

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده مکانیک و مکاترونیک

رساله دکتری مهندسی طراحی کاربردی

تحلیل غیرخطی رفتار دینامیکی میکرو یاتاقان‌های

گازی غیرمدور

نگارنده: عزیز محمد قرنجیک

استاد راهنما:

دکتر اردشیر کرمی محمدی

بهمن ۹۹

شماره: ۲/۲۹۹/۱۴۱

تاریخ: ۱۴۰۰/۲/۱۵

شماره:

تاریخ:

ویرایش:

باسمه تعالی



مدیریت تحصیلات تکمیلی

پیوست شماره ۲

دانشکده: مهندسی مکانیک و مکاترونیک

گروه: طراحی کاربردی

رساله دکتری آقای عزیزمحمد فرنجیک

تحت عنوان: تحلیل غیرخطی رفتار دینامیکی میکرویاتاقان های گازی غیرمدور

در تاریخ ۹۹/۱۲/۱۰ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ رساله دکتری ارزیابی گردید و با درجه عالی..... مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور	امضاء	اساتید راهنما
	نام و نام خانوادگی:		نام و نام خانوادگی: دکتر اردشیر کریمی محمدی
	نام و نام خانوادگی:		نام و نام خانوادگی:

امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
	نام و نام خانوادگی: دکتر سیدعلی سینا		نام و نام خانوادگی: دکتر محمدحسن شاه مردان
			نام و نام خانوادگی: دکتر مهدی بامداد
			نام و نام خانوادگی: دکتر علی اصغر جعفری

تقدیم به همسر

اسطوره زندگی،

پناه خستگی و

امید بودنم

تشکر و قدردانی

بر خود واجب می‌دانم از استاد فرزانه جناب آقای دکتر کرمی محمدی که به عنوان استاد راهنما در مراحل مختلف این رساله همواره با سعه صدر و گشاده رویی در کنار من بودند و در طول مدت تحصیل از راهنمایی‌های اخلاقی و علمی ایشان بهره جسته‌ام تشکر و قدردانی نمایم.

تعهد نامه

اینجانب عزیزمحمد قرنچیک دانشجوی دوره دکتری رشته مهندسی مکانیک دانشکده مکانیک و مکاترونیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه تحلیل غیرخطی رفتار دینامیکی میکرو یاتاقان های گاز غیر مدور تحت راهنمایی دکتر اردشیر کرمی محمدی متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .

چکیده

میکرو جریان های گازی در بسیاری از کاربردهای سیستم های میکرو الکترو مکانیکی نقش دارند. مدل سازی و شبیه سازی محاسباتی می تواند قابلیت پیش بینی مؤثر برای انتقال حرارت و مومنتوم را در مقیاس میکرو فراهم آورد و همچنین ابزاری برای ارزیابی عملکرد یک میکرو وسیله جدید قبل از ساخت آن باشد. با توجه به اینکه در مقیاس میکرو و از جمله در میکروموتورها، با وجود سرعت ها و دماهای بالا مسأله پایداری از اهمیت ویژه ای برخوردار است، به نظر می رسد استفاده از میکرو یاتاقان های گازی غیرمدور و چند لوب گزینه مناسبی برای این گونه ماشین ها باشد. در این رساله با توجه به اینکه فیلم گاز موجود در لقی میکرو یاتاقان گازی در محدوده گازهای رقیق قرار می گیرد، از مدل روانکار فیلم گاز مولکولی با در نظر گرفتن تغییرات دمایی استفاده شده است. برای بررسی تأثیر دما بر روی رفتار دینامیک غیرخطی سیستم روتور-یاتاقان، مدل روانکاری (که شامل اثرات دمایی است) به صورت سیستمی با معادلات حرکت سیستم به منظور حل همزمان آن ها کوپل شده است. معادله روانکار فیلم گاز مولکولی با استفاده از روش اجزاء محدود گسسته سازی شده و با معادلات حرکت روتور به صورت همزمان با استفاده از روش رانگ کوتا مرتبه چهارم حل شده است. مشخصه های حالت ماندگار از قبیل پروفیل فشار داخل میکرویاتاقان، زاویه انحراف، موقعیت تعادل مرکز روتور، ظرفیت حمل بار و اتلاف توان اصطکاکی و رفتار دینامیک غیرخطی سیستم با استفاده از مدارهای دینامیکی، نمودارهای فازی، نگاشت پوانکاره، طیف توانی و دیاگرام دوشاخگی بررسی و تحلیل شده است. نتایج نشان می دهد که در دماهای بالا، اثر رقیق شدگی فیلم گاز افزایش یافته و رفتار حالت ماندگار و حالت دینامیکی میکرو یاتاقان گازی غیر مدور را تحت تأثیر قرار می دهد.

کلمات کلیدی: میکرویاتاقان، یاتاقان غیر مدور، اثر رقیق شدگی، روش اجزاء محدود، نمودار

دوشاخگی، دینامیک غیرخطی

لیست مقالات مستخرج از رساله

1. Gharanjik A., Karami A., Effect of Temperature on the Non-linear Dynamic Behavior of Two-lobe Non-Circular Gas-Lubricated Micro Bearings, Part J: Journal of Engineering Tribology, 2021.
2. Gharanjik A., Karami A., The Effect of High Gas Temperature on the Steady State Behavior of Non-Circular Two-Lobe Gas-Lubricated Micro-Bearings, AUT Journal of Mechanical Engineering, 2021.

فهرست مطالب

ل	فهرست اشکال
ف	فهرست جداول
۱	فصل ۱ : مقدمه
۲	۱-۱- مقدمه
۴	۲-۱- انواع یاتاقان های گازی
۱۰	۳-۱- بیان مسأله
۱۱	۴-۱- هدف مطالعه
۱۳	فصل ۲ : پیشینه تحقیق
۱۴	۱-۲- یاتاقان های گازی
۱۷	۲-۲- میکرو یاتاقان های گازی
۲۳	فصل ۳ : معادلات حاکم بر سیستم روتور-یاتاقان
۲۴	۱-۳- قوانین پیوستگی کلی
۲۴	۲-۳- قانون بقای جرم
۲۵	۳-۳- بقای مومنتوم
۲۷	۴-۳- معادلات رینولدز
۲۹	۳-۴-۱- شرایط مرزی
۲۹	۳-۴-۲- بقای جرم
۳۲	۳-۴-۳- معادله رینولدز کلی
۳۳	۳-۴-۴- معادله رینولدز استاندارد
۳۴	۳-۵- یاتاقان های گازی

- ۳-۵-۱- معادله حالت و خواص ویسکوز ۳۴
- ۳-۵-۲- معادله رینولدز ۳۵
- ۳-۶- معادله روانکاری گاز مولکولی (MGL Model) ۳۶
- ۳-۷-۱- مدل های رقیق شدگی ۳۹
- ۳-۷-۱-۱- اثر گاز رقیق ۳۹
- ۳-۷-۲- لغزش مرزی ۴۱
- ۳-۷-۳- تغییرات عدد نادسن مرجع با دما ۴۵
- ۳-۸- معادلات دینامیک روتور ۴۶

فصل ۴: روش حل و جزئیات ۴۹

- ۴-۱- روش حل معادله MGL در حالت ماندگار ۵۰
- ۴-۱-۱- خطی سازی معادله ۵۱
- ۴-۱-۲- المان ایزوپارامتریک مثلثی دو بعدی ۵۶
- ۴-۱-۳- تبدیل ژاکوبین ۵۷
- ۴-۱-۴- روش انتگرال گیری گوس ۵۸
- ۴-۲- تعیین موقعیت تعادل حالت ماندگار ۶۱
- ۴-۳- روش حل معادله MGL در حالت دینامیکی ۷۰
- ۴-۴- روش حل معادلات دینامیکی روتور ۷۱
- ۴-۵- روش حل عددی ۷۳

فصل ۵: نتایج و بحث ۷۷

- ۵-۱- میکرویاتاقان گازی غیرمدور دو لوبی ۷۸
- ۵-۱-۱- بررسی رفتار حالت ماندگار ۷۸
- ۵-۱-۲- بررسی رفتار دینامیکی در اثر افزایش دما ۹۰

- ۵-۱-۳- بررسی رفتار دینامیکی در اثر سرعت دورانی در دماهای بالا ۹۶
- ۵-۲- میکرویاتاقان گازی غیرمدور سه لوبی ۱۰۶
- ۵-۲-۱- بررسی رفتار حالت ماندگار ۱۰۶
- ۵-۲-۲- بررسی رفتار دینامیکی در اثر افزایش دما ۱۱۵
- ۵-۲-۳- بررسی رفتار دینامیکی در اثر سرعت دورانی در دماهای بالا ۱۲۰
- ۵-۳- میکرویاتاقان گازی غیرمدور چهار لوبی ۱۳۰
- ۵-۳-۱- بررسی رفتار حالت ماندگار ۱۳۰
- ۵-۳-۲- بررسی رفتار دینامیکی در اثر افزایش دما ۱۴۱
- ۵-۳-۳- بررسی رفتار دینامیکی در اثر سرعت دورانی در دماهای بالا ۱۴۵

فصل ۶: نتیجه گیری و پیشنهادها ۱۵۷

مراجع ۱۶۱

فهرست اشکال

- شکل ۱-۱. میکرو موتور MIT ۳
- شکل ۲-۱. برخی از یاتاقان های ژورنال ایرودینامیک ۶
- شکل ۳-۱. یاتاقان های ژورنال چند لبه ای ۶
- شکل ۴-۱. یاتاقان های گازی شیاردار ۷
- شکل ۵-۱. یاتاقان های ژورنال با سطح انعطاف پذیر ۷
- شکل ۶-۱. یاتاقان های گازی تراست ۸
- شکل ۷-۱. دیاگرام شماتیک از یاتاقان نیمه آفست [۲] ۹
- شکل ۸-۱. دیاگرام شماتیک از یاتاقان بیضوی (دو لوبی) [۲] ۹
- شکل ۹-۱. یاتاقان سه لوبی متقارن [۲] ۱۰
- شکل ۱-۳. سیستم مختصات مستطیلی ۲۵
- شکل ۲-۳. سیستم مختصات ۲۸
- شکل ۳-۳. لایه نادرین و سرعت لغزشی [۱] ۴۲
- شکل ۴-۳. Q_p در مقابل D_k برای مدل های مختلف [۱] ۴۵
- شکل ۵-۳. ویسکوزیته هوا در دماهای مختلف [۳۴] ۴۶
- شکل ۶-۳. عدد نادرین مرجع تحت فشارهای مختلف محیط [۳۴] ۴۶
- شکل ۱-۴. المان مثلثی ۵۴
- شکل ۲-۴. المان مثلثی ایزوپارامتریک ۵۶
- شکل ۳-۴. نقاط گوسی در المان مثلثی ۵۹
- شکل ۴-۴. الگوریتم تعیین فشار در حالت ماندگار ۶۱
- شکل ۵-۴. الگوریتم تعیین موقعیت تعادل مرکز روتور در حالت ماندگار ۶۹
- شکل ۶-۴. جزئیات هندسی میکرویاتاقان گازی غیر مدور دو لوبی ۷۱

- شکل ۵-۱. پروفیل فشار در مقطع میانی میکرویاتاقان گازی غیرمدور دو لوبی ۸۱
- شکل ۵-۲. اثر افزایش سرعت دورانی و افزایش دمای گاز بر روی فشار ماکزیموم ۸۲
- شکل ۵-۳. اثر افزایش دما و رقیق شدگی فیلم گاز بر روی زاویه انحراف ۸۴
- شکل ۵-۴. اثر افزایش دما و رقیق شدگی فیلم گاز بر روی خروج از مرکزی مرکز روتور در حالت ماندگار ۸۵
- شکل ۵-۵. اثر افزایش دما و رقیق شدگی بر روی ظرفیت حمل بار یاتاقان ۸۶
- شکل ۵-۶. اثر افزایش دما و رقیق شدگی فیلم گاز بر روی اتلاف توان اصطکاکی ۸۸
- شکل ۵-۷. مقایسه نمودارهای دینامیکی. (A) نمودار اوربیت مرکز روتور (B) نمودار فضای فازی ۱-۲- نتایج کار رشیدی [۱۷] ۲-۲- نتایج کار حاضر- برای یاتاقان گازی غیر مدور دو لوبی ($\Lambda = 5$) ۹۱
- شکل ۵-۸. نمودارهای دینامیکی در دماهای مختلف در $\omega = 1.5 \times 10^5 \text{ rad/s}$. الف) مسیر حرکت مرکز روتور ب) نمودار فازی مرکز روتور ج) نگاشت پوانکاره د) طیف توانی جابه جایی روتور ۹۲
- شکل ۵-۹. نمودار دوشاخگی در مقابل دما - در جهت افقی ۹۵
- شکل ۵-۱۰. نمودار دوشاخگی در مقابل دما - در جهت عمودی ۹۶
- شکل ۵-۱۱. نمودارهای دینامیکی در سرعت های دورانی مختلف با در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی فیلم گاز در دمای $T_e = 1300 \text{ K}$ - الف) مسیر حرکت مرکز روتور ب) نمودار فازی مرکز روتور ج) نگاشت پوانکاره د) طیف توانی جابه جایی روتور ۹۷
- شکل ۵-۱۲. نمودار دوشاخگی در مقابل سرعت دورانی روتور در دمای 1300 K با در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی فیلم گاز در جهت افقی ۱۰۰
- شکل ۵-۱۳. نمودار دوشاخگی در مقابل سرعت دورانی روتور در دمای 1300 K با در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی فیلم گاز در جهت عمودی ۱۰۱
- شکل ۵-۱۴. نمودارهای دینامیکی در سرعت های دورانی مختلف بدون در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی در دمای 1300 K - الف) مسیر حرکت مرکز روتور ب) نمودار فازی ج) نگاشت پوانکاره د) طیف توانی ۱۰۲

- شکل ۵-۱۵. نمودار دوشاخگی در مقابل سرعت دورانی روتور در دمای 1300 K- بدون در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی فیلم گاز در جهت افقی ۱۰۵
- شکل ۵-۱۶. نمودار دوشاخگی در مقابل سرعت دورانی روتور در دمای 1300 K- بدون در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی فیلم گاز در جهت عمودی ۱۰۵
- شکل ۵-۱۷. مقایسه نمودارهای دوشاخگی در مقابل سرعت دورانی روتور در دمای 1300 K- الف) در جهت افقی ب) در جهت عمودی ۱۰۶
- شکل ۵-۱۸. پروفیل فشار در مقطع میانی میکرویاتاقان گازی غیرمدور سه لوبی ۱۰۸
- شکل ۵-۱۹. اثر افزایش سرعت دورانی و رقیق شدگی فیلم گاز بر روی مقدار فشار ماکزیموم ۱۰۹
- شکل ۵-۲۰. اثر افزایش دما و رقیق شدگی گاز بر روی زاویه انحراف ۱۱۰
- شکل ۵-۲۱. اثر افزایش دما و رقیق شدگی فیلم گاز بر روی خروج از مرکزی روتور ۱۱۲
- شکل ۵-۲۲. اثر افزایش دما و رقیق شدگی فیلم گاز بر روی ظرفیت حمل بار یاتاقان ۱۱۳
- شکل ۵-۲۳. اثر افزایش دما و رقیق شدگی فیلم گاز بر روی اتلاف توان اصطکاکی ۱۱۴
- شکل ۵-۲۴. مقایسه نمودارهای دینامیکی یاتاقان گازی غیرمدور سه لوبی در مقیاس ماکرو در $\Lambda = 20$ -۲) (۱) نتایج رشیدی [۵۲] (۲-۲) نتایج مطالعه حاضر. الف) مدار مرکز روتور ب) نمودار فازی ۱۱۶
- شکل ۵-۲۵. نمودارهای دینامیکی در دماهای مختلف در $\omega = 2 \times 10^5 \text{ rad/s}$. الف) مسیر حرکت مرکز روتور ب) نمودار فازی مرکز روتور ج) نگاشت پوانکاره د) طیف توانی جابه جایی روتور ۱۱۷
- شکل ۵-۲۶. نمودار دوشاخگی در مقابل دما در سرعت دورانی $\omega = 2 \times 10^5 \text{ rad/s}$ در جهت افقی. ۱۲۰
- شکل ۵-۲۷. نمودار دوشاخگی در مقابل دما در سرعت دورانی $\omega = 2 \times 10^5 \text{ rad/s}$ در جهت عمودی ۱۲۰
- شکل ۵-۲۸. نمودارهای دینامیکی در سرعت های دورانی مختلف با در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی در دمای $T_e = 1500 \text{ K}$ - الف) مسیر حرکت مرکز روتور ب) نمودار فازی مرکز روتور ج) نگاشت پوانکاره د) طیف توانی جابه جایی روتور ۱۲۲

- شکل ۵-۲۹. نمودار دوشاخگی در مقابل سرعت دورانی روتور در دمای $T_e = 1500 K$ در جهت افقی با در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی فیلم گاز ۱۲۴
- شکل ۵-۳۰. نمودار دوشاخگی در مقابل سرعت دورانی روتور در دمای $T_e = 1500 K$ در جهت عمودی با در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی فیلم گاز ۱۲۵
- شکل ۵-۳۱. نمودارهای دینامیکی در سرعت های دورانی مختلف بدون در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی در دمای $T_e = 1500 K$ - الف) مسیر حرکت مرکز روتور ب) نمودار فازی مرکز روتور ج) نگاشت پوانکاره د) طیف توانی جابه جایی روتور ۱۲۶
- شکل ۵-۳۲. نمودار دوشاخگی در مقابل سرعت دورانی روتور در دمای $T_e = 1500 K$ در جهت افقی بدون در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی فیلم گاز ۱۲۹
- شکل ۵-۳۳. نمودار دوشاخگی در مقابل سرعت دورانی روتور در دمای $T_e = 1500 K$ در جهت عمودی بدون در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی فیلم گاز ۱۲۹
- شکل ۵-۳۴. مقایسه نمودارهای دوشاخگی در مقابل سرعت دورانی روتور - الف) در جهت افقی ب) در جهت عمودی ۱۳۰
- شکل ۵-۳۵. پروفیل فشار در مقطع میانی میکرویاتاقان گازی غیرمدور چهار لوبی ۱۳۳
- شکل ۵-۳۶. اثر افزایش سرعت دورانی روتور و رقیق شدگی فیلم گاز بر روی مقدار فشار ماکزیموم ۱۳۴
- شکل ۵-۳۷. اثر افزایش دما و رقیق شدگی فیلم گاز بر روی زاویه انحراف ۱۳۶
- شکل ۵-۳۸. اثر افزایش دما و رقیق شدگی فیلم گاز بر روی خروج از مرکزی ۱۳۷
- شکل ۵-۳۹. اثر افزایش دما و رقیق شدگی فیلم گاز بر روی ظرفیت حمل بار یاتاقان ۱۳۹
- شکل ۵-۴۰. اثر افزایش دما و رقیق شدگی فیلم گاز بر روی اتلاف توان اصطکاکی ۱۴۰
- شکل ۵-۴۱. نمودارهای دینامیکی در دماهای مختلف در $\omega = 1 \times 10^5 \text{ rad/s}$. الف) مسیر حرکت مرکز روتور ب) نمودار فازی مرکز روتور ج) نگاشت پوانکاره د) طیف توانی جابه جایی روتور ۱۴۲
- شکل ۵-۴۲. نمودار دوشاخگی در مقابل دما در سرعت دورانی $\omega = 1 \times 10^5 \text{ rad/s}$ در جهت افقی ۱۴۴

شکل ۵-۴۳. نمودار دوشاخگی در مقابل دما در سرعت دورانی $\omega=1\times10^5 \text{ rad/s}$ در جهت عمودی... ۱۴۵

شکل ۵-۴۴. نمودارهای دینامیکی در سرعت های دورانی مختلف با در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی در دمای

$T_e = 1500 \text{ K}$ (الف) مسیر حرکت مرکز روتور ب) نمودار فازی مرکز روتور ج) نگاشت پوانکاره د) طیف

توانی جابه جایی روتور ۱۴۶

شکل ۵-۴۵. نمودار دوشاخگی در مقابل سرعت دورانی روتور در دمای $T_e = 1500 \text{ K}$ در جهت افقی با در

نظر گرفتن اثر رقیق شدگی فیلم گاز ۱۴۹

شکل ۵-۴۶. نمودار دوشاخگی در مقابل سرعت دورانی روتور در دمای $T_e = 1500 \text{ K}$ در جهت عمودی با در

نظر گرفتن اثر رقیق شدگی فیلم گاز ۱۴۹

شکل ۵-۴۷. نمودارهای دینامیکی در سرعت های دورانی مختلف بدون در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی در

$T_e = 1500 \text{ K}$ (الف) مسیر حرکت مرکز روتور ب) نمودار فازی مرکز روتور ج) نگاشت پوانکاره د) طیف

توانی جابه جایی روتور ۱۵۰

شکل ۵-۴۸. نمودار دوشاخگی در مقابل سرعت دورانی روتور در دمای $T_e = 1500 \text{ K}$ در جهت افقی بدون

در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی فیلم گاز ۱۵۳

شکل ۵-۴۹. نمودار دوشاخگی در مقابل سرعت دورانی روتور در دمای $T_e = 1500 \text{ K}$ در جهت عمودی بدون

در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی فیلم گاز ۱۵۴

شکل ۵-۵۰. مقایسه نمودارهای دوشاخگی در مقابل سرعت دورانی روتور- (الف) در جهت افقی ب) در جهت

عمودی ۱۵۵

فهرست جداول

- جدول ۵-۱. مقایسه نتایج در حالت پایدار برای یاتاقان گازی غیرمدور دو لوبی در مقیاس ماکرو..... ۷۹
- جدول ۵-۲. مقایسه نتایج در حالت پایدار برای میکرو یاتاقان گازی مدور ۷۹
- جدول ۵-۳. مقایسه نتایج در حالت ماندگار برای یاتاقان گازی غیرمدور سه لوبی در مقیاس ماکرو..... ۱۰۷
- جدول ۵-۴. مقایسه نتایج در حالت ماندگار برای یاتاقان گازی غیرمدور چهار لوبی در مقیاس ماکرو..... ۱۳۱

فصل ١ : مقدمه

۱-۱- مقدمه

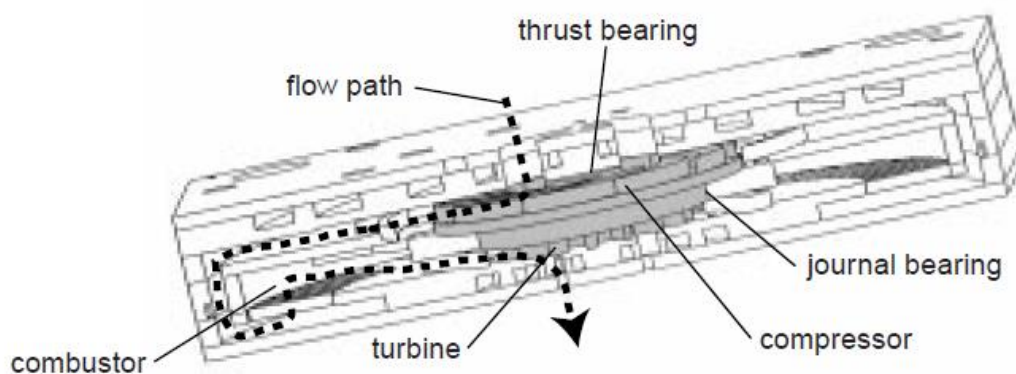
سیستم های میکرو الکترو مکانیکی^۱ یک دسته ی جدیدی از وسایل در حال ظهور هستند که به صورت چشمگیری در اکثر زمینه ها در حال گسترش می باشند. این سیستم ها با تکنیک هایی مشابه با تکنیک های ساخت چپ های مدار مجتمع^۲ (IC) تولید می شوند. از جمله مزایای آن ها عبارتند از وزن کم، اندازه کوچک، پاسخ سریع و مصرف توان کمتر.

اخیراً، یک گروه جدیدی از سیستم های میکرو الکترو مکانیکی، به نام سیستم های قدرت میکرو الکترو مکانیکی^۳ پدیدار شده است. این اصطلاح، موتورهای حرارتی با چگالی توان قابل قیاس با اندازه واقعی شان را بیان می کند، که منجر به پکیج های در مقیاس سانتی متر با خروجی توان ۱۰ تا ۱۰۰ وات شده است. این ماشین ها شامل، موتورهای توربین گازی برای پیش رانش یا تولید توان الکتریکی، کمپرسورهای با نیروی محرکه الکتریکی برای یخچال ها یا سلول های سوختی، و توربوپمپ ها برای موتورهای راکت می باشند. به عنوان یک مثال، دید جانبی از سطح مقطع سه بعدی میکرو موتور MIT در شکل ۱-۱ نشان داده شده است. در این شکل، قطعات دوار سایه زده شده اند و مسیر جریان با یک خط نقطه چین مشخص شده است. عملکرد آن به این صورت است: سیال از مرکز وارد موتور می شود، سپس از کمپرسور گریز از مرکز عبور می کند و به سمت بیرون حرکت می کند. سپس سوخت اضافه می شود و در محفظه احتراق شعله ور می شود. گازهای داغ حاصل، از طریق توربین منبسط می شوند و از مرکز سطح انتهایی چپ خارج می شوند. حرکت شعاعی روتور توسط یک یاتاقان ژورنال در دیواره توربین کنترل می شود و حرکت محوری با یک یاتاقان تراست واقع در مرکز روتور کنترل می شود.

^۱ MEMS

^۲ Integrated Circuit

^۳ power MEMS



شکل ۱-۱. میکرو موتور MIT

به علت وجود ماشین آلات با سرعت دورانی بالا، یاتاقان ها نقش مهمی را در سیستم های قدرت میکرو الکترو مکانیکی بازی می کنند. در سال های گذشته، اکثر ماشین های دوار با روانکار های مایع یا جامد به فرم های روغن و گریس روانکاری می شدند. در اکثر کاربردهای این روانکارهای متداول یک استاندارد قابل قبول از راندمان و قابلیت اطمینان پیشنهاد می شود. به هر حال، با پیشرفت تکنولوژی، کاربردها به طور پیوسته در حال افزایش بودند به طوری که در برخی موارد نیاز به خواصی بود که روانکارهای مرسوم مایع یا جامد این خواص را دارا نبودند. در برخی شرایط پاسخ مسأله را در استفاده از یاتاقان های گازی یافتند.

اکثر خواص متمایز روانکارهای گازی هنگام مقایسه با روغن ها یا گریس ها، ویسکوزیته خیلی پایین آن ها است. ویسکوزیته هوا تقریباً ده هزار مرتبه از ویسکوزیته یک روغن سبک در دمای محیط کمتر است. کاربردهای زیادی وجود دارند که در آنجا ویسکوزیته پایین در سرعت های دورانی بالا و هم پایین مطلوب است. برخی ابزارهای دقیق مانند نیروسنج ها، ترازوها، ویسکومترها و ماشین های اندازه گیری نسبت گردی، نیازمند یاتاقان هایی هستند که از هر گونه حرکت چسبی- لغزشی در سرعت پایین آزاد باشند و در این کاربردها یاتاقان های هوایی با فشارسازی خارجی برای اولین بار مورد استفاده قرار گرفتند. در سرعت های بالا، مزیت ویسکوزیته پایین نیز مشخص گردیده است. گرمایش ناشی از اصطکاک کاهش می یابد و به عنوان

یک نتیجه نه تنها راندمان ماشین افزایش می یابد بلکه از مشکلات انبساط حرارتی، خرابی سطوح یاتاقان و تغییرات خواص روانکار نیز اجتناب می شود.

۱-۲- انواع یاتاقان های گازی

معمولاً طبقه بندی یاتاقان های گازی مطابق با روش تولید فشار حمل بار در فیلم گاز مابین سطوح یاتاقان است. سه نوع اصلی عبارتند از: خود عملگر یا ایرودینامیک، فشار سازی خارجی یا ایرواستاتیک و فیلم فشرده.

یاتاقان های خود عملگر، ظرفیت حمل بار خود را از دوران یکی از سطوح یاتاقان بدست می آورند. فشار توسط تنش برشی ویسکوز فیلم گاز تولید می شود و مکانیزم آن مشابه یاتاقان های روغنی هیدرودینامیکی است. با در نظر نگرفتن اثر تراکم پذیری، اصطکاک و حمل بار یاتاقان های خود عملگر متناسب با ویسکوزیته روانکار است. بنابراین برای یاتاقان های با اندازه و لقی یکسان، و سرعت بهره برداری یکسان، حمل بار و اصطکاک یک یاتاقان هوایی حدوداً چهار برابر کمتر از یاتاقان متناظر با روانکار روغن SAE 10 است. ظرفیت بار با سرعت افزایش می یابد و در سرعت های بالا یاتاقان های گازی خود عملگر می توانند بارهای مفیدی را حمل کنند. به هر حال، بارگذاری مشخص همیشه خیلی کمتر از یاتاقان های با روانکار روغن است، و نبود هر گونه اثر روانکاری مرزی اجازه می دهد که سطوح یاتاقان در سرعت های پایین در طول استارت و استپ سایش داشته باشند. به همین دلیل، یاتاقان های خود عملگر بیشتر برای ماشین هایی مناسب هستند که برای دوره های طولانی در سرعت ثابت راه اندازی می شوند و به ندرت استارت و استپ می شوند. یاتاقان های با فشارسازی خارجی با گاز تحت فشار از یک منبع خارجی که معمولاً یک کمپرسور است، تغذیه می شوند. یک جریان پیوسته از گاز در یاتاقان وجود دارد و از این رو یک مصرف توان جهت حفظ فیلم روانکار وجود دارد. ظرفیت بار یاتاقان های با فشارسازی خارجی با فشار تغذیه گاز متناسب است و از ویسکوزیته گاز مستقل است. بنابراین یاتاقان های با فشارسازی خارجی می توانند بارهای بیشتری را نسبت

به یاتاقان های خود عملگر حمل کنند و ظرفیت بار آن ها ضرورتاً به دوران وابسته نیست. به هر حال، اثرات ایرودینامیک می توانند ظرفیت بار یاتاقان های ژورنال با فشارسازی خارجی را در سرعت های دورانی بالا افزایش دهند، و یاتاقان هایی که با در نظر گرفتن این افزایش طراحی می شوند، اغلب یاتاقان های هیبرید^۱ نامیده می شوند.

در یاتاقان های فیلم فشرده، یکی از سطوح با ارتعاش در جهت عمود به صفحه سطوح یاتاقان رانده می شود به طوری که باعث نوسانی شدن ضخامت فیلم گاز می شود. اثر پمپاژ در فیلم گاز فشاری را تولید می کند که می تواند یک بار را حمل کند. هیچ گونه وابستگی به تغذیه گاز خارجی یا دوران وجود ندارد اما توسعه مولد ارتعاش کارآمد باعث کندی پیشرفت این گونه یاتاقان ها شده است.

در یک سیستم مکانیکی دورانی سرعت بالا، برای جلوگیری از صدمات ناشی از ارتعاشات غیرخطی یاتاقان های فیلم گازی و افزایش پایداری سیستم، یاتاقان های گازی مدور می توانند به یاتاقان های گازی غیرمدور مانند پدهای نوسانی^۲، دارای انحراف^۳، چند لوبی^۴ و یاتاقان های بیضوی تغییر داده شوند.

چون ضخامت فیلم گاز خیلی نازک است، یاتاقان های گازی بایستی خیلی با دقت ساخته شوند. از معایب اصلی یاتاقان های گازی، ظرفیت حمل بار پایین و پایداری پایین است. به منظور افزایش ظرفیت حمل بار و بهبود پایداری، انواع زیادی از سازه ها طراحی شده است، اصولی که می توانند برای یاتاقان های با ماده روانکار مایع نیز به کار روند.

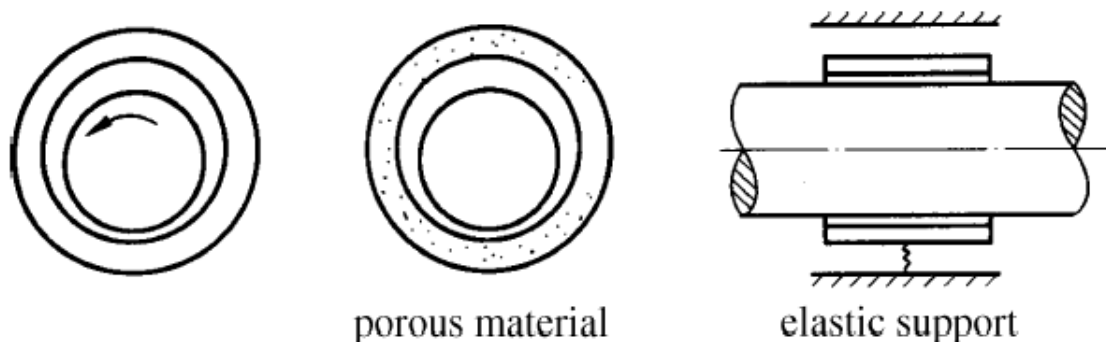
برخی از یاتاقان های ژورنال ایرودینامیک در شکل ۱-۲ نشان داده شده اند، بوش یاتاقان متخلخل از ماده متخلخل ساخته شده است. یک فنر الاستیک هم می تواند به صورت شکل ۱-۲ برای بهبود پایداری یاتاقان استفاده شود.

¹ hybrid

² tilting pad

³ off-set

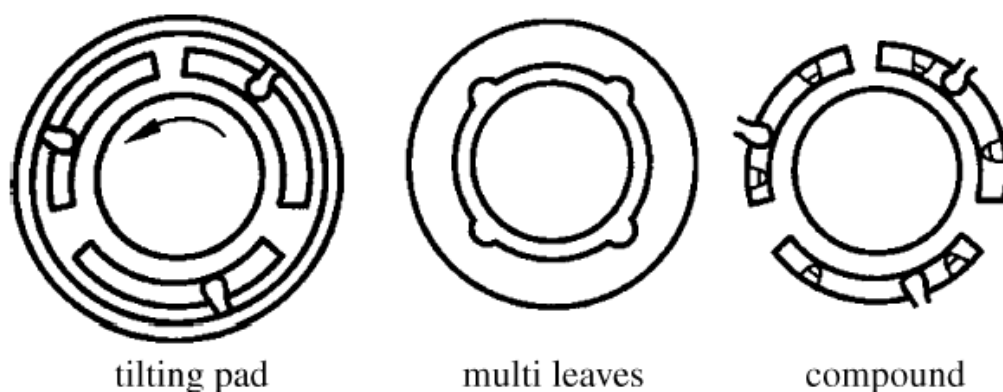
⁴ multilobe



شکل ۲-۱. برخی از یاتاقان های ژورنال ایرودینامیک

برخی از یاتاقان های ژورنال ایرودینامیک چند لبه ای در شکل ۳-۱ نشان داده شده اند. یاتاقان با پدهای نوسانی نوعی از یاتاقان چند لبه ای است، که از تعدادی پد نوسانی همانند شکل ۳-۱ تشکیل شده است. زاویه پد نوسانی می تواند به صورت خودکار با بار تنظیم شود. پایداری آن خوب، اما پیچیده است.

مواد متخلخل هم می توانند در پدها استفاده شوند. یاتاقان چند لبه ای دیگر، یاتاقان چند برگ^۱ همانند شکل ۳-۱ می باشد، که از سه یا چهار برگ معمولاً استفاده می شود. به علاوه، یاتاقان های ترکیبی^۲ هم به طور گسترده استفاده می شوند که در شکل ۳-۱ نشان داده شده است.

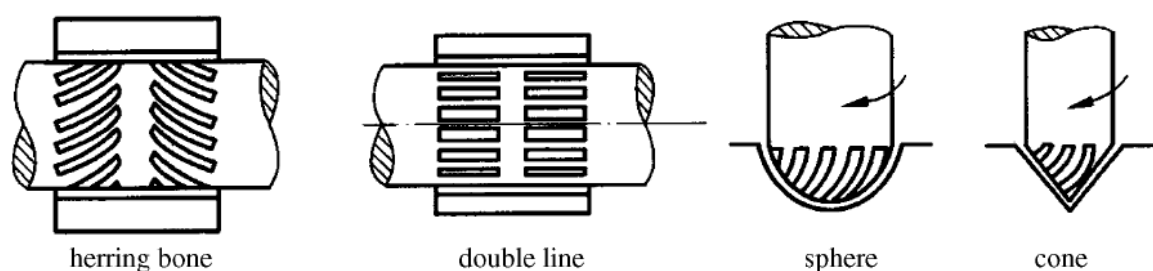


شکل ۳-۱. یاتاقان های ژورنال چند لبه ای

¹ multi-leave

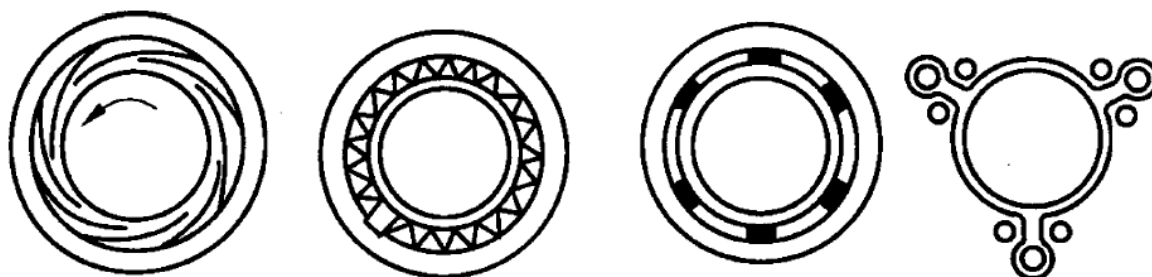
² compound

گاهی اوقات، شیارهایی می توانند بر روی سطح یاتاقان ایجاد شوند به طوری که فشار گاز با دوران محور یاتاقان به طور مؤثری تولید شود، که در شکل ۴-۱ نشان داده شده است. ظرفیت حمل بار و پایداری این یاتاقان ها بهبود یافته است و به طور گسترده در ماشین های با مقیاس کوچک و با سرعت دورانی بالا مورد استفاده قرار می گیرند. شکل شیارها ممکن است برای یاتاقان های ژورنال به صورت جناغی^۱ یا به صورت خطوط مستقیم باشند و برای یاتاقان ها تراست به صورت کروی یا مخروطی باشند.



شکل ۴-۱. یاتاقان های گازی شیاردار

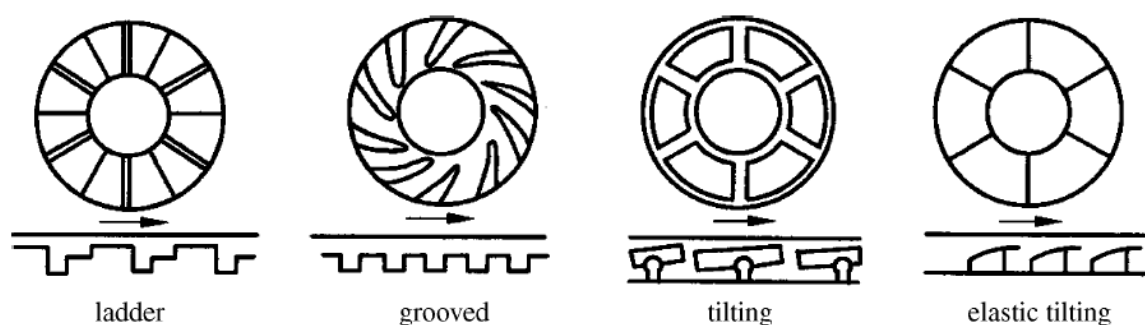
در شکل ۵-۱، برخی از یاتاقان های با پدهای انعطاف پذیر نشان داده شده است، که می توانند در ماشین های با سرعت دورانی خیلی بالا مورد استفاده قرار گیرند. سطوح این یاتاقان ها از فویل های انعطاف پذیر ایجاد شده اند. به طور کلی، سطوح بسته به نوع نیاز دارای شکل های متفاوت هستند. پایداری یاتاقان خوب است، به خصوص برای وضعیت های با اندازه کوچک و همراستایی محدود.



شکل ۵-۱. یاتاقان های ژورنال با سطح انعطاف پذیر

¹⁻ herringbone

در شکل ۶-۱ برخی از یاتاقان های گازی تراست نشان داده شده است. سازه های این یاتاقان ها به صورت نردبانی، پد نوسانی و سطح انعطاف پذیر هستند. یاتاقان نردبانی ساده با پایداری خوب است، اما ظرفیت حمل بار آن پایین است. یاتاقان شیاردار ظرفیت حمل بار بالا دارد ولی پایداری آن کم است. یاتاقان پد نوسانی یک یاتاقان با دقت بالا است، و سطح انعطاف پذیر کمی پیچیده است. این یاتاقان ها مشخصه های متفاوت دارند و می توانند مطابق با نیازهای واقعی انتخاب شوند. [۱]

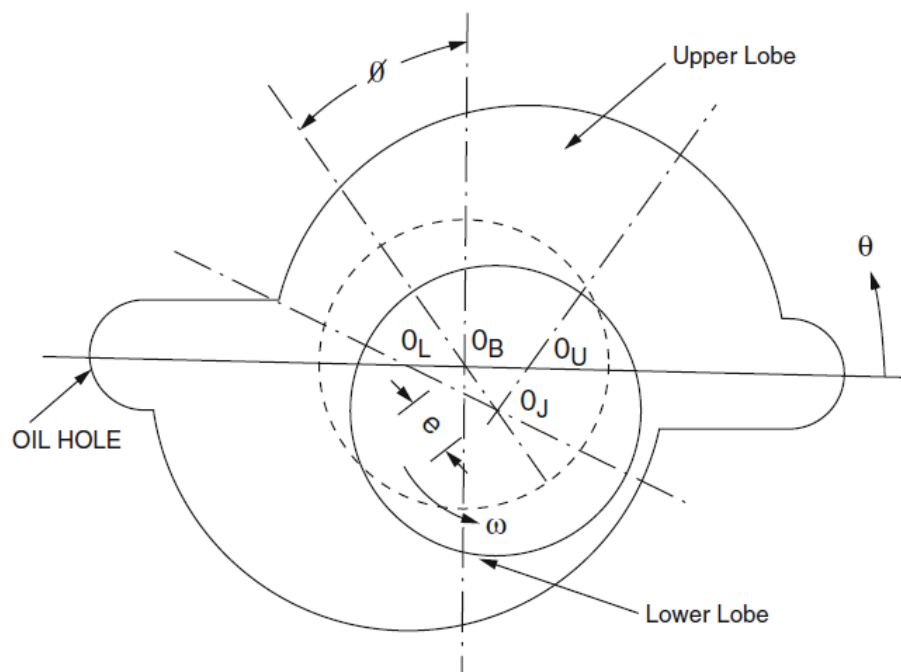


شکل ۶-۱. یاتاقان های گازی تراست

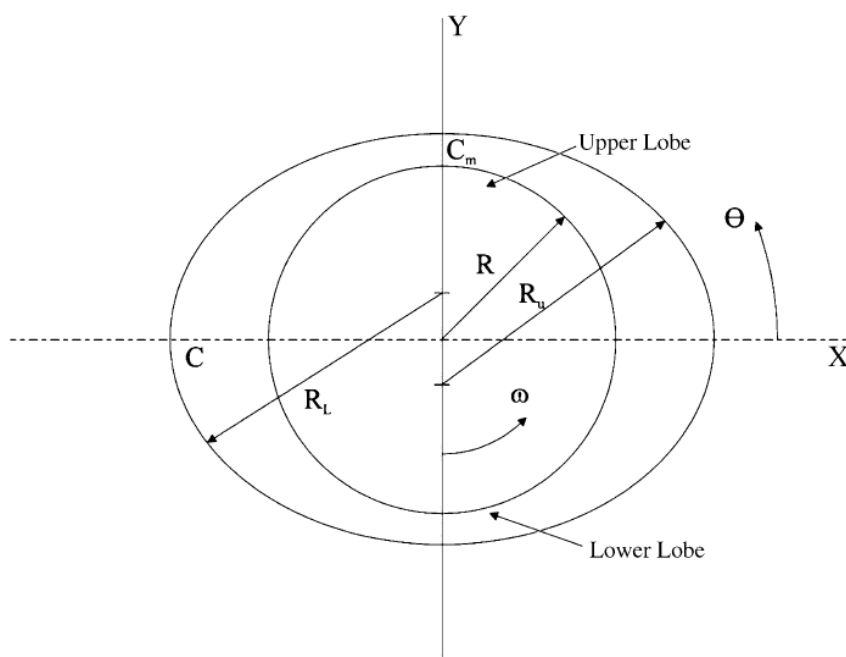
در تحقیقات و پژوهش ها گزارش شده است، زمانی که یاتاقان های دایروی تنها با یک فیلم سیال فعال عمل کنند. افزایش دما در آن ها نسبتاً بالا است. این امر منجر به توسعه یاتاقان های با پروفیل غیر مدور گردید، که با بیش از یک فیلم سیال فعال عمل می کنند. در این نوع یاتاقان ها در مقایسه با یاتاقان های مدور، سختی و میرایی افزایش یافته و دما کاهش یافته است. تقریباً تمام هندسه های یاتاقان های غیرمدور پایداری شافت را افزایش می دهند، و تحت شرایط درست، تلفات توان را کاهش و جریان سیال را افزایش خواهد داد، بنابراین دمای فیلم سیال کاهش خواهد یافت. در میان یاتاقان های غیرمدور، نیمه آفست^۱، یاتاقان بیضوی، منفذ لیمویی شکل^۲ و سه لوبی بیشتر متداول هستند. [۲]

¹ offset-halves

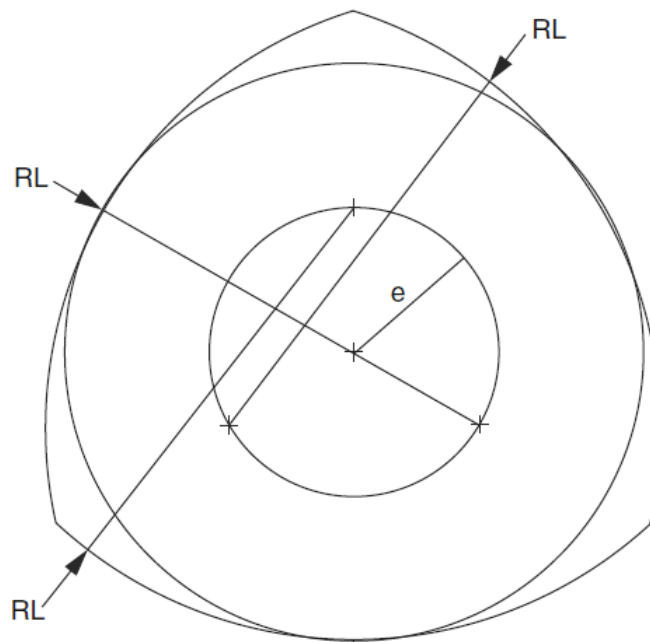
² lemon bore



شکل ۷-۱. دیاگرام شماتیک از یاتاقان نیمه آفست [۲]



شکل ۸-۱. دیاگرام شماتیک از یاتاقان بیضوی (دو لوبی) [۲]



شکل ۱-۹. یاتاقان سه لوبی متقارن [۲]

۱-۳- بیان مسأله

با توسعه سیستم های میکرو الکترو مکانیکی، سیستم های قدرت میکرو الکترو مکانیکی که از میکرو موتور و میکرو یاتاقان تشکیل شده، کانون مطالعات شده است. به منظور افزایش چگالی توان، روتور نیاز دارد که در سرعت خیلی بالا راه اندازی شود. برای بهره برداری در چنین سرعت های بالایی، یک پیش بینی دقیق از مشخصه های دینامیکی سیستم یاتاقان برای طراحی ماشین های دوار با قابلیت اطمینان بالا و برای اجتناب از وقوع بهره برداری خطرناک بایستی انجام شود. یاتاقان های با روانکار روغنی با چالش های زیادی مواجه شده اند، و این امر یاتاقان های گازی را تبدیل به اولین گزینه کرده اند. با توجه به اینکه مقیاس یک میکرو یاتاقان گازی خیلی کوچک است، ضخامت فیلم گاز در یک میکرو یاتاقان گازی با مسافت آزاد میانگین مولکولی قابل مقایسه می باشد. در این مقیاس، مکانیک سیالات این یاتاقان ها در مقایسه با یاتاقان های در مقیاس ماکرو، خیلی متفاوت است و این انحراف ها عملکرد مکانیکی یاتاقان را تحت تأثیر قرار می دهد.

با توجه به اینکه در میکرو موتورها به منظور افزایش چگالی توان، نیاز به سرعت های خیلی بالا می باشد، بالتبع افزایش سرعت منجر به افزایش دمای بهره برداری در یاتاقان ها خواهد شد که به نوبه ی خود می تواند باعث بروز مسائل پایداری گردد. لذا به علت وجود بیش از یک فیلم سیال فعال در یاتاقان های گازی غیر مدور نسبت به یاتاقان های گازی مدور، دمای فیلم سیال کاهش یافته و در پی آن تلفات توان کاهش خواهد یافت و منجر به افزایش پایداری سیستم خواهد گردید.

در تئوری روانکاری، ضخامت لایه گاز در مقایسه با ابعاد عرضی آن خیلی کوچک است. این مشاهده می تواند برای حذف کردن معادلاتی که وابسته به یکی از سه متغیر مکانی هستند، استفاده شود. این قضیه در زمان های خیلی قبل توسط دانشمند مشهور اوزبورن رینولدز^۱ برای انتگرال گیری از معادله توزان جرم در راستای ضخامت لایه و برای استفاده در معادله ناویر – استوکس خطی سازی شده برای توازن مومنتوم برای ارزیابی کمیت های موجود استخراج شد.

در میکرو یاتاقان های گازی، با توجه به سرعت خیلی بالای روتور، فاصله مابین سطح روتور و سطح یاتاقان در حدود چند میکرون است، که فیلم گاز مابین آن ها در رژیم گازهای رقیق قرار می گیرد. مطابق با دینامیک گازهای رقیق، وقتی یک گاز رقیق می شود، لغزش سرعت در سطح روتور رخ می دهد و بنابراین توزیع سرعت فیلم روانکار گازی تغییر خواهد کرد. که این امر به نوبه ی خود عملکرد میکرو یاتاقان گازی را تحت تأثیر قرار خواهد داد. برای تعیین توزیع فشار و سپس نیروی فیلم روانکار گازی، معادله رینولدز اصلاح شده بر مبنای شرایط مرزی لغزش سرعت با استفاده از روش های عددی بایستی حل شود.

۱-۴- هدف مطالعه

دمای بهره برداری یاتاقان های گازی در یک میکرو موتور خیلی بالا است. ویسکوزیته گاز و مسافت آزاد میانگین مولکولی هر دو با تغییرات دما، تغییر می کنند، که مشخصه های دینامیک غیرخطی سیستم روتور یاتاقان گازی را تحت تأثیر قرار می دهد. در این رساله، مدل روانکاری فیلم گاز با در نظر گرفتن تأثیر دما بر

¹ Osborne Reynolds

روی ویسکوزیته گاز و مسافت آزاد میانگین مولکولی تعمیم می یابد و با معادلات جنبشی روتور کوپل می شود تا به طور همزمان حل شوند. ظرفیت حمل بار، مدارهای دینامیکی، نمودارهای فازی، نگاشت پوانکاره، طیف توانی، دیاگرام های دوشاخگی پاسخ سیستم در دماهای مختلف بررسی خواهد شد.

فصل ۲ : پیشینه تحقیق

۲-۱- یاتاقان های گازی

در سال ۱۹۷۵، پینکوس^۱، معادله رینولدز تراکم پذیر را تحت شرایط همدمای یاتاقان های گازی بیضوی و سه لوبی با بردار بار عمل کننده در هر جهت دلخواه در محدوده ی کامل ۳۶۰ درجه حل کرد. وی در مطالعه ی خود نشان داد که در مقایسه با یاتاقان های مرسوم، طرح های غیرمدور، پیشرفت های قابل توجهی در سختی را عرضه می کنند [۳]. در سال ۱۹۸۲، سینگ^۲ و همکارانش، مشخصه های عملکرد حالت دائم یاتاقان های گازی غیرمدور با محورهای موازی و مورب را ارائه دادند. آن ها فرمولاسیون اجزاء محدود افزایشی پیشنهاد شده توسط ردی^۳ و چو^۴ را برای بدست آوردن نتایج برای یاتاقان های بیضوی و سه لوبی تعمیم دادند. آن ها روش خود را با نتایج بدست آمده توسط پینکوس اعتبارسنجی کردند [۴]. در سال ۱۹۸۳، وادهوا^۵ و همکارانش، بر روی مشخصه های عملکرد دینامیکی یاتاقان های بیضوی و سه لوبی مطالعه کردند. آن ها فرمولاسیون اغتشاش^۶ پیشنهاد شده توسط لوند^۷ را برای بدست آوردن خواص سختی و میرایی اصلاح کردند. آن ها برای پارامترهای تراکم پذیری انتخابی مطالعات پایداری را انجام دادند. آن ها در مطالعه خود، مشخصه-های عملکرد هر دو نوع یاتاقان را مقایسه کردند [۵]. در سال ۱۹۸۳، چاندر^۸ مشخصه های استاتیکی و دینامیکی چهار وضعیت یاتاقان ژورنال گازی غیر مدور را بررسی کرد. در این کار، معادله رینولدز اصلاح شده با روش اجزاء محدود حل شد و مقایسه ای از پایداری چهار وضعیت یاتاقان ژورنال گازی غیرمدور انجام شد [۶]. در سال ۱۹۹۴، ژاو^۹ و همکارانش، رفتار دینامیکی غیرخطی یک دمپر فیلم فشرده خارج از مرکز که بر روی یک سیستم روتور صلب نصب شده بود را بررسی کردند. مؤلفان نشان دادند که برای مقادیر بزرگ نابالانسی و ناهمراستایی استاتیکی، حرکت های فرو-هارمونیک^{۱۰} و شبه پریودیک^{۱۱} در سرعت های بیشتر از

¹ Pinkus

² Singh

³ Reddi

⁴ Chu

⁵ Wadhwa

⁶ perturbation

⁷ Lund

⁸ Chandra

⁹ Zhao

¹⁰ sub-harmonic

¹¹ quasi-periodic

دو برابر سرعت بحرانی سیستم تولید می شوند که از پاسخ هارمونیک نابالانسی دو شاخه می شوند [۷]. در سال ۱۹۹۷، سزولسزینسکی^۱ و کپیتانیاک^۲ روشی را بیان کردند که اجازه ی کنترل دوشاخگی هوپف^۳ یک سیستم روتور با دو یاتاقان گازی را می داد. آن ها نشان دادند که صدمات از رشد دامنه ارتعاشات خود تحریک ناشی می شوند و می توان با انتخاب صحیح ضرایب سختی و میرایی رینگ هوایی از آن اجتناب نمود [۸]. در سال ۲۰۰۱، وانگ^۴ و همکارانش، دینامیک غیرخطی و تحلیل دوشاخگی یک روتور صلب با یاتاقان ژورنال گازی خود عملگر را مطالعه کردند [۹]. در سال ۲۰۰۴، وانگ و همکارانش، دینامیک غیرخطی و تحلیل دوشاخگی یک روتور انعطاف پذیر با یاتاقان ژورنال گازی خود عملگر را مطالعه کردند [۱۰]. در هر دو کار، با در نظر گرفتن جرم روتور و سرعت دورانی به عنوان پارامترهای سیستم، حرکت های پریودیک و فرو هارمونیک مرکز روتور گزارش شدند. در سال ۲۰۰۵، وانگ جیون شن^۵ و وانگ چنگ چی^۶ دوشاخگی یک روتور صلب با یاتاقان های ژورنال ایرودینامیک کوتاه نسبی را ارائه دادند. آن ها چگونگی وجود یک رفتار دینامیکی مختلط را نشان دادند که شامل پاسخ های پریودیک و فروهارمونیک مرکز روتور بود [۱۱]. در سال ۲۰۰۶، وانگ درک بیشتری از روتور صلب با یاتاقان ژورنال گازی متخلخل^۷ نسبتاً کوتاه با فشارسازی خارجی فراهم کرد و رفتار دینامیکی سیستم را نسبت به جرم روتور و عدد یاتاقان نشان داد [۱۲]. در سال ۲۰۰۶، رحمت آبادی و همکارانش، مشخصه های استاتیکی و دینامیکی یاتاقان های ژورنال گازی غیرمدور را با در نظر گرفتن اثر زاویه نصب و پیش بار مطالعه نمود. آن ها اثبات کردند که یاتاقان های غیرمدور مشخصه های دینامیکی بهتری نسبت به یاتاقان های مدور دارند. همچنین اثبات کردند که با استفاده از مقدار مناسب زوایای نصب، حاشیه پایداری را می توان افزایش داد [۱۳]. در سال ۲۰۰۷، وانگ و همکارانش، رفتار یک روتور صلب و یک روتور انعطاف پذیر با یک سیستم یاتاقان ژورنال گازی شیاردار جناغی^۸ را مطالعه کردند. تحلیل آن ها یک

¹ Czolczynski

² Kpitaniak

³ Hopf bifurcation

⁴ Wang

⁵ Wang Jiun-Shen

⁶ Wang Cheng-Chi

⁷ porous

⁸ herringbone-grooved

رفتار دینامیکی پیچیده شامل پاسخ های پریودیک و شبه پریودیک سیستم را نشان می داد [۱۴]. در سال ۲۰۰۸، وانگ و همکارانش، درک بیشتری از روتور انعطاف پذیر با سیستم یاتاقان ژورنال گازی شیاردار جناغی را فراهم کردند. تحلیل آن ها یک رفتار دینامیکی پیچیده شامل پاسخ های پریودیک و شبه پریودیک سیستم را نشان می داد [۱۵]. در سال ۲۰۰۹، رشیدی و همکارانش، بر روی دوشاخگی و رفتار دینامیکی یک روتور صلب با یاتاقان های ژورنال گازی غیرمدور مطالعه کردند. سیستم یاتاقان ژورنال گازی غیر مدور شامل دو، سه و چهار لوب بود. همچنین روش اجزاء محدود برای حل کردن معادله رینولدز استفاده شد و معادلات دینامیکی توسط روش رونگ کوتا تحلیل شدند. نتایج نشان می داد که عدد یاتاقان و جرم روتور از پارامترهای دوشاخگی هستند و رفتار روتور را در موقعیت های بهره برداری متفاوت بدست آوردند [۱۶]. در سال ۲۰۱۰، رشیدی و همکارانش، بر روی تحلیل دینامیکی یک روتور صلب با یاتاقان ژورنال گازی غیرمدور دو لوبی مطالعه کردند. آن ها برای حل معادله رینولدز از روش اجزاء محدود و برای حل معادلات دینامیکی از روش رونگ کوتا استفاده کردند. نتایج مطالعه آن ها بیان می کرد که با در نظر گرفتن عدد یاتاقان و جرم روتور به عنوان پارامترهای سیستم، رفتار دینامیکی پیچیده شامل پاسخ های پریودیک، KT - پریودیک، و شبه پریودیک مرکز روتور رخ داده است [۱۷]. در سال ۲۰۱۳، وانگ و همکارانش، بر روی دوشاخگی و رفتار دینامیکی غیرخطی یک روتور صلب با سیستم یاتاقان ژورنال ایرودینامیک غیرمدور با یک روتور صلب خاص مطالعه کردند. آن ها در حل معادلات از روش عددی هیبرید با ترکیب روش تبدیل دیفرانسیلی و روش اختلاف محدود برای محاسبه توزیع فشار یاتاقان ژورنال ایرودینامیکی غیرمدور و مدارهای روتور استفاده کردند. نتایجی که بدست آوردند، سازگاری خوبی با نتایج بدست آمده از روش اختلاف محدود داشت [۱۸]. در سال ۲۰۱۴، رسولی و همکارانش، مشخصه های استاتیکی سیستم های یاتاقان گازی غیرمدور دو لوبی، سه لوبی و چهار لوبی را مطالعه کردند. آن ها معادله رینولدز را با استفاده از توابع پایه شعاعی^۱ تحلیل کردند. آن ها برای حل سیستم معادلات جبری از روش عددی استفاده کردند و موقعیت تعادل روتور را بدون استفاده از روش سعی و خطا تعیین کردند که از مزایای روش آن ها محسوب می شد [۱۹].

