

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مهندسی مکانیک

گروه طراحی کاربردی

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

**تحلیل عددی و ریاضی استوانه ویسکو الاستیک تحت**

**فشار داخلی متحرک به کمک تئوری**

**تغییر شکل برشی مرتبه اول**

دانشجو:

**سجاد صلح میرزایی**

استاد راهنما:

**دکتر حمیدرضا ایک چی**

شهریور ۱۳۹۰



دانشگاه شیراز

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۶)

شماره: ۲۹۰/۱۱۶۴

تاریخ: ۹/۷/۸۵

ویرایش:

بسمه تعالی

### فرم صورتجلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم / آقای سجاد صلح میرزایی رشته مکانیک گرایش طراحی کاربردی تحت عنوان تحلیل عددی و ریاضی استوانه ویسکو الاستیک تحت فشار داخلی متحرک به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول که در تاریخ ۱۳۹۰/۶/۳۰ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

<input type="checkbox"/> قبول (با درجه : بسیار خوب - امتیاز ۱۸-۱۸)	<input type="checkbox"/> دفاع مجدد	<input type="checkbox"/> مردود
--	------------------------------------	--------------------------------

۲- بسیار خوب (۱۸ - ۱۸/۹۹)

۱- عالی (۲۰ - ۱۹)

۴- قابل قبول (۱۴ - ۱۵/۹۹)

۳- خوب (۱۶ - ۱۷/۹۹)

۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱- استاداراهنما	حمیدرضا ایپکچی	استادیار	
۲- استاد مشاور			
۳- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	محمود چهارطاقی	استادیار	
۴- استاد ممتحن	مهدی قناد کهنوی	استادیار	
۵- استاد ممتحن	محمد جعفری	استادیار	

رئیس دانشکده:

تقدیم به آنانکه وجودم برایشان همه رنج بود

و وجودشان برایم همه مهر

تقدیم به مهربانترین پدر و تقدیم به صبورترین مادر

آنانکه توانشان رفت تا به توان برسم

و مویشان سپید گشت تا رویم سپید بماند

آنان که راستی قامتم در سگستگی قامتشان بقاء یافت

## تشکر و قدردانی

با تشکر از خداوند مهربان و عرض ادب به پیشگاه تمامی مؤلفان و اساتید محترم که در تمامی مراحل زندگی و تحصیل از آثار ارزشمندشان بهره‌مند شده‌ام. از استاد بزرگوار، جناب آقای دکتر ایپک‌چی که با راهنمایی‌های ارزشمندشان مرا در تمام مراحل انجام این تحقیق یاری نمودند، کمال تشکر و برای ایشان آرزوی توفیق روزافزون دارم.

در پایان از پدر و مادر عزیز و مهربانم که همواره باعث ایجاد انگیزه در من برای ادامه تحصیل و تلاش در این راه بوده‌اند و همچنین از همه اساتید گرانقدر تشکر و قدردانی نموده، توفیق و عزت همه را از خداوند منان مسئلت می‌نمایم.

## تعهد نامه

اینجانب سجاد صلح میرزایی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مکانیک دانشکده مکانیک دانشگاه

صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه تحلیل عددی و ریاضی استوانه ویسکو الاستیک تحت فشار... تحت

راهنمایی دکتر حمید رضا ایبک‌چی متعهد می شوم .

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده ( یا بافتهای آنها ) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ

امضای دانشجو  
سجاد صلح میرزایی

### مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است ) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

\* متن این صفحه نیز باید در ابتدای نسخه های تکثیر شده پایان نامه وجود داشته باشد .

## چکیده

در این تحقیق پاسخ دینامیکی یک استوانه‌ی ویسکوالاستیک جدار ضخیم تحت اثر بار متحرک محوری، مورد ارزیابی قرار گرفته است. جنس استوانه در برش از مدل ویسکوالاستیک پیروی می‌کند و در بالک، تابع رفتار الاستیک است. شرایط مرزی پوسته، دوسر گیر دار است. میدان جابجایی بکار رفته، به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول تخمین زده شده است. بارگذاری استوانه، یک فشار متقارن محوری متحرک با سرعت ثابت است. معادلات حاکم بر حرکت پوسته‌ی استوانه‌ای جدار ضخیم به کمک اصل همپلتون و با استفاده از اولین مدل جامد استاندارد خطی برای خصوصیت ویسکوالاستیک پوسته، با روش آپراتوری تعیین شده است.

معادلات حاکم، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و کوپل شده است که با روش تحلیلی حل شده و مقادیر جابجایی با روش المان محدود مقایسه شده است. تحلیل عددی با نوشتن یک کد در محیط ansys انجام شده است. حل تحلیلی معادلات به کمک تبدیلات لاپلاس و بکارگیری تئوری اغتشاشات بدست آمده است. بر اساس این حل، تاثیر پارامترهای همچون استهلاک و سرعت بار بر پاسخ سیستم بدست آمده است.

کلمات کلیدی:

بار متحرک- استوانه ویسکوالاستیک - روش المان محدود - تئوری تغییر شکل برشی مرتبه

اول - تئوری اغتشاشات

# فهرست

عنوان	صفحه
چکیده.....	و
فهرست علائم.....	م
پیشگفتار.....	۱
۱- فصل اول: مبانی تئوری و مرور مقالات.....	۳
۱-۱- مقدمه.....	۴
۱-۲- بررسی پدیده ی ویسکوالاستیسیته.....	۴
۱-۳- رفتار ویسکوالاستیک خطی.....	۴
۱-۴- معادلات حاکم بر مواد ویسکوالاستیک.....	۸
۱-۴-۱- معادلات بنیادین تنش به شکل انتگرالی.....	۸
۱-۴-۲- معادلات بنیادین تنش به شکل دیفرانسیلی.....	۹
۱-۵- فرضیات متداول در ویسکوالاستیسیته.....	۱۱
۱-۶- مدل های مکانیکی مواد ویسکوالاستیک.....	۱۲
۱-۶-۱- مدل ماکسول.....	۱۲
۱-۶-۲- مدل کلوین - ویت.....	۱۳
۱-۶-۳- جامد استاندارد خطی (یا مدل زنر).....	۱۴
۱-۷- معرفی تئوریهای پوسته ها.....	۱۶
۱-۷-۱- تئوری غشایی.....	۱۹
۱-۷-۲- تئوری خمشی.....	۱۹
۱-۷-۳- تئوری تغییر شکل برشی.....	۱۹
۱-۸- مروری بر تحقیقات انجام شده.....	۲۰
۱-۹- جمع بندی.....	۲۸
۲- فصل دوم: معادلات حرکت.....	۳۰
۲-۱- مقدمه :.....	۳۱
۲-۲- تئوری تغییر شکل برشی.....	۳۱
۲-۳- تعیین معادلات حرکت با استفاده از اصل همپلتون:.....	۳۵
۲-۴- رابطه ی تنش - جابجایی در حالت ویسکوالاستیک.....	۳۷
۲-۴-۱- قانون تعمیم یافته ی هوک.....	۳۷
۲-۴-۲- جایگزینی آپراتور های <b>K</b> و <b>G</b> ماده ویسکوالاستیک.....	۳۷
۲-۴-۳- تعیین منتهی های تنش در حوزه ی ویسکوالاستیک.....	۳۸



۳۸.....	انتخاب مدل ویسکوالاستیک	۴-۴-۲
۳۹.....	تعیین معادلات بر اساس مدل انتخابی	۵-۴-۲
۴۵.....	بررسی فشار متحرک	۵-۲
۴۶.....	جمع بندی	۶-۲
۴۷.....	فصل سوم: حل تحلیلی	۳
۴۸.....	مقدمه	۱-۳
۴۸.....	بی بعد سازی	۲-۳
۴۹.....	بی بعد سازی بخش همگن معادلات	۱-۲-۳
۵۴.....	بی بعد سازی بخش ناهمگن معادلات	۲-۲-۳
۵۴.....	تبدیل لاپلاس	۳-۳
۵۶.....	تئوری مقدماتی معادلات دیفرانسیل	۴-۳
۵۹.....	تبدیل معکوس لاپلاس	۱-۴-۳
۶۱.....	مقدمه ای بر تئوری اغتشاشات	۵-۳
۶۱.....	مسائل لایه مرزی	۱-۵-۳
۶۶.....	جمع بندی	۷-۳
۶۷.....	فصل چهارم: حل عددی	۴
۶۸.....	مقدمه	۱-۴
۶۸.....	تعیین خصوصیات ویسکوالاستیک مواد بر اساس سری پرونی	۲-۴
۶۹.....	المان مورد استفاده	۳-۴
۷۰.....	معرفی المان PLANE 183	۴-۴
۷۱.....	تعیین مدول رهایش بالک و برشی	۵-۴
۷۱.....	مدول رهایش برشی	۱-۵-۴
۷۳.....	مدول بالک	۲-۵-۴
۷۳.....	مدلسازی پوسته	۶-۴
۷۴.....	مش بندی	۷-۴
۷۶.....	مرحله ی حل	۸-۴
۷۷.....	اعمال شرایط مرزی	۱-۸-۴
۷۷.....	تعیین نوع آنالیز	۲-۸-۴
۷۷.....	مدل سازی فشار متحرک در استوانه	۳-۸-۴
۷۸.....	جمع بندی:	۹-۴
۷۹.....	فصل پنجم: بررسی نتایج	۵
۸۰.....	مقدمه	۱-۵

۸۲	۲-۵- تحلیل عددی پوسته
۸۲	۱-۲-۵- بررسی جابجایی های شعاعی در روی پوسته
۸۶	۲-۲-۵- بررسی جابجایی های محوری در روی پوسته
۸۹	۳-۵- مقایسه‌ی رفتار الاستیک و ویسکوالاستیک
۹۶	۴-۵- اعتبار سنجی تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول
۹۹	۵-۵- تحلیل با روش تئوری مقدماتی معادلات دیفرانسیل
۱۰۲	۶-۵- بررسی نتایج تحلیل با استفاده از تئوری اغتشاشات
۱۰۶	۷-۵- تاثیرات استهلاک در میدان جابجایی
۱۱۱	۸-۵- بررسی تاثیرات سرعت در میدان جابجایی
۱۱۴	۹-۵- تعیین سرعت بحرانی
۱۱۴	۱۰-۵- جمع بندی:
۱۱۶	۶- فصل ششم: نتیجه گیری و پیشنهادها
۱۱۷	۱-۶- نتیجه گیری و پیشنهادها
۱۱۹	پیوست
۱۳۸	مرجع

## فهرست اشکال

عنوان	صفحه
شکل (۱-۱) گرادیان سرعت .....	۵
شکل (۲-۱) (a) حالت تنش. (b) تنش هیدرواستاتیک که فقط تغییر حجم ایجاد می کند. (c) تنش انحرافی که فقط منجر به تغییر شکل می شود. ....	۱۰
شکل (۳-۱) مدل ماکسول .....	۱۳
شکل (۴-۱) مدل کلویین - ویت .....	۱۴
شکل (۵-۱) اولین مدل جامد استاندارد خطی .....	۱۵
شکل (۶-۱) دومین مدل جامد استاندارد خطی .....	۱۵
شکل (۷-۱) پوسته ی حاصل از دوران .....	۱۷
شکل (۱-۲) پوسته ی استوانه ای جدار ضخیم .....	۳۲
شکل (۲-۲) فشار داخلی متحرک .....	۴۵
شکل (۱-۴) المان PLANE 183 .....	۷۱
شکل (۲-۴) مقطع المان بندی شده ی پوسته .....	۷۶
شکل (۳-۴) گسترش یافته ی مقطع مستطیلی المان بندی شده ، حول محور z .....	۷۶
شکل (۴-۴) اعمال بار متحرک .....	۷۸
شکل (۱-۵) نام گذاری المان های مورد بررسی بر روی سطح مقطع طولی پوسته .....	۸۰
شکل (۲-۵) نام گذاری مسیرهای مورد بررسی بر روی سطح مقطع طولی پوسته .....	۸۱
شکل (۳-۵) جابجایی شعاعی در هنگام ورود بار در نقطه ی $a_m$ .....	۸۳
شکل (۴-۵) جابجایی شعاعی در هنگام ورود بار در نقطه ی $b_i$ .....	۸۴
شکل (۵-۵) جابجایی شعاعی در هنگام ورود بار در نقطه ی $b_m$ .....	۸۴
شکل (۶-۵) جابجایی شعاعی در هنگام ورود بار در نقطه ی $b_o$ .....	۸۵
شکل (۷-۵) جابجایی شعاعی در هنگام ورود بار در نقطه ی $c_m$ .....	۸۵
شکل (۸-۵) جابجایی شعاعی در روی مسیر d در زمان $t_f$ .....	۸۶
شکل (۹-۵) جابجایی محوری در هنگام ورود بار در نقطه ی $a_m$ .....	۸۷
شکل (۱۰-۵) جابجایی محوری در هنگام ورود بار در نقطه ی $b_m$ .....	۸۷
شکل (۱۱-۵) جابجایی محوری در هنگام ورود بار در نقطه ی $c_m$ .....	۸۸
شکل (۱۲-۵) جابجایی محوری در روی مسیر d در زمان $t_f$ .....	۸۹

- شکل (۵-۱۳) جابجایی شعاعی در نقطه  $b_m$  در حوزه ی الاستیک ..... ۹۰
- شکل (۵-۱۴) جابجایی شعاعی در مسیر d در حوزه ی الاستیک ..... ۹۰
- شکل (۵-۱۵) جابجایی محوری در نقطه  $b_m$  در حوزه ی الاستیک ..... ۹۱
- شکل (۵-۱۶) جابجایی محوری در مسیر d در حوزه ی الاستیک ..... ۹۱
- شکل (۵-۱۷) جابجایی شعاعی در نقطه ی  $b_m$  ..... ۹۲
- شکل (۵-۱۸) جابجایی محوری در نقطه ی  $b_m$  ..... ۹۳
- شکل (۵-۱۹) جابجایی شعاعی نقطه ی  $b_m$  در حوزه ی ویسکوالاستیک ..... ۹۴
- شکل (۵-۲۰) جابجایی شعاعی نقطه ی  $b_m$  در حوزه ی الاستیک ..... ۹۵
- شکل (۵-۲۱) جابجایی محوری روی مسیر d در حوزه ی ویسکوالاستیک ..... ۹۵
- شکل (۵-۲۲) جابجایی محوری روی مسیر d در حوزه ی الاستیک ..... ۹۶
- شکل (۵-۲۳) جابجایی شعاعی روی path a ..... ۹۷
- شکل (۵-۲۴) جابجایی شعاعی روی path c ..... ۹۷
- شکل (۵-۲۵) جابجایی محوری روی path a ..... ۹۸
- شکل (۵-۲۶) جابجایی محوری روی path c ..... ۹۹
- شکل (۵-۲۷) جابجایی شعاعی  $b_m$  ..... ۱۰۱
- شکل (۵-۲۸) جابجایی شعاعی  $a_m$  ..... ۱۰۲
- شکل (۵-۲۹) جابجایی شعاعی  $b_m$  ..... ۱۰۳
- شکل (۵-۳۰) جابجایی محوری روی مسیر d ..... ۱۰۴
- شکل (۵-۳۱) جابجایی شعاعی روی مسیر d ..... ۱۰۵
- شکل (۵-۳۲) جابجایی شعاعی نقطه ی  $b_m$  ..... ۱۰۶
- شکل (پ ۱-۱) قطعه ای از ماده تحت تغییر شکل برشی ..... ۱۱۹
- شکل (پ ۲-۲) پاسخ جامد الاستیک و مایع ویسکوز ایده آل به کرنش برشی ثابت ..... ۱۲۰
- شکل (پ ۳-۳) پاسخ جامد و مایع واقعی به کرنش برشی ثابت در آزمایش رهایش ..... ۱۲۰
- شکل (پ ۴-۴) پاسخ جامد و مایع ایده آل به تنش برشی ثابت در آزمایش خزش ..... ۱۲۱
- شکل (پ ۵-۵) پاسخ جامد و مایع واقعی به تنش برشی ثابت در آزمایش خزش ..... ۱۲۱
- شکل (پ ۶-۶) تحریک (بالا) و پاسخ (پایین) در آزمایش رهایش برشی خطی ..... ۱۲۲
- شکل (پ ۷-۷) طرح شماتیکی تبدیل رفتار خطی به غیر خطی در آزمایش رهایش برشی ..... ۱۲۳
- شکل (پ ۸-۸) نمودار لگاریتمی مدول رهایش برشی در حوزه ی زمان ..... ۱۲۴
- شکل (پ ۹-۹) نمودار لگاریتمی کامپلینس خزشی برشی در حوزه ی زمان ..... ۱۲۶
- شکل (پ ۱۰-۱۰) مدل ماکسول ..... ۱۲۸

- شکل (پ ۱۱) پاسخ مدل ماکسول به تنش ورودی پله‌ای ..... ۱۲۹
- شکل (پ ۱۲) پاسخ مدل ماکسول به کرنش ورودی پله‌ای ..... ۱۳۰
- شکل (پ ۱۳) مدل کلومین - وویت ..... ۱۳۱
- شکل (پ ۱۴) پاسخ مدل کلومین - ویت به تنش ورودی پله‌ای ..... ۱۳۲
- شکل (پ ۱۵) اولین مدل جامد استاندارد خطی ..... ۱۳۳
- شکل (پ ۱۶) دومین مدل جامد استاندارد خطی ..... ۱۳۳
- شکل (پ ۱۷) پاسخ اولین مدل جامد استاندارد خطی به تنش ورودی پله ..... ۱۳۴
- شکل (پ ۱۸) پاسخ دومین مدل جامد استاندارد خطی به کرنش ورودی پله ..... ۱۳۵
- شکل (پ ۱۹) مدل برگر ..... ۱۳۶
- شکل (پ ۲۰) ترکیبی از مدل‌های کلومین و ماکسول ..... ۱۳۷

## فهرست جداول

- جدول (۱-۲) اولین معادله ..... ۴۰
- جدول (۲-۲) دومین معادله ..... ۴۰
- جدول (۳-۲) سومین معادله ..... ۴۱
- جدول (۴-۲) چهارمین معادله ..... ۴۱
- جدول (۱-۴) مشخصات پوسته ..... ۷۴
- جدول (۲-۴) بررسی حساسیت مشبندی ..... ۷۵
- جدول (۱-۵) شماره گره‌ها ..... ۸۰
- جدول (۲-۵) مشخصات مسیرها ..... ۸۱
- جدول (۳-۵) خصوصیات ویسکوالاستیک ..... ۸۲
- جدول (۴-۵) خصوصیات الاستیک ..... ۸۹
- جدول (۵-۵) خصوصیات ویسکوالاستیک ..... ۱۰۰
- جدول (۶-۵) تاثیر استهلاک بر جابجایی شعاعی با استفاده از تئوری اغتشاشات ..... ۱۰۷
- جدول (۷-۵) جابجایی شعاعی با دو روش تحلیلی و ansys ..... ۱۰۹
- جدول (۸-۵) تأثیرات استهلاک در جابجایی محوری با استفاده از تئوری اغتشاشات .. ۱۱۰
- جدول (۹-۵) تأثیر سرعت فشار متحرک در جابجایی شعاعی با تئوری اغتشاشات ..... ۱۱۲

## فهرست علائم

$P_0$ .....	اندازه‌ی فشار متحرک
$H(t)$ .....	تابع پله
$\delta(t)$ .....	تابع دلتای دیراک
$J(t)$ .....	تابع کامپلینس خزشی
$B(t)$ .....	تابع کامپلینس خزشی بالک
$D(t)$ .....	تابع کامپلینس کششی
$\sigma_{ij}$ .....	تانسور تنش
$\varepsilon_{ij}$ .....	تانسور کرنش
$p(t)$ .....	تنش هیدرواستاتیکی
$S$ .....	ثابت لاپلاس
$u(x, t)$ .....	جابجایی شعاع میانی پوسته در راستای طولی $x$
$w(x, t)$ .....	جابجایی شعاع میانی پوسته در راستای شعاعی $z$
$\rho$ .....	چگالی
$\psi_x$ .....	زاویه‌ی چرخش سطح مقطع در صفحه‌ی $x - z$
$\tau$ .....	زمان رهایش
$V$ .....	سرعت بار
$b$ .....	شعاع خارجی پوسته
$a$ .....	شعاع داخلی پوسته
$R$ .....	شعاع میانی پوسته
$h$ .....	ضخامت پوسته
$\nu$ .....	ضریب پواسون
$\kappa^2$ .....	ضریب تصحیح برشی
$L$ .....	طول پوسته
$\Delta$ .....	کرنش حجمی

$\psi_z$ .....	کرنش عمودی عرضی
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ .....	کرنش برشی
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ .....	کرنش های عمودی
$\theta$ .....	مختصه‌ی پیرامونی پوسته
$t$ .....	مختصه‌ی زمانی
$z$ .....	مختصه‌ی شعاعی پوسته
$x$ .....	مختصه‌ی طولی پوسته
$K$ .....	مدول بالک
$G$ .....	مدول برشی
$K(t)$ .....	مدول ره‌ایش بالک
$G(t)$ .....	مدول ره‌ایش برشی
$E(t)$ .....	مدول ره‌ایش کششی
$E$ .....	مدول یانگ الاستیک
$u_z, u_\theta, u_x$ .....	میدان جابجایی پوسته در راستای $z, \theta, x$
$\bar{T}$ .....	انرژی جنبشی
$\bar{W}$ .....	انرژی کرنشی
$\bar{W}_s$ .....	کار نیروی خارجی
$L$ .....	لاگرانژین
$\eta$ .....	ضریب ویسکوزیته مدل ویسکوالاستیک

## پیشگفتار

کاربرد پوسته‌ها در موشک‌ها، خطوط لوله‌کشی و سازه‌های دریایی فراوان است. بررسی حرکت نیروها نیز در طول یک عضو یا سازه، یکی از مسائل معمول در مهندسی به شمار می‌آید که از جمله آن‌ها می‌توان به حرکت ماشین بر روی یک پل، حرکت هوا بر روی بال هواپیما، انتقال سیال داخل لوله‌ها، جرثقیل‌های سقفی، مسیرهای ارتباطی کابلی، نیروی وارد بر یک قطعه در طول عملیات ماشین‌کاری و ... اشاره کرد. از موارد مهم در تحلیل این‌گونه مسائل، بررسی اثر خصوصیت ماده و هندسه‌ی پوسته‌ی مورد نظر در پاسخ به این نوع تحریک می‌باشد. بررسی تحلیل‌های صورت گرفته در حوزه‌ی پوسته‌ها تحت بار فشاری متحرک، بیشتر متوجه مواد الاستیک بوده در حالی که طیف بسیار گسترده‌ای از مواد پیرامون ما در حوزه‌ی ویسکوالاستیک قرار دارند و شناخت رفتار مکانیکی این مواد به دلیل رفتار متفاوت نسبت به مواد الاستیک از اهمیت بالایی برخوردار است. از جمله مسائلی که مدل ویسکوالاستیک مسأله نسبت به تحلیل الاستیک مدل واقعی‌تری ارائه می‌دهد انتقال سیال درون لوله‌های پلیمری یا حرکت جریان هوا بر روی یک باله‌ی کامپوزیتی می‌باشد، زیرا ماده‌ی استفاده شده در این‌گونه مسائل از نوع پلیمر و کامپوزیت بوده و رفتار این مواد در حوزه‌ی ویسکوالاستیک قرار دارد.

همچنین، در بررسی تحلیل‌هایی که در مورد پوسته‌ها انجام شده است مشخص می‌شود که بیشترین کار منتشر شده، در حوزه‌ی تئوری پوسته‌های استوانه‌ای جدار نازک می‌باشد. واقعیت این است که پوسته یک جسم سه بعدی است که به علت نبود حل تحلیلی در حالت کلی برای مدل‌های سه بعدی، از روش‌های تقریبی استفاده شده و یا حل تحلیلی را تحت شرایطی خاص بدست می‌آورند. استفاده از تئوری پوسته‌ی جدار نازک برای استوانه‌ی جدار ضخیم باعث بوجود آمدن خطا در تعیین فرکانس طبیعی می‌گردد [۱].

پوسته‌ی جدار ضخیم به طور مشخص دارای اختلافاتی با پوسته‌ی جدار نازک می‌باشد که یکی



از این اختلافات در تغییر شکل برشی عرضی می‌باشد؛ بدین معنا که در پوسته‌ی جدار ضخیم نمی‌توان اثر تغییر شکل برشی را نادیده گرفت. یکی از تئوری‌هایی که در برگیرنده‌ی این اثرات می‌باشد، تئوری تغییر شکل برشی است، که در ادامه به تشریح اجمالی آن پرداخته خواهد شد. همچنین کاربرد تجهیزات اتلاف انرژی یا میراگرها، با توجه به قابلیت‌های فراوان آن‌ها، توجه بسیاری از مجامع مهندسی را به خود جلب کرده است. این تجهیزات مقدار زیادی از انرژی ورودی به سازه را تلف و آسیب‌های سازه‌ای را به مقدار قابل توجهی کاهش می‌دهد. میراگرهای ویسکوالاستیک نیز با قابلیت بالای اتلاف انرژی و عدم نیاز به فناوری‌های پیچیده‌ی ساخت، یکی از مطلوب‌ترین این سیستم‌ها می‌باشند. در این بخش نیز کارهای زیادی انجام شده که می‌توان به عنوان نمونه به کار بیات [۲] که به بررسی رفتار لرزه‌ای سکوه‌های ثابت فولادی با استفاده از میراگرهای ویسکوالاستیک پرداخته است اشاره کرد.

تحقیقی که در اینجا انجام خواهد شد، به تعیین حل پوسته‌های ویسکوالاستیک جدار ضخیم با تئوری برشی مرتبه‌ی اول اختصاص دارد، که در شش فصل و به صورت زیر انجام خواهد شد. فصل اول این پروژه به معرفی مواد ویسکوالاستیک و مروری بر مقالات منتشر شده در این زمینه اشاره دارد. در فصل دوم معادلات حاکم بر پوسته‌های ویسکوالاستیک بر اساس تئوری برشی مرتبه‌ی اول، تعیین خواهد شد. فصل سوم به حل تحلیلی معادلات حاکم اختصاص دارد. فصل چهارم حل عددی با نرم افزار ansys انجام خواهد شد، فصل پنجم به بررسی نتایج و فصل آخر نیز به نتایج و پیشنهادها اختصاص دارد.

## فصل اول: مبانی تئوری و مرور مقالات

### ۱-۱- مقدمه

در این بخش به بررسی رفتار ویسکوالاستیک سازه‌ها پرداخته شده و تغییر شکل الاستیک و ویسکوز آنها بررسی شده است. در کرنش‌های کم پاسخ مواد ویسکوالاستیک به اغتشاشات مکانیکی به خوبی با تئوری ویسکوالاستیسیته‌ی خطی قابل توصیف بوده و می‌توان از اصل برهم نهی بولتزمن<sup>۱</sup> استفاده کرد و پاسخ به بارگذاری را از آزمایش ساده‌ی خزش و رهائش<sup>۲</sup> بدست آورد [۳].

### ۱-۲- بررسی پدیده‌ی ویسکوالاستیسیته

جامد الاستیک و سیال ویسکوز دو نوع معمول از مواد ایده‌آلی می‌باشند که در حوزه‌ی مکانیک مورد بررسی قرار می‌گیرند. در جامد الاستیک، تغییر شکل بر اثر نیروی خارجی بعد از حذف نیرو قابل برگشت است، ولی در سیال ویسکوز، سیال تحت نیروی خارجی جریان پیدا می‌کند. پلیمرها یک خصوصیت میانی بین جامد الاستیک و سیال ویسکوز را نشان می‌دهند. این شکل از مواد که هر دو خصوصیت شبه‌جامد و شبه‌سیالی را با هم دارند، ویسکوالاستیک نامیده می‌شود. در ویسکوالاستیسیته، یک پدیده‌ی اتلاف‌کنندگی (به سبب ویسکوزیته) علاوه بر الاستیسیته وجود دارد [۳].

### ۱-۳- رفتار ویسکوالاستیک خطی

قانون نیوتن، ویسکوزیته‌ی  $\eta$  را به صورت ضریبی که تنش را به گرادیان سرعت مربوط می‌کند، تعریف می‌شود:

$$\sigma = \eta \frac{\partial V}{\partial y} \quad (1-1)$$

که  $V$  سرعت و  $y$  جهت گرادیان سرعت است. برای گرادیان سرعت در صفحه‌ی  $x-y$  می‌توان

<sup>1</sup> -Boltzmann Superposition Principle

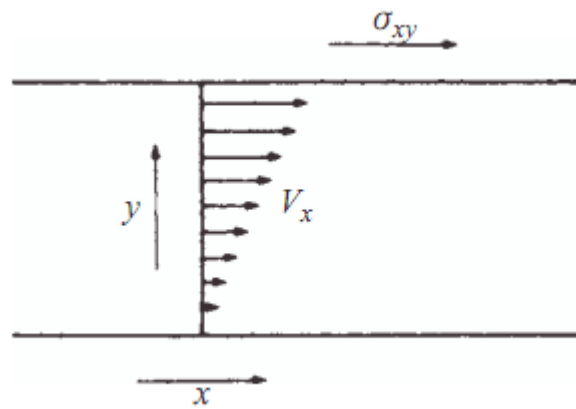
<sup>2</sup> -Creep And Relaxation

نوشت:

$$\sigma_{xy} = \eta \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) \quad (2-1)$$

که  $\frac{\partial V_x}{\partial y}$  و  $\frac{\partial V_y}{\partial x}$ ، گرادیان سرعت در راستای  $y$  و  $x$  است. شکل (1-1) حالتی را نشان می‌دهد که

گرادیان سرعت در جهت  $y$  است.



شکل (1-1) گرادیان سرعت [3].

از آنجایی که  $V_x = \frac{\partial u}{\partial t}$  و  $V_y = \frac{\partial v}{\partial t}$  و  $u$  و  $v$  جابجایی در راستاهای  $x$  و  $y$  هستند رابطه‌ی (2-1) به

شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$\sigma_{xy} = \eta \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right) \right] = \eta \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \eta \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial t} \quad (3-1)$$

که  $\gamma_{xy}$  کرنش برشی در صفحه‌ی  $xy$  می‌باشد. همان‌گونه که مشخص است در سیال، تنش به

تغییرات کرنش نسبت به زمان وابسته می‌باشد.

قانون هوک تشریح‌کننده‌ی رفتار جامد الاستیک خطی و قانون نیوتن برای سیال ویسکوز خطی

استفاده می‌شود. با ترکیب این دو قانون می‌توان رابطه‌ی بنیادین<sup>۱</sup> برای ماده ویسکوالاستیک خطی را

بدست آورد. این دو قانون:

الف - برای رفتار الاستیک:

$$(\sigma_{xy})_E = G \gamma_{xy} \quad (۴-۱)$$

ب - برای رفتار ویسکوز:

$$(\sigma_{xy})_V = \eta \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial t} \right) \quad (۵-۱)$$

که  $G$  مدول برشی است. با این فرض که تنش برشی نسبت به کرنش و نرخ کرنش قابل جمع کردن باشد، یک فرمول ساده برای رفتار ویسکوالاستیک خطی به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\sigma_{xy} = (\sigma_{xy})_E + (\sigma_{xy})_V = G \gamma_{xy} + \eta \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial t} \right) \quad (۶-۱)$$

این معادله بیان‌کننده‌ی یکی از ساده‌ترین رفتارهای ویسکوالاستیسیته‌ی خطی (مدل کلوین-ویت<sup>۲</sup>) می‌باشد که در بخش بعدی عنوان خواهد شد.

برای جامد الاستیک، قانون هوک تنها برای کرنش‌های کوچک معتبر است و قانون نیوتن در مورد ویسکوزیته به نرخ جریان نسبتاً کم محدود می‌شود. برای تنها یک فرایند بارگذاری، یک رابطه‌ی خطی بین تنش و کرنش در یک زمان داده شده وجود خواهد داشت. برای بارگذاری‌های چند مرحله‌ای می‌توان از اصل برهم‌نهی بولتزمن برای آنالیز استفاده کرد که در آن می‌توان فرض کرد هر نموی<sup>۳</sup> در تنش یک بخش مستقل از کل کرنش را می‌سازد.

دو تابع مهم در ویسکوالاستیسیته، کامپلیننس<sup>۴</sup> خزشی و مدول رهاش می‌باشد، که معرف تغییر شکل

<sup>۱</sup> - Constitutive

<sup>۲</sup> - Kelvin - Voigt Model

<sup>۳</sup> - Increment

<sup>۴</sup> - Compliance

ویسکوالاستیک بوده و از آزمایش‌های خزش و رهايش بدست می‌آیند. در آزمایش رهايش تنش، تغییرات تنش بر اثر کرنش ثابت اعمالی بر قطعه تعیین می‌شود و در آزمایش خزش تغییرات کرنش بر اثر تنش ثابت اعمالی بر قطعه بدست می‌آید. بر اساس این آزمایش‌ها مدول‌های مواد ویسکوالاستیک، به صورت زیر تعیین می‌شوند:

الف) اگر مواد تحت کرنش برشی کوچک  $\varepsilon$  قرار گیرند، تنش برشی لازم برای ثابت نگه داشتن کرنش برشی به صورت زیر است:

$$\sigma(t) = G(t)\varepsilon \quad (7-1)$$

که  $G(t)$  مدول رهايش می‌باشد.

ب) در صورتی که مواد ویسکوالاستیک تحت تغییر شکل ایزوتروپیک فشاری یا اتساعی<sup>1</sup> باشند، اجزاء قطری تانسورهای تنش و کرنش صفر نبوده و رابطه‌ی بین تحریک و پاسخ به صورت زیر است:

$$\sigma_{ii}(t) = -p(t) = 3K(t)\varepsilon_{ii} = K(t)\Delta \quad (8-1)$$

که  $p(t)$  تنش هیدرو استاتیکی،  $\Delta$  کرنش حجمی<sup>2</sup> و  $K(t)$  مدول رهايش بالک می‌باشد.

ج) مطالعه‌ی پاسخ سیستم‌های ویسکوالاستیک به استحکام کششی در زمینه‌های عملی مهم است. در این حالت برای کرنش‌های تک محوری ( $\varepsilon_{11} H(t)$ ) تغییرات تنش با زمان به صورت زیر است:

$$\sigma_{11} = E(t)\varepsilon_{11} \quad (9-1)$$

که  $E$  مدول رهايش کششی و  $H(t)$  تابع پله<sup>3</sup> است.

د) اگر مواد تحت تنش برشی کوچک و ثابت  $\sigma$  قرار گیرند، وابستگی زمانی کرنش به صورت زیر است:

<sup>1</sup> -Dilatation or compression

<sup>2</sup> -Volumetric Strain

<sup>3</sup> -Heaviside Step Function

$$\varepsilon(t) = J(t)\sigma \quad (10-1)$$

که  $J(t)$  تابع کامپلینس خزشی است.

ه) اگر ماده تحت تنش هیدرو استاتیکی  $p(t)$  باشند، تابعیت زمانی تانسور کرنش  $\Delta$  به صورت زیر است :

$$\sigma_{ii} = -p(t) = K(t)\Delta \rightarrow \Delta(t) = -p B(t) \quad , \quad B = \frac{1}{K} \quad (11-1)$$

که  $B(t)$  کامپلینس خزشی بالک است.

و) پاسخ ماده به مقاومت کششی  $H(t)$   $\sigma_{11}$  به صورت زیر است:

$$\varepsilon_{11} = D(t)\sigma_{11} \quad (12-1)$$

که  $D(t)$  به عنوان تابع کامپلینس کششی تعریف می شود.

توضیحات کامل تر مربوط به این مدول ها و آزمایش های خزش و رهایش در پیوست آمده است [۳].

#### ۱-۴- معادلات حاکم بر مواد ویسکوالاستیک

در این بخش معادلات بنیادین به شکل انتگرالی و دیفرانسیلی بیان شده است.

#### ۱-۴-۱- معادلات بنیادین تنش به شکل انتگرالی

رابطه ی تنش - کرنش در یک ماده ی ویسکوالاستیک، ایزوتروپیک به صورت زیر است:

$$\sigma_{ij} = 2 \int_{-\infty}^t G(t-\theta) d\varepsilon_{ij}(\theta) + \delta_{ij} \int_{-\infty}^t \left( k(t-\theta) - \frac{2}{3}G(t-\theta) \right) d\Delta(\theta) \quad (13-1)$$

در معادله بالا  $\Delta$  کرنش حجمی یا همان تریس<sup>۱</sup> تانسور کرنش  $\varepsilon_{ij}$  و  $K - \frac{2}{3}G = \lambda$  ضریب لامه است.

<sup>۱</sup> -Trace

تبدیل لاپلاس معادله‌ی فوق به صورت زیر است:

$$\sigma_{ij}(s) = 2sG(s)\varepsilon_{ij}(s) + \delta_{ij}(k(s) - \frac{2}{3}G(s))\Delta(s) \quad (14-1)$$

### ۱-۴-۲ - معادلات بنیادین تنش به شکل دیفرانسیلی

معادلات بنیادین برای یک ماده‌ی ایزوتروپیک که پاسخش به مشتقات تنش و کرنش وابسته است به صورت دیفرانسیلی زیر نوشته می‌شود:

$$F(\sigma, \dot{\sigma}, \ddot{\sigma}, \dots, \varepsilon, \dot{\varepsilon}, \ddot{\varepsilon}, \dots) = 0 \quad (15-1)$$

به طوری که تنش و کرنش وابسته به زمان است. شکل آپراتوری معادله‌ی فوق به صورت زیر است:

$$P(D)\sigma_{ij}(t) = Q(D)\varepsilon_{ij}(t) \quad (16-1)$$

که  $\sigma_{ij}$  عناصر تانسور تنش و  $\varepsilon_{ij}$  تانسور کرنش است. آپراتورهای  $P(D), Q(D)$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$P(D) = \sum_{r=0}^N P^r \frac{\partial^r}{\partial t^r}$$

$$Q(D) = \sum_{r=0}^N Q^r \frac{\partial^r}{\partial t^r} \quad (17-1)$$

شرایط خطی بودن معادلات لازم می‌دارد که  $P^r, Q^r$  مستقل از زمان باشند ولی در حالت کلی  $P^r, Q^r$  می‌تواند تابع زمان نیز باشد. ترکیب مناسب از ضرایب در معادله‌ی آپراتوری (۱۷-۱) می‌توان رفتار یک ماده‌ی ویسکوالاستیک را شبیه‌سازی کند.

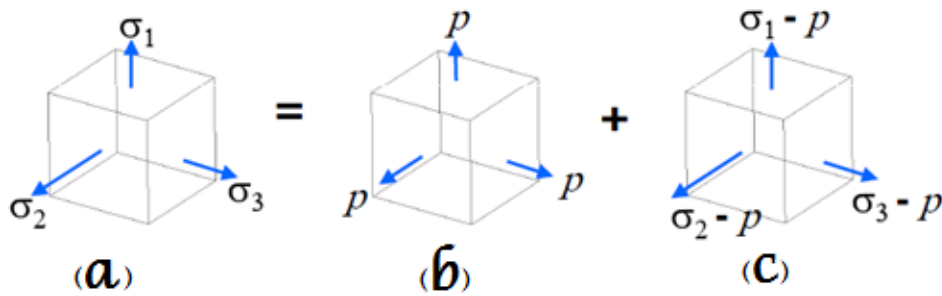
به منظور توصیف رفتار ویسکوالاستیک یک سیستم تحت کشش چند محوره تفکیک قسمت برش<sup>۱</sup> و قسمت اتساعی<sup>۲</sup> تنش مرسوم است. این قاعده به سبب پاسخ متفاوت مواد ویسکوالاستیک به برش و

<sup>۱</sup>-Deviatoric  
<sup>۲</sup>-Dilatational



## فصل اول: مبانی تئوری و مرور مقالات

اتساع (یا بالک) می‌باشد. به عبارت دیگر، انواع مختلف تنش، پاسخ‌های متفاوتی را تولید می‌کنند. در شکل (۲-۱) تصویری شماتیک از این تفکیک آمده است:



شکل (۲-۱) (a) حالت تنش (b) تنش هیدرواستاتیک که فقط تغییر حجم ایجاد می‌کند (c) تنش انحرافی که فقط منجر به تغییر شکل می‌شود.

اگر عضوهای برش و اتساع در معادله‌ی آپراتوری از هم جدا شوند، نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} P_1 \sigma_{ij} &= Q_1 \varepsilon_{ij} && \text{deviatoric} \\ P_2 \sigma_{ii} &= Q_2 \varepsilon_{ii} && \text{dilatational} \end{aligned} \quad (18-1)$$

همچنین  $P_1, P_2, Q_1, Q_2$  آپراتورهایی به شکل زیر هستند که با توجه به مدل انتخاب شده برای ماده‌ی ویسکوالاستیک تعیین می‌شوند:

$$P_0 + P_1 \frac{\partial}{\partial t} + P_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots \quad (19-1)$$

به کمک روابط (۱۸-۱) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = 2G \varepsilon_{ij} = G \gamma_{ij} &\Rightarrow 2G = \frac{Q_1}{P_1} \Rightarrow G = \frac{1}{2} \left( \frac{Q_1}{P_1} \right) \\ P_2 \sigma_{ii} = Q_2 \varepsilon_{ii} & \quad 3K = \frac{Q_2}{P_2} \Rightarrow K = \frac{1}{3} \left( \frac{Q_2}{P_2} \right) \end{aligned} \quad (20-1)$$

مدول الاستیسیته و ضریب پواسون دارای روابط زیر با مدول برشی و مدول بالک هستند.

$$E = \frac{9kG}{3k + G}$$

$$v = \frac{3k - 2G}{6k + 2G} \quad (۲۱-۱)$$

با جایگذاری مقادیر  $k, G$  بر حسب  $P, Q$  در عبارات فوق، مدول الاستیسیته و ضریب پواسون به شکل اپراتوری بدست می‌آیند [۴].

