

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک
پایان نامه کارشناسی ارشد مهندسی طراحی کاربردی

مطالعه محیط ایزوتروپیک دارای ترک تحت شوک دمایی به روش المان محدود
توسعه یافته با در نظر گرفتن تئوری چاندراساخاریا- تیزو

نگارنده: وحید جعفری

اساتید راهنما:

دکتر محمدباقر نظری

دکتر مسعود مهدی زاده رخی

بهمن ۱۳۹۹

تقدیم اثر

تمامی تلاش چندین ماهه می خود را در این تحقیق به خانواده محترم و همسر عزیزم که با صبر و حوصله و همراهی های بی دریغشان، اینجانب را در پیشرفت هر چه بهتر پایان نامه یاری و مساعدت نموده اند، تقدیم می نمایم.

شکر و قدردانی

اکنون که در سایه الطاف خداوند متعال این پایان نامه به انجام رسیده است، بر خود لازم میدانم از زحمات فراوان استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر محمد باقر نظری که در منصب استاد راهنما توصیه های بی-شائبه ی خود را در جهت گیری صحیح، تدوین و گردآوری پروژه ارائه نموده اند، مراتب سپاس را به جا آورم. همچنین از زحمات خالصانه جناب آقای دکتر مسعود مهدی زاده رخی که بارها بنی های خود بنده را یاری نموده اند، بسیار متشکرم.

دوستان عزیزم آقایان مهندس وحید عصمتی و مهندس محمد کریمی و کلیه کسانی که با سعه صدر و حمایت های بی دریغ، اینجانب را در به ثمر رساندن این تحقیق یاری رسانده اند، خالصانه شکر و قدردانی می نمایم و از درگاه ایزد منان توفیق روز افزون ایشان را خواستارم.

تعهد نامه

اینجانب وحید جعفری دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی مکانیک - طراحی کاربردی دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان نامه مطالعه محیط ایزوتروپیک دارای ترک تحت شوک دمایی به روش المان محدود توسعه یافته با در نظر گرفتن تئوری چاندراساخاریا-تیزو تحت راهنمایی دکتر محمدباقر نظری و دکتر مسعود مهدی زاده رخی متعهد می شوم:

* تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است.

* در استفاده از نتایج پژوهش های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.

* مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچگونه مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.

* کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.

* حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیر گذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.

* در کلیه مراحل انجام این پایان نامه در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا از آن استفاده شده است، اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ :

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

* کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و ...) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد.

* استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

در این پایان نامه یک محیط ایزوتروپیک دارای ترک ساکن تحت شوک حرارتی مورد مطالعه قرار گرفته است. در این تحقیق از معادلات ترموالاستیسیته دینامیکی کوپل با در نظر گرفتن تئوری چاندراساхарيا - تیزو استفاده شده است. با بهره گیری از روش المان محدود توسعه یافته، گسسته سازی معادلات در فضای بی بعد انجام شده است. برای محاسبه ضرایب شدت تنش از انتگرال بر هم کنش استفاده شده است. در نهایت چند مثال با استفاده از روش عددی حل شده و توزیع دما، جابه جایی، تنش در جهت محورهای x و y در امتداد یک لایه همگن بدست آمده است. همچنین ضرایب شدت تنش تحت شوک دمایی بررسی و با تئوری ترموالاستیک کلاسیک مقایسه گردیده است. نتایج نشان می دهد که سرعت موج دما، جابه جایی و تنش بر اساس تئوری چاندراساхарيا - تیزو برخلاف تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک محدود می باشد. همچنین ماکزیمم مقادیر جابه جایی و تنش بر اساس تئوری چاندراساхарيا - تیزو در فاصله کمتری از دیواره تحت شوک حرارتی اتفاق می افتد، و بیشینه ضریب شدت تنش مود I و- در بارگذاری های نامتقارن - ضریب شدت تنش مود II بر اساس تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک بزرگتر از تئوری چاندراساхарيا-تیزو بوده و زودتر اتفاق می افتد.

کلید واژگان

ضریب شدت تنش، المان محدود توسعه یافته، شوک گرمایی، ترموالاستیسیته تعمیم یافته، تئوری چاندراساхарيا-تیزو .

فهرست مطالب

فصل اول مقدمه..... ۱

۱-۱ مقدمه..... ۲

۲-۱ مروری بر کارهای پیشین..... ۳

۳-۱ نوآوری..... ۷

فصل دوم روش المان محدود توسعه یافته..... ۹

۱-۲ مقدمه..... ۱۰

۲-۲ روش اجزای محدود توسعه یافته..... ۱۰

۳-۲ تقریب تابع غنی سازی:..... ۱۱

۴-۲ مدل سازی ترک در روش المان محدود توسعه یافته..... ۱۱

۵-۲ تعیین موقعیت نقاط نسبت به مسیر ترک..... ۱۷

۶-۲ المان های ایزوپارامتریک..... ۱۸

۷-۲ انتگرال گیری عددی..... ۱۹

۸-۲ استخراج معادلات حاکم..... ۲۱

۹-۲ گسسته سازی معادلات حاکم..... ۲۳

فصل سوم نتایج و بحث..... ۴۱

۱-۳ مقدمه..... ۴۲

۲-۳ مثال اول..... ۴۲

۳-۳ مثال دوم..... ۴۵

۴-۳ مثال سوم..... ۴۸

۵-۳ مثال چهارم..... ۵۳

۶-۳ مثال پنجم..... ۵۸

فصل چهارم نتیجه گیری و پیشنهادات..... ۶۳

۱-۴ نتیجه گیری..... ۶۴

۲-۴ پیشنهادات..... ۶۵

منابع..... ۶۶

فهرست شکل‌ها

- شکل (۱-۲) نمایش یک ترک در یک شبکه اجزای محدود توسعه یافته همراه با المان های غنی شده..... ۱۲
- شکل (۲-۲) موقعیت یک نقطه دلخواه نسبت به مسیر ترک..... ۱۸
- شکل (۳-۲) المان ایزو پارامتریک..... ۱۹
- شکل (۴-۲) تقسیم بندی المان های شامل ترک برای انتگرال گیری عددی..... ۲۰
- شکل (۵-۲) تقسیم بندی المان شامل نوک ترک برای انتگرال گیری عددی..... ۲۱
- شکل (۱-۳) لایه همگن و ایزوتروپیک تحت شوک حرارتی..... ۴۳
- شکل (۲-۳) نمایش تغییرات تنش در جهت x در امتداد طول لایه در زمان های مختلف..... ۴۴
- شکل (۳-۳) تغییرات جابه جایی u_x در امتداد طول لایه در زمان های مختلف..... ۴۴
- شکل (۴-۳) تغییرات دما در امتداد طول لایه در زمان های مختلف..... ۴۵
- شکل (۵-۳) هندسه و ابعاد صفحه ایزوتروپیک همگن دارای ترک لب های تحت شوک گرمایی..... ۴۶
- شکل (۶-۳) تغییرات زمانی ضریب شدت تنش مود I..... ۴۷
- شکل (۷-۳) اثر تغییر اندازه ناحیه انتگرال گیری بر روی مقدار ضریب شدت تنش مد I..... ۴۷
- شکل (۸-۳) هندسه و ابعاد صفحه ایزوتروپیک همگن تحت شوک گرمایی..... ۴۸
- شکل (۹-۳) توزیع دما در صفحه در زمان های مختلف..... ۵۱
- شکل (۱۰-۳) تغییرات جابه جایی u_x در صفحه در زمان های مختلف..... ۵۱
- شکل (۱۱-۳) تغییرات σ_x در صفحه در زمان های مختلف..... ۵۲
- شکل (۱۲-۳) تغییرات σ_y در صفحه در زمان های مختلف..... ۵۲
- شکل (۱۳-۳) توزیع دما در لایه برای دو زمان متفاوت جهت بررسی همگرایی نتایج با تغییر تعداد المان های شبکه..... ۵۳
- شکل (۱۴-۳) هندسه و ابعاد صفحه ایزوتروپیک همگن تحت شوک گرمایی..... ۵۴
- شکل (۱۵-۳) منحنی های ضریب شدت تنش مد I حاصل از تئوری ترموالاستیسیته CT بر حسب دما برای سه شبکه مختلف و مقایسه با منحنی ضریب شدت تنش مد I حاصل از تئوری کلاسیک..... ۵۵
- شکل (۱۶-۳) تغییر شکل نمونه در زمان $t=0.75$ ۵۶
- شکل (۱۷-۳) کانتورهای دما در دو زمان مختلف..... ۵۶
- شکل (۱۸-۳) کانتورهای جابجایی u_y در دو زمان مختلف..... ۵۷
- شکل (۱۹-۳) کانتورهای تنش σ_x در دو زمان مختلف..... ۵۷
- شکل (۲۰-۳) کانتورهای تنش σ_y در دو زمان مختلف..... ۵۸
- شکل (۲۱-۳) هندسه و ابعاد صفحه ایزوتروپیک همگن دارای ترک لب های تحت شوک گرمایی..... ۵۹
- شکل (۲۲-۳) نمودار ضریب شدت تنش مد I و II بر حسب زمان..... ۶۰
- شکل (۲۳-۳) تغییر شکل نمونه در زمان $t=0.75$ ۶۰
- شکل (۲۴-۳) کانتورهای دما در دو زمان مختلف..... ۶۱
- شکل (۲۵-۳) کانتورهای جابجایی u_y در دو زمان مختلف..... ۶۱
- شکل (۲۶-۳) کانتورهای تنش σ_x در دو زمان مختلف..... ۶۲
- شکل (۲۷-۳) کانتورهای تنش σ_y در دو زمان مختلف..... ۶۲

فهرست جدول‌ها

جدول (۱-۳) مشخصات مسئله و خواص ماده.....	۴۳
جدول (۲-۳) خواص ماده در نظر گرفته شده [70].....	۴۶
جدول (۳-۳) خواص ماده در نظر گرفته شده.....	۴۹
جدول (۴-۳) خواص ماده در نظر گرفته شده.....	۵۴

فهرست علامتها

مساحت المان، (m^2)	A
مساحت ناحیه انتگرال برهمکنش، (m^2)	A^*
طول ترک، (m)	A
بردار مجهولات گره‌ای مربوط به توابع شکل المان محدود	A
بردار نیروی کالبدی بر واحد حجم، (N/m^3)	B
بردار مجهولات گره‌ای مربوط به توابع شکل غنی شده با تابع هویساید	B
بردار مجهولات گره‌ای مربوط به توابع شکل غنی شده نوک ترک	C
ماتریس میرایی	$[C]$
سرعت موج دما	C_T
مدول یانگ، (N/m^2)	E
بردار نیروهای گره‌ای، (N)	F
توابع غنی سازی نوک ترک، ($m^{0.5}$)	F_m
تابع هویساید	H
هدایت گرمایی، ($W/(m \cdot K)$)	K
ماتریس سفتی	$[K]$
ضریب شدت شار گرمایی	K_T
ضریب شدت تنش مد اول، ($N \cdot m^{-1.5}$)	K_I
ضریب شدت تنش مد دوم، ($N \cdot m^{-1.5}$)	K_{II}
طول مشخصه	l
ماتریس جرم، (kg)	$[M]$
انتگرال برهمکنش، (N/m)	M
تابع شکل روش المان محدود	N
مجموعه گره‌های شبکه	N_A
مجموعه گره‌های اطراف مسیر ترک	N_H

مجموعه گره‌های المان‌های نوک ترک	N_c
تابع وزنی برای محاسبه انتگرال برهمکنش، بی‌بعد	Q
مؤلفه‌های بردار شار گرمایی بر واحد سطح، (W/m^2)	q_i
گرمای تولیدشده بر واحد حجم، (W/m^3)	R
مؤلفه دستگاه مختصات قطبی، (m)	R
دما، (K)	T
بردار نیروی سطحی بر واحد سطح، (N/m^2)	Tr
زمان، (sec)	T
بردار جابه‌جایی	U
حجم، (m^3)	V
سرعت مشخصه (m/s)	v
عرض نمونه، (m)	W
چگالی انرژی کرنشی مکانیکی	W
مؤلفه‌های دستگاه مختصات دکارتی سراسری، (m)	X_1 و X_2
مؤلفه‌های دستگاه مختصات دکارتی محلی، (m)	x_1 و x_2
تابع فاصله علامت‌دار، (m)	Z

علامت‌های یونانی

α	ضریب انبساط گرمایی، $(1/^{\circ}\text{C})$
β	تانسور مدول تنش-دما
δ_{ij}	دلتای کرونکر، بی‌بعد
ε	تانسور کرنش، بی‌بعد
θ	تغییر دما، (K)
μ و λ	ثوابت لامه، (N/m^2)
ν	نسبت پواسون، بی‌بعد
ρ	چگالی، (kg/m^3)
φ	مؤلفه دستگاه مختصات قطبی، بی‌بعد
σ	تانسور تنش، (N/m^2)
Δ	بردار مجهولات گره ای
Φ	تابع شکل غنی شده برای المان‌های مسیر ترک، بی‌بعد
Ψ	تابع شکل غنی شده برای المان‌های نوک ترک، بی‌بعد
ω	زاویه بین دستگاه‌های مختصات محلی و سراسری، بی‌بعد
ξ, η	مؤلفه های دستگاه مختصات محلی در المان های ایزوپارامتریک

بالانویس‌ها

S	مربوط به حالت برهم‌نهی
T	مربوط به دما
u و v	به ترتیب مربوط به جابجایی در جهت محورهای مختصات افقی و قائم

زیرنویس‌ها

g	نشان‌دهنده مختصات سراسری
i	شمارنده، مربوط به مؤلفه x دستگاه مختصات دکارتی
j	شمارنده، مربوط به مؤلفه y دستگاه مختصات دکارتی

شمارنده مربوط به توابع شکل و همچنین نشان‌دهنده مختصات محلی	L
شمارنده، مربوط به توابع غنی‌سازی نوک ترک	M
شمارنده، مربوط به گره‌ها، گام زمانی و مؤلفه‌های دستگاه مختصات	N

فصل اول

مقدمه

۱-۱ مقدمه

بسیاری از قطعات استوانه‌ای از جمله سازه‌هایی مثل لوله‌ها و مخازن تحت فشار در تجهیزات مهندسی مدرن مثل راکتورهای هسته‌ای، دستگاه‌های تولید و انتقال اشعه ایکس و لیزر و در فرآیندهایی چون ذوب سطحی فلزات [۱]، پوشش‌دهی فلزات با نانوسرامیک‌ها [۲] و همچنین مخازن گازهای مایع در صنایع هوافضا، تحت هدایت گرمایی سریع قرار می‌گیرند. با توجه به امکان وجود عیب یا ترک در این سازه‌ها، ارزیابی دقیق ایمنی، تخمین عمر و ظرفیت تحمل بار آنها مستلزم بررسی رفتار ترک است. از میان انواع ترک‌ها در استوانه‌های تحت فشار و گرادیان دما، دو دسته از ترک‌ها شامل ترک‌های طولی^۱ و ترک‌های محیطی^۲ بحرانی‌ترین وضعیت را خواهند داشت [۳].

تئوری مرسوم هدایت گرمایی فوریه منجر به معادله حاکم سهموی در مسئله می‌شود. براساس این تئوری، تاثیر یک اغتشاش گرمایی در مرز یک جسم بلافاصله در نقاط دور از آن احساس می‌شود که از نظر فیزیکی قابل قبول نیست. از طرف دیگر، آزمایش‌ها در مواردی چون اغتشاش گرمایی در دماهای پایین، شوک‌های گرمایی^۳ در زمان‌های کوتاه و هدایت‌های گرمایی در مقیاس میکرو، سرعت محدود موج گرما را تأیید می‌کند [۴]. در این موارد، نتایج کاربرد قانون فوریه با نتایج تجربی اختلاف فاحش دارند [۵]. مهمترین نقص قانون فوریه، منجر شدن به سرعت بی-نهایت موج گرمایی است. برای رفع این مشکل، تئوری‌های مختلف تعمیم‌یافته ترموالاستیسیته^۴ ارائه شده‌اند. در مواردی که هدایت گرمایی سریع رخ می‌دهد، توزیع دمای حاصل از قانون فوریه به اندازه کافی دقیق نیست. برای مثال دمای اندازه‌گیری شده در باریکه نازکی که تحت گرمایش سریع از طریق لیزر قرار گرفته است، در زمان‌های بسیار نزدیک به زمان اعمال شوک گرمایی حدود ۳۰۰ درجه سانتی‌گراد بیشتر از دمایی است که توسط قانون فوریه

¹. Longitudinal crack

². Circumferential crack

³. Thermal shock

⁴. Generalized thermoelectricity

محاسبه می شود [۶]. هدایت گرمایی کاتانو- ورنات نیز در برخی موارد نمی تواند نتایج را به درستی پیش بینی کند و در مواردی چون فرآیندهای سریع انتقال گرما و انتقال گرما در مقیاس میکرو منجر به نتایج غیرطبیعی می شود [۸-۷]. هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه با توجه به روابط ساختاری در نظر گرفته شده، نتایج دما و تنش را در سازه به گونه ای پیش بینی می کند که با نتایج آزمایشگاهی سازگاری دارد و از طرف دیگر، در هدایت گرمایی سریع و هدایت گرمایی در مقیاس میکرو و نانو نتایج قابل قبولی ارائه می کند.

۱-۲ مروری بر کارهای پیشین

تاکنون چند تئوری بنام تئوری های ترموالاستیسیته تعمیم یافته یا هذلولوی برای حل مشکل تئوری کلاسیک ترموالاستیسیته مطرح شده اند [۹-۱۲]. در بیشتر تئوری های ترموالاستیسیته تعمیم یافته، سرعت انتقال انرژی به علت فرم هذلولوی معادله هدایت گرمایی محدود است.

تزو [۱۳-۱۴] یک مدل هذلولوی دو مرحله ای را برای لحاظ کردن برهم کنش میکروساختار ماده در فرآیندهای سریع انتقال گرما پیشنهاد کرد، در این مدل که مدل تأخیر فاز دوگانه نامیده می شود دو زمان آسایش یکی برای گرادیان دما، و دیگری برای شار گرمایی معرفی شده است. زمان آسایش گرادیان دما تأخیر زمانی ناشی از برهم کنش میکروساختار، برهم کنش فوتون الکترون و پراکنش فوتون ها و زمان آسایش شار گرمایی اثر اینرسی گرمایی را لحاظ می کند [۱۵]. مدل تأخیر فاز دوگانه بر خلاف قانون فوریه، منجر به معادله هدایت گرمایی با مشتقات جزئی مرتبه بالا نسبت به زمان می شود. نتایج آزمایش ها نشان می دهد مدل تأخیر فاز دوگانه رفتار واقعی ماده در انتقال گرمای سریع و یا انتشار گرما در مقیاس میکرو را بهتر از مدل هذلولوی بیان می کند [۱۶]. در تئوری های ترموالاستیسیته تعمیم یافته، سرعت انتقال انرژی با توجه به ماهیت موج گونه میدان دما محدود است. یکی از تئوری های اخیر ترموالاستیسیته تعمیم یافته توسط چاندراساخیاریا و تزو [۱۷] بر مبنای هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه [۱۸] ارائه شده است. در این تئوری، معادلات حاکم از کوپل شدن معادله انرژی براساس رابطه ساختاری

شار گرمایی با مدل تأخیر فاز دوگانه و معادله تعادل به دست می‌آیند.

گرین و لیندزی [۱۹] یک تئوری تعمیم‌یافته ترموالاستیسیته بر پایه نابرابری تولید آنتروپی گرین و لاوز [۲۰] پیشنهاد دادند. مدل گرین - لیندزی، دو زمان تأخیر نرخ دما را در معادلات آنتروپی و تنش معرفی می‌کند. بنابراین، تنش و آنتروپی علاوه بر تغییرات دما به نرخ دما هم وابسته‌اند. در این تئوری، شکل کلی شار گرمایی فوریه نیز به صورت تابعی از گرادیان دما و نرخ دما تعریف می‌شود. البته، در مدل گرین - لیندزی قانون فوریه نقض نمی‌شود [۱۹]. فو و همکاران در پژوهش خود رفتار ترموالاستیک کوپل یک چندلایه یا سیلندر توخالی تحت گرمای گذرا و بارهای مکانیکی را مورد بررسی قرار دادند [۲۱].

از طرف دیگر، عمر مورد انتظار یا ظرفیت بارگذاری سازه‌ها با وجود عیوب یا ترک‌ها کاهش می‌یابد. در قطعاتی که تحت دمای بالا یا گرادیان دمایی هستند، ایجاد و رشد ترک مرسوم‌ترین مود گسیختگی است. به علت محدودیت روش‌های آزمایشگاهی و تحلیلی، روش‌های عددی برای تحلیل مسائل ترموالاستیسیته به طور گسترده توسعه یافتند [۲۲]. تما و رایلکار [۲۳] با استفاده از روش المان محدود در فضای لاپلاس و سپس کاربرد یک روش لاپلاس معکوس عددی، تأثیر زمان‌های تأخیر بر دما و توزیع تنش ناشی از آن را در مسائل ترموالاستیسیته تعمیم‌یافته غیرکوپل بررسی کردند. حل‌های تقریبی برای مسائل ترمومکانیکی با معادلات ترموالاستیسیته دینامیکی کوپل و غیر کوپل با استفاده از روش المان محدود توسط تینگ و چن [۲۴]، لیو و پانگ [۲۵]، تما و رایلکار [۲۶-۲۷] و تما و نامورو [۲۸-۲۹] ارائه شده است. تما [۳۰] و نامورو [۳۱] با در نظر گرفتن ویسکوزیته مصنوعی^۵ در معادلات دینامیکی ترموالاستیسیته، نوسات عددی در توزیع دما و تنش را که با استفاده از روش انتگرال گیری مستقیم زمانی به دست آمده بودند، حذف کردند. چن و دارگوش [۳۲] با استفاده از روش المان مرزی در فضای لاپلاس، مسئله ترموالاستیسیته تعمیم یافته را در یک نیم صفحه حل کردند.

^۵Artificial viscosity

لی و وانگ یک روش عددی برای حل هدایت حرارتی تأخیر فاز دوگانه ارائه داده‌اند که در آن معادلات دیفرانسیل حاکم شامل مشتق مرتبه سوم نسبت به زمان، استخراج و به وسیله روش المان محدود حل شدند [۳۳].

فرهی‌نژاد و همکاران در پژوهش خود نتیجه گرفتند که علاوه بر تغییر زمانی دمای یک نقطه طبق مدل تأخیر دوگانه با مدل‌های هذلولی و فوریه، رفتار متفاوت ترک را نسبت به مدل فوریه نشان می‌دهد. ضریب شدت تنش بیشینه مدل تأخیر فاز دوگانه از مدل فوریه به طور قابل ملاحظه‌ای بزرگتر است. همچنین در مدل تأخیر فاز دوگانه ضریب شدت تنش بیشینه در هر لحظه قبل از رسیدن پیشانی موج تنش در موقعیت نوک آن قرار داد. مطابق با نتایج آنان در نظر گرفتن مدل مناسب هدایت گرمایی در طراحی سازه‌های تحت بار گرمایی گذرا اهمیت ویژه‌ای دارد [۳۴]. حسینی-تهرانی و اسلامی [۳۵] با استفاده از روش المان مرزی تأثیر ضریب کوپل بین میدان‌های دما و کرنش بر فرکانس طبیعی و دامنه ارتعاشات در یک فضای محدود را مطالعه کردند. علاوه بر این، حسینی‌تهرانی و اسلامی [۳۶] با بکارگیری روش المان مرزی در فضای لاپلاس، توزیع تنش به همراه جابه‌جایی و دما را در یک فضای محدود تحت شوک گرمایی بر اساس تئوری‌های کلاسیک، لرد شلمان و گرین لندزی مقایسه کردند. چن و ونگ [۳۷] از روش المان محدود در فضای لاپلاس جهت در نظر گرفتن اثر زمان‌های تأخیر تئوری‌های تعمیم‌یافته بر میدان‌های دما و تنش استفاده کردند. پریوست و تائو [۳۸] روش نیومارک صریح/ضمنی بر پایه روش تقسیم‌بندی ناحیه حل^۶ که توسط هیوز و لیو [۳۹-۴۰] معرفی شد را جهت محاسبه توزیع دما، تنش و جابه‌جایی در یک صفحه ایزوتروپیک تحت شوک گرمایی با مدل گرین لندزی، بکار بردند. تیان و همکاران [۴۱] از روش نیومارک به منظور حل معادلات گسسته گرین - لندزی در محیط المان محدود برای یک نیم‌صفحه استفاده کردند. آنها نوسانات ایجاد شده در نتایج به علت استفاده از روش نیومارک را توسط تکنیک‌های هموارسازی حذف کردند.