¹ Radial Basis Functions

۲-۲- میکرو یاتاقان های گازی

پیشرفت های اخیر در زمینه میکرو ماشین کاری، تکنیک های ساخت نیمه رساناها، توانایی ساخت توربین های گازی در اندازه دگمه پیراهن را فراهم آورده است. این میکرو موتورها یک گزینه جذاب برای باتری های شیمیایی برای تغذیه توان پیوسته یا نیرو محرکه برای میکرو وسایل هوایی و همچنین کولرها برای وسایل الکترونیکی و دیگر کاربردها عرضه می کنند. پیاده سازی و اجرای میکرو موتورها در دنیای واقعی چندین چالش را برای مهندسين دارد، که در این بین، موضوع های دینامیک روتور یاتاقان از مهم ترین موضوعات است.

هدف اصلی اکثر پروژه های میکرو موتور تولید ۱۰ وات توان بر گرم است. برای دستیابی به توان خاص بالا، اندازه ی سرعت روتور بایستی دو میلیون دور بر دقیقه باشد. در این نرخ، «سایش خشک» یاتاقانها باعث درگ بالای غیرقابل قبول و عمر سرویس کوتاه می شود. در مقایسه با یاتاقان های المان غلتشی، یاتاقان های مغناطیسی یا یاتاقان های با روانکار روغنی، یاتاقان های گازی بهترین کاندید برای روتورهای سرعت بالا در میکروموتورها می باشند که دارای تلفات اصطکاکی پایین، سایش تقریباً صفر، و سازگاری با اکثر تکنولوژی های میکرو ساخت هستند.

میکرو یاتاقان های گازی نسبت به یاتاقان های گازی در چندین مورد فرق دارند، که شامل نسبت طول به قطر خیلی پایین (L/D)، ضخامت فیلم خیلی کوچک، سرعت دورانی خیلی بالا، دمای بهره برداری خیلی بالا و عدم قطعیت های ساخت هستند. نسبت طول به قطر معمولی یک میکرو یاتاقان ژورنال گازی بر مبنای سیلیکون در حدود ۰/۰۵ الی ۰/۱ می باشد (اسپاکوسزکی^۱ و همکارانش)، که یک مرتبه اندازه کمتر از یاتاقان های ژورنال گازی مرسوم می باشد.

در سال ۱۹۹۷، ماوریو^۲ و همکارانش، مشخصه های میکرو یاتاقان های ژورنال گازی با طول بی نهایت را تحلیل کردند [۲۰]. در سال ۱۹۹۹، با در نظر گرفتن اثرات انتهایی یاتاقان، پان^۳ و همکارانش، معادله حاکم ساده شده

¹ Spakovszky

² Maureau

³ Pan

را حل کردند و نتایجی در مورد مشخصه‌های داخلی میکرویاتاقان با اندازه معین بدست آوردند [۲۱]. در سال ۱۹۹۹، پیکوس^۱ و بریور^۲ پایداری یک یاتاقان ژورنال هیدرودینامیک در یک میکروتوربین گازی را با استفاده از شبیه سازی مدار شبه طیفی^۳ مطالعه کردند. از طریق مقایسه حل معادلات ناویر استوکس و معادله رینولدز، بیان کردند که معادلات رینولدز برای تحلیل یاتاقان ژورنال با روانکار گاز در میکروتوربین گازی معتبر هستند [۲۲]. در سال ۲۰۰۰، اور^۴ مشخصه‌های یک یاتاقان ژورنال با روانکار گاز را برای یک میکروتوربین گازی با استفاده از مدل مقیاس بزرگ مطالعه نمود. وی نشان داد که نه تنها چرخش^۵ بلکه ناپایداری شعاعی شدید در یاتاقان‌های ژورنال کوتاه با روانکار گاز برای میکروتوربین گازی وجود دارد [۲۳]. در سال ۲۰۰۱، لی^۶ و همکارانش، اثر مرزی کوپل یاتاقان گازی و یاتاقان تراست را مورد بحث قرار دادند و پیشنهاد دادند که کوپلینگ یاتاقان‌های ژورنال و تراست می‌تواند در افزایش ظرفیت حمل بار خیلی مؤثر باشد [۲۴]. در سال ۲۰۰۴، کیم^۷ و همکارانش، میکرو یاتاقان های گازی با لیتوگرافی^۸ و آب کاری الکتریکی^۹ اشعه ایکس عمیق ساختند و عملکرد میکرویاتاقان را برحسب پارامترهای بار و زوایای انحراف با استفاده از تئوری روانکاری مولکولی گاز محاسبه کردند. از معایب اصلی یاتاقان‌های گازی، پایداری کم می باشد، که اغلب محدوده کاربرد آنها را محدود می کند [۲۵]. در سال ۲۰۰۴، رِن^{۱۰} و همکارانش، اشتباهات در معادلات بیان کننده توزیع سرعت و مومنوم پان را اصلاح کردند و یک درک منطقی از اثرات شرایط مرزی سرعت لغزشی بر روی مشخصه‌های میکرویاتاقان بدست آوردند [۲۶]. در سال ۲۰۰۵، ایزومورا^{۱۱} و همکارانش، یک میکرویاتاقان سرعت بالا جهت انجام آزمایشات برای ادامه‌ی توسعه یاتاقان‌های هوایی برای یک میکرو توربین گازی که قادر به بهره‌برداری به صورت پایدار در سرعت ۸۷۰۰۰۰ rpm بود، طراحی و ساختند [۲۷]. در سال ۲۰۰۵،

¹ Piekos

² Breuer

³ pseudo-spectral

⁴ Orr

⁵ whirl

⁶ Lee

⁷ Kim

⁸ lithography

⁹ electroplating

¹⁰ Ren

¹¹ Isomura

اسپاکوسزکی و لیو^۱ قوانین مقیاس برای دینامیک یاتاقان‌های ژورنال گازی هیدرواستاتیک خیلی کوتاه استخراج کردند [۲۸]. در سال ۲۰۰۵، لیو و همکارانش، یک مدل تحلیلی جدید برای میکرویاتاقان‌های ژورنال گازی جریان محوری ارائه دادند. مدل جدید شامل دو بخش است: مدل دینامیکی سیال برای یاتاقان‌های ژورنال گازی جریان محوری و مدل روتوردینامیک برای میکرویاتاقان‌ها [۲۹]. در سال ۲۰۰۵، باندو^۲ و بوکر^۳ یک تحلیل روانکاری الاستوهیدرو دینامیک اجزا محدود جدید متناسب با یاتاقان‌های ژورنال گازی با استفاده از شرایط دینامیکی پیشنهاد دادند. در تحلیل آن‌ها، جریان لغزشی گاز به طور کلی نادیده گرفته شده بود چون دینامیک سیال به مکانیزم مقیاس بزرگ بستگی داشت [۳۰]. در سال ۲۰۰۸، ژانگ^۴ و شان^۵ عملکرد دینامیکی میکرویاتاقان گازی در میکروسیستم‌ها را بررسی کردند و متوجه شدند که ظرفیت حمل بار یاتاقان ژورنال با نسبت منظر پایین به طور خطی با عدد یاتاقان آن متناسب است [۳۱]. در سال ۲۰۰۹، لی^۶ و شن^۷ اثرات رقیق‌شدگی گاز را بر روی عملکرد دینامیکی یاتاقان‌های ژورنال شیاردار جناغی برای کاربرد در میکرو-سیستم‌ها بررسی کردند [۳۲]. در سال ۲۰۰۹، ژانگ و همکارانش، مشخصه‌های میکرویاتاقان‌های ژورنال گازی را بر مبنای ویسکوزیته مؤثر مطابق با شرایط مرزی سرعت لغزشی مرتبه اول تحلیل کردند [۳۳]. در سال ۲۰۱۰، ژانگ و همکارانش، یک معادله رینولدز اصلاح شده را بر مبنای شرایط مرزی لغزشی مرتبه اول برگردورفر^۸ در دماهای متفاوت پیشنهاد دادند. تحلیل عددی آن‌ها نشان می‌داد که فشار فیلم گاز و ظرفیت حمل بار بدون بعد به طور قابل توجهی هنگام افزایش اثر رقیق‌شدگی گاز کاهش می‌یابد [۳۴]. در سال ۲۰۱۱، ژانگ و همکارانش، عملکرد استاتیک میکرویاتاقان‌ها را با استفاده از روش همبستگی طیفی^۹ تحلیل کردند. نتایج نشان می‌داد که ظرفیت حمل بار با افزایش در دمای بهره‌برداری پایین‌تر افزایش می‌یابد و وابستگی دما به ظرفیت بار در دماهای بالاتر ضعیف‌تر می‌شود [۳۵]. در سال ۲۰۱۳، ژانگ و همکارانش، یک مدل سطح

¹ Liu

² Boedo

³ Booker

⁴ Zhang

⁵ Shan

⁶ Li

⁷ Shen

⁸ Burgdorfer

⁹ spectral collocation

با زبری تصادفی را برای میکرویاتاقان‌های گازی با در نظر گرفتن اثر زبری سطح ارائه دادند [۳۶]. در سال ۲۰۱۳، ژانگ و همکارانش، معادله روانکاری فیلم گاز را با معادلات جنبشی کوپل کردند تا مشخصه‌های سیستم‌های روتور-یاتاقان را مطالعه کنند. آن‌ها متوجه شدند که محدوده دما می‌توان به دو ناحیه تقسیم شود: ناحیه با اثر ویسکوزیته غالب و ناحیه با اثر رقیق شدگی غالب [۳۷]. در طول بهره‌برداری موتور، متداول-ترین ضخامت فیلم گاز در حدود ۱ تا ۲۰ میکرومتر است؛ فیلم گاز نازک سبب رقیق شدن گاز می‌شود. در سال ۲۰۱۵، زیاولی وانگ^۱، تحلیلی جامع بر روی عملکرد سیستم روتور یاتاقان گازی در میکروموتور سیلیکونی انجام داد. وی مدل روانکاری تعمیم یافته و مدل دینامیکی را توسعه داد و اثرات عیوب میکروساخت، دما و نیروی اصطکاک ویسکوز را بر روی مشخصه‌های دینامیکی و هم حالت دائم سیستم یاتاقان بررسی کرد [۳۸]. در سال ۲۰۱۵، یانگ^۲ و همکارانش، پاسخ نابالانسی سیستم روتور-میکرو یاتاقان گازی را با استفاده از روش رونگ کوتا مرتبه چهارم بر مبنای معادله حرکت روتور محاسبه کردند، که در آن نیروی غیرخطی فیلم گاز از حل معادله رینولدز اصلاح شده با استفاده از الگوریتم پیوند جهت متناوب^۳ بدست آورده شده بود. مطالعه آن‌ها نشان می‌داد که خروج از مرکزی جرمی صحیح روتور می‌تواند پایداری سیستم روتور-میکرویاتاقان گازی را بهبود بخشد [۳۹]. در سال ۲۰۱۶، فنگ^۴ و همکارانش، عملکرد ترموهیدرو دینامیکی میکرویاتاقان با شیار مارپیچی^۵ را با در نظر گرفتن اثرات رقیق شدگی گاز و زبری سطح تحلیل کردند. آن‌ها معادله رینولدز و معادله انرژی را با مدل لغزش ویو^۶ و تابع ویرستراس-ماندلبرات^۷ ترکیب کردند تا اثرات کوپلینگ جریان لغزشی و زبری سطح را تحلیل کنند. نتایج پیش‌بینی آن‌ها نشان می‌داد که دما نیروهای یاتاقان و گشتاور اصطکاک ناشی از اثر جریان لغزشی را کاهش می‌دهد. زبری سطح نه تنها دما را به طور قابل توجهی افزایش می‌دهد بلکه نیروهای یاتاقان و گشتاور اصطکاک را در نسبت خروج از مرکزی بالا و لقی یاتاقان پایین افزایش می‌دهد [۴۰]. در سال ۲۰۱۷، ژانگ و همکارانش، معادله رینولدز اصلاح شده مرتبه اول را با در نظر گرفتن

¹ Xiaoli Wang

² Yang

³ alternating direction implication

⁴ Feng

⁵ micro spherical spiral groove bearing

⁶ Wu

⁷ Weierstrass-Mandelbrot

خزش حرارتی، که منجر به گرادیان حرارتی خیلی زیاد در راستای محوری می شد را ابتدا استخراج کردند و با معادله انرژی ساده شده برای بررسی مشخصه‌های هیدرودینامیکی حالت دائم میکرو یاتاقان گازی کوپل کردند. تحت شرایط همدم، آن‌ها متوجه شدند که گاز دی اکسید کربن نه تنها می‌تواند پایداری یاتاقان را بهبود بخشد بلکه می‌تواند یک ظرفیت حمل بار نسبتاً بالاتری تولید نماید [۴۱]. باتوجه به کارهای انجام شده از دهه‌های گذشته تاکنون، در خصوص یاتاقان‌های گازی غیرمدور در مقیاس ماکرو، پژوهش‌های متعددی انجام شده است و نتایج نشان داده است که یاتاقان‌های گازی غیرمدور عملکرد بهتر و پایداری بیشتری نسبت به یاتاقان‌های گازی مدور دارند، لذا با توجه به اینکه در مقیاس میکرو و در میکروموتورها با وجود سرعت‌های بالا و دماهای بالا مسأله پایداری از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است، به نظر می‌رسد استفاده از میکرویاتاقان‌های گازی غیرمدور بهترین گزینه برای این گونه ماشین‌ها باشد. در خصوص میکرویاتاقان‌های گازی و انواع آن پژوهش‌های متعددی انجام شده است ولی هیچ‌گونه کار پژوهشی در خصوص میکرو یاتاقان‌های گازی غیرمدور دو لوبی، سه لوبی و یا چهار لوبی گزارش نشده است و جای خالی آن محسوس می‌باشد. در این رساله، رفتار دینامیک غیرخطی میکرویاتاقان‌های گازی غیرمدور مورد بررسی قرار گرفته است.

فصل ۳۳ : معادلات حاکم بر سیستم روتور-یاتاقان

۳-۱- قوانین پیوستگی کلی

سه قانون پیوستگی اصلی عبارتند از پیوستگی جرم، مومنتوم و انرژی. معادلات حاکم در فرم برداری به صورت زیر هستند [۴۲]:

قانون بقای جرم (قانون پیوستگی):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) = 0 \quad (۱-۳)$$

قانون بقای مومنتوم (معادلات ناویر-استوکس):

$$\rho \frac{DV}{Dt} = F_B - \nabla p + \nabla \cdot \tau_{ij} \quad (۲-۳)$$

که V بردار سرعت، ρ چگالی، t زمان، F_B نیروهای حجمی، τ تنش برشی، p فشار می باشد. اپراتور D/Dt مشتق کلی، یا مشتق مادی به صورت زیر تعریف می شود:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \quad (۳-۳)$$

۳-۲- قانون بقای جرم

معادله (۱-۳) یک بیان ساده از قانون بقای جرم است. نرخ خالص یک جریان جرمی ورودی و خروجی از یک حجم دیفرانسیلی کوچک بایستی صفر باشد. در سیستم مختصات مستطیلی (شکل ۱-۳)، $V \equiv V(x, y, z)$ ، معادله ی پیوستگی به فرم زیر می باشد:

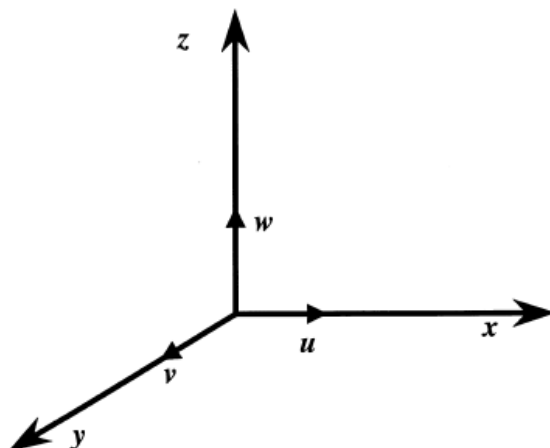
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (۴-۳)$$

که u, v, w به ترتیب مؤلفه‌های سرعت در جهتهای x, y, z هستند. اگر جریان تراکم‌ناپذیر باشد، بنابراین هیچ تغییری در چگالی وجود ندارد و معادله (۱-۳) به صورت زیر تبدیل می شود.

$$\nabla \cdot V = 0$$

(۵-۳)

و چگالی در معادله پیوستگی ظاهر نمی شود.



شکل ۳-۱. سیستم مختصات مستطیلی

۳-۳- بقای مومنتوم

معادلات ناویر-استوکس برای بقای مومنتوم از قانون دوم نیوتن تبعیت می کند که برای یک واحد حجم برابر با $F = (\rho DV/Dt)$ است. ترم های در سمت چپ معادله (۲-۳) ترم های اینرسی شامل شتاب هستند. وقتی ترم های اینرسی وجود داشته باشند، معادله ی (۲-۳) یک معادله دیفرانسیل پاره ای غیرخطی است. نیروهای حجمی، نیروهایی هستند که بر بدنه کل سیال اعمال می شوند. متداول ترین انواع نیروهای حجمی عبارتند از نیروی جاذبه، نیروی شناوری و نیروی الکترومغناطیسی. دو ترم باقی مانده به عنوان نیروهای سطحی طبقه بندی می شوند یعنی، نیروهای فشار و ویسکوزیته که به یک المان دیفرانسیلی سیال اعمال می شوند. خاطر نشان می شود که τ_{ij} میدان تنش است، یک تانسور با سه مؤلفه تنش نرمال τ_{ii} ، و شش مؤلفه تنش برشی τ_{ij} ($i \neq j$).

در مختصات مستطیلی، بقای جرم به فرم سه معادله مطابق با سه جهت X,Y,Z می باشد:

$$\begin{aligned}\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zx} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + F_{Bx} \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yy} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zy} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} + F_{By} \\ \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xz} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yz} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zz} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} + F_{Bz}\end{aligned}\quad (۶-۳)$$

زمانی که معادله سازگاری برای یک سیال معین مشخص باشد، معادلات بالا می توانند برای تعیین

سرعت مؤلفه های سرعت در مختصات متناسب استفاده شوند.

سیالات نیوتنی

اکثر سیالات، شامل روانکارهای شیمیایی و معدنی به صورت ویسکوز خطی یا نیوتنی طبقه بندی

می شوند. رابطه مابین تنش برشی و نرخ کرنشی به صورت زیر می باشد:

$$\tau = \mu \dot{\gamma} \quad (۷-۳)$$

که μ ویسکوزیته سیال است و

$$\dot{\gamma} = [\nabla U + (\nabla U)^T]$$

که $\dot{\gamma}$ تانسور نرخ کرنشی، ∇U تانسور نرخ تغییر شکل، و $(\nabla U)^T$ ترانپاده ∇U است.

روابط کلی برای نرخ تغییر شکل و تانسور تنش برشی به سیستم مختصات مورد استفاده بستگی

دارد. برای سیستم مختصات مستطیلی روابط به صورت زیر می باشند:

$$\nabla U = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}; (\nabla U)^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}; \quad \tau = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \quad (۸-۳)$$

مؤلفه های تنش نرمال:

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \quad (9-3)$$

مؤلفه های تنش برشی:

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \tau_{yx}; \quad \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \tau_{zx}; \quad \tau_{yz} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \tau_{zy} \quad (10-3)$$

با استفاده از روابط فوق، معادلات بقای مومنتوم برای یک سیال نیوتنی تراکم ناپذیر می توانند به

صورت زیر ساده شوند:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + F_{Bx} \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} + F_{By} \\ \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} + F_{Bz} \end{aligned} \quad (11-3)$$

۳-۴- معادلات رینولدز

پنج فرض اصلی زیر در استخراج این معادله برای اکثر کاربردها معتبر می باشد که معمولاً به عنوان

فرضیات روانکاری برای جریان های فیلم نازک، بدون اثر اینرسی، سیالات نیوتنی و جریان های آرام به

کار می روند. این فرضیات به صورت زیر می باشند:

۱- سیال به صورت نیوتنی فرض می شود با تناسب مستقیم مابین تنش برشی سرعت برشی.

۲- ترم های نیروهای حجمی و اینرسی در مقایسه با ترم های ویسکوزیته ناچیز فرض می شوند.

۳- تغییرات فشار در ضخامت فیلم ناچیز فرض می شود. بنابراین داریم $p=p(x,y)$

۴- جریان آرام است.

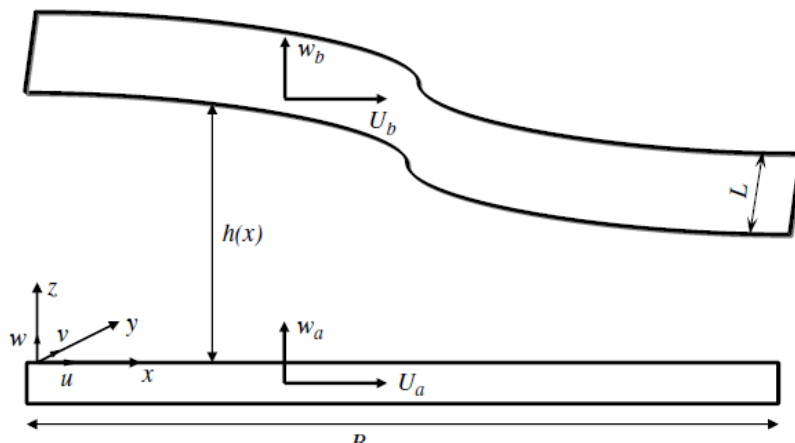
۵- اثرات منحنی ناچیز می باشد. این موضوع اشاره می کند که ضخامت فیلم روانکار در مقایسه با

طول یا عرض یاتاقان آنقدر کوچک است که می توان حوزه فیزیکی جریان را پهن شده در نظر گرفت.

این امر اجازه می دهد که بتوان از سیستم مختصات مستطیلی استفاده کرد.

برای استخراج معادله رینولدز، بایستی از معادلات بقای جرم و مومنتوم (ناویر-استوکس) استفاده می شود.

یک یاتاقان سه بعدی با فیلمی به ضخامت h در نظر بگیرید. سطوح بالایی و پایینی دارای حرکت U_b, U_a هستند. همچنین یک حرکت لهیدگی ممکن است در جهت z وجود داشته باشد. مؤلفه های حرکت لهیدگی سطوح پایین و بالا به صورت w_b, w_a نشان داده می شوند (شکل ۲-۳).



شکل ۲-۳. سیستم مختصات

با توجه به فرضیات بیان شده، معادلات مومنتوم در جهات x, y به صورت زیر نوشته می شوند:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (۱۲-۳)$$

معادلات فوق را برای تعیین میدان سرعت انتگرال گیری می کنیم. با انتگرال گیری از معادلات

دیفرانسیل پاره ای (۱۲-۳) داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{A}{\mu} \quad (۱۳-۳)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{z}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{C}{\mu}$$

پارامترهای A و C ثابت های انتگرال گیری هستند. با انتگرال گیری دوباره داریم:

$$u = \frac{z^2}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + A \frac{z}{\mu} + B \quad (۱۴-۳)$$

$$v = \frac{z^2}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial y} + C \frac{z}{\mu} + D$$

که B و D ثابت های اضافی انتگرال گیری هستند که بایستی با استفاده از شرایط مرزی مناسب

تعیین شوند.

۳-۴-۱- شرایط مرزی

شرایط مرزی برای تعیین ثوابت انتگرال گیری به صورت زیر می باشند:

$$At \ z = 0; \quad \begin{cases} u = U_a \\ v = 0 \\ w = w_a \end{cases} \quad At \ z = h; \quad \begin{cases} u = U_b \\ v = 0 \\ w = w_b \end{cases} \quad (۱۵-۳)$$

که فرض شده است که سطوح هیچ حرکتی در جهت محوری ندارند. پس از تعیین ثابت های انتگرال

گیری، توزیع سرعت به صورت زیر بدست می آید:

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (z^2 - zh) + \left(1 - \frac{z}{h}\right) U_a + \frac{z}{h} U_b \quad (۱۶-۳)$$

$$v = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial y} (z^2 - zh)$$

۳-۴-۲- بقای جرم

معادله کلی برای بقای جرم برای یک جریان تراکم پذیر به صورت زیر است:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (۱۷-۳)$$

با انتگرال گیری از معادله پیوستگی در ضخامت فیلم داریم:

$$\int_0^h \frac{\partial \rho}{\partial t} dz + \int_0^h \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dz + \int_0^h \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dz + \int_0^h \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dz = 0 \quad (۱۸-۳)$$

$$\int_0^h \frac{\partial \rho}{\partial t} dz = h \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (۱۹-۳)$$

$$\int_0^h \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dz = \rho w|_0^h = \rho(w_h - w_0) = \rho(w_b - w_a) \quad (۲۰-۳)$$

$$\int_0^h \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h (\rho u) dz - (\rho u)|_{z=h} \frac{\partial h}{\partial x} \quad (۲۱-۳)$$

طرف راست معادله (۲۱-۳) می تواند به صورت زیر بازنویسی شود:

$$RHS = \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \int_0^h u dz \right) - U_b \rho \frac{\partial h}{\partial x} \quad (۲۲-۳)$$

با توجه به نرخ جریان حجمی داریم:

$$q_x = -\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{(U_a + U_b)}{2} h$$

بنابراین معادله (۲۲-۳) تبدیل می شود به:

$$\begin{aligned}
 RHS &= \frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\rho(U_a + U_b)h}{2} \right] - U_b \rho \frac{\partial h}{\partial x} \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} [\rho(U_a + U_b)h] - U_b \rho \frac{\partial h}{\partial x}
 \end{aligned}
 \quad (23-3)$$

ترم سوم در معادله (۱۸-۳) به صورت زیر ساده می شود:

$$\int_0^h \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dz = \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \int_0^h v dz \right) - v|_{z=h} \rho \frac{\partial h}{\partial y} \quad (24-3)$$

با جاگذاری

$$q_y = -\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y}$$

با توجه به اینکه تنها ترم پوازویویل^۱ در جهت محوری وجود دارد و با توجه به اینکه $v|_{z=h} = 0$

معادله (۲۴-۳) به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\int_0^h \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dz = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) \quad (25-3)$$

با جاگذاری معادلات (۱۹-۳)-(۲۵-۳) در معادله (۱۸-۳) داریم:

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} [\rho(U_a + U_b)h] - U_b \rho \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) \\
 &+ \rho(w_b - w_a) + h \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0
 \end{aligned}
 \quad (26-3)$$

با مرتب کردن ترم ها داریم:

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) \\
 &= + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} [\rho(U_a + U_b)h] - \rho U_b \frac{\partial h}{\partial x} + \rho(w_b - w_a) + h \frac{\partial \rho}{\partial t}
 \end{aligned}
 \quad (27-3)$$

تفسیر فیزیکی خلاصه هریک از ترم های فوق به صورت زیر می باشد:

^۱ Poiseuille

کشش فیزیکی^۱، $\partial(U_a + U_b)/\partial x$ ، تغییرات در سرعت های مماسی را در بر می گیرد. با فرض

$$\partial(U_a + U_b)/\partial x = 0 \text{، اینکه سطوح یاتاقان الاستیک نیستند،}$$

گوه فیزیکی^۲، $\partial h/\partial x$ ، مهم ترین ترم برای تولید فشار در یاتاقان های هیدرودینامیک است.

گوه چگالی^۳، $\partial \rho/\partial x$ شبیه گوه فیزیکی است و عموماً در مقایسه با گوه فیزیکی ناچیز بوده و در نظر

گرفته نمی شوند.

لهیدگی هندسی^۴، $U(\partial h/\partial x)$ ، مهم ترین ترمی است که عمل شبه لهیدگی ناشی از وضعیت هندسی

را محاسبه می کند.

لهیدگی نرمال^۵، $\rho(w_b - w_a)$ توسط حرکت نسبی سطوح در جهت عمود بر جهت حرکت به وجود

می آید به طوری که سیال از نظر فیزیکی تحت فشار قرار می گیرد.

انبساط موضعی^۶، $\partial \rho/\partial t$ اندازه ای از تغییر حجم یک جرم معین از سیال را فراهم می آورد که به

علت انبساط ناشی از حرارت در یاتاقان می باشد.

۳-۴-۳- معادله رینولدز کلی

با صرف نظر از ترم های کششی، گوه چگالی و ترم های انبساط موضعی، معادله رینولدز ساده شده که

برای اکثر کاربردهای عملی کافی است، بدست می آید:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \rho (U_a - U_b) \frac{\partial h}{\partial x} + \rho (w_b - w_a) \quad (۲۸-۳)$$

فرم کلی معادله رینولدز برای حالتی که ضخامت فیلم با زمان تغییر نمی کند (یعنی در حالت ماندگار،

بدون حرکت لهیدگی نرمال) به صورت زیر می باشد:

^۱ Physical stretch

^۲ Physical wedge

^۳ Density wedge

^۴ Geometric squeeze

^۵ Normal squeeze

^۶ Local expansion

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} (U_1 + U_2) \frac{\partial(\rho h)}{\partial x} \quad (29-3)$$

که U_1 و U_2 سرعت های واقعی سطح هستند، نه مؤلفه های سرعت. اگر ضخامت فیلم با زمان تغییر کند، یعنی سطوح در واقع در جهت z حرکت می کنند، معادله رینولدز کلی به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} (U_1 + U_2) \frac{\partial(\rho h)}{\partial x} + \rho(w_2 - w_1) \quad (30-3)$$

در اکثر کاربردها، فقط یک سطح دارای حرکت است و سطح دیگری ثابت است:

$$U_1 = 0; \quad U_2 = U \neq 0 \quad (31-3)$$

$$w_1 = 0; \quad w_2 = w \neq 0$$

بنابراین سمت راست معادله (30-3) به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\frac{1}{2} U \frac{\partial(\rho h)}{\partial x} + \rho w; \quad w = \frac{\partial h}{\partial t} \text{ (squeeze velocity)} \quad (32-3)$$

۳-۴-۴- معادله رینولدز استاندارد

متداول ترین فرم معادله رینولدز به صورت زیر می باشد:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} U \frac{\partial(\rho h)}{\partial x} + \rho \frac{\partial h}{\partial t} \quad (33-3)$$

۳-۵- یاتاقان های گازی

۳-۵-۱- معادله حالت و خواص ویسکوز

۳-۵-۱-۱- معادله حالت

برای یک گاز کامل (ایده آل)، خواص فیزیکی از یک رابطه تابعی معروف به قانون گاز ایده آل پیروی می کنند:

$$PV = nR_u T \quad (۳-۳۴)$$

که V حجم اشغال شده توسط n کیلومول از یک گاز در دمای مطلق T برحسب کلونین و R_u ثابت جهانی گاز است.

۳-۵-۱-۲- خواص ویسکوزیته

به طور کلی، ویسکوزیته یک سیال توسط اثر ترکیبی نیروهای بین مولکولی و انتقال حرکت کنترل می شود. در حالی که خواص ویسکوزیته یک مایع در درجه اول تحت تأثیر نیروهای بین مولکولی است، انتقال تکانه عامل غالب در یک گاز است.

رابطه مابین ویسکوزیته و دما برای مدل مولکول های کره ای سخت [۴۳] به صورت زیر می باشد:

$$\mu = \frac{5}{16} \frac{\sqrt{\pi m_q k_B T_e}}{\pi d^2} \quad (۳-۳۵)$$

که در آن μ ویسکوزیته، m_q جرم مولکولی، k_B ثابت بولتزمن، T_e دما و d قطر مولکولی می باشد. با استفاده از رابطه ی زیر داریم:

$$k_B = m_q R_g \quad (۳-۳۶)$$

که در آن R_g ثابت گاز است. با جاگذاری رابطه (۳-۳۶) در (۳-۳۵) داریم:

$$\mu = \frac{5m_q}{16d^2} \left(\frac{R_g T_e}{\pi} \right)^{1/2} \quad (37-3)$$

۳-۵-۲- معادله رینولدز

دو عاملی که باعث می شوند فیلم گاز در یاتاقان به صورت همدمما باشد عبارت است از: ۱- تولید حرارت پایین و ۲- ظرفیت حرارتی بالای پوسته یاتاقان در مقایسه با حجم بسیار کوچک گاز در فیلم. بنابراین معادله ی رینولدز با فرض اینکه حالت پیوستگی و قوانین گاز ایده آل برای سیال کاری برقرار است، به صورت بی بعد زیر نوشته می شود:

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(PH^3 \frac{\partial P}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(PH^3 \frac{\partial P}{\partial Y} \right) = \Lambda \frac{\partial}{\partial X} (PH) + \sigma \frac{\partial}{\partial \tau} (PH) \quad (38-3)$$

که H ، P و τ به ترتیب ضخامت فیلم بدون بعد، فشار بدون بعد و زمان بدون بعد می باشند که به صورت زیر تعریف می شوند:

$$X = \frac{x}{L_{ref}}; \quad Y = \frac{y}{L_{ref}}; \quad H = \frac{h}{h_{ref}}; \quad \tau = \omega t; \quad P = \frac{p}{p_a} \quad (39-3)$$

فرم مناسب پارامترهای مرجع به نوع یاتاقان بستگی دارد.

پارامتر Λ در معادله (۳۸-۳) عدد یاتاقان یا عدد تراکم پذیری را نشان می دهد و برای یک یاتاقان گازی غیرمدور با استفاده از پارامترهای بی بعد زیر به صورت (۴۰-۳) تعریف می شود:

$$X = \frac{x}{C_m}; \quad Y = \frac{y}{C_m}; \quad H = \frac{h}{C_m}; \quad \tau = \omega t; \quad P = \frac{p}{p_a}$$

$$\Lambda = \frac{6\mu\omega R^2}{p_a C_m^2} \quad (40-3)$$

که R شعاع محور، C_m حداقل لقی، زمانی که مراکز هندسی محور و یاتاقان برهم منطبق هستند. ω سرعت دورانی و p_a فشار محیط است.

پارامتر نهایی، عدد لهدگی یاتاقان است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$\sigma = \frac{12\mu\omega R^2}{p_a[h(t=0)]^2} \quad (41-3)$$

که $h(t=0)$ ضخامت فیلم مرجع در $t=0$ است.

۳-۶- معادله روانکاری گاز مولکولی (MGL Model)

معادلات کلی برای روانکاری گازی بر مبنای معادلات دینامیک گاز تراکم پذیر یک محیط پیوسته هستند. معادله رینولدز تراکم پذیر اغلب برای حل مسائل روانکاری گازی استفاده می شود. به هر حال، در شرایط محیطی نزدیک به خلأ، یا در شرایط یک فاصله خیلی کوچک در دمای اتاق و فشار اتمسفر، مدل مرسوم بر مبنای تئوری دینامیک گاز دیگر قابل کاربرد نمی باشد.

تئوری هیدرودینامیک مرسوم نمی تواند پدیده های در شرایط نزدیک به خلأ یا جریان در یک لقی خیلی کوچک را به علت وجود اثر گاز رقیق توضیح دهد. اثر رقیق گردانی^۱ در سیستم های میکرو الکترو مکانیکی، یا در هد مغناطیسی یک هارد دیسک و یا غیره ظاهر خواهد شد. جریان های مابین هد مغناطیسی و دیسک در یک هارد دیسک کامپیوتر به صورت چشمگیری اثر گاز رقیق را نشان می دهد. هنگامی که اثر رقیق شدگی در نظر گرفته می شود، توزیع سرعت معمولاً متفاوت است، بنابراین معادله رینولدز بایستی اصلاح شود. فوکویی^۲ برای استخراج یک معادله رینولدز تراکم پذیر اصلاح شده از معادله بولتزمن استفاده کرد.

¹ thinning effect

² Fukui

معادله بولتزمن رفتار گازهای واقعی را بیان می کند. گانس^۱ در سال ۱۹۸۵ از این معادله برای بدست آوردن معادله انتقال استفاده کرد. این نقطه شروع فوکویی و کانیکو^۲ بود. آن ها معادله ای استخراج کردند که رفتار یک گاز در یک فاصله باریک را برای اعداد نادسن بزرگ پیش بینی می کرد. در حالت ایزوترمال، آن معادله شبیه یک معادله رینولدز که تابعی از عدد نادسن معکوس بود، نوشته می شد.

$$\nabla \cdot (Q(D_k)PH^3\nabla P - \Lambda PH) - \sigma \frac{\partial(PH)}{\partial \tau} = 0 \quad (42-3)$$

که

$$Q(D_k) = \frac{Q_p(D_k)}{Q_c(D_k)}$$

که $Q_c(D_k)$ جریان پیوسته پوازیویل است: $Q_c(D_k) = D_k/6$. $Q_p(D_k)$ به صورت عددی محاسبه می شود. یک فرمول تقریبی و یک دیتابیس در مقاله چاپ شده در سال ۱۹۹۰ توسط این دو نفر در دسترس است [۴۴]. فوکویی و کانکو متوجه شدند که نتایج MGL با نتایج شبیه سازی مستقیم مولکول-ها حتی در فاصله های نانو توافق خوبی دارند [۴۵].

عدد نادسن معکوس (D_k)، معمولاً تابعی از فشار p و ضخامت h است. رابطه زیر برای عدد نادسن معکوس برقرار است:

$$D_k = D_{k0} \frac{ph}{p_0 h_0} \quad (43-3)$$

^۱Gans

^۲ Kaneko

که D_{k0} عدد نادسن معکوس مشخصه است که توسط حداقل ضخامت h_0 و فشار محیط p_0 تعیین می‌شود، $D_{k0} = p_0 h_0 / \mu \sqrt{2R_g T_0}$ ؛ ثابت گاز R_g ($= 287 \text{ J/kg.K}$) است؛ T_0 دمای محیط، به طور کلی 293 K در نظر گرفته می‌شود؛ μ ویسکوزیته گاز است.

در هنگام بهره‌برداری، حداقل ضخامت فیلم گاز در حدود میکرون می‌باشد، که به اندازه‌ی کافی برای مقایسه با مسافت آزاد میانگین مولکولی مؤثر است و معادله رینولدز تراکم‌پذیر مرسوم، اعتبارش را به عنوان معادله حاکم از دست می‌دهد. مدل روانکاری گاز مولکولی (MGL) که برای تمام اعداد نادسن دلخواه معتبر است، به جای آن به کار می‌رود؛ مدل هم تغییرات ویسکوزیته گاز و هم تغییرات مسافت آزاد میانگین مولکولی با دما را در نظر می‌گیرد. مدل روانکاری گاز مولکولی به صورت زیر است:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(PH^3 Q(T_e) \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(PH^3 Q(T_e) \frac{\partial P}{\partial \zeta} \right) = \Lambda(T_e) \frac{\partial}{\partial \theta} (PH) + 2\Lambda(T_e) \frac{\partial}{\partial \tau} (PH) \quad (43-3)$$

که $Q(T_e)$ ضریب نرخ جریان بدون بعد مطابق با درجات متفاوت رقیق شدگی است. $Q = 1$ جریان پیوسته را ارائه می‌دهد- وقتی جریان گاز رقیق می‌شود، آن بیشتر از یک است و برابر است با نسبت Q_p (ضرایب نرخ جریان پوازی رقیق) به Q_c (ضرایب نرخ جریان پوازی پیوسته). به صورت زیر:

$$Q = \frac{Q_p}{Q_c} \quad (44-3)$$

هر دو Q_p و Q_c با عدد نادسن معکوس، D_k مرتبط هستند، که با دما تغییر می‌کند. D_k به صورت زیر بیان می‌شود:

$$D_k = \frac{ph}{\mu \sqrt{2R_g T_e}} = \frac{8\sqrt{2\pi} p h d^2}{5m_q R_g T_e} \propto T_e^{-1} \quad (45-3)$$

برای Q_p و Q_c ، فوکویی و کانیکو فرمول‌های چندجمله‌ای متناسب با داده‌های محاسبات عددی برای ضریب جریان توسط عدد نادسن معکوس ارائه داده‌اند که به صورت زیر می‌باشند:

$$Q_c = \frac{D_k}{6}$$

$$Q_p = \frac{D_k}{6} + 1 \cdot 0162 + \frac{1 \cdot 0653}{D_k} - \frac{2 \cdot 1354}{D_k^2}; \quad 5 \leq D_k$$

$$Q_p = 0 \cdot 13852 D_k + 1 \cdot 25087 + \frac{0 \cdot 15653}{D_k} - \frac{0 \cdot 00969}{D_k^2}; \quad 0 \cdot 15 \leq D_k < 5 \quad (46-3)$$

$$Q_p = -2 \cdot 22919 D_k + 2 \cdot 10673 + \frac{0 \cdot 01653}{D_k} - \frac{0 \cdot 0000694}{D_k^2}; \quad 0 \cdot 01 \leq D_k < 0 \cdot 15$$

علاوه بر ضریب نرخ جریان، Q ، عدد یاتاقان، Λ ، نیز به دما وابسته است و به صورت $\Lambda(T_e)$ در مدل روانکاری اصلاح شده بیان می شود، زیرا Λ با ویسکوزیته دینامیکی گاز، μ متناسب است که با دما تغییر می کند. رابطه Λ ، μ و دما (T_e) به صورت زیر است:

$$\Lambda = \frac{6\mu\omega}{p_a} \left(\frac{R}{C_m} \right)^2 \quad (47-3)$$

در اینجا R شعاع محور است و C_m حداقل لقی، زمانی که مراکز هندسی یاتاقان و محور بر هم منطبق هستند.

لازم است خاطر نشان شود، علاوه بر مدل رقیق شدگی فوکویی و کانیکو (FK)، مدل های رقیق شدگی دیگری نیز وجود دارند که جزییات آن ها در بخش بعدی آمده است. با توجه به نتایج مقاله ی ژانگ [46] که اقدام به مقایسه مدل های رقیق شدگی کرده است، مدل رقیق شدگی FK از دقت بهتری برخوردار بوده و در این رساله نیز از مدل رقیق شدگی FK استفاده شده است.

۳-۷- مدل های رقیق شدگی

۳-۷-۱- اثر گاز رقیق

به منظور توصیف میزان انحراف گاز از محیط پیوسته، نادسن یک پارامتر بدون بعد، به نام عدد نادسن (Kn) را تعریف کرد، که به صورت زیر می باشد:

$$Kn = \frac{\lambda}{h} \quad (3-48)$$

که λ مسافت آزاد میانگین مولکولی است؛ h اندازه مشخصه جریان گاز است؛ h معمولاً ارتفاع کانال یا قطر لوله است.

وقتی که مسافت آزاد مولکول های گاز کمی تغییر می کنند، با کوچکتر شدن اندازه مشخصه h ، عدد نادسن Kn بزرگتر می شود، به طوری که مسأله بیشتر از مسائل روانکاری گازی کلاسیک انحراف می یابد. بنابراین، اثر رقیق شدگی در یک وسیله با اندازه کوچک به وجود می آید.

عدد نادسن، Kn میزان رقیق شدگی گاز را نشان می دهد. عدد بزرگ، اثر رقیق شدگی قابل توجهی را بیان می کند. مطابق با عدد نادسن، Kn ، ناحیه جریان گاز می تواند به چهار رژیم زیر تقسیم شود:

۱- وقتی که $Kn \leq 0.01$ است، رژیم جریان به صورت ناحیه محیط پیوسته در نظر گرفته می شود. در این ناحیه، سیال در شرایط مرزی بدون لغزش از معادلات ناویر-استوکس است.

۲- وقتی که $0.01 \leq Kn \leq 0.1$ است، رژیم به صورت جریان لغزشی است. که معمولاً فرض شرایط مرزی بدون لغزش به کار نمی رود. مسافت آزاد میانگین از انتهای لایه نادسن شروع می شود تا یک نقش کنترلی مابین دیواره و سیال بازی کند. در رژیم جریان لغزشی، جریان تحت کنترل معادلات ناویر-استوکس است و شرایط لغزش سرعت و جهش دما برای ایجاد مدل اثر رقیق شدگی از طریق لغزش دیواره استفاده می شود.

۳- وقتی که $0.1 \leq Kn \leq 10$ است، رژیم به صورت جریان گذار است. در این رژیم معادلات ناویر-استوکس معتبر نیستند. اثر برخورد مولکول ها با همدیگر بایستی در نظر گرفته شود.

۴- وقتی که $Kn > 10$ است، سیال به صورت جریان مولکولی آزاد در نظر گرفته می شود. در رژیم جریان مولکولی آزاد، برخورد مابین مولکول ها می تواند در مقایسه با نقش برخورد مولکول ها با مرز نادیده گرفته شوند.

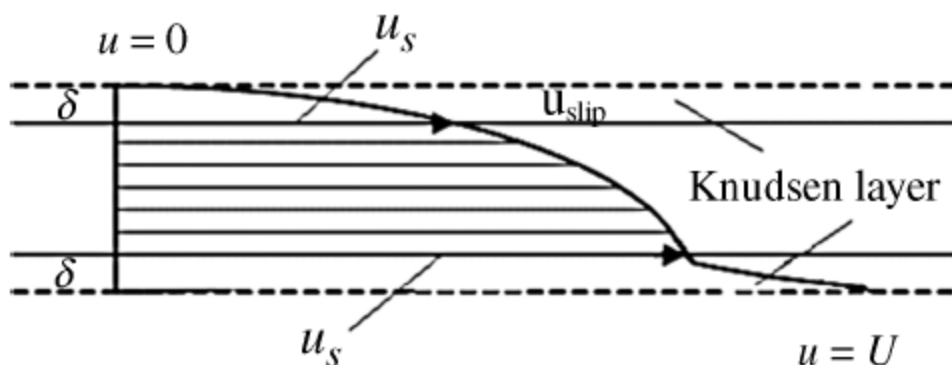
همچنین عدد نادسن معکوس بعداً به عنوان معیار اثر رقیق شدگی مورد استفاده قرار می گیرد. عبارت عدد نادسن معکوس D_k به صورت زیر است:

$$D_k = \frac{\sqrt{\pi}}{2Kn} \quad (۴۹-۳)$$

اگر $0.01 < Kn < 10$ سیال به صورت یک سیال رقیق در نظر گرفته می شود، و معادله رینولدز اصلاح یافته با ضرایب رقیق سازی بایستی استفاده شود. وقتی که نسبت خروج از مرکزی یاتاقان های ژورنال با روانکار گاز از ۰/۵ تا ۰/۹ تغییر کند، عدد نادسن محلی در حداقل ضخامت فیلم مابین ۰/۰۱۱ و ۰/۰۵۳ تغییر می کند، به علاوه در برخی از میکرو توربین های گازی که در دماهای خیلی بالا بهره برداری می شوند، اثر جریان لغزشی به علت افزایش مسافت آزاد میانگین مولکولی با دما از اهمیت ویژه ای برخوردار است. معادله رینولدز تراکم پذیر اصلاح یافته با اثر رقیق سازی به عنوان معادله حاکم به کار می رود.

۳-۷-۲- لغزش مرزی

چون معادله رینولدز فقط برای ضخامت فیلم گاز به اندازه ی کافی بزرگ به کار می رود، بایستی اثر رقیق شدگی برای جریان گاز با فاصله زیر میکرون در نظر گرفته شود. یک لایه جریان نازک نزدیک سطح جامد وجود دارد، که لایه نادسن نامیده می شود، در شکل ۳-۳. لایه نادسن و سرعت لغزشی نشان داده شده است.



شکل ۳-۳. لایه نادسن و سرعت لغزشی [۱]

اگرچه تئوری سیال پیوسته برای لایه نادسن به کار نمی رود، آن هنوز برای ناحیه های دیگر بالاتر از لایه به کار می رود. سرعت لغزشی مرز، u_s ، می تواند برای توصیف لایه نادسن به کار رود. سرعت تابعی از تنش برشی می باشد.

۳-۷-۲-۱- مدل رقیق شدگی مرتبه اول

در مدل رقیق شدگی مرتبه اول، شرایط مرزی سرعت سطوح بالا و پایین به صورت زیر فرض می شوند:

$$u|_{z=h} = U_h - a\lambda \frac{\partial u}{\partial z}|_{z=h} \quad . \quad v|_{z=h} = V_h - a\lambda \frac{\partial v}{\partial z}|_{z=h} \quad (۵۰-۳)$$

$$u|_{z=0} = U_0 + a\lambda \frac{\partial u}{\partial z}|_{z=0} \quad . \quad v|_{z=0} = V_0 + a\lambda \frac{\partial v}{\partial z}|_{z=0} \quad (۵۱-۳)$$

که a ضریب تعدیل شده سطح است که برای در نظر گرفتن بازتاب مولکول های گاز بر روی دیواره مرزی پس از برخورد استفاده می شود.

سپس با انتگرال گیری از سرعت ها در جهت ضخامت، نرخ های جریان از مدل رقیق شدگی مرتبه اول بدست می آید:

$$q_x = -Q_1 \frac{h^3}{12\eta} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + (U_0 + U_h) \frac{h}{2} \quad (52-3)$$

$$q_y = -Q_1 \frac{h^3}{12\eta} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + (V_0 + V_h) \frac{h}{2} \quad (53-3)$$

که نرخ جریان بدون بعد Q_1 برابر است با:

$$Q_1 = \frac{D_k}{6} + \frac{a\sqrt{\pi}}{2} \quad (54-3)$$

۳-۲-۷-۲- مدل رقیق شدگی مرتبه دوم

شرایط مرزی سرعت سطوح بالا و پایین برای مدل به صورت زیر هستند:

$$u|_{z=h} = U_h - a\lambda \frac{\partial u}{\partial z}|_{z=h} - \frac{1}{2}\lambda^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}|_{z=h} \quad . \quad v|_{z=h} \quad (55-3)$$

$$= V_h - a\lambda \frac{\partial v}{\partial z}|_{z=h} - \frac{a}{2}\lambda^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}|_{z=h}$$

$$u|_{z=0} = U_0 + a\lambda \frac{\partial u}{\partial z}|_{z=0} - \frac{1}{2}\lambda^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}|_{z=0} \quad . \quad v|_{z=0} \quad (56-3)$$

$$= V_0 + a\lambda \frac{\partial v}{\partial z}|_{z=0} - \frac{a}{2}\lambda^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}|_{z=0}$$

که نرخ جریان بدون بعد Q_2 به صورت زیر می باشد:

$$Q_2 = \frac{D_k}{6} + \frac{a\sqrt{\pi}}{2} + \frac{a\pi}{4D_k} \quad (57-3)$$

۳-۲-۷-۳- مدل رقیق شدگی مرتبه یک و نیم (۱/۵)

شرایط مرزی سرعت مدل به صورت زیر هستند:

$$u|_{z=h} = U_h - a\lambda \frac{\partial u}{\partial z}|_{z=h} - \frac{a}{2}\left(\frac{2}{3}\lambda\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}|_{z=h} \quad . \quad v|_{z=h} \quad (58-3)$$

$$= V_h - a\lambda \frac{\partial v}{\partial z}|_{z=h} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\lambda\right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}|_{z=h}$$

$$u|_{z=0} = U_0 + a\lambda \frac{\partial u}{\partial z}|_{z=0} - \frac{a}{2} \left(\frac{2}{3}\lambda\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}|_{z=0} \quad \cdot \quad v|_{z=0} \quad (59-3)$$

$$= V_0 + a\lambda \frac{\partial v}{\partial z}|_{z=0} - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\lambda\right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}|_{z=0}$$

که نرخ جریان بدون بعد $Q_{1.5}$ به صورت زیر می باشد:

$$Q_{1.5} = \frac{D_k}{6} + \frac{a\sqrt{\pi}}{2} + \frac{a\pi}{9D_k} \quad (60-3)$$

۳-۷-۲-۴- مدل رقیق شدگی مرتبه اول و مرتبه دوم لیو^۱

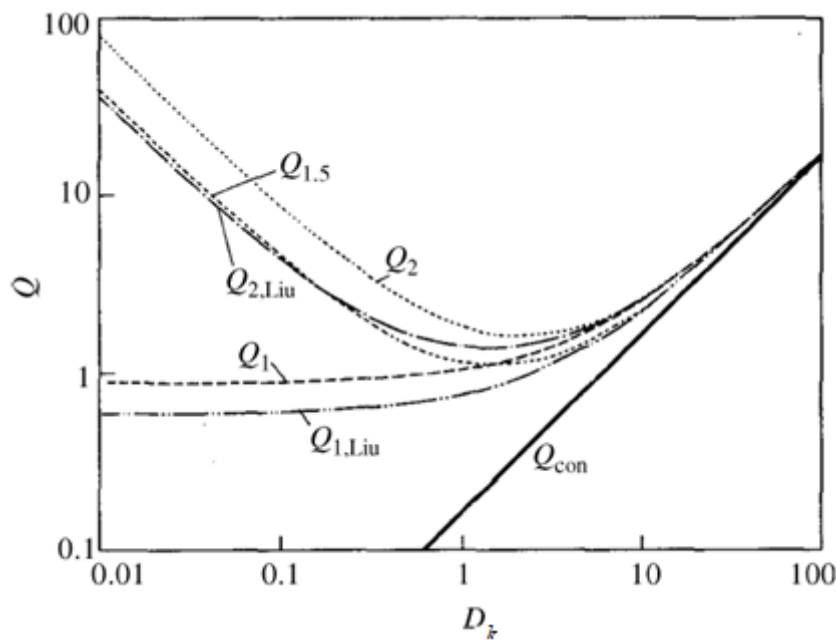
لیو، مدل های رقیق شدگی مرتبه اول و دوم خودش را با شبیه سازی دینامیک مولکولی دو بعدی استخراج کرد. نرخ های جریان بدون بعد لیو به صورت زیر هستند:

$$Q_{1.Liu} = \frac{D_k}{6} + \left(\frac{2}{3}\right) \frac{a\sqrt{\pi}}{2} \quad (61-3)$$

$$Q_{2.Liu} = \frac{D_k}{6} + \left(\frac{2}{3}\right) \frac{a\sqrt{\pi}}{2} + \left(\frac{1}{2}\right) \frac{a\pi}{4D_k} \quad (62-3)$$

شکل ۳-۴ روابط نرخ جریان پوازوییل Q_p با عدد نادسن معکوس D_k برای مدل های مختلف را نشان می دهد. همان طور که از شکل مشاهده می شود، در ناحیه ایی که عدد D_k بزرگ تر است، منحنی ها به منحنی تئوری پیوسته نزدیک است. هنگامی که D_k کاهش می یابد، نرخ های جریان Q تمام مدل ها بالاتر از منحنی پیوسته هستند، اما منحنی این مدل ها تفاوت های قابل توجهی را دارند. Q مربوط به مدل مرتبه اول کوچک است، Q مدل مرتبه دوم بزرگ است؛ Q مدل مرتبه ۱/۵ در وسط قرار دارد. Q مدل مرتبه اول و دوم لیو کمی از مدل های اصلی کوچک تر است.

