

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک

پایان نامه کارشناسی ارشد در رشته‌ی مهندسی مکانیک

عنوان:

کمانش ترمومکانیکی و پس کمانش ورق‌های نانوکامپوزیتی تقویت شده با گرافن

نگارنده:

بهاره یخچیان طوسی

استاد راهنما:

دکتر علیرضا شاطرزاده

بهمن ۱۳۹۹

پایان نامه ام
اثر کوچکم

در روزگاری که دوری فضیلت است
وسلامتی ضمیمت

تقدیم می شود

به آن که جان بخشیدن و جان خویش دادند
به از جان گذشتگان سلامت

به مادر بزرگم

که در ابتدای مسیر همراهم بود
و حال، از آسمان ها نگاهم می کند

شکر و قدردانی

ای روح روشن الهی مرا تعلیم کن
آن چه را که در من تاریک و مه آلود است، به نور معرفت خویش روشن گردان
و آن چه را در من پست و فرو افتاده است، تعالی بخش
تا من بتوانم در جان این سرود، شجاعت ازلی پروردگار را بیان آورم، کارهای خداوندی را توجیه کنم و در دل مردمان
شیرین گردانم.
جان میلتون

از جناب آقای دکتر علیرضا شاطرزاده استاد بزرگوارم، به پاس همراهی صمیمانه، نکته‌سنجی‌های علمی و از همه مهم‌تر، رفتار و برخورد نیکویشان کمال سپاس را دارم.

از اساتیدگرامی که زحمت داوری این رساله را پذیرفتند صمیمانه تشکر می‌کنم.

همچنین از تمامی اساتید محترم دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود که در این مدت افتخار شاگردی ایشان را داشتم، سپاس گزارم.

سپاس آخر را به مهربان‌ترین همراهان زندگی‌ام، به مادر و پدر عزیزم برای سال‌ها حمایت و فداکاری تقدیم می‌کنم.

بهاره یخچیان طوسی

نسلی در می‌گذرد و نسل دیگر از راه می‌سد؛

اما زمین تا ابد پابر جامی ماند...

خورشید هم چنان بر می‌درد و خورشید فرو می‌شود؛

به همان سویی می‌شتابد که از آنجا بر دمیده است...

باد به سمت جنوب روانه می‌شود و به جانب شمال باز می‌گردد؛

پیوسته به کرد و خویش می‌چرخد...

همه می‌رود و به دریای ریزند و لیکن دریا پر نمی‌شود؛

رود و دیگر بار به همان سوباز می‌گردند که از آنجا هراسا رفته‌اند.

کتاب جامعه مهد عشق

تعهد نامه

اینجانب بهاره یخچیان طوسی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی مکانیک دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه کمانش ترمومکانیکی و پس کمانش ورق های نانوکامپوزیتی تقویت شده با گرافن تحت راهنمایی دکتر علیرضا شاطرزاده متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا «Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیر گذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آن ها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود. استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده

امروزه استفاده از نانوکامپوزیت‌ها به دلیل خواص مطلوب مکانیکی و حرارتی در بسیاری از صنایع از جمله هوافضا، پزشکی، نظامی و ... گسترش پیدا کرده است. به همین منظور در مطالعه‌ی حاضر، کمانش و پس‌کمانش ترمومکانیکی ورق‌های مدرج تابعی با ماتریسی از جنس پلیمر ایزوتروپیک (دی‌گلیسیدیل اتر بیسفنول ای) و تقویت شده با نانوصفحه‌های گرافن در شرایط مرزی ساده و گیردار بررسی شده است. ورق‌ها تحت تغییرات دمای یکنواخت و نیروهای درون‌صفحه‌ای هستند. در این ورق‌های چندلایه ضخامت تمام لایه‌ها یکسان است، و با تغییر کسر وزنی نانوصفحه‌های گرافن تقویت‌کننده در هر لایه، نوع آرایش لایه‌ای تقویت‌کننده‌ها در راستای ضخامت ورق‌های نانوکامپوزیتی تغییر می‌کند. ورق‌ها با دو آرایش مدرج تابعی تقویت‌کننده‌ها به صورت X و O و آرایش یکنواخت U تقویت شده است. مدول یانگ موثر ورق با استفاده از مدل میکرومکانیک اصلاح شده هالپین-تسای محاسبه شده است، همچنین، برای به دست آوردن خواص معادل کامپوزیت‌ها از قانون اختلاط استفاده شده است. به منظور در نظر گرفتن کرنش‌های برشی جانبی تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول به کار گرفته شده است. معادلات حاکم بر ورق با بهره‌گیری از روابط غیرخطی کرنش-جابجایی ون-کارمن، معادلات ساختاری تنش-کرنش و معادلات تعادل با در نظر داشتن اثر حرارت استخراج شده‌اند. روش عددی دیفرانسیل کوداریچر به همراه یک الگوی تکرار برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی حاکم بر ورق، محاسبه دماها و بارهای کمانش بحرانی و تعیین مسیر تعادل پس‌کمانش حرارتی و مکانیکی استفاده شده است. با مقایسه‌ی نتایج پژوهش حاضر با دیگر منابع، صحت و کارایی مراحل طی شده، تأیید شده است. تأثیر نسبت ابعادی، نسبت طول به ضخامت و درصد وزنی نانوصفحه‌های گرافن تقویت‌کننده، شرایط مرزی، نسبت طول به ضخامت ورق بر دما و بار مکانیکی کمانش و مسیر تعادل پس‌کمانش ورق‌ها بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهد، توزیع مدرج تابعی تقویت‌کننده‌ها الزاماً منجر به بهبود مقاومت کمانشی ورق‌ها نمی‌شود، در توزیع مدرج تابعی نانوصفحه‌های گرافن به صورت X مقاومت ورق در برابر کمانش حرارتی و مکانیکی افزایش می‌یابد در صورتی که در توزیع نانوصفحه‌های گرافن به صورت O مقاومت کمانشی ورق‌ها کمتر می‌شود. ورق‌ها با آرایش تقویت‌کننده به صورت X ، U و O به ترتیب بالاترین بار مکانیکی کمانش و دمای کمانش را دارا هستند.

کلمات کلیدی: کمانش ترمومکانیکی، روش دیفرانسیل کوداریچر، مواد مدرج تابعی، پس‌کمانش، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول

فهرست مطالب

ک	فهرست جدول‌ها
ل	فهرست شکل‌ها
۱	فصل ۱: مقدمه
۲	۱-۱ - مقدمه
۲	۲-۱ - کامپوزیت‌ها
۳	۱-۲-۱ - انواع کامپوزیت
۴	۲-۲-۱ - نانو کامپوزیت‌ها
۴	۳-۱ - گرافن
۵	۱-۳-۱ - تاریخچه گرافن
۶	۲-۳-۱ - روش‌های ساخت گرافن
۸	۴-۱ - مواد مدرج تابعی
۸	۱-۴-۱ - تاریخچه مواد مدرج تابعی
۹	۲-۴-۱ - کامپوزیت‌های مدرج تابعی تقویت شده با نانوصفحه‌های گرافن
۹	۳-۴-۱ - روش‌های ساخت مواد مدرج تابعی
۱۰	۵-۱ - کمانش و مکانیک غیرخطی
۱۰	۱-۵-۱ - مفهوم پایداری
۱۳	۶-۱ - تئوری تغییر شکل برشی
۱۳	۱-۶-۱ - تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول
۱۵	فصل ۲: مروری بر پژوهش‌های پیشین
۱۶	۱-۲ - مقدمه

۲-۲ - مروری بر پژوهش‌های انجام شده ۱۶

فصل ۳: فرمول‌بندی و حل مسئله ۲۱

۱-۳ - مقدمه ۲۲

۲-۳ - مدل و خواص ورق کامپوزیتی ۲۲

۱-۲-۳ - روش هالپین-تسای ۲۴

۲-۲-۳ - قانون اختلاط ۲۷

۳-۲-۳ - خواص نانوصفحه‌های گرافن ۲۸

۴-۲-۳ - خواص دی‌گلیسیدیل اتر بیسفنول ای ۲۹

۳-۳ - میدان جابه‌جایی ۳۰

۴-۳ - بارگذاری ورق ۳۰

۵-۳ - روابط غیر خطی کرنش - جابه‌جایی ۳۰

۶-۳ - معادلات ساختاری ۳۱

۷-۳ - معادلات حاکم بر ورق مدرج تابعی تقویت شده با نانوصفحه‌های گرافن ۳۲

۸-۳ - شرایط مرزی ۳۸

۹-۳ - یکاها و ابعاد ۳۸

۱-۹-۳ - بی‌بعد سازی معادلات حاکم بر ورق ۳۹

۲-۹-۳ - بی‌بعد سازی شرایط مرزی ۴۰

۱۰-۳ - روش‌های حل عددی ۴۱

۱-۱۰-۳ - روش دیفرانسیل کوادریچر ۴۱

۲-۱۰-۳ - اعمال گسسته‌سازی دیفرانسیل کوادریچر بر دستگاه معادلات با مشتقات جزئی

غیرخطی حاکم بر ورق ۴۴

۳-۱۰-۳ - اعمال گسسته‌سازی دیفرانسیل کوادریچر بر شرایط مرزی ۴۸

۳-۱۱ - کمانش ورق‌های مدرّج تابعی تقویت شده با نانوصفحه‌های گرافن..... ۵۸

۳-۱۲ - پاسخ پس‌کمانشی ورق‌های مدرّج تابعی تقویت شده با نانوصفحه‌های گرافن..... ۵۹

فصل ۴: بحث و نتایج ۶۱

۴-۱ - مقدمه ۶۲

۴-۲ - محاسبه حداقل تعداد لایه‌های ورق و گره‌های همگرا..... ۶۲

۴-۳ - سخت‌سنجی روش دیفرانسیل کوادریچر..... ۶۳

۴-۴ - سخت‌سنجی مسیر تعادل پس‌کمانش ۶۴

۴-۵ - بررسی تأثیر درصد وزنی و الگوی توزیع تقویت‌کننده‌ها بر دمای کمانش بحرانی..... ۶۶

۴-۶ - تأثیر نسبت ابعادی ورق بر دمای کمانش بحرانی ۶۷

۴-۷ - مقایسه الگوی توزیع تقویت‌کننده‌ها بر مسیر تعادل پس‌کمانش حرارتی ۶۹

۴-۸ - تأثیر درصد وزنی تقویت‌کننده‌ها بر مسیر تعادل پس‌کمانش حرارتی ۷۰

۴-۹ - تأثیر نسبت‌های ابعادی و نسبت طول به ضخامت نانوصفحه‌های گرافن تقویت‌کننده بر مسیر

تعادل پس‌کمانش ۷۲

۴-۱۰ - تأثیر شرایط مرزی بر مسیر تعادل پس‌کمانش حرارتی ۷۷

۴-۱۱ - اثر تغییرات درصد وزنی تقویت‌کننده‌ها بر بار کمانش بحرانی ۷۷

۴-۱۲ - بررسی تأثیر نسبت ابعادی ورق‌ها بر بار کمانش بحرانی مکانیکی ۷۹

۴-۱۳ - تأثیر نسبت‌های ابعادی و نسبت طول به ضخامت نانوصفحه‌های گرافن تقویت‌کننده بر بار

کمانش بحرانی مکانیکی بی‌بعد ۸۰

۴-۱۴ - مقایسه الگوی توزیع تقویت‌کننده‌ها بر مسیر تعادل پس‌کمانش مکانیکی ۸۱

۴-۱۵ - اثر افزایش درصد وزنی تقویت‌کننده‌ها بر مسیر تعادل پس‌کمانش مکانیکی ۸۲

۴-۱۶ - تأثیر نسبت طول به ضخامت نانوصفحه‌های گرافن تقویت‌کننده بر مسیر تعادل پس‌کمانش

مکانیکی ۸۳

۴-۱۷ - بررسی تغییرات دمای بحرانی کمانش در برابر نیروهای درون‌صفحه‌ای ۸۴

فصل ۵: نتیجه گیری و پیشنهادها ۸۵

۵-۱ - مقدمه ۸۶

۵-۲ - نتیجه گیری ۸۶

۵-۳ - پیشنهادها ۸۷

پیوست ۸۸

مراجع ۹۳

فهرست جدول‌ها

جدول ۳-۱- توابع کسری حجمی نانوصفحه‌های گرافن برای انواع الگوهای توزیع تقویت‌کننده.....	۲۴
جدول ۳-۲- ابعاد در نظر گرفته شده برای نانوصفحه‌های گرافن.....	۲۶
جدول ۳-۳- خواص نانوصفحه‌های گرافن در نظر گرفته شده [۱۳].....	۲۹
جدول ۳-۴- خواص پلیمر در نظر گرفته شده [۴۶].....	۲۹
جدول ۴-۱- نتایج همگرایی دما (کلوین) برای کمانش و پس‌کمانش ورق مربعی مدرج تابعی با تعداد نقاط گرهی متفاوت ($a/h = 25, W_{GPL} = 0.3\%, SSSS$).....	۶۲
جدول ۴-۲- نتایج همگرایی دما (کلوین) برای کمانش و پس‌کمانش ورق مربعی مدرج تابعی با تعداد لایه‌های متفاوت ($a/h = 25, W_{GPL} = 0.3\%, SSSS$).....	۶۳
جدول ۴-۳- مقایسه نتایج پارامتر دمای بحرانی برای ورق همسانگرد ($a/b = 1$).....	۶۴
جدول ۴-۴- خواص در نظر گرفته شده برای ورق همسانگرد [۲۷].....	۶۴
جدول ۴-۵- خواص نیکل در نظر گرفته [۲۴].....	۶۵
جدول ۴-۶- مقایسه دمای کمانش بحرانی ورق‌های مدرج تابعی با شرایط مرزی ساده و کسر وزنی تقویت‌کننده ۰/۳ درصد.....	۶۹

فهرست شکل‌ها

- شکل ۱-۱- طبقه‌بندی کامپوزیت‌ها بر اساس نوع تقویت‌کننده [۴]..... ۳
- شکل ۲-۱- ساختار بلوری کریستال گرافیت [۸]..... ۵
- شکل ۳-۱- کامپوزیت تقویت شده (الف) مدرج تابعی (ب) لایه‌ای [۱۵]..... ۸
- شکل ۴-۱- (الف) تعادل پایدار (ب) تعادل ناپایدار (ج) تعادل خنثی..... ۱۰
- شکل ۵-۱- نقطه‌ی حدی در مسیر تعادلی فتر بلیول [۱۹]..... ۱۱
- شکل ۶-۱- نقطه‌ی انشعاب در مسیر تعادلی پنل استوانه‌ای [۱۹]..... ۱۱
- شکل ۷-۱- (الف) مسیر پس‌کمانش پایدار (ب) مسیر پس‌کمانش ناپایدار (ج) مسیر پس‌کمانش پایدار و مسیر خطی ناپایدار [۲۱]..... ۱۲
- شکل ۸-۱- هندسه لبه‌ی صفحه قبل و بعد از تغییر شکل با تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول [۲۲]..... ۱۴
- شکل ۱-۳- ابعاد ورق نانوکامپوزیتی چندلایه در نظر گرفته شده..... ۲۲
- شکل ۲-۳- نحوه توزیع لایه‌های ورق (الف) توزیع لایه‌ای O (ب) توزیع لایه‌ای U (ج) توزیع لایه‌ای X..... ۲۳
- شکل ۳-۳- ورق تقویت شده با تقویت‌کننده‌هایی با سطح مقطع مستطیلی [۴۴]..... ۲۵
- شکل ۴-۳- (الف) نانوصفحه‌های گرافن روی شبکه‌های میکروسکوپ الکترونی (ب) ساختار لایه‌ای گرافن [۱۳]..... ۲۸
- شکل ۵-۳- فرمول شیمیایی دی‌گلیسیدیل اتر بیسفنول ای [۴۶]..... ۲۹
- شکل ۶-۳- منته‌های نیرویی وارد بر المان ورق تغییر شکل یافته..... ۳۲
- شکل ۷-۳- منته‌های گشتاور خمشی وارد بر المان ورق تغییر شکل یافته..... ۳۳
- شکل ۸-۳- توزیع گرهی در دامنه یک بعدی..... ۴۲
- شکل ۹-۳- شبکه‌بندی گرهی برای دامنه‌ی دوبعدی..... ۴۴
- شکل ۱۰-۳- نحوه شماره‌گذاری شبکه‌بندی گرهی برای ورق در نظر گرفته شده..... ۴۹
- شکل ۱-۴- مقایسه مسیر تعادل پس‌کمانش برای ورق همسانگرد تحت تغییر دمای یکنواخت و شرایط مرزی ساده..... ۶۵
- شکل ۲-۴- مقایسه مسیر تعادل پس‌کمانش برای ورق نیکل تحت تغییر دمای یکنواخت و شرایط مرزی گیردار..... ۶۶
- شکل ۳-۴- مقایسه مقادیر دمای کمانش بحرانی در مقابل تغییرات درصد وزنی تقویت‌کننده‌ها برای ورق‌های مربعی مدرج تابعی با آرایش تقویت‌کننده متفاوت و شرایط مرزی چهار طرف ساده..... ۶۷
- شکل ۴-۴- مقادیر دمای کمانش بحرانی در مقابل تغییرات نسبت طول به ضخامت برای ورق مربعی مدرج تابعی تقویت شده به شکل X با شرایط مرزی متفاوت..... ۶۸

شکل ۴-۵- مسیر تعادل پس‌کمانش حرارتی برای ورق مربعی مدرج تابعی با شرایط مرزی چهار طرف ساده و آرایش تقویت‌کننده متفاوت با کسر وزنی تقویت‌کننده ۰/۳ درصد ۷۰

شکل ۴-۶- مقایسه اثر تغییرات درصد وزنی تقویت‌کننده‌ها بر مسیر تعادل پس‌کمانش ورق‌های چندلایه مدرج تابعی الف) آرایش تقویت‌کننده‌ها به شکل X ب) آرایش تقویت‌کننده‌ها به شکل U ج) آرایش تقویت‌کننده‌ها به شکل O ۷۲

شکل ۴-۷- تأثیر تغییرات نسبت‌های طول به ضخامت نانوصفحه‌های گرافن تقویت‌کننده بر مسیر تعادل پس‌کمانش ورق‌های چندلایه مدرج تابعی الف) آرایش تقویت‌کننده‌ها به شکل X ب) آرایش تقویت‌کننده‌ها به شکل U ج) آرایش تقویت‌کننده‌ها به شکل O ۷۴

شکل ۴-۸- اثر تغییرات نسبت‌های ابعادی نانوصفحه‌های گرافن تقویت‌کننده بر مسیر تعادل پس‌کمانش ورق‌های چندلایه مدرج تابعی الف) آرایش تقویت‌کننده‌ها به شکل X ب) آرایش تقویت‌کننده‌ها به شکل U ج) آرایش تقویت‌کننده‌ها به شکل O ۷۶

شکل ۴-۹- مسیر تعادل پس‌کمانش حرارتی برای ورق‌های مربعی مدرج تابعی با شرایط مرزی متفاوت. ۷۷

شکل ۴-۱۰- مقایسه مقادیر بار کمانش بحرانی بی‌بعد در مقابل تغییرات درصد وزنی تقویت‌کننده‌ها برای ورق‌های مربعی مدرج تابعی با آرایش تقویت‌کننده متفاوت و شرایط مرزی چهار طرف ساده .. ۷۸

شکل ۴-۱۱- مقادیر بار کمانش بحرانی بی‌بعد در مقابل تغییرات نسبت طول به ضخامت برای ورق مربعی مدرج تابعی با آرایش لایه‌ای متفاوت ۷۹

شکل ۴-۱۲- مقادیر بار کمانش بحرانی بی‌بعد در مقابل تغییرات نسبت طول به ضخامت نانوصفحه‌های گرافن ۸۰

شکل ۴-۱۳- مسیر تعادل پس‌کمانش برای مکانیکی ورق مربعی مدرج تابعی با شرایط مرزی چهار طرف ساده و آرایش تقویت‌کننده متفاوت و کسر وزنی تقویت‌کننده ۰/۷ درصد ۸۱

شکل ۴-۱۴- اثر تغییرات درصد وزنی تقویت‌کننده‌ها بر مسیر تعادل پس‌کمانش مکانیکی ورق‌های چندلایه مدرج تابعی با آرایش تقویت‌کننده‌ها به شکل X ۸۲

شکل ۴-۱۵- اثر تغییرات نسبت‌های طول به ضخامت نانوصفحه‌های گرافن تقویت‌کننده بر مسیر تعادل پس‌کمانش مکانیکی ورق‌های چندلایه مدرج تابعی با آرایش تقویت‌کننده‌ها به شکل X ۸۳

شکل ۴-۱۶- تغییرات دمای بحرانی کمانش در برابر نیروهای درون‌صفحه‌ای برای ورق مدرج تابعی با الگوی توزیع تقویت‌کننده متفاوت ۸۴

فصل ۱: مقدمه

۱-۱ - مقدمه

در این فصل ابتدا، به بیان تعریف اولیه کامپوزیت‌ها و انواع آن‌ها پرداخته شده است. سپس، به معرفی گرافن و روش‌های متداول ساخت آن پرداخته شده است. در ادامه، مفاهیم پایداری، کمانش و انواع آن در سازه‌ها شرح داده شده است. در نهایت، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و میدان جابه‌جایی حاصل از آن تعریف شده است.

۱-۲ - کامپوزیت‌ها

کامپوزیت‌ها یا مواد مرکب حاصل ترکیب دو یا چند ماده (فاز) مختلف هستند، که در آن هر یک از اجزا با خواصی متفاوت بیش از پنج درصد ماده مرکب را تشکیل داده است، و خواص ماده مرکب حاصل به‌طور محسوس متفاوت از اجزای سازنده آن است [۱]. از دیدگاه ماکروسکوپی، مواد کامپوزیتی یک مخلوط فیزیکی از دو یا چند ماده‌ی مختلف است که اجزاء آن مشخصات فیزیکی و شیمیایی خود را حفظ کرده، و مرز مشخصی با یکدیگر دارند.

استفاده از کامپوزیت‌ها به زمان‌های دور باز می‌گردد، به‌عنوان مثال خشت‌های کاه‌گلی در زمان بنی‌اسرائیل یا زره و شمشیرهای ساخته شده از لایه‌های فلزی متفاوت در قرون وسطی نمونه‌هایی از کاربرد کامپوزیت‌ها در گذشته است. امروزه نیز کامپوزیت‌ها با توجه به بهبود خصوصیت‌هایی هم‌چون وزن، مقاومت مکانیکی، سفتی، مقاومت به خوردگی، رسانایی حرارتی و ... کاربردهای گسترده‌ای در صنایع مختلف دارند [۲].

مواد مرکب از دو قسمت اصلی زمینه (ماتریس)^۱ و تقویت‌کننده^۲ (پرکننده^۳) تشکیل می‌شوند. فاز پیوسته را عموماً به‌عنوان زمینه، و فاز توزیع شده ناپیوسته را که توسط زمینه احاطه شده است، تقویت‌کننده می‌نامند. زمینه به‌طور معمول دارای چگالی، سفتی و استحکام کمتری نسبت به تقویت‌کننده است، و عموماً از جنس کربن، سرامیک، شیشه، فلز و پلیمری است. تقویت‌کننده‌ها برای استحکام بخشیدن به ماده مرکب اضافه می‌شوند، و معمولاً از جنس گرافیت، شیشه و کولار^۴ هستند، اما تقویت‌کننده‌هایی از جنس آلومینیوم، سیلیکون کاربید، سیلیکون نیتريد و تیتانیوم نیز وجود دارد. همچنین، تقویت‌کننده‌ها شکل‌های گوناگونی دارند و می‌توانند به‌صورت ذره‌ای، الیاف و صفحه‌ای باشند.

^۱. Matrix

^۲. Reinforcement

^۳. Filler

^۴. Kevlar

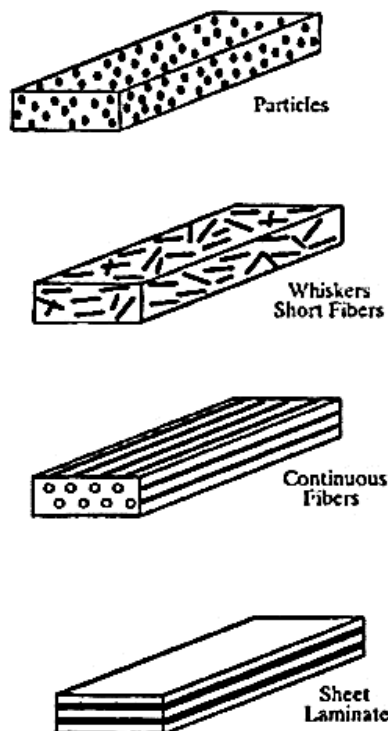
۱-۲-۱ - انواع کامپوزیت

تا به امروز، تقسیم‌بندی‌های مختلفی برای کامپوزیت‌ها ارائه شده است. کامپوزیت‌ها بر اساس نوع تقویت‌کننده‌شان به سه گروه تقسیم‌بندی می‌شوند. تصویر این کامپوزیت‌ها در شکل ۱-۱ نشان داده شده است.

الف) کامپوزیت‌های تقویت شده با ذرات^۱: ذرات تقویت‌کننده در این کامپوزیت‌ها با شکل و اندازه‌های متفاوت در ماتریس پخش شده‌اند. بتن و نئوپان از نمونه‌های معروف این کامپوزیت‌ها هستند.

ب) کامپوزیت‌های تقویت شده با الیاف: تقویت‌کننده‌ها در این دسته از کامپوزیت‌ها به صورت رشته‌ای است. تقویت‌کننده‌های رشته‌ای به دو دسته الیاف کوتاه^۲ و الیاف بلند^۳ تقسیم می‌شوند. الیاف بلند قطر حدودی بین ۰/۰۲ تا ۳ میکرومتر و نسبت طول به قطر بالایی دارند. الیاف کوتاه قطر حدودی بین ۵ تا ۱۰۰ دارند.

ج) کامپوزیت‌های تقویت شده با صفحه: در این کامپوزیت‌ها، تقویت‌کننده‌ها به صورت ورق‌های مسطح در ماتریس پراکنده شده‌اند. به عنوان مثال: کامپوزیت‌های زمینه پلیمری تقویت شده با ورق‌های فلزی هادی جریان الکتریسیته و حرارت هستند، در حالی که، کامپوزیت‌های زمینه پلیمری تقویت شده با ورق‌های شیشه‌ای مقاوم در برابر حرارت و نارسانا الکتریکی هستند [۳].



شکل ۱-۱ - طبقه‌بندی کامپوزیت‌ها بر اساس نوع تقویت‌کننده [۴].

^۱. Particles

^۲. Whiskers fibers

^۳. Continuous fibers

در تقسیم‌بندی دیگر، کامپوزیت‌ها بر اساس جنس ماده‌ی زمینه به سه گروه تقسیم می‌شوند:

الف) کامپوزیت‌های زمینه فلزی^۱

ب) کامپوزیت‌های زمینه سرامیکی^۲

ج) کامپوزیت‌های زمینه پلیمری^۳

در هر زمینه‌ای فاز تقویت‌کننده می‌تواند از جنس فلز، سرامیک یا پلیمر باشد [۵].

شایان ذکر است، در پژوهش حاضر از کامپوزیت‌های زمینه پلیمری از جنس دی‌گلیسیدیل اتر بیسفنول ای^۴ (DGEBA) استفاده شده است. DGEBA یک ترکیب آلی بی‌رنگ است، و به دلیل ویژگی‌های مناسبی همچون عایق الکتریکی، مقاومت بالا در محیط‌های اسیدی و بازی، پایداری بالا در محیط‌های حرارتی، چقرمگی و مقاومت در برابر آب و رطوبت کاربردهای وسیعی در حوزه‌های مختلف صنایع از جمله ساخت قالب سازی، عایق و پوشش، چسب و رنگ سازی و ... دارد.

۲-۲-۱ - نانوکامپوزیت‌ها

نانوکامپوزیت‌ها که ترکیبی از زمینه و تقویت‌کننده‌هایی است که حداقل یک بعد آن‌ها کمتر از ۱۰۰ نانومتر باشند. از آنجایی که ابعاد تقویت‌کننده‌ها در نانوکامپوزیت‌ها در مقیاس نانو هستند، برهم‌کنش‌های بین زمینه و تقویت‌کننده‌ها در مقایسه با برهم‌کنش‌های موجود در کامپوزیت‌های معمولی متفاوت هستند و به واسطه همین تفاوت‌ها، ویژگی‌های الکتریکی، مکانیکی و نوری و ... متفاوتی در نانوکامپوزیت‌ها شاهد هستیم [۶].

۳-۱ - گرافن

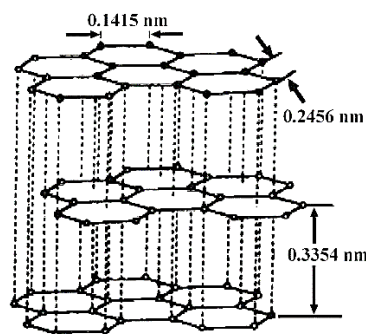
گرافن جدیدترین عضو خانواده‌ی مواد کربنی و گرافیتی چندبعدی است. گرافن ورق‌های دوبعدی از اتم‌های کربن در یک پیکربندی شش ضلعی (لانه‌زنبوری) است. صفحه‌های گرافن با کنار هم قرار گرفتن اتم‌های کربن تشکیل می‌شوند. ساختار بلوری گرافیت در شکل ۱-۲ نشان داده شده است. در یک صفحه گرافن، هر اتم کربن با سه اتم کربن دیگر پیوند دارد. این سه پیوند در یک صفحه قرار دارند و زوایای بین آن‌ها با یکدیگر مساوی و برابر ۱۲۰ درجه است. در این حالت اتم‌های کربن در وضعیتی قرار می‌گیرند که شبکه‌ای از شش ضلعی‌های منتظم را در حالت ایده‌آل ایجاد می‌کنند. طول پیوند کربن-کربن در گرافن حدود ۰/۱۴۲ نانومتر است [۷].

^۱. Metal matrix composite

^۲. Ceramic matrix composite

^۳. Polymer matrix composite

^۴. Diglycidyl ether of bisphenol A (DGEBA)



شکل ۱-۲- ساختار بلوری کریستال گرافیت [۸].

۱-۳-۱ - تاریخچه گرافن

در گذشته اصطلاح گرافن اغلب برای اشاره به انواع کامپوزیت‌ها استفاده می‌شده است. تعریف دقیق گرافن ابتدا در سال ۱۹۸۶ توسط بوهم^۱ و همکارانش، از ترکیب کلمه گرافیت و یک پسوند in^2 (نشانه وجود هیدروکربن با زنجیره باز) که به هیدروکربن‌های آروماتیک چند حلقه اشاره دارد، بیان شده است. حدود ۱۱ سال بعد، در سال ۱۹۹۷ اتحادیه بین‌المللی شیمی محض و کاربردی^۲ با انتشار تعریف گرافن به‌عنوان لایه‌ی مسطحی از اتم‌های کربن، گرافن به رسمیت شناخته شد. اما قضیه‌ای به نام مرمین واگنر^۴ در مکانیک آماری و نظریه‌ی میدان‌های کوانتومی وجود داشت که ساخت یک ماده‌ی دوبعدی را غیرممکن، ناپایدار و صرفاً یک ماده‌ی نظری می‌دانست؛ به همین دلیل، در طی سال‌ها با وجود این‌که این ماده توسط افرادی ساخته شده بود، همچنان ناشناخته باقی مانده بود.

در سال ۲۰۰۴ یک گروه از فیزیکدان‌های دانشگاه منچستر انگلستان به رهبری آندره گایم^۵ و کنستانتین نووسلوف^۶ با تغییر فرضیه‌ی بی‌ثباتی گرافن، نشان دادند که قضیه‌ی مرمین واگنر نمی‌تواند به‌طور کامل درست باشد. اما در نهایت، این دو دانشمند در سال ۲۰۱۰ موفق به ساخت گرافن دوبعدی شدند و جایزه نوبل فیزیک را از آن خود کردند. با کشف گرافن مطالعات بین‌المللی زیادی در زمینه‌ی گرافن‌ها انجام شده است، اما همچنان سنتز و تولید گرافن خالص در مقیاس بالا به‌عنوان یک چالش مهم مطرح است [۹].

^۱. Boehm

^۲. Ene

^۳. International union of pure and applied chemistry(IUPAC)

^۴. Mermin-Wagner

^۵. Andre geim

^۶. Konstantin novoselov

۱-۳-۲ - روش‌های ساخت گرافن

تا به امروزه روش‌های زیادی برای تولید انواع گرافن بیان شده است، و به‌منظور استفاده‌ی تجاری از گرافن‌ها این روش‌ها به‌سرعت در حال گسترش هستند. روش‌های تولید به‌طور کلی به دو دسته‌ی پایین‌به‌بالا و بالابه‌پایین تقسیم می‌شوند. در روش پایین‌به‌بالا مونومر مولکول‌های آلی را در کنار یکدیگر قرار می‌دهند و در روش بالابه‌پایین مواد گرافیتی و گرافنی را از مواد شیمیایی قوی مانند اسیدهای مخلوط جدا می‌کنند. در هر یک از این دو دسته روش‌های مختلفی برای تولید گرافن مطرح شده است، که هر کدام مزایا و معایب خاص خود را دارند. در ادامه، چندین روش متداول برای تولید گرافن به‌طور مختصر بیان شده است.

۱-۳-۲-۱ - لایه‌برداری مکانیکی^۱

این روش از جمله روش‌های بالابه‌پایین است، که برای اولین بار در سال ۲۰۰۴ توسط گیمل^۲ و همکارانش انجام شده است. در این روش لایه‌های گرافن با چندین مرحله لایه‌برداری از گرافیت به کمک چسب نواری به‌دست می‌آید. این روش آسان قابلیت تولید لایه‌های متنوع گرافن را دارد. نام دیگر این روش نوار اسکا تلندی یا روش پوست‌کنی است. همچنین، از الماس نیز برای برش لایه‌های نازک گرافن استفاده می‌شود. این روش نیازمند دقت بالا و تجربه‌ی کافی است در غیر این صورت ضخامت لایه‌های گرافن تولید شده زیاد خواهد بود [۱۰].

۱-۳-۲-۲ - روش رسوب‌دهی بخار شیمیایی^۳

روش رسوب‌دهی بخار شیمیایی یکی از روش‌های لایه‌نشانی شناخته شده جهت تولید لایه‌های نازک و نانوذرات است؛ به این صورت که در راکتور، گازهای واکنش‌دهنده از طریق لایه‌های مرزی نفوذ کرده و با سطح زیرپایه تماس پیدا می‌کنند و عملیات رسوب‌دهی انجام می‌شود. ابتدا برای تولید لایه‌های نازک گرافیت از هیدروکربن‌ها گازی بر روی سطح فلزات واسطه استفاده می‌شده است، در این روش مقادیر زیادی از کربن بر روی سطح رسوب کرده و بلورهای ضخیم گرافیت تشکیل می‌شده است. اما امروزه با بهبود این روش موفق به تولید گرافن‌های تک‌لایه و چندلایه شده‌اند [۱۱].

^۱. Mechanical exfoliation

^۲. Gime

^۳. Chemical vapor deposition (CVD)

۱-۳-۲-۳ - روش رشد هم‌بافته^۱

این روش در دسته روش‌های پایین به‌بالا قرار می‌گیرد و با تبخیر ترکیبات کربن با دیگر عناصر غیرکربنی انجام می‌شود. در این روش معمولاً بستر از جنس سیلیسیوم کاربید^۲ است، تا دمای ۱۰۰۰ درجه سانتی‌گراد تحت خلاء شدید حرارت داده می‌شود سپس، سیلیسیوم شروع به واجذب شدن از سطح می‌کند، و به تدریج غلظت کربن روی سطح افزایش می‌یابد و جزیره‌های گرافنی از اتم‌های کربن شروع به رشد می‌کنند. لایه‌های گرافن تولید شده با این روش مانند روش لایه‌برداری مکانیکی کیفیت بالایی دارند. کیفیت لایه‌ها در این روش به عواملی مانند: ضخامت، ابعاد و مقدار لایه‌های گرافن و کیفیت تولید وابسته است [۱۲].

۱-۳-۲-۴ - کاهش اکسید گرافن^۳

این روش قابلیت تولید انبوه گرافن به‌منظور استفاده در کامپوزیت‌ها را دارد. در این شیوه با اکسیداسیون گرافیت، ورق‌های اکسید گرافن از اکسید گرافیت استخراج می‌شود. اکسید گرافیت را در محیط اسیدی قرار داده می‌شود و ورق‌های اکسید گرافن لایه‌برداری می‌شود. فرآیند اکسایش، در سطح گرافن گروه‌های عاملی اکسیژن‌دار مانند: کربوکسیل^۴، اپوکسید^۵ و هیدروکسیل^۶ ایجاد می‌کند. گروه‌های عاملی اکسیژن‌دار اکسید گرافن را شدیداً آب‌دوست می‌کند و باعث می‌شود این ماده به راحتی در آب پخش شود و سوسپانسیون‌های آبی با ورق‌های اکسید گرافن تولید می‌کند. وجود گروه‌های عاملی اکسیژن‌دار در سطح اکسید گرافن خواص آن را متمایز از گرافن می‌کند، به همین منظور اکسید گرافن را با کاهنده‌هایی شیمیایی نظیر هیدرازین^۷ احیا می‌کنند تا به ساختار اصلی گرافن نزدیک‌تر شود. با استفاده از این روش ورق‌های گرافن بهبودیافته شیمیایی^۸ برای استفاده در کامپوزیت‌ها تولید می‌شود. عملیات حرارتی روش دیگری است که برای احیاء اکسید گرافن استفاده می‌شود، در این روش اکسید گرافن با سرعت ۲۰۰۰ درجه سانتی‌گراد بر دقیقه تا ۱۰۵۰ درجه سانتی‌گراد حرارت داده می‌شود [۱۳]. لازم به ذکر است، نانوصفحه‌های (پلیت‌لت) گرافن^۹ تقویت‌کننده استفاده شده در این پژوهش نیز با روش کاهش اکسید گرافن به کمک عملیات حرارتی تولید شده است. با روی هم قرار دادن چندین لایه ورق گرافن نانوصفحه‌های (پلیت‌لت) گرافن تشکیل می‌شود، و به همین علت ضخامت نانوصفحه‌های گرافن به‌طور قابل توجهی بزرگتر از یک ورق گرافن است.