### ۵-۱- فرضیات متداول در ویسکوالاستیسیته

در حل مسائل تحلیل تنش در حوزه ویسکوالاستیک، اغلب اعمال فرض‌هایی بر روی خصوصیت ماده ضروری است. با توجه به اینکه جمع‌آوری اطلاعات وابسته به زمان برای خصوصیات ویسکوالاستیک مشکل و زمان‌بر است بنابراین اغلب برای ماده ویسکوالاستیک یکی از خصوصیات مدول برشی  $G(t)$  یا مدول یانگ  $E(t)$  تعریف می‌شود و نه هر دو. مدول دیگر بر اساس یکی از فرضیات زیر تعیین می‌شود. این فرضیات را می‌توان بر اساس مطالب بخش قبلی و بدین صورت توضیح داد که پاسخ برخی از مواد ویسکوالاستیک در برش متفاوت از پاسخ آن‌ها در اتساع (بالک) می‌باشد؛ از این رو در حالی که پاسخ در برش ویسکوالاستیک است پاسخ در اتساع می‌تواند به صورت الاستیک باشد. این فرضیات به ترتیب: تراکم ناپذیری، رفتار الاستیک در بالک و مدول تناسبی بالک و برشی می‌باشد که هر کدام از این فرضیات مقدار خاصی را برای مدول بالک یا ضریب پواسون به صورت زیر تعیین می‌کنند:

۱- تراکم ناپذیری: برای تغییر شکل‌های کوچک در حوزه مسائل الاستیک خطی، در حالت تراکم ناپذیری، مقدار ضریب پواسون برابر با 0.5 یا مدول بالک بی‌نهایت است. تحت شرایط مشابه ضریب پواسون نیز برای یک ماده ویسکوالاستیک تراکم‌ناپذیر، برابر با 0.5 و  $K(t) = \infty$  می‌باشد. بدیهی است که این فرض همچنین دلالت بر این دارد که کرنش‌های اتساعی صفر است.

در شبیه‌سازی کامپیوتری مسائل ویسکوالاستیک با این فرض اغلب اشکالات عددی ایجاد می‌شود. بعضی از کدهای اجزاء محدود قیود یا گزینه‌هایی به منظور برطرف کردن اشکالات عددی برای استفاده در این حالت دارند. در ansys نیز برای حل این مشکل به جای 0.5 از ضریب پواسون نزدیک به 0.5 استفاده می‌شود.

۲- الاستیک در بالک: در این حالت مدول بالک، مقدار ثابت  $k_0$  را داشته و  $k(t) = k_0 H(t)$  می‌باشد. این فرض بر این اساس است که تغییرات مدول بالک نسبت به مدول برشی، با دما و زمان بسیار کم است. در این حالت ضریب پواسون تابعی از زمان است.

۳- مدول تناسبی بالک و برشی: در این حالت فرض می‌شود که نسبت مدول بالک به برشی مقدار ثابتی باشد، به طوری که  $k(t) = c_1 G(t)$  که  $c_1$  مقداری ثابت است. بنابراین در این حالت فرض می‌شود که وابستگی زمانی دو مدول شبیه و با هم متناسبند. صحت این فرض به شدت وابسته به دماست. البته در بعضی منابع این فرض را به عنوان رفتار شبه‌ویسکوالاستیک در برش و اتساع و آن را معادل با فرض ضریب پواسون ثابت در نظر گرفته‌اند [۵ و ۶].

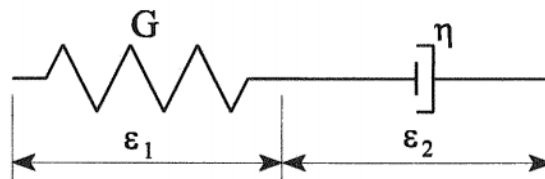
### ۱-۶- مدل‌های مکانیکی مواد ویسکوالاستیک

ویسکوالاستیسیته خطی به طور معمول به صورت ترکیب اجزاء الاستیک و ویسکوز بیان شده و از فنر و دمپر به ترتیب برای نمایش پاسخ ایده‌آل الاستیک و ویسکوز استفاده می‌شود. از مدل‌ها به منظور تعیین معادله دیفرانسیلی که تغییر شکل پلیمر تحت بررسی را توصیف می‌کند، استفاده می‌شود [۴].

#### ۱-۶-۱- مدل ماکسول<sup>۱</sup>

<sup>۱</sup> - Maxwell Model

مدل ماکسول شامل فنر و دمپر سری است (شکل (۳-۱)).



شکل (۳-۱) مدل ماکسول [۴]

رابطه‌ی کلی تنش و کرنش را برای این مدل، می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{G} + \frac{\sigma}{\eta} \quad (۲۲-۱)$$

که  $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$  می‌باشد.

دو کمبود در مورد این مدل ساده وجود دارد :

- اول اینکه تحت شرایط تنش ثابت، یعنی

$$\frac{d\sigma}{dt} = 0, \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\sigma}{\eta} \quad (۲۳-۱)$$

جریان نیوتنی مشهود است ( $\sigma = \eta \frac{d\varepsilon}{dt}$ ) و این موضوع با توجه به رفتار پیچیده‌ی خزش برای ماده‌ی

ویسکوالاستیک درست نیست.

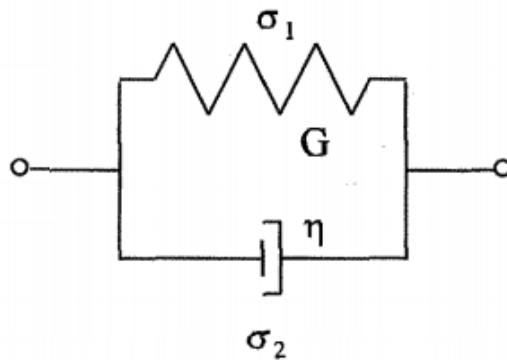
- دوم اینکه رفتار رهایش تنش را نمی‌توان به طور معمول با یک جمله‌نمایی کاهش‌ی بیان کرد، چون

لزوماً تنش در زمان بی‌نهایت به صفر میل نمی‌کند [۴].

### ۱-۶-۲- مدل کلویین - ویت

یک مدل دیگر با درجه‌ی پیچیدگی مشابه با ماکسول، مدل کلویین-ویت است. این مدل شامل یک

فنر موازی با دمپر است و به خوبی رفتار خزشی را توصیف می‌کند.



شکل (۴-۱) مدل کلوین - ویت [۴]

رابطه‌ی کلی تنش - کرنش در این مدل به صورت زیر است:

$$\sigma = G \varepsilon + \eta \dot{\varepsilon} \quad (۲۴-۱)$$

$$\text{که } \sigma = \sigma_1 + \sigma_2$$

با توجه به اینکه در کرنش ثابت دمپر عمل نمی‌کند، مدل کلوین نمی‌تواند رهايش تنش را تشریح کند

[۴].

$$\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right) = 0 \rightarrow \sigma = G \varepsilon \quad (۲۵-۱)$$

### ۱-۶-۳ - جامد استاندارد خطی (یا مدل زنر)<sup>۱</sup>

همچنان که اشاره شد، مدل ماکسول رفتار رهايش تنش و مدل کلوین نیز فقط رفتار خزشی یک

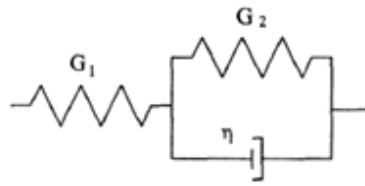
جامد ویسکوالاستیک را توصیف می‌کند، اما هیچ‌کدام برای ارائه‌ی رفتار عمومی جامد ویسکوالاستیک

مناسب نیست زیرا لازم است که مدل، هر دو رفتار رهايش تنش و خزش را با هم توصیف کند.

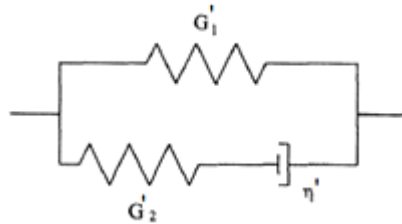
آنچه که به طور معمول جامد استاندارد سه‌المانی نامیده می‌شود ترکیبی از المان کلوین - ویت به

صورت سری با فنر (شکل (۱-۵)) یا المان ماکسول موازی با فنر است (شکل (۱-۶)) می‌باشد.

<sup>1</sup> -Standard Solid ( Zener's Solid) Model



شکل (۵-۱) اولین مدل جامد استاندارد خطی [۴]



شکل (۶-۱) دومین مدل جامد استاندارد خطی [۴]

معادله‌ی بنیادین برای اولین مدل:

$$\left(\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2}\right)\sigma + \frac{\eta}{G_1 G_2} \dot{\sigma} = \varepsilon + \frac{\eta}{G_2} \dot{\varepsilon} \quad (26-1)$$

است. با استفاده از آزمایش رهایش تنش، مدول رهایش بر اساس معادله‌ی فوق تعیین می‌شود:

$$\begin{aligned} G(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} &= \frac{G_2}{1+G_2/G_1} + \frac{G_1}{1+G_2/G_1} \exp\left[-\frac{G_1}{\eta}\left(1+\frac{G_2}{G_1}\right)t\right] = \\ &= \frac{G_1 G_2}{G_1+G_2} + \frac{G_1^2}{G_1+G_2} \exp\left[-\left(\frac{t}{\tau}\right)\right], \tau = \frac{\eta}{G_1+G_2} \end{aligned} \quad (27-1)$$

بر اساس معادله‌ی فوق مدول رهایش به صورت نمایی و با مشخصه‌ی زمانی ثابت  $\tau$  کاهش می‌یابد.

این ثابت زمان رهایش<sup>۱</sup> نامیده شده و به صورت زمان لازم برای اینکه تنش به اتمام (و یا به مقدار

ثابتی) برسد، تفسیر می‌شود.

برای دومین مدل، معادله‌ی بنیادین به صورت زیر است:

<sup>۱</sup> -Relaxation Time

$$\frac{\sigma}{\eta'} + \frac{\dot{\sigma}}{G'_2} = \varepsilon \frac{G'_1}{\eta'} + \dot{\varepsilon} \left(1 + \frac{G'_1}{G'_2}\right) \quad (28-1)$$

مدول رهایش این مدل نیز به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$G(t) = G'_1 + G'_2 \exp\left(-\frac{t}{\tau'}\right) \quad (29-1)$$

توضیحات تکمیلی مدل‌های ویسکوالاستیک در پیوست آورده شده است [۴].

### ۱-۷- معرفی تئوری‌های پوسته‌ها

قبل از ورود به بحث پوسته‌ها لازم است چند اصطلاح به طور مختصر معرفی شوند [۷]:

الف) تار<sup>۱</sup>: ساده‌ترین عضو مکانیکی است که تنها نیروی کششی ساده را می‌تواند تحمل کند. (تار در حالت یک‌بعدی است.)

ب) غشاء<sup>۲</sup>: تعمیم‌یافته‌ی تار در دو بعد است و در آن خاصیت خمشی وجود ندارد؛ مانند کاغذ و ورق نازک.

ج) پوسته‌ی غشایی<sup>۳</sup>: تعمیم یافته‌ی غشاء به حالت سه‌بعدی است که علاوه بر کشش، فشار را نیز تحمل می‌کند یا به عبارتی نیروی محوری و جانبی را تحمل می‌کند ولی سفتی خمشی‌اش ناچیز است. مانند پوسته‌های نازک یا یک ورق نازک حلقه شده.

د) تیر<sup>۴</sup>: اگر تار علاوه بر نیروی کششی، نیروی فشاری و نیروی برشی و لنگر خمشی را نیز تحمل کند،

<sup>1</sup> -String

<sup>2</sup> -Membrane

<sup>3</sup> - Membrane Shell

<sup>4</sup> -Beam

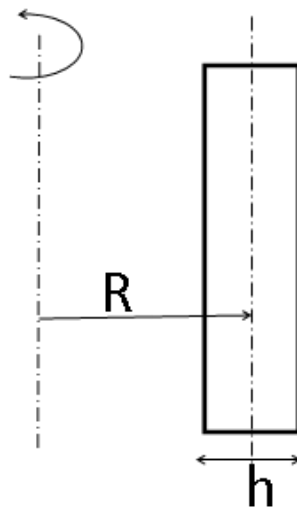
تیر نامیده می‌شود.

ه) ورق<sup>۱</sup>: تعمیم یافته‌ی تیر به حالت دوبعدی است که بر اساس نسبت ضخامت به ابعاد آن قابل دسته بندی خواهد بود:

۱.۰) ورق نازک<sup>۲</sup>: بعد سوم نسبت به دو بعد دیگر قابل چشم پوشی است و در حوزه‌ی الاستیسیته-ی دو بعدی بررسی می‌شود. در این حالت، نسبت ضخامت به طول یا عرض ورق کمتر از  $\frac{1}{20}$  است.

۲.۰) ورق ضخیم<sup>۳</sup>: در حوزه‌ی الاستیسیته‌ی سه بعدی است. در این حالت، نسبت ضخامت به طول یا عرض ورق بیشتر از  $\frac{1}{20}$  است.

و) پوسته<sup>۴</sup>: سطحی خمیده و تعمیم یافته‌ی ورق به حالت سه بعدی است که مقاومت نیرویی بیشتری نسبت به ورق از خود نشان می‌دهد و بر اساس نسبت ضخامت ( $h$ ) به شعاع میانی ( $R$ ) آن قابل دسته بندی خواهد بود:



شکل (۱-۷) پوسته‌ی حاصل از دوران

<sup>1</sup> - Plate  
<sup>2</sup> - Thin Plate  
<sup>3</sup> - Thick Plate  
<sup>4</sup> - Shell



و. (۱) پوسته نازک<sup>۱</sup>: ورقی خمیده است که قابلیت تحمل بار، عمود بر سطح خود را داراست. نسبت ضخامت به شعاع میانی پوسته کمتر از  $\frac{1}{20}$  است.

و. (۲) پوسته ضخیم<sup>۲</sup>: ورق ضخیمی است که به سه بعد تعمیم یافته است و نیروی محوری، نیروی جانبی، نیروی برشی و لنگر خمشی را تحمل می کند. در این حالت، نسبت ضخامت به شعاع میانی پوسته بیشتر از  $\frac{1}{20}$  است. یکی دیگر از تفاوت های پوسته های جدار ضخیم با جدار نازک این است که از اثر تغییر شکل برشی عرضی در پوسته های جدار نازک صرف نظر می کنند، حال آنکه نادیده گرفتن این اثر در پوسته های جدار ضخیم مناسب نیست [۸].

دسته بندی پوسته ها بر اساس ملاک های دیگری نیز انجام می شود. از این ملاک ها می توان به موارد زیر اشاره کرد:

الف) خصوصیت ماده:

الف. (۱) همگن<sup>۳</sup> و ناهمگن<sup>۴</sup>: اگر خواص ماده تابع موقعیت نباشد، پوسته همگن است و در غیر این صورت ناهمگن می باشد.

الف. (۲) همسانگرد<sup>۵</sup> و ناهمسانگرد<sup>۶</sup>: اگر خواص ماده مستقل از جهت باشد، پوسته همسانگرد است و در غیر این صورت ناهمسانگرد می باشد.

ب) رفتار ماده: رفتار ماده در دو حوزه الاستیک و ویسکوالاستیک بررسی می شود.

ج) هندسه ی خطی و غیر خطی پوسته: در صورتی که تغییر مکان بسیار کوچک<sup>۷</sup> باشد خطی است و در

<sup>1</sup> -Thin Shell

<sup>2</sup> -Thick Shell

<sup>3</sup> -Homogen

<sup>4</sup> -Nonhomogen

<sup>5</sup> -Isotropic

<sup>6</sup> -Anisotropic

<sup>7</sup> -Small Deflection

حالت جابجایی بزرگ<sup>۱</sup>، رفتار هندسی پوسته غیرخطی است. در ادامه به معرفی مختصر برخی از تئوری‌های پوسته‌ها پرداخته شده است.

### ۱-۷-۱- تئوری غشایی

یک غشاء می‌تواند مسطح یا خمیده باشد و مشابه ورقی است که تحمل فشار عرضی را دارد. نیروهای غشایی کاملاً مستقل از خمش در نظر گرفته می‌شود و آن را برای پوسته‌های مختلف از قبیل پوسته‌ی فلزی، بتن مسلح، فیلم صابون و ... می‌توان بکار برد. در این تئوری فقط اثر تنش‌های صفحه‌ای<sup>۲</sup> در نظر گرفته می‌شود [۹].

### ۱-۷-۲- تئوری خمشی

نظریه‌ی خمشی غالباً از حل تئوری غشایی استفاده می‌کند که در نواحی دارای تاثیرات ناپیوستگی تصحیح شده است. در واقع هدف این نظریه، آنالیز تنش‌ها و کرنش‌های ناشی از نیروها یا ممان‌های لبه‌ای و یا بارگذاری متمرکز است که با تئوری غشایی امکان‌پذیر نمی‌باشد. بطور کلی روابط تئوری غشایی از تعادل پوسته بدست می‌آید و تابع جنس پوسته نیست ولی روابط تئوری خمشی به جنس پوسته مرتبط است [۹].

### ۱-۷-۳- تئوری تغییر شکل برشی

تئوری‌های زیادی برای شرح حرکت پوسته‌ها وجود دارد که این تئوری‌ها همچون لاو<sup>۳</sup> دربرگیرنده‌ی غشاء و تاثیرات خمشی است [۱۰] و یا تئوری هرمن-میرسکی<sup>۴</sup> [۱۱] در برگیرنده‌ی تاثیرات اینرسی

---

<sup>1</sup> - Large Deflection

<sup>2</sup> -In-Plane

<sup>3</sup> -Love

<sup>4</sup> - Herrmann And Mirsky

چرخشی و تغییرشکل برشی می‌باشد. به هر حال نمی‌توان انتظار داشت این تئوری‌ها برای پوسته‌هایی که نسبت ضخامت به شعاع انحنا بزرگ دارند نیز برقرار باشد و این به علت فرض اساسی در همه‌ی این تئوری‌ها می‌باشد، یعنی تنش متوسط عمودی در سراسر ضخامت قابل چشم‌پوشی است. تئوری تغییرشکل برشی، تاثیرات تنش متوسط عمودی را حفظ می‌کند و بنابراین برای پوسته‌های ضخیم معتبر است. در ورق‌های ضخیم این فرض که مقاطع مسطح عمود بر صفحه‌ی میانی پس از تغییرشکل همچنان عمود بر صفحه‌ی میانی می‌مانند، در عمل صحیح نخواهد بود. با فرض اینکه خط عمود بر صفحه‌ی میانی بصورت مورب درآمده و چرخش داشته باشد ولی همچنان راست باقی بماند می‌توان تغییرشکل را بصورت  $U = u + \psi z$  تقریب زد که در آن  $u$  تغییر مکان صفحه‌ی میانی،  $z$  در راستای ضخامت پوسته که مبداء آن بر روی صفحه‌ی میانی قرار دارد،  $\psi$  چرخش و  $U$  نیز جابجایی است [۹].

### ۱-۸- مروری بر تحقیقات انجام شده

تحقیقات انجام شده مرتبط با موضوع مورد بررسی را می‌توان در بخش‌های زیر بررسی کرد:

مقالات مرتبط با تئوری تغییرشکل برشی

ورق‌های تحت بار و جرم متحرک

تیرهای ویسکوالاستیک تحت بار متحرک

پوسته‌های الاستیک

پوسته‌های ویسکوالاستیک

صالحی [۱۲] به بررسی کمانش ورق مستطیلی ویسکوالاستیک با تغییرشکل بزرگ با در نظر گرفتن تئوری تغییر شکل برشی پرداخت. معادله بنیادین از مدل ویسکوالاستیک جامد استاندارد خطی تبعیت می‌کند. معادلات تعادل حاکم بر ورق‌های مستطیل شکل در اثر بارگذاری در صفحه که باعث کمانش ورق می‌گردد ذکر شده و در ادامه با استفاده از تئوری تغییرشکل‌های برشی مرتبه بالا روابط مربوط به کرنش- تغییر مکان غیرخطی و منتجه‌های تنش بدست آمده است. در ادامه روش‌هایی

پویا<sup>۱</sup> جهت تحلیل مسأله و حل معادلات مربوط به ورق بکار گرفته شده است. نتایج عددی با استفاده از روش رهایی پویا و تفاضلات محدود<sup>۲</sup> بدست آمده و نتایج حاصله، با همین روش با در نظر گرفتن تئوری برشی مرتبه اول و همچنین تئوری کلاسیک ورق مقایسه شده است. تغییرات خیز بدون بعد، تنش و منتجه‌های تنش نسبت به زمان و سایر پارامترها بررسی شده است.

محب‌پور [۱۳] به بررسی آنالیز دینامیکی غیرخطی تیرهای لایه‌ای مرکب غیرممتقارن تحت اثر بارهای متحرک با در نظر گرفتن اثر تغییر شکل برشی پرداخت. در این پژوهش حل غیرخطی جامعی بر اساس روش عددی اجزا محدود برای مطالعه دینامیکی تیرهای مرکب غیرممتقارن تحت اثر بارهای متحرک ارائه شده است. در فرمول‌بندی مسئله اثر تغییر شکل برشی و اثرات اینرسی چرخشی نیز اعمال گردیده که بدین منظور علاوه بر آنکه معادلات حاکم برای تئوری کلاسیک لایه‌ها بدست آورده شده‌اند. معادلات حرکت برای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا نیز نوشته و حل عددی شده است.

آقای [۱۴] به بررسی خمش ویسکوالاستیک ورق‌های مدور با خیز بزرگ با استفاده از تئوری‌های تغییر شکل مرتبه بالا پرداخت. معادلات ساختاری برای ماده ویسکوالاستیک با استفاده از مدل استاندارد تعیین و معادلات تعادل حاکم بر ورق‌های مدور ضخیم در اثر بارگذاری عرضی که موجب خمش می‌شود ذکر شده و در ادامه با استفاده از تئوری تغییر شکل‌های برشی مرتبه بالا روابط مربوط به کرنش - تغییر مکان غیرخطی و منتجه‌های تنش بدست آمده است. نتایج عددی با استفاده از روش رهایی پویا و تفاضلات محدود بدست آمده و با روش المان محدود با در نظر گرفتن تئوری برشی مرتبه اول مقایسه شده است. تغییرات خیز بدون بعد، تنش و منتجه‌های تنش نسبت به زمان و سایر پارامترها بررسی شده است.

کارگرنوین و همکاران [۱۵] در مقاله‌ای به بررسی پاسخ دینامیکی تیر تیموشنکو از جنس ماده‌ی مرکب، روی بستر ویسکوالاستیک تحت تأثیر بار متحرک نوسانی پرداخته‌اند. در این کار، با استفاده از

<sup>۱</sup> -Dynamic Relaxation

<sup>۲</sup> -Finite Difference

تئوری برشی مرتبه ی اول، تحلیل دینامیکی تیر با طول بینهایت انجام شده است. سرعت حرکت بار و خصوصیات هندسی و مکانیکی تیر در طول آن ثابت می باشد. سپس با تعیین میدان جابجایی مناسب، بر اساس اصل مینی مم کل انرژی پتانسیل، معادلات دیفرانسیل حرکت استخراج گشته و با اعمال تبدیل فوریه ی مختلط نامتناهی حل می گردد. در ادامه نتایج به صورت نمودارهای خیز، نیروی برشی و تنش بر حسب فاصله از بار متحرک رسم شده و با نتایج موجود در دیگر مراجع مقایسه شده است.

ژانگ مینگ ونگ<sup>۱</sup> و همکاران [۱۶] پایداری دینامیکی ورق مستطیلی ویسکوالاستیک ناپایستار<sup>۲</sup> تحت توزیع بار مماسی یکنواخت را مورد بررسی قرار دادند. ایشان ابتدا بر پایه ی تئوری ورق نازک و رابطهی ساختاری دیفرانسیلی ویسکوالاستیک دو بعدی، معادله ی دیفرانسیل حاکم بر ارتعاشات ورق مذکور را در حوزه ی لاپلاس استخراج کردند. سپس معادله را برای مدل کلوین-ویت تعمیم داده و با استفاده از روش مربع سازی دیفرانسیلی<sup>۳</sup>، معادلات بدست آمده را برای ورق با چهار تکیه گاه ساده و ورق با دو تکیه گاه ساده و دو تکیه گاه گیردار حل کردند.

مالکزاده<sup>۴</sup> و همکاران [۱۷] یک ورق کامپوزیتی تحت بار متحرک را مورد تحلیل دینامیکی قرار دادند. ایشان جهت تعیین پاسخ دینامیکی ورق لایه ای ضخیم تحت بار متحرک نقطه ای و روی تکیه-گاه های ساده، روش حلی را بر پایه ی تئوری الاستیسیته ارائه نمودند. با استفاده از اصل همیلتون، معادلات حرکت ورق کامپوزیتی را تعیین کردند. سپس با استفاده از تئوری لایه ای<sup>۵</sup>، معادلات فوق و شرایط مرزی مربوطه را در سرتاسر ضخامت ورق گسسته کردند. در ادامه، آنالیز مودال و روش مربعات دیفرانسیلی را، برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل حاصله به کار گرفتند. برای نشان دادن دقت روش، نتایج را با حل دقیق ورق ایزوتروپ تحت بار متحرک مورد مقایسه قرار دادند. همچنین، جهت

<sup>1</sup> Zhong-Min Wang

<sup>2</sup> non-conservative

<sup>3</sup> differential quadrature method (DQM)

<sup>4</sup> Malekzadeh

<sup>5</sup> Layerwise theory

نشان دادن تأثیر تئوری‌های تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول و مرتبه‌ی بالا، نتایج بدست آمده از الاستیسیته‌ی سه بعدی در این مقاله را با نتایج تئوری‌های مذکور، مقایسه کردند، که تطابق خوبی را نشان می‌دهد. همچنین، ایشان اثر ضخامت به طول، سرعت بار و خروج از مرکز آن و آرایش لایه‌های ورق را روی پاسخ ورق، مورد مطالعه قرار دادند.

غفوری و عسگری [۱۸]، بر پایه‌ی تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، ورق کامپوزیتی لایه‌ای تحت جرم متحرک را مورد تحلیل دینامیکی قرار دادند. برای انجام این تحلیل از یک روش المان محدود استفاده کردند. همچنین از یک روش انتگرال‌گیری مستقیم جهت حل معادله‌ی حرکت حاکم، استفاده کردند. این روش را می‌توان برای شرایط مرزی مختلف، سرعت‌های مختلف و مسیرهای مختلف جرم متحرک به کار برد. ایشان جهت پیدا کردن چگونگی تأثیر پارامترهای مختلف از جمله جرم جسم متحرک و زاویه ورق‌های کامپوزیتی لایه‌ای بر پاسخ دینامیکی سیستم، بررسی‌هایی انجام دادند.

در زمینه‌ی تحلیل دینامیکی پوسته‌ها نیز کارهای زیادی انجام شده که بیشتر آن‌ها بر اساس تئوری مربوط به پوسته‌های جدار نازک است. براساس تحقیقات انجام شده، بکار گرفتن تئوری مربوط به پوسته‌های جدار نازک در تحلیل پوسته‌های جدار ضخیم، می‌تواند موجب به‌وجود آمدن خطاهای آشکاری در تحلیل فرکانس طبیعی سیستم گردد. در نتیجه تئوری کلاسیک دقت مناسبی را در تحلیل پوسته‌های جدار ضخیم ندارد. بنابراین یک تئوری پوسته‌ی جدار ضخیم برای اصلاح تئوری کیرشهف لازم است [۸].

میندلین<sup>۱</sup> و همکاران تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول<sup>۲</sup> را با استفاده از ضریب اصلاح برشی بهبود بخشیدند. در این کار به سبب فرض کرنش برشی ثابت، تنش برشی در راستای ضخامت پوسته ثابت می‌ماند که شرط صفر بودن تنش برشی در روی سطح آزاد را نقض می‌کند. که برای اصلاح این

<sup>۱</sup> - Mindlin

<sup>۲</sup> -First-order Shear Deformation Theory (FSDT)

مشکل از ضریب اصلاح برشی استفاده کردند. مقدار ضریب تصحیح برشی استفاده شده اغلب وابسته به شکل سطح مقطع در مواد ایزوتروپ است [۸].

ردی<sup>۱</sup> به منظور برقرار کردن شرط صفر بودن تنش برشی در سطح آزاد، از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی سوم<sup>۲</sup> استفاده کرد. تئوری‌های مرتبه‌ی بالا، فرمول‌بندی‌ها را بسیار پیچیده کرده و در مقابل این پیچیدگی، دقت پاسخ به میزان خیلی کمی افزایش می‌یافت. این بهبود جزئی دقت، استفاده از این تئوری‌های مرتبه بالا را در کاربردهای عمل توجیه نمی‌کرد [۸].

فیریا<sup>۳</sup> [۱۹] در کتاب خود علاوه بر تحلیل تیرها تحت بار متحرک (در حوزه‌ی الاستیک و ویسکوالاستیک)، به بررسی مسأله بار متحرک بر روی نخ و ورق پرداخته و موارد خاص دیگری را نیز بررسی کرده است. وی در این کتاب برای حل این‌گونه مسائل از دو تبدیل انتگرالی فوریه و تبدیل انتگرالی کارسون-لاپلاس استفاده کرده است. به این ترتیب که با استفاده از اولین تبدیل، متغیر  $x$  یا راستای طولی تیر را به فضای فوریه برده و با استفاده از دومین تبدیل، زمان را به فضای جدید می‌برد و سپس پاسخ را در این فضای جدید تعیین کرده و بر اساس قطب‌های این پاسخ و با استفاده از دو انتقال معکوس جواب نهایی را تعیین می‌کند.

از جمله کارهای دیگری که در حوزه‌ی تیرهای ویسکوالاستیک تحت بار متحرک انجام شده است، می‌توان به بررسی پاسخ تیر ویسکوالاستیک تحت جرم متحرک، توسط مفید<sup>۴</sup> و همکاران [۲۰] اشاره کرد. در این کار دو روش برای تعیین رفتار دینامیکی تیر ویسکوالاستیک با شرایط مرزی مختلف، تحت تأثیر جرم متحرک، ارائه شده است. اولین روش، حلی تحلیلی- عددی می‌باشد که بر اساس فرض ممان اینرسی ثابت، نادیده گرفتن اینرسی چرخشی و اثرات نیروی برشی و با استفاده از تبدیل لاپلاس، معادلات دیفرانسیل حاکم بر تیر ویسکوالاستیک بر اساس مدل کلونین، تبدیل به یک دستگاه

<sup>1</sup> - Reddy

<sup>2</sup> -Third-Order Shear Deformation Theory (TSDT)

<sup>3</sup> - Fryba

<sup>4</sup> - Mofid

معادلات معمولی شده و سپس با استفاده از روش عددی جواب این دستگاه تعیین گردیده است. در روش دوم نیز از مدل گسسته‌ی تیر استفاده شده است. به این ترتیب که تیر ویسکوالاستیک با استفاده از مجموعه‌ای از میله‌های صلب و مفاصلی که نسبت به چرخش مقاومت می‌کنند، شبیه‌سازی شده است؛ که خصوصیات فیزیکی مفصل‌ها را می‌توان با بررسی مدل ویسکوالاستیک جنس تیر تعیین کرد. در نهایت با مقایسه‌ی بین دو روش فوق صحت نتایج حاصله، تایید گردیده است.

هوانگ<sup>۱</sup> [۲۱] به بررسی پاسخ پایدار یک پوسته‌ی استوانه‌ای (جدار نازک) با طول بینهایت، همگن، در حوزه‌ی الاستیک خطی، تحت یک بار حلقوی متحرک با سرعت ثابت و در حالت متقارن محوری پرداخت. وی معادلات پوسته را با استفاده از معادلات اصلاح شده هرمن-میرسکی [۱۱] (که دربر گیرنده‌ی هر دو تغییر شکل برشی و اثرات اینرسی چرخشی است) بدست آورد و از روش تبدیل فوریه همراه با قضیه‌ی مانده‌ها برای بدست آوردن حل استفاده کرد. در تبدیل معکوس فوریه با مطرح کردن مکانیزم اتلاف انرژی، ناپایداری‌های سیستم را حذف و در نهایت به بررسی پاسخ پوسته در سرعت‌های مختلف پرداخته و پاسخ را با نتایج تئوری کلاسیک پوسته‌ها مقایسه کرده است.

این مقاله ادامه‌ی کار، مان-ناچبر<sup>۲</sup> [۲۲] بود که پاسخ دینامیکی پوسته‌های جدار نازک تحت بارهای گسسته را بررسی کرد.

ایپک چی [۲۳] به تحلیل استوانه‌ای جدار ضخیم با ضخامت متغیر تحت فشار استاتیکی و دینامیکی پرداخته است. برای این منظور، ابتدا معادلات حرکت پوسته به کمک اصل همیلتون و با استفاده از تئوری مرتبه اول هرمن-میرسکی، که اثر اینرسی دورانی و برش عرضی را در نظر می‌گیرد؛ به دست آمده‌اند. این معادلات که یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و با ضرایب متغیر است، به کمک تئوری اغتشاشات و با روش لایه مرزی حل شده است. با این روش، حل مسئله به شکل تحلیلی به دست آمده و رفتار سیستم در حوالی مرزها به خوبی مدل شده است. مقایسه نتایج با روش اجزای

---

<sup>1</sup> - Huang

<sup>2</sup> - MANN-NACHBAR



محدود نشان می‌دهد تئوری مرتبه اول، برای پیش‌بینی جابجایی شعاعی و محوری استوانه جدار ضخیم در حالت استاتیک موفق است.

تحلیل دینامیکی استوانه مرکب لایه‌ای با جداره‌ی نسبتاً ضخیم و ضخامت متغیر تحت اثر فشار داخلی متحرک و متغیر توسط سرانجام [۲۴] انجام شد. در این کار معادلات حاکم بر استوانه از جنس مواد مرکب لایه‌ای با جداره‌ی نسبتاً ضخیم و ضخامت متغیر که فشار داخلی متحرک و با اندازه‌ی متغیر درون آن ایجاد می‌شود بر اساس تئوری برشی مرتبه اول بدست آمده و به روش اجزاء محدود رفتار دینامیکی این استوانه شبیه‌سازی و کرنش‌ها و تنش‌های موجود در آن محاسبه شده است. هوانگ [۶] به بررسی حرکت اجباری روی پوسته‌ی استوانه‌ای (جدار نازک) ویسکوالاستیک پرداخت. در این کار اثرات برشی و اینرسی دورانی برای پوسته‌های نازک در نظر گرفته شد. رفتار ماده شبه-ویسکوالاستیک در برش و اتساع (یا همان فرض ضریب پواسون ثابت) فرض شده است. معادله‌ی حاکم بر پوسته‌ی ویسکوالاستیک با بکارگیری اصل تناظر بین مدول ویسکوالاستیک و الاستیک تعیین گردید و بر اساس روش شتاب مودال ویلیامز<sup>۱</sup> حل ارتعاشات اجباری را به صورت عباراتی از توابع ویژه حول حل شبه استاتیکی بسط داده شد. کاربرد این روش برای کاهش معادلات حاکم به مجموعه معادلات شبه‌استاتیکی با شرایط مرزی وابسته به زمان و یک معادلات دیفرانسیل معمولی با متغیر وابسته‌ی زمانی است.

فلسزقی<sup>۲</sup> و همکاران [۲۵] پاسخ پوسته‌ی استوانه‌ای ویسکوالاستیک جدار نازک با طول محدود تحت یک نیروی سطحی متقارن محوری متحرک را بدست آوردند. در این کار تأثیرات تغییرشکل برشی و اینرسی چرخشی نیز در نظر گرفته شده است. برای بدست آوردن معادلات در حوزه‌ی ویسکوالاستیک از اصل تناظر بر معادلات الاستیک استفاده شده و معادلات متناظر در حوزه‌ی لاپلاس بدست آمده است. حل معادلات با به کارگیری تابع گرین بدست آمده است.

<sup>۱</sup> - Williams' Modal Acceleration Method

<sup>۲</sup> - Felszeghy

هوانگ [۲۶] به بررسی پاسخ اجباری حالت پایدار پوسته‌های استوانه‌ای (جدار نازک) با طول بینهایت در حوزه ویسکوالاستیک خطی، تحت یک بار متحرک حلقوی متقارن محوری که با سرعت ثابت در طول پوسته حرکت می‌کند، پرداخت. وی معادلات پوسته‌ی ویسکوالاستیک را با بکارگیری اصل تناظر و با استفاده از معادلات اصلاح شده هرمن- میرسکی بدست آورد. این کار بسط مقاله‌ی قبلی [۲۱]، در حوزه‌ی الاستیک به ویسکوالاستیک، با استفاده از اصل تناظر بود. وی از اولین مدل جامد سه‌مانی برای شبیه‌سازی رفتار ویسکوالاستیک استفاده کرد و با فرض مهم نبودن اثرات رفتار بالک در پوسته‌ها، مقدار ضریب پواسون را ثابت گرفت. وی از روش تبدیل فوریه برای بدست آوردن حل استفاده کرد. فرض براین است که بار طوری اعمال می‌شود که ناپایداری در سیستم ظاهر نشود. به همین دلیل در تبدیل معکوس فوریه با اصلاح کردن سیستم نامیرا، ناپایداری‌های سیستم حذف شده است. وی همچنین به مطالعه‌ی تأثیرات میرایی داخلی در پاسخ دینامیکی پوسته‌های تحت بار متحرک پرداخته است. تحت فرضیات وی، تأثیرات اینرسی چرخشی و تغییر شکل برشی در پاسخ حالت پایدار سیستم ناچیز است.

منجی<sup>۱</sup> و همکاران [۲۷] از یک تئوری اصلاح شده برای بدست آوردن پاسخ دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای ویسکوالاستیک (خطی) و پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیت، استفاده کرده‌اند.

تئوری استفاده شده، رفتار دینامیکی پوسته را بدون استفاده از ضریب تصحیح، پیش‌بینی می‌کند. در این کار حل تقریبی بدست آمده علاوه بر پوسته‌های ویسکوالاستیک و کامپوزیت، در حالتی خاص برای مواد الاستیک نیز قابل استفاده است. درجه‌ی روش تقریبی اختیاری است به طوری که دقت تقریب‌ها با افزایش درجه، بیشتر می‌شود. این تئوری‌ها برای پوسته‌های استوانه‌ای عمومی و در حالتی خاص برای اشکال دایروی قابل استفاده است.

بشارتی [۲۸] به تحلیل ارتعاشی پوسته‌ی استوانه‌ای با لایه‌ی میانی ویسکوالاستیک پرداخت. در این

---

<sup>۱</sup> - Mengi

پروژه رفتار ارتعاشی پوسته استوانه‌ای الاستیک و پوسته استوانه‌ای ساندویچی با لایه مقید کننده ارتعاش، مورد بررسی قرار گرفت. جهت ارائه معادلات ریاضی حاکم بر پوسته ساندویچی سه لایه که متشکل از دو لایه الاستیک و لایه میانی ویسکوالاستیک می‌باشد از تئوری پوسته نازک و فرضیات دائل استفاده شده است. معادلات حرکت به کمک روش انرژی بدست آمده و با روش مودهای فرضی حل گردیده است. رفتار میرایی سازه با معرفی مدول مختلط برای ماده ویسکوالاستیک بیان گردیده است. میرایی سازه با تعریف تابع پاسخ فرکانسی در حوزه فرکانس با پارامترهایی از قبیل ضخامت لایه مقیدکننده، ضخامت ماده ویسکوالاستیک، مدول برشی مختلط و سختی لایه‌های الاستیک مورد مقایسه قرار گرفته است. معادلات حرکت با معکوس تبدیل فوریه گسسته، از حوزه فرکانسی به حوزه زمانی منتقل شده و در این حوزه نیز میرایی سازه بررسی شده است. برای شناخت بیشتر مواد ویسکوالاستیک، معادلات حاکم بر این مواد مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین با یک روش آزمایشگاهی، پارامترهای دینامیکی یک ماده ویسکوالاستیک مشخص اندازه‌گیری شده است. این پارامترها در تحلیل ارتعاشی سازه مورد نیاز است.

نوذریان [۲۹] به بررسی عددی توزیع تنش در مخازن تحت فشار دو لایه‌ی (ویسکوالاستیک-الاستیک) پرداخت. وی در این کار ابتدا معادلات حاکم بر مواد ویسکوالاستیک را برای مدل‌های کلونین، ماکسول و سه المانی بررسی کرده و سپس روش‌های تحلیلی محاسبه‌ی تنش کرنش در یک مخزن ویسکوالاستیک به روش دیفرانسیلی و انتگرالی ارائه داد و در نهایت با ایجاد یک کد ویژه به روش اجزاء محدود، تنش‌ها و کرنش‌ها را به صورت تابعی از زمان برای یک مخزن ویسکوالاستیک-الاستیک محاسبه کرده است. از جمله نتایج این تحقیق تأثیر در نظر گرفتن رفتار ویسکوالاستیک لایه‌ی داخلی در کاهش ضخامت لازم برای پوسته‌ی الاستیک می‌باشد.

### ۹-۱- جمع بندی

بررسی‌های انجام شده نشان می‌دهد، تحلیل‌های صورت گرفته در حوزه‌ی پوسته‌ها تحت بار فشاری

متحرک، بیشتر متوجه مواد الاستیک بوده در حالی که طیف بسیار گسترده‌ای از مواد پیرامون ما در حوزه‌ی ویسکوالاستیک قرار دارند و شناخت رفتار مکانیکی این مواد به دلیل رفتار متفاوت نسبت به مواد الاستیک از اهمیت بالایی برخوردار است. همچنین عمدتاً کارها در زمینه‌ی پوسته‌های جدار نازک با صرف‌نظر از تغییرشکل برشی و حل آن‌ها بر اساس روش‌های عددی است.

تحقیقی که در اینجا ارائه شده است، به تعیین حل پوسته‌های ویسکوالاستیک جدار ضخیم تحت فشار متحرک محوری با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه‌ی اول اختصاص دارد. بر این اساس معادلات حاکم در حوزه‌ی ویسکوالاستیک با استفاده از اصل همپلتون و روش آپراتوری ( برای شبیه‌سازی خصوصیت ویسکوالاستیک ماده بر اساس اولین مدل جامد استاندارد خطی) تعیین شده است. معادلات حاکم که یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی کوپل بهم است به صورت تحلیلی به کمک تبدیلات لاپلاس و تئوری اغتشاشات حل شده و نتایج با تحلیل عددی انجام شده با نرم افزار `ansys`، مقایسه شده است.

## فصل دوم: معادلات حرکت

۲-۱- مقدمه :

در این فصل معادلات حرکت پوسته‌ی استوانه‌ای جدار ضخیم به کمک اصل همیلتون بدست آمده است. میدان جابجایی، مطابق تئوری تغییرشکل برشی مرتبه‌ی اول فرض شده و فرضیات زیر نیز در نظر گرفته شده است :

- ۱- پوسته همگن و همسانگرد است.
- ۲- بارگذاری بر روی پوسته به صورت متقارن محوری است.
- ۳- شعاع داخلی و ضخامت پوسته ثابت است.
- ۴- خطوط عمود بر صفحه‌ی میانی پس از تغییرشکل راست باقی مانده ولی عمود بر صفحه‌ی میانی باقی نمی‌مانند.
- ۵- جابجایی‌های پوسته کوچک و در حوزه‌ی خطی بررسی می‌شود.
- ۶- از تنش اولیه صرف‌نظر می‌شود.
- ۷- رابطه‌ی تنش- کرنش تابع قانون هوک است.
- ۸- شرایط مرزی پوسته، دو سر گیر دار است.

