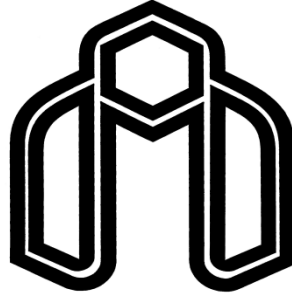


بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک و مکاترونیک

رساله‌ی دکترای مهندسی طراحی کاربردی

ارتعاشات غیر خطی و پایداری تیرهای پیچیده شده دورانی

نگارنده: محسن تاجیک

استاد راهنما: دکتر اردشیر کرمی محمدی

دی ۱۳۹۸

شماره: ۳۰۸/۲۹۸/۱۴۲
تاریخ: ۹۸/۱۱/۲۳
ویرایش:

باسمه تعالی



فرم شماره ۱۲: صورت جلسه نهایی دفاع از رساله دکتری (Ph.D)
(ویژه دانشجویان ورودی های ۹۴ و ما قبل)

بدینوسیله گواهی می شود آقای محسن تاجیک دانشجوی دکتری رشته مهندسی مکانیک به شماره دانشجویی ۹۲۱۶۹۱۵ ورودی ۹۲ در تاریخ ۹۸/۱۰/۱۸ از رساله نظری عملی خود با عنوان: ارتعاشات غیر خطی و پایداری تیرهای پیچیده شده دورانی دفاع و با اخذ نمره ۱۹.۱۰ به درجه عالی نائل گردید.

<input type="checkbox"/> الف) درجه عالی: نمره ۱۹-۲۰ <input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> ب) درجه بسیار خوب: نمره ۱۸/۹۹-۱۷ <input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/> ج) درجه خوب: نمره ۱۶/۹۹-۱۵ <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> د) غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد <input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/> ه) رساله نیاز به اصلاحات دارد <input type="checkbox"/>	

ردیف	هیئت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبۀ علمی	اعضاء
۱	استاد راهنما	دکتر اردشیر کرمی محمدی	دانشیار	
۲	استاد داور داخلی	دکتر حمید رضا ایبکی	دانشیار	
۳	استاد داور داخلی	دکتر حبیب احمدی	استادیار	
۴	استاد داور خارجی	دکتر علی اصغر جعفری	استاد	
۵	نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر سید هادی قادری	استادیار	

مدیر محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه:

ضمن تأیید مراتب فوق مقرر فرمائید اقدامات لازم در خصوص انجام مراحل دانش آموختگی آقای محسن تاجیک بعمل آید.

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده:
تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:
۹۸/۱۱/۲۳

تقدیم به پدرم به استواری کوه،

مادرم به زلالی چشمه،

و همسرم به صمیمیت باران . . .

تقدیر و تشکر

پروردگار، را سپاسگزارم که بار دیگر به من فرصت آموختن داد. با سپاس فراوان از پدرم که دستان پر مهرش همواره تکیه من بوده، سپاس بیکران بر همدلی و همراهی مادر دلسوزم که سجده‌ی ایثارش گل محبت را در وجودم پروراند و دامن گهربارش لفظ‌های مهربانی را به من آموخت. سپاس از همسر عزیزم که حضورش همواره امید بخش من بوده و صبورانه و صادقانه مرا همراهی و تشویق می‌کرد و با تقدیر و تشکر شایسته از استاد عزیزم جناب آقای دکتر اردشیر کریمی مممدی که به عنوان استاد راهنما در مراحل مختلف این رساله همواره با سعه صدر و گشاده رویی در کنار من بودند و در طول مدت تحصیل همواره راهنما و راه‌گشای بنده در اتمام و اكمال این رساله بوده- اند تشکر و قدردانی نمایم.

تعهد نامه

اینجانب محسن تاجیک دانشجوی دوره‌ی دکترای رشته‌ی مهندسی مکانیک دانشکده‌ی مهندسی مکانیک و مکاترونیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده‌ی پایان‌نامه با عنوان " ارتعاشات غیرخطی و پایداری تیرهای پیچیده شده دورانی

" تحت راهنمایی دکتر اردشیر کرمی محمدی متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این رساله توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در رساله تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه‌ی حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا «Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آمدن نتایج اصلی رساله تأثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از رساله رعایت می‌گردد.
- در کلیه‌ی مراحل انجام این رساله، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه‌ی مراحل انجام این رساله، در مواردی که به حوزه‌ی اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است؛ اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ:

امضای دانشجو:

مالکیت نتایج و حق نشر

کلیه‌ی حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود. استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در رساله بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

تحلیل ارتعاشات و پایداری سازه‌های تیرگونه پیچیده شده، موضوع تحقیقاتی بسیاری از محققان در اکثر زمینه‌های مهندسی بوده و نقش مهمی را در طراحی پره‌های توربین، مته‌های حفاری و سوراخکاری، پمپها و ... ایفا می‌کند. در عمل، این‌گونه تجهیزات را می‌توان با تیرهای پیچیده شده به صورت متمرکز یا گستره مدل‌سازی کرد. با توجه به تحقیقات صورت گرفته، مشخص است که موارد بسیاری است که تا کنون از سوی محققین در زمینه پایداری و رفتار دینامیکی تیرهای پیچیده شده محوری مورد بررسی قرار نگرفته است. یکی از مهمترین این موارد این است که تقریباً اکثر تحقیقاتی که تاکنون به بررسی رفتار دینامیکی اینگونه تیرها پرداخته است، روی معادلات خطی ساده شده آنها متمرکز شده است. همچنین، تاکنون بررسی غیرخطی رفتار ارتعاشاتی اینگونه تیرها با وجود نابالانسی، نامتقارنی^۱، اثر کش‌پذیری^۲ یا کش‌ناپذیری^۳، تغییرات سرعت محوری^۴ و بار محوری در شرایط مرزی مختلف انجام نگرفته است. از این‌رو، با توجه به اهمیت اینگونه تجهیزات، این رساله در گام اول به بررسی غیرخطی رفتار دینامیکی و ارتعاشاتی تیرهای پیچیده شده که به صورت محوری دوران می‌کنند، می‌پردازد. در گام‌های بعدی، تأثیر برخی از عوامل هندسی روی این بررسی غیرخطی مانند نوع شرایط مرزی، تغییرات سرعت محوری، کش‌پذیری یا کش‌ناپذیری، بارهای محوری و کوپلینگ حرکات محوری و پیچشی مورد بررسی قرار گرفته است. استخراج معادلات غیرخطی حرکت با استفاده از اصل همیلتون^۵ انجام شده و معادلات نهایی جهت تحلیل پایداری نیز با دو روش مستقیم (اعمال روش مقیاس‌های چندگانه روی معادلات دیفرانسیل مشتق جزئی) و غیر مستقیم (تبدیل معادلات دیفرانسیل مشتق جزئی به معادلات دیفرانسیل معمولی با استفاده از روش گالرکین^۶ و سپس اعمال روش مقیاس‌های چندگانه^۷ روی معادلات دیفرانسیل معمولی حاصل) استخراج

1 Asymmetrical

2 Stretching or Extensionality

3 In-Extensionality

4 Speed fluctuations

5 Hamilton principle

6 Galerkin

7 Multiple scales

شده‌اند. صحه‌گذاری نتایج و معادلات حاصل نیز با استفاده از روش عددی رانگ-کوتا^۸ و همچنین مقایسه با نتایج حاصل از تحقیقات صورت گرفته توسط دیگر محققین انجام شده است. در این بررسی‌ها، تحلیل رزونانس‌های اولیه و پارامتریک سیستم انجام شده و تأثیر پارامترهای مختلف مانند زاویه پیچش، شماره مد، نسبت سختی طولی به سختی عرضی تیر، ضریب میرایی و میزان خروج از مرکز تیر روی پاسخ‌های حالت پایا یا دو شاخگی‌های^۹ تیرهای پیچیده شده متقارن و نامتقارن با شرایط مرزی مذکور مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته است.

کلمات کلیدی: تیر پیچیده شده متقارن و نامتقارن؛ ارتعاشات غیرخطی؛ روش مقیاس‌های چندگانه؛

روش گالرکین؛ رزونانس اولیه؛ رزونانس پارامتریک؛ دو شاخگی؛ لنگ زنی.

8 Runge-kutta

9 Bifurcation

مقالات مستخرج از رساله

- Tajik, M., Karami Mohammadi, A., Nonlinear vibration, stability, and bifurcation analysis of unbalanced spinning pre-twisted beam, Math Mech Solids, 24(11) (2019)3514-3536.
- Tajik, M., Karami Mohammadi, A., (2019) Effect of Spinning Speed Fluctuation along with the Twist Angle on the Nonlinear Vibration and stability of an Asymmetrical Twisted Slender Beam, AJME.
- تاجیک م، کرمی محمدی ا.، (۲۰۱۸) ارتعاشات غیر خطی تیر پیچیده شده دوار با سرعت متغیر محوری نزدیک رزونانس‌های اولیه، همایش سالانه بین‌المللی مهندسی مکانیک ایران.

فهرست مطالب

فصل اول	۱
۱ - مقدمه	۲
۱-۱- هدف از تحقیق و اهمیت موضوع	۲
۱-۲- منشأ پدیده‌های غیر خطی در دینامیک روتورها	۴
۱-۳- معرفی تیرهای پیچیده شده	۷
۱-۴- مروری بر تاریخچه موضوع	۹
۱-۵- برخی مفاهیم و تعاریف در دینامیک تیرهای دوار	۲۵
۱-۵-۱- روتور جف کات	۲۶
۱-۵-۲- شکل مدهای یک تیر دوار	۲۶
۱-۵-۳- لنگ زنی همسو و ناهمسو	۲۷
۱-۵-۴- دو شاخگی	۲۸
فصل دوم	۳۱
۲ - ارتعاشات عرضی تیر پیچیده شده دوار با شرایط مرزی دو سر مفصل	۳۲
۲-۱- معادلات حرکت	۳۲
۲-۱-۱- انرژی جنبشی	۴۰
۲-۱-۲- انرژی پتانسیل	۴۱
۲-۱-۳- انرژی اتلافی	۴۱
۲-۲- تحلیل پایداری با اعمال روش مقیاس‌های چند گانه به معادلات دیفرانسیل مشتقات جزئی (PDE)	۴۵
۲-۳- تحلیل پایداری با استفاده از روش گالرکین و اعمال روش مقیاس‌های چند گانه به معادلات دیفرانسیل با مشتقات معمولی (ODE)	۵۳
۲-۴- تحلیل پایداری با تعیین ماتریس ژاکوبین	۵۶
۲-۵- نتایج	۵۷
۲-۵-۱- اعتبار سنجی نتایج	۵۷
۲-۵-۲- بحث و نتیجه گیری	۵۸
فصل سوم	۷۳
۳ - ارتعاشات عرضی تیر پیچیده شده دوار با شرایط مرزی یک سر گیر دار	۷۴
۳-۲- معادلات حرکت	۷۴
۳-۳- تحلیل پایداری با اعمال روش مقیاس‌های چند گانه به معادلات دیفرانسیل مشتقات جزئی (PDE)	۷۷

۴-۳- تحلیل پایداری با استفاده از روش گالرکین و با اعمال روش مقیاس‌های چندگانه به معادلات دیفرانسیل با مشتقات معمولی (ODE).....	۸۵
۵-۳- تحلیل پایداری با تعیین ماتریس ژاکوبین.....	۹۰
۶-۳- نتایج.....	۹۱
۱-۶-۳- اعتبار سنجی نتایج.....	۹۱
۲-۶-۳- بحث و نتیجه گیری.....	۹۲
فصل چهارم.....	۱۰۳
۴- ارتعاشات عرضی تیر پیچیده شده دوار با شرایط مرزی دو سر مفصل و سرعت متغیر.....	۱۰۴
۱-۴- معادلات حرکت.....	۱۰۴
۲-۴- تحلیل پایداری با اعمال روش مقیاس‌های چندگانه به معادلات دیفرانسیل مشتقات جزئی (PDE).....	۱۰۹
۳-۴- تحلیل پایداری با استفاده از روش گالرکین با اعمال روش مقیاس‌های چندگانه به معادلات دیفرانسیل با مشتقات معمولی (ODE).....	۱۱۶
۴-۴- تحلیل پایداری با تعیین ماتریس ژاکوبین.....	۱۱۹
۵-۴- نتایج.....	۱۲۰
۱-۵-۴- اعتبار سنجی نتایج.....	۱۲۱
فصل پنجم.....	۱۴۱
۵- ارتعاشات عرضی تیر پیچیده شده دوار با شرایط مرزی دو سر مفصل و نیروی محوری ثابت.....	۱۴۲
۱-۵- معادلات حرکت.....	۱۴۲
۱-۱-۵- کار نیروی محوری.....	۱۴۲
۲-۵- تحلیل پایداری با اعمال روش مقیاس‌های چندگانه به معادلات دیفرانسیل مشتقات جزئی (PDE).....	۱۴۶
۳-۵- تحلیل پایداری با استفاده از روش گالرکین با اعمال روش مقیاس‌های چندگانه به معادلات دیفرانسیل با مشتقات معمولی (ODE).....	۱۵۳
۴-۵- تحلیل پایداری با تعیین ماتریس ژاکوبین.....	۱۵۶
۵-۵- نتایج.....	۱۵۷
فصل ششم.....	۱۶۷
۶- ارتعاشات عرضی تیر پیچیده شده دوار با شرایط مرزی یکسر گیردار با نیروی محوری ثابت.....	۱۶۸
۱-۶- معادلات حرکت.....	۱۶۸
۱-۱-۶- کار نیروی محوری.....	۱۶۸
۲-۶- تحلیل پایداری با اعمال روش مقیاس‌های چندگانه به معادلات دیفرانسیل مشتقات جزئی (PDE).....	۱۷۰
۳-۶- تحلیل پایداری با استفاده از روش گالرکین و با اعمال روش مقیاس‌های چندگانه به معادلات دیفرانسیل با مشتقات معمولی (ODE).....	۱۷۸

۱۸۴	۴-۶- تحلیل پایداری با تعیین ماتریس ژاکوبین
۱۸۴	۵-۶- نتایج
۱۸۴	۱-۵-۶- اعتبار سنجی نتایج
۱۸۵	۲-۵-۶- بحث و نتیجه گیری
۱۹۷	فصل هفتم
۱۹۸	۷- ارتعاشات عرضی تیر پیچیده شده دوار کش ناپذیر با شرایط مرزی دو سر مفصل
۱۹۸	۱-۷- معادلات حرکت
۲۰۲	۲-۷- تحلیل پایداری با اعمال روش مقیاسهای چند گانه به معادلات دیفرانسیل مشتقات جزئی (PDE)
۲۱۰	۳-۷- تحلیل پایداری
۲۱۱	۴-۷- نتایج
۲۱۱	۱-۴-۷- اعتبار سنجی نتایج
۲۱۲	۲-۴-۷- بحث و نتیجه گیری
۲۲۳	فصل هشتم
۲۲۴	۸- ارتعاشات تیر پیچیده شده دوار کش ناپذیر با شرایط مرزی یک سر گیردار
۲۲۴	۱-۸- معادلات حرکت
۲۲۶	۲-۸- تحلیل پایداری
۲۲۷	۳-۸- نتایج
۲۳۷	فصل نهم
۲۳۸	۹- ارتعاشات محوری، عرضی و پیچشی تیر پیچیده شده دوار با شرایط مرزی دو سر مفصل
۲۳۸	۱-۹- معادلات حرکت
۲۴۲	۲-۹- تحلیل پایداری با اعمال روش مقیاسهای چند گانه به معادلات دیفرانسیل مشتقات جزئی (PDE)
۲۵۴	۳-۹- تحلیل پایداری با تعیین ماتریس ژاکوبین
۲۵۵	۴-۹- نتایج
۲۶۹	فصل دهم
۲۷۰	۱۰- ارتعاشات محوری، عرضی و پیچشی تیر پیچیده شده دوار با شرایط مرزی یک سر گیردار
۲۷۰	۱-۱۰- معادلات حرکت
۲۸۴	۲-۱۰- تحلیل پایداری با تعیین ماتریس ژاکوبین
۲۸۵	۳-۱۰- نتایج
۲۹۵	فصل یازدهم
۲۹۶	۱۱- نتیجه گیری و پیشنهادها
۲۹۶	۱-۱۱- نتیجه گیری

۳۰۱ ۲-۱۱ - پیشنهادها

۳۰۵ منابع

فهرست شکل‌ها

تخریب یک سیستم دوار در اثر بروز مشکل در آن ۳	شکل (۱-۱)
کاربرد تیر پیچیده شده در پمپها و کمپرسورها ۷	شکل (۲-۱)
نمونه‌ای از مته‌های براده برداری ۷	شکل (۳-۱)
نمونه‌ای از مته‌های حفاری چاه نفت ۷	شکل (۴-۱)
مدل تیرهای پیچیده شده ۸	شکل (۵-۱)
اولین مقاله ارائه شده در زمینه دینامیک روتورها [6] ۹	شکل (۶-۱)
مقطع مدل یک سیستم روتور با جرم متمرکز [117] ۲۶	شکل (۷-۱)
شکل مدهای سیستم روتور با جرم متمرکز در وسط تیر بر حسب سختی یاتاقانها [117] ۲۶	شکل (۸-۱)
شکل مدهای و فرکانسهای متناظر یک شفت دوار بر حسب سختی یاتاقانها [117] ۲۷	شکل (۹-۱)
شکل مدهای دوم و فرکانسهای طبیعی متناظر یک شفت دوار بر حسب سختی یاتاقانها [117] ۲۷	شکل (۱۰-۱)
لنگ زنی (الف) همسو و (ب) ناهمسو [117] ۲۸	شکل (۱۱-۱)
دستگاه مختصات محلی و مرجع برای یک تیر پیچیده شده دو سر مفصل [43] ۳۳	شکل (۱-۲)
نمایش زوایای اوپلر تیر پیچیده شده دو سر مفصل [43] ۳۳	شکل (۲-۲)
تغییر شکل یک المان از تیر [43] ۳۵	شکل (۳-۲)
یک تیر پیچیده شده دورانی به همراه مقطع آن با نمایش زاویه پیش تیر ۳۶	شکل (۴-۲)
مقایسه پاسخ فرکانسی یک تیر مستقیم در کار حاضر در حالت ($\beta_0 = 0$) با کار شاهقلی و خادم [40]، در مد اول ۵۷	شکل (۵-۲)
مقایسه پاسخ فرکانسی یک تیر مستقیم در کار حاضر در حالت ($\beta_0 = 0$) با کار شاهقلی و خادم [40]، در مد دوم ۵۸	شکل (۶-۲)
فرکانسهای همسو و ناهمسو بر حسب زاویه پیش در ۳ مد اول ۵۸	شکل (۷-۲)
فرکانسهای همسو و ناهمسو بر حسب سرعت چرخش در مد اول ۵۹	شکل (۸-۲)
فرکانسهای همسو و ناهمسو بر حسب سرعت چرخش در مد دوم ۵۹	شکل (۹-۲)
شکل (۱۰-۲) منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده دوار متقارن در مد اول و زاویه پیش الف ($\beta_0 = 0$) ب ($\beta_0 = 30^\circ$) و ج ($\beta_0 = 60^\circ$) ۶۱	شکل (۱۰-۲)
شکل (۱۱-۲) منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده دوار متقارن در مد دوم و زاویه پیش الف ($\beta_0 = 0$) ب ($\beta_0 = 30^\circ$) و ج ($\beta_0 = 60^\circ$) ۶۲	شکل (۱۱-۲)
منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده دوار نامتقارن در مد اول و زاویه پیش الف ($\beta_0 = 0$) ب ($\beta_0 = 30^\circ$) و ج ($\beta_0 = 60^\circ$) ۶۳	شکل (۱۲-۲)
منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده دوار نامتقارن در مد دوم و زاویه پیش الف ($\beta_0 = 0$) ب ($\beta_0 = 30^\circ$) و ج ($\beta_0 = 60^\circ$) ۶۴	شکل (۱۳-۲)
تأثیر تغییر پارامتر μ روی منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده متقارن در مد اول و $\beta_0 = 60^\circ$ ۶۵	شکل (۱۴-۲)

- شکل (۱۵-۲) تأثیر تغییر پارامتر μ روی منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده نامتقارن در مد اول و $\beta_0 = 60^\circ$ ۶۵
- شکل (۱۶-۲) تأثیر میزان خروج از مرکز روی منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده نامتقارن در مد اول و $\beta_0 = 60^\circ$ $\mu = 0.0005$ ۶۶
- شکل (۱۷-۲) تأثیر میزان خروج از مرکز روی منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده نامتقارن در مد اول و $\beta_0 = 60^\circ$ $\mu = 0.0005$ ۶۶
- شکل (۱۸-۲) منحنی دامنه-نسبت میرایی تیر پیچیده نامتقارن در $\sigma = 0$ ۶۷
- شکل (۱۹-۲) منحنی دامنه-نسبت میرایی تیر پیچیده نامتقارن در $\sigma = 0.03$ ۶۷
- شکل (۲۰-۲) منحنی دامنه-نسبت میرایی تیر پیچیده نامتقارن در $\sigma = 0$ ۶۸
- شکل (۲۱-۲) منحنی دامنه-نسبت میرایی تیر پیچیده نامتقارن در $\sigma = 0.1$ ۶۸
- شکل (۲۲-۲) منحنی دامنه-خروج از مرکز تیر پیچیده شده نامتقارن در فرکانس $\sigma = 0$ ۶۹
- شکل (۲۳-۲) منحنی دامنه-خروج از مرکز تیر پیچیده شده نامتقارن در فرکانس $\sigma = 0.03$ ۶۹
- شکل (۲۴-۲) منحنی دامنه-خروج از مرکز تیر پیچیده شده نامتقارن در فرکانس $\sigma = 0$ ۷۰
- شکل (۲۵-۲) منحنی دامنه-خروج از مرکز تیر پیچیده شده نامتقارن در فرکانس $\sigma = 0.1$ ۷۱
- شکل (۱-۳) یک تیر پیچیده شده دورانی یک سر گیردار به همراه مقطع آن با نمایش زاویه پیش تیر ۷۵
- شکل (۲-۳) تغییرات فرکانس طبیعی نسبت به سرعت دورانی در چهار مد اول ۹۲
- شکل (۳-۳) منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده دوار یک سر گیر دار متقارن در مد اول و زاویه پیش الف) $\beta_0 = 0$ ۹۵
- ب) $\beta_0 = 30^\circ$ و ج) $\beta_0 = 60^\circ$ ۹۵
- شکل (۴-۳) منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده دوار یک سر گیردار نامتقارن در مد اول و زاویه پیش الف) $\beta_0 = 0$ ۹۶
- ب) $\beta_0 = 30^\circ$ و ج) $\beta_0 = 60^\circ$ ۹۶
- شکل (۵-۳) منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده دوار یک سر گیر دار متقارن در مد دوم و زاویه پیش الف) $\beta_0 = 0$ ۹۷
- ب) $\beta_0 = 30^\circ$ و ج) $\beta_0 = 60^\circ$ ۹۷
- شکل (۶-۳) منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده دوار یک سر گیردار نامتقارن در مد دوم و زاویه پیش الف) $\beta_0 = 0$ ۹۸
- ب) $\beta_0 = 30^\circ$ و ج) $\beta_0 = 60^\circ$ ۹۸
- شکل (۷-۳) منحنی دامنه-نسبت میرایی تیر پیچیده شده یک سر گیردار متقارن در $\sigma = 0$ ۹۹
- شکل (۸-۳) منحنی دامنه-نسبت میرایی تیر پیچیده شده یک سر گیردار نامتقارن در $\sigma = 0$ ۹۹
- شکل (۹-۳) منحنی دامنه-خروج از مرکز تیر پیچیده شده یک سر گیردار متقارن در $\sigma = 0$ ۱۰۰
- شکل (۱۰-۳) منحنی دامنه-خروج از مرکز تیر پیچیده نامتقارن در $\sigma = 0$ ۱۰۱
- شکل (۱-۴) مقایسه منحنی‌های پاسخ فرکانسی یک تیر متقارن مستقیم ($\Gamma_2 = 0$) در کار حاضر (در حالت $\beta_0 = 0$) و کار شاهقلی [41] در مد اول، الف) بدون تغییرات سرعت ($\Gamma_1 = 0$)، ب) با تغییرات سرعت ($\Gamma_1 \neq 0$) ۱۲۱
- شکل (۲-۴) منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده دوار متقارن در مد اول و زاویه پیش الف) $\beta_0 = 0$ ب) $\beta_0 = 30^\circ$ و ج) $\beta_0 = 60^\circ$ ۱۲۳
- شکل (۳-۴) منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده دوار متقارن در مد دوم و زاویه پیش الف) $\beta_0 = 0$ ب) $\beta_0 = 30^\circ$ و ج) $\beta_0 = 60^\circ$ ۱۲۴

- شکل (۴-۴) منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده دوار نامتقارن در مد اول و زاویه پیش الف) $\beta_0 = 0$ (ب) $\beta_0 = 30^\circ$ و $\beta_0 = 60^\circ$ (ج) ۱۲۷
- شکل (۵-۴) منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده دوار نامتقارن در مد دوم و زاویه پیش الف) $\beta_0 = 0$ (ب) $\beta_0 = 30^\circ$ و $\beta_0 = 60^\circ$ (ج) ۱۲۸
- شکل (۶-۴) منحنی دامنه-نسبت میرایی تیر پیچیده شده متقارن در مد اول و $e_\eta = e_\xi = 0.05$ و $\sigma = 0$ و زاویه پیش الف) $\beta_0 = 0$ (ب) $\beta_0 = 30^\circ$ (ج) و $\beta_0 = 60^\circ$ ۱۲۹
- شکل (۷-۴) منحنی دامنه-نسبت میرایی تیر پیچیده شده متقارن در مد دوم و $e_\eta = e_\xi = 0.05$ و $\sigma = 0$ و زاویه پیش الف) $\beta_0 = 0$ (ب) $\beta_0 = 30^\circ$ (ج) و $\beta_0 = 60^\circ$ ۱۳۰
- شکل (۸-۴) منحنی دامنه-نسبت میرایی تیر پیچیده شده نامتقارن در مد اول و $e_\eta = e_\xi = 0.05$ و $\sigma = 0$ و زاویه پیش الف) $\beta_0 = 0$ (ب) $\beta_0 = 30^\circ$ (ج) و $\beta_0 = 60^\circ$ ۱۳۲
- شکل (۹-۴) منحنی دامنه-نسبت میرایی تیر پیچیده شده نامتقارن در مد دوم و $e_\eta = e_\xi = 0.05$ و $\sigma = 0$ و زاویه پیش الف) $\beta_0 = 0$ (ب) $\beta_0 = 30^\circ$ (ج) و $\beta_0 = 60^\circ$ ۱۳۳
- شکل (۱۰-۴) منحنی دامنه-خروج از مرکز تیر پیچیده شده متقارن در مد اول و $\sigma = 0$ و زاویه پیش الف) $\beta_0 = 0$ (ب) $\beta_0 = 30^\circ$ (ج) و $\beta_0 = 60^\circ$ ۱۳۵
- شکل (۱۱-۴) منحنی دامنه-خروج از مرکز تیر پیچیده شده متقارن در مد دوم و $\sigma = 0$ و زاویه پیش الف) $\beta_0 = 0$ (ب) $\beta_0 = 30^\circ$ (ج) و $\beta_0 = 60^\circ$ ۱۳۶
- شکل (۱۲-۴) منحنی دامنه-خروج از مرکز تیر پیچیده شده نامتقارن در مد اول و $\sigma = 0$ و زاویه پیش الف) $\beta_0 = 0$ (ب) $\beta_0 = 30^\circ$ (ج) و $\beta_0 = 60^\circ$ ۱۳۷
- شکل (۱۳-۴) منحنی دامنه-خروج از مرکز تیر پیچیده شده نامتقارن در مد دوم و $\sigma = 0$ و زاویه پیش الف) $\beta_0 = 0$ (ب) $\beta_0 = 30^\circ$ (ج) و $\beta_0 = 60^\circ$ ۱۳۸
- شکل (۱۴-۴) منحنی دامنه-ممان اینرسی حول محور طولی تیر پیچیده شده نامتقارن در مد اول و $\sigma = 0$ بدون تغییرات سرعت و زاویه پیش الف) $\beta_0 = 0$ (ب) $\beta_0 = 30^\circ$ (ج) و $\beta_0 = 60^\circ$ ۱۳۹
- شکل (۱۵-۴) منحنی دامنه-ممان اینرسی حول محور طولی تیر پیچیده شده نامتقارن در مد اول و $\sigma = 0$ با تغییرات سرعت و زاویه پیش الف) $\beta_0 = 0$ (ب) $\beta_0 = 30^\circ$ (ج) و $\beta_0 = 60^\circ$ ۱۳۹
- شکل (۱-۵) یک تیر پیچیده شده دورانی تحت نیروی محوری P به همراه مقطع آن با نمایش زاویه پیش تیر ۱۴۲
- شکل (۲-۵) منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده دو سر مفصل متقارن با نیروی محوری ثابت در مد اول و زاویه پیش الف) $\beta_0 = 0$ (ب) $\beta_0 = 30^\circ$ (ج) و $\beta_0 = 60^\circ$ ۱۶۰
- شکل (۳-۵) منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده دو سر مفصل نامتقارن با نیروی محوری ثابت در مد اول و زاویه پیش الف) $\beta_0 = 0$ (ب) $\beta_0 = 30^\circ$ (ج) و $\beta_0 = 60^\circ$ ۱۶۱
- شکل (۴-۵) منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده دو سر مفصل متقارن با نیروی محوری ثابت در مد دوم و زاویه پیش الف) $\beta_0 = 0$ (ب) $\beta_0 = 30^\circ$ (ج) و $\beta_0 = 60^\circ$ ۱۶۲
- شکل (۵-۵) منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده دو سر مفصل نامتقارن با نیروی محوری ثابت در مد دوم و زاویه پیش الف) $\beta_0 = 0$ (ب) $\beta_0 = 30^\circ$ (ج) و $\beta_0 = 60^\circ$ ۱۶۳

- شکل (۶-۵) منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده دو سر مفصل متقارن در مد اول و زاویه پیش $\beta_0 = 60^\circ$ با سه نیروی محوری ثابت ۱۶۳
- شکل (۷-۵) منحنی دامنه-نسبت میرایی تیر پیچیده متقارن با نیروی محوری ثابت در $\sigma = 0$ ۱۶۴
- شکل (۸-۵) منحنی دامنه-نسبت میرایی تیر پیچیده نامتقارن با نیروی محوری ثابت در $\sigma = 0$ ۱۶۵
- شکل (۹-۵) منحنی دامنه-خروج از مرکز تیر پیچیده متقارن با نیروی محوری ثابت در $\sigma = 0$ ۱۶۶
- شکل (۱۰-۵) منحنی دامنه-خروج از مرکز تیر پیچیده نامتقارن با نیروی محوری ثابت در $\sigma = 0$ ۱۶۶
- شکل (۱-۶) یک تیر پیچیده شده دورانی یک سر گیردار با نیروی محوری ثابت P به همراه مقطع آن با نمایش زاویه پیش تیر ۱۶۸
- شکل (۲-۶) تغییرات بخش موهومی فرکانس طبیعی بر حسب نیروی محوری بی بعد شده در دو مد اول و زوایای پیش مختلف ۱۸۵
- شکل (۳-۶) منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده دوار یک سر گیر دار متقارن با نیروی محوری ثابت در مد اول و زاویه پیش الف) $\beta_0 = 0$ (ب) $\beta_0 = 30^\circ$ و ج) $\beta_0 = 60^\circ$ ۱۸۹
- شکل (۴-۶) منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده دوار یک سر گیردار نامتقارن با نیروی محوری ثابت در مد اول و زاویه پیش الف) $\beta_0 = 0$ (ب) $\beta_0 = 30^\circ$ و ج) $\beta_0 = 60^\circ$ ۱۹۰
- شکل (۵-۶) منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده دوار یک سر گیر دار متقارن با نیروی محوری ثابت در مد دوم و زاویه پیش الف) $\beta_0 = 0$ (ب) $\beta_0 = 30^\circ$ و ج) $\beta_0 = 60^\circ$ ۱۹۱
- شکل (۶-۶) منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده دوار یک سر گیردار نامتقارن با نیروی محوری ثابت در مد دوم و زاویه پیش الف) $\beta_0 = 0$ (ب) $\beta_0 = 30^\circ$ و ج) $\beta_0 = 60^\circ$ ۱۹۲
- شکل (۷-۶) منحنی دامنه-نسبت میرایی تیر پیچیده متقارن با نیروی محوری ثابت در $\sigma = 0$ ۱۹۳
- شکل (۸-۶) منحنی دامنه-نسبت میرایی تیر پیچیده نامتقارن با نیروی محوری ثابت در $\sigma = 0$ ۱۹۴
- شکل (۹-۶) منحنی دامنه-خروج از مرکز تیر پیچیده متقارن با نیروی محوری ثابت در $\sigma = 0$ ۱۹۵
- شکل (۱۰-۶) منحنی دامنه-خروج از مرکز تیر پیچیده نامتقارن با نیروی محوری ثابت در $\sigma = 0$ ۱۹۶
- شکل (۱-۷) تغییر شکل یک المان از تیر کش ناپذیر [43] ۱۹۸
- شکل (۲-۷) یک تیر پیچیده شده دورانی دو سر ساده با فرض کش ناپذیری، به همراه مقطع آن با نمایش زاویه پیش تیر ۱۹۹
- شکل (۳-۷) مقایسه پاسخ فرکانسی یک تیر مستقیم کش ناپذیر در کار حاضر ($\beta_0 = 0$) و کار کار شاهقلی و خادم [42] در مد اول ۲۱۲
- شکل (۴-۷) منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده دوار دو سر مفصل متقارن کش ناپذیر در مد اول و زاویه پیش الف) $\beta_0 = 0$ (ب) $\beta_0 = 30^\circ$ و ج) $\beta_0 = 60^\circ$ ۲۱۴
- شکل (۵-۷) منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده دوار دو سر مفصل نامتقارن کش ناپذیر در مد اول و زاویه پیش الف) $\beta_0 = 0$ (ب) $\beta_0 = 30^\circ$ و ج) $\beta_0 = 60^\circ$ ۲۱۵
- شکل (۶-۷) منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده دوار دو سر مفصل متقارن کش ناپذیر در مد دوم و زاویه پیش الف) $\beta_0 = 0$ (ب) $\beta_0 = 30^\circ$ و ج) $\beta_0 = 60^\circ$ ۲۱۶
- شکل (۷-۷) منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده دوار دو سر مفصل نامتقارن کش ناپذیر در مد دوم و زاویه پیش الف) $\beta_0 = 0$ (ب) $\beta_0 = 30^\circ$ و ج) $\beta_0 = 60^\circ$ ۲۱۷

- شکل (۷-۸) منحنی دامنه-نسبت میرایی تیر پیچیده شده دو سر مفصل کش ناپذیر متقارن در $\sigma=0$ ۲۱۸
- شکل (۷-۹) منحنی دامنه-نسبت میرایی تیر پیچیده شده دو سر مفصل کش ناپذیر متقارن در $\sigma=0.05$ ۲۱۹
- شکل (۷-۱۰) منحنی دامنه-نسبت میرایی تیر پیچیده شده دو سر مفصل کش ناپذیر نامتقارن در $\sigma=0$ ۲۱۹
- شکل (۷-۱۱) منحنی دامنه-نسبت میرایی تیر پیچیده شده دو سر مفصل کش ناپذیر نامتقارن در $\sigma=0.05$ ۲۲۰
- شکل (۷-۱۲) منحنی دامنه-خروج از مرکز تیر پیچیده شده دو سر مفصل کش ناپذیر متقارن در $\sigma=0$ ۲۲۱
- شکل (۷-۱۳) منحنی دامنه-خروج از مرکز تیر پیچیده شده دو سر مفصل کش ناپذیر متقارن در $\sigma=0.05$ ۲۲۱
- شکل (۷-۱۴) منحنی دامنه-خروج از مرکز تیر پیچیده شده دو سر مفصل کش ناپذیر نامتقارن در $\sigma=0$ ۲۲۲
- شکل (۷-۱۵) منحنی دامنه-خروج از مرکز تیر پیچیده شده دو سر مفصل کش ناپذیر نامتقارن در $\sigma=0.05$ ۲۲۲
- شکل (۸-۱) منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده دوار یک سر گیر دار متقارن کش ناپذیر در مد اول و زاویه پیچش
الف) $\beta_0 = 0$ ب) $\beta_0 = 30^\circ$ و ج) $\beta_0 = 60^\circ$ ۲۳۰
- شکل (۸-۲) منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده دوار یک سر گیر دار نامتقارن کش ناپذیر در مد اول و زاویه پیچش
الف) $\beta_0 = 0$ ب) $\beta_0 = 30^\circ$ و ج) $\beta_0 = 60^\circ$ ۲۳۱
- شکل (۸-۳) منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده دوار یک سر گیر دار متقارن کش ناپذیر در مد دوم و زاویه پیچش
الف) $\beta_0 = 0$ ب) $\beta_0 = 30^\circ$ و ج) $\beta_0 = 60^\circ$ ۲۳۲
- شکل (۸-۴) منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده دوار یک سر گیر دار نامتقارن کش ناپذیر در مد دوم و زاویه پیچش الف)
الف) $\beta_0 = 0$ ب) $\beta_0 = 30^\circ$ و ج) $\beta_0 = 60^\circ$ ۲۳۳
- شکل (۸-۵) منحنی دامنه-نسبت میرایی تیر پیچیده شده یک سر گیر دار کش ناپذیر متقارن در $\sigma=0$ ۲۳۴
- شکل (۸-۶) منحنی دامنه-نسبت میرایی تیر پیچیده شده یک سر گیر دار کش ناپذیر نامتقارن در $\sigma=0$ ۲۳۵
- شکل (۸-۷) منحنی دامنه-خروج از مرکز تیر پیچیده شده یک سر گیر دار کش ناپذیر متقارن در $\sigma=0$ ۲۳۵
- شکل (۸-۸) منحنی دامنه-خروج از مرکز تیر پیچیده شده یک سر گیر دار کش ناپذیر نامتقارن در $\sigma=0$ ۲۳۶
- شکل (۹-۱) منحنی پاسخ فرکانسی عرضی تیر پیچیده شده دوار متقارن در مد اول خمشی ($N=1$) و مد اول طولی ($M=1$) و
زاویه پیچش الف) $\beta_0 = 0$ ب) $\beta_0 = 30^\circ$ و ج) $\beta_0 = 60^\circ$ ۲۵۷
- شکل (۹-۲) منحنی پاسخ فرکانسی عرضی تیر پیچیده شده دوار متقارن در مد اول خمشی ($N=1$) و مد دوم طولی ($M=2$) و
زاویه پیچش الف) $\beta_0 = 0$ ب) $\beta_0 = 30^\circ$ و ج) $\beta_0 = 60^\circ$ ۲۵۸
- شکل (۹-۳) منحنی پاسخ فرکانسی عرضی تیر پیچیده شده دوار متقارن در مد دوم خمشی ($N=2$) و مد اول طولی ($M=1$) و
زاویه پیچش الف) $\beta_0 = 0$ ب) $\beta_0 = 30^\circ$ و ج) $\beta_0 = 60^\circ$ ۲۵۹
- شکل (۹-۴) منحنی پاسخ فرکانسی عرضی تیر پیچیده شده دوار متقارن در مد دوم خمشی ($N=2$) و مد دوم طولی ($M=2$) و
زاویه پیچش الف) $\beta_0 = 0$ ب) $\beta_0 = 30^\circ$ و ج) $\beta_0 = 60^\circ$ ۲۶۰
- شکل (۹-۵) منحنی پاسخ فرکانسی عرضی تیر پیچیده شده دوار نامتقارن در مد اول خمشی ($N=1$) و مد اول طولی ($M=1$)
و زاویه پیچش الف) $\beta_0 = 0$ ب) $\beta_0 = 30^\circ$ و ج) $\beta_0 = 60^\circ$ ۲۶۲
- شکل (۹-۶) منحنی پاسخ فرکانسی عرضی تیر پیچیده شده دوار نامتقارن در مد اول خمشی ($N=1$) و مد دوم طولی
($M=2$) و زاویه پیچش الف) $\beta_0 = 0$ ب) $\beta_0 = 30^\circ$ و ج) $\beta_0 = 60^\circ$ ۲۶۳
- شکل (۹-۷) منحنی پاسخ فرکانسی عرضی تیر پیچیده شده دوار نامتقارن در مد دوم خمشی ($N=2$) و مد اول طولی
($M=1$) و زاویه پیچش الف) $\beta_0 = 0$ ب) $\beta_0 = 30^\circ$ و ج) $\beta_0 = 60^\circ$ ۲۶۴

- شکل (۸-۹) منحنی پاسخ فرکانسی عرضی تیر پیچیده شده دوار نامتقارن در مد اول خمشی ($N=1$) و مد اول طولی ($M=1$) به ازای مقادیر مختلف جابجایی محوری در زاویه صفر درجه..... ۲۶۵
- شکل (۹-۹) منحنی پاسخ فرکانسی عرضی تیر پیچیده شده دوار نامتقارن در مد اول خمشی ($N=1$) و مد اول طولی ($M=1$) به ازای مقادیر مختلف جابجایی محوری در زاویه ۶۰ درجه..... ۲۶۵
- شکل (۱۰-۹) منحنی دامنه-نسبت میرایی تیر پیچیده شده متقارن در مد اول خمشی ($N=1$) و مد اول محوری ($M=1$) و $e_\eta = e_\xi = 0.05$ و $\sigma = 0$ و زوایای پیچش مختلف..... ۲۶۶
- شکل (۱۱-۹) منحنی دامنه-نسبت میرایی تیر پیچیده شده نامتقارن در مد اول خمشی ($N=1$) و مد اول محوری ($M=1$) و $e_\eta = e_\xi = 0.05$ و $\sigma = 0$ و زوایای پیچش مختلف..... ۲۶۶
- شکل (۱۲-۹) منحنی دامنه-خروج از مرکز تیر پیچیده شده متقارن در مد اول خمشی ($N=1$) و مد اول محوری ($M=1$) و $e_\eta = e_\xi = 0.05$ و $\sigma = 0$ و زوایای پیچش مختلف..... ۲۶۷
- شکل (۱۳-۹) منحنی دامنه-خروج از مرکز تیر پیچیده شده نامتقارن در مد اول خمشی ($N=1$) و مد اول محوری ($M=1$) و $e_\eta = e_\xi = 0.05$ و $\sigma = 0$ و زوایای پیچش مختلف..... ۲۶۸
- شکل (۱-۱۰) منحنی پاسخ فرکانسی عرضی تیر پیچیده شده دوار متقارن در مد اول خمشی ($N=1$) و مد اول طولی ($M=1$) و زاویه پیچش الف ($\beta_0 = 0$) ب ($\beta_0 = 30^\circ$) و ج ($\beta_0 = 60^\circ$)..... ۲۸۹
- شکل (۲-۱۰) منحنی پاسخ فرکانسی عرضی تیر پیچیده شده دوار نامتقارن در مد اول خمشی ($N=1$) و مد اول طولی ($M=1$) و زاویه پیچش الف ($\beta_0 = 0$) ب ($\beta_0 = 30^\circ$) و ج ($\beta_0 = 60^\circ$)..... ۲۹۰
- شکل (۳-۱۰) منحنی پاسخ فرکانسی عرضی تیر پیچیده شده دوار متقارن در مد دوم خمشی ($N=2$) و مد اول طولی ($M=1$) و زاویه پیچش الف ($\beta_0 = 0$) ب ($\beta_0 = 30^\circ$) و ج ($\beta_0 = 60^\circ$)..... ۲۹۱
- شکل (۴-۱۰) منحنی پاسخ فرکانسی عرضی تیر پیچیده شده دوار نامتقارن در مد دوم خمشی ($N=2$) و مد اول طولی ($M=1$) و زاویه پیچش الف ($\beta_0 = 0$) ب ($\beta_0 = 30^\circ$) و ج ($\beta_0 = 60^\circ$)..... ۲۹۲
- شکل (۵-۱۰) منحنی دامنه-نسبت میرایی تیر پیچیده شده متقارن در مد اول خمشی ($N=1$) و مد اول محوری ($M=1$) و $e_\eta = e_\xi = 0.05$ و $\sigma = 0$ و زوایای پیچش مختلف..... ۲۹۲
- شکل (۶-۱۰) منحنی دامنه-نسبت میرایی تیر پیچیده شده نامتقارن در مد اول خمشی ($N=1$) و مد اول محوری ($M=1$) و $e_\eta = e_\xi = 0.05$ و $\sigma = 0$ و زوایای پیچش مختلف..... ۲۹۳
- شکل (۷-۱۰) منحنی دامنه-خروج از مرکز تیر پیچیده شده متقارن در مد اول خمشی ($N=1$) و مد اول محوری ($M=1$) و $e_\eta = e_\xi = 0.05$ و $\sigma = 0$ و زوایای پیچش مختلف..... ۲۹۴
- شکل (۸-۱۰) منحنی دامنه-خروج از مرکز تیر پیچیده شده نامتقارن در مد اول خمشی ($N=1$) و مد اول محوری ($M=1$) و $e_\eta = e_\xi = 0.05$ و $\sigma = 0$ و زوایای پیچش مختلف..... ۲۹۴
- شکل (۱-۱۱) مته‌های مخروطی شکل..... ۳۰۲
- شکل (۲-۱۱) نمایش لنگ زنی هماهنگ و ناهماهنگ..... ۳۰۳

فصل اول

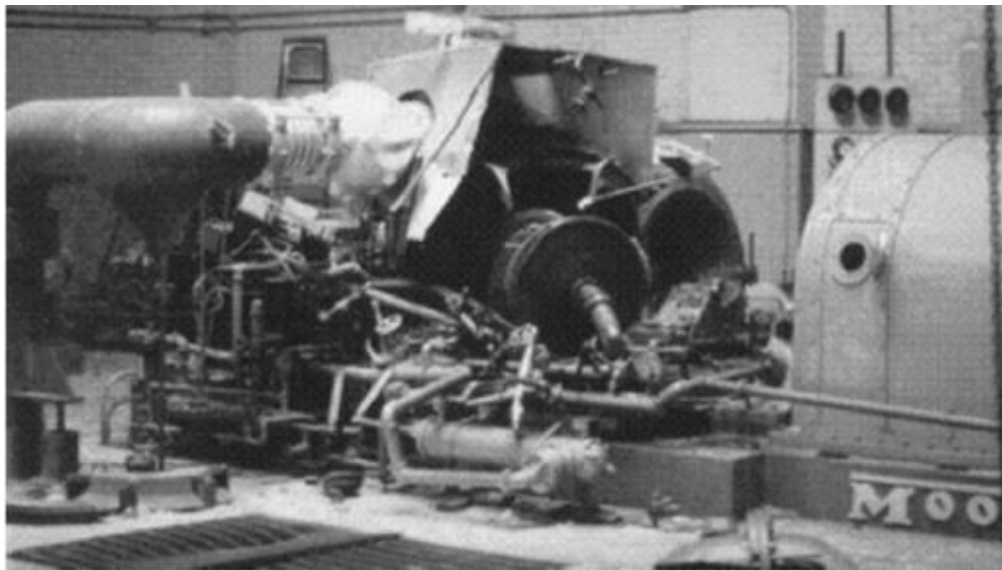
۱ - مقدمه

۱-۱ - هدف از تحقیق و اهمیت موضوع

سیستم‌های مکانیکی که در آنها عضو دواری وجود داشته باشد، به سیستم‌های روتوری^۱ معروف هستند. یک روتور^۲، جسمی است که از طریق یاتاقان‌ها روی تکیه‌گاه‌های خود قرار گرفته و می‌تواند آزادانه حول محور ثابت خود دوران کند. بررسی رفتار دینامیکی روتورها، بخشی از تحلیل ارتعاشاتی است که با مشخصه‌های دینامیکی ماشین آلات دوار سروکار دارد. این عرصه، سالیان طولانی است که به عنوان یکی از زمینه‌های مهم و چالش برانگیز تحقیقاتی و کاربردی در بسیاری از کاربردهای مهندسی از جمله طراحی و تعمیرات-نگهداری موتورهای جت، روتورهای هلی‌کوپتر، توربین‌ها، کمپرسورها، ابزارهای براده برداری، پمپ‌ها، مته‌های حفاری و ... تبدیل شده است. در این عرصه، قابلیت اطمینان و آنالیز حساسیت و خرابی روتورها و تیرهای دوار در حالت‌های مختلف اضافه بار و خرابی، مهندسی و تکنسین‌ها را با چالش‌های جدی مواجه می‌کند. از این‌رو، پیش‌بینی و تحلیل رفتار دینامیکی و ارتعاشاتی یک روتور از نظر فنی حائز اهمیت بوده و حین انتقال انرژی از جزئی به جزء دیگر، انتقال ارتعاشات را با خود به همراه دارد. این‌گونه ارتعاشات می‌تواند روی بازدهی یک سیستم روتور تأثیر گذاشته و حتی در برخی از موارد منجر به تخریب کل سیستم شود. شکل (۱-۱) نمونه‌ای از این پیامدها را نشان می‌دهد. از آنجا که انرژی جنبشی روتورها به خاطر اتصال سیستم روتور با منبع تحریک آن می‌باشد، در شرایط معین، بخش نامحدودی از این انرژی می‌تواند منجر به ارتعاشات روتور شده که گاهی در شرایط عمر کاری کمتر از آنچه انتظار است، دامنه این ارتعاشات می‌تواند به سرعت افزایش یافته، حتی اگر هیچ نیروی خارجی به سیستم اعمال نشود؛ که این امر منجر به تخریب سیستم روتور خواهد شد.

1 Rotor Systems

2 Rotor



شکل (۱-۱) تخریب یک سیستم دوار در اثر بروز مشکل در آن

در عمل، روتورها متحمل انرژی‌های ناشی از ارتعاشات محوری، خمشی (جانبی) و پیچشی بوده که پیش‌بینی و توجه به این ارتعاشات از دیدگاه مهندسی از دو جهت اهمیت پیدا می‌کند. یکی، طراحی و دیگری، نگهداری و تعمیرات. بنابراین، هدف از بررسی دینامیکی روتورها و تیرهای دوار، رساندن این انرژی‌های ارتعاشی به حداقل مقدار ممکن و جلوگیری از بروز آسیب‌های جدی در آینده کاری سیستم است.

موضوع دیگری که اهمیت بررسی رفتار دینامیکی روتورها را دو چندان می‌کند، وجود عواملی است که سیستم روتور را از حالت خطی به اشکال پیچیده غیرخطی تبدیل می‌کند. امروزه گرایش‌های مهندسی در جهت تولید ماشین‌هایی است که در عین سبکی، با سرعت بالایی کار کنند. در ماشین‌های دوار فعلی، برخی از پدیده‌های ارتعاشاتی غیرخطی در روتور، هنگام مونتاژ آن و تولید توان با سوخت، اتفاق می‌افتد. این پدیده‌ها نیز در روتورهای پلیمری به منظور ساختن یک موتور با وزن کم نیز رخ می‌دهد. تحلیل ارتعاشاتی این قبیل سیستم‌های روتوری معمولاً با استفاده از روش المان محدود و مدل‌های خطی انجام می‌شود. اما، هنگامی که ارتعاشاتی با دامنه زیاد رخ می‌دهد، نمی‌توان از ضرایب فنریت و دمپری خطی شده در مدل‌سازی سیستم روتور غیر خطی استفاده کرد. از طرفی، در تحلیل ارتعاشاتی و

طراحی یک سیستم روتور حتماً می‌بایست مشخصه‌های غیر خطی آن را در نظر گرفت. به عنوان نمونه، در یک توربین گاز برای حرکت یک هواپیما و ... حتماً می‌بایست از یک سیستم روتور سرعت بالا با توجه به سرعت بحرانی آن و مدل‌سازی بدنه آن به طور الاستیک برای کاهش سرعت بحرانی آن استفاده کرد. هنگامی که این سیستم روتور-یاتاقان-بدنه ارتعاش می‌کند، بدنه تحریک شده و می‌تواند با روتور تماس پیدا کند. همچنین احتمال این که یاتاقان‌ها آسیب ببینند نیز بسیار زیاد است. بررسی پاسخ ارتعاشی غیر خطی بدست آمده از یک ماشین دوار در شرایط پایدار از دیدگاه عملکردی بسیار مهم است. به منظور ساختن یک مدل ریاضی واقعی در تحلیل ارتعاشی، مشخصه‌های دینامیکی روتور، لازم است یاتاقان‌ها و بدنه آن مد نظر قرار گیرد. این شرایط می‌تواند باعث ایجاد ارتعاشات غیر خطی روتور شود. به عبارت دیگر، در ارتعاشات روتور با دامنه کم، پاسخ سیستم را می‌توان با معادلات و شرایط مرزی خطی توصیف کرد. اما، هرچه دامنه ارتعاشی افزایش می‌یابد، عوامل غیر خطی، نقش موثرتری را ایفا می‌کنند.

۱-۲- منشأ پدیده‌های غیر خطی در دینامیک روتورها

همان طور که عنوان شد، یکی از عواملی که ارتعاشات تیرها و شفتهای دوار را تحت تأثیر قرار می‌دهد، وجود پدیده‌های غیر خطی در آنها است. منشأ پدیده‌های غیر خطی در روتورها می‌تواند هندسی، اینرسی یا مواد ساختاری آن باشد [1, 2]. حالت غیرخطی هندسی^۱ می‌تواند ناشی از بروز کشیدگی غیرخطی^۲ یا انحنای بزرگ^۳ باشد. در عمل، این، پدیده‌های غیرخطی ممکن است ناشی از چندین عامل همزمان باشند، مانند، تغییر شکل‌های مرتبه بالا^۴، تحریک و جابجایی پایه‌های روتور، پدیده‌های غیر خطی هندسی، فیلم روغن در یاتاقان‌های ژورنال، یاتاقان‌های مغناطیسی^۵، لقی یاتاقان‌ها، لقی در یاتاقان‌های دمپری فیلم روغن و نیروی مغناطیسی و تماسی بین روتور و استاتور.

1 Geometrical Nonlinearities

2 Nonlinear Stretching

3 Large Curvatures

4 High Order Deformations

5 Magnetic Bearings

- یکی از عوامل هندسی که باعث غیر خطی شدن معادلات یک تیر دوار می‌شود، **سطح مقطع نا-متقارن^۱** تیر دوار است که باعث ایجاد کوپلینگ بین مدهای حرکتی روتور می‌شود. هنگامی که سطح مقطع یک تیر یا شفت دوار ایزوتروپیک، دو محور تقارن داشته باشد، مرکز خمشی و مرکز هندسی سطح مقطع تیر بر هم منطبق بوده و در این حالت ارتعاشات جانبی به یکدیگر کوپل نمی‌شوند. اما، در حالتی که سطح مقطع تیر نامتقارن باشد (به هر دلیلی مانند وجود عیب یا نقص در روتور یا غیر متقارن بودن شکل سطح مقطع)، مرکز خمشی و مرکز هندسی آن بر هم منطبق نبوده و از این رو، ارتعاشات خمشی و پیچشی با یکدیگر کوپل شده و ممکن است منجر به پیدایش معادلات غیر خطی کوپل شده شوند [2].

- در تحلیل‌های اولیه سازه‌های دوار، ارتعاشات پیچشی اغلب به طور مستقل از ارتعاشات جانبی یا خمشی روتور در نظر گرفته می‌شد. اما وقتی نسبت طول به قطر سازه افزایش می‌یابد، کوپلینگ بین حرکات پیچشی، جانبی و محوری نیز افزایش می‌یابد. بواسطه این کوپلینگها، فرکانسهای طبیعی مدهای پیچشی و محوری، با معکوس طول سازه متناسباند در حالی که فرکانسهای طبیعی مدهای جانبی یا خمشی، با معکوس مربع طول سازه متناسب هستند. هرچه طول سازه افزایش یابد، فرکانسهای طبیعی این سه حرکت و همچنین فاصله بین فرکانسهای طبیعی در هر سه حرکت نیز کاهش می‌یابد [2]. اگر فرکانسهای طبیعی این سه حرکت خیلی به هم نزدیک شود، انرژی مدهای پیچشی، محوری و جانبی تغییر کرده و سازه می‌تواند حرکاتی را در حین دوران داشته باشد که ترکیبی از مدهای مختلف می‌باشد. علاوه بر این، این سه حرکت می‌توانند به طور قابل توجهی از طریق شرایط مرزی سازه به یکدیگر کوپل شوند.

- **کشیدگی غیرخطی^۲**، یکی دیگر از عوامل غیر خطی در معادلات است. کشیدگی صفحه میانی یک جسم الاستیک در صورتی که هر دو تکیه‌گاه آن، حرکت روتور را از دو طرف محدود کنند، در ارتعاشات عرضی ظاهر می‌شود. این پدیده غیرخطی منجر به بروز یک رابطه غیرخطی بین کرنشها

1 Asymmetrical Cross Section
3 Nonlinear stretching

و جابجایی‌ها می‌شود. در این حالت، اگر ارتعاشات با دامنه زیاد، با تغییرات بزرگ در انحنای نیز همراه باشد، می‌بایست یک رابطه غیرخطی بین انحنای و جابجایی‌ها نیز در نظر گرفت [2].

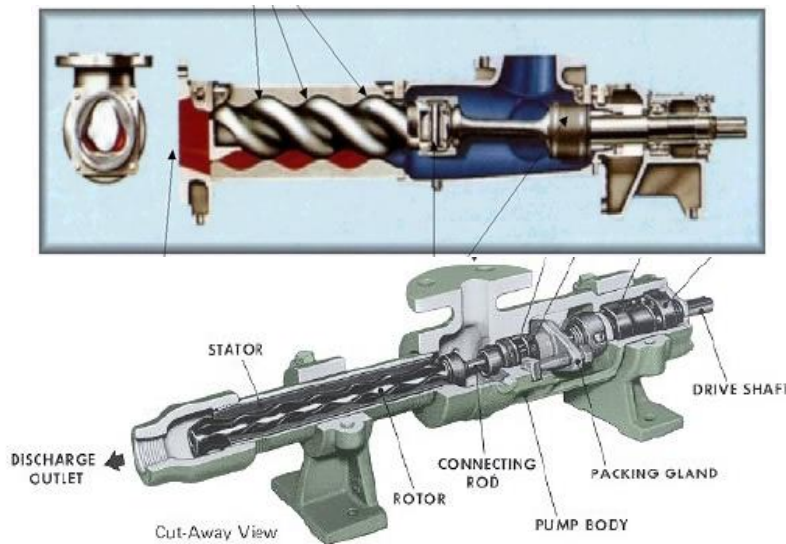
- تأثیرات غیرخطی اینرسی نیز می‌تواند در حضور جرم‌های گسترده یا متمرکز روی روتور ایجاد شود. در سیستم‌های خطی، جملات مربوط به انرژی پتانسیل، میرایی و اینرسی بر حسب توابع مرتبه اول تغییر شکل، سرعت و شتاب بیان می‌شوند. با این حال، این معادلات حرکت، تقریبی‌اند زیرا تغییر شکل‌ها کوچک فرض می‌شوند. اما، هنگامی که جابجایی یا تغییر شکل‌ها به اندازه کافی بزرگ در نظر گرفته شوند، پدیده‌های غیرخطی که در بالا اشاره شد، ظاهر می‌شوند.

- حالت غیرخطی مربوط به مواد سازنده روتور نیز در مواردی که تنش‌های روتور تابع غیرخطی از کرنشها هستند، اتفاق می‌افتد. امروزه، اهمیت به کارگیری مواد غیرخطی در تحلیل دینامیکی تجهیزات دوار به منظور افزایش دقت و بالا بردن بازده سیستم بیش از پیش افزایش پیدا کرده است. اگر شفت یک سیستم روتور از مواد کامپوزیتی ساخته شده باشد، در حین عملکرد روتور، دامنه ارتعاشات نسبت به حالتی که شفتها از مواد فلزی ساخته شوند، بسیار بزرگتر خواهد بود و رفتار سیستم غیرخطی خواهد بود. معمولاً تحلیل روتورهای با دامنه ارتعاشی بالا نیازمند شبیه‌سازی رفتار پیچیده غیرخطی آن، تغییر در سختی ناشی از تغییر هندسه روتور، مقاومت غیرخطی تکیه‌گاهها و در نظر گرفتن دیگر بخشهای مرتبط با روتور می‌باشد. امروزه به خاطر مزایای زیادی که مواد کامپوزیتی دارند، به خصوص در کاربردهای هوا-فضا برای داشتن وزن کمتر، روتورها از این مواد ساخته می‌شوند [1,2]. بدین ترتیب، وجود این پدیده‌ها، چالشهای زیادی را با خود به همراه دارد. زیرا، تحلیل این پدیده‌های غیرخطی در مقایسه با تحلیل‌های خطی به مراتب مشکل‌تر است. علاوه بر این، از آنجا که یک روتور به خاطر ممان ژيروسکوپیک، یک حرکت لنگ زنی^۱ دارد، روشهای تحلیلی به کار رفته در تحلیل سیستمهای خطی را نمی‌توان مستقیماً به روتور اعمال کرد.

1 Whirling

۳-۱- معرفی تیرهای پیچیده شده

یک نمونه از اعضای دواری که طراحی آنها بسیار مهم بوده و نقش اساسی را در کاهش ارتعاشات مخرب بعضی ماشینهای دوار ایفا می کند، پره های توربین، پره های هلی کوپتر، مته های حفاری و سوراخکاری، محور پمپها، پره کمپرسورها و ابزارهای براده برداری هستند. این تجهیزات در انواع سرعت پایین و سرعت بالا دسته بندی می شوند که محدوده سرعت آنها از ۱۰۰۰ دور بر دقیقه تا ۳۰۰۰۰ دور بر دقیقه می باشد. شکل (۲-۱) تا شکل (۴-۱) برخی از کاربرد این تجهیزات را در توربین ها، پمپها، ماشینهای براده برداری و مته های حفاری نشان می دهد.



شکل (۲-۱) کاربرد تیر پیچیده شده در پمپها و کمپرسورها



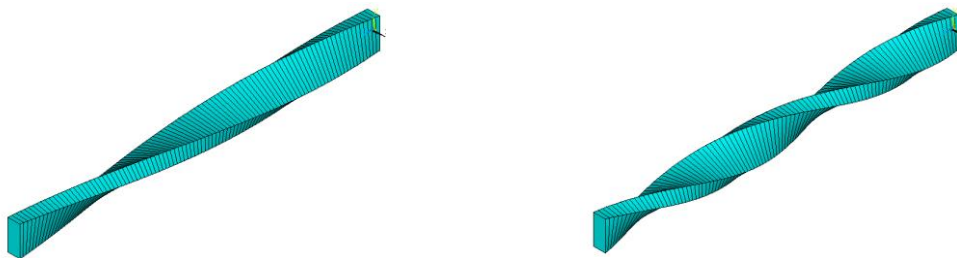
شکل (۳-۱) نمونه ای از مته های براده برداری
شکل (۴-۱) نمونه ای از مته های حفاری چاه نفت
آنچه در این بررسی مهم است، این است که این گونه اجزا را در فرآیند تحلیل و طراحی می توان

به شکل تیرهای از پیش پیچیده شده^۱ مدلسازی کرد. در این مدلسازی، می‌توان این‌گونه تیرها را بر اساس تغییر زاویه پیچش حول محور تیر، به دو نوع تقسیم‌بندی کرد:

۱- تیرهای از پیش پیچیده شده خطی. یعنی، زاویه پیچش تیر در طول آن به صورت خطی تغییر می‌کند.

۲- تیرهای از پیش پیچیده شده غیر خطی. یعنی، زاویه پیچش تیر در طول آن به صورت غیر خطی تغییر می‌کند.

از طرفی، زاویه پیچش تیرهای پیچیده شده، از یک دور تا چند دور می‌تواند متغیر باشد. شکل (۵-۱) دو تیر پیچیده شده خطی را نشان می‌دهد.



شکل (۵-۱) مدل تیرهای پیچیده شده.

تحلیل ارتعاشاتی غیرخطی و پایداری این‌گونه سازه‌های تیرگونه پیچیده شده به عنوان اصلی‌ترین موضوعات تحقیقاتی در زمینه‌های مهندسی مرتبط شناخته شده است. پیش‌بینی رفتار دینامیکی غیرخطی این سیستمها، نیازمند مدل‌های ریاضی است که تا حد زیادی دربرگیرنده مشخصه‌های دینامیکی آن باشند. موفقیت اولیه پیرامون مدلسازی تغییر شکل تیرهای از پیش پیچیده شده محوری به تئوری واگنر^۲ معروف است [3,4]. این تئوری بیان می‌کند که تیرها از الیاف صاف در حالت بدون پیچش تشکیل شده‌اند. این الیاف از طرف سطح مقطع و به صورت مارپیچ کشیده شده و شکل تیر پیچیده شده را تشکیل می‌دهند. استخراج معادلات ریاضی یک تیر پیچیده شده که فرضیات جابجایی

1 Pre-Twisted Beams
2 Wagners Theory

را روی سطح مقطع تیر مورد بررسی قرار می‌دهد، با استفاده از یک تیر یک سر گیردار از پیش پیچیده شده توسط واشیزو^۱ [5] آغاز شد و تحلیلهای نیمه معکوس برای تغییر شکل پیچشی و خمشی با بکار گیری تئوری الاستیسیته سه بعدی به کار گرفته شد.

۴-۱- مروری بر تاریخچه موضوع

علم بررسی دینامیکی روتورها و تیرها تاریخچه‌ای طولانی داشته و در طول این سالها و با پیشرفت علوم مهندسی، فاصله بین تئوری و کاربرد در آن به سرعت کم شده است. تحقیق در این زمینه طی سالیان طولانی و از دهه قبل ادامه داشته تا آنجا که اولین مقاله‌ای که در زمینه بررسی رفتارهای دینامیکی روتورها منتشر شد، به سال ۱۸۶۹ بر می‌گردد که توسط ویلیام جان رنکین^۲ [6] از اساتید دانشگاه گلاسکو^۳ منتشر شد که در آن، با مدلسازی دو درجه آزادی یک روتور، به بررسی نیروهای گریز از مرکز روی آن پرداخت (شکل (۱-۶)). همچنین، تاندل^۴ [7] برخی از مشکلات اساسی در این حوزه را مورد بحث و بررسی قرار داد.

APRIL 9, 1869. THE ENGINEER.

ON THE CENTRIFUGAL FORCE OF ROTATING SHAFTS.

By W. J. MACQUORN RANKINE, C.E., LL.D., F.R.S.
1. Object of this Communication.—The object of this communication is to explain in a form suitable for practical application, the results of a mathematical investigation of the action of the centrifugal force in long lines of shafting; an action of which no similar investigation has, to my knowledge, been hitherto published; although it is one which may seriously affect the strength, durability, and economical working of machinery.

2. Centrifugal whirling considered generally.—In Fig. 1 let A and B represent bearings at the two ends of a rotating shaft, and A B its axis of rotation. Any small deflection of the centre line of the shaft from the axis A B gives rise on the one hand to centrifugal force, tending to make the deflection become greater, and, on the other hand to an elastic stress, resisting the deflection, and tending to straighten the centre line again. The resistance to deflection may be shortly called the stiffness. For very small deflections the centrifugal force and the stiffness both increase according to the same law, being both sensibly proportional to the deflection simply; hence whichever of them is the greater for an indefinitely small deflection, continues to be the greater until some deflection is reached which causes a sufficient difference between their laws of variation. The consequence is that if for an indefinitely small deflection the centrifugal force is equal to or greater than the stiffness, the shaft must go on permanently whirling round in a limit form, as shown by the curves A D E, A' D' E', to the injury of itself and of the adjoining machinery and forming a kind of nutation which may be called centrifugal whirling. On the other hand, if for an indefinitely small deflection the stiffness is greater than the centrifugal force, centrifugal whirling is impossible.

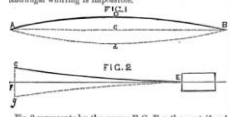


Fig. 2 represents by the curves A D E, the centrifugal whirling of an overhanging end of a shaft, the direction of whose axis of rotation E F is fixed by the bearing at E. For a shaft of a given length, diameter, and material, there is a limit of speed, and for a shaft of a given diameter and material, turning at a given speed, there is a limit of length, below which centrifugal whirling is impossible.

(3) General Nature of the Investigation.—The mathematical expression of the conditions of the problem leads to a linear differential equation of the fourth order, into

square root and fourth root, for British and

measures:

Foot HA √HA (H)

Meters 6,250,000 25,000 Y

980,000 7,700

(B) Shaft with additional Load.—An additional

loading along with the shaft, such as a pulley, has

effect on the centrifugal force when it is in the posi-

tion—that is, close to or near to a bearing.

The effect of an additional rotating load distrib-

uted uniformly along the shaft may be allowed for by dis-

tributing the weight, W, of the modulus of elasticity in the

proportion in which the weight of the shaft itself

exceeds that of the shaft.

The effect of an additional rotating load at a

point near a bearing has not yet been investigated.

It is capable of solution by means of the general

equation already known; but it is not of much practical im-

portance for a shaft is so long and so rigid in its

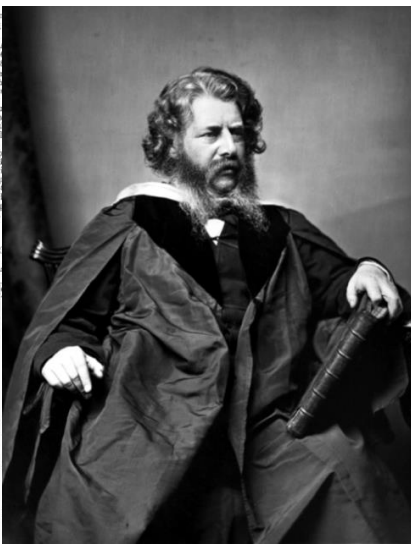
action that it requires precautions against centrifugal whirling

first precaution is to avoid loading it with rotating

weights which are not very near the bearings.

W. J. R.

Glasgow University, April 2nd, 1869.



شکل (۱-۶) اولین مقاله ارائه شده در زمینه دینامیک روتورها [6]

آنچه که مدتهاست در بررسی رفتار ارتعاشی یک سازه دوار اهمیت پیدا کرده و محققان، تمرکز و

- 1 Washizu
- 2 William John Macquorn Rankine
- 3 Glasgow
- 4 Ales Tondl

بررسی‌های خود را عمدتاً روی آن قرار داده‌اند، مدهای ارتعاشاتی مختلفی است که در یک سازه دوار رخ داده و اینکه چه تأثیری روی یکدیگر می‌گذارند. انواع مدهای ارتعاشی که در یک سازه دوار رخ می‌دهد عبارتند از: مدهای خمشی (عرضی یا جانبی)^۱، مدهای پیچشی^۲ و مدهای محوری (طولی)^۳. همچنین، برخی از تحقیقات صورت گرفته، عمدتاً روی بررسی ارتعاشاتی تیرهای پیچیده شده و غیر پیچیده شده غیر دوار یا دوار حول محور عمود بر محور طولی متمرکز شده‌اند. اوکوبو^۴ [8] پیچش و کشیدگی تیرهای پیچیده شده با سطح مقطع بیضوی را برای یک زاویه پیچش کوچک مورد بررسی قرار داد. او جملات مربوط به کوپلینگ پیچش-کشش و کشش-بدون زاویه پیچش اولیه را بر اساس تئوری الاستیسیته محاسبه کرد. با وجود تغییر شکل خمشی، تأثیر پیش پیچش روی سختی خمشی توسط ماندر و ریسنر^۵ [9] و گرفین و گودیر^۶ [10] مورد بررسی قرار گرفت. ماندر و ریسنر بر مبنای تئوری پوسته‌های تو خالی یک تیر پیش پیچیده شده با سطح مقطع مستطیلی، گزارش دادند که سختی خمشی در امتداد محور اصلی در مقایسه با تیر پیچیده نشده کاهش می‌یابد. گرفین و گودیر نیز برای تیرهای پیچیده شده با سطح مقطع بیضوی، معادلات تعادل را در دستگاه مختصات خمیده خطی بدست آورده و از تحلیل نیمه معکوس برای بررسی تأثیر سختی خمشی در امتداد محورهای اصلی برای یک زاویه پیچش کوچک استفاده کردند. کارنگی^۷ [11]، داوسون^۸ و کارنگی [12] و سابونکو^۹ [13] تأثیر زاویه پیچش، اندازه سطح مقطع و تأثیرات آیرودینامیکی را روی فرکانسهای طبیعی و شکل مدهای پره‌های یک سر درگیر توربین با استفاده از تئوری تیر اویلر-برنولی بررسی کردند. در مطالعات داوسون [12]، شکل مدهای تیرهای پیچیده شده با سطح مقطع مستطیلی با توجه به نسبت پهنا به عمق تورفتگی تیر و زاویه پیچش مد نظر قرار گرفت و نتایج بدست آمده از حل تحلیلی با آزمایشات صورت گرفته صحه-

1 Lateral Modes
 2 Torsional Modes
 3 Longitudinal Modes
 4 Okubo
 5 Maunder And Reissner
 6 Goodier And Griffin
 7 Carnegie
 8 Dawson
 9 Sabuncu

گذاری شد. شیل هانسیل¹ [14] معادلات دیفرانسیل حرکت یک تیر را با فرض چرخش پایدار آن بدست آورد و سخت شوندگی هندسی² آن با نیروی گریز از مرکز تقریب زده شد. به طور مشابه، هارتی و رابیسیتین³ [15] تأثیر سخت شوندگی هندسی را در رفتار ارتعاشی و دینامیکی یک تیر ساده با در نظر گرفتن مولفه محوری نیروی گریز از مرکز مورد بررسی قرار دادند. بانرژیه و همکاران⁴ [16] انرژی کرنشی یک تیر دوار را که در آن رابطه جابجایی-کرنش به صورت غیر خطی بود، مورد بررسی قرار دادند. کارنگی [17]، داوسون و همکارانش [18]، رائو و گاپتا⁵ [19]، عباس⁶ [20]، سابرامانام⁷ و همکارانش [21]، امرگان⁸ [22]، بانرژیه [23] و اوردیم اوغلو و ایلردیم⁹ [24] با استفاده از تئوری تیرهای تیموشنکو به بررسی تأثیرات جنبه‌های هندسی تیر، اینرسی دورانی و تغییر شکل برشی روی فرکانسهای جانبی پره‌های پیچیده شده پرداختند. بانرژیه با استفاده از روش سختی دینامیکی فرکانسهای طبیعی یک تیر پیچیده شده غیر دورانی را بررسی کرد و در این بررسی، تأثیرات اینرسی دورانی و تغییر شکل‌های برشی تیر پیچیده شده را در نظر گرفت. اوردیم اوغلو، یک روش جدید را بر مبنای روش المان محدود ارائه کرد و از آن برای بدست آوردن فرکانسهای رزونانس تیرهای تیموشنکوی پیچیده شده غیر دوار استفاده کرد. امرگان [22] از یک روش عددی برای ارزیابی توابع پاسخ فرکانسی پره‌های توربو ماشینهای مدلسازی شده به شکل تیرهای دوار منحنی و پیچیده شده استفاده کرد. او و همکارانش تأثیرات شتاب کریولیس را در معادلات در نظر گرفته و دریافتند که نتایج بدست آمده همگرایی خوبی با یکدیگر دارند. تارهان و بولتا¹⁰ [25] پایداری مدل خطی یک تیر دوار را با یک مد خمشی و با استفاده از روش ماتریسی بررسی کرده که جزء روش بولوتین تعمیم یافته¹¹ نامیده شد. رائو و کارنگی [26]، فو¹ [27]،

1 Schilhansil

2 Geometrical Hardening

3 Hurty And Rubinstein

4 Banerjee et al.

5 Gupta And Rao

6 Abbas

7 Subrahmanyam

8 Imregun

9 Yardimoglu and Yildirim

10 Turhan And Bulut

11 generalized Bolotin method

سابرامانام و کازا [28]، راثو و گاپتا [29] و سابونکو و اوران^۲ [30] رفتار دینامیکی یک تیر تیموشنکوی دورانی را حول محور عمود بر محور طولی تیر تحلیل کردند. در این بررسی، تأثیر سرعت دورانی روی فرکانس طبیعی و پایداری پره نیز مورد مطالعه قرار گرفت. فو [27] روابط بدست آمده توسط کارنگی را به مجموعه روابط بازگشتی تبدیل کرد و فرکانسهای طبیعی بدست آمده از آنالیز پره را با شرایط مرزی متعدد بررسی کرد. آوراموف و پیر^۳ [31] پره‌های دوار را به شکل یک تیر پیچیده شده دوار مدلسازی کردند و معادلات دیفرانسیل حرکت آن را بدست آوردند. آنها از روش گالرکین^۴ و شکل مدهای خطی، برای گسسته سازی معادلات استفاده کرده و روش مد غیرخطی متعامد را برای تحلیل پایداری سیستم بکار گرفتند. نتایج بدست آمده نشان داد که منحنی‌های مد اول و چهارم دارای خاصیت نرم شوندگی و منحنی‌های دوم و سوم نیز دارای خاصیت سخت شوندگی می‌باشند. اسلیپر^۵ [32] ارتعاشات کوپل شده یک تیر یک سر گیردار پیچیده شده را در صفحه عرضی مورد مطالعه قرار داد. او با استفاده از مدل‌های تئوری و آزمایشی، فرکانسهای رزونانس و منحنی‌های مودال را در زوایای پیچش 0، 45° و 90° بدست آورد و نشان داد نتایج بدست آمده از هر دو روش همگرایی خوبی با یکدیگر دارند. فیلیپ^۶ و همکاران [33] پاسخهای ارتعاشات آزاد یک تیر نابالانس با یک محور تقارن را مطالعه کردند. از آنجا که سطح مقطع تیر یک محور تقارن داشت، بین حرکت‌های خمشی و پیچشی کوپلینگ وجود داشت. آنها اینرسی دورانی و برش را در نظر گرفته و یک حل دقیق را بر مبنای بسط بوئر^۷ ارائه کردند. لیبرسو^۸ و همکارانش [34, 35] ارتعاشات کوپل شده تیرهای کامپوزیتی دوار پیچیده شده را با در نظر گرفتن تأثیرات برشی و جملات اینرسی بررسی کردند. وارمینسکی^۹ و همکاران [36] ارتعاشات سازه‌هایی با دو تیر منعطف در دو جهت اصلی را بررسی کردند. آنها با استفاده از اصل همیلتون معادلات حرکت و

1 Fu

2 Sabuncu and Evran

3 Avramov and Pierre

4 Galerkin method

5 Slyper

6 Filipich

7 Beuer method

8 Librescu

9 Warminski

شرایط مرزی را تا جملات مرتبه سه استخراج کردند. همچنین، از تستهای آزمایشگاهی و شبیه‌سازی عددی برای صحت گذاری نتایج استفاده کردند. کوولی^۱ [37] ارتعاشات خطی تیرهای دوار یک سر گیردار با یک جرم نقطه‌ای در انتهای آزاد تیر را مطالعه کرد بگونه‌ای که تیر حول محور عمود بر محور طولی آن دوران می‌کند. او با استفاده از اصل همیلتون معادلات حرکت را بدست آورد و از روش گالرکین برای گسسته سازی معادلات استفاده کرد. در این بررسی، فرکانسهای طبیعی و شکل مدها، تأثیرات ژيروسکوپی، پایداری و کوپلینگ بین خمش و پیچش مطالعه شد و تفاوت این کار با دیگر کارهای انجام شده مورد بحث قرار گرفته و برخی خطاهای بوجود آمده اصلاح شدند. برخی از این خطاها در محاسبات مقادیر ویژه و در نظر گرفتن جملات ژيروسکوپی در حرکات کوپل شده خمشی و پیچشی تیر مذکور بوجود می‌آیند. توماس^۲ و همکاران [38] ارتعاشات غیر خطی تیر یک‌سر گیردار را بررسی کرده و تأثیرات سرعت دوران را روی سخت شوندگی و نرم شوندگی تیر و نقاط دوشاخگی آن تحلیل کردند. معادلات حرکت استخراج شده و با استفاده از روش المان محدود گسسته شدند. از طرفی، آنها ماکزیمم دامنه ارتعاشات را هم با روش تحلیلی و هم با روش المان محدود بررسی کرده و دقت هر دو روش را مقایسه کردند. سیلوا^۳ و همکاران [39] پاسخ غیر خطی یک تیر یک سر گیر دار با ضخامت ثابت و عرض متغیر خطی با منبع تحریک اولیه را مطالعه و از شکل مدهای تقریبی برای گسسته سازی معادلات غیر خطی استفاده کرد. آنها از تابع جی-میجر^۴ برای حل مسئله مقادیر ویژه استفاده کرده و نتایج را با روش المان محدود و مقیاس‌های چندگانه صحت گذاری کردند. اسپانگولو^۵ و همکاران [40] رفتار تیرهای الاستیک را با تغییر شکلهای بزرگ و پارامترهای غیر خطی هندسی مرور کردند. آنها با استفاده از اصل حساب تغییرات، مدلهایی از تیر را ارائه کردند که تحت بارگذاری‌های مختلفی قرار داشت.

تحقیقات دیگری پیرامون ارتعاشات عرضی تیرهای پیچیده شده و غیر پیچیده شده که به صورت

1 Cooley

2 Thomas

3 Silva

4 Meijer-G function

5 Spagnuolo

محوری دوران می‌کنند انجام شده است. سیمو^۱ [41] با روش عددی، پایداری یک تیر دوار را مورد بررسی قرار داده و اهمیت در نظر گرفتن تأثیرات غیر خطی سخت شونده‌گی هندسی را در تحلیل پایداری تیر مورد بررسی قرار داد. ناتاراج^۲ [42] یک مدل غیر خطی پیوسته از روتور را ارائه کرد و تغییر شکلهای عرضی و پیچشی روتور را مورد بررسی قرار داد. وی با استفاده از روش اغتشاشات نشان داد که دامنه حرکات پیچشی از مرتبه دو بوده، در صورتی که دامنه و فرکانس حرکات جانبی از مرتبه یک هستند. همچنین، فرکانس ارتعاشات پیچشی نیز دو برابر فرکانس دوران سیستم می‌باشد. نایفه و پای^۳ [43] از معادلات گلین و کرسپو^۴ [44] برای بررسی پاسخهای غیر خطی تیرهای یک سر درگیر به تحریک پارامتریک در حضور رزونانس‌های داخلی در مد خمشی استفاده کردند. آنها با اعمال روش مقیاسهای چندگانه به معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی بدست آمده، معادلات مربوط به دامنه و فاز را بدست آوردند و دریافتند که پارامترهای غیر خطی هندسی، اینرسی غیر خطی را در مد اول محدود کرده در حالی که این اینرسی‌های غیر خطی، پارامترهای غیر خطی هندسی را در مدهای بالاتر محدود می‌کنند. اینرسی‌های غیر خطی دارای خاصیت نرم شونده‌گی بوده در حالی که غیر خطی‌های هندسی دارای خاصیت سخت شونده‌گی هستند. آنها به وجود دو شاخگی هوپف^۵ در بررسی خود پی برده و نشان دادند که نوسانات شبه پریودیک اتفاق می‌افتد. هوانگ^۶ [45] پاسخ فرکانسی ارتعاشات پیچشی را به شکل عددی بدست آورده و نتایج را با یک شفت دوار آزمایشی در حالت چرخش هماهنگ همسو^۷ مقایسه کرد و دریافت هنگامی که سیستم در رزونانس پیچشی اول است، پاسخ ارتعاش جانبی آن در دو برابر سرعت دورانی قرار دارد. حسینی و همکاران^۸ [46] بر مبنای اصول سینماتیک و مدلسازی نایفه و پای [43] یک مدل غیر خطی پیوسته از روتور را با کوپلینگهای پیچشی، خمشی و محوری ارائه

1 Simo

2 Nataraj

3 Nayfeh and Pai

4 Crespo and Glynn

5 Hopf bifurcation

6 Huang

7 Forward Synchronous Whirling

8 Hosseini Et All

کردند و با استفاده از روش اغتشاشات^۱ به استخراج نتایج پرداختند. آنها با استفاده از روش تحلیلی و شبیه‌سازی عددی مشخص کردند که وجود جملات غیر خطی در سختی و اینرسی روتور، هر دو حرکت چرخشی همسو و نا همسو^۲ را تحریک می‌کند. در بقیه کارهای آنها از جمله کارهای حسینی و همکاران [47]، شاهقلی و همکاران [48-53] و حسینی و زمانیان [54] اقدام به مدلسازی غیر خطی عددی و نیمه تحلیلی روتورهای متقارن و نامتقارن محوری نمودند که در آنها، تغییر شکل پیچشی و محوری در نظر گرفته شده و سپس با فرض‌هایی مانند بزرگ بودن فرکانس پیچشی از فرکانس‌های عرضی، اینرسی پیچشی حذف شده و تغییر شکل پیچشی بر حسب تغییر شکل‌های عرضی بیان شده است و یا اینکه از تغییر شکل پیچشی روتور یا تیر دوار صرف نظر شده است. تلاشهایی با هدف مدلسازی حرکات کوپل شده پیچشی و خمشی با استفاده از روش المان محدود نیز توسط زیه، چن و لی^۳ [55] و وو^۴ [56] انجام شده است. اما، موضوع ارتعاشات غیر خطی کوپل شده پیچشی-خمشی در یک سیستم روتور، زمانی پیچیده‌تر می‌شود که پدیده تماس روتور و استاتور و نیروهای تماسی ظهور پیدا کنند. بر این اساس، ادوارد، لی و فریسول^۵ [57] یک مطالعه پارامتریک عددی را با پارامترهای پیچشی متغیر انجام دادند و دریافتند که روتور جف کات^۶ می‌تواند حرکات آشوبناک^۷ و پیچشی داشته باشد. در یک مطالعه آزمایشگاهی، دانگو^۸ [58] دریافت هنگامی که روتور در طول چرخش همسو در تماس با استاتور است، فرکانسهای طبیعی ارتعاشات پیچشی آن افزایش می‌یابد. تأثیر نیروهای اصطکاکی متفاوت روی پاسخ پیچشی روتورهای با جرم متمرکز مفروض توسط میهایلوویچ و همکاران^۹ [59, 60] مورد مطالعه قرار گرفت. در این بررسی، آنها نواحی پایدار و ناپایدار را مشخص کرده و نتایج کارهای خود را با طرح‌ریزی آزمایشاتی در این زمینه اثبات کردند. لازم به ذکر است در سیستمهای ارائه شده توسط دو کار انجام

1 Perturbation Method

2 Whirling Forward And Backward

3 Hsieh, Lee And Chen

4 Wou

5 Edwards, Lees And Friswell

6 Jeffcott

7 Chaos Motions

8 Diangui

9 Mihajlovic et al.

گرفته در فوق، نیروهای اصطکاکی در سرتاسر غلتش در جایجایی جانبی روتور اعمال شده بودند. پدیده تماسی ماند-لغزش^۱ روتور و استاتور و پاسخهای غیر خطی ارتعاشات پیچشی آن نیز هم به شکل عددی و هم به طور آزمایشگاهی توسط لیاوو و همکاران^۲ [61] و لیاوو، ولاجیک و بالچاندران^۳ [62] مورد بررسی قرار گرفت. یکی از کارهایی که در آن، یک سیستم روتور دوار به شکل یک سیستم جرم متمرکز در نظر گرفته شده است، تحلیل ارتعاشی روتور یک سیستم حفاری است که توسط ژانبو و ولاجک^۴ [63] بررسی شده است. آنها در این کار، معادلات غیر خطی حرکت یک روتور حفاری را با در نظر گرفتن جرم سر مته به صورت متمرکز و تماس بین روتور با دیواره آن را با در نظر گرفتن جرم متمرکز کل روتور در وسط یک روتور بدون جرم به دست آورده‌اند. مدل مذکور، یک مدل هشت درجه آزادی بوده که در آن، ارتعاشات محوری، خمشی و پیچشی سر مته و روتور مورد بررسی قرار گرفته است. منشأ پارامترهای غیر خطی در این سیستم، تماس اصطکاکی بین روتور با دیواره محل حفاری می‌باشد که به پدیده ماند-لغزش معروف است. نمونه‌ای دیگر از مدل‌های متمرکز روتور دوار توسط نیکولاس ولاجک [64] ارائه شد که در آن، روتور حفاری به شکل یک سیستم دو درجه آزادی متمرکز غیر خطی ناشی از اصطکاک بین مته حفاری و دیواره حفاری شده در نظر گرفته شد و ارتعاشات محوری و پیچشی سر مته مورد بررسی قرار گرفته شده است. در این مدل، روتور و مته به صورت یک مدل متمرکز متشکل از یک فنر-دمپر پیچشی و محوری با جرم متمرکز در نظر گرفته شده کل مته و روتور به هم متصل شده‌اند. معادلات کوپل شده حرکت ارتعاشی محوری و پیچشی برای مدل متمرکز در نظر گرفته شده، با استفاده از روش نیوتن بدست آمدند. شنگ چونگ [65] با استفاده از ماتریس تعمیم یافته از یک سیستم متقارن، ارتعاشات جانبی و پیچشی کوپل شده یک سیستم روتور-یاتاقان نامتقارن را که به صورت یک تیر تیموشنکو پیوسته مدل شده است، مورد بررسی قرار داد. کین^۵ و همکارانش [66] نیز از یک مدل غیر خطی روتور انعطاف‌پذیر با دو درجه آزادی و بدون هیچ ارتعاش محوری و

1 Stick-slip

2 Liao et al.

3 Liao, Vlajic Karki, Balachandran

4 Xianbo and Vlajik

5 Qian

پیچشی استفاده کردند. آنها در این بررسی، تأثیر نیروهای یاتاقان‌ها و آب بندها را روی پایداری دینامیکی عرضی شفت مطالعه کردند. کینکای^۱ [67] رفتار دینامیکی یک سیستم روتور-یاتاقان معیوب را تحت تأثیر حرکات تکیه‌گاه وابسته به زمان مورد مطالعه قرار داد. تحلیل این کار با استفاده از روش المان محدود با عیوبی روی سیستم روتور-یاتاقان اجرا شد. با در نظر گرفتن تنها جابجایی‌های دورانی وابسته به زمان برای تکیه‌گاه روتور، معادلات دیفرانسیل مرتبه دو سیستم بدست آمده که نه تنها ضرایب سختی و ژيروسکوپیک آنها به زمان وابسته بود، بلکه حاوی چند فرکانس تحریک نیز بود. برای استخراج این فرکانسهای تحریک و پاسخ حالت پایدار سیستم، از روش هارمونیک بالانس استفاده شد. خانلو و همکارانش^۲ [68] نیز به بررسی تأثیر کوپلینگهای ارتعاشات جانبی و پیچشی روی رفتار دینامیکی غیر خطی یک سیستم شفت-دیسک انعطاف‌پذیر متقارن پرداختند. سیستم مذکور به شکل یک شفت پیوسته با یک دیسک صلب در وسط شفت مدلسازی شده است. با در نظر گرفتن تأثیرات کریولیس و خروج از مرکز شفت-دیسک، معادلات دیفرانسیل حرکت با استفاده از تئوری تیر ریلی بدست آمدند. در نهایت، با استفاده از سری‌های زمانی، نمودارهای فازی، پوانکاره و نمودارهای دو شاخگی، پایداری این حرکات کوپل شده مورد بررسی قرار گرفت. گانبو ژانگ^۳ و همکارانش [69] ارتعاشات غیر خطی طولی یک شفت کشتی را مورد بررسی قرار دادند. در این بررسی، مشخصه‌های دینامیکی فیلم روغن در یاتاقان‌های محوری شفت در نظر گرفته شده و رفتار دینامیکی شفت بر اساس تغییر این مشخصه‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. با استفاده از تئوری روانکاری هیدرودینامیک و روش اغتشاشات، سختی و میرایی محوری فیلم روغن مدلسازی شده و با استفاده از روش المان محدود، سختی فندانسیون تخمین زده شده است. لی گو^۴ [70] با استفاده از روش تحلیلی، پایداری ارتعاشات عرضی غیر خطی یک شفت دوار را با کوپلینگ حرارتی مورد بررسی قرار داد. وی با بررسی تأثیر فاکتورهای حرارتی دریافت که ارتعاش ناشی از حرارت تحت تأثیر بسیاری از پارامترهای هندسی روتور

1 Qinkai

2 Khanlo et al.

3 Ganbo Zhang

4 Lili Gu

از قبیل اندازه شفت، سرعت‌های دورانی، موقعیتی که در آن حرارت به شفت وارد می‌شود، سرعت بحرانی و ... قرار دارد. ماهانتی¹ [71] رفتار ارتعاشات آزاد تیرهای تیموشنکوی پیچیده شده FGM را در دو فرکانس طبیعی اول بررسی کرد و پارامترهای هندسی تیر از قبیل زاویه پیچش و ضریب لاغری و پارامترهای جنس را روی فرکانسهای طبیعی مورد ارزیابی قرار داد. کارتمیل² [72] رفتار ارتعاشاتی تیر یک سر گیردار را بررسی کرد و مدهای ارتعاشاتی کوپل شده آن را با داشتن منبع تحریک روی تکیه‌گاه خود و استفاده از روش تحلیلی مقیاسهای چند گانه استخراج کرد. او پاسخ‌های ارتعاشاتی را وقتی تشدید فرکانسهای اصلی و دوم عرضی و فرکانس اصلی پیچشی با هم ترکیب می‌شوند مورد بررسی قرار داد. همچنین، او تأثیرات نزدیکی رزونانس‌ها را به طور آزمایشی و تحلیلی بررسی کرد. کین و همکاران³ [73] رزونانس‌های ارتعاشاتی تیرهای یک سر گیردار دوار را حول سرعت‌های بحرانی آزمایشگاهی، مطالعه کردند. تیر بر مبنای تئوری تنش و کرنش مدل سازی شد و با استفاده از تبدیلات مختصاتی، دوازده معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی بدست آمد. سپس، الگوریتم شوتینگ⁴ برای حل تغییر شکل-های حالت پایا به طور عددی استفاده شد. در نهایت، با مقایسه نتایج عددی و آزمایشگاهی مشخص شد که نتایج همگرایی خوبی با یکدیگر دارند. جورجیادز و همکاران⁵ [74] یک تیر I-شکل مدل شده با تئوری تیر اوپلر-برنولی ارائه کرد و معادلات حرکت با در نظر گرفتن حرکات درون صفحه‌ای و بیرون صفحه‌ای بررسی شدند. در مدل درون صفحه‌ای، دو معادله (ارتعاشات عرضی) و در مدل بیرون صفحه-ای، چهار معادله (ارتعاشات عرضی و پیچشی) را بدست آوردند. سپس، تحلیل مودال خطی روی معادلات دیفرانسیل کوپل شده به طور تئوری و عددی انجام شد. در کار دیگر، جورجیادز [75] معادلات حرکت تیر تیموشنکو کامپوزیتی را با سرعت دوران متغیر و با استفاده از اصل همپلتون ارائه کرد. تأثیرات همگن بودن مواد، ارتعاشات اولیه و ثانویه، سرعت دوران ثابت یا متغیر و زاویه پیش تنظیم⁶ تیر

1 Mohanty

2 Cartmell

3 Qian

4 multiple shooting

5 Georgiades

6 Pre-setting angle

مورد بررسی قرار گرفت. او نشان داد که هر دو سرعت دوران متغیر و زاویه گام غیر صفر دارای تأثیرات مهمی روی رفتار دینامیکی سازه هستند. بکر^۱ و همکاران [76] رفتار دینامیکی سازه دوار سه بعدی را مورد بررسی قرار دادند. یکی از این گونه سازه‌ها یک تیر پیچیده شده بود که ضمن داشتن تأثیرات کریولیس، به صورت محوری دوران می‌کرد. معادلات حرکت این نوع تیر با استفاده از تکنیک طیف سنجی چبیشف^۲ مورد تحلیل قرار گرفت. نتایج بدست آمده از این روش با کارهای قبلی و نتایج مستخرج از شبیه‌سازی‌های المان محدود مقایسه شد و مشخص شد که همگی دارای همگرایی و دقت خوبی با یکدیگر هستند. آنها همچنین نشان دادند که روش سه بعدی مذکور می‌تواند در مواردی که هندسه مسئله پیچیده است و شرایط مرزی کوپل شده وجود دارد نیز استفاده شود. وانگ و همکاران [77] تحلیلی از ارتعاشات کوپل شده خمشی-پیچشی تیرهای دوار با سطح مقطع نامتقارن را ارائه کردند و با در نظر گرفتن اینرسی پیچشی، مدل خطی تیر را بر مبنای تئوری تیر اویلر-برنولی معرفی کردند. وجود نابالانسی و چرخش، حرکات خمشی و پیچشی را کوپل کرده و وجود سطح مقطع غیر دایره‌ای، تأثیرات تابیدن را بوجود آورد. آنها تأثیرات این دو را روی فرکانس طبیعی و چهار شکل مد اول بررسی کردند و دریافتند که تأثیر تاب روی فرکانس طبیعی زمانی که نسبت سختی تاب به سختی خمشی بزرگ است، حائز اهمیت می‌باشد. در نهایت، نتایج به طور عددی نیز صحت گذاری شدند. آدیر و جاگر^۳ [78] ارتعاشات تیرهای اویلر-برنولی پیچیده شده دوار را با استفاده از روش تجزیه ادومین اصلاح شده^۴ مورد بررسی قرار دادند. آنها معادلات دیفرانسیل خطی را با در نظر گرفتن سختی ناشی خروج از مرکز بدست آوردند. فرکانسهای طبیعی و شکل مدهای بدست آمده به طور همزمان با استفاده از روش مذکور بدست آمدند. این روش، معادلات حرکت را به معادلات جبری برگشت پذیر و شرایط مرزی ساده‌تر تبدیل می‌کند. میر طلایی و همکاران^۵ [79] ارتعاشات محوری، عرضی و پیچشی یک تیر دوار محوری را با جملات غیر خطی ناشی از کش پذیری مورد مطالعه قرار دادند. معادلات حرکت با استفاده

1 Bekir

2 Spectral-Tchebychev

3 Adair and Jaeger

4 modified adomian decomposition

5 Mirtalaei et al

از روش اغتشاشات حل شده و تأثیر کوپلینگهای محوری، خمشی و پیچشی، سرعت دوران و نسبت شعاع به طول تیر روی رفتار ارتعاشی تیر مورد مطالعه قرار گرفت. وارمینسکی [80] معادلات غیر خطی تیرهای انعطاف پذیر دوار با هاب صلب و سرعت دوران ثابت و متغیر را ارائه کرد. جملات غیر خطی از نوع هندسی بوده و تیر با تئوری اویلر-برنولی مدل شده است. او از اصل همیلتون برای استخراج معادلات استفاده کرده و معادلات پایداری تیر با استفاده از روش مقیاسهای چندگانه بدست آمدند. از آنجا که میرایی، تأثیر قابل توجهی در رفتارهای ارتعاشی سازه‌ها دارد، تحلیل دینامیکی تیرها با وجود میرایی‌هایی از قبیل میرایی داخلی و خارجی متمرکز یا گسترده، مورد مطالعه و ارزیابی قرار گرفته است. کر و هوگر^۱ [81] پاسخهای ارتعاشاتی یک تیر مخروطی شکل یک سر گیردار پیچیده شده با سطح مقطع مربعی و نیروی محوری در انتهای آزاد تیر را مورد بررسی قرار دادند. آنها از مدل اویلر-برنولی برای هندسه تیر و از مدل میرایی کلون-ویت برای میرایی سیستم استفاده کردند. در این مطالعه، تأثیرات میرایی داخلی و خارجی روی پاسخهای فرکانسی مورد بررسی قرار گرفت. لین و همکاران [82] معادلات حرکت ارتعاشاتی یک تیر الاستیک را در جهات عرضی با یک فندانسیون الاستیک مورد بررسی قرار دادند. آنها پاسخهای فرکانسی این تیر را در سه حالت نامیرا، میرایی بحرانی و فوق میرا بررسی کردند و تأثیرات پارامترهای هندسی از قبیل زاویه پیچش و نسبت میرایی را روی پاسخهای فرکانسی و پایداری سیستم مورد بررسی قرار دادند. چاوکسی^۲ [83] به بررسی تأثیر میرایی داخلی روتور و نیروهای فیلم روغن ناشی از یاتاقان‌های هیدرودینامیک روی رفتار ارتعاشی یک سیستم روتور-شفت پرداخت. مدل روتوری که او در نظر گرفت یک مدل غیر خطی سه درجه آزادی المان محدود بود. یعنی، روتور در نظر گرفته شده، دارای یک حرکت جانبی (۲ درجه آزادی) و یک حرکت پیچشی (یک درجه آزادی) بود. چن و همکارانش [84] تحلیل ارتعاشی یک تیر تیموشنکو پیچیده شده را با در نظر گرفتن میرایی داخلی کلون-ویت^۳ به منظور مطالعه تأثیرات زاویه پیچش و میرایی داخلی

1 Kar and Hauger

2 Chouksey

3 Kelvin-Voigt

روی مشخصه‌های فرکانسی تیرهای پیچیده شده میرا بررسی کردند. چن [85] رفتار ارتعاشی یک تیر تیموشنکو یک سرگیردار پیچیده شده را با میرایی گسترده کلونین-ویت بررسی کرد. در این مطالعه نیز با تغییر پارامترهای فوق، مجدداً پایداری تیر پیچیده شده مورد ارزیابی قرار گرفت. چن و همکارانش [86] بر اساس مدل اولیه المان‌های مستقیم تیر، مدل‌های المان محدود اویلر-برنولی و تیموشنکوی تیر پیچیده شده را ارائه کردند و مشخص شد که با مقایسه نتایج بدست آمده از مدل سه بعدی المان محدود در نرم افزار ANSYS، مدل المان بندی شده تیر تیموشنکو پیچیده شده، دقت بسیار خوبی دارد. رینکون و اولسوی¹ [87] مدلی را برای ارزیابی ارتعاشات و پایداری ابزارهای سوراخکاری ارائه کردند. آنها ممانهای ژيروسکوپ و اینرسی دورانی را در نظر گرفته و دریافتند که با افزایش تعداد شیارها روی ابزار، سختی و فرکانس نیز افزایش می یابد.

در تمام بررسی‌های صورت گرفته، برخی از تیرها ممکن است تحت نیروی محوری قرار گرفته و ارتعاشات عرضی آنها مورد ارزیابی قرار گرفته‌اند. لین و چن [88] و لین [89] پایداری پارامتریک یک تیر اویلر-برنولی پیچیده شده دورانی را با لایه‌های ویسکوز و تحت یک بار محوری پرئودیک مورد بررسی قرار دادند. چن [90] با استفاده از تئوری تیرهای تیموشنکو و با استفاده از اصل همپلتون، ارتعاشات خمشی یک تیر پیچیده شده تحت بارگذاری محوری را با میرایی کلونین-ویت که به صورت موضعی توزیع یافته است، مورد بررسی قرار داد. او ابتدا معادلات حرکت تیر مذکور را در دستگاه مختصات پیچشی تیر بدست آورده و سپس با استفاده از روش المان محدود، معادلات حرکت بدست آمده را به معادلات دیفرانسیل معمولی با ضرایب ثابت تبدیل کرد. همچنین، با تغییر زاویه پیچش تیر، مقدار میرایی و اندازه و موقعیت بخش میرا شده و بار محوری، پایداری تیر مذکور را بررسی کرد. به اعتقاد او مدلی که ارائه کرد، مدلی منطقی‌تر برای درک بهتر رفتار ارتعاشی تیرهای پیچیده شده با متغیرهای گوناگون موثر روی تیر می‌باشد. کریمی و همکاران² [91] پایداری عرضی تیر یک سر گیر دار چرخشی را با نیروی ناپایستار در یک بستر ویسکو الاستیک کلونین-ویت مطالعه کردند. آنها با استفاده

1 Rincon and Ulsoy

2 Karimi et al

از اصل همیلتون، معادلات را استخراج کرده و با استفاده از روش المان محدود، معادلات را به صورت گسسته در آوردند. سپس، تأثیرات زاویه پیچش، ضریب بار، ضرایب میرایی و نسبت سطح مقطع را روی پایداری سیستم مطالعه کردند. مطالعات ارتعاشی و پایداری تیرهای پیچیده شده با بارگذاری محوری، عرضی و پیچشی نیز جزء مهمترین موضوعات تحقیقاتی به شمار می‌رود. زیرا این‌گونه تیرها عمدتاً تحت بارگذاری تجمعی بخصوص بارگذاری محوری قرار دارند (مثل روتورهای مارپیچ پمپ‌ها، مته‌ها و ...). هگدورن و کووال¹ [92] پایداری پارامتریک یک تیر تیموشنکو دو سر مفصل را تحت یک نیروی پرئودیک محوری با در نظر گرفتن تأثیرات ارتعاشات محوری مورد بررسی قرار دادند. گلیسون و مغرب² [93] معادلات ارتعاشی یک مته را با مدلسازی آن به شکل یک تیر دو سرگیردار اوپلر-برنولی تحت بارگذاری محوری بدست آورده و آنها را با استفاده از روش گالرکین حل کرده و سپس، بارهای کمانشی، فرکانسهای طبیعی و شکل مدهای آن را بررسی کردند. گورگزو³ [94] پایداری تیر پیچیده شده را با نیروی محوری ضربه‌ای به صورت خطی و با استفاده از روش گالرکین برای حل معادلات کوپل شده بررسی کرد. او با استفاده از روش مقیاسهای چندگانه، پایداری سیستم را مورد بررسی قرار داده و نتایج را برای همه شرایط مرزی ارائه کرد. کلیپ⁴ [95] پایداری تیرهای الاستیک خطی با بارهای محوری و میرایی داخلی خطی را مطالعه کرد و معادلات ارتعاشات عرضی را با فرض اینکه تیر یک سرگیردار لاغر باشد بدست آورد. او از روش گالرکین برای حل معادلات استفاده کرد و تأثیرات میرایی، زاویه پیچش و بارهای بحرانی را روی پایداری تیرها بررسی کرد. سینها⁵ [96] با استفاده از تئوری تیر تیموشنکو و روش هارمونیک بالانس، تأثیرات نسبت لاغری تیر را روی نواحی ناپایدار یک تیر با تکیه‌گاههای ساده و بار محوری نوسانی بررسی کرد. تکیناپ و اولسوی [97,98] تأثیرات بارهای محوری را روی فرکانسهای طبیعی مته‌ها با مدلسازی آنها به صورت شفتهای اوپلر-برنولی پیچیده شده بررسی کردند. آنها با

1 Hagedorn and Koval

2 Magreb and Glisin

3 Gurgeoze

4 Celep

5 Sinha

استفاده از روش المان محدود به بررسی تأثیرات زاویه پیچش، سرعت دورانی و نسبت لاغری روی پاسخ فرکانسی ارتعاشات عرضی پرداخته و نتایج بدست آمده را با روشهای تحلیلی و آزمایشی مقایسه کردند. لیائو و دانگ¹ [99]، چن و کر² [100] نیز ارتعاشات و پایداری یک تیر پیچیده شده تیموشنکو را که حول محور طولی خود دوران می‌کند، مورد بررسی قرار دادند. آنها در این مطالعه، تأثیرات زاویه پیچش و سرعت دورانی را روی فرکانسهای خمشی و بارهای کمانشی با استفاده از روش المان محدود مطالعه کردند. لی [101-103] از روش مدهای مفروض برای تحلیل پایداری دینامیکی تیرهای اویلر-برنولی پیچیده شده تحت بارهای محوری ضربه‌ای و ثابت و شرایط مرزی متفاوت استفاده کرد. در این بررسی، تأثیر اغتشاشات سینوسی روی بارهای محوری با استفاده از روش بولوتین مورد مطالعه قرار گرفت. نتایج عددی بدست آمده نشان می‌دهد که سرعت دوران، زاویه پیچش و نسبت لاغری تیر به شدت روی نواحی پایدار تیر تأثیر می‌گذارد. لیائو و هوانگ [104] با استفاده از تئوری تیر اویلر-برنولی و روش اغتشاشات، پایداری پارامتریک تیرهای پیچیده شده دورا را تحت نیروی محوری پریودیک بررسی کردند. تان³ و همکارانش [105] با استفاده از روش اغتشاشات، پایداری پارامتریک تیرهای اویلر دورانی را تحت بارهای محوری فشاری سینوسی بررسی کردند. آنها از تئوری اویلر-برنولی و روش مدهای مفروض⁴ استفاده کرده و دریافتند که اگر زاویه پیچش کاهش یابد، نواحی ناپایدار کوچک خواهند بود. گائو و یانگ⁵ [106] پایداری دینامیکی یک تیر اویلر-برنولی یک سر درگیر را با سرعت دورانی متغیر و نیروی محوری تصادفی بررسی کردند. آنها از روش المان محدود استفاده کرده و دریافتند که نواحی ناپایداری در نزدیکی فرکانسهای رزونانس اصلی وجود دارد و این نواحی در رزونانسهای بالاتر کاهش می‌یابند. علاوه براین، نتایج به صورت عددی نیز در رزونانسهای ترکیبی متفاوت ارائه شد. هوانگ [107] تأثیر عیوب سازه‌ای را روی پایداری یک تیر پیچیده شده با شرایط مرزی متحرک وابسته به زمان مانند یک مته هنگام سوراخکاری بررسی کرد. در این بررسی، ناپایداری یک مته با تغییر نیروی

1 Liao and Dang

2 Chen and Keer

3 Tan

4 Assumed modes

5 Young And Gau

سوراخکاری محوری به عنوان مته‌ای که دارای عیب می‌باشد، مطالعه شد. به منظور تقریب نزدیکی از فرآیند سوراخکاری، از فندانسیون الاستیک وینکلر^۱ استفاده شده و از روش مقیاسهای چندگانه برای بررسی و تحلیل نواحی پایدار استفاده شده است. آنچه از این تحلیل بدست آمد این بود که عمق عیب، نیروی محوری و سرعت دورانی، پایداری دینامیکی را در فرآیند سوراخکاری تغییر می‌دهند. شیائو و همکاران^۲ [108] ارتعاشات تیر تیموشنکو دوار با شرایط مرزی عمومی را بررسی کرده و از روش لاگرانژ و مدهای مفروض به ترتیب برای استخراج و حل معادلات استفاده کردند. نیروی مایل محرکی هم به تیر اعمال شده و روش عددی رانگ-کوتا^۳ برای بررسی نتایج استفاده شد. نتایج نشان می‌دهد که حرکت محوری ناشی از نیروی مورد نظر در حالتی که شرایط مرزی به صورت دو سر مفصل آویزان باشد بزرگتر بوده و حرکت عرضی آن نسبت به حالتی که تیر به صورت دو سر گیر دار یا یک سر گیر دار و یک سر مفصل باشد کوچکتر خواهد بود. چن و هو [109] ارتعاشات خمشی یک تیر دوار پیچیده شده را تحت یک بار محوری ثابت به منظور بررسی تأثیرات نیروی محوری و کریولیس روی فرکانسهای طبیعی تحلیل کردند. ماهانتی [110] ارتعاشات اجباری یک تیر یک سر گیر دار پیچیده شده معیوب را مورد بررسی قرار داد و تأثیرات زاویه پیچش، موقعیت عیب و فاکتور نیرو را روی پایداری تیر مورد بررسی قرار داد. او با استفاده از تئوری تیر اویلر-برنولی نشان داد که تغییر در زاویه پیچش، تأثیرات متفاوتی را روی مدهای ارتعاشاتی اول و دوم خواهد داشت. چن [111-112] پایداری دینامیکی یک تیر تیموشنکوی پیچیده شده را تحت بار محوری فشاری پرودیک مورد بررسی قرار داد. او در این بررسی، تأثیر زاویه پیچش، سرعت دورانی، بار محوری استاتیکی، جنبه‌های هندسی سازه و شرایط مرزی مختلف را روی پایداری تیر تحلیل کرد. هوانگ [113] رفتار دینامیکی سوراخکاری با سرعت بالا را با استفاده از تیر پیچیده شده و فندانسیون الاستیک وینکلر مورد مطالعه قرار داد. او تأثیر سرعت چرخش، زاویه پیچش و نیروی محوری را روی پاسخ فرکانسی تحلیل کرد و دریافت که وقتی مته در حال

1 Winkler

2 Shiao

3 Range-Kutta

پیشروی درون قطعه کار می‌باشد، فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد. وی لی^۱ [114] پایداری غیر خطی دینامیکی شفت دورانی یک کشتی را با نیروهای محوری پریودیک مورد بررسی قرار داد. در این بررسی، پایداری دینامیکی حرکت عرضی شفت با تغییر مشخصه‌هایی از قبیل سرعت دورانی شفت، تعداد پره‌ها و جملات ثابت روی نیروی پریودیک مورد مطالعه قرار گرفت. لانگو^۲ [115] پایداری یک تیر یک سر گیر دار شبه متقارن را در فضای سه بعدی، تحت یک بار فشاری و گشتاور پیرو مورد بررسی قرار داد. آنها از روش گالرکین برای گسسته سازی معادلات استفاده کرده و روش اغتشاشات را برای محاسبه مقادیر ویژه بکار گرفته و پایداری یک تیر بار گذاری شده محوری نامیرا، متقارن و بدون زاویه پیچش را تحلیل کردند. آنها نمودارهای دوشاخگی را در فضای دو بعدی یا سه بعدی نشان دادند و دریافتند که پدیده دو شاخگی استاتیکی و دینامیکی در نواحی بحرانی و زیر بحرانی اتفاق می‌افتد. لاتالسکی و همکاران^۳ [116] رفتار دینامیکی و پایداری تیر انعطاف‌پذیر کامپوزیتی دوار نازک را تحت گشتاور محرک به شکل مجموع جملات ثابت و پریودیک مطالعه کردند. معادلات دیفرانسیل حرکت را با استفاده از اصل همپلتون بدست آورده و از روش گالرکین برای بدست آوردن معادلات دیفرانسیل معمولی استفاده کردند. آنها سپس تأثیرات همگن بودن مواد، اینرسی دورانی و برش عرضی را روی پایداری تیر بررسی کرده و دریافتند که نواحی تشدید جابجا می‌شوند.

۱-۵- برخی مفاهیم و تعاریف در دینامیک تیرهای دوار

یک سیستم روتور یا تیر دوار می‌تواند شامل دیسک‌هایی با اشکال گوناگون، شفت‌هایی با قطرهای و اشکال مختلف و یاتاقان‌هایی در موقعیت‌های گوناگون باشد. در آنالیز ارتعاشی، یک سیستم روتور پیچیده، ساده‌سازی شده و یک مدل مکانیکی و ریاضی مناسب برای آن در نظر گرفته می‌شود. در فرآیند مدل‌سازی باید پارامترهایی را که در سیستم حائز اهمیت هستند شناخت. بر این اساس، در این فصل برخی از مفاهیم اولیه در دینامیک تیرهای دوار مورد بررسی قرار گرفته است.

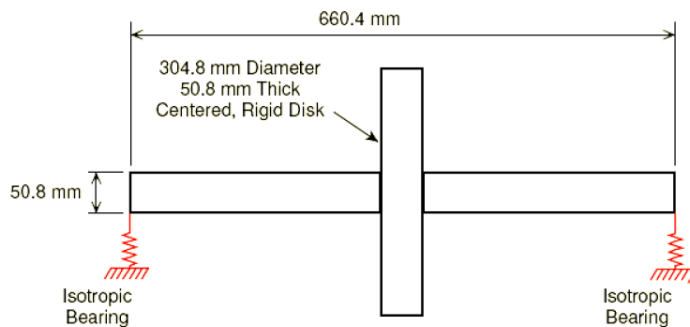
1 Wei Li

2 Luongo

3 Latalski et al

۱-۵-۱- روتور جف کات^۱

روتور جف کات معادل با یک سیستم جرم-فنر است که در آن دیسک روتور به صورت یک شفت الاستیک با جرم کم نصب شده است. این مدل، به مدل جف کات یا لاول معروف بوده و یک سیستم تک درجه آزادی است که معمولاً برای بررسی مقدماتی دینامیک روتورها استفاده می‌شود (شکل ۱-۷).