^۱. Epitaxial growth

^۲. Silicon carbide (Sic)

^۳. Carbon oxide reduction

^۴. Carboxyl

^۵. Epoxide

^۶. Hydroxyl

^۷. Hydrazine

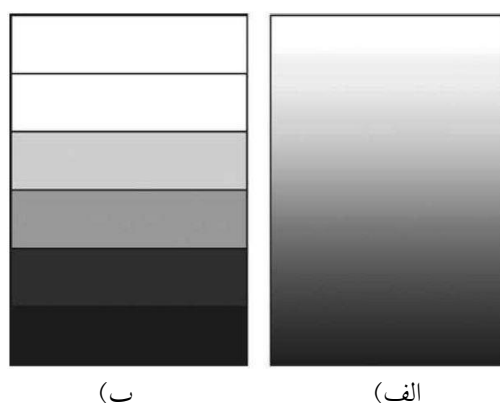
^۸. Chemically modified graphene (CMG)

^۹. Graphene platelets (GPL)

۴-۱ - مواد مدرج تابعی^۱

در سال‌های اخیر با توسعه‌ی صنایع استفاده از موتورهای پرقدرت الکتریکی، توربین‌ها، راکتورها و دیگر ماشین‌آلات صنعتی گسترش پیدا کرده است، به‌همین دلیل استفاده از موادی با مقاومت حرارتی و مکانیکی بالا یک نیاز ضروری به شمار می‌رود. مواد مدرج تابعی نسل جدیدی از مواد کامپوزیتی است که خواص مواد از یک سطح به سطح دیگر به‌طور پیوسته، طبق تابعی تعریف شده، تغییر می‌کند. در شکل ۳-۱ تغییرات پیوسته‌ی خواص کامپوزیت‌های مدرج تابعی نشان داده شده است. این تغییرات پیوسته و دائمی باعث کاهش تنش‌های حرارتی، تنش‌های پسماند و تمرکز تنش شده، و از مشکلاتی مانند لایه‌لایه شدن و ترک خوردگی جلوگیری می‌کند. در مواد مدرج تابعی خواص مکانیکی مورد نظر، نسبت به کامپوزیت‌های مرسوم، به‌طور قابل توجهی بهبود یافته است.

ساختار مواد مدرج تابعی از نظر میکروسکوپی ناهمگن است، و مواد سازنده‌ی آن عموماً مواد همسانگردی^۲ مثل فلزها، پلیمرها و سرامیک‌ها هستند. مواد مدرج تابعی به دلیل تغییرات پیوسته در ریزساختارهایشان از مواد کامپوزیتی معمول، متمایز می‌شوند [۱۴].



شکل ۳-۱ - کامپوزیت تقویت شده الف) مدرج تابعی ب) لایه‌ای [۱۵].

۱-۴-۱ - تاریخچه مواد مدرج تابعی

نیاز بشر برای یافتن موادی با ویژگی‌های مناسب‌تر نسبت به مواد خالص و مرکب موجود در صنایع، دانشمندان را به سمت تولید مواد مدرج تابعی هدایت نموده است. با بیان ایده‌ی اولیه پخش تابعی تقویت‌کننده‌ها در پلیمرها توسط شن^۳ و بور^۴ در سال ۱۹۷۲، پژوهش‌ها بر روی کامپوزیت‌های مدرج تابعی آغاز شد، و به‌دنبال آن در سال ۱۹۸۴ اولین کامپوزیت مدرج تابعی در آزمایشگاه ملی هوافضا

^۱. Functionally graded materials (FGMs)

^۲. Isotropic

^۳. Shen

^۴. Bever

ژاپن ساخته شد. پس از آن با توجه به، نیاز دنیا به توسعه‌ی صنایع هوایی این تحقیقات به صورت جدی ادامه پیدا کرد [۱۶، ۳].

۱-۴-۲ - کامپوزیت‌های مدرج تابعی تقویت شده با نانوصفحه‌های گرافن^۱

مواد پیشرفته‌ی کامپوزیتی را می‌توان با توجه به خواص نهایی مورد نیاز در ترکیب‌های متفاوتی تولید کرد. کامپوزیت‌های مدرج تابعی به دلیل خواص منحصر به فردی چون استحکام و سفتی بالا به سرعت و به طور گسترده در صنایع مختلف و سازه‌های فضایی، هواپیماها و تجهیزات پزشکی مورد استفاده قرار گرفته‌اند. الگوهای متفاوتی برای توزیع تقویت‌کننده‌ها در کامپوزیت‌های تقویت شده با نانوصفحه‌های گرافنی وجود دارد، از میان این الگوها می‌توان به الگوی توزیع تصادفی^۲ توزیع یکنواخت^۳ و توزیع مدرج تابعی^۴ اشاره کرد.

۱-۴-۳ - روش‌های ساخت مواد مدرج تابعی

نخستین مواد مدرج تابعی در ژاپن به روش رسوب‌دهی بخار شیمیایی و رسوب‌دهی بخار فیزیکی^۵ ساخته شدند. ساده‌ترین راه برای ساخت نانو کامپوزیت‌ها روش اختلاط^۶ یا فرز کردن^۷ معمولی است، اما روش متداول برای ساخت مواد مدرج تابعی متالوژی پودر^۸ است. روش‌های دیگری همچون پاشش حرارتی^۹، شکل‌دهی گالوانی^{۱۰} و سنتز احتراقی خود پیشرونده‌ی دما بالا^{۱۱} که در آن به طور هم‌زمان واکنش سنتز احتراقی و فشرده شدن مواد پودری خام تحت فشار هیدرواستاتیک انجام می‌شود، استفاده می‌شود. همچنین، از روش ریخته‌گری گریز از مرکز سرعت بالا^{۱۲} که در آن لایه‌ها با چگالی جرمی متفاوت، در جهت شعاعی شکل می‌گیرند، برای ساخت مواد مدرج تابعی استفاده می‌شود [۱۷، ۱۸].

^۱. Functionally graded graphene platelet reinforced composite (FG-GPLRC)

^۲. Random distribution

^۳. Uniform distribution (UD)

^۴. Functionally graded distribution

^۵. Physical vapor deposition (PVD)

^۶. Mixing

^۷. Milling

^۸. Powder metallurgy

^۹. Thermal spray

^{۱۰}. Galvano forming

^{۱۱}. Self-propagating high-temperature synthesis

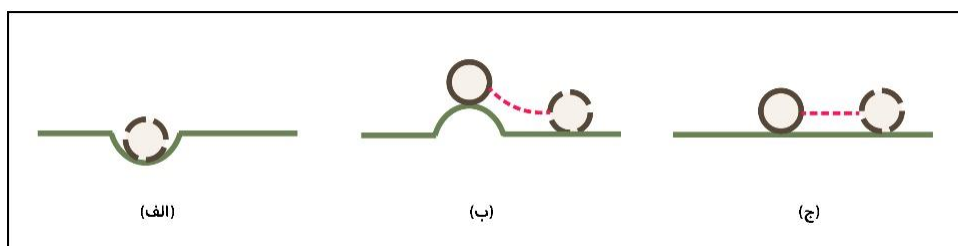
^{۱۲}. High-speed centrifugal casting techniques

۵-۱ - کمانش و مکانیک غیر خطی

از آن جایی که انتظار می‌رود، تغییر مکان در سازه‌ها متناسب با مقدار بارگذاری باشد، کمانش، افزایش نامتناسب تغییر مکان، در ازای افزایش کوچک بارگذاری تعریف می‌شود. کمانش سازه‌ها در حوزه‌ی مکانیک غیر خطی و به دو صورت فیزیکی یا هندسی است. اثر غیر خطی کمانش می‌تواند از طریق روابط تنش-کرنش یا با عبارت‌های بیان کننده‌ی تأثیر چرخش‌های اجزا سازه‌ای بر رفتار سازه، وارد تئوری مسئله شود. با فرض آن که، تنش‌ها و کرنش‌ها در روابط موجود از قانون هوک^۱ پیروی می‌کنند، عامل غیر خطی کمانش به‌طور خالص هندسی است [۱۹].

۱-۵-۱ - مفهوم پایداری

سازه‌ها زمانی پایدار هستند، که تحت تنش‌های فشاری ناشی از بارگذاری (حرارتی یا مکانیکی)، موقعیت خود را حفظ کرده و حالت خود را از دست ندهد. همچنین، در اثر افزایش مقدار کوچکی از تنش یا بار وارده همچنان تعادل خود را حفظ کرده یا به حالت اولیه تعادل خود باز می‌گردند. در این حالت سطح انرژی پتانسیل حداقل است به عبارت دیگر به ازای هر تغییر مکان به اندازه کافی کوچک، تغییر انرژی پتانسیل کل مثبت است. نقطه‌ی مقابل این تعریف، حالت تعادل ناپایدار است که با اعمال تغییر کوچکی در تنش‌ها یا نیروهای اعمالی، سازه دچار انحراف می‌شود و بیشترین سطح انرژی پتانسیل را دارا است. حالت سوم تعادل خنثی است، در این شرایط سطح انرژی پتانسیل ثابت است و با جابه‌جایی تغییری نمی‌کند [۲۰]. تفاوت تعادل پایدار، ناپایدار و خنثی در شکل ۴-۱ نشان داده شده است.



شکل ۴-۱ (الف) تعادل پایدار (ب) تعادل ناپایدار (ج) تعادل خنثی

۱-۵-۱-۱ - انواع ناپایداری و کمانش سازه‌ها

منظور از مسیر تعادل^۲، منحنی بارگذاری-تغییر مکان است. مسیر تعادلی حاصل از اولین تغییرات شکل سازه در برابر بار، مسیر تعادل پایه یا مسیر تعادل اولیه^۳ است، و مسیر پیش از کمانش را نشان می‌دهد.

^۱. Hook's law

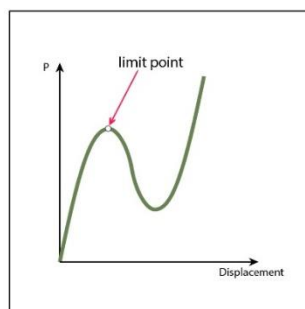
^۲. Equilibrium paths

^۳. Primary equilibrium path

این مسیر می‌تواند خطی یا غیرخطی باشد. همچنین، به باری که باعث تغییر شکل در این مسیر می‌شود، بار کمانش بحرانی گفته می‌شود.

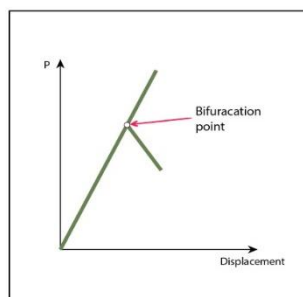
بار کمانش موجب دو نوع تغییر در مسیر تعادل می‌شود:

حالت اول: زمانی که مسیر خطی یا غیرخطی تعادل به حد نهایی بار (بار در آن نقطه به‌طور نسبی ماکزیمم است) می‌رسد، در این نقطه شیب منحنی صفر می‌شود، و یک وضعیت تعادل را نشان می‌دهد. به این حالت نقطه حدی^۱ گفته می‌شود. در شکل ۵-۱ نقطه حدی در مسیر تعادلی فنر بلیول^۲ نشان داده شده است.



شکل ۵-۱- نقطه‌ی حدی در مسیر تعادلی فنر بلیول [۱۹].

حالت دوم: مسیر تعادل پس از رسیدن به نقطه‌ای خاص در مسیر دیگری حرکت می‌کند، و مسیر تعادل اولیه، مسیر ثانویه^۳ را قطع می‌کند، به این نقطه، نقطه‌ی انشعاب^۴ گفته می‌شود. نقطه‌ی انشعاب در مسیر تعادلی پنل استوانه‌ای در شکل ۶-۱ نشان داده شده است.



شکل ۶-۱- نقطه‌ی انشعاب در مسیر تعادلی پنل استوانه‌ای [۱۹].

نقاط حدی و انشعاب، نقاط بحرانی گفته می‌شود. کمانش زمانی رخ می‌دهد که سیستم سازه‌ای پس از اعمال بار و تغییر شکل قادر به برگشتن به حالت اولیه نباشد. پس از عبور از نقطه بحرانی سازه می‌تواند پایدار یا ناپایدار باشد. این رفتار پس از کمانش سازه، پس‌کمانش خوانده می‌شود. برخی از سازه‌ها

^۱. Limit point

^۲. Belleville

^۳. Secondary path

^۴. Bifurcation point

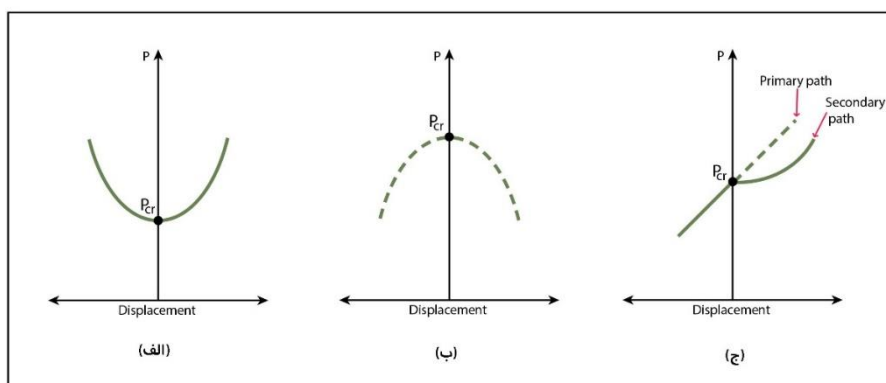
بلافاصله پس از حالت بحرانی دچار ناپایداری می‌شوند. اما سازه‌هایی همچون پوسته‌ها که پس از کمانش همچنان توانایی تحمل بار را دارند، پایدار باقی می‌مانند.

کویتر^۱ در سال ۱۹۴۵ رفتار پس‌کمانشی سازه‌ها را مورد مطالعه قرار داده است، و مسیر پس‌کمانشی آن‌ها را مطابق با شکل ۷-۱ به سه دسته تقسیم کرده است.

(الف) پس‌کمانش پایدار (پایداری متقارن در نقطه‌ی انشعاب): مماس بر مسیر تعادل در نقطه‌ی شکست افقی است. سازه با رسیدن مقدار بار به نقطه‌ی انشعاب کمانش می‌کند، اما سازه پس از نقطه‌ی بحرانی همچنان پایدار است و می‌تواند بارهای بیشتری از بار بحرانی را تحمل کند. سازه در این حالت مسیر پس‌کمانش را طی می‌کند. این رفتار عموماً در ورق‌ها و پوسته‌ها دیده می‌شود.

(ب) پس‌کمانش ناپایدار (ناپایداری متقارن در نقطه‌ی انشعاب): مماس بر مسیر تعادل در نقطه‌ی شکست افقی است؛ اما مسیر پس‌کمانش سازه ناپایدار است، و نمی‌تواند باری بیشتر از بار بحرانی را تحمل کند. این رفتار معمولاً در ستون‌ها مشاهده می‌گردد.

(ج) کمانش کلاسیک^۲ (نقطه‌ی انشعاب نامتقارن): مسیر تعادل نامتقارن است و مماس بر مسیر تعادل در نقطه‌ی انشعاب افقی نیست. مسیر اولیه‌ی تغییر شکل تا نقطه‌ی انشعاب به‌طور خطی است و پس از آن مسیر اولیه در حالت ناپایدار ادامه پیدا می‌کند؛ اما سازه ممکن است پس از نقطه‌ی انشعاب وارد مسیر (ثانویه) پایدار پس‌کمانش شود. مسیر تعادل پس‌کمانش، پایداری یا ناپایداری سازه به هندسه و نوع بارگذاری سازه وابسته است. این رفتار عمدتاً در قاب‌ها مشاهده می‌شود [۲۱].



شکل ۷-۱- الف) مسیر پس‌کمانش پایدار (ب) مسیر پس‌کمانش ناپایدار (ج) مسیر پس‌کمانش پایدار و مسیر خطی ناپایدار [۲۱].

¹. Koiter

². Classical buckling

۱-۶- تئوری تغییر شکل برشی

ورق‌ها سازه‌های خمشی هستند که ضخامت آن‌ها در مقایسه با سایر ابعاد بسیار کوچکتر است. ورق‌ها سازه‌های مسطح هستند و می‌توان آن‌ها را یک تیر دوبعدی فرض کرد. در تحلیل ورق‌ها، ضخامت ورق با یک صفحه موازی فرضی به نام صفحه‌ی میانی به دو نیمه‌ی مساوی تقسیم می‌شود. ضخامت ورق در جهت عمود بر صفحه‌ی میانی اندازه‌گیری می‌شود. ورق‌ها را می‌توان به سه دسته‌ی: الف) ورق‌های نازک با خیز کوچک^۱، ب) ورق‌های نازک با خیز بزرگ^۲ و ج) ورق‌های ضخیم^۳ تقسیم نمود. اگر نسبت ضخامت به کوچکترین بعد یک ورق کمتر از $\frac{1}{20}$ باشد، ورق نازک است.

در فرمول‌بندی ورق‌ها اغلب از سه تئوری الف) تئوری کلاسیک ورق‌ها^۴، ب) تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول^۵ و ج) تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم^۶ استفاده می‌شود.

۱-۶-۱- تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول

در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول مقاطع مستوی عمود بر صفحه‌ی میانی پس از بارگذاری و تغییر شکل مستوی باقی می‌مانند، اما الزاماً عمود نیستند، به تعبیری دیگر، در تئوری تغییر شکل برشی (چرخش‌المان‌ها) در نظر گرفته می‌شود و فرض عمود بودن سطح مقطع بر صفحه‌ی میانی پس از تغییر شکل در نظر گرفته نمی‌شود؛ به همین دلیل کرنش‌های برشی در نظر گرفته می‌شود. از طرفی، خطوط عمود بر صفحه‌ی میانی تغییر طول نمی‌دهند و این امر موجب می‌شود که w تابعی از z نباشد. جابه‌جایی المانی از صفحه بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول در شکل ۱-۸ نشان داده شده است. با توجه به شرایط بالا، در حالت کلی میدان جابه‌جایی در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) + z \phi_x(x, y, t) \quad (1-1 \text{ الف})$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) + z \phi_y(x, y, t) \quad (1-1 \text{ ب})$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (1-1 \text{ ج})$$

u_0 ، v_0 و w_0 جابه‌جایی صفحه‌ی میانی و ϕ_x و ϕ_y چرخش صفحه‌ی میانی به ترتیب حول محور y و x نسبت به سطح مقطع عرضی است و به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

¹. Small deflection

². Large deflection

³. Thick plates

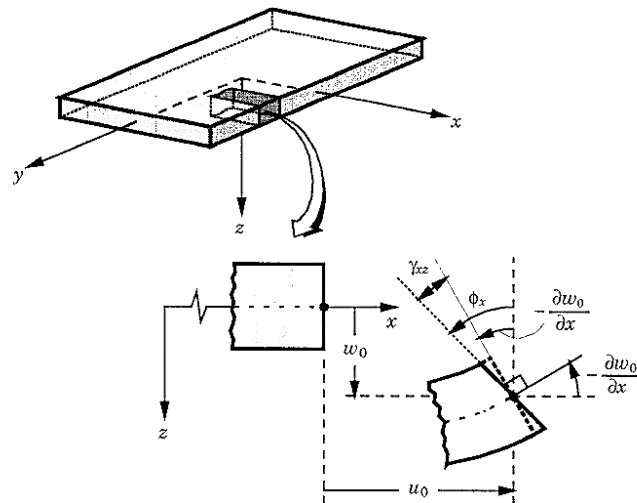
⁴. Classical plate theory (CPT)

⁵. First-order shear deformation theory (FSDT)

⁶. Third-order shear deformation theory (TSDT)

(۲-۱)

$$\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad \phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y}$$



شکل ۱-۸- هندسه لبه‌ی صفحه قبل و بعد از تغییر شکل با تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول [۲۲].

لازم به ذکر است، در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول ϵ_x ، ϵ_y و γ_{xy} در راستای ضخامت به صورت خطی تغییر می‌کنند، و γ_{xz} و γ_{yz} ثابت فرض شده است. به دنبال این فرض، تنش‌های برشی عرضی نیز ثابت خواهند بود، در حالی تغییر تنش برشی عرضی در راستای ضخامت حداقل درجه دو است. در نتیجه، این تقریب خیلی بزرگی نسبت به میدان تنش واقعی است. این تفاوت بین تنش‌های واقعی و تنش‌های مفروض در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول هنگام محاسبه نیروی برشی عرضی، معمولاً با ضرب یک پارامتر به نام ضریب تصحیح برشی^۱، اصلاح می‌گردد. ضریب تصحیح برشی به شرایط مرزی، خواص مواد و نوع بارگذاری بستگی دارد [۲۲].

^۱. Shear correction factor

فصل ۲ : مروری بر پژوهش‌های پیشین

۱-۲ - مقدمه

در دهه‌های اخیر مطالعات گسترده‌ای روی رفتار کمانشی ورق‌های کامپوزیت مدرج تابعی و بررسی پایداری حرارتی و مکانیکی آن‌ها انجام شده است. در این فصل خلاصه‌ای از مطالعات برگزیده در زمینه‌ی کمانش ورق‌ها بیان شده است و نتایج به‌دست آمده از این مطالعات به‌منظور مقایسه با نتایج پژوهش حاضر بررسی شده است.

۲-۲ - مروری بر پژوهش‌های انجام شده

در سال ۲۰۰۴ کمانش حرارتی سه‌بعدی پوسته‌ها و ورق‌های نازک ساخته شده با مواد مدرج تابعی تحت شرایط مرزی گیردار^۱، توسط نا^۲ و کیم^۳ [۲۳]، بررسی شده است. در این تحلیل المان محدود^۴، با در نظر گرفتن ۱۸ گره، پایداری حرارتی ورق‌ها مطالعه شده است. خواص مواد وابسته به دما بوده است و در راستای ضخامت به‌صورت توانی تغییر می‌کند. تغییرات دما به‌صورت یکنواخت، خطی و سینوسی در راستای ضخامت در نظر گرفته شده است. در نتایج نشان داده شده است، با افزایش ثابت کسر حجمی دمای کمانش بحرانی افزایش یافته است. همچنین، با افزایش نسبت طول به ضخامت و کاهش نسبت ابعادی دمای کمانش بحرانی کاهش یافته است. از طرفی، دمای کمانش بحرانی برای افزایش دما به‌صورت سینوسی به‌ترتیب بالاتر از افزایش دما به‌صورت خطی و یکنواخت قرار گرفته است. آن‌ها [۲۴] همچنین، در پژوهش دیگری به‌طور مشابه رفتار کمانش و پس‌کمانش حرارتی ورق‌های مدرج تابعی از جنس $Al_2O_3 - Ni$ را با شرایط مرزی گیردار بررسی کرده‌اند.

رفتار پس‌کمانشی ورق‌های مدرج تابعی مستطیلی تحت تغییرات حرارت یکنواخت، نیروهای درون‌صفحه‌ای و ولتاژ محرک ثابت را لوو^۵ و همکارانش [۲۵]، بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا^۶ مطالعه کرده‌اند. معادلات دیفرانسیل غیرخطی با مشتقات جزئی حاکم بر مسئله با استفاده از روش نیمه تحلیلی دیفرانسیل کوادریچر^۷ مبتنی بر الگوریتم بازگشتی^۸ حل شده است. نتایج نشان می‌دهد کمانش دو شاخه تنها در شرایط مرزی کاملاً گیردار به دلیل گشتاورهایی که در تکیه‌گاه‌ها ایجاد می‌شود رخ می‌دهد.

گاناپاتی^۹ و پراکاش^{۱۰} [۲۶]، کمانش حرارتی ورق‌های مورب مدرج تابعی را به کمک تئوری مرتبه

1. Clamped

2. Na

3. Kim

4. Finite element analysis

5. Leiw

6. Higher order shear deformation theory

7. Differential quadrature

8. Iteration algorithm

9. Ganapathi

10. Prakash

اول برشی و روش المان محدود با شرایط مرزی ساده مورد مطالعه قرار داده‌اند. خواص مکانیکی به کمک رابطه توانی^۱ تعیین شده است و تغییرات دما به صورت خطی و غیرخطی در راستای ضخامت در نظر گرفته شده است. ورق مدرج تابعی از جنس آلومینیوم و آلومینا^۲ است، و در راستای ضخامت از فلز خالص به سرامیک خالص به صورت تابعی تغییر می‌کند. در این تحقیق، تأثیر نسبت ابعادی، ثابت ناهمگنی و زاویه انحراف ورق بر دمای کمانش بحرانی بررسی شده است. مشاهده شده است، با افزایش زاویه انحراف دمای کمانش بحرانی افزایش یافته است. تغییرات دمای کمانش بحرانی برای ورق‌های ضخیم بسیار بیشتر از ورق‌های نازک است. تغییرات دمای کمانش بحرانی برای ثابت‌های ناهمگنی بالاتر از ۲ در ورق‌های نازک و ضخیم با نسبت‌های ابعادی و زوایای انحرافی متفاوت ناچیز است.

کمانش مکانیکی و حرارتی ورق‌های مدرج تابعی سرامیکی- فلزی توسط ژائو و همکارانش [۲۷]، با استفاده از روش بدون المان ریتز^۳ مطالعه شده است. ورق‌ها با گشودگی دایروی و مربعی تحت شرایط مرزی ساده و گیردار در نظر گرفته شده است، و تأثیر هندسه و اندازه گشودگی بر پارامترهای بار کمانش بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهد، تغییرات ثابت ناهمگنی و اندازه گشودگی تأثیر قابل توجهی بر بار و مد کمانش ورق‌ها دارد.

که^۴ و همکارانش [۲۸]، ارتعاشات آزاد، کمانش و خمش میکروورق‌های حلقوی ساخته شده با مواد مدرج تابعی به کمک تئوری تنش کوپلی اصلاح شده^۵ و تئوری صفحه‌ی میندلین^۶ مورد مطالعه قرار داده‌اند. خواص مواد در راستای ضخامت مطابق با رابطه موری-تاکانا^۷ متغیر فرض شده است. معادلات حاکم و شرایط مرزی به کمک اصل همیلتون^۸ استخراج شده است و برای حل آن‌ها از روش دیفرانسیل کوادریچر استفاده شده است. تأثیر نسبت ضخامت به طول، ثابت ناهمگنی و نسبت شعاع داخلی به خارجی حلقه برای دو شرایط مرزی گیردار-گیردار و لولا-لولا^۹ بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهد، افزایش ثابت ناهمگنی منجر به کاهش فرکانس طبیعی و بار کمانش بحرانی شده است.

مطالعه‌ی کمانش و ارتعاشات آزاد تیرهای نانوکامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تک‌دیواره^{۱۰} روی بستر الاستیک^{۱۱} بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و به کمک روش دیفرانسیل کوادریچر عمومی^{۱۲} توسط یاس و صمدی [۲۹]، نشان داده است که، افزودن نانولوله‌های کربنی تقویت‌کننده با توزیع تابعی X در مقایسه با دیگر الگوهای توزیع نانولوله‌های کربنی، موجب افزایش فرکانس و بار کمانشی شده است. همچنین آن‌ها، به منظور پیش‌بینی مقاومت تیر در برابر خمش یا کمانش هندسه‌ی

¹. Power-law

². Alumina

³. Element-free Ritz method

⁴. Ke

⁵. The modified couple stress theory

⁶. Mindlin's plate theory

⁷. Mori-Tanaka

⁸. Hamilton's principle

⁹. Hinged-Hinged

¹⁰. Single-walled carbon nanotubes (SWCNTs)

¹¹. Elastic foundation

¹². Generalized differential quadrature method (GDQM)

سطح مقطع تیر کامپوزیتی را تحلیل کرده‌اند. با توجه به تشابه هندسی تیر تقویت شده با نانولوله‌های کربنی با توزیع تابعی تقویت‌کننده X و تیر I شکل، تیر با توزیع تابعی X نسبت به دیگر هندسه‌های تیر ممان اینرسی بالاتری دارد.

ژانگ^۱ و همکارانش [۳۰]، کمانش حرارتی و مکانیکی ورق‌های مدرج تابعی از جنس سرامیک-فلز را با روش بدون مش کریگینگ محلی^۲ بررسی کرده‌اند. در این پژوهش برای تعیین کرنش‌های برشی عرضی از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول استفاده شده است و خواص مواد در راستای ضخامت به‌صورت توانی تغییر می‌کنند. تأثیر ثابت ناهمگنی، شرایط مرزی، نسبت‌های ابعادی و نوع بارگذاری بر رفتار کمانشی ورق‌ها مورد بحث قرار گرفته است.

رفتار ارتعاشی و خمشی ورق‌های دوزنقه‌ای مدرج تابعی تقویت شده با نانوصفحه‌های گرافن به کمک روش المان محدود توسط ژائو^۳ و همکارانش [۳۱]، بررسی شده است. خواص مواد مؤثر با استفاده از مدل اصلاح شده هالپین-تسای^۴ و قانون اختلاط^۵ محاسبه شده است. نتایج نشان داده است، سفتی ورق با افزایش درصد کمی از نانوصفحه‌های گرافن تقویت‌کننده به میزان قابل توجهی افزایش یافته است، همچنین، در ورق‌هایی با درصد بیشتر نانوصفحه‌های گرافن در لایه‌های بالا و پایین این تأثیر بیشتر شده است.

نتایج شن و همکاران [۳۲]، برای کمانش و پس‌کمانش ورق‌های چندلایه تقویت شده با گرافن در محیط حرارتی و تحت فشار تک محوره بر بستر الاستیک نشان داده است، که توزیع مدرج تابعی تقویت‌کننده‌ها، افزایش دما، نسبت ابعادی، سفتی بستر و شرایط مرزی تأثیر قابل توجهی بر بار کمانش و مقاومت پس‌کمانشی این ورق‌ها دارد. همچنین، در مطالعه‌ای دیگر از این گروه [۳۳]، به تحلیل و مدل سازی پس‌کمانش حرارتی ورق‌های پلیمری چندلایه تقویت شده با گرافن بر بستر الاستیک و تحت تغییرات دما پرداخته شده است. خواص مواد وابسته به دما با یک مدل میکرومکانیکی^۶ و معادلات حاکم بر ورق به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا محاسبه شده است.

ملک‌زاده [۳۴]، به بررسی کمانش حرارتی ورق‌های چهارضلعی دلخواه مدرج تابعی با شرایط مرزی مختلف به کمک تئوری الاستیک سه‌بعدی^۷ پرداخته است. در این مقاله، خواص وابسته به دما در نظر گرفته شده است و در راستای ضخامت تغییر می‌کند. معادلات و شرایط مرزی حاکم بر ورق به کمک اصل کار مجازی^۸ و روش نقشه‌برداری هندسی^۹ به‌دست آمده است و به کمک روش دیفرانسیل کوادریچر حل شده است. اثر خواص مواد وابسته به دما، میدان دما، ثابت کسر حجمی، پارامترهای هندسی و شرایط مرزی بر کمانش بررسی شده است.

1. Zhang

2. Local Kriging meshless method

3. Zhao

4. Modified Halpin-Tsai micromechanics model

5. Rule of mixture

6. Micromechanical model

7. Three-dimensional (3D) elasticity theory

8. Principle of virtual work

9. Geometric mapping technique

در بررسی ناپایداری پارامتریک^۱ ورق‌های نانوکامپوزیتی مدرج تابعی تقویت شده با نانوصفحه‌های گرافن تحت نیروی درون‌صفحه‌ای تک محوره متناوب و افزایش دمای یکنواخت، توسط وو^۲ و همکاران [۳۵]، سه آرایش لایه‌ای برای تقویت‌کننده‌ها در نظر گرفته شده است. معادلات حاکم بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول استخراج شده است، و برای حل از روش دیفرانسیل کوادریچر همراه با روش بولوتین^۳ استفاده شده است. مشاهدات آن‌ها نشان داده است، ورق‌هایی با آرایش لایه‌ای تقویت‌کننده به صورت X سفتی بیشتری دارند. با افزایش دما و نیروهای درون‌صفحه‌ای فشاری، سفتی ورق کاهش یافته است و به دنبال آن بار بحرانی کم‌انحرف و فرکانس طبیعی کم شده است، در حالی که با افزایش نیروی درون‌صفحه‌ای کششی نتیجه معکوس است. افزایش کسر وزنی تقویت‌کننده‌ها فرکانس‌های طبیعی و بار کم‌انحرف بحرانی را افزایش داده است. آن‌ها [۳۶] همچنین، در پژوهشی دیگر کم‌انحرف و پس‌کم‌انحرف نانوتیرهای چندلایه مدرج تابعی تقویت شده با نانوصفحه‌های گرافن بر بستر الاستیک را به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و روش دیفرانسیل کوادریچر بررسی کرده‌اند. نتایج این مطالعه نشان داده است، بار کم‌انحرف بحرانی و مسیر پس‌کم‌انحرف برای نانوتیرهای تقویت شده با نانوصفحه‌های گرافنی با نسبت‌های ابعادی بزرگتر از ۴ و نسبت‌های طول به ضخامت بیشتر از ۱۰۰۰ تقریباً بدون تغییر باقی مانده است.

یانگ^۴ و همکارانش [۳۷]، به منظور مطالعه رفتار کم‌انحرف و ارتعاشات آزاد ورق‌های متخلخل مدرج تابعی تقویت شده با نانوصفحه‌های گرافن پژوهشی را ارائه کرده‌اند. آن‌ها دریافتند، کسر حجمی، ضریب تخلخل و پارامترهای هندسی نانوصفحه‌های گرافن نقش مؤثری در کم‌انحرف و ارتعاشات آزاد ورق‌های مدرج تابعی دارد.

وانگ^۵ و لی^۶ [۳۸]، به مطالعه کم‌انحرف حرارتی ورق‌های ساندویچی^۷ مدرج تابعی با استفاده از روش اصلاح شده درون‌یابی نقطه محوری بدون‌مش^۸ پرداخته‌اند. در این پژوهش ورق‌ها با دو آرایش، لایه‌ی میانی مدرج تابعی و لایه‌های بالا و پایین همگن و بالعکس در نظر گرفته شده است. برای حل معادلات حاکم بر ورق از روش نیوتن-رافسون اصلاح شده^۹ استفاده شده است. اثر کسر حجمی، نسبت طول به ضخامت ورق، نسبت ابعادی و شرایط مرزی بر دمای کم‌انحرف بحرانی بررسی شده است.

نتایج تحقیقات تیم یانگ و وو [۳۹]، در بررسی تأثیر ابعاد و هندسه‌ی نانوصفحه‌های گرافنی بر پایداری دینامیکی تیرهای نانوکامپوزیتی چندلایه مدرج تابعی تقویت شده با نانوصفحه‌های گرافن نشان می‌دهد، برای نسبت‌های طول به ضخامت نانوصفحه‌های گرافنی بیشتر از ۱۰۰۰ تغییرات ناچیز است. همچنین مشاهدات آن‌ها نشان داده است، تغییرات درصد وزنی و الگوی توزیع نانوصفحه‌های گرافن

^۱. Parametric instability

^۲. Wu

^۳. Bolotin's method

^۴. Yang

^۵. Vuong

^۶. Lee

^۷. Sandwich plates

^۸. The improved radial point interpolation mesh-free method (RPIM)

^۹. Modified Newton-Raphson

تأثیر قابل توجهی بر کمانش حرارتی، ارتعاشات آزاد و ناپایداری دینامیکی تیرها دارد. پنگ^۱ و همکارانش [۴۰]، به کمک روش دیفرانسیل کوادریچر و کار معادل^۲ رفتار کمانشی ورق‌های نازک مستطیلی مدرج تابعی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تحت نیروهای جزئی در لبه را با در نظر گرفتن سه نوع آرایش برای تقویت‌کننده‌ها بررسی کرده‌اند. نتایج این تحقیق نشان داده است، همواره بیشترین بار کمانش بحرانی برای ورق‌هایی با آرایش لایه‌ای تقویت‌کننده به صورت X و کمترین بار کمانش بحرانی برای ورق‌هایی با آرایش لایه‌ای تقویت‌کننده به صورت O است.

کمانش حرارتی و مکانیکی میکروورق‌های مدرج تابعی تقویت شده با نانوصفحه‌های گرافن بر اساس تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده^۳ توسط عارفی و همکارانش [۴۱]، انجام شده است. بارهای کمانش حرارتی به کمک روش‌های تحلیلی محاسبه شده است، و تأثیر نسبت‌های ابعادی، کسر وزنی و الگوی توزیع تقویت‌کننده‌ها (یکنواخت، خطی، سهمی) بررسی شده است. نتایج نشان داده است، برای ورق‌هایی با توزیع تقویت‌کننده سهموی با توجه به حضور حداکثری تقویت‌کننده‌ها در سطوح بالایی و پایینی ورق استحکام خمشی و بار کمانش بحرانی بالاتری دارد. همچنین، نشان داده شده است با افزایش نسبت ضخامت به طول نانوصفحه‌های گرافن تقویت‌کننده بار کمانش مکانیکی به طور قابل توجهی کاهش می‌یابد.

محیی‌الدین قمشه‌ای [۴۲]، در مطالعه‌ای عددی رفتار کمانش حرارتی متقارن ورق‌های مدرج تابعی دایره‌ای با ضخامت متغیر بر بستر وینکلر-پسترناک^۴ بررسی کرده است. میدان جابه‌جایی و معادلات پایداری به کمک تئوری صفحه‌ی میندلین و تنش‌های غیرخطی ون-کارمن بیان شده است، و از روش دیفرانسیل کوادریچر برای حل معادلات حاکم استفاده شده است. همچنین، تأثیر پارامترهای مختلف از جمله ضریب بستر پسترناک بر بار و مد کمانش بررسی شده است.

مطالعه‌ی کمانش و پس‌کمانش ورق‌های پیزوالکتریک^۵ مدرج تابعی تقویت شده با نانوصفحه‌های گرافن توسط ژانگ و مائو [۴۳]، تحت پتانسیل الکتریکی خارجی و نیروهای تک محوره و دو محوره انجام شده است. نتایج مطالعات آن‌ها نشان داده است، با افزایش درصد کمی از تقویت‌کننده‌ها مقاومت پس‌کمانشی ورق‌ها را افزایش می‌یابد، این تغییرات در ورق‌هایی با الگوی توزیع تقویت‌کننده به صورت X بیشتر است. همچنین مشاهده شده است، با افزایش نسبت ابعادی نانوصفحه‌های گرافن مقاومت پس‌کمانشی ورق‌ها افزایش می‌یابد، و افزایش نسبت‌های ابعادی ورق مقاومت پس‌کمانشی ورق‌ها را کاهش می‌دهد.

¹. Peng

². Work equivalent method

³. Modified strain gradient theory (MSGT).

