارگذاری در محدوده‌ی وسیعی از تنش و نرخ کرنش، از خود نشان می‌دهند. بنابراین این مواد از قانون هوک پیروی نمی‌کنند و باید رفتار ویسکوالاستیک آنها با معادلات رفتاری مناسب مدل شود. همچنین برای بسیاری از موادی که در موقعیت‌های حساس و حیاتی به کار می‌روند، ارائه یک مدل کامل‌تر، که رفتار ماده‌ی مورد استفاده را شامل شود، ضروری می‌باشد. بنابراین در مواردی که تئوری‌های الاستیسیته و ویسکوزیته، هر کدام به تنهایی، برای مدل کردن رفتار سازه کافی نمی‌باشند، تئوری ویسکوالاستیسیته به کار می‌رود.

برای مدلسازی پیوستارهای متحرک محوری می‌توان از مدل‌های یک‌بعدی تئوری رشته متحرک

و تئوری تیر و یا مدل‌های دوبعدی تئوری ورق استفاده کرد. اگرچه تئوری ورق، توصیف دقیق‌تری از حالت فیزیکی وب ارائه می‌دهد، اما معادلات حاکم از نظر ریاضی بسیار پیچیده بوده و حل تحلیلی آن بسیار دشوار می‌باشد. تئوری‌های رشته متحرک و تیر در تعداد زیادی از مطالعات انجام شده برای مدلسازی پیوستارهای دوبعدی مورد استفاده قرار گرفتند. مطالعات صورت گرفته نشان داده است که این ساده‌سازی در اکثر موارد، به نتایج قانع‌کننده‌ای منجر می‌شود. بخصوص در ورق‌های با سفتی خمشی کوچک (وب)، نتایج حاصله با نتایج تئوری ورق یکسان می‌باشد. اما در بسیاری از موارد دیگر، مانند وقتی که پهنای ورق، خصوصیات اورتوتروپیک سیستم، تغییر در توزیع بار در راستای عرض ورق، ورق‌های کامپوزیتی (مرکب)، لایه‌های واسطه و یا نقاط تکیه‌گاهی مورد ملاحظه باشد، این ساده‌سازیها رضایت‌بخش نمی‌باشند و برای بررسی‌های دینامیکی، استفاده از تئوری ورق ضروری می‌نماید.

از طرف دیگر به منظور ارائه‌ی حالت نزدیکتر به رفتار دینامیکی واقعی سیستم‌های دوبعدی مختلف، مدل‌های رئولوژیکی دوبعدی توسط سباتکا<sup>۱</sup> [17] معرفی شدند. مدل‌های دوبعدی نسبت به مدل‌های کلاسیک یک‌بعدی (شامل فنر، دمپر و ورق‌های اصطکاکی<sup>۲</sup>) واقعی‌ترند. از نقطه نظر پدیدار-شناختی، رفتار پیوستارها مشابه سازه‌های یک‌بعدی است، اما از نقطه نظر ساختاری، مدل‌های دوبعدی، ساختار سازه‌ای و جهت‌گیری پیوستار مورد مطالعه را بهتر نشان می‌دهند. همچنین، بر خلاف المانهای یک بعدی معمولی، مدل‌های دوبعدی می‌توانند به طور مستقیم رفتار سیستم‌های مختلف الاستیک، ویسکوالاستیک و پلاستیک را ارائه دهند ([15] و [16]).

بر اساس مطالب فوق در این پایان‌نامه، رفتار وب متحرک از نظر پدیدار شناختی، یک‌بعدی و از نظر ساختاری، دوبعدی در نظر گرفته شده است. همچنین جهت مدلسازی رفتار سازه، از تئوری ویسکوالاستیسیته استفاده شده است.

---

1. Sobotka  
2. Friction Plates

## ۴-۲ مروری بر کارهای انجام شده در زمینه ارتعاشات پیوستارهای متحرک

دینامیک اجسام متحرک محوری تقریباً از ۶۰ سال پیش مورد بررسی قرار گرفته است. در اوایل سال ۱۹۵۰، نخستین مقاله‌ها در زمینه ارتعاشات عرضی رشته‌ی متحرک محوری، توسط سَک<sup>۱</sup> [18] و همچنین آرکیبالد<sup>۲</sup> و امسل<sup>۳</sup> [19] منتشر شد. اولسوی<sup>۴</sup> و ماوت<sup>۵</sup> [20] اولین مقاله را در زمینه تحلیل دینامیکی ورق تیغه‌ی اره‌ی نواری ارائه دادند. ایشان معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی حاکم بر سیستم را با استفاده از روش ریتز<sup>۶</sup> گسسته کردند. روی لبه‌های آزاد، شرایط مرزی تقریبی را در نظر گرفتند که این مسئله اساساً بر دقت حل، بخصوص برای حرکت ورق در ناحیه‌های فوق بحرانی، تأثیر می‌گذارد. لین<sup>۷</sup> و ماوت [21] بررسی‌هایی روی خیز عرضی و توزیع تنش وب ایزوتروپ متحرک تحت بارگذاری عرضی ارائه دادند. ایشان معادله‌ی حاکم بر ورق را با استفاده از تئوری غیرخطی ون کارمن<sup>۸</sup> استخراج کردند.

لین [22]، با استفاده از تئوری خطی، ارتعاشات ورق ایزوتروپ متحرک محوری روی دو تکیه‌گاه ساده و دو سر دیگر آزاد را به صورت پایه‌ای بررسی و خصوصیات ارتعاشی آن را بیان کرد. بر پایه تئوری ورق میندلین-رایزنر<sup>۹</sup>، ونگ<sup>۱۰</sup> [23] توصیف المان محدود ورق نازک متحرک را ارائه کرده و با استفاده از آن، علاوه بر سرعت انتقال محوری، توزیع تنشهای نرمال و برشی سیستم را بدست آورد. برای مدلسازی پیوستار متحرک، ویکرت<sup>۱۱</sup> و ماوت [24] از تئوری رشته‌ی یک بعدی، ویکرت [25] از تئوری تیر یک بعدی و بعضی دیگر از تئوری ورق دوبعدی استفاده کردند ([21]، [22] و [26]).

- 
1. Sack
  2. Archibald
  3. Emslie
  4. Ulsoy
  5. Mote
  6. Ritz
  7. Lin
  8. Von Karman
  9. Mindline-Reissner
  10. Wang
  11. Wickert

فانگ<sup>۱</sup> و همکاران [27] اولین کسانی بودند که ارتعاشات عرضی تسمه‌ی متحرک ویسکوالاستیک را بررسی کردند. ایشان در مدلسازی رفتار ورق از مدل فنر استفاده کردند. ژنگ<sup>۲</sup> و زو<sup>۳</sup> [28]، روش multiple scale را برای مطالعه پارامتریک ارتعاشات تسمه‌ی ویسکوالاستیک متحرک محوری که با رشته مدل شده است، استفاده کردند.

در ادامه به بررسی برخی کارهای انجام شده در زمینه‌های مختلف ارتعاشات پیوستارهای الاستیک و ویسکوالاستیک متحرک، ارتعاشات ورقهای ویسکوالاستیک ساکن و همچنین مسائل ورق مرتبط با تئوری تغییر شکل برشی که در دهه اخیر به چاپ رسیده‌اند، پرداخته می‌شود.

## ۲-۴-۱ ارتعاشات ورق ویسکوالاستیک

روسیخین<sup>۴</sup> و شیتکوا<sup>۵</sup> [29] ارتعاشات میرای ورق‌های ویسکوالاستیک خطی را مورد تحلیل قرار دادند. رفتار دینامیکی ورق ویسکوالاستیک مستطیلی را به صورت سه معادله دیفرانسیل خطی، برای سه مولفه جابجایی متعامد نقطه‌ای از سطح میانی در نظر گرفتند. ایشان دمپینگ ورق را با مدل مشتق‌های جزئی<sup>۶</sup> نسبت به زمان تعیین کردند و با اعمال روش تبدیل انتگرالی لاپلاس به عنوان روش حل، معادلات مربوطه را به صورت سری‌هایی نسبت به توابع ویژه مسئله بسط دادند. در نهایت حل را به صورت مجموع دو جمله بدست آوردند؛ یکی حاکم بر حالت تعادل سیستم است و دیگری ارتعاشات میرا حول موقعیت تعادل را توصیف می‌کند که با اتلاف اینرسی و انرژی سیستم تعیین می‌شود. همچنین ایشان اثر ویسکوزیته بر پاسخ و وابستگی زمانی جابجایی نقاط ورق را تحلیل کردند.

همچنین ایشان در مقاله‌ای دیگر [30] به تحلیل ارتعاشات میرای آزاد غیرخطی یک ورق مستطیلی ویسکوالاستیک تحت شرایط رزنانس داخلی مختلف پرداختند. ایشان پس از بیان معادلات

---

1. Fung  
2. Zhang  
3. Zu  
4. Rossikhin  
5. Shitikova  
6. Fractional Derivatives



حاکم و بی‌بعد کردن آنها، با در نظر گرفتن ویژگی‌های ویسکوز سیستم بصورت مدل مشتق جزئی Riemann-Liouville معادلات را به حالت ویسکوالاستیک تعمیم دادند. شرایط مرزی و اولیه را نیز به صورت همگن در نظر گرفتند. جهت یافتن یک حل تقریبی، توابع جابجایی درون و برون صفحه‌ای را به صورت جمله‌هایی از توابع ویژه ارتعاشات خطی (نوسانات کوچک) تعریف کردند و با استفاده از روش multiple scale، توابع مذکور را به صورت سری‌های توانی از یک پارامتر کوچک و وابسته به شاخص‌های زمانی مختلف، در نظر گرفتند. ایشان نشان دادند که هر مود ارتعاشی با ضریب دمپینگ خاص خود مشخص می‌شود. همچنین دریافتند که بسته به مقدار ویسکوزیته، سیستم به حالت پایدار یا ناپایدار می‌رسد.

## ۲-۴-۲ ورق‌های تحت جرم و بار متحرک

مالک‌زاده<sup>۱</sup> و همکاران [31] ورق کامپوزیتی تحت بار متحرک را مورد تحلیل دینامیکی قرار دادند. ایشان جهت تعیین پاسخ دینامیکی ورق لایه‌ای ضخیم تحت بار متحرک نقطه‌ای با تکیه‌گاه‌های ساده، روش حلی را بر پایه‌ی تئوری الاستیسیته ارائه نمودند. با استفاده از اصل هامیلتون، معادلات حرکت ورق کامپوزیتی را تعیین کردند. سپس با استفاده از تئوری لایه‌ای<sup>۲</sup>، معادلات و شرایط مرزی مربوطه را در سرتاسر ضخامت ورق گسسته کردند. در ادامه، آنالیز مودال و روش مربعات دیفرانسیلی را برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل حاصله به کار گرفتند. برای نشان دادن دقت روش، نتایج را با حل دقیق ورق ایزوتروپ تحت بار متحرک مورد مقایسه قرار دادند. همچنین، جهت نشان دادن تأثیر تئوری‌های تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول و مرتبه‌ی بالا، نتایج بدست آمده از الاستیسیته‌ی سه بعدی در این مقاله را با نتایج تئوری‌های مذکور، مقایسه کردند که تطابق خوبی را نشان می‌دهد. همچنین، ایشان اثر ضخامت به طول، سرعت بار و خروج از مرکز آن و آرایش لایه‌های ورق را روی پاسخ ورق، مورد مطالعه قرار دادند.

1. Malekzadeh  
2. Layerwise Theory

ونگ<sup>۱</sup> و همکاران [32] پایداری دینامیکی ورق مستطیلی ویسکوالاستیک ناپایستار<sup>۲</sup> تحت توزیع بار مماسی یکنواخت را مورد بررسی قرار دادند. ایشان بر پایه‌ی تئوری ورق نازک و رابطه‌ی ساختاری دیفرانسیلی ویسکوالاستیک دوبعدی، معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر ارتعاشات ورق مذکور را در حوزه‌ی لاپلاس استخراج کردند. سپس معادله را برای مدل کلوین-ویت تعمیم داده و با استفاده از روش مربع‌سازی دیفرانسیلی (DQM)<sup>۳</sup>، معادلات بدست آمده را برای ورق با چهار تکیه‌گاه ساده (SSSS) و ورق با دو تکیه‌گاه ساده و دو تکیه‌گاه گیردار (SCSC) حل کردند.

کیم<sup>۴</sup> [33] کمانش و ارتعاشات ورق روی بستر الاستیک که تحت فشار صفحه‌ای و بار متحرک قرار دارد را مورد بررسی قرار داده است. دامنه بار متحرک را به دو شکل ثابت و متغیر به صورت هارمونیک و بستر را نیز به صورت الاستیک فرض کردند. با استخراج معادله دیفرانسیل حاکم بر ارتعاشات عرضی سیستم در مختصات کارتیزین، و تعریف مختصات متحرک به صورت  $\eta = x - vt$ ، معادلات را بر حسب مختصات جدید بی‌بعد کردند. برای بدست آوردن پاسخ سیستم، با استفاده از تبدیل فوریه، خیز و بار را به صورت تابع نمایی از متغیرهای زمان، مکان و مکان بی‌بعد، در نظر گرفتند. در ادامه پاسخ حالت پایای سیستم به بار هارمونیک متحرک و همچنین پاسخ به بار با دامنه ثابت را با استفاده از تبدیل فوریه دوگانه بدست آوردند. جهت اعمال روش مذکور، از تبدیل فوریه سریع (FFT)<sup>۵</sup> که مبنای عددی دارد، استفاده کردند. در ادامه، ایشان به بررسی اثر پارامترهای سرعت بار، فرکانس بار و فشار صفحه‌ای بر حالت تغییر شکل، خیز ماکزیمم و مقادیر بحرانی سرعت، فرکانس و فشار صفحه‌ای پرداختند. همچنین تحلیل‌هایی جهت تعیین چگونگی اثر فشار صفحه‌ای بر پایداری و ارتعاشات سیستم، انجام دادند. در نهایت، عبارتهایی را برای پیش‌بینی سرعت بحرانی، فرکانس بحرانی و بار کمانش صفحه‌ای پیشنهاد کردند.

- 
1. Zhong-Min Wang
  2. Non-conservative
  3. Differential Quadrature Method
  4. Seong-Min Kim
  5. Fast Fourier Transform

شادانام و همکاران [34] ورق نازک مستطیلی غیرخطی تحت جرم متحرک نسبتاً سنگین را مورد بررسی قرار دادند. شرایط اولیه را تابعی از مکان و مسیر حرکت جرم متحرک را دلخواه در نظر گرفتند. با استخراج معادله‌ی حاکم بر حرکت بر مبنای تئوری کلاسیک ورق‌ها، پاسخ معادله را به صورت یک سری از توابع شکل مود فرض کردند. به این ترتیب معادله مشتق جزئی حاکم به یک معادله معمولی بر حسب زمان کاهش می‌یابد. در ادامه تئوری نقطه-گیردار باناخ<sup>۱</sup> را جهت پیش‌بینی رفتار تناوبی پاسخ به کار گرفتند. به نظر ایشان، روش ارائه شده در این مقاله روشی جامع بوده و برای بررسی رفتار ورق تحت بار متحرک نیز می‌تواند استفاده شود. ایشان نشان دادند که حتی اگر مسیر حرکت جرم متحرک متناوب باشد، پاسخ سیستم می‌تواند غیرمتناوب باشد. همچنین، محدوده‌ای را برای پارامترهای مسئله که در آن پاسخ سیستم متناوب می‌باشد، تعیین کردند.

غفوری و اصغری [35] بر پایه‌ی تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، ورق کامپوزیتی لایه‌ای تحت جرم متحرک را مورد تحلیل دینامیکی قرار دادند. برای انجام این تحلیل از یک روش المان محدود استفاده کردند. به عنوان دو روش مختلف مش‌بندی، تکنیک‌های مش ثابت<sup>۲</sup> و تطبیقی را به کار گرفتند. با استفاده از روش مش تطبیقی، مشی را منطبق بر مسیر حرکت جرم متحرک ایجاد کردند. همچنین از یک روش انتگرالگیری مستقیم جهت حل معادله حرکت حاکم، استفاده کردند. این روش را می‌توان برای شرایط مرزی مختلف، سرعت‌های مختلف و مسیرهای مختلف جرم متحرک به کار برد. ایشان اثر پارامترهای مختلف از جمله جرم جسم متحرک و زاویه ورق‌های کامپوزیتی لایه-ای را بر پاسخ دینامیکی سیستم، بررسی کردند.

## ۲-۴-۳ تیرهای ویسکوالاستیک متحرک محوری

چن<sup>۳</sup> و ینگ<sup>۴</sup> [36]، ارتعاشات و پایداری یک تیر ویسکوالاستیک متحرک محوری را روی تکیه-

---

1. Banach's Fixed Point Theorem  
 2. Stationary  
 3. Li-Qun Chen  
 4. Xiao-Dong Yang

گاه‌های ساده به همراه فنرهای پیچشی، تحلیل کردند. ایشان در مقاله خود طرحی جهت یافتن فرکانس‌های طبیعی و توابع مودال<sup>۱</sup> با استفاده از شرایط مرزی تیر الاستیک متحرک با سرعت ثابت، پیشنهاد کردند و برای یک تیر تشکیل شده از مدل کلپین، با استفاده از روش multiple scales، اثر ویسکوالاستیسیته را بر ارتعاشات آزاد تحلیل کردند. وقتی که سرعت محوری به صورت یک ارتعاش هارمونیک ساده حول سرعت متوسط ثابت در نظر گرفته شود، شرایط ناپایداری برای تیر ویسکوالاستیک متحرک محوری در رزنانس پارامتریک مشاهده می‌شود. همچنین بصورت عددی، اثرات سختی قید، سرعت محوری متوسط و ویسکوالاستیسیته را بر پاسخ سیستم بررسی کردند.

چن و همکاران [37] پایداری دینامیکی تیرهای تیموشنکوی ویسکوالاستیک متحرک محوری را تحت شرایط رزونانس داخلی بررسی کردند. با استفاده از تئوری تیر ضخیم تیموشنکو، اثر تغییر شکل برشی و اینرسی دورانی را در نظر گرفتند. پس از استخراج معادله حاکم بر اساس قانون دوم نیوتن و اصل بقای مومنتم زاویه‌ای، با استفاده از مدل کلپین، معادلات را به حالت ویسکوالاستیک تعمیم داده و بی‌بعد کردند. سرعت محوری تیر را به صورت تغییرات هارمونیک ساده حول یک مقدار سرعت متوسط در نظر گرفتند. برای برقراری شرایط حل‌پذیری در حالت رزونانس پارامتریک اصلی و مجموع، روش multiple scale را بر معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی بی‌بعد شده اعمال کردند و با استفاده از معیار روث-هرویتز<sup>۲</sup>، شرط لازم و کافی را برای پایداری سیستم استخراج کردند. ایشان با استفاده از چند مثال عددی، به بررسی اثر پارامترهای وابسته در محدوده پایداری، پرداختند.

ونگ<sup>۳</sup> و چن [38] پایداری مجانبی یک تیر ویسکوالاستیک متحرک محوری شتابدار را مورد تحلیل قرار دادند. برای تعمیم معادلات به حالت ویسکوالاستیک از مدل جامد خطی استاندارد نوع اول (شکل الف-۱۲)) استفاده کردند. شرایط مرزی را به صورت هر دو انتها تکیه‌گاه ساده فرض کردند. سرعت محوری را نیز به صورت تغییرات هارمونیک ساده حول یک سرعت متوسط ثابت در

---

1. Modal Functions  
2. Routh-Hurwitz Criterion  
3. Bo Wang

نظر گرفتند. جهت تعیین شرایط ناپایداری برای رزونانس‌های پارامتریک اصلی و ترکیبی، از تحلیل مجانبی کمک گرفتند. ایشان برای حل معادله حاکم بر ارتعاشات عرضی تیر شتابدار متحرک محوری به صورت عددی، از روش مربعات دیفرانسیلی استفاده کردند. مرزهای پایداری را در صفحه دامنه تحریک و فرکانس تحریک، به صورت عددی مشخص کردند. شبیه‌سازیهای عددی را نیز برای نشان دادن اثرات سفتی، ویسکوزیته و سرعت متوسط ثابت تیر، انجام دادند. محاسبات عددی، درستی نتایج تحلیلی کار ایشان را در رزونانس پارامتریک اصلی تأیید می‌کند.

#### ۴-۴-۲ ورق‌های الاستیک متحرک محوری

شین<sup>۱</sup> و همکاران [39]، خصوصیات دینامیکی ارتعاشات عرضی یک غشاء متحرک محوری را مورد بررسی قرار دادند. معادلات حرکت را بر ارتعاشات درون‌صفحه‌ای و برون‌صفحه‌ای سیستم را به کمک اصل هامیلتون بدست آوردند. برای غلتک‌ها دو نوع شرایط مرزی در نظر گرفتند: یک حالت بدون اصطکاک و دیگری بدون لغزش. پس از گسسته‌سازی معادلات، با استفاده از روش گالرکین، فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها را محاسبه کردند. ایشان دریافتند که سرعت انتقال، شرایط مرزی و نسبت عرض به طول غشاء<sup>۲</sup> بر فرکانس‌های طبیعی، شکل مودها و پایداری ارتعاشات خارج صفحه غشاء متحرک اثر دارند.

حاتمی و همکاران [40] ارتعاشات یک وب اورتوتروپ را در سرعت بالا بررسی کردند. صفحه‌ی وب تحت تنش صفحه‌ای ثابت قرار گرفته است و روی تکیه‌گاه ساده قرار دارد. ایشان ابتدا معادلات حرکت خارج از صفحه را بر پایه تئوری ورق نازک استخراج کرده و سپس با استفاده از روش لوی پاسخ ارتعاشی را برای سرعت‌های کمتر و بیشتر سرعت بحرانی بدست آوردند. همچنین بر پایه نتایج استخراجی، ناپایداری‌های لرزش و واگرایی وب متحرک را در سرعت‌های فوق بحرانی مطالعه کردند.

همچنین ایشان [41] ارتعاشات آزاد ورق کامپوزیتی متقارن- لایه‌ای متحرک محوری که تحت

1. Changho Shin  
2. Aspect Ratio

نیروهای صفحه‌ای قرار گرفته است را با استفاده از تئوری ورق کلاسیک مورد مطالعه قرار دادند. ابتدا یک حل دقیق جهت تحلیل ارتعاشات ورق با لایه‌های متقاطع چند دهنه متحرک<sup>۱</sup> و سپس یک حل نیمه تحلیلی را بر مبنای روش باریکه محدود (FSM)<sup>۲</sup> برای ورق متقارن- لایه‌ای با شرایط مرزی اختیاری ارائه دادند. همچنین در این حالت سرعت انتقال ورق را ثابت و غلتک‌ها را بدون اصطکاک و عمود بر راستای انتقال فرض کردند. بررسی‌ها نشان داد با افزایش سرعت انتقال، مقدار فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد و در سرعت محوری بحرانی به صفر می‌رسد و این آغاز ناپایداری می‌باشد. برای سرعت‌های انتقال بالاتر ناپایداری‌های واگرایی و لرزش قابل مشاهده می‌باشد.

بنیچوک<sup>۳</sup> و همکاران [42] ناپایداری ورق الاستیک متحرک محوری را بررسی کردند. ایشان یک نوار با سرعت انتقال محوری ثابت که روی دو تکیه‌گاه قرار دارد و دارای ارتعاشات عرضی کوچکی است را در حالت فرمولبندی دوبعدی در نظر گرفتند. برای توصیف ممان خمشی و توزیع نیروهای غشایی، از مدل ورق نازک الاستیک که تحت خمش و کشش قرار گرفته است، استفاده کردند. بررسی‌ها نشان داد، شروع ناپایداری برای برخی از مقادیر سرعت بحرانی، به شکل واگرایی می‌باشد که در این حالت فرکانس ارتعاشات ورق صفر می‌باشد. مودهای لرزش نیز فقط برای مقادیر بزرگتر سرعت بحرانی ایجاد می‌شود. ایشان جهت بررسی جزئی‌تر ناپایداری مود استاتیکی مسئله، سرعت واگرایی بحرانی و شکل کمانش متناظر با آن را به عنوان تابعی از هندسه و پارامترهای مکانیکی مسئله، مورد مطالعه قرار دادند و ثابت کردند شکل کمانش برای سرعت‌های زیر سرعت بحرانی واگرایی، متقارن و برای سرعت‌های بالاتر نامتقارن می‌باشد.

کیم<sup>۴</sup> و همکاران [43] برای ورق نازکی که تحت کشش محوری صفحه‌ای قرار گرفته است و با سرعت محوری ثابت حرکت می‌کند، فرمولبندی المان طیفی مودال<sup>۵</sup> را انجام دادند. ایشان با استفاده

- 
1. Multi-span Traveling Cross-ply Laminates
  2. Finite Strip Method
  3. Banichuk
  4. Joohong Kim
  5. Modal Spectral Element Formulation

از اصل هامیلتون، معادله‌ی حاکم و شرایط مرزی مسئله را تعیین کردند. سپس با استفاده از روش کانتورویچ<sup>۱</sup>، ماتریس المان طیفی مودال را در حوزه‌ی فرکانسی فرمولبندی کردند. در ادامه با مقایسه نتایج با FEM، روش مذکور را مورد ارزیابی قرار دادند. همچنین به صورت عددی اثر سرعت انتقال و کشش صفحه‌ای را بر خصوصیات دینامیکی ورق متحرک، مورد بررسی قرار دادند.

## ۲-۴-۵ پیوستارهای ویسکوالاستیک متحرک محوری

مارینوسکی<sup>۲</sup> و کاپیتانیک<sup>۳</sup> [44] مدل کلونین و برگرز را در مدلسازی وب ویسکوالاستیک متحرک محوری استفاده کرده و نتایج را با هم مقایسه کردند. ایشان مدل تیر را برای مشخص کردن نواحی ناپایداری و تخمین سرعت بحرانی به کار گرفته‌اند. با استفاده از تئوری تیر، معادله حرکت وب را استخراج کرده و سپس آن را برای حالت ویسکوالاستیک تعمیم دادند. اثر سرعت انتقال محوری و دمپینگ داخلی بر پایداری دینامیکی وب متحرک محوری، را نیز مورد مطالعه قرار دادند. بررسی‌های عددی مدل کلونین - ویت نشان داد، برای سرعت‌های کمتر از سرعت بحرانی، افزایش سرعت منجر به کاهش فرکانس نوسانات طبیعی و در سرعت بحرانی سیستم دچار ناپایداری به صورت واگرایی می‌شود. در سرعت‌های انتقال بالاتر از سرعت بحرانی و دمپینگ داخلی کوچک نیز ناپایداری‌ها به صورت واگرایی و لرزش مشاهده می‌شود. بین دو ناحیه‌ی مذکور، ناحیه پایداری می‌باشد که پهنای آن به دمپینگ داخلی ماده وب وابسته می‌باشد. با افزایش دمپینگ این ناحیه‌ی ناپایداری کاهش می‌یابد تا سرانجام از بین می‌رود.

ژیچاو<sup>۴</sup> و جین<sup>۵</sup> [45] نوسانات آزاد غیرخطی یک تسمه ویسکوالاستیک متحرک را بررسی کردند. برای بررسی دقیق‌تر اثر دمپینگ مواد بر ارتعاشات سیستم، از مدل زرن استفاده کردند. ایشان با اصلاح معادلات حرکت سیستم و اعمال روش multiple scale، روشی جدیدی پیشنهاد کردند که یک حل

---

1. Kantorovich  
2. Marynowski  
3. Kapitaniak  
4. Zhichao  
5. Jean

تحلیلی در تقریب مرتبه اول به پاسخ ارتعاش آزاد می‌دهد. بعلاوه حل‌ها را برای مدل الاستیک و دو مدل ویسکوالاستیک-کلوین و ماکسول-هم‌ارز<sup>۱</sup> کرده‌اند. همچنین حل‌های ساده شده را برای هر دو مدل کلوین و ماکسول تحت شرایط خاصی تعیین کردند. جهت مشاهده تأثیر پارامترهای طراحی مختلف بر دامنه و فرکانس ارتعاشات غیرخطی، شبیه‌سازی عددی را روی مدل زرن انجام دادند.

مارینوسکی [46]، ارتعاشات غیرخطی یک وب ویسکوالاستیک متحرک محوری تحت کشش وابسته به زمان را بررسی کرده است. وی وب را به صورت تیری که با سرعت ثابت محوری حرکت می‌کند در نظر گرفت. وی مولفه‌ی کرنش را به صورت غیرخطی و کشش اولیه را به صورت پریودیک در نظر گرفت. سپس با استفاده از مدل کلوین-ویت رابطه بدست آمده را به حالت ویسکوالاستیک تعمیم داد. در ادامه این معادله را بی‌بعد کرده و با استفاده از روش گالرکین این معادله را به یک سیستم ناقص مرتبه چهارم که با یک دستگاه معادله دیفرانسیل معمولی تعریف می‌شود، ساده کرد. برای انتگرال‌گیری از معادله بدست آمده و تحلیل رفتار دینامیکی سیستم، از رانگ-کوتای مرتبه چهار<sup>۲</sup> استفاده کرد.

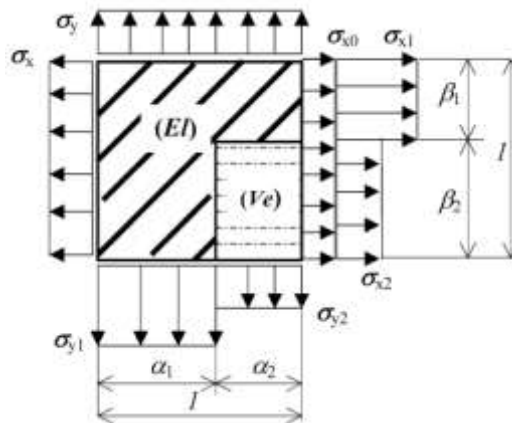
زو<sup>۳</sup> و ونگ<sup>۴</sup> [47] بر پایه معادلات رفتاری دیفرانسیلی ویسکوالاستیک دوبعدی، ارتعاشات ورق مستطیلی ویسکوالاستیک متحرک محوری با ضخامت متغیر به صورت سهمی را بررسی کردند. برای مدل‌سازی رفتار ویسکوالاستیک، مدل کلوین-ویت را استفاده قرار دادند. ایشان فرکانس طبیعی بی‌بعد را بر حسب سرعت محوری بی‌بعد برای نسبت تناظرهای مختلف، پارامتر ضخامت و زمان تأخیر بی‌بعد، با استفاده از روش مربع‌سازی دیفرانسیلی (DQ) مورد تحلیل قرار دادند. همچنین اثر پارامترهای مختلف مانند نسبت تناظر، ضخامت، سرعت محوری بی‌بعد، زمان تأخیر بی‌بعد را بر ارتعاشات سیستم مورد بحث قرار دادند. دو نوع تکیه‌گاه بصورت‌های (SSSS) و (CSCS) در نظر گرفتند.

---

1. Degenerate  
2. Fourth-order Runge-Kutta Method  
3. Zhou Yin-feng  
4. Wang Zhong-min



مارینوسکی [16] جهت مدلسازی وب ویسکوالاستیک متحرک محوری، از المان‌های رئولوژیکی دوبعدی که مطابق شکل (۱-۲) از ناحیه‌های الاستیک و ویسکوالاستیک تشکیل شده است، استفاده کرد. برای توصیف بخش ویسکوالاستیک، از مدل زنر استفاده کرد. همچنین بین دو ناحیه مذکور پیوستگی کامل فرض شد.



شکل (۱-۲) مدل رئولوژیکی دوبعدی [16]

به نظر نویسنده این مدل رئولوژیکی برای اولین بار برای بررسی سیستم‌های متحرک محوری به کار گرفته شده است. وی ابتدا با استفاده از مدل مذکور و تئوری ورق، معادله دیفرانسیل حاکم بر ارتعاش عرضی سیستم را به شکل یک معادله دیفرانسیل مشتق جزئی خطی مرتبه هشت استخراج کرد. جهت ساده‌سازی معادله حاکم، به سیستم ناقص مرتبه‌ی دوم<sup>۱</sup>، که با یک سری معادلات دیفرانسیل معمولی توصیف می‌شود، از روش گالرکین استفاده کرد. وی در حالت ساده شده، تحلیل را برای مدل رئولوژیکی‌ای که تنها از یک ناحیه ویسکوالاستیک ساخته شده، بررسی کرد. برای انتگرالگیری از معادله‌ی دیفرانسیل معمولی بدست آمده و تحلیل دینامیکی سیستم، رانگ- کوتای مرتبه چهار را به کار گرفت. آنالیز عددی پایداری دینامیکی ورق وب و همچنین اثر سرعت انتقال و میرایی داخلی بر رفتار دینامیکی سیستم، را مورد بررسی قرار داد. وی دریافت که با افزایش ثابت

1. Two-order Truncated System

زمانی خزش، سرعت بحرانی کاهش می‌یابد. همچنین در این حالت، فرکانس طبیعی، که با بخش موهومی مقادیر ویژه بحرانی بیان می‌شود، افزایش می‌یابد.

حاتمی و همکاران [48] بر مبنای روش باریکه محدود، حلی برای ارتعاشات آزاد ورق متحرک ویسکوالاستیک که تحت بارهای صفحه‌ای می‌باشند، ارائه کردند. ورق مذکور روی غلتک‌هایی که عمود بر راستای حرکت بوده و بدون اصطکاک می‌باشند، حرکت می‌کند. ایشان فرض کردند که تغییر شکلها کوچک بوده و همچنین نیروهای صفحه‌ای و جابجایی‌های عرضی غیرکوچک باشند. با استفاده از معادله دیفرانسیل حاکم بر ارتعاشات ورق متحرک با سرعت ثابت و بکارگیری مدل‌های رئولوژیکی جهت مدلسازی رفتار ویسکوالاستیک مواد، ماتریس سختی دقیقی برای یک باریکه از ورق - که مشابه تیر عمل می‌کند- در حوزة فرکانسی، استخراج کردند. از کنار هم گذاشتن ماتریس سختی این باریکه‌ها، ماتریس سختی کلی حاکم را بدست آوردند که از آن مقادیر ویژه‌ای را که بیانگر ارتعاشات آزاد ورق می‌باشند، در حوزة اعداد مختلط استخراج کردند. در نهایت نیز جهت مشاهده تأثیر سرعت محوری و پارامترهای ویسکوالاستیک بر ارتعاشات آزاد، چند مثال عددی ارائه کردند که در آنها از مدل جامد خطی استاندارد جهت مدلسازی رفتار ویسکوالاستیک استفاده شد.

تحلیل ارتعاشی ورق ویسکوالاستیک نوع لوی با دو تکیه‌گاه ساده و دو لبه آزاد توسط مارینوسکی [15] ارائه شد. وی بر پایه هم‌ارزی الاستیک- ویسکوالاستیک، معادله حالت تعادل ورق متحرک را در حوزة فرکانسی مختلط استخراج کرد. رفتار ماده ورق متحرک را تحت تنش‌های برشی، به صورت مدل سه پارامتری زرن نوع دوم و در هیدرواستاتیک به صورت الاستیک در نظر گرفت. وی در بررسی خود سرعت محوری و نیروی طولی ورق را ثابت فرض کرد. محاسبات عددی تحلیل دینامیکی را برای ورق فولادی انجام داد. اثر سرعت انتقال و زمان رهایش را بر رفتار دینامیکی ورق ویسکوالاستیک متحرک محوری که با مدل‌های رئولوژیکی دو پارامتری کلوین- ویت (مدل تیر) و سه پارامتری زرن مدل شده، مورد تحلیل و مقایسه قرار داد. نتایج نشان داد، سرعت بحرانی بدست آمده از مدل زرن، فقط در مود خمشی پایه، به خوبی با مدل تیر هماهنگ است؛ در هر دو مدل، سرعت بحرانی

با افزایش زمان رهاش، افزایش می‌یابد؛ در مقایسه با ورق الاستیک، سرعت انتقال بحرانی به آرامی افزایش می‌یابد؛ همچنین برای مدل زلزله، سرعت محوری بحرانی بالاتر از مدل کلونین-ویت می‌باشد.

## ۲-۴-۶ مروری بر کاربرد تئوری‌های تغییر شکل برشی در ارتعاشات ورق‌ها

در این قسمت، به معرفی برخی کارهای انجام شده در زمینه ارتعاشات ورق‌هایی که در آنها جهت استخراج معادلات حاکم از تئوری‌های تغییر شکل برشی استفاده شده است، پرداخته می‌شود. تئوری‌های تغییر شکل برشی، به همراه تئوری‌های دیگر ورق و تعاریف مربوط به ورق، در پیوست (ب) آمده است. کیم<sup>۱</sup> و همکاران [49] ارتعاشات غیرخطی ورق‌های کامپوزیتی لایه‌ای ویسکوالاستیک با خیز زیاد را مورد بررسی قرار دادند. ایشان ابتدا بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و تئوری غیر خطی ون کارمن و استفاده از اصل هامیلتون، معادلات حرکت سیستم را استخراج کردند. سپس با استفاده از روش‌های المان محدود و multiple scale به حل این معادلات پرداختند. ایشان اثر خیز با دامنه زیاد را بر طبیعت ائتلافی سیستم و فرکانس طبیعی آن، بررسی کردند.

ری<sup>۲</sup> [50] جهت تحلیل استاتیکی و دینامیکی ورق کامپوزیتی لایه‌ای از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه صفر<sup>۳</sup> (ZSDT) استفاده کردند. وی از مقایسه نتایج خود با کارهای قبلی دریافت که استفاده از تئوری‌های تغییر شکل برشی برای هر دو ورق نازک و ضخیم پاسخ‌های با دقت بالایی ارائه می‌دهد. صالحی و آقایی [51]، بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا، معادلات حاکم بر ورق‌های ویسکوالاستیک دایروی غیرمتقارن را استخراج و با استفاده از روش رهایی پویا<sup>۴</sup> به حل آن پرداختند. برای توصیف حالت ویسکوالاستیک مدل جامد خطی استاندارد را در نظر گرفتند.

رستگار و همکاران [52]، پس از استخراج معادلات بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه

---

1. Tae-Woo Kim  
2. M.C. Ray  
3. Zeroth-order Shear Deformation Theory  
4. Dynamic Relaxation

سوم<sup>۱</sup> (TSDT)، با استفاده از روش المان محدود، فرکانس‌های طبیعی ورق‌های کامپوزیتی مربعی با شرایط مرزی مختلف را بدست آوردند.

ژن<sup>۲</sup> و همکاران [53]، اثر تغییر شکل برشی مرتبه بالا را بر خمش، ارتعاشات و کماتش ورق‌های مستطیلی چندلایه‌ای بررسی کردند. ایشان از بررسی نتایج عددی دریافتند که مقادیر پیش‌بینی شده تنش‌های برشی عرضی، فرکانس‌های طبیعی و بار کماتش ورق‌های ساندویچی با هسته نرم، با نتایج حاصل از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم هم‌خوانی خوبی دارد.

علی‌بیگ‌لو و همکاران، ارتعاشات آزاد [54] و اجباری [55] ورق‌های کامپوزیتی مستطیلی لایه‌ای غیرمتقارن تحت توزیع جرم روی یک مسیر را مورد تحلیل قرار دادند. ایشان بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم و با استفاده از اصل هامیلتون، معادلات حاکم بر سیستم را استخراج کردند. ایشان در مقالات خود اثر اندازه و مساحت توزیع جرم را بر پاسخ سیستم تعیین کردند.

آیدوگدو<sup>۳</sup> [56] تئوری تغییر شکل برشی جدیدی برای ارتعاشات ورق‌های کامپوزیتی لایه‌ای مورد استفاده قرار داد که این تئوری، شرایط مرزی تنش را در بالا و پایین ورق دقیقاً ارضا می‌کند. وی در این تئوری، میدان جابجایی را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\begin{aligned} U(x, y, z : t) &= u(x, y : t) - zw_x + f(z)u_1(x, y : t) \\ V(x, y, z : t) &= v(x, y : t) - zw_y + g(z)v_1(x, y : t) \\ W(x, y, z : t) &= w(x, y : t) \end{aligned} \quad (1-2)$$

توابع  $f(z)$  و  $g(z)$  را توابع تغییر شکل برشی عرضی می‌نامند که با استفاده از تئوری‌های مختلف قابل بیان می‌باشند که آقای آیدوگدو از مدل نمایی جدید به نام خودشان استفاده کرد.

حسینی و همکاران [57]، برای اولین بار، حل بسته<sup>۴</sup> معادله فرکانسی ورق دایروی ضخیم را با شرایط تکیه‌گاهی مختلف، ارائه دادند. ایشان بر پایه تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم ردی و با

---

1. Third- order Shear Deformation Theory  
2. Wu Zhen  
3. Metin Aydogdu  
4. Closed-form

استفاده از اصول هامیلتون و انرژی پتانسیل مینیمم، معادلات تعادل دینامیکی و شرایط مرزی طبیعی سیستم را تعیین کردند. در نهایت فرکانس‌های طبیعی ورق‌های دایروی را برای نسبت‌های مختلف ضخامت و شعاع محاسبه کردند. همچنین وی و همکاران [58]، کار مذکور را روی ارتعاشات آزاد ورق-های مستطیلی ضخیم نوع لوی با تکیه‌گاه‌های مختلف انجام دادند.

حسینی و همکاران [59] در مقاله‌ای دیگر، ارتعاشات آزاد ورق‌های مستطیلی FGM را بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول بررسی کردند. کل ورق را روی بستر الاستیک، دو لبه ورق با تکیه‌گاه ساده و برای دو لبه دیگر تکیه‌گاه‌های مختلفی در نظر گرفتند. خواص مکانیکی را در راستای ضخامت به صورت تابع نمایی متغیر و نسبت پواسون را ثابت فرض کردند. اثرات پارامتر سختی بستر، نسبت تناظر و نسبت ضخامت به طول را بر ارتعاشات آزاد ورق مورد مطالعه قرار دادند.