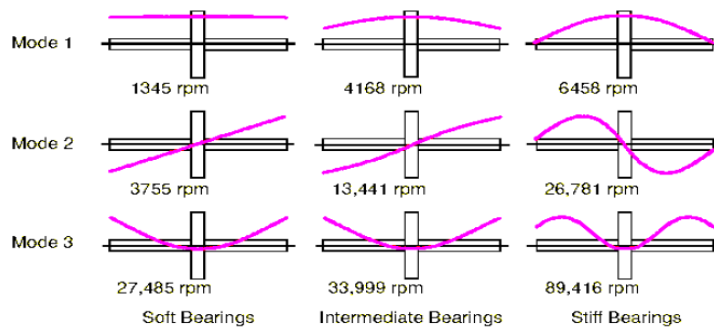


شکل (۷-۱) مقطع مدل یک سیستم روتور با جرم متمرکز [117]

سوانسون و پاول^۲ [117] از یک مدل پیچیده‌تر چند درجه آزادی شبیه یک روتور واقعی نشان داده شده در شکل (۷-۱) استفاده کردند.

۱-۵-۲- شکل مدهای یک تیر دوار

اگر فرض شود که ماشین نمی‌چرخد و سه نوع ماشین با یاتاقان‌های نرم، معمولی و سخت وجود داشته باشد، با اجرای یک آزمایش می‌توان مجموعه‌ای از فرکانسهای طبیعی و شکل مدها را یافت.

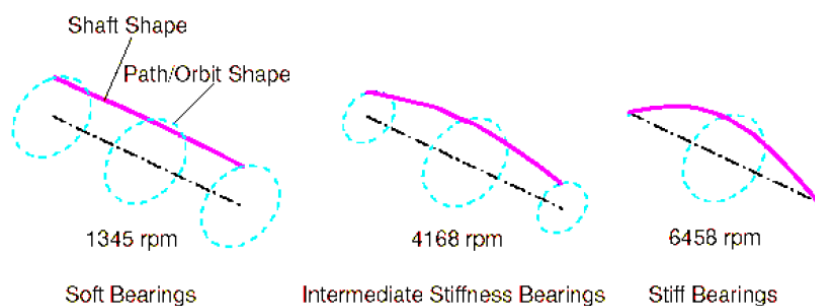


شکل (۸-۱) شکل مدهای سیستم روتور با جرم متمرکز در وسط تیر بر حسب سختی یاتاقانها [117]

1 Jeffcott Rotor

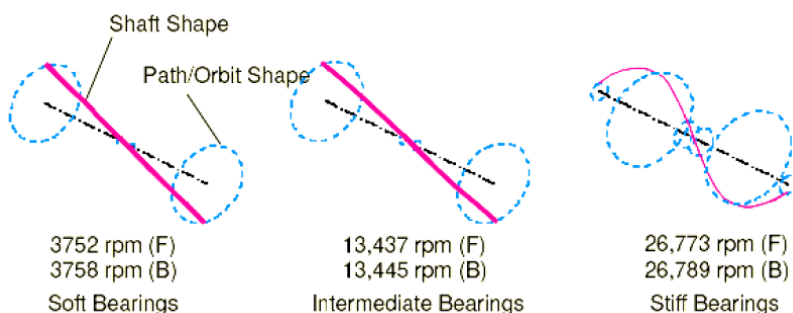
2 Swanson And Powel

شکل (۸-۱) سه شکل مد اول و فرکانسهای آن را برای سه نوع یاتاقان مذکور نشان می‌دهد. نسبت سختی یاتاقان‌ها به سختی شفت تأثیر مهمی روی شکل مدها دارد. برای یاتاقان‌های نرم و معمولی، شفت به طور قابل ملاحظه در دو مد اول خم نمی‌شود. این مدها به مد صلب معروف است. در صورتی که روتور یک حرکت دورانی داشته باشد، شکل مدها خیلی به شکل مدهای شفت غیر دورانی شبیه هستند. اما، در این حالت آنها به جای حرکت صفحه‌ای دارای حرکت دایره‌ای هستند. (شکل ۱-۱) و شکل (۱۰-۱)). همانطور که در شکل (۹-۱) نشان داده شده است. دوران شفت، یک مسیر استوانه ای را طی می‌کند. این مد، به مد استوانه‌ای نیز معروف است.



شکل (۹-۱) شکل مدهای و فرکانسهای متناظر یک شفت دوار بر حسب سختی یاتاقان‌ها [117]

همانطور که در شکل (۱۰-۱) نشان داده شده است، دوران شفت، یک مسیر مخروطی را طی می‌کند که به مد مخروطی نیز معروف است.

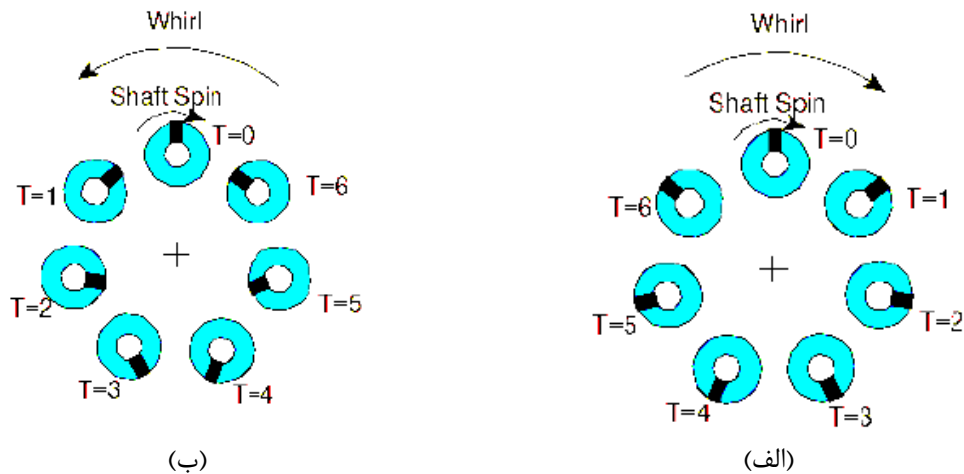


شکل (۱۰-۱) شکل مدهای دوم و فرکانسهای طبیعی متناظر یک شفت دوار بر حسب سختی یاتاقان‌ها [117]

۱-۵-۳- لنگ زنی همسو و ناهمسو^۱

لنگ زنی عبارتست از حرکت مرکز جرم روتور در صفحه عمود بر شفت. در صورتی که این

حرکت، در جهت دوران شفت باشد، چرخش همسو و در صورتی که خلاف جهت دوران شفت باشد، چرخش ناهمسو نامیده می‌شود. شکل (۱۱-۱) چرخش همسو و ناهمسو یک روتور را در یک فاصله زمانی مشخص نشان می‌دهد. حرکات همسو و ناهمسو یک روتور جف کات که توسط یاتاقان‌های ژورنال یکسان مهار شده است، به طور گسترده توسط راتو، بات و ژیستریس^۱ بررسی شده است [117].



شکل (۱۱-۱) لنگ زنی (الف) همسو و (ب) ناهمسو [117]

۱-۵-۴- دو شاخگی^۲

تئوری انشعابات یا دو شاخگی، عبارتست از مطالعه ریاضیاتی تغییرات یک ساختار توپولوژیکال مشخص مانند منحنی‌های بدست آمده از یک مجموعه برداری مشخص یا پاسخهای حاصل از معادلات دیفرانسیل. دوشاخگی یک کلمه فرانسوی بوده که توسط پوینکاره^۳ در سیستم‌های دینامیکی غیر خطی معرفی شد و برای نمایش تغییرات کیفی در خواص یک سیستم از قبیل تعداد و نوع پاسخها، با تغییر یک یا بیشتر از یک پارامتر سیستم استفاده می‌شود. به عبارت دیگر، یک دو شاخگی وقتی اتفاق می‌افتد که یک تغییر بسیار کوچک در مقادیر یک پارامتر (که به پارامتر دو شاخگی معروف است) از سیستم باعث تغییرات بسیار شدیدی در رفتار خروجی سیستم شود. دو شاخگی در هر دو سیستم پیوسته و گسسته رخ می‌دهند و به دو نوع اصلی تقسیم بندی می‌شوند [118]:

1 Rao, Bhat and Xistris.

2 Bifurcations

3 Poincare

۱- دو شاخگی موضعی^۱: عبارتست از، یک تغییر کیفی در نزدیکی یک نقطه ثابت یا حل

پریودیک سیستم.

به عبارت دیگر، این نوع دو شاخگی هنگامی رخ می‌دهد که تغییر یک پارامتر باعث تغییر پایداری سیستم حول نقطه تعادل می‌شود. در سیستم‌های پیوسته زمان، این پدیده متناظر است با اینکه بخش حقیقی یک مقدار ویژه از صفر عبور کند.

۲- دو شاخگی کلی: زمانی اتفاق می‌افتد که مسیرهای بیشتری از سیستم از قبیل مسیرهای

پریودیک با یکدیگر یا با موقعیت تعادل سیستم تداخل پیدا کنند. از این‌رو، نمی‌توان آنها را

با یک تحلیل پایداری محض از موقعیت تعادل شناسایی کرد.

با توجه به آنچه در این فصل ذکر شد و در فصل‌های بعدی بکار گرفته خواهد شد، می‌توان گفت که یک تغییر شکل بزرگ از یک سازه لزوماً به معنای وجود کرنش‌های بزرگ نمی‌باشد. به طور مثال، سازه‌هایی شبیه تیرهای یک سر درگیر، تحت دوران‌های بزرگ، تغییر شکل‌های بزرگ داشته در حالی که کرنش‌های کوچکی دارند. در یک دستگاه مختصات شبه دورانی با حرکت جسم صلب، جابجایی‌های نسبی کوچک بوده و مسأله به صورت یک مسأله الاستیک خطی می‌باشد. حال آنکه، تغییر شکل‌های بزرگ منجر به تولید پارامترهای غیر خطی هندسی ناشی از کشیدگی صفحه میانی یا انحناهای غیر خطی شده که باعث بوجود آمدن روابط کرنش-جابجایی غیر خطی می‌شوند. از این‌رو، سازه‌هایی که دارای تغییر شکل‌های بزرگ اما کرنش‌های کوچک هستند، به عنوان سازه‌های الاستیک غیر خطی شناخته می‌شوند [33]. یکی از این‌گونه سازه‌ها، تیرهای پیچیده شده حول محور طولی خود می‌باشد. در فصل‌های بعدی، معادلات حرکت یک تیر پیچیده شده الاستیک غیرخطی، اوپلر-برنولی و ایزوتروپیک با شرایط مرزی دو سر مفصل و یک سر گیر دار در حالات مختلف سرعت ثابت و متغیر مورد بررسی قرار می‌گیرد. در استخراج معادلات، از اصل همیلتون تعمیم یافته استفاده شده است. فرضیات و روش‌های ساده سازی به کار رفته در طول استخراج معادلات در هر بخش به صورت جداگانه

1 Local Bifurcation

ذکر خواهند شد.

فصل دوم

۲- ارتعاشات عرضی تیر پیچیده شده دوار با شرایط مرزی دو سر مفصل

پمپها و کمپرسورهای مارپیچ از جمله تجهیزاتی هستند که در صنعت مورد استفاده قرار می-گیرند. به منظور تحلیل پایداری این گونه تجهیزات، می توان آنها را به صورت یک تیر پیچیده شده محوری با شرایط مرزی دو سر مفصل مدل سازی کرد. این روند در ادامه مورد بررسی قرار گرفته شده است.

۲-۱- معادلات حرکت

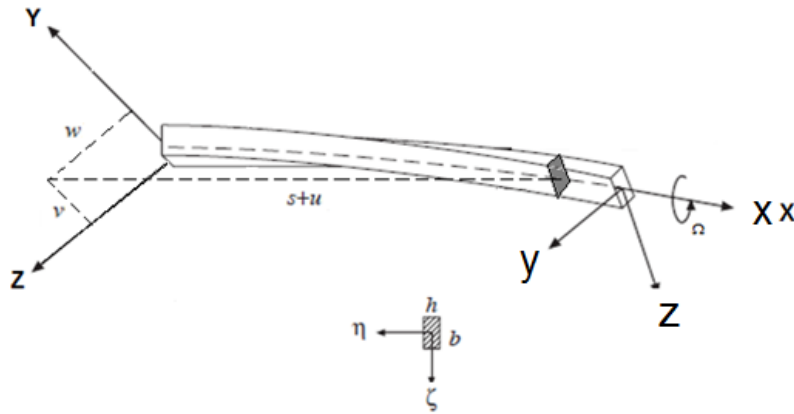
شکل (۲-۱)، یک تیر پیچیده شده دورانی دو سر مفصل با سرعت دورانی ثابت Ω را نشان می-دهد. فرض می شود تیر مذکور، یک تیر اویلر-برنولی و ایزوتروپیک بوده و از تغییر شکل برشی تیر صرف نظر شده در حالی که تأثیرات ژيروسکوپی و اینرسی دورانی تیر در نظر گرفته شده است. موقعیت یک نقطه روی محور الاستیک تیر قبل از تغییر شکل عبارتست از،

$$r_0 = s e_x \quad (۱-۲)$$

بعد از تغییر شکل، موقعیت آن برابر است با،

$$r = (s + u)e_x + v e_y + w e_z \quad (۲-۲)$$

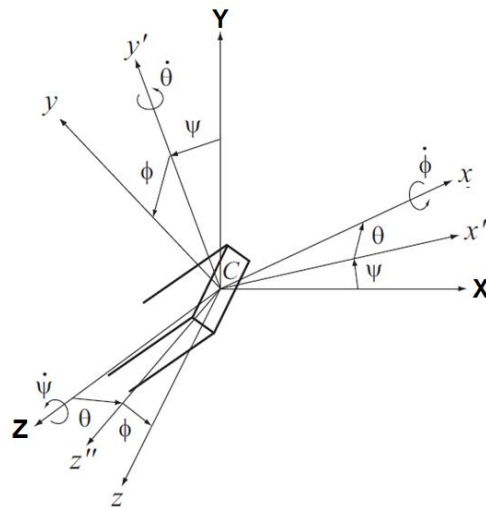
e_x ، e_y و e_z به ترتیب بردارهای یکه در امتداد محورهای x ، y و z هستند. s ، موقعیت نقطه قبل از تغییر شکل و u ، v و w میزان تغییر شکل در دستگاه XYZ هستند. با توجه به شکل (۲-۲)، هر سطح مقطع از تیر دارای یک جابجایی الاستیک در مرکز جرم C و یک دوران می باشد. مولفه های جابجایی مرکز جرم C نسبت به محورهای X ، Y و Z در موقعیت x و زمان t برابر است با $u_x(t, x)$ ، $w_z(t, x)$ ، $v_y(t, x)$. به منظور توصیف دوران سطح مقطع تیر پیچیده شده قبل و بعد از تغییر شکل تیر، از زوایای اویلر $\phi(t, x)$ ، $\psi(t, x)$ و $\theta(t, x)$ حول محورهای X ، Y و Z استفاده می شود [33].



شکل (۲-۱) دستگاه مختصات محلی و مرجع برای یک تیر پیچیده شده دو سر مفصل [43].

تغییر شکل خمشی تیر بوده و در این بخش فرض بر این است که از $\psi(t, x)$ و $\theta(t, x)$ ناشی از تغییر شکل خمشی تیر بوده و در این بخش فرض بر این است که از

تغییر شکل پیچشی تیر پیچیده شده صرف نظر شده است بگونه‌ای که $\phi(t, x)$ تنها ناشی از دوران تیر بوده و برابر است با، $\phi(t, x) = \Omega t$.



شکل (۲-۲) نمایش زوایای اوپلر تیر پیچیده شده دو سر مفصل [43]

با توجه به شکل (۲-۲)، سطح مقطع تیر در ابتدا به اندازه ψ حول محور Z ، به اندازه θ حول

محور y' و سپس به اندازه ϕ حول محور x دوران می‌کند. به این ترتیب، هر یک از دورانهای فوق را

می‌توان با یک ماتریس دوران به شکل زیر بیان کرد [43]،

$$[T_\psi] = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, [T_\theta] = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}, [T_\phi] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$$

در نتیجه با ضرب هر سه ماتریس فوق، می توان دوران کلی را به صورت زیر بیان کرد،

$$\begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} [T_\phi] & [T_\theta] & [T_\psi] \end{bmatrix}}_{=[T]} \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{Bmatrix} \quad (3-2)$$

که

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ -\cos \phi \sin \psi + \sin \phi \sin \theta \cos \psi & \cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \theta \sin \psi & \sin \phi \cos \theta \\ \sin \phi \sin \psi + \cos \phi \sin \theta \cos \psi & -\sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \theta \sin \psi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix}$$

بدین ترتیب، با توجه به شکل (3-2) سرعت زاویه‌ای یک المان تیر را با توجه به دوران 1-2-3 و

با استفاده از زوایای اویلر، می توان به صورت زیر بیان کرد [43]،

$$\begin{aligned} \omega(t, x) &= [\Omega - \dot{\psi} \sin(\theta)]e_x + [\dot{\psi} \cos(\theta) \sin(\Omega t) + \dot{\theta} \cos(\Omega t)]e_y + [\dot{\psi} \cos(\theta) \cos(\Omega t) - \dot{\theta} \sin(\Omega t)]e_z \\ &= \omega_x e_x + \omega_y e_y + \omega_z e_z \end{aligned} \quad (4-2)$$

که علامت نقطه بالای پارمترهای زاویه دوران به مشتقات زمانی اشاره دارد.

برای انحنایها نیز با توجه به تحلیل انرژی کیرشهف [119] روابط مربوط به انحنای تیر، ρ_x, ρ_y, ρ_z را

می توان با جایگزین کردن مشتقات زمانی $\frac{\partial}{\partial t}$ با مشتقات مکانی $\frac{\partial}{\partial x}$ در روابط سرعت زاویه‌ای بدست آورد.

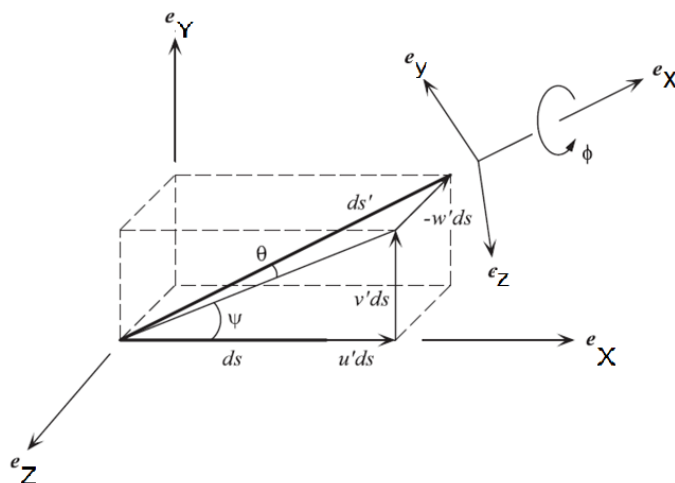
بدین ترتیب انحنای تیر برابر است با،

$$\begin{aligned} \rho(t, x) &= [\psi' \sin(\theta)]e_x + [\psi' \cos(\theta) \sin(\Omega t) + \theta' \cos(\Omega t)]e_y + [\psi' \cos(\theta) \cos(\Omega t) - \theta' \sin(\Omega t)]e_z \\ &= \rho_x e_x + \rho_y e_y + \rho_z e_z \end{aligned} \quad (5-2)$$

از طرفی، با توجه به شکل (3-2) کرنش در امتداد محور الاستیک یک المان از آن، ds ، برابر است

با [43]،

$$e = \left(\frac{\partial r}{\partial s} \cdot \frac{\partial r}{\partial s} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{\partial r_0}{\partial s} \cdot \frac{\partial r_0}{\partial s} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(1+u_x')^2 + v_y'^2 + w_z'^2} - 1 \quad (6-2)$$



شکل (۳-۲) تغییر شکل یک المان از تیر [43]

زوایای دوران را می‌توان برحسب تغییر شکلهای هندسی تیر بیان کرد. بنابراین، با توجه به شکل

(۳-۲) داده می‌شود،

$$\begin{aligned} \sin\psi &= \frac{v'_y}{\sqrt{(1+u'_x)^2 + v'_y{}^2}} & \cos\psi &= \frac{(1+u'_x)}{\sqrt{(1+u'_x)^2 + v'_y{}^2}} \\ \sin\theta &= \frac{-w'_z}{\sqrt{(1+u'_x)^2 + v'_y{}^2 + w'_z{}^2}} & \cos\theta &= \frac{\sqrt{(1+u'_x)^2 + v'_y{}^2}}{\sqrt{(1+u'_x)^2 + v'_y{}^2 + w'_z{}^2}} \\ \tan\psi &= \frac{v'_y}{1+u'_x} & \tan\theta &= \frac{-w'_z}{\sqrt{(1+u'_x)^2 + v'_y{}^2}} \end{aligned} \quad (۷-۲)$$

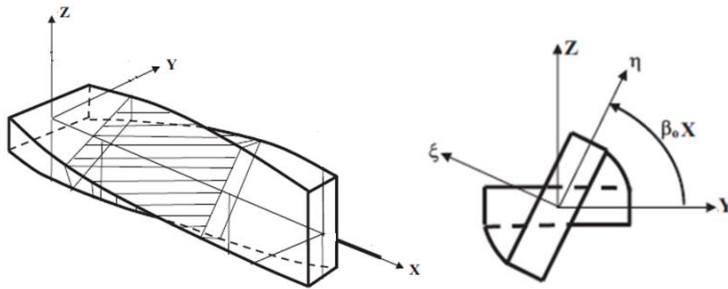
اکنون، با استفاده از روابط فوق خواهیم داشت،

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{v'_y(1+u'_x) - v'_y u'_x}{(1+u'_x)^2 + v'_y{}^2} & \dot{\psi} &= \frac{v''_y(1+u'_x) - v'_y u''_x}{(1+u'_x)^2 + v'_y{}^2} \\ \dot{\theta} &= \frac{1}{[(1+u'_x)^2 + v'_y{}^2 + w'_z{}^2]} \left\{ \frac{w'_z [(1+u'_x) u'_x + v'_y v'_y]}{\sqrt{(1+u'_x)^2 + v'_y{}^2}} - w'_z \sqrt{(1+u'_x)^2 + v'_y{}^2} \right\} \\ \dot{\theta} &= \frac{1}{[(1+u'_x)^2 + v'_y{}^2 + w'_z{}^2]} \left\{ \frac{w'_z [(1+u'_x) u_x + v'_y v_y]}{\sqrt{(1+u'_x)^2 + v'_y{}^2}} - w''_z \sqrt{(1+u'_x)^2 + v'_y{}^2} \right\} \end{aligned} \quad (۸-۲)$$

بنابراین، زوایای اوپلر ψ و θ متغیرهای وابسته بوده و تعداد متغیرهای مستقل به سه مولفه

انتقالی u_x ، v_y و w_z کاهش می‌یابد. در استخراج معادلات ارتعاشی تیر پیچیده شده دورانی محوری، از

دستگاه مختصات موضعی $\xi\eta\zeta$ چرخان درون شیار^۱ تیر و با زاویه پیچش تیر، $\beta_0 x$ ، β_0 زاویه پیچش بر واحد طول آن می‌باشد، استفاده شده است (شکل (۳-۲) و شکل (۴-۲)). محورهای η و ζ محورهای اصلی سطح مقطع تیر می‌باشند و دستگاه مختصات XYZ نیز دستگاه مختصات اولیه و ثابت تیر می‌باشند.



شکل (۴-۲) یک تیر پیچیده شده دورانی به همراه مقطع آن با نمایش زاویه پیچش تیر. مزیت استفاده از دستگاه پیچشی $\xi\eta\zeta$ در استخراج معادلات این است که برای تیر پیچیده شده لازم است دستگاهی انتخاب شود که پارامترهای مربوط به سطح مقطع از قبیل ممان اینرسی در امتداد محور طولی تغییر نکند. با توجه به شکل (۴-۲) و اینکه مولفه‌های جابجایی خط مرکزی تیر در دستگاه مختصات XYZ و $\xi\eta\zeta$ به ترتیب برابر بودند با، $u_x(t, x)$, $v_y(t, x)$, $w_z(t, x)$ و $u_\zeta(t, x)$, $v_\eta(t, x)$, $w_\xi(t, x)$ به این ترتیب، با استفاده از ماتریس دوران \mathfrak{R} (و با توجه به شکل (۴-۲)) می‌توان مولفه‌های جابجایی، اینرسی و سختی تیر را از دستگاه ثابت XYZ به دستگاه موضعی $\xi\eta\zeta$ تبدیل کرد،

$$\mathfrak{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta_0 x) & -\sin(\beta_0 x) \\ 0 & \sin(\beta_0 x) & \cos(\beta_0 x) \end{bmatrix}$$

که مولفه‌های جابجایی، اینرسی و سختی برابرند با،

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ v_y \\ w_z \end{Bmatrix} = \mathfrak{R} \begin{Bmatrix} u_\zeta \\ v_\eta \\ w_\xi \end{Bmatrix} \quad (۹-۲)$$

یا

$$\begin{aligned}
v_y(t, x) &= v_\eta(t, x) \cos(\beta_0 x) - w_\zeta(t, x) \sin(\beta_0 x) \\
w_z(t, x) &= v_\eta(t, x) \sin(\beta_0 x) + w_\zeta(t, x) \cos(\beta_0 x) \\
u_x(t, x) &= u_\xi(t, x)
\end{aligned} \tag{۱۰-۲}$$

و

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & I_{yz} \\ 0 & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} = \mathfrak{R} \begin{bmatrix} I_{\zeta\zeta} & 0 & 0 \\ 0 & I_{\eta\eta} & 0 \\ 0 & 0 & I_{\xi\xi} \end{bmatrix} \mathfrak{R}^T \tag{۱۱-۲}$$

یا

$$\begin{aligned}
I_{xx} &= I_{\xi\xi} \\
I_{yy} &= I_{\eta\eta} \cos(\beta_0 x)^2 + I_{\zeta\zeta} \sin(\beta_0 x)^2 \\
I_{zz} &= I_{\eta\eta} \sin(\beta_0 x)^2 + I_{\zeta\zeta} \cos(\beta_0 x)^2 \\
I_{yz} &= \frac{1}{2} (I_{\eta\eta} - I_{\zeta\zeta}) \sin(2\beta_0 x)
\end{aligned} \tag{۱۲-۲}$$

که

$$I_{\xi\xi} = \iint_A \rho \eta^2 d\eta d\xi, \quad I_{\zeta\zeta} = \iint_A \rho (\eta^2 + \xi^2) d\eta d\xi, \quad I_{\eta\eta} = \iint_A \rho \xi^2 d\eta d\xi \tag{۱۳-۲}$$

و برای ماتریس سختی تیر نیز داریم،

$$\begin{bmatrix} D_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & D_{yy} & D_{yz} \\ 0 & D_{zy} & D_{zz} \end{bmatrix} = \mathfrak{R} \begin{bmatrix} D_{\zeta\zeta} & 0 & 0 \\ 0 & D_{\eta\eta} & 0 \\ 0 & 0 & D_{\xi\xi} \end{bmatrix} \mathfrak{R}^T \tag{۱۴-۲}$$

یا

$$\begin{aligned}
D_{xx} &= D_{\xi\xi} \\
D_{yy} &= D_{\eta\eta} \cos(\beta_0 x)^2 + D_{\zeta\zeta} \sin(\beta_0 x)^2 \\
D_{zz} &= D_{\eta\eta} \sin(\beta_0 x)^2 + D_{\zeta\zeta} \cos(\beta_0 x)^2 \\
D_{yz} &= \frac{1}{2} (D_{\eta\eta} - D_{\zeta\zeta}) \sin(2\beta_0 x)
\end{aligned} \tag{۱۵-۲}$$

که $D_{\zeta\zeta}$ ، $D_{\xi\xi}$ و $D_{\eta\eta}$ سختی های پیچشی و خمشی تیر در دستگاه پیچشی $\xi\eta\zeta$ بوده و برابرند

با [48]

$$D_{\zeta\zeta} = G \iint_A (\eta^2 + \xi^2) d\eta d\xi, \quad D_{\xi\xi} = E \iint_A \eta^2 d\eta d\xi, \quad D_{\eta\eta} = E \iint_A \xi^2 d\eta d\xi, \quad A_{xx} = A_{\zeta\zeta} = E \iint_A d\eta d\xi \tag{۱۶-۲}$$

که ρ و A به ترتیب چگالی و سطح مقطع تیر پیچیده شده و E و G به ترتیب مدول الاستیسیته

و برشی می‌باشند. از طرفی، اگر خروج از مرکز سطح مقطع تیر در دستگاه مختصات پیچشی، (e_η, e_ζ) و زاویه چرخش کلی سطح مقطع تیر برابر با پیچش ناشی از دوران تیر (Ωt) باشد، مولفه‌های جابجایی مرکز جرم تیر $(u_{G\xi}, v_{G\eta}, w_{G\zeta})$ تیر برابر است با،

$$\begin{aligned} u_{G\xi} &= u_\xi \\ v_{G\eta} &= v_\eta + e_\eta \cos(\Omega t) - e_\zeta \sin(\Omega t) \\ w_{G\zeta} &= w_\zeta + e_\eta \sin(\Omega t) + e_\zeta \cos(\Omega t) \end{aligned} \quad (17-2)$$

بدین ترتیب با توجه به رابطه (۶-۲)، با فرض $v = w = O(\epsilon)$ و $u = O(\epsilon^2)$ و با جایگذاری

روابط (۷-۲) در (۴-۲) و سپس بسط تیلور روابط حاصل، برای مولفه‌های سرعت زاویه‌ای تا جملات مرتبه سوم، یعنی $O(\epsilon^3)$ در دستگاه مختصات پیچشی داریم:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \Omega + \dot{\phi} + \left((-1/2v\dot{w} - 1/2w\dot{v})\beta_0^2 + (-1/2w\dot{w}' - 1/2w'\dot{w} + \dots)\beta_0 + 1/2v'\dot{w}' + \dots \right) \cos(2\beta_0 x) \\ &+ \left(1/2w\dot{w} - 1/2v\dot{v} \right) \beta_0^2 + \left((-1/2w'\dot{v} - 1/2v\dot{w}' + \dots)\beta_0 + 1/2v'\dot{v}' + \dots \right) \sin(2\beta_0 x) \\ &+ \left(1/2w\dot{w} - 1/2v\dot{v} \right) \beta_0^2 + \left(1/2w\dot{w}' + \dots \right) \beta_0 + 1/2w'\dot{v}' + \dots \\ \omega_y &= \left(\left(1/4wv\dot{w} - 1/8v^2\dot{v} + \dots \right) \beta_0^3 + \left(-1/4\dot{v}v'w - 1/4v'\dot{v}w + \dots \right) \beta_0^2 \right) \cos(\Omega t - 3\beta_0 x) \\ &+ \left(-1/4\dot{w}'v'w' + 1/4v'\dot{v}' + \dots \right) \beta_0 + 1/8\dot{w}'v'^2 - 1/8\dot{w}'w'^2 + \dots \\ &+ \left(\left(v^2\dot{v} + 1/2w^2\dot{v} + \dots \right) \beta_0^3 + \left(v^2\dot{w}' - 1/2wv\dot{v}' + \dots \right) \beta_0^2 \right) \cos(\Omega t - \beta_0 x) \\ &+ \left(-\dot{\phi}\dot{w} + u'\dot{v} + 1/2\phi^2\dot{v} + \dots \right) \beta_0 + \left(u'\dot{w}' + \phi\dot{v}' + \dots \right) \\ &+ \left(\left(1/4wv\dot{w} + 1/8v^2\dot{v} + \dots \right) \beta_0^3 + \left(1/4\dot{v}v'w - 1/4v'\dot{v}w + \dots \right) \beta_0^2 \right) \cos(\Omega t + \beta_0 x) \\ &+ \left(1/4\dot{w}'v'w' + 1/4v'\dot{v}' + \dots \right) \beta_0 - 1/8\dot{w}'v'^2 + 1/8\dot{w}'w'^2 + \dots \\ &+ \left(\left(-1/4wv\dot{w} - 1/8v^2\dot{v} + \dots \right) \beta_0^3 + \left(-1/4\dot{w}w'v - 1/4ww'\dot{v} + \dots \right) \beta_0^2 \right) \sin(\Omega t - 3\beta_0 x) \\ &+ \left(1/4\dot{v}'wv' - 1/4w'\dot{w}w' + \dots \right) \beta_0 + 1/8\dot{v}'w'^2 - 1/8\dot{v}'v'^2 + \dots \\ &+ \left(\left(w^2\dot{w} + 1/2v^2\dot{w} + \dots \right) \beta_0^3 + \left(-w^2\dot{v}' + 1/2wv\dot{w}' + \dots \right) \beta_0^2 \right) \sin(\Omega t - \beta_0 x) \\ &+ \left(u'\dot{w} - \dot{w} + 1/2w'^2\dot{w} + \dots \right) \beta_0 + \left(-v'^2\dot{v}' + \phi\dot{w}' - \dot{u}'v' + \dots \right) \\ &+ \left(\left(-1/4wv\dot{w} - 1/8\dot{w}w^2 + 1/8v^2\dot{w} + \dots \right) \beta_0^3 + \left(1/4v'w\dot{w} + 1/4v\dot{w}' + \dots \right) \beta_0^2 \right) \sin(\Omega t + \beta_0 x) \\ &+ \left(1/4w'\dot{v}' - 1/8\dot{w}'v'^2 + \dots \right) \beta_0 - 1/8w'^2\dot{v}' + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_z = & \left(\begin{aligned} & (-1/4wv\dot{w} - 1/8v^2\dot{v} + \dots)\beta_0^3 + (-1/4\dot{v}v'w + 1/4v'v\dot{w} + \dots)\beta_0^2 \\ & + (-1/4\dot{w}'v'w' - 1/4v'v\dot{w}' + \dots)\beta_0 - 1/8\dot{w}'v'^2 + 1/8\dot{w}'w'^2 + \dots \end{aligned} \right) \sin(\Omega t - 3\beta_0 x) \\
& + \left(\begin{aligned} & (v^2\dot{v} + 1/2w^2\dot{v} + \dots)\beta_0^3 + (v^2\dot{w}' - 1/2wv\dot{v}' + \dots)\beta_0^2 \\ & + (-\phi\dot{w} - u'\dot{v} + 1/2\phi^2\dot{v} + \dots)\beta_0 + (-u'\dot{w}' + \phi\dot{v}' + \dots) \end{aligned} \right) \sin(\Omega t - \beta_0 x) \\
& + \left(\begin{aligned} & (1/4wv\dot{w} + 1/8v^2\dot{v} + \dots)\beta_0^3 + (1/4\dot{v}v'w - 1/4v'v\dot{w} + \dots)\beta_0^2 \\ & + (1/4\dot{w}'v'w' - 1/4v'v\dot{w}' + \dots)\beta_0 - 1/8\dot{w}'v'^2 + 1/8\dot{w}'w'^2 + \dots \end{aligned} \right) \sin(\Omega t + \beta_0 x) \\
& + \left(\begin{aligned} & (-1/4wv\dot{w} - 1/8v^2\dot{w} + \dots)\beta_0^3 + (-1/4\dot{w}w'v - 1/4ww'\dot{v} + \dots)\beta_0^2 \\ & + (1/4\dot{v}'wv' + 1/4w'w\dot{v}' + \dots)\beta_0 + 1/8\dot{v}'w'^2 - 1/8\dot{v}'v'^2 + \dots \end{aligned} \right) \cos(\Omega t - 3\beta_0 x) \\
& + \left(\begin{aligned} & (w^2\dot{w} + 1/2v^2\dot{w} + \dots)\beta_0^3 + (-w^2\dot{v}' + 1/2wv\dot{w}' + \dots)\beta_0^2 \\ & + (u'\dot{w} - \dot{w} + 1/2w'^2\dot{w} + \dots)\beta_0 + (-v'^2\dot{v}' + \phi\dot{w}' - \dot{u}'v' + \dots) \end{aligned} \right) \cos(\Omega t - \beta_0 x) \\
& \left(\begin{aligned} & (-1/4wv\dot{w} - 1/8\dot{w}w^2 + 1/8v^2\dot{w} + \dots)\beta_0^3 + (1/4v'w\dot{w} + 1/4v'w'\dot{w} + \dots)\beta_0^2 \\ & + (1/4w'v'\dot{w} + 1/8\dot{w}v'^2 + \dots)\beta_0 + 1/8w'^2\dot{v}' + \dots \end{aligned} \right) \cos(\Omega t + \beta_0 x)
\end{aligned}$$

(۱۸-۲)

و برای مولفه‌های انحنای در دستگاه مختصات پیچشی داریم،

$$\begin{aligned}
\rho_x = & \phi' + \left((-1/2vw' - 1/2wv')\beta_0^2 + (-1/2ww'' - 1/2w'^2 + \dots)\beta_0 + 1/2v'w'' + \dots \right) \cos(2\beta_0 x) \\
& + (1/2ww' - 1/2vv')\beta_0^2 + \left((-1/2w'v' - 1/2vw'' + \dots)\beta_0 + 1/2v'v'' + \dots \right) \sin(2\beta_0 x) \\
& (1/2wv' - 1/2vw')\beta_0^2 + (1/2ww'' + \dots)\beta_0 + 1/2w'v'' + \dots \\
\rho_y = & \left(\begin{aligned} & (1/4wvw' - 1/8v^2v' + \dots)\beta_0^3 + (-1/4v'^2w - 1/4v'v'w' + \dots)\beta_0^2 \\ & + (-1/4w''v'w' + 1/4v'v'' + \dots)\beta_0 + 1/8w''v'^2 - 1/8w''w'^2 + \dots \end{aligned} \right) \cos(\Omega t - 3\beta_0 x) \\
& + \left(\begin{aligned} & (v^2v' + 1/2w^2v' + \dots)\beta_0^3 + (v^2w'' - 1/2wvv'' + \dots)\beta_0^2 \\ & + (-\phi w' + u'v' + 1/2\phi^2v' + \dots)\beta_0 + (u'w'' + \phi v'' + \dots) \end{aligned} \right) \cos(\Omega t - \beta_0 x) \\
& + \left(\begin{aligned} & (1/4wvw' + 1/8v^2v' + \dots)\beta_0^3 + (1/4v'^2w - 1/4v'v'w' + \dots)\beta_0^2 \\ & + (1/4w''v'w' + 1/4v'v'' + \dots)\beta_0 - 1/8w''v'^2 + 1/8w''w'^2 + \dots \end{aligned} \right) \cos(\Omega t + \beta_0 x) \\
& + \left(\begin{aligned} & (-1/4wv' - 1/8v^2w' + \dots)\beta_0^3 + (-1/4w'^2v - 1/4ww'v' + \dots)\beta_0^2 \\ & + (1/4v''wv' - 1/4w'w'' + \dots)\beta_0 + 1/8v''w'^2 - 1/8v''v'^2 + \dots \end{aligned} \right) \sin(\Omega t - 3\beta_0 x) \\
& + \left(\begin{aligned} & (w^2w' + 1/2v^2w' + \dots)\beta_0^3 + (-w^2v'' + 1/2wvv'' + \dots)\beta_0^2 \\ & + (u'w' - w' + 1/2w'^2w' + \dots)\beta_0 + (-v'^2v'' + \phi w'' - u''v' + \dots) \end{aligned} \right) \sin(\Omega t - \beta_0 x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\begin{aligned} & (-1/4wv'v' - 1/8w'w^2 + 1/8v^2w' + \dots)\beta_0^3 + (1/4v'ww' + 1/4vw'^2 + \dots)\beta_0^2 \\ & + (1/4w'v'^2 - 1/8w'v'^2 + \dots)\beta_0 - 1/8w'^2v'' + \dots \end{aligned} \right) \sin(\Omega t + \beta_0 x) \\
\rho_z = & \left(\begin{aligned} & (-1/4wv'v' - 1/8v^2v' + \dots)\beta_0^3 + (-1/4v'^2w + 1/4v'vw' + \dots)\beta_0^2 \\ & + (-1/4w''vw' - 1/4v'v'' + \dots)\beta_0 - 1/8w''v'^2 - 1/8w''w'^2 + \dots \end{aligned} \right) \sin(\Omega t - 3\beta_0 x) \\
& + \left(\begin{aligned} & (v^2v' + 1/2w^2v' + \dots)\beta_0^3 + (v^2w'' - 1/2wv'' + \dots)\beta_0^2 \\ & + (-\phi w' - u'v' + 1/2\phi^2v' + \dots)\beta_0 + (-u'w'' + \phi v'' + \dots) \end{aligned} \right) \sin(\Omega t - \beta_0 x) \\
& + \left(\begin{aligned} & (1/4wv'v' + 1/8v^2v' + \dots)\beta_0^3 + (-1/4v'^2w - 1/4v'vw' + \dots)\beta_0^2 \\ & + (1/4w''vw' + 1/4v'v'' + \dots)\beta_0 - 1/8w''v'^2 + 1/8w''w'^2 + \dots \end{aligned} \right) \sin(\Omega t + \beta_0 x) \\
& + \left(\begin{aligned} & (-1/4wv'v' - 1/8v^2w' + \dots)\beta_0^3 + (-1/4w'^2v - 1/4ww'v' + \dots)\beta_0^2 \\ & + (1/4v''wv' + 1/4w'ww'' + \dots)\beta_0 + 1/8v''w'^2 - 1/8v''v'^2 + \dots \end{aligned} \right) \cos(\Omega t - 3\beta_0 x) \\
& + \left(\begin{aligned} & (w^2w' + 1/2v^2w' + \dots)\beta_0^3 + (-w^2v'' + 1/2wv'' + \dots)\beta_0^2 \\ & + (u'w' - w' + 1/2w^2w' + \dots)\beta_0 + (-v'^2v'' + \phi w'' - u''v' + \dots) \end{aligned} \right) \cos(\Omega t - \beta_0 x) \\
& \left(\begin{aligned} & (-1/4wv'v' - 1/8w'w^2 + 1/8v^2w' + \dots)\beta_0^3 + (1/4v'ww' + 1/4vw'^2 + \dots)\beta_0^2 \\ & + (1/4w'v'^2 + 1/8w'v'^2 + \dots)\beta_0 + 1/8w'^2v'' + \dots \end{aligned} \right) \cos(\Omega t + \beta_0 x)
\end{aligned}$$

(۱۹-۲)

با توجه به معادله (۲-۶) و بسط تیلور e^2 تا $O(\epsilon^4)$ نیز داریم،

$$e = \sqrt{(1+u')^2 + v'^2 + w'^2} - 1 \Rightarrow e^2 = u'^2 + u'v'^2 + u'w'^2 + 1/4v'^4 + 1/2v'^2w'^2 + 1/4w'^4 \quad (۲۰-۲)$$

۲-۱-۱- انرژی جنبشی

انرژی جنبشی یک تیر از پیش پیچیده شده شامل دو بخش انتقالی و دورانی تیر می باشد که

برابند با،

$$T_1 = \frac{1}{2} m \int_0^L (\dot{u}_{Gx}^2 + \dot{v}_{Gy}^2 + \dot{w}_{Gz}^2) dx \quad T_2 = \frac{1}{2} \int_0^L \{\omega\} [I] \{\omega\}^T dx \quad (۲۱-۲)$$

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} m \int_0^L (\dot{u}_{Gx}^2 + \dot{v}_{Gy}^2 + \dot{w}_{Gz}^2) dx + \frac{1}{2} \int_0^L (I_{xx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{zz}\omega_z + 2I_{yz}\omega_y\omega_z) dx$$

که جمله اول از رابطه انرژی جنبشی، شامل انرژی جنبشی ناشی از حرکت انتقالی و دوران ناشی

از خروج از مرکز تیر و جمله دوم نیز شامل دوران ناشی از تغییر زوایای اویلر تیر می باشد.

۲-۱-۲- انرژی پتانسیل

انرژی پتانسیل یک تیر برابر است با [48]،

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} \int_{-\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} (\sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{31}\varepsilon_{31} + \sigma_{12}\varepsilon_{12}) dx dy dz \quad (22-2)$$

که با توجه به تئوری‌های الاستیسیته،

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= e - y\rho_z + z\rho_y \\ \varepsilon_{31} &= \varepsilon_{xz} + y\rho_x \\ \varepsilon_{12} &= \varepsilon_{xy} - z\rho_x \end{aligned} \quad (23-2)$$

که e ، ε_{xz} و ε_{xy} به ترتیب، کرنش محوری و برشی در امتداد محور الاستیک و ρ_x ، ρ_y و ρ_z

انحنای محور الاستیک تیر هستند. با فرض اینکه تیر مورد نظر یک تیر اویلر-برنولی می‌باشد،

کرنشهای برشی صفر هستند. یعنی،

$$\varepsilon_{z\xi} = \varepsilon_{\xi\eta} = 0 \quad (24-2)$$

با جایگذاری روابط فوق و ساده سازی آنها داریم،

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L (A_{xx}e^2 + D_{xx}\rho_x^2 + D_{yy}\rho_y^2 + D_{zz}\rho_z^2 + 2D_{xz}\rho_z\rho_x + 2B_{xx}\rho_x e + 2B_{xz}\rho_z e) dx \quad (25-2)$$

برای تیرهای ایزوتروپیک، کوپلینگهای خطی بین خمش، کشش و پیچش صفر هستند. بنابراین

داریم،

$$D_{xz} = B_{xx} = B_{xz} = 0 \quad (26-2)$$

۲-۱-۳- انرژی اتلافی

با توجه به اینکه فرض شده است تیر پیچیده شده در یک محیط الاستیک با ضرایب میرایی

خارجی $c_v = c_w = c$ در راستای Y و Z دوران می‌کند، انرژی اتلافی تیر پیچیده شده ناشی از این

میرایی برابر است با،

$$W_{nc} = \frac{1}{2} \int_0^L c(\dot{v}_y + \dot{w}_z) dx \quad (27-2)$$

در نهایت، لاگرانژین برابر است با،

$$\ell = T - U + W_{nc} \quad (28-2)$$

برای بدست آوردن معادلات حرکت و شرایط مرزی مربوطه، از اصل همیلتونن تعمیم یافته استفاده می‌شود،

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \ell dt = 0 \quad (29-2)$$

با تعریف $\ell(s, t)$ به عنوان متغیر لاگرانژین و همچنین، به خاطر اینکه

می‌توان معادلات حرکت را به شکل زیر بدست آورد [122]،

$$\frac{\partial \ell}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \ell}{\partial q'_i} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \ell}{\partial q''_i} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \ell}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \left(\frac{\partial \ell}{\partial \dot{q}'_i} \right) = -Q_i^* \quad 0 < x < L \quad (30-2)$$

و شرایط مرزی نیز عبارتست از،

$$B1_i = \left\{ \left[\frac{\partial \ell}{\partial q'_i} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \ell}{\partial q''_i} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \ell}{\partial \dot{q}'_i} \right) \right] \delta q_i \right\}_{x=0}^{x=L} = 0 \quad (31-2)$$

$$B2_i = \left\{ \left[\frac{\partial \ell}{\partial q''_i} \right] \delta q'_i \right\}_{x=0}^{x=L} = 0$$

که $q_i(x, t)$ همان $u(x, t)$ ، $v(x, t)$ ، $w(x, t)$ می‌باشد.

حال، با قرار دادن روابط مذکور در روابط انرژی جنبشی و پتانسیل و سپس استفاده از رابطه

لاگرانژ و ساده سازی معادلات با استفاده از بسط تیلور تا مرتبه $O(\epsilon^3)$ ، معادلات ارتعاشی در دستگاه

مختصات پیچشی $\xi\eta\zeta$ داریم:

$$m\ddot{u} - A_{xx} \left(u'' + w'w'' + v'v'' + \beta_0(vw'' - wv'') + \beta_0^2(vv' + ww') \right) = 0 \quad (32-2)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ (-v''u' - 3/2v''v'^2 + -u''v' - v'w'' - 1/2v''w^2) + (vv'w + 1/2w'v^2 + 3/2w'w^2) \beta_0^3 \right. \\ & + (-vv'^2 - 2ww'v' + vw'^2 + -1/2v''v^2 - 3/2v''w^2 + vww'') \beta_0^2 \\ & + (wu' + 1/2w'v'^2 + 3v'v''w - vv'w'' + 1/2w'^3 + -vv''w' + ww'w'' + u''w) \beta_0 \left. \right\} A_{xx} \\ & + \left\{ -\dot{w}''\Omega\Delta I - 1/2\Delta I\ddot{v}'' + 1/2\Delta Dv^{(4)} + 4\Delta Dv\beta_0^4 + 11\Delta Dw'\beta_0^3 \right. \\ & + (3/2\Delta I\ddot{v} - 21/2\Delta Dv'' + 3\dot{w}\Omega\Delta I) \beta_0^2 + (2\Delta I\ddot{w}' - 4\Delta Dw''' - 4\dot{v}'\Omega\Delta I) \beta_0 \left. \right\} \cos(-4\beta_0 x + 2\Omega t) \\ & + \left\{ \dot{v}''\Delta I\Omega - 1/2\Delta I\ddot{w}'' + 1/2\Delta Dw^{(4)} + 4\Delta Dw\beta_0^4 - 11\Delta Dv'\beta_0^3 \right. \\ & + (3/2\Delta I\ddot{w} - 21/2\Delta Dw'' - 3\dot{v}\Delta I\Omega) \beta_0^2 + (-2\Delta I\ddot{v}' + 4\Delta Dv''' - 4\dot{w}'\Delta I\Omega) \beta_0 \left. \right\} \sin(-4\beta_0 x + 2\Omega t) \\ & + (-1/2I_{xx}\dot{w}\beta_0^2 + 1/2I_{xx}\dot{v}'\beta_0) \Omega \cos(2\beta_0 x) + (-1/2I_{xx}\dot{v}\beta_0^2 - 1/2I_{xx}\dot{w}'\beta_0) \Omega \sin(2\beta_0 x) \\ & + (-\dot{w}'' + 1/2\dot{w}\beta_0^2 - 3/2\dot{v}'\beta_0) \Omega I_{xx} + \Sigma Dw'\beta_0^3 + (1/2\Sigma I\ddot{v} - 5/2\Sigma Dv'') \beta_0^2 \\ & + (-2\Sigma Dw''' + \Sigma I\dot{w}') \beta_0 + m\ddot{v} - 1/2\Sigma I\ddot{v}'' + 1/2\Sigma Dv^{(4)} + cv \cos(\beta_0 x) - cw \sin(\beta_0 x) \\ & + me_w \Omega^2 \sin(-\beta_0 x + \Omega t) - me_v \Omega^2 \cos(-\beta_0 x + \Omega t) = 0 \end{aligned} \quad (33-2)$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ (w''u' + 3/2w''w'^2 + u''w' + v'w'v'' - 1/2w''v'^2) + (vw'w' + 1/2v'w'^2 + 3/2v'v'^2) \right\} \beta_0^3 \\
& + (-ww'^2 + 2vw'v' + ww'^2 + 1/2w''w'^2 + 3/2w''v'^2 - vww'') \beta_0^2 \\
& + (v'u' + 1/2v'w'^2 + 3vw'w'' - ww'v'' + 1/2v'^3 - ww''v' + vv'v'' + u''v) \beta_0 \} A_{xx} \\
& + \left\{ \dot{w}''\Omega\Delta I - 1/2\Delta I\ddot{w}'' + 1/2\Delta D w^{(4)} + 4\Delta D w \beta_0^4 - 11\Delta D v' \beta_0^3 \right. \\
& + (3/2\Delta I\ddot{w} - 21/2\Delta D w'' - 3\dot{v}\Omega\Delta I) \beta_0^2 + (-2\Delta I\ddot{v} + 4\Delta D v''' - 4\dot{w}'\Omega\Delta I) \beta_0 \} \cos(-4\beta_0 x + 2\Omega t) \\
& + \left\{ \dot{w}''\Delta I\Omega + 1/2\Delta I\ddot{v}'' - 1/2\Delta D v^{(4)} + 4\Delta D v \beta_0^4 - 11\Delta D w' \beta_0^3 \right. \\
& + (-3/2\Delta I\ddot{v} + 21/2\Delta D v'' - 3\dot{w}\Delta I\Omega) \beta_0^2 + (-2\Delta I\ddot{w}' + 4\Delta D w''' + 4\dot{v}'\Delta I\Omega) \beta_0 \} \sin(-4\beta_0 x + 2\Omega t) \\
& + (1/2I_{xx}\dot{v}\beta_0^2 + 1/2I_{xx}\dot{w}'\beta_0) \Omega \cos(2\beta_0 x) + (-1/2I_{xx}\dot{w}\beta_0^2 + 1/2I_{xx}\dot{v}'\beta_0) \Omega \sin(2\beta_0 x) \\
& + (-\dot{v}'' + 1/2\dot{v}\beta_0^2 + 3/2\dot{w}'\beta_0) \Omega I_{xx} + \Sigma D v' \beta_0^3 + (-1/2\Sigma I\ddot{w} + 5/2\Sigma D w'') \beta_0^2 \\
& + (-2\Sigma D v''' + \Sigma I\dot{v}') \beta_0 - m\dot{w} + 1/2\Sigma I\ddot{w}'' - 1/2\Sigma D w^{(4)} - c\dot{v} \sin(\beta_0 x) - c\dot{w} \cos(\beta_0 x) \\
& + me_\eta \Omega^2 \sin(-\beta_0 x + \Omega t) + me_\zeta \Omega^2 \cos(-\beta_0 x + \Omega t) = 0
\end{aligned} \tag{۳۴-۲}$$

با شرایط مرزی

$$x=L \Rightarrow \begin{cases} v=w=0 \\ v''=w''=0 \end{cases} \quad \text{و} \quad x=0 \Rightarrow \begin{cases} v=w=0 \\ v''=w''=0 \end{cases}$$

اگر نسبت عرض و پهناى سطح مقطع تیر به طول تیر (ضریب لاغری) خیلی کوچک باشد، می-

توان از اینرسی طولی تیر صرف نظر کرد [33]، $m\ddot{u} = 0$ ، از این رو با توجه به رابطه (۳۲-۲) و شرایط

مرزی $u(0) = u(L) = 0$ داریم،

$$\begin{aligned}
u' = & -\frac{1}{2}\beta_0^2 (v^2 + w^2) + \beta_0 (-vw' + ww') - \frac{1}{2}(v'^2 + w'^2) \\
& + \frac{1}{2L} \int_0^L (v'^2 + w'^2 - 2\beta_0 (v'w - vw') + \beta_0^2 (v^2 + w^2)) dx
\end{aligned} \tag{۳۵-۲}$$

حال با قرار دادن رابطه (۳۵-۲) در معادلات ارتعاش عرضی تیر پیچیده شده (روابط (۳۳-۲) و

(۳۴-۲))، معادلات حرکت ارتعاشات عرضی تیر پیچیده شده برابر است با،

$$\begin{aligned}
& +1/2 \frac{2\ddot{v}''\pi^2\Sigma I - 2\ddot{v}\pi^4 + 2\pi^2\Omega Ix\dot{w}'' - 2v^{(4)}}{\pi^4} - 2\frac{w'\beta_0^3}{\pi^4} + 1/2 \frac{(-\pi^2\Omega Ix\dot{w} + 10v'' - 2\Sigma I\pi^2\ddot{v})\beta_0^2}{\pi^4} \\
& + 1/2 \frac{(3\pi^2\Omega Ix\dot{v}' - 4\ddot{w}'\pi^2\Sigma I + 8w''')\beta_0}{\pi^4} - c\dot{w}\cos(\beta_0x) + c\dot{v}\sin(\beta_0x) \\
& + \frac{\Omega I_x}{2\pi^2} \left[(\dot{w}\beta_0^2 - \dot{v}'\beta_0)\cos(2\beta_0\xi)x + (\dot{v}\beta_0^2 + \dot{w}'\beta_0)\sin(2\beta_0x) \right] \\
& + e_v\Omega^2\cos(\beta_0x - \Omega t) + e_w\Omega^2\sin(\beta_0x - \Omega t) \\
& + \left(-8\frac{v\Delta D\beta_0^4}{\pi^4} - 22\frac{w'\Delta D\beta_0^3}{\pi^4} + 1/2 \frac{(42v''\Delta D - 12\pi^2\Omega\dot{w}\Delta I - 6\ddot{v}\pi^2\Delta I)\beta_0^2}{\pi^4} \right. \\
& \left. + 1/2 \frac{(16w'''\Delta D + 16\pi^2\Omega\dot{v}'\Delta I - 8\ddot{w}'\pi^2\Delta I)\beta_0}{\pi^4} + 1/2 \frac{2\ddot{v}''\pi^2\Delta I - 2v^{(4)}\Delta D + 4\pi^2\Omega\dot{w}''\Delta I}{\pi^4} \right) \cos(-2\Omega t + 4\beta_0x) \\
& + \left(8\frac{w\Delta D\beta_0^4}{\pi^4} - 22\frac{v'\Delta D\beta_0^3}{\pi^4} + 1/2 \frac{(-12\pi^2\Omega\dot{v}\Delta I - 42w''\Delta D + 6\ddot{w}\pi^2\Delta I)\beta_0^2}{\pi^4} \right. \\
& \left. + 1/2 \frac{(-16\pi^2\Omega\dot{w}'\Delta I - 8\ddot{v}'\pi^2\Delta I + 16v'''\Delta D)\beta_0}{\pi^4} + 1/2 \frac{4\pi^2\Omega\dot{v}''\Delta I - 2\ddot{w}''\pi^2\Delta I + 2w^{(4)}\Delta D}{\pi^4} \right) \sin(-2\Omega t + 4\beta_0x) \\
& + \frac{\mu}{\pi^4} (-w'\beta_0 + v'') \left(\beta_0^2 \int_0^1 (v^2 + w^2) dx + \beta_0 \int_0^1 (vw' - v'w) dx + \int_0^1 (v'^2 + w'^2) dx \right)
\end{aligned}$$

(۳۶-۲)

$$\begin{aligned}
& + 1/2 \frac{2\ddot{w}''\pi^2\Sigma I - 2\ddot{w}\pi^4 + 2\pi^2\Omega Ix\dot{v}'' - 2w^{(4)}}{\pi^4} + 2\frac{v'\beta_0^3}{\pi^4} + 1/2 \frac{(\pi^2\Omega Ix\dot{v} + 10w'' - 2\Sigma I\pi^2\ddot{w})\beta_0^2}{\pi^4} \\
& + 1/2 \frac{(3\pi^2\Omega Ix\dot{w}' + 4\ddot{v}'\pi^2\Sigma I - 8v''')\beta_0}{\pi^4} - c\dot{w}\cos(\beta_0x) - c\dot{v}\sin(\beta_0x) \\
& + \frac{\Omega I_x}{2\pi^2} (\dot{v}\beta_0^2 + \dot{w}'\beta_0)\cos(2\beta_0x) + \frac{\Omega I_x}{2\pi^2} (-\dot{w}\beta_0^2 + \dot{v}'\beta_0)\sin(2\beta_0x) \\
& + e_w\Omega^2\cos(\beta_0x - \Omega t) - e_v\Omega^2\sin(\beta_0x - \Omega t) \\
& + \left(8\frac{w\Delta D\beta_0^4}{\pi^4} - 22\frac{v'\Delta D\beta_0^3}{\pi^4} + 1/2 \frac{(-42w''\Delta D - 12\pi^2\Omega\dot{v}\Delta I + 6\ddot{w}\pi^2\Delta I)\beta_0^2}{\pi^4} \right. \\
& \left. + 1/2 \frac{(16v'''\Delta D - 16\pi^2\Omega\dot{w}'\Delta I - 8\ddot{v}'\pi^2\Delta I)\beta_0}{\pi^4} + 1/2 \frac{-2\ddot{w}''\pi^2\Delta I + 2w^{(4)}\Delta D + 4\pi^2\Omega\dot{v}''\Delta I}{\pi^4} \right) \cos(-2\Omega t + 4\beta_0x) \\
& + \left(8\frac{v\Delta D\beta_0^4}{\pi^4} + 22\frac{w'\Delta D\beta_0^3}{\pi^4} + 1/2 \frac{(12\pi^2\Omega\dot{v}\Delta I - 42w''\Delta D + 6\ddot{w}\pi^2\Delta I)\beta_0^2}{\pi^4} \right. \\
& \left. + 1/2 \frac{(-16\pi^2\Omega\dot{v}'\Delta I + 8\ddot{w}'\pi^2\Delta I - 16w'''\Delta D)\beta_0}{\pi^4} + 1/2 \frac{-4\pi^2\Omega\dot{w}''\Delta I - 2\ddot{v}''\pi^2\Delta I + 2v^{(4)}\Delta D}{\pi^4} \right) \sin(-2\Omega t + 4\beta_0x) \\
& + \frac{\mu}{\pi^4} (v'\beta_0 + w'') \left(\beta_0^2 \int_0^1 (v^2 + w^2) dx + \beta_0 \int_0^1 (vw' - v'w) dx + \int_0^1 (v'^2 + w'^2) dx \right)
\end{aligned}$$

(۳۷-۲)

در معادلات فوق داریم،

$$\Delta D = \frac{(D_{\xi\xi} - D_{\eta\eta})}{2}, \quad \Delta I = \frac{(I_{\xi\xi} - I_{\eta\eta})}{2}, \quad \Sigma D = \frac{(D_{\xi\xi} + D_{\eta\eta})}{2}, \quad \Sigma I = \frac{(I_{\xi\xi} + I_{\eta\eta})}{2}, \quad (38-2)$$

$$u = u_\zeta, \quad v = v_\eta, \quad w = w_\xi$$

برای بی بعد سازی معادلات به شکل زیر عمل شده است،

$$u^* = \frac{u}{h_0}, \quad v^* = \frac{v}{h_0}, \quad w^* = \frac{w}{h_0}, \quad x^* = \frac{x}{L}, \quad t^* = \frac{t}{\sqrt{\frac{mL^4}{\pi^4 \Sigma D}}}, \quad \Omega^* = \frac{\Omega}{\sqrt{\frac{\pi^4 \Sigma D}{mL^4}}},$$

$$I_{xx}^* = I_{\xi\xi}^* = \frac{\pi^2 I_{xx}}{mL^2}, \quad \Sigma I^* = \frac{\pi^2 \Sigma I}{mL^2}, \quad \Delta I^* = \frac{\pi^2 \Delta I}{mL^2}, \quad \Delta D^* = \frac{\pi^2 \Delta D}{mL^2}, \quad (39-2)$$

$$c^* = c \frac{\pi^2 \sqrt{m \Sigma D}}{L^2}, \quad \mu = \frac{h_0^2 A_{xx}}{2 \Sigma D}$$

که h_0 و L ، به ترتیب اندازه ضخامت مقطع و طول تیر هستند. برای راحتی، در معادلات از علامت (*) صرف نظر شده است. اکنون برای تحلیل معادلات حرکت فوق، از روشهای مقیاس‌های چند گانه و گالرکین برای بدست آوردن پاسخهای تقریبی به شکل تحلیلی و عددی استفاده می‌شود. همچنین، به منظور صحنه گذاری روابط، از روش عددی رانگ-کوتا نیز استفاده می‌شود. در گام اول، روش مقیاس‌های چند گانه مستقیماً روی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی اعمال شده در حالی که در گام بعدی، با اعمال روش گسسته‌سازی گالرکین روی معادلات حرکت، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل شده و سپس روش مقیاس‌های چندگانه روی معادلات حاصل اعمال می‌شود.

۲-۲- تحلیل پایداری با اعمال روش مقیاس‌های چند گانه به معادلات دیفرانسیل مشتقات جزئی (PDE)

اکنون به منظور حل معادلات بی بعد شده بدست آمده، از تئوری اغتشاشات و روش مقیاس‌های چند گانه برای تحلیل معادلات دیفرانسیل با مشتق جزئی استفاده می‌شود. به این ترتیب، با توجه به وجود تنها جملات غیر خطی مرتبه سه در معادلات، تقریب زیر برای مولفه‌های جابجایی عرضی تیر فرض می‌شود،

$$v(x, t) = \varepsilon v_1(x, T_0, T_2) + \varepsilon^3 v_3(x, T_0, T_2) + \dots$$

$$w(x, t) = \varepsilon w_1(x, T_0, T_2) + \varepsilon^3 w_3(x, T_0, T_2) + \dots \quad (40-2)$$

لازم به ذکر است اگر در تقریب فوق، جملات w_2, v_2, w_0, v_0 ظاهر شوند، پاسخ آنها در ادامه صفر خواهد شد. $T_n (= \varepsilon^n t)$ به مقیاس‌های زمانی اشاره دارد. به گونه‌ای که $T_0 = t$ و $T_2 = \varepsilon^2 t$. از طرفی،

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= D_0 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) &= D_0^2 + 2\varepsilon^2 D_2 D_0 + \dots \end{aligned} \quad (41-2)$$

که D_0 و D_2 به ترتیب برابرند با، $\frac{\partial}{\partial T_0}$ و $\frac{\partial}{\partial T_2}$ به منظور بالانس پارامترهای غیرخطی در معادلات و استخراج رزونانس‌های اولیه و پارامتریک، قرار می‌دهیم،

$$c = \varepsilon^2 \bar{c}, \Delta D = \varepsilon^2 \overline{\Delta D}, \Delta I = \varepsilon^2 \overline{\Delta I}, e_\zeta = \varepsilon^3 \bar{e}_\zeta, e_\eta = \varepsilon^3 \bar{e}_\eta \quad (42-2)$$

به این ترتیب، با اعمال روش مقیاس‌های چندگانه و جدا سازی عبارات مرتبه $O(\varepsilon^3)$ و $O(\varepsilon)$ داریم،

$O(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} &\frac{\Omega I_x}{2\pi^2} \left[(\beta_0^2 D_0 w_1 - \beta_0 D_0 v_1') \cos(2\beta_0 x) + (\beta_0^2 D_0 v_1 + \beta_0 D_0 w_1' \beta_0) \sin(2\beta_0 x) \right] \\ &- 2 \frac{\beta_0^3 w_1''}{\pi^4} + 1/2 \left(\frac{-2 \Sigma I D_0^2 v_1 \pi^2 - \Omega I_x D_0 w_1 \pi^2 + 10 v_1''}{\pi^4} \right) \beta_0^2 \\ &+ 1/2 \frac{(-4 \Sigma I D_0^2 w_1' \pi^2 + 3 \Omega I_x D_0 v_1' \pi^2 + 8 w_1''') \beta_0}{\pi^4} \\ &+ 1/2 \frac{-2 v_1^{(4)} + 2 \Sigma I D_0^2 v_1'' \pi^2 - 2 D_0^2 v_1 \pi^4 + 2 \Omega I_x D_0 w_1'' \pi^2}{\pi^4} = 0 \end{aligned} \quad (43-2)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\Omega I_x}{2\pi^2} \left[(\beta_0^2 D_0 v_1 + \beta_0 D_0 w_1') \cos(2\beta_0 x) + (-D_0 w_1 \beta_0^2 + D_0 v_1' \beta_0) \sin(2\beta_0 x) \right] \\ &+ 2 \frac{\beta_0^3 v_1''}{\pi^4} + 1/2 \left(\frac{-2 \Sigma I D_0^2 w_1 \pi^2 + \Omega I_x D_0 v_1 \pi^2 + 10 w_1''}{\pi^4} \right) \beta_0^2 \\ &+ 1/2 \frac{(4 \Sigma I D_0^2 v_1' \pi^2 + 3 \Omega I_x D_0 w_1' \pi^2 - 8 v_1''') \beta_0}{\pi^4} \\ &+ 1/2 \frac{-2 w_1^{(4)} + 2 \Sigma I D_0^2 w_1'' \pi^2 - 2 D_0^2 w_1 \pi^4 - 2 \Omega I_x D_0 v_1'' \pi^2}{\pi^4} = 0 \end{aligned} \quad (44-2)$$

$O(\varepsilon^3)$:

$$\begin{aligned}
& \left[(-6D_0v_1\beta_0^2 - 8D_0w_1'\beta_0 + 2D_0v_1'')\Omega\Delta I + \frac{8\Delta D\beta_0^4}{\pi^2}w_1 - \frac{22\beta_0^3\Delta D}{\pi^2}v_1' \right. \\
& \left. + \left(-\frac{21\Delta D}{\pi^2}w_1'' + 3\Delta ID_0^2w_1 \right)\beta_0^2 + \left(\frac{8\Delta D}{\pi^2}v_1''' - 4\Delta ID_0^2v_1' \right)\beta_0 - \Delta ID_0^2w_1'' + \frac{\Delta D}{\pi^2}w_1^{(4)} \right] \frac{\sin(4\beta_0x - 2\Omega T_0)}{\pi^2} \\
& \left[(-6D_0v_1\beta_0^2 + 8D_0v_1'\beta_0 + 2D_0w_1'')\Omega\Delta I - \frac{8\Delta D\beta_0^4}{\pi^2}v_1 - \frac{22\beta_0^3\Delta D}{\pi^2}w_1' \right. \\
& \left. + \left(\frac{21\Delta D}{\pi^2}v_1'' - 3\Delta ID_0^2v_1 \right)\beta_0^2 + \left(\frac{8\Delta D}{\pi^2}w_1''' - 4\Delta ID_0^2w_1' \right)\beta_0 + \Delta ID_0^2v_1'' - \frac{\Delta D}{\pi^2}v_1^{(4)} \right] \frac{\cos(4\beta_0x - 2\Omega T_0)}{\pi^2} \\
& + \frac{I_{xx}\Omega}{2\pi^2} \left[((D_2w_1 + D_0w_3)\beta_0^2 - (D_2v_1' + D_0v_3')\beta_0)\cos(2\beta_0x) + ((D_2v_1 + D_0v_3)\beta_0^2 + (D_2w_1' + D_0v_3')\beta_0)\sin(2\beta_0x) \right] \quad (45-2) \\
& + \frac{I_{xx}\Omega}{\pi^2} (-1/2\beta_0^2(D_2w_1 + D_0w_3) + 3/2\beta_0(D_0v_3' + D_2v_1') + (D_2w_1'' + D_0w_3'')) \\
& + \frac{\mu}{\pi^4} (v_1'\beta_0 + w_1'') \left(\beta_0^2 \int_0^1 (v_1^2 + w_1^2) dx + 2\beta_0 \int_0^1 (v_1w_1' - v_1'w_1) dx + \int_0^1 (v_1'^2 + w_1'^2) dx \right) \\
& + \left(-\Sigma ID_0^2v_3 - 2\Sigma ID_0D_2v_1 + \frac{5}{\pi^2}v_3'' \right) \frac{\beta_0^2}{\pi^2} + \left(-4\Sigma ID_0D_2w_1' - 2\Sigma ID_0^2w_3' + \frac{4}{\pi^2}w_3''' \right) \frac{\beta_0}{\pi^2} \\
& - 2D_0D_2v_1 - D_0^2v_3 - \frac{v_3^{(4)}}{\pi^4} + \frac{1}{\pi^2} (\Sigma ID_0^2v_3'' + 2\Sigma ID_0D_2v_1'') - \frac{2\beta_0^3}{\pi^4}w_3' \\
& + \Omega^2 e_\eta(x) \cos(\beta_0x - \Omega T_0) + \Omega^2 e_\varepsilon(x) \sin(\beta_0x - \Omega T_0) - cD_0v_1 \cos(\beta_0x) + cD_0w_1 \sin(\beta_0x) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[(-6D_0v_1\beta_0^2 - 8D_0w_1'\beta_0 + 2D_0v_1'')\Omega\Delta I + \frac{8\Delta D\beta_0^4}{\pi^2}w_1 - \frac{22\beta_0^3\Delta D}{\pi^2}v_1' \right. \\
& \left. + \left(-\frac{21\Delta D}{\pi^2}w_1'' + 3\Delta ID_0^2w_1 \right)\beta_0^2 + \left(\frac{8\Delta D}{\pi^2}v_1''' - 4\Delta ID_0^2v_1' \right)\beta_0 - \Delta ID_0^2w_1'' + \frac{\Delta D}{\pi^2}w_1^{(4)} \right] \frac{\cos(4\beta_0x - 2\Omega T_0)}{\pi^2} \\
& \left[(6D_0w_1\beta_0^2 + 8D_0v_1'\beta_0 + 2D_0w_1'')\Omega\Delta I + \frac{8\Delta D\beta_0^4}{\pi^2}v_1 + \frac{22\beta_0^3\Delta D}{\pi^2}w_1' \right. \\
& \left. + \left(-\frac{21\Delta D}{\pi^2}v_1'' + 3\Delta ID_0^2v_1 \right)\beta_0^2 + \left(-\frac{8\Delta D}{\pi^2}w_1''' - 4\Delta ID_0^2w_1' \right)\beta_0 + \Delta ID_0^2v_1'' - \frac{\Delta D}{\pi^2}v_1^{(4)} \right] \frac{\sin(4\beta_0x - 2\Omega T_0)}{\pi^2} \\
& + \frac{I_{xx}\Omega}{2\pi^2} \left[-(D_2w_1 + D_0w_3)\beta_0^2 + (D_2v_1' + D_0v_3')\beta_0\right]\sin(2\beta_0x) + ((D_2v_1 + D_0v_3)\beta_0^2 + (D_2w_1' + D_0v_3')\beta_0)\cos(2\beta_0x) \quad (46-2) \\
& + \frac{I_{xx}\Omega}{\pi^2} (1/2\beta_0^2(D_2v_1 + D_0v_3) + 3/2\beta_0(D_0w_3' + D_2w_1') + (D_2w_1'' + D_0w_3'')) \\
& + \frac{\mu}{\pi^4} (v_1'\beta_0 + w_1'') \left(\beta_0^2 \int_0^1 (v_1^2 + w_1^2) dx + 2\beta_0 \int_0^1 (v_1w_1' - v_1'w_1) dx + \int_0^1 (v_1'^2 + w_1'^2) dx \right) \\
& + \left(-\Sigma ID_0^2w_3 - 2\Sigma ID_0D_2w_1 + \frac{5}{\pi^2}w_3'' \right) \frac{\beta_0^2}{\pi^2} + \left(4\Sigma ID_0D_2v_1' - 2\Sigma ID_0^2v_3' - \frac{4}{\pi^2}v_3''' \right) \frac{\beta_0}{\pi^2} \\
& - 2D_0D_2w_1 - D_0^2w_3 - \frac{w_3^{(4)}}{\pi^4} + \frac{1}{\pi^2} (\Sigma ID_0^2w_3'' + 2\Sigma ID_0D_2v_1'') - \frac{2\beta_0^3}{\pi^4}v_3' \\
& - \Omega^2 e_\eta(x) \sin(\beta_0x - \Omega T_0) + \Omega^2 e_\varepsilon(x) \cos(\beta_0x - \Omega T_0) - cD_0w_1 \cos(\beta_0x) - cD_0v_1 \sin(\beta_0x) = 0
\end{aligned}$$

حل معادلات مرتبه اول ε ((43-2) و ((44-2) را می توان به شکل زیر تخمین زد،

$$\begin{aligned}
v_1(x, T_0, T_2) &= \Phi_f(x) \left(A_1(T_2)e^{i\omega_f T_0} + \bar{A}_1(T_2)e^{-i\omega_f T_0} \right) + \Phi_b(x) \left(A_2(T_2)e^{i\omega_b T_0} + \bar{A}_2(T_2)e^{-i\omega_b T_0} \right) \\
w_1(x, T_0, T_2) &= \Phi_f(x) \left(-iA_1(T_2)e^{i\omega_f T_0} + i\bar{A}_1(T_2)e^{-i\omega_f T_0} \right) + \Phi_b(x) \left(-iA_2(T_2)e^{i\omega_b T_0} + i\bar{A}_2(T_2)e^{-i\omega_b T_0} \right)
\end{aligned} \quad (47-2)$$

که ω_b و ω_f فرکانسهای خطی همسو و ناهمسو بوده که از خطی سازی معادلات (۲-۳۶) و (۲-۳۷)

(۳۷) و حل مسئله مقدار ویژه بدست می‌آیند و برابرند با،

$$\omega_{f,b} = \frac{1}{2} \frac{\delta_1 \pm \sqrt{\delta_3}}{\delta_2} \quad (48-2)$$

که

$$\delta_1 = I_{xx} \Omega (\beta_0^2 + 2\pi^2 n^2) \quad , \quad \delta_2 = 2(\pi^2 + (\pi^2 n^2 + \beta_0^2) \Sigma I)$$

$$\delta_3 = (I_{xx} \Omega \beta_0^2)^2 + 4 \left[4\pi^4 n^6 \Sigma I + 4\pi^4 n^4 + (I_{xx} \Omega \pi n \beta_0)^2 + (I_{xx} \Omega \pi^2 n^2)^2 \right]$$

$$+ 24 \Sigma I (\beta_0 \pi n^2)^2 + 20 (\pi n \beta_0)^2 + 20 \Sigma I (\beta_0^2 n)^2$$

و Φ_b و Φ_f نیز به ترتیب شکل مدهای خطی تیر دو سر مفصل متناظر با فرکانسهای خطی

همسوی ω_f و ناهمسوی ω_b هستند. به منظور بررسی رزونانسهای اولیه و پارامتریک، نزدیکی فرکانس

Ω به فرکانس طبیعی اولیه ω_f با در نظر گرفتن پارامتر تنظیم کننده σ به شکل زیر تخمین زده می-

شود،

$$\Omega = \omega_f + \varepsilon^2 \sigma \quad (49-2)$$

اکنون، با قرار دادن رابطه (۲-۴۹) و جواب مرتبه یک برای v و w (رابطه (۲-۴۷)) در معادلات

مرتبه ۳ برای هر دو v و w ، معادلات مرتبه ۳ را با جدا کردن و مرتب سازی ضرایب $e^{i\omega_b T_0}$ و $e^{i\omega_f T_0}$

به منظور از بین بردن ضرایب جملات سکولار و حذف small divisorهای موجود به شکل زیر ساده

می‌کنیم،

$$\left[(\beta_0^2 D_0 w_3 + i \beta_0^2 D_0 v_3 + i \beta_0 D_0 w_3' - \beta_0 D_0 v_3') e^{-2i\beta_0 x} + (\beta_0^2 D_0 w_3 - i \beta_0^2 D_0 v_3 - i \beta_0 D_0 w_3' - \beta_0 D_0 v_3') e^{2i\beta_0 x} \right.$$

$$+ 3\beta_0 D_0 v_3' - \beta_0^2 D_0 w_3 + 2D_0 w_3'' \left. \right] \frac{I_{xx} \Omega}{2\pi^2} + \frac{10\beta_0^2}{\pi^4} v_3'' - \frac{4\beta_0 \Sigma I}{\pi^2} D_0^2 w_3' - \frac{4\beta_0^3}{\pi^4} w_3' - 2 \frac{(\pi^2 + \beta_0^2 \Sigma I)}{\pi^2} D_0^2 v_3$$

$$+ \frac{8\beta_0}{\pi^4} w_3''' - 2 \frac{v_3^{(4)}}{\pi^4} + 2 \frac{\Sigma I}{\pi^2} D_0^2 v_3'' = P_{f,v}(x, T_2) e^{i\omega_f T_0} + P_{b,v}(x, T_2) e^{i\omega_b T_0} + CC + N.S.T$$

(۵۰-۲)

9

$$\begin{aligned} & \left[(\beta_0^2 D_0 v_3 - i\beta_0^2 D_0 w_3 + i\beta_0 D_0 v_3' + \beta_0 D_0 w_3') e^{-2i\beta_0 x} + (\beta_0^2 D_0 v_3 + i\beta_0^2 D_0 w_3 - i\beta_0 D_0 v_3' + \beta_0 D_0 w_3') e^{2i\beta_0 x} \right. \\ & \left. + 3\beta_0 D_0 w_3' + \beta_0^2 D_0 v_3 - 2D_0 v_3'' \right] \frac{I_{xx}\Omega}{2\pi^2} + \frac{10\beta_0^2}{\pi^4} w_3'' + \frac{4\beta_0 \Sigma I}{\pi^2} D_0^2 v_3' + \frac{4\beta_0^3}{\pi^4} v_3' - 2 \frac{(\pi^2 + \beta_0^2 \Sigma I)}{\pi^2} D_0^2 w_3 \\ & - \frac{8\beta_0}{\pi^4} v_3''' - 2 \frac{w_3^{(4)}}{\pi^4} + 2 \frac{\Sigma I}{\pi^2} D_0^2 w_3'' = P_{f,w}(x, T_2) e^{i\omega_f T_2} + P_{b,w}(x, T_2) e^{i\omega_b T_2} + CC + N.S.T \end{aligned} \quad (51-2)$$

که CC و $N.S.T$ به معنی مختلط مزدوج و ضرایب غیر سکولار می‌باشند.

پس از بدست آوردن ضرایب سکولار، از آنجا که بخشهای همگن معادلات (50-2) و (51-2) دارای پاسخهای غیر بدیهی است، با ضرب طرفین معادلات به ترتیب در $\Phi_b(x)$ و $\Phi_f(x)$ و انتگرالگیری از $x=0$ تا $x=1$ ، با استفاده از شرایط حل پذیری برای آنها داریم،

$$\int_0^1 \Phi_f(x) P_f(x, T_2) dx = 0 \quad \text{و} \quad \int_0^1 \Phi_b(x) P_b(x, T_2) dx = 0 \quad (52-2)$$

که

$$P_f(x, T_2) = P_{f,v}(x, T_2) + iP_{f,w}(x, T_2) \quad \text{و} \quad P_b(x, T_2) = P_{b,v}(x, T_2) + iP_{b,w}(x, T_2) \quad (53-2)$$

و $P_{f,w}$ ، $P_{f,v}$ و $P_{b,v}$ و $P_{b,w}$ ضرایب سکولار معادلات مرتبه سوم (50-2) و (51-2) بوده و برابرند

با،

$$\begin{aligned} P_{f,v} = & \frac{1}{\pi^2} \left[\left(-\frac{1}{4} (\beta_0 \Phi_f' + i\beta_0^2 \Phi_f) e^{2i\beta_0 x} + \frac{1}{4} i\beta_0^2 \Phi_f + \frac{3}{4} \beta_0 \Phi_f' - \frac{1}{2} i\Phi_f'' \right) \Omega I_{xx} \right. \\ & \left. - (i\beta_0^2 \Sigma I \Phi_f + 2\beta_0 \Sigma I \Phi_f' - i\Sigma I \Phi_f'' + i\pi^2 \Phi_f) \omega_f \right] A_1' \\ & + \frac{1}{2\pi^4} \left[(\Phi_f'' + i\beta_0 \Phi_f') \int_0^1 \Phi_b'^2 dx + (\beta_0^2 \Phi_f'' + i\beta_0^3 \Phi_f') \int_0^1 \Phi_b^2 dx + (\Phi_b'' + i\beta_0 \Phi_b') \int_0^1 \Phi_f' \Phi_b' dx + (\beta_0^2 \Phi_b'' + i\beta_0^3 \Phi_b') \int_0^1 \Phi_f \Phi_b dx \right. \\ & \left. + (-\beta_0^2 \Phi_b' + i\beta_0 \Phi_b'') \int_0^1 \Phi_b' \Phi_f dx + (-i\beta_0 \Phi_b'' + \beta_0^2 \Phi_b') \int_0^1 \Phi_f' \Phi_b dx \right] \mu \bar{A}_2 A_2 A_1 \\ & + \frac{1}{2\pi^4} \left[(\beta_0^2 \Phi_f'' + i\beta_0^3 \Phi_f') \int_0^1 \Phi_f^2 dx + (\Phi_f'' + i\beta_0 \Phi_f') \int_0^1 \Phi_f'^2 dx \right] \mu A_1^2 \bar{A}_1 - 1/2 i c e^{i\beta_0 x} \Phi_f A_1 \omega_f + \frac{1}{2} (e_\eta + i e_\xi) \Omega^2 e^{-i\beta_0 x} e^{i\sigma T_2} \\ & + \left[\frac{1}{\pi^2} (\Delta I \Phi_f'' - 4i\Delta I \beta_0 \Phi_f' - 3\Delta I \beta_0^2 \Phi_f) \Omega \omega_f + \frac{1}{\pi^4} \left(\frac{3}{2} \Delta I \Phi_f \omega_f^2 + \frac{21}{2} \Delta D \Phi_f'' \right) \beta_0^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{\pi^4} (4\Delta D \Phi_f''' + 2\pi^2 \Delta I \Phi_f' \omega_f^2) i\beta_0 - \frac{1}{2\pi^2} \Delta I \omega_f^2 \Phi_f'' - \frac{1}{2\pi^4} \Delta D \Phi_f^{(4)} - \frac{1}{\pi^4} (4\Delta D \beta_0^4 \Phi_f + 11i\Delta D \beta_0^3 \Phi_f') \right] \bar{A}_1 e^{2i\sigma T_2} e^{-4i\beta_0 x} \end{aligned} \quad (54-2)$$

$$\begin{aligned}
P_{b,v} = & \frac{1}{\pi^2} \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \left(\beta_0 \Phi'_b + i\beta_0^2 \Phi_b \right) e^{2i\beta_0 x} + \left(-i\Phi''_b + \frac{1}{2} i\beta_0^2 \Phi_b + \frac{3}{2} \beta_0 \Phi'_b \right) \right) I_{xx} \Omega \right. \\
& - \left. \left(i\beta_0^2 \Phi_b + 2\beta_0 \Phi'_b \right) \Sigma I \omega_b + \left(-\pi^2 \Phi_b + \Sigma I \Phi''_b \right) i \omega_b \right] A'_2 \\
& + \frac{1}{2\pi^4} \left[\left(i\beta_0 \Phi'_b + \Phi''_b \right) \int_0^1 \Phi_b'^2 dx + \left(\beta_0^2 \Phi''_b + i\beta_0^3 \Phi'_b \right) \int_0^1 \Phi_b^2 dx \right] \mu \bar{A}_2 A_2^2 - \frac{1}{2} ic e^{i\beta_0 x} \omega_b \Phi_b A_2 \\
& + \frac{1}{2\pi^4} \left[\left(\Phi''_b + i\beta_0 \Phi'_b \right) \int_0^1 \Phi_f'^2 dx + \left(i\beta_0^3 \Phi'_b + \beta_0^2 \Phi''_b \right) \int_0^1 \Phi_f^2 dx + \left(\beta_0^2 \Phi'_f - i\beta_0 \Phi''_f \right) \int_0^1 \Phi'_b \Phi_f dx \right. \\
& + \left. \left(\Phi''_f + i\beta_0 \Phi'_f \right) \int_0^1 \Phi'_f \Phi'_b dx + \left(i\beta_0 \Phi''_f - \beta_0^2 \Phi'_f \right) \int_0^1 \Phi'_f \Phi_b dx + \left(i\beta_0^3 \Phi'_f + \beta_0^2 \Phi''_f \right) \int_0^1 \Phi_f \Phi_b dx \right] \mu A_1 A_2 \bar{A}_1
\end{aligned} \tag{55-2}$$

$$\begin{aligned}
P_{f,w} = & \frac{1}{\pi^2} \left[1/2 \left(\left(\frac{1}{2} \beta_0^2 \Phi_f - \frac{1}{2} i\beta_0 \Phi'_f \right) e^{2i\beta_0 x} + \frac{1}{2} \beta_0^2 \Phi_f - \frac{3}{2} i\beta_0 \Phi'_f - \Phi''_f \right) \Omega I_{xx} \right. \\
& - \left. \left(-i\beta_0^2 \Sigma I \Phi_f + 2i\beta_0 \Sigma I \Phi'_f + \pi^2 \Phi_f + \Sigma I \Phi''_f \right) \omega_f \right] A'_1 \\
& + \frac{1}{2\pi^4} \left(\int_0^1 \Phi'_f \Phi_b d\xi \Phi'_f + i\beta_0 \int_0^1 \Phi'_b \Phi_b'' dx \Phi''_f + 1/2 i\beta_0 \int_0^1 \Phi'_f \Phi_b'' dx \Phi'_b + 1/2 \int_0^1 \Phi'_f \Phi_b'' dx \Phi''_b + 1/2 \beta_0^2 \int_0^1 \Phi''_b \Phi_f'' dx \Phi''_f \right. \\
& - 1/2 i\beta_0 \int_0^1 \Phi_b \Phi_f'' dx \Phi''_b + \beta_0^2 \int_0^1 \Phi'_b \Phi_f dx \Phi''_f + 1/2 \beta_0^2 \int_0^1 \Phi'_f \Phi_b' dx \Phi''_f + 1/2 \int_0^1 \Phi'_b \Phi_f'' dx \Phi''_b + 1/2 i\beta_0^3 \int_0^1 \Phi'_f \Phi_b dx \Phi'_b \\
& + 1/2 i\beta_0^3 \int_0^1 \Phi'_b \Phi_f dx \Phi''_b + i\beta_0^3 \int_0^1 \Phi'_b \Phi_b dx \Phi'_f - 1/2 \beta_0^2 \int_0^1 \Phi_b \Phi_b'' dx \Phi'_f + 1/2 i\beta_0 \int_0^1 \Phi'_b \Phi_f'' dx \Phi'_b \left. \right) \mu \bar{A}_2 A_2 A_1 \\
& + \frac{1}{2\pi^4} \left(\int_0^1 \Phi'_f \Phi_f'' dx \Phi_f + i\beta_0^3 \int_0^1 \Phi'_f \Phi_f dx \Phi'_f + i\beta_0 \int_0^1 \Phi'_f \Phi_f'' dx \Phi''_f \right) \mu A_1^2 \bar{A}_1 + \frac{1}{2} \left(-ie_\eta + e_\xi \right) \Omega^2 e^{-i\beta_0 x} e^{i\sigma\tau_i} \\
& + \left[\frac{1}{\pi^2} \left(-i\Phi''_f - 4\beta_0 \Phi'_f + 3i\beta_0^2 \Phi_f \right) \Omega \omega_f \Delta I - \frac{1}{\pi^4} \left(-4i\beta_0^4 \Phi_f + 11\beta_0^3 \Phi'_f \right) \Delta D - \frac{1}{\pi^4} \left(\frac{3}{2} \Delta I \Phi_f \omega_f^2 + \frac{21}{2} \Delta D \Phi_f'' \right) i\beta_0^2 \right. \\
& + \left. \frac{1}{\pi^4} \left(4\Delta D \Phi_f'' + 2\pi^2 \Delta I \Phi'_f \omega_f^2 \right) \beta_0 + \frac{1}{2\pi^2} i \Delta I \omega_f^2 \Phi''_f + \frac{1}{2\pi^4} i \Delta D \Phi_f^{(4)} \right] \bar{A}_1 e^{2i\sigma\tau_i} e^{-4i\beta_0 x} - \frac{1}{2} c e^{i\beta_0 x} \Phi_f A_1 \omega_f
\end{aligned} \tag{56-2}$$

$$\begin{aligned}
P_{b,w} = & \frac{1}{\pi^2} \left[1/2 \left(-\frac{1}{2} \left(i\beta_0 \Phi'_b + \beta_0^2 \Phi_b \right) e^{2i\beta_0 x} + \left(-\Phi''_b + \frac{1}{2} \beta_0^2 \Phi_b - \frac{3}{2} i\beta_0 \Phi'_b \right) \right) I_{xx} \Omega \right. \\
& - \left. \left(\beta_0^2 \Phi_b - 2i\beta_0 \Phi'_b \right) \Sigma I \omega_b + \left(-\pi^2 \Phi_b + \Sigma I \Phi''_b \right) \omega_b \right] A'_2 \\
& + \frac{1}{2\pi^4} \left[\left(\beta_0 \Phi'_b - i\Phi''_b \right) \int_0^1 \Phi_b'^2 dx + \left(-i\beta_0^2 \Phi''_b + \beta_0^3 \Phi'_b \right) \int_0^1 \Phi_b^2 dx \right] \mu \bar{A}_2 A_2^2 - 1/2 c e^{i\beta_0 x} \omega_b \Phi_b A_2 \\
& + \frac{1}{2\pi^4} \left[\left(-i\Phi''_b + \beta_0 \Phi'_b \right) \int_0^1 \Phi_f'^2 dx + \left(\beta_0^3 \Phi'_b - i\beta_0^2 \Phi''_b \right) \int_0^1 \Phi_f^2 dx - \left(i\beta_0^2 \Phi'_f + \beta_0 \Phi''_f \right) \int_0^1 \Phi'_b \Phi_f dx \right. \\
& + \left. \left(-i\Phi''_f + \beta_0 \Phi'_f \right) \int_0^1 \Phi'_f \Phi'_b dx - \left(\beta_0 \Phi''_f + i\beta_0^2 \Phi'_f \right) \int_0^1 \Phi'_f \Phi_b dx + \left(\beta_0^3 \Phi'_f - i\beta_0^2 \Phi''_f \right) \int_0^1 \Phi_f \Phi_b dx \right] \mu A_1 A_2 \bar{A}_1
\end{aligned} \tag{57-2}$$

به این ترتیب، با توجه به شرایط حل پذیری فوق و تقریب شکل مدها به صورت شکل مدهای

خطی تیر دو سر مفصل به صورت $\Phi_f = \Phi_b = \sin(n\pi x)$ داریم،

$$i[\Pi_{1,v} + \Pi_{2,v}\omega_f]D_2A_1 + 4\mu\Pi_{3,v}A_1^2\bar{A}_1 + \Pi_{4,v}c\omega_f\left(\frac{1-e^{i\beta_0}}{\beta_0}\right)A_1 + 2\mu\Pi_{3,v}A_1\bar{A}_2A_2$$

$$\Pi_{5,v}(e_\eta + ie_\xi)\Omega^2e^{i\sigma T_2} + i[\Pi_{6,v}\omega_f^2 + \Pi_{7,v}\omega_f + \Pi_{8,v}]\left(\frac{1-e^{-4i\beta_0}}{\beta_0}\right)e^{2i\sigma T_2}\bar{A}_1 = 0 \quad (58-2)$$

و

$$i\Pi_{1,w}D_2A_2 + 16n^2\pi^2c\omega_b\left(\frac{1-e^{i\beta_0}}{\beta_0}\right)A_2 + \Pi_{2,w}\mu\bar{A}_2A_2^2 + 2\Pi_{2,w}\mu A_2A_1\bar{A}_1 = 0 \quad (59-2)$$

که \bar{A}_2 و \bar{A}_1 مزدوجهای مختلط A_2 و A_1 بوده و

$$\begin{aligned} \Pi_{1,v} &= (8\beta_0^6 - 18\pi^2n^2\beta_0^4 - 60\pi^4n^4\beta_0^2 + 16\pi^6n^6)I_{xx}\Omega, \\ \Pi_{2,v} &= [136\pi^4n^2\beta_0^2 - 32(\pi^4n^4 + \pi^2\beta_0^4) - 32(\pi^6n^6 + \beta_0^6)]\Sigma I \\ &+ 104\pi^2n^2\beta_0^2(\pi^2n^2 + \beta_0^2)\Sigma I], \\ \Pi_{3,v} &= [208\pi^2n^4\beta_0^2(\pi^2n^2 + \beta_0^2) - 64(\pi^6n^8 + n^2\beta_0^6)], \\ \Pi_{4,v} &= 16\pi^4n^2(\pi^2n^2 - 4\beta_0^2), \Pi_{5,v} = 4(-17\beta_0^2n^2\pi^4 + 4\pi^2\beta_0^4 + 4n^4\pi^6) \\ \Pi_{6,v} &= (21\pi^2n^2\beta_0^2 - 4\pi^4n^4 - 5\beta_0^4)\pi^2n^2\Delta I, \\ \Pi_{7,v} &= (-42\pi^2n^2\beta_0^2 + 8\pi^4n^4 + 10\beta_0^4)\pi^2n^2\Delta I\Omega, \\ \Pi_{8,v} &= (4\pi^6n^8 + 36\beta_0^6n^2 + 19\pi^4n^6\beta_0^2 - 149\pi^2n^4\beta_0^4)\Delta D, \\ \Pi_{9,v} &= [-6\pi^4n^4\beta_0^2 - 8\pi^6n^6 + 162\beta_0^4n^2\pi^2 - 40\beta_0^6]n^2\pi^2, \\ \Pi_{1,w} &= [2(-\beta_0^4 + 2\beta_0^2n^2\pi^2 + 8n^4\pi^4)I_{xx}\Omega + 8(-3\beta_0^2n^2\pi^2 + \beta_0^4 - 4n^4\pi^4)\Sigma I\omega_b, \\ &+ 8(-4n^2\pi^4 + \pi^2\beta_0^2)\omega_b], \Pi_{2,w} = 16(n^2\beta_0^4 - 3\beta_0^2n^4\pi^2 - 4n^6\pi^4), \\ e_\eta &= \int_0^1 \Phi_{f|b}(x)e_\eta(x)dx, e_\xi = \int_0^1 \Phi_{f|b}(x)e_\xi(x)dx. \end{aligned} \quad (60-2)$$

همچنین، همانطور که از معادلات (58-2) و (60-2) مشاهده می شود، ضریب جمله $e^{2i\sigma T_2}$ که

$$\Lambda_2 = \Pi_{6,v}\omega_f^2 + \Pi_{7,v}\omega_f + \Pi_{8,v}$$

برای ساده سازی معادلات، با تبدیل $A_1(T_2)$ به $A(T_2)$ ، $e^{i\sigma T_0}$ به شکل زیر در معادلات حذف

می شود،

$$A_1(T_2) = A(T_2)e^{i\sigma T_2} \quad (61-2)$$

و در نهایت برای بدست آوردن پاسخ معادلات حاصل، $A(T_2)$ و $A_2(T_2)$ را به صورت قطبی

$$A = \frac{1}{2}a_1(T_2)e^{i\theta(T_2)}, A_2 = \frac{1}{2}a_2(T_2)e^{i\theta(T_2)} \quad (62-2)$$

در معادلات حاصل قرار می‌دهیم. سپس با جداسازی بخشهای حقیقی و موهومی دو معادله

حاصل، چهار معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول به شکل زیر بدست می‌آید،

$$\begin{aligned} & \left[\Pi_{1,v} + \Pi_{2,v} \omega_f \right] a_1 D_2 \Theta = 1/4 \Pi_{3,v} \mu a_1^3 + \Pi_{4,v} \left(\frac{1 - \cos(\beta_0)}{\beta_0} \right) c \omega_f a_1 + 1/2 \Pi_{3,v} \mu a_2^2 a_1 \\ & + \left[\Pi_{6,v} \omega_f^2 + \Pi_{7,v} \omega_f + \Pi_{8,v} \right] \left(\frac{\sin(2\Theta) - \sin(4\beta_0 + 2\Theta)}{\beta_0} \right) a_1 \quad (63-2) \\ & - \left[\Pi_{1,v} + \Pi_{2,v} \omega_f \right] \sigma a_1 + 2\Omega^2 \Pi_{5,v} (e_\xi \sin(\Theta) + e_\eta \cos(\Theta)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[\Pi_{1,v} + \Pi_{2,v} \omega_f \right] D_2 a_1 = \Pi_{4,v} \sin(\beta_0) c \omega_f a_1 + \left[\Pi_{6,v} \omega_f^2 + \Pi_{7,v} \omega_f + \Pi_{8,v} \right] \left(\frac{-\cos(2\Theta) + \cos(4\beta_0 + 2\Theta)}{\beta_0} \right) a_1 \\ & + 2\Pi_{5,v} \Omega^2 (e_\eta \sin(\Theta) - e_\xi \cos(\Theta)) \quad (64-2) \end{aligned}$$

$$\Pi_{1,w} D_2 a_2 = 16n^2 \pi^4 c \omega_b \left(\frac{\sin(\beta_0)}{\beta_0} \right) a_2 \quad (65-2)$$

$$\frac{1}{2} \Pi_{1,w} a_2 D_2 \theta = \frac{1}{2} \Pi_{2,w} \mu a_2 a_1^2 + 8n^2 \pi^4 c \omega_b \left(\frac{1 - \cos(\beta_0)}{\beta_0} \right) a_2 + \frac{1}{8} \Pi_{2,w} \mu a_2^3 \quad (66-2)$$

به منظور بررسی پایداری ارتعاشاتی تیر مورد نظر و همچنین استخراج نقاط ثابت تعادلی^۱

معادلات مذکور، می‌بایست مشتقات زمانی آنها صفر در نظر گرفته شوند. با انجام این کار و همانطور که

از معادلات نشان داده شده مشخص است، a_2 برابر صفر خواهد شد و این بدان معنی است که تنها لنگ

زنی همسو^۲ تحریک خواهد شد. به این ترتیب، معادلات نهایی برای بررسی پایداری سیستم مورد نظر

عبارتند از،

$$\begin{aligned} & 1/4 \Pi_{3,v} \mu a_{10}^3 + \Pi_{4,v} \left(\frac{1 - \cos(\beta_0)}{\beta_0} \right) c \omega_f a_{10} - \left[\Pi_{1,v} + \Pi_{2,v} \omega_f \right] \sigma a_{10} \\ & + \left[\Pi_{6,v} \omega_f^2 + \Pi_{7,v} \omega_f + \Pi_{8,v} \right] \left(\frac{\sin(2\Theta_0) - \sin(4\beta_0 + 2\Theta_0)}{\beta_0} \right) a_{10} \quad (67-2) \end{aligned}$$

$$+ 2\Omega^2 \Pi_{5,v} (e_\xi \sin(\Theta_0) + e_\eta \cos(\Theta_0)) = 0$$

$$\Pi_{4,v} \left(\frac{\sin(\beta_0)}{\beta_0} \right) c \omega_f a_{10} + \left[\Pi_{6,v} \omega_f^2 + \Pi_{7,v} \omega_f + \Pi_{8,v} \right] \left(\frac{-\cos(2\Theta_0) + \cos(4\beta_0 + 2\Theta_0)}{\beta_0} \right) a_{10} \quad (68-2)$$

$$+ 2\Pi_{5,v} \Omega^2 (e_\eta \sin(\Theta_0) - e_\xi \cos(\Theta_0)) = 0$$

که a_{10} و Θ_0 نقاط ثابت تعادلی معادله حرکت می‌باشند.

1 Fixed point

2 Forward Whirling

۲-۳ - تحلیل پایداری با استفاده از روش گالرکین و اعمال روش مقیاس‌های چند گانه به معادلات دیفرانسیل با مشتقات معمولی (ODE)

در این بخش، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی با استفاده از روش تقریبی گالرکین به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شوند. برای این منظور، با فرض اینکه تنها یک مد حرکتی تحریک می‌شود، روش گالرکین به شکل زیر به معادلات اعمال می‌شود [123]:

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \Phi_n(x)V(t) \\ w(x,t) &= \Phi_n(x)W(t) \end{aligned} \quad (۶۹-۲)$$

که $\Phi_n(x)$ و n به ترتیب شکل مدهای عرضی و شماره مد می‌باشند. با جایگذاری معادله (۲)-

(۶۹) در (۲-۳۶) و (۲-۳۷)، ضرب طرفین معادله حاصل در شکل مدهای متناظر خود، انتگرال گیری جزء به جزء در فاصله $[0,1]$ و استفاده از خاصیت تعامد شکل مدها داریم،

$$\begin{aligned} & -\Pi_{1,v}\dot{W} + \Pi_{4,v}c \left(\dot{V} \left(\frac{\sin(\beta_0)}{\beta_0} \right) + \dot{W} \left(\frac{1 + \cos(\beta_0)}{\beta_0} \right) \right) + 1/2\Pi_{2,v}\ddot{V} + \Pi_{3,v}(V^3 + VW^2) + 2\Pi_{9,v}V \\ & + (\Pi_{6,v}\ddot{V} + \Pi_{7,v}\dot{V} - \Pi_{8,v}V) \left(\frac{\sin(2\Omega t - 4\beta_0) + \sin(2\Omega t)}{\beta_0} \right) \\ & + (\Pi_{6,v}\ddot{W} + \Pi_{7,v}\dot{W} - \Pi_{8,v}W) \left(\frac{\cos(2\Omega t - 4\beta_0) - \cos(2\Omega t)}{\beta_0} \right) \\ & + 1/4\Pi_{5,v}\Omega^2 (e_\eta \cos(\Omega t) - e_\xi \sin(\Omega t)) = 0 \end{aligned} \quad (۷۰-۲)$$

$$\begin{aligned} & + \Pi_{1,v}\dot{V} - \Pi_{4,v}c \left(\dot{V} \left(\frac{1 + \cos(\beta_0)}{\beta_0} \right) - \dot{W} \left(\frac{\sin(\beta_0)}{\beta_0} \right) \right) + 1/2\Pi_{2,v}\ddot{W} + \Pi_{3,v}(W^3 + V^2W) + 2\Pi_{9,v}W \\ & + (\Pi_{6,v}\ddot{V} + \Pi_{7,v}\dot{V} - \Pi_{8,v}V) \left(\frac{\cos(2\Omega t - 4\beta_0) - \cos(2\Omega t)}{\beta_0} \right) \\ & - (\Pi_{6,v}\ddot{W} + \Pi_{7,v}\dot{W} - \Pi_{8,v}W) \left(\frac{\sin(2\Omega t - 4\beta_0) + \sin(2\Omega t)}{\beta_0} \right) \\ & + 1/4\Pi_{5,v}\Omega^2 (e_\eta \sin(\Omega t) + e_\xi \cos(\Omega t)) = 0 \end{aligned} \quad (۷۱-۲)$$

از آنجا که معادلات (۲-۷۰) و (۲-۷۱) شامل جملات غیر خطی مرتبه ۳ می‌باشند، تقریب (۲)-

(۷۲) را می‌توان به شکل زیر به آنها اعمال کرد،

$$\begin{aligned} V(t) &= \varepsilon V_1(T_0, T_2) + \varepsilon^3 V_3(T_0, T_2) + \dots \\ W(t) &= \varepsilon V_1(T_0, T_2) + \varepsilon^3 V_3(T_0, T_2) + \dots \end{aligned} \quad (۷۲-۲)$$

لازم به ذکر است اگر در تقریب فوق، جملات W_2, V_2, W_0, V_0 ظاهر شوند، پاسخ آنها در ادامه صفر خواهد شد. برای بالانس جملات غیر خطی و به منظور استخراج رزونانس‌های اولیه و پارامتریک، پارامترهای بی بعد زیر به شکل زیر مقیاس بندی شده و در معادلات حاصل قرار می‌دهیم،

$$c = \varepsilon^2 \bar{c}, \Delta D = \varepsilon^2 \overline{\Delta D}, \Delta I = \varepsilon^2 \overline{\Delta I}, e_\zeta = \varepsilon^3 \bar{e}_\zeta, e_\eta = \varepsilon^3 \bar{e}_\eta \quad (73-2)$$

با جایگذاری معادلات (72-2) و (73-2) در معادلات (70-2) و (71-2) و برابر قرار دادن ضرایب

توانهای مشابه ε و ε^3 داریم،

$O(\varepsilon)$:

$$-\left(2n^4 + \frac{10\beta_0^2 n^2}{\pi^2}\right)V_1 - \left(2+2n^2 + \frac{2\beta_0^2}{\pi^2}\right)\Sigma ID_0^2 V_1 - \left(2n^2 + \frac{\beta_0^2}{\pi^2}\right)\Omega I_{xx} D_0 W_1 = 0 \quad (74-2)$$

$$-\left(2n^4 + \frac{10\beta_0^2 n^2}{\pi^2}\right)W_1 - \left(2+2n^2 + \frac{2\beta_0^2}{\pi^2}\right)\Sigma ID_0^2 W_1 + \left(2n^2 + \frac{\beta_0^2}{\pi^2}\right)\Omega I_{xx} D_0 V_1 = 0 \quad (75-2)$$

و

$O(\varepsilon^3)$:

$$\begin{aligned} & (\Pi_{6,v} D_0^2 V_1 + \Pi_{7,v} D_0 V_1 - \Pi_{8,v} V_1) \left(\frac{\sin(2\Omega t - 4\beta_0) + \sin(2\Omega t)}{\beta_0} \right) \\ & + (\Pi_{6,v} D_0^2 W_1 + \Pi_{7,v} D_0 W_1 - \Pi_{8,v} W_1) \left(\frac{\cos(2\Omega t - 4\beta_0) - \cos(2\Omega t)}{\beta_0} \right) \end{aligned} \quad (76-2)$$

$$\begin{aligned} & -\Pi_{1,v} D_0 W_3 + 1/2 \Pi_{2,v} D_0^2 V_3 + 2 \Pi_{9,v} V_3 + 1/4 \Pi_{5,v} \Omega^2 (e_\eta \cos(\Omega T_0) - e_\zeta \sin(\Omega T_0)) \\ & -\Pi_{1,v} D_2 W_1 + \Pi_{3,v} (V_1^3 + V_1 W_1^2) + \Pi_{2,v} D_2 D_0 V_1 - \Pi_{4,v} c \left(\frac{D_0 V_1 \sin(\beta_0) + D_0 W_1 (1 + \cos(\beta_0))}{\beta_0} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\Pi_{6,v} D_0^2 V_1 + \Pi_{7,v} D_0 V_1 - \Pi_{8,v} V_1) \left(\frac{\cos(2\Omega t - 4\beta_0) - \cos(2\Omega t)}{\beta_0} \right) \\ & - (\Pi_{6,v} D_0^2 W_1 + \Pi_{7,v} D_0 W_1 - \Pi_{8,v} W_1) \left(\frac{\sin(2\Omega t - 4\beta_0) + \sin(2\Omega t)}{\beta_0} \right) \end{aligned} \quad (77-2)$$

$$\begin{aligned} & + \Pi_{1,v} D_0 V_3 + 1/2 \Pi_{2,v} D_0^2 W_3 + 2 \Pi_{9,v} W_3 + 1/4 \Pi_{5,v} \Omega^2 (e_\eta \sin(\Omega T_0) + e_\zeta \cos(\Omega T_0)) \\ & + \Pi_{1,v} D_2 V_1 + \Pi_{3,v} (V_1^2 W_1 + W_1^3) + \Pi_{2,v} D_2 D_0 W_1 - \Pi_{4,v} c \left(\frac{D_0 V_1 (1 + \cos(\beta_0)) - D_0 W_1 \sin(\beta_0)}{\beta_0} \right) = 0 \end{aligned}$$

پاسخ معادلات مرتبه اول (74-2) و (75-2) را می‌توان به شکل زیر بیان کرد،

$$V_1(T_0, T_2) = A_1(T_2) e^{i\omega_\zeta T_0} + A_2(T_2) e^{i\omega_\eta T_0} + CC \quad (78-2)$$

$$W_1(T_0, T_2) = -iA_1(T_2) e^{i\omega_\zeta T_0} - iA_2(T_2) e^{i\omega_\eta T_0} + CC$$

اکنون، با جایگذاری معادله (78-2) در (76-2) و (77-2)، داریم،

$$-\Pi_{1,v}D_0W_3 + 1/2\Pi_{2,v}D_0^2V_3 + 2\Pi_{9,v}V_3 = G_{f,v}(T_2)e^{i\omega_f T_0} + G_{b,v}(T_2)e^{i\omega_b T_0} + N.S.T + CC \quad (79-2)$$

$$\Pi_{1,v}D_0V_3 + 1/2\Pi_{2,v}D_0^2W_3 + 2\Pi_{9,v}W_3 = G_{f,w}(T_2)e^{i\omega_f T_0} + G_{b,w}(T_2)e^{i\omega_b T_0} + N.S.T + CC$$

که CC و N.S.T مزدوجهای مختلط و جملات غیر سکولار می باشند. همچنین، $G_{f,v}(T_2)$ ، $G_{b,v}(T_2)$ و $G_{f,w}(T_2)$ و $G_{b,w}(T_2)$ در بردارنده جملات سکولار می باشند که برابرند با،

$$G_{f,v} = (\Pi_{1,v} + \omega_f \Pi_{2,v})iA'_1 + \Pi_{4,v}\omega_f \left(\frac{1 - ce^{i\beta_0}}{\beta_0} \right) A_1 + \Pi_{3,v}A_1^2\bar{A}_1 + 2\Pi_{3,v}A_1\bar{A}_2A_2 \quad (80-2)$$

$$+ \left[\Pi_{6,v}\omega_f^2 + \Pi_{7,v}\omega_f + \Pi_{8,v} \right] \bar{A}_1 \left(\frac{1 - e^{-4i\beta_0}}{\beta_0} \right) e^{2i\sigma T_2} + 1/4\Pi_{5,v}(e_\eta + ie_\xi)\Omega^2 e^{i\sigma T_2}$$

$$G_{f,w} = (-\Pi_{1,v} + \omega_f \Pi_{2,v})A'_1 - \Pi_{4,v}\omega_f \left(\frac{1 - ce^{i\beta_0}}{\beta_0} \right) iA_1 - \Pi_{3,v}\mu i A_1^2 \bar{A}_1 - 2\Pi_{3,v}\mu i A_1 \bar{A}_2 A_2 \quad (81-2)$$

$$+ \left[\Pi_{6,v}\omega_f^2 + \Pi_{7,v}\omega_f + \Pi_{8,v} \right] \bar{A}_1 \left(\frac{1 - e^{-4i\beta_0}}{\beta_0} \right) e^{2i\sigma T_2} - 1/4\Pi_{5,v}(e_\xi - ie_\eta)\Omega^2 e^{i\sigma T_2}$$

$$G_{b,v} = 1/2\Pi_{1,w}iA'_2 + 1/2\Pi_{2,w}\mu A_2^2\bar{A}_2 + \Pi_{2,w}\mu A_1\bar{A}_1A_2 + 8n^2\pi^4 \left(\frac{1 - e^{i\beta_0}}{\beta_0} \right) \omega_b A_2 \quad (82-2)$$

$$G_{b,w} = 1/2\Pi_{1,w}A'_2 - 1/2\Pi_{2,w}i\mu A_2^2\bar{A}_2 - \Pi_{2,w}i\mu A_1\bar{A}_1A_2 - 8i\pi^2 n^2 \left(\frac{1 - e^{i\beta_0}}{\beta_0} \right) \omega_b A_2 \quad (83-2)$$

برای حذف جملات سکولار، جواب بخش خصوصی متناظر با $\pm e^{i\omega_b T_0}$ و $\pm e^{i\omega_f T_0}$ در معادلات (۲)

(۷۹) برابر است با،

$$V_3 = P_{11}(T_2)e^{i\omega_f T_0} + Q_{11}(T_2)e^{i\omega_b T_0} \quad (84-2)$$

$$W_3 = P_{22}(T_2)e^{i\omega_f T_0} + Q_{22}(T_2)e^{i\omega_b T_0}$$

با جایگذاری معادله (۸۴-۲) در (۷۹-۲) و برابر قرار دادن ضرایب جملات شامل $\pm e^{i\omega_f T_0}$ و

$\pm e^{i\omega_b T_0}$ معادله حاصل دارای پاسخهای غیر صفر می باشد اگر و تنها اگر شرایط حل پذیری به شکل زیر

برقرار باشد،

$$\begin{vmatrix} -1/2\Pi_{2,v}\omega_f^2 + 2\Pi_{9,v} & G_{f,v} \\ i\Pi_{1,v}\omega_f & G_{f,w} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{یا} \quad \begin{vmatrix} G_{f,v} & -i\Pi_{1,v}\omega_f \\ G_{f,w} & -1/2\Pi_{2,v}\omega_f^2 + 2\Pi_{9,v} \end{vmatrix} = 0 \quad (85-2)$$

و

$$\begin{vmatrix} -1/2\Pi_{2,v}\omega_b^2 + 2\Pi_{9,v} & G_{b,v} \\ i\Pi_{1,v}\omega_b & G_{b,w} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{یا} \quad \begin{vmatrix} G_{b,v} & -i\Pi_{1,v}\omega_b \\ G_{b,w} & -1/2\Pi_{2,v}\omega_b^2 + 2\Pi_{9,v} \end{vmatrix} = 0 \quad (86-2)$$

در نهایت حاصل دو دترمینان مذکور برابر است با،

$$i[\Pi_{1,v} + \Pi_{2,v}\omega_f]D_2A_1 + 4\mu\Pi_{3,v}A_1^2\bar{A}_1 + \Pi_{4,v}c\omega_f\left(\frac{1-e^{i\beta_0}}{\beta_0}\right)A_1 + 2\mu\Pi_{3,v}A_1\bar{A}_2A_2 \quad (۸۷-۲)$$

$$\Pi_{5,v}(e_\eta + ie_\xi)\Omega^2e^{i\sigma T_2} + i[\Pi_{6,v}\omega_f^2 + \Pi_{7,v}\omega_f + \Pi_{8,v}]\left(\frac{1-e^{-4i\beta_0}}{\beta_0}\right)e^{2i\sigma T_2}\bar{A}_1 = 0$$

$$i\Pi_{1,w}D_2A_2 + 16n^2\pi^2c\omega_b\left(\frac{1-e^{i\beta_0}}{\beta_0}\right)A_2 + \Pi_{2,w}\mu\bar{A}_2A_2^2 + 2\Pi_{2,w}\mu A_2A_1\bar{A}_1 = 0 \quad (۸۸-۲)$$

که دو معادله مذکور با آنچه در معادلات (۵۸-۲) و (۵۹-۲) بدست آمده، یکسان می‌باشند. این بدان معنی است که با تحریک یک مد از تیر پیچیده شده دوار، ضرایب بدست آمده از هر دو روش مستقیم و غیر مستقیم یکسان خواهند بود.