⁶ Splitting method

پورتلا و علی آبادی [۴۲] روش المان مرزی دوگانه^۷ جهت مدل کردن یک ترک دلخواه در یک ماده را پیشنهاد کردند. یک روش المان مرزی دوگانه برای تحلیل ترک ترموالاستیک گذرای غیرکوپل [۴۳] و رشد ترک شبه استاتیکی تحت بارگذاری ترمومکانیکی [۴۴] و برای مسائل سه بعدی ترموالاستیک دارای ترک، توسط علی آبادی و همکاران [۴۵] توسعه یافته است. اخلاکف و همکاران [۴۶-۴۷] از یک روش ترکیبی روی دامنه حل و مرز آن جهت محاسبه ضریب شدت تنش برای یک ترک در صفحه‌ای از جنس مواد تابعی تحت شوک گرمایی با در نظر گرفتن تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک استفاده کردند. حسینی‌تهرانی و همکاران روش المان مرزی را در فضای لاپلاس جهت محاسبه ضریب شدت تنش مود اول برای یک ترک، در فضای محدود ایزوتروپیک دوبعدی، تحت شوک گرمایی با در نظر گرفتن تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک [۴۸]، لرد شلمان [۴۹] و گرین - لیندزی [۵۰] بکار بردند. همچنین، تأثیر ضرایب اینرسی و کوپل بر ضریب شدت تنش مود اول بر اساس تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک در [۵۱] گزارش شده است. ژبو و ونگ [۵۲] اثر اینرسی بر شکست جسم صلب دارای ترک تحت شوک حرارتی را با مدل تاخیر فاز دو گانه بررسی نمودند که در این پژوهش هم ترک گرم و هم ترک با عایق حرارتی در نظر گرفته شده است، مشخص شد که اثر غیرفوریه‌ای به طور قابل ملاحظه‌ای به وسیله اثر اینرسی برجسته شده است و اثر اینرسی همیشه دامنه ضرایب شدت تنش حرارتی مدل I را برای ترک گرم افزایش می‌دهد اگر چه ممکن است دامنه ضرایب شدت تنش حرارتی مدل II را برای ترک عایق شده ضعیف کند، اگر سرعت موج حرارتی به اندازه کافی زیاد باشد. روش المان محدود توسعه یافته برای تحلیل مسائل شامل ترک تحت بارگذاری ترمومکانیکی استاتیکی و غیرکوپل توسط حسینی و همکاران [۵۳] به کار گرفته شد. مهدی‌زاده‌رخی [۵۴] با استفاده از این روش شکست مواد تابعی تحت شوک‌های حرارتی - مکانیکی را مورد بررسی و تحلیل قرار دادند. پاتاک [۵۵] به بررسی ترک در مواد تابعی تحت محیط بارگذاری حرارتی و مکانیکی پرداخته است.

⁷ Dual boundary element method

حاجی محمدی [۵۶] با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته ، رفتار ترک را در مواد ارتوتروپیک تحت بار حرارتی بررسی کرد. همچنین، این روش در ترموالاستیسیته شبه استاتیکی برای محاسبه ضریب شدت تنش و رشد ترک توسط گلی و همکاران [۵۷] و بایسته و همکاران [۵۸] جهت مدل کردن ترک عایق و هم‌دما در مواد تابعی بکار گرفته شده است.

۱-۳ نوآوری

طبق جستجوی‌های انجام شده تاکنون پژوهش‌های بسیار کمی در مورد محاسبه ضرایب شدت تنش برای بارگذاری دمایی با در نظر گرفتن تئوری چاندرا ساخاریا- تیزو منتشر شده است.

فصل دوم

روش المان محدود توسعه یافته

۲-۱- مقدمه

به منظور طراحی یک سازه خصوصا در صناعی نظیر مهندسی پزشکی ، هوافضا و... با توجه به سطح بالای اهمیت و هزینه‌های بالا تنها اکتفا کردن به روابط مقاومت مصالح در تحلیل آن‌ها درست نمی‌باشد و می‌بایست اثرات نقص و ناپیوستگی‌هایی مانند حفره و ترک را در این سازه‌ها مورد بررسی قرار داد و از علم مکانیک شکست در کنار مقاومت مصالح بهره برد. در بسیاری از مسائل مکانیک شکست به دلیل پیچیدگی در شرایط مرزی و یا هندسه مسئله نمی‌توان از روش‌های تحلیلی و آزمایشگاهی استفاده کرد و باید به کمک روش‌های عددی به تحلیل مسئله پرداخت. در علم مکانیک شکست برای بررسی رفتار ترک از روش‌های عددی همچون: المان محدود، بدون شبکه، المان محدود توسعه‌یافته ، المان محدود تطبیقی و المان مرزی استفاده می‌شود که با توجه به مزیت‌هایی که روش المان محدود توسعه‌یافته نسبت به سایر روش‌ها دارد بیش از هر روش دیگری مورد استقبال قرار گرفته است.

۲-۲- روش اجزای محدود توسعه‌یافته

روش اجزای محدود توسعه‌یافته در مقایسه با روش‌های مبتنی بر اجزای محدود متداول دارای برتری‌های بسیاری است. در روش‌های مبتنی بر اجزای محدود متداول برای مدل کردن ترک در شبکه، لازم است شبکه‌بندی با هندسه ناپیوستگی مطابقت داشته باشد. در هنگام شبیه‌سازی رشد ترک، به دلیل آنکه در هر مرحله از رشد ترک باید شبکه‌بندی با هندسه ترک جدید تطابق داشته باشد، این محدودیت بیشتر احساس می‌گردد. به علاوه در روش‌های قبل برای محاسبه تکنیکی در نوک ترک نیاز به استفاده از المان‌های بسیار ریز است که این امر باعث افزایش بار محاسباتی در مسئله خواهد گردید. روش اجزای محدود توسعه‌یافته با ارائه راهکاری جدید برای پیاده‌سازی ترک، توانسته بسیاری از عیوب مذکور را پشت سر بگذارد.

اولین بار بلیچکو و بلک برای تعریف ناپیوستگی از تابع‌های غنی‌سازی استفاده نمودند [۵۹-۶۱]. در این روش،

از تابع‌های غنی شده مخصوص به همراه درجه‌های آزادی اضافی برای معرفی ترک به صورت غیرهندسی استفاده می‌شود. این تابع‌ها و درجه‌های آزادی اضافه گردیده، ناپیوستگی در میدان جابجایی و تنش بینهایت را به صورت ریاضی به مدل اجزای محدود اضافه نموده و نیاز به وارد کردن ترک به صورت هندسی را برطرف می‌نمایند [۵۹-۶۱].

۳-۲- تقریب تابع غنی سازی:

به کمک تقریب زیر توابع غنی‌سازی در روش اجزا محدود توسعه یافته به دست می‌آید [۶۲]:

$$u(x) = \sum_{\forall i} N_i(x) a_i + \sum_{\forall i} \phi_i(x) \Psi(x) b_i \quad (1-2)$$

در این رابطه a_i ها درجات آزادی گره‌ای استاندارد و b_i ها پارامترهای مجهول مجازی هستند. $\phi_i(x)$ توابع

شکل و $\Psi(x)$ تابع غنی‌سازی هستند. N_i ها توابع شکل استاندارد هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) \quad (2-2)$$

اولین عبارت در سمت راست رابطه (۱-۲) تقریب المان محدود استاندارد است و بخش دوم اغلب انساز نامیده می‌شود.

شود [۶۲]. برای تقریب مورد استفاده در روش المان محدود کلاسیک و تعمیم یافته ممکن است توابع شکل یکسان

نباشند اما استفاده از توابع یکسان محدودیتی در حل مسئله ایجاد نمی‌کند [۶۲] در این تحقیق نیز توابع شکل یعنی

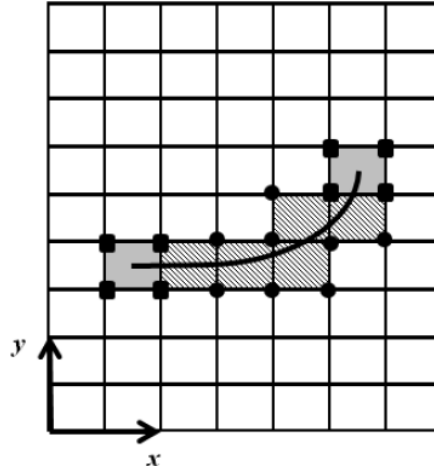
$\phi_i(x)$ برابر با $N_i(x)$ فرض شده‌اند.

۴-۲- مدل سازی ترک در روش المان محدود توسعه یافته

یک مدل المان محدود از یک جسم ترک‌دار مطابق شکل ذیل در نظر گرفته می‌شود. فرض می‌شود تمام گره-

های شبکه المان محدود با N_A مشخص شوند. در این شبکه‌بندی، گره‌های مسیر ترک و نوک ترک گره‌های غنی

شده می‌باشند و به ترتیب به عنوان گره‌های غنی شده گام N_H و گره‌های غنی شده نوک N_C شناخته می‌شوند.



شکل (۱-۲) نمایش یک ترک در یک شبکه اجزای محدود توسعه یافته همراه با المان های غنی شده

در روش المان محدود توسعه یافته میدان جابه جایی برای یک المان غنی شده ترک به صورت زیر است [۶۳]:

$$u(x, y, t) = \sum_{n \in N_A} N_n(x, y) a_n(t) + \sum_{n \in N_H} N_n(x, y) [H(Z) - H(Z_n)] b_n(t) \\ + \sum_m \sum_{n \in N_C} N_n(x, y) [F_m(r, \varphi) - F_m(r_n, \varphi_n)] C_{nm}(t) \quad (۳-۲)$$

در این رابطه $a_n(t)$ ، $b_n(t)$ ، $c_{nm}(t)$ مجهولات گره‌ای هستند که تابع زمان می‌باشند.

$$a_n(t)_n(t) = \{a_n^u(t), a_n^v(t)\}^T \quad (۴-۲)$$

$$b_n(t) = \{b_n^u(t), b_n^v(t)\}^T \quad (۵-۲)$$

$$c_{nm}(t) = \{c_{nm}^u(t), c_{nm}^v(t)\}^T \quad (۶-۲)$$

در رابطه (۳-۲) $H(z)$ تابع هویساید با رابطه زیر است:

$$H(Z) = \begin{cases} 1, & Z > 0 \\ 0, & Z \leq 0 \end{cases} \quad (۷-۲)$$

که Z تابعی از موقعیت یک نقطه نسبت به مسیر ترک است.

همچنین می‌توان به جهت جلوگیری از ناپایداری‌های عددی به جای رابطه (۷-۲) از تابع هویساید اصلاح شده

استفاده نمود [۶۴].

$$H(Z) = \begin{cases} 0 & z < -\zeta \\ 0.5 + \frac{z}{2\zeta} + \frac{1}{2\pi} \sin \frac{\pi z}{\zeta} & -\zeta < z < \zeta \\ 1 & Z > \zeta \end{cases} \quad (۸-۲)$$

که در این رابطه ζ کوچکتر از ابعاد یک المان است.

در رابطه (۳-۲) F_m مجموعه‌ای از توابع غنی سازی هستند که بر حسب مختصات محلی نوک ترک (r و ϕ) به

صورت زیر بیان می‌شود [۶۳]:

(۹-۲)

$$\{F_m\} = \{\sqrt{r} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right), \sqrt{r} \sin(\phi) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right), \sqrt{r} \sin(\phi) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\}$$

با جای گذاری روابط (۴-۲) تا (۶-۲) و (۹-۲) در رابطه (۳-۲) مولفه های جابه‌جایی در دستگاه مختصات

سراسری (x و y) به صورت زیر تعریف می‌شود:

(۱۰-۲)

$$\begin{aligned} u(x, y, t) = & \sum_{n \in N_A} N_n(x, y) a_n^u(t) + \sum_{n \in N_H} N_n(x, y) [H(Z) - H(Z_n)] b_n^u(t) \\ & + \sum_{n \in N_c} N_n(x, y) \left[\sqrt{r} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sqrt{r_n} \sin\left(\frac{\phi_n}{2}\right) \right] c_{n_1}^u(t) \\ & + \sum_{n \in N_c} N_n(x, y) \left[\sqrt{r} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sqrt{r_n} \cos\left(\frac{\phi_n}{2}\right) \right] c_{n_2}^u(t) \\ & + \sum_{n \in N_c} N_n(x, y) \left[\sqrt{r} \sin(\phi) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sqrt{r_n} \sin(\phi_n) \sin\left(\frac{\phi_n}{2}\right) \right] c_{n_3}^u(t) \\ & + \sum_{n \in N_c} N_n(x, y) \left[\sqrt{r} \sin(\phi) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sqrt{r_n} \sin(\phi_n) \cos\left(\frac{\phi_n}{2}\right) \right] c_{n_4}^u(t) \end{aligned}$$

(۱۱-۲)

$$\begin{aligned} v(x, y, t) = & \sum_{n \in N_A} N_n(x, y) a_n^v(t) + \sum_{n \in N_H} N_n(x, y) [H(Z) - H(Z_n)] b_n^v(t) \\ & + \sum_{n \in N_c} N_n(x, y) \left[\sqrt{r} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sqrt{r_n} \sin\left(\frac{\phi_n}{2}\right) \right] c_{n_1}^v(t) \\ & + \sum_{n \in N_c} N_n(x, y) \left[\sqrt{r} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sqrt{r_n} \cos\left(\frac{\phi_n}{2}\right) \right] c_{n_2}^v(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n \in N_c} N_n(x, y) \left[\sqrt{r} \sin(\varphi) \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{r_n} \sin(\varphi_n) \sin\left(\frac{\varphi_n}{2}\right) \right] c_{n_3}^v(t) \\
& + \sum_{n \in N_c} N_n(x, y) \left[\sqrt{r} \sin(\varphi) \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{r_n} \sin(\varphi_n) \cos\left(\frac{\varphi_n}{2}\right) \right] c_{n_4}^v(t)
\end{aligned}$$

در صورتیکه ترک عایق فرض شود در امتداد ترک میدان دما ناپیوسته و در نوک ترک شار حرارتی تکین خواهد

بود [۶۵]. به منظور در نظر گرفتن این ناپیوستگی می توان از تابع هویساید استفاده کرد. میدان دمای نوک ترک مشابه

میدان جابه جایی مد پارگی (مد III) ترک به صورت زیر است [۶۵]:

$$T = -\frac{K_T}{k} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \quad (۱۲-۲)$$

در این رابطه K_T ضریب شدت تنش گرمایی و k ضریب هدایت گرمایی است.

به منظور گسسته سازی میدان دما می توان از رابطه (۱۲-۲) و اولین تابع رابطه (۹-۲) برای غنی سازی گره های

نوک ترک استفاده کرد و به صورت زیر بیان نمود [۶۶]:

$$(۱۳-۲)$$

$$\begin{aligned}
\theta(x, y, t) = & \sum_{n \in N_A} N_n(x, y) a_n^T(t) + \sum_{n \in N_H} N_n(x, y) [H(Z) - H(Z_n) b_n^T(t) \\
& + \sum_{n \in N_c} N_n(x, y) [\sqrt{r} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{r_n} \sin\left(\frac{\varphi_n}{2}\right) c_n^T(t)
\end{aligned}$$

که در این رابطه $a_n^T(t)$ ، $b_n^T(t)$ و $c_n^T(t)$ مقادیر تغییرات دمای گره ها برای توابع شکل هستند. روابط (۲)-

(۱۰) (۱۱-۲) و (۱۳-۲) به صورت زیر بازنویسی می شوند:

(۱۴-۲)

$$u(x, y, t) =$$

$$\sum_{n \in N_A} N_n(x, y) a_n^u(t) + \sum_{n \in N_H} \phi_n(x, y) b_n^u(t) + \sum_{n \in N_c} \sum_{m=1}^4 \Psi_{nm}(x, y) c_{nm}^u(t)$$

(۱۵-۲)

$$v(x, y, t) =$$

$$\sum_{n \in N_A} N_n(x, y) a_n^v(t) + \sum_{n \in N_H} \phi_n(x, y) b_n^v(t) + \sum_{n \in N_c} \sum_{m=1}^4 \Psi_{nm}(x, y) c_{nm}^v(t)$$

$$\theta(x, y, t) =$$

(۱۶-۲)

$$\sum_{n \in N_A} N_n(x, y) a_n^T(t) + \sum_{n \in N_H} \phi_n(x, y) b_n^T(t) + \sum_{n \in N_c} \Psi_{n1}(x, y) c_{n1}^T(t)$$

با توجه به روابط (۱۰-۲) و (۱۱-۲) و (۱۳-۲) داریم:

(۱۷-۲)

$$\phi_n(x, y) = N_n(x, y) [H(Z) - H(Z_n)]$$

(۱۸-۲)

$$\begin{aligned} \Psi_n(x, y) = N_n(x, y) & [\sqrt{r} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{r_n} \sin\left(\frac{\varphi_n}{2}\right), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ & - \sqrt{r_n} \cos\left(\frac{\varphi_n}{2}\right), \sqrt{r} \sin(\varphi) \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{r_n} \sin(\varphi_n) \sin\left(\frac{\varphi_n}{2}\right), \sqrt{r} \sin(\varphi) \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \\ & \sqrt{r_n} \sin(\varphi_n) \cos\left(\frac{\varphi_n}{2}\right)] \end{aligned}$$

در این روابط Φ و Ψ عبارتهای غنی سازی میدانهای جابجایی و دما هستند.

با قرار دادن روابط (۲-۱۴) تا (۲-۱۶) در معادلات حاکم بر مسئله مورد نظر می توان این معادلات را گسسته سازی

کرد.

۲-۵- تعیین موقعیت نقاط نسبت به مسیر ترک

هنگام محاسبه تابع هویساید و انتگرالهای عددی المانهای روی مسیر ترک، لازم است موقعیت نقاط المان یعنی

اینکه در کدام طرف ترک قرار دارند مشخص گردد.

در این بخش برای مشخص کردن فاصله و سمت قرارگیری نقاط نسبت به مسیر ترک، الگوریتمی برای محاسبه

تابع فاصله علامت دار (Z در روابط ۲-۷ و ۲-۸) ارائه می شود:

مسیر ترک را به n بخش که هر بخش یک خط راست است تقسیم می کنیم. مطابق شکل (۲-۲) نقاط A و B

را نقاط ابتدا و انتهای بخش n ام از مسیر ترک و نقطه C را یک نقطه دلخواه فرض می کنیم. نقطه O نیز تصویر

نقطه C بر روی خط AB می باشد. پارامتر rc که موقعیت نقطه O می باشد به صورت زیر تعریف می شود:

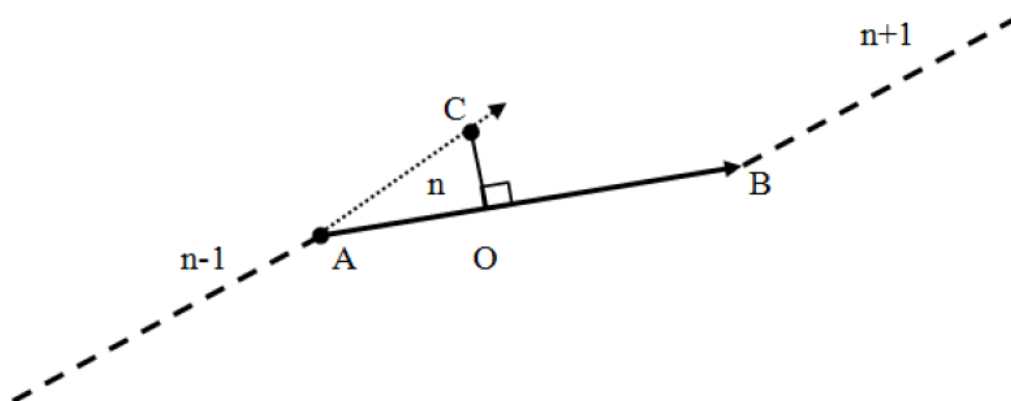
$$rc = \frac{AO}{AB} = \frac{AC \cdot AB}{|AB|^2} \quad (2-19)$$

تفسیر rc به این صورت می باشد که:

اگر $rc = 0$ باشد نقطه O بر روی نقطه A قرار می گیرد. اگر $rc = 1$ باشد نقطه O بر روی نقطه B قرار می گیرد.

اگر $rc < 0$ باشد آن گاه نقطه O بر روی امتداد AB و قبل از نقطه A می باشد. اگر $rc > 1$ آن گاه نقطه O در امتداد

AB و بعد از نقطه B است و اگر $0 < rc < 1$ آن گاه نقطه O در امتداد AB و بین نقاط A و B خواهد بود.



شکل (۲-۲) موقعیت یک نقطه دلخواه نسبت به مسیر ترک

پارامتر rs نیز به صورت زیر تعریف می شود:

$$rs = \frac{AB \cdot AC}{|AB|^2} \quad (2-20)$$

تفسیر rs به این صورت می باشد که:

اگر $rs = 0$ باشد نقطه C بر روی بردار AB قرار دارد. اگر $rs > 0$ باشد نقطه C در سمت چپ بردار AB و

هنگامیکه $rs < 0$ باشد نقطه C در سمت راست بردار AB قرار دارد.

اکنون می توان به وسیله پارامترهای rs و rc موقعیت نقاط را نسبت به ترک به دست آورد. فرض می شود تغییر

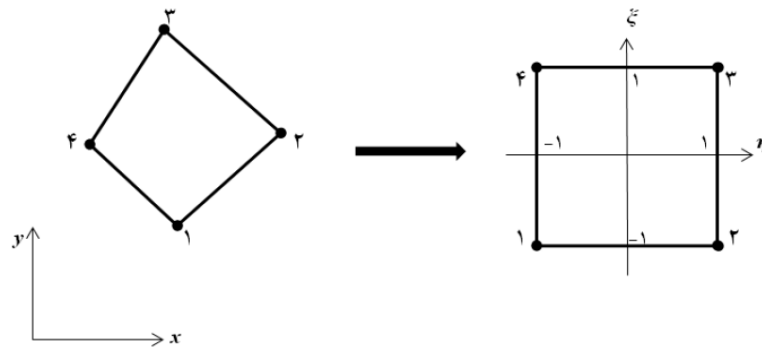
زاویه هر بخش از ترک نسبت به بخش قبلی کمتر از ۹۰ درجه باشد.

۲-۶- المان های ایزوپارامتریک

مطابق شکل (۲-۳) المانهای ایزوپارامتریک مربعی یک المان چهاروجهی در دستگاه مختصات سراسری (X, Y)

را به یک مربع 2×2 در دستگاه محلی $(\xi \times \eta)$ نگاشت می کنند. مختصات نقاط المان اولیه در دستگاه سراسری

از روابط زیر بدست می آیند [۶۴]:



شکل (۳-۲) المان ایزو پارامتریک

$$x = \sum_{i=1}^4 x_i N_i, y = \sum_{i=1}^4 y_i N_i \quad (۲۱-۲)$$

که N_i از رابطه (۲-۲) به دست می آید.

در این تحقیق برای المان بندی از المان های ایزو پارامتریک استفاده می شود.

۷-۲- انتگرال گیری عددی

پس از گسسته سازی معادلات با انتگرال هایی روبرو می شویم که برای حل آن ها باید از روش های عددی استفاده

کنیم. یکی از این روش ها، روش انتگرال گیری گوس می باشد که به صورت زیر تعریف می شود [۶۸]:

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^{nQ} f(\xi_i) w_i \quad (۲۲-۲)$$

که در این رابطه ξ_i مقادیر نقاط گوسی و nQ تعداد نقاط گوسی و w_i توابع وزنی می باشند.

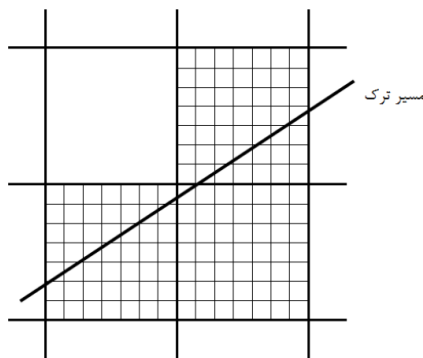
با توجه به اینکه در روش المان محدود ما می خواهیم بر روی سطح المان انتگرال گیری نمایم بنابراین باید به

محاسبه انتگرال دوگانه پرداخت که با استفاده از روش گاوس این انتگرال ها را می توان به صورت زیر به دست آورد:

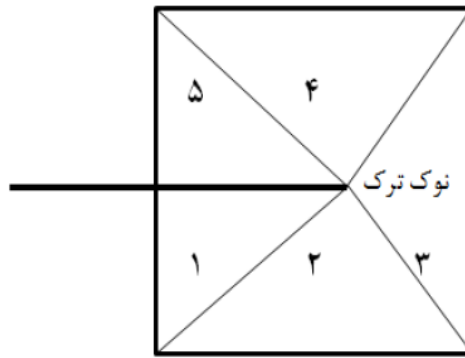
$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{nQ} \sum_{j=1}^{nQ} f(\xi_i, \eta_j) w_i w_j \quad (۲۳-۲)$$

در المان‌هایی که توسط ترک بریده می‌شوند برای انتگرال‌گیری توابع غنی‌سازی نمی‌توان از روش گاوس استفاده کرد لذا دالبوا [۶۸] دو روش برای حل این موضوع ارائه نمود. روش اول به اینصورت است که المانی که در مسیر ترک قرار دارد به المان‌های مثلثی کوچکتر در دو طرف ترک که لبه‌های این المان‌ها منطبق بر ترک می‌باشد تقسیم شود. در روش دوم المان ترک خورده به المان‌های چهارضلعی کوچکتر تقسیم می‌گردد.