زیانگ<sup>۱</sup> و همکاران [60]، بر مبنای تئوری بدون مش مرتبه  $n$  تغییر شکل برشی مرتبه سوم ردی، ارتعاشات آزاد ورق کامپوزیتی لایه‌ای را مورد مطالعه قرار دادند. ایشان فرکانس‌های طبیعی ورق کامپوزیتی لایه‌ای را برای شرایط مرزی، نسبت پهنا به ضخامت و خواص ماده‌ی مختلف محاسبه کردند. بر مبنای این تئوری میدان جابجایی را به صورت زیر در نظر گرفتند:

$$\begin{aligned} U &= u(x, y) + z\phi_x(x, y) - \frac{1}{n} \left(\frac{2}{n}\right)^{n-1} z^n (\phi_x(x, y)) + \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \\ V &= v(x, y) + z\phi_y(x, y) - \frac{1}{n} \left(\frac{2}{n}\right)^{n-1} z^n (\phi_y(x, y)) + \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \\ W &= w(x, y) \end{aligned} \quad (2-2)$$

بوسکولو<sup>۲</sup> و بنرجی<sup>۳</sup> [61] با اعمال تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، المان‌های ماتریس سختی را برای ورق تشکیل داده و با استفاده از آن، به تحلیل دقیق ارتعاشات آزاد ورق پرداختند. همچنین از مقایسه نتایج با روشهای المان محدود، دقت خوبی را اعلام کردند.

---

1. Song Xiang  
2. M. Boscolo  
3. J.R. Banerjee

## ۵-۲ جمع‌بندی

در این فصل به معرفی انواع پیوستارها، کاربرد، مسائل مدلسازی، معادلات حاکم بر پیوستارهای متحرک، تاریخچه حل این سازه‌ها و همچنین مروری بر برخی مقالات موجود در زمینه‌های مرتبط با پیوستارهای متحرک محوری و تئوری تغییر شکل برشی پرداخته شده است.

با توجه به مقالات مرور شده، تئوری‌های تغییر شکل برشی به‌ندرت در پیوستارهای متحرک به کار رفته است. بعلاوه در مقالات مربوط به این سیستم‌ها، اغلب جهت سادگی، رفتار ماده را الاستیک فرض کردند و حل‌ها را نیز به صورت عددی انجام دادند. لذا در این پایان‌نامه، بصورت تحلیلی به بررسی ارتعاشات و ب‌های متحرک محوری، بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و تئوری ویسکوالاستیسیته خطی پرداخته می‌شود. رفتار و ب متحرک نیز از نظر پدیدار شناختی، یک‌بعدی و از نظر ساختاری، دوبعدی در نظر گرفته می‌شود.

فصل سوم

استخراج معادلات حرکت

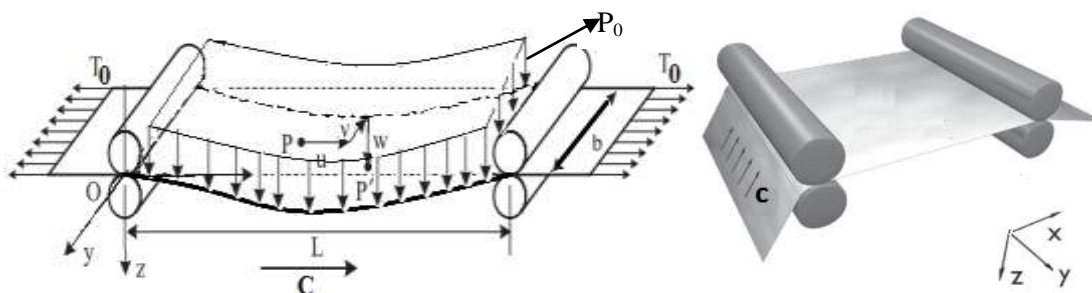
## ۱-۳ مقدمه

با توجه به هدف این پایان نامه که بررسی رفتار ارتعاشاتی وب‌های ویسکوالاستیک متحرک محوری تحت فشار عرضی ثابت می‌باشد، در این فصل، ابتدا به استخراج معادلات حاکم بر ارتعاشات وب‌های الاستیک متحرک محوری تحت فشار عرضی ثابت بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول (FSDT<sup>1</sup>) پرداخته می‌شود. سپس با نظر گرفتن رفتار ماده وب بصورت ویسکوالاستیک در برش و الاستیک در اتساع، معادلات استخراج شده برای حالت ویسکوالاستیک، تعمیم داده می‌شوند. برای شبیه‌سازی رفتار ماده در برش از مدل زبر استفاده می‌شود.

## ۲-۳ استخراج معادلات حاکم بر ارتعاشات وب الاستیک متحرک محوری بر

## مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول

وبی مطابق شکل (۱-۳)، با طول  $L$ ، عرض  $b$ ، ضخامت  $h$  و دانسیته حجمی  $\rho$ ، تحت کشش ثابت محوری  $T_0$  و فشار عرضی ثابت  $P_0$  با سرعت محوری ثابت  $c$ ، بین دو غلتک دوردیغه در دو انتهای آن در حرکت است.



شکل (۱-۳) شماتیک وب متحرک تحت فشار عرضی ثابت  $P_0$  و کشش ثابت  $T_0$

1. First-order Shear Deformation Theory



جهت استخراج معادلات حاکم، فرضیات زیر در نظر گرفته می‌شوند:

- ۱- ضخامت وب کم<sup>۱</sup> و در کل سازه ثابت می‌باشد.
- ۲- تغییر شکل‌های سازه کوچک<sup>۲</sup> است.
- ۳- فشار عرضی و نیروی کشش واحد حجم وارد بر سیستم دارای مقادیری ثابت می‌باشند.
- ۴- نسبت طول به عرض وب بزرگ می‌باشد. با توجه به این فرض، رفتار وب به تیر شبیه‌تر می‌شود و می‌توان از مدل تیر در تحلیل وب استفاده کرد. این فرض برای اکثر کاربردهای وب متحرک، مانند تسمه‌های انتقال قدرت و بار، معتبر می‌باشد.
- ۵- وب دارای خصوصیات ایزوتروپیکی می‌باشد.
- ۶- پدیده‌ی انتشار امواج<sup>۳</sup> الاستیک در صفحه‌ی وب در نظر گرفته نمی‌شود [13].
- ۷- سازه همگن است.
- ۸- غلتک‌ها بدون اصطکاک می‌باشند و فقط حالت غلتشی دارند.

### ۱-۲-۳ میدان جابجایی

بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، میدان جابجایی برای وب نازک به صورت زیر تقریب زده می‌شود [62]:

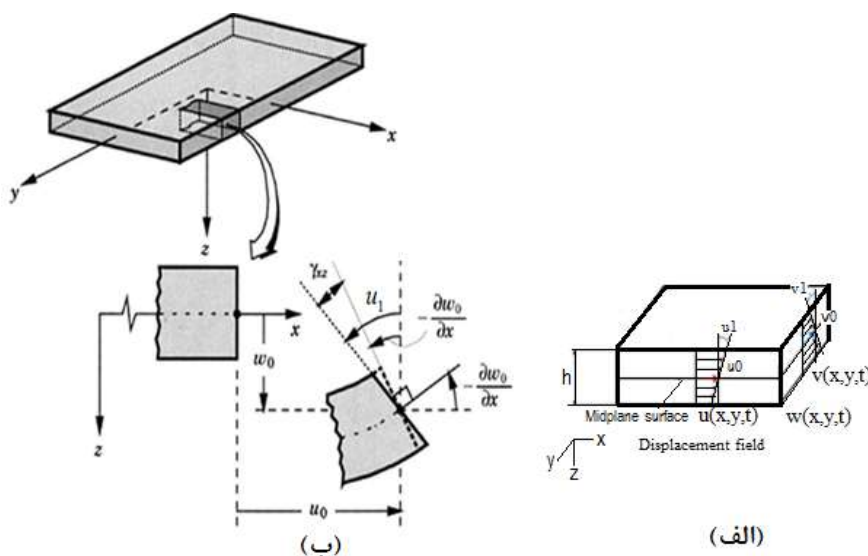
$$\begin{cases} u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) + zu_1(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) + zv_1(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \end{cases} \quad (1-3)$$

که در آن  $u$ ،  $v$  و  $w$  به ترتیب سه مولفه جابجایی در راستای سه محور مختصات  $x$ ،  $y$  و  $z$  می‌باشند.  $u_0$ ،  $v_0$  و  $w_0$  (جابجایی‌های صفحه میانی) پارامترهای مجهول با بعد طول،  $u_1$  و  $v_1$  دارای بعد چرخش بوده و توابع مجهول می‌باشند. بر اساس رابطه (۱-۳)، جابجایی نقاط مختلف وب به صورت

---

1. Thin Web  
2. Small Deflection  
3. Wave Propagation

تابع خطی از ضخامت (محور  $z$ ) تغییر می‌کند (شکل (۲-۳)). بنابراین هر مقطع صاف و عمود بر صفحه میانی، پس از تغییر شکل همچنان صاف ولی غیرعمود بر صفحه میانی باقی می‌ماند (شکل (۲-۳)). در واقع تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، با در نظر گرفتن تغییر شکل عرضی در فرضیات سینماتیکی‌اش (کرنش برشی عرضی ثابت نسبت به مختصات ضخامت)، تئوری ورق کلاسیک (CPT<sup>1</sup>) را بهبود بخشیده است [62].



شکل (۲-۳) الف- میدان جابجایی و ب- نحوه چرخش المان در FSDT

توضیحات مفصل‌تر مربوط به تئوری ورق کلاسیک، تئوری‌های تغییر شکل برشی و تفاوت آنها در پیوست (ب) آمده است.

### ۲-۲-۳ نتیجه‌های تنش

با توجه به میدان جابجایی (۱-۳)، روابط کرنش-جابجایی برای حالت خیز کوچک به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial u_1}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial v_1}{\partial y} \\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = u_1 + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = v_1 + \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{array} \right. \quad (2-3)$$

بر اساس میدان کرنش فوق، روابط تنش - کرنش به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = (\lambda + 2G) \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + \lambda \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \\ \sigma_y = (\lambda + 2G) \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) + \lambda \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \\ \sigma_z = \lambda \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \right) \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \tau_{xy} = G \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) \right) \\ \tau_{xz} = G \left( u_1 + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\ \tau_{yz} = G \left( v_1 + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \end{array} \right. \quad (3-3)$$

که در آن  $\lambda = \frac{\nu E}{(1-\nu)(1+\nu)}$  اولین ضریب لامه<sup>۱</sup> می‌باشد.

منتجه‌های تنش  $N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\left\{ \begin{array}{l} N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz \\ N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz \\ N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} M_x = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_x dz \\ M_y = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_y dz \\ M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} z \tau_{xy} dz \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} K_s \tau_{xz} dz \\ Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} K_s \tau_{yz} dz \end{array} \right. \quad (4-3)$$

منتجه‌های تنش فوق، در المان شکل (ب- ۲) نشان داده شده‌اند.

در روابط (۴-۳)، ضریب تصحیح برشی می‌باشد که در واقع اختلاف بین نیروی برشی عرضی واقعی و آنچه که با استفاده از روابط سینماتیکی FSDT بدست می‌آید را تصحیح می‌کند [62]. این ضریب علاوه بر هندسه سازه، به بارگذاری و شرایط مرزی ورق نیز وابسته می‌باشد [56]. از آنجا که برای ورق‌های مستطیلی مقدار  $K_s = 5/6$  نتایج دقیق‌تری را ارائه می‌دهد [63]، در این پایان‌نامه، مقدار مذکور برای این پارامتر منظور شده است.

1. Lamé's Factor

### ۳-۲-۳ محاسبه انرژی کرنشی وب الاستیک متحرک

چگالی انرژی کرنشی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\bar{U}_s = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) \quad (۵-۳)$$

با انتگرالگیری رابطه فوق روی حجم وب، انرژی کرنشی وب تعیین می‌شود. با در نظر گرفتن المان

حجم  $dV = dA dz = dx dy dz$ ، رابطه انرژی کرنشی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$U_s = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dz dx dy \quad (۶-۳)$$

تغییرات<sup>۱</sup> انرژی کرنشی برابر است با:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} U_s dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^b \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}) dz dx dy dt \quad (۷-۳)$$

### ۴-۲-۳ محاسبه انرژی جنبشی وب الاستیک متحرک

انرژی جنبشی سیستم، برابر با مجموع انرژی‌های جنبشی تک تک ذرات آن می‌باشد. یعنی:

$$T = \frac{1}{2} \int \bar{V}^2 dm \quad (۸-۳)$$

که  $\bar{V}$  مقدار سرعت کلی یک المان جرم سیستم می‌باشد. با در نظر گرفتن المان جرم به صورت

$dm = \rho dV$  و با توجه به اینکه سرعت کلی هر ذره برابر با مقدار برآیند مؤلفه‌های سرعت آن می‌باشد،

انرژی جنبشی کل سیستم برابر است با:

$$T = \frac{1}{2} \iint_A \int_{-h/2}^{h/2} \rho (V^2) dz dx dy = \frac{1}{2} \iint_A \int_{-h/2}^{h/2} \rho (V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) dz dx dy \quad (۹-۳)$$

مؤلفه‌های سرعت  $V_x$ ،  $V_y$  و  $V_z$  می‌باشند که با توجه به توصیف مادی (لاگرانژی)<sup>۲</sup> مشتق‌گیری

متغیرها تعیین می‌شوند. در توصیف فضایی، مشتق‌گیری متغیرها به صورت زیر انجام می‌شود:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t} \quad i = 1..3, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z \quad (۱۰-۳)$$

1. Variation  
2. Material (Lagrange's) Description

در رابطه فوق  $\frac{\partial x_i}{\partial t} = v_i$  که  $v_i$  سرعت انتقالی سیستم در راستای محور  $x_i$  می باشد.

با توجه به رابطه (۳-۱۰) مولفه های سرعت سیستم به صورت زیر بیان می شود:

$$\begin{aligned} V_x &= c + \frac{du}{dt} = c + \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} \\ V_y &= \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + c \frac{\partial v}{\partial x} \\ V_z &= \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + c \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \quad (۱۱-۳)$$

با جایگذاری رابطه (۳-۱۱) در رابطه (۳-۹) و تغییرات انرژی جنبشی نیز تعیین می شود.

### ۳-۲-۵ محاسبه کار حاصل از نیروهای خارجی اعمالی

کار حاصل از نیروهای خارجی از دو قسمت، یکی مربوط به فشار عرضی ( $W_1$ ) و دیگری نیروی

کششی ( $W_2$ ) تشکیل می شود.

کار حاصل از بار فشاری یکنواخت  $P_0$  که مطابق شکل (۳-۱) به طور عمودی (عرضی) بر وب وارد

می شود و تغییرات آن برابر است با:

$$\begin{aligned} W_1 &= \int_0^b \int_0^L P_0 w dx dy = \int_0^b \int_0^L P_0 w_0 dx dy \\ \delta \int_{t_1}^{t_2} W_1 dt &= \int_{t_1}^{t_2} \int_0^b \int_0^L P_0 \delta w_0 dx dy dt \end{aligned} \quad (۱۲-۳)$$

با فرض اینکه نیروی کشش بر واحد حجم تحت زاویه کوچک  $\theta$  (که  $\sin \theta = \theta, \cos \theta = 1$ ) نسبت

به محور  $x$  در صفحه  $xz$  به وب اعمال شده باشد، نیروهای کششی در راستاهای  $x$  و  $z$  برابرند با:

$$\begin{aligned} T_{0x} &= T_0 \cos \theta \Rightarrow T_{0x} = T_0 \\ T_{0z} &= T_0 \sin \theta \Rightarrow T_{0z} = T_0 \theta \end{aligned} \quad (۱۳-۳)$$

بنابراین کار مربوط به نیروی کشش در راستای  $x$  و تغییرات آن به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$\begin{aligned} dW_{2x} &= (T_0 dx dy dz) u = (T_0 dx dy dz) \cdot (u_0 + z u_1) \Rightarrow W_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^b \int_0^L T_0 \cdot (u_0 + z u_1) dx dy dz \\ \Rightarrow W_{2x} &= \int_0^b \int_0^L T_0 h u_0 dx dy \Rightarrow \delta W_{2x} = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^b \int_0^L T_0 h \delta u_0 dx dy dt \end{aligned} \quad (۱۴-۳)$$

کار نیروی کشش در راستای  $z$  و تغییرات آن نیز برابر است با:

$$dW_{2z} = (T_{0z} dx dy dz) w_0 \Rightarrow W_{2z} = \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^b \int_0^L T_{0z} w_0 dx dy dz$$

$$\Rightarrow W_{2z} = \int_0^b \int_0^L T_{0z} h w_0 dx dy \Rightarrow \delta W_{2z} = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^b \int_0^L T_{0z} h \delta w_0 dx dy dt \quad (15-3)$$

با توجه به اینکه  $\theta = \tan \theta = \frac{dw}{dx} = \frac{dw_0}{dx}$ ، با جایگزینی  $T_0 \frac{dw_0}{dx}$  بجای  $T_{0z}$  در رابطه فوق، تغییرات

کار نیروی کشش در راستای z را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\delta W_{2z} = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^b \int_0^L T_0 h \frac{dw_0}{dx} \delta w_0 dx dy dt \quad (16-3)$$

تغییرات کل کار نیروهای خارجی نیز برابر است با:  $\delta W = \delta W_1 + \delta W_{2x} + \delta W_{2z}$ .

### ۳-۲-۶ استخراج معادله حاکم بر وب الاستیک متحرک با استفاده از اصل هامیلتون

معادله حاکم بر حرکت وب در بازه زمانی  $(t_0, t_1)$  باید اصل هامیلتون را ارضا کند. بر اساس این

اصل:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - U_s + W) dt = 0 \quad (17-3)$$

که در آن T انرژی جنبشی،  $U_s$  انرژی کرنشی و W کار انجام شده توسط نیروهای خارجی سیستم

می باشند. با جایگزینی روابط مربوط به انرژی کرنشی، جنبشی و کار نیروهای خارجی در اصل

هامیلتون، معادلات حاکم بر ارتعاشات وب الاستیک متحرک محوری تحت فشار عرضی یکنواخت،

کشش ثابت و سرعت انتقال متغیر با زمان، برای هر یک از مؤلفه های جابجایی، به صورت دستگاه

معادلات دیفرانسیل زیر به دست می آیند:

$$Eq1(\delta u_0): \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + T_0 h = \rho h \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left( c \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + c \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial t} + c^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right)$$

$$Eq2(\delta v_0): \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = \rho h \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left( c \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + c \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial t} + c^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right)$$

$$Eq3(\delta w_0): \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + T_0 h \frac{\partial w_0}{\partial x} + P_0 = \rho h \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left( c \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + c \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} + c^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \quad (18-3)$$

$$Eq4(\delta u_1): \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = \frac{\rho h^3}{12} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left( c \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + c \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial t} + c^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \right)$$

$$Eq5(\delta v_1): \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = \frac{\rho h^3}{12} \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left( c \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) + c \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial t} + c^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \right)$$

با فرض اینکه سرعت انتقال وب ثابت باشد، دستگاه معادلات فوق، به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\begin{aligned}
 Eq1: \quad & \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + T_0 h = \rho h \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + 2c \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial t} + c^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right) \\
 Eq2: \quad & \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = \rho h \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + 2c \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial t} + c^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) \\
 Eq3: \quad & \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + T_0 h \frac{\partial w_0}{\partial x} + P_0 = \rho h \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + 2c \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} + c^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \quad (19-3) \\
 Eq4: \quad & \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = \frac{\rho h^3}{12} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + 2c \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial t} + c^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \right) \\
 Eq5: \quad & \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = \frac{\rho h^3}{12} \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + 2c \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial t} + c^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \right)
 \end{aligned}$$

دستگاه معادلات (۱۹-۳)، معادله حاکم بر ارتعاشات یک وب الاستیک نازک دارای سرعت محوری

ثابت می‌باشد. این دستگاه شامل پنج معادله دیفرانسیل مشتق جزئی و پنج مجهول  $(u_0, v_0, w_0, u_1, v_1)$

می‌باشد که به هم کوپل می‌باشند و باید با همدیگر حل شوند.

قابل ذکر است، با صفر قرار دادن سرعت انتقال وب معادلات حرکت ارتعاشات وب الاستیک ساکن

بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول حاصل می‌شود [62]:

$$\begin{aligned}
 Eq1: \quad & \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = \rho h \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \\
 Eq2: \quad & \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = \rho h \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \\
 Eq3: \quad & \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = \rho h \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad (20-3) \\
 Eq4: \quad & \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \\
 Eq5: \quad & \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}
 \end{aligned}$$

### ۳-۳ تعمیم معادلات استخراج شده به وبهای ویسکوالاستیک متحرک محوری

همانگونه که در فصل اول گفته شد، مرسوم است جهت توصیف رفتار ویسکوالاستیک یک سیستم

تحت کشش چند محوری، اثر مؤلفه برشی را از مؤلفه تغییر حجم خالص جدا کنند که این قاعده به

دلیل پاسخ متفاوت ماده ویسکوالاستیک در برش و اتساع می‌باشد (بخش ۱-۶). با توجه به مطالب ذکر شده در بخش ۱-۷، مدل زلزله نوع دوم (شکل ۱-۳) جهت توصیف رفتار ویسکوالاستیک وب متحرک استفاده می‌شود. همچنین با توجه به مطالب بخش ۱-۸، رفتار ماده ویسکوالاستیک وب متحرک در اتساع، الاستیک در نظر گرفته می‌شود. جهت تعمیم معادلات حالت الاستیک به ویسکوالاستیک، از شکل دیفرانسیلی معادلات بنیادین تنش- کرنش که در بخش ۱-۶ مطرح شد، استفاده می‌شود.

با توجه به اینکه ماده وب در برش از مدل زلزله نوع دوم پیروی می‌کند، مطابق رابطه (۱-۱۴) اپراتورهای  $P_1$  و  $Q_1$  که در معادلات (۱-۸) آمده است، به صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$P_1(D) = D + \frac{1}{\tau}$$

$$Q_1(D) = 2((E_1 + E_2)D + \frac{E_2}{\tau}) \quad (21-3)$$

که  $\tau$  زمان رهایش  $\tau = \frac{\eta}{E_1}$  و  $D$  اپراتور مشتق زمانی  $(D = \frac{\partial}{\partial t})$  می‌باشند. ضریب دو ظاهر شده در  $Q_1(D)$ ، به این دلیل است که در رابطه (۱-۸)، برای بخش انحرافی تنش (یعنی  $i \neq j$ )،  $\varepsilon_{ij} = 2\gamma_{ij}$  می‌باشد. همچنین با توجه به رفتار الاستیک ماده وب در اتساع، اپراتورهای  $P_2$  و  $Q_2$  به صورت زیر تعیین می‌شوند [4]:

$$P_2 = 1$$

$$Q_2 = 3K \quad (22-3)$$

با استفاده از روابط (۲۱-۳) و (۲۲-۳)، (۱-۱۰) و (۱-۱۲) پارامترهای  $E$ ،  $G$  و  $\nu$  به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$E(D) = \frac{9K(D\tau E_1 + D\tau E_2 + E_2)}{D\tau E_1 + D\tau E_2 + E_2 + k_0 D\tau + 3K}$$

$$\nu(D) = \frac{3K(D\tau + 1) - 2(D\tau E_1 + D\tau E_2 + E_2)}{2(D\tau E_1 + D\tau E_2 + E_2 + 3KD\tau + 3K)} \quad (23-3)$$

$$G(D) = \frac{D\tau E_1 + D\tau E_2 + E_2}{D\tau + 1}$$



حال، ابتدا به کمک پارامترهای فوق، مؤلفه‌های تنش رابطه (۳-۳) بر حسب میدان جابجایی تعیین می‌شوند. سپس با استفاده از مؤلفه‌های تنش مذکور، نتیجه‌های تنش رابطه (۳-۴) بدست می‌آیند. با جایگزینی این نتیجه‌های تنش در دستگاه معادلات حاکم بر وب الاستیک متحرک (رابطه (۳-۱۹))، این معادلات، برای وب ویسکوالاستیک متحرک محوری (با سرعت انتقال ثابت) تعمیم می‌یابند.

شکل کلی معادلات حاکم بر وب ویسکوالاستیک متحرک محوری را در حالت دوبعدی می‌توان به

شکل ماتریسی زیر نوشت:

$$\begin{aligned}
 & [A'_1]y' + [A'_2]\frac{\partial y'}{\partial x} + [A'_3]\frac{\partial y'}{\partial y} + [A'_4]\frac{\partial^2 y'}{\partial x^2} + [A'_5]\frac{\partial^2 y'}{\partial y^2} + [A'_6]\frac{\partial^2 y'}{\partial x \partial y} + [A'_7]\frac{\partial^2 y'}{\partial x \partial t} + [A'_8]\frac{\partial^2 y'}{\partial y \partial t} + \\
 & [A'_9]\frac{\partial^3 y'}{\partial x^2 \partial t} + [A'_{10}]\frac{\partial^3 y'}{\partial y^2 \partial t} + [A'_{11}]\frac{\partial^3 y'}{\partial x \partial t^2} + [A'_{12}]\frac{\partial^3 y'}{\partial y \partial t^2} + [A'_{13}]\frac{\partial^4 y'}{\partial x^2 \partial t^2} + [A'_{14}]\frac{\partial^4 y'}{\partial y^2 \partial t^2} + [A'_{15}]\frac{\partial^4 y'}{\partial x \partial t^3} \\
 & + [A'_{16}]\frac{\partial^3 y'}{\partial x \partial y \partial t} + [A'_{17}]\frac{\partial^4 y'}{\partial x \partial y \partial t^2} + [A'_{18}]\frac{\partial y'}{\partial t} + [A'_{19}]\frac{\partial^2 y'}{\partial t^2} + [A'_{20}]\frac{\partial^3 y'}{\partial t^3} + [A'_{21}]\frac{\partial^3 y'}{\partial t^4} = \{f\}
 \end{aligned} \quad (۳-۲۴)$$

که در آن  $y'$  بردار جابجایی،  $\{f\}$  بردار نیرو و  $[A'_1]$  تا  $[A'_{21}]$  ماتریس‌های ضرایب در حالت دوبعدی می‌باشند که درایه‌های این ماتریس‌ها، پارامترهای مدل رئولوژیکی و خواص فیزیکی و هندسی وب را شامل می‌شوند.

از آنجا که حل تحلیلی معادله فوق بسیار مشکل می‌باشد، با توجه به فرض چهارم در بخش ۳-۲،

$$\frac{\partial}{\partial y} = 0$$

قرار داده می‌شود که این فرض مشابه حالت تقارن محوری در مختصات قطبی می‌باشد. در

این صورت معادلات حاکم از حالت دوبعدی به حالت یکبعدی تبدیل می‌شوند. این معادلات را می-

توان در فضای ماتریسی به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}
 & [A_1]y + [A_2]\frac{\partial y}{\partial x} + [A_3]\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + [A_4]\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + [A_5]\frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial t} + [A_6]\frac{\partial^3 y}{\partial x \partial t^2} + [A_7]\frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} \\
 & + [A_8]\frac{\partial^4 y}{\partial x \partial t^3} + [A_9]\frac{\partial y}{\partial t} + [A_{10}]\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + [A_{11}]\frac{\partial^3 y}{\partial t^3} + [A_{12}]\frac{\partial^3 y}{\partial t^4} = \{f\}
 \end{aligned} \quad (۳-۲۵)$$

در این حالت، بردار جابجایی  $\{y\}$ ، بردار نیروی  $\{f\}$  و ماتریس‌های ضرایب  $[A_1]$  تا  $[A_{12}]$  به صورت

زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned}
 \{y\} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix}; \{f\} = \begin{Bmatrix} 2T_0A \\ 0 \\ 2P_0A \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; [A_1] = \begin{bmatrix} 0,0,0,0,0 \\ 0,0,0,0,0 \\ 0,0,0,0,0 \\ 0,0,0,24K_sE_2A,0 \\ 0,0,0,0,24K_sE_2A \end{bmatrix}; [A_2] = \begin{bmatrix} 0,0,0,0,0 \\ 0,0,0,0,0 \\ 0,0,-2T_0hA,-2K_sE_2hA,0 \\ 0,0,24K_sE_2A,0,0 \\ 0,0,0,0,0 \end{bmatrix} \\
 [A_3] = \begin{bmatrix} 2\rho c^2A-8E_2B,0,0,0,0 \\ 0,2A(\rho c^2-E_2),0,0,0 \\ 0,0,2hA(\rho hc^2-E_2K_s),0,0 \\ 0,0,0,h^2(2\rho c^2A-8E_2B),0 \\ 0,0,0,0,2h^2A(\rho hc^2-E_2) \end{bmatrix}; [A_4] = \begin{bmatrix} 4A\rho c,0,0,0,0 \\ 0,4A\rho c,0,0,0 \\ 0,0,4h(A\rho c-C\tau T_0),-2h\tau K_sH,0 \\ 0,0,24K_s\tau H,4A\rho h^2c,0 \\ 0,0,0,0,4A\rho h^2c \end{bmatrix} \\
 [A_5] = \begin{bmatrix} 4C\tau\rho c^2-8\tau D,0,0,0,0 \\ 0,4C\tau\rho c^2-2\tau H,0,0,0 \\ 0,0,2h\tau(2C\rho c^2-K_sH),0,0 \\ 0,0,0,4h^2\tau(C\rho c^2-2D),0 \\ 0,0,0,0,2h^2\tau(2C\rho c^2-H) \end{bmatrix}; [A_6] = \begin{bmatrix} 8C\tau\rho c,0,0,0,0 \\ 0,8C\tau\rho c,0,0,0 \\ 0,0,2h\tau(4C\rho c-\tau T_0M),-2h\tau^2K_sEM,0 \\ 0,0,24h^2\tau^2K_sEM,8Ch^2\tau\rho c,0 \\ 0,0,0,0,8Ch^2\tau\rho c \end{bmatrix} \quad (26-3) \\
 [A_7] = \begin{bmatrix} 2\tau^2(\rho c^2M-4EF),0,0,0,0 \\ 0,2\tau^2M(\rho c^2-E),0,0,0 \\ 0,0,2h\tau^2M(\rho c^2-K_sE),0,0 \\ 0,0,0,2h^2\tau^2(\rho c^2M-4EF),0 \\ 0,0,0,0,2h^2\tau^2M(\rho c^2-E) \end{bmatrix}; [A_8] = \begin{bmatrix} 4\rho\tau^2cM,0,0,0,0 \\ 0,4\rho\tau^2cM,0,0,0 \\ 0,0,4\rho h\tau^2cM,0,0 \\ 0,0,0,4\rho h^2\tau^2cM,0 \\ 0,0,0,0,4\rho h^2\tau^2cM \end{bmatrix}; [A_9] = \begin{bmatrix} 0,0,0,0,0 \\ 0,0,0,0,0 \\ 0,0,0,0,0 \\ 0,0,0,24\tau K_sH,0 \\ 0,0,0,0,24\tau K_sH \end{bmatrix} \\
 [A_{10}] = \begin{bmatrix} 2\rho A,0,0,0,0 \\ 0,2\rho A,0,0,0 \\ 0,0,2\rho hA,0,0 \\ 0,0,0,2\rho h^2A+24K_s\tau^2EM,0 \\ 0,0,0,0,2\rho h^2A+24K_s\tau^2EM \end{bmatrix}; [A_{11}] = \begin{bmatrix} 4C\rho\tau,0,0,0,0 \\ 0,4C\rho\tau,0,0,0 \\ 0,0,4C\rho h\tau,0,0 \\ 0,0,0,4C\rho h^2\tau,0 \\ 0,0,0,0,4C\rho h^2\tau \end{bmatrix}; [A_{12}] = \begin{bmatrix} 2M\rho\tau^2,0,0,0,0 \\ 0,2M\rho\tau^2,0,0,0 \\ 0,0,2M\rho h\tau^2,0,0 \\ 0,0,0,2M\rho h^2\tau^2,0 \\ 0,0,0,0,2M\rho h^2\tau^2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

که در آن:

$$\begin{aligned}
 E = E_1 + E_2; A = 3K + 4E_2; B = 3K + E_2; C = 3K + 2E + 2E_2; D = 3KE_2 \\
 + 3KE + 2EE_2; M = 3K + 4E; F = 3K + E; H = 3KE + 3KE_2 + 8EE_2 \quad (27-3)
 \end{aligned}$$

در واقع هدف اصلی این پایان نامه، یافتن جابجایی‌های مجهول مسئله از طریق حل معادله (۲۵-۳)

و بررسی پارامترهای مؤثر بر آن، از جمله فرکانس‌های طبیعی، سرعت بحرانی و ... می‌باشد.

### ۴-۳ معادلات حاکم بر وب الاستیک متحرک محوری با فرض نسبت طول به

#### عرض بزرگ

جهت اعمال فرض ۴ در وب الاستیک متحرک،  $\frac{\partial}{\partial y} = 0$  در معادله (۳-۱۹) قرار داده می‌شود. در

این صورت، پس از جایگذاری نتیجه‌های تنش (۳-۴) در معادلات مذکور، معادلات حاکم به شکل

ماتریسی زیر تبدیل می‌شود:

$$[\bar{A}_1]y + [\bar{A}_2]\frac{\partial y}{\partial x} + [\bar{A}_3]\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + [\bar{A}_4]\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + [\bar{A}_5]\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \{\bar{f}\} \quad (۳-۲۸)$$

در رابطه فوق  $y$  بردار جابجایی،  $\{\bar{f}\}$  بردار نیرو و  $[\bar{A}_1]$  تا  $[\bar{A}_5]$  ماتریس‌های ضرایب می‌باشند که

درایه‌های این ماتریس‌ها خواص مکانیکی وب را شامل می‌شوند و بصورت زیر می‌باشند:

$$\{y\} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix}; \{\bar{f}\} = \begin{Bmatrix} T_0(1-\nu^2) \\ 0 \\ 2P_0(1+\nu) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; [\bar{A}_1] = \begin{bmatrix} 0,0,0,0,0 \\ 0,0,0,0,0 \\ 0,0,0,0,0 \\ 0,0,0,6K_s E(1-\nu),0 \\ 0,0,0,0,12K_s E \end{bmatrix}$$

$$[\bar{A}_2] = \begin{bmatrix} 0,0,0,0,0 \\ 0,0,0,0,0 \\ 0,0,-2T_0 h(1+\nu),-K_s E h,0 \\ 0,0,6K_s E(1-\nu),0,0 \\ 0,0,0,0,0 \end{bmatrix}; [\bar{A}_3] = \begin{bmatrix} \rho c^2(1-\nu^2)-E,0,0,0,0 \\ 0,2\rho c^2(1+\nu)-E,0,0,0 \\ 0,0,h(2\rho c^2(1+\nu)-K_s E),0,0 \\ 0,0,0,h^2(\rho c^2(1-\nu^2)-E),0 \\ 0,0,0,0,h^2(2\rho c^2(1+\nu)-E) \end{bmatrix} \quad (۳-۲۹)$$

$$[\bar{A}_4] = \begin{bmatrix} 2\rho c(1-\nu^2),0,0,0,0 \\ 0,4\rho c(1+\nu),0,0,0 \\ 0,0,4\rho h c(1+\nu),0,0 \\ 0,0,0,2\rho h^2 c(1-\nu^2),0 \\ 0,0,0,0,4\rho h^2 c(1+\nu) \end{bmatrix}; [\bar{A}_5] = \begin{bmatrix} \rho(1-\nu^2),0,0,0,0 \\ 0,2\rho(1+\nu),0,0,0 \\ 0,0,2\rho h(1+\nu),0,0 \\ 0,0,0,\rho h^2(1-\nu^2),0 \\ 0,0,0,0,2\rho h^2(1+\nu) \end{bmatrix}$$

معادلات (۳-۲۹) صرفاً جهت مقایسه رفتار وب الاستیک متحرک با وب ویسکوالاستیک متحرک،

در فصول بعدی استخراج و بیان شده‌اند.

### ۳-۵ جمع بندی

در این فصل، بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول معادلات حاکم بر ارتعاشات وب الاستیک متحرک محوری در حالت دوبعدی استخراج شدند. سپس با در نظر گرفتن مدل زبر نوع دوم جهت توصیف رفتار ویسکوالاستیک وب متحرک در برش و رفتار الاستیک در اتساع، با استفاده از شکل دیفرانسیلی معادلات بنیادین، معادلات مذکور برای وب ویسکوالاستیک متحرک تعمیم داده شدند. معادلات حاکم به صورت یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مشتق جزئی شامل پنج معادله و پنج مجهول می‌باشند. به دلیل مشکلات حل این معادلات در حالت دوبعدی، با فرض اینکه نسبت طول به عرض وب بزرگ می‌باشد، تغییرات نسبت به مختصه  $y$  برابر صفر قرار داده شد. به این ترتیب معادلات فقط شامل متغیرهای بعد طولی و زمان می‌باشند. همچنین، با توجه به فرض مذکور، معادلات حاکم بر وب الاستیک متحرک تعیین شدند. در فصل بعدی به حل ریاضی این معادلات پرداخته می‌شود.

فصل چہارم

حل تھیلی

## ۴-۱ مقدمه

در فصل پیشین، بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، دستگاه معادلات دیفرانسیل مشتق جزئی حاکم بر ارتعاشات وب ویسکوالاستیک متحرک محوری استخراج شد. با فرض اینکه نسبت طول به عرض وب بزرگ می‌باشد، این معادلات شامل مشتقات جزئی نسبت به متغیرهای زمان و بعد طولی وب متحرک ( $x$ ) می‌باشند. حل دستگاه معادلات مذکور شامل دو بخش حل عمومی و خصوصی خواهد بود. از آنجا که در تعیین حل این دستگاه معادلات، از تئوری اغتشاشات<sup>۱</sup> استفاده می‌شود، ابتدا معادلات بی‌بعد می‌شوند. سپس از معادلات بی‌بعد شده تبدیل لاپلاس<sup>۲</sup> نسبت به متغیر زمان گرفته می‌شود. در ادامه، با توجه به این که مسئله حاضر جزء مسائل لایه مرزی دسته‌بندی می‌شود، به کمک روش MAE<sup>۳</sup> پاسخ در حوزه لاپلاس به دست می‌آید. با محاسبه لاپلاس معکوس پاسخ بدست آمده با استفاده از قضیه مانده‌ها<sup>۴</sup>، پاسخ نهایی سیستم در محیط بی‌بعد (زمان و مکان بی‌بعد) تعیین می‌شود. همچنین، روش‌های تعیین سرعت بحرانی و فرکانس طبیعی بیان می‌شود.

## ۴-۲ بی‌بعدسازی معادلات

ابتدا با تعریف پارامترهای بی‌بعد اولیه زیر، معادلات حاکم را بی‌بعد می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{x}{L}; t^* = \frac{t}{t_0} \\ u_0^* &= \frac{u_0}{h_0}; v_0^* = \frac{v_0}{h_0}; w_0^* = \frac{w_0}{h_0} \\ E_1^* &= \frac{E_1}{K}; E_2^* = \frac{E_2}{K}; E^* = E_1^* + E_2^* \end{aligned} \quad (1-4)$$

$x^*, t^*$  به ترتیب مکان و زمان بی‌بعد،  $w_0^*, v_0^*, u_0^*$  نیز به ترتیب جابجایی‌های بی‌بعد مولفه‌های  $u_0$

،  $v_0$  و  $w_0$  می‌باشند. قابل ذکر است، مولفه‌های جابجایی  $u_1$  و  $v_1$  خودشان بی‌بعد می‌باشند.  $t_0, h_0$

- 
1. Perturbation Theory
  2. Laplace Transformation
  3. Matched Asymptotic Expansion
  4. Residual Theorem

پارامترهای اختیاری می‌باشند که در این پایان‌نامه مقادیر آنها به صورت  $t_0 = \tau, h_0 = h$  در نظر گرفته شده است.