^۱ Liu

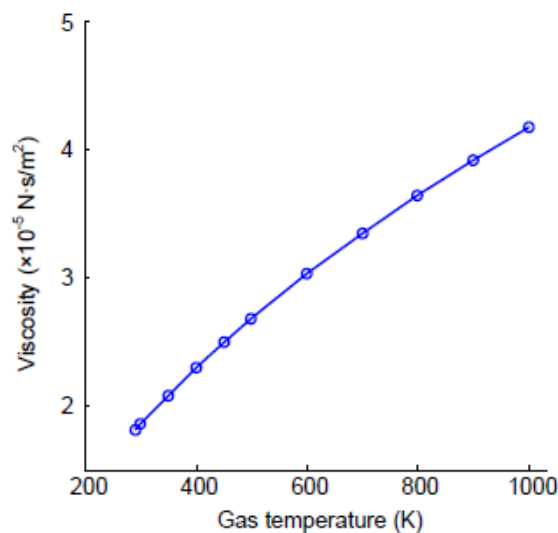


شکل ۳-۴. Q_p در مقابل D_k برای مدل‌های مختلف [۱]

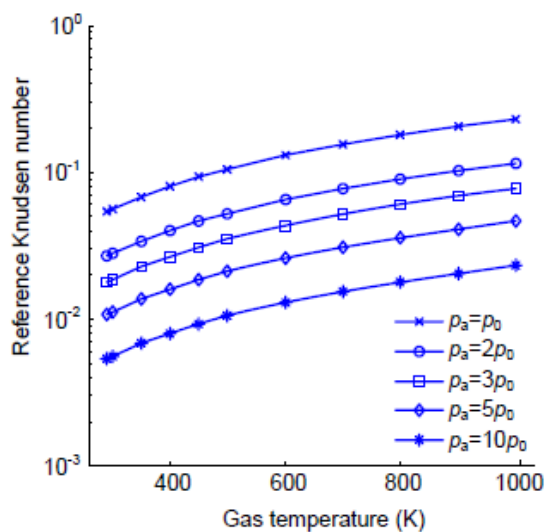
۳-۷-۳- تغییرات عدد نادسن مرجع با دما

ویسکوزیته گازها، یک خاصیت فیزیکی است که می‌تواند از آزمایش‌ها یا از محاسبات تقریبی از مدل‌های تئوری بدست آید. مقادیر ویسکوزیته برای هوا به تدریج با افزایش دما افزایش می‌یابد (شکل ۳-۵). در میکرو یا تاقان‌های گازی، عدد نادسن مرجع به صورت $Kn_0 = \lambda/c$ تعریف می‌شود، که $\lambda = \mu \sqrt{\pi R_g T_e} / \sqrt{2} p_a$ ، مسافت آزاد میانگین مولکولی، c لقی شعاعی متوسط، μ ویسکوزیته گاز، R_g ثابت گاز، T_e دمای محیط، و p_a فشار محیط است. شکل ۳-۶ برای نشان دادن محدوده عدد نادسن مرجع برای فیلم روانکار گازی با لقی شعاعی متوسط $10 \mu m$ در فشارهای مختلف محیط و افزایش دما ارائه شده است. عدد نادسن مرجع با افزایش دما افزایش می‌یابد. بنابراین، هوا در دماهای بالاتر رقیق‌تر می‌شود. هنگامی که فشار محیط افزایش می‌یابد، عدد نادسن مرجع کاهش می‌یابد. هنگامی که فشار محیط از یک تا ده اتمسفر تغییر می‌کند، مقادیر عدد نادسن مرجع در محدوده 10^{-3} و 10^{-1}

قرار می‌گیرد. مطابق با تئوری جنبشی گازها، جریان در ناحیه لغزش قرار می‌گیرد. بنابراین مرز سرعت با لغزش در فصل مشترک گاز- جامد بایستی در محاسبات در نظر گرفته شوند.



شکل ۳-۵. ویسکوزیته هوا در دماهای مختلف [۳۴]



شکل ۳-۶. عدد نادسن مرجع تحت فشارهای مختلف محیط [۳۴]

۳-۸- معادلات دینامیک روتور

در حالت دینامیکی، معادلات حرکت روتور به صورت زیر هستند:

$$m\ddot{x} = f_{ex} + f_{gx} + f_{fx} + m\rho\omega^2 \sin\omega t \quad (۶۳-۳)$$

$$m\ddot{y} = f_{ey} + f_{gy} + f_{fy} + m\rho\omega^2 \cos\omega t \quad (۶۴-۳)$$

که f_{ex} و f_{ey} مؤلفه های نیروی خارجی، f_{gx} و f_{gy} مؤلفه های نیروی فیلم گاز و f_{fx} و f_{fy} مؤلفه های نیروی اصطکاک ویسکوز هستند. ρ خروج از مرکزی روتور (فاصله مابین مرکز هندسی روتور تا مرکز جرم روتور) و (x,y) موقعیت مرکز روتور است. در اینجا دات (.) مشتق نسبت به زمان (t) می باشد.

پارامترهای بدون بعد را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$X = \frac{x}{C_m}; \quad Y = \frac{y}{C_m}; \quad \tilde{\rho} = \frac{m\rho\omega^2}{p_a R^2}; \quad \bar{M} = \frac{mC_m\omega^2}{p_a R^2}; \quad F_e = \frac{f_e}{p_a R^2}; \quad (۶۵-۳)$$

$$F_g = \frac{f_g}{p_a R^2}; \quad F_f = \frac{f_f}{p_a R^2}; \quad \tau = \omega t$$

با استفاده از پارامترهای بدون بعد فوق، فرم بدون بعد معادله دینامیک روتور به صورت زیر بدست می آید:

$$\bar{M}X'' = F_{ex} + F_{gx} + F_{fx} + \bar{M}\tilde{\rho} \sin \tau \quad (۶۶-۳)$$

$$\bar{M}Y'' = F_{ey} + F_{gy} + F_{fy} + \bar{M}\tilde{\rho} \cos \tau \quad (۶۷-۳)$$

که در اینجا پریم (') نشان دهنده مشتق نسبت به τ می باشد.

فصل ۱۴ : روش حل و جزئیات

۴-۱- روش حل معادله MGL در حالت ماندگار^۱

برای بدست آوردن توزیع فشار در داخل یاتاقان بایستی معادله روانکاری گاز مولکولی حل شود. معادله MGL در حالت بدون بعد به صورت زیر می باشد:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(PH^3 Q \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(PH^3 Q \frac{\partial P}{\partial \zeta} \right) = \Lambda H \frac{\partial P}{\partial \theta} + \Lambda P \frac{\partial H}{\partial \theta} \quad (۱-۴)$$

مدل MGL با استفاده از پارامترهای زیر بدون بعد شده است:

$$x = R\theta; \quad y = R\zeta; \quad p = Pp_a; \quad h = HC_m;$$

در اینجا H ضخامت فیلم سیال در حالت بدون بعد است و رابطه ی آن برای حالت ماندگار به شکل زیر است [۴۷]:

$$H_0^k = \frac{1}{\delta} - X_{j0} \cos \theta - Y_{j0} \sin \theta + \left(\frac{1}{\delta} - 1 \right) \cos(\theta - \theta_0^k) \quad (۲-۴)$$

k نشان دهنده شماره لوب، δ نسبت بیضوی یاتاقان و برابر با C/C_m ، X_{j0} و Y_{j0} موقعیت مرکز محور در حالت ماندگار، θ_0 موقعیت خط واصل مرکز یاتاقان و مرکز لوب و همچنین پارامتر عدد یاتاقان $\Lambda = 6\mu\omega R^2/p_a C_m^2$ است.

شرایط مرزی برای معادله ی فوق به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} P(\theta_1, \zeta) &= 1 \\ P(\theta_2, \zeta) &= 1 \\ P(\theta, \pm \lambda) &= 1 \end{aligned} \quad (۳-۴)$$

^۱steady state

فرمولاسیون اجزاء محدود معادلات دیفرانسیل منجر به معادلات جبری غیرخطی برای هر المان از مش‌های اجزاء محدود می‌شود. اگر ماتریس ضرایب مستقل از بردار مقادیر گره ای باشد، ماتریس ضرایب می‌تواند برای تمام المان‌ها ارزیابی شود و معادلات اسمبل شده پس از اعمال شرایط مرزی، می‌توانند برای بدست آوردن مقادیر گره ای حل شوند. وقتی ماتریس ضرایب به بردار مجهول پاسخ بستگی داشته باشد، ماتریس ضرایب نمی‌تواند ارزیابی شود. اگر بتوان یک تقریب برای بردار پاسخ پیدا کرد، ماتریس ضرایب می‌تواند ارزیابی و اسمبل شود. این به معنی خطی سازی معادلات غیرخطی می‌باشد. سپس می‌توان تقریب دیگری برای بردار پاسخ با حل معادلات اسمبل شده بدست آورد. این روند می‌تواند تا زمانی که حل تقریبی به حل واقعی نزدیک شود، ادامه پیدا کند. چنین روندی یک روند تکراری نامیده می‌شود. روندهای تکراری معمول به صورت زیر می‌باشند [۴۸]:

۱- روش تکرار پیکارد^۱ (یا تکرار مستقیم)

۲- روش تکرار نیوتن-رافسون^۲

۳- روش ریکز^۳

با توجه به همگرایی سریع روش تکرار نیوتن برای حل معادلات غیرخطی از این روش استفاده شده است. در این روش ابتدا معادله غیرخطی توسط بسط تیلور خطی سازی می‌شود و سپس روش اجزاء محدود بر معادلات حاصل اعمال می‌شود تا معادله ی ماتریسی تعیین شود، معادله ماتریسی برای پیدا کردن متغیر اصلاح کننده حل می‌شود و فرایند دوباره تکرار می‌شود تا مادامی که مقدار متغیر اصلاح کننده به صفر میل نماید.

۴-۱-۱- خطی سازی معادله

با در نظر گرفتن $\alpha(P) = PH^3Q$ داریم:

^۱ Picard

^۲ Newton-Raphson

^۳ Riks

$$-\nabla \cdot (\alpha(P)\nabla P) + \Lambda P \frac{\partial H}{\partial \theta} = -\Lambda H \frac{\partial P}{\partial \theta} \quad (۴-۴)$$

با در نظر گرفتن $P = P_0 + \delta P$ و با جاگذاری در $\alpha(P)$ و با استفاده از بسط تیلور داریم:

$$\alpha(P_0 + \delta P) = \alpha(P_0) + \frac{d\alpha}{dP}(P_0)\delta P \quad (۵-۴)$$

با جاگذاری رابطه ی فوق و با صرف نظر از ترم های δP با توان بیشتر از ۲ داریم:

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (P_0 H^3 Q \nabla (\delta P)) + \Lambda(\delta P) \frac{\partial H}{\partial \theta} \\ = \nabla \cdot (P_0 H^3 Q \nabla P_0) + \nabla \cdot (H^3 Q \delta P \nabla P_0) - \Lambda P_0 \frac{\partial H}{\partial \theta} \\ - \Lambda H \frac{\partial (\delta P)}{\partial \theta} - \Lambda H \frac{\partial P_0}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (۶-۴)$$

ترم های اول و دوم سمت راست تساوی به صورت زیر می باشند:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (P_0 H^3 Q \nabla P_0) &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left(P_0 H^3 Q \frac{\partial P_0}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(P_0 H^3 Q \frac{\partial P_0}{\partial \zeta} \right) \\ &= H^3 Q \frac{\partial P_0}{\partial \theta} \frac{\partial P_0}{\partial \theta} + 3P_0 H^2 Q \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{\partial P_0}{\partial \theta} + P_0 H^3 Q \frac{\partial^2 P_0}{\partial \theta^2} \\ &\quad + H^3 Q \frac{\partial P_0}{\partial \zeta} \frac{\partial P_0}{\partial \zeta} + P_0 H^3 Q \frac{\partial^2 P_0}{\partial \zeta^2} \end{aligned} \quad (۷-۴)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (H^3 Q \delta P \nabla P_0) &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left(H^3 Q \delta P \frac{\partial P_0}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(H^3 Q \delta P \frac{\partial P_0}{\partial \zeta} \right) \\ &= H^3 Q \frac{\partial (\delta P)}{\partial \theta} \frac{\partial P_0}{\partial \theta} + 3\delta P H^2 Q \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{\partial P_0}{\partial \theta} \\ &\quad + H^3 Q \delta P \frac{\partial^2 P_0}{\partial \theta^2} + H^3 Q \frac{\partial (\delta P)}{\partial \zeta} \frac{\partial P_0}{\partial \zeta} + H^3 Q \delta P \frac{\partial^2 P_0}{\partial \zeta^2} \end{aligned} \quad (۸-۴)$$

با در نظر گرفتن توابع زیر، معادله به صورت (۴-۱۰) تبدیل می شود:

$$c = P_0 H^3 Q \quad ; \quad a = \Lambda \frac{\partial H}{\partial \theta} - 3H^2 Q \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{\partial P_0}{\partial \theta} - H^3 Q \left(\frac{\partial^2 P_0}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 P_0}{\partial \zeta^2} \right)$$

$$b = -H^3 Q \left(\frac{\partial P_0}{\partial \theta} \right) + \Lambda H \quad ; \quad g = -H^3 Q \left(\frac{\partial P_0}{\partial \zeta} \right) \quad (9-4)$$

$$f = H^3 Q \left(\frac{\partial P_0}{\partial \theta} \frac{\partial P_0}{\partial \theta} + \frac{\partial P_0}{\partial \zeta} \frac{\partial P_0}{\partial \zeta} \right) + 3P_0 H^2 Q \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{\partial P_0}{\partial \theta} + P_0 H^3 Q \left(\frac{\partial^2 P_0}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 P_0}{\partial \zeta^2} \right) \\ - \Lambda P_0 \frac{\partial H}{\partial \theta} - \Lambda H \frac{\partial P_0}{\partial \theta}$$

$$-\nabla \cdot (c \nabla (\delta P)) + a(\delta P) + b \frac{\partial (\delta P)}{\partial \theta} + g \frac{\partial (\delta P)}{\partial \zeta} = f \quad (10-4)$$

با ضرب در تابع تست v ، عبارت انتگرال باقیمانده وزنی^۱ به صورت زیر بدست می آید:

$$\int_{\Omega} \left[-v \frac{\partial}{\partial \theta} \left(c \frac{\partial (\delta P)}{\partial \theta} \right) - v \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(c \frac{\partial (\delta P)}{\partial \zeta} \right) + v a \delta P + v b \frac{\partial (\delta P)}{\partial \theta} \right. \\ \left. + v g \frac{\partial (\delta P)}{\partial \zeta} - f v \right] d\Omega = 0 \quad (11-4)$$

با استفاده از قضیه ی گرین، فرم ضعیف^۲ به صورت زیر بدست می آید:

^۱weighted residual integral

^۲weak form

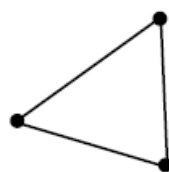
$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} c \left(\frac{\partial(\delta P)}{\partial \theta} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial(\delta P)}{\partial \zeta} \frac{\partial v}{\partial \zeta} \right) d\Omega \\
&= \int_{\Omega} \left(-va\delta P - vb \frac{\partial(\delta P)}{\partial \theta} - vg \frac{\partial(\delta P)}{\partial \zeta} + fv \right) d\Omega \quad (12-4) \\
&+ \oint_{\Gamma} v \left(c \frac{\partial(\delta P)}{\partial \theta} n_{\theta} + c \frac{\partial(\delta P)}{\partial \zeta} n_{\zeta} \right) d\Gamma
\end{aligned}$$

در اینجا n_{θ}, n_{ζ} مؤلفه های بردار یکه عمود بر Γ می باشد. انتگرال مرزی آخر در عبارت فوق به علت اینکه شرایط مرزی اساسی^۱ (EBC) هستند، برابر صفر است.

حل تقریبی برای یک المان به صورت زیر می باشد:

$$\delta P^e = \sum_{j=1}^{NEN} d_j^e \varphi_j^e(\theta, \zeta) \quad (13-4)$$

که در اینجا d_j^e مقادیر گره ای و φ_j^e توابع شکل هستند. برای المان های مثلثی خطی (شکل ۴-۱) $NEN = 3$ است.



3-node triangular
element
 $NEN = 3$

شکل ۴-۱. المان مثلثی

^۱ Essential Boundary Condition

برای معادله i ام المان e ، با جاگذاری حل تقریبی و با در نظر گرفتن $v = \varphi_i^e$ داریم:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} c \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sum_{j=1}^{NEN} d_j^e \varphi_j^e(\theta, \zeta) \right) \frac{\partial \varphi_i^e}{\partial \theta} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\sum_{j=1}^{NEN} d_j^e \varphi_j^e(\theta, \zeta) \right) \frac{\partial \varphi_i^e}{\partial \zeta} \right) d\Omega \\
 & = \int_{\Omega} \left(-\varphi_i^e a \left(\sum_{j=1}^{NEN} d_j^e \varphi_j^e(\theta, \zeta) \right) \right. \\
 & \quad - \varphi_i^e b \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sum_{j=1}^{NEN} d_j^e \varphi_j^e(\theta, \zeta) \right) \\
 & \quad \left. - \varphi_i^e g \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\sum_{j=1}^{NEN} d_j^e \varphi_j^e(\theta, \zeta) \right) + f \varphi_i^e \right) d\Omega
 \end{aligned} \tag{۱۴-۴}$$

پس از مرتب کردن معادله ی فوق داریم:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^{NEN} \left[\int_{\Omega} \left\{ c \left(\frac{\partial \varphi_j^e}{\partial \theta} \frac{\partial \varphi_i^e}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi_j^e}{\partial \zeta} \frac{\partial \varphi_i^e}{\partial \zeta} \right) + a \varphi_i^e \varphi_j^e + b \varphi_i^e \frac{\partial \varphi_j^e}{\partial \theta} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + g \varphi_i^e \frac{\partial \varphi_j^e}{\partial \zeta} \right\} d\Omega \right] d_j^e = \int_{\Omega} (f \varphi_i^e) d\Omega
 \end{aligned} \tag{۱۵-۴}$$

با معرفی ماتریس های زیر داریم:

$$\hat{K}_{ij}^e = \int_{\Omega} c \left(\frac{\partial \varphi_j^e}{\partial \theta} \frac{\partial \varphi_i^e}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi_j^e}{\partial \zeta} \frac{\partial \varphi_i^e}{\partial \zeta} \right) d\Omega \tag{۱۶-۴}$$

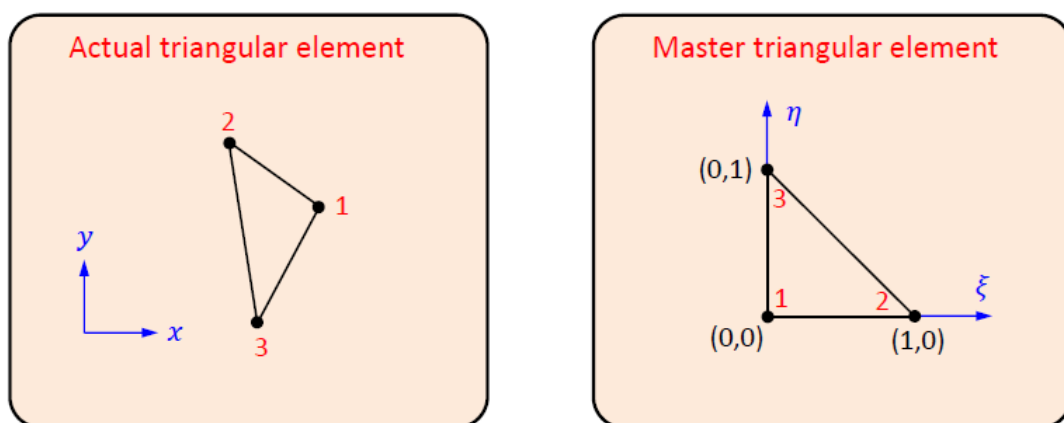
$$\hat{M}_{ij}^e = \int_{\Omega} a \varphi_i^e \varphi_j^e d\Omega \quad ; \quad \hat{N}_{ij}^e = \int_{\Omega} b \varphi_i^e \frac{\partial \varphi_j^e}{\partial \theta} d\Omega$$

$$\hat{S}_{ij}^e = \int_{\Omega} g \varphi_i^e \frac{\partial \varphi_j^e}{\partial \zeta} d\Omega \quad ; \quad \hat{F}_i^e = \int_{\Omega} f \varphi_i^e d\Omega$$

سیستم المانی $NEN \times NEN$ برابر است با:

$$([\hat{K}^e] + [\hat{M}^e] + [\hat{N}^e] + [\hat{S}^e])\{d^e\} = \{\hat{F}^e\} \quad (۱۷-۴)$$

برای محاسبه ی این انتگرال ها از المان ایزوپارامتریک مثلثی (شکل ۲-۴) استفاده می شود و توابع شکل برحسب مختصات المان ایزوپارامتریک نوشته می شوند.



شکل ۲-۴. المان مثلثی ایزوپارامتریک

۴-۱-۲- المان ایزوپارامتریک مثلثی دو بعدی

المان ایزوپارامتریک مثلثی، یک المان با مساحتی برابر با 0.5 است. گره های آن در خلاف جهت عقربه های ساعت شماره گذاری می شوند و از گره (0,0) شروع می شود.

توابع شکل برای المان ایزوپارامتریک مثلثی به صورت زیر می باشند:

$$\varphi_1 = 1 - \xi - \eta$$

$$\varphi_2 = \xi$$

$$\varphi_3 = \eta$$

(۱۸-۴)

۴-۱-۳- تبدیل ژاکوبین

مشتقات $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}$ که در انتگرال ها ظاهر می شود، بایستی برحسب $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}$ نوشته شوند، که این امر

مستلزم تبدیل مختصات مابین (θ, ζ) و (ξ, η) است.

بنابراین ماتریس ژاکوبین به صورت زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} &= \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} &= \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \end{aligned} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} & \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \eta} & \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \end{pmatrix}$$

برای محاسبه ی انتگرال ها به معکوس ماتریس ژاکوبین نیاز داریم:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} & \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \xi}{\partial \zeta} & \frac{\partial \eta}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \end{pmatrix}$$

جهت محاسبه ی معکوس ماتریس ژاکوبین، ابتدا ماتریس ژاکوبین را بدست می آوریم و سپس آن را

معکوس می کنیم:

$$[J^e] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} & \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \eta} & \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \theta_j^e \frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi} & \sum \zeta_j^e \frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi} \\ \sum \theta_j^e \frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta} & \sum \zeta_j^e \frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1^e & \zeta_1^e \\ \theta_2^e & \zeta_2^e \\ \theta_3^e & \zeta_3^e \end{bmatrix}$$

با توجه به توابع شکل المان ایزوپارامتریک مثلثی داریم:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین معکوس ماتریس ژاکوبین به صورت زیر بدست می آید:

$$[J^e]^{-1} = \frac{1}{|J^e|} \begin{bmatrix} J_{22}^e & -J_{12}^e \\ -J_{21}^e & J_{11}^e \end{bmatrix}, \quad |J^e| = J_{11}^e J_{22}^e - J_{12}^e J_{21}^e$$

حال به ارزیابی انتگرال ها می پردازیم:

$$K_{ij}^e = \int_{\Omega} c \left(\frac{\partial \varphi_j^e}{\partial \theta} \frac{\partial \varphi_i^e}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi_j^e}{\partial \zeta} \frac{\partial \varphi_i^e}{\partial \zeta} \right) d\Omega$$

در اینجا $c = P_0 H^3 Q$ تابعی از (θ, ζ) است که با استفاده از روابط $\theta = \sum \theta_j^e \varphi_j$ و $\zeta = \sum \zeta_j^e \varphi_j$ بر حسب مختصات (ξ, η) نوشته می شود.

و مشتقات توابع شکل به صورت زیر بدست می آیند:

$$\frac{\partial \varphi^e}{\partial \theta} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} (J^e)_{11}^{-1} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} (J^e)_{12}^{-1}$$

$$\frac{\partial \varphi^e}{\partial \zeta} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \zeta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \zeta} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} (J^e)_{21}^{-1} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} (J^e)_{22}^{-1}$$

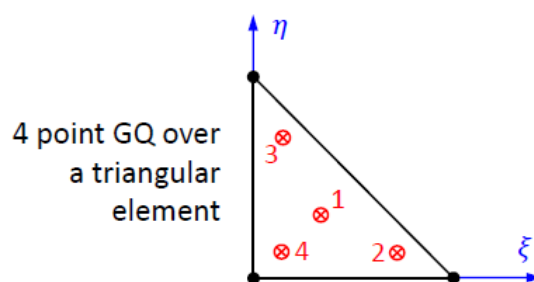
همچنین داریم:

$$\int_{\Omega^e} d\theta d\zeta = \int_{\Omega_{master}^e} |J^e| d\xi d\eta$$

۴-۱-۴ روش انتگرال گیری گوس

برای یک المان ایزوپارامتریک مثلثی حدود المان برای مختصات ξ و η به ترتیب بین $[0,1]$ و $[\xi - 0,1]$ است و نقاط گوسی در شکل ۴-۳ نشان داده شده است.

2D GQ Integration Over Triangles			
NGP	ξ_k	η_k	W_k
1	1/3	1/3	0.5
3	0.5	0.0	1/6
	0.0	0.5	1/6
	0.5	0.5	1/6
4	1/3	1/3	- 27/96
	0.6	0.2	25/96
	0.2	0.6	25/96
	0.2	0.2	25/96



شکل ۳-۴. نقاط گوسی در المان مثلثی

$$I = \int_{\Omega^e} f d\xi d\eta = \int_{\xi=0}^1 \int_{\eta=0}^{1-\xi} f d\xi d\eta$$

$$I = \sum_{k=1}^{NGP} f(\xi_k, \eta_k) W_k$$

در اینجا NGP برابر با تعداد نقاط گوسی، ξ_k, η_k مختصات نقاط گوسی در المان ایزوپارامتریک و W_k ضریب می باشد.

بنابراین ارزیابی انتگرال ها به صورت زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned}
\hat{K}_{ij}^e &= \int_{\Omega} c(\xi, \eta) \left[\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi} (J^e)_{11}^{-1} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta} (J^e)_{12}^{-1} \right) \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} (J^e)_{11}^{-1} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} (J^e)_{12}^{-1} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi} (J^e)_{21}^{-1} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta} (J^e)_{22}^{-1} \right) \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} (J^e)_{21}^{-1} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} (J^e)_{22}^{-1} \right) \right] |J^e| d\xi d\eta \\
&= \sum_{k=1}^{NGP} c(\xi_k, \eta_k) \left[\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi} (J^e)_{11}^{-1} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta} (J^e)_{12}^{-1} \right) \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} (J^e)_{11}^{-1} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} (J^e)_{12}^{-1} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi} (J^e)_{21}^{-1} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta} (J^e)_{22}^{-1} \right) \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} (J^e)_{21}^{-1} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} (J^e)_{22}^{-1} \right) \right] |J^e| W_k
\end{aligned}$$

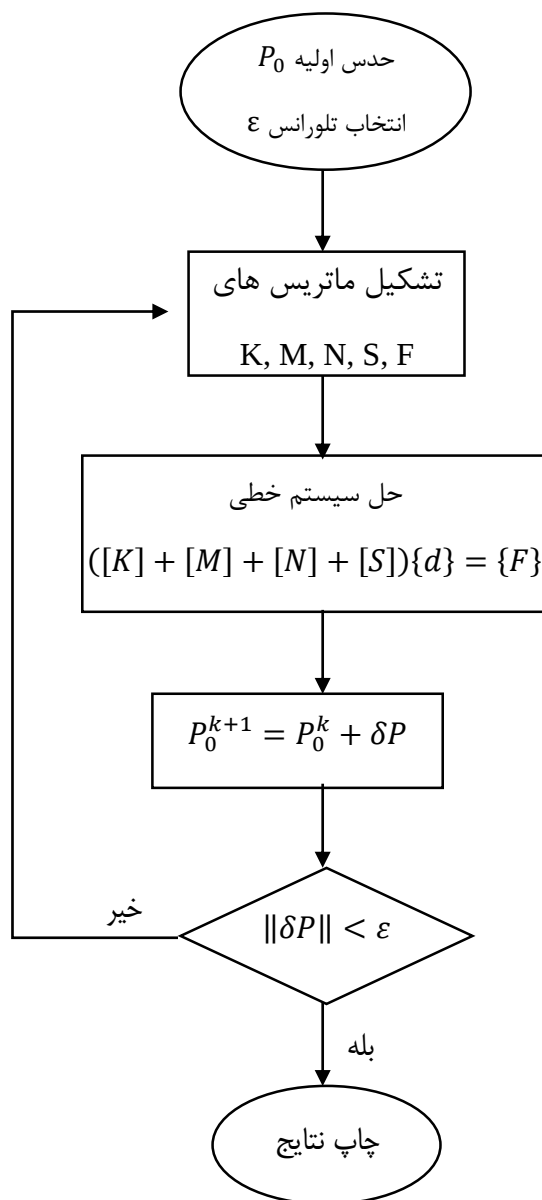
$$\hat{M}_{ij}^e = \int_{\Omega} a(\xi, \eta) \varphi_i \varphi_j |J^e| d\xi d\eta = \sum_{k=1}^{NGP} a(\xi_k, \eta_k) \varphi_i \varphi_j |J^e| W_k$$

$$\begin{aligned}
\hat{N}_{ij}^e &= \int_{\Omega} b(\xi, \eta) \varphi_i \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi} (J^e)_{11}^{-1} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta} (J^e)_{12}^{-1} \right) |J^e| d\xi d\eta \\
&= \sum_{k=1}^{NGP} b(\xi_k, \eta_k) \varphi_i \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi} (J^e)_{11}^{-1} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta} (J^e)_{12}^{-1} \right) |J^e| W_k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{S}_{ij}^e &= \int_{\Omega} g(\xi, \eta) \varphi_i \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi} (J^e)_{21}^{-1} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta} (J^e)_{22}^{-1} \right) |J^e| d\xi d\eta \\
&= \sum_{k=1}^{NGP} g(\xi_k, \eta_k) \varphi_i \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi} (J^e)_{21}^{-1} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta} (J^e)_{22}^{-1} \right) |J^e| W_k
\end{aligned}$$

$$\hat{F}_i^e = \int_{\Omega} f(\xi, \eta) \varphi_i |J^e| d\xi d\eta = \sum_{k=1}^{NGP} f(\xi_k, \eta_k) \varphi_i |J^e| W_k$$

پس از بدست آوردن انتگرال ها برای هر المان، نوبت به اسمبل کردن آن ها می رسد، پس از اسمبل کردن و حل معادله ی ماتریسی، مقادیر گره ای مربوط به متغیر δP بدست می آید که با استفاده از روش تکرار نیوتن این فرایند آنقدر تکرار می شود که مقادیر متغیر δP به صفر نزدیک شوند. الگوریتم حل در شکل ۴-۴ نشان داده شده است.



شکل ۴-۴. الگوریتم تعیین فشار در حالت ماندگار

۴-۲- تعیین موقعیت تعادل حالت ماندگار

موقعیت تعادلی مرکز محور را می توان با حل معادلات زیر بدست آورد:

$$\begin{cases} F_{X0}(X_{j0}, Y_{j0}) = 0 \\ F_{Y0}(X_{j0}, Y_{j0}) - W_0 = 0 \end{cases} \quad (۱۹-۴)$$

با حدس موقعیت تعادل استاتیکی محور، معادله ی فوق با روش تکرار زیر حل می شود:

$$\begin{bmatrix} X_{j0} \\ Y_{j0} \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} X_{j0} \\ Y_{j0} \end{bmatrix}_k - \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{X0}}{\partial X_{j0}} & \frac{\partial F_{Y0}}{\partial X_{j0}} \\ \frac{\partial F_{X0}}{\partial Y_{j0}} & \frac{\partial F_{Y0}}{\partial Y_{j0}} \end{bmatrix}_k^{-1} \begin{bmatrix} F_{X0} \\ F_{Y0} - W_0 \end{bmatrix}_k \quad (۲۰-۴)$$

که در اینجا F_{X0} و F_{Y0} به صورت زیر می باشند:

$$F_{X0} = F_{Px} + F_{\tau x} \quad (۲۱-۴)$$

$$F_{Y0} = F_{Py} + F_{\tau y}$$

این نیروها با توجه به توزیع فشار بدست آمده به صورت زیر تعیین می شوند:

$$\begin{aligned} F_{Px} &= \frac{f_{px}}{p_a R^2} = -\frac{1}{p_a R^2} \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} p \cos \theta \, R d\theta dz \\ &= -\int_{-L/D}^{L/D} \int_0^{2\pi} P \cos \theta \, d\theta d\zeta \\ F_{Py} &= \frac{f_{py}}{p_a R^2} = -\frac{1}{p_a R^2} \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} p \sin \theta \, R d\theta dz \\ &= -\int_{-L/2R}^{L/2R} \int_0^{2\pi} P \sin \theta \, d\theta d\zeta \\ F_{\tau x} &= \frac{f_{\tau x}}{p_a R^2} = \frac{1}{p_a R^2} \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} \tau \sin \theta \, R d\theta dz \\ &= \frac{1}{p_a} \int_{-L/D}^{L/D} \int_0^{2\pi} \tau \sin \theta \, d\theta d\zeta \end{aligned} \quad (۲۲-۴)$$

$$F_{\tau y} = \frac{f_{\tau y}}{p_a R^2} = - \frac{1}{p_a R^2} \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} \tau \cos \theta R d\theta dz$$

$$= - \frac{1}{p_a} \int_{-L/D}^{L/D} \int_0^{2\pi} \tau \cos \theta d\theta d\zeta$$

برای بدست آوردن تنش برشی τ از رابطه ی زیر استفاده می شود [۴۹]:

$$\tau = \frac{Hcp_a}{2R} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{\mu\omega R}{cH} \quad (۲۳-۴)$$

بنابراین مؤلفه های ماتریس ژاکوبین به صورت زیر بدست می آیند:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_{X0}}{\partial X_{j0}} & \frac{\partial F_{Y0}}{\partial X_{j0}} \\ \frac{\partial F_{X0}}{\partial Y_{j0}} & \frac{\partial F_{Y0}}{\partial Y_{j0}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{Px}}{\partial X_{j0}} + \frac{\partial F_{\tau x}}{\partial X_{j0}} & \frac{\partial F_{py}}{\partial X_{j0}} + \frac{\partial F_{\tau y}}{\partial X_{j0}} \\ \frac{\partial F_{Px}}{\partial Y_{j0}} + \frac{\partial F_{\tau x}}{\partial Y_{j0}} & \frac{\partial F_{py}}{\partial Y_{j0}} + \frac{\partial F_{\tau y}}{\partial Y_{j0}} \end{bmatrix} \quad (۲۴-۴)$$

$$= \begin{bmatrix} \int_{-L/2R}^{L/2R} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\partial P}{\partial X_{j0}} \cos \theta + \frac{1}{p_a} \frac{\partial \tau}{\partial X_{j0}} \sin \theta \right) d\theta d\zeta & \int_{-L/2R}^{L/2R} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\partial P}{\partial X_{j0}} \sin \theta - \frac{1}{p_a} \frac{\partial \tau}{\partial X_{j0}} \cos \theta \right) d\theta d\zeta \\ \int_{-L/2R}^{L/2R} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\partial P}{\partial Y_{j0}} \cos \theta + \frac{1}{p_a} \frac{\partial \tau}{\partial Y_{j0}} \sin \theta \right) d\theta d\zeta & \int_{-L/2R}^{L/2R} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\partial P}{\partial Y_{j0}} \sin \theta - \frac{1}{p_a} \frac{\partial \tau}{\partial Y_{j0}} \cos \theta \right) d\theta d\zeta \end{bmatrix} \quad (۲۵-۴)$$

برای تعیین ترم های $\frac{\partial \tau}{\partial X_{j0}}$ و $\frac{\partial \tau}{\partial Y_{j0}}$ از رابطه ی تنش برشی استفاده می شود:

$$\frac{\partial \tau}{\partial X_{j0}} = (-\cos \theta) \left(\frac{cp_a}{2R} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial P}{\partial X_{j0}} \right) \left(\frac{Hcp_a}{2R} \right) + \left(\frac{\mu\omega R}{cH^2} \right) \cos \theta \quad (۲۶-۴)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial Y_{j0}} = (-\sin \theta) \left(\frac{cp_a}{2R} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial P}{\partial Y_{j0}} \right) \left(\frac{Hcp_a}{2R} \right) + \left(\frac{\mu\omega R}{cH^2} \right) \sin \theta$$

همان طور که مشخص است برای تعیین مؤلفه های ماتریس ژاکوبین، ابتدا نیاز به تعیین $\frac{\partial P}{\partial Y_{j0}}$ و $\frac{\partial P}{\partial X_{j0}}$

است. بدین منظور از طرفین معادله ی رینولدز نسبت به X_{j0}, Y_{j0} مشتق گیری می شود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X_{j0}} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(PH^3 Q \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(PH^3 Q \frac{\partial P}{\partial \zeta} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial X_{j0}} \left(\Lambda P \frac{\partial H}{\partial \theta} \right) \\ = \frac{\partial}{\partial X_{j0}} \left(\Lambda H \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (۲۷-۴)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial Y_{j0}} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(PH^3 Q \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(PH^3 Q \frac{\partial P}{\partial \zeta} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial Y_{j0}} \left(\Lambda P \frac{\partial H}{\partial \theta} \right) \\ = \frac{\partial}{\partial Y_{j0}} \left(\Lambda H \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) \end{aligned}$$

پس از انجام محاسبات و ساده سازی و با در نظر گرفتن $u = \frac{\partial P}{\partial X_{j0}}, \frac{\partial P}{\partial Y_{j0}}$ معادلات فوق به صورت زیر

تبدیل می شوند:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (PH^3 Q \nabla u) + u \left(3QH^2 \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{\partial P}{\partial \theta} + H^3 Q \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} + H^3 Q \frac{\partial^2 P}{\partial \zeta^2} - \Lambda \frac{\partial H}{\partial \theta} \right) \\ + \frac{\partial u}{\partial \theta} \left(H^3 Q \frac{\partial P}{\partial \theta} - \Lambda H \right) + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \left(H^3 Q \frac{\partial P}{\partial \zeta} \right) \\ = -3QH^2 \frac{\partial H}{\partial X_{j0}} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{\partial P}{\partial \zeta} \frac{\partial P}{\partial \zeta} \right) - 6PQH \frac{\partial H}{\partial X_{j0}} \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{\partial P}{\partial \theta} \\ + \left(\Lambda P - 3PQH^2 \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{\partial X_{j0}} \left(\frac{\partial H}{\partial \theta} \right) \\ - 3PH^2 Q \frac{\partial H}{\partial X_{j0}} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \zeta^2} \right) + \Lambda \frac{\partial H}{\partial X_{j0}} \frac{\partial P}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (۲۸-۴)$$

$$\begin{aligned}
& \nabla \cdot (PH^3Q\nabla u) + u \left(3QH^2 \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{\partial P}{\partial \theta} + H^3Q \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} + H^3Q \frac{\partial^2 P}{\partial \zeta^2} - \Lambda \frac{\partial H}{\partial \theta} \right) \\
& + \frac{\partial u}{\partial \theta} \left(H^3Q \frac{\partial P}{\partial \theta} - \Lambda H \right) + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \left(H^3Q \frac{\partial P}{\partial \zeta} \right) \\
& = -3QH^2 \frac{\partial H}{\partial Y_{j_0}} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{\partial P}{\partial \zeta} \frac{\partial P}{\partial \zeta} \right) - 6PQH \frac{\partial H}{\partial Y_{j_0}} \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{\partial P}{\partial \theta} \\
& + \left(\Lambda P - 3PQH^2 \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{\partial Y_{j_0}} \left(\frac{\partial H}{\partial \theta} \right) \\
& - 3PH^2Q \frac{\partial H}{\partial Y_{j_0}} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \zeta^2} \right) + \Lambda \frac{\partial H}{\partial Y_{j_0}} \frac{\partial P}{\partial \theta}
\end{aligned}$$

با در نظر گرفتن ضرایب به صورت زیر داریم:

$$\alpha = PH^3Q$$

$$\beta = 3QH^2 \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{\partial P}{\partial \theta} + H^3Q \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} + H^3Q \frac{\partial^2 P}{\partial \zeta^2} - \Lambda \frac{\partial H}{\partial \theta}$$

(۲۹-۴)

$$\gamma = H^3Q \frac{\partial P}{\partial \theta} - \Lambda H$$

$$\chi = H^3Q \frac{\partial P}{\partial \zeta}$$

$$\begin{aligned}
f_1 & = -3QH^2 \frac{\partial H}{\partial X_{j_0}} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{\partial P}{\partial \zeta} \frac{\partial P}{\partial \zeta} \right) - 6PQH \frac{\partial H}{\partial X_{j_0}} \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{\partial P}{\partial \theta} \\
& + \left(\Lambda P - 3PQH^2 \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{\partial X_{j_0}} \left(\frac{\partial H}{\partial \theta} \right) \\
& - 3PH^2Q \frac{\partial H}{\partial X_{j_0}} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \zeta^2} \right) + \Lambda \frac{\partial H}{\partial X_{j_0}} \frac{\partial P}{\partial \theta}
\end{aligned}$$

(۳۰-۴)

$$\begin{aligned}
f_2 & = -3QH^2 \frac{\partial H}{\partial Y_{j_0}} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{\partial P}{\partial \zeta} \frac{\partial P}{\partial \zeta} \right) - 6PQH \frac{\partial H}{\partial Y_{j_0}} \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{\partial P}{\partial \theta} \\
& + \left(\Lambda P - 3PQH^2 \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{\partial Y_{j_0}} \left(\frac{\partial H}{\partial \theta} \right) \\
& - 3PH^2Q \frac{\partial H}{\partial Y_{j_0}} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \zeta^2} \right) + \Lambda \frac{\partial H}{\partial Y_{j_0}} \frac{\partial P}{\partial \theta}
\end{aligned}$$

بنابراین معادلات به شکل ساده ی زیر تبدیل می شوند:

$$\nabla \cdot (\alpha \nabla u) + \beta u + \gamma \frac{\partial u}{\partial \theta} + \chi \frac{\partial u}{\partial \zeta} = f_1 \quad (31-4)$$

$$\nabla \cdot (\alpha \nabla u) + \beta u + \gamma \frac{\partial u}{\partial \theta} + \chi \frac{\partial u}{\partial \zeta} = f_2$$

معادلات فوق خطی هستند و با استفاده از روش اجزا محدود اقدام به حل این معادلات می نماییم. به علت شباهت هر دو معادله، جزئیات حل برای معادله ی اول ذکر می گردد.

شرایط مرزی برای معادلات (31-4) به صورت زیر در نظر گرفته می شوند:

$$u(\theta_1, \zeta) = 0$$

$$u(\theta_2, \zeta) = 0 \quad (32-4)$$

$$u\left(\theta, \pm \frac{L}{2R}\right) = 0$$

فرم ضعیف برای معادله ی اول (31-4) به صورت زیر می باشد:

$$\int_{\Omega} \alpha \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial v}{\partial \zeta} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \left(-v\beta u - v\gamma \frac{\partial u}{\partial \theta} - v\chi \frac{\partial u}{\partial \zeta} + f_1 v \right) d\Omega \quad (33-4)$$

حل تقریبی برای یک المان به صورت زیر می باشد:

$$u^e = \sum_{j=1}^{NEN} u_j^e \varphi_j^e(\theta, \zeta) \quad (34-4)$$

که در اینجا u_j^e مقادیر گره ای و φ_j^e توابع شکل هستند. برای المان های مثلثی خطی $NEN = 3$ است.

پس از جاگذاری حل تقریبی و مرتب کردن معادله داریم:

$$\sum_{j=1}^{NEN} \left[\int_{\Omega} \left\{ \alpha \left(\frac{\partial \varphi_j^e}{\partial \theta} \frac{\partial \varphi_i^e}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi_j^e}{\partial \zeta} \frac{\partial \varphi_i^e}{\partial \zeta} \right) + \beta \varphi_i^e \varphi_j^e + \gamma \varphi_i^e \frac{\partial \varphi_j^e}{\partial \theta} + \chi \varphi_i^e \frac{\partial \varphi_j^e}{\partial \zeta} \right\} d\Omega \right] u_j^e = \int_{\Omega} (f_1 \varphi_i^e) d\Omega \quad (35-4)$$

با معرفی ماتریس های زیر داریم:

$$\begin{aligned}\tilde{K}_{ij}^e &= \int_{\Omega} \alpha \left(\frac{\partial \varphi_j^e}{\partial \theta} \frac{\partial \varphi_i^e}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi_j^e}{\partial \zeta} \frac{\partial \varphi_i^e}{\partial \zeta} \right) d\Omega \\ \tilde{M}_{ij}^e &= \int_{\Omega} \beta \varphi_i^e \varphi_j^e d\Omega \quad ; \quad \tilde{N}_{ij}^e = \int_{\Omega} \gamma \varphi_i^e \frac{\partial \varphi_j^e}{\partial \theta} d\Omega \\ \tilde{S}_{ij}^e &= \int_{\Omega} \chi \varphi_i^e \frac{\partial \varphi_j^e}{\partial \zeta} d\Omega \quad ; \quad \tilde{F}_i^e = \int_{\Omega} f_1 \varphi_i^e d\Omega\end{aligned}\tag{۳۶-۴}$$

سیستم المانی $NEN \times NEN$ برابر است با:

$$([\tilde{K}^e] + [\tilde{M}^e] + [\tilde{N}^e] + [\tilde{S}^e])\{u^e\} = \{\tilde{F}^e\}\tag{۳۷-۴}$$

برای محاسبه ی این انتگرال ها از المان ایزوپارامتریک مثلثی استفاده می شود و توابع شکل برحسب مختصات المان ایزوپارامتریک نوشته می شوند.

بنابراین با توجه به توابع شکل المان ایزوپارامتریک مثلثی و روش انتگرال گیری گوس، ارزیابی انتگرال ها به صورت زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned}\tilde{K}_{ij}^e &= \int_{\Omega} \alpha(\xi, \eta) \left[\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi} (J^e)_{11}^{-1} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta} (J^e)_{12}^{-1} \right) \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} (J^e)_{11}^{-1} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} (J^e)_{12}^{-1} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi} (J^e)_{21}^{-1} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta} (J^e)_{22}^{-1} \right) \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} (J^e)_{21}^{-1} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} (J^e)_{22}^{-1} \right) \right] |J^e| d\xi d\eta \\ &= \sum_{k=1}^{NGP} \alpha(\xi_k, \eta_k) \left[\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi} (J^e)_{11}^{-1} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta} (J^e)_{12}^{-1} \right) \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} (J^e)_{11}^{-1} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} (J^e)_{12}^{-1} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi} (J^e)_{21}^{-1} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta} (J^e)_{22}^{-1} \right) \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} (J^e)_{21}^{-1} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} (J^e)_{22}^{-1} \right) \right] |J^e| W_k\end{aligned}$$

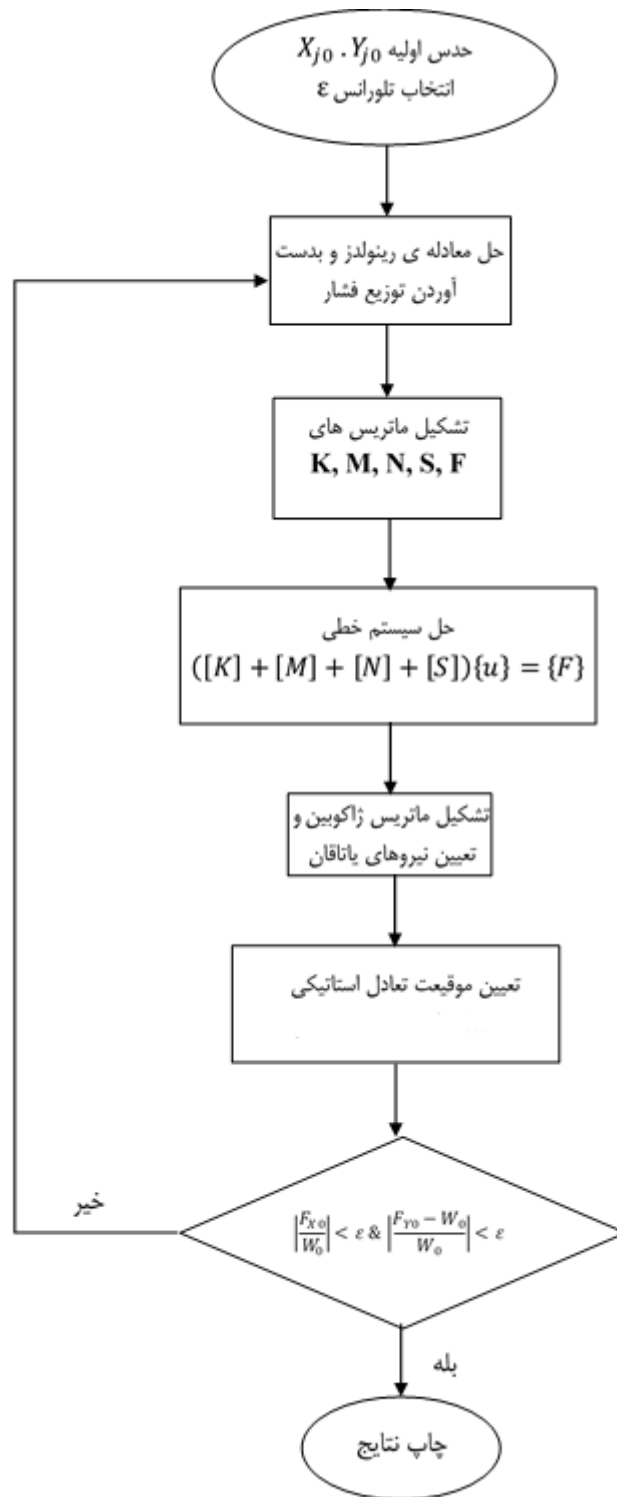
$$\tilde{M}_{ij}^e = \int_{\Omega} \beta(\xi, \eta) \varphi_i \varphi_j |J^e| d\xi d\eta = \sum_{k=1}^{NGP} \beta(\xi_k, \eta_k) \varphi_i \varphi_j |J^e| W_k$$

$$\begin{aligned}
\tilde{N}_{ij}^e &= \int_{\Omega} \gamma(\xi, \eta) \varphi_i \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi} (J^e)_{11}^{-1} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta} (J^e)_{12}^{-1} \right) |J^e| d\xi d\eta \\
&= \sum_{k=1}^{NGP} \gamma(\xi_k, \eta_k) \varphi_i \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi} (J^e)_{11}^{-1} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta} (J^e)_{12}^{-1} \right) |J^e| W_k \\
\tilde{S}_{ij}^e &= \int_{\Omega} \chi(\xi, \eta) \varphi_i \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi} (J^e)_{21}^{-1} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta} (J^e)_{22}^{-1} \right) |J^e| d\xi d\eta \\
&= \sum_{k=1}^{NGP} \chi(\xi_k, \eta_k) \varphi_i \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi} (J^e)_{21}^{-1} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta} (J^e)_{22}^{-1} \right) |J^e| W_k \\
\tilde{F}_i^e &= \int_{\Omega} f_1(\xi, \eta) \varphi_i |J^e| d\xi d\eta = \sum_{k=1}^{NGP} f_1(\xi_k, \eta_k) \varphi_i |J^e| W_k
\end{aligned}$$

با اسمبل کردن معادلات و حل معادله ی ماتریسی کل می توان مقادیر $u = \frac{\partial P}{\partial X_{j0}}, \frac{\partial P}{\partial Y_{j0}}$ را بدست

آورد. فرایند کلی تعیین موقیت تعادل حالت ماندگار روتور در داخل یاتاقان گازی در شکل ۴-۵ نشان

داده شده است.