۲-۴- تحلیل پایداری با تعیین ماتریس ژاکوبین

به منظور تحلیل پایداری حالت پایای معادلات مرتبه اول (۶۳-۲) تا (۶۶-۲) و با فرض $a_2=0$ ، ماتریس ژاکوبین، J ، طرف راست معادلات (۶۳-۲) و (۶۴-۲) برابر است با [118]،

$$J = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

یا

$$J = \begin{bmatrix} \left\{ \frac{3\Pi_{3,v}}{4\Lambda_1 a_{10}} \mu a_{10}^2 + \frac{\Pi_{4,v}}{\Lambda_1 a_{10}} \left(\frac{1 - \cos(\beta_0)}{\beta_0} \right) c\omega_f \right.}{+ \frac{\Lambda_2}{\Lambda_1 a_{10}} \left(\frac{\sin(2\Theta_0) - \sin(4\beta_0 + 2\Theta_0)}{\beta_0} \right) - \frac{\sigma}{a_{10}}} & \left. \left\{ \frac{\Lambda_2}{\Lambda_1} \left(\frac{2\cos(2\Theta_0) - 2\cos(4\beta_0 + 2\Theta_0)}{\beta_0} \right) \right\} \right\} \\ \left\{ \frac{\Lambda_2}{\Lambda_1} \left(\frac{-\cos(2\Theta_0) + \cos(4\beta_0 + 2\Theta_0)}{\beta_0} \right) \right\} & \left\{ \frac{\Lambda_2}{\Lambda_1} \left(\frac{2\sin(2\Theta_0) - 2\sin(4\beta_0 + 2\Theta_0)}{\beta_0} \right) a_{10} \right\} \\ \left\{ + \frac{\Pi_{4,v}}{\Lambda_1} \sin(\beta_0) c\omega_f \right\} & \left\{ + 2\Omega^2 \frac{\Pi_{5,v}}{\Lambda_1 a_{10}} (e_\xi \cos(\Theta_0) - e_\eta \sin(\Theta_0)) \right\} \\ & \left\{ + 2\Omega^2 \frac{\Pi_{5,v}}{\Lambda_1} (e_\eta \cos(\Theta_0) + e_\xi \sin(\Theta_0)) \right\} \end{bmatrix} \quad (۸۹-۲)$$

که

$$\Lambda_1 = [\Pi_{1,v} + \Pi_{2,v}\omega_f], \quad \Lambda_2 = [\Pi_{6,v}\omega_f^2 + \Pi_{7,v}\omega_f + \Pi_{8,v}] \quad (۹۰-۲)$$

و مقادیر ویژه متناظر آن از معادله زیر بدست می‌آیند،

$$|J - \lambda I| = 0 \quad \text{یا} \quad \lambda^2 - (A+D)\lambda + AD - BC = 0 \quad (۹۱-۲)$$

با توجه به معادلات (۸۹-۲) تا (۹۱-۲)، از آنجا که $(A+D) < 0$ ، اگر $AD - BC > 0$ ، حرکت

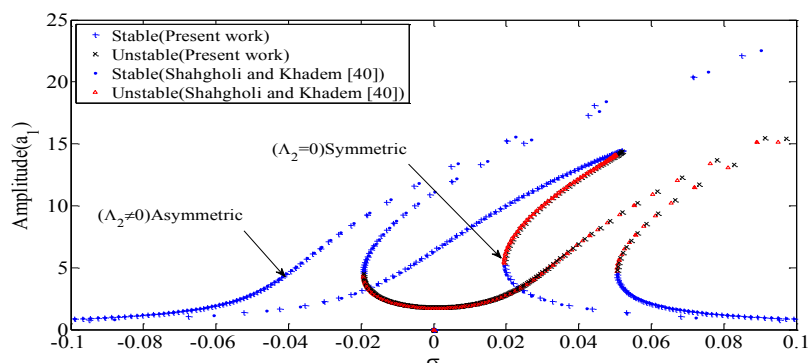
دینامیکی سیستم در نقاط ثابت تعادلی^۱، (a_{10}, Θ_0) پایدار بوده و در غیر اینصورت ناپایدار می‌باشد.

۲-۵- نتایج

در این بخش، با استفاده از معادلات بدست آمده، برخی از نمودارها جهت تحلیل پایداری به صورت زیر رسم شده است. در این نمودارها، تأثیر زاویه پیچش، میزان خروج از مرکز و ضریب میرایی خارجی روی رزونانس‌های اولیه و پارامتریک تیر پیچیده شده دورانی متقارن و نامتقارن محوری، مورد بررسی قرار خواهد گرفت. برای این منظور، پارامترهای بی بعد شده زیر مورد استفاده قرار گرفته‌اند: $I_{xx} = 0.001$ ، $c = 0.01$ ، $\mu = 0.0001$ ، $I_{\xi\xi} = I_{\eta\eta} = 0.00287$. بقیه پارامترهای بی بعد استفاده شده، در هر بررسی متعاقباً ذکر خواهند شد.

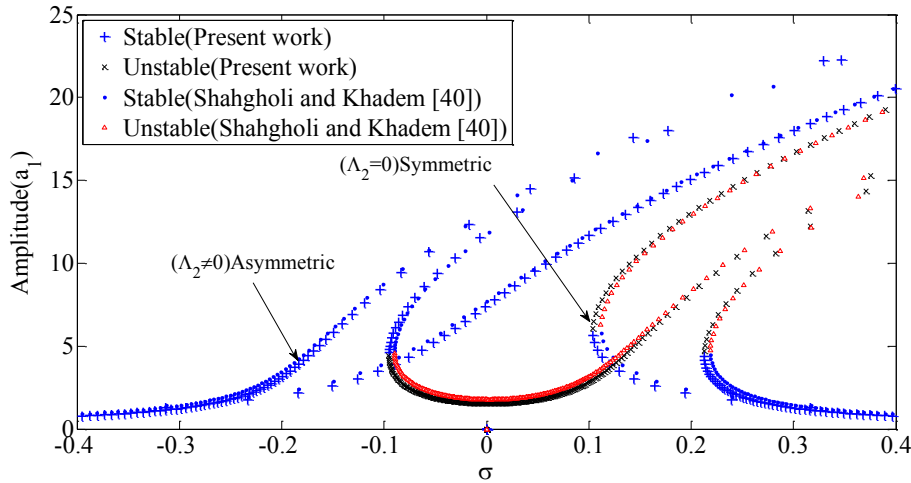
۲-۵-۱- اعتبار سنجی نتایج

قبل از اینکه به بررسی نمودارهای فرکانسی مستخرج از این بخش پرداخته شود، ابتدا نتایج بدست آمده در زاویه پیچش $\beta_0 = 0$ با نتایج حاصل از کارهای شاهقلی و خادم [40] مقایسه و صحت گذاری می‌شود. بدین ترتیب، با در نظر گرفتن $\beta_0 = 0$ در معادلات (۲-۶۷) و (۲-۶۸)، تیر پیچیده شده مذکور، به یک تیر بدون زاویه پیچش و مستقیم تبدیل شده و منحنی‌های پاسخ فرکانسی آنها نیز در دو مد اول و در حالت متقارن و نامتقارن به تصویر کشیده شده است. از طرفی، منحنی‌های متناظر بدست آمده توسط کارهای شاهقلی و خادم نیز در شکل (۲-۵) و شکل (۲-۶) نشان داده شده‌اند.



شکل (۲-۵) مقایسه پاسخ فرکانسی یک تیر مستقیم در کار حاضر در حالت $(\beta_0 = 0)$ با کار شاهقلی و خادم [40]، در مد اول

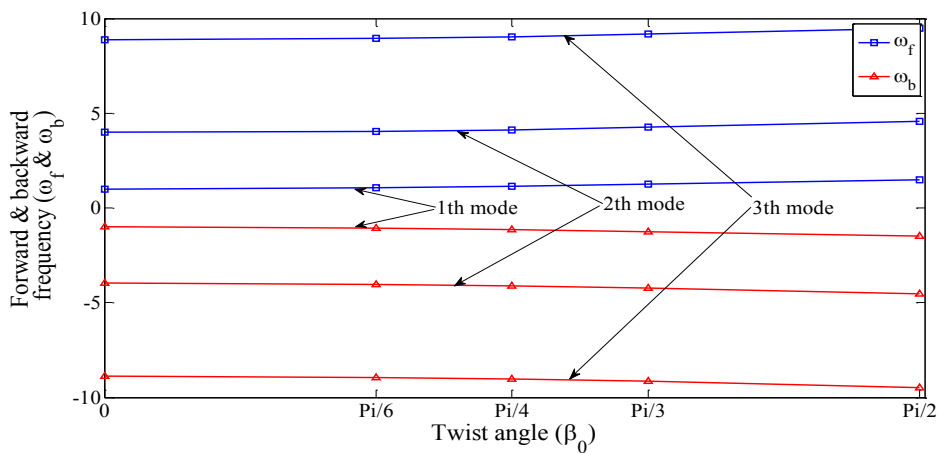
با مقایسه هر دو نتایج بدست آمده، مشخص است که تغییرات بین آنها بسیار کوچک بوده و همپوشانی نسبتاً خوبی با یکدیگر دارند.



شکل (۲-۶) مقایسه پاسخ فرکانسی یک تیر مستقیم در کار حاضر در حالت $(\beta_0 = 0)$ با کار شاهقلی و خادم [40]، در مد دوم.

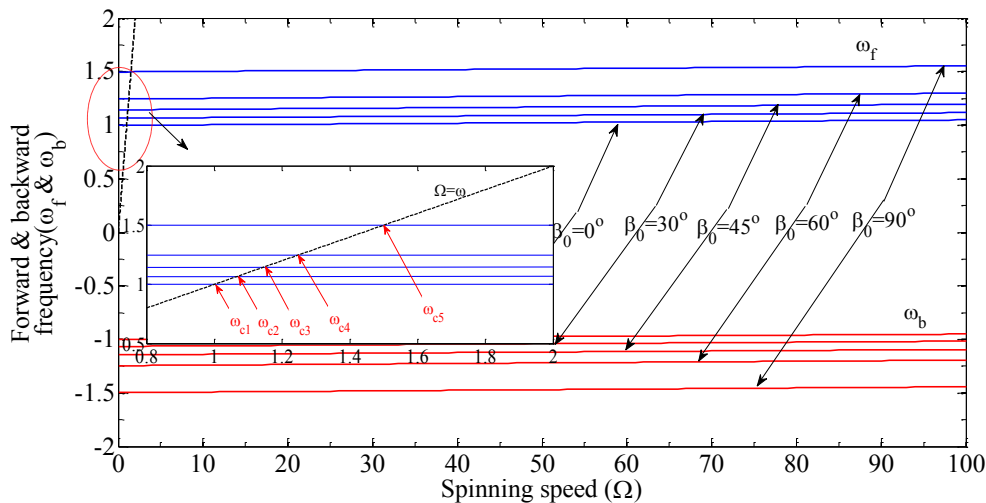
۲-۵-۲- بحث و نتیجه گیری

شکل (۲-۷) فرکانسهای خطی همسو و ناهمسو تیر پیچیده شده محوری دوار را در زوایای پیچش 0° ، 30° ، 45° و 60° نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود، با افزایش زاویه پیچش، فرکانسهای همسو و ناهمسو تیر مذکور با شرایط مرزی دو سر مفصل در سه مد اول ارتعاشاتی به تدریج افزایش می‌یابند.

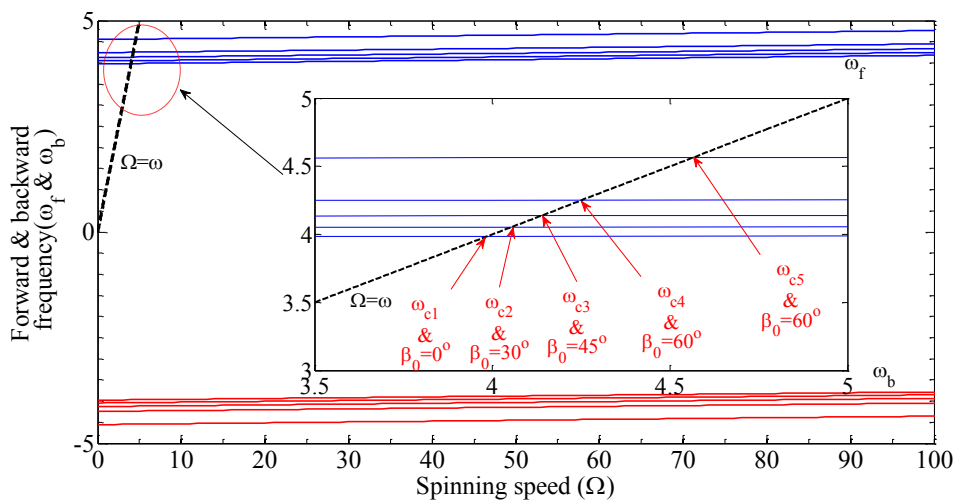


شکل (۲-۷) فرکانسهای همسو و ناهمسو برحسب زاویه پیچش در ۳ مد اول

شکل (۸-۲) و شکل (۹-۲) فرکانسهای همسو و ناهمسو تیر پیچیده شده دوار محوری با شرایط مرزی دو سر مفصل را نسبت به سرعت چرخش در مدهای اول و دوم و زوایای پیچش 0° ، 30° ، 45° ، 60° و 90° نشان می‌دهد. با توجه به این اشکال، هنگامی که سرعت چرخش در هر زاویه پیچش افزایش می‌یابد، فرکانسهای طبیعی همسو افزایش می‌یابد. علاوه بر این، محل تقاطع فرکانسهای همسو با خط $\omega = \Omega$ که نشان دهنده فرکانسهای خطی بحرانی ω_{c1} ، ω_{c2} ، ω_{c3} ، ω_{c4} و ω_{c5} تیر پیچیده شده در زوایای پیچش 0° ، 30° ، 45° ، 60° و 90° هستند، با افزایش زاویه پیچش، افزایش یافته و دامنه نوسانات در نزدیکی این فرکانسها نیز تشدید می‌شود.

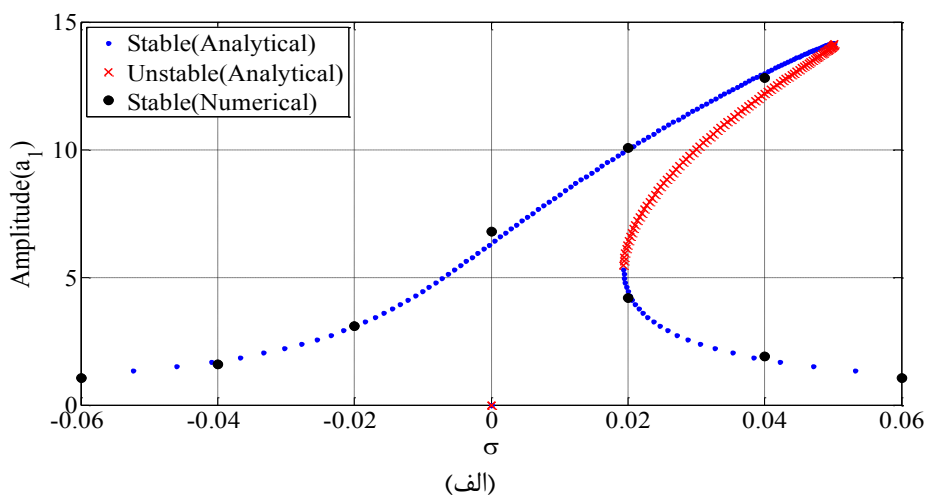


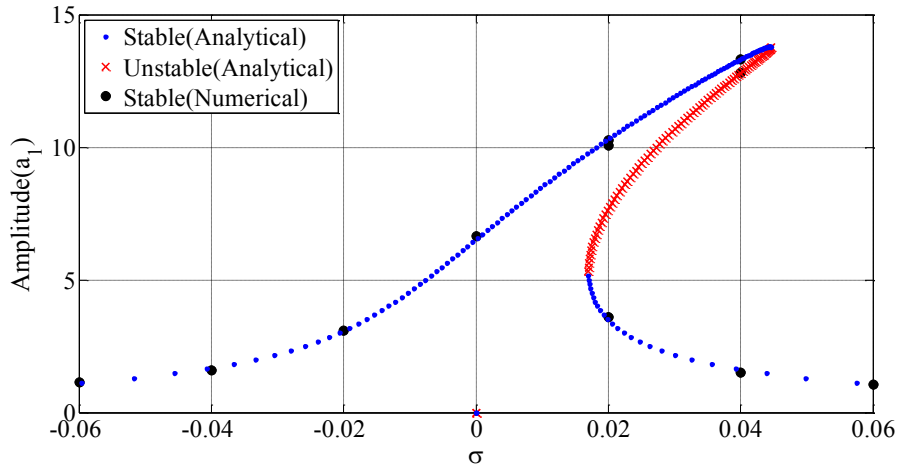
شکل (۸-۲) فرکانسهای همسو و ناهمسو بر حسب سرعت چرخش در مد اول



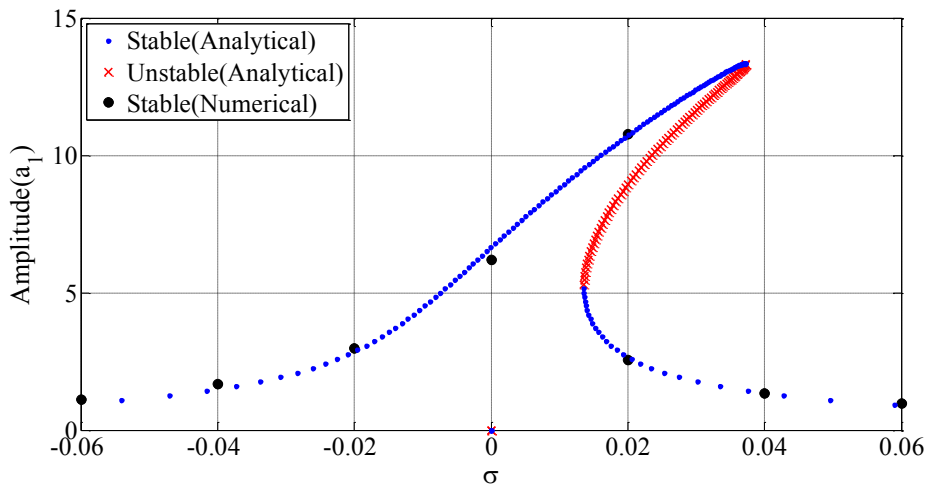
شکل (۹-۲) فرکانسهای همسو و ناهمسو بر حسب سرعت چرخش در مد دوم

شکل (۲-۱۰) تا شکل (۲-۱۳) منحنی‌های پاسخ فرکانسی غیر خطی تیر مورد نظر را پیرامون نقاط ثابت تعادلی سیستم در مدهای اول و دوم و زوایای پیچش مختلف برای حالت متقارن و نامتقارن نشان می‌دهند. فرض شده است که نابالانسی‌ها در هر دو جهات اصلی تیر یکسان و برابرند با، $e_{\eta} = e_{\xi} = 0.05$. همانطور که مشاهده می‌شود، از آنجا که منحنی‌ها در هر دو مد و حالات متقارن و نامتقارن به سمت راست خم شده‌اند، تأثیر پارامترهای غیرخطی از نوع سخت شونده می‌باشد که مؤید این است که پارامترهای غیرخطی هندسی تعیین کننده رفتار غیرخطی سیستم هستند. با توجه به شکل (۲-۱۰) و شکل (۲-۱۱) و معادلات (۲-۶۷) و (۲-۶۸)، در حالت متقارن ($\Lambda_2 = 0$)، تیر تنها دارای یک منبع تحریک بوده که همان نابالانسی با فرکانس Ω می‌باشد و در نتیجه منحنی پاسخ فرکانسی دارای یک قله بوده و تنها یک پرش در فرکانس رزونانس رخ می‌دهد. همچنین، در حالت متقارن، دیده می‌شود که برای برخی از مقادیر σ ، سیستم دارای تنها یک پاسخ پایدار بوده در حالی که برای برخی دیگر، سیستم دارای سه پاسخ بوده که دوتای آنها پایدار و دیگری ناپایدار است. در نتیجه در این حالات همواره پدیده پرش و دو شاخگی اتفاق می‌افتد. این درحالی است که وقتی نامتقارنی در سیستم وجود دارد ($\Lambda_2 \neq 0$)، علاوه بر منبع تحریک ناشی از نابالانسی با فرکانس Ω ، یک منبع تحریک دیگر با فرکانس 2Ω در سیستم بوجود می‌آید که ناشی از وجود نامتقارنی در سیستم می‌باشد و به عنوان تحریک پارامتریک در سیستم شناخته می‌شود. از این رو، منحنی‌های پاسخ فرکانسی دارای دو قله می‌باشند.





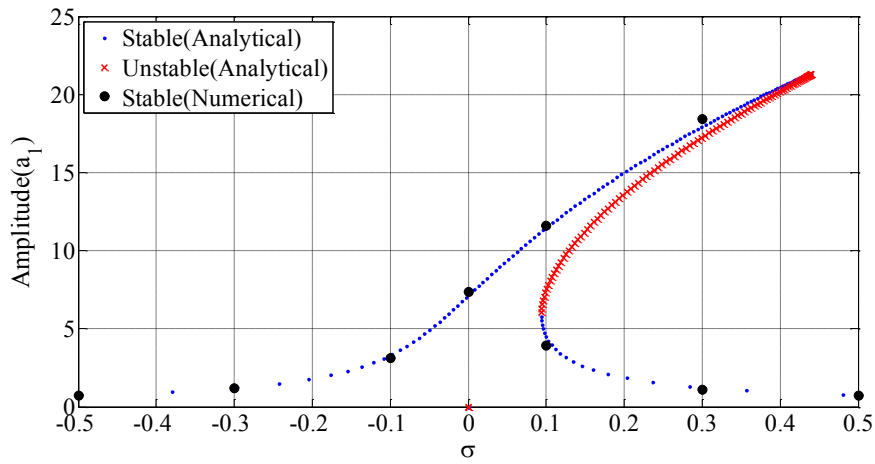
(ب)



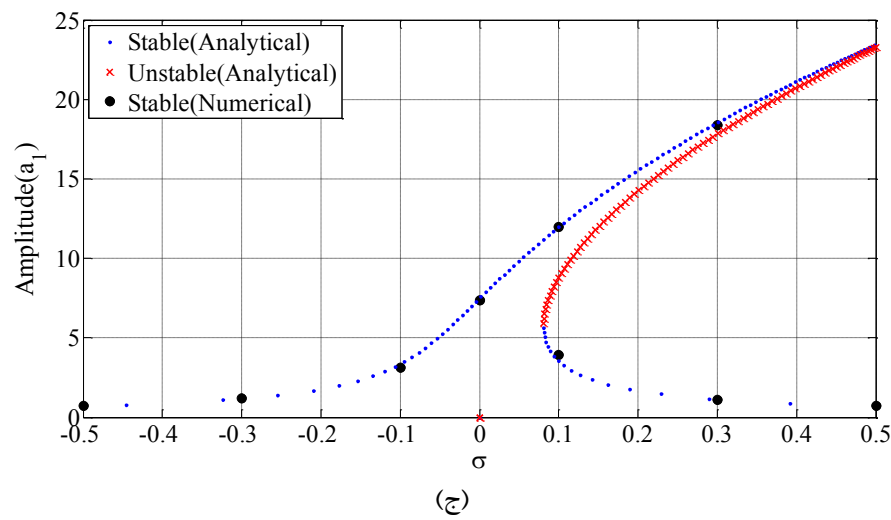
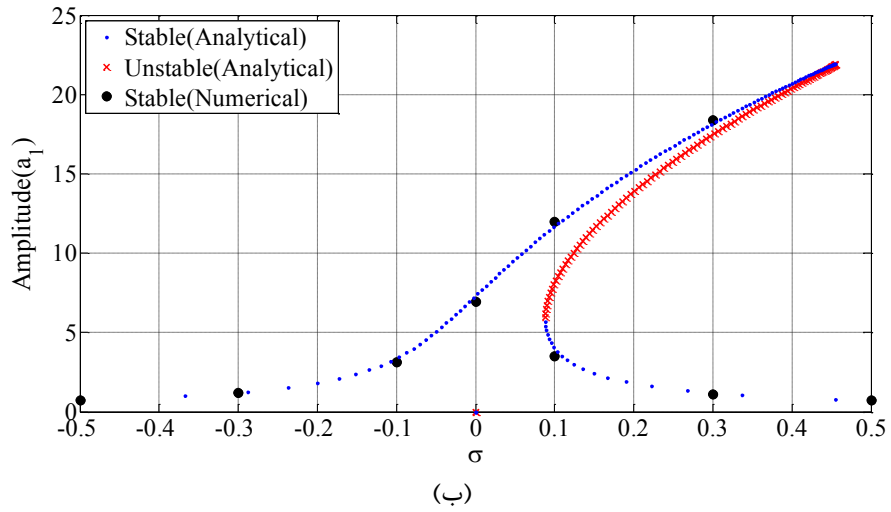
(ج)

شکل (۱-۲) منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده دوار متقارن در مد اول و زاویه پیش الف) $\beta_0 = 0$ (ب)

$\beta_0 = 60^\circ$ (ج و $\beta_0 = 30^\circ$)

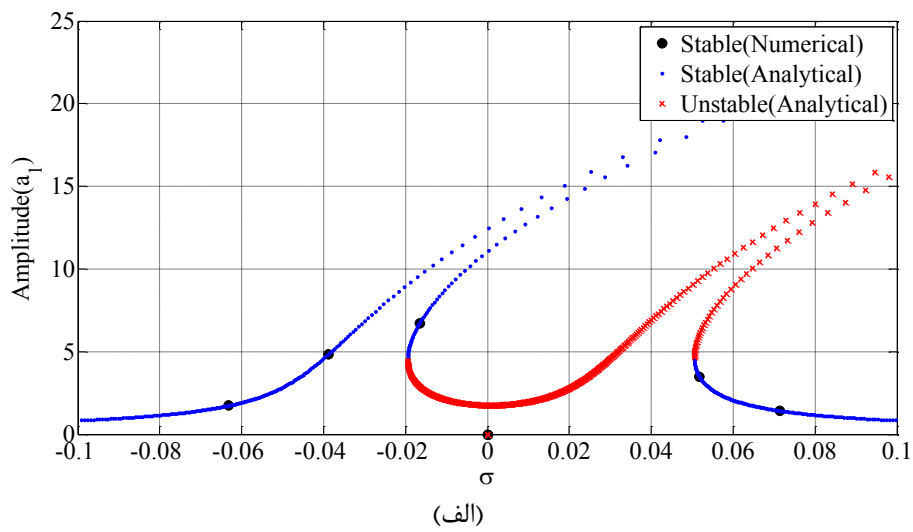


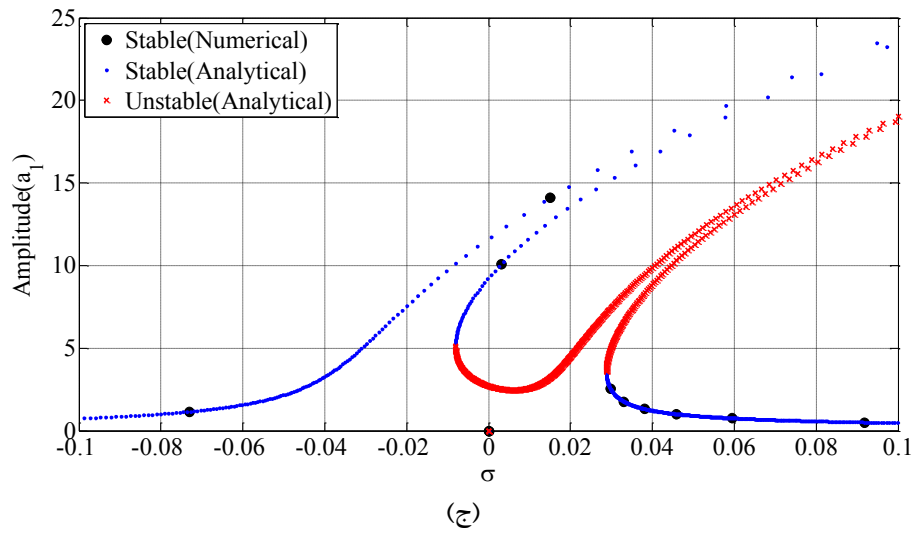
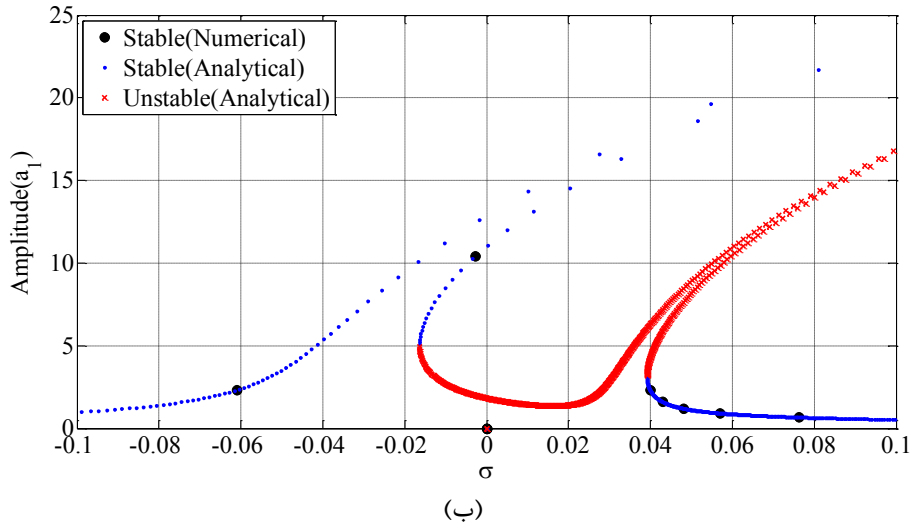
(د)



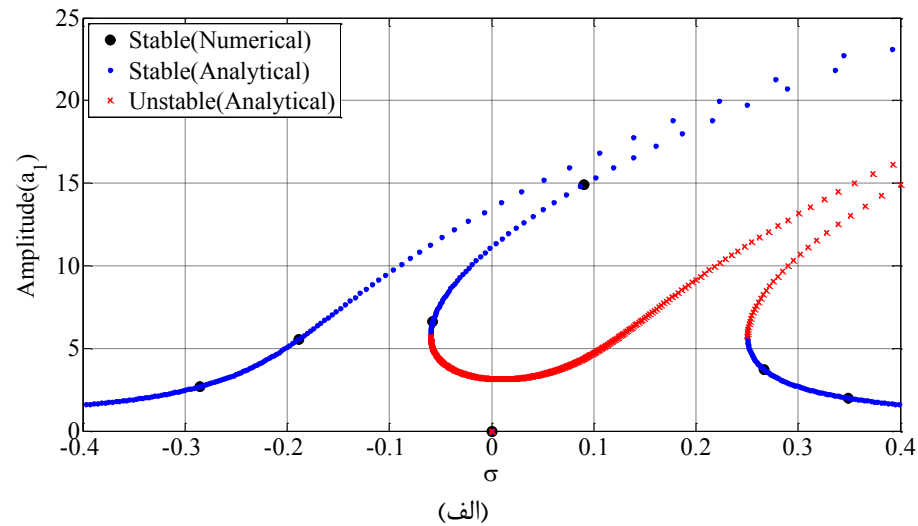
شکل (۱-۲) منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده دوار متقارن در مد دوم و زاویه پیش‌فشار (الف) $\beta_0 = 0$ (ب)

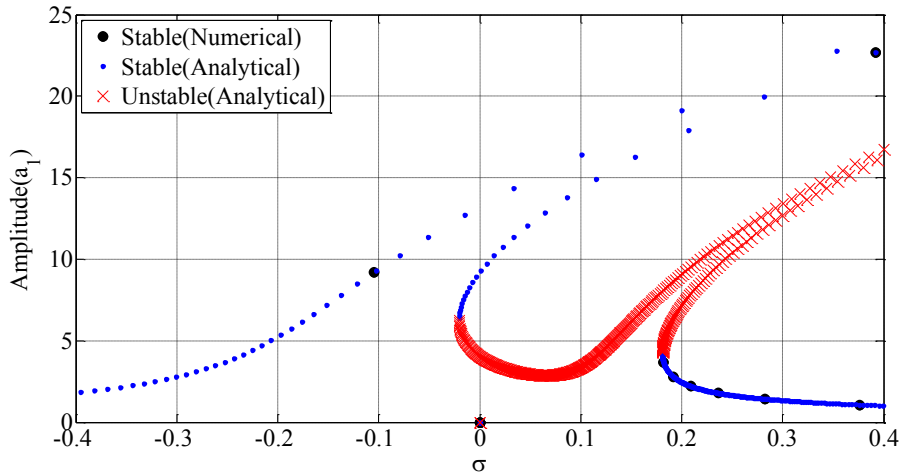
$\beta_0 = 60^\circ$ (ج و $\beta_0 = 30^\circ$)



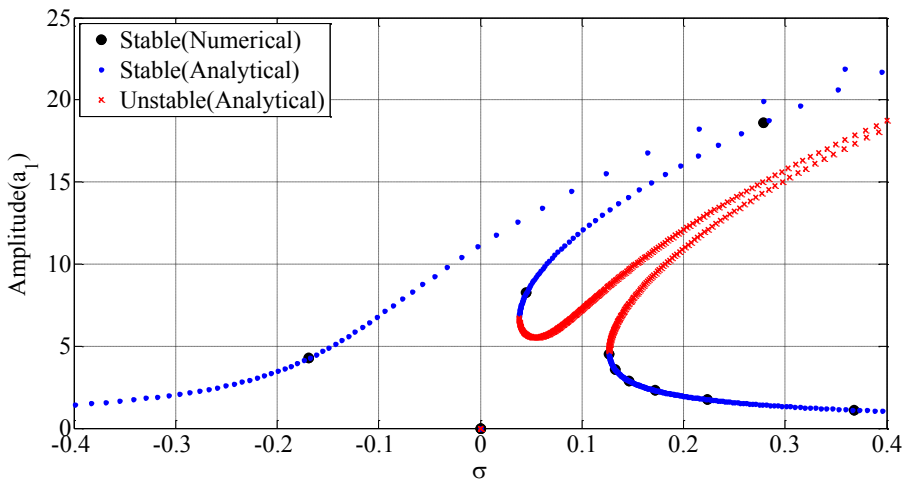


شکل (۲-۱۲) منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده دوار نامتقارن در مد اول و زاویه پیش الف) $\beta_0 = 0$ (ب) $\beta_0 = 30^\circ$ (ج) و $\beta_0 = 60^\circ$ (د)





(ب)



(ج)

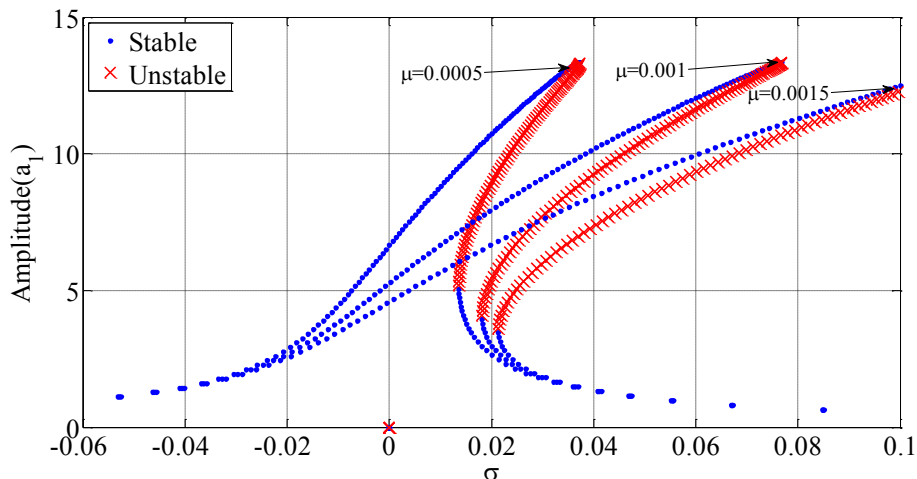
شکل (۲-۱۳) منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده دوار نامتقارن در مد دوم و زاویه پیچش الف) $\beta_0 = 0$ (ب)

$$\beta_0 = 30^\circ \text{ (ج) و } \beta_0 = 60^\circ$$

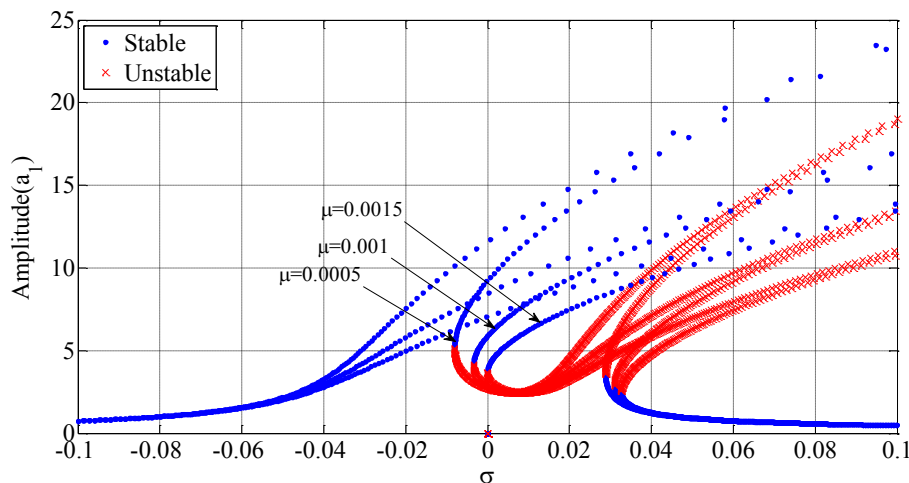
شکل (۲-۱۴) و شکل (۲-۱۵) منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده متقارن و نامتقارن را وقتی

پارامتر μ (نسبت سختی طولی به خمشی) در زاویه پیچش $\beta_0 = 60^\circ$ افزایش می‌یابد، نشان می‌دهد.

همانطور که نشان داده شده، با افزایش پارامتر μ ، تأثیر سخت شونده‌گی تیر شدیدتر می‌شود.

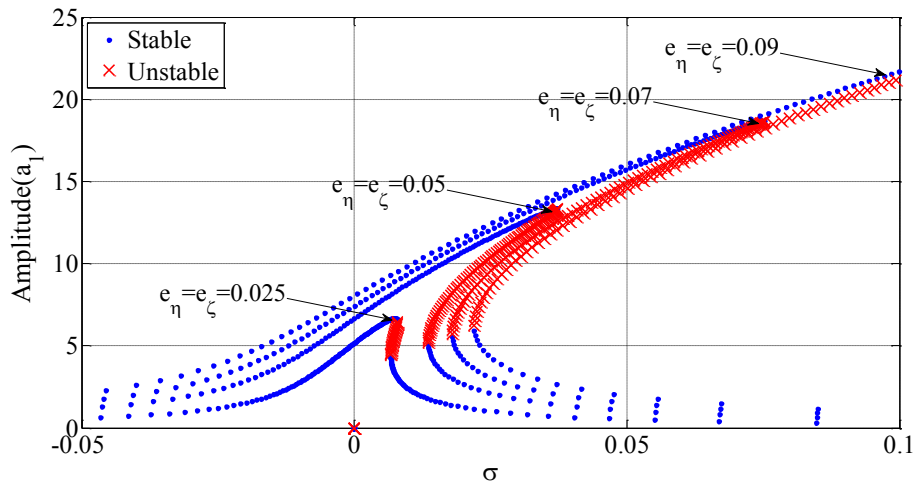


شکل (۲-۱۴) تأثیر تغییر پارامتر μ روی منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده متقارن در مد اول و $\beta_0 = 60^\circ$.

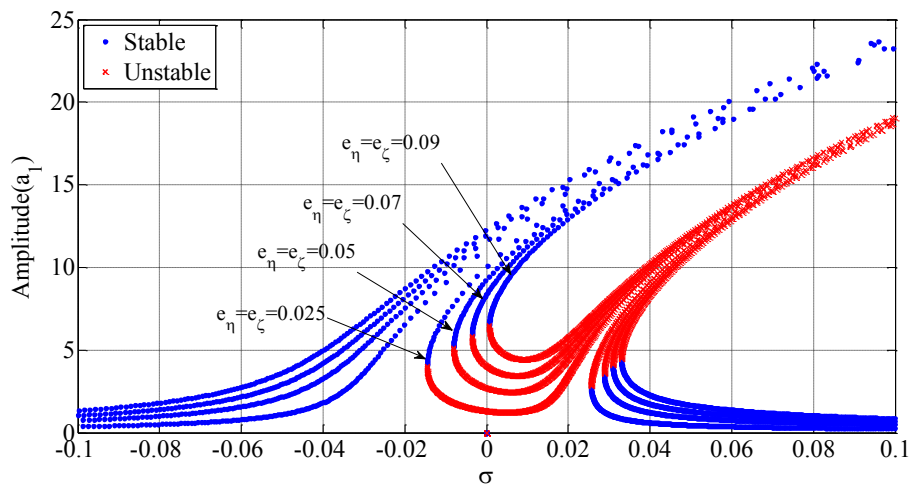


شکل (۲-۱۵) تأثیر تغییر پارامتر μ روی منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده نامتقارن در مد اول و $\beta_0 = 60^\circ$.

شکل (۲-۱۶) و شکل (۲-۱۷) تأثیر پارامتر خروج از مرکز را روی منحنی‌های پاسخ فرکانسی در حالات متقارن و نامتقارن در زاویه پیش $\beta_0 = 60^\circ$ نشان می‌دهند. همانطور که مشاهده می‌شود، برای تیرهای متقارن و نامتقارن، افزایش خروج از مرکز منجر به افزایش دامنه نوسانات شده بگونه‌ای که برای مقادیر خروج از مرکز کوچکتر، ناحیه ناپایدار کوچکتر بوده درحالیکه افزایش خروج از مرکز، باعث افزایش دامنه نواحی پایدار شده و فرکانس قله نیز افزایش می‌یابد.



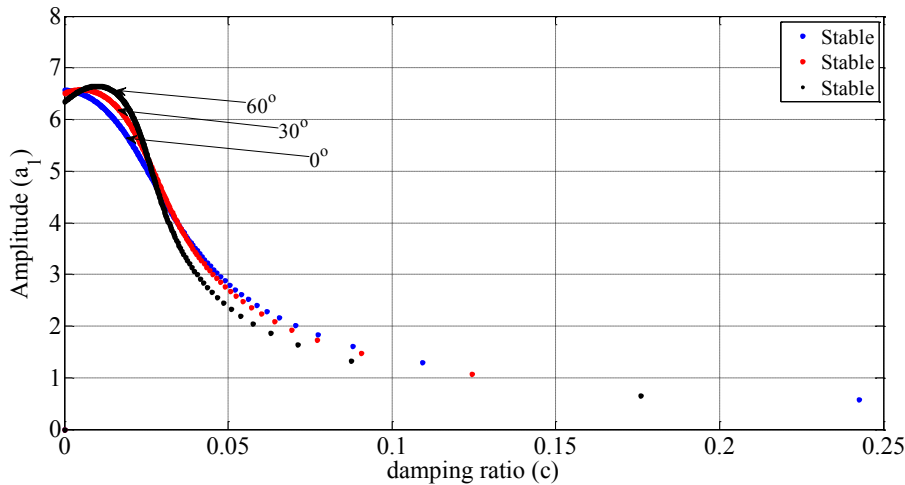
شکل (۲-۱۶) تأثیر میزان خروج از مرکز روی منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده متقارن در مد اول و
 $\mu = 0.0005$ ، $\beta_0 = 60^\circ$



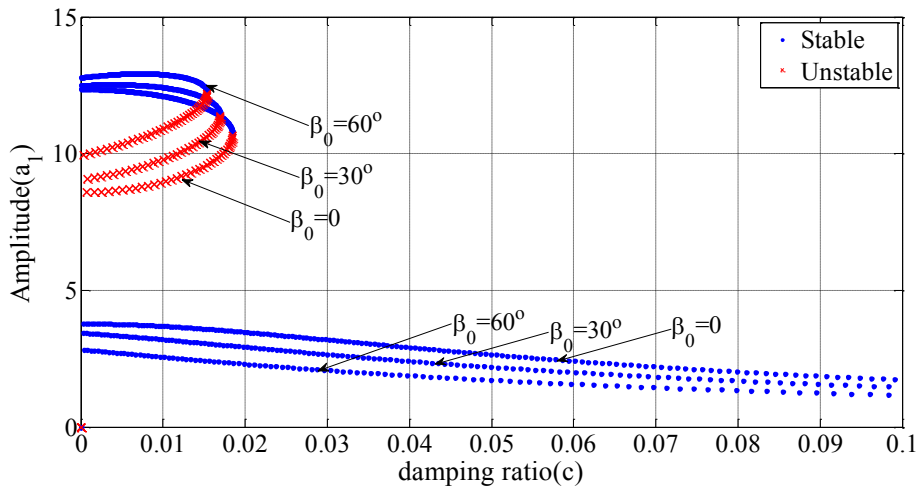
شکل (۲-۱۷) تأثیر میزان خروج از مرکز روی منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده نامتقارن در مد اول و
 $\mu = 0.0005$ ، $\beta_0 = 60^\circ$

شکل (۲-۱۸) منحنی دامنه بر حسب نسبت میرایی خارجی تیر پیچیده شده محوری را در زوایای پیچش مختلف و فرکانسهای طبیعی متناظر با $\sigma = 0$ نشان می‌دهد. با توجه به این شکل، می‌توان دید که با افزایش نسبت میرایی، دامنه نوسانات کاهش می‌یابد بگونه‌ای که در مقادیر $c < 0.025$ ، در یک مقدار میرایی مشخص، تأثیر وجود میرایی در تیرهای با زوایای پیچش بزرگتر کمتر بوده در حالی که برای $c > 0.025$ ، شرایط برعکس می‌باشد. بنابراین، افزایش زاویه پیچش، به میرا شدن سریع‌تر سیستم کمک خواهد کرد. علاوه بر این، سیستم تنها دارای یک پاسخ پایدار در همه زوایای پیچش و

ضرایب میرایی بوده که در نتیجه آن، هیچگونه دوشاخگی در نمودار پایداری سیستم مشاهده نمی‌شود. اما در فرکانسی غیر از فرکانس رزونانس (مثلاً $\sigma=0.03$)، سه پاسخ وجود داشته که شامل یک پاسخ ناپایدار و دو پاسخ پایدار می‌باشد و در این حالت پدیده دوشاخگی اتفاق می‌افتد (شکل (۲-۱۹)).



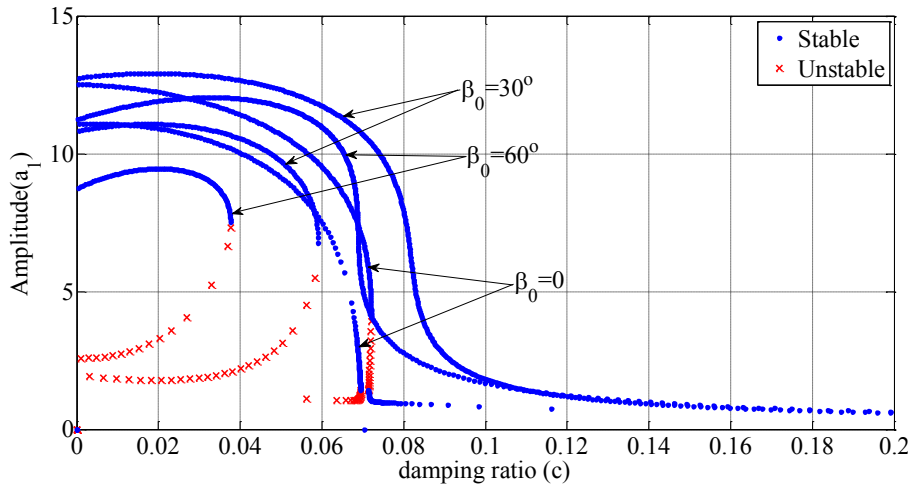
شکل (۲-۱۸) منحنی دامنه-نسبت میرایی تیر پیچیده متقارن در $\sigma=0$.



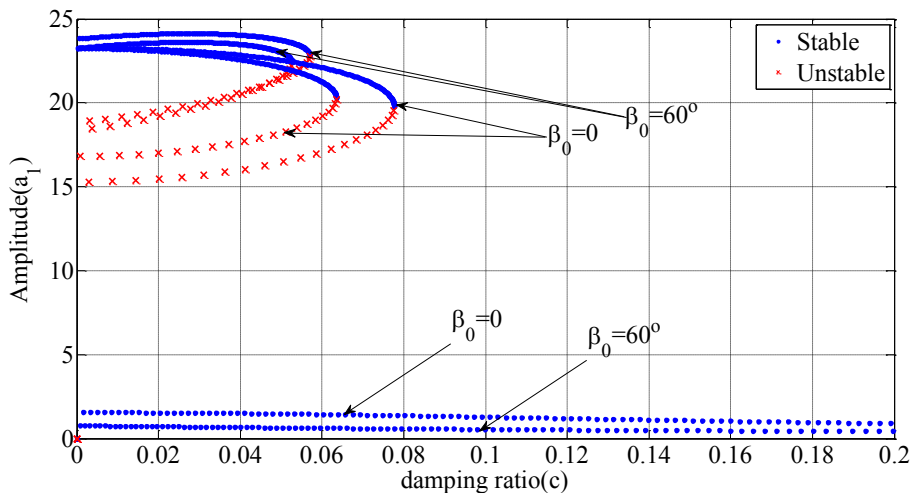
شکل (۲-۱۹) منحنی دامنه-نسبت میرایی تیر پیچیده متقارن در $\sigma=0.03$.

در حالتی که تیر پیچیده شده، نامتقارن ($\Lambda_2 \neq 0$) می‌باشد، مشابه با حالت متقارن، برای $\sigma=0$ و مد اول، با افزایش ضریب میرایی، دامنه نوسانات در همه زوایای پیچش کاهش می‌یابد. در این حالت، سه پاسخ در سیستم وجود دارد که دو پاسخ آن پایدار و دیگری ناپایدار است بگونه‌ای که در زوایای پیچش بزرگتر، ناحیه پایدار کاهش می‌یابد (شکل (۲-۲۰)). در فرکانسهای دیگر برای نمونه در $\sigma=0.1$ ، همانطور که در شکل (۲-۲۱) نشان داده شده است، کاملاً مشابه با حالت متقارن در $\sigma=0.03$

، ولی پنج پاسخ وجود داشته بگونه‌ای که سه پاسخ آنها پایدار و دو پاسخ دیگر ناپایدار می‌باشد. در نتیجه پدیده دوشاخگی اتفاق می‌افتد.



شکل (۲-۲۰) منحنی دامنه-نسبت میرایی تیر پیچیده نامتقارن در $\sigma=0$.



شکل (۲-۲۱) منحنی دامنه-نسبت میرایی تیر پیچیده نامتقارن در $\sigma=0.1$.

شکل (۲-۲۲) تا شکل (۲-۲۳) دامنه نوسانات را برحسب خروج از مرکز تیر پیچیده شده متقارن

در فرکانس‌های طبیعی متناظر با $\sigma=0$ و $\sigma=0.03$ نشان می‌دهد. همانطور که در شکل (۲-۲۲)

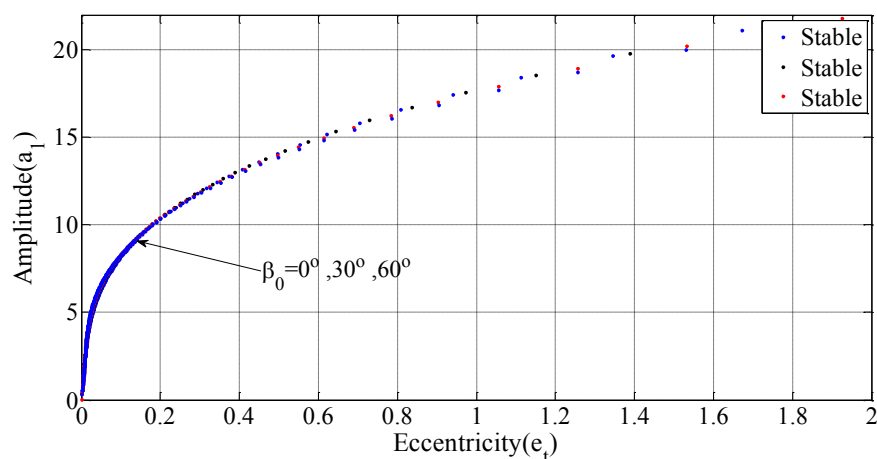
نشان داده شده است، در حالت $\sigma=0$ ، حرکت نوسانی تیر پیچیده شده دوار در کل مقادیر خروج از

مرکز تیر و زوایای پیچش مختلف آن، پایدار بوده و در نتیجه هیچگونه دوشاخگی اتفاق نمی‌افتد.

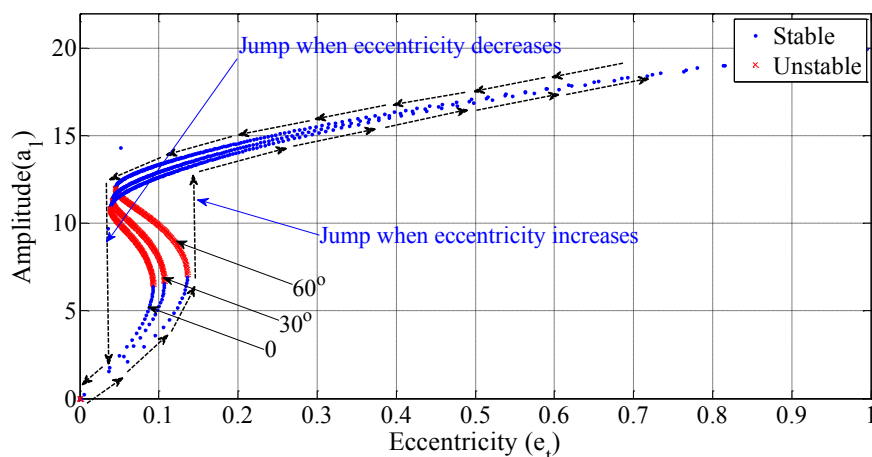
همچنین، زاویه پیچش تأثیر ناچیزی روی دامنه نوسانات سیستم دارد. اما، در فرکانس $\sigma \neq 0$ (برای

نمونه، $\sigma=0.03$)، همانطور که در شکل (۲-۲۳) نشان داده شده است، سیستم در مقادیر خروج از

مرکز کوچکتر، تنها دارای یک پاسخ پایدار بوده، در مقادیر متوسط خروج از مرکز، دارای دو پاسخ پایدار و یک پاسخ ناپایدار و در مقادیر بزرگتر خروج از مرکز تیر، تنها دارای یک پاسخ پایدار می‌باشند. در نتیجه، در این حالت، پدیده پرش و دوشاخگی در سیستم اتفاق می‌افتد. لازم به ذکر است که وقتی میزان خروج از مرکز تیر افزایش یا کاهش می‌یابد، پدیده پرش در مقادیر متفاوتی از آن اتفاق می‌افتد. در هر دو حالت مذکور، تغییرات دامنه در مقادیر بزرگتر خروج از مرکز شدیدتر می‌باشد. همچنین، در مقادیر کوچکتر خروج از مرکز، زمانی که زاویه پیچش افزایش می‌یابد، به ازای یک مقدار مشخص خروج از مرکز، دامنه نوسان کاهش می‌یابد در حالی که برای مقادیر بزرگتر خروج از مرکز وضعیت برعکس می‌باشد.



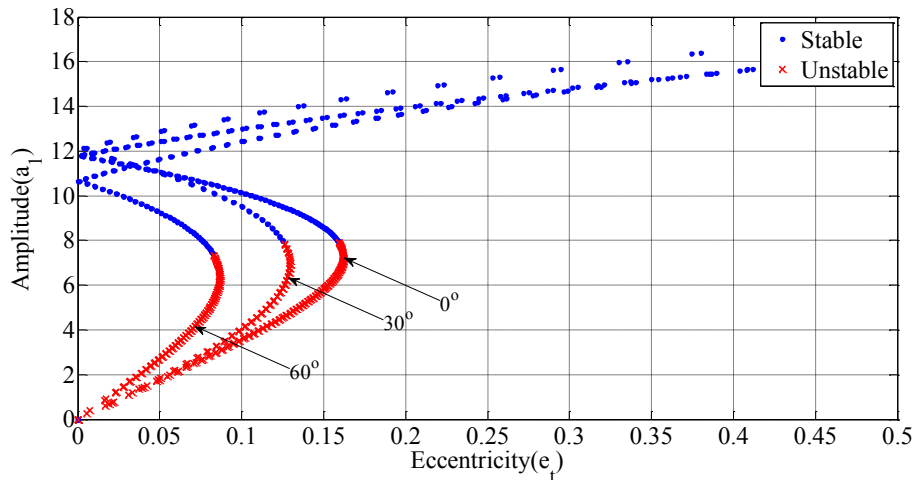
شکل (۲-۲۲) منحنی دامنه-خروج از مرکز تیر پیچیده شده متقارن در فرکانس $\sigma = 0$.



شکل (۲-۲۳) منحنی دامنه-خروج از مرکز تیر پیچیده شده متقارن در فرکانس $\sigma = 0.03$.

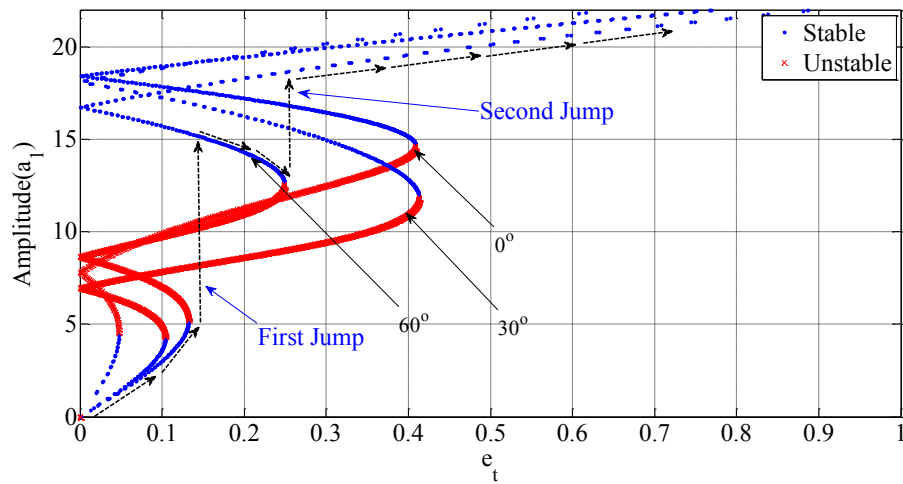
شکل (۲-۲۴) تأثیر زاویه پیچش β_0 را روی منحنی دامنه-خروج از مرکز تیر پیچیده شده دوار

نامتقارن در نزدیکی فرکانسهای متناظر با $\sigma=0$ نشان می دهد.



شکل (۲-۲۴) منحنی دامنه-خروج از مرکز تیر پیچیده شده نامتقارن در فرکانس $\sigma=0$.

در این حالت، به ازای برخی از مقادیر مشخص خروج از مرکز تیر در $\sigma=0$ ، تنها دو بخش وجود دارد. بخش اول، در مقادیر خروج از مرکز کوچکتر بوده که شامل سه پاسخ بوده با دو پاسخ پایدار و یک پاسخ ناپایدار در حالی که در بخش دوم و در مقادیر خروج از مرکز بزرگتر، به ازای کلیه زوایای پیچش، تنها یک پاسخ پایدار وجود دارد. در نتیجه پدیده دو شاخگی اتفاق می افتد. همچنین، با افزایش زاویه پیچش، در یک مقدار خروج از مرکز مشخص، دامنه پایدار نوسانات سیستم کاهش می یابد. برای تیر پیچیده شده نامتقارن، نمودار دامنه-خروج از مرکز در فرکانس $\sigma=0.1$ در شکل (۲-۲۵) نشان داده شده است. در این حالت، پنج پاسخ وجود دارد بگونه ای که سه پاسخ آن پایدار و مابقی آن ناپایدار می باشند. در نتیجه، در این حالت دو پرش در سیستم رخ داده و پدیده دو شاخگی نیز اتفاق می افتد. توضیحات مذکور برای زاویه پیچش $\beta_0=60^\circ$ در شکل (۲-۲۵) نشان داده شده است. همچنین، در یک مقدار خروج از مرکز مشخص، دامنه ناحیه پایدار با افزایش زاویه پیچش کاهش می یابد که می توان گفت وجود زاویه پیچش می تواند به میرا شدن دامنه نوسانات تیر پیچیده شده کمک کند.



شکل (۲-۲۵) منحنی دامنه-خروج از مرکز تیر پیچیده شده نا متقارن در فرکانس $\sigma = 0.1$.

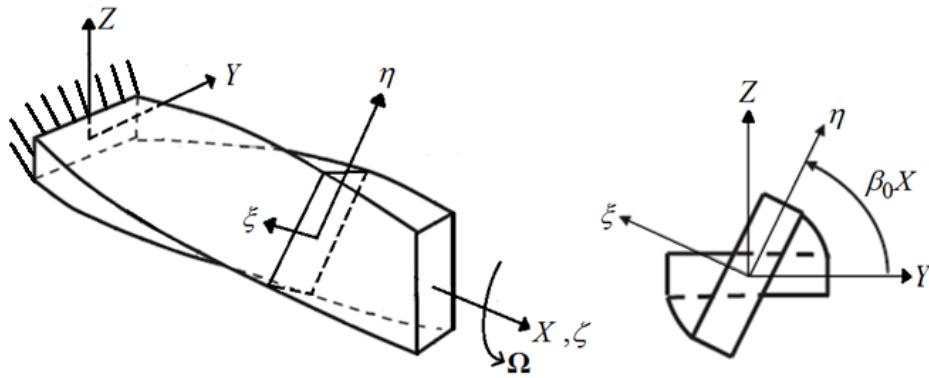
فصل سوم

۳ - ارتعاشات عرضی تیر پیچیده شده دوار با شرایط مرزی یک سر گیر دار

تجهیزات براده برداری مانند مته‌ها از جمله تجهیزاتی هستند که در صنایع مختلف مورد استفاده قرار می‌گیرند. به منظور تحلیل پایداری این گونه تجهیزات، می‌توان آنها را به صورت یک تیر پیچیده شده محوری با شرایط مرزی یک سر گیردار مدل‌سازی کرد. این روند در ادامه مورد بررسی قرار گرفته شده است.

۳-۲ - معادلات حرکت

در این بخش، پایداری تیرهای پیچیده شده دوار با شرایط مرزی یک سر گیر دار مورد بررسی قرار گرفته شده است. فرض این است که زاویه پیچش β_0 به صورت خطی بوده و تأثیر ممانهای ژيروسکوپیک و اینرسی دورانی در نظر گرفته شده است، ولی از تأثیر پیچش ناشی از برش صرف نظر شده است. همچنین، همانند فصل ۲، با فرض لاغر بودن تیر مذکور، از اینرسی طولی صرف نظر شده و با استخراج معادله ساده شده مربوط به ارتعاشات طولی تیر (که با آنچه در بخش قبل بدست آمده، متفاوت می‌باشد) و جایگذاری آن در معادلات ارتعاشات عرضی، می‌توان به معادلات حرکت سیستم دست یافت. از طرفی، مشاهده خواهد شد که تأثیر زاویه پیچش در مدهای اول و دوم چگونه خواهد بود. همچنین، در بخشهای دیگر نیز به بررسی تأثیر میزان خروج از مرکز و نسبت میرایی در زوایای پیچش مختلف پرداخته شده است. شکل (۳-۱)، یک تیر پیچیده شده دورانی یک سر گیردار با سرعت دورانی ثابت Ω را نشان می‌دهد.



شکل (۱-۳) یک تیر پیچیده شده دورانی یک سر گیردار به همراه مقطع آن با نمایش زاویه پیچش تیر.

با در نظر گرفتن شرایط بخش قبل و با توجه به روابط (۲-۳۲) و شرایط مرزی

$$x=0 \Rightarrow \begin{cases} v=0, v'=0 \\ w=0, w'=0 \end{cases} \quad \text{و} \quad x=L \Rightarrow \begin{cases} v''=0, v'''=0 \\ w''=0, w'''=0 \end{cases} \quad (1-3)$$

برای تیر یک سر گیردار مذکور، اگر نسبت عرض به پهناى سطح مقطع تیر یک سر گیردار

(ضریب لاغری) خیلی کوچک باشد ($\frac{h_0}{L} \ll 1$)، می‌توان از اینرسی طولی تیر صرف نظر کرد،

از این رو با توجه به روابط (۲-۳۲) و شرایط مرزی طولی برای تیرهای یک سر گیردار

$$u(0)=u'(L)=0 \text{ داریم [33]،}$$

$$u' = -1/2(w'^2 + v'^2) + (v'w - vw')\beta_0 - 1/2(v^2 + w^2)\beta_0^2 + \int_0^L (v'v'' + w'w'' + (vw'' - wv''))\beta_0 + (vv' + ww')\beta_0^2 dx \quad (2-3)$$

که می‌توان تفاوت آن را با رابطه بدست آمده در (۲-۳۵) مشاهده کرد. حال با قرار دادن رابطه

(۲-۳) در معادلات ارتعاشات جانبی تیر (معادلات (۲-۳۳) و (۲-۳۴))، معادلات حرکت ارتعاشات عرضی

تیر یک سر گیردار پیچیده شده برابر است با،

$$\begin{aligned}
& -2 \frac{w' \beta_0^3}{\pi^4} + 1/2 \frac{(-\pi^2 \Omega I_x \dot{w} + 10v'' - 2\Sigma I \pi^2 \ddot{v}) \beta_0^2}{\pi^4} + 1/2 \frac{(3\pi^2 \Omega I_x \dot{v}' - 4\ddot{w}' \pi^2 \Sigma I + 8w''') \beta_0}{\pi^4} \\
& + 1/2 \frac{2\ddot{v}'' \pi^2 \Sigma I - 2\ddot{v} \pi^4 + 2\pi^2 \Omega I_x \dot{w}'' - 2v^{(4)}}{\pi^4} - c\dot{v} \cos(\beta_0 x) + c\dot{w} \sin(\beta_0 x) \\
& + e_\eta \Omega^2 \cos(\beta_0 x - \Omega t) + e_\zeta \Omega^2 \sin(\beta_0 x - \Omega t) + \frac{\Omega I_x}{2\pi^2} \left[(\dot{w} \beta_0^2 - \dot{v}' \beta_0) \cos(2\beta_0 x) + (\dot{v} \beta_0^2 + \dot{w}' \beta_0) \sin(2\beta_0 x) \right] \\
& + \left(-8 \frac{v \Delta D \beta_0^4}{\pi^4} - 22 \frac{w' \Delta D \beta_0^3}{\pi^4} + 1/2 \frac{(42v'' \Delta D - 12\pi^2 \Omega \dot{w} \Delta I - 6\dot{v} \pi^2 \Delta I) \beta_0^2}{\pi^4} \right. \\
& \left. + 1/2 \frac{(16w'' \Delta D + 16\pi^2 \Omega \dot{v}' \Delta I - 8\ddot{w}' \pi^2 \Delta I) \beta_0}{\pi^4} + 1/2 \frac{2\ddot{v}'' \pi^2 \Delta I - 2v^{(4)} \Delta D + 4\pi^2 \Omega \dot{w}'' \Delta I}{\pi^4} \right) \cos(-2\Omega t + 4\beta_0 x) \\
& + \left(8 \frac{w \Delta D \beta_0^4}{\pi^4} - 22 \frac{v' \Delta D \beta_0^3}{\pi^4} + 1/2 \frac{(-12\pi^2 \Omega \dot{v} \Delta I - 42w'' \Delta D + 6\ddot{w} \pi^2 \Delta I) \beta_0^2}{\pi^4} \right. \\
& \left. + 1/2 \frac{(-16\pi^2 \Omega \dot{w}' \Delta I - 8\ddot{v}' \pi^2 \Delta I + 16v'' \Delta D) \beta_0}{\pi^4} + 1/2 \frac{4\pi^2 \Omega \dot{v}'' \Delta I - 2\ddot{w}'' \pi^2 \Delta I + 2w^{(4)} \Delta D}{\pi^4} \right) \sin(-2\Omega t + 4\beta_0 x) \\
& + \frac{2\mu}{\pi^4} (-\beta_0 w' + v'') \left(\beta_0 \int_0^1 (vw'' - wv'') dx + \beta_0^2 \int_0^1 (ww' + vv') dx + \int_0^1 (v'v'' + w'w'') dx \right) = 0
\end{aligned}$$

(۳-۳)

$$\begin{aligned}
& 2 \frac{v' \beta_0^3}{\pi^4} + 1/2 \frac{(\pi^2 \Omega I_x \dot{v} + 10w'' - 2\Sigma I \pi^2 \ddot{w}) \beta_0^2}{\pi^4} + 1/2 \frac{(3\pi^2 \Omega I_x \dot{w}' + 4\dot{v}' \pi^2 \Sigma I - 8v''') \beta_0}{\pi^4} \\
& + 1/2 \frac{2\ddot{w}'' \pi^2 \Sigma I - 2\ddot{w} \pi^4 + 2\pi^2 \Omega I_x \dot{v}'' - 2w^{(4)}}{\pi^4} - c\dot{w} \cos(\beta_0 x) - c\dot{v} \sin(\beta_0 x) \\
& + e_\zeta \Omega^2 \cos(\beta_0 x - \Omega t) - e_\eta \Omega^2 \sin(\beta_0 x - \Omega t) + \frac{\Omega I_x}{2\pi^2} \left[(\dot{v} \beta_0^2 + \dot{w}' \beta_0) \cos(2\beta_0 x) + (-\dot{w} \beta_0^2 + \dot{v}' \beta_0) \sin(2\beta_0 x) \right] \\
& + \left(8 \frac{w \Delta D \beta_0^4}{\pi^4} - 22 \frac{v' \Delta D \beta_0^3}{\pi^4} + 1/2 \frac{(-42w'' \Delta D - 12\pi^2 \Omega \dot{v} \Delta I + 6\ddot{w} \pi^2 \Delta I) \beta_0^2}{\pi^4} \right. \\
& \left. + 1/2 \frac{(16v'' \Delta D - 16\pi^2 \Omega \dot{w}' \Delta I - 8\dot{v}' \pi^2 \Delta I) \beta_0}{\pi^4} + 1/2 \frac{-2\ddot{w}'' \pi^2 \Delta I + 2w^{(4)} \Delta D + 4\pi^2 \Omega \dot{v}'' \Delta I}{\pi^4} \right) \cos(-2\Omega t + 4\beta_0 x) \\
& + \left(8 \frac{v \Delta D \beta_0^4}{\pi^4} + 22 \frac{w' \Delta D \beta_0^3}{\pi^4} + 1/2 \frac{(12\pi^2 \Omega \dot{v} \Delta I - 42w'' \Delta D + 6\dot{w} \pi^2 \Delta I) \beta_0^2}{\pi^4} \right. \\
& \left. + 1/2 \frac{(-16\pi^2 \Omega \dot{v}' \Delta I + 8\ddot{w}' \pi^2 \Delta I - 16w'' \Delta D) \beta_0}{\pi^4} + 1/2 \frac{-4\pi^2 \Omega \dot{w}'' \Delta I - 2\ddot{v}'' \pi^2 \Delta I + 2v^{(4)} \Delta D}{\pi^4} \right) \sin(-2\Omega t + 4\beta_0 x) \\
& + \frac{2\mu}{\pi^4} (\beta_0 v' + w'') \left(\beta_0 \int_0^1 (vw'' - wv'') dx + \beta_0^2 \int_0^1 (ww' + vv') dx + \int_0^1 (v'v'' + w'w'') dx \right) = 0
\end{aligned}$$

(۴-۳)

برای ساده سازی، در معادلات فوق داریم،

$$\Delta D = \frac{(D_{\xi\xi} - D_{\eta\eta})}{2}, \quad \Delta I = \frac{(I_{\xi\xi} - I_{\eta\eta})}{2}, \quad \Sigma D = \frac{(D_{\xi\xi} + D_{\eta\eta})}{2}, \quad \Sigma I = \frac{(I_{\xi\xi} + I_{\eta\eta})}{2}, \quad (۵-۳)$$

$$u = u_\zeta, \quad v = v_\eta, \quad w = w_\xi$$

برای بی بعد سازی معادلات به شکل زیر عمل شده است،

$$\begin{aligned}
u^* &= \frac{u}{h_0}, v^* = \frac{v}{h_0}, w^* = \frac{w}{h_0}, x^* = \frac{x}{L}, t^* = \frac{t}{\sqrt{\frac{mL^4}{\pi^4 \Sigma D}}}, \Omega^* = \frac{\Omega}{\sqrt{\frac{\pi^4 \Sigma D}{mL^4}}}, \\
I_{xx}^* &= I_{\zeta\zeta}^* = \frac{\pi^2 I_{xx}}{mL^2}, \quad \Sigma I^* = \frac{\pi^2 \Sigma I}{mL^2}, \quad \Delta I^* = \frac{\pi^2 \Delta I}{mL^2}, \quad \Delta D^* = \frac{\pi^2 \Delta D}{mL^2}, \\
c^* &= c \frac{\pi^2 \sqrt{m \Sigma D}}{L^2}, \quad \mu = \frac{h_0^2 A_{xx}}{2 \Sigma D},
\end{aligned} \tag{۶-۳}$$

که h_0 و L ، به ترتیب اندازه ضخامت مقطع و طول تیر هستند. برای راحتی، در معادلات از علامت (*) صرف نظر شده است.

۳-۳- تحلیل پایداری با اعمال روش مقیاس‌های چند گانه به معادلات دیفرانسیل مشتقات جزئی (PDE)

اکنون به منظور حل معادلات بی بعد شده بدست آمده، از تئوری اغتشاشات و روش مقیاس‌های چندگانه برای تحلیل معادلات دیفرانسیل با مشتق جزئی استفاده می‌شود. به این ترتیب، فرض می‌شود،

$$\begin{aligned}
v(x,t) &= \varepsilon v_1(x, T_0, T_2) + \varepsilon^3 v_3(x, T_0, T_2) + \dots \\
w(x,t) &= \varepsilon w_1(x, T_0, T_2) + \varepsilon^3 w_3(x, T_0, T_2) + \dots
\end{aligned} \tag{۷-۳}$$

لازم به ذکر است اگر در تقریب فوق، جملات v_0, w_0, v_2, w_2 ظاهر شوند، پاسخ آنها در ادامه

صفر خواهد شد. $T_n (= \varepsilon^n t)$ به مقیاس‌های زمانی اشاره دارد. بگونه‌ای که $T_0 = t$ و $T_2 = \varepsilon^2 t$. از طرفی،

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} &= D_0 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \\
\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) &= D_0^2 + 2\varepsilon^2 D_2 D_0 + \dots
\end{aligned} \tag{۸-۳}$$

که D_0 و D_2 به ترتیب برابرند با، $\frac{\partial}{\partial T_0}$ و $\frac{\partial}{\partial T_2}$. به منظور بالانس پارامترهای غیرخطی در معادلات و

استخراج رزونانس‌های اولیه و پارامتریک، قرار می‌دهیم،

$$c = \varepsilon^2 \bar{c}, \Delta D = \varepsilon^2 \bar{\Delta D}, \Delta I = \varepsilon^2 \bar{\Delta I}, e_\zeta = \varepsilon^3 \bar{e}_\zeta, e_\eta = \varepsilon^3 \bar{e}_\eta \tag{۹-۳}$$

به این ترتیب، با اعمال روش مقیاس‌های چندگانه و جدا سازی عبارات مرتبه $O(\varepsilon^1)$ و $O(\varepsilon^3)$

داریم،

$O(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned}
& \frac{\Omega I_x}{2\pi^2} \left[(\beta_0^2 D_0 w_1 - \beta_0 D_0 v_1') \cos(2\beta_0 x) + (\beta_0^2 D_0 v_1 + \beta_0 D_0 w_1' \beta_0) \sin(2\beta_0 x) \right] \\
& - 2 \frac{\beta_0^3 w_1'}{\pi^4} + 1/2 \left(\frac{-2 \Sigma I D_0^2 v_1 \pi^2 - \Omega I_x D_0 w_1 \pi^2 + 10 v_1''}{\pi^4} \right) \beta_0^2 \\
& + 1/2 \frac{(-4 \Sigma I D_0^2 w_1' \pi^2 + 3 \Omega I_x D_0 v_1' \pi^2 + 8 w_1''') \beta_0}{\pi^4} \\
& + 1/2 \frac{-2 v_1^{(4)} + 2 \Sigma I D_0^2 v_1'' \pi^2 - 2 D_0^2 v_1 \pi^4 + 2 \Omega I_x D_0 w_1'' \pi^2}{\pi^4} = 0
\end{aligned} \tag{10-3}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\Omega I_x}{2\pi^2} \left[(\beta_0^2 D_0 v_1 + \beta_0 D_0 w_1') \cos(2\beta_0 x) + (-D_0 w_1 \beta_0^2 + D_0 v_1' \beta_0) \sin(2\beta_0 x) \right] \\
& + 2 \frac{\beta_0^3 v_1'}{\pi^4} + 1/2 \left(\frac{-2 \Sigma I D_0^2 w_1 \pi^2 + \Omega I_x D_0 v_1 \pi^2 + 10 w_1''}{\pi^4} \right) \beta_0^2 \\
& + 1/2 \frac{(4 \Sigma I D_0^2 v_1' \pi^2 + 3 \Omega I_x D_0 w_1' \pi^2 - 8 v_1''') \beta_0}{\pi^4} \\
& + 1/2 \frac{-2 w_1^{(4)} + 2 \Sigma I D_0^2 w_1'' \pi^2 - 2 D_0^2 w_1 \pi^4 - 2 \Omega I_x D_0 v_1'' \pi^2}{\pi^4} = 0
\end{aligned} \tag{11-3}$$

9

$O(\varepsilon^3)$:

$$\begin{aligned}
& \left[(-6D_0v_1\beta_0^2 - 8D_0w_1'\beta_0 + 2D_0v_1'')\Omega\Delta I + \frac{8\Delta D\beta_0^4}{\pi^2}w_1 - \frac{22\beta_0^3\Delta D}{\pi^2}v_1' \right. \\
& \left. + \left(-\frac{21\Delta D}{\pi^2}w_1'' + 3\Delta ID_0^2w_1 \right)\beta_0^2 + \left(\frac{8\Delta D}{\pi^2}v_1''' - 4\Delta ID_0^2v_1' \right)\beta_0 - \Delta ID_0^2w_1'' + \frac{\Delta D}{\pi^2}w_1^{(4)} \right] \frac{\sin(4\beta_0x - 2\Omega T_0)}{\pi^2} \\
& \left[(-6D_0v_1\beta_0^2 + 8D_0v_1'\beta_0 + 2D_0w_1'')\Omega\Delta I - \frac{8\Delta D\beta_0^4}{\pi^2}v_1 - \frac{22\beta_0^3\Delta D}{\pi^2}w_1' \right. \\
& \left. + \left(\frac{21\Delta D}{\pi^2}v_1'' - 3\Delta ID_0^2v_1 \right)\beta_0^2 + \left(\frac{8\Delta D}{\pi^2}w_1''' - 4\Delta ID_0^2w_1' \right)\beta_0 + \Delta ID_0^2v_1'' - \frac{\Delta D}{\pi^2}v_1^{(4)} \right] \frac{\cos(4\beta_0x - 2\Omega T_0)}{\pi^2} \\
& + \frac{I_{xx}\Omega}{2\pi^2} \left[((D_2w_1 + D_0w_3)\beta_0^2 - (D_2v_1' + D_0v_3')\beta_0)\cos(2\beta_0x) \right. \\
& \left. + ((D_2v_1 + D_0v_3)\beta_0^2 + (D_2w_1' + D_0v_3')\beta_0)\sin(2\beta_0x) \right] \tag{12-3} \\
& + \frac{I_{xx}\Omega}{\pi^2} \left(1/2\beta_0^2(-D_2w_1 - D_0w_3) + 3/2\beta_0(D_0v_3' + D_2v_1') + (D_2w_1'' + D_0w_3'') \right) \\
& + \frac{2\mu}{\pi^4} (-\beta_0w_1' + v_1'') \left(\beta_0 \int_0^1 (v_1w_1'' - w_1v_1'') dx + \beta_0^2 \int_0^1 (w_1w_1' + v_1v_1') dx + \int_0^1 (v_1v_1'' + w_1w_1'') dx \right) \\
& + \left(-\Sigma ID_0^2v_3 - 2\Sigma ID_0D_2v_1 + \frac{5}{\pi^2}v_3'' \right) \frac{\beta_0^2}{\pi^2} + \left(-4\Sigma ID_0D_2w_1' - 2\Sigma ID_0^2w_3' + \frac{4}{\pi^2}w_3''' \right) \frac{\beta_0}{\pi^2} \\
& - 2D_0D_2v_1 - D_0^2v_3 - \frac{v_3^{(4)}}{\pi^4} + \frac{1}{\pi^2} (\Sigma ID_0^2v_3'' + 2\Sigma ID_0D_2v_1'') - \frac{2\beta_0^3}{\pi^4}w_3' \\
& + \Omega^2 e_\eta(x) \cos(\beta_0x - \Omega T_0) + \Omega^2 e_\xi(x) \sin(\beta_0x - \Omega T_0) - cD_0v_1 \cos(\beta_0x) + cD_0w_1 \sin(\beta_0x) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[(-6D_0v_1\beta_0^2 - 8D_0w_1'\beta_0 + 2D_0v_1'')\Omega\Delta I + \frac{8\Delta D\beta_0^4}{\pi^2}w_1 - \frac{22\beta_0^3\Delta D}{\pi^2}v_1' \right. \\
& \left. + \left(-\frac{21\Delta D}{\pi^2}w_1'' + 3\Delta ID_0^2w_1 \right)\beta_0^2 + \left(\frac{8\Delta D}{\pi^2}v_1''' - 4\Delta ID_0^2v_1' \right)\beta_0 - \Delta ID_0^2w_1'' + \frac{\Delta D}{\pi^2}w_1^{(4)} \right] \frac{\cos(4\beta_0x - 2\Omega T_0)}{\pi^2} \\
& \left[(6D_0w_1\beta_0^2 + 8D_0v_1'\beta_0 + 2D_0w_1'')\Omega\Delta I + \frac{8\Delta D\beta_0^4}{\pi^2}v_1 + \frac{22\beta_0^3\Delta D}{\pi^2}w_1' \right. \\
& \left. + \left(-\frac{21\Delta D}{\pi^2}v_1'' + 3\Delta ID_0^2v_1 \right)\beta_0^2 + \left(-\frac{8\Delta D}{\pi^2}w_1''' - 4\Delta ID_0^2w_1' \right)\beta_0 + \Delta ID_0^2v_1'' - \frac{\Delta D}{\pi^2}v_1^{(4)} \right] \frac{\sin(4\beta_0x - 2\Omega T_0)}{\pi^2} \\
& + \frac{I_{xx}\Omega}{2\pi^2} \left[-(D_2w_1 + D_0w_3)\beta_0^2 + (D_2v_1' + D_0v_3')\beta_0 \right] \sin(2\beta_0x) \\
& + ((D_2v_1 + D_0v_3)\beta_0^2 + (D_2w_1' + D_0v_3')\beta_0)\cos(2\beta_0x) \tag{13-3} \\
& + \frac{I_{xx}\Omega}{\pi^2} \left(1/2\beta_0^2(D_2v_1 + D_0v_3) + 3/2\beta_0(D_0w_3' + D_2w_1') + (D_2w_1'' + D_0w_3'') \right) \\
& + \frac{2\mu}{\pi^4} (\beta_0v_1' + w_1'') \left(\beta_0 \int_0^1 (v_1w_1'' - w_1v_1'') dx + \beta_0^2 \int_0^1 (w_1w_1' + v_1v_1') dx + \int_0^1 (v_1v_1'' + w_1w_1'') dx \right) \\
& + \left(-\Sigma ID_0^2w_3 - 2\Sigma ID_0D_2w_1 + \frac{5}{\pi^2}w_3'' \right) \frac{\beta_0^2}{\pi^2} + \left(4\Sigma ID_0D_2v_1' - 2\Sigma ID_0^2v_3' - \frac{4}{\pi^2}v_3''' \right) \frac{\beta_0}{\pi^2} \\
& - 2D_0D_2w_1 - D_0^2w_3 - \frac{w_3^{(4)}}{\pi^4} + \frac{1}{\pi^2} (\Sigma ID_0^2w_3'' + 2\Sigma ID_0D_2v_1'') - \frac{2\beta_0^3}{\pi^4}v_3' \\
& - \Omega^2 e_\eta(x) \sin(\beta_0x - \Omega T_0) + \Omega^2 e_\xi(x) \cos(\beta_0x - \Omega T_0) - cD_0w_1 \cos(\beta_0x) - cD_0v_1 \sin(\beta_0x) = 0
\end{aligned}$$

حل معادلات مرتبه اول ε به شکل زیر تخمین زده می‌شود،

$$v_1(x, T_0, T_2) = \Phi_f(x) \left(A_1(T_2)e^{i\omega_f T_0} + \bar{A}_1(T_2)e^{-i\omega_f T_0} \right) + \Phi_b(x) \left(A_2(T_2)e^{i\omega_b T_0} + \bar{A}_2(T_2)e^{-i\omega_b T_0} \right)$$

$$w_1(x, T_0, T_2) = \Phi_f(x) \left(-iA_1(T_2)e^{i\omega_f T_0} + i\bar{A}_1(T_2)e^{-i\omega_f T_0} \right) + \Phi_b(x) \left(-iA_2(T_2)e^{i\omega_b T_0} + i\bar{A}_2(T_2)e^{-i\omega_b T_0} \right)$$

که ω_b و ω_f فرکانسهای خطی همسو و ناهمسو بوده و از حل معادله خطی حاصل از (۳-۱۰) و (۳-۱۱) و سپس حل مسئله مقدار ویژه بدست می‌آیند. به منظور بررسی رزونانس‌های اولیه و پارامتریک، نزدیکی فرکانس Ω به فرکانس طبیعی اولیه ω_f با در نظر گرفتن پارامتر تنظیم کننده σ به شکل زیر تخمین زده می‌شود:

$$\Omega = \omega_f + \varepsilon^2 \sigma \quad (۳-۱۴)$$

اکنون، با قرار دادن رابطه (۳-۱۴) و جواب مرتبه ۱ برای v و w (معادلات فوق) در معادلات مرتبه ۳ برای هر دو v و w ، معادلات مرتبه ۳ را با جدا کردن و مرتب سازی ضرایب $e^{i\omega_b T_0}$ و $e^{i\omega_f T_0}$ برای از بین بردن ضرایب سکولار و حذف small divisorهای موجود به شکل زیر ساده می‌کنیم،

$$\left[\left(\beta_0^2 D_0 w_3 + i\beta_0^2 D_0 v_3 + i\beta_0 D_0 w_3' - \beta_0 D_0 v_3' \right) e^{-2i\beta_0 x} + \left(\beta_0^2 D_0 w_3 - i\beta_0^2 D_0 v_3 - i\beta_0 D_0 w_3' - \beta_0 D_0 v_3' \right) e^{2i\beta_0 x} \right. \\ \left. + 3\beta_0 D_0 v_3' - \beta_0^2 D_0 w_3 + 2D_0 w_3'' \right] \frac{I_{xx} \Omega}{2\pi^2} + \frac{10\beta_0^2}{\pi^4} v_3'' - \frac{4\beta_0 \Sigma I}{\pi^2} D_0^2 w_3' - \frac{4\beta_0^3}{\pi^4} w_3' - 2 \frac{(\pi^2 + \beta_0^2 \Sigma I)}{\pi^2} D_0^2 v_3 \\ + \frac{8\beta_0}{\pi^4} w_3''' - 2 \frac{v_3^{(4)}}{\pi^4} + 2 \frac{\Sigma I}{\pi^2} D_0^2 v_3'' = P_{f,v}(x, T_2) e^{i\omega_f T_0} + P_{b,v}(x, T_2) e^{i\omega_b T_0} + CC + N.S.T \quad (۳-۱۵)$$

$$\left[\left(\beta_0^2 D_0 v_3 - i\beta_0^2 D_0 w_3 + i\beta_0 D_0 v_3' + \beta_0 D_0 w_3' \right) e^{-2i\beta_0 x} + \left(\beta_0^2 D_0 v_3 + i\beta_0^2 D_0 w_3 - i\beta_0 D_0 v_3' + \beta_0 D_0 w_3' \right) e^{2i\beta_0 x} \right. \\ \left. + 3\beta_0 D_0 w_3' + \beta_0^2 D_0 v_3 - 2D_0 v_3'' \right] \frac{I_{xx} \Omega}{2\pi^2} + \frac{10\beta_0^2}{\pi^4} w_3'' + \frac{4\beta_0 \Sigma I}{\pi^2} D_0^2 v_3' + \frac{4\beta_0^3}{\pi^4} v_3' - 2 \frac{(\pi^2 + \beta_0^2 \Sigma I)}{\pi^2} D_0^2 w_3 \\ - \frac{8\beta_0}{\pi^4} v_3''' - 2 \frac{w_3^{(4)}}{\pi^4} + 2 \frac{\Sigma I}{\pi^2} D_0^2 w_3'' = P_{f,w}(x, T_2) e^{i\omega_f T_0} + P_{b,w}(x, T_2) e^{i\omega_b T_0} + CC + N.S.T \quad (۳-۱۶)$$

که CC و $N.S.T$ به معنی مختلط مزدوج و ضرایب غیر سکولار می‌باشند.

پس از بدست آوردن ضرایب سکولار، از آنجا که بخشهای همگن معادلات (۳-۱۵) و (۳-۱۶)

دارای پاسخهای غیر بدیهی است، با ضرب طرفین معادلات به ترتیب در $\Phi_b(x)$ و $\Phi_f(x)$ و

انتگرالگیری از $x=0$ تا $x=1$ ، با استفاده از شرایط حل پذیری برای آنها داریم،

$$\int_0^1 \Phi_f(x) P_f(x, T_2) dx = 0 \quad \text{و} \quad \int_0^1 \Phi_b(x) P_b(x, T_2) dx = 0 \quad (17-3)$$

که

$$P_f(x, T_2) = P_{f,v}(x, T_2) + iP_{f,w}(x, T_2) \quad \text{و} \quad P_b(x, T_2) = P_{b,v}(x, T_2) + iP_{b,w}(x, T_2) \quad (18-3)$$

ضرایب سکولار معادلات مرتبه ۳ از ε هستند و برابرند با،

$$\begin{aligned} P_{f,v} = & \frac{1}{\pi^2} \left[\left(-\frac{1}{4} (\beta_0 \Phi'_f + i\beta_0^2 \Phi_f) e^{2i\beta_0 x} + \frac{1}{4} i\beta_0^2 \Phi_f + \frac{3}{4} \beta_0 \Phi'_f - \frac{1}{2} i\Phi_f'' \right) \Omega I_{xx} \right. \\ & \left. - (i\beta_0^2 \Sigma I \Phi_f + 2\beta_0 \Sigma I \Phi'_f - i\Sigma I \Phi_f'' + i\pi^2 \Phi_f) \omega_f \right] A_1' \\ & + \frac{1}{\pi^4} \left(\int_0^1 \Phi'_f \Phi_f'' dx \Phi_f'' + i\beta_0 \int_0^1 \Phi'_f \Phi_f'' dx \Phi'_f + \beta_0^2 \int_0^1 \Phi'_f \Phi_f'' dx \Phi_f'' + i\beta_0^3 \int_0^1 \Phi'_f \Phi_f'' dx \Phi'_f \right) \mu \bar{A}_1 A_1^2 \\ & + \frac{1}{\pi^4} \left(1/2 \beta_0^2 \int_0^1 \Phi'_b \Phi_f'' dx \Phi_b'' + 1/2 i\beta_0^3 \int_0^1 \Phi'_b \Phi_f'' dx \Phi_b' + i\beta_0 \int_0^1 \Phi'_b \Phi_f'' dx \Phi_f'' + 1/2 i\beta_0 \int_0^1 \Phi'_f \Phi_b'' dx \Phi_b' \right. \\ & + 1/2 \int_0^1 \Phi'_f \Phi_b'' dx \Phi_b'' + \int_0^1 \Phi'_b \Phi_b'' d\xi \Phi_f'' + 1/2 i\beta_0 \int_0^1 \Phi'_f \Phi_b'' dx \Phi_b'' - 1/2 i\beta_0 \int_0^1 \Phi'_b \Phi_f'' dx \Phi_b'' + \beta_0^2 \int_0^1 \Phi'_b \Phi_b'' dx \Phi_f'' \\ & + 1/2 \beta_0^2 \int_0^1 \Phi'_f \Phi_b'' dx \Phi_b'' + 1/2 \int_0^1 \Phi'_b \Phi_f'' dx \Phi_b'' + 1/2 i\beta_0^3 \int_0^1 \Phi'_f \Phi_b'' dx \Phi_b' + i\beta_0^3 \int_0^1 \Phi'_b \Phi_b'' dx \Phi_f'' - 1/2 \beta_0^2 \int_0^1 \Phi'_f \Phi_b'' dx \Phi_b' \\ & \left. + 1/2 \beta_0^2 \int_0^1 \Phi'_b \Phi_f'' dx \Phi_b' + 1/2 i\beta_0 \int_0^1 \Phi'_b \Phi_f'' dx \Phi_b' \right) \bar{A}_2 A_1 A_2 \mu + \frac{1}{2\pi^4} - 1/2 i c e^{i\beta_0 x} \Phi_f A_1 \omega_f + \frac{1}{2} (e_\eta + i e_\xi) \Omega^2 e^{-i\beta_0 x} e^{i\sigma T_2} \\ & + \left[\frac{1}{\pi^2} (\Delta I \Phi_f'' - 4i\Delta I \beta_0 \Phi'_f - 3\Delta I \beta_0^2 \Phi_f) \Omega \omega_f + \frac{1}{\pi^4} \left(\frac{3}{2} \Delta I \Phi_f \omega_f^2 + \frac{21}{2} \Delta D \Phi_f'' \right) \beta_0^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{\pi^4} (4\Delta D \Phi_f'' + 2\pi^2 \Delta I \Phi_f' \omega_f^2) i\beta_0 - \frac{1}{2\pi^2} \Delta I \omega_f^2 \Phi_f'' - \frac{1}{2\pi^4} \Delta D \Phi_f^{(4)} - \frac{1}{\pi^4} (4\Delta D \beta_0^4 \Phi_f + 11i\Delta D \beta_0^3 \Phi_f') \right] \bar{A}_1 e^{2i\sigma T_2} e^{-4i\beta_0 x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{b,v} = & \frac{1}{\pi^2} \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} (\beta_0 \Phi_b' + i\beta_0^2 \Phi_b) e^{2i\beta_0 x} + (-i\Phi_b'' + \frac{1}{2} i\beta_0^2 \Phi_b + \frac{3}{2} \beta_0 \Phi_b') \right) I_{xx} \Omega \right. \\ & \left. - (i\beta_0^2 \Phi_b + 2\beta_0 \Phi_b') \Sigma I \omega_b + (-\pi^2 \Phi_b + \Sigma I \Phi_b'') i\omega_b \right] A_2' - \frac{1}{2} i c e^{i\beta_0 x} \omega_b \Phi_b A_2 \\ & + \frac{1}{\pi^4} \left(\int_0^1 \Phi'_f \Phi_f'' dx \Phi_f'' + i\beta_0^3 \int_0^1 \Phi'_f \Phi_f'' dx \Phi'_f + i\beta_0 \int_0^1 \Phi'_f \Phi_f'' dx \Phi_f'' + \beta_0^2 \int_0^1 \Phi'_f \Phi_f'' dx \Phi_f'' \right) \mu \bar{A}_2 A_2^2 \\ & + \frac{1}{\pi^4} \left(1/2 \beta_0^2 \int_0^1 \Phi'_b \Phi_f'' dx \Phi_f'' + \int_0^1 \Phi'_b \Phi_b'' d\xi \Phi_f'' + i\beta_0 \int_0^1 \Phi'_b \Phi_f'' dx \Phi_f'' + 1/2 i\beta_0 \int_0^1 \Phi'_f \Phi_b'' dx \Phi_b' \right. \\ & + 1/2 \int_0^1 \Phi'_f \Phi_b'' dx \Phi_b'' + 1/2 \beta_0^2 \int_0^1 \Phi'_b \Phi_f'' dx \Phi_b' + 1/2 i\beta_0 \int_0^1 \Phi'_b \Phi_f'' dx \Phi_b'' - 1/2 i\beta_0 \int_0^1 \Phi'_b \Phi_f'' dx \Phi_b'' + \beta_0^2 \int_0^1 \Phi'_b \Phi_b'' dx \Phi_f'' \\ & + 1/2 \beta_0^2 \int_0^1 \Phi'_f \Phi_b'' dx \Phi_f'' + 1/2 \int_0^1 \Phi'_b \Phi_f'' dx \Phi_b'' + 1/2 i\beta_0^3 \int_0^1 \Phi'_f \Phi_b'' dx \Phi_b' + 1/2 i\beta_0^3 \int_0^1 \Phi'_b \Phi_f'' dx \Phi_b' + i\beta_0^3 \int_0^1 \Phi'_b \Phi_b'' dx \Phi_f'' \\ & \left. - 1/2 \beta_0^2 \int_0^1 \Phi'_f \Phi_b'' dx \Phi_b' + 1/2 i\beta_0 \int_0^1 \Phi'_b \Phi_f'' dx \Phi_b' \right) \bar{A}_1 A_1 A_2 \mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{f,w} = & \frac{1}{\pi^2} \left[1/2 \left(\left(\frac{1}{2} \beta_0^2 \Phi_f - \frac{1}{2} i \beta_0 \Phi_f' \right) e^{2i\beta_0 x} + \frac{1}{2} \beta_0^2 \Phi_f - \frac{3}{2} i \beta_0 \Phi_f' - \Phi_f'' \right) \Omega_{xx} \right. \\
& - \left. \left(-i\beta_0^2 \Sigma I \Phi_f + 2i\beta_0 \Sigma I \Phi_f' + \pi^2 \Phi_f + \Sigma I \Phi_f'' \right) \omega_f \right] A_1' \\
& + \frac{1}{2\pi^4} \left[\left(-i\Phi_f'' + \beta_0 \Phi_f' \right) \int_0^1 \Phi_b'^2 dx + \left(-i\beta_0^2 \Phi_f'' + \beta_0^3 \Phi_f' \right) \int_0^1 \Phi_b^2 dx + \left(-i\Phi_b'' + \beta_0 \Phi_b' \right) \int_0^1 \Phi_f' \Phi_b' dx \right. \\
& + \left. \left(-i\beta_0^2 \Phi_b'' + \beta_0^3 \Phi_b' \right) \int_0^1 \Phi_f \Phi_b dx + \left(i\beta_0^2 \Phi_b' + \beta_0 \Phi_b'' \right) \int_0^1 \Phi_b' \Phi_f dx + \left(-\beta_0 \Phi_b'' - i\beta_0^2 \Phi_b' \right) \int_0^1 \Phi_f' \Phi_b dx \right] \mu \bar{A}_2 A_2 A_1 \\
& + \frac{1}{2\pi^4} \left[\left(-i\beta_0^2 \Phi_f'' + \beta_0^3 \Phi_f' \right) \int_0^1 \Phi_f^2 dx + \left(-\Phi_f'' + \beta_0 \Phi_f' \right) \int_0^1 \Phi_f'^2 dx \right] \mu A_1^2 \bar{A}_1 \\
& + \left[\frac{1}{\pi^2} \left(-i\Phi_f'' - 4\beta_0 \Phi_f' + 3i\beta_0^2 \Phi_f \right) \Omega \omega_f \Delta I - \frac{1}{\pi^4} \left(-4i\beta_0^4 \Phi_f + 11\beta_0^3 \Phi_f' \right) \Delta D - \frac{1}{\pi^4} \left(\frac{3}{2} \Delta I \Phi_f \omega_f^2 + \frac{21}{2} \Delta D \Phi_f'' \right) i\beta_0^2 \right. \\
& + \left. \frac{1}{\pi^4} \left(4\Delta D \Phi_f'' + 2\pi^2 \Delta I \Phi_f' \omega_f^2 \right) \beta_0 + \frac{1}{2\pi^2} i \Delta I \omega_f^2 \Phi_f'' + \frac{1}{2\pi^4} i \Delta D \Phi_f^{(4)} \right] \bar{A}_1 e^{2i\sigma T_2} e^{-4i\beta_0 x} \\
& - \frac{1}{2} c e^{i\beta_0 x} \Phi_f A_1 \omega_f + \frac{1}{2} \left(-ie_\eta + e_\xi \right) \Omega^2 e^{-i\beta_0 x} e^{i\sigma T_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{b,w} = & \frac{1}{\pi^2} \left[1/2 \left(-\frac{1}{2} \left(i\beta_0 \Phi_b' + \beta_0^2 \Phi_b \right) e^{2i\beta_0 x} + \left(-\Phi_b'' + \frac{1}{2} \beta_0^2 \Phi_b - \frac{3}{2} i \beta_0 \Phi_b' \right) \right) I_{xx} \Omega \right. \\
& - \left. \left(\beta_0^2 \Phi_b - 2i\beta_0 \Phi_b' \right) \Sigma I \omega_b + \left(-\pi^2 \Phi_b + \Sigma I \Phi_b'' \right) \omega_b \right] A_2' \\
& + \frac{1}{2\pi^4} \left(i \int_0^1 \Phi_b' \Phi_b'' dx \Phi_b'' + \beta_0 \int_0^1 \Phi_b' \Phi_b'' dx \Phi_b' + i\beta_0^2 \int_0^1 \Phi_b' \Phi_b dx \Phi_b'' \right) \mu \bar{A}_2 A_2^2 - 1/2c e^{i\beta_0 x} \omega_b \Phi_b A_2 \\
& + \frac{1}{2\pi^4} \left(1/2 i \beta_0^2 \int_0^1 \Phi_b' \Phi_f' dx \Phi_f + \beta_0 \int_0^1 \Phi_b' \Phi_f'' dx \Phi_f' + 1/2 \beta_0 \int_0^1 \Phi_f' \Phi_f'' dx \Phi_b' + 1/2 i \int_0^1 \Phi_f' \Phi_b'' dx \Phi_b'' \right. \\
& + 1/2 \beta_0 \int_0^1 \Phi_b \Phi_f'' dx \Phi_b'' + 1/2 i \beta_0 \int_0^1 \Phi_b \Phi_f'' dx \Phi_b'' + \beta_0^2 \int_0^1 \Phi_b' \Phi_b dx \Phi_f'' + 1/2 \beta_0^2 \int_0^1 \Phi_f' \Phi_b' dx \Phi_f'' \\
& + 1/2 \int_0^1 \Phi_b' \Phi_f'' dx \Phi_b'' + 1/2 i \beta_0^3 \int_0^1 \Phi_f' \Phi_b dx \Phi_b' + 1/2 i \beta_0^3 \int_0^1 \Phi_b' \Phi_f dx \Phi_b' \\
& \left. + i\beta_0^3 \int_0^1 \Phi_b' \Phi_b dx \Phi_f' - 1/2 i \beta_0^2 \int_0^1 \Phi_f \Phi_b'' dx \Phi_b' + 1/2 i \beta_0 \int_0^1 \Phi_b' \Phi_f'' dx \Phi_b' \right) \mu A_1 A_2 \bar{A}_1
\end{aligned}$$

به این ترتیب، با توجه به شرایط حل پذیری فوق و تقریب شکل مدها با شکل مدهای خطی تیر

یک سر گیردار به صورت

$$\Phi_f = \Phi_b = \cos \gamma_n x - \cosh \gamma_n x - \frac{\cos \gamma_n + \cosh \gamma_n}{\sin \gamma_n + \sinh \gamma_n} \sin \gamma_n x - \sinh \gamma_n x$$

$$\gamma_n \approx \frac{\sqrt{n-1} \pi}{\sqrt{2}}$$

داریم،

$$\begin{aligned}
& \left(\Lambda_{1,v} + i\Lambda_{2,v} \right) D_2 A_1 + \left(\Lambda_{5,v} + i\Lambda_{6,v} \right) A_1 A_2 \bar{A}_2 + \left(i\Lambda_{7,v} + \Lambda_{8,v} \right) A_1^2 \bar{A}_1 + \left(i\Lambda_{3,v} + \Lambda_{4,v} \right) \bar{A}_1 e^{2i\sigma T_2} \\
& - i c A_1 \omega_f \Pi_{(9,\beta_0,m)} + \left(e_\eta + i e_\xi \right) \Omega^2 e^{i\sigma T_2} = 0
\end{aligned} \tag{۱۹-۳}$$

$$\left(\Lambda_{1,w} + i\Lambda_{2,w} \right) D_2 A_2 + \left(\Lambda_{5,v} + i\Lambda_{6,v} \right) A_1 A_2 \bar{A}_1 + \left(\Lambda_{8,v} + i\Lambda_{7,v} \right) A_2^2 \bar{A}_2 - i c A_2 \omega_b \Pi_{(9,\beta_0,m)} = 0 \tag{۲۰-۳}$$

که \bar{A}_2 و \bar{A}_1 مزدوجهای مختلط A_2 و A_1 بوده و

$$\begin{aligned}\Pi_{(1,\beta_0,n)} &= \int_0^1 \phi \phi' dx; \Pi_{(2,\beta_0,n)} = \int_0^1 \frac{\phi \phi'}{e^{2i\beta_0 x}} dx = \Pi_{(2,\beta_0,n)}^C + i\Pi_{(2,\beta_0,n)}^S; \Pi_{(3,\beta_0,n)} = \int_0^1 \phi^2 dx; \\ \Pi_{(4,\beta_0,n)} &= \int_0^1 \frac{\phi^2}{e^{2i\beta_0 x}} dx = \Pi_{(4,\beta_0,n)}^C + i\Pi_{(4,\beta_0,n)}^S; \Pi_{(5,\beta_0,n)} = \int_0^1 \phi \phi'' dx; \Pi_{(6,\beta_0,n)} = \int_0^1 \phi \phi''' dx; \\ \Pi_{(7,\beta_0,n)} &= \int_0^1 \phi \phi^{(4)} dx; \Pi_{(8,\beta_0,n)} = \int_0^1 \frac{\phi^2}{e^{4i\beta_0 x}} dx = \Pi_{(8,\beta_0,n)}^C + i\Pi_{(8,\beta_0,n)}^S; \\ \Pi_{(9,\beta_0,n)} &= \int_0^1 \phi^2 e^{i\beta_0 x} dx = \Pi_{(9,\beta_0,n)}^C + i\Pi_{(9,\beta_0,n)}^S; \Pi_{(10,\beta_0,n)} = \int_0^1 \frac{\phi \phi^{(4)}}{e^{4i\beta_0 x}} dx = \Pi_{(10,\beta_0,n)}^C + i\Pi_{(10,\beta_0,n)}^S; \\ \Pi_{(11,\beta_0,n)} &= \int_0^1 \frac{\phi \phi'}{e^{4i\beta_0 x}} dx = \Pi_{(11,\beta_0,n)}^C + i\Pi_{(11,\beta_0,n)}^S; \Pi_{(12,\beta_0,n)} = \int_0^1 \frac{\phi \phi''}{e^{4i\beta_0 x}} dx = \Pi_{(12,\beta_0,n)}^C + i\Pi_{(12,\beta_0,n)}^S; \\ \Pi_{(13,\beta_0,n)} &= \int_0^1 \phi' \phi'' dx; \Pi_{(14,\beta_0,n)} = \int_0^1 \frac{\phi \phi'''}{e^{4i\beta_0 x}} dx = \Pi_{(14,\beta_0,n)}^C + i\Pi_{(14,\beta_0,n)}^S;\end{aligned}$$

9

$$\begin{aligned}\Lambda_{1,v} &= \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{3}{2} I_{xx} \Omega - 4 \Sigma I \omega_f \right) \beta_0 \Pi_{(1,\beta_0,n)} \\ \Lambda_{2,v} &= \frac{1}{2\pi^2} \left(\beta_0^2 \Pi_{(3,\beta_0,n)} - 2 \Pi_{(5,\beta_0,n)} \right) I_{xx} \Omega + \frac{2}{\pi^2} \left(\Pi_{(5,\beta_0,n)} + \beta_0^2 \Pi_{(3,\beta_0,n)} \right) \Sigma I \omega_f - 2 \Pi_{(3,\beta_0,n)} \omega_f \\ \Lambda_{3,v} &= \frac{2 \Delta I \omega_f \Omega}{\pi^2} \left[-\frac{4}{\pi^2} \beta_0 \Pi_{(11,\beta_0,n)}^C - \frac{3}{\pi^2} \beta_0^2 \Pi_{(8,\beta_0,n)}^S + \Pi_{(12,\beta_0,n)}^S \right] \\ &+ \frac{\Delta I \omega_f^2}{\pi^2} \left[4 \beta_0 \Pi_{(11,\beta_0,n)}^C + 3 \beta_0^2 \Pi_{(8,\beta_0,n)}^S - \Pi_{(12,\beta_0,n)}^S \right] \\ &+ \frac{\Delta D}{\pi^4} \left[-\Pi_{(10,\beta_0,n)}^S + 8 \beta_0 \Pi_{(14,\beta_0,n)}^C - 22 \beta_0^3 \Pi_{(11,\beta_0,n)}^C - 8 \beta_0^4 \Pi_{(8,\beta_0,n)}^S + 21 \beta_0^2 \Pi_{(12,\beta_0,n)}^S \right] \\ \Lambda_{4,v} &= \frac{2 \Delta I \omega_f \Omega}{\pi^2} \left[\frac{4}{\pi^2} \beta_0 \Pi_{(11,\beta_0,n)}^S - \frac{3}{\pi^2} \beta_0^2 \Pi_{(8,\beta_0,n)}^C + \Pi_{(12,\beta_0,n)}^C \right] \\ &+ \frac{\Delta I \omega_f^2}{\pi^2} \left[-4 \beta_0 \Pi_{(11,\beta_0,n)}^S + 3 \beta_0^2 \Pi_{(8,\beta_0,n)}^C - \Pi_{(12,\beta_0,n)}^C \right] \\ &+ \frac{\Delta D}{\pi^4} \left[-\Pi_{(10,\beta_0,n)}^C - 8 \beta_0 \Pi_{(14,\beta_0,n)}^S + 22 \beta_0^3 \Pi_{(11,\beta_0,n)}^S - 8 \beta_0^4 \Pi_{(8,\beta_0,n)}^C + 21 \beta_0^2 \Pi_{(12,\beta_0,n)}^C \right], \\ \Lambda_{5,v} &= \frac{4}{\pi^4} \mu \left(\Pi_{(13,\beta_0,n)} \Pi_{(5,\beta_0,n)} + \beta_0^2 \Pi_{(1,\beta_0,n)} \Pi_{(5,\beta_0,n)} \right) \\ \Lambda_{6,v} &= \frac{4}{\pi^4} \mu \left(\beta_0^3 \Pi_{(1,\beta_0,n)}^2 + \beta_0 \Pi_{(13,\beta_0,n)} \Pi_{(1,\beta_0,n)} \right), \\ \Lambda_{7,v} &= \frac{2}{\pi^4} \mu \left(\beta_0 \Pi_{(13,\beta_0,n)} \Pi_{(1,\beta_0,n)} + \beta_0^3 \Pi_{(1,\beta_0,n)}^2 \right) \\ \Lambda_{8,v} &= \frac{2}{\pi^4} \mu \left(\beta_0^2 \Pi_{(1,\beta_0,n)} \Pi_{(5,\beta_0,n)} + \Pi_{(13,\beta_0,n)} \Pi_{(5,\beta_0,n)} \right), \\ \Lambda_{1,w} &= \frac{3}{2\pi^2} I_{xx} \beta_0 \Pi_{(1,\beta_0,n)} \Omega - 4 \Sigma I \beta_0 \Pi_{(1,\beta_0,n)} \omega_b\end{aligned}$$

$$\Lambda_{2,w} = \frac{1}{2\pi^2} (\beta_0^2 \Pi_{(3,\beta_0,n)} - 2\Pi_{(5,\beta_0,n)}) I_{xx} \Omega + \frac{1}{\pi^2} (-2\beta_0^2 \Pi_{(3,\beta_0,n)} \omega_b + 2\Pi_{(5,\beta_0,n)}) \Sigma I \omega_b - 2\Pi_{(3,\beta_0,n)} \omega_b \quad (21-3)$$

$$e_\eta = \int_0^1 \Phi_{flb}(x) e_\eta(x) dx, e_\xi = \int_0^1 \Phi_{flb}(x) e_\xi(x) dx$$

همچنین، همانطور که از معادلات (۳-۱۹) و (۳-۲۱) مشاهده می‌شود، ضریب جمله $e^{2i\sigma T_2}$ که

$\Pi = (i\Lambda_{3,v} + \Lambda_{4,v})$ می‌باشد، اشاره به نامتقارنی در سیستم دارد. برای ساده سازی معادلات، با تبدیل

$A_1(T_2)$ به $A(T_2)$ ، $e^{i\sigma T_0}$ به شکل زیر در معادلات حذف می‌شود،

$$A_1(T_2) = A(T_2) e^{i\sigma T_2} \quad (22-3)$$

و در نهایت برای بدست آوردن پاسخ معادلات حاصل، $A(T_2)$ و $A_2(T_2)$ را به صورت قطبی

$$A = \frac{1}{2} a_1(T_2) e^{i\theta(T_2)}, A_2 = \frac{1}{2} a_2(T_2) e^{i\theta(T_2)} \quad (23-3)$$

در معادلات حاصل قرار می‌دهیم. سپس با جداسازی بخشهای حقیقی و موهومی دو معادله

حاصل، چهار معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول به شکل زیر بدست می‌آید،

$$4(\Lambda_{1,v}^2 + \Lambda_{2,v}^2) D_2 a_1 = 4[(\Lambda_{2,v} \Lambda_{4,v} - \Lambda_{1,v} \Lambda_{3,v}) \sin(2\Theta) - (\Lambda_{1,v} \Lambda_{4,v} + \Lambda_{2,v} \Lambda_{3,v}) \cos(2\Theta)] a_1 + 8\Omega^2 [(\Lambda_{2,v} e_\eta - \Lambda_{1,v} e_\xi) \sin(\Theta) - (\Lambda_{1,v} e_\eta + \Lambda_{2,v} e_\xi) \cos(\Theta)] - (\Lambda_{2,v} \Lambda_{7,v} + \Lambda_{1,v} \Lambda_{8,v}) a_1^3 - (\Lambda_{1,v} \Lambda_{5,v} + \Lambda_{2,v} \Lambda_{6,v}) a_1 a_2^2 + 8c a_1 \omega_f (\Lambda_{2,v} \Pi_{(9,\beta_0,n)}^C - \Lambda_{1,v} \Pi_{(9,\beta_0,n)}^S) \quad (24-3)$$

$$4(\Lambda_{1,v}^2 + \Lambda_{2,v}^2) a_1 D_2 \Theta = 4[(-\Lambda_{1,v} \Lambda_{3,v} + \Lambda_{4,v} \Lambda_{2,v}) \cos(2\Theta) + (\Lambda_{4,v} \Lambda_{1,v} + \Lambda_{3,v} \Lambda_{2,v}) \sin(2\Theta)] a_1 + (\Lambda_{8,v} \Lambda_{2,v} - \Lambda_{1,v} \Lambda_{7,v}) a_1^3 + (\Lambda_{5,v} \Lambda_{2,v} - \Lambda_{1,v} \Lambda_{6,v}) a_1 a_2^2 - 4(\Lambda_{1,v}^2 + \Lambda_{2,v}^2) a_1 \sigma + 8\Omega^2 [(\Lambda_{2,v} e_\xi + e_\eta \Lambda_{1,v}) \sin(\Theta) + (e_\eta \Lambda_{2,v} - e_\xi \Lambda_{1,v}) \cos(\Theta)] + 8c a_1 \omega_f (\Lambda_{2,v} \Pi_{(9,\beta_0,n)}^S + \Lambda_{1,v} \Pi_{(9,\beta_0,n)}^C) \quad (25-3)$$

$$4(\Lambda_{2,w}^2 + \Lambda_{1,w}^2) D_2 a_2 = -(\Lambda_{1,w} \Lambda_{5,v} + \Lambda_{2,w} \Lambda_{6,v}) a_2 a_1^2 - (\Lambda_{1,w} \Lambda_{8,v} + \Lambda_{2,w} \Lambda_{7,v}) a_2^3 + 8c a_2 \omega_b (\Lambda_{2,w} \Pi_{(9,\beta_0,n)}^C - \Lambda_{1,w} \Pi_{(9,\beta_0,n)}^S) \quad (26-3)$$

$$4(\Lambda_{2,w}^2 + \Lambda_{1,w}^2) D_2 \theta = (-\Lambda_{6,v} \Lambda_{1,w} + \Lambda_{2,w} \Lambda_{5,v}) a_1^2 + (-\Lambda_{7,v} \Lambda_{1,w} + \Lambda_{2,w} \Lambda_{8,v}) a_2^2 + 8c a_2 \omega_b (\Lambda_{1,w} \Pi_{(9,\beta_0,n)}^C + \Lambda_{2,w} \Pi_{(9,\beta_0,n)}^S) \quad (27-3)$$

