

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک

پایان نامه کارشناسی ارشد مهندسی هوافضا - سازه های هوایی

بررسی پدیده ی فروجهش روی یک کمان کم عمق با شرایط مرزی عمومی

نگارنده: محمد بوستانی

استاد راهنما

دکتر اردشیر کرمی محمدی

شهریور ۹۸

تقدیم به آن‌ها که راه زندگی را به من آموختند، عزیزانی که وجودم برایشان همه رنج بود و وجودشان
برایم همه مهر، مویشان سپیدی گرفت تا رویم سپید بماند، آنان که فروغ نگاهشان، گرمی کلامشان و
روشنی رویشان سرمایه‌های جاودانی زندگی‌ام بوده و خواهند بود. آنان که راستی قامت در شکستگی
قامتشان تجلی یافت. در برابر وجود گرمی‌شان زانوی ادب بر زمین می‌نهم و با دلی مملو از عشق و
محبت بر دستانشان بوسه می‌زنم.

تقدیم به مادر، پدر، خواهر عزیزم

تقدیم به همه‌ی کسانی که می‌اندیشند

تشکر و قدردانی:

مَنّت و سپاس، یزدان پاک را که در سایه‌ی رحمتش توانستم گامی به‌سوی تکامل برداشته و وجود خویش را به زینت علم بیارایم. باشد که به خود آیم، شاکر باشم و طریقی برگزینم تا ستایش و بندگی او را در صراط مستقیم برآورم و در خدمت خلق او باشم.

اکنون که به یاری خداوند متعال این پایان‌نامه به اتمام رسیده است، بر خود لازم می‌دانم از تمامی کسانی که به‌نوعی این‌جانب را در انجام پایان‌نامه یاری کرده‌اند، کمال تشکر را داشته باشم و ضمن سپاس فراوان از خانواده عزیزم، لازم می‌دانم از همه‌ی دوستان همیشه همراهم که هرگز فراموششان نخواهم کرد تشکر و قدردانی کرده و از درگاه خداوند متعال برای همه‌ی این بزرگواران آرزوی سعادت روزافزون دارم، همچنین از استاد فاضل و بزرگوارم جناب آقای دکتر کرمی محمدی که فراتر از یک استاد در کنارم بودند کمال تشکر و قدردانی را دارم.

تعمدنامه

اینجانب محمد بوستانی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی هوافضا- سازه‌های هوایی دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان‌نامه بررسی پدیده‌ی فروجهش روی یک کمان کم عمق با شرایط مرزی عمومی تحت راهنمایی دکتر اردشیر کرمی محمدی متعهد می‌شوم.

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « **Shahrood University of Technology** » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان‌نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان‌نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

چکیده:

تیرهای قوسی کم عمق یک المان سازه‌ای مهم در کاربرد سازه‌های مهندسی راه و ساختمان و مهندسی مکانیک و هوافضا می‌باشد. مشخصه مهم تیرهای قوسی کم عمق، تحت بارگذاری جانبی، ناپایداری آن‌ها در برابر نیروهای بحرانی است که در اثر آن سازه دستخوش یک جابه‌جایی بزرگ ناگهانی به سوی یک ساختار تعادلی جدید می‌شود که به اصطلاح فروجهش نامیده می‌شود.

در این تحقیق به بررسی نیروهای بحرانی استاتیکی و دینامیکی یک تیر قوسی کم عمق با شکل اولیه تابع سینوسی و تکیه‌گاه‌های عمومی (فقر) تحت یک بار نقطه‌ای ثابت پرداخته شده است.

روابط غیر خطی حاکم بر تیر قوسی کم عمق، با فرض تیر اویلر-برنولی به دست آمده و معادله حرکت آن با استفاده از یک معادله دیفرانسیلی-انتگرالی غیر خطی بیان شده و با در نظر گرفتن یک پاسخ فوریه کسینوسی و یک چند جمله‌ای کمکی به حل آن پرداخته شده است.

رویکرد اتخاذ شده برای تحلیل این مساله استفاده از انرژی کل سیستم و حساب تغییرات و انتگرال گیری جزء به جزء می‌باشد.

در پایان به مقایسه تأثیر انواع تکیه‌گاه بر نیروی بحرانی کمان پرداخته شده است.

واژه‌های کلیدی: تیر قوسی کم عمق، پدیده فروجهش، شرایط مرزی عمومی، نیروی بحرانی

استاتیکی، نیروی بحرانی دینامیکی، پایداری استاتیکی، پایداری دینامیکی

فهرست مطالب

فصل ۱: کلیات تحقیق

۱

۱-۱- تعریف موضوع ۲

فصل ۲: پیشینه تحقیق

۹

۱-۲- مروری بر کارهای گذشته ۱۰

فصل ۳: فرمولبندی مسأله

۱۹

۱-۳- مقدمه ۲۰

۲-۳- انرژی کل تیر قوسی ۲۲

۳-۳- سری فوریه‌ی اصلاح شده ۲۶

۴-۳- استخراج معادله حاکم با حساب تغییرات ۳۰

۲-۴-۳- کمانش استاتیک ۳۳

۲-۴-۲- ساده سازی معادلات ۳۵

۳-۴-۳- ناپایداری دینامیک ۵۰

فصل ۴: نتایج

۵۵

۱-۴- مقدمه ۵۶

۲-۴- نتایج ۵۶

پیوست

۶۵

فهرست اشکال

- شکل (۱-۱) مود کمانشی برای تیر قوسی دایروی ۴
- شکل (۲-۱) مود کمانشی برای تیر قوسی کم عمق ۴
- شکل (۱-۳) تیر قوسی کم عمق با بارگذاری متمرکز و تکیه گاه عمومی ۲۰
- شکل (۲-۳) تیر قوسی کم عمق با بارگذاری متمرکز و تکیه گاه الاستیک ۲۱
- شکل (۱-۴) صحت سنجی مدل دوبعدی با مدل عددی در آباکوس ۵۷
- شکل (۲-۴) پاسخ استاتیکی ناپایداری کمانش برای شرط مرزی دوسر در گیر ۵۸
- شکل (۳-۴) پاسخ استاتیکی ناپایداری کمانش برای شرط مرزی دوسر لولا ۵۹
- شکل (۴-۴) پاسخ استاتیکی ناپایداری کمانش برای شرط مرزی غیر خطی (فنر) در دو انتها ۶۰
- شکل (۵-۴) مقایسه پاسخ استاتیکی در سه حالت شرط مرزی ۶۱
- شکل (۶-۴) تغییرات U_p و $1U_p$ با بار اعمالی برای نسبت های مختلف سختی برای کمان با شرط مرزی فنر در دو انتها برای ناپایداری دینامیکی ۶۱

Q^*	بار متمرکز
L	فاصله بین دو تکیه گاه
h	بیشینه مقدار ارتفاع اولیه مرکز تیر قوسی
a	ارتفاع سطح مقطع تیر
b	عرض سطح مقطع تیر
A	مساحت سطح مقطع تیر
x	مختصه افقی خط مرکز تیر قوسی
z	مختصه عمودی خط مرکز تیر قوسی
$w_0(x)$	معادله اولیه منحنی خط مرکز تیر
$w(x)$	معادله منحنی خط مرکز تیر بعد از بارگذاری
K_0	سفتی فنر پیچشی در $x=0$
K_1	سفتی فنر پیچشی در $x=L$
k_0	سفتی فنر خطی در $x=0$
k_1	سفتی فنر خطی در $x=L$
$u(x)$	جابه جایی افقی هر نقطه از صفحه میانی
ε_x	کرنش افقی
ε_{xm}	کرنش صفحه میانی
κ_x	تغییر انحنای صفحه میانی
P	نیروی محوری
M	ممان خمشی

E	مدول یانگ
I	ممان اینرسی سطح مقطع حول محور خنثی
U_m^*	چگالی انرژی کرنشی
U_b^*	چگالی انرژی خمشی
U_P^*	چگالی انرژی پتانسیل
U_{mT}^*	انرژی کل کششی
U_{bT}^*	انرژی کل خمشی
U_{PT}^*	انرژی کل پتانسیل
T^*	انرژی جنبشی
ρ	چگالی
V	حجم
U	انرژی پتانسیل کل
L^*	لاگرانژین
H	انتگرال همیلتون
D	سفتی پیچشی تیر
A_m	ثابت بسط فوریه
S(x)	چند جمله‌ای کمکی سری فوریه
δ	اپراتور تغییرات
U_s	انرژی کرنشی کمان تغییر شکل یافته
U_Q	انرژی پتانسیل متناسب با بار نقطه‌ای

فصل ۱: کلیات تحقیق

۱-۱- تعریف موضوع

تیر قوسی کم عمق به صورت گسترده در بناهای مهندسی راه و ساختمان یا به عنوان زیرسازه برای سازه‌های بسیار پیچیده در مهندسی مکانیک و هوافضا بکار برده می‌شود. در واقع تیرهای قوسی کم عمق، سازه‌های یک بعدی بسیار خمیده‌ای هستند که می‌توانند به عنوان انتقال دهنده نیرو در سیستم‌های سازه‌ای، نگه‌دارنده سازه‌های بام و گنبد، قطعه‌ی تقویتی برای خودرو و هواپیما، به عنوان تجهیزات الکترومکانیکی برای تغییر وضعیت بین چندین حالت تعادلی و یا به عنوان المان‌های مکانیکی در سوئیچ‌های حرارتی چند وضعیتی و سوئیچ‌های فشاری به کار روند. علاوه بر موارد فوق تیرهای قوسی همچنین می‌توانند به عنوان ایزولاسیون ارتعاشی^۱ و جاذب ارتعاشی^۲ استفاده شوند [۲-۳]. اگرچه تیرهای قوسی دارای فرم نسبتاً ساده‌ای هستند اما المان سازه‌ای بسیار مفیدی می‌باشند و همان‌گونه که ذکر شد کاربردهای متنوعی هم می‌توانند داشته باشند. علاوه بر این می‌توان از آن‌ها در درک و تحلیل بهتر سازه‌های پیچیده‌تر که شبیه تیر قوسی کم عمق هستند مانند پوسته‌های کم عمق و صفحات خمیده استفاده کرد.

دغدغه‌ی اصلی در رفتار تیرهای قوسی کم عمق تحت بارهای جانبی، ناپایداری آن‌ها در برابر نیروهای بحرانی است که می‌تواند سازه را تخریب یا شروع به جابه‌جایی به ساختار دیگری بکند. در واقع اگر میزان نیروی فشاری درونی تیرهای قوسی به بیش از حدی برسد در این صورت سازه دستخوش یک جابه‌جایی بزرگ ناگهانی به سوی یک ساختار تعادلی جدید می‌شود. این پدیده می‌تواند مطلوب (تغییر وضعیت سوئیچ) یا نامطلوب (فروپاشی گنبد یا خرپا) باشد.

زمانی که یک تیر قوسی کم عمق (یک تیر خمیده با انحنای کم) تحت یک نیروی عرضی در امتداد مرکز انحنای آن قرار می‌گیرد، نیرو محوری ایجاد شده تحت تاثیر خمش تیر، ممکن است منجر به

¹ Vibration isolation

² vibrations absorption

کمانش تیر شود؛ به طوری که انحنای اولیه‌ی تیر قوسی، معکوس گردد. نیروی عرضی بحرانی به ابعاد و صلبیت تیر، خاصیت فنریت تکیه‌گاه‌ها، نحوه‌ی توزیع نیرو و انحنای اولیه‌ی تیر قوسی کم عمق، وابسته است. حل عمومی این مساله با به کارگیری قوانین کمانش کلاسیک مبنی بر پایداری نسبت به جابه‌جایی‌های بسیار کوچک حول نقطه‌ی تعادل به دست می‌آید.

یک تیر قوسی شکل که تحت تاثیر نیروی عرضی قرار گرفته ممکن است در ناحیه‌ی الاستیک ناپایدار گردد. به طور کلی دو حالت برای کمانش تیرهای قوسی وجود دارد [۴]:

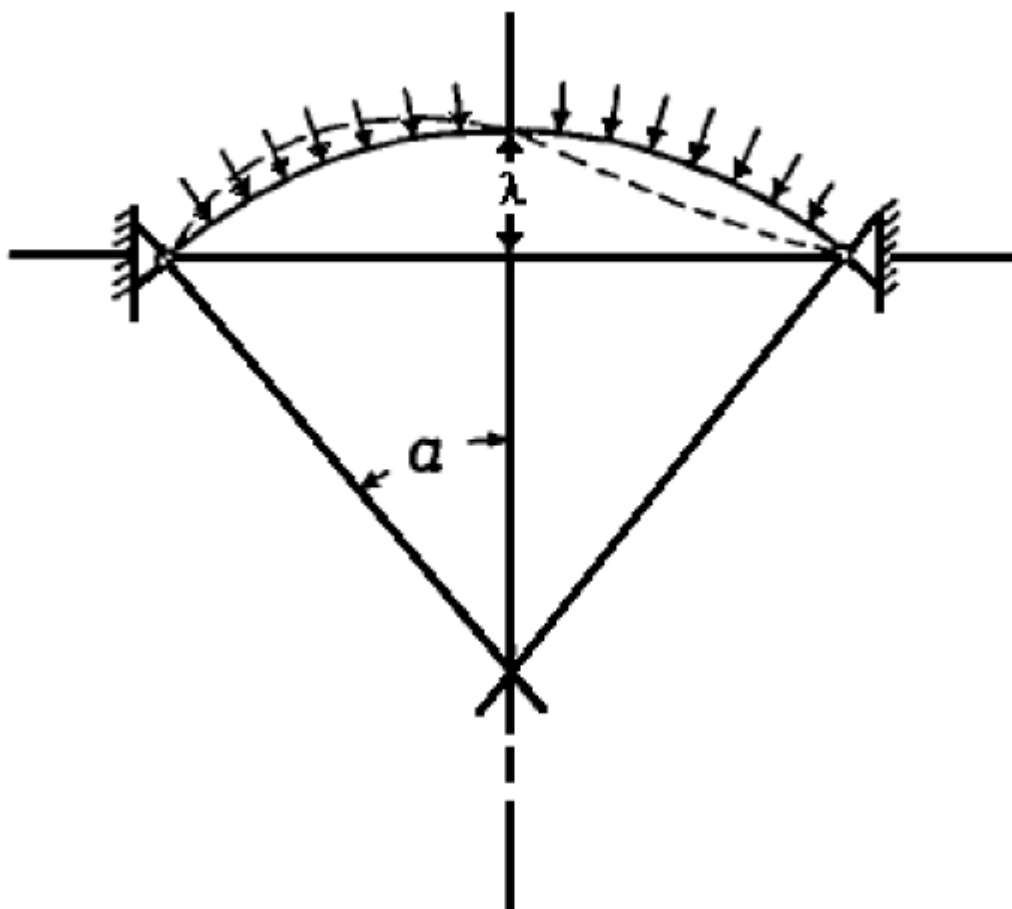
۱. اگر ارتفاع تیر قوسی؛ (شکل (۱-۱)) در مرتبه‌ی یکسان با فاصله‌ی دو تکیه‌گاه تیر قوسی باشد؛ بنابراین این امکان برای تیر قوسی وجود دارد که تحت فشار بحرانی در مود نشان داده شده (با نقطه چین در شکل) کمانش نماید. این نوع کمانش غیر کششی^۱ را می‌توان بی‌خطر فرض کرد. برای نمونه تیرهای قوسی دایروی تحت نیروی عرضی گسترده‌ی غیر یکنواخت با انواع گوناگون تکیه‌گاه‌ها را می‌توان برای این مدل در نظر گرفت.

۲. اگر ارتفاع یک تیر قوسی شکل بسیار کوچک‌تر از فاصله‌ی دو تکیه‌گاه آن باشد؛ که به تیر قوسی کم عمق^۲ معروف است (شکل (۲-۱)). نیروی محوری که به دلیل ثابت بودن دو انتهای تیر ایجاد می‌شود نقش مهمی در پایداری الاستیکی دارد. تیر ممکن است ناپایدار گردد و به طور ناگهانی معکوس انحنای اولیه گردد که در شکل (۲-۱) تغییر انحنای از خط ممتد به خط نقطه چین بیانگر این پدیده می‌باشد. در این حالت تغییر شکل کمانشی، کششی^۳ خواهد بود؛ این تغییر شکل در حالت اول غیر کششی می‌باشد.

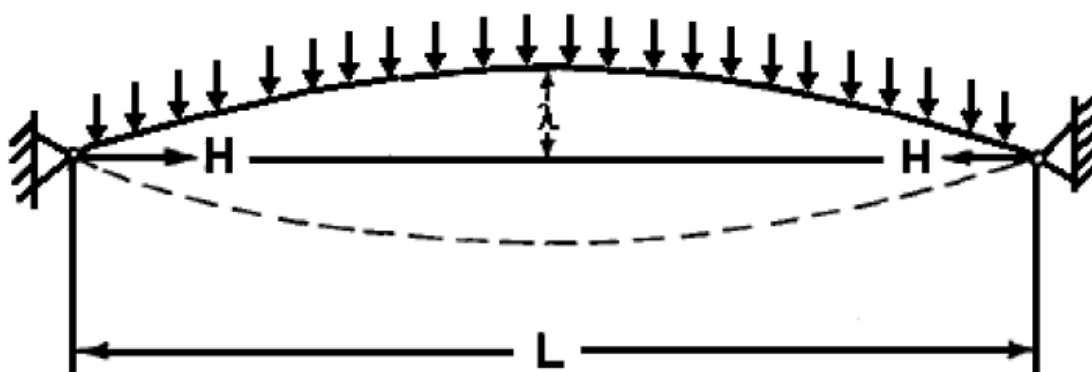
¹ inextentional

² Shallow arch

³ extensinal



شکل (۱-۱) مود کمانشی برای تیر قوسی دایروی



شکل (۲-۱) مود کمانشی برای تیر قوسی کم عمق

زمانی که نیروی عرضی یک تیر قوسی به مقدار بحرانی برسد فرم تغییر شکل یافته ممکن است دستخوش یک جهش ناگهانی شود؛ که فروجهش^۱ نامیده می‌شود. پژوهش‌ها در بررسی پایداری تیرهای قوسی کم عمق با توجه به چگونگی بار عرضی اعمال شده بر آن‌ها می‌تواند به دو دسته تقسیم بندی شود: پایداری استاتیکی و پایداری دینامیکی. در حالت پایداری استاتیکی فرض بر این است که بارگذاری عرضی در یک حالت شبه استاتیکی^۲ اعمال شده است. به علت رفتار غیرخطی تغییر شکل تیر قوسی، وضعیت‌های تعادلی پایدار چندگانه‌ای ممکن است وجود داشته باشد و ساختار تیر قوسی ممکن است از یک حالت تعادلی پایدار به حالت تعادلی پایدار دیگری جهش نماید.

زمانی که نیروهای عرضی به جای حالت شبه استاتیکی، به طور ناگهانی بکار برده شوند، این پدیده دینامیکی بوده و بسیار پیچیده‌تر می‌باشد. مهم‌تر این که؛ نیروهای بحرانی محاسبه شده متفاوت از حالت استاتیکی خواهد بود. برای مثال اگر یک نیروی عرضی به صورت ناگهانی اعمال شود، نیروی بحرانی دینامیکی حدود ۸۰٪ نیروی بحرانی استاتیکی خواهد بود [۵]. از سویی دیگر؛ اگر نیروی عرضی به صورت ناگهانی اعمال شود؛ فروجهش تیر قوسی نسبت به حالت شبه استاتیکی راحت‌تر اتفاق می‌افتد.

رفتار استاتیکی و دینامیکی تیرهای قوسی؛ هر دو؛ برای مهندسين حائز اهمیت است، زیرا تیر قوسی کم عمق یکی از ساده‌ترین نوع سازه‌های غیر خطی است که پدیده‌ی کمانش دینامیکی را به خوبی نشان می‌دهد. معادله‌ی حرکت کامل و مستقل از زمان برای تیر قوسی کم عمق با استفاده از یک معادله‌ی دیفرانسیل جزئی-انتگرالی غیر خطی بیان می‌شود. اگر از ترم‌های وابسته به زمان صرف نظر شود؛ معادله‌ی استاتیکی تعادل را نتیجه می‌دهد که می‌تواند به‌طور دقیق برای انواع مختلف بارگذاری و

¹ Snap-through buckling

² Quasi-static

شرایط مرزی حل شود. اما بدست آوردن شرایط لازم و کافی برای پایداری دینامیکی سخت است؛ زیرا مستلزم این است که یک انتگرال گیری کامل از معادله‌ی دیفرانسیلی-انتگرالی غیر خطی صورت پذیرد. در برآورد نیروهای بحرانی دینامیکی سازه‌های الاستیک؛ که به طور دینامیکی بارگذاری شده‌اند؛ به طور کلی راهکار استفاده شده در دو رویکرد می‌تواند دسته بندی شود:

رویکرد اول، استفاده از روش‌های عددی در تحلیل معادلات اینگونه سیستم‌ها است تا کمانش دینامیکی یک سازه تحت یک بار متداول دینامیکی برای انواع مقادیر پارامترهای نیرویی بررسی شود و پاسخ سازه سیستم در پایداری دینامیکی احراز گردد. پارامتر نیرویی که یک تغییر بزرگ در پاسخ ایجاد کند به عنوان نیروی بحرانی در نظر گرفته می‌شود. این رویکرد مستقیم نیازمند محاسبات زیادی در گستره‌ی وسیعی از محدوده‌ی تغییر پارامترهاست.

به منظور ساده سازی تحلیل عددی برای برای حل معادله‌ی دیفرانسیلی حرکت، یک سازه‌ی پیوسته باید به یک مدل با چند درجه آزادی تفکیک گردد [۶]. اغلب تعداد درجات آزادی که برای این سیستم-ها در نظر گرفته می‌شود زیاد بوده و محاسبات بسیاری لازم دارد که معمولاً هم وقت گیر است. هر چند تکنیک‌های کارآمد امروزی و کامپیوترها با سرعت بالا نیز در دسترس می‌باشند، اما دقت رویکرد عددی اغلب وابسته به تعداد درجات آزادی سیستم تقلیل یافته و روش محاسبه‌ی عددی اتخاذ شده؛ است. اگرچه روش‌های عددی در تحلیل‌های کمانش دینامیکی سودمند هستند؛ با این وجود؛ زمانی که نگرش عددی برای سیستم غیر خطی بکار برده می‌شود، پیچیدگی زیاد معادله‌ی دیفرانسیل حرکت مشکل ساز بوده و حل‌های عددی این چنین مسائلی با مقدار اولیه‌ی غیر خطی، کاملاً به شرایط اولیه حساس می‌باشند. بنابراین با توجه به مشکلاتی که روش‌های عددی دارند؛ ممکن است جوابی نامطمئن و یا حلی پر خطا حاصل شود.

رویکرد دوم، مطالعه‌ی انرژی کلی سیستم است که به عنوان روش انرژی نیز شناخته می‌شود. در این روش به دو روش به مطالعه‌ی سیستم پرداخته می‌شود. در روش اول به بررسی انرژی کلی سیستم در

صفحه‌ی فازی پرداخته می‌شود [۷] که شرایط بحرانی به مشخصات صفحه‌ی فازی سیستم وابسته هستند، در این روش با تعیین نقاط بحرانی از معادله‌ی حرکت، به بررسی این نقاط در صفحه‌ی فازی پرداخته می‌شود و اهمیت آن این است که با استفاده از آن کلیه‌ی شرایط کافی برای پایداری و ناپایداری دینامیکی را می‌توان تعیین کرد. در روش دوم که بر اساس اصل پایستاری انرژی استوار است [۸] با استفاده از معادله‌ی انرژی کلی سیستم به تعیین شرایط بحرانی و در نهایت تعیین نیروهای بحرانی می‌پردازد. مزیت اصلی این دیدگاه این است که معیاری برای تعیین نیروی بحرانی کمانش دینامیکی فراهم می‌کند و نیازی به حل معادله‌ی حرکت سیستم نیست.

بارگذاری اعمال شده‌ی ناگهانی به وسیله‌ی تغییرات سریع در مقدار آن مشخص می‌شود که نتایج آن در پاسخ سازه به طور چشمگیری بیشتر از بارگذاری تدریجی با مقدار مشابه می‌باشد. تغییر در مقدار نیرو، به اندازه‌ی کافی سریع باشد یا نه؛ به عنوان بار ناگهانی شناخته شده و به وسیله‌ی خیز بار کنترل می‌شود. زمانی که خیز بار کمتر از نیمی از دوره‌ی تناوب اصلی سیستم سازه باشد [۹]، نیرو به صورت ناگهانی اعمال شده است. روش‌های انرژی می‌توانند برای تحلیل پایداری دینامیکی سازه‌هایی که تحت بارگذاری ناگهانی چون حالت ضربه^۱، نیروی ثابت در زمان محدود؛ که در زمان $t=0$ به سازه به طور ناگهانی اعمال شده و در زمان $t>0$ حذف می‌گردد و اثر آن روی سازه باقی می‌ماند، بکار روند. بنابراین از رویکرد انرژی می‌توان در تحلیل کمانش دینامیکی تیرهای قوسی کم عمق که تحت بارگذاری ناگهانی قرار گرفته است نیز استفاده کرد. از این رو با توجه به ویژگی‌های این رویکرد نسبت به روش‌های عددی، در این تحقیق نیز از روش انرژی استفاده شده است.

همان طور که اشاره شد پارامتر نیرویی که یک تغییر زیاد در پاسخ ایجاد کند را بحرانی می‌نامند. پس از تخطی نیرو از سطح نیرویی بحرانی؛ تیر قوسی کم عمق به طور ناگهانی از یک حالت تعادلی پایدار به ساختار تعادلی پایدار غیر مجاور آن جهش می‌کند. این پدیده‌ی ناپایدار؛ فروجهش؛ نامیده می‌-

¹ impulse

شود که یک مشخصه‌ی مهم از تیرهای قوسی کم عمق می‌باشد. کمانش دینامیکی را می‌توان به صورت افزایش زیاد در جابه‌جایی در اثر کمی افزایش؛ در مقدار نیروی مستقل از زمان اعمال شده تعریف کرد. پدیده‌ی فروجهش با یک جهش ناگهانی از یک ساختار تعادلی به ساختار تعادلی دیگر مشخص می‌شود که این جابه‌جایی‌ها بزرگ‌تر از حالت اولیه هستند.