⁴. Winkler-Pasternak foundation

⁵. Piezoelectric

فصل ۳ : فرمول بندی و حل مسئله

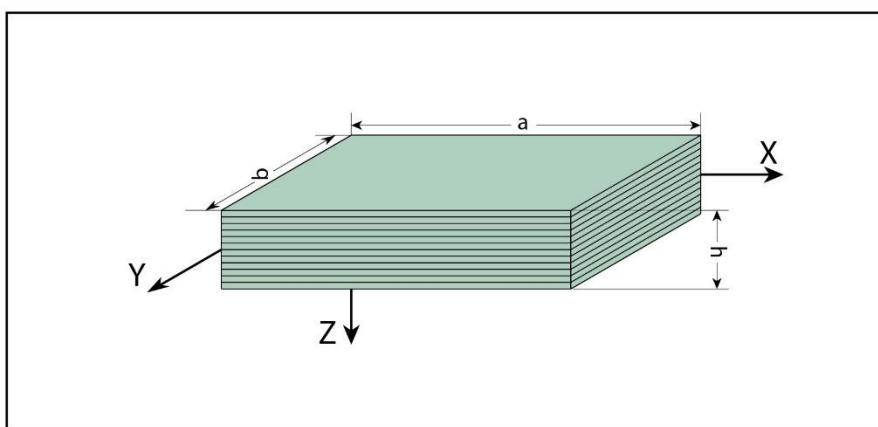
۳-۱ - مقدمه

در این فصل ابتدا مدل ورق نانوکامپوزیتی چندلایه تقویت شده با نانوصفحه‌های گرافن تعریف شده است. به منظور یافتن مدول یانگ مؤثر از مدل میکرومکانیک اصلاح شده هالپین-تسای و همچنین، برای به دست آوردن خواص معادل کامپوزیت‌ها از قانون اختلاط استفاده شده است. سپس، میدان جابه‌جایی ورق بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول تعریف شده است، و روابط کرنش-جابه‌جایی مطابق روابط ون-کارمن در نظر گرفته شده است.

در گام بعدی، با در نظر گرفتن اثر حرارت به کمک معادلات ساختاری تنش-کرنش و اصل کار مجازی، معادله‌های حاکم بر ورق چندلایه تقویت شده با نانوصفحه‌های گرافن استخراج شده است. در ادامه، از روش عددی دیفرانسیل کوادریچر (DQ) برای تبدیل دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی^۱ به دستگاه معادلات دیفرانسیل جبری غیرخطی^۲ استفاده شده است. در نهایت، با اعمال شرایط مرزی، دستگاه معادلات حاکم بر ورق به فرم ماتریسی بازنویسی شده، و به حل مسئله پرداخته شده است.

۳-۲ - مدل و خواص ورق کامپوزیتی

در این پژوهش، ورق‌های نانوکامپوزیتی چندلایه تقویت شده با طول a ، عرض b و ضخامت h مطابق شکل ۳-۱ در نظر گرفته شده است. در این ورق‌ها ضخامت تمام لایه‌ها یکسان است، و هر لایه ترکیبی از تقویت‌کننده گرافن صفحه‌ای و زمینه پلیمری همسانگرد از جنس DGEBA است. نانوصفحه‌های گرافن در زمینه پلیمری به صورت یکنواخت و با جهت‌گیری تصادفی پراکنده شده است.



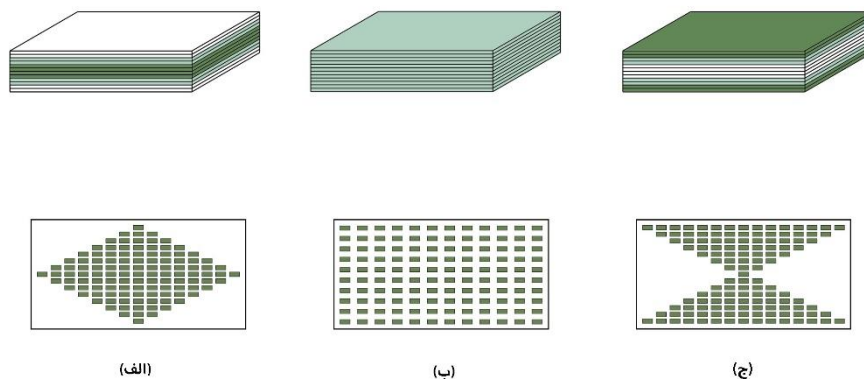
شکل ۳-۱- ابعاد ورق نانوکامپوزیتی چندلایه در نظر گرفته شده.

¹. Partial differential equation

². Nonlinear algebraic equation system

به منظور بررسی تأثیر نحوه توزیع تقویت کننده‌ها در زمینه‌ی پلیمری، در ورق‌های نانوکامپوزیتی با تغییر کسر وزنی نانوصفحه‌های گرافن در هر لایه، در راستای ضخامت سه نوع آرایش لایه‌ای در نظر گرفته شده است. آرایش لایه‌ای یکنواخت که در آن کسر حجمی نانوصفحه‌های گرافن^۱ در راستای ضخامت ثابت است و دو آرایش مدرج تابعی که در آن‌ها کسر حجمی نانوصفحه‌های گرافن به صورت پیوسته و مطابق با تابعی معین در جهت ضخامت ورق تغییر کرده است.

توزیع تابعی تقویت کننده‌ها به صورت O (O-GPLRC) در (شکل ۳-۲-الف) نشان داده شده است، لایه‌های میانی بیشترین مقدار کسر حجمی نانوصفحه‌های گرافن را دارد، و با رنگ تیره‌تر نشان داده شده است، به تدریج با حرکت به سمت لایه‌های سطحی کسر حجمی نانوصفحه‌های گرافن کمتر شده و با رنگ روشن‌تر ترسیم شده است. در (شکل ۳-۲-ب) کامپوزیت‌های تقویت شده با نانوصفحه‌های گرافن با توزیع یکنواخت تقویت کننده‌ها (U-GPLRC) نمایش داده شده است، کسر حجمی نانوصفحه‌های گرافن در تمام لایه‌ها یکسان و ورق به صورت یکنواخت تقویت شده است. کامپوزیت‌های تقویت شده با نانوصفحه‌های گرافن با توزیع تابعی تقویت کننده‌ها به صورت X (X-GPLRC) در (شکل ۳-۲-ج) نشان داده شده است، لایه‌های بالا و پایین ورق بیشترین کسر حجمی نانوصفحه‌های گرافن را دارا است، و با رنگ تیره‌تر نشان داده شده است.



شکل ۳-۲- نحوه توزیع لایه‌های ورق الف) توزیع لایه‌ای O ب) توزیع لایه‌ای U ج) توزیع لایه‌ای X

کسر حجمی $(V_{GPL}^{(K)})$ ، برای هر لایه $(K = 1, 2, \dots, N_L)$ ، با توجه به نوع آرایش لایه‌ها مطابق با جدول ۱-۳ تعریف شده است.

لازم به ذکر است، توابع کسر حجمی مربوط به هر یک از انواع آرایش‌های لایه‌ای، برای حل معادلات

^۱. The GPL volume fraction

نهایی و مقایسه‌ی نتایج در نرم‌افزار متلب کدنویسی شده است.

جدول ۱-۳- توابع کسری حجمی نانوصفحه‌های گرافن برای انواع الگوهای توزیع تقویت‌کننده.

الگوی توزیع نانوصفحه‌های گرافن	کسر حجمی هر لایه
U-GPLRC	$V_{GPL}^{(K)} = V_{GPL}^*$
X-GPLRC	$V_{GPL}^{(K)} = 2V_{GPL}^* 2K - N_L - 1 / N_L$
O-GPLRC	$V_{GPL}^{(K)} = 2V_{GPL}^* (1 - 2K - N_L - 1 / N_L)$

در روابط فوق N_L تعداد لایه‌ها است و V_{GPL}^* معرف کسر حجمی کل به صورت زیر تعریف شده است.

$$V_{GPL}^* = \frac{W_{GPL}}{W_{GPL} + (\rho_{GPL} / \rho_m)(1 - W_{GPL})} \quad (۱-۳)$$

W_{GPL} کسر وزنی تقویت‌کننده‌ها، ρ_m و ρ_{GPL} به ترتیب چگالی زمینه و چگالی نانوصفحه‌های گرافن است.

۱-۲-۳- روش هالپین-تسای

مدل‌های میکرومکانیکی متفاوتی برای پیش‌بینی خواص مکانیکی مؤثر کامپوزیت‌ها ارائه شده است، روش هالپین-تسای یکی از آن‌ها است.

روش هالپین-تسای یک مدل نیمه تجربی برای محاسبه خواص معادل کامپوزیت‌ها است. کامپوزیت‌های مورد نظر به صورت یکنواخت و با جهت‌گیری تصادفی تقویت شده‌اند. با توجه به این‌که، در روش هالپین-تسای اثر هندسه و اندازه تقویت‌کننده‌ها در نظر گرفته می‌شود، شیوه‌ی مطلوبی برای محاسبه خواص مکانیکی کامپوزیت‌ها است.

مدول الاستیک در جهت طولی (E_L) و مدول الاستیک در جهت عرضی (E_T) به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$E_L = \frac{1 + \zeta_L \eta_L V_f}{1 - \eta_L V_f} \times E_m \quad (۲-۳ الف)$$

$$E_T = \frac{1 + \zeta_T \eta_T V_f}{1 - \eta_T V_f} \times E_m \quad (۲-۳ ب)$$

E_m مدول یانگ زمینه و V_f کسر حجمی تقویت کننده^۱ است. مقادیر η_L و η_T به صورت زیر محاسبه می گردد [۳۶].

$$\eta_L = \frac{(E_f / E_m) - 1}{(E_f / E_m) + \zeta_L} \quad (3-3 \text{ الف})$$

$$\eta_T = \frac{(E_f / E_m) - 1}{(E_f / E_m) + \zeta_T} \quad (3-3 \text{ ب})$$

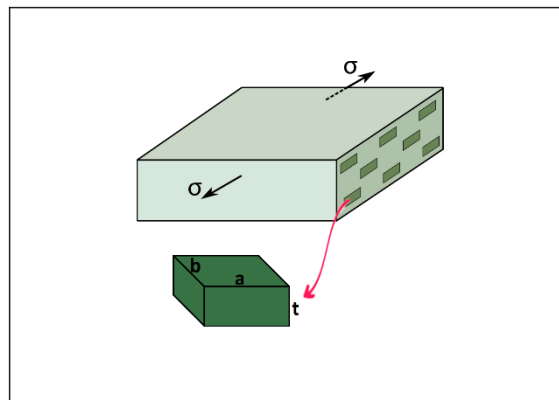
E_f مدول یانگ تقویت کننده است، ζ_L و ζ_T مشخصه های هندسی تقویت کننده هستند و درجه ی تقویت زمینه توسط تقویت کننده ها تعریف می شوند. مقدار این کمیت ها به شکل و نحوه قرار گیری تقویت کننده ها و نوع بارگذاری بستگی دارد. مشخصه های هندسی به صورت تجربی و از انطباق نمودارهای تجربی و تئوری محاسبه می شود.

به عنوان نمونه، برای تقویت کننده هایی با سطح مقطع دایره ای و الگوی توزیع مربعی در زمینه ζ_L و ζ_T برابر ۲ است. همچنین، برای تقویت کننده هایی با سطح مقطع مستطیلی مطابق شکل ۳-۳، ζ_L و ζ_T به صورت زیر محاسبه می شوند.

$$\zeta_L = 2(a/t) \quad (3-4 \text{ الف})$$

$$\zeta_T = 2(b/t) \quad (3-4 \text{ ب})$$

در روابط بالا a ، b و t به ترتیب، طول عرض و ضخامت تقویت کننده است [۴۴].



شکل ۳-۳- ورق تقویت شده با تقویت کننده هایی با سطح مقطع مستطیلی [۴۴].

^۱. Filler volume fraction

مدول الاستیک کامپوزیت‌هایی با پراکندگی تصادفی تقویت‌کننده از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$E = \frac{3}{8}E_L + \frac{5}{8}E_T \quad (5-3)$$

با توجه به رابطه (5-3) و روش هالپین-تسای مدول یانگ مؤثر برای ورق‌های کامپوزیتی مدرج تابعی با زمینه پلیمری از جنس DGEBA و تقویت شده با نانوصفحه‌های گرافن مورد نظر در پژوهش حاضر به صورت زیر تعریف شده است [36].

$$E = \frac{3}{8} \frac{1 + \zeta_L \eta_L V_{GPL}}{1 - \eta_L V_{GPL}} \times E_m + \frac{5}{8} \frac{1 + \zeta_T \eta_T V_{GPL}}{1 - \eta_T V_{GPL}} \times E_m \quad (6-3)$$

مقادیر η_L و η_T به صورت زیر محاسبه می‌گردند.

$$\eta_L = \frac{(E_{GPL} / E_m) - 1}{(E_{GPL} / E_m) + \zeta_L} \quad (7-3 \text{ الف})$$

$$\eta_T = \frac{(E_{GPL} / E_m) - 1}{(E_{GPL} / E_m) + \zeta_T} \quad (7-3 \text{ ب})$$

E_m و E_{GPL} به ترتیب مقادیر مدول یانگ ماتریس و نانوصفحه‌های گرافن است.

مشخصه‌های هندسی ζ_L و ζ_T به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\zeta_L = 2(a_{GPL} / t_{GPL}) \quad (8-3 \text{ الف})$$

$$\zeta_T = 2(b_{GPL} / t_{GPL}) \quad (8-3 \text{ ب})$$

a_{GPL} ، b_{GPL} و t_{GPL} به ترتیب طول، عرض و ضخامت نانوصفحه‌ی گرافن است.

ابعاد نانوصفحه‌های گرافن تقویت‌کننده برای ماده‌ی مرکب مورد مطالعه در این پژوهش، در جدول ۲-۳ آورده شده است.

جدول ۲-۳- ابعاد در نظر گرفته شده برای نانوصفحه‌های گرافن.

ابعاد صفحه‌ی گرافنی

$$a_{GPL} = 2.5 \mu m$$

$$b_{GPL} = 1.5 \mu m$$

$$t_{GPL} = 1.5 nm$$

۳-۲-۲ - قانون اختلاط

در مواد کامپوزیتی که از دو یا چند فاز متفاوت تشکیل شده‌اند، خواص مکانیکی مؤثر به پارامترهای از قبیل چگالی، شکل و موقعیت مواد تشکیل دهنده و نحوه توزیع فازها ... وابسته است. در نتیجه برای پیش‌بینی مدول الاستیک معادل یا هر خاصیت معادل دیگر ماده‌ی مورد نظر باید توزیع کسر حجمی و شکل تقریبی فازهای تشکیل دهنده در نظر گرفته شود.

از این‌رو قانون اختلاط یک شیوه مرسوم و مناسب برای پیش‌بینی خواص مکانیکی است. در این روش ماده‌ی مرکبی با دو فاز الاستیک همسانگرد در نظر گرفته شده است و با توجه به باری که سازه تحمل می‌کند، دو مدل وویگ^۱ و روس^۲ بیان شده است.

۳-۲-۲-۱ - مدل وویگ

در مدل وویگ فرض می‌شود، کرنش‌های مساوی به فازهای ماده مرکب وارد می‌شود، و تنش کل برابر مجموع تنش‌هایی است، که هر یک از فازها به‌تنهایی تحمل می‌کنند. مدول الاستیک ماده مرکب میانگین وزنی مدول یانگ مؤثر فازها است و به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$E = E_m V_m + E_f V_f \quad (۹-۳)$$

V_f و V_m کسر حجمی، E_f و E_m ضرایب پواسون به ترتیب ماتریس و تقویت‌کننده است.

۳-۲-۲-۲ - مدل روس

در مدل روس فرض شده است، در فازهای ماده مرکب تحت بارهای وارده، تنش‌های مساوی ایجاد می‌شود، و کرنش کل برابر مجموع کرنش‌هایی است که هر یک از فازها به‌تنهایی تحمل می‌کنند. مدول یانگ مؤثر ماده مرکب به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۴۵].

$$\nu = \left(\frac{V_f}{\nu_f} + \frac{V_m}{\nu_m} \right)^{-1} \quad (۱۰-۳)$$

^۱. Voigt

^۲. Reuss

لازم به ذکر است، در پژوهش حاضر نیز از قانون اختلاط (مدل وویگ) برای محاسبه ضریب انبساط حرارتی^۱ و ضریب پواسون^۲ معادل کامپوزیت‌های مدرج تابعی مورد نظر استفاده شده است و به‌صورت زیر محاسبه شده است

$$\nu = \nu_m V_m + \nu_{GPL} V_{GPL} \quad (۱۱-۳) \text{ (الف)}$$

$$\alpha = \alpha_m V_m + \alpha_{GPL} V_{GPL} \quad (۱۱-۳) \text{ (ب)}$$

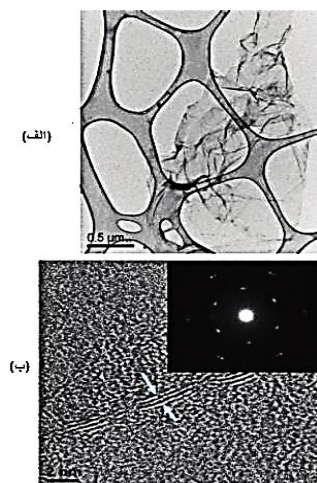
ν_m و ν_{GPL} ضرایب پواسون، α_m و α_{GPL} ضرایب انبساط حرارتی به ترتیب نانوصفحه‌های گرافن و ماتریس است. بدیهی است، V_m کسر حجمی ماتریس است و به‌صورت زیر تعریف می‌گردد [۳۵].

$$V_m = 1 - V_{GPL} \quad (۱۲-۳)$$

در ادامه به ارائه‌ی خواص زمینه و تقویت‌کننده مورد مطالعه در این پژوهش پرداخته شده است.

۳-۲-۳ - خواص نانوصفحه‌های گرافن

نانوصفحه‌های گرافن مورد استفاده در این مطالعه از روش کاهش اکسید گرافن تهیه شده است. تصویر این نانوصفحه‌های گرافن در شکل ۳-۴ نشان داده شده است، و خواص آن طبق جدول ۳-۳ در نظر گرفته شده است.



شکل ۳-۴- الف) نانوصفحه‌های گرافن روی شبکه‌های میکروسکوپ الکترونی ب) ساختار لایه‌ای گرافن [۱۳].

^۱. Thermal expansion coefficient

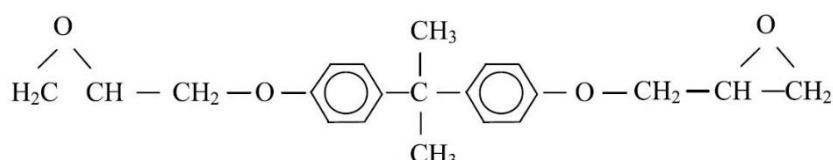
^۲. Poisson's ratio

جدول ۳-۳- خواص نانوصفحه‌های گرافن در نظر گرفته شده [۱۳].

خواص نانوصفحه‌های گرافن	
مدول یانگ (GPa)	۱۰۱۰
چگالی (kgm^{-3})	۱۰۶۲/۵
ضریب پواسون	۰/۱۸۶
ضریب انبساط حرارتی ($\times 10^{-6} / K$)	۵

۳-۲-۴ - خواص دی‌گلیسیدیل اتر بیسفنول ای

فرمول شیمیایی دی‌گلیسیدیل اتر بیسفنول ای در شکل ۳-۵ نشان داده شده است، و خواص مکانیکی آن با توجه به جدول ۳-۴ در نظر گرفته شده است.



شکل ۳-۵- فرمول شیمیایی دی‌گلیسیدیل اتر بیسفنول ای [۴۶].

جدول ۳-۴- خواص پلیمر در نظر گرفته شده [۴۶].

خواص DGEBA	
مدول یانگ (GPa)	۳/۰
چگالی (kgm^{-3})	۱۲۰۰
ضریب پواسون	۰/۳۴
ضریب انبساط حرارتی ($\times 10^{-6} / K$)	۶۰

تمامی پارامترهای معرفی شده و فرمول‌های ارائه شده در ارتباط با قانون اختلاط و روش هالپین-تسای در نرم‌افزار متلب برنامه‌نویسی و پیاده‌سازی شده است، و در حل معادلات نهایی حاکم بر ورق به کار گرفته شده است.

۳-۳ - میدان جابه‌جایی

مؤلفه‌های جابه‌جایی برای نقطه‌ای دلخواه در ورق بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول به صورت زیر نشان داده شده است.

$$\bar{U}(X, Y, Z) = U(X, Y) + Z \psi_x(X, Y) \quad (۳-۱۳ الف)$$

$$\bar{V}(X, Y, Z) = V(X, Y) + Z \psi_y(X, Y) \quad (۳-۱۳ ب)$$

$$\bar{W}(X, Y, Z) = W(X, Y) \quad (۳-۱۳ ج)$$

$\bar{U}$ ، $\bar{V}$ و $\bar{W}$ به ترتیب جابه‌جایی یک نقطه دلخواه در راستای محورهای مختصات X ، Y و Z است. مؤلفه‌های جابه‌جایی صفحه‌ی میانی ($Z=0$) نیز با U ، V و W نشان داده شده است. ψ_x و ψ_y چرخش‌های صفحه‌ی میانی به ترتیب حول محورهای Y و X نسبت به سطح مقطع عرضی است.

۳-۴ - بارگذاری ورق

در پژوهش حاضر فرض می‌شود، ورق فاقد هرگونه تنش‌های اولیه در دمای مرجع T_0 است، و دما طبق رابطه (۳-۱۴) به صورت یکنواخت تغییر می‌کند.

$$\Delta T = T - T_0 \quad (۳-۱۴)$$

همچنین، بار گسترده یکنواخت N_{X0} در راستای محور X و بار گسترده یکنواخت N_{Y0} در راستای محور Y به لبه‌های ورق وارد می‌شود.

۳-۵ - روابط غیر خطی کرنش - جابه‌جایی

با استفاده از رابطه‌ی غیرخطی کرنش - جابه‌جایی ون-کارمن کرنش‌های حاکم بر ورق مدرج تابعی حاضر در این پژوهش برحسب جابه‌جایی‌های U ، V و W و چرخش‌های ψ_x و ψ_y در صفحه‌ی میانی به صورت زیر تعریف شده است.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \gamma_{YZ} \\ \gamma_{XZ} \\ \gamma_{XY} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_X^{(0)} \\ \varepsilon_Y^{(0)} \\ \gamma_{YZ}^{(0)} \\ \gamma_{XZ}^{(0)} \\ \gamma_{XY}^{(0)} \end{Bmatrix} + Z \begin{Bmatrix} \varepsilon_X^{(1)} \\ \varepsilon_Y^{(1)} \\ \gamma_{YZ}^{(1)} \\ \gamma_{XZ}^{(1)} \\ \gamma_{XY}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_{,X} + \frac{1}{2}(W_{,X})^2 \\ V_{,Y} + \frac{1}{2}(W_{,Y})^2 \\ W_{,Y} + \psi_Y \\ W_{,X} + \psi_X \\ U_{,Y} + V_{,X} + W_{,X} W_{,Y} \end{Bmatrix} + Z \begin{Bmatrix} \psi_{X,X} \\ \psi_{Y,Y} \\ 0 \\ 0 \\ \psi_{X,Y} + \psi_{Y,X} \end{Bmatrix} \quad (۱۵-۳)$$

۳-۶ - معادلات ساختاری

بر اساس قانون هوک، معادلات ساختاری تنش-کرنش با در نظر گرفتن اثر حرارت برای ورق مدرج تابعی تحت تغییرات دمای یکنواخت به صورت زیر تعریف می شود.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \sigma_{YZ} \\ \sigma_{XZ} \\ \sigma_{XY} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \gamma_{YZ} \\ \gamma_{XZ} \\ \gamma_{XY} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Delta T \quad (۱۶-۳)$$

در معادلات ساختاری کرنش ها به وسیله ی ماتریس سفتی به تنش ها مربوط می شوند. مؤلفه های ماتریس سفتی برای $(i, j = 1, 2, 4, 5, 6)$ به صورت زیر محاسبه می شود.

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E}{1-\nu^2} \quad (۱۷-۳ \text{ الف})$$

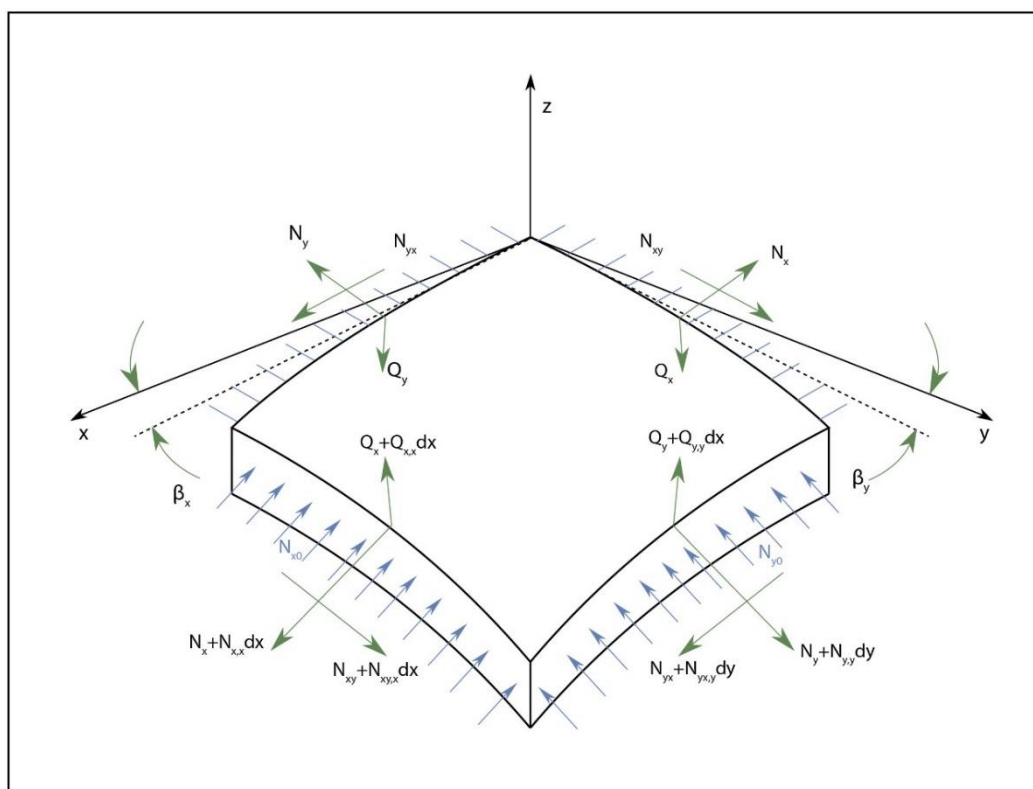
$$Q_{12} = \frac{\nu E}{1-\nu^2} \quad (۱۷-۳ \text{ ب})$$

$$Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (۱۷-۳ \text{ ج})$$

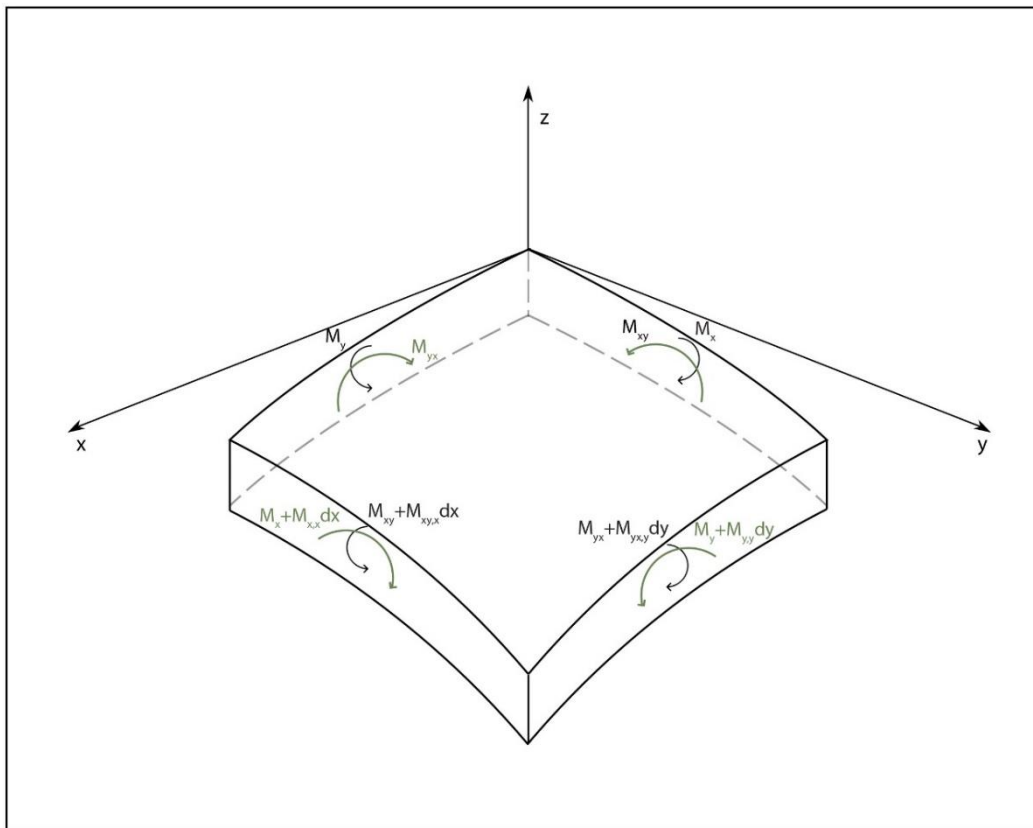
۷-۳ - معادلات حاکم بر ورق مدرج تابعی تقویت شده با نانوصفحه‌های گرافن

در این مرحله، با در نظر گرفتن بار حرارتی و مکانیکی وارد بر ورق با استفاده از روابط تعادل به استخراج معادلات دیفرانسیل غیرخطی ورق کامپوزیتی چندلایه تقویت شده با نانوصفحه‌های گرافن پرداخته شده است.

جهت ساده‌سازی، تصاویر نتیجه‌های نیرو در شکل ۳-۶ و نتیجه‌های گشتاورهای خمشی در شکل ۳-۷ جداگانه نشان داده شده است. اثر چرخش در رفتار ورق در نظر گرفته شده است، و معادلات تعادل برای المان تغییرشکل یافته استخراج شده است. لازم به ذکر است نتیجه‌های نیرو و نتیجه‌های گشتاور خمشی نشان داده شده در جهت مثبت خود هستند.



شکل ۳-۶- نتیجه‌های نیرویی وارد بر المان ورق تغییر شکل یافته



شکل ۷-۳- منتجه‌های گشتاور خمشی وارد بر المان ورق تغيير شکل يافته

به دليل کوچک بودن زاويه‌های دوران β_x و β_y در معادلات تعادل سینوس آن‌ها با β_x و β_y و کسینوس با ۱ جایگزین شده است.

با یادآوری این‌که، N_x نشان دهنده منتجه نیرو، و نیرو بر واحد طول روی لبه dy (همین‌طور سایر نیروها) است، برآیند نیروها درجهت X عبارت است از:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow \quad (۱۸-۳)$$

$$-N_x dy + (N_x + N_{x,x} dx) dy - N_{yx} dx + (N_{yx} + N_{yx,y} dy) dx + N_{x,0} dy - N_{x,0} dy = 0 \rightarrow N_{x,x} + N_{yx,y} = 0$$

به‌طور مشابه، برای برآیند نیروها درجهت Y می‌توان نوشت:

$$\sum F_y = 0 \rightarrow N_{xy,x} + N_{y,y} = 0 \quad (۱۹-۳)$$

برآیند نیروها در جهت Z اندکی پیچیده‌تر است و به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\sum F_z = 0 \rightarrow \quad (۲۰-۳)$$

$$\begin{aligned} & N_y dx \beta_y - (N_y + N_{y,y} dy) dx (\beta_y + \beta_{y,y} dy) \\ & + N_x dy \beta_x - (N_x + N_{x,x} dx) dy (\beta_x + \beta_{x,x} dx) \\ & - N_{x0} dy \beta_x + N_{x0} dy (\beta_x + \beta_{x,x} dx) - N_{y0} dx \beta_y + N_{y0} dx (\beta_y + \beta_{y,y} dy) \\ & - Q_y dx + (Q_y + Q_{y,y} dy) dx - Q_x dy + (Q_x + Q_{x,x} dx) dy \\ & + N_{xy} dy \beta_y - (N_{xy} + N_{xy,x} dx) dy (\beta_y + \beta_{y,x} dx) \\ & + N_{yx} dx \beta_x - (N_{yx} + N_{yx,y} dy) dx (\beta_x + \beta_{x,y} dy) = 0 \end{aligned}$$

با توجه به این که، dx و dy بسیار کوچک هستند می توان از مقادیر مرتبه دوم آن ها چشم پوشی کرد. با مرتب کردن عبارات بالا ملاحظه می شود:

$$\begin{aligned} & Q_{x,x} + Q_{y,y} - (N_{x,x} + N_{xy,y}) \beta_x - (N_{yx,x} + N_{y,y}) \beta_y \\ & + (N_{x0} - N_x) \beta_{x,x} + (N_{y0} - N_y) \beta_{y,y} - N_{xy} \beta_{y,x} - N_{yx} \beta_{x,y} = 0 \end{aligned} \quad (۲۱-۳)$$

در نهایت، با جای گذاری معادلات (۱۸-۳) و (۱۹-۳) در معادله (۲۱-۳)، و توجه به برابری N_{xy} و N_{yx} برآیند نیروها در جهت Z به صورت زیر نشان داده می شود:

$$\sum F_z = 0 \rightarrow \quad (۲۲-۳)$$

$$Q_{x,x} + Q_{y,y} + (N_{x0} - N_x) \beta_{x,x} + (N_{y0} - N_y) \beta_{y,y} - 2N_{xy} (\beta_{y,x} + \beta_{x,y}) = 0$$

همچنین، با گرفتن برآیند گشتاورها حول محور X و Y نیز دو معادله تعادل دیگر به صورت زیر به دست آمده است.

$$\sum M_x = 0 \rightarrow M_{xy,x} + M_{y,y} - Q_y = 0 \quad (۲۳-۳ الف)$$

$$\sum M_y = 0 \rightarrow M_{yx,y} + M_{x,x} - Q_x = 0 \quad (۲۳-۳ ب)$$

لازم به ذکر است، با توجه به روابط $\beta_x = -\frac{dw}{dx}$ و $\beta_y = -\frac{dw}{dy}$ مقادیر $\beta_{x,y}$ و $\beta_{y,x}$ برابر است و می توان آن ها را با $w_{,xy}$ نشان داد.

با توجه به معادلات تعادل محاسبه شده، معادلات پایداری حاکم بر ورق کامپوزیتی مورد نظر بر حسب منتهجه های نیرویی N_x ، N_y ، N_{xy} ، منتهجه های گشتاور خمشی M_x ، M_y ، M_{xy} و منتهجه های نیروی برشی Q_x و Q_y جهت مطالعه در پژوهش حاضر به فرم زیر بازنویسی شده است:

$$N_{X,X} + N_{XY,Y} = 0 \quad (۳-۲۴الف)$$

$$N_{XY,X} + N_{Y,Y} = 0 \quad (۳-۲۴ب)$$

$$Q_{X,X} + Q_{Y,Y} + (N_X - N_{X0})W_{,XX} + (N_Y - N_{Y0})W_{,YY} + 2N_{XY}W_{,XY} = 0 \quad (۳-۲۴ج)$$

$$M_{X,X} + M_{XY,Y} - Q_X = 0 \quad (۳-۲۴د)$$

$$M_{XY,X} + M_{Y,Y} - Q_Y = 0 \quad (۳-۲۴هـ)$$

کسر حجمی تقویت کننده‌ها در هر لایه متفاوت است، و خواص مواد در هر لایه تغییر می‌کند، در نتیجه مقدار تنش‌ها در راستای ضخامت پیوسته نیست، و در هر لایه تغییر می‌کند. منته‌های نیرو، با N_X و N_Y معرفی می‌شوند، و از مجموع انتگرال‌های تنش در هر لایه به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$\begin{Bmatrix} N_X \\ N_Y \\ N_{XY} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \sigma_{XY} \end{Bmatrix} dZ = \sum_{k=1}^{N_L} \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \sigma_{XY} \end{Bmatrix}^{(k)} dZ \quad (۳-۲۵)$$

با حل انتگرال‌های فوق می‌توان آن‌ها را بر حسب که مؤلفه‌های سفتی $A_{ij} (i, j = 1, 2, 6)$ ، و منته‌های دمایی نیرو N_X^T ، N_Y^T و N_{XY}^T به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\begin{Bmatrix} N_X \\ N_Y \\ N_{XY} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_X^{(0)} \\ \varepsilon_Y^{(0)} \\ \gamma_{XY}^{(0)} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N_X^T \\ N_Y^T \\ N_{XY}^T \end{Bmatrix} \quad (۳-۲۶)$$

که در آن‌ها مؤلفه‌های سفتی طبق رابطه زیر به دست می‌آیند:

$$(A_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} dZ = \sum_{k=1}^{N_L} \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} Q_{ij}^{(k)} dZ \quad A_{ij} (i, j = 1, 2, 6) \quad (۳-۲۷)$$

منته‌های دمایی نیرو نیز به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} N_X^T \\ N_Y^T \\ N_{XY}^T \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{N_L} \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{Bmatrix}^{(k)} \Delta T dZ \quad (۳-۲۸)$$

به طور مشابه، منته‌های نیروی برشی، Q_X و Q_Y و منته‌های گشتاور خمشی M_X ، M_Y و M_{XY} محاسبه شده است. در این‌جا نیز مقادیر تنش در راستای ضخامت متغیر است، و مجموع انتگرال‌های تنش در هر لایه محاسبه شده است.

$$\begin{Bmatrix} Q_Y \\ Q_X \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{YZ} \\ \sigma_{XZ} \end{Bmatrix} dZ = \sum_{k=1}^{N_L} \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_{YZ} \\ \sigma_{XZ} \end{Bmatrix}^{(k)} dZ \quad (3-29 \text{ الف})$$

$$\begin{Bmatrix} M_X \\ M_Y \\ M_{XY} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \sigma_{XY} \end{Bmatrix} Z dZ = \sum_{k=1}^{N_L} \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \sigma_{XY} \end{Bmatrix}^{(k)} Z dZ \quad (3-29 \text{ ب})$$

روابط (3-29) را می‌توان با در نظر گرفتن مؤلفه‌های سفتی $A_{ij}(i, j=4,5)$ و $D_{ij}(i, j=1,2,6)$ ، و منته‌های دمایی گشتاور خمشی M_X^T ، M_Y^T و M_{XY}^T به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{Bmatrix} Q_Y \\ Q_X \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44} & 0 \\ 0 & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{YZ}^{(0)} \\ \gamma_{XZ}^{(0)} \end{Bmatrix} \quad (3-30 \text{ الف})$$

$$\begin{Bmatrix} M_X \\ M_Y \\ M_{XY} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_X^{(1)} \\ \epsilon_Y^{(1)} \\ \gamma_{XY}^{(1)} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} M_X^T \\ M_Y^T \\ M_{XY}^T \end{Bmatrix} \quad (3-30 \text{ ب})$$

مؤلفه‌های سفتی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$A_{ij} = \kappa \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} dZ = \kappa \sum_{k=1}^{N_L} \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} Q_{ij}^{(k)} dZ \quad A_{ij}(i, j=4,5) \quad (3-31 \text{ الف})$$

$$(D_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} Z^2 dZ = \sum_{k=1}^{N_L} \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} Q_{ij}^{(k)} Z^2 dZ \quad D_{ij}(i, j=1,2,6) \quad (3-31 \text{ ب})$$

ضریب تصحیح برشی (κ) در فصل دوم توضیح داده شده است، و در این پژوهش معادل $\frac{5}{6}$ در نظر گرفته شده است.

