بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک

پایان‌نامه کارشناسی ارشد مهندسی طراحی کاربردی

تحلیل خزش در پوسته‌های کروی جدار ضخیم ساخته شده از موّاد ناهمگن FG تحت بار مکانیکی و گرادیان شعاعی دما بر اساس نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی

نگارنده: نبی‌الله زیبایی

استاد راهنما

دکتر مهدی قنّاد کهتوئی

مهر ۱۳۹۸

شماره: ۱/۱۲۸ پ د
تاریخ: ۹۹/۹/۱۹

باسمه‌تعالی

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد آقای نبی‌الله زیبایی با شماره دانشجویی ۹۵۰۷۶۳۴ رشته‌ی مهندسی مکانیک گرایش تحلیل تنش تحت عنوان تحلیل خزش در پوسته‌های کروی جدار ضخیم ساخته شده از مواد ناهمگن FG تحت بار مکانیکی و گرادیان شعاعی دما بر اساس نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی که در تاریخ ۹۸/۷/۲۹ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

الف) درجه عالی: نمره ۲۰-۱۹ ☐ ب) درجه خیلی خوب: نمره ۱۸/۹۹ — ۱۸ ☐
ج) درجه خوب: نمره ۱۷/۹۹ — ۱۶ ☑ د) درجه متوسط: نمره ۱۵/۹۹-۱۴ ☐
ه) کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد ☐
نوع تحقیق: نظری ☑ عملی ☐

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱- استادراهنمای اول	دکتر مهدی قناد کهتویی	دانشیار	
۲- استادراهنمای دوم			
۳- استاد مشاور			
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر محمد جعفری	دانشیار	
۵- استاد ممتحن اول	دکتر حسین توزنده‌جانی	استادیار	
۶- استاد ممتحن دوم	دکتر محمدباقر نظری	استادیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر مهدی گردویی

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:
۹۹/۴/۱۵

۶

تقدیم اثر

تقدیم به مهربان فرشته‌گانی که:

لحظات ناب باور بودن، لذّت و غرور دانستن، جسارت خواستن، عظمت رسیدن و تمام تجربه‌های یکتا و زیبای زندگی‌ام مدیون حضور سبز آن‌هاست.

تشکر و قدردانی

از خدای متعال سپاس‌گزارم که توفیق کسب علم و دانش را به من عطا فرمود تا بتوانم این مرحله از علم‌آموزی را با به پایان برسانم. از خانواده‌ی عزیزم به خاطر حمایت‌ها و محبت‌های بی‌دریغی که نسبت به من داشته و دارند، کمال تشکر و سپاس را دارم. از استادارجمندم، جناب‌آقای **دکتر مهدی قنّادکهتوئی** به خاطر راهنمایی‌های ارزشمند و زحمات ایشان در کلّیه‌ی مراحل انجام پایان‌نامه تقدیر و تشکر می‌نمایم.

همچنین از تمامی اساتید محترم دانشکده‌ی مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود که توفیق شاگردی‌شان را داشتم، سپاس‌گزاری نموده و از خداوند بزرگ سلامت و و موفقیت برای آنها مسألت دارم.

نبی‌الله زیبایی
شهریور ۱۳۹۹

تعهدنامه

این‌جانب **نبی‌الله زیبایی** دانشجوی دوره‌ی کارشناسی ارشد رشته **مهندسی مکانیک** گرایش **طراحی کاربردی** دانشکده مهندسی **مکانیک و مکاترونیک** دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان‌نامه **تحلیل خزش در پوسته‌های کروی جدار ضخیم ساخته شده از موّاد ناهمگن FG تحت بار مکانیکی و گرادیان شعاعی دما بر اساس نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی** تحت راهنمایی **دکتر مهدی قنّاد کهتوئی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط این‌جانب انجام‌شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلّیه‌ی حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان‌نامه تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در کلّیه‌ی مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آن‌ها) استفاده‌شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلّیه‌ی مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه‌ی اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده‌شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلّیه‌ی حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان‌نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پژوهش با بررسی یک پوسته‌ی کروی جدار ضخیم ناهمگن FG تحت بار مکانیکی و گرادیان شعاعی دما با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی رابطه‌ها مربوط به حالت خزش پایا استخراج شده است و نتایج به‌دست آمده از حل تحلیلی با استفاده از روش المان محدود در نرم افزار آباکوس مقایسه شده است. فشار در جدار داخلی یکنواخت است و همچنین دما در جدار داخلی و خارجی ثابت در نظر گرفته شده است. برای استخراج معادلات با استفاده از حل معادله‌ی پرانتل-روس و با استفاده از رابطه‌ها سازگاری کرنش، تنش‌ها و نرخ کرنش خزشی معادل تحلیل شده است. نتایج به‌دست آمده از حل تحلیلی با حل المان محدود تطابق بسیار خوبی دارد.

کلمات کلیدی: خزش، پوسته‌های کروی، جدار ضخیم، FGM، PET، بار مکانیکی، گرادیان شعاعی دما، المان محدود.

فهرست مطالب

فهرست اشکال

فهرست جداول

فهرست علائم

مدول یانگ	E	کرنش خزشی	ε^{cr}
مدول یانگ جدار داخلی	E_i	ضریب انبساط حرارتی جدار داخلی	α_i
زمان	t	تنش انحرافی	S_{ij}
دما	T	کرنش معادل	$\bar{\varepsilon}$
دمای ذوب	T_m	نرخ کرنش پلاستیک	$\dot{\varepsilon}^p$
کرنش	ε	کرنش مؤثر خزش	ε_e^{cr}
کرنش محیطی	ε_θ	کرنش معادل خزش	$\bar{\varepsilon}^{cr}$
کرنش شعاعی	ε_r	کرنش نصف‌النهاری	$\varepsilon_\emptyset$
ضریب پواسون	ν	کرنش مؤثر	ε_e
تنش	σ	تنش نصف‌النهاری	$\sigma_\emptyset$
تنش محیطی	σ_θ	شعاع بی‌بعد	R
تنش شعاعی	σ_r	پارامتر موّاد	b
تنش مؤثر	σ_e	ضریب انبساط حرارتی	α
نرخ کرنش	$\dot{\varepsilon}$	ضریب انتقال حرارتی	λ
پارامتر موّاد در جدار داخلی	b_i	ضریب انتقال حرارتی جدار داخلی	λ_i
نرخ کرنش مؤثر خزش	$\dot{\varepsilon}_e^{cr}$	جابه‌جایی شعاعی	u_r
شعاع داخلی	R_i	جابه‌جایی محیطی	u_θ
شعاع خارجی	R_o	جابه‌جایی نصف‌النهاری	$u_\emptyset$
شعاع بی‌بعد	R_o/R_i	نرخ کرنش خزشی	$\dot{\varepsilon}^{cr}$

فصل ۱: مقدمه

۱-۱ مقدمه

پوسته‌ها[1] یا سازه‌های پوسته‌ای، از فراوان‌ترین و متنوع‌ترین انواع سازه‌ها هستند که در دنیای فیزیکی اطراف ما پیدا می‌شوند. پوسته‌ها در اشکال طبیعی مانند جمجمه‌ی سر انسان‌ها و حیوانات و نیز اجزای محافظ اندام جانوری مانند لاک و صدف مشاهده می‌شوند؛ در اشکال مصنوعی در صنایع مختلف: ساختمانی، نیروگاهی، خودروسازی، نظامی، هوا و فضا همانند: سقف‌ها، لوله‌ها، بدنه‌ی خودروها و هواپیماها، پرتابه‌ها و پرتاب‌کننده ها، موشک‌ها و سفینه‌ها تولید می‌شوند.

نیروها و لنگرهای وارد شده، در بالاترین مرتبه‌ی تکاملی سازه‌ها قرار می‌گیرند. به تناسب مطلوبیت رفتاری، پیچیدگی تحلیل آنها نیز حائز اهمیّت می‌باشد. روش های تحلیلی-تقریبی موجود برای تحلیل پوسته‌ها بر اساس فرضیاتی است که تئوری پوسته‌ها را تشکیل می‌دهند. از میان انواع پوسته‌ها، پوسته‌های استوانه‌ای و کروی به دلیل فراوانی کاربرد، از اهمیّت ویژه‌تری برخوردارند. مطالعه‌ی رفتار این گونه پوسته‌ها از گذشته‌ی نه چندان دور تا به امروز مورد توّجه دانشمندان بوده و همچنان ادامه دارد. دانش‌پژوهان پیگیر اعمال تغییرات بر روی هندسه و مادّه‌ی پوسته‌ها بوده‌اند که بتوانند مقاومت آنها را در برابر انواع تنش‌های مکانیکی و حرارتی افزایش و درصورت امکان، وزن آنها را کاهش دهند.

۲-۱ پوسته‌ها

پوسته‌ها[۱] سازه‌هایی خمیده هستند که ضخامت آن‌ها در برابر سایر ابعادشان کوچک است. پوسته‌ها از نظر رفتاری در برابر نیروها و لنگرهای وارد شده مطلوبیت ویژه‌ای دارند. مطالعه‌ی این رفتار از گذشته‌ای نه‌چندان دور مورد توّجه پژوهشگران زیادی قرار گرفته و به دلیل کاربرد فراوان، این توّجه همچنان ادامه دارد.

---
[1] shells

۱-۲-۱ انواع پوسته‌ها

به طور کلّی پوسته‌ها را می‌توان از دیدگاه هندسی، مادّی و رفتاری بررسی کرد.

الف- از دیدگاه هندسی

پوسته‌ی حاصل از انتقال[1]: از انتقال یک منحنی یا سطح مادّی در امتداد خط راست خارج از صفحه‌ی قوس حاصل می‌شود.

پوسته‌ی حاصل از دوران[2]: از دوران یک منحنی یا سطح مادّی حول محور واقع در صفحه‌ی قوس تشکیل می‌شود.

پوسته‌ی جدار نازک[3]: پوسته‌ای که نسبت ضخامت به شعاع انحنای سطح میانی آن کمتر از $\frac{1}{20}$ باشد.

پوسته جدار ضخیم[4]: پوسته‌ای که نسبت ضخامت به شعاع انحنای سطح میانی آن بیشتر از $\frac{1}{20}$باشد.

ب- از دیدگاه مادی

پوسته‌ی همگن[5]: خوّاص مکانیکی مادّه‌ی پوسته، در نقاط مختلف آن یکسان بوده و تابع موقعیت نمی‌باشد.

پوسته‌ی ناهمگن[6]: خوّاص مکانیکی مادّه‌ی پوسته، در نقاط مختلف آن یکسان نبوده و تابع موقعیت می‌باشد.

پوسته‌ی همسانگرد[7]: خوّاص مکانیکی مادّه‌ی پوسته، در جهات مربوط به هر نقطه، یکسان است.

پوسته‌ی ناهمسانگرد[8]: خوّاص مکانیکی مادّه‌ی پوسته، در جهات مربوط به هر نقطه، یکسان نست.

---

[1] Shell of Translation
[2] Shell of Revolution
[3] Thin Walled Shell
[4] Tick Walled Shell
[5] Homogeneous Shell
[6] Inhomogeneous Shell
[7] Isotropic Shell
[8] Anisotropic Shell

ج- از دیدگاه رفتاری

پوسته با تغییر شکل کوچک[1]: جابه‌جایی هر نقطه از پوسته بین شرایط بارگذاری و بدون بارگذاری، کوچک است.

پوسته با تغییر شکل بزرگ[2]: جابه‌جایی هر نقطه از پوسته بین شرایط بارگذاری و بدون بارگذاری، کوچک نیست.

پوسته با رفتار کشسان[3]: تغییر شکل‌ها بازگشت پذیرند و معادله‌ی تنش-کرنش از قانون عمومی هوک پیروی می‌کند.

پوسته با رفتار مومسان[4]: تغییر شکل‌ها بازگشت ناپذیرند و معادله‌ی تنش-کرنش از قانون عمومی هوک پیروی نمی‌کند.

۱-۳ تئوری پوسته‌های جدار نازک

در پوسته‌های نازک، نسبت ضخامت پوسته h به شعاع سطح میانی R کوچکتر از ۱/۲۰ می‌باشد. تئوری این دسته از پوسته‌ها بر مبنای تئوری الاستیسیته‌ی خطی بنا شده است. به طور کلّی به دلیل کوچک بودن یک بعد نسبت به ابعاد دیگر، تئوری الاستیسیته‌ی سه بعدی استفاده نمی‌شود؛ بلکه با ساده‌سازی رابطه‌ها الاستیسیته، روش‌های تحلّیلی-تقریبی برای تحلّیل پوسته‌های نازک به‌دست می‌آورند. دقت نتایج تئوری‌های ارائه شده بستگی به درجه‌ی ساده سازی رابطه‌ها الاستیسیته دارد. اوّلین فرضیات را کیرشهف[5] (۱۸۵۰) درباره‌ی ورق‌ها ارائه کرد که پس از آن در بسط تئوری پوسته‌ها به‌کار گرفته شد.

---

[1]Small Deformation
[2]Large Deformation
[3]Elastic Behavior
[4]Plastic Behavior
[5]Kirchhoff

اِرون[۱] (۱۸۷۴) تئوری پوسته‌ها را مبتنی بر فرضیات کیرشهف معرفی کرد، اما کار وی کامل نبود. لوو[۲] (۱۸۸۸) معادلات عمومی پوسته‌های نازک را ارائه کرد که اکنون به عنوان تئوری کلاسیک پوسته‌های نازک یا تئوری لوو-کیرشهف مشهور است. رایسنر[۳] (۱۹۱۲) با استفاده از فرضیات لوو تحلیل پوسته-های حاصل از دوران متقارن محوری[۴] را ارائه نمود.

تئوری عمومی پوسته‌های نازک را می‌توان به این‌گونه تقسیم‌بندی کرد:

۱- تئوری با تقریب مرتبه‌ی صفر (تئوری غشایی)[۵]

۲- تئوری با تقریب مرتبه‌ی یک (تئوری خمشی)[۶]

۱-۳-۱ تئوری غشایی

غشاء[۷] از دیدگاه مکانیکی، یک تار[۸] دو بعدی است که فقط می‌تواند نیروهای محوری (نیروهای غشایی) را تحمّل کند. پوسته‌هایی که سختی خمشی[۹] آنها خیلی کم است و از نظر فیزیکی نمی‌توانند لنگرهای خمشی را تحمل کنند، با این تئوری تحلیل می‌شوند. میدان نیروهای داخلی در اغلب پوسته‌های نازک، عمدتاً از نیروهای غشایی تشکیل می شود و از این جهت نیروهای غشایی برای تأمین تعادل ایستایی پوسته کافی هستند و به عبارتی دیگر پوسته از نظر ایستایی معین است. در تئوری غشایی، جابه‌جایی پوسته با جابه‌جایی سطح میانی توصیف و مسائل در حالت تنش‌صفحه‌ای[۱۰] و کرنش‌صفحه‌ای[۱۱] با چشم‌پوشی از تنش عمودی و کرنش عمودی در راستای شعاعی، تحلیل می شوند[۱].

---

[1] Aron
[2] Love
[3] Reissner
[4] Axisymmetric Shell of Revolution
[5] Membrane Theory
[6] Bending Theory
[7] Membrane
[8] String
[9] Bending Stiffness
[10] Plane Stress
[11] Plane Strain

۱-۳-۲ تئوری خمشی

ورق[1] از دیدگاه مکانیکی، یک تیر[2] دو بعدی است که علاوه بر نیروهای محوری، نیروهای برشی و لنگرهای خمشی را نیز می‌تواند تحمل کند. پوسته‌هایی که سختی خمشی آنها قابل توّجه باشند و از نظر فیزیکی بتوانند لنگرهای خمشی را تحمل کنند، با این تئوری تحلیل می‌شوند. فرضیه‌ی مقدماتی تیرها توسط ناویر[3] ارائه و سپس توسط کیرشهف در مورد ورق‌ها تعمیم داده شد و لوو باهمین فرضیات، تئوری خمشی را صورت‌بندی نمود.

در حالت کلّی، معادلات تعادل به تنهایی برای به‌دست آوردن نیروهای خمشی کافی نیستند و به عبارتی دیگر، پوسته از نظر ایستایی نامعین است. در تئوری خمشی نیز، جابه‌جایی پوسته با جابه‌جایی سطح میانی توصیف می‌شود. فرضیات تئوری غشایی و تئوری خمشی (تئوری کلاسیک) را فرضیات لوو- کیرشهف می‌نامند که عبارتند از [۱]:

۱- نسبت ضخامت پوسته به شعاع انحنای سطح میانی در مقایسه با واحد، کوچک است (پوسته‌ی نازک)؛

۲- خیزها در مقایسه با ضخامت پوسته، کوچک هستند (خیز کوچک)؛

۳- مؤلفه‌ی تنش عمود بر سطح میانی نسبت به سایر مؤلفه‌های تنش، قابل چشم پوشی است (تنش صفحه‌ای)؛

۴- مقاطع مستوی عمود بر سطح میانی پوسته، پس از بارگذاری و تغییر شکل، همچنان مستوی و عمود باقی می‌مانند. با این فرض، کرنش‌های برشی و مؤلفه‌ی کرنش عمود برسطح میانی، صفر در نظر گرفته می‌شوند (کرنش صفحه‌ای).

---

[1] Plate

[2] Beam

[3] Navier

۱-۴ تئوری پوسته‌های جدار ضخیم

اولین بار لامه[۱] (۱۸۵۲) با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی دو بعدی(PET)[۲]، حلّ دقیق استوانه‌های ضخیم متقارن محوری با جدار ثابت تحت فشار یکنواخت داخلی از مادّه‌ی همگن و همسانگرد را ارائه کرد[۲]، که تاکنون نیز در حلّ مسائل مختلف مهندسی کاربرد فراوانی داشته است. گالرکین[۳] (۱۹۳۰) رابطه‌ها پوسته‌های ضخیم را با استفاده از معادلات اساسی الاستیسیته به‌دست آورد. ولاسف[۴] (۱۹۴۹) با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی خطی، معادلات قابل حلّی برای پوسته‌های ضخیم ارائه کرد. نقدی (۱۹۵۶) با لحاظ اثر برش عرضی و اینرسی دورانی، تئوری تغییر شکل برشی[۵] را برای پوسته‌های ضخیم پایه‌گذاری نمود[۳]. میرسکی و هرمان[۶] (۱۹۵۸) با به‌کارگیری تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل، تحلّیل ارتعاشی پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم را ارائه کردند[۴]. گرینس‌پن[۷] (۱۹۶۰) مقادیر ویژه‌ی استوانه‌ی ضخیم را با تئوری‌های مختلف پوسته‌های نازک و ضخیم مقایسه نمود[۵].

تئوری عمومی پوسته‌های ضخیم را می‌توان به‌این‌گونه تقسیم‌بندی کرد:

۱- تئوری الاستیسیته‌ی مستوی

۲- تئوری تغییر شکل برشی

۱-۴-۱ تئوری الاستیسیته‌ی مستوی(PET)

به طور کلّی در تئوری الاستیسیته‌ی سه بعدی، ۱۵ معادله وجود دارد که می‌توان ۱۵ مجهول را به‌دست آورد؛ معادلات عبارتند از: سه معادله‌ی تعادل (تنش)، شش معادله‌ی سینماتیک (کرنش-جابه

---

[1]Lame

[2]Plane Elasticity Theory

[3]Galerkin

[4]Vlassov

[5]Shear Deformation

[6]Mirsky-Hermann

[7]Greenspon

جایی) و شش معادله‌ی رفتاری (تنش-کرنش) و مجهولات عبارتند از: شش مؤلفه‌ی تنش (تانسور متقارن تنش)، شش مؤلفه‌ی کرنش (تانسور متقارن کرنش) و سه مؤلفه‌ی جابه‌جایی (بردار جابه‌جایی). تئوری الاستیسیته‌ی سه بعدی هرچند مشخصات رفتاری پوسته‌ها را به طور کامل توصیف می‌کند و منجر به حلّ دقیق می شود ولی حلّ معادلات آن بسیار پیچیده می‌باشد و عملاً به‌کارگیری آنها امکان-ناپذیر است. با فرضیات ساده‌شونده‌ای می‌توان معادلات بالا را کاهش داد و تئوری الاستیسیته‌ی دو بعدی (مستوی) را برای تحلّیل پوسته‌های استوانه‌ای و کروی به‌کار برد. در تئوری الاستیسیته‌ی مستوی، فرض می شود که مقاطع مستوی عمود بر محور مرکزی پوسته، پس از اعمال فشار و تغییر شکل، همچنان مستوی و عمود بر محور پوسته باقی می‌مانند. در حقیقت کرنش برشی و تنش برشی صفر در نظر گرفته می‌شود اما برخلاف تئوری کلاسیک پوسته‌های نازک، جابه‌جایی هر نقطه از پوسته برابر جابه‌جایی سطح میانی در نظر گرفته نمی‌شود. این تئوری را لامه برای استوانه‌ی جدار ثابت متقارن محوری از مادّه‌ی همگن و همسانگرد به‌کار برد و توزیع تنش را در استوانه‌ها به‌دست آورد. تئوری لامه به تئوری کلاسیک استوانه‌های ضخیم مشهور است[۶و۷].

۱-۵ موّاد با تغییرات تابعی خوّاص (FGM[1])

موّاد همگن و همسانگرد به دلیل یکنواختی خوّاص از قبیل: مقاومت مکانیکی، مقاومت حرارتی، مقاومت در برابر خوردگی و سایش، مقاومت در برابر خزش و خستگی و ... محدودیت‌هایی درصنایع نظامی، هوا و فضا، نفت و گاز، خودروسازی و... ایجاد می‌کنند. از این‌رو دانشمندان همواره در تلاش بوده‌اند که از موّاد جدید با خوّاص برتر استفاده کنند.

لخنیتسکی[1] (۱۹۵۰) تئوری الاستیسیته‌ی موّاد ناهمسانگرد را فرمول‌بندی کرد[۸] و پس از وی دیگران، تئوری‌های حاکم بر ورق‌ها و پوسته‌های کامپوزیتی را ارائه نمودند. وینسون[2] (۱۹۷۴) تئوری

[1]Functionally Graded Materials

کلاسیک و تئوری تغییر شکل برشی را در تحلّیل استاتیکی پوسته‌های کامپوزیتی به‌کار برد و بین نتایج دو روش مقایسه‌ای انجام داد.

