

الحمد لله الذي
خلقنا من
الحمم



دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک

گروه طراحی کاربردی

پایان نامه کارشناسی ارشد

تحلیل رزونانس غیرخطی غشای مستطیلی هایپرالاستیک بر بستر الاستیک غیرخطی تحت تحریک خارجی هارمونیک

نگارنده:

سینا کریمی

استاد راهنما:

دکتر حبیب احمدی

بهمن ۱۳۹۹

شماره: ۲۰۲۹۹/۱۵۹
تاریخ: ۱۴۰۲/۲/۲

باسمه تعالی



فرم شماره (۳): صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد آقای سینا کریمی با شماره دانشجویی ۹۷۱۳۶۶۴ رشته مهندسی مکانیک گرایش طراحی کاربردی تحت عنوان تحلیل رزونانس غیرخطی غشای مستطیلی هایپرالاستیک بر بستر الاستیک غیرخطی تحت تحریک خارجی هارمونیک که در تاریخ ۱۳۹۹/۱۱/۲۸ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

☒ الف) درجه عالی: نمره ۲۰-۱۹	☐ ب) درجه خیلی خوب: نمره ۱۸-۱۷/۹۹
☐ ج) درجه خوب: نمره ۱۶-۱۷/۹۹	☐ د) درجه متوسط: نمره ۱۴-۱۵/۹۹
☐ ه) کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد	
نوع تحقیق: ☒ نظری ☐ عملی	

عضو هیات داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنمای اول	دکتر حبیب احمدی	دانشیار	
۲- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر سید مهدی حسینی فراش	استادیار	
۳- استاد ممتحن اول	دکتر حمیدرضا ایپک چی	دانشیار	
۴- استاد ممتحن دوم	دکتر سید علی سینا	استادیار	



نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر مهدی گردویی

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

تقدیم به:

پدر و مادر عزیزم

که در مسیر پر پیچ و خم زندگی، مشعل امید را در شب‌های زندگیم به ارمغان آوردند و یاری
سبزشان همواره و بی منت، امیدبخش و یاری‌دهنده در تمام طول زندگیم بوده است. امید است
که توانسته باشم قطره‌ای از دریای بی‌کران محبت‌هایشان را سپاس گفته باشم.

شکر و قدردانی

حمد و سپاس ایزد منان را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت‌های اوندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند.

با سپاس و تقدیر ویژه از استاد عالی‌قدر جناب آقای دکتر حبیب احمدی که در مراحل مختلف این پژوهش، راهنمایی‌های ارزنده و سازنده‌ی خود را بر من ارزانی داشته و از هیچ کوششی در این زمینه دریغ ننمودند. از خداوند متعال توفیقات روز افزون ایشان را توأم با صحت و سعادت خواستارم.

تعمدنامه

اینجانب سينا کریمی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی مکانیک گرایش طراحی کاربردی دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه تحلیل رزونانس غیرخطی غشای مستطیلی هایپرالاستیک بر بستر الاستیک غیرخطی تحت تحریک خارجی هارمونیک تحت راهنمایی دکتر حبیب احمدی متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود. استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده

در این پژوهش، تحلیل رزونانس غیرخطی غشای مستطیلی هایپرالاستیک بر بستر الاستیک غیرخطی وینکلر-پسترناک تحت فشار خارجی گسترده و یکنواخت مورد بررسی قرار گرفته است. ساختار ماده‌ای این غشا تراکم‌ناپذیر، همگن و ایزوتروپیک می‌باشد. بستر الاستیک غیرخطی شامل دو جمله‌ی خطی وینکلر و پسترناک و یک جمله‌ی غیرخطی درجه سه وینکلر می‌باشد. با استفاده از تئوری غشای هایپرالاستیک با فرض تغییر شکل محدود و اصل هامیلتون، معادلات حاکم بر سیستم استخراج گردیده است. همچنین با توجه به تابع چگالی انرژی کرنشی مدل ساختاری هایپرالاستیک نئو-هوکین، انرژی جنبشی، کار ناشی از بارگذاری گسترده و فشار یکنواخت و اثرات میرایی تعیین گردیده است. با اعمال روش گلرکین و با در نظر گرفتن خیز تک مود و دو مود، معادله حرکت غیرخطی با مشتقات جزئی در جهت عرضی به معادلات دیفرانسیل معمولی در حوزه‌ی زمان تبدیل شده است. سپس با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه به تحلیل رزونانس‌های اولیه و ثانویه برای حالت‌های تک مود و دو مود پرداخته شده است. در انتها اثر پارامترهای مختلفی همچون نرخ کشیدگی، دامنه تحریک خارجی، ضریب میرایی (نسبت میرایی)، پارامترهای بستر الاستیک و همچنین اثر پارامتر تنظیم σ بر روی رفتار ارتعاشی غشای مستطیلی هایپرالاستیک مورد بررسی قرار گرفته است.

کلمات کلیدی: غشای مستطیلی هایپرالاستیک، مدل ساختاری نئو-هوکین، تحلیل رزونانسی، بستر الاستیک

غیرخطی وینکلر-پسترناک، رزونانس اولیه، رزونانس ثانویه، روش مقیاس‌های چندگانه

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

۱- مقاله کنفرانسی: "بررسی ارتعاشات غیرخطی پوسته مستطیلی هایپرالاستیک بر روی بستر الاستیک غیرخطی با روش مقیاس‌های چندگانه"، نهمین کنفرانس بین المللی آکوستیک و ارتعاشات ایران، تهران

۲- مقاله پژوهشی: "تحلیل رزونانس‌های مافوق هارمونیک و مادون هارمونیک یک غشای مستطیلی هایپرالاستیک بر بستر الاستیک غیرخطی با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه"، نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر (تحت داوری)

3- Journal paper: "Nonlinear vibration analysis of a rectangular hyperelastic membrane embedded within the nonlinear Winkler-Pasternak elastic foundation under hydrostatic pressure, International journal of structural stability and dynamics (revision)

فهرست مطالب

ل	فهرست جدول‌ها
م	فهرست شکل‌ها
۱	فصل ۱: پیشگفتار
۲	۱-۱ مقدمه
۳	۲-۱ کلیات غشای مستطیلی از جنس هایپیرالاستیک
۳	۱-۲-۱ تعریف ماده‌ی هایپیرالاستیک
۵	۲-۲-۱ انواع مواد هایپیرالاستیک
۹	۳-۲-۱ دیدگاه مکانیک محیط پیوسته برای لاستیک
۱۲	۴-۲-۱ الاستیسیته غیرخطی
۱۵	۵-۲-۱ مدل‌های ساختاری
۱۹	۳-۱ مروری بر پیشینه تحقیق
۲۷	فصل ۲: معادلات حاکم بر غشای مستطیلی هایپیرالاستیک
۲۸	۱-۲ شرح مسئله

۲-۱-۱ هندسه مسئله ۲۸

۲-۱-۲ تئوری غشای هایپرالاستیک ۲۸

۲-۲ معادلات حرکت ۳۰

فصل ۳: تحلیل ارتعاشات غیرخطی غشای مستطیلی هایپرالاستیک بر اساس تک مود ۳۳

۱-۳ گسسته‌سازی معادله حرکت بر اساس تک مود ۳۴

۲-۳ حل تحلیلی به روش مقیاس‌های چندگانه ۳۵

۱-۲-۳ رزونانس اولیه ۳۵

۲-۲-۳ رزونانس‌های مافوق هارمونیک ($\Omega \approx \frac{1}{3}\omega_0$) و مادون هارمونیک ($\Omega \approx 3\omega_0$): ۳۸

۳-۲-۳ رزونانس‌های مادون هارمونیک ($\Omega \approx \frac{1}{5}\omega_0$) و مادون هارمونیک ($\Omega \approx 5\omega_0$): ۴۲

۴-۲-۳ رزونانس‌های مادون هارمونیک ($\Omega \approx \frac{1}{7}\omega_0$) و مادون هارمونیک ($\Omega \approx 7\omega_0$): ۴۵

۳-۳ نتایج ۵۰

۱-۳-۳ اعتبارسنجی تحلیل رزونانس‌های اولیه و ثانویه ۵۰

۲-۳-۳ تحلیل رزونانس‌های اولیه و ثانویه ۵۲

فصل ۴: تحلیل ارتعاشات غیرخطی غشای مستطیلی هایپرالاستیک بر اساس دو مود ۶۹

۱-۴ گسسته‌سازی معادله حرکت بر اساس دو مود ۷۰

۲-۴ حل تحلیلی به روش مقیاس‌های چندگانه ۷۰

۷۰..... ۱-۲-۴ رزونانس ثانویه

۷۸..... ۳-۴ نتایج

۷۸..... ۱-۳-۴ اعتبارسنجی تحلیل رزونانس $\Omega \approx 2\omega_2 + \omega_1$

۸۰..... ۲-۳-۴ تحلیل رزونانس $\Omega \approx 2\omega_2 + \omega_1$

۸۷ فصل ۵: نتایج و پیشنهادها

۸۸..... ۱-۵ نتایج

۸۸..... ۱-۱-۵ نتیجه‌گیری بر اساس تک مود

۹۰..... ۲-۱-۵ نتیجه‌گیری بر اساس دو مود

۸۹..... ۲-۵ پیشنهادها

۹۲ مراجع

فهرست جدول‌ها

جدول ۳-۱. مقایسه فرکانس‌های طبیعی (rad/s) ۵۱

جدول ۳-۲. مشخصات فیزیکی سیستم ۵۲

جدول ۴-۱. مقایسه بین فرکانس‌های طبیعی غشای مستطیلی هایپرالاستیک بر حسب (rad/s) ۷۹

جدول ۴-۲. مقایسه بین فرکانس‌های طبیعی غشای مستطیلی نئو-هوکین بر حسب (rad/s) ۷۹

فهرست شکل‌ها

- شکل ۱-۱. تراوشات درخت لاستیک ۵
- شکل ۲-۱. مولکول‌های لاستیک ۶
- شکل ۳-۱. نمودار تنش-کرنش مواد شبه لاستیک ۷
- شکل ۱-۲. غشای هایپرالاستیک بر بستر الاستیک ۲۸
- شکل ۱-۳. مقایسه‌ی دو روش عددی و تحلیلی برای رزونانس اولیه ۵۰
- شکل ۲-۳. اثر مقادیر دامنه تحریک خارجی بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی رزونانس اولیه برای پوسته مستطیلی هایپرالاستیک ۵۲
- شکل ۳-۳. اثر نسبت‌های میرایی بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی رزونانس اولیه برای پوسته مستطیلی هایپرالاستیک ۵۳
- شکل ۴-۳. اثر پارامتر سختی غیرخطی بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی رزونانس اولیه برای پوسته مستطیلی هایپرالاستیک ۵۳
- شکل ۵-۳. اثر مقادیر نرخ کشیدگی بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی رزونانس اولیه برای پوسته مستطیلی هایپرالاستیک ۵۴
- شکل ۶-۳. اثر پارامتر تنظیم بر منحنی‌های دامنه پاسخ-دامنه تحریک رزونانس اولیه برای پوسته مستطیلی هایپرالاستیک ۵۴
- شکل ۷-۳. اثر مقادیر نرخ کشیدگی بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی رزونانس مافوق هارمونیک ($\Omega \approx \frac{1}{3} \omega_0$) برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک ۵۵

- شکل ۳-۸. اثر بستر بر منحنی های پاسخ فرکانسی رزونانس مافوق هارمونیک ($\Omega \approx \frac{1}{3}\omega_0$) برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک ۵۵
- شکل ۳-۹. اثر پارامترهای سختی خطی بر منحنی های پاسخ فرکانسی رزونانس مافوق هارمونیک ($\Omega \approx \frac{1}{3}\omega_0$) برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک ۵۶
- شکل ۳-۱۰. اثر پارامتر سختی غیرخطی بر منحنی های پاسخ فرکانسی رزونانس مافوق هارمونیک ($\Omega \approx \frac{1}{3}\omega_0$) برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک ۵۷
- شکل ۳-۱۱. اثر پارامتر تنظیم بر منحنی های دامنه پاسخ-دامنه تحریک رزونانس مافوق هارمونیک ($\Omega \approx \frac{1}{3}\omega_0$) برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک ۵۷
- شکل ۳-۱۲. اثر مقادیر نرخ کشیدگی بر منحنی های دامنه پاسخ-دامنه تحریک رزونانس مافوق هارمونیک ($\Omega \approx \frac{1}{3}\omega_0$) برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک ۵۸
- شکل ۳-۱۳. اثر مقادیر نرخ کشیدگی بر منحنی های پاسخ فرکانسی رزونانس مادون هارمونیک ($\Omega \approx 3\omega_0$) برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک ۵۹
- شکل ۳-۱۴. اثر بستر بر منحنی های پاسخ فرکانسی رزونانس مادون هارمونیک ($\Omega \approx 3\omega_0$) برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک ۵۹
- شکل ۳-۱۵. اثر پارامترهای سختی خطی بر منحنی های پاسخ فرکانسی رزونانس مادون هارمونیک ($\Omega \approx 3\omega_0$) برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک ۶۰
- شکل ۳-۱۶. اثر پارامتر سختی غیرخطی بر منحنی های پاسخ فرکانسی رزونانس مادون هارمونیک ($\Omega \approx 3\omega_0$) برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک ۶۰
- شکل ۳-۱۷. اثر مقادیر نرخ کشیدگی بر منحنی های پاسخ فرکانسی رزونانس مافوق هارمونیک ($\Omega \approx \frac{1}{5}\omega_0$) برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک ۶۱

- شکل ۳-۱۸. اثر پارامترهای سختی خطی بر منحنی های پاسخ فرکانسی رزونانس مافوق هارمونیک ($\Omega \approx$)
 $\frac{1}{5}\omega_0$ برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک ۶۲
- شکل ۳-۱۹. اثر پارامتر تنظیم بر منحنی های دامنه پاسخ-دامنه تحریک رزونانس مافوق هارمونیک ($\Omega \approx$)
 $\frac{1}{5}\omega_0$ برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک ۶۲
- شکل ۳-۲۰. اثر مقادیر نرخ کشیدگی بر منحنی های دامنه پاسخ-دامنه تحریک رزونانس مافوق هارمونیک
 $\frac{1}{5}\omega_0$ ($\Omega \approx$) برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک ۶۳
- شکل ۳-۲۱. اثر مقادیر نرخ کشیدگی بر منحنی های پاسخ فرکانسی رزونانس مادون هارمونیک ($\Omega \approx$)
 $5\omega_0$ برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک ۶۳
- شکل ۳-۲۲. اثر پارامترهای سختی خطی بر منحنی های پاسخ فرکانسی رزونانس مادون هارمونیک ($\Omega \approx$)
 $5\omega_0$ برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک ۶۴
- شکل ۳-۲۳. اثر مقادیر نرخ کشیدگی بر منحنی های پاسخ فرکانسی رزونانس مافوق هارمونیک ($\Omega \approx$)
 $\frac{1}{7}\omega_0$ برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک ۶۵
- شکل ۳-۲۴. اثر پارامترهای سختی خطی بر منحنی های پاسخ فرکانسی رزونانس مافوق هارمونیک ($\Omega \approx$)
 $\frac{1}{7}\omega_0$ برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک ۶۶
- شکل ۳-۲۵. اثر مقادیر نرخ کشیدگی بر منحنی های پاسخ فرکانسی رزونانس مادون هارمونیک ($\Omega \approx$)
 $7\omega_0$ برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک ۶۶
- شکل ۳-۲۶. اثر پارامترهای سختی خطی بر منحنی های پاسخ فرکانسی رزونانس مادون هارمونیک ($\Omega \approx$)
 $7\omega_0$ برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک ۶۷
- شکل ۴-۱. اثر مقادیر نرخ کشیدگی در راستای x در غیاب بستر الاستیک بر پاسخ دامنه-فرکانس رزونانس
 ثانویه $\Omega \approx 2\omega_2 + \omega_1$ غشای مستطیلی هایپرالاستیک ۸۱

- شکل ۴-۲. اثر مقادیر نرخ کشیدگی در راستای x در حضور جمله غیر خطی بستر الاستیک (k_3) بر پاسخ دامنه-فرکانس رزونانس ثانویه $\Omega \approx 2\omega_2 + \omega_1$ غشای مستطیلی هایپرالاستیک ۸۱
- شکل ۴-۳. اثر مقادیر نرخ کشیدگی در راستای y در غیاب بستر الاستیک بر پاسخ دامنه-فرکانس رزونانس ثانویه $\Omega \approx 2\omega_2 + \omega_1$ غشای مستطیلی هایپرالاستیک ۸۲
- شکل ۴-۴. اثر مقادیر مختلف دامنه تحریک خارجی (P_0) بر پاسخ دامنه-فرکانس رزونانس ثانویه $\Omega \approx 2\omega_2 + \omega_1$ غشای مستطیلی هایپرالاستیک ۸۳
- شکل ۴-۵. اثر پارامتر سختی خطی وینکلر (k_1) بر پاسخ دامنه-فرکانس رزونانس ثانویه $\Omega \approx 2\omega_2 + \omega_1$ غشای مستطیلی هایپرالاستیک ۸۳
- شکل ۴-۶. اثر پارامتر سختی خطی پسترناک (k_2) بر پاسخ دامنه-فرکانس رزونانس ثانویه $\Omega \approx 2\omega_2 + \omega_1$ غشای مستطیلی هایپرالاستیک ۸۴
- شکل ۴-۷. اثر پارامتر سختی غیرخطی وینکلر (k_3) بر پاسخ دامنه-فرکانس رزونانس ثانویه $\Omega \approx 2\omega_2 + \omega_1$ غشای مستطیلی هایپرالاستیک ۸۵

فصل ۱: پیشگفتار

۱-۱ مقدمه

غشا المانی ساختاری است که در یک جهت (ضخامت) در مقایسه با دو جهت دیگر نازک‌تر است و در اثر تنش‌های کششی در صفحه خودش کشیده می‌شود. رفتار غشاها شبیه به کابل‌ها می‌باشد، بدین صورت که می‌توان فرض کرد غشا از کنار هم قرار دادن کابل‌ها ایجاد می‌شود و در غشاها نیز ارتعاشات عرضی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. غشاها کاربردهای فراوانی در زمینه‌های مختلف دارند. آنها جزء اصلی تجهیزات موسیقی هستند. همچنین از آنها در میکروفون‌ها، اسپیکرها و سایر دستگاه‌ها استفاده می‌شود. به عنوان نمونه دیافراگم میکروفون‌های خازنی غشا می‌باشد. در مهندسی پزشکی بسیاری از بافت‌های بدن به صورت غشا مدل می‌شوند. به عنوان مثال ارتعاشات پرده صماخ گوش انسان با استفاده از مدل غشا بررسی می‌شود. معادلات ارتعاشی مربوط به غشا یک معادله موج دو بعدی است. غشاها مقاومت خمشی و برشی ندارند و نیروی بازگرداننده در آنها ناشی از نیروهای کششی یا کشش درون صفحه‌ای می‌باشد (مانند ارتعاشات کابل‌ها) [۱].

امروزه غشاها از جنس ماده‌ی هایپرالاستیک تحت بارگذاری‌های مختلف استاتیکی و دینامیکی به دلیل توسعه‌ی قوانین ساختاری و ماده‌ای، در سازه‌های فضایی، عمرانی، رباتیک و سنسورها تا مسائل مختلف زیست‌محیطی، پزشکی و جراحی کاربرد فراوانی داشته است که مطالعه و تحلیل آنها از اهمیت بالایی برخوردار است. ساختار ماده‌ای این غشاها تراکم‌ناپذیر یا تقریباً تراکم‌ناپذیر در نظر گرفته می‌شود و تحت بارگذاری‌های درون‌صفحه‌ای و یا جانبی، کرنش‌های بسیار بزرگ، با رابطه تنش کرنش غیرخطی را متحمل می‌گردند که در چنین حالتی، غیرخطی‌های هندسی و ساختار ماده‌ای باید در نظر گرفته شوند. در این فصل مقدمه‌ای مختصر و کلی در مورد غشای هایپرالاستیک و کاربرد آن در علوم ارائه شده است.

۲-۱ کلیات غشای مستطیلی از جنس هایپیرالاستیک [۲]

۱-۲-۱ تعریف ماده‌ی هایپیرالاستیک

مواد هایپیرالاستیک گروهی از مواد هستند که می‌توانند تغییر شکل‌های بزرگ بازگشت‌پذیر و الاستیک داشته باشند. قوانین ساختاری مواد هایپیرالاستیک برای مدل‌سازی موادی به کار می‌روند که تحت کرنش‌های بسیار بزرگ، رفتار الاستیک از خود نشان می‌دهند. این قوانین برای دو حالت اصلی زیر مورد استفاده واقع می‌گردند:

حالت اول برای مدل‌سازی رفتار مواد غیرخطی مانند رفتار لاستیکی^۱ مواد پلیمری^۲ می‌باشد (مواد شبه لاستیک). خواص این مواد نزدیک به مواد الاستیک ایده‌آل است؛ یعنی تنش، صرفاً تابعی از کرنش جاری و مستقل از نرخ و سابقه‌ی بارگذاری بوده و تغییر شکل‌ها بازگشت‌پذیر هستند. این مواد همسانگرد هستند. همچنین در برابر تغییر حجم از خود مقاومت نشان می‌دهند؛ به صورتی که مدول بالک^۳ آن‌ها با فلزات قابل مقایسه است. همچنین این مواد در مقابل برش مقاومت بسیار کمی از خود نشان می‌دهند. حالت دوم در مدل‌سازی تغییر شکل‌های بزرگ همچون فوم‌های پلیمری^۴ با قابلیت تغییر شکل‌های بزرگ بازگشت‌پذیر (مانند اسفنج‌ها^۵) استفاده می‌شود. وابستگی این مواد به نرخ و یا سابقه‌ی بارگذاری بسیار اندک بوده و قابل صرف‌نظر است. بر خلاف لاستیک‌ها، اغلب فوم‌ها دارای تراکم‌پذیری^۶ بالایی هستند. همچنین فوم‌ها با توجه به ساختار سلولی خود می‌توانند خاصیت ناهمسانگردی نیز داشته

^۱ Rubbery behavior

^۲ Polymeric materials

^۳ Bulk modulus

^۴ Polymeric foams

^۵ Sponges

^۶ Compressibility

باشند.

لازم به ذکر است که رفتار مواد پلیمری در حالت کلی به شدت تابع دما، نرخ کرنش و نرخ بارگذاری هستند. رفتار این مواد شامل سه بخش شیشه‌مانند^۱، ویسکوالاستیک^۲ و لاستیکی^۳ است که میزان هر کدام از این سه بخش و جزئیات رفتار آن‌ها وابسته به ساختار مولکولی این مواد است. در زیر دمای بحرانی که به آن دمای تبدیل شیشه‌ای^۴ نیز گفته می‌شود، پلیمرها رفتاری مشابه شیشه دارند. نزدیک این دما، تنش‌ها به شدت وابسته به نرخ کرنش هستند و در خود این دما، مدول برشی به شدت کاهش می‌یابد. در دماهای بالاتر از این دما، ماده رفتار لاستیکی از خود نشان می‌دهد.

برای بسیاری از مواد، مدل الاستیک خطی، رفتار مشاهده شده از مواد را با دقت توضیح نمی‌دهد. مدل هایپرالاستیک یا گرین-الاستیک^۵ در واقع یک مدل ساختاری برای گروهی از مواد ایده‌آل الاستیک می‌باشد که در آن‌ها رابطه‌ی تنش-کرنش از یک تابع انرژی کرنشی^۶ استخراج می‌شود. ماده‌ی هایپرالاستیک حالت خاصی از ماده‌ی الاستیک کوشی^۷ است.

از انواع مواد هایپرالاستیک می‌توان به لاستیک‌ها، مواد شبه‌لاستیک، الاستومرها و بافت‌های زیستی نرم اشاره کرد که در ادامه در مورد آن‌ها به طور مختصر توضیح داده می‌شود.

^۱ Glassy

^۲ Viscoelastic

^۳ Rubbery

^۴ Glass transition temperature

^۵ Green-Elastic

^۶ Strain energy

^۷ Cauchy

۱-۲-۲ انواع مواد هایپرالاستیک

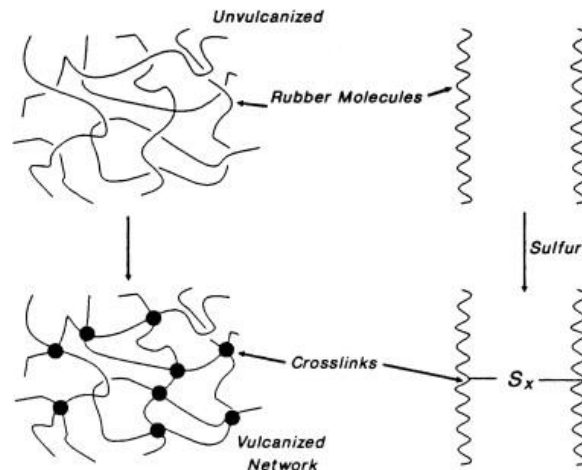
لاستیک طبیعی مطابق شکل (۱-۱) از تراوشات درخت لاستیک به دست می‌آید که ظاهری شیری رنگ دارد. منشأ لغت کائوچو (لاستیک) کلمه‌ای هندی است که "درخت گریان" معنی می‌دهد. ماده‌ی ترشح شده دارای مقادیر زیادی هیدروکربن است که به عنوان لاستیک خام شناخته می‌شود. همچنین مقادیری از صمغ، مواد معدنی، پروتئین و آب در این ماده وجود دارد. برای جدا کردن لاستیک از ناخالصی‌ها، به ماده‌ی تراوش شده گرما داده می‌شود. این درخت‌ها با اینکه از نظر گیاه‌شناسی از یک خانواده نیستند؛ ولی ترکیب هیدروکربنی یکسانی دارند.



شکل ۱-۱. تراوشات درخت لاستیک [۳]

لاستیک‌ها از مولکول‌های بلند زنجیره‌ای تشکیل شده‌اند. ولکانش^۱، پیوند دادن زنجیره‌ها توسط باندهای شیمیایی است که اولین بار با اضافه کردن سولفور با لاستیک طبیعی انجام شد. مولکول تقویت شده‌ی لاستیک در شکل (۱-۲) نشان داده شده است.

^۱ Vulcanization



شکل ۱-۲. مولکول‌های لاستیک در فرایند ولکانش [۴]

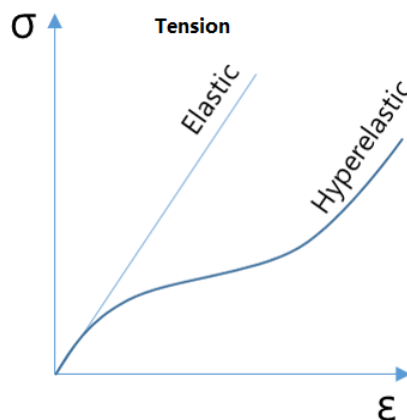
تا قبل از کشف فرایند ولکانش، لاستیک به علت حساسیت شدید نسبت به محیط، کاربرد صنعتی چندانی نداشت؛ زیرا با مقدار کمی حرارت، نرم و چسبناک و با سرد کردن سخت و شکننده می‌شود. ولکانش، خواص فیزیکی لاستیک را بهبود می‌بخشد.

ترکیب‌های لاستیکی معمولاً از یک لاستیک پایه (لاستیک طبیعی)، یک پرکننده^۱ مانند کربن سیاه یا اکسید روی، یک تقویت‌کننده و افزودنی‌های دیگری تشکیل شده‌اند. این افزودنی‌ها به دلیل بهبود برخی خواص همراه با تضعیف خواص دیگر، بسته به کاربرد لاستیک مشخص می‌شوند. لاستیک‌ها دارای کاربردهای مهندسی بسیار وسیعی به خصوص در حوزه مهندسی مکانیک، عمران و برق هستند. علاوه بر صنعت خودرو در موارد بسیاری مانند روکش سیم‌ها، آب‌بندهای اجزای الکتریکی و ارینگ‌ها (خاصیت نشت‌ناپذیری)، برینگ‌های ایزولاسیون ارتعاشات در ساختمان‌ها، بوش‌ها و اتصال‌دهنده‌ها (استفاده از خاصیت جذب صدا و ارتعاش)، اتصالات چسبی، تسمه‌ها و موارد بسیار دیگری به کار می‌روند. دلیل اصلی استفاده از اجزای لاستیکی قابلیت کشسانی و چقرمگی^۲ آن‌ها است. برخی از لاستیک‌ها می‌توانند تا ۵ یا ۶ برابر طول اولیه‌ی خود تغییر طول دهند.

^۱ Filler

^۲ Toughness

واضح‌ترین نمونه برای این مواد، مواد شبه‌لاستیک می‌باشند که در آن‌ها رابطه‌ی تنش-کرنش را می‌توان به‌صورت رابطه‌ی الاستیک غیرخطی، همسانگرد و به‌طور کلی مستقل از نرخ کرنش بیان کرد. رفتار این مواد به این صورت است که مدول الاستیک لحظه‌ای در کرنش‌های کوچک و متوسط کاهش یافته و نرم می‌شود و ناگهان در کرنش‌های بزرگ، ماده سفت شده و مدول الاستیک به‌صورت لحظه‌ای افزایش می‌یابد. به این رفتار، رفتار S شکل گفته می‌شود (شکل ۱-۳).



شکل ۱-۳. نمودار تنش-کرنش مواد شبه‌لاستیک [۵]

از جمله مواد دیگری که رفتار آن‌ها اغلب با رفتار مواد هایپرالاستیک ایده‌آل مطابقت دارد، الاستومرهای ولکانش‌یافته‌ی پرنشده^۱ هستند. الاستومرهای پرشده^۲ نیز گاهی به کمک مواد هایپرالاستیک ایده‌آل مدل‌سازی می‌شوند. الاستومر، پلیمری است که به دلیل داشتن اتصالات عرضی قوی، قابلیت کشسانی زیادی دارد. نام الاستومر از دو قسمت "الاستو" (برگرفته از "الاستیک" و به معنای کشسانی) و "مر" (برگرفته از "پلیمر") تشکیل شده‌است. ضریب پواسون برخی از این مواد به ۰/۵ بسیار نزدیک است و بنابراین می‌توان آن‌ها را تراکم‌ناپذیر فرض کرد. الاستومرها در ساخت

^۱ Unfilled vulcanized elastomers

^۲ Filled elastomers

محصولات زیادی مانند لاستیک اتومبیل، درزگیرهای آب‌بندی، برف پاک‌کن‌ها و شلنگ‌ها به کار می‌روند. همچنین از دیگر کاربردهای لاستیک‌ها و الاستومرها می‌توان به کف‌پوش‌ها و ضربه‌گیرها، پدهای طبی در کفش‌ها و یا مبدل‌های دی‌الکتریک الاستومری^۱ که امروزه برای تولید انرژی الکتریکی از نیروهای حرکتی مختلف مثل انرژی انسان، حرکت ماشین‌ها و یا امواج دریا مورد استفاده‌ی وسیع قرار گرفته‌اند، اشاره کرد.

بافت‌های زیستی نرم نیز رفتار غیرخطی مشابه مواد هایپرلاستیک از خود نشان می‌دهند. بافت‌های زیستی مجموعه‌ای از سلول‌های مشابه هستند که بر روی هم کار مشخصی را انجام می‌دهند. از جمله‌ی آن‌ها می‌توان به زیست مواد نرم^۲ اشاره کرد. آزمایش‌های تک‌محوری انجام شده بر روی دیواره‌ی عروق بدن جانداران نشان‌دهنده‌ی رفتار غیرخطی تنش-کرنش این مواد با قابلیت تحمل کششی بالا در کرنش‌های کمتر و قابلیت کشش پایین‌تر در کشیدگی‌های بالاتر می‌باشد که همچون مواد شبه‌لاستیک از آن تحت عنوان کرنش-سختی^۳ نام برده می‌شود.

دیواره‌ی عروق می‌توانند از مواد همگن یا ناهمگن، همسانگرد یا ناهمسانگرد، تراکم‌پذیر یا تراکم‌ناپذیر و ویسکوالاستیک باشند. بعضی بافت‌های زیستی همچون بافت مغز و کبد رفتار همسانگرد از خود نشان می‌دهند. بخش دیگری از زیست مواد نرم مانند پوست و تاندون‌ها رفتار ناهمسانگرد دارند. بررسی رفتار مکانیکی عروق (از جمله دیواره‌های رگ‌های خونی) می‌تواند اطلاعات مفیدی در زمینه‌ی شروع، پیشروی و درمان بیماری‌های قلبی عروقی در اختیار دانشمندان قرار دهد. همچنین سازه‌هایی در بدن موجودات زنده را می‌توان به کمک این مواد مدل‌سازی کرد که از جمله‌ی آن می‌توان به عروق خونی^۴ نقاط مختلف بدن موجودات زنده اشاره کرد. کمک به متخصصان در تشخیص بیماری‌ها همانند بافت‌های

^۱ Dielectric elastomer transducers

^۲ Soft biomaterials

^۳ Strain-Hardening

^۴ Blood vessels

سرطانی و یا تومورهای داخل بدن موجودات زنده از طریق بررسی رفتار غیرخطی این مواد نیز از جمله کاربردهای دیگر آنها است.

۱-۲-۳ دیدگاه مکانیک محیط پیوسته برای لاستیک

در این بخش برای درک بهتر مسئله، ابتدا مفاهیم پایه‌ی مربوط به مکانیک محیط پیوسته و تغییرشکل ارائه شده، سپس مواد هایپرالاستیسیته و در نهایت مدل‌های در دسترس جهت مدل‌سازی غشای هایپرالاستیک معرفی می‌گردند [۶].