شکل ۴-۵. الگوریتم تعیین موقعیت تعادل مرکز روتور در حالت ماندگار

۴-۳- روش حل معادله MGL در حالت دینامیکی

حل معادله ی MGL در حالت دینامیکی با استفاده از روش المان محدود با توجه به مراحل زیر بدست می آید:

$$2\Lambda H \frac{\partial P}{\partial \tau} - \nabla \cdot (PH^3 Q \nabla P) + \Lambda U \frac{\partial}{\partial \theta} (PH) + 2\Lambda P \frac{\partial H}{\partial \tau} = 0 \quad (۴-۳۸)$$

با گسسته سازی مکان داریم:

$$P = \sum_{j=1}^{n_p} P_j(\tau) N_j \quad (۴-۳۹)$$

در اینجا n_p برابر با تعداد گره ها می باشد. با اعمال روش گالرکین داریم:

$$\begin{aligned} \iint_{A^e} \left(2\Lambda H \frac{\partial P}{\partial \tau} - \nabla \cdot (PH^3 Q \nabla P) + \left(\Lambda U \frac{\partial H}{\partial \theta} + 2\Lambda \frac{\partial H}{\partial \tau} \right) P \right. \\ \left. + \Lambda U H \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) N_i^e d\theta d\zeta = 0 \end{aligned} \quad (۴-۴۰)$$

با انجام محاسبات ریاضی داریم:

$$\begin{aligned} M &= \iint_{A^e} 2\Lambda H N_j^e N_i^e d\theta d\zeta \\ \{F\} &= \iint_{A^e} \left\{ -PH^3 Q \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \frac{\partial N_i^e}{\partial \theta} + \frac{\partial P}{\partial \zeta} \frac{\partial N_i^e}{\partial \zeta} \right) - \left(\Lambda U \frac{\partial H}{\partial \theta} + 2\Lambda \frac{\partial H}{\partial \tau} \right) P N_i^e \right. \\ &\quad \left. + (\Lambda U H P) \frac{\partial N_i^e}{\partial \theta} \right\} d\theta d\zeta \\ \{Q\} &= \int_{\partial A^e} PH^3 Q \frac{\partial P}{\partial \zeta} N_i^e d\theta + \int_{\partial A^e} \left\{ PH^3 Q \frac{\partial P}{\partial \theta} - \Lambda U P H \right\} N_i^e d\zeta \end{aligned} \quad (۴-۴۱)$$

معادله ی ماتریسی به صورت زیر بدست می آید:

$$[M]\{\dot{P}\} = \{F\} + \{Q\} \quad (۴-۴۲)$$

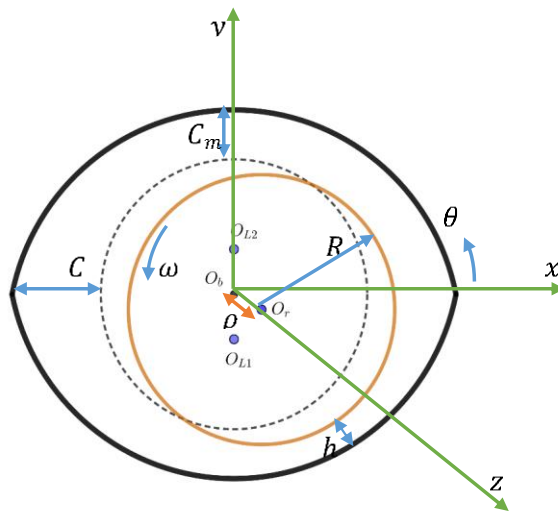
۴-۴- روش حل معادلات دینامیکی روتور

در حالت دینامیکی، معادلات حرکت روتور به صورت زیر هستند:

$$m\ddot{x}_j = f_{ex} + f_{gx} + f_{fx} + m\rho\omega^2 \cos \omega t \quad (۴۳-۴)$$

$$m\ddot{y}_j = f_{ey} + f_{gy} + f_{fy} + m\rho\omega^2 \sin \omega t$$

که f_{ex} و f_{ey} مؤلفه های نیروی خارجی، f_{gx} و f_{gy} مؤلفه های نیروی فیلم گاز و f_{fx} و f_{fy} مؤلفه های نیروی اصطکاک ویسکوز هستند. ρ خروج از مرکزی روتور (فاصله مابین مرکز هندسی روتور تا مرکز جرم روتور) و (x_j, y_j) موقعیت مرکز روتور است. جزئیات هندسی میکرویاتاقان گازی غیرمدور دو لوبی در شکل ۶-۴ نشان داده شده است.



شکل ۶-۴. جزئیات هندسی میکرویاتاقان گازی غیر مدور دو لوبی

پارامترهای بدون بعد را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$X_j = \frac{x_j}{C_m} ; Y_j = \frac{y_j}{C_m} ; \tilde{\rho} = \frac{m\rho\omega^2}{p_a R^2} ; \bar{M} = \frac{mC_m\omega^2}{p_a R^2} \quad (۴۴-۴)$$

$$F_e = \frac{f_e}{p_a R^2} ; F_g = \frac{f_g}{p_a R^2} ; F_f = \frac{f_f}{p_a R^2}$$

با استفاده از پارامترهای فوق، فرم بدون بعد معادله دینامیک روتور به صورت زیر بدست می آید:

$$\bar{M}X_j'' = F_{ex} + F_{gx} + F_{fx} + \tilde{\rho} \cos \tau \quad (45-4)$$

$$\bar{M}Y_j'' = F_{ey} + F_{gy} + F_{fy} + \tilde{\rho} \sin \tau$$

نیروی فیلم گاز بدون بعد، F_g می تواند به صورت زیر محاسبه شود:

$$\begin{cases} F_{gx} = - \int_{-\frac{L}{2R}}^{\frac{L}{2R}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} P \cos \theta \, d\theta d\zeta \\ F_{gy} = - \int_{-\frac{L}{2R}}^{\frac{L}{2R}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} P \sin \theta \, d\theta d\zeta \end{cases} \quad (46-4)$$

انتگرال های دوگانه ی فوق با استفاده از روش های عددی محاسبه و نیروی فیلم گاز بدست می آید.

نیروی اصطکاک ویسکوز بدون بعد، F_f می تواند به صورت زیر محاسبه شود:

$$\begin{cases} F_{fx} = \frac{1}{p_a} \int_{-\frac{L}{2R}}^{\frac{L}{2R}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau_h \sin \theta \, d\theta d\zeta \\ F_{fy} = - \frac{1}{p_a} \int_{-\frac{L}{2R}}^{\frac{L}{2R}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau_h \cos \theta \, d\theta d\zeta \end{cases} \quad (47-4)$$

پارامتر τ_h در معادلات فوق، تنش برشی در سطح روتور است که در اثر ویسکوزیته گاز ایجاد می شود،

که به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\tau_h = \frac{HC_m p_a}{2R} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{\mu \omega R}{C_m H} \quad (48-4)$$

معادله فوق از قانون ویسکوزیته نیوتن استخراج شده است.

با تعریف متغیرهای حالت به صورت

$$S_1 = X_j ; \quad S_2 = Y_j ; \quad S_3 = V_x ; \quad S_4 = V_y \quad (49-4)$$

معادلات حرکت به فرم فضای حالت زیر تبدیل می شوند.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS_1}{d\tau} = S_3 \\ \frac{dS_2}{d\tau} = S_4 \\ \frac{dS_3}{d\tau} = \frac{F_{ex} + F_{gx} + F_{fx} + \tilde{\rho} \cos \tau}{M} \\ \frac{dS_4}{d\tau} = \frac{F_{ey} + F_{gy} + F_{fy} + \tilde{\rho} \sin \tau}{M} \end{array} \right. \quad (50-4)$$

روابط فوق معادلات مرتبه اول غیرخطی هستند.

۴-۵- روش حل عددی

معادله (۴-۳۸) یک معادله دیفرانسیلی پاره ای غیرخطی است که برای حل آن روش عددی به کار گرفته می شود تا بتوان آن را به صورت مسأله مقدار اولیه تبدیل کرد. لذا روش عددی اجزاء محدود برای رسیدن به چنین هدفی پیشنهاد می شود.

با گسسته سازی فشار به صورت

$$P = \sum_{j=1}^{n_p} P_j(\tau) N_j \quad (51-4)$$

در اینجا n_p تعداد گره ها، P_j مقادیر فشار در هر گره و N_j توابع شکل هستند و با اعمال روش گالرکین و ساده سازی عبارات معادله ی ماتریسی به صورت زیر بدست می آید:

$$[\bar{M}]\{\dot{P}\} = \{\bar{K}\} + \{\bar{A}\} + \{\bar{B}\} + \{\bar{Z}\} \quad (52-4)$$

که در آن، ماتریس $\bar{M}$ و بقیه بردارها به شکل زیر می باشند:

$$\begin{aligned}
\bar{M} &= \iint_{A^e} 2\Lambda H N_j^e N_i^e d\theta d\zeta \\
\bar{K} &= \iint_{A^e} P H^3 Q \nabla P \cdot \nabla N_i^e d\theta d\zeta \\
\bar{A} &= - \iint_{A^e} \left(\Lambda U \frac{\partial H}{\partial \theta} + 2\Lambda \frac{\partial H}{\partial \tau} \right) P N_i^e d\theta d\zeta \\
\bar{B} &= - \iint_{A^e} \Lambda U H \frac{\partial P}{\partial \theta} N_i^e d\theta d\zeta \\
\bar{Z} &= - \int_{\partial A} (P H^3 Q \nabla P) \cdot n N_i^e ds
\end{aligned} \tag{۵۳-۴}$$

در هر لحظه ای که وضعیت سینماتیکی محور مشخص شود، معادله (۵۲-۴) شامل دو متغیر $\bar{Z}_i, P_i$ می‌شود که باید تعیین شوند. در گره های داخلی ناحیه المان بندی شده، شار $\bar{Z}_i$ صفر است و P_i نامشخص می باشد. همچنین در گره های روی مرزهای خارجی ($\zeta = \pm \frac{L}{2R}$) و لبه های ابتدا و انتهای هر یک از لوب ها (θ_2^k, θ_1^k) ، P_i مشخص است و Z_i نامشخص می باشد. لذا معادله (۵۲-۴) به همان تعداد معادلات، مجهولات دارد که با کمک شرایط مرزی بدست می آیند. معادله (۵۲-۴) با استفاده از روش تکرار گوس سایدل به فرم زیر تبدیل می شود

$$\{\dot{P}\}_{n_f \times 1} = \{g\}_{n_f \times 1} \tag{۵۴-۴}$$

که در آن

$$g_i = g_i(P, S_1, S_2, S_3, S_4, \tau) \quad ; i = 1, 2, \dots, n_f \tag{۵۵-۴}$$

که در اینجا n_f برابر با تعداد المان ها می باشد. بنابراین مسأله در حالت دینامیکی به یک مسأله مقدار اولیه با معادلات زیر خلاصه می شود.

$$\frac{dS_i}{d\tau} = f_i(P, S_1, S_2, S_3, S_4, \tau) \quad ; \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (56-4)$$

$$\frac{dP_i}{d\tau} = g_i(P, S_1, S_2, S_3, S_4, \tau) \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n_f$$

که در لحظه $t = 0$ متغیرهای تعریف شده به صورت

$$S_1 = X_{j0} \quad ; \quad S_2 = Y_{j0} \quad ; \quad S_3 = S_4 = 0 \quad (57-4)$$

$$P = P_0$$

بیان می شوند. که X_{j0} و Y_{j0} موقعیت تعادل پایدار روتور و P_0 توزیع فشار داخل میکرو یاتاقان گازی در حالت یکنواخت است. با در نظر گرفتن این شرایط اولیه، معادلات (56-4) با استفاده از روش رانگ-کوتا مرتبه چهارم حل می شود و نتایج بدست آمده برای مرحله ی زمانی بعدی به عنوان شرایط اولیه در نظر گرفته خواهد شد. این فرایند تا رسیدن به زمان نهایی به همین صورت ادامه می یابد. در این تحقیق مرحله ی زمانی برابر با $\frac{\pi}{300}$ در نظر گرفته شده است [17] و جهت رسیدن به نتایج پایدار، پس از طی 1000 دور، نمودارهای دینامیکی جهت بررسی رفتار روتور در داخل میکرو یاتاقان گازی رسم شده اند.

فصل ۵ : نتایج و بحث

در این فصل ابتدا رفتار حالت ماندگار میکرویاتاقان های گازی غیر مدور بررسی می گردند و سپس رفتار آن ها در حالت دینامیکی در اثر افزایش دما و همچنین رفتار دینامیکی آن ها در اثر افزایش سرعت دورانی در دماهای بالا مورد بررسی قرار گرفته است.

۵-۱- میکرویاتاقان گازی غیرمدور دو لوبی

۵-۱-۱- بررسی رفتار حالت ماندگار

در این بخش، اثر دما و رقیق شدگی فیلم گاز بر روی مشخصه های حالت ماندگار میکرویاتاقان گازی غیرمدور دو لوبی بررسی شده است. به منظور تعیین پروفیل فشار، مدل MGL با استفاده از روش اجزاء محدود حل شده است و اثر دما و رقیق شدگی فیلم گاز بر روی فشار، ظرفیت حمل بار، زاویه انحراف، نسبت خروج از مرکزی و اتلاف توان اصطکاکی مطالعه شده است. نتایج نشان می دهد که اثر دما و رقیق شدگی فیلم گاز بر روی مشخصه های حالت ماندگار از اهمیت بالایی برخوردار هستند.

۵-۱-۱-۱- اعتبار سنجی

در میکرو وسایل، مشخصه های میکرویاتاقان گازی غیر مدور دو لوبی نسبت به مقیاس ماکرو متفاوت است. در مقیاس میکرو معادله MGL استفاده می شود. برای اطمینان از دقت نتایج، موقعیت تعادل روتور در شرایط $Q=1$ (جریان پیوسته) بدست می آید، و نتایج کار رشیدی [۱۷] و چاندرا [۶] در جدول ۵-۱ با نتایج یاتاقان گازی غیر مدور دو لوبی در مقیاس ماکرو برای $\delta = 0.5$, $L / D = 1$ مقایسه شده است. جدول ۵-۱ توافق خوبی مابین نتایج را نشان می دهد. همچنین، به منظور اطمینان از دقت نتایج بدست آمده در مقیاس میکرو، به علت اینکه در مقیاس میکرو بر روی یاتاقان های گازی غیر مدور مطالعه ای صورت نگرفته است، با استفاده از مدل MGL، مشخصه های حالت ماندگار میکرویاتاقان گازی مدور برای $\varepsilon = 0.6$, $L / D = 1$ بدست آمده و در جدول ۵-۲ با نتایج کار مالیک [۵۰] مقایسه شده است. با توجه به جدول ۵-۲، توافق خوبی مابین نتایج بدست آمده و نتایج مالیک مشاهده می شود. لازم به ذکر است که اختلاف مابین نتایج در حالت $Kn=0$ به علت تعداد بالای المان در کار حاضر بوده و در حالت $Kn=0.1$ به علت این است که در کار مالیک از معادله

رینولدز اصلاح شده مرتبه اول استفاده شده است در حالی که در کار حاضر از مدل MGL استفاده شده است

که نسبت به مدل های دیگر دقیق تر است.

جدول ۵-۱. مقایسه نتایج در حالت پایدار برای یاتاقان گازی غیرمدور دو لوبی در مقیاس ماکرو

Λ	W_0	X_{j0}^1	Y_{j0}^1	X_{j0}^2	Y_{j0}^2	X_{j0}^3	Y_{j0}^3	درصد خطا با نتایج چاندرا	درصد خطا با نتایج رشیدی
0.1	0.01	0.244	-0.002	0.257	-0.002	0.2402	-0.0027	1.55	6.53
0.5	0.05	0.242	-0.014	0.254	-0.014	0.2381	-0.0145	1.59	6.23
1	0.1	0.236	-0.026	0.246	-0.028	0.2311	-0.0280	1.95	5.98
2	0.2	0.217	-0.050	0.224	-0.053	0.2097	-0.0528	2.89	6.06
5	0.5	0.16	-0.103	0.166	-0.111	0.1524	-0.1073	2.05	6.66
10	1	0.126	-0.178	0.122	-0.174	0.1229	-0.1746	2.09	0.47
20	2	0.087	-0.272	0.091	-0.276	0.086	-0.2705	0.61	2.33
۱: نتایج چاندرا ۲: نتایج رشیدی ۳: نتایج مطالعه حاضر									

جدول ۵-۲. مقایسه نتایج در حالت پایدار برای میکرو یاتاقان گازی مدور

Λ	results	Without slip, Kn=0			with slip, Kn=0.1		
		ϕ	W_0	P_L	ϕ	W_0	P_L
0.1	1	84.76	0.1243	17.94	87.55	0.0719	13.39
	2	83.5709	0.1294	18.0281	86.4306	0.0737	13.4245
	error,%	1.40	4.10	0.49	1.28	2.50	0.26
0.2	1	79.70	0.2483	17.91	85.11	0.1438	13.39
	2	76.9766	0.2608	17.9755	82.6269	0.1479	13.4242
	error,%	3.42	5.03	0.37	2.92	2.85	0.26
0.5	1	66.78	0.6146	17.74	78.03	0.3592	13.39
	2	65.4832	0.6306	17.7763	74.5521	0.3652	13.4218
	error,%	1.94	2.60	0.20	4.46	1.67	0.24
1	1	52.76	1.1829	17.40	67.58	0.7151	13.38
	2	51.9228	1.1995	17.4120	62.9951	0.7160	13.4158
	error,%	1.59	1.40	0.07	6.78	0.13	0.27
2	1	38.56	2.1239	16.90	52.55	1.3911	13.38
	2	38.7655	2.1311	16.9104	49.3922	1.3479	13.4081
	error,%	0.53	0.34	0.06	6.01	3.11	0.21
5	1	22.47	3.8259	16.23	31.84	2.9349	13.37
	2	24.0417	3.8832	16.2788	32.6115	2.7577	13.4348
	error,%	6.99	1.50	0.3	2.42	6.04	0.48
10	1	13.43	4.8935	15.91	19.43	4.2399	13.35
	2	14.2070	5.2580	15.9611	21.5184	4.1596	13.4994
	error,%	5.79	7.45	0.32	5.60	1.89	1.12
۱: نتایج مالیک ۲: نتایج مطالعه حاضر							

۵-۱-۱-۲- نتایج

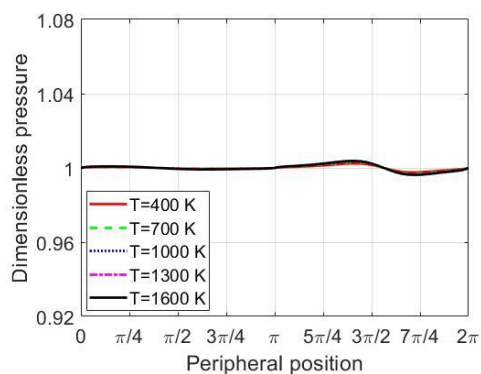
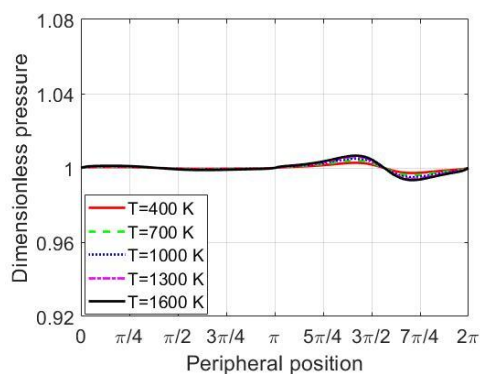
مقدار پارامترهای اصلی مورد استفاده در تحلیل به صورت زیر می باشند:

$$L/D = 0.1; \quad p_a = 101325 \text{ Pa}; \quad \delta = 0.5$$

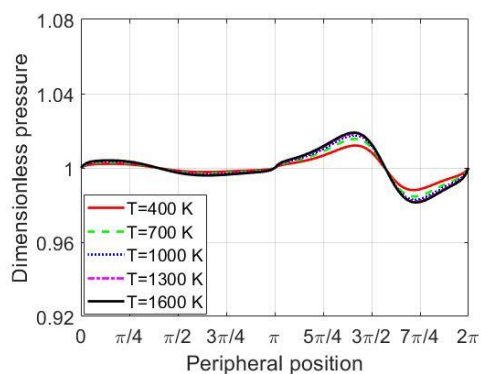
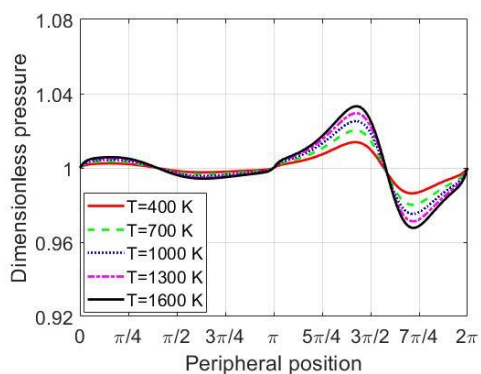
پروفیل فشار محیطی بدون بعد در مقطع میانی میکرویاتاقان گازی غیرمدور دو لوبی در شکل ۵-۱ ارائه شده است، که در آن نسبت طول به یاتاقان برابر با 0.1 و نسبت بیضوی برابر با 0.5 است. سرعت دورانی روتور به ترتیب $100,000$ ، $500,000$ و $1,000,000$ دور بر دقیقه است. نتایج نشان می دهند که تغییر دما اثر قابل توجهی بر روی پروفیل فشار میکرویاتاقان گازی غیرمدور دو لوبی دارد. هنگامی که دما افزایش می یابد، مقادیر فشار در پروفیل فشار افزایش می یابد، و هنگامی که اثر رقیق شدگی در نظر گرفته می شود، مقادیر فشار در پروفیل فشار نسبت به حالتی که اثر رقیق شدگی نادیده گرفته می شود، کاهش می یابد، میزان این افت فشار در سرعت های دورانی پایین، مابین این دو حالت (با و بدون در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی فیلم گاز) در حدود 0.3% درصد است و در سرعت های دورانی بالا به بیش از 3% درصد می رسد. هنگامی که دما افزایش می یابد، ویسکوزیته گاز افزایش می یابد، که به نوبه ی خود منجر به افزایش فشار گاز می گردد و هنگامی که گاز رقیق می شود، فشار گاز کاهش می یابد. هنگامی که این دو اثر با هم در نظر گرفته شوند، فشار گاز به علت غالب بودن اثر ویسکوزیته گاز کمتر افزایش می یابد.

همان طور که از شکل ۵-۱ مشاهده می شود، پروفیل فشار با افزایش سرعت دورانی یکسان می باشد، مقادیر فشار میکرویاتاقان افزایش می یابد، و در نتیجه ظرفیت حمل بار میکرو یاتاقان افزایش می یابد. مطابق با پروفیل های فشار در این دو حالت، در دمای 400 K مقدار فشار تقریباً یکسان است که نشان می دهد در دماهای پایین اثر رقیق شدگی فیلم گاز قابل اغماض است.

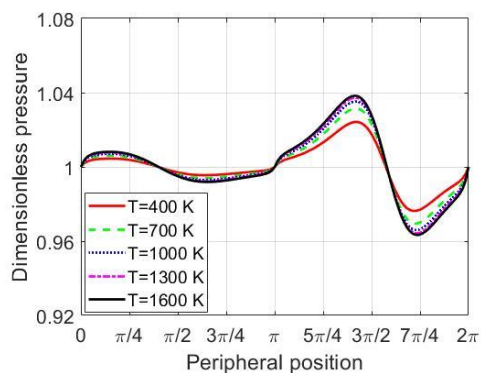
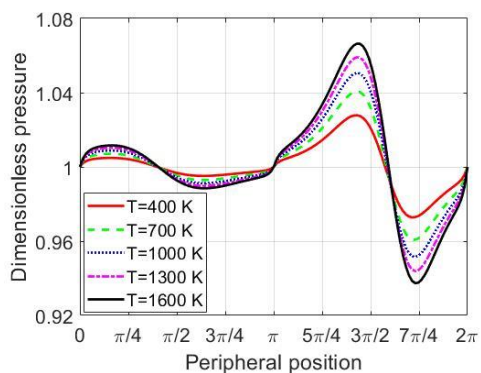
$\Omega = 100,000 \text{ rpm}$



$\Omega = 500,000 \text{ rpm}$



$\Omega = 1,000,000 \text{ rpm}$



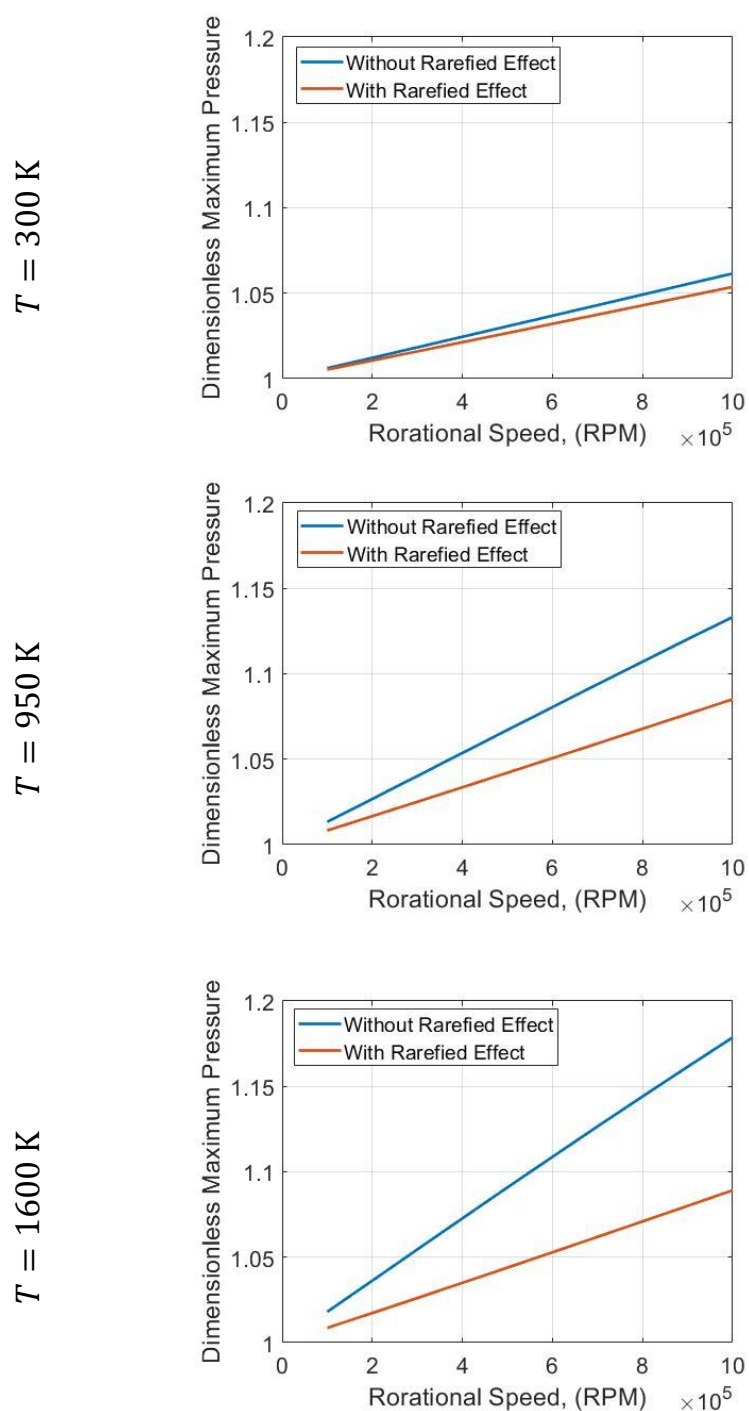
بدون در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی

با در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی

شکل ۵-۱. پروفیل فشار در مقطع میانی میکرویاتاقان گازی غیرممدور دو لوبی

شکل ۵-۲ فشار ماکزیموم در سرعت های دورانی مختلف را در سه دمای ۳۰۰، ۹۵۰ و ۱۶۰۰ K با و بدون در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی فیلم گاز نشان می دهد. مطابق با شکل، هنگامی که سرعت دورانی افزایش می یابد، و دمای گاز افزایش می یابد، فشار ماکزیموم در داخل میکرویاتاقان افزایش می یابد، و وقتی اثر رقیق شدگی فیلم گاز در نظر گرفته می شود، مقدار فشار ماکزیموم در مقایسه با حالتی که اثر رقیق شدگی در نظر گرفته

نمی شود، کاهش می یابد. در حالتی که اثر رقیق شدگی فیلم گاز در نظر گرفته می شود، افت فشار ماکزیموم با افزایش سرعت دورانی و افزایش دمای گاز افزایش می یابد. بطوری که در سرعت های دورانی بالا، مقدار افت فشار در دماهای پایین در حدود ۰/۸ درصد و در دماهای بالا بیش از ۸ درصد است.

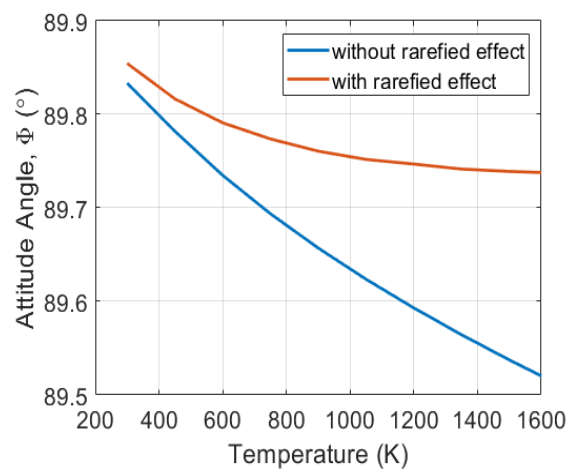


شکل ۵-۲. اثر افزایش سرعت دورانی و افزایش دمای گاز بر روی فشار ماکزیموم

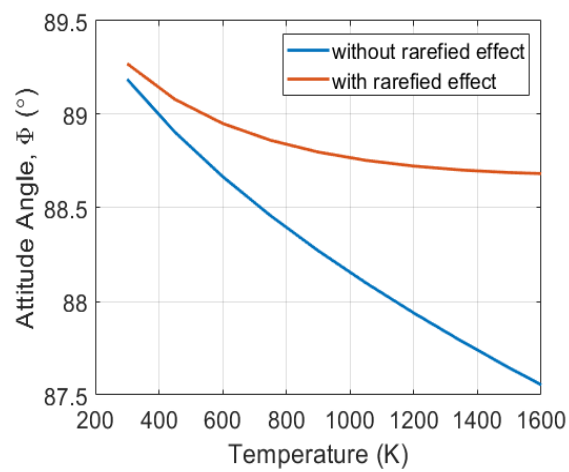
در شکل ۵-۳، اثر دما و اثر رقیق شدگی گاز بر روی زاویه انحراف میکرویاتاقان گازی غیر مدور دو لوبی برای $\varepsilon = 0.75$ بررسی شده است. همان طور که مشاهده می شود، در هر دو حالت زاویه انحراف با افزایش دمای گاز کاهش می یابد، اما وقتی که اثر رقیق شدگی گاز در نظر گرفته می شود، نرخ کاهشی زاویه انحراف کمتر می شود. هنگامی که دما افزایش می یابد، اختلاف مابین زاویه انحراف در دو حالت (با در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی و بدون در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی) افزایش می یابد، و در حالتی که اثر رقیق شدگی در نظر گرفته می شود، زاویه انحراف نسبت به حالتی که اثر رقیق شدگی در نظر گرفته نمی شود، بیشتر است. هنگامی که سرعت دورانی روتور افزایش می یابد، مقدار زاویه انحراف کاهش می یابد.

در شکل ۵-۴، اثر دما و رقیق شدگی گاز بر روی خروج از مرکزی حالت پایدار مرکز روتور میکرویاتاقان گازی غیر مدور دو لوبی بررسی شده است. همان طور که مشاهده می شود، هنگامی که دما افزایش می یابد، خروج از مرکزی مرکز روتور کاهش می یابد. هنگامی که اثر رقیق شدگی گاز در نظر گرفته می شود، خروج از مرکزی مرکز روتور نسبت به حالتی که اثر رقیق شدگی گاز در نظر گرفته نمی شود، بیشتر است. با افزایش دمای گاز و بدون در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی، خروج از مرکزی تا $46/83$ درصد کاهش می یابد، در حالتی که اثر رقیق شدگی فیلم گاز در نظر گرفته شود، این مقدار برابر با $32/19$ درصد می باشد. در دماهای پایین و با در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی، خروج از مرکزی تا $3/66$ درصد افزایش می یابد، که در دماهای بالا به $32/21$ درصد می رسد.

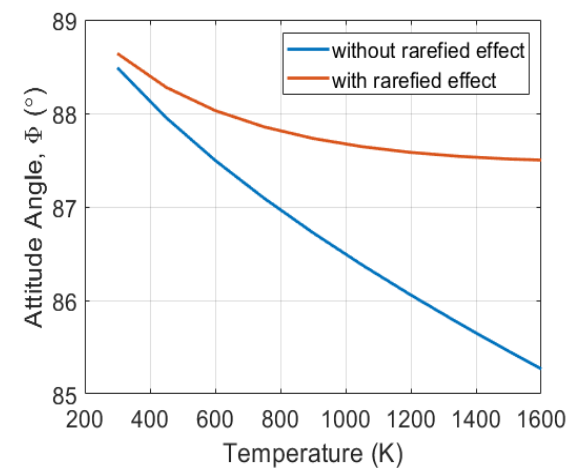
$\Omega = 100.000 \text{ rpm}$



$\Omega = 500.000 \text{ rpm}$

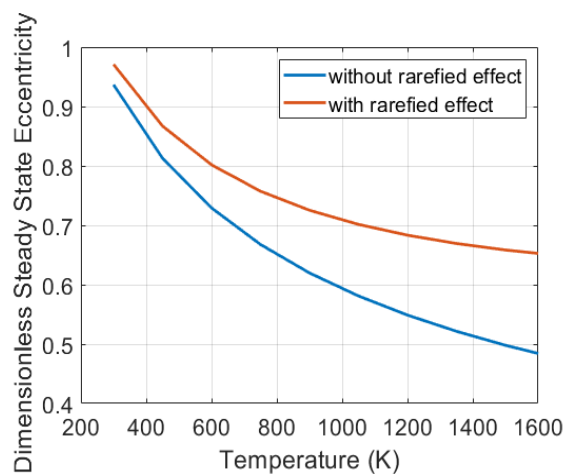


$\Omega = 1.000.000 \text{ rpm}$

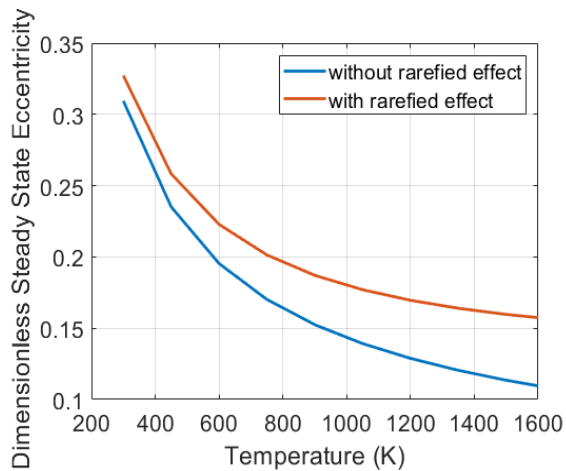


شکل ۵-۳. اثر افزایش دما و رقیق شدگی فیلم گاز بر روی زاویه انحراف

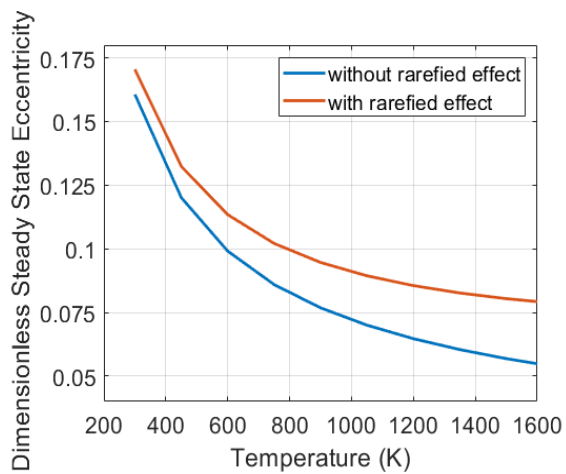
$\Omega = 100.000 \text{ rpm}$



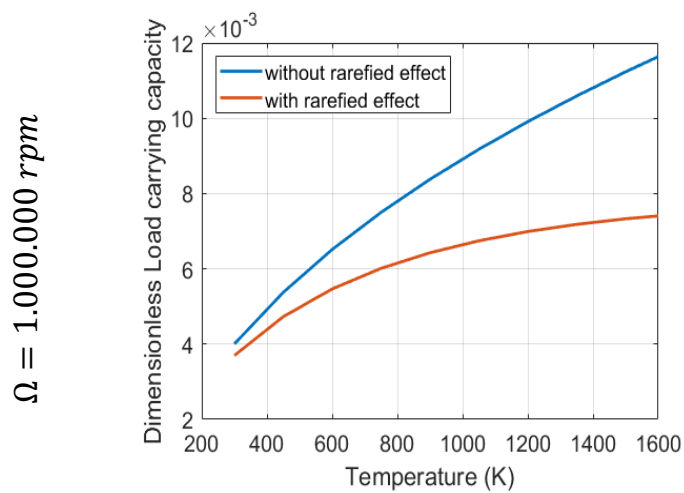
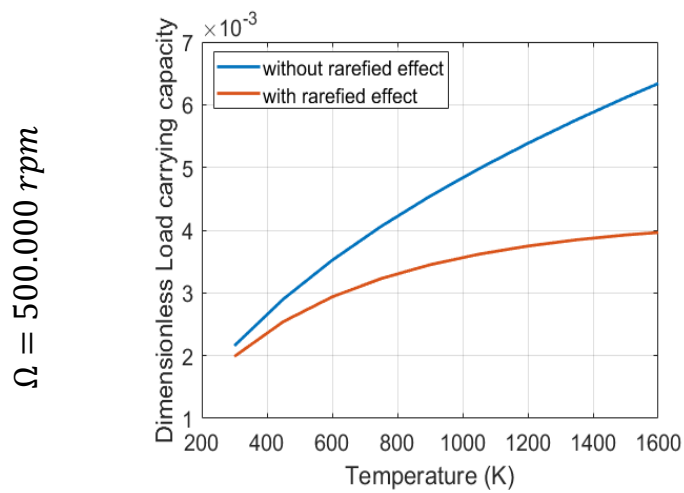
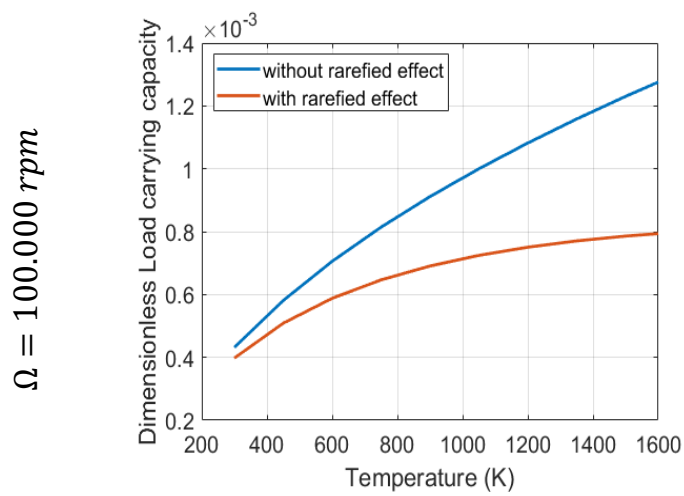
$\Omega = 500.000 \text{ rpm}$



$\Omega = 1.000.000 \text{ rpm}$



شکل ۴-۵. اثر افزایش دما و رقیق شدگی فیلم گاز بر روی خروج از مرکزی مرکز روتور در حالت ماندگار

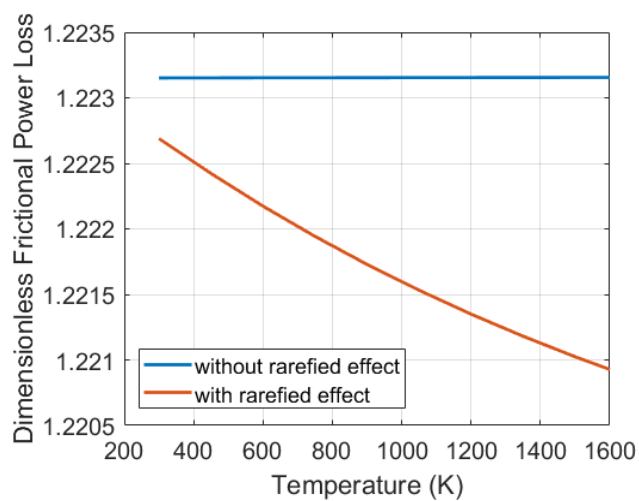


شکل ۵-۵. اثر افزایش دما و رقیق شدگی بر روی ظرفیت حمل بار یاتاقان

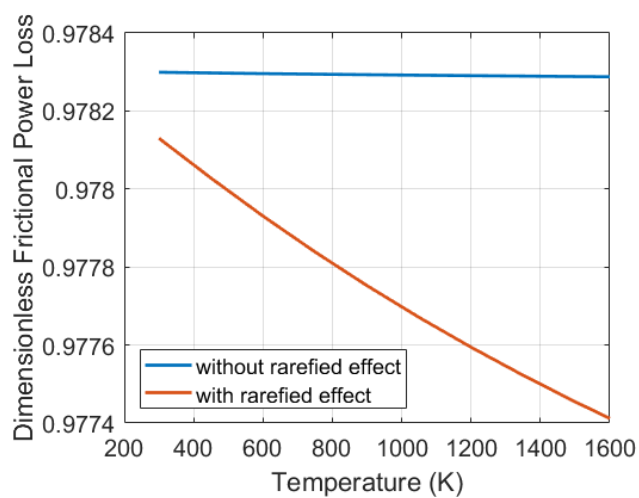
در شکل ۵-۵، اثر دما و رقیق شدگی گاز بر روی ظرفیت حمل بار میکرویاتاقان گازی غیرمدور دو لوبی بررسی شده است. هنگامی که دمای گاز افزایش می یابد، ظرفیت حمل بار یاتاقان افزایش می یابد. هنگامی که اثر رقیق شدگی در نظر گرفته می شود، ظرفیت حمل بار یاتاقان نسبت به حالتی که اثر رقیق شدگی در نظر گرفته نمی شود، کمتر است. اگر اثر رقیق شدگی فیلم گاز در نظر گرفته نشود، ظرفیت حمل بار یاتاقان با افزایش دمای گاز در حدود ۱۸۲ درصد افزایش می یابد، ولی اگر اثر رقیق شدگی فیلم گاز در نظر گرفته شود، با افزایش دمای گاز، میزان افزایش ظرفیت حمل بار یاتاقان در حدود ۹۷ درصد می باشد. اختلاف مقدار ظرفیت حمل بار یاتاقان در مقایسه بین دو حالت (با و بدون در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی) در دماهای پایین کم بوده و در حدود ۸ درصد است ولی در دماهای بالا این اختلاف افزایش یافته و به حدود ۳۶ درصد می رسد.

در شکل ۵-۶، اثر دما و رقیق شدگی گاز بر روی اتلاف توان اصطکاکی میکرویاتاقان گازی غیر مدور دو لوبی بررسی شده است. هر چه گاز رقیق تر می شود، اتلاف توان اصطکاکی کمتر می شود. زمانی که اثر رقیق شدگی در نظر گرفته نمی شود، اتلاف توان اصطکاکی با افزایش دما تغییر چندانی ندارد و تقریباً ثابت است، ولی اگر اثر رقیق شدگی فیلم گاز در نظر گرفته می شود، اتلاف توان اصطکاکی با افزایش دما، کاهش می یابد که در حدود ۰/۱۲ درصد می باشد. در دماهای پایین درصد کاهش اتلاف توان اصطکاکی در حدود ۰/۰۴ درصد و در دماهای بالا در حدود ۰/۱۶ درصد است که بیانگر این موضوع است که اتلاف توان اصطکاکی در دماهای بالا چهار برابر اتلاف توان اصطکاکی در دماهای پایین است.

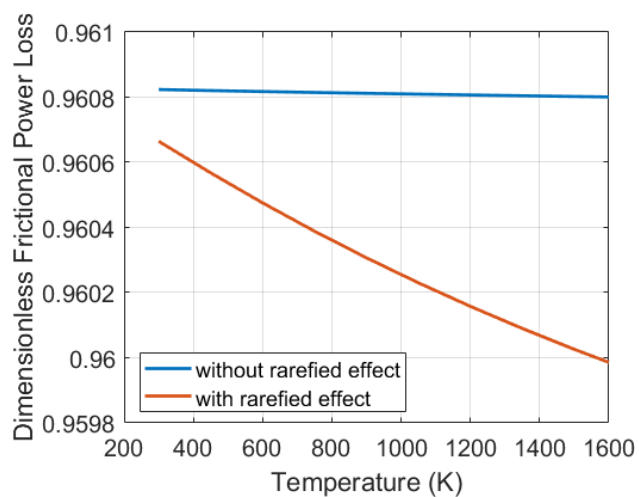
$\Omega = 100,000 \text{ rpm}$



$\Omega = 500,000 \text{ rpm}$



$\Omega = 1,000,000 \text{ rpm}$



شکل ۵-۶. اثر افزایش دما و رقیق شدگی فیلم گاز بر روی اتلاف توان اصطکاکی

۵-۱-۱-۳- نتیجه

در میکرویاتاقان های گازی، به علت نیاز به سرعت های بالا برای افزایش ظرفیت حمل بار، امکان افزایش دما وجود دارد. دمای بالا و اندازه کوچک میکرویاتاقان ها منجر به رقیق شدگی فیلم گاز می شود و نادیده گرفتن اثر رقیق شدگی فیلم گاز در حل معادله رینولدز منجر به بدست آمدن نتایج ناصحیح خواهد شد.

برخی از نتایج بدست آمده به صورت زیر می باشند:

۱- هنگامی که دمای گاز افزایش می یابد، فشار و ظرفیت حمل بار یاتاقان افزایش می یابد و زاویه انحراف، خروج از مرکزی و اتلاف توان اصطکاکی کاهش می یابد.

۲- در یک دمای معین، با در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی فیلم گاز، زاویه انحراف و خروج از مرکزی افزایش می یابد و ظرفیت حمل بار یاتاقان و اتلاف توان اصطکاکی کاهش می یابد.

۳- در دماهای بالا و سرعت دورانی بالا:

- درصد کاهش فشار تقریباً ده برابر بیشتر از درصد کاهش فشار در سرعت دورانی پایین است.
- در صد افزایش زاویه انحراف تقریباً ده برابر بیشتر از در صد افزایش زاویه انحراف در سرعت دورانی پایین است.
- در صد افزایش خروج از مرکزی تقریباً $1/3$ برابر بیشتر از در صد افزایش خروج از مرکزی در سرعت دورانی پایین است.
- درصد کاهش ظرفیت حمل بار یاتاقان تقریباً با درصد کاهش ظرفیت حمل بار یاتاقان در سرعت دورانی پایین برابر است.
- در صد کاهش اتلاف توان اصطکاکی تقریباً نصف در صد کاهش اتلاف توان اصطکاکی در سرعت دورانی پایین است.

نتایج نشان می دهد که اثر رقیق شدگی گاز از اهمیت بالایی برخوردار است و مشخصه های حالت ماندگار میکرویاتاقان گازی غیر مدور دو لوبی را تحت تأثیر قرار می دهد.

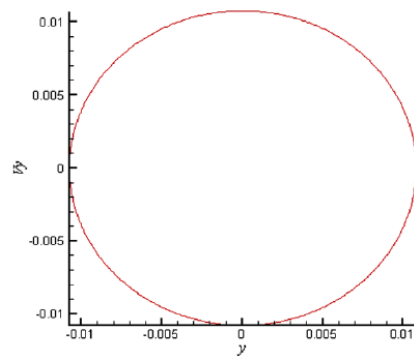
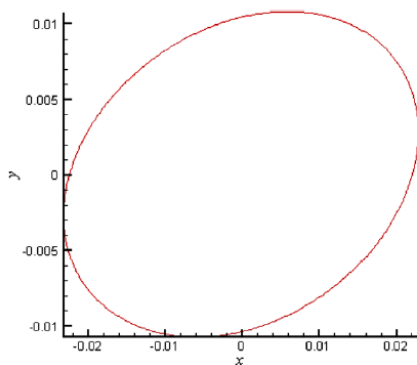
۵-۱-۲- بررسی رفتار دینامیکی در اثر افزایش دما

در این بخش اثر تغییر دما بر روی رفتار دینامیک غیرخطی میکرو یاتاقان گازی غیر مدور دو لوبی بررسی شده است. با افزایش دما، گاز در داخل میکرو یاتاقان گازی رقیق می شود و در نتیجه شرایط مرزی لغزش در داخل میکرو یاتاقان گازی در نظر گرفته شده است. علاوه بر اثر رقیق شدگی فیلم گاز، تغییرات ویسکوزیته گاز در اثر تغییرات دما و همچنین نیروی اصطکاک ویسکوزیته گاز در این مدل در نظر گرفته شده اند. با حل همزمان معادله رینولدز اصلاح شده (مدل MGL) و معادله حرکت روتور و با رسم نمودارهای اوربیت مرکز روتور، صفحه فازی، نگاشت پوانکاره و طیف توانی، رفتار دینامیکی میکرو یاتاقان گازی غیر مدور دو لوبی مورد بررسی قرار گرفته است.

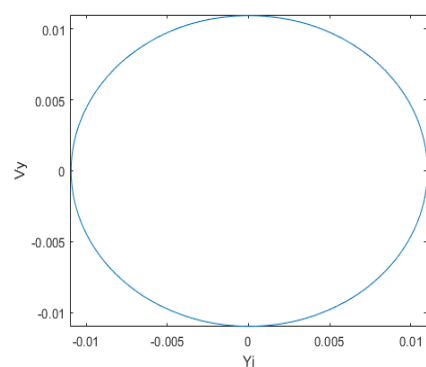
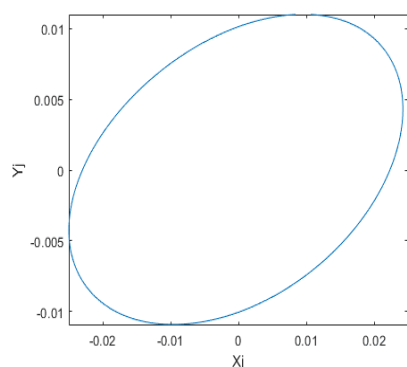
۵-۱-۲-۱- اعتبارسنجی

جهت اطمینان از صحت نتایج تحقیق حاضر، با توجه به عدم وجود کار مشابه بر روی یاتاقان گازی غیر مدور در مقیاس میکرو، رفتار دینامیکی یاتاقان گازی غیرمدور دو لوبی در مقیاس ماکرو مورد بررسی قرار گرفته و با نتایج کارهای مشابه در مقیاس ماکرو مقایسه شده است. گام اول تحلیل رفتار دینامیک غیرخطی، تعیین موقعیت تعادل حالت پایدار روتور در داخل یاتاقان گازی به عنوان شرایط اولیه برای حالت دینامیکی می باشد، که جهت اطمینان از صحت نتایج، با نتایج ارائه شده توسط چاندرا و رشیدی مطابق جدول ۵-۱ مقایسه شده اند. با توجه به نتایج ارائه شده در جدول ۵-۱ توافق خوبی مابین نتایج مشاهده می شود. همچنین تحلیل رفتار دینامیک غیرخطی یاتاقان گازی غیرمدور دو لوبی در مقیاس ماکرو انجام شده و با نتایج بدست آمده توسط رشیدی مورد مقایسه قرار گرفته است. همان طور که از شکل ۵-۷ مشاهده می شود، نتایج کار حاضر با نتایج کار رشیدی کاملاً منطبق است.

2.1



2.2



a

b

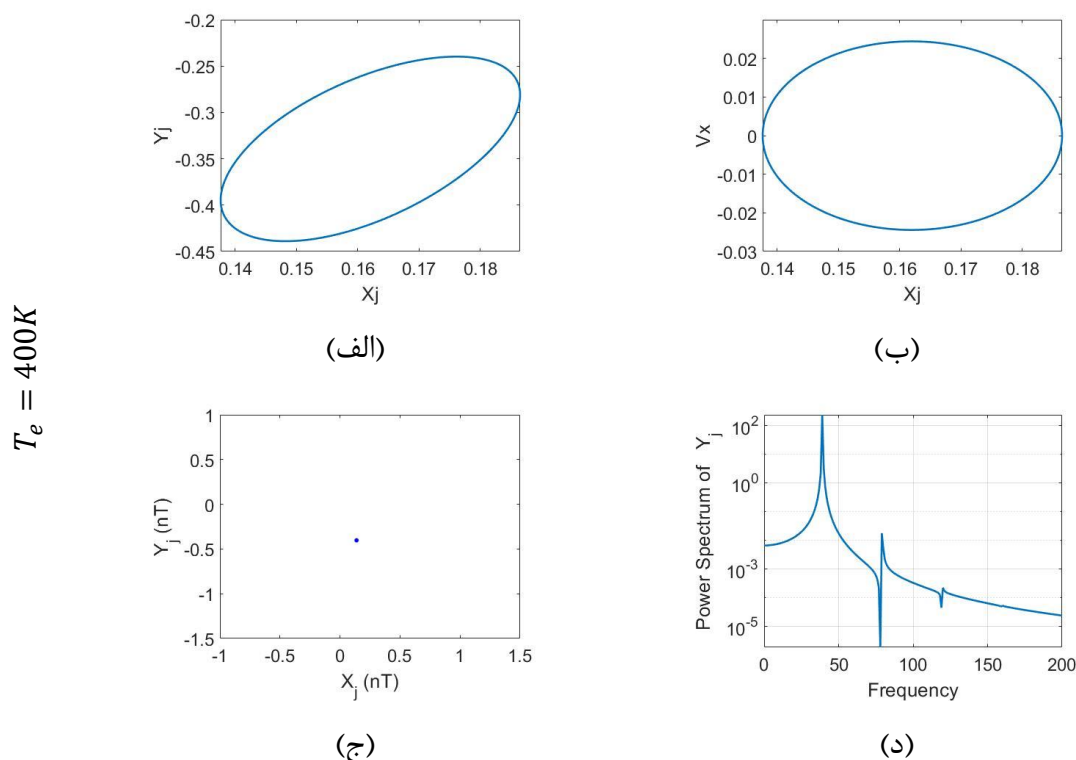
شکل ۵-۷. مقایسه نمودارهای دینامیکی. (a) نمودار اوربیت مرکز روتور (b) نمودار فضای فازی ۱-۲- نتایج کار رشیدی [۱۷]
۲-۲- نتایج کار حاضر- برای یاتاقان گازی غیر مدور دو لوبی ($\Lambda = 5$)

۵-۱-۲-۲- نتایج

در این بخش، رفتار دینامیکی میکرویاتاقان گازی غیر مدور دو لوبی با افزایش دما از ۴۰۰ K تا ۲۰۰۰ K و با در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی مورد بررسی قرار گرفته است. بار خارجی اعمالی بر ژورنال $W = 0.4053 \text{ N}$ و سرعت دورانی روتور $\omega = 1.5 \times 10^5 \text{ rad/s}$ است.

نمودارهای دینامیکی شامل اوربیت مرکز روتور، نمودار فازی، نگاشت پوانکاره و نمودار طیف توانی برای دماهای مختلف در شکل ۵-۸ نشان داده شده است. در شکل ۵-۹ و شکل ۵-۱۰ نمودار دوشاخگی در برابر دما به عنوان پارامتر دوشاخگی رسم شده است. با توجه به شکل ۵-۹ و شکل ۵-۱۰، حرکت روتور تا دما ۷۰۰ K به صورت سنکرون بوده و پس از دمای ۷۰۰ K با افزایش دما حرکت روتور به حرکت شبه پریودیک تبدیل می شود. در دمای ۴۰۰ K با توجه به مسیر حرکت مرکز روتور، نمودار فازی مرکز روتور و نگاشت

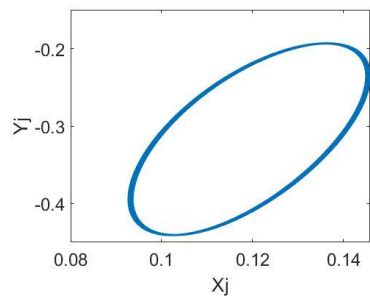
پوانکاره که تک نقطه ای می باشد، حرکت 1T-پریودیک است و در دیاگرام طیف توانی پیک ها در ضرایب صحیح از یک فرکانس پایه ظاهر می شوند. در دمای 700 K، با توجه به مسیر حرکت مرکز روتور، نمودار فازی مرکز روتور و نگاشت پوانکاره، حرکت 1T-پریودیک است و دیاگرام طیف توانی این موضوع را تأیید می کند. این دما نقطه ی شروع حرکت شبه پریودیک است. در دمای 1000 K، با توجه به مسیر حرکت مرکز روتور حرکت تورویدال^۱ است، نگاشت پوانکاره به صورت حلقه بسته است و دیاگرام طیف توانی حاوی فرکانس های بی تناسب است. مطابق با نگاشت پوانکاره در دمای 1600 K بیانگر حرکت فاز قفل شونده^۲ بر روی یک توروس شکسته^۳ است. در این حالت، نوسان های پریودیک نسبتاً پیچیده هستند. در دمای 1900 K حرکت شبه پریودیک است.