موّاد با تغییرات تابعی خوّاص(FGM) در ساختار ارگانیسم‌های زنده مانند استخوان وجود داشته است. به عنوان مثال استخوان در لایه‌ی بیرونی که نیاز به مقاومت مناسبی در برابر عوامل خارجی از قبیل ضربه دارد، از استحکام بیشتری برخوردار است و به تدریج از سختی آن کم می‌شود تا لایه‌ی درونی که کاملاً نرم می‌باشد تا شرایط مناسب برای جذب موّاد غذایی را داشته باشد. ازاین رو تغییرات خوّاص به‌صورت کاملاً پیوسته و تدریجی ایجاد می‌شود. موّاد FG، ناهمگن هستند ولی آنها را همسانگرد در نظر می‌گیرند.

۱-۵-۱ ویژگی‌های موّاد FG

موّاد ناهمگن FG در مقایسه با موّاد همگن (ایزوتروپ‌ها) و موّاد ناهمسانگرد (کامپوزیت‌ها) دارای ویژگی‌های به شرح زیر می‌باشند[۹]:

۱- مقاومت زیاد در برابر گرادیان دمایی بالا. درحقیقت این گونه موّاد با کاهش تنش‌های حرارتی، آثار منفی آنها را به نحو قابل توّجهی کاهش می‌دهند. به کمک موّاد FG می‌توان در ناحیه‌هایی که تنش‌های حرارتی به حالت بحرانی می‌رسند، آنها را کنترل کرد.

۲- مقاومت زیاد در برابر بارهای مکانیکی بالا. به کمک موّاد FG می‌توان استحکام موّاد را افزایش داد تا از ورود اجسام به ناحیه‌ی مومسان و حتّی شکست[۳] تا حدود زیادی جلوگیری شود.

۳- یکی از مهّم‌ترین ویژگی‌های موّاد FG، کاهش تمرکز تنش در اجسام جامد است. در بسیاری ازاجسام به دلیل وجود شکل‌های خاصّ هندسی، تمرکز تنش در نقاطی از جسم ایجاد

[1]Lekhnitskii

[2]Vinson

[3]Fracture

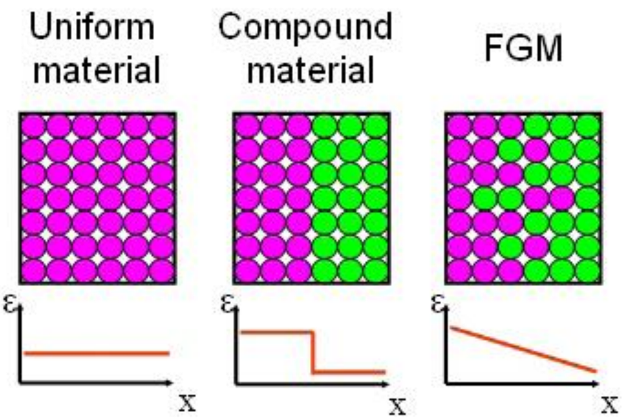
می‌شود، مانند لبه‌های جسم و نزدیکی سوراخ‌ها و گشودگی‌ها. به کمک موّاد FG می‌توان آثار تمرکز تنش را به‌صورت چشم‌گیری کاهش داد.

۴- بهترین ترکیب برای تغییر خوّاص مادّه که مانع ایجاد یا رشد ترک شود، موّاد FG است.

۵- اگر پوشش ترد[1] بر روی موّاد نرم به‌صورت لایه‌های جدا انجام شود، احتمال جدا شدن لایه‌ی ترد بسیار زیاد است. به کمک موّاد FG، این کار با تغییرات پیوسته و تدریجی انجام می‌پذیرد.

به عنوان مثال هنگامی که موّاد کامپوزیت در معرض بارهای حرارتی بالا قرار می‌گیرند، ترک، ابتدا در مرز زمینه و الیاف ایجاد و سپس در لایه‌ها و مقاطع ضعیف داخل زمینه و الیاف منتشر می‌شود. در موّاد FG، به دلیل پیوستگی موجود در خوّاص مکانیکی، حرارتی و مغناطیسی، تنش‌ها و گرادیان آنها حالت پیوسته‌ای پیدا می‌کنند که باعث استحکام مادّه می‌شوند.

شکل (۱-۱) مقایسه‌ی بین تغییرات خوّاص در موّاد همسانگرد، کامپوزیت و FG را نشان می دهد.



شکل ۱-۱ مقایسه‌ی تغییرات خوّاص در موّاد مختلف[۱۰]

[1]Brittle Coating

۱-۵-۲ تاریخچه و سابقه‌ی موّاد FG

مفهوم اولیه‌ی FGM توسط نینو[1] و همکارانش در۱۹۸۴ در سازمان هوا و فضای ژاپن مطرح و از ۱۹۸۶ مطالعات امکان‌سنجی تولید FGM در این کشور شروع شد[۱۱و۱۲]. مرحله‌ی اول پروژه‌ی ملّی ((فناوری گسترش FGM)) طی سال‌های ۸۹-۱۹۸۷ در ژاپن انجام شد. در زمینه‌ی تحقیق در مورد این پروژه، سه گروه ساخت موّاد، پردازش و ارزیابی موّاد همکاری داشتند. نظریه‌ی پیشنهادی، تولید یک مادّه‌ی جدید بود که با استفاده از سرامیک‌ها با مقاومت حرارتی بالا و تحمل گرادیان حرارتی مناسب و فلزات با مقاومت مکانیکی بالا و ضریب هدایت حرارتی مناسب، به گونه‌ای که تغییرات تدریجی مادّه از سرامیک به فلز انجام پذیرد تا شرایط دمایی لایه‌ی بیرونی دماغه‌ی شاتل فضایی و نیز شرایط مکانیکی و جوشکاری لایه‌ی درونی شاتل ارضاء شود.

پس از دست‌یابی به هدف پروژه که ساخت و آمادّه‌سازی قطعاتی به قطر ۳۰ میلیمتر و ضخامت ۱ تا ۱۰ میلی‌متر که قادر به تحمل دماهایی در حدود ۲۰۰۰ درجه‌ی کلوین و اختلاف دمایی در حدود ۱۰۰۰ درجه‌ی کلوین بودند، دانشمندان ژاپنی، نتایج پژوهش‌های خود را در اولین سمپوزیوم جهانی در ۱۹۹۰ در اختیار همگان قرار دادند[۱۳]. مرحله‌ی دوم پروژه‌ی ملّی ژاپن در ۹۱-۱۹۹۰ انجام شد که منجر به ساخت ورق مربّعی به ابعاد ۳۰۰ میلیمتر برای استفاده در قسمت پایینی دماغه‌ی سفینه‌ی فضایی و یک نیم‌کره به قطر ۵۰ میلیمتر برای استفاده در نوک مخروطی دماغه‌ی سفینه شد[۱۴]. دومین سمپوزیوم جهانی FGM، در ۱۹۹۲ برگزار و پس از آن، مطالعات بر روی موّاد FG و به‌ویژه تحلّیل سازه‌های FGM فراگیر شد.

[1]Ninno

۱-۵-۳ مدل‌سازی ریاضی موّاد FG

با توّجه به اینکه موّاد FG اساساً ناهمگن می‌باشند و خوّاص مکانیکی، حرارتی و مغناطیسی آنها به‌صورت پیوسته و تدریجی تغییر می‌کند، می‌توان تغییر خوّاص را با یک تابع پیوسته‌ی ریاضی، مدل کرد و از آن در روش‌های تحلّیلی و عددی بهره گرفت. روش مرسوم در مدل‌سازی خوّاص مکانیکی و حرارتی موّاد FG، استفاده از یک تابع توانی یا تابع نمایی برای بیان توزیع پیوسته‌ی خوّاص در مادّه می‌باشد. معمولاً در عبارات مربوط به توزیع خوّاص، تغییرات مدول کشسانی[1]، ضریب هدایت حرارتی، ضریب انبساط حرارتی[2] و چگالی[3] را در نظر می‌گیرند و تغییرات نسبت پواسون[4] را لحاظ نمی‌کنند. دلیل آن، مقدار نسبت پواسون است که بسیار نزدیک به هم می‌باشد، به گونه‌ای که می‌توان از تغییرات ناچیز آن در جسم چشم‌پوشی کرد، یعنی مادّه را ناهمگن همسانگرد (FG ایزوتروپ) درنظر گرفت.

خلاصه‌ای از کارهای انجام شده با استفاده از روش تحلیلی در زمینه‌ی مواد ناهمگن(FG) در جدول (۱-۱) آورده شده است.

[1] Elasticity Modulus

[2] Thermal expansion

[3] Density

[4] Poisson's ratio

جدول (۱-۱) خلاصه‌ای از پیشینه‌ی پژوهش مواد ناهمگن

پژوهشگر-پژوهشگران	نوع تابع انتخاب شده	سال
اُباتا و نودا[1][۱۵]	تابع توانی	(۱۹۹۴)
هورگان و چان[۱۶]	تابع توانی	(۱۹۹۹)
یانگ[2][۱۷]	تابع توانی	(۲۰۰۰)
توتونچو[3][۱۸]	تابع توانی	(۲۰۰۱)
تارن[4][۱۹]	تابع توانی	(۲۰۰۱)
جبّاری و همکاران	تابع توانی	(۲۰۰۳)
اراسلان و آکیز[5][۲۱]	تابع نمایی	(۲۰۰۶)
هونگ‌جون و ژیفای[6][۲۲]	تابع نمایی	(۲۰۰۶)

تابع توانی در اکثر مراجع به‌صورت رابطه‌ی زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$P(z) = P_a \left(\frac{z}{a} \right)^n \qquad (۷-۱)$$

P_a خاصیت مادّه (مکانیکی، حرارتی و ...) در یک لایه‌ی مشخّص و n ثابت ناهمگنی است.

توتونچو (۲۰۰۹) سه مدل تابع توانی ساده، به‌صورت تلفیق فلز-سرامیک ارائه کرد[۲۴]. شاؤ[7] (۲۰۰۸) برای خوّاص مادّه‌ی ناهمگن تابع نمایی به‌صورت رابطه‌ی (۱-۱۲) ارائه کرد[۲۵]:

---

[1] Obata & Noda

[2] Yang

[3] Tutuncu

[4] Tarn

[5] Eraslan & Akis

[6] Hongjun & Zhifei

[7] Shao

$$\begin{cases} A(R) = A_o e^{m_i (R-R_1)} \\ R_1 = \dfrac{r_1}{r_m},\ R_2 = \dfrac{r_2}{r_m} \end{cases} \tag{۱-۱۲}$$

که در این رابطه m_i ثابت ناهمگنی مادّه، r_1 و r_2 به ترتیب شعاع داخلی و خارجی استوانه و r_m میانگین شعاع داخلی و خارجی و A_o خوّاص لایه‌ی خارجی استوانه می‌باشد.

توتونچو (۲۰۰۷)[۲۶] و همچنین کلس و کانکر[1] (۲۰۱۱) [۲۷] تغییر خوّاص در جداره‌ی استوانه را به‌صورت تابع نمایی طبق رابطه‌ی زیر بیان نمودند:

$$A(r) = A_0 e^{\beta r} \tag{۱-۱۳}$$

که در آن r شعاع استوانه، β ثابت ناهمگنی مادّه و A_o نیز خوّاص لایه‌ی خارجی استوانه می باشد.

۱-۶ خزش

نیاز به اقتصادی بودن و صرف هزینه‌ی کمتر در صنایعی نظیر موتورهای توربین گاز، راکتورهای هسته‌ای، تجهیزات تولید برق، طراحی قطعات مکانیکی، صنایع نفت، پتروشیمی و نظامی، ضرورت نگرشی دیگر در طراحی قطعات مهندسی را روشن می‌سازد که رسیدن به این مهّم را باید در بررسی پدیده‌ی خزش جستجو کرد.

بار اعمال شده به جسم، با گذشت زمان می‌تواند کرنش غیر الاستیکی را در جسم ایجاد کند که با زمان کاهش می‌یابد. این کرنش می‌تواند حتی در بارهای اعمال شده کمتر از بار طراحی اتفاق بیفتد و در دماهای بالا به شدت عمر سازه را پایین می‌آورد. [۲۸]

به‌طور خلاصه، خزش به تغییر شکل وابسته به زمان مادّه‌ای گفته می‌شود که در زمان نسبتاً

[1] Keles & Conker

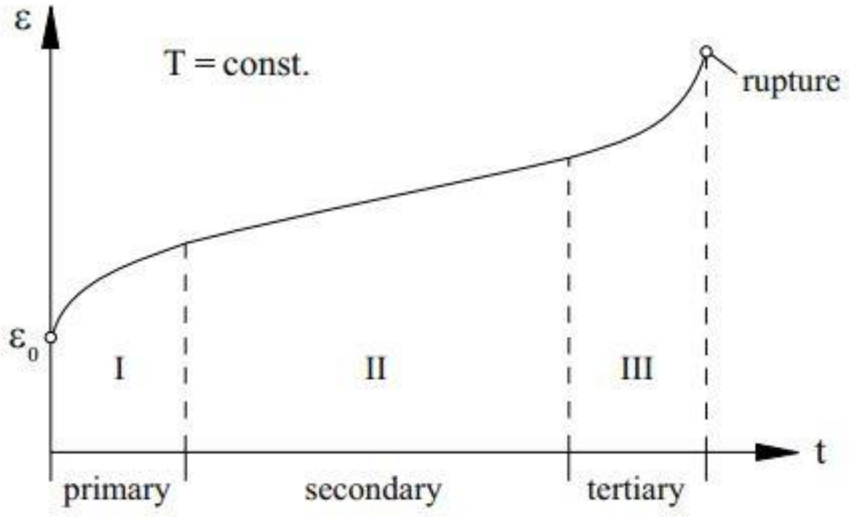
طولانی تحت تأثیر بار قرار داشته باشد. در این پژوهش مقرر شده است که تحلیل خزش در پوسته‌های کروی جدار ضخیم ساخته شده از موّاد ناهمگن تحت بار مکانیکی و گرادیان شعاعی دما بر اساس تئوری الاستیسیته‌ی مستوی مورد ارزیابی قرار گیرد. کاربرد این سازه‌ها در اغلب صنایع به گونه‌ای است که معمولاً تحت تأثیر دما و فشارهای زیاد قرار می‌گیرند که خزش مهّم‌ترین مکانیزم مخرب حاکم بر آن‌ها می‌باشد. توزیع تنش‌ها در مخازن جدار ضخیم همگن و همسانگرد به گونه‌ای است که ماکزیمم تنش کششی مماسی در سطح داخل سبب رشد ترک از این سطح و گسترش آن به سطح خارجی شده و در نهایت به پدیده‌ی شکست در مخزن منتهی می‌گردد که با پیشرفت علم در صنعت تولید موّاد در ابعاد مولکولی برای غلبه بر این مشکل در دهه‌های اخیر، منجر به تولید موّاد با خوّاص تابعی معیّن و کنترل شده، شده است.

۱-۶-۱ انواع خزش

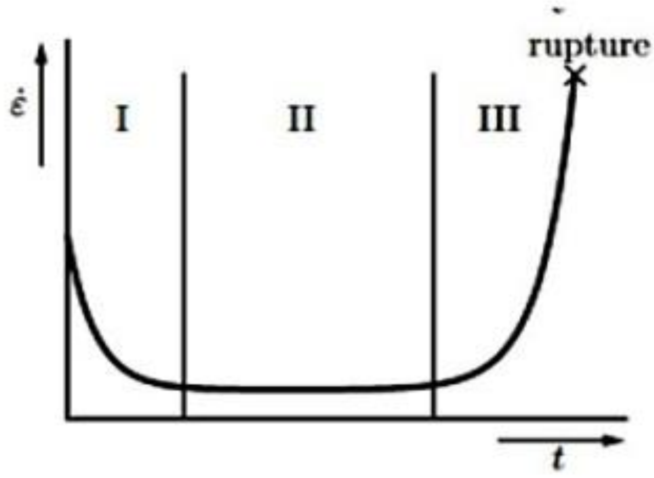
پدیده‌ی خزش به سه ناحیه تقسیم می‌شود. I) ناحیه‌ی اول: خزش اولیه، II) ناحیه‌ی دوم: خزش ثانویه(حالت پایا)، III) ناحیه‌ی سوم: خزش گذرا، که تا زمان گسیختگی ادامه پیدا میکند. [۲۹]

۱-۶-۲ خزش حالت پایا

در این پژوهش خزش ثانویه در حالت دما ثابت (گرادیان شعاعی دما یعنی دما وابسته به زمان نیست و دمای جدار داخلی و خارجی ثابت است) مورد بررسی قرار می گیرد که نرخ تغییرات کرنش در نمودار کرنش نسبت به زمان تقریبا ثابت است. در شکل(۱-۲) نمودار تغییرات کرنش بر حسب زمان و در شکل (۱-۳) نمودار نرخ تغییرات کرنش بر حسب زمان برای حالت دما ثابت برای هر سه حالت خزش نشان داده می شود.



شکل ۱-۲ تغییرات کرنش با زمان در حالت دما ثابت[۲۹]



شکل ۱-۳ تغییرات نرخ کرنش با زمان در حالت دما ثابت[۲۹]

۱-۷ پیشینه‌ی پژوهش

برای اولین بار لامه در ۱۸۵۲ با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی، حلّ دقیق استوانه‌های ضخیم متقارن محوری با جدار ثابت از موّاد همگن و همسانگرد تحت فشار یکنواخت داخلی در حالت کرنش

صفحه‌ای را ارائه کرد[۲]. ازمانی‌نژاد و همکاران در سال ۲۰۱۴ [۳۰] حلّ تحلیلی‌ای به فرم بسته برای تنش‌های خزشی مخازن استوانه‌ای تحت فشار چرخان ساخته شده از موّاد FG ارائه دادند. در این حلّ، رفتار خزشی موّاد با استفاده از قانون نورتون تحت شرایط کرنش صفحه‌ای بررسی شد و با تعریف شعاعی پارامترهای وابسته به موّاد در قانون نورتون، نشان دادند که خوّاص موّاد FG تأثیر قابل توّجهی بر روی نرخ کرنش خزشی معادل و توزیع تنش در راستای شعاعی دارد. لقمان و همکاران در سال ۲۰۱۶ [۳۱] به بررسی بازتوزیع تنش‌ها و تغییر شکل‌های وابسته به زمان[1] در مخازن جدار ضخیم کروی FGM تحت فشار داخلی و توزیع شعاعی دما پرداخته و بیان کردند که تغییرات تنش مماسی در طول زمان به مراتب بیشتر و تأثیرگذارتر از تنش شعاعی است و در دماهای بالا، پدیده‌ی خزش تأثیر بیشتری در تغییر شکل جسم دارد. جاهد و بیدآبادی[۳۲] با استخراج و حلّ معادلات عمومی و با در نظر گرفتن تغییرات نرخ جابه‌جایی به‌عنوان یک تابع بر حسب تغییرات بار(فشار داخلی و خارجی، نیروی گریز از مرکز و گرادیان دما) رفتار خزشی اوّلیه و ثانویه را پیش‌بینی و با حلّ المان محدود مقایسه نمودند. همچنین جاهد و دوبی[۳۳] در ۱۹۹۷ یک روش عمومی برای تحلیل الاستیک-پلاستیک ارایه دادند. یو و او[۳۴] به تحلیل خزش حالت پایا در پوسته‌های کروی جدار ضخیم پرداختند به‌طوریکه مشخصه‌های خزش متغییر باشند. آریا و همکاران[۳۵] به تحلیل خزش در کره‌ی جدار ضخیم ساخته شده از موّاد همگن ناهمسانگرد تحت فشار با استفاده از تئوری کرنش محدود پرداختند. آن‌ها فرض کردند که مادّه تراکم ناپذیر بوده و از قانون خزشی نورتون برای به‌دست آوردن پاسخ خزشی استفاده کردند. همچنین در این مقاله به بررسی تاثیر ناهمسانگردی مادّه پرداخته شد و مشاهده شد که کرنش خزشی با تغییرات ناهمسانگردی مادّه تغییر می‌کند. آن‌ها در این مقاله دو حالت همسانگرد و ناهمسانگرد را با هم مقایسه نمودند و مشاهده کردند که توزیع تنش و کرنش در جداره‌ی کره تفاوت‌های زیادی با هم دارد. آن‌ها همچنین نتیجه گرفتند که ناهمسانگردی مادّه تأثیر

[1] Time-Dependent

مهّمی بر روی نرخ خزش داشته و باعث کاهش نرخ خزش می‌شود که این نتیجه باعث بهبود شرایط در نحوه‌ی طراحی می‌گردد. لقمان و همکاران[۳۶] با استفاده از حلّ الاستیک متوالی به تحلیل تنش‌های خزش در کره‌ی جدار ضخیم FG تحت فشار داخلی و میدان دمایی یکنواخت پرداختند. خوّاص خزشی و مکانیکی مادّه بر طبق قانون توانی و در جهت شعاعی می‌باشد. کرنش کل، مجموع کرنش الاستیک و حرارتی و خزشی می‌باشد و کرنش‌های خزشی وابسته به زمان و دما هستند. در این مقاله از قانون خزشی نورتون برای به‌دست آوردن پاسخ خزشی استفاده شده است. نتیجه این تحقیق نشان می‌دهد که پارامتر ناهمگنی مادّه تأثیر به‌سزایی بر روی تنش‌های حرارتی دارد.

۱-۸ مروری بر فصل‌های پایان‌نامه

برای تحلّیل خزش پوسته‌های جدار ضخیم همگن و ناهمگن کروی و پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم همگن و ناهمگن با جدار ثابت، فشار یکنواخت و گرادیان شعاعی دما و همچنین شرایط انتهایی متفاوت، به گونه‌ای که مسأله از حالت الاستیسیته‌ی دو بعدی خارج نشود، می‌توان از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی که از دقت بالایی برخوردار می‌باشد استفاده کرد.