۱-۳-۲-۱ تغییر شکل و کرنش

نقطه‌ی شروع مکانیک محیط پیوسته، اندازه‌گیری جابه‌جایی و تغییر شکل است. نقطه‌ی p در یک جسم دارای بردار مکان مرجع $X = X_i e_i$ است. مکان جدید نقطه‌ی p در طی تغییر شکل و یا حرکت به نقطه p' انتقال می‌یابد که دارای بردار مکان $x = x_i e_i$ است. رابطه‌ی بردار مکان قدیم و بردار مکان جدید توسط بردار جابه‌جایی u طبق معادله‌ی زیر است:

$$x_i = X_i + u_i \quad (1-1)$$

شکل دیفرانسیلی معادله (۱-۱) به صورت زیر می‌باشد:

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j = F_{ij} dX_j \quad (2-1)$$

که F_{ij} در معادله‌ی (۲-۱) عناصر تنسور گرادیان تغییر شکل است که به شکل ماتریسی با F نشان داده می‌شود. تنسور راست کوشی-گرین از گرادیان تغییر شکل به دست می‌آید که به صورت زیر است:

$$C_{ij} = F_{mi} F_{mj} \quad (3-1)$$

معادله‌ی (۳-۱) در شکل ماتریسی، به صورت زیر معرفی می‌گردد:

$$C = F^T \cdot F \quad (4-1)$$

به همین ترتیب تنسور چپ کوشی-گرین برابر است با:

$$B_{ij} = F_{im}F_{jm} \quad (5-1)$$

یا به شکل ماتریسی، معادله‌ی (5-1) عبارت است از:

$$B = F \cdot F^T \quad (6-1)$$

تعریف این تنسورها منجر به تعریف کرنش می‌شود. از تنسور راست کوشی-گرین (C) برای یافتن تنسور کرنش لاگرانژی (تنسوری که کرنش را بر اساس حالت مرجع بیان می‌کند) که معادل با رابطه‌ی زیر است:

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(C_{ij} - \delta_{ij}) \quad (7-1)$$

که δ_{ij} تابع دلتای کرانکر است.

تنسور کرنش اویلری که شکلی از کرنش نسبت به موقعیت تغییر شکل یافته را بیان می‌کند برابر است با:

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(\delta_{ij} - B_{ij}^{-1}) \quad (8-1)$$

همچنین نسبت کشیدگی^۱ برای المان یک بعدی با طول اولیه‌ی L_0 و طول ثانویه‌ی L برابر با رابطه‌ی زیر است:

$$\lambda = \frac{L}{L_0} \quad (9-1)$$

آشناترین تعریف برای کرنش، کرنش مهندسی یا اسمی است که بر اساس نسبت تغییر طول به طول اولیه بیان شده که طبق رابطه‌ی زیر مستقیماً از نسبت کشیدگی تعیین می‌شود:

$$\varepsilon_i = \lambda_i - 1 \quad (10-1)$$

گرادیان تغییر شکل F بر اساس دو تنسور یعنی تنسور دوران متعامد R و تنسور راست کشیدگی متقارن

^۱ Stretch ratio

مثبت معین U یا تنسور چپ کشیدگی V به صورت زیر قابل بیان است:

$$F = R \cdot U = V \cdot R \quad (11-1)$$

مقادیر ویژه تنسور راست کشیدگی، نسبت های کشیدگی اصلی^۱ می باشند که به صورت رابطه ی زیر می باشد:

$$\det[U_{ij} - \lambda_n \delta_{ij}] = 0 \quad (12-1)$$

این نسبت کشیدگی با مقادیر ویژه تنسور راست کوشی-گرین از طریق معادلات مشخصه مرتبط است با:

$$\det[C_{ij} - \lambda_n^2 \delta_{ij}] = 0 \quad (13-1)$$

یعنی مقادیر ویژه تنسور راست کوشی-گرین λ_n^2 است که این مقدار برای تنسور چپ کوشی-گرین برابر λ_n^{-2} است.

۱-۲-۳-۲ پایاهای کرنش

پایاهای کرنش از طریق تنسور راست کوشی-گرین و بدون توجه به جهت مختصات، به صورت زیر قابل تعریف است:

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = tr(C) \quad (14-1)$$

$$I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 = \frac{1}{2} (I_1^2 - tr(C^2)) \quad (15-1)$$

$$I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = det(C) \quad (16-1)$$

ثوابت کشیدگی $\lambda_i (i = 1, 2, 3)$ در معادله ی (۱۴-۱) تا (۱۶-۱) ریشه ی مربعی مقادیر ویژه ی تنسور چپ یا راست کوشی-گرین می باشند.

به همین ترتیب، دترمینان تنسور راست کشیدگی برابر با J است که در رابطه ی زیر ذکر شده است:

^۱ Principle stretch ratios

$$J = \det(U) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \quad (17-1)$$

اگر همچون مسئله‌ی مورد بررسی ما، ماده تراکم‌ناپذیر باشد، آنگاه طبق رابطه‌ی زیر، J همواره برابر با یک بوده و رابطه‌ی سودمندی را بین نسبت‌های کشیدگی اصلی برقرار می‌سازد:

$$J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 \quad (18-1)$$

به همین ترتیب می‌توان پایاهای کرنش را از طریق تانسور تغییر شکل چپ کوشی-گرین تعریف کرد که به صورت معادلات زیر آورده شده است:

$$I_1 = \text{tr}(B) = B_{kk} \quad (19-1)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} (I_1^2 - B \cdot B) = \frac{1}{2} (I_1^2 - B_{ik} \cdot B_{ki}) \quad (20-1)$$

$$I_3 = \det(B) = J^2 \quad (21-1)$$

برای مواد تراکم‌ناپذیر، می‌توان مجموعه ثوابت زیر را نیز برای تانسور تغییر شکل چپ کوشی-گرین به کار برد:

$$\bar{I}_1 = \frac{I_1}{J^{2/3}} = \frac{B_{kk}}{J^{2/3}} \quad (22-1)$$

$$\bar{I}_2 = \frac{I_2}{J^{4/3}} = \frac{1}{2} (\bar{I}_1^2 - \frac{B \cdot B}{J^{4/3}}) = \frac{1}{2} (\bar{I}_1^2 - \frac{B_{ik} \cdot B_{ki}}{J^{4/3}}) \quad (23-1)$$

$$\bar{I}_3 = \sqrt{\det(B)} \quad (24-1)$$

۱-۲-۴ الاستیسیته غیر خطی

۱-۲-۴-۱ هایپرالاستیسیته

با توجه به مطالب ارائه شده در بخش (۱-۲-۱) و (۲-۲-۱) و تعریف مواد هایپرالاستیک و انواع آن، پلیمرها با اتصال عرضی^۱ یا همان الاستومرها دارای ایده‌آل‌ترین رفتار الاستیک در بین مواد

^۱ Cross-linked polymers

هایپرالاستیک بوده که ماده‌ی موردنظر ما در این پژوهش نیز می‌باشد.

تمامی مواد هایپرالاستیک از قوانین زیر پیروی می‌کنند:

۱. ماده الاستیک ایده‌آل است، یعنی الف) وقتی ماده در دمای ثابت یا آدیاباتیک تغییر شکل می‌یابد، تنش صرفاً به کرنش آن لحظه وابسته بوده و مستقل از نرخ بارگذاری است. ب) رفتار برگشت‌پذیر دارد، یعنی در طی یک سیکل بسته از کرنش در شرایط هم‌دمای یا آدیاباتیک، هیچ کار خالصی روی ماده انجام نمی‌شود.

۲. مدول برشی آن در حدود 10^{-5} برابر اکثر مواد است.

۳. مدول برشی وابسته به دما بوده و ماده در اثر حرارت‌دهی سفت‌تر می‌شود.

۴. وقتی ماده کشیده می‌شود از خود حرارت آزاد می‌کند.

۵. شدیداً در مقابل تغییرات حجمی مقاومت می‌کند.

۶. رابطه‌ی تنش-کرنش برای ماده از طریق چگالی انرژی کرنشی W که تابعی از تنسور گرادیان تغییر شکل است، بیان می‌شود ($W = W(F)$). این امر نشان می‌دهد که ماده کاملاً الاستیک بوده و نیز بدین معنی است که صرفاً نیازمند کار با یک تابع اسکالر است. شکل کلی تابع چگالی انرژی کرنشی با آزمایش‌های مشخص شده و فرمول استخراجی شامل ثوابتی است که برای هر ماده‌ی خاص قابل حصول است.

۷. ماده‌ی تغییر شکل نیافته، ایزوتروپیک فرض می‌شود یعنی رفتار ماده مستقل از جهت‌گیری اولیه‌ی ماده نسبت به بارگذاری است. اگر تابع چگالی انرژی کرنشی تابعی از تنسور تغییر شکل چپ‌کوشی باشد معادله‌ی سازگاری حاصل به طور خودکار ایزوتروپیک است.

۸. رابطه‌ی تنش-کرنش از طریق مشتق‌گیری نسبت به چگالی انرژی کرنشی حاصل می‌شود.

۱-۲-۴-۲ محاسبه رابطه تنش- کرنش از چگالی انرژی تغییر شکل [۷]

قوانین ساختاری برای ماده‌ی هایپرالاستیک ایزوتروپیک از طریق رابطه‌ی زیر بیان می‌شود که چگالی انرژی کرنشی را به سه پایای تنسور کرنش یا گرادیان تغییر شکل مرتبط می‌کند:

$$W(F) = U(I_1, I_2, I_3) = \bar{U}(\bar{I}_1, \bar{I}_2, J) = \tilde{U}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad (۲۷-۱)$$

که رابطه‌ی تنش-کرنش از مشتق‌گیری چگالی انرژی کرنشی حاصل می‌گردد. در ادامه، روابط تنش-کرنش بر حسب انتخاب پایای کرنش ارائه گردیده است.

- چگالی انرژی کرنشی بر حسب گرادیان تغییر شکل (F_{ij}) به صورت زیر است:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{J} F_{ik} \frac{\partial W}{\partial F_{jk}} \quad (۲۸-۱)$$

- چگالی انرژی کرنشی بر حسب I_1, I_2 و I_3 در معادله‌ی زیر ارائه شده است:

$$\sigma_{ij} = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial U}{\partial I_2} \right) B_{ij} - \frac{\partial U}{\partial I_2} B_{ik} B_{kj} \right] + 2\sqrt{I_3} \frac{\partial U}{\partial I_3} \delta_{ij} \quad (۲۹-۱)$$

- چگالی انرژی کرنشی بر حسب $\bar{I}_1, \bar{I}_2$ و J در معادله‌ی زیر آورده شده است:

$$\sigma_{ij} = \frac{2}{J} \left[\frac{1}{J^{2/3}} \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{I}_1} + \bar{I}_1 \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{I}_2} \right) B_{ij} - \left(\bar{I}_1 \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{I}_1} + 2\bar{I}_2 \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{I}_2} \right) \frac{\delta_{ij}}{3} - \frac{1}{J^{4/3}} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{I}_2} B_{ik} B_{kj} \right] + \frac{\partial \bar{U}}{\partial J} \delta_{ij} \quad (۳۰-۱)$$

- چگالی انرژی کرنشی بر حسب λ_1, λ_2 و λ_3 به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\sigma_{ij} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \lambda_1} b_i^{(1)} b_j^{(1)} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \lambda_2} b_i^{(2)} b_j^{(2)} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \lambda_3} b_i^{(3)} b_j^{(3)} \quad (۳۱-۱)$$

اکثر مواد لاستیکی شدیداً در مقابل تغییر حجم مقاومت می‌کنند و لذا به صورت مواد غیر قابل فشرده^۱

تقریب زده می‌شوند. مدل‌های مختص به مواد هایپرالاستیک دارای این ویژگی‌ها می‌باشند:

- در تغییر شکل، برای ثابت نگه داشتن حجم $J=1$ است.

^۱ Incompressible

- چگالی انرژی کرنشی صرفاً تابعی از دو پایای کرنش می‌باشد.

۵-۲-۱ مدل‌های ساختاری

مدل‌های هایپرالاستیک بسته به کاربردهای محققین از تابع انرژی کرنشی، به دو دسته‌ی کلی تقسیم می‌شوند:

- دسته‌ی اول ناشی از مفهوم ریاضی تابع انرژی کرنشی می‌باشند، مانند سری ریولین^۱ یا اگدن^۲. به این دسته مدل‌های پدیدارشناختی^۳ می‌گویند. تعیین پارامترهای ماده در این مدل‌ها مشکل بوده و در خارج از محدوده‌ی تغییر شکل ممکن است منجر به خطا شوند.
- دومین نوع از مدل‌هایی هستند که از مفاهیم فیزیکی قابل استخراج‌اند. این مدل‌ها بر اساس فیزیک شبکه زنجیره‌های پلیمر و روش‌های آماری می‌باشند. این امر بسته به پدیده‌های میکروسکوپی، منجر به توابع انرژی کرنشی متفاوتی می‌گردد و در اکثر موارد فرمول‌بندی ریاضی آن‌ها کمی پیچیده است. در این بخش تعدادی از مدل‌های حاکم بررسی می‌شوند.

۱-۵-۲-۱ مدل‌های ساختاری پدیدارشناختی [۸]

۱-۵-۲-۱-۱ مدل مونی^۴ (مدل مونی-ریولین مرتبه اول)

مونی با مشاهده‌ی رفتار لاستیکی خطی تحت بارگذاری ساده‌ی برشی، تابع چگالی انرژی کرنشی را به صورت معادله‌ی زیر در نظر گرفت:

^۱ Rivlin

^۲ Ogden

^۳ Phenomenological models

^۴ Mooney model

$$W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3) \quad (32-1)$$

که C_1 و C_2 دو پارامتر ماده هستند. این مدل به طور گسترده برای مواد لاستیکی با کرنش متوسط (زیر ۲۰۰٪) استفاده می‌شود.

۱-۲-۵-۱ مدل مونی-ریولین^۱

ریولین مدل پیشین را از طریق بسط W به سری‌های چندجمله‌ای از $(I_1 - 3)$ و $(I_2 - 3)$ توسعه داد که به صورت معادله‌ی زیر می‌باشد:

$$W = \sum_{i=0, j=0}^{\infty} C_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j \quad (33-1)$$

که C_{ij} پارامترهای ماده بوده و $C_{\infty} = 0$ است. معمولاً جملات سری موردنظر به جملات مرتبه دوم و سوم ختم می‌شود، به عنوان مثال، نیازمند تعیین و پارامتر برای جملات تا مرتبه سوم است. مدل بیان شده ریولین قابل توسعه از طریق شکل‌های دیگر پایهای کرنش است. در هر صورت، این شکل از کرنش انرژی به صورت کلاسیک برای کرنش‌های خیلی بزرگ استفاده می‌شود.

طبق رابطه اخیر، مدل سه پارامتری و پنج پارامتری مونی-ریولین به صورت معادلات زیر بیان می‌شود:

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) \quad (34-1)$$

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{02}(I_2 - 3)^2 \quad (35-1)$$

در مقالات، اثبات شده که مدل مونی-ریولین برای ترکیبات لاستیک پر نشده^۲ (به مواد لاستیکی خالی از مواد غیرآلی می‌گویند) مناسب است [۹].

^۱ The Mooney-Rivlin model

^۲ Unfilled rubber

۱-۲-۵-۳ مدل یئو^۱

یئو در سال ۱۹۹۰، مدل دیگری را طبق رابطه‌ی زیر پیشنهاد داد که در آن پایای کرنش دوم I_2 دارای مقدار ثابت کشیدگی بوده و در تابع انرژی کرنشی دخیل نمی‌شود:

$$W = \sum_{i=1}^3 C_i (I_1 - 3)^i \quad (۳۶-۱)$$

این مدل دقت خوبی را برای لاستیک پرشده^۲ به همراه داشته و تنها نیازمند تست کشش دوجوره‌ی متقارن برای تطابق با داده‌هاست.

۱-۲-۵-۴ مدل بیدرمن^۳

بیدرمن از معادله مونی-ریولین تنها جملات با $i = 0$ یا $j = 0$ را حفظ نمود و به این ترتیب سه جمله‌ی اول از I_1 و جمله‌ی اول از I_2 را مدنظر قرار داد که به صورت معادله‌ی زیر است:

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 \quad (۳۷-۱)$$

۱-۲-۵-۵ هینس-ویلسون^۴

جیمز و همکاران از مقایسه‌ی توصیف چگالی انرژی کرنشی بر حسب پایاهای کرنش و ثوابت کشیدگی تصمیم به حفظ شش جمله اول از سری گرفتند که معادله‌ی زیر آن را نشان می‌دهد.

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{02}(I_2 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 \quad (۳۸-۱)$$

^۱ Yeoh model

^۲ Filled rubber

^۳ The Biderman model

^۴ The Haines-Wilson model

۱-۲-۵-۱ مدل اگدن^۱

در سال ۱۹۷۲ اگدن، چگالی انرژی کرنشی را بر حسب ثوابت کشیدگی بیان نمود. او چگالی انرژی کرنشی را به صورت یک سری از توان‌های حقیقی $\lambda_i (i = 1, 2, 3)$ به صورت معادله‌ی زیر ارائه داد:

$$W = \sum_{n=1}^N \frac{\mu_n}{a_n} (\lambda_1^{a_n} + \lambda_2^{a_n} + \lambda_3^{a_n} - 3) \quad (۳۹-۱)$$

به طوری که پارامترهای ماده باید شرط زیر را ارضا کنند:

$$\mu_n a_n > 0, \quad \forall n = 1, N \quad (۴۰-۱)$$

۱-۲-۵-۲ مدل‌های فیزیکی [۸]

مدل‌های فیزیکی بر اساس پاسخ میکروسکوپی زنجیره‌های پلیمری در شبکه می‌باشند. این مدل‌ها بر اساس فرض‌های انجام شده در رسیدن به پاسخ باهم تفاوت دارند.

۱-۲-۵-۱ مدل نئو-هوکین^۲

این مدل، ساده‌ترین مدل فیزیکی موجود برای مواد لاستیکی است که در تطابق با مدل مونی-ریولین اما با یک پارامتر بوده و در عین حال از ارتباط زنجیره‌ی مولکولی به دست می‌آید. مواد لاستیکی از طریق شبکه‌ای از زنجیره‌های انعطاف‌پذیر بلند که با اتصالات شیمیایی به هم متصل‌اند، حاصل می‌شود. الاستیسیته‌ی این شبکه عمدتاً به سبب تغییرات آنتروپی در طی تغییر شکل بوده که آنتروپی ماده نیز توسط تعداد ترکیب‌های ممکن از زنجیره‌های ماکرومولکولی تعریف می‌گردد. ترلوار^۳ [۸] از توزیع آماری

^۱ Ogden model

^۲ Neo-Hookean

^۳ Treloar

گوسین^۱ استفاده کرد و شکل انرژی کرنشی رابطه‌ی زیر را ارائه نمود:

$$W = \frac{1}{2}nkT(I_1 - 3) \quad (41-1)$$

که در آن n چگالی زنجیره در واحد حجم، k ثابت بولتزمن و T دمای مطلق است. تروآر برای کربن طبیعی سیاه^۲ مقدار nkT را برابر 0.2 مگاپاسکال به دست آورد. مدل وی در تطابق مناسبی با تست‌های کشش، برش ساده و تست‌های دو محوره در تغییر شکل‌های کمتر از 50% بوده است.

۱-۲-۵-۲ مدل ایشیهارا^۳

ایشیهارا تئوری غیر گوسین را به کار برده و با استفاده از خطی‌سازی معادلات مربوطه، سری ریولین را برای چگالی انرژی کرنشی طبق رابطه‌ی زیر به دست آورد:

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 \quad (42-1)$$

مدل مولکولی حاضر، شامل ثابت I_2 کرنش بوده که تا پیش از آن در مدل‌های فیزیکی ظاهر نشده بود. به این ترتیب مدل ایشیهارا نزدیک به روابط حاکم بر مدل بیدرمن یا مونی-ریولین است [۱۰].

۳-۱ مروری بر پیشینه تحقیق

در سال‌های اخیر محققان، مطالعات و پژوهش‌های متنوعی را در زمینه ارتعاشات انواع ورق، پوسته و غشای هایپرالاستیک ارائه داده‌اند. در حوزه‌ی مطالعه‌ی مدل‌های ساختاری مواد هایپرالاستیک، سلوادورای [۱۱]، ساکوماندی و اگدن [۱۲] تحقیقاتی را ارائه داده‌اند. آمابیلی و همکاران [۱۳] به بررسی و تحلیل ارتعاشات غیرخطی آزاد و اجباری ورق‌های نازک مربعی ساخته شده از ماده‌ی هایپرالاستیک

^۱ Gaussian statistical distribution

^۲ Carbon black-filled natural rubber

^۳ Ishihara model

پرداخته‌اند. غیرخطی‌های فیزیکی و ماده‌ای با استفاده از قوانین ساختاری هایپرالاستیک نئو-هوکین، مونی-ریولین و اگدن و غیرخطی‌های هندسی با استفاده از تئوری پوسته‌ی غیرخطی نووژیلو مدل‌سازی شده است. رفتار سیستم با استفاده از معادلات دیفرانسیل معمولی با جمله‌های غیرخطی درجه دو و سه در جابه‌جایی تعیین شده است. مدل‌ها و نتایج عددی با نتایج اجزای محدود در حالت استاتیکی مقایسه شده است و منحنی‌های نیرو-تغییرشکل و پاسخ فرکانسی برای این مدل‌ها به دست آمده است. از جمله نتایج این پژوهش، وابستگی پیک تشدید و ناحیه پایداری به پارامتر غیرخطی بستر، نرخ کشیدگی، بزرگی نیرو و دمپینگ می‌باشد.

ژانگ و همکاران [۱۴] به تحلیل ارتعاشات غیرخطی یک پوسته‌ی استوانه‌ای جدار نازک هایپرالاستیک طبق قانون ساختاری مونی-ریولین و تحت تحریک هارمونیک شعاعی، پرداخته‌اند. با استفاده از نظریه‌ی لاو کیرشهف^۱، نظریه‌ی پوسته‌ی کم‌عمق غیرخطی دانل^۲، روابط ساختاری هایپرالاستیک، معادلات لاگرانژ و نظریه‌ی کرنش جزئی، معادلات دیفرانسیل غیرخطی استخراج می‌شود. ابتدا، فرکانس‌های طبیعی شعاعی، محیطی و محوری مورد مطالعه قرار می‌گیرند، سپس بر اساس نمودارهای چندشاخگی و بخش‌های پوانکاره، رفتارهای غیرخطی توصیف‌کننده‌ی ارتعاشات شعاعی پوسته نشان داده شده است. بررسی تأثیر پارامترهای ساختاری و ماده‌ای بر روی ارتعاشات شعاعی پوسته نشان می‌دهد که موده‌های ارتعاشی به نرخ ضخامت به شعاع بسیار حساس هستند.

گونچالوز و همکاران [۱۵] به ارتعاشات غیرخطی غشای دایروی هایپرالاستیک با کشیدگی اولیه تحت تغییرشکل محدود و فشار جانبی متغیر با زمان با استفاده از ماده‌ی ایزوتروپیک، همگن و هایپرالاستیک نئو-هوکین پرداخته‌اند. ابتدا حل دقیق غشا تحت کشیدگی یکنواخت شعاعی به دست آمده است. سپس معادلات حرکت غشا استخراج شده است. با استفاده از معادلات خطی فرکانس‌های

^۱ The Kirchhoff-Love hypothesis

^۲ Donnell's nonlinear shallow shell theory

طبیعی و شکل موده‌های غشا به صورت تحلیلی به دست آمده است. سپس با استفاده از موده‌های طبیعی و روش گلرکین میدان جابه‌جایی غیرخطی تخمین زده می‌شود. همچنین مدل‌های مختلف برای مقایسه با نتایج ارزیابی شده برای غشای مشابه با روش اجزای محدود غیرخطی مورد استفاده قرار می‌گیرند. در انتها تأثیر قانون ساختاری و نرخ کشیدگی بر روی رابطه‌ی فرکانس دامنه و منحنی‌های چندشاخگی بررسی شده است.

سوارز و همکاران [۱۶] به بررسی و مطالعه‌ی ارتعاشات غیرخطی غشای حلقوی هایپرالاستیک با کشیدگی اولیه تحت تغییر شکل محدود با استفاده از مدل ساختاری هایپرالاستیک نئو-هوکین پرداخته‌اند. غشا در ابتدا در مرز داخلی ثابت در نظر گرفته شده است. همچنین تحت کشش شعاعی حول محیط بیرونی قرار می‌گیرد و مرز بیرونی ثابت در نظر گرفته می‌شود. سپس این غشا با کشیدگی اولیه، تحت فشار جانبی هارمونیک قرار می‌گیرد. حل عددی و تحلیلی آن توسط روش شوتینگ^۱ به دست می‌آید. شکل مودها و فرکانس‌های طبیعی از معادلات خطی شده به صورت عددی و تحلیلی به دست می‌آیند. سپس با استفاده از روش گلرکین معادلات دیفرانسیل غیرخطی گسسته شده به دست می‌آید. در انتها تأثیر نرخ کشیدگی و هندسه‌ی غشا در روابط غیرخطی فرکانس دامنه و منحنی‌های تشدید بررسی شده است.

سوارز و همکاران [۱۷] به بررسی ارتعاشات غیرخطی و پایداری غشای هایپرالاستیک با کشیدگی اولیه تحت فشار جانبی هارمونیک و تغییر شکل اولیه محدود، با استفاده از چهار مدل ساختاری هایپرالاستیک پرداخته‌اند. معادلات حرکت غشا با استفاده از اصل هامیلتون استخراج شده است. با استفاده از معادلات خطی شده، فرکانس‌های طبیعی و شکل موده‌های غشا به صورت تحلیلی به دست آمده است. سپس با استفاده از روش گلرکین میدان جابه‌جایی غیرخطی تخمین زده می‌شود. معادلات

^۱ Shooting method

غیرخطی به روش عددی رانج-کوتا^۱ حل شده‌اند. در انتها تأثیر نرخ کشیدگی، پارامترهای بستر، بزرگی نیرو و دمپینگ در ارتعاشات خطی و غیرخطی و نمایش دینامیک غیرخطی با استفاده از روابط فرکانس-دامنه و منحنی‌های تشدید بررسی شده است.

کویوروا و همکاران [۱۸] یک فرمولاسیون نظری و عددی جهت تحلیل ارتعاشات غیرخطی غشای متحرک محوری ارائه داده‌اند. این مدل با تعریف لاگرانژین از یک مسئله‌ی محیط پیوسته در زمینه دینامیک مواد جامد تحت کشیدگی اولیه ارائه شده است. الاستیسیته‌ی غشا از طریق یک مدل کرنش محدود تعریف شده است. معادلات غیرخطی حاکم از اصل هامیلتون^۲ به دست آمده است. این معادلات توسط روش اجزای محدود گسسته‌سازی شده‌اند. این فرمولاسیون شامل اثرات هندسی غیرخطی جابه‌جایی‌های بزرگ، تغییر در تنش غشا و تغییرات در سرعت محوری به دلیل تغییر شکل می‌باشد. سپس از یک مدل عددی برای تخمین این اثرات غیرخطی هندسی بر رفتار دینامیکی این غشای متحرک محوری استفاده شده است. این مسئله با استفاده از دستگاه مختصات کارتزین فرمول‌بندی شده است که منجر به معادلات گسسته‌ی نسبتاً ساده می‌شود. تأیید این مدل در مقایسه با نتایج تجربی در محدوده‌ی خطی امکان‌پذیر می‌باشد. رفتار دینامیکی غیرخطی غشا مورد بررسی قرار گرفته و تأثیر تماس بین آن و تکیه‌گاه‌های استوانه‌ای و هوای محیط اطراف آن بررسی شده است. برای مقادیر بالای سرعت محوری، اولین فرکانس طبیعی از هارمونیک‌های خطی دوم و سوم عبور می‌کند. نتایج نشان می‌دهد که تکیه‌گاه استوانه‌ای شکل تأثیر قابل‌توجهی بر رفتار غشای متحرک محوری دارد.

ژی-می وو و همکاران [۱۹] به تحلیل ارتعاشات غیرخطی غشای متحرک با چگالی متغیر در فرایند چاپ پرداخته‌اند. این غشا با چگالی متغیر سهموی مدل‌سازی شده است. سپس معادلات ون-کارمن با استفاده از تابع انحراف بیان شده‌اند و تابع نیروی داخلی غشای متحرک محوری بر اساس تئوری

^۱ Runge-Kutta

^۲ Hamilton's principle

الاستیسیته به دست آمده است. مشخصات ارتعاشی غیرخطی غشای متحرک تحت شرایط مرزی گیردار بررسی شده است. متغیرهای زمانی و مکانی با استفاده از روش بابنو-گلرکین^۱ جداسازی شده‌اند و عبارت فرکانس ارتعاش غیرخطی این غشا به دست آمده است. منحنی‌های مربوط به فرکانس و ضریب تراکم، سرعت و نسبت طول به عرض به دست آمده‌اند. تأثیر سرعت، نسبت طول به عرض، ضریب تراکم و مقدار اولیه‌ی ارتعاش بر روی ارتعاشات غیرخطی غشاهای متحرک بررسی شده است. این مطالعه، پایه‌ی نظری را برای بهینه‌سازی در فشار چاپ و بهبود پایداری غشا در فرایند چاپ ارائه می‌دهد. در این پژوهش برای ضریب تراکم مشابه، با نسبت طول به عرض بیشتر، سرعت بحرانی غشا بیشتر خواهد بود و همچنین تحت همان نسبت طول به عرض مشابه، هر چه ضریب تراکم بیشتر باشد، سرعت بحرانی ارتعاش غشا کمتر خواهد بود. ژی-می وو و همکاران [۲۰] در مقاله‌ای مشابه به مشخصه‌های ارتعاشات غیرخطی و پایداری غشای متحرک در فرایند چاپ پرداخته‌اند. تحلیل ارتعاشات برای غشای متحرک مستطیل شکل با چهار لبه مرزی ثابت با استفاده از روش بابنو-گلرکین مورد مطالعه قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهد که می‌توان از ارتعاش غیرخطی انحراف بالا به طور موثر با افزایش نسبت طول به عرض غشا و کاهش سرعت بدون بعد، اجتناب کرد.

فرید خان و همکاران [۲۱] به تحلیل رفتار غیرخطی برداشت کننده‌ی انرژی الکترومغناطیسی غشایی تحت ارتعاشات هارمونیک و تصادفی پرداخته‌اند. در این مقاله، ساخت و توصیف یک ماده برداشت-کننده‌ی انرژی الکترومغناطیسی غشایی از نوع پلی دی متیل سیلوکسان^۲ ارائه شده است.

ژو سان و همکاران [۲۲] به بررسی ارتعاشات غیرخطی غشای انعطاف‌پذیر تحت بار متناوب با روش عددی و اجزای محدود پرداخته‌اند. ابتدا یک مدل ساده برای نشان دادن خصوصیات دینامیکی یک بال غشایی تحت بار آیرودینامیک متناوب در دماهای بالاتر پیشنهاد شده است. سپس روش حلی بر اساس

^۱ Bubnov-Galerkin

^۲ Polydimethylsiloxane (PDMS)

روش اجزای محدود، روش عددی تعمیم یافته‌ی آلفا^۱ و نیوتون رافسون^۲ جهت حل معادلات حاکم در نظر گرفته شده‌است. در انتها، با استفاده از روش عددی پیشنهاد شده، ارتعاشات اجباری غشای انعطاف-پذیر تحت بار متناوب شبیه‌سازی شده‌است و تأثیر چگالی غشا، مدول الاستیسیته و پیش‌کرنش به تفصیل بررسی شده‌است. لیو و همکاران [۲۳] به بررسی مسئله‌ی ارتعاش اجباری غیرخطی با میرایی ویسکوز پایین برای سازه‌ی غشایی تحت بارگذاری ضربه‌ای پرداخته‌اند. معادلات حاکم بر حرکت بر اساس نظریه‌ی ون-کارمن و اصل دالامبر^۳ به دست آمده‌است و با استفاده از روش‌های بابنو-گلرکین و روش اغتشاش کریلوف-بوغولوبوف-میتروپولسکی^۴ حل شده‌اند. حل‌های تحلیلی فرکانس و جابه‌جایی جانبی غشای مستطیلی ارتوتروپیک با لبه‌های ثابت به دست آمده‌است. مود ارتعاشی غشا و جابه‌جایی و منحنی‌های زمان هر نقطه مشخص بر روی سطح غشا مورد بررسی قرار گرفته‌است که این نتایج، پایه‌ای محاسباتی برای کنترل ارتعاش و طراحی دینامیکی سازه‌های غشایی را فراهم می‌کند. با توجه به مقایسه و تجزیه و تحلیل در این مطالعه می‌توان فرکانس ارتعاش اجباری غیرخطی میرا و مود ارتعاشی هر مرتبه را محاسبه نمود.

به طور خاص، در بیومکانیک و مهندسی پزشکی، مطالعات ویژه‌ای در مسائل حاوی غشاهای قرار-گرفته بر روی بستر الاستیک انجام شده‌است؛ پامپلونا و موتا [۲۴] آنالیز تحلیلی و عددی یک غشای هایپرالاستیک دایروی بر روی بستر صلب و الاستیک، به عنوان ابزاری برای عمل جراحی پوست ارائه داده‌اند.