منته‌های دمایی گشتاور خمشی نیز با کمک روابط زیر محاسبه شده است.

$$\begin{Bmatrix} M_X^T \\ M_Y^T \\ M_{XY}^T \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{N_L} \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{Bmatrix} \Delta T Z dZ \quad (3-32)$$

در این مرحله، منته‌های نیرویی و منته‌های گشتاور خمشی به‌دست آمده از روابط (3-28) و (3-30) را با در نظر گرفتن معادلات سینماتیک روابط (3-15)، در معادلات حاکم بر ورق روابط (3-24) جای‌گذاری شده است و معادلات تعادل غیرخطی حاکم بر ورق نانوکامپوزیتی تحت نیروهای درون‌صفحه‌ای و تغییر دمای یکنواخت بر حسب جابه‌جایی‌ها به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

شایان ذکر است، مشتق منته‌های دمایی نیرو و منته‌های دمایی گشتاور خمشی با توجه به تغییرات یکنواخت دما در جهت‌های X و Y صفر می‌شود و از معادلات حذف شده است.

$$A_{11}(U_{,XX} + W_{,X}W_{,XX}) + A_{12}(V_{,XY} + W_{,Y}W_{,XY}) + A_{66}(U_{,YY} + V_{,XY} + W_{,Y}W_{,XY} + W_{,X}W_{,YY}) = 0 \quad (3-33\text{الف})$$

$$A_{66}(U_{,XY} + V_{,XX} + W_{,XX}W_{,Y} + W_{,X}W_{,XY}) + A_{12}(U_{,XY} + W_{,X}W_{,XY}) + A_{22}(V_{,YY} + W_{,Y}W_{,YY}) = 0 \quad (3-33\text{ب})$$

$$A_{55}(W_{,XX} + \psi_{X,X}) + A_{44}(W_{,YY} + \psi_{Y,Y}) + \left\{ A_{11} \left[U_{,X} + \frac{1}{2}(W_{,X})^2 \right] + A_{12} \left[V_{,Y} + \frac{1}{2}(W_{,Y})^2 \right] - N_{XX}^T - N_{X0} \right\} W_{,XX} + \left\{ A_{12} \left[U_{,X} + \frac{1}{2}(W_{,X})^2 \right] + A_{22} \left[V_{,Y} + \frac{1}{2}(W_{,Y})^2 \right] - N_{YY}^T - N_{Y0} \right\} W_{,YY} + 2A_{66}(U_{,Y} + V_{,X} + W_{,X}W_{,Y})W_{,XY} = 0 \quad (3-33\text{ج})$$

$$D_{11}\psi_{X,XX} + D_{12}\psi_{Y,XY} + D_{66}(\psi_{X,YY} + \psi_{Y,XY}) - A_{55}(W_{,X} + \psi_X) = 0 \quad (3-33\text{د})$$

$$D_{66}(\psi_{X,XY} + \psi_{Y,XX}) + D_{12}\psi_{X,XY} + D_{22}\psi_{Y,YY} - A_{44}(W_{,Y} + \psi_Y) = 0 \quad (3-33\text{هـ})$$

۳-۸ - شرایط مرزی

در این پژوهش دو شرایط تکیه‌گاهی گیردار و ساده در چهار طرف $(X=0, a)$ و $(Y=0, b)$ برای ورق نانوکامپوزیتی تقویت شده با نانوصفحه‌های گرافن در نظر گرفته شده است، و برای برقراری آن‌ها از نظر ریاضی ارضای روابط زیر نیاز است.

شرایط مرزی گیردار:

$$U=V=W=\psi_X=\psi_Y=0 \quad (X=0, a) \quad (۳-۳۴\text{الف})$$

$$U=V=W=\psi_X=\psi_Y=0 \quad (Y=0, b) \quad (۳-۳۴\text{ب})$$

شرایط مرزی ساده:

$$U=V=W=\psi_Y=M_{XX}=0 \quad (X=0, a) \quad (۳-۳۵\text{الف})$$

$$U=V=W=\psi_X=M_{YY}=0 \quad (Y=0, b) \quad (۳-۳۵\text{ب})$$

متحرک در لبه‌ی $(X=0, a)$:

$$V=W=\psi_Y=M_{XX}=N_{XX}=0 \quad (X=0, a) \quad (۳-۳۶)$$

۳-۹ - یکاها و ابعاد

اندازه‌گیری‌ها در فیزیک با کمیت‌هایی مانند: سرعت، نیرو، انرژی، دما، جریان الکتریکی و بسیاری کمیت‌های دیگر سروکار دارد. نکته جالب این است که، این کمیت‌ها می‌توانند برحسب چند کمیت پایه‌ای طول، جرم و زمان بیان شوند. این سه، کمیت‌های بنیادی نامیده می‌شوند. تمام کمیت‌های دیگر که برحسب این‌ها بیان می‌شوند، کمیت‌های فرعی نامیده می‌شوند. بیشتر کمیت‌های فیزیکی را می‌توان برحسب کمیت‌های پایه و بی‌بعد بیان کرد. استفاده از پارامترهای بی‌بعد پیچیدگی مسئله را کاهش می‌دهد، متغیرهای تجربی مؤثر در مسئله کمتر شده، بنابراین تحلیل و بررسی پدیده‌ها آسان‌تر می‌شود [۴۷].

۳-۹-۱ - بی بعد سازی معادلات حاکم بر ورق

در این پژوهش نیز پارامترهای مسئله به کمک روابط زیر بی بعد شده است.

$$(x, y) = (X/a, Y/b) \quad (۳-۳۷الف)$$

$$(u, v, w) = (U, V, W)/h \quad (۳-۳۷ب)$$

$$(\varphi_x, \varphi_y) = (\psi_X, \psi_Y) \quad (۳-۳۷ج)$$

$$(\lambda_1, \lambda_2) = a/(h, b) \quad (۳-۳۷د)$$

$$(a_{ij}, d_{ij}) = (A_{ij}, D_{ij}/h^2)/A_{110} \quad (۳-۳۷هـ)$$

$$\lambda = N_{Y0}/N_{X0} \quad (۳-۳۷و)$$

$$(P, P_x^T, P_y^T) = (N_{X0}, N_X^T, N_Y^T)/A_{110} \quad (۳-۳۷ز)$$

A_{110} برابر با مقدار A_{11} برای یک ورق همگن از جنس ماتریس است و به صورت زیر محاسبه می شود.

$$A_{110} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11m} dZ \quad (۳-۳۸الف)$$

$$Q_{11m} = \frac{E_m}{1-\nu_m^2} \quad (۳-۳۸ب)$$

سپس، با توجه به پارامترهای بی بعد تعریف شده در روابط (۳-۳۷) معادلات تعادل حاکم بر ورق (روابط ۳-۲۴) بی بعد سازی شده و به صورت زیر باز نویسی می شوند.

$$\begin{aligned} & a_{11} \left(u_{,xx} + \frac{1}{\lambda_1} w_{,x} w_{,xx} \right) + a_{12} \lambda_2 \left(v_{,xy} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} w_{,y} w_{,xy} \right) \\ & + a_{66} \lambda_2 \left(\lambda_2 u_{,yy} + v_{,xy} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} w_{,y} w_{,xy} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} w_{,x} w_{,yy} \right) = 0 \end{aligned} \quad (۳-۳۹الف)$$

$$a_{66} \left(\lambda_2 u_{,xy} + v_{,xx} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} w_{,xx} w_{,y} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} w_{,x} w_{,xy} \right) + a_{12} \lambda_2 \left(u_{,xy} + \frac{1}{\lambda_1} w_{,x} w_{,xy} \right) + a_{22} \lambda_2^2 \left(v_{,yy} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} w_{,y} w_{,yy} \right) = 0 \quad (3-39\text{ب})$$

$$a_{55} (w_{,xx} + \lambda_1 \varphi_{x,x}) + a_{44} \lambda_2 (\lambda_2 w_{,yy} + \lambda_1 \varphi_{y,y}) + \left\{ \frac{a_{11}}{\lambda_1} \left[u_{,x} + \frac{1}{2\lambda_1} (w_{,x})^2 \right] + a_{12} \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \left[v_{,y} + \frac{\lambda_2}{2\lambda_1} (w_{,y})^2 \right] - P_x^T - P \right\} w_{,xx} + \left\{ \frac{a_{12}}{\lambda_1} \left[u_{,x} + \frac{1}{2\lambda_1} (w_{,x})^2 \right] + a_{22} \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \left[v_{,y} + \frac{\lambda_2}{2\lambda_1} (w_{,y})^2 \right] - P_y^T - \lambda P \right\} \lambda_2^2 w_{,yy} + 2a_{66} \left(\lambda_2 u_{,y} + v_{,x} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} w_{,x} w_{,y} \right) \frac{\lambda_2}{\lambda_1} w_{,xy} = 0 \quad (3-39\text{ج})$$

$$d_{11} \varphi_{x,xx} + d_{12} \lambda_2 \varphi_{y,xy} + d_{66} \lambda_2 (\lambda_2 \varphi_{x,yy} + \varphi_{y,xy}) - a_{55} \lambda_1 (w_{,x} + \lambda_1 \varphi_x) = 0 \quad (3-39\text{د})$$

$$d_{66} (\lambda_2 \varphi_{x,xy} + \varphi_{y,xx}) + d_{12} \lambda_2 \varphi_{x,xy} + d_{22} \lambda_2^2 \varphi_{y,yy} - a_{44} \lambda_1 (\lambda_2 w_{,y} + \lambda_1 \varphi_y) = 0 \quad (3-39\text{هـ})$$

۳-۹-۲ - بی بعد سازی شرایط مرزی

شرایط مرزی بی بعد نیز به صورت زیر در نظر گرفته می شوند:

شرایط مرزی گیردار:

$$u = v = w = \varphi_x = \varphi_y = 0 \quad (x = 0, 1) \quad (3-40\text{الف})$$

$$u = v = w = \varphi_x = \varphi_y = 0 \quad (y = 0, 1) \quad (3-40\text{ب})$$

شرایط مرزی ساده:

$$u = v = w = \varphi_y = 0 \quad d_{11}\varphi_{x,x} + d_{12}\lambda_2\varphi_{y,y} = 0 \quad (x = 0,1) \quad (3-41\text{الف})$$

$$u = v = w = \varphi_x = 0 \quad d_{12}\varphi_{x,x} + d_{22}\lambda_2\varphi_{y,y} = 0 \quad (y = 0,1) \quad (3-41\text{ب})$$

متحرک در لبه ی $(x = 0,1)$:

$$v = w = \varphi_y = 0 \quad d_{11}\varphi_{x,x} + d_{12}\lambda_2\varphi_{y,y} = 0 \quad (3-42\text{الف})$$

$$a_{11}\left[u_{,x} + \frac{1}{2\lambda_1}(w_{,x})^2\right] + a_{12}\lambda_2\left[v_{,y} + \frac{\lambda_2}{2\lambda_1}(w_{,y})^2\right] = 0 \quad (3-42\text{ب})$$

۳-۱۰ - روش های حل عددی

در حل مسائل مهندسی استفاده از روش های تحلیلی به دلیل دقت بالا، بسیار مورد توجه هستند. از طرفی در طبیعت بسیاری از پدیده های گوناگون از جمله حرارت با استفاده از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مدل می شوند. با توجه به پیچیدگی های حل این معادلات و محدودیت هایی که حل تحلیلی به هندسه، شرایط مرزی و بازه تحلیل مسئله تحمیل می کند، موجب پیدایش و رشد روزافزون روش های عددی شده است و آن ها را به اصلی ترین ابزار در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی تبدیل کرده است. به طوری که امروزه، برای حل مسائل مهندسی روش های عددی متنوعی در دسترس هستند.

روش دیفرانسیل کوادریچر یا دیفرانسیل مربعات یک روش حل عددی است، و در حل بسیاری از مسائل مهندسی استفاده شده است. روش دیفرانسیل کوادریچر یک جایگزین مناسب برای روش های مرسوم حل عددی از جمله المان محدود و تفاضل محدود^۱ است.

۳-۱۰-۱ - روش دیفرانسیل کوادریچر

روش دیفرانسیل کوادریچر برای اولین بار در سال ۱۹۷۱ توسط بلمن^۲ و همکاران [۴۸]، به عنوان یک روش عددی ساده برای حل معادلات دیفرانسیل خطی و غیرخطی پیشنهاد شده است. شیوه ی حل در این روش نیز مانند بسیاری از روش های عددی با گسسته سازی فضای پیوسته مسئله انجام می شود. ایده ی اصلی این روش به این صورت است که مشتق تابع در هر یک از این نقاط گرهی به صورت جمع

^۱. Finite difference

^۲. Bellman

خطی وزن دار از مقدار تابع در تمام نقاط گره‌ای تعیین شده در آن راستا است. خواسته مسئله مقدار تابع مورد نظر در هر یک از نقاط گره‌ای است.

به‌منظور شرح روش دیفرانسیل کوادریچر، ابتدا یک مسئله یک‌بعدی مطابق شکل ۳-۸ تعریف شده، و تابع پیوسته و مشتق‌پذیر $F=f(x)$ در نظر گرفته شده است.



شکل ۳-۸- توزیع گرهی در دامنه یک بعدی

مشتق مرتبه اول تابع $f(x)$ نسبت به x در نقطه x_i ، به‌طور تقریبی برابر با مجموع خطی وزنی مقادیر تابع در کل دامنه است و به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$f'(x_i) = \frac{\partial f}{\partial x} \bigg|_{x_i} = \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} f(x_j) \quad (i=1,2,\dots,N) \quad (3-43)$$

$C_{ij}^{(1)}$ ضرایب وزنی مشتق مرتبه اول و N تعداد گره‌ها است. مقادیر ضریب وزنی $C_{ij}^{(1)}$ در هر نقطه‌ای گره‌ای x_i متفاوت است و برای محاسبه آن روش‌های متعددی، از جمله روش بلمن و روش کوئن^۱ و چنگ^۲ وجود دارد؛ در این پژوهش، برای محاسبه ماتریس‌های ضرایب وزنی یکی از روش‌های دیفرانسیل کوادریچر مبتنی بر چندجمله‌ای^۳ که برای اولین بار در سال ۱۹۹۲ توسط شوو^۴ و ریچاردز^۵ معرفی شده، استفاده شده است.

ابتدا، درایه‌های غیر قطری ماتریس ضرایب وزنی مشتق مرتبه اول به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$C_{ij}^{(1)} = \frac{\prod_{k=1, k \neq i}^N (x_i - x_k)}{(x_i - x_j) \prod_{k=1, k \neq j}^N (x_j - x_k)} \quad (i, j = 1, 2, \dots, N; i \neq j), \quad (3-44)$$

¹. Quen

². Chang

³. Polynomial-based differential quadrature

⁴. Shu

⁵. Richards

درایه‌های قطری ماتریس ضرایب وزنی مرتبه یک، نیز به صورت زیر است:

$$C_{ii}^{(1)} = - \sum_{k=1, k \neq i}^N C_{ik}^{(1)} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (45-3)$$

مشتق مرتبه k تابع $f(x)$ نسبت به x در نقطه x_i به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$f^{(k)}(x_i) = \left. \frac{\partial^{(k)} f}{\partial x^{(k)}} \right|_{x_i} = \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(k)} f(x_j) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (46-3)$$

به این نکته باید توجه شود که، در رابطه بالا مرتبه مشتق در بازه $2 \leq k \leq (N-1)$ تعریف شده است. برای محاسبه درایه‌های غیر قطری ماتریس ضرایب وزنی مشتق مرتبه $2 \leq k \leq (N-1)$ نیز از رابطه زیر استفاده می‌شود.

$$C_{ij}^{(k)} = k \left[C_{ii}^{(1)} C_{ij}^{(k-1)} - \frac{C_{ij}^{(k-1)}}{(x_i - x_j)} \right] \quad (i, j = 1, 2, \dots, N; i \neq j), \quad (47-3)$$

همچنین، درایه‌های قطری ماتریس ضرایب وزنی مشتق مرتبه $2 \leq k \leq (N-1)$ به صورت زیر محاسبه می‌شود.

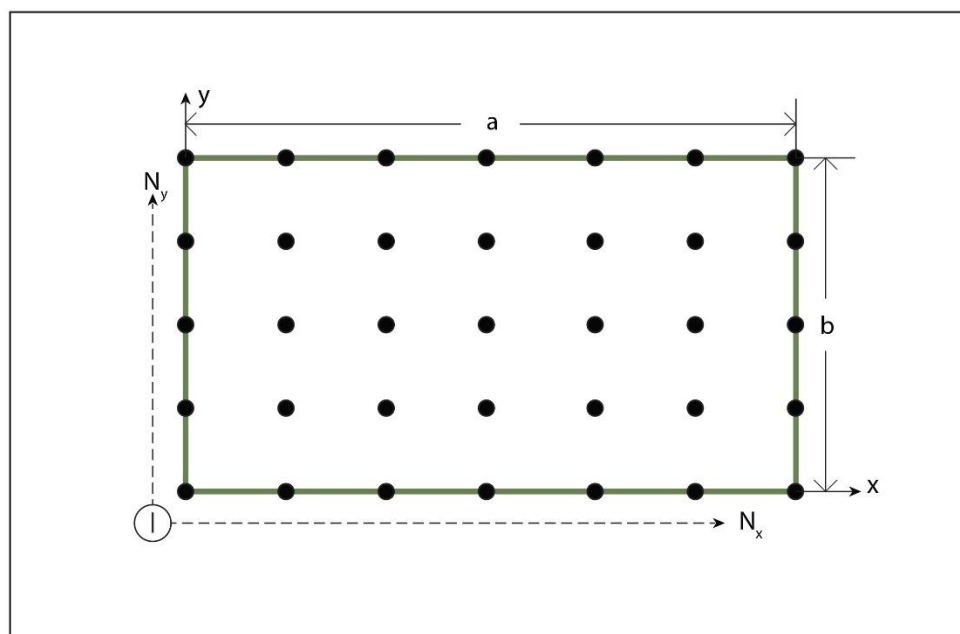
$$C_{ii}^{(k)} = - \sum_{v=1, v \neq i}^N C_{iv}^{(k)} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (48-3)$$

در مرحله بعد به نحوه توزیع گره‌ها در دامنه حل، پرداخته شده است. نحوه‌ی توضیح گره‌ها در پاسخ مسئله مؤثر است. توزیع گره‌ها می‌تواند یکنواخت و با فاصله برابر، یا غیریکنواخت و تجمعی در دامنه حل باشد. با توجه به هندسه‌ی مسئله توزیع‌های گره‌ای مختلفی برای دامنه‌ی حل در نظر گرفته می‌شود. در این جا نیز توزیع یکنواخت طبق یک الگوی کسینوسی برای گره‌ها مطابق رابطه زیر در نظر گرفته شده است [۴۹].

$$x_i = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \frac{\pi(i-1)}{N-1} \right] \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (49-3)$$

۳-۱۰-۲ - اعمال گسسته‌سازی دیفرانسیل کوادریچر بر دستگاه معادلات با مشتقات جزئی غیرخطی حاکم بر ورق

دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی حاکم بر ورق چندلایه مدرج تابعی تقویت شده با نانوصفحه‌های گرافن برحسب مؤلفه‌های جابه‌جایی U ، v ، W ، φ_x ، φ_y تعریف شده است و مشتقات آنها نسبت به متغیر X و y است. در سطح ورق شبکه‌بندی گرهی مطابق شکل ۹-۳ در نظر گرفته شده است.



شکل ۹-۳ - شبکه‌بندی گرهی برای دامنه‌ی دوبعدی

N_x تعداد گره‌ها در راستای X و N_y تعداد گره‌ها در راستای y به‌طور یکنواخت و با فاصله برابر، طبق یک الگوی کسینوسی به کمک رابطه زیر در سطح ورق پراکنده شده‌اند.

$$x_i = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \frac{\pi(i-1)}{N_1-1} \right] \quad (i=1, 2, \dots, N_1) \quad (۳-۵۰الف)$$

$$y_j = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \frac{\pi(j-1)}{N_2-1} \right] \quad (j=1, 2, \dots, N_2) \quad (۳-۵۰ب)$$

توابع مورد نظر در مسئله حاضر، بردار جابه‌جایی در هر نقطه گره‌ای است و با کمک روابط دیفرانسیل کوادریچر به صورت زیر محاسبه شده است. مشتق مرتبه k_1 تابع نسبت به متغیر x در نقطه i و مشتق مرتبه k_2 تابع نسبت به متغیر y در نقطه j به صورت زیر تعیین شده است.

$$\left. \frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}} \{u, v, w, \varphi_x, \varphi_y\} \right|_{x=x_i} = \sum_{m=1}^{N_x} C_{im}^{(k_1)} \{u_{mj}, v_{mj}, w_{mj}, \varphi_{xmj}, \varphi_{ymj}\} \quad (i=1,2,\dots,N_x) \quad (3-51 \text{ الف})$$

$$\left. \frac{\partial^{k_2}}{\partial y^{k_2}} \{u, v, w, \varphi_x, \varphi_y\} \right|_{y=y_j} = \sum_{n=1}^{N_y} C_{jn}^{(k_2)} \{u_{in}, v_{in}, w_{in}, \varphi_{xin}, \varphi_{yin}\} \quad (j=1,2,\dots,N_y) \quad (3-51 \text{ ب})$$

$C_{im}^{(k_1)}$ ضرایب وزنی مشتق مرتبه k_1 نسبت به متغیر x و $\{u_{mj}, v_{mj}, w_{mj}, \varphi_{xmj}, \varphi_{ymj}\}$ پاسخ مورد نظر در نقطه (x_i, y_j) است. به طور مشابه، $C_{jn}^{(k_2)}$ ضرایب وزنی مشتق مرتبه k_2 نسبت به متغیر y و $\{u_{in}, v_{in}, w_{in}, \varphi_{xin}, \varphi_{yin}\}$ پاسخ مورد نظر در نقطه (x_i, y_j) است. همچنین، مشتق مرتبه k_1 و k_2 تابع به ترتیب نسبت به متغیر x و متغیر y برای $(i=1,2,\dots,N_x)$ و $(j=1,2,\dots,N_y)$ به صورت زیر محاسبه شده است.

$$\left. \frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial y^{k_2}} \{u, v, w, \varphi_x, \varphi_y\} \right|_{x=x_i, y=y_j} = \sum_{m=1}^{N_1} \sum_{n=1}^{N_2} C_{im}^{(k_1)} C_{jn}^{(k_2)} \{u_{mn}, v_{mn}, w_{mn}, \varphi_{xmn}, \varphi_{ymn}\} \quad (3-52)$$

بردار $\{u_{mn}, v_{mn}, w_{mn}, \varphi_{xmn}, \varphi_{ymn}\}$ پاسخ مورد نظر در نقطه (x_i, y_j) است. روابط در این جا تنها برای شبکه گرهی در راستای X ارائه شده است و فرمول‌بندی در جهت y نیز به طور مشابه تعریف می‌شوند. ضرایب وزنی مشتق مرتبه اول به صورت زیر محاسبه می‌گردد.

$$C_{im}^{(1)} = \frac{\prod_{k=1, \neq i}^{N_x} (x_i - x_k)}{(x_i - x_m) \prod_{k=1, \neq m}^{N_x} (x_m - x_k)} \quad (i, m = 1, 2, \dots, N_x; i \neq m) \quad (3-53 \text{ الف})$$

$$C_{ii}^{(1)} = - \sum_{v=1, \neq i}^{N_x} C_{iv} \quad (3-53 \text{ ب})$$

همچنین، ضرایب وزنی برای مشتقات مرتبه $2 \leq k \leq (N_x - 1)$ نیز به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$C_{im}^{(k)} = k \left[C_{ii}^{(1)} C_{im}^{(k-1)} - \frac{C_{im}^{(k-1)}}{(x_i - x_m)} \right] \quad (i, m = 1, 2, \dots, N_x; i \neq m), \quad (3-54\text{الف})$$

$$C_{ii}^{(k)} = - \sum_{m=1}^{N_x} C_{im}^{(k)} \quad (3-54\text{ب})$$

حال در معادلات (3-39) مشتق‌های مرتبه اول و بالاتر توابع u, v, w, φ_x و φ_y با استفاده از روابط (3-51) و (3-52) بازنویسی شده است و هر یک از نقاط گرهی را به صورت جمع خطی وزن دار از مقدار تابع در تمام نقاط گرهی تعیین شده، نوشته شده است. ابتدا چند عبارت به عنوان نمونه برای آشنایی با نحوه تبدیل، آورده شده است. سپس، به ارائه معادلات حاکم بر ورق پرداخته شده است.

$$a_{11} u_{,xx} = a_{11} \sum_{m=1}^{N_x} C_{im}^{(2)} u_{mj} \quad (3-55\text{الف})$$

$$a_{66} \lambda_2^2 u_{,yy} = a_{66} \lambda_2^2 \sum_{n=1}^{N_y} C_{jn}^{(2)} u_{in} \quad (3-55\text{ب})$$

$$a_{12} \lambda_2 v_{,xy} = a_{12} \lambda_2 \sum_{m=1}^{N_x} \sum_{n=1}^{N_y} C_{im}^{(1)} C_{jn}^{(1)} v_{mn} \quad (3-55\text{ج})$$

$$a_{11} w_{,x} w_{,xx} = a_{11} \sum_{m=1}^{N_x} C_{im}^{(1)} w_{mj} \sum_{m=1}^{N_x} C_{im}^{(2)} w_{mj} \quad (3-55\text{د})$$

$$a_{12} \lambda_2 w_{,y} w_{,xy} = a_{12} \lambda_2 \sum_{n=1}^{N_y} C_{jn}^{(1)} w_{in} \sum_{m=1}^{N_x} \sum_{n=1}^{N_y} C_{im}^{(1)} C_{jn}^{(1)} w_{mn} \quad (3-55\text{هـ})$$

$$a_{12} \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_{,y} w_{,xx} = a_{12} \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \sum_{n=1}^{N_y} C_{jn}^{(1)} v_{in} \sum_{m=1}^{N_x} C_{im}^{(2)} w_{mj} \quad (3-55\text{و})$$

$$a_{12} \frac{\lambda_2^2}{2\lambda_1^2} (w_{,y})^2 w_{,xx} = a_{12} \frac{\lambda_2^2}{2\lambda_1^2} \left(\sum_{n=1}^{N_y} C_{jn}^{(1)} w_{in} \right)^2 \sum_{m=1}^{N_x} C_{im}^{(2)} w_{mj} \quad (3-55\text{ز})$$

در نهایت، معادلات حاکم بر ورق مدرج تابعی نیز با اعمال ضرایب وزنی و پیاده‌سازی روش دیفرانسیل کوادریچر به صورت زیر بازنویسی شده است.

$$\begin{aligned} & a_{11} \left(\sum_{m=1}^{N_x} C_{im}^{(2)} u_{mj} + \frac{1}{\lambda_1} \sum_{m=1}^{N_x} C_{im}^{(1)} w_{mj} \sum_{m=1}^{N_x} C_{im}^{(2)} w_{mj} \right) + a_{12} \lambda_2 \left(\sum_{m=1}^{N_x} \sum_{n=1}^{N_y} C_{im}^{(1)} C_{jn}^{(1)} v_{mn} \right. \\ & + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \sum_{n=1}^{N_y} C_{jn}^{(1)} w_{in} \sum_{m=1}^{N_x} \sum_{n=1}^{N_y} C_{im}^{(1)} C_{jn}^{(1)} w_{mn} \left. \right) + a_{66} \lambda_2 \left(\lambda_2 \sum_{n=1}^{N_y} C_{jn}^{(2)} u_{in} + \sum_{m=1}^{N_x} \sum_{n=1}^{N_y} C_{im}^{(1)} C_{jn}^{(1)} v_{mn} \right. \\ & + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \sum_{n=1}^{N_y} C_{jn}^{(1)} w_{in} \sum_{m=1}^{N_x} \sum_{n=1}^{N_y} C_{im}^{(1)} C_{jn}^{(1)} w_{mn} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \sum_{m=1}^{N_x} C_{im}^{(1)} w_{mj} \sum_{n=1}^{N_y} C_{jn}^{(2)} w_{in} \left. \right) = 0 \end{aligned} \quad (3-56\text{الف})$$

$$\begin{aligned} & a_{66} \left(\lambda_2 \sum_{m=1}^{N_x} \sum_{n=1}^{N_y} C_{im}^{(1)} C_{jn}^{(1)} u_{mn} + \sum_{m=1}^{N_x} C_{im}^{(2)} v_{mj} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \sum_{m=1}^{N_x} C_{im}^{(2)} w_{mj} \sum_{n=1}^{N_y} C_{jn}^{(1)} w_{in} \right. \\ & + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \sum_{m=1}^{N_x} C_{im}^{(1)} w_{mj} \sum_{m=1}^{N_x} \sum_{n=1}^{N_y} C_{im}^{(1)} C_{jn}^{(1)} w_{mn} \left. \right) \\ & + a_{12} \lambda_2 \left(\sum_{m=1}^{N_x} \sum_{n=1}^{N_y} C_{im}^{(1)} C_{jn}^{(1)} u_{mn} + \frac{1}{\lambda_1} \sum_{m=1}^{N_x} C_{im}^{(1)} w_{mj} \sum_{m=1}^{N_x} \sum_{n=1}^{N_y} C_{im}^{(1)} C_{jn}^{(1)} w_{mn} \right) \\ & + a_{22} \lambda_2^2 \left(\sum_{n=1}^{N_y} C_{jn}^{(2)} v_{in} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \sum_{n=1}^{N_y} C_{jn}^{(1)} w_{in} \sum_{n=1}^{N_y} C_{jn}^{(2)} w_{in} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3-56\text{ب})$$

$$\begin{aligned}
& a_{55} \left(\sum_{m=1}^{N_x} C_{im}^{(2)} w_{mj} + \lambda_1 \sum_{m=1}^{N_x} C_{im}^{(1)} \varphi_{xmj} \right) + a_{44} \lambda_2 \left(\lambda_2 \sum_{n=1}^{N_y} C_{jn}^{(2)} w_{in} + \lambda_1 \sum_{n=1}^{N_y} C_{jn}^{(1)} \varphi_{yin} \right) \\
& + \left\{ \frac{a_{11}}{\lambda_1} \left[\sum_{m=1}^{N_x} C_{im}^{(1)} u_{mj} + \frac{1}{2\lambda_1} \left(\sum_{m=1}^{N_x} C_{im}^{(1)} w_{mj} \right)^2 \right] \right. \\
& + \frac{a_{12} \lambda_2}{\lambda_1} \left[\sum_{n=1}^{N_y} C_{jn}^{(1)} v_{in} + \frac{\lambda_2}{2\lambda_1} \left(\sum_{n=1}^{N_y} C_{jn}^{(1)} w_{in} \right)^2 \right] - p_x^T - P \left\{ \sum_{m=1}^{N_x} C_{im}^{(2)} w_{mj} \right. \\
& + \left\{ \frac{a_{12}}{\lambda_1} \left[\sum_{m=1}^{N_x} C_{im}^{(1)} u_{mj} + \frac{1}{2\lambda_1} \left(\sum_{m=1}^{N_x} C_{im}^{(1)} w_{mj} \right)^2 \right] \right. \\
& + \frac{a_{22} \lambda_2}{\lambda_1} \left[\sum_{n=1}^{N_y} C_{jn}^{(1)} v_{in} + \frac{\lambda_2}{2\lambda_1} \left(\sum_{n=1}^{N_y} C_{jn}^{(1)} w_{in} \right)^2 \right] - p_y^T - \lambda P \left\{ \lambda_2^2 \sum_{n=1}^{N_y} C_{jn}^{(2)} w_{in} \right. \\
& + 2a_{66} \left(\lambda_2 \sum_{n=1}^{N_y} C_{jn}^{(1)} u_{in} + \sum_{m=1}^{N_x} C_{im}^{(1)} v_{mj} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \sum_{m=1}^{N_x} C_{im}^{(1)} w_{mj} \sum_{n=1}^{N_y} C_{jn}^{(1)} w_{in} \right) \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \sum_{m=1}^{N_x} \sum_{n=1}^{N_y} C_{im}^{(1)} C_{jn}^{(1)} w_{mn} = 0
\end{aligned}$$

(۳-۵۶ج)

$$\begin{aligned}
& d_{11} \sum_{m=1}^{N_x} C_{im}^{(2)} \varphi_{xmj} + d_{12} \lambda_2 \sum_{m=1}^{N_x} \sum_{n=1}^{N_y} C_{im}^{(1)} C_{jn}^{(1)} \varphi_{ymn} \\
& + d_{66} \lambda_2 \left(\lambda_2 \sum_{n=1}^{N_y} C_{jn}^{(2)} \varphi_{xin} + \sum_{m=1}^{N_x} \sum_{n=1}^{N_y} C_{im}^{(1)} C_{jn}^{(1)} \varphi_{ymn} \right) - a_{55} \lambda_1 \left(\sum_{m=1}^{N_x} C_{im}^{(1)} w_{mj} + \lambda_1 \varphi_{xij} \right) = 0
\end{aligned}$$

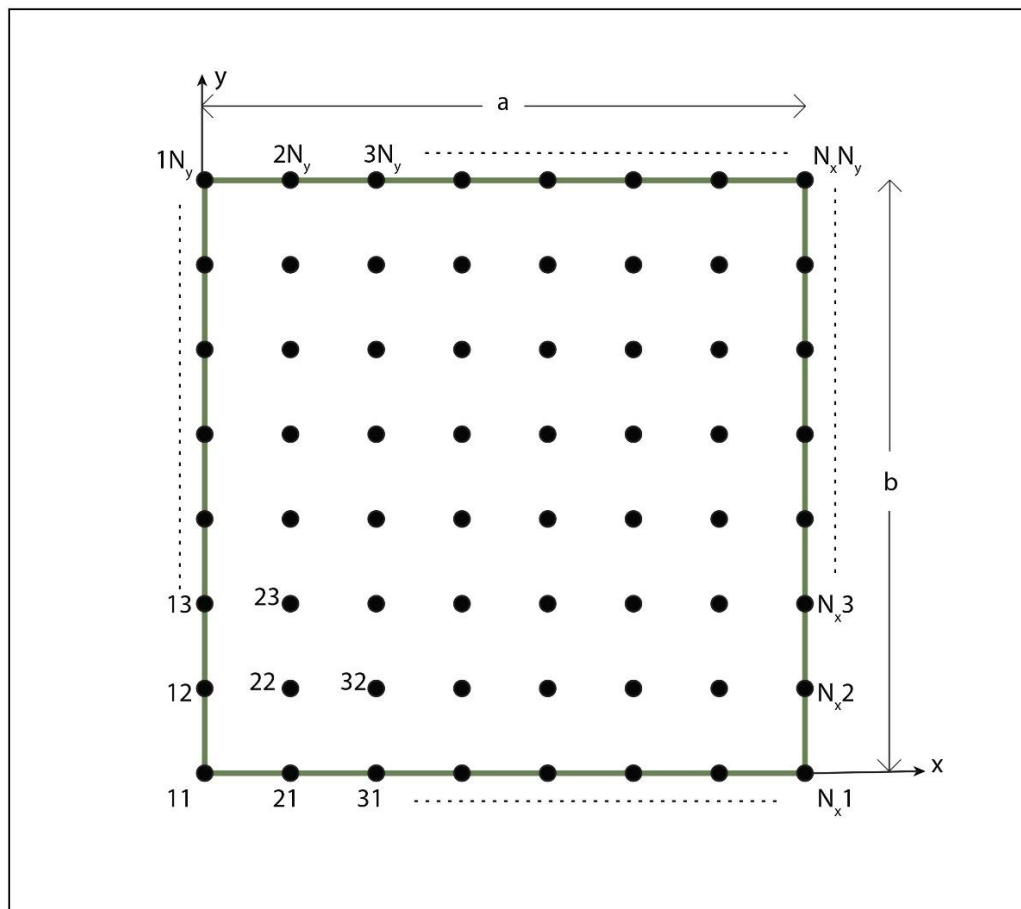
(۳-۵۶د)

$$\begin{aligned}
& d_{66} \left(\lambda_2 \sum_{m=1}^{N_x} \sum_{n=1}^{N_y} C_{im}^{(1)} C_{jn}^{(1)} \varphi_{xmn} + \sum_{m=1}^{N_x} C_{im}^{(2)} \varphi_{ymj} \right) + d_{12} \lambda_2 \sum_{m=1}^{N_x} \sum_{n=1}^{N_y} C_{im}^{(1)} C_{jn}^{(1)} \varphi_{xmn} \\
& + d_{22} \lambda_2^2 \sum_{n=1}^{N_y} C_{jn}^{(2)} \varphi_{yin} - a_{44} \lambda_1 \left(\lambda_2 \sum_{n=1}^{N_y} C_{jn}^{(1)} w_{in} + \lambda_1 \varphi_{yij} \right) = 0
\end{aligned}$$

(۳-۵۶هـ)

۳-۱۰-۳ - اعمال گسسته‌سازی دیفرانسیل کوادریچر بر شرایط مرزی

شماره‌گذاری گره‌ها مطابق شکل ۳-۱۰ در نظر گرفته شده است. سپس، با اعمال دیفرانسیل کوادریچر و گسسته‌سازی شرایط مرزی حاکم بر ورق چندلایه مدرج تابعی، شرایط مرزی در لبه‌های $(x=0)$ ، $(x=1)$ ، $(y=0)$ و $(y=1)$ با توجه به مختصات و شماره متناظر با هر گره در لبه‌ی ورق ارائه شده است.



شکل ۳-۱۰- نحوه شماره گذاری شبکه بندی گرهی برای ورق در نظر گرفته شده.