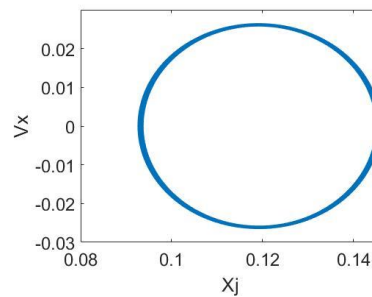
شکل ۵-۸. نمودارهای دینامیکی در دماهای مختلف در $\omega = 1.5 \times 10^5 \text{ rad/s}$. (الف) مسیر حرکت مرکز روتور (ب) نمودار فازی مرکز روتور (ج) نگاشت پوانکاره (د) طیف توانی جابه جایی روتور

^۱toroidal
^۲phase-locking
^۳broken torus

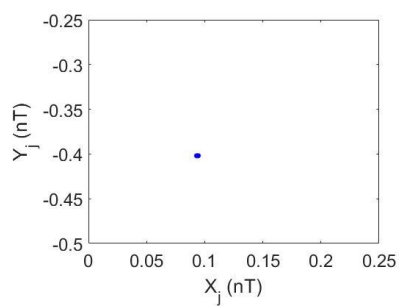
$T_e = 700K$



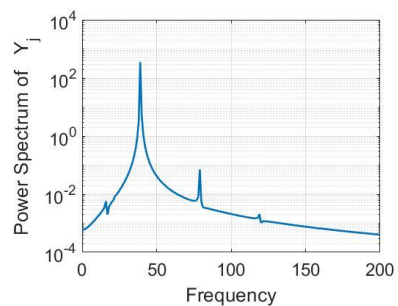
(الف)



(ب)



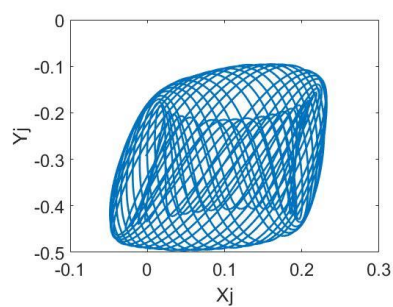
(ج)



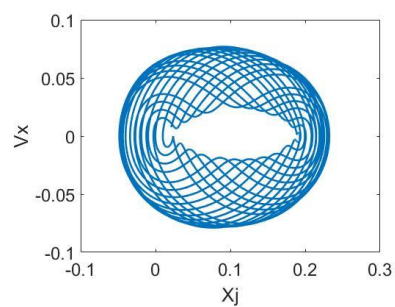
(د)

شکل ۵-۸. ادامه

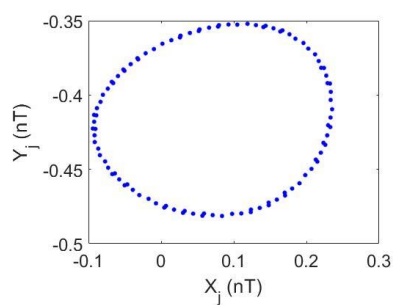
$T_e = 1000K$



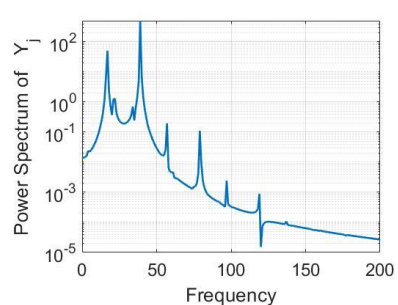
(الف)



(ب)

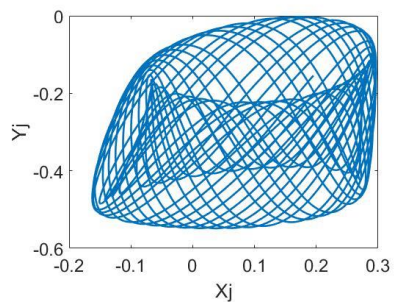


(ج)

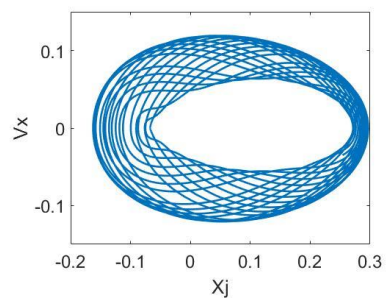


(د)

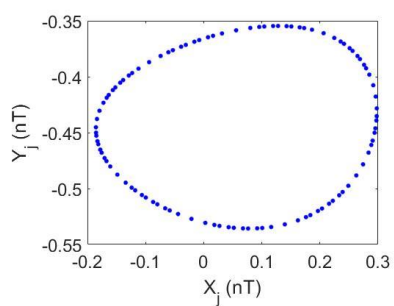
شکل ۵-۸. ادامه



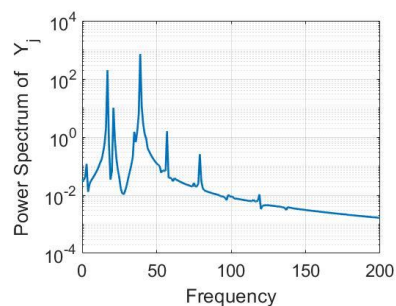
(الف)



(ب)

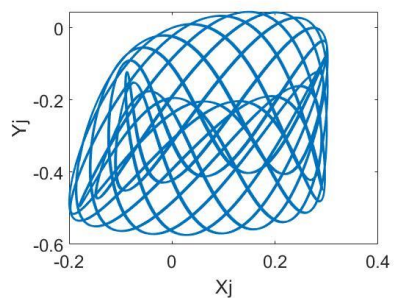


(ج)

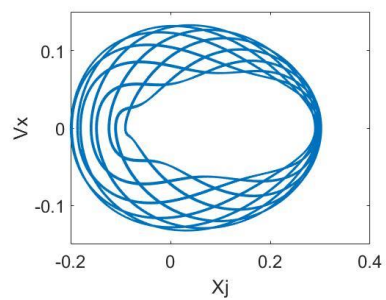


(د)

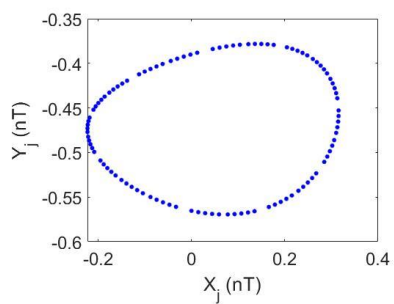
شکل ۵-۸. ادامه



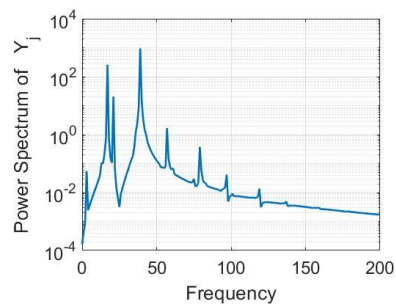
(الف)



(ب)



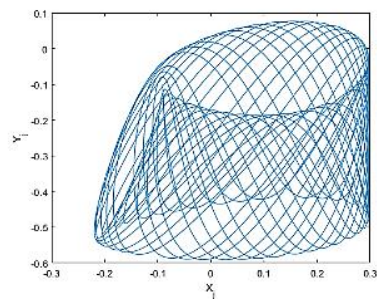
(ج)



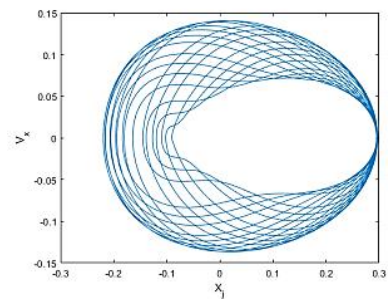
(د)

شکل ۵-۸. ادامه

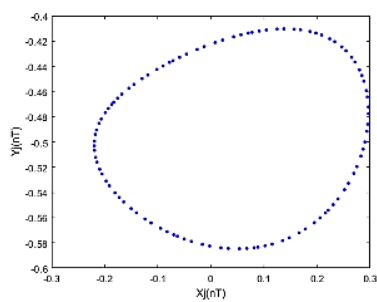
$T_e = 1900K$



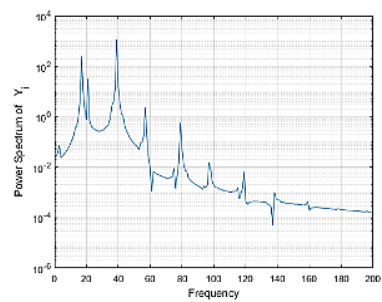
(الف)



(ب)

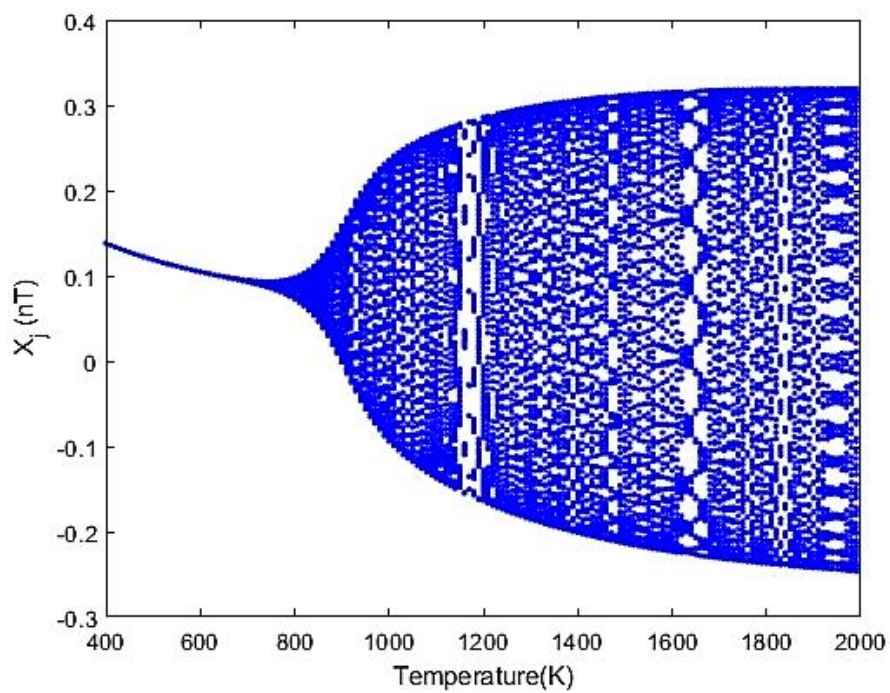


(ج)

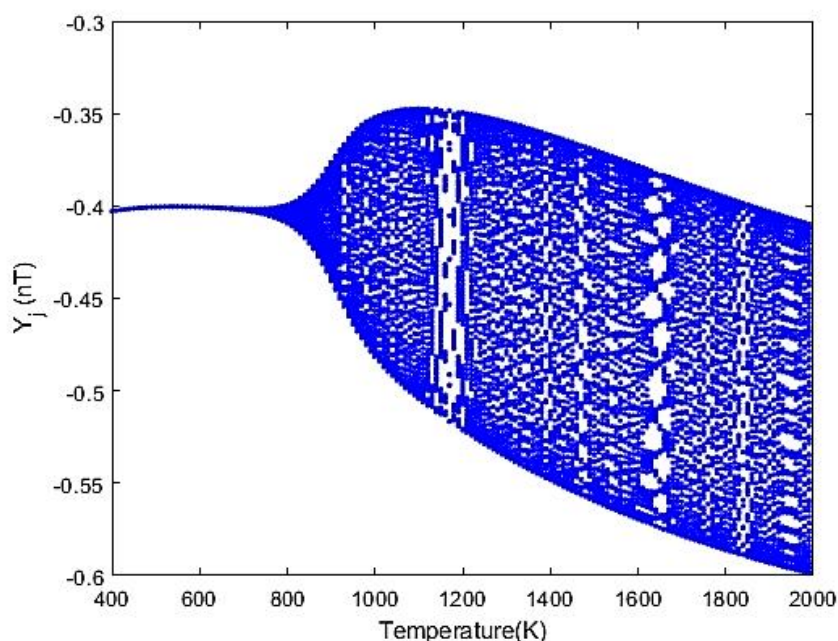


(د)

شکل ۵-۸. ادامه



شکل ۵-۹. نمودار دوشاخگی در مقابل دما - در جهت افقی



شکل ۵-۱۰. نمودار دوشاخگی در مقابل دما - در جهت عمودی

۵-۱-۳- بررسی رفتار دینامیکی در اثر سرعت دورانی در دماهای بالا

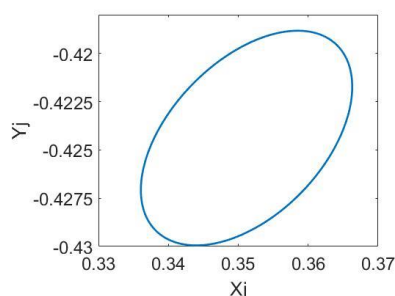
در این بخش، رفتار دینامیکی میکروویاتاقان گازی دو لوبی هنگامی که سرعت دورانی از $0.5 \times 10^5 \text{ rad/s}$ تا $2.1 \times 10^5 \text{ rad/s}$ افزایش می یابد و با در نظر گرفتن و بدون در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی بررسی شده است. بار خارجی اعمالی به ژورنال $W = 0.4053 \text{ N}$ و دمای گاز $T_e = 1300 \text{ K}$ است.

۵-۱-۳-۱- با در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی

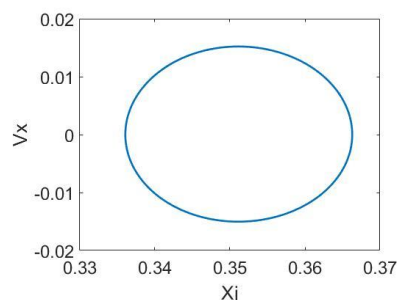
نمودارهای دینامیکی شامل مسیر حرکت مرکز روتور، نمودار فازی، نگاشت پوانکاره و طیف توانی در شکل ۵-۱۱ نشان داده شده اند. شکل ۵-۱۲ و شکل ۵-۱۳ نمودار دوشاخگی را نشان می دهد که در آن سرعت دورانی روتور به عنوان پارامتر دوشاخگی در نظر گرفته شده است. در $0.5 \times 10^5 \text{ rad/s}$ با توجه به مسیر حرکت مرکز روتور، نمودار فازی و با توجه به تک نقطه ای بودن نگاشت پوانکاره، حرکت 1T-پریودیک است، و در نمودار طیف توانی، پیک ها در ضرایب صحیحی از یک فرکانس پایه ظاهر شده اند. در $1 \times 10^5 \text{ rad/s}$ نیز حرکت 1T-پریودیک است. در $1.5 \times 10^5 \text{ rad/s}$ با توجه به مسیر حرکت مرکز روتور حرکت

توروی‌دال^۱ است، نگاشت پوانکاره حلقه بسته بوده و نمودار طیف توانی حاوی فرکانس های بی تناسب است، بنابراین حرکت از نوع شبه پریودیک است. در $2 \times 10^5 \text{ rad/s}$ نیز حرکت از نوع شبه پریودیک است. در $2 \cdot 12 \times 10^5 \text{ rad/s}$ با توجه به نگاشت پوانکاره حرکت از نوع 2T-پریودیک است.

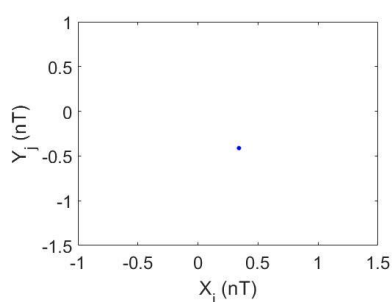
$$\omega = 0.5 \times 10^5 \text{ rad/s}$$



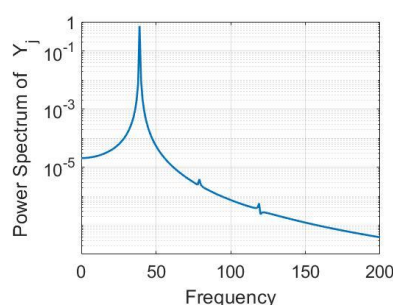
(الف)



(ب)



(ج)



(د)

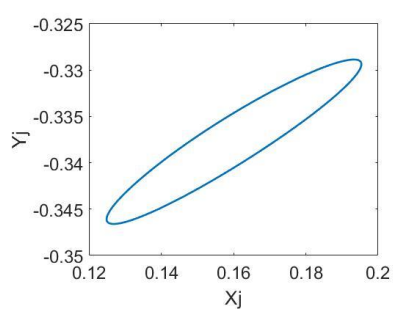
شکل ۵-۱۱. نمودارهای دینامیکی در سرعت های دورانی مختلف با در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی فیلم گاز در دمای $T_e = 1300 \text{ K}$ (الف) مسیر حرکت مرکز روتور (ب) نمودار فازی مرکز روتور (ج) نگاشت پوانکاره (د) طیف توانی جابه جایی روتور

با توجه به شکل ۵-۱۲ و شکل ۵-۱۳، رفتار روتور تا سرعت دورانی $\omega = 1.46 \times 10^5 \text{ rad/s}$ از نوع 1T-پریودیک است، و سپس هنگامی که سرعت دورانی افزایش می یابد، نوع حرکت تبدیل به شبه پریودیک می شود. با توجه به شکل ۵-۱۲ و شکل ۵-۱۳، هنگامی که سرعت دورانی به $\omega = 1.75 \times 10^5 \text{ rad/s}$ می رسد، یک افزایش ناگهانی در جابه جایی مرکز روتور در جهت عمودی اتفاق می افتد. رفتار شبه پریودیک

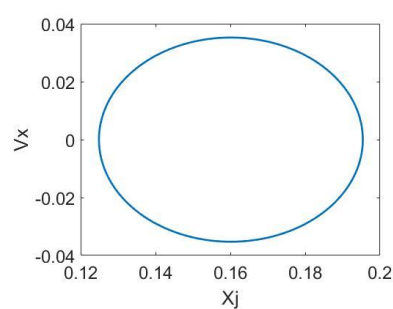
^۱toroidal

تا زمانی که سرعت دورانی به $\omega = 2 \cdot 09 \times 10^5 \text{ rad/s}$ می رسد، ادامه دارد. از سرعت دورانی $\omega = 2 \cdot 1 \times 10^5 \text{ rad/s}$ تا $2 \cdot 12 \times 10^5 \text{ rad/s}$ رفتار سیستم 2T-پریودیک بوده و در سرعت دورانی $\omega = 2 \cdot 13 \times 10^5 \text{ rad/s}$ رفتار سیستم T-پریودیک است.

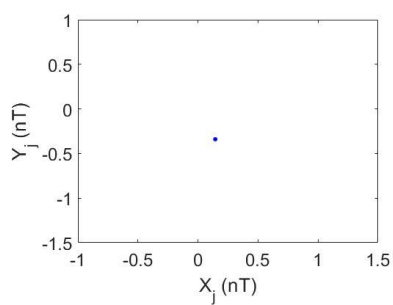
$$\omega = 1 \times 10^5$$



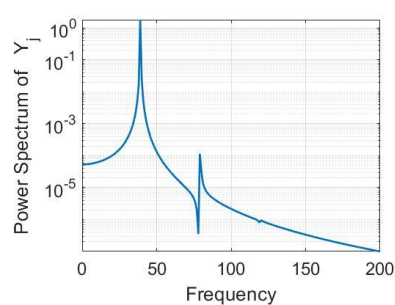
(الف)



(ب)



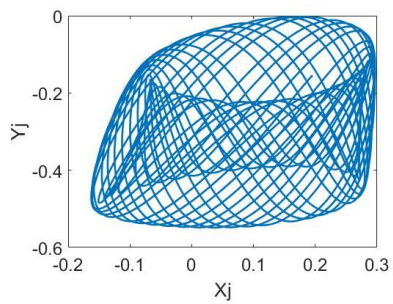
(ج)



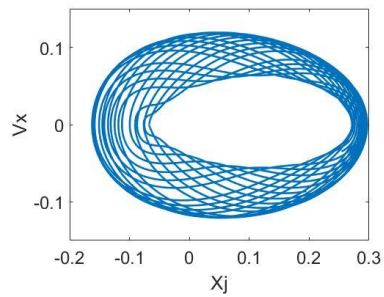
(د)

شکل ۵-۱۱. ادامه

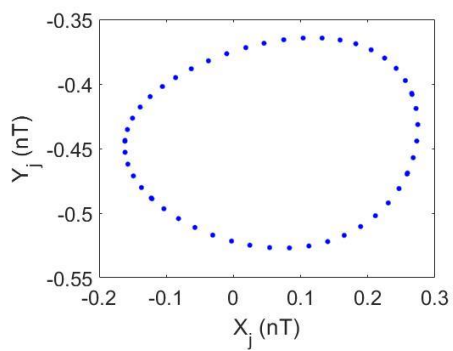
$$\omega = 1.5 \times 10^5$$



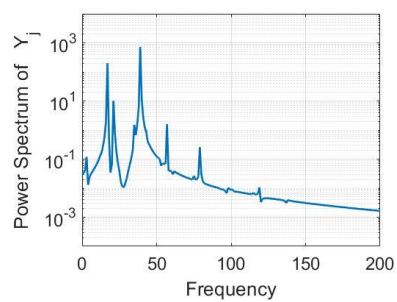
(الف)



(ب)



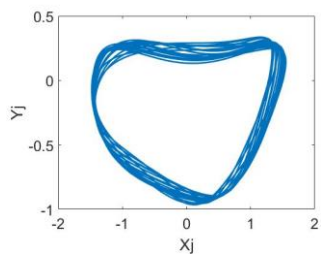
(ج)



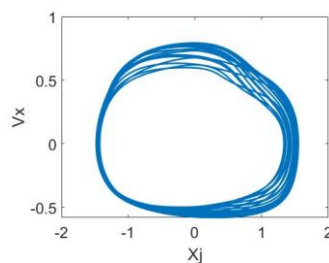
(د)

شکل ۵-۱۱. ادامه

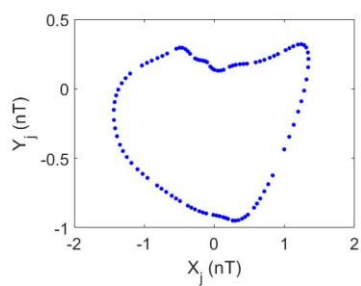
$$\omega = 2 \times 10^5 \text{ rad/s}$$



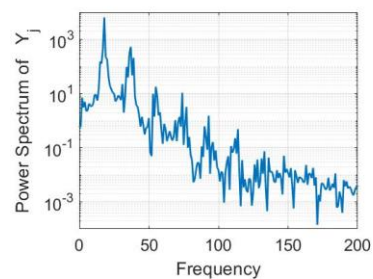
(الف)



(ب)



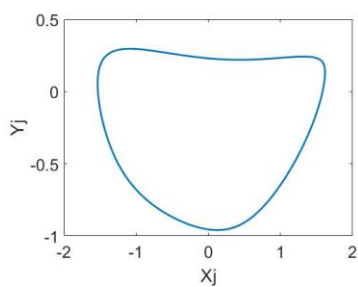
(ج)



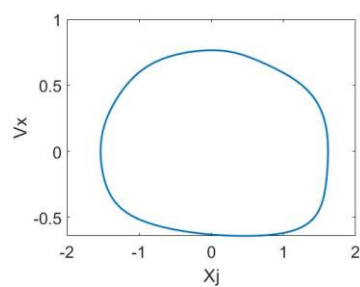
(د)

شکل ۵-۱۱. ادامه

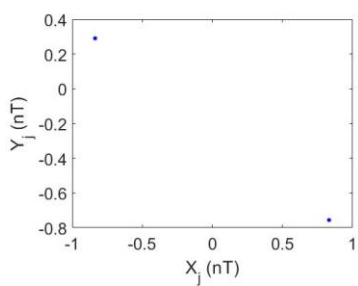
$$\omega = 2 \cdot 12 \times 10^5 \text{ rad/s}$$



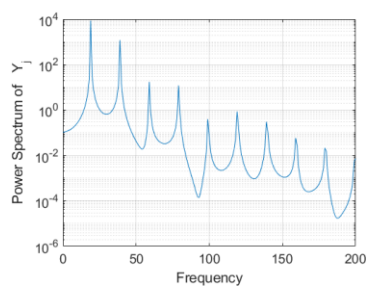
(الف)



(ب)

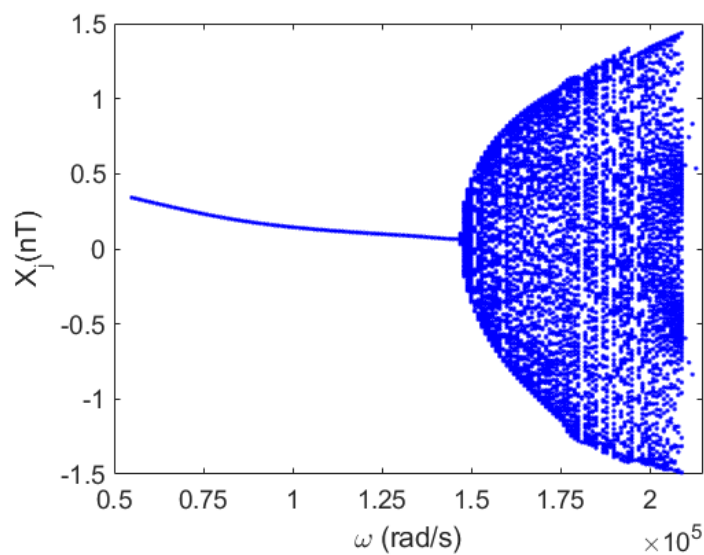


(ج)

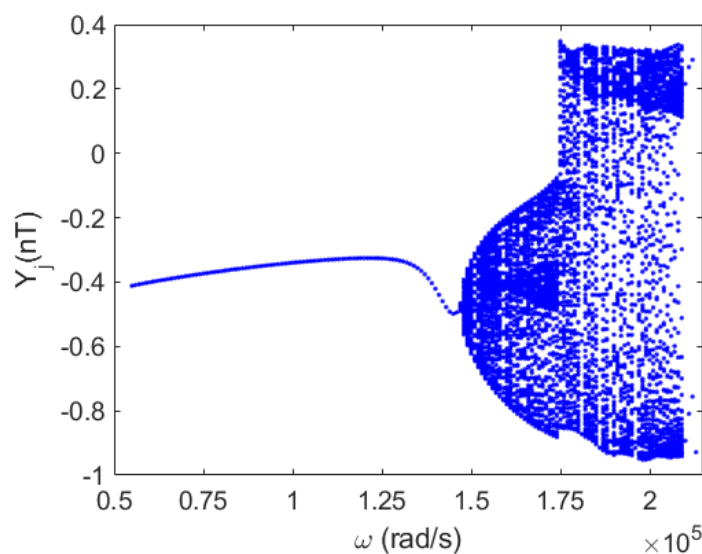


(د)

شکل ۵-۱۱. ادامه



شکل ۵-۱۲. نمودار دوشاخگی در مقابل سرعت دورانی روتور در دمای 1300 K با در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی فیلم گاز در جهت افقی



شکل ۵-۱۳. نمودار دوشاخگی در مقابل سرعت دورانی روتور در دمای 1300 K با در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی فیلم گاز در جهت عمودی

۵-۱-۳-۲- بدون در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی

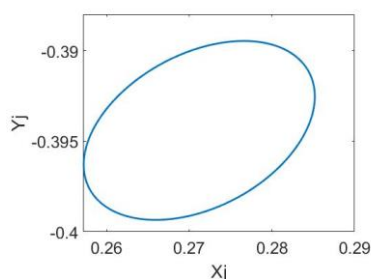
نمودارهای دینامیکی شامل مسیر حرکت مرکز روتور، نمودار فازی، نگاشت پوانکاره و طیف توانی در شکل ۵-۱۴ نشان داده شده است. شکل ۵-۱۵ و شکل ۵-۱۶ نمودار دوشاخگی را نشان می دهد که در آن سرعت دورانی روتور پارامتر دوشاخگی است.

در $0.5 \times 10^5 \text{ rad/s}$ با توجه به مسیر حرکت مرکز روتور، نمودار فازی و با توجه به تک نقطه ای بودن نگاشت پوانکاره، حرکت از نوع 1T-پریودیک است، و در نمودار طیف توانی، پیک ها در ضرایب صحیحی از یک فرکانس پایه مرکز روتور ظاهر می شوند. در $1 \times 10^5 \text{ rad/s}$ نیز حرکت از نوع 1T-پریودیک است. بازه ی جابه جایی در جهات افقی و عمودی در مقایسه با سرعت دورانی قبلی افزایش یافته است. در سرعت دورانی $1.5 \times 10^5 \text{ rad/s}$ نیز حرکت 1T-پریودیک است و بازه ی جابه جایی مرکز روتور در جهت عمودی در مقایسه با سرعت دورانی قبلی افزایش یافته است. در $2 \times 10^5 \text{ rad/s}$ با توجه به مسیر حرکت حرکت از نوع تورویدال است، نگاشت پوانکاره حلقه بسته است و نمودار طیف توانی شامل فرکانس های بی

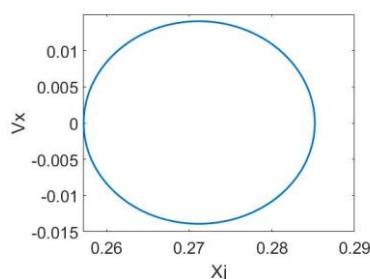
تناسب است. بنابراین حرکت از نوع شبه پریودیک است. نگاشت پوانکاره متناظر در سرعت دورانی بیانگر حرکت از نوع فاز قفل شونده^۱ بر روی توروس شکسته شده است.

با توجه به شکل ۵-۱۵ و شکل ۵-۱۶، رفتار روتور با افزایش سرعت روتور تا $\omega = 1.51 \times 10^5 \text{ rad/s}$ حرکت از نوع 1T-پریودیک است، و سپس هنگامی که سرعت دورانی افزایش می یابد، نوع حرکت چند 1T-پریودیک و شبه پریودیک است. با توجه به شکل ۵-۱۵ و شکل ۵-۱۶، هنگامی که سرعت دورانی به $\omega = 1.64 \times 10^5 \text{ rad/s}$ می رسد، یک افزایش ناگهانی در جابه جایی مرکز روتور در جهت عمودی اتفاق می افتد. در سرعت دورانی $\omega = 1.81 \times 10^5 \text{ rad/s}$ جابه جایی مرکز روتور در جهت عمودی دوباره کاهش می یابد. در سرعت دورانی بالای $\omega = 1.82 \times 10^5 \text{ rad/s}$ جابه جایی مرکز روتور در جهت عمودی دوباره افزایش خواهد یافت و حرکت روتور از نوع شبه پریودیک خواهد بود.

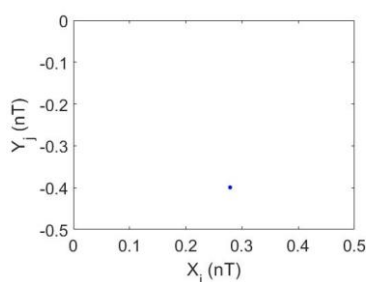
$$\omega = 0.5 \times 10^5 \text{ rad/s}$$



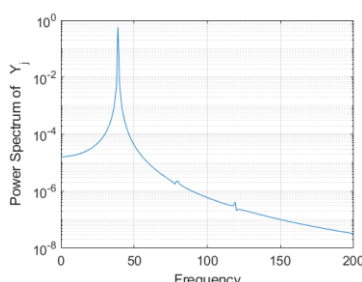
(الف)



(ب)



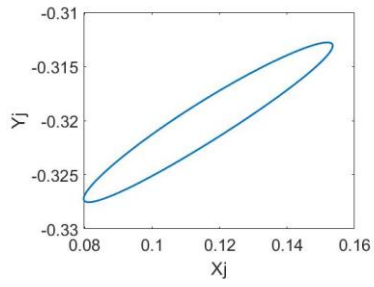
(ج)



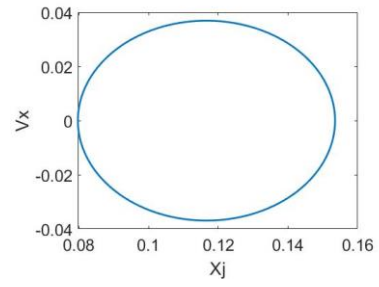
(د)

شکل ۵-۱۴. نمودارهای دینامیکی در سرعت های دورانی مختلف بدون در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی در دمای 1300 K - (الف) مسیر حرکت مرکز روتور (ب) نمودار فازی (ج) نگاشت پوانکاره (د) طیف توانی

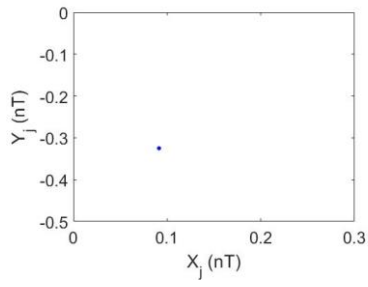
$$\omega = 1 \times 10^5 \text{ rad/s}$$



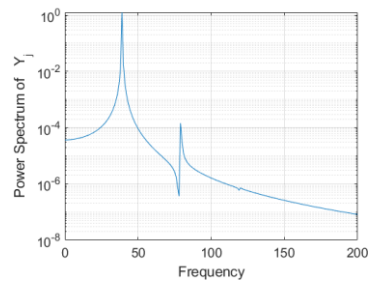
(الف)



(ب)



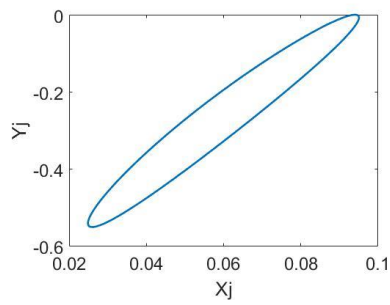
(ج)



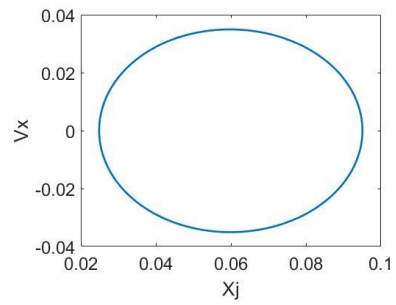
(د)

شکل ۵-۱۴. ادامه

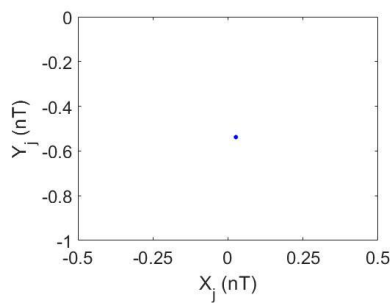
$$\omega = 1.5 \times 10^5 \text{ rad/s}$$



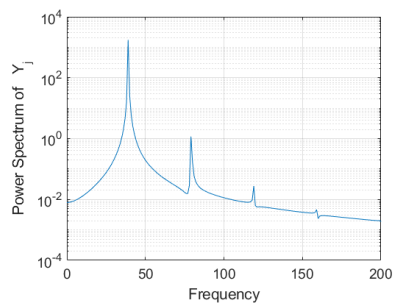
(الف)



(ب)



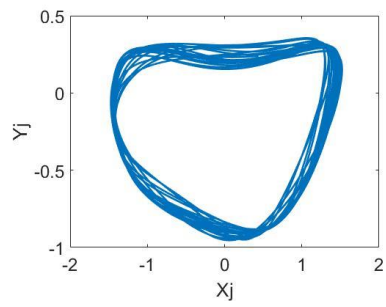
(ج)



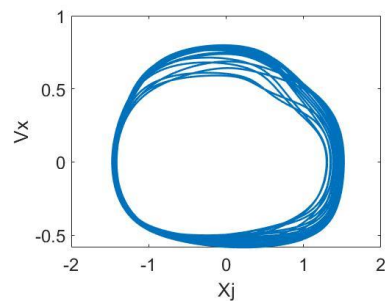
(د)

شکل ۵-۱۴. ادامه

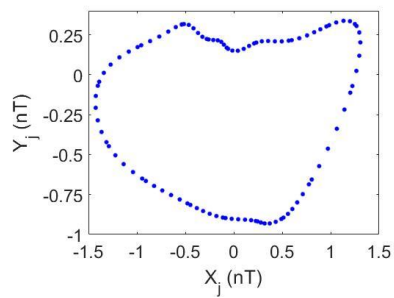
$$\omega = 2 \times 10^5 \text{ rad/s}$$



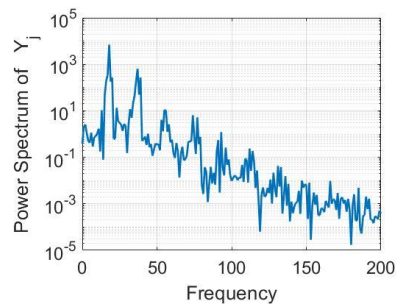
(الف)



(ب)



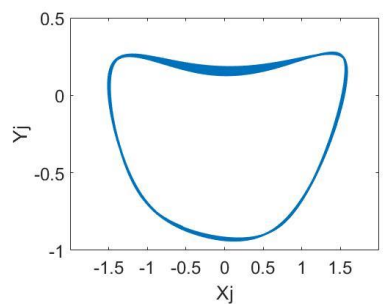
(ج)



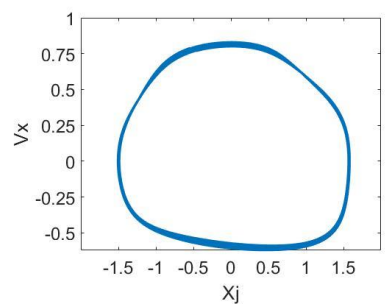
(د)

شکل ۵-۱۴. ادامه

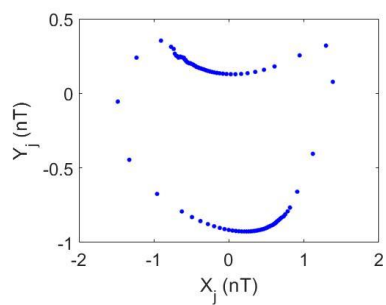
$$\omega = 2 \cdot 1 \times 10^5 \text{ rad/s}$$



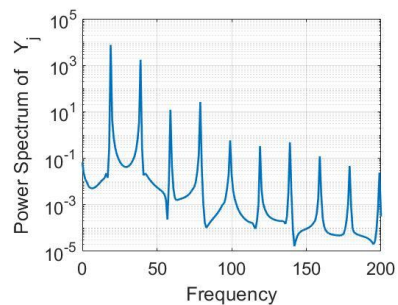
(الف)



(ب)

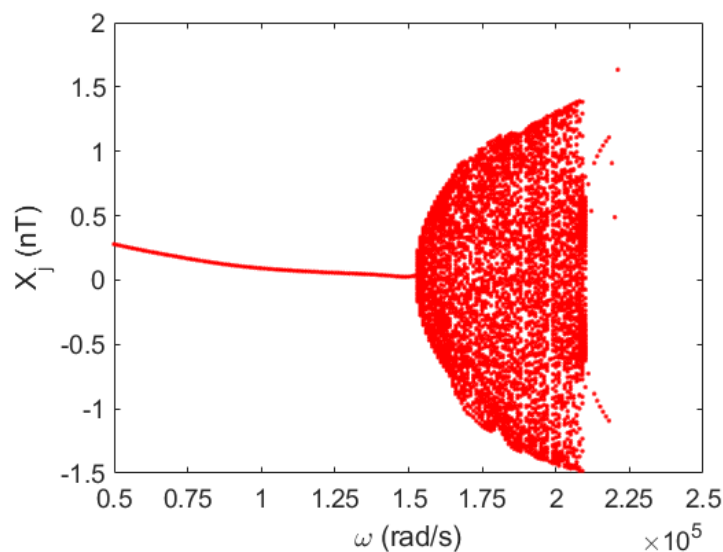


(ج)

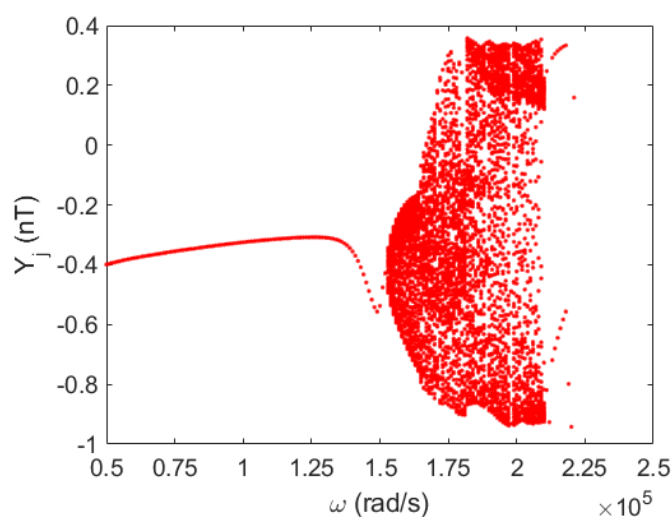


(د)

شکل ۵-۱۴. ادامه



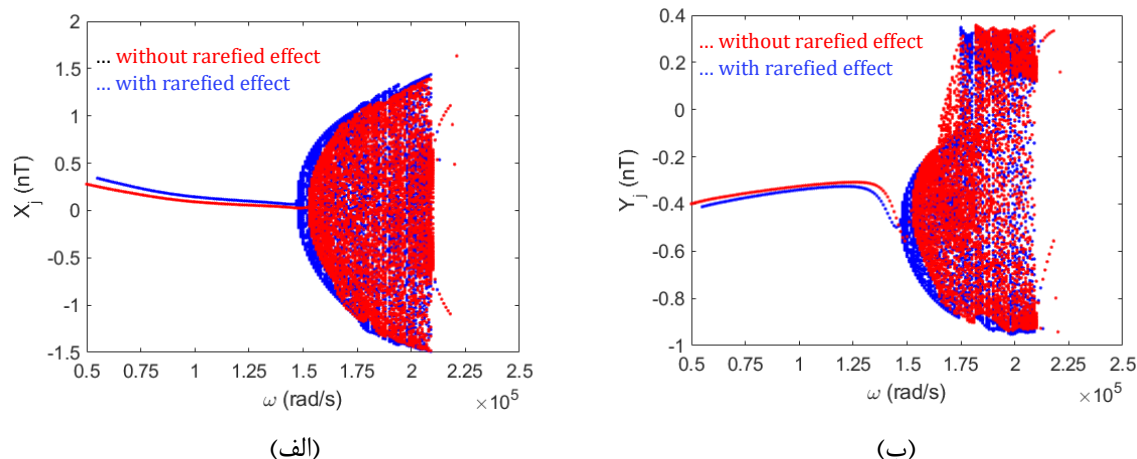
شکل ۵-۱۵. نمودار دوشاخگی در مقابل سرعت دورانی روتور در دمای ۱۳۰۰K - بدون در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی فیلم گاز در جهت افقی



شکل ۵-۱۶. نمودار دوشاخگی در مقابل سرعت دورانی روتور در دمای ۱۳۰۰K - بدون در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی فیلم گاز در جهت عمودی

۵-۱-۳-۳- تأثیر رقیق شدگی فیلم گاز

در شکل ۵-۱۷، نمودار دوشاخگی در دو حالت در کنار هم رسم شده است. همان طور که از شکل ۵-۱۷ قابل مشاهده است، جابه جایی افقی مرکز روتور با در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی افزایش می یابد و در جهت عمودی کاهش می یابد. هنگامی که اثر رقیق شدگی در نظر گرفته می شود، تغییر رفتار روتور از پریودیک به شبه پریودیک زودتر اتفاق می افتد. حرکت روتور با در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی در سرعت های پایانی تغییر می کند.



شکل ۵-۱۷. مقایسه نمودارهای دوشاخگی در مقابل سرعت دورانی روتور در دمای ۱۳۰۰ K - (الف) در جهت افقی (ب) در جهت عمودی

هنگامی که رفتار روتور پریودیک است، با در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی، جابه جایی مرکز روتور از ۴ تا ۹ درصد افزایش می یابد، و در جهت عمودی وقتی اثر رقیق شدگی در نظر گرفته می شود بین ۲ تا ۷ درصد کاهش می یابد. در طراحی میکرو موتورها، این مقدار تغییر در جابه جایی مرکز روتور می تواند منجر به اثرات قابل توجهی شود.

در این مطالعه، دما ۱۳۰۰ K در نظر گرفته شده است. اگر دما افزایش یابد، درصد تغییرات افزایش خواهد یافت که اهمیت در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی را بیشتر نشان خواهد داد.

۵-۲- میکرویاتاقان گازی غیرمدور سه لوبی

۵-۲-۱- بررسی رفتار حالت ماندگار

در این بخش، اثر دما و رقیق شدگی فیلم گاز بر روی مشخصه های حالت ماندگار میکرویاتاقان گازی غیرمدور سه لوبی بررسی شده است. به منظور تعیین پروفیل فشار، مدل MGL با استفاده از روش اجزاء محدود حل شده است و اثر دما و رقیق شدگی فیلم گاز بر روی فشار، ظرفیت حمل بار، زاویه انحراف، نسبت خروج از مرکزی و اتلاف توان اصطکاکی مطالعه شده است. نتایج نشان می دهد که اثر دما و رقیق شدگی فیلم گاز بر روی مشخصه های حالت ماندگار از اهمیت بالایی برخوردار هستند.

۵-۲-۱-۱-اعتبار سنجی

در میکرو وسایل، مشخصه های میکرویاتاقان گازی غیر مدور سه لوبی نسبت به مقیاس ماکرو متفاوت است. در مقیاس میکرو معادله MGL استفاده می شود. برای اطمینان از دقت نتایج، موقعیت تعادل روتور در شرایط $Q=1$ (جریان پیوسته) بدست می آید، و نتایج کار رشیدی و چاندرا برای $\delta = 0.5$, $L/D = 1$ در جدول ۳-۵ با نتایج یاتاقان گازی غیر مدور سه لوبی در مقیاس ماکرو مقایسه شده است. جدول ۳-۵ توافق خوبی مابین نتایج را نشان می دهد.

جدول ۳-۵. مقایسه نتایج در حالت ماندگار برای یاتاقان گازی غیرمدور سه لوبی در مقیاس ماکرو

Λ	W_0	X_{j0}^1	Y_{j0}^1	X_{j0}^2	Y_{j0}^2	X_{j0}^3	Y_{j0}^3	درصد خطا با نتایج چاندرا	درصد خطا با نتایج رشیدی
0.1	0.01	0.223	-0.004	0.217	-0.005	0.2212	-0.004	0.81	1.93
0.5	0.05	0.224	-0.018	0.218	-0.014	0.2219	-0.0175	0.95	1.90
1	0.1	0.222	-0.044	0.216	-0.035	0.2198	-0.0417	1.15	2.24
2	0.2	0.211	-0.082	0.209	-0.071	0.2104	-0.0796	0.63	1.91
5	0.5	0.194	-0.147	0.192	-0.146	0.1928	-0.1441	1.11	0.21
10	1	0.212	-0.215	0.212	-0.200	0.2097	-0.2111	1.45	2.09
20	2	0.272	-0.323	0.286	-0.324	0.2674	-0.3199	1.26	3.52
۱: نتایج چاندرا [۶] ۲: نتایج رشیدی [۵۱] ۳: نتایج مطالعه حاضر									

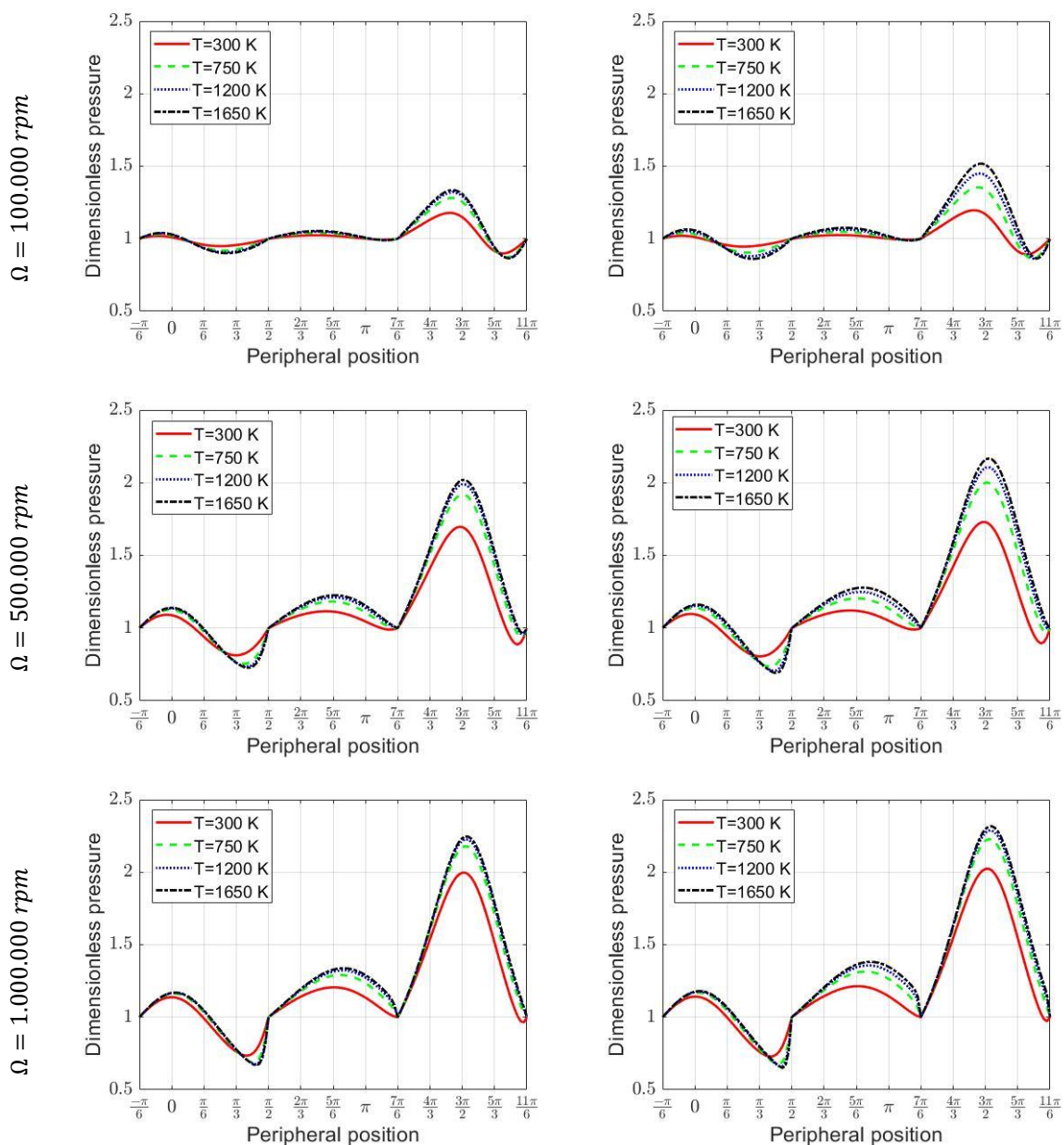
۵-۲-۱-۲-نتایج

مقدار پارامترهای اصلی مورد استفاده در تحلیل به صورت زیر می باشند:

$$L/D = 0.1; \quad p_a = 101325 \text{ Pa}; \quad \delta = 0.5$$

پروفیل فشار محیطی بدون بعد در مقطع میانی میکرویاتاقان گازی غیرمدور سه لوبی در شکل ۵-۱۸ ارائه شده است، که در آن نسبت طول به قطر یاتاقان برابر با 0.1 و نسبت بیضوی برابر با 0.5 است. سرعت دورانی روتور به ترتیب $100,000$ ، $500,000$ و $1,000,000$ دور بر دقیقه است. نتایج نشان می دهند که تغییر دما اثر قابل توجهی بر روی پروفیل فشار میکرویاتاقان گازی غیرمدور سه لوبی دارد. هنگامی که دما افزایش می یابد، مقادیر فشار در پروفیل فشار افزایش می یابد، و هنگامی که اثر رقیق شدگی در نظر گرفته می شود، مقادیر فشار در پروفیل فشار نسبت به حالتی که اثر رقیق شدگی نادیده گرفته می شود، کاهش می یابد.

هنگامی که دما افزایش می یابد، ویسکوزیته گاز افزایش می یابد، که به نوبه ی خود منجر به افزایش فشار گاز می گردد و هنگامی که گاز رقیق می شود، فشار گاز کاهش می یابد. هنگامی که این دو اثر با هم در نظر گرفته شوند، فشار گاز به علت غالب بودن اثر ویسکوزیته گاز کمتر افزایش می یابد.