ابتدا درفصل اوّل این پژوهش، ضمن مرور تئوری پوسته‌های نازک و ضخیم، مطالعات انجام شده در خصوص پوسته‌های کروی ارائه شده است. همچنین موّاد با تغییرات تابعی خوّاص (FGM) تعریف و ضمن بیان تاریخچه و ویژگی‌های آن‌ها، شیوه‌های مدل‌سازی ریاضی آن‌ها مورد بررسی قرار گرفته و پیشینه‌ی پژوهشی موّاد FG ارائه شده است. فصل دوّم به تعریف مبانی تحلیل خزش و مفاهیم آن پرداخته شده است و فصل سوم شامل مرور رابطه‌ها اساسی حاکم بر پوسته‌های جدار ضخیم همگن کروی تحت بار مکانیکی و سپس استخراج معادلات خزشی حاکم با استفاده قانون توانی بیلی-نورتون با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی می‌باشد. فصل چهارم با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی برای مادّه‌ی FG با تغییرات توانی خوّاص تحت بارگذاری مکانیکی شامل فشار داخلی و

خارجی و گرادیان شعاعی دما را شامل می‌باشد. در پایان هر فصل حلّ تحلیلی و المان محدود پوسته-های کروی تحت بارگذاری مکانیکی و گرادیان شعاعی دما، توزیع تنش‌ها و نرخ کرنش خزشی ارائه شده است. در فصل سوم و چهارم به‌منظور بررسی صحت نتایج حاصل از حلّ تحلیلی، مدل‌سازی عددی کره‌ی مورد نظر نیز ارائه شده و نتایج دو روش حلّ با یکدیگر مقایسه شده است. نتایج حاصل از حلّ تحلیلی به کمک تئوری الاستیسیته‌ی مستوی با نتایج حاصل از حلّ عددی مقایسه شده است. نتیجه‌گیری، جمع‌بندی نهایی و ارائه‌ی پیشنهادها در فصل پنجم انجام شده است.

فصل ۲: مبانی تحلیل خزش

۲-۱ مقدمه

با توّجه به افزایش اهمیّت کارکرد طولانی مدت تجهیزات به ویژه در دمای بالا، مانند ماشین‌آلات دما بالا، موتورهای جت و هوانوردی پرسرعت، نیاز فوری را برای طراحان و مهندسین محاسبات ایجاد نموده است که به مطالعات گسترده در زمینه‌ی مکانیک خزش به‌پردازند. با توّجه به کاربرد بسیار گسترده‌ی مخازن تحت فشار در زمینه‌های مختلف مانند نیروگاه‌ها، پتروشیمی، هوافضا و... مطالعه‌ی خزش در این تجهیزات اهمیّت یافته است. در این فصل به مروری بر تحقیقات انجام شده در این زمینه می‌پردازیم.

۲-۲ خزش

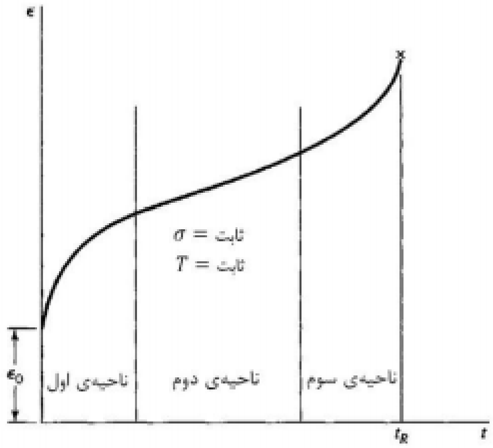
بار اعمال شده به جسم با گذشت زمان می‌تواند کرنش غیر الاستیکی را در مادّه ایجاد کند که با زمان افزایش می یابد که گفته می‌شود مادّه دچار خزش شده است. این کرنش می‌تواند حتی در بارهای کمتر از بار طراحی اتفاق بیفتد و در دماهای بالا عمر جسم را به شدت محدود کند[۲۸].

۲-۳ مفهوم خزش و منحنی خزش

خزش را کرنش غیر الاستیک وابسته به زمان تعریف می‌کنند که متاثر از بار اعمالی و دما است. زمان، بار و دمایی که در آنها سازه دچار خزش و به دنبال آن دچار خزش تسلیم یا خزش شکست می‌شود به جنس سازه و محیطی که در آن وجود دارد بستگی دارد بنابراین خزش در گستره‌ی وسیعی از دما و بار اتفاق می‌افتد[۲۸].

به طور کلّی رفتار خزشی تابعی از مادّه، تنش، دما، زمان و تنش و دمای پیشین است. با استفاده از تست خزش منحنی خزش یک بعدی به‌صورت شکل(۲-۱) می‌شود که در این منحنی کرنش بر حسب زمان در یک تنش و دمای ثابت، رسم شده است. منحنی خزش شامل سه ناحیه است که در

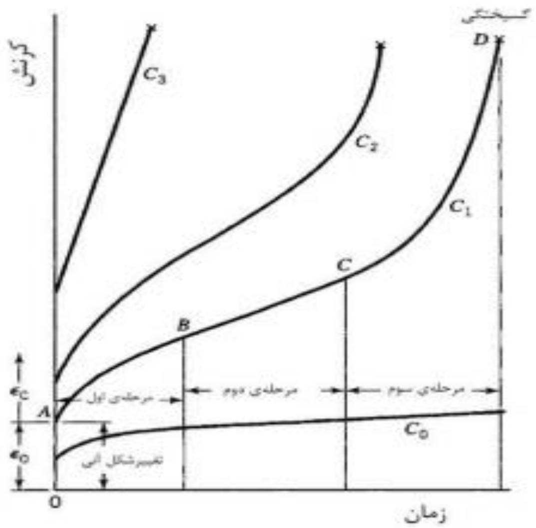
هر ناحیه تغییرات کرنش متفاوت می‌باشد. در زمان t=0 کرنش برابر ε_0 و ناشی از بار اولیه است که با توّجه به میزان بار احتمالی و دما، می‌تواند الاستیک، پلاستیک و یا هر دو باشد. در ناحیه‌ی اول نرخ کرنش(شیب منحنی خزش) کاهش پیدا می‌کند تا اینکه به یک مقدار کمینه برسد. در ناحیه‌ی دوم این مقدار کمینه تقریباً ثابت باقی می ماند تا زمانی که شروع به افزایش کرده و بدین ترتیب وارد ناحیه‌ی سوم شود. در این ناحیه نرخ کرنش به افزایش ادامه می دهد تا در زمان t_R گسستگی(شکست) رخ دهد.



شکل ۲-۱ منحنی خزش[۲۸]

تقسیم بندی منحنی خزش به سه محدوده برای خیلی از موّاد مرسوم است با این حال ممکن است منحنی‌های متفاوتی با توّجه به فاز تنش و دما وجود داشته باشد. برای تقریب این منحنی‌ها رابطه‌ها متفاوتی ارائه شده است. در شکل(۲-۲) چهار منحنی خزش متفاوت C_0، C_1، C_2، C_3 رسم شده است. منحنی C_1 سه ناحیه را نشان می دهد. در این منحنی، OA همان ε_0 است. این کرنش به‌صورت $\varepsilon_0(\sigma,T)$ نشان داده می‌شود. خط AB ناحیه‌ی اول است که در آن نرخ کرنش کاهش پیدا می‌کند. محققان رفتار خزش را در این مرحله با رابطه‌های نشان می‌دهند که که نرخ کرنش ناشی از خزش را به‌صورت تابعی از تنش، دما و زمان بیان می‌کند. خط BC ناحیه‌ی دوم را نشان می‌دهد. در این ناحیه

نرخ کرنش تقریباً ثابت است. اگر در این ناحیه نرخ کرنش ثابت باقی بماند، نرخ کرنش تنها تابعی از تنش و دما، و کرنش ناشی از خزش، تابعی خطی از زمان خواهد بود. خط CD مرحله‌ی سوم خزش را نشان می‌دهد که در آن نرخ کرنش به شدّت افزایش می یابد تا به نقطه‌ی گسیختگی D برسد. اگر مادّه‌ی به کار برده شده برای ایجاد منحنی C_1 تحت تنش یا دمای کمتری قرار گیرد ممکن است واکنشی مشابه منحنی C_0 داشته باشد که در این حالت خزش به مرحله‌ی سوم نمی رسد. اگر مادّه مربوط به منحنی C_1 تحت تنش یا دمای بالاتر قرار گیرد واکنش آن می‌تواند به‌صورت منحنی C_2 (ناحیه ابتدایی خزش حذف می شود) یا به‌صورت منحنی C_3 (ناحیه اول و دوم حذف می‌شوند و در این حالت گسیختگی در زمان کوتاهتری اتفاق می‌افتد.) باشد.



شکل ۲-۲ منحنی خزش[۲۸]

در جدول ۲-۱ تعدادی از رابطه‌ها ارائه شده توسط محققان برای کرنش ناشی از خزش آورده شده است. در حالت کلّی این دسته معادلات به چهار دسته تقسیم بندی شده اند که شامل معادلات وابسته به زمان، معادلات وابسته به دما، معادلات وابسته به تنش و معادلات وابسته به ترکیبی از زمان تنش و دما می باشد. در جدول زیر نمونه‌هایی از این رابطه‌ها آورده شده است.

جدول ۲-۱ رابطه‌ها تجربی خزش یک بعدی[۲۸]

رابطه	شکل رابطه	منبع
وابسته به زمان		
گویا		
(الف)	$\varepsilon_c = \frac{at}{1+bt}$	(فرندنتال، ۱۹۳۶)
لگاریتمی		
(ب)	$\varepsilon = a + bln(t)$	(فیلیپس، ۱۹۰۵)
(پ)	$\varepsilon = a + bln(1+ct)$	(اصلاح شده‌ی معادله ب)
نمایی		
(ت)	$\varepsilon = a + bt - cexp(-dt)$	(مک‌وتی، ۱۹۳۴)
(ث)	$\varepsilon_c = at + b(1-\exp(-ct))$	(مک‌وتی، ۱۹۳۴ و سودربرگ، ۱۹۳۶)
توانی		
(ج)	$\varepsilon_c = bt^n \quad 1 < m,\ 0 < n\ < 1$	(بیلی، ۱۹۳۵)
سری‌های توانی		
(چ)	$\varepsilon_c = at^m + bt^n \qquad \frac{1}{3} < n < \frac{1}{2}$	(دلاکمبه، ۱۹۳۹)
وابسته به تنش و زمان		
نمایی		
(ح)	$\varepsilon_c = af(t)\exp(b\sigma)$	(دورن، ۱۹۶۲)
(خ)	$\dot{\varepsilon}_c = a\exp(b + c\sigma)$	(نادایی، ۱۹۳۱)
(ک)	$\dot{\varepsilon}_c = a[\exp(b\sigma) - 1]$	(سودربرگ، ۱۹۳۶)
توانی		
(گ)	$\varepsilon_c = af(t)\sigma^b$	(دورن، ۱۹۶۲)
(م)	$\varepsilon_c = at^n\sigma^b \quad 0 < n \leq 1, b > 1$	(بیلی، ۱۹۳و نورتون، ۱۹۲۹)

۲-۴ مبانی تحلیل خزش

به طور کلّی برای مدل کردن منحنی های خزشی، کرنش ناشی از خزش را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\varepsilon_c = f(t,T,\sigma) \tag{۲-۱}$$

مرسوم است که اثرات t,T,σ به‌صورت جداگانه فرض شود پس می‌توان کرنش خزشی را به فرم زیر در نظر گرفت.

$$\varepsilon_c = \sum_{i=1}^{n} f_i(t) g_i(T) h_i(\sigma) \tag{۲-۲}$$

در جدول ۲-۱، ε_c کرنش خزشی، σ تنش، T دما، t زمان، ln لگاریتم طبیعی، exp تابع نمایی و a,b, c, m, n پارامترهایی هستند که می‌تواند تابعی از t,T,σ و یا ثابت باشند. در تست‌های خزش به نظر می‌رسد که تنش ناشی از حضور در مرحله دوم به‌صورت خطی با زمان تغییر می‌کند بدین معنی که نرخ خزش ثابت است به همین دلیل مرحله‌ی دوم خزش را، خزش حالت پایا می‌نامند.

برای یک دمای مشخص، وابستگی کرنش به تنش را از وابستگی آن به زمان می‌توان تفکیک کرد. برای مثال در شرایط هم دما، رابطه‌ی رایجی که می‌توان در نظر گرفت به‌صورت توانی است. معادله بیلی-نورتون به خوبی خزش مرحله‌ی اول و دوم را مدل می‌کند.

$$\varepsilon_c = a t^n \sigma^b \tag{۲-۳}$$

۲-۵ خزش حالت پایا[1]

در حالت کلّی تنش در هر نقطه‌ای درون یک جسم را می‌توان با سه تنش اصلی در سه جهت اصلی، که دو به دو عمود و مستقل هستند مشخص کرد. رابطه تنش-کرنش برای موّاد همگن الاستیک خطی بر اساس محورهای اصلی را می‌توان توان به‌صورت زیر نوشت.

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \vartheta(\sigma_2 + \sigma_3)] \tag{۲-۴}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}[\sigma_2 - \vartheta(\sigma_1 + \sigma_3)] \tag{۲-۵}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}[\sigma_3 - \vartheta(\sigma_2 + \sigma_1)] \tag{۲-۶}$$

اگر فرض کنیم که تنها کرنش های موجود در جسم کرنش های الاستیک و کرنش های ناشی از خزش باشند در نتیجه جمع کرنش‌های اصلی به‌صورت زیر خواهد بود.

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)_{elastic} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)_{creep} \tag{۲-۷}$$

کرنش حجمی کل به‌صورت زیر بیان شده است

$$e = \bar{I}_1 + 2\bar{I}_2 + 4\bar{I}_3 \tag{۲-۸}$$

که $\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{I}_3$ نامتغیرهای کرنش هستند. با توجّه به اینکه $\bar{I}_2, \bar{I}_3$ جملاتی با مراتب بالا هستند برای کرنش‌های کوچک می‌توان از آنها صرف‌نظر کرد و معادله‌ی (۲-۸) را به‌صورت زیر تقریب زد.

$$e \approx \bar{I}_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \tag{۲-۹}$$

با استفاده از معادلات (۲-۴) و (۲-۵) و (۲-۶) داریم

$$(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)_{elastic} = \frac{1 - 2\vartheta}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \tag{۲-۱۰}$$

---

[1] Steady state creep

از طرفی به‌طور تجربی ملاحظه می‌شود که تغییر شکل غیر الاستیک شامل تغییرات حجمی نمی‌شود، بنابراین تغییرات حجمی ناشی از تغییر شکل خزشی را صفر در نظر می‌گیریم.

$$(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)_{creep} = 0 \tag{۲-۱۱}$$

برای تغییر شکل همسان ناشی از خزش می‌توان از معادله (۲-۱۱) نسبت به زمان به‌صورت زیر مشتق گرفت.

$$(\dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 + \dot{\varepsilon}_3)_c = 0 \tag{۲-۱۲}$$

زیرنویس c نمادی برای خزش است. فرضیه‌ی دیگری که از آن استفاده می شود این است که نرخ کرنش‌های برشی ماکزیمم یعنی $\dot{\gamma}_{i,j} = \frac{1}{2}(\dot{\varepsilon}_i - \dot{\varepsilon}_j)$ متناسب با تنش‌های برشی ماکزیمم هستند پس:

$$\frac{(\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_2)_c}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{(\dot{\varepsilon}_2 - \dot{\varepsilon}_3)_c}{\sigma_2 - \sigma_3} = \frac{(\dot{\varepsilon}_3 - \dot{\varepsilon}_1)_c}{\sigma_3 - \sigma_1} = D(x, y, z, t) \tag{۲-۱۳}$$

که D(x, y, z, t) تابعی از مکان و زمان است. برای حالت پایا D تنها تابعی از مکان خواهد بود. با حلّ معادلات (۲-۱۲) و (۲-۱۳) خواهیم داشت:

$$(\dot{\varepsilon}_1)_c = \frac{2}{3}D[\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3)] \tag{۲-۱۴}$$

$$(\dot{\varepsilon}_2)_c = \frac{2}{3}D[\sigma_2 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)] \tag{۲-۱۵}$$

$$(\dot{\varepsilon}_3)_c = \frac{2}{3}D[\sigma_3 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_1)] \tag{۲-۱۶}$$

برای محاسبه‌ی D، تنش مؤثر، کرنش مؤثر و نرخ کرنش مؤثر را تعیین می‌کنیم. برای معیار فون میسس تنش موثر را به‌صورت زیر می نویسیم:

$$\sigma_e^v = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{[(\sigma_3-\sigma_1)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_1-\sigma_2)^2]} \tag{۱۷-۲}$$

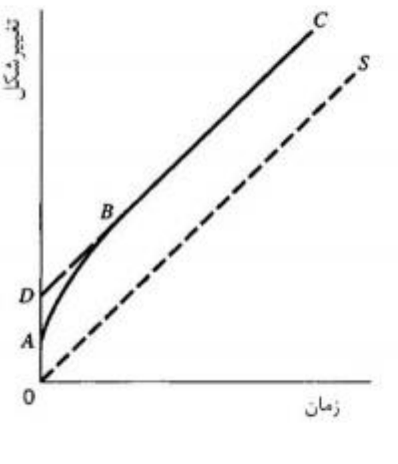
که بالانویس v بیانگر معیار فون میسس است.

به‌طور مشابه برای کرنش مؤثر و نرخ کرنش مؤثر داریم:

$$\varepsilon_{ec}^v = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{[(\varepsilon_3-\varepsilon_1)_c^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)_c^2+(\varepsilon_1-\varepsilon_2)_c^2]} \tag{۱۸-۲}$$

$$\dot{\varepsilon}_{ec}^v = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{[(\dot{\varepsilon}_3-\dot{\varepsilon}_1)_c^2+(\dot{\varepsilon}_2-\dot{\varepsilon}_3)_c^2+(\dot{\varepsilon}_1-\dot{\varepsilon}_2)_c^2]} \tag{۱۹-۲}$$

حال یک عضو سازه‌ای را تحت تنش و دمای ثابت برای مدت طولانی در نظر می‌گیریم. اگر تغییر شکل به اندازه‌ی کافی کوچک باشد که مانع از خزش مرحله‌ی سوم شود نمودار تغییر شکل ناشی از خزش-زمان این عضو تقریباً مشابه منحنی با خط پیوسته در شکل(۲-۳) خواهد بود. تغییر شکل ناگهانی OA ممکن است کاملا الاستیک، پلاستیک و یا ترکیبی از هر دو باشد. به دنبال مرحله‌ی خزش AB، مرحله‌ی دوم خزش BC (خزش حالت پایا) قرار دارد. در مدت زمان طولانی و در صورت کوتاه بودن مرحله‌ی ابتدایی خزش، تقریب تغییر شکل خزش حالت پایا با خط چین مستقیم OS، تقریب بسیار خوبی است. [۲۸]



شکل ۲-۳ تغییر شکل با زمان[۲۸]

در این تقریب فرض می شود که مؤلفه‌های دما و تنش هر المان حجمی در عضو، با زمان ثابت می‌ماند. پس در حالت پایا، نرخ خزش برای دمای مشخص تنها تابعی از تنش است و رابطه‌ی نرخ کرنش به‌صورت زیر خواهد بود.

$$\dot{\varepsilon}_{ec}^{v} = f(\sigma_e) \tag{۲-۲۰}$$

رابطه‌ها مختلفی برای تابع f پیشنهاد شده است. در جدول ۲-۱ رابطه‌ای که بیشتر مورد استفاده قرار می گیرد رابطه بیلی-نورتون است که به‌صورت زیر می‌باشد.

$$\dot{\varepsilon}_{ec}^{v} = B(\sigma_e^{v})^{n} \tag{۲-۲۱}$$

از مزایای این رابطه علاوه بر دقّت کافی، سهولت در بکارگیری آن است. در یک تست کشش ساده با تنش σ_1 و نرخ کرنش $(\dot{\varepsilon}_1)_c$ با استفاده از معادلات (۲-۱۴) و (۲-۱۵) و (۲-۱۶) داریم

$$(\dot{\varepsilon}_2)_c = (\dot{\varepsilon}_3)_c = -\frac{1}{2}(\dot{\varepsilon}_1)_c \tag{۲-۲۲}$$

بنابراین با در نظر گرفتن رابطه‌ی(۲-۲۲) و معادلات (۲-۱۷) و (۲-۱۹) خواهیم داشت

$$\sigma_e^{v} = \sigma_1 \tag{۲-۲۳}$$

$$\dot{\varepsilon}_{ec}^{v} = (\dot{\varepsilon}_1)_c \tag{۲-۲۴}$$

سپس با به‌کارگیری معادلات (۲-۱۴) و (۲-۲۰) و دو رابطه‌ی (۲-۲۳) و (۲-۲۴)، D را می‌توان به فرم زیر به‌دست آورد.

$$D = \frac{3}{2}\frac{\dot{\varepsilon}_{ec}^{v}}{\sigma_e^{v}} \tag{۲-۲۵}$$

با این مقدار D و معادله‌ی (۲-۲۱) می‌توانیم معادلات (۲-۱۴) و (۲-۱۵) و (۲-۱۶) را به فرم زیر بنویسیم.

$$(\dot{\varepsilon}_1)_c = \frac{2}{3}B(\sigma_e^v)^{n-1}[\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3)]$$ (۲-۲۶)

$$(\dot{\varepsilon}_2)_c = \frac{2}{3}B(\sigma_e^v)^{n-1}[\sigma_2 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)]$$ (۲-۲۷)

$$(\dot{\varepsilon}_3)_c = \frac{2}{3}B(\sigma_e^v)^{n-1}[\sigma_3 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_1)]$$ (۲-۲۸)

فصل ۳: تحلیل خزش حالت پایا در پوسته‌های کروی جدار ضخیم همگن

۳-۱ مقدمه

در این فصل به استخراج رابطه‌ها تنش ناشی از خزش در پوسته‌های کروی می‌پردازیم که با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی خزش در حالت پایا بر اساس رابطه‌ی بیلی-نورتون بررسی می‌شود. معادله‌ی بیلی-نورتون، رابطه‌ی بین کرنش و تنش ناشی از خزش را به‌صورت زیر بیان می‌کند:

$$\varepsilon_e = at^n\sigma_e^b \qquad 0<n\leq 1\ ,\ b\geq 1 \qquad (۳-۱)$$

این رابطه برای شرایط هم‌دما، مرحله اوّل و دوّم خزش را به‌خوبی بیان می‌کند.[۲۷] در این پژوهش برای تحلیل خزش حالت پایا (مرحله‌ی دوم خزش) حالت $n=1$ در نظر گرفته می‌شود، بنابراین معادله نورتون به شکل زیر بیان می‌شود:

$$\varepsilon_e = at\sigma_e^b \qquad (۳-۲)$$

که a و b مقادیر مربوط به خوّاص مادّه هستند. با یک بار مشتق گرفتن از رابطه (۳-۲) رابطه‌ی نرخ کرنش به‌دست می‌آید.

$$\dot{\varepsilon_e} = a\sigma_e^b \qquad (۳-۳)$$

۳-۲ تحلیل خزش در پوسته‌های کروی جدار ضخیم همگن

در این قسمت به استخراج رابطه‌ها تنش ناشی از خزش در پوسته‌های کروی جدار ضخیم همگن می‌پردازیم.