از جمله مسائل کلاسیک در مکانیک سازه‌ای، تحلیل و بررسی پوسته‌ها، غشاها و ورق‌ها بر روی بسترهای خطی الاستیک حاوی یک یا دو پارامتر می‌باشد [۲۵]. مدل‌هایی مانند وینکلر، فیلوننکو-

^۱ Generalized- α

^۲ Newton-Raphson

^۳ D'Alembert's principle

^۴ Krylov-Bogolubov-Mitropolsky (KBM)

بورودیچ، پسترناک و ولاسوف در بسترها و فونداسیون به کار می‌روند؛ مدل معروف و رایج، بستر غیرخطی وینکلر با جمله غیرخطی درجه سه می‌باشد [۲۶]. مدل‌های دیگر، به عنوان نمونه در [۲۷، ۲۸، ۲۹] کاربرد داشته‌اند.

با توجه به سوابق مطالعات، تحلیل رزونانسی غشای مستطیلی هایپرالاستیک بر بستر الاستیک شامل سه پارامتر کمتر مورد توجه واقع شده است، لذا در این پژوهش، ارتعاشات غیرخطی اجباری غشای مستطیلی هایپرالاستیک بر بستر الاستیک وینکلر-پسترناک تحت بارگذاری خارجی گسترده و یکنواخت مورد بررسی قرار خواهد گرفت. نوآوری و تفاوت تحقیق پیشنهادی نسبت به دیگر تحقیقات به صورت زیر می‌باشد:

۱- در نظر گرفتن بستر الاستیک غیرخطی وینکلر-پسترناک

۲- در نظر گرفتن خیز دو جمله ای در گسسته سازی معادلات غیرخطی برای غشای مستطیلی

هایپرالاستیک

۳- آنالیز رزونانسی به روش تحلیلی برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک

بدین منظور فرضیات مسئله به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

- ساختار ماده‌ای این غشا تراکم‌ناپذیر، همگن، ایزوتروپیک و هایپرالاستیک در نظر گرفته می‌شود.
- از تئوری غشا با فرض تغییر شکل محدود و مدل ساختاری نئو-هوکین در استخراج معادلات استفاده می‌شود.

- در این تحقیق ارتعاشات عرضی غیرخطی غشای مستطیلی در نظر گرفته می‌شود.

- این سیستم تحت بارگذاری یکنواخت هارمونیک قرار می‌گیرد.

- خیز تک مود و دو مود در گسسته‌سازی در نظر گرفته می‌شود.

- از روش مقیاس‌های چندگانه برای حل مسئله استفاده می‌شود.

- آنالیز رزونانسی سیستم به صورت تحلیلی بررسی خواهد شد.

بدین منظور، ابتدا در فصل دوم معادلات حاکم بر غشا مطابق با شرح هندسه مسئله به دست خواهد آمد. سپس، تحلیل ارتعاشات غیرخطی غشا بر اساس دو حالت تک مود و دو مود و در دو فصل مجزای سوم و چهارم صورت می‌پذیرد و در نهایت، نتایج حاصل از تحلیل‌های رزونانسی در فصل پنجم ارائه خواهد شد.

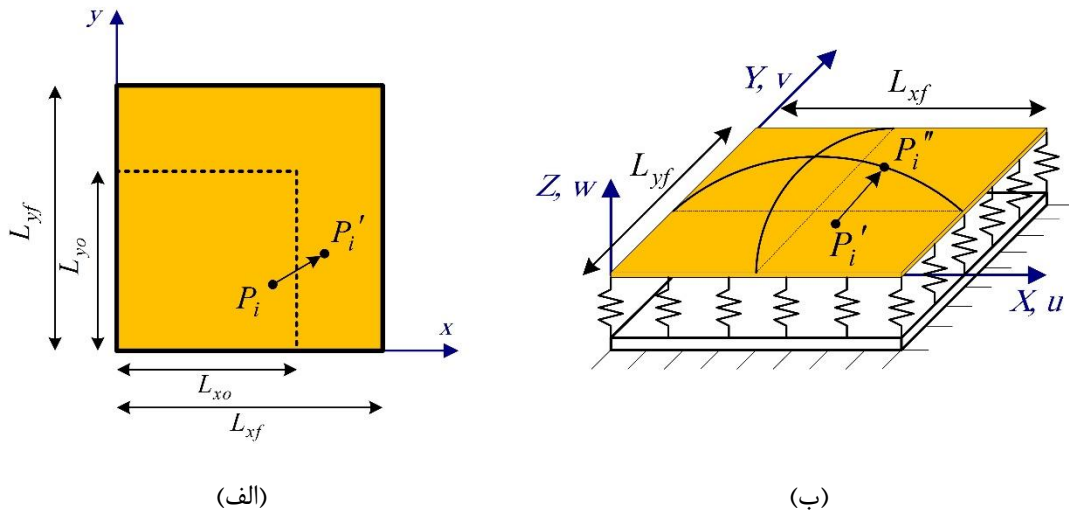
فصل ۲ : معادلات حاکم بر غشای مستطیلی

پیرالاستیک

۲-۱-۱ شرح مسئله

۲-۱-۱-۱ هندسه مسئله

با توجه به شکل (۲-۱)، هندسه‌ی مورد بررسی در تحقیق حاضر یک غشای مستطیلی با ضخامت h ، چگالی جرمی Γ و طول‌های تغییر شکل نیافته‌ی L_{x0} و L_{y0} به ترتیب در جهت‌های x و y می‌باشد. همچنین با فرض $1 \ll \frac{h}{L_{x0}}, \frac{h}{L_{y0}}$ ، از تئوری غشای هایپرالاستیک با ضخامت بسیار کم برای غشای تغییر شکل یافته در مسئله استفاده شده است [۱۷].



شکل ۲-۱. غشای هایپرالاستیک بر بستر الاستیک

۲-۱-۲ تئوری غشای هایپرالاستیک

تابع چگالی انرژی کرنشی بر واحد حجم تغییر شکل نیافته مطابق با معادله‌ی زیر، تعریف می‌شود [۱۷] و [۳۰]:

$$W = W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = W(I_1, I_2, I_3) \quad (۱-۲)$$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\
I_2 &= (\lambda_1 \lambda_2)^2 + (\lambda_2 \lambda_3)^2 + (\lambda_1 \lambda_3)^2 \\
I_3 &= (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^2
\end{aligned} \tag{۲-۲}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ کشیدگی‌های اصلی در سه جهت دستگاه مختصات و I_1, I_2, I_3 پایاهای کرنش می‌باشند. در کرنش‌های بزرگ طی بارگذاری‌های مختلف، از مدل ساختاری نئو-هوکین برای مدل هایپرلاستیک، جهت تعیین تابع چگالی کرنشی برای غشای همگن و ایزوتروپیک طبق معادله‌ی زیر استفاده می‌گردد [۳۱ و ۳۲]:

$$W = C_1(I_1 - 3) \tag{۳-۲}$$

که C_1 جزو پارامترهای معین ماده می‌باشد. مطابق شکل (۲-۱ الف)، ذره ای در مختصات اولیه‌ی P_i در دستگاه مختصات مرجع x, y, z بر اثر کشیدگی به مختصات تغییر شکل یافته‌ی P_i' و سپس با توجه به شکل (۲-۱ ب)، به موقعیت P_i'' در دستگاه مختصات مرجع $X(x, y, t), Y(x, y, t), Z(x, y, t)$ جابجا می‌گردد. پایاهای کرنش در معادله‌ی (۲-۲) از تنسور متریک حالت‌های تغییر شکل یافته و اولیه تعیین می‌شود. تنسور متریک کنترالواریانس^۱ غشا در پیکره‌ی مرجع و تغییر شکل نیافته برابر با ماتریس همانی است، در حالی که در یک میدان تغییر شکل دلخواه، تنسور متریک کوواریانس برای غشای تغییر شکل یافته برابر است با [۳۳]:

$$A = \begin{bmatrix} X_{,x}^2 + Y_{,x}^2 + Z_{,x}^2 & X_{,x}X_{,y} + Y_{,x}Y_{,y} + Z_{,x}Z_{,y} \\ X_{,x}X_{,y} + Y_{,x}Y_{,y} + Z_{,x}Z_{,y} & X_{,y}^2 + Y_{,y}^2 + Z_{,y}^2 \end{bmatrix} \tag{۴-۲}$$

بنابراین، پایای کرنش اول مطابق تعریف تنسور راست تغییر شکل کوشی-گرین و رابطه‌ی (۲-۲) به صورت رابطه‌ی زیر به دست می‌آید [۳۴]:

$$I_1 = \left[\frac{1}{(X_{,x}^2 + Y_{,x}^2 + Z_{,x}^2)(X_{,y}^2 + Y_{,y}^2 + Z_{,y}^2) - (X_{,x}X_{,y} + Y_{,x}Y_{,y} + Z_{,x}Z_{,y})} + X_{,x}^2 + Y_{,x}^2 + Z_{,x}^2 + X_{,y}^2 + Y_{,y}^2 + Z_{,y}^2 \right] \tag{۵-۲}$$

^۱ Contravariant metric tensor

که با توجه به تغییر حجم بسیار کم در ماده، خاصیت تراکم ناپذیری در نظر گرفته می شود ($I_3 = 1$) و:

$$\lambda_3^2 = 1/\det(A) \text{ و } \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \text{tr}(A)$$

با توجه به تابع چگالی کرنشی برای مدل ساختاری نئو-هوکین که بصورت رابطه (۲-۳) ارائه شد، انرژی کرنشی الاستیک U ، با انتگرال گیری از تابع چگالی کرنشی (W) در پیکره‌ی مرجع و تغییر شکل نیافته به صورت زیر تعریف می گردد:

$$U = \int_0^{L_{x0}} \int_0^{L_{y0}} \int_0^h W(X, X_{,x}, X_{,y}, Y, Y_{,x}, Y_{,y}, Z, Z_{,x}, Z_{,y}, x, y) dz dy dx \quad (۶-۲)$$

همچنین به دلیل بارگذاری غشا در کشش یکنواخت در جهت های x و y ، کار حاصل از نیروهای گسترده‌ی اعمالی بر مرزها (f_x و f_y) و کار انجام شده توسط فشار خارجی یکنواخت بر سطح غشا ($P_h(t)$) برابر است با:

$$\begin{aligned} W_e = & L_{x0} f_y (Y - y)|_{y=L_{y0}} - L_{x0} f_y (Y - y)|_{y=0} \\ & + L_{y0} f_x (X - x)|_{x=L_{x0}} - L_{y0} f_x (X - x)|_{x=0} \\ & + P_h(t) \Delta V \end{aligned} \quad (۷-۲)$$

$\Delta V = V_f - V_0$ تغییر حجم ناشی از فشار است؛ V_f حجم غشای تغییرشکل یافته و V_0 حجم غشای تغییرشکل نیافته است که به دلیل تخت بودن: $V_0 = 0$. همچنین، f_x و f_y نیروهای گسترده بر واحد طول و $P_h(t)$ فشار یکنواخت بر واحد سطح می باشند.

۲-۲ معادلات حرکت

اکنون، غشای از پیش کشیده شده در شکل (۲-۱ الف) تحت بارگذاری عرضی متغیر با زمان قرار می گیرد. با توجه به پیکره‌ی تغییر شکل نیافته و با توجه به شکل (۲-۱ ب)، میدان جابه‌جایی کلی برابر است با:

$$\begin{aligned} X &= X_0(x, y) + u(x, y, t) \\ Y &= Y_0(x, y) + v(x, y, t) \\ Z &= w(x, y, t) \end{aligned} \quad (۸-۲)$$

که $X_0 = \delta_x x$ و $Y_0 = \delta_y y$. همچنین δ_x و δ_y به ترتیب نرخ کشیدگی در راستای x و y می‌باشند. u و v نیز به ترتیب جابه‌جایی در راستای x ، y و z می‌باشند. همچنین، $\delta_x = L_{xf}/L_{xo}$ و $\delta_y = L_{yf}/L_{yo}$ بیانگر سفتی اولیه غشا می‌باشند که کلیه مولفه‌های تنش و کرنش، تابعی از این دو متغیر هستند. برای غشای کشیده نشده δ_x و δ_y برابر ۱ است. انرژی جنبشی T مطابق معادله‌ی زیر به دست می‌آید:

$$T = \int_0^{L_{xo}} \int_0^{L_{yo}} \int_0^h \Gamma \frac{(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2)}{2} dz dy dx \quad (۹-۲)$$

که $\dot{(\quad)} = \partial/\partial t$ و چگالی جرمی (Γ) به دلیل تراکم‌ناپذیری در تغییر شکل، ثابت باقی می‌ماند. اکنون با توجه به شکل (۱-ب) غشای کشیده شده بر روی بستر الاستیک وینکلر-پسترناک در نظر گرفته می‌شود، طوری که رابطه‌ی نیروی واکنش آن بر غشا برابر است با:

$$F = k_1 w - k_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + k_3 w^3 \quad (۱۰-۲)$$

که w جابه‌جایی عرضی متغیر با زمان غشا و k_1 و k_3 به ترتیب پارامترهای سختی خطی و غیرخطی وینکلر می‌باشد و k_2 پارامتر سختی پسترناک است.

U_f ، انرژی کرنشی بستر الاستیک با انتگرال معادله‌ی (۱۰-۲) در ناحیه‌ی مربوطه تعریف می‌گردد [۱۷]. با جایگذاری رابطه‌ی (۸-۲) در پایای کرنش (۵-۲) و در نظر گرفتن معادلات (۶-۲)، (۷-۲)، (۹) و (۱۰-۲)، لاگرانژین براساس مولفه‌های u و v و w طبق معادله‌ی زیر به دست می‌آید:

$$L = T - U - U_f + W_e + W_{nc} \quad (۱۱-۲)$$

که W_{nc} مربوط به کار نیروهای ناپایستار و میرایی (دمپینگ) می‌باشد. با اعمال اصل هامیلتون معادلات حاکم بر سیستم به صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial W}{\partial X_{,x}}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial W}{\partial X_{,y}}\right)+h\Gamma\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-C\frac{\partial u}{\partial t}=0 \quad (12-2)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial W}{\partial Y_{,x}}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial W}{\partial Y_{,y}}\right)+h\Gamma\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-C\frac{\partial v}{\partial t}=0 \quad (13-2)$$

$$\begin{aligned} &-\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial W}{\partial Z_{,x}}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial W}{\partial Z_{,y}}\right)+h\Gamma\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-C\frac{\partial w}{\partial t}-P_h(t)\delta_x\delta_y \\ &+\left(k_1w-k_2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+k_3w^3\right)\delta_x\delta_y=0 \end{aligned} \quad (14-2)$$

معادلات (۱۲-۲) و (۱۳-۲) مربوط به روابط استخراج شده از روش همیلتون براساس مؤلفه‌های u و v است و معادله‌ی (۱۴-۲) مربوط به راستای w می‌باشد. در مقاله‌های [۱۵، ۱۶ و ۳۵]، نویسندگان بر اساس تحلیل به روش اجزای محدود نشان داده‌اند که در پاسخ آزاد و اجباری برای غشا در ارتعاشات با دامنه‌های بزرگ و کوچک، مؤلفه‌های u و v در مقایسه با جابه‌جایی عرضی w در ارتعاشات عرضی غشا قابل اغماض می‌باشند. همچنین در روابط بالا، $C = \xi C_c$ ضریب میرایی، ξ نسبت میرایی، C_c میرایی بحرانی خطی، $P_h(t) = P_0 \cos(\Omega t)$ فشار خارجی یکنواخت و گسترده، P_0 دامنه تحریک و Ω فرکانس تحریک می‌باشد. پارامترهای دیگر مربوط به مشخصات هندسی، ساختاری و بستر می‌باشند که در روابط قبل معرفی گردیده‌اند.

در فصل‌های بعد، به تحلیل ارتعاشات غشای مستطیلی هایپروالاستیک بر اساس حالت تک مود و سپس حالت دو مود پرداخته خواهد شد.

فصل ۳ : تحلیل ارتعاشات غیر خطی غشای

مستطیلی بایر الاستیک بر اساس تک مود

۳-۱ گسسته سازی معادله حرکت بر اساس تک مود

در این فصل به تحلیل ارتعاشات یک غشای مستطیلی هاپرالاستیک بر اساس یک مود پرداخته می‌شود.

پاسخ عرضی ارتعاشات غیرخطی با در نظر گرفتن شکل مود به صورت $\psi(x, y) = \sin(\frac{m\pi x}{L_{xo}})\sin(\frac{n\pi y}{L_{yo}})$

باتوجه به رابطه‌ی زیر و در ادامه، در حالت خاص تک مود $((m, n) = (1, 1))$ در نظر گرفته می‌شود:

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^L \sum_{n=1}^Q W_{mn}(t) \sin\left(\frac{m\pi x}{L_{xo}}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_{yo}}\right) \quad (۱-۳)$$

در رابطه‌ی (۱-۳)، $W_{mn}(t)$ دامنه‌های مودال وابسته به زمان در پاسخ فرکانسی می‌باشند. با اعمال

روش گلرکین، معادله حرکت غیرخطی با مشتقات جزئی ارتعاشات عرضی (معادله‌ی (۲-۱۴)) به معادله

دیفرانسیل معمولی غیرخطی ارتعاشات عرضی غشا بر بستر الاستیک غیرخطی به صورت رابطه‌ی زیر

تبدیل می‌شود که با روش تحلیلی مقیاس‌های چندگانه قابل حل است:

$$\begin{aligned} \ddot{W}_{mn}(t) + \hat{\mu}\dot{W}_{mn}(t) + \omega_0^2 W_{mn}(t) + \hat{\alpha}_2 W_{mn}^3(t) + \hat{\alpha}_3 W_{mn}^5(t) \\ + \hat{\alpha}_4 W_{mn}^7(t) = \hat{\eta} P_h(t) \end{aligned} \quad (۲-۳)$$

مشاهده می‌شود جمله‌های غیرخطی سه، پنج و هفت در معادله حضور دارند. ω_0 فرکانس طبیعی

مربوط به مود $(m, n) = (1, 1)$ و ضرایب دیگر رابطه (۲-۳) به صورت زیر می‌باشند:

$$\omega_0^2 = + \frac{\delta_x \delta_y k_1}{\Gamma h} + \frac{2C_1 n^2 \pi^2}{\Gamma L_{yo}^2} + \frac{2C_1 m^2 \pi^2}{\Gamma L_{xo}^2} - \frac{2C_1 m^2 \pi^2}{\Gamma L_{xo}^2 \delta_x^4 \delta_y^2} \quad (۳-۳)$$

$$- \frac{2C_1 n^2 \pi^2}{\Gamma L_{yo}^2 \delta_x^2 \delta_y^4} + \frac{\delta_x \delta_y k_2 n^2 \pi^2}{\Gamma h L_{yo}^2} + \frac{\delta_x \delta_y k_2 m^2 \pi^2}{\Gamma h L_{xo}^2}$$

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_2 = \frac{1}{16} \frac{1}{\Gamma h L_{xo}^4 L_{yo}^4 \delta_x^6 \delta_y^6} (9\delta_x^7 \delta_y^7 k_3 L_{xo}^4 L_{yo}^4 \\ + 18h\delta_y^4 n^2 \pi^4 C_1 L_{xo}^2 (L_{xo}^2 n^2 + L_{yo}^2 m^2) \delta_x^6 \\ + 18C_1 h \pi^4 (m^2 L_{yo}^2 (L_{xo}^2 n^2 + L_{yo}^2 m^2) \delta_y^6 + n^4 L_{xo}^4) \delta_x^4 \\ - 28C_1 L_{xo}^2 L_{yo}^2 \pi^4 h m^2 n^2 \delta_x^2 \delta_y^2 + 18C_1 L_{yo}^4 \pi^4 h m^4 \delta_y^4) \end{aligned}$$

$$\hat{\alpha}_3 = \frac{15}{32} \frac{C_1 \pi^6}{\Gamma L_{xo}^6 L_{yo}^6 \delta_x^4 \delta_y^4} \left(m^6 L_{yo}^6 \delta_y^4 + \frac{2}{5} m^4 n^2 L_{xo}^2 L_{yo}^4 \delta_y^2 \left(\delta_x^2 + \frac{5}{2} \delta_y^2 \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
& + 2n^4 m^2 L_{xo}^4 L_{yo}^2 \delta_x^2 \left(\delta_x^2 + \frac{1}{5} \delta_y^2 \right) + n^6 L_{xo}^6 \delta_x^4 \\
\hat{\alpha}_4 = & \frac{175}{2048} \frac{C_1 \pi^8 (L_{xo}^2 n^2 \delta_x^2 + L_{yo}^2 m^2 \delta_y^2)}{\Gamma L_{xo}^8 L_{yo}^8 \delta_x^6 \delta_y^6} (m^4 L_{yo}^4 \delta_y^4 - \frac{26}{35} m^2 n^2 L_{xo}^2 L_{yo}^2 \delta_x^2 \delta_y^2 \\
& + n^4 L_{xo}^4 \delta_x^4) (L_{xo}^2 n^2 + L_{yo}^2 m^2) \\
\hat{\mu} = & - \frac{C}{\Gamma h} \\
\hat{\eta} = & - \frac{4 \delta_x \delta_y (\cos(m\pi) - 1)(\cos(n\pi) - 1)}{\Gamma h m n \pi^2}
\end{aligned}$$

۲-۳ حل تحلیلی به روش مقیاس‌های چندگانه [۳۶]

۱-۲-۳ رزونانس اولیه

جهت تحلیل فرکانسی رزونانس اولیه، σ به عنوان پارامتر تنظیم معرفی می‌گردد که نزدیک بودن فرکانس تحریک Ω به ω_0 را بیان می‌کند. لذا، برای حل معادله‌ی غیرخطی (۲-۳) برای رزونانس اولیه‌ی ارتعاشات، پارامترهای جدید با توجه به رابطه زیر تعریف می‌گردند:

$$\begin{aligned}
\hat{\mu} = \varepsilon \mu, \quad \hat{\alpha}_2 = \varepsilon \alpha_2, \quad \hat{\alpha}_3 = \varepsilon \alpha_3, \quad \hat{\alpha}_4 = \varepsilon \alpha_4, \quad \hat{\eta} = \varepsilon \eta, \\
\Omega = \omega_0 + \varepsilon \sigma, \quad \Omega t = \omega_0 T_0 + \sigma T_1
\end{aligned} \tag{۴-۳}$$

در معادلات و روابط ذکر شده $1 \ll \varepsilon$ پارامتر کمی می‌باشد که به اندازه‌ی کافی کوچک در نظر گرفته شده است.

T_0 و T_1 در رابطه‌ی (۴-۳)، با توجه به تعریف مقیاس زمانی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$T_n = \varepsilon^n t, \quad n = 0, 1 \tag{۵-۳}$$

با جایگذاری روابط (۴-۳) در معادله‌ی (۲-۳)، رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}
\ddot{W}_{mn}(t) + \omega_0^2 W_{mn}(t) + \varepsilon \mu \dot{W}_{mn}(t) + \varepsilon \alpha_2 W_{mn}^3(t) + \varepsilon \alpha_3 W_{mn}^5(t) \\
+ \varepsilon \alpha_4 W_{mn}^7(t) = \eta \varepsilon P_0 \cos(\omega_0 T_0 + \sigma T_1)
\end{aligned} \tag{۶-۳}$$

در ادامه پاسخ سیستم بر اساس روش مقیاس‌های چندگانه به صورت زیر پیشنهاد می‌شود:

$$W(t; \varepsilon) = W_0(T_0, T_1) + \varepsilon^1 W_1(T_0, T_1) + \dots \quad (7-3)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (7-3) در (4-3) و برابر صفر قرار دادن ضرایب مختلف ε^0 و ε^1 ، معادلات زیر به دست می‌آیند:

$$\varepsilon^0: D_0^2 W_0 + \omega_0^2 W_0 = 0 \quad (8-3)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^1: D_0^2 W_1 + \omega_0^2 W_1 = & -2D_0 D_1 W_0 - \alpha_2 W_0^3 \\ & -\alpha_3 W_0^5 - \alpha_4 W_0^7 - \mu D_0 W_0 \\ & -\eta P_0 \cos(\omega_0 T_0) \cos(\sigma T_1) + \eta P_0 \sin(\omega_0 T_0) \sin(\sigma T_1) \end{aligned} \quad (9-3)$$

که در روابط (8-3) و (9-3):

$$D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}, \quad n = 0, 1 \quad (10-3)$$

جواب عمومی معادله‌ی (8-3) به صورت رابطه‌ی زیر است:

$$W_0 = A(T_1) \exp(i\omega_0 T_0) + B(T_1) \exp(-i\omega_0 T_0) \quad (11-3)$$

که B ، مزدوج مختلط A است. در ادامه، رابطه‌ی (11-3) در (9-3) جایگذاری می‌شود. سپس، به منظور حذف جملاتی که منجر به ایجاد جمله‌ی سکولار^۱ در پاسخ سیستم می‌شوند، ضریب $\exp(i\omega_0 T_0)$ به صورت زیر برابر صفر قرار داده می‌شود:

$$\begin{aligned} & 3\alpha_2 A^2 B + 10\alpha_3 A^3 B^2 + 35\alpha_4 A^4 B^3 \\ & + i\omega_0 \mu A + 2i\omega_0 A' + \frac{1}{4} \eta P_0 (\exp(i\sigma T_1) \\ & - \exp(-i\sigma T_1)) + \frac{1}{2} \eta P_0 \left(\frac{1}{2} \exp(i\sigma T_1) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \exp(-i\sigma T_1) \right) = 0 \end{aligned} \quad (12-3)$$

^۱ Secular term

که در روابط ارائه شده، $(\)'$ مشتق گیری نسبت به پارامتر T_1 می باشد. برای حل معادله ی (۳-۱۲)، A و B به شکل قطبی زیر تعریف می گردند:

$$A = \frac{1}{2}ae^{i\beta}, \quad B = \frac{1}{2}ae^{-i\beta} \quad (۳-۱۳)$$

که $a(T_1)$ و $\beta(T_1)$ حقیقی می باشند.

با جایگذاری معادله ی (۳-۱۳) در رابطه ی (۳-۱۲) و سپس جداسازی بخش های حقیقی و موهومی و برابر صفر قرار دادن آن ها، روابط زیر حاصل می شوند:

$$a' = -\frac{1}{2}\mu a - \frac{1}{2}\frac{\eta P_0}{\omega_0} \sin(\sigma T_1 - \beta) \quad (۳-۱۴)$$

$$a\beta' = +\frac{3}{8\omega_0}\alpha_2 a^3 + \frac{5}{16\omega_0}\alpha_3 a^5 + \frac{35}{128\omega_0}\alpha_4 a^7 + \frac{1}{2}\frac{\eta P_0}{\omega_0} \cos(\sigma T_1 - \beta) \quad (۳-۱۵)$$

زاویه فاز جدید (γ) به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\gamma = \sigma T_1 - \beta \quad (۳-۱۶)$$

بنابراین، معادلات (۳-۱۴) و (۳-۱۵) به صورت سیستم خودگردان^۱ زیر تبدیل می گردند:

$$a' = -\frac{1}{2}\mu a - \frac{1}{2}\frac{\eta P_0}{\omega_0} \sin(\gamma) \quad (۳-۱۷)$$

$$a\gamma' = \left(\sigma - \frac{3}{8\omega_0}\alpha_2 a^2 - \frac{5}{16\omega_0}\alpha_3 a^4 - \frac{35}{128\omega_0}\alpha_4 a^6 \right) a - \frac{1}{2}\frac{\eta P_0}{\omega_0} \cos(\gamma) \quad (۳-۱۸)$$

هنگامی که a' و γ' برابر با صفر باشند، حرکت حالت پایا رخ می دهد. لذا با برابر صفر قرار دادن آن ها،

به توان دو رساندن و سپس جمع دو طرف معادلات بالا، معادله ی پاسخ فرکانسی برای رزونانس اولیه

به صورت زیر حاصل می گردد:

$$\left(a\sigma - \frac{3}{8\omega_0}\alpha_2 a^3 - \frac{5}{16\omega_0}\alpha_3 a^5 - \frac{35}{128\omega_0}\alpha_4 a^7 \right)^2 + \frac{1}{4}a^2\mu^2 = \frac{1}{4}\frac{\eta^2 P_0^2}{\omega_0^2} \quad (۳-۱۹)$$

^۱ Autonomous system

۲-۲-۳ رزونانس‌های مافوق هارمونیک ($\Omega \approx \frac{1}{3}\omega_0$) و مادون هارمونیک ($\Omega \approx 3\omega_0$):

در این بخش، با در نظر گرفتن غیرخطی از درجه سه، به منظور حل معادله‌ی غیرخطی (۲-۳)، پارامترهای جدید به صورت رابطه‌ی زیر تعریف می‌شوند:

$$\hat{\mu} = \varepsilon\mu, \quad \hat{\alpha}_2 = \varepsilon\alpha_2 \quad \hat{\alpha}_3 = \varepsilon^2\alpha_3 \quad \hat{\alpha}_4 = \varepsilon^2\alpha_4 \quad (۲۰-۳)$$

با جایگذاری روابط (۲۰-۳)، معادله‌ی (۲-۳) به معادله‌ی زیر تبدیل می‌گردد:

$$\ddot{W}_{mn}(t) + \omega_0^2 W_{mn}(t) + \varepsilon\mu\dot{W}_{mn}(t) + \varepsilon\alpha_2 W_{mn}^3(t) + \varepsilon^2\alpha_3 W_{mn}^5(t) + \varepsilon^2\alpha_4 W_{mn}^7(t) = \eta P_0 \cos(\Omega t) \quad (۲۱-۳)$$

برای تقریب مرتبه‌ی یک، دو مقیاس زمانی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$T_n = \varepsilon^n t, \quad n = 0, 1 \quad (۲۲-۳)$$

پاسخ سیستم بر اساس روش مقیاس‌های چندگانه به صورت زیر بسط داده می‌شود:

$$W(t; \varepsilon) = W_0(T_0, T_1) + \varepsilon^1 W_1(T_0, T_1) + \dots \quad (۲۳-۳)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۲۳-۳) در (۲۱-۳) و برابر صفر قرار دادن ضرایب مختلف ε^0 و ε^1 ، معادلات زیر به دست می‌آیند:

$$\varepsilon^0: D_0^2 W_0 + \omega_0^2 W_0 = \eta P_0 \cos(\Omega t) \quad (۲۴-۳)$$

$$\varepsilon^1: D_0^2 W_1 + \omega_0^2 W_1 = -2D_0 D_1 W_0 - \alpha_2 W_0^3 - \mu D_0 W_0 \quad (۲۵-۳)$$

که در روابط بالا:

$$D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}, \quad n = 0, 1 \quad (۲۶-۳)$$

جواب عمومی معادله‌ی (۲۴-۳) به صورت زیر است:

$$W_0 = A(T_1)e^{i\omega_0 T_0} + \Lambda(T_1)e^{i\Omega T_0} + c. c. \quad (۲۷-۳)$$

که $c. c$ در معادله‌ی بالا جمله‌ی مربوط به مزدوج مختلط می‌باشد. همچنین:

$$\Lambda = \frac{P_0}{2(\omega_0^2 - \Omega^2)} \quad (28-3)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۲۷-۳) در (۲۵-۳) معادله‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} D_0^2 W_1 + \omega_0^2 W_1 = & -3\bar{A}\Lambda^2 \alpha_2 e^{iT_0(2\Omega - \omega_0)} - 3\Lambda\bar{A}^2 \alpha_2 e^{iT_0(\Omega - 2\omega_0)} \\ & -3\Lambda A^2 \alpha_2 e^{iT_0(\Omega + 2\omega_0)} - 3\Lambda\Lambda^2 \alpha_2 e^{iT_0(2\Omega + \omega_0)} \\ & -A^3 \alpha_2 e^{3i\omega_0 T_0} \\ & -(2iA'\omega_0 + A(i\mu\omega_0 + 6\Lambda^2 \alpha_2 + 3\alpha_2 A\bar{A}))e^{i\omega_0 T_0} \\ & -\Lambda(i\mu\Omega + 3\Lambda^2 \alpha_2 + 6\alpha_2 A\bar{A})e^{i\Omega T_0} - \Lambda^3 \alpha_2 e^{3i\Omega T_0} + c.c. \end{aligned} \quad (29-3)$$

طبق رابطه‌ی (۲۹-۳)، برای حذف جملاتی که منجر به ایجاد جمله‌ی نامحدود و سکولار در پاسخ

سیستم می‌شوند، ضریب $\exp(i\omega_0 T_0)$ برابر صفر قرار داده می‌شود که به صورت زیر می‌باشد:

$$2iA'\omega_0 + A(i\mu\omega_0 + 6\Lambda^2 \alpha_2 + 3\alpha_2 A\bar{A}) = 0 \quad (30-3)$$

با توجه به معادله‌ی (۲۹-۳)، هنگامی که فرکانس تحریک از ω_0 دور باشد، رزونانس‌های مافوق هارمونیک

و مادون هارمونیک رخ خواهد داد، این حالت‌ها در بخش‌های بعدی ارائه خواهد شد.

۱-۲-۲-۳ رزونانس مافوق هارمونیک ($\Omega \approx \frac{1}{3}\omega_0$)

بر اساس معادله‌ی (۲۹-۳)، هنگامی که فرکانس تحریک (Ω) نزدیک $\frac{1}{3}\omega_0$ باشد، یک جمله‌ی نامحدود

جدید ایجاد شده که این حالت را رزونانس مافوق هارمونیک گویند. برای تحلیل فرکانسی، σ پارامتر

تنظیم معرفی می‌گردد که نزدیک بودن Ω به $\frac{1}{3}\omega_0$ را بیان می‌کند، بنابراین فرکانس تحریک به صورت

زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$3\Omega = \omega_0 + \varepsilon\sigma \quad (31-3)$$

حال رابطه‌ی (۳۱-۳) در (۲۹-۳) جایگذاری می‌گردد و ضریب جملاتی که منجر به ایجاد جمله‌ی

نامحدود و سکولار در پاسخ سیستم می‌شوند، به صورت زیر برابر صفر قرار داده می‌شود:

$$\Lambda^3 \alpha_2 e^{i\sigma T_1} + 2iA'\omega_0 + A(i\mu\omega_0 + 6\Lambda^2 \alpha_2 + 3\alpha_2 A\bar{A}) = 0 \quad (32-3)$$

برای حل معادله‌ی (۳۲-۳)، A به شکل قطبی زیر تعریف می‌گردد:

$$A = \frac{1}{2}ae^{i\beta}, \quad \bar{A} = \frac{1}{2}ae^{-i\beta} \quad (۳۳-۳)$$

که $a(T_1)$ و $\beta(T_1)$ حقیقی می‌باشند.