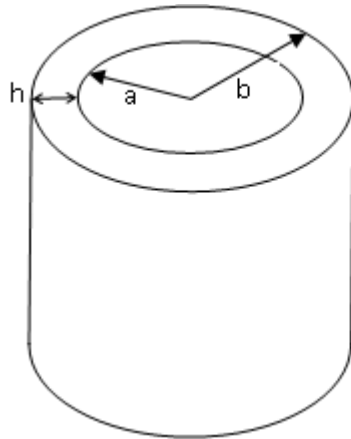
۲-۲- تئوری تغییر شکل برشی

تجربه نشان می‌دهد که تئوری لاو(۱) - پوسته نازک فرض می‌شود ۲- مقاطع عمود بر صفحه‌ی میانی پوسته بعد از تغییرشکل به صورت عمود بر صفحه‌ی میانی باقی می‌مانند، خیز را کمتر از مقدار واقعی و فرکانس طبیعی را بیشتر از مقدار واقعی پیش‌بینی می‌کند زیرا مطابق این نظریه از اثر برشی عرضی صرف‌نظر می‌شود. کرنش‌های عرضی هرچند کوچکند ولی صفر نیستند. برای پوسته‌های ضخیم به ویژه در نواحی اعمال بار متمرکز توزیع تنش‌های برشی عرضی می‌تواند بزرگ باشد [۱]. بر این اساس معادلات حاکم بر پوسته‌ی استوانه‌ای با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول به صورت زیر تعیین می‌شود.

## فصل دوم: تعیین معادلات حرکت

یک پوسته‌ی استوانه‌ای با شعاع داخلی  $a$  و شعاع خارجی  $b$  مفروض است. ضخامت پوسته  $h = b - a$

و شعاع میانی  $R = \frac{(a+b)}{2}$  است.



شکل (۱-۲) پوسته‌ی استوانه‌ای جدار ضخیم

برای فرمول‌بندی از سیستم مختصات استوانه‌ای  $(\theta, x, z)$  استفاده شده است که در آن  $x$  جهت محوری پوسته،  $\theta$  جهت محیطی پوسته و  $z$  عمود بر  $x$  و  $\theta$  بوده و از صفحه‌ی میانی اندازه‌گیری شده و جهت مثبت آن از صفحه‌ی میانی به سمت خارج است. میدان جابجایی هر نقطه‌ی پوسته با  $u_z, u_\theta, u_x$  مشخص می‌شود.

با توجه به اینکه هندسه، بارگذاری، جنس و شرایط مرزی پوسته مستقل از  $\theta$  است، مسأله متقارن محوری است و  $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$  می‌باشد. بدین ترتیب، بر اساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه‌ی اول میدان جابجایی با دو مؤلفه‌ی  $\bar{u}_z, \bar{u}_x$  و به صورت رابطه‌ی (۱-۲) تخمین زده خواهند شد و با تعیین انرژی کرنشی، انرژی جنبشی و کار نیروهای خارجی، بر اساس این میدان جابجایی و با بهره‌گرفتن از اصل همپلتون روابط حاکم بر پوسته استخراج می‌شود.

## فصل دوم: تعیین معادلات حرکت

$$\begin{cases} \bar{u}_x = u(x, t) + z \Psi_x(x, t) \\ \bar{u}_z = w(x, t) + z \Psi_z(x, t) \end{cases} \quad (1-2)$$

$u$  و  $w$  اجزاء جابجایی یک ذره روی سطح میانی ( $z = 0$ ) بوده و  $\Psi_x$  زاویه چرخش سطح مقطع در صفحه‌ی  $X-Z$  و  $\Psi_z$  کرنش عمودی عرضی است.

بر اساس میدان جابجایی در رابطه‌ی (۱-۲)، میدان کرنش به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\begin{cases} e_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \Psi_x}{\partial x} & \gamma_{x\theta} = 0 \\ e_{\theta\theta} = \frac{u_z}{r} = \frac{w}{R+z} + \frac{z}{R+z} \Psi_z & \gamma_{xz} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} = \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \Psi_x \right) + z \frac{\partial \Psi_z}{\partial x} \\ e_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = \Psi_z & \gamma_{z\theta} = 0 \end{cases} \quad (2-2)$$

چگالی انرژی کرنشی عبارتست از:

$$\begin{aligned} 2W^* &= \sigma_{xx} e_{xx} + \sigma_{\theta\theta} e_{\theta\theta} + \sigma_{zz} e_{zz} + \sigma_{xz} \gamma_{xz} = \\ &\sigma_{xx} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \Psi_x}{\partial x} \right) + \sigma_{\theta\theta} \left( \frac{w}{R+z} + \frac{z}{R+z} \Psi_z \right) + \sigma_{zz} (\Psi_z) + \sigma_{xz} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \Psi_x + z \frac{\partial \Psi_z}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (3-2)$$

انرژی کرنشی پوسته با انتگرال گیری روی حجم بدست می‌آید. المان حجم  $(R+z)d\theta dz dx$  است که:

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq x \leq L, \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (4-2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{W}}{2\pi} &= \int_0^L \left\{ R N_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + R M_{xx} \frac{\partial \Psi_x}{\partial x} + N_{\theta\theta} w + M_{\theta\theta} \Psi_z + R N_{zz} \Psi_z \right. \\ &\left. + R Q_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \Psi_x \right) + R M_{xz} \frac{\partial \Psi_z}{\partial x} \right\} dx \end{aligned} \quad (5-2)$$

که  $\bar{W}$  انرژی کرنشی و منتجه‌های تنش به صورت زیر تعریف شده‌اند:



$$\begin{aligned}
 N_{xx} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{xx} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz & N_{zz} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{zz} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz \\
 M_{xx} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{xx} \left(1 + \frac{z}{R}\right) z dz & Q_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{xz} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz \\
 N_{\theta\theta} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{\theta\theta} dz & M_{xz} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{xz} \left(1 + \frac{z}{R}\right) z dz \\
 M_{\theta\theta} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{\theta\theta} z dz
 \end{aligned} \tag{۶-۲}$$

چگالی انرژی جنبشی  $T^*$  عبارتست از:

$$T^* = \frac{1}{2} \rho \left[ \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \rho \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} + z \frac{\partial \Psi_x}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} + z \frac{\partial \Psi_z}{\partial t} \right)^2 \right] \tag{۷-۲}$$

$\rho$  چگالی است. با انتگرال گیری از این رابطه روی حجم، انرژی جنبشی پوسته تعیین می شود:

$$\begin{aligned}
 \frac{\bar{T}}{\pi} &= \int_0^L \rho \left[ R h \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + R h \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \frac{h^3}{6} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial \Psi_x}{\partial t} \right) + \frac{h^3}{6} \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial \Psi_z}{\partial t} \right) + \right. \\
 &\left. \frac{R h^3}{12} \left( \frac{\partial \Psi_x}{\partial t} \right)^2 + \frac{R h^3}{12} \left( \frac{\partial \Psi_z}{\partial t} \right)^2 \right] dx
 \end{aligned} \tag{۸-۲}$$

که  $\bar{T}$  انرژی جنبشی کل است.

اگر  $f_x, f_z$  به ترتیب اجزاء  $x, z$  نیروی خارجی بر واحد سطح ( $x$  محوری و  $z$  شعاعی) بوده که به مرز

پوسته اعمال می شوند؛ کار نیروهای خارجی  $W_s = \iint (f_x u_x + f_z u_z) ds$  است.

انتگرال گیری بر روی تمام سطح پوسته انجام می شود. این سطح شامل ۲ مرز استوانه ای  $z = \pm \frac{h}{2}$  و

دو سطح مقطع انتهایی  $x = 0, L$  است.

$$\begin{aligned}
 W_s &= 2\pi R \int_0^L (F_x u + m_x \Psi_x + q w + m_z \Psi_z) dx \\
 &+ R \left[ N_{xx}^* u + M_{xx}^* \Psi_x + Q_x^* w + M_{xz}^* \Psi_z \right]_{x=0}^{x=L}
 \end{aligned} \tag{۹-۲}$$

که در آن:

$$\left\{ \begin{array}{ll} F_x = \left(1 + \frac{z}{R}\right) f_x \Big|_{z=-\frac{h}{2}}^{z=+\frac{h}{2}} & m_x = z \left(1 + \frac{z}{R}\right) f_x \Big|_{z=-\frac{h}{2}}^{z=+\frac{h}{2}} \\ q = \left(1 + \frac{z}{R}\right) f_z \Big|_{z=-\frac{h}{2}}^{z=+\frac{h}{2}} & m_z = z \left(1 + \frac{z}{R}\right) f_z \Big|_{z=-\frac{h}{2}}^{z=+\frac{h}{2}} \\ N_{xx}^* = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} f_x \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz & M_{xx}^* = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} f_x z \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz \\ Q_x^* = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} f_z \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz & M_{xz}^* = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} f_z z \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz \end{array} \right. \quad (10-2)$$

### ۳-۲- تعیین معادلات حرکت با استفاده از اصل همیلتون:

طبق اصل همیلتون:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad (11-2)$$

که این اصل برای بدست آوردن معادلات حرکت و شرایط مرزی و اولیه‌ی مناسب بکار گرفته می‌شود و در آن:

$$\delta \bar{L} = \delta \bar{T} - \delta \bar{W} + \delta \bar{W}_s \quad (12-2)$$

؛

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta \bar{W}}{\pi} = \int_0^L \left\{ R N_{xx} \delta \frac{\partial u}{\partial x} + R M_{xx} \delta \frac{\partial \Psi_x}{\partial x} + N_{\theta\theta} \delta w + M_{\theta\theta} \delta \Psi_z + R N_{zz} \delta \Psi_z \right. \\ \left. + R Q_x \delta \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \Psi_x \right) + R M_{xz} \delta \frac{\partial \Psi_z}{\partial x} \right\} dx \\ \frac{\delta \bar{T}}{2\pi} = \int_0^L \rho \left[ R h \frac{\partial u}{\partial t} \delta \frac{\partial u}{\partial t} + R h \frac{\partial w}{\partial t} \delta \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{h^3}{12} \frac{\partial u}{\partial t} \delta \frac{\partial \Psi_x}{\partial t} + \frac{h^3}{12} \frac{\partial \Psi_x}{\partial t} \delta \frac{\partial u}{\partial t} \right. \\ \left. + \frac{h^3}{12} \frac{\partial w}{\partial t} \delta \frac{\partial \Psi_z}{\partial t} + \frac{h^3}{12} \frac{\partial \Psi_z}{\partial t} \delta \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{R h^3}{12} \frac{\partial \Psi_x}{\partial t} \delta \frac{\partial \Psi_x}{\partial t} + \frac{R h^3}{12} \frac{\partial \Psi_z}{\partial t} \delta \frac{\partial \Psi_z}{\partial t} \right] \end{array} \right. \quad (13-2)$$

$$\begin{cases} \delta W_s = 2\pi R \int_0^L (F_x \delta u + m_x \delta \Psi_x + q \delta w + m_z \delta \Psi_z) dx \\ + 2\pi R \left[ N_{xx}^* \delta u + M_{xx}^* \delta \Psi_x + Q_x^* \delta w + M_{xz}^* \delta \Psi_z \right]_{x=0}^{x=L} \end{cases}$$

با جایگذاری (۲-۱۳) در (۲-۱۱) و (۲-۱۲) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \delta \bar{L} = \int_0^L \int_{t_1}^{t_2} 2\pi \left[ (-Rh \rho \ddot{u} - \frac{\rho h^3}{12} \ddot{\Psi}_x + R N'_{xx} + R F_x) \delta u \right. \\ \left. - (\frac{\rho h^3}{12} \ddot{u} - R \frac{\rho h^3}{12} \ddot{\Psi}_x - R Q_x + R M'_{xx} + R m_x) \delta \Psi_x \right. \\ \left. + \left( (-Rh \rho \ddot{w} - \frac{\rho h^3}{12} \ddot{\Psi}_z - N_{\theta\theta} + R Q'_x + R q) \delta w \right. \right. \\ \left. \left. + (-R \frac{\rho h^3}{12} \ddot{\Psi}_x - \frac{\rho h^3}{12} \ddot{w} - M_{\theta\theta} - R N_{xx} + R M'_{xx} + R m_z) \delta \Psi_z \right] dx \right. \\ \left. + 2\pi R \left[ (N_{xx}^* - N_{xx}) \delta u + (M_{xx}^* - M_{xx}) \delta \Psi_x \right. \right. \\ \left. \left. + (Q_x^* - Q_x) \delta w + (M_{xz}^* - M_{xz}) \delta \Psi_z \right]_{\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} = 0 \right. \end{aligned} \quad (۲-۱۴)$$

که علامت پریم و نقطه به ترتیب مشخص کننده‌ی مشتق نسبت به  $t, x$  می‌باشند. از این رابطه نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} N'_{xx} + F_x = \rho h \left( \ddot{u} + \frac{h^2}{12R} \ddot{\Psi}_x \right) \\ M'_{xx} - Q_x + m_x = \frac{\rho h^3}{12} \left( \ddot{\Psi}_x + \frac{1}{R} \ddot{u} \right) \\ Q'_x - \frac{N_{\theta\theta}}{R} + q = \rho h \left( \ddot{w} + \frac{h^2}{12R} \ddot{\Psi}_z \right) \\ M'_{xz} - N_{zz} - \frac{M_{\theta\theta}}{R} + m_z = \frac{\rho h^3}{12} \left( \ddot{\Psi}_z + \frac{1}{R} \ddot{w} \right) \end{cases} \quad (۲-۱۵)$$

شرط اولیه‌ی مساله، معلوم بودن جابجایی و سرعت اولیه است. شرایط مرزی مساله، معلوم بودن  $N_{xx} u, M_{xx} \Psi_x, Q_x w, M_{xz} \Psi_z$  در دو انتهای پوسته است.

## ۲-۴- رابطه ی تنش - جابجایی در حالت ویسکوالاستیک

همان‌گونه که در فصل قبل اشاره شد، در مواد ویسکوالاستیک بخش‌های انحرافی و حجمی تنش رفتارهای رهائش متفاوتی را دنبال می‌کنند. با توجه به اینکه در پوسته‌ها رفتار برشی پوسته اهمیت بیشتری دارد، از این فرض مرسوم استفاده شده و رفتار ماده در بالک الاستیک و در برش، ویسکوالاستیک در نظر گرفته می‌شود. بدین ترتیب تعیین، تئوری پوسته‌های جدار ضخیم در حوزه‌ی ویسکوالاستیک شامل مراحل زیر است:

### ۲-۴-۱- قانون تعمیم یافته ی هوک

روابط تنش- کرنش یک جسم جامد سه بعدی ایزوتروپیک الاستیک که از قانون هوک پیروی می‌کند، به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \left(K - \frac{2}{3}G\right)(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) + 2G\varepsilon_{xx} \\ \sigma_{\theta\theta} &= \left(K - \frac{2}{3}G\right)(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) + 2G\varepsilon_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} &= \left(K - \frac{2}{3}G\right)(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) + 2G\varepsilon_{zz} \\ \sigma_{xz} &= G\varepsilon_{xz}\end{aligned}\quad (۱۶-۲)$$

### ۲-۴-۲- جایگزینی آپراتورهای K و G ماده ویسکوالاستیک

مقادیر K, G بصورت آپراتوری و مطابق روابط (۱-۲۰) است. با جایگزین کردن این مقادیر در معادلات فوق، روابط تنش- کرنش مواد ویسکوالاستیک به صورت آپراتوری زیر بدست می‌آید [۱۶]:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{1}{3} \frac{Q_2 P_1 \varepsilon_{xx} + Q_2 P_1 \varepsilon_{\theta\theta} + Q_2 P_1 \varepsilon_{zz} + 2Q_1 P_2 \varepsilon_{xx} - Q_1 P_2 \varepsilon_{\theta\theta} - Q_1 P_2 \varepsilon_{zz}}{P_2 P_1} \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{3} \frac{Q_2 P_1 \varepsilon_{xx} + Q_2 P_1 \varepsilon_{\theta\theta} + Q_2 P_1 \varepsilon_{zz} - Q_1 P_2 \varepsilon_{xx} + 2Q_1 P_2 \varepsilon_{\theta\theta} - Q_1 P_2 \varepsilon_{zz}}{P_2 P_1} \\ \sigma_{zz} &= \frac{1}{3} \frac{Q_2 P_1 \varepsilon_{xx} + Q_2 P_1 \varepsilon_{\theta\theta} + Q_2 P_1 \varepsilon_{zz} - Q_1 P_2 \varepsilon_{xx} - Q_1 P_2 \varepsilon_{\theta\theta} + 2Q_1 P_2 \varepsilon_{zz}}{P_2 P_1} \\ \sigma_{xz} &= \frac{Q_1 \varepsilon_{xz}}{P_1}\end{aligned}\quad (۱۷-۲)$$

### ۲-۴-۳- تعیین نتیجه های تنش در حوزه ی ویسکوالاستیک

با توجه به اینکه در روابط تنشی بالا، مخرج مشترک تمام چهار معادله، آپراتور  $P_2P_1$  می باشد، به همین منظور و برای راحتی کار، حاصل ضرب نتیجه های تنش (معادله (۲-۶)) در آپراتور  $P_2P_1$  تعیین می شود. بدین ترتیب روابط بین نتیجه های تنش (ضربدر آپراتور  $P_1P_2$ ) با کرنش بدست می آید:

$$NN_{xx} = P_2P_1N_{xx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} P_2P_1\sigma_{xx} (1 + \frac{z}{R}) dz \quad (۱۸-۲)$$

حال با استفاده از رابطه ی کرنش- جابه جایی، روابط بین نتیجه های تنش (ضربدر آپراتور  $P_2P_1$ ) با جابجایی تعیین می شود:

$$\begin{aligned} NN_{xx} = & (\frac{h}{36R}) \{ [12Q_2P_1R \frac{\partial}{\partial x} u(x,t)] + [12Q_2P_1R \Psi_z(x,t)] + [24Q_1P_2R \frac{\partial}{\partial x} u(x,t)] \\ & - [12Q_1P_2R \Psi_z(x,t)] + [12Q_2P_1w(x,t)] - [12Q_1P_2w(x,t)] \\ & + [Q_2P_1h^2 \frac{\partial}{\partial x} \Psi_x(x,t)] + [2Q_1P_2h^2 \frac{\partial}{\partial x} \Psi_x(x,t)] \} \end{aligned} \quad (۱۹-۲)$$

### ۲-۴-۴- انتخاب مدل ویسکوالاستیک

از این به بعد برای کاهش حجم محاسبات، معادلات برای مدل مورد استفاده در این تحلیل تعیین می شود. در این تحلیل رفتار ماده در برش ویسکوالاستیک و در بالک الاستیک فرض می شود. برای مدل سازی ویسکوالاستیک از اولین مدل جامد سه المانی استفاده می شود که شکل شماتیک آن شکل (۱-۵) و رابطه ی کلی تنش کرنش آن مطابق معادله ی (۱-۲۶) است. در این حالت مقدار دقیق آپراتورهای  $P_1, Q_1$  در رابطه ی (۱-۱۸) به صورت زیر تعیین می شوند:

$$\begin{aligned} P_1 = & (\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2}) + \frac{\eta}{G_1G_2} \frac{\partial}{\partial t} \\ Q_1 = & 2(1 + \frac{\eta}{G_2} \frac{\partial}{\partial t}) \end{aligned} \quad (۲۰-۲)$$

و با توجه به اینکه رفتار پوسته در بالک، الاستیک است، آپراتورهای  $P_2, Q_2$  نیز به صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$\begin{aligned} P_2 &= 1 \\ Q_2 &= 3K \end{aligned} \quad (21-2)$$

### ۲-۴-۵- تعیین معادلات بر اساس مدل انتخابی

بر اساس مدل انتخابی، مقادیر  $P_1, P_2, Q_1, Q_2$  معلوم می‌شوند. با قرار دادن این مقادیر در رابطه (۲-۱۹)، روابط بین منته‌های تنش (ضربدر آپراتور  $P_1 P_2$ ) با جابجایی برای مدل مورد نظر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} NN_{xx} &= \left( \frac{h}{36RG_1G_2} \right) \{ [36KR\eta D \frac{\partial}{\partial x} u(x,t)] + [36KR\eta D \Psi_z(x,t)] + [48RG_1\eta D \frac{\partial}{\partial x} u(x,t)] \\ &- [24RG_1\eta D \Psi_z(x,t)] + [36KRG_2 \frac{\partial}{\partial x} u(x,t)] + [36KRG_1 \frac{\partial}{\partial x} u(x,t)] + [36K\eta Dw(x,t)] \\ &+ [36KRG_2 \Psi_z(x,t)] + [36KRG_1 \Psi_z(x,t)] + [48RG_1G_2 \frac{\partial}{\partial x} u(x,t)] - [24G_1\eta Dw(x,t)] \\ &- [24RG_1G_2 \Psi_z(x,t)] + [36KG_2 w(x,t)] + [36KG_1 w(x,t)] - [24G_1G_2 w(x,t)] + [4h^2G_1G_2 \frac{\partial}{\partial x} \Psi_x(x,t)] \\ &+ [3Kh^2G_2 \frac{\partial}{\partial x} \Psi_x(x,t)] + [3Kh^2G_1 \frac{\partial}{\partial x} \Psi_x(x,t)] + [4h^2G_1\eta D \frac{\partial}{\partial x} \Psi_x(x,t)] + [3Kh^2\eta D \frac{\partial}{\partial x} \Psi_x(x,t)] \} \end{aligned} \quad (22-2)$$

که در رابطه فوق  $D$  آپراتور مشتق است. بقیه‌ی روابط بین منته‌های تنش (ضرب در آپراتور  $P_1 P_2$ ) با جابجایی مشابه رابطه‌ی فوق تعیین می‌شوند. در این روابط  $\kappa^2$  ضریب تصحیح برشی بوده و مقادیر  $\alpha, \beta, \gamma$  به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned} \alpha &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{dz}{R+z} = Ln \frac{1+h/2R}{1-h/2R} \\ \beta &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{z dz}{R+z} = h - R\alpha \\ \gamma &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{z^2 dz}{R+z} = \alpha R^2 - Rh \end{aligned} \quad (23-2)$$

حال با ضرب طرفین هر چهار معادله (۲-۱۵) در آپراتور  $P_1 P_2$  و قرار دادن منته‌های تنش ویسکوالاستیک (معادله (۲-۲۲))، معادلات پوسته‌ی استوانه‌ای جدار ضخیم در حوزه‌ی ویسکوالاستیک بدست می‌آید. این معادلات در جدول‌های (۲-۱) تا (۲-۴) آورده شده است.

فصل دوم: تعیین معادلات حرکت

جدول (۱-۲) اولین معادله

operator		
$\left(\frac{h}{36G_1G_2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \left\{ 36k \eta \frac{\partial}{\partial t} + 48G_1 \eta \frac{\partial}{\partial t} + 36k (G_1 + G_2) + 48G_1 G_2 \right\}$ $-\left(\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} + \frac{\eta}{G_1G_2} \frac{\partial}{\partial t}\right) \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2}$		$u(x, t)$
$\left(\frac{h^3}{36G_1R G_2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \left\{ 4G_1G_2 + 3k (G_1 + G_2) + 4G_1 \eta \frac{\partial}{\partial t} + 3k \eta \frac{\partial}{\partial t} \right\}$ $-\frac{\rho h^3}{12R} \left(\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} + \frac{\eta}{G_1G_2} \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2}{\partial t^2}$		$\psi_x(x, t)$
$\left(\frac{h}{36G_1R G_2} \frac{\partial}{\partial x}\right) \left\{ 36k \eta \frac{\partial}{\partial t} - 24G_1 \eta \frac{\partial}{\partial t} + 36k (G_1 + G_2) - 24G_1G_2 \right\}$		$w(x, t)$
$\left(\frac{h}{36G_1G_2} \frac{\partial}{\partial x}\right) \left\{ 36k \eta \frac{\partial}{\partial t} - 24G_1 \eta \frac{\partial}{\partial t} + 36k (G_1 + G_2) - 24G_1G_2 \right\}$		$\psi_z(x, t)$
	$\left(\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} + \frac{\eta}{G_1G_2} \frac{\partial}{\partial t}\right)$	$F_x$

جدول (۲-۲) دومین معادله

operator		
$\left(\frac{h^3}{36R G_1G_2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \left\{ 3k \eta \frac{\partial}{\partial t} + 4G_1 \eta \frac{\partial}{\partial t} + 3k (G_1 + G_2) + 4G_1 G_2 \right\}$ $-\left(\frac{\rho h^3}{12R}\right) \left(\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} + \frac{\eta}{G_1G_2} \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2}{\partial t^2}$		$u(x, t)$
$\left(\frac{h^3}{36G_1G_2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \left\{ 4G_1 \eta \frac{\partial}{\partial t} + 3k \eta \frac{\partial}{\partial t} + 3k (G_1 + G_2) + 4G_1 G_2 \right\}$ $-\frac{\kappa^2 h}{2} \left(2 + \frac{2\eta}{G_2} \frac{\partial}{\partial t}\right) - \left(\frac{\rho h^3}{12}\right) \left(\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} + \frac{\eta}{G_1G_2} \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2}{\partial t^2}$		$\psi_x(x, t)$
	$-\frac{\kappa^2 h}{2} \left(2 + \frac{2\eta}{G_2} \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial}{\partial x}$	$w(x, t)$
$\left(\frac{h^3}{36R G_1G_2} \frac{\partial}{\partial x}\right) \left\{ 6k \eta \frac{\partial}{\partial t} + 6k (G_1 + G_2) - 4G_1 \eta \frac{\partial}{\partial t} - 4G_1 G_2 \right\}$ $-\kappa^2 \left(\frac{h^3}{24R}\right) \left(2 + \frac{2\eta}{G_2} \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial}{\partial x}$		$\psi_z(x, t)$
	$\left(\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} + \frac{\eta}{G_1G_2} \frac{\partial}{\partial t}\right)$	$m_x$

فصل دوم: تعیین معادلات حرکت

جدول (۳-۲) سومین معادله

operator		
$-\left(\frac{k h}{R}\right)\left(\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} + \frac{\eta}{G_1 G_2} \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{h}{3R}\right)\left(2 + \frac{2\eta}{G_2} \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial}{\partial x}$		$u(x, t)$
$\frac{\kappa^2 h}{2} \left(2 + \frac{2\eta}{G_2} \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial}{\partial x}$		$\psi_x(x, t)$
$\frac{\kappa^2 h}{2} \left(2 + \frac{2\eta}{G_2} \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\alpha k}{R} \left(\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} + \frac{\eta}{G_1 G_2} \frac{\partial}{\partial t}\right) - \frac{2\alpha}{3R} \left(2 + \frac{2\eta}{G_2} \frac{\partial}{\partial t}\right) - \rho h \left(\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} + \frac{\eta}{G_1 G_2} \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2}{\partial t^2}$		$w(x, t)$
$\frac{\kappa^2 h^3}{24R} \left(2 + \frac{2\eta}{G_2} \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \left(\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} + \frac{\eta}{G_1 G_2} \frac{\partial}{\partial t}\right) \left\{ \frac{k h}{R} + \frac{\beta k}{R} + \frac{\rho h^3}{12R} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} - \frac{1}{3R} \left(2 + \frac{2\eta}{G_2} \frac{\partial}{\partial t}\right) \{2\beta - h\}$		$\psi_z(x, t)$
$\left(\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} + \frac{\eta}{G_1 G_2} \frac{\partial}{\partial t}\right)$		$q_x$

جدول (۴-۲) چهارمین معادله

operator		
$\left(\frac{h}{36 G_1 G_2} \frac{\partial}{\partial x}\right) \{-36k \eta \frac{\partial}{\partial t} + 24G_1 \eta \frac{\partial}{\partial t} - 36k (G_1 + G_2) + 24 G_1 G_2\}$		$u(x, t)$
$+\left(\frac{h^3}{36 R G_1 G_2} \frac{\partial}{\partial x}\right) \{-3k \eta \frac{\partial}{\partial t} + 2G_1 \eta \frac{\partial}{\partial t} + 2G_1 G_2 - 3k (G_1 + G_2)\}$ $\left(\frac{\kappa^2 h^3}{12G_2 R}\right) \left(G_2 + \eta \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial}{\partial x} - \left(\frac{k h^3}{12R}\right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} + \frac{\eta}{G_1 G_2} \frac{\partial}{\partial t}\right) + \left(\frac{h^3}{36R}\right) \left(2 + \frac{2\eta}{G_2} \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial}{\partial x}$		$\psi_x(x, t)$
$+\left(\frac{h}{36 R G_1 G_2}\right) \{-36k \eta \frac{\partial}{\partial t} + 24G_1 \eta \frac{\partial}{\partial t} - 36k (G_1 + G_2) + 24 G_1 G_2\}$ $\left(\frac{\kappa^2 h^3}{12G_2 R}\right) \left(G_2 + \eta \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \left(\frac{\rho h^3}{12R} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\beta k}{R}\right) \left(\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} + \frac{\eta}{G_1 G_2} \frac{\partial}{\partial t}\right) - \frac{2\beta}{3R} \left(2 + \frac{2\eta}{G_2} \frac{\partial}{\partial t}\right)$		$w(x, t)$
$+\left(\frac{h}{36 G_1 G_2}\right) \{-36k \eta \frac{\partial}{\partial t} - 48 G_1 \eta \frac{\partial}{\partial t} - 36k (G_1 + G_2) - 48 G_1 G_2\}$ $\left(\frac{\kappa^2 h^3}{12G_2}\right) \left(G_2 + \eta \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \left(\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} + \frac{\eta}{G_1 G_2} \frac{\partial}{\partial t}\right) \left\{ + \frac{\gamma k}{R} + \left(\frac{\rho h^3}{12}\right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} - \frac{2\gamma}{3R} \left(2 + \frac{2\eta}{G_2} \frac{\partial}{\partial t}\right)$		$\psi_z(x, t)$
$\left(\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} + \frac{\eta}{G_1 G_2} \frac{\partial}{\partial t}\right)$		$m_z$



## فصل دوم: تعیین معادلات حرکت

این معادلات به شکل ماتریسی زیر قابل بازنویسی است:

$$\begin{aligned}
 & [A_1] \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + [A_3] \frac{\partial y}{\partial x} + [A_4] y + [A_6] \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + [A_7] \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \\
 & [A_8] \frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial t} + [A_9] \frac{\partial y}{\partial t} + [AA] \frac{\partial y^3}{\partial t^3} + f = 0
 \end{aligned}
 \quad , y = \begin{cases} u(x, t) \\ \psi_x(x, t) \\ w(x, t) \\ \psi_z(x, t) \end{cases} \quad (24-2)$$

که ماتریس‌های ضرایب عبارتند از:

$$[A_1] = \begin{bmatrix} \left(\frac{h}{36G_1G_2}\right)(36k(G_1+G_2)+48G_1G_2) & \left(\frac{h^3}{36RG_1G_2}\right)(3k(G_1+G_2)+4G_1G_2) & 0 & 0 \\ \left(\frac{h^3}{36RG_1G_2}\right)(3k(G_1+G_2)+4G_1G_2) & \left(\frac{h^3}{36G_1G_2}\right)(3k(G_1+G_2)+4G_1G_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\kappa^2h}{2} & \frac{\kappa^2h^3}{12R} \\ 0 & 0 & \frac{\kappa^2h^3}{12R} & \left(\frac{\kappa^2h^3}{12}\right) \end{bmatrix} \quad (25-2)$$

$$[A_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \left(\frac{h}{36G_1RG_2}\right)(36k(G_1+G_2)-24G_1G_2) & \left(\frac{h}{36G_1G_2}\right)(36k(G_1+G_2)-24G_1G_2) \\ 0 & 0 & -\frac{2\kappa^2h}{2} & \left(\frac{h^3}{36RG_1G_2}\right)(6k(G_1+G_2)-4G_1G_2)-\left(\frac{\kappa^2h^3}{12R}\right) \\ -\left(\frac{h}{36G_1RG_2}\right)(36k(G_1+G_2)-24G_1G_2) & \frac{2\kappa^2h}{2} & 0 & 0 \\ \left(\frac{h}{36G_1G_2}\right)(-36k(G_1+G_2)+24G_1G_2) & \left(\frac{h^3}{36RG_1G_2}\right)(-6k(G_1+G_2)+4G_1G_2)+\left(\frac{\kappa^2h^3}{12R}\right) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (25-2)$$

$$[A_4] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2\kappa^2 h}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\alpha k}{R} \left( \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} \right) - \frac{4\alpha}{3R} & -\frac{2}{3R} \{2\beta - h\} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3R} \{2\beta - h\} & -\left( \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} \right) \left( \frac{k h}{R} + \frac{\beta k}{R} \right) \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3R} \{2\beta - h\} & -\frac{4\gamma}{3R} - \frac{\gamma k}{R} \left( \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} \right) \\ 0 & 0 & -\left( \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} \right) \left( \frac{k h}{R} + \frac{\beta k}{R} \right) & + \left( \frac{h}{36 G_1 G_2} \right) (-36k (G_1 + G_2) - 48 G_1 G_2) \end{bmatrix} \quad (25-2)$$

$$[A_6] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \left( \frac{h}{36 G_1 R G_2} \right) (36k \eta - 24G_1 \eta) & \left( \frac{h}{36 G_1 G_2} \right) (36k \eta - 24G_1 \eta) \\ 0 & 0 & -\frac{\kappa^2 h}{G_2} \eta & \left( \frac{h^3}{36 R G_1 G_2} \right) (6k \eta - 4G_1 \eta) \\ -\left( \frac{h}{36 G_1 R G_2} \right) (36k \eta - 24G_1 \eta) & \frac{\kappa^2 h}{G_2} \eta & 0 & -\left( \frac{\kappa^2 h^3}{12 G_2 R} \right) \eta \\ \left( \frac{h}{36 G_1 G_2} \right) (-36k \eta + 24G_1 \eta) & \left( \frac{h^3}{36 R G_1 G_2} \right) (-6k \eta + 4G_1 \eta) & 0 & 0 \\ \left( \frac{h}{36 G_1 G_2} \right) (-36k \eta + 24G_1 \eta) & + \left( \frac{\kappa^2 h^3}{12 G_2 R} \right) \eta & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (25-2)$$

$$[A_7] = \begin{bmatrix} -\rho h \left( \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} \right) & -\left( \frac{\rho h^3}{12R} \right) \left( \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} \right) & 0 & 0 \\ -\left( \frac{\rho h^3}{12R} \right) \left( \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} \right) & -\left( \frac{\rho h^3}{12} \right) \left( \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho h \left( \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} \right) & -\left( \frac{\rho h^3}{12R} \right) \left( \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} \right) \\ 0 & 0 & -\left( \frac{\rho h^3}{12R} \right) \left( \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} \right) & -\left( \frac{\rho h^3}{12} \right) \left( \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} \right) \end{bmatrix} \quad (25-2)$$

فصل دوم: تعیین معادلات حرکت

$$[A_8] = \begin{bmatrix} \left(\frac{h}{36G_1G_2}\right)(36k\eta + 48G_1\eta) & \left(\frac{h^3}{36RG_1G_2}\right)(3k\eta + 4G_1\eta) & 0 & 0 \\ \left(\frac{h^3}{36RG_1G_2}\right)(3k\eta + 4G_1\eta) & \left(\frac{h^3}{36G_1G_2}\right)(4G_1\eta + 3k\eta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\kappa^2 h}{G_2} \eta & \left(\frac{\kappa^2 h^3}{12G_2 R}\right) \eta \\ 0 & 0 & \left(\frac{\kappa^2 h^3}{12G_2 R}\right) \eta & \left(\frac{\kappa^2 h^3}{12G_2}\right) \eta \end{bmatrix} \quad (25-2)$$

$$[A_9] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\kappa^2 h}{G_2} \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\alpha k}{R} \frac{\eta}{G_1 G_2} - \frac{4\alpha}{3R} \frac{\eta}{G_2} & -\frac{2}{3R} \frac{\eta}{G_2} \{2\beta - h\} \\ 0 & 0 & -\frac{\eta}{G_1 G_2} \left(\frac{kh}{R} + \frac{\beta k}{R}\right) & -\frac{\eta}{G_1 G_2} \left(\frac{kh}{R} + \frac{\beta k}{R}\right) \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3R} \frac{\eta}{G_2} \{2\beta - h\} & \left(\frac{h}{36G_1G_2}\right)(-36k\eta - 48G_1\eta) \\ 0 & 0 & -\frac{\eta}{G_1 G_2} \left(\frac{kh}{R} + \frac{\beta k}{R}\right) & -\frac{4\gamma}{3R} \frac{\eta}{G_2} - \frac{\gamma k}{R} \frac{\eta}{G_1 G_2} \end{bmatrix} \quad (25-2)$$

$$[AA] = \begin{bmatrix} -\rho h \frac{\eta}{G_1 G_2} & -\left(\frac{\rho h^3}{12R}\right) \frac{\eta}{G_1 G_2} & 0 & 0 \\ -\left(\frac{\rho h^3}{12R}\right) \frac{\eta}{G_1 G_2} & -\left(\frac{\rho h^3}{12}\right) \frac{\eta}{G_1 G_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho h \frac{\eta}{G_1 G_2} & -\left(\frac{\rho h^3}{12R}\right) \frac{\eta}{G_1 G_2} \\ 0 & 0 & -\left(\frac{\rho h^3}{12R}\right) \frac{\eta}{G_1 G_2} & -\left(\frac{\rho h^3}{12}\right) \frac{\eta}{G_1 G_2} \end{bmatrix} \quad (25-2)$$

$$f = \left( \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} + \frac{\eta}{G_1 G_2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \begin{bmatrix} F_x \\ m_x \\ q_x \\ m_z \end{bmatrix} \quad (26-2)$$

رابطه‌ی (۲۶-۲) بخش ناهمگن معادلات دیفرانسیل (۲۴-۲) می باشد که عناصر آن بر اساس نیروهای

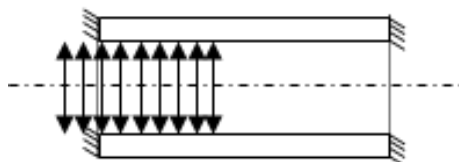
اعمالی بر پوسته تعیین می‌شود.

## ۲-۵- بررسی فشار متحرک

در اینجا، تنها نیروی خارجی اعمال شده بر سیستم، فشار متحرک می‌باشد که بر سطح داخلی پوسته

در راستای  $z$  اعمال شده و در روی سطح  $(z = +\frac{h}{2})$  نیروی اعمالی صفر است و بار با

سرعت ثابت در طول پوسته پیشروی می‌کند که در شکل به صورت شماتیک رسم شده است.



شکل (۲-۲) فشار داخلی متحرک

این فشار متحرک بر حسب تابع پله  $H$  شبیه‌سازی می‌شود:

$$f_z = p_0 H(Vt - x) = \begin{cases} p_0 & x \leq Vt \\ 0 & x > Vt \end{cases} \quad (27-2)$$

که  $V$  سرعت پیشروی و  $p_0$  مقدار فشار متحرک می‌باشد. بنابراین مقادیر  $[F_x \quad m_x \quad q_x \quad m_z]'$

در رابطه‌ی (۲۶-۲)، با استفاده از روابط (۱۰-۲) بصورت زیر تعیین می‌شوند:

$$\left. \begin{array}{l} f_x = 0 \\ f_z = (P_0 H(Vt - x)) \end{array} \right\} \begin{cases} F_x = 0, m_x = 0 \\ q = (1 + \frac{z}{R}) f_z \Big|_{z=-\frac{h}{2}}^{z=+\frac{h}{2}} = (1 - \frac{h}{2R})(P_0 H(Vt - x)) \\ m_z = z (1 + \frac{z}{R}) f_z \Big|_{z=-\frac{h}{2}}^{z=+\frac{h}{2}} = (-\frac{h}{2})(1 - \frac{h}{2R})(P_0 H(Vt - x)) \end{cases} \quad (28-2)$$

در نتیجه رابطه‌ی (۲-۲۶) به صورت آپراتوری زیر تعیین می‌شود:

$$f = \left( \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} + \frac{\eta}{G_1 G_2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( 1 - \frac{h}{2R} \right) (p_0 H(Vt - x)) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{h}{2} \end{bmatrix} \quad (۲-۲۹)$$

بعد از اعمال آپراتور مشتق، نتیجه می‌شود:

$$f = \left( 1 - \frac{h}{2R} \right) \left\{ P_0 \left( \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} \right) H(Vt - x) + \frac{\eta P_0}{G_1 G_2} V \delta(Vt - x) \right\} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{h}{2} \end{bmatrix} \quad (۲-۳۰)$$

بعد از تعیین جنس و هندسه‌ی پوسته‌ی مورد بررسی، تمامی عناصر ماتریس‌های ضرایب روابط (۲-۲۵) و (۲-۲۶)، تبدیل به اعدادی ثابت می‌شوند و نیز ماتریس رابطه‌ی (۲-۲۹) که تحریک اعمالی بر پوسته می‌باشد، به صورت ترکیبی از توابع دیراک و پله در می‌آید.

بر این اساس، معادلات حاکم بر پوسته‌های ویسکوالاستیک تحت فشار متحرک (رابطه‌ی (۲-۲۴))، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت، شامل مشتقات جزئی نسبت به زمان و مکان و کوپل بهم می‌باشد که حل آن در بخش بعد ارائه خواهد شد. با حذف جمله‌ی استهلاک، معادلات به حالت الاستیک [۱۰] تبدیل می‌شوند.

## ۲-۶- جمع بندی

در این فصل بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و بر اساس اصل همیلتون و با استفاده از روش آپراتوری برای اعمال مدل ویسکوالاستیک جامد استاندارد، معادلات حاکم بر سیستم، استخراج گردید.