در این تحقیق با استفاده از روش دوم و مطابق شکل (۲-۴) المان‌های ترک خورده به چهارضلعی‌های کوچکتری تقسیم می‌شوند. موقعیت مرکز هریک از چهارضلعی‌های کوچکتر نسبت به ترک ملاک انتگرال‌گیری و ارزیابی تابع هویساید قرار می‌گیرد. یعنی برای ارزیابی تابع هویساید در انتگرال‌گیری، کل نقاط گوسی بر روی هر چهارضلعی در طرفی در نظر گرفته می‌شود که مرکز چهارضلعی در همان طرف ترک باشد. المان نوک ترک نیز مطابق شکل (۲-۵) به منظور حذف اثر تکینی نوک ترک در عبارت زیر انتگرال به چند مثلث تقسیم می‌شود.



شکل (۲-۴) تقسیم‌بندی المان‌های شامل ترک برای انتگرال‌گیری عددی



شکل (۵-۲) تقسیم‌بندی المان شامل نوک ترک برای انتگرال‌گیری عددی

۸-۲- استخراج معادلات حاکم

در این قسمت به بررسی معادلات حاکم و بی‌بعد سازی آنها می‌پردازیم.

معادلات حاکم بر مسئله برای یک محیط ایزوتروپیک با در نظر گرفتن تئوری چاندراسا-تیزو برحسب

مولفه‌های جابه‌جایی و دما بدون وجود منبع گرمایی و نیروهای کالبدی به صورت زیر است:

$$(\lambda + \mu)u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} - \beta \theta_{,i} = \rho \ddot{u}_i \quad (24-2)$$

$$(25-2)$$

$$\begin{aligned} & -\rho C_V \dot{\theta} - T_0 \beta \dot{u}_{i,i} - \tau_q \rho C_V \ddot{\theta} - \tau_q T_0 \beta \ddot{u}_{i,i} - \frac{1}{2} \tau_q^2 \rho C_V \ddot{\ddot{\theta}} - \frac{1}{2} \tau_q^2 T_0 \beta \ddot{\ddot{u}}_{i,i} \\ & = -k \nabla^2 \theta - \tau_t k \nabla^2 \dot{\theta} \end{aligned}$$

با استفاده از متغیرهای بی‌بعد زیر معادلات فوق را بی‌بعد می‌نماییم.

پارامترهای بی‌بعد:

$$x_i = \hat{x}_i L \quad (26-2)$$

$$\tau_T = \frac{\hat{\tau}_T L}{V} \quad (27-2)$$

$$C = \hat{C}V \quad (28-2)$$

$$\tau_q = \frac{\hat{\tau}_q L}{V} \quad (29-2)$$

$$\left(L = V\hat{t} \rightarrow \hat{t} = \frac{L}{V}\right) t = \frac{L}{V} \hat{t} \quad (30-2)$$

$$\hat{k} = \frac{k}{VL\rho CV} \quad (31-2)$$

$$\theta = T_0 \hat{T} \quad (32-2)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial (T_0 \hat{T})}{\partial \left(\frac{L}{V} \hat{t}\right)} = \frac{T_0 V}{L} \dot{\hat{T}} \quad (33-2)$$

$$\hat{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \quad (34-2)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 (T_0 \hat{T})}{\partial \left(\frac{L}{V} \hat{t}\right)^2} = \frac{T_0 V^2}{L^2} \ddot{\hat{T}} \quad (35-2)$$

$$\hat{\mu} = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \quad (36-2)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{\partial^3 \theta}{\partial t^3} = \frac{\partial^3 (T_0 \hat{T})}{\partial \left(\frac{L}{V} \hat{t}\right)^3} = \frac{T_0 V^3}{L^3} \ddot{\hat{T}} \quad (37-2)$$

$$\hat{\beta} = \frac{\rho V^2}{\lambda + 2\mu} \quad (38-2)$$

$$u = \frac{L\beta T_0}{(\lambda + 2\mu)} \hat{u} \quad (39-2)$$

$$u_{i,i} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \left(\frac{L\beta T_0}{(\lambda + 2\mu)} \hat{u}_i\right)}{\partial (L\hat{x}_i)} = \frac{\beta T_0}{(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \hat{x}_i} \quad (40-2)$$

$$\dot{u}_{i,i} = \frac{\partial}{\partial t} u_{i,i} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\beta T_0}{(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \hat{x}_i}\right) = \frac{\partial}{\partial \left(\frac{L}{V} \hat{t}\right)} \left(\frac{\beta T_0}{(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \hat{x}_i}\right) = \frac{\beta T_0 V}{(\lambda + 2\mu)L} \dot{\hat{u}}_{i,i} \quad (41-2)$$

$$\ddot{u}_{i,i} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_{i,i} = \frac{\partial^2}{\partial \left(\frac{L}{V} \hat{t}\right)^2} \left(\frac{\beta T_0}{(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \hat{x}_i}\right) = \frac{\beta T_0 V^2}{(\lambda + 2\mu)L^2} \ddot{\hat{u}}_{i,i} \quad (42-2)$$

$$\ddot{\ddot{u}}_{i,i} = \frac{\partial^3}{\partial t^3} u_{i,i} = \frac{\partial^3}{\partial \left(\frac{L}{V} \hat{t}\right)^3} \left(\frac{\beta T_0}{(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \hat{x}_i}\right) = \frac{\beta T_0 V^3}{(\lambda + 2\mu)L^3} \ddot{\ddot{\hat{u}}}_{i,i} \quad (43-2)$$

$$\ddot{u}_i = \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_i = \frac{\partial^2 \left(\frac{L\beta T_0}{\lambda + 2\mu}\right) \hat{u}}{\partial \left(\frac{L}{V} \hat{t}\right)^2} = \frac{L\beta T_0 V^2}{L^2(\lambda + 2\mu)} \ddot{\hat{u}}_i = \frac{\beta T_0 V^2}{L(\lambda + 2\mu)} \ddot{\hat{u}}_i \quad (44-2)$$

$$u_{i,jj} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial^2 \left(\frac{L\beta T_0}{\lambda+2\mu} \hat{u}_i \right)}{\partial (L\hat{x}_j) \partial (L\hat{x}_j)} = \frac{\frac{L\beta T_0}{\lambda+2\mu}}{L^2} \frac{\partial^2 \hat{u}_i}{\partial \hat{x}_j \partial \hat{x}_j} = \frac{\beta T_0}{L(\lambda+2\mu)} \hat{u}_{i,jj} \quad (۴۵-۲)$$

$$u_{j,ji} = \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 \left(\frac{L\beta T_0}{\lambda+2\mu} \hat{u}_j \right)}{\partial (L\hat{x}_j) \partial (L\hat{x}_i)} = \frac{\frac{L\beta T_0}{\lambda+2\mu}}{L^2} \frac{\partial^2 \hat{u}_j}{\partial \hat{x}_j \partial \hat{x}_i} = \frac{\beta T_0}{L(\lambda+2\mu)} \hat{u}_{j,ji} \quad (۴۶-۲)$$

$$\nabla \theta = \theta_{,i} = \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial T_0 \hat{T}}{\partial (L\hat{x})} = \frac{T_0}{L} \hat{T}_{,i} \quad (۴۷-۲)$$

$$\nabla^2 \theta = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial (L\hat{x})} = \left(\frac{T_0}{L} \hat{T}_{,i} \right) = \frac{T_0}{L^2} \hat{T}_{,ii} \quad (۴۸-۲)$$

$$\nabla^2 \dot{\theta} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \theta) = \frac{\partial}{\partial \left(\frac{L}{V} \hat{t} \right)} \left(\frac{T_0}{L^2} \hat{T}_{,ii} \right) = \frac{T_0 V}{L^3} \hat{T}_{,ii} \quad (۴۹-۲)$$

پس از جای گذاری متغیرهای بی بعد و تعریف $\epsilon = \frac{T_0 \beta^2}{\rho C_V (\lambda+2\mu)}$

معادلات (۲۴-۲) و (۲۵-۲) به صورت زیر بیان می شود :

$$(\hat{\lambda} + \hat{\mu}) \hat{u}_{j,ji} + \hat{\mu} \hat{u}_{i,jj} - \hat{T}_{,i} = \beta \ddot{\hat{u}}_i \quad (۵۰-۲)$$

$$(۵۱-۲)$$

$$\frac{1}{2} \hat{t}_q^2 \in \ddot{\hat{u}}_{i,i} + \frac{1}{2} \hat{t}_q^2 \ddot{\hat{T}} + \hat{t}_q \in \ddot{\hat{u}}_{i,i} + \hat{t}_q \ddot{\hat{T}} + \epsilon \hat{u}_{i,i} + \hat{T} - \hat{t}_T \hat{K} \hat{T}_{,ii} - \hat{K} \hat{T}_{,ii} = 0$$

از این پس تمام معادلات در فضای بی بعد بیان می شوند و علامت $\hat{}$ برای سادگی حذف شده است.

۹-۲- گسسته سازی معادلات حاکم

تقریب گلرکین با به کارگیری انتگرال باقی مانده وزنی برای تابع حرکت :

$$\int_v (\sigma_{ij,j} + B_i - \rho \ddot{u}_i) S_L dv = 0 \quad (۵۲-۲)$$

با به کارگیری فرمول بندی ضعیف بر روی عبارت مشخص شده :

$$\int_v (\sigma_{ij,j}) S_L dv = \int_A \sigma_{ij} n_j S_L dA - \int_V \frac{\partial S_L}{\partial x_j} \sigma_{ij} dv \quad (۵۳-۲)$$

با جای گذاری رابطه (۵۳-۲) در (۵۲-۲) :

$$\int_A \sigma_{ij} n_j S_L dA - \int_V \frac{\partial S_L}{\partial x_j} \sigma_{ij} dv + \int_V B_i S_L dv - \int_V \rho \ddot{u}_i S_L dv = 0 \quad (54-2)$$

با در نظر گرفتن فرمول کوشی داریم:

$$\int_A \sigma_{ij} n_j S_L dA = \int_A Tr_i^n S_L dA \quad (55-2)$$

از طرفی در بخش بی بعد سازی داشتیم:

$$\hat{\sigma}_{ij} = \hat{\mu}(\hat{u}_{i,j} + \hat{u}_{j,i}) + \hat{\lambda} \hat{u}_{k,k} \delta_{ij} - \hat{\beta} \hat{\theta} \delta_{ij} \quad (56-2)$$

با جای گذاری رابطه (56-2) در عبارت دوم رابطه (54-2) داریم:

$$\int_V \frac{\partial S_L}{\partial x_j} \sigma_{ij} dv = \int_V \frac{\partial S_L}{\partial x_j} [\mu(u_{i,j} + u_{j,i}) + \lambda u_{k,k} \delta_{ij} - \beta \theta \delta_{ij}] dv \quad (57-2)$$

با جای گذاری (55-2) و (57-2) در (54-2) داریم:

$$\int_V \rho \ddot{u}_i S_L dv + \int_V \frac{\partial S_L}{\partial x_j} [\mu(u_{i,j} + u_{j,i}) + \lambda u_{k,k} \delta_{ij}] dv - \int_V \beta \theta \frac{\partial S_L}{\partial x_j} dv = \quad (58-2)$$

$$\int_V B_i S_L dv + \int_A Tr_i^n S_L dA$$

مولفه های جابه جایی و تغییر دما برای هر المان مبنا :

$$u(x, y, t) = N_h(x, y) a_h^u(t) + \phi_h(x, y) b_h^u(t) + \Psi_{hm}(x, y) C_{hm}^u(t) \quad (59-2)$$

$$v(x, y, t) = N_h(x, y) a_h^v(t) + \phi_h(x, y) b_h^v(t) + \Psi_{hm}(x, y) C_{hm}^v(t) \quad (60-2)$$

$$\theta(x, y, t) = N_h(x, y) a_h^T(t) + \phi_h(x, y) b_h^T(t) + \Psi_{hm}(x, y) C_{hm}^T(t) \quad (61-2)$$

$$\dot{u} = N_h(x, y) \dot{a}_h^u(t) + \phi_h(x, y) \dot{b}_h^u + \Psi_{hm}(x, y) \dot{c}_{hm}^u(t) \quad (62-2)$$

$$\ddot{u} = N_h(x, y) \ddot{a}_h^u(t) + \phi_h(x, y) \ddot{b}_h^u + \Psi_{hm}(x, y) \ddot{c}_{hm}^u(t) \quad (63-2)$$

مابقی پارامترها هم به همین ترتیب می باشد .

با جای گذاری مولفه های جابه جایی و دما در رابطه (۵۸-۲) داریم :

$$\begin{aligned}
 & \left(\int_v \rho S_L N_h dv \right) \ddot{a}_h^u + \left(\int_v \rho S_L \phi_h dv \right) \ddot{b}_h^u + \left(\int_v \rho S_L \psi_{hm} dv \right) \ddot{c}_{hm}^u \quad (۶۴-۲) \\
 & + \int_v S_{L,x} [(\lambda + 2\mu)(N_{h,x} a_h^u + \phi_{h,x} b_h^u + \psi_{hm,x} c_{hm}^u) \\
 & \quad + \lambda(N_{h,y} a_h^v + \phi_{h,y} b_h^v + \psi_{hm,y} c_{hm}^v)] dv \\
 & + \int_v \mu S_{L,y} (N_{h,y} a_h^u + \phi_{h,y} b_h^u + \psi_{hm,y} c_{hm}^u + N_{h,x} a_h^v + \phi_{h,x} b_h^v + \psi_{hm,x} c_{hm}^v) dv \\
 & - \int_v \beta S_{L,x} (N_h a_h^T + \phi_h b_h^T + \psi_{hm} c_{hm}^T) dv = \int_V B_x S_L dv + \\
 & \int_A Tr_x^n S_L dA \quad (۶۵-۲)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\int_v \rho S_L N_h dv \right) \ddot{a}_h^v + \left(\int_v \rho S_L \phi_h dv \right) \ddot{b}_h^v + \left(\int_v \rho S_L \psi_{hm} dv \right) \ddot{c}_{hm}^v \\
 & + \int_v \mu S_{L,x} (N_{h,x} a_h^v + \phi_{h,x} b_h^v + \psi_{hm,x} c_{hm}^v + N_{h,y} a_h^u + \phi_{h,y} b_h^u + \psi_{hm,y} c_{hm}^u) dv \\
 & + \int_v S_{L,y} [(\lambda + 2\mu)(N_{h,y} a_h^v + \phi_{h,y} b_h^v + \psi_{hm,y} c_{hm}^v) + \lambda(N_{h,x} a_h^u + \phi_{h,x} b_h^u + \\
 & \psi_{hm,x} c_{hm}^u)] dv - \int_v \beta S_{L,y} (N_h a_h^T + \phi_h b_h^T + \psi_{hm} c_{hm}^T) dv = \\
 & \int_V B_y S_L dv + \int_A Tr_y^n S_L dA
 \end{aligned}$$

معادلات (۶۴-۲) و (۶۵-۲) به صورت زیر بازنویسی می شوند :

(۶۶-۲)

$$\begin{aligned}
 & \left(\int_v \rho S_L N_h dv \right) \ddot{a}_h^u + \left(\int_v \rho S_L \phi_h dv \right) \ddot{b}_h^u + \left(\int_v \rho S_L \psi_{hm} dv \right) \ddot{c}_{hm}^u + \\
 & \left(\int_v [(\lambda + 2\mu) S_{L,x} N_{h,x} + \mu S_{L,y} N_{h,y}] dv \right) a_h^u +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\int_v [(\lambda + 2\mu)S_{L,x}\phi_{h,x} + \mu S_{L,y}\phi_{h,y}] dv \right) b_h^u + \\
& \left(\int_v [(\lambda + 2\mu)S_{L,x}\psi_{hm,x} + \mu S_{L,y}\psi_{hm,y}] dv \right) c_{hm}^u + \\
& \left(\int_v [\lambda S_{L,x}N_{h,y} + \mu S_{L,y}N_{h,x}] dv \right) a_h^v + \left(\int_v [\lambda S_{L,x}\phi_{h,y} + \mu S_{L,y}\phi_{h,x}] dv \right) b_h^v + \\
& \int_v ([\lambda S_{L,x}\psi_{hm,y} + \mu S_{L,y}\psi_{hm,x}] dv) c_{hm}^v \\
& - \left(\int_v [\beta S_{L,x}(N_h a_h^T + \phi_h b_h^T + \psi_{hm} c_{hm}^T)] dv \right)
\end{aligned}$$

$$= \int_v B_x S_L dv + \int_A Tr_x^n S_L dA$$

(97-2)

$$\begin{aligned}
& \left(\int_v \rho S_L N_h dv \right) \ddot{a}_h^v + \left(\int_v \rho S_L \phi_h dv \right) \ddot{b}_h^v + \left(\int_v \rho S_L \psi_{hm} dv \right) \ddot{c}_{hm}^v + \\
& \left(\int_v [\mu S_{L,x}N_{h,y} + \lambda S_{L,y}N_{h,x}] dv \right) a_h^u + \left(\int_v [\mu S_{L,x}\phi_{h,y} + \lambda S_{L,y}\phi_{h,x}] dv \right) b_h^u \\
& + \left(\int_v [\mu S_{L,x}\psi_{hm,y} + \lambda S_{L,y}\psi_{hm,x}] dv \right) c_{hm}^u \\
& + \left(\int_v [\mu S_{L,x}N_{h,x} + (\lambda + 2\mu)S_{L,y}N_{h,y}] dv \right) a_h^v \\
& \left(\int_v [\mu S_{L,x}\phi_{h,x} + (\lambda + 2\mu)S_{L,y}\phi_{h,y}] dv \right) b_h^v \\
& + \left(\int_v [\mu S_{L,x}\psi_{hm,x} + (\lambda + 2\mu)S_{L,y}\psi_{hm,y}] dv \right) c_{hm}^v \\
& - \left(\int_v [\beta S_{L,y}(N_h a_h^T + \phi_h b_h^T + \psi_{hm} c_{hm}^T)] dv \right) = \int_v B_y S_L dv + \int_A Tr_y^n S_L dA
\end{aligned}$$

معادله بی بعد شده انرژی را از قبل داشتیم:

$$\frac{1}{2}\tau_q^2 \in \ddot{u}_{i,i} + \frac{1}{2}\tau_q^2 \ddot{T} + \tau_q \in \ddot{u}_{i,i} + \tau_q \ddot{T} + \in \dot{u}_{i,i} + \dot{T} - \tau_T K \dot{T}_{,ii} - k T_{,ii} = 0$$

با اعمال انتگرال باقی مانده وزنی داریم:

$$\int_v \left(\tau_q \in \ddot{u}_{i,i} + \tau_q \ddot{T} + \in \dot{u}_{i,i} + \dot{T} + \frac{1}{2}\tau_q^2 \in \ddot{u}_{i,i} + \frac{1}{2}\tau_q^2 \ddot{T} - \right. \quad (68-2)$$

$$\left. \tau_T K \dot{T}_{,ii} - k T_{,ii} \right) S_L d_V = 0$$

با اعمال فرمول بندی ضعیف روی عبارات مشخص شده داریم:

$$\int_V \left(\tau_T K \dot{T}_{,ii} + k T_{,ii} \right) S_L d_V = \int_A \left(\tau_T K \dot{T}_{,i} + k T_{,i} \right) S_L n_i dA - \quad (69-2)$$

$$\int_V \left(\tau_T K \dot{T}_{,i} + k T_{,i} \right) S_{L,x_i} d_V$$

با جای گذاری (69-2) در (68-2) داریم:

$$(70-2)$$

$$\int_v \left(\frac{1}{2}\tau_q^2 \in \ddot{u}_{i,i} + \frac{1}{2}\tau_q^2 \ddot{T} + \tau_q \in \ddot{u}_{i,i} + \tau_q \ddot{T} + \in \dot{u}_{i,i} + \dot{T} \right) S_L dv -$$

$$\int_A \left(\tau_T K \dot{T}_{,i} + k T_{,i} \right) S_L n_i dA + \int_V \left(\tau_T K \dot{T}_{,i} + k T_{,i} \right) S_{L,x_i} dv = 0$$

با جای گذاری مولفه های جابه جایی و تغییر دما در رابطه (70-2) داریم:

$$(71-2)$$

$$\int_v \left(\frac{1}{2}\tau_q^2 \in (N_{h,x} \ddot{a}_h^u + \phi_{h,x} \ddot{b}_h^u + \psi_{hm,x} \ddot{c}_{hm}^u + N_{h,y} \ddot{a}_h^v + \phi_{h,y} \ddot{b}_h^v + \psi_{hm,y} \ddot{c}_{hm}^v) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\tau_q^2 (N_h \ddot{a}_h^T + \phi_h \ddot{b}_h^T + \psi_{hm} \ddot{c}_{hm}^T) + \tau_q \right.$$

$$\left. \in (N_{h,x} \ddot{a}_h^u + \phi_{h,x} \ddot{b}_h^u + \psi_{hm,x} \ddot{c}_{hm}^u + N_{h,y} \ddot{a}_h^v + \phi_{h,y} \ddot{b}_h^v + \psi_{hm,y} \ddot{c}_{hm}^v) \right.$$

$$\left. + \tau_q (N_h \ddot{a}_h^T + \phi_h \ddot{b}_h^T + \psi_{hm} \ddot{c}_{hm}^T) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& \in (N_{h,x} \dot{a}_h^u + \phi_{h,x} \dot{b}_h^u + \psi_{hm,x} \dot{c}_{hm}^u + N_{h,y} \dot{a}_h^v + \phi_{h,y} \dot{b}_h^v + \psi_{hm,y} \dot{c}_{hm}^v) + N_h \dot{a}_h^T + \\
& \phi_h \dot{b}_h^T + \psi_{hm} \dot{c}_{hm}^T) S_L dv - \int (\tau_T K \dot{T}_{,x} + K T_{,x}) S_L n_x dA - \\
& - \int_A (\tau_T K \dot{T}_{,y} + K T_{,y}) S_L n_y dA + \int_V (\tau_T K (N_{h,x} \dot{a}_h^T + \phi_{h,x} \dot{b}_h^T + \psi_{hm,x} \dot{c}_{hm}^T) \\
& + k(N_{h,x} a_h^T + \phi_{h,x} b_h^T + \psi_{hm,x} c_{hm}^T)) S_{L,x} dv + \int (\tau_T K (N_{h,y} \dot{a}_h^T + \\
& \phi_{h,y} \dot{b}_h^T + \psi_{hm,y} \dot{c}_{hm}^T) + k(N_{h,y} a_h^T + \phi_{h,y} b_h^T + \psi_{hm,y} c_{hm}^T)) S_{L,y} dv = 0
\end{aligned}$$

معادله (۷۱-۲) به صورت زیر بازنویسی می شود .