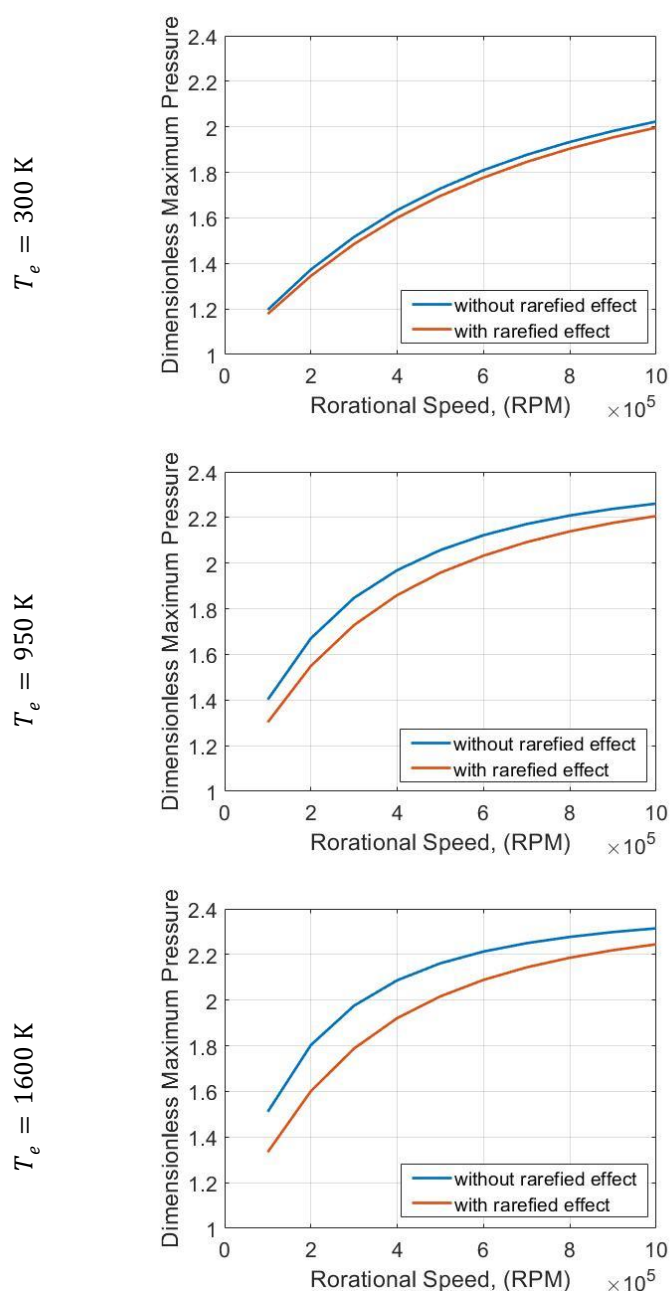


با در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی

بدون در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی

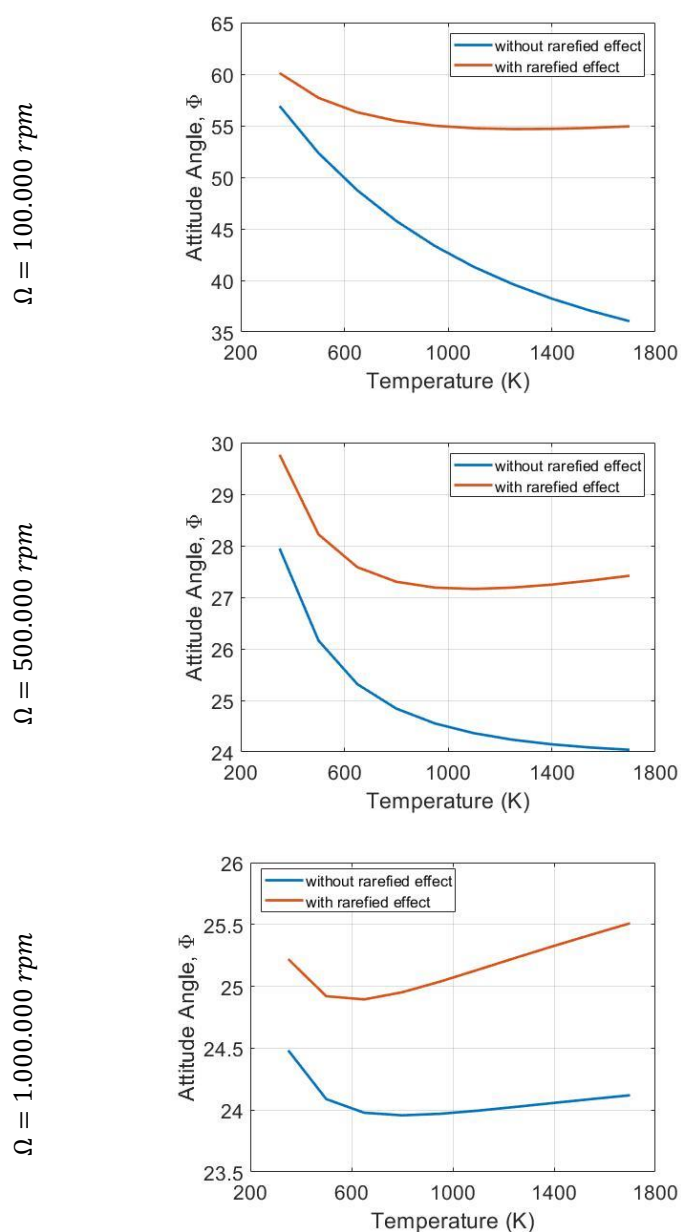
شکل ۵-۱۸. پروفیل فشار در مقطع میانی میکرویاتاقان گازی غیرمدور سه لوبی

همان طور که از شکل ۵-۱۸ مشاهده می شود، در حالتی که اثر رقیق شدگی فیلم گاز در نظر گرفته می شود، بعد از 1000 K با افزایش دمای گاز، تقریباً هیچ افزایشی در مقادیر فشار مشاهده نمی شود. مطابق با پروفیل های فشار در دو حالت، در دمای 300 K ، تقریباً مقدار فشار در دو حالت یکسان است. با افزایش سرعت دورانی روتور، مقادیر فشار میکرویاتاقان افزایش می یابد، اما وقتی اثر رقیق شدگی در نظر گرفته می شود، افت فشار با افزایش سرعت دورانی بیشتر می شود.



شکل ۵-۱۹. اثر افزایش سرعت دورانی و رقیق شدگی فیلم گاز بر روی مقدار فشار ماکزیموم

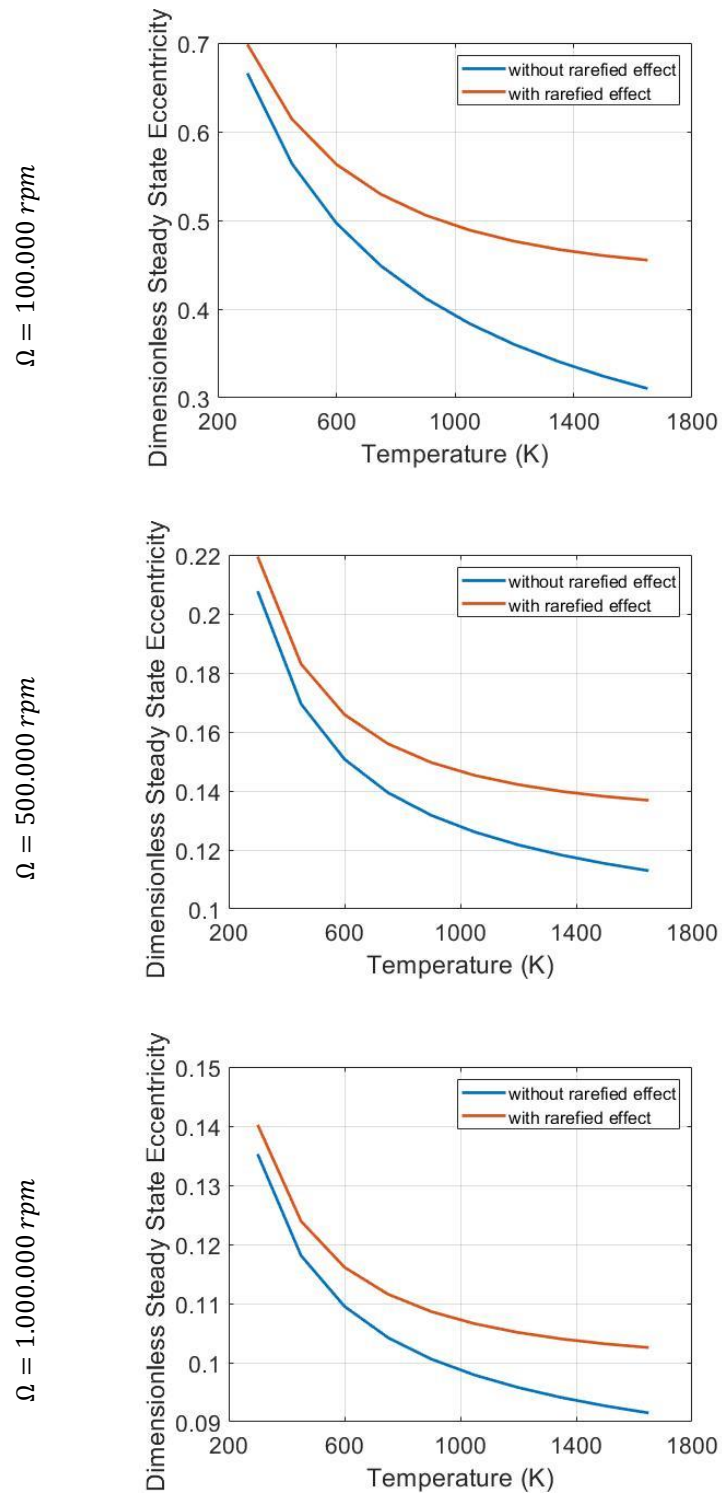
در شکل ۵-۱۹ اثر افزایش سرعت دورانی و رقیق شدگی فیلم گاز بر روی مقدار فشار ماکزیموم در دماهای مختلف ارائه شده است. هنگامی که سرعت دورانی افزایش می یابد، مقدار فشار ماکزیموم نیز افزایش می یابد. با در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی، مقدار فشار ماکزیموم نسبت به حالتی که اثر رقیق شدگی نادیده گرفته می شود، کمتر است. در سرعت های دورانی پایین، اختلاف مقدار فشار ماکزیموم مابین این دو حالت بیشتر است و زمانی که سرعت دورانی افزایش می یابد، این اختلاف کمتر می شود. همچنین با افزایش دمای گاز و با در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی، افت مقدار فشار ماکزیموم افزایش می یابد.



شکل ۵-۲۰. اثر افزایش دما و رقیق شدگی گاز بر روی زاویه انحراف

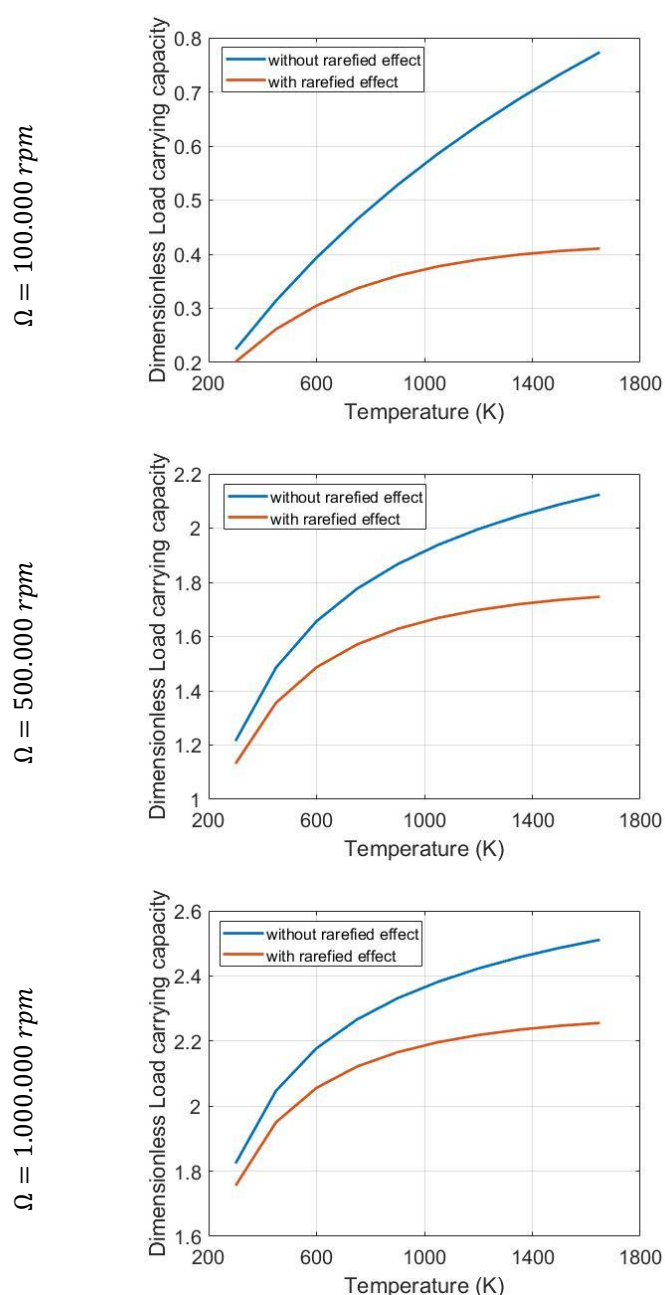
در شکل ۵-۲۰، اثر دما و اثر رقیق شدگی گاز بر روی زاویه انحراف میکرویاتاقان گازی غیر مدور سه لوبی بررسی شده است. همان طور که مشاهده می شود، در هر دو حالت زاویه انحراف با افزایش دمای گاز کاهش می یابد، اما وقتی که اثر رقیق شدگی گاز در نظر گرفته می شود، نرخ کاهشی زاویه انحراف کمتر می شود. هنگامی که دما افزایش می یابد، اختلاف مابین زاویه انحراف در دو حالت (با در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی و بدون در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی) افزایش می یابد، و در حالتی که اثر رقیق شدگی در نظر گرفته می شود، زاویه انحراف نسبت به حالتی که اثر رقیق شدگی در نظر گرفته نمی شود، با افزایش دمای گاز و سرعت دورانی روتور، زاویه انحراف کمتر می شود. اما وقتی سرعت دورانی به یک میلیون دور بر دقیقه می رسد، زاویه انحراف ابتدا کاهش می یابد و سپس بعد از 800 K زاویه انحراف افزایش می یابد.

در شکل ۵-۲۱، اثر دما و رقیق شدگی فیلم گاز بر روی خروج از مرکزی حالت ماندگار مرکز روتور میکرویاتاقان گازی غیر مدور سه لوبی بررسی شده است. همان طور که مشاهده می شود، هنگامی که دما افزایش می یابد، خروج از مرکزی مرکز روتور کاهش می یابد. با افزایش سرعت دورانی روتور، خروج از مرکزی روتور کاهش می یابد و هنگامی که اثر رقیق شدگی گاز در نظر گرفته می شود، خروج از مرکزی مرکز روتور نسبت به حالتی که اثر رقیق شدگی گاز در نظر گرفته نمی شود، بیشتر است و نرخ افزایش آن با افزایش سرعت دورانی روتور کاهش می یابد.



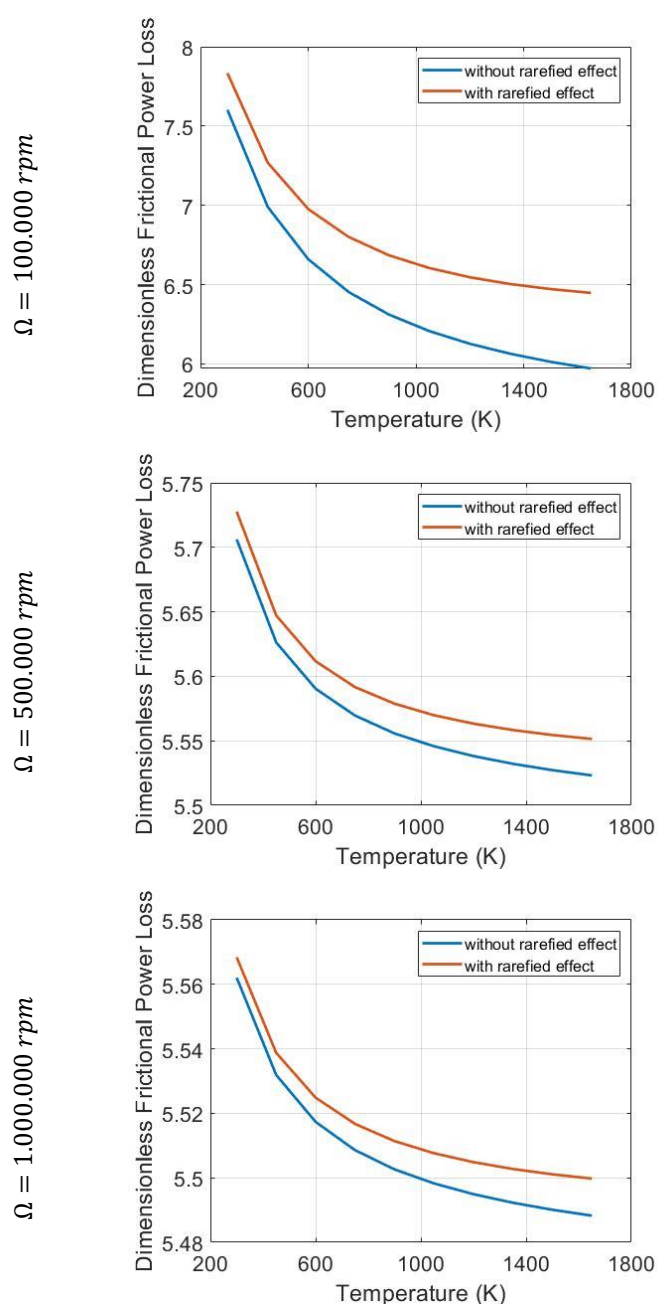
شکل ۵-۲۱. اثر افزایش دما و رقیق شدگی فیلم گاز بر روی خروج از مرکزی روتور

در شکل ۵-۲۲، اثر دما و رقیق شدگی گاز بر روی ظرفیت حمل بار میکرویاتاقان گازی غیرمدور سه لوبی بررسی شده است. هنگامی که دمای گاز و سرعت دورانی روتور افزایش می یابد، ظرفیت حمل بار یاتاقان نیز افزایش می یابد. هنگامی که اثر رقیق شدگی در نظر گرفته می شود، ظرفیت حمل بار یاتاقان نسبت به حالتی که اثر رقیق شدگی در نظر گرفته نمی شود، کمتر است و با افزایش سرعت دورانی روتور، نرخ کاهش ظرفیت حمل بار یاتاقان کمتر می شود.



شکل ۵-۲۲. اثر افزایش دما و رقیق شدگی فیلم گاز بر روی ظرفیت حمل بار یاتاقان

در شکل ۵-۲۳، اثر دما و رقیق شدگی گاز بر روی اتلاف توان اصطکاکی میکرویاتاقان گازی غیر مدور سه لوبی بررسی شده است. مطابق شکل، هر چه گاز رقیق تر می شود، اتلاف توان اصطکاکی کمتر می شود. هنگامی که سرعت دورانی روتور افزایش می یابد، اتلاف توان اصطکاکی کمتر می شود. با در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی، اتلاف توان اصطکاکی بیشتر می شود، با افزایش سرعت دورانی، میزان افزایش اتلاف توان اصطکاکی کمتر می شود.



شکل ۵-۲۳. اثر افزایش دما و رقیق شدگی فیلم گاز بر روی اتلاف توان اصطکاکی

۵-۲-۱-۳- نتیجه

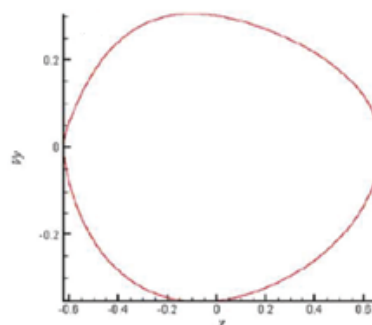
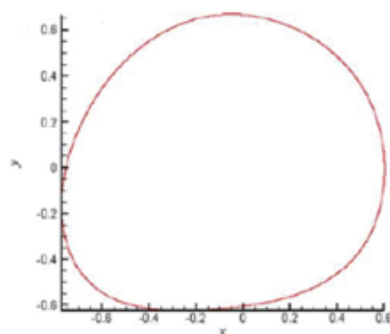
در میکرویاتاقان های گازی، با توجه به الزام سرعت های بالا برای افزایش ظرفیت حمل بار، احتمال افزایش دما وجود دارد. دمای بالا و اندازه کوچک میکرویاتاقان ها منجر به رقیق شدگی فیلم گاز می شود و نادیده گرفتن اثر رقیق شدگی فیلم گاز در حل معادله رینولدز منجر به بدست آمدن نتایج ناصحیح خواهد شد. هر چه گاز رقیق تر می شود، فشار گاز کمتر می شود و به تبع آن ظرفیت حمل بار یاتاقان کمتر می شود و زاویه انحراف بیشتر می شود. نتایج نشان می دهد که اثر رقیق شدگی گاز از اهمیت بالایی برخوردار است و مشخصه های حالت ماندگار میکرویاتاقان گازی غیر مدور سه لوبی را تحت تأثیر قرار می دهد.

۵-۲-۲- بررسی رفتار دینامیکی در اثر افزایش دما

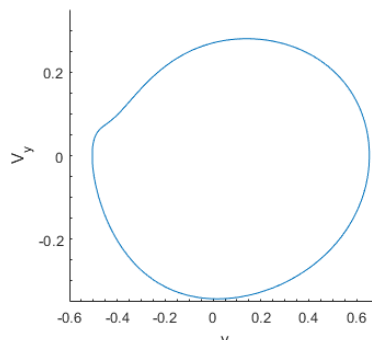
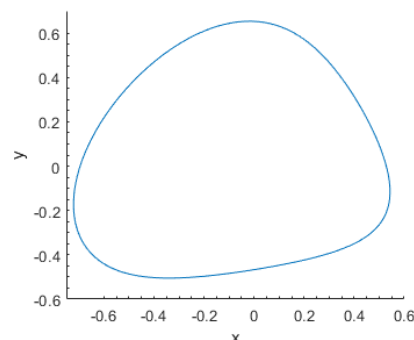
۵-۲-۲-۱- اعتبارسنجی

جهت اطمینان از صحت نتایج تحقیق حاضر، با توجه به عدم وجود کار مشابه بر روی یاتاقان گازی غیر مدور در مقیاس میکرو، رفتار دینامیکی یاتاقان گازی غیرمدور سه لوبی در مقیاس ماکرو مورد بررسی قرار گرفته و با نتایج کارهای مشابه در مقیاس ماکرو مقایسه شده است. گام اول تحلیل رفتار دینامیک غیرخطی، تعیین موقعیت تعادل حالت ماندگار روتور در داخل یاتاقان گازی به عنوان شرایط اولیه برای حالت دینامیکی می باشد، که جهت اطمینان از صحت نتایج، با نتایج ارائه شده توسط چاندرا و رشیدی مطابق جدول ۵-۳ مقایسه شده اند. با توجه به نتایج ارائه شده در این جدول توافق خوبی مابین نتایج مشاهده می شود. همچنین تحلیل رفتار دینامیک غیرخطی یاتاقان گازی غیرمدور سه لوبی در مقیاس ماکرو انجام شده و با نتایج بدست آمده توسط رشیدی مورد مقایسه قرار گرفته است. همان طور که از شکل ۵-۲۴ مشاهده می شود، نتایج کار حاضر با نتایج کار رشیدی از انطباق خوبی برخوردار است.

2-1



2-2



(الف)

(ب)

شکل ۲۴-۵. مقایسه نمودارهای دینامیکی یاتاقان گازی غیرمدور سه لوبی در مقیاس ماکرو در $\Lambda = 20$. (۲-۱) نتایج رشیدی [۵۲] (۲-۲) نتایج مطالعه حاضر. (الف) مدار مرکز روتور (ب) نمودار فازی

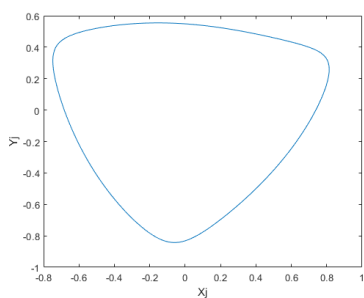
۵-۲-۲-۲- نتایج

در این بخش، رفتار دینامیکی میکرویاتاقان گازی غیر مدور سه لوبی با افزایش دما از 800 K تا 2800 K و با $\omega = 2 \times 10^5 \text{ rad/s}$ سرعت دورانی روتور قرار گرفته است. در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی مورد بررسی قرار گرفته است.

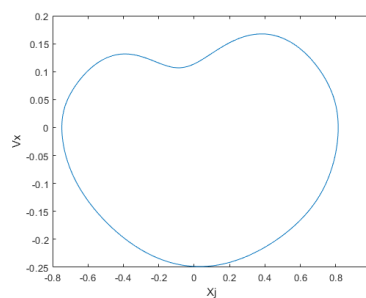
نمودارهای دینامیکی شامل اوربیت مرکز روتور، نمودار فازی، نگاشت پوانکاره و نمودار طیف توانی برای دماهای مختلف در شکل ۲۵-۵ نشان داده شده است. در شکل ۲۶-۵ و شکل ۲۷-۵ نمودار دوشاخگی در برابر دما به عنوان پارامتر دوشاخگی رسم شده است. با توجه به شکل ۲۶-۵ و شکل ۲۷-۵، حرکت روتور از دمای 800 K تا دمای 920 K حرکت روتور به صورت $4T$ -پریودیک است و تا دما 1010 K به صورت KT -پریودیک بوده و تا دمای 1190 K با افزایش دما حرکت روتور به حرکت شبه پریودیک تبدیل می شود. از دمای 1220 K تا دمای 1280 K حرکت روتور به صورت $5T$ -پریودیک است و سپس با افزایش دما دوباره حرکت روتور به شبه پریودیک تبدیل می شود تا اینکه در دمای 1700 K به حرکت $6T$ -پریودیک تبدیل می شود و با افزایش

دما حرکت روتور شبه پریودیک می شود. در دمای 2030 K حرکت روتور به $6T$ -پریودیک و در دمای 2060 K حرکت روتور به $7T$ -پریودیک تبدیل می شود. پس از این دما با افزایش دما حرکت روتور شبه پریودیک خواهد بود. به صورت کلی، با افزایش دما، میزان جابه جایی روتور کاهش می یابد.

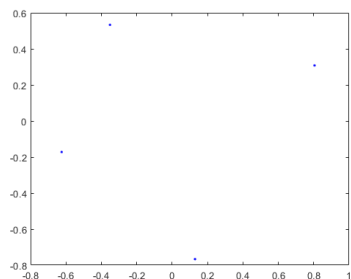
$$T_e = 800\text{ K}$$



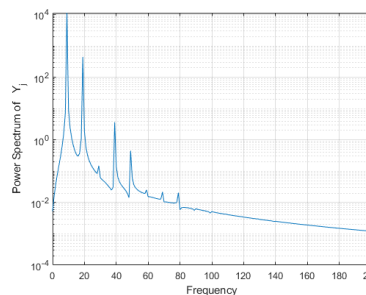
(الف)



(ب)



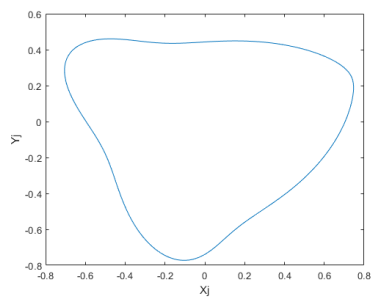
(ج)



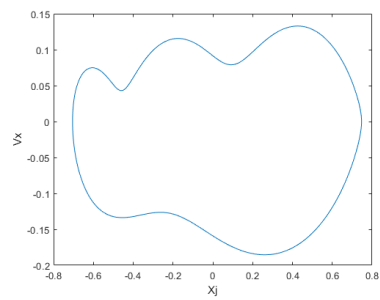
(د)

شکل ۵-۲۵. نمودارهای دینامیکی در دماهای مختلف در $\omega = 2 \times 10^5 \text{ rad/s}$. (الف) مسیر حرکت مرکز روتور (ب) نمودار فازی مرکز روتور (ج) نگاشت پوانکاره (د) طیف توانی جابه جایی روتور

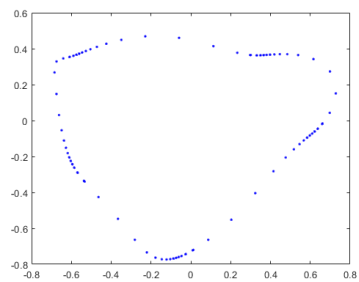
$T_e = 1300K$



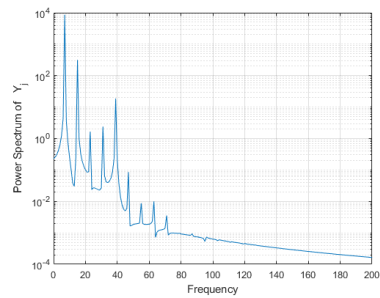
(الف)



(ب)



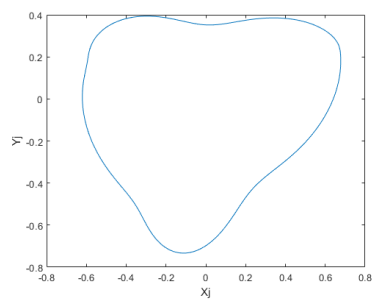
(ج)



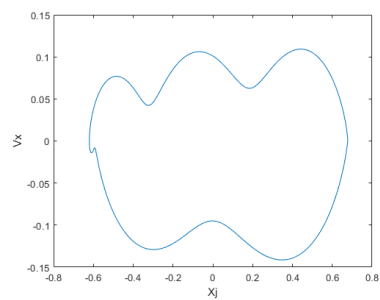
(د)

شکل ۵-۲۵. ادامه

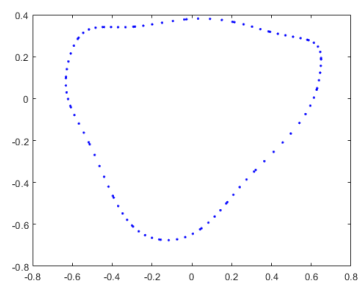
$T_e = 1800K$



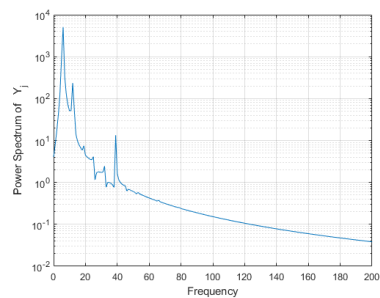
(الف)



(ب)



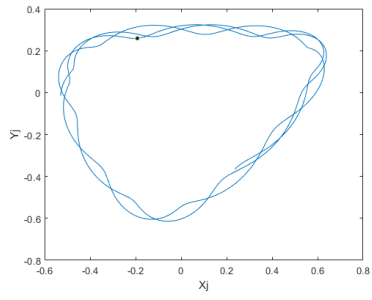
(ج)



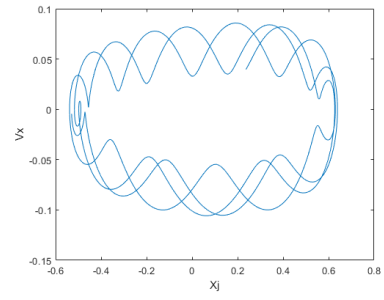
(د)

شکل ۵-۲۵. ادامه

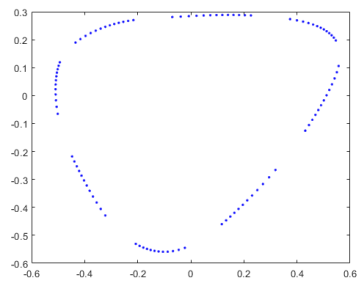
$T_e = 2300K$



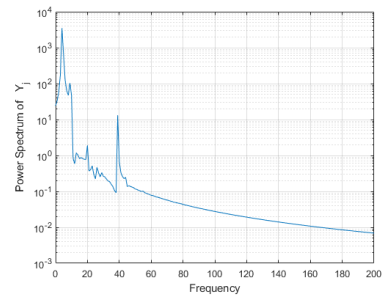
(الف)



(ب)



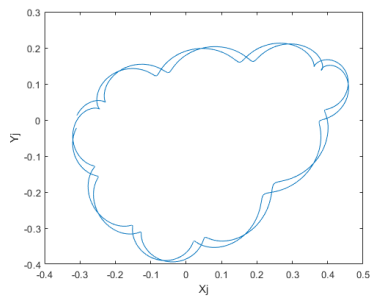
(ج)



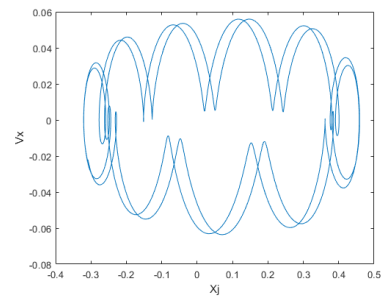
(د)

شکل ۵-۲۵. ادامه

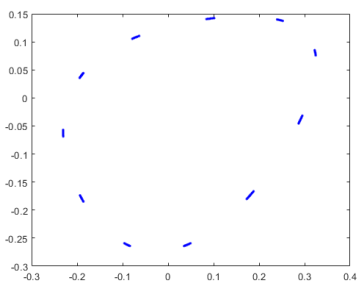
$T_e = 2800K$



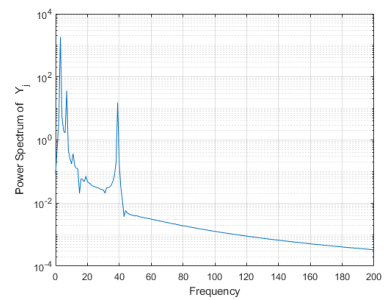
(الف)



(ب)

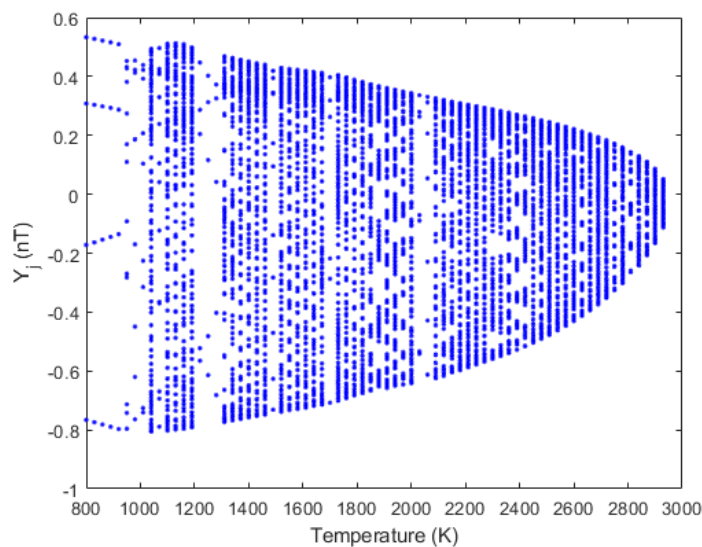


(ج)

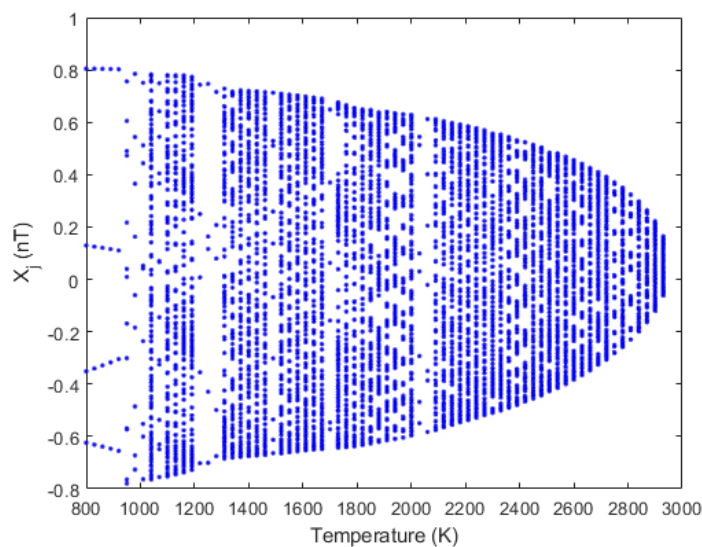


(د)

شکل ۵-۲۵. ادامه



شکل ۵-۲۶. نمودار دوشاخگی در مقابل دما در سرعت دورانی $\omega = 2 \times 10^5 \text{ rad/s}$ در جهت افقی



شکل ۵-۲۷. نمودار دوشاخگی در مقابل دما در سرعت دورانی $\omega = 2 \times 10^5 \text{ rad/s}$ در جهت عمودی

۵-۲-۳- بررسی رفتار دینامیکی در اثر سرعت دورانی در دماهای بالا

در این بخش از رساله، رفتار دینامیکی میکرویاتاقان گازی غیر مدور سه لوبی هنگامی که سرعت دورانی روتور از $0.5 \times 10^5 \text{ rad/s}$ تا $2.25 \times 10^5 \text{ rad/s}$ افزایش می یابد و با در نظر گرفتن و بدون در نظر گرفتن

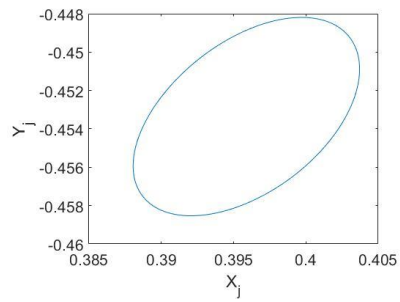
اثر رقیق شدگی بررسی شده است. بار خارجی اعمالی به ژورنال $W = 0.4053 N$ و دمای فیلم گاز $T_e = 1500 K$ است.

۵-۲-۳-۱- با در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی

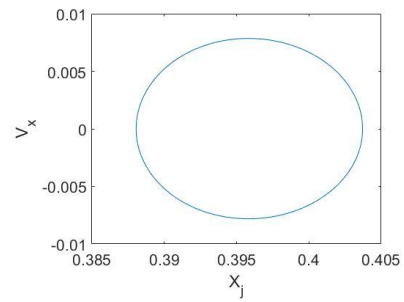
نمودارهای دینامیکی شامل مسیر حرکت مرکز روتور، نمودار فازی، نگاشت پوانکاره و طیف توانی در شکل ۲۸-۵ نشان داده شده اند. شکل ۲۹-۵ و شکل ۳۰-۵ نمودار دوشاخگی را نشان می دهد که در آن سرعت دورانی روتور به عنوان پارامتر دوشاخگی در نظر گرفته شده است. در $0.5 \times 10^5 \text{ rad/s}$ با توجه به مسیر حرکت مرکز روتور، نمودار فازی و با توجه به تک نقطه ای بودن نگاشت پوانکاره، حرکت 1T-پریودیک است، و در نمودار طیف توانی، پیک ها در ضرایب صحیحی از یک فرکانس پایه ظاهر شده اند. در $1 \times 10^5 \text{ rad/s}$ و $1.5 \times 10^5 \text{ rad/s}$ نیز حرکت 1T-پریودیک است. در $2 \times 10^5 \text{ rad/s}$ با توجه به مسیر حرکت مرکز روتور، نگاشت پوانکاره حلقه بسته بوده و نمودار طیف توانی حاوی فرکانس های ناصحیح است، بنابراین حرکت از نوع شبه پریودیک است. در $2.25 \times 10^5 \text{ rad/s}$ نیز با توجه به نگاشت پوانکاره که شبیه یک حلقه بسته است، می توان نتیجه گرفت که حرکت از نوع شبه پریودیک می باشد.

مطابق شکل ۲۹-۵ و شکل ۳۰-۵ رفتار روتور تا سرعت $\omega = 1.6 \times 10^5 \text{ rad/s}$ از نوع 1T-پریودیک است و سپس با افزایش سرعت دورانی، حرکت به حرکت شبه پریودیک تبدیل می شود. زمانی که سرعت دورانی روتور به $\omega = 2.1 \times 10^5 \text{ rad/s}$ می رسد، حرکت به صورت فاز قفل شونده است. در سرعت دورانی برابر با $\omega = 2.15 \times 10^5 \text{ rad/s}$ ، حرکت از نوع 9T-پریودیک است و سپس زمانی که سرعت دورانی برابر با $\omega = 2.25 \times 10^5 \text{ rad/s}$ می شود، حرکت تبدیل به حرکت شبه پریودیک می شود.

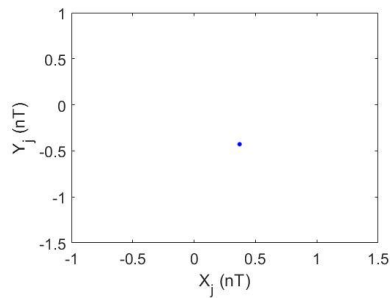
$$\omega = 0.5 \times 10^5 \text{ rad/s}$$



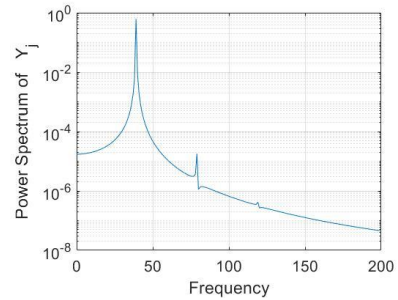
(الف)



(ب)



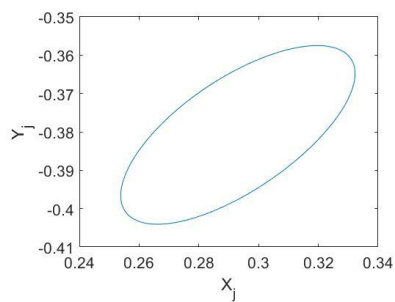
(ج)



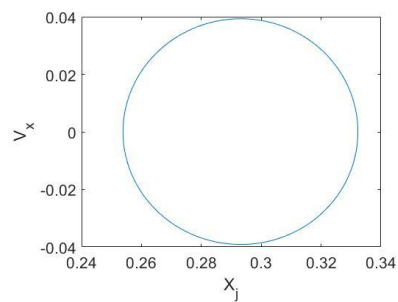
(د)

شکل ۵-۲۸. نمودارهای دینامیکی در سرعت های دورانی مختلف با در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی در دمای $T_e = 1500 \text{ K}$ -
 الف) مسیر حرکت مرکز روتور (ب) نمودار فازی مرکز روتور (ج) نگاشت پوانکاره (د) طیف توانی جابه جایی روتور

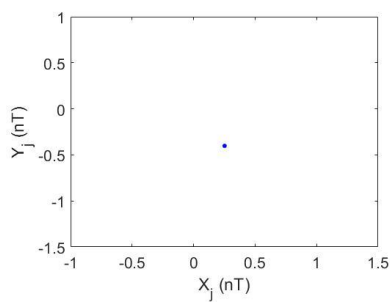
$$\omega = 1 \times 10^5 \text{ rad/s}$$



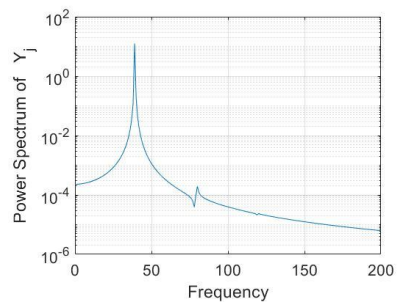
(الف)



(ب)



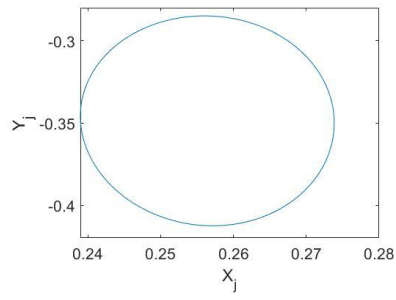
(ج)



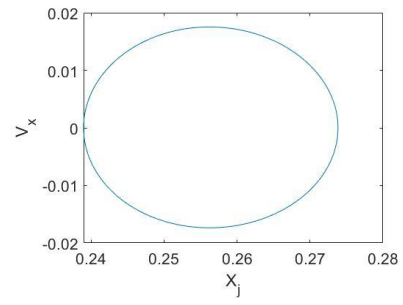
(د)

شکل ۵-۲۸. ادامه

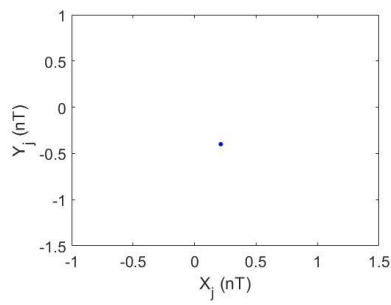
$$\omega = 1.5 \times 10^5 \text{ rad/s}$$



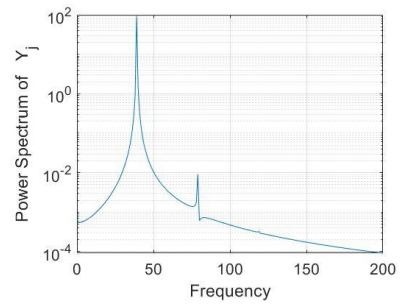
(الف)



(ب)



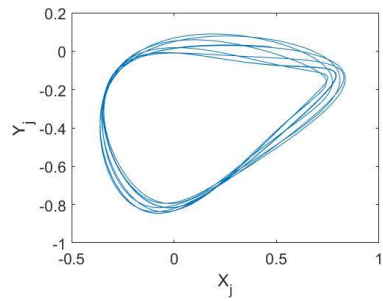
(ج)



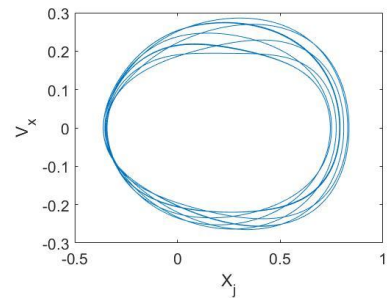
(د)

شکل ۵-۲۸. ادامه

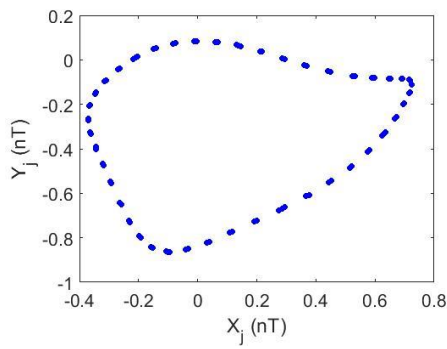
$$\omega = 2 \times 10^5 \text{ rad/s}$$



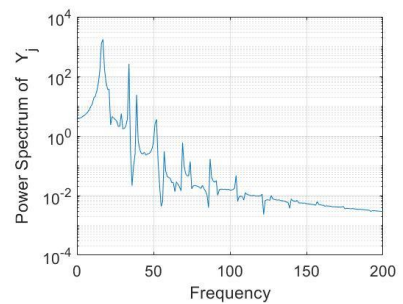
(الف)



(ب)



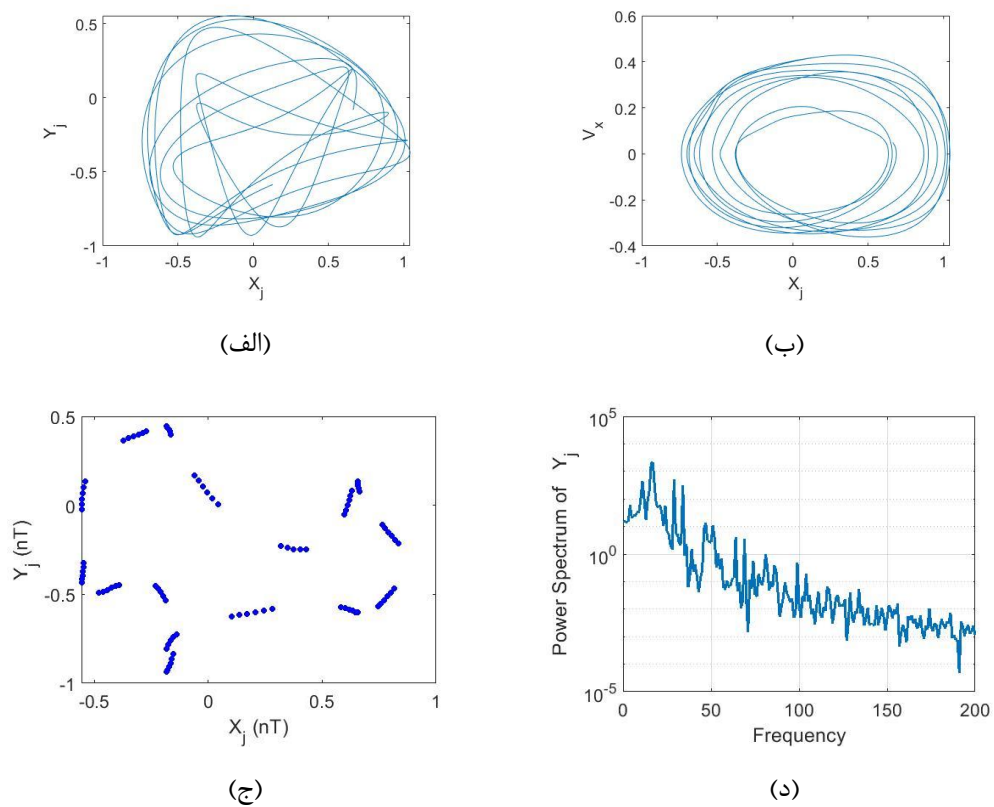
(ج)



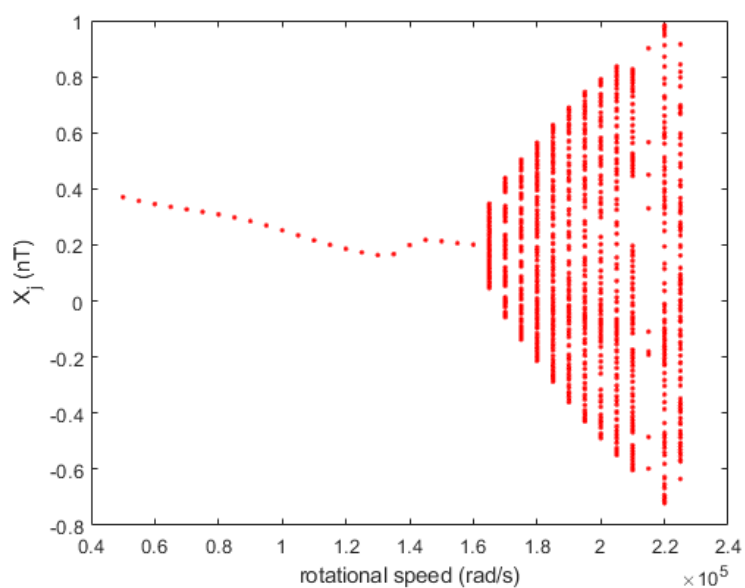
(د)

شکل ۵-۲۸. ادامه

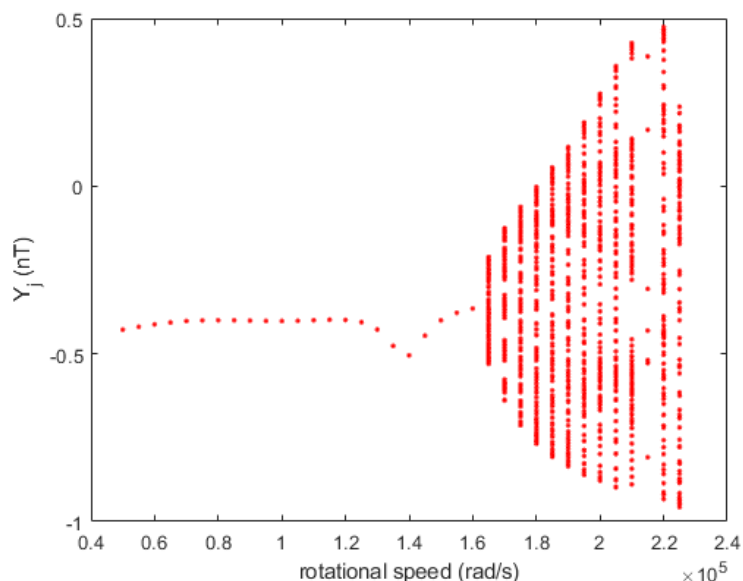
$$\omega = 2 \cdot 25 \times 10^5 \text{ rad/s}$$



شکل ۵-۲۸. ادامه



شکل ۵-۲۹. نمودار دوشاخگی در مقابل سرعت دورانی روتور در دمای $T_e = 1500 \text{ K}$ در جهت افقی با در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی فیلم گاز



شکل ۵-۳. نمودار دوشاخگی در مقابل سرعت دورانی روتور در دمای $T_e = 1500 K$ در جهت عمودی با در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی فیلم گاز

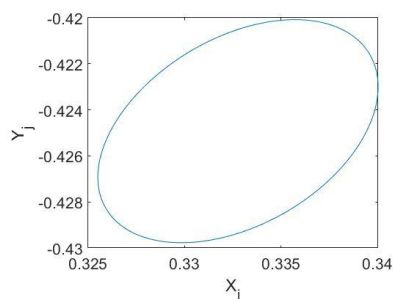
۵-۲-۳-۲- بدون در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی

نمودارهای دینامیکی شامل مسیر حرکت مرکز روتور، نمودار فازی، نگاشت پوانکاره و طیف توانی در شکل ۵-۳۱ نشان داده شده اند. شکل ۵-۳۲ و شکل ۵-۳۳ نمودار دوشاخگی را نشان می دهد که در آن سرعت دورانی روتور به عنوان پارامتر دوشاخگی در نظر گرفته شده است. در $0.5 \times 10^5 \text{ rad/s}$ با توجه به مسیر حرکت مرکز روتور، نمودار فازی و با توجه به تک نقطه ای بودن نگاشت پوانکاره، حرکت 1T-پریودیک است، و در نمودار طیف توانی، پیک ها در ضرایب صحیحی از یک فرکانس پایه ظاهر شده اند. در $1 \times 10^5 \text{ rad/s}$ نیز حرکت 1T-پریودیک است و بازه جابه جایی مرکز روتور در جهات افقی و عمودی نسبت به سرعت دورانی قبلی کاهش یافته است. همچنین در $1.5 \times 10^5 \text{ rad/s}$ نیز حرکت 1T-پریودیک است. در سرعت دورانی $2 \times 10^5 \text{ rad/s}$ با توجه به مسیر حرکت مرکز روتور حرکت توروئیدال^۱ است، نگاشت پوانکاره حلقه بسته بوده و نمودار طیف توانی حاوی فرکانس های ناصحیح است، بنابراین حرکت از نوع شبه پریودیک است. زمانی

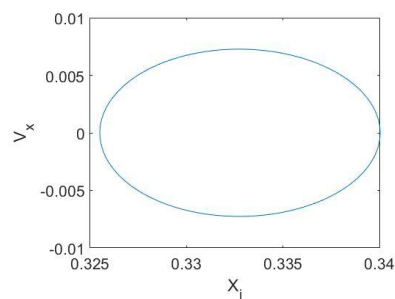
^۱ toroidal

که سرعت دورانی به $2 \cdot 25 \times 10^5 \text{ rad/s}$ می رسد، با توجه به نگاشت پوانکاره، تبدیل به حرکت از نوع آشوب می شود.

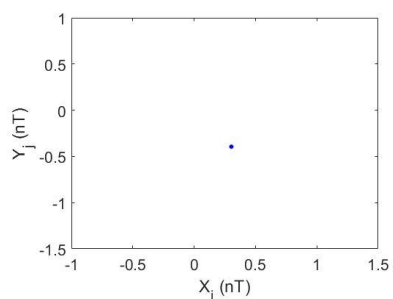
$$\omega = 0 \cdot 5 \times 10^5 \text{ rad/s}$$



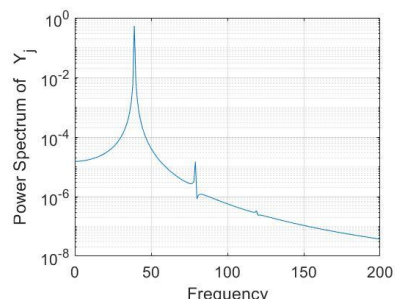
(الف)



(ب)



(ج)

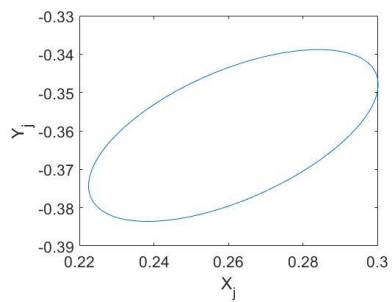


(د)

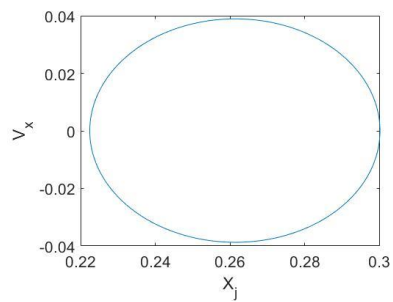
شکل ۳۱-۵. نمودارهای دینامیکی در سرعت های دورانی مختلف بدون در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی در دمای $T_e = 1500$ K- (الف) مسیر حرکت مرکز روتور (ب) نمودار فازی مرکز روتور (ج) نگاشت پوانکاره (د) طیف توانی جابه جایی روتور

با توجه به شکل ۳۲-۵ و شکل ۳۳-۵، رفتار روتور تا سرعت دورانی $\omega = 1 \cdot 6 \times 10^5 \text{ rad/s}$ از نوع $-1T$ پریودیک است. در سرعت $\omega = 1 \cdot 65 \times 10^5 \text{ rad/s}$ حرکت تبدیل به حرکت شبه پریودیک می شود. این حرکت تا سرعت $\omega = 2 \times 10^5 \text{ rad/s}$ ادامه می یابد تا اینکه در سرعت دورانی $\omega = 2 \cdot 05 \times 10^5 \text{ rad/s}$ به حرکت فاز قفل شونده تبدیل می شود. پس از این سرعت تا سرعت دورانی $\omega = 2 \cdot 25 \times 10^5 \text{ rad/s}$ حرکت از نوع آشوب می باشد.