با توجه به پارامترهای بی‌بعد فوق، اپراتورهای مشتق بی‌بعد شده به صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{1}{t_0} \frac{\partial}{\partial t^*}; \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{1}{t_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^{*2}}; \frac{\partial^3}{\partial t^3} = \frac{1}{t_0^3} \frac{\partial^3}{\partial t^{*3}}; \frac{\partial^4}{\partial t^4} = \frac{1}{t_0^4} \frac{\partial^4}{\partial t^{*4}} \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial x^*}; \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}}; \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} = \frac{1}{Lt_0} \frac{\partial^2}{\partial x^* \partial t^*}; \frac{\partial^3}{\partial x \partial t^2} = \frac{1}{Lt_0^2} \frac{\partial^3}{\partial x^* \partial t^{*2}} \\ \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} &= \frac{1}{L^2 t_0} \frac{\partial^3}{\partial x^{*2} \partial t^*}; \frac{\partial^4}{\partial x \partial t^3} = \frac{1}{Lt_0^3} \frac{\partial^4}{\partial x^* \partial t^{*3}}; \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} = \frac{1}{L^2 t_0^2} \frac{\partial^4}{\partial x^{*2} \partial t^{*2}} \end{aligned} \quad (۲-۴)$$

با اعمال پارامترها و اپراتورهای بی‌بعد فوق در معادلات (۳-۲۵) و ماتریس‌های ضرایب (۳-۲۶)

پارامترهای بی‌بعد جدیدی در معادلات ظاهر می‌شوند که به صورت زیر نام‌گذاری می‌شوند:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{h_0}{L}; c^* = c \frac{t_0}{h_0}; \frac{\rho h_0^2}{K t_0^2} = e; R = \frac{\tau}{t_0} = 1 \\ \frac{\rho c h}{K t_0} &= e c^*; \frac{\rho c^2}{K} = e c^{*2} \end{aligned} \quad (۳-۴)$$

در نهایت معادلات بی‌بعد شده را می‌توان به صورت ماتریسی زیر نوشت:

$$\begin{aligned} [A_1^*] y^* + \varepsilon [A_2^*] \frac{\partial y^*}{\partial x^*} + \varepsilon^2 [A_3^*] \frac{\partial^2 y^*}{\partial x^{*2}} + \varepsilon [A_4^*] \frac{\partial^2 y^*}{\partial x^* \partial t^*} + \varepsilon^2 [A_5^*] \frac{\partial^3 y^*}{\partial x^{*2} \partial t^*} + \varepsilon [A_6^*] \frac{\partial^3 y^*}{\partial x^* \partial t^{*2}} \\ + \varepsilon^2 [A_7^*] \frac{\partial^4 y^*}{\partial x^{*2} \partial t^{*2}} + \varepsilon [A_8^*] \frac{\partial^4 y^*}{\partial x^* \partial t^{*3}} + [A_9^*] \frac{\partial y^*}{\partial t^*} + [A_{10}^*] \frac{\partial^2 y^*}{\partial t^{*2}} + [A_{11}^*] \frac{\partial^3 y^*}{\partial t^{*3}} + [A_{12}^*] \frac{\partial^4 y^*}{\partial t^{*4}} = \{f^*\} \end{aligned} \quad (۴-۴)$$

که با تعریف پارامترهای بی‌بعد زیر:

$$\begin{cases} \bar{A} = 3 + 4E_2^* \\ \bar{B} = 3 + E_2^* \\ \bar{C} = 3 + 2E_2^* + 2E_2^* \\ \bar{D} = 3E_2^* + 3E_2^* + 2E_2^* E_2^* \end{cases} \begin{cases} \bar{E} = 3 + 4E^* \\ \bar{F} = 3 + E^* \\ \bar{G} = 3E_2^* + 3E^* + 8E^* E_2^* \end{cases} \quad (۵-۴)$$

بردار جابجایی بی‌بعد  $\{y^*\}$ ، بردار نیروی بی‌بعد  $\{f^*\}$  و ماتریس‌های ضرایب بی‌بعد  $[A_1^*]$  تا  $[A_{12}^*]$

عبارتند از:

$$\{y^*\} = \begin{Bmatrix} u_0^* \\ v_0^* \\ w_0^* \\ u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix}; \{f^*\} = \begin{Bmatrix} 2\frac{T_0 h}{K} \bar{A} \\ 0 \\ 2\frac{P_0}{K} \bar{A} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; [A_1^*] = \begin{bmatrix} 0,0,0,0,0 \\ 0,0,0,0,0 \\ 0,0,0,0,0 \\ 0,0,0,24K_s E_2^* \bar{A},0 \\ 0,0,0,0,24K_s E_2^* \bar{A} \end{bmatrix}; [A_2^*] = \begin{bmatrix} 0,0,0,0,0 \\ 0,0,0,0,0 \\ 0,0,-2\bar{A}\frac{T_0 h}{K},-2K_s E_2^* \bar{A},0 \\ 0,0,24K_s E_2^* \bar{A},0,0 \\ 0,0,0,0,0 \end{bmatrix}$$

$$[A_3^*] = \begin{bmatrix} 2ec^* \bar{A} - 8E_2^* \bar{B}, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 2\bar{A}(ec^{*2} - E_2^*), 0, 0, 0 \\ 0, 0, 2\bar{A}(ec^* - E_2^* K_s), 0, 0 \\ 0, 0, 0, 2ec^* \bar{A} - 8E_2^* \bar{B}, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 2\bar{A}(ec^{*2} - E_2^*) \end{bmatrix}; [A_4^*] = \begin{bmatrix} 4\bar{A}ec^* 0, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 4\bar{A}ec^*, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 4(\bar{A}ec^* - \bar{C}R\frac{T_0 h}{K}), -2RK_s \bar{G}, 0 \\ 0, 0, 24K_s R \bar{G}, 4\bar{A}ec^*, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 4\bar{A}ec^* \end{bmatrix}$$

$$[A_5^*] = \begin{bmatrix} 4R(\bar{C}ec^{*2} - 4D^*), 0, 0, 0, 0 \\ 0, 2R(2\bar{C}ec^{*2} - \bar{G}), 0, 0, 0 \\ 0, 0, 2R(2\bar{C}ec^{*2} - K_s \bar{G}), 0, 0 \\ 0, 0, 0, 4R(\bar{C}ec^{*2} - 2D^*), 0 \\ 0, 0, 0, 0, 2R(2\bar{C}ec^{*2} - \bar{G}) \end{bmatrix}; [A_6^*] = \begin{bmatrix} 8\bar{C}Rec^*, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 8\bar{C}Rec^*, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 2R(4\bar{C}ec^* - R\bar{E}\frac{T_0 h}{K}), -2R^2 K_s E^* \bar{E}, 0 \\ 0, 0, 24R^2 K_s E^* \bar{E}, 8\bar{C}Rec^*, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 8\bar{C}Rec^* \end{bmatrix} \quad (۴-۶)$$

$$[A_7^*] = \begin{bmatrix} 2R^2(ec^{*2} \bar{E} - 4E^* \bar{F}), 0, 0, 0, 0 \\ 0, 2R^2 \bar{E}(ec^{*2} - E^*), 0, 0, 0 \\ 0, 0, 2R^2 \bar{E}(ec^{*2} - K_s E^*), 0, 0 \\ 0, 0, 0, 2R^2(ec^{*2} \bar{E} - 4E^* \bar{F}), 0 \\ 0, 0, 0, 0, 2R^2 \bar{E}(ec^{*2} - E^*) \end{bmatrix}; [A_8^*] = \begin{bmatrix} 4R^2 ec^* \bar{E}, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 4R^2 ec^* \bar{E}, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 4R^2 ec^* \bar{E}, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 4R^2 ec^* \bar{E}, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 4R^2 ec^* \bar{E} \end{bmatrix}; [A_9^*] = \begin{bmatrix} 0, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 24RK_s \bar{G}, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 24RK_s \bar{G} \end{bmatrix}$$

$$[A_{10}^*] = \begin{bmatrix} 2e\bar{A}, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 2e\bar{A}, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 2e\bar{A}, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 2e\bar{A} + 24K_s R^2 E^* \bar{E}, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 2e\bar{A} + 24K_s R^2 E^* \bar{E} \end{bmatrix}; [A_{11}^*] = \begin{bmatrix} 4\bar{C}eR, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 4\bar{C}eR, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 4\bar{C}eR, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 4\bar{C}eR, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 4\bar{C}eR \end{bmatrix}; [A_{12}^*] = \begin{bmatrix} 2\bar{E}eR^2, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 2\bar{E}eR^2, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 2\bar{E}eR^2, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 2\bar{E}eR^2, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 2\bar{E}eR^2 \end{bmatrix}$$

### ۳-۴ تبدیل لاپلاس

برای حل دستگاه معادلات بی‌بعدشده (۴-۴)، به علت مشکل بودن حل معادلات شامل مشتقات

جزئی، ابتدا با استفاده از تبدیل لاپلاس نسبت به زمان بی‌بعد، آنها به صورت معادلات دیفرانسیل

معمولی تبدیل می‌شوند.

تبدیل لاپلاس تابع  $f(t)$  به صورت زیر تعریف می‌شود:



$$L(f(t)) = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (7-4)$$

در رابطه فوق  $s$  متغیر لاپلاس است که در حالت کلی عددی مختلط می‌باشد. مزیت اصلی این تبدیل این است که بعد از انجام این انتقال، با توجه به ثابت بودن متغیر لاپلاس نسبت به متغیر مکان بی‌بعد، معادلات حاکم تبدیل به دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی خطی با ضرایب ثابت (نسبت به متغیر مکان) می‌شوند و تنها مشتقات مکانی در عبارات باقی خواهند ماند.

بردار جابجایی در محیط لاپلاس به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L(y^*(x^*, t^*)) = Y(x^*, s) = \int_0^{+\infty} y^*(x^*, t^*) e^{-st^*} dt^* \quad (8-4)$$

قابل ذکر است که متغیر لاپلاس  $s$  در معادله (8-4) بی‌بعد می‌باشد.

با توجه به اینکه در تبدیلات لاپلاس با شرایط اولیه صفر:

$$\begin{aligned} L\left(\frac{\partial y^*(x^*, t^*)}{\partial t^*}\right) &= sY(x^*, s); L\left(\frac{\partial^2 y^*(x^*, t^*)}{\partial t^{*2}}\right) = s^2 Y(x^*, s) \\ L\left(\frac{\partial^3 y^*(x^*, t^*)}{\partial t^{*3}}\right) &= s^3 Y(x^*, s); L\left(\frac{\partial^4 y^*(x^*, t^*)}{\partial t^{*4}}\right) = s^4 Y(x^*, s) \\ L\left(\frac{\partial^2 y^*(x^*, t^*)}{\partial x^* \partial t^*}\right) &= s \frac{dY(x^*, s)}{dx^*}; L\left(\frac{\partial^3 y^*(x^*, t^*)}{\partial x^* \partial t^{*2}}\right) = s^2 \frac{dY(x^*, s)}{dx^*} \\ L\left(\frac{\partial^4 y^*(x^*, t^*)}{\partial x^* \partial t^{*3}}\right) &= s^3 \frac{dY(x^*, s)}{dx^*}; L\left(\frac{\partial^3 y^*(x^*, t^*)}{\partial x^{*2} \partial t^*}\right) = s \frac{d^2 Y(x^*, s)}{dx^{*2}} \\ L\left(\frac{\partial^4 y^*(x^*, t^*)}{\partial x^{*2} \partial t^{*2}}\right) &= s^2 \frac{d^2 Y(x^*, s)}{dx^{*2}} \end{aligned} \quad (9-4)$$

با اعمال تبدیل لاپلاس بر دستگاه معادلات (4-4)، دستگاه مذکور به صورت زیر در می‌آید:

$$\varepsilon^2 [B_2] \frac{d^2 Y}{dx^{*2}} + \varepsilon [B_1] \frac{dY}{dx^*} + [B_0] Y = \{F\} \quad (10-4)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} [B_2] &= s^2 [A_7^*] + s [A_5^*] + [A_3^*] \\ [B_1] &= s^3 [A_8^*] + s^2 [A_6^*] + s [A_4^*] + [A_2^*] \\ [B_0] &= s^4 [A_{12}^*] + s^3 [A_{11}^*] + s^2 [A_{10}^*] + s [A_9^*] + [A_1^*] \\ \{F\} &= \left\{ 2 \frac{T_0 h}{sK} A^*, 0, 2 \frac{P_0}{sK} A^*, 0, 0 \right\}^T \end{aligned} \quad (11-4)$$

دستگاه معادلات (10-4) شامل پنج معادله دیفرانسیل معمولی خطی مرتبه دو غیرهمگن می-

باشد. در ادامه به تعیین جواب‌های عمومی و خصوصی معادلات مذکور در فضای لاپلاس پرداخته می‌شود.

#### ۴-۴ شرایط مرزی مسئله

با توجه به شکل مسئله (شکل (۳-۱)) وب بین غلتک‌های دو ردیفه حرکت می‌کند؛ بنابراین در تکیه‌گاه‌ها می‌توان شیب وب را صفر فرض کرد (مانند سرگیردار در تیرها). به عبارت دیگر، هر خط صاف و عمود بر صفحه‌ی میانی در تکیه‌گاه‌ها، پس از تغییر شکل همچنان صاف و عمود باقی می‌ماند. با توجه به مطالب فوق و میدان جابجایی مفروض (معادله (۳-۱))، شرایط مرزی مسئله بصورت زیر بیان می‌شود:

$$\{y\} = 0 \Rightarrow \begin{cases} u = 0 \Rightarrow u_1 = u_2 = 0 \\ v = 0 \Rightarrow v_1 = v_2 = 0 \\ w = 0 \end{cases} \quad (۴-۱۲)$$

#### ۴-۵ تعیین پاسخ دینامیکی به کمک روش MAE در فضای لاپلاس [64]

در بسیاری از مسائل، اغتشاش در ناحیه‌ای کوچک (باریک<sup>۱</sup>) اثر کرده و اثر تغییرات متغیرهای وابسته در آن خیلی زیاد می‌باشد. به علت اینکه در این دسته مسائل، پارامتر  $\varepsilon$  در بزرگترین مرتبه مشتق ضرب می‌شود، خیلی اوقات، این نواحی باریک به مرزهای حوزه مورد بررسی مرتبط می‌شوند. از این رو، این دسته مسائل به مسائل لایه مرزی معروفند. در این نواحی، تغییرات سریع را نمی‌توان با متغیر کند<sup>۲</sup> بیان کرد، اما به کمک مقیاس سریع<sup>۳</sup> این کار امکان‌پذیر می‌باشد. از آنجا که در معادله (۴-۱۰)، پارامتر کوچک  $\varepsilon$  در بزرگترین مرتبه مشتق ضرب شده است، مسئله مورد بررسی را می‌توان جزء مسائل لایه مرزی دانست.

- 
1. Narrow Region
  2. Slow Scale
  3. Fast Scale

یکی از روش‌های حل مسائل لایه مرزی، روش MAE می‌باشد. ایده اصلی در روش MAE این است که حل تقریبی لزوماً بر حسب یک بسط و یک مقیاس قابل بیان نمی‌باشد، بلکه حل مسئله شامل دو یا چند بسط و مقیاس است که هر کدام در ناحیه‌ای خاص، معتبر می‌باشند. این مقیاس‌ها باید به گونه‌ای انتخاب شوند که اولاً بسط‌ها، تمام حوزه مورد بررسی را شامل شوند. ثانیاً، حل‌های نواحی مجاور، همپوشانی (ناحیه مشترک<sup>۱</sup>) داشته باشند. در لایه‌های مرزی، حل داخلی<sup>۲</sup>  $(y^i)$  و در نقاط دیگر، حل خارجی<sup>۳</sup>  $(y^o)$  برقرار می‌باشند. از ترکیب حل‌های داخلی و خارجی بدست آمده به صورت  $y^c = y^o + y^i - (y^o)^i = y^o + y^i - (y^i)^o$  نیز حل کلی<sup>۴</sup> حاصل می‌شود. توضیحات کاملتر مربوط به مسائل لایه مرزی و روش MAE، در پیوست (ج) آمده است.

بر اساس روش MAE، برای یافتن حل داخلی در مرز چپ  $(x^* = 0)$ ، با اعمال متغیر سریع

$$\eta = \frac{x^*}{\varepsilon} \quad \text{در معادله (۴-۱۰)، معادله مذکور به معادله (۴-۱۳) تبدیل می‌شود:}$$

$$[B_2] \frac{d^2 Y_0^i}{d\eta^2} + [B_1] \frac{dY_0^i}{d\eta} + [B_0] Y_0^i = \{F\} \quad (۴-۱۳)$$

که  $Y_0^i$  حل داخلی در فضای لاپلاس برای  $x^* = 0$  می‌باشد. برای حل معادله دیفرانسیل فوق می‌توان از تئوری مقدماتی معادلات دیفرانسیل یا تئوری اغتشاشات استفاده کرد.

بر اساس تئوری مقدماتی حل معادلات دیفرانسیل، پاسخ عمومی معادله (۴-۱۳) به صورت (۴-۱۴)

در نظر گرفته می‌شود.

$$Y_{0g}^i = \{V\} e^{m\eta} \quad (۴-۱۴)$$

که در آن  $m$  مقدار ویژه و  $\{V\}$  بردار ویژه می‌باشند. این نوع مسائل، به مسائل مقدار ویژه<sup>۵</sup>

معروف اند. تعیین پاسخ عمومی معادله (۴-۱۰) منوط به تعیین مقادیر ویژه و بردارهای ویژه می‌باشد.

- 
1. Overlap
  2. Inner Solution
  3. Outer Solution
  4. Composite Solution
  5. Eigenvalue Problems

برای یافتن مقادیر و بردارهای ویژه، با جایگزین کردن (۴-۱۴) در بخش همگن معادلات (۴-۱۰) و

حذف  $e^{mj^*}$  از طرفین معادلات، دستگاه معادلات زیر حاصل می‌شود:

$$[D]_{5 \times 5} \{V\} = \{0\} \quad (۱۵-۴)$$

که در آن:

$$D = m^2 B_2 + m B_1 + B_0 \quad (۱۶-۴)$$

شرط داشتن جواب غیر صفر برای دستگاه (۴-۱۶) آن است که دترمینان ماتریس D صفر گردد.

ماتریس D در حالت کلی به صورت زیر می‌باشد:

$$[D] = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} & D_{34} & 0 \\ 0 & 0 & D_{43} & D_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{55} \end{bmatrix} \quad (۱۷-۴)$$

مولفه‌های ماتریس D به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned} D_{11} &= m^2(2\bar{A}ec^{*2} - 8\bar{B}E_2^* + sR(4\bar{C}ec^{*2} - 8\bar{D}) + s^2R^2(2\bar{E}ec^{*2} - 8\bar{F}E^*)) \\ &+ m(4s\bar{A}ec^* + 8s^2R\bar{C}ec^* + 4s^3R^2\bar{E}ec^*) + 2s^2\bar{A}e + 4s^3R\bar{C}e + 2s^4R^2\bar{E}e \\ D_{22} &= m^2(2\bar{A}ec^{*2} - 2\bar{A}E_2^* + sR(4\bar{C}ec^{*2} - 2\bar{G}) + s^2R^2\bar{E}(2ec^{*2} - 2E^*)) \\ &+ m(4s\bar{A}ec^* + 8s^2R\bar{C}ec^* + 4s^3R^2\bar{E}ec^*) + 2s^2\bar{A}e + 4s^3R\bar{C}e + 2s^4R^2\bar{E}e \\ D_{33} &= m^2(2\bar{A}ec^{*2} - 2K_sE_2^*\bar{A} + sR(4\bar{C}ec^{*2} - 2K_s\bar{G}) + s^2R^2\bar{E}(2ec^{*2} - 2K_sE^*)) \\ &+ m(-2T_0h\bar{A}/K + s(4\bar{A}ec^* - 4R\bar{C}T_0h/K) + s^2(8R\bar{C}ec^* - 2R^2\bar{E}T_0h/K) \\ &+ 4s^3R^2\bar{E}ec^*) + 2s^2\bar{A}e + 4s^3R\bar{C}e + 2s^4R^2\bar{E}e \\ D_{34} &= m(-2K_sE_2^*\bar{A} - 2sK_sR\bar{G} - 2s^2K_sR^2\bar{E}E^*) \\ D_{43} &= 24m(K_sE_2^*\bar{A} + sK_sR\bar{G} + s^2K_sR^2\bar{E}E^*) \\ D_{44} &= m^2(2\bar{A}ec^{*2} - 8\bar{B}E_2^* + sR(4\bar{C}ec^{*2} - 8\bar{D}) + s^2R^2(2\bar{E}ec^{*2} - 8\bar{F}E^*)) + m(4s\bar{A}ec^* + 8s^2R\bar{C}ec^* \\ &+ 4s^3R^2\bar{E}ec^*) + 24K_sE_2^*\bar{A} + 24sK_sR\bar{G} + s^2(2\bar{A}e + 24K_sR^2\bar{E}E^*) + 4s^3R\bar{C}e + 2s^4R^2\bar{E}e \\ D_{55} &= m^2(2\bar{A}ec^{*2} - 2\bar{A}E_2^* + sR(4\bar{C}ec^{*2} - 2\bar{G}) + s^2R^2\bar{E}(2ec^{*2} - 2E^*)) + m(4s\bar{A}ec^* + 8s^2R\bar{C}ec^* \\ &+ 4s^3R^2\bar{E}ec^*) + 24K_sE_2^*\bar{A} + 24sK_sR\bar{G} + s^2(2\bar{A}e + 24K_sR^2\bar{E}E^*) + 4s^3R\bar{C}e + 2s^4R^2\bar{E}e \end{aligned} \quad (۱۸-۴)$$

دترمینان ماتریس (۴-۱۷) برابر است با:

$$\det(D) = D_{11}D_{22}(D_{33}D_{44} - D_{34}D_{43})D_{55} \quad (۱۹-۴)$$

ریشه‌های معادله‌ی  $\det(D)=0$  که معادله مشخصه<sup>۱</sup> سیستم نامیده می‌شود، همان مقادیر ویژه سیستم می‌باشند.

برای صفر شدن دترمینان ماتریس  $D$ ، باید تک تک ضرایب معادله مشخصه صفر باشند. یعنی:

$$\det(D) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} D_{11} = 0 \\ D_{22} = 0 \\ D_{33}D_{44} - D_{34}D_{43} = 0 \\ D_{55} = 0 \end{cases} \quad (۲۰-۴)$$

اما از آنجا که هر یک از مؤلفه‌های دترمینان  $D$  تابعی از ضریب لاپلاس  $s$  می‌باشند، مقادیر ویژه به صورت توابعی پیچیده از  $s$  تعیین می‌شوند.

یافتن ریشه‌ی معادلات  $D_{55}=0, D_{22}=0, D_{11}=0$  به طریق معمولی امکان پذیر است. به این ترتیب با بدست آوردن ریشه‌های آنها، شش مقدار ویژه تعیین می‌گردند (به ازای هر معادله دو مقدار ویژه). این مقادیر ویژه را به ترتیب  $m_1, m_2, m_3, m_4, m_9, m_{10}$  نامیده شده‌اند.

معادله  $D_{33}D_{44} - D_{34}D_{43} = 0$  تابعی پیچیده از  $s$  بوده و برای یافتن ریشه‌ی آن می‌توان از تئوری اغتشاشات استفاده کرد و این مقادیر ویژه را به شکل ساده‌تری تخمین زد. این تئوری به بررسی آن دسته از مسائل می‌پردازد که در معادله‌ی حاکم بر آنها، پارامتر کوچکی مانند  $\varepsilon$  وجود دارد. بر اساس این تئوری پاسخ این معادله بر حسب یک سری از این پارامتر کوچک نوشته شده و با جایگذاری در معادله و مساوی صفر قرار دادن جملات با توان یکسان  $\varepsilon$ ، یک حل تحلیلی (تقریبی) برای مساله بدست می‌آید. توضیحات مفصل‌تر این تئوری در پیوست (ج) آمده است.

از آنجا که شعاع همگرایی مسئله حاضر (با توجه به مقادیر پارامترهای مورد بررسی در فصل بعدی) محدوده کوچکی از  $s$  می‌باشد، مقادیر ویژه مربوط به معادله  $D_{33}D_{44} - D_{34}D_{43} = 0$  بصورت زیر پیشنهاد می‌شود:

1. Characteristic Equation

$$m = m_0 + m_1 s + m_2 s^2 \quad (۲۱-۴)$$

با جایگذاری (۲۱-۴) در معادله مشخصه  $D_{33}D_{44} - D_{34}D_{43} = 0$  و حل آن بر اساس توان‌های

یکسان  $s$ ، چهار مقدار ویژه بعدی به نام‌های  $m_8, m_7, m_6, m_5$  تعیین می‌گردند.

به این ترتیب، ۱۰ مقدار ویژه مسئله بدست آمدند. بردارهای ویژه‌ی مرتبط با هر یک از مقادیر

ویژه به راحتی با استفاده از معادله (۴-۱۵)، بصورت زیر تعیین می‌شوند:

$$\{V_1\} = \{V_2\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \{V_3\} = \{V_4\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \{V_9\} = \{V_{10}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}; \{V_5\}, \{V_6\}, \{V_7\}, \{V_8\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{D_{34}}{D_{33}} \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (۲۲-۴)$$

که  $\{V_1\}$  تا  $\{V_{10}\}$  به ترتیب بردارهای ویژه مرتبط با مقادیر ویژه‌ی  $m_1$  تا  $m_{10}$  می‌باشند. قابل

ذکر است بردارهای ویژه  $\{V_5\}, \{V_6\}, \{V_7\}, \{V_8\}$  با جایگذاری مقادیر ویژه مربوط به خودشان در

نسبت  $\frac{D_{34}}{D_{33}}$  بدست می‌آیند. بنابراین با یافتن مقادیر و بردارهای ویژه، پاسخ عمومی حل داخلی در

مرز چپ تعیین شد.

برای بدست آوردن جواب خصوصی معادله (۴-۱۳) در حوزه لاپلاس، با توجه به ثابت بودن

ضرایب این معادله دیفرانسیل و متغیر لاپلاس  $s$ ، برای تعیین حل خصوصی از روش ضرایب نامعین

می‌توان استفاده کرد. بر اساس این روش حل خصوصی معادله (۴-۱۳) نیز به صورت زیر می‌باشد:

$$Y_p = [B_0]^{-1}\{F\} \quad (۲۳-۴)$$

با توجه به اینکه بردار نیروی  $\{F\}$  و ماتریس  $[B_0]$  مستقل از  $x^*$  می‌باشند، حل خصوصی (۲۳-۴)

نیز مستقل از  $x^*$  است. بنابراین حل کلی داخلی در مرز  $x^* = 0$  برابر است با مجموع حل‌های

خصوصی و عمومی. یعنی:

$$Y_0^i = Y_{0g}^i + Y_p \Rightarrow Y_0^i = \sum_{n=1}^{n=N} C_n \{V\}_n e^{m_n \eta} + Y_p \quad (۲۴-۴)$$

که  $N$  تعداد مقادیر ویژه و  $C_n$  ضرایب ثابت می‌باشند که با توجه به شرایط مرزی تعیین می‌شوند.

بر اساس شرط انطباق<sup>۱</sup>، باید  $(y^i)^o = (y^o)^i$ . بنابراین:

$$\lim_{\eta \rightarrow +\infty} Y_0^i = \lim_{x^* \rightarrow 0} Y^o \quad (25-4)$$

تابع  $(y^o)^i$  از جایگذاری متغیر اصلی با متغیر سریع در حل خارجی و سپس بسط آن حاصل می‌شود. تابع  $(y^i)^o$  نیز از جایگذاری متغیر سریع با متغیر اصلی در حل داخلی و سپس بسط آن بدست می‌آید. بنابراین پاسخ کلی  $Y_0^i$  باید در  $\eta \rightarrow +\infty$  محدود باشد. از این رو در بخش حل عمومی آن، ضرایب  $\eta$  در  $e^{m_n \eta}$  (مقادیر ویژه) باید دارای قسمت حقیقی منفی باشند.

برای یافتن حل داخلی در مرز راست ( $x^* = 1$ ) با اعمال متغیر سریع  $\xi = \frac{x^* - 1}{\varepsilon}$  در معادله (۴-۴)

(۱۰)، معادله مذکور به معادله (۴-۲۶) تبدیل می‌شود:

$$[B_2] \frac{d^2 Y_1^i}{d\xi^2} + [B_1] \frac{dY_1^i}{d\xi} + [B_0] Y_1^i = \{F\} \quad (26-4)$$

که  $Y_1^i$  حل داخلی در فضای لاپلاس برای  $x^* = 1$  می‌باشد.

بر اساس تئوری مقدماتی معادلات دیفرانسیل، پاسخ عمومی معادله (۴-۲۶) به صورت  $Y_{1g}^i = \{V\} e^{m\xi}$  در نظر گرفته می‌شود. با توجه به یکسان بودن ماتریس‌های ضرایب معادلات دیفرانسیل (۴-۱۳) و (۴-۲۶)، مقادیر و بردارهای ویژه مربوط به حل داخلی در مرز راست نیز همان مقادیر بدست آمده برای مرز چپ می‌باشد. حل خصوصی معادله (۴-۲۶) نیز به صورت (۴-۲۳) می‌باشد. بنابراین حل کلی داخلی در مرز  $x^* = 1$  برابر است با:

$$Y_1^i = Y_{1g}^i + Y_p \Rightarrow Y_1^i = \sum_{n=1}^{n=N} D_n \{V\}_n e^{m_n \xi} + Y_p \quad (27-4)$$

$D_n$  ضرایب ثابت مربوط به حل عمومی در مرز راست می‌باشند که با توجه به شرایط مرزی مرز

راست تعیین می‌شوند.

بر اساس شرط انطباق، در مرز راست باید:

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} Y_1^i = \lim_{x^* \rightarrow 1} Y^0 \quad (28-4)$$

بنابراین پاسخ کلی  $Y_1^i$  باید در  $\xi \rightarrow -\infty$  محدود باشد. از این رو در بخش حل عمومی آن، مقادیر ویژه ضرب شده در  $\xi$  باید دارای قسمت حقیقی مثبت باشند.

همانطور که گفته شد ضرایب ثابت مربوط به حل داخلی در مرزهای چپ ( $C_n$ ) و راست ( $D_n$ ) با توجه به شرایط مرزی (۴-۱۲) تعیین می‌شوند. در مسئله مورد بررسی، این ضرایب بصورت کسرهایی با صورت و مخرج بسیار پیچیده می‌باشند که هر کدام از آنها شامل جمع و ضرب چندین چندجمله‌ای تابع  $s$  هستند.

با در نظر گرفتن  $Y^0$  به عنوان حل خارجی، معادله (۴-۱۰) برای قسمت خارجی به معادله دیفرانسیل زیر تبدیل می‌شود:

$$\varepsilon^2 [B_2] \frac{d^2 Y^0}{dx^{*2}} + \varepsilon [B_1] \frac{dY^0}{dx^*} + [B_0] Y^0 = \{F\} \quad (29-4)$$

حل خارجی در فضای لاپلاس به صورت  $Y^0 = Y_0 + \varepsilon Y_1 + \dots$  در نظر گرفته می‌شود. با جایگزینی این حل در رابطه (۴-۱۰) و انتخاب جملات با توانهای یکسان  $\varepsilon$ ، برای مرتبه<sup>۱</sup> صفر  $\varepsilon$ ، پاسخ  $Y_0$  به صورت زیر بدست می‌آید:

$$(\varepsilon^0): [B_0] Y_0 = \{F\} \Rightarrow Y_0 = [B_0]^{-1} \{F\} = Y_p \quad (30-4)$$

برای مرتبه یک  $\varepsilon$  نیز پاسخ  $Y_1$  به صورت زیر می‌باشد:

$$(\varepsilon^1): [B_0] Y_1 = \{0\} \Rightarrow Y_1 = \{0\} \quad (31-4)$$

با توجه به (۴-۳۰) و (۴-۳۱) حل خارجی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$Y^0 = Y_p \quad (32-4)$$

بنابراین حل‌های داخلی و خارجی بصورت مجزا تعیین شدند. حل کلی مسأله (۴-۱۰) در فضای



لاپلاس به صورت  $Y^C = Y_0^i + Y_1^i + Y^O - (Y_0^i)^O - (Y_1^i)^O$  می‌باشد که  $(Y_0^i)^O$  و  $(Y_1^i)^O$  بخشهای مشترک حل خارجی با هر کدام از حلهای داخلی می‌باشند. با قرار دادن  $x^* = 1, x^* = 0$  در حل خارجی، می‌توان این بخشهای مشترک را پیدا کرد. با توجه به مستقل بودن حل خارجی از  $x^*$ ،  $Y^O = (Y_0^i)^O = (Y_1^i)^O$  بنابراین حل کلی برابر است با:

$$Y^C = Y_0^i + Y_1^i - Y^O \quad (۳۳-۴)$$

$Y^C$  حل کلی را در حوزه لاپلاس می‌دهد. با محاسبه لاپلاس معکوس، می‌توان حل را در حوزه‌ی زمان بدست آورد. برای تعیین لاپلاس معکوس از تئوری باقی‌مانده‌ها استفاده می‌شود. با توجه به این که برای همپوشانی حل، علامت مقادیر ویژه  $m_n$  بر حسب  $s$  مهم است، ابتدا با تعیین ریشه‌های صورت و مخرج مقادیر ویژه و ضرایب ثابت مربوط به حل داخلی در مرزهای چپ ( $C_n$ ) و راست ( $D_n$ ) بازه‌های مختلف دارای جواب مشخص می‌شوند. سپس حل کلی معادله (۴-۱۰) در هر کدام ناحیه‌ها بدست می‌آیند. برای تعیین علامت مقادیر ویژه  $m_1, m_2, m_3, m_4, m_9, m_{10}$  از بسط تیلور مرتبه‌ی دوم آنها استفاده می‌شود. مجموعه روابط فوق، در قالب یک کد در محیط Maple آماده شده است.

## ۶-۴ تبدیل معکوس لاپلاس برای حل‌های بدست آمده

لاپلاس معکوس تابع  $F(s)$  بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s) ds \quad (۳۴-۴)$$

در رابطه فوق  $f(t)$  و  $F(s)$  به ترتیب توابع در فضای زمان و لاپلاس می‌باشند.  $c$  نیز یک ثابت حقیقی است.

در مسئله حاضر، با توجه به پیچیدگی ضرایب ثابت، مقادیر ویژه و در نتیجه پاسخ کلی در فضای لاپلاس، برای یافتن تبدیل لاپلاس معکوس حل نهایی نمی‌توان از فرمول کلی (۴-۳۴) استفاده کرد. از این رو جهت برگرداندن پاسخ‌ها به حوزه زمان، از روش مانده‌ها استفاده می‌شود.

لاپلاس معکوس‌گیری با استفاده از مانده‌ها بر اساس قضیه کوشی می‌باشد [۶۵]. بر اساس این

قضیه، هرگاه  $f(z)$  در درون و روی مرز ساده  $C$  به استثنای نقاط تکین  $z_1, z_2, \dots, z_n$ ، تحلیلی باشد در این صورت:

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[f(z), z_k] \quad (35-4)$$

که  $\text{Res}$  مانده‌ی تابع  $f$  در نقطه  $z_k$  است.

بنابراین لاپلاس معکوس‌گیری با روش مانده‌ها به شکل زیر بیان می‌شود [66]:

اگر  $F(s)$  لاپلاس تابع  $f(t)$  باشد و این تابع تعداد محدودی قطب داشته باشد با انتخاب  $c$  در رابطه (۳۴-۴) به طوری که تمام قطب‌ها سمت چپ  $\text{Re}(s) = c$  قرار گیرند؛ آنگاه لاپلاس معکوس تابع  $f(t)$  به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \text{Res}[F(s)e^{st}, z_k] \quad (36-4)$$

به کمک رابطه فوق، می‌توان پاسخ نهایی معادلات را از فضای لاپلاس به فضای زمان برگرداند. برای استفاده از رابطه (۳۶-۴)، لازم است قطب‌های سیستم مشخص باشند؛ بنابراین پس از تعیین کلیه قطب‌های سیستم، لاپلاس معکوس پاسخ با استفاده از روش مانده‌ها تعیین می‌شود. پس از تعیین قطب‌های سیستم، لاپلاس معکوس مربوط به قطب‌های صفر مستقیماً محاسبه می‌شوند و برای سایر قطب‌ها بصورت جداگانه از قضیه فوق استفاده می‌شود. پاسخ مرتبط با قطب‌های صفر سیستم، حل استاتیکی و پاسخ مربوط به سایر قطب‌ها، حل دینامیکی مسئله نامیده می‌شوند.

#### ۴-۶-۱ تعیین پاسخ استاتیکی وب ویسکوالاستیک متحرک

حل استاتیکی در واقع پاسخ سیستم در زمان بی‌نهایت می‌باشد؛ یعنی باید حد پاسخ نهایی بدست آمده در  $t \rightarrow \infty$  تعیین گردد. از آنجا که در زمان بی‌نهایت تغییرات نسبت به زمان از بین می‌رود، برای تعیین حل استاتیکی، می‌توان مقدار  $s$  را در معادلات فضای لاپلاس برابر صفر قرار داد و معادلات جدید بدست آمده را حل کرد. به عبارت دیگر، با جایگذاری  $s=0$  در معادله (۴-۱۰)، دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی زیر حاصل می‌شود:

$$\varepsilon^2 [A_3^*] \frac{d^2 Y^S}{dx^{*2}} + \varepsilon [A_2^*] \frac{dY^S}{dx^*} + [A_1^*] Y^S = \{F\} \quad (37-4)$$

با حل معادله فوق بر اساس شرایط مرزی مسئله و با توجه به این که  $L^{-1}\{F\} = \{f\}$ ، پاسخ استاتیکی سیستم تعیین می‌شود.

بنابراین پاسخ کلی سیستم در محیط بی‌بعد برابر است با مجموع پاسخ‌های استاتیکی و دینامیکی. یعنی:

$$y_{total}^* = y_{static}^* + y_{dynamical}^* \quad (38-4)$$

پس از تعیین پاسخ در حالت بی‌بعد، با استفاده از معادله (۴-۱) می‌توان پاسخ سیستم را به محیط ابعادی برگرداند.

#### ۷-۴ تعیین سرعت بحرانی وب ویسکوالاستیک متحرک محوری

جهت تعیین سرعت بحرانی وب ویسکوالاستیک متحرک از روش حل موج استفاده می‌شود. در این روش، با اعمال تغییر متغیر  $X = x - ct$ ، دستگاه مختصات به یک نقطه از وب متحرک متصل می‌شود. بنابراین، اپراتورهای مشتق بصورت زیر تبدیل می‌شوند:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial t} = -c \frac{\partial}{\partial X}; \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2}{\partial X^2}; \quad \frac{\partial^3}{\partial t^3} = -c^3 \frac{\partial^3}{\partial X^3}; \quad \frac{\partial^4}{\partial t^4} = c^4 \frac{\partial^4}{\partial X^4} \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X}; \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial X^2}; \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} = -c \frac{\partial^2}{\partial X^2}; \quad \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} = -c \frac{\partial^3}{\partial X^3} \\ \frac{\partial^3}{\partial x \partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^3}{\partial X^3}; \quad \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} = c^2 \frac{\partial^4}{\partial X^4}; \quad \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial t} = -c \frac{\partial^4}{\partial X^4} \end{aligned} \quad (39-4)$$

با اعمال اپراتورهای مشتق (۴-۳۹) در معادله‌ی (۳-۲۵)، این معادلات مشتق جزئی به معادلات دیفرانسیل معمولی زیر تبدیل می‌شوند:

$$BB_4 \frac{d^4 y}{dX^4} + BB_3 \frac{d^3 y}{dX^3} + BB_2 \frac{d^2 y}{dX^2} + BB_1 \frac{dy}{dX} + BB_0 y = \{f\} \quad (40-4)$$

که در آن:

$$BB_4 = c^2 (A_7 - cA_8 + c^2 A_{12}); BB_3 = c(-A_5 + cA_6 - c^2 A_{11})$$

$$BB_2 = A_3 - cA_4 + c^2 A_{10}; BB_1 = A_2 - cA_9; BB_0 = A_1 \quad (41-4)$$

برای حل معادله جدید بدست آمده، از روش ریاضی حل معادلات با ضرایب ثابت استفاده می‌شود. به این صورت که با در نظر گرفتن پاسخ عمومی معادله فوق به صورت  $\{y\} = \{V\}e^{mx}$  و جایگذاری آن در رابطه (۴-۴۰)، معادله مشخصه زیر حاصل می‌شود:

$$[BB_4 m^4 + BB_3 m^3 + BB_2 m^2 + BB_1 m + BB_0] \{V\} = \{0\} \quad (42-4)$$

شرط داشتن جواب غیرصفر برای معادله فوق آن است که دترمینان ماتریس ضرب شده در بردار  $\{V\}$  صفر شود. یعنی:

$$\det(BB_4 m^4 + BB_3 m^3 + BB_2 m^2 + BB_1 m + BB_0) = 0 \quad (43-4)$$

دترمینان ماتریس مذکور بصورت مجموع ضرب چند جمله‌ای شامل  $c$  در توانی از  $m$  می‌باشد. با برابر صفر قرار دادن دترمینان، مقادیر مختلفی برای  $c$  بدست می‌آید. از طرف دیگر، بر اساس شرط پایداری سیستم، مقادیر  $m$  در پاسخ عمومی، باید حقیقی یا مختلط باشند. بنابراین، اولین مقدار  $c$  که منجر به  $m$  موهومی شود، همان سرعت بحرانی ( $c_{cr}$ ) است [67]. بر این اساس، مقدار سرعت بحرانی، با نوشتن یک کد در محیط نرم‌افزار Maple تعیین شده است.

## ۸-۴ تعیین فرکانس طبیعی وب ویسکوالاستیک متحرک محوری

جهت یافتن فرکانس‌های طبیعی سیستم، پاسخ همگن معادله‌ی (۴-۴) بصورت فرض می‌شود:

$$\{y^*\} = \{V(x^*)\}e^{i\omega t^*} \quad (44-4)$$

که در آن،  $\omega$  فرکانس طبیعی بی‌بعد می‌باشد.

با جایگذاری رابطه (۴-۴۴) در معادله همگن (۴-۴)، معادله مشتق جزئی مذکور به یک معادله

دیفرانسیل معمولی، بصورت زیر تبدیل می‌شود:

$$[\bar{B}_2] \frac{d^2 V}{dx^{*2}} + [\bar{B}_1] \frac{dV}{dx^*} + [\bar{B}_0] V = \{0\} \quad (45-4)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \bar{B}_0 &= A_1 + i\omega A_9 - \omega^2 A_{10} - i\omega^3 A_{11} + \omega^4 A_{12} \\ \bar{B}_1 &= \varepsilon(A_2 + i\omega A_4 - \omega^2 A_6 - i\omega^3 A_8) \\ \bar{B}_2 &= \varepsilon^2(A_3 + i\omega A_5 - \omega^2 A_7) \end{aligned} \quad (46-4)$$

پاسخ بخش همگن معادله‌ی (45-4) بصورت:

$$\{V(x^*)\} = \{A\} e^{\beta x^*} \quad (47-4)$$

در نظر گرفته می‌شود که در آن  $\{A_j\}$  بردارهای ویژه و  $\beta_j$  مقادیر ویژه می‌باشند.

با جایگذاری حل (47-4) در (45-4)، معادله مشخصه سیستم بصورت زیر بدست می‌آید:

$$[\beta^2 B_2 + \beta B_1 + B_0] \{V\} = \{0\} \quad (48-4)$$

مشابه آنچه که قبلاً گفته شد، در این حالت نیز شرط داشتن جواب غیرصفر برای معادله فوق آن

است که دترمینان ماتریس ضرایب صفر باشد. یعنی:

$$\det(\beta^2 B_2 + \beta B_1 + B_0) = 0 \quad (49-4)$$

رابطه (49-4) (که به معادله تفرق<sup>1</sup> نیز معروف می‌باشد) دارای ۱۰ مقدار ویژه و به ازای هر مقدار

ویژه، یک بردار ویژه موجود می‌باشد که به کمک معادله (48-4) تعیین می‌شوند. این مقادیر ویژه ( $\beta_j$ )

و بردارهای ویژه ( $\{A_j\}$ ) شامل عباراتی از  $\omega$  می‌باشند.