(۷۲-۲)

$$\begin{aligned}
& \left(\int_V \frac{1}{2} \tau_q^2 \in N_{h,x} S_L dv \right) \ddot{a}_h^u + \left(\int_V \frac{1}{2} \tau_q^2 \in \phi_{h,x} S_L dv \right) \ddot{b}_h^u \\
& + \left(\int_V \frac{1}{2} \tau_q^2 \in \psi_{hm,x} S_L dv \right) \\
& \ddot{c}_{hm}^u + \left(\int_V \frac{1}{2} \tau_q^2 \in N_{h,y} S_L dv \right) \ddot{a}_h^v + \left(\int_V \frac{1}{2} \tau_q^2 \in \phi_{h,y} S_L dv \right) \ddot{b}_h^v \\
& + \left(\int_V \frac{1}{2} \tau_q^2 \in \psi_{hm,y} S_L dv \right) \\
& \ddot{c}_{hm}^v + \left(\int_V \frac{1}{2} \tau_q^2 N_h S_L dv \right) \ddot{a}_h^T + \left(\int_V \frac{1}{2} \tau_q^2 \phi_h S_L dv \right) \ddot{b}_h^T \\
& + \left(\int_V \frac{1}{2} \tau_q^2 \psi_{hm} S_L dv \right) \ddot{c}_{hm}^T \\
& + \left(\int_V \tau_q \in N_{h,x} S_L dv \right) \ddot{a}_h^u + \left(\int_V \tau_q \in \phi_{h,x} S_L dv \right) \ddot{b}_h^u \\
& + \left(\int_V \tau_q \in \psi_{hm,x} S_L dv \right) \ddot{c}_{hm}^u +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\int_V \tau_q \in N_{h,y} S_L dv \right) \ddot{a}_h^v + \left(\int_V \tau_q \in \emptyset_{h,y} S_L dv \right) \ddot{b}_h^v \\
& \quad + \left(\int_V \tau_q \in \psi_{hm,y} S_L dv \right) \ddot{c}_{hm}^v \\
& + \left(\int_V \tau_q N_h S_L dv \right) \ddot{a}_h^T + \left(\int_V \tau_q \emptyset_h S_L dv \right) \ddot{b}_h^T + \left(\int_V \tau_q \psi_{hm} S_L dv \right) \ddot{c}_{hm}^T \\
& + \left(\int_V \in N_{h,x} S_L dv \right) \dot{a}_h^u + \left(\int_V \in \emptyset_{h,x} S_L dv \right) \dot{b}_h^u + \left(\int_V \in \psi_{hm,x} S_L dv \right) \dot{c}_{hm}^u + \\
& \left(\int_V \in N_{h,y} S_L dv \right) \dot{a}_h^v + \left(\int_V \in \emptyset_{h,y} S_L dv \right) \dot{b}_h^v + \left(\int_V \in \psi_{hm,y} S_L dv \right) \dot{c}_{hm}^v + \\
& \left[\int_V (N_h S_L + \tau_T K N_{h,x} S_{L,x} + \tau_T K N_{h,y} S_{L,y}) dv \right] \dot{a}_h^T + \\
& \left[\int_V (\emptyset_h S_L + \tau_T K \emptyset_{h,x} S_{L,x} + \tau_T K \emptyset_{h,y} S_{L,y}) dv \right] \dot{b}_h^T + \\
& \left[\int_V (\psi_{h,m} S_L + \tau_T K \psi_{hm,x} S_{L,x} + \tau_T K \psi_{hm,y} S_{L,y}) dv \right] \dot{c}_{hm}^T + \\
& \left[\int_V K N_{h,x} S_{L,x} + K N_{h,y} S_{L,y} dv \right] a_h^T + \left[\int_V (K \emptyset_{h,x} S_{L,x} + K \emptyset_{h,y} S_{L,y}) dv \right] b_h^T \\
& + C_{hm}^T \left[\int_V (K \psi_{hm,x} S_{L,x} + K \psi_{hm,y} S_{L,y}) dv \right] = \int_A (\tau_T K \dot{T}_{,x} + K T_{,x}) S_L n_x dA \\
& + \int_A (\tau_T K \dot{T}_{,y} + K T_{,y}) S_L n_y dA
\end{aligned}$$

معادلات فوق را می توان به شکل ماتریسی زیر بیان نمود :

$$[P]\{\ddot{\Delta}\} + [M]\{\ddot{\Delta}\} + [C]\{\dot{\Delta}\} + [K]\{\Delta\} = \{F\} \quad (۷۳-۲)$$

در رابطه بالا M و C و K به ترتیب ماتریس های جرم ، میرایی و سفتی هستند ، $\{\Delta\}$ بردار مجهولات گره ای و

$\{F\}$ بردار نیروهای گره ای است .

$$\{\Delta\} = \{a_h^u, b_h^u, c_{hm}^u, a_h^v, b_h^v, c_{hm}^v, a_h^T, b_h^T, c_{hm}^T\} \quad (۷۴-۲)$$

$$M_{11} = \int_v \rho S_L N_h dv \quad (75-2)$$

$$M_{12} = \int_v \rho S_L \phi_h dv \quad (76-2)$$

$$M_{13} = \int_v \rho S_L \psi_{hm} dv \quad (77-2)$$

$$M_{24} = \int_v \rho S_L N_h dv \quad (78-2)$$

$$M_{25} = \int_v \rho S_L \phi_h dv \quad (79-2)$$

$$M_{26} = \int_v \rho S_L \psi_{hm} dv \quad (80-2)$$

$$M_{31} = \int_v \tau_q \in N_{h,x} S_L dv \quad (81-2)$$

$$M_{32} = \int_v \tau_q \in \emptyset_{h,x} S_L dv \quad (82-2)$$

$$M_{33} = \int_v \tau_q \in \psi_{hm,x} S_L dv \quad (83-2)$$

$$M_{34} = \int_v \tau_q \in N_{h,y} S_L dv \quad (84-2)$$

$$M_{35} = \int_v \tau_q \in \emptyset_{h,y} S_L dv \quad (85-2)$$

$$M_{36} = \int_v \tau_q \in \psi_{hm,y} S_L dv \quad (86-2)$$

$$M_{37} = \int_v \tau_q N_h S_L dv \quad (87-2)$$

$$M_{38} = \int_v \tau_q \emptyset_h S_L dv \quad (88-2)$$

$$M_{39} = \int_v \tau_q \psi_{hm} S_L dv \quad (89-2)$$

$$C_{31} = \int_v \in N_{h,x} S_L dv \quad (90-2)$$

$$C_{32} = \int_v \in \phi_{h,x} S_L dv \quad (91-2)$$

$$C_{33} = \int_v \in \psi_{hm,x} S_L dv \quad (92-2)$$

$$C_{34} = \int_v \in N_{h,y} S_L dv \quad (93-2)$$

$$C_{35} = \int_v \in \phi_{h,y} S_L dv \quad (94-2)$$

$$C_{36} = \int_v \in \psi_{hm,y} S_L dv \quad (95-2)$$

$$C_{37} = \int_v (N_h S_L + \tau_T K N_{h,x} S_{L,x} + \tau_T K N_{h,y} S_{L,y}) dv \quad (96-2)$$

$$C_{38} = \int_v (\phi_h S_L + \tau_T K \phi_{h,x} S_{L,x} + \tau_T K \phi_{h,y} S_{L,y}) dv \quad (97-2)$$

$$C_{39} = \int_v (\psi_{hm} S_L + \tau_T K \psi_{hm,x} S_{L,x} + \tau_T K \psi_{hm,y} S_{L,y}) dv \quad (98-2)$$

$$K_{11} = \int_v [(\lambda + 2\mu) S_{L,x} N_{h,x} + \mu S_{L,y} N_{h,y}] dv \quad (99-2)$$

$$K_{12} = \int_v [(\lambda + 2\mu) S_{L,x} \phi_{h,x} + \mu S_{L,y} \phi_{h,y}] dv \quad (100-2)$$

$$K_{13} = \int_v [(\lambda + 2\mu) S_{L,x} \psi_{hm,x} + \mu S_{L,y} \psi_{hm,y}] dv \quad (101-2)$$

$$K_{14} = \int_v [\lambda S_{L,x} N_{h,y} + \mu S_{L,y} N_{h,x}] dv \quad (102-2)$$

$$K_{15} = \int_v [\lambda S_{L,x} \phi_{h,y} + \mu S_{L,y} \phi_{h,x}] dv \quad (103-2)$$

$$K_{16} = \int_v [\lambda S_{L,x} \psi_{hm,y} + \mu S_{L,y} \psi_{hm,x}] dv \quad (104-2)$$

$$K_{17} = \int_v \beta S_{L,x} N_h a_h^T dv \quad (105-2)$$

$$K_{18} = \int_v \beta S_{L,x} \phi_h b_h^T dv \quad (106-2)$$

$$K_{19} = \int_v \beta S_{L,x} \psi_{hm} c_{hm}^T dv \quad (107-2)$$

$$k_{21} = \int_v [\mu S_{L,x} N_{h,y} + \lambda S_{L,y} N_{h,x}] dv \quad (108-2)$$

$$k_{22} = \int v [\mu S_{L,x} \Phi_{h,y} + \lambda S_{L,y} \Phi_{h,x}] dv \quad (109-2)$$

$$k_{23} = \int_v [\mu S_{L,x} \psi_{hm,y} + \lambda S_{L,y} \psi_{hm,x}] dv \quad (110-2)$$

$$k_{24} = \int_v [\mu S_{L,x} N_{h,x} + (\lambda + 2\mu) S_{L,y} N_{h,y}] dv \quad (111-2)$$

$$k_{25} = \int_v [\mu S_{L,x} \Phi_{h,x} + (\lambda + 2\mu) S_{L,y} \Phi_{h,y}] dv \quad (112-2)$$

$$k_{26} = \int_v [\mu S_{L,x} \psi_{hm,x} + (\lambda + 2\mu) S_{L,y} \psi_{hm,y}] dv \quad (113-2)$$

$$k_{27} = - \int_v \beta S_{L,y} N_h a_h^T dv \quad (114-2)$$

$$k_{28} = - \int_v \beta S_{L,y} \Phi_h b_h^T dv \quad (115-2)$$

$$k_{29} = - \int_v \beta S_{L,y} \psi_{hm} c_{hm}^T dv \quad (116-2)$$

$$k_{37} = \int_v (K N_{h,x} S_{L,x} + K N_{h,y} S_{L,y}) dv \quad (117-2)$$

$$k_{38} = \int_v (K \Phi_{h,x} S_{L,x} + K \Phi_{h,y} S_{L,y}) dv \quad (118-2)$$

$$k_{39} = C_{hm}^T [\int_v (K \psi_{hm,x} S_{L,x} + K \psi_{hm,y} S_{L,y}) dv] \quad (119-2)$$

$$P_{31} = \int_v \frac{1}{2} \tau_q^2 \in N_{h,x} S_L dv \quad (120-2)$$

$$P_{32} = \int_v \frac{1}{2} \tau_q^2 \in \Phi_{h,x} S_L dv \quad (121-2)$$

$$P_{33} = \int_v \frac{1}{2} \tau_q^2 \in \psi_{hm,x} S_L dv \quad (122-2)$$

$$P_{34} = \int_v \frac{1}{2} \tau_q^2 \in N_{h,y} S_L dv \quad (123-2)$$

$$P_{35} = \int_v \frac{1}{2} \tau_q^2 \in \Phi_{h,y} S_L dv \quad (124-2)$$

$$P_{36} = \int_v \frac{1}{2} \tau_q^2 \in \psi_{hm,y} S_L dv \quad (125-2)$$

$$P_{37} = \int_v \frac{1}{2} \tau_q^2 N_h S_L dv \quad (126-2)$$

$$P_{38} = \int_V \frac{1}{2} \tau_q^2 \phi_h S_L dv \quad (127-2)$$

$$P_{39} = \int_V \frac{1}{2} \tau_q^2 \psi_{hm} S_L dv \quad (128-2)$$

$$F_{11} = \int_V B_x S_L dv + \int_A Tr_x^n S_L dA \quad (129-2)$$

$$F_{21} = \int_V B_y S_L dv + \int_A Tr_y^n S_L dA \quad (130-2)$$

$$F_{31} = \int_A (\tau_T K \dot{T}_{,x} + K T_{,x}) S_L n_x dA \quad (131-2)$$

$$+ \int_A (\tau_T K \dot{T}_{,y} + K T_{,y}) S_L n_y dA$$

$$[S] = [N_1 \dots N_4 \quad \phi_1 \dots \phi_4 \quad \psi_{11} \dots \psi_{44}] \quad (132-2)$$

$$[N] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] \quad (133-2)$$

$$[\phi] = [\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3 \ \phi_4] \quad (134-2)$$

$$[\psi_1] = [\psi_{11} \ \psi_{12} \ \psi_{13} \ \psi_{14}] \quad (135-2)$$

$$[\psi_2] = [\psi_{21} \ \psi_{22} \ \psi_{23} \ \psi_{24}] \quad (136-2)$$

$$[\psi_3] = [\psi_{31} \ \psi_{32} \ \psi_{33} \ \psi_{34}] \quad (137-2)$$

$$[\psi_4] = [\psi_{41} \ \psi_{42} \ \psi_{43} \ \psi_{44}] \quad (138-2)$$

$$[G_1] = [N_{1,x} \ N_{2,x} \ N_{3,x} \ N_{4,x}] \quad (139-2)$$

$$[G_2] = [N_{1,y} \ N_{2,y} \ N_{3,y} \ N_{4,y}] \quad (140-2)$$

$$[G_3] = [\phi_{1,x} \ \phi_{2,x} \ \phi_{3,x} \ \phi_{4,x}] \quad (141-2)$$

$$[G_4] = [\phi_{1,y} \ \phi_{2,y} \ \phi_{3,y} \ \phi_{4,y}] \quad (142-2)$$

$$[G_5] = [\psi_{11,x} \ \psi_{12,x} \ \psi_{13,x} \ \psi_{14,x}] \quad (143-2)$$

$$[G_6] = [\psi_{21,x} \ \psi_{22,x} \ \psi_{23,x} \ \psi_{24,x}] \quad (144-2)$$

$$[G_7] = [\Psi_{31,x} \Psi_{32,x} \Psi_{33,x} \Psi_{34,x}] \quad (۱۴۵-۲)$$

$$[G_8] = [\Psi_{41,x} \Psi_{42,x} \Psi_{43,x} \Psi_{44,x}] \quad (۱۴۶-۲)$$

$$[G_9] = [\Psi_{11,y} \Psi_{12,y} \Psi_{13,y} \Psi_{14,y}] \quad (۱۴۷-۲)$$

$$[G_{10}] = [\Psi_{21,y} \Psi_{22,y} \Psi_{23,y} \Psi_{24,y}] \quad (۱۴۸-۲)$$

$$[G_{11}] = [\Psi_{31,y} \Psi_{32,y} \Psi_{33,y} \Psi_{34,y}] \quad (۱۴۹-۲)$$

$$[G_{12}] = [\Psi_{41,y} \Psi_{42,y} \Psi_{43,y} \Psi_{44,y}] \quad (۱۵۰-۲)$$

$$[G_{13}] = [N_{1,x} \dots N_{4,x} \quad \Phi_{1,x} \dots \Phi_{4,x} \quad \Psi_{11,x} \dots \Psi_{44,x}] \quad (۱۵۱-۲)$$

$$[G_{14}] = [N_{1,y} \dots N_{4,y} \quad \Phi_{1,y} \dots \Phi_{4,y} \quad \Psi_{11,y} \dots \Psi_{44,y}] \quad (۱۵۲-۲)$$

با استفاده از روابط فوق، مؤلفه‌های ماتریس‌ها به صورت زیر بازنویسی می‌شوند:

$$[M_{11}] = [M_{24}] = \int_v \rho[S]^T [N] dv \quad (۱۵۳-۲)$$

$$[M_{12}] = [M_{25}] = \int_v \rho[S]^T [\Phi] dv \quad (۱۵۴-۲)$$

$$[M_{13}] = [M_{26}] = \int_v \rho[S]^T [\Psi] dv \quad (۱۵۵-۲)$$

$$(۱۵۶-۲)$$

$$[M_{13}] = [M_{26}] = \int_v [\rho[S]^T [\Psi_1] \quad \rho[S]^T [\Psi_2] \quad \rho[S]^T [\Psi_3] \quad \rho[S]^T [\Psi_4]] dv$$

$$[M_{31}] = \int_v \tau_q \in [G_1][S]^T dv \quad (۱۵۷-۲)$$

$$[M_{32}] = \int_v \tau_q \in [G_3][S]^T dv \quad (۱۵۸-۲)$$

(159-2)

$$[M_{33}] = \int_v [\tau_q \in [G_5][S]^T \quad \tau_q \in [G_6][S]^T \quad \tau_q \in [G_7][S]^T \quad \tau_q \in [G_8][S]^T] dv$$

$$[M_{34}] = \int_v \tau_q \in [G_2][S]^T dv \quad (160-2)$$

$$[M_{35}] = \int_v \tau_q \in [G_4][S]^T dv \quad (161-2)$$

(162-2)

$$[M_{36}] = \int_v [\tau_q \in [G_9][S]^T \quad \tau_q \in [G_{10}][S]^T \quad \tau_q \in [G_{11}][S]^T \quad \tau_q \in [G_{12}][S]^T] dv$$

$$[M_{37}] = \int_v \tau_q [N][S]^T dv \quad (163-2)$$

$$[M_{38}] = \int_v \tau_q [\Phi][S]^T dv \quad (164-2)$$

$$[M_{39}] = \int_v [\tau_q [\Psi_1][S]^T \quad \tau_q [\Psi_2][S]^T \quad \tau_q [\Psi_3][S]^T \quad \tau_q [\Psi_4][S]^T] dv \quad (165-2)$$

$$[C_{31}] = \int_v \in [G_1][S]^T dv \quad (166-2)$$

$$[C_{32}] = \int_v \in [G_3][S]^T dv \quad (167-2)$$

$$[C_{33}] = \int_v [\in [G_5][S]^T \quad \in [G_6][S]^T \quad \in [G_7][S]^T \quad \in [G_8][S]^T] dv \quad (168-2)$$

$$[C_{34}] = \int_v \in [G_2][S]^T dv \quad (169-2)$$

$$[C_{35}] = \int_v \in [G_4][S]^T dv \quad (170-2)$$

$$[C_{36}] = \int_v [\in [G_9][S]^T \quad \in [G_{10}][S]^T \quad \in [G_{11}][S]^T \quad \in [G_{12}][S]^T] dv \quad (171-2)$$

$$[C_{37}] = \int_v ([N][S]^T + \tau_T K[G_1][G_{13}]^T + \tau_T K[G_2][G_{14}]^T) dv \quad (172-2)$$

$$[C_{38}] = \int_v ([\Phi][S]^T + \tau_T K[G_3][G_{13}]^T + \tau_T K[G_4][G_{14}]^T) dv \quad (173-2)$$

$$[C_{39}]$$

$$= \int_v ([[\Psi_1][S]^T \quad [\Psi_2][S]^T \quad [\Psi_3][S]^T \quad [\Psi_4][S]^T] \\ + [\tau_T K[G_5][G_{13}]^T \quad \tau_T K[G_6][G_{13}]^T \quad \tau_T K[G_7][G_{13}]^T \quad \tau_T K[G_8][G_{13}]^T] \\ + [\tau_T K[G_9][G_{14}]^T \quad \tau_T K[G_{10}][G_{14}]^T \quad \tau_T K[G_{11}][G_{14}]^T \quad \tau_T K[G_{12}][G_{14}]^T]) dv$$

$$[C_{39}] = \left[\int_v [[\Psi_1][S]^T + [G_5]\tau_T K[G_{13}]^T \right. \\ \left. + \tau_T K[G_9][G_{14}]^T] dv \cdot \int_v [[\Psi_2][S]^T + \tau_T K[G_6][G_{13}]^T \right. \\ \left. + \tau_T K[G_{10}][G_{14}]^T] dv \cdot \int_v [[\Psi_3][S]^T + \tau_T K[G_7][G_{13}]^T \right. \\ \left. + \tau_T K[G_{11}][G_{14}]^T] dv \cdot \int_v [[\Psi_4][S]^T + \tau_T K[G_8][G_{13}]^T \right. \\ \left. + \tau_T K[G_{12}][G_{14}]^T] dv \right]$$

$$[K_{11}] = \int_v [(\lambda + 2\mu)[G_{13}]^T [G_1] + \mu[G_{14}]^T [G_2]] dv \quad (175-2)$$

$$[K_{12}] = \int_v [(\lambda + 2\mu)[G_{13}]^T [G_3] + \mu[G_{14}]^T [G_4]] dv \quad (176-2)$$

(177-2)

$$[K_{13}] = \int_v \left[[(\lambda + 2\mu)[G_{13}]^T[G_5] \quad (\lambda + 2\mu)[G_{13}]^T[G_6] \quad (\lambda + 2\mu)[G_{13}]^T[G_7] \quad (\lambda + 2\mu)[G_{13}]^T[G_8]] \right. \\ \left. + [\mu[G_{14}]^T[G_9] \quad \mu[G_{14}]^T[G_{10}] \quad \mu[G_{14}]^T[G_{11}] \quad \mu[G_{14}]^T[G_{12}]] \right] dv$$

$$[K_{13}] = \left[\int_v [(\lambda + 2\mu)[G_{13}]^T[G_5] \right. \\ \left. + \mu[G_{14}]^T[G_9]] dv \cdot \int_v [(\lambda + 2\mu)[G_{13}]^T[G_6] + \mu[G_{14}]^T[G_{10}]] dv \cdot \int_v [(\lambda + 2\mu)[G_{13}]^T[G_7] \right. \\ \left. + \mu[G_{14}]^T[G_{11}]] dv \cdot \int_v [(\lambda + 2\mu)[G_{13}]^T[G_8] + \mu[G_{14}]^T[G_{12}]] dv \right]$$

$$[K_{14}] = \int_v [\lambda[G_{13}]^T[G_2] + \mu[G_{14}]^T[G_1]] dv \quad (178-2)$$

$$[K_{15}] = \int_v [\lambda[G_{13}]^T[G_4] + \mu[G_{14}]^T[G_3]] dv \quad (179-2)$$

(180-2)

$$[K_{16}] = \int_v \left[[\lambda[G_{13}]^T[G_9] \quad \lambda[G_{13}]^T[G_{10}] \quad \lambda[G_{13}]^T[G_{11}] \quad \lambda[G_{13}]^T[G_{12}]] \right. \\ \left. + [\mu[G_{14}]^T[G_5] \quad \mu[G_{14}]^T[G_6] \quad \mu[G_{14}]^T[G_7] \quad \mu[G_{14}]^T[G_8]] \right] dv$$

(181-2)

$$\begin{aligned}
[K_{16}] = & \left[\int_v [\lambda[G_{13}]^T[G_9] \right. \\
& + \mu[G_{14}]^T[G_5]]dv \cdot \int_v [\lambda[G_{13}]^T[G_{10}] \\
& + \mu[G_{14}]^T[G_6]]dv \cdot \int_v [\lambda[G_{13}]^T[G_{11}] \\
& \left. + \mu[G_{14}]^T[G_7]]dv \cdot \int_v [\lambda[G_{13}]^T[G_{12}] + \mu[G_{14}]^T[G_8]]dv \right]
\end{aligned}$$

$$[K_{17}] = \int_v \beta[G_{13}]^T[N] dv \quad (182-2)$$

$$[K_{18}] = \int_v \beta[G_{13}]^T[\Phi] dv \quad (183-2)$$

(184-2)

$$[K_{19}] = \int_v [\beta[G_{13}]^T[\Psi_1] \quad \beta[G_{13}]^T[\Psi_2] \quad \beta[G_{13}]^T[\Psi_3] \quad \beta[G_{13}]^T[\Psi_4]] dv$$

$$[K_{21}] = \int_v [\mu[G_{13}]^T[G_2] + \lambda[G_{14}]^T[G_1]] dv \quad (185-2)$$

$$[K_{22}] = \int_v [\mu[G_{13}]^T[G_4] + \lambda[G_{14}]^T[G_3]] dv \quad (186-2)$$

(187-2)

$$\begin{aligned}
[K_{23}] = \int_v [(\mu[G_{13}]^T[G_9] + \lambda[G_{14}]^T[G_5]) (\mu[G_{13}]^T[G_{10}] \\
+ \lambda[G_{14}]^T[G_6]) (\mu[G_{13}]^T[G_{11}] + \lambda[G_{14}]^T[G_7]) (\mu[G_{13}]^T[G_{12}] \\
+ \lambda[G_{14}]^T[G_8])] dv
\end{aligned}$$

$$[K_{24}] = \int_v [\mu[G_{13}]^T[G_1] + (\lambda + 2\mu)[G_{14}]^T[G_2]] dv \quad (188-2)$$

$$[K_{25}] = \int_v [\mu[G_{13}]^T[G_3] + (\lambda + 2\mu)[G_{14}]^T[G_4]] dv \quad (189-2)$$