با جایگذاری معادله‌ی (۳۳-۳) در رابطه‌ی (۳۲-۳) و سپس جداسازی بخش‌های حقیقی و موهومی و برابر صفر قرار دادن آن‌ها، روابط زیر حاصل می‌شوند:

$$a' = -\frac{1}{2}a\mu - \frac{\Lambda^3\alpha_2}{\omega_0}\sin(\sigma T_1 - \beta) \quad (۳۴-۳)$$

$$a\beta' = 3\frac{a\Lambda^2\alpha_2}{\omega_0} + \frac{3}{8}\frac{a^3\alpha_2}{\omega_0} + \frac{\Lambda^3\alpha_2}{\omega_0}\cos(\sigma T_1 - \beta) \quad (۳۵-۳)$$

زاویه فاز جدید (γ) به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\gamma = \sigma T_1 - \beta \quad (۳۶-۳)$$

بنابراین، معادلات (۳۴-۳) و (۳۵-۳) به صورت سیستم خودگردان زیر تبدیل می‌گردند:

$$a' = -\frac{1}{2}a\mu - \frac{\Lambda^3\alpha_2}{\omega_0}\sin(\gamma) \quad (۳۷-۳)$$

$$a\gamma' = \left(\sigma - 3\frac{\Lambda^2\alpha_2}{\omega_0}\right)a - \frac{3}{8}\frac{a^3\alpha_2}{\omega_0} - \frac{\Lambda^3\alpha_2}{\omega_0}\cos(\gamma) \quad (۳۸-۳)$$

هنگامی که a' و γ' برابر با صفر باشند، حرکت حالت پایا رخ می‌دهد. لذا با برابر صفر قرار دادن آن‌ها،

به توان دو رساندن و سپس جمع دو طرف معادلات بالا، معادله‌ی پاسخ فرکانسی برای رزونانس مافوق

هارمونیک به صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$\left(\frac{1}{4}\mu^2 + \left(\sigma - 3\frac{\Lambda^2\alpha_2}{\omega_0} - \frac{3}{8}\frac{a^2\alpha_2}{\omega_0}\right)^2\right)a^2 = \frac{\Lambda^6\alpha_2^2}{\omega_0^2} \quad (۳۹-۳)$$

۲-۲-۲ رزونانس مادون هارمونیک ($\Omega \approx 3\omega_0$)

طبق معادله‌ی (۲۹-۳)، هنگامی که فرکانس تحریک (Ω) نزدیک $3\omega_0$ باشد، یک جمله‌ی نامحدود جدید

ایجاد شده که این حالت را رزونانس مادون هارمونیک گویند. فرکانس تحریک به صورت زیر خواهد بود:

$$\Omega = 3\omega_0 + \varepsilon\sigma \quad (40-3)$$

حال رابطه‌ی (۴۰-۳) در (۲۹-۳) جایگذاری می‌گردد و ضریب جملاتی که منجر به ایجاد جمله‌ی نامحدود و سکولار در پاسخ سیستم می‌شوند، به صورت زیر برابر صفر قرار داده می‌شود:

$$3\Lambda\bar{A}^2\alpha_2 e^{i\sigma T_1} + 2iA'\omega_0 + A(i\mu\omega_0 + 6C^2\alpha_2 + 3\alpha_2 A\bar{A}) = 0 \quad (41-3)$$

برای حل معادله‌ی (۴۱-۳)، مشابه روابط بیان شده در رزونانس مافوق هارمونیک، A به شکل قطبی رابطه (۳۳-۳) در نظر گرفته می‌شود. با جایگذاری رابطه‌ی (۳۳-۳) در رابطه (۴۱-۳) و جداسازی بخش‌های حقیقی و موهومی و برابر صفر قرار دادن آن‌ها، روابط زیر حاصل می‌شوند:

$$a' = -\frac{1}{2}a\mu - \frac{3}{4}\frac{\Lambda a^2\alpha_2}{\omega_0}\sin(\sigma T_1 - 3\beta) \quad (42-3)$$

$$a\beta' = 3\frac{a\Lambda^2\alpha_2}{\omega_0} + \frac{3}{8}\frac{a^3\alpha_2}{\omega_0} + \frac{3}{4}\frac{\Lambda a^2\alpha_2}{\omega_0}\cos(\sigma T_1 - 3\beta) \quad (43-3)$$

زاویه فاز جدید (γ) به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\gamma = \sigma T_1 - 3\beta \quad (44-3)$$

بنابراین، معادلات (۴۲-۳) و (۴۳-۳) به حالت‌های زیر به عنوان سیستم خودگردان تبدیل می‌گردند:

$$a' = -\frac{1}{2}a\mu - \frac{3}{4}\frac{\Lambda a^2\alpha_2}{\omega_0}\sin(\gamma) \quad (45-3)$$

$$a\gamma' = \left(\sigma - 3\frac{\Lambda^2\alpha_2}{\omega_0}\right)a - \frac{3}{8}\frac{a^3\alpha_2}{\omega_0} - \frac{3}{4}\frac{\Lambda a^2\alpha_2}{\omega_0}\cos(\gamma) \quad (46-3)$$

مشابه رابطه‌ی (۳۹-۳)، برای حرکت حالت پایا، معادله‌ی پاسخ فرکانسی برای رزونانس مادون هارمونیک به صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$\left(\frac{1}{4}\mu^2 + \left(\sigma - 3\frac{\Lambda^2\alpha_2}{\omega_0} - \frac{3}{8}\frac{a^2\alpha_2}{\omega_0}\right)^2\right)a^2 = \frac{9}{16}\frac{\Lambda^2 a^4 \alpha_2^2}{\omega_0^2} \quad (47-3)$$

۳-۲-۳ رزونانس‌های مادون هارمونیک ($\Omega \approx \frac{1}{5}\omega_0$) و مادون هارمونیک : ($\Omega \approx 5\omega_0$)

در این بخش، با در نظر گرفتن غیر خطی از درجه پنج، به منظور حل معادله‌ی غیر خطی (۲-۳) پارامترهای جدید به صورت رابطه‌ی زیر تعریف می‌گردند:

$$\hat{\mu} = \varepsilon\mu, \quad \hat{\alpha}_2 = \varepsilon^2\alpha_2, \quad \hat{\alpha}_3 = \varepsilon\alpha_3, \quad \hat{\alpha}_4 = \varepsilon^2\alpha_4 \quad (۴۸-۳)$$

با جایگذاری پارامترهای (۴۸-۳) در رابطه (۲-۳) و در نظر گرفتن روابط (۲۲-۳) و (۲۳-۳)، پس از حل و برابر صفر قرار دادن ضرایب مختلف ε^0 و ε^1 ، معادلات زیر به دست می‌آیند:

$$\varepsilon^0: D_0^2 W_0 + \omega_0^2 W_0 = \eta P_0 \cos(\Omega t) \quad (۴۹-۳)$$

$$\varepsilon^1: D_0^2 W_1 + \omega_0^2 W_1 = -2D_0 D_1 W_0 - \alpha_3 W_0^5 - \mu D_0 W_0 \quad (۵۰-۳)$$

با تعریف مشابه روابط (۲۶-۳) تا (۲۸-۳) و با جایگذاری رابطه‌ی (۲۷-۳) در (۵۰-۳)، معادله‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} D_0^2 W_1 + \omega_0^2 W_1 = & -5\bar{A}\Lambda^4\alpha_3 e^{iT_0(4\Omega-\omega_0)} - 5A\Lambda^4\alpha_3 e^{iT_0(4\Omega+\omega_0)} \\ & -A^5\alpha_3 e^{5i\omega_0 T_0} - 20\alpha_3\bar{A}\Lambda^2\left(\Lambda^2 + \frac{3}{2}A\bar{A}\right) e^{iT_0(2\Omega-\omega_0)} \\ & -20\alpha_3A\Lambda^2\left(\Lambda^2 + \frac{3}{2}A\bar{A}\right) e^{iT_0(2\Omega+\omega_0)} \\ & -30\alpha_3A^2\Lambda\left(\Lambda^2 + \frac{2}{3}A\bar{A}\right) e^{iT_0(\Omega+2\omega_0)} \\ & -30\alpha_3\bar{A}^2\Lambda\left(\Lambda^2 + \frac{2}{3}A\bar{A}\right) e^{iT_0(\Omega-2\omega_0)} \\ & -5\alpha_3\bar{A}^4\Lambda e^{iT_0(\Omega-4\omega_0)} - 5\alpha_3A^4\Lambda e^{iT_0(\Omega+4\omega_0)} \\ & -10\alpha_3\Lambda^2A^3 e^{iT_0(2\Omega+3\omega_0)} - 10\alpha_3\Lambda^2\bar{A}^3 e^{iT_0(2\Omega-3\omega_0)} \\ & -10\alpha_3\Lambda^3\bar{A}^2 e^{iT_0(3\Omega-2\omega_0)} - 10\alpha_3\Lambda^3A^2 e^{iT_0(3\Omega+2\omega_0)} \\ & -(20\alpha_3\Lambda^2A^3 + 5\alpha_3A^4\bar{A})e^{3i\omega_0 T_0} - (2iA'\omega_0 + A(i\mu\omega_0 \\ & + 30\Lambda^4\alpha_3 + 10\alpha_3A^2\bar{A}^2 + 60\alpha_3A\bar{A}\Lambda^2))e^{i\omega_0 T_0} \\ & -\Lambda(i\mu\Omega + 10\Lambda^4\alpha_3 + 30\alpha_3A^2\bar{A}^2 + 60\alpha_3A\bar{A}\Lambda^2)e^{i\Omega T_0} \end{aligned} \quad (۵۱-۳)$$

$$-5\Lambda^3\alpha_3(\Lambda^2 + 4A\bar{A})e^{3i\Omega T_0} - \Lambda^5\alpha_3e^{5i\Omega T_0} + c.c.$$

برای حذف جملاتی که منجر به ایجاد جمله‌ی نامحدود و سکولار در پاسخ سیستم می‌شوند، ضریب $\exp(i\omega_0 T_0)$ برابر صفر قرار داده می‌شود که به صورت زیر می‌باشد:

$$2iA'\omega_0 + A(i\mu\omega_0 + 30\Lambda^4\alpha_3 + 10\alpha_3A^2\bar{A}^2 + 60\alpha_3A\bar{A}\Lambda^2) = 0 \quad (52-3)$$

۳-۲-۱ رزونانس مافوق هارمونیک ($\Omega \approx \frac{1}{5}\omega_0$)

بر اساس معادله‌ی (۵۱-۳)، هنگامی که فرکانس تحریک (Ω) نزدیک $\frac{1}{5}\omega_0$ باشد، یک جمله‌ی نامحدود جدید ایجاد شده که این حالت را رزونانس مافوق هارمونیک گویند. برای تحلیل فرکانسی، σ پارامتر تنظیم معرفی می‌گردد که نزدیک بودن Ω به $\frac{1}{5}\omega_0$ را بیان می‌کند، بنابراین فرکانس تحریک به صورت زیر خواهد بود:

$$5\Omega = \omega_0 + \varepsilon\sigma \quad (53-3)$$

حال رابطه‌ی (۵۳-۳) در (۵۱-۳) جایگذاری می‌گردد و ضریب جملاتی که منجر به ایجاد جمله‌ی نامحدود و سکولار در پاسخ سیستم می‌شوند، به صورت زیر برابر صفر قرار داده می‌شود:

$$\Lambda^5\alpha_3e^{i\sigma T_1} + 2iA'\omega_0 + A(i\mu\omega_0 + 30\Lambda^4\alpha_3 + 10\alpha_3A^2\bar{A}^2 + 60\alpha_3A\bar{A}\Lambda^2) = 0 \quad (54-3)$$

برای حل معادله‌ی (۵۴-۳)، مشابه روابط بیان شده‌ی قبل، A به شکل قطبی رابطه‌ی (۳۳-۳) در نظر گرفته می‌شود. با جایگذاری معادله‌ی (۳۳-۳) در رابطه‌ی (۵۴-۳) و سپس جداسازی بخش‌های حقیقی و موهومی و برابر صفر قرار دادن آن‌ها، روابط زیر حاصل می‌شوند:

$$a' = -\frac{1}{2}a\mu - \frac{\Lambda^5\alpha_3}{\omega_0}\sin(\sigma T_1 - \beta) \quad (55-3)$$

$$a\beta' = 15\frac{a\Lambda^4\alpha_3}{\omega_0} + \frac{15}{2}\frac{a^3\Lambda^2\alpha_3}{\omega_0} + \frac{5}{16}\frac{a^5\alpha_3}{\omega_0} + \frac{\Lambda^5\alpha_3}{\omega_0}\cos(\sigma T_1 - \beta) \quad (56-3)$$

با در نظر گرفتن زاویه فاز طبق رابطه‌ی (۳۶-۳)، معادلات (۵۵-۳) و (۵۶-۳) به حالت‌های زیر به عنوان سیستم خودگردان تبدیل می‌گردند:

$$a' = -\frac{1}{2}a\mu - \frac{\Lambda^5\alpha_3}{\omega_0}\sin(\gamma) \quad (57-3)$$

$$a\gamma' = \left(\sigma - 15\frac{\Lambda^4\alpha_3}{\omega_0} - \frac{15}{2}\frac{a^2\Lambda^2\alpha_3}{\omega_0}\right)a - \frac{5}{16}\frac{a^5\alpha_3}{\omega_0} - \frac{\Lambda^5\alpha_3}{\omega_0}\cos(\gamma) \quad (58-3)$$

برای حرکت حالت پایا، معادله‌ی پاسخ فرکانسی برای رزونانس مافوق هارمونیک به صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$\left(\frac{1}{4}\mu^2 + \left(\sigma - 15\frac{\Lambda^4\alpha_3}{\omega_0} - \frac{15}{2}\frac{a^2\Lambda^2\alpha_3}{\omega_0} - \frac{5}{16}\frac{a^4\alpha_3}{\omega_0}\right)^2\right)a^2 = \frac{\Lambda^{10}\alpha_3^2}{\omega_0^2} \quad (59-3)$$

۲-۳-۲-۳ رزونانس مادون هارمونیک ($\Omega \approx 5\omega_0$)

طبق معادله‌ی (۵۱-۳)، هنگامی که فرکانس تحریک (Ω) نزدیک $5\omega_0$ باشد، یک جمله‌ی نامحدود جدید ایجاد شده که این حالت را رزونانس مادون هارمونیک گویند. برای تحلیل فرکانسی، σ پارامتر تنظیم معرفی می‌گردد که نزدیک بودن Ω به $5\omega_0$ را بیان می‌کند، بنابراین فرکانس تحریک به صورت زیر خواهد بود:

$$\Omega = 5\omega_0 + \varepsilon\sigma \quad (60-3)$$

رابطه‌ی (۶۰-۳) در (۵۱-۳) جایگذاری می‌گردد و ضریب جملاتی که منجر به ایجاد جمله‌ی نامحدود و سکولار در پاسخ سیستم می‌شوند، به صورت زیر برابر صفر قرار داده می‌شود:

$$5\Lambda\bar{A}^4\alpha_3e^{i\sigma T_1} + 2iA'\omega_0 + A(i\mu\omega_0 + 30\Lambda^4\alpha_3 + 10\alpha_3A^2\bar{A}^2 + 60\alpha_3A\bar{A}\Lambda^2) = 0 \quad (61-3)$$

برای حل معادله‌ی (۶۱-۳)، مشابه روابط بیان شده‌ی قبل، A به شکل قطبی رابطه (۳۳-۳) در نظر گرفته می‌شود. با جایگذاری معادله‌ی (۳۳-۳) در رابطه‌ی (۶۱-۳) و سپس جداسازی بخش‌های حقیقی و موهومی و برابر صفر قرار دادن آن‌ها، روابط زیر حاصل می‌شوند:

$$a' = -\frac{1}{2}a\mu - \frac{5}{16}\frac{\Lambda a^4\alpha_3}{\omega_0}\sin(\sigma T_1 - 5\beta) \quad (62-3)$$

$$a\beta' = 15\frac{a\Lambda^4\alpha_3}{\omega_0} + \frac{15}{2}\frac{a^3\Lambda^2\alpha_3}{\omega_0} + \frac{5}{16}\frac{a^5\alpha_3}{\omega_0} + \frac{5}{16}\frac{\Lambda a^4\alpha_3}{\omega_0}\cos(\sigma T_1 - 5\beta) \quad (63-3)$$

زاویه فاز جدید (γ) به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\gamma = \sigma T_1 - 5\beta \quad (۶۴-۳)$$

بنابراین، معادلات (۶۲-۳) و (۶۳-۳) به حالت های زیر به عنوان سیستم خودگردان تبدیل می گردند:

$$a' = -\frac{1}{2}a\mu - \frac{5}{16}\frac{\Lambda a^4\alpha_3}{\omega_0}\sin(\gamma) \quad (۶۵-۳)$$

$$a\gamma' = \left(\sigma - 15\frac{\Lambda^4\alpha_3}{\omega_0} - \frac{15}{2}\frac{a^2\Lambda^2\alpha_3}{\omega_0}\right)a - \frac{5}{16}\frac{a^5\alpha_3}{\omega_0} - \frac{5}{16}\frac{\Lambda a^4\alpha_3}{\omega_0}\cos(\gamma) \quad (۶۶-۳)$$

برای حرکت حالت پایا، معادله ی پاسخ فرکانسی برای رزونانس مادون هارمونیک به صورت زیر حاصل می گردد:

$$\left(\frac{1}{4}\mu^2 + \left(\sigma - 15\frac{\Lambda^4\alpha_3}{\omega_0} - \frac{15}{2}\frac{a^2\Lambda^2\alpha_3}{\omega_0} - \frac{5}{16}\frac{a^4\alpha_3}{\omega_0}\right)^2\right)a^2 = \frac{25}{256}\frac{\Lambda^2 a^8 \alpha_3^2}{\omega_0^2} \quad (۶۷-۳)$$

۳-۲-۴ رزونانس های مادون هارمونیک ($\Omega \approx \frac{1}{7}\omega_0$) و مادون هارمونیک ($\Omega \approx 7\omega_0$):

در این بخش، با در نظر گرفتن غیرخطی از درجه هفت، به منظور حل معادله ی غیرخطی (۲-۳) پارامتر-

های جدید به صورت رابطه ی زیر تعریف می گردند:

$$\hat{\mu} = \varepsilon\mu, \quad \hat{\alpha}_2 = \varepsilon^2\alpha_2, \quad \hat{\alpha}_3 = \varepsilon^2\alpha_3, \quad \hat{\alpha}_4 = \varepsilon\alpha_4 \quad (۶۸-۳)$$

با جایگذاری پارامترهای (۶۸-۳) در رابطه ی (۲-۳) و در نظر گرفتن روابط (۲۲-۳) و (۲۳-۳)، پس از

حل و برابر صفر قرار دادن ضرایب مختلف ε^0 و ε ، معادلات خطی زیر به دست می آیند:

$$\varepsilon^0: D_0^2 W_0 + \omega_0^2 W_0 = \eta P_0 \cos(\Omega t) \quad (۶۹-۳)$$

$$\varepsilon^1: D_0^2 W_1 + \omega_0^2 W_1 = -2D_0 D_1 W_0 - \alpha_4 W_0^7 - \mu D_0 W_0 \quad (۷۰-۳)$$

با تعریف مشابه روابط (۲۶-۳) تا (۲۸-۳) و با جایگذاری رابطه ی (۲۷-۳) در (۷۰-۳)، معادله ی زیر

به دست می آید:

$$\begin{aligned}
D_0^2 W_1 + \omega_0^2 W_1 = & -42\bar{A}\Lambda^4\alpha_4\left(\Lambda^2 + \frac{5}{2}A\bar{A}\right)e^{iT_0(4\Omega-\omega_0)} \\
& -42A\Lambda^4\alpha_4\left(\Lambda^2 + \frac{5}{2}A\bar{A}\right)e^{iT_0(4\Omega+\omega_0)} \\
& -(42\Lambda^2 A^5\alpha_4 + 7\bar{A}A^6\alpha_4)e^{5i\omega_0 T_0} \\
& -105\alpha_4\bar{A}\Lambda^2(\Lambda^4 + 4\Lambda^2 A\bar{A} + 2A^2\bar{A}^2)e^{iT_0(2\Omega-\omega_0)} \\
& -105\alpha_4 A\Lambda^2(\Lambda^4 + 4\Lambda^2 A\bar{A} + 2A^2\bar{A}^2)e^{iT_0(2\Omega+\omega_0)} \\
& -210\alpha_4 A^2\Lambda\left(\Lambda^4 + 2\Lambda^2 A\bar{A} + \frac{1}{2}A^2\bar{A}^2\right)e^{iT_0(\Omega+2\omega_0)} \\
& -210\alpha_4\bar{A}^2\Lambda\left(\Lambda^4 + 2\Lambda^2 A\bar{A} + \frac{1}{2}A^2\bar{A}^2\right)e^{iT_0(\Omega-2\omega_0)} \\
& -105\alpha_4\bar{A}^4\Lambda(\Lambda^2 + \frac{2}{5}A\bar{A})e^{iT_0(\Omega-4\omega_0)} \\
& -105\alpha_4 A^4\Lambda\left(\Lambda^2 + \frac{2}{5}A\bar{A}\right)e^{iT_0(\Omega+4\omega_0)} \\
& -140\alpha_4\Lambda^2 A^3\left(\Lambda^2 + \frac{3}{4}A\bar{A}\right)e^{iT_0(2\Omega+3\omega_0)} \\
& -140\alpha_4\Lambda^2\bar{A}^3\left(\Lambda^2 + \frac{3}{4}A\bar{A}\right)e^{iT_0(2\Omega-3\omega_0)} \tag{V1-3} \\
& -105\alpha_4\Lambda^3\bar{A}^2\left(\Lambda^2 + \frac{4}{3}A\bar{A}\right)e^{iT_0(3\Omega-2\omega_0)} \\
& -105\alpha_4\Lambda^3 A^2\left(\Lambda^2 + \frac{4}{3}A\bar{A}\right)e^{iT_0(3\Omega+2\omega_0)} \\
& -7\alpha_4\Lambda^5(\Lambda^2 + 6A\bar{A})e^{5i\Omega T_0} - 21\alpha_4\bar{A}^2\Lambda^5 e^{iT_0(5\Omega-2\omega_0)} \\
& -21\alpha_4 A^2\Lambda^5 e^{iT_0(5\Omega+2\omega_0)} - 7\alpha_4\bar{A}\Lambda^6 e^{iT_0(6\Omega-\omega_0)} \\
& -7\alpha_4 A\Lambda^6 e^{iT_0(6\Omega+\omega_0)} - 7\alpha_4\bar{A}^6\Lambda e^{iT_0(\Omega-6\omega_0)} \\
& -21\alpha_4 A^5\Lambda^2 e^{iT_0(2\Omega+5\omega_0)} - 35\alpha_4\bar{A}^4\Lambda^3 e^{iT_0(3\Omega-4\omega_0)} \\
& -7\alpha_4 A^6\Lambda e^{iT_0(\Omega+6\omega_0)} - 21\alpha_4\bar{A}^5\Lambda^2 e^{iT_0(2\Omega-5\omega_0)} \\
& -35\alpha_4 A^4\Lambda^3 e^{iT_0(3\Omega+4\omega_0)} - 35\alpha_4\bar{A}^3\Lambda^4 e^{iT_0(4\Omega-3\omega_0)} \\
& -35\alpha_4 A^3\Lambda^4 e^{iT_0(4\Omega+3\omega_0)} \\
& -(210\alpha_4\Lambda^4 A^3 + 210\alpha_4\Lambda^2 A^4\bar{A} + 21\alpha_3 A^5\bar{A}^2)e^{3i\omega_0 T_0} \\
& -(2iA'\omega_0 + A(i\mu\omega_0 + 140\Lambda^6\alpha_4 + 630\alpha_4 A\bar{A}\Lambda^4 \\
& + 35\alpha_4 A^3\bar{A}^3 + 420\alpha_4 A^2\bar{A}^2\Lambda^2))e^{i\omega_0 T_0} \\
& -\Lambda(2iA'\omega_0 + A(i\mu\omega_0 + 140\Lambda^6\alpha_4 + 630\alpha_4 A\bar{A}\Lambda^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +35\alpha_4 A^3 \bar{A}^3 + 420\alpha_4 A^2 \bar{A}^2 \Lambda^2)) e^{i\Omega T_0} \\
& -21\Lambda^3 \alpha_4 (\Lambda^4 + 10\Lambda^2 A \bar{A} + 10A^2 \bar{A}^2) e^{3i\Omega T_0} - \Lambda^7 \alpha_4 e^{7i\omega_0 T_0} \\
& + c. c.
\end{aligned}$$

برای حذف جملاتی که منجر به ایجاد جمله‌ی سکولار در پاسخ سیستم می‌شوند، ضریب $\exp(i\omega_0 T_0)$ برابر صفر قرار داده می‌شود که به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}
& -(2iA'\omega_0 + A(i\mu\omega_0 + 140\Lambda^6\alpha_4 + 630\alpha_4 A \bar{A} \Lambda^4 \\
& + 35\alpha_4 A^3 \bar{A}^3 + 420\alpha_4 A^2 \bar{A}^2 \Lambda^2)) = 0
\end{aligned} \tag{۷۲-۳}$$

۳-۲-۴-۱ رزونانس مافوق هارمونیک ($\Omega \approx \frac{1}{7}\omega_0$)

طبق معادله‌ی (۷۱-۳)، هنگامی که فرکانس تحریک (Ω) نزدیک $\frac{1}{7}\omega_0$ باشد، یک جمله‌ی نامحدود جدید ایجاد شده که این حالت را رزونانس مافوق هارمونیک گویند. برای تحلیل فرکانسی، σ پارامتر تنظیم معرفی می‌گردد که نزدیک بودن Ω به $\frac{1}{7}\omega_0$ را بیان می‌کند، بنابراین فرکانس تحریک به صورت زیر خواهد بود:

$$7\Omega = \omega_0 + \varepsilon\sigma \tag{۷۳-۳}$$

حال رابطه‌ی (۷۳-۳) در (۷۱-۳) جایگذاری می‌گردد و ضریب جملاتی که منجر به ایجاد جمله‌ی نامحدود و سکولار در پاسخ سیستم می‌شوند، به صورت زیر برابر صفر قرار داده می‌شود:

$$\begin{aligned}
& \Lambda^7 \alpha_4 e^{i\sigma T_1} + (2iA'\omega_0 \\
& + A(i\mu\omega_0 + 140\Lambda^6\alpha_4 + 630\alpha_4 A \bar{A} \Lambda^4 + 35\alpha_4 A^3 \bar{A}^3 \\
& + 420\alpha_4 A^2 \bar{A}^2 \Lambda^2)) = 0
\end{aligned} \tag{۷۴-۳}$$

برای حل معادله‌ی (۷۴-۳)، مشابه روابط بیان شده‌ی قبل، A به شکل قطبی رابطه‌ی (۳۳-۳) در نظر گرفته می‌شود.

با جایگذاری معادله‌ی (۳۳-۳) در رابطه‌ی (۷۴-۳) و سپس جداسازی بخش‌های حقیقی و موهومی و برابر صفر قرار دادن آن‌ها، روابط زیر حاصل می‌شوند:

$$a' = -\frac{1}{2}a\mu - \frac{\Lambda^7\alpha_4}{\omega_0}\sin(\sigma T_1 - \beta) \quad (75-3)$$

$$a\beta' = 70\frac{a\Lambda^6\alpha_4}{\omega_0} + \frac{315}{4}\frac{a^3\Lambda^4\alpha_4}{\omega_0} + \frac{105}{8}\frac{a^5\Lambda^2\alpha_4}{\omega_0} + \frac{35}{128}\frac{a^7\alpha_4}{\omega_0} + \frac{\Lambda^7\alpha_4}{\omega_0}\cos(\sigma T_1 - \beta) \quad (76-3)$$

با در نظر گرفتن زاویه فاز طبق رابطه‌ی (۳۶-۳)، معادلات (۷۵-۳) و (۷۶-۳) به حالت‌های زیر به عنوان

سیستم خودگردان تبدیل می‌گردند:

$$a' = -\frac{1}{2}a\mu - \frac{\Lambda^7\alpha_4}{\omega_0}\sin(\gamma) \quad (77-3)$$

$$a\gamma' = \left(\sigma - 70\frac{\Lambda^6\alpha_4}{\omega_0} + \frac{315}{4}\frac{a^2\Lambda^4\alpha_4}{\omega_0} + \frac{105}{8}\frac{a^4\Lambda^2\alpha_4}{\omega_0}\right)a - \frac{35}{128}\frac{a^7\alpha_4}{\omega_0} - \frac{\Lambda^7\alpha_4}{\omega_0}\cos(\gamma) \quad (78-3)$$

برای حرکت حالت پایا، معادله‌ی پاسخ فرکانسی برای رزونانس مافوق هارمونیک به‌صورت زیر حاصل

می‌گردد:

$$\left(\frac{1}{4}\mu^2 + \left(\sigma - 70\frac{\Lambda^6\alpha_4}{\omega_0} - \frac{315}{4}\frac{a^2\Lambda^4\alpha_4}{\omega_0} - \frac{105}{8}\frac{a^4\Lambda^2\alpha_4}{\omega_0} - \frac{35}{128}\frac{a^6\alpha_4}{\omega_0}\right)^2\right)a^2 = \frac{\Lambda^{14}\alpha_4^2}{\omega_0^2} \quad (79-3)$$

۳-۲-۴ رزونانس مادون هارمونیک ($\Omega \approx 7\omega_0$)

بر اساس معادله‌ی (۷۱-۳)، هنگامی که فرکانس تحریک (Ω) نزدیک $7\omega_0$ باشد، یک جمله‌ی نامحدود

جدید ایجاد شده که این حالت را رزونانس مادون هارمونیک گویند. برای تحلیل فرکانسی، σ پارامتر

تنظیم معرفی می‌گردد که نزدیک بودن Ω به $7\omega_0$ را بیان می‌کند، بنابراین فرکانس تحریک به‌صورت

زیر خواهد بود:

$$\Omega = 7\omega_0 + \varepsilon\sigma \quad (80-3)$$

حال رابطه‌ی (۸۰-۳) در (۷۱-۳) جایگذاری می‌گردد و ضریب جملاتی که منجر به ایجاد جمله‌ی

نامحدود و سکولار در پاسخ سیستم می‌شوند، به صورت زیر برابر صفر قرار داده می‌شود:

$$7\Lambda\bar{A}^6\alpha_4 e^{i\sigma T_1} + (2iA'\omega_0 + A(i\mu\omega_0 + 140\Lambda^6\alpha_4 + 630\alpha_4 A\bar{A}\Lambda^4 + 35\alpha_4 A^3\bar{A}^3 + 420\alpha_4 A^2\bar{A}^2\Lambda^2)) = 0 \quad (۸۱-۳)$$

برای حل معادله‌ی (۸۱-۳)، مشابه روابط بیان شده‌ی قبل، A به شکل قطبی رابطه‌ی (۳۳-۳) در نظر

گرفته می‌شود. با جایگذاری معادله‌ی (۳۳-۳) در رابطه‌ی (۸۱-۳) و سپس جداسازی بخش‌های حقیقی

و موهومی و برابر صفر قرار دادن آن‌ها، روابط زیر حاصل می‌شوند:

$$a' = -\frac{1}{2}a\mu - \frac{7}{64}\frac{\Lambda a^6\alpha_4}{\omega_0}\sin(\sigma T_1 - 7\beta) \quad (۸۲-۳)$$

$$a\beta' = 70\frac{a\Lambda^6\alpha_4}{\omega_0} + \frac{315}{4}\frac{a^3\Lambda^4\alpha_4}{\omega_0} + \frac{105}{8}\frac{a^5\Lambda^2\alpha_4}{\omega_0} + \frac{35}{128}\frac{a^7\alpha_4}{\omega_0} + \frac{7}{64}\frac{\Lambda a^6\alpha_4}{\omega_0}\cos(\sigma T_1 - 7\beta) \quad (۸۳-۳)$$

زاویه فاز جدید (γ) به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\gamma = \sigma T_1 - 7\beta \quad (۸۴-۳)$$

بنابراین، معادلات (۸۲-۳) و (۸۳-۳) به حالت‌های زیر به عنوان سیستم خودگردان تبدیل می‌گردند:

$$a' = -\frac{1}{2}a\mu - \frac{7}{64}\frac{\Lambda a^6\alpha_4}{\omega_0}\sin(\gamma) \quad (۸۵-۳)$$

$$a\gamma' = \left(\sigma - 70\frac{\Lambda^6\alpha_4}{\omega_0} + \frac{315}{4}\frac{a^2\Lambda^4\alpha_4}{\omega_0} + \frac{105}{8}\frac{a^4\Lambda^2\alpha_4}{\omega_0}\right)a - \frac{35}{128}\frac{a^7\alpha_4}{\omega_0} - \frac{7}{64}\frac{\Lambda a^6\alpha_4}{\omega_0}\cos(\gamma) \quad (۸۶-۳)$$

مشابه قبل، برای حرکت حالت پایا، معادله‌ی پاسخ فرکانسی برای رزونانس مادون هارمونیک به صورت

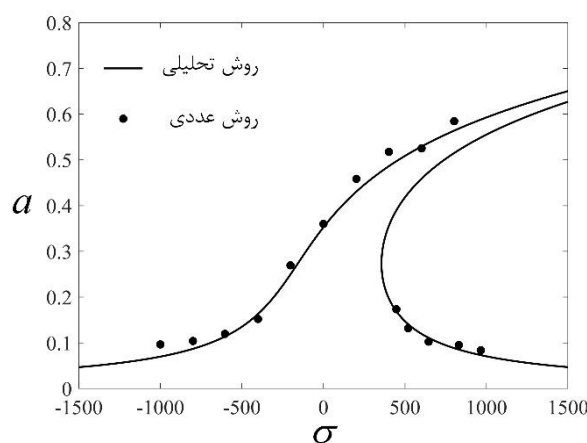
زیر حاصل می‌گردد:

$$\left(\frac{1}{4}\mu^2 + \left(\sigma - 70\frac{\Lambda^6\alpha_4}{\omega_0} - \frac{315}{4}\frac{a^2\Lambda^4\alpha_4}{\omega_0} - \frac{105}{8}\frac{a^4\Lambda^2\alpha_4}{\omega_0} - \frac{35}{128}\frac{a^6\alpha_4}{\omega_0}\right)^2\right)a^2 = \frac{49}{4096}\frac{\Lambda^2 a^{12}\alpha_4^2}{\omega_0^2} \quad (۸۷-۳)$$

۳-۳ نتایج

۱-۳-۳ اعتبارسنجی تحلیل رزونانس‌های اولیه و ثانویه

در این بخش به منظور بررسی صحت نتایج، یک روش عددی جهت ارزیابی حل تحلیلی رزونانس اولیه مورد استفاده قرار می‌گیرد. بدین منظور، حل معادله‌ی (۳-۴) با استفاده از روش رانج-کوتا مرتبه‌ی چهارم انجام می‌شود. در این روش برای مقادیر مختلف فرکانس تحریک، ماکزیمم دامنه‌های مختلف استخراج شده است (شرایط اولیه‌ی صفر). در ادامه، منحنی‌های عددی و تحلیلی پاسخ فرکانسی در شکل (۱-۳) نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، نتایج عددی تقریباً مشابه با نتایج تحلیلی می‌باشند. بنابراین، این نتایج نشان می‌دهد که شبیه‌سازی عددی نتایج تحلیلی را تأیید می‌کند.