پس از یافتن مقادیر و بردارهای ویژه، پاسخ کلی معادله (45-4) بصورت زیر نوشته می‌شود.

$$\{V\} = \sum_{j=1}^{10} C_j \{A_j\} e^{\beta_j x^*} \quad (50-4)$$

$j$  شماره مقدار ویژه و  $C_j$  ثابت می‌باشد. با اعمال شرط مرزی (4-12) در دو لبه  $x^* = 0, 1$ ، یک

دستگاه معادلات جبری بصورت  $[AA]\{C\} = \{0\}$  حاصل می‌شود که  $\{C\}$  شامل عناصر  $C_j$  است. شرط

1. Dispersion Equation

وجود جواب غیرصفر، صفر بودن دترمینان ماتریس  $[AA]$  است، یعنی  $\det[AA]=0$ . این عبارت یک رابطه جبری بین  $\omega$  و  $\beta_j, j=1..10$  می باشد که مقادیر  $\beta_j$  نیز تابع  $\omega$  است و از حل آن مقادیر  $\omega$  بدست می آیند. برای تعیین  $\omega$ ، از روش های محاسبات عددی استفاده می شود. در این پایان نامه، رابطه فوق و رابطه (۴-۴۹) با الگوریتم تنصیف<sup>۱</sup> بطور همزمان حل شده اند.

#### ۹-۴ تعیین پاسخ استاتیکی وب الاستیک متحرک محوری

روش تعیین پاسخ استاتیکی وب الاستیک متحرک، نیز دقیقاً مشابه حالت ویسکوالاستیک می -

باشد. ابتدا با تعریف پارامترهای بی بعد زیر، معادلات (۳-۲۸) بی بعد می شوند:

$$x^* = \frac{x}{L}; t^* = \frac{t}{t_0}; u_0^* = \frac{u_0}{h_0}; v_0^* = \frac{v_0}{h_0}; w_0^* = \frac{w_0}{h_0}; \varepsilon = \frac{h_0}{L}; c^* = c \frac{t_0}{h_0}; E^* = \frac{E}{K} \quad (۵۱-۴)$$

مشابه وب ویسکوالاستیک،  $h_0$  و  $t_0$  پارامترهای اختیاری می باشند که برای وب الاستیک بصورت

$$t_0 = 1, h_0 = h$$

دستگاه معادلات بی بعد شده نیز به شکل ماتریسی زیر نوشته می شوند:

$$[\bar{A}_1^*] y^* + \varepsilon [\bar{A}_2^*] \frac{\partial y^*}{\partial x^*} + \varepsilon^2 [\bar{A}_3^*] \frac{\partial^2 y^*}{\partial x^{*2}} + \varepsilon [\bar{A}_4^*] \frac{\partial^2 y^*}{\partial x^* \partial t^*} + [\bar{A}_5^*] \frac{\partial^2 y^*}{\partial t^{*2}} = \{ \bar{f}^* \} \quad (۵۲-۴)$$

که پس از لاپلاس گیری به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\varepsilon^2 [\bar{A}_3^*] \frac{d^2 Y}{dx^{*2}} + \varepsilon ([\bar{A}_2^*] + s [\bar{A}_4^*]) \frac{dY}{dx^*} + ([\bar{A}_1^*] + s^2 [\bar{A}_5^*]) Y = \{ L(\bar{f}) \} \quad (۵۳-۴)$$

با توجه به اینکه در تعیین پاسخ استاتیکی،  $s=0$  قرار داده می شود:

$$\varepsilon^2 [\bar{A}_3^*] \frac{d^2 Y}{dx^{*2}} + \varepsilon [\bar{A}_2^*] \frac{dY}{dx^*} + [\bar{A}_1^*] Y = \{ L(\bar{f}) \} \quad (۵۴-۴)$$

پاسخ استاتیکی وب الاستیک متحرک نیز با حل معادله فوق به کمک شرایط مرزی بیان شده در

معادله (۴-۱۲) بدست می آید.

## ۴-۱۰ جمع‌بندی

در این فصل به حل ریاضی معادله‌ی حاکم بر ارتعاشات وب ویسکوالاستیک متحرک محوری که در فصل پیشین بدست آمده بود، پرداخته شده است. در ابتدا، پس از بی‌بعدسازی و لاپلاس‌گیری معادلات، حل استاتیکی مسئله تعیین شد. سپس، با استفاده از روش MAE پاسخ سیستم در فضای لاپلاس و بی‌بعد بدست آمد و با استفاده از قضیه مانده‌ها به حوزه‌ی زمان برگردانده شدند. در انتهای فصل نیز روش‌های تعیین سرعت بحرانی و فرکانس‌های طبیعی سیستم بررسی شده است. نتایج و بحث حاصل از روش‌های ارائه شده در این فصل، در فصل پنجم بیان می‌شوند.

فصل پنجم

بررسی نتایج



## ۵-۱ مقدمه

در این فصل به بیان و بررسی نتایج حاصل از روش‌های بیان شده در فصل چهارم پرداخته می‌شود. ابتدا نتایج مربوط به پاسخ کلی، سرعت بحرانی و فرکانس‌های طبیعی، به ازای یک سری مقادیر اولیه انتخابی بیان می‌شوند. سپس اثر پارامترهای مختلف ضخامت، خصوصیات ویسکوالاستیک و سرعت انتقال وب بر رفتار سیستم بررسی می‌شوند.

## ۵-۲ پاسخ کلی سیستم به ازای مقادیر اولیه

مقادیر اولیه انتخابی بصورت جدول زیر می‌باشند:

جدول (۵-۱) مقادیر اولیه انتخابی برای خصوصیات ماده، هندسه و بارگذاری<sup>۱</sup>

مدل زبر	ویسکوالاستیک خصوصیات	$E_1$ (Pa)	1e11
		$E_2$ (Pa)	2.5e10
		$\eta$ (Pa.s)	5e10
الاستیک	خصوصیات	$E$ (Pa)	6.5e10
		$\nu$	0.3
		$K$ (Pa)	5.4167e10
هندسی	خصوصیات	$b$ (m)	0.1
		$h$ (m)	0.01
		$L$ (m)	0.75
سرعت انتقال		$c$ (m/s)	0.25
بارهای اعمالی		$P_0$ (Pa)	100
		$T_0$ (N/m <sup>3</sup> )	1.0667e8
چگالی		$\rho$ (kg/ m <sup>3</sup> )	7800

با توجه به مقادیر جدول فوق:  $c^* = 12.5$ ,  $\tau = 0.5$ (sec).

۱- مقادیر انتخابی در محدوده مقادیر مراجع [13] و [15] می‌باشند.

قابل ذکر است مدول الاستیسیته و بالک وب الاستیک با توجه به روابط زیر تعیین می‌شوند:

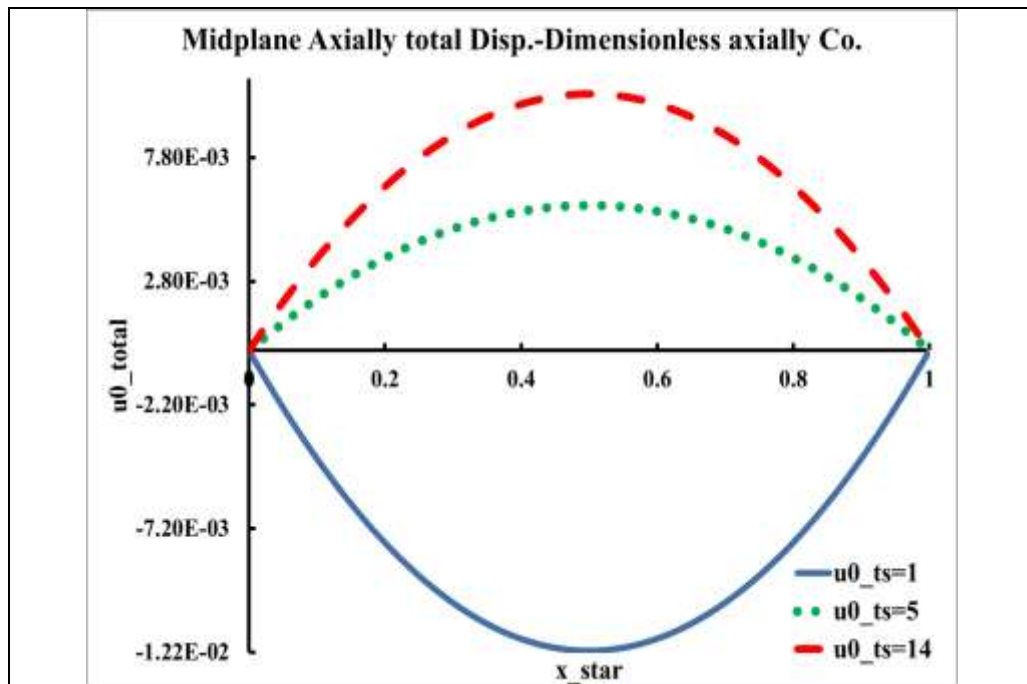
$$E = \frac{E_2}{2(1+\nu)}$$

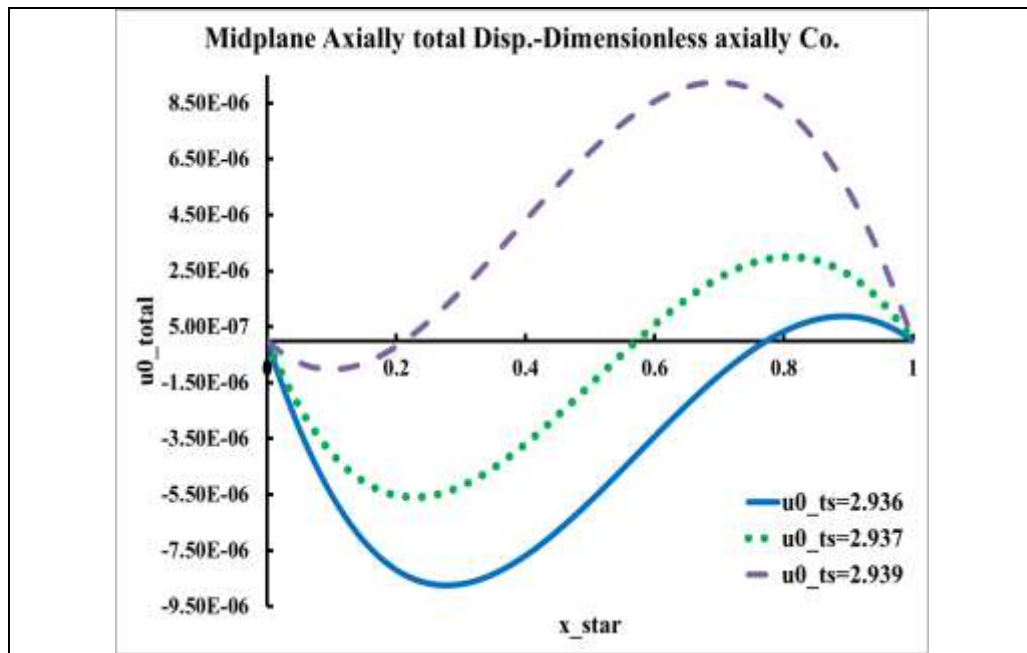
$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (1-5)$$

مقادیر خصوصیات الاستیک، در تعیین پاسخ استاتیکی وب الاستیک متحرک استفاده می‌شوند. همانطور که در فصل قبل گفته شد، پاسخ کلی سیستم در فضای لاپلاس با توجه به رابطه (۴-۳۳) تعیین می‌شود. پس از محاسبه لاپلاس معکوس، پاسخ سیستم در فضای زمان و مکان بی‌بعد تعیین می‌گردد. جهت ترسیم این پاسخ‌ها که بر حسب  $t^*, x^*$  می‌باشند، یکی از متغیرها ثابت و دیگری تغییر داده می‌شود.

### ۱-۲-۵ بررسی جابجایی محوری

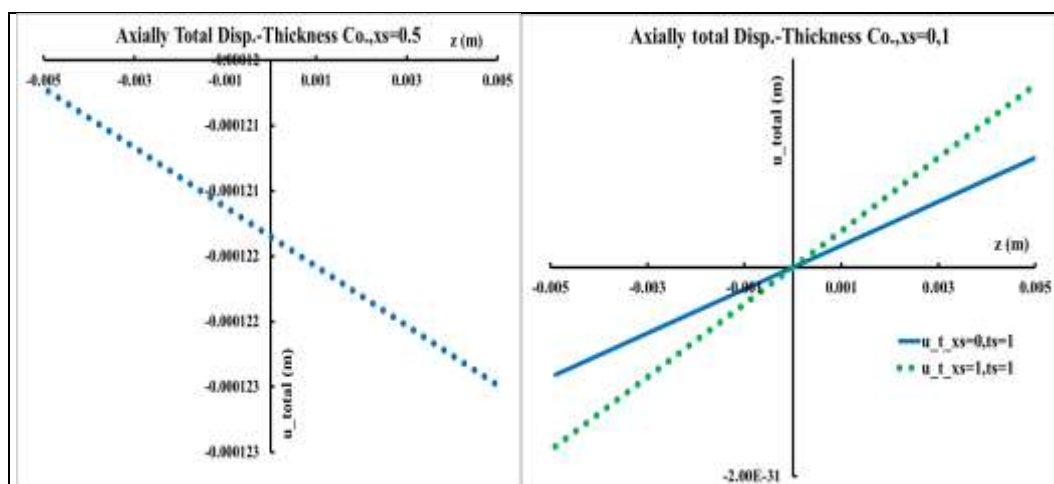
در شکل‌های زیر جابجایی محوری مربوط به صفحه میانی در زمان‌های بی‌بعد مختلف، بر حسب مکان بی‌بعد ترسیم شده است.

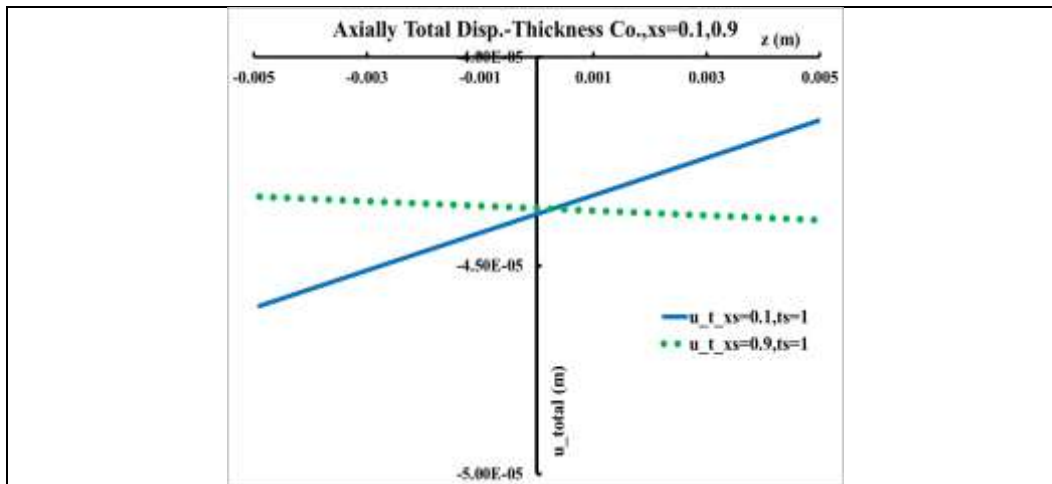




شکل (۵-۱) جابجایی محوری حل کلی صفحه میانی در زمانهای مختلف بر حسب مکان بی بعد

با توجه به شکل (۵-۱)، تقریباً پس از طی  $t^* = 14 \Rightarrow t = 7(\text{sec})$ ، جابجایی محوری صفحه میانی به حد استاتیکی خود می‌رسد. همچنین، تغییر جهت جابجایی محوری در زمان بسیار کوتاهی (در حد هزارم ثانیه) و در ثانیه اول حرکت سیستم اتفاق می‌افتد. جابجایی محوری کلی در نقاط مختلف طول وب ( $x^* = 0, 0.1, 0.5, 0.9, 1$ ) در زمان رهاش ( $t^* = 1$ ) بر حسب مختصه عرضی  $z$  در جدول زیر نشان شده است.



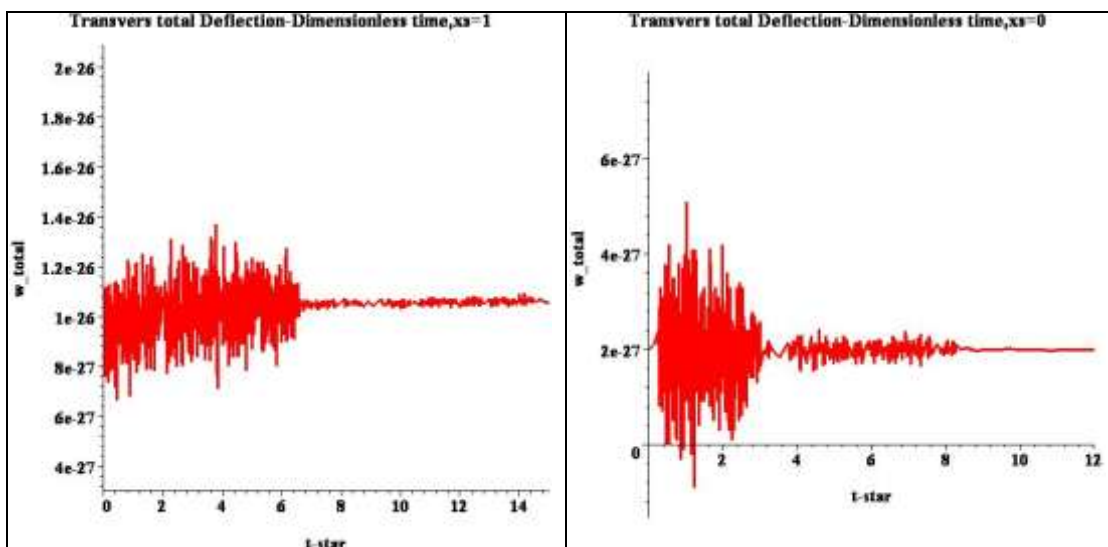


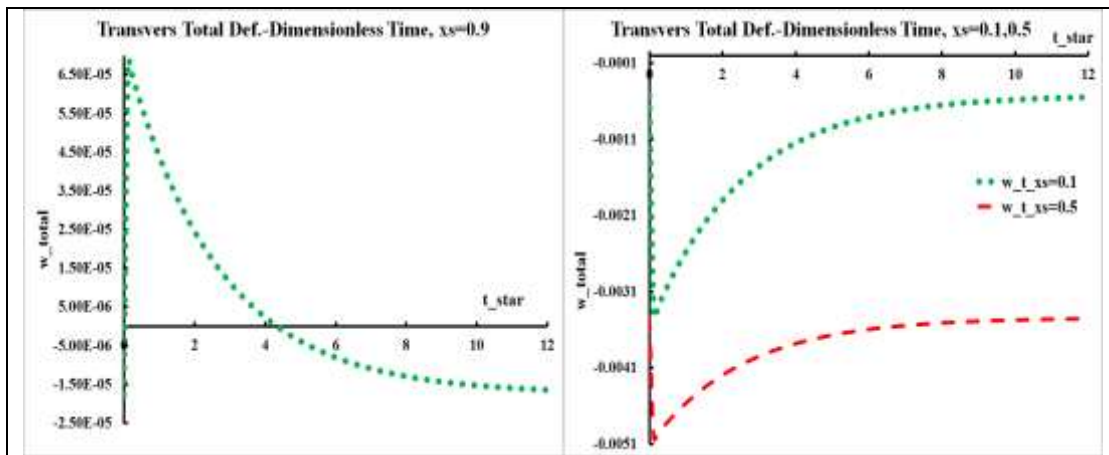
شکل (۲-۵) جابجایی محوری کلی در نقاط مختلف  $x^* = 0, 0.1, 0.5, 0.9, 1$  در زمان  $t^* = 1$  بر حسب  $z$

با توجه به نمودارهای ارائه شده در شکل (۲-۵) جابجایی محوری در زمان رهاش بصورت تابعی خطی از مختصه  $z$  تغییر می‌کند که نشان‌دهنده همان فرض میدان جابجایی بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول می‌باشد. همچنین جابجایی محوری در مرزها مقادیر بسیار کوچک (تقریباً صفر) می‌باشد که با شرایط مرزی در نظر گرفته شده مسئله سازگاری دارد. اختلاف جابجایی محوری در صفحات بالایی و پایینی نسبت به صفحه میانی، به ازای مقادیر اولیه در حدود  $\pm 0.94\%$  می‌باشد.

### ۲-۲-۵ بررسی خیز عرضی

خیز عرضی در نقاط مختلف وب بر حسب زمان بی‌بعد در شکل زیر ترسیم شده است.

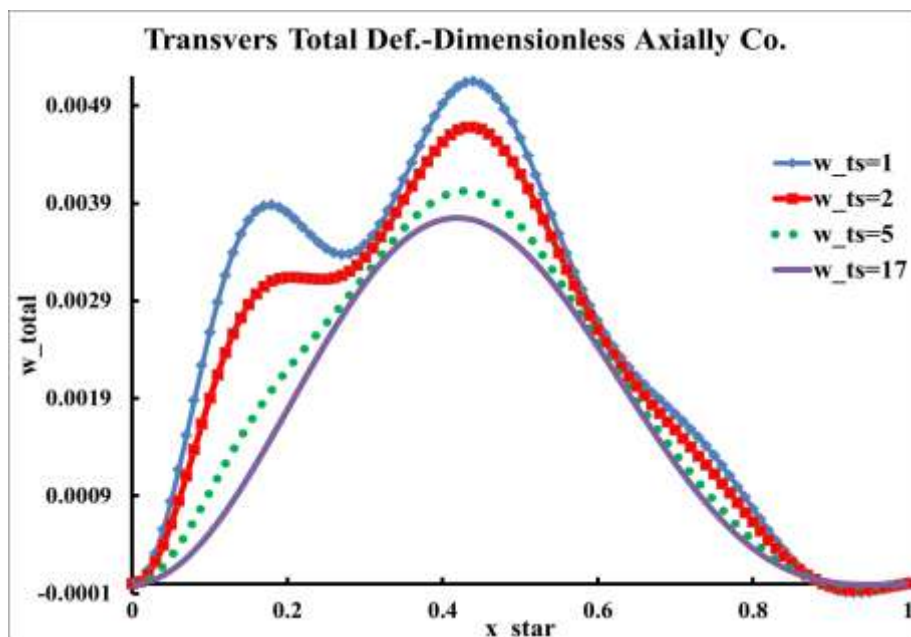




شکل (۳-۵) خیز عرضی حل کلی در مکان‌های مختلف  $x^* = 0, 0.1, 0.5, 0.9, 1$  بر حسب زمان بی‌بعد

با توجه به شکل فوق، در ابتدا اغتشاشات بسیار کوچکی در مرزهای چپ و راست مشاهده می‌شود؛ بعد از مدت کوتاهی (در حد چهار ثانیه) این خیزها به یک مقدار کوچک حدی (تقریباً صفر) می‌رسند که با شرایط مرزی انتخابی در فصل پیشین منطبق می‌باشند. خیز مربوط به نقاط میانی  $x^* = 0.1, 0.5, 0.9$  نیز در کمتر از شش ثانیه به مقدار نهایی خود می‌رسد. همچنین، بیشترین خیز عرضی در وسط وب می‌باشد.

شکل زیر نیز خیز عرضی مربوط به حل کلی را در زمان‌های بی‌بعد مختلف نشان می‌دهد.



شکل (۴-۵) خیز عرضی حل کلی در زمان‌های مختلف بر حسب مکان بی‌بعد

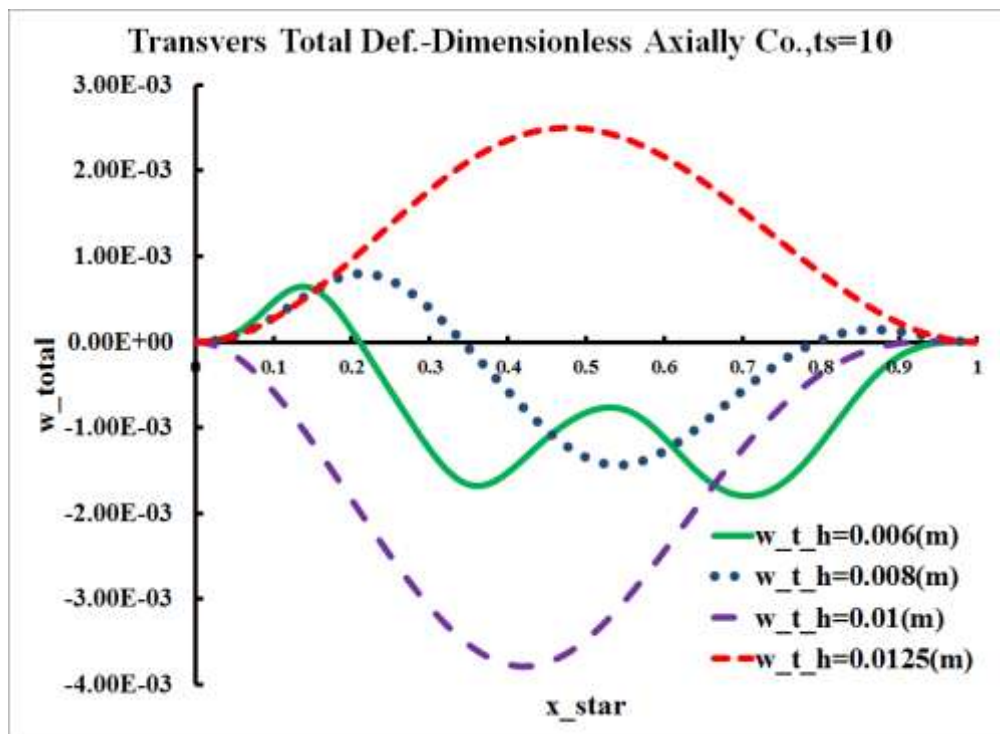
با توجه به شکل (۴-۵) مقدار خیز ماکزیمم و تعداد موج‌های خیز عرضی وب با گذشت زمان کاهش می‌یابد. خیز ماکزیمم تقریباً در قسمت وسط وب اتفاق می‌افتد. همچنین، خیز عرضی کلی در مدت زمان کمتر از هشت ثانیه به پاسخ استاتیکی خود می‌رسد.

### ۳-۵ بررسی اثر پارامترهای مختلف بر میدان جابجایی کلی سیستم

در این بخش به بررسی اثر تغییر پارامترهای ضخامت، خصوصیات ویسکوالاستیک، چگالی، کشش محوری و سرعت انتقال وب بر پاسخ سیستم پرداخته می‌شود.

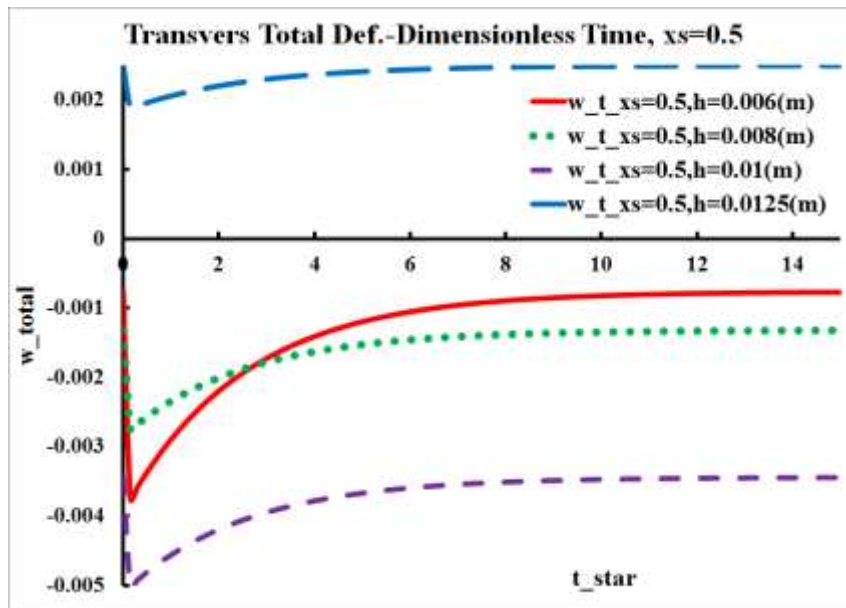
#### ۱-۳-۵ بررسی اثر ضخامت وب

ضخامت وب پارامتر مهمی در استخراج معادلات و تعیین میدان جابجایی می‌باشد. شکل زیر خیز عرضی را بر حسب مختصه محوری بی‌بعد برای ضخامت‌های مختلف، در زمان  $t^* = 10$  نشان می‌دهد.



شکل (۵-۵) تأثیر تغییرات ضخامت بر جابجایی عرضی وب ویسکوالاستیک متحرک محوری در  $t^* = 10$

خیز عرضی در  $x^* = 0.5$  بر حسب زمان بی بعد، برای ضخامت‌های مختلف نیز بصورت زیر است:

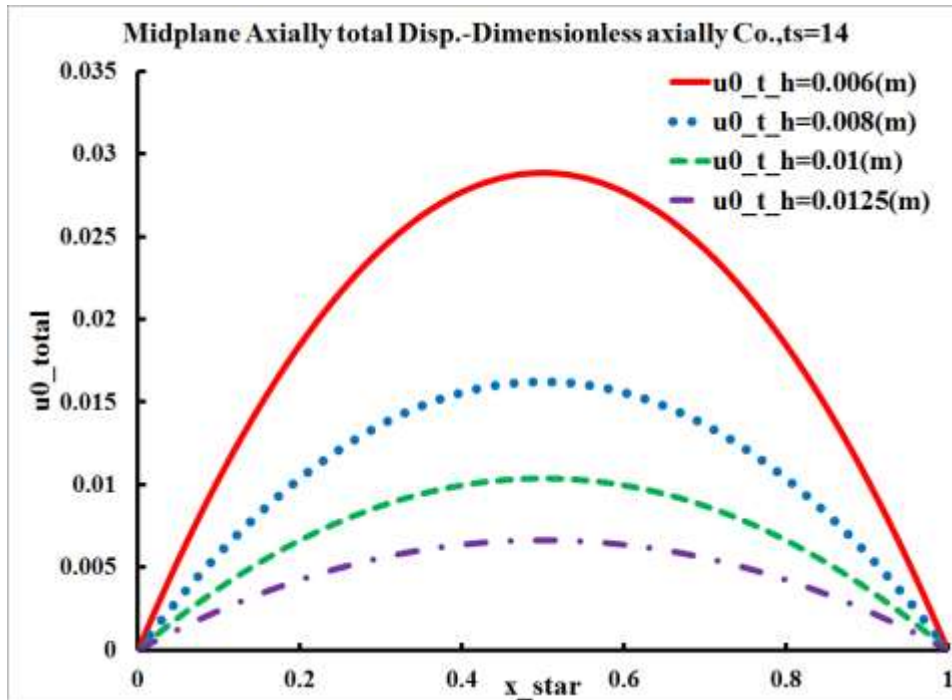


شکل (۵-۶) تأثیر ضخامت بر جابجایی عرضی نقطه میانی وب ویسکوالاستیک متحرک بر حسب زمان بی بعد

با توجه به شکل (۵-۵) در ضخامت‌های کوچکتر از هشت میلی‌متر، مقدار خیز ماکزیمم و تعداد موج‌های نمودار با افزایش ضخامت، کاهش می‌یابد. با افزایش مقدار ضخامت از هشت میلی‌متر به یک سانتی‌متر، مقدار خیز افزایش می‌یابد؛ اما با افزایش ضخامت در  $h > 1\text{cm}$  مقدار خیز ماکزیمم کاهش می‌یابد. با توجه به شکل (۵-۶)، مقدار خیز در تمام ضخامت‌ها، در حدود پنج ثانیه به حالت حدی خود می‌رسند.

جهت بررسی اثر ضخامت بر جابجایی محوری، پاسخ جابجایی محوری کلی مربوط به صفحه

میانی در زمان  $t^* = 14$  در شکل (۵-۷) زیر آمده است.



شکل (۷-۵) تأثیر تغییرات ضخامت بر جابجایی محوری وب ویسکوالاستیک متحرک محوری در  $t^* = 14$

با توجه به شکل (۷-۵) مقدار جابجایی محوری حداکثر با افزایش ضخامت، کاهش می‌یابد. همچنین، زمان رسیدن به حالت حدی (پاسخ استاتیکی)، تقریباً مقدار ثابتی (هفت ثانیه) می‌باشد.

### ۲-۳-۵ بررسی اثر خصوصیات ویسکوالاستیک

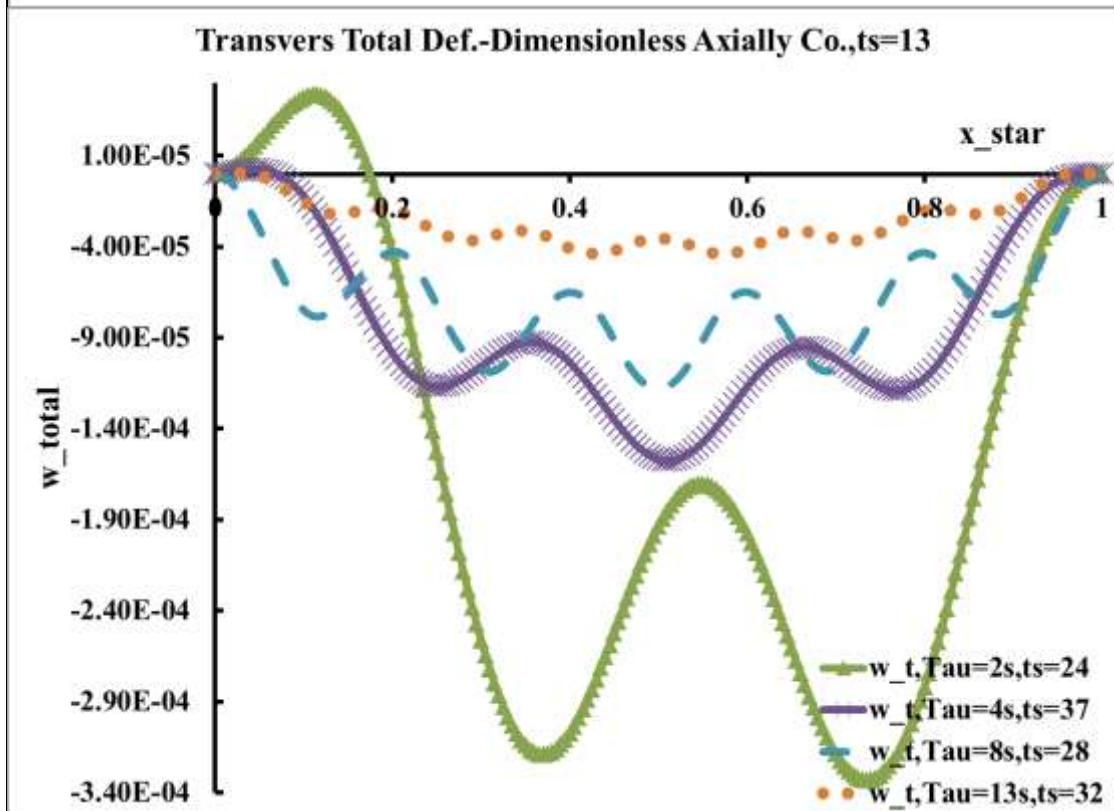
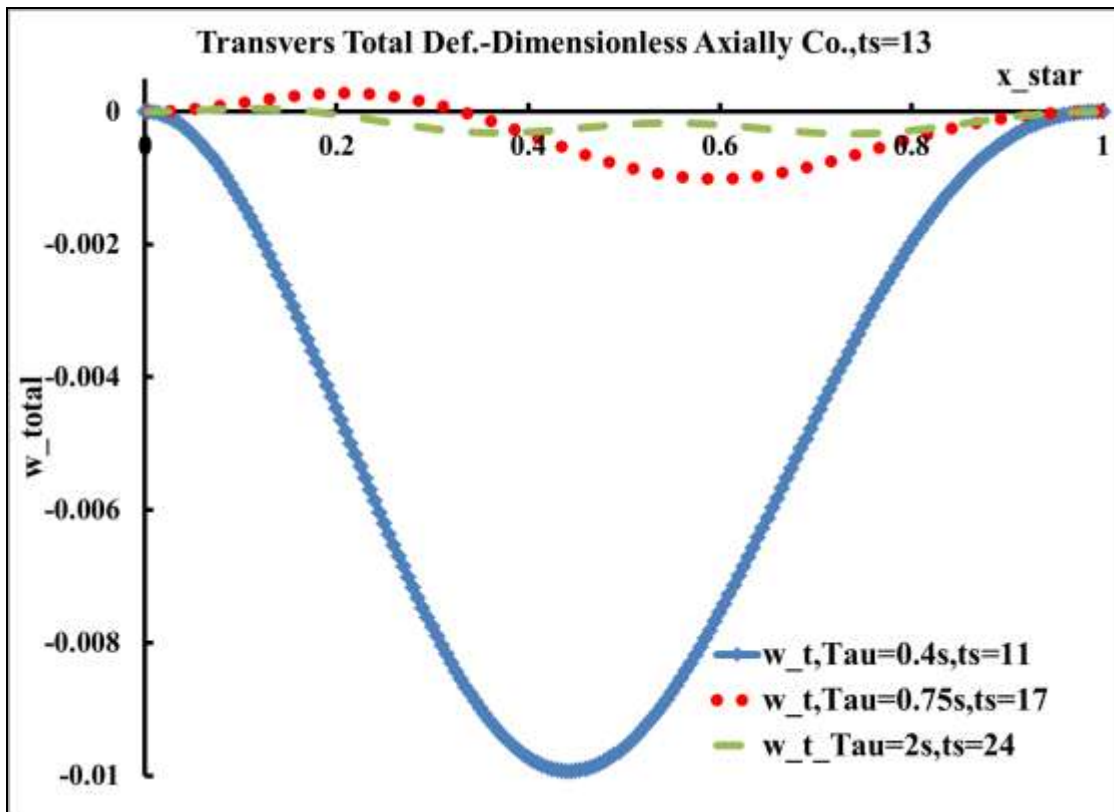
با توجه به اینکه در این پایان‌نامه، رفتار ماده مورد بررسی در برش ویسکوالاستیک فرض شده است، بررسی تأثیر مقدار پارامترهای ویسکوالاستیک بر رفتار کلی سیستم حائز اهمیت می‌باشد.

#### الف) اثر زمان رهایش

زمان رهایش (ثابت زمانی) بصورت زمان لازم برای رسیدن به حد نهایی تنش تفسیر می‌شود که شامل پارامترهای  $E_1$  و  $\eta$  می‌باشد.

شکل (۸-۵) چگونگی تأثیر زمان رهایش را بر خیز عرضی سیستم در زمان لازم رسیدن به حالت حدی (حد استاتیکی)  $t_s^*$  بر حسب مختصه محوری بی‌بعد و در مرکز وب ( $x^* = 0.5$ ) بر حسب زمان بی‌بعد نشان می‌دهد.

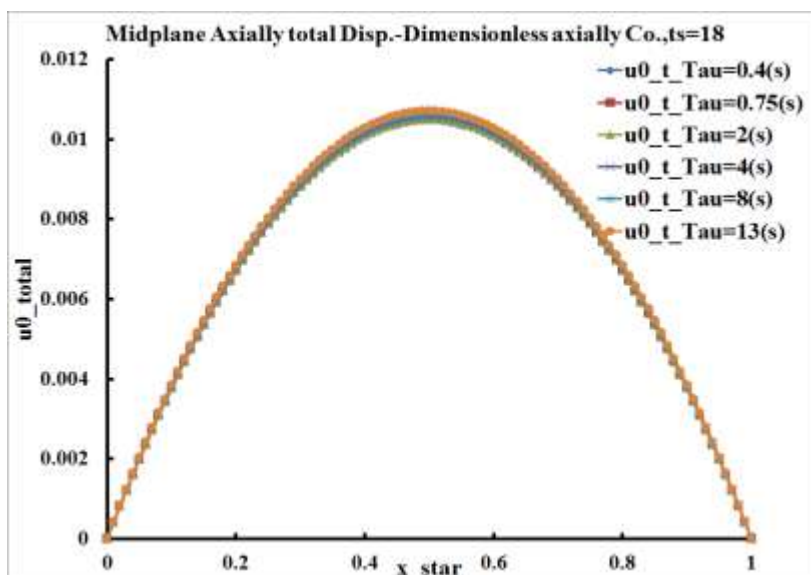




شکل (۸-۵) تأثیر تغییرات زمان رهايش بر جابجايی عرضی وب ویسکوالاستیک متحرک محوری در  $t^* = 10$

با توجه به نمودارهای ترسیم شده در شکل (۵-۸)، با افزایش مقدار زمان رهايش، مقدار خيز حداکثر کاهش می‌یابد که این روند کاهشى در زمان‌های رهايش کوچکتر شدیدتر می‌باشد؛ ولی تعداد موج‌های شکل پاسخ بیشتر می‌شود؛ بعلاوه با افزایش زمان رهايش، برای رسیدن به پاسخ استاتیکی زمان بیشتری مورد نیاز می‌باشد. در  $\tau > 4$  خيز عرضی حالت مقارنی نسبت به نقطه وسط وب پیدا می‌کند.

جهت بررسی اثر مقدار زمان رهايش بر جابجایی محوری، پاسخ جابجایی محوری کلی مربوط به صفحه میانی در زمان  $t^* = 18$  در شکل (۵-۹) ترسیم شده است.



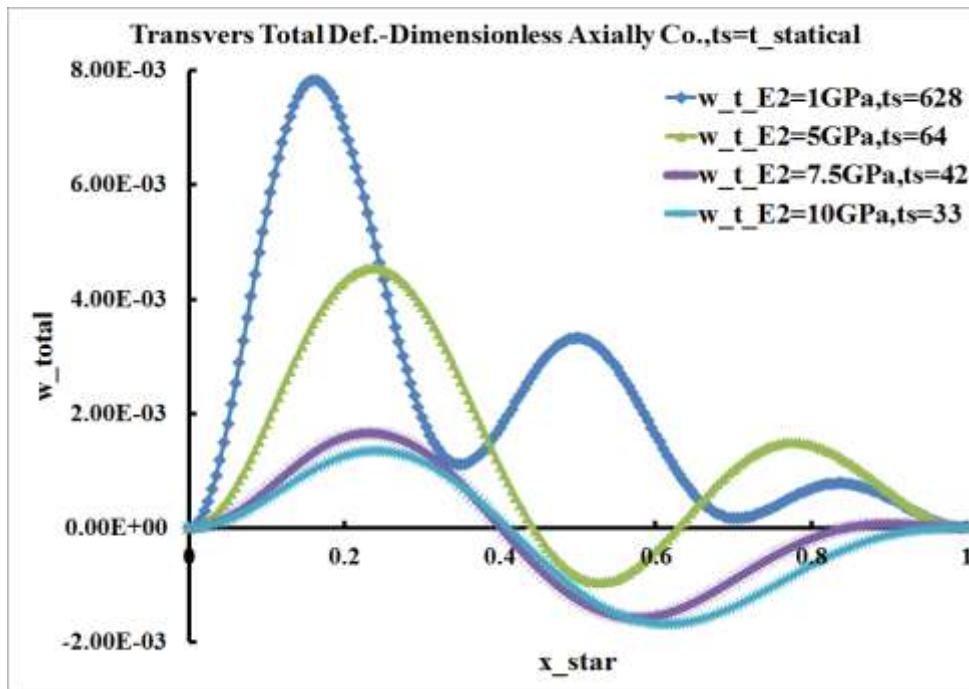
شکل (۵-۹) تأثیر زمان رهايش بر جابجایی محوری صفحه میانی وب ویسکوالاستیک متحرک در  $t^* = 18$

شکل (۵-۹) نشان می‌دهد که با افزایش مقدار ثابت زمانی، جابجایی محوری تقریباً حالت یکنواختی دارد. در واقع مقدار حداکثر جابجایی محوری به آرامی افزایش می‌یابد.