۳-۲-۱ حلّ الاستیک پوسته‌های کروی جدار ضخیم همگن با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی

در تحلیل‌هایی که در این پژوهش ارائه می‌شود فرض بر تقارن محوری بودن مسئله است که این فرض دارای شرایط زیر است. به عبارت دیگر هنگامی ما با یک مسأله متقارن محوری روبه‌رو هستیم که:

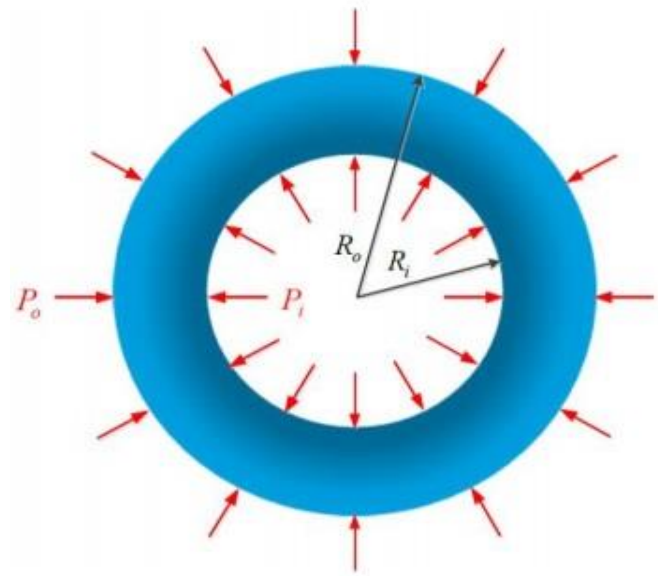
الف- هندسه شکل نسبت به محور متقارن باشد.

ب- جنس مادّه‌ی مورد نظر نیز نسبت به محور متقارن باشد.

ج- شرایط مرزی حاکم بر مسأله نسبت به محور متقارن باشد.

با توّجه به مطالب ذکر شده هر کدام از سه شرط بالا اگر در مسأله ای برقرار نباشد نمی‌توان فرض متقارن محوری بودن را در آن مسأله به‌کار برد .

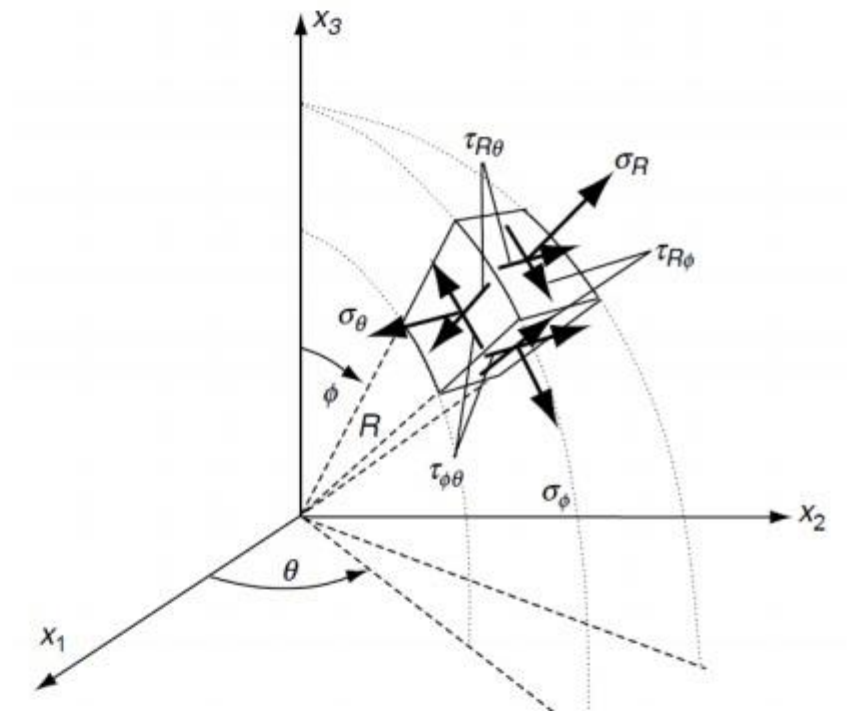
پوسته‌ی کروی جدار ضخیم همگن با شعاع داخلی R_i و شعاع خارجی R_o مانند شکل (۳-۱) در نظر می‌گیریم. این پوسته تحت فشار یکنواخت داخلی P_i و فشار یکنواخت خارجی P_o می‌باشد. با استفاده از دستگاه مختصات کروی به استخراج معادلات می‌پردازیم.



شکل ۳-۱ پوسته کروی جدار ضخیم همگن[۶]

۳-۲-۲ رابطه‌ها اساسی در دستگاه مختصات کروی

با در نظر گرفتن دستگاه مختصات راست‌گرد تنش‌های یک المان دلخواه از یک جسم در مختصات کروی به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود:



شکل ۳-۲ دستگاه مختصات کروی[۶]

که در این المان تانسور تنش به‌صورت زیر می‌باشد:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_R & \tau_{R\theta} & \tau_{R\emptyset} \\ \tau_{\theta R} & \sigma_\theta & \tau_{\theta\emptyset} \\ \tau_{\emptyset R} & \tau_{\emptyset\theta} & \sigma_\emptyset \end{bmatrix} \quad (۴-۳)$$

به همین ترتیب تانسور کرنش و بردار جابه‌جایی را می‌توان به‌صورت زیر نمایش داد:

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_R & \frac{\gamma_{R\theta}}{2} & \frac{\gamma_{R\emptyset}}{2} \\ \frac{\gamma_{\theta R}}{2} & \varepsilon_\theta & \frac{\gamma_{\theta\emptyset}}{2} \\ \frac{\gamma_{\emptyset R}}{2} & \frac{\gamma_{\emptyset\theta}}{2} & \varepsilon_\emptyset \end{bmatrix} \quad (۵-۳)$$

$$\{u_{ij}\} = \begin{Bmatrix} u_R \\ u_\theta \\ u_\emptyset \end{Bmatrix} \quad (۳-۶)$$

با توّجه به این‌که کره در دو جهت تقارن محوری دارد پس:

$$\frac{\partial()}{\partial\theta} = \frac{\partial()}{\partial\emptyset} = 0 \text{ و } u_\theta = u_\emptyset = 0 \quad (۳-۷)$$

و با توّجه به معادلات سینماتیک و رابطه‌ها ساختاری در مختصات کروی:

$$\gamma_{ij} = 0 \rightarrow \tau_{ij} = 0 \quad (۳-۸)$$

پس از بازنویسی، تانسور تنش و کرنش و بردار جابه‌جایی به‌ترتیب به‌صورت رابطه‌ها (۳-۹)، (۳-۱۰) و (۳-۱۱) نوشته می‌شوند و تانسور تنش و کرنش قطری می‌باشد، لذا تنش‌ها و کرنش‌های نرمال مقادیر اصلی و محورهای دستگاه کروی، جهت‌های اصلی می‌شوند و تعداد مجهولات از ۱۵ مجهول به ۷ مجهول(۳ مجهول تنش، ۳ مجهول کرنش و ۱ مجهول جابه‌جایی) می‌رسد که برای حلّ به ۷ معادله نیاز دارد.

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_R & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\theta & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\emptyset \end{bmatrix} \quad (۳-۹)$$

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_R & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_\theta & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_\emptyset \end{bmatrix} \quad (۳-۱۰)$$

$$\{u_{ij}\} = \begin{Bmatrix} u_R \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (۳-۱۱)$$

با نوشتن معادله تعادل، سینماتیک و ساختاری داریم:

$$\frac{\partial\sigma_R}{\partial R} + \frac{1}{R}(2\sigma_R - \sigma_\theta - \sigma_\emptyset) = 0 \quad (۳-۱۲)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_R = \dfrac{\partial u_R}{\partial R} = \dfrac{du_R}{dR} \\ \varepsilon_\theta = \dfrac{1}{R\cos\emptyset}\left(\dfrac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + u_R\cos\emptyset - u_\emptyset\sin\emptyset\right) = \dfrac{u_R}{R} \\ \varepsilon_\emptyset = \dfrac{1}{R}\left(u_R + \dfrac{\partial u_\emptyset}{\partial\emptyset}\right) = \dfrac{u_R}{R} \end{cases} \qquad (۱۳\text{-}۳)$$

$$\rightarrow \varepsilon_R = \frac{du_R}{dR}\ , \varepsilon_\theta = \varepsilon_\emptyset = \frac{u_R}{R} \qquad (۱۴\text{-}۳)$$

$$\sigma_i = \frac{E}{(1+\vartheta)(1-2\vartheta)}\Big((1-\vartheta)\varepsilon_i + \vartheta\big(\varepsilon_j + \varepsilon_k\big)\Big) \qquad (۱۵\text{-}۳)$$

Or

$$\varepsilon_i = \frac{1}{E}\left(\sigma_i - \vartheta(\sigma_j + \sigma_k)\right), \quad \mathrm{i} \neq \mathrm{j} \neq \mathrm{k}$$

همان‌طور که می‌دانیم در پوسته‌ی کروی

$$u_R(\mathrm{R})\ , u_\theta = u_\emptyset = 0 \quad \sigma_R(R)\ , \sigma_\theta = \sigma_\emptyset \qquad \varepsilon_R(R)\ , \varepsilon_\theta = \varepsilon_\emptyset = \frac{u_R}{R} \qquad (۱۶\text{-}۳)$$

با توجّه به معادله‌ی (۳-۱۶) اکنون مسأله در حوزه‌ی تحلیل مسائل دوبعدی امکان‌پذیر است و لذا از تئوری کلاسیک (PET) استفاده می‌شود.

با در نظر گرفتن

$$\frac{R}{R_i} = r, \qquad \frac{R_o}{R_i} = k, \qquad \frac{u_R}{R_i} = u_r \qquad (۱۷\text{-}۳)$$

و معادلات سینماتیک و ساختاری به‌صورت زیر:

$$\begin{cases} \varepsilon_R = \dfrac{du_R}{dR} = \dfrac{du_r}{dr} \\ \varepsilon_\theta = \varepsilon_\emptyset = \dfrac{u_R}{R} = \dfrac{u_r}{r} \end{cases} \qquad (۱۸\text{-}۳)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_R \\ \sigma_\theta = \sigma_\emptyset \end{Bmatrix} = E\begin{bmatrix} A & 2B \\ B & A+B \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon_R \\ \varepsilon_\theta = \varepsilon_\emptyset \end{Bmatrix} \qquad (۱۹\text{-}۳)$$

$$\mathrm{A} = \frac{1-\vartheta}{(1+\vartheta)(1-2\vartheta)}\ , \mathrm{B} = \frac{\vartheta}{(1+\vartheta)(1-2\vartheta)} \qquad (۲۰\text{-}۳)$$

معادله‌ی تعادل به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2}{r}\left(\sigma_r - \sigma_\phi\right) = 0$$

Or (۲۱-۳)

$$\frac{d\sigma_R}{dr} + \frac{2}{r}\left(\sigma_R - \sigma_\phi\right) = 0$$

با قرار دادن معادلات(۳-۱۸) و (۳-۱۹) در معادله‌ی (۳-۲۱)، معادله‌ی ناویر به‌دست می‌آید:

$$\frac{d}{dr}\left[E(A\frac{d\mathrm{u}_r}{dr} + 2B\frac{\mathrm{u}_r}{r})\right] + \frac{2}{r}\left[E(A-B)(\frac{d\mathrm{u}_r}{dr} - \frac{\mathrm{u}_r}{r})\right] = 0 \qquad (۲۲-۳)$$

که $\mathrm{E} \neq 0$ می‌باشد در نتیجه

$$\frac{d}{dr}(A\frac{d\mathrm{u}_r}{dr} + 2B\frac{\mathrm{u}_r}{r}) + \frac{2}{r}(A-B)(\frac{d\mathrm{u}_r}{dr} - \frac{\mathrm{u}_r}{r}) = 0 \qquad (۲۳-۳)$$

پس:

$$r^2u''_r + 2ru'_r - 2u_r = 0 \qquad (۲۴-۳)$$

که ' بیانگر مشتق اول نسبت به r و " بیانگر مشتق دوم نسبت به r است و یک معادله‌ی کوشی-اویلر همگن می‌باشد که حلّ آن به فرم زیر است.

با حدس $\mathrm{u}_r(r) = r^m$ و جایگذاری در معادله ریشه های معادله $m_{1,2} = 1$ و -2 می‌باشد. بنابراین جواب عمومی معادله(جابه‌جایی شعاعی) به‌صورت زیر می‌باشد و C_1, C_2 ثابت‌های معادله هستند که با استفاده از شرایط مرزی تنش به‌دست می‌آیند.

$$\mathrm{u}_r(r) = C_1 r^{m_1} + C_2 r^{m_2}$$

Or (۲۵-۳)

$$\mathrm{u}_r(r) = C_1\mathrm{r} + \frac{C_2}{r^2}$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۳-۲۵) در معادله‌ی (۳-۱۸) و سپس رابطه‌ی (۳-۱۹)، تنش‌ها و جابه‌جایی‌ها به‌صورت زیر نوشته می‌شوند.

$$\begin{cases} \varepsilon_R = \dfrac{du_r}{r} = c_1 - \dfrac{2c_2}{r^3} \\ \varepsilon_\phi = \varepsilon_\theta = \dfrac{u_r}{r} = c_1 + \dfrac{c_2}{r^3} \end{cases} \tag{۲۶-۳}$$

$$\begin{cases} \sigma_R = E\left[(A+2B)c_1 - 2(A-B)\dfrac{c_2}{r^3}\right] \\ \sigma_\phi = \sigma_\theta = E\left[(A+2B)c_1 + 2(A-B)\dfrac{c_2}{r^3}\right] \end{cases} \tag{۲۷-۳}$$

سپس با اعمال شرایط مرزی ثابت های C_1 و C_2 به‌دست *می‌آیند*.

$$\begin{aligned} \sigma_r|_{r=1} &= -P_i \\ \sigma_r|_{r=k} &= -P_o \end{aligned} \tag{۲۸-۳}$$

که ثابت‌های معادله به‌صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{P_i - k^3 P_o}{E(A+2B)(k^3-1)} \\ C_2 = \dfrac{k^3(P_i - P_o)}{2E(A-B)(k^3-1)} \end{cases} \tag{۲۹-۳}$$

با جایگذاری ثابت‌های c_1 و c_2 در معادله‌ی (۳-۲۷) و ((۳-۲۵)، جابه‌جایی شعاعی و تنش‌ها به‌دست می‌آیند.

$$u_R(r) = \frac{R_i r}{E(k^3-1)}\left[\left(\frac{P_i - k^3 P_o}{A+2B}\right) + \left(\frac{P_i - P_o}{A-B}\right)\frac{k^3}{2r^3}\right] \tag{۳۰-۳}$$

$$\begin{cases} \sigma_R = \dfrac{1}{k^3-1}\left[(P_i - k^3 P_o) - (P_i - P_o)\dfrac{k^3}{r^3}\right] \\ \sigma_\phi = \sigma_\theta = \dfrac{1}{k^3-1}\left[(P_i - k^3 P_o) + (P_i - P_o)\dfrac{k^3}{2r^3}\right] \end{cases} \tag{۳۱-۳}$$

۳-۳ بررسی نتایج

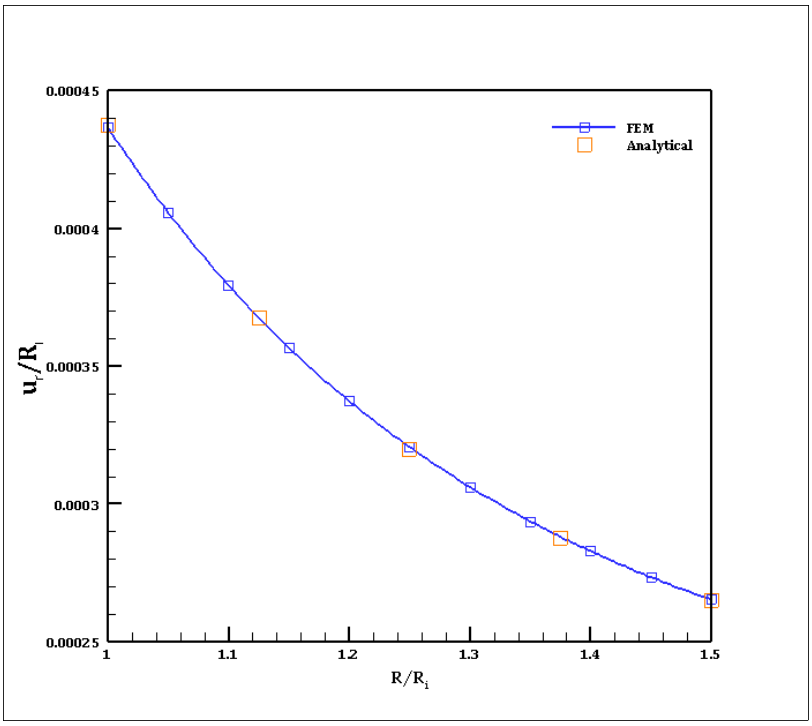
برای مطالعه‌ی موردی و بررسی نمودارهای به‌دست آمده از نتایج المان محدود[1]، یک پوسته‌ی کروی جدار ضخیم با مشخصات زیر در نظر می‌گیریم. پوسته‌ی کروی جدار ثابت همگن به شعاع داخلی 40 mm و شعاع خارجی 60 mm، تحت فشار یکنواخت داخلی 80 MPa قرار گرفته شده است. مدول الاستیک 200 GPa و ضریب پواسون 0.3 می‌باشد.

با شبیه‌سازی یک نمونه‌ی هندسی در نرم‌افزار آباکوس بر مبنای روش المان محدود، حلّ المان محدود انجام می‌شود. در این مسأله به دلیل دو تقارن محوری[2] بودن، یک چهارم آن به‌صورت دو بعدی در نظر گرفته شده است. در تحلیل، المان‌های مورد استفاده از نوع CAX8R و مدل دارای ۶۰۰ المان می‌باشد که در راستای شعاعی ۲۰ المان در نظر گرفته شده است. شرایط مرزی گره‌های مربوط به مرز افقی که امتداد آن‌ها از مرکز کره می‌گذرد، به واسطه‌ی تقارن در راستای عمودی، و همچنین گره‌های مربوط به مرز عمودی که امتداد آن‌ها از مرکز کره می‌گذرد، به واسطه‌ی تقارن در راستای افقی، مقیّد شده‌اند.

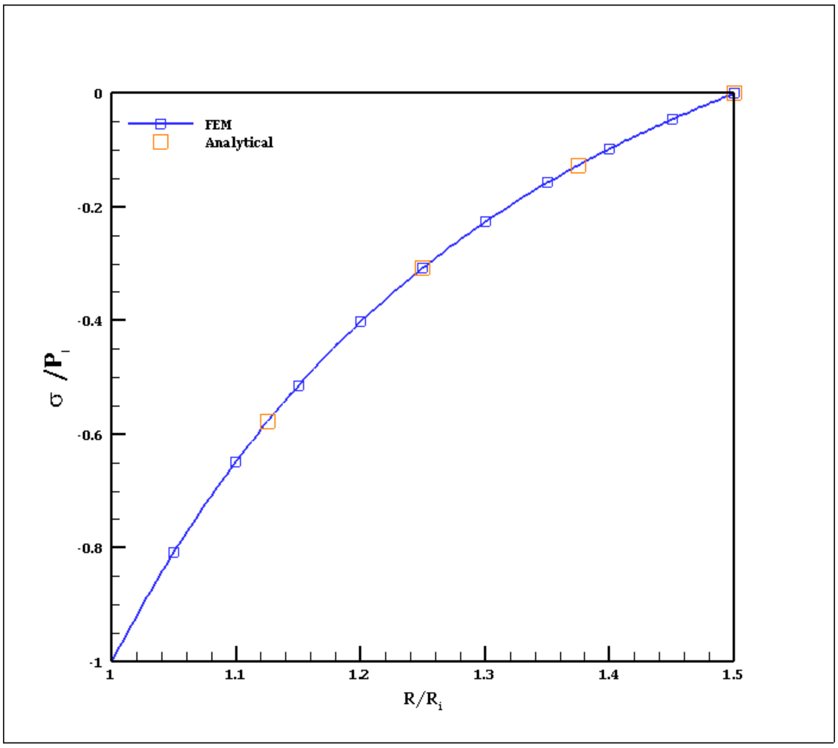
شکل (۳-۳) تا شکل (۳-۶) توزیع جابه‌جایی شعاعی، تنش شعاعی، تنش محیطی و تنش فون میسس در مدل را نشان می‌دهد.