شکل ۱-۳. مقایسه‌ی دو روش عددی و تحلیلی برای رزونانس اولیه

$$(k_1 = k_2 = k_3 = 0, \delta_x = \delta_y = 1.02, \xi = 0.02, P_0 = 2500 \text{ N/m}^2)$$

همچنین در ادامه، پاسخ‌های ارائه شده در این تحقیق با یکی از کارهای موجود در زمینه‌ی ارتعاشات غشای هاپیرالاستیک مقایسه شده است و ملاحظه می‌شود نتایج ارائه شده در مطالعه‌ی حاضر با دقت مناسبی با نتایج موجود در مرجع [۱۷] مطابقت دارند.

در جدول (۱-۳)، مقایسه ای بین فرکانس‌های طبیعی غشای مستطیلی هایپرالاستیک بر بستر وینکلر- پسترناک به دست آمده در این تحقیق و نتایج مشابه در مقاله‌ی سوارز و گونچالوز [۱۷] صورت گرفته

است. نتایج برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک با مشخصات $L_{yo} = 1 \text{ m}$, $L_{xo} = 1.5 \text{ m}$

$$\Gamma = 1200 \text{ kg/m}^3, m = n = 1, h = 0.001 \text{ m}, \delta_x = \delta_y = 1.02$$

است. $C_1 = 0.17 \text{ MPa}$, $\xi = 0.02$, $k_1 = 10^5 \text{ N/m}^3$ و $k_3 = 10^5 \text{ N/m}^3$ به دست آمده است.

جدول ۱-۳. مقایسه فرکانس‌های طبیعی (rad/s)

دامنه ($A_{11}(\text{m})$)	پژوهش	مرجع [۱۷]	دامنه ($A_{11}(\text{m})$)	پژوهش	مرجع [۱۷]
۰/۱	۲۹۶/۳۷۶	۲۹۷/۷۳۴	۱/۱	۳۶۹/۵۹۹	۳۶۹/۳۴۷
۰/۲	۲۹۹/۱۹۹	۳۰۰	۱/۲	۳۸۰/۷۹۹	۳۸۰
۰/۳	۳۰۵/۰۰۸	۳۰۵/۴۷۶	۱/۳	۳۹۲/۶۹۹	۳۹۳/۲۱۸
۰/۴	۳۱۱/۰۴۸	۳۱۰/۹۶۸	۱/۴	۴۰۵/۳۶۶	۴۰۵/۸۰۶
۰/۵	۳۱۷/۳۳۰	۳۱۷/۰۸۹	۱/۵	۴۱۸/۸۷۹	۴۱۹/۶۶۹
۰/۶	۳۲۲/۲۱۴	۳۲۳/۸۷۱	۱/۶	۴۳۳/۳۲۰	۴۳۲/۹۰۳
۰/۷	۳۳۰/۶۹۳	۳۳۱/۲۸۲	۱/۷	۴۴۸/۷۹۸	۴۴۷/۴۱۱
۰/۸	۳۳۹/۶۳۱	۳۴۰	۱/۸	۴۵۸/۶۲۶	۴۵۹/۳۱۲
۰/۹	۳۴۹/۰۶۵	۳۴۹/۳۴۷	۱/۹	۴۷۲/۴۱۹	۴۷۶/۴۴۳
۱	۳۵۹/۰۳۹	۳۵۹/۳۵۵	۲	۴۸۳/۳۲۱	۴۸۶/۴۰۰

۲-۳-۳ تحلیل رزونانس‌های اولیه و ثانویه

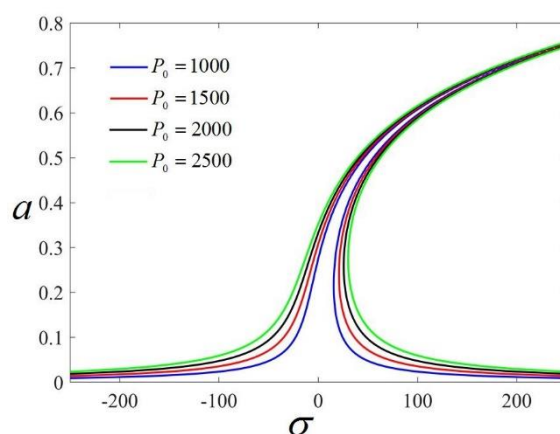
در جدول (۲-۳)، مشخصات هندسی و پارامترهای ساختاری غشای مستطیلی هایپرلاستیک، جهت به دست آوردن روابط و نمودارها بیان شده است که برای تحلیل روابط و رزونانس‌های مختلف مورد استفاده قرار می‌گیرد.

جدول ۲-۳. مشخصات فیزیکی سیستم

مقدار	مشخصات هندسی	مقدار	پارامترهای ساختاری ماده
۱/۵ m	L_{xo}	۱۲۰۰ kg/m ³	Γ
۱/۰ m	L_{yo}	۰/۱۷ MPa	C_1
۰/۰۰۱ m	h	-	-

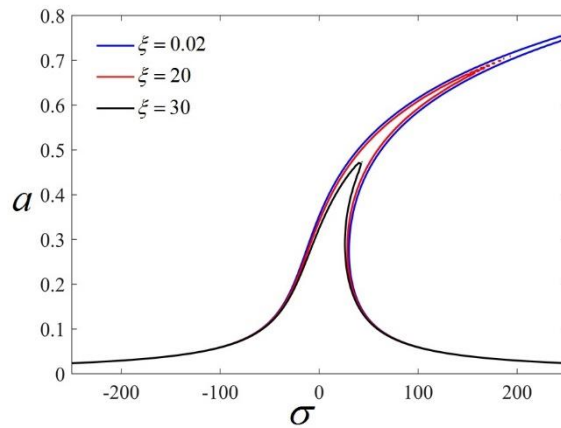
۱-۲-۳-۳ تحلیل رزونانس اولیه

در شکل‌های (۲-۳) و (۳-۳) به ترتیب، اثر دامنه تحریک خارجی و نسبت میرایی بر پاسخ فرکانسی غشای مستطیلی هایپرلاستیک بررسی شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، افزایش دامنه تحریک موجب افزایش مقیاس نمودارها و در نتیجه افزایش مقدار پرش می‌شود و افزایش نسبت میرایی باعث کاهش دامنه سیستم و در نتیجه کاهش مقدار پرش می‌گردد.



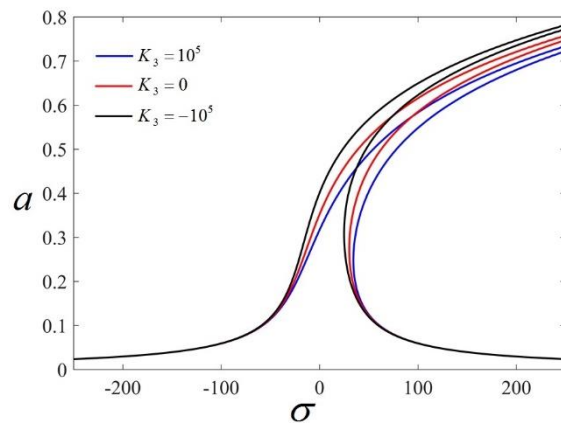
شکل ۲-۳. اثر مقادیر دامنه تحریک خارجی بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی رزونانس اولیه برای غشای مستطیلی هایپرلاستیک

$$(k_1 = 10^5 \text{ N/m}^3, \delta_x = \delta_y = 1.02, \xi = 0.02)$$



شکل ۳-۳. اثر نسبت‌های میرایی بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی رزونانس اولیه برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک
 $(k_1 = 10^5 \text{ N/m}^3, \delta_x = \delta_y = 1.02, P_0 = 2500 \text{ N/m}^2)$

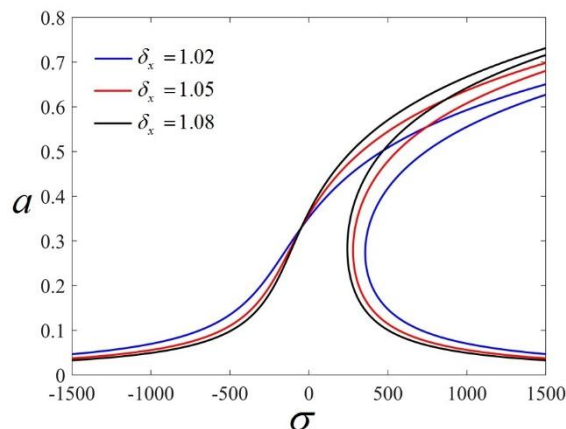
همچنین در شکل (۴-۳)، اثر مقادیر مختلف پارامتر سختی غیرخطی بستر (k_3) بر پاسخ فرکانسی سیستم ارائه شده است. با افزایش مقادیر مثبت ضریب پارامتر غیرخطی بستر، رفتار سخت‌شوندگی در سیستم افزایش یافته است. همچنین افزایش مقادیر منفی ضریب پارامتر غیرخطی بستر، منجر به کاهش رفتار سخت‌شوندگی می‌گردد.



شکل ۴-۳. اثر پارامتر سختی غیرخطی بستر بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی رزونانس اولیه برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک

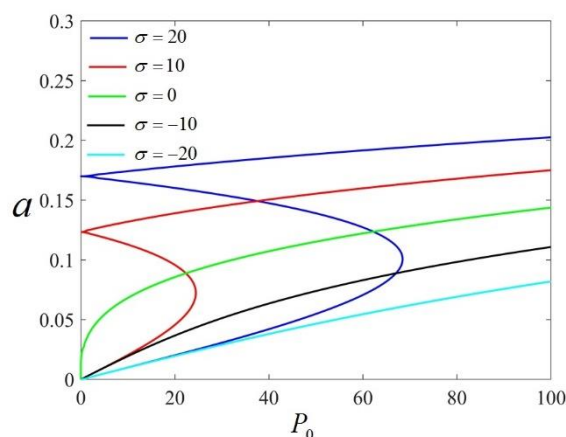
$$(k_1 = 10^5 \text{ N/m}^3, \delta_x = \delta_y = 1.02, P_0 = 2500 \text{ N/m}^2, \xi = 0.02)$$

تأثیر مقادیر مختلف نرخ کشیدگی در راستای x در غیاب بستر الاستیک بر پاسخ دامنه-فرکانس رزونانس اولیه ارتعاشات در شکل (۵-۳) نشان داده شده است. با توجه به این شکل با افزایش نرخ کشیدگی، رفتار سخت‌شوندگی در سیستم کاهش می‌یابد.



شکل ۳-۵. اثر مقادیر نرخ کشیدگی بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی رزونانس اولیه برای غشای مستطیلی هایپروالاستیک ($k_1 = k_2 = k_3 = 0$, $\xi = 0.02$, $P_0 = 2500 \text{ N/m}^2$)

در شکل (۳-۶) اثر پارامتر تنظیم بر دامنه پاسخ-دامنه تحریک سیستم قابل مشاهده می‌باشد. با افزایش پارامتر تنظیم σ ، مقدار پرش نیز افزایش می‌یابد.

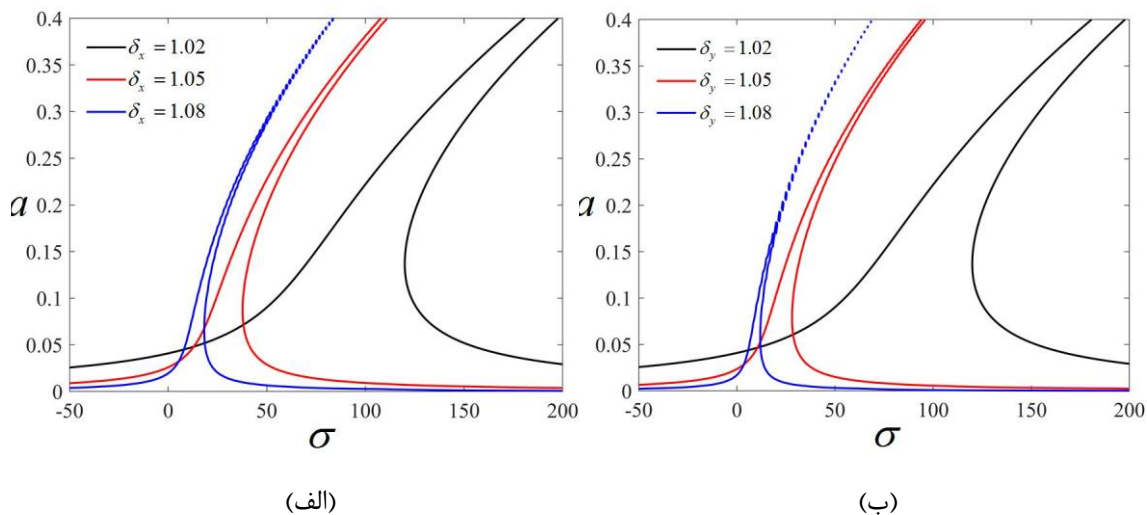


شکل ۳-۶. اثر پارامتر تنظیم بر منحنی‌های دامنه پاسخ-دامنه تحریک رزونانس اولیه برای غشای مستطیلی هایپروالاستیک ($k_1 = k_2 = k_3 = 0$, $\xi = 0.02$, $\delta_x = \delta_y = 1.02$)

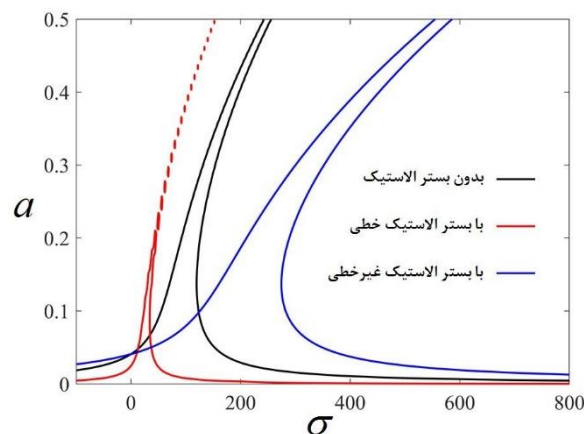
۳-۲-۲ تحلیل رزونانس مافوق هارمونیک ($\Omega \approx \frac{1}{3} \omega_0$)

تأثیر مقادیر مختلف نرخ کشیدگی در راستای x و y در غیاب بستر الاستیک بر پاسخ دامنه-فرکانس رزونانس مافوق هارمونیک ($\Omega \approx \frac{1}{3} \omega_0$)، به ترتیب در شکل‌های (۳-۷ الف) و (۳-۷ ب) نشان داده شده است. با توجه به این شکل‌ها، با افزایش نرخ کشیدگی، رفتار سخت‌شوندگی و مقدار پرش در سیستم

کاهش می‌یابد. در شکل (۸-۳) اثر حضور بستر بر پاسخ دامنه-فرکانس سیستم نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که حالت‌های بستر الاستیک خطی و بستر الاستیک غیرخطی، به ترتیب دارای کمترین و بیشترین مقدار سخت‌شوندگی می‌باشند. در واقع رفتار سخت‌شوندگی بدین معناست که علامت ضریب جمله‌ی غیرخطی در معادله حرکت معمولی، مثبت می‌باشد.



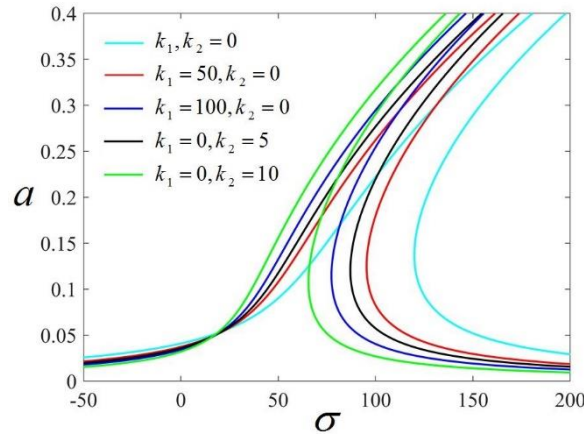
شکل ۸-۳. اثر مقادیر نرخ کشیدگی بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی رزونانس مافوق هارمونیک ($\Omega \approx \frac{1}{3}\omega_0$) برای غشای مستطیلی هایپر الاستیک ($k_1 = k_2 = k_3 = 0$, $\xi = 0.02$, $P_0 = 100 \text{ N/m}^2$)



شکل ۸-۳. اثر بستر بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی رزونانس مافوق هارمونیک ($\Omega \approx \frac{1}{3}\omega_0$) ($k_1 = 50 \text{ N/m}^3$, $k_2 = 20 \text{ N/m}^3$, $k_3 = 10^5 \text{ N/m}^5$, $\delta_x = \delta_y = 1.02$, $P_0 = 100 \text{ N/m}^2$)

با توجه به شکل (۹-۳)، اثر پارامترهای سختی خطی بر پاسخ دامنه-فرکانس سیستم بررسی شده است. مشاهده می‌گردد حالت‌های بدون بستر الاستیک خطی و $k_2 = 10$ ، به ترتیب دارای بیشترین و کمترین

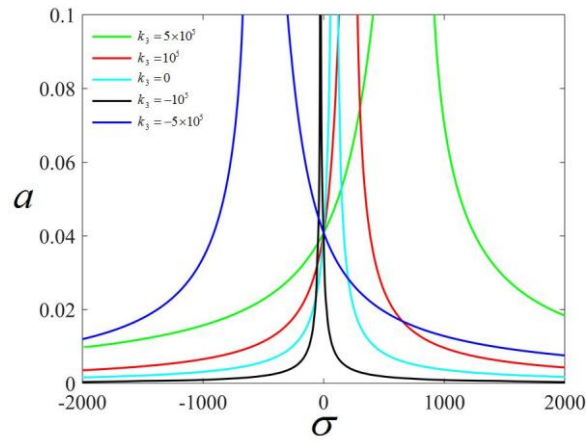
مقدار سخت‌شوندگی می‌باشند. همچنین افزایش مقدار k_1 (پارامتر بستر وینکلر) و k_2 (پارامتر بستر پسترناک) منجر به کاهش رفتار سخت‌شوندگی می‌شود.



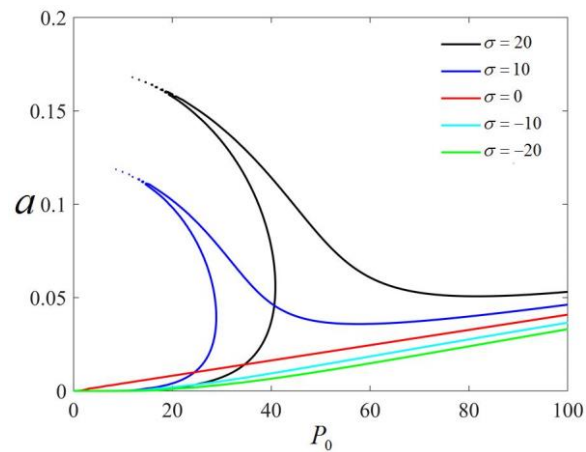
شکل ۹-۳. اثر پارامترهای سختی خطی بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی رزونانس مافوق هارمونیک ($\Omega \approx \frac{1}{3}\omega_0$) برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک
($\xi = 0.02$, $\delta_x = \delta_y = 1.02$, $P_0 = 100 \text{ N/m}^2$)

در شکل (۳-۱۰) اثر پارامتر سختی غیرخطی k_3 بر پاسخ دامنه-فرکانس سیستم نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که رفتار سخت‌شوندگی و مقدار پرش و همچنین ماکزیمم دامنه‌ی ارتعاشات به مقدار k_3 بستگی دارد. به طوری که با افزایش مقادیر مثبت k_3 ، مقدار پرش و رفتار سخت‌شوندگی افزایش می‌یابد. همچنین، افزایش مقادیر منفی k_3 منجر به افزایش مقدار پرش می‌شود. در واقع پارامتر بستر الاستیک مثبت، رفتار سخت‌شوندگی را به یک رفتار سخت‌شونده و پارامتر بستر الاستیک منفی، رفتار سخت‌شوندگی را به یک رفتار نرم‌شونده تغییر می‌دهد.

در شکل (۳-۱۱) اثر پارامتر تنظیم بر دامنه پاسخ-دامنه تحریک سیستم قابل مشاهده می‌باشد. با افزایش پارامتر تنظیم σ مقدار پرش نیز افزایش می‌یابد.

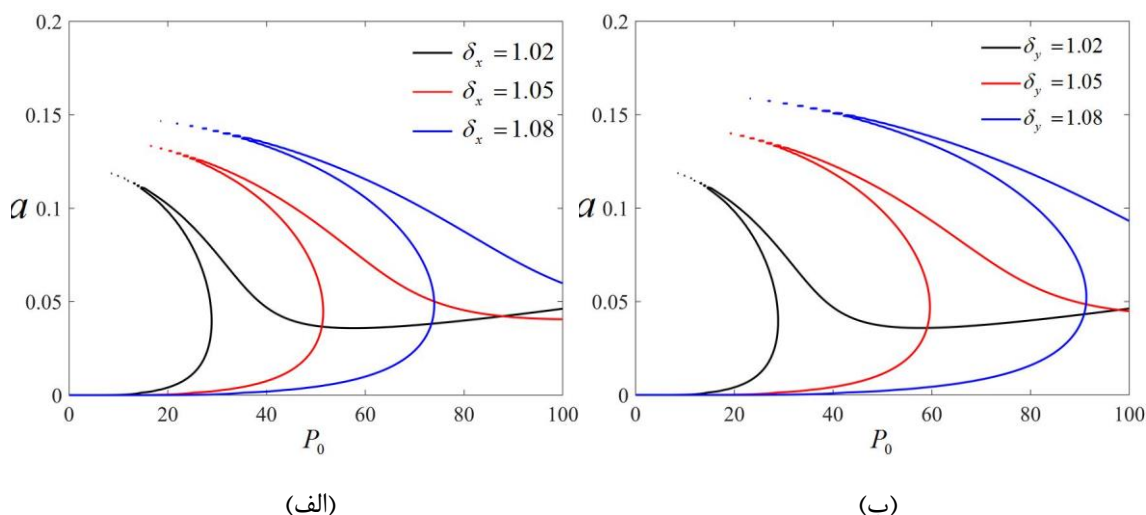


شکل ۳-۱۰. اثر پارامتر سختی غیرخطی بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی رزونانس مافوق هارمونیک ($\Omega \approx \frac{1}{3}\omega_0$)
برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک
($\xi = 0.02, \delta_x = \delta_y = 1.02, P_0 = 100 \text{ N/m}^2$)



شکل ۳-۱۱. اثر پارامتر تنظیم بر منحنی‌های دامنه پاسخ-دامنه تحریک رزونانس مافوق هارمونیک ($\Omega \approx \frac{1}{3}\omega_0$)
برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک
($k_1 = k_2 = k_3 = 0, \xi = 0.02, \delta_x = \delta_y = 1.02$)

شکل‌های (۳-۱۲ الف) و (۳-۱۲ ب) به ترتیب تأثیر مقادیر مختلف نرخ کشیدگی در راستای x و y بر دامنه پاسخ-دامنه تحریک سیستم را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که با افزایش نرخ کشیدگی مقدار پرش نیز افزایش می‌یابد.

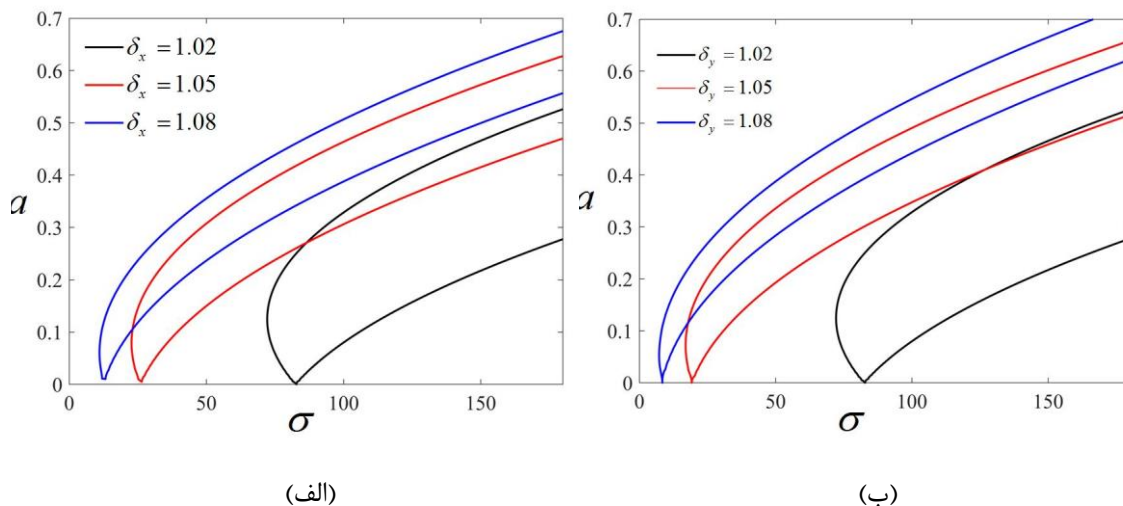


شکل ۳-۱۲. اثر مقادیر نرخ کشیدگی بر منحنی‌های دامنه-پاسخ-دامنه تحریک رزونانس مافوق هارمونیک ($\Omega \approx \frac{1}{3}\omega_0$) برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک ($k_1 = k_2 = k_3 = 0, \xi = 0.02$)

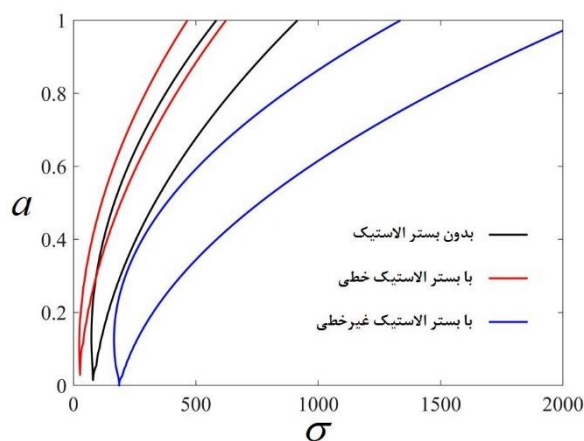
۳-۲-۳-۳ تحلیل رزونانس مادون هارمونیک ($\Omega \approx 3\omega_0$)

در شکل‌های (۳-۱۳ الف) و (۳-۱۳ ب) به ترتیب، اثر مقادیر مختلف نرخ کشیدگی در راستای x و y در غیاب بستر الاستیک بر پاسخ دامنه-فرکانس رزونانس مادون هارمونیک ($\Omega \approx 3\omega_0$)، نشان داده شده است. با افزایش نرخ کشیدگی، رفتار سخت‌شوندگی در سیستم کاهش می‌یابد. کاهش رفتار سخت-شوندگی بدین معناست که ضریب جمله‌ی غیرخطی در معادله حرکت معمولی، کاهش می‌یابد.

در شکل (۳-۱۴) اثر حضور بستر بر پاسخ دامنه-فرکانس سیستم نشان داده شده است. همانگونه که مشاهده می‌شود حالت بستر الاستیک خطی و بستر الاستیک غیرخطی، به ترتیب دارای کمترین و بیشترین رفتار سخت‌شوندگی می‌باشند.



شکل ۳-۱۳. اثر مقادیر نرخ کشیدگی بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی رزونانس مادون هارمونیک ($\Omega \approx 3\omega_0$) برای غشای مستطیلی هایپر الاستیک
 $(k_1 = k_2 = k_3 = 0, \xi = 0.02, P_0 = 100 \text{ N/m}^2)$

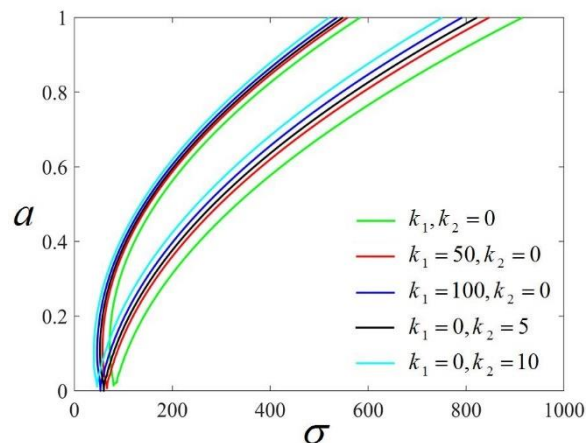


شکل ۳-۱۴. اثر بستر بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی رزونانس مادون هارمونیک ($\Omega \approx 3\omega_0$) برای غشای مستطیلی هایپر الاستیک

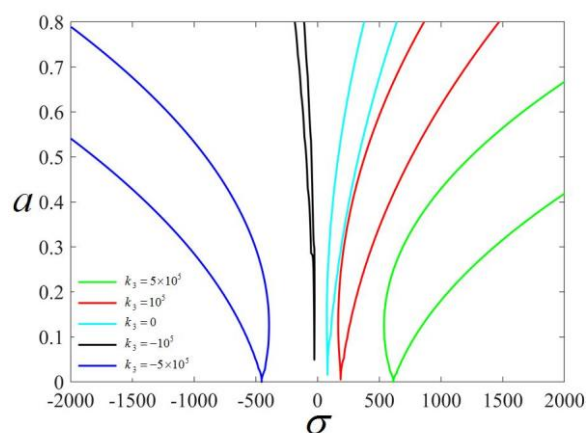
$$(k_1 = 50 \text{ N/m}^3, k_2 = 20 \text{ N/m}^3, k_3 = 10^5 \text{ N/m}^5, \delta_x = \delta_y = 1.02, P_0 = 100 \text{ N/m}^2)$$

در شکل (۳-۱۵)، اثر پارامترهای سختی خطی بر پاسخ دامنه-فرکانس سیستم بررسی شده است. حالت‌های بدون بستر الاستیک خطی و $k_2 = 10$ به ترتیب دارای بیشترین و کمترین رفتار سخت-شوندگی می‌باشند. افزایش مقدار k_1 (پارامتر بستر وینکلر) و k_2 (پارامتر بستر پسترناک) منجر به کاهش رفتار سخت‌شوندگی می‌شود. شکل (۳-۱۶) اثر پارامتر سختی غیرخطی k_3 بر پاسخ دامنه-

فرکانس سیستم را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که با افزایش مقادیر مثبت k_3 ، رفتار سخت‌شوندگی افزایش می‌یابد. همچنین، افزایش مقادیر منفی k_3 منجر به کاهش رفتار سخت‌شوندگی می‌شود.