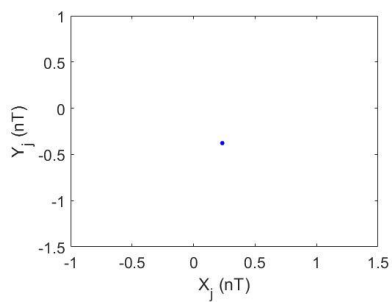
$$\omega = 1 \times 10^5 \text{ rad/s}$$



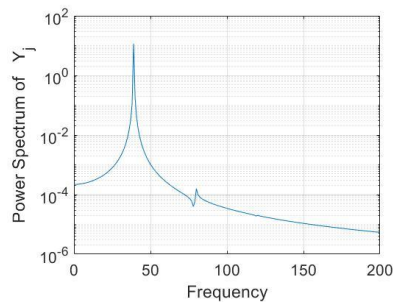
(الف)



(ب)



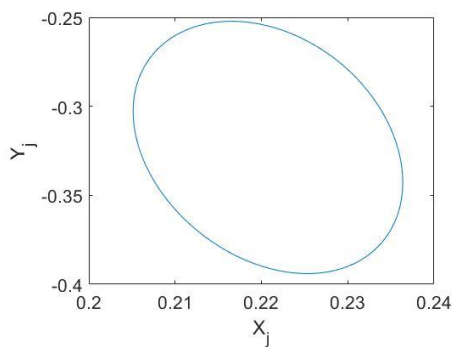
(ج)



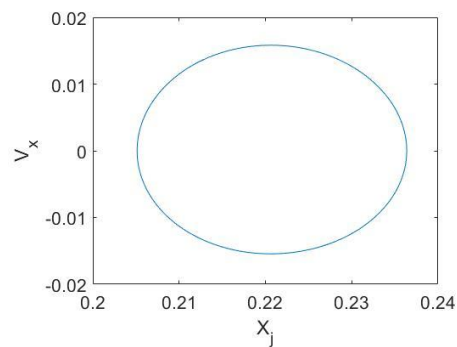
(د)

شکل ۵-۳۱. ادامه

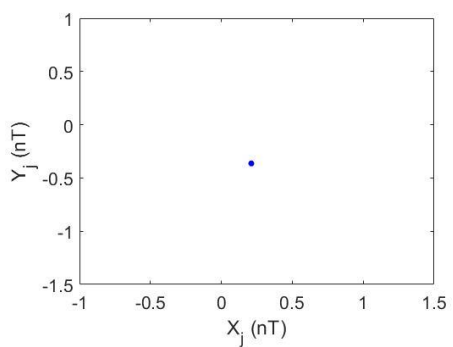
$$\omega = 1.5 \times 10^5 \text{ rad/s}$$



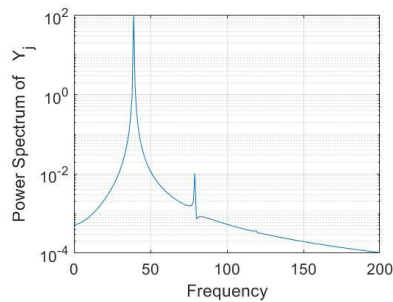
(الف)



(ب)



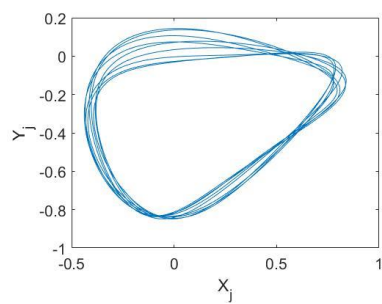
(ج)



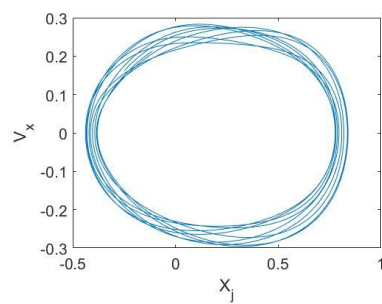
(د)

شکل ۵-۳۱. ادامه

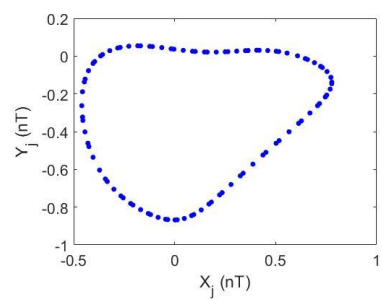
$$\omega = 2 \times 10^5 \text{ rad/s}$$



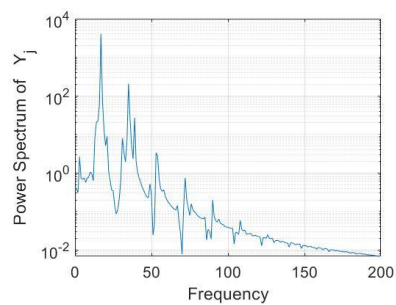
(الف)



(ب)



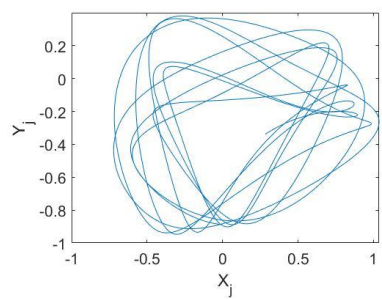
(ج)



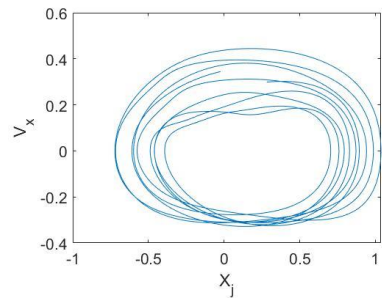
(د)

شکل ۵-۳۱. ادامه

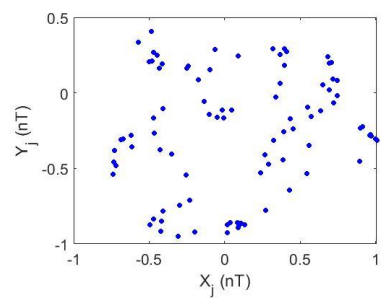
$$\omega = 2 \cdot 25 \times 10^5 \text{ rad/s}$$



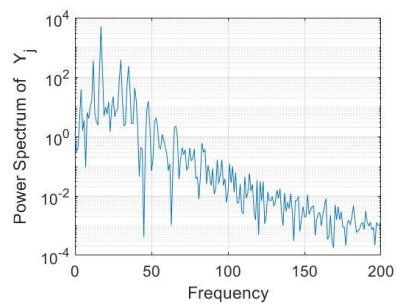
(الف)



(ب)

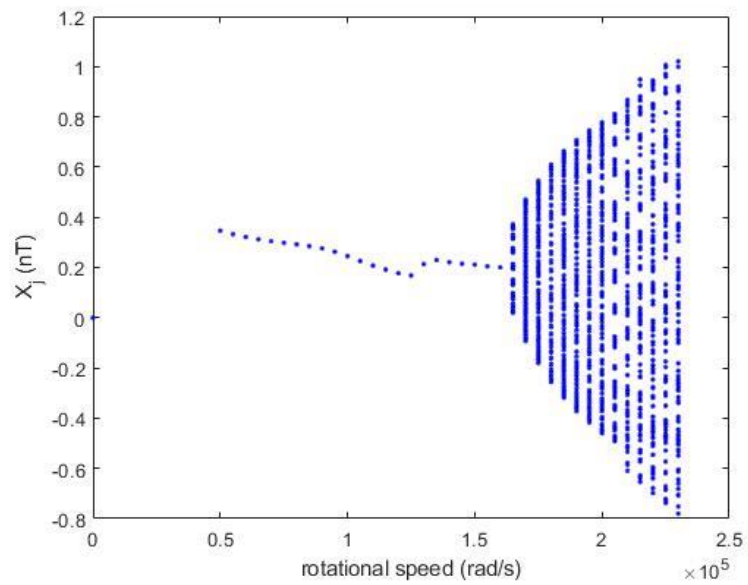


(ج)

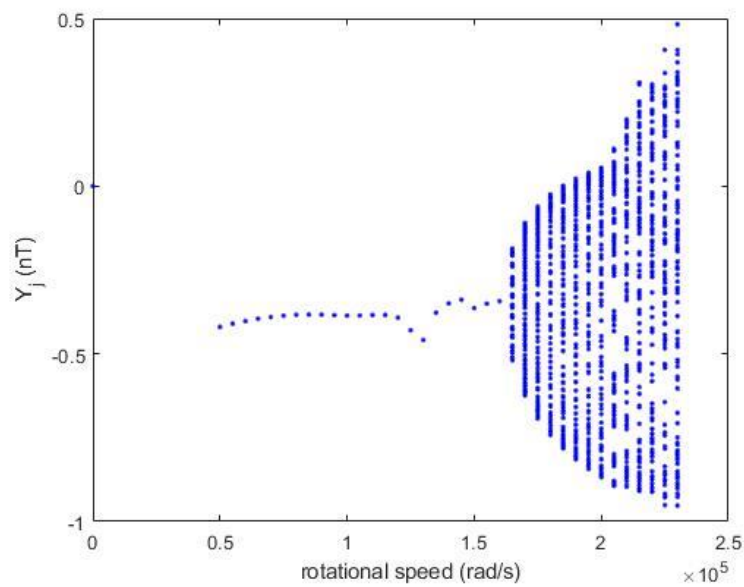


(د)

شکل ۵-۳۱. ادامه



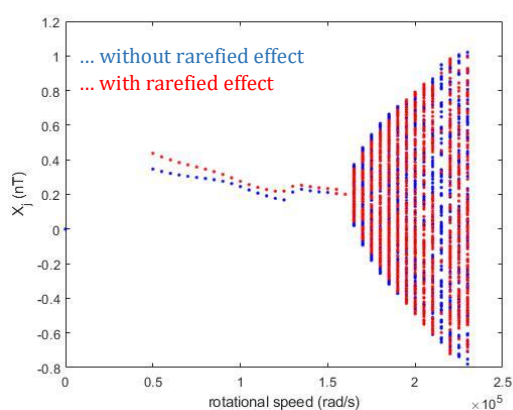
شکل ۵-۳۲. نمودار دوشاخگی در مقابل سرعت دورانی روتور در دمای $T_e = 1500\text{ K}$ در جهت افقی بدون در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی فیلم گاز



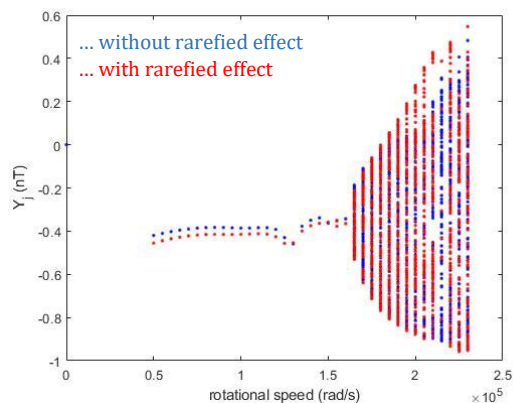
شکل ۵-۳۳. نمودار دوشاخگی در مقابل سرعت دورانی روتور در دمای $T_e = 1500\text{ K}$ در جهت عمودی بدون در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی فیلم گاز

۵-۲-۳- تأثیر رقیق شدگی فیلم گاز

در شکل ۳۴-۵ نمودار دو شاخگی در دو حالت با و بدون در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی در کنار هم رسم شده است. با توجه به شکل، زمانی که اثر رقیق شدگی در نظر گرفته می شود، جابه جایی مرکز روتور در جهت افقی و عمودی افزایش می یابد. اختلاف مابین دو حالت در سرعت دورانی پایین در حدود ۲۰ درصد بوده و با افزایش سرعت دورانی این اختلاف کمتر می شود. در سرعت های دورانی بالا، بدون در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی، به حرکت آشوب می رسیم در صورتی که اثر رقیق شدگی در نظر گرفته شود، شاهد رفتار شبه پریودیک خواهیم بود.



(الف)



(ب)

شکل ۳۴-۵. مقایسه نمودارهای دوشاخگی در مقابل سرعت دورانی روتور- (الف) در جهت افقی (ب) در جهت عمودی

۵-۳- میکرویاتاقان گازی غیرمدور چهار لوبی

۵-۳-۱- بررسی رفتار حالت ماندگار

در این بخش، اثر دما و رقیق شدگی فیلم گاز بر روی مشخصه های حالت پایدار میکرویاتاقان گازی غیرمدور چهار لوبی بررسی شده است. به منظور تعیین پروفیل فشار، مدل MGL با استفاده از روش اجزاء محدود حل شده است و اثر دما و رقیق شدگی فیلم گاز بر روی فشار، ظرفیت حمل بار، زاویه انحراف، نسبت خروج از

مرکزی و اتلاف توان اصطکاکی مطالعه شده است. نتایج نشان می دهد که اثر دما و رقیق شدگی فیلم گاز بر روی مشخصه های حالت ماندگار از اهمیت بالایی برخوردار هستند.

۵-۳-۱-۱- اعتبار سنجی

در میکرو وسایل، مشخصه های میکرویاتاقان گازی غیر مدور چهار لوبی نسبت به مقیاس ماکرو متفاوت است. در مقیاس میکرو معادله MGL استفاده می شود. برای اطمینان از دقت نتایج، موقعیت تعادل روتور در شرایط $Q=1$ (جریان پیوسته) برای $L/D = 1, \delta = 0.5$ بدست آمده، و با نتایج کار رشیدی و چاندرا در جدول ۴-۵ مقایسه شده است. جدول ۴-۵ توافق خوبی مابین نتایج را نشان می دهد.

جدول ۴-۵. مقایسه نتایج در حالت ماندگار برای یاتاقان گازی غیرمدور چهار لوبی در مقیاس ماکرو

Λ	W_0	X_{j0}^1	Y_{j0}^1	X_{j0}^2	Y_{j0}^2	X_{j0}^3	Y_{j0}^3	درصد خطا با نتایج چاندرا	درصد خطا با نتایج رشیدی
0.1	0.01	0.240	-0.004	0.233	-0.003	0.2355	-0.0045	1.87	1.08
0.5	0.05	0.238	-0.023	0.232	-0.015	0.2348	-0.0223	1.36	1.45
1	0.1	0.234	-0.046	0.232	-0.032	0.2328	-0.0435	0.69	1.12
2	0.2	0.23	-0.085	0.231	-0.081	0.2276	-0.0804	1.56	1.39
5	0.5	0.231	-0.159	0.227	-0.154	0.2289	-0.1532	1.78	0.41
10	1	0.277	-0.243	0.268	-0.241	0.2724	-0.2345	2.46	0.27
20	2	0.375	-0.400	0.380	-0.406	0.371	-0.3950	1.16	2.55
۱: نتایج چاندرا ۲: نتایج رشیدی ۳: نتایج مطالعه حاضر									

۵-۳-۱-۲- نتایج

مقدار پارامترهای اصلی مورد استفاده در تحلیل به صورت زیر می باشند:

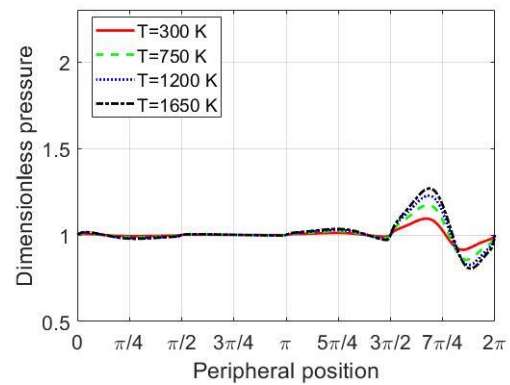
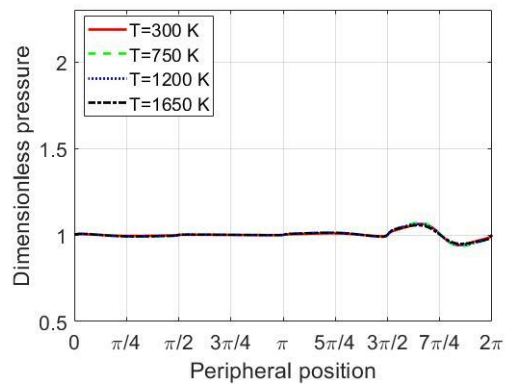
$$L/D = 0.05; \quad p_a = 101325 \text{ Pa}; \quad \delta = 0.4$$

پروفیل فشار محیطی بدون بعد در مقطع میانی میکرویاتاقان گازی غیرمدور چهار لوبی در شکل ۵-۳۵ ارائه شده است، که در آن نسبت طول به یاتاقان برابر با ۰/۵ و نسبت بیضوی برابر با ۰/۴ است. سرعت دورانی روتور به ترتیب ۱۰۰،۰۰۰، ۵۰۰،۰۰۰ و ۱،۰۰۰،۰۰۰ دور بر دقیقه است. نتایج نشان می دهند که تغییر دما

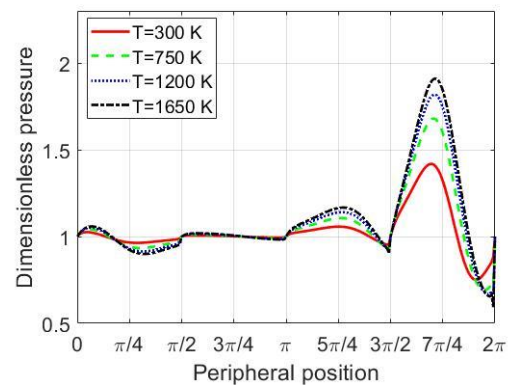
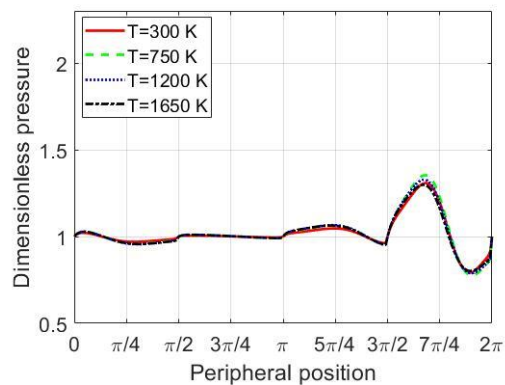
اثر قابل توجهی بر روی پروفیل فشار میکرویاتاقان گازی غیرمدور چهار لوبی دارد. هنگامی که دما افزایش می‌یابد، مقادیر فشار در پروفیل فشار افزایش می‌یابد، و هنگامی که اثر رقیق شدگی در نظر گرفته می‌شود، مقادیر فشار در پروفیل فشار نسبت به حالتی که اثر رقیق شدگی نادیده گرفته می‌شود، کاهش می‌یابد. هنگامی که دما افزایش می‌یابد، ویسکوزیته گاز افزایش می‌یابد، که به نوبه ی خود منجر به افزایش فشار گاز می‌گردد و هنگامی که گاز رقیق می‌شود، فشار گاز کاهش می‌یابد. هنگامی که این دو اثر با هم در نظر گرفته شوند، فشار گاز به علت غالب بودن اثر ویسکوزیته گاز کمتر افزایش می‌یابد.

در سرعت دورانی پایین، در حالتی که اثر رقیق شدگی فیلم گاز در نظر گرفته نشده است، حداکثر اختلاف فشار مابین دماها در حدود ۱۶ درصد است و با در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی، این اختلاف در حدود ۱/۳ درصد است. در سرعت دورانی بالا، در حالتی که اثر رقیق شدگی فیلم گاز در نظر گرفته نشده است، حداکثر اختلاف فشار مابین دماها در حدود ۳۲ درصد است و با در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی فیلم گاز، این اختلاف در حدود ۱ درصد است. نکته ی جالب توجه در میکرویاتاقان های چهار لوبی این است که با در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی، مقادیر فشار با افزایش دما ابتدا افزایش و سپس کاهش پیدا می‌کنند. مطابق با شکل، با افزایش سرعت دورانی روتور، مقادیر فشار میکرویاتاقان افزایش می‌یابد، و در نتیجه ظرفیت حمل بار میکرویاتاقان افزایش می‌یابد.

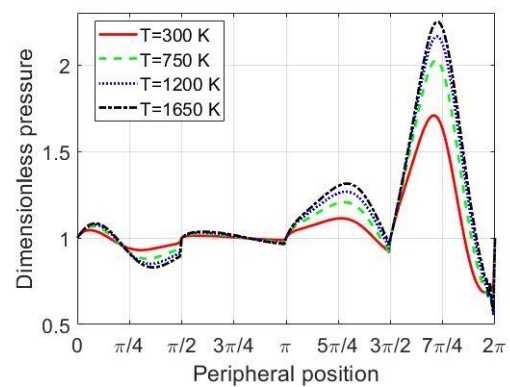
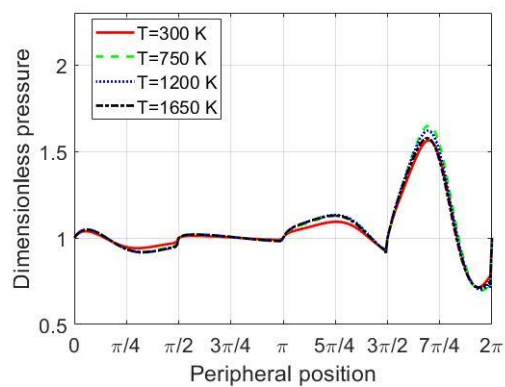
$\Omega = 100.000 \text{ rpm}$



$\Omega = 500.000 \text{ rpm}$



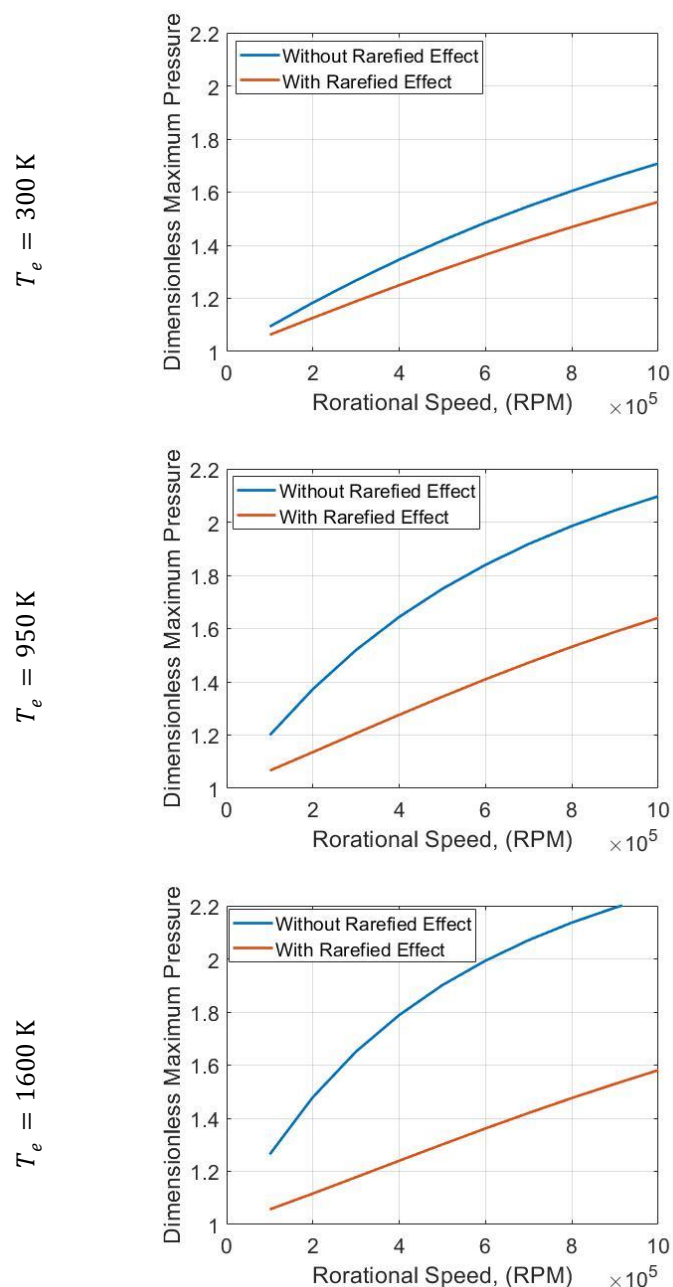
$\Omega = 1.000.000 \text{ rpm}$



با در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی

بدون در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی

شکل ۵-۳۵. پروفیل فشار در مقطع میانی میکرویاتاقان گازی غیرمدور چهار لوبی



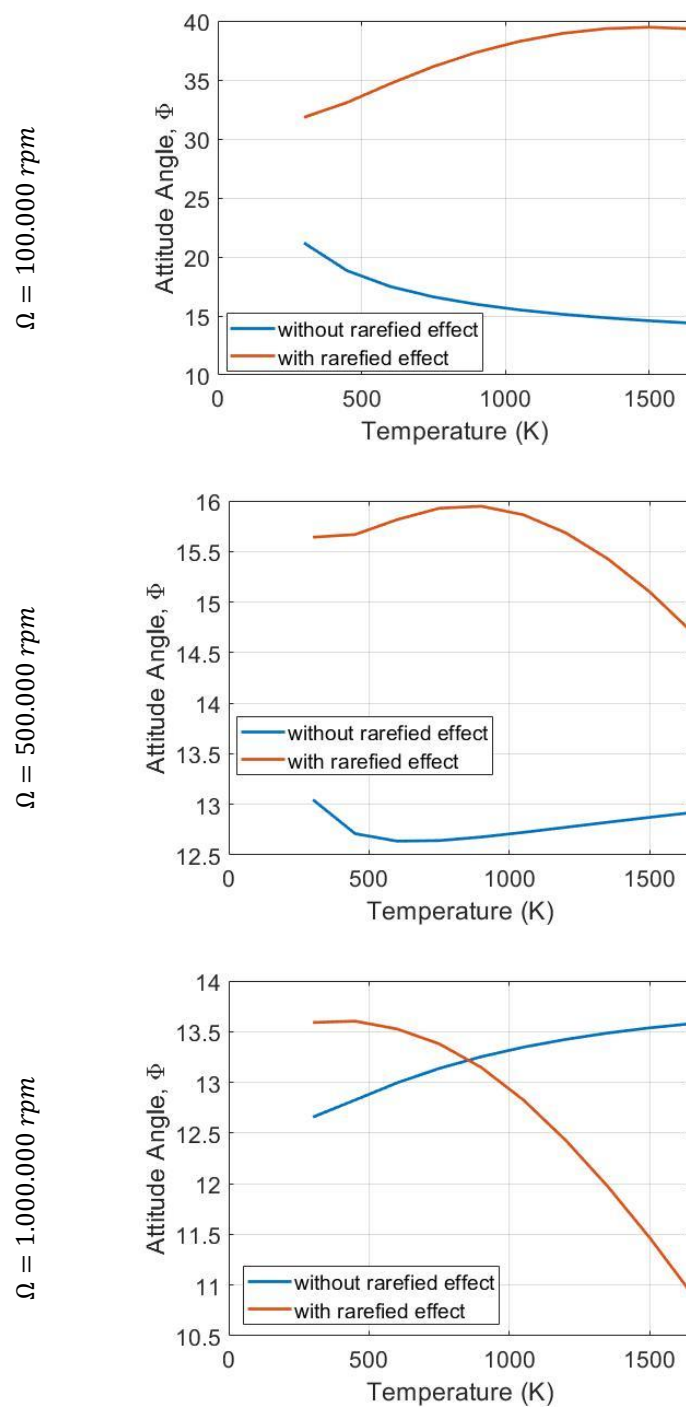
شکل ۵-۳۶. اثر افزایش سرعت دورانی روتور و رقیق شدگی فیلم گاز بر روی مقدار فشار ماکزیموم

در شکل ۵-۳۶ اثر افزایش سرعت دورانی و رقیق شدگی فیلم گاز بر روی مقدار فشار ماکزیموم داخل میکرویاتاقان نشان داده شده است. با توجه به شکل با افزایش سرعت دورانی مقدار فشار ماکزیموم افزایش می‌یابد و با در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی مقدار فشار ماکزیموم نسبت به حالتی که اثر رقیق شدگی در نظر گرفته نمی‌شود، کمتر می‌شود. برای یک سرعت دورانی معین، با افزایش دمای گاز، مقدار فشار ماکزیموم

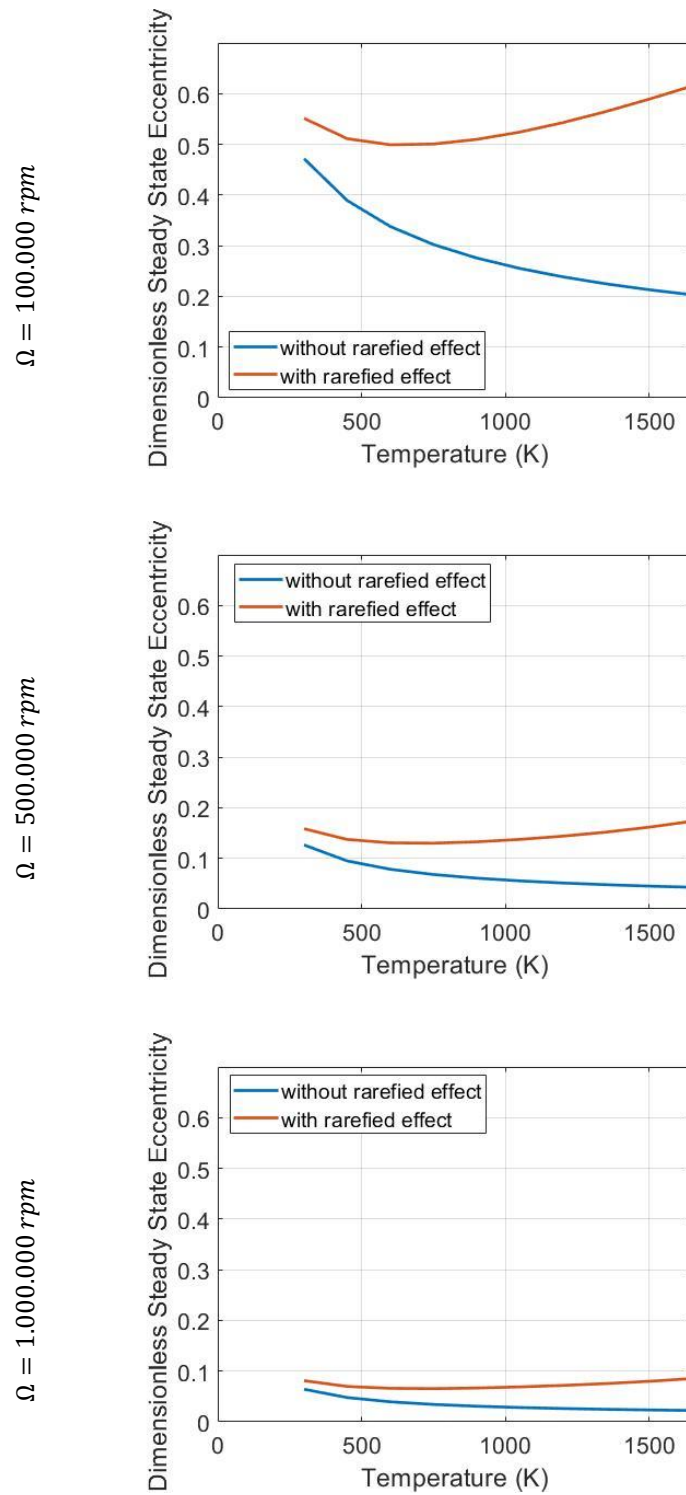
افزایش می یابد. اختلاف مقدار فشار ماکزیموم مابین دو حالت در سرعت های دورانی پایین کمتر بوده و با افزایش سرعت دورانی این اختلاف بیشتر می شود. در دماهای پایین و در سرعت دورانی بالا این اختلاف در حدود $9/3$ درصد است و در دماهای بالا و سرعت دورانی بالا این اختلاف به $43/3$ درصد می رسد.

در شکل ۵-۳۷، اثر دما و اثر رقیق شدگی گاز بر روی زاویه انحراف میکرویاتاقان گازی غیر مدور چهار لوبی بررسی شده است. همان طور که مشاهده می شود، در سرعت دورانی پایین، با افزایش دمای گاز، بدون در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی، زاویه انحراف با افزایش دمای گاز، با شیب آرامی کاهش می یابد. وقتی اثر رقیق شدگی در نظر گرفته می شود، رفتار زاویه انحراف تغییر می کند و با افزایش دمای گاز، با شیب آرامی شروع به افزایش می کند. زمانی که سرعت دورانی افزایش داده می شود، رفتار زاویه انحراف دوباره تغییر می کند و این بار برای حالت بدون اثر رقیق شدگی، پس از طی روند کاهشی در دمای 600K ، شروع به افزایش می کند و برای حالت با اثر رقیق شدگی، پس از طی روند افزایشی در دمای 900K شروع به کاهش می نماید. در سرعت دورانی بالا، رفتار زاویه انحراف در دو حالت مورد بررسی کاملاً برعکس همدیگر می باشند به طوری که برای حالت بدون اثر رقیق شدگی، رفتار کاملاً صعودی داشته و برای حالت با اثر رقیق شدگی، رفتار کاملاً نزولی دارد. محل تلاقی این دو نمودار در دمای 850K است. به عبارتی دیگر، مقدار زاویه انحراف در این دما برای هر دو حالت عددی یکسان است.

در شکل ۵-۳۸، اثر دما و رقیق شدگی گاز بر روی خروج از مرکزی حالت ماندگار مرکز روتور میکرویاتاقان گازی غیر مدور چهار لوبی بررسی شده است. همان طور که مشاهده می شود، هنگامی که دما افزایش می یابد، خروج از مرکزی مرکز روتور کاهش می یابد. هنگامی که اثر رقیق شدگی گاز در نظر گرفته می شود، خروج از مرکزی مرکز روتور نسبت به حالتی که اثر رقیق شدگی گاز در نظر گرفته نمی شود، بیشتر است و با افزایش دمای گاز، ابتدا روند نزولی داشته و سپس صعودی می شود. با افزایش سرعت دورانی روتور، میزان خروج از مرکزی کاهش در هر دو حالت کاهش می یابد. در سرعت دورانی پایین و در دمای بالا، اختلاف مابین این دو حالت در حدود 176 درصد است در حالی که در سرعت دورانی بالا و در دمای بالا، اختلاف مابین این دو حالت در حدود 242 درصد می باشد.



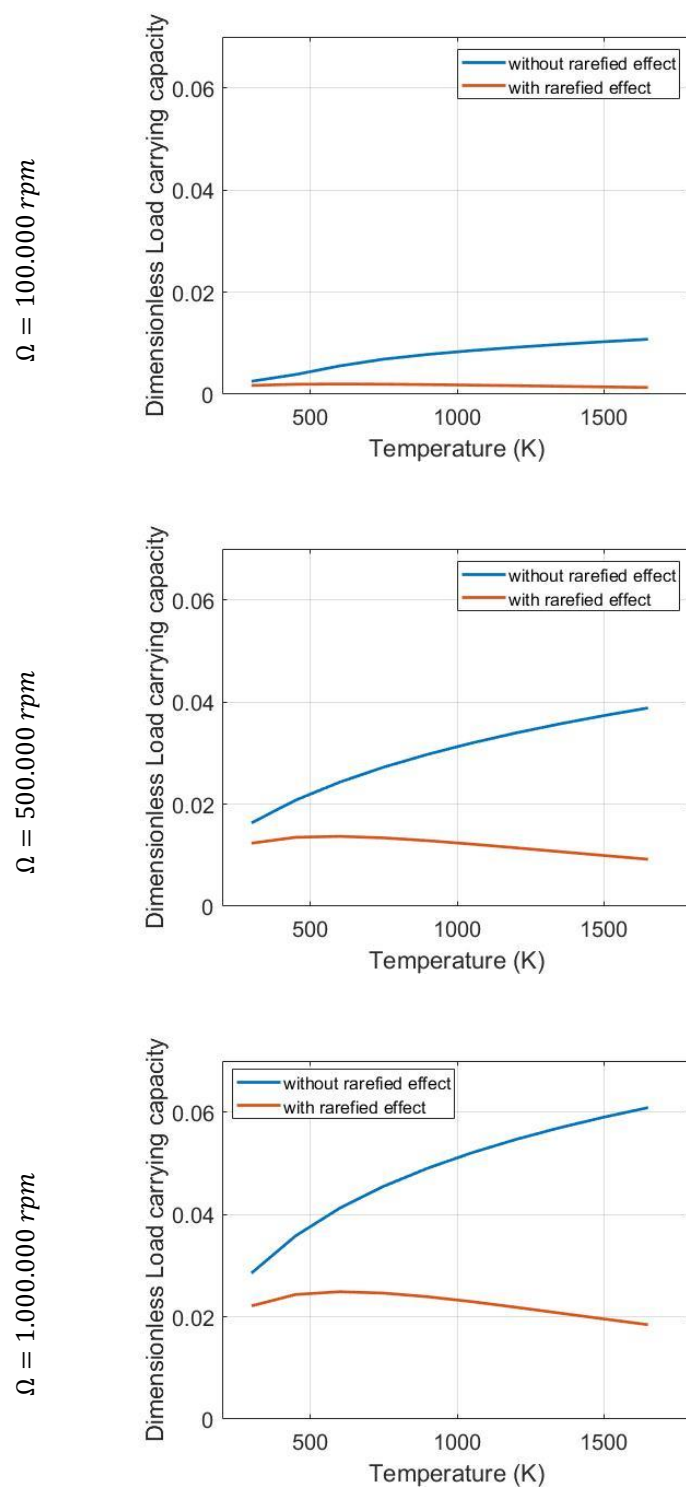
شکل ۵-۳۷. اثر افزایش دما و رقیق شدگی فیلم گاز بر روی زاویه انحراف



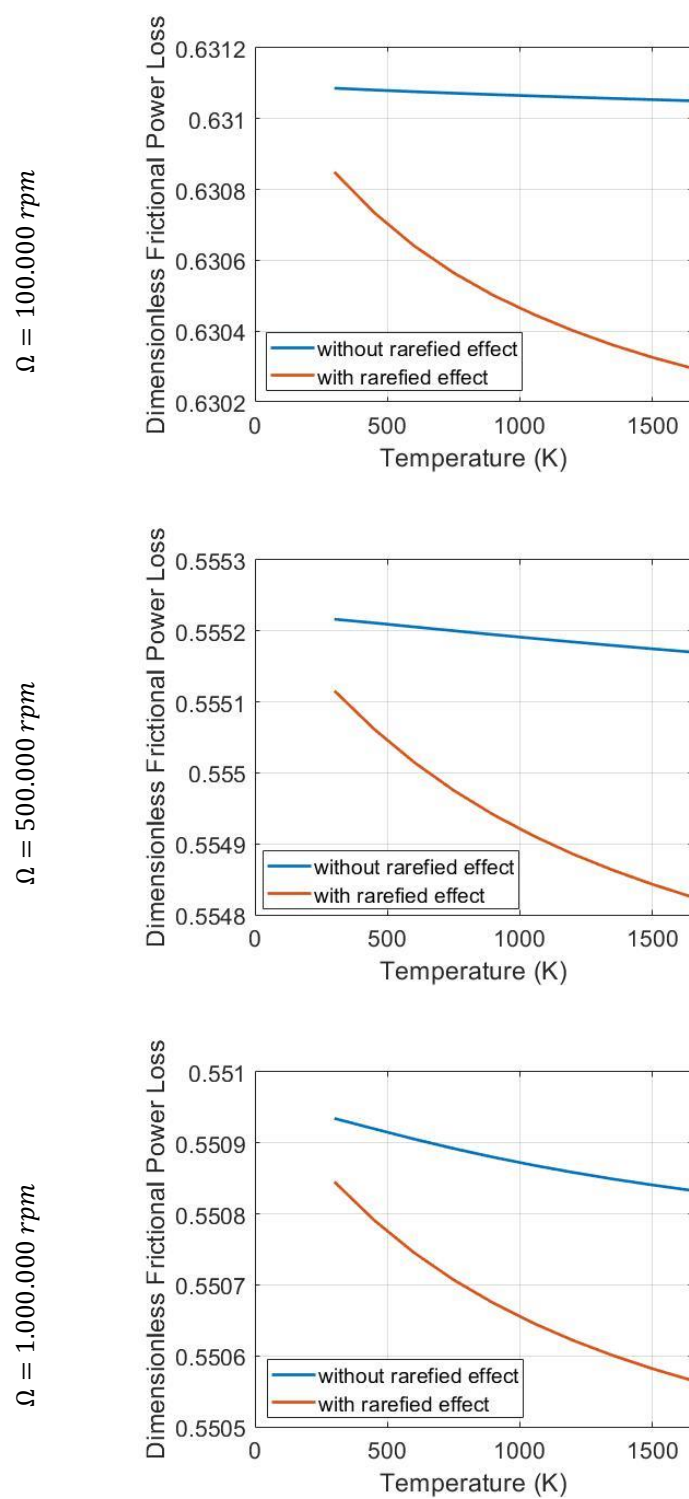
شکل ۵-۳۸. اثر افزایش دما و رقیق شدگی فیلم گاز بر روی خروج از مرکزی

در شکل ۵-۳۹، اثر دما و رقیق شدگی گاز بر روی ظرفیت حمل بار میکرویاتاقان گازی غیرمدور چهار لوبی بررسی شده است. هنگامی که دمای گاز افزایش می یابد، ظرفیت حمل بار یاتاقان افزایش می یابد. هنگامی که اثر رقیق شدگی در نظر گرفته می شود، ظرفیت حمل بار یاتاقان نسبت به حالتی که اثر رقیق شدگی در نظر گرفته نمی شود، کمتر است. اختلاف مابین دو حالت (با و بدون اثر رقیق شدگی) در دماهای پایین کمتر بوده و با افزایش دمای گاز، این اختلاف رفته رفته افزایش پیدا می کند. با افزایش سرعت دورانی، مقادیر ظرفیت حمل بار یاتاقان در هر دو حالت افزایش یافته است. در سرعت دورانی پایین و در دمای بالا، اختلاف مابین این دو حالت در حدود ۶۱۵ درصد و در سرعت دورانی بالا و در دمای بالا در حدود ۲۰۲ درصد می باشد.

در شکل ۵-۴۰، اثر دما و رقیق شدگی گاز بر روی اتلاف توان اصطکاکی میکرویاتاقان گازی غیر مدور چهار لوبی بررسی شده است. همان طور که از شکل مشاهده می شود، هر چه گاز رقیق تر می شود، اتلاف توان اصطکاکی کمتر می شود. با افزایش دمای گاز، زمانی که اثر رقیق شدگی در نظر گرفته نمی شود، اتلاف توان اصطکاکی با شیب آرامی کاهش می یابد، اگر اثر رقیق شدگی در نظر گرفته شود، اتلاف توان اصطکاکی با افزایش دمای گاز با شیب تندی کاهش می یابد. با افزایش سرعت دورانی، میزان اتلاف توان اصطکاکی در هر دو حالت کاهش می یابد. در سرعت دورانی پایین و در دمای بالا، اختلاف مابین این دو حالت در حدود ۰/۱۳ درصد است و در سرعت دورانی بالا و در دمای بالا در حدود ۰/۰۴ درصد می باشد.



شکل ۵-۳۹. اثر افزایش دما و رقیق شدگی فیلم گاز بر روی ظرفیت حمل بار یاتاقان



شکل ۴۰-۵. اثر افزایش دما و رقیق شدگی فیلم گاز بر روی اتلاف توان اصطکاکی

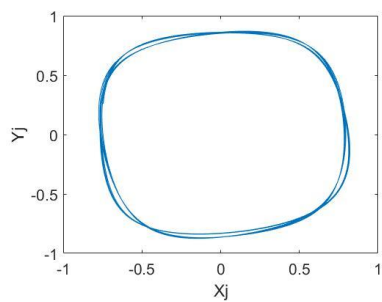
۵-۳-۱-۳- نتیجه

در میکرویاتاقان های گازی غیر مدور چهار لوبی، برای افزایش ظرفیت حمل بار، سرعت دورانی روتور افزایش داده می شود که به تبع آن امکان افزایش دما وجود دارد. دمای بالا و اندازه کوچک میکرویاتاقان ها منجر به رقیق شدگی فیلم گاز می شود و نادیده گرفتن اثر رقیق شدگی فیلم گاز در حل معادله رینولدز منجر به بدست آمدن نتایج ناصحیح خواهد شد. هر چه گاز رقیق تر می شود، فشار گاز کمتر می شود و در نتیجه ظرفیت حمل بار یاتاقان کمتر می شود و زاویه انحراف بیشتر می شود. نتایج نشان می دهد که اثر رقیق شدگی گاز از اهمیت بالایی برخوردار است و مشخصه های حالت ماندگار میکرویاتاقان گازی غیر مدور چهار لوبی را تحت تأثیر قرار می دهد.

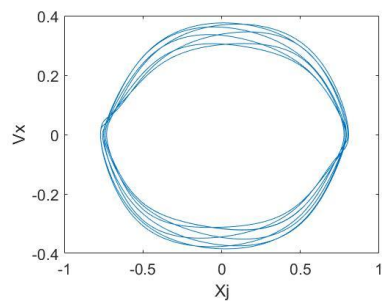
۵-۳-۲- بررسی رفتار دینامیکی در اثر افزایش دما

در این بخش، رفتار دینامیکی میکرویاتاقان گازی غیر مدور چهار لوبی با افزایش دما از 300K تا 2300K و با در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی مورد بررسی قرار گرفته است. سرعت دورانی روتور $\omega = 1 \times 10^5 \text{ rad/s}$ است. نمودارهای دینامیکی شامل مسیر حرکت مرکز روتور، نمودار فازی، نگاشت پوانکاره و نمودار طیف توانی برای دماهای مختلف در شکل ۵-۴۱ نشان داده شده است. در دمای 300K با توجه به نمودار مسیر حرکت مرکز روتور و حلقه بسته در نگاشت پوانکاره و ظهور فرکانس های غیرصحیح در طیف توانی، حرکت روتور از نوع شبه پریودیک است. حرکت در دمای 800K نیز از نوع شبه پریودیک است. در دمای 1300K با توجه به نگاشت پوانکاره حرکت شبه پریودیک از نوع فاز قفل شونده می باشد. در دماهای 1800K و 2300K با توجه به مسیر حرکت مرکز روتور، نمودار فازی و تک نقطه ای بودن نگاشت پوانکاره و نمودار طیف توانی می توان نتیجه گرفت که حرکت از نوع 1T-پریودیک است.

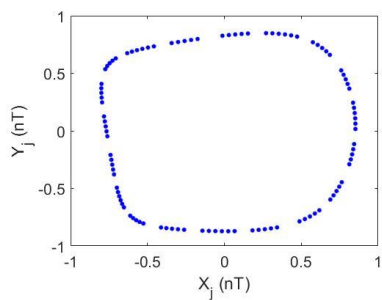
$T_e = 300K$



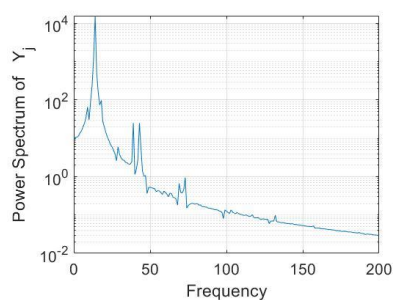
(الف)



(ب)



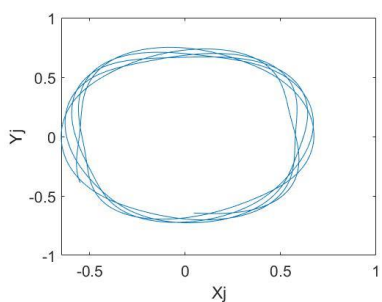
(ج)



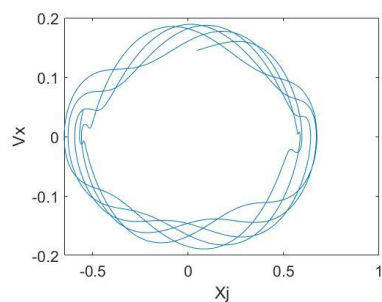
(د)

شکل ۵-۴۱. نمودارهای دینامیکی در دماهای مختلف در $\omega = 1 \times 10^5 \text{ rad/s}$. (الف) مسیر حرکت مرکز روتور (ب) نمودار فازی مرکز روتور (ج) نگاشت پوانکاره (د) طیف توانی جابه جایی روتور

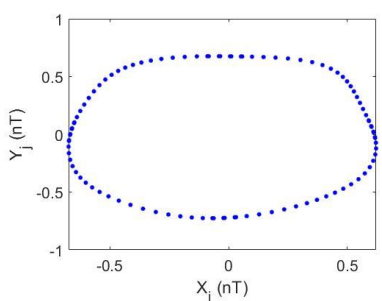
$T_e = 800K$



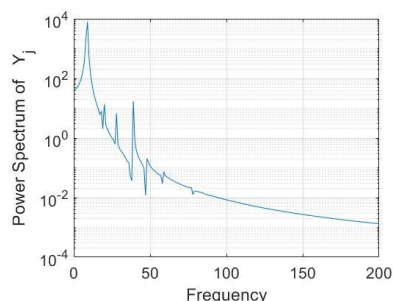
(الف)



(ب)



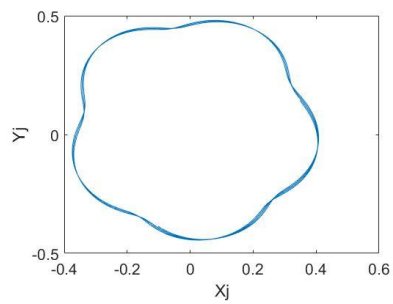
(ج)



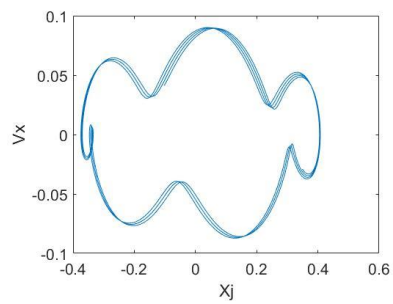
(د)

شکل ۵-۴۱. ادامه

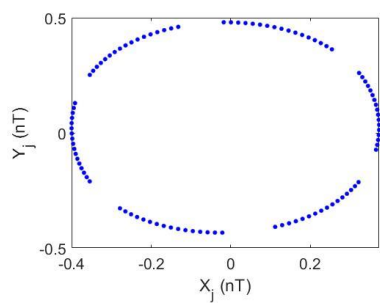
$T_e = 1300K$



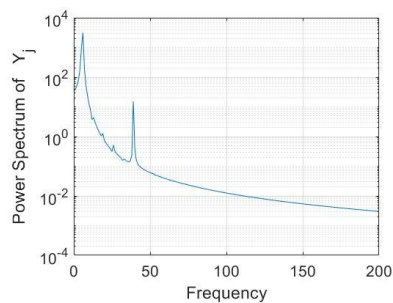
(الف)



(ب)



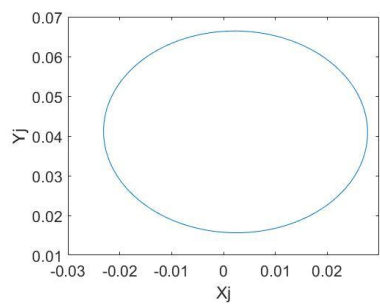
(ج)



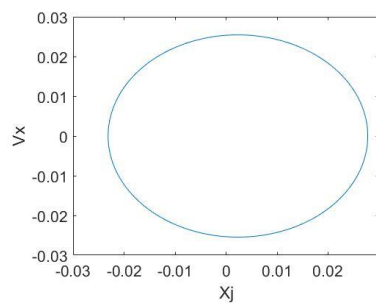
(د)

شکل ۵-۴۱. ادامه

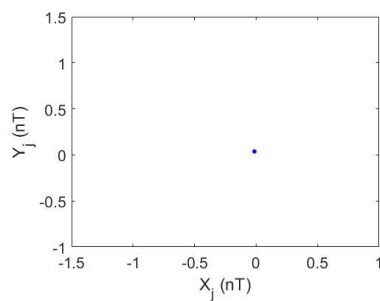
$T_e = 1800K$



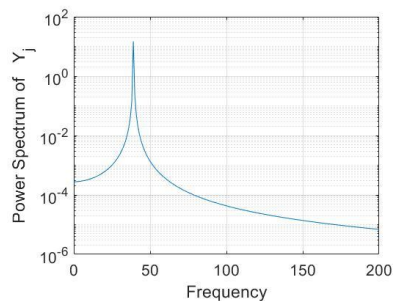
(الف)



(ب)



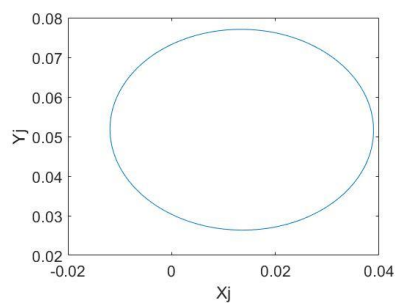
(ج)



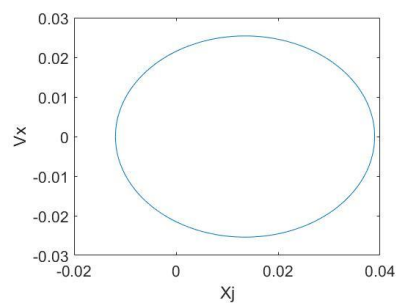
(د)

شکل ۵-۴۱. ادامه

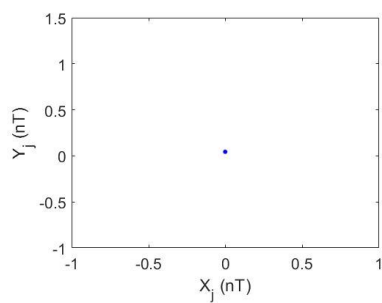
$$T_e = 2300K$$



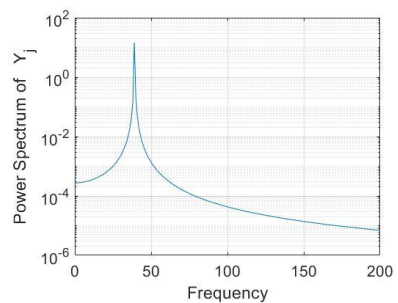
(الف)



(ب)

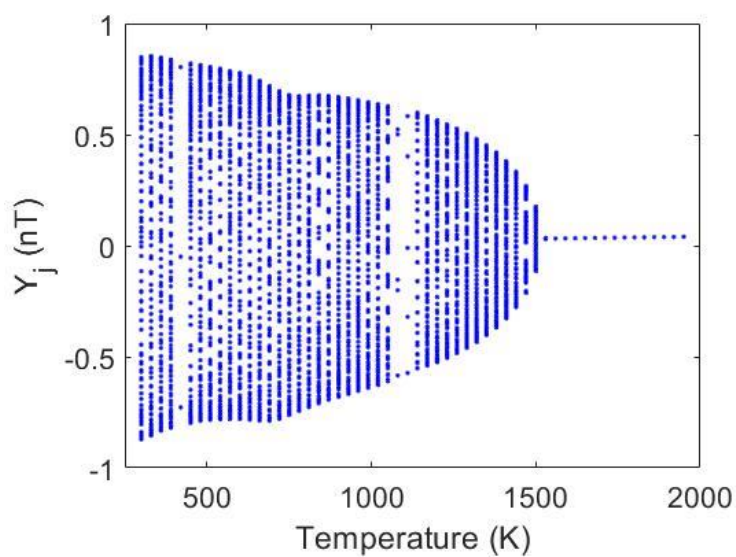


(ج)

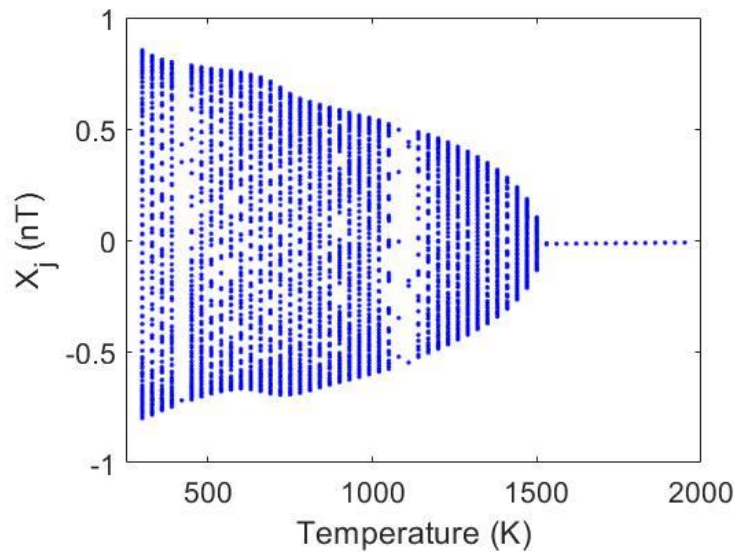


(د)

شکل ۵-۴۱. ادامه



شکل ۵-۴۲. نمودار دوشاخگی در مقابل دما در سرعت دورانی $\omega = 1 \times 10^5 \text{ rad/s}$ در جهت افقی



شکل ۵-۴۳. نمودار دوشاخگی در مقابل دما در سرعت دورانی $\omega = 1 \times 10^5 \text{ rad/s}$ در جهت عمودی

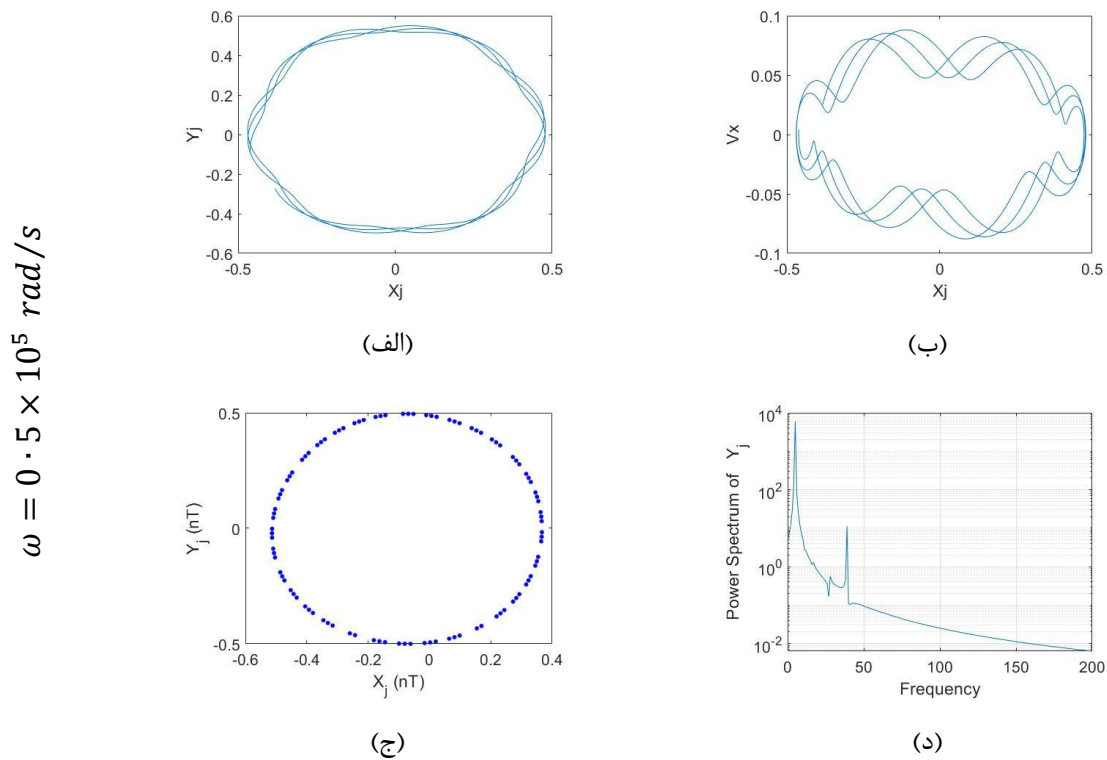
در شکل ۵-۴۲ و شکل ۵-۴۳ نمودار دوشاخگی در برابر دما به عنوان پارامتر دوشاخگی رسم شده است. با توجه به شکل ۵-۴۲ و شکل ۵-۴۳، حرکت روتور از دمای 300 K تا دمای 390 K به صورت شبه پریودیک بوده و در دمای 420 K از نوع $3T$ -پریودیک می شود. پس از این دما تا دمای 1050 K حرکت از نوع شبه پریودیک است و در دماهای 1080 K و 1110 K حرکت از نوع $5T$ -پریودیک است. حرکت پس از این دما دوباره تا دمای 1500 K به حرکت شبه پریودیک تبدیل می شود و پس از دمای 1500 K با افزایش دما حرکت روتور از نوع $1T$ -پریودیک می شود.