### ب) اثر پارامتر $E_2$

یکی دیگر از خصوصیات ویسکوالاستیک که تأثیر به‌سزایی در زمان رسیدن به پاسخ استاتیکی دارد، پارامتر  $E_2$  می‌باشد.

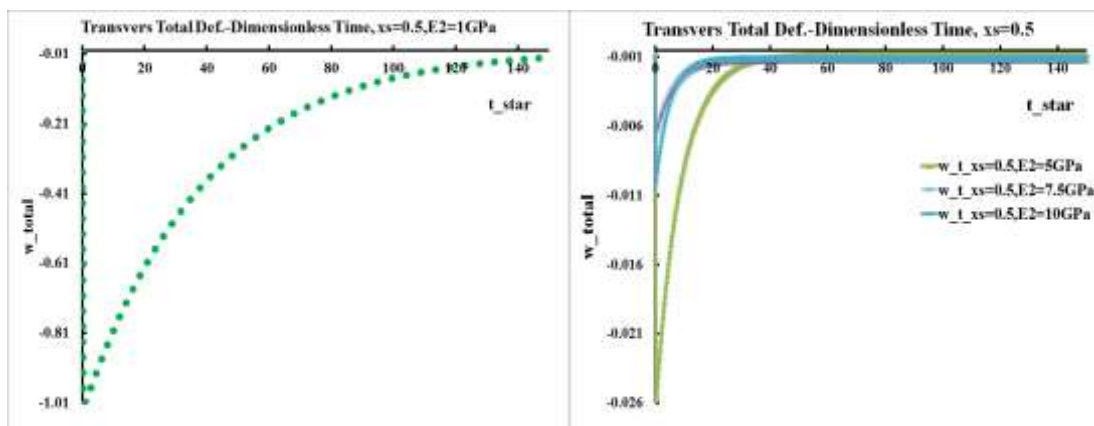
شکل (۵-۱۰) خيز عرضی را در زمان رسیدن به حد استاتیکی ( $t_s^*$ ) بر حسب مختصه محوری بی‌بعد و در مرکز وب ( $x^* = 0.5$ ) بر حسب زمان بی‌بعد، برای  $E_2$ های مختلف نشان می‌دهد.



شکل (۵-۱۰) تأثیر پارامتر  $E_2$  بر خیز عرضی وب ویسکوالاستیک متحرک محوری در  $t^* = t_s^*$

با توجه به شکل (۵-۱۰)، مقدار  $t_s^*$  شدیداً به  $E_2$  وابسته می‌باشد؛ بطوری که با افزایش  $E_2$  از 1GPa به 10GPa مقدار  $t_s^*$  از ۶۲۸ به ۳۳ می‌رسد. با افزایش  $E_2$ ، مقدار خیز عرضی حداکثر و اختلاف بین خیزهای حداکثر و حداقل کاهش می‌یابد.

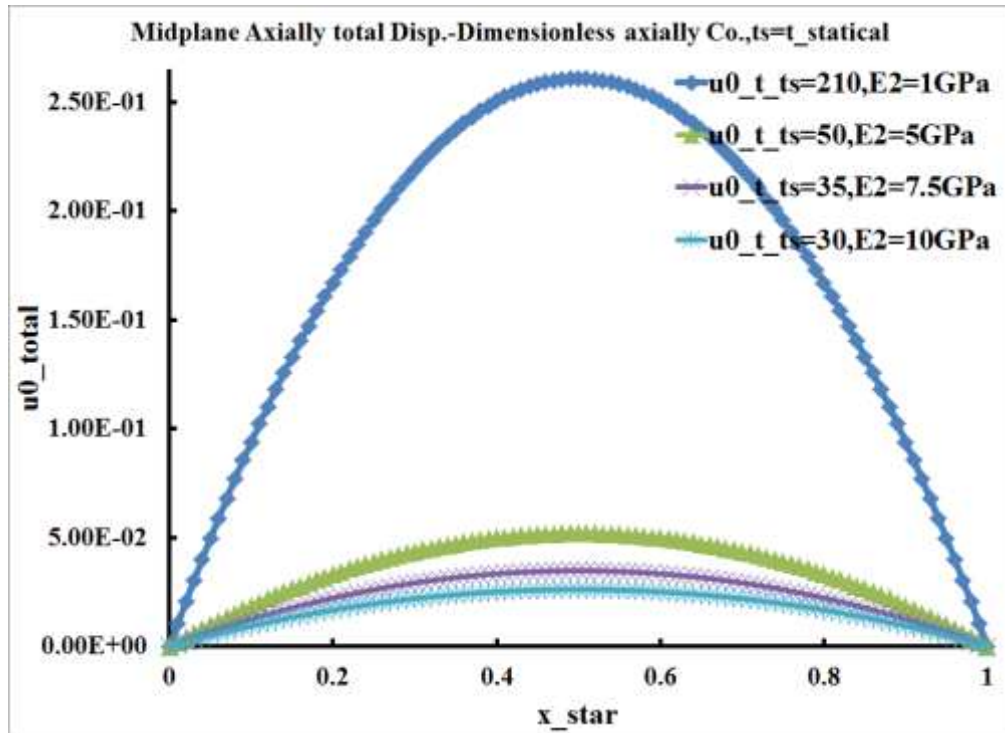
پاسخ خیز عرضی بر حسب زمان بی‌بعد در مرکز وب ( $x^* = 0.5$ )، برای مقادیر مختلف  $E_2$  نیز بصورت زیر می‌باشد:



شکل (۵-۱۱) تأثیر پارامتر  $E_2$  بر پاسخ خیز عرضی مرکز وب بر حسب زمان بی‌بعد

با توجه به شکل (۵-۱۱)، با افزایش مقدار  $E_2$  زمان کمتری برای رسیدن به حد استاتیکی خیز عرضی نیاز می‌باشد.

در شکل (۵-۱۲) جابجایی محوری در زمان  $t_s^*$  بر حسب مختصه محوری بی‌بعد برای  $E_2$ های مختلف ترسیم شده است.

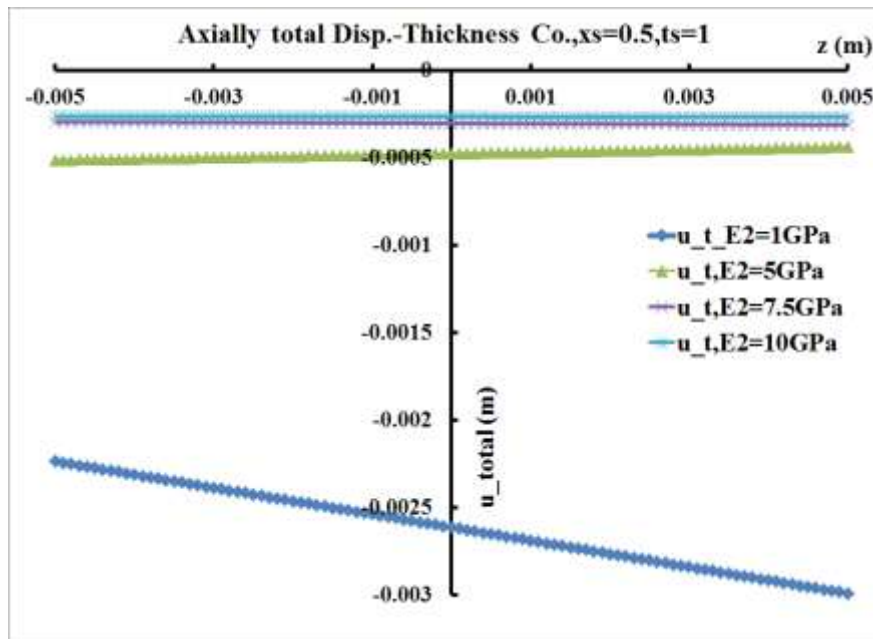


شکل (۵-۱۲) تأثیر پارامتر  $E_2$  بر جابجایی محوری وب ویسکوالاستیک متحرک محوری در  $t_s^* = t^*$

برخلاف پارامترهایی که قبلاً مورد بررسی قرار گرفت، پارامتر  $E_2$  بر زمان رسیدن به جابجایی استاتیکی مؤلفه محوری تأثیرگذار می‌باشد. با توجه به شکل (۵-۱۲)، در  $E_2 < 10GPa$  با افزایش این پارامتر، مقدار جابجایی محوری ماکزیمم و زمان لازم برای رسیدن به پاسخ نهایی کاهش می‌یابد. ولی مانند حالت‌های بررسی شده دیگر، موقعیت جابجایی محوری ماکزیمم در قسمت میانی وب می‌باشد.

در شکل (۵-۱۳) تأثیر پارامتر  $E_2$  بر جابجایی محوری کلی وب ویسکوالاستیک متحرک در وسط

وب و  $t^* = 1$  بر حسب مختصه  $z$  نشان شده است.



شکل (۵-۱۳) تأثیر پارامتر  $E_2$  بر جابجایی محوری کلی وب ویسکوالاستیک متحرک در  $x^* = 0.5$  و  $t^* = 1$

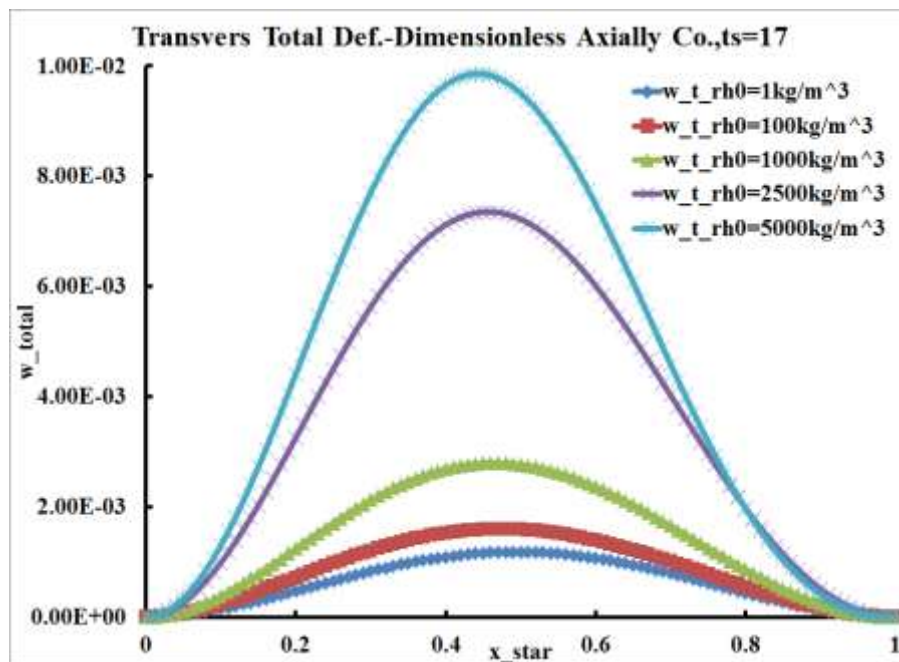
شکل (۵-۱۳) روند کاهشی جابجایی محوری کلی را برای افزایش  $E_2$  نشان می‌دهند. اختلاف جابجایی محوری در صفحات بالایی و پایینی نسبت به صفحه میانی برای مقادیر ۱، ۵،  $7/5$  و ۱۰ گیگاپاسکال به ترتیب در حدود  $\pm 0.43\%$ ،  $\pm 2.86\%$ ،  $\pm 7.89\%$ ،  $\pm 14\%$  می‌باشد. یعنی با افزایش  $E_2$  در محدوده مورد بررسی، اختلاف مذکور کاهش می‌یابد.

### ۳-۳-۵ بررسی اثر چگالی

چگالی از جمله خواص فیزیکی است که در معادلات حاکم بر وب ظاهر می‌شود. مقدار این خاصیت، نسبت به پارامترهای ویسکوالاستیک به راحتی محاسبه می‌شود.

شکل (۵-۱۴) خیز عرضی را در  $t^* = 17$  بر حسب مختصه محوری بی‌بعد برای چگالی‌های

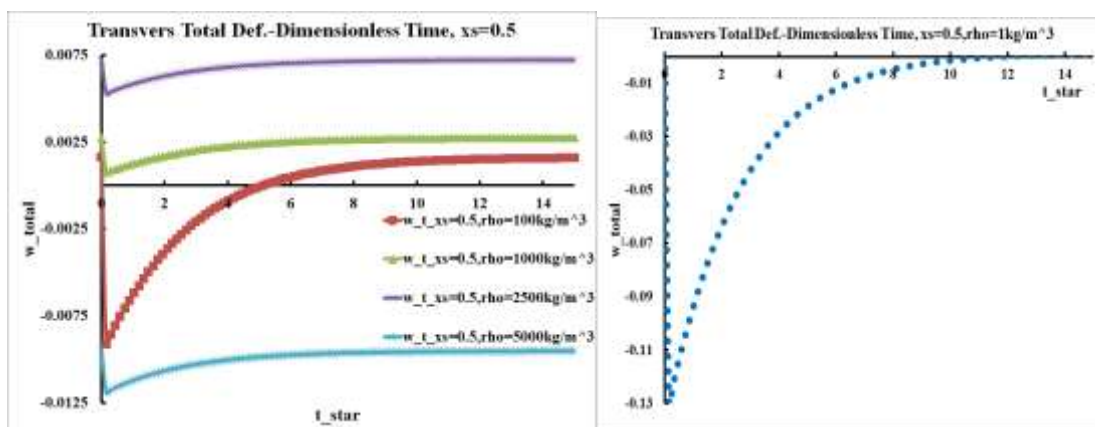
مختلف نشان می‌دهد.



شکل (۵-۱۴) تأثیر چگالی بر خیز عرضی وب ویسکوالاستیک متحرک محوری در  $t^* = 17$

با توجه به شکل (۵-۱۴) در  $\rho \leq 5000(kg / m^3)$  با افزایش چگالی، مقدار خیز عرضی حداکثر، در یک زمان مشخص افزایش می‌یابد. زمان رسیدن به حد نهایی پاسخ تقریباً ثابت می‌باشد. در این حالت خیز حداکثر تقریباً در میانه وب اتفاق می‌افتد.

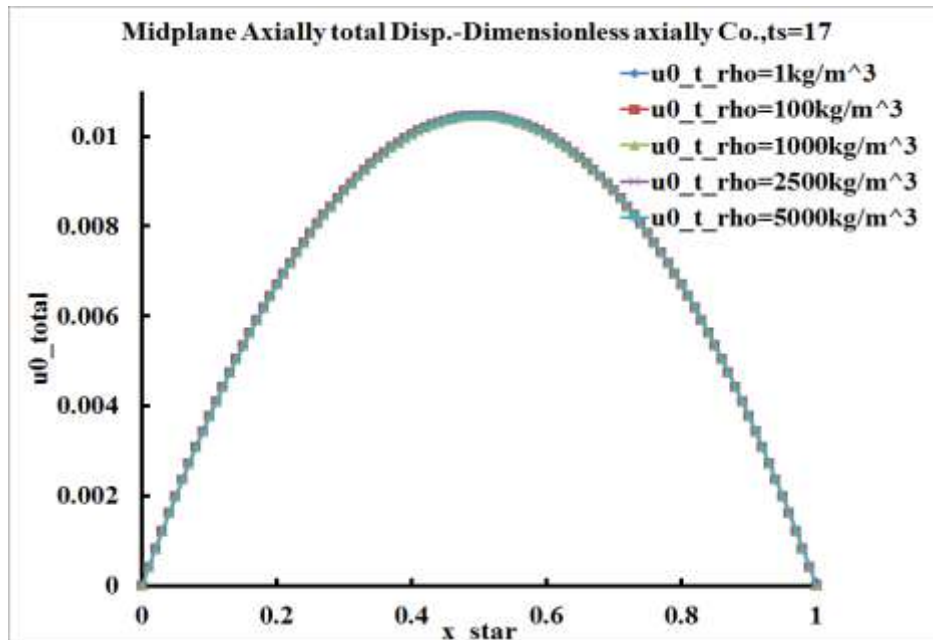
خیز عرضی مرکز وب بر حسب زمان بی‌بعد، برای چگالی‌های مختلف بصورت زیر است:



شکل (۵-۱۵) تأثیر چگالی بر خیز عرضی مرکز وب بر حسب زمان بی‌بعد

شکل (۵-۱۵) نشان می‌دهد برای مقادیر مختلف چگالی، خیز صفحه میانی در مدت زمان اندکی (در حد ۵ ثانیه) به مقدار استاتیکی خود می‌رسند.

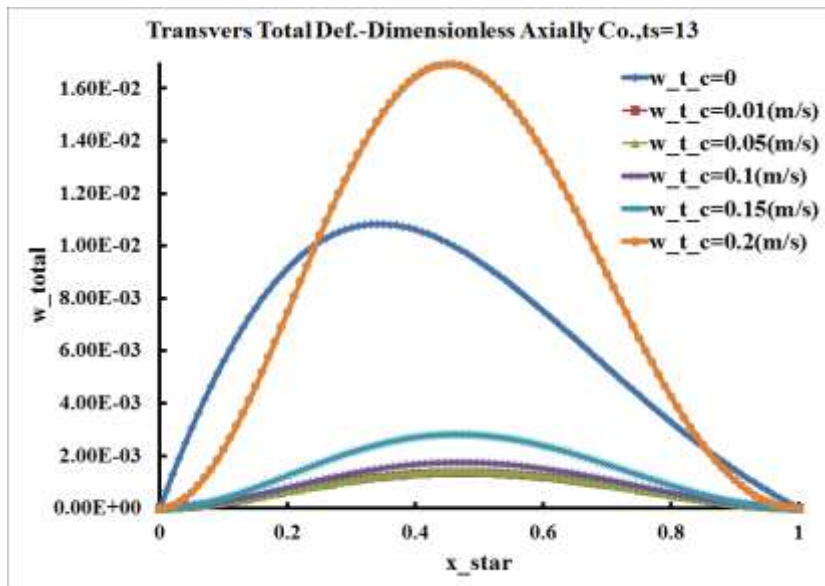
جهت بررسی اثر چگالی بر جابجایی محوری، پاسخ جابجایی محوری کلی مربوط به صفحه میانی در زمان  $t^* = 17$  برای چگالی‌های مختلف در شکل (۵-۱۶) ترسیم شده است.



شکل (۵-۱۶) تأثیر چگالی بر جابجایی محوری صفحه میانی وب ویسکوالاستیک متحرک محوری در  $t^* = 17$  با توجه به شکل (۵-۱۶)، تغییرات پارامتر چگالی تأثیر محسوسی بر مقدار جابجایی محوری صفحه میانی ندارد.

### ۴-۳-۵ بررسی اثر سرعت انتقال محوری

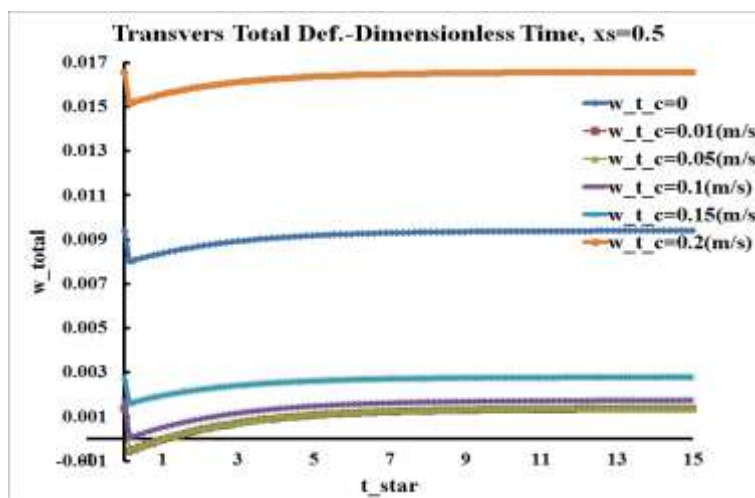
یکی از پارامترهای مهم در بررسی وب‌های متحرک، سرعت انتقال وب می‌باشد. از این رو در این قسمت به بررسی اثر این پارامتر بر میدان جابجایی پرداخته می‌شود. در شکل (۵-۱۷) خیز عرضی سیستم در زمان  $t^* = 13$  بر حسب مختصه محوری بی‌بعد برای سرعت‌های انتقال مختلف ترسیم شده است.



شکل (۵-۱۷) تأثیر سرعت انتقال بر خیز عرضی وب ویسکوالاستیک متحرک محوری در  $t^* = 13$

با توجه به شکل (۵-۱۷)، در سرعت‌های کمتر از  $0.15$  متر بر ثانیه، مقدار خیز عرضی حداکثر از خیز وب ساکن کمتر است. در حالت وب متحرک، مقدار خیز ماکزیمم با افزایش سرعت انتقال، افزایش می‌یابد. بعلاوه، به جزء در حالت وب ساکن، در سرعت‌های انتقال مختلف تغییر شکل ماکزیمم تقریباً در وسط وب ایجاد می‌شود. زمان رسیدن به پاسخ استاتیکی در حالت وب متحرک تقریباً یکسان ( $t^* = 13$ ) می‌باشد. شکل (۵-۱۸) نیز تأییدکننده نتایج مذکور می‌باشد.

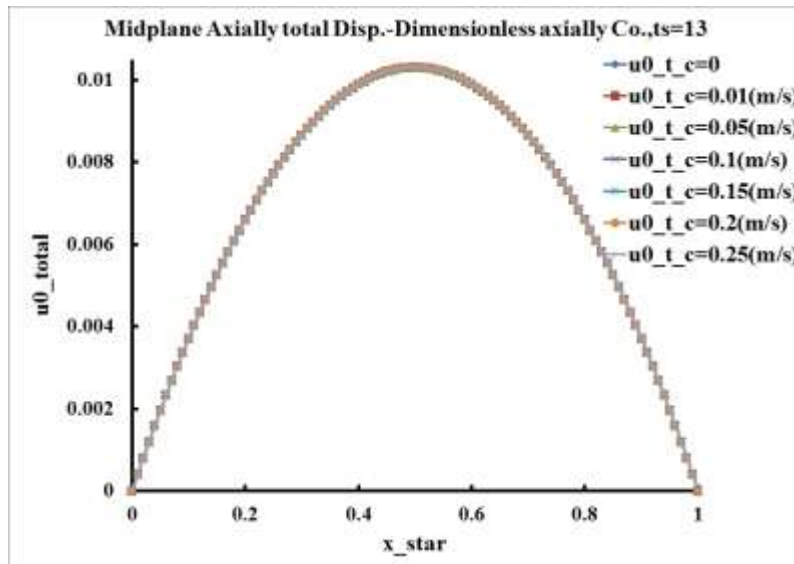
تأثیر سرعت انتقال بر خیز عرضی مرکز وب بر حسب زمان بی‌بعد در شکل زیر ترسیم شده است.



شکل (۵-۱۸) تأثیر سرعت انتقال بر خیز عرضی مرکز وب بر حسب زمان بی‌بعد



جابجایی محوری کلی مربوط به صفحه میانی در زمان  $t^* = 13$  برای سرعت‌های انتقال مختلف در شکل (۱۹-۵) ترسیم شده است.



شکل (۱۹-۵) تأثیر سرعت انتقال بر جابجایی محوری صفحه میانی وب ویسکوالاستیک متحرک در  $t^* = 13$

با توجه به فوق، تغییرات سرعت انتقال وب تأثیر محسوسی بر مقدار جابجایی محوری صفحه میانی ندارد.

#### ۴-۵ بررسی سرعت بحرانی سیستم

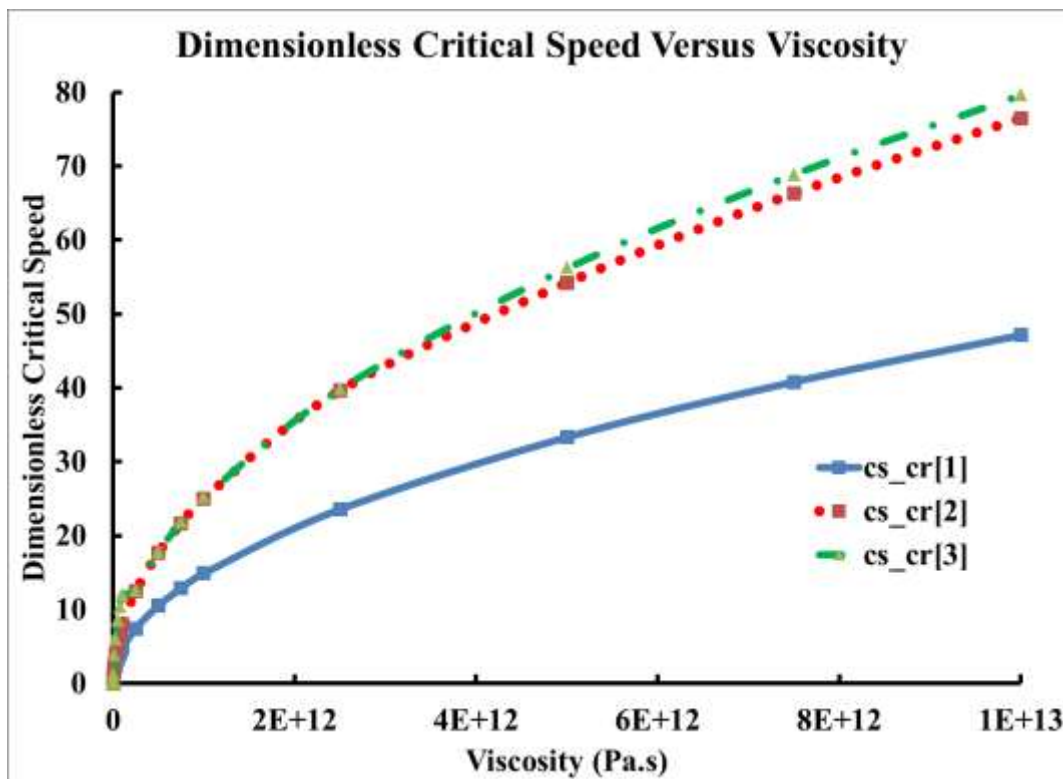
با توجه به آنچه که در بخش ۴-۷ گفته شد، پس از اتصال دستگاه مختصات به یک نقطه از وب متحرک (با اعمال تغییر متغیر  $X = x - ct$ ) و بر اساس شرط پایداری، مقادیر سرعت بحرانی تعیین می‌شوند. برای وب ویسکوالاستیک متحرک محوری دارای مشخصات هندسه، ماده و بارگذاری مطابق با جدول (۱-۵)، مقادیر چهار سرعت بحرانی بی‌بعد اول سیستم برابر است با:  $۳/۳۳۲۵$ ،  $۵/۶۳۳$ ،  $۸/۴۹۳۸$  و  $۸/۹۶۰۶$ .

به کمک همین روش، مقادیر سه سرعت بحرانی بی‌بعد اول وب الاستیک نیز بصورت  $۳/۳۳۲۵$ ،  $۴/۱۳۷۷$ ،  $۴/۶۲۷۹$  و  $۵/۶۳۳$  بدست می‌آیند. بنابراین سرعت بحرانی اول، وب الاستیک با وب ویسکوالاستیک می‌باشد. اما مقادیر سرعت‌های بحرانی بالاتر، در حالت ویسکوالاستیک از الاستیک

بیشتر می‌باشد؛ بطوری که سرعت بحرانی چهارم وب الاستیک با سرعت بحرانی دوم وب ویسکوالاستیک برابر است.

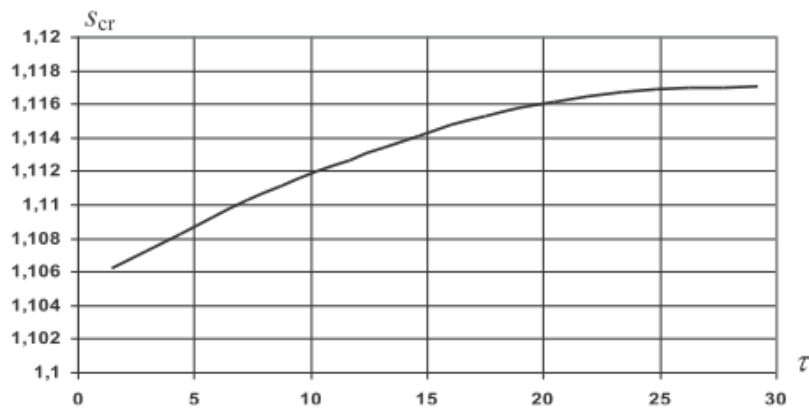
#### ۱-۴-۵ بررسی اثر ویسکوزیته بر سرعت‌های بحرانی وب ویسکوالاستیک

در شکل زیر اثر پارامتر ویسکوزیته بر مقادیر سه سرعت بحرانی بی‌بعد اول وب ویسکوالاستیک متحرک نشان داده شده است.



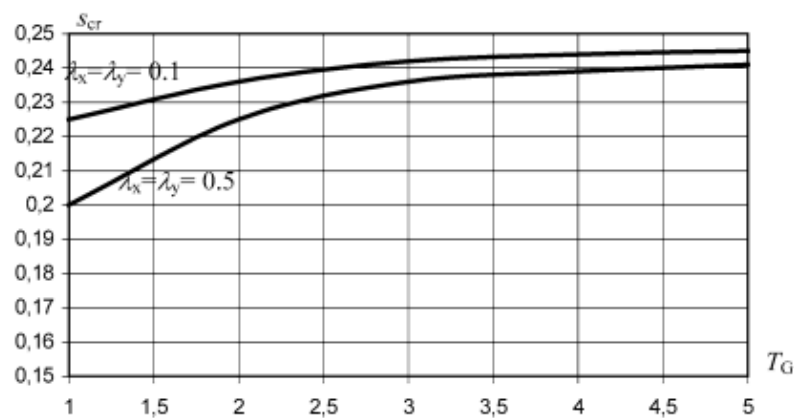
شکل (۲۰-۵) بررسی اثر ویسکوزیته بر سه سرعت بحرانی بی‌بعد اول وب ویسکوالاستیک متحرک

با توجه به شکل (۲۰-۵)، با افزایش مقدار ویسکوزیته مقادیر هر سه سرعت بحرانی اول افزایش می‌یابد. از آنجا که ویسکوزیته با زمان رهایش رابطه مستقیم دارد، بنابراین نتیجه مذکور با نتیجه مارینوسکی [15] همخوانی دارد (شکل (۲۱-۵)).



شکل (۲۱-۵) بررسی اثر زمان رهاش بر سرعت بحرانی وب ویسکوالاستیک متحرک [15]

چنین نتیجه‌ای در مرجع [16] نیز بدست آمده است (شکل (۲۲-۵)).



شکل (۲۲-۵) بررسی اثر زمان رهاش بر سرعت بحرانی وب ویسکوالاستیک متحرک [16]

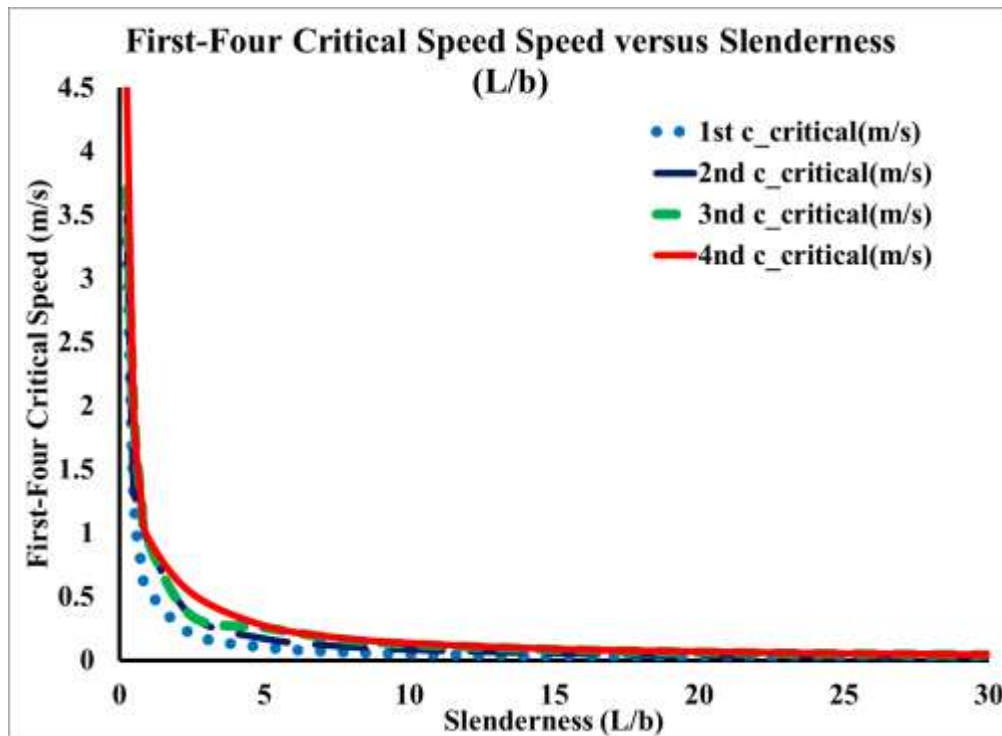
که  $\lambda_x, \lambda_y$  زمان‌های خزش در دو راستای  $x$  و  $y$  می‌باشند.

### ۲-۴-۵ بررسی اثر لاغری بر سرعت‌های بحرانی وب ویسکوالاستیک متحرک

با توجه به داده‌های جدول (۱-۵) نمودار سه سرعت بحرانی بی‌بعد اول وب ویسکوالاستیک

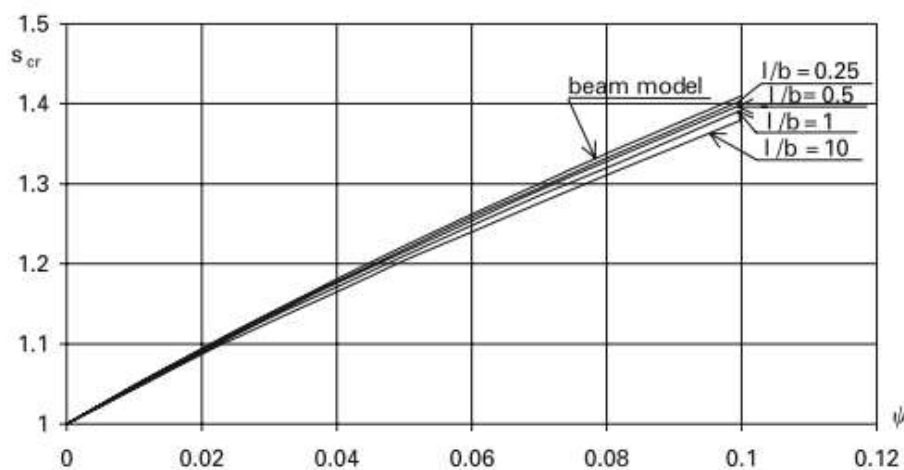
متحرک بر حسب ضریب لاغری<sup>۱</sup> (نسبت طول به عرض وب) بصورت شکل (۲۳-۵) بدست می‌آید:

1. Slenderness



شکل (۵-۲۳) بررسی اثر لاغری بر چهار سرعت بحرانی بی‌بعد اول وب ویسکوالاستیک متحرک

با توجه به شکل (۵-۲۳) با افزایش لاغری، مقدار هر چهار سرعت بحرانی اول بی‌بعد کاهش می‌یابد که این روند در مقادیر لاغری پایین‌تر شدت بیشتری دارد. روند مذکور در مرجع [22] نیز قابل مشاهده می‌باشد.



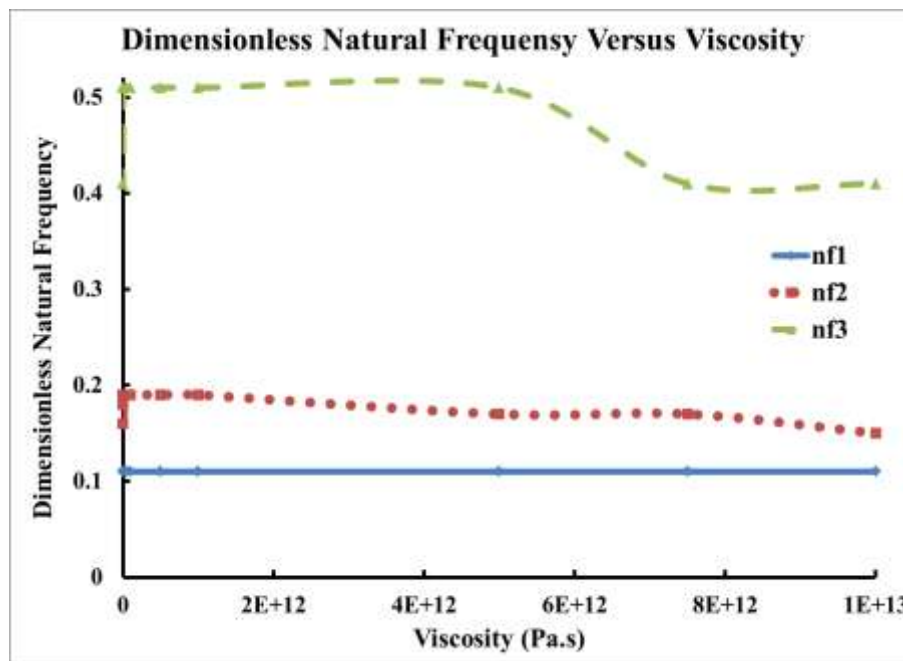
شکل (۵-۲۴) سرعت بحرانی برای نسبت‌های مختلف لاغری وب [22]

## ۵-۵ بررسی فرکانس‌های طبیعی سیستم

بر اساس آنچه که در بخش ۴-۸ برای تعیین فرکانس طبیعی وب‌های ویسکوالاستیک متحرک محوری بیان شد، پس از یافتن معادله تفرق حاکم بر سیستم، مقادیر چهار فرکانس طبیعی بی‌بعد اول سیستم تعیین شده است. مقادیر این چهار فرکانس طبیعی بی‌بعد برای وب ویسکوالاستیک متحرک محوری با مشخصات هندسه، ماده و بارگذاری مطابق با جدول (۵-۱)، به ترتیب عبارتند از: ۰/۱۱، ۰/۱۹، ۰/۵۱ و ۱/۴۹.

### ۵-۵-۱ بررسی اثر ویسکوزیته بر فرکانس‌های طبیعی وب ویسکوالاستیک

در شکل (۵-۲۵) سه فرکانس طبیعی بی‌بعد اول سیستم به ازای مقادیر مختلف ویسکوزیته ترسیم شده است.



شکل (۵-۲۵) بررسی اثر ویسکوزیته بر سه فرکانس طبیعی بی‌بعد اول وب ویسکوالاستیک متحرک

با توجه به شکل فوق، فرکانس طبیعی اول مستقل از مقدار ویسکوزیته وب متحرک می‌باشد که در مراجع مختلفی از جمله [48] نیز چنین نتیجه‌ای گرفته شده است.

## ۵-۶ جمع بندی

در این فصل، با توجه به مطالب گفته شده در فصل گذشته، حل کلی، سرعت بحرانی و فرکانس-های طبیعی، به ازای یک مقادیر اولیه انتخابی تعیین شدند. اثر پارامترهای مختلف ماده، هندسه و سرعت انتقال وب بر رفتار سیستم نیز بررسی شد. در فصل بعدی، نتیجه‌گیری و پیشنهادات این تحقیق ارائه خواهند شد.

فصل هشتم

نتیجہ گیری و پیشہ ندادہ

## ۶-۱ مقدمه

در این پایان‌نامه، به حل ریاضی معادله‌ی حاکم بر ارتعاشات وب ویسکوالاستیک متحرک محوری تحت فشار عرضی ثابت پرداخته شده است. در ابتدا، به کمک اصل هامیلتون و بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، معادلات حاکم بر ارتعاشات وب الاستیک متحرک محوری در حالت دوبعدی استخراج شده‌اند. سپس با در نظر گرفتن مدل زرن نوع دوم جهت توصیف رفتار ویسکوالاستیک وب متحرک در برش و رفتار الاستیک در اتساع، با استفاده از شکل دیفرانسیلی معادلات بنیادین، معادلات مذکور برای وب ویسکوالاستیک متحرک تعمیم داده شدند. معادلات حاکم به صورت یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مشتق جزئی شامل پنج معادله و پنج مجهول می‌باشند که به هم کوپل می‌باشند. از آنجا که حل این معادلات در حالت دوبعدی مشکل می‌باشد، با فرض این که نسبت طول به عرض وب به اندازه کافی بزرگ باشد، تغییرات نسبت به مختصه  $y$  برابر صفر قرار داده شد. به این ترتیب معادلات حاصل فقط شامل متغیرهای بعد طولی و زمان می‌باشند. پس از بی‌بعدسازی و لاپلاس‌گیری از معادلات، با استفاده از روش MAE پاسخ سیستم در فضای لاپلاس بدست آمد. به عنوان نتایج پایان‌نامه، حل کلی، سرعت بحرانی و فرکانس‌های طبیعی، به ازای مقادیر اولیه انتخابی تعیین شدند. همچنین، اثر پارامترهای مختلف ماده، هندسه و سرعت انتقال وب بر رفتار سیستم بررسی شده‌اند.