[1] Finite Element

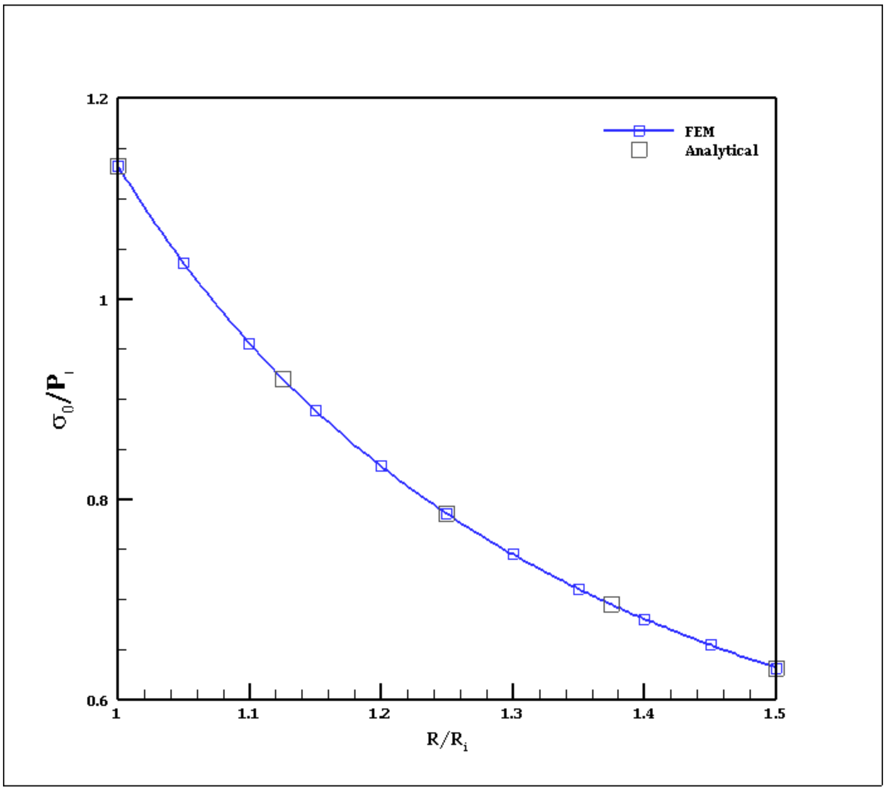
[2] Double Axisymmetric



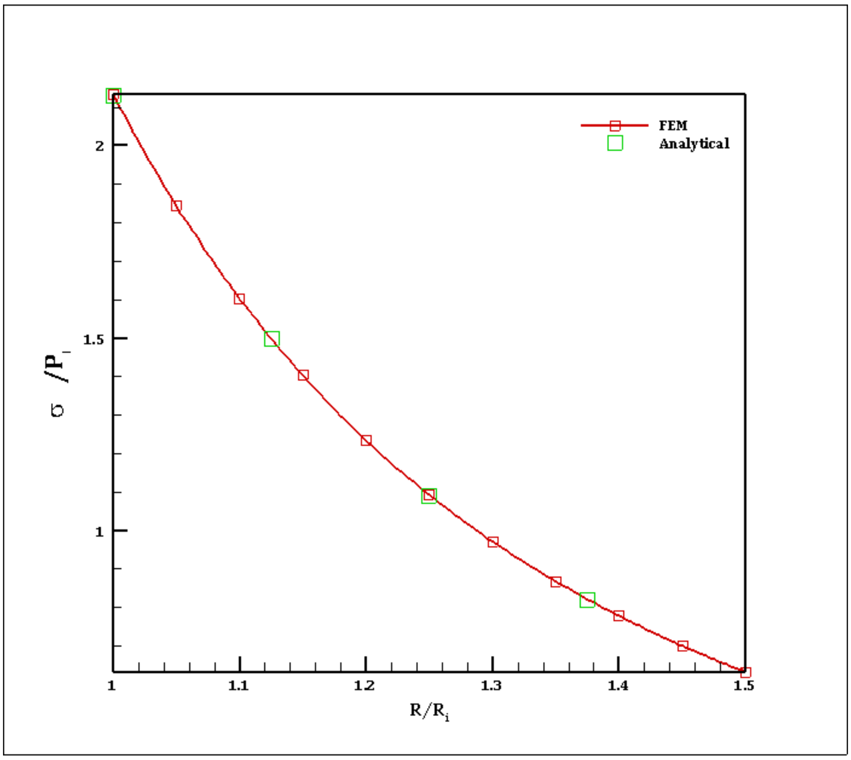
شکل ۳-۳ توزیع جابه‌جایی شعاعی پوسته‌ی کروی همگن تحت فشار یکنواخت داخلی



شکل ۳-۴ توزیع تنش شعاعی پوسته‌ی کروی همگن تحت فشار یکنواخت داخلی



شکل ۳-۵ توزیع تنش محیطی پوسته‌ی کروی همگن تحت فشار یکنواخت داخلی



شکل ۳-۶ توزیع تنش فون میسس پوسته‌ی کروی همگن تحت فشار یکنواخت داخلی

۴-۳ خزش پوسته‌های کروی جدار ضخیم همگن تحت فشار داخلی و خارجی

کره‌ای جدار ضخیم همگن با شعاع داخلی R_i و شعاع خارجی R_o تحت فشار داخلی P_i و فشار خارجی P_o در نظر می‌گیریم. با استفاده از دستگاه مختصات کروی به استخراج معادلات می‌پردازیم.

برای استخراج معادلات خزشی از رابطه‌ی پرانتل-روس [۲۹] استفاده می‌کنیم. معادله‌ی پرانتل-روس در حالت پلاستیک به‌صورت زیر می‌باشد.

$$d\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = \frac{3}{2}\frac{d\dot{\varepsilon}^{p}}{\sigma_e}S_{ij} \qquad (۳۲-۳)$$

که بالانویس p بیانگر حالت پلاستیک می‌باشد.

با تعمیم رابطه (۳-۳۲) برا حالت خزش، رابطه‌ی پرانتل-روس به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$d\dot{\varepsilon}_{ij}^{cr} = \frac{3}{2}\frac{d\dot{\varepsilon}^{cr}}{\sigma_e}S_{ij} \qquad (۳۳-۳)$$

که:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{cr} = \frac{3}{2}\frac{\dot{\varepsilon}^{cr}}{\sigma_e}S_{ij} \qquad (۳۴-۳)$$

برای به‌دست آوردن تنش مؤثر در مختصات کروی از معیار فون میسس استفاده می‌کنیم.

$$\sigma_e^{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{[(\sigma_\emptyset - \sigma_R)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_\emptyset)^2 + (\sigma_R - \sigma_\theta)^2]} = \sigma_\emptyset - \sigma_R \qquad (۳۵-۳)$$

و تانسور تنش انحرافی برای پوسته‌ی کروی

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{kk} \qquad (۳۶-۳)$$

و

$$[S_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(2\sigma_R - (\sigma_\emptyset + \sigma_\theta)) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}(2\sigma_\theta - (\sigma_\emptyset + \sigma_R)) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}(2\sigma_\emptyset - (\sigma_R + \sigma_\theta)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}(\sigma_R - \sigma_\emptyset) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}(\sigma_\theta - \sigma_R) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}(\sigma_\emptyset - \sigma_R) \end{bmatrix} \quad (۳۷\text{-}۳)$$

با استفاده از قانون توانی بیلی-نورتون می‌توان نوشت:

$$\varepsilon^{cr} = \mathrm{b}\sigma^n t^m \quad (۳۸\text{-}۳)$$

که b و m و n پارامتر ثابت موّاد هستند. برای شرایط دما ثابت $n \geq 1$ می‌توان نوشت[۳۶].

$$\bar{\varepsilon}^{cr} = b\sigma_e^n t^m \quad (۳۹\text{-}۳)$$

و کرنش خزشی مؤثر

$${\varepsilon_e}^{cr} = b\sigma_e^n t^m \quad (۴۰\text{-}۳)$$

نرخ کرنش خزشی مؤثر به‌صورت زیر می‌باشد.

$$\dot{\varepsilon}_e^{cr} = \frac{d\varepsilon_e^{cr}}{dt} = mb\sigma_e^n t^{m-1} \quad (۴۱\text{-}۳)$$

که برای حالت پایا m=1 است و برای خزش اولیه $0 < m < 1$ می‌باشد که معمولا m=0.5 لحاظ می‌شود.

۳-۴-۱ خزش حالت پایا

معادله‌ی پرانتل-روس، کرنش معادل خزشی برای حالت پایا و با توّجه به معیار فون میسس رابطه‌ها به‌صورت زیر بازنویسی می‌شوند.

$$\begin{Bmatrix}\dot{\varepsilon}_R\\ \dot{\varepsilon}_\emptyset\end{Bmatrix}=\frac{\dot{\varepsilon}_e}{2\sigma_e}\begin{bmatrix}2 & -2\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_R\\ \sigma_\emptyset\end{Bmatrix} \tag{۴۲-۳}$$

که برای خزش ثانویه به فرم زیر می‌باشد.

$$\begin{Bmatrix}\dot{\varepsilon}_R\\ \dot{\varepsilon}_\emptyset\end{Bmatrix}=\frac{b\sigma_e^{n-1}}{2}\begin{bmatrix}2 & -2\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_R\\ \sigma_\emptyset\end{Bmatrix} \tag{۴۳-۳}$$

و

$$\dot{\varepsilon}_R=\frac{d\dot{u}(r)}{dr}\,,\dot{\varepsilon}_\emptyset=\frac{\dot{u}(r)}{r},\sigma_e=\sigma_R-\sigma_\emptyset \tag{۴۴-۳}$$

که با استفاده از رابطه‌ی $\dot{\varepsilon}_\emptyset=\frac{\dot{u}(r)}{r}$ و محاسبه‌ی $\dot{u}(r)$ داریم:

$$\dot{u}(r)=r\dot{\varepsilon}_\emptyset\,,\dot{\varepsilon}_R=\dot{\varepsilon}_\emptyset+r\frac{d\dot{\varepsilon}_\emptyset}{dr} \tag{۴۵-۳}$$

آنگاه رابطه‌ی سازگاری زیر برقرار می‌شود.

$$\dot{\varepsilon}_\emptyset+r\frac{d\dot{\varepsilon}_\emptyset}{dr}-\dot{\varepsilon}_R=0 \tag{۴۶-۳}$$

و با جایگذاری در معادله دیفرانسیل (۳-۴۶) تنش معادل به‌دست می‌آید.

$$\frac{r}{2}\frac{d\sigma_e^n}{dr}+-\frac{3}{2}\sigma_e^n=0\rightarrow\sigma_e=\sigma_R-\sigma_\emptyset=\left(\frac{C_1}{r^3}\right)^{\frac{1}{n}} \tag{۴۷-۳}$$

رابطه‌ی (۳-۴۷) را در معادله‌ی تعادل جایگذاری و آن را حلّ می‌کنیم.

$$\frac{d\sigma_R}{dr}=\frac{2}{r}\left(\frac{C_1}{r^3}\right)^{\frac{1}{n}} \tag{۴۸-۳}$$

و

$$\sigma_R=2C_1^{\frac{1}{n}}\left[\int_{R_i}^{r}r^{-(\frac{3}{n}+1)}dr+r^{\frac{-3}{n}}\right]+C_2 \tag{۴۹-۳}$$

با اعمال شرایط مرزی فشار داخل و خارج ثابت‌های C_1و C_2 به‌دست می‌آید.

$$\begin{cases}C_1=\left[\dfrac{P_i-P_o}{2\int_{R_i}^{R_o}r^{-(\frac{3}{n}+1)}dr}\right]^n\\ C_2=-P_i\end{cases} \tag{۵۰-۳}$$

آنگاه تنش‌های شعاعی، نصف النهاری و کرنش خزشی معادل به‌دست ی‌آیند.

$$\sigma_R = \frac{(P_i - P_o)}{(k^{-\frac{3}{n}} - 1)} R^{-\frac{3}{n}} - \frac{(P_i k^{-\frac{3}{n}} - P_o)}{(k^{-\frac{3}{n}} - 1)} \tag{۵۱-۳}$$

$$\sigma_\emptyset = \sigma_\theta = \frac{(P_i - P_o)(2n-3)}{2n(k^{-\frac{3}{n}} - 1)} R^{-\frac{3}{n}} - \frac{(P_i k^{-\frac{3}{n}} - P_o)}{(k^{-\frac{3}{n}} - 1)} \tag{۵۲-۳}$$

$$\sigma_e = \frac{(P_i - P_o) R^{-\frac{3}{n}}}{\left(k^{-\frac{3}{n}} - 1\right)} (\frac{-3}{2n}) \tag{۵۳-۳}$$

$$\dot{\varepsilon}_e = b \left(\frac{-3}{2n}\right)^n (\frac{P_i - P_o}{k^{-\frac{3}{n}} - 1})^n R^{-\frac{3}{n}} \tag{۵۴-۳}$$

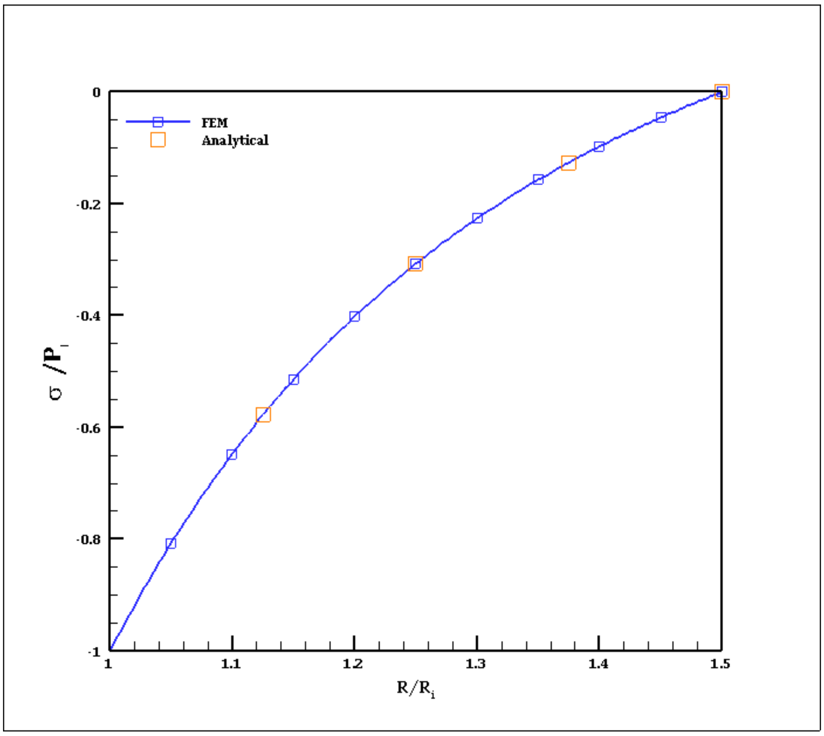
۳-۵ بررسی نتایج

برای مطالعه‌ی موردی و بررسی نمودارهای به‌دست آمده از نتایج المان محدود، یک پوسته‌ی کروی جدار ضخیم با مشخصات زیر در نظر می‌گیریم. پوسته‌ی کروی جدار ثابت همگن به شعاع داخلی 40 mm و شعاع خارجی 60 mm، تحت فشار یکنواخت داخلی 80 MPa قرار گرفته شده است. مدول الاستیک 200 GPa و ضریب پواسون 0.3 می‌باشد. همچنین پارامتر موّاد خزش 3.125e-14 بر واحد ساعت و n=1 را در نظر می‌گیریم.

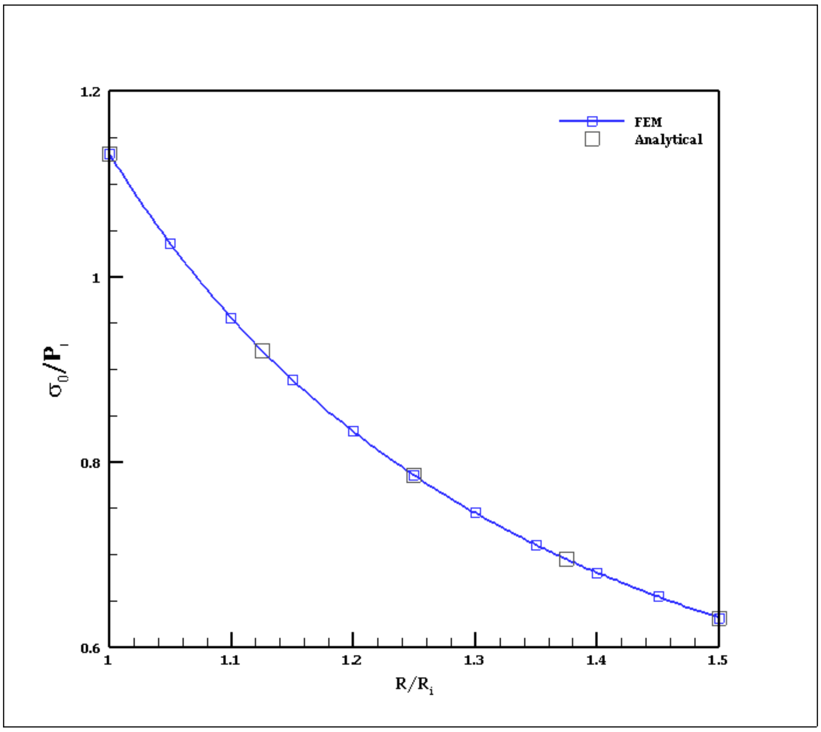
با شبیه‌سازی یک نمونه‌ی هندسی در نرم‌افزار آباکوس بر مبنای روش المان محدود، حلّ عددی انجام می‌شود. المان‌های مورد استفاده از نوع CAX8R و مدل دارای ۶۰۰ المان می‌باشد که در راستای شعاعی ۲۰ المان در نظر گرفته شده است.

شرایط مرزی همانند بخش ۳-۳ می‌باشد.

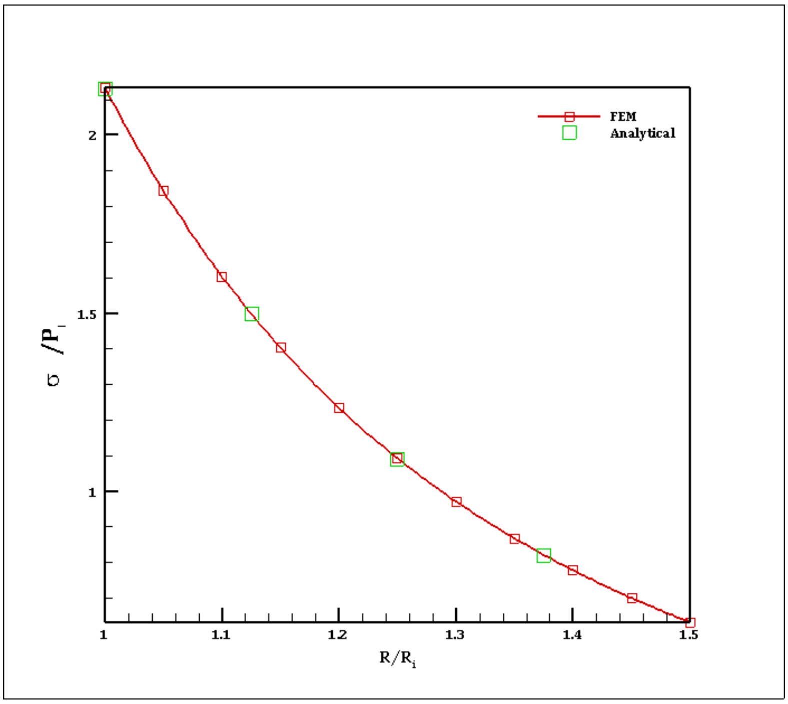
شکل (۳-۷) تا شکل (۳-۱۰) توزیع تنش شعاعی، تنش محیطی، تنش فون میسس و نرخ کرنش معادل خزشی در مدل را نشان می‌دهد.



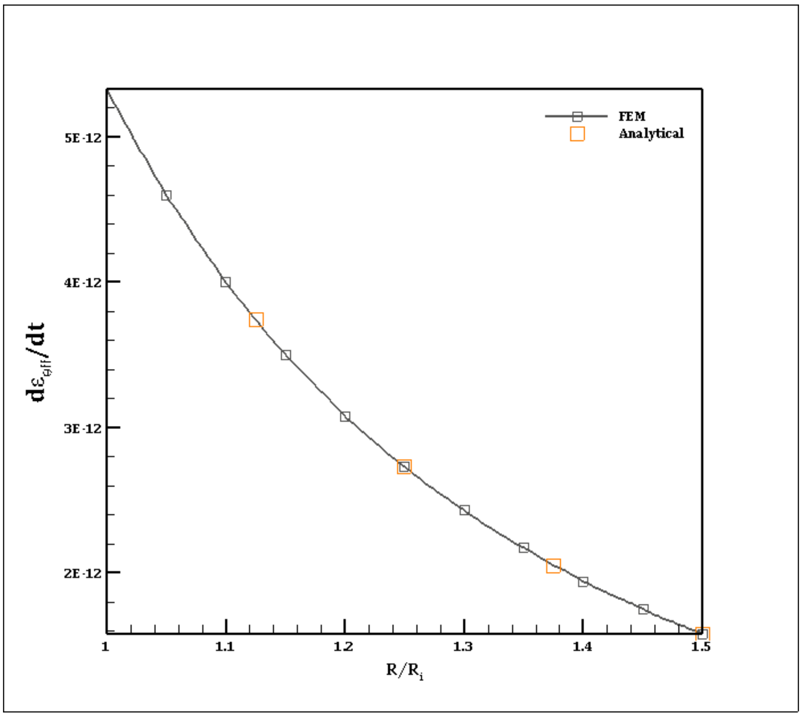
شکل ۳-۷ توزیع تنش شعاعی پوسته‌ی کروی همگن تحت فشار یکنواخت داخلی



شکل ۳-۸ توزیع تنش محیطی پوسته‌ی کروی همگن تحت فشار یکنواخت داخلی



شکل ۳-۹ توزیع تنش فون میسس پوسته‌ی کروی همگن تحت فشار یکنواخت داخلی



شکل ۳-۱۰ توزیع نرخ کرنش مؤثر در پوسته‌ی کروی همگن تحت فشار یکنواخت داخلی بعد

از ۱۰۰۰ ساعت

۳-۶ انتقال حرارت یک‌بعدی در مختصات کروی

با توجّه به یکنواخت بودن انتقال حرارت در راستای شعاع کره، برای مشخص کردن رابطه‌ی $T(r)$ باید معادله یک بعدی انتقال حرارت در مختصات کروی را حلّ نمود. معادله‌ی انتقال حرارت بدون تولید منبع حرارتی با گرادیان شعاعی دما در مختصات کروی به فرم زیر می‌باشد. [۳۸]

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda r^2\frac{\partial T(r)}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\lambda\sin\theta\frac{\partial T(r)}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\emptyset}\left(\lambda\frac{\partial T(r)}{\partial\emptyset}\right)=0 \quad (۳-۵۵)$$

با استفاده از خاصیت دو تقارن محوری بودن کره ($\frac{\partial}{\partial\emptyset}=0,\frac{\partial}{\partial\theta}=0$) رابطه‌ی(۳-۵۵) به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda r^2\frac{\partial T(r)}{\partial r}\right)=0 \quad (۳-۵۶)$$

با حلّ معادله‌ی (۳-۵۶) رابطه‌ی توزیع دما برای پوسته‌ی کروی همگن به‌صورت زیر می‌باشد.

$$T(r)=\frac{C_1}{r}+C_2 \quad (۳-۵۷)$$

که ثابت‌های C_1 و C_2 با استفاده از شرایط مرزی دمایی به‌دست می‌آیند. دما در جدار داخلی T_i و دما در جدار خارجی T_o می‌باشد. پس ثابت‌های C_1 و C_2 به‌صورت زیر می‌باشند.

$$\begin{cases} C_1=\dfrac{(T_i-T_o)r_o}{k-1} \\ C_2=\dfrac{kT_o-T_i}{k-1} \end{cases} \quad (۳-۵۸)$$

پس

$$T(r)=\frac{(T_i-T_o)r_o}{k-1}\frac{1}{r}+\frac{kT_o-T_i}{k-1} \quad (۳-۵۹)$$

با توجّه به تقارن در هندسه، بار گذاری و مادّه، صفر شدن کرنش‌های برشی که منجر به صفر شدن تنش‌های برشی خواهد شد؛ تانسور تنش، کرنش و بردار جابه‌جایی بیان شد. از طرفی برای کرنش‌های حرارتی تانسور کرنش به‌صورت زیر می‌باشد.

$$[\varepsilon_{ij}]^T = \begin{bmatrix} \alpha\Theta(r) & 0 & 0 \\ 0 & \alpha\Theta(r) & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\Theta(r) \end{bmatrix} \tag{۳-۶۰}$$

θ(r) تغییرات دما در راستای ضخامت به‌صورت تابعی از شعاع کره است که واحد آن °Cمی‌باشد. این تغییرات دما، نسبت به دمای منبع سنجیده می‌شود به‌طوری $\theta(r)$ =T(r)-$T_{refrence}$ *می‌باشد* و $T_{refrence}$ دمای مرجع است. لذا کرنش کلّی به‌صورت زیر است.

$$[\varepsilon_{ij}] = [\varepsilon_{ij}]^M + [\varepsilon_{ij}]^{th} \tag{۳-۶۱}$$

که بالانویس M بیانگر کرنش‌های مکانیکی و بالانویس th بیانگر کرنش‌های حرارتی می‌باشد.