(190-2)

$$\begin{aligned}
[K_{26}] = \int_v [(\mu[G_{13}]^T[G_5] + (\lambda + 2\mu)[G_{14}]^T[G_9]) (\mu[G_{13}]^T[G_6] \\
+ (\lambda + 2\mu)[G_{14}]^T[G_{10}]) (\mu[G_{13}]^T[G_7] \\
+ (\lambda + 2\mu)[G_{14}]^T[G_{11}]) (\mu[G_{13}]^T[G_8] + (\lambda + 2\mu)[G_{14}]^T[G_{12}])] dv
\end{aligned}$$

$$[K_{27}] = - \int_v \beta[G_{14}]^T[N] dv \quad (191-2)$$

$$[K_{28}] = - \int_v \beta[G_{14}]^T[\Phi] dv \quad (192-2)$$

(193-2)

$$[K_{29}] = - \int_v [\beta[G_{14}]^T[\Psi_1] \beta[G_{14}]^T[\Psi_2] \beta[G_{14}]^T[\Psi_3] \beta[G_{14}]^T[\Psi_4]] dv$$

$$[K_{37}] = \int_v (K[G_1][G_{13}]^T + K[G_2][G_{14}]^T) dv \quad (194-2)$$

$$[K_{38}] = \int_v (K[G_3][G_{13}]^T + K[G_4][G_{14}]^T) dv \quad (195-2)$$

(196-2)

$$\begin{aligned}
[K_{39}] = \int_v & [(K[G_5][G_{13}]^T + K[G_9][G_{14}]^T)(K[G_6][G_{13}]^T \\
& + K[G_{10}][G_{14}]^T)(K[G_7][G_{13}]^T + K[G_{11}][G_{14}]^T)(K[G_8][G_{13}]^T \\
& + K[G_{12}][G_{14}]^T)] dv
\end{aligned}$$

$$[P_{31}] = \int_v \frac{1}{2} \tau_q^2 \in [G_1][S]^T dv \quad (197-2)$$

$$[P_{32}] = \int_v \frac{1}{2} \tau_q^2 \in [G_3][S]^T dv \quad (198-2)$$

$$(199-2)$$

$$\begin{aligned}
[P_{33}] = \int_v & \left[\frac{1}{2} \tau_q^2 \in [G_5][S]^T \frac{1}{2} \tau_q^2 \in [G_6][S]^T \frac{1}{2} \tau_q^2 \in [G_7][S]^T \frac{1}{2} \tau_q^2 \right. \\
& \left. \in [G_8][S]^T \right] dv
\end{aligned}$$

$$[P_{34}] = \int_v \frac{1}{2} \tau_q^2 \in [G_2][S]^T dv \quad (200-2)$$

$$[P_{35}] = \int_v \frac{1}{2} \tau_q^2 \in [G_4][S]^T dv \quad (201-2)$$

$$(202-2)$$

$$\begin{aligned}
[P_{36}] = \int_v & \left[\frac{1}{2} \tau_q^2 \in [G_9][S]^T \frac{1}{2} \tau_q^2 \in [G_{10}][S]^T \frac{1}{2} \tau_q^2 \in [G_{11}][S]^T \frac{1}{2} \tau_q^2 \right. \\
& \left. \in [G_{12}][S]^T \right] dv
\end{aligned}$$

$$[P_{37}] = \int_v \frac{1}{2} \tau_q^2 [N][S]^T dv \quad (203-2)$$

$$[P_{38}] = \int_v \frac{1}{2} \tau_q^2 [\Phi][S]^T dv \quad (204-2)$$

$$(205-2)$$

$$[P_{39}] = \int_v \left[\frac{1}{2} \tau_q^2 [\Psi_1][S]^T \frac{1}{2} \tau_q^2 [\Psi_2][S]^T \frac{1}{2} \tau_q^2 [\Psi_3][S]^T \frac{1}{2} \tau_q^2 [\Psi_4][S]^T \right] dv$$

فصل سوم

نتایج و بحث

۳-۱- مقدمه

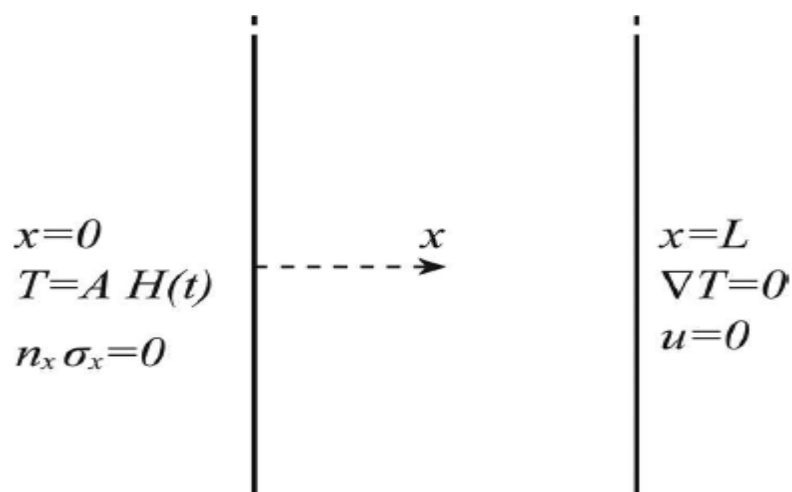
در این فصل در ابتدا نتایج حاصل با نتایج تحلیلی و عددی موجود در مقالات به منظور صحت‌سنجی روش حل ارائه شده در این تحقیق مقایسه شده است. در مثال اول توزیع دما، جابجایی و تنش برای یک لایه همگن و ایزوتروپیک تحت شوک دمایی با نتایج حاصل از یک حل عددی ارزیابی شده است. در مثال دوم تغییرات ضریب شدت تنش مود I با نتایج عددی به جهت اعتبار سنجی مطابقت داده شده است. پس از آن در چند مثال رفتار یک لایه دارای ترک تحت شوک دمایی با در نظر گرفتن تئوری چاندراساخاریا-تیزو^۱ مورد بررسی و مقایسه با تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک^۲ قرار گرفته است.

۳-۲- مثال اول

اسلامی و همکاران [۶۹] یک لایه همگن و ایزوتروپیک را که در $x=0$ بدون تنش و در $x=L$ گیردار و عایق شده را مورد بررسی قرار داده‌اند. (مطابق شکل ۳-۱) یک شوک حرارتی پله‌ای نیز به سطح $x=0$ اعمال می‌شود. در این مثال از معادلات ترموالاستیسیته کلاسیک برای تعیین دما، جابجایی‌ها و تنش‌ها در لایه استفاده شده است. نتایج به‌دست آمده از این مطالعه با نتایج ارائه شده در مرجع [۶۹] مقایسه شده است و در توزیع دما در راستای x جابه‌جایی و تغییرات تنش هم‌گرایی مناسبی مشاهده شد.

^۱. Chandrasekharaiah -Tizo theory(C-T)

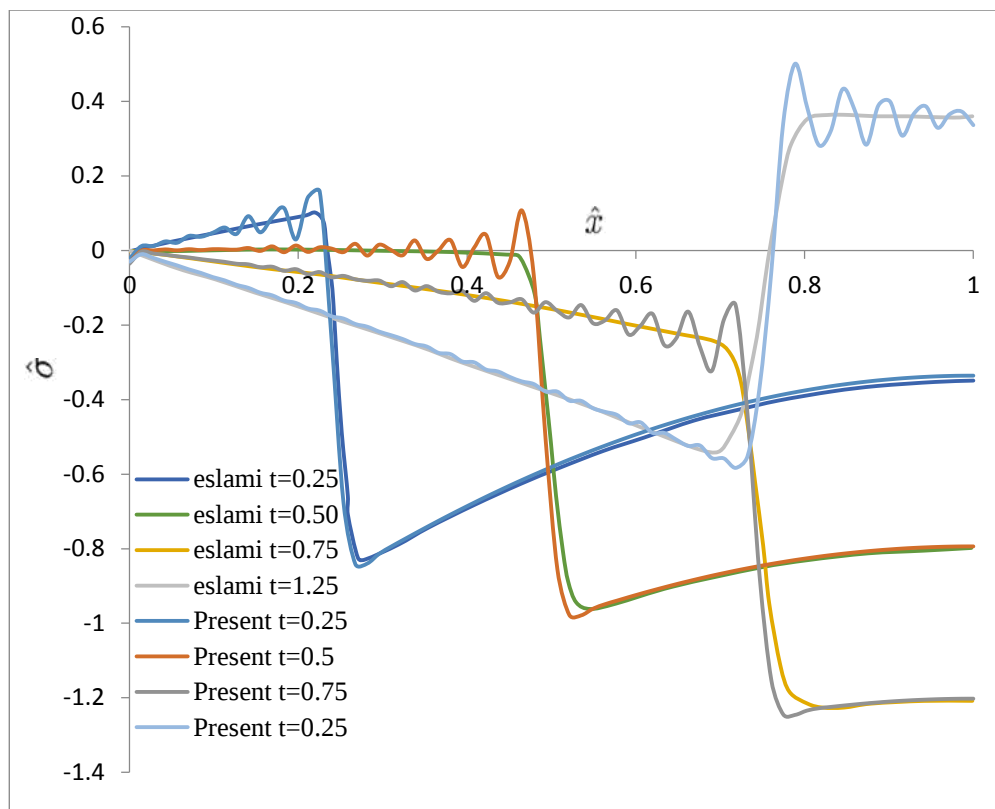
^۲. classical thermoelasticity theory (CTE)



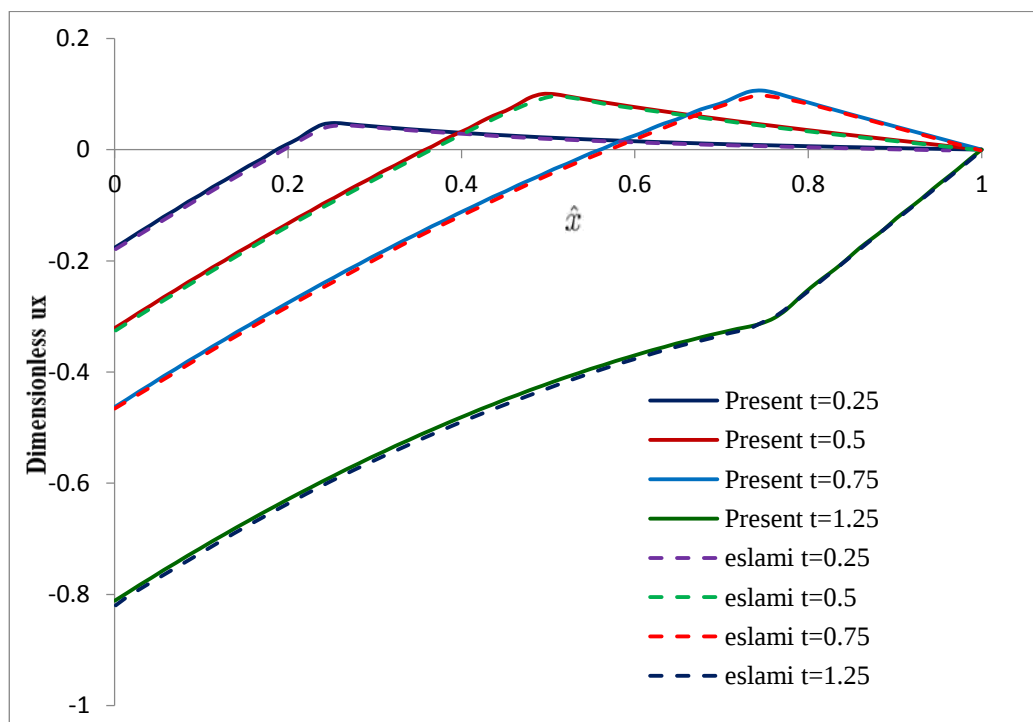
شکل (۱-۳) لایه همگن و ایزوتروپیک تحت شوک حرارتی

جدول (۱-۳) مشخصات مسئله و خواص ماده

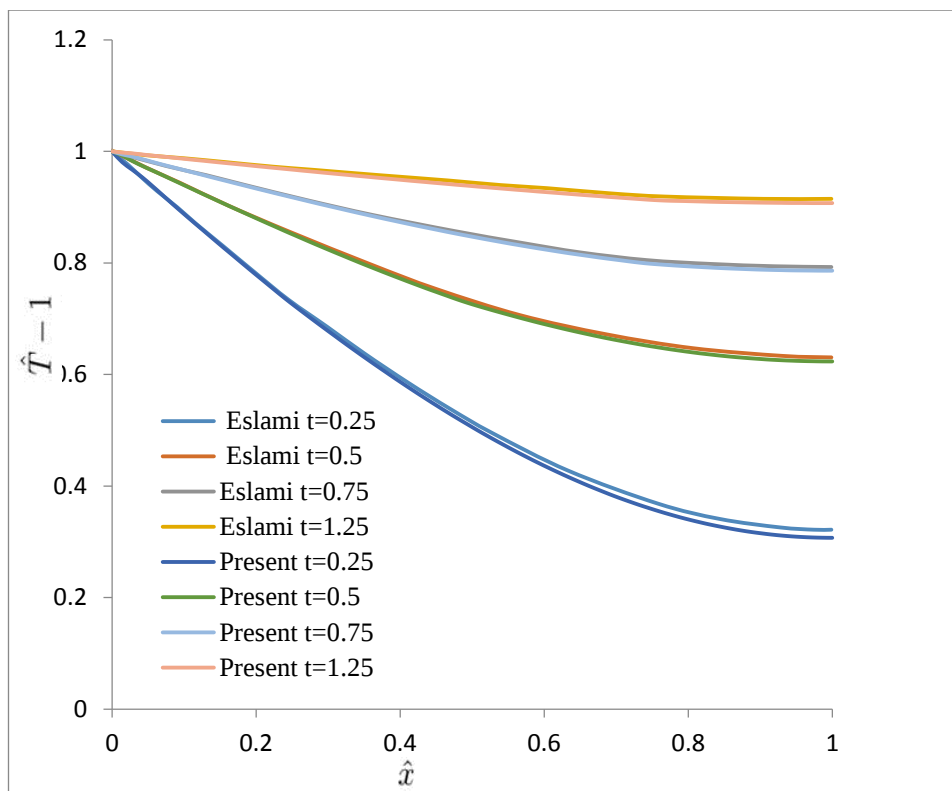
مقدار	واحد	نام پارامتر
1	-	طول بدون بعد
3	-	عرض بدون بعد
71	-	مش بندی در راستای X
201	-	مش بندی در راستای Y
0.01	-	گام زمانی بی بعد
1.25	-	زمان نهایی بی بعد
200	Gpa	E
17	W/mK	K
4.4112e-05	1/K	α
7833	kg/m ³	ρ



شکل (۳-۲) نمایش تغییرات تنش در جهت x در امتداد طول لایه در زمان‌های مختلف



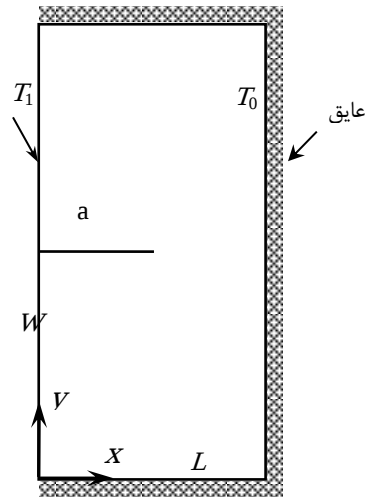
شکل (۳-۳) تغییرات جابه‌جایی u_x در امتداد طول لایه در زمان‌های مختلف



شکل (۴-۳) تغییرات دما در امتداد طول لایه در زمان‌های مختلف

۳-۳- مثال دوم

برای این مثال یک لایه دو بعدی الاستیک ایزوتروپیک و همگن با یک ترک لبه‌ای مطابق با شکل (۳-۵) در نظر گرفته می‌شود. دمای اولیه لایه برابر با ۲۷۳K معادل با $(T_0 = 273K)$ فرض می‌شود. دمای سطح سمت چپ این لایه با فرایند رسانش در زمان $t = 0$ به سرعت به مقدار صفر کاهش پیدا می‌کند $(T_1 = 0 K)$. سطوح دیگر این لایه عایق حرارتی فرض می‌شوند. ابعاد بی بعد این لایه عبارتند از $L = 1$ ، $W = 4$ و $a = 0.5$ (شکل ۳-۵). ضخامت بی بعد لایه نیز ۱۰ در نظر گرفته می‌شود. خواص ماده در جدول (۳-۲) ارائه شده است. مسئله در حالت کرنش صفحه‌ای حل شده است.



شکل (۵-۳) هندسه و ابعاد صفحه ایزوتروپیک همگن دارای ترک لبه‌ای تحت شوک گرمایی

گام زمانی استفاده شده برای حل مسئله در قلمرو زمان نیز $\Delta t = 0.005$ در فضای بی بعد می‌باشد.

یک شبکه شامل 51×205 المان مستطیلی چهار گره‌ای برای گسسته‌سازی هندسه مسئله مورد استفاده قرار گرفته است.

طول مشخصه 0.001 و سرعت مشخصه 0.00470782 در نظر گرفته شده است.

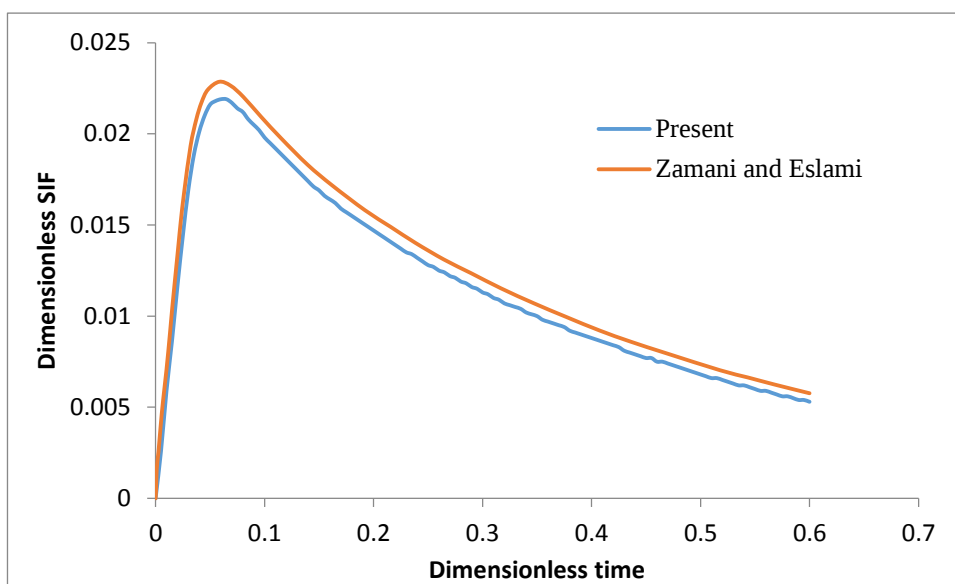
تغییرات زمانی ضریب شدت تنش مد I با نتایج [70] در شکل (۶-۳) مقایسه شده است. در شکل (۷-۳) مقادیر

ضریب شدت تنش برای چهار ناحیه انتگرال‌گیری متفاوت مقایسه شده است که نتایج نشان می‌دهد مقدار ضریب

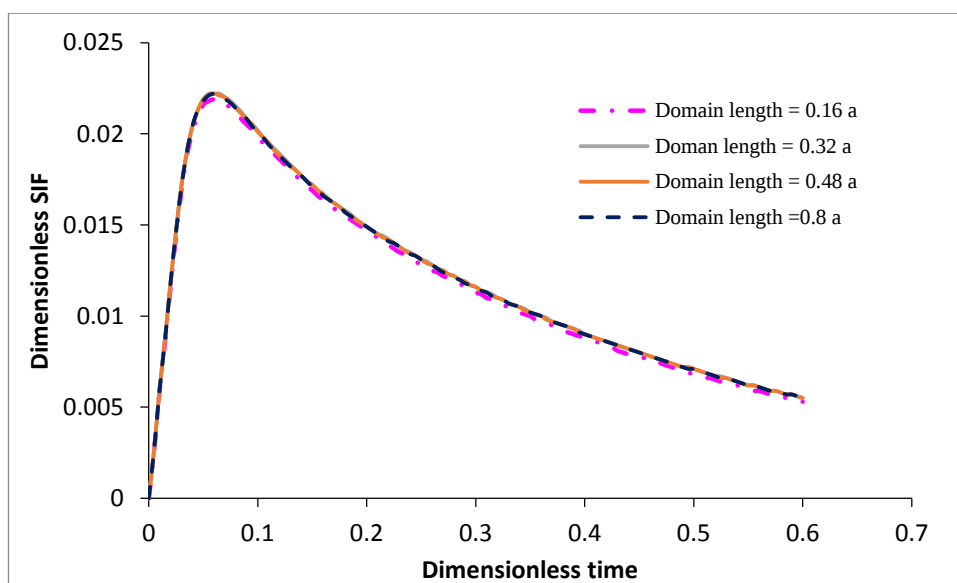
شدت تنش مد I از اندازه ناحیه انتگرال‌گیری مستقل می‌باشد.

جدول (۲-۳) خواص ماده در نظر گرفته شده [70]

ظرفیت گرمایی ویژه (J/Kg-K)	چگالی (Kg/m ³)	هدایت گرمایی (W/m-K)	ضریب انبساط گرمایی (10 ⁻⁶ /K)	نسبت پواسون	مدول یانگ (GPa)
۴۶۱	۷۸۳۳	۱۷	۶,۶۸	۰,۳	۲۰۰



شکل (۳-۶) تغییرات زمانی ضریب شدت تنش مود I

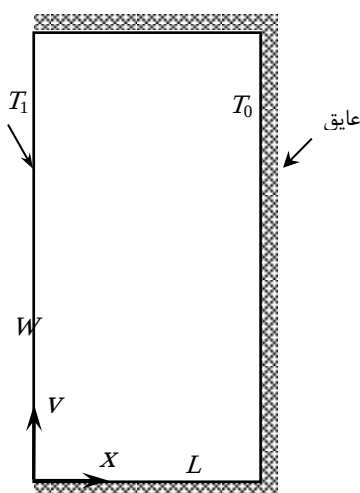


شکل (۳-۷) اثر تغییر اندازه ناحیه انتگرال گیری بر روی مقدار ضریب شدت تنش مد I

۳-۴-مثال سوم

برای این مثال یک لایه دوبعدی الاستیک ایزوتروپیک و همگن مطابق با شکل (۳-۸) در نظر گرفته می‌شود. دمای اولیه لایه برابر با 100K معادل با $(T_0 = 100K)$ فرض می‌شود. دمای سطح سمت چپ این لایه با فرایند رسانش در زمان $t = 0$ به سرعت به مقدار $2 T_0$ افزایش پیدا می‌کند $(T_1 = 2T_0)$. سطوح دیگر این لایه عایق حرارتی فرض می‌شوند و لبه سمت چپ کاملاً مقید شده است.

از معادلات انتقال حرارت با تاخیر فاز دوگانه^۱ برای حل مسئله استفاده شده و ابعاد بی بعد این لایه عبارتند از $L = 3$, $W = 6$ (شکل ۳-۸). ضخامت لایه نیز ۱۰ بی بعد در نظر گرفته می‌شود. τ_T و τ_q بی بعد هم به ترتیب برابر با ۱ و ۰/۳ در نظر گرفته شده‌اند و مسئله در حالت کرنش صفحه‌ای حل شده است. خواص ماده تشکیل دهنده صفحه در جدول (۳-۳) ارائه شده است.



شکل (۳-۸) هندسه و ابعاد صفحه ایزوتروپیک همگن تحت شوک گرمایی

¹ dual-phase-lag (DPL) heat conduction

جدول (۳-۳) خواص ماده در نظر گرفته شده

ظرفیت گرمایی ویژه (J/Kg-K)	چگالی (Kg/m ³)	هدایت گرمایی (W/m-K)	ضریب انبساط گرمایی (10 ⁻⁶ /K)	نسبت پواسون	مدول یانگ (GPa)
۴۶۱	۷۸۳۳	۱۷	۴۴/۱۱۲	۰٫۳	۲۰۰

گام زمانی استفاده شده برای حل مسئله در قلمرو زمان نیز $\Delta t = 0.03$ در فضای بی بعد می باشد.

یک شبکه شامل 71×143 المان مستطیلی چهار گره ای برای گسسته سازی هندسه مسئله مورد استفاده قرار گرفته است.

توزیع دما در صفحه در زمان های مختلف برای تئوری های ترموالاستیسیته کلاسیک و چاندراساخیاریا- تیزو در شکل (۳-۹) به نمایش در آمده است. در تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک وقتی که دمای سطح چپ این لایه به دمای یک در فضای بی بعد می رسد در هر یک از گام های زمانی دمای تمام صفحه بالاتر از صفر می باشد و این نشان دهنده سرعت نامحدود موج دما می باشد حال آنکه سرعت محدود موج دما به خوبی در تئوری چاندراساخیاریا- تیزو قابل مشاهده است. یعنی در هر یک از گام های زمانی در فاصله ای از سطح چپ لایه دما صفر می باشد.