## ۶-۲ نتایج

نتایج این پایان‌نامه بصورت زیر قابل بیان می‌باشند:

- ۱- تغییرات جابجایی محوری در راستای ضخامت قابل توجه است و در برخی موارد تا حدود ۱۴ درصد با جابجایی صفحه میانی اختلاف دارد.
- ۲- به ازای مقادیر انتخابی جابجایی محوری صفحه میانی سریعاً به حد استاتیکی خود می‌رسد. همچنین، تغییر جهت جابجایی محوری در زمان بسیار کوتاهی (در حد هزارم ثانیه) و تقریباً در ثانیه اول حرکت سیستم اتفاق می‌افتد.



- ۳- در اکثر حالات بررسی شده، در ابتدا اغتشاشات بسیار کوچکی در جابجایی‌های عرضی مرزهای چپ و راست مشاهده می‌شود که بعد از مدت کوتاهی این خیزها به یک مقدار کوچک حدی (تقریباً صفر) می‌رسند که با شرایط مرزی انتخابی مسئله منطبق می‌باشند.
- ۴- مقدار خیز ماکزیمم و تعداد نوسانات شکل خیز عرضی وب با گذشت زمان کاهش می‌یابد.
- ۵- محل حادث شدن خیز عرضی استاتیکی ماکزیمم به مقادیر پارامترهای وابسته می‌باشد؛ ولی جابجایی محوری، معمولاً در وسط (یا نزدیک به آن) طول وب به مقدار حداکثر خود می‌رسد.
- ۶- با افزایش ضخامت، مقادیر ماکزیمم جابجایی عرضی و محوری و تعداد موج‌های خیز عرضی کاهش می‌یابد. زمان رسیدن هر دو مؤلفه جابجایی به مقدار استاتیکی، برای ضخامت‌های مختلف تقریباً یکسان است.
- ۷- با افزایش مقدار ثابت زمانی، مقدار خیز حداکثر کاهش می‌یابد که این روند کاهشی در ثوابت زمانی کوچکتر شدیدتر می‌باشد؛ ولی نوسانات شکل پاسخ بیشتر می‌شود؛ بعلاوه با افزایش ثابت زمانی، برای رسیدن به پاسخ استاتیکی زمان بیشتری مورد نیاز می‌باشد. مقدار حداکثر جابجایی محوری نیز به آرامی افزایش می‌یابد.
- ۸- زمان رسیدن به پاسخ استاتیکی، شدیداً به پارامتر  $E_2$  وابسته می‌باشد؛ در  $E_2 < 10GPa$  با افزایش  $E_2$ ، مقدار خیز عرضی حداکثر کاهش می‌یابد. این پارامتر بر زمان رسیدن به جابجایی استاتیکی مؤلفه محوری جابجایی نیز تأثیرگذار می‌باشد.
- ۹- در  $\rho \leq 5000(kg / m^3)$  با افزایش چگالی، مقدار خیز عرضی حداکثر افزایش می‌یابد. بعلاوه، مقدار چگالی تأثیر زیادی بر مقدار جابجایی محوری ندارد.
- ۱۰- در حالت وب متحرک، مقدار خیز ماکزیمم با افزایش سرعت انتقال، افزایش می‌یابد. در سرعت‌های انتقال مختلف محل تغییر شکل ماکزیمم و زمان رسیدن به پاسخ استاتیکی تقریباً ثابت می‌باشد. مقدار سرعت انتقال محوری وب تأثیر زیادی بر مقدار جابجایی محوری ندارد.
- ۱۲- سرعت بحرانی در حالت وب الاستیک از وب ویسکوالاستیک به مراتب کوچکتر است.

۱۳- با افزایش مقدار ویسکوزیته مقادیر هر سه سرعت بحرانی اول افزایش می‌یابد.

۱۴- با افزایش ضریب لاغری و ب (نسبت طول به عرض) مقادیر سه سرعت بحرانی اول کاهش

می‌یابند.

۱۵- فرکانس طبیعی اول مستقل از مقدار ویسکوزیته و ب متحرک می‌باشد.

### ۳-۶ پیشنهادها

جهت انجام مطالعه جامع‌تر در زمینه جاری، موارد زیر قابل بررسی می‌باشند:

- ۱- بررسی دینامیکی و ب ویسکوالاستیک متحرک با سرعت متغیر با زمان
- ۲- استفاده از بسط‌های مراتب بالاتر تئوری اغتشاشات در تخمین مقادیر ویژه
- ۳- استفاده از روش‌های بهینه‌تر در تعیین علامت مقادیر ویژه
- ۴- ارائه روش‌های جامع‌تر در بدست آوردن دقیق‌تر مقادیر ویژه سیستم
- ۵- بررسی پاسخ سیستم تحت بار کششی وابسته به زمان
- ۶- بررسی پاسخ سیستم تحت فشار متغیر
- ۷- بررسی پاسخ سیستم متحرک تحت بار و یا جرم متحرک
- ۸- بررسی استفاده از مدل‌های رئولوژیکی کاربردی دیگر از قبیل مدل‌های چندپارامتری برگرز و ویچرت<sup>۱</sup> در تعیین رفتار سازه ویسکوالاستیک
- ۱۰- مطالعه پارامترهای مؤثر بر مقادیر سرعت بحرانی و فرکانس‌های طبیعی سیستم
- ۱۱- ارائه روش‌های دقیق‌تر در لاپلاس معکوس‌گیری از پاسخ‌های بدست آمده
- ۱۲- بازنگری و بررسی انتخاب پارامترهای بی‌بعد استفاده شده در بخش بی‌بعدسازی معادلات
- ۱۳- بررسی اثر تکیه‌گاه‌های مختلف از جمله بسترهای الاستیک و ویسکوالاستیک

1. Wiechert

بدون توجه به مشکلات احتمالی در حل معادلا حاکم، روش ارائه شده در این تحقیق، در بررسی

ارتعاشات آزاد و اجباری موارد زیر قابل بررسی می‌باشد:

۱- تیرهای متحرک از جنس‌های کامپوزیت، ویسکوالاستیک و FGM

۲- وب‌های کامپوزیت متحرک محوری

۳- پیوستارهای متحرک با سرعت محوری متغیر با زمان

۴- پیوستارهای متحرک روی بسترهای الاستیک و ویسکوالاستیک

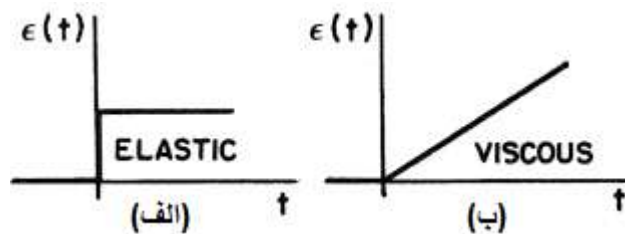
## پیوست الف - اصول ویسکوالاستیسیته خطی و مدل‌های وابسته

### الف-۱ تعیین خصوصیات مکانیکی مواد ویسکوالاستیک

بطور معمول با انجام تست‌های ساده آزمایشگاهی می‌توان ویژگی‌های مواد را مشخص کرد. تعیین خصوصیات مکانیکی مواد ویسکوالاستیک مشابه مواد الاستیک، اغلب شامل تست کشش محوری می‌باشد. اگرچه تست‌های کشش ویسکوالاستیک زیادی وجود دارد، اما معمولاً فقط سه حالت خزش، رهایش تنش و بارگذاری دینامیکی مورد استفاده قرار می‌گیرند [12].

#### الف-۱-۱- خزش

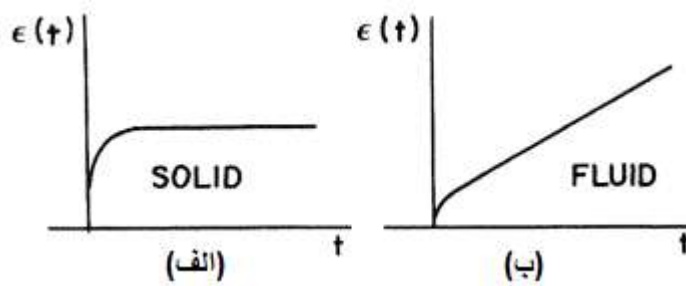
تست خزش شامل اندازه‌گیری کرنش وابسته به زمان  $\epsilon(t) = \delta(t)/L_0$ ، ناشی تنش محوری ثابت  $\sigma(t) = \sigma_0 H(t)$  می‌باشد. در این حالت، اگر رابطه تنش-کرنش خطی باشد، با  $a$  برابر شدن تنش، کرنش نیز  $a$  برابر می‌شود. شکل (الف-۱) پاسخ مواد الاستیک ایده‌آل (الف) و مایع ایده‌آل (ب) را به تست خزش نشان می‌دهد.



شکل (الف-۱) پاسخ الف- جامد الاستیک ایده‌آل، ب- مایع ایده‌آل به تست رهایش [4]

اما در واقعیت، کرنش در جامدات در مدت طولانی به یک مقدار حدی می‌رسد. کرنش در مایعات

نیز تابعی از زمان می‌باشد (شکل (الف-۲)).

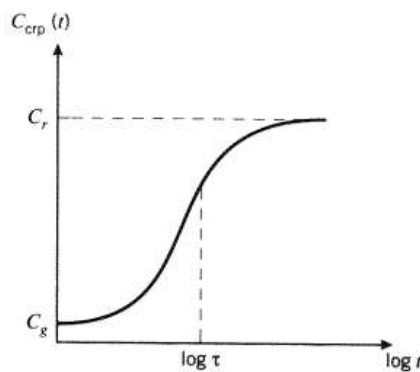


شکل (الف-۲) پاسخ به تست خزش: الف- جامد الاستیک واقعی، ب- مایع واقعی [4]

نسبت کرنش به تنش کامپلینس (نرمی)  $C$  نامیده می‌شود. برای کرنش تابع زمان، که از تنش ثابت ناشی می‌شود، این نسبت را کامپلینس خزش می‌نامند. یعنی:

$$C_{crp}(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} \quad \text{(الف-۱)}$$

در شکل (الف-۳) تابع کامپلینس خزش در مقابل لگاریتم زمان رسم شده است. نمودار از  $C_g$  (کامپلینس شیشه) شروع شده و در حالت تعادل به  $C_r$  (کامپلینس لاستیک) می‌رسد.



شکل (الف-۳) تابع کامپلینس خزش  $C_{crp}(t)$  [12]

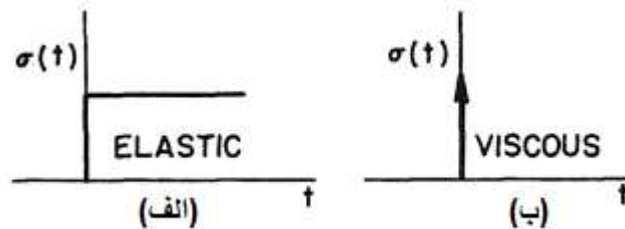
در نمودار فوق نقطه‌ای که با  $\log \tau$  نشان داده شده است، نقطه‌ی عطف نمودار می‌باشد.  $\tau$  زمان رهاپیش در فرآیند خزش نامیده می‌شود.

با برداشتن بار، کرنش به تدریج کاهش می‌یابد و به یک مقدار حدی می‌رسد که به آن پدیده بازگشت اطلاق می‌گردد.

## الف-۱-۲- رهایش تنش

در این حالت تنش وابسته به زمان، ناشی از کرنش ثابت  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t)$  اندازه‌گیری می‌شود. شکل

(الف-۴) پاسخ مواد جامد الاستیک ایده‌آل (الف) و مایع ایده‌آل را به تست رهایش نشان می‌دهد.

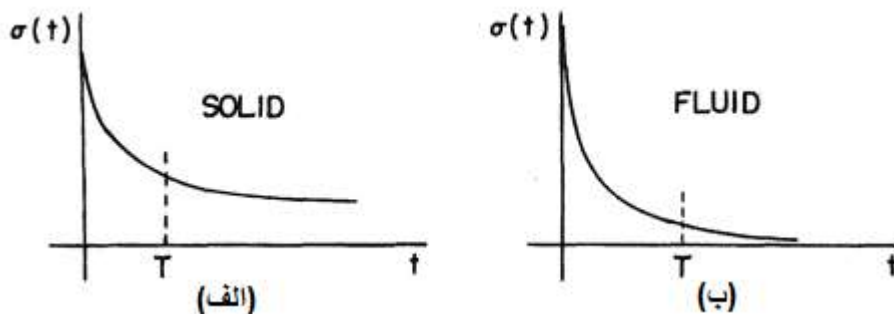


شکل (الف-۴) پاسخ الف- جامد الاستیک ایده‌آل، ب- مایع ایده‌آل به تست رهایش [4]

اما در واقعیت برای جامدات و مایعات چنین رفتاری مشاهده نمی‌شود. تنش در جامدات پس از

مدت نسبتاً کوتاهی کاهش یافته و به یک مقدار حدی می‌رسد. تنش در مایعات نیز پس از مدت

کوتاهی به صفر می‌رسد. شکل (الف-۵) این رفتارها را نشان می‌دهد.



شکل (الف-۵) پاسخ الف- جامد الاستیک واقعی، ب- مایع واقعی به تست رهایش [4]

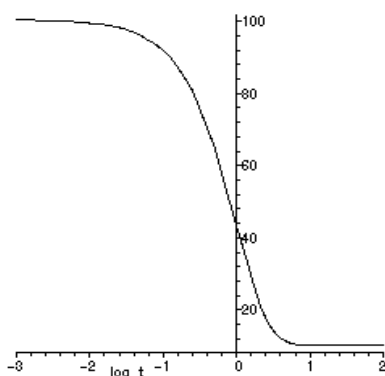
بنابراین همانطور که قبلاً نیز گفته شده است، تعیین جامد یا مایع بودن ماده با توجه به زمان

رهایش (زمان لازم برای اتمام یا ثبات تنش) انجام می‌شود [4].

مشابه کامپلینس خزش، در اینجا مدول رهایش به صورت  $E_{rel}(t) = \sigma(t) / \varepsilon_0$  معرفی می‌شود.

شکل (الف-۶) مدول رهایش را در مقابل لگاریتم زمان نشان می‌دهد. در این شکل  $E_g = 100$  ،

$E_r = 10$  و  $\tau = 1$  می‌باشند [12].



شکل (الف-۶) تابع مدول رهایش تنش  $E_{rel}(t)$  [12]

خزش و رهایش هر دو مظهر یک مکانیسم ملکولی‌اند و انتظار می‌رود  $E_{rel}(t)$  و  $C_{cp}(t)$  به هم

مرتبط باشند. اما در حالت کلی ولو اینکه  $E_r = \frac{1}{C_r}$  و  $E_g = \frac{1}{C_g}$ ، نمی‌توان گفت  $E_{rel}(t) = \frac{1}{C_{cp}(t)}$ .

به ویژه حرکت به سوی حالت تعادل در پاسخ رهایش سریع‌تر از خزش می‌باشد [12]. با برداشتن بار، تنش به تدریج کاهش می‌یابد و به صفر می‌رسد.

### الف-۱-۳- بارگذاری دینامیکی<sup>۱</sup> (سیکلی)

تست‌های خزش و رهایش تنش برای مطالعه‌ی پاسخ مواد در زمان‌های طولانی (از چند دقیقه تا روز)، مناسب می‌باشند، اما برای زمان‌های کوتاه‌تر (ثانیه یا کمتر)، پاسخ دقیقی ارائه نمی‌دهد. تست دینامیکی، که در آن تنش (یا کرنش) حاصله از کرنش (یا تنش) سینوسی اندازه‌گیری می‌شود، اغلب برای یافتن پاسخ پلیمرها در بازه‌های کوتاه‌مدت مناسب می‌باشد. هنگامی که یک ماده ویسکوالاستیک تحت تنش متغیر سینوسی قرار می‌گیرد، سرانجام به یک حالت پایا می‌رسد که در آن کرنش حاصله نیز تابعی سینوسی، با همان فرکانس زاویه‌ای، اما با تأخیر فاز به اندازه‌ی زاویه  $\alpha$ ، می‌باشد. این تأخیر فاز مشابه تأخیر کرنش مشاهده شده در آزمایش خزش می‌باشد. همواره کرنش با فاز  $\alpha$  از تنش عقب می‌ماند، حتی اگر کرنش نسبت به تنش متغیر کنترل شده باشد.

در بارگذاری سیکلی پدیده هیستریسیس رخ می‌دهد که منجر به اتلاف انرژی می‌شود. تفاوت

1. Dynamic Loading

رفتار ماده در حالت استاتیک و دینامیک نیز با این تست مشخص می‌شود.

### الف - ۲ اصل جمع آثار بولتزمن [۶۷]

در یک سیستم ویسکوالاستیک که تحت بار قرار گرفته است، به علت تغییرات آنتروپی (بی-نظمی)، پس از توقف اعمال بار، پاسخ سیستم متوقف نمی‌شود (از بین نمی‌رود). یعنی تغییر شکل چنین ماده‌ای فقط به تنش اعمالی واقعی وابسته نمی‌باشد، بلکه به گذشته تنش (سابقه مکانیکی) تحمل شده توسط آن نیز مرتبط می‌باشد [4].

طبق آنچه که در بخش الف-۱ گفته شد، در حالت تنش ثابت، افزایش کرنش و در حالت کرنش ثابت، کاهش تنش مشاهده می‌شود. حال اگر تنش یا کرنش دارای سابقه زمانی عمومی باشند، یا اگر تنش و کرنش با هم تغییر کنند، پاسخ سیستم (تنش، کرنش یا جابجایی) چگونه تعیین می‌شود؟ تحت رژیم رفتاری خطی، پاسخ‌های مربوط به اغتشاشات خطی مختلف را می‌توان با هم جمع کرد. این روش به اصل جمع آثار بولتزمن معروف می‌باشد. بولتزمن در سال ۱۸۷۶ بیان کرد: تنشی که در فاصله زمانی  $t$  در جسم ایجاد می‌شود، کاملاً به سابقه کرنش در فاصله  $[0, t]$  بستگی دارد. همین مطلب برای کرنش نیز صادق است. بنابراین، پس از تقسیم سابقه بارگذاری به مجموعه‌ای از بارگذاری‌های پله‌ای و تعیین پاسخ برای هر بخش، برای بدست آوردن پاسخ کلی، تک‌تک پاسخ‌ها با هم جمع می‌شوند.

برای تست رهایش، نمو تنش در زمان  $\tau$  که  $0 < \tau < t$ ، از نمو کرنش به صورت زیر بدست می‌آید:

$$d\sigma(\tau) = E(t-\tau)d\varepsilon(\tau) \quad (\text{الف-۲})$$

تنش در زمان  $t$  با جمع کردن نمو‌های تنش زمان‌های قبل، به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\sigma(t) = \int_0^t E(t-\tau)d\varepsilon(\tau) = \int_0^t E(t-\tau)\frac{\partial\varepsilon(\tau)}{\partial\tau}d\tau \quad (\text{الف-۳})$$

در رابطه فوق  $E$  همان مدول رهایش است.

مشابه این مطلب برای کرنش نیز برقرار می‌باشد. برای تست خزش، نمو کرنش در زمان  $\tau$  برابر



است با:

$$d\varepsilon(\tau) = D(t-\tau)d\sigma(\tau) \quad (\text{الف-۴})$$

و کرنش در زمان  $t$  برابر است با:

$$\varepsilon(t) = \int_0^t D(t-\tau)d\sigma(\tau) = \int_0^t D(t-\tau)\frac{\partial\sigma(\tau)}{\partial\tau}d\tau \quad (\text{الف-۵})$$

در رابطه فوق  $D$  کامپلینس خزش است.

بنابراین به کمک اصل فوق، اگر پاسخ سیستم به ورودی پله مشخص باشد، می‌توان پاسخ به هر ورودی دلخواه را نیز بدست آورد.

### الف - ۳ اصل تناظر [۱۲]

در مواد الاستیک، همانگونه که عکس‌العمل‌ها و جابجایی‌های مرز به مکان وابسته می‌باشند، می‌توانند تابعی از زمان نیز باشد، بدون اینکه به پاسخ سیستم اثری بگذارد. در واقع از آنجا که مشتقات زمانی در معادلات ظاهر نمی‌شود، زمان فقط نقش یک پارامتر ایفا می‌کند. اما برای مواد ویسکوالاستیک، مشتق زمانی وارد معادلات شده و در نتیجه حل مسئله آنها را پیچیده‌تر می‌کند. با وجود این، در بسیاری از حالات معادلات میدان مربوط به ویسکوالاستیک دارای ویژگی‌هایی می‌باشند که حل آنها را نسبتاً آسان‌تر می‌کند. در واقع بر اساس اصل تناظر که در این قسمت تشریح می‌شود، می‌توان حل‌های موجود مسائل الاستیک را به مسائل ویسکوالاستیک تعمیم داد.

وقتی یک مسئله مکانیکی - سازه، ماده آن، شرایط مرزی عکس‌العمل و جابجایی - تحت انتقال لاپلاس قرار می‌گیرد، اغلب به حالتی تبدیل می‌شود که هیچکدام از دیدگاه فضایی توصیف آن تغییر نمی‌کند. به عبارت دیگر مسئله از نظر فضایی مشابه به نظر می‌رسد. فقط دیدگاه وابسته به زمان، به نام ویژگی‌های مادی، تغییر می‌کند. مسئله تحلیل تنش جسم ویسکوالاستیک را می‌توان در صفحه لاپلاس مشابه جسم الاستیک، تفسیر گردد. از این رو حل یک جسم الاستیک را می‌توان برای جسم ویسکوالاستیک مشابه آن، در فضای لاپلاس به کار گرفت.

بر اساس اصل تناظر، در صورت وجود حل الاستیسیته مسئله، می‌توان حل ویسکوالاستیک مسئله را نیز تعیین کرد. برای این کار باید در حل الاستیک به جای بار و شرایط مرزی، تبدیل لاپلاس آن و به جای خواص مکانیکی  $(E, \nu)$  تبدیل لاپلاس آنها را ضربدر  $s$  جایگزین کرد.

برای این تناظر استثنایی وجود دارد: اگرچه شکل فیزیکی جسم مورد بررسی در اثر اعمال تبدیل لاپلاس بدون تغییر است، اما شرایط مرزی عکس‌العمل‌ها و جابجایی‌ها ممکن است از نظر فضایی تغییر کنند که در این صورت نمی‌توان از اصل تناظر استفاده کرد. با این وجود، توابعی که قابلیت تفکیک متغیر دارند، تحت تبدیل، از نظر فضایی تغییر نمی‌کنند.

بطور خلاصه، مسائل تحلیل تنش که قیود مرزی آن مستقل از زمان، یا در بدترین حالت، توابع تفکیک‌پذیری از زمان و مکان باشند، در هر دو حالت واقعی و صفحه لاپلاس مشابه به نظر می‌رسند.

#### الف - ۴ معرفی مدل‌های رئولوژیکی در مدلسازی رفتار ویسکوالاستیک خطی وب [11]

همانطور که در فصل اول گفته شد، مدلسازی پاسخ به تحریک مکانیکی مواد ویسکوالاستیک، توسط مواد الاستیک و ویسکوز انجام می‌شود. جهت شبیه‌سازی خاصیت ویسکوالاستیک خطی، در تحلیل‌های استاتیکی، از مدل چهار پارامتری برگرز و در تحلیل‌های دینامیکی، از مدل سه پارامتری جامد خطی استاندارد استفاده می‌شود [13]. در تشکیل مدل‌های مذکور از مدل‌هایی مانند مدل ماکسول و کلوین-ویت استفاده شده است. از این رو در ادامه به معرفی و بررسی این دو مدل و مدل‌های چند پارامتری اشاره شده در فوق پرداخته می‌شود.

#### الف-۴-۱- مدل ماکسول

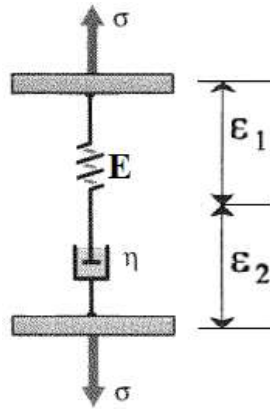
در مدل ماکسول که در شکل (الف-۷) نشان داده شده است، یک فنر هوکی به صورت سری به یک دشیپات نیوتنی متصل می‌باشد. در یک اتصال سری مانند مدل ماکسول، تنش در هر المان مشابه و برابر تنش اعمالی می‌باشد، درحالی‌که کرنش کلی برابر با مجموع کرنش هر المان می‌باشد. به بیان ریاضی داریم:

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

(الف-۶)

در اینجا زیرنویس‌های ۱ و ۲ به ترتیب بیانگر فنر و دشیپات می‌باشند.



شکل (الف-۷) مدل ماکسول [12]

هرگاه تنش‌ی که اعمال می‌کنیم لزوماً ثابت نباشند، درمی‌یابیم که نرخ کرنش از دو بخش تشکیل

شده است: الف) نرخ کرنش عضو فنری مقدار آن برابر با  $\frac{\dot{\sigma}}{E}$ ، متناسب با مقدار تنش، همفاز و وابسته

به نرخ تنش می‌باشد. ب) نرخ کرنش عضو دمپر که فقط به مقدار لحظه‌ای تنش پاسخ می‌دهد، به

طوری که به موجب آن نرخ کرنش  $\frac{\sigma}{\eta}$  می‌شود [3]. بنابراین نرخ کرنش می‌شود:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} \quad (\text{الف-۷})$$

در رابطه فوق هرگاه  $E \rightarrow \infty$ ، فنر به عنوان عضوی جامد عمل کرده و حاصل یک سیال ویسکوز

می‌شود. و همینطور اگر  $\eta \rightarrow \infty$  حاصل یک رفتار کاملاً الاستیک می‌شود. رابطه تنش-کرنش در این

مدل به صورت زیر بیان می‌شود:

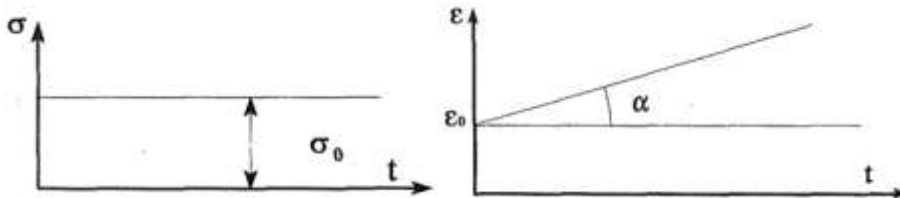
$$\sigma(t) + \frac{\eta}{E} \frac{d\sigma(t)}{dt} = \eta \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \quad (\text{الف-۸})$$

پاسخ مدل ماکسول در تست کشش به صورت زیر می‌باشد:

$$\varepsilon = \sigma_0 \left( \frac{1}{E} + \frac{t}{\eta} \right) \quad (\text{الف-۹})$$

بنابراین رفتار مدل ماکسول در تست خزش به صورت خطی نسبت به زمان (شکل الف-۸)

می‌باشد:

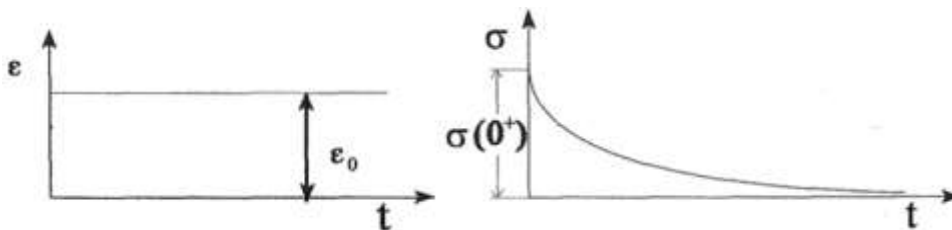


شکل (الف-۸) رفتار مدل ماکسول در تست خزش

و پاسخ آن به تست رهایش:

$$\sigma = \varepsilon_0 E e^{\left(-\frac{\eta}{E}\right)t} \quad (\text{الف-۱۰})$$

که مقدار  $\frac{E}{\eta}$  که ثابت و از خواص ماده می‌باشد، همان زمان رهایش است.



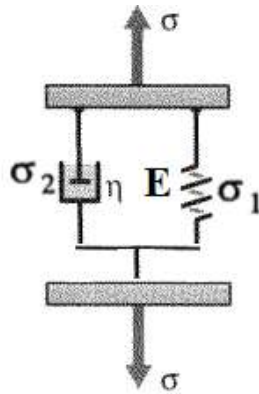
شکل (الف-۹) رفتار مدل ماکسول در تست رهایش

#### الف-۴-۲-مدل کلوین-ویت

این مدل همانگونه که در شکل (الف-۱۰) نشان داده شده است، ترکیب ترمهای دمپر ویسکوز و

فنر الاستیک به صورت موازی می‌باشد. در این مدل بر خلاف مدل ماکسول (نیروها) تنش‌های فنر و

دمپر با هم جمع می‌شوند و اما (تغییر مکانها) کرنشها برای فنر و دمپر با هم برابرند.



شکل (الف-۱۰) مدل کلوین-ویت [3]

برخلاف مدل ماکسول، در مدل کلوین بر اثر اعمال تنش ناگهانی، به دلیل موازی بودن یک فنر با دمپر، کرنش ناگهانی در همان لحظه مشاهده نمی‌شود. در حالی که در مدل ماکسول به دلیل آزاد بودن، به صورت لحظه ای می‌توانست کرنشی متناسب با تنش اعمال شده ناگهانی از خود بروز دهد.

فتر تنشی برابر با  $(E\varepsilon)$  ایجاد می‌کند، در حالی که دمپر تنشی متناسب با نرخ کرنش،  $(\eta \dot{\varepsilon})$

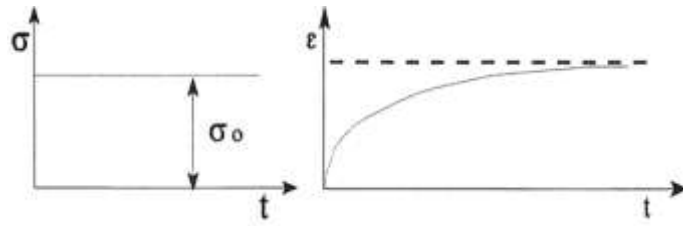
ایجاد می‌کند. بنابراین رابطه تنش-کرنش در این مدل، به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\sigma(t) = E\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \quad (\text{الف-۱۱})$$

در این رابطه وقتی  $(E \rightarrow 0)$  یعنی هنگامی که فنر دارای سختی صفر است، یک ماده‌ی سیال ویسکوز و وقتی  $(\eta \rightarrow 0)$  رفتاری کاملاً الاستیک مشاهده می‌شود. این مدل به دلیل وجود فنر و دمپر به صورت موازی، پس از برداشتن نیروی اعمال شده، شکل و هندسه خود را باز می‌یابد، هر چند این بازیافت شکل اولیه با اتلاف انرژی همراه است. خاطر نشان می‌شود، برخلاف مدل ماکسول، مسیر بارگذاری و باربرداری در مدل کلوین بر هم منطبق نیستند و به همین دلیل به این ماده خصوصیت غیرالاستیک نسبت داده می‌شود.

پاسخ مدل کلوین-ویت به تست خزش بصورت زیر می‌باشد:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{G} (1 - e^{(-\frac{\eta}{E}t)}) \quad (\text{الف-۱۲})$$



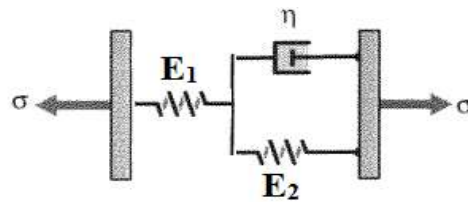
شکل (الف- ۱۱) پاسخ مدل کلوین به تست خزش

پاسخ این مدل به تست رهائش که مقدار ثابتی را برای تنش نشان می‌دهد:

$$\sigma(t) = E\varepsilon_0 \quad (\text{الف-۱۳})$$

#### الف-۴-۳- مدل زنر نوع اول (مدل شکل کلوین یا پوینتینگ-تامسون<sup>۱</sup>)

مدل زنر از نظر ساختاری دارای دو نوع مختلف می‌باشد که با یکدیگر هم‌ارز هستند که نوع اول آن در اینجا بررسی می‌شود. مدل زنر نوع دوم در فصل اول معرفی شد. زنر نوع اول شامل ترکیب مدل کلوین-ویت و یک المان فنر مطابق شکل (الف-۱۲) می‌باشد. یکی از ویژگی‌های بارز مدل پوینتینگ-تامسون تقسیم‌بندی مشخص انواع کرنش در آن است. بطوری که کرنش الاستیک را با المان الاستیک و کرنش ویسکوالاستیک را با المان کلوین-ویت نشان داده است.



شکل (الف-۱۲) مدل زنر نوع اول

در این مدل، کرنش کل برابر است با مجموع کرنش دو قسمت فنر و کلوین-ویت.

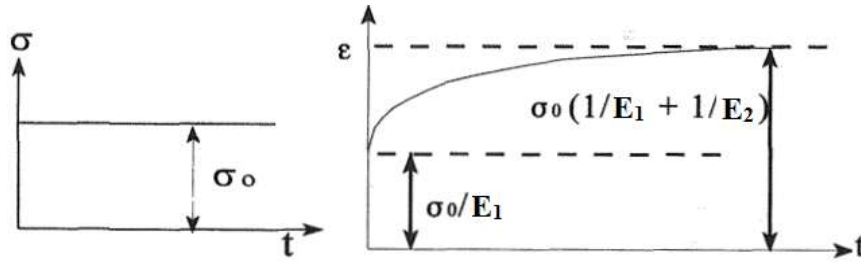
رابطه بین تنش و کرنش آن با معادله زیر بیان می‌شود:

1. Poynting-Thompson

$$\frac{1}{E_1} \frac{d\sigma(t)}{dt} + \frac{1}{\eta} \left(1 + \frac{E_2}{E_1}\right) \sigma = \frac{d\varepsilon(t)}{dt} + \frac{E_2}{\eta} \quad (\text{الف-۱۴})$$

پاسخ مدل زرن نوع اول به تست خزش:

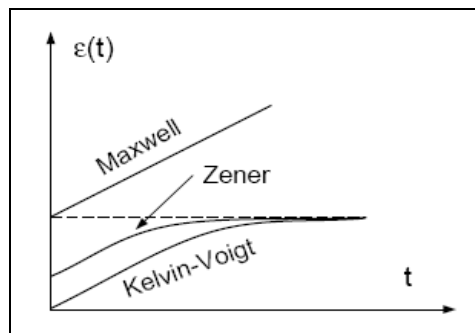
$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \left[ \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \left(1 - e^{-\frac{E_2}{\eta} t}\right) \right] \quad (\text{الف-۱۵})$$



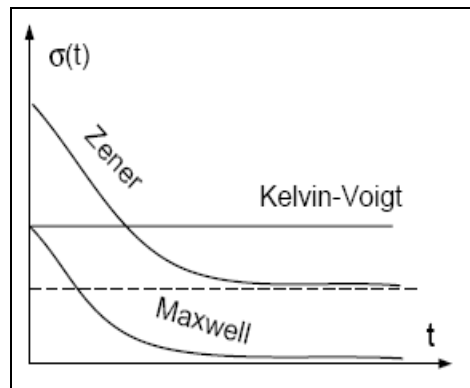
شکل (الف-۱۳) پاسخ مدل زرن نوع اول به تست خزش

همانطور که می‌دانیم، مواد ویسکوالاستیک دو ویژگی منحصر بفرد دارند: خزش و رهایش. طبیعت ماده ویسکوالاستیک حکم می‌کند که تابع خزش افزایش یابد و به یک مقدار نهایی در حالت پایا برسد، ولی تابع رهایش با کاهش به یک مقدار نهایی در حالت پایا برسد.

در شکل (الف-۱۴) کرنش بر حسب زمان و شکل (الف-۱۵) تنش بر حسب زمان برای سه ماکسول، کلوین-ویت و زرن آورده شده است.



شکل (الف-۱۴) تابع خزش برای سه مدل [3]

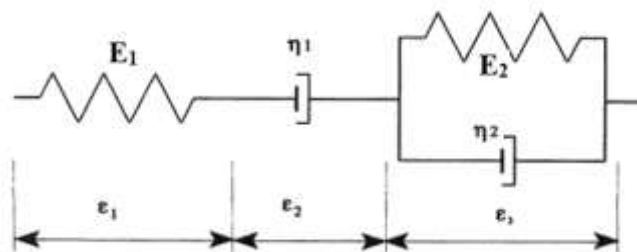


شکل (الف- ۱۵) تابع رهایش برای سه مدل [3]

همانطور که در قبلاً ذکر شد، تابع خزش پیش‌بینی شده توسط مدل ماکسول و تابع رهایش پیش‌بینی شده توسط مدل کلوین برای مواد ویسکوالاستیک نامعقول‌اند. تابع خزش پیش‌بینی شده توسط مدل ماکسول با زمان افزایش می‌یابد (شکل (الف- ۱۴)) و تابع رهایش پیش‌بینی شده توسط مدل کلوین با زمان ثابت می‌ماند (شکل (الف- ۱۵)). بنابراین هر دو مدل ماکسول و کلوین-ویت در رسیدن به خصوصیات مواد ویسکوالاستیک در محدوده زمان شکست خورده‌اند. از سوی دیگر مدل زرن توانست هر دو تابع خزش و رهایش را در حوزه زمان بخوبی پیش‌بینی کند [3].

#### الف-۴-۴-مدل برگرز

مدل برگرز که یک المان چهار پارامتری مایع خطی نیز نامیده می‌شود، مطابق شکل (الف- ۱۶)، ترکیب سری مدل کلوین و مدل ماکسول می‌باشد.



شکل (الف- ۱۶) شماتیک مدل برگرز [11]

در این مدل، برای یک تنش ورودی، کرنش کل به صورت مجموع کرنش‌های هر قسمت می‌باشد.



بنابراین رابطه تنش - کرنش به صورت زیر استخراج می‌شود:

$$\frac{\eta_1 \eta_2}{E_1 E_2} \frac{d^2 \sigma(t)}{dt^2} + \left[ \frac{\eta_2}{E_2} + \eta_1 \left( \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \right] \frac{d\sigma(t)}{dt} + \sigma = \frac{\eta_1 \eta_2}{E_2} \frac{d^2 \varepsilon(t)}{dt^2} + \eta_1 \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \quad (\text{الف-۱۶})$$

پاسخ این مدل به تست خزش (ورودی تنش پله  $(\sigma = \sigma_0 H(t))$  به صورت زیر می‌باشد:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \left[ \frac{1}{E_1} + \frac{t}{\eta_1} + \frac{1}{E_2} \left( 1 - e^{-\frac{E_2}{\eta_2} t} \right) \right] \quad (\text{الف-۱۷})$$

و پاسخ سیستم به تست رهائش:

$$r_2 \frac{d^2 \sigma(t)}{dt^2} + r_1 \frac{d\sigma(t)}{dt} + \sigma = \varepsilon_0 (q_1 \delta(t) + q_2 \frac{d\delta(t)}{dt}) \quad (\text{الف-۱۸})$$

در معادله فوق  $\delta(t)$  دلتای دیراک (ضربه) می‌باشد. پارامترهای دیگر نیز برابرند با:

$$r_2 = \frac{\eta_1 \eta_2}{E_1 E_2}; \quad r_1 = \frac{\eta_2}{E_2} + \eta_1 \left( \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \quad (\text{الف-۱۹})$$

$$q_1 = \eta_1; \quad q_2 = \frac{\eta_1 \eta_2}{E_2}$$

البته مدل‌های بررسی شده در فوق می‌توانند به صورت‌های نامتناهی با هم ترکیب شوند تا

تأثیرات دیگری را نیز نشان دهند از جمله تأثیر خزش ابتدایی. مشاهده می‌شود که این مدل‌ها از

معادلات مرتبه اول خطی پیروی می‌کنند.

#### الف-۴-۵- مدل ویچرت

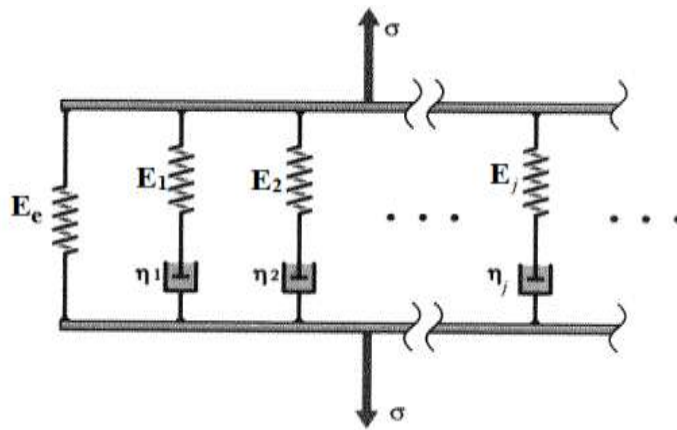
معمولاً پلیمرهای واقعی در زمان رهائش، با یک زمان رهائش که توسط مدل‌های بیان شده در

فوق پیش‌بینی شد، رها نمی‌شوند. بلکه طول‌های مختلفی از بخش‌های ملکولی در رهائش شرکت

می‌کنند و بخش‌های ساده‌تر و کوتاه‌تر خیلی سریعتر از بخش‌های با طول بیشتر رها می‌شوند؛ که این

منجر به توزیعی در زمان رهائش می‌شود. برای رفع این مشکل، مهندسين مدل ویچرت را که مطابق

شکل (الف-۱۷) دارای تعداد زیادی مدل ماکسول موازی با یک فنر می‌باشد، را پیشنهاد کردند.



شکل (الف-۱۷) شماتیک مدل ویچرت [12]

در این مدل، تنش کل برابر است با مجموع تنش تک تک قسمت‌های موازی.