حال مساله‌ی کلی یک جسم الاستیک را در نظر بگیرید؛ که تحت اثر نیروی ضربه‌ای قرار گرفته است. جسم ممکن است یک بعدی، دو بعدی و یا سه بعدی باشد. نیروی ضربه‌ای مربوطه نیز یک نیرو، با توزیع فضایی یک بعدی، دو بعدی و یا سه بعدی خواهد بود. نیروی ضربه‌ای فرض شده؛ دارای مدت زمان اثر؛ بسیار کوتاهی است که در حالت ایده‌آل در ترم‌هایی از تابع دلتای دیراک زمانی نشان داده می‌شود و در $t=0$ به همه‌ی نقاط جسم اعمال می‌شود و یک توزیع سرعت با مقدار متناهی را به طور آنی به جسم وارد می‌کند. پس از آن؛ جسم تحت هیچ نیروی خارجی دیگری قرار نمی‌گیرد. در نتیجه مساله مورد نظر به مساله‌ی ارتعاش آزاد یک سیستم پیوسته با سرعت اولیه‌ی معین و جابه‌جایی اولیه‌ی صفر تبدیل می‌شود.

فصل ۲: پیشینه تحقیق

۲-۱- مروری بر کارهای گذشته

همان طور که در مقدمه بیان شد؛ تیرهای قوسی کم عمق، اجزای سازه‌ای مهمی هستند و مساله‌ی کمانش استاتیکی و دینامیکی آن‌ها توجه بسیاری از مهندسين و دانشمندان را به خود جلب کرده است. اولین مطالعات نظری بر روی نیروی بحرانی استاتیکی تیر قوسی توسط تیموشینکو^۱ در سال ۱۹۳۵ صورت گرفت [۱۱]، که تیرقوسی کم عمق سینوسی با تکیه‌گاه لولایی که تحت اثر بار گسترده‌ی یکنواخت عرضی به صورت استاتیکی قرار گرفته و دچار پدیده‌ی فروجهش شده بود را، مورد مطالعه قرار داده است. کار مقدماتی تیموشینکو توسط سایر پژوهشگران، به شرح زیر پیروی و بسط داده شد: پایداری استاتیکی تیر قوسی کم عمق با تکیه‌گاه لولایی با روشی جامع در سال ۱۹۵۲ توسط فونگ^۲ و کاپلن^۳ مطالعه شده است [۴]. در واقع با در نظر گرفتن تکیه‌گاه منعطف^۴ برای تیرقوسی کم عمق تحت تاثیر انواع مختلف نیروهای عرضی از قبیل یک بار متمرکز که بر روی نقطه‌ی میانی تیر قوسی عمل می‌کرد این پژوهش را بسط داد. جی‌جی‌سلویک^۵ و باندرا^۶ در سال ۱۹۶۲ [۱۲]، جنبه‌های مختلف کمانش تیرهای قوسی کم عمق و ناپایداری استاتیکی آن‌ها را مطالعه کردند و تئوری کاملی بر اساس روش انرژی و تحلیل تجربی روی یک تیر قوسی دایروی با دو انتهای گیردار و تحت نیروی متمرکز مرکزی، ارائه کردند. زمانی که نیروی عرضی به صورت دینامیکی اعمال شود؛ تحلیل مساله پیچیده‌تر می‌گردد. در مقدمه به دو رویکرد ارائه شده برای بدست آوردن نیروهای بحرانی دینامیکی اشاره شد.

¹ Timoshenko

² Fung

³ Kaplan

⁴ Flexibly

⁵ Gjelsvik

⁶ Bonder

در رویکرد اول معادلات حرکت به صورت عددی حل می‌شود تا پاسخ سیستم به دست آید و به وسیله-
ی آن نیروی بحرانی برای پارامترهای مشخص شده‌ی سیستم را تعیین کنند. در این زمینه
پژوهشگرانی به شرح زیر فعالیت نموده اند:

در سال ۱۹۶۶ هامفریز^۱ [۱۳]، به مطالعه‌ی عددی و آزمایشگاهی برای بررسی بحث فروجهش دینامیکی
یک تیر قوسی کم عمق دایروی با انواع بارگذاری تحت نیروی ضربه‌ای یکنواخت، نیروی پله و ضربه‌ی
مستطیلی پرداخت. معادله‌ی انتگرالی-دیفرانسیلی غیر خطی حرکت را برای هر دو تکیه‌گاه لولایی و
گیردار، به صورت عددی و با استفاده از روش گلرکین حل و مقادیر بار بحرانی برای فروجهش دینامیکی
به دست آورده است.

لاک^۲ در سال ۱۹۶۶ [۱۴]، به بررسی رفتار دینامیکی یک تیر قوسی کم عمق سینوسی با تکیه‌گاه‌های
لولایی که تحت تاثیر نیروی فشاری یکنواخت سینوسی پله‌ای قرار گرفته، پرداخته است. نیروی فشاری
بحرانی را به وسیله‌ی انتگرال گیری عددی از معادله‌ی حرکت و تحلیل پایداری بینهایت کوچک تعیین
کرده است و نتایج حاصل از هر دو روش را نیز، باهم مقایسه نموده است.

لویتاس^۳ و همکارانش در سال ۲۰۰۲ [۱۵]، کارهایی تئوری و آزمایشگاهی روی پاسخ‌های غیر خطی
دینامیکی، رفتار دینامیکی و پایداری دینامیکی تیرهای قوسی کم عمق انجام داده‌اند. در واقع با استفاده
از نگاشت سلولی پونکاره، به مطالعه پایداری دینامیکی کلی تیر قوسی کم عمق الاستیک که تحت
نیروی شعاعی یکنواخت ثابت قرار دارد، پرداخته اند. نگاشت سلولی یک ابزار عددی برای تحلیل کلی
سیستم‌های دینامیکی غیر خطی می‌باشد. حل ارائه شده از یک مدل دینامیکی شامل دو مود متقارن و
غیر متقارن تشکیل شده است. رفتار دینامیکی ناشی از اختلال جابه‌جایی و سرعت اعمال شده بررسی
گردیده و مقادیر ایمن از این اختلالات در مقابل کمانش تیر قوسی را بدست آورده‌اند.

¹ Humphreys

² Lock

³ Levitas

مالون^۱ و همکارانش در سال ۲۰۰۶ [6]، تاثیر انحنای اولیه‌ی تیر قوسی کم عمق نازک بر میزان نیروی کمانش ضربه‌ای دینامیکی را آزمایش کردند. با به کارگیری روش‌های عددی و یک مدل نیمه تحلیلی چند درجه آزادی، تحلیل‌های شبه استاتیکی و دینامیکی گذرای غیر خطی را انجام دادند تا نیروی کمانش دینامیکی را تعیین نمایند. اثر انواع پارامترها از قبیل مدت تحریک، دمپینگ و به ویژه شکل تیر قوسی را بررسی کردند. همچنین نتایج عددی و نتایج حاصل از مدل المان محدود را مقایسه کردند.

چن^۲ و رو^۳ در سال ۲۰۰۹ [۱۶]، پاسخ فروجهش دینامیکی یک تیر قوسی کم عمق سینوسی با تکیه‌گاه لولایی که تحت یک جفت گشتاور مساوی و مخالف هم در دو انتها و به صورت ناگهانی اعمال شده‌اند، را به صورت عددی و مقایسه با نتایج آزمایشگاهی، مورد بررسی قرار دادند. برای این منظور با مدل سازی آزمایشگاهی از تیر قوسی، هر دو انحراف استاتیکی و پاسخ دینامیکی آن را با بارگذاری مورد نظر اندازه‌گیری کرده و نتایج را با تحلیل عددی معادلات حرکت تعیین شده با استفاده از سری فوریه مقایسه کرده‌اند.

در سال ۲۰۱۳، چاندرا^۴ و همکارانش [۱۷] یک بررسی عددی بر رفتار دینامیکی یک تیر قوسی کم عمق سینوسی تحت بارگذاری سینوسی که پدیده‌ی فروجهش را تجربه کرده است را انجام داده‌اند. با بکارگیری ساختار معین و ساده سازی بارگذاری، مساله‌ی تیر قوسی را به صورت یک سیستم یک درجه آزادی با برخی از فرضیات مشخص، ساده نموده‌اند و نتایج مدل ساده شده را با نتایج حاصل از مدل المان محدود با جزئیات کامل مقایسه کرده‌اند. در این بررسی شرایط فروجهش و عدم فروجهش تیر قوسی را تحت بار وابسته‌ی زمانی، سینوسی تعیین کرده و پاسخ پس از فروجهش را نیز ارزیابی و مشخص کرده‌اند و نتیجه‌ی حاصل این بوده که، رفتار فروجهش تیر قوسی، احتمال شکست آن را افزایش می‌دهد.

¹ Mallon

² Chen

³ Ro

⁴ Chandra

رویکرد دوم که با عنوان روش‌های انرژی شناخته می‌شود؛ با مطالعه‌ی انرژی کل و صفحه‌ی فازی سیستم به بررسی پایداری دینامیکی سیستم‌های مورد مطالعه می‌پردازد. اولین محاسبه‌ی تئوری نیروی کمانش دینامیکی به وسیله‌ی هاف^۱ و بروس^۲ در سال ۱۹۵۴ [۱۸]، انجام شده است؛ که آن‌ها پایداری تیر قوسی سینوسی را تحت بارگذاری پله‌ی واحد و نیروی ضربه‌ای ایده‌آل مطالعه کردند.

سو^۳ و همکارانش از سال ۱۹۶۶ تا ۱۹۶۹ [۶-۱۹-۲۰]، تعدادی مقاله انتشار دادند که مسائل پایداری دینامیکی تیر قوسی سینوسی را با اثرات پارامترهای مختلف روی پایداری با تکیه‌گاه‌های منعطف تحت نیروی ضربه‌ای و سایر نیروهای زمانی مطالعه کردند. در واقع پایداری دینامیکی سیستم‌های پیوسته را با مطالعه رفتار خطوط سیر و استفاده از معیار انرژی در فضای حالت تابعی بررسی کردند و میزان بار بحرانی را برای انواع بارگذاری تعیین نمودند.

سیمتسز^۴ در سال ۱۹۹۰ [۸]، در کتاب خود یک نگاه جامع بر روی پایداری دینامیکی تیرهای قوسی کم عمق و همچنین سازه‌هایی دیگر چون پوسته‌ی استوانه‌ای و کلاhek کروی داشته است. در واقع با استفاده از رویکرد انرژی کل سیستم، حد بالایی و پایینی برای نیروی کمانش دینامیکی تیر قوسی کم عمق با شکل اولیه‌ی سینوسی و دارای تکیه‌گاه‌های لولایی یا گیردار که تحت بار ناگهانی سینوسی قرار دارد را بدست آورده است.

لین^۵ و چن^۶ در سال ۲۰۰۳ [۲۱]، به بررسی شرایط کافی در مقابل فروجهش دینامیکی برای تیر قوسی کم عمق با بارگذاری عرضی و تحت تاثیر حرکت انتهای تیر قوسی با سرعت معین نیز قرار دارد، پرداخته‌اند. برای این منظور به مقایسه‌ی انرژی کلی سیستم در حالتی که انتهای آن حرکت می‌کند با حالت تعادل پایدار پرداخته‌اند و یک کران پایین برای انرژی کلی سیستم و بار بحرانی بدست آورده‌اند.

¹ Hoff

² Bruce

³ Hsu

⁴ Simitses

⁵ Lin

⁶ Chen

در سال ۲۰۰۴ [۲۲] نیز رفتار دینامیکی یک تیر قوسی کم عمق تحت بار نقطه‌ای که با سرعت ثابت حرکت می‌کند را بررسی کرده‌اند. همچنین ثابت کردند که در حالت شبه استاتیکی نیروی بحرانی بیشتر از حالت دینامیکی بدست می‌آید و هنگامی که بار وارده بیشتر از حالت بار بحرانی دینامیکی باشد؛ یک محدوده‌ی سرعت وجود دارد که تیر قوسی در معرض کمانش دینامیکی قرار می‌گیرد؛ خواه بار همچنان روی تیر باشد یا آن را ترک کرده باشد. آن‌ها؛ برای تعیین شرایط این محدوده‌ی سرعت از مفاهیم انرژی کلی و انرژی بحرانی و انتگرال‌گیری عددی از معادلات حرکت استفاده کردند.

لین و چن در سال ۲۰۰۶ [۴]، یک تیر قوسی کم عمق که تحت تاثیر حرکت یک انتهای آن با سرعت ثابت قرار دارد و بدون بارگذاری عرضی است را در نظر گرفتند و پایداری دینامیکی آن را در مقابل فروجهش دینامیکی بررسی کردند و نشان دادند که در حالت شبه استاتیک (با نادیده گرفتن سرعت حرکت انتهای تیر قوسی) این پدیده رخ نخواهد داد و همچنین سرعت بحرانی آن را نیز با استفاده از روش انرژی به دست آوردند.

برسلاوسکی^۱ و همکارانش در سال ۲۰۰۸ [۲۳]؛ به تحلیل مودهای غیر خطی حرکت‌های فروجهش یک تیر قوسی کم عمق پرداختند. برای این منظور دینامیک تیر قوسی کم عمق را با سیستم دو درجه آزادی مدل کردند و با استفاده از روش‌های خطی سازی و دترمینان هیل^۲ به مطالعه‌ی مودهای غیر خطی پرداختند و نتایج تحلیلی را با اطلاعات بدست آمده از شبیه سازی عددی مقایسه کردند.

پی^۳ و برادفورد^۴ در سال ۲۰۱۰ [۲۴]، یک تحلیل غیر خطی از کمانش الاستیک صفحه‌ای یک تیر قوسی کم عمق دایروی با تکیه‌گاه‌های لولایی و گیردار را انجام دادند که تحت تاثیر هر دو نوع بارگذاری گرمایی یکنواخت و نیروی شعاعی یکنواخت قرار گرفته است. با استفاده از روش کار مجازی معادلات غیر خطی تعادل و معادلات دیفرانسیلی تعادل کمانشی را تعیین کردند و حلی تحلیلی برای محدوده‌ی

¹ Breslavsky

² Hill

³ Pi

⁴ Bradford

ناپایداری و نیروهای کمانش انشعابی ارائه نمودند. در سال ۲۰۱۲ [۲۵]، نیز مطالعه‌ای تحلیلی روی کمانش دینامیکی صفحه‌ای یک تیر قوسی کم عمق با تکیه‌گاه‌های مختلف اعم از لولایی، گیردار و لولایی-گیردار را تحت نیروی یکنواخت شعاعی که به صورت ناگهانی و در زمان نامحدود اعمال شده است، انجام دادند. با استفاده از اصل بقای انرژی، معیار کمانش دینامیکی تیر قوسی را تعیین کردند و حل تحلیلی برای نیروی کمانش دینامیکی را استخراج کردند. همچنین آن‌ها در سال ۲۰۱۳ [۲۶] با استفاده از رویکرد انرژی به بررسی پایداری صفحه‌ای غیر خطی تیر قوسی دایروی با پیش بار استاتیکی که دارای مانع‌های دورانی در انتهای آن است و تحت بارگذاری ناگهانی نیروی یکنواخت شعاعی با زمان نامحدود قرار دارد، پرداختند و حل‌های تحلیلی برای نیروی کمانش دینامیکی را استخراج کردند که قادر است، یک مفهوم دقیق، از رفتار پایداری دینامیکی تیر کم عمق را فرمول‌بندی کند. همچنین نشان دادند که تیر قوسی که به طور استاتیکی دارای پیش بار است، تحت بارگذاری دینامیکی بیشتر در خطر کمانش دینامیکی قرار دارند. نیروی کمانش تیرهای قوسی، به مقدار و تفاوت انعطاف موانع دورانی دو انتهای تیر وابسته است. چنانچه تیرهای قوسی که دارای موانع دورانی یکسانی هستند نیروهای بحرانی حد بالا و پایین دارند، در حالی که تیرهای قوسی که موانع دورانی غیر یکسانی دارند، تنها یک نیروی کمانش دینامیکی دارند.

در سال ۲۰۱۴ ها^۱ و همکارانش [۲۷] یک حل دقیق برای تیر قوسی که شکل اولیه و بار اعمالی آن با یک ترکیب خطی از توابع سینوسی معین می‌باشد را ارائه کردند. نیروی اعمالی را مستقل زمانی در نظر گرفتند و پایداری مجانبی تیر قوسی را تحلیل کردند. با استفاده از فضای هیلبرت^۲ به حل معادله‌ی حرکت اقدام و نقاط تعادلی را در حالت یک بعدی و دو بعدی بدست آوردند.

^۱ Ha

^۲ Hilbert space

عبدالجواد^۱ و همکارانش در سال ۲۰۱۳ [۲۸]، اثر دو پارامتر بستر الاستیک مدل پاسترناک^۲ را بر فروجهش استاتیکی و دینامیکی یک تیر قوسی کم عمق که تحت یک بار متمرکز با سرعت ثابت است را مطالعه کردند. تغییر شکل تیر قوسی را به وسیله‌ی سری‌های فوریه تعیین کردند و نشان دادند که برای تحلیل شبه استاتیکی و دینامیکی، چهار مود اول در بسط فوریه برای پیش بینی پاسخ تیر قوسی کافی هستند.

در سال‌های اخیر و با ساخت مواد مدرج تابعی^۳، پژوهش‌هایی نیز بر روی تیرهای قوسی با این مواد صورت گرفته است.

در سال ۲۰۰۵؛ راستگو و همکارانش [۲۹]، به بررسی نیروی کمانش گرمایی یک تیر خمیده از مواد مندرج تابعی با سطح مقطع متقارن دوجهته خمیده و بارگذاری حرارتی و شرایط تکیه‌گاهی لولایی پرداخته‌اند. در تحلیل پایداری فضایی تیر خمیده‌ی دایروی، انرژی کرنشی الاستیک و انرژی پتانسیل ناشی از بارگذاری گرمایی را؛ به وسیله‌ی اصل کار مجازی استخراج کردند. معادلات پایداری را با استفاده از اصل حساب تغییرات بدست آوردند و از روش گلرکین برای حل معادلات پایداری و تعیین نیروی کمانش گرمایی بحرانی استفاده کرده‌اند.

اکسی^۴ و شیرانگ^۵ در سال ۲۰۰۸ [۳۰]، بر اساس فرضیات کیرشهف و در نظر گرفتن موارد افزایش طول محوری، انحنای اولیه و کوپل خمش-کشش بر روی تیر قوسی تغییر شکل یافته، به صورت هندسی معادلات حاکم غیر خطی تیر قوسی با مواد مدرج تابعی و تحت بارگذاری مکانیکی و گرمایی را استخراج کردند. در این تحلیل مشخصات مواد تیر قوسی را فرض کرده‌اند که به صورت توانی در راستای ضخامت تغییر می‌کند و نیروی کمانش بحرانی و شکل موده‌های متناظر با تیر قوسی شبه

¹ Abdelgawad

² Pasternak model

³ Functionally graded material (FGM)

⁴ Xi

⁵ Shirong

دایروی و دارای تکیه‌گاه‌های گیردار را با روش عددی شوتینگ^۱ بدست آوردند و اثرات تغییر در مشخصات مواد را روی بارهای بحرانی و تغییر شکل سازه بررسی کردند.

عطایی و همکارانش در سال ۲۰۱۲ [۳۱]، یک تیر قوسی کم عمق با مدول الاستیسیته‌ای که در طول ضخامت یا در راستای طولی و یا هر دو جهت تغییر می‌کند و تحت بارگذاری یکنواخت عرضی با تکیه-گاه‌های لولایی قرار دارد؛ را در نظر گرفته‌اند. معادلات حاکم بر تیر قوسی کم عمق از مواد مدرج تابعی دوجبهته‌ی تغییر شکل یافته را ارائه کردند و بر اساس این معادلات، نیروی فروجهش را با رویکرد ترکیب روش‌های تحلیلی-عددی بدست آوردند و مطالعه‌ی پارامتری نیروی بحرانی را نیز بررسی کردند.

در سال ۲۰۱۹ ژانگ و همکارانش [38] به بررسی کمانش الاستیک درون صفحه ای یک تیر دایروی کم عمق لامینت تحت نیروی متمرکز مرکزی بر اساس تئوری کلاسیک لامینت ها (CLT) پرداختند و نیروهای کمانش تیر دایروی کم عمق با تکیه گاه دوسر گیردار را با روش انرژی پتانسیل کل محاسبه کردند.

در سال ۲۰۱۸ کیبولاهی و همکارانش [39] به بررسی کمانش دینامیکی یک تیر قوسی کم عمق تحت نیروی حرارتی گذرا پرداختند. قوس در یک سطح در معرض شوک حرارتی قرار دارد و سطح دیگر در دمای مرجع نگهداری می شود. برای محاسبه کمانش از تئوری کلاسیک کمان و معادله حرکت تیر قوسی کم عمق استفاده شده است.

در سال ۲۰۱۷، یان و همکاران [40] یک مطالعه تحلیلی از یک قوس کم عمق غیر یکنواخت تحت یک بار متمرکز مرکزی ارائه دادند. عدم یکنواختی توسط سه ناحیه سختی ثابت مشخص شده است. از اصل کمترین مقدار انرژی پتانسیل برای به دست آوردن معادلات تعادل استفاده شده است.

¹ Shooting method

در سال ۲۰۱۸ یان و همکاران [41] مجدداً به بررسی تحلیلی قوس کم عمق دایره ای غیر یکنواخت تحت یک بار متمرکز با توجه به اثر ناقص بودن در شرایط مرزی دوسر لولا پرداختند. که با توجه به اصل حداقل انرژی پتانسیل به محاسبه می‌گردد.

در سال ۲۰۱۵ پلات [42] هر تیر یا قوس را به عنوان یک الاستیک غیر قابل تفکیک مدل کرد. جابه جایی بحرانی برای تکیه گاه های دوسر لولا، دوسر گیردار و یک سر گیردار و یک سر لولا محاسبه کرد. جابجایی بحرانی مستقیماً از تئوری تعادل شکل ساختار بارگذاری نشده اولیه بدست آورد.

در این پژوهش ما به بررسی نیروهای بحرانی استاتیکی و دینامیکی یک تیر قوسی کم عمق با شکل اولیه تابع سینوسی و تکیه‌گاه‌های عمومی (فشر) تحت یک بار نقطه‌ای ثابت می‌پردازیم.

روابط غیر خطی حاکم بر تیر قوسی کم عمق، با فرض تیر اویلر-برنولی به دست می‌آیند و معادله حرکت آن با استفاده از یک معادله دیفرانسیلی-انتگرالی غیر خطی بیان می‌گردد و با در نظر گرفتن یک پاسخ فوریه کسینوسی و یک چند جمله‌ای کمکی به حل آن پرداخته می‌پردازیم.

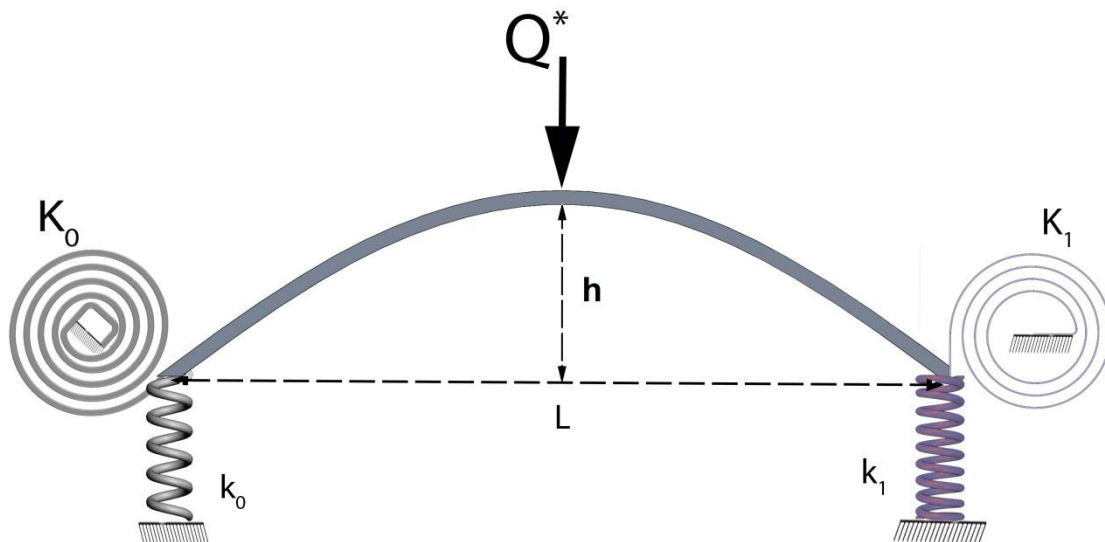
رویکرد اتخاذ شده برای تحلیل این مساله استفاده از انرژی کل سیستم و حساب تغییرات و انتگرال گیری جزء به جزء می‌باشد.

در پایان به مقایسه تأثیر انواع تکیه‌گاه بر نیروی بحرانی کمان می‌پردازیم.

فصل ۳: فرمولبندی مسأله

۱-۳- مقدمه

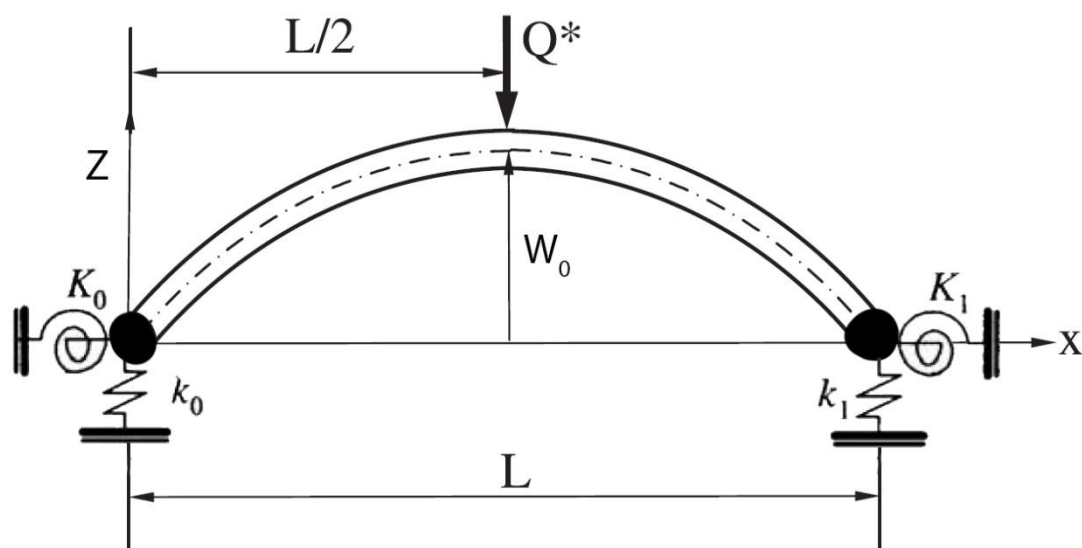
در شکل (۱-۳) یک تیر قوسی کم عمق با تکیه‌گاه‌های الاستیک که شامل یک فنر خطی و یک فنر پیچشی در ابتدا و انتها و تحت بار متمرکز Q^* در مرکز آن می‌باشد، نشان داده شده است.