## فصل سوم: حل تحلیلی

### ۳-۱- مقدمه

معادلات حاکم بر سیستم در فصل قبل بر اساس میدان جابجایی رابطه‌ی (۲-۱) تعیین شد که جابجایی‌ها در راستای طولی و شعاعی پوسته بر اساس تئوری تغییرشکل برشی تخمین زده شدند. برای ساده‌تر شدن محاسبات کرنش عمودی عرضی  $\psi_z$  صفر در نظر گرفته می‌شود و میدان جابجایی طولی در جهت ضخامت، خطی فرض می‌شود [۱]. به این ترتیب میدان جابجایی جدید بصورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{cases} \bar{u}_x = u(x, t) + z \Psi_x(x, t) \\ \bar{u}_z = w(x, t) \end{cases} \quad (۳-۱)$$

بر اساس این میدان جابجایی، تعداد معادلات حاکم از چهار به سه عدد کاهش می‌یابد. این دستگاه معادلات همچنان شامل مشتقات جزئی نسبت به زمان و بعد طولی پوسته می‌باشد. و حل آن شامل دو بخش حل عمومی و خصوصی خواهد بود. از آنجا که برای تعیین حل این دستگاه معادلات، از تئوری اغتشاشات<sup>۱</sup> استفاده می‌شود، ابتدا معادلات بی‌بعد می‌شوند؛ سپس از معادلات تبدیل لاپلاس نسبت به زمان گرفته شده و پاسخ در حوزه‌ی لاپلاس به دست می‌آید. با محاسبه‌ی لاپلاس معکوس از پاسخ، می‌توان حل را در حوزه‌ی زمان بدست آورد.

### ۳-۲- بی بعد سازی

دستگاه معادلات دیفرانسیل (۲-۲۴) با مجموعه ماتریس‌های ضرایب (۲-۲۵)، شامل بخش همگن و ناهمگن به صورت زیر می‌باشد:

<sup>۱</sup> - Perturbation Theory

$$\begin{aligned}
 & [A_1] \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + [A_3] \frac{\partial y}{\partial x} + [A_4] y + [A_6] \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + [A_7] \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + [A_8] \frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial t} \\
 & + [A_9] \frac{\partial y}{\partial t} + [AA] \frac{\partial y}{\partial t^3} = \\
 & = - \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ (1 - \frac{h}{2R}) (\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2}) (P_0 H(Vt - x)) + (1 - \frac{h}{2R}) \frac{\eta P_0}{G_1 G_2} V \delta(Vt - x) \end{array} \right\} \quad (2-3)
 \end{aligned}$$

که بی بعد سازی به ترتیب زیر انجام می شود:

### ۳-۲-۱- بی بعد سازی بخش همگن معادلات

برای بی بعد سازی سمت چپ معادلات (۲-۳)، پارامترهای بی بعد زیر تعریف می شوند:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{K}{G_1} + \frac{K}{G_2} = G_0^* \\ \frac{K}{G_1} = G_1^* \\ R^* = \frac{R}{h_0} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x^* = \frac{x}{L} \\ h^* = \frac{h}{h_0} \\ w^* = \frac{w}{h_0} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} u^* = \frac{u}{h_0} \\ t^* = \frac{t}{t_0}, (t_0 = \frac{\eta}{G_2}) \end{array} \right. \quad (3-3)$$

بر این اساس، ماتریس مؤلفه‌های میدان جابجایی بی بعد عبارتند از:

$$y^* = \left\{ \begin{array}{c} u^* \\ \psi \\ w^* \end{array} \right\} \quad (4-3)$$

و آپراتورهای مشتق بی بعد شده نیز به صورت زیر تعیین می شوند:



$$\begin{cases} \frac{d}{dx} = \frac{1}{L} \frac{d}{dx^*} & , & \frac{d^2}{dx^2} = \frac{1}{L^2} \frac{d^2}{dx^{*2}} \\ \frac{d}{dt} = \frac{1}{t_0} \frac{d}{dt^*} & , & \frac{d^2}{dt^2} = \frac{1}{t_0^2} \frac{d^2}{dt^{*2}} \end{cases} \quad (5-3)$$

بی‌بعدسازی از ماتریس ضرایب (۲-۲۵) آغاز و تمام درایه‌های آن با استفاده از روابط (۳-۳) بی‌بعد می‌شود که این روند در ادامه به طور نمونه و با توجه به رابطه (۲-۲۵)، برای  $[A_8]$  بررسی شده است:

$$\begin{cases} A_{8,11} = h \frac{\eta}{G_2} \left( \frac{k}{G_1} + \frac{4}{3} \right) & = h_0 h^* t_0 \left( G_1^* + \frac{4}{3} \right) \\ A_{8,12} = A_{8,21} = \frac{h^3}{12R} \frac{\eta}{G_2} \left( \frac{k}{G_1} + \frac{4}{3} \right) & = \frac{h_0^2 h^{*3}}{12R^*} t_0 \left( G_1^* + \frac{4}{3} \right) \\ A_{8,22} = \frac{h^3}{12} \frac{\eta}{G_2} \left( \frac{k}{G_1} + \frac{4}{3} \right) & = \frac{h_0^3 h^{*3}}{12} t_0 \left( G_1^* + \frac{4}{3} \right) \\ A_{8,33} = \kappa^2 h \frac{\eta}{G_2} & = \kappa^2 h_0 h^* t_0 \end{cases} \quad (6-3)$$

که شکل ماتریسی  $[A_8]$  به صورت زیر درمی‌آید:

$$[A_8^*] = h_0^* \begin{bmatrix} h^* t_0 \left( G_1^* + \frac{4}{3} \right) & \frac{h_0^1 h^{*3}}{12R^*} t_0 \left( G_1^* + \frac{4}{3} \right) & 0 \\ \frac{h_0 h^{*3}}{12R^*} t_0 \left( G_1^* + \frac{4}{3} \right) & \frac{h_0^2 h^{*3}}{12} t_0 \left( G_1^* + \frac{4}{3} \right) & 0 \\ 0 & 0 & \kappa^2 h^* t_0 \end{bmatrix} \quad (7-3)$$

در نهایت با استفاده از این ماتریس‌های ضرایب بی‌بعد شده و بی‌بعد کردن میدان جابجایی  $y$  (بر اساس رابطه (۳-۴)) و اعمال اپراتورهای مشتق بی‌بعد شده (بر اساس رابطه (۳-۵)) در بخش

همگن (سمت چپ) رابطه (۳-۲)، دستگاه معادلات دیفرانسیل همگن بی بعد شده بصورت زیر درمی آید:

$$\begin{aligned}
 [B_1] \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} \{y^*\} + [B_3] \frac{\partial}{\partial x^*} \{y^*\} + [B_4] \{y^*\} + [B_6] \frac{\partial^2}{\partial x^* \partial t^*} \{y^*\} + [B_7] \frac{\partial^2}{\partial t^{*2}} \{y^*\} \\
 + [B_8] \frac{\partial^3}{\partial x^{*2} \partial t^*} \{y^*\} + [B_9] \frac{\partial}{\partial t^*} \{y^*\} + [BB] \frac{\partial^3}{\partial t^{*3}} \{y^*\} = 0
 \end{aligned} \tag{۸-۳}$$

که این ماتریس‌های ضرایب جدید با استفاده از تعریف عبارات‌های بی بعد :

$$e^2 = \frac{\rho h_0^2}{K t_0^2} = \frac{\rho h_0^2}{K \left(\frac{\eta}{G^2}\right)^2}, \quad \varepsilon = \frac{h_0}{L} \tag{۹-۳}$$

بصورت زیر می‌باشند:

$$B_1 = \left(\frac{h_0}{L}\right)^2 * \begin{bmatrix} h^* \left(G_0^* + \frac{4}{3}\right) & \frac{h^{*3}}{12R^*} \left(G_0^* + \frac{4}{3}\right) & 0 \\ \frac{h^{*3}}{12R^*} \left(G_0^* + \frac{4}{3}\right) & \frac{h^*}{12} \left(G_0^* + \frac{4}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \kappa^2 h^* \end{bmatrix} = \varepsilon^2 B_1^* \tag{۱۰-۳}$$

$$B_8 = \left(\frac{h_0}{L}\right)^2 * \begin{bmatrix} h^* \left(G_1^* + \frac{4}{3}\right) & \frac{h^{*3}}{12R^*} \left(G_1^* + \frac{4}{3}\right) & 0 \\ \frac{h^{*3}}{12R^*} \left(G_1^* + \frac{4}{3}\right) & \frac{h^*}{12} \left(G_1^* + \frac{4}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \kappa^2 h^* \end{bmatrix} = \varepsilon^2 B_8^* \tag{۱۱-۳}$$

$$B_3 = \frac{h_0^*}{L} * \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{h^*}{R^*} (G_0^* - \frac{2}{3}) \\ 0 & 0 & -\kappa^2 h^* \\ -\frac{h^*}{R^*} (G_0^* - \frac{2}{3}) & \kappa^2 h^* & 0 \end{bmatrix} = \varepsilon B_3^* \quad (12-3)$$

$$B_6 = \frac{h_0^*}{L} * \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{h^*}{R^*} (G_1^* - \frac{2}{3}) \\ 0 & 0 & -\kappa^2 h^* \\ -\frac{h^*}{R^*} (G_1^* - \frac{2}{3}) & \kappa^2 h^* & 0 \end{bmatrix} = \varepsilon B_6^* \quad (13-3)$$

$$B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\kappa^2 h^* & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\alpha}{R^*} (G_0^* + \frac{4}{3}) \end{bmatrix} = B_4^* \quad (14-3)$$

$$B_9 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\kappa^2 h^* & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\alpha}{R^*} (G_1^* + \frac{4}{3}) \end{bmatrix} = B_9^* \quad (15-3)$$

$$B_7 = \frac{\rho h_0^2}{K t_0^2} * \begin{bmatrix} -h^* G_0^* & -\frac{h^{*3}}{12R^*} G_0^* & 0 \\ -\frac{h^{*3}}{12R^*} G_0^* & -\frac{h^{*3}}{12} G_0^* & 0 \\ 0 & 0 & -h^* G_0^* \end{bmatrix} = e^2 B_7^* \quad (16-3)$$

$$BB = \frac{\rho h_0^2}{K t_0^2} * \begin{bmatrix} -h^* G_1^* & -\frac{h^{*3}}{12R^*} G_1^* & 0 \\ -\frac{h^{*3}}{12R^*} G_1^* & -\frac{h^{*3}}{12} G_1^* & 0 \\ 0 & 0 & -h^* G_1^* \end{bmatrix} = e^2 BB^* \quad (17-3)$$

معادله‌ی (۸-۳) با استفاده از تعریف‌های فوق، بصورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 B_1^* \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} \{y^*\} + \varepsilon^2 B_8^* \frac{\partial^3}{\partial x^{*2} \partial t^*} \{y^*\} + \varepsilon B_3^* \frac{\partial}{\partial x^*} \{y^*\} + \varepsilon B_6^* \frac{\partial^2}{\partial x^* \partial t^*} \{y^*\} + \\ B_4 \{y^*\} + B_9 \frac{\partial}{\partial t^*} \{y^*\} + e^2 B_7^* \frac{\partial^2}{\partial t^{*2}} \{y^*\} + e^2 BB^* \frac{\partial^3}{\partial t^{*3}} \{y^*\} = 0 \end{aligned} \quad (18-3)$$

در نهایت با تغییر متغیر مکانی:

$$\phi = \frac{x^*}{\varepsilon} \Rightarrow x^* = \phi^* \varepsilon \rightarrow \begin{cases} dx^* = d\phi^* \varepsilon \\ dx^{*2} = d\phi^{*2} (\varepsilon)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dx^*} = \frac{1}{\varepsilon} * \frac{d}{d\phi} \\ \frac{d^2}{dx^{*2}} = \frac{1}{\varepsilon^2} * \frac{d^2}{d\phi^2} \end{cases} \quad (19-3)$$

معادلات به شکل زیر درمی‌آیند:

$$B_1^* \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \{y^*\} + B_8^* \frac{\partial^3}{\partial \phi^{*2} \partial t^*} \{y^*\} + B_3^* \frac{\partial}{\partial \phi^*} \{y^*\} + B_6^* \frac{\partial^2}{\partial \phi^* \partial t^*} \{y^*\} +$$

$$B_4 \{y^*\} + B_9 \frac{\partial}{\partial t^*} \{y^*\} + e^2 B_7^* \frac{\partial^2}{\partial t^{*2}} \{y^*\} + e^2 BB^* \frac{\partial^3}{\partial t^{*3}} \{y^*\} = 0 \quad (20-3)$$

### ۳-۲-۲- بی بعد سازی بخش ناهمگن معادلات

بدین منظور، علاوه بر عبارات بی بعد رابطه‌ی (۳-۳)، لازم است پارامتر سرعت بی بعد نیز تعریف شود:

$$V^* = \frac{V^* t_0}{L} \quad (21-3)$$

بر اساس عبارات بی بعد، توابع پله و دلتای دیراک به شکل بی بعد زیر درمی آیند:

$$H(Vt - x) \rightarrow H(V^* t^* - x^*)$$

$$\delta(Vt - x) \rightarrow \frac{1}{L} \delta(V^* t^* - x^*) \quad (22-3)$$

و در نهایت بخش ناهمگن معادلات به شکل بی بعد زیر درمی آیند:

$$= - \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \frac{P_0}{K} G_0^* \left(1 - \frac{h^*}{2R^*}\right) H(V^* t^* - \varepsilon^* \phi) + G_1^* \left(1 - \frac{h^*}{2R^*}\right) \frac{P_0}{K} V^* \delta(V^* t^* - \varepsilon^* \phi) \end{array} \right\} \quad (23-3)$$

### ۳-۳- تبدیل لاپلاس

برای حل این دستگاه معادلات بی بعد شده- شامل بخش همگن (رابطه‌ی (۲۰-۳)) و بخش ناهمگن

(۲۳-۳)- از تبدیل لاپلاس نسبت به زمان (بی بعد) استفاده می شود. تبدیل لاپلاس تابع  $f(t)$  بصورت

زیر تعریف می شود:

$$Laplace(f(t)) = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (24-3)$$

که در این رابطه،  $s$  متغیر (مختلط) لاپلاس می‌باشد [۳۰]. مزیت اصلی این تبدیل این است که بعد از این انتقال، با توجه به ثابت بودن متغیر لاپلاس، معادلات جدید تبدیل به دستگاه معادلات خطی با ضرایب ثابت می‌شود و تنها مشتق مکانی در عبارات باقی خواهد ماند. با تعریف:

$$Laplace(y^*(\phi, t^*)) = \bar{y}(\phi, s) = \int_0^{+\infty} y^*(\phi, t^*) e^{-st^*} dt^*, Laplace\left(\frac{\partial}{\partial t^*} y^*(\phi, t^*)\right) = (s) \bar{y}(\phi, s)$$

$$Laplace\left(\frac{\partial}{\partial t^*} y^*(\phi, t^*)\right) = (s)^2 \bar{y}(\phi, s) \quad Laplace\left(\frac{\partial}{\partial t^*} y^*(\phi, t^*)\right) = (s)^3 \bar{y}(\phi, s) \quad (25-3)$$

معادلات در حوزه‌ی لاپلاس تعیین می‌شود:

$$\left\{ \left( B_1^* + (s) B_8^* \right) \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \left( B_3^* + (s) B_6^* \right) \frac{\partial}{\partial \phi} + \right.$$

$$\left. B_4 + e^2 (s)^2 B_7^* + (s) B_9 + e^2 (s)^3 B B^* \right\} y^*(\phi, s) =$$

$$= - \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \left( \frac{P_0}{K} G_0^* \left( 1 - \frac{h^*}{2R^*} \right) \frac{e^{\left( -\frac{s \varepsilon \phi}{V^*} \right)}}{s} + G_1^* \left( 1 - \frac{h^*}{2R^*} \right) \frac{P_0}{K} e^{\left( -\frac{s \varepsilon \phi}{V^*} \right)} \right) \end{array} \right\} \quad (26-3)$$

و بر اساس این دستگاه معادلات، جواب‌های عمومی و خصوصی در فضای لاپلاس، با استفاده از دو روش مختلف، در ادامه تعیین می‌شود.

### ۳-۴- تئوری مقدماتی معادلات دیفرانسیل

حل معادلات (۳-۲۶) شامل دو بخش همگن و غیر همگن است. حل همگن آن نیازمند تعیین مقادیر ویژه و بردارهای ویژه است. برای این منظور با جایگزین کردن  $\bar{y} = \bar{v} e^{m\phi}$  در بخش همگن معادلات (۳-۲۶) و حذف  $e^{m\phi}$  از طرفین معادلات، دستگاه معادلات  $[B] \{\bar{v}\} = \{0\}$  حاصل می‌شود که شرط داشتن جواب غیر صفر برای این دستگاه این است که دترمینان ماتریس  $B$  که معادله‌ی مشخصه نامیده می‌شود صفر گردد. ریشه‌های این معادله‌ی مشخصه، مقادیر ویژه‌ی دستگاه می‌باشند؛ ولی با توجه به وجود ضریب ثابت  $s$  در معادلات، مقادیر ویژه به صورت توابعی پیچیده از  $s$  تعیین می‌شود. برای حل این مشکل می‌توان از تئوری اغتشاشات استفاده کرده و این مقادیر ویژه را به شکل ساده-تری تخمین زد. این تئوری به بررسی آن دسته از مسائل می‌پردازد که در معادله‌ی حاکم بر آنها، پارامتر کوچکی مانند  $e_1$  وجود دارد. بر اساس این تئوری پاسخ این معادله بر حسب یک سری از این پارامتر کوچک نوشته شده و با جایگذاری در معادله و مساوی صفر قرار دادن جملات با توان یکسان  $e_1$ ، یک حل تحلیلی (تقریبی) برای مساله بدست می‌آید. با تعریف متغیر بدون بعد جدید  $e_1$  به صورت زیر:

$$e^2 s^2 = e_1^2 \Rightarrow s = \frac{e_1}{e} \quad (۳-۲۷)$$

معادلات بی‌بعد شده (۳-۲۶) به شکل زیر تبدیل می‌شوند:

$$\left\{ \left( B_1^* + \left( \frac{e_1}{e} \right) B_8^* \right) \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \left( B_3^* + \left( \frac{e_1}{e} \right) B_6^* \right) \frac{\partial}{\partial \phi} + B_4 + e_1^2 * B_7^* + \left( \frac{e_1}{e} \right) B_9 + \frac{e_1^3}{e} B B^* \right\} \{\bar{y}(\phi, s)\} = \{0\} \quad (۳-۲۸)$$

حل عمومی این دستگاه معادلات بصورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\bar{u}_g = \bar{v} e^{m\phi}, \bar{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (۳-۲۹)$$

## فصل سوم: حل تحلیلی

با جایگذاری در رابطه‌ی (۳-۲۸) و حذف  $e^{m\phi}$ ، نتیجه می‌شود:

$$[q_1]\{\bar{v}\} = \{0\}$$

$$[q_1] = \left( B_1^* + \left(\frac{e_1}{e}\right) B_8^* \right) m^2 + \left( B_3^* + \left(\frac{e_1}{e}\right) B_6^* \right) m + \left( B_4 + e_1^2 * B_7^* + \left(\frac{e_1}{e}\right) B_9 + \frac{e_1^3}{e} B B^* \right) \quad (3-30)$$

که حاصل دترمینان ماتریس  $[q_1]$  معادله‌ی مشخصه دستگام بوده که شامل متغیر  $m$  و ضریب ثابت  $e_1$  می‌باشد و با توجه به اینکه ضریب  $e_1$  بدون بعد بوده و کوچک فرض می‌شود، می‌توان با استفاده از تئوری اغتشاشات، مقادیر ویژه‌ی  $m$  را بر حسب  $e_1$  تخمین زد. بدیهی است فرض کوچک بودن  $e_1$ ، در محدوده خاصی از  $S$  معتبر است. بدین منظور حل پیشنهادی  $m$  بصورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$m = m_0 + m_1 e_1 \quad (3-31)$$

با قرار دادن مقدار  $m$  در معادله‌ی مشخصه، نتیجه می‌شود:

$$g(m_0) + f(m_0, m_1) e_1 + \dots = 0 \quad (3-32)$$

که  $g(m_0)$  تابعی از  $m_0$  و  $f(m_0, m_1)$  تابعی از  $(m_0, m_1)$  است. از حل  $g(m_0)$  شش مقدار برای  $m_0$  و از  $f(m_0, m_1)$  یک رابطه بین  $(m_0, m_1)$  تعیین می‌شود که با قرار دادن هر کدام از مقادیر  $m_0$ ، مقدار  $m_1$  متناظر با آن تعیین می‌شود. در نهایت با تعیین  $(m_0, m_1)$ ، شش مقدار ویژه‌ی تخمینی با توجه به رابطه‌ی (۳-۳۱) تعیین می‌شود.

بر اساس مقادیر ویژه‌ی تخمین زده شده در مرحله‌ی قبل، بردارهای ویژه به راحتی قابل محاسبه هستند.

جواب عمومی در فضای لاپلاس عبارتست از:



$$\bar{u}_g = \sum_{i=1}^6 C_i [\bar{v}]_i e^{m_i \phi} \quad (33-3)$$

که ثابت  $C_i$  با اعمال شرایط مرزی تعیین می شود.

برای بدست آوردن جواب خصوصی بر اثر تحریک اعمالی در حوزه‌ی لاپلاس، با توجه به ثابت بودن ضرایب معادلات دیفرانسیل (۳-۲۶) و متغیر لاپلاس  $s$ ، برای تعیین حل خصوصی از روش ضرایب نامعین می توان استفاده کرد. بر این اساس حل خصوصی پیشنهادی بصورت زیر است:

$$\bar{y}_p = \{v\} \exp\left(-\frac{s \varepsilon \phi}{V^*}\right) \quad (34-3)$$

با جایگذاری در رابطه‌ی (۳-۲۶) نتیجه می شود:

$$\left\{ \left( B_1^* + (s) B_8^* \right) \left( \frac{s \varepsilon}{V^*} \right)^2 + \left( B_3^* + (s) B_6^* \right) \left( \frac{s \varepsilon}{V^*} \right) + \right. \\ \left. B_4 + e^2 * (s)^2 B_7^* + (s) B_9 + e^2 * (s)^3 B B^* \right\} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} e^{\left( -\frac{s \varepsilon \phi}{V^*} \right)} = \\ = - \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \left( \frac{P_0}{K} G_0^* \left( 1 - \frac{h^*}{2R^*} \right) \frac{1}{s} + G_1^* \left( 1 - \frac{h^*}{2R^*} \right) \frac{P_0}{K} \right) \end{array} \right\} e^{\left( -\frac{s \varepsilon \phi}{V^*} \right)} \quad (35-3)$$

که بردار  $v$  به راحتی قابل محاسبه است. محاسبات به کمک نرم افزار maple 13 انجام شده است.

بدین ترتیب حل خصوصی در حوزه‌ی لاپلاس بر اساس رابطه‌ی (۳-۳۴) تعیین می شود.

حل کلی در حوزه‌ی لاپلاس، بصورت زیر است:

$$\bar{u} = \bar{u}_g + \bar{y}_p = \sum_{i=1}^6 C_i [\bar{v}]_i e^{m_i \phi} + \bar{y}_p \quad (36-3)$$

شرایط مرزی مساله برای پوسته‌ی دو سر گیردار بصورت زیر در نظر گرفته شده است.

$$\bar{u}(x^* = 0, s) = 0, \bar{u}(x^* = 1, s) = 0 \quad (37-3)$$

با اعمال شرایط مرزی در رابطه‌ی (36-3)، شش معادله برای تعیین شش مجهول  $C_i$  بدست می‌آید

که هر معادله به شکل زیر می‌باشد:

$$\sum_{i=1}^6 f_i(s) C_i + f_i^*(s) = 0 \quad (38-3)$$

که  $f_i(s), f_i^*(s)$  توابعی از  $s$  می‌باشند. بدین ترتیب جواب نهایی دستگاه معادلات (36-3) در فضای لاپلاس بر اساس رابطه‌ی (36-3) تعیین می‌شود و در نهایت با استفاده تبدیل معکوس لاپلاس، جواب نهایی از حوزه‌ی لاپلاس به فضای زمان انتقال داده می‌شود.

### ۳-۴-۱- تبدیل معکوس لاپلاس

رابطه‌ی کلی لاپلاس معکوس به شکل زیر است:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s) ds \quad (39-3)$$

به طوری که  $c$  یک ثابت حقیقی است. این فرمول برای لاپلاس معکوس توابع ساده استفاده می‌شود و در اینجا و برای لاپلاس معکوس‌گیری از حل نهایی، از این فرمول کلی به دلیل پیچیدگی پاسخ در حوزه‌ی لاپلاس، استفاده نمی‌شود. در این مساله مقادیر ضرایب  $C_i$  به صورت کسری و ترکیبی از توابع نمایی و چند جمله‌ای، به شکل زیر است:

$$C_i(s) = \frac{(چند جمله ای) e^{b1 s} + (چند جمله ای) e^{c1 s} + (چند جمله ای) e^{d1 s} + \dots}{(چند جمله ای) e^{b2 s} + (چند جمله ای) e^{c2 s} + (چند جمله ای) e^{d2 s} + \dots} \quad (۴۰-۳)$$

و نمی توان آن را با فرمول کلی (۳-۳۹) به فضای زمان برگرداند و برای محاسبه ی لاپلاس معکوس از روش مانده ها استفاده می شود. لاپلاس معکوس گیری با استفاده از مانده ها بر اساس قضیه ی کوشی می باشد [۳۱]. بر اساس این قضیه هرگاه  $f(z)$  در درون و روی مرز ساده ی  $C$  به استثنای نقاط تکین  $z_1, z_2, \dots, z_n$  تحلیلی باشد در این صورت:

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res} [f(z), z_k] \quad (۴۱-۳)$$

بنابراین لاپلاس معکوس گیری با روش مانده ها به شکل زیر بیان می شود [۳۰]:

اگر  $F(s)$  لاپلاس تابع  $f(t)$  باشد و این تابع تعداد محدودی قطب داشته باشد با انتخاب  $c$  در رابطه ی (۳-۳۹) به طوری که تمام قطب ها سمت چپ  $\text{Re}(s) = c$  قرار گیرند؛ آنگاه لاپلاس معکوس تابع  $f(t)$  به صورت زیر تعیین می شود.

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \text{Res} [F(s)e^{st}, z_k] \quad (۴۲-۳)$$

در نهایت با استفاده از رابطه ی (۳-۴۲)، می توان جواب نهایی معادلات را از فضای لاپلاس به فضای زمان برگرداند.

برای استفاده از رابطه ی (۳-۴۲)، لازم است که قطب های سیستم مشخص باشند ولی به علت اینکه  $C_i$  ها در رابطه ی (۳-۳۶) به شکل رابطه ی (۳-۴۰) می باشند، قطب های سیستم قابل تعیین نیستند. برای حل این مشکل، کلیه ی توابع نمایی مخرج  $C_i$  با استفاده از سری تیلور و با تعیین شعاع همگرایی تخمین زده می شوند؛ در نتیجه قطب های سیستم مشخص شده و می توان با روش مانده ها لاپلاس معکوس را محاسبه کرد.

دومین روش برای تعیین پاسخ سیستم بر اساس تئوری اغتشاشات می باشد که در ادامه ارائه می شود.

### ۳-۵- مقدمه ای بر تئوری اغتشاشات

بسیاری از مسایل، دارای معادلات حاکم غیرخطی، ضرایب متغیر و شرایط مرزی غیرخطی می‌باشند که نمی‌توان برای آنها حل دقیق پیدا کرد. در نتیجه حل، با استفاده از روش‌های عددی، تحلیلی و یا ترکیبی از هر دو روش تقریب زده می‌شود. یکی از روش‌های تحلیلی تئوری اغتشاشات است و معمولاً برای مسائلی استفاده می‌شود که در آنها پارامترهای کوچک یا بزرگ وجود دارد. در تئوری اغتشاشات، حل کامل معادله، با استفاده از چند جمله اول یک سری، بر حسب این پارامتر کوچک یا بزرگ بیان می‌شود.

حل معادلات جبری با استفاده از تئوری اغتشاشات، شامل سه حالت کلی می‌باشد:

حالت اول- حل با استفاده از سری یکنواخت: در اینصورت ریشه بصورت  $x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots$  در نظر گرفته می‌شود که  $\varepsilon$  پارامتر کوچکی است و پس از جایگذاری آن در معادله اصلی، ضرایب مختلف  $\varepsilon$  را برابر صفر قرار می‌دهند. بنابراین تعدادی معادله بدست می‌آید، که از حل آنها، مقادیر  $x_0, x_1, \dots$  و در نتیجه ریشه‌ها تعیین می‌شوند.

حالت دوم- حل با استفاده از سری غیریکنواخت: در اینصورت در با نظر گرفتن ریشه بصورت یکنواخت، سری‌های پاسخ بدست آمده، واگرا می‌باشد. بنابراین سری یکنواخت مناسب نمی‌باشد و حل را بصورت غیریکنواخت  $x = x_0 + \varepsilon^{\nu} x_1 + \varepsilon^{2\nu} x_2 + \dots$  زیر در نظر می‌گیرند.

حالت سوم- معادله اغتشاشی تکین: در این حالت، پارامتر کوچک در بزرگترین توان متغیر ضرب می‌شود. برخی از ریشه‌ها با سری یکنواخت و برخی دیگر به کمک سری‌هایی مانند

$$x = \frac{1}{\varepsilon^{\nu}} (y_0 + \varepsilon y_1 + \dots)$$

### ۳-۵-۱- مسائل لایه مرزی

در مسائلی که در فوق مطرح شد، اثر پارامتر اغتشاشی ( $\varepsilon$ ) در پاسخ‌ها، کوچک بود. اما در اینجا

مسائلی را در نظر گرفته می‌شود که در آنها، اغتشاش در ناحیه‌ای کوچک (باریک<sup>۱</sup>) اثر کرده و تغییرات متغیرهای وابسته در آن خیلی زیاد می‌باشد. به علت اینکه، در این دسته مسائل، پارامتر  $\varepsilon$  در بزرگترین مرتبه مشتق ضرب می‌شود، خیلی اوقات، این نواحی باریک به مرزهای حوزه مورد بررسی متصل می‌شوند. از این رو، این دسته مسائل به مسائل لایه مرزی معروفند. در این نواحی، تغییرات سریع را نمی‌توان با متغیر کند<sup>۲</sup> بیان کرد، اما به کمک مقیاس سریع<sup>۳</sup> این کار امکان‌پذیر می‌باشد.

در مسائل لایه مرزی، با استفاده از یک حل نمی‌توان هر دو شرط مرزی را ارضا کرد. روش‌های متعددی برای حل مسائل لایه مرزی وجود دارند، از جمله: روش MAE<sup>۴</sup>، multiple scale، ایده اصلی در روش MAE این است که، حل تقریبی لزوماً بر حسب یک بسط و یک مقیاس قابل بیان نمی‌باشد، بلکه حل مسئله شامل دو یا چند بسط و مقیاس است که هرکدام در ناحیه‌ای خاص، معتبر می‌باشند. این مقیاس‌ها باید به گونه‌ای انتخاب شوند که اولاً بسط‌ها، تمام حوزه مورد بررسی را شامل شوند. ثانیاً، حل‌های نواحی مجاور، همپوشانی (ناحیه مشترک)<sup>۵</sup> داشته باشند.

در روش MAE، برای لایه مرزی، تغییر متغیر سریع را بصورت کلی  $\eta = \frac{x-p}{\varepsilon}$  انتخاب می‌کنند، که  $p$  موقعیت لایه مرزی می‌باشد (در مرز چپ  $p=0$  و در راست  $p=1$ ). در لایه مرزی حل داخلی  $(y^i)$  و در نقاط دیگر حل خارجی  $(y^o)$  برقرار می‌باشند. شرط صحیح و منطبق بودن پاسخ‌ها آنست که در مرزها  $(y^i)^o = (y^o)^i$ . تابع  $(y^o)^i$  از جایگذاری متغیر اصلی با متغیر سریع در حل خارجی و سپس بسط آن حاصل می‌شود. تابع  $(y^i)^o$  نیز از جایگذاری متغیر سریع با متغیر اصلی در حل داخلی و سپس بسط آن بدست می‌آید. از ترکیب حل‌های داخلی و خارجی بدست آمده، بصورت

$$y^c = y^o + y^i - (y^o)^i = y^o + y^i - (y^i)^o$$

حاصل می‌شود.

<sup>1</sup> Narrow Region

<sup>2</sup> -Slow Scale

<sup>3</sup> Fast Scale

<sup>4</sup> - Matched Asymptotic Expansion

<sup>5</sup> Overlap

جهت تعیین موقعیت لایه مرزی، معمولاً فرض می‌کنند که آن، در یکی از دو انتها وجود دارد. سپس، با توجه به آن، یک جمله بسطِ حل تعیین می‌شود. اگر بسط‌های همسایه قابل انطباق بودند که فرض درست است در غیر این صورت، لایه مرزی در انتهای دیگر می‌باشد.

بر اساس این روش، پاسخ سیستم به صورت زیر قابل تعیین است. معادله حاکم بر رفتار ارتعاشی سیستم در حالت بی‌بعد شده و در فضای لاپلاس بصورت ماتریسی زیر می‌باشد:

$$\varepsilon^2[B_{18}]y'' + \varepsilon[B_{36}]y' + [B_{49}]y + F = 0 \quad (43-3)$$

حل خارجی بصورت  $y^o = y_0 + \varepsilon y_1 + \dots$  در نظر گرفته می‌شود. با جایگزینی در رابطه‌ی (43-3) و انتخاب جملات با توانهای یکسان  $\varepsilon$ ، نتیجه می‌شود:

$$o(\varepsilon^0): [B_{49}]y_0 + F = 0 \Rightarrow y_0 = [B_{49}]^{-1}F \quad (44-3)$$

حل داخلی در  $x^* = 0$  با تعریف متغیر سریع  $\eta = \frac{x^*}{\varepsilon}$ ، بصورت  $y_1^i = y_0(\eta) + \varepsilon y_1(\eta) + \dots$  در نظر گرفته می‌شود. با جایگزینی در رابطه‌ی (43-3)، نتیجه می‌شود:

$$o(\varepsilon^0): [B_{18}]\left(\frac{d^2 y_0}{d\eta^2}\right) + [B_{36}]\left(\frac{dy_0}{d\eta}\right) + [B_{49}]y + F \Big|_{x^*=0} = 0 \quad (45-3)$$

که یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با ضرایب ثابت می‌باشد، که در آن پارامتر  $s$  نیز وجود دارد. حل عمومی مسأله فوق را بصورت  $y = Ve^{m\eta}$  در نظر گرفته و با جایگذاری آن در معادله، بردارهای ویژه ( $V$ ) و مقادیر ویژه مشابه بخش قبل بدست می‌آید.

حل خصوصی معادله (45-3) بصورت  $y_p = [B_{49}]^{-1}F(0)$  می‌باشد. بنابراین حل کلی داخلی در  $x^* = 0$  برابر است با:

$$y_0 = \sum_{n=1}^{n=N} c_n V_n e^{m_n \eta} + y_p \quad (46-3)$$

که  $N$  تعداد مقادیر ویژه و  $C_i$  ثوابتی می‌باشند که با توجه به شرایط مرزی تعیین می‌شوند.

حل داخلی در  $x^* = 1$  با تعریف متغیر سریع  $\xi = \frac{x^* - 1}{\varepsilon}$ ، بصورت  $y_2^i = y_0(\xi) + \varepsilon y_1(\xi) + \dots$  در

نظر گرفته می‌شود. با جایگزینی در معادله، داریم:

$$o(\varepsilon^0): [B_{18}] \left( \frac{d^2 y_0}{d\xi^2} \right) + [B_{36}] \left( \frac{dy_0}{d\xi} \right) + [B_{49}] y + F \Big|_{x^*=1} = 0 \quad (47-3)$$

که حل آن مشابه بخش قبل می‌باشد.

حل کلی مسأله (۳-۴۳) بصورت  $y^c = y^o + y_1^i + y_2^i - (y_1^i)^o - (y_2^i)^o$  می‌باشد، که  $(y_1^i)^o$  و  $(y_2^i)^o$  بخشهای مشترک حل خارجی با هر کدام از حلهای داخلی می‌باشند. در مساله مرتبه‌ی صفر، با قرار دادن  $x^* = 1, x^* = 0$  در حل خارجی، می‌توان بخشهای مشترک را پیدا کرد.  $y^c$  حل کلی را در حوزه لاپلاس می‌دهد. با محاسبه لاپلاس معکوس، می‌توان حل را در حوزه‌ی زمان بدست آورد. برای تعیین لاپلاس معکوس از تئوری باقی‌مانده‌ها استفاده شده است. با توجه به این که برای همپوشانی حل، علامت مقادیر ویژه  $m_n$  بر حسب  $S$  مهم است، ابتدا این مقادیر تعیین علامت شده و در هر ناحیه، حل کلی (۳-۴۳) بدست آمده است. مجموعه روابط فوق، در قالب یک کد در محیط Maple آماده شده است [۲۳] و [۳۲ تا ۳۴].

### ۳-۶- سرعت بحرانی

برای تعیین سرعت بحرانی پوسته‌های ویسکوالاستیک تحت فشار متحرک داخلی، با مجموعه معادلات ۳-۲، از روش حل موج استفاده می‌شود. بدین منظور از دستگاه معادلات متحرک با بار، با تغییر متغیر زیر استفاده می‌شود.

$$X = x - V t \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X} \\ \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial t} = -V \frac{\partial}{\partial X} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial X^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} \end{cases} \quad (48-3)$$

با اعمال این تغییر متغیر در رابطه‌ی ۲-۳، نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} & (-V [A_8] - V^3 [AA]) \frac{\partial^3}{\partial X^3} \{y\} + ([A_1] - V [A_6] + V^2 [A_7]) \frac{\partial^2}{\partial X^2} \{y\} + ([A_3] - V [A_9]) \frac{\partial}{\partial X} \{y\} \\ & + ([A_4]) \{y\} = - \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ (1 - \frac{h}{2R}) (\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2}) (P_0 H(-X)) + (1 - \frac{h}{2R}) \frac{\eta P_0}{G_1 G_2} V \delta(-X) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

که برای  $X > 0$  طرف دوم عبارت فوق صفر می‌شود و با استفاده از جواب عمومی به صورت

$\{y\} = \{A\} e^{\alpha X}$  و جایگذاری در رابطه‌ی فوق، معادله‌ی مشخصه به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$((-V [A_8] - V^3 [AA]) \alpha^3 + ([A_1] - V [A_6] + V^2 [A_7]) \alpha^2 + ([A_3] - V [A_9]) \alpha + ([A_4])) (A) = 0 \quad (49-3)$$

که شرط داشتن جواب غیر صفر این است که دترمینان ماتریس ضرب شده در بردار  $(A)$  صفر شود:

$$\alpha x = \det((-V [A_8] - V^3 [AA]) \alpha^3 + ([A_1] - V [A_6] + V^2 [A_7]) \alpha^2 + ([A_3] - V [A_9]) \alpha + ([A_4])) = 0 \quad (50-3)$$

و شرط پایدار بودن سیستم این است که در  $\{y\} = \{A\} e^{\alpha X}$  مقادیر  $\alpha$  حقیقی یا مختلط باشد

(موهومی خالص نباشد). بر این اساس مقدار سرعت بحرانی تعیین می‌شود.



### ۳-۷- جمع بندی

در این فصل دو حل نیمه تحلیلی برای پوسته‌های ویسکوالاستیک تعیین شد. اولین حل بر مبنای تئوری مقدماتی معادلات دیفرانسیل و دومین روش بر اساس تئوری اغتشاشات می‌باشد.

## فصل چهارم: حل عددی

#### ۴-۱- مقدمه

در این بخش حل عددی مسأله مورد بررسی ارائه خواهد شد. برای حل اجزاء محدود مساله از نرم افزار انسیس استفاده شده است. تنها مشکل این نرم افزار این است که نمی توان بار متحرک را مستقیماً وارد نرم افزار کرد و باید با استفاده از دستورات ماکرونویسی در انسیس، ای پی دی ال<sup>۱</sup> این بار را بصورت پله ای وارد نمود.

قبل از انجام تحلیل با نرم افزار، با توجه به اینکه یکی از بهترین روش های تعیین خصوصیت ویسکوالاستیک مواد در ansys، استفاده از سری پرونی<sup>۲</sup> است، ابتدا مفهوم این سری شرح داده می شود و سپس مراحل انجام تحلیل از مرحله ی انتخاب المان تا انتها ارائه خواهد شد .

#### ۴-۲- تعیین خصوصیات ویسکوالاستیک مواد بر اساس سری پرونی

برای تعیین خصوصیات ویسکوالاستیک ماده، از مدول رهایش بالک و برشی استفاده می شود. در نرم افزار انسیس توابع رهایش و بالک را می توان، بر حسب جملاتی از سری توانی پرونی و بصورت زیر بیان کرد [۳۵]:

$$\begin{aligned} a) G &= G_{\infty} + \sum_{i=1}^{n_G} G_i e^{\left(\frac{-t}{\tau_i^G}\right)} \\ b) K &= K_{\infty} + \sum_{i=1}^{n_K} K_i e^{\left(\frac{-t}{\tau_i^K}\right)} \end{aligned} \quad (1-4)$$

$G_i, G_{\infty}$  مدول الاستیک برشی،  $K_i, K_{\infty}$  مدول الاستیک بالک،  $\tau_i^G, \tau_i^K$  زمان رهایش برای هر کدام از اجزاء سری پرونی است. با معرفی مدول های تناسبی<sup>۳</sup> به شکل زیر:

$$\alpha_i^G = \frac{G_i}{G_0}, \quad \alpha_i^K = \frac{K_i}{K_0} \quad (2-4)$$

<sup>1</sup>-Ansys Parametric Design Language(APDL)

<sup>2</sup>-Prony Series

<sup>3</sup> - Relative Moduli

به طوریکه :

$$G_0 = G_\infty + \sum_{i=1}^{n_G} G_i \quad , \quad K_0 = K_\infty + \sum_{i=1}^{n_K} K_i \quad (3-4)$$

توابع رهایش و بالک را می توان به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$G = G_0 \left( \alpha_\infty^G + \sum_{i=1}^{n_G} \alpha_i^G e^{\left(\frac{-t}{\tau_i^G}\right)} \right) \quad (a)$$

(4-4)

$$K = K_0 \left( \alpha_\infty^K + \sum_{i=1}^{n_K} \alpha_i^K e^{\left(\frac{-t}{\tau_i^K}\right)} \right) \quad (b)$$

در اینجا  $G_0, K_0$  به ترتیب مدول برشی و مدول بالک در بارگذاری سریع یا مدول آنی و  $G_\infty, K_\infty$  مدول مربوط به بارگذاری های کند یا مدول نهایی می باشد. تعداد جملات سری پرونی برای برش  $n_G$  و برای رفتار حجمی  $n_K$  است که لازم نیست این دو مشابه باشند. این مطلب در مورد زمان های رهایش  $\tau_i^K, \tau_i^G$  نیز صادق است.