با استفاده از رابطه تنش- کرنش مربوط به مدل ماکسول، رابطه تنش- کرنش مدل ویچرت در

فضای لاپلاس به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\bar{\sigma}(s) = \bar{\sigma}_e + \sum_j \bar{\sigma}_j = \left[ E_e + \sum_j \frac{E_j s}{s + \frac{E_j}{\eta_j}} \right] \quad (\text{الف-۲۰})$$

## پیوست ب - بررسی تئوری‌های ورق [62]

در این پیوست، پس از بیان طبقه‌بندی ورق‌های از نظر ضخامت و تغییر شکل، تئوری‌های مختلف ورق، از تئوری کیرشهف<sup>۱</sup> (کلاسیک) ورق، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول میندلین<sup>۲</sup> و در نهایت تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی سوم (ردی) ورق‌ها مطرح می‌شوند. در تئوری‌های تغییر شکل برشی، اثر تغییر شکل برشی عرضی که در تئوری کیرشهف صرف‌نظر شده، لحاظ شده است. با استفاده از اصل جابجایی‌های مجازی<sup>۳</sup> و بر مبنای فرضیات سینماتیکی مطرح شده در تئوری‌های مورد مطالعه، معادله‌ی حاکم و شرایط مرزی، برای ورق با ضخامت یکنواخت استخراج شده است.

### ب-۱ - طبقه‌بندی ورق از نظر ضخامت و تغییر شکل

خواص خمشی ورق، در مقایسه با ابعاد دیگر، عمدتاً به ضخامت آن وابسته است. بر اساس نسبت  $a/h$  که  $a$  کوچکترین بعد صفحه‌ی ورق و  $h$  ضخامت آن می‌باشد، ورق‌ها را می‌توان به سه دسته‌ی ورق ضخیم، غشاء و ورق نازک تقسیم‌بندی کرد. این سه عبارتند از:

$$\text{الف- ورق‌های ضخیم } \left(\frac{a}{h} \leq 8..10\right)$$

$$\text{ب- غشاءها } \left(\frac{a}{h} \geq 80..100\right)$$

$$\text{ج- ورق‌های نازک } \left(8..10 \leq \frac{a}{h} \leq 80..100\right)$$

### ب-۲ - مروری بر تئوری‌های بررسی رفتار ورق‌ها

تئوری‌های ورق دوبعدی را می‌توان به دو دسته تقسیم کرد:

۱- تئوری ورق کلاسیک که در آن اثر تغییر شکل برشی عرضی صرف‌نظر شده است.

۲- تئوری‌های تغییر شکل برشی ورق.

---

1. Kirchhoff  
2. Mindlin  
3. Virtual Displacements,

تئوری ورق کلاسیک (کیرشهف) (CPT) برای حالت خمش خالص، بر مبنای میدان جابجایی زیر

می‌باشد:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= -z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= -z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (ب-۱)$$

که در آن  $(u, v, w)$  به ترتیب مؤلفه‌های جابجایی در راستای  $(x, y, z)$  و  $w_0$  خیز صفحه‌ی میانی (یعنی  $z=0$ ) می‌باشند. میدان جابجایی مذکور دلالت بر آن دارد که خط مستقیم عمود بر صفحه‌ی  $xy$ ، پس از تغییر شکل، مستقیم و عمود باقی می‌ماند. در فرض کیرشهف هر دو اثر برش عرضی و نرمال عرضی، یعنی تغییر شکل حاصل از خمش و کشیدگی درون صفحه‌ای، صرف‌نظر شده است.

یک تعداد از تئوری‌های تغییر شکل برشی وجود دارند که ساده‌ترین آن، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول (FSDT) می‌باشد که همچنین به تئوری ورق میندلین (۱۹۵۱) معروف است. این تئوری بر مبنای میدان جابجایی زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= z\varphi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= z\varphi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (ب-۲)$$

که در آن  $\varphi_x$  و  $\varphi_y$  به ترتیب چرخش حول محورهای  $x$  و  $y$  می‌باشند. FSDT با در نظر گرفتن تغییر شکل عرضی در فرضیات سینماتیکی‌اش (یعنی کرنش برشی عرضی ثابت نسبت به مختصات ضخامت)، CPT را توسعه بخشیده است. در FSDT، فاکتورهای تصحیح برشی‌ای معرفی می‌شوند که اختلاف بین نیروی برشی عرضی واقعی و آنچه که با استفاده از روابط سینماتیکی FSDT بدست می‌آیند را تصحیح می‌کنند. که این پارامترها علاوه بر هندسه سازه، به بارگذاری و شرایط مرزی ورق نیز وابسته می‌باشد.

در هر دو تئوری FSDT و CPT، حالت تنش را صفحه‌ای در نظر گرفته و از شکل تنش صفحه‌ای کاهش یافته معادله رفتاری استفاده شده است.

در تئوری‌های مرتبه دو و بالاتر، از چندجمله‌ای مرتبه بالاتر در بسط مربوط به مؤلفه‌های جابجایی استفاده می‌شود. تئوری‌های مرتبه‌ی بالاتر پارامترهای جدیدی معرفی می‌کنند که اغلب تعبیر فیزیکی آنها مشکل می‌باشد. تئوری مرتبه دوم میدان جابجایی را به صورت زیر در نظر می‌گیرند:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= z\varphi_x(x, y) + z^2\psi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= z\varphi_y(x, y) + z^2\psi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{ب-۳})$$

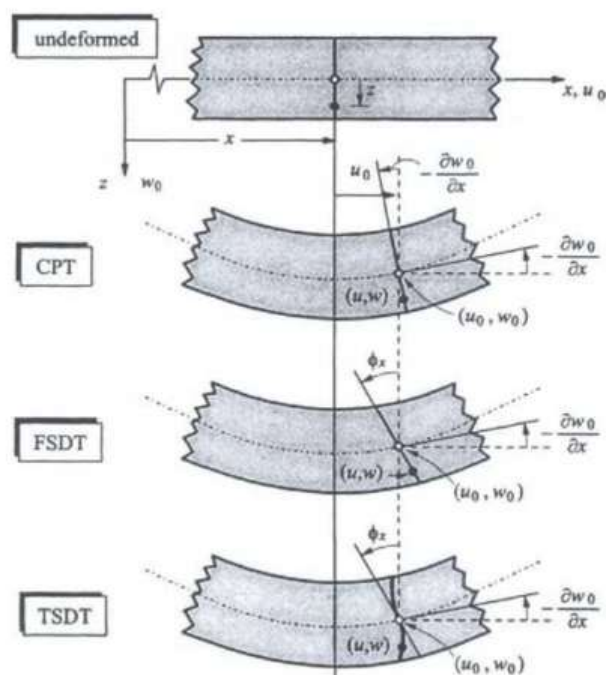
در تئوری مرتبه‌ی سوم ردی<sup>۱</sup> (TSDT) نیز میدان جابجایی به شکل زیر فرض می‌شود:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= z\varphi_x(x, y) - \alpha z^3\left(\varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}\right) \\ v(x, y, z) &= z\varphi_y(x, y) - \alpha z^3\left(\varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}\right) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{ب-۴})$$

می‌باشد و با  $\alpha = 4/(3h^2)$  صفر قرار دادن آن، به تئوری مرتبه اول می‌رسیم. میدان جابجایی با تغییرات مرتبه دوم کرنش برشی عرضی در راستای ضخامت و مقدار صفر تنش‌های برشی در سطوح بالا و پایین ورق، منطبق می‌باشد. برخلاف FSDT، TSDT نیاز به فاکتور تصحیح برشی ندارد. در شکل (ب-۱)، هندسه‌ی اولیه و تغییر شکل یافته یک لبه ورق از دیدگاه تئوری‌های مختلف نشان داده شده است.

علاوه بر سادگی ذاتی و هزینه‌ی محاسباتی پایین، تئوری ورق مرتبه اول اغلب یک توصیف با دقت کافی از پاسخ‌های عمومی (مانند خیز، بار کمانش و فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات) برای ورق‌های نازک یا ضخیم متوسط، فراهم می‌آورد. از این رو از این روش برای تعیین پاسخ‌های عمومی استفاده می‌شود. تئوری مرتبه‌ی سوم، نسبت به FSDT، علی‌رغم افزایش زیاد هزینه محاسباتی، دقت نسبی را به میزان کمی افزایش می‌دهد.

1. Reddy



شکل (ب- ۱) هندسه‌ی اولیه و تغییر شکل یافته یک لبه ورق از دیدگاه تئوری‌های مختلف [62]

### ب- ۳- تئوری کلاسیک (کیرشهف) ورق (CPT)

کرنش خطی وابسته به میدان جابجایی معادله (ب-۱) برابر است با:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \epsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{aligned} \tag{ب-۵}$$

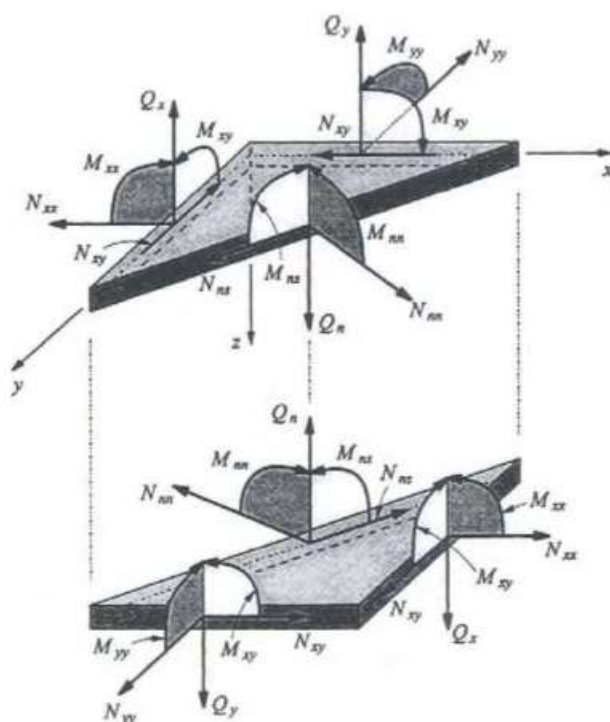
که در آن  $\epsilon_{xx}$  و  $\epsilon_{yy}$  کرنش‌های عمودی و  $\gamma_{xy}$  کرنش برشی می‌باشند.

انرژی کرنشی مجازی U برای ورق کیرشهف نیز برابر است با:

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_{\Omega_0} \left[ \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx} \delta \epsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \epsilon_{yy} + \sigma_{xy} \delta \gamma_{xy}) dz \right] dx dy \\ &= \int_{\Omega_0} \left( M_{xx} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + M_{yy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \sigma_{xy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) dx dy \end{aligned} \tag{ب-۶}$$

که در آن  $\Omega_0$  محدوده اشغال شده توسط صفحه‌ی میانی ورق، h ضخامت ورق،  $\sigma_{yy}$ ،  $\sigma_{xx}$

تنش‌های عمودی،  $\sigma_{xy}$  تنش برشی و  $M_{xx}$ ،  $M_{yy}$ ،  $M_{xy}$  ممان واحد طول می‌باشند (شکل (ب-۲)).



شکل (ب-۲) نیروها و ممان‌ها در المان ورق [62]

ممان‌ها نیز به قرار زیر می‌باشند:

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (7-ب)$$

از آنجا که در تئوری ورق کیرشهف  $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$  انرژی کرنشی مجازی مربوط به کرنش-

های برشی عرضی صفر است.

انرژی پتانسیل مجازی ناشی از بارگذاری عرضی  $q(x,y)$  برابر است با:

$$\delta V = - \int_{\Omega_0} q(x,y) \delta w_0 dx dy \quad (8-ب)$$

اگر نیروها یا مومنت‌های غیرصفر لبه‌ای موجود باشند، انرژی پتانسیل مجازی آنها نیز باید به

معادله‌ی فوق اضافه شود. بر اساس اصل جابجایی مجازی:

$$\delta W = \delta U + \delta V = 0 \quad (9-ب)$$

و با استفاده از آن، معادله تعادل حاکم بر تئوری ورق کیرشهف برابر است با:

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + q = 0 \quad (10-ب)$$

با فرض اینکه ماده‌ی ورق ایزوتروپیک باشد و از قانون هوک پیروی نماید، معادله‌ی تنش-کرنش

برابر است با:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{xx} + \nu \epsilon_{yy}) \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{yy} + \nu \epsilon_{xx}) \\ \sigma_{xy} &= G \gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \end{aligned} \quad (11-ب)$$

با استفاده از روابط فوق و (ب-۷) و انتگرالگیری از روابط در راستای ضخامت نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} M_{xx} &= -D \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\ M_{yy} &= -D \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} &= -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (12-ب)$$

که در آن  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ ، سفتی خمشی ورق نامیده می‌شود. با جایگذاری منته‌های تنش

(معادله (ب-۱۲)) در معادله (ب-۱۰)، معادله بایهارمونیک حاکم بر خمش ورق حاصل می‌شود:

$$D \left( \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \right) = q \quad (13-ب)$$

#### ب-۴ - تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول (FSDT)

با توجه به میدان جابجایی داده شده در معادله (ب-۲) مولفه‌های کرنش خطی برابر است با:



$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} = z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{xy} = z \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \\ \gamma_{xz} = \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \gamma_{yz} = \varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{array} \right. \quad (14-ب)$$

همانطور که واضح است، کرنش‌های  $(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy})$  در راستای ضخامت ورق خطی می‌باشند، در

حالی که کرنش‌های برشی عرضی  $\gamma_{xz}$  و  $\gamma_{yz}$  ثابت‌اند.

با استفاده از اصل جابجایی مجازی  $\delta W = \delta U + \delta V = 0$  که در آن:

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_{\Omega_0} \left[ \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \sigma_{xy} \delta \gamma_{xy} + \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz} + \sigma_{yz} \delta \gamma_{yz}) dz \right] dx dy \\ \delta V &= \int_{\Omega_0} q(x, y) \delta w_0 dx dy \end{aligned} \quad (15-ب)$$

با معرفی  $(\delta w_0, \delta \varphi_x, \delta \varphi_y)$ ، به عنوان جابجایی‌های مجازی و انتگرال‌گیری از معادله‌ی مربوط به

اصل جابجایی مجازی، به سه معادله‌ی زیر برای جابجایی‌های مجازی می‌رسیم:

$$\begin{aligned} \delta w_0 : & - \left( \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right) = q \\ \delta \varphi_x : & - \left( \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) + Q_x = 0 \\ \delta \varphi_y : & - \left( \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} \right) + Q_y = 0 \end{aligned} \quad (16-ب)$$

که در آن:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_x \\ Q_y \end{array} \right\} = \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{array} \right\} dz \quad (17-ب)$$

از آنجا که در این تئوری کرنش برشی عرضی در ضخامت ورق ثابت در نظر گرفته شده است،

تنش‌های برشی عرضی نیز ثابت خواهند بود. این مسئله با این حقیقت معروف که تنش‌های برشی

عرضی در راستای ضخامت به صورت سهمی تغییر می‌کنند، در تضاد می‌باشد. این اختلاف بین

تغییرات سهموی تنش‌های برشی عرضی و حالت ثابت تنش‌های برشی پیش‌بینی شده توسط تئوری

مرتبه‌ی اول، به دلیل محدودیت‌های سینماتیکی FSDT، در خود تئوری قابل تصحیح نمی‌باشد. اما با

ضرب انتگرال (ب-۱۷) در یک پارامتر  $K_s$  که فاکتور تصحیح برش نامیده می‌شود، می‌توان نیروهای برشی را تصحیح کرد.

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = K_s \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (\text{ب-۱۸})$$

ضریب فوق سختی برش عرضی ورق را اصلاح می‌کند. فاکتور  $K_s$ ، از مساوی قرار دادن انرژی کرنشی ناشی از تنش‌های برشی عرضی FSDT، با انرژی کرنشی منتهی از تنش‌های برشی عرضی پیش‌بینی شده از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی، محاسبه می‌شود.

با فرض اینکه ماده‌ی ورق ایزوتروپیک باشد و از قانون هوک پیروی کند:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & G & 0 & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (\text{ب-۱۹})$$

معادلات رفتاری به صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned} M_{xx} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} z dz = D \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right) \\ M_{yy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} z dz = D \left( \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right) \\ M_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} z dz = \frac{D(1-\nu)}{2} \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \\ Q_x &= K_s \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dz = \frac{K_s E h}{2(1+\nu)} \left( \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\ Q_y &= K_s \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz} dz = \frac{K_s E h}{2(1+\nu)} \left( \varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (\text{ب-۲۰})$$

از جایگذاری منتهی‌های تنش (رابطه (ب-۲۰)) در معادلات تعادل (ب-۱۶)، می‌توان معادلات را

بر حسب مولفه‌های جابجایی بیان کرد:

$$\begin{aligned} \delta w_0 : & -\frac{K_s E h}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right) = q(x, y) \\ \delta \varphi_x : & -\frac{D(1-\nu)}{2} \left( \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} \right) - \frac{D(1+\nu)}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right) + \frac{K_s E h}{2(1+\nu)} \left( \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) = 0 \\ \delta \varphi_y : & -\frac{D(1-\nu)}{2} \left( \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} \right) - \frac{D(1+\nu)}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right) + \frac{K_s E h}{2(1+\nu)} \left( \varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) = 0 \end{aligned} \quad (21-ب)$$

### ب- ۵- تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم (TSDT)

در این تئوری با استفاده از میدان جابجایی (ب-۳)، به میدان کرنشی زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - \alpha z^3 \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \\ \varepsilon_{yy} &= z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - \alpha z^3 \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\ \gamma_{xy} &= z \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) - \alpha z^3 \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \\ \gamma_{xz} &= (1 - \beta z^2) \left( \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\ \gamma_{yz} &= (1 - \beta z^2) \left( \varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (22-ب)$$

که در آن  $\alpha = 4/(3h^2)$  و  $\beta = 4/h^2$ . به کمک اصل جابجایی‌های مجازی، سه معادله زیر برای

سه مؤلفه جابجایی حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned} \delta w_0 : & -\left( \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right) - \alpha \left( \frac{\partial^2 P_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 P_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 P_{yy}}{\partial y^2} \right) = q \\ \delta \varphi_x : & -\left( \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) + Q_x = 0 \\ \delta \varphi_y : & -\left( \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} \right) + Q_y = 0 \end{aligned} \quad (23-ب)$$

که در آن پارامترهای زیر را معرفی می‌کنیم:

$$\begin{cases} P_{xx} \\ P_{yy} \\ P_{xy} \end{cases} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{cases} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{cases} z^3 dz$$

$$\begin{cases} R_x \\ R_y \end{cases} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{cases} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{cases} z^2 dz$$

(ب-۲۴)

در نهایت معادلات رفتاری ورق بصورت زیر بدست می‌آید:

$$M_{xx} = \frac{4D}{5} \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right) - \frac{D}{5} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)$$

$$P_{xx} = \frac{4h^2 D}{35} \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right) - \frac{h^2 D}{28} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)$$

$$M_{yy} = \frac{4D}{5} \left( \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right) - \frac{D}{5} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)$$

$$P_{yy} = \frac{4h^2 D}{35} \left( \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right) - \frac{h^2 D}{28} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)$$

$$M_{xy} = \left( \frac{1-\nu}{2} \right) \left[ \frac{4D}{5} \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) - \frac{2D}{5} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right]$$

$$P_{xy} = \left( \frac{1-\nu}{2} \right) \left[ \frac{4h^2 D}{35} \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) - \frac{h^2 D}{14} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right]$$

$$Q_x = \frac{2hG}{3} \left( \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right); \quad Q_y = \frac{2hG}{3} \left( \varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)$$

$$R_x = \frac{h^3 G}{30} \left( \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right); \quad R_y = \frac{h^3 G}{30} \left( \varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)$$

(ب-۲۵)

## پیوست ج - مقدمه‌ای بر تئوری اغتشاشات و مسایل لایه مرزی

### ج-۱- مقدمه

تعداد محدودی از معادلات دیفرانسیل از قبیل معادلات مرتبه‌ی اول خطی و همگن، معادلات مرتبه‌ی بالاتر خطی با ضرایب ثابت و معادلات مشتق جزئی‌ای که با استفاده از جداسازی متغیرها قابل تبدیل به دو حالت قبل باشد، را می‌توان در شکل بسته حل کرد. اما بسیاری از مسایلی که فیزیکدانان، مهندسیین و ریاضیدانان با آن مواجه می‌شوند، شامل مشکلاتی از قبیل معادلات حاکم غیرخطی، ضرایب متغیر و شرایط مرزی غیرخطی می‌باشند، که از حل دقیق آنها جلوگیری می‌کند. در نتیجه حل با استفاده از روش‌های عددی، تحلیلی و یا ترکیبی از هر دو روش تقریب زده می‌شود. مزیت داشتن یک فرمول تقریبی برای حل، نسبت به برنامه‌های کامپیوتری که فقط عدد می‌دهد، این است که فرمول امکان بررسی نقش متغیرها و پارامترهای مختلف را در حل فراهم می‌آورد. در میان تکنیک‌های تحلیلی، بهترین روش، تئوری متقارن اغتشاشات (سری مجانبی)، که تابعی از پارامترها یا مختصات کوچک یا بزرگ می‌باشد. همانطور که از نام تئوری اغتشاشات برمی‌آید، این تئوری تنها وقتی مفید می‌باشد که معادله‌ای که قرار است حل شود، به معادله قابل حل نزدیک باشد، یا به عبارت دیگر یک اغتشاش از آن باشد ([69] و [70]).

تئوری اغتشاشات به عنوان یک مجموعه از ترفندهای فرمولی شهرت دارد که اغلب درست کار می‌کند، ولی به ندرت توجیه‌پذیر است. این روش در بسیاری از موارد با موفقیت بکار رفته است، اما بعضی افراد نیز آن را به علت دقت زیاد ریاضی، رد کردند [69]. مطابق با تئوری اغتشاشات، حل کامل معادله، با استفاده از چند جمله‌ی اول یک سری اغتشاشی - معمولاً دو جمله‌ی اول - بیان می‌شود. اگرچه این سری ممکن است واگرا شود، برای بیان کمی یا کیفی پاسخ‌ها، نسبت به بسط‌هایی که به صورت یکنواخت یا مطلق همگرا می‌شوند، مفیدتر می‌باشد [64].

سری مذکور به صورت بسطی شامل یک پارامتر (کوچک یا بزرگ) بیان می‌شود، که پارامتر مزبور

یا بطور طبیعی در معادله ظاهر می‌شود، یا اینکه جهت راحتی کار، به صورت مصنوعی معرفی می‌شود. چنین بسطی اغتشاشات پارامتر<sup>۱</sup> نامیده می‌شود. علاوه بر این بسط ممکن است بر حسب مختصات (هر یک از بزرگ یا کوچک) بیان شود، که در این صورت آن را اغتشاشات مختصات<sup>۲</sup> نامند [64].

### ج - ۲ - ماهیت تئوری اغتشاشات [69]

تئوری اغتشاشات برای اولین بار در مکانیک سماوی، که به حرکت سیاره‌ها می‌پردازد، ظاهر شد. از روزگار باستان، روش‌های ریاضی مختلفی جهت توصیف این حرکات، معمولاً بدون هیچ تلاشی جهت بیان علل آن، مورد استفاده قرار گرفتند. پس از بیان قانون گرانش نیوتن، امکان بررسی حرکت سیاره‌ها با استفاده از قوانین فیزیکی بوجود آمد. اگر فقط خورشید و یک سیاره را در نظر بگیریم، حرکت به صورت بیضی می‌باشد. که این حل کاملاً منطبق بر حرکت مشاهده شده نمی‌باشد. با بیان اینکه، سیارات بر هم نیروهای جاذبه وارد می‌کنند و در نتیجه حرکت را آشفته<sup>۳</sup> می‌کنند، می‌توان حل غیر اغتشاشی بدست آمده را اصلاح کرد. تئوری اغتشاشات، در مصداق اصلی‌اش، به روش‌های مختلف اعمال این اصلاح برمی‌گردد. در اصل از حل غیر ارتعاشی به عنوان تقریب اولیه در نظر گرفته و سپس با محاسبه‌ی نیروهای بین سیاره‌ها، حل غیرارتعاشی را تصحیح کردند. برای حل دقیق‌تر، دو تصحیح را در نظر گرفتند. مجموع حل غیرارتعاشی و تصحیح‌های متوالی آن تشکیل یک سری می‌دهد، که مجموع جزیی تعداد قابل قبول از آنها، پاسخ تقریبی با دقت کافی می‌دهد.

با اینکه در عصر حاضر حوزه‌ی کاربرد تئوری اغتشاشات خیلی وسیعتر از علم مکانیک سماوی می‌باشد، اما ایده‌ی اصلی مشابه می‌باشد. در این گونه مسائل، ابتدا شخص یک مسئله‌ی قابل حل را، به نام مسئله‌ی غیرارتعاشی یا کاهش یافته<sup>۴</sup>، در نظر گرفته و حل آن را به عنوان یک پاسخ تقریبی برای مسئله‌ی خیلی پیچیده‌تر که با مسئله‌ی مذکور فقط در ترم‌های کوچک، در معادله‌ی حاکم

---

1. Parameter Perturbation  
2. Coordinate Perturbation  
3. Perturb  
4. Reduced Problem

متفاوت می‌باشد، استفاده می‌کند. سپس به دنبال یک سری شامل تصحیح‌های پی‌درپی روی پاسخ تقریبی می‌رود که این سری معمولاً به صورت سری توانی (یا نوعی اصلاح شده از سری توانی) از پارامتر کوچک ارتعاشی می‌باشد. در نهایت نشان می‌دهد که استفاده فقط تعداد محدودی از این ترم-های تصحیح (معمولاً یک یا دو ترم)، حل تقریبی مفیدی را برای مسئله‌ی واقعی فراهم می‌آورد.

### ج-۳- اغتشاشات پارامتری [70]

بسیاری از مسائل فیزیکی شامل تابع  $u(x, \varepsilon)$  را می‌توان با معادله‌ی ریاضی  $L(u, x, \varepsilon) = 0$  و شرایط مرزی  $B(u, \varepsilon) = 0$  که در آن  $x$  یک متغیر مستقل اسکالر یا برداری و  $\varepsilon$  یک پارامتر است. در حالت کلی نمی‌توان این مسئله را به صورت دقیق حل کرد. با این حال اگر  $\varepsilon = \varepsilon_0$  ای (مثلاً  $\varepsilon_0 = 0$ ) وجود داشته باشد که برای آن، مسئله فوق را بتوان به صورت دقیق حل کرد، ما به دنبال حلی به شکل توانی از  $\varepsilon$  هستیم. یعنی:

$$u(x; \varepsilon) = u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + \varepsilon^2 u_2(x) + \dots \quad (\text{ج-۱})$$

که در آن  $u_n$  مستقل از  $\varepsilon$  و  $u_0(x)$  حل مسئله برای  $\varepsilon = 0$  می‌باشد. در ادامه با جایگزینی بسط فوق در معادلات  $L(u, x, \varepsilon) = 0$  و  $B(u, \varepsilon) = 0$  و بسط آنها بر حسب  $\varepsilon$ ، ضرایب را بر حسب توان-های  $\varepsilon$  مرتب می‌کنیم. از آنجا که این معادله باید برای تمام مقادیر  $\varepsilon$  برقرار باشد، هر ضریب  $\varepsilon$  باید بطور جداگانه به صفر میل کند، زیرا توالی‌های مختلف  $\varepsilon$  مستقل خطی می‌باشند. البته این معادله‌ی حاکم بر ضرایب  $u_n$ ، از معادله‌ی اولیه ساده‌تر بوده و می‌توان آن را با موفقیت حل کرد. این مسئله، به عنوان نمونه، در حل معادلات جبری نشان داده می‌شود.

### ج-۴- سری مجانبی

در حالت کلی سری  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\omega^n}$  که در آن  $a_n$  مستقل از  $\omega$  می‌باشد، سری مجانبی گفته می‌شود:

$$f(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\omega^n} \text{ as } \omega \rightarrow 0 \quad (\text{ج-۲})$$

اگر و تنها اگر:

$$f(\omega) = \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{\omega^n} + O\left(\frac{1}{\omega^N}\right) \quad \text{as } \omega \rightarrow \infty \quad (\text{ج-۳})$$

معادله‌ی فوق را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$f(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{a_n}{\omega^n} + \frac{a_N}{\omega^N} + O\left(\frac{1}{\omega^N}\right) \quad \text{as } \omega \rightarrow \infty \quad (\text{ج-۴})$$

با توجه به معادله‌ی فوق، (ج-۲) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$f(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{a_n}{\omega^n} + O\left(\frac{1}{\omega^N}\right) \quad (\text{ج-۵})$$

استفاده از سری مجانبی بر این حقیقت استوار است که خطای ایجاد شده در اثر قطع سری، هم مرتبه با اولین جمله‌ی حذف شده می‌باشد و از این رو وقتی  $\omega \rightarrow \infty$  این خطا به سرعت به صفر میل می‌کند. در عمل معمولاً  $\omega$  را یک مقدار بزرگ در نظر گرفته و تلاش می‌کنیم با اضافه کردن تعداد جملات، مقدار خطا را کاهش دهیم. اما اگر سری واگرا باشد، نقطه‌ای وجود خواهد داشت که بعد از آن با اضافه کردن تعداد جملات، مطابق مقدار خطا افزایش می‌یابد. بنابراین برای یک مقدار مفروض  $\omega$ ، یک مقدار بهینه برای  $N$  وجود دارد که کمترین خطا را می‌دهد. به هر حال در عمل به ندرت بیش از یک یا دو ترم در بسط آورده می‌شود و از این رو نگرانی از بابت واگرایی سری وجود ندارد [64].

### ج - ۵ - حل معادلات جبری (معادله مرتبه دوم) [64]

در حل تقریبی معادلات جبری وابسته به پارامتر کوچک، حل به صورت یک سری مجانبی شامل پارامترهای کوچک بیان می‌شود. البته همانطور که گفته شد، چنین سری‌ای را اغتشاشات پارامتری نامند. جهت تشریح این روش، معادلات در سه حالت کلی زیر مورد مطالعه قرار می‌گیرند:

**حالت اول - حل معادله جبری با استفاده از سری یکنواخت:** هدف یافتن ریشه‌های معادله

$$x^2 - (3+2)x + 2 + \varepsilon = 0 \quad \text{می‌باشد. وقتی } \varepsilon = 0 \text{ باشد، معادله به صورت } x^2 - 3x + 2 = 0 \text{ تبدیل می‌شود.}$$

که ریشه‌های آن ۲ و ۱ می‌باشند. معادله‌ی اول اغتشاشی و معادله‌ی دوم غیراغتشاشی می‌باشد.



هنگامیکه اپسیلون پارامتر کوچک اما محدودی است، انتظار می‌رود ریشه به آرامی از ۱ به سمت ۲ منحرف شود. اولین قدم برای تعیین یک حل تقریبی، تعیین شکل سری حل است. در این مسأله ریشه به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots \quad (\text{ج-۶})$$

مرحله بعد شامل جایگزینی حل مفروض در معادله حاکم می‌باشد. نتیجه به صورت زیر می‌باشد:

$$(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots)^2 - (3 + 2\varepsilon)(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots) + 2 + \varepsilon = 0 \quad (\text{ج-۷})$$

مرحله سوم شامل برخی از عملیات‌های جبری مقدماتی جهت تعیین ضرایب توان‌های مشابه

اپسیلون می‌باشد. در نتیجه با مرتب‌سازی بر اساس توان‌های مشابه اپسیلون، نتیجه می‌شود:

$$(x_0^2 - 3x_0 + 2) + \varepsilon(2x_0x_1 - 3x_1 - 2x_0 + 1) + \varepsilon^2(2x_0x_2 + x_1^2 - 3x_2 - 2x_1) = 0 \quad (\text{ج-۸})$$

در مرحله چهارم ضرایب هر یک از توان‌های اپسیلون برابر صفر قرار داده می‌شود. از مساوی صفر

قرار دادن ضرایب اردرهای صفر، یک و دو، سه معادله‌ی حاصل می‌شوند:

$$\varepsilon^0: x_0^2 - 3x_0 + 2 = 0$$

$$\varepsilon^1: 2x_0x_1 - 3x_1 - 2x_0 + 1 = 0 \quad (\text{ج-۹})$$

$$\varepsilon^2: 2x_0x_2 + x_1^2 - 3x_2 - 2x_1 = 0$$

در مرحله پنجم، سه معادله‌ی فوق به ترتیب حل می‌شوند (برای حل مسئله همواره از اردری

که بیشترین تأثیر را در حل مسأله دارد، شروع می‌کنند. جملاتی که بیشترین تأثیر را دارند، جملات

غالب<sup>۱</sup> گویند). در مرحله آخر، پاسخ‌های بدست آمده از مرحله فوق در سری اولیه جایگزین می‌-

شوند. بنابراین در نهایت پاسخ‌های معادله به صورت زیر خواهند شد:

$$x = 1 - \varepsilon + 3\varepsilon^2 + \dots$$

$$x = 2 + 3\varepsilon - 3\varepsilon^2 + \dots \quad (\text{ج-۱۰})$$

**حالت دوم- حل معادله جبری با استفاده از سری غیریکنواخت:** در اینجا هدف معادله

$(x-1)(x-\tau) = -\varepsilon x$  می‌باشد. هنگامی که  $\varepsilon = 0$ ، معادله به  $(x-1)(x-\tau) = 0$  تبدیل می‌شود که

1. Dominant Terms

ریشه‌های آن ۱ و  $\tau$  می‌باشند. مانند حالت اول، در اینجا نیز حل به صورت معادله (ج-۶) در نظر گرفته می‌شود. دقیقاً مشابه حالت قبل، پس از جایگزینی، مرتب‌سازی معادله بر حسب توانهای  $\varepsilon$  و در نهایت صفر قرار دادن ضرایب اردرهای مختلف  $\varepsilon$ ، سه معادله زیر حاصل می‌شوند.

$$\begin{aligned}\varepsilon^0: (x_0 - 1)(x_0 - \tau) &= 0 \\ \varepsilon^1: (2x_0 - 1 - \tau)x_1 + x_0 &= 0 \\ \varepsilon^2: (2x_0 - 1 - \tau)x_2 + x_1^2 + x_1 &= 0\end{aligned}\tag{ج-۱۱}$$

از حل معادله اول، مقادیر ۱ و  $\tau$  برای  $x_0$  بدست می‌آید.

از حل معادله‌های بعدی و برای  $x_0=1$ ، پاسخ کلی برای  $x$  به شکل زیر در می‌آید:

$$x = 1 - \frac{\varepsilon}{1 - \tau} - \frac{\varepsilon^2 \tau}{(1 - \tau)^3} + \dots\tag{ج-۱۲}$$

همچنین برای  $x_0 = \tau$ :

$$x = \tau - \frac{\varepsilon \tau}{1 - \tau} - \frac{\varepsilon^2 \tau}{(1 - \tau)^3} + \dots\tag{ج-۱۳}$$

همانطور که مشاهده می‌شود، هنگامی که  $\tau \rightarrow 1$ ، سری‌های فوق واگرا می‌باشند. یا به عبارت دیگر سری‌ها شکسته<sup>۱</sup> (غیریکنواخت) می‌شوند، زیرا مقادیر تصحیح پاسخ معادله‌ی کاهش یافته به بی‌نهایت میل می‌کند. در واقع برای شکسته شدن سری، نیاز نیست که  $\tau$ ، دقیقاً برابر ۱ شود. بلکه هر وقت جمله‌های مرتبه‌ی اول، مرتبه‌ی دوم و مانند این، هم اردر با جمله‌ی مرتبه‌ی صفر شوند، بسط شکسته می‌شود. زیرا بر خلاف فرض پایه‌ای روش، تصحیح جمله‌ی مرتبه‌ی صفر، کوچک نخواهد بود. از آنچه گفته شد چنین برمی‌آید که برای حالتی که  $\tau = 1$  سری یکنواخت مناسب نمی‌باشد. بنابراین حل را به صورت غیریکنواخت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$x = x_0 + \varepsilon^{\nu} x_1 + \varepsilon^{2\nu} x_2 + \dots\tag{ج-۱۴}$$

با در نظر گرفتن دو جمله اول بسط فوق و با جایگذاری  $\tau = 1$ ، بسط فوق به شکل زیر تبدیل

1. Break Down

می‌شود:

$$x = 1 + \varepsilon^{\nu} x_1 \quad (\text{ج-۱۵})$$

از جایگذاری پاسخ فوق در معادله اولیه نتیجه می‌شود:

$$\varepsilon^{2\nu} x_1^2 + \varepsilon^{\nu+1} x_1 + \varepsilon = 0 \quad (\text{ج-۱۶})$$

با استفاده از بالانس جملات غالب و با توجه رفتار اغتشاشی پاسخ،  $\nu$  برابر ۵، بدست می‌آید.

با برابر صفر قرار دادن ضریب  $\varepsilon$ ، مقدار  $x_1 = \pm i$  بدست می‌آید. در نتیجه پاسخ معادله، برای

اطراف  $\tau = 1$ ، به صورت زیر می‌باشد:

$$x = 1 \pm i\varepsilon^{1/2} \quad (\text{ج-۱۷})$$

**حالت سوم - معادله اغتشاشی تکین:** معادله  $\varepsilon x^2 + x + 1 = 0$  را که در آن پارامتر کوچک در

بزرگترین توان  $x$  ضرب شده است را معادله اغتشاشی تکین<sup>۱</sup> گویند.

مانند دو حالت قبل، با در نظر گرفتن پاسخ به صورت یکنواخت  $x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots$ ،

جایگذاری در معادله و برابر صفر قرار دادن ضرایب، به دو معادله زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} x_0 + 1 &= 0 \\ x_1 + x_0^2 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{ج-۱۸})$$

از حل دو معادله فوق، یک ریشه به صورت زیر بدست می‌آید:

$$x = -1 - \varepsilon + \dots \quad (\text{ج-۱۹})$$

حال برای تعیین ریشه‌ی دوم، پاسخی به شکل زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$x = \frac{1}{\varepsilon^{\nu}} (y_0 + \varepsilon y_1 + \dots) \quad (\text{ج-۲۰})$$

با در نظر گرفتن جمله‌ی اول پاسخ فوق، از جایگذاری در معادله و بالانس جملات همگن، ریشه‌ی

دوم معادله به شکل زیر بدست می‌آید:

1. Singular Perturbation Problem

$$x = -\frac{1}{\varepsilon} + \dots \quad (\text{ج-۲۱})$$

از جمله نکات قابل توجه درباره‌ی تئوری اغتشاشات این است که:

۱- صورت‌هایی که برای حل معادله (به خصوص در حالت‌های دوم و سوم) در نظر گرفته شده‌اند، با توجه به شکل پاسخ دقیق معادله‌ها می‌باشد.

۲- نتایج بدست آمده از حل تئوری اغتشاشات با نتایج تحلیلی (حل دقیق)، توافق خوبی دارد.

### ج-۶- مسائل لایه مرزی [۶۴]

در مسائلی که تاکنون در این پیوست بررسی شد، اثر پارامتر اغتشاشی ( $\varepsilon$ ) در پاسخ‌ها، کوچک بود. ولی با گذشت زمان طولانی، این اثر حالت تراکمی پیدا می‌کرد. در نتیجه دامنه یا فاز پاسخ‌ها به آرامی نسبت به زمان تغییر می‌کرد و می‌توانستیم آنها را با مقیاس‌های زمانی کند<sup>۱</sup> بیان کنیم. اما در این قسمت مسائلی را در نظر گرفته می‌شود که در آنها، اغتشاش در ناحیه‌ای کوچک (باریک<sup>۲</sup>) اثر کرده و تغییرات متغیرهای وابسته در آن خیلی زیاد می‌باشد. به علت اینکه در این دسته مسائل، پارامتر  $\varepsilon$  در بزرگترین مرتبه مشتق ضرب می‌شود، خیلی اوقات، این نواحی باریک به مرزهای حوزه مورد بررسی متصل می‌شوند. از این رو، این دسته مسائل به نام‌های مسائل لایه مرزی<sup>۳</sup> در مکانیک سیالات، مسایل لایه لبه‌ای<sup>۴</sup> در مکانیک جامدات و مسائل پوسته<sup>۵</sup> در کاربردهای الکتریکی، شناخته می‌شوند. مسائل فیزیکی بسیاری وجود دارند که در آن، تغییرات سریعی از یک متغیر، در ناحیه مورد بررسی اتفاق می‌افتد و ناحیه باریکی را که این تغییرات در آن اتفاق می‌افتد، لایه شوک<sup>۶</sup> در مکانیک جامدات و سیالات، نقطه انتقال<sup>۷</sup> در مکانیک کوانتوم و خط یا سطح استوکس<sup>۸</sup> در ریاضیات می‌نامند.

- 
1. Slow Time Scale
  2. Narrow Region
  3. BoundaryLayer
  4. Edge Layer
  5. Skin Layer
  6. Shock Layer
  7. Transition Point
  8. Stokes Line and Surface

در این نواحی، تغییرات سریع را نمی‌توان با متغیر کند بیان کرد، اما به کمک مقیاس سریع (بزرگ شده یا کشیده شده)<sup>۱</sup> این کار امکان‌پذیر می‌باشد.

روش‌های متعددی برای حل مسائل لایه مرزی وجود دارند، از جمله: روش MAE، روش بسط مرکب<sup>۲</sup>، multiple scale و ... که در این پیوست روش‌های multiple scale و MAE به اختصار توضیح داده می‌شوند.

با یک مثال ساده که حل دقیق آن نیز جهت مقایسه موجود می‌باشد، به طرح و ضرورت بررسی این دسته مسائل پرداخته می‌شود.

### ج-۶-۱ بررسی یک مثال ساده

مسئله مقدار مرزی ساده زیر را با شرایط مرزی مربوطه در نظر می‌گیریم:

$$\varepsilon y'' + (1 + \varepsilon^2)y' + (1 - \varepsilon^2)y = 0 \quad (\text{ج-۲۲})$$

$$y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta$$

که در آن  $\varepsilon$  یک پارامتر مثبت بی‌بعد کوچک می‌باشد. همچنین فرض می‌شود، معادله و شرایط مرزی بی‌بعد هستند.