شکل (۱-۳) تیر قوسی کم عمق با بارگذاری متمرکز و تکیه‌گاه عمومی

فاصله‌ی بین دو تکیه‌گاه تیر قوسی با L و بیشینه‌ی مقدار ارتفاع اولیه‌ی مرکز تیر قوسی با h نشان داده شده است. در تیرهای قوسی کم عمق نسبت h/L کمتر از 0.35 در نظر گرفته می‌شود [۳۱]. سطح مقطع تیر به صورت مستطیل انتخاب شده و ارتفاع سطح مقطع تیر با a و عرض آن با b مشخص می‌شود، بنابراین $dA = b dz$ خواهد بود (A مساحت سطح مقطع تیر می‌باشد). برای سادگی $b=1$ انتخاب می‌شود. در تعیین معادلات حرکت از تئوری تیر اویلر برنولی استفاده شده است. برای این منظور ارتفاع مقطع تیر یا ضخامت آن در مقایسه با سایر ابعاد تیر قوسی کوچک در نظر گرفته شده که در نتیجه‌ی آن تنها اثر ممان خمشی در فرمول‌بندی تغییر انحنای خط مرکزی تیر لحاظ می‌گردد. با توجه به این

که؛ در تیرهای قوسی کم عمق شعاع انحنای تیر در مقایسه با عمق تیر بزرگ می‌باشد و از طرفی در تئوری اویلر برنولی صفحات عمود بر خط مرکزی پس از بارگذاری نیز نسبت به خط مرکز عمود باقی می‌مانند، بنابراین کرنش محوری در راستای ضخامت تیر قوسی به صورت خطی تغییر می‌کنند. همان‌گونه که در شکل (۲-۳) مشخص است، مولفه‌ی x نشان دهنده‌ی مختصه‌ی افقی خط مرکز تیر قوسی بوده و مولفه z نشان دهنده‌ی یک نقطه روی سطح مقطع تیر قوسی است که فاصله‌ی آن مختصه را نسبت به خط مرکز تیر قوسی مشخص می‌کند. منحنی خط مرکز تیر؛ قبل و بعد از بارگذاری؛ به ترتیب با توابع $w_0(x)$ و $w(x)$ بیان می‌شوند.



شکل (۲-۳) تیر قوسی کم عمق با بارگذاری متمرکز و تکیه‌گاه الاستیک
 K_0 و K_1 سفتی فنرهای پیچشی و k_0 و k_1 سفتی فنرهای خطی در $x=0, L$ هستند.

۳-۲- انرژی کل تیر قوسی

یک کمان بلند و باریک با انحنای اولیه‌ی کوچک و سطح مقطع متقارن در نظر بگیرید. $w_0(x)$ شکل اولیه‌ی خط مرکز و $w(x)$ شکل خط مرکز پس از تغییر شکل است. $u(x)$ جابه‌جایی افقی هر نقطه از صفحه‌ی میانی است.

معادله‌ی غیر خطی کرنش-جابه‌جایی مربوط به کمان برابر است با:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{xm} + z\kappa_x \quad (1-3)$$

که در آن ε_{xm} کرنش صفحه‌ی میانی و κ_x تغییر انحنای صفحه‌ی میانی است و از رابطه‌های زیر حاصل می‌شوند:

$$\varepsilon_{xm} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{dw_0}{dx} \right)^2 \quad (2-3)$$

$$\kappa_x = - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{d^2 w_0}{dx^2} \right) \quad (3-3)$$

نیروی محوری را با P و ممان خمشی را با M مشخص می‌کنیم، داریم:

$$P = \int_A \sigma_x dA \quad (4-3)$$

برای الاستیسیته‌ی خطی و با استفاده از قانون هوک می‌توان نوشت:

$$P = \int_A E \varepsilon_x dA = E \int_A (\varepsilon_{xm} + z\kappa_x) dA = EA \varepsilon_{xm} \quad (5-3)$$

به طور مشابه داریم:

$$M = EI \kappa_x \quad (6-3)$$

که در آن E مدول یانگ و I ممان اینرسی سطح مقطع حول محور خنثی می‌باشد.

در ادامه به معرفی چگالی انرژی کششی U_m^* ، چگالی انرژی خمشی U_b^* و چگالی انرژی پتانسیل U_p^* ؛ مربوط به نیروهای خارجی در واحد طول کمان پرداخته می‌شود.

$$U_m^* = \frac{EA\varepsilon_{xm}^2}{2} = \frac{P^2}{2EA} \quad (۷-۳)$$

$$U_b^* = \frac{EI\kappa_x^2}{2} = \frac{M^2}{2EI} \quad (۸-۳)$$

$$U_p^* = -Q^*(w - w_0) \quad (۹-۳)$$

بعد از انتگرال گیری در کل طول انرژی های کل عبارتند از:

$$U_{mT}^* = \frac{1}{2} \int_0^L EA\varepsilon_{xm}^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{P^2}{EA} dx \quad (۱۰-۳)$$

$$U_{bT}^* = \frac{1}{2} \int_0^L EI\kappa_x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2}{EI} dx \quad (۱۱-۳)$$

$$U_{pT}^* = - \int_0^L Q^*(w - w_0) dx \quad (۱۲-۳)$$

با نادیده گرفتن انرژی جنبشی چرخشی و انرژی جنبشی درون صفحه ای^۱ در راستای طولی، عبارت انرژی جنبشی به صورت زیر بیان می شود.

$$T^* = \frac{1}{2} \int_V \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dV \quad (۱۳-۳)$$

$$T^* = \frac{\rho A}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx \quad (۱۴-۳)$$

که در آن ρ چگالی ماده و V حجم می باشد.

با معرفی U به عنوان انرژی پتانسیل کل، L^* به عنوان لاگراژین و H به عنوان انتگرال همیلتون، می توان نوشت:

$$U = U_{bT}^* + U_{mT}^* + U_{pT}^* \quad (۱۵-۳)$$

^۱ In-plane

$$L^* = T^* - U \quad (۱۶-۳)$$

$$H = \int_{t1}^{t2} L^* dt = \int_{t1}^{t2} (T^* - U) dt \quad (۱۷-۳)$$

با استفاده از اصل همیلتون و اکسترمم‌گیری از H و با توجه به جابه‌جایی u معادله‌ی حرکت درون صفحه‌ای (معادله‌ی تعادل)، به دست می‌آید که برابر است با:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad (۱۸-۳)$$

این معادله نشان می‌دهد که نیروی محوری P به مختصات فضایی وابسته است و با استفاده از روابط تنش-جابه‌جایی و شرایط مرزی، P ممکن است به صورت جملاتی از جابه‌جایی عمودی w و مشتقات وابسته به آن بیان شود:

$$P = EA\varepsilon_{xm} = EA \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{dw_0}{dx} \right)^2 \right] \quad (۱۹-۳)$$

با انتگرال‌گیری در تمام طول کمان داریم $(w_{,x} = \frac{\partial w}{\partial x})$:

$$PL = EA \left[u \Big|_0^L + \frac{1}{2} \int_0^L (w_{,x}^2 - w_{0,x}^2) dx \right] \quad (۲۰-۳)$$

با استفاده از شرایط مرزی $u(L) = u(0) = 0$ ، می‌توان نوشت:

$$P = \frac{EA}{2L} \int_0^L (w_{,x}^2 - w_{0,x}^2) dx \quad (۲۱-۳)$$

به این ترتیب انرژی پتانسیل کل فقط به جابه‌جایی عمودی w و مشتقات آن در جهت x وابسته است.

$$U_T^* = \int_0^L \left[\frac{EA}{8L^2} \left\{ \int_0^L (w_{,x}^2 - w_{0,x}^2) dx \right\}^2 + \frac{EI}{2} (w_{,xx} - w_{0,xx})^2 - Q^* (w - w_0) \right] dx \quad (۲۲-۳)$$

قبل از پرداختن به مسائل مختلف کمان‌ها؛ بهتر است که تمام پارامترها به صورت بی‌بعد^۱ بیان شوند؛ موارد زیر در برای بی‌بعد سازی مورد استفاده قرار می‌گیرند:

$$x = \frac{L}{\pi} \xi$$

$$\gamma^2 = \frac{I}{A} \Rightarrow w(x, t) = \gamma \eta(\xi, \tau)$$

$$\varepsilon_E = \left(\frac{\tau'}{L}\right)^2 \Rightarrow t = \tau \frac{L/\pi}{\sqrt{E\varepsilon_E/\rho}}$$

$$q(\xi, \tau) = \frac{\rho}{AE\varepsilon_E^2} Q^*(x, t)$$

با توجه به این که $P_E = \pi^2 EI/L^2$ و مشتق جزئی نسبت به ξ را با پریم^۲ (') و نسبت به τ را با نقطه^۳ (.)، مشخص می‌شود؛ می‌توان نوشت:

$$P = \frac{P_E}{2\pi} \int_0^\pi (\eta'^2 - \eta_0'^2) d\xi \quad (23-3)$$

$$M = -P_E \gamma (\eta'' - \eta_0'') \quad (24-3)$$

$$U_T^* = \frac{P_E \varepsilon_E L}{4\pi} \int_0^\pi \left[\frac{1}{2\pi^2} \left\{ \int_0^\pi (\eta'^2 - \eta_0'^2) d\xi \right\}^2 + 2(\eta'' - \eta_0'')^2 - 4q(\eta - \eta_0) \right] d\xi \quad (25-3)$$

از $\frac{P_E \varepsilon_E L}{4}$ به عنوان یک پارامتر بی‌بعد استفاده می‌شود. موارد مختلف انرژی با علامت یکسان و بدون ستاره (*)، به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$U_{mT} = \frac{1}{2\pi^2} \left[\int_0^\pi (\eta'^2 - \eta_0'^2) d\xi \right] \quad (26-3)$$

$$U_{bT} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\eta'' - \eta_0'')^2 d\xi \quad (27-3)$$

$$U_{PT} = -\frac{4}{\pi} \int_0^\pi q(\eta - \eta_0) d\xi \quad (28-3)$$

¹ Nondimensional

² Prime

³ Dot

$$U_T = U_{mT} + U_{bT} + U_{pT} \quad (29-3)$$

و در انتها انرژی جنبشی برابر است با:

$$T = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \dot{\eta}^2 d\xi \quad (30-3)$$

۳-۳- سری فوریه‌ی اصلاح شده

در دهه‌های اخیر تعداد زیادی روش دقیق و موثر آزمایشگاهی و محاسباتی برای توسعه‌ی تحلیل ارتعاشی تیرها، صفحه‌ها و پوسته‌ها ارائه شده است. بیشتر این روش‌ها، تنها برای شرایط مرزی خاص؛ مفید هستند که معمولاً به تغییرات ثابت نیاز دارند تا برای شرایط مرزی مختلف مورد استفاده قرار گیرند. بنابراین استفاده از روش‌های موجود؛ متحمل محاسباتی خسته کننده است و برای شرایط مرزی مختلف مشکل ساز می‌شود.

برای مسائل ارتعاشی تیر، صفحه و ورق؛ توابع قابل قبول اکثراً به فرم بسط سری فوریه بیان می‌شوند، این امر به خاطر تکامل و تعامد آن‌ها و همچنین ثبات عالی آن‌ها در محاسبات عددی است. به هر حال عبارت سری فوریه‌ی مرسوم؛ به طور عمده یک مشکل همگرایی در راستای شرایط مرزی، به جز چند شرط مرزی ساده؛ دارد، که سری فوریه را تنها برای چند شرط مرزی ایده‌آل محدود می‌کند. در مواردی غیر از آن، بسط سری فوریه جمله به جمله مشتق‌پذیر نمی‌باشد و همچنین پاسخ ممکن است همگرا نشود یا به آرامی همگرا شود.

نرخ همگرایی برای بسط سری فوریه یک تابع متناوب، به وضوح و همواری آن بستگی دارد. لی^۱ در سال‌های ۲۰۰۰ و ۲۰۰۲ [۳۲ و ۳۳]، یک روش سری فوریه‌ی اصلاح شده برای تحلیل ارتعاشی یک تیر اویلر-برنولی همگن؛ با شرایط مرزی الاستیک عمومی ارائه داد.

¹ Li

همان گونه که در شکل (۲-۱) شکل (۲-۳) مشاهده شد، شرایط مرزی مساله به شرح زیر می باشد:

$$\hat{k}_0 w = -w''' \quad \hat{K}_0 w' = w'' \quad (\hat{k}_0 = k_0/D \quad \hat{K}_0 = K_0/D) \quad @ x = 0 \quad (۳۱-۳)$$

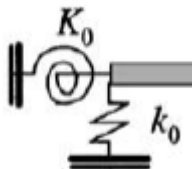
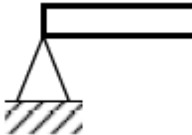
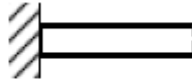
و

$$\hat{k}_1 w = w''' \quad \hat{K}_1 w' = -w'' \quad (\hat{k}_1 = k_1/D \quad \hat{K}_1 = K_1/D) \quad @ x = L \quad (۳۲-۳)$$

به طوری که D، سفتی پیچشی تیر می باشد.

تعدادی از شرایط مرزی عادی؛ در این مورد خاص می توانند با مقدار گرفتن سفتی فنرها (مانند مقادیر صفر و بی نهایت) به وجود آیند؛ که در جدول زیر به آنها می پردازیم [34].

جدول (۱-۳) نمایش تکیه گاه های معمول و تبدیل تکیه گاه الاستیک به آنها

	$K_0 = [0, \infty]$ $k_0 = [0, \infty]$	تکیه گاه الاستیک
	$K_0 = 0$ $k_0 = \infty$	تکیه گاه لولایی
	$K_0 = \infty$ $k_0 = \infty$	تکیه گاه ثابت
	$K_0 = 0$ $k_0 = 0$	انتهای آزاد

در سری فوریه ی اصلاح شده؛ برخلاف روش فوریه ی معمولی؛ جابه جایی عرضی تیر $w(x)$ ، با یک سری استاندارد کوسینوسی فوریه به علاوه ی یک تابع چند جمله ای کمکی $P(x)$ [35]، در بازه ی $[0, L]$ ؛ بیان می شود.

$$w(x) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \cos(\lambda_m x) + P(x) \quad (33-3)$$

که در آن A_m ثابت بسط و $\lambda_m = m\pi/L$. تابع چند جمله‌ای کمکی $P(x)$ ، به اندازه‌ی کافی ساده و واضح است و برای از بین بردن تمام ناپیوستگی‌های پتانسیلی مرتبط با مشتقات مرتبه‌ی اول و مرتبه‌ی سوم، شرایط مرزی کاربرد دارد؛ که شرایط زیر را ارضا می‌کند:

$$P'''(0) = w'''(0) = \alpha_0 \quad (35-3) \quad P'''(L) = w'''(L) = \alpha_1 \quad (34-3)$$

$$P'(0) = w'(0) = \beta_0 \quad (37-3) \quad P'(L) = w'(L) = \beta_1 \quad (36-3)$$

یکی از چند جمله‌ای‌ها را می‌توان به راحتی به صورت زیر در نظر گرفت:

$$P(x) = \varsigma(x)^T \bar{\alpha} \quad (38-3)$$

و

$$\varsigma(x) = \begin{bmatrix} -(15x^4 - 60Lx^3 + 60L^2x^2 - 8L^4)/360L \\ (15x^4 - 30L^2x^2 + 7L^4)/360L \\ (6Lx - 2L^2 - 3x^2)/6L \\ (3x^2 - L^2)/6L \end{bmatrix} \quad (39-3)$$

و

$$\bar{\alpha} = [\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1]^T \quad (40-3)$$

با قرار دادن معادلات (۳۳-۲) تا (۳۸-۲)؛ در شرایط مرزی (۳۴-۲) تا (۳۷-۲)، بردار نامشخص $\bar{\alpha}$ به

صورت زیر به دست می‌آید.

$$\bar{\alpha} = \sum_{m=0}^{\infty} B^{-1} Q_m A_m \quad (41-3)$$

به طوری که:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\hat{k}_0 L^3}{45} + 1 & \frac{7\hat{k}_0 L^3}{360} & \frac{-\hat{k}_0 L}{3} & \frac{-\hat{k}_0 L}{6} \\ \frac{7\hat{k}_1 L^3}{360} & \frac{\hat{k}_1 L^3}{45} + 1 & \frac{-\hat{k}_1 L}{6} & \frac{-\hat{k}_1 L}{3} \\ \frac{L}{3} & \frac{L}{6} & \hat{K}_0 + \frac{1}{L} & \frac{-1}{L} \\ \frac{L}{6} & \frac{L}{3} & \frac{-1}{L} & \hat{K}_1 + \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad (42-3)$$

و

$$Q_m = \begin{bmatrix} -\hat{k}_0 & (-1)^m \hat{k}_1 & -\lambda_m^2 & (-1)^2 \lambda_m^2 \end{bmatrix}^T \quad (43-3)$$

باید اشاره شود که؛ تابع چند جمله‌ای $P(x)$ برای از بین بردن ناپیوستگی‌های ممکن در $x = 0, L$ از تابع جابه‌جایی $w(x)$ و مشتقات مربوط به آن، معرفی شده است. در نتیجه سری فوریه اکنون به سادگی یک جابه‌جایی مشروط^۱ یا باقی‌مانده^۲ را معرفی می‌کند که حداقل سه مشتق پیوسته در هر نقطه دارد. یک مزیت آن این است که؛ دیفرانسیل تمام جملات مورد نیاز سری فوریه را بر اساس جمله به جمله^۳ انجام می‌دهد. در این مورد می‌توان نشان داد:

$$w'(x) = -\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m A_m \sin(\lambda_m x) + P'(x) \quad (44-3)$$

$$w''(x) = -\sum_{m=1}^{\infty} A_m \lambda_m^2 \cos(\lambda_m x) + P''(x) \quad (45-3)$$

$$w'''(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \lambda_m^3 \sin(\lambda_m x) + P'''(x) \quad (46-3)$$

$$w''''(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \lambda_m^4 \cos(\lambda_m x) + P''''(x) \quad (47-3)$$

و ثابت فوریه A_m به صورت زیر ارضا می‌گردد:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} A_m \lambda_m^4 = 0 \quad (48-3)$$

¹ Conditioned

² Residual

³ Term-by-term

با توجه به رابطه‌ی فوق؛ همگرایی سری فوریه‌ی اصلاح شده با سرعت بسیار زیادی نسبت به سری

فوریه‌ی معمولی ($\lim_{m \rightarrow \infty} A_m = 0$)؛ انجام می‌گیرد.

پذیرفتن معادلات (۲-۳۸) و (۲-۳۹)؛ به عنوان یک تابع پیوسته که بتواند شرایط مرزی (۲-۳۴) تا (۲-

۳۷) را ارضا کند؛ نگران کننده بود، که با توجه به همگرایی پاسخ سری، این نگرانی برطرف می‌شود. در

واقع هر تابعی که بتواند این شرایط مرزی را ارضا نماید؛ مانند توابع چندجمله‌ای یا مثلثاتی؛ مورد قبول

واقع می‌گردد.

۳-۴- استخراج معادله حاکم با حساب تغییرات

حساب تغییرات شاخه‌ای از آنالیز است که با مسائل ماکزیمم و مینیمم سر و کار دارد. برخی از مسائل

مورد توجه که به این شاخه مربوط است: پیدا کردن کوتاهترین فاصله بین دو نقطه به نحوی که سطح

حاصل از دوران آن حول محور پیدا کردن یک منحنی بین همه منحنی‌های واقع در صفحه مینیمم

باشد. پیدا کردن خمی که دو نقطه را وصل کند به طوری که اگر گلوله‌ای از نقطه بالاتر به سمت پایین

حرکت کند زمان طی شده مینیمم باشد.

تعریف: فرض کنید Ω فضایی از توابع بوده که هریک از آنها بر فاصله $[x_0, x_1]$ تعریف شده اند. حال

اگر J تابعی از Ω به R مجموعه اعداد حقیقی، تعریف شده باشد، $J: \Omega \rightarrow R$ آنگاه J را یک فانکشنال

یا تابعی مینامند.

۳-۴-۱- مساله بنیادی در حساب تغییرات

فرض کنید دو نقطه واقع در صفحه داریم و هر منحنی دلخواه باشد که از این دو نقطه میگذرد. بین این منحنی ها دنبال یک منحنی هستیم که فانکشنال زیر را اکستریم کند. جواب این مساله ممکن است پیوسته یا ناپیوسته، مشتق پذیر یا غیر مشتق پذیر باشد. مجموعه ای که شامل جواب های پیوسته و مشتق پذیر است، مجموع توابع مجاز مینیمم و در بحث خود هر تابع مطرح شده را یک تابع مجاز میگیریم. برای اینکه ببینیم این مقدار بحرانی به دست آمده (یعنی صفر)، ماکزیمم است یا مینیمم، مقدار فانکشنال را به ازای یک منحنی دیگر، مثلاً یک خط راست که از شرایط مرزی عبور کند، می یابیم. حل: معادله اوایلر-لاگرانژ با حل معادله و اعمال شرایط مرزی، منحنی بحرانی به دست می آید در برخی شرایط، معادله اوایلر-لاگرانژ به صورت تابعی x و y است. در نتیجه دو حالت می تواند رخ دهد که هر دو به جواب واحد (خانواده ای از خطوط مستقیم) منجر می شود.

مسائل مربوط به حساب تغییرات، به مسائلی به شکل معادلات دیفرانسیل برگردانده شده و سپس حل می شد. ولی در بسیاری موارد معادلات اوایلر-لاگرانژ دقیقاً قابل حل نیست. این وضعیت باعث گسترش روش های تغییراتی مستقیم شده است که در آن مستقیماً با تابع کار می شود.

با استفاده از حساب تغییرات و انتگرال گیری جزء به جزء از معادله ۳-۲۵ معادله حاکم بر تعادل کمان کم عمق تحت بار نقطه ای بدست می آید [36,37]. برای این کار معادله ۳-۲۵ مجدداً به شکل زیر بازنویسی می شود:

$$U_T^* = a1 \int_0^\pi \left[\left\{ \int_0^\pi (\eta'^2 - \eta_0'^2) d\xi \right\}^2 + 2(\eta'' - \eta_0'')^2 - 4Q(\eta - \eta_0) \right] d\xi \quad (۴۹-۳)$$

عبارات ثابت با a1 نشان داده شده اند. ابتدا اوپراتور تغییراتی δ به معادله اعمال می شود. این اوپراتور خاصیت خطی داشته و مانند مشتق عمل می کند:

$$\delta U_T^* = a1 \int_0^\pi \left[\delta \left\{ \int_0^\pi (\eta'^2 - \eta_0'^2) d\xi \right\}^2 + 2\delta(\eta'' - \eta_0'')^2 - 4\delta Q(\eta - \eta_0) \right] d\xi \quad (50-3)$$

با اعمال δ به تک تک عبارات خواهیم داشت:

$$\delta U_T^* = a1 \int_0^\pi \left[2 \int_0^\pi (\eta'^2 - \eta_0'^2) d\xi \int_0^\pi \delta(\eta'^2 - \eta_0'^2) d\xi + 2\delta(\eta'' - \eta_0'')^2 - 4\delta Q(\eta - \eta_0) \right] d\xi \quad (51-3)$$

دقت داریم که انحنای کمان در گذر زمان ثابت است و $\delta\eta_0$ برابر صفر است. در اینجا $\delta\eta'^2 = 2\eta'\delta\eta'$ و $\int_0^\pi (\eta'^2 - \eta_0'^2) d\xi$ بعداً با استفاده از ساده سازی و استفاده از ضریب a1 برابر p تعریف خواهد شد. در نتیجه داریم:

$$\delta U_T^* = a1 \int_0^\pi \left[4 \int_0^\pi (\eta'^2 - \eta_0'^2) d\xi \int_0^\pi \eta' \delta\eta' d\xi + 2\delta(\eta'' - \eta_0'')^2 - 4\delta Q(\eta - \eta_0) \right] d\xi \quad (52-3)$$

با اعمال انتگرال گیری جزء به جزء داریم:

$$\delta U_T^* = a1 \int_0^\pi \left[-4 \left(\int_0^\pi (\eta'^2 - \eta_0'^2) d\xi \right) \int_0^\pi \eta'' \delta\eta d\xi + 4(\eta''' - \eta_0''')\delta\eta - 4\delta Q(\eta - \eta_0) \right] d\xi \quad (53-3)$$

اکنون با اعمال ضرایب ثابت و ساده سازی معادله نهایی بصورت زیر خواهد بود:

$$(u - u_0)''' - Pu'' + \frac{\pi}{2} Q \delta(\zeta - \frac{\pi}{2}) = 0 \quad (54-3)$$

در این رابطه P برابر انتگرال زیر است:

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (u'^2 - u_0'^2) d\zeta \quad (55-3)$$

دقت داریم که این یک معادله استاتیک است. در صورتی که هدف تحلیل ارتعاشی کمان بود برای داشتن فرم دینامیک عبارت $\rho A \ddot{u}$ که از اعمال اوپراتور تغییرات به انرژی جنبشی بدست می آید باید به معادله اضافه می شد.