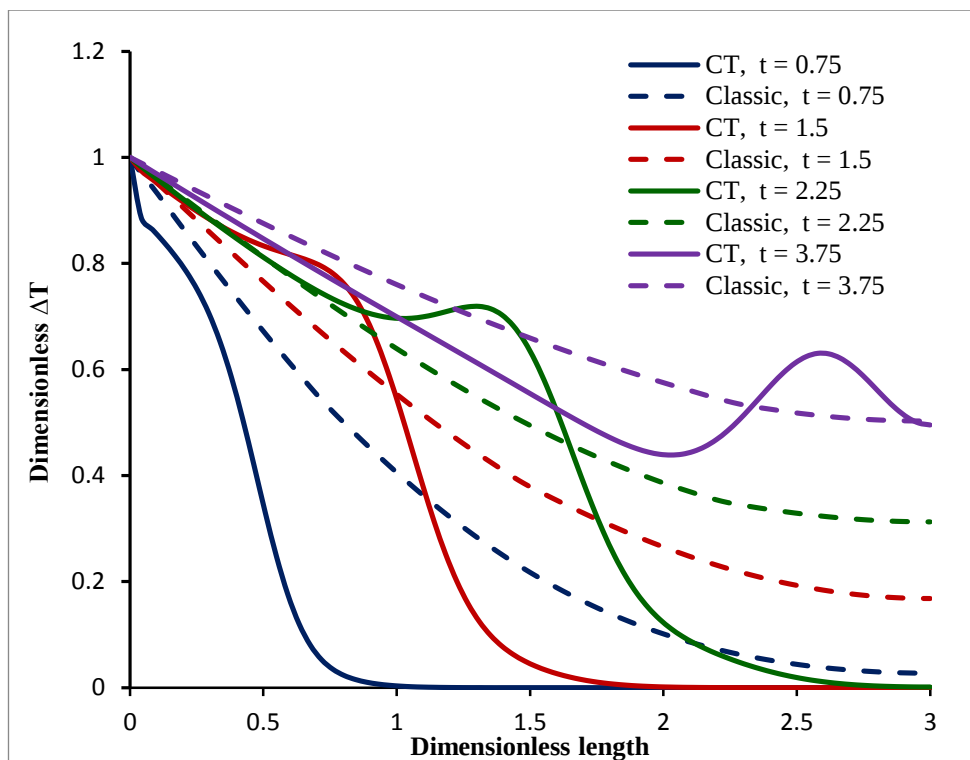
در $t=3.75$ دمای تمام صفحه تغییر پیدا کرده است و در ابتدای برگشت موج دما از لبه سمت راست باریکه به سمت چپ شاهد یک پیک می باشیم. همچنین کاملاً مشخص است که انتشار گرما بر اساس تئوری C-T موجی شکل است لکن بر اساس CTE ما شاهد پخش گرما در صفحه می باشیم.

شکل (۳-۱۰) تغییرات جابه جایی در صفحه در زمان های مختلف را نشان می دهد. سرعت محدود جابه جایی به خوبی مشخص است. در تئوری C-T در ابتدا با افزایش دمای سطح چپ لایه جابه جایی در جهت منفی محور X اتفاق می افتد که با گذشت زمان این مقدار بیشتر می شود. در هر گام زمانی با فاصله گرفتن از سطح سمت چپ لایه مقدار جابه جایی ها کمتر و در نقطه ای به صفر می رسد و بعد از آن جابه جایی ها در جهت مثبت محور X افزایش می یابد و شاهد یک کشش در آن نقطه هستیم و بعد از آن از مقدار جابه جایی ها کاسته شده و به صفر می رسد و سایر نقاط هیچ گونه جابه جایی ندارند و این خود دلالت بر سرعت محدود جابه جایی دارد. در گام زمانی $t=3.75$ در تئوری CTE

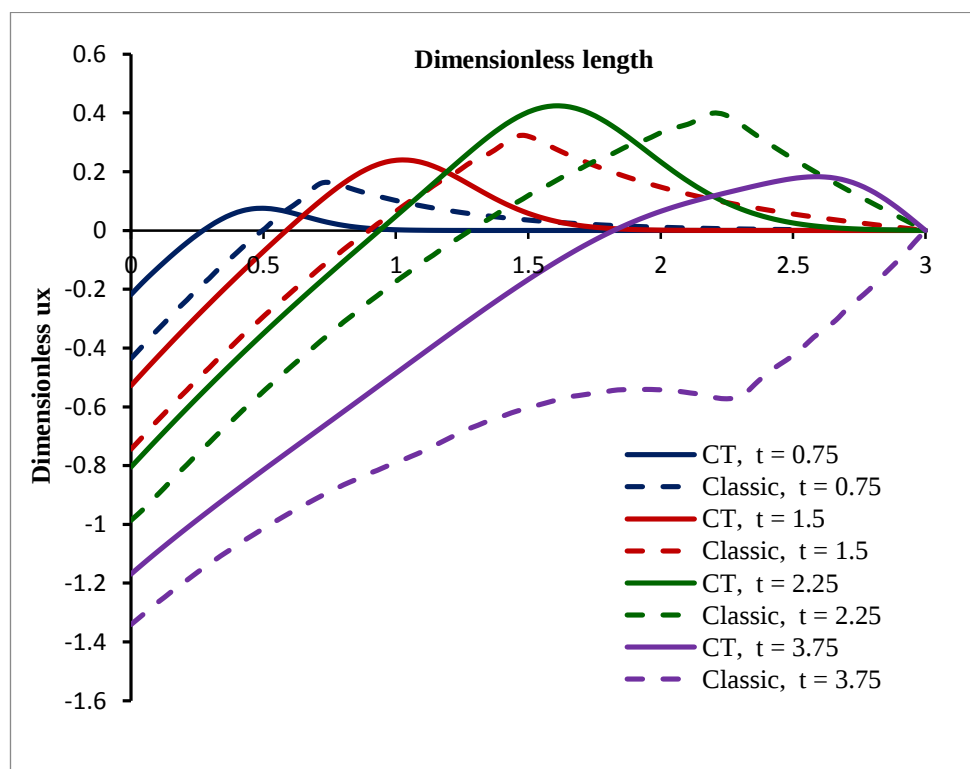
هیچ‌گونه جابه‌جایی مثبتی را شاهد نیستیم. همچنین با توجه به نمودار، بر اساس تئوری C-T در هر گام زمانی بیشترین مقدار جابه‌جایی، در فاصله کمتری از سطح در معرض شوک حرارتی نسبت به تئوری CTE اتفاق می‌افتد. شکل (۱۱-۳) تغییرات تنش در راستای محور x صفحه را بر اساس تئوری C-T و تئوری CTE نشان می‌دهد. بیشترین مقادیر تنش بر اساس تئوری C-T در فاصله کمتری از سطح در معرض شوک حرارتی نسبت به تئوری CTE اتفاق می‌افتد، اما مقادیر آن‌ها کمتر از تئوری CTE می‌باشد. همچنین محدود بودن موج تنش در تئوری C-T به خوبی مشخص است.

شکل (۱۲-۳) تغییرات تنش در راستای محور y صفحه را بر اساس تئوری C-T و تئوری CTE نشان می‌دهد. بیشترین مقادیر تنش در این راستا نیز همانند محور x بر اساس تئوری C-T در فاصله کمتری از سطح در معرض شوک حرارتی نسبت به تئوری CTE اتفاق می‌افتد، اما مقادیر آن‌ها کمتر از تئوری CTE می‌باشد. تغییرات تنش در تئوری CTE با نوساناتی همراه است اما در تئوری C-T شاهد رفتار هموارتری می‌باشیم. همچنین محدود بودن موج تنش در تئوری C-T و نامحدود بودن آن در تئوری CTE به خوبی مشخص است.

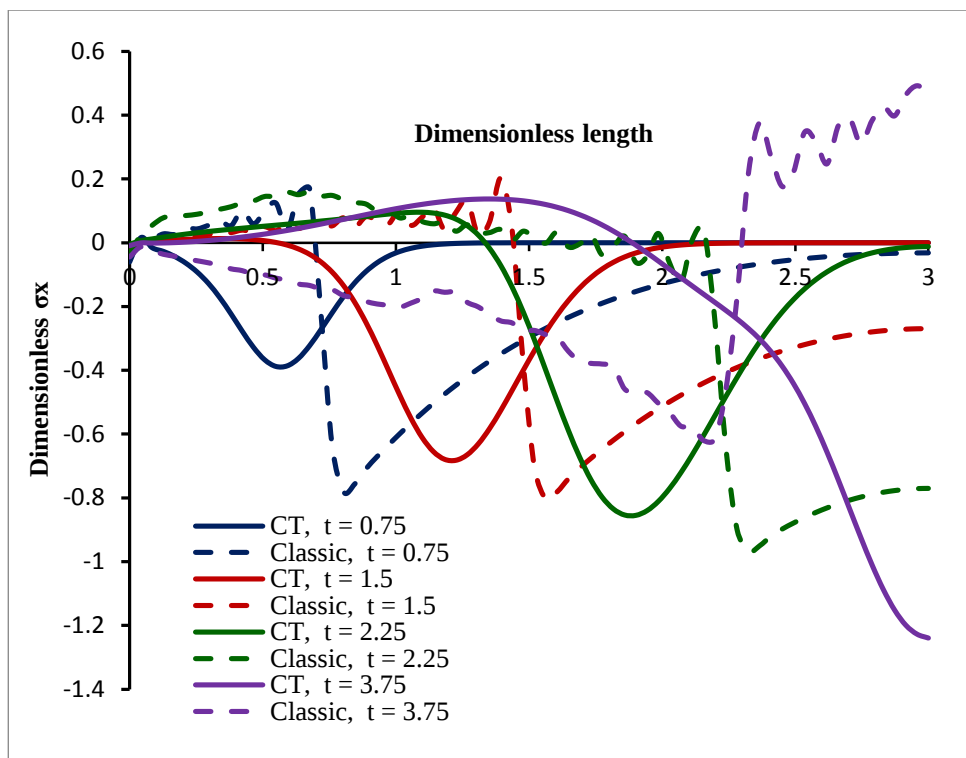
در شکل (۱۳-۳) برای هر یک از گام‌های زمانی $t=1.5$ و $t=2.25$ چهارم‌ش ساختاریافته لحاظ گردید و اثر تغییرات دما با تغییرات تعداد المان‌های شبکه بررسی شد که همگرایی خوبی را نشان می‌دهد و لذا نتایج مستقل از تعداد المان‌های شبکه می‌باشند.



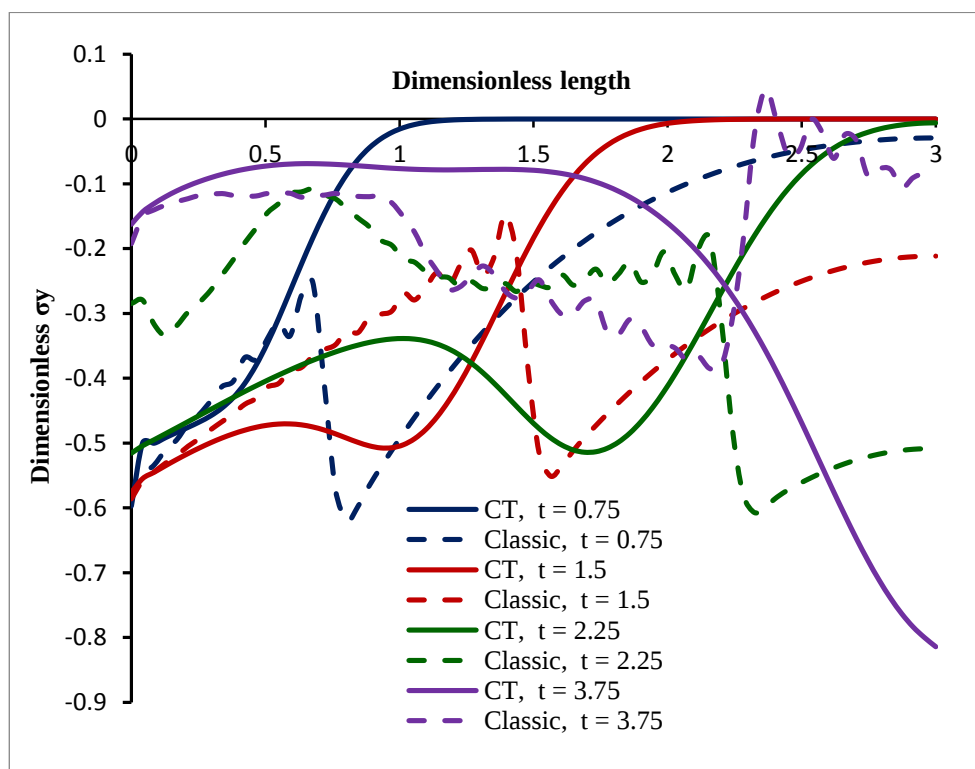
شکل (۳-۹) توزیع دما در صفحه در زمان های مختلف



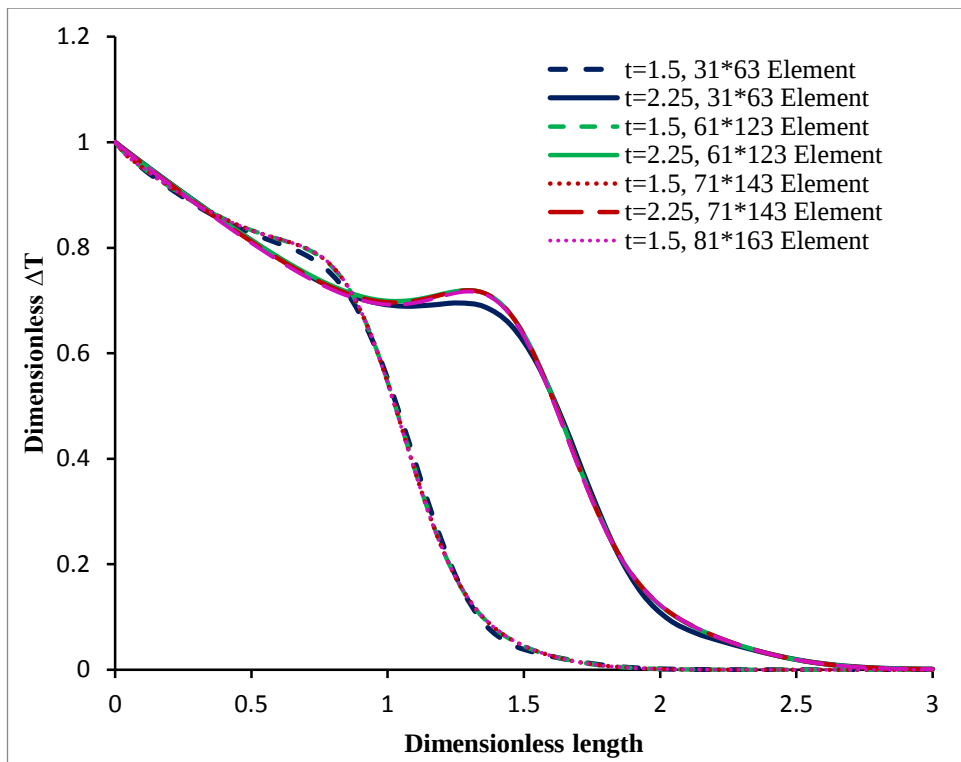
شکل (۳-۱۰) تغییرات جابه جایی u_x در صفحه در زمان های مختلف



شکل (۱۱-۳) تغییرات σ_x در صفحه در زمان‌های مختلف



شکل (۱۲-۳) تغییرات σ_y در صفحه در زمان‌های مختلف



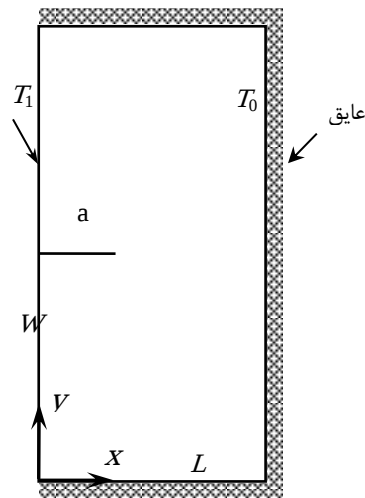
شکل (۳-۱۳) توزیع دما در لایه برای دو زمان متفاوت جهت بررسی همگرایی نتایج با تغییر تعداد المان‌های شبکه

۳-۵- مثال چهارم

برای این مثال یک لایه دو بعدی الاستیک ایزوتروپیک و همگن ترک‌دار مطابق با شکل در نظر گرفته می‌شود. دمای اولیه لایه برابر با 100K معادل با $(T_0 = 100K)$ فرض می‌شود. دمای سطح سمت چپ این لایه با فرایند رسانش در زمان $t = 0$ به سرعت به مقدار $0.02 T_0$ کاهش پیدا می‌کند $(T_1 = 0.02 T_0)$. سطوح دیگر این لایه عایق حرارتی فرض می‌شوند و لبه سمت چپ کاملاً مقید شده است.

از معادلات انتقال حرارت با تاخیر فاز دوگانه برای حل مسئله استفاده شده و ضریب شدت تنش مد I با استفاده از روش انتگرال برهمکنش بدست آمده است. ابعاد بی‌بعد این لایه عبارتند از $L = 3$ ، $W = 6$ و $a = L/3$ (شکل ۳-۱۴).

ضخامت بی‌بعد لایه نیز ۱۰ در نظر گرفته می‌شود. τ_q و τ_T بی‌بعد هم به ترتیب برابر با ۱ و 0.3 در نظر گرفته شده‌اند و مسئله در حالت کرنش صفحه‌ای حل شده است. خواص ماده در نظر گرفته شده برای صفحه در جدول (۳-۴) ارائه شده است.



شکل (۳-۱۴) هندسه و ابعاد صفحه ایزوتروپیک همگن تحت شوک گرمایی

جدول (۳-۴) خواص ماده در نظر گرفته شده

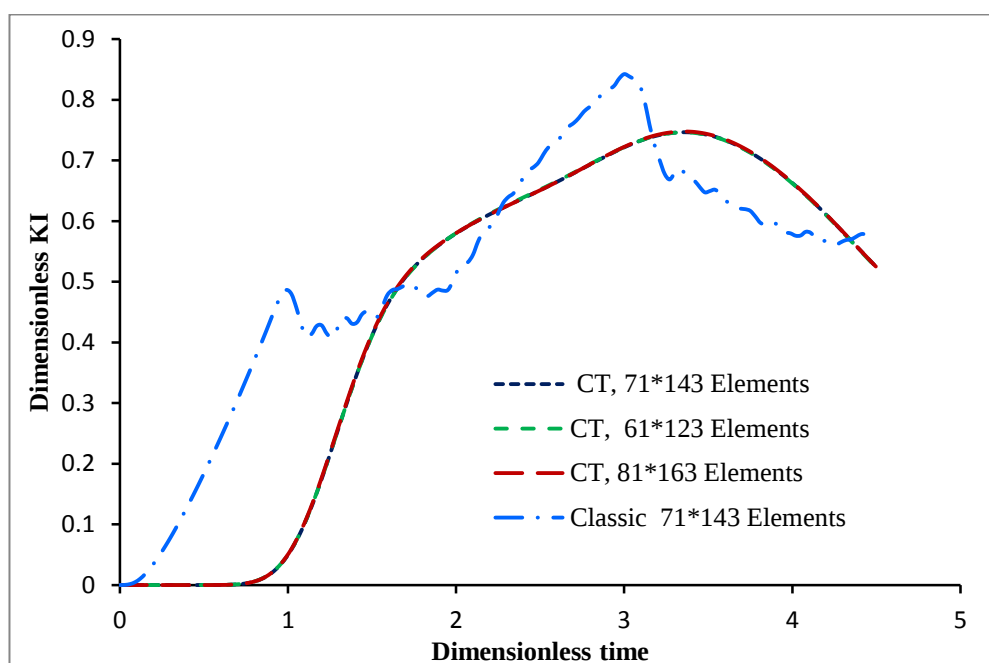
ظرفیت گرمایی ویژه (J/Kg-K)	چگالی (Kg/m ³)	هدایت گرمایی (W/m-K)	ضریب انبساط گرمایی (10 ⁻⁶ /K)	نسبت پواسون	مدول یانگ (GPa)
۴۶۱	۷۸۳۳	۱۷	6.68	۰,۳	۲۰۰

گام زمانی استفاده شده برای حل مسئله در قلمرو زمان نیز $\Delta t = 0.03$ در فضای بی بعد می باشد.

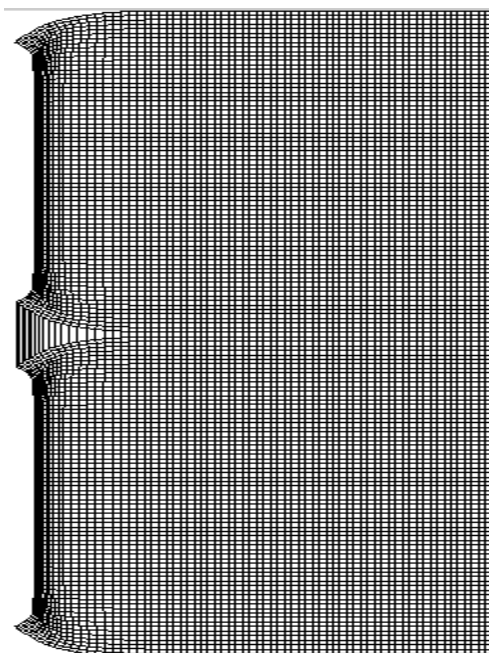
این مسئله با سه شبکه شامل 71×143 المان، 61×123 المان و 81×163 المان مستطیلی چهار گره ای مدل سازی و تحلیل شده است.

در نمودار (۳-۱۵) تاثیر تعداد المان های شبکه بر ضریب شدت تنش مود اول بررسی شد و شاهد همگرایی نتایج می باشیم. در نتایج مبتنی بر تئوری CTE به محض اعمال شوک دمایی ضریب شدت تنش افزایش می یابد حال آنکه در تئوری C-T پس از زمان بی بعد 1 شاهد افزایش ضریب شدت تنش می-باشیم و این خود نشان دهنده محدود بودن موج دما در این تئوری می باشد. در تئوری CTE مقادیر ضریب شدت تنش نوسانات بیشتری نسبت به مقادیر

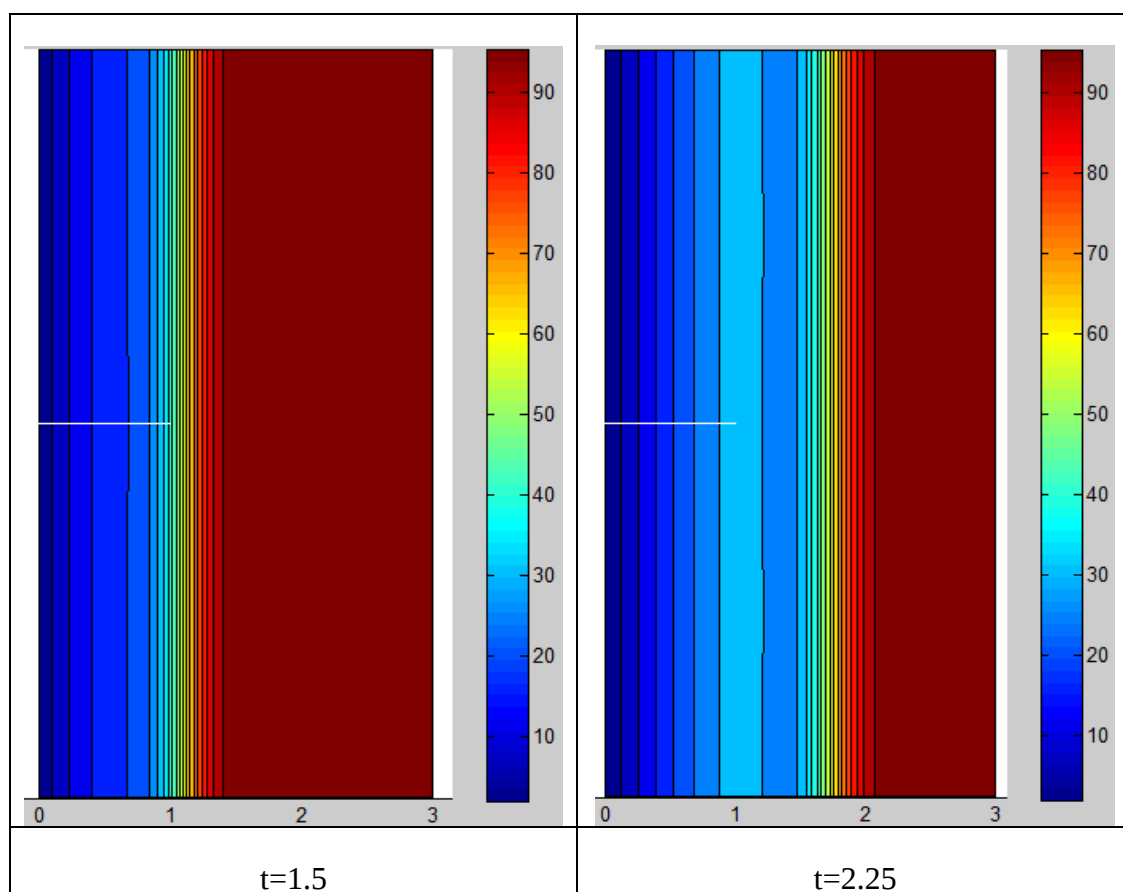
حاصل از تئوری C-T دارد ، همچنین بیشترین مقدار ضریب شدت تنش تئوری CTE بیشتر از تئوری C-T بوده و به دلیل نامحدود بودن سرعت موج دما بر اساس این تئوری، بیشترین مقدار ضریب شدت تنش زودتر اتفاق می افتد. در نمودار (۳-۱۶) سرعت محدود جابه جایی در تمام صفحه و باز شدگی متقارن ترک به خوبی قابل مشاهده می باشد. در شکل (۳-۱۷) توزیع دما در زمان های $t=1.5$ و $t=2.25$ نشان داده شده است . سرعت محدود موج گرما در زمان های قید شده مشهود است. در شکل (۳-۱۸) جابه جایی در راستای y در زمان های $t=1.5$ و $t=2.25$ ارائه شده است. به وضوح باز شدگی ترک و همچنین تقارن جابه جایی در راستای y نشان داده شده است. شکل (۳-۱۹) تنش های به وجود آمده در راستای x در زمان های $t=1.5$ و $t=2.25$ را نشان می دهد. این شکل مشخص می کند سرعت موج تنش محدود بوده و با گذشت زمان در حال انتشار به دیواره راست لایه می باشد.