شکل ۳-۱۵. اثر پارامترهای سختی خطی بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی رزونانس مادون هارمونیک ($\Omega \approx 3\omega_0$) برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک ($\xi = 0.02, \delta_x = \delta_y = 1.02, P_o = 100 \text{ N/m}^2$)

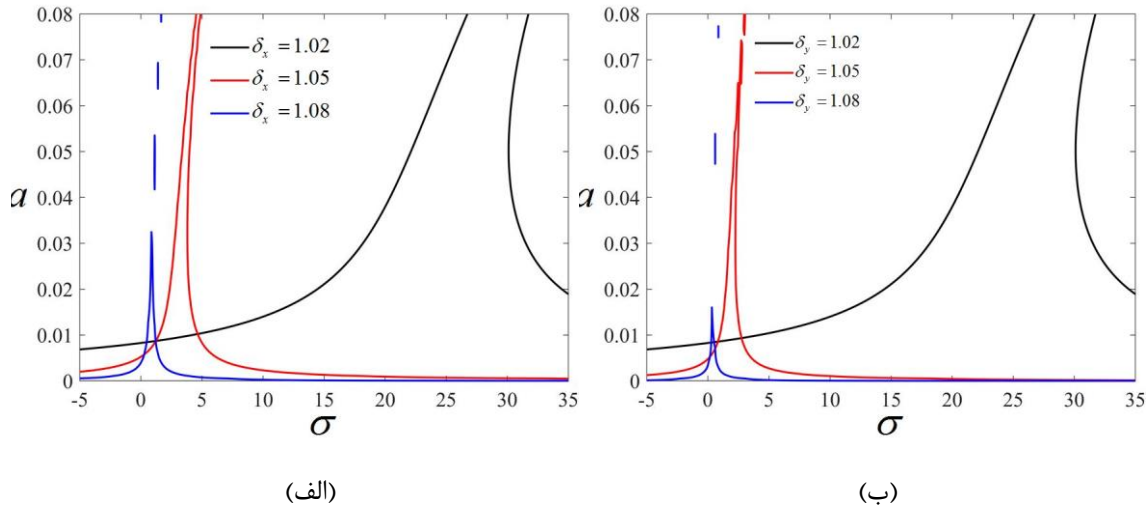


شکل ۳-۱۶. اثر پارامتر سختی غیرخطی بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی رزونانس مادون هارمونیک ($\Omega \approx 3\omega_0$) برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک ($\xi = 0.02, \delta_x = \delta_y = 1.02, P_o = 100 \text{ N/m}^2$)

۳-۲-۴ تحلیل رزونانس مافوق هارمونیک ($\Omega \approx \frac{1}{5}\omega_0$)

اثر مقادیر نرخ کشیدگی در راستای x و y در غیاب بستر الاستیک بر پاسخ دامنه-فرکانس رزونانس مافوق هارمونیک ($\Omega \approx \frac{1}{5}\omega_0$)، به ترتیب در شکل‌های (۳-۱۷ الف) و (۳-۱۷ ب) نشان داده شده است.

با توجه به این شکل‌ها، با افزایش نرخ کشیدگی، رفتار سخت‌شوندگی و مقدار پرش در سیستم کاهش می‌یابد.

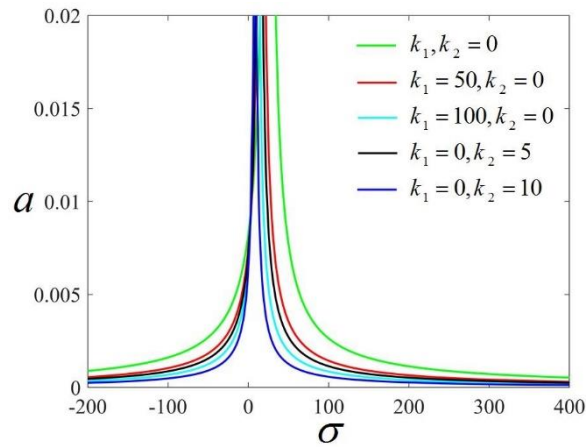


شکل ۳-۱۷. اثر مقادیر نرخ کشیدگی بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی رزونانس مافوق هارمونیک ($\Omega \approx \frac{1}{5}\omega_0$) برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک

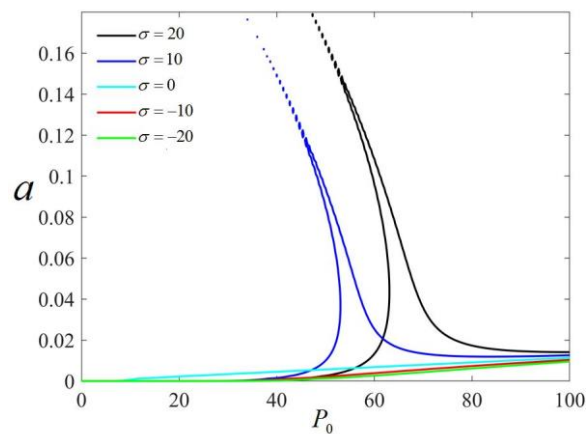
$$(k_1 = k_2 = k_3 = 0, \xi = 0.02, P_0 = 100 \text{ N/m}^2)$$

با توجه به شکل (۳-۱۸)، اثر پارامترهای سختی خطی بر پاسخ دامنه-فرکانس سیستم بررسی شده است. مشاهده می‌گردد حالت‌های بدون بستر الاستیک خطی و $k_2 = 10$ به ترتیب دارای بیشترین و کمترین مقدار پرش می‌باشند. همچنین افزایش مقدار k_1 (پارامتر بستر وینکلر) و k_2 (پارامتر بستر پسترناک) منجر به کاهش مقدار پرش و رفتار سخت‌شوندگی می‌شود.

شکل (۳-۱۹) اثر پارامتر تنظیم بر دامنه پاسخ-دامنه تحریک سیستم را نشان می‌دهد. با افزایش پارامتر تنظیم σ مقدار پرش نیز افزایش می‌یابد.

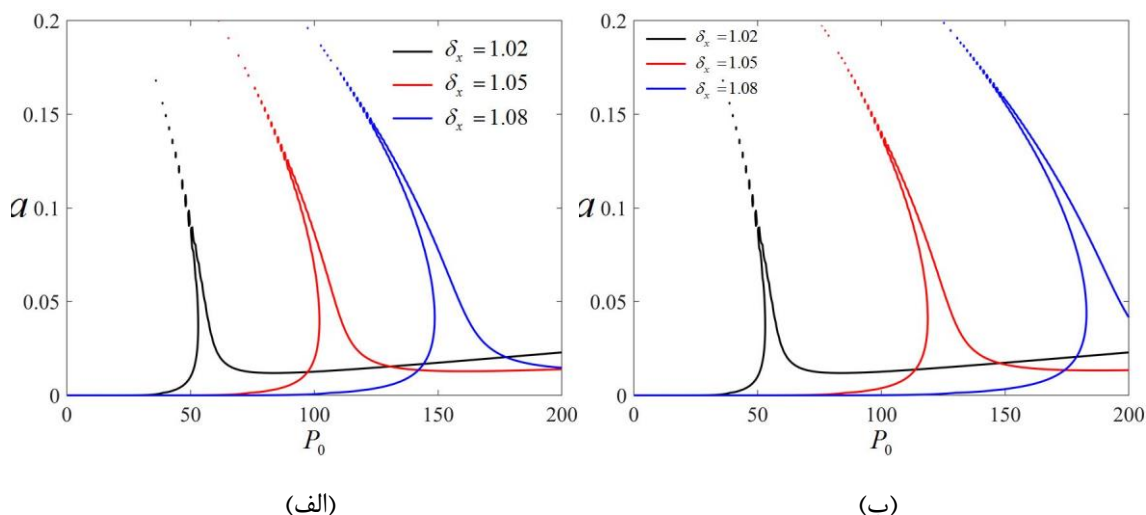


شکل ۳-۱۸. اثر پارامترهای سختی خطی بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی رزونانس مافوق هارمونیک ($\Omega \approx \frac{1}{5}\omega_0$)
برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک
($\xi = 0.02, \delta_x = \delta_y = 1.02, P_0 = 100 \text{ N/m}^2$)



شکل ۳-۱۹. اثر پارامتر تنظیم بر منحنی‌های دامنه پاسخ-دامنه تحریک رزونانس مافوق هارمونیک ($\Omega \approx \frac{1}{5}\omega_0$)
برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک
($k_1 = k_2 = k_3 = 0, \xi = 0.02, \delta_x = \delta_y = 1.02$)

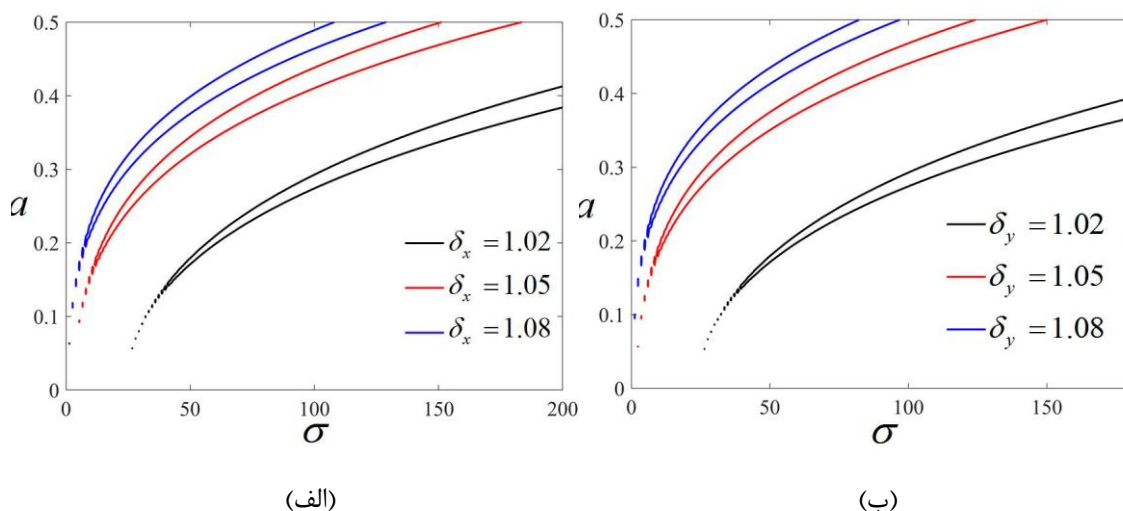
شکل‌های (۳-۲۰ الف) و (۳-۲۰ ب) به ترتیب تأثیر مقادیر مختلف نرخ کشیدگی در راستای x و y بر دامنه پاسخ-دامنه تحریک سیستم را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که افزایش نرخ کشیدگی، افزایش مقدار پرش را به همراه خواهد داشت.



شکل ۳-۲۰. اثر مقادیر نرخ کشیدگی بر منحنی‌های دامنه پاسخ-دامنه تحریک رزونانس مافوق هارمونیک
 برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک ($k_1 = k_2 = k_3 = 0, \xi = 0.02$) ($\Omega \approx \frac{1}{5}\omega_0$)

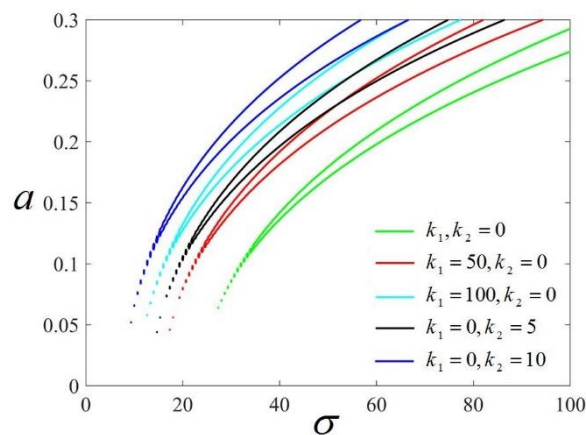
۳-۲-۵ تحلیل رزونانس مادون هارمونیک ($\Omega \approx 5\omega_0$)

در شکل‌های (۳-۲۱ الف) و (۳-۲۱ ب) به ترتیب، اثر مقادیر مختلف نرخ کشیدگی در راستای x و y در غیاب بستر الاستیک بر پاسخ دامنه-فرکانس رزونانس مادون هارمونیک ($\Omega \approx 5\omega_0$)، نشان داده شده است. با افزایش نرخ کشیدگی، رفتار سخت‌شوندگی در سیستم کاهش می‌یابد.



شکل ۳-۲۱. اثر مقادیر نرخ کشیدگی بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی رزونانس مادون هارمونیک ($\Omega \approx 5\omega_0$) برای
 غشای مستطیلی هایپرالاستیک
 ($k_1 = k_2 = k_3 = 0, \xi = 0.02, P_0 = 100 \text{ N/m}^2$)

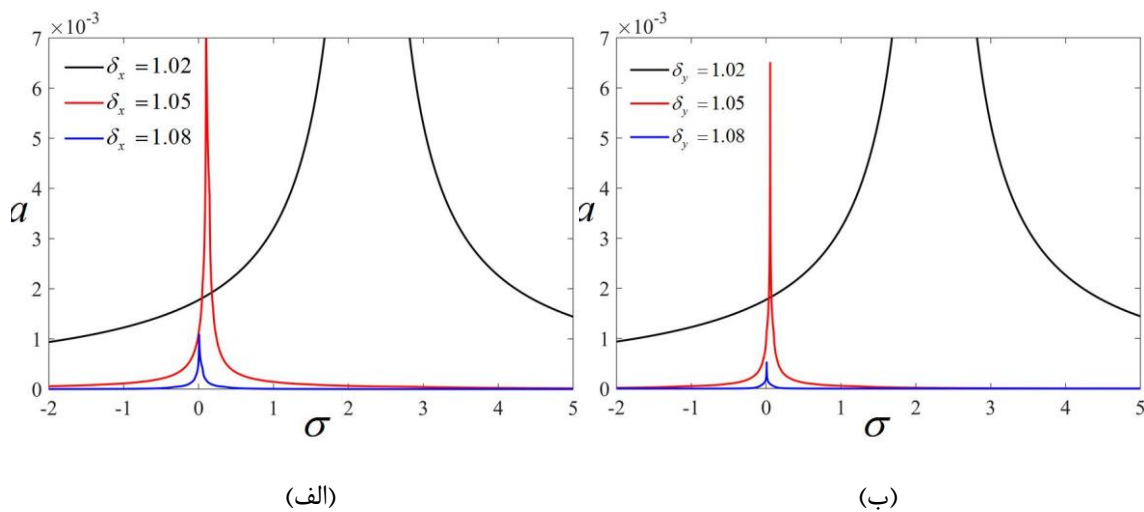
در شکل (۳-۲۲)، اثر پارامترهای سختی خطی بر پاسخ دامنه-فرکانس سیستم بررسی شده است. در حالت‌های بدون بستر الاستیک خطی و $k_2 = 10$ به ترتیب دارای بیشترین و کمترین رفتار سخت-شوندگی می‌باشند. همچنین با افزایش مقدار k_1 (پارامتر بستر وینکلر) و k_2 (پارامتر بستر پسترناک) رفتار سخت‌شوندگی کاهش می‌یابد.



شکل ۳-۲۲. اثر پارامترهای سختی خطی بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی رزونانس مادون هارمونیک ($\Omega \approx 5\omega_0$) برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک
($\xi = 0.02, \delta_x = \delta_y = 1.02, P_o = 100 \text{ N/m}^2$)

۳-۲-۶ تحلیل رزونانس مافوق هارمونیک ($\Omega \approx \frac{1}{7}\omega_0$)

اثر مقادیر نرخ کشیدگی در راستای x و y در غیاب بستر الاستیک بر پاسخ دامنه-فرکانس رزونانس مافوق هارمونیک ($\Omega \approx \frac{1}{7}\omega_0$)، به ترتیب در شکل‌های (۳-۲۳ الف) و (۳-۲۳ ب) نشان داده شده است. با توجه به این شکل‌ها، با افزایش نرخ کشیدگی، رفتار سخت‌شوندگی و مقدار پرش در سیستم کاهش می‌یابد.

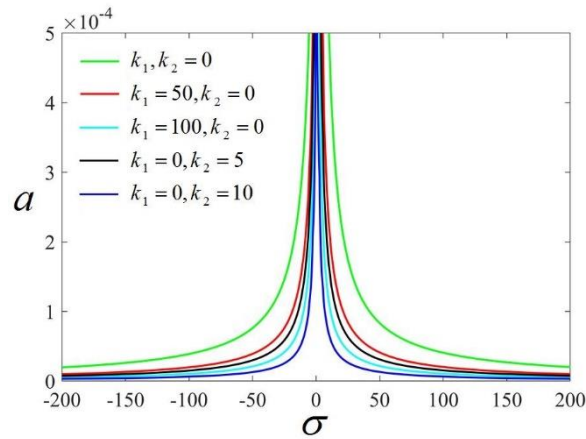


شکل ۳-۲۳. اثر مقادیر نرخ کشیدگی بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی رزونانس مافوق هارمونیک ($\Omega \approx \frac{1}{7}\omega_0$) برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک

$$(k_1 = k_2 = k_3 = 0, \xi = 0.02, P_0 = 100 \text{ N/m}^2)$$

در شکل (۳-۲۴)، اثر پارامترهای سختی خطی بر پاسخ دامنه-فرکانس سیستم بررسی شده است. مشاهده می‌گردد حالت‌های بدون بستر الاستیک خطی و $k_2 = 10$ به ترتیب دارای بیشترین و کمترین مقدار پرش می‌باشند.

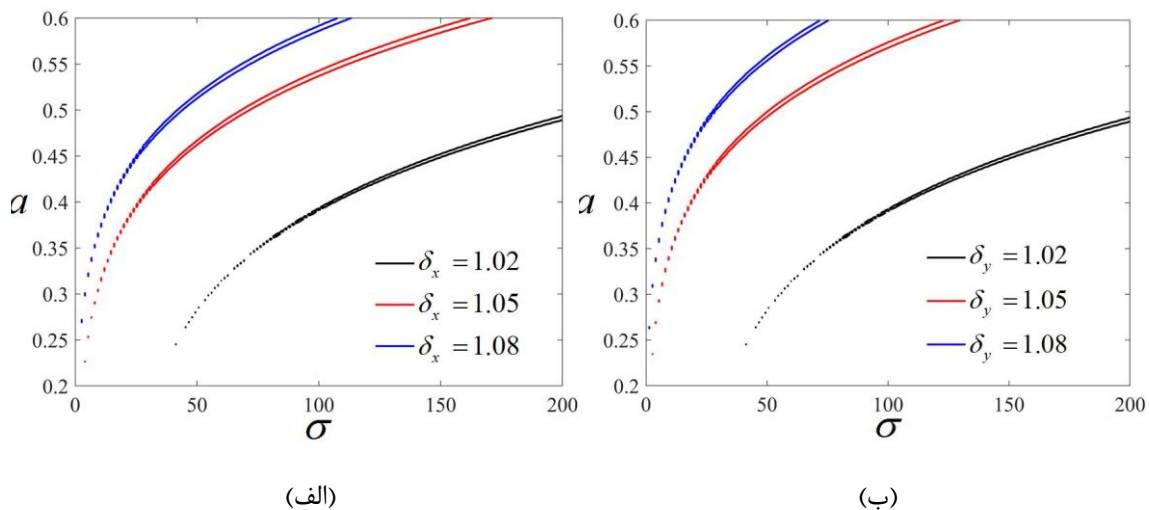
همچنین افزایش مقدار k_1 (پارامتر بستر وینکلر) و k_2 (پارامتر بستر پسترناک) منجر به کاهش مقدار پرش می‌شود.



شکل ۳-۲۴. اثر پارامترهای سختی خطی بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی رزونانس مافوق هارمونیک ($\Omega \approx \frac{1}{7}\omega_0$) برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک
($\xi = 0.02$, $\delta_x = \delta_y = 1.02$, $P_o = 100 \text{ N/m}^2$)

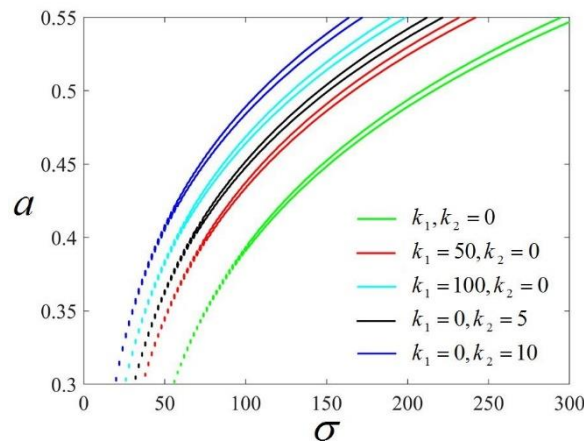
۳-۲-۷ تحلیل رزونانس مادون هارمونیک ($\Omega \approx 7\omega_0$)

در شکل‌های (۳-۲۵ الف) و (۳-۲۵ ب) به ترتیب، اثر مقادیر مختلف نرخ کشیدگی در راستای x و y در غیاب بستر الاستیک بر پاسخ دامنه-فرکانس رزونانس مادون هارمونیک ($\Omega \approx 7\omega_0$)، نشان داده شده است. با افزایش نرخ کشیدگی، رفتار سخت‌شوندگی در سیستم کاهش می‌یابد.



شکل ۳-۲۵. اثر مقادیر نرخ کشیدگی بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی رزونانس مادون هارمونیک ($\Omega \approx 7\omega_0$) برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک
($k_1 = k_2 = k_3 = 0$, $\xi = 0.02$, $P_o = 100 \text{ N/m}^2$)

شکل (۳-۲۶)، اثر پارامترهای سختی خطی بر پاسخ دامنه-فرکانس سیستم را نشان می‌دهد. حالت-های بدون بسترالاستیک خطی و $k_2 = 10$ به ترتیب دارای بیشترین و کمترین رفتار سخت‌شوندگی می‌باشند. افزایش مقدار k_1 (پارامتر بستر وینکلر) و k_2 (پارامتر بستر پسترناک) منجر به کاهش مقدار سخت‌شوندگی می‌شود.



شکل ۳-۲۶. اثر پارامترهای سختی خطی بر منحنی‌های پاسخ فرکانسی رزونانس مادون هارمونیک ($\Omega \approx 7\omega_0$) برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک
($\xi = 0.02, \delta_x = \delta_y = 1.02, P_o = 100 \text{ N/m}^2$)

با بیان تحلیل‌های مربوط به رزونانس‌های مختلف حالت تک‌مود برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک، در فصل ۵، نتایج حاصل از تحلیل‌های به دست آمده برای این حالت بیان شده‌اند.

فصل ۴ : تحلیل ارتعاشات غیر خطی غشای

مستطیلی بایر الاستیک بر اساس دو مود

۴-۱ گسسته سازی معادله حرکت بر اساس دو مود

در این بخش باتوجه به رابطه‌ی زیر، جهت گسسته‌سازی معادله حرکت، پاسخ عرضی ارتعاشات در دو مود در نظر گرفته می‌شود:

$$w(x, y, t) = W_1(t) \sin\left(\frac{\pi x}{L_{x0}}\right) \sin\left(\frac{3\pi y}{L_{y0}}\right) + W_2(t) \sin\left(\frac{3\pi x}{L_{x0}}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L_{y0}}\right) \quad (۱-۴)$$

در رابطه‌ی (۱-۴)، $W_1(t)$ و $W_2(t)$ به ترتیب دامنه‌های مربوط به مودهای $(m, n) = (1, 3)$ و $(m, n) = (3, 1)$ می‌باشند. با جایگذاری رابطه‌ی (۱-۴) در رابطه‌ی (۲-۱۴) و اعمال روش گلرکین، معادلات گسسته‌شده در جهت عرضی ارتعاشات غشای مستطیلی به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \ddot{W}_1(t) + \hat{\mu}_1 \dot{W}_1(t) + \omega_1^2 W_1(t) + \alpha_1 W_1^3(t) + \alpha_2 W_1(t) W_2^2(t) + \alpha_3 W_1^5(t) \\ + \alpha_4 W_1(t) W_2^4(t) + \alpha_5 W_1^2(t) W_2^3(t) + \alpha_6 W_1^3(t) W_2^2(t) + \alpha_7 W_1^7(t) \\ + \alpha_8 W_1(t) W_2^6(t) + \alpha_9 W_1^2(t) W_2^5(t) + \alpha_{10} W_1^3(t) W_2^4(t) + \alpha_{11} W_1^4(t) W_2^3(t) \\ + \alpha_{12} W_1^5(t) W_2^2(t) = \hat{\eta}_1 P_0 \cos(\Omega t + \tau_1) \end{aligned} \quad (۲-۴)$$

$$\begin{aligned} \ddot{W}_2(t) + \hat{\mu}_2 \dot{W}_2(t) + \omega_2^2 W_2(t) + \beta_1 W_2^3(t) + \beta_2 W_2(t) W_1^2(t) + \beta_3 W_2^5(t) \\ + \beta_4 W_2(t) W_1^4(t) + \beta_5 W_2^2(t) W_1^3(t) + \beta_6 W_2^3(t) W_1^2(t) + \beta_7 W_2^7(t) \\ + \beta_8 W_2(t) W_1^6(t) + \beta_9 W_2^2(t) W_1^5(t) + \beta_{10} W_2^3(t) W_1^4(t) + \beta_{11} W_2^4(t) W_1^3(t) \\ + \beta_{12} W_2^5(t) W_1^2(t) = \hat{\eta}_2 P_0 \cos(\Omega t + \tau_2) \end{aligned} \quad (۳-۴)$$

که ω_1 و ω_2 به ترتیب فرکانس‌های طبیعی مربوط به مودهای $(m, n) = (1, 3)$ و $(m, n) = (3, 1)$ می‌باشند.

۴-۲ حل تحلیلی به روش مقیاس‌های چندگانه

۴-۲-۱ رزونانس ثانویه

در این بخش با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه، یکی از حالت‌های رزونانس ثانویه ارتعاشات غشای مستطیلی هایدروالاستیک برای حالت دو مود ارائه شده است. در این تحلیل، معادلات گسسته‌شده‌ی (۴-۴)

(۲) و (۳-۴) از درجه‌ی غیرخطی سه در نظر گرفته شده‌اند [۳۶]. جهت حل معادلات غیرخطی (۲-۴) و

(۳-۴)، پارامترهای جدید به صورت رابطه‌ی زیر تعریف می‌گردند:

$$\hat{\mu}_i = \varepsilon^2 \mu_i \quad (i = 1, 2); \quad \hat{\eta}_i = \varepsilon \eta_i \quad (i = 1, 2) \quad (۴-۴)$$

در معادلات و روابط ذکر شده $\varepsilon \ll 1$ و به اندازه کافی کوچک در نظر گرفته شده است. با جایگذاری

روابط (۴-۴)، معادلات (۲-۴) و (۳-۴) به معادلات زیر تبدیل می‌شوند:

$$\begin{aligned} \ddot{W}_1(t) + \varepsilon^2 \mu_1 \dot{W}_1(t) + \omega_1^2 W_1(t) + \alpha_1 W_1^3(t) + \alpha_2 W_1(t) W_2^2(t) + \alpha_3 W_1^5(t) \\ + \alpha_4 W_1(t) W_2^4(t) + \alpha_5 W_1^2(t) W_2^3(t) + \alpha_6 W_1^3(t) W_2^2(t) + \alpha_7 W_1^7(t) \\ + \alpha_8 W_1(t) W_2^6(t) + \alpha_9 W_1^2(t) W_2^5(t) + \alpha_{10} W_1^3(t) W_2^4(t) + \alpha_{11} W_1^4(t) W_2^3(t) \\ + \alpha_{12} W_1^5(t) W_2^2(t) = \varepsilon \eta_1 P_0 \cos(\Omega t + \tau_1) \end{aligned} \quad (۵-۴)$$

$$\begin{aligned} \ddot{W}_2(t) + \varepsilon^2 \mu_2 \dot{W}_2(t) + \omega_2^2 W_2(t) + \beta_1 W_2^3(t) + \beta_2 W_2(t) W_1^2(t) + \beta_3 W_2^5(t) \\ + \beta_4 W_2(t) W_1^4(t) + \beta_5 W_2^2(t) W_1^3(t) + \beta_6 W_2^3(t) W_1^2(t) + \beta_7 W_2^7(t) \\ + \beta_8 W_2(t) W_1^6(t) + \beta_9 W_2^2(t) W_1^5(t) + \beta_{10} W_2^3(t) W_1^4(t) + \beta_{11} W_2^4(t) W_1^3(t) \\ + \beta_{12} W_2^5(t) W_1^2(t) = \varepsilon \eta_2 P_0 \cos(\Omega t + \tau_2) \end{aligned} \quad (۶-۴)$$

ضرایب روابط (۵-۴) و (۶-۴) به صورت زیر ارائه شده‌اند:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 = \frac{\delta_x \delta_y k_1}{\Gamma h} - 2 \frac{\pi^2 C_1}{L_{xo}^2 \Gamma \delta_x^4 \delta_y^2} - 18 \frac{\pi^2 C_1}{L_{yo}^2 \Gamma \delta_x^2 \delta_y^4} + 18 \frac{\pi^2 C_1}{L_{yo}^2 \Gamma} + 2 \frac{\pi^2 C_1}{L_{xo}^2 \Gamma} \\ + \frac{\delta_x \delta_y \pi^2 k_2}{L_{xo}^2 \Gamma h} + 9 \frac{\delta_x \delta_y \pi^2 k_2}{L_{yo}^2 \Gamma h} \end{aligned} \quad (۷-۴)$$

$$\begin{aligned} \omega_2^2 = 2 \frac{\pi^2 C_1}{L_{yo}^2 \Gamma} + 18 \frac{\pi^2 C_1}{L_{xo}^2 \Gamma} + \frac{\delta_x \delta_y k_1}{\Gamma h} + 9 \frac{\delta_x \delta_y \pi^2 k_2}{L_{xo}^2 \Gamma h} + \frac{\delta_x \delta_y \pi^2 k_2}{L_{yo}^2 \Gamma h} - 2 \frac{\pi^2 C_1}{L_{yo}^2 \Gamma \delta_x^2 \delta_y^4} \\ - 18 \frac{\pi^2 C_1}{L_{xo}^2 \Gamma \delta_x^4 \delta_y^2} \end{aligned}$$