به منظور بررسی پایداری ارتعاشاتی تیر مورد نظر و همچنین استخراج نقاط ثابت تعادلی

معادلات مذکور، می‌بایست مشتقات زمانی آنها صفر در نظر گرفته شوند. با انجام این کار و همانطور که

از معادلات نشان داده شده مشخص است، a_2 نیز برابر صفر خواهد شد و این بدان معنی است که تنها حرکت لنگ زنی همسو در سیستم تحریک خواهد شد. به این ترتیب، معادلات نهایی برای بررسی پایداری سیستم مورد نظر عبارتند از،

$$4 \left[(\Lambda_{2,v} \Lambda_{4,v} - \Lambda_{1,v} \Lambda_{3,v}) \sin(2\Theta_0) - (\Lambda_{1,v} \Lambda_{4,v} + \Lambda_{2,v} \Lambda_{3,v}) \cos(2\Theta_0) \right] a_{10} + 8\Omega^2 \left[(\Lambda_{2,v} e_\eta - \Lambda_{1,v} e_\xi) \sin(\Theta_0) - (\Lambda_{1,v} e_\eta + \Lambda_{2,v} e_\xi) \cos(\Theta_0) \right] - (\Lambda_{2,v} \Lambda_{7,v} + \Lambda_{1,v} \Lambda_{8,v}) a_{10}^3 + 8c a_{10} \omega_f \left(\Lambda_{2,v} \Pi_{(9,\beta_0,n)}^C - \Lambda_{1,v} \Pi_{(9,\beta_0,n)}^S \right) = 0 \quad (28-3)$$

$$4 \left[(-\Lambda_{1,v} \Lambda_{3,v} + \Lambda_{4,v} \Lambda_{2,v}) \cos(2\Theta_0) + (\Lambda_{4,v} \Lambda_{1,v} + \Lambda_{3,v} \Lambda_{2,v}) \sin(2\Theta_0) \right] a_{10} + (\Lambda_{8,v} \Lambda_{2,v} - \Lambda_{1,v} \Lambda_{7,v}) a_{10}^3 - 4(\Lambda_{1,v}^2 + \Lambda_{2,v}^2) a_{10} \sigma + 8\Omega^2 \left[(\Lambda_{2,v} e_\xi + e_\eta \Lambda_{1,v}) \sin(\Theta_0) + (e_\eta \Lambda_{2,v} - e_\xi \Lambda_{1,v}) \cos(\Theta_0) \right] + 8c a_{10} \omega_f \left(\Lambda_{2,v} \Pi_{(9,\beta_0,n)}^S + \Lambda_{1,v} \Pi_{(9,\beta_0,n)}^C \right) = 0 \quad (29-3)$$

۳-۴- تحلیل پایداری با استفاده از روش گالکین و با اعمال روش مقیاس‌های چندگانه به معادلات دیفرانسیل با مشتقات معمولی (ODE)

در این بخش، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی با استفاده از روش تقریبی گالکین به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شوند. برای این منظور، با فرض اینکه تنها یک مد حرکتی تحریک می‌شود، روش گالکین به شکل زیر به پارامترهای جابجایی عرضی تیر پیچیده شده یک سر گیردار اعمال می‌شود،

$$v(x,t) = \Phi_n(x) V(t) \quad (30-3)$$

$$w(x,t) = \Phi_n(x) W(t)$$

که $\Phi_n(x)$ و n به ترتیب شکل مدهای عرضی و شماره مد می‌باشند. با جایگذاری معادله (۳-۳)

در (۳-۳) و (۴-۳)، ضرب طرفین معادله حاصل در شکل مدهای متناظر خود، انتگرال گیری جزء

به جزء در فاصله $[0,1]$ و استفاده از خاصیت تعامد شکل مدها داریم،

$$\begin{aligned} & (\Gamma_1 V + \Gamma_2 W + \Gamma_3 \ddot{V} + \Gamma_4 \ddot{W} + \Gamma_5 \dot{V} + \Gamma_6 \dot{W}) \cos(2\Omega t) + (\Gamma_1 W - \Gamma_4 \ddot{V} + \Gamma_3 \ddot{W} - \Gamma_2 V - \Gamma_6 \dot{V} + \Gamma_5 \dot{W}) \sin(2\Omega t) \\ & + (-c \Pi_{(9,\beta_0,n)} + \Gamma_{15} + \Gamma_{11}) \dot{V} + (\Gamma_{12} - \Gamma_{16}) \dot{W} + \Gamma_9 V - \Gamma_{10} W + \Gamma_7 V W^2 - \Gamma_8 V^2 W \\ & - \Gamma_8 W^3 + \Gamma_7 V^3 + \Gamma_{13} \ddot{V} - \Gamma_{14} \ddot{W} + \Omega^2 (e_\eta \cos(\Omega t) - e_\xi \sin(\Omega t)) = 0 \end{aligned} \quad (31-3)$$

$$\begin{aligned}
& (\Gamma_1 V + \Gamma_2 W + \Gamma_3 \ddot{V} + \Gamma_4 \ddot{W} + \Gamma_5 \dot{V} + \Gamma_6 \dot{W}) \sin(2\Omega t) + (-\Gamma_1 W + \Gamma_4 \ddot{V} - \Gamma_3 \ddot{W} + \Gamma_2 V + \Gamma_6 \dot{V} - \Gamma_5 \dot{W}) \cos(2\Omega t) \\
& + (-c \Pi_{(9, \beta_0, n)} + \Gamma_{15} - \Gamma_{11}) \dot{W} + (\Gamma_{12} + \Gamma_{16}) \dot{V} + \Gamma_9 W - \Gamma_{10} V + \Gamma_8 V W^2 + \Gamma_8 V^2 W \\
& - \Gamma_8 V^3 + \Gamma_7 W^3 + \Gamma_{13} \ddot{W} - \Gamma_{14} \ddot{V} + \Omega^2 (e_\eta \cos(\Omega t) + e_\zeta \sin(\Omega t)) = 0
\end{aligned} \tag{۳۲-۳}$$

که

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= \frac{2}{\pi^4} \left(-4\beta_0 \Pi_{(14, \beta_0, n)}^S - 1/2 \Pi_{(10, \beta_0, n)}^C + 11\beta_0^3 \Pi_{(11, \beta_0, n)}^S - 4\beta_0^4 \Pi_{(8, \beta_0, n)}^C + 21/2 \beta_0^2 \Pi_{(12, \beta_0, n)}^C \right) \Delta D, \\
\Gamma_2 &= \frac{2}{\pi^4} \left(4\beta_0 \Pi_{(14, \beta_0, n)}^C - 1/2 \Pi_{(10, \beta_0, n)}^S - 11\beta_0^3 \Pi_{(11, \beta_0, n)}^C - 4\beta_0^4 \Pi_{(8, \beta_0, n)}^S + 21/2 \beta_0^2 \Pi_{(12, \beta_0, n)}^S \right) \Delta D, \\
\Gamma_3 &= \frac{2}{\pi^2} \left(-3/2 \beta_0^2 \Pi_{(8, \beta_0, n)}^C + 2\beta_0 \Pi_{(11, \beta_0, n)}^S + 1/2 \Pi_{(12, \beta_0, n)}^C \right) \Delta I, \\
\Gamma_4 &= \frac{2}{\pi^2} \left(-3/2 \beta_0^2 \Pi_{(8, \beta_0, n)}^S - 2\beta_0 \Pi_{(11, \beta_0, n)}^C + 1/2 \Pi_{(12, \beta_0, n)}^S \right) \Delta I, \\
\Gamma_5 &= \frac{2}{\pi^2} \left(-\Pi_{(12, \beta_0, n)}^S + 4\beta_0 \Pi_{(11, \beta_0, n)}^C + 3\beta_0^2 \Pi_{(8, \beta_0, n)}^S \right) \Omega \Delta I, \\
\Gamma_6 &= \frac{2}{\pi^2} \left(\Pi_{(12, \beta_0, n)}^C + 4\beta_0 \Pi_{(11, \beta_0, n)}^S - 3\beta_0^2 \Pi_{(8, \beta_0, n)}^C \right) \Omega \Delta I, \\
\Gamma_7 &= \frac{2\mu}{\pi^4} \left(\beta_0^2 \Pi_{(1, \beta_0, n)} \Pi_{(5, \beta_0, n)} + \Pi_{(13, \beta_0, n)} \Pi_{(5, \beta_0, n)} \right), \Gamma_8 = \frac{2\mu}{\pi^4} \left(\beta_0^3 \Pi_{(1, \beta_0, n)}^2 + \beta_0 \Pi_{(13, \beta_0, n)} \Pi_{(1, \beta_0, n)} \right), \\
\Gamma_9 &= \frac{2}{\pi^4} \left(-1/2 \Pi_{(7, \beta_0, n)} + 5/2 \beta_0^2 \Pi_{(5, \beta_0, n)} \right), \Gamma_{10} = \frac{2}{\pi^4} \left(-2\beta_0 \Pi_{(6, \beta_0, n)} + \beta_0^3 \Pi_{(1, \beta_0, n)} \right), \\
\Gamma_{11} &= -\frac{\beta_0 \Omega I_{xx}}{2\pi^2} \left(\Pi_{(2, \beta_0, n)}^C + \Pi_{(4, \beta_0, n)}^S \right), \Gamma_{12} = \frac{\beta_0^2 \Omega I_{xx}}{2\pi^2} \left(-\Pi_{(2, \beta_0, n)}^C + \Pi_{(4, \beta_0, n)}^C \right), \\
\Gamma_{13} &= \frac{1}{\pi^2} \left(-\pi^2 \Pi_{(3, \beta_0, n)} + \Sigma \Pi_{(5, \beta_0, n)} - \beta_0^2 \Pi_{(3, \beta_0, n)} \right), \Gamma_{14} = \frac{2\beta_0 \Sigma I}{\pi^2} \Pi_{(1, \beta_0, n)}, \\
\Gamma_{15} &= \frac{3\beta_0}{2\pi^2} \Omega I_{xx} \Pi_{(1, \beta_0, n)}, \Gamma_{16} = \frac{1}{\pi^2} \left(-\Pi_{(5, \beta_0, n)} + 1/2 \beta_0^2 \Pi_{(3, \beta_0, n)} \right) \Omega I_{xx}
\end{aligned} \tag{۳۳-۳}$$

از آنجا که معادله (۳۱-۳) و (۳۲-۳) شامل تنها جملات غیر خطی مرتبه سه می باشد، تقریب

(۳۴-۳) را می توان به شکل زیر به معادلات (۳۱-۳) و (۳۲-۳) اعمال کرد،

$$\begin{aligned}
V(t) &= \varepsilon V_1(T_0, T_2) + \varepsilon^3 V_3(T_0, T_2) + \dots \\
W(t) &= \varepsilon V_1(T_0, T_2) + \varepsilon^3 V_3(T_0, T_2) + \dots
\end{aligned} \tag{۳۴-۳}$$

لازم به ذکر است اگر در تقریب فوق، جملات W_2, V_2, W_0, V_0 ظاهر شوند، پاسخ آنها در ادامه

صفر خواهد شد. برای بالانس جملات غیر خطی و به منظور استخراج رزونانس های اولیه و پارامتریک،

پارامترهای بی بعد زیر به شکل زیر مقیاس بندی شده و در معادلات حاصل قرار می دهیم،

$$c = \varepsilon^2 \bar{c}, \Delta D = \varepsilon^2 \bar{\Delta D}, \Delta I = \varepsilon^2 \bar{\Delta I}, e_\zeta = \varepsilon^3 \bar{e}_\zeta, e_\eta = \varepsilon^3 \bar{e}_\eta \tag{۳۵-۳}$$

با جایگذاری معادلات (۳۴-۳) و (۳۵-۳) در معادلات (۳۱-۳) و (۳۲-۳) و برابر قرار دادن ضرایب

توانهای مشابه ε و ε^3 داریم،

$O(\varepsilon)$:

$$\Gamma_9 V_1 - \Gamma_{10} W_1 + (\Gamma_{11} + \Gamma_{15}) D_0 V_1 + (\Gamma_{12} - \Gamma_{16}) D_0 W_1 + \Gamma_{13} D_0^2 V_1 - \Gamma_{14} D_0^2 W_1 = 0 \quad (۳۶-۳)$$

$$\Gamma_9 W_1 + \Gamma_{10} V_1 + (\Gamma_{16} + \Gamma_{12}) D_0 V_1 + (\Gamma_{15} - \Gamma_{11}) D_0 W_1 + \Gamma_{13} D_0^2 W_1 + \Gamma_{14} D_0^2 V_1 = 0 \quad (۳۷-۳)$$

$O(\varepsilon^3)$:

$$\begin{aligned} & (\Gamma_1 V_1 + \Gamma_2 W_1 + \Gamma_3 \ddot{V}_1 + \Gamma_4 \ddot{W}_1 + \Gamma_5 \dot{V}_1 + \Gamma_6 \dot{W}_1) \cos(2\Omega t) + (\Gamma_1 W_1 - \Gamma_4 \ddot{V}_1 + \Gamma_3 \ddot{W}_1 - \Gamma_2 V_1 - \Gamma_6 \dot{V}_1 + \Gamma_5 \dot{W}_1) \sin(2\Omega t) \\ & \Gamma_7 (V_1^3 + V_1 W_1^2) - \Gamma_8 (W_1^3 + V_1^2 W_1) + \Gamma_9 V_3 - \Gamma_{10} W_3 + (\Gamma_{11} + \Gamma_{15}) D_0 V_3 + (\Gamma_{11} + \Gamma_{15}) D_2 V_1 \\ & + (\Gamma_{12} - \Gamma_{16}) D_0 W_3 + (\Gamma_{12} + \Gamma_{16}) D_2 W_1 + \Gamma_{13} D_0^2 V_3 - \Gamma_{14} D_0^2 W_3 + 2(\Gamma_{13} D_2 D_0 V_1 - \Gamma_{14} D_2 D_0 W_1) \\ & + \Omega^2 (e_\eta \cos(\Omega t) - e_\zeta \sin(\Omega t)) - c\Pi_{(9,\beta_0,n)} D_0 V_1 = 0 \end{aligned} \quad (۳۸-۳)$$

$$\begin{aligned} & (\Gamma_1 V_1 + \Gamma_2 W_1 + \Gamma_3 \ddot{V}_1 + \Gamma_4 \ddot{W}_1 + \Gamma_5 \dot{V}_1 + \Gamma_6 \dot{W}_1) \sin(2\Omega t) + (-\Gamma_1 W_1 + \Gamma_4 \ddot{V}_1 - \Gamma_3 \ddot{W}_1 + \Gamma_2 V_1 + \Gamma_6 \dot{V}_1 - \Gamma_5 \dot{W}_1) \cos(2\Omega t) \\ & + i\Gamma_7 W_1^3 + i\Gamma_8 V_1^3 + i\Gamma_7 V_1^2 W_1 + i\Gamma_8 V_1 W_1^2 + (\Gamma_9 W_3 + \Gamma_{10} V_3) + (-\Gamma_{11} + \Gamma_{15}) D_0 W_3 + (\Gamma_{12} + \Gamma_{16}) D_0 V_3 \\ & + (\Gamma_{11} + \Gamma_{15}) D_2 W_1 + (\Gamma_{12} + \Gamma_{16}) D_2 V_1 + \Gamma_{13} D_0^2 W_3 + \Gamma_{14} D_0^2 V_3 + 2(\Gamma_{13} D_2 D_0 W_1 + \Gamma_{14} D_2 D_0 V_1) \\ & + \Omega^2 (e_\eta \cos(\Omega t) + e_\zeta \sin(\Omega t)) - c\Pi_{(9,\beta_0,n)} D_0 W_1 = 0 \end{aligned} \quad (۳۹-۳)$$

پاسخ معادلات (۳۶-۳) و (۳۷-۳) را می توان به شکل زیر بیان کرد،

$$V_1(T_0, T_2) = A_1(T_2) e^{i\omega_f T_0} + A_2(T_2) e^{i\omega_b T_0} + CC \quad (۴۰-۳)$$

$$W_1(T_0, T_2) = -iA_1(T_2) e^{i\omega_f T_0} - iA_2(T_2) e^{i\omega_b T_0} + CC$$

اکنون، با جایگذاری معادله (۴۰-۳) در (۳۸-۳) و (۳۹-۳)، داریم،

$$\begin{aligned} & (\Gamma_{13} D_0^2 V_3 - \Gamma_{14} D_0^2 W_3) + (\Gamma_{11} + \Gamma_{15}) D_0 V_3 + (\Gamma_{12} - \Gamma_{16}) D_0 W_3 + (\Gamma_9 V_3 - \Gamma_{10} W_3) \\ & = G_{f,v}(T_2) e^{i\omega_f T_0} + G_{b,v}(T_2) e^{i\omega_b T_0} + N.S.T + CC \end{aligned} \quad (۴۱-۳)$$

$$\begin{aligned} & (\Gamma_{13} D_0^2 W_3 + \Gamma_{14} D_0^2 V_3) + (-\Gamma_{11} + \Gamma_{15}) D_0 W_3 + (\Gamma_{12} + \Gamma_{16}) D_0 V_3 + (\Gamma_9 W_3 + \Gamma_{10} V_3) \\ & = G_{f,w}(T_2) e^{i\omega_f T_0} + G_{b,w}(T_2) e^{i\omega_b T_0} + N.S.T + CC \end{aligned} \quad (۴۲-۳)$$

که CC و N.S.T مزدوجهای مختلط و جملات غیر سکولار می باشند. همچنین، $G_{f,v}(T_2)$

$G_{b,v}(T_2)$ ، $G_{f,w}(T_2)$ و $G_{b,w}(T_2)$ دربردارنده جملات شامل سکولار می باشند که برابرند با،

$$\begin{aligned}
G_{f,v} = & \frac{2}{\pi^2} \left[\left(-\frac{1}{4} (i\beta_0 \Phi'_f - \beta_0^2 \Phi_f) e^{2i\beta_0 x} + i\beta_0^2 \Phi_f + \frac{3}{4} \beta_0 \Phi'_f + \frac{1}{2} i \Phi_f'' \right) \Omega_{xx} \right. \\
& - \left. \left(-2i\Sigma I \Phi_f - \beta_0^2 \Sigma I \Phi_f + i\beta_0 \Sigma I \Phi_f' + i\pi^2 \Phi_f'' \right) \omega_f \right] A_1' \\
& + \frac{1}{2\pi^4} \left(i \int_0^1 \Phi_f' \Phi_f'' dx \Phi_f'' + \beta_0^2 \int_0^1 \Phi_f' \Phi_f dx \Phi_f'' + i\beta_0^3 \int_0^1 \Phi_f' \Phi_f dx \Phi_f' + \beta_0 \int_0^1 \Phi_f' \Phi_f'' dx \Phi_f' \right) \mu \bar{A}_1 A_1^2 \\
& + \frac{1}{2\pi^4} \left(1/2 \beta_0^2 \int_0^1 \Phi_b' \Phi_f dx \Phi_b'' + i\beta_0 \int_0^1 \Phi_b' \Phi_b'' dx \Phi_f' - 1/2 \beta_0 \int_0^1 \Phi_f' \Phi_b'' dx \Phi_b' - 1/2 i \beta_0 \int_0^1 \Phi_b' \Phi_f'' dx \Phi_b'' \right. \\
& - i \int_0^1 \Phi_b' \Phi_b'' d\xi \Phi_f'' + 1/2 i \beta_0 \int_0^1 \Phi_f' \Phi_b'' dx \Phi_b'' + 3/2 \beta_0^3 \int_0^1 \Phi_b' \Phi_f dx \Phi_b' + i\beta_0^2 \int_0^1 \Phi_b' \Phi_b dx \Phi_f'' - \beta_0^3 \int_0^1 \Phi_b' \Phi_b dx \Phi_f' \\
& + 1/2 \beta_0^2 \int_0^1 \Phi_f' \Phi_b dx \Phi_b'' + 1/2 \int_0^1 \Phi_f' \Phi_b'' dx \Phi_b'' + 1/2 i \beta_0^2 \int_0^1 \Phi_b' \Phi_f'' dx \Phi_b' + 1/2 \int_0^1 \Phi_b' \Phi_f'' dx \Phi_b'' + 1/2 i \beta_0^3 \int_0^1 \Phi_f' \Phi_b dx \Phi_b' \\
& - 1/2 \beta_0^2 \int_0^1 \Phi_f' \Phi_b'' dx \Phi_b' + 1/4 i \beta_0 \int_0^1 \Phi_b' \Phi_f'' dx \Phi_b' \left. \right) \bar{A}_2 A_1 A_2 \mu + \frac{1}{2\pi^4} - 1/2 i c e^{i\beta_0 x} \Phi_f A_1 \omega_f + \frac{1}{2} (e_\eta + i e_\xi) \Omega^2 e^{-i\beta_0 x} e^{i\sigma \tau_2} \\
& + \left[\frac{1}{\pi^2} (\Delta I \Phi_f'' - i \Delta I \beta_0 \Phi_f' - 3 i \Delta I \beta_0^2 \Phi_f) \Omega \omega_f + \frac{1}{\pi^4} \left(\frac{3}{2} i \Delta I \Phi_f \omega_f^2 + \frac{11}{2} \Delta D \Phi_f'' \right) \beta_0^2 \right. \\
& \left. + \frac{1}{\pi^4} (4 \Delta D \Phi_f'' - \pi^2 i \Delta I \Phi_f' \omega_f^2) i \beta_0 + \frac{1}{2\pi^2} \Delta I \omega_f^2 \Phi_f'' + \frac{3}{2\pi^4} i \Delta D \Phi_f^{(4)} - \frac{1}{\pi^4} (4 \Delta D \beta_0^4 \Phi_f + \frac{11}{2} i \Delta D \beta_0^3 \Phi_f') \right] \bar{A}_1 e^{2i\sigma \tau_2} e^{-4i\beta_0 x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{b,v} = & 2 \left[\left(-\frac{1}{2} (-i\beta_0 \Phi_b'' - 2i\beta_0^2 \Phi_b) e^{2i\beta_0 x} + \left(2i\Phi_b'' + \frac{1}{2} i\beta_0^2 \Phi_b' + \frac{3}{2} \beta_0 \Phi_b \right) \right) I_{xx} \Omega \right. \\
& - \left. \left(2i\beta_0 \Phi_b' + \beta_0^2 \Phi_b'' \right) \Sigma I \omega_b + \left(i\Phi_b'' + \Sigma I \Phi_b' \right) i\omega_b \right] A_2' - \frac{1}{2} i c e^{i\beta_0 x} \omega_b \Phi_b A_2 \\
& + \frac{1}{\pi^4} \left(i \int_0^1 \Phi_f' \Phi_f'' dx \Phi_f'' + i\beta_0 \int_0^1 \Phi_f' \Phi_f'' dx \Phi_f' + \beta_0^2 \int_0^1 \Phi_f' \Phi_f dx \Phi_f'' \right) \mu \bar{A}_2 A_2^2 \\
& + \frac{1}{\pi^4} \left(1/2 \beta_0^2 \int_0^1 \Phi_b' \Phi_f dx \Phi_f'' + 1/2 i \beta_0^3 \int_0^1 \Phi_b' \Phi_f dx \Phi_b' + \int_0^1 \Phi_b' \Phi_b'' d\xi \Phi_f'' + 1/2 i \beta_0 \int_0^1 \Phi_b' \Phi_f'' dx \Phi_b'' + \beta_0^2 \int_0^1 \Phi_b' \Phi_b dx \Phi_f'' \right. \\
& + 1/2 \int_0^1 \Phi_f' \Phi_b'' dx \Phi_b'' + \beta_0^3 \int_0^1 \Phi_f' \Phi_f dx \Phi_f' + 1/2 \beta_0^2 \int_0^1 \Phi_b'' \Phi_f'' dx \Phi_b' + 1/2 i \beta_0^3 \int_0^1 \Phi_f' \Phi_b dx \Phi_b' - 1/2 i \beta_0 \int_0^1 \Phi_b' \Phi_f'' dx \Phi_b'' \\
& + 1/2 \beta_0^2 \int_0^1 \Phi_f' \Phi_b' dx \Phi_f'' + 1/2 \int_0^1 \Phi_b' \Phi_f'' dx \Phi_b'' + i\beta_0^3 \int_0^1 \Phi_b' \Phi_b dx \Phi_f' + 1/2 i \beta_0 \int_0^1 \Phi_f' \Phi_f'' dx \Phi_b' + i\beta_0 \int_0^1 \Phi_b' \Phi_f'' dx \Phi_f' \\
& \left. - 1/2 i \beta_0^2 \int_0^1 \Phi_f' \Phi_b'' dx \Phi_b' - 1/2 \beta_0 \int_0^1 \Phi_b' \Phi_f'' dx \Phi_b' \right) \bar{A}_1 A_1 A_2 \mu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{f,w} = & \frac{2}{\pi^2} \left[\left(-\frac{1}{4} (i\beta_0 \Phi'_b - \beta_0^2 \Phi_b) e^{2i\beta_0 x} + i\beta_0^2 \Phi_b + \frac{3}{4} \beta_0 \Phi'_b + \frac{1}{2} i\Phi_b'' \right) \Omega I_{xx} \right. \\
& - \left. (\Sigma I \Phi_b + i\beta_0^2 \Sigma I \Phi_b + i\beta_0 \Sigma I \Phi_b' + 2i\pi^2 \Phi_b'') \omega_b \right] A_1' \\
& + \frac{1}{2\pi^4} \left(\int_0^1 \Phi'_f \Phi_f'' dx \Phi_f'' + i\beta_0^2 \int_0^1 \Phi'_f \Phi_f dx \Phi_f'' - \beta_0^3 \int_0^1 \Phi'_f \Phi_f dx \Phi_f' + i\beta_0 \int_0^1 \Phi'_f \Phi_f'' dx \Phi_f' \right) \mu \bar{A}_1 A_1^2 \\
& + \frac{1}{2\pi^4} \left(-1/2 \beta_0^2 \int_0^1 \Phi'_b \Phi_b'' dx \Phi_b'' - \beta_0 \int_0^1 \Phi'_b \Phi_b'' dx \Phi_b' - 1/2 i\beta_0 \int_0^1 \Phi'_b \Phi_b'' dx \Phi_b' + \beta_0 \int_0^1 \Phi_b \Phi_b'' dx \Phi_b'' \right. \\
& - 2i \int_0^1 \Phi_b \Phi_b'' d\xi \Phi_f'' + \beta_0 \int_0^1 \Phi_f \Phi_b'' dx \Phi_b'' - 3/2 i\beta_0^3 \int_0^1 \Phi'_b \Phi_b'' dx \Phi_b' + 2i\beta_0^2 \int_0^1 \Phi'_b \Phi_b'' dx \Phi_b'' - i\beta_0^3 \int_0^1 \Phi'_b \Phi_b'' dx \Phi_b' \\
& + 1/2 i\beta_0^2 \int_0^1 \Phi'_f \Phi_b'' dx \Phi_b'' - i \int_0^1 \Phi'_f \Phi_b'' dx \Phi_b'' + 1/2 \beta_0^2 \int_0^1 \Phi_b \Phi_b'' dx \Phi_b' - 1/2 i \int_0^1 \Phi'_b \Phi_b'' dx \Phi_b'' + 1/2 \beta_0^3 \int_0^1 \Phi'_f \Phi_b'' dx \Phi_b' \\
& \left. + 1/2 i\beta_0^2 \int_0^1 \Phi'_f \Phi_b'' dx \Phi_b' - 1/4 \beta_0 \int_0^1 \Phi'_b \Phi_b'' dx \Phi_b' \right) \bar{A}_2 A_1 A_2 \mu + \frac{1}{2\pi^4} - 1/2 i c e^{i\beta_0 x} \Phi_f A_1 \omega_f + \frac{1}{2} (ie_\eta + e_\xi) \Omega^2 e^{-i\beta_0 x} e^{i\sigma T_2} \\
& + \left[\frac{1}{\pi^2} (\Delta I \Phi_f'' - i\Delta I \beta_0 \Phi_f' - 3i\Delta I \beta_0^2 \Phi_f) \Omega \omega_f + \frac{1}{\pi^4} \left(\frac{3}{2} i\Delta I \Phi_f \omega_f^2 + \frac{11}{2} \Delta D \Phi_f'' \right) \beta_0^2 \right. \\
& \left. + \frac{1}{\pi^4} (4\Delta D \Phi_f'' - \pi^2 i\Delta I \Phi_f' \omega_f^2) i\beta_0 + \frac{1}{2\pi^2} \Delta I \omega_f^2 \Phi_f'' + \frac{3}{2\pi^4} i\Delta D \Phi_f^{(4)} - \frac{1}{\pi^4} (4\Delta D \beta_0^4 \Phi_f + \frac{11}{2} i\Delta D \beta_0^3 \Phi_f'') \right] \bar{A}_1 e^{2i\sigma T_2} e^{-4i\beta_0 x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{b,w} = & 2 \left[\left(-\frac{1}{2} (-2\beta_0 \Phi_f'' - 2i\beta_0^2 \Phi_f') e^{2i\beta_0 x} + (2\Phi_f'' + \frac{1}{2} \beta_0^2 \Phi_f' + \frac{3}{2} i\beta_0 \Phi_f'') \right) I_{xx} \Omega \right. \\
& - \left. (2\beta_0 \Phi_f' - i\beta_0^2 \Phi_f'') \Sigma I \omega_b + (-\Phi_f'' + i\Sigma I \Phi_f') i\omega_f \right] A_2' - \frac{1}{2} c e^{i\beta_0 x} \omega_f \Phi_f A_2 \\
& + \frac{1}{\pi^4} \left(i \int_0^1 \Phi'_f \Phi_f'' dx \Phi_f'' + i\beta_0 \int_0^1 \Phi'_f \Phi_f'' dx \Phi_f' + \beta_0^2 \int_0^1 \Phi'_f \Phi_f'' dx \Phi_f'' \right) \mu \bar{A}_2 A_2^2 \\
& + \frac{1}{\pi^4} \left(1/2 \beta_0^2 \int_0^1 \Phi'_b \Phi_b'' dx \Phi_f'' + 1/2 i\beta_0^3 \int_0^1 \Phi'_b \Phi_b'' dx \Phi_b' + \int_0^1 \Phi_b \Phi_b'' d\xi \Phi_f'' + 1/2 i\beta_0 \int_0^1 \Phi_b \Phi_b'' dx \Phi_b'' + \beta_0^2 \int_0^1 \Phi_b \Phi_b'' dx \Phi_f'' \right. \\
& + 1/2 \int_0^1 \Phi'_f \Phi_b'' dx \Phi_b'' + \beta_0^3 \int_0^1 \Phi'_f \Phi_b'' dx \Phi_f' + 1/2 \beta_0^2 \int_0^1 \Phi_b \Phi_b'' dx \Phi_b'' + 1/2 i\beta_0^3 \int_0^1 \Phi'_f \Phi_b'' dx \Phi_b' - 1/2 i\beta_0 \int_0^1 \Phi_b \Phi_b'' dx \Phi_b'' \\
& + 1/2 \beta_0^2 \int_0^1 \Phi'_f \Phi_b'' dx \Phi_f'' + 1/2 \int_0^1 \Phi_b \Phi_b'' dx \Phi_b'' + i\beta_0^3 \int_0^1 \Phi'_b \Phi_b'' dx \Phi_b' + 1/2 i\beta_0 \int_0^1 \Phi'_f \Phi_b'' dx \Phi_b'' + i\beta_0 \int_0^1 \Phi_b \Phi_b'' dx \Phi_f' \\
& \left. - 1/2 i\beta_0^2 \int_0^1 \Phi_f \Phi_b'' dx \Phi_b' - 1/2 \beta_0 \int_0^1 \Phi'_b \Phi_b'' dx \Phi_b' \right) \bar{A}_1 A_1 A_2 \mu
\end{aligned}$$

برای حذف جملات سکولار، جواب بخش خصوصی متناظر با $\pm e^{i\omega_f T_0}$ و $\pm e^{i\omega_b T_0}$ در معادلات (۳)

(۴۱) و (۴۲-۳) برابر است با،

$$\begin{aligned}
V_3 &= P_{11}(T_2) e^{i\omega_f T_0} + Q_{11}(T_2) e^{i\omega_b T_0} \\
W_3 &= P_2(T_2) e^{i\omega_f T_0} + Q_{22}(T_2) e^{i\omega_b T_0}
\end{aligned} \tag{۴۳-۳}$$

با جایگذاری معادله (۴۳-۳) در (۴۱-۳) و (۴۲-۳) و برابر قرار دادن ضرایب جملات شامل

$\pm e^{i\omega_b T_0}$ و $\pm e^{i\omega_f T_0}$ ، معادلات حاصل دارای پاسخ های غیر صفر می باشند اگر و تنها اگر شرایط حل

پذیری به شکل زیر برقرار باشد،

$$\begin{vmatrix} -\Gamma_{13}\omega_f^2 + i(\Gamma_{11} + \Gamma_{15})\omega_f + \Gamma_6 & G_{f,v} \\ -\Gamma_{14}\omega_f^2 + i(\Gamma_{12} + \Gamma_{16})\omega_f + \Gamma_{10} & G_{f,w} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{یا} \quad (44-3)$$

$$\begin{vmatrix} G_{f,v} & \Gamma_{14}\omega_f^2 + i(\Gamma_{12} - \Gamma_{16})\omega_f - \Gamma_{10} \\ G_{f,w} & -\Gamma_{13}\omega_f^2 + i(-\Gamma_{11} + \Gamma_{15})\omega_f + \Gamma_9 \end{vmatrix} = 0$$

و

$$\begin{vmatrix} -\Gamma_{13}\omega_b^2 + i(\Gamma_{11} + \Gamma_{15})\omega_b + \Gamma_6 & G_{b,v} \\ -\Gamma_{14}\omega_b^2 + i(\Gamma_{12} + \Gamma_{16})\omega_b + \Gamma_{10} & G_{b,w} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{یا} \quad (45-3)$$

$$\begin{vmatrix} G_{b,v} & \Gamma_{14}\omega_b^2 + i(\Gamma_{12} - \Gamma_{16})\omega_b - \Gamma_{10} \\ G_{b,w} & -\Gamma_{13}\omega_b^2 + i(-\Gamma_{11} + \Gamma_{15})\omega_b + \Gamma_9 \end{vmatrix} = 0$$

در نهایت حاصل دو دترمینان مذکور برابر است با،

$$\begin{aligned} & (\Lambda_{1,v} + i\Lambda_{2,v})D_2A_1 + (\Lambda_{5,v} + i\Lambda_{6,v})A_1A_2\bar{A}_2 + (i\Lambda_{7,v} + \Lambda_{8,v})A_1^2\bar{A}_1 + (i\Lambda_{3,v} + \Lambda_{4,v})\bar{A}_1e^{2i\sigma T_2} \\ & - icA_1\omega_f\Pi_{(9,\beta_0,n)} + (e_\eta + ie_\xi)\Omega^2e^{i\sigma T_2} = 0 \end{aligned} \quad (46-3)$$

$$(\Lambda_{1,w} + i\Lambda_{2,w})D_2A_2 + (\Lambda_{5,v} + i\Lambda_{6,v})A_1A_2\bar{A}_1 + (\Lambda_{8,v} + i\Lambda_{7,v})A_2^2\bar{A}_2 - icA_2\omega_b\Pi_{(9,\beta_0,n)} = 0 \quad (47-3)$$

که دو معادله مذکور با آنچه در معادلات (۳-۱۹) و (۳-۲۰) بدست آمده، یکسان می باشند. این

بدان معنی است که با تحریک یک مد از تیر پیچیده شده دوار یک سر گیردار، ضرایب بدست آمده از

هر دو روش مستقیم و غیر مستقیم یکسان خواهند بود.

۳-۵- تحلیل پایداری با تعیین ماتریس ژاکوبین

به منظور پایداری حالت پایای معادلات مرتبه اول (۳-۲۴) و (۳-۲۵) و با فرض $a_2(T_2) = 0$ ،

ماتریس ژاکوبین، J ، طرف راست معادلات (۳-۲۴) و (۳-۲۵) برابر است با [118]،

$$J = \frac{1}{4(\Lambda_{1,v}^2 + \Lambda_{2,v}^2)} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{cases} 4(\Lambda_{2,v}\Lambda_{4,v} - \Lambda_{1,v}\Lambda_{3,v})\sin(2\Theta_0) - 4(\Lambda_{1,v}\Lambda_{4,v} + \Lambda_{2,v}\Lambda_{3,v})\cos(2\Theta_0) \\ -3(\Lambda_{2,v}\Lambda_{7,v} + \Lambda_{1,v}\Lambda_{8,v})a_{10}^2 + 8c\omega_f(\Lambda_{2,v}\Pi_{(9,\beta_0,n)}^C - \Lambda_{1,v}\Pi_{(9,\beta_0,n)}^S) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
B &= 8 \left\{ \left((\Lambda_{2,v}\Lambda_{4,v} - \Lambda_{1,v}\Lambda_{3,v}) \cos(2\Theta_0) + (\Lambda_{1,v}\Lambda_{4,v} + \Lambda_{2,v}\Lambda_{3,v}) \sin(2\Theta_0) \right) a_{10} \right. \\
&\quad \left. + \Omega^2 \left((\Lambda_{1,v}e_\eta + \Lambda_{2,v}e_\xi) \sin(\Theta_0) + (\Lambda_{2,v}e_\eta - \Lambda_{1,v}e_\xi) \cos(\Theta_0) \right) \right\} \\
C &= \frac{1}{a_{10}} \left\{ 4 \left(\Lambda_{2,v}\Lambda_{4,v} - \Lambda_{1,v}\Lambda_{3,v} \right) \cos(2\Theta_0) + 4 \left(\Lambda_{1,v}\Lambda_{4,v} + \Lambda_{2,v}\Lambda_{3,v} \right) \sin(2\Theta_0) \right. \\
&\quad \left. + 3 \left(\Lambda_{2,v}\Lambda_{8,v} - \Lambda_{1,v}\Lambda_{7,v} \right) a_{10}^2 - 4 \sigma \left(\Lambda_{1,v}^2 + \Lambda_{2,v}^2 \right) \right. \\
&\quad \left. + 8ca_1\omega_f \left(\Lambda_{2,v}\Pi_{(9,\beta_0,n)}^S + \Lambda_{1,v}\Pi_{(9,\beta_0,n)}^C \right) \right\} \quad (48-3) \\
D &= \frac{8}{a_{10}} \left\{ \left(-(\Lambda_{2,v}\Lambda_{4,v} - \Lambda_{1,v}\Lambda_{3,v}) \sin(2\Theta_0) + (\Lambda_{1,v}\Lambda_{4,v} + \Lambda_{2,v}\Lambda_{3,v}) \cos(2\Theta_0) \right) a_{10} \right. \\
&\quad \left. + \Omega^2 \left((\Lambda_{1,v}e_\eta + \Lambda_{2,v}e_\xi) \cos(\Theta_0) - (\Lambda_{2,v}e_\eta - \Lambda_{1,v}e_\xi) \sin(\Theta_0) \right) \right\}
\end{aligned}$$

و مقادیر ویژه متناظر آن از معادله زیر بدست می آیند،

$$|J - \lambda_4 I| = 0 \quad \text{or} \quad \lambda^2 - (A+D)\lambda + AD - BC = 0 \quad (49-3)$$

با توجه به معادلات (48-3) و (49-3)، از آنجا که $(A+D) < 0$ ، اگر $AD - BC > 0$ ، حرکت

دینامیکی سیستم در نقاط ثابت تعادلی، (a_{10}, Θ_0) پایدار بوده و در غیر اینصورت ناپایدار می باشد.

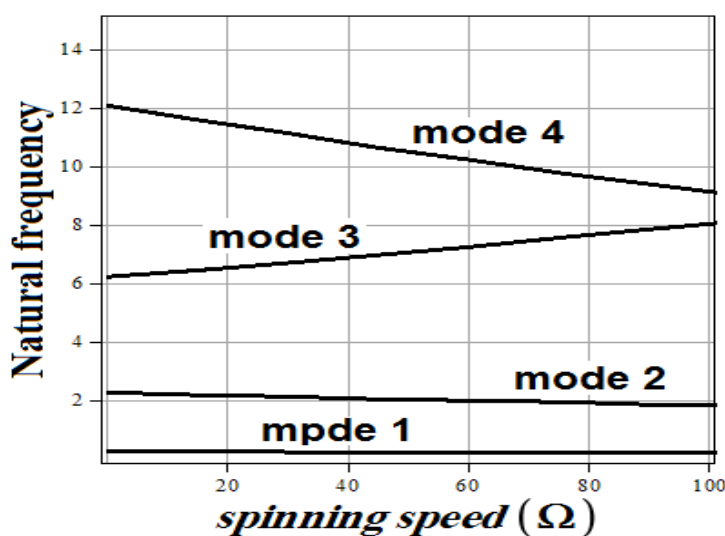
۳-۶- نتایج

در این بخش، با استفاده از معادلات بدست آمده، نمودارهای پاسخ فرکانسی جهت تحلیل پایداری تیرهای پیچیده شده یک سر گیردار با سرعت دورانی ثابت گزارش شده است. در این نمودارها، تأثیر زاویه پیچش، میزان خروج از مرکز و ضریب میرایی خارجی روی رزونانس های اولیه و پارامتریک تیر پیچیده شده دورانی متقارن و نامتقارن محوری یک سر گیردار، مورد بررسی قرار خواهد گرفت. از طرفی به منظور بررسی و صحه گذاری نتایج بدست آمده از تئوری اغتشاشات، از روش عددی رانگ-کوتا استفاده شده است. برای این منظور، پارامترهای بی بعد شده زیر مورد استفاده قرار گرفته اند: $I_{xx} = 0.001$ ، $c = 0.01$ ، $\mu = 0.0005$ ، $I_{\xi\xi} = I_{\eta\eta} = 0.002878$ ، بقیه پارامترهای بی بعد استفاده شده، در هر بررسی ذکر خواهند شد.

۳-۶-۱- اعتبار سنجی نتایج

شکل (۲-۳) نمودار تغییرات فرکانسی مربوط به تیر پیچیده شده یک سر گیردار مذکور را وقتی زاویه پیچش $\beta_0 = 0$ است در چهار مد اول ارتعاشاتی نشان می دهد. با در نظر گرفتن $\beta_0 = 0$ و استخراج

فرکانسهای طبیعی حاصل از حل معادلات خطی (۳-۱۰) و (۳-۱۱)، همانطور که مشاهده می‌شود، در دو مد اول ارتعاشاتی با افزایش سرعت چرخش، فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد در حالی که در مد سوم این روند صعودی و در مد چهارم نیز نزولی خواهد بود. به جهت متفاوت بودن داده‌های عددی و در نظر گرفتن داده‌های یکسان به منظور مقایسه نتایج در سایر فصل‌های این رساله، شکل (۳-۲) تنها رفتار نمودارها با مرجع [25] مقایسه شده‌اند. با بررسی نتایج بدست آمده با مرجع [25] مشخص است که نتایج در هر چهار مد از نظر رفتاری، همگرایی خوبی با یکدیگر دارند.



شکل (۳-۲) تغییرات فرکانس طبیعی نسبت به سرعت دورانی در چهار مد اول

۳-۶-۲- بحث و نتیجه گیری

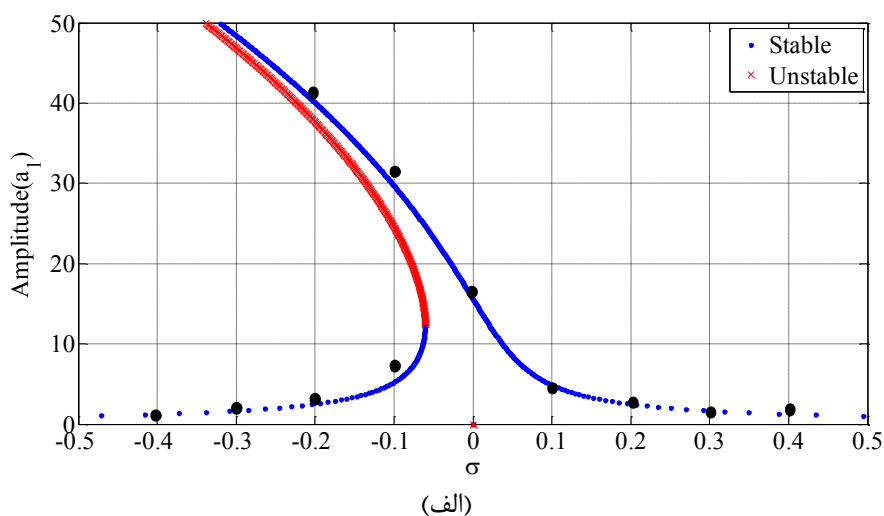
اشکال (۳-۳) تا (۳-۶) منحنی‌های پاسخ فرکانسی غیر خطی عرضی تیر پیچیده شده را پیرامون نقاط ثابت تعادلی تیر پیچیده شده یک سر گیردار در مدهای اول و دوم و زوایای پیچش مختلف برای حالت متقارن و نامتقارن نشان می‌دهد. فرض شده است که نابالانسی‌ها در هر دو جهات اصلی تیر یکسان بوده و برابرند با، $e_{\xi} = e_{\eta} = 0.05$. همانطور که مشاهده می‌شود، در مد اول، منحنی‌های پاسخ فرکانسی سیستم متقارن و نامتقارن به سمت چپ و در مد دوم به سمت راست خم شده‌اند که مؤید این است که تأثیر پارامترهای غیر خطی سیستم در مد اول از نوع نرم شونده و در مد دوم از نوع سخت شونده می‌باشد. با توجه به اشکال (۳-۳) و (۳-۵)، در حالت متقارن $\Pi = 0$ ، تیر تنها دارای یک منبع تحریک بوده که همان نابالانسی با فرکانس Ω می‌باشد و در نتیجه منحنی پاسخ فرکانسی دارای

یک قله بوده و تنها یک پرش در فرکانس رزونانس رخ می‌دهد. همچنین، در حالت متقارن و زوایای پیچش کوچکتر دیده می‌شود که برای برخی از مقادیر σ ، سیستم تنها یک پاسخ پایدار داشته است، در حالی که برای برخی مقادیر دیگر، سیستم دارای سه پاسخ بوده که دوتای آنها پایدار و دیگری ناپایدار است. در نتیجه همواره پدیده پرش و دو شاخگی اتفاق می‌افتد. اما وقتی زاویه پیچش افزایش می‌یابد، نواحی ناپایدار کاهش یافته و در نتیجه احتمال بروز پرش و دو شاخگی در سیستم کاهش می‌یابد. این درحالی است که وقتی نامتقارنی در سیستم وجود دارد ($\Pi \neq 0$)، علاوه بر منبع تحریک ناشی از نابالانسی با فرکانس Ω ، یک منبع تحریک پارامتریک با فرکانس 2Ω در سیستم بوجود می‌آید که ناشی از وجود نامتقارنی در سیستم می‌باشد. از این‌رو، منحنی‌های پاسخ فرکانسی دارای دو قله می‌باشد. این مطلب در اشکال (۳-۴) و (۳-۶) برای تیرهای پیچیده شده نامتقارن محوری نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، در برخی از مقادیر، سیستم دارای پنج پاسخ، در برخی دیگر، یک پاسخ و در برخی دیگر دارای سه پاسخ بوده که شامل ترکیبی از پاسخ‌های پایدار و ناپایدار می‌باشند. بسیار واضح است که همواره پدیده دو شاخگی اتفاق می‌افتد. همانطور که مشاهده می‌شود، در مد اول تیر پیچیده شده یک سرگیردار نامتقارن، منحنی پاسخ فرکانسی در زوایای پیچش کوچکتر به شکل نمودارهای دوشاخگی از نوع دو شاخگی زینی^۱ در فرکانسهای نقاط تغییر حالت پایای سیستم از پایدار به ناپایدار یعنی R_1 و R_2 می‌باشند، بگونه‌ای که در زاویه پیچش صفر درجه، همانطور که نشان داده شده است، سیستم تمایل به پرش از پاسخ ناپایدار سیستم در نقطه زینی واقع در نقطه R_1 به پاسخ پایدار در R'_1 دارد. سپس، در فرکانسهای متناظر با فاصله بین $R'_1 - R_2$ که متعلق به پاسخهای غیر صفر پایدار سیستم بوده نوسان کرده و در مرحله بعد، از نقطه ناپایدار زینی واقع در R_2 پرش دوم داشته و به پاسخ پایدار سیستم در R'_2 می‌رود. با افزایش زاویه پیچش سیستم، پهنای فرکانسی بین دو نقطه زینی یعنی $R_1 - R_2$ افزایش یافته و میزان پرش از این دو نقطه به تدریج کاهش می‌یابد. اما

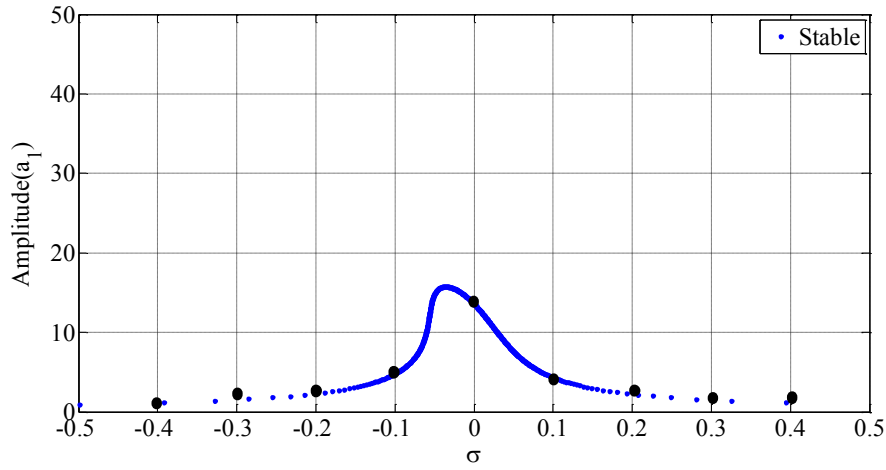
1 saddle-node bifurcation

در مد دوم، نمودار دوشاخگی از نوع چنگالی^۱ خواهد بود به صورتیکه پاسخ پایای سیستم در R_1 به دو شاخگی فوق بحرانی چنگالی^۲ نزدیک بوده که با یک دو شاخگی چنگالی زیر بحرانی^۳ به R_2 ختم می-شود (این موضوع برای نمونه در شکل (۳-۶) و برای زاویه پیچش $\beta_0 = 60^\circ$ نشان داده شده است). در این حالت مشاهده می-شود که سیستم تمایل به پرش از حالت ناپایدار در R_1 به حالت پایدار در R'_1 دارد به طوری که با افزایش زاویه پیچش، طول $R_1 R'_1$ این پرش کاهش می-یابد. از طرفی می-توان دید که در زوایای پیچش کوچکتر، سیستم دارای پهنای وسیعتری از پاسخهای صفر و پهنای کوچکتری از پاسخهای غیر صفر خواهد بود و اگر سیستم در فرکانسی در فاصله $R_1 - R_2$ نوسان کند، با دامنه‌ای برابر با پاسخ غیر صفر ارتعاش می-کند.

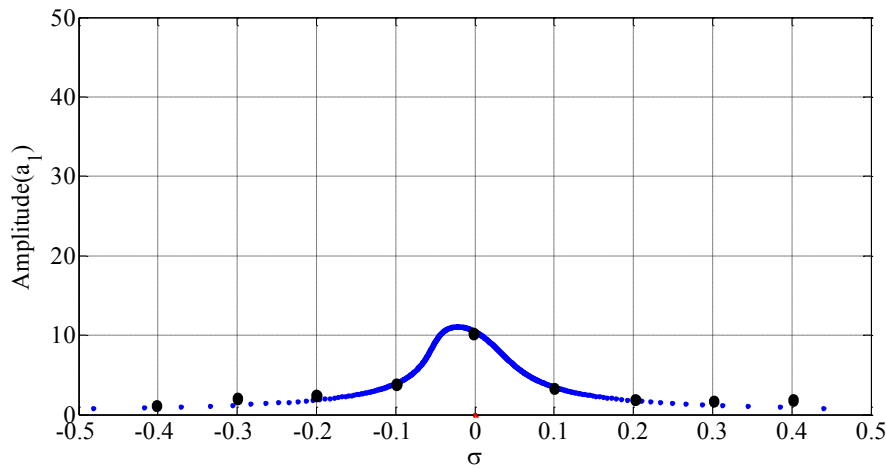
از طرفی، با توجه به شکل‌های (۳-۳) و (۴-۳)، در مد اول، با افزایش زاویه پیچش، β_0 ، تأثیرات نرم شوندگی کاهش یافته و در نتیجه دامنه قله‌های نوسانی کاهش می-یابد. از این‌رو، در مد اول می-توان گفت وجود زاویه پیچش می-تواند به عنوان یک پارامتر میرا کننده نوسانات سیستم عمل کند. در مد دوم نیز شرایط مشابه می-باشد بگونه‌ای که با افزایش زاویه پیچش، تأثیر سخت شوندگی کاهش یافته و در نتیجه دامنه نواحی پایدار نیز کاهش می-یابد. بنابراین، می-توان گفت که در تیرهای پیچیده شده یک سر گیردار، وجود زاویه پیچش به میرا شدن سریع‌تر نوسانات سیستم کمک می-کند.



1 pitchfork
2 supercritical pitchfork bifurcation
3 subcritical pitchfork bifurcation



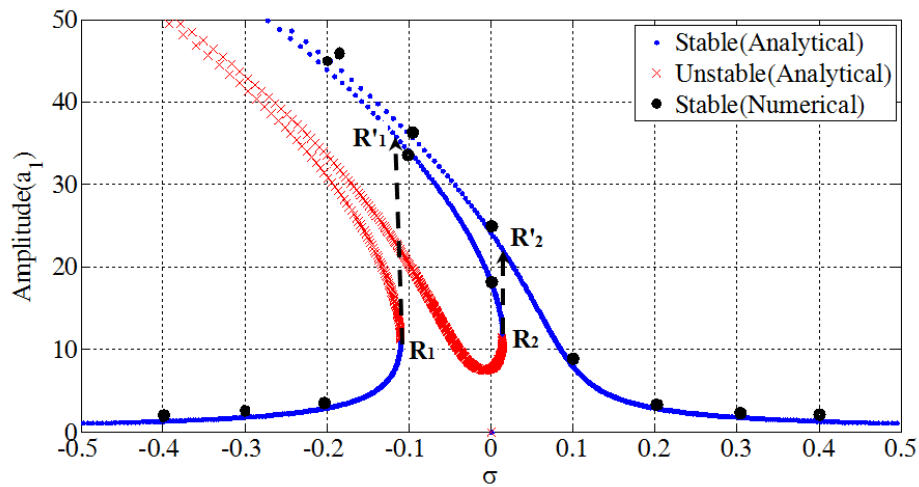
(ب)



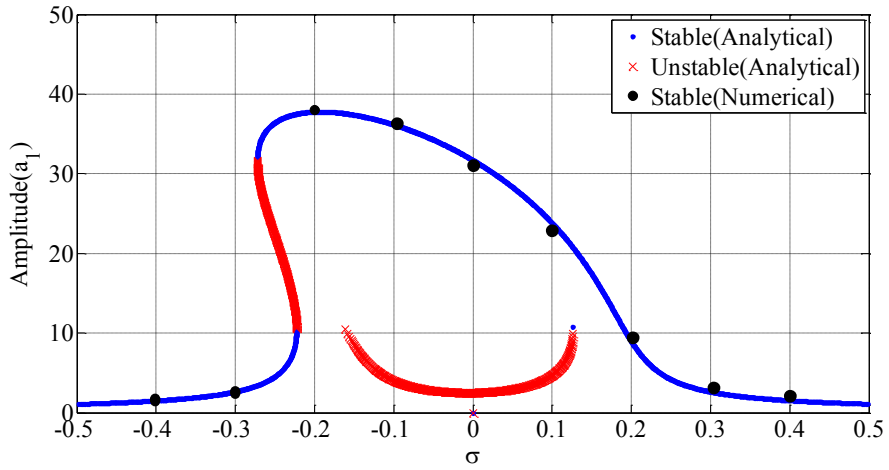
(ج)

شکل (۳-۳) منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده دوار یک سر گیر دار متقارن در مد اول و زاویه پیش الف

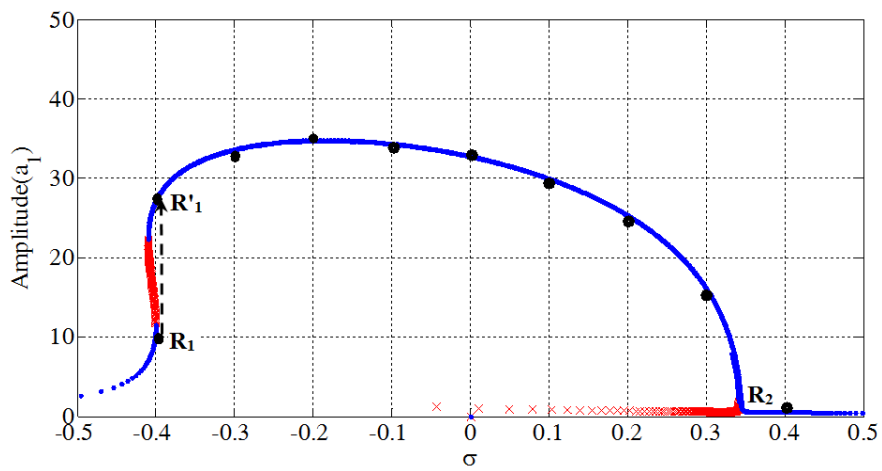
$$\beta_0 = 60^\circ \text{ (ج) و } \beta_0 = 30^\circ \text{ (ب) } \beta_0 = 0$$



(الف)



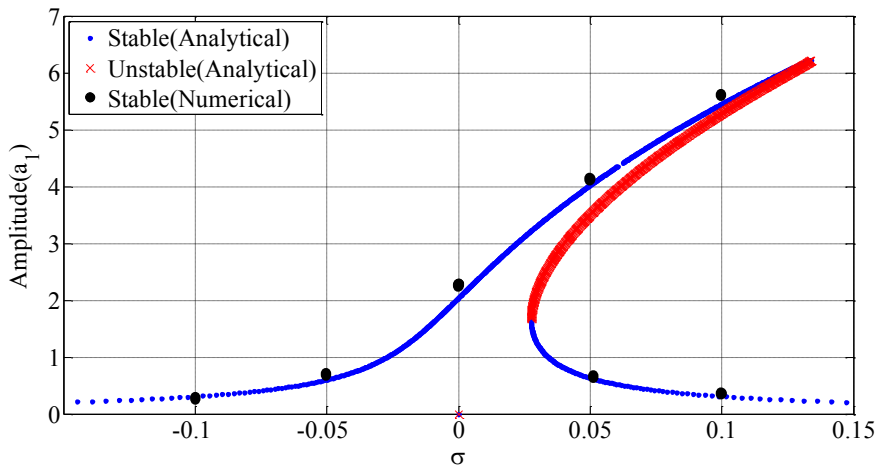
(ب)



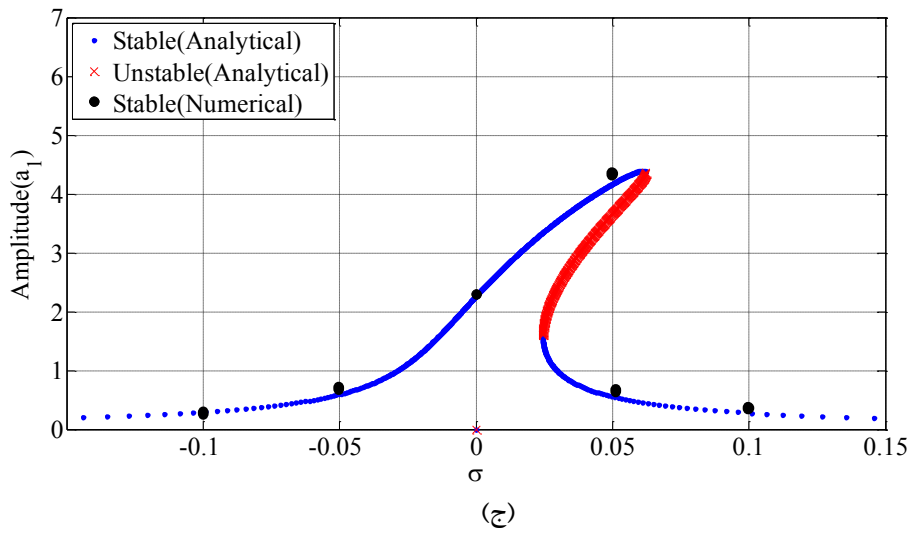
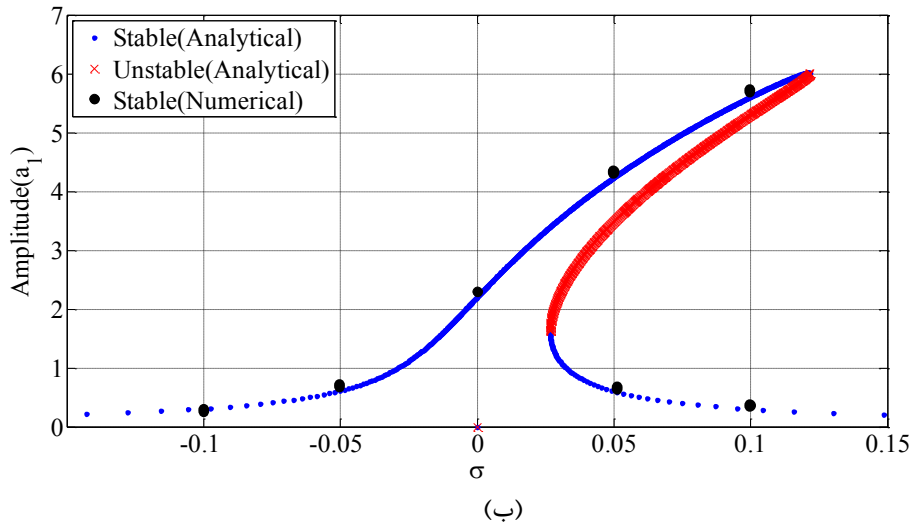
(ج)

شکل (۳-۴) منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده دوار یک سر گیردار نامتقارن در مد اول و زاویه پیش الف

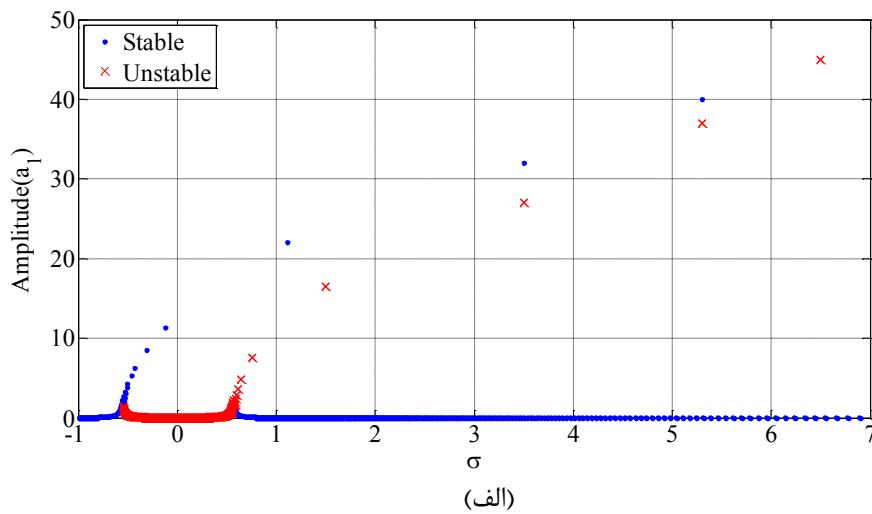
$$\beta_0 = 60^\circ \text{ (ج) و } \beta_0 = 30^\circ \text{ (ب) } \beta_0 = 0$$

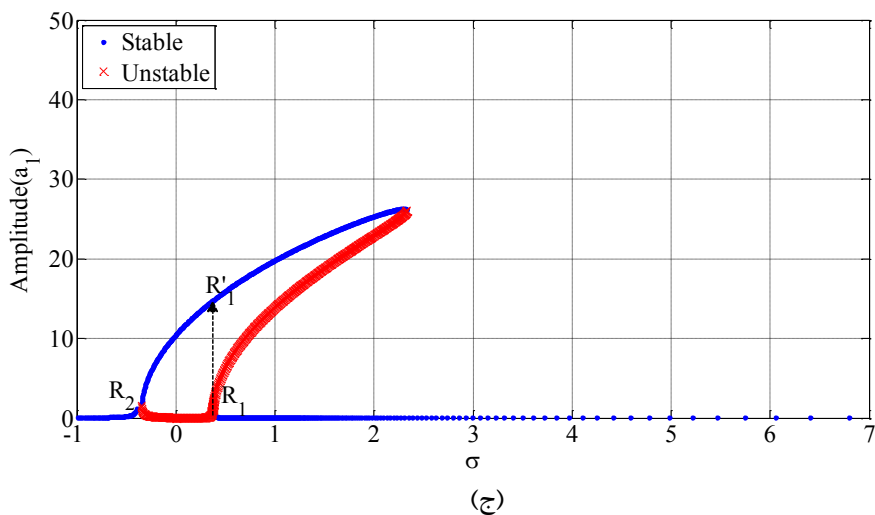
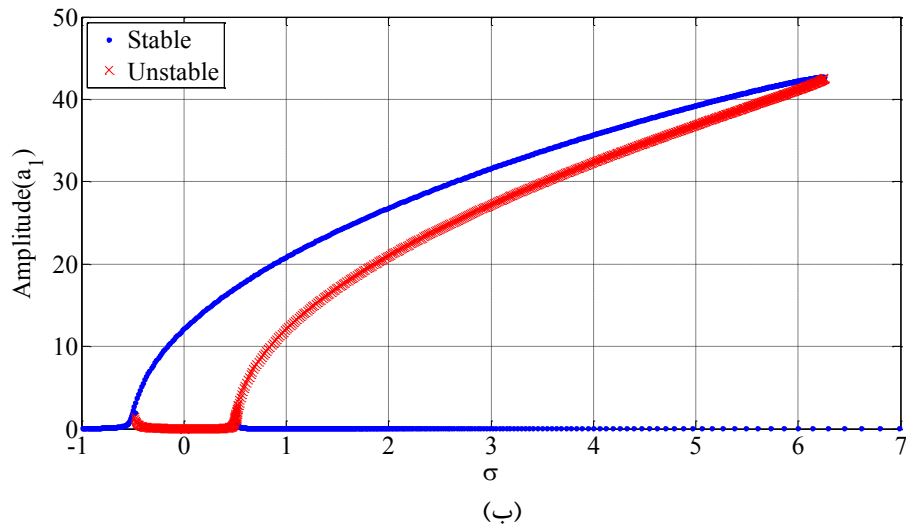


(الف)



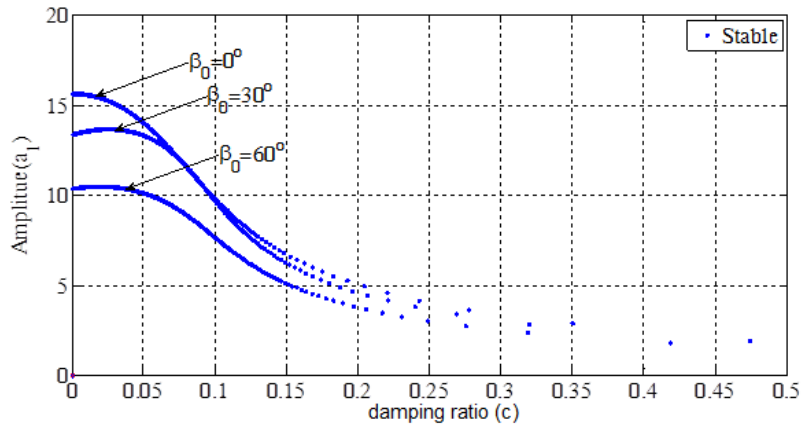
شکل (۵-۳) منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده دوار یک سر گیر دار متقارن در مد دوم و زاویه پیچش الف) $\beta_0 = 0^\circ$ (ب) $\beta_0 = 30^\circ$ و (ج) $\beta_0 = 60^\circ$



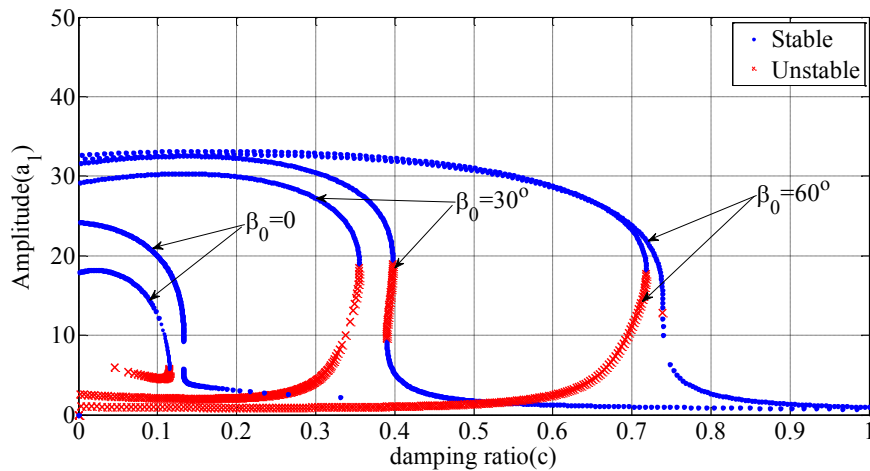


شکل (۳-۶) منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده دوار یک سر گیردار نامتقارن در مد دوم و زاویه پیچش الف) $\beta_0 = 0$ (ب) $\beta_0 = 30^\circ$ (ج) و $\beta_0 = 60^\circ$

شکل (۳-۷) منحنی دامنه بر حسب نسبت میرایی تیر پیچیده شده محوری یک سر گیردار را در زوایای پیچش مختلف و فرکانسهای طبیعی متناظر با $\sigma = 0$ نشان می‌دهد. با توجه به این شکل، می‌توان دید که با افزایش نسبت میرایی، دامنه نوسانات کاهش می‌یابد. علاوه بر این، سیستم تنها دارای یک پاسخ پایدار در همه زوایای پیچش و ضرایب میرایی بوده که در نتیجه آن، سیستم در این حالت هیچگونه دوشاخگی ندارد. از طرفی، می‌توان گفت افزایش زاویه پیچش، منجر به کاهش شدیدتر دامنه نوسانات سیستم می‌شود.



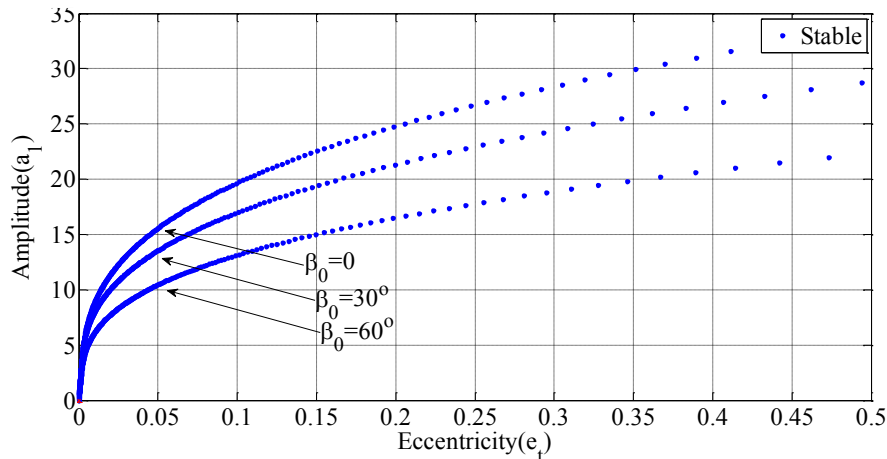
شکل (۷-۳) منحنی دامنه-نسبت میرایی تیر پیچیده شده یک سر گیردار متقارن در $\sigma=0$. در حالتی که تیر پیچیده شده، نامتقارن ($\Pi \neq 0$) می باشد (شکل (۸-۳))، برای $\sigma=0$ و مد اول، با افزایش ضریب میرایی، دامنه نوسانات در همه زوایای پیچش کاهش می یابد. در این حالت، سه پاسخ در سیستم وجود دارد که دو پاسخ آن پایدار و دیگری ناپایدار است. اما بر خلاف تیرهای پیچیده شده دو سر مفصل، همانگونه که نشان داده شده است، هرچه زاویه پیچش بزرگتر شده، سیستم در ضریب میرایی بزرگتری شروع به میرا شدن می کند که می توان گفت در حالت نامتقارن برخلاف حالت متقارن، با افزایش زاویه پیچش جهت میرا شدن، سیستم به نسبت میرایی خارجی بزرگتری احتیاج دارد.



شکل (۸-۳) منحنی دامنه-نسبت میرایی تیر پیچیده شده یک سر گیردار نامتقارن در $\sigma=0$.

اشکال (۹-۳) و (۱۰-۳) دامنه نوسانات را برحسب خروج از مرکز تیر پیچیده شده متقارن و

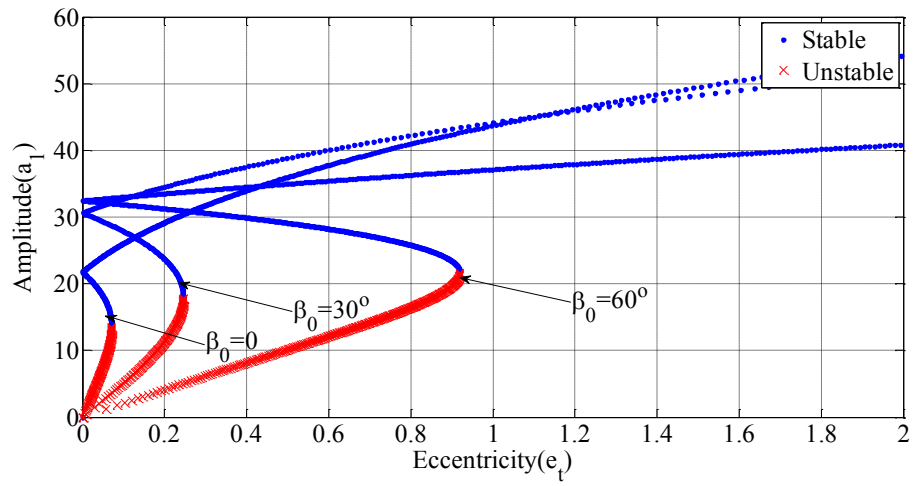
نامتقارن در فرکانس طبیعی متناظر با $\sigma=0$ نشان می دهند.



شکل (۹-۳) منحنی دامنه-خروج از مرکز تیر پیچیده شده یک سر گیردار متقارن در $\sigma=0$.

همانطور که در شکل (۹-۳) نشان داده شده است، حرکت نوسانی تیر پیچیده شده دوار یک سر گیردار متقارن در کل مقادیر خروج از مرکز تیر و زوایای پیچش مختلف آن، پایدار بوده و در نتیجه هیچگونه دوشاخگی اتفاق نمی‌افتد. همچنین، با توجه به شکل (۹-۳) مشاهده می‌شود که با افزایش زاویه پیچش، در یک خروج از مرکز مشخص، دامنه نوسانات سیستم کاهش می‌یابد.

شکل (۱۰-۳) تأثیر زاویه پیچش β_0 را روی منحنی دامنه-خروج از مرکز تیر پیچیده شده دوار یک سر گیردار نامتقارن در نزدیکی فرکانسهای متناظر با $\sigma=0$ نشان می‌دهد. در این حالت، به ازای برخی از مقادیر مشخص خروج از مرکز تیر در $\sigma=0$ ، تنها دو بخش وجود دارد. بخش اول، در مقادیر خروج از مرکز کوچکتر بوده که شامل سه پاسخ بوده با دو پاسخ پایدار و یک پاسخ ناپایدار، در حالی که در بخش دوم و در مقادیر خروج از مرکز بزرگتر، به ازای کلیه زوایای پیچش، تنها یک پاسخ پایدار وجود دارد. در نتیجه پدیده دوشاخگی و یک پرش اتفاق می‌افتد. همچنین، افزایش زاویه پیچش باعث می‌شود پرش در مقادیر بزرگتری از خروج از مرکز اتفاق افتاده و دامنه پایدار نوسانات سیستم کاهش می‌یابد.



شکل (۱۰-۳) منحنی دامنه-خروج از مرکز تیر پیچیده نامتقارن در $\sigma = 0$.

فصل چہارم

۴ – ارتعاشات عرضی تیر پیچیده شده دوار با شرایط مرزی دو سر مفصل و سرعت متغیر

اصولاً سرعت چرخش سازه‌های تیرگونه پیچیده شده مانند ابزارهای براده برداری ممکن است تحت تأثیر عوامل محیطی مانند نوسانات منبع انرژی مانند برق یا هر عامل دیگری قرار گیرد بگونه‌ای که پایداری سیستم را تحت تأثیر قرار می‌دهد. در این بخش، مدل حرکت یک تیر پیچیده شده الاستیک غیرخطی، اویلر-برنولی و ایزوتروپیک با شرایط مرزی دو سر مفصل بگونه‌ای که سرعت چرخش آن در معرض اغتشاشهای سینوسی قرار دارد، مورد بررسی قرار می‌گیرد. در استخراج معادلات، از اصل همیلتون تعمیم یافته استفاده شده است و فرضیات و روشهای ساده سازی به کار رفته، در طول استخراج معادلات در هر بخش به صورت جداگانه ذکر خواهند شد.

۴-۱- معادلات حرکت

همانطور که در بخش ۲-۱ توضیح داده شد، به منظور توصیف دوران سطح مقطع تیر پیچیده شده قبل و بعد از تغییر شکل تیر، از زوایای اویلر $\phi(t, x)$ ، $\psi(t, x)$ و $\theta(t, x)$ حول محورهای Y, X و Z استفاده می‌شود [24] و همانطور که گفته شد، $\psi(t, x)$ و $\theta(t, x)$ ناشی از حرکت عرضی تیر بوده که با فرض اینکه از تغییر شکل پیچشی تیر صرف نظر شده است، $\phi(t, x)$ تنها ناشی از دوران تیر می‌باشد. از این‌رو، می‌توان گفت $\phi(t, x)$ برابر است با،

$$\phi(t, x) = \int_0^t \Omega(t) dt \quad (1-4)$$

فرض می‌کنیم سرعت دوران محوری تیر پیچیده شده دو سر مفصل در معرض یک اغتشاش کسینوسی قرار دارد. از این‌رو داریم،

$$\Omega(t) = \Omega_0(1 + \varepsilon^2 \cos(2\Omega t)) \quad (2-4)$$

در نتیجه، با قرار دادن رابطه (۲-۴) در (۱-۴) داریم،

$$\phi(t, x) = \Omega_0 \left(t + \frac{\varepsilon^2}{2\Omega} \sin(2\Omega t) \right) \quad (3-4)$$

حال، با توجه به زوایای اوایلر، سرعت زاویه‌ای ω تیر پیچیده شده در دستگاه XYZ برابر است با،

$$\begin{aligned} \omega(t, x) &= [\dot{\phi} - \dot{\psi} \sin(\theta)] e_x + [\dot{\psi} \cos(\theta) \sin(\phi) + \dot{\theta} \cos(\phi)] e_y + [\dot{\psi} \cos(\theta) \cos(\phi) - \dot{\theta} \sin(\phi)] e_z \\ &= \omega_x e_x + \omega_y e_y + \omega_z e_z \end{aligned} \quad (4-4)$$

که مشتقات مذکور در رابطه بالا به $\frac{\partial}{\partial t}$ اشاره دارند. اکنون، با توجه به آنچه در رابطه (2-4) ذکر

شد و همچنین رابطه (3-4)، می‌توان مولفه‌های سرعت زاویه‌ای تیر پیچیده شده مذکور با سرعت متغیر

را بر حسب مولفه‌های جابجایی تیر در دستگاه X، Y و Z به صورت زیر نوشت،

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\phi} + \Omega_0 (1 + \varepsilon^2 \cos(2\Omega t)) \\ &+ \left((-1/2v\dot{w} - 1/2w\dot{v})\beta_0^2 + (-1/2w\dot{w}' - 1/2w'\dot{w} + \dots)\beta_0 + 1/2v'\dot{w}' + \dots \right) \cos(2\beta_0 x) \\ &+ \left((1/2w\dot{w} - 1/2v\dot{v})\beta_0^2 + (-1/2w'\dot{v} - 1/2v\dot{w}' + \dots)\beta_0 + 1/2v'\dot{v}' + \dots \right) \sin(2\beta_0 x) \\ &(1/2w\dot{v} - 1/2v\dot{w})\beta_0^2 + (1/2w\dot{w}' + \dots)\beta_0 + 1/2w'\dot{v}' + \dots \\ \omega_y &= \left(\left((1/4wv\dot{w} - 1/8v^2\dot{v} + \dots)\beta_0^3 + (-1/4\dot{v}w' - 1/4v\dot{v}w + \dots)\beta_0^2 \right) \cos(\Omega_0 t - 3\beta_0 x) \right. \\ &\quad \left. + (-1/4\dot{w}'v' + 1/4v'\dot{v}' + \dots)\beta_0 + 1/8\dot{w}'v'^2 - 1/8\dot{w}'w'^2 + \dots \right) \\ &+ \left((v^2\dot{v} + 1/2w^2\dot{v} + \dots)\beta_0^3 + (v^2\dot{w}' - 1/2wv\dot{v}' + \dots)\beta_0^2 \right) \cos(\Omega_0 t - \beta_0 x) \\ &\quad + (-\phi\dot{w} + u'\dot{v} + 1/2\phi^2\dot{v} + \dots)\beta_0 + (u'\dot{w}' + \phi\dot{v}' + \dots) \\ &+ \left((1/4wv\dot{w} + 1/8v^2\dot{v} + \dots)\beta_0^3 + (1/4\dot{v}w' - 1/4v'\dot{v}w + \dots)\beta_0^2 \right) \cos(\Omega_0 t + \beta_0 x) \\ &\quad + (1/4\dot{w}'v' + 1/4v'\dot{v}' + \dots)\beta_0 - 1/8\dot{w}'v'^2 + 1/8\dot{w}'w'^2 + \dots \\ &+ \left((-1/4wv\dot{v} - 1/8v^2\dot{w} + \dots)\beta_0^3 + (-1/4\dot{w}w'v - 1/4ww'\dot{v} + \dots)\beta_0^2 \right) \sin(\Omega_0 t - 3\beta_0 x) \\ &\quad + (1/4\dot{v}w' - 1/4w'\dot{w}' + \dots)\beta_0 + 1/8\dot{v}'w'^2 - 1/8\dot{v}'v'^2 + \dots \\ &+ \left((w^2\dot{w} + 1/2v^2\dot{w} + \dots)\beta_0^3 + (-w^2\dot{v}' + 1/2wv\dot{w}' + \dots)\beta_0^2 \right) \sin(\Omega_0 t - \beta_0 x) \\ &\quad + (u'\dot{w} - \dot{w} + 1/2w'^2\dot{w} + \dots)\beta_0 + (-v'^2\dot{v}' + \phi\dot{w}' - \dot{u}'v' + \dots) \\ &\left((-1/4wv\dot{w} - 1/8\dot{w}w^2 + 1/8v^2\dot{w} + \dots)\beta_0^3 + (1/4v'w\dot{w} + 1/4v\dot{w}'w + \dots)\beta_0^2 \right) \sin(\Omega_0 t + \beta_0 x) \\ &\quad + (1/4w'\dot{v}' - 1/8\dot{w}'v'^2 + \dots)\beta_0 - 1/8w'^2\dot{v}' + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_z = & \left(\begin{aligned} & (-1/4wv\dot{w} - 1/8v^2\dot{v} + \dots)\beta_0^3 + (-1/4\dot{v}v'w + 1/4v'v\dot{w} + \dots)\beta_0^2 \\ & + (-1/4\dot{w}'v'w' - 1/4v'v\dot{v}' + \dots)\beta_0 - 1/8\dot{w}'v'^2 + 1/8\dot{w}'w'^2 + \dots \end{aligned} \right) \sin(\Omega_0 t - 3\beta_0 x) \\
& + \left(\begin{aligned} & (v^2\dot{v} + 1/2w^2\dot{v} + \dots)\beta_0^3 + (v^2\dot{w}' - 1/2wv\dot{v}' + \dots)\beta_0^2 \\ & + (-\phi\dot{w} - u'\dot{v} + 1/2\phi^2\dot{v} + \dots)\beta_0 + (-u'\dot{w}' + \phi\dot{v}' + \dots) \end{aligned} \right) \sin(\Omega_0 t - \beta_0 x) \\
& + \left(\begin{aligned} & (1/4wv\dot{w} + 1/8v^2\dot{v} + \dots)\beta_0^3 + (1/4\dot{v}v'w - 1/4v'v\dot{w} + \dots)\beta_0^2 \\ & + (1/4\dot{w}'v'w' - 1/4v'v\dot{v}' + \dots)\beta_0 - 1/8\dot{w}'v'^2 + 1/8\dot{w}'w'^2 + \dots \end{aligned} \right) \sin(\Omega_0 t + \beta_0 x) \\
& + \left(\begin{aligned} & (-1/4wv\dot{w} - 1/8v^2\dot{w} + \dots)\beta_0^3 + (-1/4\dot{w}w'v - 1/4ww'\dot{v} + \dots)\beta_0^2 \\ & + (1/4\dot{v}'w'w' + 1/4w'w\dot{v}' + \dots)\beta_0 + 1/8\dot{v}'w'^2 - 1/8\dot{v}'v'^2 + \dots \end{aligned} \right) \cos(\Omega_0 t - 3\beta_0 x) \\
& + \left(\begin{aligned} & (w^2\dot{w} + 1/2v^2\dot{w} + \dots)\beta_0^3 + (-w^2\dot{v}' + 1/2wv\dot{w}' + \dots)\beta_0^2 \\ & + (u'\dot{w} - \dot{w} + 1/2w'^2\dot{w} + \dots)\beta_0 + (-v'^2\dot{v}' + \phi\dot{w}' - \dot{u}'v' + \dots) \end{aligned} \right) \cos(\Omega_0 t - \beta_0 x) \\
& \left(\begin{aligned} & (-1/4wv\dot{w} - 1/8\dot{w}w^2 + 1/8v^2\dot{w} + \dots)\beta_0^3 + (1/4v'w\dot{w} + 1/4v\dot{w}'w + \dots)\beta_0^2 \\ & + (1/4w'v'\dot{v} + 1/8\dot{w}v'^2 + \dots)\beta_0 + 1/8w'^2\dot{v}' + \dots \end{aligned} \right) \cos(\Omega_0 t + \beta_0 x)
\end{aligned} \tag{5-4}$$

برای انحنایها نیز با توجه به تحلیل انرژی کیرشهف، روابط مربوط به انحنای تیر، ρ_x, ρ_y, ρ_z را

می‌توان با جایگزین کردن مشتقات زمانی $\frac{\partial}{\partial t}$ با مشتقات $\frac{\partial}{\partial x}$ در روابط سرعت زاویه‌ای بدست آورد. حال،

همانند آنچه در بخش ۱-۲ بیان شد، با قرار دادن روابط مذکور در روابط انرژی جنبشی و پتانسیل و

سپس استفاده از رابطه لاگرانژ و ساده سازی معادلات با استفاده از بسط تیلور داریم:

$$m\ddot{u} - A_{xx} \left(u'' + w'w'' + v'v'' + \beta_0(vw'' - ww'') + \beta_0^2(vv' + ww') \right) = 0 \tag{6-4}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{aligned} & (-v''u' - 3/2v''v'^2 + -u''v' - v'ww'' - 1/2v''w^2) + (vv'w + 1/2w'v^2 + 3/2w'w^2) \beta_0^3 \\ & + (-vv'^2 - 2ww'v' + vw'^2 + -1/2v''v^2 - 3/2v''w^2 + vww'') \beta_0^2 \\ & + (wu' + 1/2w'v'^2 + 3v'v''w - vv'w'' + 1/2w'^3 + -vv''w' + ww'w'' + u''w) \beta_0 \end{aligned} \right\} A_{xx} \\
& + \left\{ \begin{aligned} & -\dot{w}''\Omega_0\Delta I - 1/2\Delta I\ddot{v}'' + 1/2\Delta Dv^{(4)} + 4\Delta Dv\beta_0^4 + 11\Delta Dw'\beta_0^3 \\ & + (3/2\Delta I\ddot{v} - 21/2\Delta Dv'' + 3\dot{w}\Omega_0\Delta I) \beta_0^2 + (2\Delta I\ddot{w}' - 4\Delta Dw''' - 4\dot{v}'\Omega_0\Delta I) \beta_0 \end{aligned} \right\} \cos(-4\beta_0 x + 2\Omega_0 t) \\
& + \left\{ \begin{aligned} & \dot{v}''\Delta I\Omega_0 - 1/2\Delta I\ddot{w}'' + 1/2\Delta Dw^{(4)} + 4\Delta Dw\beta_0^4 - 11\Delta Dv'\beta_0^3 \\ & + (3/2\Delta I\ddot{w} - 21/2\Delta Dw'' - 3\dot{v}\Delta I\Omega_0) \beta_0^2 + (-2\Delta I\ddot{v}' + 4\Delta Dv''' - 4\dot{w}'\Delta I\Omega_0) \beta_0 \end{aligned} \right\} \sin(-4\beta_0 x + 2\Omega_0 t) \\
& + 1/2(-\dot{w}\beta_0^2 + \dot{v}'\beta_0)I_{xx}\Omega_0 \cos(2\beta_0 x) + 1/2(-\dot{v}\beta_0^2 - \dot{w}'\beta_0)I_{xx}\Omega_0 \sin(2\beta_0 x)
\end{aligned} \tag{7-4}$$

$$\begin{aligned}
& +(-\beta_0\Omega w' + 1/4\dot{v}'\beta_0 + 1/2\Omega v'' - 1/2\beta_0^2\Omega v - 1/4\dot{w}\beta_0^2)I_{xx}\Omega_0\varepsilon^2 \cos(-2\beta_0 x + 2\Omega t) \\
& +(\beta_0\Omega v' + 1/4\dot{w}'\beta_0 + 1/2\Omega w'' - 1/2\beta_0^2\Omega w + 1/4\dot{v}\beta_0^2)I_{xx}\Omega_0\varepsilon^2 \sin(-2\beta_0 x + 2\Omega t) \\
& +(-\dot{w}'' + 1/2\dot{w}\beta_0^2 - 3/2\dot{v}'\beta_0)\Omega_0 I_{xx} + \Sigma D w' \beta_0^3 + (1/2\Sigma I \ddot{v} - 5/2\Sigma D v'')\beta_0^2 \\
& +(-2\Sigma D w''' + \Sigma I \dot{w}')\beta_0 + m\dot{v} - 1/2\Sigma I \ddot{v}'' + 1/2\Sigma D v^{(4)} + c\dot{w} \cos(\beta_0 x) - c\dot{w} \sin(\beta_0 x) \\
& + m e_{\zeta} \Omega_0^2 \sin(-\beta_0 x + \Omega_0 t) - m e_{\eta} \Omega_0^2 \cos(-\beta_0 x + \Omega_0 t) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \{(w''u' + 3/2w''w'^2 + u''w' + v'w'v'' - 1/2w''v'^2) + (vw'w + 1/2v'w^2 + 3/2v'v'^2)\beta_0^3 \\
& + (-ww'^2 + 2vw'v' + wv'^2 + 1/2w''w^2 + 3/2w''v^2 - vww'')\beta_0^2 \\
& + (v'u' + 1/2v'w'^2 + 3vw'w'' - ww'v'' + 1/2v'^3 - ww''v' + vv'v'' + u''v)\beta_0\} A_{xx} \\
& + \{v''\Omega_0\Delta I - 1/2\Delta I \ddot{w}'' + 1/2\Delta D w^{(4)} + 4\Delta D w \beta_0^4 - 11\Delta D v' \beta_0^3 \\
& + (3/2\Delta I \ddot{w} - 21/2\Delta D w'' - 3\dot{v}\Omega_0\Delta I)\beta_0^2 + (-2\Delta I \ddot{v}' + 4\Delta D v''' - 4\dot{w}'\Omega_0\Delta I)\beta_0\} \cos(-4\beta_0 x + 2\Omega_0 t) \\
& + \{\dot{w}''\Delta I \Omega_0 + 1/2\Delta I \ddot{v}'' - 1/2\Delta D v^{(4)} + 4\Delta D v \beta_0^4 - 11\Delta D w' \beta_0^3 \\
& + (-3/2\Delta I \ddot{v} + 21/2\Delta D v'' - 3\dot{w}\Delta I \Omega_0)\beta_0^2 + (-2\Delta I \ddot{w}' + 4\Delta D w''' + 4\dot{v}'\Delta I \Omega_0)\beta_0\} \sin(-4\beta_0 x + 2\Omega_0 t) \quad (\text{A-4}) \\
& + 1/2(\dot{v}\beta_0^2 + \dot{w}'\beta_0)I_{xx}\Omega_0 \cos(2\beta_0 x) + 1/2(-\dot{w}\beta_0^2 + \dot{v}'\beta_0)I_{xx}\Omega_0 \sin(2\beta_0 x) \\
& + (\beta_0\Omega w' - 1/4\dot{v}'\beta_0 - 1/2\Omega v'' + 1/2\beta_0^2\Omega v + 1/4\dot{w}\beta_0^2)I_{xx}\Omega_0\varepsilon^2 \sin(-2\beta_0 x + 2\Omega t) \\
& + (-\beta_0\Omega v' + 1/4\dot{w}'\beta_0 + 1/2\Omega w'' - 1/2\beta_0^2\Omega w + 1/4\dot{v}\beta_0^2)I_{xx}\Omega_0\varepsilon^2 \cos(-2\beta_0 x + 2\Omega t) \\
& + (-\dot{v}'' + 1/2\dot{v}\beta_0^2 + 3/2\dot{w}'\beta_0)\Omega_0 I_{xx} + \Sigma D v' \beta_0^3 + (-1/2\Sigma I \ddot{w} + 5/2\Sigma D w'')\beta_0^2 \\
& + (-2\Sigma D v''' + \Sigma I \dot{v}')\beta_0 - m\dot{w} + 1/2\Sigma I \ddot{w}'' - 1/2\Sigma D w^{(4)} - c\dot{v} \sin(\beta_0 x) - c\dot{v} \cos(\beta_0 x) \\
& + m e_{\eta} \Omega_0^2 \sin(-\beta_0 x + \Omega_0 t) + m e_{\zeta} \Omega_0^2 \cos(-\beta_0 x + \Omega_0 t) = 0
\end{aligned}$$

با شرایط مرزی

$$@x=0, L \Rightarrow \begin{cases} u=0 \\ v, w=0 \\ v''=w''=0 \end{cases}$$

که

$$\Delta D = \frac{(D_{\xi\xi} - D_{\eta\eta})}{2}, \quad \Delta I = \frac{(I_{\xi\xi} - I_{\eta\eta})}{2}, \quad \Sigma D = \frac{(D_{\xi\xi} + D_{\eta\eta})}{2}, \quad \Sigma I = \frac{(I_{\xi\xi} + I_{\eta\eta})}{2}, \quad (9-4)$$

$$u = u_{\zeta}, \quad v = v_{\eta}, \quad w = w_{\xi}$$

اگر نسبت عرض و پهناى سطح مقطع تیر به طول تیر (ضریب لاغری) خیلی کوچک باشد، می-

توان از اینرسی طولی تیر صرف نظر کرد، $m\ddot{u}(x,t) = 0$ ، از این رو با توجه به رابطه (۴-۶) و شرایط

مرزی $u(0) = u(L) = 0$ داریم [33].

$$u' = -\frac{1}{2}\beta_0^2(v^2 + w^2) + \beta_0(-vw' + wv') - \frac{1}{2}(v'^2 + w'^2) + \frac{1}{2L}\int_0^L(v'^2 + w'^2 - 2\beta_0(v'w - vw') + \beta_0^2(v^2 + w^2))dx \quad (10-4)$$

حال با قرار دادن رابطه (10-4) در معادلات ارتعاش جانبی تیر و با در نظر گرفتن مرتبه‌های

جملات مرتبه $O(\epsilon^2)$ و $v = w = O(\epsilon)$ با توجه به معادله (10-4)، بسط معادلات حاصل با سری تیلور تا

جملات مرتبه $O(\epsilon^3)$ و استفاده از پارامترهای بی بعد شده

$$u^* = \frac{u}{h_0}, v^* = \frac{v}{h_0}, w^* = \frac{w}{h_0}, x^* = \frac{x}{L}, \Omega^* = \frac{\Omega}{\sqrt{\pi^4 \Sigma D / mL^4}}, \Omega_0^* = \frac{\Omega_0}{\sqrt{\pi^4 \Sigma D / mL^4}},$$

$$t^* = \frac{t}{\sqrt{mL^4 / \pi^4 \Sigma D}}, I_{xx}^* = I_{\zeta\zeta}^* = \frac{\pi^2 I_{xx}}{mL^2}, \Sigma I^* = \frac{\pi^2 \Sigma I}{mL^2}, c^* = c \frac{\pi^2 \sqrt{m \Sigma D}}{L^2}, \mu = \frac{h_0^2 A_{xx}}{2 \Sigma D},$$

معادلات حرکت ارتعاشات عرضی تیر برابر است با،

$$\begin{aligned} & -2 \frac{w' \beta_0^3}{\pi^4} + 1/2 \frac{(-\pi^2 \Omega_0 I_{xx} \dot{w} + 10v'' - 2\Sigma I \pi^2 \ddot{v}) \beta_0^2}{\pi^4} + 1/2 \frac{(3\pi^2 \Omega_0 I_{xx} \dot{v}' - 4\ddot{w}' \pi^2 \Sigma I + 8w''') \beta_0}{\pi^4} \\ & + 1/2 \frac{2\dot{v}'' \pi^2 \Sigma I - 2\ddot{v} \pi^4 + 2\pi^2 \Omega_0 I_{xx} \dot{w}'' - 2v^{(4)}}{\pi^4} - c\dot{v} \cos(\beta_0 x) + c\dot{w} \sin(\beta_0 x) \\ & + \frac{\Omega_0 I_{xx}}{2\pi^2} \left[(\dot{w} \beta_0^2 - \dot{v}' \beta_0) \cos(2\beta_0 x) + (\dot{v} \beta_0^2 + \dot{w}' \beta_0) \sin(2\beta_0 x) \right] \\ & + e_\eta \Omega_0^2 \cos(\beta_0 x - \Omega_0 t) + e_\zeta \Omega_0^2 \sin(\beta_0 x - \Omega_0 t) \\ & + \left(-8 \frac{v \Delta D \beta_0^4}{\pi^4} - 22 \frac{w' \Delta D \beta_0^3}{\pi^4} + 1/2 \frac{(42v'' \Delta D - 12\pi^2 \Omega_0 \dot{w} \Delta I - 6\dot{v} \pi^2 \Delta I) \beta_0^2}{\pi^4} \right. \\ & \left. + 1/2 \frac{(16w''' \Delta D + 16\pi^2 \Omega_0 \dot{v}' \Delta I - 8\dot{w}'' \pi^2 \Delta I) \beta_0}{\pi^4} + 1/2 \frac{2\dot{v}'' \pi^2 \Delta I - 2v^{(4)} \Delta D + 4\pi^2 \Omega_0 \dot{w}'' \Delta I}{\pi^4} \right) \cos(-2\Omega_0 t + 4\beta_0 x) \\ & + \left(8 \frac{w \Delta D \beta_0^4}{\pi^4} - 22 \frac{v' \Delta D \beta_0^3}{\pi^4} + 1/2 \frac{(-12\pi^2 \Omega_0 \dot{v} \Delta I - 42w'' \Delta D + 6\dot{w} \pi^2 \Delta I) \beta_0^2}{\pi^4} \right. \\ & \left. + 1/2 \frac{(-16\pi^2 \Omega_0 \dot{w}' \Delta I - 8\dot{v}'' \pi^2 \Delta I + 16v''' \Delta D) \beta_0}{\pi^4} + 1/2 \frac{4\pi^2 \Omega_0 \dot{v}' \Delta I - 2\dot{w}'' \pi^2 \Delta I + 2w^{(4)} \Delta D}{\pi^4} \right) \sin(-2\Omega_0 t + 4\beta_0 x) \\ & + \frac{I_{xx} \Omega_0}{\pi^2} \varepsilon^2 \left[(-\beta_0 \Omega w' + 1/4 \dot{v}' \beta_0 + 1/2 \Omega v'' - 1/2 \beta_0^2 \Omega v - 1/4 \dot{w} \beta_0^2) \cos(-2\beta_0 x + 2\Omega t) \right. \\ & \left. + (\beta_0 \Omega v' + 1/4 \dot{w}' \beta_0 + 1/2 \Omega w'' - 1/2 \beta_0^2 \Omega w + 1/4 \dot{v} \beta_0^2) \sin(-2\beta_0 x + 2\Omega t) \right] \\ & + \frac{I_{xx} \Omega_0 \Omega}{\pi^2} \varepsilon^2 \left[(3/2 \beta_0 \dot{v}' + \dot{w}'' - 1/2 \beta_0^2 \dot{w}) \cos(2\Omega t) + (-w'' + \beta_0^2 w - 2\beta_0 v') \sin(2\Omega t) \right] \\ & + \frac{\mu}{\pi^4} (-w' \beta_0 + v'') \left(\beta_0^2 \int_0^1 (v^2 + w^2) dx + \beta_0 \int_0^1 (vw' - v'w) dx + \int_0^1 (v'^2 + w'^2) dx \right) = 0 \end{aligned}$$

(۱۱-۴)

$$\begin{aligned}
& + 2 \frac{v' \beta_0^3}{\pi^4} + 1/2 \frac{(\pi^2 \Omega_0 I_x \dot{v} + 10 w'' - 2 \Sigma I \pi^2 \ddot{w}) \beta_0^2}{\pi^4} + 1/2 \frac{(3 \pi^2 \Omega_0 I_x \dot{w}' + 4 \dot{v}' \pi^2 \Sigma I - 8 v''') \beta_0}{\pi^4} \\
& + 1/2 \frac{2 \ddot{w}'' \pi^2 \Sigma I - 2 \dot{w} \pi^4 + 2 \pi^2 \Omega_0 I_x \dot{v}'' - 2 w^{(4)}}{\pi^4} - c \dot{w} \cos(\beta_0 x) - c \dot{v} \sin(\beta_0 x) \\
& + \frac{\Omega_0 I_{xx}}{2 \pi^2} \left[(\dot{v} \beta_0^2 + \dot{w}' \beta_0) \cos(2 \beta_0 x) + (-\dot{w} \beta_0^2 + \dot{v}' \beta_0) \sin(2 \beta_0 x) \right] \\
& + e_\zeta \Omega_0^2 \cos(\beta_0 x - \Omega_0 t) - e_\eta \Omega_0^2 \sin(\beta_0 x - \Omega_0 t) \\
& + \left(8 \frac{w \Delta D \beta_0^4}{\pi^4} - 22 \frac{v' \Delta D \beta_0^3}{\pi^4} + 1/2 \frac{(-42 w'' \Delta D - 12 \pi^2 \Omega_0 \dot{v} \Delta I + 6 \ddot{w} \pi^2 \Delta I) \beta_0^2}{\pi^4} \right. \\
& \left. + 1/2 \frac{(16 v''' \Delta D - 16 \pi^2 \Omega_0 \dot{w}' \Delta I - 8 \dot{v}' \pi^2 \Delta I) \beta_0}{\pi^4} + 1/2 \frac{-2 \ddot{w}'' \pi^2 \Delta I + 2 w^{(4)} \Delta D + 4 \pi^2 \Omega_0 \dot{v}' \Delta I}{\pi^4} \right) \cos(-2 \Omega_0 t + 4 \beta_0 x) \\
& + \left(8 \frac{v \Delta D \beta_0^4}{\pi^4} + 22 \frac{w' \Delta D \beta_0^3}{\pi^4} + 1/2 \frac{(12 \pi^2 \Omega_0 \dot{v} \Delta I - 42 w'' \Delta D + 6 \ddot{w} \pi^2 \Delta I) \beta_0^2}{\pi^4} \right. \\
& \left. + 1/2 \frac{(-16 \pi^2 \Omega_0 \dot{v}' \Delta I + 8 \ddot{w}'' \pi^2 \Delta I - 16 w''' \Delta D) \beta_0}{\pi^4} + 1/2 \frac{-4 \pi^2 \Omega_0 \dot{w}'' \Delta I - 2 \dot{v}'' \pi^2 \Delta I + 2 v^{(4)} \Delta D}{\pi^4} \right) \sin(-2 \Omega_0 t + 4 \beta_0 x) \\
& + \frac{I_{xx} \Omega_0}{\pi^2} \varepsilon^2 \left[(\beta_0 \Omega w' - 1/4 \dot{v}' \beta_0 - 1/2 \Omega v'' + 1/2 \beta_0^2 \Omega v + 1/4 \dot{w} \beta_0^2) \sin(-2 \beta_0 x + 2 \Omega t) \right. \\
& \left. + (-\beta_0 \Omega v' + 1/4 \dot{w}' \beta_0 + 1/2 \Omega w'' - 1/2 \beta_0^2 \Omega w + 1/4 \dot{v} \beta_0^2) \cos(-2 \beta_0 x + 2 \Omega t) \right] \\
& + \frac{I_{xx} \Omega_0 \Omega}{\pi^2} \varepsilon^2 \left[(-3/2 \beta_0 \dot{w}' + \dot{v}'' - 1/2 \beta_0^2 \dot{v}) \cos(2 \Omega t) + (-v'' + \beta_0^2 v + 2 \beta_0 w') \sin(2 \Omega t) \right] \\
& + \frac{\mu}{\pi^4} (v' \beta_0 + w'') \left(\beta_0^2 \int_0^1 (v^2 + w^2) dx + \beta_0 \int_0^1 (v w' - v' w) dx + \int_0^1 (v'^2 + w'^2) dx \right) x=0
\end{aligned}$$

(۱۲-۴)

که h_0 و L ، به ترتیب اندازه ضخامت مقطع و طول تیر هستند. برای راحتی، در معادلات از علامت (*) صرف نظر شده است. اکنون برای تحلیل معادلات حرکت فوق، از روشهای مقیاس‌های چند گانه و گالرکین برای بدست آوردن پاسخهای تقریبی به شکل تحلیلی و عددی استفاده می‌شود. همچنین، به منظور صحه گذاری روابط، از روش عددی رانگ-کوتا نیز استفاده شده است.

۴-۲- تحلیل پایداری با اعمال روش مقیاس‌های چندگانه به معادلات دیفرانسیل مشتقات جزئی (PDE)

اکنون، به منظور حل معادلات بی بعد شده بدست آمده، از تئوری اغتشاشات و روش مقیاس‌های چند گانه برای تحلیل معادلات دیفرانسیل با مشتق جزئی استفاده می‌شود. به این ترتیب، با توجه به وجود تنها جملات غیر خطی مرتبه سه در معادلات، تقریب زیر برای مولفه‌های جابجایی عرضی تیر

فرض می‌شود،

$$v(x,t) = \varepsilon v_1(x, T_0, T_2) + \varepsilon^3 v_3(x, T_0, T_2) + \dots \quad (13-4)$$

$$w(x,t) = \varepsilon w_1(x, T_0, T_2) + \varepsilon^3 w_3(x, T_0, T_2) + \dots$$

لازم به ذکر است اگر در تقریب فوق، جملات w_2, v_2, w_0, v_0 ظاهر شوند، پاسخ آنها در ادامه

صفر خواهد شد. $T_n (= \varepsilon^n t)$ به مقیاس‌های زمانی اشاره دارد. بگونه‌ای که $T_0 = t$ و $T_2 = \varepsilon^2 t$.