معادله ی (4-4) تعمیم یافته ی مدل ماکسول می باشد.

### 4-3- المان مورد استفاده

برای انتخاب المان موارد زیر مدنظر بوده است:

الف- المان باید قابلیت ارائه ی خصوصیت ویسکوالاستیک ماده را داشته باشد.

با توجه به اینکه در اینجا برای ارائه ی خصوصیات ویسکوالاستیک ماده، از سری پرونی استفاده می-شود در نتیجه باید المانی استفاده شود که توابع اصلی را بتوان بر حسب جملاتی از سری پرونی تعیین کرد. با توجه به راهنمای انسیس، تنها در المان های زیر می توان سری پرونی را تعریف کرد:

LINK180, SHELL181, PLANE182, PLANE183, SOLID185, SOLID186, SOLID187, BEAM188, SOLSH190, SHELL208, SHELL209, and SHELL281

ب- المان مورد نظر باید قابلیت مدل سازی استوانه های جدار ضخیم را دارا باشد.

در المان های فوق:

LINK180: در تحلیل تیر یا خرپا استفاده می شود.

SHELL181 و SHELL208, SHELL209 و SHELL281: در تحلیل پوسته ی جدار نازک استفاده

می شود.

BEAM188: در تحلیل تیر استفاده می شود.

در نتیجه تنها المان های زیر علاوه بر ارائه سری پرونی، برای مواد سه بعدی و همچنین استوانه های

جدار ضخیم قابل استفاده می باشند:

PLANE182, PLANE183, SOLID185, SOLID186, SOLID187, SOLSH190

ج- المان مورد نظر باید قابلیت مدل سازی فشار متقارن محوری را دارا باشد.

با توجه به اینکه سازه ی مورد نظر متقارن محوری است به جای انجام تحلیل سه بعدی، تحلیل بر

روی سطح مقطع مستطیلی، که در طول استوانه برش خورده است انجام می شود که تنها دو المان

PLANE182, PLANE183، این شرط را برآورده می کنند.

در این تحلیل از المان PLANE183 در حالت متقارن محوری استفاده می شود. این المان ترکیبی از

PLANE82 و PLANE77 بوده و در بارگذاری مکانیکی و دمایی قابل استفاده است.

### ۴-۴- معرفی المان PLANE 183

PLANE183 (شکل ۴-۱) یک المان با تابع شکل درجه دو می باشد. این المان به دو صورت هشت

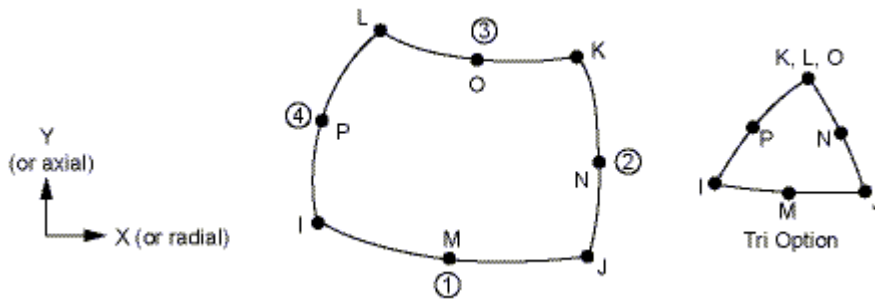
گره و یا شش گره تعریف می شود که هر گره دو درجه ی آزادی دارد (جابجایی نقاط در راستاهای  $x, y$ )

و می توان در مسائل صفحه ای (تنش صفحه ای، کرنش صفحه ای) یا در مسائل متقارن محوری از آن

استفاده کرد. PLANE183 امکان مدل کردن تأثیرات تغییر شکل های بزرگ، کرنش های بزرگ،

پلاستیسیته، هایپر الاستیسیته و خزش را نیز فراهم می کند. این المان همچنین قابلیت شبیه سازی

مواد الاستوپلاستیک تقریباً تراکم‌ناپذیر و مواد هایپرالاستیک کاملاً تراکم‌ناپذیر را نیز دارد. هندسه و موقعیت گره‌ها و سیستم مختصات برای این المان در شکل زیر آورده شده است:



شکل (۴-۱) المان PLANE 183 [۳۵]

#### ۴-۵- تعیین مدول رهايش بالک و برشی

بر اساس فرضیات فصل دوم، رفتار ماده در برش و بالک به صورت زیر است:

الف) در برش رفتار ماده ویسکوالاستیک می‌باشد و برای مدل سازی این رفتار از اولین مدل جامد استاندارد خطی استفاده می‌شود و مدول رهايش  $G$  به صورت تابعی از زمان تعیین می‌شود.

ب) رفتار ماده در بالک الاستیک در نظر گرفته شده است. بدین ترتیب مدول بالک  $k$  عددی ثابت و بدون وابستگی به زمان است.

#### ۴-۵-۱- مدول رهايش برشی

یکی از بهترین روش‌های تعیین خصوصیات مواد ویسکوالاستیک در انسیس (و در اینجا فقط مدول رهايش برشی  $G$ ) استفاده از سری پرونی است. روش‌های مختلفی برای تعیین این سری در انسیس وجود دارد. اولین روش این است که داده‌های مدول رهايش برشی نسبت به زمان، که از آزمایش رهايش بدست آمده است را مستقیماً وارد انسیس کرده و خود انسیس منحنی سری پرونی را بر این

داده‌ها منطبق<sup>۱</sup> می‌کند. در هنگام انطباق تابع نمایی بر داده‌ها، انسیس  $G_\infty, G_0$  را به ترتیب اولین و آخرین داده در نظر می‌گیرد و مقدار ضرایب  $\tau_i, \alpha_i$  را محاسبه می‌کند ولی بعد از آن، مقادیر  $G_\infty, G_0$  را در حافظه نگه نمی‌دارد. از این دو مقدار مجهول  $(G_\infty, G_0)$ ،  $G_0$  مدول آنی است و با تعیین مدول الاستیک  $E$  و ضریب پواسون  $\nu$ ، انسیس آن را بر اساس فرمول زیر محاسبه می‌کند:

$$G_0 = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (۵-۴)$$

نکته‌ی دیگر این است که در داده‌های آزمایشگاهی، در صورتی که آخرین داده صفر باشد، مدول رهایش  $G$  به صورت مدول رهایش المان ماکسول بدست می‌آید.

روش دوم تعیین سری پرونی در انسیس که در این تحلیل مورد استفاده قرار گرفت، این است که با توجه به اینکه در حل تحلیلی مساله از مدل جامد استاندارد برای شبیه‌سازی رفتار برشی ماده استفاده شده است، بر اساس مدول رهایش برشی که برای این المان در فصل اول بدست آمد و رابطه‌ی (۴-۴) ضرایب سری پرونی به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$G(t) = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} + \frac{G_1^2}{G_1 + G_2} \exp\left[-\left(\frac{G_1 + G_2}{\eta}\right) t\right] \quad (۶-۴)$$

یا

$$G(t) = G_\infty + G_i \exp\left[-\left(\frac{t}{\tau_i^G}\right)\right] \quad (۷-۴)$$

که در آن:

$$G_\infty = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2}, \quad G_i = \frac{G_1^2}{G_1 + G_2}, \quad \tau_i^G = \frac{\eta}{G_1 + G_2} \quad (۸-۴)$$

و مقدار مدول برشی آنی  $G_0$  نیز با قرار دادن  $t = 0$  در رابطه (۶-۴) بصورت زیر تعیین می‌شود:

$$G_0 = G_1 \quad (۹-۴)$$

<sup>۱</sup>-Fit

در نتیجه ضرایب سری پرونی (۴-۴) از روابط (۲-۴) ، (۸-۴) و (۹-۴) تعیین می‌شود. همچنین با توجه به رابطه‌ی (۱۰-۴) ، نیازی به وارد کردن مقدار  $G_\infty$  نیست.

اگر در رابطه‌ی (۱-۴)  $t = 0$  باشد، داریم:

$$G_0 = G_\infty + \sum_{i=1}^{n_G} G_i \quad (۱۰-۴)$$

حال مستقیماً ضرایب سری پرونی مورد نظر  $\tau_i, \alpha_i$  وارد ansys می‌شود ولی  $G_0$  را نمی‌توان وارد ansys کرد و همانگونه که قبلاً اشاره شد، انسیس این مقدار را بر حسب مدول الاستیک E و ضریب پواسون محاسبه می‌کند.

#### ۴-۵-۲- مدول بالک

با توجه به اینکه رفتار ماده در بالک الاستیک در نظر گرفته شده است برای حالت بالک، سری پرونی تعریف نمی‌شود و با وارد کردن مدول الاستیک و ضریب پواسون، انسیس مقدار مدول بالک الاستیک را بر اساس رابطه‌ی زیر محاسبه می‌کند.

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (۱۱-۴)$$

#### ۴-۶- مدل سازی پوسته

برای مدل سازی پوسته از خصوصیت تقارن محوری مساله استفاده شده و به جای مدل سازی تمام پوسته، سطح مقطع مستطیلی شکل طولی آن مدل سازی می‌شود. مشخصات پوسته مطابق جدول (۱-۴) است. در این جدول خواص مکانیکی ویسکوالاستیک و بالک، مطابق توضیحات بخش قبل، برای مدل توصیف شده است.



جدول (۴-۱) مشخصات پوسته

$L = 1 \text{ m}$	طول
$R = 0.12 \text{ m}$	شعاع میانی
$h = 0.02 \text{ m}$	ضخامت
$E = 0.52 \times 10^{10} \text{ Pa}$	مدول الاستیسیته
$K = 0.43 \times 10^{10} \text{ Pa}$	مدول بالک
$\nu = 0.3$	ضریب پواسون
$\kappa^2 = \frac{\pi^2}{12}$	ضریب تصحیح برشی
$\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$	چگالی
$V = 5 \text{ m/s}$	سرعت بار
$P = 50000 \text{ Pa}$	فشار

#### ۴-۷- مش بندی

در این مرحله مدل ساخته شده برای انجام تحلیل مش بندی می شود. در این مش بندی از المان های مربعی شکل استفاده می شود. طول المان ها نیز باید به اندازه ای باشد که پاسخ پوسته، هیچگونه وابستگی به تغییرات اندازه المان نداشته باشد؛ برای این کار بر اساس سری پرونی (۴-۱۲)، نمودارهای جابجایی شعاعی و محوری در طول پوسته و روی شعاع میانی پوسته رسم شده است.

$$G = 0.49 * 10^7 + 0.199 * 10^{12} e^{-0.109r} \quad (۴-۱۲)$$

## فصل چهارم: حل عددی

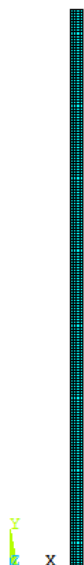
جدول (۴-۲) بررسی حساسیت مشبندی

جابجایی شعاعی در طول پوسته روی شعاعی میانی	جابجایی شعاعی در طول پوسته روی شعاعی میانی	اندازه المان
		$\frac{1}{25} m$
		$\frac{1}{100} m$
		$\frac{1}{200} m$

با توجه به اینکه با اندازه المان  $\frac{1}{200} m$ ، تغییرات پاسخ نسبت به پاسخ پوسته با اندازه المان  $\frac{1}{100} m$

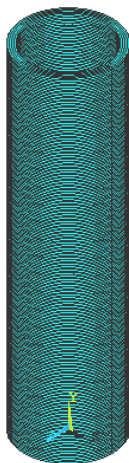
بسیار کم است، این مقدار به عنوان اندازه مشبندی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

شکل (۲-۴) مقطع المان بندی شده ی پوسته را نشان می دهد.



شکل (۲-۴) مقطع المان بندی شده ی پوسته

شکل گسترش یافته ی مقطع المان بندی شده ی فوق حول محور  $Z$ ، بصورت زیر است:



شکل (۳-۴) گسترش یافته ی مقطع مستطیلی المان بندی شده ، حول محور  $Z$

#### ۴-۸- مرحله ی حل

حل مساله شامل بخش های زیر است:

#### ۴-۸-۱- اعمال شرایط مرزی

دو لبه‌ی پوسته ثابت فرض شده است:

$$y(0,t) = y(L,t) = 0 \quad (۴-۱۳)$$

#### ۴-۸-۲- تعیین نوع آنالیز

برای انجام این تحلیل از آنالیز transient-full استفاده شده است که یک تحلیل دینامیکی است.

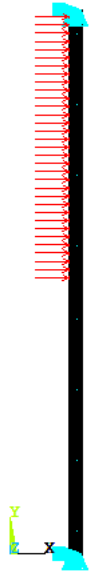
#### ۴-۸-۳- مدل سازی فشار متحرک در استوانه

برای اعمال فشار متحرک در پوسته، باید از توابع پله‌ای استفاده کرد. به این صورت که اگر مدل متقارن محوری یک پوسته از  $n$  المان متوالی تشکیل شده باشد، برای ورود بار پیوسته و رسیدن آن به انتهای پوسته به  $n$  مرحله‌ی بارگذاری پله‌ای نیاز است. از این رو کل زمان بارگذاری بر روی هر

المان برابر با  $t = \frac{L}{nV}$  است که  $L$  طول پوسته و  $V$  سرعت ورود فشار متحرک در پوسته می‌باشد.

فرآیند مدل‌سازی به این صورت است که بار پیوسته را بر روی المان شماره‌ی یک وارد کرده و زمان  $t$  به آن اختصاص داده می‌شود که متناظر با حل شماره‌ی یک می‌باشد. حال بار پیوسته را بر روی دو المان اول وارد کرده و زمان  $2t$  به آن اختصاص داده می‌شود که متناظر با حل شماره‌ی دو است. این روند تا حل شماره‌ی  $n$  ام انجام می‌شود. حل متوالی این  $n$  مرحله، حرکت بار پیوسته در استوانه را برای نرم‌افزار شبیه‌سازی می‌کند. برای حالت ایستا (یعنی وقتی که فشار در روی کل پوسته است) در پوسته، مرحله‌ی  $n+1$  به مراحل قبلی اضافه می‌شود. زمان این مرحله اختیاری می‌باشد.

برای انجام کار فوق می‌توان از ماکرونویسی استفاده کرد. به این صورت که در هر  $n$  مرحله‌ی فوق یک بار جدید به قبلی اضافه شده و هر مرحله در فایلی ذخیره و در نهایت، با فراخوانی این  $n$  مرحله، حل انجام می‌شود.



شکل (۴-۴) اعمال بار متحرک

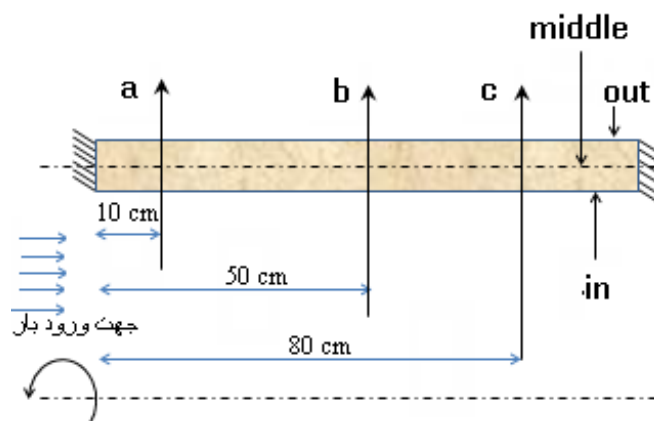
#### ۴-۹- جمع بندی:

در این فصل، حل عددی پوسته، با استفاده از سری پرونی برای تعریف خصوصیت ویسکوالاستیک ماده و استفاده از کدنویسی برای اعمال بار متحرک انجام گردید.

## فصل پنجم: بررسی نتایج

### ۵-۱- مقدمه

در بخش‌های قبلی، بعد از تعیین معادلات حاکم بر پوسته‌های ویسکوالاستیک، پاسخ این سیستم با روش‌های عددی و نیمه تحلیلی تعیین شد؛ در این فصل به بررسی نتایج حاصل از این تحلیل‌ها پرداخته می‌شود. برای بررسی و مقایسه‌ی نتایج، از چند بخش نام‌گذاری شده پوسته استفاده شده و نتایج در این نقاط بررسی می‌شود. نقاط مورد بررسی بر روی سه خط  $a, b, c$  که به ترتیب، ۱۰ و ۵۰ و ۸۰ سانتیمتر از ابتدای پوسته فاصله دارند، قرار گرفته است که بر روی این خطوط، نقاط داخلی و میانی و خارجی پوسته به ترتیب با زیرنویس‌های  $o, m, i$  نشان داده می‌شوند. (بدین معنی که نقطه- $a_i$  نقطه‌ی داخلی پوسته بوده که از ابتدای پوسته ۱۰ سانتیمتر فاصله دارد). موقعیت و مشخصات این گره‌ها در زیر آمده است.



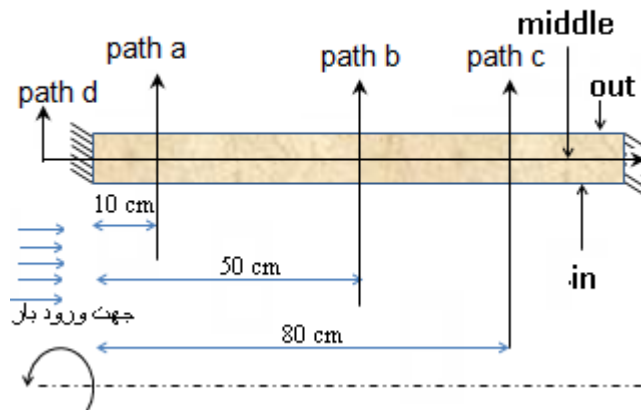
شکل (۵-۱) نام‌گذاری المان‌های مورد بررسی بر روی سطح مقطع طولی پوسته

جدول (۵-۱) شماره گره‌ها

	In ( $R = 11cm$ ).	middle ( $R = 12cm$ ).	out ( $R = 13cm$ ).
a (10cm).	۷۷۶	۲۳۹۰	۵۰
b (50 cm).	۶۱۶	۲۳۱۰	۲۱۰
C (80 cm).	۴۹۶	۲۲۵۰	۳۳۰

## فصل پنجم: بررسی نتایج

علاوه بر گره‌های فوق، برای بررسی بعضی از پارامترها در تحلیل، لازم است که مسیرهایی<sup>۱</sup> در روی سطح مقطع مورد بررسی در پوسته همانند شکل زیر تعیین شود.



شکل (۲-۵) نام‌گذاری مسیرهای مورد بررسی بر روی سطح مقطع طولی پوسته

که مشخصات این مسیرها در زیر آمده است:

جدول (۲-۵) مشخصات مسیرها

	Node 1	Node 2
Path a	۷۷۶	۵۰
Path b	۶۱۶	۲۱۰
Path c	۴۹۶	۳۳۰
Path d	۶	۴۱۴

برای بررسی خصوصیت ویسکوالاستیک، از دو سری پرونی استفاده می‌شود که مشخصات این دو در زیر آمده است.

<sup>۱</sup> -Path



## فصل پنجم: بررسی نتایج

جدول (۳-۵) خصوصیات ویسکوالاستیک

سری پرونی ب	سری پرونی الف	
$G = 0.49 * 10^7 + 0.19 * 10^{12} e^{-109591t}$	$G = 0.49 * 10^7 + 0.199 * 10^{12} e^{-0.109t}$	رابطه
$0.912 * 10^{-5} s$	$9.12 s$	$\tau$
ثابت‌های معادل در مدل جامد استاندارد.		
$0.2 * 10^{12}$	$0.2 * 10^{12}$	$G_1$
$0.5 * 10^7$	$0.05 * 10^8$	$G_2$
$0.18 * 10^7$	$0.18 * 10^{13}$	$\eta$
ثابت‌های الاستیک.		
$0.52 * 10^{12}$	$0.52 * 10^{12}$	$E$
0.3	0.3	$\nu$
$0.43 * 10^{12}$	$0.43 * 10^{12}$	$K$

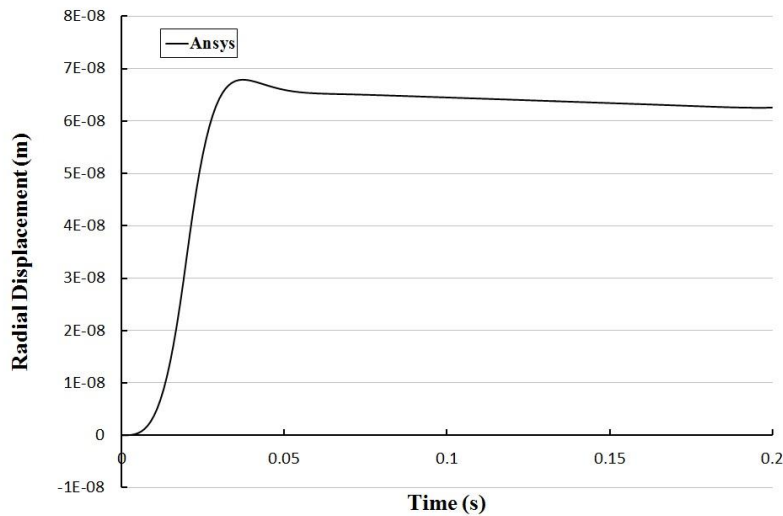
### ۲-۵- تحلیل عددی پوسته

این بخش به بررسی نتایج حاصل از تحلیل عددی پوسته اختصاص دارد. بدین منظور، پارامترهایی چون جابجایی شعاعی و محوری نقاط روی پوسته مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

### ۱-۲-۵- بررسی جابجایی های شعاعی در روی پوسته

بر اساس داده‌های جدول (۴-۱) و سری پرونی الف، جابجایی شعاعی نقاط  $a_m, b_i, b_m, b_o, c_m$  پوسته در هنگام ورود بار به صورت زیر تعیین می‌شود.

الف: جابجایی شعاعی نقطه‌ی  $a_m$  :



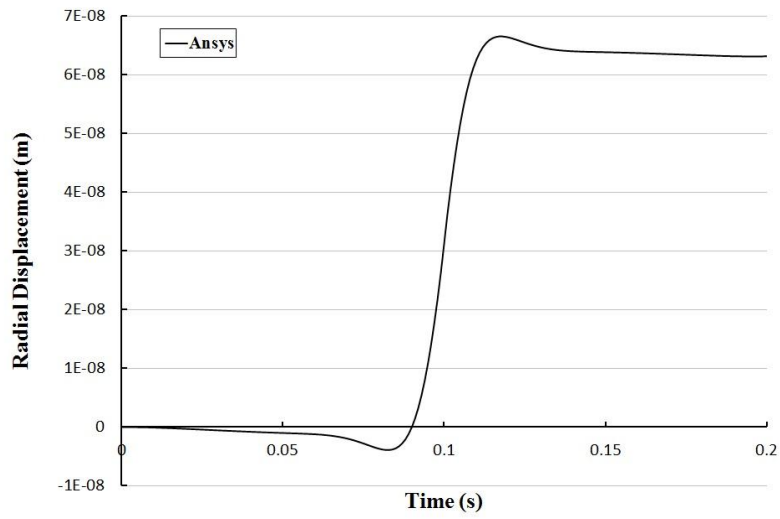
شکل (۳-۵) جابجایی شعاعی در هنگام ورود بار در نقطه‌ی  $a_m$

بر اساس سرعت حرکت بار در طول پوسته، زمان رسیدن بار به انتهای پوسته برابر با  $t_f = \frac{L}{V}$  می‌باشد که در آن  $L, V$  به ترتیب سرعت حرکت بار و طول پوسته است که در اینجا مقدار  $t_f = 0.2$  تعیین می‌شود.

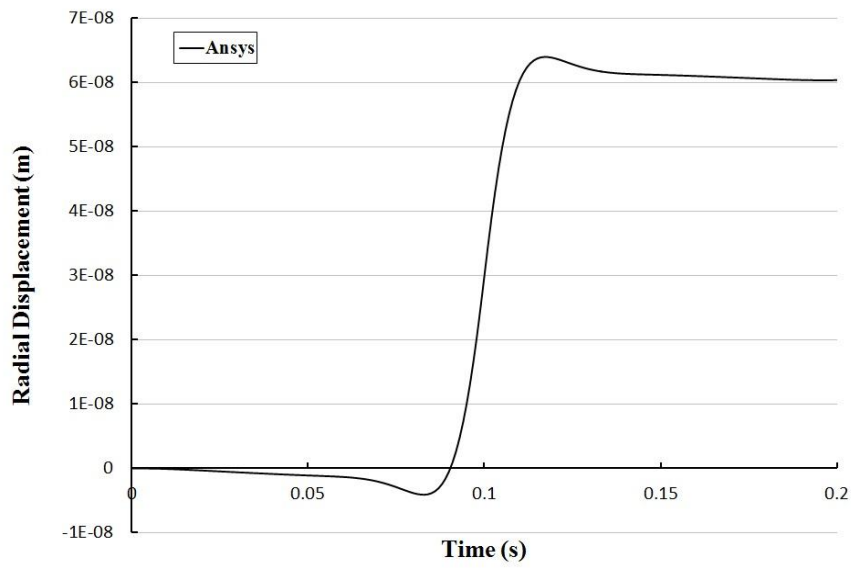
با توجه به موقعیت طولی نقطه‌ی  $a_m$ ، زمان رسیدن بار به این نقطه  $0.1 * t_f$  است. به علت نزدیک بودن این نقطه به مرز، قبل از رسیدن بار به نقطه  $a_m$ ، به علت وجود تکیه‌گاه ساده، شیب به وجود آمده در نقاط قبلی باعث جابجایی شعاعی این نقطه، قبل از رسیدن بار می‌شود و بعد از وارد شدن کامل بار، جابجایی تقریباً به یک تعادل می‌رسد.

ب: جابجایی شعاعی نقاط روی  $b$ :

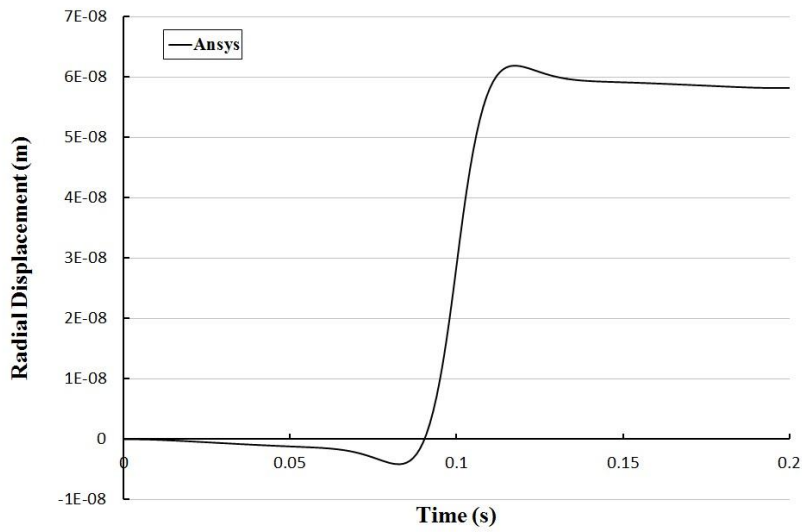
جابجایی این سه نقطه به صورت زیر است:



شکل (۴-۵) جابجایی شعاعی در هنگام ورود بار در نقطه‌ی  $b_i$



شکل (۵-۵) جابجایی شعاعی در هنگام ورود بار در نقطه‌ی  $b_m$

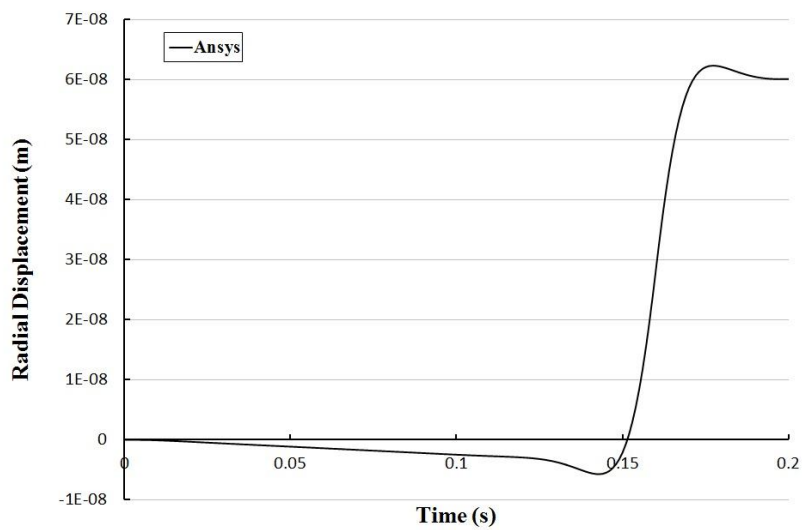


شکل (۵-۶) جابجایی شعاعی در هنگام ورود بار در نقطه‌ی  $b_o$

پس از عبور بار، در مدت زمان مورد بررسی، جابجایی نقطه‌ی  $b_i$  همان‌طور که انتظار می‌رود از  $b_o, b_m$  بزرگ‌تر است.

ج: جابجایی شعاعی  $c_m$ :

نمودار مربوط به جابجایی شعاعی  $c_m$  به صورت زیر است:

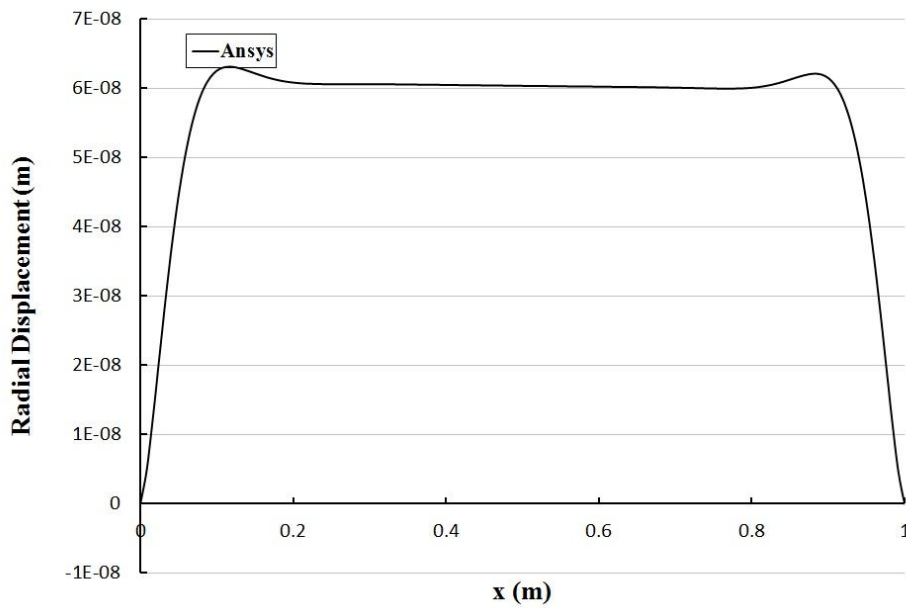


شکل (۵-۷) جابجایی شعاعی در هنگام ورود بار در نقطه‌ی  $c_m$

بار در لحظه‌ی  $t = 0.8 t_f$  به نقطه‌ی C می‌رسد. تا قبل از رسیدن بار، جابجایی نقطه‌ی مورد نظر صفر است که با نزدیک شدن بار، تحت تأثیر جابجایی المان‌های قبلی قرار می‌گیرد.

د: جابجایی شعاعی روی مسیر  $d$ :

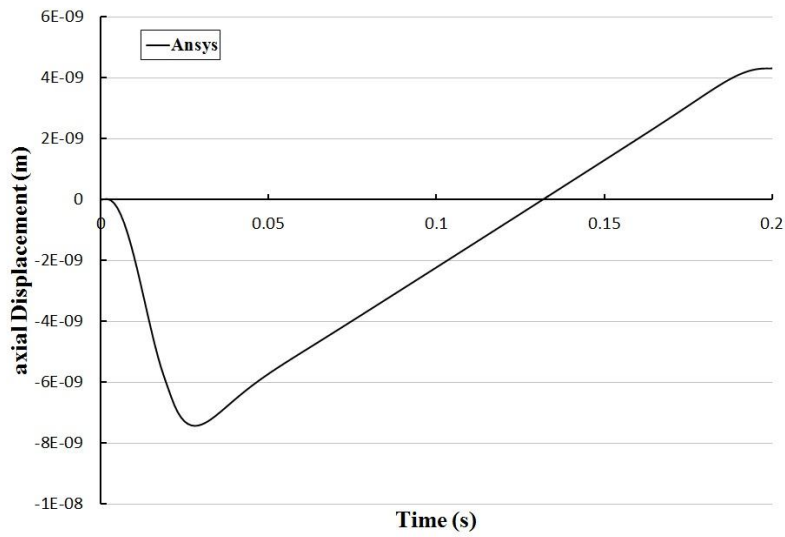
در نهایت جابجایی شعاعی در روی مسیر  $d$  و در زمان  $t_f$  که بار به انتهای پوسته می‌رسد، به صورت زیر است.



شکل (۸-۵) جابجایی شعاعی در روی مسیر  $d$  در زمان  $t_f$

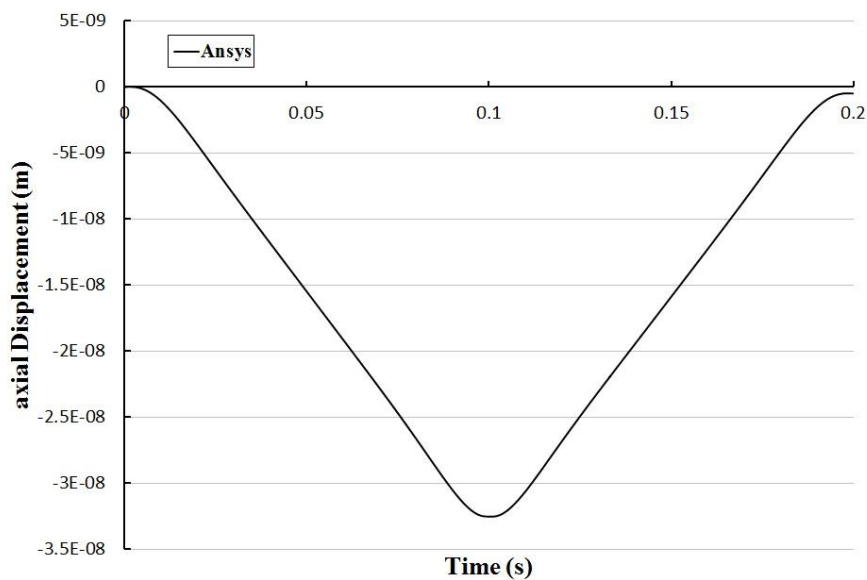
### ۵-۲-۲- بررسی جابجایی‌های محوری در روی پوسته.

جابجایی محوری نقاط  $a_m, b_m, c_m$  روی پوسته در هنگام ورود بار مطابق زیر است.



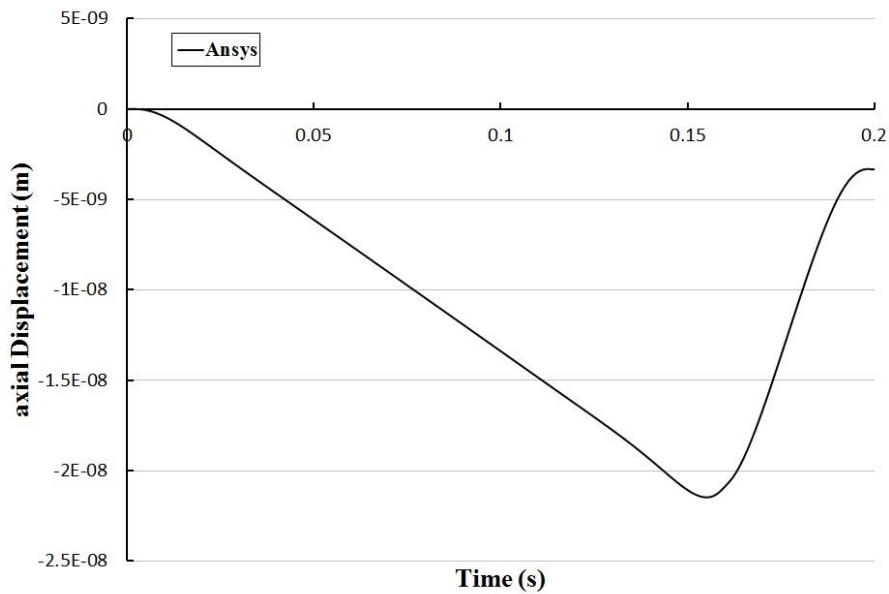
شکل (۵-۹) جابجایی محوری در هنگام ورود بار در نقطه‌ی  $a_m$

با توجه به موقعیت طولی  $a_m$  قبل از رسیدن بار، این نقطه دارای جابجایی محوری منفی بود ولی بعد از ورود بار، این نقطه به سمت مثبت محور کشیده شده و در نهایت در لحظه‌ی  $t_f$ ، این نقطه دارای خیز مثبت خواهد بود.



شکل (۵-۱۰) جابجایی محوری در هنگام ورود بار در نقطه‌ی  $b_m$

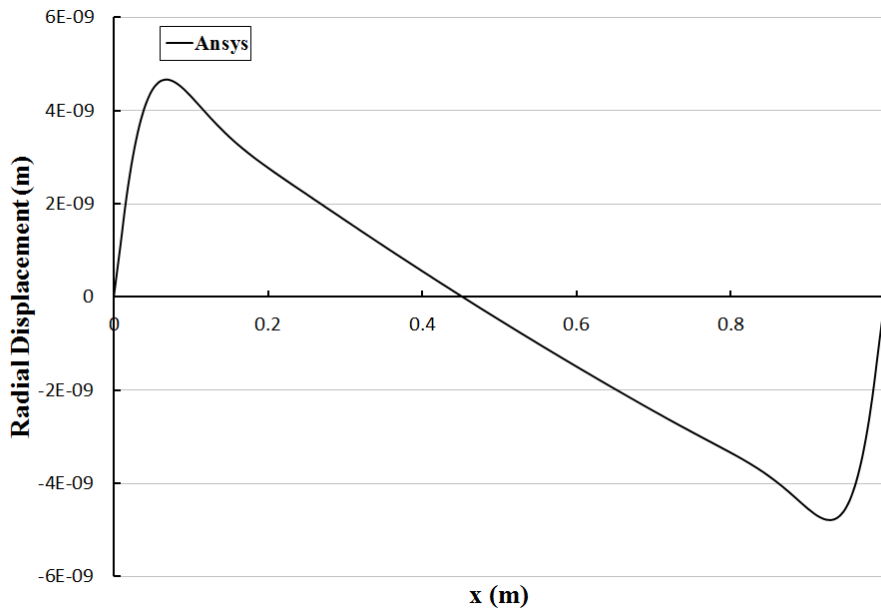
بر اساس موقعیت طولی  $b_m$  قبل از رسیدن بار، این نقطه دارای جابجایی محوری منفی بود، ولی بعد از ورود بار، این نقطه به سمت مثبت محور کشیده شده و در نهایت در لحظه  $t_f$ ، جابجایی طولی این نقطه تقریباً صفر خواهد شد.



شکل (۵-۱۱) جابجایی محوری در هنگام ورود بار در نقطه  $c_m$

همان گونه که از شکل‌ها مشخص است، جابجایی محوری نسبت به جابجایی شعاعی سریع‌تر تحت تأثیر قرار می‌گیرد. بر اساس موقعیت طولی  $c_m$ ، قبل از رسیدن بار، این نقطه دارای جابجایی محوری منفی بود، ولی بعد از ورود بار، این نقطه به سمت مثبت محور کشیده شده و در نهایت در لحظه  $t_f$ ، این نقطه دارای خیز منفی خواهد بود.

در نهایت جابجایی طولی در روی مسیر  $d$  و در زمان  $t_f$  به صورت زیر است که بر اساس نمودارهای فوق انتظار داریم، این نمودار در لحظه  $t_f$  در بعضی از نقاط دارای جابجایی مثبت و در نقاط دیگر دارای جابجایی منفی باشد.



شکل (۵-۱۲) جابجایی محوری در روی مسیر  $d$  در زمان  $t_f$

### ۵-۳- مقایسه‌ی رفتار الاستیک و ویسکوالاستیک

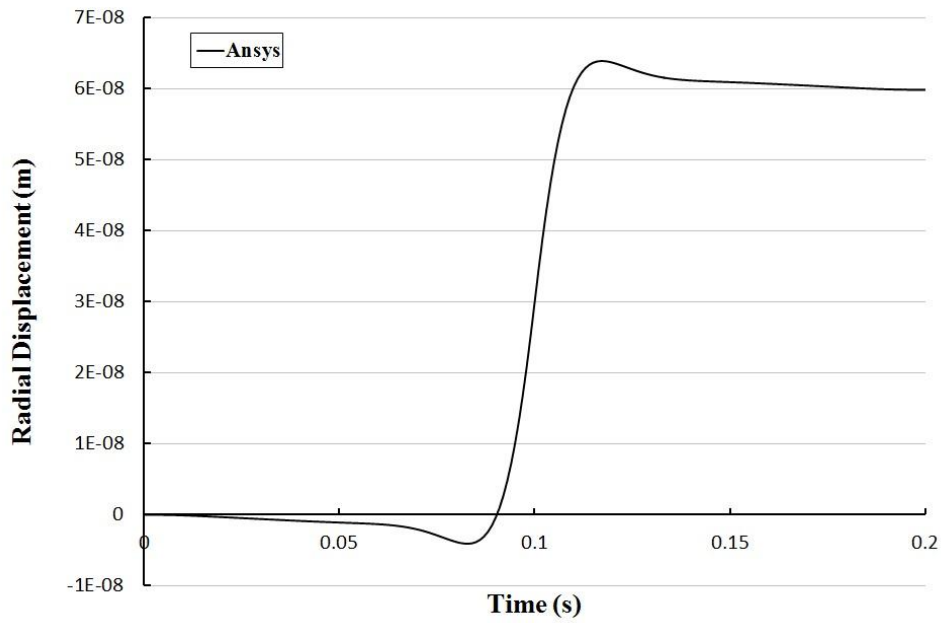
به منظور تشریح تفاوت رفتار ویسکوالاستیک و الاستیک پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم تحت بار متحرک، ابتدا به بررسی نتایج حاصل از تحلیل عددی پوسته‌ها در حوزه‌ی الاستیک پرداخته می‌شود که این کار با استفاده از نرم افزار انجام گردیده است. خصوصیت الاستیک ماده بر اساس جدول (۵-۴) و بقیه‌ی داده‌ها بر اساس جدول (۴-۱) است.

جدول (۵-۴) خصوصیات الاستیک.