۵-۳-۳- بررسی رفتار دینامیکی در اثر سرعت دورانی در دماهای بالا

۵-۳-۳-۱- با در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی

نمودارهای دینامیکی شامل مسیر حرکت مرکز روتور، نمودار فازی، نگاشت پوانکاره و طیف توانی در شکل ۵-۴۴ نشان داده شده اند. در $0.5 \times 10^5 \text{ rad/s}$ با توجه به مسیر حرکت مرکز روتور، نمودار فازی و با توجه به منحنی بسته نگاشت پوانکاره، حرکت از نوع شبه پریودیک است، و در نمودار طیف توانی، پیک ها در ضرایب غیر صحیحی از یک فرکانس پایه ظاهر شده اند. در سرعت دورانی $1 \times 10^5 \text{ rad/s}$ نیز حرکت از

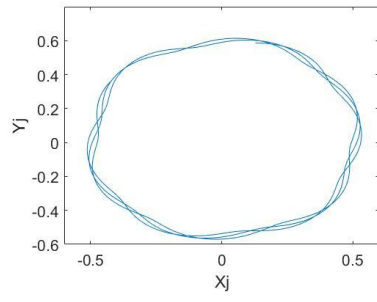
نوع شبه پریودیک است. در $1 \cdot 5 \times 10^5 \text{ rad/s}$ با توجه به نگاشت پوانکاره حرکت شبه پریودیک از نوع فاز قفل شونده بوده و نمودار طیف توانی حاوی فرکانس های غیرصحیح می باشد. نوع حرکت در سرعت $2 \times 10^5 \text{ rad/s}$ و $2 \cdot 5 \times 10^5 \text{ rad/s}$ از نوع شبه پریودیک است.



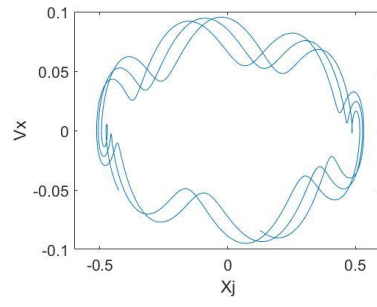
شکل ۴۴-۵. نمودارهای دینامیکی در سرعت های دورانی مختلف با در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی در دمای $T_e = 1500 \text{ K}$ -
 الف) مسیر حرکت مرکز روتور (ب) نمودار فازی مرکز روتور (ج) نگاشت پوانکاره (د) طیف توانی جابه جایی روتور

شکل ۴۵-۵ و شکل ۴۶-۵ نمودار دوشاخگی را نشان می دهد که در آن سرعت دورانی روتور به عنوان پارامتر دوشاخگی در نظر گرفته شده است. با توجه به شکل ۴۵-۵ و شکل ۴۶-۵، رفتار روتور تا رسیدن به سرعت دورانی $\omega = 0 \cdot 9 \times 10^5 \text{ rad/s}$ از نوع شبه پریودیک است، و در این سرعت به حالت 7T-پریودیک تبدیل می شود و سپس هنگامی که سرعت دورانی افزایش می یابد، نوع حرکت تبدیل به شبه پریودیک می شود. هنگامی که سرعت دورانی به $\omega = 2 \cdot 1 \times 10^5 \text{ rad/s}$ می رسد، حرکت شبه پریودیک به حرکت از نوع 19T-پریودیک تبدیل می شود و در ادامه روند دوباره به حرکت شبه پریودیک تبدیل می شود.

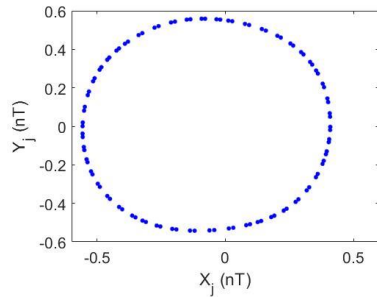
$$\omega = 1 \times 10^5 \text{ rad/s}$$



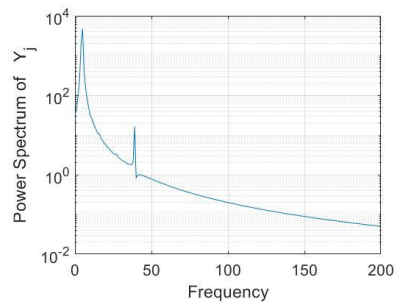
(الف)



(ب)



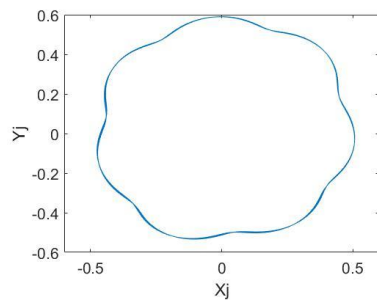
(ج)



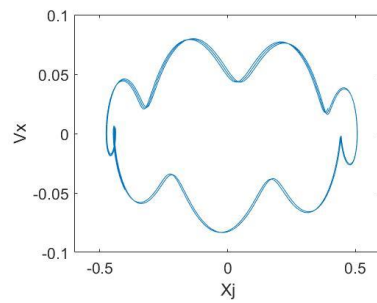
(د)

شکل ۵-۴۴. ادامه

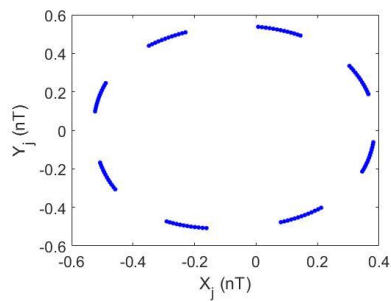
$$\omega = 1.5 \times 10^5 \text{ rad/s}$$



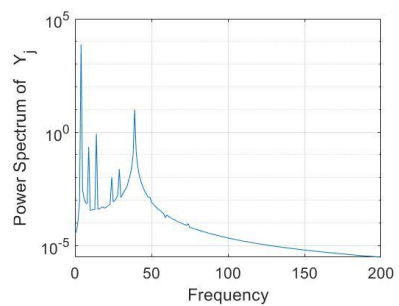
(الف)



(ب)



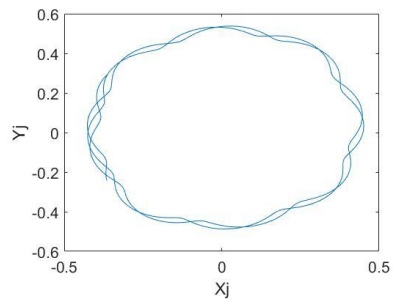
(ج)



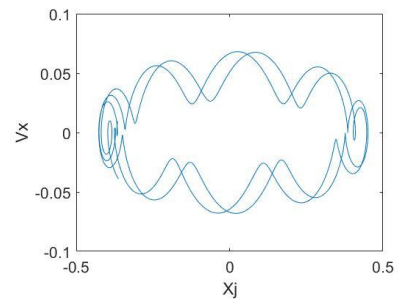
(د)

شکل ۵-۴۴. ادامه

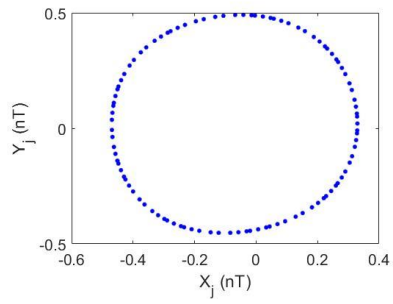
$$\omega = 2 \times 10^5 \text{ rad/s}$$



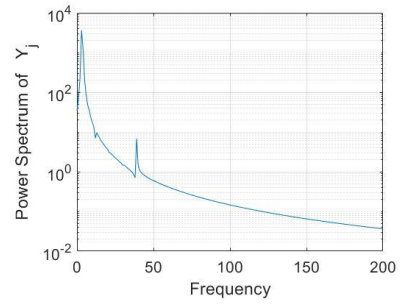
(الف)



(ب)



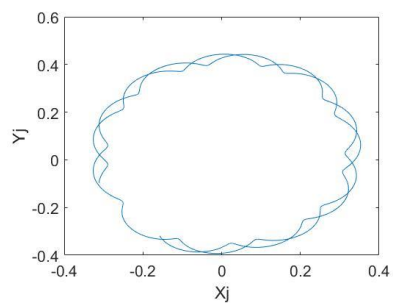
(ج)



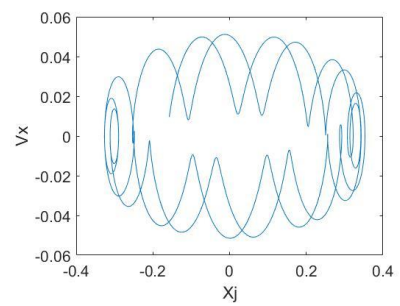
(د)

شکل ۵-۴۴. ادامه

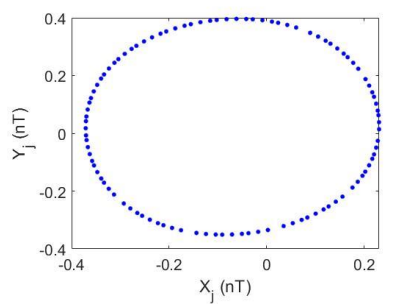
$$\omega = 2 \cdot 5 \times 10^5 \text{ rad/s}$$



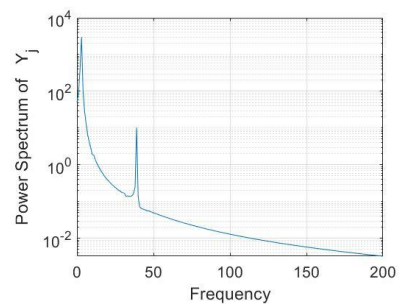
(الف)



(ب)

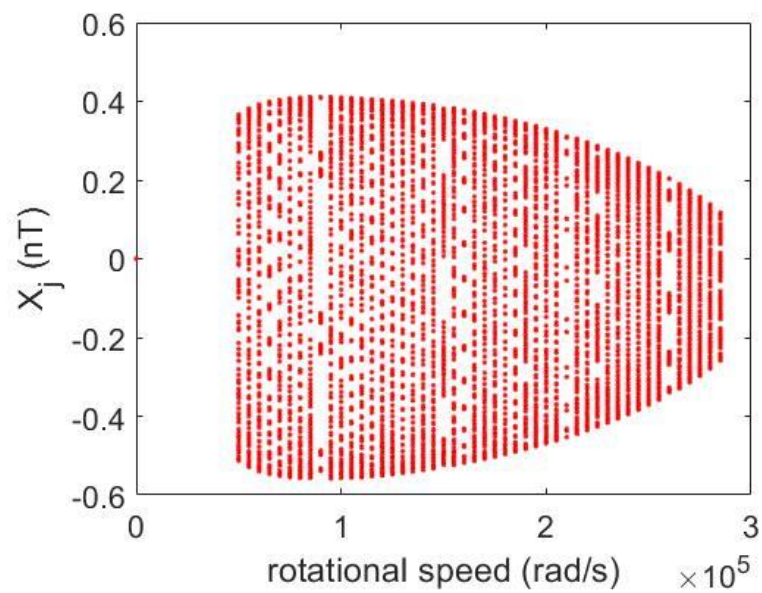


(ج)

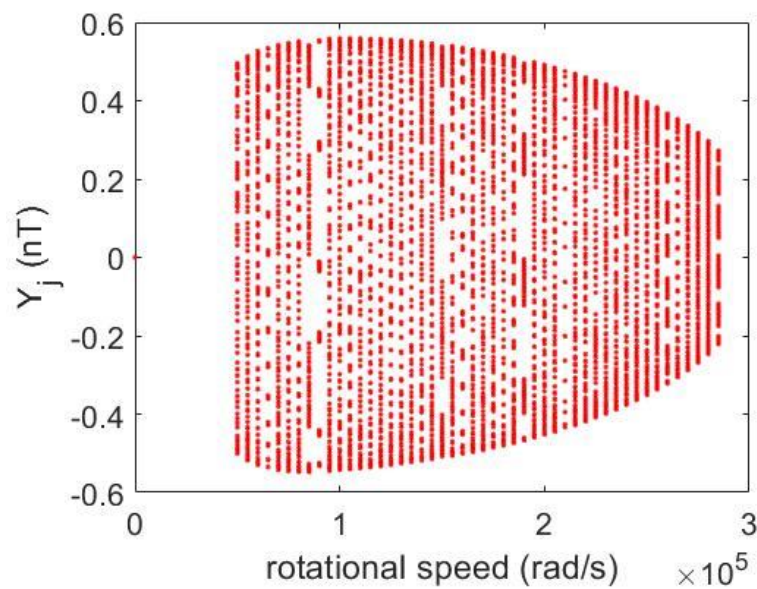


(د)

شکل ۵-۴۴. ادامه



شکل ۵-۴۵. نمودار دوشاخگی در مقابل سرعت دورانی روتور در دمای $T_e = 1500\text{ K}$ در جهت افقی با در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی فیلم گاز

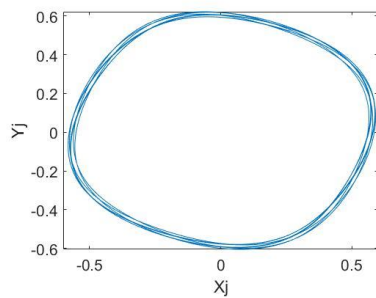


شکل ۵-۴۶. نمودار دوشاخگی در مقابل سرعت دورانی روتور در دمای $T_e = 1500\text{ K}$ در جهت عمودی با در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی فیلم گاز

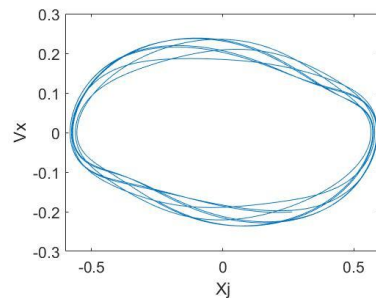
۵-۳-۲- بدون در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی

نمودارهای دینامیکی شامل مسیر حرکت مرکز روتور، نمودار فازی، نگاشت پوانکاره و طیف توانی در شکل ۴۷-۵ نشان داده شده اند. شکل ۴۸-۵ و شکل ۴۹-۵ نمودار دوشاخگی را نشان می دهد که در آن سرعت دورانی روتور به عنوان پارامتر دوشاخگی در نظر گرفته شده است. در $0.5 \times 10^5 \text{ rad/s}$ با توجه به مسیر حرکت مرکز روتور، نمودار فازی و با توجه به منحنی بسته بودن نگاشت پوانکاره، حرکت از نوع شبه پریودیک است، و در نمودار طیف توانی، پیک ها در ضرایب غیرصحیحی از یک فرکانس پایه ظاهر شده اند. در سرعت $1 \times 10^5 \text{ rad/s}$ نیز حرکت از نوع شبه پریودیک است. در سرعت $1.5 \times 10^5 \text{ rad/s}$ با توجه به نگاشت پوانکاره حرکت شبه پریودیک از نوع فاز قفل شونده بوده و نمودار طیف توانی حاوی فرکانس های غیرصحیح است. در $2 \times 10^5 \text{ rad/s}$ با توجه به نگاشت پوانکاره، حرکت از نوع $4T$ -پریودیک است. در سرعت دورانی $2.5 \times 10^5 \text{ rad/s}$ با توجه به نگاشت پوانکاره حرکت از نوع $5T$ -پریودیک است.

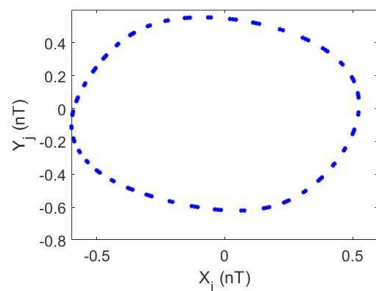
$$\omega = 0.5 \times 10^5 \text{ rad/s}$$



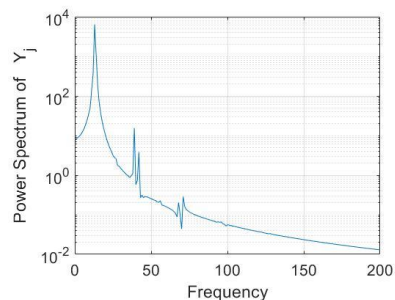
(الف)



(ب)



(ج)

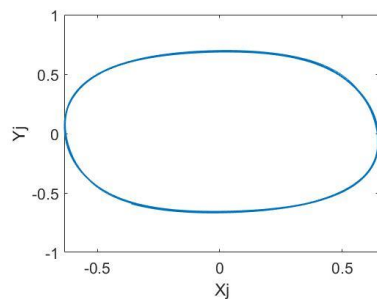


(د)

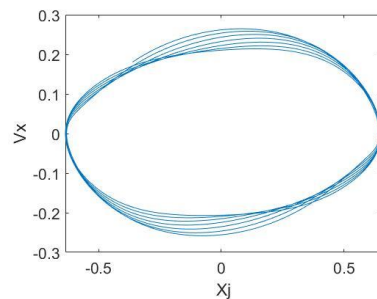
شکل ۴۷-۵. نمودارهای دینامیکی در سرعت های دورانی مختلف بدون در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی در $T_e = 1500 \text{ K}$ -
 (الف) مسیر حرکت مرکز روتور (ب) نمودار فازی مرکز روتور (ج) نگاشت پوانکاره (د) طیف توانی جابه جایی روتور

با توجه به شکل ۴۸-۵ و شکل ۴۹-۵، رفتار روتور تا سرعت دورانی $\omega = 1.15 \times 10^5 \text{ rad/s}$ از نوع شبه پریودیک است، و از سرعت $\omega = 1.15 \times 10^5 \text{ rad/s}$ تا $\omega = 1.2 \times 10^5 \text{ rad/s}$ حرکت از شبه پریودیک به حرکت 3T پریودیک تبدیل می شود و سپس هنگامی که سرعت دورانی افزایش می یابد، نوع حرکت تبدیل به شبه پریودیک می شود تا در سرعت $\omega = 1.65 \times 10^5 \text{ rad/s}$ به حرکت 7T-پریودیک تبدیل می شود و دوباره با افزایش سرعت تبدیل به حرکت شبه پریودیک تبدیل می شود. دوباره از سرعت $\omega = 1.95 \times 10^5 \text{ rad/s}$ تا سرعت $\omega = 2 \times 10^5 \text{ rad/s}$ به حرکت 4T-پریودیک تبدیل می شود و سپس با افزایش سرعت دورانی به حرکت شبه پریودیک تبدیل می شود. در سرعت دورانی $\omega = 2.25 \times 10^5 \text{ rad/s}$ حرکت به 9T-پریودیک تبدیل می شود و سپس با افزایش سرعت به حرکت شبه پریودیک تبدیل شده و در سرعت $\omega = 2.35 \times 10^5 \text{ rad/s}$ حرکت از نوع 12T-پریودیک بوده و سپس دوباره با افزایش سرعت دورانی شبه پریودیک شده و پس از آن به حرکت 5T-پریودیک تبدیل می شود.

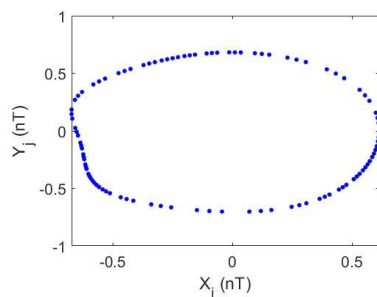
$$\omega = 1 \times 10^5 \text{ rad/s}$$



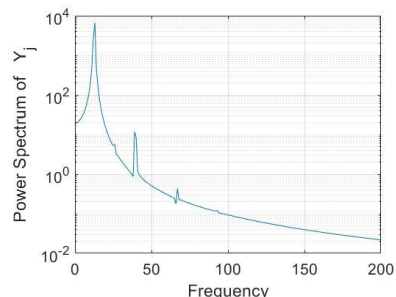
(الف)



(ب)



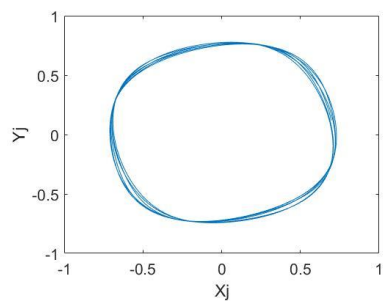
(ج)



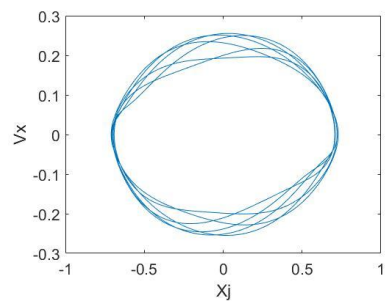
(د)

شکل ۴۷-۵. ادامه

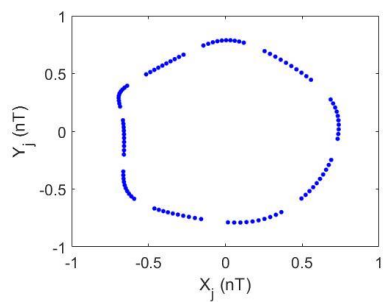
$$\omega = 1.5 \times 10^5 \text{ rad/s}$$



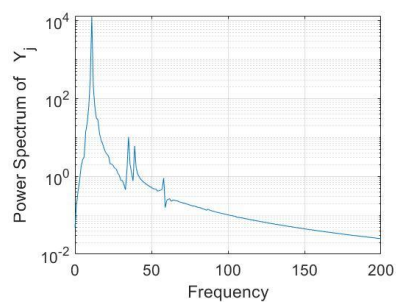
(الف)



(ب)



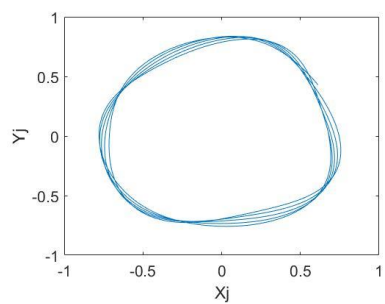
(ج)



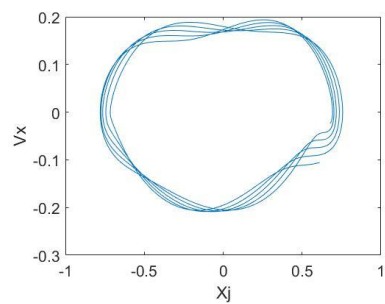
(د)

شکل ۵-۴۷. ادامه

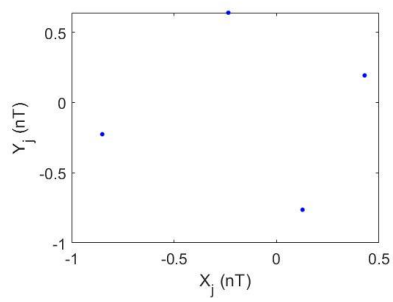
$$\omega = 2 \times 10^5 \text{ rad/s}$$



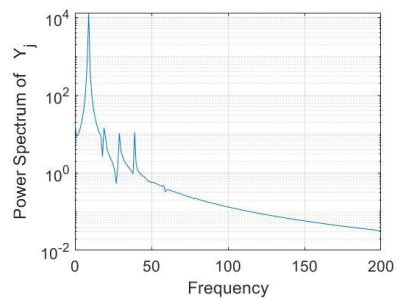
(الف)



(ب)



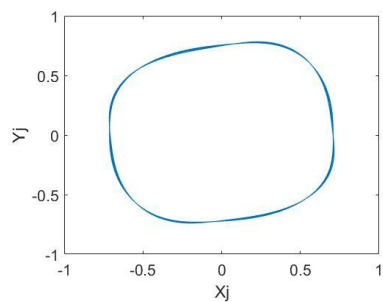
(ج)



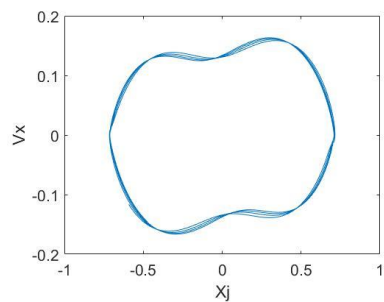
(د)

شکل ۵-۴۷. ادامه

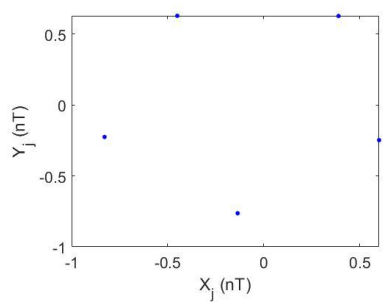
$$\omega = 2.5 \times 10^5 \text{ rad/s}$$



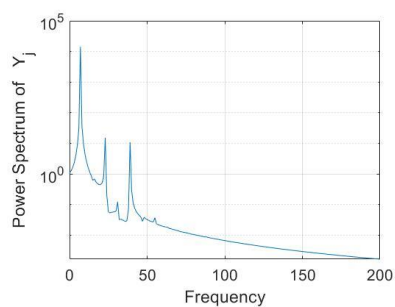
(الف)



(ب)

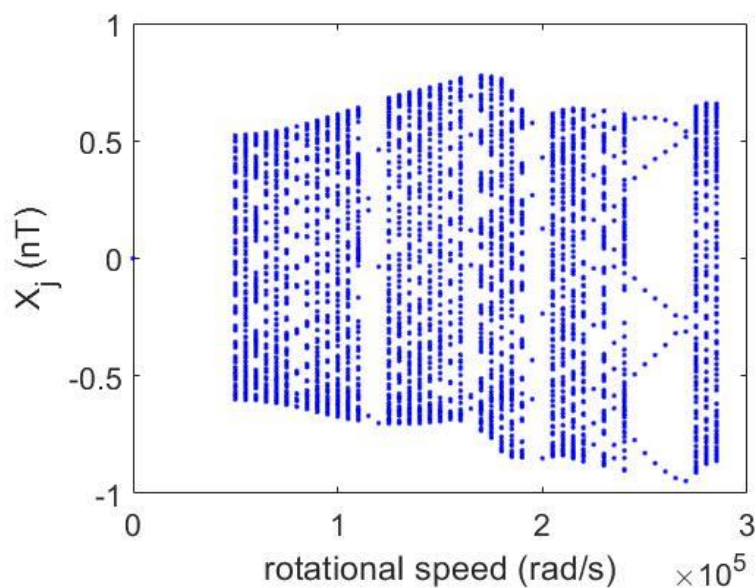


(ج)

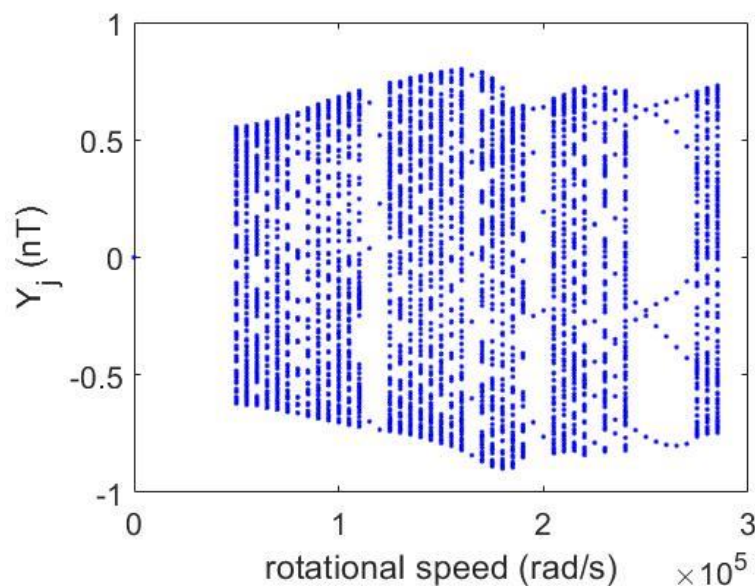


(د)

شکل ۵-۴۷. ادامه



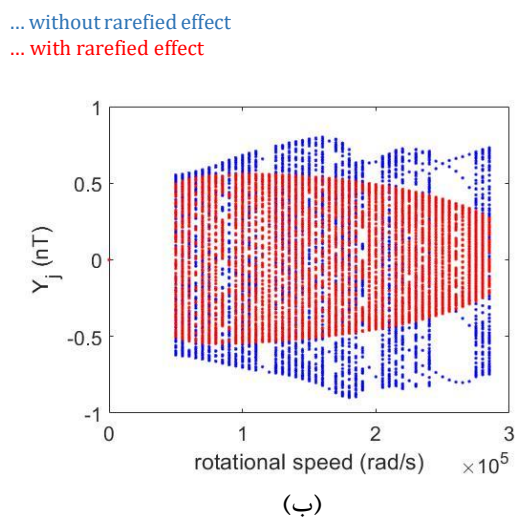
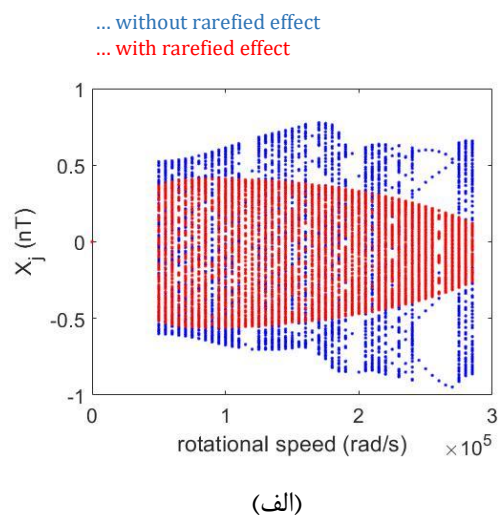
شکل ۵-۴۸. نمودار دوشاخگی در مقابل سرعت دورانی روتور در دمای $T_e = 1500 \text{ K}$ در جهت افقی بدون در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی فیلم گاز



شکل ۵-۴۹. نمودار دوشاخگی در مقابل سرعت دورانی روتور در دمای $T_e = 1500\text{ K}$ در جهت عمودی بدون در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی فیلم گاز

۵-۳-۳-۳- تأثیر رقیق شدگی فیلم گاز

در شکل ۵-۵۰ نمودار دوشاخگی دو حالت با و بدون اثر رقیق شدگی در کنار هم جهت مقایسه رسم شده است. زمانی که اثر رقیق شدگی در نظر گرفته نمی شود، رفتار روتور از تنوع بیشتری برخوردار است در حالی که در حالت با اثر رقیق شدگی، رفتار روتور با افزایش سرعت دورانی از نوع شبه پریودیک است. وقتی که اثر رقیق شدگی فیلم گاز در نظر گرفته شود، در جهات افقی و عمودی جابه جایی مرکز روتور نسبت به حالت بدون اثر رقیق شدگی کمتر شده است.



شکل ۵-۵۰. مقایسه نمودارهای دوشاخگی در مقابل سرعت دورانی روتور- الف) در جهت افقی ب) در جهت عمودی

فصل ۶ : نتیجه گیری و پیشنهادها

در این رساله، رفتار دینامیکی سه نوع میکرو یاتاقان گازی غیر مدور دو لوبی، سه لوبی و چهار لوبی مورد مطالعه قرار گرفته است. تحلیل رفتار این میکرو یاتاقان ها در دو حالت ماندگار و دینامیکی انجام شده است. در حالت ماندگار با حل مدل روانکاری مولکولی گاز (MGL) با استفاده از روش اجزاء محدود و روش تکرار نیوتن، پروفیل فشار داخل میکرویاتاقان تعیین شده و تمام پارامترهای یاتاقان با افزایش دمای فیلم گاز و سرعت دورانی روتور بررسی شده است. در حالت دینامیکی مدل روانکاری مولکولی گاز دینامیکی با استفاده از روش اجزاء محدود گسسته سازی شده و با معادلات حرکت روتور به صورت همزمان با استفاده از روش رانگ کوتا مرتبه چهارم حل شده است و رفتار میکرو یاتاقان ها با افزایش دمای فیلم گاز و سرعت دورانی روتور بررسی شده است.

بررسی های انجام شده با در نظر گرفتن دو حالت صورت گرفته است. حالت اول، با در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی فیلم گاز و حالت دوم، بدون در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی فیلم گاز. زمانی که دمای فیلم گاز افزایش می یابد، با توجه به مقیاس میکرو یاتاقان ها، منجر به رقیق شدن فیلم گاز می شود که نتایج نشان می دهد اثر رقیق شدگی فیلم گاز در رفتار میکرویاتاقان ها تأثیر بسزایی دارد.

جهت شناسایی رفتار دینامیکی میکرویاتاقان ها، نمودارهای مسیر حرکت مرکز روتور، نمودارهای فازی، نگاشت پوانکاره، نمودارهای طیف توانی و نمودارهای دوشاخگی ترسیم شده اند. بررسی نمودارها نشان می دهد که هر چه دمای گاز بیشتر شود و سرعت دورانی روتور افزایش یابد، اثر رقیق شدگی فیلم گاز نمود بیشتری پیدا می کند به طوری که نادیده گرفتن این اثر می تواند منجر به خطای زیاد در محاسبات طراحی این میکرو یاتاقان ها گردد.

در حالت ماندگار، در سرعت دورانی بالا و دمای گاز بالا نتایج به صورت زیر می باشد:

- در هر سه نوع میکرویاتاقان، پروفیل فشار تحت تأثیر رقیق شدگی فیلم گاز، مقادیر فشار کاهش می یابد که بیشترین تأثیر در میکرویاتاقان چهار لوبی مشاهده گردید. در نوع چهار لوبی، با در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی، مقادیر فشار مربوط به دماهای بالا کمتر از دماهای پایین شد. در میکرویاتاقان های دو لوبی و سه لوبی، میزان تأثیر تقریباً برابر است.

- در هر سه نوع میکرویاتاقان، با در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی، فشار ماکزیموم کاهش می یابد که بیشترین نرخ کاهش مربوط به میکرویاتاقان چهار لوبی بوده و سپس نوع دو لوبی بیشترین کاهش را داشته و سه لوبی کمترین کاهش را دارا می باشد.

- با در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی، زاویه انحراف در میکرویاتاقان های دو لوبی و سه لوبی افزایش می یابد در حالی که در میکرویاتاقان چهار لوبی زاویه انحراف کمتر می شود. بیشترین اختلاف مابین دو حالت با و بدون در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی، مربوط به نوع چهار لوبی است.

- در هر سه نوع میکرویاتاقان، با در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی، خروج از مرکزی روتور افزایش می یابد که بیشترین اختلاف مابین دو حالت با و بدون در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی، مربوط به نوع چهار لوبی می باشد، سپس نوع دو لوبی بیشترین اختلاف را داراست و نوع سه لوبی کمترین اختلاف را دارد.

- در هر سه نوع میکرویاتاقان، با در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی، ظرفیت حمل بار یاتاقان کاهش می یابد که بیشترین اختلاف مابین دو حالت با و بدون در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی مربوط به نوع چهار لوبی بوده و سپس نوع دو لوبی بیشترین اختلاف را دارد و نوع سه لوبی کمترین اختلاف را دارد.

- با در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی، اتلاف توان اصطکاکی در نوع دو لوبی و چهار لوبی کاهش می یابد ولی در نوع سه لوبی افزایش می یابد. بیشترین اختلاف مابین دو حالت با و بدون در نظر گرفتن اثر رقیق شدگی مربوط به نوع سه لوبی، سپس نوع دو لوبی می باشد و نوع چهار لوبی کمترین اختلاف را دارد.

در حالت دینامیکی در میکرو یاتاقان گازی دو لوبی و سه لوبی در دماهای بالا گاز و با افزایش سرعت دورانی، زمانی که اثر رقیق شدگی فیلم گاز در نظر گرفته می شود، میزان خروج از مرکزی روتور از مرکز یاتاقان بیشتر می شود ولی در میکرویاتاقان چهار لوبی، میزان خروج از مرکزی کاهش می یابد.

در حالت دینامیکی، در دماهای بالا گاز، در میکرویاتاقان دو لوبی و سه لوبی، با افزایش سرعت دورانی روتور،

میزان تأثیر رقیق شدگی فیلم گاز در مقدار جابه جایی مرکز روتور ابتدا روند نزولی آرامی داشته و سپس در سرعت های دورانی بالا، میزان تأثیر رقیق شدگی گاز افزایش می یابد. در میکرویاتاقان چهار لوبی، با افزایش سرعت دورانی روتور، میزان تأثیر رقیق شدگی فیلم گاز ابتدا با نرخ تندی افزایش می یابد و سپس در سرعت-های بالا تقریباً ثابت می ماند.

در حالت دینامیکی، در سرعت دورانی بالا، با افزایش دمای گاز، در میکرویاتاقان دو لوبی، حداکثر میزان جابه جایی مرکز روتور ابتدا روند صعودی داشته و در دماهای بالا تقریباً ثابت می ماند، در حالی که در میکرویاتاقان های سه لوبی و چهارلوبی، حداکثر میزان جابه جایی مرکز روتور روند نزولی داشته و در دماهای بالا، حرکت روتور با افزایش سرعت دورانی، به حرکت 1T-پریودیک تبدیل می شود.

مقایسه رفتار دینامیکی محور در میکرویاتاقان های گازی غیرمدور به پارامترهایی از قبیل ابعاد میکرویاتاقان (نسبت طول به یاتاقان)، نسبت بیضوی میکرویاتاقان، جرم محور، سرعت دورانی محور، دمای فیلم گاز، میزان خروج از مرکزی محور، بار خارجی و ... بستگی دارد. بنابراین ممکن است در یک شرایط معینی از این پارامترها، رفتار پایداری محور در میکرویاتاقان سه لوبی بهتر باشد و با تغییر پارامترها و برای یک شرایط دیگر، رفتار پایداری محور در میکرویاتاقان چهار لوبی باشد. لذا مقایسه رفتار دینامیکی محور در انواع میکرویاتاقان های گازی غیرمدور کاملاً وابسته به شرایط میکرویاتاقان و شرایط بهره برداری می باشد.

پیشنهادهای:

- ۱- در این مطالعه، روتور به صورت جسم صلب در نظر گرفته شده است که می توان مطالعه را براساس انعطاف پذیر بودن روتور انجام دارد و رفتار دینامیکی سیستم روتور-یاتاقان را مورد بررسی قرار داد.
- ۲- با توجه به وجود سرعت های دورانی بالا، می توان در معادلات حاکم بر جریان گاز در میکرویاتاقان اثر اینرسی ماده روانکار را در نظر گرفت و تأثیر آن را بر روی مشخصه های عملکرد بررسی نمود.
- ۳- معمولاً در یاتاقان ها از لاینر یاتاقان به دلیل داشتن ضریب انبساط حرارتی پایین تر نسبت به یاتاقان استفاده می شود که به صورت یک جسم منعطف در نظر گرفته می شود. لذا می توان یک بررسی الاستوهیدرودینامیک و ترموالاستوهیدرودینامیک برای میکرویاتاقان های دارای لاینر انجام داد.

مراجع

1. Wen, S. and P. Huang, *Principles of Tribology*. Principles of Tribology, 2011: p. 1-455.
2. Chauhan, A., *Non-Circular Journal Bearings*. SpringerBriefs in Materials. 2016: Springer International Publishing.
3. Pinkus, O., *Analysis of Noncircular Gas Journal Bearings*. Journal of Lubrication Technology, 1975. **97**(4): p. 616-623.
4. Singh, D.V., R. Sinhasan, and S.S. Wadhwa, *Analysis of non-circular gas bearings including skewed axes*. Wear, 1982. **79**(2): p. 209-220.
5. Sinhasan, R., S.S. Wadhwa, and D.V. Singh, *DYNAMIC PERFORMANCE OF NON-CIRCULAR GAS BEARINGS*. Periodica Polytechnica Mechanical Engineering, 1984. **28**(4): p. 367-389.
6. Chandra, M., M. Malik, and R. Sinhasan, *Comparative study of four gas-lubricated noncircular journal bearing configurations*. Tribology International, 1983. **16**(2): p. 103-108.
7. Zhao, J.Y., I.W. Linnett, and L.J. McLean, *Subharmonic and Quasi-Periodic Motions of an Eccentric Squeeze Film Damper-Mounted Rigid Rotor*. Journal of Vibration and Acoustics, 1994. **116**(3): p. 357-363.
8. Czołczyński, K. and T. Kapitaniak, *Hopf bifurcation in rotors supported in gas bearings*. Chaos, Solitons & Fractals, 1997. **8**(4): p. 499-515.
9. Wang, C.-C. and C.o.-K.a. Chen, *Bifurcation Analysis of Self-Acting Gas Journal Bearings*. Journal of Tribology, 2001. **123**(4): p. 755-767.
10. Wang, C.C., M.J. Jang, and C.K. Chen, *Non-linear dynamic analysis of a flexible rotor supported by self-acting gas journal bearings*. Proceedings of The Institution of Mechanical Engineers Part C-journal of Mechanical Engineering Science - PROC INST MECH ENG C-J MECH E, 2004. **218**: p. 1527-1538.
11. Wang, J.-S. and C.-C. Wang, *Nonlinear dynamic and bifurcation analysis of short aerodynamic journal bearings*. Tribology International, 2005. **38**(8): p. 740-748.
12. Wang, C.C., *Nonlinear dynamic behavior and bifurcation analysis of a rigid rotor supported by a relatively short externally pressurized porous gas journal bearing system*. Acta Mechanica, 2006. **183**(1): p. 41-60.
13. Rahmatabadi, A. and R. Rashidi, *Effect of mount angle on static and dynamic characteristics of gas-lubricated, noncircular journal bearings*. Iranian Journal of Science and Technology, Transaction B: Engineering, 2006. **30**.
14. Wang, C.-C., *Bifurcation analysis of an aerodynamic journal bearing system considering the effect of stationary herringbone grooves*. Chaos Solitons & Fractals - CHAOS SOLITON FRACTAL, 2007. **33**: p. 1532-1545.
15. Wang, C.-C., *Theoretical and nonlinear behavior analysis of a flexible rotor supported by a relative short herringbone-grooved gas journal-bearing system*. Physica D: Nonlinear Phenomena, 2008. **237**(18): p. 2282-2295.

16. Rashidi, R., A. Mohammadi, and F. Bakhtiari-Nejad, *Preload effect on nonlinear dynamic behavior of a rigid rotor supported by noncircular gas-lubricated journal bearing systems*. Nonlinear Dynamics, 2010. **60**: p. 231-253.
17. Rashidi, R., A. Mohammadi, and F. Bakhtiari-Nejad, *Bifurcation and nonlinear dynamic analysis of a rigid rotor supported by two-lobe noncircular gas-lubricated journal bearing system*. Nonlinear Dynamics, 2010. **61**: p. 783-802.
18. Wang, C.-C. and C.-C. Wang, *Bifurcation and nonlinear dynamic analysis of noncircular aerodynamic journal bearing system*. Nonlinear Dynamics, 2013. **72**(1): p. 477-489.
19. Rasooli Shooroki, H., et al., *Numerical solution of Reynold's equation governing noncircular gas bearing system using radial basis function*. Iranian Journal of Science and Technology (Sciences), 2014. **38**(4): p. 389-397.
20. Maureau, J., et al., *Flow and load characteristics of microbearings with slip*. Journal of Micromechanics and Microengineering, 1997. **7**(2): p. 55-64.
21. Pan, L., G.R. Liu, and K.Y. Lam, *Flow and load characteristics in a coaxial microbearing of finite length*. Journal of Micromechanics and Microengineering, 1999. **9**: p. 270.
22. Piekos, E.S. and K.S. Breuer, *Pseudospectral Orbit Simulation of Nonideal Gas-Lubricated Journal Bearings for Microfabricated Turbomachines*. Journal of Tribology, 1999. **121**(3): p. 604-609.
23. Orr, D.J., *Macro-scale investigation of high speed gas bearings for MEMS devices*, in *Aeronautics and Astronautics*. 1969, Massachusetts Institute of Technology.
24. Lee, Y., et al., *Analysis of Gas-Lubricated Bearings with a Coupled Boundary Effect for Micro Gas Turbine*. Tribology Transactions - TRIBOL TRANS, 2001. **44**: p. 685-691.
25. Kim, D., et al., *Hydrodynamic Performance of Gas Microbearings*. Journal of Tribology-transactions of The Asme - J TRIBOL-TRANS ASME, 2004. **126**.
26. Ren, L., K.-Q. Zhu, and X.-L. Wang, *Effects of the slip velocity boundary condition on the characteristics of microbearing*. Journal of Micromechanics and Microengineering, 2003. **14**: p. 116.
27. Isomura, K., et al., *Development of high-speed micro-gas bearings for three-dimensional micro-turbo machines*. Journal of Micromechanics and Microengineering, 2005. **15**(9): p. S222-S227.
28. Spakovszky, Z.S. and L.X. Liu, *Scaling Laws for Ultra-Short Hydrostatic Gas Journal Bearings*. Journal of Vibration and Acoustics, 2005. **127**(3): p. 254-261.
29. Liu, L.X., et al., *Hydrostatic Gas Journal Bearings for Micro-Turbomachinery*. Journal of Vibration and Acoustics, 2004. **127**(2): p. 157-164.
30. Boedo, S. and J.F. Booker, *Modal and Nodal EHD Analysis for Gas Journal Bearings*. Journal of Tribology, 2005. **127**(2): p. 306-314.
31. Zhang, Q. and X. Shan, *Dynamic characteristics of micro air bearings for microsystems*. Microsystem Technologies, 2007. **14**: p. 229-234.
32. Li, W.-L. and R.-W. Shen, *Linear Stability Analysis of the Herringbone Groove Journal Bearings in Microsystems: Consideration of Gas Rarefaction Effects*. Journal of Tribology, 2009. **131**: p. 041705.

33. Zhang, H.-j., C. Zhu, and Q. Yang, *Characteristics of Micro Gas Journal Bearings Based on Effective Viscosity*. Journal of Tribology, 2009. **131**: p. 041707.
34. Zhang, H.-j., C.-s. Zhu, and M. Tang, *Effects of rarefaction on the characteristics of micro gas journal bearings*. Journal of Zhejiang University-SCIENCE A, 2010. **11**(1): p. 43-49.
35. Zhang, W.-M., J.-B. Zhou, and G. Meng, *Performance and stability analysis of gas-lubricated journal bearings in MEMS*. Tribology International, 2011. **44**(7): p. 887-897.
36. Zhang, W., G. Meng, and Z. Peng, *Gaseous slip flow in micro-bearings with random rough surface*. International Journal of Mechanical Sciences, 2013. **68**: p. 105-113.
37. Zhang, X.-Q., et al., *Influence of temperature on nonlinear dynamic characteristics of spiral-grooved gas-lubricated thrust bearing-rotor systems for microengine*. Tribology International, 2013. **61**: p. 138–143.
38. Wang, X., *On the performance of gas-lubricated bearing-rotor system in microengine*. Journal of Physics: Conference Series, 2015. **660**: p. 012089.
39. Yang, Q., Y. Liu, and H.-j. Zhang, *Unbalance response of micro gas bearing-rotor system considering rarefaction effect*. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology, 2015. **230**.
40. Feng, K., et al., *Thermohydrodynamic analysis of micro spherical spiral groove gas bearings under slip flow and surface roughness coupling effect*. Microsystem Technologies, 2016.
41. Zhang, X., Q. Chen, and J. Liu, *Steady Characteristics of High-Speed Micro-Gas Journal Bearings With Different Gaseous Lubricants and Extreme Temperature Difference*. Journal of Tribology, 2016. **139**(2).
42. Khonsari, M.M. and E.R. Booser, *Applied Tribology: Bearing Design and Lubrication*. 2017: Wiley.
43. Karniadakis, G., A. Beskok, and A. Nr, *MicroFlows and Nanoflows - Fundamentals and Simulation*. 2005.
44. Fukui, S. and R. Kaneko, *A Database for Interpolation of Poiseuille Flow Rates for High Knudsen Number Lubrication Problems*. Journal of Tribology, 1990. **112**(1): p. 78-83.
45. Huang , W. and D.B. Bogy, *The Effect of the Accommodation Coefficient on Slider Air Bearing Simulation*. Journal of Tribology, 1999. **122**(2): p. 427-435.
46. Zhang, S. and P.Y. Song, *Analysis and Comparison of the Models for the Rarefied Gas Effect on Gas Lubrication*. Applied Mechanics and Materials, 2014. **577**: p. 289-292.
47. Zare Mehrjardi, M., A.D. Rahmatabadi, and R. Rashidi Meybodi, *Linear and nonlinear analysis of mount angle effects on the dynamic stability of micropolar lubricated hydrodynamic lobed journal bearings*. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology, 2019. **234**(1): p. 104-125.
48. Reddy, J. *introduction to nonlinear finite element analysis*. 1984.

49. Zhang, X.-Q., et al., *Effects of Temperature on Nonlinear Dynamic Behavior of Gas Journal Bearing-rotor Systems for Microengine*. Tribology Transactions, 2016. **59**.
50. Malik, M., *Theoretical Considerations of Molecular Mean Free Path Influenced Slip in Self-Acting Gas-Lubricated Plain Journal Bearings*. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 1984. **198**(1): p. 25-31.
51. Rashidi, R., *Non-linear analysis of the dynamic behavior of the non-circular gas bearings*, in *Department of Mechanical Engineering*. 2009, Shahrood University of Technology: Iran.
52. Rashidi, R., A. Mohammadi, and F. Bakhtiari-Nejad, *Effect of bearing number on non-linear dynamic behaviour of aerodynamic non-circular journal bearing systems*. Proceedings of The Institution of Mechanical Engineers Part J-journal of Engineering Tribology - PROC INST MECH ENG J-J ENG TR, 2010. **224**: p. 139-156.

Abstract

Micro-gas streams are involved in many applications of micro-electromechanical systems. Computational modeling and simulation can provide effective predictive capabilities for heat transfer and momentum at the micro scale, as well as a tool for evaluating the performance of a new micro device before it is built. Given that at the micro scale, including in micro motors, despite the high speeds and temperatures, the issue of stability is of particular importance, it seems that the use of non-circular gas bearings and multi-lobes is a good option for such machines. In this thesis, considering that the gas film in the gap of the gas-lubricated micro bearing is in the range of rarefied gases, the molecular gas film lubricant model has been used by considering temperature changes. To investigate the effect of temperature on the nonlinear dynamic behavior of the rotor-bearing system, the lubrication model (which includes temperature effects) is systematically coupled with the equations of motion of the system in order to solve them simultaneously. The molecular gas film lubrication equation has been discretized using the finite element method and solved with the rotor motion equations simultaneously using the fourth-order Runge-Kutta method. Steady state characteristics such as pressure profile, deviation angle, rotor center equilibrium position, load carrying capacity and frictional power loss and nonlinear dynamic behavior of the system using dynamic orbits, phase portraits, Poincaré map, power spectrum and bifurcation diagrams reviewed and analyzed. The results show that at high temperatures, the rarefaction effect of the gas film increases and affects the steady state and dynamic behavior of the non-circular gas-lubricated micro bearing.

Keywords: micro bearing, non-circular bearing, rarefaction effect, finite element method, bifurcation diagram, non-linear dynamic



Shahrood University of
Technology

Faculty of Mechanical and Mechatronics Engineering

Ph.D. Thesis in Applied Mechanics Engineering

Nonlinear Analysis of the Dynamic Behavior of Non-Circular Gas- Lubricated Micro-Bearings

By: Aziz mohammad Gharanjik

Supervisor:

Dr. Ardeshir Karami mohammadi

February, 2021