طرفی،

$$\frac{\partial}{\partial t} = D_0 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \quad (14-4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = D_0^2 + 2\varepsilon^2 D_2 D_0 + \dots$$

که D_0 و D_2 به ترتیب برابرند با، $\frac{\partial}{\partial T_0}$ و $\frac{\partial}{\partial T_2}$ به منظور بالانس پارامترهای غیرخطی در معادلات و

استخراج رزونانس‌های اولیه و پارامتریک، قرار می‌دهیم،

$$c = \varepsilon^2 \bar{c}, \Delta D = \varepsilon^2 \bar{\Delta D}, \Delta I = \varepsilon^2 \bar{\Delta I}, e_\zeta = \varepsilon^3 \bar{e}_\zeta, e_\eta = \varepsilon^3 \bar{e}_\eta \quad (15-4)$$

به این ترتیب، با اعمال روش مقیاس‌های چندگانه و جدا سازی عبارات مرتبه $O(\varepsilon^3)$ و $O(\varepsilon)$

داریم،

$O(\varepsilon)$:

$$\frac{\Omega_0 I_x}{2\pi^2} (\beta_0^2 D_0 w_1 - \beta_0 D_0 v_1') \cos(2\beta_0 x) + \frac{\Omega_0 I_x}{2\pi^2} (D_0 v_1 \beta_0^2 + D_0 w_1' \beta_0) \sin(2\beta_0 x)$$

$$- \frac{2\beta_0^3 w_1'}{\pi^4} + \left(\frac{-\Sigma I D_0^2 v_1 \pi^2 - 1/2\Omega_0 I_x D_0 w_1 \pi^2 + 5v_1''}{\pi^4} \right) \beta_0^2$$

$$+ \left(\frac{-2\Sigma I D_0^2 w_1' \pi^2 + 3/2\Omega_0 I_x D_0 v_1 \pi^2 + 4w_1'''}{\pi^4} \right) \beta_0$$

$$+ \left(\frac{-v_1^{(4)} + \Sigma I D_0^2 v_1'' \pi^2 - D_0^2 v_1 \pi^4 + \Omega_0 I_x D_0 w_1'' \pi^2}{\pi^4} \right) = 0 \quad (16-4)$$

$$\frac{\Omega_0 I_x}{2\pi^2} (\beta_0^2 D_0 v_1 + \beta_0 D_0 w_1') \cos(2\beta_0 x) + \frac{\Omega_0 I_x}{2\pi^2} (-D_0 w_1 \beta_0^2 + D_0 v_1' \beta_0) \sin(2\beta_0 x)$$

$$+ \frac{2\beta_0^3 v_1'}{\pi^4} + \left(\frac{-\Sigma I D_0^2 w_1 \pi^2 + 1/2\Omega_0 I_x D_0 v_1 \pi^2 + 5w_1'''}{\pi^4} \right) \beta_0^2$$

$$+ \left(\frac{2\Sigma I D_0^2 v_1' \pi^2 + 3/2\Omega_0 I_x D_0 w_1 \pi^2 - 4v_1'''}{\pi^4} \right) \beta_0$$

$$+ \frac{-w_1^{(4)} + \Sigma I D_0^2 w_1'' \pi^2 - D_0^2 w_1 \pi^4 - \Omega_0 I_x D_0 v_1'' \pi^2}{\pi^4} = 0 \quad (17-4)$$

$O(\varepsilon^3)$:

$$\begin{aligned}
& \left[(-6D_0v_1\beta_0^2 - 8D_0w_1'\beta_0 + 2D_0v_1'')\Omega_0\Delta I + \frac{8\Delta D\beta_0^4}{\pi^2}w_1 - \frac{22\beta_0^3\Delta D}{\pi^2}v_1' \right. \\
& \left. + \left(-\frac{21\Delta D}{\pi^2}w_1'' + 3\Delta ID_0^2w_1 \right)\beta_0^2 + \left(\frac{8\Delta D}{\pi^2}v_1''' - 4\Delta ID_0^2v_1' \right)\beta_0 - \Delta ID_0^2w_1'' + \frac{\Delta D}{\pi^2}w_1^{(4)} \right] \frac{\sin(4\beta_0x - 2\Omega_0T_0)}{\pi^2} \\
& \left[(-6D_0v_1\beta_0^2 + 8D_0v_1'\beta_0 + 2D_0w_1'')\Omega_0\Delta I - \frac{8\Delta D\beta_0^4}{\pi^2}v_1 - \frac{22\beta_0^3\Delta D}{\pi^2}w_1' \right. \\
& \left. + \left(\frac{21\Delta D}{\pi^2}v_1'' - 3\Delta ID_0^2v_1 \right)\beta_0^2 + \left(\frac{8\Delta D}{\pi^2}w_1''' - 4\Delta ID_0^2w_1' \right)\beta_0 + \Delta ID_0^2v_1'' - \frac{\Delta D}{\pi^2}v_1^{(4)} \right] \frac{\cos(4\beta_0x - 2\Omega_0T_0)}{\pi^2} \\
& + \left((D_2w_1 + D_0w_3)\beta_0^2 - (D_2v_1' + D_0v_3')\beta_0 \right) \frac{I_{xx}\Omega_0}{2\pi^2} \cos(2\beta_0x) \\
& + \left((D_2v_1 + D_0v_3)\beta_0^2 + (D_2w_1' + D_0w_3')\beta_0 \right) \frac{I_{xx}\Omega_0}{2\pi^2} \sin(2\beta_0x) \\
& + \left(-\beta_0\Omega w_1' + 1/4D_0v_1'\beta_0 + 1/2\Omega v_1'' - 1/2\beta_0^2\Omega v_1 - 1/4D_0w_1\beta_0^2 \right) \frac{I_{xx}\Omega_0}{\pi^2} \cos(-2\beta_0x + 2\Omega T_0) \\
& + \left(\beta_0\Omega v_1' + 1/4D_0w_1'\beta_0 + 1/2\Omega w_1'' - 1/2\beta_0^2\Omega w_1 + 1/4D_0v_1\beta_0^2 \right) \frac{I_{xx}\Omega_0}{\pi^2} \sin(-2\beta_0x + 2\Omega T_0) \\
& - \left(3/2\beta_0D_0v_1' + D_0w_1'' - 1/2\beta_0^2D_0w_1 \right) \frac{I_{xx}\Omega_0\Omega}{\pi^2} \cos(2\Omega T_0) \\
& + \left(-w_1'' + \beta_0^2w_1 - 2\beta_0v_1' \right) \frac{I_{xx}\Omega_0\Omega}{\pi^2} \sin(2\Omega T_0) \\
& + \frac{\mu}{\pi^4} \left(v_1'\beta_0 + w_1'' \right) \left(\beta_0^2 \int_0^1 (v_1^2 + w_1^2) dx + 2\beta_0 \int_0^1 (v_1^2w_1' - v_1'w_1) dx + \int_0^1 (v_1'^2 + w_1'^2) dx \right) \\
& + \left(1/2\beta_0^2(-D_2w_1 - D_0w_3) + 3/2\beta_0(D_0v_3' + D_2v_1') + (D_2w_1' + D_0w_3'') \right) \frac{I_{xx}\Omega_0}{\pi^2} \\
& + \left(-\Sigma ID_0^2v_3 - 2\Sigma ID_0D_2v_1 + \frac{5}{\pi^2}v_3'' \right) \frac{\beta_0^2}{\pi^2} + \left(-4\Sigma ID_0D_2w_1' - 2\Sigma ID_0^2w_3' + \frac{4}{\pi^2}w_3''' \right) \frac{\beta_0}{\pi^2} \\
& - 2D_0D_2v_1 - D_0^2v_3 - \frac{v_3^{(4)}}{\pi^4} + \frac{1}{\pi^2} \left(\Sigma ID_0^2v_3'' + 2\Sigma ID_0D_2v_1'' \right) - \frac{2\beta_0^3}{\pi^4}w_3' \\
& + \Omega^2 e_\eta(x) \cos(\beta_0x - \Omega T_0) + \Omega^2 e_\xi(x) \sin(\beta_0x - \Omega T_0) - cD_0v_1 \cos(\beta_0x) + cD_0w_1 \sin(\beta_0x) = 0 \\
& \left[(-6D_0v_1\beta_0^2 - 8D_0w_1'\beta_0 + 2D_0v_1'')\Omega_0\Delta I + \frac{8\Delta D\beta_0^4}{\pi^2}w_1 - \frac{22\beta_0^3\Delta D}{\pi^2}v_1' \right. \\
& \left. + \left(-\frac{21\Delta D}{\pi^2}w_1'' + 3\Delta ID_0^2w_1 \right)\beta_0^2 + \left(\frac{8\Delta D}{\pi^2}v_1''' - 4\Delta ID_0^2v_1' \right)\beta_0 - \Delta ID_0^2w_1'' + \frac{\Delta D}{\pi^2}w_1^{(4)} \right] \frac{\cos(4\beta_0x - 2\Omega_0T_0)}{\pi^2} \\
& + \left[(6D_0w_1\beta_0^2 + 8D_0v_1'\beta_0 + 2D_0w_1'')\Omega_0\Delta I + \frac{8\Delta D\beta_0^4}{\pi^2}v_1 + \frac{22\beta_0^3\Delta D}{\pi^2}w_1' \right. \\
& \left. + \left(-\frac{21\Delta D}{\pi^2}v_1'' + 3\Delta ID_0^2v_1 \right)\beta_0^2 + \left(-\frac{8\Delta D}{\pi^2}w_1''' - 4\Delta ID_0^2w_1' \right)\beta_0 + \Delta ID_0^2v_1'' - \frac{\Delta D}{\pi^2}v_1^{(4)} \right] \frac{\sin(4\beta_0x - 2\Omega_0T_0)}{\pi^2}
\end{aligned} \tag{1A-4}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(-(D_2 w_1 + D_0 w_3) \beta_0^2 + (D_2 v_1' + D_0 v_3') \beta_0 \right) \frac{I_{xx} \Omega_0}{2\pi^2} \sin(2\beta_0 x) \\
& + \left((D_2 v_1 + D_0 v_3) \beta_0^2 + (D_2 w_1' + D_0 v_3') \beta_0 \right) \frac{I_{xx} \Omega_0}{2\pi^2} \cos(2\beta_0 x) \\
& + \left(\beta_0 \Omega w_1' - 1/4 D_0 v_1' \beta_0 - 1/2 \Omega v_1'' + 1/2 \beta_0^2 \Omega v_1 + 1/4 D_0 w_1 \beta_0^2 \right) \frac{I_{xx} \Omega_0}{\pi^2} \sin(-2\beta_0 x + 2\Omega T_0) \\
& + \left(-\beta_0 \Omega v_1' + 1/4 D_0 w_1' \beta_0 + 1/2 \Omega w_1'' - 1/2 \beta_0^2 \Omega w_1 + 1/4 D_0 v_1 \beta_0^2 \right) \frac{I_{xx} \Omega_0}{\pi^2} \cos(-2\beta_0 x + 2\Omega T_0) \\
& + \left(-3/2 \beta_0 D_0 w_1' + D_0 v_1'' - 1/2 \beta_0^2 D_0 v_1 \right) \frac{I_{xx} \Omega_0 \Omega}{\pi^2} \cos(2\Omega T_0) \\
& + \left(-v_1'' + \beta_0^2 v_1 + 2\beta_0 w_1' \right) \frac{I_{xx} \Omega_0 \Omega}{\pi^2} \sin(2\Omega T_0) \tag{۱۹-۴} \\
& + \frac{\mu}{\pi^4} (v_1' \beta_0 + w_1'') \left(\beta_0^2 \int_0^1 (v_1^2 + w_1^2) dx + 2\beta_0 \int_0^1 (v_1 w_1' - v_1' w_1) dx + \int_0^1 (v_1'^2 + w_1'^2) dx \right) \\
& + \left(1/2 \beta_0^2 (D_2 v_1 + D_0 v_3) + 3/2 \beta_0 (D_0 w_3' + D_2 w_1') + (D_2 w_1'' + D_0 w_3'') \right) \frac{I_{xx} \Omega}{\pi^2} \\
& + \left(-\Sigma I D_0^2 w_3 - 2\Sigma I D_0 D_2 w_1 + \frac{5}{\pi^2} w_3'' \right) \frac{\beta_0^2}{\pi^2} + \left(4\Sigma I D_0 D_2 v_1' - 2\Sigma I D_0^2 v_3' - \frac{4}{\pi^2} v_3''' \right) \frac{\beta_0}{\pi^2} \\
& - 2D_0 D_2 w_1 - D_0^2 w_3 - \frac{w_3^{(4)}}{\pi^4} + \frac{1}{\pi^2} \left(\Sigma I D_0^2 w_3'' + 2\Sigma I D_0 D_2 v_1'' \right) - \frac{2\beta_0^3}{\pi^4} v_3' \\
& - \Omega^2 e_{\eta}(x) \sin(\beta_0 x - \Omega T_0) + \Omega^2 e_{\xi}(x) \cos(\beta_0 x - \Omega T_0) - c D_0 w_1 \cos(\beta_0 x) - c D_0 v_1 \sin(\beta_0 x) = 0
\end{aligned}$$

حل معادلات مرتبه اول ε (معادلات (۴-۱۶) و (۴-۱۷)) به شکل زیر تخمین زده می‌شود،

$$\begin{aligned}
v_1(x, T_0, T_2) &= \Phi_f(x) \left(A_1(T_2) e^{i\omega_f T_0} + \bar{A}_1(T_2) e^{-i\omega_f T_0} \right) + \Phi_b(x) \left(A_2(T_2) e^{i\omega_b T_0} + \bar{A}_2(T_2) e^{-i\omega_b T_0} \right) \\
w_1(x, T_0, T_2) &= \Phi_f(x) \left(-iA_1(T_2) e^{i\omega_f T_0} + i\bar{A}_1(T_2) e^{-i\omega_f T_0} \right) + \Phi_b(x) \left(-iA_2(T_2) e^{i\omega_b T_0} + i\bar{A}_2(T_2) e^{-i\omega_b T_0} \right)
\end{aligned}$$

که ω_b و ω_f فرکانسهای خطی همسو و ناهمسو بوده که از خطی سازی معادلات (۴-۱۱) و (۴-۱۲)

و حل مسئله مقدار ویژه بدست می‌آیند و برابرند با،

$$\omega_{f,b} = \frac{1}{2} \frac{\delta_1 \pm \sqrt{\delta_3}}{\delta_2} \tag{۲۰-۴}$$

که

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= I_{xx} \Omega_0 (\beta_0^2 + 2\pi^2 n^2) \quad , \quad \delta_2 = 2 \left(\pi^2 + (\pi^2 n^2 + \beta_0^2) \Sigma I \right) \\
\delta_3 &= \left(I_{xx} \Omega_0 \beta_0^2 \right)^2 + 4 \left[4\pi^4 n^6 \Sigma I + 4\pi^4 n^4 + (I_{xx} \Omega_0 \pi n \beta_0)^2 + (I_{xx} \Omega_0 \pi^2 n^2)^2 \right] \\
& \quad + 24\Sigma I (\beta_0 \pi n^2)^2 + 20(\pi n \beta_0)^2 + 20\Sigma I (\beta_0^2 n)^2
\end{aligned}$$

به منظور بررسی رزونانس‌های اولیه و پارامتریک، نزدیکی Ω_0 و Ω به ω_f می‌تواند به شکل زیر با

استفاده از پارامترهای تنظیم کننده $\sigma_1 = O(1)$ و $\sigma_2 = O(1)$ معرفی شوند،

$$\Omega = \omega_f + \varepsilon^2 \sigma_1, \quad \Omega_0 = \omega_f + \varepsilon^2 \sigma_2 \quad (21-4)$$

می توان ثابت کرد که $[\sigma_1 = \sigma_2]$ [120].

اکنون، با قرار دادن رابطه (21-4) و جواب مرتبه 1 برای v و w در معادلات مرتبه 3 برای هر دو w و v (معادلات (4-18) و (0))، معادلات مرتبه 3 حاصل را با جدا کردن و مرتب سازی ضرایب $e^{i\omega_f T_0}$ و $e^{i\omega_b T_0}$ برای از بین بردن ضرایب سکولار ترم و حذف small divisorهای موجود به شکل زیر ساده می کنیم،

$$\begin{aligned} & \left[(\beta_0^2 D_0 w_3 + i\beta_0^2 D_0 v_3 + i\beta_0 D_0 w_3' - \beta_0 D_0 v_3') e^{-2i\beta_0 x} + (\beta_0^2 D_0 w_3 - i\beta_0^2 D_0 v_3 - i\beta_0 D_0 w_3' - \beta_0 D_0 v_3') e^{2i\beta_0 x} \right. \\ & \left. + 3\beta_0 D_0 v_3' - \beta_0^2 D_0 w_3 + 2D_0 w_3'' \right] \frac{I_{xx} \Omega_0}{2\pi^2} + \frac{10\beta_0^2}{\pi^4} v_3'' - \frac{4\beta_0 \Sigma I}{\pi^2} D_0^2 w_3' - \frac{4\beta_0^3}{\pi^4} w_3' - 2 \frac{(\pi^2 + \beta_0^2 \Sigma I)}{\pi^2} D_0^2 v_3 \\ & + \frac{8\beta_0}{\pi^4} w_3''' - 2 \frac{v_3^{(4)}}{\pi^4} + 2 \frac{\Sigma I}{\pi^2} D_0^2 v_3'' = P_{f,v}(x, T_2) e^{i\omega_f T_0} + P_{b,v}(x, T_2) e^{i\omega_b T_0} + CC + N.S.T \end{aligned} \quad (22-4)$$

$$\begin{aligned} & \left[(\beta_0^2 D_0 v_3 - i\beta_0^2 D_0 w_3 + i\beta_0 D_0 v_3' + \beta_0 D_0 w_3') e^{-2i\beta_0 x} + (\beta_0^2 D_0 v_3 + i\beta_0^2 D_0 w_3 - i\beta_0 D_0 v_3' + \beta_0 D_0 w_3') e^{2i\beta_0 x} \right. \\ & \left. + 3\beta_0 D_0 w_3' + \beta_0^2 D_0 v_3 - 2D_0 v_3'' \right] \frac{I_{xx} \Omega_0}{2\pi^2} + \frac{10\beta_0^2}{\pi^4} w_3'' + \frac{4\beta_0 \Sigma I}{\pi^2} D_0^2 v_3' + \frac{4\beta_0^3}{\pi^4} v_3' - 2 \frac{(\pi^2 + \beta_0^2 \Sigma I)}{\pi^2} D_0^2 w_3 \\ & - \frac{8\beta_0}{\pi^4} v_3''' - 2 \frac{w_3^{(4)}}{\pi^4} + 2 \frac{\Sigma I}{\pi^2} D_0^2 w_3'' = P_{f,w}(x, T_2) e^{i\omega_f T_0} + P_{b,w}(x, T_2) e^{i\omega_b T_0} + CC + N.S.T \end{aligned} \quad (23-4)$$

که CC و $N.S.T$ به معنی مختلط مزدوج و ضرایب غیر سکولار می باشند.

پس از بدست آوردن ضرایب سکولار، از آنجا که بخشهای همگن معادلات (22-4) و (23-4) دارای پاسخهای غیر بدیهی است، با ضرب طرفین معادلات به ترتیب در $\Phi_f(x)$ و $\Phi_b(x)$ ، و انتگرالگیری از $x=0$ تا $x=1$ ، با استفاده از شرایط حل پذیری برای آنها داریم،

$$\int_0^1 \Phi_f(x) P_f(x, T_2) dx = 0 \quad \text{و} \quad \int_0^1 \Phi_b(x) P_b(x, T_2) dx = 0 \quad (24-4)$$

که $P_{f,w}, P_{f,v}, P_{b,v}$ و $P_{b,w}$ ضرایب سکولار معادلات مرتبه 3 از ε هستند و برابرند با،

$$\begin{aligned} P_{f,v} &= i \left[\Pi_{1,v} + \Pi_{2,v} \omega_f \right] A_1' + 2\mu \Pi_{3,v} A_1 \bar{A}_2 A_2 + \mu \Pi_{3,v} \mu A_1^2 \bar{A}_1 - \Pi_{4,v} c \omega_f \left(\frac{1 - e^{i\beta_0}}{\beta_0} \right) A_1 \\ & + i \left[\Gamma 2 \left(\frac{1 - e^{-4i\beta_0}}{\beta_0} \right) + \Gamma 1 (1 + e^{-2i\beta_0}) \right] e^{2i\sigma T_2} \bar{A}_1 + \Pi_{5,v} (e_\eta + i e_\xi) \Omega_0^2 e^{i\sigma T_2} \end{aligned} \quad (25-4)$$

$$P_{b,v} = \frac{1}{2} i \Pi_{1,w} A'_2 + \Pi_{2,w} A_1 A_2 \bar{A}_1 + \frac{1}{2} \Pi_{2,w} \bar{A}_2 A_2^2 + 8n^2 \pi^2 c \omega_b \left(\frac{1 - e^{i\beta_0}}{\beta_0} \right) A_2 \quad (26-4)$$

$$P_{f,w} = \left[\Pi_{1,v} + \Pi_{2,v} \omega_f \right] A'_1 - 2i\mu \Pi_{3,v} A_1 \bar{A}_2 A_2 - i\mu \Pi_{3,v} \mu A_1^2 \bar{A}_1 + i \Pi_{4,v} c \omega_f \left(\frac{1 - e^{i\beta_0}}{\beta_0} \right) A_1 \quad (27-4)$$

$$+ \left[\Gamma 2 \left(\frac{1 - e^{-4i\beta_0}}{\beta_0} \right) + \Gamma 1 (1 + e^{-2i\beta_0}) \right] e^{2i\sigma T_2} \bar{A}_1 - \Pi_{5,v} (ie_\eta + ie_\xi) \Omega_0^2 e^{i\sigma T_2}$$

$$P_{b,w} = \frac{1}{2} \Pi_{1,w} A'_2 - i \Pi_{2,w} A_1 A_2 \bar{A}_1 - \frac{1}{2} i \Pi_{2,w} \bar{A}_2 A_2^2 - 8in^2 \pi^2 c \omega_b \left(\frac{1 - e^{i\beta_0}}{\beta_0} \right) A_2 \quad (28-4)$$

به این ترتیب، با توجه به شرایط حل پذیری فوق و تقریب شکل مدها به صورت شکل مدهای

خطی با شرایط مرزی دو سر مفصل به صورت زیر داریم، $\Phi_f = \Phi_b = \sin(n\pi x)$

$$i \left[\Pi_{1,v} + \Pi_{2,v} \omega_f \right] D_2 A_1 + 4\mu \Pi_{3,v} A_1^2 \bar{A}_1 + \Pi_{4,v} c \omega_f \left(\frac{1 - e^{i\beta_0}}{\beta_0} \right) A_1 + 2\mu \Pi_{3,v} A_1 \bar{A}_2 A_2 \quad (29-4)$$

$$+ \left[\Gamma 2 \left(\frac{1 - e^{-4i\beta_0}}{\beta_0} \right) + \Gamma 1 (1 + e^{-2i\beta_0}) \right] e^{2i\sigma T_2} \bar{A}_1 + \Pi_{5,v} (e_\eta + ie_\xi) \Omega_0^2 e^{i\sigma T_2} = 0$$

و

$$i \Pi_{1,w} D_2 A_2 + 16n^2 \pi^2 c \omega_b \left(\frac{1 - e^{i\beta_0}}{\beta_0} \right) A_2 + \Pi_{2,w} \mu \bar{A}_2 A_2^2 + 2 \Pi_{2,w} \mu A_2 A_1 \bar{A}_1 = 0 \quad (30-4)$$

که \bar{A}_2 و \bar{A}_1 مزدوجهای مختلط A_2 و A_1 می باشند و

$$\Pi_{1,v} = (8\beta_0^6 - 18\pi^2 n^2 \beta_0^4 - 60\pi^4 n^4 \beta_0^2 + 16\pi^6 n^6) I_{xx} \Omega_0,$$

$$\Pi_{2,v} = \left[136\pi^4 n^2 \beta_0^2 - 32(\pi^4 n^4 + \pi^2 \beta_0^4) - 32(\pi^6 n^6 + \beta_0^6) \Sigma I + 104\pi^2 n^2 \beta_0^2 (\pi^2 n^2 + \beta_0^2) \Sigma I \right],$$

$$\Pi_{3,v} = \left[208\pi^2 n^4 \beta_0^2 (\pi^2 n^2 + \beta_0^2) - 64(\pi^6 n^8 + n^2 \beta_0^6) \right],$$

$$\Pi_{4,v} = 16\pi^4 n^2 (\pi^2 n^2 - 4\beta_0^2), \Pi_{5,v} = 4(-17\beta_0^2 n^2 \pi^4 + 4\pi^2 \beta_0^4 + 4n^4 \pi^6)$$

$$\Pi_{6,v} = (21\pi^2 n^2 \beta_0^2 - 4\pi^4 n^4 - 5\beta_0^4) \pi^2 n^2 \Delta I,$$

$$\Pi_{7,v} = (-42\pi^2 n^2 \beta_0^2 + 8\pi^4 n^4 + 10\beta_0^4) \pi^2 n^2 \Delta I \Omega_0,$$

$$\Pi_{8,v} = (4\pi^6 n^8 + 36\beta_0^6 n^2 + 19\pi^4 n^6 \beta_0^2 - 149\pi^2 n^4 \beta_0^4) \Delta D,$$

$$\Pi_{9,v} = \left[-6\pi^4 n^4 \beta_0^2 - 8\pi^6 n^6 + 162\beta_0^4 n^2 \pi^2 - 40\beta_0^6 \right] n^2 \pi^2,$$

$$\Gamma 1 = 1/4 \Pi_{5,v} I_{xx} \Omega_0^2 n^2, \quad \Gamma 2 = \Pi_{6,v} \omega_f^2 + \Pi_{7,v} \omega_f + \Pi_{8,v}$$

$$\Pi_{1,w} = \left[2(-\beta_0^4 + 2\beta_0^2 n^2 \pi^2 + 8n^4 \pi^4) I_{xx} \Omega_0 + 8(-3\beta_0^2 n^2 \pi^2 + \beta_0^4 - 4n^4 \pi^4) \Sigma I \omega_b \right],$$

$$+8(-4n^2\pi^4 + \pi^2\beta_0^2)\omega_b] , \Pi_{2,w} = 16(n^2\beta_0^4 - 3\beta_0^2n^4\pi^2 - 4n^6\pi^4),$$

$$e_\eta = \int_0^1 \frac{\Phi_{fb}(x)}{e^{i\beta_0x}} e_\eta(x) dx, e_\xi = \int_0^1 \frac{\Phi_{fb}(x)}{e^{i\beta_0x}} e_\xi(x) dx. \quad (31-4)$$

همانطور که از معادلات (۲۹-۴) و (۳۱-۴) مشاهده می‌شود، $\Gamma 1$ و $\Gamma 2$ به ترتیب اشاره به جملات مربوط به تغییرات سرعت چرخشی و نامتقارنی سیستم دارند که همگی ضربی از $e^{2i\sigma T_2}$ هستند. این بدان معنی است که نامتقارنی و تغییرات سرعت در این سیستم منجر به بروز رزونانس‌های پارامتریک با فرکانس 2Ω در سیستم می‌شوند.

برای ساده سازی معادلات، با تبدیل $A_1(T_2)$ به $A(T_2)$ ، $e^{i\sigma T_0}$ به شکل زیر در معادلات حذف می‌شود،

$$A_1(T_2) = A(T_2)e^{i\sigma T_2} \quad (32-4)$$

و در نهایت برای بدست آوردن پاسخ معادلات حاصل، $A(T_2)$ و $A_2(T_2)$ را به صورت قطبی

$$A = \frac{1}{2}a_1(T_2)e^{i\theta(T_2)}, A_2 = \frac{1}{2}a_2(T_2)e^{i\theta(T_2)} \quad (33-4)$$

در معادلات حاصل قرار می‌دهیم. سپس با جداسازی بخشهای حقیقی و موهومی دو معادله

حاصل، چهار معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول به شکل زیر بدست می‌آید،

$$\left[\Pi_{1,v} + \Pi_{2,v}\omega_f \right] a_1 D_2 \Theta = 1/4 \Pi_{3,v} \mu a_1^3 + \Pi_{4,v} \left(\frac{1 - \cos(\beta_0)}{\beta_0} \right) c \omega_f a_1 + 1/2 \Pi_{3,v} \mu a_2^2 a_1$$

$$+ \left[\Gamma 2 \left(\frac{\sin(2\Theta) - \sin(4\beta_0 + 2\Theta)}{\beta_0} \right) + \Gamma 1 \left(\frac{\sin(2\Theta) - \sin(2\Theta + 2\beta_0)}{\beta_0} \right) \right] a_1 \quad (34-4)$$

$$- \left[\Pi_{1,v} + \Pi_{2,v}\omega_f \right] \sigma a_1 + 2\Omega_0^2 \Pi_{5,v} (e_\xi \sin(\Theta) + e_\eta \cos(\Theta))$$

$$\left[\Pi_{1,v} + \Pi_{2,v}\omega_f \right] D_2 a_1 = \left[\Gamma 2 \left(\frac{-\cos(2\Theta) + \cos(4\beta_0 + 2\Theta)}{\beta_0} \right) + \Gamma 1 \left(\frac{-\cos(2\Theta) + \cos(2\Theta + 2\beta_0)}{\beta_0} \right) \right] a_1 \quad (35-4)$$

$$+ \Pi_{4,v} \sin(\beta_0) c \omega_f a_1 + 2 \Pi_{5,v} \Omega_0^2 (e_\eta \sin(\Theta) - e_\xi \cos(\Theta))$$

$$\Pi_{1,w} D_2 a_2 = 16n^2 \pi^4 c \omega_b \left(\frac{\sin(\beta_0)}{\beta_0} \right) a_2 \quad (36-4)$$

$$\frac{1}{2} \Pi_{1,w} a_2 D_2 \Theta = \frac{1}{2} \Pi_{2,w} \mu a_2 a_1^2 + 8n^2 \pi^4 c \omega_b \left(\frac{1 - \cos(\beta_0)}{\beta_0} \right) a_2 + \frac{1}{8} \Pi_{2,w} \mu a_2^3 \quad (37-4)$$

به منظور بررسی پایداری ارتعاشاتی تیر مورد نظر و همچنین استخراج نقاط ثابت تعادلی

معادلات مذکور، می‌بایست مشتقات زمانی آنها صفر در نظر گرفته شوند. با انجام این کار و همانطور که

از معادلات نشان داده شده مشخص است، a_2 نیز برابر صفر خواهد شد و این بدان معنی است که تنها

لنگ زنی همسو تحریک خواهد شد. به این ترتیب، معادلات نهایی برای بررسی پایداری سیستم مورد نظر عبارتند از،

$$1/4\Pi_{3,v}\mu a_{10}^3 - [\Pi_{1,v} + \Pi_{2,v}\omega_f] \sigma a_{10} + \Pi_{4,v} \left(\frac{1 - \cos(\beta_0)}{\beta_0} \right) c\omega_f a_{10} + \left[\Gamma 2 \left(\frac{\sin(2\Theta_0) - \sin(4\beta_0 + 2\Theta_0)}{\beta_0} \right) + \Gamma 1 \left(\frac{\sin(2\Theta_0) - \sin(2\Theta_0 + 2\beta_0)}{\beta_0} \right) \right] a_{10} \quad (38-4)$$

$$+ 2\Omega_0^2 \Pi_{5,v} (e_\xi \sin(\Theta_0) + e_\eta \cos(\Theta_0)) = 0$$

$$\Pi_{4,v} \sin(\beta_0) c\omega_f a_{10} + \left[\Gamma 2 \left(\frac{-\cos(2\Theta_0) + \cos(4\beta_0 + 2\Theta_0)}{\beta_0} \right) + \Gamma 1 \left(\frac{-\cos(2\Theta_0) + \cos(2\Theta_0 + 2\beta_0)}{\beta_0} \right) \right] a_{10} \quad (39-4)$$

$$+ 2\Pi_{5,v}\Omega_0^2 (e_\eta \sin(\Theta_0) - e_\xi \cos(\Theta_0)) = 0$$

که a_{10} و Θ_0 نقاط ثابت تعادلی معادله حرکت می‌باشند.

۳-۴ - تحلیل پایداری با استفاده از روش گالرکین با اعمال روش مقیاس‌های چندگانه به معادلات دیفرانسیل با مشتقات معمولی (ODE)

در این بخش، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی با استفاده از روش تقریبی گالرکین به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شوند. برای این منظور، با فرض اینکه تنها یک مد حرکتی تحریک می‌شود، روش گالرکین به شکل زیر به معادلات اعمال می‌شود،

$$v(x,t) = \Phi_n(x)V(t)$$

$$w(x,t) = \Phi_n(x)W(t) \quad (40-4)$$

که $\Phi_n(x)$ و n به ترتیب شکل مدهای عرضی و شماره مد می‌باشند. با جایگذاری معادله (۴۰-۴)

(۴۰) در (۴۰-۴) و (۴۰-۴)، ضرب طرفین معادله حاصل در شکل مدهای متناظر خود، انتگرال گیری جزء به جزء در فاصله $[0,1]$ و استفاده از خاصیت تعامد شکل مدها داریم،

$$\left(\Pi_{6,v}\ddot{V} + \Pi_{7,v}\dot{V} - \Pi_{8,v}V \right) \left(\frac{\sin(2\Omega_0 t - 4\beta_0) + \sin(2\Omega_0 t)}{\beta_0} \right) + \left(\Pi_{6,v}\ddot{W} + \Pi_{7,v}\dot{W} - \Pi_{8,v}W \right) \left(\frac{\cos(2\Omega_0 t - 4\beta_0) - \cos(2\Omega_0 t)}{\beta_0} \right)$$

$$- \varepsilon^2 \Pi_{1,v} \dot{W} \cos(2\Omega t) + (1/2\Pi_{5,v}V - 1/4\Pi_{3,v}W) \varepsilon^2 I_{xx} \Omega_0 \Omega \sin(2\Omega t)$$

$$+ 1/4\Pi_{5,v} \varepsilon^2 I_{xx} \Omega_0 \Omega [W \cos(-2\Omega t + 2\beta_0) + V \sin(-2\Omega t + 2\beta_0)]$$

$$- \Pi_{1,v} \dot{W} + \Pi_{4,v} c \left[\dot{V} \left(\frac{\sin(\beta_0)}{\beta_0} \right) + \dot{W} \left(\frac{1 + \cos(\beta_0)}{\beta_0} \right) \right] + 1/2\Pi_{2,v} \ddot{V} + \Pi_{3,v} \mu (V^3 + VW^2) + 2\Pi_{9,v} V$$

$$+ 1/4\Pi_{5,v} \Omega_0^2 (e_\eta \cos(\Omega_0 t) - e_\xi \sin(\Omega_0 t)) = 0$$

(۴۱-۴)

$$\begin{aligned}
& (\Pi_{6,v}\ddot{V} + \Pi_{7,v}\dot{V} - \Pi_{8,v}V) \left(\frac{\cos(2\Omega_0 t - 4\beta_0) - \cos(2\Omega_0 t)}{\beta_0} \right) - (\Pi_{6,v}\ddot{W} + \Pi_{7,v}\dot{W} - \Pi_{8,v}W) \left(\frac{\sin(2\Omega_0 t - 4\beta_0) + \sin(2\Omega_0 t)}{\beta_0} \right) \\
& + \varepsilon^2 \Pi_{1,v} \cos(2\Omega t) \dot{V} + (-1/2\Pi_{5,v}W + 1/4\Pi_{3,v}V) \varepsilon^2 I_x \Omega \Omega_0 \sin(2\Omega t) \\
& + 1/4\Pi_{5,v} \varepsilon^2 I_x \Omega \Omega_0 V \cos(-2\Omega t + 2\beta_0) - 1/4\Pi_{5,v} \varepsilon^2 I_x \Omega \Omega_0 W \sin(-2\Omega t + 2\beta_0) \\
& + \Pi_{1,v} \dot{V} - \Pi_{4,v} c \left[\dot{V} \left(\frac{1 + \cos(\beta_0)}{\beta_0} \right) - \dot{W} \left(\frac{\sin(\beta_0)}{\beta_0} \right) \right] + 1/2\Pi_{2,v} \ddot{V} + \Pi_{3,v} \mu (W^3 + V^2 W) + 2\Pi_{9,v} W \\
& + 1/4\Pi_{5,v} \Omega_0^2 (e_\eta \sin(\Omega_0 t) + e_\xi \cos(\Omega_0 t)) = 0
\end{aligned}$$

(۴۲-۴)

از آنجا که معادلات (۴۱-۴) و (۴۲-۴) شامل تنها جملات غیر خطی مرتبه سه می باشد، تقریب

(۴۳-۴) را می توان به شکل زیر به معادلات (۴۱-۴) و (۴۲-۴) اعمال کرد،

$$V(t) = \varepsilon V_1(T_0, T_2) + \varepsilon^3 V_3(T_0, T_2) + \dots \quad (۴۳-۴)$$

$$W(t) = \varepsilon V_1(T_0, T_2) + \varepsilon^3 V_3(T_0, T_2) + \dots$$

لازم به ذکر است اگر در تقریب فوق، جملات V_0, W_0, V_2, W_2 ظاهر شوند، پاسخ آنها در ادامه

صفر خواهد شد. برای بالانس ترمهای غیر خطی و به منظور استخراج رزونانس های اولیه و پارامتریک،

پارامترهای بی بعد زیر به شکل زیر مقیاس بندی شده و در معادلات حاصل قرار می دهیم،

$$c = \varepsilon^2 \bar{c}, \Delta D = \varepsilon^2 \bar{\Delta D}, \Delta I = \varepsilon^2 \bar{\Delta I}, e_\zeta = \varepsilon^3 \bar{e}_\zeta, e_\eta = \varepsilon^3 \bar{e}_\eta \quad (۴۴-۴)$$

با جایگذاری معادلات (۴۳-۴) و (۴۴-۴) در معادلات (۴۱-۴) و (۴۲-۴) و برابر قرار دادن ضرایب

توانهای مشابه ε و ε^3 داریم،

$O(\varepsilon)$:

$$2\Pi_{9,v} V_1 + (1/4\Sigma\Pi_{3,v} - \Pi_{5,v}) D_0^2 V_1 - \Pi_{1,v} D_0 W_1 = 0 \quad (۴۵-۴)$$

$$2\Pi_{9,v} W_1 + (1/4\Sigma\Pi_{3,v} + \Pi_{5,v}) D_0^2 W_1 + \Pi_{1,v} D_0 V_1 = 0 \quad (۴۶-۴)$$

و

$O(\varepsilon^3)$:

$$-\Pi_{1,v} D_0 W_3 + 1/2\Pi_{2,v} D_0^2 V_3 + 2\Pi_{9,v} V_3 - \Pi_{1,v} D_2 W_1 + \Pi_{3,v} \mu (V_1^3 - V_1 W_1^2 + 2V_1 W_1^2) + \Pi_{2,v} D_2 D_0 V_1$$

$$+ (\Pi_{6,v} D_0^2 V_1 + \Pi_{7,v} D_0 V_1 - \Pi_{8,v} V_1) \left(\frac{\sin(2\Omega_0 T_0 - 4\beta_0) + \sin(2\Omega_0 T_0)}{\beta_0} \right)$$

$$+ (\Pi_{6,v} D_0^2 W_1 + \Pi_{7,v} D_0 W_1 - \Pi_{8,v} W_1) \left(\frac{\cos(2\Omega_0 T_0 - 4\beta_0) - \cos(2\Omega_0 T_0)}{\beta_0} \right) \quad (۴۷-۴)$$

$$-\Pi_{1,v} \cos(2\Omega T_0) D_0 W_1 + (1/2\Pi_{5,v} V_1 + 1/4\Pi_{3,v} W_1) I_x \Omega \Omega_0 \sin(2\Omega T_0)$$

$$-1/4\Pi_{5,v} I_x \Omega \Omega_0 W \cos(-2\Omega T_0 + 2\beta_0) - 1/4\Pi_{5,v} I_x \Omega \Omega_0 V \sin(-2\Omega T_0 + 2\beta_0)$$

$$-\Pi_{4,v} c \left(\frac{D_0 V_1 \sin(\beta_0) + D_0 W_1 (1 + \cos(\beta_0))}{\beta_0} \right) + 1/4\Pi_{5,v} \Omega_0^2 (e_\eta \cos(\Omega_0 T_0) - e_\xi \sin(\Omega_0 T_0)) = 0$$

$$\begin{aligned}
& \Pi_{1,v}D_0V_3 + 1/2\Pi_{2,v}D_0^2W_3 + 2\Pi_{9,v}W_3 \\
& + \Pi_{1,v}D_2V_1 + \Pi_{3,v}\mu(2V_1^2W - V_1^2W_1 + W_1^3) + \Pi_{2,v}D_2D_0W_1 \\
& + (\Pi_{6,v}D_0^2V_1 + \Pi_{7,v}D_0V_1 - \Pi_{8,v}V_1) \left(\frac{\cos(2\Omega_0T_0 - 4\beta_0) - \cos(2\Omega_0T_0)}{\beta_0} \right) \\
& - (\Pi_{6,v}D_0^2W_1 + \Pi_{7,v}D_0W_1 - \Pi_{8,v}W_1) \left(\frac{\sin(2\Omega_0T_0 - 4\beta_0) + \sin(2\Omega_0T_0)}{\beta_0} \right) \\
& - \Pi_{1,v} \cos(2\Omega T_0)D_0V_1 + (1/2\Pi_{5,v}W_1 - 1/4\Pi_{3,v}V_1)I_x \Omega \Omega_0 \sin(2\Omega T_0) \\
& - 1/4\Pi_{5,v}I_x \Omega \Omega_0 V_1 \cos(-2\Omega T_0 + 2\beta_0) + 1/4\Pi_{5,v}I_x \Omega \Omega_0 W \sin(-2\Omega T_0 + 2\beta_0) \\
& - \Pi_{4,v}C \left(\frac{D_0V_1(1+\cos(\beta_0)) - D_0W_1\sin(\beta_0)}{\beta_0} \right) + 1/4\Pi_{5,v}\Omega_0^2 (e_\eta \sin(\Omega_0T_0) + e_\xi \cos(\Omega_0T_0)) = 0
\end{aligned} \tag{48-4}$$

پاسخ معادلات (45-4) و (46-4) را می توان به شکل زیر بیان کرد،

$$\begin{aligned}
V_1(T_0, T_2) &= A_1(T_2)e^{i\omega_f T_0} + A_2(T_2)e^{i\omega_b T_0} + CC \\
W_1(T_0, T_2) &= -iA_1(T_2)e^{i\omega_f T_0} - iA_2(T_2)e^{i\omega_b T_0} + CC
\end{aligned} \tag{49-4}$$

اکنون، با جایگذاری معادله (49-4) در (47-4) و (48-4)، داریم،

$$\begin{aligned}
-\Pi_{1,v}D_0W_3 + 1/2\Pi_{2,v}D_0^2V_3 + 2\Pi_{9,v}W_3 &= G_{f,v}(T_2)e^{i\omega_f T_0} + G_{b,v}(T_2)e^{i\omega_b T_0} + N.S.T + CC \\
\Pi_{1,v}D_0V_3 + 1/2\Pi_{2,v}D_0^2W_3 + 2\Pi_{9,v}W_3 &= G_{f,w}(T_2)e^{i\omega_f T_0} + G_{b,w}(T_2)e^{i\omega_b T_0} + N.S.T + CC
\end{aligned} \tag{50-4}$$

که CC و N.S.T مزدوجهای مختلط و جملات غیر سکولار می باشند. همچنین،

$G_{f,v}(T_2)$ ، $G_{b,v}(T_2)$ و $G_{f,w}(T_2)$ در بردارنده جملات شامل سکولار می باشند که برابرند با،

$$\begin{aligned}
G_{f,v} &= i[\Pi_{1,v} + \Pi_{2,v}\omega_f]A_1' + 8\mu\Pi_{3,v}A_1\bar{A}_2A_2 + 4\mu\Pi_{3,v}\mu A_1^2\bar{A}_1 + \Pi_{4,v}c\omega_f \left(\frac{1-e^{i\beta_0}}{\beta_0} \right) A_1 \\
& + i \left[\Gamma 2 \left(\frac{1-e^{-4i\beta_0}}{\beta_0} \right) + \Gamma 1(1+e^{-2i\beta_0}) \right] e^{2i\sigma T_2} \bar{A}_1 + 1/8\Pi_{5,v}(e_\eta + ie_\xi)\Omega_0^2 e^{i\sigma T_2} \\
G_{b,v} &= -\frac{1}{2}i\Pi_{1,w}A_2' + \Pi_{2,w}A_1A_2\bar{A}_1 + 2\Pi_{2,w}\bar{A}_2A_2^2 - 8n^2\pi^2c\omega_b \left(\frac{1-e^{i\beta_0}}{\beta_0} \right) A_2 \\
G_{f,w} &= [\Pi_{1,v} + \Pi_{2,v}\omega_f]A_1' - 8i\mu\Pi_{3,v}A_1\bar{A}_2A_2 - 4i\mu\Pi_{3,v}\mu A_1^2\bar{A}_1 + i\Pi_{4,v}c\omega_f \left(\frac{1-e^{i\beta_0}}{\beta_0} \right) A_1 \\
& + \left[\Gamma 2 \left(\frac{1-e^{-4i\beta_0}}{\beta_0} \right) + \Gamma 1(1+e^{-2i\beta_0}) \right] e^{2i\sigma T_2} \bar{A}_1 - \Pi_{5,v}(ie_\eta + ie_\xi)\Omega_0^2 e^{i\sigma T_2} \\
G_{b,w} &= \frac{1}{2}\Pi_{1,w}A_2' - 4i\Pi_{2,w}A_1A_2\bar{A}_1 - 2i\Pi_{2,w}\bar{A}_2A_2^2 - 8in^2\pi^2c\omega_b \left(\frac{1-e^{i\beta_0}}{\beta_0} \right) A_2
\end{aligned}$$

برای حذف جملات سکولار، جواب بخش خصوصی متناظر با $\pm e^{i\omega_b T_0}$ و $\pm e^{i\omega_f T_0}$ در معادله (49-4)

(50) برابر است با،

$$V_3 = P_{11}(T_2)e^{i\omega_f T_0} + Q_{11}(T_2)e^{i\omega_b T_0} \quad (51-4)$$

$$W_3 = P_2(T_2)e^{i\omega_f T_0} + Q_{22}(T_2)e^{i\omega_b T_0}$$

با جایگذاری معادله (51-4) در (50-4) و برابر قرار دادن ضرایب جملات شامل $\pm e^{i\omega_f T_0}$ و

$\pm e^{i\omega_b T_0}$ ، معادله (50-4) دارای پاسخ های غیر صفر می باشد اگر و تنها اگر شرایط حل پذیری به شکل

زیر برقرار باشد،

$$\begin{vmatrix} -1/2\Pi_{2,v}\omega_f^2 + 2\Pi_{9,v} & G_{f,v} \\ i\Pi_{1,v}\omega_f & G_{f,w} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{یا} \quad \begin{vmatrix} G_{f,v} & -i\Pi_{1,v}\omega_f \\ G_{f,w} & -1/2\Pi_{2,v}\omega_f^2 + 2\Pi_{9,v} \end{vmatrix} = 0 \quad (52-4)$$

و

$$\begin{vmatrix} -1/2\Pi_{2,v}\omega_b^2 + 2\Pi_{9,v} & G_{b,v} \\ i\Pi_{1,v}\omega_b & G_{b,w} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{یا} \quad \begin{vmatrix} G_{b,v} & -i\Pi_{1,v}\omega_b \\ G_{b,w} & -1/2\Pi_{2,v}\omega_b^2 + 2\Pi_{9,v} \end{vmatrix} = 0 \quad (53-4)$$

در نهایت حاصل دو دترمینان مذکور برابر است با،

$$\begin{aligned} & i[\Pi_{1,v} + \Pi_{2,v}\omega_f] D_2 A_1 + 4\mu\Pi_{3,v} A_1^2 \bar{A}_1 + \Pi_{4,v} c\omega_f \left(\frac{1 - e^{i\beta_0}}{\beta_0} \right) A_1 + 2\mu\Pi_{3,v} A_1 \bar{A}_2 A_2 \\ & + \left[\Gamma 2 \left(\frac{1 - e^{-4i\beta_0}}{\beta_0} \right) + \Gamma 1 (1 + e^{-2i\beta_0}) \right] e^{2i\sigma T_2} \bar{A}_1 + \Pi_{5,v} (e_\eta + ie_\xi) \Omega_0^2 e^{i\sigma T_2} = 0 \end{aligned} \quad (54-4)$$

و

$$i\Pi_{1,w} D_2 A_2 + 16n^2 \pi^2 c\omega_b \left(\frac{1 - e^{i\beta_0}}{\beta_0} \right) A_2 + \Pi_{2,w} \mu \bar{A}_2 A_2^2 + 2\Pi_{2,w} \mu A_2 A_1 \bar{A}_1 = 0 \quad (55-4)$$

که دو معادله مذکور با آنچه در معادلات (29-4) و (30-4) بدست آمده، یکسان می باشند. این

بدان معنی است که با تحریک یک مد از تیر پیچیده شده دوار با سرعت چرخش متغیر، ضرایب بدست

آمده از هر دو روش مستقیم و غیر مستقیم یکسان خواهند بود.

۴-۴ - تحلیل پایداری با تعیین ماتریس ژاکوبین

به منظور پایداری حالت پایای معادلات مرتبه اول (34-4) و (35-4) و با فرض $a_2(T_2) = 0$ ،

ماتریس ژاکوبین، ل، طرف راست معادلات (34-4) و (35-4)، برابر است با [118]،

$$J = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (56-4)$$

که

$$\begin{aligned} A &= \frac{3\Pi_{3,v}}{4\Lambda_{1,v}a_{10}} \mu a_{10}^2 + \frac{\Pi_{4,v}}{\Lambda_{1,v}a_{10}} \left(\frac{1 - \cos(\beta_0)}{\beta_0} \right) c\omega_f - \frac{\sigma}{a_{10}} \\ &+ \frac{1}{\Lambda_{1,v}a_{10}} \left[\Gamma 1 \left(\frac{\sin(2\Theta_0) - \sin(2\Theta_0 + 2\beta_0)}{\beta_0} \right) + \Gamma 2 \left(\frac{\sin(2\Theta_0) - \sin(4\beta_0 + 2\Theta_0)}{\beta_0} \right) \right] \\ B &= \frac{2}{\Lambda_{1,v}} \left[\Gamma 2 \left(\frac{\cos(2\Theta_0) - \cos(4\beta_0 + 2\Theta_0)}{\beta_0} \right) + \Gamma 1 \left(\frac{\cos(2\Theta_0) - \cos(2\Theta_0 + 2\beta_0)}{\beta_0} \right) \right] \\ &+ 2\Omega_0^2 \frac{\Pi_{5,v}}{\Lambda_{1,v}a_{10}} (e_\xi \cos(\Theta_0) - e_\eta \sin(\Theta_0)) \\ C &= \frac{1}{\Lambda_{1,v}} \left[\Gamma 2 \left(\frac{-\cos(2\Theta_0) + \cos(4\beta_0 + 2\Theta_0)}{\beta_0} \right) + \Gamma 1 \left(\frac{-\cos(2\Theta_0) + \cos(2\Theta_0 + 2\beta_0)}{\beta_0} \right) \right] \\ &+ \frac{\Pi_{4,v}}{\Lambda_{1,v}} \sin(\beta_0) c\omega_f \\ D &= \frac{2}{\Lambda_{1,v}} \left[\Gamma 2 \left(\frac{2\sin(2\Theta_0) - 2\sin(4\beta_0 + 2\Theta_0)}{\beta_0} \right) + \Gamma 1 \left(\frac{\sin(2\Theta_0) - \sin(2\Theta_0 + 2\beta_0)}{\beta_0} \right) \right] a_{10} \\ &+ 2\Omega_0^2 \frac{\Pi_{5,v}}{\Lambda_{1,v}} (e_\eta \cos(\Theta_0) + e_\xi \sin(\Theta_0)) \end{aligned}$$

و مقادیر ویژه متناظر آن از معادله زیر بدست می‌آیند،

$$|J - \lambda I| = 0 \quad \text{یا} \quad \lambda^2 - (A+D)\lambda + AD - BC = 0 \quad (57-4)$$

با توجه به معادلات (56-4) و (57-4)، از آنجا که $(A+D) < 0$ ، اگر $AD - BC > 0$ ، حرکت

دینامیکی سیستم در نقاط ثابت تعادلی (a_{10}, Θ_0) پایدار بوده و در غیر اینصورت ناپایدار می‌باشد.

۴-۵- نتایج

سرانجام، با استفاده از معادلات بدست آمده، نمودارهای لازم جهت تحلیل پایداری تیرهای

پیچیده شده دو سر مفصل با سرعت چرخش متغیر به صورت زیر رسم شده است. در این بخش، تأثیر

زاویه پیچش، میزان خروج از مرکز، تغییرات سرعت و ضریب میرایی خارجی روی رزونانس‌های اولیه و

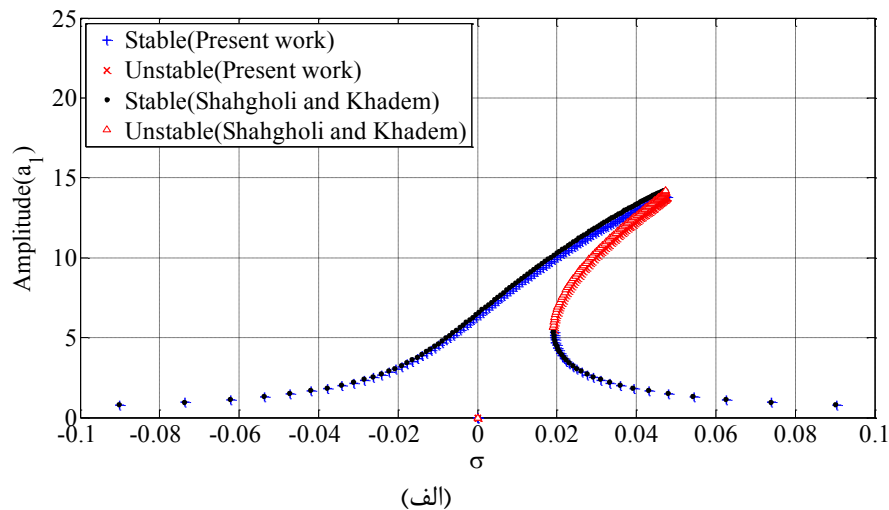
پارامتریک تیر پیچیده شده دورانی متقارن و نامتقارن محوری، مورد بررسی قرار خواهد گرفت. برای این

منظور، پارامترهای بی بعد شده زیر مورد استفاده قرار گرفته اند: $I_{\xi\xi} = I_{\eta\eta} = 0.002878$ ، $I_{xx} = 0.001$ ،

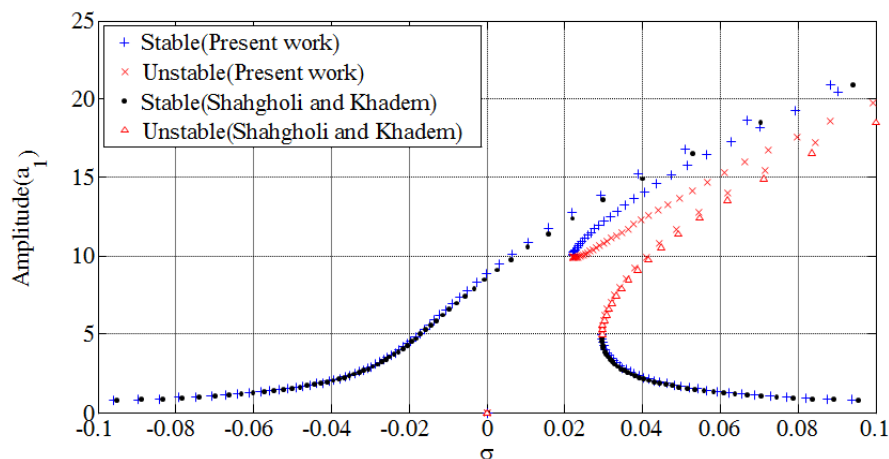
$\mu=0.0005$, $c=0.01$. بقیه پارامترهای بی بعد استفاده شده، در هر بررسی ذکر خواهند شد.

۴-۵-۱- اعتبار سنجی نتایج

به منظور صحت گذاری نتایج، داده‌های بدست آمده در زاویه پیچش $\beta_0=0$ با نتایج حاصل از کارهای شاهقلی و خادم [41] مقایسه و صحت گذاری می‌شوند. بدین ترتیب، با در نظر گرفتن $\beta_0=0$ در معادلات (۴-۳۸) و (۴-۳۹)، تیر پیچیده شده مذکور به یک تیر بدون زاویه پیچش و مستقیم تبدیل شده و منحنی‌های پاسخ فرکانسی آنها در حالت با و بدون زاویه پیچش در مد اول و در حالت متقارن به تصویر کشیده شده است.



(الف)



(ب)

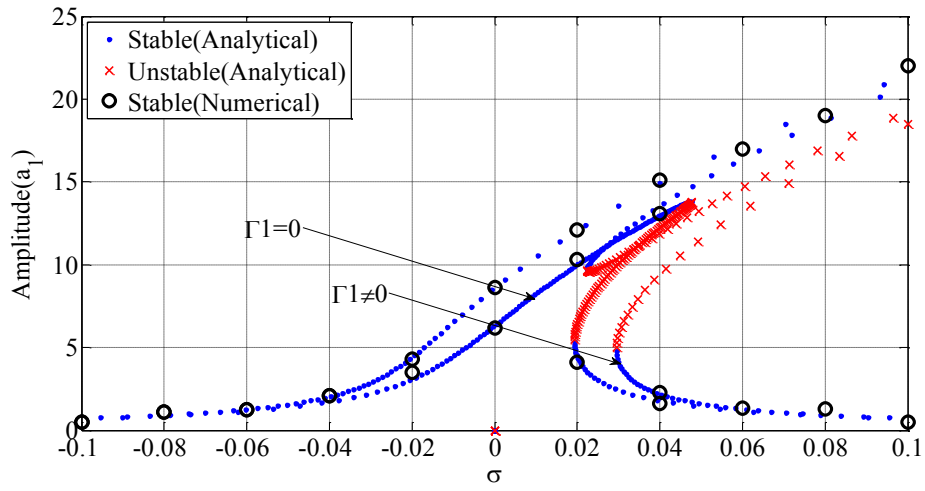
شکل (۴-۱) مقایسه منحنی‌های پاسخ فرکانسی یک تیر متقارن مستقیم ($\Gamma_2=0$) در کار حاضر (در حالت $\beta_0=0$) و کار شاهقلی [41] در مد اول، الف) بدون تغییرات سرعت ($\Gamma_1=0$)، ب) با تغییرات سرعت ($\Gamma_1 \neq 0$).

با مقایسه هر دو نتایج بدست آمده مشخص است که تغییرات بین آنها بسیار ناچیز بوده و

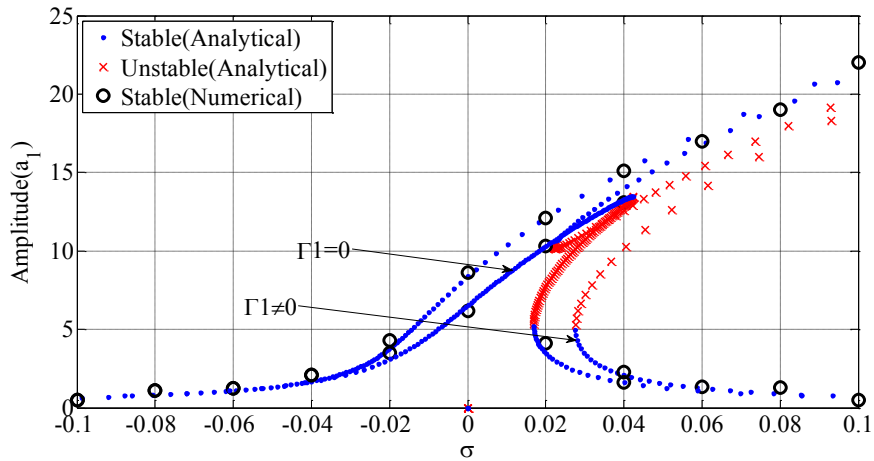
همپوشانی نسبتاً خوبی با یکدیگر دارند. اما، همانطور که در شکل (۴-۱) برای کار حاضر نشان داده شده است، از آنجا که دو شاخه بدست آمده در نمودار، نزدیک به هم بوده، می‌توان گفت که تأثیر تغییرات سرعت بسیار ناچیز بوده و در نتیجه، بر اساس [41]، تنها یک پیک وجود خواهد داشت و انتظار می‌رود تنها یک پرش در سیستم اتفاق بیفتد.

شکل (۴-۲) و شکل (۴-۳) پاسخ فرکانسی غیر خطی را حول نقاط ثابت تعادلی تیر پیچیده شده متقارن در مدهای اول و دوم در حالات با و بدون سرعت متغیر و زوایای پیچش مختلف نشان می‌دهد. فرض می‌شود که مقادیر بی بعد شده خروج از مرکز در دو جهت اصلی یکسان بوده و برابرند با، $e_\eta = e_\xi = 0.05$. همانطور که نشان داده شده است، در مدهای اول و دوم متقارن، دامنه نوسانات حالات پایای تیر پیچیده شده با وجود تغییرات سرعت ($\Gamma 1 \neq 0$)، در همه زوایای پیچش از مقادیر متناظر خود در حالت بدون تغییرات سرعت ($\Gamma 1 = 0$) بزرگتر است. همچنین، در تیرهای متقارن بدون تغییرات سرعت، منحنی‌های پاسخ فرکانسی تنها دارای یک قله می‌باشند که این بدان معنی است که تنها منبع تحریک همان نابالانسی موجود در تیر بوده و یک پرش در سیستم اتفاق می‌افتد. اما، در مورد تیرهای متقارن با در نظر گرفتن تغییرات سرعت، دو قله و در نتیجه دو پرش نزدیک به هم در سیستم مشاهده می‌شود بگونه‌ای که در زوایای پیچش بزرگتر و مد اول حتی با وجود تغییرات سرعت، تنها یک پرش در سیستم رخ می‌دهد (برای مثال به منحنی مربوط به $\beta_0 = 60^\circ$ نگاه کنید). از این‌رو، در مد اول تیرهای پیچیده شده متقارن دو سر مفصل، تغییرات سرعت در زوایای پیچش کوچکتر به عنوان یک منبع تحریک دیگر تأثیر گذار خواهد بود. اما در مد دوم، در هر زاویه پیچش، تأثیر تغییرات سرعت حائز اهمیت خواهد بود. در نتیجه در منحنی پاسخ فرکانسی همواره دو قله مشاهده می‌شود. علاوه بر این، از آنجا که منحنی‌ها به سمت راست میل می‌کنند، تأثیر پارامترهای غیر خطی از نوع سخت شونده می‌باشند. همچنین، مشاهده می‌شود که در برخی از مقادیر σ و بدون تغییرات سرعت ($\Gamma 1 = 0$)، سیستم تنها دارای یک پاسخ پایدار بوده درحالی‌که در برخی دیگر از مقادیر σ ، سه پاسخ وجود دارد که دو تا از آنها پایدار و دیگری ناپایدار است. اما، در حالت $\Gamma 1 \neq 0$ ، به ازای برخی از مقادیر σ ، سیستم تنها دارای

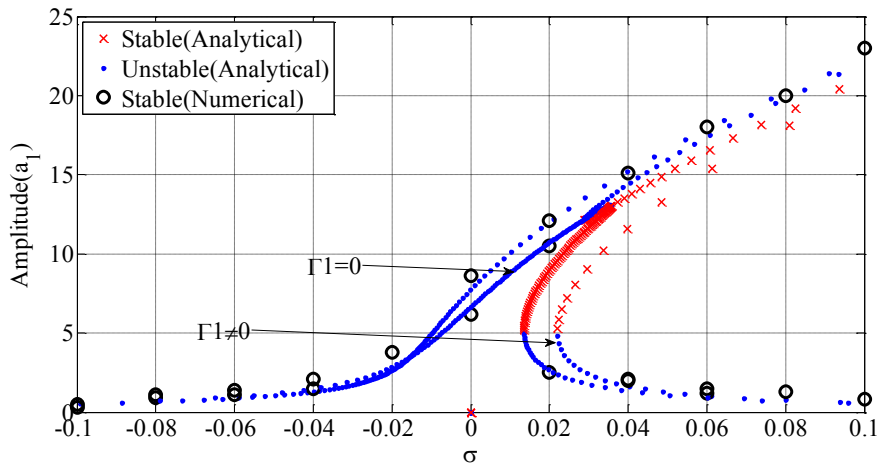
یک پاسخ پایدار بوده و در برخی از مقادیر σ ،



(الف)



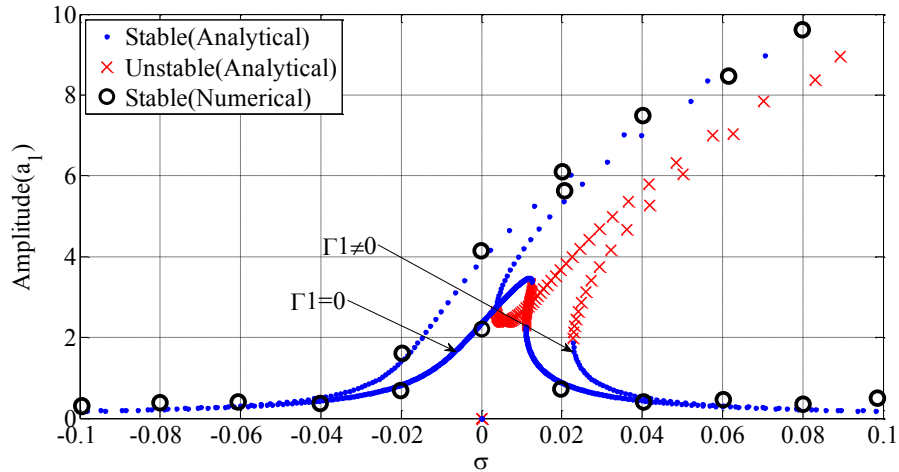
(ب)



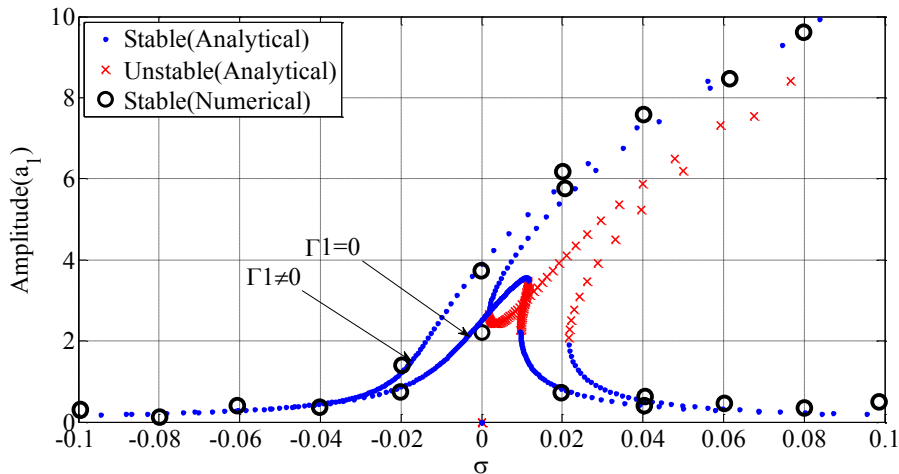
(ج)

شکل (۲-۴) منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده دوار متقارن در مد اول و زاویه پیش الف) $\beta_0 = 0$ (ب)

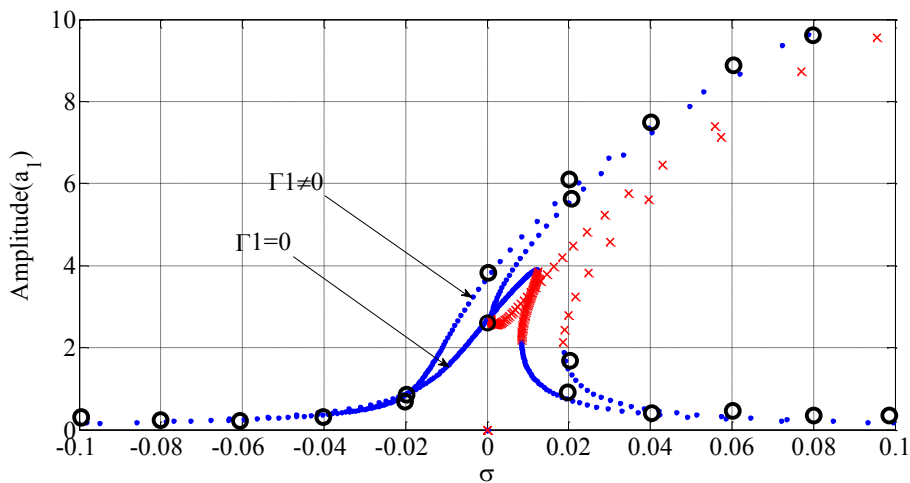
$\beta_0 = 30^\circ$ (ج) و $\beta_0 = 60^\circ$



(الف)



(ب)



(ج)

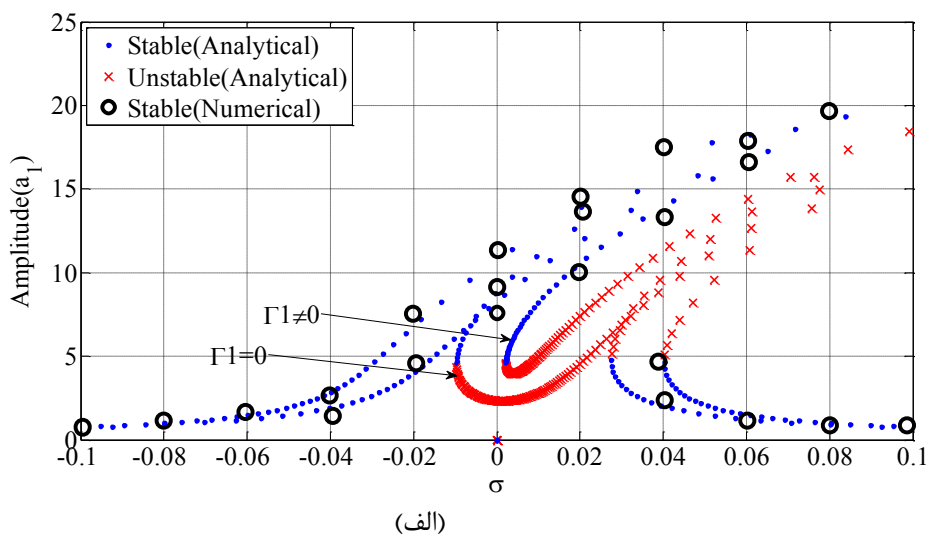
شکل (۳-۴) منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده دوار متقارن در مد دوم و زاویه پیش الف) $\beta_0 = 0$ (ب)

$$\beta_0 = 30^\circ \text{ و } \beta_0 = 60^\circ \text{ (ج)}$$

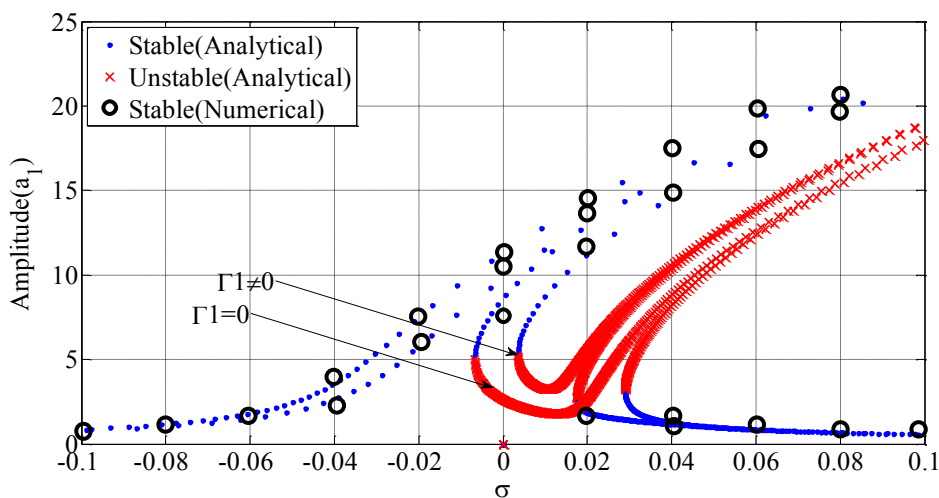
دو پاسخ پایدار و یک پاسخ ناپایدار و در برخی دیگر از مقادیر σ ، دارای سه پاسخ پایدار و دو

پاسخ ناپایدار می‌باشند. در نتیجه، در حالات با و بدون تغییرات سرعت، پدیده پرش و دو شاخگی اتفاق می‌افتد. همچنین می‌توان مشاهده کرد که در مد اول، با افزایش زاویه پیچش β_0 ، تأثیر سخت شونده‌گی ضعیف بوده و دامنه نقاط قله کاهش می‌یابند. به منظور صحت‌گذاری نتایج بدست آمده از روش تئوری اغتشاشات، از روش عددی رانگ-کوتا نیز استفاده شده که نتایج آن نیز در شکل (۴-۲) و شکل (۴-۳) به تصویر کشیده شده‌اند. شکل (۴-۴) و شکل (۴-۵) منحنی‌های پاسخ فرکانسی تیر مذکور را در حالات نامتقارن و با و بدون تغییرات سرعت در دو مد اول نشان می‌دهد. همانطور که قبلاً نیز ذکر شده، در این حالات، دو منبع تحریک در سیستم وجود دارد که ناشی از وجود نابالانسی با فرکانس تحریک Ω و ناشی از وجود نامتقارنی با فرکانس تحریک 2Ω به عنوان تحریک پارامتریک هستند. در نتیجه، منحنی‌های پاسخ فرکانسی دارای دو قله می‌باشند. همچنین، در حالتی که تغییرات سرعت در سیستم وجود دارد، با توجه به رابطه (۴-۲۹) مشاهده می‌شود که منبع تحریک سومی با فرکانس 2Ω نیز در سیستم بوجود می‌آید که به عنوان تحریک پارامتریک می‌باشند. با توجه به کارهای قبلی انجام شده [36-44]، مشخص است که در تیرهای مستقیم با وجود نامتقارنی و تغییرات سرعت، منحنی پاسخ فرکانسی دارای دو قله بوده و به سمت راست خم می‌شود و تأثیر پارامترهای غیرخطی از نوع سخت شونده می‌باشند. در تیرهای پیچیده شده نیز رفتار نمودارهای پاسخ فرکانسی مانند تیرهای مستقیم می‌باشد. همچنین، به ازای برخی از مقادیر σ ، پنج پاسخ وجود دارد که دو پاسخ ناپایدار و سه پاسخ پایدار می‌باشند. در برخی دیگر از مقادیر σ ، سه پاسخ وجود داشته که یکی پایدار و بقیه ناپایدار هستند. در نهایت، در برخی دیگر از مقادیر σ ، تنها یک پاسخ پایدار وجود دارد. از این‌رو، واضح است که پدیده پرش و دو شاخگی اتفاق می‌افتد. در مرجع [41] گزارش شده است که در حضور نامتقارنی و تغییرات سرعت در تیرهای بدون زاویه پیچش و مدهای پایینتر، تأثیر نامتقارنی نسبت به وجود تغییرات سرعت غالب است. به عبارت دیگر، در مدهای پایینتر، نامتقارنی به سیستم انرژی پمپ می‌کند. اما، زمانی که تیر به صورت پیچیده شده می‌باشد، وجود زاویه پیچش تأثیر تغییرات سرعت را تغییر داده بگونه‌ای که همانطور که در شکل (۴-۴) و شکل (۴-۵) نشان داده شده، اگرچه تأثیر تغییرات سرعت در

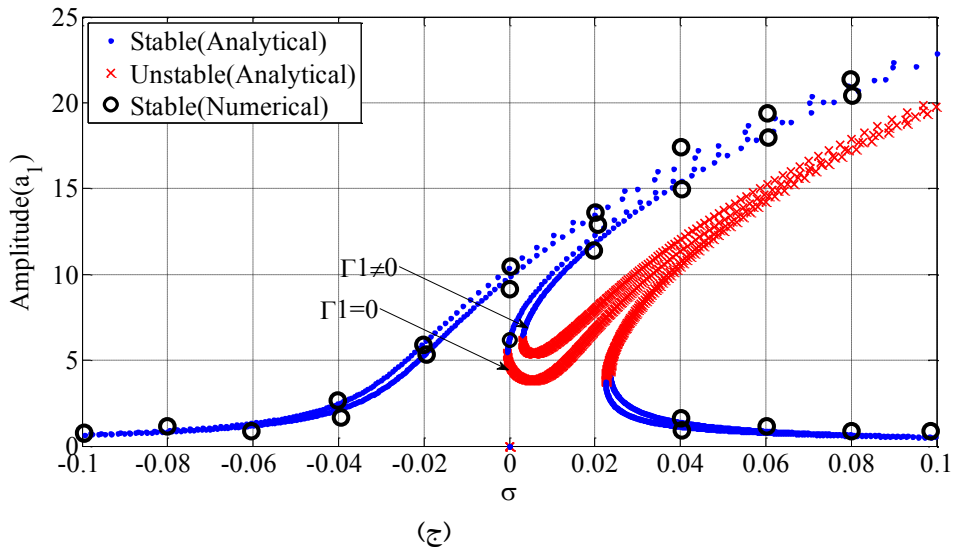
مدهای پایینتر ضعیف می‌باشد، اما، افزایش زاویه پیچش تأثیر تغییرات سرعت را تقویت می‌کند. برای مثال، در $\beta_0 = 60^\circ$ ، منحنی‌های پاسخ فرکانسی با تغییرات سرعت ($\Gamma_1 \neq 0$) به منحنی‌های پاسخ فرکانسی بدون زاویه پیچش نزدیک می‌شوند. به عبارت دیگر، در مدهای کوچکتر، منبع تحریک ناشی از تغییرات سرعت در زوایای پیچش بزرگتر می‌تواند به پمپ انرژی در سیستم کمک کند در حالی که در زوایای پیچش کوچکتر، معمولاً تأثیر نامتقارنی، انرژی را به سیستم پمپ می‌کند. همچنین، افزایش شماره مد نیز تأثیرات تغییرات سرعت را افزایش می‌دهد. همچنین، مشابه بخش قبل به منظور بررسی صحت نتایج بدست آمده، از روش عددی رانگ-کوتا نیز استفاده شده است که در شکل (۴-۴) و شکل (۴-۵) نشان داده شده است.



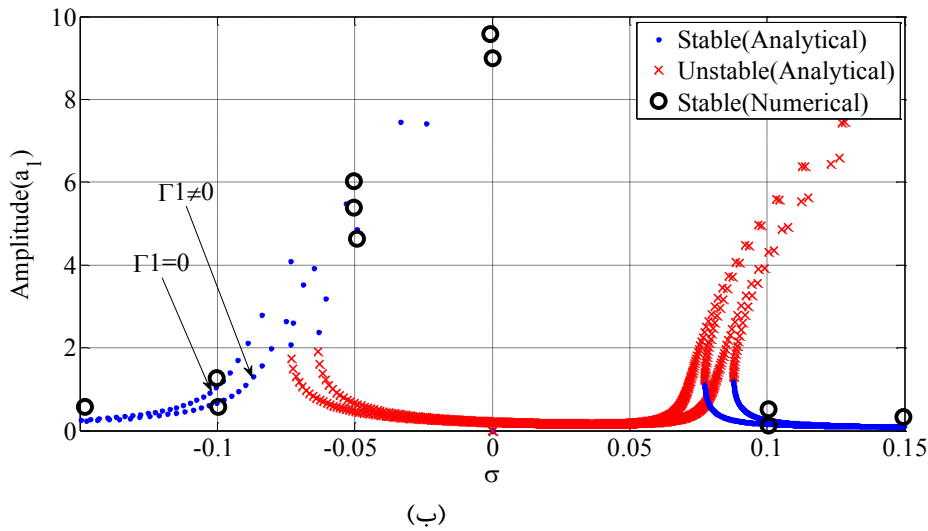
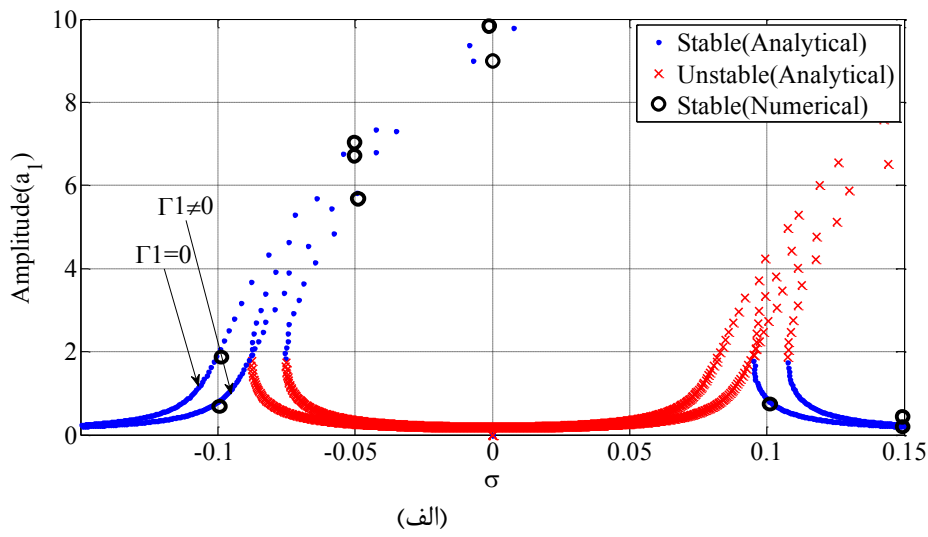
(الف)

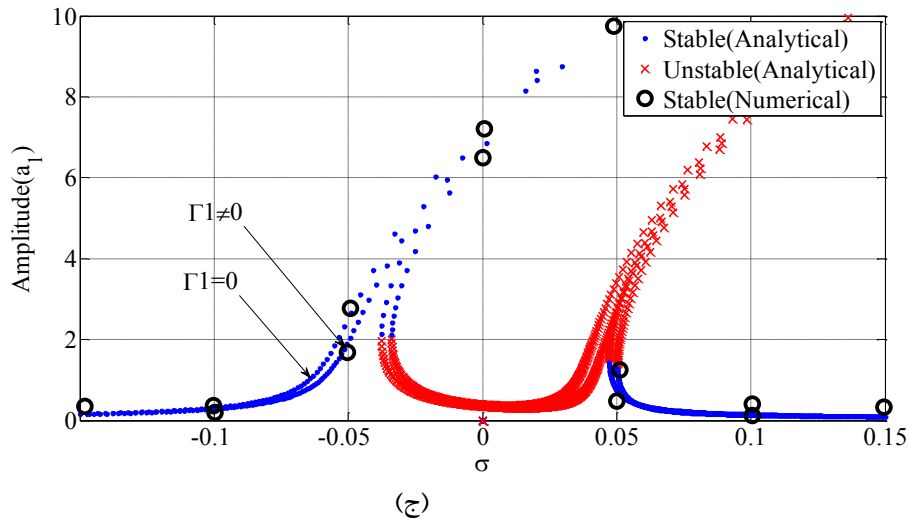


(ب)



شکل (۴-۴) منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده دوار نامتقارن در مد اول و زاویه پیش الف) $\beta_0 = 0$ ب) $\beta_0 = 30^\circ$ ج) $\beta_0 = 60^\circ$



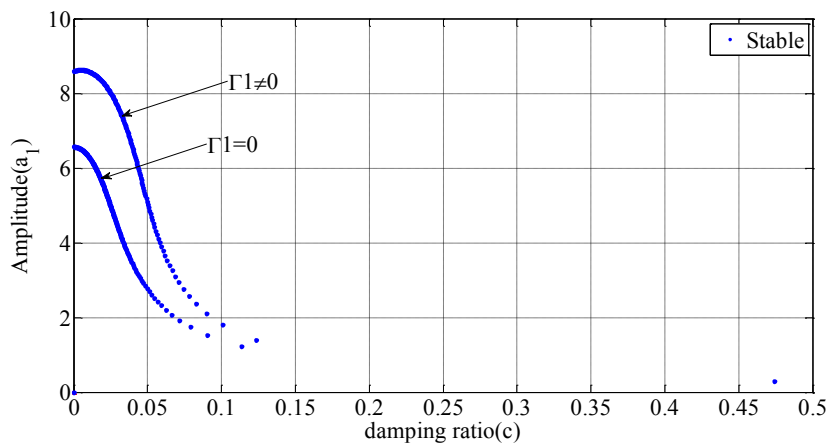


شکل (۴-۵) منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده دوار نامتقارن در مد دوم و زاویه پیچش الف) $\beta_0 = 0$ (ب)

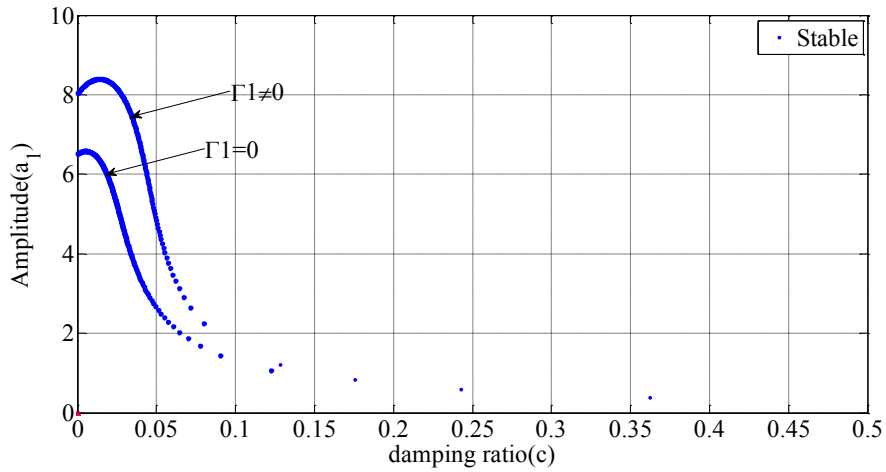
$$\beta_0 = 30^\circ \text{ (ج) و } \beta_0 = 60^\circ$$

شکل (۴-۶) و شکل (۴-۷) منحنی دامنه-نسبت میرایی تیر متقارن مذکور را در زوایای پیچش

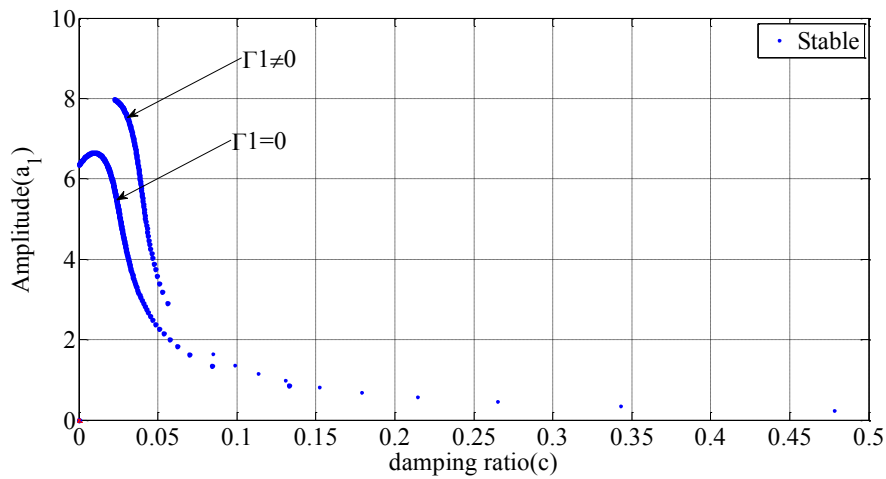
مختلف، در مدهای اول و دوم و فرکانس طبیعی متناظر با $\sigma = 0$ نشان می‌دهد. همانطور که دیده می‌شود، در مد اول، در همه زوایای پیچش و در حضور تغییرات سرعت ($\Gamma_1 \neq 0$)، دامنه نوسانات نسبت به حالت بدون در نظر گرفتن تغییرات سرعت ($\Gamma_1 = 0$) بزرگتر است. اما، با افزایش زاویه پیچش، تأثیر فزاینده دامنه نوسانات ناشی از وجود تغییرات سرعت کاهش می‌یابد. همچنین، با افزایش نسبت میرایی، دامنه نوسانات کاهش می‌یابد. علاوه بر این، سیستم در هر زاویه پیچش، تنها دارای یک پاسخ پایدار بوده و در نتیجه هیچ دو شاخگی پدید نمی‌آید. در مد دوم نیز شرایط مانند مد اول می‌باشد.



(الف)

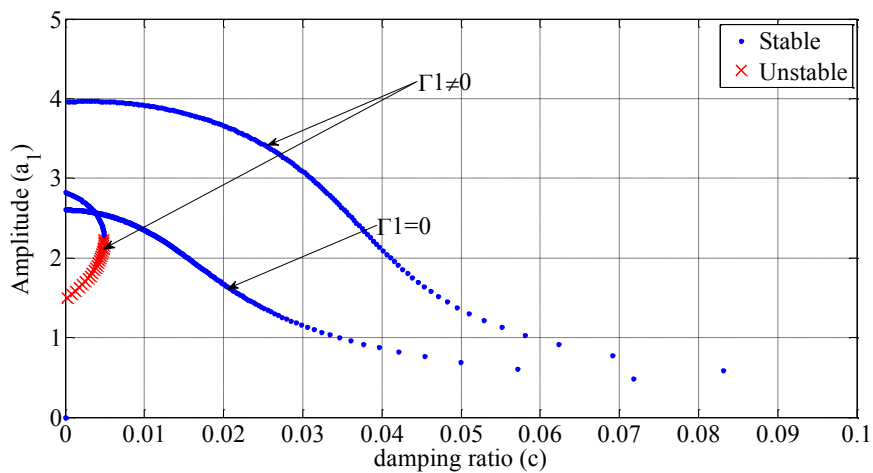


(ب)

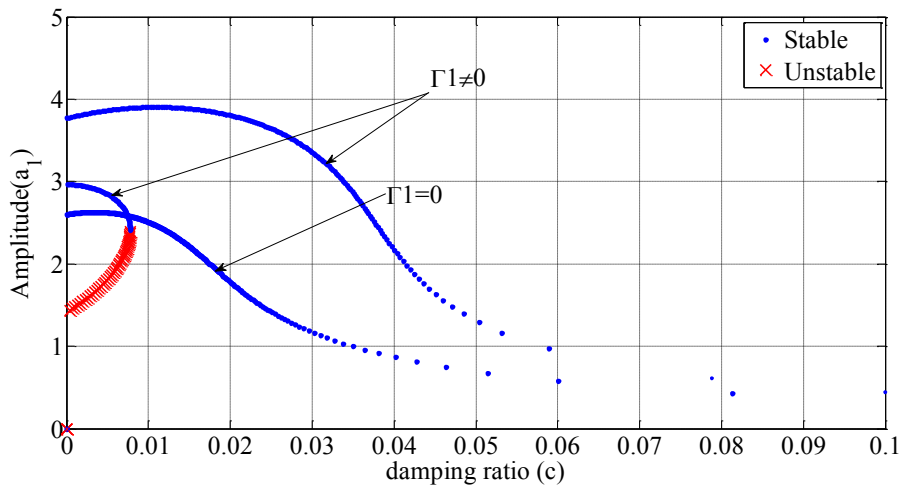


(ج)

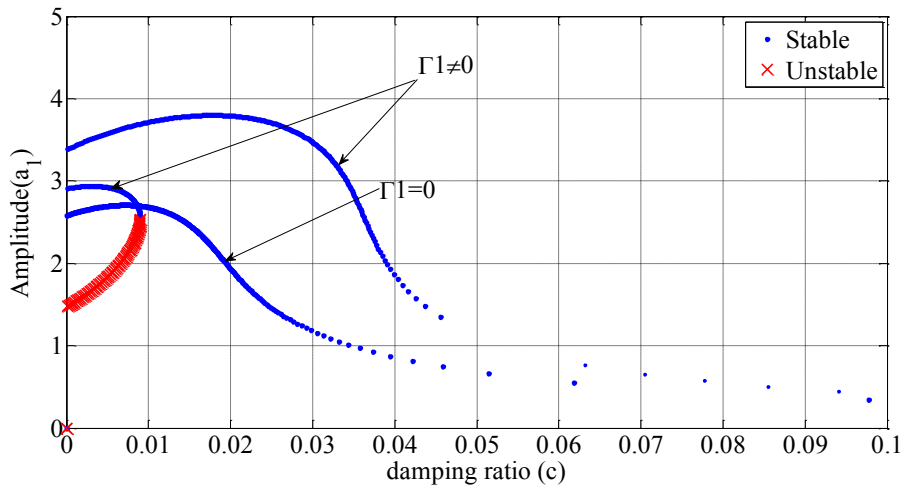
شکل (۴-۶) منحنی دامنه-نسبت میرایی تیر پیچیده شده متقارن در مد اول و $e_\eta = e_\xi = 0.05$ و $\sigma = 0$ و زاویه پیشش الف) $\beta_0 = 0$ ب) $\beta_0 = 30^\circ$ و ج) $\beta_0 = 60^\circ$.



(الف)



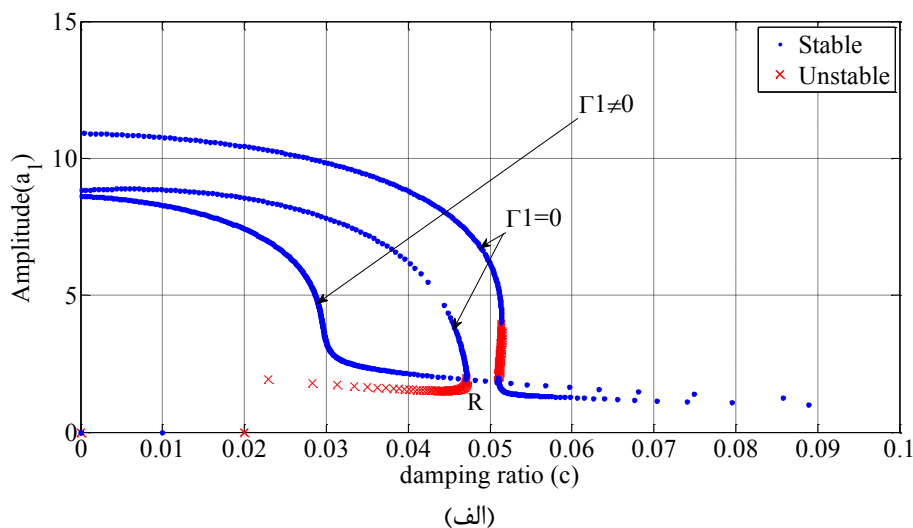
(ب)

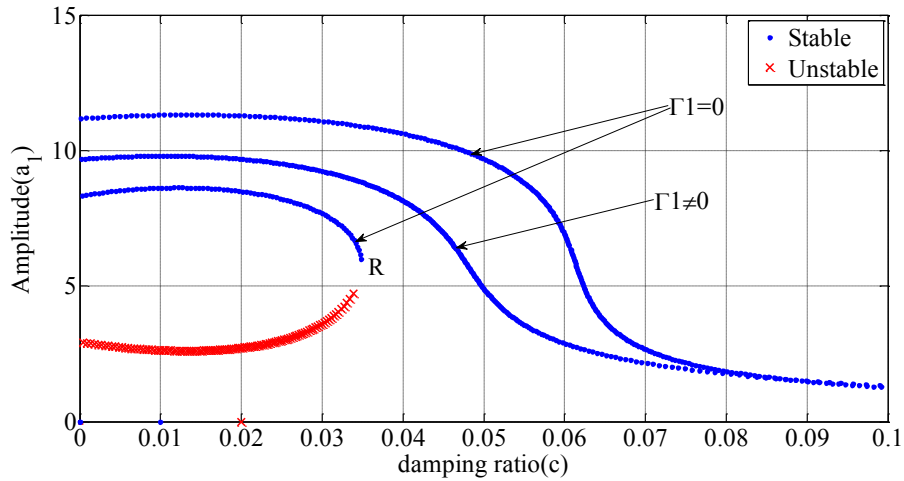


(ج)

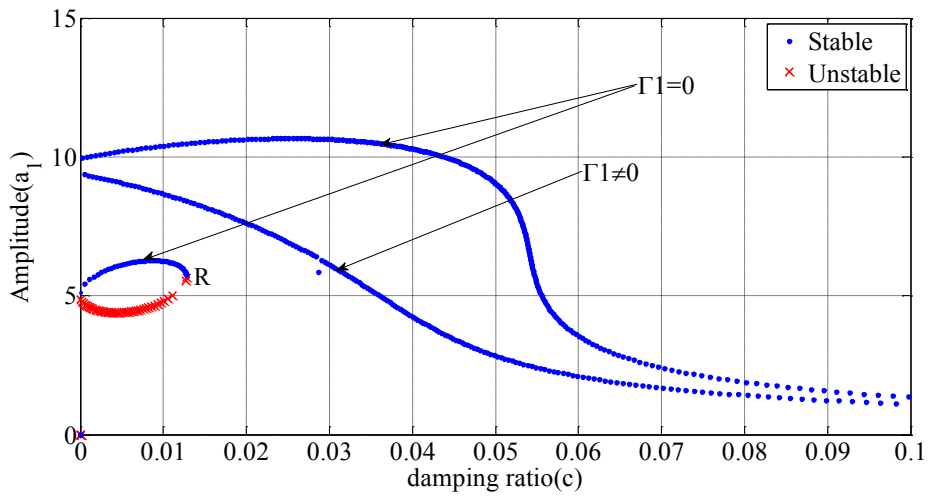
شکل (۷-۴) منحنی دامنه-نسبت میرایی تیر پیچیده شده متقارن در مد دوم و $e_\eta = e_\xi = 0.05$ و $\sigma = 0$ و زاویه پیچش الف) $\beta_0 = 0$ (ب) $\beta_0 = 30^\circ$ و ج) $\beta_0 = 60^\circ$. در حالت نامتقارن ($\Gamma_2 \neq 0$)، همانطور که در شکل (۸-۴) نشان داده شده است، مشابه با حالت متقارن، به ازای $\sigma = 0$ و مد اول و در حضور تغییرات سرعت ($\Gamma_1 \neq 0$)، تنها یک پاسخ پایدار در سیستم وجود داشته، در حالی که در غیاب تغییرات سرعت ($\Gamma_1 = 0$)، سه پاسخ (دو تا پایدار و دیگری ناپایدار)، در سیستم وجود دارد. بنابراین، در حالت اول پدیده دو شاخگی رخ نداده، در حالی که در حالت دوم این پدیده بوقوع می پیوندد. همچنین، افزایش ضریب بی بعد شده میرایی، دامنه نوسانات را در هر زاویه پیچش و در حالات با و بدون تغییرات سرعت کاهش می دهد. نتیجه مهمتر اینکه افزایش زاویه پیچش در تیر پیچیده شده نامتقارن در حالت بدون تغییرات سرعت، باعث می شود نقطه پرش

(نقطه R) در نسبت میرایی کوچکتر اتفاق افتاده تا به تدریج این پدیده حذف می‌شود و سیستم دارای تک پاسخ پایدار در همه ضرایب میرایی خواهد بود. در حضور تغییرات سرعت، شرایط مانند حالت بدون تغییرات سرعت است. در این حالت، افزایش زاویه پیچش باعث می‌شود شیب نمودار دامنه برحسب نسبت میرایی بیشتر شده و دامنه نوسانات پایدار به سرعت میرا شود. در مد دوم و هر دو حالت با و بدون تغییرات سرعت، در ضرایب میرایی پایینتر و هر زاویه پیچشی، سه پاسخ وجود دارد که دوتای آنها پایدار و دیگری ناپایدار است. از این رو، نقطه دوشاخگی یا پرش (نقطه R در حضور تغییرات سرعت و نقطه Q در غیاب تغییرات سرعت) بوجود خواهد آمد. همانطور که در شکل (۴-۹) نشان داده شده است، در حضور و غیاب تغییرات سرعت، افزایش زاویه پیچش این نقاط پرش را به سمت چپ جابجا کرده و پرش در نسبت‌های میرایی پایینتری رخ می‌دهد. مقایسه این منحنی‌ها در مدهای اول و دوم نشان می‌دهد که تأثیر تغییرات سرعت در مد دوم بیشتر بوده و افزایش زاویه پیچش باعث می‌شود این منحنی‌ها به یکدیگر نزدیک شوند. به عبارت دیگر، تأثیر تغییرات سرعت با افزایش شماره مدها و نیز افزایش زاویه پیچش بیشتر قابل ملاحظه خواهد بود.



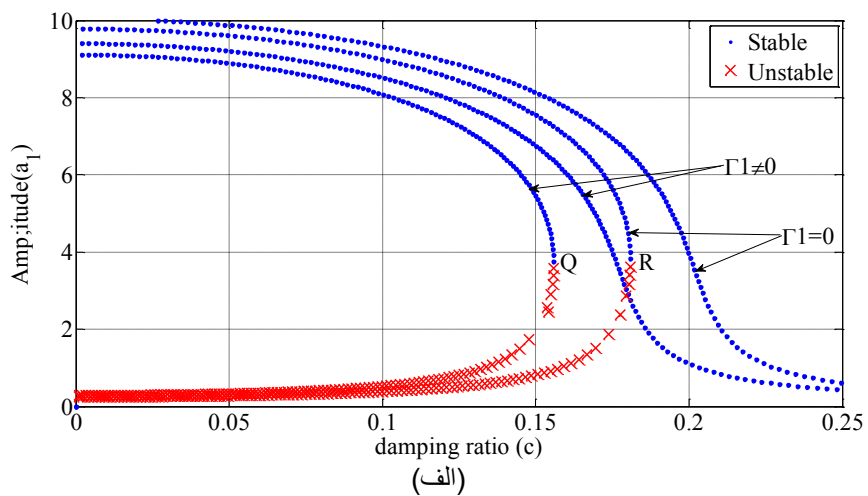


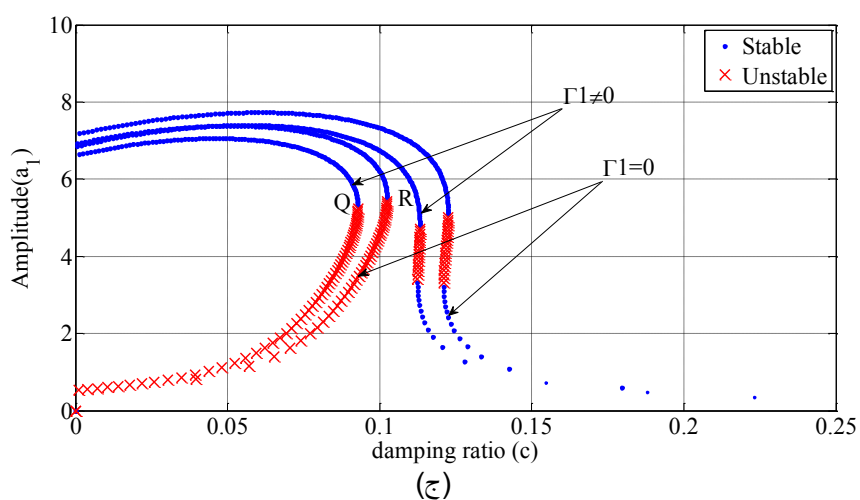
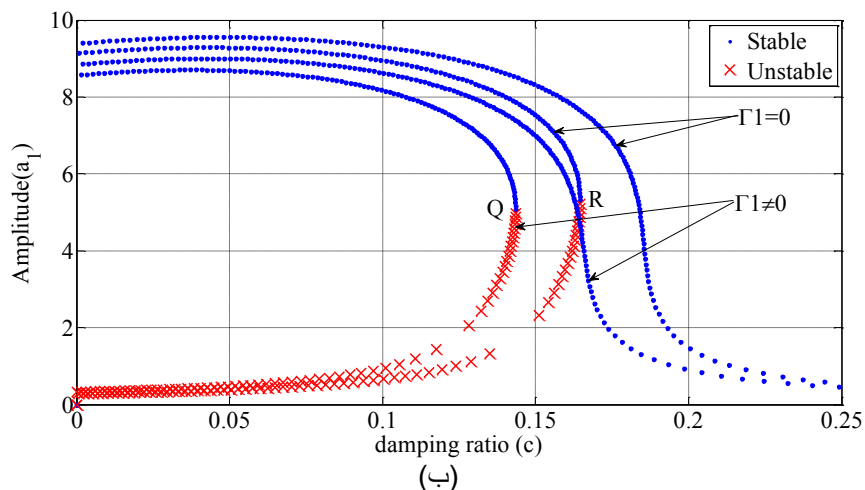
(ب)



(ج)

شکل (۴-۸) منحنی دامنه-نسبت میرایی تیر پیچیده شده نامتقارن در مد اول و $e_\eta = e_\xi = 0.05$ و $\sigma = 0$ و زاویه پیش‌فشار الف (ب $\beta_0 = 0^\circ$ و ج $\beta_0 = 60^\circ$).

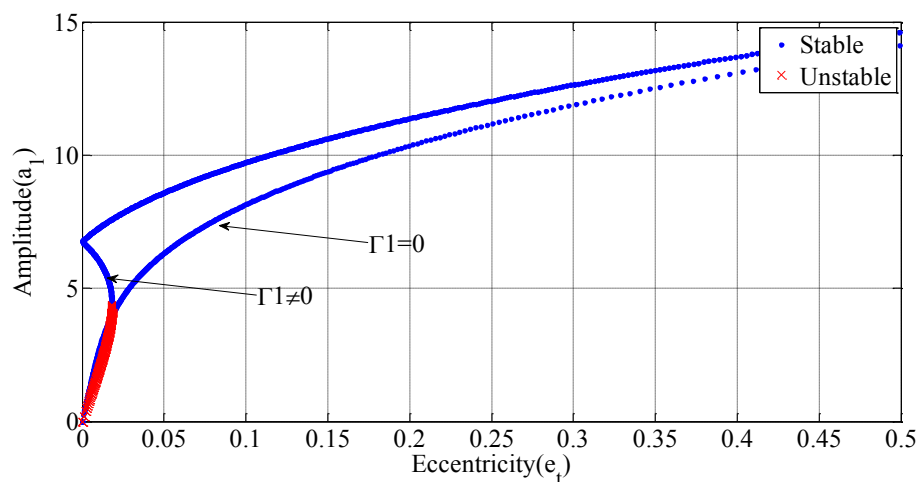




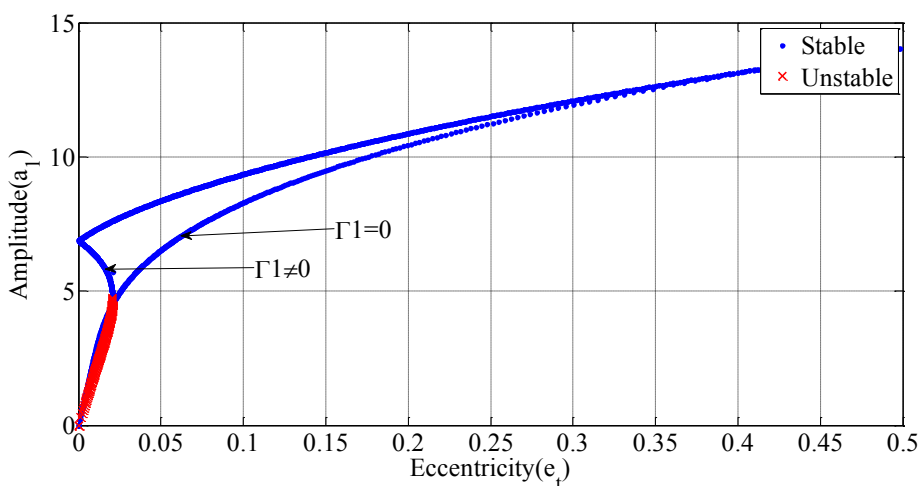
شکل (۹-۴) منحنی دامنه-نسبت میرایی تیر پیچیده شده نامتقارن در مد دوم و $e_\eta = e_\xi = 0.05$ و $\sigma = 0$ و زاویه پیچش الف) $\beta_0 = 0$ ب) $\beta_0 = 30^\circ$ و ج) $\beta_0 = 60^\circ$.

شکل (۱۰-۴) و شکل (۱۱-۴) منحنی دامنه برحسب خروج از مرکز سیستم را در حالت متقارن محوری و در حضور و عدم حضور تغییرات سرعت در فرکانس طبیعی متناظر با $\sigma = 0$ نشان می‌دهند. همانطور که مشاهده می‌شود، حرکت نوسانی تیر مذکور با نبود تغییرات سرعت ($\Gamma 1 = 0$) در سرتاسر دامنه خروج از مرکز و زوایای پیچش مختلف و مدهای اول و دوم، پایدار می‌باشد. در نتیجه در این حالت، هیچگونه دو شاخگی در سیستم اتفاق نمی‌افتد و زاویه پیچش تأثیرات ناچیزی روی دامنه نوسانات دارد. با این وجود، وقتی تغییرات سرعت در سیستم وجود دارد ($\Gamma 1 \neq 0$)، تعداد پاسخها متفاوت خواهد بود، بگونه‌ای که در مقادیر خروج از مرکز کوچکتر، سه پاسخ وجود داشته که دوتای آنها پایدار و دیگری ناپایدار می‌باشد. در نتیجه پدیده دو شاخگی شدن اتفاق می‌افتد. از طرفی، در مقادیر

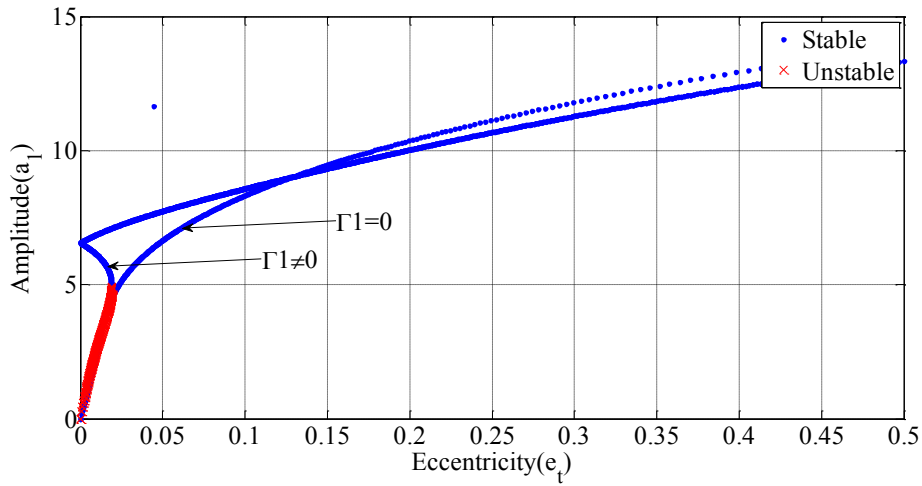
بزرگتر خروج از مرکز، افزایش زاویه پیچش دامنه پایدار تیر مذکور را کاهش می‌دهد. علاوه بر این، در زوایای پیچش کوچکتر، تأثیر تغییرات سرعت نسبت به نابالانسی غالب بوده، بگونه‌ای که دامنه پایدار تیر متقارن مذکور با سرعت متغیر نسبت به حالت بدون تغییرات سرعت در همه مقادیر خروج از مرکز بزرگتر است. اما در مقادیر بزرگتر زاویه پیچش (برای مثال در زاویه پیچش $\beta_0 = 60^\circ$)، تأثیر نابالانسی نسبت به تغییرات سرعت غالب بوده بگونه‌ای که در مقادیر بزرگتر خروج از مرکز، دامنه نوسانات نسبت به حالت بدون تغییرات زاویه پیچش کوچکتر است. به عبارت دیگر، با توجه به اینکه در تیرهای متقارن، تغییرات سرعت نسبت به نابالانسی غالب بوده و منجر به افزایش دامنه نوسانات می‌شود، اما، افزایش زاویه پیچش، باعث می‌شود تأثیر تغییرات سرعت روی افزایش دامنه نوسانات کاهش یافته و تأثیر نابالانسی غالب خواهد شد.



(الف)

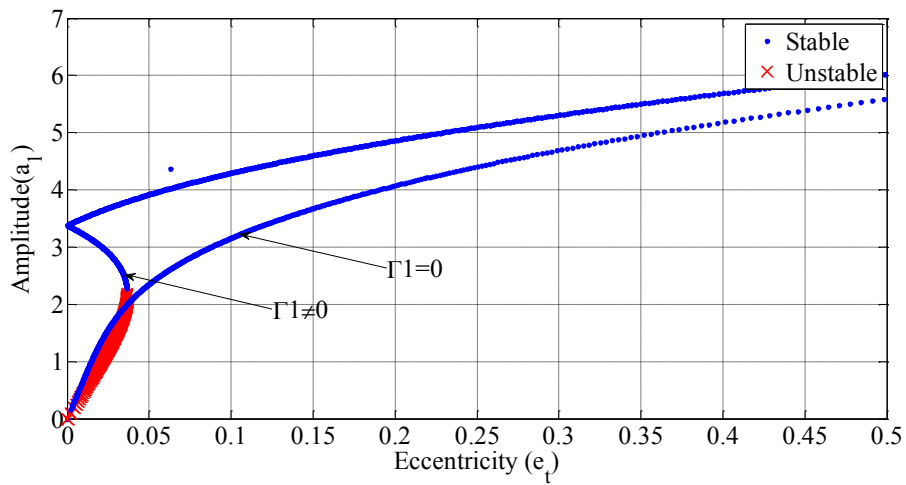


(ب)

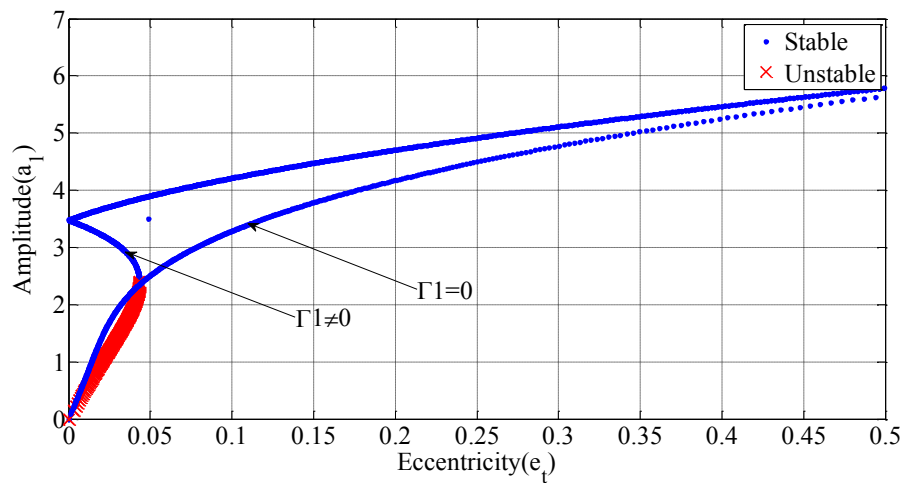


(ج)

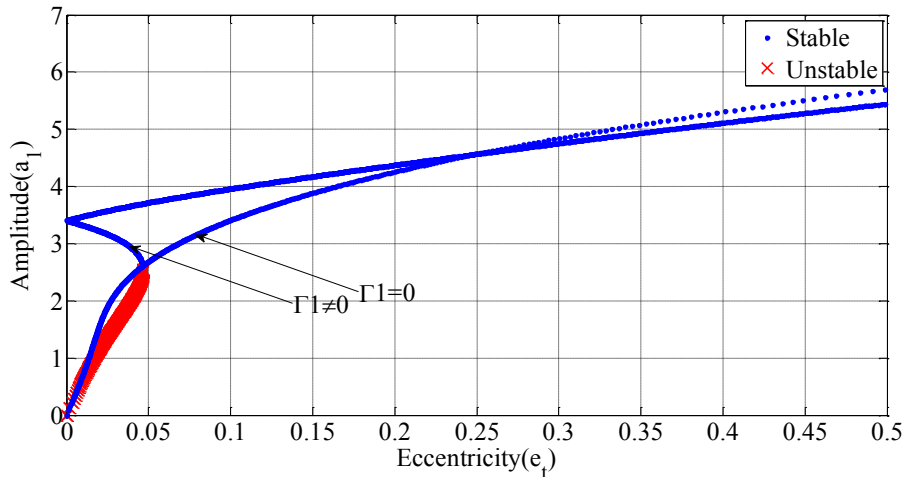
شکل (۴-۱۰) منحنی دامنه-خروج از مرکز تیر پیچیده شده متقارن در مد اول و $\sigma = 0$ و زاویه پیش الف $\beta_0 = 60^\circ$ (ج) و $\beta_0 = 30^\circ$ (ب) $\beta_0 = 0$.



(الف)



(ب)



(ج)

شکل (۴-۱۱) منحنی دامنه-خروج از مرکز تیر پیچیده شده متقارن در مد دوم و $\sigma=0$ و زاویه پیش الف

$\beta_0=0$ (ب) $\beta_0=30^\circ$ (ج) و $\beta_0=60^\circ$.

شکل (۴-۱۲) و شکل (۴-۱۳) تأثیر زاویه پیش (β_0) را روی منحنی دامنه-خروج از مرکز تیر

پیچیده شده نامتقارن نزدیک فرکانس طبیعی متناظر با $\sigma=0$ در مدهای اول و دوم نشان می‌دهد.

همانطور که دیده می‌شود، حرکت نوسانی تیر پیچیده شده چرخشی در حالت با و بدون تغییرات

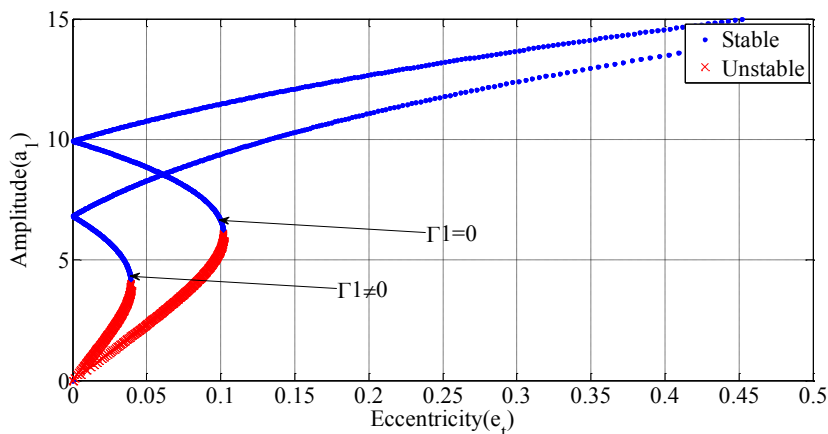
سرعت دارای دو پاسخ پایدار و یک پاسخ ناپایدار می‌باشد. در نتیجه در هر دو حالت، پدیده دو شاخگی

رخ می‌دهد. علاوه بر این، در مدهای کوچکتر، تأثیر تغییرات سرعت ضعیف و کاهنده دامنه نوسانات

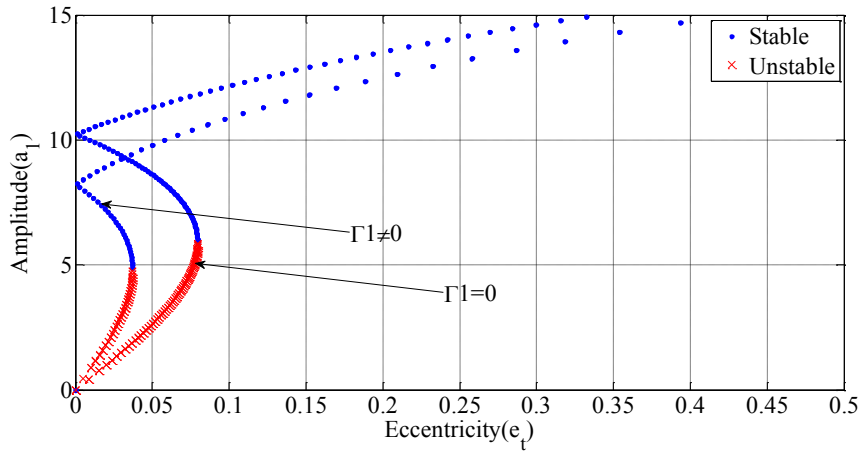
بوده در حالی که تأثیر نامتقارنی غالب می‌باشد. اما در هر مد، افزایش زاویه پیش تأثیر نوسانات سرعت

را تقویت کرده بگونه‌ای که منحنی‌های با تغییرات سرعت به منحنی‌های متناظر بدون تغییرات سرعت

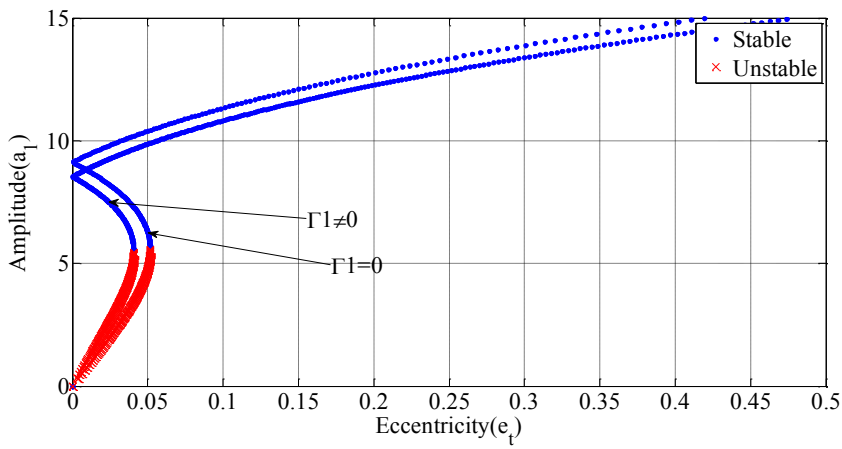
نزدیک می‌شوند. این حقیقت در مدهای بالاتر قابل ملاحظه‌تر خواهد بود.