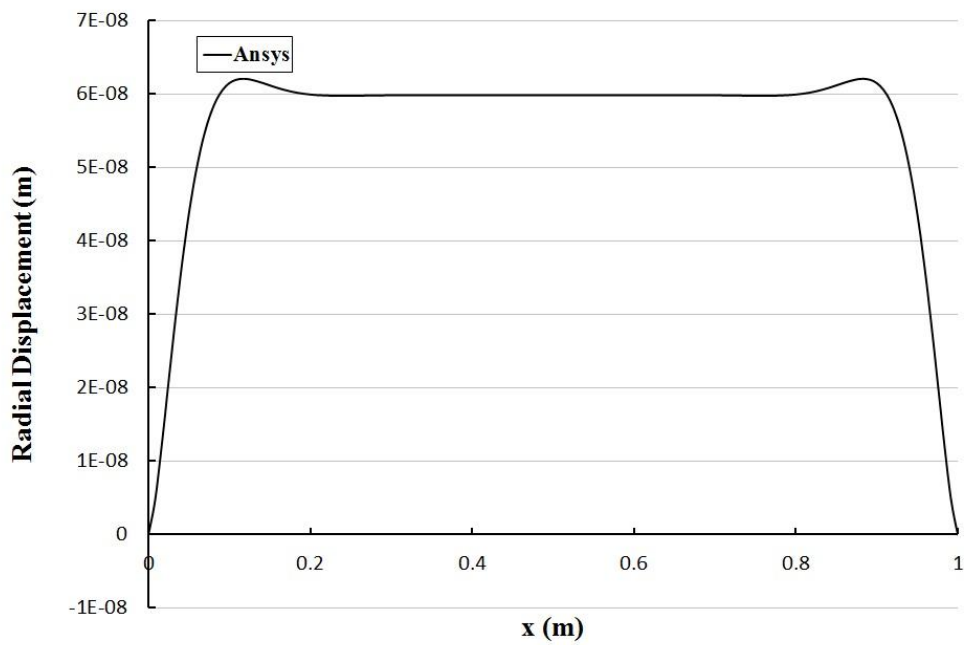
$0.43 \cdot 10^{12} \text{ pa}$	مدول بالک
$0.52 \cdot 10^{12} \text{ pa}$	مدول یانگ.
0.3	ضریب پواسون.

بر این اساس، نمودارهای مربوط به جابجایی شعاعی و محوری در حوزه الاستیک در ادامه آمده است.

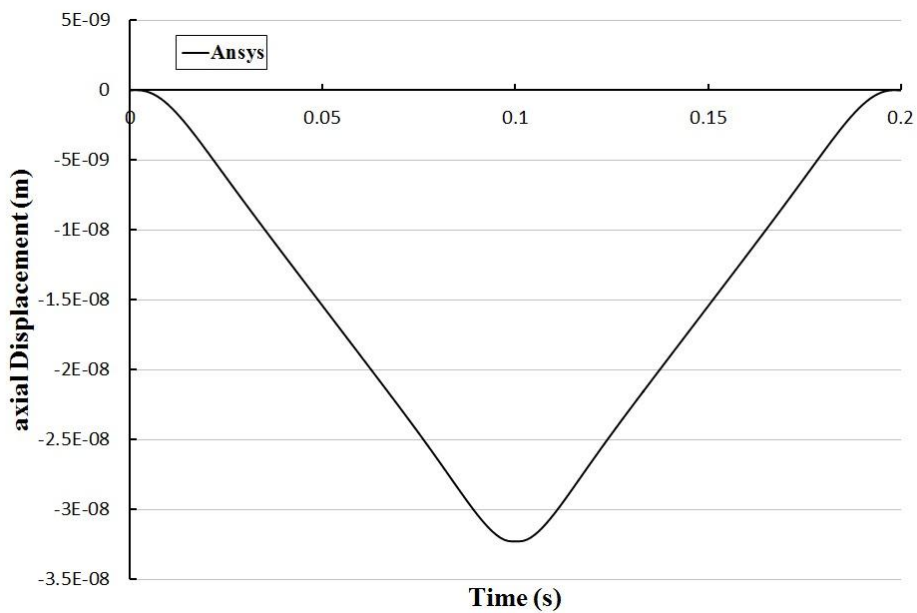




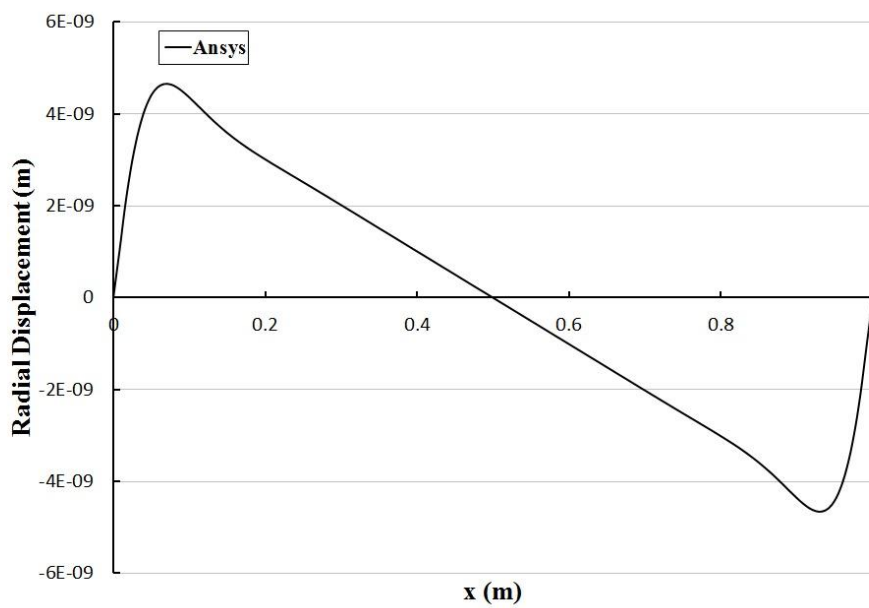
شکل (۵-۱۳) جابجایی شعاعی در نقطه  $b_m$  در حوزه ی الاستیک



شکل (۵-۱۴) جابجایی شعاعی در مسیر d در حوزه ی الاستیک



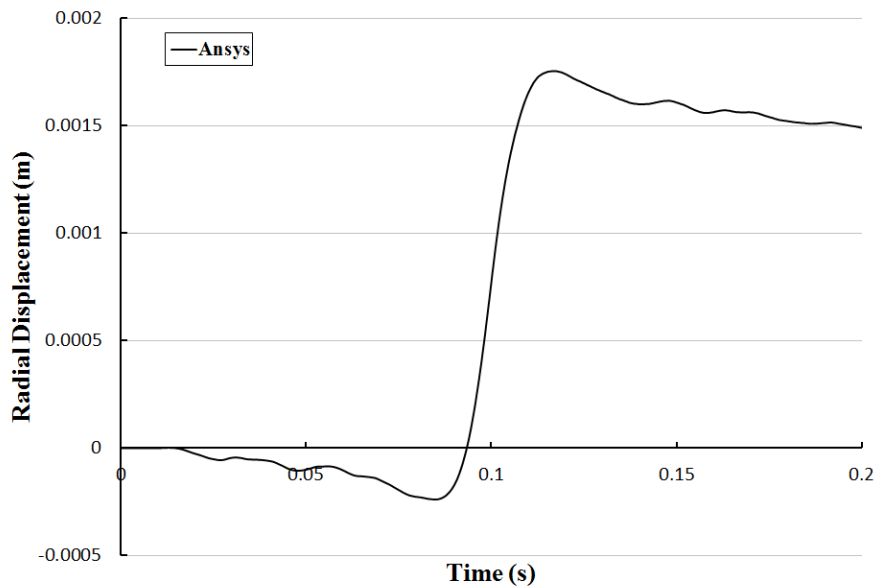
شکل (۵-۱۵) جابجایی محوری در نقطه  $b_m$  در حوزه ی الاستیک



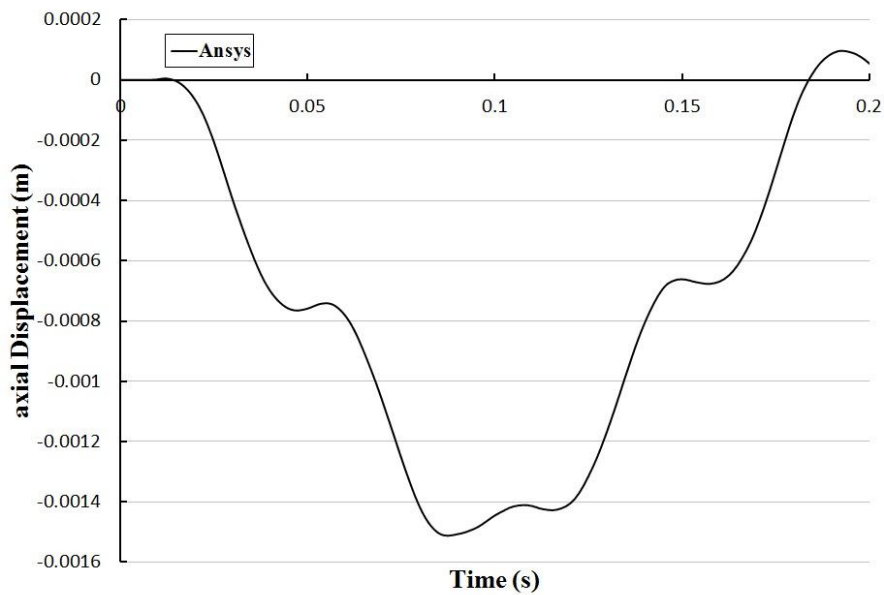
شکل (۵-۱۶) جابجایی محوری در مسیر d در حوزه ی الاستیک

از مقایسه‌ی نمودارهای فوق با نمودارهای معادل در حوزه‌ی ویسکو الاستیک که در بخش ۵-۲ بررسی شد، مشخص می‌شود که هر دو دسته نمودار (حوزه‌ی ویسکو الاستیک و ویسکو الاستیک) شباهت زیادی به هم دارند.

برای مشخص شدن علت این تشابه لازم است مسأله مورد بررسی در حوزه‌ی ویسکو الاستیک را بر اساس سری پرونی دیگری تشریح کرد که از سری پرونی (ب) در جدول (۵-۳) استفاده شده است. بر این اساس، نمودارهای جابجایی شعاعی و محوری در نقطه‌ی  $b_m$  به صورت زیر تعیین می‌شود:



شکل (۵-۱۷) جابجایی شعاعی در نقطه‌ی  $b_m$

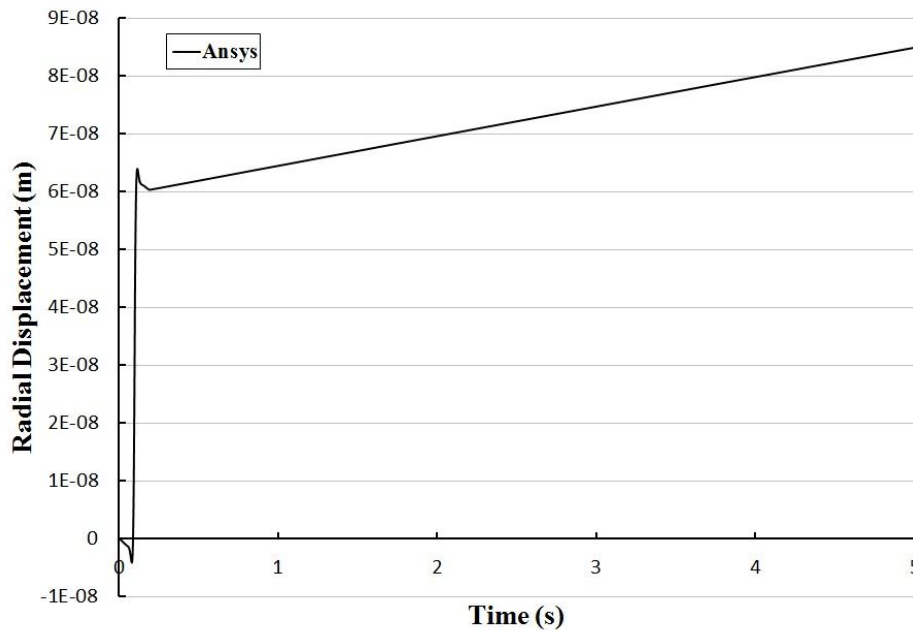


شکل (۵-۱۸) جابجایی محوری در نقطه‌ی  $b_m$

همان‌گونه که از نمودارهای فوق مشخص است، جابجایی‌ها به مراتب بیشتر از حالت الاستیک و ویسکوالاستیک قبلی است (نمودار های قبل)، در حالی که تفاوت این سه دسته نمودار (نمودارهای حوزه‌ی الاستیک و ویسکوالاستیک با سری‌های پرونی الف و ب) تنها در زمان رهایش می‌باشد. به این صورت که در شکل (۵-۱۷) و شکل (۵-۱۸)، کلیه شرایط نسبت به ماده‌ی ویسکوالاستیک با سری پرونی (الف) یکسان در نظر گرفته شده است، فقط زمان رهایش با تغییر پارامتر  $\eta$  تغییر کرده است، در نتیجه با توجه به اینکه، زمان رهایش در این حالت خیلی کوچک‌تر از محدوده‌ی زمانی مورد بررسی  $t_f = 0.2$  است، به همین علت در این بازه، رهایش خیلی کمی رخ داده و خیز افزایش می‌یابد. در حوزه‌ی الاستیک نیز هیچ رهایشی رخ نمی‌دهد. به همین علت بود که در مورد پوسته‌ی ویسکوالاستیک با سری پرونی الف، به علت زیاد بودن پارامتر  $\eta$ ، زمان رهایش نسبت به زمان مورد بررسی ورود بار زیاد بود و در این محدوده، رهایش خیلی کمی رخ داده و رفتار ماده به حالت الاستیک نزدیک‌تر بود.

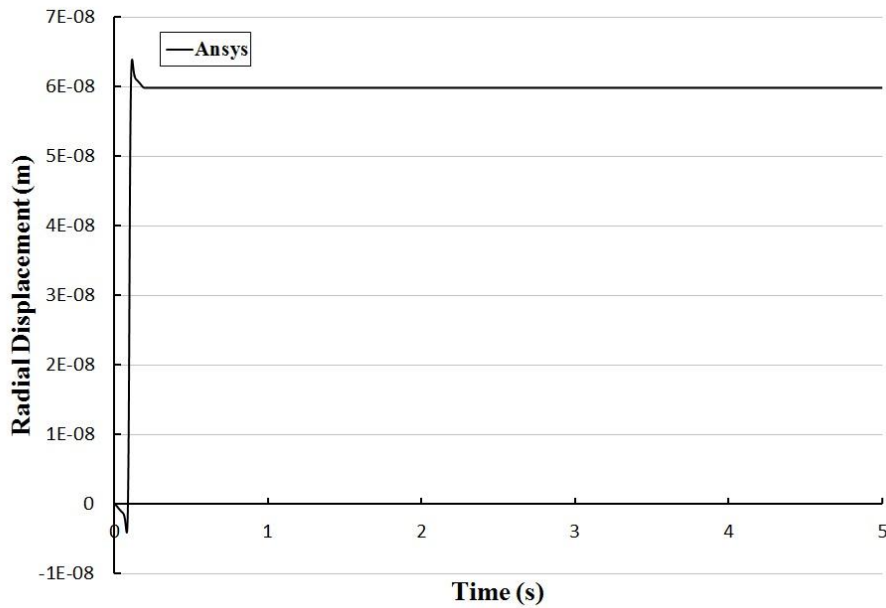
همان‌گونه که در بالا اشاره شد، در محدوده‌ی زمانی  $t_f$  نمودار حالت الاستیک با ویسکوالاستیک (به

ازای اولین سری پرونی) یکسان است. حال در صورتی که زمان مورد بررسی را افزایش یابد، رفتار این دو از هم تفکیک می‌شود. به این صورت که در حالت ویسکوالاستیک با سری پرونی الف:



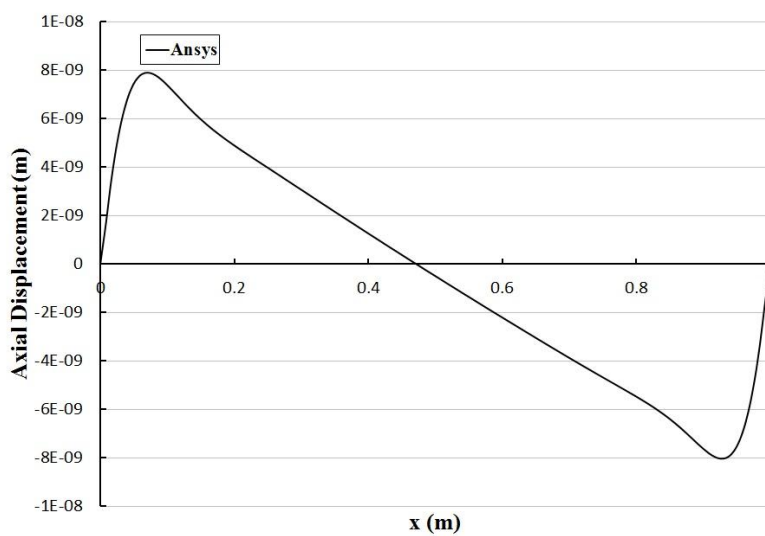
شکل (۵-۱۹) جابجایی شعاعی نقطه‌ی  $b_m$  در حوزه‌ی ویسکوالاستیک.

همان‌طور که مشخص است، بعد از ورود بار به روی پوسته و ثابت ماندن بار، به علت وابستگی زمانی خصوصیات ماده‌ی ویسکوالاستیک، جابجایی شعاعی افزایش می‌یابد در حالی که نمودار جابجایی شعاعی در حالت الاستیک (با شرایط مشابه) به صورت زیر است:

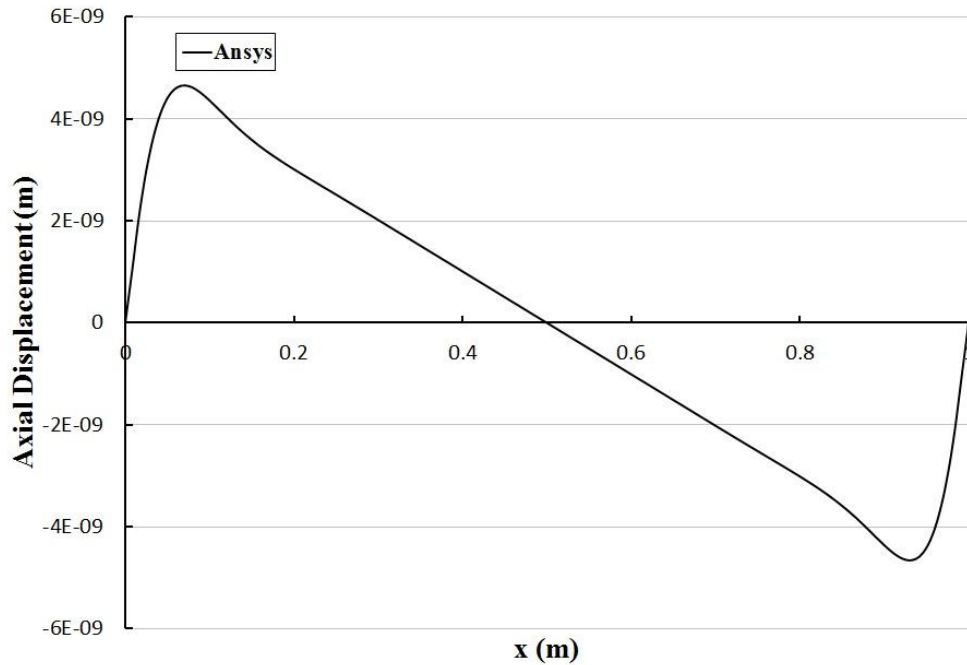


شکل (۲۰-۵) جابجایی شعاعی نقطه‌ی  $b_m$  در حوزه‌ی الاستیک در لحظه‌ی  $t = 5s$

در این حالت همان‌طور که انتظار می‌رفت، پاسخ پوسته‌ی الاستیک بعد از ثابت ماندن بار، تابع زمان نیست. در مورد جابجایی محوری در حالت الاستیک و ویسکوالاستیک نیز، بعد از ثابت ماندن بار روی پوسته، نمودارهای زیر بدست آمده است:



شکل (۲۱-۵) جابجایی محوری روی مسیر  $d$  در حوزه‌ی ویسکوالاستیک در لحظه‌ی  $t = 5s$



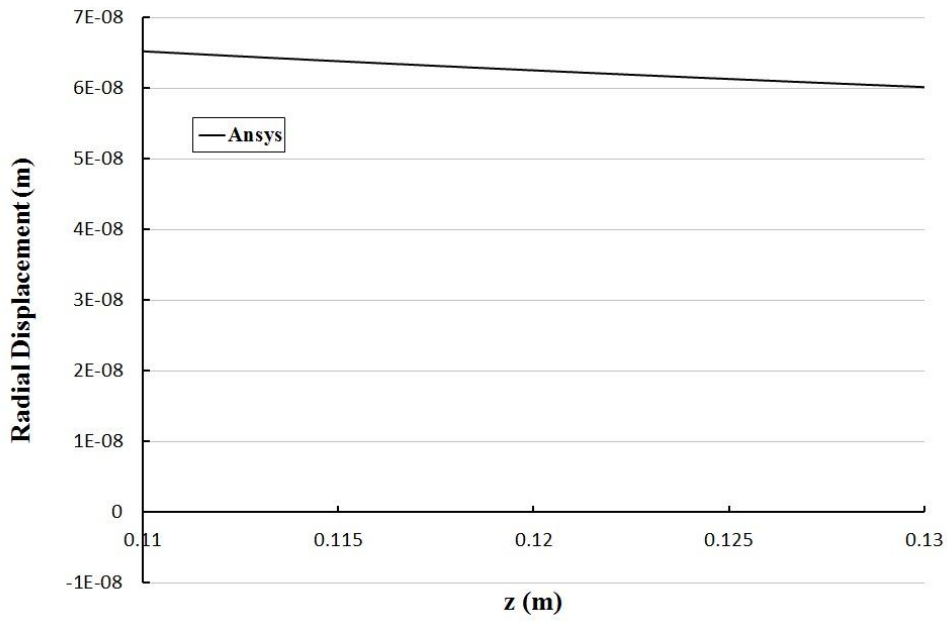
شکل (۵-۲۲) جابجایی محوری روی مسیر  $d$  در حوزه‌ی الاستیک در لحظه‌ی  $t = 5s$

در حالت ویسکوالاستیک، بعد از ماند بار، به علت خصوصیت ماده، رهايش رخ داده و هر دو جابجایی شعاعی و محوری افزایش می‌یابد. در صورتی که در حالت الاستیک، بعد از ماند بار روی سازه، با گذشت زمان هیچ تغییراتی در میدان جابجایی پوسته رخ نمی‌دهد.

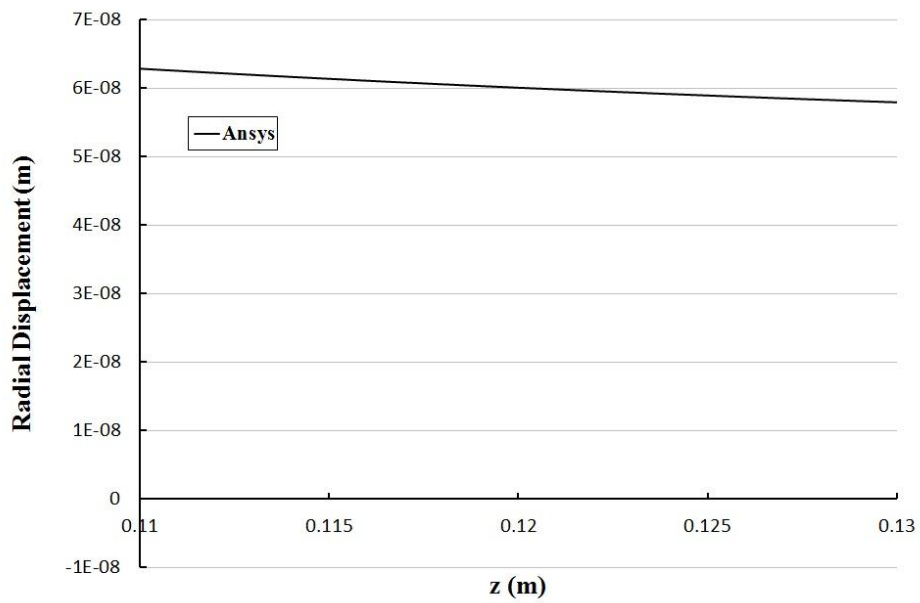
#### ۵-۴- اعتبار سنجی تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول

به منظور اعتبارسنجی بکارگیری تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول در تحلیل رفتار پوسته‌ی استوانه‌ای ویسکوالاستیک جدار ضخیم، می‌توان از بررسی تغییرات جابجایی‌های شعاعی و محوری در راستای ضخامت استفاده کرد. برای این منظور از نمودارهای جابجایی شعاعی و محوری پوسته بر اساس داده‌های جدول (۴-۱) و سری پرونی الف در جدول (۵-۳)، در روی مسیرهای  $a$ ،  $c$ ، در زمان رسیدن بار به انتهای پوسته، استفاده شده است.

نمودار جابجایی شعاعی در روی مسیر های a, c به صورت زیر است:



شکل (۲۳-۵) جابجایی شعاعی روی path a



شکل (۲۴-۵) جابجایی شعاعی روی path c

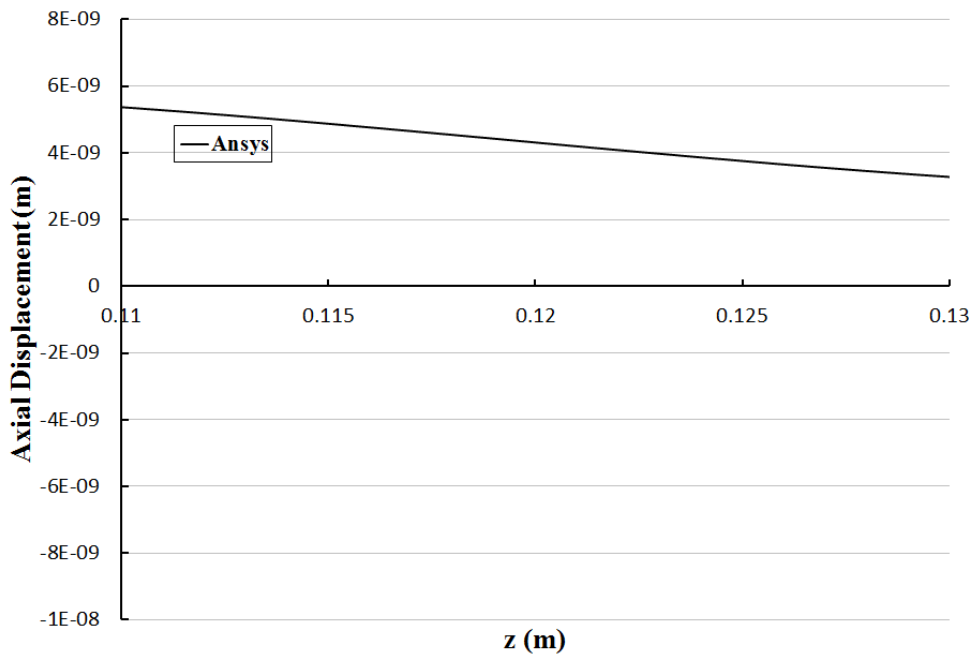


همان گونه که مشخص است، هر دو نمودار با تقریب بالایی به صورت خطی می‌باشند. بدین معنی که تغییرات جابجایی شعاعی در راستای ضخامت خطی است و در نتیجه بر اساس رابطه‌ی زیر، تغییرات جابجایی شعاعی در راستای ضخامت پوسته بر مبنای جابجایی شعاعی لایه‌ی میانی پوسته، قابل تعیین است.

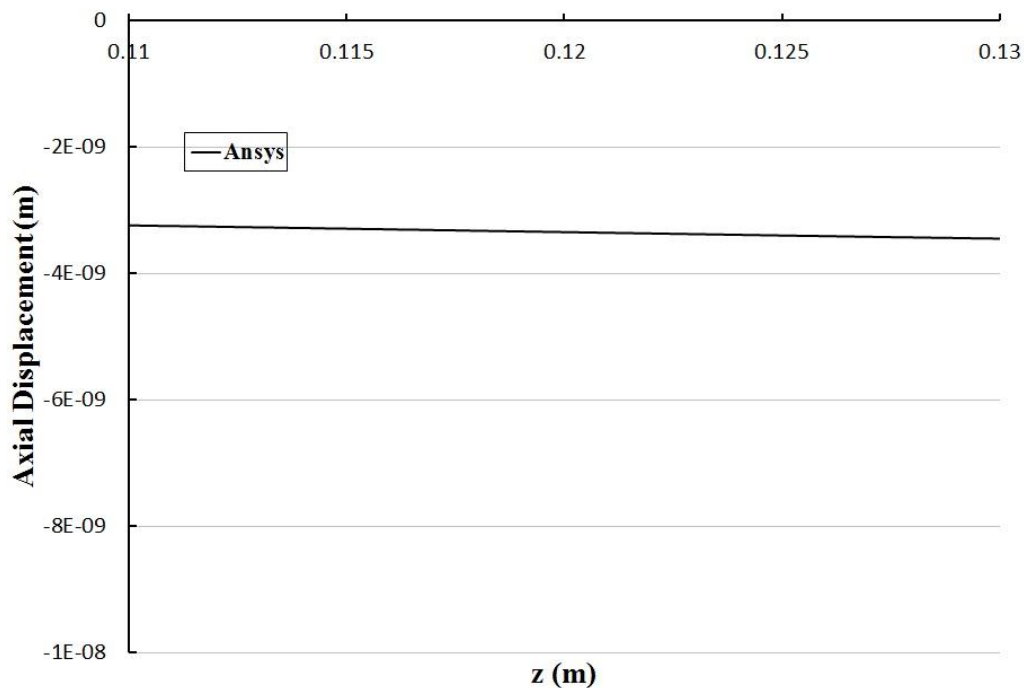
$$u'_x = u'(x, t) + z \Psi'_x(x, t) \quad (1-5)$$

که در آن  $u'_x$  جابجایی شعاعی نقاط در یک مسیر معین در راستای ضخامت پوسته بوده و برابر است با جابجایی شعاعی نقطه‌ی میانی  $u'(x, t)$  روی آن مسیر که متناسب با فاصله‌ی  $z$  از نقطه‌ی میانی با شیب  $\Psi'_x(x, t)$  تغییر می‌کند.

این رابطه همان رابطه‌ی (۱-۲) یا تعریف میدان جابجایی بر حسب تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول است. جابجایی محوری نیز در روی مسیر های a,c به شکل زیر است:



شکل (۲۵-۵) جابجایی محوری روی path a



شکل (۵-۲۶) جابجایی محوری روی path c

که همانند جابجایی شعاعی، خطی بودن این نمودارها دقت بالای استفاده از میدان جابجایی بر حسب تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول را نشان می‌دهد؛ و با توجه به اینکه در مواد ویسکوالاستیک پاسخ ماده علاوه بر وابستگی به موقعیت مکانی، به مختصه‌ی زمان نیز وابسته است، مقدار شیب و خیز در روی مسیرهای  $c, a$  با هم متفاوت می‌باشد. لازم به ذکر است که در تحلیل ریاضی انجام شده، تغییرات جابجایی شعاعی، مستقل از  $Z$  فرض شده است.

## ۵-۵- تحلیل با روش تئوری مقدماتی معادلات دیفرانسیل

تحلیل پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم با استفاده از تئوری مقدماتی معادلات دیفرانسیل در فصل سوم ارائه شد که بر اساس فرضیات مربوطه، پاسخ سیستم به فشار متحرک داخلی در فضای لاپلاس

## فصل پنجم: بررسی نتایج

به صورت توابع پیچیده‌ای از متغیر لاپلاس تعیین گردیده و برای بازگرداندن به فضای زمان از روش مانده‌ها استفاده می‌شود.

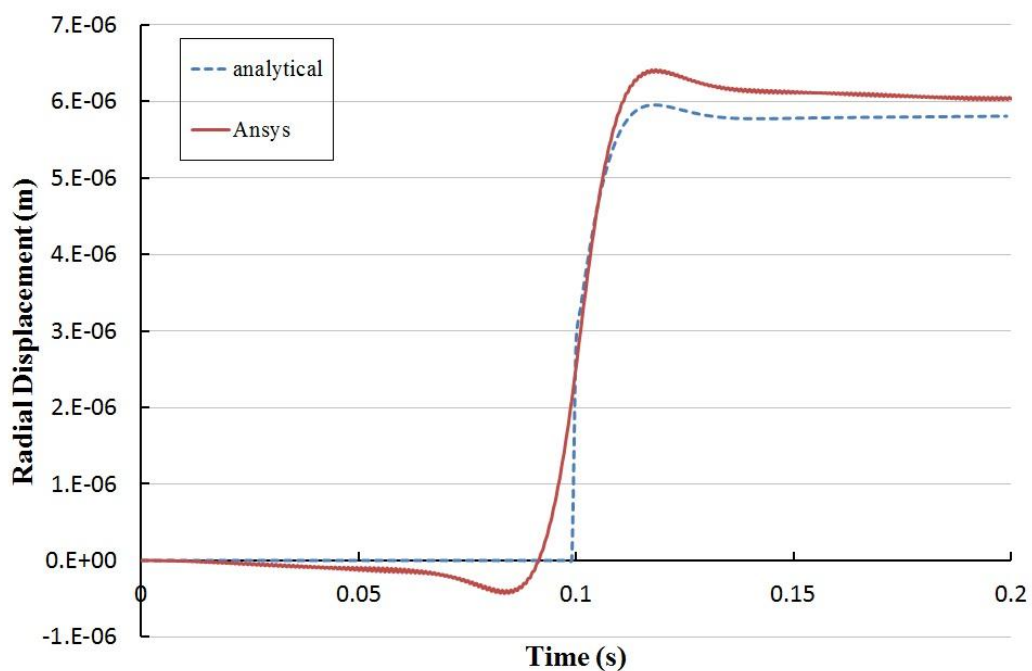
در لاپلاس معکوس گیری به روش مانده‌ها، لازم است که قطب‌های سیستم تعیین گردد. در سیستم‌های ارتعاشی، قطب‌های با مقدار حقیقی کوچک‌تر یا مساوی صفر، قطب‌های پایدار سیستم می‌باشند و قطب‌هایی با مقدار حقیقی مثبت باعث ناپایدار شدن سیستم می‌گردد.

در تعیین پاسخ سیستم با استفاده از روش مورد بررسی به علت اینکه در بخشی از روند تعیین پاسخ، از تقریب‌هایی استفاده شده است، در سیستم قطب‌های ناپایداری به وجود می‌آید که با توجه به اینکه این قطب‌ها به دلیل اغتشاش به وجود آمده‌اند، در تعیین لاپلاس معکوس با روش مانده‌ها، اثرات این قطب‌های ناپایدار نادیده گرفته می‌شود. در ادامه بر اساس داده‌های جدول ۴-۱ و سری پرونی (ج) در جدول (۵-۵):

جدول (۵-۵) خصوصیات ویسکوالاستیک.

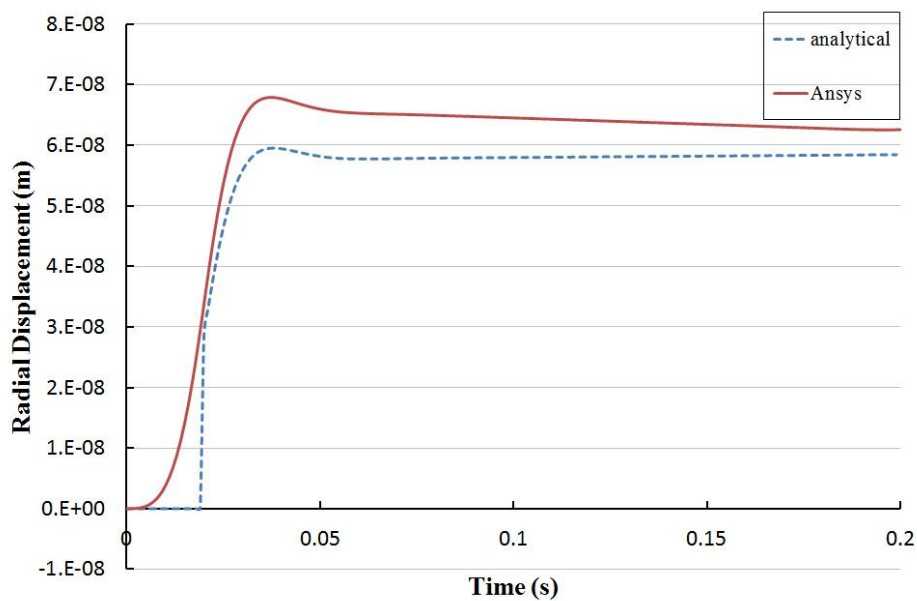
سری پرونی ج	
$G = 0.4 * 10^9 + 0.16 * 10^{10} e^{-0.136t}$	رابطه.
$0.2 * 10^{10}$	$G_1$
$0.5 * 10^9$	$G_2$
$0.18 * 10^{11}$	$\eta$
$0.52 * 10^{10}$	$E$
0.3	$\nu$

پاسخ‌های سیستم تعیین می‌شود، که در شکل (۵-۲۷) جابجایی شعاعی با حل ansys مقایسه شده است.



شکل (۵-۲۷) جابجایی شعاعی  $b_m$

جابجایی های شعاعی تطابق خوبی با ansys دارد ولی جابجایی های محوری با خطا همراه است. در صورت بررسی پاسخ بر اساس سری پرونی (الف)، نمودارهای زیر حاصل می شود:



شکل (۵-۲۸) جابجایی شعاعی  $a_m$

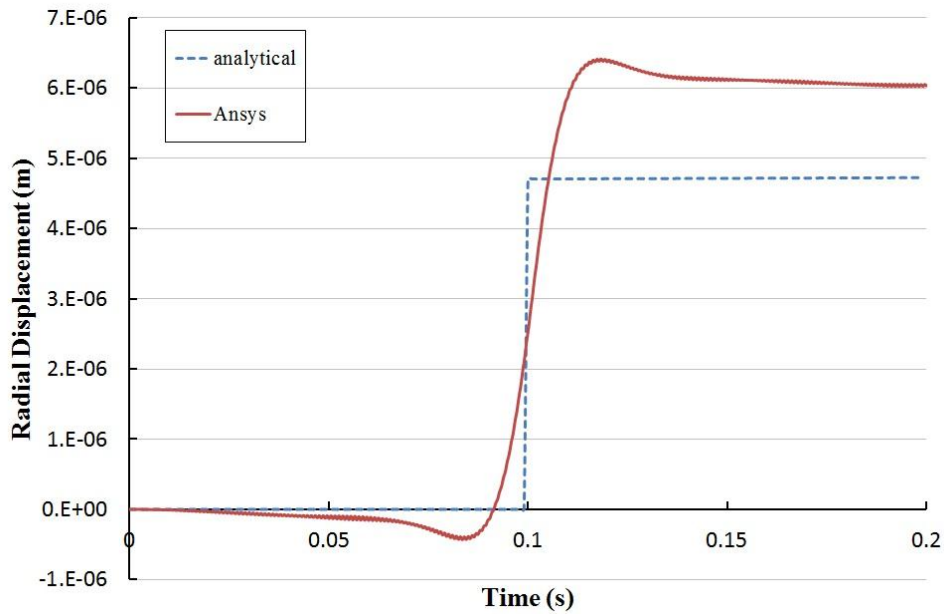
که مطابقت خوبی بین حل ansys و حل تحلیلی وجود دارد ولی در حالت محوری نتایج درستی به همراه ندارد؛ که این امر به این علت است که استفاده از تئوری مقدماتی معادلات دیفرانسیل موجب بروز خطاهایی نسبت به اثرات شرایط مرزی، در پاسخ می‌شود. به این صورت که با توجه به تخمین  $C_i$  ها، جواب‌های وابسته به مرز با تقریب همراه هستند، در نتیجه شکل جابجایی محوری در کل پوسته که شدیداً به شرایط مرزی وابسته است، خطا دارد.

## ۵-۶- بررسی نتایج تحلیل با استفاده از تئوری اغتشاشات

استفاده از تئوری مقدماتی معادلات دیفرانسیل تأثیرات شرایط مرزی در پاسخ پوسته را به درستی نشان نمی‌داد؛ از اینرو روش دیگری برای تحلیل پوسته‌های ویسکوالاستیک بر مبنای استفاده از تئوری اغتشاشات و بر اساس روش لایه‌ی مرزی در فصل قبل تعیین شد و در این بخش به بررسی میدان جابجایی حاصل از این روش، پرداخته می‌شود.