$$\mu_1 = \mu_2 = -\frac{C}{\Gamma h}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \frac{729 \pi^4 C_1}{8 L_{yo}^4 \Gamma \delta_x^2 \delta_y^6} + \frac{9 \pi^4 C_1}{8 L_{xo}^4 \Gamma \delta_x^6 \delta_y^2} - \frac{63 \pi^4 C_1}{4 L_{xo}^2 L_{yo}^2 \Gamma \delta_x^4 \delta_y^4} + \frac{81 \pi^4 C_1}{8 L_{xo}^2 L_{yo}^2 \Gamma \delta_x^2} \\ + \frac{81 \pi^4 C_1}{8 L_{xo}^2 L_{yo}^2 \Gamma \delta_y^2} + \frac{9 \delta_x \delta_y k_3}{16 \Gamma h} + \frac{9 \pi^4 C_1}{8 L_{xo}^4 \Gamma \delta_x^2} + \frac{729 \pi^4 C_1}{8 L_{yo}^4 \Gamma \delta_y^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= \frac{3\delta_x\delta_y k_3}{4\Gamma h} + \frac{27\pi^4 C_1}{2L_{x0}^4 \Gamma \delta_x^2} + \frac{27\pi^4 C_1}{2L_{y0}^4 \Gamma \delta_y^2} - \frac{41\pi^4 C_1}{L_{x0}^2 L_{y0}^2 \Gamma \delta_x^4 \delta_y^4} + \frac{27\pi^4 C_1}{2L_{y0}^4 \Gamma \delta_x^2 \delta_y^6} \\
&\quad + \frac{27\pi^4 C_1}{2L_{x0}^4 \Gamma \delta_x^6 \delta_y^2} + \frac{243\pi^4 C_1}{2L_{x0}^2 L_{y0}^2 \Gamma \delta_x^2} + \frac{3\pi^4 C_1}{2L_{x0}^2 L_{y0}^2 \Gamma \delta_y^2} \\
\alpha_3 &= \frac{243\pi^6 C_1}{16L_{x0}^2 L_{y0}^4 \Gamma \delta_x^2 \delta_y^2} + \frac{27\pi^6 C_1}{16L_{x0}^4 L_{y0}^2 \Gamma \delta_x^2 \delta_y^2} + \frac{1215\pi^6 C_1}{32L_{x0}^2 L_{y0}^4 \Gamma \delta_y^4} \\
&\quad + \frac{135\pi^6 C_1}{32L_{x0}^4 L_{y0}^2 \Gamma \delta_x^4} + \frac{15\pi^6 C_1}{32L_{x0}^6 \Gamma \delta_x^4} + \frac{10935\pi^6 C_1}{32L_{y0}^6 \Gamma \delta_y^4} \\
\alpha_4 &= \frac{19683\pi^6 C_1}{32L_{x0}^4 L_{y0}^2 \Gamma \delta_x^4} + \frac{27\pi^6 C_1}{32L_{x0}^2 L_{y0}^4 \Gamma \delta_y^4} + \frac{2187\pi^6 C_1}{32L_{x0}^6 \Gamma \delta_x^4} + \frac{243\pi^6 C_1}{32L_{y0}^6 \Gamma \delta_y^4} \\
&\quad + \frac{27\pi^6 C_1}{16L_{x0}^4 L_{y0}^2 \Gamma \delta_x^2 \delta_y^2} + \frac{243\pi^6 C_1}{16L_{x0}^2 L_{y0}^4 \Gamma \delta_x^2 \delta_y^2} \\
\alpha_5 &= -\frac{729\pi^6 C_1}{64L_{y0}^6 \Gamma \delta_y^4} - \frac{729\pi^6 C_1}{64L_{x0}^6 \Gamma \delta_x^4} - \frac{2241\pi^6 C_1}{64L_{x0}^2 L_{y0}^4 \Gamma \delta_y^4} + \frac{12879\pi^6 C_1}{64L_{x0}^4 L_{y0}^2 \Gamma \delta_x^4} \\
&\quad + \frac{675\pi^6 C_1}{32L_{x0}^2 L_{y0}^4 \Gamma \delta_x^2 \delta_y^2} + \frac{1755\pi^6 C_1}{32L_{x0}^4 L_{y0}^2 \Gamma \delta_x^2 \delta_y^2} \\
\alpha_6 &= \frac{243\pi^6 C_1}{16L_{x0}^2 L_{y0}^4 \Gamma \delta_y^4} + \frac{243\pi^6 C_1}{16L_{x0}^6 \Gamma \delta_x^4} + \frac{2187\pi^6 C_1}{16L_{y0}^6 \Gamma \delta_y^4} + \frac{2187\pi^6 C_1}{16L_{x0}^4 L_{y0}^2 \Gamma \delta_x^4} \\
&\quad + \frac{3321\pi^6 C_1}{8L_{x0}^2 L_{y0}^4 \Gamma \delta_x^2 \delta_y^2} + \frac{369\pi^6 C_1}{8L_{x0}^4 L_{y0}^2 \Gamma \delta_x^2 \delta_y^2} \\
\alpha_7 &= \frac{1575\pi^8 C_1}{2048L_{x0}^6 L_{y0}^2 \Gamma \delta_x^6} + \frac{127575\pi^8 C_1}{2048L_{x0}^2 L_{y0}^6 \Gamma \delta_y^6} + \frac{175\pi^8 C_1}{2048L_{x0}^8 \Gamma \delta_x^6} + \frac{1148175\pi^8 C_1}{2048L_{y0}^8 \Gamma \delta_y^6} \\
&\quad + \frac{3645\pi^8 C_1}{2048L_{x0}^4 L_{y0}^4 \Gamma \delta_x^2 \delta_y^4} + \frac{405\pi^8 C_1}{2048L_{x0}^6 L_{y0}^2 \Gamma \delta_x^4 \delta_y^2} + \frac{32805\pi^8 C_1}{2048L_{x0}^2 L_{y0}^6 \Gamma \delta_x^2 \delta_y^4} \\
&\quad + \frac{3645\pi^8 C_1}{2048L_{x0}^4 L_{y0}^4 \Gamma \delta_x^4 \delta_y^2} \\
\alpha_8 &= -\frac{2781\pi^8 C_1}{512L_{x0}^4 L_{y0}^4 \Gamma \delta_x^2 \delta_y^4} + \frac{891\pi^8 C_1}{512L_{x0}^2 L_{y0}^6 \Gamma \delta_x^2 \delta_y^4} + \frac{13851\pi^8 C_1}{512L_{x0}^6 L_{y0}^2 \Gamma \delta_x^4 \delta_y^2} \\
&\quad + \frac{8019\pi^8 C_1}{512L_{x0}^4 L_{y0}^4 \Gamma \delta_x^4 \delta_y^2} + \frac{76545\pi^8 C_1}{512L_{x0}^8 \Gamma \delta_x^6} + \frac{945\pi^8 C_1}{512L_{y0}^8 (\Gamma) \delta_y^6} \\
&\quad + \frac{688905\pi^8 C_1}{512L_{x0}^6 L_{y0}^2 \Gamma \delta_x^6} + \frac{905\pi^8 C_1}{512L_{x0}^2 L_{y0}^6 \Gamma \delta_y^6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_9 &= -\frac{54675\pi^8 C_1}{1024L_{x0}^8 \Gamma \delta_x^6} - \frac{6075\pi^8 C_1}{1024L_{y0}^8 \Gamma \delta_y^6} + \frac{965925\pi^8 C_1}{1024L_{x0}^6 L_{y0}^2 \Gamma \delta_x^6} - \frac{18675\pi^8 C_1}{1024L_{x0}^2 L_{y0}^6 \Gamma \delta_y^6} \\
&\quad + \frac{158679\pi^8 C_1}{1024L_{x0}^6 L_{y0}^2 \Gamma \delta_x^4 \delta_y^2} + \frac{351\pi^8 C_1}{1024L_{x0}^2 L_{y0}^6 \Gamma \delta_x^2 \delta_y^4} - \frac{9801\pi^8 C_1}{1024L_{x0}^4 L_{y0}^4 \Gamma \delta_x^2 \delta_y^4} \\
&\quad + \frac{47871\pi^8 C_1}{1024L_{x0}^4 L_{y0}^4 \Gamma \delta_x^4 \delta_y^2} \\
\alpha_{10} &= \frac{3645\pi^8 C_1}{512L_{x0}^2 L_{y0}^6 \Gamma \delta_y^6} + \frac{32805\pi^8 C_1}{512L_{y0}^8 \Gamma \delta_y^6} + \frac{32805\pi^8 C_1}{512L_{x0}^8 \Gamma \delta_x^6} + \frac{295245\pi^8 C_1}{512L_{x0}^6 L_{y0}^2 \Gamma \delta_x^6} \\
&\quad + \frac{535815\pi^8 C_1}{512L_{x0}^4 L_{y0}^4 \Gamma \delta_x^4 \delta_y^2} + \frac{40095\pi^8 C_1}{512L_{x0}^2 L_{y0}^6 \Gamma \delta_x^2 \delta_y^4} \\
&\quad + \frac{4455\pi^8 C_1}{512L_{x0}^4 L_{y0}^4 \Gamma \delta_x^2 \delta_y^4} + \frac{59535\pi^8 C_1}{512L_{x0}^6 L_{y0}^2 \Gamma \delta_x^4 \delta_y^2} \\
\alpha_{11} &= -\frac{10125\pi^8 C_1}{1024L_{x0}^8 \Gamma \delta_x^6} - \frac{91125\pi^8 C_1}{1024L_{y0}^8 \Gamma \delta_y^6} - \frac{172125\pi^8 C_1}{1024L_{x0}^2 L_{y0}^6 \Gamma \delta_y^6} + \frac{70875\pi^8 C_1}{1024L_{x0}^6 L_{y0}^2 \Gamma \delta_x^6} \\
&\quad + \frac{224721\pi^8 C_1}{1024L_{x0}^4 L_{y0}^4 \Gamma \delta_x^4 \delta_y^2} + \frac{123201\pi^8 C_1}{1024L_{x0}^2 L_{y0}^6 \Gamma \delta_x^2 \delta_y^4} + \frac{167049\pi^8 C_1}{1024L_{x0}^4 L_{y0}^4 \Gamma \delta_x^2 \delta_y^4} \\
&\quad + \frac{15129\pi^8 C_1}{1024L_{x0}^6 L_{y0}^2 \Gamma \delta_x^4 \delta_y^2} \\
\alpha_{12} &= \frac{18315\pi^8 C_1}{512L_{x0}^6 L_{y0}^2 \Gamma \delta_x^6} + \frac{25515\pi^8 C_1}{512L_{x0}^2 L_{y0}^6 \Gamma \delta_y^6} + \frac{2835\pi^8 C_1}{512L_{x0}^8 \Gamma \delta_x^6} + \frac{229635\pi^8 C_1}{512L_{y0}^8 \Gamma \delta_y^6} \\
&\quad + \frac{379809\pi^8 C_1}{512L_{x0}^2 L_{y0}^6 \Gamma \delta_x^2 \delta_y^4} + \frac{55161\pi^8 C_1}{512L_{x0}^4 L_{y0}^4 \Gamma \delta_x^2 \delta_y^4} \\
&\quad + \frac{4449\pi^8 C_1}{512L_{x0}^6 L_{y0}^2 \Gamma \delta_x^4 \delta_y^2} + \frac{65961\pi^8 C_1}{512L_{x0}^4 L_{y0}^4 \Gamma \delta_x^4 \delta_y^2} \\
\eta_1 = \eta_2 &= -\frac{16\delta_x \delta_y}{3\Gamma h \pi^2} \\
\beta_1 &= -\frac{63\pi^4 C_1}{4L_{x0}^2 L_{y0}^2 \Gamma \delta_x^4 \delta_y^4} + \frac{9\pi^4 C_1}{8L_{y0}^4 \Gamma \delta_y^2} + \frac{9\delta_x \delta_y k_3}{16\Gamma h} + \frac{729\pi^4 C_1}{8L_{x0}^4 \Gamma \delta_x^2} + \frac{729\pi^4 C_1}{8L_{x0}^4 \Gamma \delta_x^6 \delta_y^2} \\
&\quad + \frac{81\pi^4 C_1}{8L_{x0}^2 L_{y0}^2 \Gamma \delta_x^2} + \frac{81\pi^4 C_1}{8L_{x0}^2 L_{y0}^2 \Gamma \delta_y^2} + \frac{9\pi^4 C_1}{8L_{y0}^4 \Gamma \delta_x^2 \delta_y^6} \\
\beta_2 &= \frac{27\pi^4 C_1}{2L_{x0}^4 \Gamma \delta_x^6 \delta_y^2} + \frac{3\pi^4 C_1}{2L_{x0}^2 L_{y0}^2 \Gamma \delta_x^2} + \frac{243\pi^4 C_1}{2L_{x0}^2 L_{y0}^2 \Gamma \delta_y^2} + \frac{27\pi^4 C_1}{2L_{y0}^4 \Gamma \delta_x^2 \delta_y^6} \\
&\quad - 41 \frac{\pi^4 C_1}{L_{x0}^2 L_{y0}^2 \Gamma \delta_x^4 \delta_y^4} + \frac{27\pi^4 C_1}{2L_{x0}^4 \Gamma \delta_x^2} + \frac{3\delta_x \delta_y k_3}{4\Gamma h} + \frac{27\pi^4 C_1}{2L_{y0}^4 \Gamma \delta_y^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_3 &= \frac{27\pi^6 C_1}{16L_{x0}^2 L_{y0}^4 \Gamma \delta_x^2 \delta_y^2} + \frac{243\pi^6 C_1}{16L_{x0}^4 L_{y0}^2 \Gamma \delta_x^2 \delta_y^2} + \frac{10935\pi^6 C_1}{32L_{x0}^6 \Gamma \delta_x^4} \\
&\quad + \frac{15\pi^6 C_1}{32L_{y0}^6 \Gamma \delta_y^4} + \frac{135\pi^6 C_1}{32L_{x0}^2 L_{y0}^4 \Gamma \delta_y^4} + \frac{1215\pi^6 C_1}{32L_{x0}^4 L_{y0}^2 \Gamma \delta_x^4} \\
\beta_4 &= \frac{27\pi^6 C_1}{32L_{x0}^4 L_{y0}^2 \Gamma \delta_x^4} + \frac{19683\pi^6 C_1}{32L_{x0}^2 L_{y0}^4 \Gamma \delta_y^4} + \frac{243\pi^6 C_1}{16L_{x0}^4 L_{y0}^2 \Gamma \delta_x^2 \delta_y^2} \\
&\quad + \frac{27\pi^6 C_1}{16L_{x0}^2 L_{y0}^4 \Gamma \delta_x^2 \delta_y^2} + \frac{2187\pi^6 C_1}{32L_{y0}^6 \Gamma \delta_y^4} + \frac{243\pi^6 C_1}{32L_{x0}^6 \Gamma \delta_x^4} \\
\beta_5 &= -\frac{729\pi^6 C_1}{64L_{x0}^6 \Gamma \delta_x^4} - \frac{729\pi^6 C_1}{64L_{y0}^6 \Gamma \delta_y^4} + \frac{675\pi^6 C_1}{32L_{x0}^4 L_{y0}^2 \Gamma \delta_x^2 \delta_y^2} \\
&\quad + \frac{1755\pi^6 C_1}{32L_{x0}^2 L_{y0}^4 \Gamma \delta_x^2 \delta_y^2} - \frac{2241\pi^6 C_1}{64L_{x0}^4 L_{y0}^2 \Gamma \delta_x^4} + \frac{12879\pi^6 C_1}{64L_{x0}^2 L_{y0}^4 \Gamma \delta_y^4} \\
\beta_6 &= \frac{2187\pi^6 C_1}{16L_{x0}^6 \Gamma \delta_x^4} + \frac{3321\pi^6 C_1}{8L_{x0}^4 L_{y0}^2 \Gamma \delta_x^2 \delta_y^2} + \frac{369\pi^6 C_1}{8L_{x0}^2 L_{y0}^4 \Gamma \delta_x^2 \delta_y^2} \\
&\quad + \frac{243\pi^6 C_1}{16L_{y0}^6 \Gamma \delta_y^4} + \frac{2187\pi^6 C_1}{16L_{x0}^2 L_{y0}^4 \Gamma \delta_y^4} + \frac{243\pi^6 C_1}{16L_{x0}^4 L_{y0}^2 \Gamma \delta_x^4} \\
\beta_7 &= \frac{175\pi^8 C_1}{2048L_{y0}^8 \Gamma \delta_y^6} + \frac{1148175\pi^8 C_1}{2048L_{x0}^8 \Gamma \delta_x^6} + \frac{127575\pi^8 C_1}{2048L_{x0}^6 L_{y0}^2 \Gamma \delta_x^6} + \frac{1575\pi^8 C_1}{2048L_{x0}^2 L_{y0}^6 \Gamma \delta_y^6} \\
&\quad + \frac{32805\pi^8 C_1}{2048L_{x0}^6 L_{y0}^2 \Gamma \delta_x^4 \delta_y^2} + \frac{3645\pi^8 C_1}{2048L_{x0}^4 L_{y0}^4 \Gamma \delta_x^4 \delta_y^2} + \frac{3645\pi^8 C_1}{2048L_{x0}^4 L_{y0}^4 \Gamma \delta_x^2 \delta_y^4} \\
&\quad + \frac{405\pi^8 C_1}{2048L_{x0}^2 L_{y0}^6 \Gamma \delta_x^2 \delta_y^4} \\
\beta_8 &= \frac{891\pi^8 C_1}{512L_{x0}^6 L_{y0}^2 \Gamma \delta_x^4 \delta_y^2} + \frac{8019\pi^8 C_1}{512L_{x0}^4 L_{y0}^4 \Gamma \delta_x^2 \delta_y^4} + \frac{13851\pi^8 C_1}{512L_{x0}^2 L_{y0}^6 \Gamma \delta_x^2 \delta_y^4} \\
&\quad - \frac{2781\pi^8 C_1}{512L_{x0}^4 L_{y0}^4 \Gamma \delta_x^4 \delta_y^2} + \frac{905\pi^8 C_1}{512L_{x0}^6 L_{y0}^2 \Gamma \delta_x^6} + \frac{688905\pi^8 C_1}{512L_{x0}^2 L_{y0}^6 \Gamma \delta_y^6} \\
&\quad + \frac{945\pi^8 C_1}{512L_{x0}^8 \Gamma \delta_x^6} + \frac{76545\pi^8 C_1}{512L_{y0}^8 \Gamma \delta_y^6} \\
\beta_9 &= -\frac{54675\pi^8 C_1}{1024L_{y0}^8 \Gamma \delta_y^6} - \frac{6075\pi^8 C_1}{1024L_{x0}^8 \Gamma \delta_x^6} + \frac{158679\pi^8 C_1}{1024L_{x0}^2 L_{y0}^6 \Gamma \delta_x^2 \delta_y^4} \\
&\quad - \frac{9801\pi^8 C_1}{1024L_{x0}^4 L_{y0}^4 \Gamma \delta_x^4 \delta_y^2} + \frac{351\pi^8 C_1}{1024L_{x0}^6 L_{y0}^2 \Gamma \delta_x^4 \delta_y^2} + \frac{47871\pi^8 C_1}{1024L_{x0}^4 L_{y0}^4 \Gamma \delta_x^2 \delta_y^4} \\
&\quad + \frac{965925\pi^8 C_1}{1024L_{x0}^2 L_{y0}^6 \Gamma \delta_y^6} - \frac{18675\pi^8 C_1}{1024L_{x0}^6 L_{y0}^2 \Gamma \delta_x^6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{10} = & \frac{32805\pi^8 C_1}{512L_{y0}^8 \Gamma \delta_y^6} + \frac{4455\pi^8 C_1}{512L_{x0}^4 L_{y0}^4 \Gamma \delta_x^4 \delta_y^2} + \frac{40095\pi^8 C_1}{512L_{x0}^6 L_{y0}^2 \Gamma \delta_x^4 \delta_y^2} \\
& + \frac{535815\pi^8 C_1}{512L_{x0}^4 L_{y0}^4 \Gamma \delta_x^2 \delta_y^4} + \frac{59535\pi^8 C_1}{512L_{x0}^2 L_{y0}^6 \Gamma \delta_x^2 \delta_y^4} + \frac{3645\pi^8 C_1}{512L_{x0}^6 L_{y0}^2 \Gamma \delta_x^6} \\
& + \frac{32805\pi^8 C_1}{512L_{x0}^8 \Gamma \delta_x^6} + \frac{295245\pi^8 C_1}{512L_{x0}^2 L_{y0}^6 \Gamma \delta_y^6} \\
\beta_{11} = & \frac{15129\pi^8 C_1}{1024L_{x0}^2 L_{y0}^6 \Gamma \delta_x^2 \delta_y^4} + \frac{123201\pi^8 C_1}{1024L_{x0}^6 L_{y0}^2 \Gamma \delta_x^4 \delta_y^2} + \frac{167049\pi^8 C_1}{1024L_{x0}^4 L_{y0}^4 \Gamma \delta_x^4 \delta_y^2} \\
& + \frac{224721\pi^8 C_1}{1024L_{x0}^4 L_{y0}^4 \Gamma \delta_x^2 \delta_y^4} - \frac{172125\pi^8 C_1}{1024L_{x0}^6 L_{y0}^2 \Gamma \delta_x^6} + \frac{70875\pi^8 C_1}{1024L_{x0}^2 L_{y0}^6 \Gamma \delta_y^6} \\
& - \frac{91125\pi^8 C_1}{1024L_{x0}^8 \Gamma \delta_x^6} - \frac{10125\pi^8 C_1}{1024L_{y0}^8 \Gamma \delta_y^6} \\
\beta_{12} = & \frac{55161\pi^8 C_1}{512L_{x0}^4 L_{y0}^4 \Gamma \delta_x^4 \delta_y^2} + \frac{379809\pi^8 C_1}{512L_{x0}^6 L_{y0}^2 \Gamma \delta_x^4 \delta_y^2} + \frac{4449\pi^8 C_1}{512L_{x0}^2 L_{y0}^6 \Gamma \delta_x^2 \delta_y^4} \\
& + \frac{65961\pi^8 C_1}{512L_{x0}^4 L_{y0}^4 \Gamma \delta_x^2 \delta_y^4} + \frac{25515\pi^8 C_1}{512L_{x0}^6 L_{y0}^2 \Gamma \delta_x^6} + \frac{18315\pi^8 C_1}{512L_{x0}^2 L_{y0}^6 \Gamma \delta_y^6} \\
& + \frac{2835\pi^8 C_1}{512L_{y0}^8 \Gamma \delta_y^6} + \frac{229635\pi^8 C_1}{512L_{x0}^8 \Gamma \delta_x^6}
\end{aligned}$$

در ادامه، پاسخ سیستم بر اساس روش مقیاس‌های چندگانه برای معادلات (۴-۵) و (۴-۶) به‌صورت زیر بسط داده می‌شود:

$$W_1(t, \varepsilon) = \varepsilon W_{11}(T_0, T_2) + \varepsilon^3 W_{13}(T_0, T_2) + \dots \quad (۸-۴)$$

$$W_2(t, \varepsilon) = \varepsilon W_{21}(T_0, T_2) + \varepsilon^3 W_{23}(T_0, T_2) + \dots \quad (۹-۴)$$

که مقیاس T_1 به دلیل اثر غیرخطی در $O(\varepsilon^3)$ از روابط (۴-۸) و (۴-۹) حذف شده است. دو مقیاس زمانی T_0 و T_2 به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$T_n = \varepsilon^n t, \quad n = 0, 2 \quad (۱۰-۴)$$

با جایگذاری روابط (۴-۸) و (۴-۹) در (۴-۵) و (۴-۶) و برابر صفر قرار دادن ضرایب مختلف ε و ε^3 ، معادلات زیر به دست می‌آیند:

برای ε :

$$\begin{aligned} D_0^2 W_{11} + \omega_1^2 W_{11} &= \eta_1 P_0 \cos(\Omega T_0 + \tau_1) \\ D_0^2 W_{21} + \omega_2^2 W_{21} &= \eta_2 P_0 \cos(\Omega T_0 + \tau_2) \end{aligned} \quad (۱۱-۴)$$

برای ε^3 :

$$\begin{aligned} D_0^2 W_{13} + \omega_1^2 W_{13} &= -2D_0 D_2 W_{11} - \mu_1 D_0 W_{11} \\ &\quad - \alpha_1 W_{11}^3 - \alpha_2 W_{11} W_{21}^2 \\ D_0^2 W_{23} + \omega_2^2 W_{23} &= -2D_0 D_2 W_{21} - \mu_2 D_0 W_{21} \\ &\quad - \beta_1 W_{21}^3 - \beta_2 W_{21} W_{11}^2 \end{aligned} \quad (۱۲-۴)$$

که در روابط بالا:

$$D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}, \quad n = 0, 2 \quad (۱۳-۴)$$

جواب عمومی معادلات (۱۱-۴) به صورت زیر ارائه شده است:

$$\begin{aligned} W_{11} &= A_1(T_2) e^{i\omega_1 T_0} + \Lambda_1(T_2) e^{i(\Omega T_0 + \tau_1)} + c.c. \\ W_{21} &= A_2(T_2) e^{i\omega_2 T_0} + \Lambda_2(T_2) e^{i(\Omega T_0 + \tau_2)} + c.c. \end{aligned} \quad (۱۴-۴)$$

که $c.c$ در معادله‌ی بالا، جمله‌ی مربوط به مزدوج مختلط می‌باشد. همچنین $\Lambda_i (i = 1, 2)$ به صورت

زیر ارائه می‌گردد:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \frac{\eta_1 P_0}{2(\omega_1^2 - \Omega^2)} \\ \Lambda_2 &= \frac{\eta_2 P_0}{2(\omega_2^2 - \Omega^2)} \end{aligned} \quad (۱۵-۴)$$

۴-۱-۲-۱ رزونانس $\Omega \approx 2\omega_2 + \omega_1$

در این بخش، برای تحلیل رزونانس ثانویه $\Omega \approx 2\omega_2 + \omega_1$ ، پارامتر تنظیم σ معرفی می‌گردد که نزدیک بودن Ω به $2\omega_2 + \omega_1$ را بیان می‌کند. بنابراین، فرکانس تحریک به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\Omega = 2\omega_2 + \omega_1 + \varepsilon^2 \sigma \quad (۱۶-۴)$$

حال روابط (۱۴-۴) و (۱۶-۴) در (۱۲-۴) جایگذاری می‌گردند و برای حذف جملاتی که منجر به ایجاد جمله‌ی نامحدود و سکولار در پاسخ سیستم می‌شوند، ضرایب $\exp(i\omega_1 T_0)$ و $\exp(i\omega_2 T_0)$ به صورت زیر برابر صفر قرار داده می‌شوند:

$$2i\omega_1 A'_1 + A_1(i\mu_1\omega_1 + 6\Lambda_1^2\alpha_1 + 3A_1\bar{A}_1\alpha_1 + 2\alpha_2 A_2\bar{A}_2 + 2\Lambda_2^2\alpha_2) + \Lambda_1 e^{i(\sigma T_2 + \tau_1)} \bar{A}_2^2 \alpha_2 = 0 \quad (۱۷-۴)$$

$$2i\omega_2 A'_2 + A_2(i\omega_2\mu_2 + 2\beta_2\Lambda_1^2 + 2\beta_2 A_1\bar{A}_1 + 3A_2\bar{A}_2\beta_1 + 6\beta_1\Lambda_2^2) + 2\Lambda_1\bar{A}_1\bar{A}_2 e^{i(\sigma T_2 + \tau_1)} \beta_2 = 0$$

برای حل معادله‌ی (۱۷-۴)، A به شکل قطبی زیر تعریف می‌گردد:

$$A_1 = \frac{1}{2} a_1 e^{i\theta_1}, \quad \bar{A}_1 = \frac{1}{2} a_1 e^{-i\theta_1} \\ A_2 = \frac{1}{2} a_2 e^{i\theta_2}, \quad \bar{A}_2 = \frac{1}{2} a_2 e^{-i\theta_2} \quad (۱۸-۴)$$

که $a_1(T_2)$ ، $\theta_1(T_2)$ ، $a_2(T_2)$ و $\theta_2(T_2)$ حقیقی می‌باشند.

با جایگذاری معادله‌ی (۱۸-۴) در رابطه‌ی (۱۷-۴) و سپس جداسازی بخش‌های حقیقی و موهومی و برابر صفر قرار دادن آن‌ها، روابط زیر حاصل می‌شوند:

$$a'_1 = -\frac{1}{2} a_1 \mu_1 - \frac{\Lambda_1 a_2^2 \alpha_2}{4\omega_1} \sin(-2\theta_2 - \theta_1 + \sigma T_2 + \tau_1) \quad (۱۹-۴)$$

$$a_1 \theta'_1 = \frac{a_1}{\omega_1} \left(3\Lambda_1^2 \alpha_1 + \frac{1}{4} a_2^2 \alpha_2 + \frac{3}{8} \alpha_1 a_1^2 + \Lambda_2^2 \alpha_2 \right) + \frac{\Lambda_1 a_2^2 \alpha_2}{4\omega_1} \cos(-2\theta_2 - \theta_1 + \sigma T_2 + \tau_1) \quad (۲۰-۴)$$

$$a'_2 = -\frac{1}{2} a_2 \mu_2 - \frac{\Lambda_1 a_1 a_2 \beta_2}{2\omega_2} \sin(-2\theta_2 - \theta_1 + \sigma T_2 + \tau_1) \quad (۲۱-۴)$$

$$a_2 \theta'_2 = \frac{a_2}{2\omega_2} \left(2\beta_2 \Lambda_1^2 + \frac{3}{4} a_2^2 \beta_1 + \frac{1}{2} \beta_2 a_1^2 + 3\beta_1 \Lambda_2^2 \right) + \frac{\Lambda_1 a_1 a_2 \beta_2}{2\omega_2} \cos(-2\theta_2 - \theta_1 + \sigma T_2 + \tau_1) \quad (۲۲-۴)$$

زاویه فاز جدید (γ) به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\gamma = -2\theta_2 - \theta_1 + \sigma T_2 + \tau_1 \quad (۲۳-۴)$$

بنابراین، معادلات (۴-۱۹) تا (۴-۲۲) به صورت سیستم خودگردان زیر تبدیل می گردند:

$$a'_1 = -\frac{1}{2}a_1\mu_1 - \frac{\Lambda_1 a_2^2 \alpha_2}{4\omega_1} \sin\gamma \quad (۴-۲۴)$$

$$a_1\gamma' = \left(\sigma - \frac{3\Lambda_1^2 \alpha_1}{\omega_1} - \frac{\Lambda_2^2 \alpha_2}{\omega_1}\right)a_1 - \frac{a_1 a_2^2 \alpha_2}{4\omega_1} - \frac{3\alpha_1 a_1^3}{8\omega_1} - \frac{\Lambda_1 a_2^2 \alpha_2}{4\omega_1} \cos\gamma \quad (۴-۲۵)$$

$$a'_2 = -\frac{1}{2}a_2\mu_2 - \frac{\Lambda_1 a_1 a_2 \beta_2}{2\omega_2} \sin\gamma \quad (۴-۲۶)$$

$$a_2\gamma' = \left(\sigma - \frac{2\Lambda_1^2 \beta_2}{\omega_2} - \frac{3\Lambda_2^2 \beta_1}{\omega_2}\right)a_2 - \frac{3a_2^3 \beta_1}{4\omega_2} - \frac{a_2 \beta_2 a_1^2}{2\omega_2} - \frac{\Lambda_1 a_1 a_2 \beta_2}{\omega_2} \cos(\gamma) \quad (۴-۲۷)$$

هنگامی که $a'_n = \gamma' = 0$ باشد، حرکت حالت پایا رخ می دهد. لذا با برابر صفر قرار دادن آن ها، به توان

دو رساندن و سپس جمع دو طرف معادلات بالا، معادلات پاسخ فرکانسی برای رزونانس $\Omega \approx 2\omega_2 + \omega_1$

به صورت زیر حاصل می گردند:

$$\left[\mu_1^2 + \left(\sigma - \frac{3\Lambda_1^2 \alpha_1}{\omega_1} - \frac{a_2^2 \alpha_2}{4\omega_1} - \frac{3\alpha_1 a_1^2}{8\omega_1} - \frac{\Lambda_2^2 \alpha_2}{\omega_1}\right)^2\right] 4a_1^2 = \frac{1}{4\omega_1^2} \Lambda_1^2 a_2^4 \alpha_2^2 \quad (۴-۲۸)$$

$$\left[\mu_2^2 + \left(\sigma - \frac{2\Lambda_1^2 \beta_2}{\omega_2} - \frac{3a_2^2 \beta_1}{4\omega_2} - \frac{\beta_2 a_1^2}{2\omega_2} - \frac{3\Lambda_2^2 \beta_1}{\omega_2}\right)^2\right] a_2^2 = \frac{\Lambda_1^2 a_2^4 \alpha_2^2}{\omega_2^2} \quad (۴-۲۹)$$

۴-۳ نتایج

۴-۳-۱ اعتبارسنجی تحلیل رزونانس $\Omega \approx 2\omega_2 + \omega_1$

در این بخش به منظور بررسی صحت نتایج، پاسخ های ارائه شده در این فصل با یکی از کارهای پیشین

در زمینه ارتعاش غشای مستطیلی هایپرالاستیک مقایسه شده است. بدین منظور، مقایسه ای بین

فرکانس های طبیعی به دست آمده در مطالعه ی حاضر و نتایج موجود در مرجع [۱۷] برای مدل مونی-

ریولین در جدول (۴-۱) ارائه شده است. همچنین مقایسه ای دیگر بین فرکانس های طبیعی در این

تحقیق و نتایج موجود در مرجع [۳۷] برای غشای نئو-هوکین با شرایط مرزی چهار لبه ثابت در جدول

(۲-۴) انجام شده است. ملاحظه می‌شود نتایج ارائه شده در این بخش با دقت مناسبی با نتایج موجود

در مراجع [۱۷] و [۳۷] مطابقت دارند.

جدول ۱-۴. مقایسه بین فرکانس‌های طبیعی غشای مستطیلی هایپرالاستیک بر حسب (rad/s)

($h = 0.001 \text{ m}, L_{xo} = 1.5 \text{ m}, L_{yo} = 1 \text{ m}, \Gamma = 1200 \text{ kg/m}^3, k_1 = 10^5 \text{ N/m}^3$

$C_1 = 0.1361 \text{ MPa}, C_2 = 0.00806 \text{ MPa}$).

δ_x	δ_y	$m = 1, n = 3$			$m = 3, n = 1$		
		پژوهش	مرجع [۱۷]	اختلاف (%)	پژوهش	مرجع [۱۷]	اختلاف (%)
۱/۰.۲	۱/۰.۲	۲۹۹/۴۳	۲۹۸/۶۹	۰/۲۵	۲۹۷/۱۰	۲۹۶/۷۰	۰/۱۳
۱/۰.۲	۱/۰.۵	۳۰۷/۷۶	۳۰۶/۴۳	۰/۴۳	۳۰۲/۷۳	۳۰۲/۱۵	۰/۱۹
۱/۰.۲	۱/۰.۸	۳۱۵/۳۵	۳۱۳/۵۳	۰/۵۷	۳۰۸/۱۳	۳۰۷/۳۹	۰/۲۴
۱/۰.۵	۱/۰.۲	۳۰۵/۹۲	۳۰۴/۸۸	۰/۳۴	۳۰۳/۳۹	۳۰۲/۷۰	۰/۲۳
۱/۰.۸	۱/۰.۲	۳۱۲/۰۹	۳۱۰/۷۹	۰/۴۲	۳۰۹/۳۰	۳۰۸/۳۶	۰/۳۰
۱/۱	۱/۱	۳۳۵/۱۷	۳۳۲/۷۲	۰/۷۳	۳۲۶/۹۹	۳۲۵/۶۷	۰/۴۰
۱/۱	۱/۵	۳۹۹/۲۸	۳۹۵/۴۱	۰/۹۷	۳۸۴/۲۳	۳۸۲/۸۵	۰/۳۶
۱/۵	۱/۵	۴۵۹/۹۹	۴۵۷/۵۶	۰/۵۳	۴۴۷/۵۰	۴۴۶/۱۷	۰/۲۹
۱/۵	۲/۰	۵۲۵/۰۲	۵۲۲/۸۵	۰/۴۱	۵۱۳/۱۸	۵۱۲/۸۳	۰/۰۷
۲/۰	۲/۰	۵۹۹/۴۴	۵۹۹/۲۳	۰/۰۴	۵۸۹/۱۵	۵۸۹/۰۴	۰/۰۲

جدول ۲-۴. مقایسه بین فرکانس‌های طبیعی غشای مستطیلی نئو-هوکین بر حسب (rad/s)

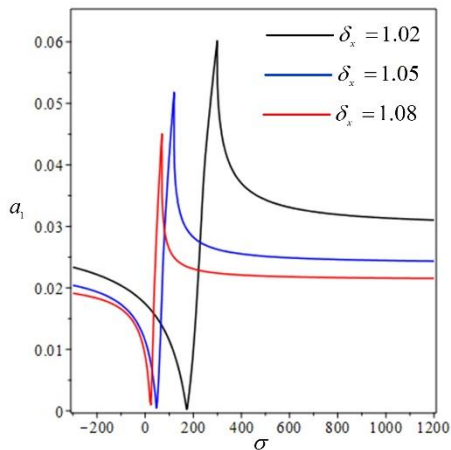
($h = 0.001 \text{ m}, L_{xo} = 1.5 \text{ m}, L_{yo} = 1 \text{ m}, \Gamma = 1200 \text{ kg/m}^3, C_1 = 0.17 \text{ MPa}$).

m	n	پژوهش	مرجع [۳۷]	اختلاف (%)
۱	۳	۱۶۲/۵۱	۱۶۲/۵۱	۰/۰۰
۳	۱	۱۱۸/۲۵	۱۱۸/۲۵	۰/۰۰

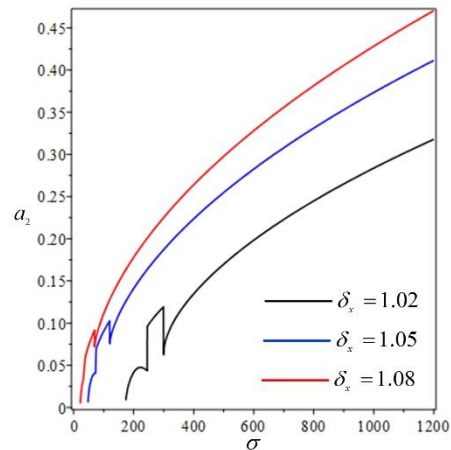
۴-۳-۲ تحلیل رزونانس $\Omega \approx 2\omega_2 + \omega_1$

اکنون در این بخش، به تحلیل رزونانس $\Omega \approx 2\omega_2 + \omega_1$ برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک پرداخته شده است. در ادامه اثر نرخ کشیدگی، دامنه تحریک خارجی و پارامترهای خطی و غیرخطی بستر الاستیک بر رفتار ارتعاشی غشا بررسی می‌گردد. همچنین مطابق جدول (۳-۲) در فصل قبل، مشخصات هندسی و پارامترهای مشخص غشا، جهت تحلیل رزونانس $\Omega \approx 2\omega_2 + \omega_1$ مورد استفاده قرار می‌گیرد. تأثیر مقادیر مختلف نرخ کشیدگی در راستای x (δ_x) در غیاب بستر الاستیک بر پاسخ دامنه-فرکانس رزونانس ثانویه $\Omega \approx 2\omega_2 + \omega_1$ غشای مستطیلی هایپرالاستیک، در شکل (۴-۱) نمایش داده شده است. پاسخ فرکانسی برای مدهای اول ($(m,n) = (1,3)$) و دوم ($(m,n) = (3,1)$) به ترتیب در شکل‌های (۴-۱ الف) و (۴-۱ ب) نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، در مقادیر کم σ پدیده‌ی پرش اتفاق می‌افتد. با توجه به شکل (۴-۱ الف)، با افزایش δ_x ، پرش در نمودار کاهش می‌یابد و منحنی‌ها به سمت چپ منتقل می‌گردند. همچنین با افزایش مقادیر δ_x در شکل (۴-۱ ب)، رفتار سخت شونده‌ی در سیستم کاهش یافته است.