(الف)

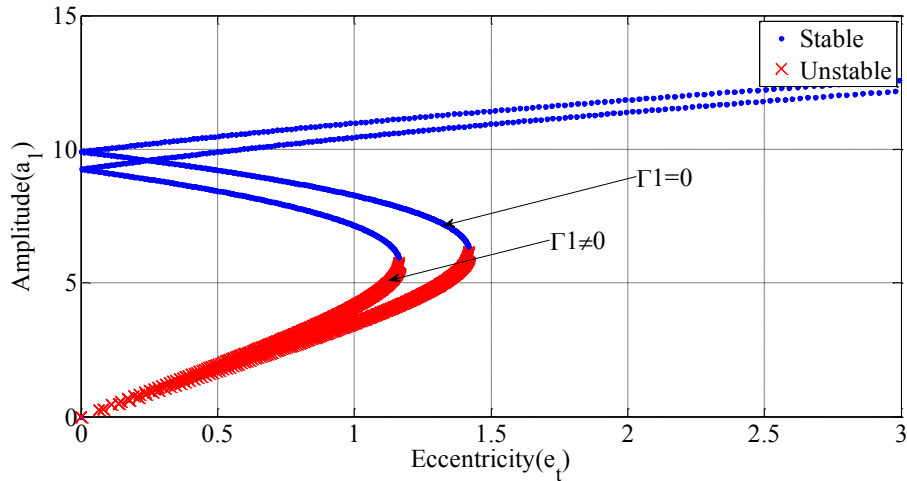


(ب)

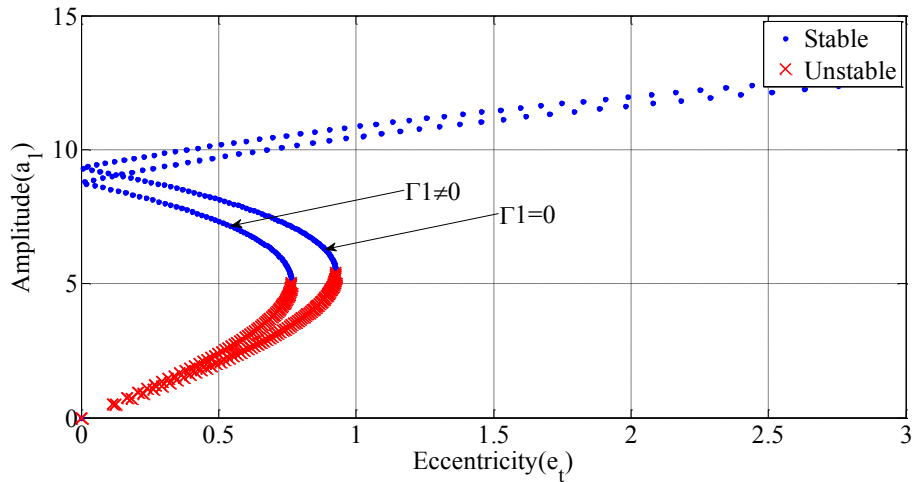


(ج)

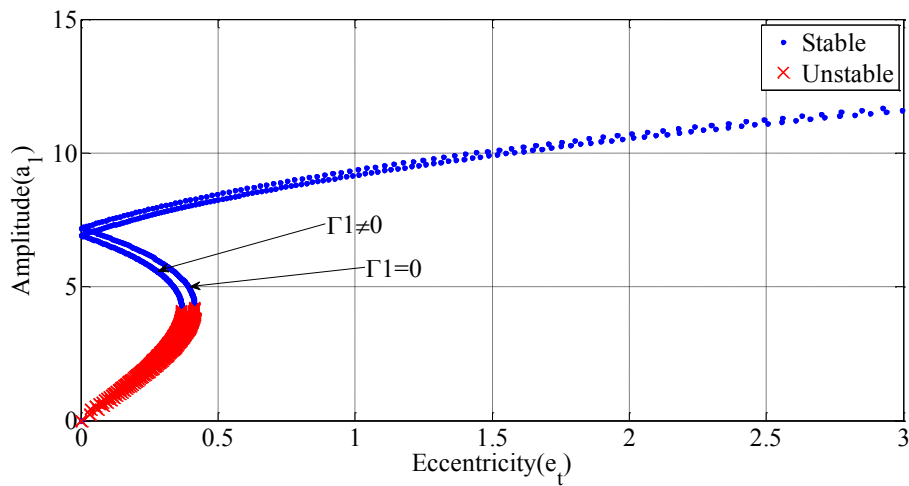
شکل (۴-۱۲) منحنی دامنه-خروج از مرکز تیر پیچیده شده نامتقارن در مد اول و $\sigma=0$ و زاویه پیش الف $\beta_0=60^\circ$ (ج) و $\beta_0=30^\circ$ (ب) و $\beta_0=0$.



(الف)



(ب)



(ج)

شکل (۴-۱۳) منحنی دامنه-خروج از مرکز تیر پیچیده شده نامتقارن در مد دوم و $\sigma = 0$ و زاویه پیش‌شده الف

$\beta_0 = 0$ (ب) $\beta_0 = 30^\circ$ (ج) و $\beta_0 = 60^\circ$.

شکل (۴-۱۴) و شکل (۴-۱۵) تأثیر ممان اینرسی جرمی حول محور x (I_{xx}) تیر پیچیده شده را

روی منحنی‌های پاسخ فرکانسی تیر نامتقارن در مد اول و در حضور و عدم حضور تغییرات سرعت و

زوایای پیش‌شده مختلف نشان می‌دهد. همانطور که در شکل (۴-۱۴) نشان داده شده است، در غیاب

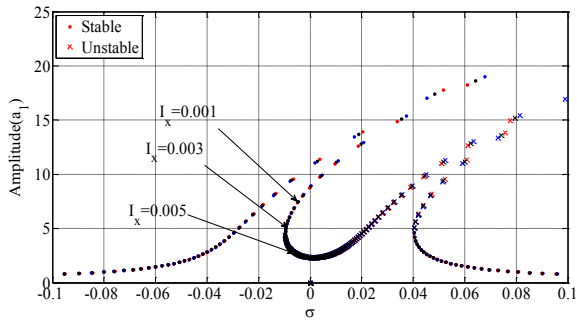
تغییرات سرعت ($\Gamma_1 = 0$)، تغییرات I_{xx} تأثیر چندانی روی پاسخهای فرکانسی در هر زاویه پیش‌شده

نداشته اما زمانی که یک اغتشاش کوچک روی سرعت دوران بوجود می‌آید ($\Gamma_1 \neq 0$)، افزایش ممان

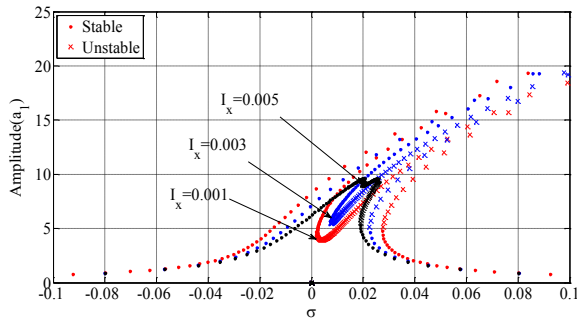
اینرسی I_{xx} ، دامنه نوسانات را افزایش داده و تأثیر تغییرات سرعت را تقویت می‌کند. اما، در این حالت،

می‌توان دید که با افزایش زاویه پیش‌شده، دامنه پاسخ فرکانسی و تأثیر فزاینده I_{xx} روی پاسخهای

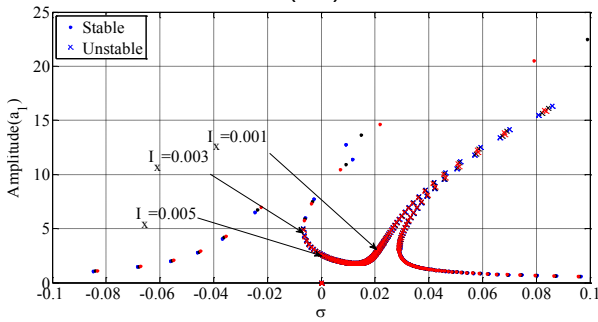
فرکانسی کاهش می‌یابد.



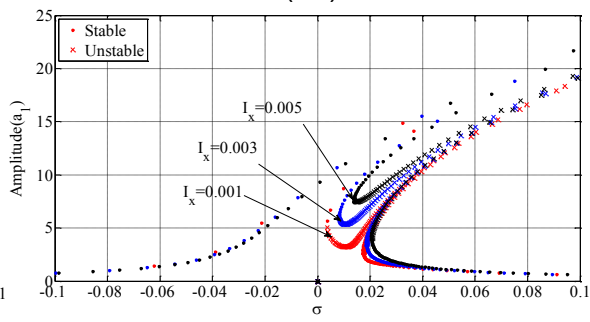
(الف)



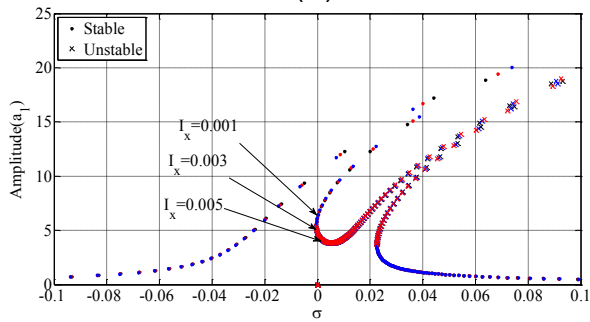
(الف)



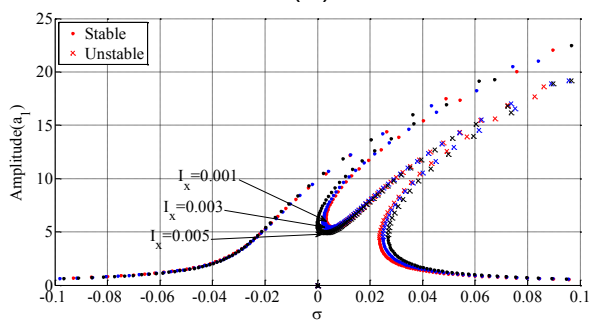
(ب)



(ب)



(ج)



(ج)

شکل (۴-۱۴) منحنی دامنه-ممان اینرسی حول محور طولی تیر پیچیده شده نامتقارن در مد اول و $\sigma=0$ بدون تغییرات سرعت و زاویه پیش (الف) $\beta_0=0$ (ب) $\beta_0=30^\circ$ و (ج) $\beta_0=60^\circ$.

شکل (۴-۱۵) منحنی دامنه-ممان اینرسی حول محور طولی تیر پیچیده شده نامتقارن در مد اول و $\sigma=0$ با تغییرات سرعت و زاویه پیش (الف) $\beta_0=0$ (ب) $\beta_0=30^\circ$ و (ج) $\beta_0=60^\circ$.

فصل پنجم

۵- ارتعاشات عرضی تیر پیچیده شده دوار با شرایط مرزی دو سر مفصل و نیروی محوری ثابت

همانطور که پیش از این نیز ذکر شد، عموماً اکثر تجهیزات مدل شده با تیرهای پیچیده شده از قبیل پمپها و کمپرسورهای مارپیچ در حین عملکرد، تحت تأثیر بارهای خارجی بویژه بارهای محوری قرار می‌گیرند. از این‌رو، در این بخش، ارتعاشات و پایداری یک تیر پیچیده محوری تحت تأثیر یک نیروی محوری که در یک انتهای آن وارد می‌شود مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۵-۱- معادلات حرکت

۵-۱-۱- کار نیروی محوری

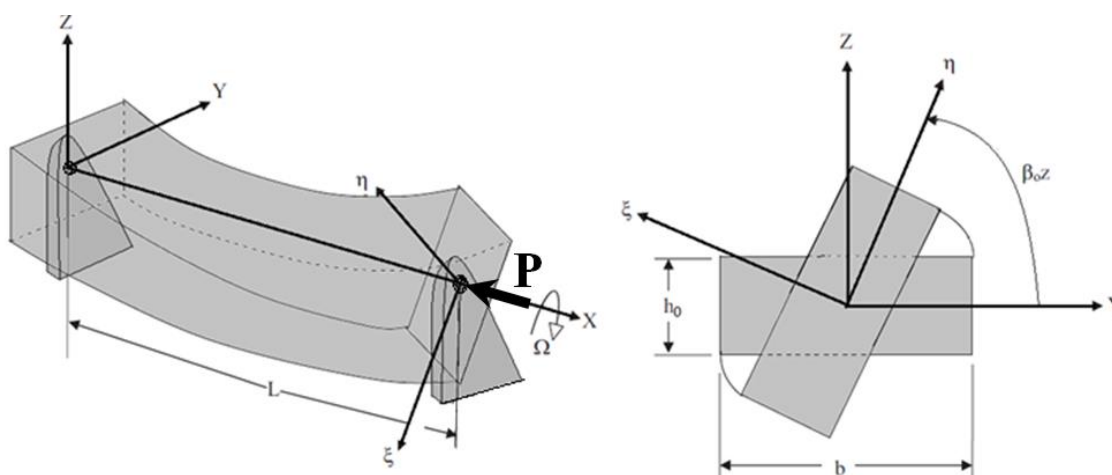
شکل (۵-۱) یک تیر پیچیده شده محوری دو سر مفصل را که یک بار محوری ثابت به انتهای آن

وارد می‌شود نشان می‌دهد. با توجه به این شکل، کار نیروی محوری خارجی P برابر است با،

$$\delta W_{nc2} = (P - A_{xx}\varepsilon_0) \delta u_0 \quad (5-1)$$

که u_0 و ε_0 به ترتیب جابجایی محوری در محل اثر نیرو یا همان انتهای تیر دو سر مفصل و

کرنش محوری محل اثر نیرو می‌باشد.



شکل (۵-۱) یک تیر پیچیده شده دورانی تحت نیروی محوری P به همراه مقطع آن با نمایش زاویه پیچش تیر. در نهایت، لاگرانژین برابر است با،

$$\mathcal{L} = T - U + W_{nc1} + W_{nc2} \quad (5-2)$$

که W_{nc1} و W_{nc2} به ترتیب کار نیروهای میرایی خارجی و نیروی خارجی P می‌باشند. برای

بدست آوردن معادلات حرکت و شرایط مرزی مربوطه، همانند فصل‌های قبلی از اصل همیلتون تعمیم یافته استفاده می‌شود،

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{L} dt = 0 \quad (3-5)$$

به این ترتیب، با قرار دادن روابط مذکور در روابط انرژی جنبشی و پتانسیل و سپس استفاده از رابطه لاگرانژ و ساده سازی معادلات با استفاده از بسط تیلور تا مرتبه $O(\epsilon^3)$ ، معادلات ارتعاشی در دستگاه مختصات پیچشی $\xi\eta\zeta$ برابرند با،

$$P = A_{xx} \cdot \epsilon_0 \quad (4-5)$$

$$m\ddot{u} - A_{xx} (u'' + w'w'' + v'v'' + \beta_0(vw'' - wv'') + \beta_0^2(vv' + ww')) = 0 \quad (5-5)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ (-v''u' - 3/2v''v'^2 + -u''v' - v'ww'' - 1/2v''w^2) + (vv'w + 1/2w'v^2 + 3/2w'w^2) \beta_0^3 \right. \\ & + (-vv'^2 - 2ww'v' + vv'^2 + -1/2v''v^2 - 3/2v''w^2 + vww'') \beta_0^2 \\ & + (wu' + 1/2w'v'^2 + 3v'v''w - vv'w'' + 1/2w'^3 + -vv''w' + ww'w'' + u''w) \beta_0 \left. \right\} A_{xx} \\ & + \left\{ -\dot{w}''\Omega\Delta I - 1/2\Delta I\ddot{v}'' + 1/2\Delta Dv^{(4)} + 4\Delta Dv\beta_0^4 + 11\Delta Dw'\beta_0^3 \right. \\ & + (3/2\Delta I\ddot{v} - 21/2\Delta Dv'' + 3\dot{w}\Omega\Delta I) \beta_0^2 + (2\Delta I\ddot{w}' - 4\Delta Dw''' - 4\dot{v}'\Omega\Delta I) \beta_0 \left. \right\} \cos(-4\beta_0 x + 2\Omega t) \\ & + \left\{ \dot{v}''\Delta I\Omega - 1/2\Delta I\ddot{w}'' + 1/2\Delta Dw^{(4)} + 4\Delta Dw\beta_0^4 - 11\Delta Dv'\beta_0^3 \right. \\ & + (3/2\Delta I\ddot{w} - 21/2\Delta Dw'' - 3\dot{v}\Delta I\Omega) \beta_0^2 + (-2\Delta I\ddot{v}' + 4\Delta Dv''' - 4\dot{w}'\Delta I\Omega) \beta_0 \left. \right\} \sin(-4\beta_0 x + 2\Omega t) \\ & + (-1/2I_{xx}\dot{w}\beta_0^2 + 1/2I_{xx}\dot{v}'\beta_0)\Omega \cos(2\beta_0 x) + (-1/2I_{xx}\dot{v}\beta_0^2 - 1/2I_{xx}\dot{w}'\beta_0)\Omega \sin(2\beta_0 x) \\ & + (-\dot{w}'' + 1/2\dot{w}\beta_0^2 - 3/2\dot{v}'\beta_0)\Omega I_{xx} + \Sigma Dw'\beta_0^3 + (1/2\Sigma I\ddot{v} - 5/2\Sigma Dv'')\beta_0^2 \\ & + (-2\Sigma Dw''' + \Sigma I\ddot{w}')\beta_0 + m\ddot{v} - 1/2\Sigma I\ddot{v}'' + 1/2\Sigma Dv^{(4)} + c\dot{v}\cos(\beta_0 x) - c\dot{w}\sin(\beta_0 x) \\ & + me_\zeta\Omega^2 \sin(-\beta_0 x + \Omega t) - me_\eta\Omega^2 \cos(-\beta_0 x + \Omega t) = 0 \end{aligned} \quad (6-5)$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ (w''u' + 3/2w''w'^2 + u''w' + v'w'v'' - 1/2w''v'^2) + (vw'w' + 1/2v'w'^2 + 3/2v'v'^2) \beta_0^3 \right. \\
& + (-ww'^2 + 2vw'v' + ww'^2 + 1/2w''w'^2 + 3/2w''v'^2 - vww'') \beta_0^2 \\
& + (v'u' + 1/2v'w'^2 + 3vw'w'' - ww'v'' + 1/2v'^3 - ww''v' + v'v'' + u''v) \beta_0 \left. \right\} A_{xx} \\
& + \left\{ \dot{v}''\Omega\Delta I - 1/2\Delta I\ddot{w}'' + 1/2\Delta Dw^{(4)} + 4\Delta Dw\beta_0^4 - 11\Delta Dv'\beta_0^3 \right. \\
& + (3/2\Delta I\ddot{w} - 21/2\Delta Dw'' - 3\dot{v}\Omega\Delta I) \beta_0^2 + (-2\Delta I\dot{v}' + 4\Delta Dv''' - 4\dot{w}'\Omega\Delta I) \beta_0 \left. \right\} \cos(-4\beta_0 x + 2\Omega t) \\
& + \left\{ \dot{w}''\Delta I\Omega + 1/2\Delta I\dot{v}'' - 1/2\Delta Dv^{(4)} + 4\Delta Dv\beta_0^4 - 11\Delta Dw'\beta_0^3 \right. \\
& + (-3/2\Delta I\dot{v} + 21/2\Delta Dv'' - 3\dot{w}\Delta I\Omega) \beta_0^2 + (-2\Delta I\dot{w}' + 4\Delta Dw''' + 4\dot{v}'\Delta I\Omega) \beta_0 \left. \right\} \sin(-4\beta_0 x + 2\Omega t) \quad (7-5) \\
& + (1/2I_{xx}\dot{v}\beta_0^2 + 1/2I_{xx}\dot{w}'\beta_0) \Omega \cos(2\beta_0 x) + (-1/2I_{xx}\dot{w}\beta_0^2 + 1/2I_{xx}\dot{v}'\beta_0) \Omega \sin(2\beta_0 x) \\
& + (-\dot{v}'' + 1/2\dot{v}\beta_0^2 + 3/2\dot{w}'\beta_0) \Omega I_{xx} + \Sigma Dv'\beta_0^3 + (-1/2\Sigma I\ddot{w} + 5/2\Sigma Dw'') \beta_0^2 \\
& + (-2\Sigma Dv''' + \Sigma I\dot{v}') \beta_0 - m\ddot{w} + 1/2\Sigma I\ddot{w}'' - 1/2\Sigma Dw^{(4)} - c\dot{v} \sin(\beta_0 x) - c\dot{w} \cos(\beta_0 x) \\
& + me_\eta \Omega^2 \sin(-\beta_0 x + \Omega t) + me_\zeta \Omega^2 \cos(-\beta_0 x + \Omega t) = 0
\end{aligned}$$

با شرایط مرزی

$$x=L \Rightarrow \begin{cases} v=w=0 \\ v''=w''=0 \end{cases} \quad \text{و} \quad x=0 \Rightarrow \begin{cases} v=w=0 \\ v''=w''=0 \end{cases}$$

اگر نسبت عرض و طول سطح مقطع تیر به طول تیر (ضریب لاغری) خیلی کوچک باشد، می-

توان از اینرسی طولی تیر صرف نظر کرد، $m\ddot{u}(x,t) = 0$ ، از اینرو با توجه به رابطه (5-5) و شرایط

مرزی $u(0) = u(L) = 0$ داریم،

$$\begin{aligned}
& u' + \frac{1}{2}\beta_0^2(v^2 + w^2) - \beta_0(-vw' + ww') + \frac{1}{2}(v'^2 + w'^2) \\
& - \frac{1}{2L} \int_0^L (v'^2 + w'^2 - 2\beta_0(v'w - vw') + \beta_0^2(v^2 + w^2)) dx = \varepsilon_0 \quad (8-5)
\end{aligned}$$

با توجه به رابطه (8-5) و (4-5) داریم،

$$\begin{aligned}
& u' = \frac{P}{A_{xx}} - \frac{1}{2}\beta_0^2(v^2 + w^2) + \beta_0(-vw' + ww') - \frac{1}{2}(v'^2 + w'^2) \\
& + \frac{1}{2L} \int_0^L (v'^2 + w'^2 - 2\beta_0(v'w - vw') + \beta_0^2(v^2 + w^2)) dx \quad (9-5)
\end{aligned}$$

حال با قرار دادن رابطه (9-5) در معادلات ارتعاش جانبی تیر، معادلات حرکت ارتعاشات عرضی

تیر برابر است با،

$$\begin{aligned}
& 1/2 \frac{2\ddot{v}''\pi^2\Sigma I - 2\ddot{v}\pi^4 + 2\pi^2\Omega Ix\dot{w}'' - 2v^{(4)}}{\pi^4} - 2 \frac{w'\beta_0^3}{\pi^4} + 1/2 \frac{(-\pi^2\Omega Ix\dot{w} + 10v'' - 2\Sigma I\pi^2\ddot{v})\beta_0^2}{\pi^4} \\
& + 1/2 \frac{(3\pi^2\Omega Ix\dot{w}' - 4\ddot{w}'\pi^2\Sigma I + 8w''')\beta_0}{\pi^4} - c\dot{w}\cos(\beta_0x) + c\dot{w}\sin(\beta_0x) \\
& + \frac{\Omega I_x}{2\pi^2} \left[(\dot{w}\beta_0^2 - \dot{v}'\beta_0)\cos(2\beta_0x) + (\dot{v}\beta_0^2 + \dot{w}'\beta_0)\sin(2\beta_0x) \right] \\
& + e_\eta \Omega^2 \cos(\beta_0x - \Omega t) + e_\zeta \Omega^2 \sin(\beta_0x - \Omega t) \\
& + \left(-8 \frac{v\Delta D\beta_0^4}{\pi^4} - 22 \frac{w'\Delta D\beta_0^3}{\pi^4} + 1/2 \frac{(42v''\Delta D - 12\pi^2\Omega\dot{w}\Delta I - 6\ddot{v}\pi^2\Delta I)\beta_0^2}{\pi^4} \right. \\
& \left. + 1/2 \frac{(16w'''\Delta D + 16\pi^2\Omega\dot{v}'\Delta I - 8\ddot{w}'\pi^2\Delta I)\beta_0}{\pi^4} + 1/2 \frac{2\ddot{v}''\pi^2\Delta I - 2v^{(4)}\Delta D + 4\pi^2\Omega\dot{w}''\Delta I}{\pi^4} \right) \cos(-2\Omega t + 4\beta_0x) \\
& + \left(8 \frac{w\Delta D\beta_0^4}{\pi^4} - 22 \frac{v'\Delta D\beta_0^3}{\pi^4} + 1/2 \frac{(-12\pi^2\Omega\dot{v}\Delta I - 42w''\Delta D + 6\ddot{w}\pi^2\Delta I)\beta_0^2}{\pi^4} \right. \\
& \left. + 1/2 \frac{(-16\pi^2\Omega\dot{w}'\Delta I - 8\ddot{v}'\pi^2\Delta I + 16v'''\Delta D)\beta_0}{\pi^4} + 1/2 \frac{4\pi^2\Omega\dot{v}''\Delta I - 2\ddot{w}''\pi^2\Delta I + 2w^{(4)}\Delta D}{\pi^4} \right) \sin(-2\Omega t + 4\beta_0x) \\
& + \frac{\mu}{\pi^4} (-w'\beta_0 + v'') \left(\beta_0^2 \int_0^1 (v^2 + w^2) dx + \beta_0 \int_0^1 (vw' - v'w) dx + \int_0^1 (v'^2 + w'^2) dx \right) + F_x (v'' - \beta_0 w')
\end{aligned}$$

(۱۰-۵)

$$\begin{aligned}
& + 1/2 \frac{2\ddot{w}''\pi^2\Sigma I - 2\ddot{w}\pi^4 + 2\pi^2\Omega Ix\dot{v}'' - 2w^{(4)}}{\pi^4} + 2 \frac{v'\beta_0^3}{\pi^4} + 1/2 \frac{(\pi^2\Omega Ix\dot{v} + 10w'' - 2\Sigma I\pi^2\ddot{w})\beta_0^2}{\pi^4} \\
& + 1/2 \frac{(3\pi^2\Omega Ix\dot{v}' + 4\ddot{v}'\pi^2\Sigma I - 8v''')\beta_0}{\pi^4} - c\dot{w}\cos(\beta_0x) - c\dot{v}\sin(\beta_0x) \\
& + \frac{\Omega I_x}{2\pi^2} (\dot{v}\beta_0^2 + \dot{w}'\beta_0)\cos(2\beta_0x) + \frac{\Omega I_x}{2\pi^2} (-\dot{w}\beta_0^2 + \dot{v}'\beta_0)\sin(2\beta_0x) \\
& + e_\zeta \Omega^2 \cos(\beta_0x - \Omega t) - e_\eta \Omega^2 \sin(\beta_0x - \Omega t) \\
& + \left(8 \frac{w\Delta D\beta_0^4}{\pi^4} - 22 \frac{v'\Delta D\beta_0^3}{\pi^4} + 1/2 \frac{(-42w''\Delta D - 12\pi^2\Omega\dot{v}\Delta I + 6\ddot{w}\pi^2\Delta I)\beta_0^2}{\pi^4} \right. \\
& \left. + 1/2 \frac{(16v'''\Delta D - 16\pi^2\Omega\dot{w}'\Delta I - 8\ddot{v}'\pi^2\Delta I)\beta_0}{\pi^4} + 1/2 \frac{-2\ddot{w}''\pi^2\Delta I + 2w^{(4)}\Delta D + 4\pi^2\Omega\dot{v}''\Delta I}{\pi^4} \right) \cos(-2\Omega t + 4\beta_0x) \\
& + \left(8 \frac{v\Delta D\beta_0^4}{\pi^4} + 22 \frac{w'\Delta D\beta_0^3}{\pi^4} + 1/2 \frac{(12\pi^2\Omega\dot{v}\Delta I - 42w''\Delta D + 6\ddot{w}\pi^2\Delta I)\beta_0^2}{\pi^4} \right. \\
& \left. + 1/2 \frac{(-16\pi^2\Omega\dot{v}'\Delta I + 8\ddot{w}'\pi^2\Delta I - 16w'''\Delta D)\beta_0}{\pi^4} + 1/2 \frac{-4\pi^2\Omega\dot{w}''\Delta I - 2\ddot{v}''\pi^2\Delta I + 2v^{(4)}\Delta D}{\pi^4} \right) \sin(-2\Omega t + 4\beta_0x) \\
& + \frac{\mu}{\pi^4} (v'\beta_0 + w'') \left(\beta_0^2 \int_0^1 (v^2 + w^2) dx + \beta_0 \int_0^1 (vw' - v'w) dx + \int_0^1 (v'^2 + w'^2) dx \right) + F_x (w'' + \beta_0 v')
\end{aligned}$$

(۱۱-۵)

برای ساده سازی، در معادلات فوق داریم،

$$\Delta D = \frac{(D_{\xi\xi} - D_{\eta\eta})}{2}, \quad \Delta I = \frac{(I_{\xi\xi} - I_{\eta\eta})}{2}, \quad \Sigma D = \frac{(D_{\xi\xi} + D_{\eta\eta})}{2},$$

$$\Sigma I = \frac{(I_{\xi\xi} + I_{\eta\eta})}{2}, \quad u = u_\xi, \quad v = v_\eta, \quad w = w_\xi$$

برای بی بعد سازی معادلات به شکل زیر عمل شده است،

$$u^* = \frac{u_\xi}{h_0}, \quad v^* = \frac{v_\eta}{h_0}, \quad w^* = \frac{w_\xi}{h_0}, \quad x^* = \frac{x}{L}, \quad t^* = \frac{t}{\sqrt{\frac{mL^4}{\pi^4 \Sigma D}}}, \quad P = F_x \cdot \frac{\Sigma D}{L^2}$$

$$\Omega^* = \frac{\Omega}{\sqrt{\frac{\pi^4 \Sigma D}{mL^4}}}, \quad c^* = c \frac{\pi^2 \sqrt{m \Sigma D}}{L^2}, \quad \mu = \frac{h_0^2 A_{xx}}{2 \Sigma D},$$

که h_0 و L ، به ترتیب اندازه ضخامت مقطع و طول تیر هستند. برای راحتی، در معادلات از علامت (*) صرف نظر شده است.

۵-۲- تحلیل پایداری با اعمال روش مقیاس‌های چند گانه به معادلات دیفرانسیل مشتقات جزئی (PDE)

اکنون به منظور حل معادلات بی بعد شده بدست آمده، از تئوری اغتشاشات و روش مقیاس‌های چندگانه برای تحلیل معادلات دیفرانسیل با مشتق جزئی استفاده می‌شود. به این ترتیب، فرض می‌شود،

$$v(x, t) = \varepsilon v_1(x, T_0, T_2) + \varepsilon^3 v_3(x, T_0, T_2) + \dots$$

$$w(x, t) = \varepsilon w_1(x, T_0, T_2) + \varepsilon^3 w_3(x, T_0, T_2) + \dots$$

که $T_0 = t$ و $T_2 = \varepsilon^2 t$ از طرفی،

$$\frac{\partial}{\partial t} = D_0 + \varepsilon^2 D_2 + \dots$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = D_0^2 + 2\varepsilon^2 D_2 D_0 + \dots$$

لازم به ذکر است اگر در تقریب فوق، جملات v_0, w_0, v_2, w_2 ظاهر شوند، پاسخ آنها در ادامه

صفر خواهد شد. D_0 و D_2 به ترتیب برابرند با، $\frac{\partial}{\partial T_0}$ و $\frac{\partial}{\partial T_2}$. به منظور بالانس پارامترهای غیرخطی در

معادلات و استخراج رزونانس‌های اولیه و پارامتریک، قرار می‌دهیم،

$$c = \varepsilon^2 \bar{c}, \quad \Delta D = \varepsilon^2 \bar{\Delta D}, \quad \Delta I = \varepsilon^2 \bar{\Delta I}, \quad e_\xi = \varepsilon^3 \bar{e}_\xi, \quad e_\eta = \varepsilon^3 \bar{e}_\eta, \quad F_x = \varepsilon^2 \bar{F}_x$$

به این ترتیب، با اعمال روش مقیاس‌های چندگانه و جدا سازی عبارات مرتبه $O(\varepsilon^3)$ و $O(\varepsilon^1)$

داریم،

$O(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned}
& \frac{\Omega I_x}{2\pi^2} \left[(\beta_0^2 D_0 w_1 - \beta_0 D_0 v_1') \cos(2\beta_0 x) + (\beta_0^2 D_0 v_1 + \beta_0 D_0 w_1' \beta_0) \sin(2\beta_0 x) \right] \\
& - 2 \frac{\beta_0^3 w_1'}{\pi^4} + 1/2 \left(\frac{-2\Sigma I D_0^2 v_1 \pi^2 - \Omega I_x D_0 w_1 \pi^2 + 10 v_1''}{\pi^4} \right) \beta_0^2 \\
& + 1/2 \frac{(-4\Sigma I D_0^2 w_1' \pi^2 + 3\Omega I_x D_0 v_1' \pi^2 + 8 w_1''') \beta_0}{\pi^4} \\
& + 1/2 \frac{-2v_1^{(4)} + 2\Sigma I D_0^2 v_1'' \pi^2 - 2D_0^2 v_1 \pi^4 + 2\Omega I_x D_0 w_1'' \pi^2}{\pi^4} = 0
\end{aligned} \tag{1Y-5}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\Omega I_x}{2\pi^2} \left[(\beta_0^2 D_0 v_1 + \beta_0 D_0 w_1') \cos(2\beta_0 x) + (-D_0 w_1 \beta_0^2 + D_0 v_1' \beta_0) \sin(2\beta_0 x) \right] \\
& + 2 \frac{\beta_0^3 v_1'}{\pi^4} + 1/2 \left(\frac{-2\Sigma I D_0^2 w_1 \pi^2 + \Omega I_x D_0 v_1 \pi^2 + 10 w_1''}{\pi^4} \right) \beta_0^2 \\
& + 1/2 \frac{(4\Sigma I D_0^2 v_1' \pi^2 + 3\Omega I_x D_0 w_1' \pi^2 - 8 v_1''') \beta_0}{\pi^4} \\
& + 1/2 \frac{-2w_1^{(4)} + 2\Sigma I D_0^2 w_1'' \pi^2 - 2D_0^2 w_1 \pi^4 - 2\Omega I_x D_0 v_1'' \pi^2}{\pi^4} = 0
\end{aligned} \tag{1A-5}$$

9

$O(\varepsilon^3)$:

$$\begin{aligned}
& \left[(-6D_0 v_1 \beta_0^2 - 8D_0 w_1' \beta_0 + 2D_0 v_1'') \Omega \Delta I + \frac{8\Delta D \beta_0^4}{\pi^2} w_1 - \frac{22\beta_0^3 \Delta D}{\pi^2} v_1' \right. \\
& \left. + \left(-\frac{21\Delta D}{\pi^2} w_1'' + 3\Delta I D_0^2 w_1 \right) \beta_0^2 + \left(\frac{8\Delta D}{\pi^2} v_1''' - 4\Delta I D_0^2 v_1' \right) \beta_0 - \Delta I D_0^2 w_1'' + \frac{\Delta D}{\pi^2} w_1^{(4)} \right] \frac{\sin(4\beta_0 x - 2\Omega T_0)}{\pi^2} \\
& \left[(-6D_0 v_1 \beta_0^2 + 8D_0 v_1' \beta_0 + 2D_0 w_1'') \Omega \Delta I - \frac{8\Delta D \beta_0^4}{\pi^2} v_1 - \frac{22\beta_0^3 \Delta D}{\pi^2} w_1' \right. \\
& \left. + \left(\frac{21\Delta D}{\pi^2} v_1'' - 3\Delta I D_0^2 v_1 \right) \beta_0^2 + \left(\frac{8\Delta D}{\pi^2} w_1''' - 4\Delta I D_0^2 w_1' \right) \beta_0 + \Delta I D_0^2 v_1'' - \frac{\Delta D}{\pi^2} v_1^{(4)} \right] \frac{\cos(4\beta_0 x - 2\Omega T_0)}{\pi^2} \\
& + \frac{I_{xx} \Omega}{2\pi^2} \left[((D_2 w_1 + D_0 w_3) \beta_0^2 - (D_2 v_1' + D_0 v_3') \beta_0) \cos(2\beta_0 x) + ((D_2 v_1 + D_0 v_3) \beta_0^2 + (D_2 w_1' + D_0 v_3') \beta_0) \sin(2\beta_0 x) \right] \\
& + \frac{I_{xx} \Omega}{\pi^2} (-1/2 \beta_0^2 (D_2 w_1 + D_0 w_3) + 3/2 \beta_0 (D_0 v_3' + D_2 v_1') + (D_2 w_1'' + D_0 w_3'')) \\
& + \frac{\mu}{\pi^4} (v_1' \beta_0 + w_1'') \left(\beta_0^2 \int_0^1 (v_1^2 + w_1^2) dx + 2\beta_0 \int_0^1 (v_1^2 w_1' - v_1' w_1) dx + \int_0^1 (v_1'^2 + w_1'^2) dx \right) \\
& + \left(-\Sigma I D_0^2 v_3 - 2\Sigma I D_0 D_2 v_1 + \frac{5}{\pi^2} v_3'' \right) \frac{\beta_0^2}{\pi^2} + \left(-4\Sigma I D_0 D_2 w_1' - 2\Sigma I D_0^2 w_3' + \frac{4}{\pi^2} w_3''' \right) \frac{\beta_0}{\pi^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2D_0D_2v_1 - D_0^2v_3 - \frac{v_3^{(4)}}{\pi^4} + \frac{1}{\pi^2}(\Sigma ID_0^2v_3'' + 2\Sigma ID_0D_2v_1'') - \frac{2\beta_0^3}{\pi^4}w_3' + F_x(v_1'' - \beta_0w_1') \\
& + \Omega^2 e_\eta(x) \cos(\beta_0 x - \Omega T_0) + \Omega^2 e_\xi(x) \sin(\beta_0 x - \Omega T_0) - cD_0v_1 \cos(\beta_0 x) + cD_0w_1 \sin(\beta_0 x) = 0
\end{aligned} \tag{۱۹-۵}$$

$$\begin{aligned}
& \left[(-6D_0v_1\beta_0^2 - 8D_0w_1'\beta_0 + 2D_0v_1'')\Omega\Delta I + \frac{8\Delta D\beta_0^4}{\pi^2}w_1 - \frac{22\beta_0^3\Delta D}{\pi^2}v_1' \right. \\
& \left. + \left(-\frac{21\Delta D}{\pi^2}w_1'' + 3\Delta ID_0^2w_1 \right)\beta_0^2 + \left(\frac{8\Delta D}{\pi^2}v_1''' - 4\Delta ID_0^2v_1' \right)\beta_0 - \Delta ID_0^2w_1'' + \frac{\Delta D}{\pi^2}w_1^{(4)} \right] \frac{\cos(4\beta_0 x - 2\Omega T_0)}{\pi^2} \\
& \left[(6D_0w_1\beta_0^2 + 8D_0v_1'\beta_0 + 2D_0w_1'')\Omega\Delta I + \frac{8\Delta D\beta_0^4}{\pi^2}v_1 + \frac{22\beta_0^3\Delta D}{\pi^2}w_1' \right. \\
& \left. + \left(-\frac{21\Delta D}{\pi^2}v_1'' + 3\Delta ID_0^2v_1 \right)\beta_0^2 + \left(-\frac{8\Delta D}{\pi^2}w_1''' - 4\Delta ID_0^2w_1' \right)\beta_0 + \Delta ID_0^2v_1'' - \frac{\Delta D}{\pi^2}v_1^{(4)} \right] \frac{\sin(4\beta_0 x - 2\Omega T_0)}{\pi^2} \\
& + \frac{I_{xx}\Omega}{2\pi^2} \left[-(D_2w_1 + D_0w_3)\beta_0^2 + (D_2v_1' + D_0v_3')\beta_0 \right] \sin(2\beta_0 x) + \left[(D_2v_1 + D_0v_3)\beta_0^2 + (D_2w_1' + D_0v_3')\beta_0 \right] \cos(2\beta_0 x) \\
& + \frac{I_{xx}\Omega}{\pi^2} \left(1/2\beta_0^2(D_2v_1 + D_0v_3) + 3/2\beta_0(D_0w_3' + D_2w_1') + (D_2w_1'' + D_0w_3'') \right) \\
& + \frac{\mu}{\pi^4} (v_1'\beta_0 + w_1'') \left(\beta_0^2 \int_0^1 (v_1^2 + w_1^2) dx + 2\beta_0 \int_0^1 (v_1w_1' - v_1'w_1) dx + \int_0^1 (v_1'^2 + w_1'^2) dx \right) \\
& + \left(-\Sigma ID_0^2w_3 - 2\Sigma ID_0D_2w_1 + \frac{5}{\pi^2}w_3'' \right) \frac{\beta_0^2}{\pi^2} + \left(4\Sigma ID_0D_2v_1' - 2\Sigma ID_0^2v_3' - \frac{4}{\pi^2}v_3''' \right) \frac{\beta_0}{\pi^2} \\
& - 2D_0D_2w_1 - D_0^2w_3 - \frac{w_3^{(4)}}{\pi^4} + \frac{1}{\pi^2}(\Sigma ID_0^2w_3'' + 2\Sigma ID_0D_2v_1'') - \frac{2\beta_0^3}{\pi^4}v_3' + F_x(v_1'' - \beta_0w_1') \\
& - \Omega^2 e_\eta(x) \sin(\beta_0 x - \Omega T_0) + \Omega^2 e_\xi(x) \cos(\beta_0 x - \Omega T_0) - cD_0w_1 \cos(\beta_0 x) - cD_0v_1 \sin(\beta_0 x) = 0
\end{aligned} \tag{۲۰-۵}$$

حل معادلات مرتبه اول ε به شکل زیر تخمین زده می شود،

$$\begin{aligned}
v_1(x, T_0, T_2) &= \Phi_f(x) \left(A_1(T_2)e^{i\omega_f T_0} + \bar{A}_1(T_2)e^{-i\omega_f T_0} \right) + \Phi_b(x) \left(A_2(T_2)e^{i\omega_b T_0} + \bar{A}_2(T_2)e^{-i\omega_b T_0} \right) \\
w_1(x, T_0, T_2) &= \Phi_f(x) \left(-iA_1(T_2)e^{i\omega_f T_0} + i\bar{A}_1(T_2)e^{-i\omega_f T_0} \right) + \Phi_b(x) \left(-iA_2(T_2)e^{i\omega_b T_0} + i\bar{A}_2(T_2)e^{-i\omega_b T_0} \right)
\end{aligned} \tag{۲۱-۵}$$

که ω_b و ω_f فرکانسهای خطی همسو و ناهمسو هستند که برای تیر مذکور برابر است با،

$$\omega_{f,b} = \frac{1}{2} \frac{\delta_1 \pm \sqrt{\delta_3}}{\delta_2} \tag{۲۲-۵}$$

که

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= I_{xx}\Omega(\beta_0^2 + 2\pi^2 n^2) \quad , \quad \delta_2 = 2 + (\pi^2 n^2 + \beta_0^2)\Sigma I \\
\delta_3 &= (I_{xx}\beta_0^2\Omega)^2 + 4 \left[\pi^6 n^6 \Sigma I + 2\pi^4 n^4 + (I_{xx}\pi n \Omega \beta_0)^2 + (I_{xx}\pi^2 n^2 \Omega)^2 + 6\Sigma I(\beta_0 \pi^2 n^2)^2 \right. \\
& \quad \left. + 10(\pi n \beta_0)^2 + 5\Sigma I(\beta_0^2 \pi n)^2 + (2\pi^2 n^2 \Sigma I + 2\beta_0^2 \Sigma I + 4)\pi^2 n^2 F_x \right]
\end{aligned}$$

سپس با در نظر گرفتن پارامتر تنظیم کننده برای ω_f به منظور بررسی رزونانسهای تیر

مذکور، به شکل زیر داریم:

$$\Omega = \omega_f + \varepsilon^2 \sigma \quad (23-5)$$

اکنون، با قرار دادن رابطه (23-5) و جواب مرتبه یک برای v و w (معادلات (21-5)) در

معادلات مرتبه سه برای هر دو v و w ، معادلات مرتبه سه را با جدا کردن و مرتب سازی ضرایب

$e^{i\omega_b T_0}$ و $e^{i\omega_f T_0}$ برای از بین بردن ضرایب سکولار ترم و حذف small divisorهای موجود به شکل زیر

ساده می کنیم،

$$\begin{aligned} & \left[(\beta_0^2 D_0 w_3 + i\beta_0^2 D_0 v_3 + i\beta_0 D_0 w_3' - \beta_0 D_0 v_3') e^{-2i\beta_0 x} \right. \\ & + (\beta_0^2 D_0 w_3 - i\beta_0^2 D_0 v_3 - i\beta_0 D_0 w_3' - \beta_0 D_0 v_3') e^{2i\beta_0 x} \\ & \left. + 3\beta_0 D_0 v_3' - \beta_0^2 D_0 w_3 + 2D_0 w_3'' \right] \frac{I_{xx} \Omega}{2\pi^2} \end{aligned} \quad (24-5)$$

$$\begin{aligned} & + \frac{10\beta_0^2}{\pi^4} v_3'' - \frac{4\beta_0 \Sigma I}{\pi^2} D_0^2 w_3' - \frac{4\beta_0^3}{\pi^4} w_3' - 2 \frac{(\pi^2 + \beta_0^2 \Sigma I)}{\pi^2} D_0^2 v_3 \\ & + \frac{8\beta_0}{\pi^4} w_3''' - 2 \frac{v_3^{(4)}}{\pi^4} + 2 \frac{\Sigma I}{\pi^2} D_0^2 v_3'' = P_{f,v}(x, T_2) e^{i\omega_f T_0} + P_{b,v}(x, T_2) e^{i\omega_b T_0} + CC + N.S.T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[(\beta_0^2 D_0 v_3 - i\beta_0^2 D_0 w_3 + i\beta_0 D_0 v_3' + \beta_0 D_0 w_3') e^{-2i\beta_0 x} \right. \\ & + (\beta_0^2 D_0 v_3 + i\beta_0^2 D_0 w_3 - i\beta_0 D_0 v_3' + \beta_0 D_0 w_3') e^{2i\beta_0 x} \\ & \left. + 3\beta_0 D_0 w_3' + \beta_0^2 D_0 v_3 - 2D_0 v_3'' \right] \frac{I_{xx} \Omega}{2\pi^2} \end{aligned} \quad (25-5)$$

$$\begin{aligned} & + \frac{10\beta_0^2}{\pi^4} w_3'' + \frac{4\beta_0 \Sigma I}{\pi^2} D_0^2 v_3' + \frac{4\beta_0^3}{\pi^4} v_3' - 2 \frac{(\pi^2 + \beta_0^2 \Sigma I)}{\pi^2} D_0^2 w_3 \\ & - \frac{8\beta_0}{\pi^4} v_3''' - 2 \frac{w_3^{(4)}}{\pi^4} + 2 \frac{\Sigma I}{\pi^2} D_0^2 w_3'' = P_{f,w}(x, T_2) e^{i\omega_f T_0} + P_{b,w}(x, T_2) e^{i\omega_b T_0} + CC + N.S.T \end{aligned}$$

که CC و $N.S.T$ به معنی مختلط مزدوج و ضرایب غیر سکولار می باشند. پس از بدست آوردن

ضرایب سکولار، با استفاده از شرایط حل پذیری برای آنها داریم،

$$\int_0^1 \Phi_f(x) P_f(x, T_2) dx = 0 \quad \text{و} \quad \int_0^1 \Phi_b(x) P_b(x, T_2) dx = 0 \quad (26-5)$$

که $P_{b,v}$ ، $P_{f,w}$ ، $P_{f,v}$ و $P_{b,v}$ ضرایب سکولار معادلات مرتبه ۳ از ε هستند و برابرند با،

$$\begin{aligned}
P_{f,v} = & \frac{1}{\pi^2} \left[\left(-\frac{1}{4} (\beta_0 \Phi'_f + i\beta_0^2 \Phi_f) e^{2i\beta_0 x} + \frac{1}{4} i\beta_0^2 \Phi_f + \frac{3}{4} \beta_0 \Phi'_f - \frac{1}{2} i\Phi_f'' \right) \Omega I_{xx} \right. \\
& - \left(i\beta_0^2 \Sigma I \Phi_f + 2\beta_0 \Sigma I \Phi'_f - i \Sigma I \Phi_f'' + i\pi^2 \Phi_f \right) \omega_f \left. \right] A'_1 + \left(-\frac{1}{2} i c e^{i\beta_0 x} \Phi_f \omega_f + \frac{1}{2\pi^4} (\Phi_f'' + 1/2 i\beta_0 \Phi'_f) F_x \right) A_1 \\
& + \frac{1}{2\pi^4} \left[(\Phi_f'' + i\beta_0 \Phi'_f) \int_0^1 \Phi_b'^2 dx + (\beta_0^2 \Phi_f'' + i\beta_0^3 \Phi_f') \int_0^1 \Phi_b^2 dx + (\Phi_b'' + i\beta_0 \Phi_b') \int_0^1 \Phi_f' \Phi_b' dx + (\beta_0^2 \Phi_b'' + i\beta_0^3 \Phi_b') \int_0^1 \Phi_f \Phi_b dx \right. \\
& + \left. (-\beta_0^2 \Phi_b' + i\beta_0 \Phi_b'') \int_0^1 \Phi_b' \Phi_f dx + (-i\beta_0 \Phi_b'' + \beta_0^2 \Phi_b') \int_0^1 \Phi_f' \Phi_b dx \right] \mu \bar{A}_2 A_2 A_1 \\
& + \frac{1}{2\pi^4} \left[(\beta_0^2 \Phi_f'' + i\beta_0^3 \Phi_f') \int_0^1 \Phi_f^2 dx + (\Phi_f'' + i\beta_0 \Phi_f') \int_0^1 \Phi_f'^2 dx \right] \mu A_1^2 \bar{A}_1 + \frac{1}{2} (e_\eta + i e_\xi) \Omega^2 e^{-i\beta_0 x} e^{i\sigma T_z} \\
& + \left[\frac{1}{\pi^2} (\Delta I \Phi_f'' - 4i\Delta I \beta_0 \Phi_f' - 3\Delta I \beta_0^2 \Phi_f) \Omega \omega_f + \frac{1}{\pi^4} \left(\frac{3}{2} \Delta I \Phi_f \omega_f^2 + 2\frac{1}{2} \Delta D \Phi_f'' \right) \beta_0^2 \right. \\
& \left. + \frac{1}{\pi^4} (4\Delta D \Phi_f'' + 2\pi^2 \Delta I \Phi_f' \omega_f^2) i\beta_0 - \frac{1}{2\pi^2} \Delta I \omega_f^2 \Phi_f'' - \frac{1}{2\pi^4} \Delta D \Phi_f^{(4)} - \frac{1}{\pi^4} (4\Delta D \beta_0^4 \Phi_f + 11i\Delta D \beta_0^3 \Phi_f') \right] \bar{A}_1 e^{2i\sigma T_z} e^{-4i\beta_0 x}
\end{aligned} \tag{27-5}$$

$$\begin{aligned}
P_{b,v} = & \frac{1}{\pi^2} \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} (\beta_0 \Phi_b' + i\beta_0^2 \Phi_b) e^{2i\beta_0 x} + (-i\Phi_b'' + \frac{1}{2} i\beta_0^2 \Phi_b + \frac{3}{2} \beta_0 \Phi_b') \right) I_{xx} \Omega \right. \\
& - \left. (i\beta_0^2 \Phi_b + 2\beta_0 \Phi_b') \Sigma I \omega_b + (-\pi^2 \Phi_b + \Sigma I \Phi_b'') i\omega_b \right] A'_2 - \frac{1}{2} (i c e^{i\beta_0 x} \omega_b \Phi_b - F_x (i\beta_0 \Phi_b' + \Phi_b'')) A_2 \\
& + \frac{1}{2\pi^4} \left[(i\beta_0 \Phi_b' + \Phi_b'') \int_0^1 \Phi_b'^2 dx + (\beta_0^2 \Phi_b'' + i\beta_0^3 \Phi_b') \int_0^1 \Phi_b^2 dx \right] \mu \bar{A}_2 A_2^2 \\
& + \frac{1}{2\pi^4} \left[(\Phi_b'' + i\beta_0 \Phi_b') \int_0^1 \Phi_f'^2 dx + (i\beta_0^3 \Phi_b' + \beta_0^2 \Phi_b'') \int_0^1 \Phi_f^2 dx + (\beta_0^2 \Phi_f' - i\beta_0 \Phi_f'') \int_0^1 \Phi_b' \Phi_f dx \right. \\
& \left. + (\Phi_f'' + i\beta_0 \Phi_f') \int_0^1 \Phi_f' \Phi_b' dx + (i\beta_0 \Phi_f'' - \beta_0^2 \Phi_f') \int_0^1 \Phi_f \Phi_b dx + (i\beta_0^3 \Phi_f' + \beta_0^2 \Phi_f'') \int_0^1 \Phi_f \Phi_b dx \right] \mu A_1 A_2 \bar{A}_1
\end{aligned} \tag{28-5}$$

$$\begin{aligned}
P_{f,w} = & \frac{1}{\pi^2} \left[1/2 \left(\left(\frac{1}{2} \beta_0^2 \Phi_f - \frac{1}{2} i\beta_0 \Phi_f' \right) e^{2i\beta_0 x} + \frac{1}{2} \beta_0^2 \Phi_f - \frac{3}{2} i\beta_0 \Phi_f' - \Phi_f'' \right) \Omega I_{xx} \right. \\
& - \left. (-i\beta_0^2 \Sigma I \Phi_f + 2i\beta_0 \Sigma I \Phi_f' + \pi^2 \Phi_f + \Sigma I \Phi_f'') \omega_f \right] A'_1 \\
& + \frac{1}{2\pi^4} \left[(-i\Phi_f'' + \beta_0 \Phi_f') \int_0^1 \Phi_b'^2 dx + (-i\beta_0^2 \Phi_f'' + \beta_0^3 \Phi_f') \int_0^1 \Phi_b^2 dx + (-i\Phi_b'' + \beta_0 \Phi_b') \int_0^1 \Phi_f' \Phi_b' dx \right. \\
& + \left. (-i\beta_0^2 \Phi_b'' + \beta_0^3 \Phi_b') \int_0^1 \Phi_f \Phi_b dx + (i\beta_0^2 \Phi_b' + \beta_0 \Phi_b'') \int_0^1 \Phi_b' \Phi_f dx + (-\beta_0 \Phi_b'' - i\beta_0^2 \Phi_b') \int_0^1 \Phi_f' \Phi_b dx \right] \mu \bar{A}_2 A_2 A_1 \\
& + \frac{1}{2\pi^4} \left[(-i\beta_0^2 \Phi_f'' + \beta_0^3 \Phi_f') \int_0^1 \Phi_f^2 dx + (-\Phi_f'' + \beta_0 \Phi_f') \int_0^1 \Phi_f'^2 dx \right] \mu A_1^2 \bar{A}_1 \\
& + \left[\frac{1}{\pi^2} (-i\Phi_f'' - 4\beta_0 \Phi_f' + 3i\beta_0^2 \Phi_f) \Omega \omega_f \Delta I - \frac{1}{\pi^4} (-4i\beta_0^4 \Phi_f + 11\beta_0^3 \Phi_f') \Delta D - \frac{1}{\pi^4} \left(\frac{3}{2} \Delta I \Phi_f \omega_f^2 + 2\frac{1}{2} \Delta D \Phi_f'' \right) i\beta_0^2 \right. \\
& \left. + \frac{1}{\pi^4} (4\Delta D \Phi_f'' + 2\pi^2 \Delta I \Phi_f' \omega_f^2) \beta_0 + \frac{1}{2\pi^2} i \Delta I \omega_f^2 \Phi_f'' + \frac{1}{2\pi^4} i \Delta D \Phi_f^{(4)} \right] \bar{A}_1 e^{2i\sigma T_z} e^{-4i\beta_0 x} \\
& + \left(-\frac{1}{2} c e^{i\beta_0 x} \Phi_f \omega_f + \frac{1}{2\pi^4} F_x (\beta_0 \Phi_f' - i\Phi_f'') \right) A_1 + \frac{1}{2} (-i e_\eta + e_\xi) \Omega^2 e^{-i\beta_0 x} e^{i\sigma T_z}
\end{aligned} \tag{29-5}$$

$$\begin{aligned}
P_{b,w} = & \frac{1}{\pi^2} \left[1/2 \left(-1/2 \left(i\beta_0 \Phi'_b + \beta_0^2 \Phi_b \right) e^{2i\beta_0 x} + \left(-\Phi_b'' + 1/2 \beta_0^2 \Phi_b - 3/2 i \beta_0 \Phi_b' \right) \right) I_{xx} \Omega \right. \\
& - \left(\beta_0^2 \Phi_b - 2i \beta_0 \Phi_b' \right) \Sigma I \omega_b + \left(-\pi^2 \Phi_b + \Sigma I \Phi_b'' \right) \omega_b \left. \right] A_2' + \left(-\frac{1}{2} c e^{i\beta_0 x} \omega_b \Phi_b + \frac{1}{2\pi^4} F_x \left(\beta_0 \Phi_b' - i\Phi_b'' \right) A_2 \right) \\
& + \frac{1}{2\pi^4} \left[\left(\beta_0 \Phi_b' - i\Phi_b'' \right) \int_0^1 \Phi_b'^2 dx + \left(-i\beta_0^2 \Phi_b'' + \beta_0^3 \Phi_b' \right) \int_0^1 \Phi_b^2 dx \right] \mu \bar{A}_2 A_2^2 \\
& + \frac{1}{2\pi^4} \left[\left(-i\Phi_b'' + \beta_0 \Phi_b' \right) \int_0^1 \Phi_f'^2 dx + \left(\beta_0^3 \Phi_b' - i\beta_0^2 \Phi_b'' \right) \int_0^1 \Phi_f^2 dx - \left(i\beta_0^2 \Phi_f' + \beta_0 \Phi_f'' \right) \int_0^1 \Phi_b' \Phi_f dx \right. \\
& \left. + \left(-i\Phi_f'' + \beta_0 \Phi_f' \right) \int_0^1 \Phi_f' \Phi_b' dx - \left(\beta_0 \Phi_f'' + i\beta_0^2 \Phi_f' \right) \int_0^1 \Phi_f' \Phi_b dx + \left(\beta_0^3 \Phi_f' - i\beta_0^2 \Phi_f'' \right) \int_0^1 \Phi_f \Phi_b dx \right] \mu A_1 A_2 \bar{A}_1
\end{aligned} \tag{۳۰-۵}$$

به این ترتیب، با توجه به شرایط حل پذیری فوق و تقریب شکل مدها به صورت شکل مدهای

خطی با شرایط مرزی دو سر مفصل به صورت زیر داریم، $\Phi_f = \Phi_b = \sin(n\pi x)$

$$\begin{aligned}
i \left[\Pi_{1,v} + \Pi_{2,v} \omega_f \right] D_2 A_1 + 4\mu \Pi_{3,v} A_1^2 \bar{A}_1 + \Pi_{4,v} c \omega_f \left(\frac{1 - e^{i\beta_0}}{\beta_0} \right) A_1 + 2\mu \Pi_{3,v} A_1 \bar{A}_2 A_2 + \Pi_{10,v} F_x A_1 \\
\Pi_{5,v} \left(e_\eta + i e_\xi \right) \Omega^2 e^{i\sigma T_2} + i \left[\Pi_{6,v} \omega_f^2 + \Pi_{7,v} \omega_f + \Pi_{8,v} \right] \left(\frac{1 - e^{-4i\beta_0}}{\beta_0} \right) e^{2i\sigma T_2} \bar{A}_1 = 0
\end{aligned} \tag{۳۱-۵}$$

۹

$$i \Pi_{1,w} D_2 A_2 + 16n^2 \pi^2 c \omega_b \left(\frac{1 - e^{i\beta_0}}{\beta_0} \right) A_2 + \Pi_{2,w} \mu \bar{A}_2 A_2^2 + 2\Pi_{2,w} \mu A_2 A_1 \bar{A}_1 + \Pi_{3,w} F_x A_2 = 0 \tag{۳۲-۵}$$

که

$$\begin{aligned}
\Pi_{1,v} &= \left(8\beta_0^6 - 18\pi^2 n^2 \beta_0^4 - 60\pi^4 n^4 \beta_0^2 + 16\pi^6 n^6 \right) I_{xx} \Omega, \\
\Pi_{2,v} &= \left[136\pi^4 n^2 \beta_0^2 - 32\left(\pi^4 n^4 + \pi^2 \beta_0^4 \right) - 32\left(\pi^6 n^6 + \beta_0^6 \right) \Sigma I + 104\pi^2 n^2 \beta_0^2 \left(\pi^2 n^2 + \beta_0^2 \right) \Sigma I \right], \\
\Pi_{3,v} &= \left[208\pi^2 n^4 \beta_0^2 \left(\pi^2 n^2 + \beta_0^2 \right) - 64\left(\pi^6 n^8 + n^2 \beta_0^6 \right) \right], \\
\Pi_{4,v} &= 16\pi^4 n^2 \left(\pi^2 n^2 - 4\beta_0^2 \right), \Pi_{5,v} = 4\left(-17\beta_0^2 n^2 \pi^4 + 4\pi^2 \beta_0^4 + 4n^4 \pi^6 \right) \\
\Pi_{6,v} &= \left(21\pi^2 n^2 \beta_0^2 - 4\pi^4 n^4 - 5\beta_0^4 \right) \pi^2 n^2 \Delta I, \\
\Pi_{7,v} &= \left(-42\pi^2 n^2 \beta_0^2 + 8\pi^4 n^4 + 10\beta_0^4 \right) \pi^2 n^2 \Delta I \Omega, \\
\Pi_{8,v} &= \left(4\pi^6 n^8 + 36\beta_0^6 n^2 + 19\pi^4 n^6 \beta_0^2 - 149\pi^2 n^4 \beta_0^4 \right) \Delta D, \\
\Pi_{9,v} &= \left[-6\pi^4 n^4 \beta_0^2 - 8\pi^6 n^6 + 162\beta_0^4 n^2 \pi^2 - 40\beta_0^6 \right] n^2 \pi^2, \\
\Pi_{10,v} &= \left(-16\pi^4 n^4 + 68\pi^2 n^2 \beta_0^2 - 16\beta_0^4 \right) n^2 \\
\Pi_{1,w} &= \left[2\left(-\beta_0^4 + 2\beta_0^2 n^2 \pi^2 + 8n^4 \pi^4 \right) I_{xx} \Omega + 8\left(-3\beta_0^2 n^2 \pi^2 + \beta_0^4 - 4n^4 \pi^4 \right) \Sigma I \omega_b \right. \\
& \left. + 8\left(-4n^2 \pi^4 + \pi^2 \beta_0^2 \right) \omega_b \right], \Pi_{2,w} = 16\left(n^2 \beta_0^4 - 3\beta_0^2 n^4 \pi^2 - 4n^6 \pi^4 \right),
\end{aligned}$$

$$\Pi_{3,w} = 4(\beta_0^2 - 4n^2\pi^2)n^2$$

$$e_\eta = \int_0^1 \Phi_{flb}(x)e_\eta(x)dx, e_\xi = \int_0^1 \Phi_{flb}(x)e_\xi(x)dx. \quad (33-5)$$

برای حذف $e^{i\sigma T_0}$ در معادلات قرار می دهیم،

$$A_1(T_2) = A(T_2)e^{i\sigma T_2} \quad (34-5)$$

و در نهایت برای بدست آوردن پاسخ معادلات حاصل، $A(T_2)$ و $A_2(T_2)$ را به صورت قطبی

$$A = \frac{1}{2}a_1(T_2)e^{i\Theta(T_2)}, A_2 = \frac{1}{2}a_2(T_2)e^{i\theta(T_2)} \quad (35-5)$$

در معادلات حاصل قرار می دهیم. سپس با جداسازی بخشهای حقیقی و موهومی دو معادله

حاصل، چهار معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول به شکل زیر بدست می آید،

$$\begin{aligned} & [\Pi_{1,v} + \Pi_{2,v}\omega_f] a_1 D_2 \Theta = 1/4\Pi_{3,v}\mu a_1^3 + 1/2\Pi_{3,v}\mu a_2^2 a_1 + \left(\Pi_{4,v} \left(\frac{1 - \cos(\beta_0)}{\beta_0} \right) c\omega_f + \Pi_{10,v} F_x \right) a_1 \\ & + [\Pi_{6,v}\omega_f^2 + \Pi_{7,v}\omega_f + \Pi_{8,v}] \left(\frac{\sin(2\Theta) - \sin(4\beta_0 + 2\Theta)}{\beta_0} \right) a_1 \\ & - [\Pi_{1,v} + \Pi_{2,v}\omega_f] \sigma a_1 + 2\Omega^2 \Pi_{5,v} (e_\xi \sin(\Theta) + e_\eta \cos(\Theta)) \end{aligned} \quad (36-5)$$

$$\begin{aligned} & [\Pi_{1,v} + \Pi_{2,v}\omega_f] D_2 a_1 = \Pi_{4,v} \sin(\beta_0) c\omega_f a_1 + [\Pi_{6,v}\omega_f^2 + \Pi_{7,v}\omega_f + \Pi_{8,v}] \left(\frac{-\cos(2\Theta) + \cos(4\beta_0 + 2\Theta)}{\beta_0} \right) a_1 \\ & + 2\Pi_{5,v}\Omega^2 (e_\eta \sin(\Theta) - e_\xi \cos(\Theta)) \end{aligned} \quad (37-5)$$

$$\Pi_{1,w} D_2 a_2 = 16n^2\pi^4 c\omega_b \left(\frac{\sin(\beta_0)}{\beta_0} \right) a_2 \quad (38-5)$$

$$\frac{1}{2}\Pi_{1,w} a_2 D_2 \theta = \frac{1}{2}\Pi_{2,w}\mu a_2 a_1^2 + \left(8n^2\pi^4 c\omega_b \left(\frac{1 - \cos(\beta_0)}{\beta_0} \right) + \Pi_{3,w} F_x \right) a_2 + \frac{1}{8}\Pi_{2,w}\mu a_2^3 \quad (39-5)$$

به منظور بررسی پایداری ارتعاشاتی تیر مورد نظر و همچنین استخراج نقاط ثابت تعادلی

معادلات مذکور، می بایست مشتقات زمانی آنها صفر در نظر گرفته شوند. با انجام این کار و همانطور که

از معادلات نشان داده شده مشخص است، a_2 نیز برابر صفر خواهد شد و این بدان معنی است که تنها

لنگ زنی همسو تحریک خواهد شد. به این ترتیب، معادلات نهایی برای بررسی پایداری سیستم مورد

نظر عبارتند از،

$$\begin{aligned}
& 1/4\Pi_{3,v}\mu a_{10}^3 + \left(\Pi_{4,v} \left(\frac{1 - \cos(\beta_0)}{\beta_0} \right) c\omega_f + \Pi_{10,v} F_x \right) a_{10} \\
& + \left[\Pi_{6,v}\omega_f^2 + \Pi_{7,v}\omega_f + \Pi_{8,v} \right] \left(\frac{\sin(2\Theta_0) - \sin(4\beta_0 + 2\Theta_0)}{\beta_0} \right) a_1 \\
& - \left[\Pi_{1,v} + \Pi_{2,v}\omega_f \right] \sigma a_{10} + 2\Omega^2 \Pi_{5,v} (e_\xi \sin(\Theta_0) + e_\eta \cos(\Theta_0)) = 0
\end{aligned} \tag{۴۰-۵}$$

$$\begin{aligned}
& \Pi_{4,v} \sin(\beta_0) c\omega_f a_{10} + \left[\Pi_{6,v}\omega_f^2 + \Pi_{7,v}\omega_f + \Pi_{8,v} \right] \left(\frac{-\cos(2\Theta_0) + \cos(4\beta_0 + 2\Theta_0)}{\beta_0} \right) a_{10} \\
& + 2\Pi_{5,v}\Omega^2 (e_\eta \sin(\Theta_0) - e_\xi \cos(\Theta_0)) = 0
\end{aligned} \tag{۴۱-۵}$$

۳-۵ - تحلیل پایداری با استفاده از روش گالرکین با اعمال روش مقیاس‌های چند گانه به معادلات دیفرانسیل با مشتقات معمولی (ODE)

در این بخش، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی با استفاده از روش تقریبی گالرکین به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شوند. برای این منظور، با فرض اینکه تنها یک مد حرکتی تحریک می‌شود، روش گالرکین به شکل زیر به معادلات اعمال می‌شود،

$$\begin{aligned}
v(x,t) &= \Phi_n(x)V(t) \\
w(x,t) &= \Phi_n(x)W(t)
\end{aligned} \tag{۴۲-۵}$$

که $\Phi_n(x)$ و n به ترتیب شکل مدهای عرضی و شماره مد می‌باشند. با جایگذاری معادله (۵-۵)

در (۴۲-۵) و (۱۰-۵)، ضرب طرفین معادله حاصل در شکل مدهای متناظر خود، انتگرال گیری جزء به جزء در فاصله $[0,1]$ و استفاده از خاصیت تعامد شکل مدها داریم،

$$\begin{aligned}
& \left(\Pi_{6,v}\ddot{V} + \Pi_{7,v}\dot{V} - \Pi_{8,v}V \right) \left(\frac{\sin(2\Omega t - 4\beta_0) + \sin(2\Omega t)}{\beta_0} \right) \\
& + \left(\Pi_{6,v}\ddot{W} + \Pi_{7,v}\dot{W} - \Pi_{8,v}W \right) \left(\frac{\cos(2\Omega t - 4\beta_0) - \cos(2\Omega t)}{\beta_0} \right) \\
& - \Pi_{1,v}\dot{W} + \Pi_{4,v}c \left(\dot{V} \left(\frac{\sin(\beta_0)}{\beta_0} \right) + \dot{W} \left(\frac{1 + \cos(\beta_0)}{\beta_0} \right) \right) + 1/2\Pi_{2,v}\ddot{V} + \Pi_{3,v}(V^3 + VW^2) \\
& + (2\Pi_{9,v} + \Pi_{10,v}F_x)V + 1/4\Pi_{5,v}\Omega^2 (e_\eta \cos(\Omega t) - e_\xi \sin(\Omega t)) = 0
\end{aligned} \tag{۴۳-۵}$$

$$\begin{aligned}
& (\Pi_{6,v}\ddot{V} + \Pi_{7,v}\dot{V} - \Pi_{8,v}V) \left(\frac{\cos(2\Omega t - 4\beta_0) - \cos(2\Omega t)}{\beta_0} \right) \\
& - (\Pi_{6,v}\ddot{W} + \Pi_{7,v}\dot{W} - \Pi_{8,v}W) \left(\frac{\sin(2\Omega t - 4\beta_0) + \sin(2\Omega t)}{\beta_0} \right) \\
& + \Pi_{1,v}\dot{V} - \Pi_{4,v}c \left(\dot{V} \left(\frac{1 + \cos(\beta_0)}{\beta_0} \right) - \dot{W} \left(\frac{\sin(\beta_0)}{\beta_0} \right) \right) + 1/2\Pi_{2,v}\ddot{V} + \Pi_{3,v}(W^3 + V^2W) \\
& + (2\Pi_{9,v} + \Pi_{10,v}F_x)W + 1/4\Pi_{5,v}\Omega^2(e_\eta \sin(\Omega t) + e_\xi \cos(\Omega t)) = 0
\end{aligned} \tag{44-5}$$

از آنجا که معادلات (43-5) و (44-5) شامل تنها جملات غیر خطی مرتبه سه می باشد، تقریب

(45-5) را می توان به شکل زیر به معادلات (43-5) و (44-5) اعمال کرد،

$$\begin{aligned}
V(t) &= \varepsilon V_1(T_0, T_2) + \varepsilon^3 V_3(T_0, T_2) + \dots \\
W(t) &= \varepsilon V_1(T_0, T_2) + \varepsilon^3 V_3(T_0, T_2) + \dots
\end{aligned} \tag{45-5}$$

لازم به ذکر است اگر در تقریب فوق، جملات W_2, V_2, W_0, V_0 ظاهر شوند، پاسخ آنها در ادامه

صفر خواهد شد. برای بالانس ترمهای غیر خطی و به منظور استخراج رزونانس های اولیه و پارامتریک،

پارامترهای بی بعد زیر به شکل زیر مقیاس بندی شده و در معادلات حاصل قرار می دهیم،

$$c = \varepsilon^2 \bar{c}, \Delta D = \varepsilon^2 \bar{\Delta D}, \Delta I = \varepsilon^2 \bar{\Delta I}, e_\zeta = \varepsilon^3 \bar{e}_\zeta, e_\eta = \varepsilon^3 \bar{e}_\eta, F_x = \varepsilon^2 \bar{F}_x \tag{46-5}$$

با جایگذاری معادلات (45-5) و (46-5) در معادلات (43-5) و (44-5) و برابر قرار دادن ضرایب

توانهای مشابه ε و ε^3 داریم،

$O(\varepsilon)$:

$$-2 \left(n^4 + \frac{5\beta_0^2 n^2}{\pi^2} \right) V_1 - \left(2 + 2n^2 + \frac{2\beta_0^2}{\pi^2} \right) \Sigma I D_0^2 V_1 - \left(2n^2 + \frac{\beta_0^2}{\pi^2} \right) \Omega I_{xx} D_0 W_1 = 0 \tag{47-5}$$

$$-2 \left(n^4 + \frac{5\beta_0^2 n^2}{\pi^2} \right) W_1 - \left(2 + 2n^2 + \frac{2\beta_0^2}{\pi^2} \right) \Sigma I D_0^2 W_1 + \left(2n^2 + \frac{\beta_0^2}{\pi^2} \right) \Omega I_{xx} D_0 V_1 = 0 \tag{48-5}$$

$O(\varepsilon^3)$:

$$\begin{aligned}
& (\Pi_{6,v} D_0^2 V_1 + \Pi_{7,v} D_0 V_1 - \Pi_{8,v} V_1) \left(\frac{\sin(2\Omega t - 4\beta_0) + \sin(2\Omega t)}{\beta_0} \right) \\
& + (\Pi_{6,v} D_0^2 W_1 + \Pi_{7,v} D_0 W_1 - \Pi_{8,v} W_1) \left(\frac{\cos(2\Omega t - 4\beta_0) - \cos(2\Omega t)}{\beta_0} \right) \\
& - \Pi_{1,v} D_0 W_3 + 1/2\Pi_{2,v} D_0^2 V_3 + 2\Pi_{9,v} V_3 - \Pi_{10,v} F_x V_1 \\
& - \Pi_{1,v} D_2 W_1 + \Pi_{3,v} (V_1^3 - V_1 W_1^2 + 2V_1 W_1^2) + \Pi_{2,v} D_2 D_0 V_1 - \Pi_{4,v} c \left(\frac{D_0 V_1 \sin(\beta_0) + D_0 W_1 (1 + \cos(\beta_0))}{\beta_0} \right) \\
& + 1/4\Pi_{5,v} \Omega^2 (e_\eta \cos(\Omega T_0) - e_\xi \sin(\Omega T_0)) = 0
\end{aligned} \tag{49-5}$$

$$\begin{aligned}
& (\Pi_{6,v}D_0^2V_1 + \Pi_{7,v}D_0V_1 - \Pi_{8,v}V_1) \left(\frac{\cos(2\Omega t - 4\beta_0) - \cos(2\Omega t)}{\beta_0} \right) \\
& - (\Pi_{6,v}D_0^2W_1 + \Pi_{7,v}D_0W_1 - \Pi_{8,v}W_1) \left(\frac{\sin(2\Omega t - 4\beta_0) + \sin(2\Omega t)}{\beta_0} \right) \\
& + \Pi_{1,v}D_0V_3 + 1/2\Pi_{2,v}D_0^2W_3 + 2\Pi_{9,v}W_3 + \Pi_{10,v}F_xW_1 \\
& + \Pi_{1,v}D_2V_1 + \Pi_{3,v}(2V_1^2W - V_1^2W_1 + W_1^3) + \Pi_{2,v}D_2D_0W_1 - \Pi_{4,v}C \left(\frac{D_0V_1(1+\cos(\beta_0)) - D_0W_1\sin(\beta_0)}{\beta_0} \right) \\
& + 1/4\Pi_{5,v}\Omega^2(e_\eta\sin(\Omega T_0) + e_\xi\cos(\Omega T_0)) = 0
\end{aligned} \tag{50-5}$$

پاسخ معادلات (47-5) و (48-5) را می توان به شکل زیر بیان کرد،

$$\begin{aligned}
V_1(T_0, T_2) &= A_1(T_2)e^{i\omega_f T_0} + A_2(T_2)e^{i\omega_b T_0} + CC \\
W_1(T_0, T_2) &= -iA_1(T_2)e^{i\omega_f T_0} - iA_2(T_2)e^{i\omega_b T_0} + CC
\end{aligned} \tag{51-5}$$

اکنون، با جایگذاری معادله (51-5) در (49-5) و (50-5)، داریم،

$$-\Gamma_1 D_0^2 V_3 - \Gamma_2 V_3 - \Gamma_3 D_0 W_3 = G_{f,v}(T_2)e^{i\omega_f T_0} + G_{b,v}(T_2)e^{i\omega_b T_0} + N.S.T + CC \tag{52-5}$$

$$-\Gamma_1 D_0^2 W_3 - \Gamma_2 W_3 + \Gamma_3 D_0 V_3 = G_{f,w}(T_2)e^{i\omega_f T_0} + G_{b,w}(T_2)e^{i\omega_b T_0} + N.S.T + CC \tag{53-5}$$

که CC و N.S.T مزدوجهای مختلط و جملات غیر سکولار می باشند و،

$$\Gamma_1 = 4 + \left(\frac{4}{\pi^2}\beta_0^2 + 4n^2\right)\Sigma I, \Gamma_2 = \left(\frac{20}{\pi^2}n^2\beta_0^2 + 4n^4\right), \Gamma_3 = \left(4n^2 + \frac{2}{\pi^2}\beta_0^2\right)I_{xx}\Omega \tag{54-5}$$

همچنین، $G_{b,w}(T_2)$ و $G_{f,w}(T_2)$ ، $G_{b,v}(T_2)$ ، $G_{f,v}(T_2)$ دربردارنده جملات شامل سکولار می-

باشند که برابرند با،

$$\begin{aligned}
G_{f,v} &= (\Pi_{1,v} + \omega_f \Pi_{2,v})iA_1' + \Pi_{4,v}\omega_f \left(\frac{1 - ce^{i\beta_0}}{\beta_0} \right) A_1 + \Pi_{3,v}A_1^2\bar{A}_1 + 2\Pi_{3,v}A_1\bar{A}_2A_2 \\
& + \left[\Pi_{6,v}\omega_f^2 + \Pi_{7,v}\omega_f + \Pi_{8,v} \right] \bar{A}_1 \left(\frac{1 - e^{-4i\beta_0}}{\beta_0} \right) e^{2i\sigma T_2} - \Pi_{10,v}F_x A_1 + 1/4\Pi_{5,v}(e_\eta + ie_\xi)\Omega^2 e^{i\sigma T_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{f,w} &= (-\Pi_{1,v} + \omega_f \Pi_{2,v})A_1' - \Pi_{4,v}\omega_f \left(\frac{1 - ce^{i\beta_0}}{\beta_0} \right) iA_1 - \Pi_{3,v}\mu i A_1^2 \bar{A}_1 - 2\Pi_{3,v}\mu i A_1 \bar{A}_2 A_2 \\
& + \left[\Pi_{6,v}\omega_f^2 + \Pi_{7,v}\omega_f + \Pi_{8,v} \right] \bar{A}_1 \left(\frac{1 - e^{-4i\beta_0}}{\beta_0} \right) e^{2i\sigma T_2} - i\Pi_{10,v}F_x A_1 - 1/4\Pi_{5,v}(e_\xi - ie_\eta)\Omega^2 e^{i\sigma T_2}
\end{aligned}$$

$$G_{b,v} = 1/2\Pi_{1,w}iA_2' + 1/2\Pi_{2,w}\mu A_2^2\bar{A}_2 + \Pi_{2,w}\mu A_1\bar{A}_1A_2 + 8n^2\pi^4 \left(\frac{1 - e^{i\beta_0}}{\beta_0} \right) \omega_b A_2 - 2\Pi_{3,w}F_x A_2$$

$$G_{b,w} = 1/2\Pi_{1,w}A_2' - 1/2\Pi_{2,w}i\mu A_2^2\bar{A}_2 - \Pi_{2,w}i\mu A_1\bar{A}_1A_2 - 8i\pi^2n^2\left(\frac{1-e^{i\beta_0}}{\beta_0}\right)\omega_bA_2 + 2i\Pi_{3,w}F_xA_2$$

برای حذف جملات سکولار، جواب بخش خصوصی متناظر با $\pm e^{i\omega_f T_0}$ و $\pm e^{i\omega_b T_0}$ در معادلات (۵۳-۵) -

(۵۲) و (۵۳-۵) برابر است با،

$$\begin{aligned} V_3 &= P_{11}(T_2)e^{i\omega_f T_0} + Q_{11}(T_2)e^{i\omega_b T_0} \\ W_3 &= P_2(T_2)e^{i\omega_f T_0} + Q_{22}(T_2)e^{i\omega_b T_0} \end{aligned} \quad (۵۵-۵)$$

با جایگذاری معادله (۵۵-۵) در (۵۲-۵) و (۵۳-۵) و برابر قرار دادن ضرایب جملات شامل

$\pm e^{i\omega_b T_0}$ و $\pm e^{i\omega_f T_0}$ ، معادله حاصل دارای پاسخ های غیر صفر می باشد اگر و تنها اگر شرایط حل پذیری

به شکل زیر برقرار باشد،

$$\begin{vmatrix} \Gamma_1\omega_f^2 - \Gamma_2 & G_{f,v} \\ i\Gamma_3\omega_f & G_{f,w} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{یا} \quad \begin{vmatrix} G_{f,v} & -i\Gamma_3\omega_f \\ G_{f,w} & \Gamma_1\omega_f^2 - \Gamma_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (۵۶-۵)$$

و

$$\begin{vmatrix} \Gamma_1\omega_b^2 - \Gamma_2 & G_{b,v} \\ i\Gamma_3\omega_b & G_{b,w} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{یا} \quad \begin{vmatrix} G_{b,v} & -i\Gamma_3\omega_b \\ G_{b,w} & \Gamma_1\omega_b^2 - \Gamma_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (۵۷-۵)$$

در نهایت حاصل دو دترمینان مذکور برابر است با،

$$\begin{aligned} i[\Pi_{1,v} + \Pi_{2,v}\omega_f]D_2A_1 + 4\mu\Pi_{3,v}A_1^2\bar{A}_1 + \Pi_{4,v}c\omega_f\left(\frac{1-e^{i\beta_0}}{\beta_0}\right)A_1 + 2\mu\Pi_{3,v}A_1\bar{A}_2A_2 + \Pi_{10,v}F_xA_1 \\ \Pi_{5,v}(e_\eta + ie_\xi)\Omega^2e^{i\sigma T_2} + i[\Pi_{6,v}\omega_f^2 + \Pi_{7,v}\omega_f + \Pi_{8,v}]\left(\frac{1-e^{-4i\beta_0}}{\beta_0}\right)e^{2i\sigma T_2}\bar{A}_1 = 0 \end{aligned} \quad (۵۸-۵)$$

و

$$i\Pi_{1,w}D_2A_2 + 16n^2\pi^2c\omega_b\left(\frac{1-e^{i\beta_0}}{\beta_0}\right)A_2 + \Pi_{2,w}\mu\bar{A}_2A_2^2 + 2\Pi_{2,w}\mu A_2A_1\bar{A}_1 + \Pi_{3,w}F_xA_2 = 0 \quad (۵۹-۵)$$

که دو معادله مذکور با آنچه در معادلات (۳۱-۵) و (۳۲-۵) بدست آمده، یکسان می باشند.

۴-۵ - تحلیل پایداری با تعیین ماتریس ژاکوبین

به منظور پایداری حالت پایای معادلات مرتبه اول (۳۶-۵) تا (۳۹-۵) و با فرض $a_2(T_2)=0$ ،

ماتریس ژاکوبین، J ، طرف راست معادلات (۳۶-۵) و (۳۷-۵)، برابر است با [118]:

$$J = \begin{bmatrix} \left[\frac{3\Pi_{3,v}}{4\Lambda_{1,v}a_{10}}\mu a_{10}^2 + \frac{1}{\Lambda_{1,v}a_{10}} \left(\Pi_{4,v} \left(\frac{1-\cos(\beta_0)}{\beta_0} \right) c\omega_f + \Pi_{10,v}F_x \right) \right] & \left[\frac{\Lambda_{2,v}}{\Lambda_{1,v}} \left(\frac{2\cos(2\Theta_0) - 2\cos(4\beta_0 + 2\Theta_0)}{\beta_0} \right) \right] \\ \left[\frac{\Lambda_{2,v}}{\Lambda_{1,v}a_{10}} \left(\frac{\sin(2\Theta_0) - \sin(4\beta_0 + 2\Theta_0)}{\beta_0} \right) - \frac{\sigma}{a_{10}} \right] & \left[+2\Omega^2 \frac{\Pi_{5,v}}{\Lambda_{1,v}a_{10}} (e_\xi \cos(\Theta_0) - e_\eta \sin(\Theta_0)) \right] \\ \left[\frac{\Lambda_{2,v}}{\Lambda_{1,v}} \left(\frac{-\cos(2\Theta_0) + \cos(4\beta_0 + 2\Theta_0)}{\beta_0} \right) \right] & \left[\frac{\Lambda_{2,v}}{\Lambda_{1,v}} \left(\frac{2\sin(2\Theta_0) - 2\sin(4\beta_0 + 2\Theta_0)}{\beta_0} \right) a_{10} \right] \\ \left[+ \frac{\Pi_{4,v}}{\Lambda_{1,v}} \sin(\beta_0) c\omega_f \right] & \left[+2\Omega^2 \frac{\Pi_{5,v}}{\Lambda_{1,v}} (e_\eta \cos(\Theta_0) + e_\xi \sin(\Theta_0)) \right] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (۶۰-۵)$$

که

$$\Lambda_{1,v} = [\Pi_{1,v} + \Pi_{2,v}\omega_f], \quad \Lambda_{2,v} = [\Pi_{6,v}\omega_f^2 + \Pi_{7,v}\omega_f + \Pi_{8,v}] \quad (۶۱-۵)$$

و مقادیر ویژه متناظر آن از معادله زیر بدست می آیند،

$$|J - \lambda I| = 0 \quad \text{یا} \quad \lambda^2 - (A+D)\lambda + AD - BC = 0 \quad (۶۲-۵)$$

با توجه به معادلات (۶۰-۵) تا (۶۲-۵)، از آنجا که $(A+D) < 0$ ، اگر $AD - BC > 0$ ، حرکت

دینامیکی سیستم در نقاط ثابت تعادلی (a_{10}, Θ_0) پایدار بوده و در غیر اینصورت ناپایدار می باشد.

۵-۵- نتایج

شکل (۲-۵) تا شکل (۵-۵) منحنی‌های پاسخ فرکانسی غیر خطی را پیرامون نقاط ثابت تعادلی

تیر پیچیده شده دو سر مفصل با نیروی محوری فشاری در مدهای اول و دوم و زوایای پیچش مختلف

برای حالت متقارن و نامتقارن نشان می‌دهد. با فرض اینکه نابالانسی‌ها در هر دو جهت اصلی تیر یکسان

بوده و برابرند با $e_\eta = e_\xi = 0.05$ ، مشاهده می‌شود که منحنی‌های پاسخ فرکانسی سیستم متقارن و

نامتقارن در مدهای اول و دوم به سمت راست خم شده‌اند که مؤید این است که تأثیر پارامترهای غیر

خطی سیستم در هر دو مد از نوع سخت شونده می‌باشند. با توجه به شکل (۲-۵) و شکل (۴-۵)، در

حالت متقارن ($\Lambda_{2,v} = 0$)، تیر تنها دارای یک منبع تحریک بوده که همان نابالانسی با فرکانس Ω می-

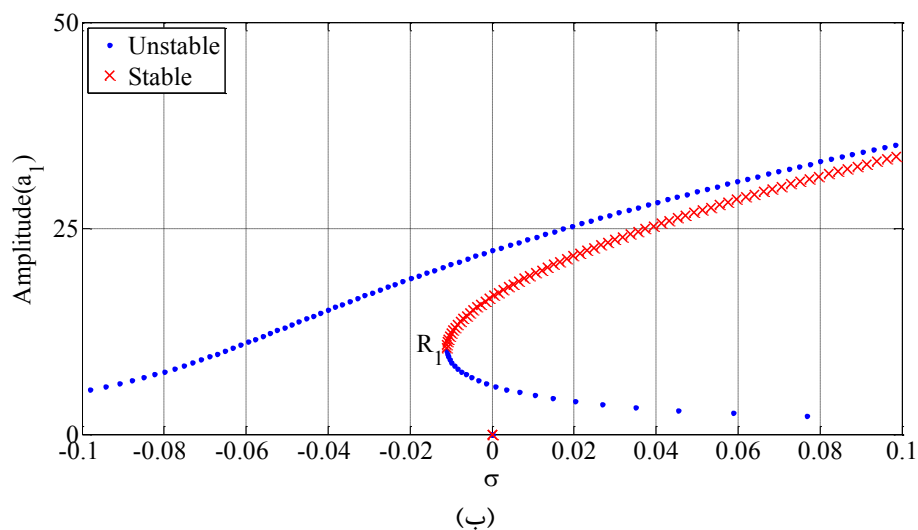
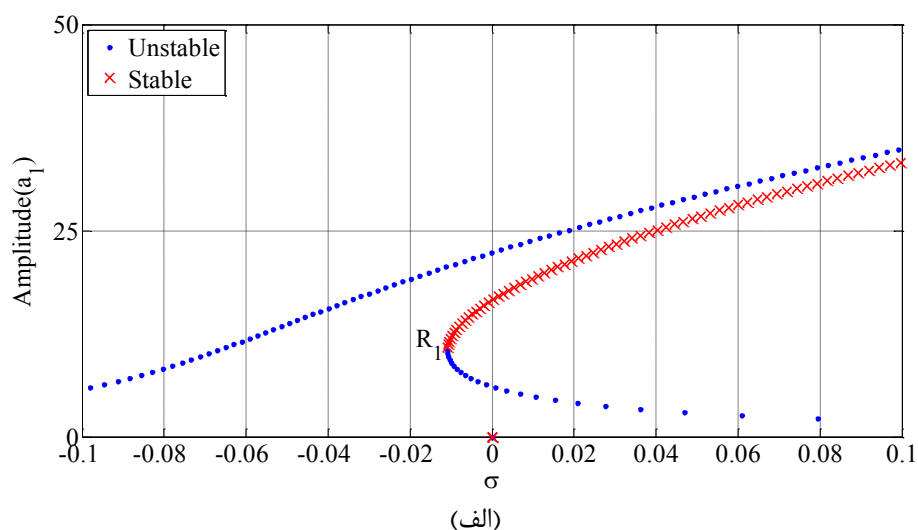
باشد و در نتیجه منحنی پاسخ فرکانسی دارای یک قله بوده و تنها یک پرش در فرکانس رزونانس رخ

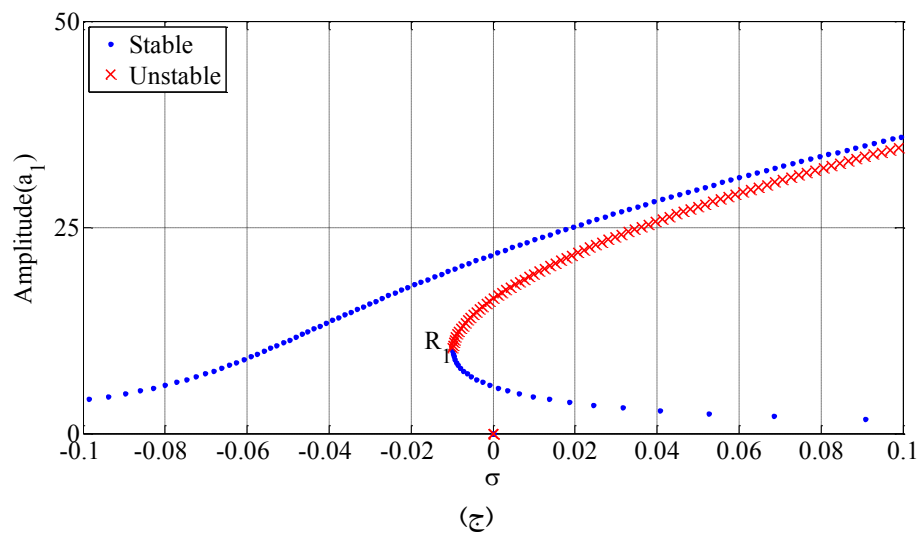
می‌دهد.

در مقایسه با حالتی که سیستم تحت تأثیر هیچ نیروی محوری خارجی قرار ندارد (با توجه به آنچه در فصل ۲ توضیح داده شده است)، با مشاهده منحنی‌های پاسخ فرکانسی مشخص است که زمانی که یک نیروی محوری فشاری به انتهای تیر دو سر مفصل پیچیده شده وارد می‌شود، در مد اول، دامنه سیستم در هر فرکانس متناظر بزرگتر شده و فرکانس تشدید (نقطه پرش) کاهش می‌یابد. همچنین، با مقایسه نمودارهای این بخش با حالت بدون نیروی محوری فشاری، میزان سخت شوندگی پاسخ فرکانسی بیشتر می‌شود. در مد دوم متقارن نیز شرایط بگونه‌ای است که وجود نیروهای محوری فشاری باعث جابجایی فرکانسهای نقاط پرش به سمت چپ شده که در نتیجه آن، دامنه سیستم در فرکانسهای متناظر، نسبت به حالتی که نیروی محوری وجود ندارد، افزایش پیدا کرده است.

در حالت وجود نامتقارنی در سیستم، ($\Lambda_{2,v} \neq 0$)، علاوه بر منبع تحریک ناشی از نابالانسی با فرکانس Ω ، یک منبع تحریک دیگر با فرکانس 2Ω در سیستم بوجود می‌آید که به عنوان تحریک پارامتریک در سیستم شناخته می‌شود. از این‌رو، منحنی‌های پاسخ فرکانسی دارای دو قله می‌باشد. این مطلب در شکل (۴-۶) و شکل (۶-۶) برای تیرهای پیچیده شده نامتقارن تحت یک بار محوری فشاری نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، در برخی از مقادیر، سیستم دارای پنج پاسخ، در برخی دیگر یک پاسخ و در برخی دیگر دارای سه پاسخ بوده که شامل ترکیبی از پاسخهای پایدار و ناپایدار می‌باشند. بسیار واضح است که همواره پدیده دو شاخگی اتفاق می‌افتد. از طرفی، در مقایسه با پاسخهای مشابه سیستم در حالت بدون نیروی محوری که در شکل‌های (۲-۱۲) و (۲-۱۳) نشان داده شده است، وجود نیروی فشاری محوری P ، همانند حالت متقارن، باعث افزایش دامنه پایدار سیستم شده و پهنای فرکانسی $R_1 - R_2$ به سمت راست جابجا می‌شود و همانند تیرهای دو سر مفصل بدون نیروی فشاری، با افزایش زاویه پیچش، این پهنای فرکانسی کاهش می‌یابد. اما، در حالت وجود نیروی فشاری محوری در مد دوم نیز همانطور که نشان داده شده است، در زوایای پیچش کوچکتر، سیستم دارای پهنای وسیعتری از پاسخهای صفر و پهنای کوچکتری از پاسخهای غیر صفر خواهد بود و اگر

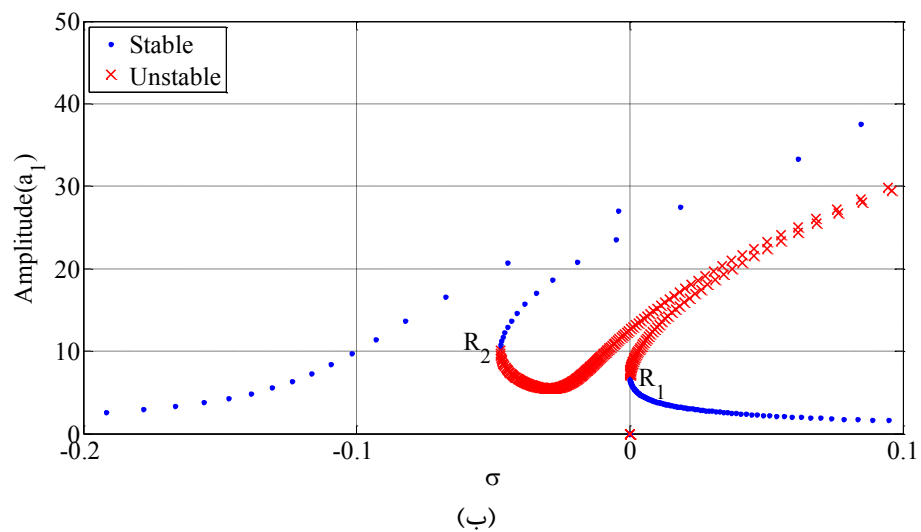
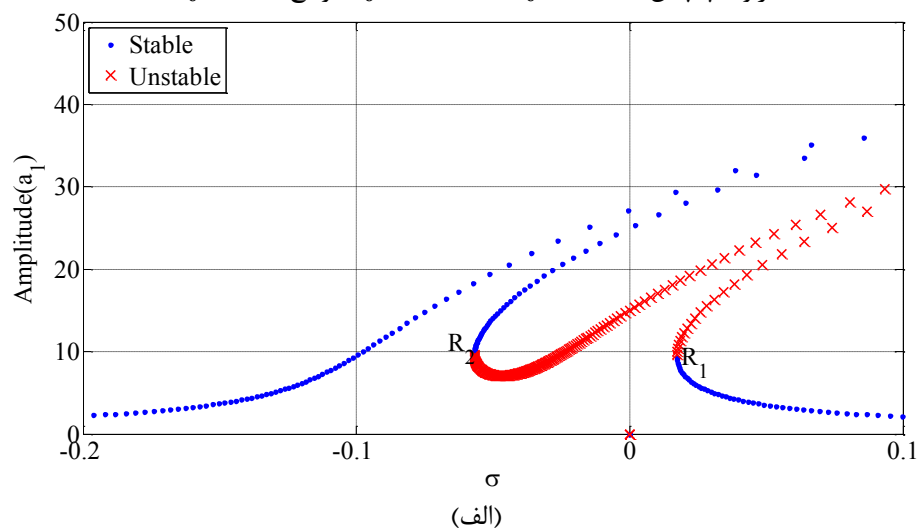
سیستم در فرکانسی در فاصله $R_1 - R_2$ عمل کند، با دامنه‌ای برابر با پاسخ غیر صفر، نوسان می‌کند. در حالت کلی، می‌توان گفت که وجود نیروی محوری فشاری باعث افزایش دامنه پایدار سیستم می‌شود. با توجه به شکل (۲-۵) و شکل (۳-۵)، در مد اول، با افزایش زاویه پیچش، β_0 ، تأثیرات سخت شوندگی کاهش یافته و در نتیجه دامنه قله‌های نوسانی کاهش می‌یابد. از این‌رو، در مد اول می‌توان گفت وجود زاویه پیچش می‌تواند به عنوان یک پارامتر میرا کننده نوسانات نیز در حالت وجود نیروی محوری سیستم عمل کند. در مورد مد دوم برخلاف مد اول، شرایط به گونه‌ای است که با افزایش زاویه پیچش، تأثیر سخت شوندگی افزایش یافته و در نتیجه دامنه نواحی پایدار نیز افزایش می‌یابد.

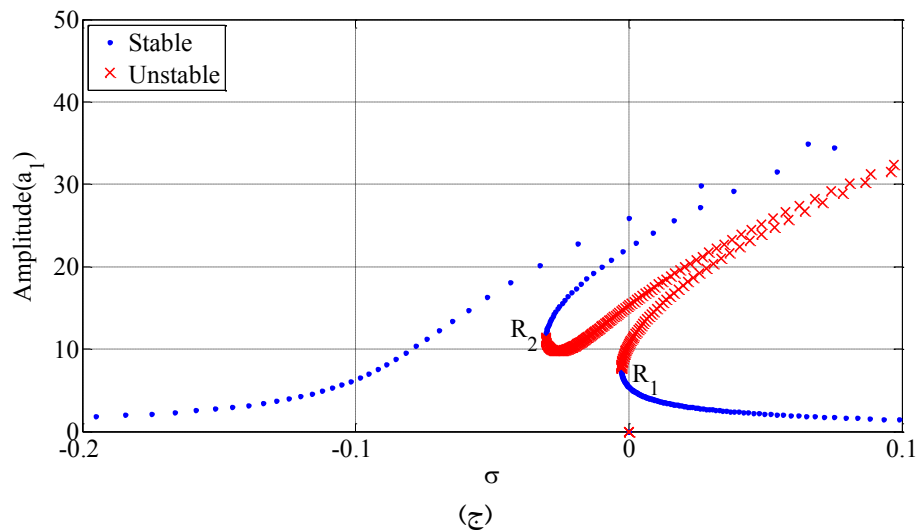




شکل (۲-۵) منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده دو سر مفصل متقارن با نیروی محوری ثابت در مد اول و

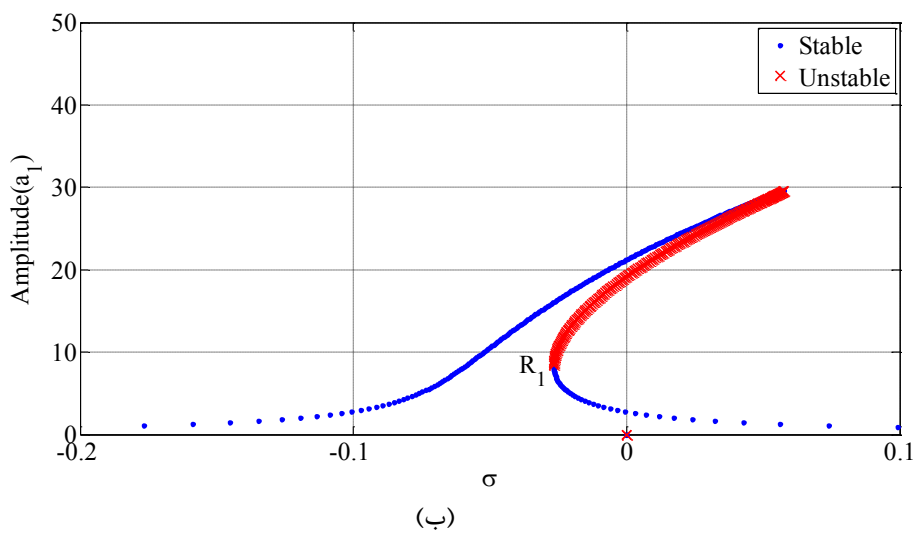
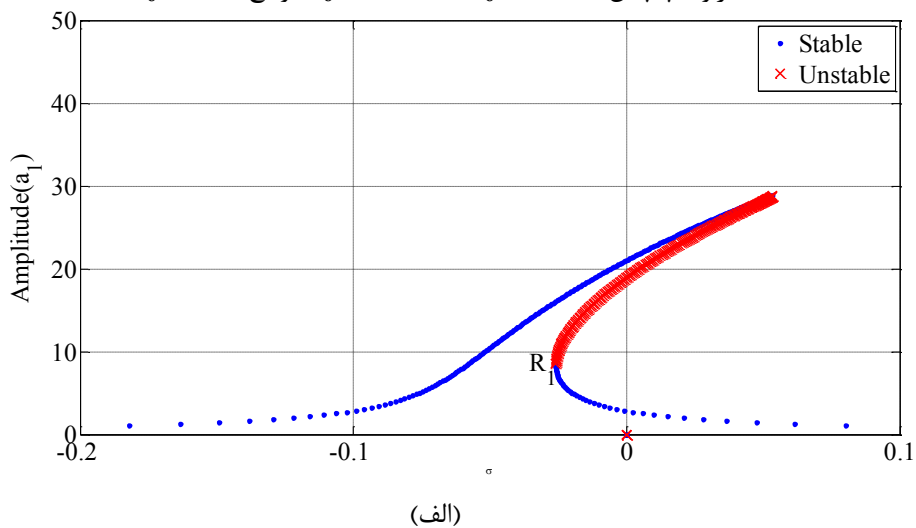
زاویه پیش‌فشار الف ($\beta_0 = 0$ ب) $\beta_0 = 30^\circ$ و ج) $\beta_0 = 60^\circ$

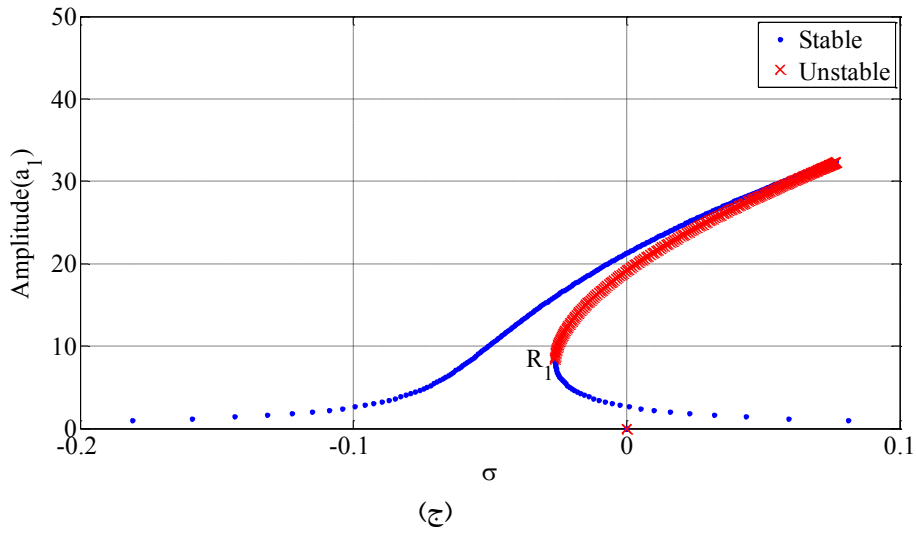




شکل (۵-۳) منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده دو سر مفصل نامتقارن با نیروی محوری ثابت در مد اول و

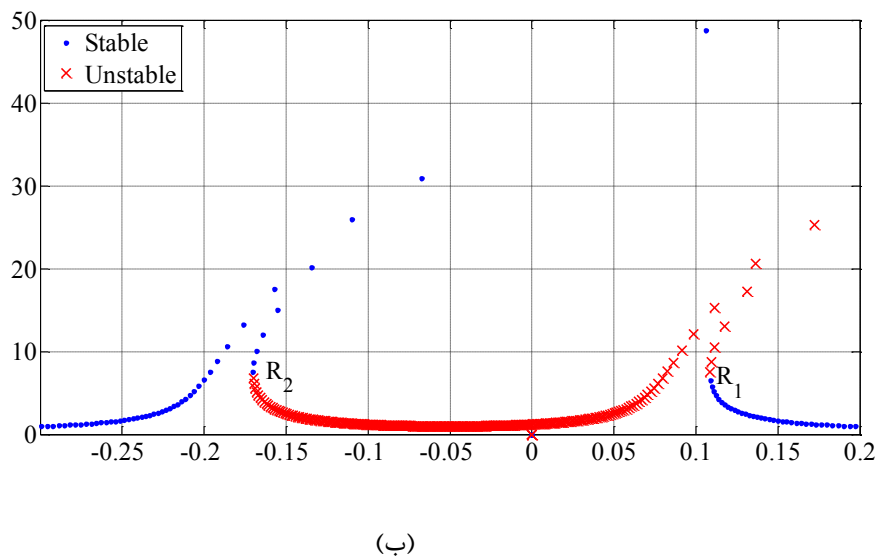
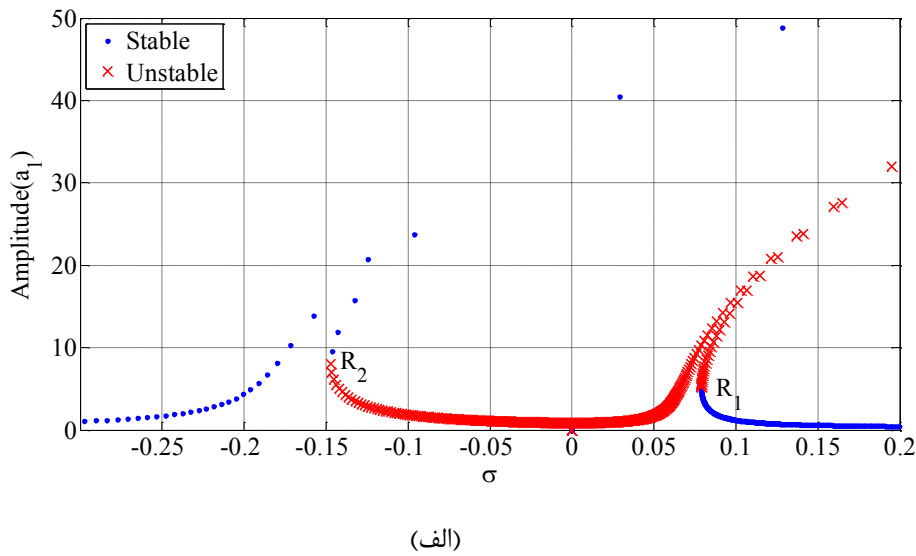
زاویه پیشش الف) ($\beta_0 = 0$ ب) ($\beta_0 = 30^\circ$ و ج) ($\beta_0 = 60^\circ$)

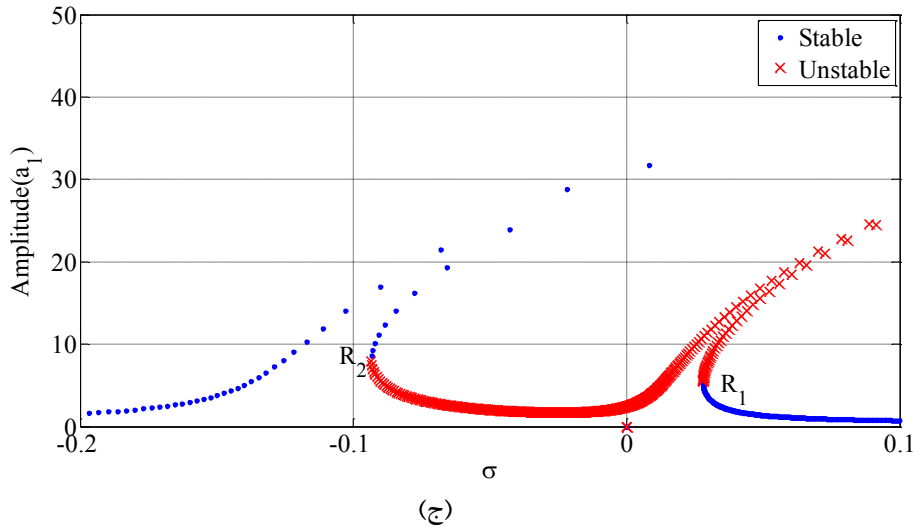




شکل (۴-۵) منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده دو سر مفصل متقارن با نیروی محوری ثابت در مد دوم و

زاویه پیشش الف ($\beta_0 = 0$ ب) $\beta_0 = 30^\circ$ و ج) $\beta_0 = 60^\circ$





شکل (۵-۵) منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده دو سر مفصل نامتقارن با نیروی محوری ثابت در مد دوم و

زاویه پیش‌فشار (الف) $\beta_0 = 0$ (ب) $\beta_0 = 30^\circ$ و (ج) $\beta_0 = 60^\circ$

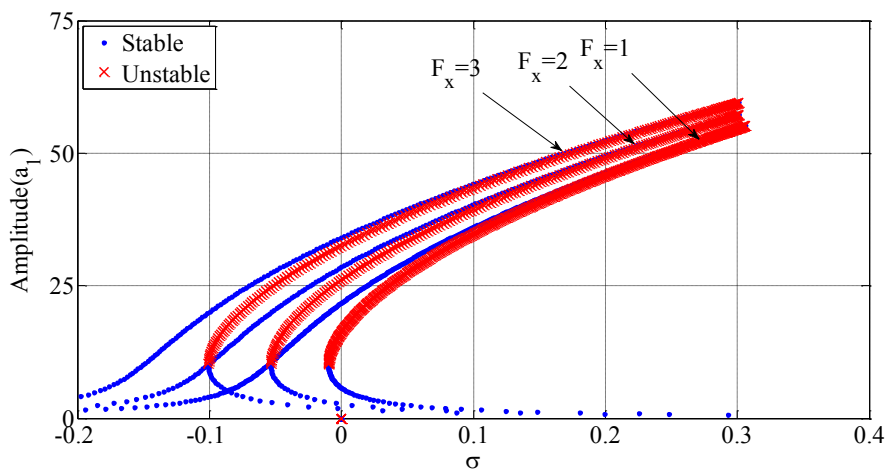
شکل (۶-۵) نمودار پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده تحت نیروی محوری فشاری در نیروهای

فشاری مختلف نشان می‌دهد. این نمودار برای نمونه برای زاویه پیش‌فشار $\beta_0 = 60^\circ$ در مد اول متقارن

نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود، افزایش نیروی محوری فشاری باعث افزایش دامنه حالت

پایدار پاسخ فرکانسی می‌شود. همچنین، مشاهده می‌شود که با افزایش نیروی محوری فشاری، فرکانس

نقطه پرش کاهش می‌یابد.

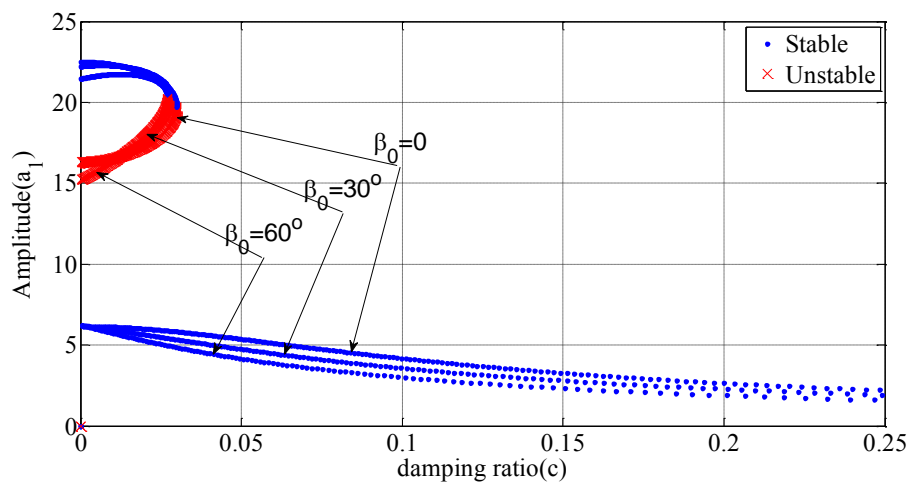


شکل (۶-۵) منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده دو سر مفصل متقارن در مد اول و زاویه پیش‌فشار $\beta_0 = 60^\circ$

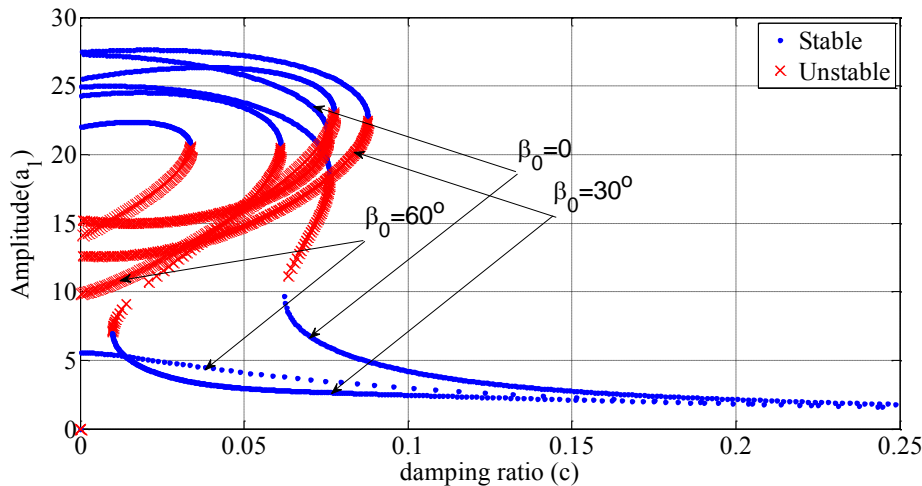
با سه نیروی محوری ثابت

شکل (۷-۵) منحنی دامنه بر حسب نسبت میرایی تیر پیچیده شده محوری دو سر مفصل تحت

بار ثابت محوری فشاری P را در زوایای پیچش مختلف و فرکانسهای طبیعی متناظر با $\sigma=0$ نشان می‌دهد. با توجه به این شکل، می‌توان دید که با افزایش نسبت میرایی، دامنه نوسانات کاهش می‌یابد. علاوه بر این، بر خلاف حالت متناظر بدون نیروی محوری (فصل ۲)، سیستم دارای دو پاسخ پایدار و یک پاسخ ناپایدار بوده که در این حالت بر خلاف حالت بدون نیروی محوری، همواره پدیده دو شاخگی اتفاق می‌افتد. همچنین، دامنه نوسانات پایدار سیستم نسبت به حالت بدون نیروی محوری بزرگتر خواهد بود. اما، همانند حالت بدون نیروی محوری، می‌توان گفت افزایش زاویه پیچش در فرکانس $\sigma=0$ تیرهای متقارن مذکور، تأثیرات کمی در تغییرات دامنه نوسانات سیستم دارد.