شرایط مرزی گیردار:

$$u_{1j} = v_{1j} = w_{1j} = \varphi_{x1j} = \varphi_{y1j} = 0 \quad (x = 0) \quad (۳-۵۷الف)$$

$$u_{N_x j} = v_{N_x j} = w_{N_x j} = \varphi_{xN_x j} = \varphi_{yN_x j} = 0 \quad (x = 1) \quad (۳-۵۷ب)$$

$$u_{i1} = v_{i1} = w_{i1} = \varphi_{xi1} = \varphi_{yi1} = 0 \quad (y = 0) \quad (۳-۵۷ج)$$

$$u_{iN_y} = v_{iN_y} = w_{iN_y} = \varphi_{xiN_y} = \varphi_{yiN_y} = 0 \quad (y = 1) \quad (۳-۵۷د)$$

شرایط مرزی ساده:

$$u_{1j} = v_{1j} = w_{1j} = \varphi_{y1j} = 0, \quad d_{11} \sum_{m=1}^{N_x} C_{1m}^{(1)} \varphi_{xmj} + d_{12} \lambda_2 \sum_{n=1}^{N_y} C_{jn}^{(1)} \varphi_{y,y} = 0 \quad (x = 0) \quad (۳-۵۸الف)$$

$$u_{N_x j} = v_{N_x j} = w_{N_x j} = \varphi_{y N_x j} = 0, \quad d_{11} \sum_{m=1}^{N_x} C_{N_x m}^{(1)} \varphi_{x m j} + d_{12} \lambda_2 \sum_{n=1}^{N_y} C_{j n}^{(1)} \varphi_{y N_x n} = 0 \quad (x=1) \quad (3-58 \text{ ب})$$

$$d_{12} \sum_{m=1}^{N_x} C_{i m}^{(1)} \varphi_{x m 1} + d_{22} \lambda_2 \sum_{n=1}^{N_y} C_{1 n}^{(1)} \varphi_{y i n} = 0 \quad (y=0) \quad (3-58 \text{ ج})$$

$$u_{i 1} = v_{i 1} = w_{i 1} = \varphi_{x i 1} = 0,$$

$$u_{i N_y} = v_{i N_y} = w_{i N_y} = \varphi_{x i N_y} = 0, \quad d_{12} \sum_{m=1}^{N_x} C_{i m}^{(1)} \varphi_{x m N_y} + d_{22} \lambda_2 \sum_{n=1}^{N_y} C_{N_y n}^{(1)} \varphi_{y i n} = 0 \quad (y=1) \quad (3-58 \text{ د})$$

متحرک در لبه ی $(x=0)$:

$$v_{1 j} = w_{1 j} = \varphi_{y 1 j} = 0 \quad d_{11} \sum_{m=1}^{N_x} C_{1 m}^{(1)} \varphi_{x m j} + d_{12} \lambda_2 \sum_{n=1}^{N_y} C_{j n}^{(1)} \varphi_{y , y} = 0 \quad (3-59 \text{ الف})$$

$$a_{11} \left[\sum_{m=1}^{N_1} C_{1 m}^{(1)} u_{m j} + \frac{1}{2 \lambda_1} \left(\sum_{m=1}^{N_1} C_{1 m}^{(1)} w_{m j} \right)^2 \right] + a_{12} \lambda_2 \left[\sum_{n=1}^{N_2} C_{j n}^{(1)} v_{1 n} + \frac{\lambda_2}{2 \lambda_1} \left(\sum_{n=1}^{N_2} C_{j n}^{(1)} w_{1 n} \right)^2 \right] = 0 \quad (3-59 \text{ ب})$$

متحرک در لبه ی $(x=1)$:

$$v_{N_1 j} = w_{N_1 j} = \varphi_{y N_1 j} = 0 \quad d_{11} \sum_{m=1}^{N_x} C_{N_x m}^{(1)} \varphi_{x m j} + d_{12} \lambda_2 \sum_{n=1}^{N_y} C_{j n}^{(1)} \varphi_{y N_x n} = 0 \quad (3-60 \text{ الف})$$

$$a_{11} \left[\sum_{m=1}^{N_1} C_{N_1 m}^{(1)} u_{m j} + \frac{1}{2 \lambda_1} \left(\sum_{m=1}^{N_1} C_{N_1 m}^{(1)} w_{m j} \right)^2 \right] + a_{12} \lambda_2 \left[\sum_{n=1}^{N_2} C_{j n}^{(1)} v_{N_1 n} + \frac{\lambda_2}{2 \lambda_1} \left(\sum_{n=1}^{N_2} C_{j n}^{(1)} w_{N_1 n} \right)^2 \right] = 0 \quad (3-60 \text{ ب})$$

سپس، برای بازنویسی دستگاه معادلات جبری غیرخطی حاکم بر ورق به فرم ماتریسی، ابتدا بردار جابه‌جایی $\{d\}$ با کنار هم قرار دادن ستون‌های ماتریس جابه‌جایی به‌صورت زیر در نظر گرفته شده است.

$$\{d\} = \{u_{ij}, v_{ij}, w_{ij}, \varphi_{xij}, \varphi_{yij}\}^T = \{u_{11}, u_{12}, \dots, u_{N_x N_y}, v_{11}, v_{12}, \dots, v_{N_x N_y}, w_{11}, w_{12}, \dots, w_{N_x N_y}, \varphi_{x11}, \varphi_{x12}, \dots, \varphi_{x N_x N_y}, \varphi_{y11}, \varphi_{y12}, \dots, \varphi_{y N_x N_y}\}^T \quad (3-61)$$

برای تطبیق درایه‌های ماتریس‌های ضرایب وزنی با جابه‌جایی‌های متناظر با هر گره در بردار جابه‌جایی، از حاصل ضرب کرونیکر^۱ استفاده شده، و به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

^۱. Kronecker product

$$[A] \otimes [B] = [A_{ij} [B]] \quad (۶۲-۳)$$

ضرب کرونیگر برای $C_{im}^{(1)}$ و $C_{im}^{(2)}$ ماتریس‌های ضرایب وزنی با مشتق نسبت به متغیر x به صورت زیر انجام شده است.

$$A^x = C_{N_x \times N_x}^{(1)} \otimes I_{N_y \times N_y} \quad (۶۳-۳ \text{ الف})$$

$$B^x = C_{N_x \times N_x}^{(2)} \otimes I_{N_y \times N_y} \quad (۶۳-۳ \text{ ب})$$

I معرف ماتریس همانی است، و به طور مشابه برای $C_{jn}^{(1)}$ و $C_{jn}^{(2)}$ ماتریس‌های ضرایب وزنی با مشتق نسبت به متغیر y نیز داریم:

$$A^y = I_{N_x \times N_x} \otimes C_{N_y \times N_y}^{(1)} \quad (۶۴-۳ \text{ الف})$$

$$B^y = I_{N_x \times N_x} \otimes C_{N_y \times N_y}^{(2)} \quad (۶۴-۳ \text{ ب})$$

همچنین، ماتریس ضرایب وزنی برای توابع با مشتق نسبت به متغیر x و y نیز به صورت زیر محاسبه شده است.

$$A^{xy} = C_{N_x \times N_x}^{(1)} \otimes C_{N_y \times N_y}^{(1)} \quad (۶۵-۳)$$

حاصل ضرب کرونیگر ماتریس‌های ضرایب وزنی در پیوست الف محاسبه شده است. معادلات جبری غیرخطی حاکم بر کمانش و پس‌کمانش ورق‌های مدرج تابعی تقویت شده با نانوصفحه‌های گرافن تحت بار حرارتی و نیروهای درون‌صفحه‌ای به فرم ماتریسی زیر بیان می‌شود.

$$([K_L] - \Delta T [K_T] - P [K_P] + [K_{NL1}] + [K_{NL2}]) \{d\} = 0 \quad (۶۶-۳)$$

از آنجایی که N_x تعداد گره در راستای محور x و N_y تعداد گره در راستای محور y ورق طبق روش دیفرانسیل کوادریچر فرض شده است و هر گره دارای پنج درجه آزادی است، بنابراین ابعاد دستگاه معادلات ماتریسی حاکم بر ورق $5N_x N_y \times 5N_x N_y$ است، و به تبع آن ماتریس‌های سفتی K_L ، K_P ، K_{NL2} ، K_{NL1} و K_T ابعادشان $5N_x N_y \times 5N_x N_y$ است. K_L ماتریس ضرایب ثابت، K_P ماتریس ضرایب مرتبط با نیرو، K_T ماتریس ضرایب مرتبط با دما و K_{NL1} و K_{NL2} نیز به ترتیب ماتریس‌هایی از توابع خطی و درجه دو از بردار جابه‌جایی‌های مجهول است.

نحوه‌ی تعریف ماتریس‌های سفتی خطی (K_L ، K_P و K_T) و غیرخطی (K_{NL1} و K_{NL2}) در ادامه شرح داده شده است، و زیرماتریس‌های هر یک از ماتریس‌های سفتی معرفی شده، به‌صورت ارائه شده در نرم‌افزار متلب کدنویسی شده‌اند.

زیرماتریس‌ها در هر یک از ماتریس‌های K_L ، K_P و K_T شامل مؤلفه‌های سفتی، نسبت‌های ابعادی و ضرایب وزنی هستند. زیرماتریس‌های K_{NL1} از توابعی خطی بردار جابه‌جایی، مؤلفه‌های سفتی، نسبت‌های ابعادی و ضرایب وزنی تشکیل شده است، و زیرماتریس‌های K_{NL2} نیز مؤلفه‌های سفتی، نسبت‌های ابعادی، ضرایب وزنی و توابع درجه دو بردار جابه‌جایی را شامل می‌شوند.

با توجه به معادلات حاکم بر ورق و بردار جابه‌جایی مورد نظر، ماتریس‌های سفتی به‌صورت زیر تعریف شده است.

$$K_L = \begin{bmatrix} [K_{11}]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [K_{12}]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} \\ [K_{21}]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [K_{22}]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} \\ [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [K_{33}]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [K_{34}]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [K_{35}]_{N_x N_y \times N_x N_y} \\ [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [K_{43}]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [K_{44}]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [K_{45}]_{N_x N_y \times N_x N_y} \\ [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [K_{53}]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [K_{54}]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [K_{55}]_{N_x N_y \times N_x N_y} \end{bmatrix} \quad (3-67 \text{ الف})$$

$$K_T = \begin{bmatrix} [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} \\ [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} \\ [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [T_{33}]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} \\ [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} \\ [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} \end{bmatrix} \quad (3-67 \text{ ب})$$

$$K_P = \begin{bmatrix} [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} \\ [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} \\ [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [P_{33}]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} \\ [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} \\ [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} \end{bmatrix} \quad (3-67 \text{ ج})$$

$$K_{NL1} = \begin{bmatrix} [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [L_{13}]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} \\ [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [L_{23}]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} \\ [L_{31}]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [L_{32}]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} \\ [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} \\ [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} \end{bmatrix} \quad (3-67د)$$

$$K_{NL2} = \begin{bmatrix} [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} \\ [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} \\ [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [M_{33}]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} \\ [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} \\ [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} & [0]_{N_x N_y \times N_x N_y} \end{bmatrix} \quad (3-67هـ)$$

دستگاه معادلات ماتریسی حاکم بر ورق مدرج تابعی به کمک ماتریس‌های سفتی تعریف شده، به فرم گسترده در پیوست ب بازنویسی شده است.

هر یک از زیر ماتریس‌های K_L به صورت زیر استخراج شده است.

$$[K_{11}] = a_{11} \times [B^x] + a_{66} \lambda_2^2 \times [B^y] \quad (3-68الف)$$

$$[K_{12}] = \lambda_2 (a_{12} + a_{66}) \times [A^{xy}] \quad (3-68ب)$$

$$[K_{21}] = \lambda_2 (a_{12} + a_{66}) \times [A^{xy}] \quad (3-68ج)$$

$$[K_{22}] = a_{66} \times [B^x] + a_{22} \lambda_2^2 \times [B^y] \quad (3-68د)$$

$$[K_{33}] = a_{55} \times [B^x] + a_{44} \lambda_2^2 \times [B^y] \quad (3-68هـ)$$

$$[K_{34}] = a_{55} \lambda_1 \times [A^x] \quad (3-68و)$$

$$[K_{35}] = a_{44} \lambda_1 \lambda_2 \times [A^y] \quad (3-68ز)$$

$$[K_{43}] = -a_{55} \lambda_1 \times [A^x] \quad (3-68ح)$$

$$[K_{44}] = d_{11} \times [B^x] + d_{66} \lambda_2^2 \times [B^y] - a_{55} \lambda_1^2 I_{N_x N_y \times N_x N_y} \quad (3-68ط)$$

$$[K_{45}] = \lambda_2 (d_{12} + d_{66}) \times [A^{xy}] \quad (3-68ی)$$

$$[K_{53}] = -a_{44}\lambda_1\lambda_2 \times [A^y] \quad (3-68\text{ک})$$

$$[K_{54}] = \lambda_2 (d_{66} + d_{12}) [A^{xy}] \quad (3-68\text{ل})$$

$$[K_{55}] = d_{66} \times [B^x] + d_{22}\lambda_2^2 \times [B^y] - a_{44}\lambda_1^2 I_{N_x N_y \times N_x N_y} \quad (3-68\text{م})$$

برای ماتریس‌های K_P و K_T نیز داریم:

$$[T_{33}] = P_x^T [B^x] + \lambda_2^2 P_y^T \times [B^y] \quad (3-69\text{الف})$$

$$[P_{33}] = P [B^x] + \lambda_2^2 \lambda P \times [B^y] \quad (3-69\text{ب})$$

ضمناً، P_x^T و P_y^T منته‌های دمایی نیرو بی‌بعد و P نیروی درون‌صفحه‌ای بی‌بعد هستند.
برای تعریف زیر ماتریس‌های K_{NL1} و K_{NL2} از روش زیر استفاده شده است.

$$\begin{aligned} [L_{13}] = & a_{11} \frac{1}{\lambda_1} \times [A^x] \cdot \times \begin{bmatrix} F_1 & F_1 & \cdots & F_1 \\ F_2 & F_2 & \cdots & F_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F_{N_x N_y} & F_{N_x N_y} & \cdots & F_{N_x N_y} \end{bmatrix}_{N_x N_y \times N_x N_y} \quad (3-70\text{الف}) \\ & + \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1} (a_{12} + a_{66}) \times [A^y] \cdot \times \begin{bmatrix} G_1 & G_1 & \cdots & G_1 \\ G_2 & G_2 & \cdots & G_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_{N_x N_y} & G_{N_x N_y} & \cdots & G_{N_x N_y} \end{bmatrix}_{N_x N_y \times N_x N_y} \\ & + a_{66} \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1} \times [A^x] \cdot \times \begin{bmatrix} H_1 & H_1 & \cdots & H_1 \\ H_2 & H_2 & \cdots & H_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ H_{N_x N_y} & H_{N_x N_y} & \cdots & H_{N_x N_y} \end{bmatrix}_{N_x N_y \times N_x N_y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[L_{23}] &= a_{66} \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \times [B^x] \cdot \times \begin{bmatrix} J_1 & J_1 & \cdots & J_1 \\ J_2 & J_2 & \cdots & J_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ J_{N_x N_y} & J_{N_x N_y} & \cdots & J_{N_x N_y} \end{bmatrix}_{N_x N_y \times N_x N_y} \\
&+ \frac{\lambda_2}{\lambda_1} (a_{12} + a_{66}) \times [A^x] \cdot \times \begin{bmatrix} G_1 & G_1 & \cdots & G_1 \\ G_2 & G_2 & \cdots & G_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_{N_x N_y} & G_{N_x N_y} & \cdots & G_{N_x N_y} \end{bmatrix}_{N_x N_y \times N_x N_y} \\
&+ a_{22} \frac{\lambda_2^3}{\lambda_1} \times [A^y] \cdot \times \begin{bmatrix} H_1 & H_1 & \cdots & H_1 \\ H_2 & H_2 & \cdots & H_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ H_{N_x N_y} & H_{N_x N_y} & \cdots & H_{N_x N_y} \end{bmatrix}_{N_x N_y \times N_x N_y}
\end{aligned}
\tag{ب.۷۰-۳}$$

$$\begin{aligned}
[L_{31}] &= a_{11} \frac{1}{\lambda_1} \times [A^x] \cdot \times \begin{bmatrix} F_1 & F_1 & \cdots & F_1 \\ F_2 & F_2 & \cdots & F_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F_{N_x N_y} & F_{N_x N_y} & \cdots & F_{N_x N_y} \end{bmatrix}_{N_x N_y \times N_x N_y} \\
&+ a_{12} \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1} \times [A^x] \cdot \times \begin{bmatrix} H_1 & H_1 & \cdots & H_1 \\ H_2 & H_2 & \cdots & H_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ H_{N_x N_y} & H_{N_x N_y} & \cdots & H_{N_x N_y} \end{bmatrix}_{N_x N_y \times N_x N_y} \\
&+ 2a_{66} \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1} \times [A^y] \cdot \times \begin{bmatrix} G_1 & G_1 & \cdots & G_1 \\ G_2 & G_2 & \cdots & G_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_{N_x N_y} & G_{N_x N_y} & \cdots & G_{N_x N_y} \end{bmatrix}_{N_x N_y \times N_x N_y}
\end{aligned}
\tag{ج.۷۰-۳}$$

$$\begin{aligned}
[L_{31}] &= a_{12} \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \times [A^y] \cdot \times \begin{bmatrix} F_1 & F_1 & \cdots & F_1 \\ F_2 & F_2 & \cdots & F_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F_{N_x N_y} & F_{N_x N_y} & \cdots & F_{N_x N_y} \end{bmatrix}_{N_x N_y \times N_x N_y} \quad (570-3) \\
&+ a_{22} \frac{\lambda_2^3}{\lambda_1} \times [A^y] \cdot \times \begin{bmatrix} H_1 & H_1 & \cdots & H_1 \\ H_2 & H_2 & \cdots & H_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ H_{N_x N_y} & H_{N_x N_y} & \cdots & H_{N_x N_y} \end{bmatrix}_{N_x N_y \times N_x N_y} \\
&+ 2a_{66} \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \times [A^x] \cdot \times \begin{bmatrix} G_1 & G_1 & \cdots & G_1 \\ G_2 & G_2 & \cdots & G_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_{N_x N_y} & G_{N_x N_y} & \cdots & G_{N_x N_y} \end{bmatrix}_{N_x N_y \times N_x N_y}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[M_{33}] &= a_{11} \frac{1}{2\lambda_1^2} \times [A^x] \cdot \times \begin{bmatrix} K_1 & K_1 & \cdots & K_1 \\ K_2 & K_2 & \cdots & K_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{N_x N_y} & K_{N_x N_y} & \cdots & K_{N_x N_y} \end{bmatrix}_{N_x N_y \times N_x N_y} \cdot \times \begin{bmatrix} F_1 & F_1 & \cdots & F_1 \\ F_2 & F_2 & \cdots & F_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F_{N_x N_y} & F_{N_x N_y} & \cdots & F_{N_x N_y} \end{bmatrix}_{N_x N_y \times N_x N_y} \quad (570-3) \\
&+ a_{12} \frac{\lambda_2^2}{2\lambda_1^2} \times [A^y] \cdot \times \begin{bmatrix} J_1 & J_1 & \cdots & J_1 \\ J_2 & J_2 & \cdots & J_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ J_{N_x N_y} & J_{N_x N_y} & \cdots & J_{N_x N_y} \end{bmatrix}_{N_x N_y \times N_x N_y} \cdot \times \begin{bmatrix} F_1 & F_1 & \cdots & F_1 \\ F_2 & F_2 & \cdots & F_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F_{N_x N_y} & F_{N_x N_y} & \cdots & F_{N_x N_y} \end{bmatrix}_{N_x N_y \times N_x N_y} \\
&+ a_{12} \frac{\lambda_2^2}{2\lambda_1^2} \times [A^x] \cdot \times \begin{bmatrix} K_1 & K_1 & \cdots & K_1 \\ K_2 & K_2 & \cdots & K_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{N_x N_y} & K_{N_x N_y} & \cdots & K_{N_x N_y} \end{bmatrix}_{N_x N_y \times N_x N_y} \cdot \times \begin{bmatrix} H_1 & H_1 & \cdots & H_1 \\ H_2 & H_2 & \cdots & H_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ H_{N_x N_y} & H_{N_x N_y} & \cdots & H_{N_x N_y} \end{bmatrix}_{N_x N_y \times N_x N_y} \\
&+ a_{22} \frac{\lambda_2^4}{2\lambda_1^2} \times [A^y] \cdot \times \begin{bmatrix} J_1 & J_1 & \cdots & J_1 \\ J_2 & J_2 & \cdots & J_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ J_{N_x N_y} & J_{N_x N_y} & \cdots & J_{N_x N_y} \end{bmatrix}_{N_x N_y \times N_x N_y} \cdot \times \begin{bmatrix} H_1 & H_1 & \cdots & H_1 \\ H_2 & H_2 & \cdots & H_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ H_{N_x N_y} & H_{N_x N_y} & \cdots & H_{N_x N_y} \end{bmatrix}_{N_x N_y \times N_x N_y} \\
&+ 2a_{66} \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \times [A^x] \cdot \times \begin{bmatrix} J_1 & J_1 & \cdots & J_1 \\ J_2 & J_2 & \cdots & J_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ J_{N_x N_y} & J_{N_x N_y} & \cdots & J_{N_x N_y} \end{bmatrix}_{N_x N_y \times N_x N_y} \cdot \times \begin{bmatrix} G_1 & G_1 & \cdots & G_1 \\ G_2 & G_2 & \cdots & G_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_{N_x N_y} & G_{N_x N_y} & \cdots & G_{N_x N_y} \end{bmatrix}_{N_x N_y \times N_x N_y}
\end{aligned}$$

که در آن‌ها:

$$K_i = \sum_{j=1}^{N_x N_y} A_{ij}^x w_j \quad (۳-۷۱الف)$$

$$F_i = \sum_{j=1}^{N_x N_y} B_{ij}^x w_j \quad (۳-۷۱ب)$$

$$J_i = \sum_{j=1}^{N_x N_y} A_{ij}^y w_j \quad (۳-۷۱ج)$$

$$H_i = \sum_{j=1}^{N_x N_y} B_{ij}^y w_j \quad (۳-۷۱د)$$

$$G_i = \sum_{j=1}^{N_x N_y} A_{ij}^{xy} w_j \quad (۳-۷۱هـ)$$

برای بازنویسی شرایط مرزی ساده حاکم بر ورق به فرم ماتریسی، به طور مشابه عمل شده است. با توجه به این که φ_y در لبه‌ی $(x=0,1)$ و φ_x در لبه‌ی $(y=0,1)$ صفر می‌شود، روابط $(۳-۵۸)$ به صورت زیر در نظر گرفته شده است.

شرایط مرزی ساده:

$$u_{1j} = v_{1j} = w_{1j} = \varphi_{y1j} = 0, \quad \sum_{m=1}^{N_x} C_{1m}^{(1)} \varphi_{xmj} = 0, \quad (x=0) \quad (۳-۷۲الف)$$

$$u_{N_x j} = v_{N_x j} = w_{N_x j} = \varphi_{yN_x j} = 0, \quad \sum_{m=1}^{N_x} C_{N_x m}^{(1)} \varphi_{xmj} = 0, \quad (x=1) \quad (۳-۷۲ب)$$

$$u_{i1} = v_{i1} = w_{i1} = \varphi_{xi1} = 0, \quad \sum_{n=1}^{N_y} C_{1n}^{(1)} \varphi_{yin} = 0, \quad (y=0) \quad (۳-۷۲ج)$$

$$u_{iN_y} = v_{iN_y} = w_{iN_y} = \varphi_{xiN_y} = 0, \quad \sum_{n=1}^{N_y} C_{N_y n}^{(1)} \varphi_{yin} = 0, \quad (y=1) \quad (۳-۷۲د)$$

همچنین در شرایط مرزی متحرک v و w صفر می‌شود، بنابراین در لبه‌ی $(x=0)$ روابط (۳-۵۹) به‌صورت زیر باز نویسی شده است:

$$v_{1j} = w_{1j} = \varphi_{y1j} = 0, \quad \sum_{m=1}^{N_x} C_{1m}^{(1)} \varphi_{xmj} = 0 \quad (۳-۷۳\text{الف})$$

$$\left[\sum_{m=1}^{N_1} C_{1m}^{(1)} u_{mj} + \frac{1}{2\lambda_1} \left(\sum_{m=1}^{N_1} C_{1m}^{(1)} w_{mj} \right)^2 \right] = 0 \quad (۳-۷۳\text{ب})$$

همچنین، از بازنویسی روابط (۳-۶۰) در لبه‌ی $(x=1)$ داریم:

$$v_{N_1j} = w_{N_1j} = \varphi_{yN_1j} = 0, \quad \sum_{m=1}^{N_x} C_{N_x m}^{(1)} \varphi_{xmj} = 0 \quad (۳-۷۴\text{الف})$$

$$\left[\sum_{m=1}^{N_1} C_{N_1 m}^{(1)} u_{mj} + \frac{1}{2\lambda_1} \left(\sum_{m=1}^{N_1} C_{N_1 m}^{(1)} w_{mj} \right)^2 \right] = 0 \quad (۳-۷۴\text{ب})$$

ماتریس‌های ضرایب وزنی در روابط (۳-۷۲) به کمک ضرب کرونیگر بازنویسی و به همراه فرم ماتریسی شرایط مرزی در پیوست ج شرح داده شده است.

۳-۱۱ - کمانش ورق‌های مدرج تابعی تقویت شده با نانوصفحه‌های گرافن

تعداد گره‌ها در راستای محورهای X و Y مساوی و برابر با N فرض شده است. با حذف عبارت‌های غیرخطی $(K_{NL1}$ و $K_{NL2})$ ، دستگاه ماتریسی غیرخطی مسئله به یک مسئله‌ی مقدار ویژه‌ی خطی تبدیل شده است، و با استفاده از آن دمای کمانش بحرانی و بار کمانش بحرانی محاسبه شده است. با حذف ماتریس‌های K_{NL1} ، K_{NL2} و K_P دستگاه ماتریسی به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$([K_L] - \Delta T [K_T]) \{d\} = 0 \quad (۳-۷۵)$$

با حل معادله‌ی فوق کوچکترین مقدار ویژه مثبت به‌عنوان دمای کمانش بحرانی به‌دست می‌آید. به‌طور مشابه برای محاسبه بار مکانیکی کمانش بحرانی با حذف ماتریس‌های K_{NL1} ، K_{NL2} و K_T داریم:

$$([K_L] - P [K_P]) \{d\} = 0 \quad (۳-۷۶)$$

کوچکترین مقدار ویژه به دست آمده از حل معادله بالا بار کمانش بحرانی است. در ادامه، با توجه به مقادیر بار کمانش بحرانی به دست آمده، دستگاه ماتریسی خطی مسئله به صورت زیر در نظر گرفته شده است و مجدد با حل مسئله‌ی مقدار ویژه‌ی خطی، مقادیر دمای کمانش بحرانی برای تغییرات بار به بار کمانش بحرانی محاسبه شده است.

$$([K_L] - P[K_P] - \Delta T[K_T])\{d\} = 0 \quad (77-3)$$

۳-۱۲ - پاسخ پس‌کمانشی ورق‌های مدرج تابعی تقویت شده با نانوصفحه‌های گرافن

با در نظر گرفتن ماتریس‌های غیرخطی (K_{NL1} و K_{NL2})، دستگاه معادلات ماتریسی غیرخطی حاکم بر ورق‌های چند لایه مدرج تابعی تحت تغییر دمای یکنواخت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$([K_L] - \Delta T[K_T] + [K_{NL1}] + [K_{NL2}])\{d\} = 0 \quad (78-3)$$

برای تعیین مسیرهای تعادل پس‌کمانش ورق، بردارهای ویژه‌ی (مد کمانش) متناظر با کوچکترین مقدار ویژه‌ی (دمای کمانش بحرانی) به دست آمده، به عنوان حدس‌های اولیه‌ی جابه‌جایی در تشکیل ماتریس $[K_{NL1}]$ و $[K_{NL2}]$ به کار گرفته می‌شوند. سپس، به کمک یک الگوی تکراری مسیرهای تعادل پس‌کمانش ورق ترسیم شده است.

همچنین برای تعیین مسیر پس‌کمانش مکانیکی با استفاده از رابطه (۷۹-۳) مراحل ذکر شده برای تعیین مسیر پس‌کمانش مکانیکی به طور مشابه طی می‌شود.

$$([K_L] - P[K_P] + [K_{NL1}] + [K_{NL2}])\{d\} = 0 \quad (79-3)$$

تمامی مراحل شرح داده شده، شامل محاسبه دما و بار کمانش بحرانی و تعیین مسیر تعادل پس‌کمانش حرارتی و مکانیکی در نرم‌افزار متلب کدنویسی شده است. در فصل آینده به ارائه نتایج حل عددی و بحث پیرامون آن‌ها خواهیم پرداخت.

فصل ۴ : بحث و نتایج

۱-۴ - مقدمه

در این فصل به ارائه نتایج حاصل از حل دستگاه معادلات دیفرانسیل حاکم بر ورق‌های چندلایه مدرج تابعی پرداخته شده است. ابتدا با مقایسه نتایج به‌دست آمده با دیگر پژوهش‌ها، صحت‌سنجی روش دیفرانسیل کوادریچر و مسیر تعادل پس‌کمانش ورق انجام شده است. سپس، به تحلیل و مقایسه بارها و دماهای کمانش بحرانی و مسیر تعادل پس‌کمانش حرارتی و مکانیکی و عوامل مؤثر بر آن پرداخته شده است.

۲-۴ - محاسبه حداقل تعداد لایه‌های ورق و گره‌های همگرا

ابتدا به بررسی همگرایی نتایج برای تعیین حداقل تعداد نقاط گرهی پرداخته شده است. تعداد گره‌ها در راستای محور x و y یکسان و برابر N در نظر گرفته شده است. انتظار می‌رود، با افزایش تعداد گره‌ها دقت نتایج بیشتر شود؛ اما مشاهده می‌شود، این مهم الزاماً به بالا بردن دقت نتایج پژوهش منجر نمی‌شود، بلکه در مواردی باعث واگرایی و انحراف نتایج می‌شود. همواره نتیجه‌ی مطلوب به‌ازای تعداد گره مشخصی حاصل می‌شود، و با افزایش تعداد گره‌ها از این مقدار همگرایی از بین می‌رود. در این پژوهش نیز به‌منظور یافتن حداقل تعداد نقاط گرهی نتایج برای تغییرات دمای کمانش بحرانی و تغییرات دمای پس‌کمانش برای ورق‌های ده لایه مدرج تابعی با آرایش لایه‌ای X و شرایط مرزی ساده در جدول ۱-۴ نشان داده شده است.

(w_c) بیشترین جابه‌جایی مرکزی بی‌بعد است و در جدول ۱-۴ برابر با یک در نظر گرفته شده است و مقادیر تغییرات دمای پس‌کمانش متناظر با آن نشان داده شده است.

جدول ۱-۴- نتایج همگرایی دما (کلوین) برای کمانش و پس‌کمانش ورق مربعی مدرج تابعی با تعداد نقاط گرهی متفاوت $(a/h = 25, W_{GPL} = 0.3\%, SSSS)$.

$N (N_L = 10)$	ΔT_{cr}	$\Delta T (w_c = 1)$
۵	۳۹/۵۷۱۶	۸۰/۴۰۳۹
۷	۴۰/۲۷۶۶	۸۲/۵۶۵۱
۹	۴۰/۲۶۱۲	۸۳/۰۴۵۷
۱۱	۴۰/۲۶۱۲	۸۲/۹۶۲۹
۱۳	۴۰/۲۶۱۴	۸۲/۹۷۰۲
۱۵	۴۰/۲۶۱۴	۸۲/۹۶۹۷
۱۷	۴۰/۲۶۱۴	۸۲/۹۶۹۷

همان‌طور که مشاهده می‌شود، فرض ۱۱ گره در راستای محور x و y ورق نتایج همگرایی مطلوبی دارد و با افزایش تعداد گره‌ها تغییرات محسوسی در دما ایجاد نمی‌شود. تعیین حداقل تعداد گره از جهت کاهش حجم محاسبات بسیار مورد توجه است.

همچنین، در مطالعه‌ی کماتش حرارتی ورق‌های چندلایه مشاهده می‌شود، با افزایش تعداد لایه‌های ورق از میزان مشخصی نتایج به‌دست آمده تغییرات قابل ملاحظه‌ای ندارند و با نتایج ورقی با تعداد لایه‌های بی‌نهایت تقریباً برابر است. در این مرحله نیز برای پیدا کردن حداقل تعداد لایه‌ها به‌طور مشابه عمل شده است، و تغییرات دمای کماتش بحرانی و تغییرات دمای پس‌کوماتش برای بیشترین جابه‌جایی مرکزی بی‌بعد برابر یک برای ورق‌هایی با آرایش لایه‌ای X و تعداد لایه‌های مختلف بررسی شده است. ورق با شرایط مرزی ساده و ۱۱ نقطه گرهی در هر راستا فرض شده است و نتایج به‌دست آمده در جدول ۴-۲ نشان داده شده است.

جدول ۴-۲- نتایج همگرایی دما (کلوین) برای کماتش و پس‌کوماتش ورق مربعی مدرج تابعی با تعداد

لایه‌های متفاوت ($a/h = 25, W_{GPL} = 0.3\%, SSSS$)

$N_L (N = 11)$	ΔT_{cr}	$\Delta T (w_c = 1)$
۶	۳۹/۶۹۰۲	۸۲/۳۶۵۸
۱۰	۴۰/۲۶۱۴	۸۲/۹۶۲۹
۲۰	۴۰/۵۰۲۳	۸۳/۲۱۴۵
۳۰	۴۰/۵۴۶۹	۸۳/۲۶۱۱
۴۰	۴۰/۵۶۲۵	۸۳/۲۷۷۴
۵۰	۴۰/۵۶۹۷	۸۳/۲۸۴۹
$+\infty$	۴۰/۵۸۲۶	۸۳/۲۹۸۳

از مقایسه نتایج ورقی با ده لایه و ورقی با تعداد لایه‌های بی‌نهایت مشاهده می‌گردد اختلاف این نتایج ناچیز و قابل چشم‌پوشی است، بنابراین انتخاب ورقی با ده لایه برای مطالعه نتایج، همگرایی و دقت مناسبی دارد.

۴-۳ - صحت‌سنجی روش دیفرانسیل کوادریچر

به‌منظور بررسی عملکرد و روش دیفرانسیل کوادریچر در نظر گرفته شده و بررسی صحت کد نوشته شده در نرم‌افزار متلب مقادیر پارامتر دمای بحرانی (λ_{Tcr}) به‌دست آمده از پژوهش حاضر، با مرجع [۳۰]، و [۲۷]، برای ورق همسانگردی مقایسه شده است.

λ_{Tcr} معرف پارامتر دمای بحرانی است و به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\lambda_{Tcr} = 10^3 \alpha \Delta T_{cr} \quad (۱-۴)$$

رفتار کمانش حرارتی ورق همسانگرد مربعی در مرجع [۳۰] با روش بدون مش کریگینگ محلی و در مرجع [۲۷] به کمک روش بدون المان ریتز مطالعه شده است. نتایج این مقایسه در جدول ۳-۴ آورده شده است.

جدول ۳-۴ - مقایسه نتایج پارامتر دمای بحرانی برای ورق همسانگرد ($a/b=1$)			
منابع	$a/h=10$	$a/h=20$	$a/h=100$
پژوهش حاضر (DQ)	۱۱/۹۷۷۸	۳/۱۱۹۴	۰/۱۲۶۵
ژانگ و همکاران (کریگینگ) [۳۰]	۱۱/۹۹۹	۳/۱۲۳	۰/۱۲۷۲
ژائو و همکاران (ریتز) [۲۷]	۱۱/۸۳	۳/۰۸۹	۰/۱۲۷۱

ورق همسانگرد مربعی با شرایط مرزی ساده و خواص مکانیکی مطابق جدول ۴-۴ در نظر گرفته شده است.

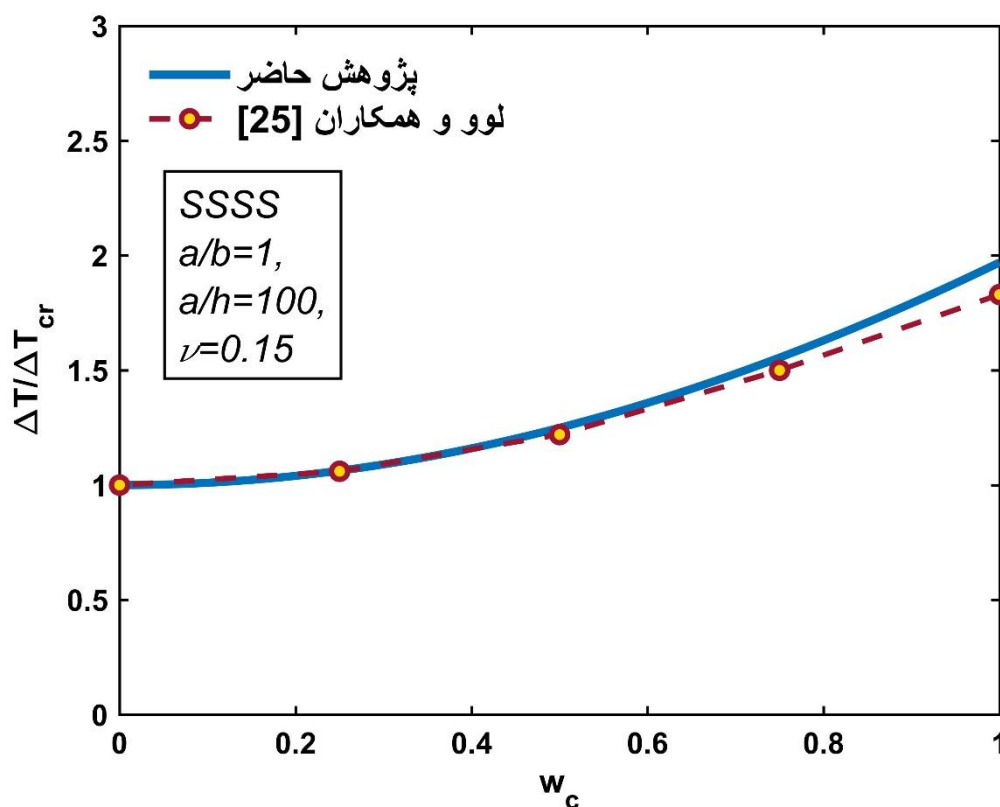
جدول ۴-۴ - خواص در نظر گرفته شده برای ورق همسانگرد [۲۷]

خواص ورق همسانگرد	
ضریب پواسون	۰/۳
ضریب انبساط حرارتی ($\times 10^{-6} / K$)	۱/۰

از مقایسه نتایج برای نسبت طول به ضخامت‌های متفاوت می‌توان مشاهده کرد نتایج به‌دست آمده از پژوهش حاضر تطابق مناسبی با سایر مطالعات دارد.