۳-۴-۲- کمانش استاتیک

برای کمان کم عمق، ارتفاع کمان را می توان به فرم سینوسی زیر در نظر گرفت:

$$u_0(\zeta) = h \sin(\zeta) \quad (56-3)$$

در استفاده از سری فوریه بهبود یافته، عبارات سری کسینوسی بوده و عبارت S نیز در کنار عبارت کسینوسی در نظر گرفته می شود تا مشتقات مرتبه بالاتر برقرار باشند. S را می توان برابر مجموع زیر در نظر گرفت:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(\zeta) \quad (57-3)$$

که $s_n(\zeta)$ برابر ضرب زیر است:

$$s_n(\zeta) = \left[\begin{array}{c} -\left(\frac{15L^3\zeta^4}{\pi^4} - \frac{60L^3\zeta^3}{\pi^3} + \frac{60L^3\zeta^2}{\pi^2} - 8L^3\right)/360 \\ \left(\frac{15L^3\zeta^4}{\pi^4} - \frac{30L^3\zeta^2}{\pi^2} + 7L^3\right)/360 \\ \left(-\frac{3L\zeta^2}{\pi^2} + \frac{6L\zeta}{\pi} - 2L\right)/6 \\ \left(\frac{3L\zeta^2}{\pi^2} - L\right)/6 \end{array} \right]^T \left[\begin{array}{cccc} \frac{\hat{k}_0 L^3}{45} + 1 & \frac{7\hat{k}_0 L^3}{360} & -\frac{\hat{k}_0 L}{3} & -\frac{\hat{k}_0 L}{6} \\ \frac{7\hat{k}_1 L^3}{360} & \frac{\hat{k}_1 L^3}{45} + 1 & -\frac{\hat{k}_1 L}{6} & -\frac{\hat{k}_1 L}{3} \\ \frac{L}{3} & \frac{L}{6} & \hat{k}_0 + \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{L}{6} & \frac{L}{3} & -\frac{1}{L} & \hat{k}_1 + \frac{1}{L} \end{array} \right]^{-1} \left\{ \begin{array}{c} -\hat{k}_0 \\ (-1)^n \hat{k}_1 \\ -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \\ (-1)^n \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \end{array} \right\} \lambda_n \quad (58-3)$$

که طول بی بعد کمان است. ضرب بردار اول در ماتریس دوم و بردار سوم یک اسکالر خواهد بود. در

ابتدا برای محاسبات معادله بصورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$\Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_3 = 0 \quad (59-3)$$

$$\Delta_1 = (u - u_0)'''$$

$$\Delta_2 = Pu''$$

$$\Delta_3 = \frac{\pi}{2} Q \delta\left(\zeta - \frac{\pi}{2}\right)$$

و در مرحله اول عبارت $P = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (u'^2 - u_0'^2) d\zeta$ محاسبه می‌شود. این عبارت شامل u' و u_0' است. در

اینجا $u_0' = h \cos(\zeta)$ است. همچنین $u(\zeta) = S + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(\lambda_n \zeta)$ است. پس برای محاسبه u' باید

ابتدا S' تعیین شود:

$$S' = \sum_{n=1}^{\infty} s'_n(\zeta) \quad (۶۰-۳)$$

در فرم ماتریسی داریم:

$$s'_n(\zeta) = \left\{ \begin{array}{l} -\left(\frac{60L^3\zeta^3}{\pi^4} - \frac{180L^3\zeta^2}{\pi^3} + \frac{120L^3\zeta}{\pi^2} \right) / 360 \\ \left(\frac{60L^3\zeta^3}{\pi^4} - \frac{60L^3\zeta}{\pi^2} \right) / 360 \\ \left(-\frac{6L\zeta}{\pi^2} + \frac{6L}{\pi} \right) / 6 \\ \left(\frac{6L\zeta}{\pi^2} \right) / 6 \end{array} \right\}^T \left[\begin{array}{cccc} \frac{\hat{k}_0 L^3}{45} + 1 & \frac{7\hat{k}_0 L^3}{360} & -\frac{\hat{k}_0 L}{3} & -\frac{\hat{k}_0 L}{6} \\ \frac{7\hat{k}_1 L^3}{360} & \frac{\hat{k}_1 L^3}{45} + 1 & -\frac{\hat{k}_1 L}{6} & -\frac{\hat{k}_1 L}{3} \\ \frac{L}{3} & \frac{L}{6} & \hat{k}_0 + \frac{1}{L} & \frac{-1}{L} \\ \frac{L}{6} & \frac{L}{3} & \frac{-1}{L} & \hat{k}_1 + \frac{1}{L} \end{array} \right]^{-1} \left\{ \begin{array}{l} -\hat{k}_0 \\ (-1)^n \hat{k}_1 \\ -\left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \\ (-1)^n \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \end{array} \right\} \lambda_n \quad (۶۱-۳)$$

$$= f_n(\zeta) \lambda_n$$

۳-۴-۲-۲- ساده سازی معادلات

برای محاسبه $s'_n(\zeta)$ با داشتن عبارت $s'_n(\zeta)$ از رابطه بالا بر حسب n و ζ می‌توان انتگرال

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi$$

را محاسبه نمود که برابر است با:

$$\begin{aligned}
& -(\alpha_m \lambda_n^2 (2160(-1)^{1+n} L^6 \pi k_0 k_1 m + 108(-1)^{1+n} L^6 \pi^3 k_0 k_1 m n^2 \\
& + 3(-1)^{1+n} L^6 \pi^5 k_0 k_1 n^2 m^3 \\
& + 8640(-1)^{1+n} L^4 \sin(\pi m) k_1^2 \\
& + 1440 L^2 \cos(\pi m) \pi^3 k_0^2 m^3 \\
& + 8640(-1)^n \pi^5 n^2 \cos(\pi m) m^3 \\
& + 1440 L^4 \sin(\pi m) \pi^2 k_1^2 n^2 \\
& + 4320 L^3 \sin(\pi m) \pi^2 k_0 n^2 \\
& + 4320 L^3 \sin(\pi m) \pi^2 k_1 n^2 \\
& + 9 L^6 (-1)^n \pi^5 k_0 k_1 n^2 \cos(\pi m) m^3 \\
& + 36 L^7 \cos(\pi m) \pi^3 (-1)^n k_0^2 k_1 m^2 n^2 \\
& + +96 L^6 \sin(\pi m) \pi^4 (-1)^n k_0 k_1 m^2 n^2 \\
& + 192 L^4 \cos(\pi m) \pi^5 (-1)^n k_0 k_1 m^3 n^2 + L^7 \cos(\pi m) \pi^5 (-1)^n k_0^2 k_1 m^3 n^2 \\
& + 15 L^7 \sin(\pi m) \pi^4 (-1)^n k_0^2 k_1 m^2 n^2 + 2880 L^4 \cos(\pi m) \pi^3 (-1)^n k_0 k_1 m n^2 \\
& + 252 L^6 \cos(\pi m) \pi^3 (-1)^n k_0 k_1 m n^2 768 L^4 \sin(\pi m) \pi^4 (-1)^n k_0 k_1 m^2 n^2 \\
& - 4320 L^3 \pi^3 k_0 m^3 - 8640 L^4 \pi k_0^2 m + 8640(-1)^{1+n} \pi^5 n^2 m^3 \\
& + 4320 L^3 \pi^3 (-1)^n k_1 m^3 - 2160 L^6 \pi k_0 k_1 m - 4320 L^3 \pi^3 k_0 m n^2 \\
& - 8640 L^4 \pi k_0 k_1 m - 36 L^7 \pi^3 k_0 k_1 m^3 + 192 L^4 \pi^5 k_1^2 n^2 m^3 - 192 L^8 \pi k_0^2 k_1^2 m \\
& - 252 L^6 \pi^3 k_0 k_1 m^3 + 432 L^3 \pi^5 k_0 n^2 m^3 + 1152 L^3 \pi^5 k_1 n^2 m^3 \\
& + 1440 L^4 \pi^3 (-1)^n k_1^2 m^3 - 1152 L^7 \pi k_0^2 k_1 m - 432 L^7 \pi k_0 k_1^2 m \\
& - 2880 L^4 \pi^3 k_0 k_1 m^3 + 8640 L \pi^5 k_1 n^2 m^3 + 1440 L^4 \pi^3 (-1)^n k_0^2 m n^2 \\
& - 2880 L^4 \pi^3 k_0 k_1 m n^2 + 4320 L^3 \pi^3 (-1)^n k_0 m n^2 + 192 L^4 \pi^5 k_0 k_1 n^2 m^3 \\
& + 288 L^3 (-1)^n \pi^5 k_0 n^2 m^3 + 288 L^3 (-1)^n \pi^5 k_1 n^2 m^3 - 252 L^6 \pi^3 k_0 k_1 m n^2 \\
& + L^7 \pi^5 k_0 k_1^2 n^2 m^3 + 9 L^6 \pi^5 k_0 k_1 n^2 - 36 L^7 \pi^3 k_0 k_1^2 m n^2 \\
& + 888 L^8 \sin(\pi m) \pi^2 k_0^2 k_1^2 n^2 m^2 - 24 L^7 \cos(\pi m) \pi^3 k_0^2 k_1 m^3 \\
& + 168 L^8 \cos(\pi m) \pi k_0^2 k_1^2 m + 432 L^7 \sin(\pi m) \pi^2 k_0^2 k_1 m^2 \\
& + 324 L^7 \sin(\pi m) k_0 k_1^2 m^2 + 12 L^7 \sin(\pi m) \pi^2 k_0 k_1^2 n^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 108L^6 \cos(\pi m) \pi^3 k_0 k_1 m^3 - 627L^4 \sin(\pi m) \pi^4 k_1^2 n^2 m^2 \\
& + 288L^3 \pi^5 k_0 n^2 \cos(\pi m) m^3 + 648L^7 \cos(\pi m) \pi k_0^2 k_1 m \\
& + 648 \cos(\pi m) \pi k_0 k_1 m + 1440L^6 \sin(\pi m) \pi^2 k_0 k_1 m^2 \\
& + 1440L^6 \sin(\pi m) \pi^2 k_0 k_1 n^2 + 1440L^5 \sin(\pi m) \pi^2 k_0^2 k_1 m^2 \\
& - 1440L^4 \cos(\pi m) \pi^3 k_1^2 m n^2 - 2880L^3 \sin(\pi m) \pi^4 k_1 m^2 n^2 \\
& + 1440L^4 \sin(\pi m) \pi^2 (-1)^n k_1^2 m^2 \\
& + 2160L^6 \cos(\pi m) \pi k_0 k_1 m + 4320L^4 \sin(\pi m) \pi^2 k_0 k_1 m^2 \\
& + 2880L^4 \sin(\pi m) \pi^2 k_0 k_1 n^2 - 4320L^3 \cos(\pi m) \pi^3 k_1 m n^2 \\
& - 8640L \sin(\pi m) \pi^4 k_1 m^2 n^2 + 8640L^4 \cos(\pi m) \pi (-1)^n k_1^2 m \\
& + 24(-1)^{1+n} L^8 \sin(\pi m) k_0^2 k_1^2 \\
& + 8640(-1)^{1+n} L^5 \sin(\pi m) k_0 k_1^2 \\
& + 8640(-1)^{1+n} L^4 \sin(\pi m) k_0 k_1 \\
& + 504(-1)^{1+n} L^7 \sin(\pi m) k_0 k_1^2 \\
& + 1440(-1)^{1+n} L^4 \sin(\pi m) \pi^2 k_0^2 n^2 \\
& + 4320(-1)^{1+n} L^3 \cos(\pi m) \pi^3 k_1 m^3 + 24L^8 \sin(\pi m) k_0^2 k_1^2 \\
& + 504L^7 \sin(\pi m) k_0^2 k_1 - 216L^7 \sin(\pi m) k_0 k_1^2 \\
& + 8640L^5 \sin(\pi m) k_0^2 k_1 + 8640L^4 \sin(\pi m) k_0 k_1 \\
& + 4320(-1)^{1+n} L^3 \sin(\pi m) \pi^2 k_0 n^2 \\
& + 4320(-1)^{1+n} L^3 \sin(\pi m) \pi^2 k_1 n^2 + 8640L^4 \sin(\pi m) k_0^2 \\
& + 8640L^5 \cos(\pi m) \pi (-1)^n k_0 k_1^2 m \\
& + 5760L^7 \sin(\pi m) \pi^2 (-1)^n k_0 k_1 m^2 \\
& + 4320L^3 \cos(\pi m) \pi^3 (-1)^n k_1 m n^2 \\
& + 8640L^4 \cos(\pi m) \pi (-1)^n k_0 k_1 m \\
& + 192L^4 \cos(\pi m) \pi^5 (-1)^n k_0^2 m^3 n^2 \\
& + 24L^7 \cos(\pi m) \pi^3 k_0 k_1^2 m n^2 + 13L^7 \sin(\pi m) \pi^4 k_0 k_1^2 m^2 n^2 \\
& - 3L^6 \pi^5 k_0 k_1 n^2 \cos(\pi m) m^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 92L^8 \sin(\pi m) \pi^2 (-1)^n k_0^2 k_1^2 m^2 \\
& + 72L^6 \sin(\pi m) \pi^4 k_0 k_1 m^2 n^2 \\
& + 192L^8 \cos(\pi m) \pi (-1)^n k_0^2 k_1^2 m \\
& + 288L^7 \sin(\pi m) \pi^2 (-1)^n k_0^2 k_1 m^2 \\
& + 16L^7 \sin(\pi m) \pi^2 (-1)^n k_0 k_1^2 m^2 \\
& + 1152L^3 (-1)^n \pi^5 k_0 n^2 \cos(\pi m) m^3 \\
& + 432L^3 (-1)^n \pi^5 k_1 n^2 \cos(\pi m) m^3 \\
& + 108L^6 \cos(\pi m) \pi^3 k_0 k_1 m n^2 + 288L^4 \sin(\pi m) \pi^4 k_0 k_1 m^2 n^2 \\
& + 432L^7 \cos(\pi m) (-1)^n k_0^2 k_1 m \\
& + 1152L^7 \cos(\pi m) \pi (-1)^n k_0 k_1^2 m \\
& + 1440L^6 \sin(\pi m) \pi^2 (-1)^n k_0 k_1 m^2 \\
& + 2880L^5 \sin(\pi m) \pi^2 (-1)^n k_0 k_1^2 m^2 \\
& + 720L^3 \sin(\pi m) \pi^4 (-1)^n k_1 m^2 n^2 \\
& + 8640L \cos(\pi m) \pi^5 (-1)^n k_0 m^3 n^2 \\
& + 2160L^6 \cos(\pi m) \pi (-1)^n k_0 k_1 m \\
& + 216L^7 \sin(\pi m) (-1)^n k_0^2 k_1 - 8640\pi^5 n^2 \cos(\pi m) m^3 \\
& + 2880(-1)^{1+n} L^4 \cos(\pi m) \pi^3 k_0 k_1 m^3 \\
& + 2160(-1)^{1+n} L^3 \sin(\pi m) \pi^4 k_0 m^2 n^2 \\
& + 432(-1)^{1+n} L^4 \sin(\pi m) \pi^4 k_0^2 m^2 n^2 \\
& + 144(-1)^{1+n} L^6 \sin(\pi m) \pi^2 k_0 k_1 n^2 \\
& + 36(-1)^{1+n} L^7 \cos(\pi m) \pi^3 k_0^2 k_1 m^3 \\
& + 12(-1)^{1+n} L^7 \sin(\pi m) \pi^2 k_0^2 k_1 n^2 \\
& + 252(-1)^{1+n} L^6 \cos(\pi m) \pi^2 k_0 k_1 m^3 \\
& + 2880(-1)^{1+n} L^4 \sin(\pi m) \pi^2 k_0 k_1 n^2 \\
& + 8640(-1)^{1+n} L \sin(\pi m) \pi^4 k_0 m^2 n^2 \\
& + 24(-1)^{1+n} L^7 \pi^3 k_0^2 k_1 m n^2 + 8640\pi^5 n^2 m^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 24(-1)^{1+n}L^7\pi^3k_0k_1^2m^3 + 108(-1)^{1+n}L^6\pi^3k_0k_1m^3 \\
& + 648(-1)^{1+n}L^7\pi k_0^2k_1m + 648(-1)^{1+n}L^7\pi k_0k_1^2m \\
& + 168(-1)^{1+n}L^8\pi k_0^2k_1^2m)/((L^7k_0^2k_1^2 + 9L^6k_0^2k_1 + 9L^6k_0k_1^2 \\
& + 72L^5k_0k_1 + 192L^4k_0k_1^2 + 432L^3k_0^2 + 2304L^3k_0k_1 \\
& + 432L^3k_1^2 + 2160L^2k_0 + 2160L^2k_1 + 8640Lk_0k_1 + 8640k_0 \\
& + 8640k_1)m^4\pi^4L)
\end{aligned}$$

Δ_1 در معادله تعادل برابر خواهد بود با:

$$\Delta_1 = (S + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(\lambda_n \zeta) - h \sin(\zeta))''' = S''' + h \cos(\zeta) - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^4 \alpha_n \cos(\lambda_n \zeta) \quad (۶۲-۳)$$

در محاسبه $\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (u'^2 - u_0'^2) d\zeta$ عبارت u' برابر خواهد بود با:

$$u' = (S + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(\lambda_n \zeta))' = S' - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \alpha_n \sin(\lambda_n \zeta) \quad (۶۳-۳)$$

با به توان دوم رساندن این عبارت داریم:

$$u'^2 = \left(S' - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \alpha_n \sin(\lambda_n \zeta) \right)^2 = S'^2 - 2S' \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \alpha_n \sin(\lambda_n \zeta) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \alpha_n \sin(\lambda_n \zeta) \right)^2 \quad (۶۴-۳)$$

از طرفی $u_0'^2 = (h \cos(\zeta))^2$

بنابراین:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (u'^2 - u_0'^2) d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left(S'^2 - 2S' \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \alpha_n \sin(\lambda_n \zeta) + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n \alpha_n \sin(\lambda_n \zeta))^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_n \alpha_n \sin(\lambda_n \zeta) \times \lambda_k \alpha_k \sin(\lambda_k \zeta)) - (h \cos(\zeta))^2 \right) d\zeta \quad (۶۵-۳)$$

در انتگرال بالا عبارات اول و دوم با توجه به محاسبه $\sum_{n=1}^{\infty} s'_n(\zeta)$ از قبل، بدست می آیند و برای ثابت c_1

و c_2 خواهند بود و داریم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (u'^2 - u_0'^2) d\zeta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left(S'^2 - 2S' \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \alpha_n \sin(n\zeta) + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n \alpha_n \sin(n\zeta))^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_n \alpha_n \sin(n\zeta) \times \lambda_k \alpha_k \sin(k\zeta)) - (h \cos(\zeta))^2 \right) d\zeta \quad (۶۶-۳) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (S'^2) d\zeta - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(S' \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \alpha_n \sin(n\zeta) \right) d\zeta + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n \alpha_n \sin(n\zeta))^2 \right) d\zeta - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi ((h \cos(\zeta))^2) d\zeta \\ &= \sum c_{1n} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \alpha_n \int_0^\pi S' \sin(n\zeta) d\zeta + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n \alpha_n)^2 \int_0^\pi (\sin(n\zeta))^2 d\zeta - \sum c_{2n} \end{aligned}$$

عبارت اول معادله نیز برابر است با:

$$\begin{aligned}
& const2 \cdot n^2 \alpha_m \left(-3 L^6 \pi^5 n^2 \cos(\pi m) m^3 + 65 L^7 \pi^4 \sin(\pi m) m^2 n^2 + 72 L^6 \pi^4 \sin(\pi m) m^2 n^2 \right. \\
& + 2300 L^8 \pi^2 \sin(\pi m) (-1)^n m^2 + 120 L^7 \pi^3 \cos(\pi m) m n^2 + 4020 L^7 \pi^2 \sin(\pi m) (-1)^n m^2 \\
& + 108 L^6 \pi^3 \cos(\pi m) m n^2 - 1920 L^4 \pi^4 \sin(\pi m) m^2 n^2 \\
& + 4800 L^8 \pi \cos(\pi m) (-1)^n m + 1440 L^6 \pi^2 \sin(\pi m) (-1)^n m^2 \\
& - 2880 L^3 \pi^4 \sin(\pi m) m^2 n^2 + 7920 L^7 \pi \cos(\pi m) (-1)^n m \\
& + 72000 L^5 \pi^2 \sin(\pi m) (-1)^n m^2 - 7200 L^4 \pi^3 \cos(\pi m) m n^2 \\
& + 2160 L^6 \pi \cos(\pi m) (-1)^n m + 36000 L^4 \pi^2 \sin(\pi m) (-1)^n m^2 \\
& - 4320 L^3 \pi^3 \cos(\pi m) m n^2 - 43200 L \pi^4 \sin(\pi m) m^2 n^2 + 216000 L^5 \pi \cos(\pi m) (-1)^n m \\
& + 86400 L^4 \pi \cos(\pi m) (-1)^n m + 3 (-1)^{1+n} L^6 \pi^5 n^2 m^3 + 120 (-1)^{1+n} L^7 \pi^3 m n^2 \\
& + 108 (-1)^{1+n} L^6 \pi^3 m n^2 + 180 (-1)^{1+n} L^7 \pi^3 \cos(\pi m) m^3 + 252 (-1)^{1+n} L^6 \pi^3 \cos(\pi m) m^3 \\
& + 60 (-1)^{1+n} L^7 \pi^2 \sin(\pi m) n^2 + 144 (-1)^{1+n} L^6 \pi^2 \sin(\pi m) n^2 + 14400 (-1)^{1+n} L^4 \pi^3 \cos(\pi m) m^3 \\
& + 4320 (-1)^{1+n} L^3 \pi^3 \cos(\pi m) m^3 + 216000 L^5 \sin(\pi m) + 600 L^8 \sin(\pi m) + 1440 L^7 \sin(\pi m) \\
& + 7200 L^4 \pi^3 \cos(\pi m) m^3 - 8640 \pi^5 n^2 \cos(\pi m) m^3 + 4320 L^3 \pi^3 \cos(\pi m) m^3 \\
& + 8640 L^3 \pi^2 \sin(\pi m) n^2 + 86400 L^4 \sin(\pi m) + 4320 L^3 (-1)^n \pi^3 m n^2 + 576 L^3 (-1)^n \pi^5 n^2 m^3 \\
& + 7200 L^4 (-1)^n \pi^3 m n^2 + 1584 L^3 \pi^5 n^2 m^3 - 4320 L^3 \pi^3 m n^2 \\
& + 8640 (-1)^{1+n} \pi^5 n^2 m^3 + 21600 (-1)^{1+n} L^4 \pi^2 \sin(\pi m) n^2 + 8640 (-1)^{1+n} L^3 \pi^2 \sin(\pi m) n^2 \\
& + 1440 (-1)^{1+n} L^3 \pi^4 \sin(\pi m) m^2 n^2 + 43200 (-1)^{1+n} L \pi^4 \sin(\pi m) m^2 n^2 + 5 L^7 \pi^5 \cos(\pi m) (-1)^n m^3 n^2 \\
& + 9 L^6 \pi^5 (-1)^n n^2 \cos(\pi m) m^3 + 75 L^7 \pi^4 \sin(\pi m) (-1)^n m^2 n^2 + 96 L^6 \pi^4 \sin(\pi m) (-1)^n m^2 n^2 \\
& + 180 L^7 \pi^3 (-1)^n \cos(\pi m) m n^2 + 252 L^6 \pi^3 (-1)^n \cos(\pi m) m n^2 + 14400 L^4 \pi^3 (-1)^n \cos(\pi m) m n^2 \\
& + 4320 L^3 \pi^3 (-1)^n \cos(\pi m) m n^2 + 576 L^3 \pi^5 n^2 \cos(\pi m) m^3 + 8640 (-1)^n \pi^5 n^2 \cos(\pi m) m^3 \\
& + 43200 L \pi^5 \cos(\pi m) (-1)^n m^3 n^2 + 1920 L^4 \pi^5 \cos(\pi m) (-1)^n m^3 n^2 + 1584 L^3 (-1)^n \pi^5 n^2 \cos(\pi m) m^3 \\
& + 1680 L^4 \pi^4 \sin(\pi m) (-1)^n m^2 n^2 + 86400 (-1)^{1+n} L^4 \sin(\pi m) + 216000 (-1)^{1+n} L^5 \sin(\pi m) + 1440 (-1)^{1+n} L^7 \sin(\pi m) \\
& + 600 (-1)^{1+n} L^8 \sin(\pi m) + 8640 \pi^5 n^2 m^3 - 4320 L^3 \pi^3 m^3 - 86400 L^4 \pi m - 180 L^7 \pi^3 m n^2 \\
& - 252 L^6 \pi^3 m n^2 - 14400 L^4 \pi^3 m n^2 + 4200 (-1)^{1+n} \pi L^8 m + 6480 (-1)^{1+n} \pi L^7 m + 2160 (-1)^{1+n} \pi L^6 m + 120 (-1)^{1+n} L^7 \pi^3 m^3 \\
& + 108 (-1)^{1+n} L^6 \pi^3 m^3 - 180 L^7 \pi^3 m^3 - 252 L^6 \pi^3 m^3 - 14400 L^4 \pi^3 m^3 - 4800 L^8 \pi m - 7920 L^7 \pi m \\
& - 2160 L^6 \pi m - 216000 \pi L^5 m + 2160 L^6 \pi \cos(\pi m) m + 21600 L^4 \pi^2 \sin(\pi m) m^2 + 21600 L^4 \pi^2 \sin(\pi m) n^2 \\
& - 120 L^7 \pi^3 \cos(\pi m) m^3 + 2200 L^8 \pi^2 \sin(\pi m) m^2 - 108 L^6 \pi^3 \cos(\pi m) m^3 + 3780 L^7 \pi^2 \sin(\pi m) m^2 \\
& + 60 L^7 \pi^2 \sin(\pi m) n^2 + 4200 L^8 \pi \cos(\pi m) m + 1440 L^6 \pi^2 \sin(\pi m) m^2 + 144 L^6 \pi^2 \sin(\pi m) n^2 \\
& + 6480 L^7 \pi \cos(\pi m) m + 36000 L^5 \pi^2 \sin(\pi m) m^2 + 5 L^7 \pi^5 n^2 m^3 + 9 L^6 \pi^5 n^2 m^3 + 1920 L^4 \pi^5 n^2 m^3 \\
& + 43200 L \pi^5 n^2 m^3 + 7200 L^4 \pi^3 m^3 (-1)^n + 4320 L^3 \pi^3 m^3 (-1)^n \Big)
\end{aligned}$$

که ثابت const2 برابر است با:

$$\frac{1}{(25L^7 + 90L^6 + 72L^5 + 9600L^4 + 15840L^3 + 4320L^2 + 216000L + 86400)m^4L^3\pi^2}$$