در شکل (۴-۲)، اثر مقادیر مختلف نرخ کشیدگی در راستای x (δ_x) در حضور جمله غیرخطی بستر الاستیک (k_3) بر پاسخ دامنه-فرکانس رزونانس $\Omega \approx 2\omega_2 + \omega_1$ ، بررسی شده است. با در نظر گرفتن پارامتر غیرخطی k_3 و مقایسه با شکل (۴-۱)، رفتار سخت‌شوندگی در سیستم افزایش یافته است و مقدار پرش کاهش می‌یابد. همچنین فاصله‌ی بین دو اکستریم در منحنی‌ها در شکل (۴-۲ ب) کاهش می‌یابد.



(الف)

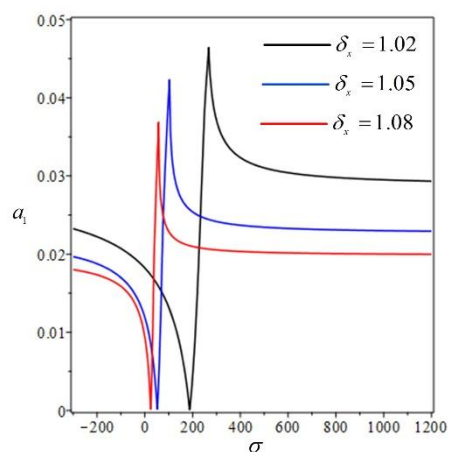


(ب)

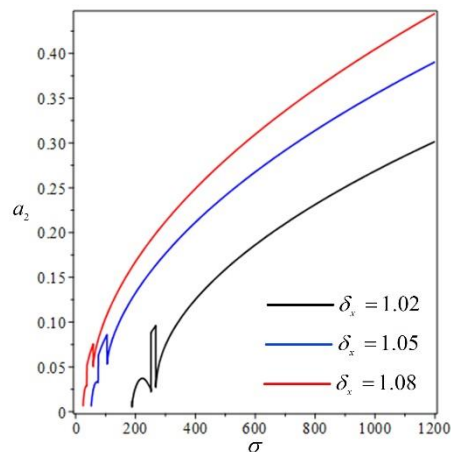
شکل ۴-۱. اثر مقادیر نرخ کشیدگی در راستای x در غیاب بستر الاستیک بر پاسخ دامنه-فرکانس رزونانس ثانویه

$$\Omega \approx 2\omega_2 + \omega_1 \text{ غشای مستطیلی هایپرالاستیک}$$

$$(k_1 = k_2 = k_3 = 0, \xi = 0.02, P_0 = 2500 \text{ N/m}^2, \delta_y = 1.02)$$



(الف)



(ب)

شکل ۴-۲. اثر مقادیر نرخ کشیدگی در راستای x در حضور جمله غیرخطی بستر الاستیک (k_3) بر پاسخ دامنه-فرکانس رزونانس ثانویه

$$\Omega \approx 2\omega_2 + \omega_1 \text{ غشای مستطیلی هایپرالاستیک}$$

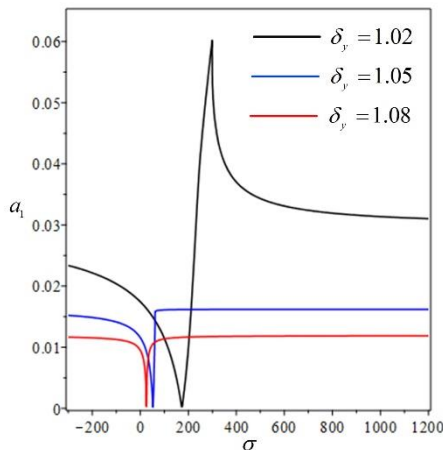
$$(k_1 = k_2 = 0, k_3 = 10^5, \xi = 0.02, P_0 = 2500 \text{ N/m}^2, \delta_y = 1.02)$$

اثر مقادیر نرخ کشیدگی در راستای y (δ_y) در غیاب بستر الاستیک بر پاسخ دامنه-فرکانس رزونانس

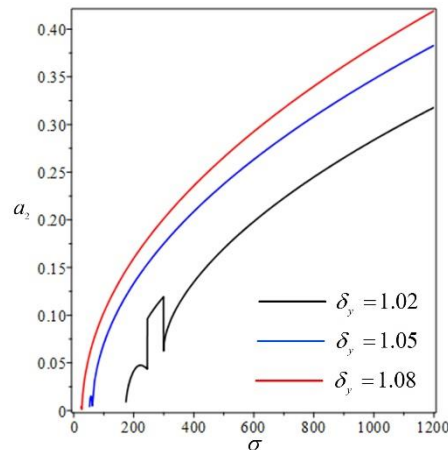
$\Omega \approx 2\omega_2 + \omega_1$ در شکل (۳-۴) نشان داده شده است. مشابه تحلیل اثر نرخ کشیدگی δ_x ، با افزایش

δ_y ، مقدار پرش و رفتار سخت‌شوندگی در سیستم کاهش یافته است. همچنین با توجه به شکل (۳-۴)

الف) و در مقایسه با تحلیل اثر δ_x ، مقدار دامنه ماکزیمم ارتعاشات به شدت به مقدار δ_y وابسته است، به طوری که با افزایش مقدار δ_y ، دامنه ماکزیمم ارتعاشات با شدت بیشتری کم می گردد.



(الف)



(ب)

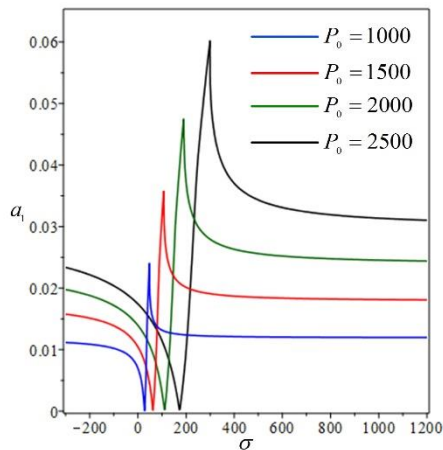
شکل ۴-۳. اثر مقادیر نرخ کشیدگی در راستای y در غیاب بستر الاستیک بر پاسخ دامنه-فرکانس رزونانس ثانویه

$$\Omega \approx 2\omega_2 + \omega_1 \text{ غشای مستطیلی هایپر الاستیک}$$

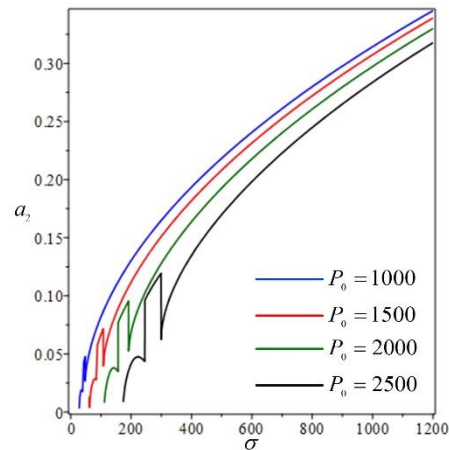
$$((k_1 = k_2 = k_3 = 0, \xi = 0.02, P_0 = 2500 \text{ N/m}^2, \delta_x = 1.02))$$

رفتار ارتعاشی غشا در اثر مقادیر مختلف دامنه تحریک خارجی (P_0) در شکل (۴-۴) قابل مشاهده می باشد. با توجه به شکل (۴-۴ الف) مشاهده می شود که با افزایش مقدار دامنه تحریک (P_0)، مقادیر پرش و دامنه ماکزیمم ارتعاشات در نمودار افزایش می یابد. همچنین افزایش مقدار P_0 ، باعث افزایش رفتار سخت شونده گی و فاصله بین دو اکسترمم در شکل (۴-۴ ب) می گردد.

در شکل (۴-۵)، اثر پارامتر سختی خطی وینکلر (k_1) بر پاسخ دامنه-فرکانس نشان داده شده است. همانگونه که در شکل (۴-۵ الف) مشاهده می شود، با افزایش k_1 ، مقدار پرش در نمودار کاهش می یابد. همچنین مشاهده می شود که با افزایش مقادیر k_1 در شکل (۴-۵ ب) و تمایل نمودار در کشش به محور $\sigma = 0$ ، رفتار سخت شونده گی نیز کاهش می یابد.



(الف)

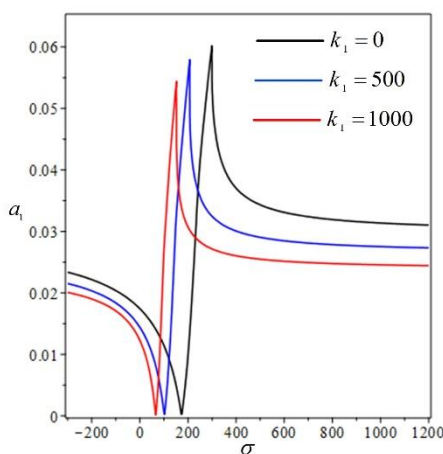


(ب)

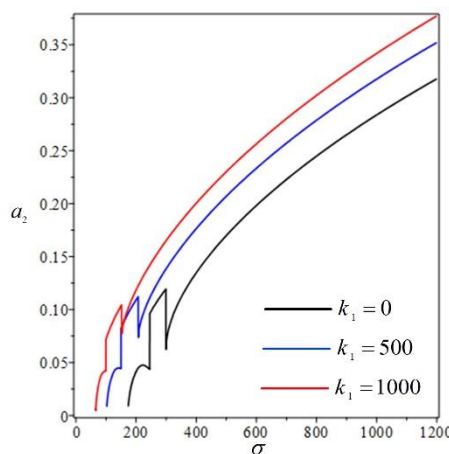
شکل ۴-۴ اثر مقادیر مختلف دامنه تحریک خارجی (P_0) بر پاسخ دامنه-فرکانس رزونانس ثانویه $\Omega \approx 2\omega_2 + \omega_1$

غشای مستطیلی هایپرالاستیک

$$(k_1 = k_2 = k_3 = 0, \xi = 0.02, \delta_x = \delta_y = 1.02)$$



(الف)



(ب)

شکل ۴-۵. اثر پارامتر سختی خطی وینکلر (k_1) بر پاسخ دامنه-فرکانس رزونانس ثانویه $\Omega \approx 2\omega_2 + \omega_1$ غشای

مستطیلی هایپرالاستیک

$$(k_2 = k_3 = 0, \xi = 0.02, \delta_x = \delta_y = 1.02, P_0 = 2500 \text{ N/m}^2)$$

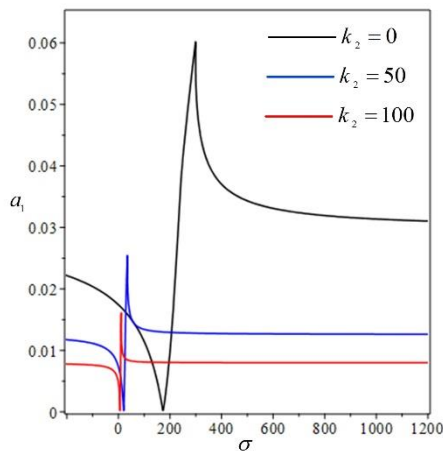
تأثیر پارامتر سختی خطی پسترناک (k_2) بر پاسخ دامنه-فرکانس رزونانس $\Omega \approx 2\omega_2 + \omega_1$ در

شکل (۴-۶) به خوبی قابل مشاهده و بررسی می‌باشد. همانطور که در شکل (۴-۶ الف) ملاحظه می‌گردد،

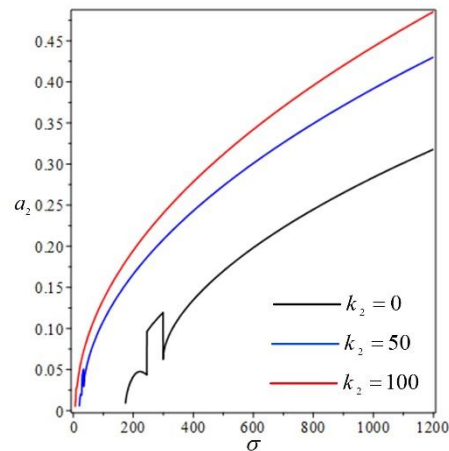
با حضور و افزایش مقادیر k_2 ، مقادیر پرش و دامنه ماکزیمم ارتعاشات در نمودار به شدت کاهش می‌یابد.

همچنین با توجه به شکل (۴-۶ ب)، با افزایش مقادیر k_2 و تمایل نمودار در کشش به محور $\sigma = 0$ ،

رفتار سخت‌شوندگی نیز کاهش می‌یابد.



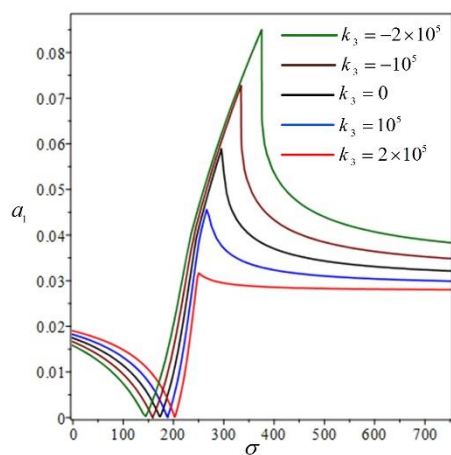
(الف)



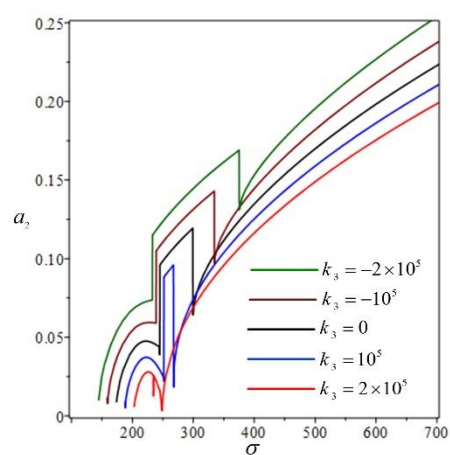
(ب)

شکل ۴-۶. اثر پارامتر سختی خطی پسترناک (k_2) بر پاسخ دامنه-فرکانس رزونانس ثانویه $\Omega \approx 2\omega_2 + \omega_1$ غشای مستطیلی هایپرالاستیک
 $(k_1 = k_3 = 0, \xi = 0.02, \delta_x = \delta_y = 1.02, P_o = 2500 \text{ N/m}^2)$

در شکل (۴-۷)، اثر مقادیر پارامتر سختی غیرخطی وینکлер (k_3) در غیاب پارامترهای خطی بستر بر پاسخ دامنه-فرکانس برای رزونانس $\Omega \approx 2\omega_2 + \omega_1$ بررسی شده است. با توجه به شکل (۴-۷ الف) مشاهده می‌شود که با افزایش مقادیر مثبت k_3 ، پُرش در نمودار کاهش می‌یابد. از طرفی دیگر با افزایش مقادیر منفی k_3 ، پُرش در نمودار افزایش می‌یابد. همچنین همانطور که در شکل (۴-۷ ب) ملاحظه می‌گردد، با افزایش مقادیر مثبت و منفی k_3 ، رفتار سخت‌شوندگی در نمودار به ترتیب افزایش و کاهش می‌یابد.



(الف)



(ب)

شکل ۷-۴ اثر پارامتر سختی غیرخطی وینکلر (k_3) بر پاسخ دامنه-فرکانس رزونانس ثانویه $\Omega \approx 2\omega_2 + \omega_1$

غشای مستطیلی هایپرالاستیک

$$(k_1 = k_2 = 0, \xi = 0.02, \delta_x = \delta_y = 1.02, P_0 = 2500 \text{ N/m}^2)$$

با بیان تحلیل‌های مربوط به رزونانس‌های مختلف حالت دو مود برای غشای مستطیلی هایپرالاستیک،

در فصل بعد، نتایج حاصل از تحلیل‌های به دست آمده برای این حالت ارائه شده‌اند.

فصل ۵ : نتایج و پیشنهادها

۵-۱ نتایج

در این پایان نامه، تحلیل ارتعاشات غیرخطی غشای مستطیلی هایپرالاستیک بر بستر الاستیک وینکلر-پسترناک، تحت فشار خارجی گسترده و یکنواخت بررسی شد. با استفاده از تئوری غشا با فرض تغییر شکل محدود و با تعیین تابع چگالی انرژی کرنشی مدل ساختاری هایپرالاستیک نئو-هوکین، انرژی جنبشی و کار ناشی از بارگذاری یکنواخت گسترده و فشار یکنواخت، با نظر گرفتن واکنش بستر الاستیک و اثر میرایی، به دست آمد. از اصل هامیلتون برای به دست آوردن معادلات دیفرانسیل حاکم سه بعدی استفاده شد. با استفاده از یکی از روش های مجزاسازی با عنوان روش گلرکین و با در نظر گرفتن خیز تک مود و دو مود، معادله حرکت غیرخطی با مشتقات جزئی در جهت عرضی حرکت به معادلات دیفرانسیل معمولی در حوزه ی زمان تبدیل گردید. سپس از روش مقیاس های چندگانه جهت حل معادله دیفرانسیل معمولی غیرخطی و تحلیل رزونانس های اولیه و ثانویه برای حالت های تک مود و دو مود استفاده شد. در نهایت، اثر پارامترهای مختلفی همچون نرخ کشیدگی، دامنه تحریک خارجی، ضریب میرایی (نسبت میرایی)، پارامترهای بستر الاستیک و همچنین اثر پارامتر تنظیم σ بر روی رفتار ارتعاشی غشای مستطیلی هایپرالاستیک در رزونانس های مختلف بررسی شد و منحنی ها و نمودارهای مختلف پاسخ فرکانسی به دست آمد. برخی از نتایج به دست آمده از این مطالعه برای دو حالت تک مود و دو مود به صورت زیر می باشند:

۵-۱-۱ نتیجه گیری بر اساس تک مود

۵-۱-۱-۱ رزونانس اولیه

- با افزایش ضریب پارامتر بستر غیرخطی، رفتار سخت شوندگی افزایش می یابد.
- افزایش دامنه تحریک موجب افزایش مقیاس نمودارها و در نتیجه افزایش مقدار پرش می شود.

- افزایش نسبت میرایی باعث کاهش دامنه و در نتیجه کاهش مقدار پرش می‌شود.
- با افزایش نرخ کشیدگی در راستای x در غیاب بستر الاستیک در رزونانس اولیه ارتعاشات، سخت‌شوندگی کاهش می‌یابد.
- در منحنی دامنه پاسخ-دامنه تحریک، با افزایش پارامتر تنظیم σ ، مقدار پرش نیز افزایش می‌یابد.

۵-۱-۱-۲ رزونانس‌های مافوق و مادون هارمونیک

- با افزایش نرخ کشیدگی در راستای x و y در غیاب بستر الاستیک در تمام رزونانس‌ها، سخت‌شوندگی در سیستم کاهش می‌یابد.
- غشا در حالت‌های بسترالاستیک غیرخطی و بستر الاستیک خطی به ترتیب دارای بیشترین و کمترین رفتار سخت‌شوندگی می‌باشد.
- در رزونانس‌های مختلف، افزایش مقدار k_1 (پارامتر بستر وینکلر) و k_2 (پارامتر بستر پسترناک) منجر به کاهش رفتار سخت‌شوندگی و پدیده پرش می‌شود.
- در رزونانس‌های مافوق و مادون هارمونیک ($\Omega \approx \frac{1}{3}\omega_0$) و ($\Omega \approx 3\omega_0$) با افزایش مقدار مثبت k_3 (پارامتر سختی غیرخطی)، سخت‌شوندگی افزایش می‌یابد و با افزایش مقدار منفی k_3 ، سخت‌شوندگی کاهش می‌یابد.
- در منحنی دامنه پاسخ-دامنه تحریک سیستم با افزایش پارامتر تنظیم σ ، مقدار پرش نیز افزایش می‌یابد.
- در منحنی دامنه پاسخ-دامنه تحریک سیستم با افزایش نرخ کشیدگی در راستای x و y در غیاب بستر الاستیک، مقدار پرش نیز افزایش می‌یابد.

۵-۱-۲ نتیجه گیری بر اساس دو مود

$$\Omega \approx 2\omega_2 + \omega_1 \text{ رزونانس}$$

- افزایش مقادیر نرخ کشیدگی در راستای x و y منجر به کاهش مقدار پرش و رفتار سخت‌شوندگی می‌شود.
- با در نظر گرفتن پارامتر غیرخطی بستر k_3 و مقایسه با حالت بدون بستر، رفتار سخت‌شوندگی و مقدار پرش به ترتیب افزایش و کاهش می‌یابد.
- ماکزیمم دامنه ارتعاشات به شدت به مقادیر مختلف نرخ کشیدگی در راستای y وابسته است. به طوری که افزایش مقادیر δ_y منجر به کاهش شدید ماکزیمم دامنه ارتعاشات می‌شود.
- با افزایش مقادیر دامنه تحریک خارجی، مقدار پرش، ماکزیمم دامنه ارتعاشات و همچنین رفتار سخت‌شوندگی در سیستم افزایش می‌یابد.
- افزایش مقادیر پارامتر سختی خطی وینکلر (k_1)، منجر به کاهش مقدار پرش و رفتار سخت‌شوندگی می‌شود.
- افزایش مقادیر پارامتر سختی خطی پسترناک (k_2)، منجر به کاهش شدید مقدار پرش، ماکزیمم دامنه ارتعاشات و رفتار سخت‌شوندگی می‌شود.
- افزایش مقادیر مثبت پارامتر غیرخطی بستر ($k_3 > 0$)، منجر به کاهش مقدار پرش و افزایش رفتار سخت‌شوندگی می‌شود. همچنین، افزایش مقادیر منفی پارامتر غیرخطی بستر ($k_3 < 0$)، منجر به افزایش مقدار پرش و کاهش رفتار سخت‌شوندگی می‌شود.

۵-۲ پیشنهادها

در ادامه‌ی زمینه‌ی تحقیقاتی پیشنهاد شده در این پایان نامه، می‌توان تحلیل را بر اساس موارد زیر در نظر گرفت:

- ۱- استفاده از دیگر مدل‌های ساختاری هایپرالاستیک، همچون مدل ساختاری مونی-ریولین
- ۲- در نظر گرفتن بسترهای الاستیک مختلف دیگر، همچون بستر کلوین، فیلوننکو-بورودیچ و ولاسوف
- ۳- تحلیل با شرط وجود یک گرادیان دما به صورت خطی و یا سهموی

مراج

[۱] شاه قلی، م، (۱۳۹۷) "ارتعاشات سیستم‌های پیوسته" جلد اول، چاپ اول، دانشگاه شهیدرجایی،

تهران

[۲] قارونی ح، (۱۳۹۸)، رساله‌ی دکتری تخصصی: "تحلیل الاستیک غیرخطی استوانه‌های ضخیم تحت

فشار با جدار متغیر از مواد هایپرالاستیک به کمک تئوری تغییر شکل برشی"، دانشکده مهندسی

مکانیک و مکاترونیک، دانشگاه صنعتی شاهرود.

[3] www.britannica.com/science/rubber-chemical-compound/Tapping-and-coagulation

[4] Mark J. E., Erman B., and Roland M. (2013), "*The science and technology of rubber*", Academic press.

[5] www.medium.com/@getwelsim/neo-hookean-hyperelastic-model-for-nonlinear-finite-element-analysis-16ac996aa507

[6] Treloar L. (1944) "Stress-strain data for vulcanized rubber under various types of deformation", *Rubber Chemistry and Technology*, **17**, **4**, pp **813-825**.

[7] Bower A. F. (2009), "*Applied mechanics of solids*", CRC Press.

[8] Marckmann G. and Verron E. (2006) "Comparison of hyperelastic models for rubber-like materials", *Rubber chemistry and technology*, **79**, **5**, pp **835-858**.

[9] Yeoh O. H. (1990) "Characterization of elastic properties of carbon-black-filled rubber vulcanizates", *Rubber chemistry and technology*, **63**, **5**, pp **792-805**.

[۱۰] حبیب‌زاده خامنه ص، (۱۳۹۷)، پایان‌نامه ارشد: "آنالیز ارتعاشی و حساسیت میکروسکوپ نیرو

اتمی با تیر از جنس ماده هایپرالاستیک"، دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک، دانشگاه صنعتی

شاهرود.

[11] Selvadurai A. (2006) "Deflections of a rubber membrane", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **54**, **6**, pp **1093-1119**.

- [12] Saccomandi G. and Ogden R. W. (2004), “*Mechanics and thermomechanics of rubberlike solids*”, Springer.
- [13] Breslavsky I. D., Amabili M., and Legrand M. (2014) “Nonlinear vibrations of thin hyperelastic plates”, *Journal of Sound and Vibration*, **333**, 19, pp **4668-4681**.
- [14] Zhang J., Xu J., Yuan X., Ding H., Niu D., and Zhang W. (2019) “Nonlinear vibration analyses of cylindrical shells composed of hyperelastic materials”, *Acta Mechanica Solida Sinica*, **32**, 4, pp **463-482**.
- [15] Gonçalves P. B., Soares R. M., and Pamplona D. (2009) “Nonlinear vibrations of a radially stretched circular hyperelastic membrane”, *Journal of Sound and Vibration*, **327**, 1-2, pp **231-248**.
- [16] Soares R. M. and Gonçalves P. B. (2012) “Nonlinear vibrations and instabilities of a stretched hyperelastic annular membrane”, *International Journal of Solids and Structures*, **49**, 3-4, pp **514-526**.
- [17] Soares R. M. and Gonçalves P. B. (2018) “Nonlinear vibrations of a rectangular hyperelastic membrane resting on a nonlinear elastic foundation”, *Meccanica*, **53**, 4-5, pp **937-955**.
- [18] Koivurova H. and Pramila A. (1997) “Nonlinear vibration of axially moving membrane by finite element method”, *Computational Mechanics*, **20**, 6, pp **573-581**.
- [19] Wu J.-m., Tian Z., Wang Y., and Guo X.-x., (2016) “Nonlinear vibration characteristics analysis of variable density printing moving membrane”, *Symposium on Piezoelectricity, Acoustic Waves, and Device Applications (SPAWDA)*, IEEE, pp. **407-410**.
- [20] Wu J., Shao M., Wang Y., Wu Q., and Nie Z. (2017) “Nonlinear vibration characteristics and stability of the printing moving membrane”, *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control*, **36**, 3, pp **306-316**.
- [21] Khan F., Sassani F., and Stoeber B. (2014) “Nonlinear behaviour of membrane type electromagnetic energy harvester under harmonic and random vibrations”, *Microsystem Technologies*, **20**, 7, pp **1323-1335**.
- [22] Sun X. and Zhang J.-z. (2016) “Nonlinear vibrations of a flexible membrane under periodic load”, *Nonlinear Dynamics*, **85**, 4, pp **2467-2486**.

- [23] Liu C.-j., Zheng Z.-L., Yang X.-Y., and ZHAO H. (2014) "Nonlinear damped vibration of pre-stressed orthotropic membrane structure under impact loading", *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, **14**, **01**, pp **1350055**.
- [24] Pamplona D. and Mota D. (2012) "Numerical and experimental analysis of inflating a circular hyperelastic membrane over a rigid and elastic foundation", *International Journal of Mechanical Sciences*, **65**, **1**, pp **18-23**.
- [25] Kerr A. (1984) "On the formal development of elastic foundation models", *Ingenieur-Archiv*, **54**, **6**, pp **455-464**.
- [26] Chien R. D. and Chen C. S. (2005) "Nonlinear vibration of laminated plates on a nonlinear elastic foundation", *Composite structures*, **70**, **1**, pp **90-99**.
- [27] Esfahani S., Kiani Y., and Eslami M. (2013) "Non-linear thermal stability analysis of temperature dependent FGM beams supported on non-linear hardening elastic foundations", *International Journal of Mechanical Sciences*, **69**, pp **10-20**.
- [28] Malekzadeh P. and Setoodeh A. (2007) "Large deformation analysis of moderately thick laminated plates on nonlinear elastic foundations by DQM", *Composite Structures*, **80**, **4**, pp **569-579**.
- [29] Santee D. M. and Gonçalves P. B. (2006) "Oscillations of a beam on a non-linear elastic foundation under periodic loads", *Shock and Vibration*, **13**, **4-5**, pp **273-284**.
- [30] Yuan X.-g., Zhang H.-w., Ren J.-s., and Zhu Z.-y. (2010) "Some qualitative properties of incompressible hyperelastic spherical membranes under dynamic loads", *Applied Mathematics and Mechanics*, **31**, **7**, pp **903-910**.
- [31] Changjun C. and Xinchun S. (1997) "The growth of the void in a hyperelastic rectangular plate under a uniaxial extension", *Applied Mathematics and Mechanics*, **18**, **7**, pp **615-621**.
- [32] Ren J.-s. (2008) "Dynamical response of hyper-elastic cylindrical shells under periodic load", *Applied Mathematics and Mechanics*, **29**, **10**, pp **1319**.
- [33] Green A. E. and Adkins J. E. (1960), "*Large elastic deformations and non-linear continuum mechanics*", Clarendon Press.
- [34] Chang-jun C. and Jiu-sheng R. (2003) "Transversely isotropic hyper-elastic material rectangular plate with voids under a uniaxial extension", *Applied Mathematics and Mechanics*, **24**, **7**, pp **763-773**.

- [35] Soares R. M. and Gonçalves P. B. (2014) “Large-amplitude nonlinear vibrations of a Mooney–Rivlin rectangular membrane”, *Journal of Sound and Vibration*, **333**, **13**, pp **2920-2935**.
- [36] Nayfeh A. H. and Mook D. T. (2008), “*Nonlinear oscillations*”, John Wiley & Sons.
- [37] Hagedorn P. and DasGupta A. (2007), “*Vibrations and waves in continuous mechanical systems*”, Wiley Online Library.

Abstract

In this thesis, the nonlinear vibrations of a rectangular hyperelastic membrane resting on nonlinear Winkler-Pasternak elastic foundation subjected to uniformly distributed external pressure is investigated. The membrane is composed of an incompressible, homogeneous and isotropic material. The elastic foundation includes two Winkler and Pasternak linear terms and a Winkler term with cubic nonlinearity. Using the theory of thin hyperelastic membrane assuming the finite deformations and Hamilton's principle, the governing equations are obtained. Also, according to the strain energy function for neo-Hookean hyperelastic constitutive law, the kinetic energy, the work of uniform distributed force and pressure and the effects of damping are determined. By applying Galerkin's method and considering the transverse displacement in one and two modes, the nonlinear partial differential equation of motion in the transversal direction is transformed to the ordinary differential equations. Then, utilizing the method of multiple scales, the primary and secondary resonances for the oscillations in one and two modes are analyzed. Finally, the effect of the various parameters such as the stretching ratios, excitation amplitude, damping ratio, stiffness parameters of the elastic foundation, and also the detuning parameter on the vibration behavior of a rectangular hyperelastic membrane is investigated.

Keywords: Rectangular hyperelastic membrane, Neo-Hookean constitutive model, Resonance analysis, Nonlinear Winkler-Pasternak elastic foundation, Primary resonance, Secondary resonance, Method of multiple scales



Faculty of Mechanics and Mechatronics Engineering

M.Sc. Thesis in Applied Design Engineering

**Nonlinear resonance analysis of rectangular hyperelastic
membrane resting on a nonlinear elastic foundation
subjected to external harmonic excitation**

By:

Sina Karimi

Supervisor:

Dr. Habib Ahmadi

February 2021