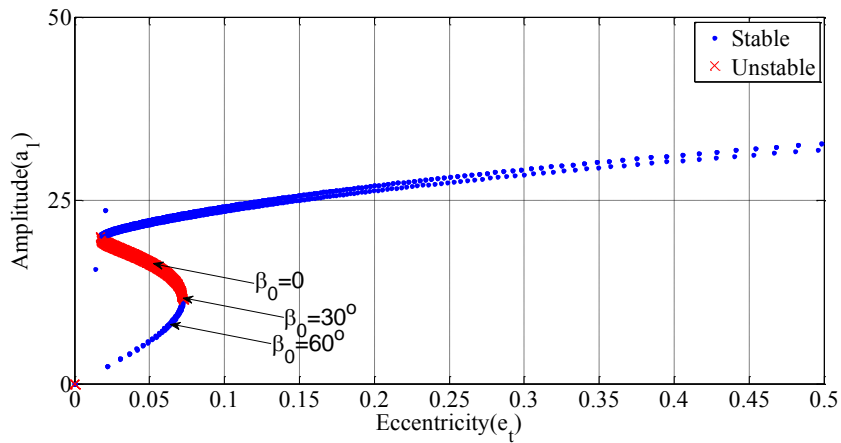
شکل (۷-۵) منحنی دامنه-نسبت میرایی تیر پیچیده متقارن با نیروی محوری ثابت در $\sigma=0$. با توجه به شکل (۸-۵)، در حالتی که تیر پیچیده شده، نامتقارن ($\Lambda_{2,v} \neq 0$) می‌باشد، در $\sigma=0$ و مد اول، با افزایش ضریب میرایی، دامنه نوسانات در همه زوایای پیچش کاهش می‌یابد. در این حالت، سه پاسخ در سیستم وجود دارد که دو پاسخ آن پایدار و دیگری ناپایدار است. همانند تیرهای پیچیده شده دو سر مفصل بدون نیروی محوری، تغییر زاویه پیچش، تأثیرات ناچیزی روی پاسخ فرکانس سیستم مذکور دارد. اما، میزان دامنه نوسانات در حالت نامتقارن محوری و فرکانس $\sigma=0$ و با نیروی محوری نسبت به حالت متناظر بدون نیروی محوری در هر ضریب میرایی متناظر، بزرگتر خواهد بود.



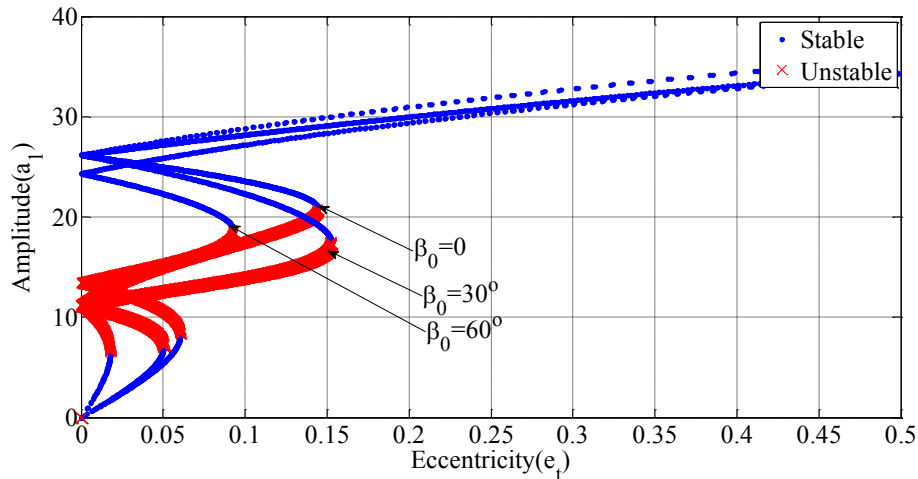
شکل (۸-۵) منحنی دامنه-نسبت میرایی تیر پیچیده نامتقارن با نیروی محوری ثابت در $\sigma=0$. شکل (۹-۵) و شکل (۱۰-۵)، دامنه نوسانات را برحسب خروج از مرکز تیر پیچیده شده متقارن و نامتقارن تحت نیروی محوری ثابت و شرایط مرزی دو سر مفصل را در فرکانس طبیعی متناظر با $\sigma=0$ نشان می‌دهد. همانطور که در شکل (۹-۵) نشان داده شده است، برخلاف حالتی که هیچ نیروی محوری در انتهای تیر وارد نمی‌شود، علاوه بر پاسخهای پایدار سیستم در هر زاویه پیچش، یک پاسخ ناپایدار نیز وجود داشته که باعث بروز پدیده دو شاخگی در سیستم می‌شود. از طرفی، دامنه پایدار سیستم در حالتی که نیروی محوری ثابت وجود دارد، نسبت به حالتی که این نیرو وجود ندارد، بیشتر می‌باشد. همچنین، همانند حالت بدون نیروی محوری که در فصل ۲ نشان داده شده است و با توجه به شکل (۹-۵) مشاهده می‌شود که افزایش زاویه پیچش، در یک خروج از مرکز مشخص، تأثیر شگرفی در دامنه نوسانات سیستم ندارد.

شکل (۱۰-۵) تأثیر زاویه پیچش β_0 را روی منحنی دامنه-خروج از مرکز تیر پیچیده شده دوار دو سر مفصل نامتقارن با نیروی محوری ثابت در نزدیکی فرکانسهای متناظر با $\sigma=0$ نشان می‌دهد. در این حالت، به ازای برخی از مقادیر مشخص خروج از مرکز تیر در $\sigma=0$ ، سه بخش وجود دارد. بخش اول، در مقادیر خروج از مرکز کوچکتر بوده که شامل پنج پاسخ بوده با سه پاسخ پایدار و دو پاسخ ناپایدار (برخلاف حالت متناظر بدون نیروی محوری با دو پاسخ پایدار و یک پاسخ ناپایدار)، در حالی که در بخش دوم و در مقادیر خروج از مرکز بزرگتر، به ازای کلیه زوایای پیچش، یک حل ناپایدار و دو حل

پایدار وجود داشته و در نهایت، در بخش سوم و در مقادیر خروج از مرکز بزرگتر، تنها یک پاسخ پایدار وجود دارد. بنابراین، همواره پدیده دو شاخگی اتفاق می‌افتد.



شکل (۹-۵) منحنی دامنه-خروج از مرکز تیر پیچیده متقارن با نیروی محوری ثابت در $\sigma = 0$.



شکل (۱۰-۵) منحنی دامنه-خروج از مرکز تیر پیچیده نامتقارن با نیروی محوری ثابت در $\sigma = 0$.

فصل ششم

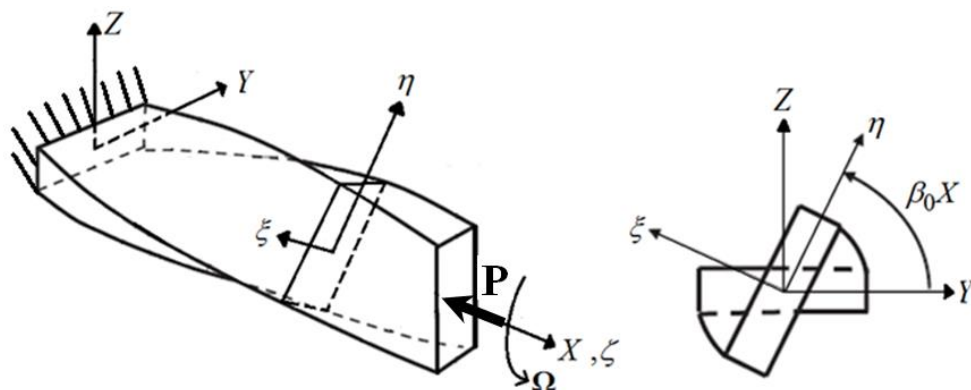
۶- ارتعاشات عرضی تیر پیچیده شده دوار با شرایط مرزی یک سر گیردار با نیروی محوری ثابت

در اکثر تیرهای پیچیده شده از قبیل مته های حفاری یا براده برداری و ... در حین عملکرد، تحت تأثیر بارهای خارجی بویژه بارهای محوری قرار می گیرند. از این رو، در این بخش، ارتعاشات و پایداری یک تیر پیچیده محوری یک سر گیردار تحت تأثیر یک نیروی محوری که در انتهای آزاد آن وارد می شود مورد بررسی قرار می گیرد.

۶-۱- معادلات حرکت

۶-۱-۱- کار نیروی محوری

شکل (۶-۱) یک تیر پیچیده شده محوری یک سر گیردار با سرعت دورانی ثابت Ω را که یک بار محوری ثابت P به انتهای آن وارد می شود نشان می دهد.



شکل (۶-۱) یک تیر پیچیده شده دورانی یک سر گیردار با نیروی محوری ثابت P به همراه مقطع آن با نمایش زاویه پیچش تیر.

با توجه به شرایط مرزی

$$x=0 \Rightarrow \begin{cases} v=0, v'=0 \\ w=0, w'=0 \end{cases} \quad \text{و} \quad x=L \Rightarrow \begin{cases} v''=0, v'''=0 \\ w''=0, w'''=0 \end{cases}$$

برای تیر یک سر گیردار مذکور تحت یک بار محوری ثابت، اگر نسبت عرض و پهنای سطح

مقطع تیر به طول تیر (ضریب لاغری) خیلی کوچک باشد، می توان از اینرسی طولی تیر صرف نظر کرد،

$m\ddot{u}(x, t) = 0$ از این رو با توجه به رابطه (۵-۵) و شرایط مرزی $u(0)=u'(l)=0$ داریم،

$$u' + 1/2(w'^2 + v'^2) - (vw' - vw')\beta_0 + 1/2(v^2 + w^2)\beta_0^2 - \int_0^L (v'v'' + w'w'' + (vw'' - wv''))\beta_0 + (vv' + ww')\beta_0^2 dx = \varepsilon_0 \quad (۱-۶)$$

با توجه به رابطه (۱-۶) و (رابطه ۵-۶) داریم،

$$u' = \frac{P}{A_{xx}} - 1/2(w'^2 + v'^2) + (vw' - vw')\beta_0 - 1/2(v^2 + w^2)\beta_0^2 + \int_0^L (v'v'' + w'w'' + (vw'' - wv''))\beta_0 + (vv' + ww')\beta_0^2 dx \quad (۲-۶)$$

حال با قرار دادن رابطه (۲-۶) در معادلات ارتعاش جانبی تیر، معادلات حرکت ارتعاشات عرضی

تیر برابر است با،

$$\begin{aligned} & -2\frac{w'\beta_0^3}{\pi^4} + 1/2\frac{(-\pi^2\Omega I_{xx}\dot{w} + 10v'' - 2\Sigma I\pi^2\dot{v})\beta_0^2}{\pi^4} + 1/2\frac{(3\pi^2\Omega I_{xx}\dot{v}' - 4\ddot{w}'\pi^2\Sigma I + 8w''')\beta_0}{\pi^4} \\ & + 1/2\frac{2\ddot{v}''\pi^2\Sigma I - 2\dot{v}\pi^4 + 2\pi^2\Omega I_{xx}\dot{w}'' - 2v^{(4)}}{\pi^4} - c\dot{v}\cos(\beta_0x) + c\dot{w}\sin(\beta_0x) \\ & + \frac{\Omega I_{xx}}{2\pi^2} \left[(\dot{w}\beta_0^2 - \dot{v}'\beta_0)\cos(2\beta_0x) + (\dot{v}\beta_0^2 + \dot{w}'\beta_0)\sin(2\beta_0x) \right] \\ & + e_\eta \Omega^2 \cos(\beta_0x - \Omega t) + e_\zeta \Omega^2 \sin(\beta_0x - \Omega t) \\ & + \left(-8\frac{v\Delta D\beta_0^4}{\pi^4} - 22\frac{w'\Delta D\beta_0^3}{\pi^4} + 1/2\frac{(42v''\Delta D - 12\pi^2\Omega\dot{w}\Delta I - 6\ddot{v}\pi^2\Delta I)\beta_0^2}{\pi^4} \right. \\ & \left. + 1/2\frac{(16w'''\Delta D + 16\pi^2\Omega\dot{v}'\Delta I - 8\ddot{w}''\pi^2\Delta I)\beta_0}{\pi^4} + 1/2\frac{2\ddot{v}''\pi^2\Delta I - 2v^{(4)}\Delta D + 4\pi^2\Omega\dot{w}''\Delta I}{\pi^4} \right) \cos(-2\Omega t + 4\beta_0x) \\ & + \left(8\frac{w\Delta D\beta_0^4}{\pi^4} - 22\frac{v'\Delta D\beta_0^3}{\pi^4} + 1/2\frac{(-12\pi^2\Omega\dot{v}\Delta I - 42w''\Delta D + 6\ddot{w}\pi^2\Delta I)\beta_0^2}{\pi^4} \right. \\ & \left. + 1/2\frac{(-16\pi^2\Omega\dot{w}'\Delta I - 8\ddot{v}'\pi^2\Delta I + 16v'''\Delta D)\beta_0}{\pi^4} + 1/2\frac{4\pi^2\Omega\dot{v}''\Delta I - 2\ddot{w}''\pi^2\Delta I + 2w^{(4)}\Delta D}{\pi^4} \right) \sin(-2\Omega t + 4\beta_0x) \\ & + \frac{2\mu}{\pi^4} (-\beta_0 w' + v'') \left(\beta_0 \int_0^1 (vw'' - wv'') dx + \beta_0^2 \int_0^1 (ww' + vv') dx + \int_0^1 (v'v'' + w'w'') dx \right) + F_x (v'' - \beta_0 w') = 0 \end{aligned} \quad (۳-۶)$$

$$\begin{aligned}
& +2 \frac{v' \beta_0^3}{\pi^4} + 1/2 \frac{(\pi^2 \Omega I x \dot{v} + 10 w'' - 2 \Sigma I \pi^2 \ddot{w}) \beta_0^2}{\pi^4} + 1/2 \frac{(3 \pi^2 \Omega I x \dot{w}' + 4 \dot{v}' \pi^2 \Sigma I - 8 v''') \beta_0}{\pi^4} \\
& + 1/2 \frac{2 \ddot{w}'' \pi^2 \Sigma I - 2 \ddot{w} \pi^4 + 2 \pi^2 \Omega I_x \dot{v}'' - 2 w^{(4)}}{\pi^4} - c \dot{w} \cos(\beta_0 x) - c \dot{v} \sin(\beta_0 x) \\
& + \frac{\Omega I_{xx}}{2 \pi^2} \left[(\dot{v} \beta_0^2 + \dot{w}' \beta_0) \cos(2 \beta_0 x) + (-\dot{w} \beta_0^2 + \dot{v}' \beta_0) \sin(2 \beta_0 x) \right] \\
& + e_\zeta \Omega^2 \cos(\beta_0 x - \Omega t) - e_\eta \Omega^2 \sin(\beta_0 x - \Omega t) \\
& + \left(8 \frac{w \Delta D \beta_0^4}{\pi^4} - 22 \frac{v' \Delta D \beta_0^3}{\pi^4} + 1/2 \frac{(-42 w'' \Delta D - 12 \pi^2 \Omega \dot{v} \Delta I + 6 \ddot{w} \pi^2 \Delta I) \beta_0^2}{\pi^4} \right. \\
& \left. + 1/2 \frac{(16 v'' \Delta D - 16 \pi^2 \Omega \dot{w}' \Delta I - 8 \dot{v}' \partial \pi^2 \Delta I) \beta_0}{\pi^4} + 1/2 \frac{-2 \ddot{w}'' \pi^2 \Delta I + 2 w^{(4)} \Delta D + 4 \pi^2 \Omega \dot{v}'' \Delta I}{\pi^4} \right) \cos(-2 \Omega t + 4 \beta_0 x) \\
& + \left(8 \frac{v \Delta D \beta_0^4}{\pi^4} + 22 \frac{w' \Delta D \beta_0^3}{\pi^4} + 1/2 \frac{(12 \pi^2 \Omega \dot{v} \Delta I - 42 w'' \Delta D + 6 \ddot{w} \pi^2 \Delta I) \beta_0^2}{\pi^4} \right. \\
& \left. + 1/2 \frac{(-16 \pi^2 \Omega \dot{v}' \Delta I + 8 \ddot{w}' \pi^2 \Delta I - 16 w'' \Delta D) \beta_0}{\pi^4} + 1/2 \frac{-4 \pi^2 \Omega \dot{w}'' \Delta I - 2 \dot{v}'' \pi^2 \Delta I + 2 v^{(4)} \Delta D}{\pi^4} \right) \sin(-2 \Omega t + 4 \beta_0 x) \\
& + \frac{2 \mu}{\pi^4} (\beta_0 v' + w'') \left(\beta_0 \int_0^1 (v w'' - w v'') dx + \beta_0^2 \int_0^1 (w w' + v v') dx + \int_0^1 (v' v'' + w' w'') dx \right) + F_x (w'' + \beta_0 v') = 0
\end{aligned}$$

(۴-۶)

برای ساده سازی، در معادلات فوق داریم،

$$\Delta D = \frac{(D_{\xi\xi} - D_{\eta\eta})}{2}, \quad \Delta I = \frac{(I_{\xi\xi} - I_{\eta\eta})}{2}, \quad \Sigma D = \frac{(D_{\xi\xi} + D_{\eta\eta})}{2}, \quad \Sigma I = \frac{(I_{\xi\xi} + I_{\eta\eta})}{2}, \quad (۵-۶)$$

$$u = u_\zeta, \quad v = v_\eta, \quad w = w_\xi,$$

برای بی بعد سازی معادلات به شکل زیر عمل شده است،

$$\begin{aligned}
u^* &= \frac{u_\zeta}{h_0}, \quad v^* = \frac{v_\eta}{h_0}, \quad w^* = \frac{w_\xi}{h_0}, \quad x^* = \frac{x}{L}, \quad t^* = \frac{t}{\sqrt{mL^4 / \pi^4 \Sigma D}}, \quad p = F_x \cdot \frac{\Sigma D}{L^2} \\
\Omega^* &= \frac{\Omega}{\sqrt{\pi^4 \Sigma D / mL^4}}, \quad c^* = c \frac{\pi^2 \sqrt{m \Sigma D}}{L^2}, \quad \mu = \frac{h_0^2 A_{xx}}{2 \Sigma D},
\end{aligned} \quad (۶-۶)$$

که L و h_0 به ترتیب اندازه ضخامت مقطع و طول تیر هستند. برای راحتی، در معادلات از

علامت (*) صرف نظر شده است.

۶-۲- تحلیل پایداری با اعمال روش مقیاس‌های چندگانه به معادلات دیفرانسیل

مشتقات جزئی (PDE)

اکنون به منظور حل معادلات بی بعد شده بدست آمده، از تئوری اغتشاشات و روش مقیاس‌های

چندگانه برای تحلیل معادلات دیفرانسیل با مشتق جزئی استفاده می‌شود. به این ترتیب، فرض می‌شود،

$$v(x,t) = \varepsilon v_1(x, T_0, T_2) + \varepsilon^3 v_3(x, T_0, T_2) + \dots \quad (7-6)$$

$$w(x,t) = \varepsilon w_1(x, T_0, T_2) + \varepsilon^3 w_3(x, T_0, T_2) + \dots$$

لازم به ذکر است اگر در تقریب فوق، جملات v_0, w_0, v_2, w_2 ظاهر شوند، پاسخ آنها در ادامه

صفر خواهد شد. $T_2 = \varepsilon^2 t$ و $T_0 = t$ از طرفی،

$$\frac{\partial}{\partial t} = D_0 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \quad (8-6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = D_0^2 + 2\varepsilon^2 D_2 D_0 + \dots$$

که D_0 و D_2 به ترتیب برابرند با، $\frac{\partial}{\partial T_0}$ و $\frac{\partial}{\partial T_2}$ به منظور بالانس پارامترهای غیرخطی در معادلات و

استخراج رزونانس‌های اولیه و پارامتریک، قرار می‌دهیم،

$$c = \varepsilon^2 \bar{c}, \Delta D = \varepsilon^2 \bar{\Delta D}, \Delta I = \varepsilon^2 \bar{\Delta I}, e_\zeta = \varepsilon^3 \bar{e}_\zeta, e_\eta = \varepsilon^3 \bar{e}_\eta, F_x = \varepsilon^2 \bar{F}_x \quad (9-6)$$

به این ترتیب، با اعمال روش مقیاس‌های چندگانه و جدا سازی عبارات مرتبه $O(\varepsilon^3)$ و $O(\varepsilon^1)$

داریم،

$O(\varepsilon)$:

$$\frac{\Omega I_x}{2\pi^2} \left[(\beta_0^2 D_0 w_1 - \beta_0 D_0 v_1') \cos(2\beta_0 x) + (\beta_0^2 D_0 v_1 + \beta_0 D_0 w_1' \beta_0) \sin(2\beta_0 x) \right]$$

$$- 2 \frac{\beta_0^3 w_1'}{\pi^4} + 1/2 \left(\frac{-2 \Sigma I D_0^2 v_1 \pi^2 - \Omega I_x D_0 w_1 \pi^2 + 10 v_1''}{\pi^4} \right) \beta_0^2 \quad (10-6)$$

$$+ 1/2 \frac{(-4 \Sigma I D_0^2 w_1' \pi^2 + 3 \Omega I_x D_0 v_1' \pi^2 + 8 w_1''') \beta_0}{\pi^4}$$

$$+ 1/2 \frac{-2 v_1^{(4)} + 2 \Sigma I D_0^2 v_1'' \pi^2 - 2 D_0^2 v_1 \pi^4 + 2 \Omega I_x D_0 w_1'' \pi^2}{\pi^4} = 0$$

$$\frac{\Omega I_x}{2\pi^2} \left[(\beta_0^2 D_0 v_1 + \beta_0 D_0 w_1') \cos(2\beta_0 x) + (-D_0 w_1 \beta_0^2 + D_0 v_1' \beta_0) \sin(2\beta_0 x) \right]$$

$$+ 2 \frac{\beta_0^3 v_1'}{\pi^4} + 1/2 \left(\frac{-2 \Sigma I D_0^2 w_1 \pi^2 + \Omega I_x D_0 v_1 \pi^2 + 10 w_1''}{\pi^4} \right) \beta_0^2 \quad (11-6)$$

$$+ 1/2 \frac{(4 \Sigma I D_0^2 v_1' \pi^2 + 3 \Omega I_x D_0 w_1' \pi^2 - 8 v_1''') \beta_0}{\pi^4}$$

$$+ 1/2 \frac{-2 w_1^{(4)} + 2 \Sigma I D_0^2 w_1'' \pi^2 - 2 D_0^2 w_1 \pi^4 - 2 \Omega I_x D_0 v_1'' \pi^2}{\pi^4} = 0$$

9

$O(\varepsilon^3)$:

$$\begin{aligned}
& \left[(-6D_0v_1\beta_0^2 - 8D_0w_1'\beta_0 + 2D_0v_1'')\Omega\Delta I + \frac{8\Delta D\beta_0^4}{\pi^2}w_1 - \frac{22\beta_0^3\Delta D}{\pi^2}v_1' \right. \\
& \left. + \left(-\frac{21\Delta D}{\pi^2}w_1'' + 3\Delta ID_0^2w_1 \right)\beta_0^2 + \left(\frac{8\Delta D}{\pi^2}v_1''' - 4\Delta ID_0^2v_1' \right)\beta_0 - \Delta ID_0^2w_1'' + \frac{\Delta D}{\pi^2}w_1^{(4)} \right] \frac{\sin(4\beta_0x - 2\Omega T_0)}{\pi^2} \\
& \left[(-6D_0v_1\beta_0^2 + 8D_0v_1'\beta_0 + 2D_0w_1'')\Omega\Delta I - \frac{8\Delta D\beta_0^4}{\pi^2}v_1 - \frac{22\beta_0^3\Delta D}{\pi^2}w_1' \right. \\
& \left. + \left(\frac{21\Delta D}{\pi^2}v_1'' - 3\Delta ID_0^2v_1 \right)\beta_0^2 + \left(\frac{8\Delta D}{\pi^2}w_1''' - 4\Delta ID_0^2w_1' \right)\beta_0 + \Delta ID_0^2v_1'' - \frac{\Delta D}{\pi^2}v_1^{(4)} \right] \frac{\cos(4\beta_0x - 2\Omega T_0)}{\pi^2} \\
& + \frac{I_{xx}\Omega}{2\pi^2} \left[((D_2w_1 + D_0w_3)\beta_0^2 - (D_2v_1' + D_0v_3')\beta_0)\cos(2\beta_0x) \right. \\
& \left. + ((D_2v_1 + D_0v_3)\beta_0^2 + (D_2w_1' + D_0v_3')\beta_0)\sin(2\beta_0x) \right] \tag{12-6} \\
& + \frac{I_{xx}\Omega}{\pi^2} (1/2\beta_0^2(-D_2w_1 - D_0w_3) + 3/2\beta_0(D_0v_3' + D_2v_1') + (D_2w_1'' + D_0w_3'')) \\
& + \frac{2\mu}{\pi^4} (-\beta_0w_1' + v_1'') \left(\beta_0 \int_0^1 (v_1w_1'' - w_1v_1'') dx + \beta_0^2 \int_0^1 (w_1w_1' + v_1v_1') dx + \int_0^1 (v_1'v_1'' + w_1'w_1'') dx \right) \\
& + \left(-\Sigma ID_0^2v_3 - 2\Sigma ID_0D_2v_1 + \frac{5}{\pi^2}v_3'' \right) \frac{\beta_0^2}{\pi^2} + \left(-4\Sigma ID_0D_2w_1' - 2\Sigma ID_0^2w_3' + \frac{4}{\pi^2}w_3''' \right) \frac{\beta_0}{\pi^2} \\
& - 2D_0D_2v_1 - D_0^2v_3 - \frac{v_3^{(4)}}{\pi^4} + \frac{1}{\pi^2} (\Sigma ID_0^2v_3'' + 2\Sigma ID_0D_2v_1'') - \frac{2\beta_0^3}{\pi^4}w_3' + F_x(v_1'' - \beta_0w_1') \\
& + \Omega^2 e_\eta(x)\cos(\beta_0x - \Omega T_0) + \Omega^2 e_\varepsilon(x)\sin(\beta_0x - \Omega T_0) - cD_0v_1\cos(\beta_0x) + cD_0w_1\sin(\beta_0x) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[(-6D_0v_1\beta_0^2 - 8D_0w_1'\beta_0 + 2D_0v_1'')\Omega\Delta I + \frac{8\Delta D\beta_0^4}{\pi^2}w_1 - \frac{22\beta_0^3\Delta D}{\pi^2}v_1' \right. \\
& \left. + \left(-\frac{21\Delta D}{\pi^2}w_1'' + 3\Delta ID_0^2w_1 \right)\beta_0^2 + \left(\frac{8\Delta D}{\pi^2}v_1''' - 4\Delta ID_0^2v_1' \right)\beta_0 - \Delta ID_0^2w_1'' + \frac{\Delta D}{\pi^2}w_1^{(4)} \right] \frac{\cos(4\beta_0x - 2\Omega T_0)}{\pi^2} \\
& \left[(6D_0w_1\beta_0^2 + 8D_0v_1'\beta_0 + 2D_0w_1'')\Omega\Delta I + \frac{8\Delta D\beta_0^4}{\pi^2}v_1 + \frac{22\beta_0^3\Delta D}{\pi^2}w_1' \right. \\
& \left. + \left(-\frac{21\Delta D}{\pi^2}v_1'' + 3\Delta ID_0^2v_1 \right)\beta_0^2 + \left(-\frac{8\Delta D}{\pi^2}w_1''' - 4\Delta ID_0^2w_1' \right)\beta_0 + \Delta ID_0^2v_1'' - \frac{\Delta D}{\pi^2}v_1^{(4)} \right] \frac{\sin(4\beta_0x - 2\Omega T_0)}{\pi^2} \\
& + \frac{I_{xx}\Omega}{2\pi^2} \left[-(D_2w_1 + D_0w_3)\beta_0^2 + (D_2v_1' + D_0v_3')\beta_0 \right] \sin(2\beta_0x) \\
& + \left[(D_2v_1 + D_0v_3)\beta_0^2 + (D_2w_1' + D_0v_3')\beta_0 \right] \cos(2\beta_0x) \tag{۱۳-۶} \\
& + \frac{I_{xx}\Omega}{\pi^2} \left(1/2\beta_0^2(D_2v_1 + D_0v_3) + 3/2\beta_0(D_0w_3' + D_2w_1') + (D_2w_1'' + D_0w_3'') \right) \\
& + \frac{2\mu}{\pi^4} (\beta_0v_1' + w_1'') \left(\beta_0 \int_0^1 (v_1w_1'' - w_1v_1'') dx + \beta_0^2 \int_0^1 (w_1w_1' + v_1v_1') dx + \int_0^1 (v_1v_1'' + w_1'w_1'') dx \right) \\
& + \left(-\Sigma ID_0^2w_3 - 2\Sigma ID_0D_2w_1 + \frac{5}{\pi^2}w_3'' \right) \frac{\beta_0^2}{\pi^2} + \left(4\Sigma ID_0D_2v_1' - 2\Sigma ID_0^2v_3' - \frac{4}{\pi^2}v_3''' \right) \frac{\beta_0}{\pi^2} \\
& - 2D_0D_2w_1 - D_0^2w_3 - \frac{w_3^{(4)}}{\pi^4} + \frac{1}{\pi^2} (\Sigma ID_0^2w_3'' + 2\Sigma ID_0D_2v_1'') - \frac{2\beta_0^3}{\pi^4}v_3' + F_x(w_1'' + \beta_0v_1') \\
& - \Omega^2 e_{\eta}(x) \sin(\beta_0x - \Omega T_0) + \Omega^2 e_{\xi}(x) \cos(\beta_0x - \Omega T_0) - cD_0w_1 \cos(\beta_0x) - cD_0v_1 \sin(\beta_0x) = 0
\end{aligned}$$

حل معادلات مرتبه اول ε به شکل زیر تخمین زده می‌شود،

$$\begin{aligned}
v_1(x, T_0, T_2) &= \Phi_f(x) \left(A_1(T_2)e^{i\omega_f T_0} + \bar{A}_1(T_2)e^{-i\omega_f T_0} \right) + \Phi_b(x) \left(A_2(T_2)e^{i\omega_b T_0} + \bar{A}_2(T_2)e^{-i\omega_b T_0} \right) \\
w_1(x, T_0, T_2) &= \Phi_f(x) \left(-iA_1(T_2)e^{i\omega_f T_0} + i\bar{A}_1(T_2)e^{-i\omega_f T_0} \right) + \Phi_b(x) \left(-iA_2(T_2)e^{i\omega_b T_0} + i\bar{A}_2(T_2)e^{-i\omega_b T_0} \right)
\end{aligned}$$

که ω_b و ω_f فرکانسهای خطی همسو و ناهمسو بوده و از حل معادله خطی حاصل از روابط (۶-۶)

و (۴-۶) و سپس حل مسئله مقدار ویژه بدست می‌آیند. به منظور بررسی رزونانس‌های اولیه و

پارامتریک، نزدیکی فرکانس Ω به فرکانس طبیعی اولیه ω_f با در نظر گرفتن پارامتر تنظیم کننده σ

به شکل زیر تخمین زده می‌شود:

$$\Omega = \omega_f + \varepsilon^2 \sigma \tag{۱۴-۶}$$

اکنون، با قرار دادن رابطه فوق و جواب مرتبه ۱ برای v و w (معادلات فوق) در معادلات مرتبه ۳

برای هر دو v و w ، معادلات مرتبه ۳ را با جدا کردن و مرتب سازی ضرایب $e^{i\omega_b T_0}$ و $e^{i\omega_f T_0}$ برای از

بین بردن ضرایب سکولار ترم و حذف small divisorهای موجود به شکل زیر ساده می‌کنیم،

$$\begin{aligned}
& \left[(\beta_0^2 D_0 w_3 + i \beta_0^2 D_0 v_3 + i \beta_0 D_0 w_3' - \beta_0 D_0 v_3') e^{-2i\beta_0 x} + (\beta_0^2 D_0 w_3 - i \beta_0^2 D_0 v_3 - i \beta_0 D_0 w_3' - \beta_0 D_0 v_3') e^{2i\beta_0 x} \right. \\
& \left. + 3\beta_0 D_0 v_3' - \beta_0^2 D_0 w_3 + 2D_0 w_3'' \right] \frac{I_{xx} \Omega}{2\pi^2} + \frac{10\beta_0^2}{\pi^4} v_3'' - \frac{4\beta_0 \Sigma I}{\pi^2} D_0^2 w_3' - \frac{4\beta_0^3}{\pi^4} w_3' - 2 \frac{(\pi^2 + \beta_0^2 \Sigma I)}{\pi^2} D_0^2 v_3 \\
& + \frac{8\beta_0}{\pi^4} w_3''' - 2 \frac{v_3^{(4)}}{\pi^4} + 2 \frac{\Sigma I}{\pi^2} D_0^2 v_3'' = P_{f,v}(x, T_2) e^{i\omega_f T_0} + P_{b,v}(x, T_2) e^{i\omega_b T_0} + CC + N.S.T
\end{aligned} \quad (15-6)$$

$$\begin{aligned}
& \left[(\beta_0^2 D_0 v_3 - i \beta_0^2 D_0 w_3 + i \beta_0 D_0 v_3' + \beta_0 D_0 w_3') e^{-2i\beta_0 x} + (\beta_0^2 D_0 v_3 + i \beta_0^2 D_0 w_3 - i \beta_0 D_0 v_3' + \beta_0 D_0 w_3') e^{2i\beta_0 x} \right. \\
& \left. + 3\beta_0 D_0 w_3' + \beta_0^2 D_0 v_3 - 2D_0 v_3'' \right] \frac{I_{xx} \Omega}{2\pi^2} + \frac{10\beta_0^2}{\pi^4} w_3'' + \frac{4\beta_0 \Sigma I}{\pi^2} D_0^2 v_3' + \frac{4\beta_0^3}{\pi^4} v_3' - 2 \frac{(\pi^2 + \beta_0^2 \Sigma I)}{\pi^2} D_0^2 w_3 \\
& - \frac{8\beta_0}{\pi^4} v_3''' - 2 \frac{w_3^{(4)}}{\pi^4} + 2 \frac{\Sigma I}{\pi^2} D_0^2 w_3'' = P_{f,w}(x, T_2) e^{i\omega_f T_0} + P_{b,w}(x, T_2) e^{i\omega_b T_0} + CC + N.S.T
\end{aligned} \quad (16-6)$$

که CC و $N.S.T$ به معنی مختلط مزدوج و ضرایب غیر سکولار می باشند.

پس از آوردن ضرایب سکولار، با استفاده از شرایط حل پذیری برای آنها داریم،

$$\int_0^1 \Phi_f(x) P_f(x, T_2) dx = 0 \quad \text{و} \quad \int_0^1 \Phi_b(x) P_b(x, T_2) dx = 0 \quad (17-6)$$

که $P_{b,v}$ ، $P_{f,w}$ ، $P_{f,v}$ و $P_{b,v}$ ضرایب سکولار معادلات مرتبه ۳ از ε هستند و برابرند با،

$$\begin{aligned}
P_{f,v} = & \frac{1}{\pi^2} \left[\left(-\frac{1}{4} (\beta_0 \Phi_f' + i \beta_0^2 \Phi_f) e^{2i\beta_0 x} + \frac{1}{4} i \beta_0^2 \Phi_f + \frac{3}{4} \beta_0 \Phi_f' - \frac{1}{2} i \Phi_f'' \right) \Omega I_{xx} \right. \\
& \left. - (i \beta_0^2 \Sigma I \Phi_f + 2 \beta_0 \Sigma I \Phi_f' - i \Sigma I \Phi_f'' + i \pi^2 \Phi_f) \omega_f \right] A_1' + \frac{1}{2\pi^4} (i \beta_0 \Phi_f' + \Phi_f'') F_x A_1 \\
& + \frac{1}{\pi^4} \left(\int_0^1 \Phi_f' \Phi_f'' dx \Phi_f'' + i \beta_0 \int_0^1 \Phi_f' \Phi_f'' dx \Phi_f' + \beta_0^2 \int_0^1 \Phi_f' \Phi_f'' dx \Phi_f'' + i \beta_0^3 \int_0^1 \Phi_f' \Phi_f'' dx \Phi_f' \right) \mu \bar{A}_1 A_1^2 \\
& + \frac{1}{\pi^4} \left(1/2 \beta_0^2 \int_0^1 \Phi_b' \Phi_f dx \Phi_b'' + 1/2 i \beta_0^3 \int_0^1 \Phi_b' \Phi_f dx \Phi_b' + i \beta_0 \int_0^1 \Phi_b' \Phi_f'' dx \Phi_f' + 1/2 i \beta_0 \int_0^1 \Phi_f' \Phi_b'' dx \Phi_b' \right. \\
& + 1/2 \int_0^1 \Phi_f' \Phi_b'' dx \Phi_b'' + \int_0^1 \Phi_b' \Phi_b'' d\xi \Phi_f'' + 1/2 i \beta_0 \int_0^1 \Phi_f' \Phi_b'' dx \Phi_b'' - 1/2 i \beta_0 \int_0^1 \Phi_b' \Phi_f'' dx \Phi_b'' + \beta_0^2 \int_0^1 \Phi_b' \Phi_b'' dx \Phi_f'' \\
& + 1/2 \beta_0^2 \int_0^1 \Phi_f' \Phi_b dx \Phi_b'' + 1/2 \int_0^1 \Phi_b' \Phi_f'' dx \Phi_b'' + 1/2 i \beta_0^3 \int_0^1 \Phi_f' \Phi_b dx \Phi_b' + i \beta_0^3 \int_0^1 \Phi_b' \Phi_b dx \Phi_f' - 1/2 \beta_0^2 \int_0^1 \Phi_f' \Phi_b dx \Phi_b' \\
& \left. + 1/2 \beta_0^2 \int_0^1 \Phi_b' \Phi_f'' dx \Phi_b' + 1/2 i \beta_0 \int_0^1 \Phi_b' \Phi_f'' dx \Phi_b' \right) \bar{A}_2 A_1 A_2 \mu + \frac{1}{2\pi^4} - 1/2 i c e^{i\beta_0 x} \Phi_f A_1 \omega_f + \frac{1}{2} (e_\eta + i e_\xi) \Omega^2 e^{-i\beta_0 x} e^{i\sigma T_2} \\
& + \left[\frac{1}{\pi^2} (\Delta I \Phi_f'' - 4i \Delta I \beta_0 \Phi_f' - 3 \Delta I \beta_0^2 \Phi_f) \Omega \omega_f + \frac{1}{\pi^4} \left(\frac{3}{2} \Delta I \Phi_f \omega_f^2 + \frac{21}{2} \Delta D \Phi_f'' \right) \beta_0^2 \right. \\
& \left. + \frac{1}{\pi^4} (4 \Delta D \Phi_f'' + 2\pi^2 \Delta I \Phi_f' \omega_f^2) i \beta_0 - \frac{1}{2\pi^2} \Delta I \omega_f^2 \Phi_f'' - \frac{1}{2\pi^4} \Delta D \Phi_f^{(4)} - \frac{1}{\pi^4} (4 \Delta D \beta_0^4 \Phi_f + 11 i \Delta D \beta_0^3 \Phi_f') \right] \bar{A}_1 e^{2i\sigma T_2} e^{-4i\beta_0 x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{b,v} = & \frac{1}{\pi^2} \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \left(\beta_0 \Phi'_b + i\beta_0^2 \Phi_b \right) e^{2i\beta_0 x} + \left(-i\Phi''_b + \frac{1}{2} i\beta_0^2 \Phi_b + \frac{3}{2} \beta_0 \Phi'_b \right) \right) I_{xx} \Omega \right. \\
& - \left(i\beta_0^2 \Phi_b + 2\beta_0 \Phi'_b \right) \Sigma I \omega_b + \left(-\pi^2 \Phi_b + \Sigma I \Phi''_b \right) i \omega_b \left. \right] A'_2 - \frac{1}{2} i c e^{i\beta_0 x} \omega_b \Phi_b A_2 + \frac{1}{2\pi^4} \left(i\beta_0 \Phi'_b + \Phi''_b \right) F_x A_2 \\
& + \frac{1}{\pi^4} \left(\int_0^1 \Phi'_f \Phi''_f dx \Phi''_f + i\beta_0^3 \int_0^1 \Phi'_f \Phi_f dx \Phi'_f + i\beta_0 \int_0^1 \Phi'_f \Phi''_f dx \Phi'_f + \beta_0^2 \int_0^1 \Phi'_f \Phi_f dx \Phi''_f \right) \mu \bar{A}_2 A_2^2 \\
& + \frac{1}{\pi^4} \left(1/2 \beta_0^2 \int_0^1 \Phi'_b \Phi'_f dx \Phi_f + \int_0^1 \Phi'_b \Phi''_f d\xi \Phi''_f + i\beta_0 \int_0^1 \Phi'_b \Phi''_f dx \Phi'_f + 1/2 i \beta_0 \int_0^1 \Phi'_f \Phi''_f dx \Phi'_b \right. \\
& + 1/2 \int_0^1 \Phi'_f \Phi''_b dx \Phi''_b + 1/2 \beta_0^2 \int_0^1 \Phi''_b \Phi''_f dx \Phi'_b + 1/2 i \beta_0 \int_0^1 \Phi_b \Phi''_f dx \Phi''_b - 1/2 i \beta_0 \int_0^1 \Phi_b \Phi''_f dx \Phi''_b + \beta_0^2 \int_0^1 \Phi'_b \Phi_b dx \Phi''_f \\
& + 1/2 \beta_0^2 \int_0^1 \Phi'_f \Phi'_b dx \Phi''_f + 1/2 \int_0^1 \Phi'_b \Phi''_f dx \Phi''_b + 1/2 i \beta_0^3 \int_0^1 \Phi'_f \Phi_b dx \Phi'_b + 1/2 i \beta_0^3 \int_0^1 \Phi'_b \Phi_f dx \Phi''_b + i\beta_0^3 \int_0^1 \Phi'_b \Phi_b dx \Phi''_f \\
& \left. - 1/2 \beta_0^2 \int_0^1 \Phi_f \Phi''_b dx \Phi'_b + 1/2 i \beta_0 \int_0^1 \Phi'_b \Phi''_f dx \Phi'_b \right) \bar{A}_1 A_1 A_2 \mu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{f,w} = & \frac{1}{\pi^2} \left[1/2 \left(\left(\frac{1}{2} \beta_0^2 \Phi_f - \frac{1}{2} i \beta_0 \Phi'_f \right) e^{2i\beta_0 x} + \frac{1}{2} \beta_0^2 \Phi_f - \frac{3}{2} i \beta_0 \Phi'_f - \Phi''_f \right) \Omega I_{xx} \right. \\
& - \left(-i\beta_0^2 \Sigma I \Phi_f + 2i \beta_0 \Sigma I \Phi'_f + \pi^2 \Phi_f + \Sigma I \Phi''_f \right) \omega_f \left. \right] A'_1 + \frac{1}{2\pi^4} \left(\beta_0 \Phi'_f - i\Phi''_f \right) F_x A_1 \\
& + \frac{1}{2\pi^4} \left[\left(-i\Phi''_f + \beta_0 \Phi'_f \right) \int_0^1 \Phi_b'^2 dx + \left(-i\beta_0^2 \Phi''_f + \beta_0^3 \Phi'_f \right) \int_0^1 \Phi_b^2 dx + \left(-i\Phi''_b + \beta_0 \Phi'_b \right) \int_0^1 \Phi'_f \Phi'_b dx \right. \\
& + \left. \left(-i\beta_0^2 \Phi''_b + \beta_0^3 \Phi'_b \right) \int_0^1 \Phi_f \Phi_b dx + \left(i\beta_0^2 \Phi'_b + \beta_0 \Phi''_b \right) \int_0^1 \Phi'_b \Phi_f dx + \left(-\beta_0 \Phi''_b - i\beta_0^2 \Phi'_b \right) \int_0^1 \Phi'_f \Phi_b dx \right] \mu \bar{A}_2 A_2 A_1 \\
& + \frac{1}{2\pi^4} \left[\left(-i\beta_0^2 \Phi''_f + \beta_0^3 \Phi'_f \right) \int_0^1 \Phi_f^2 dx + \left(-\Phi''_f + \beta_0 \Phi'_f \right) \int_0^1 \Phi_f'^2 dx \right] \mu A_1^2 \bar{A}_1 \\
& + \left[\frac{1}{\pi^2} \left(-i\Phi''_f - 4\beta_0 \Phi'_f + 3i\beta_0^2 \Phi_f \right) \Omega \omega_f \Delta I - \frac{1}{\pi^4} \left(-4i\beta_0^4 \Phi_f + 11\beta_0^3 \Phi'_f \right) \Delta D - \frac{1}{\pi^4} \left(\frac{3}{2} \Delta I \Phi_f \omega_f^2 + 21/2 \Delta D \Phi_f \right) i\beta_0^2 \right. \\
& + \frac{1}{\pi^4} \left(4\Delta D \Phi_f'' + 2\pi^2 \Delta I \Phi_f' \omega_f^2 \right) \beta_0 + \frac{1}{2\pi^2} i \Delta I \omega_f^2 \Phi_f'' + \frac{1}{2\pi^4} i \Delta D \Phi_f^{(4)} \left. \right] \bar{A}_1 e^{2i\sigma T_2} e^{-4i\beta_0 x} \\
& - \frac{1}{2} c e^{i\beta_0 x} \Phi_f A_1 \omega_f + \frac{1}{2} \left(-i e_\eta + e_\xi \right) \Omega^2 e^{-i\beta_0 x} e^{i\sigma T_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{b,w} = & \frac{1}{\pi^2} \left[1/2 \left(-\frac{1}{2} \left(i\beta_0 \Phi'_b + \beta_0^2 \Phi_b \right) e^{2i\beta_0 x} + \left(-\Phi''_b + \frac{1}{2} \beta_0^2 \Phi_b - \frac{3}{2} i \beta_0 \Phi'_b \right) \right) I_{xx} \Omega \right. \\
& - \left(\beta_0^2 \Phi_b - 2i \beta_0 \Phi'_b \right) \Sigma I \omega_b + \left(-\pi^2 \Phi_b + \Sigma I \Phi''_b \right) \omega_b \left. \right] A'_2 + \frac{1}{2\pi^4} \left(\beta_0 \Phi'_b - i\Phi''_b \right) F_x A_2 \\
& + \frac{1}{2\pi^4} \left(i \int_0^1 \Phi'_b \Phi''_b dx \Phi''_b + \beta_0 \int_0^1 \Phi'_b \Phi''_b dx \Phi'_b + i\beta_0^2 \int_0^1 \Phi'_b \Phi_b dx \Phi''_b \right) \mu \bar{A}_2 A_2^2 - 1/2 c e^{i\beta_0 x} \omega_b \Phi_b A_2 \\
& + \frac{1}{2\pi^4} \left(1/2 i \beta_0^2 \int_0^1 \Phi'_b \Phi'_f dx \Phi_f + \beta_0 \int_0^1 \Phi'_b \Phi''_f dx \Phi'_f + 1/2 \beta_0 \int_0^1 \Phi'_f \Phi''_f dx \Phi'_b + 1/2 i \int_0^1 \Phi'_f \Phi''_b dx \Phi''_f \right. \\
& + 1/2 \beta_0 \int_0^1 \Phi_b \Phi''_f dx \Phi''_b + 1/2 i \beta_0 \int_0^1 \Phi_b \Phi''_f dx \Phi''_b + \beta_0^2 \int_0^1 \Phi'_b \Phi_b dx \Phi''_f + 1/2 \beta_0^2 \int_0^1 \Phi'_f \Phi'_b dx \Phi''_f \\
& + 1/2 \int_0^1 \Phi'_b \Phi''_f dx \Phi''_b + 1/2 i \beta_0^3 \int_0^1 \Phi'_f \Phi_b dx \Phi'_b + 1/2 i \beta_0^3 \int_0^1 \Phi'_b \Phi_f dx \Phi'_b \\
& \left. + i\beta_0^3 \int_0^1 \Phi'_b \Phi_b dx \Phi'_f - 1/2 i \beta_0^2 \int_0^1 \Phi_f \Phi''_b dx \Phi'_b + 1/2 i \beta_0 \int_0^1 \Phi'_b \Phi''_f dx \Phi'_b \right) \mu A_1 A_2 \bar{A}_1
\end{aligned}$$

به این ترتیب، با توجه به شرایط حل پذیری فوق و تقریب شکل مدها به صورت شکل مدهای

خطی با شرایط مرزی یک سر گیردار به صورت

$$\Phi_f = \Phi_b = \cos \gamma_n \xi - \cosh \gamma_n \xi - \frac{\cos \gamma_n + \cosh \gamma_n}{\sin \gamma_n + \sinh \gamma_n} \sin \gamma_n \xi - \sinh \gamma_n \xi$$

$$\gamma_n \approx \frac{\sqrt{2n-1} \pi}{2}$$

داریم،

$$\begin{aligned} & (\Lambda_{1,v} + i\Lambda_{2,v})D_2 A_1 + (\Lambda_{5,v} + i\Lambda_{6,v})A_1 A_2 \bar{A}_2 + (i\Lambda_{7,v} + \Lambda_{8,v})A_1^2 \bar{A}_1 \\ & + (i\Lambda_{3,v} + \Lambda_{4,v})\bar{A}_1 e^{2i\sigma T_2} - i c A_1 \omega_f \Pi_{(9,\beta_0,n)} - \frac{1}{\pi^4} (\Pi_{(5,\beta_0,n)} + i\beta_0 \Pi_{(1,\beta_0,n)}) F_x A_1 \end{aligned} \quad (18-6)$$

$$+ (e_\eta + i e_\xi) \Omega^2 e^{i\sigma T_2} = 0$$

$$\begin{aligned} & (\Lambda_{1,w} + i\Lambda_{2,w})D_2 A_2 + (\Lambda_{5,v} + i\Lambda_{6,v})A_1 A_2 \bar{A}_1 + (\Lambda_{8,v} + i\Lambda_{7,v})A_2^2 \bar{A}_2 \\ & - i c A_2 \omega_b \Pi_{(9,\beta_0,n)} - \frac{1}{\pi^4} (A_{(5,\beta_0,n)} + i\beta_0 A_{(1,\beta_0,n)}) F_x A_2 = 0 \end{aligned} \quad (19-6)$$

که \bar{A}_2 و \bar{A}_1 مزدوجهای مختلط A_2 و A_1 بوده و

$$\begin{aligned} \Pi_{(1,\beta_0,n)} &= \int_0^1 \phi \phi' dx; & \Pi_{(2,\beta_0,n)} &= \int_0^1 \frac{\phi \phi'}{e^{2i\beta_0 x}} dx = \Pi_{(2,\beta_0,n)}^C + i\Pi_{(2,\beta_0,n)}^S; & \Pi_{(3,\beta_0,n)} &= \int_0^1 \phi^2 dx; \\ \Pi_{(4,\beta_0,n)} &= \int_0^1 \frac{\phi^2}{e^{2i\beta_0 x}} dx = \Pi_{(4,\beta_0,n)}^C + i\Pi_{(4,\beta_0,n)}^S; & \Pi_{(5,\beta_0,n)} &= \int_0^1 \phi \phi'' dx; & \Pi_{(6,\beta_0,n)} &= \int_0^1 \phi \phi''' dx; \\ \Pi_{(7,\beta_0,n)} &= \int_0^1 \phi \phi^{(4)} dx; & \Pi_{(8,\beta_0,n)} &= \int_0^1 \frac{\phi^2}{e^{4i\beta_0 x}} dx = \Pi_{(8,\beta_0,n)}^C + i\Pi_{(8,\beta_0,n)}^S; \\ \Pi_{(9,\beta_0,n)} &= \int_0^1 \phi^2 e^{i\beta_0 x} dx = \Pi_{(9,\beta_0,n)}^C + i\Pi_{(9,\beta_0,n)}^S; & \Pi_{(10,\beta_0,n)} &= \int_0^1 \frac{\phi \phi^{(4)}}{e^{4i\beta_0 x}} dx = \Pi_{(10,\beta_0,n)}^C + i\Pi_{(10,\beta_0,n)}^S; \\ \Pi_{(11,\beta_0,n)} &= \int_0^1 \frac{\phi \phi'}{e^{4i\beta_0 x}} dx = \Pi_{(11,\beta_0,n)}^C + i\Pi_{(11,\beta_0,n)}^S; & \Pi_{(12,\beta_0,n)} &= \int_0^1 \frac{\phi \phi''}{e^{4i\beta_0 x}} dx = \Pi_{(12,\beta_0,n)}^C + i\Pi_{(12,\beta_0,n)}^S; \\ \Pi_{(13,\beta_0,n)} &= \int_0^1 \phi' \phi'' dx; & \Pi_{(14,\beta_0,n)} &= \int_0^1 \frac{\phi \phi'''}{e^{4i\beta_0 x}} dx = \Pi_{(14,\beta_0,n)}^C + i\Pi_{(14,\beta_0,n)}^S \end{aligned}$$

9

$$\Lambda_{1,v} = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{3}{2} I_{xx} \Omega - 4 \Sigma I \omega_f \right) \beta_0 \Pi_{(1,\beta_0,n)}$$

$$\Lambda_{2,v} = \frac{1}{2\pi^2} \left(\beta_0^2 \Pi_{(3,\beta_0,n)} - 2 \Pi_{(5,\beta_0,n)} \right) I_{xx} \Omega + \frac{2}{\pi^2} \left(\Pi_{(5,\beta_0,n)} + \beta_0^2 \Pi_{(3,\beta_0,n)} \right) \Sigma I \omega_f - 2 \Pi_{(3,\beta_0,n)} \omega_f$$

$$\Lambda_{3,v} = \frac{2 \Delta I \omega_f \Omega}{\pi^2} \left[-\frac{4}{\pi^2} \beta_0 \Pi_{(11,\beta_0,n)}^C - \frac{3}{\pi^2} \beta_0^2 \Pi_{(8,\beta_0,n)}^S + \Pi_{(12,\beta_0,n)}^S \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\Delta I \omega_f^2}{\pi^2} \left[4\beta_0 \Pi_{(11, \beta_0, n)}^C + 3\beta_0^2 \Pi_{(8, \beta_0, n)}^S - \Pi_{(12, \beta_0, n)}^S \right] \\
& + \frac{\Delta D}{\pi^4} \left[-\Pi_{(10, \beta_0, n)}^S + 8\beta_0 \Pi_{(14, \beta_0, n)}^C - 22\beta_0^3 \Pi_{(11, \beta_0, n)}^C - 8\beta_0^4 \Pi_{(8, \beta_0, n)}^S + 21\beta_0^2 \Pi_{(12, \beta_0, n)}^S \right] \\
\Lambda_{4,v} = & \frac{2\Delta I \omega_f \Omega}{\pi^2} \left[\frac{4}{\pi^2} \beta_0 \Pi_{(11, \beta_0, n)}^S - \frac{3}{\pi^2} \beta_0^2 \Pi_{(8, \beta_0, n)}^C + \Pi_{(12, \beta_0, n)}^C \right] \\
& + \frac{\Delta I \omega_f^2}{\pi^2} \left[-4\beta_0 \Pi_{(11, \beta_0, n)}^S + 3\beta_0^2 \Pi_{(8, \beta_0, n)}^C - \Pi_{(12, \beta_0, n)}^C \right] \\
& + \frac{\Delta D}{\pi^4} \left[-\Pi_{(10, \beta_0, n)}^C - 8\beta_0 \Pi_{(14, \beta_0, n)}^S + 22\beta_0^3 \Pi_{(11, \beta_0, n)}^S - 8\beta_0^4 \Pi_{(8, \beta_0, n)}^C + 21\beta_0^2 \Pi_{(12, \beta_0, n)}^C \right], \\
\Lambda_{5,v} = & \frac{4}{\pi^4} \mu \left(\Pi_{(13, \beta_0, n)} \Pi_{(5, \beta_0, n)} + \beta_0^2 \Pi_{(1, \beta_0, n)} \Pi_{(5, \beta_0, n)} \right) \\
\Lambda_{6,v} = & \frac{4}{\pi^4} \mu \left(\beta_0^3 \Pi_{(1, \beta_0, n)}^2 + \beta_0 \Pi_{(13, \beta_0, n)} \Pi_{(1, \beta_0, n)} \right), \Lambda_{7,v} = \frac{2}{\pi^4} \mu \left(\beta_0 \Pi_{(13, \beta_0, n)} \Pi_{(1, \beta_0, n)} + \beta_0^3 \Pi_{(1, \beta_0, n)}^2 \right) \\
\Lambda_{8,v} = & \frac{2}{\pi^4} \mu \left(\beta_0^2 \Pi_{(1, \beta_0, n)} \Pi_{(5, \beta_0, n)} + \Pi_{(13, \beta_0, n)} \Pi_{(5, \beta_0, n)} \right), \Lambda_{1,w} = \frac{3}{2\pi^2} I_{xx} \beta_0 \Pi_{(1, \beta_0, n)} \Omega - 4\Sigma I \beta_0 \Pi_{(1, \beta_0, n)} \omega_b \\
\Lambda_{2,w} = & \frac{1}{2\pi^2} \left(\beta_0^2 \Pi_{(3, \beta_0, n)} - 2\Pi_{(5, \beta_0, n)} \right) I_{xx} \Omega + \frac{1}{\pi^2} \left(-2\beta_0^2 \Pi_{(3, \beta_0, n)} \omega_b + 2\Pi_{(5, \beta_0, n)} \right) \Sigma I \omega_b - 2\Pi_{(3, \beta_0, n)} \omega_b \\
e_\eta = & \int_0^1 \Phi_{f|b}(x) e_\eta(x) dx, e_\xi = \int_0^1 \Phi_{f|b}(x) e_\xi(x) dx
\end{aligned}$$

همچنین، همانطور که از معادله (۶-۱۸) مشاهده می‌شود، ضریب جمله $e^{2i\sigma T_2}$ که

می باشد، اشاره به نا متقارنی در سیستم دارد. برای حذف $e^{i\sigma T_0}$ در معادلات قرار

می‌دهیم،

$$A_1(T_2) = A(T_2) e^{i\sigma T_2} \quad (۲۰-۶)$$

و در نهایت برای بدست آوردن پاسخ معادلات حاصل، $A(T_2)$ و $A_2(T_2)$ را به صورت قطبی

$$A = \frac{1}{2} a_1(T_2) e^{i\theta(T_2)}, A_2 = \frac{1}{2} a_2(T_2) e^{i\theta(T_2)} \quad (۲۱-۶)$$

در معادلات حاصل قرار می‌دهیم.

سپس با جداسازی بخشهای حقیقی و موهومی دو معادله حاصل، ۴ معادله دیفرانسیل معمولی

مرتبه اول به شکل زیر بدست می‌آید،

$$\begin{aligned}
4(\Lambda_{1,v}^2 + \Lambda_{2,v}^2) D_2 a_1 = & 4 \left[(\Lambda_{2,v} \Lambda_{4,v} - \Lambda_{1,v} \Lambda_{3,v}) \sin(2\Theta) - (\Lambda_{1,v} \Lambda_{4,v} + \Lambda_{2,v} \Lambda_{3,v}) \cos(2\Theta) \right] a_1 \\
& + 8\Omega^2 \left[(\Lambda_{2,v} e_\eta - \Lambda_{1,v} e_\xi) \sin(\Theta) - (\Lambda_{1,v} e_\eta + \Lambda_{2,v} e_\xi) \cos(\Theta) \right] - (\Lambda_{2,v} \Lambda_{7,v} + \Lambda_{1,v} \Lambda_{8,v}) a_1^3 \\
& - (\Lambda_{1,v} \Lambda_{5,v} + \Lambda_{2,v} \Lambda_{6,v}) a_1 a_2^2 + 8c a_1 \omega_f \left(\Lambda_{2,v} \Pi_{(9, \beta_0, n)}^C - \Lambda_{1,v} \Pi_{(9, \beta_0, n)}^S \right) - F_x \Pi_{(1, \beta_0, n)} \Lambda_{2,v}^f a_1
\end{aligned} \quad (۲۲-۶)$$

$$4(\Lambda_{1,v}^2 + \Lambda_{2,v}^2)a_1 D_2 \Theta = 4 \left[(-\Lambda_{1,v} \Lambda_{3,v} + \Lambda_{4,v} \Lambda_{2,v}) \cos(2\Theta) + (\Lambda_{4,v} \Lambda_{1,v} + \Lambda_{3,v} \Lambda_{2,v}) \sin(2\Theta) \right] a_1$$

$$+ (\Lambda_{8,v} \Lambda_{2,v} - \Lambda_{1,v} \Lambda_{7,v}) a_1^3 + (\Lambda_{5,v} \Lambda_{2,v} - \Lambda_{1,v} \Lambda_{6,v}) a_1 a_2^2 - 4(\Lambda_{1,v}^2 + \Lambda_{2,v}^2) a_1 \sigma$$

$$+ 8\Omega^2 \left[(\Lambda_{2,v} e_\xi + e_\eta \Lambda_{1,v}) \sin(\Theta) + (e_\eta \Lambda_{2,v} - e_\xi \Lambda_{1,v}) \cos(\Theta) \right] \quad (23-6)$$

$$+ 8ca_1 \omega_f \left(\Lambda_{2,v} \Pi_{(9,\beta_0,n)}^S + \Lambda_{1,v} \Pi_{(9,\beta_0,n)}^C \right) + F_x \left(\Lambda_{2,v}^f \Pi_{(5,\beta_0,n)} + \Lambda_{1,v}^f \Pi_{(1,\beta_0,n)} \right) a_1$$

$$4(\Lambda_{2,w}^2 + \Lambda_{1,w}^2) D_2 a_2 = -(\Lambda_{1,w} \Lambda_{5,v} + \Lambda_{2,w} \Lambda_{6,v}) a_2 a_1^2 - (\Lambda_{1,w} \Lambda_{8,v} + \Lambda_{2,w} \Lambda_{7,v}) a_2^3$$

$$+ 8ca_2 \omega_b \left(\Lambda_{2,w} \Pi_{(9,\beta_0,n)}^C - \Lambda_{1,w} \Pi_{(9,\beta_0,n)}^S \right) - F_x \Pi_{(1,\beta_0,n)} \Lambda_{2,v}^b a_1 \quad (24-6)$$

$$4(\Lambda_{2,w}^2 + \Lambda_{1,w}^2) D_2 \theta = (-\Lambda_{6,v} \Lambda_{1,w} + \Lambda_{2,w} \Lambda_{5,v}) a_1^2 + (-\Lambda_{7,v} \Lambda_{1,w} + \Lambda_{2,w} \Lambda_{8,v}) a_2^2$$

$$+ 8ca_2 \omega_b \left(\Lambda_{1,w} \Pi_{(9,\beta_0,n)}^C + \Lambda_{2,w} \Pi_{(9,\beta_0,n)}^S \right) + F_x \left(\Lambda_{2,v}^b \Pi_{(5,\beta_0,n)} + \Lambda_{1,v}^b \Pi_{(1,\beta_0,n)} \right) a_1 \quad (25-6)$$

به منظور بررسی پایداری ارتعاشاتی تیر مورد نظر و همچنین استخراج نقاط ثابت تعادلی

معادلات مذکور، می‌بایست مشتقات زمانی آنها صفر در نظر گرفته شوند. با انجام این کار و همانطور که

از معادلات نشان داده شده مشخص است، a_2 نیز برابر صفر خواهد شد و این بدان معنی است که تنها

لنگ زنی همسو تحریک خواهد شد. به این ترتیب، معادلات نهایی برای بررسی پایداری سیستم مورد

نظر عبارتند از،

$$4 \left[(\Lambda_{2,v} \Lambda_{4,v} - \Lambda_{1,v} \Lambda_{3,v}) \sin(2\Theta_0) - (\Lambda_{1,v} \Lambda_{4,v} + \Lambda_{2,v} \Lambda_{3,v}) \cos(2\Theta_0) \right] a_{10}$$

$$+ 8\Omega^2 \left[(\Lambda_{2,v} e_\eta - \Lambda_{1,v} e_\xi) \sin(\Theta_0) - (\Lambda_{1,v} e_\eta + \Lambda_{2,v} e_\xi) \cos(\Theta_0) \right] - (\Lambda_{2,v} \Lambda_{7,v} + \Lambda_{1,v} \Lambda_{8,v}) a_{10}^3 \quad (26-6)$$

$$+ 8ca_{10} \omega_f \left(\Lambda_{2,v} \Pi_{(9,\beta_0,n)}^C - \Lambda_{1,v} \Pi_{(9,\beta_0,n)}^S \right) - F_x \Pi_{(1,\beta_0,n)} \Lambda_{2,v}^f a_{10} = 0$$

$$4 \left[(-\Lambda_{1,v} \Lambda_{3,v} + \Lambda_{4,v} \Lambda_{2,v}) \cos(2\Theta_0) + (\Lambda_{4,v} \Lambda_{1,v} + \Lambda_{3,v} \Lambda_{2,v}) \sin(2\Theta_0) \right] a_{10}$$

$$+ (\Lambda_{8,v} \Lambda_{2,v} - \Lambda_{1,v} \Lambda_{7,v}) a_{10}^3 - 4(\Lambda_{1,v}^2 + \Lambda_{2,v}^2) a_{10} \sigma$$

$$+ 8\Omega^2 \left[(\Lambda_{2,v} e_\xi + e_\eta \Lambda_{1,v}) \sin(\Theta_0) + (e_\eta \Lambda_{2,v} - e_\xi \Lambda_{1,v}) \cos(\Theta_0) \right] \quad (27-6)$$

$$+ 8ca_{10} \omega_b \left(\Lambda_{2,v} \Pi_{(9,\beta_0,n)}^S + \Lambda_{1,v} \Pi_{(9,\beta_0,n)}^C \right) + F_x \left(\Lambda_{2,v}^f \Pi_{(5,\beta_0,n)} + \Lambda_{1,v}^f \Pi_{(1,\beta_0,n)} \right) a_{10} = 0$$

۶-۳- تحلیل پایداری با استفاده از روش گالرکین و با اعمال روش مقیاس‌های

چندگانه به معادلات دیفرانسیل با مشتقات معمولی (ODE)

در این بخش، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی با استفاده از روش تقریبی گالرکین به

معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شوند. برای این منظور، با فرض اینکه تنها یک مد حرکتی

تحریک می‌شود، روش گالرکین به شکل زیر به معادلات اعمال می‌شود،

$$v(x,t) = \Phi_n(x)V(t) \quad (28-6)$$

$$w(x,t) = \Phi_n(x)W(t)$$

که $\Phi_n(x)$ و n به ترتیب شکل مدهای عرضی و شماره مد می‌باشند. با جایگذاری رابطه (۲۸-۶)

در (۳-۶) و (۴-۶)، ضرب طرفین معادله حاصل در شکل مدهای متناظر خود، انتگرال گیری جزء به

جزء در فاصله $[0,1]$ و استفاده از خاصیت تعامد شکل مدها داریم،

$$\begin{aligned} & (\Gamma_1 V + \Gamma_2 W + \Gamma_3 \ddot{V} + \Gamma_4 \ddot{W} + \Gamma_5 \dot{V} + \Gamma_6 \dot{W}) \cos(2\Omega t) \\ & + (\Gamma_1 W - \Gamma_4 \ddot{V} + \Gamma_3 \ddot{W} - \Gamma_2 V - \Gamma_6 \dot{V} + \Gamma_5 \dot{W}) \sin(2\Omega t) \\ & + (-c\Pi_{(9,\beta_0,n)} + \Gamma_{15} + \Gamma_{11}) \dot{V} + (\Gamma_{12} - \Gamma_{16}) \dot{W} + \Gamma_9 V - \Gamma_{10} W + \Gamma_7 V W^2 - \Gamma_8 V^2 W \\ & - \Gamma_8 W^3 + \Gamma_7 V^3 + \Gamma_{13} \ddot{V} - \Gamma_{14} \ddot{W} + \Omega^2 (e_\eta \cos(\Omega t) - e_\zeta \sin(\Omega t)) \end{aligned} \quad (29-6)$$

$$+ (\beta_0 \Pi_{(1,\beta_0,n)} W + \Pi_{(5,\beta_0,n)} V) F_x = 0$$

$$\begin{aligned} & (\Gamma_1 V + \Gamma_2 W + \Gamma_3 \ddot{V} + \Gamma_4 \ddot{W} + \Gamma_5 \dot{V} + \Gamma_6 \dot{W}) \sin(2\Omega t) \\ & + (-\Gamma_1 W + \Gamma_4 \ddot{V} - \Gamma_3 \ddot{W} + \Gamma_2 V + \Gamma_6 \dot{V} - \Gamma_5 \dot{W}) \cos(2\Omega t) \\ & + (-c\Pi_{(9,\beta_0,n)} + \Gamma_{15} - \Gamma_{11}) \dot{W} + (\Gamma_{12} + \Gamma_{16}) \dot{V} + \Gamma_9 W - \Gamma_{10} V + \Gamma_8 V W^2 + \Gamma_8 V^2 W \\ & - \Gamma_8 V^3 + \Gamma_7 W^3 + \Gamma_{13} \ddot{W} - \Gamma_{14} \ddot{V} + \Omega^2 (e_\eta \cos(\Omega t) + e_\zeta \sin(\Omega t)) \end{aligned} \quad (30-6)$$

$$+ (\beta_0 \Pi_{(1,\beta_0,n)} V + \Pi_{(5,\beta_0,n)} W) F_x = 0$$

که

$$\Gamma_1 = \frac{2}{\pi^4} \left(-4\beta_0 \Pi_{(14,\beta_0,n)}^S - 1/2\Pi_{(10,\beta_0,n)}^C + 11\beta_0^3 \Pi_{(11,\beta_0,n)}^S - 4\beta_0^4 \Pi_{(8,\beta_0,n)}^C + 21/2\beta_0^2 \Pi_{(12,\beta_0,n)}^C \right) \Delta D,$$

$$\Gamma_2 = \frac{2}{\pi^4} \left(4\beta_0 \Pi_{(14,\beta_0,n)}^C - 1/2\Pi_{(10,\beta_0,n)}^S - 11\beta_0^3 \Pi_{(11,\beta_0,n)}^C - 4\beta_0^4 \Pi_{(8,\beta_0,n)}^S + 21/2\beta_0^2 \Pi_{(12,\beta_0,n)}^S \right) \Delta D,$$

$$\Gamma_3 = \frac{2}{\pi^2} \left(-3/2\beta_0^2 \Pi_{(8,\beta_0,n)}^C + 2\beta_0 \Pi_{(11,\beta_0,n)}^S + 1/2\Pi_{(12,\beta_0,n)}^C \right) \Delta I,$$

$$\Gamma_4 = \frac{2}{\pi^2} \left(-3/2\beta_0^2 \Pi_{(8,\beta_0,n)}^S - 2\beta_0 \Pi_{(11,\beta_0,n)}^C + 1/2\Pi_{(12,\beta_0,n)}^S \right) \Delta I,$$

$$\Gamma_5 = \frac{2}{\pi^2} \left(-\Pi_{(12,\beta_0,n)}^S + 4\beta_0 \Pi_{(11,\beta_0,n)}^C + 3\beta_0^2 \Pi_{(8,\beta_0,n)}^S \right) \Omega \Delta I,$$

$$\Gamma_6 = \frac{2}{\pi^2} \left(\Pi_{(12,\beta_0,n)}^C + 4\beta_0 \Pi_{(11,\beta_0,n)}^S - 3\beta_0^2 \Pi_{(8,\beta_0,n)}^C \right) \Omega \Delta I,$$

$$\Gamma_7 = \frac{2\mu}{\pi^4} \left(\beta_0^2 \Pi_{(1,\beta_0,n)} \Pi_{(5,\beta_0,n)} + \Pi_{(13,\beta_0,n)} \Pi_{(5,\beta_0,n)} \right), \Gamma_8 = \frac{2\mu}{\pi^4} \left(\beta_0^3 \Pi_{(1,\beta_0,n)}^2 + \beta_0 \Pi_{(13,\beta_0,n)} \Pi_{(1,\beta_0,n)} \right),$$

$$\Gamma_9 = \frac{2}{\pi^4} \left(-1/2\Pi_{(7,\beta_0,n)} + 5/2\beta_0^2 \Pi_{(5,\beta_0,n)} \right), \Gamma_{10} = \frac{2}{\pi^4} \left(-2\beta_0 \Pi_{(6,\beta_0,n)} + \beta_0^3 \Pi_{(1,\beta_0,n)} \right),$$

$$\Gamma_{11} = -\frac{\beta_0 \Omega I_{xx}}{2\pi^2} \left(\Pi_{(2,\beta_0,n)}^C + \Pi_{(4,\beta_0,n)}^S \right), \Gamma_{12} = \frac{\beta_0^2 \Omega I_{xx}}{2\pi^2} \left(-\Pi_{(2,\beta_0,n)}^C + \Pi_{(4,\beta_0,n)}^C \right),$$

$$\Gamma_{13} = \frac{1}{\pi^2} \left(-\pi^2 \Pi_{(3,\beta_0,n)} + \Sigma \Pi_{(5,\beta_0,n)} - \beta_0^2 \Pi_{(3,\beta_0,n)} \right), \Gamma_{14} = \frac{2\beta_0 \Sigma I}{\pi^2} \Pi_{(1,\beta_0,n)},$$

$$\Gamma_{15} = \frac{3\beta_0}{2\pi^2} \Omega I_{xx} \Pi_{(1,\beta_0,n)}, \Gamma_{16} = \frac{1}{\pi^2} \left(-\Pi_{(5,\beta_0,n)} + 1/2\beta_0^2 \Pi_{(3,\beta_0,n)} \right) \Omega I_{xx}$$

از آنجا که معادلات (۲۹-۶) و (۳۰-۶) شامل تنها جملات غیر خطی مرتبه سه می باشد، تقریب

(۳۱-۶) را می توان به شکل زیر به معادلات (۲۹-۶) و (۳۰-۶) اعمال کرد،

$$V(t) = \varepsilon V_1(T_0, T_2) + \varepsilon^3 V_3(T_0, T_2) + \dots \quad (۳۱-۶)$$

$$W(t) = \varepsilon W_1(T_0, T_2) + \varepsilon^3 W_3(T_0, T_2) + \dots$$

لازم به ذکر است اگر در تقریب فوق، جملات W_2, V_2, W_0, V_0 ظاهر شوند، پاسخ آنها در ادامه

صفر خواهد شد. برای بالانس ترمهای غیر خطی و به منظور استخراج رزونانس های اولیه و پارامتریک،

پارامترهای بی بعد زیر به شکل زیر مقیاس بندی شده و در معادلات حاصل قرار می دهیم،

$$c = \varepsilon^2 \bar{c}, \Delta D = \varepsilon^2 \bar{\Delta D}, \Delta I = \varepsilon^2 \bar{\Delta I}, e_\zeta = \varepsilon^3 \bar{e}_\zeta, e_\eta = \varepsilon^3 \bar{e}_\eta, F_x = \varepsilon^2 \bar{F}_x \quad (۳۲-۶)$$

با جایگذاری روابط (۳۱-۶) و (۳۲-۶) در (۲۹-۶) و (۳۰-۶) و برابر قرار دادن ضرایب توانهای

مشابه ε و ε^3 داریم،

$O(\varepsilon)$:

$$\Gamma_9 V_1 - \Gamma_{10} W_1 + (\Gamma_{11} + \Gamma_{15}) D_0 V_1 + (\Gamma_{12} - \Gamma_{16}) D_0 W_1 + \Gamma_{13} D_0^2 V_1 - \Gamma_{14} D_0^2 W_1 = 0 \quad (۳۳-۶)$$

$$\Gamma_9 W_1 + \Gamma_{10} V_1 + (\Gamma_{16} + \Gamma_{12}) D_0 V_1 + (\Gamma_{15} - \Gamma_{11}) D_0 W_1 + \Gamma_{13} D_0^2 W_1 + \Gamma_{14} D_0^2 V_1 = 0 \quad (۳۴-۶)$$

$O(\varepsilon^3)$:

$$\begin{aligned} & (\Gamma_1 V_1 + \Gamma_2 W_1 + \Gamma_3 \ddot{V}_1 + \Gamma_4 \ddot{W}_1 + \Gamma_5 \dot{V}_1 + \Gamma_6 \dot{W}_1) \cos(2\Omega t) + (\Gamma_1 W_1 - \Gamma_4 \ddot{V}_1 + \Gamma_3 \ddot{W}_1 - \Gamma_2 V_1 - \Gamma_6 \dot{V}_1 + \Gamma_5 \dot{W}_1) \sin(2\Omega t) \\ & \Gamma_7 (V_1^3 + V_1 W_1^2) - \Gamma_8 (W_1^3 + V_1^2 W_1) + \Gamma_9 V_3 - \Gamma_{10} W_3 + (\Gamma_{11} + \Gamma_{15}) D_0 V_3 + (\Gamma_{11} + \Gamma_{15}) D_0 V_3 \end{aligned} \quad (۳۵-۶)$$

$$\begin{aligned} & + (\Gamma_{12} - \Gamma_{16}) D_0 W_3 + (\Gamma_{12} + \Gamma_{16}) D_2 W_1 + \Gamma_{13} D_0^2 V_3 - \Gamma_{14} D_0^2 W_3 + \frac{1}{\pi^4} \left(\beta_0 \Pi_{(1,\beta_0,n)} W_1 + \Pi_{(5,\beta_0,n)} V_1 \right) F_x \\ & + 2(\Gamma_{13} D_2 D_0 V_1 - \Gamma_{14} D_2 D_0 W_1) + \Omega^2 (e_\eta \cos(\Omega t) - e_\zeta \sin(\Omega t)) - c \Pi_{(9,\beta_0,n)} D_0 V_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\Gamma_1 V_1 + \Gamma_2 W_1 + \Gamma_3 \ddot{V}_1 + \Gamma_4 \ddot{W}_1 + \Gamma_5 \dot{V}_1 + \Gamma_6 \dot{W}_1) \sin(2\Omega t) + (-\Gamma_1 W_1 + \Gamma_4 \ddot{V}_1 - \Gamma_3 \ddot{W}_1 + \Gamma_2 V_1 + \Gamma_6 \dot{V}_1 - \Gamma_5 \dot{W}_1) \cos(2\Omega t) \\ & + i\Gamma_7 W_1^3 + i\Gamma_8 V_1^3 + i\Gamma_7 V_1^2 W_1 + i\Gamma_8 V_1 W_1^2 + (\Gamma_9 W_3 + \Gamma_{10} V_3) + (-\Gamma_{11} + \Gamma_{15}) D_0 W_3 + (\Gamma_{12} + \Gamma_{16}) D_0 V_3 \\ & + (\Gamma_{11} + \Gamma_{15}) D_2 W_1 + (\Gamma_{12} + \Gamma_{16}) D_2 V_1 + \Gamma_{13} D_0^2 W_3 + \Gamma_{14} D_0^2 V_3 + \frac{1}{\pi^4} \left(\beta_0 \Pi_{(1,\beta_0,n)} V_1 + \Pi_{(5,\beta_0,n)} W_1 \right) F_x \end{aligned} \quad (۳۶-۶)$$

$$+ 2(\Gamma_{13} D_2 D_0 W_1 + \Gamma_{14} D_2 D_0 V_1) + \Omega^2 (e_\eta \cos(\Omega t) + e_\zeta \sin(\Omega t)) - c \Pi_{(9,\beta_0,n)} D_0 W_1 = 0$$

پاسخ معادلات (۳۳-۶) و (۳۴-۶) را می توان به شکل زیر بیان کرد،

$$V_1(T_0, T_2) = A_1(T_2) e^{i\omega_7 T_0} + A_2(T_2) e^{i\omega_8 T_0} + CC \quad (۳۷-۶)$$

$$W_1(T_0, T_2) = -iA_1(T_2) e^{i\omega_7 T_0} - iA_2(T_2) e^{i\omega_8 T_0} + CC$$

اکنون، با جایگذاری معادله (۳۷-۶) در (۳۵-۶) و (۳۶-۶)، داریم،

$$\begin{aligned} & (\Gamma_{13}D_0^2V_3 - \Gamma_{14}D_0^2W_3) + (\Gamma_{11} + \Gamma_{15})D_0V_3 + (\Gamma_{12} - \Gamma_{16})D_0W_3 + (\Gamma_9V_3 - \Gamma_{10}W_3) \\ & = G_{f,v}(T_2)e^{i\omega_f T_0} + G_{b,v}(T_2)e^{i\omega_b T_0} + N.S.T + CC \end{aligned} \quad (۳۸-۶)$$

$$\begin{aligned} & (\Gamma_{13}D_0^2W_3 + \Gamma_{14}D_0^2V_3) + (-\Gamma_{11} + \Gamma_{15})D_0W_3 + (\Gamma_{12} + \Gamma_{16})D_0V_3 + (\Gamma_9W_3 + \Gamma_{10}V_3) \\ & = G_{f,w}(T_2)e^{i\omega_f T_0} + G_{b,w}(T_2)e^{i\omega_b T_0} + N.S.T + CC \end{aligned} \quad (۳۹-۶)$$

که CC و N.S.T مزدوجهای مختلط و جملات غیر سکولار می باشند.

همچنین، $G_{f,v}(T_2)$ ، $G_{b,v}(T_2)$ ، $G_{f,w}(T_2)$ و $G_{b,w}(T_2)$ دربردارنده جملات شامل سکولار می باشند

که برابرند با،

$$\begin{aligned} G_{f,v} = & \frac{2}{\pi^2} \left[\left(-\frac{1}{4} (i\beta_0 \Phi'_f - \beta_0^2 \Phi_f) e^{2i\beta_0 x} + i\beta_0^2 \Phi_f + \frac{3}{4} \beta_0 \Phi'_f + \frac{1}{2} i \Phi_f'' \right) \Omega_{I_{xx}} \right. \\ & - \left. \left(-2i\Sigma I \Phi_f - \beta_0^2 \Sigma I \Phi_f + i\beta_0 \Sigma I \Phi'_f + i\pi^2 \Phi_f'' \right) \omega_f \right] A_1' - \frac{1}{2\pi^4} \left(i\beta_0 \Pi_{(1,\beta_0,n)} + \Pi_{(5,\beta_0,n)} V_1 \right) F_x A_1 \\ & + \frac{1}{2\pi^4} \left(i \int_0^1 \Phi'_f \Phi_f'' dx \Phi_f'' + \beta_0^2 \int_0^1 \Phi'_f \Phi_f dx \Phi_f'' + i\beta_0^3 \int_0^1 \Phi'_f \Phi_f dx \Phi_f' + \beta_0 \int_0^1 \Phi'_f \Phi_f'' dx \Phi_f' \right) \bar{\mu} A_1 A_1^2 \\ & + \frac{1}{2\pi^4} \left(1/2 \beta_0^2 \int_0^1 \Phi'_b \Phi_b dx \Phi_b'' + i\beta_0 \int_0^1 \Phi'_b \Phi_b'' dx \Phi_b' - 1/2 \beta_0 \int_0^1 \Phi'_b \Phi_b'' dx \Phi_b' - 1/2 i \beta_0 \int_0^1 \Phi_b \Phi_f'' dx \Phi_b'' \right. \\ & - i \int_0^1 \Phi'_b \Phi_b'' d\xi \Phi_f'' + 1/2 i \beta_0 \int_0^1 \Phi_f \Phi_b'' dx \Phi_b'' + 3/2 \beta_0^3 \int_0^1 \Phi'_b \Phi_b dx \Phi_b' + i\beta_0^2 \int_0^1 \Phi'_b \Phi_b dx \Phi_f'' - \beta_0^3 \int_0^1 \Phi'_b \Phi_b dx \Phi_f' \\ & + 1/2 \beta_0^2 \int_0^1 \Phi'_f \Phi_b dx \Phi_b'' + 1/2 \int_0^1 \Phi'_f \Phi_b'' dx \Phi_b'' + 1/2 i \beta_0^2 \int_0^1 \Phi_b \Phi_f'' dx \Phi_b' + 1/2 \int_0^1 \Phi'_b \Phi_f'' dx \Phi_b'' + 1/2 i \beta_0^3 \int_0^1 \Phi'_f \Phi_b dx \Phi_b' \\ & \left. - 1/2 \beta_0^2 \int_0^1 \Phi_f \Phi_b'' dx \Phi_b' + 1/4 i \beta_0 \int_0^1 \Phi'_b \Phi_f'' dx \Phi_b' \right) \bar{A}_2 A_1 A_2 \mu + \frac{1}{2\pi^4} - 1/2 i c e^{i\beta_0 x} \Phi_f A_1 \omega_f + \frac{1}{2} (e_\eta + i e_\xi) \Omega^2 e^{-i\beta_0 x} e^{i\sigma T_2} \\ & + \left[\frac{1}{\pi^2} (\Delta I \Phi_f'' - i \Delta I \beta_0 \Phi_f' - 3 i \Delta I \beta_0^2 \Phi_f) \Omega \omega_f + \frac{1}{\pi^4} \left(\frac{3}{2} i \Delta I \Phi_f \omega_f^2 + \frac{11}{2} \Delta D \Phi_f'' \right) \beta_0^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{\pi^4} \left(4 \Delta D \Phi_f'' - \pi^2 i \Delta I \Phi_f' \omega_f^2 \right) i \beta_0 + \frac{1}{2\pi^2} \Delta I \omega_f^2 \Phi_f'' + \frac{3}{2\pi^4} i \Delta D \Phi_f^{(4)} - \frac{1}{\pi^4} \left(4 \Delta D \beta_0^4 \Phi_f + \frac{11}{2} i \Delta D \beta_0^3 \Phi_f' \right) \right] \bar{A}_1 e^{2i\sigma T_2} e^{-4i\beta_0 x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{b,v} = & 2 \left[\left(-\frac{1}{2} \left(-i\beta_0 \Phi_b'' - 2i\beta_0^2 \Phi_b \right) e^{2i\beta_0 x} + \left(2i\Phi_b'' + \frac{1}{2} i\beta_0^2 \Phi_b' + \frac{3}{2} \beta_0 \Phi_b \right) \right) I_{xx} \Omega \right. \\
& - \left(2i\beta_0 \Phi_b' + \beta_0^2 \Phi_b'' \right) \Sigma I \omega_b + \left(i\Phi_b'' + \Sigma I \Phi_b' \right) i\omega_b \left. \right] A_2' - \frac{1}{2} ic e^{i\beta_0 x} \omega_b \Phi_b A_2 - \frac{1}{2\pi^4} \left(i\beta_0 \Pi_{(1,\beta_0,n)} + \Pi_{(5,\beta_0,n)} V_1 \right) F_x A_2 \\
& + \frac{1}{\pi^4} \left(i \int_0^1 \Phi_f' \Phi_f'' dx \Phi_f'' + i\beta_0 \int_0^1 \Phi_f' \Phi_f'' dx \Phi_f' + \beta_0^2 \int_0^1 \Phi_f' \Phi_f'' dx \Phi_f'' \right) \mu \bar{A}_2 A_2^2 \\
& + \frac{1}{\pi^4} \left(1/2 \beta_0^2 \int_0^1 \Phi_b' \Phi_f' dx \Phi_f'' + 1/2 i \beta_0^3 \int_0^1 \Phi_b' \Phi_f' dx \Phi_b' + \int_0^1 \Phi_b' \Phi_f'' d\xi \Phi_f'' + 1/2 i \beta_0 \int_0^1 \Phi_b \Phi_f'' dx \Phi_b'' + \beta_0^2 \int_0^1 \Phi_b' \Phi_b dx \Phi_f'' \right. \\
& + 1/2 \int_0^1 \Phi_f' \Phi_b'' dx \Phi_b'' + \beta_0^3 \int_0^1 \Phi_f' \Phi_f dx \Phi_f' + 1/2 \beta_0^2 \int_0^1 \Phi_b'' \Phi_f'' dx \Phi_b' + 1/2 i \beta_0^3 \int_0^1 \Phi_f' \Phi_b dx \Phi_b' - 1/2 i \beta_0 \int_0^1 \Phi_b \Phi_f'' dx \Phi_b'' \\
& + 1/2 \beta_0^2 \int_0^1 \Phi_f' \Phi_b' dx \Phi_f'' + 1/2 \int_0^1 \Phi_b' \Phi_f'' dx \Phi_b'' + i\beta_0^3 \int_0^1 \Phi_b' \Phi_b dx \Phi_f' + 1/2 i \beta_0 \int_0^1 \Phi_f' \Phi_f'' dx \Phi_b' + i\beta_0 \int_0^1 \Phi_b' \Phi_f'' dx \Phi_f' \\
& \left. - 1/2 i \beta_0^2 \int_0^1 \Phi_f \Phi_b'' dx \Phi_b' - 1/2 \beta_0 \int_0^1 \Phi_b' \Phi_f'' dx \Phi_b' \right) \bar{A}_1 A_1 A_2 \mu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{f,w} = & \frac{2}{\pi^2} \left[\left(-\frac{1}{4} \left(i\beta_0 \Phi_b' - \beta_0^2 \Phi_b \right) e^{2i\beta_0 x} + i\beta_0^2 \Phi_b + \frac{3}{4} \beta_0 \Phi_b' + \frac{1}{2} i \Phi_b'' \right) \Omega I_x \right. \\
& - \left(\Sigma I \Phi_b + i\beta_0^2 \Sigma I \Phi_b + i\beta_0 \Sigma I \Phi_b' + 2i\pi^2 \Phi_b'' \right) \omega_b \left. \right] A_1' + \frac{1}{2\pi^4} \left(-\beta_0 \Pi_{(1,\beta_0,n)} + i\Pi_{(5,\beta_0,n)} V_1 \right) F_x A_1 \\
& + \frac{1}{2\pi^4} \left(\int_0^1 \Phi_f' \Phi_f'' dx \Phi_f'' + i\beta_0^2 \int_0^1 \Phi_f' \Phi_f'' dx \Phi_f'' - \beta_0^3 \int_0^1 \Phi_f' \Phi_f'' dx \Phi_f' + i\beta_0 \int_0^1 \Phi_f' \Phi_f'' dx \Phi_f' \right) \mu \bar{A}_1 A_1^2 \\
& + \frac{1}{2\pi^4} \left(-1/2 \beta_0^2 \int_0^1 \Phi_b' \Phi_f dx \Phi_b'' - \beta_0 \int_0^1 \Phi_b' \Phi_f'' dx \Phi_f' - 1/2 i \beta_0 \int_0^1 \Phi_f' \Phi_b'' dx \Phi_b' + \beta_0 \int_0^1 \Phi_b \Phi_f'' dx \Phi_b'' \right. \\
& - 2i \int_0^1 \Phi_b' \Phi_b'' d\xi \Phi_f'' + \beta_0 \int_0^1 \Phi_f \Phi_b'' dx \Phi_b'' - 3/2 i \beta_0^3 \int_0^1 \Phi_b' \Phi_f dx \Phi_b' + 2i\beta_0^2 \int_0^1 \Phi_b' \Phi_b dx \Phi_f'' - i\beta_0^3 \int_0^1 \Phi_b' \Phi_b dx \Phi_f' \\
& + 1/2 i \beta_0^2 \int_0^1 \Phi_f' \Phi_b dx \Phi_b'' - i \int_0^1 \Phi_f' \Phi_b'' dx \Phi_b'' + 1/2 \beta_0^2 \int_0^1 \Phi_b \Phi_f'' dx \Phi_b' - 1/2 i \int_0^1 \Phi_b' \Phi_f'' dx \Phi_b'' + 1/2 \beta_0^3 \int_0^1 \Phi_f' \Phi_b dx \Phi_b' \\
& + 1/2 i \beta_0^2 \int_0^1 \Phi_f \Phi_b'' dx \Phi_b' - 1/4 \beta_0 \int_0^1 \Phi_b' \Phi_f'' dx \Phi_b' \left. \right) \bar{A}_2 A_1 A_2 \mu + \frac{1}{2\pi^4} - 1/2 ic e^{i\beta_0 x} \Phi_f A_1 \omega_f + \frac{1}{2} \left(i e_\eta + e_\xi \right) \Omega^2 e^{-i\beta_0 x} e^{i\sigma T_2} \\
& + \left[\frac{1}{\pi^2} \left(\Delta I \Phi_f'' - i\Delta I \beta_0 \Phi_f' - 3i\Delta I \beta_0^2 \Phi_f \right) \Omega \omega_f + \frac{1}{\pi^4} \left(\frac{3}{2} i\Delta I \Phi_f \omega_f^2 + \frac{11}{2} \Delta D \Phi_f'' \right) \beta_0^2 \right. \\
& \left. + \frac{1}{\pi^4} \left(4\Delta D \Phi_f'' - \pi^2 i\Delta I \Phi_f' \omega_f^2 \right) i\beta_0 + \frac{1}{2\pi^2} \Delta I \omega_f^2 \Phi_f'' + \frac{3}{2\pi^4} i\Delta D \Phi_f^{(4)} - \frac{1}{\pi^4} \left(4\Delta D \beta_0^4 \Phi_f + \frac{11}{2} i\Delta D \beta_0^3 \Phi_f' \right) \right] \bar{A}_1 e^{2i\sigma T_2} e^{-4i\beta_0 x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{b,w} = & 2 \left[\left(-\frac{1}{2} \left(-2\beta_0 \Phi_f'' - 2i\beta_0^2 \Phi_f \right) e^{2i\beta_0 x} + \left(2\Phi_f'' + \frac{1}{2} \beta_0^2 \Phi_f' + \frac{3}{2} i\beta_0 \Phi_f \right) \right) I_{xx} \Omega \right. \\
& - \left(2\beta_0 \Phi_f' - i\beta_0^2 \Phi_f'' \right) \Sigma I \omega_b + \left(-\Phi_f'' + i\Sigma I \Phi_f' \right) i\omega_f \left. \right] A_2' - \frac{1}{2} c e^{i\beta_0 x} \omega_f \Phi_f A_2 + \frac{1}{2\pi^4} \left(-\beta_0 \Pi_{(1,\beta_0,n)} + i\Pi_{(5,\beta_0,n)} V_1 \right) F_x A_2 \\
& + \frac{1}{\pi^4} \left(i \int_0^1 \Phi_f' \Phi_f'' dx \Phi_f'' + i\beta_0 \int_0^1 \Phi_f' \Phi_f'' dx \Phi_f' + \beta_0^2 \int_0^1 \Phi_f' \Phi_f'' dx \Phi_f'' \right) \mu \bar{A}_2 A_2^2 \\
& + \frac{1}{\pi^4} \left(1/2 \beta_0^2 \int_0^1 \Phi_b' \Phi_f' dx \Phi_f'' + 1/2 i \beta_0^3 \int_0^1 \Phi_b' \Phi_f' dx \Phi_b' + \int_0^1 \Phi_b' \Phi_b'' d\xi \Phi_f'' + 1/2 i \beta_0 \int_0^1 \Phi_b \Phi_f'' dx \Phi_b'' + \beta_0^2 \int_0^1 \Phi_b' \Phi_b dx \Phi_f'' \right. \\
& + 1/2 \int_0^1 \Phi_f' \Phi_b'' dx \Phi_b'' + \beta_0^3 \int_0^1 \Phi_f' \Phi_f dx \Phi_f' + 1/2 \beta_0^2 \int_0^1 \Phi_b'' \Phi_f'' dx \Phi_b' + 1/2 i \beta_0^3 \int_0^1 \Phi_f' \Phi_b dx \Phi_b' - 1/2 i \beta_0 \int_0^1 \Phi_b \Phi_f'' dx \Phi_b'' \\
& + 1/2 \beta_0^2 \int_0^1 \Phi_f' \Phi_b' dx \Phi_f'' + 1/2 \int_0^1 \Phi_b' \Phi_f'' dx \Phi_b'' + i\beta_0^3 \int_0^1 \Phi_b' \Phi_b dx \Phi_f' + 1/2 i \beta_0 \int_0^1 \Phi_f' \Phi_f'' dx \Phi_b' + i\beta_0 \int_0^1 \Phi_b' \Phi_f'' dx \Phi_f' \\
& \left. - 1/2 i \beta_0^2 \int_0^1 \Phi_f \Phi_b'' dx \Phi_b' - 1/2 \beta_0 \int_0^1 \Phi_b' \Phi_f'' dx \Phi_b' \right) \bar{A}_1 A_1 A_2 \mu
\end{aligned}$$

برای حذف جملات سکولار، جواب بخش خصوصی متناظر با $\pm e^{i\omega_f T_0}$ و $\pm e^{i\omega_b T_0}$ در روابط (۶-)

(۳۸) و (۳۹-۶) برابر است با،

$$\begin{aligned} V_3 &= P_{11}(T_2)e^{i\omega_f T_0} + Q_{11}(T_2)e^{i\omega_b T_0} \\ W_3 &= P_2(T_2)e^{i\omega_f T_0} + Q_{22}(T_2)e^{i\omega_b T_0} \end{aligned} \quad (۴۰-۶)$$

با جایگذاری رابطه (۴۰-۶) و برابر قرار دادن ضرایب جملات شامل $\pm e^{i\omega_f T_0}$ و $\pm e^{i\omega_b T_0}$ ، معادله

حاصل دارای پاسخ های غیر صفر می باشد اگر و تنها اگر شرایط حل پذیری به شکل زیر برقرار باشد،

$$\begin{vmatrix} -\Gamma_{13}\omega_f^2 + i(\Gamma_{11} + \Gamma_{15})\omega_f + \Gamma_9 & G_{f,v} \\ -\Gamma_{14}\omega_f^2 + i(\Gamma_{12} + \Gamma_{16})\omega_f + \Gamma_{10} & G_{f,w} \end{vmatrix} = 0$$

یا (۴۱-۶)

$$\begin{vmatrix} G_{f,v} & \Gamma_{14}\omega_f^2 + i(\Gamma_{12} - \Gamma_{16})\omega_f - \Gamma_{10} \\ G_{f,w} & -\Gamma_{13}\omega_f^2 + i(-\Gamma_{11} + \Gamma_{15})\omega_f + \Gamma_9 \end{vmatrix} = 0$$

و

$$\begin{vmatrix} -\Gamma_{13}\omega_b^2 + i(\Gamma_{11} + \Gamma_{15})\omega_b + \Gamma_9 & G_{b,v} \\ -\Gamma_{14}\omega_b^2 + i(\Gamma_{12} + \Gamma_{16})\omega_b + \Gamma_{10} & G_{b,w} \end{vmatrix} = 0$$

یا (۴۲-۶)

$$\begin{vmatrix} G_{b,v} & \Gamma_{14}\omega_b^2 + i(\Gamma_{12} - \Gamma_{16})\omega_b - \Gamma_{10} \\ G_{b,w} & -\Gamma_{13}\omega_b^2 + i(-\Gamma_{11} + \Gamma_{15})\omega_b + \Gamma_9 \end{vmatrix} = 0$$

در نهایت حاصل دو دترمینان مذکور برابر است با،

$$\begin{aligned} &(\Lambda_{1,v} + i\Lambda_{2,v})D_2 A_1 + (\Lambda_{5,v} + i\Lambda_{6,v})A_1 A_2 \bar{A}_2 + (i\Lambda_{7,v} + \Lambda_{8,v})A_1^2 \bar{A}_1 \\ &+ (i\Lambda_{3,v} + \Lambda_{4,v})\bar{A}_1 e^{2i\sigma T_2} - icA_1 \omega_f \Pi_{(9,\beta_0,n)} - \frac{1}{\pi^4} (\Pi_{(5,\beta_0,n)} + i\beta_0 \Pi_{(1,\beta_0,n)}) F_x A_1 \\ &+ (e_\eta + ie_\xi) \Omega^2 e^{i\sigma T_2} = 0 \end{aligned} \quad (۴۳-۶)$$

$$\begin{aligned} &(\Lambda_{1,w} + i\Lambda_{2,w})D_2 A_2 + (\Lambda_{5,v} + i\Lambda_{6,v})A_1 A_2 \bar{A}_1 + (\Lambda_{8,v} + i\Lambda_{7,v})A_2^2 \bar{A}_2 \\ &- icA_2 \omega_b \Pi_{(9,\beta_0,n)} - \frac{1}{\pi^4} (A_{(5,\beta_0,n)} + i\beta_0 A_{(1,\beta_0,n)}) F_x A_2 = 0 \end{aligned} \quad (۴۴-۶)$$

که دو معادله مذکور با آنچه در معادلات (۱۸-۶) و (۱۹-۶) بدست آمده، یکسان می باشند.

۴-۶- تحلیل پایداری با تعیین ماتریس ژاکوبین

به منظور پایداری حالت پایای معادلات مرتبه اول (۲۲-۶) تا (۲۵-۶) و با فرض $a_2(T_2)=0$.

ماتریس ژاکوبین، J ، طرف راست معادلات (۲۲-۶) و (۲۳-۶) برابر است با [32]،

$$J = \frac{1}{4(\Lambda_{1,v}^2 + \Lambda_{2,v}^2)} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{cases} 4(\Lambda_{2,v}\Lambda_{4,v} - \Lambda_{1,v}\Lambda_{3,v})\sin(2\Theta_0) - 4(\Lambda_{1,v}\Lambda_{4,v} + \Lambda_{2,v}\Lambda_{3,v})\cos(2\Theta_0) \\ -3(\Lambda_{2,v}\Lambda_{7,v} + \Lambda_{1,v}\Lambda_{8,v})a_{10}^2 + 8c\omega_f(\Lambda_{2,v}\Pi_{(9,\beta_0,n)}^C - \Lambda_{1,v}\Pi_{(9,\beta_0,n)}^S) \\ -F_x\Pi_{(1,\beta_0,n)}\Lambda_{2,v}^f \end{cases}$$

$$B = 8 \begin{cases} ((\Lambda_{2,v}\Lambda_{4,v} - \Lambda_{1,v}\Lambda_{3,v})\cos(2\Theta_0) + (\Lambda_{1,v}\Lambda_{4,v} + \Lambda_{2,v}\Lambda_{3,v})\sin(2\Theta_0))a_{10} \\ +\Omega^2((\Lambda_{1,v}e_\eta + \Lambda_{2,v}e_\xi)\sin(\Theta_0) + (\Lambda_{2,v}e_\eta - \Lambda_{1,v}e_\xi)\cos(\Theta_0)) \end{cases} \quad (۴۵-۶)$$

$$C = \frac{1}{a_{10}} \begin{cases} 4(\Lambda_{2,v}\Lambda_{4,v} - \Lambda_{1,v}\Lambda_{3,v})\cos(2\Theta_0) + 4(\Lambda_{1,v}\Lambda_{4,v} + \Lambda_{2,v}\Lambda_{3,v})\sin(2\Theta_0) \\ +3(\Lambda_{2,v}\Lambda_{8,v} - \Lambda_{1,v}\Lambda_{7,v})a_{10}^2 - 4\sigma(\Lambda_{1,v}^2 + \Lambda_{2,v}^2) \\ +8ca_1\omega_f(\Lambda_{2,v}\Pi_{(9,\beta_0,n)}^S + \Lambda_{1,v}\Pi_{(9,\beta_0,n)}^C) + F_x(\Lambda_{2,v}^f\Pi_{(5,\beta_0,n)} + \Lambda_{1,v}^f\Pi_{(1,\beta_0,n)}) \end{cases}$$

$$D = \frac{8}{a_{10}} \begin{cases} -(\Lambda_{2,v}\Lambda_{4,v} - \Lambda_{1,v}\Lambda_{3,v})\sin(2\Theta_0) + (\Lambda_{1,v}\Lambda_{4,v} + \Lambda_{2,v}\Lambda_{3,v})\cos(2\Theta_0))a_{10} \\ +\Omega^2((\Lambda_{1,v}e_\eta + \Lambda_{2,v}e_\xi)\cos(\Theta_0) - (\Lambda_{2,v}e_\eta - \Lambda_{1,v}e_\xi)\sin(\Theta_0)) \end{cases}$$

و مقادیر ویژه متناظر آن از معادله زیر بدست می آیند،

$$|J - \lambda I| = 0 \quad \text{یا} \quad \lambda^2 - (A+D)\lambda + AD - BC = 0 \quad (۴۶-۶)$$

با توجه به معادلات (۴۵-۶) و (۴۶-۶)، از آنجا که $(A+D) < 0$ ، اگر $AD - BC > 0$ ، حرکت

دینامیکی سیستم در نقاط ثابت تعادلی (a_{10}, Θ_0) پایدار بوده و در غیر اینصورت ناپایدار می باشد.

۴-۵- نتایج

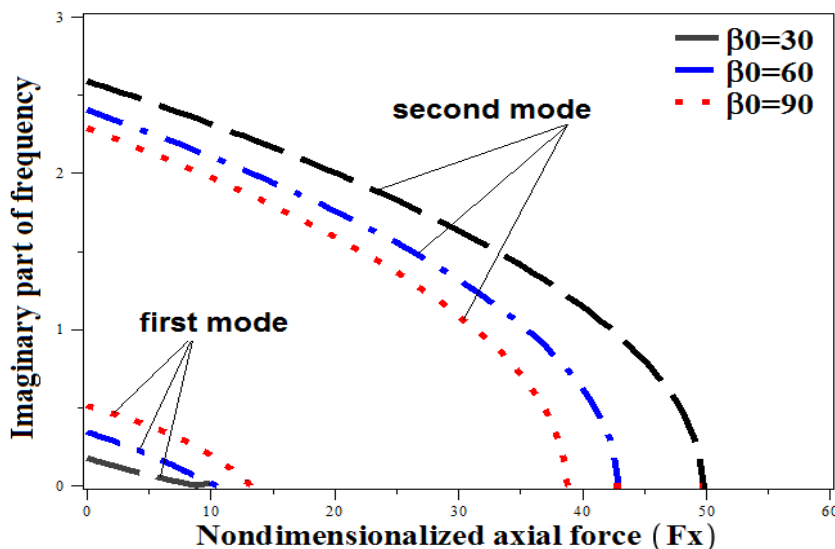
۴-۵-۱- اعتبار سنجی نتایج

شکل (۲-۶) بخش موهومی فرکانس طبیعی تیر پیچیده شده تحت بار محوری فشاری را

برحسب نیروی محوری بی بعد شده در زوایای پیچش مختلف و مدهای اول و دوم نشان می دهد. نتایج

بدست آمده نشان می دهد که افزایش نیروی محوری باعث کاهش فرکانس طبیعی سیستم مذکور شده

به گونه‌ای که تا نیرویی تحت عنوان نیروی بحرانی این فرکانس به صفر میل خواهد کرد. از طرفی همانطور که مشاهده می‌شود، در یک نیروی مشخص، در مد اول، افزایش زاویه پیچش منجر به افزایش فرکانس طبیعی و افزایش نیروی بحرانی سیستم تیر مذکور خواهد شد. اما در مد دوم، افزایش زاویه پیچش منجر به کاهش فرکانس طبیعی و کاهش نیروی بحرانی سیستم خواهد شد. از آنجا که پارامترهای عددی در نظر گرفته شده به منظور مقایسه و اعتبار سنجی با کار چن [86] متفاوت می‌باشد، لذا به منظور بررسی و صحت گذاری نتایج، تنها رفتار نمودارها با هم مقایسه شده‌اند. همانطور که مشاهده می‌شود، رفتار نمودار بدست آمده در شکل (۶-۲) با نتایج بدست آمده از کار چن [86] همگرایی خوبی دارند.



شکل (۶-۲) تغییرات بخش موهومی فرکانس طبیعی بر حسب نیروی محوری بی بعد شده در دو مد اول و زوایای پیچش مختلف

۶-۵-۲- بحث و نتیجه گیری

شکل (۶-۳) تا شکل (۶-۶) منحنی‌های پاسخ فرکانسی غیر خطی را پیرامون نقاط ثابت تعادلی تیر پیچیده شده یک سر گیردار با نیروی محوری فشاری در مدهای اول و دوم و زوایای پیچش مختلف برای حالت متقارن و نامتقارن نشان می‌دهد. فرض شده است که نابالانسی‌ها در هر دو جهت اصلی تیر یکسان بوده و برابرند با، $e_{\xi} = e_{\eta} = 0.05$. همانطور که مشاهده شده است، در مد اول، منحنی‌های پاسخ

فرکانسی سیستم متقارن و نامتقارن به سمت چپ و در مد دوم به سمت راست خم شده‌اند که مؤید این است که تأثیر پارامترهای غیر خطی سیستم در مد اول از نوع نرم شونده و در مد دوم از نوع سخت شونده می‌باشد. با توجه به شکل (۳-۶) و شکل (۵-۶)، در حالت متقارن ($\Pi=0$)، تیر تنها دارای یک منبع تحریک بوده که همان نابالانسی با فرکانس Ω می‌باشد و در نتیجه منحنی پاسخ فرکانسی دارای یک قله بوده و تنها یک پرش در فرکانس رزونانس رخ می‌دهد.

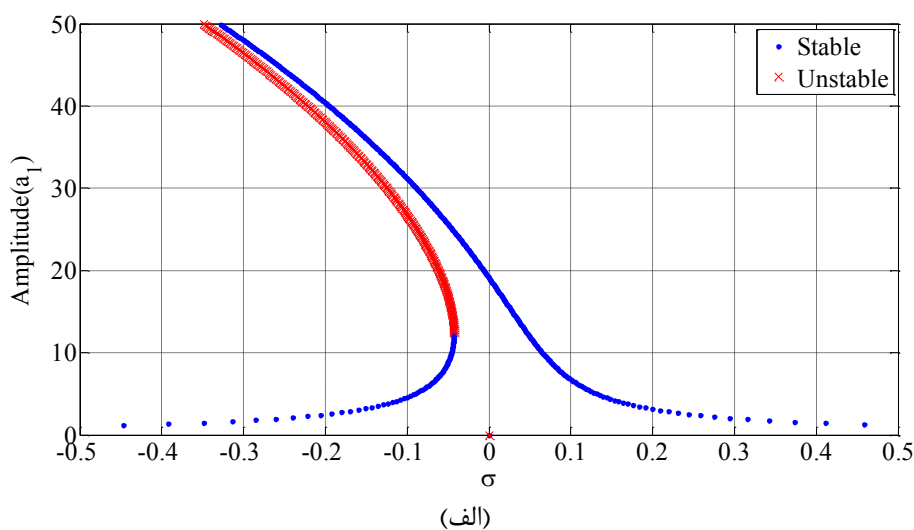
در مقایسه با حالتی که سیستم تحت تأثیر هیچ نیروی محوری خارجی قرار ندارد (با توجه به آنچه در فصل ۳ توضیح داده شده است)، با مشاهده منحنی‌های پاسخ فرکانسی مشخص است که زمانی که یک نیروی محوری فشاری به انتهای تیر یک سر گیردار پیچیده شده وارد می‌شود، در مد اول، دامنه سیستم در هر فرکانس بزرگتر شده بگونه‌ای که با افزایش زاویه پیچش در حضور نیروهای فشاری محوری، احتمال بروز نواحی پایدار و ناپایدار و در نتیجه بروز دو شاخگی در سیستم افزایش می‌یابد. به طور مثال، با مقایسه نمودارهای مربوط به زاویه 30° یا 60° در شکل (۳-۳) با شکل (۳-۶) می‌توان دید که در حضور نیروی فشاری خارجی، پدیده دو شاخگی در سیستم اتفاق می‌افتد و تأثیر نرم شوندگی در سیستم بیشتر می‌شود. همانطور که مشاهده می‌شود، این پدیده دو شاخگی از نوع saddle-node bifurcation می‌باشد. در مد دوم نیز شرایط بگونه‌ای است که وجود نیروهای محوری فشاری باعث جابجایی فرکانسهای نقاط saddle-node bifurcation به سمت چپ شده که در نتیجه آن، دامنه سیستم در فرکانسهای متناظر، نسبت به حالتی که نیروی محوری وجود ندارد، افزایش پیدا کرده است.

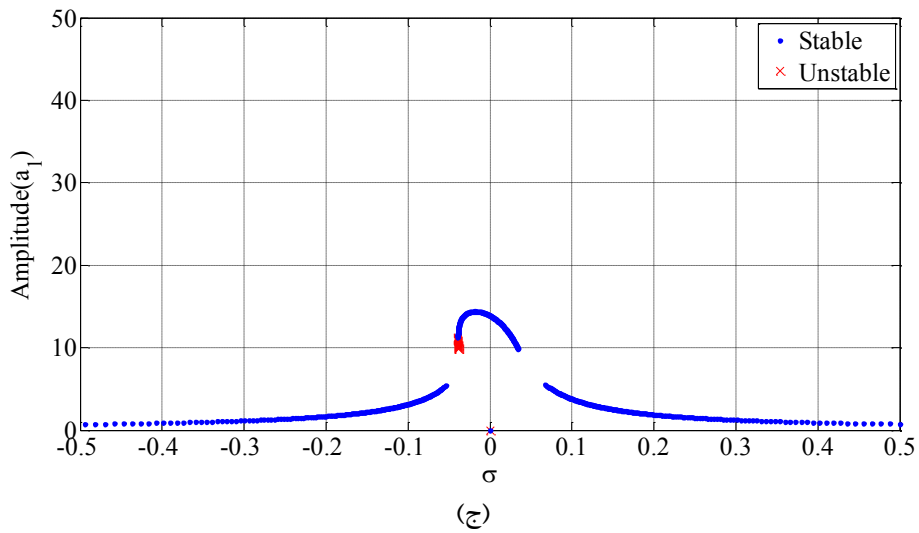
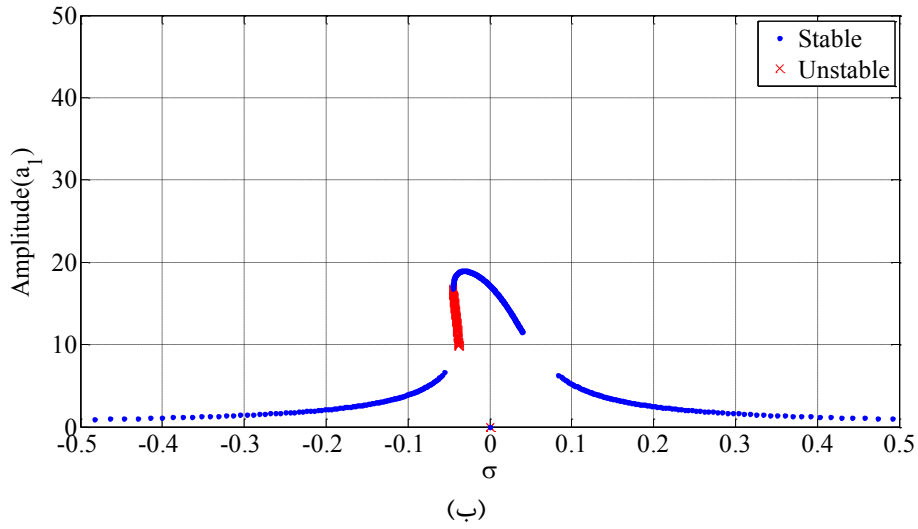
در حالت وجود نامتقارنی در سیستم، ($\Pi \neq 0$)، علاوه بر منبع تحریک ناشی از نابالانسی با فرکانس Ω ، یک منبع تحریک دیگر با فرکانس 2Ω در سیستم بوجود می‌آید که به عنوان تحریک پارامتریک در سیستم شناخته می‌شود. از این‌رو، منحنی‌های پاسخ فرکانسی دارای دو قله می‌باشد. این مطلب در شکل (۴-۶) و شکل (۶-۶) برای تیرهای پیچیده شده نامتقارن تحت یک بار محوری فشاری نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، در برخی از مقادیر، سیستم دارای پنج پاسخ، در

برخی دیگر یک پاسخ و در برخی دیگر دارای سه پاسخ بوده که شامل ترکیبی از پاسخهای پایدار و ناپایدار می‌باشند. بسیار واضح است که همواره پدیده دو شاخگی اتفاق می‌افتد. از طرفی، همانطور که مشاهده می‌شود، در مد اول که برای تیر پیچیده شده یک سرگردار نامتقارن نشان داده شده است، منحنی پاسخ فرکانسی در زوایای پیچش کوچکتر دارای به شکل نمودارهای دوشاخگی از نوع saddle-node bifurcation در فرکانسهای نقاط تغییر حالت پایای سیستم از پایدار به ناپایدار یعنی R_1 و R_2 می‌باشد، بگونه‌ای که در زاویه پیچش صفر درجه، همانطور که نشان داده شده است، سیستم تمایل به پرش از پاسخ ناپایدار سیستم در saddle-node bifurcation واقع در نقطه R_1 به پاسخ پایدار در R'_1 پرش می‌کند. سپس در فرکانسهای متناظر با فاصله بین $R'_1 - R_2$ که متعلق به پاسخهای پایدار سیستم بوده نوسان کرده و سپس از نقطه ناپایدار saddle-node bifurcation واقع در R_2 پرش دوم داشته و به پاسخ پایدار سیستم در R'_2 می‌رود. اما، با افزایش زاویه پیچش سیستم، پهنای فرکانسی بین دو saddle-node bifurcation یعنی $R_1 - R_2$ افزایش یافته و میزان پرش از دو saddle-node bifurcation به تدریج کاهش می‌یابد. همچنین، در مقایسه با پاسخهای مشابه سیستم در حالت بدون نیروی محوری که در شکل (۳-۴) نشان داده شده است، وجود نیروی فشاری محوری P ، همانند حالت متقارن، باعث افزایش دامنه پایدار سیستم شده و پهنای فرکانسی $R_1 - R_2$ به سمت راست جابجا می‌شود. از طرف دیگر، همانطور که در مورد تیرهای یک سر گردار بدون نیروی فشاری محوری در فصل ۳ توضیح داده شد، در حالت وجود نیروی فشاری محوری در مد دوم نیز همانطور که نشان داده شده است، نمودار دوشاخگی از نوع pitchfork خواهد بود، به صورتیکه پاسخ پایای سیستم در R_1 به صورت supercritical pitchfork bifurcation بوده که با یک subcritical pitchfork bifurcation به R_2 ختم می‌شود (این موضوع برای نمونه در شکل (۳-۶) و برای زاویه پیچش $\beta_0 = 60^\circ$ نشان داده شده است). در این حالت مشاهده می‌شود که سیستم تمایل به پرش از حالت ناپایدار در R_1 به حالت پایدار در R'_1 دارد. همانطور که مشاهده می‌شود، با افزایش زاویه پیچش، طول $R_1 R'_1$ این پرش کاهش می‌یابد. از طرفی، می‌توان دید که در زوایای پیچش کوچکتر، سیستم دارای پهنای وسیعتری از پاسخهای صفر

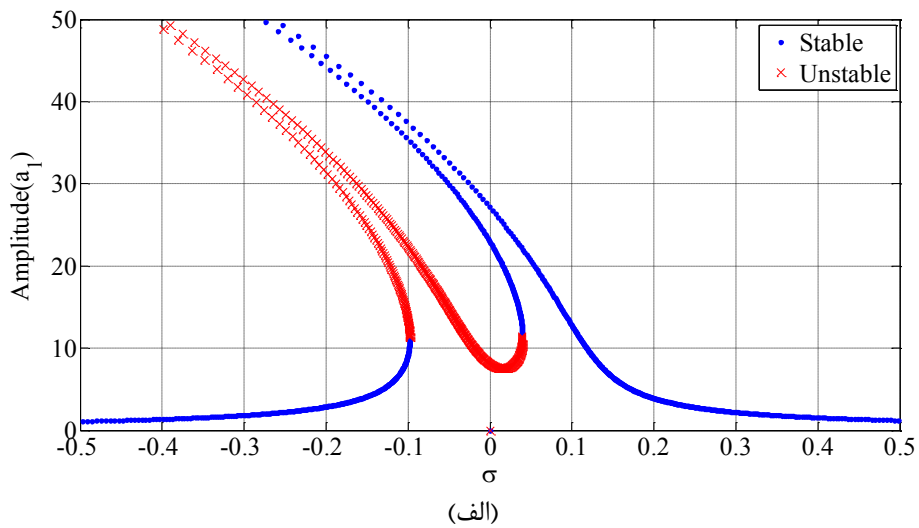
و پهنای کوچکتري از پاسخهای غير صفر خواهد بود و اگر سيستم در فرکانسي در فاصله $R_1 - R_2$ عمل کند، سيستم با دامنه‌ای برابر با پاسخ غير صفر، نوسان می‌کند. همچنين، ضمن جابجایی فرکانسهای نقاط دو شاخگی در حالت وجود نیروی محوری نسبت به حالت نبود نیروهای محوری، دامنه نواحی پایدار سيستم به تدریج افزایش می‌یابد.