حاصل انتگرال داخل مجموع دوم $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \alpha_n \int_0^{\pi} S' \sin(n\zeta) d\zeta$ برابر خواهد بود با:

$$\begin{aligned}
& c1 \cdot \left((-3L^6\pi^5n^2\cos(\pi m)m^3 + 65L^7\pi^4\sin(\pi m)m^2n^2 + 72L^6\pi^4\sin(\pi m)m^2n^2 \right. \\
& + 2300L^8\pi^2\sin(\pi m)(-1)^nm^2 + 120L^7\pi^3\cos(\pi m)mn^2 + 4020L^7\pi^2\sin(\pi m)(-1)^nm^2 \\
& + 108L^6\pi^3\cos(\pi m)mn^2 - 1920L^4\pi^4\sin(\pi m)m^2n^2 \\
& + 4800L^8\pi\cos(\pi m)(-1)^nm + 1440L^6\pi^2\sin(\pi m)(-1)^nm^2 \\
& - 2880L^3\pi^4\sin(\pi m)m^2n^2 + 7920L^7\pi\cos(\pi m)(-1)^nm \\
& + 72000L^5\pi^2\sin(\pi m)(-1)^nm^2 - 7200L^4\pi^3\cos(\pi m)mn^2 \\
& + 2160L^6\pi\cos(\pi m)(-1)^nm + 36000L^4\pi^2\sin(\pi m)(-1)^nm^2 \\
& - 4320L^3\pi^3\cos(\pi m)mn^2 - 43200L\pi^4\sin(\pi m)m^2n^2 + 216000L^5\pi\cos(\pi m)(-1)^nm \\
& + 86400L^4\pi\cos(\pi m)(-1)^nm + 3(-1)^{1+n}L^6\pi^5n^2m^3 + 120(-1)^{1+n}L^7\pi^3mn^2 \\
& + 108(-1)^{1+n}L^6\pi^3mn^2 + 180(-1)^{1+n}L^7\pi^3\cos(\pi m)m^3 + 252(-1)^{1+n}L^6\pi^3\cos(\pi m)m^3 \\
& + 60(-1)^{1+n}L^7\pi^2\sin(\pi m)n^2 + 144(-1)^{1+n}L^6\pi^2\sin(\pi m)n^2 + 14400(-1)^{1+n}L^4\pi^3\cos(\pi m)m^3 \\
& + 4320(-1)^{1+n}L^3\pi^3\cos(\pi m)m^3 + 216000L^5\sin(\pi m) + 600L^8\sin(\pi m) + 1440L^7\sin(\pi m) \\
& + 7200L^4\pi^3\cos(\pi m)m^3 - 8640\pi^5n^2\cos(\pi m)m^3 + 4320L^3\pi^3\cos(\pi m)m^3 \\
& + 8640L^3\pi^2\sin(\pi m)n^2 + 86400L^4\sin(\pi m) + 4320L^3(-1)^n\pi^3mn^2 + 576L^3(-1)^n\pi^5n^2m^3 \\
& + 7200L^4(-1)^n\pi^3mn^2 + 1584L^3\pi^5n^2m^3 - 4320L^3\pi^3mn^2 \\
& + 8640(-1)^{1+n}\pi^5n^2m^3 + 21600(-1)^{1+n}L^4\pi^2\sin(\pi m)n^2 + 8640(-1)^{1+n}L^3\pi^2\sin(\pi m)n^2 \\
& + 1440(-1)^{1+n}L^3\pi^4\sin(\pi m)m^2n^2 + 43200(-1)^{1+n}L\pi^4\sin(\pi m)m^2n^2 + 5L^7\pi^5\cos(\pi m)(-1)^nm^3n^2 \\
& + 9L^6\pi^5(-1)^nn^2\cos(\pi m)m^3 + 75L^7\pi^4\sin(\pi m)(-1)^nm^2n^2 + 96L^6\pi^4\sin(\pi m)(-1)^nm^2n^2 \\
& + 180L^7\pi^3(-1)^n\cos(\pi m)mn^2 + 252L^6\pi^3(-1)^n\cos(\pi m)mn^2 + 14400L^4\pi^3(-1)^n\cos(\pi m)mn^2 \\
& + 4320L^3\pi^3(-1)^n\cos(\pi m)mn^2 + 576L^3\pi^5n^2\cos(\pi m)m^3 + 8640(-1)^n\pi^5n^2\cos(\pi m)m^3 \\
& + 43200L\pi^5\cos(\pi m)(-1)^nm^3n^2 + 1920L^4\pi^5\cos(\pi m)(-1)^nm^3n^2 + 1584L^3(-1)^n\pi^5n^2\cos(\pi m)m^3 \\
& + 1680L^4\pi^4\sin(\pi m)(-1)^nm^2n^2 + 86400(-1)^{1+n}L^4\sin(\pi m) + 216000(-1)^{1+n}L^5\sin(\pi m) + 1440(-1)^{1+n}L^7\sin(\pi m) \\
& + 600(-1)^{1+n}L^8\sin(\pi m) + 8640\pi^5n^2m^3 - 4320L^3\pi^3m^3 - 86400L^4\pi m - 180L^7\pi^3mn^2 \\
& - 252L^6\pi^3mn^2 - 14400L^4\pi^3mn^2 + 4200(-1)^{1+n}\pi L^8m + 6480(-1)^{1+n}\pi L^7m + 2160(-1)^{1+n}\pi L^6m + 120(-1)^{1+n}L^7\pi^3m^3 \\
& + 108(-1)^{1+n}L^6\pi^3m^3 - 180L^7\pi^3m^3 - 252L^6\pi^3m^3 - 14400L^4\pi^3m^3 - 4800L^8\pi m - 7920L^7\pi m \\
& - 2160L^6\pi m - 216000\pi L^5m + 2160L^6\pi\cos(\pi m)m + 21600L^4\pi^2\sin(\pi m)m^2 + 21600L^4\pi^2\sin(\pi m)n^2 \\
& - 120L^7\pi^3\cos(\pi m)m^3 + 2200L^8\pi^2\sin(\pi m)m^2 - 108L^6\pi^3\cos(\pi m)m^3 + 3780L^7\pi^2\sin(\pi m)m^2 \\
& + 60L^7\pi^2\sin(\pi m)n^2 + 4200L^8\pi\cos(\pi m)m + 1440L^6\pi^2\sin(\pi m)m^2 + 144L^6\pi^2\sin(\pi m)n^2 \\
& + 6480L^7\pi\cos(\pi m)m + 36000L^5\pi^2\sin(\pi m)m^2 + 5L^7\pi^5n^2m^3 + 9L^6\pi^5n^2m^3 + 1920L^4\pi^5n^2m^3 + 43200L\pi^5n^2m^3 \\
& + 7200L^4\pi^3m^3(-1)^n + 4320L^3\pi^3m^3(-1)^n) \Big)
\end{aligned}$$

که ثابت c_1 برابر است با:

$$c_1 = \left(\sin(n \zeta) n^2 \alpha_m \right) / \left((25 L^7 + 90 L^6 + 72 L^5 + 9600 L^4 + 15840 L^3 + 4320 L^2 + 216000 L + 86400) m^4 \pi^2 L^3 \right)$$

در این معادلات m و n می توانند فرد یا زوج باشند. چهار حالت در نظر گرفته می شود: m فرد و n زوج، m فرد و n فرد، m زوج و n زوج، و m زوج و n فرد. حالت اول عبارت برابر صفر خواهد بود. در ۳ حالت بعدی عبارات به ترتیب برابرند با:

$$\begin{aligned}
& \left(4\alpha_m \left(-2240 L^7 \pi^4 m^5 - 18000 L^8 \pi^2 m^5 - 2688 L^6 \pi^4 m^5 + 17920 L^7 \pi^4 m^3 - 31200 L^7 \pi^2 m^5 \right. \right. \\
& \quad + 144000 L^8 \pi^2 m^3 + 21504 L^6 \pi^4 m^3 - 11520 L^6 \pi^2 m^5 + 3840 L^4 \pi^4 m^5 - 35840 L^7 \pi^4 m \\
& \quad + 249600 L^7 \pi^2 m^3 - 432000 L^5 \pi^2 m^5 + 69120 L^3 \pi^4 m^5 - 288000 L^8 \pi^2 m \\
& \quad - 43008 L^6 \pi^4 m + 92160 L^6 \pi^2 m^3 - 30720 L^4 \pi^4 m^3 - 230400 L^4 \pi^2 m^5 \\
& \quad - 499200 L^7 \pi^2 m + 3456000 L^5 \pi^2 m^3 - 552960 L^3 \pi^4 m^3 + 1382400 L \pi^4 m^5 \\
& \quad - 184320 L^6 \pi^2 m + 61440 L^4 \pi^4 m + 1843200 L^4 \pi^2 m^3 - 6912000 L^5 \pi^2 m \\
& \quad \left. \left. + 1105920 L^3 \pi^4 m - 11059200 L \pi^4 m^3 - 3686400 L^4 \pi^2 m + 22118400 L \pi^4 m \right) \right) / \\
& \left(L^3 \pi^2 (25 L^7 m^8 + 90 L^6 m^8 - 400 L^7 m^6 + 72 L^5 m^8 - 1440 L^6 m^6 + 9600 L^4 m^8 \right. \\
& \quad + 2400 L^7 m^4 - 1152 L^5 m^6 + 15840 L^3 m^8 + 8640 L^6 m^4 - 153600 L^4 m^6 + 4320 L^2 m^8 \\
& \quad - 6400 L^7 m^2 + 6912 L^5 m^4 - 253440 L^3 m^6 + 216000 L m^8 - 23040 L^6 m^2 \\
& \quad + 921600 L^4 m^4 - 69120 L^2 m^6 + 86400 m^8 + 6400 L^7 - 18432 L^5 m^2 + 1520640 L^3 m^4 \\
& \quad - 3456000 L m^6 + 23040 L^6 - 2457600 L^4 m^2 + 414720 L^2 m^4 - 1382400 m^6 + 18432 L^5 \\
& \quad - 4055040 L^3 m^2 + 20736000 L m^4 + 2457600 L^4 - 1105920 L^2 m^2 + 8294400 m^4 \\
& \quad + 4055040 L^3 - 55296000 L m^2 + 1105920 L^2 - 22118400 m^2 + 55296000 L \\
& \quad \left. \left. + 22118400 \right) \right) - \left(4\alpha_m (2560 L^7 \pi^4 m^5 + 18000 L^8 \pi^2 m^5 + 3072 L^6 \pi^4 m^5 \right. \\
& \quad - 20480 L^7 \pi^4 m^3 + 26400 L^7 \pi^2 m^5 - 144000 L^8 \pi^2 m^3 - 24576 L^6 \pi^4 m^3 \\
& \quad + 5760 L^6 \pi^2 m^5 + 119040 L^4 \pi^4 m^5 + 40960 L^7 \pi^4 m - 211200 L^7 \pi^2 m^3 \\
& \quad + 432000 L^5 \pi^2 m^5 + 69120 L^3 \pi^4 m^5 + 288000 L^8 \pi^2 m + 49152 L^6 \pi^4 m \\
& \quad - 46080 L^6 \pi^2 m^3 - 952320 L^4 \pi^4 m^3 + 115200 L^4 \pi^2 m^5 + 422400 L^7 \pi^2 m \\
& \quad - 3456000 L^5 \pi^2 m^3 - 552960 L^3 \pi^4 m^3 + 1382400 L \pi^4 m^5 + 92160 L^6 \pi^2 m \\
& \quad + 1904640 L^4 \pi^4 m - 921600 L^4 \pi^2 m^3 + 6912000 L^5 \pi^2 m + 1105920 L^3 \pi^4 m \\
& \quad \left. \left. - 11059200 L \pi^4 m^3 + 1843200 L^4 \pi^2 m + 22118400 L \pi^4 m \right) \right) / (L^3 \pi^2 (25 L^7 m^8 \\
& \quad + 90 L^6 m^8 - 400 L^7 m^6 + 72 L^5 m^8 - 1440 L^6 m^6 + 9600 L^4 m^8 + 2400 L^7 m^4 \\
& \quad - 1152 L^5 m^6 + 15840 L^3 m^8 + 8640 L^6 m^4 - 153600 L^4 m^6 + 4320 L^2 m^8 - 6400 L^7 m^2 \\
& \quad + 6912 L^5 m^4 - 253440 L^3 m^6 + 216000 L m^8 - 23040 L^6 m^2 + 921600 L^4 m^4 \\
& \quad - 69120 L^2 m^6 + 86400 m^8 + 6400 L^7 - 18432 L^5 m^2 + 1520640 L^3 m^4 - 3456000 L m^6 \\
& \quad + 23040 L^6 - 2457600 L^4 m^2 + 414720 L^2 m^4 - 1382400 m^6 + 18432 L^5 \\
& \quad - 4055040 L^3 m^2 + 20736000 L m^4 + 2457600 L^4 - 1105920 L^2 m^2 + 8294400 m^4 \\
& \quad + 4055040 L^3 - 55296000 L m^2 + 1105920 L^2 - 22118400 m^2 + 55296000 L \\
& \quad \left. \left. + 22118400 \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(18 \alpha_m \left(540 L^7 \pi^4 m^5 + 600 L^8 \pi^2 m^5 + 1296 L^6 \pi^4 m^5 - 9720 L^7 \pi^4 m^3 + 1440 L^7 \pi^2 m^5 \right. \right. \\
& \quad - 10800 L^8 \pi^2 m^3 - 23328 L^6 \pi^4 m^3 + 194400 L^4 \pi^4 m^5 + 43740 L^7 \pi^4 m \\
& \quad - 38880 L^7 \pi^2 m^3 + 216000 L^5 \pi^2 m^5 + 77760 L^3 \pi^4 m^5 + 48600 L^8 \pi^2 m - 14400 L^8 m^3 \\
& \quad + 104976 L^6 \pi^4 m - 31104 L^6 \pi^2 m^3 - 3499200 L^4 \pi^4 m^3 + 86400 L^4 \pi^2 m^5 - 34560 L^7 m^3 \\
& \quad - 3888000 L^5 \pi^2 m^3 - 1399680 L^3 \pi^4 m^3 - 129600 L^8 m - 279936 L^6 \pi^2 m \\
& \quad + 15746400 L^4 \pi^4 m - 6220800 L^4 \pi^2 m^3 - 311040 L^7 m + 17496000 L^5 \pi^2 m \\
& \quad - 5184000 L^5 m^3 + 6298560 L^3 \pi^4 m - 1866240 L^3 \pi^2 m^3 - 34992000 L^4 \pi^2 m \\
& \quad \left. \left. - 2073600 L^4 m^3 - 46656000 L^5 m - 16796160 L^3 \pi^2 m - 18662400 L^4 m \right) \right) / \\
& \left(L^3 \pi^2 \left(25 L^7 m^8 + 90 L^6 m^8 - 900 L^7 m^6 + 72 L^5 m^8 - 3240 L^6 m^6 + 9600 L^4 m^8 \right. \right. \\
& \quad + 12150 L^7 m^4 - 2592 L^5 m^6 + 15840 L^3 m^8 + 43740 L^6 m^4 - 345600 L^4 m^6 \\
& \quad + 4320 L^2 m^8 - 72900 L^7 m^2 + 34992 L^5 m^4 - 570240 L^3 m^6 + 216000 L m^8 \\
& \quad - 262440 L^6 m^2 + 4665600 L^4 m^4 - 155520 L^2 m^6 + 86400 m^8 + 164025 L^7 \\
& \quad - 209952 L^5 m^2 + 7698240 L^3 m^4 - 7776000 L m^6 + 590490 L^6 - 27993600 L^4 m^2 \\
& \quad + 2099520 L^2 m^4 - 3110400 m^6 + 472392 L^5 - 46189440 L^3 m^2 + 104976000 L m^4 \\
& \quad + 62985600 L^4 - 12597120 L^2 m^2 + 41990400 m^4 + 103926240 L^3 - 629856000 L m^2 \\
& \quad \left. \left. + 28343520 L^2 - 251942400 m^2 + 1417176000 L + 566870400 \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(4\alpha_m \left(-2240 L^7 \pi^4 m^5 - 18000 L^8 \pi^2 m^5 - 2688 L^6 \pi^4 m^5 + 17920 L^7 \pi^4 m^3 \right. \right. \\
& \quad - 31200 L^7 \pi^2 m^5 + 144000 L^8 \pi^2 m^3 + 21504 L^6 \pi^4 m^3 - 11520 L^6 \pi^2 m^5 \\
& \quad + 3840 L^4 \pi^4 m^5 - 35840 L^7 \pi^4 m + 249600 L^7 \pi^2 m^3 - 432000 L^5 \pi^2 m^5 \\
& \quad + 69120 L^3 \pi^4 m^5 - 288000 L^8 \pi^2 m - 43008 L^6 \pi^4 m + 92160 L^6 \pi^2 m^3 - 30720 L^4 \pi^4 m^3 \\
& \quad - 230400 L^4 \pi^2 m^5 - 499200 L^7 \pi^2 m + 3456000 L^5 \pi^2 m^3 - 552960 L^3 \pi^4 m^3 \\
& \quad + 1382400 L \pi^4 m^5 - 184320 L^6 \pi^2 m + 61440 L^4 \pi^4 m + 1843200 L^4 \pi^2 m^3 \\
& \quad - 6912000 L^5 \pi^2 m + 1105920 L^3 \pi^4 m - 11059200 L \pi^4 m^3 - 3686400 L^4 \pi^2 m \\
& \quad \left. \left. + 22118400 L \pi^4 m \right) \right) / \left(L^3 \pi^2 (25 L^7 m^8 + 90 L^6 m^8 - 400 L^7 m^6 + 72 L^5 m^8 \right. \\
& \quad - 1440 L^6 m^6 + 9600 L^4 m^8 + 2400 L^7 m^4 - 1152 L^5 m^6 + 15840 L^3 m^8 + 8640 L^6 m^4 \\
& \quad - 153600 L^4 m^6 + 4320 L^2 m^8 - 6400 L^7 m^2 + 6912 L^5 m^4 - 253440 L^3 m^6 \\
& \quad + 216000 L m^8 - 23040 L^6 m^2 + 921600 L^4 m^4 - 69120 L^2 m^6 + 86400 m^8 + 6400 L^7 \\
& \quad - 18432 L^5 m^2 + 1520640 L^3 m^4 - 3456000 L m^6 + 23040 L^6 - 2457600 L^4 m^2 \\
& \quad + 414720 L^2 m^4 - 1382400 m^6 + 18432 L^5 - 4055040 L^3 m^2 + 20736000 L m^4 \\
& \quad + 2457600 L^4 - 1105920 L^2 m^2 + 8294400 m^4 + 4055040 L^3 - 55296000 L m^2 \\
& \quad \left. \left. + 1105920 L^2 - 22118400 m^2 + 55296000 L + 22118400 \right) \right) \\
& - \left(4\alpha_m \left(2560 L^7 \pi^4 m^5 + 18000 L^8 \pi^2 m^5 + 3072 L^6 \pi^4 m^5 - 20480 L^7 \pi^4 m^3 + 26400 L^7 \right. \right. \\
& \quad + 69120 L^3 \pi^4 m^5 + 288000 L^8 \pi^2 m + 49152 L^6 \pi^4 m - 46080 L^6 \pi^2 m^3 \\
& \quad - 952320 L^4 \pi^4 m^3 + 115200 L^4 \pi^2 m^5 + 422400 L^7 \pi^2 m - 3456000 L^5 \pi^2 m^3 \\
& \quad - 552960 L^3 \pi^4 m^3 + 1382400 L \pi^4 m^5 + 92160 L^6 \pi^2 m + 1904640 L^4 \pi^4 m \\
& \quad - 921600 L^4 \pi^2 m^3 + 6912000 L^5 \pi^2 m + 1105920 L^3 \pi^4 m - 11059200 L \pi^4 m^3 \\
& \quad \left. \left. + 1843200 L^4 \pi^2 m + 22118400 L \pi^4 m \right) \right) / \left(L^3 \pi^2 (25 L^7 m^8 + 90 L^6 m^8 - 400 L^7 m^6 \right. \\
& \quad + 72 L^5 m^8 - 1440 L^6 m^6 + 9600 L^4 m^8 + 2400 L^7 m^4 - 1152 L^5 m^6 + 15840 L^3 m^8 \\
& \quad + 8640 L^6 m^4 - 153600 L^4 m^6 + 4320 L^2 m^8 - 6400 L^7 m^2 + 6912 L^5 m^4 - 253440 L^3 m^6 \\
& \quad + 216000 L m^8 - 23040 L^6 m^2 + 921600 L^4 m^4 - 69120 L^2 m^6 + 86400 m^8 + 6400 L^7 \\
& \quad - 18432 L^5 m^2 + 1520640 L^3 m^4 - 3456000 L m^6 + 23040 L^6 - 2457600 L^4 m^2 \\
& \quad + 414720 L^2 m^4 - 1382400 m^6 + 18432 L^5 - 4055040 L^3 m^2 + 20736000 L m^4 \\
& \quad + 2457600 L^4 - 1105920 L^2 m^2 + 8294400 m^4 + 4055040 L^3 - 55296000 L m^2 \\
& \quad \left. \left. + 1105920 L^2 - 22118400 m^2 + 55296000 L + 22118400 \right) \right)
\end{aligned}$$

برابر حل حالت متقارن در نظر گرفته می شود که در آن m و n فرد در نظر گرفته می شوند. بنابراین

عبارت دوم بالا برای محاسبات در نظر گرفته می شود. این عبارت بطور خلاصه برابر است با $r5\alpha_m$ که

$$r5 = \frac{4r1}{r2} - \frac{4r3}{r4} \quad \text{و:}$$

>

$$\begin{aligned} r1 = & (-2240 L^7 \pi^4 m^5 - 18000 L^8 \pi^2 m^5 - 2688 L^6 \pi^4 m^5 + 17920 L^7 \pi^4 m^3 - 31200 L^7 \pi^2 m^5 \\ & + 144000 L^8 \pi^2 m^3 + 21504 L^6 \pi^4 m^3 - 11520 L^6 \pi^2 m^5 + 3840 L^4 \pi^4 m^5 - 35840 L^7 \pi^4 m \\ & + 249600 L^7 \pi^2 m^3 - 432000 L^5 \pi^2 m^5 + 69120 L^3 \pi^4 m^5 - 288000 L^8 \pi^2 m \\ & - 43008 L^6 \pi^4 m + 92160 L^6 \pi^2 m^3 - 30720 L^4 \pi^4 m^3 - 230400 L^4 \pi^2 m^5 \\ & - 499200 L^7 \pi^2 m + 3456000 L^5 \pi^2 m^3 - 552960 L^3 \pi^4 m^3 + 1382400 L \pi^4 m^5 \\ & - 184320 L^6 \pi^2 m + 61440 L^4 \pi^4 m + 1843200 L^4 \pi^2 m^3 - 6912000 L^5 \pi^2 m \\ & + 1105920 L^3 \pi^4 m - 11059200 L \pi^4 m^3 - 3686400 L^4 \pi^2 m + 22118400 L \pi^4 m) : \end{aligned}$$

>

$$\begin{aligned} r2 = & L^3 \pi^2 (25 L^7 m^8 + 90 L^6 m^8 - 400 L^7 m^6 + 72 L^5 m^8 - 1440 L^6 m^6 + 9600 L^4 m^8 \\ & + 2400 L^7 m^4 - 1152 L^5 m^6 + 15840 L^3 m^8 + 8640 L^6 m^4 - 153600 L^4 m^6 + 4320 L^2 m^8 \\ & - 6400 L^7 m^2 + 6912 L^5 m^4 - 253440 L^3 m^6 + 216000 L m^8 - 23040 L^6 m^2 \\ & + 921600 L^4 m^4 - 69120 L^2 m^6 + 86400 m^8 + 6400 L^7 - 18432 L^5 m^2 + 1520640 L^3 m^4 \\ & - 3456000 L m^6 + 23040 L^6 - 2457600 L^4 m^2 + 414720 L^2 m^4 - 1382400 m^6 + 18432 L^5 \\ & - 4055040 L^3 m^2 + 20736000 L m^4 + 2457600 L^4 - 1105920 L^2 m^2 + 8294400 m^4 \\ & + 4055040 L^3 - 55296000 L m^2 + 1105920 L^2 - 22118400 m^2 + 55296000 L \\ & + 22118400) : \end{aligned}$$

>

$$\begin{aligned} r3 = & (2560 L^7 \pi^4 m^5 + 18000 L^8 \pi^2 m^5 + 3072 L^6 \pi^4 m^5 - 20480 L^7 \pi^4 m^3 + 26400 L^7 \pi^2 m^5 \\ & - 144000 L^8 \pi^2 m^3 - 24576 L^6 \pi^4 m^3 + 5760 L^6 \pi^2 m^5 + 119040 L^4 \pi^4 m^5 \\ & + 40960 L^7 \pi^4 m - 211200 L^7 \pi^2 m^3 + 432000 L^5 \pi^2 m^5 + 69120 L^3 \pi^4 m^5 \\ & + 288000 L^8 \pi^2 m + 49152 L^6 \pi^4 m - 46080 L^6 \pi^2 m^3 - 952320 L^4 \pi^4 m^3 \\ & + 115200 L^4 \pi^2 m^5 + 422400 L^7 \pi^2 m - 3456000 L^5 \pi^2 m^3 - 552960 L^3 \pi^4 m^3 \\ & + 1382400 L \pi^4 m^5 + 92160 L^6 \pi^2 m + 1904640 L^4 \pi^4 m - 921600 L^4 \pi^2 m^3 \\ & + 6912000 L^5 \pi^2 m + 1105920 L^3 \pi^4 m - 11059200 L \pi^4 m^3 + 1843200 L^4 \pi^2 m \\ & + 22118400 L \pi^4 m) : \end{aligned}$$

>

$$r4 = L^3 \pi^2 (25 L^7 m^8 + 90 L^6 m^8 - 400 L^7 m^6 + 72 L^5 m^8 - 1440 L^6 m^6 + 9600 L^4 m^8 + 2400 L^7 m^4 - 1152 L^5 m^6 + 15840 L^3 m^8 + 8640 L^6 m^4 - 153600 L^4 m^6 + 4320 L^2 m^8 - 6400 L^7 m^2 + 6912 L^5 m^4 - 253440 L^3 m^6 + 216000 L m^8 - 23040 L^6 m^2 + 921600 L^4 m^4 - 69120 L^2 m^6 + 86400 m^8 + 6400 L^7 - 18432 L^5 m^2 + 1520640 L^3 m^4 - 3456000 L m^6 + 23040 L^6 - 2457600 L^4 m^2 + 414720 L^2 m^4 - 1382400 m^6 + 18432 L^4 - 4055040 L^3 m^2 + 20736000 L m^4 + 2457600 L^4 - 1105920 L^2 m^2 + 8294400 m^4 + 4055040 L^3 - 55296000 L m^2 + 1105920 L^2 - 22118400 m^2 + 55296000 L + 22118400) :$$

با در نظر داشتن حالت دوم، عبارت اول معادله برابر خواهد بود با:

$$\begin{aligned} & -4 \text{const}2 \alpha_m (20 L^7 \pi^5 m^3 + 24 L^6 \pi^5 m^3 - 300 L^7 \pi^3 m^3 - 360 L^6 \pi^3 m^3 + 7680 L^4 \pi^5 m^3 \\ & + 1200 L^7 \pi^3 m + 8640 L^3 \pi^5 m^3 + 9000 L^8 \pi m + 1440 L^6 \pi^3 m - 7200 L^4 \pi^3 m^3 \\ & + 14400 L^7 \pi m + 172800 L \pi^5 m^3 + 4320 L^6 \pi m + 28800 L^4 \pi^3 m + 216000 L^5 \pi m \\ & + 86400 L^4 \pi m) + 4 \text{const}2 \alpha_m (20 L^7 \pi^5 m^3 + 24 L^6 \pi^5 m^3 - 300 L^7 \pi^3 m^3 \\ & - 360 L^6 \pi^3 m^3 + 7680 L^4 \pi^5 m^3 - 1200 L^7 \pi^3 m + 8640 L^3 \pi^5 m^3 - 9000 L^8 \pi m \\ & - 1440 L^6 \pi^3 m - 7200 L^4 \pi^3 m^3 - 14400 L^7 \pi m + 172800 L \pi^5 m^3 - 4320 L^6 \pi m \\ & - 28800 L^4 \pi^3 m - 216000 L^5 \pi m - 86400 L^4 \pi m) \end{aligned}$$

که برای ساده شدن محاسبات بصورت $r6\alpha_m$ در نظر گرفته می‌شود و $r6$ ضریب معادله فوق است.