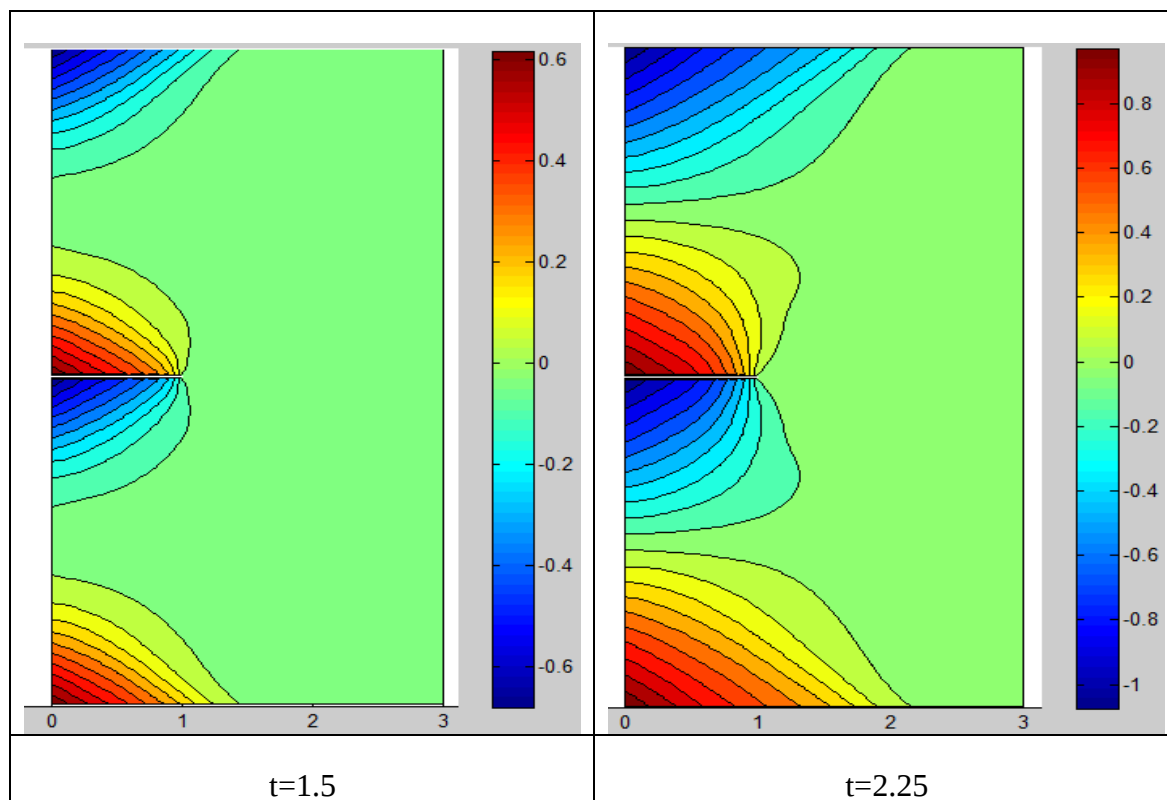
شکل (۳-۱۵) منحنی های ضریب شدت تنش مد I حاصل از تئوری ترموالاستیسیته CT بر حسب دما برای سه شبکه مختلف و مقایسه با منحنی ضریب شدت تنش مد I حاصل از تئوری کلاسیک



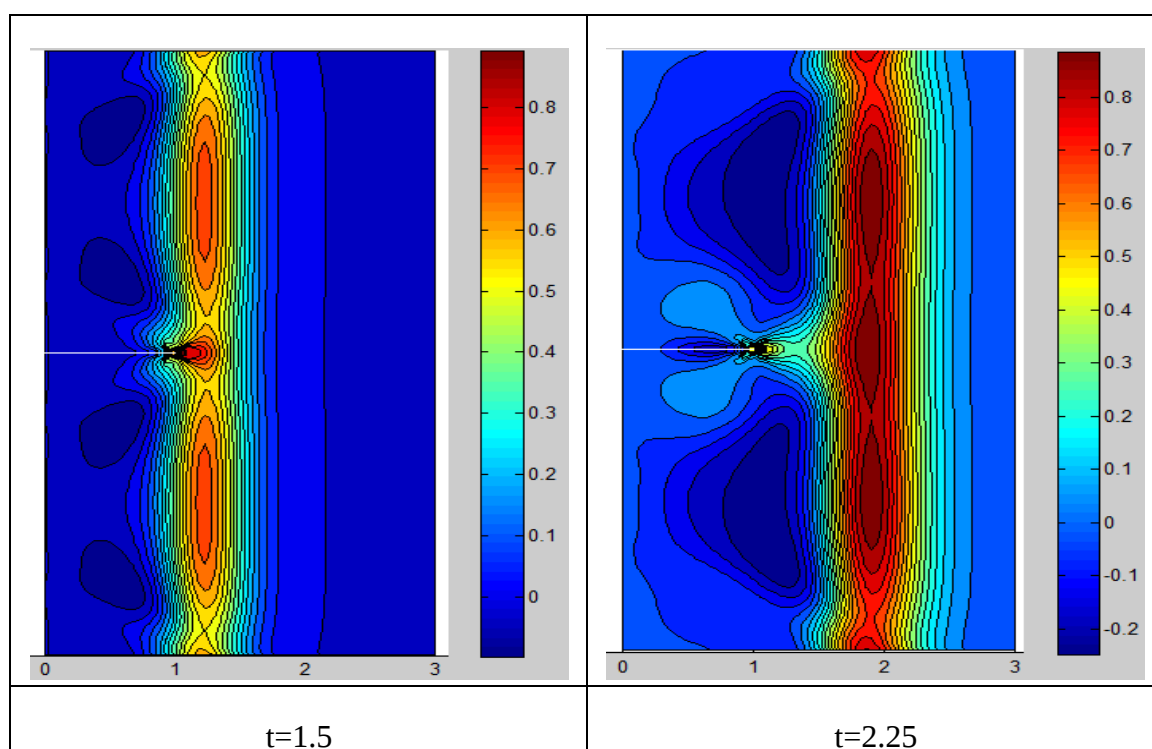
شکل (۳-۱۶) تغییر شکل نمونه در زمان $t=0.75$



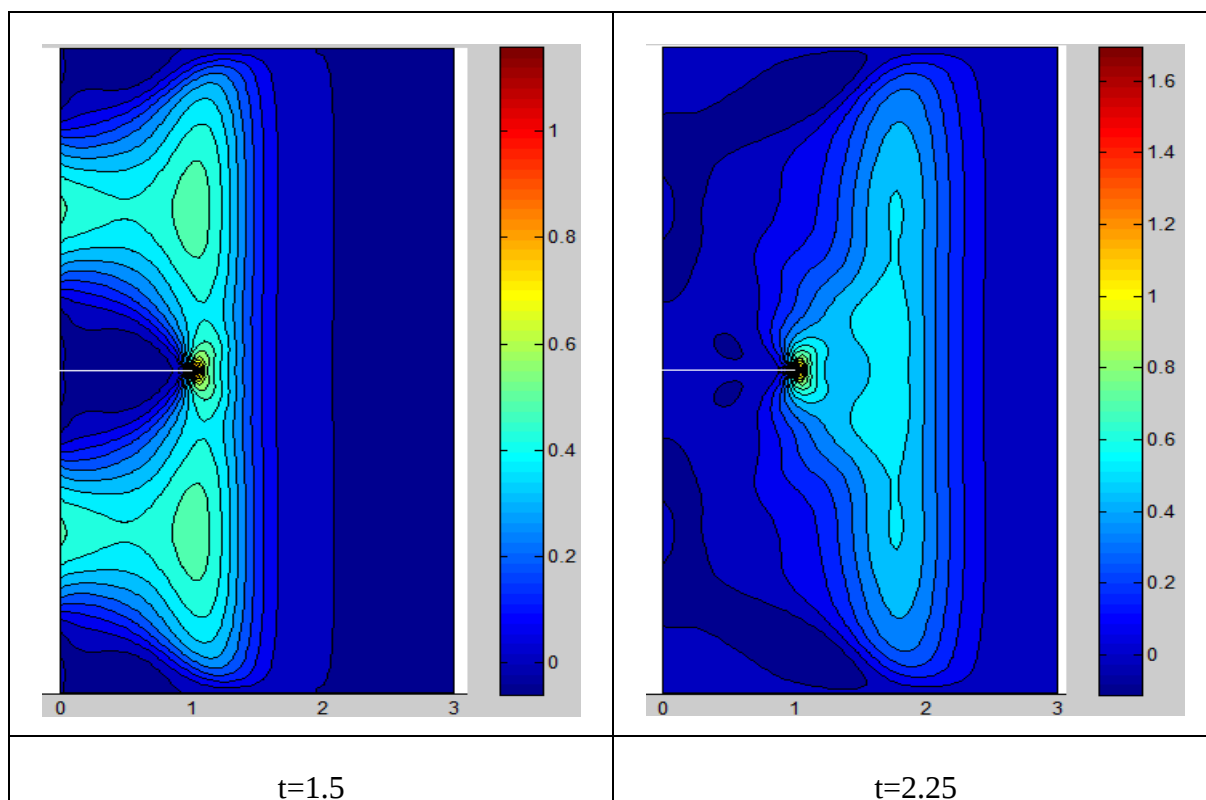
شکل (۳-۱۷) کانتورهای دما در دو زمان مختلف



شکل (۳-۱۸) کانتورهای جابجایی u_y در دو زمان مختلف



شکل (۳-۱۹) کانتورهای تنش σ_x در دو زمان مختلف

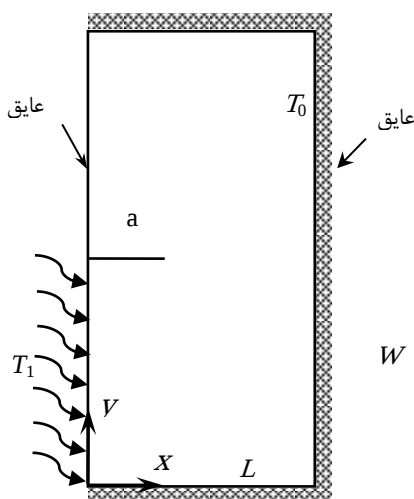


شکل (۳-۲۰) کانتورهای تنش σ_y در دو زمان مختلف

۳-۶- مثال پنجم

برای این مثال یک لایه دوبعدی الاستیک ایزوتروپیک و همگن دارای ترک مطابق با شکل (۳-۲۱) در نظر گرفته می‌شود. دمای اولیه لایه برابر با 100K معادل با $(T_0 = 100K)$ فرض می‌شود. دمای نیمه پایین لبه سمت چپ این لایه با فرایند رسانش در زمان $t = 0$ به سرعت به مقدار $0.02 T_0$ کاهش پیدا می‌کند $(T_1 = 0.02T_0)$. سطوح دیگر این لایه عایق حرارتی فرض می‌شوند و لبه سمت چپ کاملاً مقید شده است. τ_T و τ_q بی‌بعد هم به ترتیب برابر با ۱ و $0/3$ در نظر گرفته شده‌اند و مسئله در حالت کرنش صفحه‌ای حل شده است.

از معادلات انتقال حرارت با تاخیر فاز دوگانه برای حل مسئله استفاده شده و ابعاد بی‌بعد این لایه عبارتند از $L = 6$ ، $W = 3$ و $a = L/3$ (شکل ۳-۲۱). ضخامت بی‌بعد لایه نیز ۱۰ در نظر گرفته می‌شود. خواص ماده تشکیل دهنده جسم مطابق با جدول (۳-۴) است.

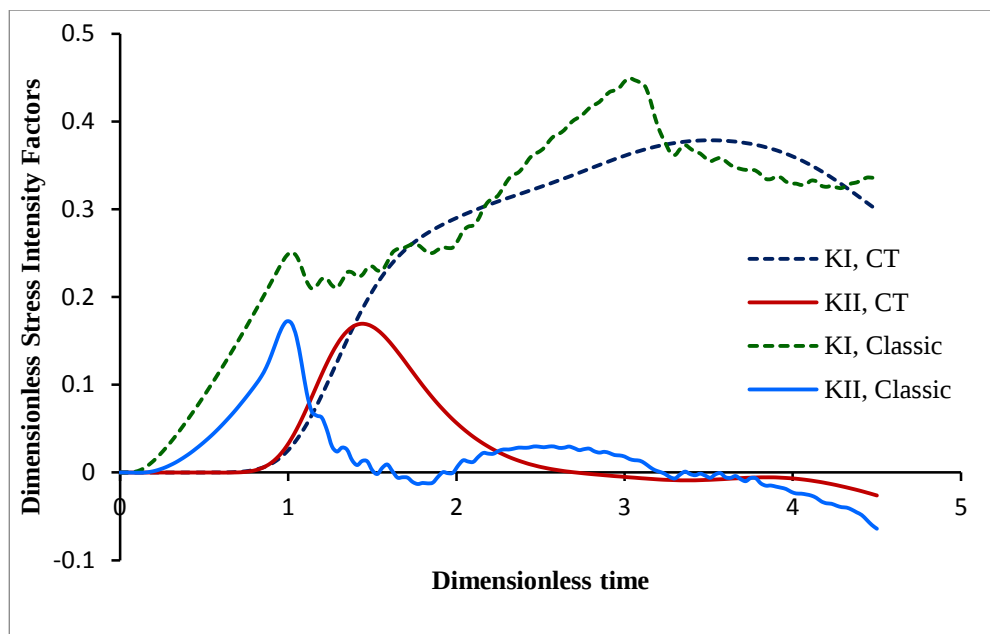


شکل (۳-۲۱) هندسه و ابعاد صفحه ایزوتروپیک همگن دارای ترک لبه‌ای تحت شوک گرمایی

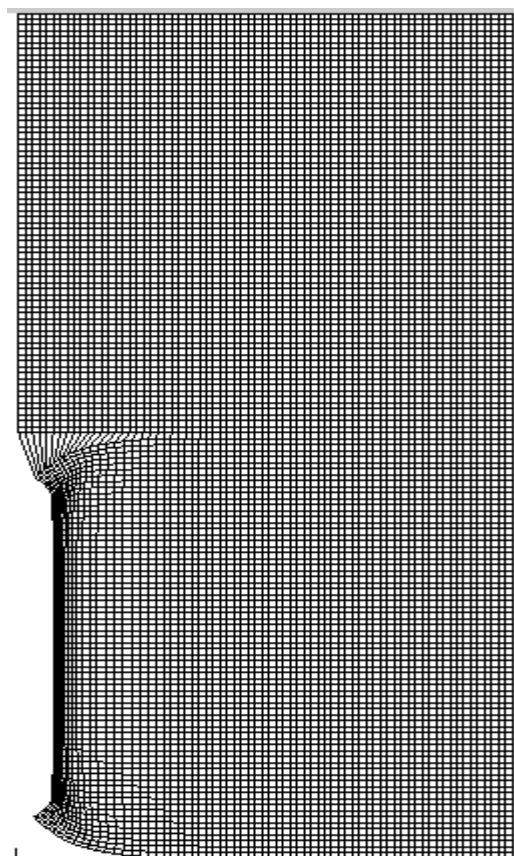
گام زمانی استفاده شده برای حل مسئله در قلمرو زمان نیز $\Delta t = 0.03$ در فضای بی بعد می‌باشد.

این مسئله با یک شبکه شامل 71×143 المان مستطیلی چهار گره‌ای مدلسازی و تحلیل شده است. ضرایب شدت تنش بدست آمده حاصل از تئوری ترموالاستیسیته CT در شکل (۳-۲۲) ارائه و با ضرایب شدت تنش حاصل از تئوری کلاسیک مقایسه شده‌اند. مطابق انتظار با توجه به عدم تقارن بارگذاری در این مثال ضریب شدت تنش مد II نیز ایجاد می‌شود که در مقایسه با ضریب شدت تنش مد I ماکزیمم کمتری دارد و سریعتر مقدار آن از ماکزیمم به صفر می‌رسد. دلیل این رفتار مربوط به تغییرات محدودتر جابجایی u_x لبه پایینی نسبت به u_y است. با توجه به تغییر جهت جابجایی u_x بعد از گذشت زمان، مقدار آن منفی هم می‌شود.

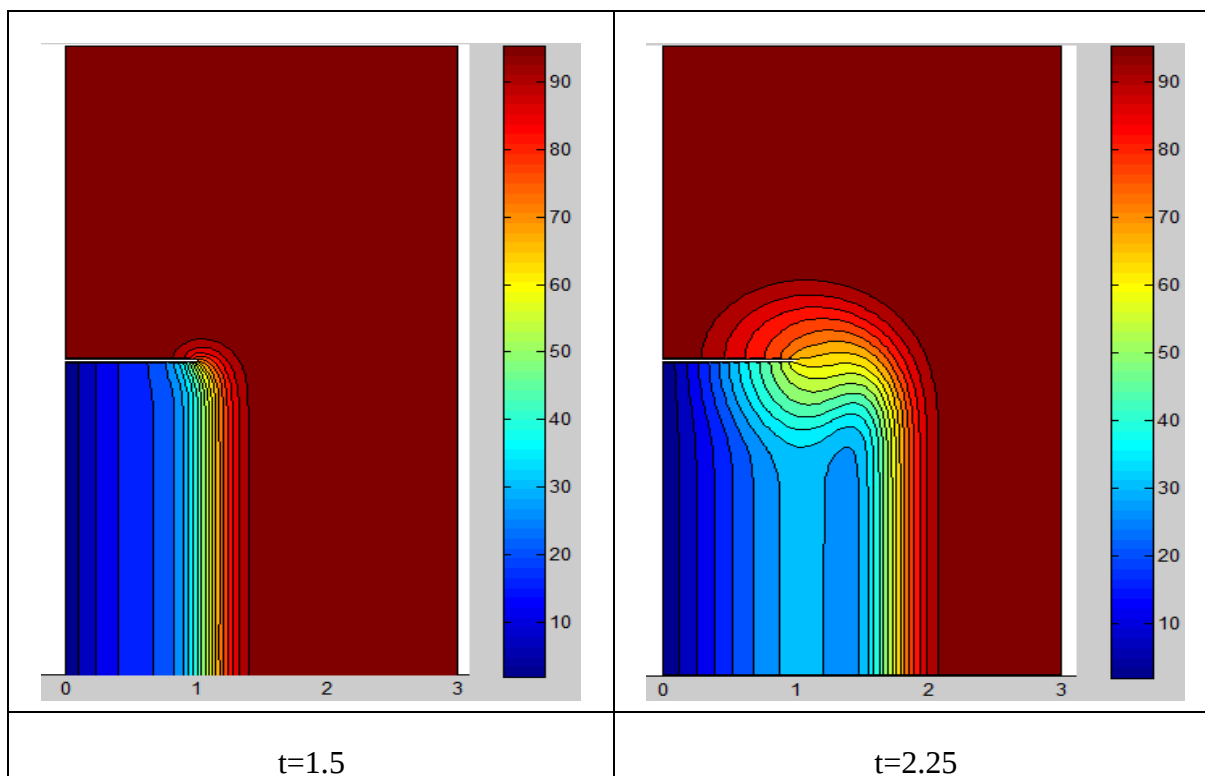
در شکل (۳-۲۳) تغییر شکل لایه در زمان $t=0.75$ نشان داده شده است. اثر کاهش دما در نیمه پایینی سطح سمت چپ لایه، باز شدن سطح پایینی ترک و سرعت محدود جابه‌جایی مشهود است. در شکل (۳-۲۴) توزیع دما در دو زمان $t=1.5$ و $t=2.25$ نمایش داده شده است. محدود بودن سرعت موج دما و انتقال حرارت از سطح بالایی ترک با گذشت زمان قابل مشاهده می‌باشد. شکل (۳-۲۵) جابه‌جایی در دو زمان $t=1.5$ و $t=2.25$ را نشان می‌دهد و بازشدگی سطح پایینی ترک و سرعت محدود جابه‌جایی کاملاً مشخص می‌باشد. در شکل (۳-۲۶) با مشخص کردن تنش در راستای x در دو زمان $t=1.5$ و $t=2.25$ ایجاد موج تنش در نیمه پایینی لایه و سرعت محدود موج تنش را نشان می‌دهد.