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_R & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_\theta & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_\emptyset \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha\Theta(r) & 0 & 0 \\ 0 & \alpha\Theta(r) & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\Theta(r) \end{bmatrix} \tag{۳-۶۲}$$

با استفاده از معادله ساختاری و رابطه بین تنش- کرنش و خاصیت دو تقارن محوری کره

$$\begin{Bmatrix} \sigma_R \\ \sigma_\emptyset \end{Bmatrix} = E \begin{Bmatrix} A & 2B \\ B & A+B \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\emptyset \end{Bmatrix} - \mathrm{E\alpha\Theta(r)} \begin{bmatrix} C \\ C \end{bmatrix} \tag{۳-۶۳}$$

که $C = \frac{1}{1-2\vartheta}$ می‌باشد. که با جایگذاری در معادله تعادل به معادله زیر خواهیم رسید.

$$r^2 u_r'' + 2r u_r' - 2u_r = \frac{C\alpha}{A} I \tag{۳-۶۴}$$

که ' بیانگر مشتق اول نسبت به r و " بیانگر مشتق دوم نسبت به r است که یک معادله کوشی-اویلر ناهمگن است. و برای حلّ آن جواب به‌صورت $\mathrm{u}_r(r) = r^m$ و جایگذاری در معادله جایگذاری می‌گردد. معادله‌ی مشخصّه داری حلّ عمومی و حلّ خصوصی می‌باشد. برای حلّ خصوصی از روش رانسکین استفاده می‌شود.

جواب عمومی و خصوصی معادله بالا به فرم زیر است.

$$u_r(\mathrm{r}) = \frac{C\alpha}{A} I + c_1 r + \frac{c_2}{r^2} \tag{۳-۶۵}$$

$$I = \int_{R_i}^{r} r^2 \Theta(r) dr \tag{۳-۶۶}$$

در فصل بعدی رابطه‌ها ترموالاستیک به‌صورت کامل حلّ شده است.

فصل ۴: تحلیل خزش حالت پایا در پوسته‌های کروی جدار ضخیم ناهمگن

۴-۱ تحلیل الاستیک پوسته‌های کروی جدار ضخیم FG

همان‌طور که اشاره شد در موّاد FG، خوّاص (مکانیکی، حرارتی، مغناطیسی) مادّه به‌طور پیوسته تغییر می‌کند. در این پژوهش خوّاص مکانیکی به‌جز نسبت پواسون در راستای ضخامت کره به‌صورت تابع توانی بر حسب شعاع کره تغییر می‌کنند. لذا با در نظر گرفتن شکل هندسی و محورهای مختصات تعریف شده در بخش قبل تغییرات مدول الاستیسیته برای موّاد FG را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\mathrm{E(R)}=\mathrm{E_i}(\frac{R}{R_i})^{n_1}=\mathrm{E_i}r^{n_1} \tag{۴-۱}$$

که n_1 ثابت ناهمگنی می‌باشد و ضریب پواسون ثابت است. با جایگذاری در معادله‌ی ساختاری و معادله‌ی تعادل، معادله‌ی ناویر به شکل زیر می‌باشد.

$$\frac{d}{dr}\left[E(r)(A\frac{d\mathrm{u}_r}{dr}+2B\frac{\mathrm{u}_r}{r})\right]+\frac{2}{r}\left[E(r)(A-B)(\frac{d\mathrm{u}_r}{dr}-\frac{\mathrm{u}_r}{r})\right]=0 \tag{۴-۲}$$

که بعد از ساده سازی معادله‌ی فوق به معادله دیفرانسیل کوشی-اویلر همگن زیر خواهیم رسید.

$$\frac{d^2\mathrm{u}_r}{dr^2}+\left(\frac{n_1+2}{r}\right)\frac{d\mathrm{u}_r}{dr}+\frac{2}{r^2}(n_1\frac{B}{A}-1)u_r=0 \tag{۴-۳}$$

$$r^2u_r''+(n_1+2)ru_r'+2(n_1\vartheta^*-1)u_r=0 \tag{۴-۴}$$

که ' بیانگر مشتق اول نسبت به r و " بیانگر مشتق دوم نسبت به r است. و $\vartheta^*=\frac{B}{A}$ تعریف شده است. و برای حلّ آن جواب به‌صورت $\mathrm{u}_r(r)=r^m$ و جایگذاری در معادله ریشه های معادله به‌دست می‌آیند.

$$m^2+(n_1+1)m+2(n_1\vartheta^*-1)=0 \tag{۴-۵}$$

و ریشه های معادله به‌صورت زیر می‌باشند.

$$m_{1,2}=-\frac{n_1+1}{2}\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2} \tag{۴-۶}$$

$$\Delta=n_1^2+2(1-4\vartheta^*)n_1+9 \tag{۴-۷}$$

ریشه‌های معادله ممکن است حقیقی، موهومی و یا مضاعف باشند. در این پژوهش فرض $\Delta > 0$ است.

پس ریشه های معادله به‌ترتیب زیر می‌باشند.

$$m_1 = -\frac{n_1 + 1}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \tag{۴-۸}$$

$$m_2 = -\frac{n_1 + 1}{2} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \tag{۴-۹}$$

جواب معادله دیفرانسیل به‌صورت زیر می‌باشد.

$$\mathrm{u}_r(r) = C_1 r^{m_1} + C_2 r^{m_2} \tag{۴-۱۰}$$

با جایگذاری در رابطه‌ها تنش-کرنش، تنش شعاعی و تنش نصف النهاری (یا تنش محیطی) به‌فرم زیر می‌باشد

$$\sigma_R = E_i r^{n_1}[C_1(Am_1 + 2B)r^{m_1} + C_2(Am_2 + 2B)r^{m_2}] \tag{۴-۱۱}$$

$$\sigma_\emptyset = E_i r^{n_1}[C_1(Bm_1 + (A + B))r^{m_1} + C_2(Bm_2 + (A + B))r^{m_2}] \tag{۴-۱۲}$$

و ثابت‌های C_1 و C_2 با اعمال شرایط مرزی به‌دست می‌آیند.

$$\sigma_r|_{r=1} = -P_i \qquad \sigma_r|_{r=k} = -P_o \tag{۴-۱۳}$$

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{k^{m_2}P_i - k^{1-n_1}P_o}{E_i(Am_1 + 2B)(k^{m_1} - k^{m_2})} \\ C_2 = \dfrac{-k^{m_1}P_i + k^{1-n_1}P_o}{E_i(Am_2 + 2B)(k^{m_1} - k^{m_2})} \end{cases} \tag{۴-۱۴}$$

با جایگذاری C_1 و C_2 در رابطه‌ها (۴-۱۱) و (۴-۱۲) تنش‌های شعاعی، محیطی و جابه‌جایی شعاعی به‌دست می‌آیند.

$$\sigma_R = \frac{r^{n_1-1}}{k^{m_1} - k^{m_2}}[(k^{m_2}P_i - k^{1-n_1}P_o)r^{m_1} - (k^{m_1}P_i - k^{1-n_1}P_o)r^{m_2}] \tag{۴-۱۵}$$

$$\sigma_{\phi} = \sigma_{\Theta} = \frac{r^{n_1-1}}{k^{m_1} - k^{m_2}} \left[\frac{(A+B) + Bm_1}{Am_1 + 2B} (k^{m_2} P_i - k^{1-n_1} P_o) r^{m_1} - \frac{(A+B) + Bm_2}{Am_2 + 2B} (k^{m_1} P_i - k^{1-n_1} P_o) r^{m_2} \right] \quad (۱۶-۴)$$

$$u_R(r) = \frac{R_i}{E_i(k^{m_1} - k^{m_2})} \left[\frac{1}{Am_1 + 2B} (k^{m_2} P_i - k^{1-n_1} P_o) r^{m_1} - \frac{1}{Am_2 + 2B} (k^{m_1} P_i - k^{1-n_1} P_o) r^{m_2} \right] \quad (۱۷-۴)$$

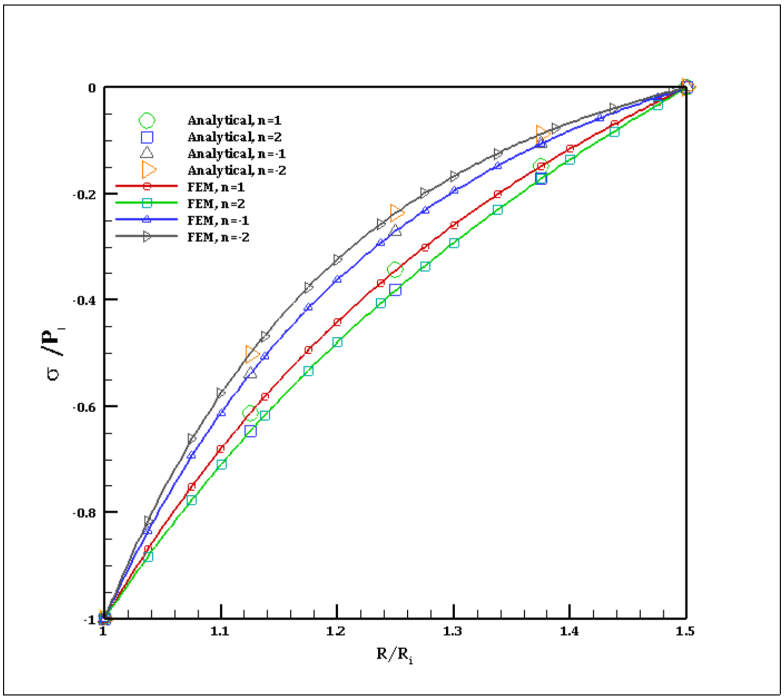
۴-۲ بررسی نتایج

برای مطالعه‌ی موردی و بررسی نمودارهای به‌دست آمده از نتایج المان محدود، یک پوسته‌ی کروی جدار ضخیم با مشخصات زیر در نظر می‌گیریم. پوسته‌ی کروی جدار ثابت همگن به شعاع داخلی 40 mm و شعاع خارجی 60 mm، تحت فشار یکنواخت داخلی 80 MPa قرار گرفته شده است. مدول الاستیک 200 GPa در جدار داخلی و ضریب پواسون 0.3 ثابت می‌باشد.

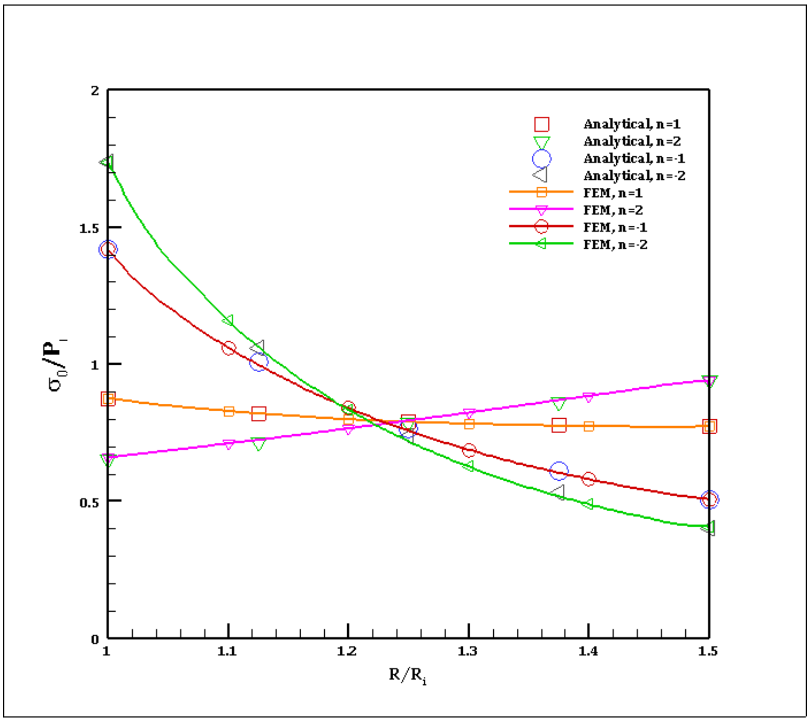
با شبیه‌سازی یک نمونه‌ی هندسی در نرم‌افزار آباکوس بر مبنای روش المان محدود، حلّ المان محدود انجام می‌شود. در این مسأله به دلیل دو تقارن محوری بودن، یک چهارم آن به‌صورت دو بعدی در نظر گرفته شده است. همچنین برای شبیه سازی موّاد ناهمگن، هندسه‌ی مورد نظر به ۲۰ لایه تقسیم شده است. در این تحلیل، المان‌های مورد استفاده از نوع CAX8R و مدل دارای ۲۴۰۰ المان می‌باشد که در راستای شعاعی ۴۰ المان در نظر گرفته شده است.

شرایط مرزی همان شرایط مرزی تعریف شده در بخش ۳-۳ است.

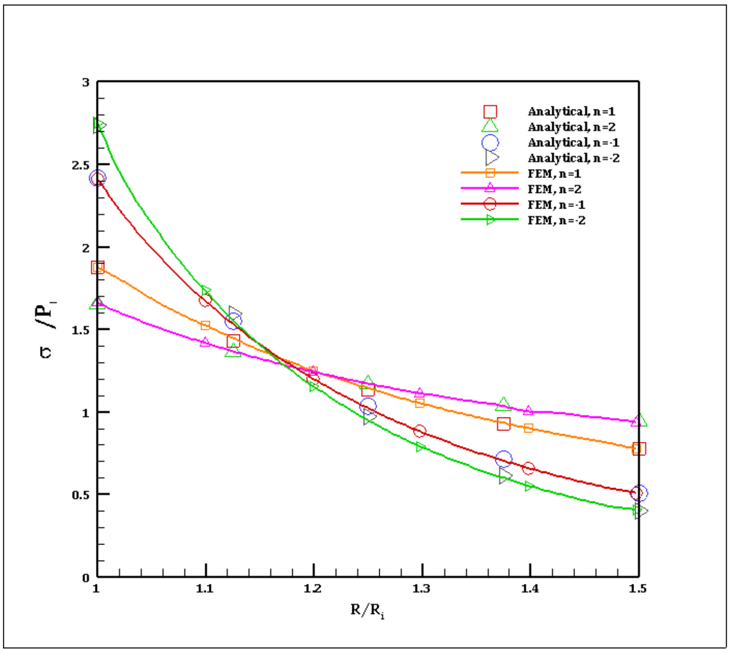
شکل (۴-۱) تا شکل (۴-۳) توزیع تنش شعاعی، تنش محیطی و تنش فون میسس در مدل را برای ثابت‌های ناهمگنی مختلف نشان می‌دهد.



شکل ۴-۱ توزیع تنش شعاعی در پوسته‌ی کروی ناهمگن تحت فشار داخلی یکنواخت



شکل ۴-۲ توزیع تنش محیطی در پوسته‌ی کروی ناهمگن تحت فشار داخلی یکنواخت



شکل ۴-۳ توزیع تنش فون میسس در پوسته‌ی کروی ناهمگن تحت فشار داخلی یکنواخت

۴-۳ تحلیل خزش پوسته‌های کروی ناهمگن تحت فشار

برای تحلیل خزش پایا در پوسته‌های کروی ناهمگن FG معادله‌ی بیلی-نورتون به فرم زیر تعریف می‌شود.

$$\varepsilon^{cr} = \mathrm{b}(r)\sigma^{n(r)} \tag{۴-۱۸}$$

که پارامتر ثابت موّاد تابعی از شعاع کره می‌باشد و

$$n(r) = n_0$$
$$b(r) = b_0 r^{b_1} \tag{۴-۱۹}$$

مقادیر n_0 و b_0 و b_1 مقادیر ثابت موّاد هستند. با جایگذاری رابطه‌ی (۴-۱۹) در رابطه‌ی (۴-۱۸) و سپس رابطه‌ی (۳-۵۰) تنش شعاعی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\sigma_R = 2\left(\frac{C_1}{b_1}\right)_1^{\frac{1}{n_0}}\left[\int_{R_i}^{r} r^{-\left(\frac{b_1+n_0+3}{n_0}\right)} dr\right] + C_2 \tag{۴-۲۰}$$

که با اعمال شرایط مرزی فشار در جدار داخلی و خارجی،

$$\sigma_R = \frac{(P_i - P_o)}{(k^{-\beta} - 1)} R^{-\beta} - \frac{(P_i k^{-\beta} - P_o)}{(k^{-\beta} - 1)}$$
$$\sigma_\emptyset = \sigma_\theta = \frac{(P_o - P_i)}{(k^{-\beta} - 1)} \frac{(\beta - 2)}{2} R^{-\beta} - \frac{(P_i k^{-\beta} - P_o)}{(k^{-\beta} - 1)}$$
$$\sigma_e = \sigma_\emptyset \text{-} \sigma_R \tag{۲۱-۴}$$
$$\dot{\varepsilon}_e = b(r) {\sigma_e}^{n_0}$$

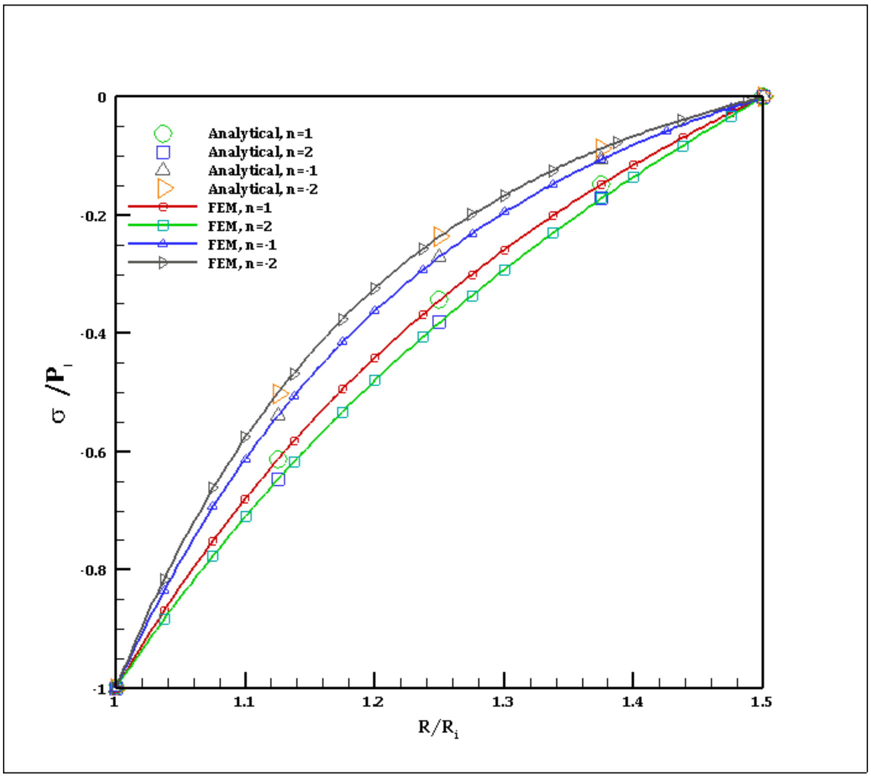
به‌دست می‌آیند. و

$$\begin{cases} R = \dfrac{r}{R_i} \\ k = \dfrac{R_o}{R_i} \\ \beta = \dfrac{3 + b_1}{n_0} \end{cases} \tag{۲۲-۴}$$

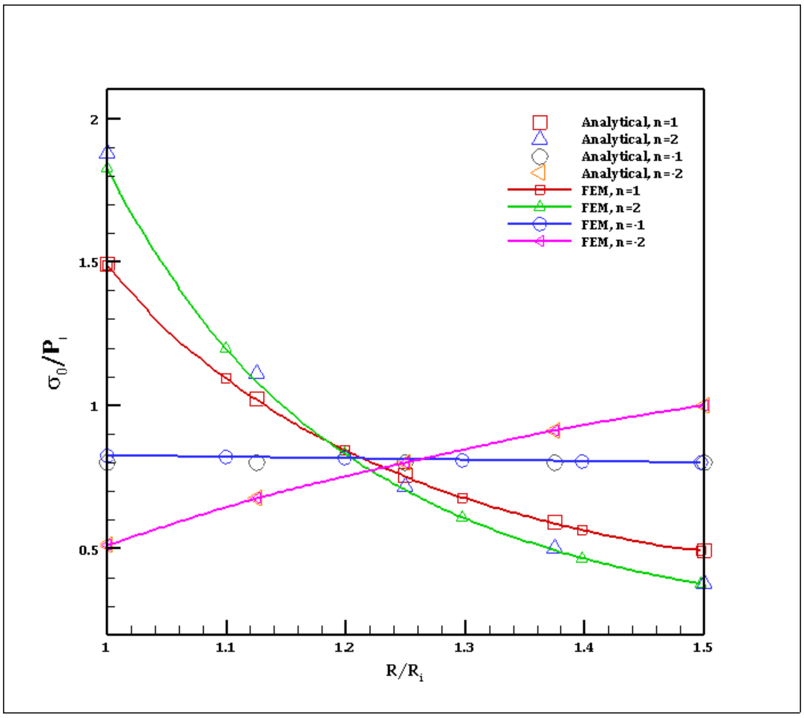
۴-۴ بررسی نتایج

برای مطالعه‌ی موردی و بررسی نمودارهای به‌دست آمده از نتایج المان محدود، یک پوسته‌ی کروی جدار ضخیم با مشخصات زیر در نظر می‌گیریم. پوسته جدار ثابت همگن به شعاع داخلی 40 mm و شعاع خارجی 60 mm، تحت فشار یکنواخت داخلی 80 MP قرار گرفته شده است. مدول الاستیک $200\ GPa$در جدار داخلی و ضریب پواسون 0.3 ثابت می‌باشد. . همچنین پارامتر موّاد خزشی در جدار داخلی 3.125e-14 بر واحد ساعت، $n_0 = 1$ و b_1=1 را در نظر می‌گیریم.