عبارت سوم معادله اصلی برابر خواهد بود با:

$$-\frac{1}{2} \frac{\cos(\pi n) \sin(\pi n) - \pi n}{n} \quad (67-3)$$

با n فرد این عبارت به $-\frac{\pi}{2}$ ساده می شود. عبارت آخر معادله برابر خواهد بود با $\frac{1}{4}h^2$. در نتیجه معادله نهایی برابر است با:

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (u'^2 - u_0'^2) d\zeta = \frac{1}{2\pi} \left((r_6 - r_5) \alpha_m - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi h^2}{4} \right) \quad (3-68)$$

اکنون با مشخص شدن P معادله قابل حل است. در نتیجه حل معادله منحنی ناپایداری بدست می آید.

۳-۴-۳- ناپایداری دینامیک

در مورد ناپایداری دینامیک فراجش، دو پیکربندی پایدار p_0 و $-p_0$ وجود دارند. این دو بعد از اعمال ناگهانی بار در زمان صفر بوجود می آیند. با استفاده از مفهوم انرژی پتانسیل کل می توان شرایط بروز ناپایداری فراجش را بررسی نمود. مقدار بار در این شرایط بار بحرانی خواهد بود. انرژی پتانسیل کل برابر است با:

$$U = U_S + U_Q \quad (3-69)$$

که U_S انرژی کرنشی کمان تغییرشکل یافته است و U_Q انرژی پتانسیل متناسب با بار نقطه ای:

$$U_s = 2p^2 + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (u_{,\xi\xi} - u_{0,\xi\xi})^2 d\xi \quad (3-70)$$

$$U_Q = 2Q \left(u\left(\frac{\pi}{2}\right) - u_0\left(\frac{\pi}{2}\right) \right)$$

برای محاسبه عبارات فوق $u_0(\zeta) = h \sin(\zeta)$ و $u(\zeta) = S + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(\lambda_n \zeta)$ را در اختیار داریم.

جهت محاسبه $u_{,\xi\xi}, u_{0,\xi\xi}$ از تعاریف این دو استفاده می کنیم:

$$u_0(\zeta) = h \sin(\zeta) \rightarrow u_{0,\xi\xi} = -h \sin(\zeta) \quad (71-3)$$

$$u_{,\xi\xi} = S'' + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\lambda_n^2 \alpha_n \cos(\lambda_n \zeta) \right)$$

که با داشتن S' از قبل می توان S'' را محاسبه نمود:

$$s_n''(\zeta) = f_n'(\zeta) \lambda_n = \left\{ \begin{array}{l} -\left(\frac{180L^3 \zeta^2}{\pi^4} - \frac{360L^3 \zeta}{\pi^3} + \frac{120L^3}{\pi^2} \right) / 360 \\ \left(\frac{180L^3 \zeta^2}{\pi^4} - \frac{60L^3}{\pi^2} \right) / 360 \\ -\frac{L}{\pi^2} \\ \frac{L}{\pi^2} \end{array} \right\}^T \left[\begin{array}{cccc} \frac{\hat{k}_0 L^3}{45} + 1 & \frac{7\hat{k}_0 L^3}{360} & -\frac{\hat{k}_0 L}{3} & -\frac{\hat{k}_0 L}{6} \\ \frac{7\hat{k}_1 L^3}{360} & \frac{\hat{k}_1 L^3}{45} + 1 & -\frac{\hat{k}_1 L}{6} & -\frac{\hat{k}_1 L}{3} \\ \frac{L}{3} & \frac{L}{6} & \hat{k}_0 + \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{L}{6} & \frac{L}{3} & -\frac{1}{L} & \hat{k}_1 + \frac{1}{L} \end{array} \right]^{-1} \left\{ \begin{array}{l} -\hat{k}_0 \\ (-1)^n \hat{k}_1 \\ -\left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \\ (-1)^n \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \end{array} \right\} \lambda_n \quad (72-3)$$

$$= g_n(\zeta) \lambda_n$$

اکنون داریم:

$$\int_0^\pi (u_{,\xi\xi} - u_{0,\xi\xi})^2 d\xi = \int_0^\pi \left(g_n(\zeta) \lambda_n + \sum_{n=1}^\infty (-\lambda_n^2 \alpha_n \cos(\lambda_n \zeta)) + h \sin(\zeta) \right)^2 d\xi = \quad (۷۳-۳)$$

$$\int_0^\pi \left(g_n^2(\zeta) \lambda_n^2 + \left(\sum_{n=1}^\infty (-\lambda_n^2 \alpha_n \cos(\lambda_n \zeta)) \right)^2 + h^2 \sin^2(\zeta) + \right. \\ \left. 2g_n(\zeta) \lambda_n \sum_{n=1}^\infty (-\lambda_n^2 \alpha_n \cos(\lambda_n \zeta)) + 2h \sin(\zeta) \sum_{n=1}^\infty (-\lambda_n^2 \alpha_n \cos(\lambda_n \zeta)) + 2g_n(\zeta) \lambda_n h \sin(\zeta) \right) d\xi$$

عبارت اول داخل انتگرال برابر است با:

$$\left(gn \cdot \lambda_n \right)^2$$

$$= \left(\lambda_n \left(\pi^4 (25 L^7 + 90 L^6 + 72 L^5 + 9600 L^4 + 15840 L^3 + 4320 L^2 + 216000 L + 86400) \right)^{-1} \right. \\ \left(-120 L^6 \pi^3 (-1)^n \zeta n^2 - 60 L^6 \pi^2 (-1)^n \zeta^2 n^2 + 60 L^5 \pi^2 (-1)^n \zeta^3 n^2 - 108 L^5 \pi^3 (-1)^n \zeta n^2 - 84 L^5 \pi^2 (-1)^n \zeta^2 n^2 + 54 L^4 \pi^2 (-1)^n \zeta^3 n^2 + 7200 L^3 \pi^3 (-1)^n \zeta n^2 - 4800 L^3 \pi^2 (-1)^n \zeta^2 n^2 - 3600 L^2 \pi^2 (-1)^n \zeta^3 n^2 + 4320 L^2 \pi^3 (-1)^n \zeta n^2 - 1440 L^2 \pi^2 (-1)^n \zeta^2 n^2 - 2160 L \pi^2 (-1)^n \zeta^3 n^2 + 85 L^6 \pi^4 n^2 + 108 L^5 \pi^4 n^2 + 2200 L^7 \pi^2 (-1)^n - 1600 L^7 (-1)^n \zeta^2 + 2100 L^6 (-1)^n \zeta^3 - 4800 L^7 \pi \zeta + 3180 L^6 \pi^2 (-1)^n - 2640 L^6 (-1)^n \zeta^2 + 3240 L^5 (-1)^n \zeta^3 + 5520 L^3 \pi^4 n^2 - 7920 L^6 \pi \zeta + 720 L^5 \pi^2 (-1)^n - 720 L^5 (-1)^n \zeta^2 + 1080 L^4 (-1)^n \zeta^3 + 2880 L^2 \pi^4 n^2 - 2160 L^5 \pi \zeta + 36000 L^4 \pi^2 (-1)^n - 72000 L^4 (-1)^n \zeta^2 + 43200 \pi^4 (-1)^n n^2 - 216000 L^4 \pi \zeta + 7200 L^3 \pi^2 (-1)^n - 28800 L^3 (-1)^n \zeta^2 - 86400 L^3 \zeta \pi + 2300 L^7 \pi^2 + 3420 L^6 \pi^2 + 720 L^5 \pi^2 + 72000 L^4 \pi^2 + 43200 \pi^4 n^2 - 1400 L^7 \zeta^2 + 2400 L^6 \zeta^3 - 2160 L^6 \zeta^2 + 3960 L^5 \zeta^3 - 720 L^5 \zeta^2 + 1080 L^4 \zeta^3 + 108000 L^3 \zeta^3 + 21600 L^3 \pi^2 + 75 L^6 \pi^4 (-1)^n n^2 - 180 L^6 \pi^3 \zeta n^2 - 40 L^6 \pi^2 \zeta^2 n^2 + 84 L^5 \pi^4 (-1)^n n^2 + 90 L^5 \pi^2 \zeta^3 n^2 - 252 L^5 \pi^3 \zeta n^2 - 36 L^5 \pi^2 \zeta^2 n^2 + 126 L^4 \pi^2 \zeta^3 n^2 - 4200 L^7 \pi (-1)^n \zeta + 1920 L^3 \pi^4 (-1)^n n^2 - 6480 L^6 \pi (-1)^n \zeta - 14400 L^3 \pi^3 \zeta n^2 + 2400 L^3 \pi^2 \zeta^2 n^2 + 1440 L^2 \pi^4 (-1)^n n^2 + 7200 L^2 \pi^2 \zeta^3 n^2 - 2160 L^5 \pi (-1)^n \zeta - 4320 L^2 \pi^3 \zeta n^2 + 1440 L^2 \pi^2 \zeta^2 n^2 + 2160 L \pi^2 \zeta^3 n^2 + 43200 L^2 \zeta^3 \right) \Big)^2$$

بدلیل طولانی بودن حاصل انتگرال این عبارت از بازنویسی آن صرف نظر می شود و با r_1 نشان داده می شود.

عبارت دوم پس از انتگرال گیری برابر است با:

$$\int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\lambda_n^4 \alpha_n^2 \cos^2(\lambda_n \zeta) \right) \right) d\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\lambda_n^4 \alpha_n^2 \frac{\cos(\lambda_n \pi) \sin(\lambda_n \pi) + \lambda_n \pi}{2\lambda_n} \right) \quad (74-3)$$

حاصل عبارت سوم پس از انتگرال گیری:

$$\frac{h^2 \pi}{2} \quad (75-3)$$

با داشتن $g_n(\zeta)$ انتگرال عبارات ۴ام و ۶ام نیز قابل محاسبه است که برابرند با r_2 و r_3 . در نهایت حاصل عبارت ۵ام برابر خواهد بود با:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-2h\lambda_n^2 \alpha_n \frac{1 + \cos(\pi\lambda_n)}{1 - \lambda_n^2} \right) \quad (76-3)$$

در نتیجه U_s برابر خواهد بود با:

$$U_s = (g_n(\zeta)\lambda_n)^2 + r_1 + \frac{h^2 \pi}{2} + r_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-2h\lambda_n^2 \alpha_n \frac{1 + \cos(\pi\lambda_n)}{1 - \lambda_n^2} \right) + r_3 \quad (77-3)$$

مقدار U_Q با توجه به معلوم بودن عبارات آن از قبل، قابل محاسبه است.
اکنون با معلوم بودن انرژی پتانسیل کل نمودار آن بر حسب Q بدست می آید.

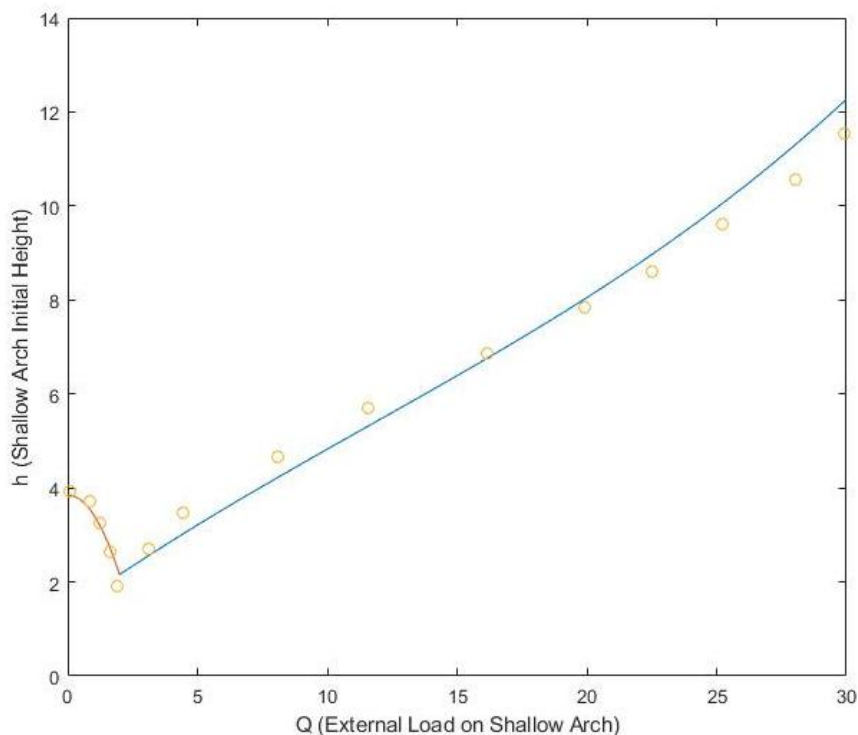
فصل ۴: نتایج

۴-۱- مقدمه

در این فصل صحت سنجی و نتایج حل ارائه می شود. برای صحت سنجی از نرم افزار آباکوس استفاده شده است. مدل دو بعدی باست. نتایج برای کمانش استاتیک و دینامیک در ادامه ارائه شده اند. برای صحت سنجی از نرم افزار آباکوس استفاده می شود. مراحل مدلسازی آباکوس در پیوست شرح داده شده است. مدل مورد بررسی کمان دوبعدی است که توسط تحلیل دینامیکی ضمنی در آباکوس تحت بار ضربه قرار می گیرد تا کمانش آن بررسی شود. در ادامه نتایج صحت سنجی م محاسبات تحقیق ارائه می شوند. برای حالت دوسر فنر هر جا ذکر نشده مقدار ثابت فنر k_0 برابر 0.4 و نسبت k_0/k_1 برابر 0.9 است.

۴-۲- نتایج

جهت صحت سنجی نتایج تحقیق با نتایج عددی نرم افزار آباکوس و همچنین کتاب سیمیتسس مقایسه می شود. نمودار زیر صحت سنجی مدل تحلیل را با مدل عددی نشان می دهد.

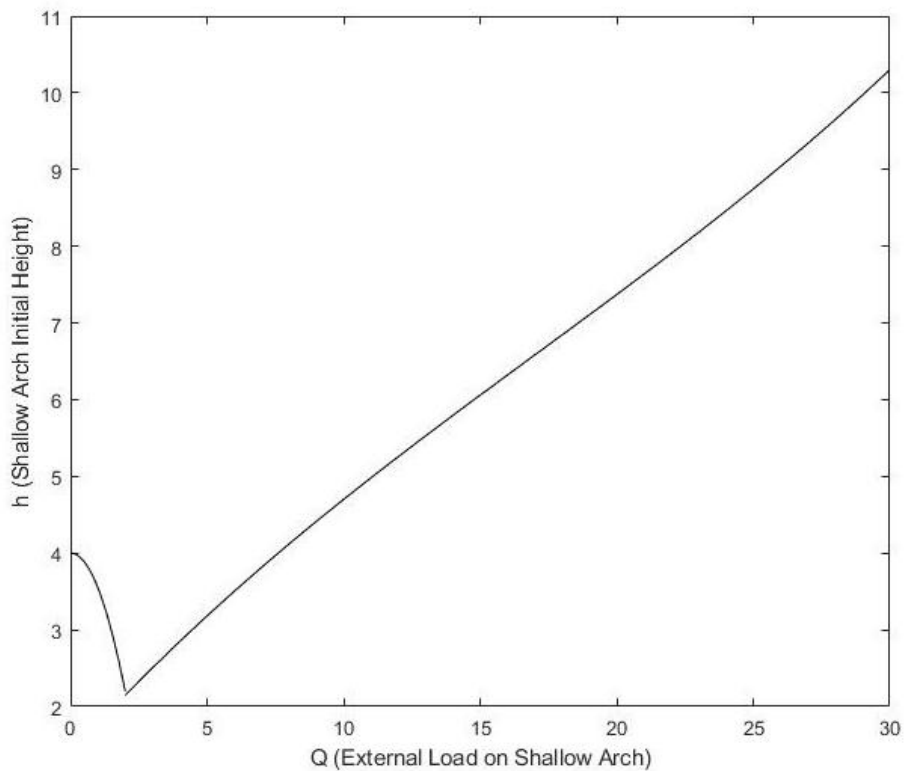


شکل (۴-۱) صحت سنجی مدل دوبعدی با مدل عددی در آباکوس

این نمودار تغییرات فاکتور انحنای کمان را با تغییر نیرو نشان می دهد. حل شامل سه مود است که هر مود با P^0 ، P^{1+} و P^{1-} نشان داده می شود که مورد دوم ناپایدار است و مورد بحث قرار نمی گیرد و مورد اول شکل اولیه کمان است. نمودار بالا و نمودارهای بعدی حالت P^{1-} است. نقطه تکین در نمودار نشان دهنده بار بحرانی کمانش است. خط پیوسته مقدار بدست آمده از تئوری و نقاط سبز مقادیر پیش بینی شده توسط نرم افزار را نشان می دهند. همانطور که مشاهده می شود علی رغم تفاوت دو رویکرد عددی و تحلیلی دو نمودار انطباق مناسبی دارند. شکل بعدی مقایسه تغییرات بار بحرانی بر حسب ارتفاع کمان است که با مرجع سیمیتسس انجام شده است.

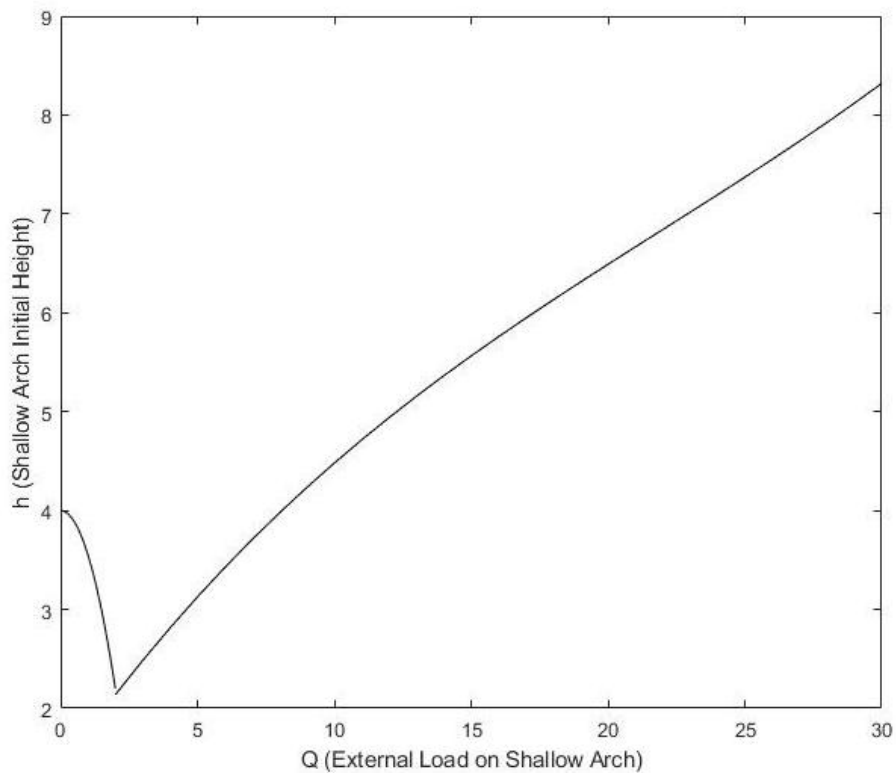
شکل (۲-۴) مقایسه تغییرات بار بحرانی با متغیر e برای تحقیق حاضر و مرجع سیمیتس

انطباق مناسبی بین دو نمودار وجود دارد. در ادامه سایر نمودارهای بدست آمده از روش تحلیل ارائه شده است. نمودار شکل زیر تغییرات کمانش استاتیک را در مدل کمان نشان می دهد.



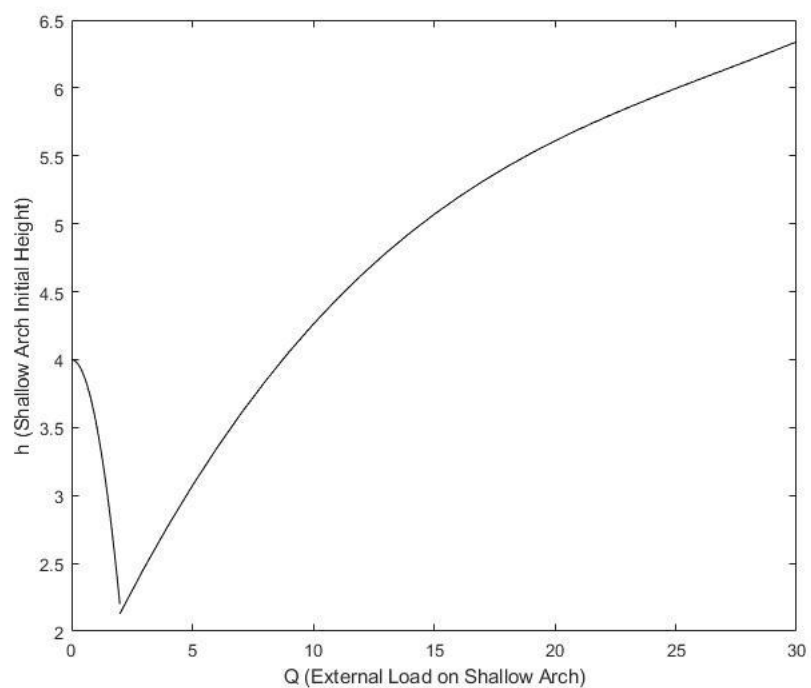
شکل (۳-۴) پاسخ استاتیکی ناپایداری کمانش برای شرط مرزی دوسردرگیر

نمودار دارای دو شاخه کاهشی و افزایشی است. مقدار بار بحرانی کمانش در حدود ۲.۱ است. تغییرات خیز بر حسب بار تا میزان ۱۱ ادامه داشته است. محاسبات برای حالت دوسردرگیر انجام شده است. نمودار مشابه برای حالتی که در دو انتها دو تکیه گاه ساده داریم بدست آمده است.



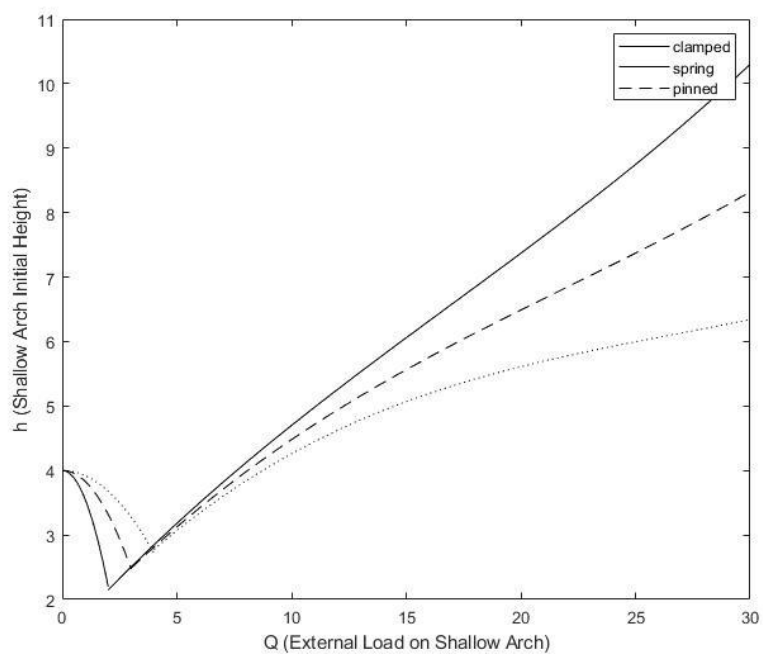
شکل (۴-۴) پاسخ استاتیکی ناپایداری کمانش برای شرط مرزی غیرخطی (فتر) در دو انتها

همانطور که مشاهده می شود بار بحرانی در مقداری نزدیک تر به ۵ اتفاق افتاده است. همچنین میزان خیز متناسب با بار نهایی به نسبت شکل قبل کاهش یافته است. این کاهش در حالت شرط مرزی دوسر فتر زیادتر است (شکل زیر).



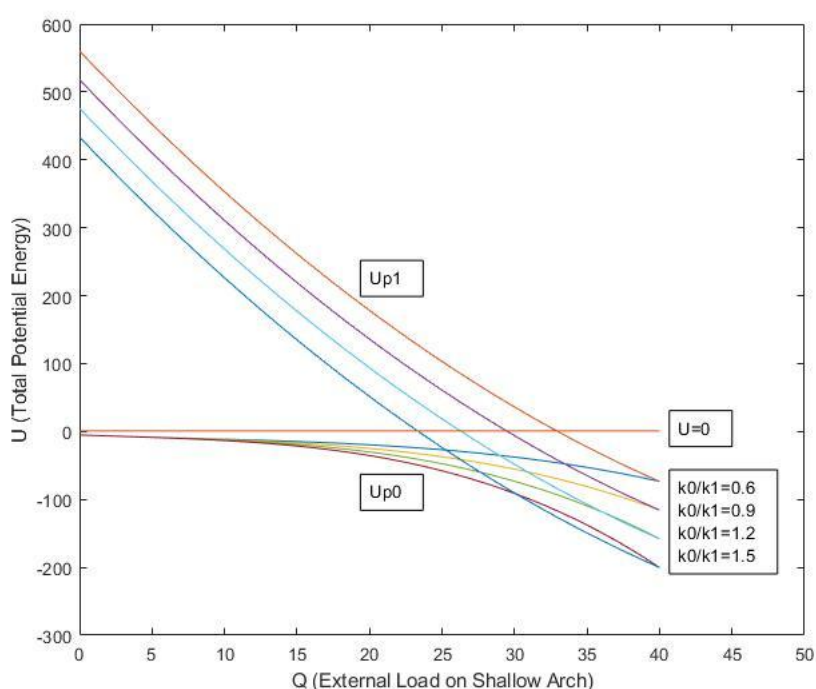
شکل (۴-۵) پاسخ استاتیکی ناپایداری کمانش برای شرط مرزی دوسرلولا

برای درک بهتر نمودار این سه وضعیت را بطور همزمان در شکل زیر می توان مشاهده نمود.