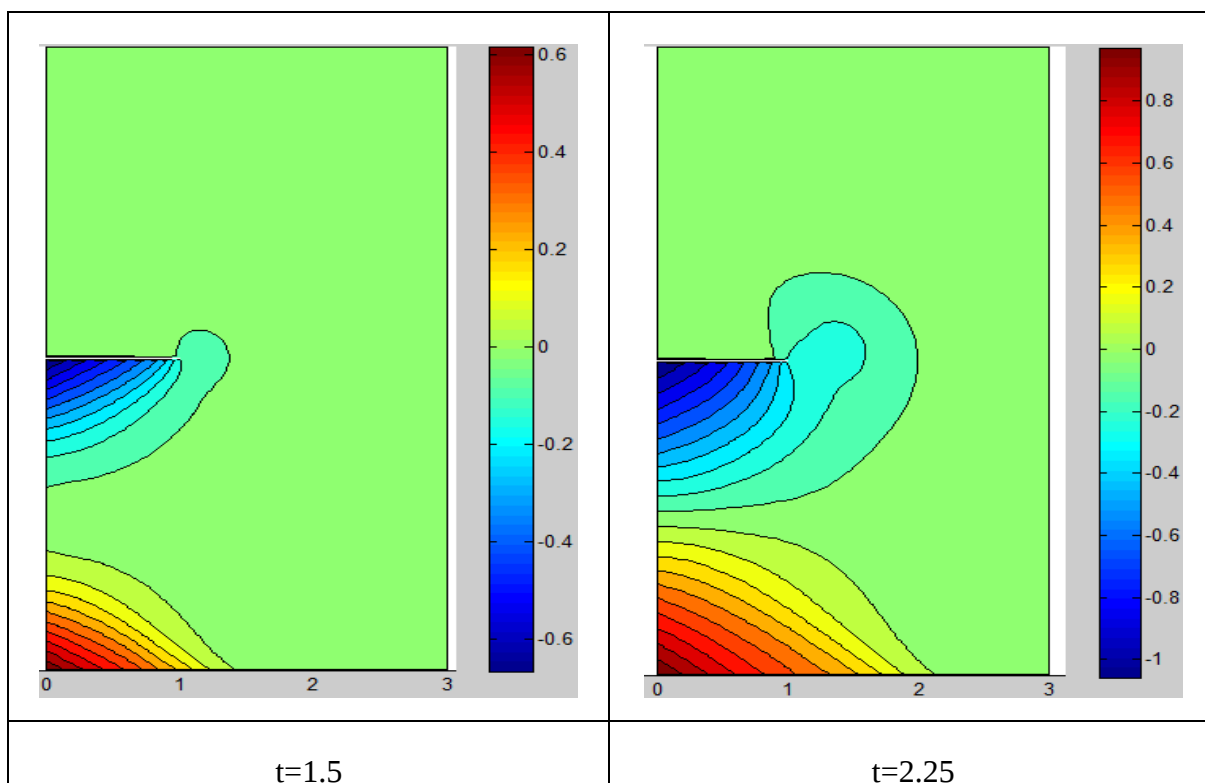
شکل (۳-۲۲) نمودار ضریب شدت تنش مد I و II بر حسب زمان



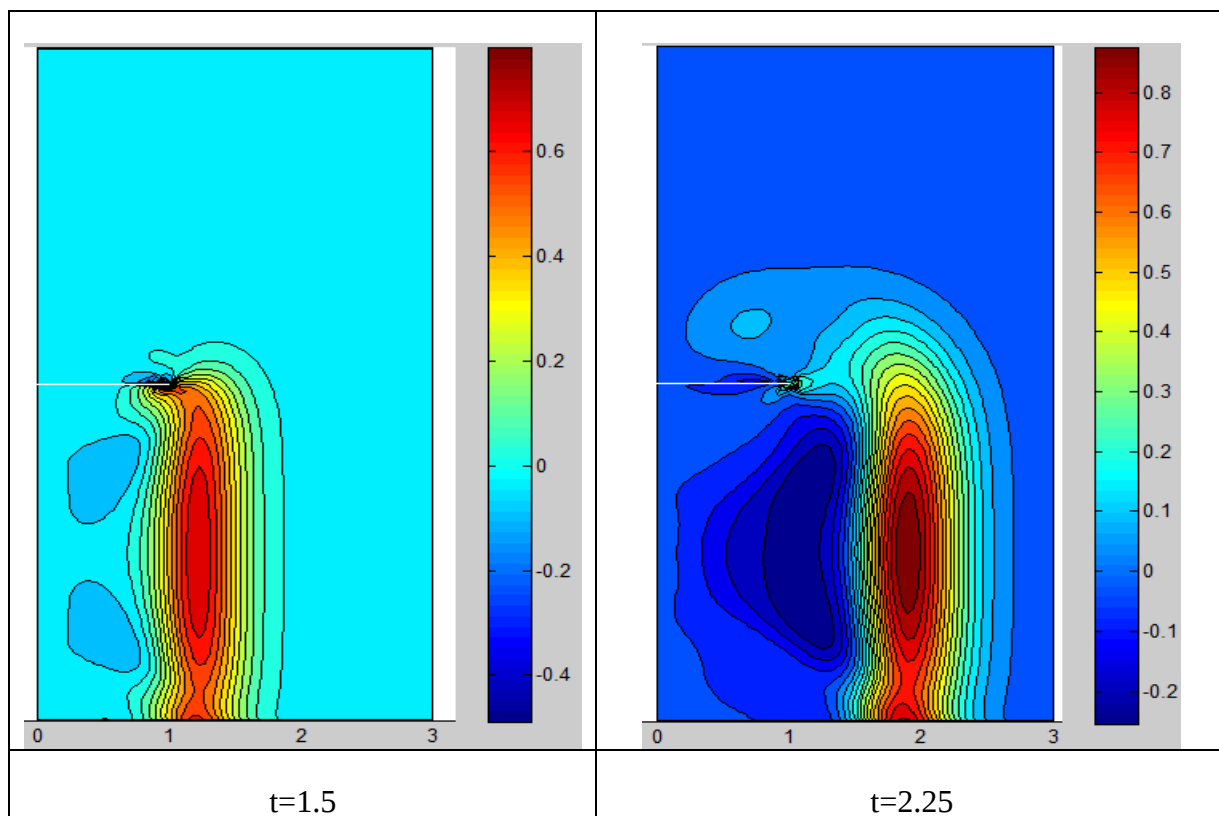
شکل (۳-۲۳) تغییر شکل نمونه در زمان $t=0.75$



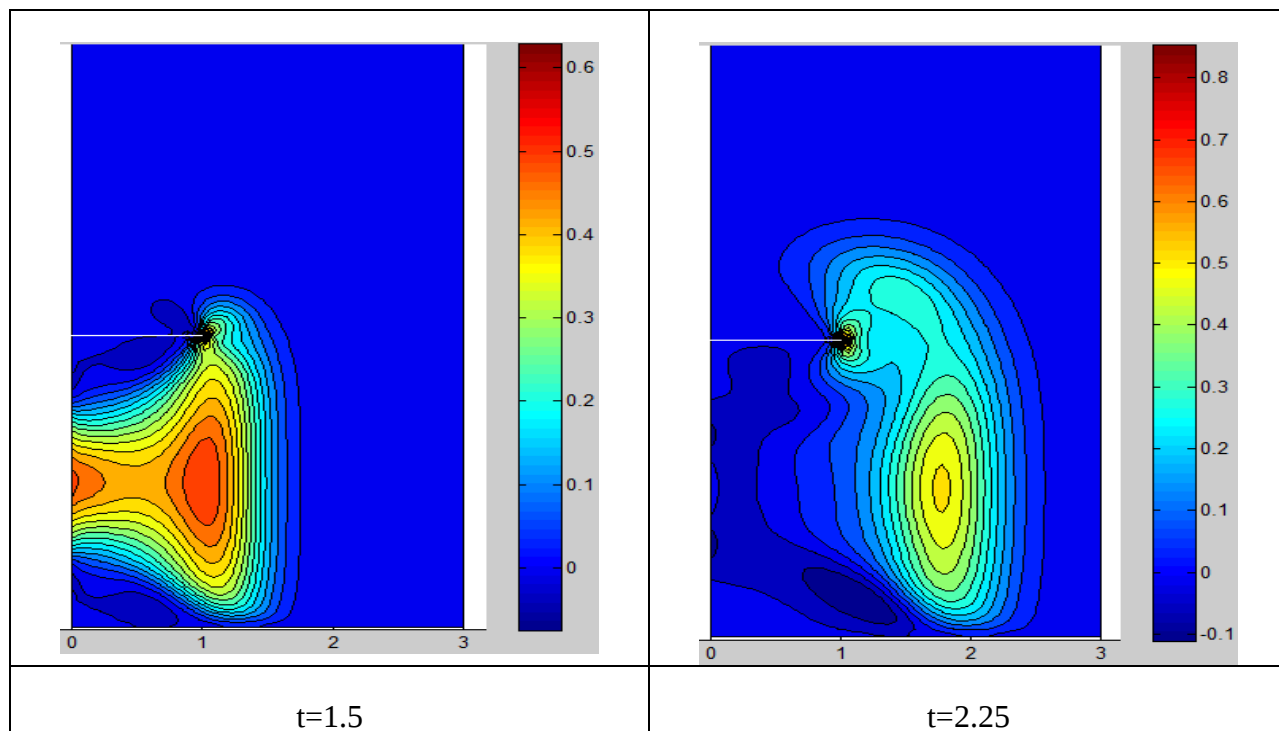
شکل (۳-۲۴) کانتورهای دما در دو زمان مختلف



شکل (۳-۲۵) کانتورهای جابجایی u_y در دو زمان مختلف



شکل (۳-۲۶) کانتورهای تنش σ_x در دو زمان مختلف



شکل (۳-۲۷) کانتورهای تنش σ_y در دو زمان مختلف

فصل چهارم

نتیجه‌گیری و پیشنهادات

۴-۱- نتیجه گیری

در این پایان نامه یک محیط ایزوتروپیک دارای ترک ساکن تحت شوک حرارتی مورد مطالعه قرار گرفته است. در این تحقیق از معادلات ترموالاستیسیته دینامیکی کوپل با در نظر گرفتن تئوری چاندراساخیاریا- تیزو استفاده شده است. با بهره گیری از روش المان محدود توسعه یافته، گسسته سازی معادلات در فضای بی بعد انجام شده است. برای محاسبه ضرایب شدت تنش از انتگرال برهم کنش استفاده شده است. در چند مثال عددی نتایج با تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک مقایسه شده است. اثر استقلال از ناحیه انتگرال گیری و نیز تعداد المان های شبکه بررسی شد. بخشی از نتایج حاصل از این پژوهش عبارتند از:

۱. سرعت موج دما بر اساس تئوری چاندراساخیاریا- تیزو محدود می باشد لکن در تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک نامحدود می باشد.

۲. بر اساس تئوری چاندراساخیاریا- تیزو سرعت جابه جایی ها محدود می باشد ولی نتایج حاصل از تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک دلالت بر نامحدود بودن آن دارد.

۳. سرعت موج تنش بر اساس تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک نامحدود بوده و بر اساس تئوری چاندراساخیاریا- تیزو محدود می باشد.

۴. ماکزیمم مقدار جابه جایی در تئوری چاندراساخیاریا- تیزو نسبت به تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک در فاصله کمتری از دیواره تحت شوک حرارتی اتفاق می افتد.

۵. ماکزیمم مقدار تنش در جهت محورهای X و Y در تئوری چاندراساخیاریا- تیزو نسبت به تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک در فاصله کمتری از دیواره تحت شوک حرارتی اتفاق می افتد ولی مقادیر آن کمتر از مقادیر حاصل از تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک می باشد.

۶. ماکزیمم مقدار ضریب شدت تنش مود I بر اساس تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک بیشتر از تئوری چاندراساخیاریا- تیزو بوده و زودتر اتفاق می افتد.

۷. در بارگذاری های نامتقارن که ضریب شدت تنش مود II نیز ایجاد می شود، ماکزیمم مقدار ضریب شدت تنش مود II بر اساس تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک بیشتر از تئوری چاندراساхарيا- تیزو بوده و زودتر اتفاق می افتد. همچنین مشخص شد که در هر دو تئوری ضریب شدت تنش مود II در مقایسه با ضریب شدت تنش مود I ماکزیمم کمتری دارد.

۴-۲- پیشنهادات

۱. محاسبه ضرایب شدت تنش بر اساس تئوری چاندراساхарيا- تیزو برای مواد تابعی (FGM) به منظور پیش-بینی رفتار مواد تابعی دارای ترک.
۲. محاسبه ضرایب شدت تنش بر اساس تئوری چاندراساхарيا- تیزو برای محیط همگن و ایزوتروپیک با توزیع دمای غیر خطی.
۳. بررسی ترک های داخلی در یک محیط همگن و ایزوتروپیک با در نظر گرفتن چاندراساхарيا- تیزو.

- [1] Jones I. S. & Rothwell G. (2001). Reference stress intensity factors with application to weight functions for internal circumferential cracks in cylinders. *Engineering Fracture Mechanics* 68(4) 435-454.
- [2] Zhang M. Y. & Cheng G. J. (2011). Pulsed laser coating of hydroxyapatite/titanium nanoparticles on ti-6al-4v substrates: Multiphysics simulation and experiments. *IEEE transactions on nanobioscience* Vol. 99 pp. 1-14.
- [3] قاجار ر، عباس پور نیاسانی م، سعیدی گوگرچین ح. (1393) ، " توابع صریح ضریب شدت تنش برای ترک های نیم بیضوی محیطی خارجی در استوانه تحت بارهای مکانیکی و حرارتی "، مهندسی مکانیک مدرس، شماره ۹، دوره ۱۴، ص ۹۸-۹۰.
- [4] Tzou D. Y. (1995). The generalized lagging response in small-scale and high-rate heating. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 38 pp 3231–3234.
- [5] Babaei M. H. & Chen Z. (2010). Transient hyperbolic heat conduction in a functionally graded hollow cylinder. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*. 24 pp 325-330.
- [6] Babaei M. H. & Chen Z. T. (2008). Hyperbolic heat conduction in a functionally graded hollow sphere. *International Journal of Thermophysics* 29 pp 1457–1469 .
- [7] Körner C. & Bergmann H. W. (1998). The physical defects of the hyperbolic heat conduction equation. *Applied Physics A*. Vol. 67 No. 1 pp. 397-401
- [8] Godoy S. & García-Colín L. S. (1997). Nonvalidity of the telegrapher's diffusion equation in two and three dimensions for crystalline solids. *Physical Review E* VOL 55 No 3 PP 2127-2131
- [9] Chandrasekharaiah D. S. (1998). Hyperbolic thermoelasticity: a review of recent literature. ” **Appl Mech Rev.** 51 pp 705–729.
- [10] Chandrasekharaiah D. S. (1998). Hyperbolic thermoelasticity: a review of recent literature.” **Appl Mech Rev.** 51 pp 705–729.
- [11] Joseph DD. and Preziosi L. (1989) “Heat waves.” **Rev Mod Phys.** 61 pp 41–73.
- [12] Joseph DD. and Preziosi L. (1990) “Heat waves: addendum.” **Rev Mod Phys.** 62 pp 375–391.
- [13] Tzou D. Y. (1996). A unified field approach for heat conduction from macro-to micro-scales. Vol. 117 No. 1 pp. 8–16

- [14] Tzou D. Y. (1995). The generalized lagging response in small-scale and high-rate heating. *International Journal of Heat and Mass Transfer* Vol. 38 No. 17 pp. 3231–3240 1995.
- [15] Akbarzadeh A. H. & Chen Z. T. (2012). Transient heat conduction in a functionally graded cylindrical panel based on the dual phase lag theory. *International Journal of Thermophysics*. Vol. 33 No. 6 pp. 1100-1125.
- [16] Tzou D. Y. (1995). Experimental support for the lagging behavior in heat propagation. *Journal of thermophysics and heat transfer* Vol. 9 No. 4 pp. 686-693
- [17] Chandrasekharaiah D. S. (1998). Hyperbolic thermoelasticity: a review of recent literature. 1998;51:705.
- [18] Tzou D. Y. (1995). A unified field approach for heat conduction from macro-to micro-scales. . *J Heat Trans-T Asme* 1995;117:8–16
- [19] Green A. E. & Lindsay K. A. (1972). Thermoelasticity. *Journal of elasticity* 2 pp 1–7.
- [20] Green A. E. & Laws N. (1972). On the entropy production inequality. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 45 pp 47–53.
- [21] Fu J. W. Chen Z. T. & Qian L. F. (2015). Coupled thermoelastic analysis of a multi-layered hollow cylinder based on the C–T theory and its application on functionally graded materials. *Composite Structures* [2015. Vol. 131.pp. 139–150](#)
- [22] Tamma K. K. & Namburu R. R. (1997). Computational approaches with applications to non-classical and classical thermomechanical problems. .” **Appl Mech Rev.** 50 pp 514-551.
- [23] Tamma K. K. & Railkar S. B. (1990). Evaluation of thermally induced non-Fourier stress wave disturbances via tailored hybrid transfinite element formulations. *Computers & structures* 34 pp 5-16.
- [24] Ting E. C. & Chen H. C. (1982). A unified numerical approach for thermal stress waves. *Computers & Structures* . 15 pp 165-175.
- [25] Liu W. K. and Zhang Y. F. (1983) “Unconditionally stable implicit-explicit algorithms for coupled thermal stress waves” **Comp. Struct.** 17 pp 371-374.
- [26] Tamma K. K. and Railkar S. B. (1987) “A generalized hybrid transfinite element computational approach for nonlinear/linear unified thermal/structural analysis” **Comp. and Struct.** 26(4) pp 655-665.

- [27] Tamma K. K. and Railkar S. B. (1987) “Transfinite element methodology towards a unified thermal/structural analysis” **Comp. and Struct.** 25(5) pp 649-660.
- [28] Tamma K. K. and Railkar S. B. (1987) “Nonlinear/Linear unified thermal stress formulations: Transfinite element approach” **Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.** 64 pp 415-428.
- [29] Tamma K. K. and Railkar S. B. (1988) “On Heat Displacement Based Hybrid Transfinite Element Formulations for Uncoupled/Coupled Thermally Induced Stress Wave Propagation” **Comp. Struct.** 30(5) pp 1025-1036.
- [30] Tamma K. K. (1996) “**Numerical Simulations for Hyperbolic Heat Conduction/Dynamic Problems Induced by Non-Fourier/Fourier Effects.**” Thermal Stresses IV edited by R. Hetnarski Elsevier Amsterdam.
- [31] Tamma K. K. & Namburu R. R. (1992). An effective finite element modeling/analysis approach for dynamic thermoelasticity due to second sound effects. **Computational Comput Mech.** 9 pp 73–84.
- [32] Chen J. & Dargush G. F. (1995). Boundary element method for dynamic poroelastic and thermoelastic analyses Analysis.” **Int J Solids Struct.** 32(15) pp 2257–2278.
- [33] Li J. & Wang B. (2020). Numerical analysis of temperature field and thermal stress associated with dual-phase-lag heat conduction.. 2018. pp. 1–8
- [34] Farahinejad E. Nazari M. B. & Mehdizadeh M. (2017). Thermoelastic analysis of circumferential cracks in thick-walled cylinders considering dual-phase lag theory. **Modares Mechanical Engineering** Vol. 16 No. 12 pp. 249-258
- [35] Hosseini Tehrani P. and Eslami MR. (1998) “Two-Dimensional Time Harmonic Dynamic Coupled Thermoelasticity Analysis by BEM Formulation.” **Engng Anal B. E.** 22 pp 245–250.
- [36] Hosseini Tehrani P. and Eslami MR. (2000) “Boundary Element Analysis of Coupled Thermoelasticity With Relaxation Times in finite Domain.” **AIAA J.** 38(3) pp 534–541.
- [37] Chen TC. and Weng CI. (1988) “Generalized coupled transient thermoelastic plane problems by Laplace transform/finite element method.” **J Appl Mech.** 55 pp 377–382.
- [38] Prevost J. H. & Tao D. (1983). Finite element analysis of dynamic coupled thermoelasticity problems with relaxation times. '**J Appl Mech.** 50 pp 817–822.
- [39] Hughes T. J. & Liu W. K. (1978). Implicit-explicit finite elements in transient analysis: stability theory.**ASME J APPL MECH.** 45 pp 371-374.

- [40] Hughes T. J. & Liu W. K. (1978). Implicit-explicit finite elements in transient analysis: stability theory. ." **ASME J APPL MECH.** 45 pp 375-378.
- [41] Tian X. Shen Y. Chen C. & He T. (2006). A direct finite element method study of generalized thermoelastic problems ." **Int J Solids Struct.** 43(7–8) pp 2050–2063.
- [42] Portela A. Aliabadi M. H. & Rooke D. P. (1992). The dual boundary element method: effective implementation for crack problems ." **Int J Num Meth Eng.** 33 pp 1269–1287.
- [43] Prasad N. N. V. Aliabadi M. H. & Rooke D. P. (1996). The dual boundary element method for transient thermoelastic crack problems ." **Int J Solids Struct.** 33 pp 2695–2718.
- [44] Prasad N. N. V. Aliabadi M. H. & Rooke D. P. (1994). Incremental crack growth in thermoelastic problems ." **Int J Frac.** 66 pp 45–50.
- [45] Dell’Erba DN. Aliabadi MH. and Rooke DP. (1998) “Dual Boundary Element Method for Three-Dimensional Thermoelastic Crack Problems.” **Int J Frac.** 94 pp 89–101.
- [46] Ekhlakov AV. Khay OM. Zhang Ch. Sladek J. and Sladek V. (2012) “A BDEM for transient thermoelastic crack problems in functionally graded materials under thermal shock.” **Comput Mater Sci.** 57 pp 30-37.
- [47] Ekhlakov AV. Khay OM. Zhang Ch. Sladek J. and Sladek V. (2012) “Thermoelastic crack analysis in functionally graded materials and structures by a BEM.” **Fatigue & Fract of Eng Mater & Struct.** 35 pp 742-766.
- [48] Hosseini-Tehrani P. Eslami MR. and Daghyani HR. (2001) “Dynamic Crack Analysis Under Coupled Assumption.” **Trans ASME J Appl Mech.** 38 pp 584–588.
- [49] Hosseini-Tehrani P. and Hosseini-Godarzi AR. (2004) “Dynamic crack analysis under thermal shock considering Lord–Shulman theory.” **Int J Therm Sci.** 43 pp 1003-1010.
- [50] Hosseini-Tehrani P. Eslami MR. and Azari SH. (2006) “Analysis of Thermoelastic Crack Problems Using Green–Lindsay Theory.” **J Therm Stress.** 29 pp 317–330.
- [51] Hosseini-Tehrani P. Hosseini-Godarzi AR. and Tavangar M. (2005) “Boundary element analysis of stress intensity factor K-I in some two-dimensional dynamic thermoelastic problems.” **Eng Anal Bound Elem.** 29 pp 232–240.
- [53] Hosseini S. Bayesteh H. and Mohammadi S. (2013) “Thermo-mechanical xfm crack propagation analysis of functionally graded materials.” **Mater Sci Eng A.** 561 pp 285–302.

- [54] مهدی زاده رخی م، 1391، رساله دکتری، “تحلیل عددی گسترش ترک در یک صفحه از جنس ماده تابعی تحت بار دینامیکی و شوک حرارتی” دانشکده مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود.
- [55] Himanshu Pathak (2018) “ Crack interaction study in functionally graded materials (FGMs) using XFEM under thermal and mechanical loading environment”
- [56] حاجی محمدی م، 1392، پایان نامه ارشد، “محاسبه پارامترهای دینامیکی شکست در مواد مرکب تحت بار حرارتی با روش اجزا محدود توسعه یافته” دانشکده مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود.
- [57] Goli E. Bayesteh H. and Mohammadi S. (2014) “Mixed mode fracture analysis of adiabatic cracks in homogeneous and non-homogeneous materials in the frame-work of partition of unity and the path-independent interaction integral.” **Eng Fract Mech.** 131 pp 100–127.
- [58] Bayesteh H. Afshar A. & Mohammadi S. (2015). Thermo-mechanical fracture study of inhomogeneous cracked solids by the extended isogeometric analysis method .” **Eur J Mech A/Solids.** 51 pp 123–139.
- [59] Kirugulige M. S. (2007) Ph.D thesis “**A study of mixed-mode dynamic fracture in advanced particulate composites by optical interferometry digital image correlation and finite element methods**” Auburn University.
- [60] Belytschko T. & Black T. (1999). Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. International journal for numerical methods in engineering . 45 pp 601-620.
- [61] Moes N. Dolbow J. and Belytschko T. (1999) “A finite element method for crack growth without remeshing” **Int. J. Nume. Meth. Engin.** 46 pp 131-150.
- [62] Belytschko T. Gracie R. and Ventura G. (2009) “**A Review of Extended/Generalized Finite Element Methods for Material Modelling**” Northwestern University Evanston IL
- [63] Mohammadi S. (2008) “**Extended Finite Element Method**” Blackwell Publishing Ltd.
- [64] Kokini K. and Case M. (1997) “Initiation of surface and interface edge cracks in functionally graded ceramic thermal barrier coatings” **ASME J. Eng. Mater. Technol.** 119 pp 148-152.
- [65] Duflot M. (2008) “The extended finite element method in thermoelastic fracture mechanics” **Int. J. for Num. Methods in Engin.** 74 pp 827-847.

[66] Zamani A. and Eslami M. R. (2010) "Implementation of the Extended Finite Element Method for Dynamic Thermoelastic Fracture Initiation" **Int. J. Solids Struct.** 47 pp 1392–1404.

[67] ع. م. (۱۳۸۳)؛ محاسبات عددی. آنالیز عددی کاربردی؛ انتشارات جهاد دانشگاهی

[68] Dolbow J. E. (1999) Ph. D thesis "**An extended finite element method with discontinuous enrichment for applied mechanics**" Northwestern University USA.

[69] Bateni M. & Eslami M. R. (2017). Thermally nonlinear generalized thermoelasticity of a layer. *Journal of Thermal Stresses*

[70] Zamani A. and Eslami M. R. (2009) "Coupled Dynamical Thermoelasticity of a Functionally Graded Cracked Layer" **J. Therm. Stress.** 32 pp 969–985.

Abstract

In this thesis, an isotropic medium with static cracks under heat shock has been studied. In this research, the dynamic thermoelasticity equations of the coupling have been used considering Chandrasakharia-Tizo theory. Using the extended finite element method, the equations are discretized in dimensionless space. Interaction integral has been used to calculate the stress intensity factors. Finally, some examples are obtained using the numerical method and the distribution of temperature, displacement, Stress in the direction of the X and Y axes along a homogeneous layer. Also, stress intensity factors under temperature shock have been investigated and compared with classical thermoelasticity theory. The results show that, the speed of temperature, displacement and stress waves are limited according to Chandrasakharia-Tizo theory, contrary to the classical thermoelasticity theory. Also, the maximum values of displacement and stress according to Chandrasakharia-Tizo theory occur at a shorter distance from the wall under heat shock, and the maximum stress intensity factor of mode I and - in asymmetric loads - the stress intensity factor of mode II according to the classical thermoelasticity theory is greater than the Chandrasakharia-Tizo theory and occurs earlier.

Key words

Stress intensity factors, extended finite element method, Thermal shock, generalized thermoelasticity, Chandrasakharia-Tizo theory.



Shahrood University of Technology

Faculty of Mechanical Engineering

XFEM analysis of cracked media under thermal shock considering
Chandrasekharaiah-Tzou theory

Vahid Jafari

Thesis

Submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of
Master of Science (M. Sc)

Supervisors

Dr. Mohammad Bagher Nazari

Dr. Masoud Mahdizadeh Rokhi

February 2021