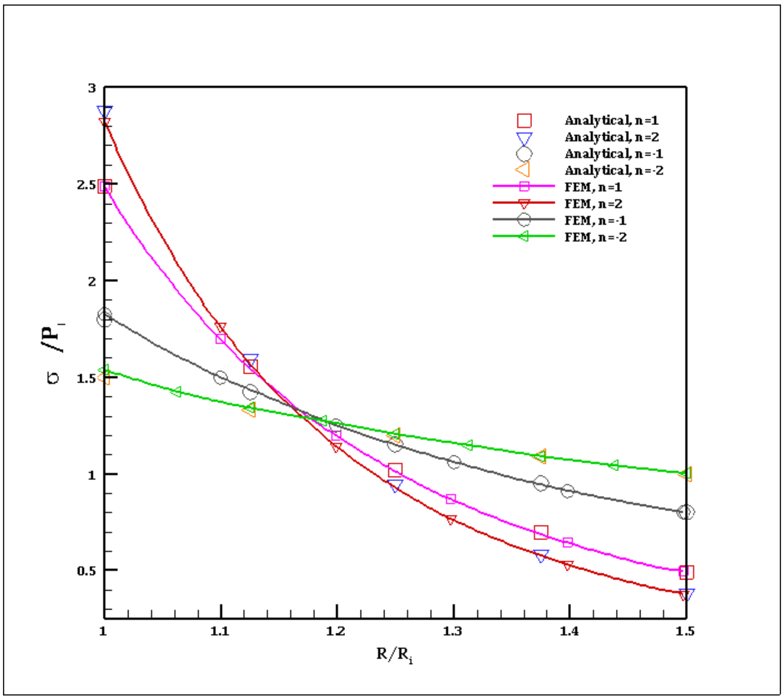
با شبیه‌سازی یک نمونه‌ی هندسی در نرم‌افزار آباکوس بر مبنای روش المان محدود، حلّ عددی انجام می‌شود. در این مسأله به دلیل دو تقارن محوری بودن، یک چهارم آن به‌صورت دو بعدی در نظر گرفته شده است. همچنین برای شبیه سازی موّاد ناهمگن، هندسه‌ی مورد نظر به ۲۰ لایه تقسیم شده است. در این تحلیل، المان‌های مورد استفاده از نوع CAX8R و مدل دارای ۲۴۰۰ المان می‌باشد که در راستای شعاعی ۴۰ المان در نظر گرفته شده است. شرایط مرزی همان شرایط مرزی تعریف شده در بخش ۳-۳ است. شکل (۴-۴) تا شکل (۴-۷) توزیع تنش شعاعی، تنش محیطی، تنش فون میسس و نرخ کرنش مؤثر در مدل را برای ثابت‌های ناهمگنی مختلف نشان می‌دهد.



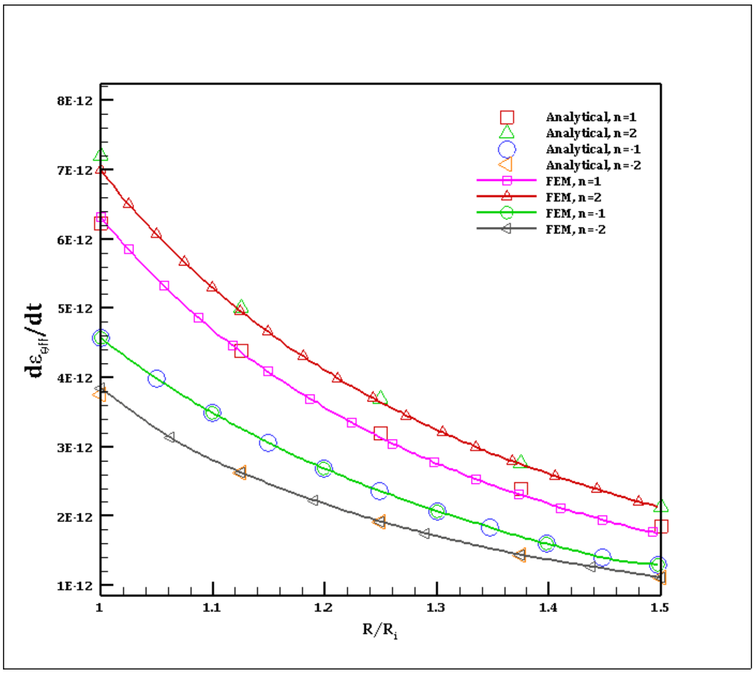
شکل ۴-۴ توزیع تنش شعاعی در پوسته‌ی کروی ناهمگن تحت فشار داخلی یکنواخت



شکل ۴-۵ توزیع تنش محیطی در پوسته‌ی کروی ناهمگن تحت فشار داخلی یکنواخت



شکل ۴-۶ توزیع تنش فون میسس در پوسته‌ی کروی ناهمگن تحت فشار داخلی یکنواخت



شکل ۴-۷ توزیع نرخ کرنش مؤثر در پوسته‌ی کروی ناهمگن تحت فشار داخلی یکنواخت

بعد از ۱۰۰۰ ساعت

۴-۵تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های کروی ناهمگن

همانطور که اشاره شد خوّاص مکانیکی، حرارتی و مغناطیسی در موّاد ناهمگن به طور پیوسته تغییر می‌کند. در این پژوهش خوّاص موّاد را بر اساس توزیع توانی نسبت به شعاع کره در نظر می‌گیریم که در آن فرض شده خوّاص مکانیکی به‌جز ضریب پواسون تغییر می‌کنند. لذا با درنظر گرفتن محورهای مختصات و هندسه و بارگذاری در بخش قبل تغییرات مدول الاستیسیته و ضریب انبسات حرارتی برای موّاد FG را به‌صورت زیر درنظر می‌گیریم.

$$\mathrm{E(R)}=\mathrm{E_i}(\frac{R}{R_i})^{n_1}=\mathrm{E_i}r^{n_1}, \alpha(R)=\alpha_i(\frac{R}{R_i})^{n_2}=\alpha_i r^{n_2} \tag{۲۳-۴}$$

که در این رابطه n_1 و n_2 ضریب ناهمگنی می‌باشد، لذا معادلات ساختاری به فرم زیر نوشته می‌شوند.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_R \\ \sigma_\theta=\sigma_\emptyset \end{Bmatrix}=E(R)\begin{bmatrix} A & 2B \\ B & A+B \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon_R \\ \varepsilon_\theta=\varepsilon_\emptyset \end{Bmatrix}-\mathrm{E(R)\alpha(R)\Theta(r)}\begin{bmatrix} C \\ C \end{bmatrix} \tag{۲۴-۴}$$

که با جایگذاری در معادله‌ی تعادل به معادله و پس از ساده سازی به معادله زیر خواهیم رسید.

$$r^2u_r''+(n_1+2)ru_r'+2(n_1\vartheta^*-1)u_r = \frac{C\alpha_i}{A}r^2\left[r(n_1+n_2)\Theta(r)+r^2\frac{d\Theta(r)}{dr}\right] \tag{۲۵-۴}$$

این معادله، معادله‌ی ناویر برای کره‌های ناهمگن تحت حرارت می‌باشد. که ضرایب A و B و C در بالا تعریف شده اند.

۴-۵-۱ انتقال حرارت یک بعدی

برای مشخص کردن رابطه‌ی $\Theta(r)$ در معادله دیفرانسیل (۴-۲۵) فرض می‌کنیم که انتقال حرارت یک‌بعدی و در راستای شعاع کره می‌باشد. معادله‌ی انتقال حرارت یک بعدی در حالت پایدار به فرمت زیر می‌باشد.

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda(r)r^2\frac{\partial T(r)}{\partial r}\right)=0 \tag{۲۶-۴}$$

در این رابطه $\lambda(r)$ به‌صورت توانی زیر تعریف می‌شود.

$$\lambda(r) = \lambda_i r^{n_3} \qquad (۲۷-۴)$$

با بررسی دو حالت $n_3 \neq -1$ و $n_3 = -1$ معادله‌ی انتقال حرارت را حلّ می‌کنیم.

الف: $n_3 \neq -1$

$$\mathrm{T}(r) = c_3 r^{-(n_3+1)} + c_4 \qquad (۲۸-۴)$$

که ثابت‌های c_3 و c_4 با توجّه به شرایط مرزی تعیین می‌گردد. و شرایط مرزی در جدار داخل و جدار خارج به‌صورت زیر است.

On r=1 ; T(r)= T_i (۲۹-۴)

On r=k ; T(r)= T_o (۳۰-۴)

پس از اعمال شرایط مرزی ثابت‌های c_3 و c_4 به‌دست می‌آیند.

$$c_3 = -\frac{(T_i - T_o)}{\frac{1}{k^{n_3+1}} - 1} \qquad (۳۱-۴)$$

$$c_4 = \frac{\frac{T_i}{k^{n_3+1}} - T_o}{\frac{1}{k^{n_3+1}} - 1} \qquad (۳۲-۴)$$

و در نتیجه

$$\mathrm{T}(r) = -\frac{(T_i - T_o)}{\frac{1}{k^{n_3+1}} - 1} r^{-(n_3+1)} + \frac{\frac{T_i}{k^{n_3+1}} - T_o}{\frac{1}{k^{n_3+1}} - 1} \qquad (۳۳-۴)$$

که معادله‌ی (۴-۳۳) معادله‌ی توزیع دما در جداره‌ی کره در حالت $n_3 \neq -1$ است.

ب: $n_3 = -1$

$$T(r) = c_3 \ln r + c_4 \qquad (۳۴-۴)$$

که پس از اعمال شرایط مرزی:

$$c_3 = -\frac{(T_i - T_o)}{\ln k} \qquad (۳۵-۴)$$

$$c_4 = T_i \qquad (۳۶-۴)$$

و در نتیجه

$$T(r) = -\frac{(T_i - T_o)}{\ln k}\ln r + T_i \tag{۳۷-۴}$$

که معادله‌ی (۴-۳۷) معادله‌ی توزیع دما در جداره‌ی کره در حالت $n_3 = -1$ است. و

$$\theta(r) = T(r) - T_{refrence} \tag{۳۸-۴}$$

حال به حلّ معادله‌ی ناویر می‌پردازیم.

حالت اول: $n_3 \neq -1$

با جایگذاری رابطه توزیع دما در معادله‌ی (۴-۳۸) و سپس رابطه‌ی (۴-۲۵) پس از ساده سازی به رابطه‌ی زیر می‌رسیم.

$$r^2 u_r'' + (n_1 + 2) r u_r' + 2(n_1 \vartheta^* - 1) u_r = \frac{C\alpha_i}{A} r^2 \left[r(n_1 + n_2)\Theta(r) + r^2 \frac{d\Theta(r)}{dr} \right] \tag{۳۹-۴}$$

State 1: (۴۰-۴)

$$\mathrm{T}(r) = \frac{(T_o - T_i)}{\frac{1}{k^{n_3+1}} - 1} r^{-(n_3+1)} + \frac{\frac{T_i}{k^{n_3+1}} - T_o}{\frac{1}{k^{n_3+1}} - 1}$$

State 2: (۴۱-۴)

$$\mathrm{T}(r) = \frac{(T_o - T_i)}{\ln k}\ln r + T_i \tag{۴۲-۴}$$

حلّ عمومی معادله‌ی (۴-۳۹) به فرم زیر است.

$$u_r^h(r) = C_1 r^{m_1} + C_2 r^{m_2} \tag{۴۳-۴}$$

که بالانویس h بیانگر حلّ عمومی معادله می‌باشد. فشار در لایه‌ی داخلی و خارجی پوسته‌ی کروی صفر می‌باشد. پس:

$$\sigma_r|_{r=1} = 0 \tag{۴۴-۴}$$
$$\sigma_r|_{r=k} = 0$$

که ثابت‌های C_1 و C_2 با اعمال شرایط مرزی صفر به‌دست می‌آیند.

حالت اول:

حلّ خصوصی معادله (۴-۳۹) به فرم زیر می‌باشد.

$$u_p = c_5 r^{n_2 - n_3} + c_6 r^{n_2+1} \tag{۴-۴۵}$$

که ثابت‌های c_5 و c_6 با جایگذاری در معادله به‌دست می‌آیند.

$$c_5 = \frac{\frac{C\alpha_i}{A}(n_1 + n_2 - n_3 + 1)c_3}{(n_1 + n_2 - n_3 + 1)(n_2 - n_3) + 2(n\vartheta^* - 1)} \tag{۴-۴۶}$$

$$c_6 = \frac{\frac{C\alpha_i}{A}(n_1 + n_2)c_4}{(n_1 + n_2 + 2)(n_2 + 1) + 2(n\vartheta^* - 1)} \tag{۴-۴۷}$$

حالت دوم:

حلّ خصوصی معادله‌ی (۴-۳۹) به‌فرم زیر می‌باشد.

$$u_p = c_5 r^{n_2+1} \ln r + c_6 r^{n_2+1} \tag{۴-۴۸}$$

که ثابت‌های c_5 و c_6 با جایگذاری در معادله به‌دست می‌آیند.

$$c_5 = \frac{\frac{C\alpha_i}{A}(n_1 + n_2)c_3}{(n_1 + n_2 + 2)(n_2 + 1) + 2(n\vartheta^* - 1)} \tag{۴-۴۹}$$

$$c_6 = \frac{\frac{C\alpha_i}{A}\{(n_1 + n_2)c_4 + c_3\}}{(n_1 + n_2 + 2)(n_2 + 1) + 2(n\vartheta^* - 1)} \tag{۴-۵۰}$$

که حلّ خصوصی معادله همان $u_r(r)$ می‌باشد. پس تنش شعاعی:

$$\sigma_R = E(R)[A\frac{du_r}{dr} + 2B\frac{u_r}{r} - C\alpha(r)\theta(r)] \tag{۴-۵۱}$$

و تنش محیطی

$$\sigma_\theta = E(R)[B\frac{du_r}{dr} + (A+B)\frac{u_r}{r} - C\alpha(r)\theta(r)] \tag{۴-۵۲}$$

به‌دست می‌آیند.

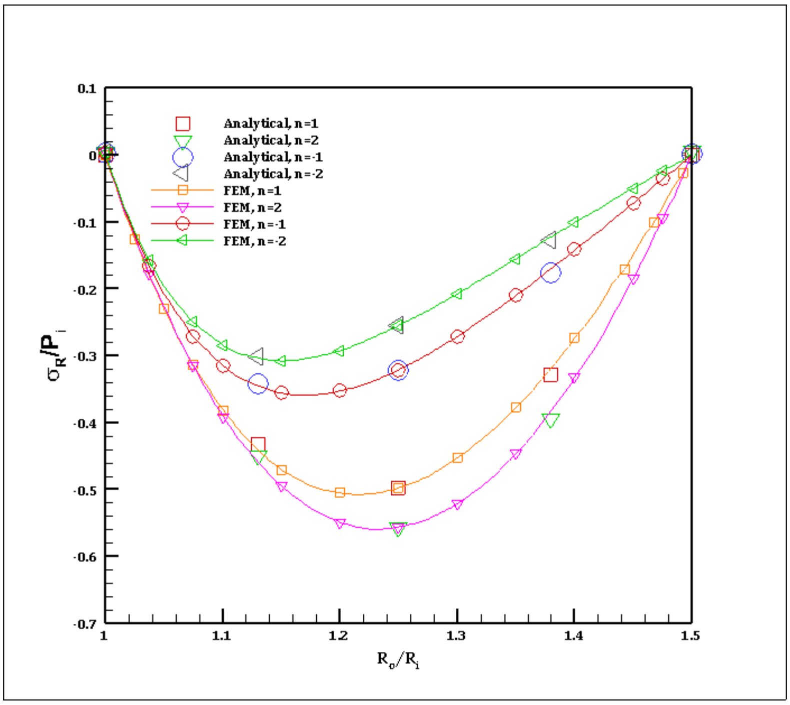
۴-۶ بررسی نتایج

برای مطالعه‌ی موردی و بررسی نمودارهای به‌دست آمده از نتایج المان محدود، یک پوسته‌ی کروی جدار ضخیم با مشخصات زیر در نظر می‌گیریم. پوسته جدار ثابت ناهمگن به شعاع داخلی 40 mm و شعاع خارجی 60 mm، در نظر می‌گیریم. مدول الاستیک $200\ GPa$ در جدار داخلی و ضریب پواسون 0.3 ثابت می‌باشد. ضریب انبساط حرارتی در جدار داخلی 1.2e-5 است. دمای مرجع $T_{Refrence} = 25$ و دما در جدار داخلی و خارجی به ترتیب 125 و 25 درجه سانتی‌گراد می‌باشد.

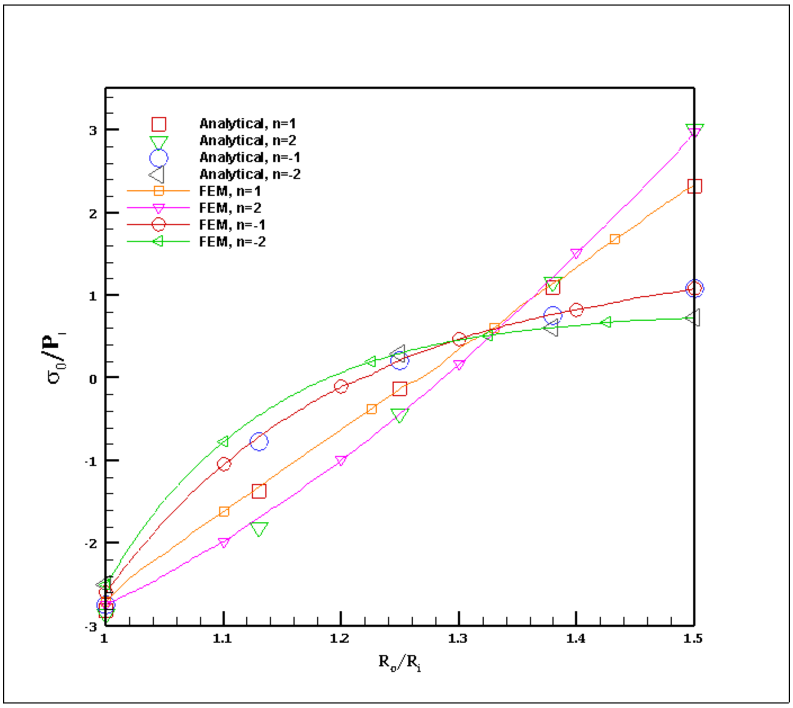
با شبیه‌سازی یک نمونه‌ی هندسی در نرم‌افزار آباکوس بر مبنای روش المان محدود، حلّ عددی انجام می‌شود. در این مسأله به دلیل دو تقارن محوری بودن، یک چهارم آن به‌صورت دو بعدی در نظر گرفته شده است. همچنین برای شبیه سازی موّاد ناهمگن، هندسه‌ی مورد نظر به ۲۰ لایه تقسیم شده است. در این تحلیل، المان‌های مورد استفاده از نوع CAX8T و مدل دارای ۲۴۰۰ المان می‌باشد که در راستای شعاعی ۴۰ المان در نظر گرفته شده است.

شرایط مرزی دما در جدار داخلی و خارجی می‌باشد.

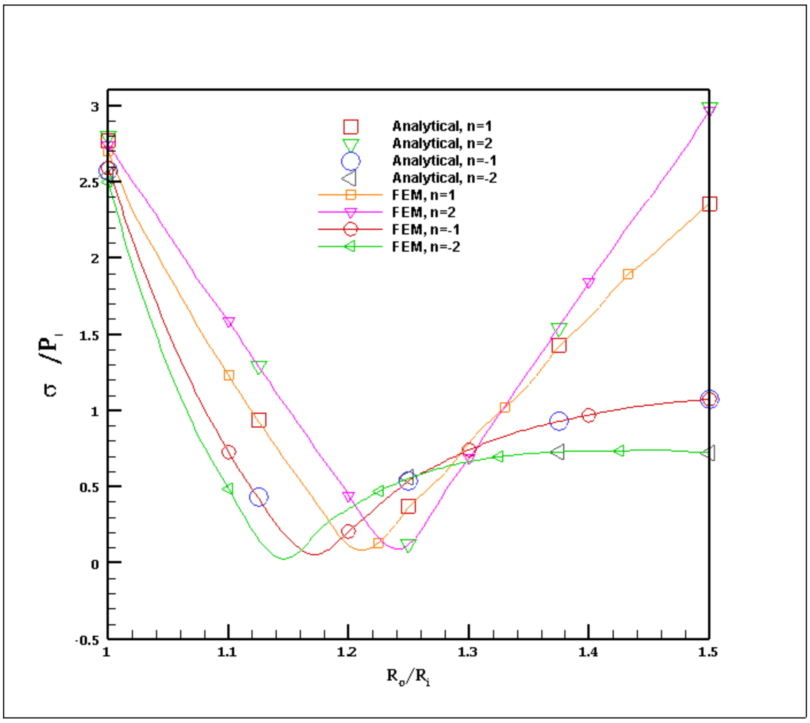
شکل (۴-۸) تا شکل (۴-۱۰) توزیع تنش شعاعی، تنش محیطی و تنش فون میسس در مدل را برای ثابت‌های ناهمگنی مختلف نشان می‌دهد.



شکل ۴-۸ توزیع تنش شعاعی در پوسته‌ی کروی ناهمگن تحت گرادیان شعاعی دما



شکل ۴-۹ توزیع تنش محیطی در پوسته‌ی کروی ناهمگن تحت گرادیان شعاعی دما



شکل ۴-۱۰ توزیع تنش فون میسس در پوسته‌ی کروی ناهمگن تحت گرادیان شعاعی دما

۴-۷ تحلیل خزش پوسته‌های کروی ناهمگن تحت گرادیان شعاعی دما

برای تحلیل خزش در حالت پایا در حضور گرادیان شعاعی دما، حلّ در زمان صفر مورد نیاز است. که این حلّ، همان حلّ ترموالاستیک مسأله می‌باشد. حلّ ترموالاستیک پوسته‌ی کروی جدار ضخیم ناهمگن به‌صورت زیر می‌باشد.