شکل (۴-۶) مقایسه پاسخ استاتیکی در سه حالت شرط مرزی

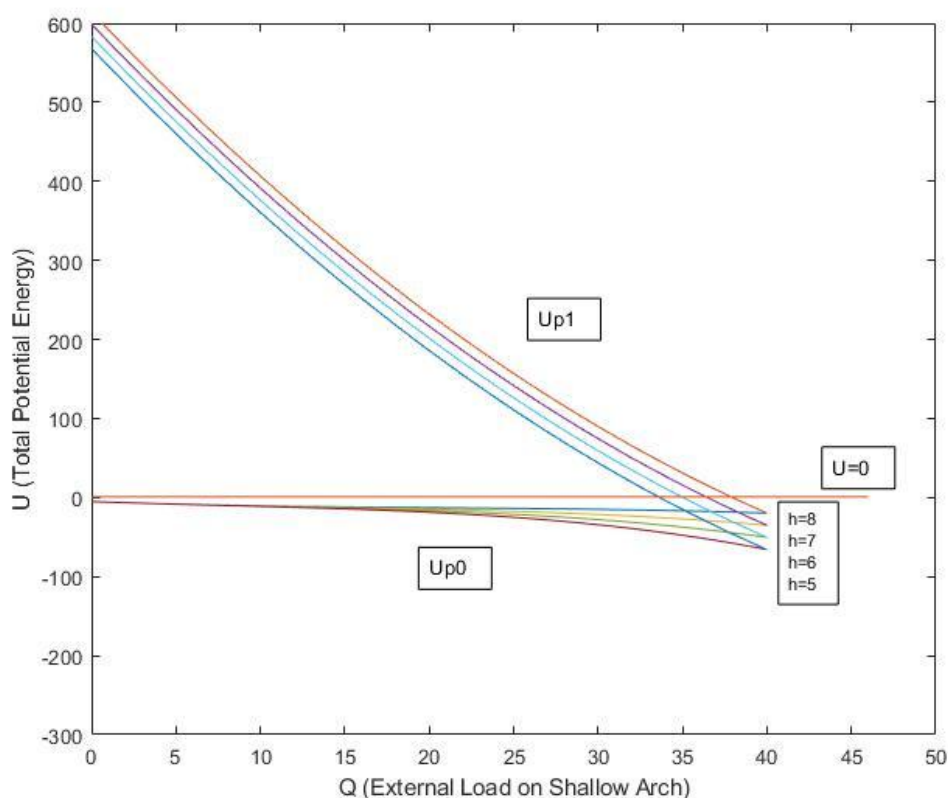
وجود فنر در مرز کمان باعث کاهش بار بحرانی کمانش شده است. خیز متناسب با این بار نیز از حالت های دوسردرگیر به دوسرلولا و به دوسرفنر نیز کاهش یافته است. در حالت فنری افزایش بار بحرانی در خیزهای نزدیک به هم اتفاق افتاده است. در حالت دینامیکی فرض بر این است که دو وضعیت پایدار P^0 و P^{1-} است که در اینجا با P^1 نشان داده می شود وجود دارد. بار متمرکز در زمان صفر در یک لحظه اعمال می شود و بعد اثر آن در نظر گرفته نمی شود و حالت پایدار سیستم بررسی می شود. یک رویکرد مناسب استفاده از مفهوم انرژی پتانسیل کل برای برقراری شرایط لازم در حالت جهش است. مقدار بار متناسب با این وضعیت تعادل بار بحرانی نامیده می شود. نمودار تغییرات بار بحرانی بر حسب انرژی پتانسیل کل را می توان در شکل زیر دید. مقدار h در این نمودار برابر ۸ در نظر گرفته شده است و همانطور که قبلا ذکر شد سفتی فنرهای خطی و پیچشی برای سادگی محاسبات یکسان در نظر گرفته شده اند ($\hat{k}_0 = \hat{K}_0$ و $\hat{k}_0 = \hat{K}_0$).



شکل (۴-۷) تغییرات Up_1 و Up_0 با بار اعمالی برای نسبت های مختلف سختی برای کمان با شرط مرزی فنر در دو انتها برای ناپایداری دینامیکی

تغییرات برای شرط مرزی دوسرفنر خطی و پیچشی در نظر گرفته شده است. برای راحتی مقایسه ثابت های دو فنر انتها بصورت یک نسبت در نظر گرفته شده است تا با داشتن یکی دیگری بدست بیاید. با افزایش بار کمانش تغییرات Up_1 و Up_0 در تمام حالات به ترتیب کاهشی و افزایشی است. با افزایش نسبت k_0 به k_1 شیب Up_0 افزایش می یابد. اختلاف بین Up_1 ها در بار حداقل به نسبت کمتر از مقادیر متناظر در بار حداکثر است.

برای مقایسه بهتر و بررسی تاثیر h در محاسبات دینامیک نمودار بعدی برای h متغیر و نسبت سفتی فنر ثابت 0.9 ارائه می شود.



شکل (۸-۴) تغییرات Up_1 و Up_0 با بار اعمالی برای نسبت های مختلف ارتفاع کمان برای کمان با شرط مرزی فنر در دو انتها برای ناپایداری دینامیکی در نسبت سفتی ثابت 0.9

خط $U=0$ ترسیم شده که نشان دهنده محدوده پایدار و ناپایدار است. شمای کلی نمودارها مشابه قبل است با این تفاوت که تغییر در ارتفاع کمان به نسبت تغییر در سختی فنر ها اثر کمتری داشته است. همچنین با افزایش ارتفاع کمان نمودارهای Up_0 و Up_1 به سمت پایین حرکت می کنند. بنابراین می توان نتیجه گرفت که در حالت استاتیکی بار بحرانی استاتیکی به ترتیب از تکیه گاه دوسر گیردار، تکیه گاه دوسر فنر و تکیه گاه دو سر لولا افزایش می یابد و مقدار خیز (ارتفاع اولیه) متناسب با مقدار بار کاهش می یابد.

هرچه نسبت $\frac{k_0}{k_1}$ بزرگتر باشد؛ نیروی بحرانی دینامیکی و همچنین نیروی بحرانی استاتیکی کوچکتر می باشد.

برای ارتفاع اولیه تیر قوسی کم عمق نیز این موضوع قابل رویت است که با افزایش مقدار h ، مقدار بار بحرانی استاتیکی و دینامیکی افزایش می یابد.

پیوست

روند اجرای تحلیل ضربه برای کمانش تیر منحنی با استفاده از روش دینامیکی غیرخطی ضمنی در آباکوس

یکی از ویژگی های آباکوس انعطاف پذیری آن در دسترسی به پروسه های مختلف تحلیل است. به این معنی که نرم افزار به کاربر اجازه می دهد تا حل مساله را به صورت مرحله به مرحله اعمال کند و این کار توسط پروسه های تحلیل امکان پذیر است. در واقع یک مفهوم بنیادی در آباکوس تقسیم مساله به چند مرحله است. یک مرحله می تواند شامل هر فاز از تحلیل باشد، مانند : حرارتی گذرا، دینامیکی گذرا، استاتیکی و ... به بیان ساده تر در آباکوس/استاندارد یک مرحله می تواند تنها تحلیل استاتیکی مرتبط با تغییر بار از یک مقدار به مقدار دیگر باشد. در هر مرحله کاربر یک پروسه را انتخاب می کند که توسط آن نوع تحلیل مشخص می شود : تحلیل تنش دینامیک ، تحلیل مقدار ویژه ، تحلیل کمانش و ... انتخاب پروسه ها از هر مرحله به مرحله بعد می تواند مختلف باشد . از آنجا که وضعیت مدل (مانند دما ، تنش ، کرنش و ...) در هر مرحله به روز می شود ، پاسخ مرحله جدید همواره متأثر از مرحله قبلی است. مثلاً اگر قبل از یک آنالیز فرکانسی خطی یک تحلیل استاتیکی غیر خطی انجام دهیم ، اثر این تحلیل غیر خطی به صورت سختی پیش بار در تحلیل فرکانسی خطی دخیل خواهد بود.

در آباکوس به طور کلی دو نوع روند تحلیل داریم : روند عمومی^۱ ، روند اغتشاشات خطی^۲

در روند عمومی هر نوع مساله خطی و غیرخطی قابل تحلیل است و در هر دو ماژول استاندارد و صریح در دسترس است ولی روند دوم صرفاً تحلیل خطی از مساله ارایه میدهد و در ماژول استاندارد در دسترس است.

در شرایطی که بخواهیم مساله را در چند مرحله^۳ حل کنیم باید از روند عمومی استفاده کنیم. این شرایط زمانی مفید است که بخواهیم از نتایج یک مرحله به عنوان شرایط اولیه برای مرحله بعد استفاده

¹ General

² Linear perturbation

³ Multistep

کنیم و یا بعضی از متغیرها مثل بارگذاری و یا شرایط مرزی در مراحل بعدی عوض شود که برای این کار از قابلیت شروع مجدد^۱ استفاده می شود. تحلیل های انجام شده در روند اغتشاشات خطی هیچ تاثیری بر تحلیل های انجام شده در روند عمومی ندارند.

نرم افزار آباکوس روش های مختلفی را برای حل مسایل دینامیکی ارائه می دهد که شامل موارد زیر است :

- تحلیل دینامیکی ضمنی با استفاده از انتگرال گیری مستقیم^۲
- تحلیل دینامیکی صریح^۳
- تحلیل دینامیکی حالت پایا با حل مستقیم^۴
- استخراج فرکانس های طبیعی^۵
- استخراج مقادیر ویژه مختلط^۶
- تحلیل دینامیکی مودال گذرا^۷
- تحلیل دینامیکی حالت پایا و مبتنی بر مود^۸
- تحلیل دینامیکی حالت پایا مبتنی بر شبه فضا^۹
- تحلیل طیفی پاسخ^{۱۰}
- تحلیل پاسخ اتفاقی^{۱۱}

جهت بررسی اثرات غیر خطی انتگرال گیری مستقیم^{۱۲} از سیستم استفاده می شود. در مازول استاندارد از انتگرال گیری مستقیم ضمنی^{۱۳} و در مازول صریح از انتگرال گیری مستقیم صریح^{۱۴} استفاده می شود. در روش های مبتنی بر انتگرال گیری مستقیم، از معادلات کلی سیستم در طی زمان

¹ Restart
² Implicit dynamic analysis using direct integration
³ Explicit dynamic analysis
⁴ Direct-solution steady-state dynamic analysis
⁵ Natural frequency extraction
⁶ Complex eigenvalue extraction
⁷ Transient modal dynamic analysis
⁸ Mode-based steady-state dynamic analysis
⁹ Subspace-based steady-state dynamic analysis
¹⁰ Response spectrum
¹¹ Random response analysis
¹² Direct Integration
¹³ Implicit
¹⁴ Explicit

انتگرال گرفته می شود که هزینه محاسباتی زیادی نسبت به روش های مودال^۱ دارد. لذا در تحلیل مسایل خطی معمولاً از روش های مودال استفاده می شود. روش های شبه فضا^۲ که در استاندارد ارایه شده است رویکردی است جهت حل مسایلی که درجه غیرخطی بودن آنها ملایم است. در استاندارد عمده حل ها با تحلیل فرکانسی شروع شده و مقادیر و بردارهای ویژه سیستم بدست می آیند. در روش های مبتنی بر مود امکان اعمال جابجایی و یا دوران اولیه^۳ وجود ندارد و برای اینکار از روش تحلیل دینامیکی مودال گذرا^۴ استفاده می شود. در تمام تحلیل های دینامیکی باید چگالی و میرایی مواد ذکر شود.

در روش ضمنی از عملگرهای ضمنی و در روش صریح از عملگرهای تفاضل مرکزی^۵ برای انتگرال گیری استفاده می شود. در تحلیل ضمنی ماتریس عملگرهای انتگرالی باید معکوس گشته و مجموعه ای از معادلات غیرخطی باید در هر افزایش زمانی^۶ حل شود. در روش حل صریح، جابجایی ها و سرعتها بر مبنای مقادیر معلوم در ابتدای مرحله زمانی بدست می آیند در نتیجه ماتریس های کلی جرم و سختی نیازی به تشکیل و معکوس شدن ندارند. البته باید توجه داشت که چون عملگر تفاضل مرکزی به طور مشروط پایدار است لذا افزایش زمانی محدود خواهد بود و این در حالی است که عکس قضیه در مورد روش ضمنی صادق است. در روش صریح، هر چه ابعاد شبکه بندی کوچک تر باشد افزایش زمانی هم می تواند کوچکتر شود. افزایش زمانی در روند ضمنی به طور اتوماتیک انجام می شود و برای مدل های بدون سطوح تماسی گزینه transient fidelity وجود دارد ولی در مورد روند صریح مقدار افزایش زمانی باید همواره از یک مقدار بحرانی کمتر باشد. با افزایش میرایی سازه این حد بحرانی کمتر خواهد شد. به طور کلی می توان گفت که روند صریح مناسب برای مسایل با دینامیک سریع^۷ بوده و البته به

¹ Modal Methods

² Subspace-based

³ Prescribed displacement and rotation

⁴ Transient modal dynamic analysis

⁵ Central-difference

⁶ Time increment

⁷ High speed dynamic events

مقادیر افزایش زمانی کم حساس است؛ در مقابل روند ضمنی حساسیتی نسبت به مقدار افزایش زمانی نداشته ولی دوره زمانی پاسخ مورد نظر باید از به حد کافی طولانی تر از فرکانس پاسخ سیستم باشد. پروسه های تحلیل دینامیکی با حل مستقیم در آباکوس عبارتند از:

- تحلیل دینامیکی ضمنی : استفاده از انتگرال گیری مستقیم ، مناسب برای تحلیل های گذرای شدیداً غیرخطی ، قابل دسترسی در ماژول استاندارد
- تحلیل دینامیکی صریح مبتنی بر شبه فضا: استفاده از انتگرال گیری مستقیم و صریح و بر مبنای مقادیر و بردارهای ویژه ، مناسب برای سیستم های با درجه غیر خطی ملایم ، قابل دسترسی در ماژول استاندارد
- تحلیل دینامیکی صریح: قابل دسترسی در ماژول صریح
- تحلیل پاسخ هارمونیک حالت پایا با حل مستقیم: بدست آوردن پاسخ به شکل واقعی و موهومی به عنوان تابعی از فرکانس و قابلیت مدل سازی اثرات وابسته به فرکانس

هر دو تحلیل خطی و غیر خطی در ماژول آباکوس/استاندارد قابل دستیابی است. تحلیل های خطی فقط از طریق پروسه اغتشاشات خطی قابل انجام هستند و می توانند وابسته به تحلیل های استاتیکی پیش بار باشند.

هدف از تحلیل های غیر خطی دستیابی به جواب همگرا به هزینه محاسبات کم است. بر این اساس حل های غیر خطی در آباکوس دارای دو رویکرد هستند: در یک رویکرد ، انتخاب پارامتر افزایش زمانی توسط خود کاربر صورت می گیرد و مقدار آن در پروسه حل ثابت خواهد بود . در رویکرد دوم انتخاب پارامتر فوق به صورت خودکار توسط نرم افزار در هر مرحله از حل صورت می گیرد و کاربر مقداری را به عنوان تolerانس تعیین می کند. رویکرد دوم معمولاً به صرفه تر است چرا که کاربر به طور کلی قادر به پیش بینی پاسخ در مراحل بعدی نیست و نمی تواند مقدار بهینه ای را به این پارامتر اختصاص دهد و این در حالی است که این امر برای نرم افزار با توجه به الگوریتم های موجود امکان پذیر است . از طرفی

دیگر باید به این نکته توجه داشت که کاربرد رویکرد دوم عمدتاً در مسایلی است که بارگذاری در طی زمان تغییر می کند مانند مسایل خزش و انتقال حرارت.

در آباکوس/صریح پارامتر افزایش زمانی توسط محدوده پایداری اوپراتور تفاضل مرکزی کنترل می شود. بنابراین پروسه انتخاب این پارامتر کاملاً اتوماتیک است و امکان تعیین آن توسط کاربر وجود ندارد چرا که بهینه نیست.

ماژول های آباکوس/استاندارد و آباکوس/صریح دو ماژول کاملاً متفاوت بوده و ساختمان داده کاملاً متفاوتی دارند. در نتیجه پروسه دینامیکی صریح نمی تواند برای مسایلی استفاده شود که توسط پروسه استاندارد قابل حل است.

۴-۲-۲- روش حل مدل عددی

همانطور که ذکر شد نرم افزار آباکوس نحوه انجام تحلیل های مختلف را به صورت پروسه ای تنظیم نموده است و این بدین معنی است که کاربر می تواند در یک مرحله یک تحلیل مشخص را انجام داده و نتایج را مشاهده نماید و در مرحله بعدی تحلیل های احتمالی که بر مبنای تحلیل قبل است را بر اساس آن انجام دهد و از نتایج حل قبلی در مساله جدید استفاده نماید.

اغلب مسایلی که توسط نرم افزار آباکوس حل می شوند شامل پیدا نمودن یک حل تقریبی (اجزای محدود) برای جابجایی ها ، تغییر شکل ها ، تنش ها ، نیروها و احتمالاً متغیرهای دیگر مانند دما در جسم جامد ناشی از تاریخچه ای از بارگذاری هستند. حل دقیق چنین مسایلی نیازمند آن است که هر دوی معادلات تعادل نیرو و ممان در کل زمان مورد نظر بر روی یک حجم دلخواه از جسم ارضا شود. روش اجزای محدود جابجایی مبتنی بر بدست آوردن تقریبی از این حالت تعادلی است که برای این کار معادله تعادل با یک فرم ضعیف شده ای جایگزین می شود. در این بخش ما معادله دقیق تعادل را

بدست آورده و آن را به فرم کار مجازی می نویسیم تا بتوانیم برای تقریب اجزای محدود از آن استفاده کنیم .

اساس توسعه روش اجزای محدود جابجایی بر مبنای تقریب های فضایی محلی از بخش های حل است . برای توسعه این تقریب، ۳ معادله تعادل بدست آمده با یک فرم ضعیف شده ، یک معادله اسکالر برای تمام جسم ، جایگزین می کنیم که از ضرب یک تابع آزمون مقداردهی شده برداری و پیوسته در معادله دیفرانسیل تعادل نقطه ای و انتگرال گیری از آن بدست می آید. از آنجا که تابع آزمون کاملاً دلخواه است ، عبارت دیفرانسیلی تعادل در هر نقطه دلخواه و در هر جهتی ، همواره می تواند با انتخاب یک تابع آزمون غیر صفر در آن نقطه و آن جهت بازیابی شود. برای این حالت از تعادل با یک ماتریس کلی تنش ، این فرم ضعیف شده معادل همان اصل کار مجازی است . تابع آزمون می تواند فرض شود که یک میدان سرعت مجازی δv است که کاملاً دلخواه بوده ولی باید از قیود تعیین شده سینماتیکی پیروی نموده و پیوستگی کافی داشته باشد . ضرب نقطه ای این تابع آزمون با معادله تعادل نیرو نمایانگر نرخ کار مجازی خواهد بود .

عبارت کار مجازی یک مفهوم فیزیکی ساده دارد : نرخ کار انجام شده توسط نیروهای خارجی متاثر از هر میدان سرعت مجازی برابر است با نرخ کار انجام شده توسط تنش های حالت تعادل بر روی نرخ تغییر شکل همان میدان سرعت مجازی. در واقع اصل کار مجازی همان فرم ضعیف شده معادلات تعادلی بوده و به عنوان اساسی ترین رابطه جهت فرمول بندی روش اجزای محدود استفاده می شود . مزیت اصلی آن این است که معادله تعادلی فوق به صورت انتگرالی حول حجم جسم است. ما می توانیم تقریب های مختلفی را با استفاده از تابع آزمون های مختلف برای میدان سرعت مجازی بدست آوریم که کاملاً دلخواه نیستند ولی تغییرات آنها محدود به مقادیر تعداد مشخصی از گره ها است . این رویکرد در بدست آوردن معادلات، پایه قویتری از ریاضیات را بدست می دهد که توسط آن می توان به جای گسسته سازی مستقیم تفاضل محدود معادلات تعادل نقطه ای ، تقریبی از آنها را مورد مطالعه قرار داد.

در مورد المان ها نیز ذکر این نکته ضروری است که تئوری تمام المان ها در آباکوس به شکل انتگرال گیری عددی هستند که اجازه می دهد تا کلیت تئوری در رفتار ماده حفظ شود. مقطع المان تیر یا ورق می تواند به شکل کلی تعریف شود. تمام المان ها در مختصات کلی کارترین تعریف می شوند و مقادیر پایه برداری در اکثر آنها بر حسب مقادیر گره ای با توابع میانپای اسکالر تعریف می شوند.

اکثر مدل های اجزای محدود در آباکوس ، غیر خطی هستند و ابعاد آنها می تواند از چند درجه آزادی تا هزاران درجه آزادی باشد. بر حسب این متغیرها، معادلات تعادل که توسط گسسته سازی معادله اصل کار مجازی بدست آمده اند را می توان نوشت.

در اینجا دو بحث مطرح می شود : چگونه عبارت تعادلی گسسته ، باید در هر مرحله زمانی حل شود و دوم اینکه اندازه افزایش زمانی چگونه باید تعیین شود. ماژول آباکوس/استاندارد معمولاً از روش نیوتن برای حل معادلات غیر خطی استفاده می کند. علت اصلی این انتخاب، نرخ مناسب همگرایی است که توسط روش نیوتن بدست می آید در مقایسه با سایر روش ها مانند روش نیوتن اصلاح شده یا روش شبه نیوتن.

هر دو این موارد در یک حل آباکوس استاندارد به طور پیش فرض چک می شوند. آباکوس همچنین مقادیر قله را در باقیمانده های نیرویی، جابجایی های نموی و تصحیحات اعمالی بر جابجایی ها در هر تکرار به دست می دهد و کاربر می تواند این موارد را چک کند. در کدهای حجیم اجزای محدود معمولاً از روش نیوتن استفاده نمی شود و این به این دلیل است که ماتریس ژاکوبین کامل به سختی قابل محاسبه است و نمی توان فرم بسته ای از این ماتریس ارایه داد و باید عددی حل شود که دارای خطا است.

روش نیوتن اصلاح شده، روشی دیگر است که بعضاً به عنوان جایگزین استفاده می شود. در این روش ماتریس ژاکوبین به طور دفعی محاسبه می شود. این روش برای مسایلی که میزان غیر خطی بودن آنها در حد متوسط است، مناسب است.

وقتی که یک الگوریتم تکراری به یک مساله وابسته به تاریخچه زمانی اعمال می شود، حل به دست آمده معمولاً دقت متوسطی داشته و یا واگرا می شود. بنابراین انتگرال گیری از متغیرهای وابسته به تاریخچه زمانی باید به طور کامل حول هر تغییر زمانی در هر تکرار صورت گیرد. در آباکوس/استاندارد، با فرض اینکه متغیرهای گره ای u در طی نمو زمانی به طور خطی تغییر کنند، این امر انجام پذیر است.

مساله انتخاب میزان افزایش زمانی کار مشکلی بوده و برای هر مساله می تواند متفاوت باشد. انتخاب این پارامتر چه به صورت دستی باشد و چه خودکار، باید دقیق بوده تا جواب های مناسبی به دست دهد. در مسایل دینامیکی هر کدام از دو گزینه فوق می تواند منجر به جواب های مناسب و یا نامناسب شود و کاربر باید با توجه به دید خود از مساله آنرا تعیین نماید.

همچنین در مسایل دینامیکی می توان از گزینه half-increment residual استفاده کرد. ایده به این شرح است که اوپراتور تعیین کننده بازه زمانی، سرعت ها و شتاب هادر پایان مرحله $(t + \Delta t)$ به صورت تابعی از جابجایی پایان مرحله و شرایط ابتدای مرحله تعیین می کند. در ادامه تعادل در $(t + \Delta t)$ برقرار می گردد که یک حل مناسب را در پایان هر مرحله تضمین می دهد.

کنترل مرحله زمانی بر مبنای اندازه گیری خطای حالت تعادل است (باقیمانده های نیرویی) که در بعضی نقاط در حین حل انجام می گیرد و از اوپراتور انتگرال گیری به همراه جواب به دست آمده در $(t + \Delta t)$ استفاده می کند تا در حین مرحله زمانی عمل میانمایی انجام گیرد.

ارزیابی در نیمه مرحله $(t + \frac{\Delta t}{2})$ صورت می گیرد. اگر ماکزیمم بردار باقیمانده¹ از یک تفرانس مشخصی که توسط کاربر تعیین می شود بزرگتر باشد، نرم افزار این مرحله زمانی را بزرگ تشخیص داده و با یک فاکتور مناسبی آن را کاهش می دهد و در حالت برعکس، اندازه مرحله زمانی مناسب تشخیص داده شده و ثابت باقی می ماند.

¹ half-increment residual

در حالتی که سیستم کاملاً خطی باشد، روش های مقدار ویژه در آباکوس برای حل استفاده می شود چرا که در مورد خواص طبیعی سازه اطلاعات مناسبی را به دست می دهد و از نظر مدت زمان حل نسبت به روش های مبتنی بر انتگرال گیری مستقیم بسیار به صرفه تر است.

انتگرال گیری مستقیم در آباکوس توسط اوپراتور صریح تفاضل مرکزی انجام می شود. به این صورت که از تمام درجات آزادی مدل اجزای محدود برای تحلیل غیرخطی، انتگرال گرفته می شود. انتخاب اوپراتور انتگرال گیری متاثر از فاکتورهای مختلفی است. بر خلاف روش های مبتنی بر انتشار امواج که پاسخ های محلی را در مدل پیوسته به دست می دهند، روش های دینامیکی در آباکوس/استاندارد به گونه ای است که دینامیک کلی سیستم را به دست می دهد. اثرات موجی مانند انعکاس، زوم و خاصیت پخشی در مسایل سازه ای اهمیت ندارند چرا که مدت زمان پاسخ سیستم نسبت به مدت زمان انتشار امواج در سازه بسیار بیشتر است و این مسایل در حوزه مسایل تحت عنوان اینرسی طبقه بندی می شوند.

اپراتورهای انتگرال گیری دینامیکی به دو دسته صریح و ضمنی تقسیم می شوند. روندهای صریح که در آباکوس/صریح استفاده شده است، مقادیر دینامیک را در زمان $(t + \Delta t)$ و بر اساس مقادیر موجود در t محاسبه می کند و اوپراتور تفاضل مرکزی به صورت مشروط پایدار است و محدوده پایداری به طور تقریبی برابر است با مدت زمانی که طول می کشد تا یک موج الاستیک کوچک ترین بعد یک المان را طی کند. این محدودیت در مقادیر زمانی در روند ضمنی توسط محاسبه مقادیر در $(t + \Delta t)$ بر مبنای مقادیر در زمان $(t + \Delta t)$ و همچنین مقادیر فعلی در t ، برداشته شده است. اما از آنجا که این الگوریتم ها ضمنی هستند، معادلاتی که باید حل شوند از نوع غیرخطی خواهند بود.