۴-۴ - صحت‌سنجی مسیر تعادل پس‌کمانش

در ادامه به بررسی مسیر تعادلی پس‌کمانش و صحت الگوی تکرار نوشته شده در نرم‌افزار متلب پرداخته شده است و نتایج به‌دست آمده با مرجع [۲۵] مقایسه شده است به‌منظور نمایش دقیق‌تر، مسیر تعادل پس‌کمانش حرارتی ورق همسانگردی تحت تغییر دمای یکنواخت و شرایط مرزی ساده در شکل ۱-۴ رسم شده است.



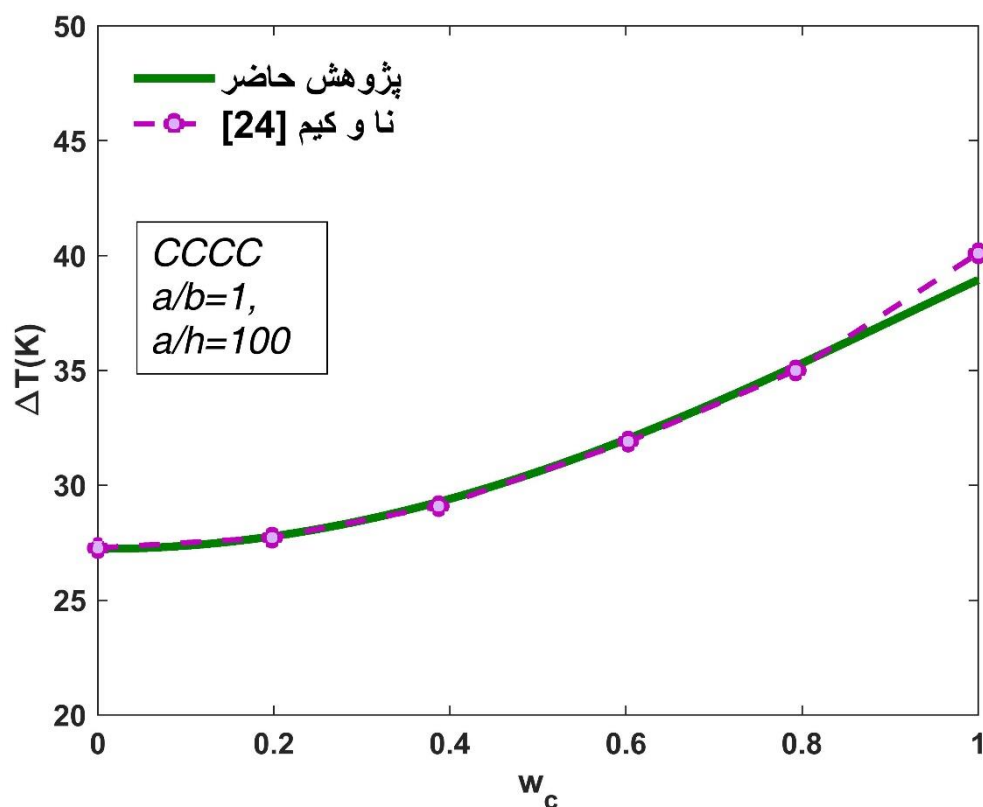
شکل ۴-۱- مقایسه مسیر تعادل پس کمانش برای ورق همسانگرد تحت تغییر دمای یکنواخت و شرایط مرزی ساده.

واضح است، نمودار بالا مسیر تعادل ثانویه ورق را نشان می‌دهد، که ورق بعد از نقطه‌ی انشعاب یا دوشاخگی طی می‌کند.

همچنین، در مقایسه‌ای دیگر مسیر تعادل پس کمانش برای ورق مربعی از جنس نیکل با خواص مکانیکی مطابق جدول ۴-۵ تحت تغییرات دمای یکنواخت و شرایط مرزی گیردار در شکل ۴-۲ ترسیم شده است و نتایج به‌دست آمده با مرجع [۲۴] مقایسه شده است.

جدول ۴-۵- خواص نیکل در نظر گرفته [۲۴].

خواص مکانیکی نیکل	
مدول یانگ (GPa)	۱۹۹/۵
ضریب پواسون	۰/۳
ضریب انبساط حرارتی ($\times 10^{-6} / K$)	۱۳/۳



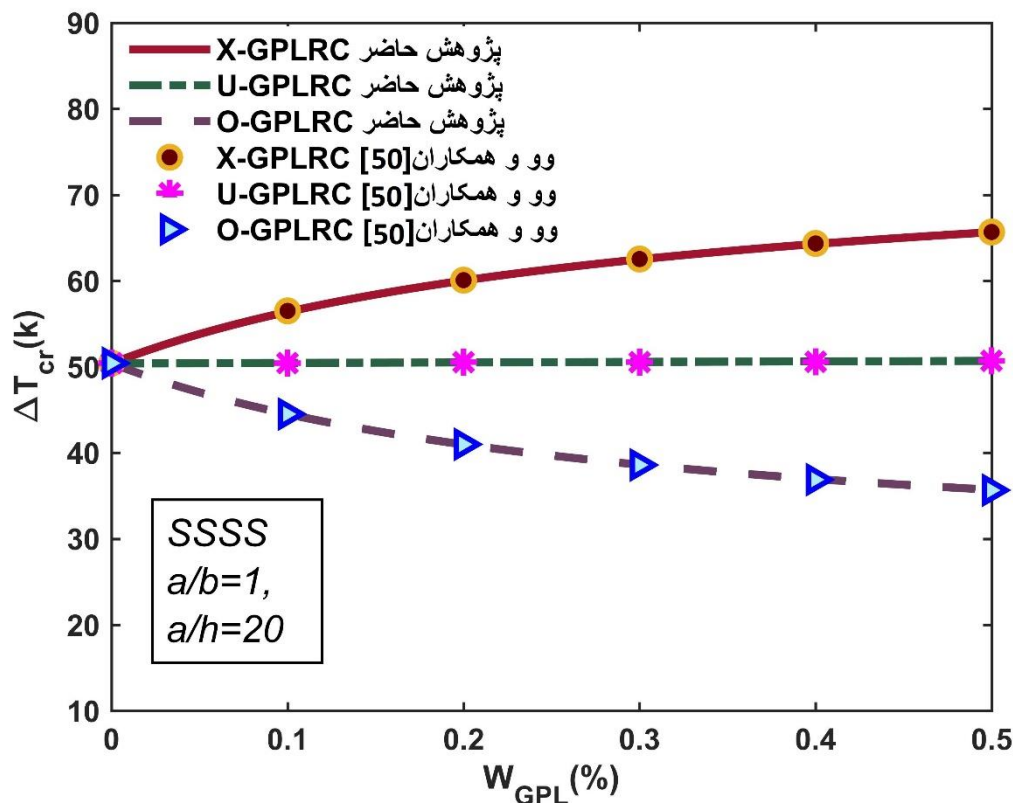
شکل ۴-۲- مقایسه مسیر تعادل پس کمانش برای ورق نیکل تحت تغییر دمای یکنواخت و شرایط مرزی گیردار

۴-۵ - بررسی تأثیر درصد وزنی و الگوی توزیع تقویت کننده‌ها بر دمای کمانش بحرانی

به منظور اعتبارسنجی پژوهش حاضر نتایج به دست آمده، با نتایج مرجع [۵۰] در شکل ۴-۳ مقایسه شده است.

نتایج نشان می‌دهد که با توجه به نوع آرایش تقویت کننده‌ها با افزایش کسر وزنی آن‌ها دمای کمانش بحرانی می‌تواند بدون تغییر، افزایشی و یا کاهشی باشد. انتظار می‌رود با تقویت مدرج تابعی ورق‌ها با توجه به بهبود خواص مکانیکی دمای کمانش بحرانی آن‌ها افزایش یابد، اما همان‌طور که در شکل ۴-۳ مشاهده می‌گردد، توزیع مدرج تابعی تقویت کننده الزاماً، منجر به افزایش دمای کمانش بحرانی نمی‌شود. در ورق‌هایی با آرایش تقویت کننده به شکل X با توجه به این که، مقدار تقویت کننده‌ها در لایه‌های سطحی بیشتر است، این لایه‌ها سفتی خمشی بالاتری دارند، به همین علت با افزایش کسر وزنی تقویت کننده‌ها دمای کمانش بحرانی افزایش می‌یابد، در صورتی که در ورق‌هایی با آرایش تقویت کننده به شکل O به طور معکوس عمل کرده و دمای کمانش بحرانی کاهش می‌یابد. همچنین، با افزایش کسر

وزنی تقویت کننده‌ها شیب تغییرات دمای کمانش بحرانی کم می‌شود. از طرفی، مشاهده می‌شود افزایش کسر وزنی تقویت کننده‌ها در ورق با توزیع یکنواخت بی‌اثر است و دمای کمانش بحرانی تقریباً ثابت باقی می‌ماند.



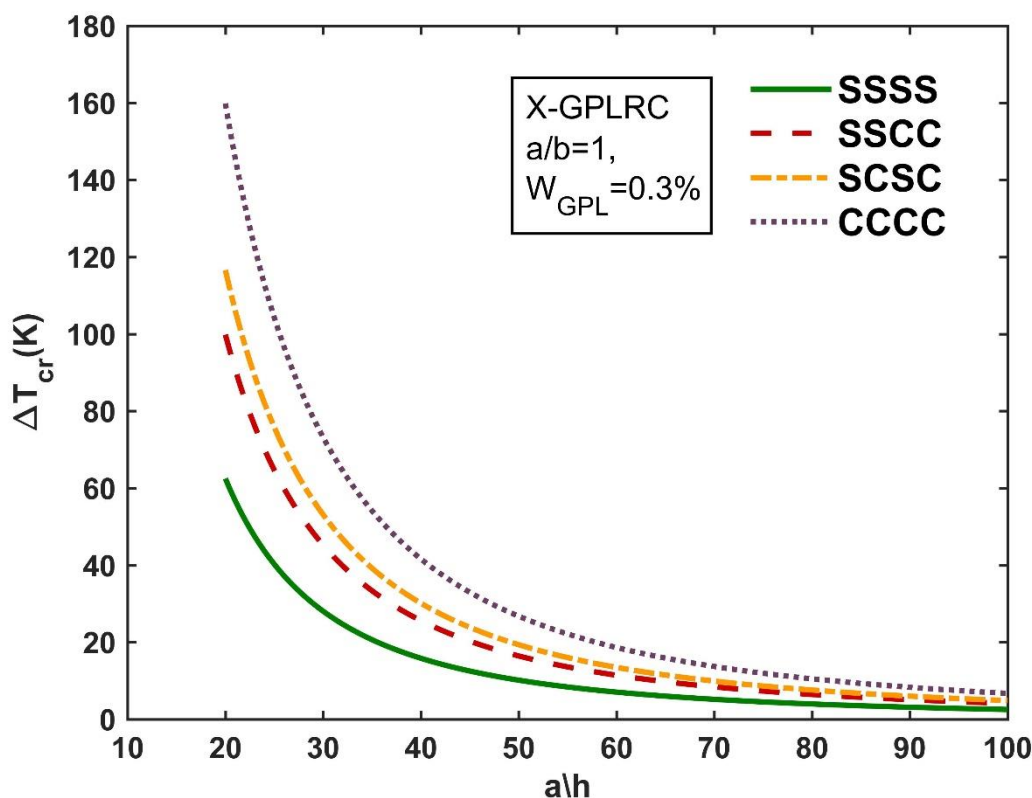
شکل ۴-۳- مقایسه مقادیر دمای کمانش بحرانی در مقابل تغییرات درصد وزنی تقویت کننده‌ها برای ورق‌های مربعی مدرج تابعی با آرایش تقویت کننده متفاوت و شرایط مرزی چهار طرف ساده

۴-۶- تأثیر نسبت ابعادی ورق بر دمای کمانش بحرانی

حال پس از اطمینان صحت روش دیفرانسیل کوادریچر و کدنویسی‌های انجام شده، به بررسی تأثیر نسبت طول به ضخامت و نسبت‌های ابعادی ورق بر دمای کمانش بحرانی پرداخته شده است. ابتدا، به مقایسه‌ی تأثیر تغییرات نسبت طول به ضخامت ورق بر دمای کمانش بحرانی پرداخته شده است. این مقایسه در نمودارهای شکل ۴-۴ برای ورق‌هایی با آرایش تقویت کننده به صورت X و با چهار شرایط مرزی: چهار طرف گیردار (CCCC)، چهار طرف ساده (SSSS)، ساده-گیردار-گیردار (SSCC) و ساده-گیردار-ساده-گیردار (CSCS) نشان داده شده است، و تغییرات نسبت طول به ضخامت و تأثیر آن بر دمای کمانش بحرانی نمایش داده شده است. در ورق‌هایی با شرایط مرزی چهار طرف گیردار، گشتاورهای خمشی عکس‌العمل تکیه‌گاهی در برابر

گشتاورهای خمشی اعمالی مقاومت می‌کنند و بالاترین مقادیر دمای کمانش بحرانی را دارا هستند و تا دماهای بالاتری در برابر کمانش مقاومت می‌کنند، به تبع آن با توجه به شرایط مرزی و عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی، به ترتیب پس از آن ورق‌هایی با شرایط مرزی: ساده-ساده-گیردار-گیردار، ساده-گیردار-ساده-گیردار و چهار طرف ساده قرار می‌گیرند.

همچنین، نتایج نشان می‌دهد در ورق‌هایی با نسبت طول به ضخامت بیشتر دمای کمانش بحرانی کمتر است، با افزایش ضخامت ورق یا کاهش ابعادی آن دمای کمانش بحرانی افزایش می‌یابد. نتایج مشابه‌ای در مراجع [۲۳، ۲۴، ۴۱] گزارش شده است.



شکل ۴-۴- مقادیر دمای کمانش بحرانی در مقابل تغییرات نسبت طول به ضخامت برای ورق مربعی مدرج تابعی تقویت شده به شکل X با شرایط مرزی متفاوت

در جدول ۴-۶ دمای کمانش بحرانی برای ورق‌های مدرج تابعی و شرایط مرزی چهار طرف ساده بیان شده است. تأثیر تغییرات نسبت‌های ابعادی و نسبت‌های طول به ضخامت برای الگوهای توزیع متفاوت تقویت‌کننده نشان داده شده است.

همان‌طور که مشاهده می‌گردد، با تغییر نسبت‌های طول به ضخامت از ۲۵ به ۴۵ دمای کمانش بحرانی به‌طور چشم‌گیری کاهش می‌یابد، اما در مقابل با افزایش نسبت‌های ابعادی دمای کمانش بحرانی افزایش می‌یابد، و نشان می‌دهد با تغییر شکل ورق از مربع به مستطیل میزان تحمل دمای کمانش بحرانی ورق‌ها افزایش پیدا کرده است.

جدول ۴-۶- مقایسه دمای کمانش بحرانی ورق‌های مدرج تابعی با شرایط مرزی ساده و کسر وزنی تقویت‌کننده ۰/۳ درصد

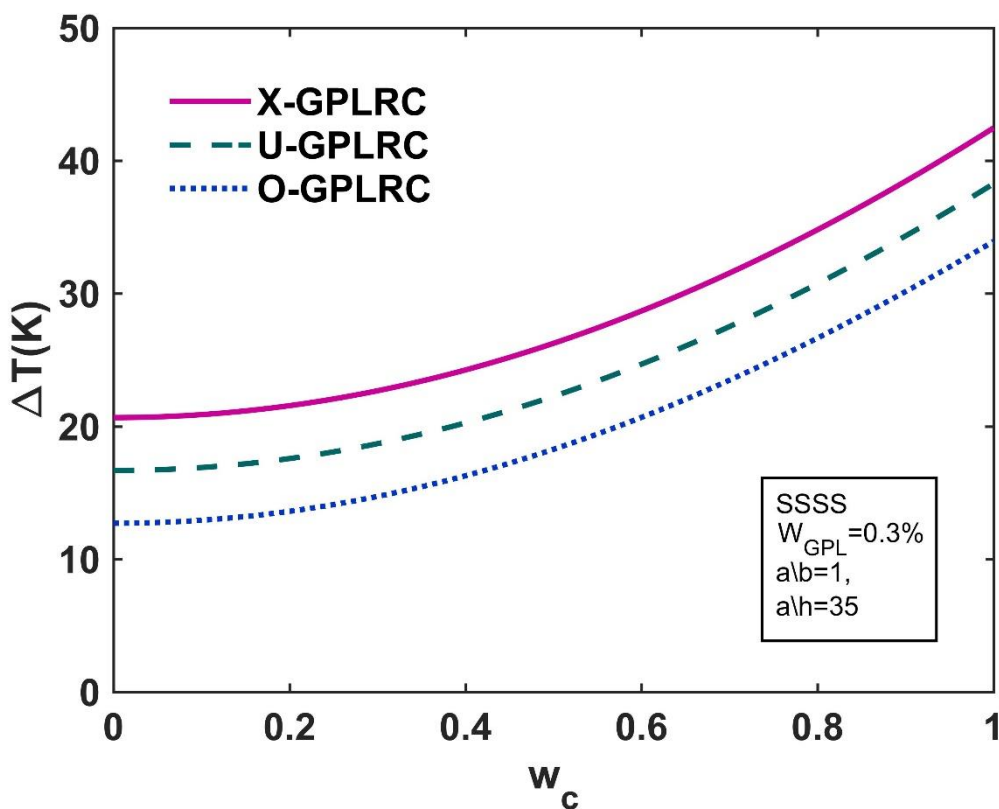
الگوی توزیع	$a/b = 1$			$a/b = 1.5$			$a/b = 2$		
	$a/h = 25$	$a/h = 35$	$a/h = 45$	$a/h = 25$	$a/h = 35$	$a/h = 45$	$a/h = 25$	$a/h = 35$	$a/h = 45$
X-GPL	۴۰/۲۶۱۴	۲۰/۶۶۰۰	۱۲/۵۲۸۰	۶۴/۹۴۹۳	۳۳/۴۴۶۹	۲۰/۳۱۱۴	۹۸/۹۱۵۶	۵۱/۱۸۸۶	۳۱/۱۴۹۲
U-GPL	۳۲/۵۳۸۶	۱۶/۶۷۸۷	۱۰/۱۰۹۰	۵۲/۵۶۴۰	۲۷/۰۲۰۹	۱۶/۳۹۶۹	۸۰/۲۰۶۸	۴۱/۳۹۵۳	۲۵/۱۶۱۴
O-GPL	۲۴/۸۱۷۳	۱۲/۷۰۶۸	۷/۶۹۸۱	۴۰/۱۴۶۹	۲۰/۶۰۱۰	۱۲/۴۹۱۹	۶۱/۳۷۸۴	۳۱/۵۹۱۸	۱۹/۱۸۰۷

۴-۷ - مقایسه الگوی توزیع تقویت‌کننده‌ها بر مسیر تعادل پس‌کمانش حرارتی

حال پس از حل مسائل مقدار ویژه و بررسی دمای کمانش بحرانی، با در نظر گرفتن ماتریس‌های غیرخطی (K_{NL1} و K_{NL2})، به بررسی مسیرهای تعادل پس‌کمانش پرداخته شده است.

در ابتدا، به مقایسه ورق‌هایی با الگوهای توزیع تقویت‌کننده متفاوت و تأثیر آن بر مسیر پس‌کمانش حرارتی نانوورق‌های مدرج تابعی پرداخته شده است، و تغییرات دمای پس‌کمانش برحسب بیشترین جابه‌جایی مرکزی بی‌بعد برای ورق‌های مربعی با شرایط مرزی چهار طرف ساده و نسبت طول به ضخامت ۳۵ در شکل ۴-۵ نشان داده شده است.

در این‌جا نیز به‌طور مشابه با دمای کمانش بحرانی مشاهده می‌شود، در ورق‌هایی با آرایش تقویت‌کننده به‌صورت X با توجه به این‌که، کسر حجمی تقویت‌کننده‌ها در لایه‌های سطحی بیشتر است و ورق‌ها استحکام خمشی بالاتری دارند، دمای کمانش بحرانی در آن‌ها بیشتر است و به‌تبع آن مسیر تعادل پس‌کمانش بالاتر از سایر الگوهای توزیع تقویت‌کننده قرار می‌گیرد. همچنین، در ورق‌هایی با آرایش تقویت‌کننده به‌صورت O لایه‌های میانی کسر حجمی تقویت‌کننده بیشتری دارند و دمای کمانش بحرانی در آن‌ها کمتر است. ورق‌هایی با آرایش تقویت‌کننده به‌صورت O به ازای تغییرات دمای یکسان جابه‌جایی مرکزی بی‌بعد بیشتری نسبت به سایر الگوهای توزیع تقویت‌کننده دارند.

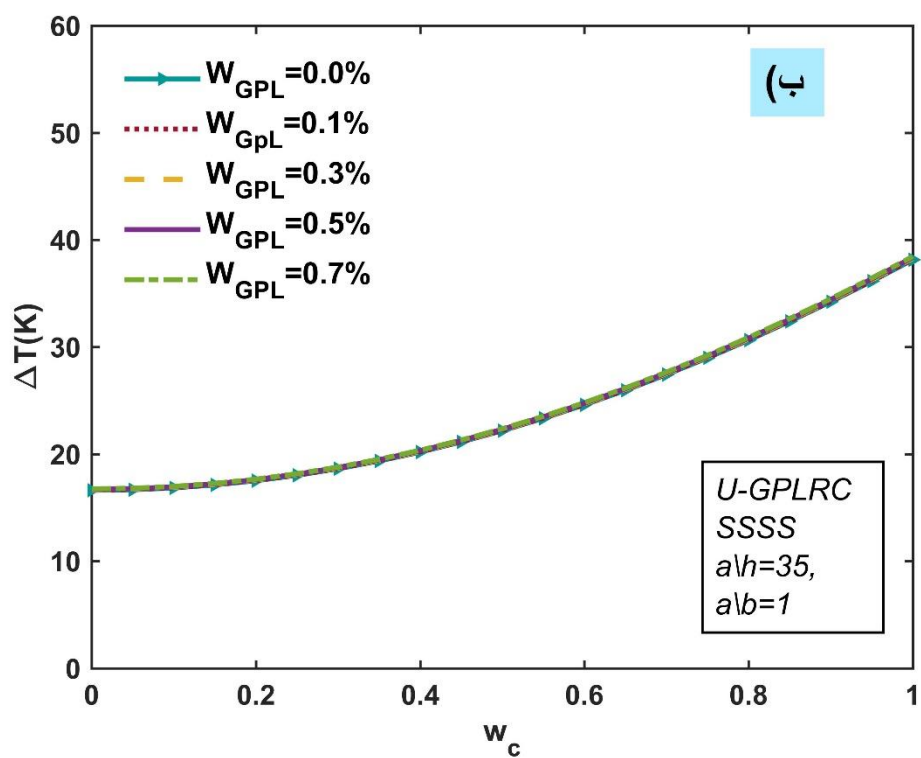
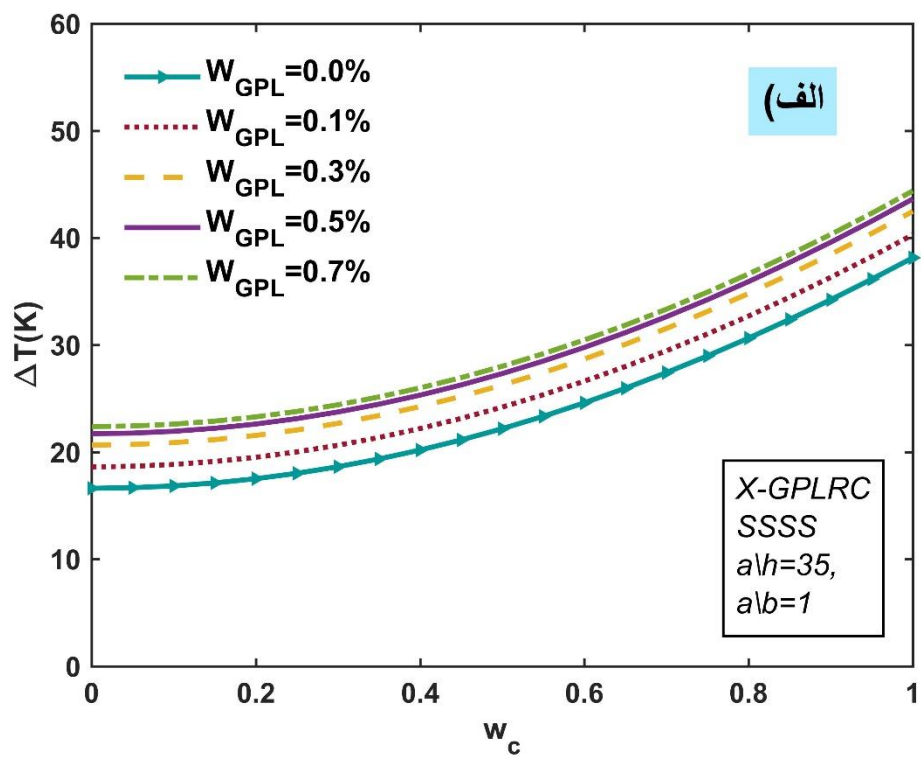


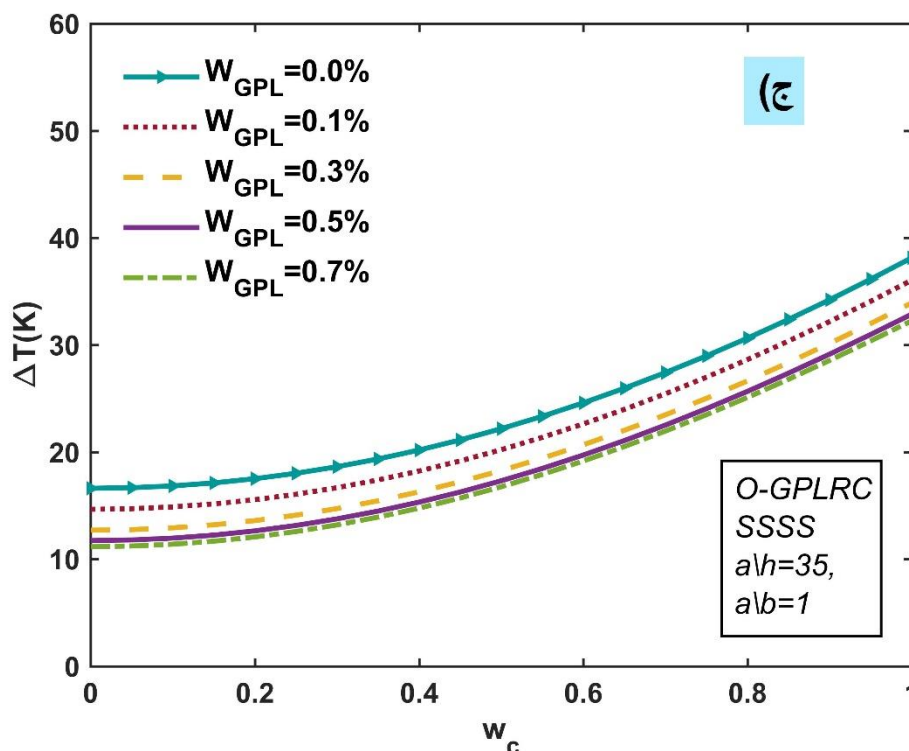
شکل ۴-۵- مسیر تعادل پس کمانش حرارتی برای ورق مربعی مدرج تابعی با شرایط مرزی چهار طرف ساده و آرایش تقویت کننده متفاوت با کسر وزنی تقویت کننده ۰/۳ درصد

۴-۸ - تأثیر درصد وزنی تقویت کننده ها بر مسیر تعادل پس کمانش حرارتی

در اقدام بعدی، تغییرات مسیر تعادل پس کمانش ورق های مدرج تابعی با افزایش درصد وزنی تقویت کننده مورد مطالعه قرار گرفته است. ورق ها مربعی، تحت شرایط مرزی ساده با نسبت طول به ضخامت ۳۵ فرض شده است. مسیر تعادل پس کمانش برای ورق های مدرج تابعی با ۰/۱، ۰/۳، ۰/۵ و ۰/۷ درصد وزنی تقویت کننده و اپوکسی خالص در شکل ۴-۶ نشان داده شده است.

مشاهده می شود، با افزایش درصد وزنی تقویت کننده ها در ورق هایی با آرایش تقویت کننده به شکل X، مدول یانگ مؤثر و به دنبال آن مؤلفه های سفتی در لایه های سطحی افزایش یافته است، در نتیجه مقاومت پس کمانش حرارتی ورق ها افزایش می یابد، این تغییرات در ورق هایی با آرایش تقویت کننده به شکل O معکوس است و مقاومت پس کمانش حرارتی ورق ها کاهش می یابد. تغییرات در ورق هایی با آرایش تقویت کننده به شکل U به صورت یکنواخت صورت می گیرد و افزایش درصد وزنی تقویت کننده ها بر مسیر پس کمانش حرارتی ورق ها اثری ندارد و ثابت باقی می ماند.





شکل ۴-۶- مقایسه اثر تغییرات درصد وزنی تقویت کننده‌ها بر مسیر تعادل پس کمانش ورق‌های چندلایه
مدرج تابعی الف) آرایش تقویت کننده‌ها به شکل X ب) آرایش تقویت کننده‌ها به شکل U ج) آرایش
تقویت کننده‌ها به شکل O

۴-۹- تأثیر نسبت‌های ابعادی و نسبت طول به ضخامت نانوصفحه‌های گرافن تقویت کننده بر مسیر تعادل پس کمانش

در مقایسه‌ای دیگر اثر تغییرات نسبت طول به ضخامت نانوصفحه‌های گرافن بر مسیر تعادل پس کمانش بررسی شده است. در این جا نیز نتایج نشان می‌دهد، تأثیر تغییرات نسبت طول به ضخامت نانوصفحه‌های گرافن به نوع آرایش تقویت کننده‌ها بستگی دارد و بر مسیر تعادل پس کمانش حرارتی ورق‌های مدرج تابعی مؤثر است.

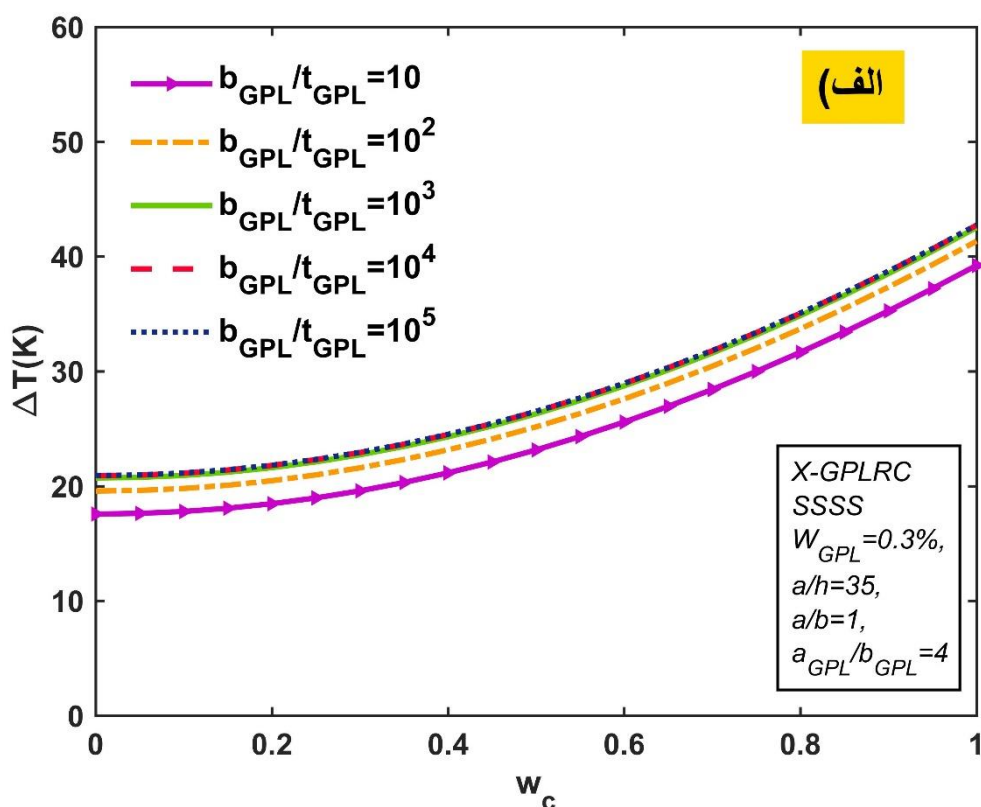
با توجه به تأثیر نسبت ابعادی و نسبت طول به ضخامت نانوصفحه‌های گرافن بر مدول یانگ مؤثر ورق‌ها، در ورق‌هایی با آرایش تقویت کننده به شکل X با افزایش نسبت طول به ضخامت نانوصفحه‌های گرافن مدول یانگ مؤثر در لایه‌های سطحی افزایش یافته، و به تبع آن مؤلفه‌های سفتی و مقاومت پس کمانشی ورق‌ها افزایش می‌یابد؛ در ورق‌هایی با آرایش تقویت کننده به شکل O نیز با افزایش نسبت طول به ضخامت نانوصفحه‌های گرافن به‌طور معکوس عمل کرده و مدول یانگ مؤثر در لایه‌های میانی افزایش می‌یابد، و مقاومت پس کمانشی ورق‌ها کمتر می‌شود.

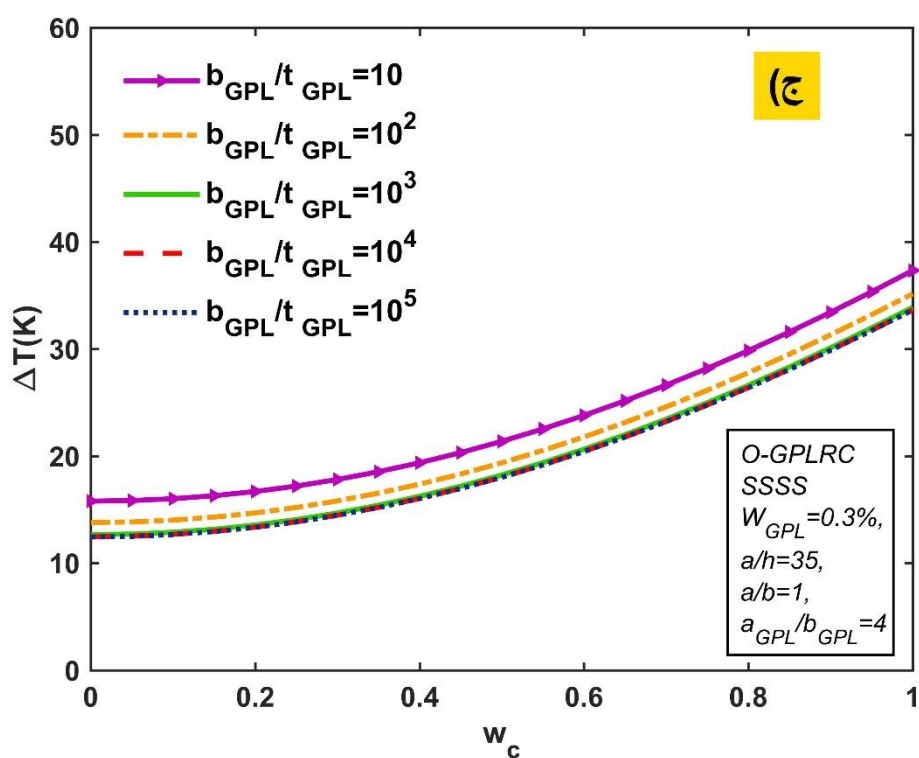
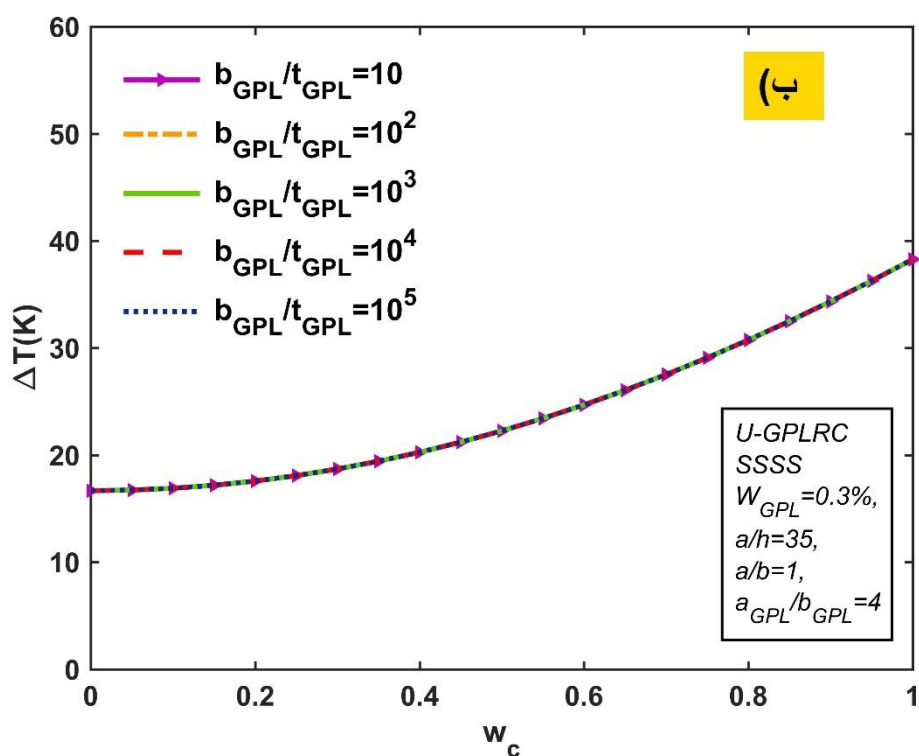
در ورق‌هایی با آرایش تقویت کننده به شکل U با توجه به توزیع یکنواخت تقویت کننده‌ها مقادیر

مدول یانگ مؤثر برای همه لایه‌های ورق یکسان و با افزایش نسبت طول به ضخامت نانوصفحه‌های گرافن، مؤلفه‌های سفتی نیز به‌طور یکنواخت تغییر می‌کند، به همین دلیل مسیر تعادل پس‌کمانش برای این ورق‌ها یکسان است و افزایش نسبت طول به ضخامت نانوصفحه‌های گرافن تأثیری بر مقاومت پس‌کمانشی ورق‌ها ندارد.