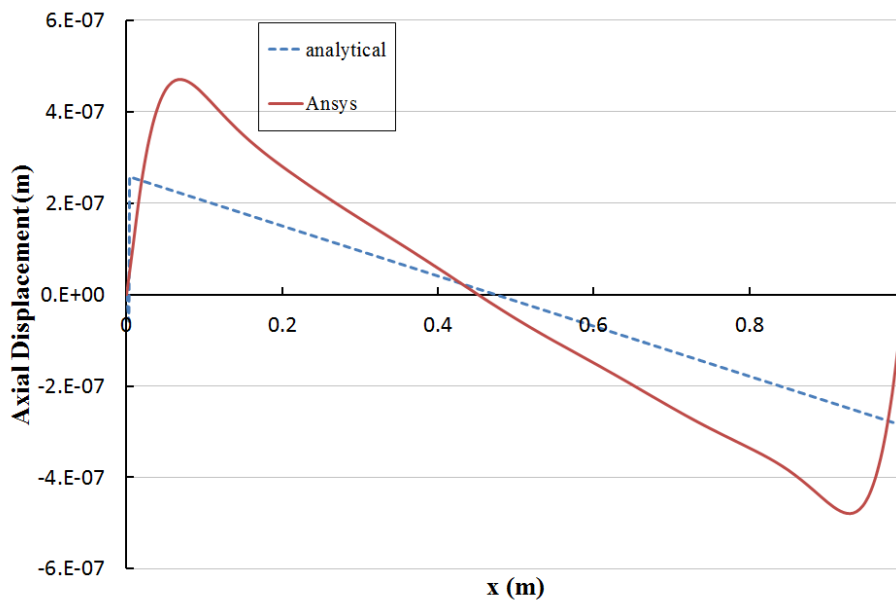
جابجایی شعاعی با انسیس در نقطه‌ی  $b_m$  بر اساس سری پرونی ج و جدول ۴-۱ و با استفاده از

تئوری اغتشاشات به صورت زیر تعیین می‌شود:



شکل (۵-۲۹) جابجایی شعاعی  $b_m$

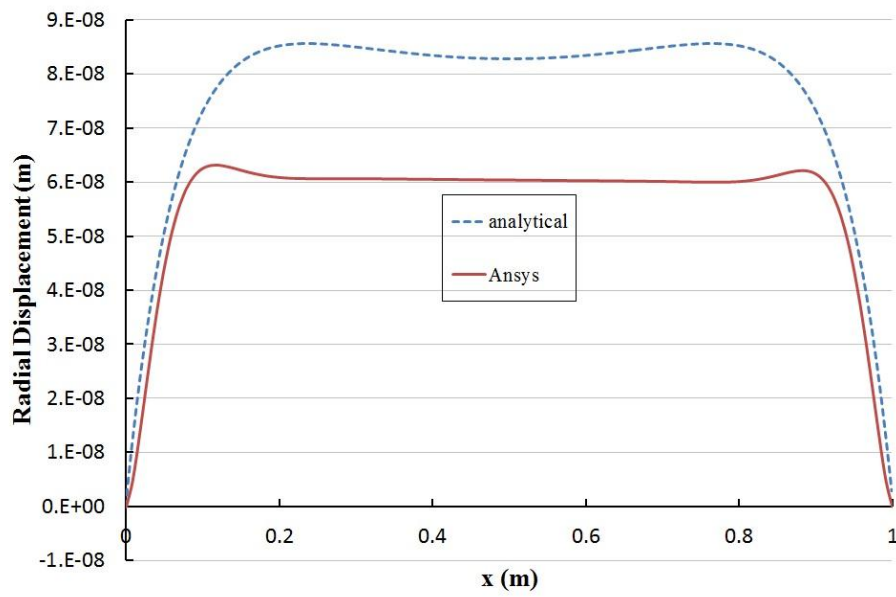
که تطابق خوبی بین این دو پاسخ وجود دارد. به همین ترتیب جابجایی محوری با شرایط فوق در روی مسیر d در انسیس و تئوری اغتشاشات به صورت زیر است:



شکل (۵-۳۰) جابجایی محوری روی مسیر d

که تقریباً تطابق خوبی با هم دارد، البته اختلافی که بین این دو نمودار می‌باشد، قابل قبول است؛ با توجه به اینکه در حالت الاستیک بر اساس کارهای انجام شده [۲۳]، این مقدار خطا در استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مطلوب است.

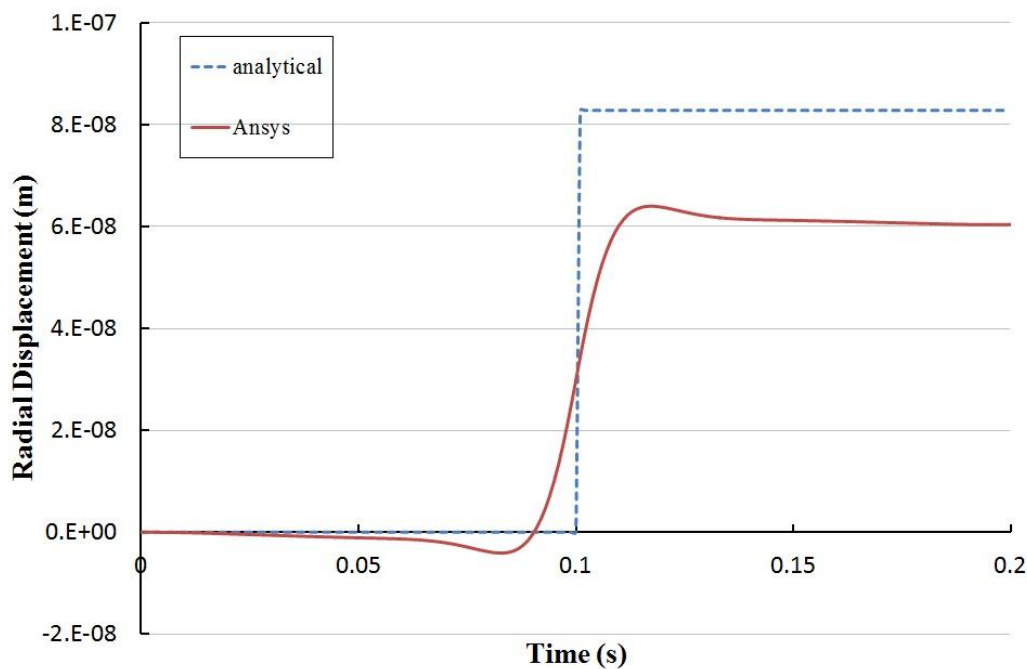
و در صورتی که از سری پرونی (الف) استفاده شود، جابجایی شعاعی روی مسیر d بر اساس تئوری اغتشاشات و حل عددی به صورت زیر است:



شکل (۵-۳۱) جابجایی شعاعی روی مسیر d

که تطابق خوبی دارد. جابجایی شعاعی  $b_m$  نیز به صورت زیر تعیین می شود:





شکل (۵-۳۲) جابجایی شعاعی نقطه‌ی  $b_m$

در این حالت نیز پاسخ تئوری اغتشاشات تطابق خوبی با پاسخ ansys در دارد.

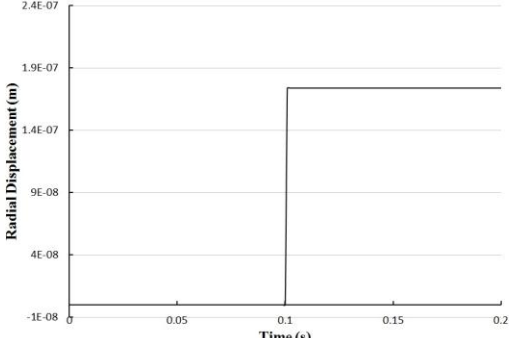
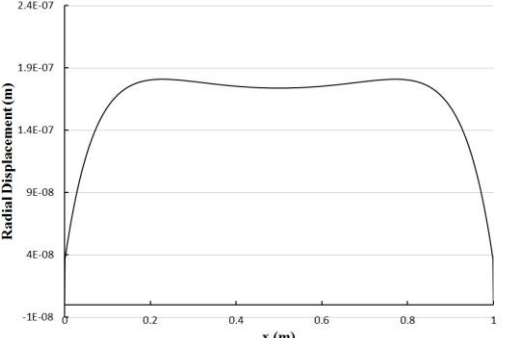
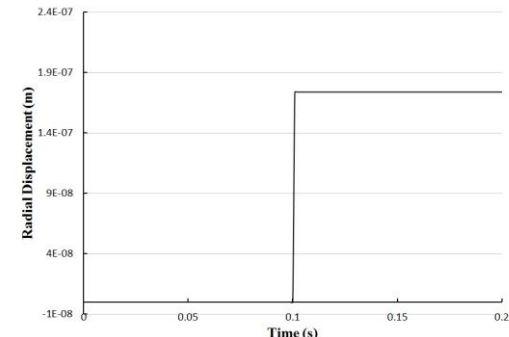
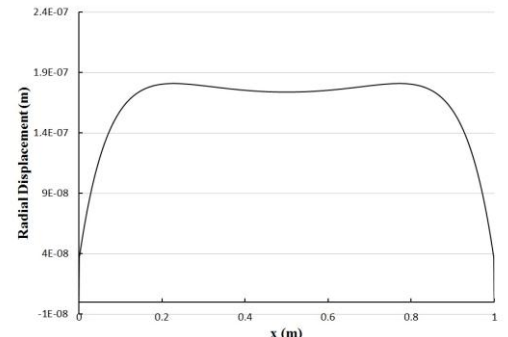
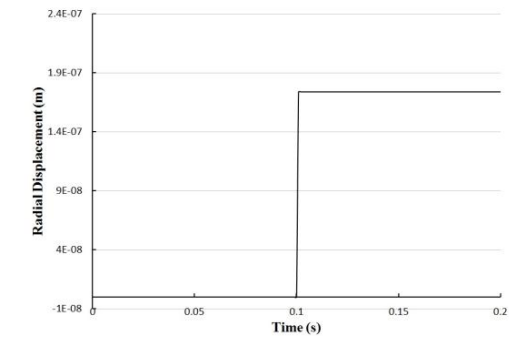
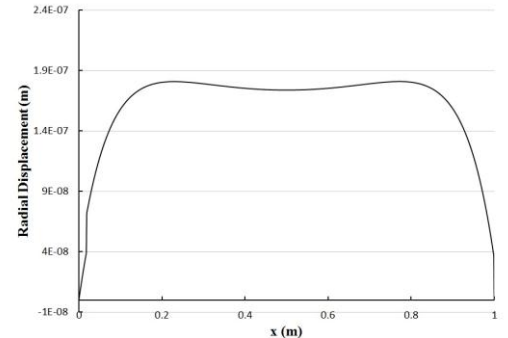
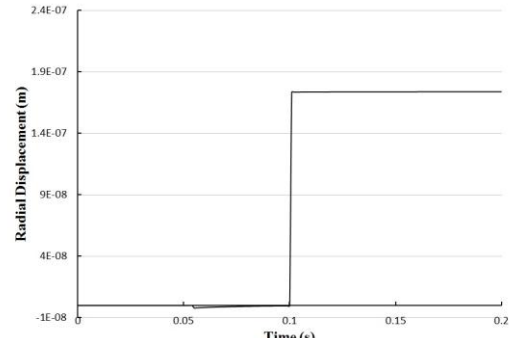
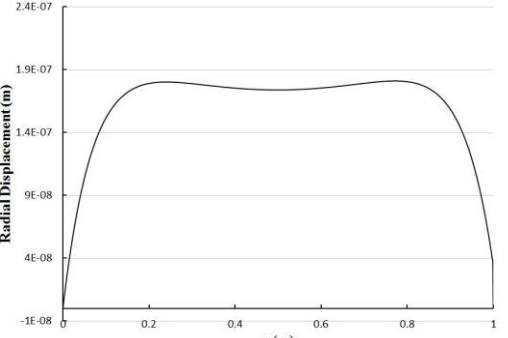
### ۵-۷- تأثیرات استهلاک در میدان جابجایی

در این بخش به بررسی تأثیرات استهلاک در میدان جابجایی پوسته با استفاده از تئوری اغتشاشات پرداخته می‌شود. برای این منظور اثرات تغییر استهلاک در سری پرونی الف بررسی شده است. ضخامت پوسته‌ی مورد بررسی  $0.01\text{ m}$  و بقیه داده‌های مورد نیاز از جدول ۴-۱ می‌باشد. در ادامه در جدول ۵-۶، جابجایی شعاعی در لحظه‌ی رسیدن بار به انتهای پوسته در روی مسیر  $d$  و جابجایی شعاعی، طول میانی پوسته ( $x = 0.5$ ) بر حسب زمان، نسبت به تغییرات پارامتر  $\eta$  بررسی شده است.

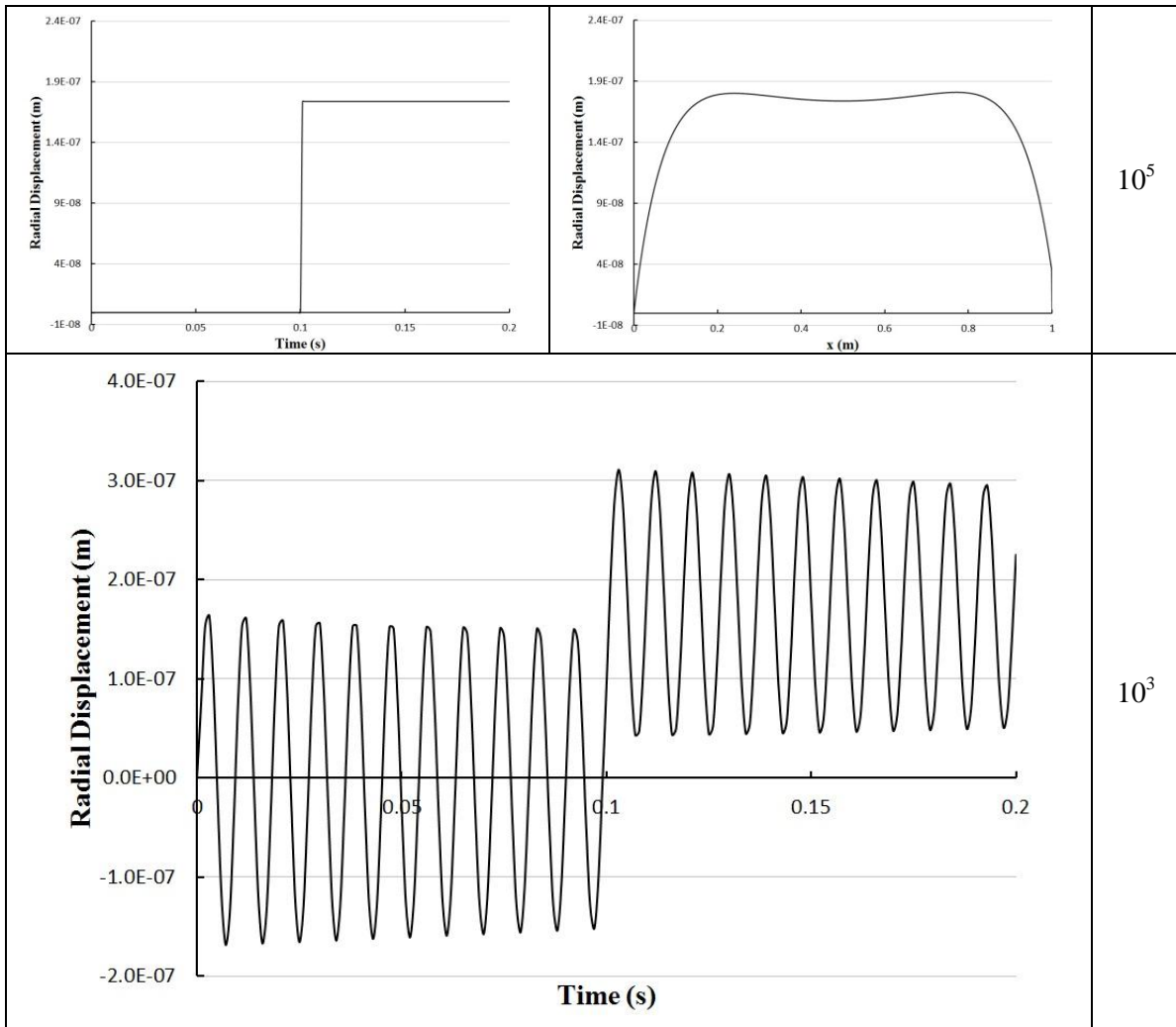
و در جدول ۵-۷ نیز، مقایسه‌ای بین پاسخ ansys با تئوری اغتشاشات انجام شده است.

## فصل پنجم: بررسی نتایج

جدول (۵-۶) تاثیر استهلاک بر جابجایی شعاعی با استفاده از تئوری اغتشاشات

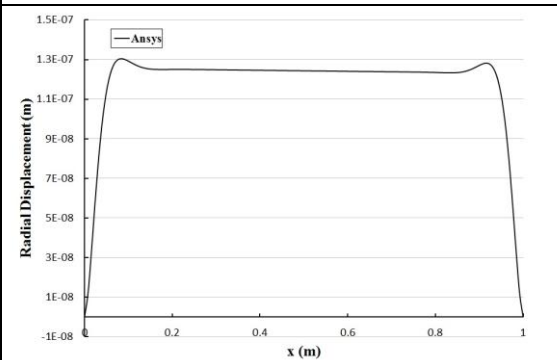
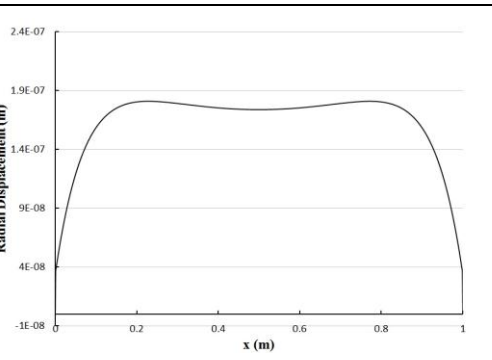
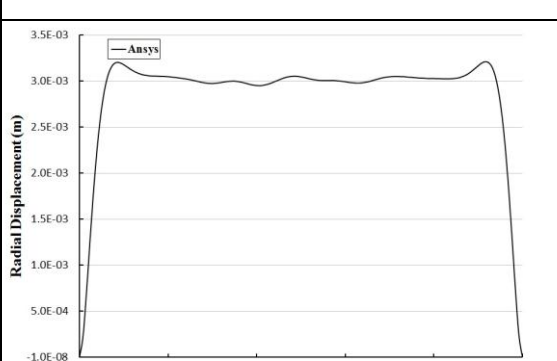
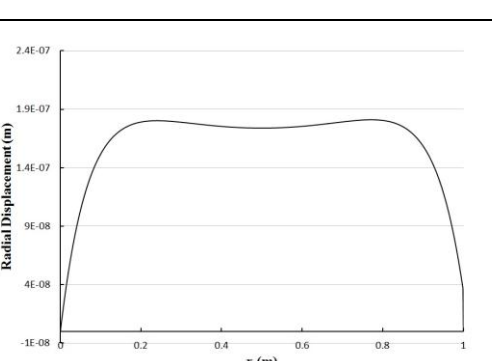
جابجایی شعاعی در $x=0.5$ بر حسب زمان.	جابجایی شعاعی در $t=t_f$ بر حسب مکان.	$\eta = 0.182^*$
		$10^{13}$
		$10^{11}$
		$10^9$
		$10^7$

فصل پنجم: بررسی نتایج



## فصل پنجم: بررسی نتایج

جدول (۷-۵) جابجایی شعاعی با دو روش تحلیلی و ansys

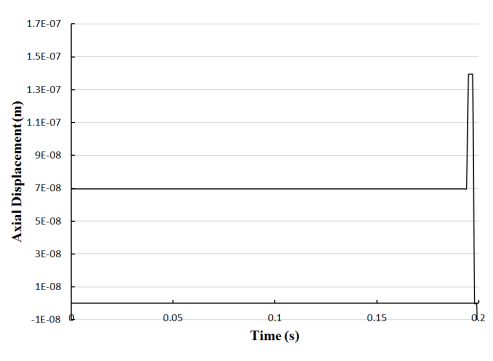
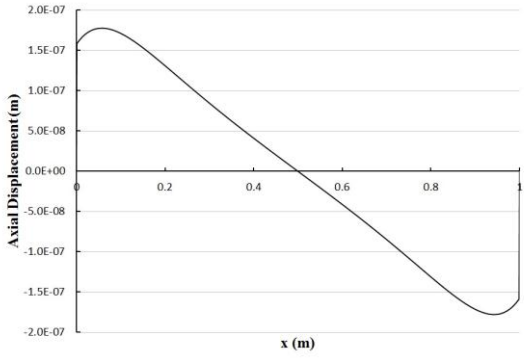
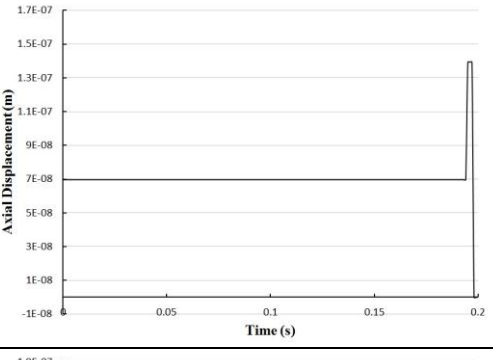
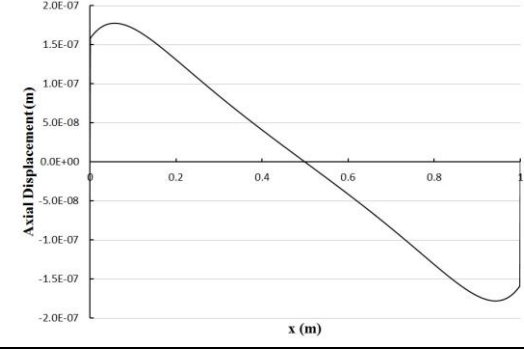
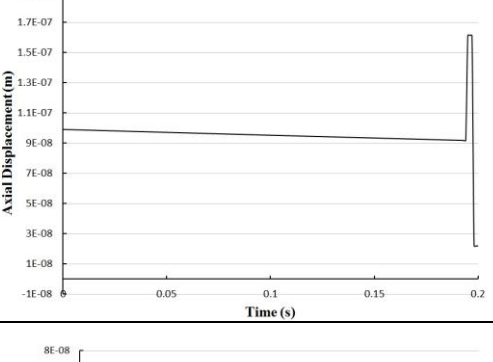
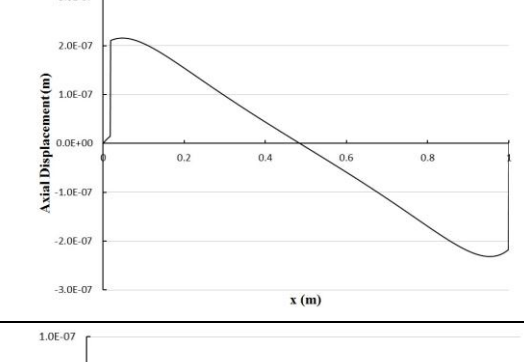
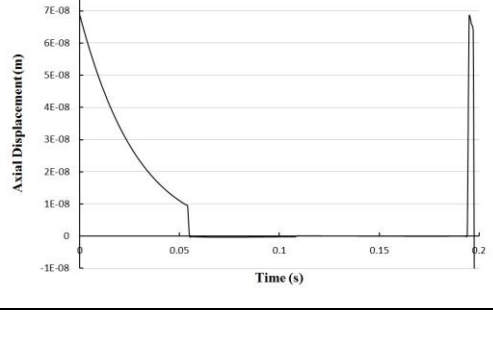
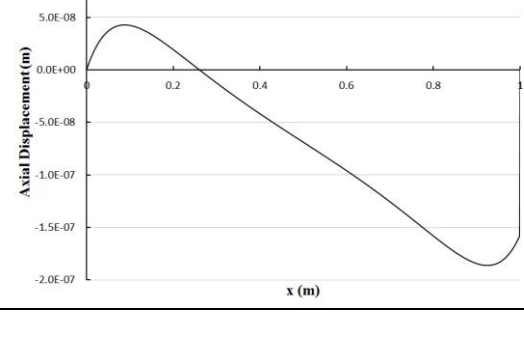
جابجایی شعاعی در $t=t_f$ بر حسب مکان (انسیس)	جابجایی شعاعی در $t=t_f$ بر حسب مکان (حل تحلیلی)	$\eta = 0.182^*$
		$10^{13}$
		$10^6$

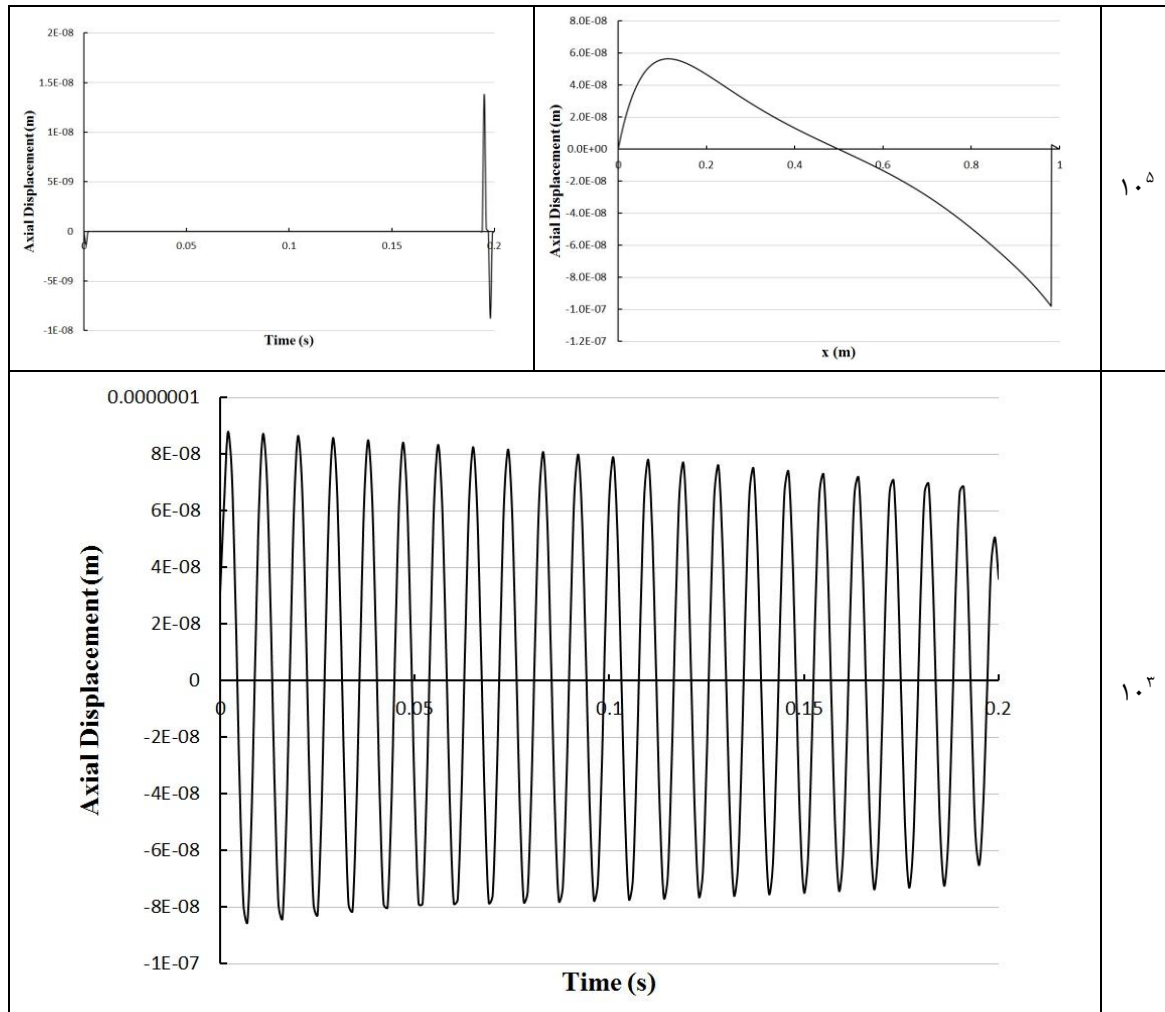
از مقایسه‌ی جدول ۷-۵ و ۶-۵ مشخص می‌شود که با کاهش استهلاک، جابجایی شعاعی افزایش می‌یابد. که در استهلاک‌های بالا، جواب ansys با تئوری اغتشاشات هم‌خوانی دارد. با کاهش استهلاک جواب تئوری اغتشاشات، هم‌خوانی خوبی با حل انسیس ندارد. این موضوع به این علت است که در بخشی از روند تحلیل تئوری اغتشاشات در تخمین مقادیر ویژه با استفاده از این تئوری، از پارامتر بی بعد  $e$  استفاده شد که مقدار این پارامتر باید کوچک باشد تا بتوان از تئوری اغتشاشات استفاده کرد و این پارامتر که در رابطه‌ی ۳-۹ تعریف شده، با مقدار  $\eta$  رابطه‌ی معکوس دارد. به همین علت است که با کاهش استهلاک، تئوری اغتشاشات پاسخ مناسبی را نمی‌دهد.

در جدول ۸-۵، جابجایی محوری در لحظه‌ی رسیدن بار به انتهای پوسته در روی مسیر  $d$  و جابجایی محوری، طول میانی پوسته ( $x = 0.5$ ) بر حسب زمان، نسبت به تغییرات پارامتر  $\eta$  بررسی شده است.

## فصل پنجم: بررسی نتایج

جدول (۵-۸) تأثیرات استهلاک در جابجایی محوری با استفاده از تئوری اغتشاشات

جابجایی محوری در $x=0.5$ بر حسب زمان.	جابجایی محوری در $t=t_f$ بر حسب مکان.	$\eta =$ 1.82*
		$1.0^1$ $2$
		$1.0^1$ $1$
		$1.0^9$
		$1.0^7$



### ۵-۸- بررسی تأثیرات سرعت در میدان جابجایی

در این بخش به بررسی تأثیرات سرعت فشار متحرک در میدان جابجایی پوسته با استفاده از تئوری اغتشاشات پرداخته می‌شود. برای این منظور از سری پرونی  $G = 0.4 * 10^9 + 0.16 * 10^{10} e^{-136t}$  استفاده شده که متناظر با مقادیر زیر است:

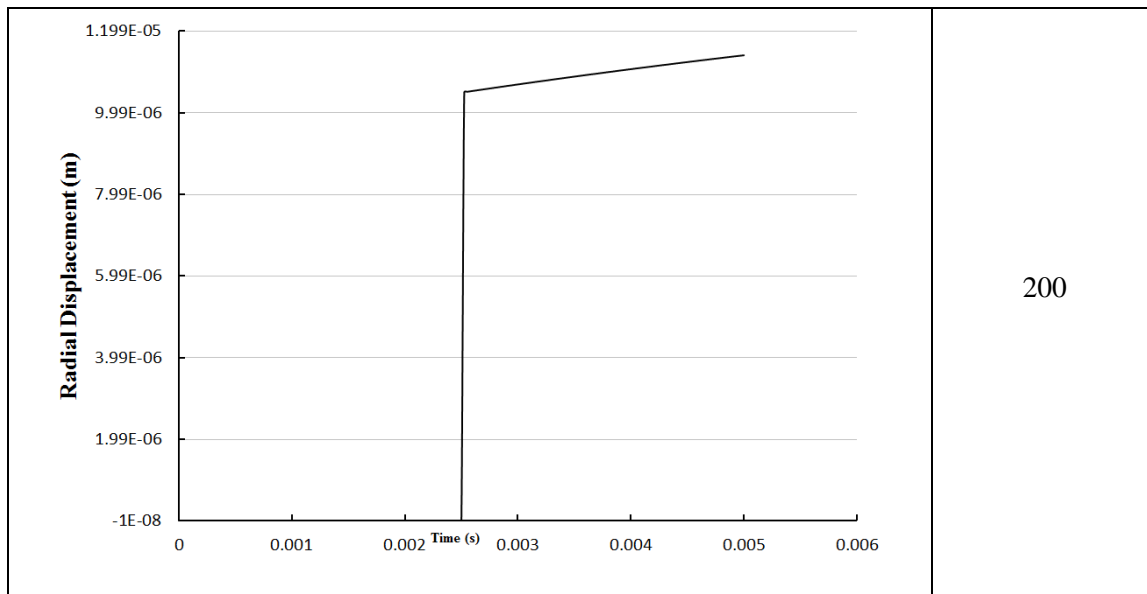
$$G_1 = 0.2 * 10^{10}, G_2 = 0.05 * 10^{10}, \eta = 0.182 * 10^8 \quad (۲-۵)$$

ضخامت پوسته‌ی مورد بررسی  $0.01 \text{ m}$  و بقیه داده‌های مورد نیاز از جدول ۴-۱ می‌باشد. در ادامه در جدول ۵-۹، جابجایی شعاعی طول میانی پوسته ( $x = 0.5$ ) بر حسب زمان، نسبت به تغییرات سرعت بررسی شده است.

جدول (۵-۹) تأثیر سرعت فشار متحرک در جابجایی شعاعی با استفاده از تئوری اغتشاشات	
جابجایی شعاعی در $x = 0.5 \text{ m}$ بر حسب زمان	V (m/s)
	5
	20
	40

<p>Graph showing Radial Displacement (m) versus Time (s) for parameter 60. The displacement starts at 0, remains at 0 until approximately 0.008s, then jumps sharply to about 1.1e-05 m and continues to rise slowly to approximately 1.2e-05 m at 0.018s.</p>	60
<p>Graph showing Radial Displacement (m) versus Time (s) for parameter 100. The displacement starts at 0, remains at 0 until approximately 0.005s, then jumps sharply to about 1.1e-05 m and continues to rise slowly to approximately 1.2e-05 m at 0.012s.</p>	100
<p>Graph showing Radial Displacement (m) versus Time (s) for parameter 150. The displacement starts at 0, remains at 0 until approximately 0.0035s, then jumps sharply to about 1.1e-05 m and continues to rise slowly to approximately 1.2e-05 m at 0.007s.</p>	150





200

دیده می‌شود که با افزایش سرعت، جابجایی شعاعی در لحظه‌ی  $t = t_f$  کاهش می‌یابد، زیرا نقطه مورد نظر، فرصت کافی برای جابجایی را نداشته است.

### ۵-۹- تعیین سرعت بحرانی

سرعت بحرانی سیستم در فصل سوم با استفاده از روش حل موج تعیین شد. در این بخش به بررسی مقدار این سرعت بحرانی به ازای سری پرونی ج و داده‌های جدول ۴-۱ پرداخته می‌شود. بر اساس این داده‌ها، معادله‌ی  $aX$  از درجه‌ی ۹ تعیین می‌شود که دو ریشه‌ی صفر، که معرف حرکت جسم صلب است و هفت ریشه‌ی غیر صفر دارد. به ازای تغییر علامت‌های ضرایب معادله  $aX$ ، ریشه‌های مختلف حاصل می‌شود. این ریشه‌ها در هر بازه‌ای که ضرایب، تغییر علامت می‌دهند می‌توانند حقیقی یا مختلط باشند. به ازای این سری پرونی، سرعت بحرانی برابر با  $434 \text{ m/s}$  به دست می‌آید.

### ۵-۱۰- جمع بندی:

در این فصل به بررسی پاسخ پوسته ویسکوالاستیک تحت فشار متحرک به روش عددی با نرم افزار

ansys و دو روش تحلیلی تئوری مقدماتی معادلات دیفرانسیل و تئوری اغتشاشات پرداخته شد. که روش تئوری مقدماتی معادلات دیفرانسیل به علت تخمین اثرات شرایط مرزی جواب نهایی حوزه‌ی لاپلاس در حالت جابجایی شعاعی در نقاط دور از مرز تطابق خوبی دارد ولی جابجایی محوری که در تمام نقاط روی پوسته متأثر از شرایط مرزی است، با خطا همراه است؛ و در حل بر اساس تئوری اغتشاشات (تحت شرایطی) مطابقت خوبی با حل ansys برقرار است.

## فصل ششم: نتیجه گیری و پیشنهادها

## ۶-۱- نتیجه گیری و پیشنهادها

الف- نتیجه گیری:

۱- تحلیل پوسته‌های استوانه‌ای با حل معادلات حاکم به کمک تئوری مقدماتی معادلات دیفرانسیل که در فصل سوم ارائه شد، منجر به حلی پیچیده در فضای لاپلاس می‌شود که عملاً نمی‌توان از آن لاپلاس معکوس گرفت مگر این که این حل را تقریب زد که در این صورت جواب در مرز، دقت مناسبی ندارد ولی در نقاط دور از مرز، حل دقیق‌تری را ارائه می‌دهد.

۲- تطابق حل عددی و تحلیلی به پارامتر استهلاک بستگی دارد.

۳- جابجایی شعاعی به ازای بیشتر مقادیر استهلاک تطابق خوبی با حل عددی دارد.

۴- جابجایی محوری در تئوری مقدماتی، تطابق مناسبی با حل عددی ندارد.

۵- بیشترین انحراف دوحل، در استهلاک‌های کوچک است.

۶- بر اساس تئوری ارائه شده، در محدوده‌ای خاص از مقادیر استهلاک، جابجایی به تغییرات استهلاک حساس نیست.

۷- با کم شدن زمان رهایش، پاسخ سیستم در مدت زمان موردنظر، به حرکتی نوسانی میل می‌کند.

ب- پیشنهادها:

برای مطالعه جامع‌تر مساله، بررسی موارد زیر پیشنهاد می‌شود:

۱- استفاده از تئوری مرتبه‌ی بالاتر تغییر شکل برشی

۲- معرفی روش‌های موثرتر در تعیین مقادیر ویژه

۳- معرفی روش‌های دقیق‌تر در تعیین لاپلاس معکوس

۴- مطالعه‌ی تاثیر پارامترهای ابعادی در پاسخ

۵- استفاده از مرتبه‌های بالاتر در تئوری اغتشاشات

۶- بازنگری در پارامترهای بی بعد معرفی شده

۷- تعیین ضریب تقویت دینامیکی بر حسب سرعت بار

۸- مطالعه رفتار سازه پس از حذف بار

۹- بررسی پاسخ سیستم تحت فشار با سرعت متغیر

۱۰- بررسی تاثیر سایر مدل‌های ویسکوالاستیک (ماکسول و کلویین) بر پاسخ

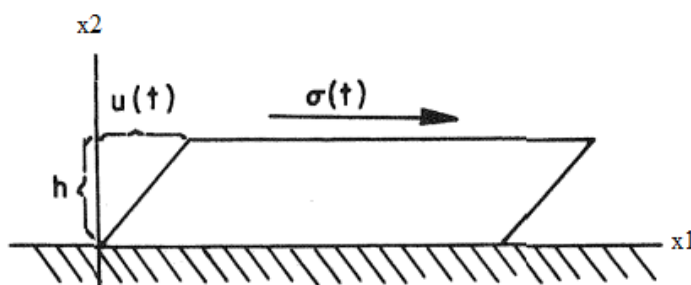
۱۱- بررسی تاثیر پارامترهای سختی ( $G_1, G_2$ ) بر پاسخ

## پیوست

پیوست (۱) - آزمایش رهاش تنش<sup>۱</sup> [۴]

در این آزمایش تغییرات تنش بر اثر کرنش ثابت اعمالی بر قطعه بدست می‌آید. بدین منظور قطعه‌ای از ماده‌ی تحت کرنش برشی ثابت بررسی می‌شود. همانند شکل زیر تغییرشکل برشی کوچکی بر قطعه اعمال شده و تغییرات لازم در تنش برای ثابت ماندن این تغییرشکل بدست آورده می‌شود. در آزمایش برش از مشخصه‌ی تنش و کرنش کششی صرف‌نظر شده است. در این متن  $\sigma, \varepsilon$  با  $\sigma_{12}, \gamma_{12}$  نشان داده می‌شود. کرنش اعمالی بصورت زیر است :

$$\gamma_{12} = \varepsilon = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} H(t) \quad (\text{پ-۱})$$



شکل (پ-۱) قطعه‌ای از ماده تحت تغییر شکل برشی. [۴]

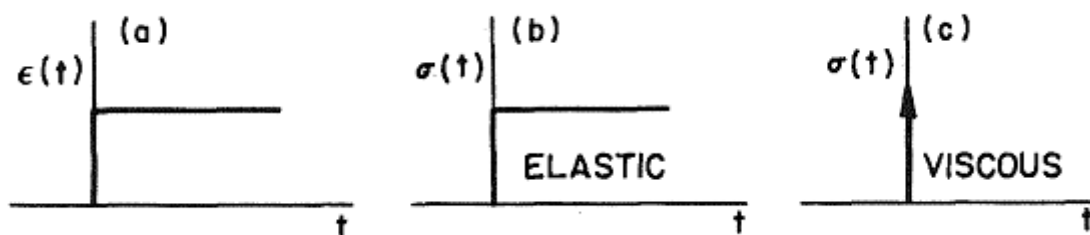
که  $H(t)$  تابع پله<sup>۲</sup> بوده که مقدار آن برای  $t > 0$  یک و در بقیه‌ی دامنه صفر است. برای یک ماده‌ی الاستیک ایده‌آل، تنش برشی لازم برای ثابت نگه داشتن  $\varepsilon$ ، برابر با  $\sigma = \sigma_0 H(t)$  است و برای یک مایع ویسکوز ایده‌آل تنش لازم، تابع ضربه<sup>۳</sup>  $\delta$  می‌باشد.

<sup>۱</sup> - Stress relaxation

<sup>۲</sup> -Heaviside function

<sup>۳</sup> -Dirac function

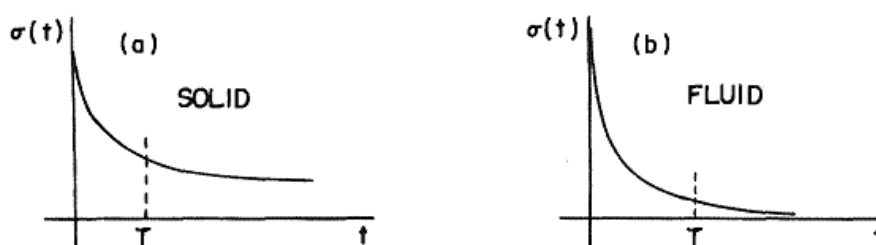
پاسخ مایع و جامد ایده‌آل در آزمایش رهایش بصورت شکل زیر بدست می‌آید:



شکل (پ-۲) پاسخ جامد الاستیک و مایع ویسکوز ایده‌آل به کرنش برشی ثابت در آزمایش رهایش [۴]

یک بررسی دقیق در حالت واقعی نشان می‌دهد که هیچ‌کدام از این پاسخ‌های ایده‌آل کاملاً رخ نمی‌دهد؛ به طوری که برای جامدات تنش به سرعت در مدت کوتاهی کاهش می‌یابد و سپس در مدت طولانی به مقدار حدی  $\sigma_{\infty}$  میل می‌کند.

تکامل تدریجی رهایش برای جامدات و مایعات حقیقی در شکل (پ-۳) مشاهده می‌شود.

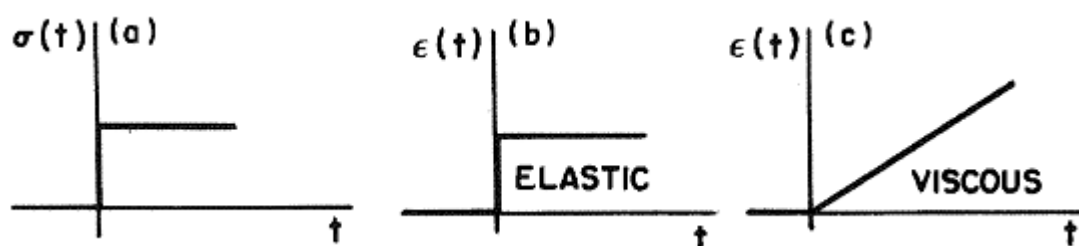


شکل (پ-۳) پاسخ جامد و مایع واقعی به کرنش برشی ثابت در آزمایش رهایش [۴]

با توجه به زمان رهایش، یا به عبارتی زمان لازم برای این که تنش به اتمام برسد (به مقدار ثابتی برسد)، آزمایشگر می‌تواند نتیجه بگیرد که ماده کاملاً الاستیک و یا مایع است. اگر رهایشی در طول آزمایش مشاهده نشود، می‌توان نتیجه گرفت که ماده کاملاً الاستیک است.