برای شروع، دنبال یک سری پیشرو به صورت زیر، به عنوان پاسخ تقریبی می‌باشیم:

$$y^0(x; \varepsilon) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \dots \quad (\text{ج-۲۳})$$

حل فوق را حل خارجی می‌نامند. این حل را در معادله اصلی و شرایط مرزی آن جایگذاری کرده و سپس با برابر قرار دادن ضرایب توان‌های یکسان  $\varepsilon$ ، برای هر اردر نتیجه می‌شود:

$$y_0' + y_0 = 0 \quad (\text{ج-۲۴})$$

$$y_0(0) = \alpha, \quad y_0(1) = \beta$$

$$y_1' + y_1 = -y_0''$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_1(1) = 0 \quad (\text{ج-۲۵})$$

پاسخ معادله (ج-۲۴) که یک معادله مرتبه ۱ می‌باشد، برابر است با:

1. Magnified or Strtched Scale
2. Composite Expansion Method

$$y_0 = c_0 e^{-x} \quad (\text{ج-۲۶})$$

معادله (ج-۲۴) دارای دو شرط مرزی می‌باشد، در حالی که رابطه فوق فقط به یک شرط مرزی نیاز دارد. بنابراین  $y_0$  نمی‌تواند هر دو شرط مرزی را ارضا نماید (به جزء در شرایط خاص انطباق). یعنی اعمال هر شرط مرزی، یک پاسخ مختلف می‌دهد:

$$y_0(0) = \alpha : y_0 = \alpha e^{-x} \quad (\text{ج-۲۷})$$

$$y_0(1) = \beta : y_0 = \beta e^{1-x} \quad (\text{ج-۲۸})$$

بنابراین به ازای هر شرط یک مقدار برای ثابت حاصل می‌شود که با هم متفاوت می‌باشد. پس در هر صورت یک شرط مرزی ارضا نمی‌شود و باید دور انداخته شود. اما سؤالی که در اینجا پیش می‌آید این است که کدام شرط مرزی باید دور انداخته شود؟ پاسخ این سؤال با استفاده از بحث‌های فیزیکی یا ریاضی داده می‌شود که در زیر آمده است. همانطور که بعداً نشان داده خواهد شد، هرگاه ضریب  $y'$  در معادله (ج-۲۲) مثبت باشد، شرط مرزی سمت چپ باید دور انداخته شود.

بنابراین پاسخ  $y_0$ ، همان معادله (ج-۲۸) بوده و از آنجا حل معادله (ج-۲۵) به صورت زیر می‌باشد:

$$y_1 = c_1 e^{-x} - \beta x e^{1-x} \quad (\text{ج-۲۹})$$

در اینجا نیز باز همان مشکل تعدد شرایط مرزی وجود دارد که دوباره با دور انداختن شرط مرزی چپ،  $y_1$  به صورت زیر خواهد شد:

$$y_1 = \beta(1-x)e^{1-x} \quad (\text{ج-۳۰})$$

بنابراین پاسخ کلی (حل خارجی) به صورت زیر در می‌آید:

$$y^0 = \beta e^{1-x} + \varepsilon \beta(1-x)e^{1-x} + \dots \quad (\text{ج-۳۱})$$

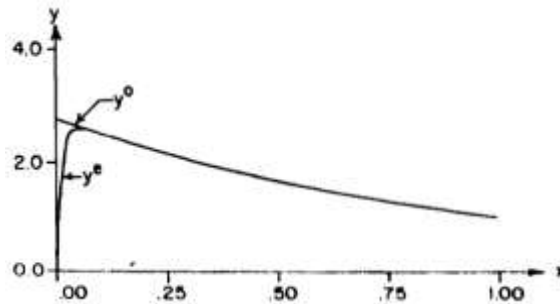
که در مبدأ دارای مقدار  $\beta e(1+\varepsilon)$  است که با مقدار واقعی ( $y(0) = \alpha$ ) متفاوت می‌باشد. جهت مشخص شدن ریشه این غیریکنواختی پاسخ را با حل دقیق مورد مقایسه قرار می‌دهیم.

با جایگذاری  $y = e^{sx}$  در (ج-۲۲)، با توجه به شرایط مرزی، حل دقیق آن به صورت زیر بدست

می‌آید:

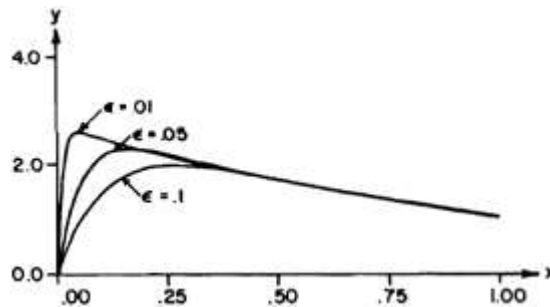
$$y^e = \frac{[\beta - \alpha e^{-(1/\varepsilon)-1}] e^{-(1+\varepsilon)x} + [\alpha e^{-(1+\varepsilon)} - \beta] e^{-[(1/\varepsilon)-1]x}}{e^{-(1+\varepsilon)} - e^{-[(1/\varepsilon)-1]}} \quad (\text{ج-۳۲})$$

مقایسه حل خارجی و حل دقیق نشان می‌دهد که به ازای مقادیر کوچک  $\varepsilon$ ، حل تقریبی خارجی، به جزء در نزدیکی مرز چپ (لایه مرزی)، بر حل دقیق منطبق می‌باشد. شکل (ج-۱) این مطلب را بهتر نشان می‌دهد:



شکل (ج-۱) مقایسه بسط حل خارجی با حل دقیق به ازای  $\varepsilon = 0.01, \beta = 1, \alpha = 0$  [64]

با توجه به شکل (ج-۱)، حل دقیق در مبدأ، جهت ارضاء شرایط مرزی، سریعاً تغییر می‌کند. شکل (ج-۲) هم اثر مقادیر مختلف پارامتر کوچک  $\varepsilon$  را بر اندازه لایه مرزی بیان می‌کند.



شکل (ج-۲) اثر مقدار پارامتر اغتشاشی بر اندازه لایه مرزی به ازای  $\beta = 1, \alpha = 0$  [64]

با توجه به شکل (ج-۲)، با افزایش مقدار  $\varepsilon$ ، لایه مرزی باریک‌تر می‌شود.

با توجه به مطالب بیان شده در فوق، به نظر می‌رسد که پاسخ یک معادله را نمی‌توان بر حسب یک مقیاس تنها بیان کرد که در این حالت مسئله، یک مسئله ایده‌آل برای روش multiple scale می‌باشد. با وجود این، برای مسائل غیرخطی، بخصوص آنهایی دارای حاکم معادله غیرخطی هستند،

استفاده این روش سر راست نمی‌باشد و باید از MAE استفاده کرد.

### ج-۶-۲ روش multiple scale

$y(x; \varepsilon)$  علاوه بر  $x$  و  $\varepsilon$  به ترکیب آنها، یعنی  $\frac{x}{\varepsilon}$  و  $\varepsilon x$  نیز وابسته می‌باشد که این، مسئله را برای استفاده از روش multiple scale ایده‌آل می‌سازد. جهت آشنایی با این روش، به حل معادله (ج-۲۲)، با این روش پرداخته می‌شود.

در اینجا  $\xi = \frac{x}{\varepsilon}$  را به عنوان متغیر داخلی و  $x_0 = x$  را متغیر خارجی معرفی می‌کنیم. با جایگذاری این متغیرها در معادله (ج-۲۲)، نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \frac{2\partial^2 y}{\partial \xi \partial x_0} + \varepsilon \frac{\partial^2 y}{\partial x_0^2} + (1 + \varepsilon^2) \left( \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial x_0} \right) + (1 - \varepsilon^2) y = 0 \quad (\text{ج-۳۳})$$

با در نظر گرفتن پاسخ معادله فوق به صورت بسط یکنواخت  $y = y_0(\xi, x_0) + \varepsilon y_1(\xi, x_0) + \dots$  نتیجه می‌شود:

$$O(\varepsilon^0): \frac{\partial^2 y_0}{\partial \xi^2} + \frac{\partial y_0}{\partial \xi} = 0 \quad (\text{ج-۳۴})$$

$$O(\varepsilon^1): \frac{\partial^2 y_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial y_1}{\partial \xi} = -\frac{2\partial^2 y_0}{\partial \xi \partial x_0} - \frac{\partial y_0}{\partial x_0} - y_0 \quad (\text{ج-۳۵})$$

حل معادله (ج-۳۴) به صورت زیر می‌باشد:

$$y_0 = A(x_0) + B(x_0)e^{-\xi} \quad (\text{ج-۳۶})$$

با قرار دادن، حل فوق در معادله (ج-۳۵) نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial y_1}{\partial \xi} = -(A' + A) + (B' - B)e^{-\xi} \quad (\text{ج-۳۷})$$

که در آن علامت پریم نشانه مشتق ضرایب می‌باشد. حل خصوصی معادله (ج-۳۸) برابر است با:

$$y_{1p} = -(A' + A)\xi - (B' - B)\xi e^{-\xi} \quad (\text{ج-۳۸})$$

از آنجا  $\varepsilon y_1$  در  $\xi \rightarrow \infty$  خیلی بزرگتر از  $y_0$  می‌باشد، از این رو برای یک بسط یکنواخت، ضرایب  $\xi$



و  $e^{-\xi}$  باید صفر باشند. بنابراین برای ضرایب، نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} A' + A &= 0 \\ B' - B &= 0 \end{aligned} \quad \text{(ج-۳۹)}$$

که از حل این دو معادله دیفرانسیل، ضرایب به صورت  $A = ae^{-x_0}$ ،  $B = be^{x_0}$  حاصل می‌شوند. پس از جایگذاری ضرایب فوق در (ج-۳۶) و تبدیل به متغیر اصلی، سپس جایگذاری حاصل در حل کلی، نتیجه می‌شود:

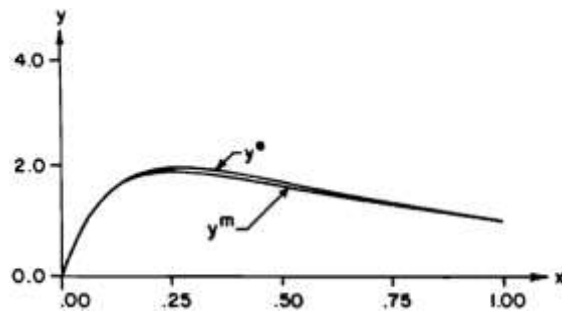
$$y = ae^{-x} + be^{-(1/\varepsilon)+1} + \dots \quad \text{(ج-۴۰)}$$

با اعمال شرایط مرزی (ج-۲۲):

$$\begin{aligned} \alpha &= a + b \\ \beta &= ae^{-1} + be^{-(1/\varepsilon)+1} \end{aligned} \quad \text{(ج-۴۱)}$$

با حذف جمله کوچک  $e^{-(1/\varepsilon)}$  و حل دو معادله فوق،  $a = \beta e$ ،  $b = \alpha - \beta e$  بدست می‌آیند. با توجه به این ضرایب، حل بسط مرتبه اول معادله (ج-۲۲)، برابر است با:

$$y = \beta e^{1-x} + (\alpha - \beta e)e^{-(x/\varepsilon)+x} + \dots \quad \text{(ج-۴۲)}$$



شکل (ج-۳) مقایسه بسط حل  $y^m$  (multiple scale) با حل دقیق به ازای  $\varepsilon = 0.1, \beta = 1, \alpha = 0$  [64]

شکل (ج-۳) نشان می‌دهد، در اکثر نقاط حل multiple scale با حل دقیق، منطبق می‌باشد.

### ج-۶-۳ روش حل MAE

ایده اصلی در روش MAE این است که حل تقریبی لزوماً بر حسب یک بسط و یک مقیاس قابل بیان نمی‌باشد، بلکه حل مسئله شامل دو یا چند بسط و مقیاس است که هر کدام در ناحیه‌ای خاص،

معتبر می‌باشند. این مقیاس‌ها باید به گونه‌ای انتخاب شوند که اولاً، بسط‌ها تمام حوزه مورد بررسی را شامل شوند. ثانیاً، حل‌های نواحی مجاور، همپوشانی (ناحیه مشترک)<sup>۱</sup> داشته باشند.

در اینجا با حل چند مثال، به شرح این روش پرداخته می‌شود.

معادله (ج-۲۲) را در نظر می‌گیریم. وقتی  $\varepsilon \rightarrow 0$ ، معادله به صورت  $y' + y = 0$  کاهش می‌یابد که مرتبه اول بوده و نمی‌تواند هر دو شرط مرزی را ارضا نماید. در نتیجه یکی از شرایط مرزی باسد دور انداخته شوند. در بخش (ج-۶-۱)، با توجه به حل دقیق، دریافتیم که لایه مرزی در مبدأ می‌باشد که البته به علت عدم دسترسی به حل دقیق (!)، برای کاربردهای معمولی، این همیشه ممکن نیست. بنابراین ما نیازمند تعیین موقعیت لایه مرزی می‌باشیم. در بسیاری از موارد، می‌توان از بحث‌های فیزیکی استفاده کرد که در ادامه بیشتر توضیح داده می‌شود. بعلاوه در دو بخش قبل، به کمک حل دقیق، متغیر  $\xi = \frac{x}{\varepsilon}$  را به عنوان متغیر داخلی در نظر گرفته بودیم که در این قسمت چگونگی انتخاب این متغیر، در حالت کلی تشریح می‌شود.

جهت تعیین موقعیت لایه مرزی، فرض می‌کنیم که آن، در یکی از دو انتها وجود دارد. سپس، با توجه به آن، یک جمله بسط حل را تعیین می‌کنیم. اگر بسط‌های همسایه قابل انطباق بودند که فرض ما درست، واگر نه لایه مرزی در انتهای دیگر می‌باشد.

در اینجا، لایه مرزی را در سمت راست فرض می‌کنیم و از این رو  $y(1) = \beta$  باید دور انداخته شود. سپس، دنبال حل خارجی‌ای به صورت  $y^o(x; \varepsilon) = y_0(x) + \dots$  می‌باشیم. با جایگذاری این حل در معادله (ج-۲۲) و با توجه به شرط مرزی سمت چپ، حل خارجی به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$y^o = \alpha e^{-x} + \dots \quad (\text{ج-۴۳})$$

برای بررسی رفتار حل در لایه مرزی فرضی، لازم است، همسایگی  $x=1$  را بزرگتر (گسترده‌تر) کنیم. از آنجا که بازه مورد بررسی  $[0, 1]$  است، ما یک بازه کوچک  $1-x$  نزدیک  $x$  که در آن  $x < 1$  است،

1. Overlap

را بزرگ می‌کنیم. بنابراین پارامتر سریع را به صورت  $\xi = \frac{1-x}{\varepsilon^\nu}$  تعریف می‌کنیم که در آن  $\nu$  باید بزرگتر از صفر باشد، تا  $\xi$  یک پارامتر سریع باشد. مقدار  $\nu$  نامعوم است و در حالت کلی، یک مقدار قیاسی است و از باید از طریق تحلیل تعیین شود. به هر حال، با تغییر متغیر  $\xi = \frac{1-x}{\varepsilon^\nu}$ ، معادله (ج-۲۲) به معادله زیر تبدیل می‌شود:

$$\varepsilon^{1-2\nu} \frac{d^2 y}{d\xi^2} - \varepsilon^{-\nu} (1 + \varepsilon^2) \frac{dy}{d\xi} + (1 - \varepsilon^2) y = 0 \quad (\text{ج-۴۴})$$

با ثابت نگه داشتن  $\xi$  وقتی که  $\varepsilon \rightarrow 0$ ، جملات غالب معادله فوق، به صورت زیر می‌باشند:

$$\varepsilon^{1-2\nu} \frac{d^2 y}{d\xi^2} - \varepsilon^{-\nu} \frac{dy}{d\xi} + y + \dots = 0 \quad (\text{ج-۴۵})$$

شکل حدی معادله (ج-۴۵) در  $\varepsilon \rightarrow 0$ ، به مقدار  $\nu$  بستگی دارد. سه امکان وجود دارد:  $\nu > 1$ ،

$\nu < 1$  و  $\nu = 1$ . اگر  $\nu > 1$ ، شکل حدی معادله (ج-۴۵) به صورت  $\frac{d^2 y^i}{d\xi^2} = 0$  می‌شود که پاسخ عمومی

آن برابر است با:

$$y^i = a_0 + b_0 \xi \quad (\text{ج-۴۶})$$

از آنجا که لایه مرزی در  $x=1$  فرض شد، (ج-۴۶) باید شرط مرزی  $y = \beta$  را در  $\xi = 0$  ( $x=1$ )

ارضا نماید. بنابراین برای حل داخلی نتیجه می‌شود:

$$y^i = \beta + b_0 \xi \quad (\text{ج-۴۷})$$

حل‌های بدست آمده خارجی (ج-۴۳) و داخلی (ج-۴۷)، باید بخش‌های مشترک داشته باشند.

برای تعیین بخش‌های همپوشان (مشترک) دو حل، به صورت زیر عمل می‌شود:

۱- در حل خارجی، به جای  $x$ ، متغیر سریع  $\xi$  را جایگزین می‌کنیم. در نتیجه معادله (ج-۴۳) به با

متغیر جدید به صورت زیر در می‌آید:

$$y^o = \alpha e^{-1 + \varepsilon^\nu \xi} \quad (\text{ج-۴۸})$$

۲- حال با فرض ثابت بودن  $\xi$ ، بسط تیلور معادله فوق حول پارامتر کوچک  $\varepsilon = 0$ ، می‌نویسیم:

$$(y^0)^i = \alpha e^{-1} \quad (\text{ج-۴۹})$$

از آنجا که معادله در مرتبه صفر بررسی می‌شود، فقط یک جمله از بسط، را در نظر می‌گیریم.

۳- در حل داخلی به جای  $\xi$ ، متغیر  $x$  را جایگزین می‌کنیم.

$$y^i = \beta + \frac{b_0(1-x)}{\varepsilon^\nu} \quad (\text{ج-۵۰})$$

۴- با فرض  $x$  ثابت، بسط تیلور معادله فوق، حول  $\varepsilon = 0$ ، به صورت زیر می‌شود:

$$(y^i)^0 = \begin{cases} \beta & \text{if } b_0 = 0 \\ \frac{b_0(1-x)}{\varepsilon^\nu} & \text{if } b_0 \neq 0 \end{cases} \quad (\text{ج-۵۱})$$

۵- شرط منطبق بودن پاسخ‌ها، به صورت  $(y^i)^0 = (y^0)^i$  بیان می‌شود.

ارضای شرط انطباق، نیازمند آنست که  $\alpha e^{-1} = \beta$  که این در حالت کلی برقرار نمی‌باشد. حال

اگر  $\nu < 1$ ، شکل حدی معادله (ج-۴۵) به صورت  $\frac{dy^i}{d\xi} = 0$  می‌شود که پاسخ آن  $y^i = a_0$  می‌باشد. با

توجه به شرط مرزی در  $\xi = 0$ ، پاسخ به صورت  $y^i = \beta$  در می‌آید. ارضای شرط انطباق حکم می‌کند،

$\alpha e^{-1} = \beta$  که در حالت کلی برقرار نمی‌باشد. پس فرض  $\nu < 1$  نیز برای این حالت، اشتباه است.

اگر  $\nu = 1$ ، شکل حدی معادله (ج-۴۵) به صورت  $\frac{d^2 y^i}{d\xi^2} - \frac{dy^i}{d\xi} = 0$  می‌شود که پاسخ آن

در  $y^i = a_0 + b_0 e^{\xi}$  می‌باشد. با توجه به شرط مرزی در  $\xi = 0$ ، پاسخ به صورت  $y^i = \beta - b_0 + b_0 e^{\xi}$

می‌آید. پس از بیان  $y^i$  بر حسب  $x$ ، با فرض  $x$  ثابت، بسط تیلور آن حول  $\varepsilon = 0$  برابر است با:

$$(y^i)^0 = \begin{cases} \beta & \text{if } b_0 = 0 \\ b_0 e^{\frac{1-x}{\varepsilon}} & \text{if } b_0 \neq 0 \end{cases} \quad (\text{ج-۵۲})$$

جهت ارضای شرط انطباق، باید  $b_0 = 0, \beta = \alpha e^{-1}$  باشد که در حالت کلی صحیح نمی‌باشد.

بنابراین، فرض وجود لایه مرزی در سمت راست صحیح نمی‌باشد، از این رو لایه مرزی باید در مبدأ

باشد. برای اینکه لایه مرزی در مبدأ باشد، حل خارجی باید در  $x=1$  معتبر باشد. بنابراین ما دنبال حل

خارجی‌ای به صورت  $y^0(x; \varepsilon) = y_0(x) + \dots$  می‌باشیم. با جایگذاری این بسط در معادله (ج-۲۲) و با توجه به شرایط مرزی در  $x=1$ ، حل خارجی به صورت زیر در می‌آید:

$$y^0 = \beta e^{1-x} + \dots \quad (\text{ج-۵۳})$$

برای بررسی وجود لایه مرزی در مبدأ، متغیر سریع را به صورت  $\xi = \frac{x}{\varepsilon^\nu}$  معرفی می‌کنیم. با تغییر

این متغیر، معادله (ج-۲۲)، به معادله زیر تبدیل می‌شود:

$$\varepsilon^{1-2\nu} \frac{d^2 y}{d\xi^2} + \varepsilon^{-\nu} (1 + \varepsilon^2) \frac{dy}{d\xi} + (1 - \varepsilon^2) y = 0 \quad (\text{ج-۵۴})$$

وقتی که  $\varepsilon \rightarrow 0$ ، جملات غالب معادله فوق، برابر است با:

$$\varepsilon^{1-2\nu} \frac{d^2 y}{d\xi^2} + \varepsilon^{-\nu} \frac{dy}{d\xi} + y = 0 \quad (\text{ج-۵۵})$$

مشابه حالت قبل، در اینجا نیز شکل حدی معادله (ج-۵۵) در  $\varepsilon \rightarrow 0$ ، به مقدار  $\nu$  بستگی دارد.

اگر  $\nu > 1$ ، شکل حدی معادله (ج-۵۵) به صورت  $\frac{d^2 y^i}{d\xi^2} = 0$  می‌شود که پاسخ آن با توجه به

شرط مرزی در  $x=0$ ، برابر است با:

$$y^i = \alpha + b_0 \xi \quad (\text{ج-۵۶})$$

جهت اعمال شرط انطباق، معادله فوق را بر حسب  $x$ ، به صورت  $y^i = \alpha + \frac{b_0 x}{\varepsilon^\nu}$  نوشته و سپس با  $x$

ثابت حول  $\varepsilon = 0$ ، به صورت زیر بسط می‌دهیم:

$$(y^i)^0 = \begin{cases} \alpha & \text{if } b_0 = 0 \\ \frac{b_0 x}{\varepsilon^\nu} & \text{if } b_0 \neq 0 \end{cases} \quad (\text{ج-۵۷})$$

حل خارجی را نیز بر حسب  $\xi$  نوشته و با فرض ثابت بودن  $\xi$ ، بسط پاسخ را حول  $\varepsilon$  می‌نویسیم:

$$(y^0)^i = \beta e + \dots \quad (\text{ج-۵۸})$$

ارضای شرط انطباق روی (ج-۵۷) و (ج-۵۸)، می‌طلبد که:  $b_0 = 0, \beta e = \alpha$  که صحیح نمی‌باشد.

حال اگر  $\nu < 1$ ، شکل حدی معادله (ج-۴۵) به صورت  $\frac{dy^i}{d\xi} = 0$  می‌شود که پاسخ آن با توجه به

شرط مرزی، به صورت  $y^i = \alpha$  در می‌آید. ارضای شرط انطباق حکم می‌کند،  $\alpha = \beta e$  که صحیح نمی‌باشد. اگر  $\nu = 1$ ، شکل حدی معادله (ج-۴۵) به صورت  $\frac{d^2 y^i}{d\xi^2} - \frac{dy^i}{d\xi} = 0$  می‌شود که پاسخ آن با توجه به شرط مرزی، به صورت  $y^i = \alpha - b_0 + b_0 e^{\xi}$  در می‌آید. پس از بیان  $y^i$  بر حسب  $x$ ، با فرض  $x$  ثابت، بسط تیلور آن حول  $\varepsilon = 0$  برابر است با:

$$(y^i)^0 = \alpha - b_0 \quad (\text{ج-۵۹})$$

با توجه به شرط انطباق،  $b_0 = \alpha - \beta e$  بدست می‌آید. بنابراین برای تقریب مرتبه اول، نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} y^0 &= \beta e^{1-x} + \dots \\ y^i &= \beta e + (\alpha - \beta e)e^{-x/\varepsilon} + \dots \end{aligned} \quad (\text{ج-۶۰})$$

از آنجا که شرایط انطباق برقرار شد، فرض ما در مورد وجود لایه مرزی در مبدأ و همچنین انتخاب متغیر سریع به صورت  $\xi = \frac{x}{\varepsilon}$ ، درست می‌باشد. شرایط  $\nu > 1$  و  $\nu < 1$ ، بخاطر اینکه عدد خاصی را مشخص نمی‌کنند، نامعین هستند. از طرف دیگر  $\nu = 1$  معین بوده و معمولاً حد تمایز<sup>۱</sup> نامیده می‌شود. قابل ذکر است، بزرگنمایی صحیح، همیشه توسط حد تمایز حاصل می‌شود.

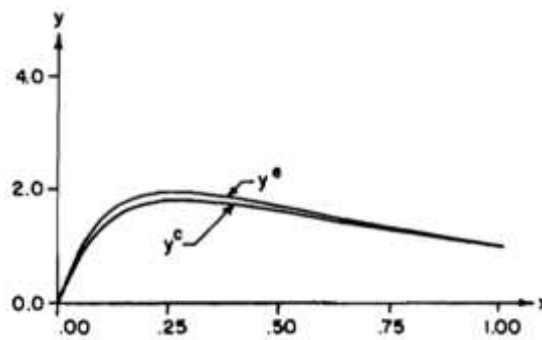
در (ج-۶۰)،  $y^0$  برای کل ناحیه به جزء بازه کوچک نزدیک مبدأ و  $y^i$  فقط برای لایه مرزی معتبر می‌باشند. در ضمن این دو حل، یک ناحیه مشترک نیز دارند. حال اگر بخواهیم یک حل مرکب داشته باشیم، باید از رابطه زیر استفاده کنیم:

$$y^C = y^0 + y^i - (y^0)^i = y^0 + y^i - (y^i)^0 \quad (\text{ج-۶۱})$$

با توجه به معادله فوق، حل مرکب (ج-۲۲) به صورت زیر می‌باشد:

$$y^C = \beta e^{1-x} + (\alpha - \beta e)e^{-x/\varepsilon} + \dots \quad (\text{ج-۶۲})$$

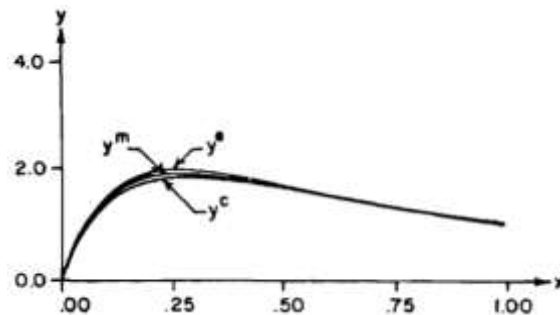
1. Distinguished Limit



شکل (ج-۴) مقایسه حل مرکب روش  $y^c$  (MAE) با حل دقیق به ازای  $\varepsilon = 0.1, \beta = 1, \alpha = 0$  [64]

روش MAE یک پاسخ مرکب ایجاد می‌کند که برای حل داخلی و خارجی قابل تفکیک می‌باشد.

اما پاسخ روش multiple scale، تفکیک‌ناپذیر می‌باشد.



شکل (ج-۵) مقایسه حل روش‌های MAE و multiple scale با حل دقیق به ازای

$$[64] \varepsilon = 0.1, \beta = 1, \alpha = 0$$

با توجه به معادلات (ج-۴۲) و (ج-۶۲)، حل‌های داخلی و خارجی روش‌های MAE و multiple scale، توافق خوبی با هم دارند. بعلاوه حضور فاکتور اضافی  $e^x$  در (ج-۴۲)، باعث توافق بهتر آن نسبت به (ج-۶۲) شده است که شکل (ج-۵) نیز بیانگر این مطلب می‌باشد. البته این بدان معنا نیست که روش multiple scale بالاتر از روش MAE است، زیرا کاربرد روش multiple scale برای معادلات دیفرانسیل غیرخطی، بخصوص معادلات مشتق‌جزیی مانند معادله ناویر-استوکس سرراست نمی‌باشد.

- [1] Montgomery T.Sh. and William J.M., (2005). **“Introduction to Polymer Viscoelasticity”**. A John Wiley & Sons, Inc.
- [2] Nhan Phan-Thien, (1956). **“Understanding viscoelasticity; Basic of rheology”**. Springer- Verlag, Berlin.
- [3] Wang G., (2001). **PhD. thesis, “Analyses of Sandwich Beams and Plates with Viscoelastic Cores”**. Mech. depart., University of Maryland.
- [4] Riande E., Diaz-Calleja R., Prolongo M.G., Masegosa R.M. and Salom C., (2000). **“Polymer Viscoelasticity; Stress and Strain in practice”**. Marcel Dekker INC., New York.
- [5] Brinson H.F., Brinson C.L., (2008). **“Polymer Engineering Science and Viscoelasticity; an Introduction”**. Springer. New York.
- [6] Nashif A.D., Jones D. and Henderson J.P., (1985), **“Vibration Damping”**. John Wiley & Sons, New York.
- [7] Jones D.I.G., (1978), **“A Reduced-temperature Nomogram for Characterization of Damping Material Behavior”**, **Shock Vibration Bulletin, Vol.48, Part 2**, pp. **1-11**.
- [8] Sun C.T., and Lu Y.P., (1995), **“Vibration Damping of Structural Elements”**, Prentice Hall PTR, New Jersey.
- [9] Christensen R. M., (1982), **“Theory of Viscoelasticity: An Introduction”**, Academic Press, New York.
- [10] Bagley R. L. and Torvik P. J., (1983), **“Fractional Calculus- A Different Approach to Analysis of Viscoelastically Damped Structures”**. **AIAA Journal, Vol. 21, No. 5**, pp.**741-748**.
- [11] Roderic S.L., (2000). **“Viscoelastic Solids”**, University of Wisconsin.
- [12] Roylance D., (2001). **“Engineering Viscoelasticity”**. Cambridge, MA 02139.
- [13] Marynowski K., (2008). **“Dynamics of the Axially Moving Orthotropic Web”**. Second Edition, Springer- Verlag, Berlin.
- [14] Ventsel E., Krauthammer T., (2001). **“Thin plates and Shells: Theory, Analysis, and Applications”**, New York.



- [15] Marynowski K., (2010). "Free vibration analysis of the axially moving Levy-type viscoelastic plate", **European Journal of Mechanics A/Solids** **29**, pp. **879-886**.
- [16] Marynowski K., (2006). "Two-dimensional rheological element in modeling of axially moving viscoelastic web". **European Journal of Mechanics A/Solids** **25**, pp. **729-744**.
- [17] Sobotka Z., (1989). "Theory of Plasticity and Limit Design of Plates". Elsevier.
- [18] Sack R.A., (1954), "Transverse oscillations in traveling strings". **British J. of Applied Physics** **5**, pp. **224-226**.
- [19] Archibald F.R. and Emslie A.G., (1958), "The vibrations of a string having a uniform motion along its length". **J. of Applied Mech. ASME** **25** (3), pp. **347-348**.
- [20] Ulsoy A.G. and Mote Jr.C.D., (1982). "Vibrations of wide band saw blades". **J. of Engineering for Industry, ASME** **104** (1), pp. **71-78**.
- [21] Lin C.C. and Mote Jr.C.D., (1995). "Equilibrium displacement and stress distribution in a two dimensional axially moving web under transverse loading". **J. of Applied Mechanics ASME** **62**, pp. **772-779**.
- [22] Lin C.C., (1997). "Stability and vibration characteristics of axially moving plates". **Int. J. of Solid and Structures** **34** (24), pp. **3179-3190**.
- [23] Wang X., (1999). "Numerical analysis of moving orthotropic thin plates". **Computers & Structures** **70**, pp. **467-486**.
- [24] Wickert J.A., Mote Jr.C.D., (1990). "Classical vibration analysis of axially moving continua". **J. of Appl. Mech. ASME** **57**, pp. **738-744**.
- [25] Wickert J.A., (1992). "Nonlinear vibration of a traveling tensioned beam". **Int. J. Non-Linear Mech.** **27** (3), pp. **503-517**.
- [26] Kim J., Cho J., Lee U. and Park S., (2003). "Modal spectral element formulation for axially moving plates subjected to in-plane axial tension". **Comput. & Structures** **81**, pp. **2011-2020**.
- [27] Fung R.F., Huang J.S. and Chen Y.C., (1997). "The transient amplitude of the viscoelastic traveling string: an integral constitutive law". **J. of Sound and Vibration** **201** (2), pp. **153-167**.

- [28] Zhang L. and Zu J.W., (1999). "Nonlinear vibration of parametrically excited moving belts", **J. Appl. Mech.** **66** (2), pp. 396–409.
- [29] Rossikhin Yu.A. and Shitikova M.V., (2006), "Analysis of damped vibrations of linear viscoelastic plates with damping modeled with fractional derivatives", **Signal Processing** **86**, pp. 2703–2711.
- [30] Rossikhin Yu.A. and Shitikova M.V., (2006). "Analysis of free non-linear vibrations of a viscoelastic plate under the conditions of different internal resonances", **Int. J. of Non-Linear Mechanics** **41**, pp. 313–325.
- [31] Malekzade P., Fiouz A.R. and Razi H., (2009). "Three-dimensional dynamic analysis of laminated composite plates subjected to moving load". **Composite Structures** **90**, pp. 105–114.
- [32] Wang Zh.M., Zhou Y.F. and Wang Y., (2007). "Dynamic stability of a non-conservative viscoelastic rectangular plate", **J. of Sound and Vibration** **307**, pp. 250–264.
- [33] Kim S.M., (2004). "Buckling and vibration of a plate on elastic foundation subjected to in-plane compression and moving loads". **Int. J. of Solids and Structures** **41**, pp. 5647–5661.
- [34] Shadnam M.R., Rahimzadeh Rofooei F., Mofid M. and Mehri B., (2002). "Periodicity in the response of nonlinear plate under moving mass". **Thin-Walled Structures** **40**, pp. 283–295.
- [35] Ghafoori E. and Asghari M., (2010). "Dynamic analysis of laminated composite plates traversed by a moving mass based on a first-order theory". **Composite Structures** **92**, pp. 1865–1876.
- [36] Chen L.Q., Yang X.D., (2006). "Vibration and stability of an axially moving viscoelastic beam with hybrid supports". **European J. of Mechanics A/Solids** **25**, pp. 996–1008.
- [37] Chen L.Q., Tang Y.Q. and Lim C.W., (2010). "Dynamic stability in parametric resonance of axially accelerating viscoelastic Timoshenko beams". **J. of Sound and Vibration** **329**, pp. 547–565.
- [38] Wang B. and Chen L.Q., (2009). "Asymptotic stability analysis with numerical confirmation of an axially accelerating beam constituted by the standard linear solid model". **J. of Sound and Vibration** **328**, pp. 456–466.
- [39] Shin C., Chung J. and Kim W., (2005). "Dynamic characteristics of the out of-plane vibration for an axially moving membrane", **J. of Sound and Vibration** **286**, pp. 1019–1031.

- [40] Hatami S., Azhari M., Saadatpour M.M. and Memarzadeh P., "Exact Free Vibration of Webs Moving Axially at High Speed", **recent advanced in applied mathematics and computational and information sciences- Volume I**.
- [41] Hatami S., Azhari M. and Saadatpour M.M., (2007). "Free vibration of moving laminated composite plates". **Composite Structures 80**, pp. 609–620.
- [42] Banichuk N., Jeronen J., Neittaanmaki P. and Tuovinen T., (2010). "On the instability of an axially moving elastic plate", **Int. J. of Solids and Structures 47**, pp. 91–99.
- [43] Kim J., Cho J., Lee U. and Park S., (2003). "Modal spectral element formulation for axially moving plates subjected to in-plane axial tension", **Computers and Structures 81**, pp. 2011–2020.
- [44] Marynowski K. and Kapitaniak T., (2002). "Kelvin–Voigt versus Burgers internal damping in modeling of axially moving viscoelastic web ", **Int. J. of Non-Linear Mechanics 37**, pp. 1147 – 1161.
- [45] Hou Zh. and Zu J.W., (2002), "Non-linear free oscillations of moving viscoelastic belts", **Mechanism and Machine Theory 37**, pp. 925–940.
- [46] Marynowski K., (2004), "Non-linear vibrations of an axially moving viscoelastic web with time-dependent tension", **Chaos, Solitons and Fractals 21**, pp. 481–490.
- [47] Zhou Y.F. and Wang Zh.M, (2008). "Vibrations of axially moving viscoelastic plate with parabolically varying thickness", **J. of Sound and Vibration 316**, pp. 198–210.
- [48] Hatami S., Ronagh H.R. and Azhari M., (2008). "Exact free vibration analysis of axially moving viscoelastic plates", **Computers and Structures 86**, pp. 1738–1746.
- [49] Kim T.W. and Kim J.H., (2002). "Nonlinear vibration of viscoelastic laminated composite plates". **Int. J. of Solids and Structures 39**, pp. 2857–2870.
- [50] Ray M.C., (2003). "Zeroth-Order Shear Deformation Theory for Laminated Composite Plates". **ASME J. Appl. Mech.**, 70, pp. 374–380.
- [51] Salehi M. and Aghaei H., (2005). "Dynamic relaxation large deflection analysis of non-axisymmetric circular viscoelastic plates". **Computers and Structures 83**, pp. 1878–1890.

- [52] Rastgaar Aagaah M., Mahinfalah M. and Nakhaie Jazar G., (2006). “Natural frequencies of laminated composite plates using third order shear deformation theory”. **Composite Structures** 72. Pp. 273–279.
- [53] Wu Zh., Cheung Y.K., Lo S.H. and Chen W., (2008). “Effects of higher-order global local shear deformations on bending, vibration and buckling of multilayered plates”. **Composite Structures** 82, pp. 277–289.
- [54] Alibeigloo A., Shakeri M. and Kari M.R., (2008). “Free vibration analysis of antisymmetric laminated rectangular plates with distributed patch mass using third-order shear deformation theory”. **Ocean Engineering** 35, pp. 183–190.
- [55] Alibeigloo A. and Kari M.R., (2009). ‘Forced vibration analysis of antisymmetric laminated rectangular plates with Distributed patch mass using third order shear deformation theory’. **Thin-Walled Structures** 47, pp. 653–660.
- [56] Aydogdu M., (2009). ‘A new shear deformation theory for laminated composite plates’. **Composite Structures** 89, pp. 94–101.
- [57] Hosseini-Hashemi Sh., Eshaghi M., Rokni Damavandi Taher H. and Fadaie M., (2010). “Exact closed-form frequency equations for thick circular plates using a third order shear deformation theory”. **J. of Sound and Vibration** 329, pp. 3382–3396.
- [58] Hosseini-Hashemi Sh., Fadaee M. and Rokni Damavandi Taher H., (2011). “Exact solutions for free flexural vibration of Lévy-type rectangular thick plates via third-order shear deformation plate theory”. **Applied Mathematical Modelling** 35, pp. 708–727.
- [59] Hosseini-Hashemi Sh., Rokni Damavandi Taher H., Akhavan H. and Omid M., (2010). “Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-order shear deformation plate theory”. **Applied Mathematical Modelling** 34, pp. 1276–1291.
- [60] Xiang S., Jiang Sh.X., Bi Z.Y., Jin Y.X. and Yang M.S., (2011). “A nth-order meshless generalization of Reddy’s third-order shear deformation theory for the free vibration on laminated composite plates”. **Composite Structures** 93, pp. 299–307.
- [61] Boscolo M. and Banerjee J.R., (2011). “Dynamic stiffness elements and their applications for plates using first order shear deformation theory”. **Computers and Structures** 89, pp. 395–410.

- [62] Wang C.M., Reddy J.N. and Lee K.H., (2000). "**Shear Deformable Beams And Plates, Relationships with Classical Solutions**". Elsevier, Amsterdam- Lausanne- New York- Oxford- Shannon - Singapore- Tokyo.
- [63] Shooshtari A., Razavi S., (2010) "A closed form solution for linear and nonlinear free vibrations of composite and fiber metal laminated rectangular plates", **Composite Structures 92**, pp. 2663–2675.
- [64] Nayfeh A.H, (1933). "**Introduction to Perturbation Techniques**", John Wiley, New York. London. Sydney. Toronto.
- [۶۵] علیزاده ق.، وحیدی ج.، (۱۳۸۱)، "توابع مختلط"، دانشگاه مازندران.
- [66] Jeffrey A., (2002). "**Advanced engineering mathematics**", Harcourt academic press, Florida.
- [67] Simkins T.E., (1994). "Amplification of flexural waves in gun tubes", **J. sound and vibrations 172(2)**, pp. 145-154.
- [68] Drazdof A., (1998). "**Viscoelastic Structures Institute for Industrial Mathematics**", Ben-Curion University of the Negev. Be'ersheba, Israel.
- [69] James A.M, (1991). "**Perturbations Theory and Methods**", John Wiley & Sons Inc.
- [70] Nayfeh A.H, (1933). "**Perturbation Method**", John Wiley, New York. London. Sydney. Toronto.

## **Abstract**

In this research, the mathematical solution of the governing equations of a thin axially moving viscoelastic web under lateral pressure has been investigated. The web translates axially with a constant velocity between two pairs of rollers and it is subjected to a uniform tension at the both ends. The equations of motions, which are a system of partial differential equation, have been derived by using the Hamilton's principle. The behavior of the viscoelastic web has been defined with a three-parameter Zener model in shear and elastic in bulk. The matched asymptotic expansion method (MAE) and Laplace transform has been applied to obtain the displacements in Laplace domain. These displacements have been transmitted to the time domain by using residual theorem. Based on this analytical solution, the composite solution of the system, the critical speeds and the natural frequencies, were determined for a given set of initial values. Finally, a parametric study has been performed to investigate the effects of various parameters such as thickness, viscoelastic properties, density and translating speed on the system response.

**Keywords:** Axially Moving Viscoelastic Web, First-order Shear Deformation Theory, Hamilton's Principle, Matched Asymptotic Expansion, Residual Theorem;



**Shahrood University of Technology**

**Faculty of Mechanical Engineering**

**Mathematical solution of an axially moving  
viscoelastic web under lateral pressure  
using first order shear deformation theory**

Thesis

Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of  
Master of Science (M.Sc)  
In Mechanical Engineering, Applied Design

**Rohollah Darzi-Naftchali**

Supervisor:

**Dr. Hamid Reza Eipakchi**

**Date: February 2012**