مسیر تعادل پس‌کمانش برای ورق‌های مدرج تابعی تقویت شده با نانوصفحه‌های گرافنی با نسبت ابعادی برابر ۴ در شکل ۴-۷ ترسیم شده است. ورق‌ها با نسبت طول به ضخامت ۳۵ با شرایط مرزی ساده و ۰/۳ درصد وزنی تقویت‌کننده فرض شده است.

نتایج نشان می‌دهد، تغییرات مسیر تعادل پس‌کمانش برای مقادیر نسبت طول به ضخامت نانوصفحه‌های گرافن بالاتر از ۱۰۰۰ بسیار کم است. روابط نیز نشان می‌دهند، برای ضخامت‌های نانوصفحه‌های گرافن بیشتر از ۱۰۰۰ تغییرات مدول یانگ مؤثر بسیار کم است، و در نتیجه افزایش مؤلفه‌های سفتی ورق نیز بسیار ناچیز است.

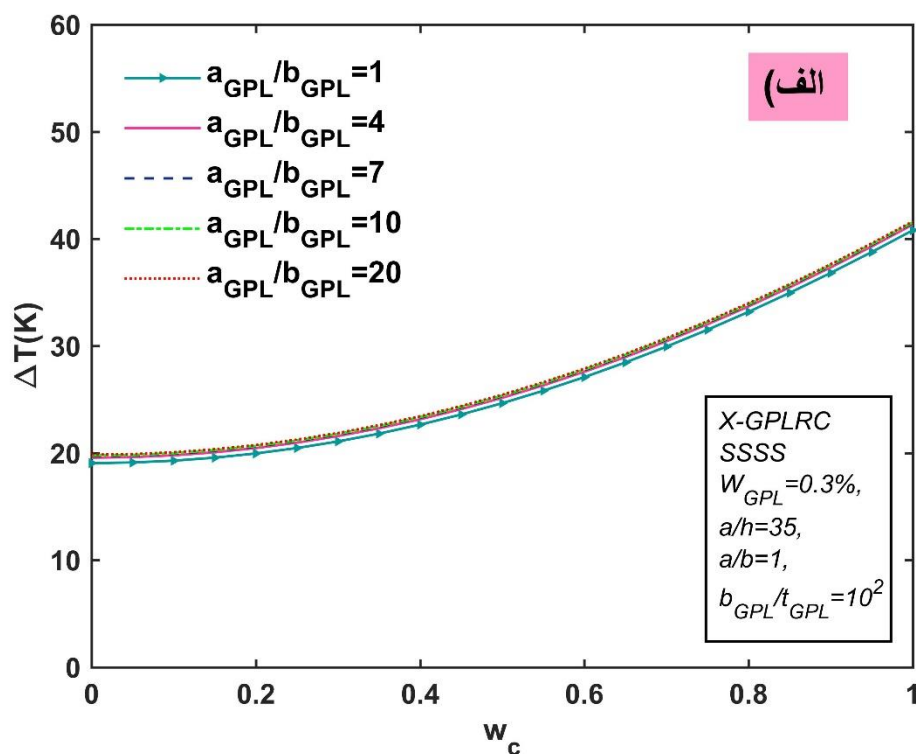


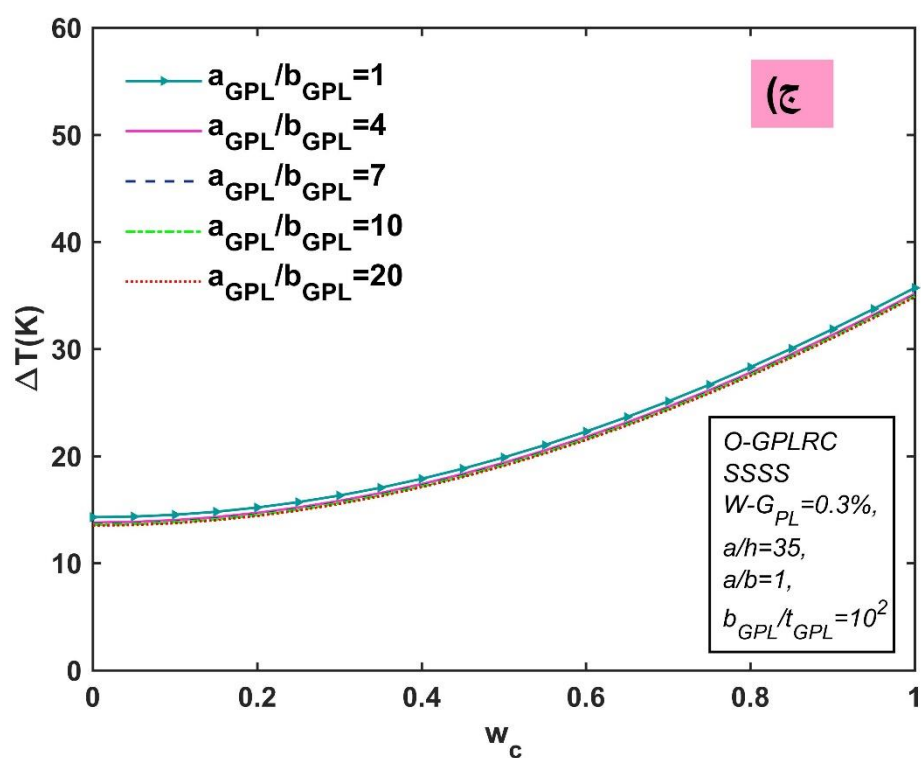
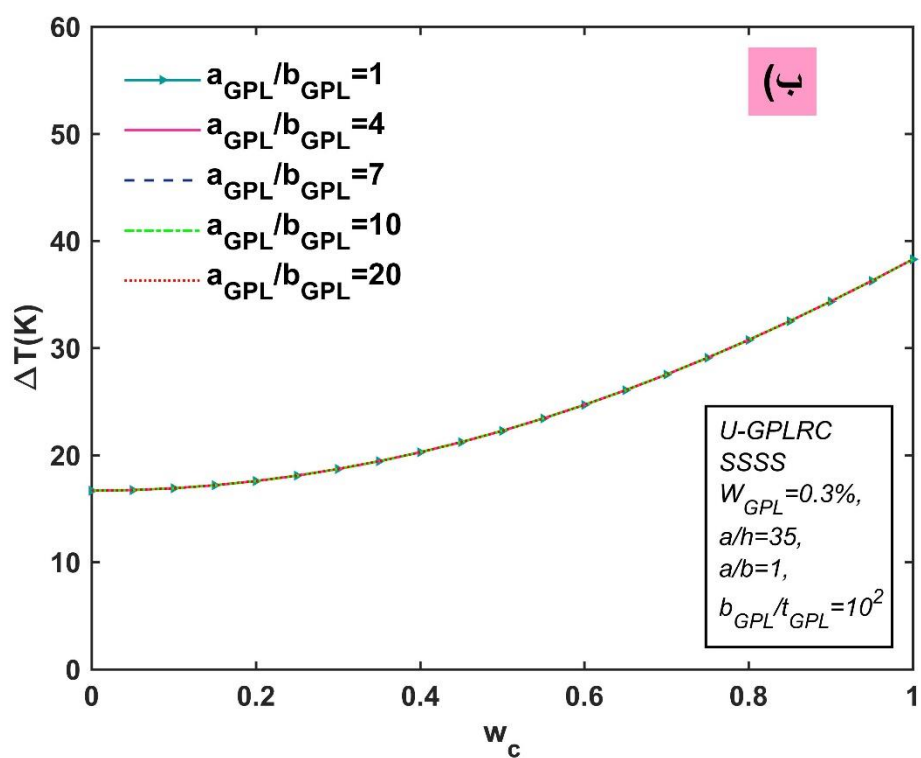


شکل ۷-۴- تأثیر تغییرات نسبت‌های طول به ضخامت نانوصفحه‌های گرافن تقویت‌کننده بر مسیر تعادل پس‌کمانش ورق‌های چندلایه مدرج تابعی الف) آرایش تقویت‌کننده‌ها به شکل X (ب) آرایش تقویت‌کننده‌ها به شکل U (ج) آرایش تقویت‌کننده‌ها به شکل O

تغییرات مسیر تعادل پس‌کمانش برای ورق‌های مدرج تابعی تقویت شده با نانوصفحه‌های گرافن با نسبت طول به ضخامت ۱۰۰ و نسبت‌های ابعادی ۱، ۴، ۷، ۱۰ و ۲۰ و در شکل ۴-۸ نشان داده شده است. ورق‌ها تحت شرایط مرزی ساده با نسبت طول به ضخامت ۳۵ و درصد وزنی ۰/۳ تقویت‌کننده و در نظر گرفته شده است.

در این‌جا نیز به‌طور مشابه نتایج نشان می‌دهد، در ورق‌هایی با توزیع یکنواخت تقویت‌کننده‌ها تغییرات نسبت ابعادی نانوصفحه‌های گرافن بر مسیر تعادل پس‌کمانش اثری ندارد و مسیر تعادل پس‌کمانش ثابت باقی می‌ماند، اما در ورق‌هایی با آرایش تقویت‌کننده به شکل X با افزایش نسبت ابعادی نانوصفحه‌های گرافن، مقاومت پس‌کمانشی ورق‌ها افزایش یافته و مسیرهای تعادل پس‌کمانشی بالاتر قرار می‌گیرند، و در ورق‌هایی با آرایش تقویت‌کننده به شکل O با افزایش نسبت ابعادی نانوصفحه‌های گرافن، مقاومت پس‌کمانشی ورق‌ها کمتر شده است و نمودارها پایین‌تر قرار می‌گیرند. از طرفی مشاهده می‌شود، برای نسبت ابعادی نانوصفحه‌های گرافن بالاتر از ۴ این تغییرات در تمامی الگوهای توزیع تقویت‌کننده تغییرات بسیار کمی داشته و تقریباً ثابت باقی می‌ماند. نتایج به‌دست آمده از مرجع [۳۹] نیز مشابه با نتایج حاضر است.

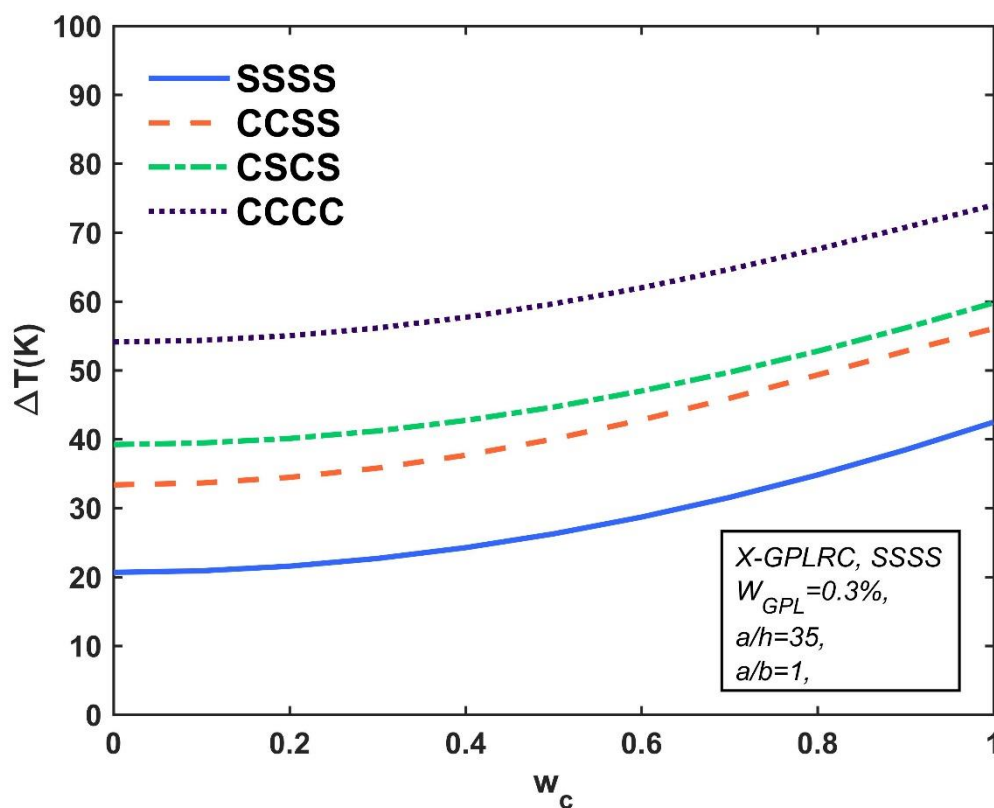




شکل ۸-۴- اثر تغییرات نسبت‌های ابعادی نانوصفحه‌های گرافن تقویت‌کننده بر مسیر تعادل پس‌کمانش ورق‌های چندلایه مدرج تابعی الف) آرایش تقویت‌کننده‌ها به شکل X ب) آرایش تقویت‌کننده‌ها به شکل U ج) آرایش تقویت‌کننده‌ها به شکل O

۴-۱۰ - تأثیر شرایط مرزی بر مسیر تعادل پس‌کمانش حرارتی

در شکل ۴-۹ مسیر تعادل پس‌کمانش برای ورق‌هایی با آرایش تقویت‌کننده به شکل X با شرایط مرزی متفاوت و نسبت طول به ضخامت ۳۵ بررسی شده است. همان‌طور که انتظار می‌رود، مشاهده می‌شود ورق با شرایط مرزی چهار طرف ساده دارای مقاومت حرارتی پس‌کمانش کمتری است، و به ترتیب پس از آن ورق با شرایط مرزی ساده-ساده-گیردار-گیردار، ساده-گیردار-ساده-گیردار و چهار طرف گیردار قرار می‌گیرند و مقاومت پس‌کمانش بیشتری دارند.



شکل ۴-۹ - مسیر تعادل پس‌کمانش حرارتی برای ورق‌های مربعی مدرج تابعی با شرایط مرزی متفاوت.

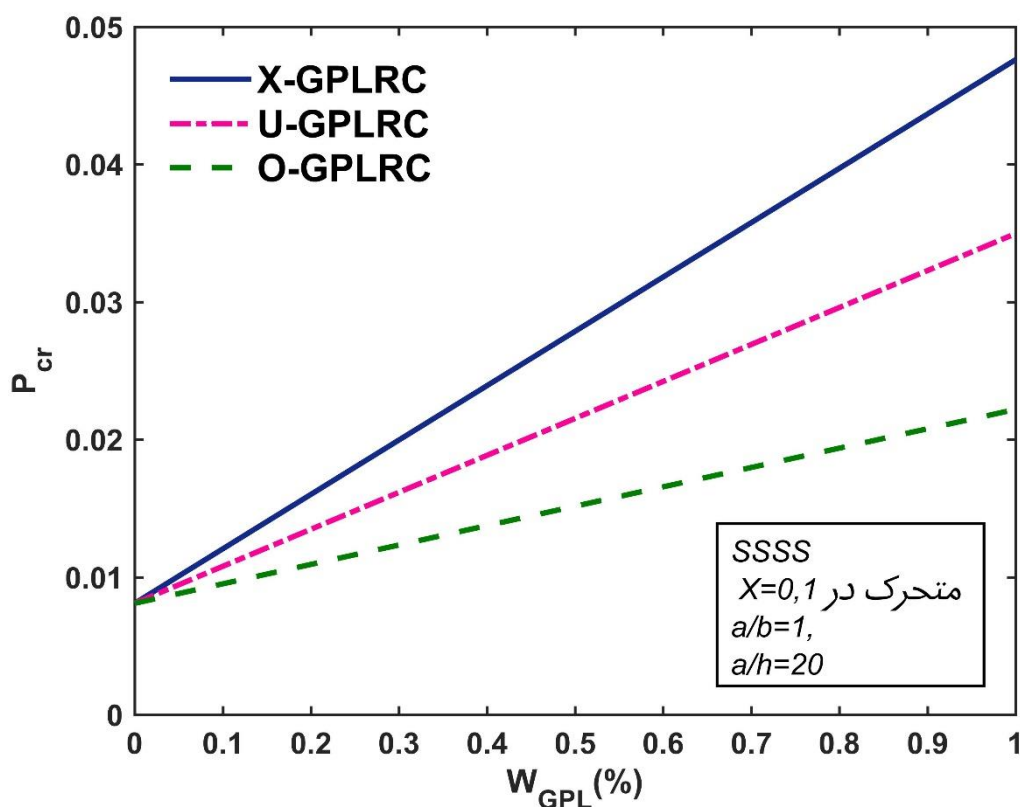
۴-۱۱ - اثر تغییرات درصد وزنی تقویت‌کننده‌ها بر بار کمانش بحرانی

سپس، در ادامه مطالعه‌ی کمانش ورق‌های مدرج تابعی تقویت شده نانوصفحه‌های گرافن با حل مسئله مقدار ویژه به بررسی بار کمانش بحرانی بی‌بعد مکانیکی، مسیر پس‌کمانش مکانیکی و عوامل مؤثر بر

آن پرداخته شده است. بار بحرانی کمانش ورق تحت نیروی فشاری یکنواخت P در راستای محور X در $\Delta T = 0$ محاسبه شده است.

شرایط مرزی چهار طرف ساده فرض شده است، و با توجه به بارگذاری ورق در لبه‌های $x = 0, 1$ ، ورق در راستای محور X متحرک در نظر گرفته شده است و شرایط مرزی بازنویسی شده است. تأثیر افزایش درصد وزنی تقویت‌کننده‌ها بر بار کمانش بحرانی برای ورق‌های مربعی با نسبت طول به ضخامت ۲۰ و در شکل ۴-۱۰ نشان داده شده است. مشاهده می‌شود، ورق‌هایی با الگوی توزیع X بیشترین مقدار بار کمانش بحرانی را دارد و به دنبال آن ورق با الگوی توزیع U و ورق با الگوی توزیع O قرار می‌گیرند.

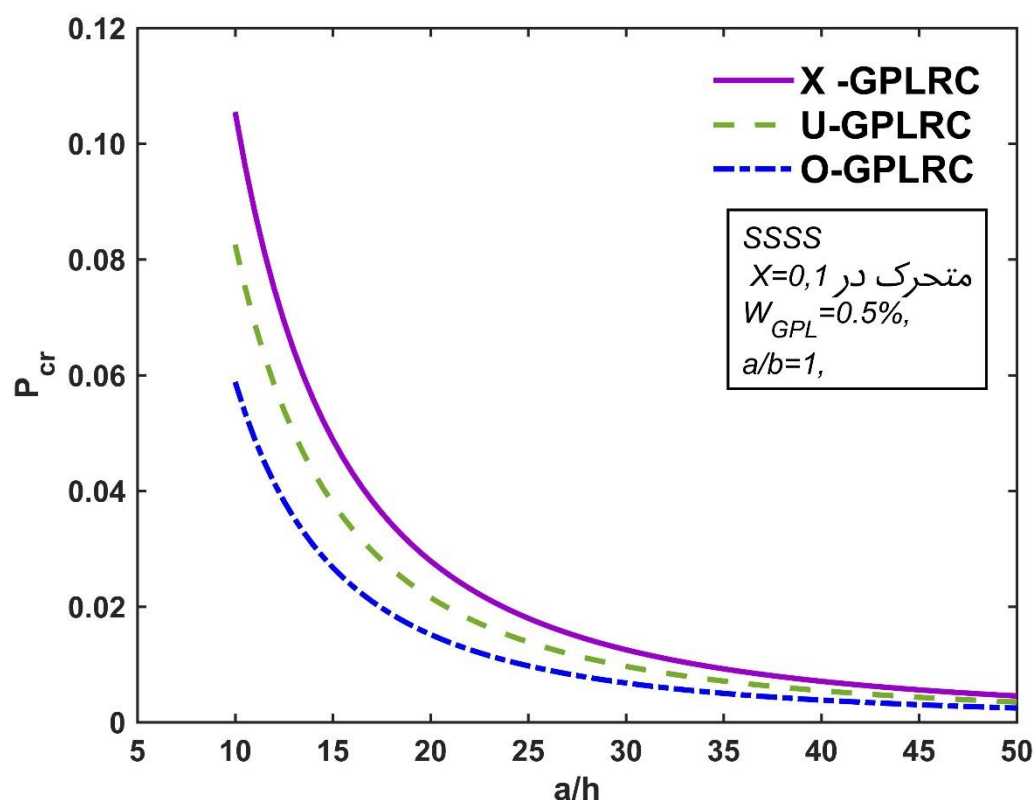
با افزایش درصد وزنی تقویت‌کننده‌ها بار بحرانی کمانش در هر سه الگوی توزیع تقویت‌کننده افزایش می‌یابد. با توجه به این که، ورق‌هایی با آرایش تقویت‌کننده‌ها به صورت X سفتی خمشی بیشتری دارند، شیب تغییرات بار کمانش بحرانی در این ورق‌ها بیشتر از سایر الگوهای توزیع تقویت‌کننده است. در مراجع [۲۹، ۳۵، ۳۹، ۴۱، ۴۳] نتایج مشابه‌ای با پژوهش حاضر گزارش شده است.



شکل ۴-۱۰- مقایسه مقادیر بار کمانش بحرانی بی‌بعد در مقابل تغییرات درصد وزنی تقویت‌کننده‌ها برای ورق‌های مربعی مدرج تابعی با آرایش تقویت‌کننده متفاوت و شرایط مرزی چهار طرف ساده

۱۲-۴ - بررسی تأثیر نسبت ابعادی ورق‌ها بر بار کمانش بحرانی مکانیکی

تغییرات بار بحرانی کمانش بی‌بعد در برابر افزایش نسبت طول به ضخامت ورق برای سه الگوی توزیع تقویت‌کننده با درصد وزنی ۰/۵ در شکل ۱۱-۴ رسم شده است. نشان داده شده است، با افزایش نسبت طول به ضخامت ورق بار بحرانی کمانش کاهش پیدا کرده و به تعبیری دیگر هرچه ورق بزرگتر یا نازک‌تر شود بار بحرانی کمانش کاهش پیدا می‌کند. نتیجه به‌دست آمده با نتایج مرجع [۴۱] مشابه است.



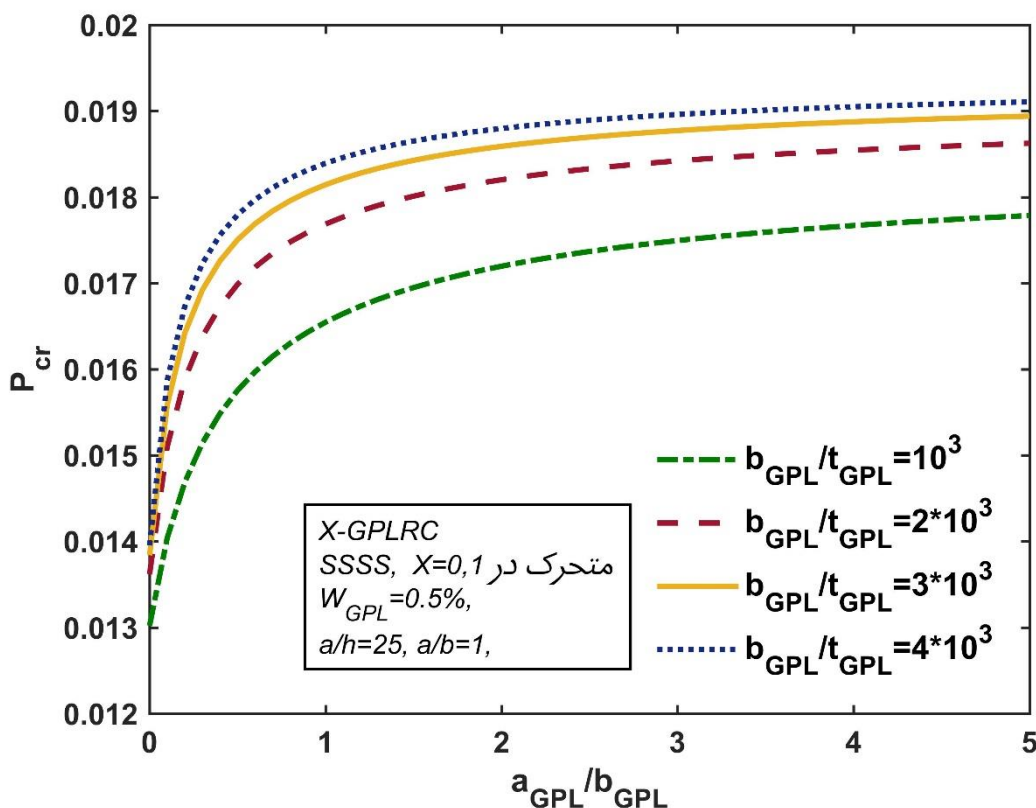
شکل ۱۱-۴ - مقادیر بار کمانش بحرانی بی‌بعد در مقابل تغییرات نسبت طول به ضخامت برای ورق مربعی مدرج تابعی با آرایش لایه‌ای متفاوت

۴-۱۳ - تأثیر نسبت‌های ابعادی و نسبت طول به ضخامت نانوصفحه‌های گرافن تقویت‌کننده بر بار کمانش بحرانی مکانیکی

بی‌بعد

مقادیر بار کمانش بحرانی بی‌بعد به‌ازای نسبت‌های ابعادی نانوصفحه‌های گرافن از صفر تا ۵ برای ورق‌هایی با آرایش تقویت‌کننده به شکل X و شرایط مرزی ساده محاسبه شده است. ورق‌ها با ۰/۵ درصد وزنی تقویت شده‌اند و اندازه نسبت طول به ضخامت نانوصفحه‌های گرافن در هر نمودار شکل ۴-۱۲ متفاوت است. ملاحظه شده است، برای نسبت‌های ابعادی نانوصفحه‌های گرافن بین صفر تا ۲ بار بحرانی کمانش افزایش می‌یابد اما برای نسبت‌های بیشتر از ۲ بار کمانش بحرانی تغییرات زیادی ندارد و تقریباً ثابت باقی می‌ماند، به عبارتی دیگر هنگامی که نانوصفحه‌های گرافن بلندتر و باریک‌تر می‌شوند بار بحرانی کمانش مکانیکی افزایش می‌یابد.

همچنین، با افزایش نسبت طول به ضخامت نانوصفحه‌های گرافن بار بحرانی کمانش مکانیکی افزایش می‌یابد، اما این تغییرات در مقایسه با افزایش طول به ضخامت نانوصفحه‌های گرافن به تدریج کمتر می‌شود.

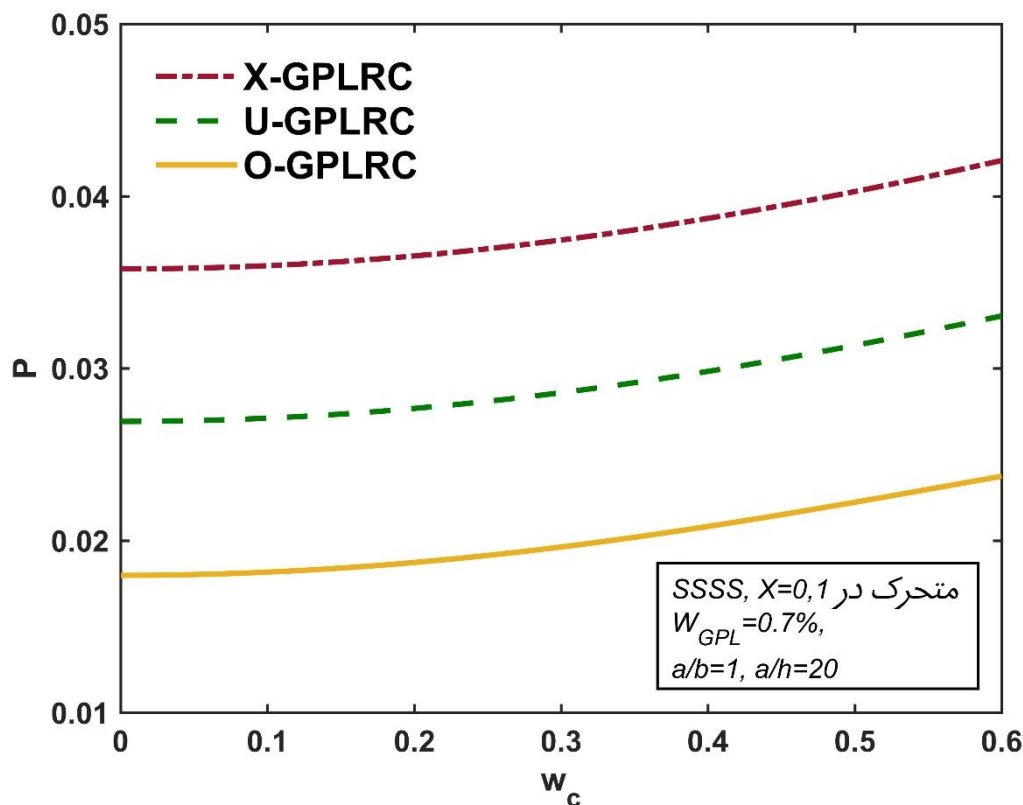


شکل ۴-۱۲- مقادیر بار کمانش بحرانی بی‌بعد در مقابل تغییرات نسبت طول به ضخامت نانوصفحه‌های گرافن

۴-۱۴ - مقایسه الگوی توزیع تقویت‌کننده‌ها بر مسیر تعادل پس‌کمانش مکانیکی

در ادامه، با در نظر گرفتن ماتریس‌های غیرخطی (K_{NL1} و K_{NL2})، به بررسی مسیر تعادل پس‌کمانش مکانیکی ورق‌ها پرداخته شده است.

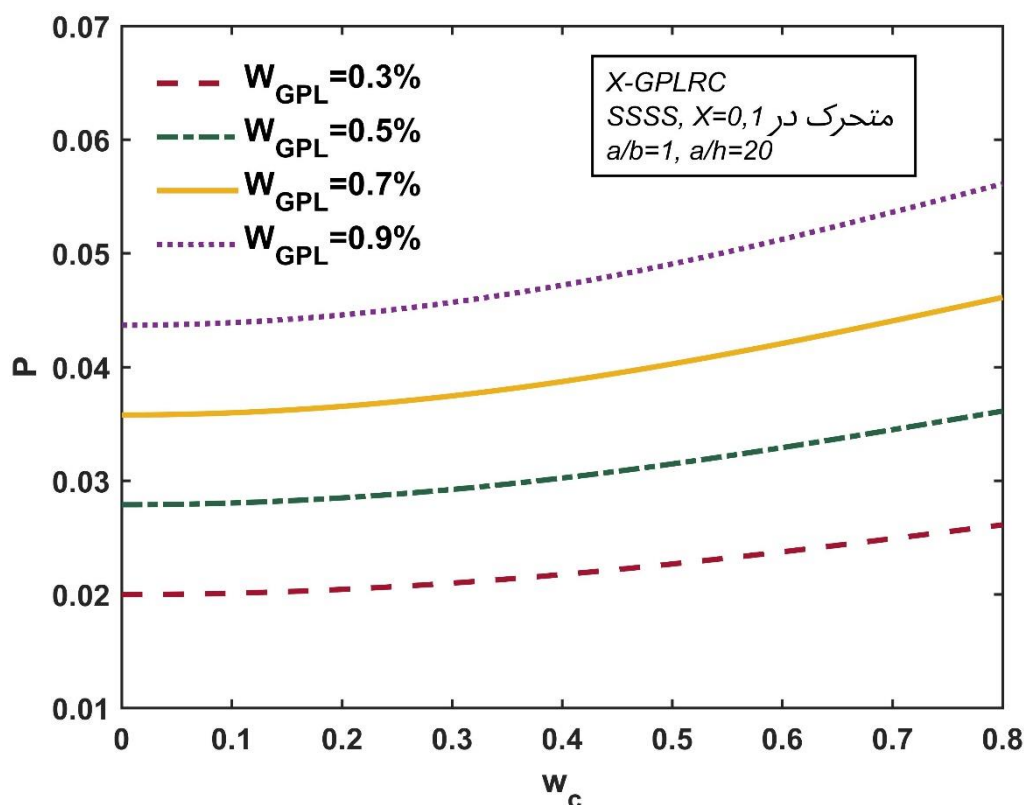
رفتار پس‌کمانشی ورق‌های مربعی با شرایط مرزی چهار طرف ساده در سه توزیع تقویت‌کننده متفاوت بررسی شده است و مسیر تعادل پس‌کمانش آن‌ها در شکل ۴-۱۳ رسم شده است. P نشان دهنده نیروی محوری بی‌بعد است. نتایج نشان داده است ورق‌هایی با توزیع تقویت‌کننده به شکل X بیشترین و ورق‌هایی با توزیع تقویت‌کننده به شکل O کمترین مقاومت پس‌کمانش مکانیکی را دارا هستند.



شکل ۴-۱۳ - مسیر تعادل پس‌کمانش برای مکانیکی ورق مربعی مدرج تابعی با شرایط مرزی چهار طرف ساده و آرایش تقویت‌کننده متفاوت و کسر وزنی تقویت‌کننده ۰/۷ درصد

۴-۱۵ - اثر افزایش درصد وزنی تقویت‌کننده‌ها بر مسیر تعادل پس‌کمانش مکانیکی

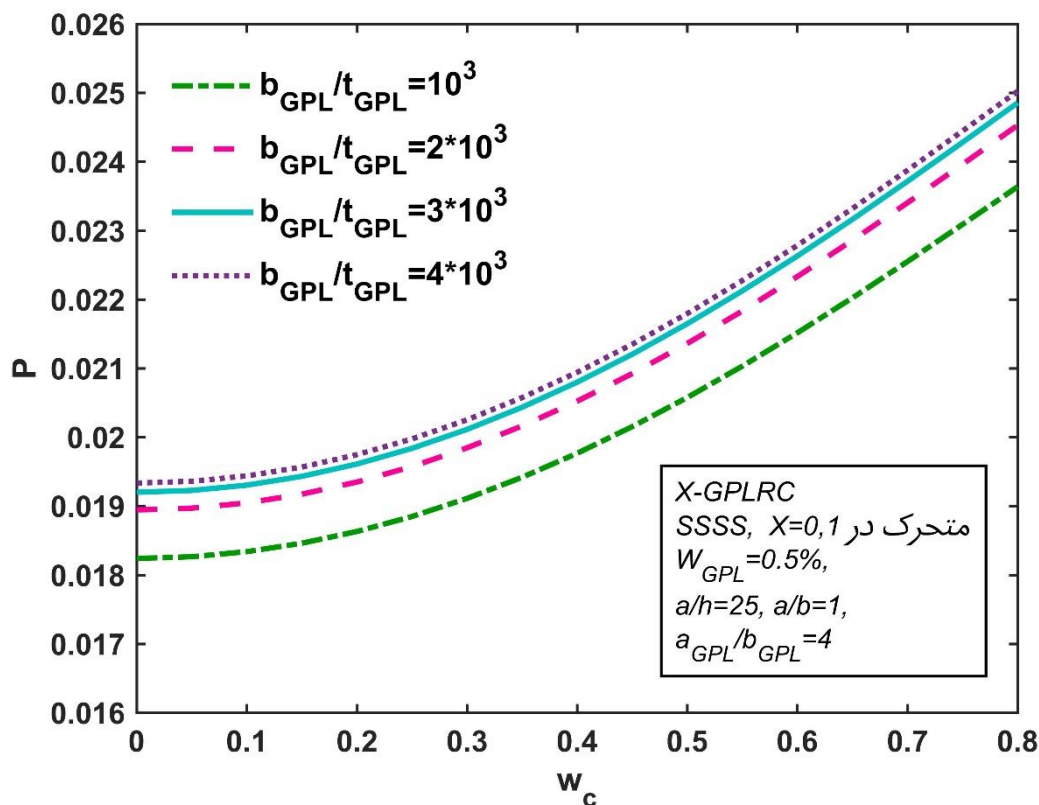
به‌منظور بررسی تأثیر تغییر درصد وزنی تقویت‌کننده‌ها بر مسیر تعادل پس‌کمانش مکانیکی، ورق‌هایی با درصدهای وزنی تقویت‌کننده ۰/۳، ۰/۵، ۰/۷ و ۰/۹ با الگوی توزیع تقویت‌کننده به‌صورت X تحت شرایط مرزی ساده در نظر گرفته شده است. نتایج به‌دست آمده در شکل ۴-۱۴ نشان داده است، با افزایش درصد تقویت‌کننده‌ها مقاومت پس‌کمانش مکانیکی ورق‌ها افزایش می‌یابد. در مراجع [۳۶، ۴۳] نتایج مشابه‌ای گزارش شده است.



شکل ۴-۱۴ - اثر تغییرات درصد وزنی تقویت‌کننده‌ها بر مسیر تعادل پس‌کمانش مکانیکی ورق‌های چندلایه مدرج تابعی با آرایش تقویت‌کننده‌ها به شکل X

۴-۱۶ - تأثیر نسبت طول به ضخامت نانوصفحه‌های گرافن تقویت‌کننده بر مسیر تعادل پس‌کمانش مکانیکی

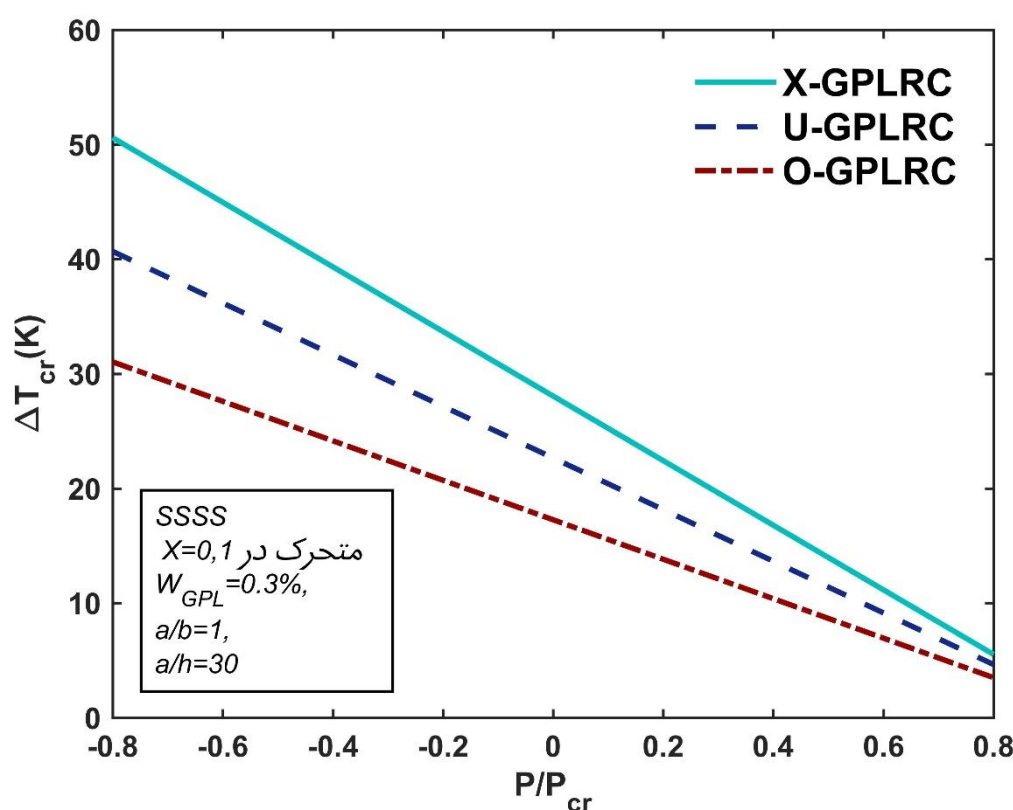
تغییرات مسیر تعادل پس‌کمانش در برابر افزایش نسبت طول به ضخامت نانوصفحه‌های گرافن تقویت‌کننده در ورق‌هایی با ۰/۵ درصد تقویت‌کننده و شرایط مرزی ساده در شکل ۴-۱۵ نشان داده شده است. نتایج نشان داده است، با افزایش نسبت طول به ضخامت نانوصفحه‌های گرافن مقاومت پس‌کمانش مکانیکی ورق‌ها افزایش می‌یابد این تغییرات به تدریج با افزایش نسبت طول به ضخامت نانوصفحه‌های گرافن کمتر می‌شود.