پیوست (۲) - آزمایش خزش<sup>۱</sup> [۴]

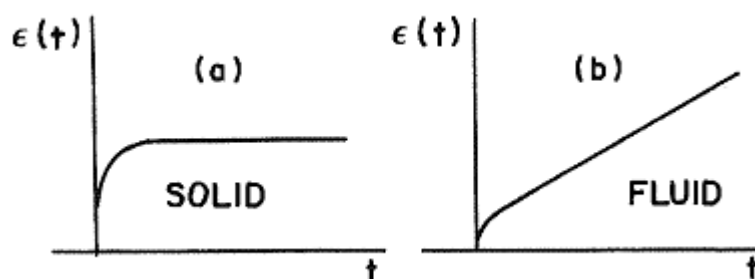
در این آزمایش تغییرات کرنش بر اثر تنش ثابت اعمالی بر قطعه بدست می‌آید. بدین‌منظور قطعه‌ای از ماده را تحت تنش برشی  $\sigma = \sigma_0 H(t)$  قرار داده و تغییرات کرنش برشی تعیین می‌شود. در شکل (پ-۴) مشاهده می‌شود که کرنش برشی برای یک جامد ایده آل به طور لحظه‌ای افزایش و سپس در طول زمان ثابت می‌ماند و کرنش برای سیال ایده آل تابعی از زمان است.



شکل (پ-۴) پاسخ جامد و مایع ایده آل به تنش برشی ثابت در آزمایش خزش. [۴]

در حالت واقعی، پاسخ به تنش برشی، یک تغییرشکل لحظه‌ای از نوع الاستیک است که با افزایش تدریجی کرنش برشی نسبت به زمان ادامه می‌یابد.

اگر کرنش در مدت طولانی به مقدار نهایی  $\epsilon_\infty$  نزدیک شود، ماده مورد بررسی جامد و اگر در مدت طولانی کرنش تابعی خطی از زمان باشد، ماده‌ی مورد نظر مایع است. شکل (پ-۵):



شکل (پ-۵) پاسخ جامد و مایع واقعی به تنش برشی ثابت در آزمایش خزش. [۴]

<sup>۱</sup> - Creep



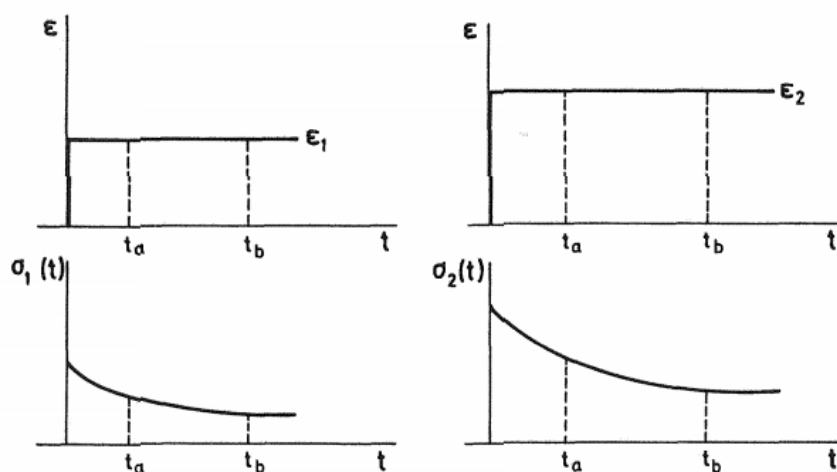
## پیوست (۳) - مدول رهایش بالک و برشی [۴]

اگر مواد تحت کرنش برشی کوچک  $\varepsilon$  قرار گیرند، تنش برشی لازم برای ثابت نگه داشتن کرنش برشی بصورت زیر است:

$$\sigma(t) = G(t)\varepsilon \quad (\text{پ-۲})$$

که  $G(t)$  مدول رهایش می باشد.

به منظور بدست آوردن فهم بهتری از خطی بودن رهایش، فرض کنید در آزمایش جداگانه ای کرنش های برشی  $\varepsilon_1 H(t)$ ،  $\varepsilon_2 H(t)$  بر نمونه ای اعمال شده باشند. پاسخ، مطابق شکل (پ-۶) شکل (پ-۶) است:



شکل (پ-۶) تحریک (بالا) و پاسخ (پایین) در آزمایش رهایش برشی خطی [۴]

رفتار رهایش برشی در صورتی خطی بررسی می شود که برای  $t = t_a$ ،  $t = t_b$  روابط زیر برقرار باشد:

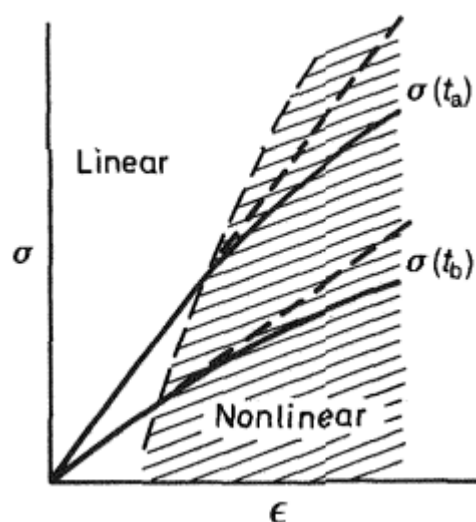
$$\frac{\sigma_1(t_a)}{\varepsilon_1} = \frac{\sigma_2(t_a)}{\varepsilon_2} = G(t_a)$$

$$\frac{\sigma_1(t_b)}{\varepsilon_1} = \frac{\sigma_2(t_b)}{\varepsilon_2} = G(t_b) \quad (\text{پ-۳})$$

$$G(t_a) \neq G(t_b)$$

بدین معنی که در لحظه ای مشخص (a) نسبت تنش به کرنش اعمال شده، مقدار ثابتی است ( $G(t_a)$ ) و با چند برابر کردن کرنش در آزمایش، تنش نیز به صورت خطی در این لحظه (a) چند برابر می شود

ولی در نهایت مقدار این ضریب  $(G(t_a))$  با گذشت زمان تغییر می‌کند  $(G(t_a) \neq G(t_b))$ .  
خطی بودن در رهائش برای کرنش‌های برشی کوچک می‌باشد. در شکل (پ-۷) رفتار خطی و  
غیرخطی آزمایش رهائش نشان داده شده است:



شکل (پ-۷) طرح شماتیکی تبدیل رفتار خطی به غیر خطی در آزمایش رهائش برشی [۴]

همان‌طور که در شکل مشخص است، در کرنش‌های بزرگ، رفتار غیرخطی است و در این ناحیه تنش‌ها از حالت خطی کمتر است. همچنین تنش مرتبط با کرنش مورد نظر در ناحیه‌ی غیرخطی را نمی‌توان از آزمایشات قبلی بدست آورد.

در آزمایش رهائش انجام شده بر روی جامدات، تنش برشی به طور پیوسته با گذشت زمان کاهش می‌یابد تا به یک مقدار ثابت  $G_e$  برسد. از این‌رو مدول رهائش با معادله‌ی زیر نسبت به زمان بیان می‌شود.

$$G(t) = G_e + G_d \phi(t), G_e = \frac{\sigma_\infty}{\epsilon} \quad (\text{پ-۴})$$

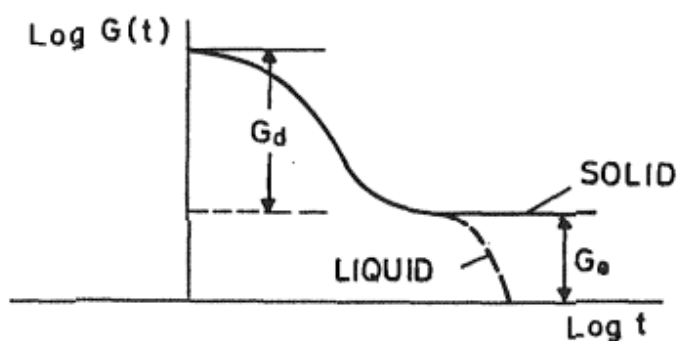
$G_d$  حداکثر تغییرات  $G(t)$  برای ماده‌ی الاستیک بوده و  $\phi(t)$  تابع زمانی یکنواخت یکه<sup>۱</sup> شده‌ای است

<sup>۱</sup> -Normalized

که مقادیر حدی آن بصورت زیر است:

$$\begin{cases} t = 0 \rightarrow \phi(0) = 1 \\ t = \infty \rightarrow \phi(\infty) = 0 \end{cases} \quad (\text{پ-۵})$$

واضح است که  $G_e$  برای مایعات صفر است. تغییرات  $G(t)$  نسبت به زمان برای پلیمرهای جامد و مایع در شکل (پ-۸) نشان داده شده است:



شکل (پ-۸) نمودار لگاریتمی مدول رهایش برشی در حوزه‌ی زمان [۴]

اگر مواد ویسکوالاستیک تحت تغییرشکل ایزوتروپیک فشاری یا اتساعی<sup>۱</sup> باشند، اجزاء قطری تانسورهای تنش و کرنش صفر نیست و رابطه‌ی بین تحریک و پاسخ بصورت زیر می‌شود:

$$\sigma_{ii}(t) = -p(t) = 3K(t)\varepsilon_{ii} = K(t)\Delta \quad (\text{پ-۶})$$

که  $P(t)$  تنش هیدرو استاتیکی و  $\Delta$  کرنش حجمی<sup>۲</sup> است. مدول رهایش بالک همانند مدول رهایش  $G(t)$  به طور یکنواخت با رابطه‌ی زیر کاهش می‌یابد:

$$K(t) = K_e + K_d \phi'(t) \quad (\text{پ-۷})$$

<sup>۱</sup> -Dilatation or compression

<sup>۲</sup> -Volumetric Strain

و  $\phi'(t)$  تابع زمانی یکنواخت یکه شده است که مقادیر حدی آن بصورت زیر است:

$$\begin{cases} t = 0 \rightarrow \phi'(0) = 1 \\ t = \infty \rightarrow \phi'(\infty) = 0 \end{cases} \quad (\text{پ-۸})$$

مطالعه‌ی پاسخ سیستم‌های ویسکوالاستیک به استحکام کششی در زمینه‌های عملی مهم است. در

این حالت برای کرنش‌های تک محوری ( $\varepsilon_{11} H(t)$ ) تغییرات تنش با زمان بصورت زیر است:

$$\sigma_{11} = E(t) \varepsilon_{11} \quad (\text{پ-۹})$$

و مدول رهاپش کششی E بصورت زیر است:

$$E(t) = E_e + E_d \phi''(t) \quad (\text{پ-۱۰})$$

و مقادیر حدی  $\phi''(t)$  نیز مشابه با مقادیر حدی  $\phi'(t)$  ,  $\phi(t)$  می‌باشد.

## پیوست (۴) - توابع کامپلینس بالک و برشی [۴]

اگر مواد تحت تنش برشی کوچک و ثابت  $\sigma$  قرار گیرند، در این حالت وابستگی زمانی کرنش بصورت زیر است:

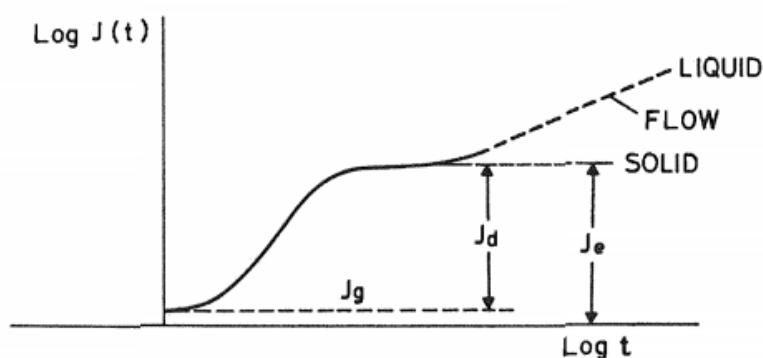
$$\varepsilon(t) = J(t)\sigma \quad (\text{پ-۱۱})$$

که  $J(t)$  تابع کامپلینس خزشی است و خطی بودن تابع کامپلینس خزشی نیز همانند مدول رهائش برشی بررسی می‌شود و این خطی بودن در کرنش‌های زیاد صادق نیست. تابع کامپلینس خزشی به صورت تابع زمانی زیر بیان می‌شود و در شکل (پ-۹) آمده است:

$$\begin{cases} J(t) = J_g + J_d \psi(t) & \text{for solid} \\ J(t) = J_g + J_d \psi(t) + \frac{t}{\eta} & \text{for liquid} \end{cases} \quad (\text{پ-۱۲})$$

که  $\Psi(t)$  تابع زمانی افزایشی یکنواخت یکه‌ای است که مقادیر کران آن بصورت زیر است:

$$\begin{cases} t = 0 \rightarrow \psi(0) = 0 \\ t = \infty \rightarrow \psi(\infty) = 1 \end{cases} \quad (\text{پ-۱۳})$$



شکل (پ-۹) نمودار لگاریتمی کامپلینس خزشی برشی در حوزه‌ی زمان [۴]

اگر ماده تحت تنش هیدرو استاتیکی  $P$  باشند، تابعیت زمانی تانسور کرنش  $\Delta$  بصورت زیر است :

$$\sigma_{ii} = -p = K(t)\Delta \rightarrow \Delta(t) = -\frac{p}{K(t)} \rightarrow \Delta(t) = -p B(t) \quad , \quad B = \frac{1}{K} \quad (\text{پ-۱۴})$$

که  $B(t)$  کامپلینس خزشی بالک است. در حالی که در فاصله‌ی زمانی صفر تا بی نهایت  $J(t)$  ممکن است تغییرات زیادی داشته باشد، تغییرات رخ داده در  $B(t)$  تقریباً کوچک است.

پاسخ ماده به مقاومت کششی  $H(t)$   $\sigma_{11}$  به صورت زیر است:

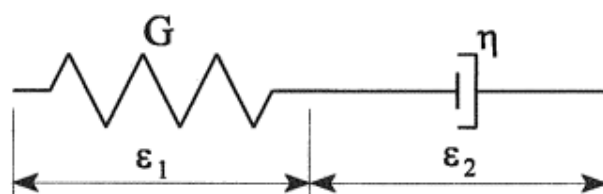
$$\varepsilon_{11} = D(t)\sigma_{11} \quad (\text{پ-۱۵})$$

که  $D(t)$  نیز به عنوان تابع کامپلینس کششی معرفی می‌شود.

پیوست (۵) - مدل های مکانیکی مواد ویسکوالاستیک [۴]

۱.۵. مدل ماکسول<sup>۱</sup>

مدل ماکسول شامل فنر و دمپر به طور سری (شکل پ-۱۰) است.



شکل (پ-۱۰) مدل ماکسول [۴]

رابطه کلی تنش و کرنش را برای این مدل، می توان بصورت زیر نوشت :

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{G} + \frac{\sigma}{\eta} \quad (\text{پ-۱۶})$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

حال با استفاده از این عبارت می توانیم پاسخ ماده را به تنش و کرنش پله ای ارزیابی می کنیم.

راحت ترین راه برای حل معادله دیفرانسیل (پ-۱۶)، حل آن در فضای لاپلاس است که انتقال

لاپلاس این معادله بصورت زیر است:

$$s \bar{\varepsilon}(s) - \varepsilon(0^+) = \frac{1}{G} [s \bar{\sigma}(s) - \sigma(0^+)] + \frac{1}{\eta} \bar{\sigma}(s) \quad (\text{پ-۱۷})$$

حال با استفاده از این رابطه و بر اساس تست های خزش و رهایش، مدول های کامپلینس خزشی و

رهایش برشی، بصورت زیر تعیین می شود:

آزمایش خزش:

هدف از این آزمایش، بررسی پاسخ مدل ماکسول با رابطه ی (پ-۱۶) به تنش ورودی پله ای

$\sigma = \sigma_0 H(t)$  می باشد. که  $H(t)$  تابع پله است.

<sup>۱</sup> - Maxwell model

با شرایط مرزی  $\varepsilon(0^+) = \varepsilon_0, \sigma(0^+) = \sigma_0$ :

$$\bar{\varepsilon}(s) = \frac{\varepsilon_0}{s} + \frac{\sigma_0}{\eta s^2} \quad (\text{پ-۱۸})$$

لاپلاس معکوس معادله‌ی فوق:

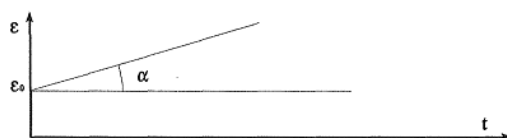
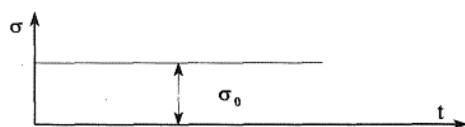
$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \left( \frac{1}{G} + \frac{t}{\eta} \right), G = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \quad (\text{پ-۱۹})$$

مقدار  $G = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$  می‌باشد، چون در لحظه‌ی صفر فقط فنر عکس‌العمل دارد و دمپر تأثیری ندارد. در

نتیجه تابع کامپلینس خزشی بصورت زیر بدست می‌آید:

$$J(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} = \left( \frac{1}{G} + \frac{t}{\eta} \right) \quad (\text{پ-۲۰})$$

پاسخ مدل ماکسول به تنش ورودی پله‌ای در شکل زیر آمده است:



شکل (پ-۱۱) پاسخ مدل ماکسول به تنش ورودی پله‌ای [۴]

آزمایش رهایش:

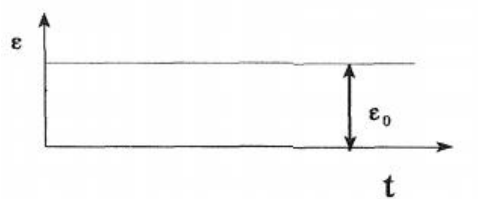
برای این منظور پاسخ مدل را به کرنش ورودی پله‌ای  $\varepsilon = \varepsilon_0 H(t)$  ارزیابی می‌کنیم:

$$\bar{\sigma}(s) = \frac{\eta}{G + \eta s} \sigma(0^+) \quad \text{inverse} \rightarrow \sigma(t) = \sigma(0^+) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \tau = \frac{\eta}{G} \quad (\text{پ-۲۱})$$

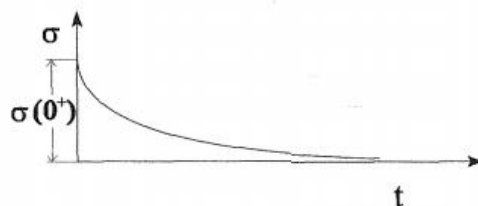
این معادله نشان می‌دهد که تنش به صورت نمایی و با مشخصه‌ی زمانی ثابت  $\tau = \frac{\eta}{G}$  کاهش می‌یابد:

که  $\tau$  زمان رهایش نامیده می‌شود. مدول رهایش بصورت زیر است:





(a)



(b)

شکل (پ ۱۲) پاسخ مدل ماکسول به کرنش ورودی پله‌ای [۴]

$$G(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma(0^+)}{\varepsilon_0} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (\text{پ-۲۲})$$

پاسخ سیستم به کرنش ورودی پله‌ای در شکل (پ ۱۲) آمده است:

دو تا کمبود در مورد این مدل ساده وجود دارد:

- اول تحت شرایط تنش ثابت، یعنی:

$$\frac{d\sigma}{dt} = 0, \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\sigma}{G} \quad (\text{پ-۲۳})$$

جریان نیوتنی مشهود است ( $\sigma = G \frac{d\varepsilon}{dt}$ ) و این موضوع با توجه به رفتار پیچیده‌ی خزش برای ماده‌ی

ویسکوالاستیک درست نیست.

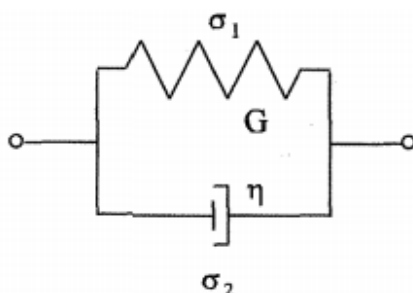
- دوم اینکه رفتار رهايش تنش را نمی‌توان بطور معمول با یک‌ترم نمایی کاهش‌ی بیان کرد، چون لزوماً

تنش در زمان بی‌نهایت به صفر میل نمی‌کند.

۲.۵. مدل کلونین-ویت

یک مدل دیگر با درجه‌ی پیچیدگی مشابه با ماکسول، مدل کلونین-ویت است. این مدل شامل یک

فنر موازی با دمپر است و به خوبی رفتار خزشی را توصیف می‌کند.



شکل (پ-۱۳) مدل کلونین - وویت [۴]

تنش کل در این مدل مجموع تنش در فنر و دمپر می‌باشد.

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \quad (\text{پ-۲۴})$$

کرنش هر جزء با کرنش کل برابر است. ( $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$ ).

$$\sigma_1 = G \varepsilon \quad , \quad \sigma_2 = \eta \dot{\varepsilon} \quad (\text{پ-۲۵})$$

در نتیجه رابطه‌ی کلی تنش - کرنش بصورت زیر درمی‌آید:

$$\sigma = G \varepsilon + \eta \dot{\varepsilon} \quad (\text{پ-۲۶})$$

آزمایش خزش:

بررسی پاسخ مدل به تنش ورودی پله‌ای، با انتقال به فضای لاپلاس (داریم:  $\varepsilon(0^+) = 0$ ):

$$\frac{\sigma_0}{s} = G \bar{\varepsilon}(s) + \eta [s \bar{\varepsilon}(s) - \varepsilon(0^+)] \rightarrow \bar{\varepsilon}(s) = \frac{\sigma_0}{s(G + \eta s)} \text{ inv} \rightarrow \varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{G} (1 - \exp(-\frac{t}{\tau})) \quad (\text{پ-۲۷})$$

که  $\frac{\eta}{G}$  از واحد زمان (ثانیه) است و بیان‌کننده‌ی شدت تغییرات در جایی که تغییر شکل رخ می‌دهد

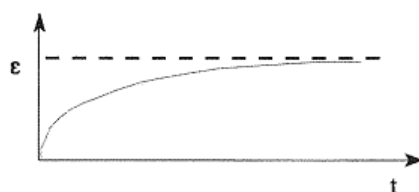
می‌باشد، که به آن زمان تأخیر<sup>۱</sup>  $\tau$  می‌گویند. پاسخ مدل به تنش ورودی پله‌ای شکل (پ-۱۴) آمده

است.

<sup>۱</sup> -retardation time



(a)



(b)

شکل (پ-۱۴) پاسخ مدل کلوین-ویت به تنش ورودی پله‌ای [۴]

در آزمایشات خزش جایگزین کردن  $G$  با  $\frac{1}{J}$  که  $J$  کامپلینس فنر است، مناسب‌تر می‌باشد.

$$\varepsilon(t) = J \sigma_0 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] \quad (\text{پ-۲۸})$$

بر اساس رابطه‌ی فوق، تابع کامپلینس خزشی بصورت زیر بدست می‌آید:

$$J(t) = J \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] \quad (\text{پ-۲۹})$$

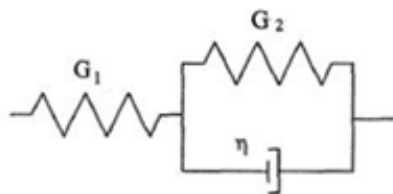
با توجه به اینکه در کرنش ثابت دمپر عمل نمی‌کند، مدل کلوین نمی‌تواند رهایش تنش را تشریح کند.

$$\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right) = 0 \rightarrow \sigma = G e \quad (\text{پ-۳۰})$$

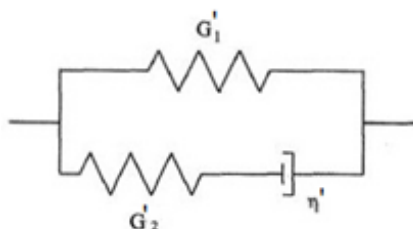
۳.۵. جامد استاندارد خطی (یا مدل زنر)

همچنان‌که اشاره شد، مدل ماکسول رفتار رهایش تنش و مدل کلوین نیز فقط رفتار خزشی یک جامد ویسکوالاستیک را توصیف می‌کند. اما هیچکدام برای ارائه‌ی رفتار عمومی جامد ویسکوالاستیک مناسب نیست، زیرا لازم است که مدل، هر دو رفتار رهایش تنش و خزش را با هم بیان کند.

آنچه که به طور معمول جامد استاندارد سه المانی نامیده می‌شود، ترکیبی از المان کلوین- ویت به صورت سری با فنر شکل (پ-۱۵) یا المان ماکسول موازی با فنر شکل (پ-۱۶) می‌باشد.



شکل (پ-۱۵) اولین مدل جامد استاندارد خطی [۴]



شکل (پ-۱۶) دومین مدل جامد استاندارد خطی [۴]

برای اولین مدل با توجه به سه رابطه‌ی a, b, c داریم:

$$\left. \begin{array}{l} a) \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, (\varepsilon_2 = \varepsilon_3) \\ b) \varepsilon_1 = \frac{\sigma}{G_1} \\ c) \sigma = G_2 \varepsilon_2 + \eta \dot{\varepsilon}_2 \end{array} \right\} \varepsilon_2 = \varepsilon - \frac{\sigma}{G_1} \quad \left. \vphantom{\left. \begin{array}{l} a) \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, (\varepsilon_2 = \varepsilon_3) \\ b) \varepsilon_1 = \frac{\sigma}{G_1} \\ c) \sigma = G_2 \varepsilon_2 + \eta \dot{\varepsilon}_2 \end{array} \right\}} \right\} \sigma = G_2 \left( \varepsilon - \frac{\sigma}{G_1} \right) + \eta \left( \dot{\varepsilon} - \frac{\dot{\sigma}}{G_1} \right) \quad (\text{پ-۳۱})$$

معادله‌ی کلی تنش - کرنش بصورت مرتب شده‌ی زیر درمی‌آید:

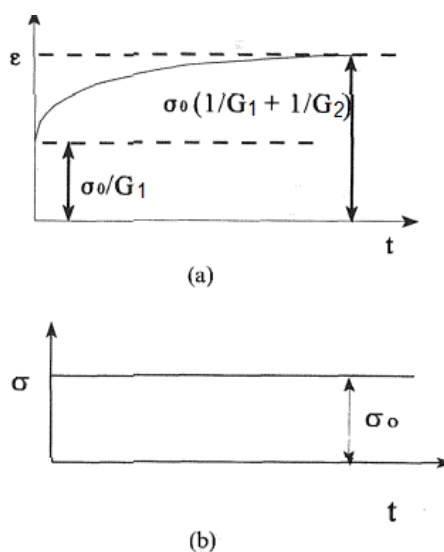
$$\left( \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} \right) \sigma + \frac{\eta}{G_1 G_2} \dot{\sigma} = \varepsilon + \frac{\eta}{G_2} \dot{\varepsilon} \quad (\text{پ-۳۲})$$

حال با استفاده از آزمایشات خزش و رهایش، رفتار مدل بررسی می‌شود:

آزمایش خزش (بررسی پاسخ مدل (شکل (پ-۱۷)) به تنش ورودی پله  $(\sigma = \sigma_0 H(t))$ :

تبدیل لاپلاس (پ-۳۲):

$$\bar{\varepsilon}(s) = \frac{\varepsilon(0)}{s + \tau^{-1}} + \frac{\sigma_0}{\eta} \left( 1 + \frac{G_2}{G_1} \right) \left( \frac{1}{s(s + \tau^{-1})} \right), \text{inv} \rightarrow \varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{G_1} + \frac{\sigma_0}{G_2} [1 - \exp(-\frac{t}{\tau})], \tau = \frac{\eta}{G_2} \quad (\text{پ-۳۳})$$



شکل (پ- ۱۷) پاسخ اولین مدل جامد استاندارد خطی به تنش ورودی پله [۴]

در نتیجه، تابع کامپلینس خزشی بصورت زیر تعیین می‌شود:

$$J(t) = \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} [1 - \exp(-\frac{t}{\tau})] = J_g + J_1 [1 - \exp(-\frac{t}{\tau})] \quad , J_g = \frac{1}{G_1} \quad , J_1 = \frac{1}{G_2} \quad (\text{پ- ۳۴})$$

آزمایش رهایش:

برای کرنش ورودی پله‌ای، انتقال لاپلاس معادله‌ی (پ- ۳۲) می‌شود:

$$\frac{G_2}{\eta} \bar{\varepsilon}(s) = \frac{1}{\eta} (1 + \frac{G_2}{G_1}) \bar{\sigma}(s) + \frac{1}{G_1} [s \bar{\sigma}(s) - \sigma(0^+)] \quad (\text{پ- ۳۵})$$

$$\sigma(t) = \sigma_0 \left\{ \left( G_2 \frac{\varepsilon_0 / \sigma_0}{1 + G_2 / G_1} \right) + \frac{1}{1 + G_2 / G_1} \exp\left[-\frac{G_1}{\eta} \left(1 + \frac{G_2}{G_1}\right) t\right] \right\} \quad , \sigma_0 = \sigma(0^+) = \varepsilon_0 G_1 \quad (\text{پ- ۳۶})$$

که مدول رهایش بصورت زیر درمی‌آید:

$$G(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} = \frac{G_2}{1 + G_2 / G_1} + \frac{G_1}{1 + G_2 / G_1} \exp\left[-\frac{G_1}{\eta} \left(1 + \frac{G_2}{G_1}\right) t\right] = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} + \frac{G_1^2}{G_1 + G_2} \exp\left[-\left(\frac{G_1 + G_2}{\eta}\right) t\right] \quad (\text{پ- ۳۷})$$

و رابطه‌ی کلی تنش - کرنش برای دومین مدل بصورت زیر است:

$$\frac{\sigma}{\eta'} + \frac{\dot{\sigma}}{G'_2} = \varepsilon \frac{G'_1}{\eta'} + \dot{\varepsilon} \left(1 + \frac{G'_1}{G'_2}\right) \quad (\text{پ-۳۸})$$

آزمایش خزش (بررسی پاسخ مدل به تنش ورودی پله‌ای):

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \left\{ \frac{1}{G'_1 + G'_2} + \frac{G'_2}{G'_1(G'_1 + G'_2)} [1 - \exp(-\frac{t}{\tau''})] \right\}$$

$$, \tau'' = \frac{\eta'(G'_1 + G'_2)}{G'_1 G'_2} = \frac{\tau'(G'_1 + G'_2)}{G'_1}, \tau' = \frac{\eta'}{G'_2} \quad (\text{پ-۳۹})$$

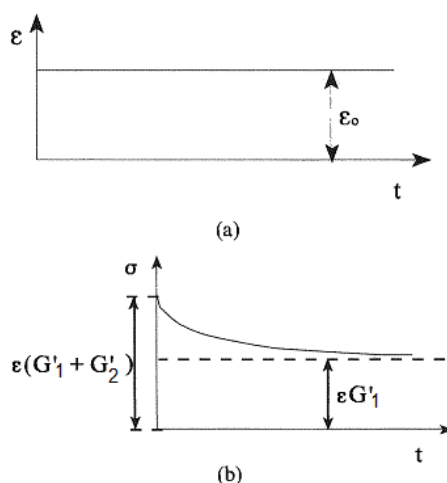
آزمایش رهایش (بررسی پاسخ مدل به کرنش ورودی پله‌ای):

$$(21) \sigma(t) = \varepsilon_0 [G'_1 + G'_2 \exp(-\frac{t}{\tau'})] \quad , \tau' = \frac{\eta'}{G'_2} \quad (\text{پ-۴۰})$$

مدول رهایش:

$$G(t) = G'_1 + G'_2 \exp(-\frac{t}{\tau'}) \quad (\text{پ-۴۱})$$

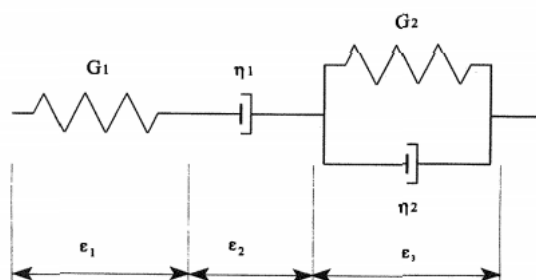
پاسخ این مدل به کرنش ورودی پله‌ای بصورت شکل زیر است:



شکل (پ-۱۸) پاسخ دومین مدل جامد استاندارد خطی به کرنش ورودی پله [۴]

۴.۵ مدل برگر<sup>۱</sup>

این مدل از ترکیب مدل ماکسول با کلوین-ویت (شکل (پ-۱۹)) بدست می‌آید.



شکل (پ-۱۹) مدل برگر [۴]

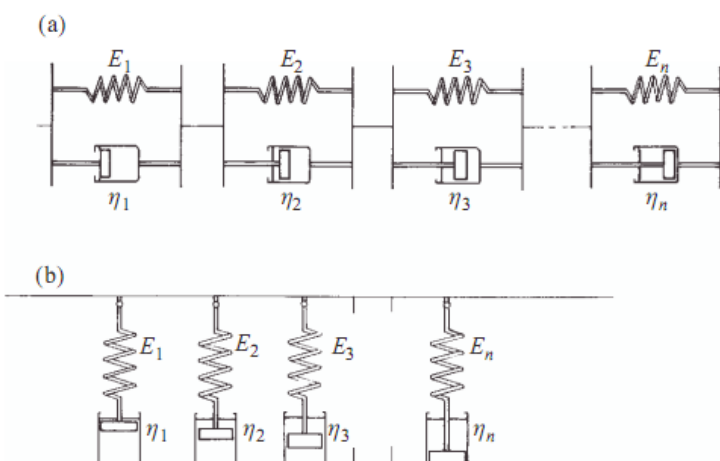
و معادله‌ی بنیادین این مدل بصورت زیر است:

$$\sigma + \left[ \frac{\eta_2}{G_2} + \eta_1 \left( \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} \right) \right] \dot{\sigma} + \frac{\eta_1 \eta_2}{G_1 G_2} \ddot{\sigma} = \eta_1 \dot{\epsilon} + \frac{\eta_1 \eta_2}{G_2} \ddot{\epsilon} \quad (\text{پ-۴۲})$$

۴.۵ مدل‌های چند المانی

برای مواد واقعی یک پاسخ نمایی ساده در خزش و رهايش تنش، توصیف مناسبی از وابستگی زمانی را ارائه نمی‌دهد. یک بیان خوب را می‌توان به‌وسیله‌ی یک آرایش از مدل‌های کلوین بصورت سری و یا یک آرایش از مدل‌های ماکسول بصورت موازی مطابق شکل زیر بدست آورد.

<sup>۱</sup> - Burgers model



شکل (پ - ۲۰) ترکیبی از مدل‌های کلویین و ماکسول [۳]

مدل‌های دیگری نیز از ترکیب المان‌های فوق بدست می‌آیند .



## مرجع

- [1]. Reddy J.N, (1984), "Energy and variational methods in applied mechanics", John Wiley & Sons, New York.
- [۲]. بیات ح، (۱۳۸۴)، پایان‌نامه ارشد: "بهبود رفتار لرزهای سکوه‌های ثابت فولادی با استفاده از میراگرهای ویسکوالاستیک"، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان.
- [3]. Ward I.M., Sweeny J., (2004), "An Introduction To The Mechanical Properties Of Solid Polymers", John Wiley & Sons Ltd, England.
- [4]. Riande E., Calleja R.D., Prolongo M.G., Masegosa R.M, Salom C., (2000). "Polymer viscoelasticity stress and strain in practice", Marcel Dekker INC, Spain.
- [5]. Brinson H.F, Brinson L.C, (2008). "Polymer engineering science and viscoelasticity: an Introduction", Springer, USA.
- [6]. Huang C.C, (1975), "Forced motion of viscoelastic cylindrical", J. of Sound and Vibration 39(3), 273-286.
- [۷]. یوگورال ا.سی، (۱۳۷۵)، "تنش در ورق‌ها و پوسته‌ها"، مترجم: راستگو ع. ، چاپ اول، انتشارات دانشگاه تربیت مدرس، تهران.
- [8]. Hua Li, Khin-Yong Lam, Teng-Yong Ng, (2005), "Rotating Shell Dynamics, Studies In Applied Mechanics", Elsevier.
- [۹]. اسدیان م.، (۱۳۸۸)، رساله کارشناسی ارشد: "پاسخ دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم تحت بار متحرک با تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول"، دانشکده مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود.
- [10]. Mirsky I., Herrmann G., (1958), "Axially Symmetric Motions of Thick Cylindrical Shells", J. of Applied Mechanics. 97-102.
- [11]. Herrmann G., Mirsky I., (1956), "Three- dimensional and shell- theory analysis of axially symmetric motions of cylinders", J. of Applied Mechanics, ASME vol(78), 563-568.

[۱۲]. صالحی الف، (۱۳۶۲)، پایان‌نامه کارشناسی ارشد: "کمانش ورق مستطیلی ویسکوالاستیک با در نظر گرفتن تغییر شکل برشی"، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر.

[۱۳]. محب‌پور س، (۱۳۷۷)، رساله دکتری: "آنالیز دینامیکی غیر خطی تیرهای لایه‌ای مرکب غیر متقارن تحت اثر بارهای متحرک با در نظر گرفتن اثر تغییر شکل برشی"، دانشکده مکانیک، دانشگاه شیراز.

[۱۴]. آقایی ح، (۱۳۸۳)، پایان‌نامه ارشد: "خمش ویسکوالاستیک ورق‌های مدور با استفاده از تئوری‌های تغییرشکل مرتبه بالا"، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر.

[۱۵]. کارگرنوین م، ح، رضوانی م، ج، یونسیان د، (۱۳۸۸)، "تحلیل دینامیکی تیر تیموشنکو از جنس ماده‌ی مرکب روی بستر ویسکوالاستیک تحت تأثیر بار متحرک نوسانی"، هفدهمین کنفرانس بین‌المللی سالانه مکانیک، دانشگاه تهران.

[16]. Zhong-Min Wang, Yin-Feng Zhou, Yan Wang, (2007), "Dynamic stability of a non-conservative viscoelastic rectangular plate", *Journal of Sound and Vibration* 307, 250–264.

[17]. P. Malekzade, A.R. Fiouz, H. Razi, (2009), "Three-dimensional dynamic analysis of laminated composite plates subjected to moving load", *Composite Structures* 90, 105–114.

[18]. E. Ghafoori, M. Asghari, (2010), "Dynamic analysis of laminated composite plates traversed by a moving mass based on a first-order theory", *Composite Structures* 92, 1865–1876.

[19]. Fryba L., (1999), "Vibration of solids and structures under moving loads", 3th edition, Thomas Telford Ltd, London.

[20]. Mofid M., Tehranchi A., Ostadhossein A., (2010), "On the viscoelastic beam subjected to moving mass", *J. of Advances in Engineering Software* 41, 240–247.

[21]. Huang C.C., (1976), "Moving loads on elastic cylindrical shells", *J. of Sound and Vibration* 49(2), 215-220.

[22]. Mann- Nachbar P., (1962), "On the role of bending in the dynamic response of thin shells to moving discontinuous loads", *J. of Aerospace Sciences* 29, 648-657.

[۲۳]. ایپک چی، ح، ۱۳۸۳، رساله دکتری: "تحلیل استوانه‌های جدار ضخیم با ضخامت متغیر تحت فشار استاتیکی و دینامیکی و تعیین توزیع فشار از پاسخ"، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس.

[۲۴]. سرانجام ب.، (۱۳۸۵)، رساله دکتری: "تحلیل دینامیکی استوانه‌ای مرکب لایه‌ای با جداره‌ی نسبتاً ضخیم و ضخامت متغیر تحت اثر فشار داخلی متحرک و متغیر"، دانشکده مکانیک،

دانشگاه شیراز.

[25]. Felszeghy S.F., Gollemith W., and Sackman J.L., (1977), "Forced axisymmetric motion of viscoelastic cylindrical shells", J. of Solids Structures 13, 877-895.

[26]. Huang C.C, (1978), "Moving loads on viscoelastic cylindrical shells", J. of Sound and Vibration, 60(3), 351-358.

[27]. Mengi Y., Birlik G.A., (1989), "A refined dynamic theory for viscoelastic cylindrical shells and cylindrical laminated composites, part1: General theory", J. of Sound and Vibration, 130(1), 55-67.

[۲۸]. بشارتی الف.، (۱۳۶۲)، پایان‌نامه کارشناسی ارشد: "تحلیل ارتعاشی پوسته استوانه‌ای با لایه میانی ویسکوالاستیک"، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر.

[۲۹]. نوذریان ح.، (۱۳۷۴)، پایان‌نامه کارشناسی ارشد: "آنالیز عددی تنش در مخازن تحت فشار دو لایه (ویسکوالاستیک-الاستیک)"، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس.

[30]. Jeffrey A., (2002), "Advanced engineering mathematics", Harcourt Academic press, Florida.

[۳۱]. علیزاده ق.، وحیدی ج.، (۱۳۸۱)، "توابع مختلط"، دانشگاه مازندران.

[32]. James A. M, (1991), "Perturbations Theory and Methods", John Wiley & Sons, Inc.

[33]. Nayfeh A.H, (1933), "Perturbation Method", John Wiley, New York.

[34]. Nayfeh A.H, (1933), "Introduction To Perturbation Techniques", John Wiley, New York.

[35]. Ansys 11 user manual.

John Wiley & Sons Ltd, England.

## **Abstract**

In this research, the dynamic response of a viscoelastic thick cylindrical shell under moving load has been evaluated. The material properties obey a viscoelastic model in shear and elastic in bulk. Boundary conditions in both of side of shell is clamped. The first-order shear deformation theory (FSDT) has been assumed as the displacement field. By considering the first standard linear solid model, the governing equations of motion have been derived with the Hamilton's principle by using the operator method. The governing equations, which are a system of partial differential equations, have been solved analytically and the displacements have been compared with the finite element method (FEM). A code in Ansys package has been prepared for numerical analysis. The analytical solution has been obtained using the Laplace transform and the perturbation technique. Based on this solution the effects of the parameters such as damping and moving load velocity on system response have been investigated.

**Keywords:** moving load, viscoelastic thick cylindrical shell, finite element method, first order shear deformation theory, perturbation theory.



**Shahrood University of Technology**  
**Mechanical Engineering Faculty**

**Numerical and mathematical analysis of a viscoelastic cylinder under  
internal moving pressure using first order shear deformation theory**

**Sajad Solhmirzaei**

**Supervisor:**

**Dr. Hamid Reza Eipakchi**

Summer, 2011