در مسایل سازه ای، الگوریتم های ضمنی معمولاً جواب های مناسبی می دهند و مرحله زمانی آنها ۱ تا ۲ برابر بزرگتر از محدوده پایداری رویه های ساده صریح است ولی کیفیت پاسخ با افزایش مرحله زمانی نسبت به دوره تناوب مودهای پاسخ افت پیدا می کند.

جهت تعیین بیشترین مرحله زمانی مجاز ۳ فاکتور را باید در نظر بگیریم : نرخ تغییرات بارگذاری اعمالی ، میزان پیچیدگی میرایی غیرخطی و مشخصات سازه مانند سختی و دوره تناوب. در حالت کلی در صورتی که رابطه $\Delta t < 0.1t$ برای بیشترین مرحله زمانی صادق باشد نتایج مناسبی را می توان به دست آورد . بنابراین قضاوت در مورد مناسب بودن هر کدام از این دو روش انتگرال گیری وابسته به محدوده پایداری سیستم برای روند صریح ، میزان سادگی حل در روند ضمنی ، تغییر نسبی افزایش زمانی برای به دست آوردن جواب با دقت مناسب و سائز مدل است.

مساله کمانش غیرخطی در واقع همان تحلیل ارتعاشی غیرخطی سیستم تحت اثر بار ضربه است. با اعمال بار ضربه سازه دچار کمانش شده سپس حول وضعیت کمانش ارتعاش میکند. مقادیر مورد نظر برای تحلیل فعلی تا نقطه کمانش استخراج می شود و تغییرات بعد آن بررسی نخواهد شد. از آنجا که روش دینامیکی ضمنی نتایج مناسبی را در مسایل ارتعاشات غیرخطی بدست داده است لذا از این روش جهت انجام تحلیل کمانش استفاده می شود.

جهت انجام تحلیل فوق به یک مدل المان بندی شده به همراه شرایط مرزی نیاز داریم. روند انجام تحلیل با استفاده از فایل ماکرو در زیر تشریح شده است:

ابتدا و در بالای فایل متنی باید دو خط زیر به عنوان پیش فرض وجود داشته باشد:

*Heading

*Preprint, echo=NO, model=NO, history=NO, contact=NO

در ادامه مختصات گره ها را تعیین می نماییم :

*Node

1	,	0	,	0
2	,	0.01	,	3.13092E-07
3	,	0.02	,	1.35524E-06
4	,	0.03	,	3.29756E-06

در بالا ستون اول شماره گره و دو ستون بعدی مختصات X و Y است. در ادامه ارتباط المان ها با

گره ها را تعیین می نماییم :

در بالا ستون اول شماره المان و ۲ ستون دیگر شماره گره های آن المان هستند. المان مورد استفاده از نوع B23 است که دارای ۶ درجه آزادی است، ۳ درجه انتقالی و ۳ درجه دورانی. تابع میانپای از نوع هرمیت مرتبه ۳ است. در مرحله بعد سطح مقطع و مشخصات مواد تعیین می شوند:

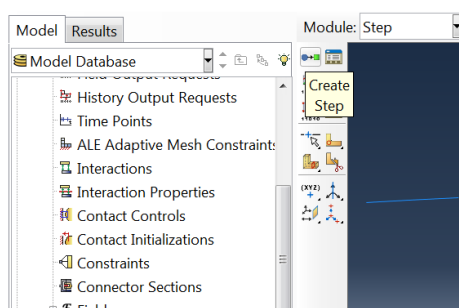
شکل فوق ابعاد سطح مقطع مستطیلی، چگالی و مدول الاستیسیته را نشان می دهد. پروفیل بارگذاری نیز باید به صورت جدول به نرم افزار داده شود :

پروپیل بارگذاری فوق از نوع دلتای دیراک است. در پایان نوع مرحله و شرایط مرزی تعیین می شود:

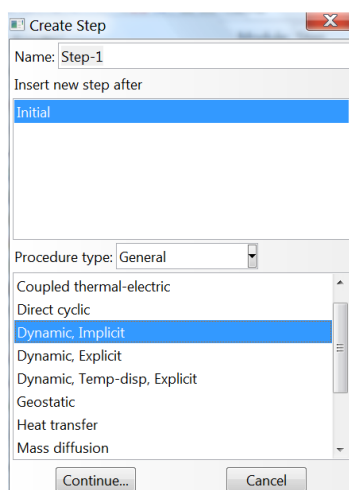
۷۶

در نمونه فوق، مرحله از نوع دینامیکی ضمنی دارای هندسه غیرخطی، ضریب آلفای -0.001 ، نمو زمانی 0.0005 و بازه زمانی 0 تا 1 است.

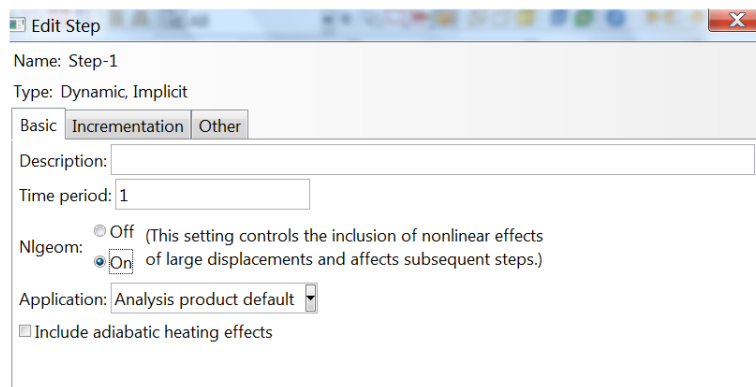
روند تحلیل دینامیکی ضمنی، پروسه مدنظر ما برای تحلیل های غیر خطی در آباکوس است. جهت انجام تحلیل فوق تنها کافیت تا از منوی **general** این نوع تحلیل را انتخاب نماییم.



شکل ۴۸: انتخاب گزینه تعیین تحلیل

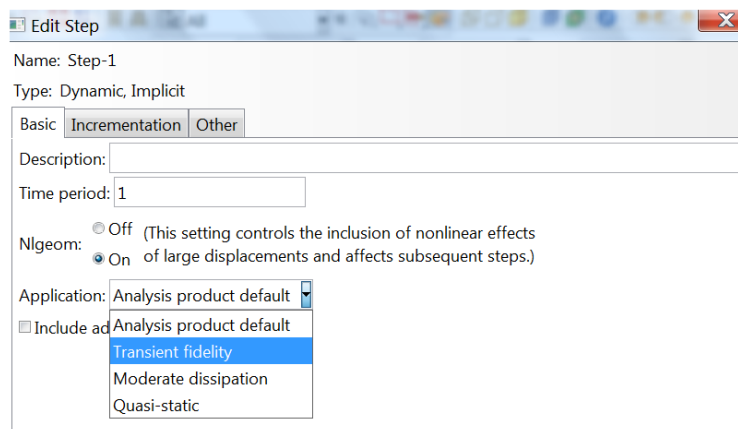


شکل ۴۹: تعیین تحلیل دینامیکی ضمنی



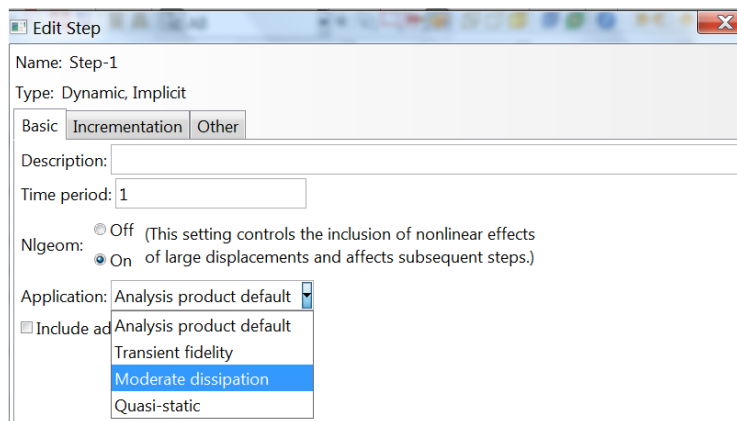
شکل ۵۰: فعال نمودن گزینه هندسه غیرخطی

گزینه هندسه غیرخطی را فعال می نمایم.



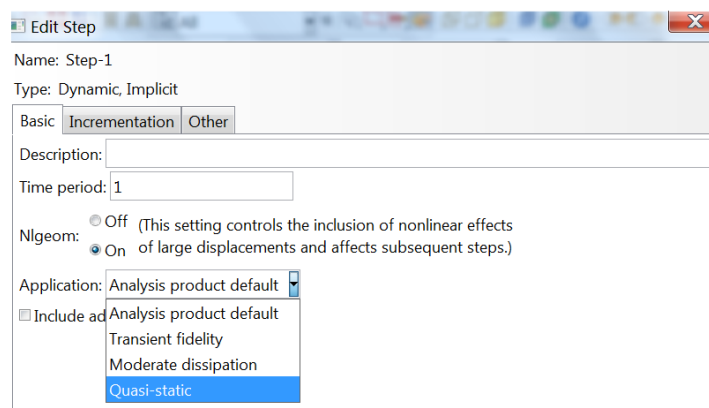
شکل ۵۱: گزینه transient fidelity

Application های پیشنهادی برنامه در شکل فوق نشان داده شده است. Transient fidelity برای مسایلی است که میزان غیرخطی بودن آنها پایین بوده و پارامتر α در آن -0.03 در نظر گرفته می شود.



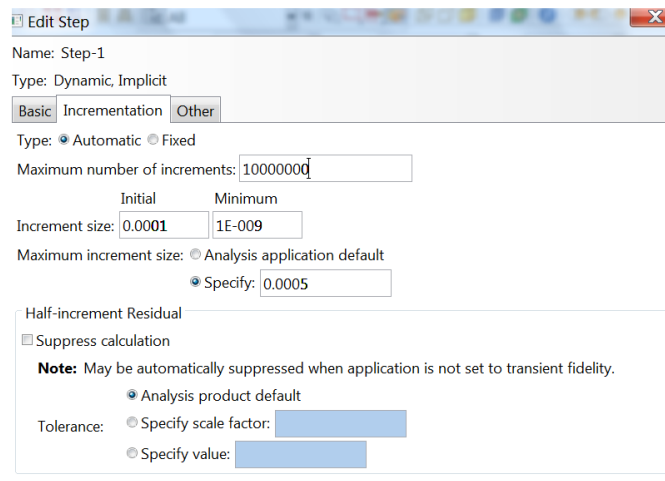
شکل ۵۲ : گزینه moderate dissipation

Moderate dissipation برای مسایلی است که میزان غیرخطی بودن آنها متوسط است و پارامتر α در آن -0.003 در نظر گرفته می شود.



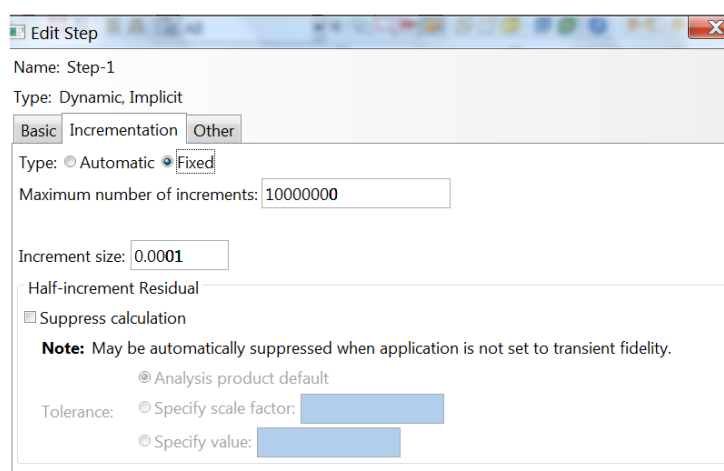
شکل ۵۳ : گزینه quasi-static

در انتها گزینه تحلیل شبه-استاتیک را داریم که عملاً در حل مساله ما به کار نمی آید.



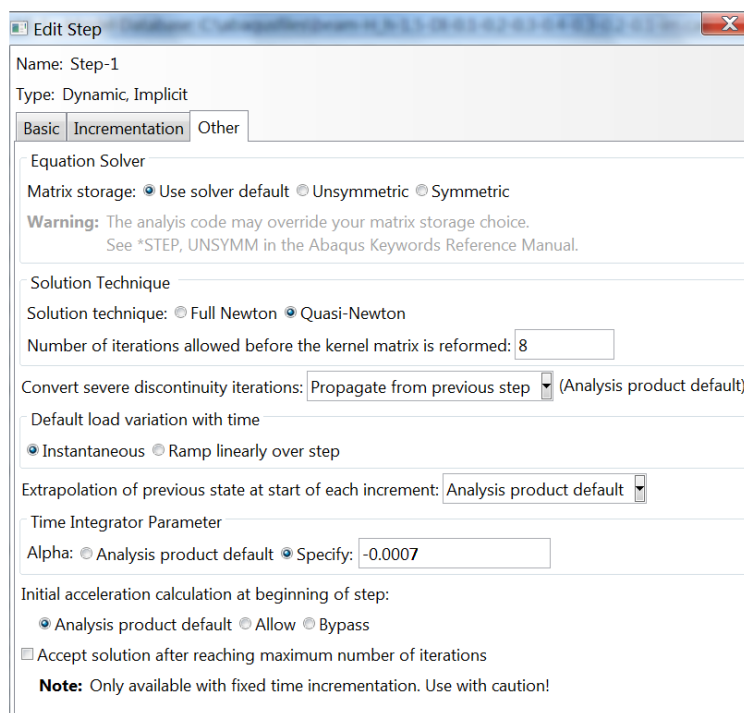
شکل ۵۴ : تعیین پارامتر نمو زمانی اتوماتیک

همانطور که در بخش تئوری ذکر شد، در این پروسه، پارامترهای حل هم می تواند به طور اتوماتیک و با ذکر محدوده آنها تعیین شود و هم به طور دستی. شکل فوق نمونه ای از تعیین خودکار پارامترها را نشان می دهد. بیشترین تعداد تکرار برابر ۱۰۰۰۰۰۰۰ انتخاب شده است تا برنامه محدودیتی در اعمال تکرار بالا نداشته باشد. محدوده پارامتر نمو زمانی بین ۰.۰۰۰۱ و ۰.۰۰۰۵ است و این یعنی برنامه مجاز است تا این پارامتر را تا حد زیادی کوچک نموده تا دقت حل بالاتر رود و جهت جلوگیری از کاهش دقت، مقدار ماکزیمم آن ۰.۰۰۰۵ انتخاب شده است.



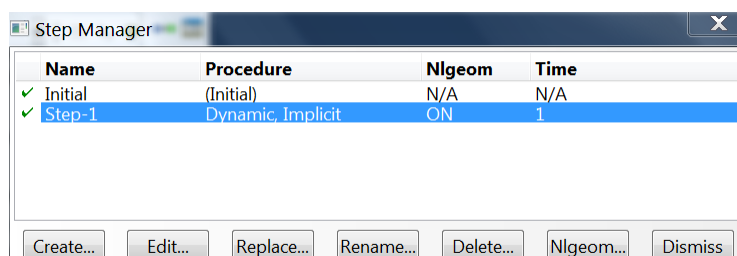
شکل ۵۵ : تعیین پارامتر نمو زمانی ثابت

شکل فوق نیز انتخاب پارامتر نمو زمانی به طور ثابت را نشان می دهد که این ویژگی را دارد که در هنگام گرفتن تبدیل فوریه سریع، مقدار پارامتر F_s (sampling frequency) ثابت و قابل تعیین خواهد بود.



شکل ۵۶: تعیین روش حل غیرخطی و پارامتر alpha

همانطور که در شکل فوق نشان داده شده است، امکان تعیین روش حل غیرخطی معادلات به فرم نیوتن و شبه نیوتن وجود دارد. همچنین پارامتر نمو زمانی به عنوان نمونه برابر -0.0007 انتخاب شده است. امکان انتخاب این پارامتر به طور پیش فرض نیز در نرم افزار وجود دارد.



شکل ۵۷: فعال بودن گزینه هندسه غیرخطی

علاوه بر اینکه می توان مسایل را در آباکوس از طریق GUI برنامه تعیین و اجرا نمود، می توان از گزینه آماده سازی فایل ورودی نرم افزار (فایل inp) نیز استفاده نمود. ویژگی این کار این است که با در دست داشتن فایل ورودی، انتخاب های بیشتری برای حل وجود دارد که در abaqus manual آورده شده است. در شکل ۵۸ یک نمونه از فایل ورودی را برای تحلیل دینامیکی ضمنی مشاهده می نماییم.

در قسمت ۱ و ۲ مختصات گره ها و رابطه گره ها با المان ها تعیین شده اند. در قسمت ۳ به مجموعه ای از گره ها و المان ها عنوان اختصاص داده شده است تا بعداً فراخوانی شود. قسمت ۴ مربوط به مشخصات سطح مقطع و مواد و قسمت ۵ برای تعیین پروفیل بارگذاری است. در نهایت در قسمت های ۶ و ۷ دو نمونه تحلیل استاتیکی غیرخطی و دینامیکی آورده شده است.

- [1] Virgin.L.N. and Davis.R.B. (2003) "Vibration isolation using buckled struts" **Journal of Sound Vibration**, **260**, pp: **965-973**.
- [2] Avramov.K.V. and Mikhlin.Y.V. (2004) "Snap-through truss as a vibration absorber" **Journal of Modal Analysis**, **10**, **2**, pp: **291-308**.
- [3] Budginskii.V.A. (1989) "On the use of the snap-through membrane for limitation of dynamical loads" **Mechanics of Solids**, **4**, pp: **44-49**.
- [4] Fung.Y.C. and Kaplan.A. (1952) "Buckling of low arches or curved beams of small curvature" **National Advisory Committee for Aeronautics**.
- [5] Chen.J.S. and Lin.J.S. (2006) "Stability of a shallow arch with one end moving at constant speed" **International Journal of Non-Linear Mechanics**, **41**, **5**, pp: **706-715**.
- [6] Mallon.N.J. and Fey.R.H.B. and Nijmeijer.H. and Zhang.G.Q. (2006) "Dynamic buckling of a shallow arch under shock loading considering the effects of the arch shape" **International Journal of Non-Linear Mechanics**, **41**, **9**, pp: **1057-1067**.
- [7] Hsu.C.S. (1966) "On dynamic stability of elastic bodies with prescribed initial conditions" **International Journal of Engineering Science**, **4**, **1**, pp: **1-21**.
- [8] Simitses.G.J. (1990), "**Dynamic Stability of Suddenly Loaded Structures**", Springer-Verlag, New York.
- [9] Pi.Y.L. and Bradford.M.A. (2013) "Nonlinear dynamic buckling of pinned-fixed shallow arches under a sudden central concentrated load" **Nonlinear Dynamics**, **73**, **3**, pp:**1289-1306**.
- [10] Shen.H.S. (2016) "**Functionally graded materials: nonlinear analysis of plates and shells**" CRC press.
- [11] Timoshenko.S.P. (1935) "Buckling of flat curved bars and slightly curved plates" **Asme Journal. Applied Mechanics** **2**, pp: **17-20**.
- [12] Gjelsvik.A and Bonder.S.R. (1962) "The energy criterion and snap buckling of arches" **Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE**, **88**, **EM5**, pp: **87-134**.
- [13] Humphreys.J.S. (1966) "On dynamic snap buckling of shallow arches" **AIAA Journal**, **4**, **5**, pp: **878-886**.
- [14] Lock.M.H. (1966) "The snapping of a shallow sinusoidal arch under a step pressure load" **AIAA Journal**, **4**, **7**, pp: **1249-1256**.

- [15] Levitas.J. and Singer.J. and Weller.T. (1997) "Global dynamic stability of a shallow arch by Poincare-like simple cell mapping" **International Journal of Non-Linear Mechanics**, 32, 2, pp: 411-424.
- [16] Chen.J.S. and Ro.W.C. (2009) "Dynamic response of a shallow arch under end moments" **Journal of Sound and Vibration**, 326, pp: 321-331.
- [17] Chandra.Y. and Stanciulescu.I. and Virgin.L.N. and Eason.T.G. and Spottswood.S.M. (2013) "A numerical investigation of snap-through in a shallow arch-like model" **Journal of Sound and Vibration**, 332, pp: 2532-2548.
- [18] Hoff.N.J. and Bruce.V.G. (1954) "Dynamic analysis of the buckling of laterally loaded flat arches" **Journal of Mathematics and Physics**, 32, pp: 276-288.
- [19] Hsu.C.S. (1967) "The effects of various parameters on the dynamic stability of a shallow arches" **Asme Journal of Applied Myechnics**, 34, pp: 349-358.
- [20] Hsu.C.S. (1968) "stability of shallow arches against snap-through under timewise step loads" **Asme Journal of Applied Myechnics**, 35, pp: 31-39.
- [21] Chen.J.S. and Lin.J.S. (2003) "Dynamic snap-through of a laterally loaded arch under prescribed end motion" **International Journal of Solids and Structures**, 40, 18, pp: 4769-4787.
- [22] Chen.J.S. and Lin.J.S. (2004) "Dynamic snap-through of a shallow arch under a moving point load" **Asme Journal of Vibration and Acoustics**, 126, 4, pp: 514-519.
- [23] Breslavsky.I. and Avramov.K.V. and Mikhlin.Yu. and Kochurov.R. (2008) "Nonlinear modes of snap-through motions of ashallow arch" **Journal of Sound and Vibration**, 311, 1, pp: 297-313.
- [24] Pi.Y.L. and Bradford.M.A. (2010) "Nonlinear in-plane elastic buckling of shallow circular arches under uniform radial and thermal loading" **International Journal of Mechanical Sciences**, 52, pp: 75-88.
- [25] Pi.Y.L. and Bradford.M.A. (2012) "Nonlinear dynamic buckling of shallow circular arches under a sudden uniform radial load" **Journal of Sound and Vibration**, 331, pp: 4199-4217.
- [26] Pi.Y.L. and Bradford.M.A. (2013) "In-plane stability of preloaded shallow arches against dynamic snap-through accounting for rotational end restraints" **Engineering Structures**, 56, pp: 1496-1510.

- [27] Ha.J. and Gutman.S. and shon.S. and Lee.S. (2014) "Stability of shallow arches under constant load" **International Journal of Non-Linear Mechanics**, **58**, pp: 120-127.
- [28] Abdelgawad.A. and Anwar.A. and Nassar.M. (2013) "snap-through buckling of a shallow arch resting on a two-parameter elastic foundation" **Applied Mathematical Modelling**, **37**, pp: 7953-7963.
- [29] Rastgo.A. and Shafie.H. and Allahverdizadeh.A. (2005) "Instability of curved beams made of functionally graded material under thermal loading" **International Journal of Mechanics and Materials in Design**, **2**, pp: 117-128.
- [30] Xi.S. and Shirong.L. (2008) "Nonlinear stability of fixed-fixed FGM arches subjected to mechanical and thermal loads" **Advanced Materials Research**, **33-37**, pp: 699-706.
- [31] Atai.A.A. and Naei.M.H. and Rahrovan.S. (2012) "Limit load analysis of shallow arches made of functionally bi-directional graded materials under mechanical loading" **Journal of mechanical science and technology**, **26**, **6**, pp: 1811-1816.
- [32] Li.W.L. (2000) "Free vibrations of beams with general boundary conditions" **Journal of Sound and Vibration**, **237**, **4**, pp: 709-725.
- [33] Li.W.L. (2002) "Comparison of Fourier sine and cosine series expansions for beams with arbitrary boundary conditions" **Journal of Sound Vibration**, **255**, pp: 185-194.
- [34] Wang.C.M. and Zhang.H. and Challamel.N. and Duan.W.H. (2017) "On boundary conditions for buckling and vibration of nonlocal beams" **European Journal of Mechanics-A/Solids**, **61**, pp: 73-81.
- [35] Jin.G. and Ye.T. and Su.Z. (2015) "**Structural Vibration: A uniform accurate solution for laminated beams, plates and shells with general boundary conditions**" Springer.
- [36] Chen.J.S. and Ro.W.C. and Lin.J.S. (2009) "Exact static and dynamic critical loads of a sinusoidal arch under a point force at the midpoint" **International Journal of Non-Linear Mechanics**, **44**, **1**, pp: 66-70.
- [37] Chen.J.S. and Hung.S.Y. (2012) "Exact snapping loads of a buckled beam under a midpoint force" **Applied Mathematical Modelling**, **36**, **4**, pp: 1776-1782.
- [38] Zhang,Z.,Liu,A.,Yang,J.,& Huang,Y.(2019)." Nonlinear in-plane elastic buckling of a laminated circular shallow arch subjected to a central concentrated load. **International Journal of Mechanical Sciences**, **161**, pp:105023.

- [39] Keibolahi, A., Kiani, Y. and Eslami, M.R.,(2018). Dynamic snap-through of shallow arches under thermal shock. ***Aerospace Science and Technology*, 77, pp.545-554.**
- [40] Yan, S. T., Shen, X., Chen, Z., & Jin, Z. (2017). On buckling of non-uniform shallow arch under a central concentrated load. ***International Journal of Mechanical Sciences*, 133, pp: 330-343.**
- [41] Yan, S. T., Shen, X., Chen, Z., & Jin, Z. (2018). Symmetric snap-through and equal potential energy load of non-uniform shallow arch under a concentrated load considering imperfection effect. ***International Journal of Mechanical Sciences*, 146, pp:152-179.**
- [42] Plaut, R. H. (2015). Snap-through of arches and buckled beams under unilateral displacement control. ***International Journal of Solids and Structures*, 63, pp: 109-113.**

Abstract:

Shallow arches are important structural elements used in civil, mechanical and aerospace engineering as part of complex structures. The major concern in their behavior under lateral loading is their instability at a critical load, which can make the structure to collapse or displace to another stable configuration, a phenomenon called snap through.

In this study, we investigate the static and dynamic critical forces of a shallow arc beam with an initial form of sinusoidal function and general supports (springs) under a fixed point load.

The nonlinear relations governing the shallow arc beam are obtained by assuming the Euler-Bernoulli beam and its equation of motion is expressed using a nonlinear differential-integral equation and given a Fourier cosine response and a auxiliary polynomial function has been resolved.

The approach taken to analyze this problem is to use the whole system energy and Calculus of variations and partial integration.

Finally, the effect of different types of support on the critical force of the arc is compared.

Keywords: Shallow arch; Snap-through buckling; General boundary conditions; Static critical force; Dynamic critical force; Static stability; Dynamic stability



Shahrood University of
Technology

Faculty of Mechanical and Mechatronics Engineering

M.Sc. Thesis in Aerospace- Space Structures
Engineering

Snap-through buckling of a shallow arch with general boundary conditions

By: Mohammad Boustani

Supervisor:
Dr. Ardeshir Karami Mohammadi

September, 2019