الف: n≠-1

$$u_r(\mathrm{r}) = c_5 r^{n_2-n_3} + c_6 r^{n_2+1} \quad (۵۳-۴)$$

$$c_5 = \frac{\frac{C\alpha_i}{A}(n_1+n_2-n_3+1)c_3}{(n_1+n_2-n_3+1)(n_2-n_3)+2(n\vartheta^*-1)} \quad (۵۴-۴)$$

$$c_6 = \frac{\frac{C\alpha_i}{A}(n_1+n_2)c_4}{(n_1+n_2+2)(n_2+1)+2(n\vartheta^*-1)}$$ (۵۵-۴)

ب:n=-1

$$u_r(\mathrm{r}) = c_5 r^{n_2+1}\ln r + c_6 r^{n_2+1}$$ (۵۶-۴)

$$c_5 = \frac{\frac{C\alpha_i}{A}(n_1+n_2)c_3}{(n_1+n_2+2)(n_2+1)+2(n\vartheta^*-1)}$$ (۵۷-۴)

$$c_6 = \frac{\frac{C\alpha_i}{A}\{(n_1+n_2)c_4+c_3\}}{(n_1+n_2+2)(n_2+1)+2(n\vartheta^*-1)}$$ (۵۸-۴)

که تنش شعاعی و محیطی به‌صورت زیر می‌باشند.

$$\sigma_R = E(R)[A\frac{du_r}{dr}+2B\frac{u_r}{r}-C\alpha(r)\theta(r)]$$ (۵۹-۴)

$$\sigma_\theta = E(R)[B\frac{du_r}{dr}+(A+B)\frac{u_r}{r}-C\alpha(r)\theta(r)]$$ (۶۰-۴)

همچنین تنش فون میسس برای پوسته‌ی کروی به‌صورت زیر است.

$$\sigma_{eff}=\sigma_\theta-\sigma_R$$ (۶۱-۴)

نرخ کرنش خزشی معادل به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\dot{\varepsilon}_e^{cr} = \frac{d\varepsilon_e^{cr}}{dt} = mb(r)\sigma_e^n t^{m-1}$$ (۶۲-۴)

که برای حالت پایا m=1 است و برای خزش اولیه $0 < m < 1$ می‌باشد. پس نرخ کرنش خزشی معادل در خزش حالت پایا به‌صورت زیر است:

$$\dot{\varepsilon}_e^{cr} = b(r)\sigma_e^n$$ (۶۳-۴)

و تنش مؤثر برابر است با:

$$\sigma_e = \sigma_\theta-\sigma_R$$ (۶۴-۴)

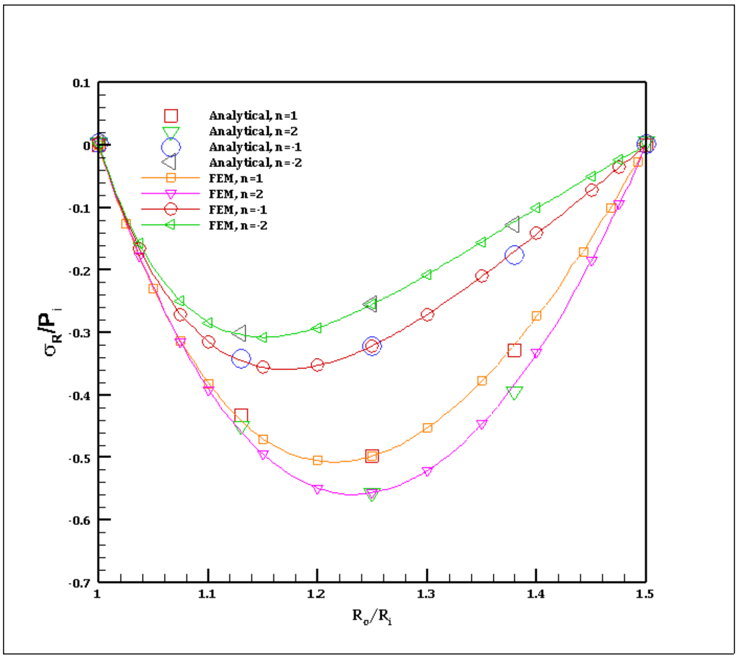
۴-۸بررسی نتایج

برای مطالعه‌ی موردی یک پوسته‌ی کروی جدار ضخیم با مشخصات زیر در نظر می‌گیریم. پوسته جدار ثابت ناهمگن به شعاع داخلی 40 mm و شعاع خارجی 60 mm، در نظر می‌گیریم. مدول الاستیک $200\ GPa$ در جدار داخلی و ضریب پواسون 0.3 ثابت می‌باشد. ضریب انبساط حرارتی در جدار داخلی 1.2e-5 است. همچنین پارامتر موّاد خزشی در جدار داخلی 3.125e-14 بر واحد ساعت، $n_0 = 1$ و b_1=1 را در نظر می‌گیریم. دمای مرجع $T_{Refrence}$= 25 و دما در جدار داخلی و خارجی به ترتیب T_i=125 و T_o=25 درجه سانتی‌گراد می‌باشد.

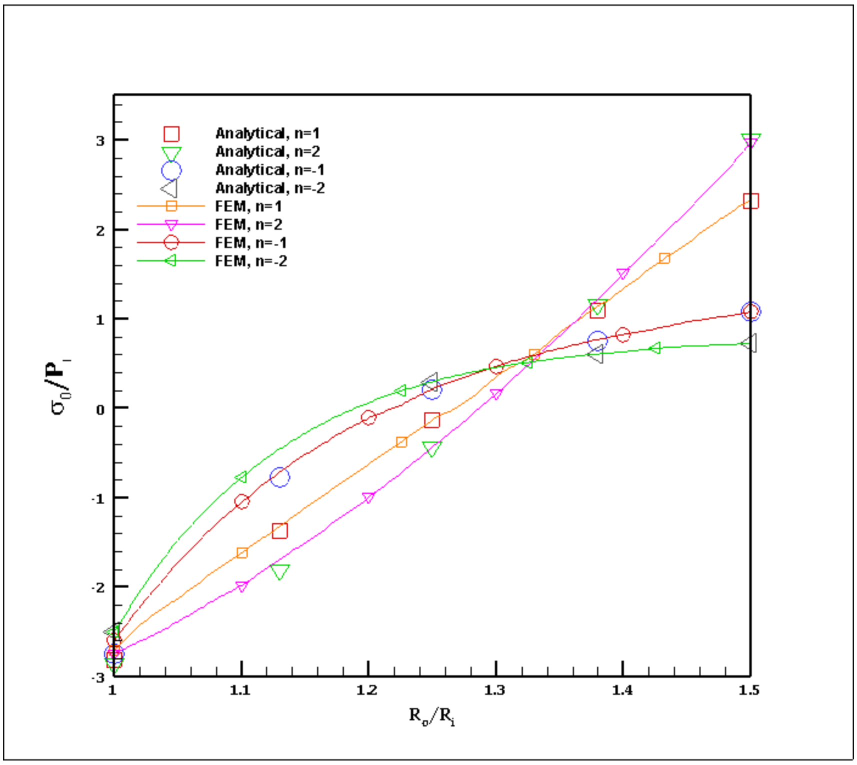
با شبیه‌سازی یک نمونه‌ی هندسی در نرم‌افزار آباکوس بر مبنای روش المان محدود، حلّ عددی انجام می‌شود. این مسأله به دلیل دو تقارن محوری بودن، یک چهارم آن به‌صورت دو بعدی در نظر گرفته شده است. برای شبیه سازی موّاد ناهمگن، هندسه‌ی مورد نظر به ۲۰ لایه تقسیم شده است و المان‌های مورد استفاده از نوع CAX8R که مدل دارای ۲۴۰۰ المان می‌باشد که در راستای شعاعی ۴۰ المان در نظر گرفته شده است.

شرایط مرزی همان شرایط مرزی تعریف شده در بخش ۴-۶ است.

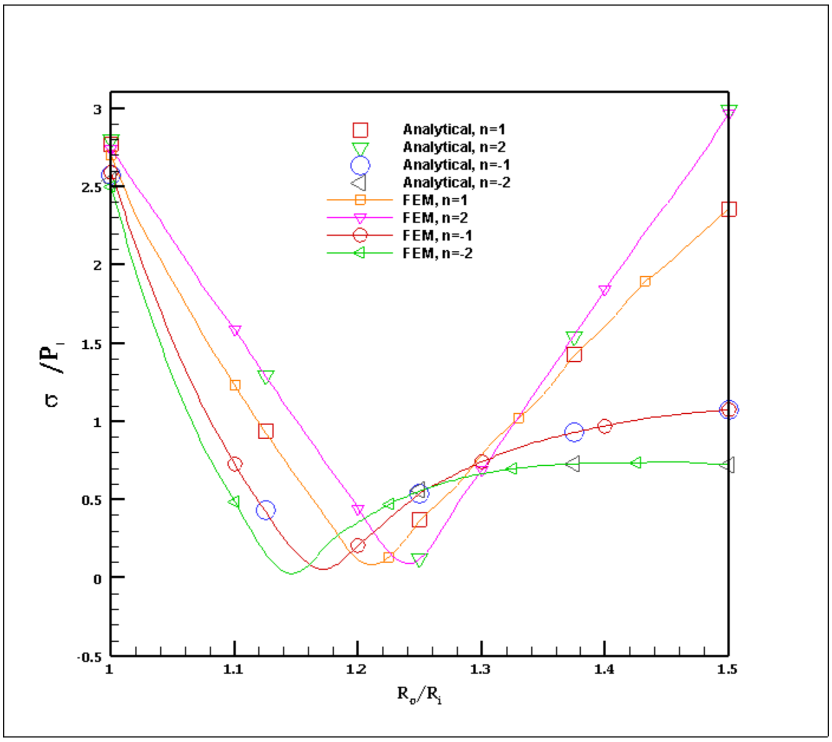
شکل (۴-۱۱) تا شکل (۴-۱۴) توزیع تنش شعاعی، تنش محیطی ، تنش فون میسس و نرخ کرنش مؤثر در مدل را برای ثابت‌های ناهمگنی مختلف نشان می‌دهد.



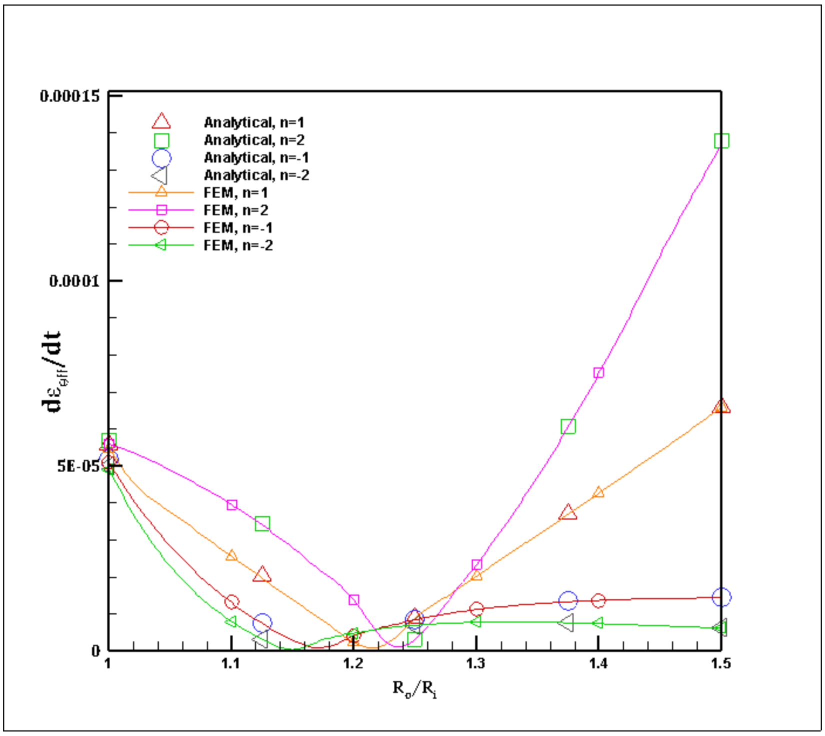
شکل ۴-۱۱ توزیع تنش شعاعی در پوسته‌ی کروی ناهمگن تحت گرادیان شعاعی دما



شکل ۴-۱۲ توزیع تنش محیطی در پوسته‌ی کروی ناهمگن تحت گرادیان شعاعی دما



شکل ۴-۱۳ توزیع تنش فون میسس در پوسته‌ی کروی ناهمگن تحت گرادیان شعاعی دما



شکل ۴-۱۴ توزیع نرخ کرنش مؤثر در پوسته‌ی کروی ناهمگن تحت گرادیان شعاعی دما بعد از ۸ ساعت

فصل ۵: نتیجه‌گیری و پیشنهادها

۵-۱ مقدمه

بررسی‌های انجام شده در زمینه‌ی خزش در این پژوهش تنها بخش کوچکی از مطالعات انجام شده می‌باشد و روز به‌روز تحلیل‌های مختلفی در این زمینه در حال گسترش است.

در این پژوهش پوسته‌های کروی همگن و ناهمگن مورد بررسی قرار گرفته‌اند و نمودارهای مربوط به هر کدام از حلّ تحلیلی با حلّ المان محدود اعتبار سنجی گردیده است. همچنین با آگاه بودن از نتایج به‌دست آمده، می‌توان تأثیرات آنها را در زمینه‌ی طراحی حائز اهمیّت دانست.

۵-۲ نتیجه‌گیری

با بررسی تنش‌ها و توزیع نرخ کرنش مؤثر در پوسته‌های کروی همگن و ناهمگن تحت فشار یکنواخت (فشار در جدار داخلی) و همچنین گرادیان شعاعی دما(به بخش بررسی نتایج فصل سوم و چهارم مراجع شود) (دمای جدار داخلی و خارجی ثابت) می‌توان نتیجه گرفت که:

۱- گرادیان دمایی نسبت به فشار یکنواخت در زمینه‌ی خزش تأثیر بیشتری در پدیده‌ی خزش دارد.

۲- ثابت ناهمگنی در موّاد FG در روند خزش بسیار مؤثر است.

۳- انتخاب صحیح و مناسب پارامتر ناهمگنی در ساخت و طراحی برای صنایع مختلف و بسته به نوع نیاز، اهمیّت ویژه‌ای دارد.

۴- به‌طور کلّی در پوسته‌های کروی ناهمگن در حالتی که $\beta \to 0$ تغییرات تنش مؤثر ثابت است که می‌تواند در طراحی سازه از اهمیّت خاصی برخوردار باشد.

۳-۵ پیشنهادها

۱- استفاده از مدل‌های خزشی متفاوت

۲- تحلیل خزش پوسته‌ی کروی در حالت Single Axysymmetric

۳- استفاده از مدل‌های خزشی که اثر زمان را بررسی می‌کند.

مراجع

[۱] یوگورال ای. سی.: **تنش در ورق‌ها و پوسته‌ها**، ترجمه‌ی غ.ح. رحیمی شعرباف، چاپ اوّل، انتشارات دانشگاه تربیت مدرّس، تهران، ۱۳۷۵.

[2] Timoshenko S.P., Goodier J.N.: **Theory of Elasticity**, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1970.

[3] Naghdi P.M., Cooper R.M. (1956): **Propagation of elastic waves in cylindrical shells including the effects of transverse shear and rotary inertia**, J. Acoustical Sci. America, vol. 28, 1, pp 56-63.

[4] Mirsky I., Hermann G. (1958): **Axially motions of thick cylindrical shells**, J. Appl. Mech. 25, pp 97-102.

[5] Greenspon J.E. (1960): **Vibration of a thick-walled cylindrical shell, camparison of the exact theory with approximate theories**, J. Acoustical Sci. America 32, 5, pp 571-578.

[6] Timoshenko S.P.: **Strength of Materials: Part II (Advanced Theo. and Prob.)**, 3rd ed., Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1976.

[7] Boresi P., Chong K., Lee J.D.: **Elasticity in Engineering Mechanics**, 3rd ed., John Wiley, 2010.

[8] Lekhnitskii S.G.: **Theory of Elasticity of an Anisotropic Body**, Mir Pub., Moscow. 1981.

[9] Suresh S., Mortensen A.: **Fundamentals of Functionally Graded Materials**, Cambridge Pub., London, 1998.

[10] Koizumi M., Niino M. (1995): **Overview of FGM research in Japan**, MRS Bulletin, vol. 20, pp 19-21.

[11] Koizumi M. (1997): **FGM activities in Japan**, Composites: Part B (Engineering), 28B, pp 1-4.

[12] Yamanouchi M., Koizumi M., Hirai M., Shiota I. (1990): **Proceedings of the first international symposium on FGM**, functionally gradient materials forum and the society of non-traditional technology, Japan.

[13] Koizumi M. (1993): **The concept of FGM,** Ceramic Transactions Functionally Graded Material, vol. 34, pp 3-10.

[14] Obata Y., Noda N. (1994): **Steady thermal stresses in a hollow circular cylinder and a hollow sphere of a functionally gradient material**, J. Thermal Stresses, vol. 17, pp 471-487.

[15] Horgan C.O., Chan A.M. (1999): **The pressurized hollow cylinder or disk problem for functionally graded isotropic linearly elastic materials**, J. Elasticity, vol. 55, pp 43-59.

[16] Yang Y.Y. (2000): **Time-dependet stress analysis in functionally graded materials**, Int. J. Solids and Struc. vol. 37, pp 7593-7608.

[17] Tutuncu N. & Ozturk M. (2001): **Exact solution for stresses in functionally graded pressure vessels**, J. Composites: Part B (Engineering), 32B, pp 683-686.

[18] Tarn J.Q. (2001): **Exact solutions for functionally graded anisotropic cylinders subjected to thermal and mechanical loads**, Int. J. Solds and Struc., vol. 38, pp 9189-8206.

[19] Jabbari M., Sohrabpour S., Eslami M.R. (2002): **Mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to radially symmetric loads**, Int. J. Pressure Vessel and Piping, vol. 79, pp 493-497.

[20] Jahed H., Bidabadi J. (2003): **An axisymmetric method of creep analysis for primary and secondary creep**, International Journal of Pressure Vessels and Piping, Vol. 80, pp. 597

[21] Hongjun X., Zhifei S., Taotao Z. (2007): **Elastic analysis of heterogeneous elastic hollow cylinders**, J. Composite Struc., vol. 79, pp 140-147.

[22] Praveen G.N. & Reddy J.N. (1998): **Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded Ceramic-Metal plates**, Int. J. Solids and Struc. Vol. 35, pp 4457-4476.

[23] Tutuncu N., Temel B. (2009): **A novel approach to stress analysis of pressurized FGM cylinders, disks and spheres**, J. Composite Struc., vol. 91, pp 385-390.

[24] Shao Z.S., Ma G.W. (2008): **Thermo-mechanical stresses in functionally graded circular hollow cylinder with linearly increasing boundary temperature**, J. Composite Struc., vol. 83, pp 259-265.

[25] Tutuncu N. (2007): **Stresses in thick-walled FGM cylinders with exponentially- varying properties**, J. Eng. Struc., vol. 29, pp 2032-2035.

[26] Arya V. K., Debnath K. K., Bhatnagar N. S., (1980): **The spherical vessel with anisotropic creep properties considering large strains**, International journal of nonlinear mechanics, vol. 15, pp 185–193.

[27] Boresi A. B., Schmidt R. J.: **Advanced Mechanics of Materials**, 6th ed., John
Wiley & Sons, Inc., United States of America, 2003.

[28] Zamani-Nejad M., Hoseini Z., Niknejad A., Ghannad M., (2015): **Steady-State creep deformations and stresses in FGM rotating thick cylindrical pressure vessels**, J. Mechanics, Vol. 31, No. 1, pp. 1-6.

[29] Kraus H.: Creep Analysis, New York, (1980).

[30] Khatami Ghazvini M.R., Loghman A., Asghari A. A, (2016): **Time-Dependent deformation and stress redistribution analysis of thick walled spheres under radial temperature distribution and an internal pressure**, J. Aerospace Mechanics, Vol. 12, No 2, pp. 1-13.

[31] H. Jahed, J. Bidabadi, (2003): **An axisymmetric method of creep analysis for primary and secondary creep**, International Journal of Pressure Vessels and Piping, Vol. 80, pp. 597

[32] H. Jahed, R. N. Dubey. (?); **An Axisymmetric Method of Elastic-Plastic Analysis Capable of Predicting Residual Stress Field**, J. of Pressure VesselsTechnology, Vol. ?, pp. ?.

[33] You L. H., Ou H. (2008**): Steady-state creep analysis of thick-walled Spherical pressure vessels with varying creep properties**, Journal of Pressure Vessel Technology, Vol. 130, pp. 1-5

[34] V. K. Arya, K. K. Debnath, N. S. Bhatnagar, (1980): **The spherical vessel with anisotropic creep properties considering large strains**, International journal of nonlinear mechanics, vol. 15, pp 185–193.

[35] Eipakchi H. R. (2010), **Third-order shear deformation theory for stress analysis of a thick conical shell under pressure**, J. OF Mechanics OF Materials and Structures, vol. 1, 5, pp 1-17.

[36] You L. H., Ou H. (2008): **Steady-state creep analysis of thick-walled Spherical pressure vessels with varying creep properties**, Journal of Pressure Vessel Technology, Vol. 130, pp. 1-5

[37] Loy C. T., Lam K.Y., Reddy J. N., (1999): **Vibration of functionally graded cylindrical shells**, Int. J. Mech. Sci., vol. 41, pp 309-324.

[38] Eslami. M. R.: **Theory of Elasticity and Thermal stress, Solid Mechanics and Its Applications**, New York, 2013.

[39] Abaqus 6.12 Documentation.

Abstract

In this study, by investigating a heterogeneous thick-walled spherical shell FG under mechanical load and radial temperature gradient by the plane elasticity theory, the relations related to the steady state creep have been extracted and the results obtained from analytical solution using finite element method in software Abacus has been compared. The pressure in the inner wall is uniform and also the temperature in the inner and outer wall is constant. To derive the equations using the solution of the Prandtl-Ross equation and using the relations, the strain compatibility, stresses and equivalent creep strain rates are analyzed. The results obtained from the analytical solution are in good agreement with the finite element solution.

Keywords: Creep, Thick spherical shell, FGM, PET, Radial gradient temperature, Finite Element.

Shahrood University of Technology

Faculty of Mechanical and Mechatronics Engineering

M.Sc. Thesis in Applied Mechanics Engineering

Creep analysis of thick spherical shells made of functionally graded material under mechanical load and radial gradient temperature based on PET

By: Nabiollah Zibaei

Supervisor:

Dr. Mehdi Ghanad

October 2019