شکل ۴-۱۵ - اثر تغییرات نسبت‌های طول به ضخامت نانوصفحه‌های گرافن تقویت‌کننده بر مسیر تعادل پس‌کمانش مکانیکی ورق‌های چندلایه مدرج تابعی با آرایش تقویت‌کننده‌ها به شکل X

۱۷-۴ - بررسی تغییرات دمای بحرانی کمانش در برابر نیروهای درون صفحه‌ای

تغییرات دمای بحرانی کمانش در برابر P/P_{cr} برای سه الگوی توزیع تقویت کننده و با شرایط مرزی ساده در شکل ۱۶-۴ نشان داده شده است. P/P_{cr} مثبت نشان دهنده نیروی فشاری و مقادیر منفی آن نیروی کششی را در لبه $x=0,1$ نشان می‌دهد. با توجه به این که اعمال نیروهای کششی به ورق باعث ایجاد تنش‌های کششی اولیه در ورق شده و سفتی ورق را افزایش می‌دهد، دمای کمانش بحرانی بالاتر می‌رود اما با اعمال نیروهای فشاری سفتی ورق کمتر می‌شود و دمای کمانش بحرانی کاهش می‌یابد. با توجه به سفتی بالاتر ورق‌هایی با آرایش تقویت کننده به صورت X، دمای کمانش بحرانی بیشتری از سایر الگوهای توزیع تقویت کننده دارند.



شکل ۱۶-۴ - تغییرات دمای بحرانی کمانش در برابر نیروهای درون صفحه‌ای برای ورق مدرج تابعی با الگوی توزیع تقویت کننده متفاوت

فصل ۵ : نتیجه گیری و پیشنهاد

۵-۱ - مقدمه

در این فصل ابتدا نتایج به دست آمده از نمودارهای فصل گذشته به اختصار بیان شده است و در ادامه پیشنهاداتی برای توسعه و مطالعه بیشتر مطرح شده است.

۵-۲ - نتیجه گیری

در پایان نامه، حاضر کمانش و پس کمانش نانورق های مدرج تابعی تقویت شده با نانوصفحه های گرافن تحت بار مکانیکی و حرارتی با سه نوع آرایش تقویت کننده X ، U و O بررسی شده است. برای به دست آوردن خواص معادل کامپوزیت ها از قانون اختلاط و از مدل میکرومکانیک اصلاح شده هالپین-تسای برای محاسبه مدول یانگ مؤثر استفاده شده است. دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی حاکم بر ورق با استفاده از روش عددی دیفرانسیل کوادریچر به دستگاه معادلات دیفرانسیل جبری غیرخطی تبدیل شده است. محاسبه دماها و بارهای کمانش بحرانی و تعیین مسیر پس کمانش حرارتی و مکانیکی بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول به کمک یک الگوی تکراری تحت تغییرات دمایی یکنواخت و نیروهای درون صفحه ای انجام گرفته است. اعتبار مراحل و روش های مورد استفاده در روند حل مسئله با بررسی و مقایسه آن ها با نتایج موجود در پژوهش های دیگر سنجیده شده است. در نهایت در این پایان نامه نتایجی به شرح زیر استخراج شده است:

- ❖ حداقل تعداد ۱۱ نقطه گرهی و ۱۰ لایه برای دستیابی به پاسخ همگرا در روش دیفرانسیل کوادریچر تعیین شده است.
- ❖ جهت صحت سنجی الگوی تکرار استفاده شده، نتایج دمای کمانش بحرانی و مسیر تعادل پس کمانش حرارتی به دست آمده با دیگر مطالعات مقایسه و تطبیق داده شده است.
- ❖ ورق ها با شرایط مرزی چهار طرف گیردار دمای کمانش بحرانی و مسیر تعادل پس کمانش حرارتی بالاتری دارند، و بعد از آن به ترتیب ورق هایی با شرایط مرزی ساده-گیردار-ساده-گیردار، ساده-ساده-گیردار-گیردار و چهار طرف ساده قرار می گیرند.
- ❖ ورق هایی با آرایش تقویت کننده به شکل X ، U و O به ترتیب مسیر پس کمانش بالاتری را طی می کنند.
- ❖ توزیع مدرج تابعی تقویت کننده ها تنها در ورق هایی با آرایش تقویت کننده به شکل X دمای کمانش بحرانی و مقاومت پس کمانش حرارتی را افزایش می دهد.
- ❖ افزایش کسر وزنی تقویت کننده ها، دمای کمانش بحرانی و مقاومت پس کمانش حرارتی را در ورق های تقویت شده به شکل X و U به ترتیب افزایش و کاهش می دهد و در توزیع یکنواخت آن دمای کمانش بحرانی و مسیر تعادل پس کمانش حرارتی ثابت باقی می ماند.
- ❖ هرچه ورق بزرگتر یا نازک تر شود، دما و بار کمانش بحرانی کاهش می یابد.
- ❖ هرچه ورق بلندتر یا باریک تر شود، دما کمانش بحرانی افزایش می یابد.

- ❖ برای نانوصفحه‌های گرافن با نسبت طول به ضخامت بیشتر از ۱۰۰۰ و نسبت ابعادی بیشتر از ۴ مسیر تعادل پس‌کمانش تقریباً ثابت باقی می‌ماند و تغییری محسوسی در آن مشاهده نمی‌شود.
- ❖ افزایش کسر وزنی تقویت‌کننده‌ها، بار کمانش بحرانی را به ترتیب در ورق‌های تقویت شده به شکل X ، U و O افزایش می‌دهد.
- ❖ برای ورق‌های تقویت شده با نانوصفحه‌های گرافن با نسبت ابعادی بیشتر از ۲ بار بحرانی کمانش تقریباً ثابت باقی می‌ماند.
- ❖ با افزایش درصد وزنی تقویت‌کننده‌ها مقاومت پس‌کمانش مکانیکی ورق‌ها افزایش یافته و مسیر تعادل پس‌کمانش مکانیکی بالاتری را طی می‌کنند.
- ❖ با اعمال نیروهای کششی به ورق دمای کمانش بحرانی افزایش می‌یابد و اعمال نیروهای فشاری دمای کمانش بحرانی را کاهش می‌دهد.

۵-۳ - پیشنهادها

- با هدف مطالعه‌ی بیشتر و توسعه پژوهش انجام شده پیشنهاداتی به شرح زیر ارائه شده است:
- ❖ تحلیل خمش، کمانش و ارتعاشات ورق‌های مدرج تابعی با استفاده از روش دیفرانسیل کوادریچر می‌تواند موضوع بسیاری از پژوهش‌ها باشد.
- ❖ به منظور بهبود خواص حرارتی و مکانیکی، تحلیل ورق بر بستر الاستیک در نظر گرفته شود.
- ❖ تحلیل ورق‌های ساندویچی به کمک روش دیفرانسیل کوادریچر
- ❖ بررسی رفتار ورق‌ها با هر یک از تئوری‌های تغییر شکل برشی می‌تواند به پیشرفت پژوهش حاضر کمک کند.
- ❖ بررسی کمانش و پس‌کمانش ورق‌های نانوکامپوزیتی پیزوالکتریک با استفاده از روش دیفرانسیل کوادریچر
- ❖ تحلیل کمانش و پس‌کمانش ورق‌ها در محیط حرارتی با تغییرات دمای غیریکنواخت
- ❖ تغییر در هندسه مسئله از دیگر پیشنهاداتی است که به توسعه پژوهش حاضر کمک می‌کند به عنوان مثال می‌توان به تحلیل ورق‌های مستطیلی و دایروی با گشودگی اشاره کرد.

الف) ضرب کرونیگر ماتریس‌های ضرایب وزنی

حاصل ضرب کرونیگر $C_{im}^{(1)}$ و $C_{im}^{(2)}$ ماتریس‌های ضرایب وزنی با مشتق نسبت به متغیر x و ماتریس همانی به صورت زیر به دست می‌آید.

$$A^x = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11}^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_{11}^{(1)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_{11}^{(1)} \end{bmatrix}_{N_y \times N_y} & \begin{bmatrix} C_{12}^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_{12}^{(1)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_{12}^{(1)} \end{bmatrix}_{N_y \times N_y} & \dots & \begin{bmatrix} C_{1N_x}^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_{1N_x}^{(1)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_{1N_x}^{(1)} \end{bmatrix}_{N_y \times N_y} \\ \begin{bmatrix} C_{21}^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_{21}^{(1)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_{21}^{(1)} \end{bmatrix}_{N_y \times N_y} & \begin{bmatrix} C_{22}^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_{22}^{(1)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_{22}^{(1)} \end{bmatrix}_{N_y \times N_y} & \dots & \begin{bmatrix} C_{2N_x}^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_{2N_x}^{(1)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_{2N_x}^{(1)} \end{bmatrix}_{N_y \times N_y} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{bmatrix} C_{N_x 1}^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_{N_x 1}^{(1)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_{N_x 1}^{(1)} \end{bmatrix}_{N_y \times N_y} & \begin{bmatrix} C_{N_x 2}^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_{N_x 2}^{(1)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_{N_x 2}^{(1)} \end{bmatrix}_{N_y \times N_y} & \dots & \begin{bmatrix} C_{N_x N_x}^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_{N_x N_x}^{(1)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_{N_x N_x}^{(1)} \end{bmatrix}_{N_y \times N_y} \end{bmatrix}_{N_x N_y \times N_x N_y} \quad (۱-۵)$$

$$B^x = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11}^{(2)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_{11}^{(2)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_{11}^{(2)} \end{bmatrix}_{N_y \times N_y} & \begin{bmatrix} C_{12}^{(2)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_{12}^{(2)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_{12}^{(2)} \end{bmatrix}_{N_y \times N_y} & \dots & \begin{bmatrix} C_{1N_x}^{(2)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_{1N_x}^{(2)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_{1N_x}^{(2)} \end{bmatrix}_{N_y \times N_y} \\ \begin{bmatrix} C_{21}^{(2)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_{21}^{(2)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_{21}^{(2)} \end{bmatrix}_{N_y \times N_y} & \begin{bmatrix} C_{22}^{(2)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_{22}^{(2)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_{22}^{(2)} \end{bmatrix}_{N_y \times N_y} & \dots & \begin{bmatrix} C_{2N_x}^{(2)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_{2N_x}^{(2)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_{2N_x}^{(2)} \end{bmatrix}_{N_y \times N_y} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{bmatrix} C_{N_x 1}^{(2)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_{N_x 1}^{(2)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_{N_x 1}^{(2)} \end{bmatrix}_{N_y \times N_y} & \begin{bmatrix} C_{N_x 2}^{(2)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_{N_x 2}^{(2)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_{N_x 2}^{(2)} \end{bmatrix}_{N_y \times N_y} & \dots & \begin{bmatrix} C_{N_x N_x}^{(2)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_{N_x N_x}^{(2)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_{N_x N_x}^{(2)} \end{bmatrix}_{N_y \times N_y} \end{bmatrix}_{N_x N_y \times N_x N_y} \quad (الف-۲)$$

همچنین، حاصل ضرب کرونیگر $C_{jn}^{(1)}$ و $C_{jn}^{(2)}$ ماتریس‌های ضرایب وزنی با مشتق نسبت به متغیر y و ماتریس همانی به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$A^y = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11}^{(1)} & C_{12}^{(1)} & \dots & C_{1N_y}^{(1)} \\ C_{21}^{(1)} & C_{22}^{(1)} & \dots & C_{2N_y}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N_y 1}^{(1)} & C_{N_y 2}^{(1)} & \dots & C_{N_y N_y}^{(1)} \end{bmatrix}_{N_y \times N_y} & [0]_{N_y \times N_y} & \dots & [0]_{N_y \times N_y} \\ [0]_{N_y \times N_y} & \begin{bmatrix} C_{11}^{(1)} & C_{12}^{(1)} & \dots & C_{1N_y}^{(1)} \\ C_{21}^{(1)} & C_{22}^{(1)} & \dots & C_{2N_y}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N_y 1}^{(1)} & C_{N_y 2}^{(1)} & \dots & C_{N_y N_y}^{(1)} \end{bmatrix}_{N_y \times N_y} & \dots & [0]_{N_y \times N_y} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0]_{N_y \times N_y} & [0]_{N_y \times N_y} & \dots & \begin{bmatrix} C_{11}^{(1)} & C_{12}^{(1)} & \dots & C_{1N_y}^{(1)} \\ C_{21}^{(1)} & C_{22}^{(1)} & \dots & C_{2N_y}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N_y 1}^{(1)} & C_{N_y 2}^{(1)} & \dots & C_{N_y N_y}^{(1)} \end{bmatrix}_{N_y \times N_y} \end{bmatrix}_{N_y N_y \times N_y N_y} \quad (۳-۵)$$

$$B^y = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11}^{(2)} & C_{12}^{(2)} & \dots & C_{1N_y}^{(2)} \\ C_{21}^{(2)} & C_{22}^{(2)} & \dots & C_{2N_y}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N_y 1}^{(2)} & C_{N_y 2}^{(2)} & \dots & C_{N_y N_y}^{(2)} \end{bmatrix}_{N_y \times N_y} & [0]_{N_y \times N_y} & \dots & [0]_{N_y \times N_y} \\ [0]_{N_y \times N_y} & \begin{bmatrix} C_{11}^{(2)} & C_{12}^{(2)} & \dots & C_{1N_y}^{(2)} \\ C_{21}^{(2)} & C_{22}^{(2)} & \dots & C_{2N_y}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N_y 1}^{(2)} & C_{N_y 2}^{(2)} & \dots & C_{N_y N_y}^{(2)} \end{bmatrix}_{N_y \times N_y} & \dots & [0]_{N_y \times N_y} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0]_{N_y \times N_y} & [0]_{N_y \times N_y} & \dots & \begin{bmatrix} C_{11}^{(2)} & C_{12}^{(2)} & \dots & C_{1N_y}^{(2)} \\ C_{21}^{(2)} & C_{22}^{(2)} & \dots & C_{2N_y}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N_y 1}^{(2)} & C_{N_y 2}^{(2)} & \dots & C_{N_y N_y}^{(2)} \end{bmatrix}_{N_y \times N_y} \end{bmatrix}_{N_y N_y \times N_y N_y} \quad (۴-الف)$$

حاصل ضرب ماتریس‌های ضرایب وزنی برای توابع با مشتق نسبت به متغیر x و y نیز به صورت زیر به دست می‌آید.

$$A^{xy} = \begin{bmatrix} C_{11}^{(l)} \begin{bmatrix} C_{11}^{(l)} & C_{12}^{(l)} & \dots & C_{1N_y}^{(l)} \\ C_{21}^{(l)} & C_{22}^{(l)} & \dots & C_{2N_y}^{(l)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N_y1}^{(l)} & C_{N_y2}^{(l)} & \dots & C_{N_yN_y}^{(l)} \end{bmatrix}_{N_y \times N_y} & C_{12}^{(l)} \begin{bmatrix} C_{11}^{(l)} & C_{12}^{(l)} & \dots & C_{1N_y}^{(l)} \\ C_{21}^{(l)} & C_{22}^{(l)} & \dots & C_{2N_y}^{(l)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N_y1}^{(l)} & C_{N_y2}^{(l)} & \dots & C_{N_yN_y}^{(l)} \end{bmatrix}_{N_y \times N_y} & \dots & C_{1N_x}^{(l)} \begin{bmatrix} C_{11}^{(l)} & C_{12}^{(l)} & \dots & C_{1N_y}^{(l)} \\ C_{21}^{(l)} & C_{22}^{(l)} & \dots & C_{2N_y}^{(l)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N_y1}^{(l)} & C_{N_y2}^{(l)} & \dots & C_{N_yN_y}^{(l)} \end{bmatrix}_{N_y \times N_y} \\ C_{21}^{(l)} \begin{bmatrix} C_{11}^{(l)} & C_{12}^{(l)} & \dots & C_{1N_y}^{(l)} \\ C_{21}^{(l)} & C_{22}^{(l)} & \dots & C_{2N_y}^{(l)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N_y1}^{(l)} & C_{N_y2}^{(l)} & \dots & C_{N_yN_y}^{(l)} \end{bmatrix}_{N_y \times N_y} & C_{22}^{(l)} \begin{bmatrix} C_{11}^{(l)} & C_{12}^{(l)} & \dots & C_{1N_y}^{(l)} \\ C_{21}^{(l)} & C_{22}^{(l)} & \dots & C_{2N_y}^{(l)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N_y1}^{(l)} & C_{N_y2}^{(l)} & \dots & C_{N_yN_y}^{(l)} \end{bmatrix}_{N_y \times N_y} & \dots & C_{2N_x}^{(l)} \begin{bmatrix} C_{11}^{(l)} & C_{12}^{(l)} & \dots & C_{1N_y}^{(l)} \\ C_{21}^{(l)} & C_{22}^{(l)} & \dots & C_{2N_y}^{(l)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N_y1}^{(l)} & C_{N_y2}^{(l)} & \dots & C_{N_yN_y}^{(l)} \end{bmatrix}_{N_y \times N_y} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N_x1}^{(l)} \begin{bmatrix} C_{11}^{(l)} & C_{12}^{(l)} & \dots & C_{1N_y}^{(l)} \\ C_{21}^{(l)} & C_{22}^{(l)} & \dots & C_{2N_y}^{(l)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N_y1}^{(l)} & C_{N_y2}^{(l)} & \dots & C_{N_yN_y}^{(l)} \end{bmatrix}_{N_y \times N_y} & C_{N_x2}^{(l)} \begin{bmatrix} C_{11}^{(l)} & C_{12}^{(l)} & \dots & C_{1N_y}^{(l)} \\ C_{21}^{(l)} & C_{22}^{(l)} & \dots & C_{2N_y}^{(l)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N_y1}^{(l)} & C_{N_y2}^{(l)} & \dots & C_{N_yN_y}^{(l)} \end{bmatrix}_{N_y \times N_y} & \dots & C_{N_xN_x}^{(l)} \begin{bmatrix} C_{11}^{(l)} & C_{12}^{(l)} & \dots & C_{1N_y}^{(l)} \\ C_{21}^{(l)} & C_{22}^{(l)} & \dots & C_{2N_y}^{(l)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N_y1}^{(l)} & C_{N_y2}^{(l)} & \dots & C_{N_yN_y}^{(l)} \end{bmatrix}_{N_y \times N_y} \end{bmatrix}_{N_x N_y \times N_x N_y} \quad (5-5)$$

ب) دستگاه معادلات ماتریسی حاکم بر ورق مدرج تابعی

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] & [0] & [0] & [0] \\ [K_{21}] & [K_{22}] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [K_{33}] & [K_{34}] & [K_{35}] \\ [0] & [0] & [K_{43}] & [K_{44}] & [K_{45}] \\ [0] & [0] & [K_{53}] & [K_{54}] & [K_{55}] \end{bmatrix} - \Delta T \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [T_{33}] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \end{bmatrix} - P \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [P_{33}] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} [0] & [0] & [L_{13}] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [L_{23}] & [0] & [0] \\ [L_{31}] & [L_{32}] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [M_{33}] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \end{bmatrix} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ \vdots \\ u_{N_x N_y} \\ v_{11} \\ v_{12} \\ \vdots \\ v_{N_x N_y} \\ w_{11} \\ w_{12} \\ \vdots \\ w_{N_x N_y} \\ \varphi_{x11} \\ \varphi_{x12} \\ \vdots \\ \varphi_{xN_x N_y} \\ \varphi_{y11} \\ \varphi_{y12} \\ \vdots \\ \varphi_{yN_x N_y} \end{Bmatrix} = 0 \quad (ب-1)$$

ج) شرایط مرزی ساده

ماتریس‌های ضرایب وزنی در روابط (۳-۷۲) به کمک ضرب کرونیگر به صورت زیر در نظر گرفته شده است.

$$A_1^x = \begin{bmatrix} C_{11}^{(1)} & C_{12}^{(1)} & \dots & C_{1N_x}^{(1)} \end{bmatrix}_{1 \times N_x} \otimes I_{N_y \times N_y} \quad (\text{ج-۱})$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11}^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_{11}^{(1)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_{11}^{(1)} \end{bmatrix}_{N_y \times N_y} & \begin{bmatrix} C_{12}^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_{12}^{(1)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_{12}^{(1)} \end{bmatrix}_{N_y \times N_y} & \dots & \begin{bmatrix} C_{1N_x}^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_{1N_x}^{(1)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_{1N_x}^{(1)} \end{bmatrix}_{N_y \times N_y} \end{bmatrix}_{N_y \times N_x N_y}$$

$$A_{N_x}^x = \begin{bmatrix} C_{N_x 1}^{(1)} & C_{N_x 2}^{(1)} & \dots & C_{N_x N_x}^{(1)} \end{bmatrix}_{1 \times N_x} \otimes I_{N_y \times N_y} \quad (\text{ج-۲})$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{N_x 1}^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_{N_x 1}^{(1)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_{N_x 1}^{(1)} \end{bmatrix}_{N_y \times N_y} & \begin{bmatrix} C_{N_x 2}^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_{N_x 2}^{(1)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_{N_x 2}^{(1)} \end{bmatrix}_{N_y \times N_y} & \dots & \begin{bmatrix} C_{N_x N_x}^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_{N_x N_x}^{(1)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_{N_x N_x}^{(1)} \end{bmatrix}_{N_y \times N_y} \end{bmatrix}_{N_y \times N_x N_y}$$

$$A_1^y = I_{N_x \times N_x} \otimes \begin{bmatrix} C_{11}^{(1)} & C_{12}^{(1)} & \dots & C_{1N_y}^{(1)} \end{bmatrix}_{1 \times N_y} \quad (\text{ج-۳})$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11}^{(1)} & C_{12}^{(1)} & \dots & C_{1N_y}^{(1)} \end{bmatrix}_{1 \times N_y} & [0 \ 0 \ \dots \ 0]_{1 \times N_y} & \dots & [0 \ 0 \ \dots \ 0]_{1 \times N_y} \\ [0 \ 0 \ \dots \ 0]_{1 \times N_y} & \begin{bmatrix} C_{11}^{(1)} & C_{12}^{(1)} & \dots & C_{1N_y}^{(1)} \end{bmatrix}_{1 \times N_y} & \dots & [0 \ 0 \ \dots \ 0]_{1 \times N_y} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0 \ 0 \ \dots \ 0]_{1 \times N_y} & [0 \ 0 \ \dots \ 0]_{1 \times N_y} & \dots & \begin{bmatrix} C_{11}^{(1)} & C_{12}^{(1)} & \dots & C_{1N_y}^{(1)} \end{bmatrix}_{1 \times N_y} \end{bmatrix}_{N_x \times N_x N_y}$$

$$A_{N_y}^y = I_{N_x \times N_x} \otimes \begin{bmatrix} C_{N_y 1}^{(1)} & C_{N_y 2}^{(1)} & \dots & C_{N_y N_y}^{(1)} \end{bmatrix}_{1 \times N_y} \quad (\text{ج-۴})$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{N_y 1}^{(1)} & C_{N_y 2}^{(1)} & \dots & C_{N_y N_y}^{(1)} \end{bmatrix}_{1 \times N_y} & [0 \ 0 \ \dots \ 0]_{1 \times N_y} & \dots & [0 \ 0 \ \dots \ 0]_{1 \times N_y} \\ [0 \ 0 \ \dots \ 0]_{1 \times N_y} & \begin{bmatrix} C_{N_y 1}^{(1)} & C_{N_y 2}^{(1)} & \dots & C_{N_y N_y}^{(1)} \end{bmatrix}_{1 \times N_y} & \dots & [0 \ 0 \ \dots \ 0]_{1 \times N_y} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0 \ 0 \ \dots \ 0]_{1 \times N_y} & [0 \ 0 \ \dots \ 0]_{1 \times N_y} & \dots & \begin{bmatrix} C_{N_y 1}^{(1)} & C_{N_y 2}^{(1)} & \dots & C_{N_y N_y}^{(1)} \end{bmatrix}_{1 \times N_y} \end{bmatrix}_{N_x \times N_x N_y}$$

شرایط مرزی ساده به فرم ماتریسی به صورت زیر تعریف می شود:

$$u_{1j}=v_{1j}=w_{1j}=\varphi_{y1j}=0, \quad \left[A_1^x\right]_{N_y \times N_x N_y} \times \left\{ \begin{array}{c} \varphi_{x11} \\ \varphi_{x12} \\ \vdots \\ \varphi_{xN_x N_y} \end{array} \right\} = 0 \quad (x=0) \quad (\Delta-\mathcal{C})$$

$$u_{N_x j}=v_{N_x j}=w_{N_x j}=\varphi_{yN_x j}=0, \quad \left[A_{N_x}^x\right]_{N_y \times N_x N_y} \times \left\{ \begin{array}{c} \varphi_{x11} \\ \varphi_{x12} \\ \vdots \\ \varphi_{xN_x N_y} \end{array} \right\} = 0 \quad (x=1) \quad (\mathcal{E}-\mathcal{C})$$

$$u_{i1}=v_{i1}=w_{i1}=\varphi_{xi1}=0, \quad \left[A_1^y\right]_{N_x \times N_x N_y} \times \left\{ \begin{array}{c} \varphi_{y11} \\ \varphi_{y12} \\ \vdots \\ \varphi_{yN_x N_y} \end{array} \right\} = 0 \quad (y=0) \quad (\mathcal{V}-\mathcal{C})$$

$$u_{iN_y}=v_{iN_y}=w_{iN_y}=\varphi_{xiN_y}=0, \quad \left[A_{N_y}^y\right]_{N_x \times N_x N_y} \times \left\{ \begin{array}{c} \varphi_{y11} \\ \varphi_{y12} \\ \vdots \\ \varphi_{yN_x N_y} \end{array} \right\} = 0 \quad (y=1) \quad (\mathcal{A}-\mathcal{C})$$

- [1] Agarwal B.D and Broutman L.J. (1990) "Analysis and Performance of Fibre Composites" John Wiley and Sons.
- [2] Jones R.M. (1999) "Mechanics of Composite Materials" CRC Press, USA.
- [3] Shen, M. and M.B. Bever, Gradients in polymeric materials. *Materials Science*, 1972: p. 741-746.
- [4] Chawla N and Chawla K.K. (2006) "Metal Matrix Composites", Springer, USA, pp. 403.
- [5] Markworth A.J, Ramesh K.S, and Parks W.P. (1995) "Modelling studies applied to functionally graded materials" *Journal of Materials Science.*, 30, pp. 2183-2193.
- [6] Mai Y.W and Yu Z.Z. (2006) "Polymer Nanocomposites" pp. 608-613
- [7] Jia, X, Campos-Delgado J, Terrones M and S.Dresselhaus M. (2011) "Graphene edges: a review of their fabrication and characterization" *Nanoscale.*, 3, pp. 86-95.
- [8] Shindo A. (2000) "Comprehensive Composite Materials : Fiber Reinforcements & General theory of Composites", Vol. 1, Hyogo, Japan. pp. 1-33.
- [9] Dreyer D.R, Ruoff R.S and Bielawski C.W. (2010) "From conception to realization: an historial account of graphene and some perspectives for its future" *Angew Chem Int Ed Engl.*, 49, pp. 36-44.
- [10] Geim A.K, Novoselov K.S, Morozov S.V and Jiang D. (2004) "Electric Field Effect in Atomically Thin Carbon Films" *Science.*, 306, pp. 666-669.
- [11] Park S and Ruoff R.S. (2009) "Chemical methods for the production of graphenes" *Nature Nanotechnology*, 4, pp. 217-224.
- [12] Berger C, Song, Li X, Wu X and Brown N. (2006) "Electronic Confinement and Coherence in Patterned Epitaxial Graphene" *Science.*, 312 pp. 1191-1196.
- [13] Rafiee M.A, Rafiee J, Yu Z.Z and Koratkar N. (2009) "Buckling resistant graphene nanocomposites" *Applied Physics Letters.*, 95, pp. 223-240.
- [14] Heballi H, Tounsi A, Houari M.S.A, Bessaim A and Bedia E.A.A. (2014) "New Quasi-3D Hyperbolic Shear Deformation Theory for the Static and Free Vibration Analysis of Functionally Graded Plates" *Journal of Engineering Mechanics.*, 140, pp. 374-383.
- [15] Shen H.S. (2009) "Functionally graded materials : nanlinear analysis of plates and shells", CRC press, New York.
- [16] Koizumi M. (1997) "FGM activities in Japan" *Composites Part B.*, pp. 1-4.
- [17] Low I.M. (2006) "Ceramic-Matrix Composites", Woodhead Publishing, Australia. 1, p. 632.
- [18] Birman V and Byrd L.W. (2007) "Modeling and Analysis of Functionally Graded Materials and Structures" *Applied Mechanics Reviews.*, 60, pp. 195-216.
- [19] Brush D.O and Almroth B.O. (1975) "Buckling of Bars, Plates, and Shells", McGraw-Hill, USA.
- [20] Eslami M.R. (2017) "Buckling and Postbuckling of Beams, Plates and Shells", USA.

[۲۱] رحمانی ع، (۱۳۹۵)، پایان نامه ارشد: «آنالیز کمانش و پس کمانش پو سته های نانو کامپوزیت هدفمند (مدرج شده تابعی)»، دانشکده مهندسی هوا و فضا، دانشگاه سمنان.

- [22] Reddy J.N.(2004) "Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells Theory and Analysis", CRC press, New York. p. 831.
- [23] Na K.S and Kim J.H. (2004) "Three-dimensional thermal buckling analysis of functionally graded materials" *Composites Part B: Engineering.*, 35, pp. 429-437.
- [24] Na K.S and Kim J.H. (2006) "Thermal postbuckling investigations of functionally graded plates using 3-D finite element method" *Finite Elements in Analysis and Design.*, 42, pp. 749-756.
- [25] Liew K.M, Yang J, and Kitipornchai S. (2003) "Postbuckling of piezoelectric FGM plates subject to thermo-electro-mechanical loading" *International Journal of Solids and Structures.*, 40, pp. 3869-3892.
- [26] Ganapathi M and Prakash T. (2006) "Thermal buckling of simply supported functionally graded skew plates" *Composite Structures.*, 74, pp. 247-250.
- [27] Zhao X, Lee Y.Y and Liew K.M. (2009) "Mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates" *Composite Structures.*, 90, pp. 161-171.
- [28] Ke L.L, Yang J, Kitipornchai S and Bradford M.A. (2012) "Bending, buckling and vibration of size-dependent functionally graded annular microplates" *Composite Structures.*, 94, pp. 3250-3257.
- [29] Yas M.H and Samadi N. (2012) "Free vibrations and buckling analysis of carbon nanotube-reinforced composite Timoshenko beams on elastic foundation" *International Journal of Pressure Vessels and Piping.*, 98, pp. 119-128.
- [30] Zhang L.W, Zhu P, and Liew K.M. (2014) "Thermal buckling of functionally graded plates using a local Kriging meshless method" *Composite Structures.*, 108, pp. 472-492.
- [31] Zhao Z, Chuang F, Wang Y and Yang J. (2017) "Bending and vibration analysis of functionally graded trapezoidal nanocomposite plates reinforced with graphene nanoplatelets (GPLs)" *Composite Structures.*, 180, pp. 799-808.
- [32] Shen H.S, Xiang Y, Lin F and Hui D. (2017) "Buckling and postbuckling of functionally graded graphene-reinforced composite laminated plates in thermal environments" *Composites Part B: Engineering.*, 119, pp. 67-78.
- [33] Shen H.S, Xiang Y and Lin F. (2017) "Thermal buckling and postbuckling of functionally graded graphene-reinforced composite laminated plates resting on elastic foundations" *Thin-Walled Structures.*, 118, pp. 229-237.
- [34] Malekzadeh P. (2011) "Three-dimensional thermal buckling analysis of functionally graded arbitrary straight-sided quadrilateral plates using differential quadrature method" *Composite Structures.*, 93, pp. 1246-1254.
- [35] Wu H, Yang J and Kitipornchai S. (2018) "Parametric instability of thermo-mechanically loaded functionally graded graphene reinforced nanocomposite plates" *International Journal of Mechanical Sciences.*, 135, pp. 431-440.
- [36] Yang J, Wu H and Kitipornchai S. (2017) "Buckling and postbuckling of functionally graded multilayer graphene platelet-reinforced composite beams" *Composite Structures.*, 161, pp. 111-118.
- [37] Yang J, Chen D and Kitipornchai S. (2018) "Buckling and free vibration analyses of functionally graded graphene reinforced porous nanocomposite plates based on Chebyshev-Ritz method" *Composite Structures.*, 193, pp. 281-294.
- [38] Do V.N.V and Lee C.H. (2017) "Thermal buckling analyses of FGM sandwich plates using the improved radial point interpolation mesh-free method" *Composite Structures.*, 177, pp. 171-186.

- [39] Wu H, Yang J and Kitipornchai S. (2017) "Dynamic instability of functionally graded multilayer graphene nanocomposite beams in thermal environment" *Composite Structures.*, 162, pp. 244-254.
- [40] Jiao P, Chen Z, Ma H, Zhang D and Ge P. (2019) "Buckling analysis of thin rectangular FG-CNTRC plate subjected to arbitrarily distributed partial edge compression loads based on differential quadrature method" *Thin-Walled Structures.*, 145, p. 106417.
- [41] Arefi M, Mohammad-Rezaei Bidgoli E, and Rabczuk T. (2019) "Thermo-mechanical buckling behavior of FG GNP reinforced micro plate based on MSGT" *Thin-Walled Structures.*, 142, pp. 444-459.
- [42] Mohieddin Ghomshei M. (2020) "A numerical study on the thermal buckling of variable thickness Mindlin circular FGM plate on a two-parameter foundation". *Mechanics Research Communications.*, 108, pp. 103-112.
- [43] Mao J.J. and Zhang W. (2019) "Buckling and post-buckling analyses of functionally graded graphene reinforced piezoelectric plate subjected to electric potential and axial forces" *Composite Structures.*, 216, pp. 392-405.
- [44] Halpin J.C and Kardos J.L. (1976) "The Halpin-Tsai equations A review" *polymer Engineering and Science.*, 16, pp. 344-352.
- [45] Nakamura T, Wang T and Sampath S. (2000) "Determination of properties of graded materials by inverse analysis and instrumented indentation" *Acta Materialia.*, 48, pp. 4293-4306.
- [46] Yasmin A and Daniel I.M. (2004) "Mechanical and thermal properties of graphite platelet/epoxy composites" *Polymer.*, 45, pp. 8211-8219.
- [47] آریا، آ.پ. (۱۳۸۸) «آشنایی با مکانیک کلاسیک» چاپ ششم، انتشارات دانشگاه فردوسی، مشهد، ص ۴۹۹.
- [48] Bellman R, Kashef B.G, and Casti J. (1971) "Differential quadrature A technique for the rapid solution of nonlinear partial differential equations" *Computational Physics.*, pp. 40-52.
- [49] Bert C.W and Malik M. (1996) "Differential quadrature method in computational mechanics: A review" *Applied Mechanics Reviews.*, 49, pp. 1-28.
- [50] Wu H, Kitipornchai S and Yang J. (2017) "Thermal buckling and postbuckling of functionally graded graphene nanocomposite plates" *Materials & Design.*, 132, pp. 430-441.

Abstract

Today, the use of nanocomposites has expanded due to its favorable mechanical and thermal properties in many industries, including aerospace, medicine, military, etc. Therefore, in the present numerical study, the thermomechanical buckling and post-buckling of functionally graded plates with a matrix of isotropic polymer (diglycidyl ether bisphenol A) and reinforced with graphene platelets (GPLs) under simply supported and clamped boundary conditions has been investigated. The plates are subjected to uniform temperature changes and in-plate forces. In these multilayer plates, the thickness of all layers is the same, and the GPL weight fraction may have a layer-wise variation across the plate thickness. The plates are reinforced with two functionally graded (X and O) and uniform (U) distributions. The effective Young's modulus of the plates is calculated using the modified Halpin-Tsai micromechanical model, and also the mixing law is used to obtain the equivalent properties of the composites. Within the framework of the first-order shear deformation theory (FSDT), the nonlinear governing equations are derived by applying the principle of virtual displacements and then solved by using a differential quadrature-based (DQ) iteration technique, calculate the critical buckling temperatures and loads, and determine the thermal and mechanical post-buckling paths. By comparing the results of the present study with other sources, the accuracy and efficiency of the steps taken, have been confirmed. The effect of aspect ratio, width-to-thickness ratio and GLP weight fraction, boundary conditions, on buckling temperature and post-buckling equilibrium paths of the plates have been investigated. The results show the functionally graded distribution of the GLPs does not necessarily improve the buckling strength of the plates. In the functionally graded distribution of GLPs as X, the plate's resistance to thermal and mechanical buckling increases, while in the distribution of GPL as O, the buckling strength of the plates decreases. Plates with GLPs distribution of X, U and O respectively have the highest buckling load, buckling temperature and post-buckling equilibrium path.

Keywords: Thermomechanical buckling, Differential quadrature method, Functional graded materials, Post buckling, First order shear deformation theory



Shahrood University of
Technology

Faculty of Mechanical and Mechatronics Engineering

M.Sc. Thesis in Applied Mechanics Engineering

Thermomechanical buckling and postbuckling of nanocomposite plates reinforced with graphene

Under Supervision of:
Dr. Alireza Shaterzadeh

By:
Bahareh Yakhchian

Feb,2021