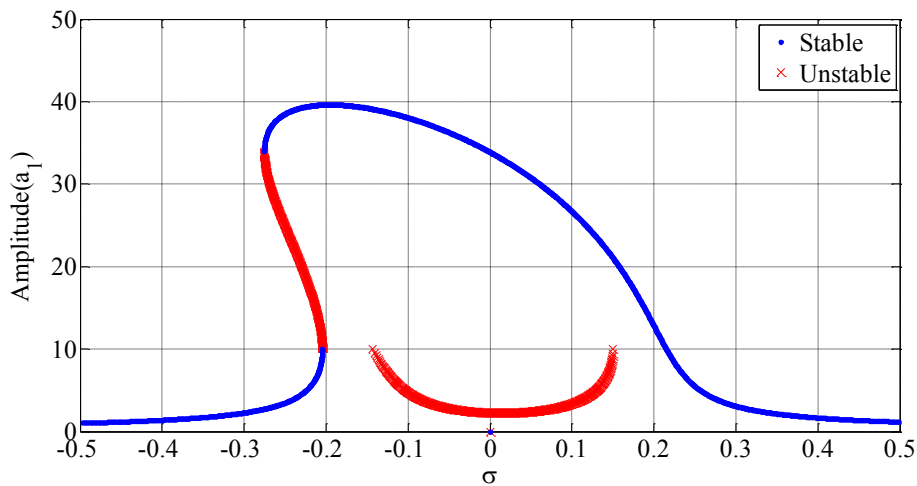
از طرفی، با توجه به شکل (۳-۶) و شکل (۴-۶)، در مد اول، با افزایش زاویه پیچش، β_0 ، تأثیرات نرم شونددگی کاهش یافته و در نتیجه دامنه قله‌های نوسانی کاهش می‌یابد. از این‌رو، در مد اول می‌توان گفت وجود زاویه پیچش می‌تواند به عنوان یک پارامتر میرا کننده نوسانات سيستم عمل کند. در مورد مد دوم نیز شرایط مشابه بوده به گونه‌ای که با افزایش زاویه پیچش، تأثیر سخت شونددگی کاهش یافته و در نتیجه دامنه نواحی پایدار نیز کاهش می‌یابد. در نتیجه می‌توان گفت که در تیرهای پیچیده شده یک سر گیردار، وجود زاویه پیچش به میرا شدن سریع‌تر نوسانات و پایداری سيستم کمک می‌کند. کریمی و همکاران [87] نیز با بررسی تأثیر نیروی محوری که به سر آزاد تیر یک سر گیردار وارد شد و با تحلیل المان محدود به بررسی خطی ارتعاشات و پایداری تیر مذکور پرداختند و آنها نیز به این نتیجه رسیدند که افزایش زاویه پیچش منجر به کاهش دامنه سيستم و پایداری سریع‌تر آن می‌شود.



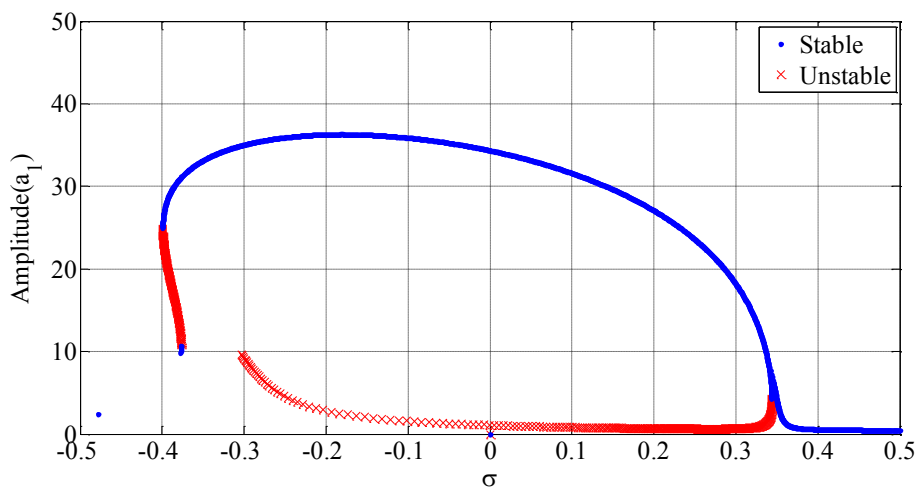


شکل (۳-۶) منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده دوار یک سر گیر دار متقارن با نیروی محوری ثابت در مد اول و زاویه پیش الف ($\beta_0 = 0$ ب) $\beta_0 = 30^\circ$ و ج) $\beta_0 = 60^\circ$



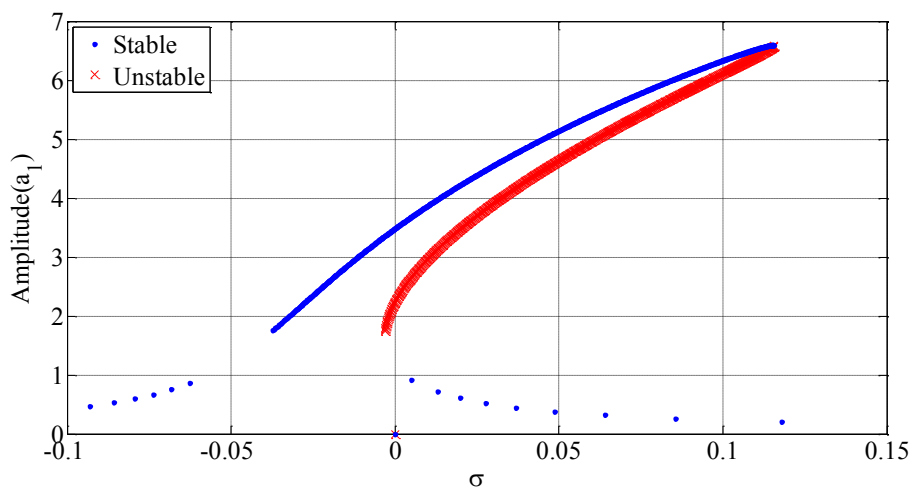


(ب)

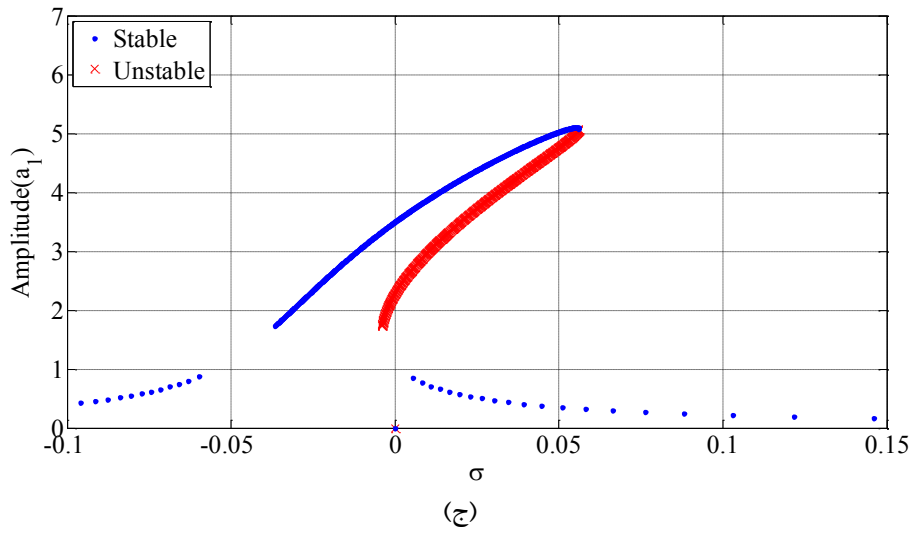
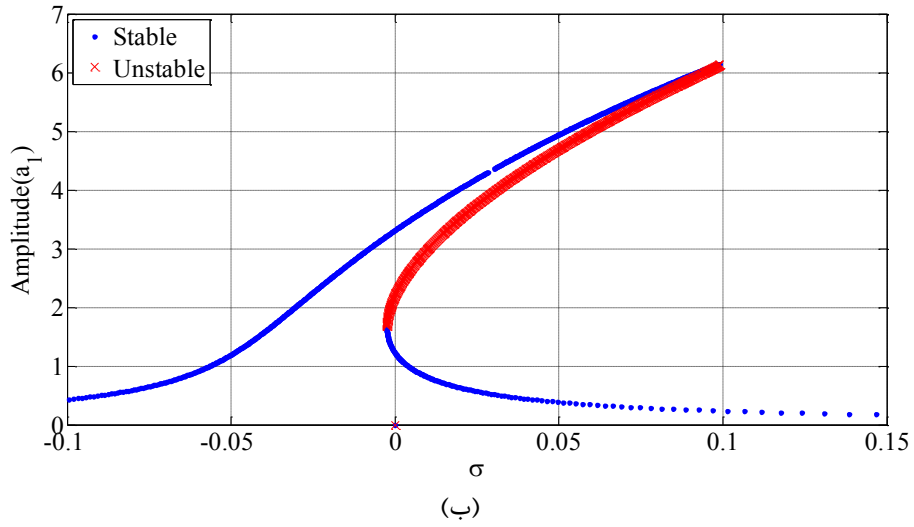


(ج)

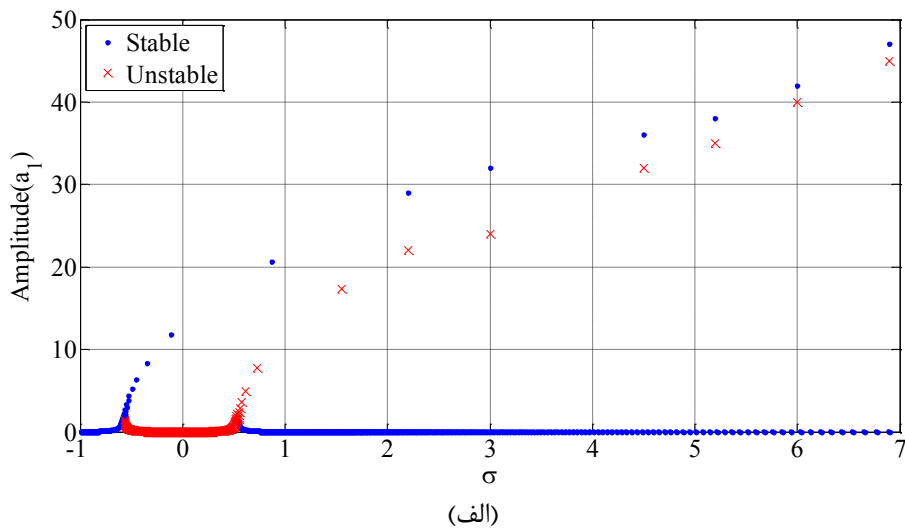
شکل (۴-۶) منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده دوار یک سر گیردار نامتقارن با نیروی محوری ثابت در مد اول و زاویه پیش‌اف (الف) $\beta_0 = 0$ (ب) $\beta_0 = 30^\circ$ و (ج) $\beta_0 = 60^\circ$

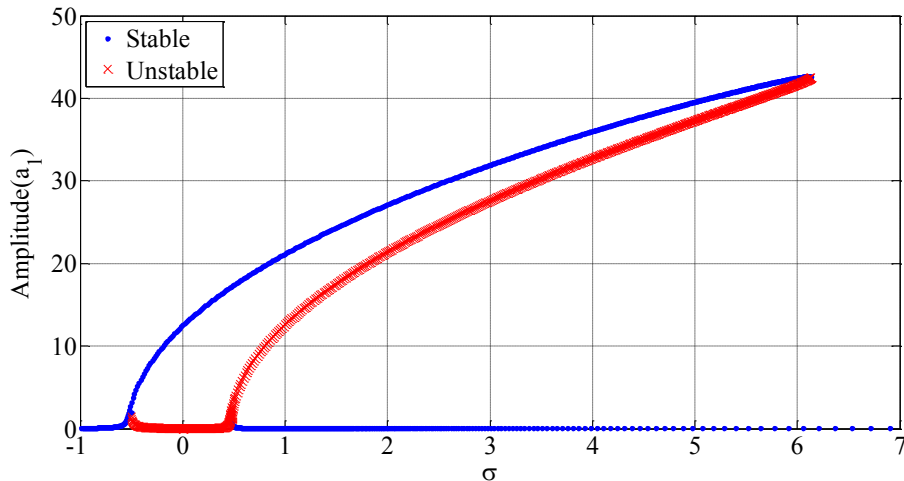


(الف)

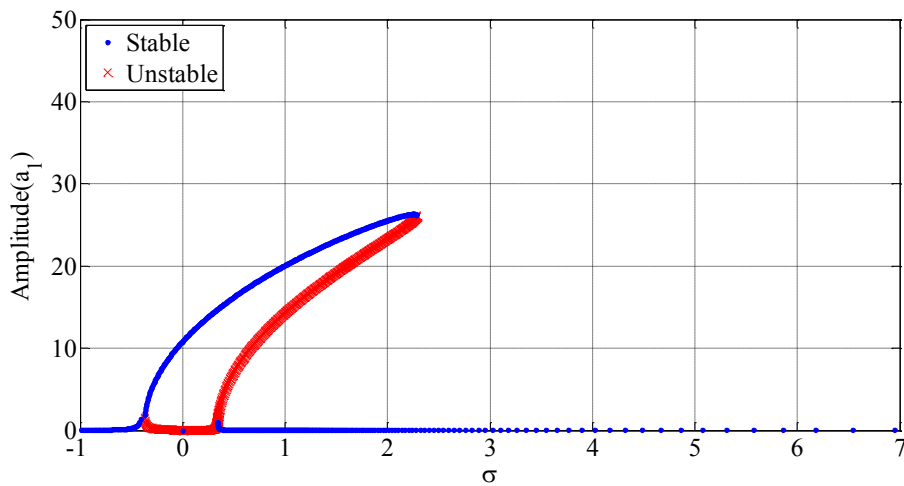


شکل (۵-۶) منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده دوار یک سر گیر دار متقارن با نیروی محوری ثابت در مد دوم و زاویه پیش الف) ($\beta_0 = 0$ ب) ($\beta_0 = 30^\circ$ ج) و ($\beta_0 = 60^\circ$ د)





(ب)



(ج)

شکل (۶-۶) منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده دوار یک سر گیردار نامتقارن با نیروی محوری ثابت در مد

دوم و زاویه پیش الف ($\beta_0 = 0$ ب) $\beta_0 = 30^\circ$ و ج) $\beta_0 = 60^\circ$

شکل (۶-۷) منحنی دامنه بر حسب نسبت میرایی تیر پیچیده شده محوری یک سر گیردار تحت

بار ثابت محوری فشاری P را در زوایای پیش مختلف و فرکانسهای طبیعی متناظر با $\sigma = 0$ نشان

می‌دهد. با توجه به این شکل، می‌توان دید که با افزایش نسبت میرایی، دامنه نوسانات کاهش می‌یابد.

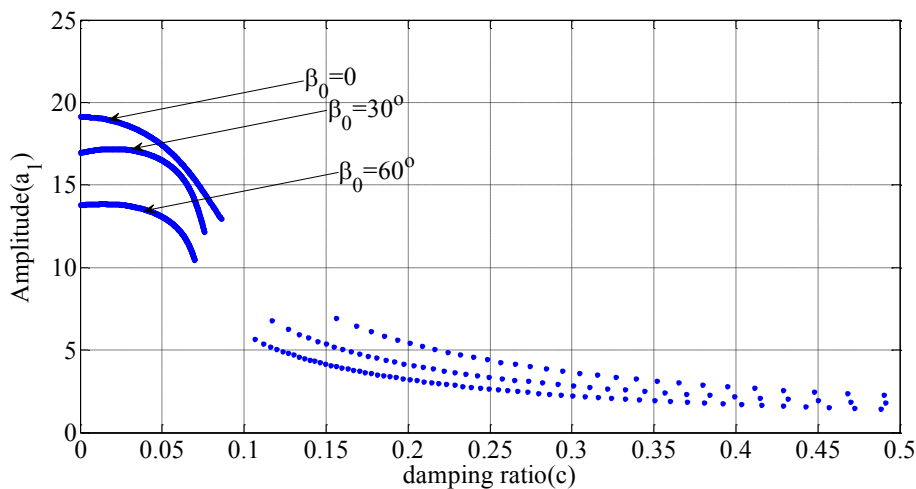
علاوه بر این، سیستم تنها دارای یک پاسخ پایدار در همه زوایای پیش و ضرایب میرایی بوده که در

نتیجه آن، سیستم در این حالت هیچگونه دوشاخگی ندارد. از طرفی، می‌توان گفت افزایش زاویه پیش

منجر به کاهش شدیدتر دامنه نوسانات سیستم شده و در اینجا نیز در مورد تیرهای متقارن محوری این

مطلب گویای این است که وجود زاویه پیش می‌تواند به میرا شدن سریع‌تر تیرهای پیچیده شده تحت

بار محوری خارجی کمک کند. همچنین، در حالتی که نیروهای محوری فشاری به انتهای آزاد تیرهای پیچیده شده یک سر گیردار وارد می‌شوند، میزان جابجایی عرضی تیر یا نوسانات عرضی آن، البته در ضرایب میرایی کوچکتر، نسبت به حالتی که هیچگونه نیروی محوری وجود ندارد بیشتر خواهد بود. اما، با افزایش ضریب میرایی به یک تیر با و بدون نیروهای محوری فشاری، همانطور که در نمودار شکل (۳-۷) نیز مشخص شده است، کاهش دامنه نوسانات در حالت وجود نیروهای محوری، شدیدتر بوده است.

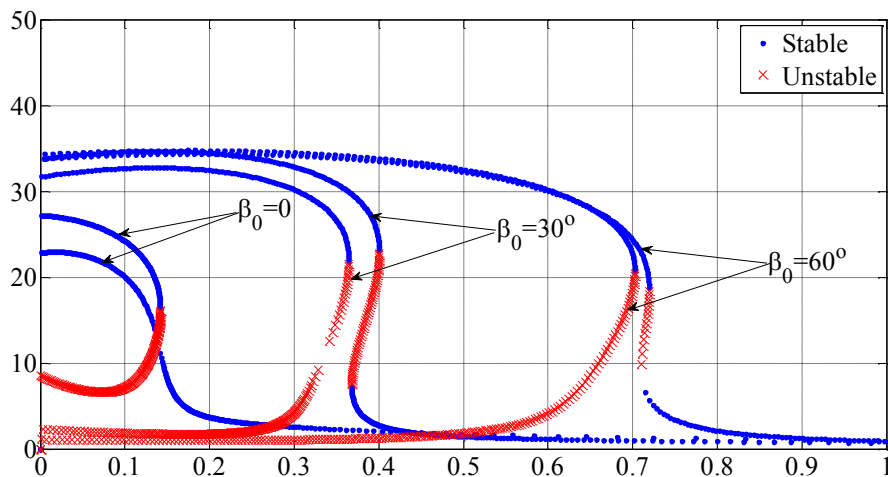


شکل (۷-۶) منحنی دامنه-نسبت میرایی تیر پیچیده متقارن با نیروی محوری ثابت در $\sigma = 0$.

با توجه به شکل (۸-۶) در حالتی که تیر پیچیده شده، نامتقارن ($\Pi \neq 0$) می‌باشد، برای $\sigma = 0$ و مد اول، با افزایش ضریب میرایی، دامنه نوسانات در همه زوایای پیچش کاهش می‌یابد. در این حالت، سه پاسخ در سیستم وجود دارد که دو پاسخ آن پایدار و دیگری ناپایدار است. اما بر خلاف تیرهای پیچیده شده دو سر مفصل، همانگونه که نشان داده شده است، هرچه زاویه پیچش بزرگتر شده، سیستم در ضریب میرایی بزرگتری شروع به میرا شدن می‌کند که می‌توان گفت در حالت نامتقارن برخلاف حالت متقارن، با افزایش زاویه پیچش، جهت میرا شدن، سیستم به نسبت میرایی خارجی بزرگتری احتیاج دارد.

همچنین، در حالتیکه نیروهای محوری فشاری به انتهای آزاد تیرهای پیچیده شده یک سر گیردار نامتقارن وارد می‌شوند، میزان جابجایی عرضی تیر یا نوسانات عرضی آن، البته در ضرایب میرایی

کوچکتر، نسبت به حالتی که هیچگونه نیروی محوری وجود ندارد کمی بیشتر خواهد بود. اما، با افزایش ضریب میرایی به یک تیر نامتقارن با و بدون نیروهای محوری فشاری، همانطور که در نمودار شکل (۳-۸) نیز مشخص شده است، کاهش دامنه نوسانات در حالت وجود نیروهای محوری، در ضرایب میرایی کوچکتری رخ خواهد داد.

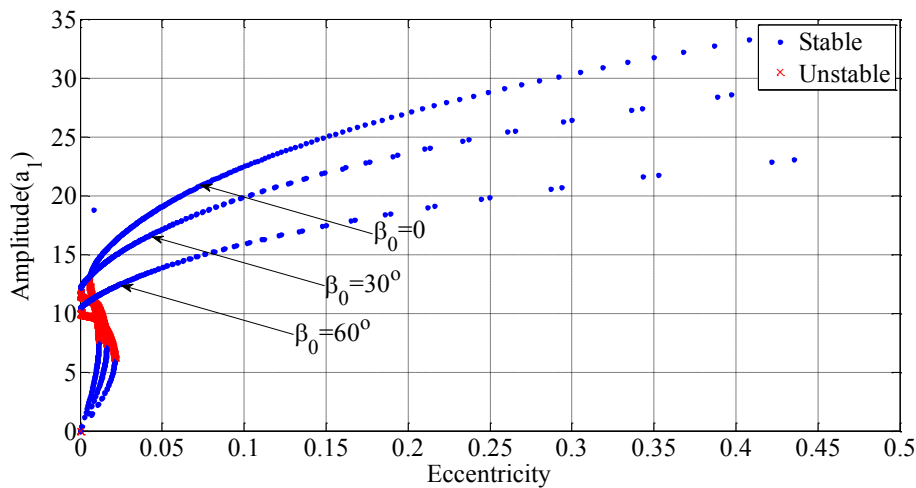


شکل (۸-۶) منحنی دامنه-نسبت میرایی تیر پیچیده نامتقارن با نیروی محوری ثابت در $\sigma=0$.

شکل (۹-۶) و شکل (۱۰-۶)، دامنه نوسانات را برحسب خروج از مرکز تیر پیچیده شده متقارن و نامتقارن تحت نیروی محوری ثابت در فرکانس طبیعی متناظر با $\sigma=0$ نشان می‌دهد. همانطور که در شکل (۹-۶) نشان داده شده است، برخلاف حالتی که هیچ نیروی محوری در انتهای آزاد تیر نمی‌شود، علاوه بر پاسخهای پایدار سیستم در هر زاویه پیچش، یک پاسخ ناپایدار نیز وجود داشته که باعث بروز پدیده دو شاخگی در سیستم می‌شود. از طرفی، دامنه پایدار سیستم در حالتی که نیروی محوری ثابت وجود دارد، نسبت به حالتی که این نیرو وجود ندارد، بیشتر می‌باشد. همچنین، با توجه به شکل (۹-۶) مشاهده می‌شود که با افزایش زاویه پیچش، در یک خروج از مرکز مشخص، دامنه نوسانات سیستم کاهش می‌یابد.

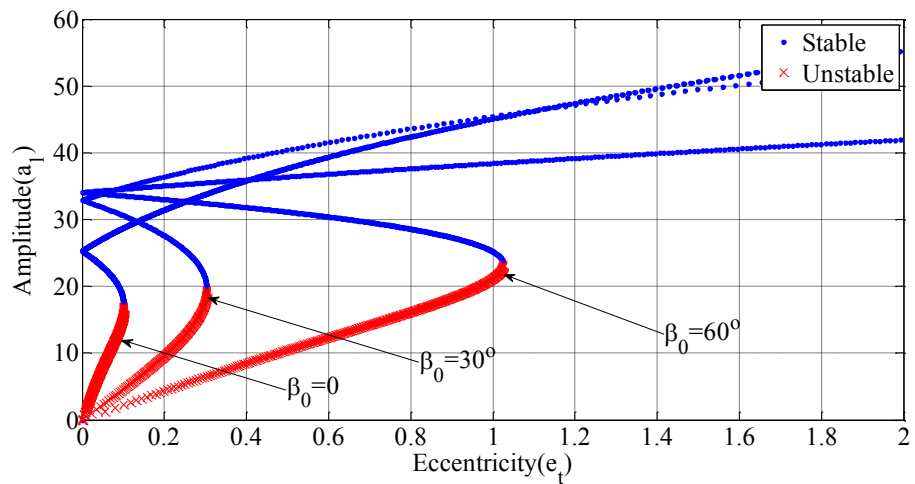
شکل (۱۰-۶) تأثیر زاویه پیچش β_0 را روی منحنی دامنه-خروج از مرکز تیر پیچیده شده دوار یک سر گیردار نامتقارن با نیروی محوری ثابت در نزدیکی فرکانسهای متناظر با $\sigma=0$ نشان می‌دهد.

در این حالت، به ازای برخی از مقادیر مشخص خروج از مرکز تیر در $\sigma=0$ ، تنها دو بخش وجود دارد. بخش اول، در مقادیر خروج از مرکز کوچکتر بوده که شامل سه پاسخ بوده با دو پاسخ پایدار و یک پاسخ ناپایدار، در حالی که در بخش دوم و در مقادیر خروج از مرکز بزرگتر، به ازای کلیه زوایای پیچش، تنها یک پاسخ پایدار وجود دارد.



شکل (۹-۶) منحنی دامنه-خروج از مرکز تیر پیچیده متقارن با نیروی محوری ثابت در $\sigma=0$.

در نتیجه، پدیده دو شاخگی و یک پرش اتفاق می افتد. همچنین، افزایش زاویه پیچش باعث می شود، پرش در مقادیر بزرگتری از خروج از مرکز اتفاق افتاده و دامنه پایدار نوسانات سیستم کاهش می یابد. اما در مقایسه با حالت مشابه بدون وجود نیروی محوری ثابت، نقطه پرش در خروج از مرکز بزرگتری در هر زاویه پیچش اتفاق می افتد و دامنه نوسانات پایدار سیستم در هر زاویه پیچش متناظر بیشتر خواهد بود.



شکل (۶-۱۰) منحنی دامنه-خروج از مرکز تیر پیچیده نامتقارن با نیروی محوری ثابت در $\sigma = 0$.

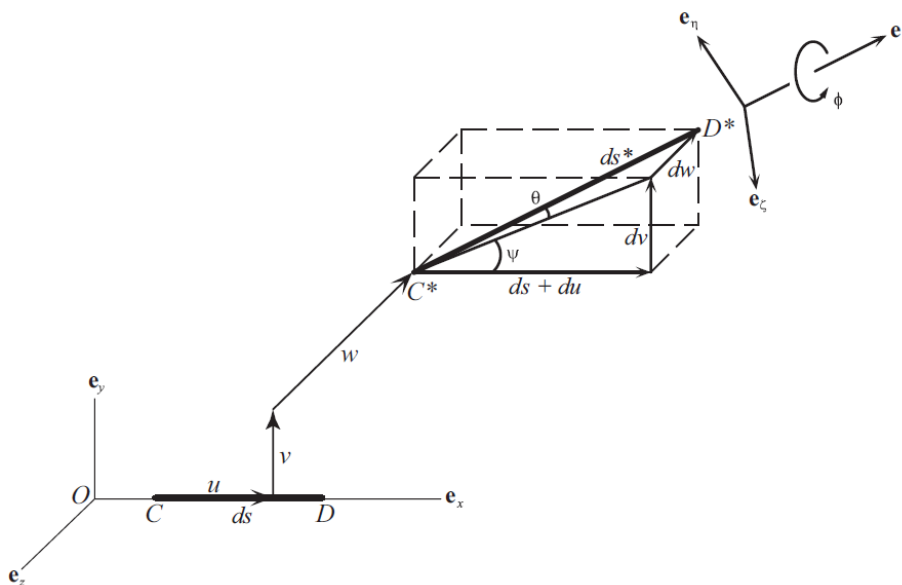
فصل هفتم

۷- ارتعاشات عرضی تیر پیچیده شده دوار کش ناپذیر با شرایط مرزی دو سر مفصل

۷-۱- معادلات حرکت

یک واقعیت در مورد تیرها این است که برای تیرهایی با یک انتهای ثابت یا مفصل شده و انتهای دیگر به صورت آزاد یا لغزشی (شکل (۷-۲)) با فرض نبود هیچ باری در امتداد محور طولی تیر، فرض می‌شود تیر دارای خاصیت کش ناپذیری^۱ می‌باشد. با توجه به این موضوع و شکل (۷-۱) فرض بر این است که کرنش در امتداد محور الاستیک یک المان از آن، ds ، برابر است با،

$$e = \left(\frac{\partial r}{\partial s} \cdot \frac{\partial r}{\partial s} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{\partial r_0}{\partial s} \cdot \frac{\partial r_0}{\partial s} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(1+u'_x)^2 + v'_y{}^2 + w'_z{}^2} - 1 \quad (7-1)$$



شکل (۷-۱) تغییر شکل یک المان از تیر کش ناپذیر [43]

شرایط مرزی تیر به صورتی در نظر گرفته می‌شود که یک تکیه‌گاه آن، مفصل ساده و ثابت و دیگری مفصل ساده و قابل حرکت باشد. در این حالت، تغییر طولی eds برابر با صفر خواهد بود و خواهیم داشت،

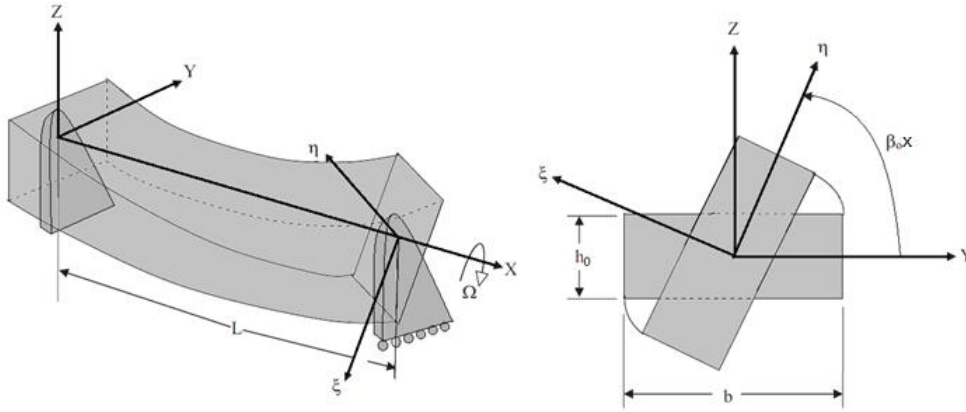
¹ In-extensionality

$$e = 0 \quad \Rightarrow \quad (1+u'_x)^2 + v'_y{}^2 + w'_z{}^2 = 1 \quad (2-7)$$

که با حل u' و بسط تیلور عبارت حاصل، خواهیم داشت،

$$u'_x = \sqrt{1-v'_y{}^2-w'_z{}^2} - 1 \approx -\frac{1}{2}(v'_y{}^2+w'_z{}^2) + \dots \quad (3-7)$$

این فرض، همان کش ناپذیری تیر نامیده می‌شود.



شکل (۲-۷) یک تیر پیچیده شده دورانی دو سر ساده با فرض کش ناپذیری، به همراه مقطع آن با نمایش زاویه پیچش تیر.

از طرفی، روابط (۱-۲) تا (۳۱-۲) مستخرج از فصل ۲ قابل استفاده برای تیرهای پیچیده شده با فرض کش ناپذیری بوده و با در نظر گرفتن شرط فوق، معادله لاگرانژ می‌تواند به صورت زیر نوشته شود،

$$\ell = T - V + W_{nc} + \frac{1}{2} \lambda \left[1 - (1+u'_x)^2 - v'_y{}^2 - w'_z{}^2 \right] \quad (4-7)$$

که λ ضریب لاگرانژین نامیده می‌شود. حال مانند فصل‌های قبلی، برای بدست آوردن معادلات

حرکت و شرایط مرزی مربوطه، از اصل همیلتون تعمیم یافته استفاده می‌شود،

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \ell dt = 0 \quad (5-7)$$

با تعریف $\ell(s, t)$ به عنوان متغیر لاگرانژین و همچنین، به خاطر اینکه

می‌توان معادلات حرکت را به شکل زیر بدست آورد، $\ell = \ell(q_i, \dot{q}_i, q'_i, q''_i, \dot{q}'_i, s, t)$

$$\frac{\partial \ell}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \ell}{\partial q'_i} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \ell}{\partial q''_i} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \ell}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \left(\frac{\partial \ell}{\partial \dot{q}'_i} \right) = -Q_i^* \quad 0 < x < L \quad (6-7)$$

و شرایط مرزی نیز عبارتست از،

$$B1_i = \left\{ \left[\frac{\partial \ell}{\partial q'_i} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \ell}{\partial q''_i} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \ell}{\partial \dot{q}'_i} \right) \right] \delta q_i \right\}_{x=0}^{x=L} = 0 \quad (7-7)$$

$$B2_i = \left\{ \left[\frac{\partial \ell}{\partial q''_i} \right] \delta q'_i \right\}_{x=0}^{x=L} = 0$$

که $q_i(x, t)$ ، همان $u(x, t)$ ، $v(x, t)$ ، $w(x, t)$ ، $\phi(x, t)$ و $\lambda(x, t)$ می‌باشد.

با قرار دادن روابط مذکور در روابط انرژی جنبشی و پتانسیل و سپس استفاده از رابطه لاگرانژ و ساده سازی معادلات با استفاده از بسط تیلور تا مرتبه $O(\epsilon^3)$ ، با توجه به اصل همیلتون تعمیم یافته، معادله ارتعاشاتی طولی تیر در راستای محور x و ζ برابر است با،

$$m\ddot{u} - [\lambda(1+u')] = 0 \quad (8-7)$$

با در نظر گرفتن قید کش ناپذیری (رابطه (7-2))، جایگذاری رابطه (7-3) در (7-8) و ساده سازی نتایج، ضریب لاگرانژین λ برابر است با،

$$\lambda(x, t) = -m \int_L^x \int_0^x \left[\frac{d}{dt} (v\dot{v} + w\dot{w}) \beta_0^2 + (v\ddot{w}' + w'\ddot{v} - w\ddot{v}' - 2\dot{v}\dot{w}' + 2\dot{v}\dot{w}' - v'\ddot{w}) \beta_0 \right. \\ \left. + \frac{d}{dt} (v'\dot{v}' + w'\dot{w}') \right] dx dx \quad (9-7)$$

با توجه به طولانی بودن معادلات ارتعاشاتی عرضی و پیچشی، از آوردن آنها صرف نظر شده است. همچنین، از آنجا که فرکانس طبیعی پیچشی از فرکانس طبیعی جانبی خیلی بزرگتر بوده، در نتیجه تأثیر جملات اینرسی پیچشی از اینرسی جانبی کمتر بوده و می‌توان از جملات اینرسی پیچشی صرف نظر کرد، $I_{xx}\ddot{\phi} = 0$ [33]. بدین ترتیب، کرنشی پیچشی $\phi(x, t)$ برابر است با،

$$\phi(x, t) = \int_0^x \left((-1/2(w'v'' - v'w'') + (-v'^2 + w'^2)\beta_0 + 1/2\beta_0(ww'' - vv'') + 3/2\beta_0^2(v'w + vw') + 1/2\beta_0^3(v^2 - w^2)) \cos(2\beta_0 x) \right. \\ \left. + (3/2\beta_0^2(vv'' - w'w'') + 1/2(w'w'' - v'v'') + 2\beta_0 v'w' + 1/2\beta_0(vw'' + wv'') - \beta_0^3 vw) \sin(2\beta_0 x) \right. \\ \left. + 1/2(v'w'' - w'v'') + (v'^2 + w'^2)\beta_0 - 1/2\beta_0(ww'' - vv'') + 3/2\beta_0^2(vw' - v'w) + 1/2\beta_0^3(w^2 + v^2) \right) dx \quad (10-7)$$

و با توجه به معادله لاگرانژ (7-4) معادله ارتعاشات عرضی تیر پیچیده شده دو سر ساده با در

نظر گرفتن شرط کش ناپذیری (7-3) برابر است با،

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi^2} I_x \Omega (\beta_0^2 \dot{w} - \beta_0 \dot{v}') \cos(2\beta_0 x) + \frac{1}{2\pi^2} I_x \Omega (\beta_0^2 \dot{v} + \beta_0 \dot{w}') \sin(2\beta_0 x) \\
& + \left(\begin{aligned} & -8\Delta D \beta_0^4 v - 22\Delta D \beta_0^3 w' + (-6\Delta I \pi^2 \Omega \dot{w} + 21\Delta D v'' - 3\Delta I \pi^2 \ddot{v}) \beta_0^2 \\ & + (8\Delta I \pi^2 \Omega \dot{v}' - 4\Delta I \pi^2 \ddot{w}' + 8\Delta D w''') \beta_0 + \Delta I \pi^2 \ddot{v}'' - \Delta D v^{(4)} + 2\Delta I \Omega \pi^2 \dot{w}'' \end{aligned} \right) \frac{\cos(-2\Omega t + 4\beta_0 x)}{\pi^4} \\
& + \left(\begin{aligned} & 8\Delta D \beta_0^4 w - 22\Delta D \beta_0^3 v' + (-6\Delta I \pi^2 \Omega \dot{v} - 21\Delta D w'' + 3\Delta I \pi^2 \ddot{w}) \beta_0^2 \\ & + (-4\Delta I \pi^2 \ddot{v}' + 8\Delta D v''' - 8\Delta I \pi^2 \Omega \dot{w}') \beta_0 - \Delta I \pi^2 \ddot{w}'' + \Delta D w^{(4)} + 2\Delta I \pi^2 \Omega \dot{v}'' \end{aligned} \right) \frac{\sin(-2\Omega t + 4\beta_0 x)}{\pi^4} \\
& + \frac{1}{\pi^4} (vwv''' + 3v'v''w - 2w' + v'^2 w' + 4w'w''w + w'v''v + w'''w^2 + w'^3) \beta_0^3 \\
& + \frac{1}{\pi^4} (ww'v - 3v'''w'w - 1/2\Sigma I \pi^2 \ddot{v} + w'''v'w - 1/2I_x \pi^2 \Omega \dot{w} + 5v'' - v^{(4)}w^2 - 2v''w'^2 - 4v''v'^2 \\
& - v'''v'v - v''w''w - 2v'w'w'' - vv''^2 + w^{(4)}vw) \beta_0^2 + \frac{1}{\pi^4} (-w'''v''v + 2v^{(4)}v'w + 2w'v''^2 - 2w'''v'^2 \\
& - \Sigma I \pi^2 \ddot{w}' + w^{(4)}w'w - w^{(4)}v'v + 3w'v'v''' + w'''w'^2 + 3/2I_x \pi^2 \Omega \dot{v}' - w''v''v' + 4v'''v''w \\
& + 3w'''w''w + 4w'''w + w'w''^2) \beta_0 + \frac{1}{\pi^4} (-v^{(4)} - v^{(4)}v'^2 + I_x \pi^2 \Omega \dot{w}'' - w^{(4)}v'w' - 4v'v''v'' - v''^3 \\
& - w'w''v'' - 3v'w''w'' - \ddot{v}\pi^4 - v''w''^2 + 1/2\Sigma I \pi^2 \ddot{v}'') + e_\eta \Omega^2 \cos(\beta_0 x - \Omega t) + e_\zeta \Omega^2 \sin(\beta_0 x - \Omega t) \\
& + c(\dot{w} \sin(\beta_0 x) - \dot{v} \cos(\beta_0 x)) \\
& + \left(\left(v' \int_1^x \int_0^x \frac{d^2}{dt^2} (wv' - vw') dx dx \right) + \left(w \int_1^x \int_0^x \frac{d}{dt} (w'\dot{w}' + v'\dot{v}') dx dx \right) \right)' \beta_0 \\
& + \left(\left(w \int_1^x \int_0^x \frac{d}{dt} (w'\dot{v} - v'\dot{w}) dx dx \right) - \left(v' \int_1^x \int_0^x \frac{d}{dt} (w\dot{w} + v\dot{v}) dx dx \right) \right)' \beta_0^2 \\
& + \left(w \int_1^x \int_0^x \frac{d}{dt} (v\dot{v} + w\dot{w}) dx dx \right)' \beta_0^3 - \left(v' \int_1^x \int_0^x \frac{d}{dt} (v'\dot{v}' + w'\dot{w}') dx dx \right)'
\end{aligned}$$

(11-V)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi^2} I_x \Omega (\beta_0^2 \dot{v} - \beta_0 \dot{w}') \cos(2\beta_0 x) + \frac{1}{2\pi^2} I_x \Omega (-\beta_0^2 \dot{w} + \beta_0 \dot{v}') \sin(2\beta_0 x) \\
& + \left(\begin{aligned} & -8\Delta D \beta_0^4 v - 22\Delta D \beta_0^3 w' + (6\Delta I \pi^2 \Omega \dot{w} + 21\Delta D v'' + 3\Delta I \pi^2 \ddot{v}) \beta_0^2 \\ & + (-8\Delta I \pi^2 \Omega \dot{v}' - 4\Delta I \pi^2 \ddot{w}' - 8\Delta D w''') \beta_0 + \Delta I \pi^2 \ddot{v}'' + \Delta D v^{(4)} + 2\Delta I \Omega \pi^2 \dot{w}'' \end{aligned} \right) \frac{\sin(-2\Omega t + 4\beta_0 x)}{\pi^4} \\
& + \left(\begin{aligned} & 8\Delta D \beta_0^4 w - 22\Delta D \beta_0^3 v' + (-6\Delta I \pi^2 \Omega \dot{v} - 21\Delta D w'' - 3\Delta I \pi^2 \ddot{w}) \beta_0^2 \\ & + (-4\Delta I \pi^2 \ddot{v}' - 8\Delta D v''' - 8\Delta I \pi^2 \Omega \dot{w}') \beta_0 + \Delta I \pi^2 \ddot{w}'' + \Delta D w^{(4)} - 2\Delta I \pi^2 \Omega \dot{v}'' \end{aligned} \right) \frac{\cos(-2\Omega t + 4\beta_0 x)}{\pi^4} \\
& + \frac{1}{\pi^4} (vwv''' + 3w'w''v - 2v' + w'^2 v' + 4v'v''v + v'w''w + v'''v^2 + v'^3) \beta_0^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\pi^4} (wv'v - 3w''v'v - 1/2\Sigma I \pi^2 \ddot{w} + v''w'v - 1/2I_x \pi^2 \Omega \dot{v} + 5w'' - w^{(4)}v^2 - 2w''v'^2 - 4w''w'^2 \\
& - w''w'w - v''w''v - 2v'w'v'' - ww''^2 + v^{(4)}vw) \beta_0^2 + \frac{1}{\pi^4} (-w''v''w + 2w^{(4)}w'v + 2v'w''^2 - 2v''w''^2 \\
& - \Sigma I \pi^2 \ddot{v}' + v^{(4)}v'v - v^{(4)}w'w + 3w'v'w'' + v''v'^2 + 3/2I_x \pi^2 \Omega \dot{w}' - w''v''w' + 4w''w''v \\
& + 3v''v''v + 4v''v + v'v''^2) \beta_0 + \frac{1}{\pi^4} (-w^{(4)} - w^{(4)}w'^2 + I_x \pi^2 \Omega \dot{v}'' - v^{(4)}v'w' - 4w''w''w' - w''^3 \\
& - v'v''w'' - 3w'v''v'' - \dot{w}\pi^4 - w''v''^2 + 1/2\Sigma I \pi^2 \ddot{w}'') + e_\eta \Omega^2 \sin(\beta_0 x - \Omega t) - e_\zeta \Omega^2 \cos(\beta_0 x - \Omega t) \\
& + c(\dot{w} \cos(\beta_0 x) + \dot{v} \sin(\beta_0 x)) \\
& + \left(\left(w' \int_1^x \int_0^x \frac{d^2}{dt^2} (wv' + vw') dx dx \right) + \left(v \int_1^x \int_0^x \frac{d}{dt} (w'\dot{w}' - v'\dot{v}') dx dx \right) \right)' \beta_0 \\
& + \left(\left(v \int_1^x \int_0^x \frac{d}{dt} (w'\dot{v} + v'\dot{w}) dx dx \right) - \left(w' \int_1^x \int_0^x \frac{d}{dt} (w\dot{w} - v\dot{v}) dx dx \right) \right)' \beta_0^2 \\
& + \left(v \int_1^x \int_0^x \frac{d}{dt} (v\dot{v} + w\dot{w}) dx dx \right)' \beta_0^3 + \left(w' \int_1^x \int_0^x \frac{d}{dt} (v'\dot{v}' + w'\dot{w}') dx dx \right)'
\end{aligned}$$

برای ساده سازی، در معادلات فوق داریم،

$$\Delta D = \frac{(D_{\xi\xi} - D_{\eta\eta})}{2}, \quad \Delta I = \frac{(I_{\xi\xi} - I_{\eta\eta})}{2}, \quad \Sigma D = \frac{(D_{\xi\xi} + D_{\eta\eta})}{2}, \quad \Sigma I = \frac{(I_{\xi\xi} + I_{\eta\eta})}{2}, \quad (13-7)$$

$$u = u_\zeta, \quad v = v_\eta, \quad w = w_\xi,$$

برای بی بعد سازی معادلات به شکل زیر عمل شده است،

$$\begin{aligned}
u^* &= \frac{u}{h_0}, \quad v^* = \frac{v}{h_0}, \quad w^* = \frac{w}{h_0}, \quad x^* = \frac{x}{L}, \quad t^* = \frac{t}{\sqrt{\frac{mL^4}{\pi^4 \Sigma D}}}, \quad \Omega^* = \frac{\Omega}{\sqrt{\frac{\pi^4 \Sigma D}{mL^4}}}, \\
I_{xx}^* &= I_{\zeta\zeta}^* = \frac{\pi^2 I_{xx}}{mL^2}, \quad \Sigma I^* = \frac{\pi^2 \Sigma I}{mL^2}, \quad \Delta I^* = \frac{\pi^2 \Delta I}{mL^2}, \quad \Delta D^* = \frac{\pi^2 \Delta D}{mL^2}, \quad (14-7) \\
c^* &= c \frac{\pi^2 \sqrt{m \Sigma D}}{L^2},
\end{aligned}$$

که h_0 و L ، به ترتیب اندازه ضخامت مقطع و طول تیر هستند. برای راحتی، در معادلات از

علامت (*) صرف نظر شده است.

۷-۲- تحلیل پایداری با اعمال روش مقیاس‌های چند گانه به معادلات دیفرانسیل مشتقات جزئی (PDE)

اکنون به منظور حل معادلات بی بعد شده بدست آمده، از تئوری اغتشاشات و روش مقیاس‌های

چندگانه برای تحلیل معادلات دیفرانسیل با مشتق جزئی استفاده می‌شود. به این ترتیب، فرض می‌شود،

$$v(x,t) = \varepsilon v_1(x, T_0, T_2) + \varepsilon^3 v_3(x, T_0, T_2) + \dots \quad (15-7)$$

$$w(x,t) = \varepsilon w_1(x, T_0, T_2) + \varepsilon^3 w_3(x, T_0, T_2) + \dots$$

لازم به ذکر است اگر در تقریب فوق، جملات w_0, v_0, w_2, v_2 ظاهر شوند، پاسخ آنها در ادامه

صفر خواهد شد. $T_0 = t$ و $T_2 = \varepsilon^2 t$ از طرفی،

$$\frac{\partial}{\partial t} = D_0 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \quad (16-7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = D_0^2 + 2\varepsilon^2 D_2 D_0 + \dots$$

که D_0 و D_2 به ترتیب برابرند با، $\frac{\partial}{\partial T_0}$ و $\frac{\partial}{\partial T_2}$ به منظور بالانس پارامترهای غیرخطی در معادلات و

استخراج رزونانس‌های اولیه و پارامتریک، قرار می‌دهیم،

$$c = \varepsilon^2 \bar{c}, \Delta D = \varepsilon^2 \bar{\Delta D}, \Delta I = \varepsilon^2 \bar{\Delta I}, e_\zeta = \varepsilon^3 \bar{e}_\zeta, e_\eta = \varepsilon^3 \bar{e}_\eta, \quad (17-7)$$

به این ترتیب، با اعمال روش مقیاس‌های چندگانه و جدا سازی عبارات مرتبه $O(\varepsilon^1)$ و $O(\varepsilon^3)$

داریم،

$O(\varepsilon)$:

$$\frac{\Omega I_x}{2\pi^2} \left[(\beta_0^2 D_0 w_1 - \beta_0 D_0 v_1') \cos(2\beta_0 x) + (\beta_0^2 D_0 v_1 + \beta_0 D_0 w_1' \beta_0) \sin(2\beta_0 x) \right]$$

$$- 2 \frac{\beta_0^3 w_1'}{\pi^4} + 1/2 \left(\frac{-2 \Sigma I D_0^2 v_1 \pi^2 - \Omega I_x D_0 w_1 \pi^2 + 10 v_1''}{\pi^4} \right) \beta_0^2 \quad (18-7)$$

$$+ 1/2 \frac{(-4 \Sigma I D_0^2 w_1' \pi^2 + 3 \Omega I_x D_0 v_1' \pi^2 + 8 w_1''') \beta_0}{\pi^4}$$

$$+ 1/2 \frac{-2 v_1^{(4)} + 2 \Sigma I D_0^2 v_1'' \pi^2 - 2 D_0^2 v_1 \pi^4 + 2 \Omega I_x D_0 w_1'' \pi^2}{\pi^4} = 0$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\Omega I_x}{2\pi^2} \left[(\beta_0^2 D_0 v_1 + \beta_0 D_0 w_1') \cos(2\beta_0 x) + (-D_0 w_1 \beta_0^2 + D_0 v_1' \beta_0) \sin(2\beta_0 x) \right] \\
& + 2 \frac{\beta_0^3 v_1'}{\pi^4} + 1/2 \left(\frac{-2\Sigma ID_0^2 w_1 \pi^2 + \Omega I_x D_0 v_1 \pi^2 + 10 w_1''}{\pi^4} \right) \beta_0^2 \\
& + 1/2 \frac{(4\Sigma ID_0^2 v_1' \pi^2 + 3\Omega I_x D_0 w_1' \pi^2 - 8 v_1''') \beta_0}{\pi^4} \\
& + 1/2 \frac{-2 w_1^{(4)} + 2\Sigma ID_0^2 w_1'' \pi^2 - 2 D_0^2 w_1 \pi^4 - 2\Omega I_x D_0 v_1'' \pi^2}{\pi^4} = 0
\end{aligned} \tag{19-V}$$

9

$O(\varepsilon^3)$:

$$\begin{aligned}
& \left[(-6D_0 v_1 \beta_0^2 - 8D_0 w_1' \beta_0 + 2D_0 v_1'') \Omega \Delta I + \frac{8\Delta D \beta_0^4}{\pi^2} w_1 - \frac{22\beta_0^3 \Delta D}{\pi^2} v_1' \right. \\
& \left. + \left(-\frac{21\Delta D}{\pi^2} w_1'' + 3\Delta I D_0^2 w_1 \right) \beta_0^2 + \left(\frac{8\Delta D}{\pi^2} v_1''' - 4\Delta I D_0^2 v_1' \right) \beta_0 - \Delta I D_0^2 w_1'' + \frac{\Delta D}{\pi^2} w_1^{(4)} \right] \frac{\sin(4\beta_0 x - 2\Omega T_0)}{\pi^2} \\
& \left[(-6D_0 v_1 \beta_0^2 + 8D_0 v_1' \beta_0 + 2D_0 w_1'') \Omega \Delta I - \frac{8\Delta D \beta_0^4}{\pi^2} v_1 - \frac{22\beta_0^3 \Delta D}{\pi^2} w_1' \right. \\
& \left. + \left(\frac{21\Delta D}{\pi^2} v_1'' - 3\Delta I D_0^2 v_1 \right) \beta_0^2 + \left(\frac{8\Delta D}{\pi^2} w_1''' - 4\Delta I D_0^2 w_1' \right) \beta_0 + \Delta I D_0^2 v_1'' - \frac{\Delta D}{\pi^2} v_1^{(4)} \right] \frac{\cos(4\beta_0 x - 2\Omega T_0)}{\pi^2} \\
& + ((D_2 w_1 + D_0 w_3) \beta_0^2 - (D_2 v_1' + D_0 v_3') \beta_0) \frac{I_{xx} \Omega}{2\pi^2} \cos(2\beta_0 x) \\
& + ((D_2 v_1 + D_0 v_3) \beta_0^2 + (D_2 w_1' + D_0 v_3') \beta_0) \frac{I_{xx} \Omega}{2\pi^2} \sin(2\beta_0 x) \\
& + \left(\left(v_1' \int_1^x \int_0^x D_0^2 (w_1 v_1' - v_1 w_1') dx dx \right) + \left(w_1 \int_1^x \int_0^x D_0 (w_1' D_0 w_1' + v_1' D_0 v_1') dx dx \right) \right)' \beta_0 \\
& + \left(\left(w_1 \int_1^x \int_0^x D_0 (w_1' D_0 v_1 - v_1' D_0 w_1) dx dx \right) - \left(v_1' \int_1^x \int_0^x D_0 (w_1 D_0 w_1 + v_1 D_0 v_1) dx dx \right) \right)' \beta_0^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(w_1 \int_1^x \int_0^x D_0 (v_1 D_0 v_1 + w_1 D_0 w_1) dx dx \right)' \beta_0^3 - \left(v_1' \int_1^x \int_0^x D_0 (v_1' D_0 v_1' + w_1' D_0 w_1') dx dx \right)' \\
& + \left(-1/2 \beta_0^2 D_0 w_3 + 3/2 \beta_0 D_0 v_3' + D_0 w_3'' \right) \frac{I_{xx} \Omega}{\pi^2} \\
& + \left(-\Sigma I D_0^2 v_3 + \frac{5}{\pi^2} v_3'' \right) \frac{\beta_0^2}{\pi^2} + \left(-2 \Sigma I D_0^2 w_3' + \frac{4}{\pi^2} w_3''' \right) \frac{\beta_0}{\pi^2} \\
& - D_0^2 v_3 - \frac{v_3^{(4)}}{\pi^4} + \frac{1}{\pi^2} \Sigma I D_0^2 v_3'' - \frac{2 \beta_0^3}{\pi^4} w_3' \\
& + \frac{1}{\pi^4} (v_1 w_1 v_1''' + 3 v_1' v_1 w_1 - 2 w_1' + v_1'^2 w_1' + 4 w_1' w_1'' w_1 + w_1' v_1'' v_1 + w_1'' w_1^2 + w_1'^3) \beta_0^3 \\
& + \frac{1}{\pi^4} (w_1 w_1' v_1 - 3 v_1'' w_1' w_1 - 1/2 \Sigma I \pi^2 D_2 D_0 v + w_1'' v_1' w_1 - 1/2 I_x \pi^2 \Omega D_2 w + 5 v_1'' - v_1^{(4)} w_1^2 - 2 v_1'' w_1'^2 - 4 v_1'' v_1'^2 \\
& - v_1'' v_1' v_1 - v_1'' w_1'' w_1 - 2 v_1' w_1' w_1'' - v_1 v_1''^2 + w_1^{(4)} v_1 w_1) \beta_0^2 + \frac{1}{\pi^4} (-w_1'' v_1'' v_1 + 2 v_1^{(4)} v_1' w_1 + 2 w_1' v_1''^2 - 2 w_1'' v_1'^2 \\
& - \Sigma I \pi^2 D_2 D_0 w' + w_1^{(4)} w_1' w_1 - w_1^{(4)} v_1' v_1 + 3 w_1' v_1' v_1'' + w_1'' w_1'^2 + 3/2 I_x \pi^2 \Omega D_2 v' - w_1'' v_1' v_1' + 4 v_1' v_1'' w_1 \\
& + 3 w_1'' w_1' w_1 + 4 w_1'' w_1 + w_1' w_1''^2) \beta_0 + \frac{1}{\pi^4} (-v_1^{(4)} - v_1^{(4)} v_1'^2 + I_x \pi^2 \Omega D_2 w'' - w_1^{(4)} v_1' w_1' - 4 v_1' v_1'' v_1'' - v_1''^3 \\
& - w_1' w_1'' v_1'' - 3 v_1' w_1'' w_1'' - D_2 D_0 v \pi^4 - v_1'' w_1''^2 + 1/2 \Sigma I \pi^2 D_2 D_0 v_1'') \\
& + \Omega^2 e_\eta(x) \cos(\beta_0 x - \Omega T_0) + \Omega^2 e_\xi(x) \sin(\beta_0 x - \Omega T_0) - c D_0 v_1 \cos(\beta_0 x) + c D_0 w_1 \sin(\beta_0 x) = 0
\end{aligned}$$

(20-V)

$O(\varepsilon^3)$:

$$\begin{aligned}
& \left[(-6 D_0 v_1 \beta_0^2 - 8 D_0 w_1' \beta_0 + 2 D_0 v_1'') \Omega \Delta I + \frac{8 \Delta D \beta_0^4}{\pi^2} w_1 - \frac{22 \beta_0^3 \Delta D}{\pi^2} v_1' \right. \\
& \left. + \left(-\frac{21 \Delta D}{\pi^2} w_1'' + 3 \Delta I D_0^2 w_1 \right) \beta_0^2 + \left(\frac{8 \Delta D}{\pi^2} v_1''' - 4 \Delta I D_0^2 v_1' \right) \beta_0 - \Delta I D_0^2 w_1'' + \frac{\Delta D}{\pi^2} w_1^{(4)} \right] \frac{\cos(4 \beta_0 x - 2 \Omega T_0)}{\pi^2} \\
& + \left[(6 D_0 w_1 \beta_0^2 + 8 D_0 v_1' \beta_0 + 2 D_0 w_1'') \Omega \Delta I + \frac{8 \Delta D \beta_0^4}{\pi^2} v_1 + \frac{22 \beta_0^3 \Delta D}{\pi^2} w_1' \right. \\
& \left. + \left(-\frac{21 \Delta D}{\pi^2} v_1'' + 3 \Delta I D_0^2 v_1 \right) \beta_0^2 + \left(-\frac{8 \Delta D}{\pi^2} w_1''' - 4 \Delta I D_0^2 w_1' \right) \beta_0 + \Delta I D_0^2 v_1'' - \frac{\Delta D}{\pi^2} v_1^{(4)} \right] \frac{\sin(4 \beta_0 x - 2 \Omega T_0)}{\pi^2} \\
& + \left(-(D_2 w_1 + D_0 w_3) \beta_0^2 + (D_2 v_1' + D_0 v_3') \beta_0 \right) \frac{I_{xx} \Omega}{2 \pi^2} \sin(2 \beta_0 x) \\
& + \left((D_2 v_1 + D_0 v_3) \beta_0^2 + (D_2 w_1' + D_0 w_3') \beta_0 \right) \frac{I_{xx} \Omega}{2 \pi^2} \cos(2 \beta_0 x) \\
& + \left(\left(w_1' \int_1^x \int_0^x D_0^2 (w_1 v_1' + v_1 w_1') dx dx \right) + \left(v_1 \int_1^x \int_0^x D_0 (w_1' D_0 w_1' - v_1' D_0 v_1') dx dx \right) \right)' \beta_0 \\
& + \left(\left(v_1 \int_1^x \int_0^x D_0 (w_1' D_0 v_1 + v_1' D_0 w_1) dx dx \right) - \left(w_1' \int_1^x \int_0^x D_0 (w_1 D_0 w_1 - v_1 D_0 v_1) dx dx \right) \right)' \beta_0^2 \\
& + \left(v_1 \int_1^x \int_0^x D_0 (v_1 D_0 v_1 + w_1 D_0 w_1) dx dx \right)' \beta_0^3 + \left(w_1' \int_1^x \int_0^x D_0 (v_1' D_0 v_1' + w_1' D_0 w_1') dx dx \right)'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(1/2\beta_0^2 D_0 v_3 + 3/2\beta_0 D_0 w_3' + D_0 w_3'' \right) \frac{I_{xx}\Omega}{\pi^2} + \left(-\Sigma I D_0^2 w_3 + \frac{5}{\pi^2} w_3'' \right) \frac{\beta_0^2}{\pi^2} \\
& + \left(-2\Sigma I D_0^2 v_3' - \frac{4}{\pi^2} v_3'' \right) \frac{\beta_0}{\pi^2} - D_0^2 w_3 - \frac{w_3^{(4)}}{\pi^4} + \frac{1}{\pi^2} \Sigma I D_0^2 w_3'' - \frac{2\beta_0^3}{\pi^4} v_3' \\
& + \frac{1}{\pi^4} \left(v_1 w_1 w_1''' + 3w_1' w_1'' v_1 - 2v_1' + w_1'^2 v_1' + 4v_1' v_1'' v_1 + v_1' w_1'' w_1 + v_1'' v_1'^2 + v_1'^3 \right) \beta_0^3 \\
& + \frac{1}{\pi^4} \left(w_1 v_1' v_1 - 3w_1'' v_1' v_1 - 1/2\Sigma I \pi^2 D_2 D_0 w_1 + v_1'' w_1' v_1 - 1/2I_x \pi^2 \Omega D_2 v_1 + 5w_1'' - w_1^{(4)} v_1'^2 - 2w_1'' v_1'^2 - 4w_1'' w_1'^2 \right. \\
& - w_1'' w_1' w_1 - v_1'' w_1' v_1 - 2v_1' w_1' v_1'' - w_1 w_1''^2 + v_1^{(4)} v_1 w_1 \left. \right) \beta_0^2 + \frac{1}{\pi^4} \left(-w_1'' v_1'' w_1 + 2w_1^{(4)} w_1' v_1 + 2v_1' w_1''^2 - 2v_1'' w_1'^2 \right. \\
& - \Sigma I \pi^2 D_2 D_0 v_1' + v_1^{(4)} v_1' v_1 - v_1^{(4)} w_1' w_1 + 3w_1' v_1' w_1'' + v_1'' v_1'^2 + 3/2I_x \pi^2 \Omega D_2 w_1' - w_1'' v_1'' w_1' + 4w_1'' w_1' v_1 \\
& + 3v_1'' w_1' v_1 + 4v_1'' v_1' + v_1' v_1''^2 \left. \right) \beta_0 + \frac{1}{\pi^4} \left(-w_1^{(4)} - w_1^{(4)} w_1'^2 + I_x \pi^2 \Omega D_2 v_1'' - v_1^{(4)} v_1' w_1' - 4w_1'' w_1'' w_1' - w_1''^3 \right. \\
& - v_1' v_1'' w_1'' - 3w_1' v_1'' v_1'' - D_2 D_0 w_1 \pi^4 - w_1'' v_1''^2 + 1/2\Sigma I \pi^2 D_2 D_0 w_1'' \left. \right) \\
& - \Omega^2 e_\eta(x) \sin(\beta_0 x - \Omega T_0) + \Omega^2 e_\xi(x) \cos(\beta_0 x - \Omega T_0) - cD_0 w_1 \cos(\beta_0 x) - cD_0 v_1 \sin(\beta_0 x) = 0
\end{aligned}$$

(۲۱-۷)

حل معادلات مرتبه اول ε به شکل زیر تخمین زده می شود،

$$\begin{aligned}
v_1(x, T_0, T_2) &= \Phi_f(x) \left(A_1(T_2) e^{i\omega_f T_0} + \bar{A}_1(T_2) e^{-i\omega_f T_0} \right) + \Phi_b(x) \left(A_2(T_2) e^{i\omega_b T_0} + \bar{A}_2(T_2) e^{-i\omega_b T_0} \right) \\
w_1(x, T_0, T_2) &= \Phi_f(x) \left(-iA_1(T_2) e^{i\omega_f T_0} + i\bar{A}_1(T_2) e^{-i\omega_f T_0} \right) + \Phi_b(x) \left(-iA_2(T_2) e^{i\omega_b T_0} + i\bar{A}_2(T_2) e^{-i\omega_b T_0} \right)
\end{aligned}$$

(۲۲-۷)

به منظور بررسی رزونانسهای اولیه و پارامتریک، نزدیکی فرکانس Ω به فرکانس طبیعی اولیه ω_f

با در نظر گرفتن پارامتر تنظیم کننده σ به شکل زیر تخمین زده می شود:

$$\Omega = \omega_f + \varepsilon^2 \sigma \tag{۲۳-۷}$$

اکنون، با قرار دادن رابطه (۲۳-۷) و جواب مرتبه یک برای v و w (معادلات (۲۲-۷)) در

معادلات مرتبه سه برای هر دو v و w ، معادلات مرتبه سه را با جدا کردن و مرتب سازی ضرایب

$e^{i\omega_b T_0}$ و $e^{i\omega_f T_0}$ برای از بین بردن ضرایب سکولار ترم و حذف small divisorهای موجود به شکل زیر

ساده می کنیم،

$$\begin{aligned}
& \left[\left(\beta_0^2 D_0 w_3 + i\beta_0^2 D_0 v_3 + i\beta_0 D_0 w_3' - \beta_0 D_0 v_3' \right) e^{-2i\beta_0 x} + \left(\beta_0^2 D_0 w_3 - i\beta_0^2 D_0 v_3 - i\beta_0 D_0 w_3' - \beta_0 D_0 v_3' \right) e^{2i\beta_0 x} \right. \\
& \left. + 3\beta_0 D_0 v_3' - \beta_0^2 D_0 w_3 + 2D_0 w_3'' \right] \frac{I_{xx}\Omega}{2\pi^2} + \frac{10\beta_0^2}{\pi^4} v_3'' - \frac{4\beta_0 \Sigma I}{\pi^2} D_0^2 w_3' - \frac{4\beta_0^3}{\pi^4} w_3'' - 2 \frac{(\pi^2 + \beta_0^2 \Sigma I)}{\pi^2} D_0^2 v_3 \\
& + \frac{8\beta_0}{\pi^4} w_3''' - 2 \frac{v_3^{(4)}}{\pi^4} + 2 \frac{\Sigma I}{\pi^2} D_0^2 v_3'' = P_{f,v}(x, T_2) e^{i\omega_f T_0} + P_{b,v}(x, T_2) e^{i\omega_b T_0} + CC + N.S.T
\end{aligned}$$

(۲۴-۷)

$$\begin{aligned} & \left[(\beta_0^2 D_0 v_3 - i\beta_0^2 D_0 w_3 + i\beta_0 D_0 v_3' + \beta_0 D_0 w_3') e^{-2i\beta_0 x} + (\beta_0^2 D_0 v_3 + i\beta_0^2 D_0 w_3 - i\beta_0 D_0 v_3' + \beta_0 D_0 w_3') e^{2i\beta_0 x} \right. \\ & \left. + 3\beta_0 D_0 w_3' + \beta_0^2 D_0 v_3 - 2D_0 v_3'' \right] \frac{I_{xx}\Omega}{2\pi^2} + \frac{10\beta_0^2}{\pi^4} w_3'' + \frac{4\beta_0 \Sigma I}{\pi^2} D_0^2 v_3' + \frac{4\beta_0^3}{\pi^4} v_3' - 2 \frac{(\pi^2 + \beta_0^2 \Sigma I)}{\pi^2} D_0^2 w_3 \\ & - \frac{8\beta_0}{\pi^4} v_3''' - 2 \frac{w_3^{(4)}}{\pi^4} + 2 \frac{\Sigma I}{\pi^2} D_0^2 w_3'' = P_{f,w}(x, T_2) e^{i\omega_f T_0} + P_{b,w}(x, T_2) e^{i\omega_b T_0} + CC + N.S.T \end{aligned}$$

(۲۵-۷)

که CC و $N.S.T$ به معنی مختلط مزدوج و ضرایب غیر سکولار می باشند.

پس از بدست آوردن ضرایب سکولار، با استفاده از شرایط حل پذیری برای آنها داریم،

$$\int_0^1 \Phi_f(x) P_f(x, T_2) dx = 0 \quad \text{و} \quad \int_0^1 \Phi_b(x) P_b(x, T_2) dx = 0 \quad (۲۶-۷)$$

که P_f و P_b ضرایب سکولار معادلات مرتبه ۳ از ε هستند و برابرند با،

$$\begin{aligned} P_f = & \left[I_x \Omega (6\beta_0 \Phi_f' - 4i\Phi_f'' + 2i\beta_0^2 \Phi_f) + \Sigma I \omega_f (4i\Phi_f'' - 8\beta_0 \Phi_f' - 4i\beta_0^2 \Phi_f) - 8i\Phi_f \omega_f \right] A_1' \\ & + \left[\begin{aligned} & -8\Phi_f'^2 \Phi_f^{(4)} - 8i\beta_0^3 \Phi_f'' \Phi_f'^2 - 8i\beta_0 \Phi_f'' \Phi_f'^2 - 8i\beta_0 \Phi_f'' \Phi_f'^2 - 8\beta_0^2 \Phi_f' \Phi_f \Phi_f'' \\ & -8\Phi_f''^3 - 32i\beta_0^3 \Phi_f' \Phi_f \Phi_f'' - 24i\beta_0 \Phi_f'' \Phi_f \Phi_f''' - 8i\beta_0 \Phi_f' \Phi_f \Phi_f^{(4)} \\ & -32\beta_0^2 \Phi_f'^2 \Phi_f'' - 32\Phi_f'' \Phi_f' \Phi_f'' - 8\beta_0^2 \Phi_f'' \Phi_f'' - 8i\beta_0^3 \Phi_f'^3 \end{aligned} \right] \bar{A}_1 A_1^2 \\ & + \left[\begin{aligned} & -4\Phi_b'^2 \Phi_f^{(4)} - 4\beta_0 \Omega^2 \Phi_b^2 \Phi_f^{(4)} - 4i\beta_0 \Phi_f' \Phi_b \Phi_b^{(4)} - 12i\beta_0 \Phi_b' \Phi_f \Phi_b^{(4)} + 4\beta_0^2 \Phi_f \Phi_b \Phi_b^{(4)} - 12\Phi_f' \Phi_b' \Phi_b^{(4)} \\ & -16\Phi_f'' \Phi_b'^2 + 4i\beta_0 \Phi_f'' \Phi_b'^2 - 20\Phi_b'' \Phi_f' \Phi_b' - 4\beta_0^2 \Phi_b'' \Phi_f - 28\Phi_b'' \Phi_b'^2 \Phi_f' - 24\beta_0^2 \Phi_b'^2 \Phi_f'' - 16\Phi_f'' \Phi_b'' \Phi_b' \\ & -40\beta_0^2 \Phi_f' \Phi_b' \Phi_b'' - 16\beta_0^2 \Phi_b' \Phi_b \Phi_f'' - 12\beta_0^2 \Phi_f'' \Phi_b'' \Phi_b - 4i\beta_0^3 \Phi_f'' \Phi_b'^2 - 12i\beta_0 \Phi_b'' \Phi_f'' - 16i\beta_0^3 \Phi_f' \Phi_b'^2 \\ & -28i\beta_0^3 \Phi_b' \Phi_f \Phi_b'' - 12i\beta_0^3 \Phi_b'' \Phi_b \Phi_f - 16i\beta_0^3 \Phi_b' \Phi_b \Phi_f'' - 28i\beta_0 \Phi_b'' \Phi_f \Phi_b'' - 8i\beta_0 \Phi_b'' \Phi_b \Phi_f'' \\ & -12i\beta_0 \Phi_f' \Phi_b \Phi_b'' - 4i\beta_0 \Phi_f'' \Phi_b' \Phi_b'' - 20i\beta_0^3 \Phi_f' \Phi_b \Phi_b'' - 20i\beta_0 \Phi_b'' \Phi_b' \Phi_f' \end{aligned} \right] A_1 A_2 \bar{A}_2 \\ & + 8(\omega_f - \omega_b)^2 \left[\begin{aligned} & +i\beta_0^3 \Phi_b \int_1^x \int_0^x \Phi_f \Phi_b dx dx + \beta_0^2 \Phi_b' \int_1^x \int_0^x \Phi_f \Phi_b dx dx + \beta_0^2 \Phi_b \int_1^x \int_0^x \Phi_f' \Phi_b dx dx \\ & -\beta_0^2 \Phi_b \int_1^x \int_0^x \Phi_b' \Phi_f dx dx + i\beta_0 \Phi_b' \int_1^x \int_0^x \Phi_b' \Phi_f dx dx - i\beta_0 \Phi_b' \int_1^x \int_0^x \Phi_f' \Phi_b dx dx \\ & +i\beta_0 \Phi_b \int_1^x \int_0^x \Phi_f' \Phi_b' dx dx + \Phi_b' \int_1^x \int_0^x \Phi_f' \Phi_b' dx dx \end{aligned} \right] A_1 A_2 \bar{A}_2 \\ & + \left[\begin{aligned} & -2\Delta D \Phi_f^{(4)} + 16i\Delta D \beta_0 \Phi_f'' + (42\Delta D \beta_0^2 - 2\Delta I \omega_f^2 + 4\Delta I \omega_f \Omega) \Phi_f' \\ & + \beta_0 (8i\Delta I \omega_f^2 - 44i\Delta D \beta_0^2 - 16i\Delta I \omega_f \Omega) \Phi_f' \\ & + \beta_0^2 (-12\Delta I \omega_f \Omega - 16\Delta D \beta_0^2 + 6\Delta I \omega_f^2) \Phi_f \end{aligned} \right] \bar{A}_1 e^{-2i(2\beta_0 x - \sigma T_2)} \\ & - 4i\omega_f e^{i\beta_0 x} c \Phi_f A_1 + 2\Omega^2 (e_\eta + i e_\xi) e^{-i(\beta_0 x - \sigma T_2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_b = & \left[I_x \Omega (6\beta_0 \Phi'_b - 4i\Phi''_b + 2i\beta_0^2 \Phi_b) + \Sigma I \omega_b (4i\Phi''_b - 8\beta_0 \Phi'_b - 4i\beta_0^2 \Phi_b) - 8i\Phi_b \omega_b \right] A'_2 \\
& + \left(\begin{aligned} & -8\Phi_b'^2 \Phi_b^{(4)} - 8i\beta_0 \Phi_b' \Phi_b \Phi_b^{(4)} - 32\beta_0^2 \Phi_b'^2 \Phi_b'' - 32\Phi_b''' \Phi_b'' \Phi_b' - 8\beta_0^2 \Phi_b''^2 \Phi_b - 8i\beta_0^3 \Phi_b'^3 \\ & -8\beta_0^2 \Phi_b' \Phi_b \Phi_b'' - 8i\beta_0^3 \Phi_b'' \Phi_b'^2 - 8i\beta_0 \Phi_b'' \Phi_b'^2 - 8i\beta_0 \Phi_b'' \Phi_b' - 32i\beta_0^3 \Phi_b' \Phi_b \Phi_b'' \\ & -24i\beta_0 \Phi_b'' \Phi_b \Phi_b''' - 8\Phi_b'''^3 \end{aligned} \right) A_2^2 \bar{A}_2 \\
& + \left(\begin{aligned} & -16\Phi_f''^2 \Phi_b'' - 4\Phi_f'^2 \Phi_b^{(4)} - 24\beta_0^2 \Phi_f'^2 \Phi_b'' - 20\Phi_f''' \Phi_b'' \Phi_f' - 4\beta_0^2 \Phi_f'^2 \Phi_b^{(4)} - 28\Phi_f''' \Phi_f'' \Phi_b' \\ & -16\Phi_b'' \Phi_f'' \Phi_f' - 4\beta_0^2 \Phi_f''^2 \Phi_b - 12\Phi_f' \Phi_b' \Phi_f^{(4)} - 4i\beta_0^3 \Phi_b'' \Phi_f'^2 - 12i\beta_0 \Phi_f''^2 \Phi_b' \\ & +4i\beta_0 \Phi_b'' \Phi_f'^2 - 16i\beta_0^3 \Phi_f'^2 \Phi_b' - 16\beta_0^2 \Phi_f' \Phi_f \Phi_b'' - 12\beta_0^2 \Phi_f'' \Phi_b' \Phi_f - 40\beta_0^2 \Phi_f' \Phi_b' \Phi_f'' \\ & +4\beta_0^2 \Phi_f \Phi_b \Phi_f^{(4)} - 12i\beta_0 \Phi_b'' \Phi_f \Phi_f''' - 20i\beta_0 \Phi_f'' \Phi_f' \Phi_b' - 12i\beta_0^3 \Phi_f'' \Phi_f \Phi_b \\ & -4i\beta_0 \Phi_b' \Phi_f \Phi_f^{(4)} - 28i\beta_0^3 \Phi_f' \Phi_b \Phi_f'' - 4i\beta_0 \Phi_f'' \Phi_f' \Phi_b'' - 28i\beta_0 \Phi_f'' \Phi_b \Phi_f''' - 8i\beta_0 \Phi_f'' \Phi_f \Phi_b'' \\ & -16i\beta_0^3 \Phi_f' \Phi_f \Phi_b'' - 12i\beta_0 \Phi_f' \Phi_b \Phi_f^{(4)} - 20i\beta_0^3 \Phi_b' \Phi_f \Phi_f'' \end{aligned} \right) A_1 \bar{A}_1 A_2 \\
& + 8(\omega_f - \omega_b)^2 \left(\begin{aligned} & \Phi_f' \int_1^x \int_0^x \Phi_f' \Phi_b' dx dx - i\beta_0 \Phi_f' \int_1^x \int_0^x \Phi_b' \Phi_f dx dx + i\beta_0 \Phi_f' \int_1^x \int_0^x \Phi_f' \Phi_b dx dx \\ & + i\beta_0 \Phi_f \int_1^x \int_0^x \Phi_f' \Phi_b' dx dx + i\beta_0^3 \Phi_f \int_1^x \int_0^x \Phi_f \Phi_b dx dx - \beta_0^2 \Phi_f \int_1^x \int_0^x \Phi_f' \Phi_b dx dx \\ & + \beta_0^2 \Phi_f \int_1^x \int_0^x \Phi_b' \Phi_f dx dx + \beta_0^2 \Phi_f' \int_1^x \int_0^x \Phi_f \Phi_b dx dx \end{aligned} \right) A_1 \bar{A}_1 A_2 \\
& - 4ice^{i\beta_0 x} \Phi_b \omega_b A_2
\end{aligned}$$

به این ترتیب، با توجه به شرایط حل پذیری فوق و تقریب شکل مدها به صورت شکل مدهای

خطی با شرایط مرزی دو سر مفصل به صورت زیر داریم، $\Phi_f = \Phi_b = \sin(n\pi x)$

$$\begin{aligned}
\Lambda_{1,v} iD_2 A_1 + (\Lambda_{2,v} + \Lambda_{3,v}) A_1 A_2 \bar{A}_2 + \Lambda_{4,v} \bar{A}_1 A_1^2 + \Lambda_{5,v} c \left(\frac{1-e^{i\beta_0}}{\beta_0} \right) \omega_f A_1 + \Lambda_{6,v} \left(\frac{1-e^{-4\beta_0 i}}{\beta_0} \right) i \bar{A}_1 e^{2i\sigma T_2} \\
+ \Lambda_{7,v} (e_v + ie_w) \Omega^2 e^{i\sigma T_2} = 0
\end{aligned} \tag{۲۷-۷}$$

و

$$\Lambda_{1,w} iD_2 A_2 + (\Lambda_{2,w} + \Lambda_{3,w}) A_1 A_2 \bar{A}_1 + \Lambda_{4,w} A_2^2 \bar{A}_2 + \Lambda_{5,w} c \omega_b A_2 = 0 \tag{۲۸-۷}$$

که

$$\Lambda_{1,v} = \left(\begin{aligned} & (-192n^4 \pi^4 - 192\beta_0^4 + 816n^2 \pi^2 \beta_0^2) \omega_f \\ & + (96n^6 \pi^6 + 48\beta_0^6 I_x \Omega - 108n^2 \pi^2 \beta_0^4 - 360n^4 \pi^4 \beta_0^2) I_x \Omega \\ & + (312n^2 \pi^2 \beta_0^4 - 96\beta_0^6 + 312n^4 \pi^4 \beta_0^2 - 96n^6 \pi^6) \Sigma I \omega_f \end{aligned} \right)$$

$$\Lambda_{2,v} = \Lambda_{2,0,v} + i\Lambda_{2,1,v} + \Lambda_{2,2,v}$$

$$\Lambda_{2,0,v} = (-832\beta_0^2 n^4 \pi^4 - 832\beta_0^4 n^2 \pi^2 + 256n^6 \pi^6 + 256\beta_0^6) (n^2 \pi^2) (\omega_f - \omega_b)^2$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_{2,1,v} &= \left(-832\beta_0^2 n^4 \pi^4 - 832\beta_0^4 n^2 \pi^2 + 256n^6 \pi^6 + 256\beta_0^6\right) \left(\frac{3}{4}\beta_0\right) (\omega_f - \omega_b)^2 \\
\Lambda_{2,2,v} &= \left(1128\beta_0^2 n^4 \pi^4 - 288n^6 \pi^6 + 120n^2 \pi^2 \beta_0^4 - 96\beta_0^6\right) (\omega_f - \omega_b)^2 \\
\Lambda_{3,v} &= \left(-8064\beta_0^4 n^2 \pi^2 + 8064\beta_0^2 n^4 \pi^4 - 1536n^6 \pi^6 + 1536\beta_0^6\right) n^4 \pi^4 \\
\Lambda_{4,v} &= \frac{1}{2} \left(-1536n^6 \pi^6 - 8064\beta_0^4 n^2 \pi^2 + 8064\beta_0^2 n^4 \pi^4 + 1536\beta_0^6\right) n^4 \pi^4 \\
\Lambda_{5,v} &= \left(-384\beta_0^2 n^2 \pi^2 + 96n^4 \pi^4\right) \\
\Lambda_{6,v} &= - \left\{ \begin{aligned} &\left(-30\beta_0^4 n^2 \pi^2 - 24n^6 \pi^6 + 126\beta_0^2 n^4 \pi^4\right) \Delta I \omega_f \Omega \\ &+ \left(-57\beta_0^2 n^6 \pi^6 - 108n^2 \pi^2 \beta_0^6 + 447n^4 \pi^4 \beta_0^4 - 12n^8 \pi^8\right) \Delta D \\ &+ \left(-63\beta_0^2 n^4 \pi^4 + 12n^6 \pi^6 + 15\beta_0^4 n^2 \pi^2\right) \Delta I \omega_f^2 \end{aligned} \right\} \\
\Lambda_{7,v} &= \left(-51\beta_0^2 n^2 \pi^2 + 12\beta_0^4 + 12n^4 \pi^4\right) \\
\Lambda_{1,w} &= \left\{ \begin{aligned} &\left(48\beta_0^2 - 192n^2 \pi^2\right) \omega_b \\ &+ \left(24\beta_0^4 - 72\beta_0^2 n^2 \pi^2 - 96n^4 \pi^4\right) \Sigma I \omega_b \\ &+ \left(-12\beta_0^4 + 24\beta_0^2 n^2 \pi^2 + 96n^4 \pi^4\right) I_x \Omega \end{aligned} \right\} \\
\Lambda_{2,w} &= \Lambda_{2,0,w} + i\Lambda_{2,1,w} + \Lambda_{2,2,w} \\
\Lambda_{2,0,w} &= \left(-64\beta_0^4 + 192\beta_0^2 n^2 \pi^2 + 256n^4 \pi^4\right) \left(n^2 \pi^2\right) (\omega_f - \omega_b)^2 \\
\Lambda_{2,1,w} &= \left(-64\beta_0^4 + 192\beta_0^2 n^2 \pi^2 + 256n^4 \pi^4\right) \left(\frac{3}{4}\beta_0\right) (\omega_f - \omega_b)^2 \\
\Lambda_{2,2,w} &= \left(24\beta_0^4 - 24\beta_0^2 n^2 \pi^2 - 288n^4 \pi^4\right) (\omega_f - \omega_b)^2 \\
\Lambda_{3,w} &= \left(-384\pi^4 n^4 \beta_0^4 + 1920\pi^6 n^6 \beta_0^2 - 1536\pi^8 n^8\right) \\
\Lambda_{4,w} &= \frac{1}{2} \left(-384\pi^4 n^4 \beta_0^4 + 1920\pi^6 n^6 \beta_0^2 - 1536\pi^8 n^8\right); \Lambda_{5,w} = 96\pi^2 n^2 \left(\frac{1 - e^{i\beta_0}}{\beta_0}\right) \quad (29-7)
\end{aligned}$$

همچنین، همانطور که از معادلات (27-7) و (29-7) مشاهده می شود، ضریب جمله $e^{2i\sigma T_2}$ که

$\Lambda_{6,v}$ می باشد، اشاره به نا متقارنی در سیستم دارد که با فرکانسی برابر 2Ω نوسان می کند. برای حذف $e^{i\sigma T_0}$ در معادلات قرار می دهیم،

$$A_1(T_2) = A(T_2) e^{i\sigma T_2} \quad (30-7)$$

و در نهایت برای بدست آوردن پاسخ معادلات حاصل، $A(T_2)$ و $A_2(T_2)$ را به صورت قطبی

$$A = \frac{1}{2} a_1(T_2) e^{i\theta(T_2)}, A_2 = \frac{1}{2} a_2(T_2) e^{i\theta(T_2)} \quad (31-7)$$

در معادلات حاصل قرار می دهیم. سپس با جداسازی بخشهای حقیقی و موهومی دو معادله

حاصل، ۴ معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول به شکل زیر بدست می‌آید،

$$\Lambda_{1,v} D_2 a_1 = \Lambda_{5,v} c \omega_f a_1 \left(\frac{\sin(\beta_0)}{\beta_0} \right) + \Lambda_{6,v} \left(\frac{\cos(-2\Theta + 4\beta_0) - \cos(2\Theta)}{\beta_0} \right) a_1 \quad (32-7)$$

$$+ 2\Lambda_{7,v} \Omega^2 (e_v \sin(\Theta) - \cos(\Theta) e_w)$$

$$\Lambda_{1,v} a_1 D_2 \Theta = \Lambda_{5,v} c \omega_f a_1 \left(\frac{1 - \cos(\beta_0)}{\beta_0} \right) + \Lambda_{6,v} a_1 \left(\frac{\sin(2\Theta) + \sin(-2\Theta + 4\beta_0)}{\beta_0} \right) \quad (33-7)$$

$$+ 1/4 \Lambda_{4,v} a_1^3 - \Lambda_{1,v} a_1 \sigma + (\Lambda_{2,v} + \Lambda_{3,v}) a_1 a_2^2 + 2\Lambda_{7,v} \Omega^2 (e_w \sin(\Theta) + e_v \cos(\Theta))$$

$$\Lambda_{1,w} D_2 a_2 = -a_2 \Lambda_{5,w} c \omega_b \left(\frac{\sin(\beta_0)}{\beta_0} \right) \quad (34-7)$$

$$\Lambda_{1,w} D_2 \theta = \Lambda_{5,w} c \omega_b \frac{\cos(\beta_0)}{\beta_0} + 1/4 \Lambda_{4,w} a_2^2 + 1/4 \Lambda_{3,w} a_1^2 + 1/4 \Lambda_{2,w} a_1^2 \quad (35-7)$$

به منظور بررسی پایداری ارتعاشاتی تیر مورد نظر و همچنین استخراج نقاط ثابت تعادلی معادلات مذکور، می‌بایست مشتقات زمانی آنها صفر در نظر گرفته شوند. با انجام این کار و همانطور که از معادلات نشان داده شده مشخص است، a_2 نیز برابر صفر خواهد شد و این بدان معنی است که تنها لنگ زنی همسو تحریک خواهد شد. به این ترتیب، معادلات نهایی برای بررسی پایداری سیستم مورد نظر عبارتند از،

$$\Lambda_{5,v} c \omega_f a_{10} \left(\frac{\sin(\beta_0)}{\beta_0} \right) + \Lambda_{6,v} \left(\frac{\cos(-2\Theta_0 + 4\beta_0) - \cos(2\Theta_0)}{\beta_0} \right) a_{10} \quad (36-7)$$

$$+ 2\Lambda_{7,v} \Omega^2 (e_v \sin(\Theta_0) - e_w \cos(\Theta_0)) = 0$$

$$\Lambda_{5,v} c \omega_f a_{10} \left(\frac{1 - \cos(\beta_0)}{\beta_0} \right) + \Lambda_{6,v} a_{10} \left(\frac{\sin(2\Theta_0) + \sin(-2\Theta_0 + 4\beta_0)}{\beta_0} \right) \quad (37-7)$$

$$+ 1/4 \Lambda_{4,v} a_{10}^3 - \Lambda_{1,v} \sigma a_{10} + 2\Lambda_{7,v} \Omega^2 (e_w \sin(\Theta_0) + e_v \cos(\Theta_0)) = 0$$

۳-۷- تحلیل پایداری

به منظور پایداری حالت پایای معادلات مرتبه اول (۳۲-۷) تا (۳۵-۷) و با فرض $a_2(T_2) = 0$ ،

ماتریس ژاکوبین، J ، طرف راست معادلات (۳۲-۷) و (۳۳-۷)، برابر است با [32].

$$J = \begin{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \frac{3\Lambda_{4,v}}{4\Lambda_{1,v}a_{10}} \mu a_{10}^2 + \frac{\Lambda_{5,v}}{\Lambda_{1,v}a_{10}} \left(\frac{1 - \cos(\beta_0)}{\beta_0} \right) c\omega_f \\ + \frac{\Lambda_{6,v}}{\Lambda_{1,v}a_{10}} \left(\frac{\sin(2\Theta_0) - \sin(-4\beta_0 + 2\Theta_0)}{\beta_0} \right) - \frac{\sigma}{a_{10}} \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\Lambda_{6,v}}{\Lambda_{1,v}} \left(\frac{2\cos(2\Theta_0) - 2\cos(-4\beta_0 + 2\Theta_0)}{\beta_0} \right) \\ + 2\Omega^2 \frac{\Lambda_{7,v}}{\Lambda_{1,v}a_{10}} (e_\xi \cos(\Theta_0) - e_\eta \sin(\Theta_0)) \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{\Lambda_{6,v}}{\Lambda_{1,v}} \left(\frac{-\cos(2\Theta_0) + \cos(4\beta_0 - 2\Theta_0)}{\beta_0} \right) \\ + \frac{\Lambda_{5,v}}{\Lambda_{1,v}} \frac{\sin(\beta_0)}{\beta_0} c\omega_f \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\Lambda_{6,v}}{\Lambda_{1,v}} \left(\frac{2\sin(2\Theta_0) + 2\sin(4\beta_0 - 2\Theta_0)}{\beta_0} \right) a_{10} \\ + 2\Omega^2 \frac{\Lambda_{7,v}}{\Lambda_{1,v}} (e_\eta \cos(\Theta_0) + e_\xi \sin(\Theta_0)) \end{array} \right\} \end{bmatrix} \quad (38-7)$$

$$= \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

و مقادیر ویژه متناظر آن از معادله زیر بدست می‌آیند،

$$|J - \lambda I| = 0 \quad \text{یا} \quad \lambda^2 - (A+D)\lambda + AD - BC = 0 \quad (39-7)$$

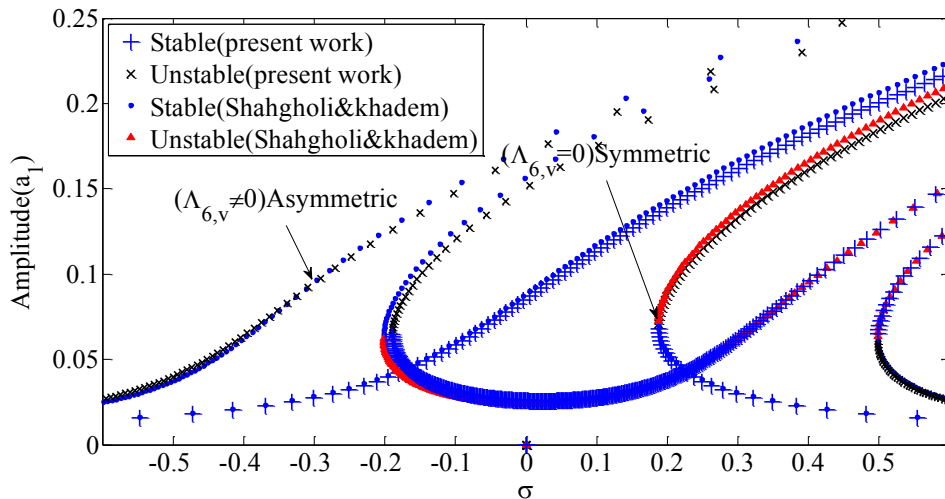
با توجه به معادلات (38-7) و (39-7)، از آنجا که $(A+D) < 0$ ، اگر $AD - BC > 0$ ، حرکت

دینامیکی سیستم در نقاط ثابت تعادلی (a_{10}, Θ_0) پایدار بوده و در غیر اینصورت ناپایدار می‌باشد.

۷-۴- نتایج

۷-۴-۱- اعتبار سنجی نتایج

قبل از اینکه به بررسی نمودارهای فرکانسی مستخرج از این بخش پرداخته شود، ابتدا نتایج بدست آمده در زاویه پیچش $\beta_0 = 0$ با نتایج حاصل از کارهای شاهقلی و خادم [42] مقایسه و صحت گذاری می‌شود. بدین ترتیب، با در نظر گرفتن $\beta_0 = 0$ در معادلات (36-7) و (37-7)، تیر پیچیده شده مذکور، به یک تیر بدون زاویه پیچش و مستقیم تبدیل شده و منحنی‌های پاسخ فرکانسی آنها نیز در مد اول و در حالت متقارن و نامتقارن به تصویر کشیده شده است. به منظور مقایسه، پارامترهای بی بعد شده میرایی و خروج از مرکز همانند [42] یعنی $c = 0.03$ و $e_\eta = e_\xi = 0.0005$ در نظر گرفته شده است. از طرفی، منحنی‌های متناظر بدست آمده توسط کارهای شاهقلی و خادم نیز در شکل (3-7) نشان داده شده‌اند. با مقایسه هر دو نتایج بدست آمده، مشخص است که تغییرات بین آنها بسیار کوچک بوده و همپوشانی نسبتاً خوبی با یکدیگر دارند.



شکل (۳-۷) مقایسه پاسخ فرکانسی یک تیر مستقیم کش ناپذیر در کار حاضر ($\beta_0 = 0$) و کار کار شاهقلی و خادم [۴۲] در مد اول.

۷-۴-۲- بحث و نتیجه گیری

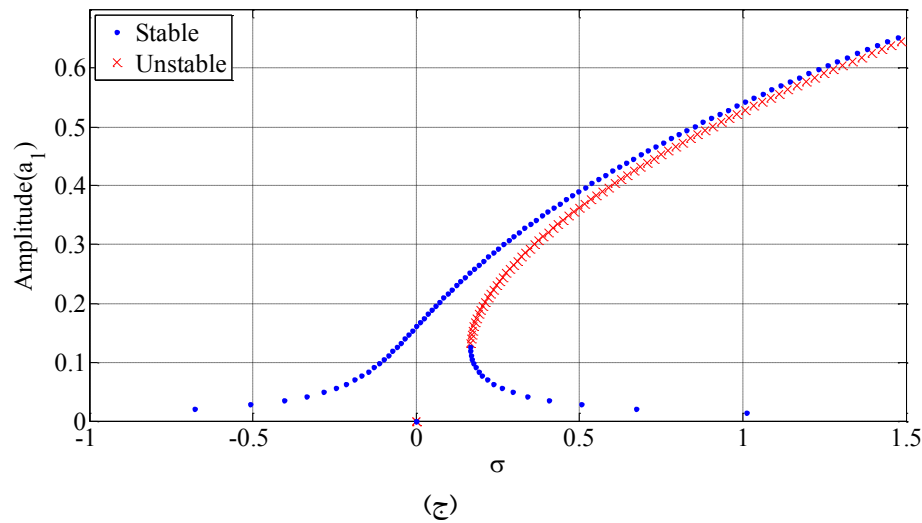
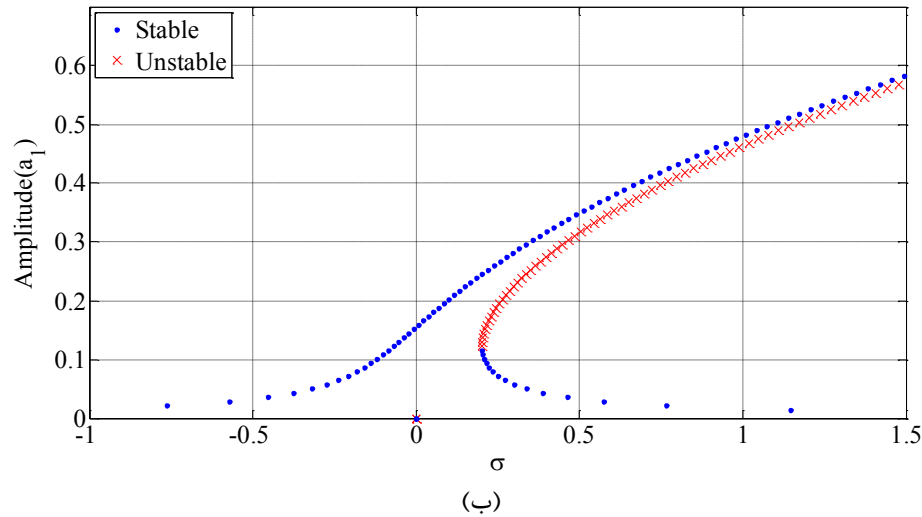
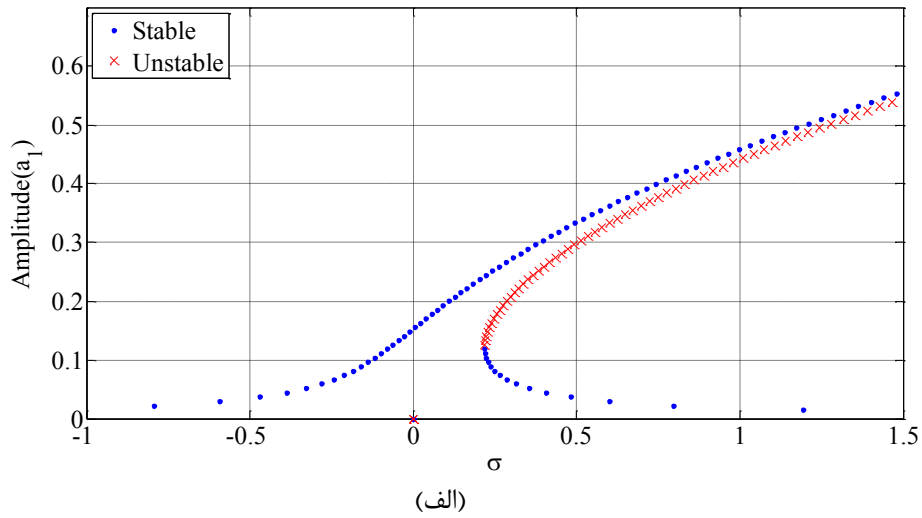
شکل (۴-۷) تا شکل (۷-۷) منحنی‌های پاسخ فرکانسی غیر خطی را پیرامون نقاط ثابت تعادلی سیستم در مدهای اول و دوم و زوایای پیش مختلف برای حالت متقارن و نامتقارن نشان می‌دهد. همانند فصل‌های قبلی، فرض شده است که نابالانسی‌ها در هر دو جهات اصلی تیر یکسان بوده و برابرند با، $e_\eta = e_\xi = 0.05$. همانطور که مشاهده می‌شود، از آنجا که منحنی‌ها در هر دو مد و حالات متقارن و نامتقارن به سمت راست خم شده‌اند، تأثیر پارامترهای غیرخطی از نوع سخت شونده می‌باشد. با توجه به شکل (۴-۷) و شکل (۶-۷) در حالت متقارن ($\Lambda_{6,v} = 0$)، تیر تنها دارای یک منبع تحریک بوده که همان نابالانسی با فرکانس Ω می‌باشد و در نتیجه منحنی پاسخ فرکانسی دارای یک قله بوده و تنها یک پرش از حل ناپایدار به حل پایدار رخ می‌دهد. همچنین، در حالت متقارن دیده می‌شود که برای برخی از مقادیر σ ، سیستم تنها دارای یک پاسخ پایدار بوده در حالی که برای برخی دیگر، سیستم دارای سه پاسخ بوده که دوتای آنها پایدار و دیگری ناپایدار است. در نتیجه، در این حالات همواره پدیده پرش و دو شاخگی اتفاق می‌افتد. در این حالت، نیز سیستم در نقطه تغییر حالت پایدار و ناپایدار دارای دوشاخگی از نوع زینی^۱ می‌باشد به صورتیکه در فرکانس نقاط تغییر حالت پایای سیستم از پایدار به

¹ saddle-node bifurcation

ناپایدار یعنی R_1 ، سیستم تمایل به پرش از پاسخ ناپایدار سیستم در saddle-node bifurcation واقع در نقطه R_1 به پاسخ پایدار در R'_1 دارد. این درحالی است که در حالتی که نامتقارنی در سیستم وجود دارد ($\Lambda_{6,v} \neq 0$)، علاوه بر منبع تحریک ناشی از نابالانسی با فرکانس Ω ، یک منبع تحریک دیگر با فرکانس 2Ω در سیستم بوجود می‌آید که ناشی از وجود نامتقارنی در سیستم می‌باشد و به عنوان تحریک پارامتریک در سیستم شناخته می‌شود. از این‌رو، منحنی‌های پاسخ فرکانسی دارای دو قله می‌باشند. این مطلب در شکل (۵-۷) و شکل (۷-۷) برای تیرهای پیچیده شده کش ناپذیر نامتقارن محوری نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، در برخی از مقادیر σ ، سیستم دارای پنج پاسخ، در برخی دیگر، یک پاسخ و در برخی دیگر دارای سه پاسخ بوده که شامل ترکیبی از پاسخهای پایدار و ناپایدار می‌باشند. بسیار واضح است که همواره پدیده دو شاخگی اتفاق می‌افتد که به شکل نمودارهای دوشاخگی از نوع زینی در فرکانسهای نقاط تغییر حالت پایای سیستم از پایدار به ناپایدار یعنی R_1 و R_2 می‌باشد، بگونه‌ای که سیستم تمایل به پرش از پاسخ ناپایدار سیستم در saddle-node bifurcation واقع در نقطه R_1 به پاسخ پایدار در R'_1 دارد. سپس در فرکانسهای متناظر با فاصله بین $R'_1 - R_2$ که متعلق به پاسخهای پایدار سیستم بوده نوسان کرده و سپس از نقطه ناپایدار saddle-node bifurcation واقع در R_2 پرش دوم داشته و به پاسخ پایدار سیستم در R'_2 می‌رود. همچنین، در هر دو مد نامتقارن سیستم، همانطور که مشاهده می‌شود، در زوایای پیچش کوچکتر، سیستم دارای پهنای وسیعتری از پاسخهای صفر و پهنای کوچکتری از پاسخهای غیر صفر خواهد بود و اگر سیستم در فرکانسی در فاصله $R_1 - R_2$ عمل کند، با دامنه‌ای برابر با دامنه پاسخ غیر صفر نوسان می‌کند.

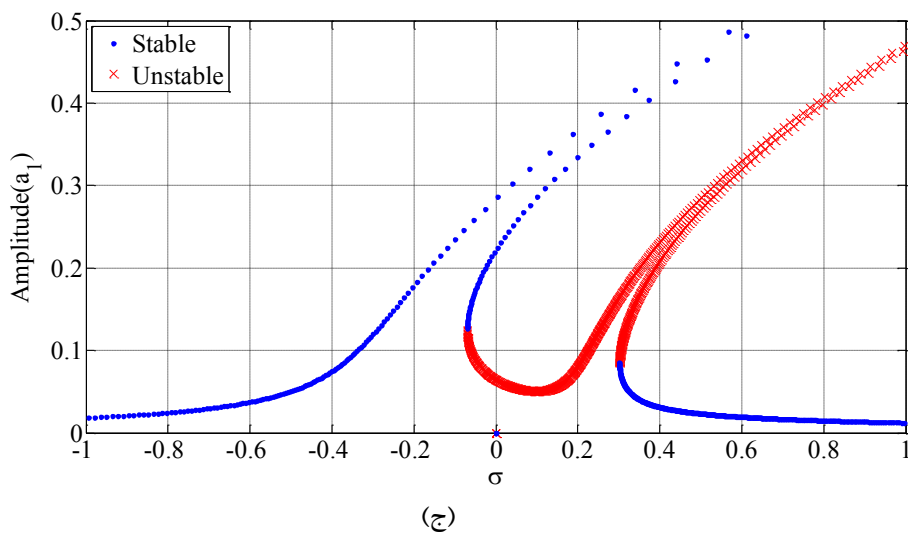
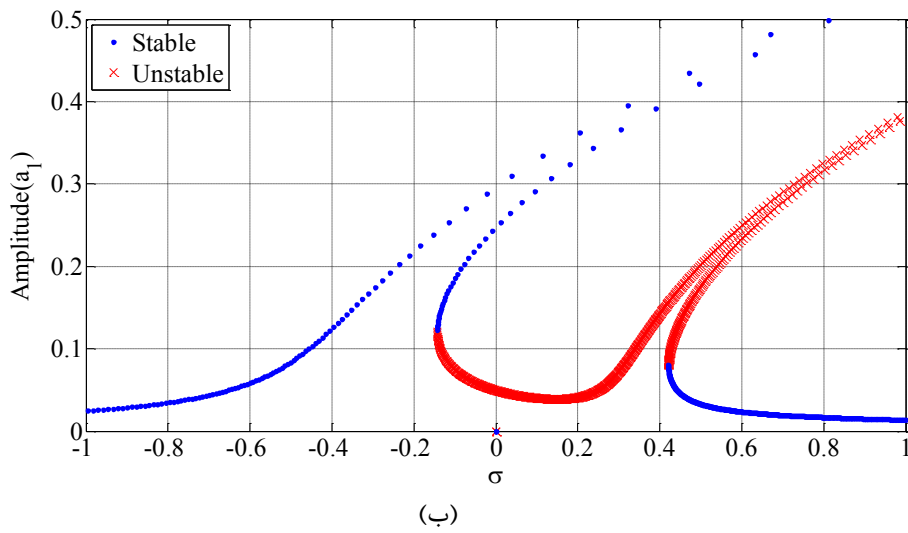
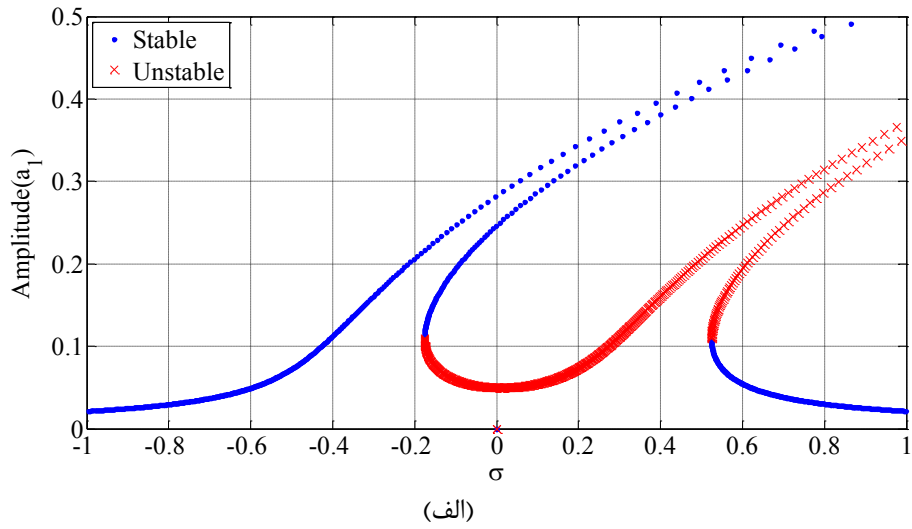
از طرفی، مشاهده می‌شود در مد اول و دوم، با افزایش زاویه پیچش، β_0 ، تأثیرات سخت شوندگی کاهش یافته و در نتیجه مشاهده می‌شود که دامنه نوسانات تیر پیچیده شده کش ناپذیر در فرکانسهای متناظر به تدریج افزایش می‌یابد و این می‌رساند که وجود زاویه پیچش در تیرهای پیچیده شده کش ناپذیر نسبت به تیرهای کش پذیر تأثیر معکوسی را با خود به همراه داشته و نمی‌تواند به میرا

شدن سیستم کمک کند.



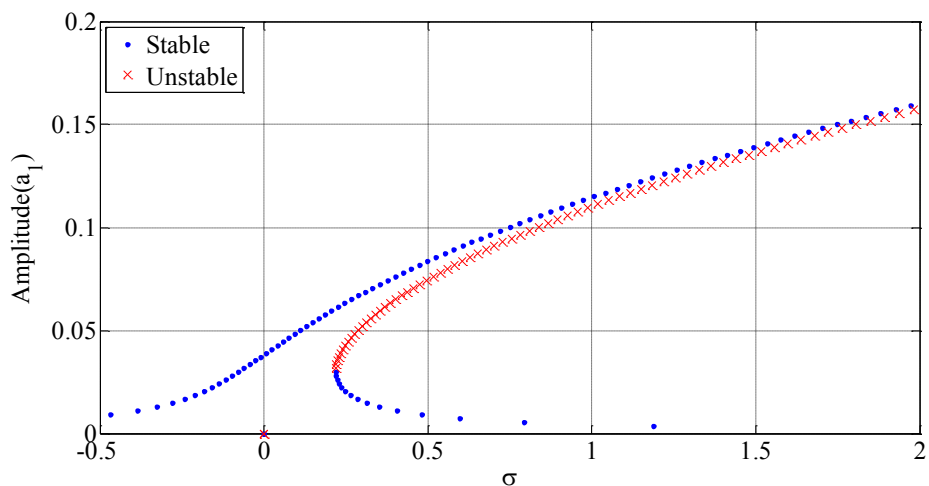
شکل (۴-۷) منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده دوار دو سر مفصل متقارن کش ناپذیر در مد اول و زاویه

پیچش الف) $\beta_0 = 0$ ب) $\beta_0 = 30^\circ$ و ج) $\beta_0 = 60^\circ$

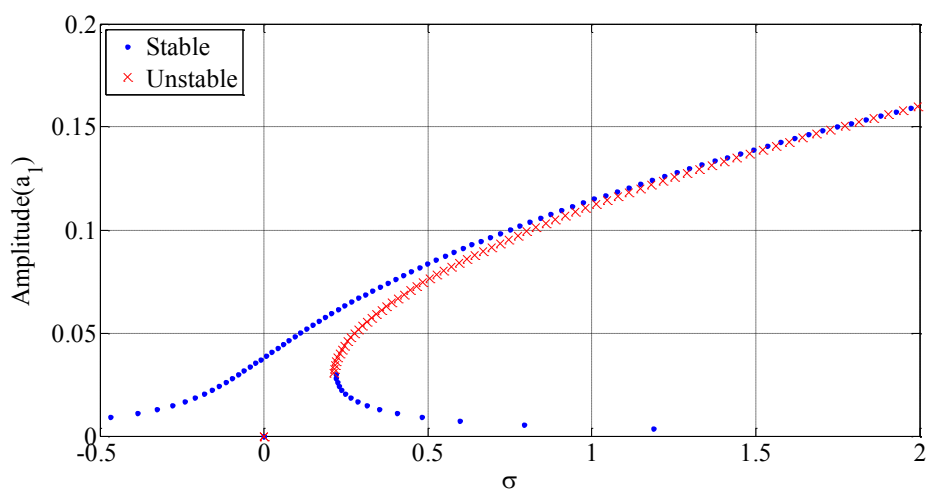


شکل (۵-۷) منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده دوار دو سر مفصل نامتقارن کش ناپذیر در مد اول و زاویه

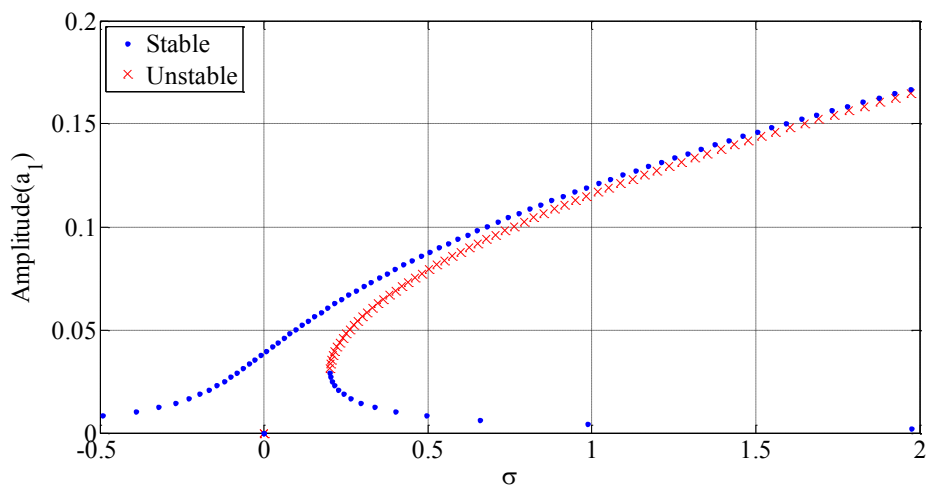
پیچش الف) $\beta_0 = 0$ ب) $\beta_0 = 30^\circ$ و ج) $\beta_0 = 60^\circ$



(الف)



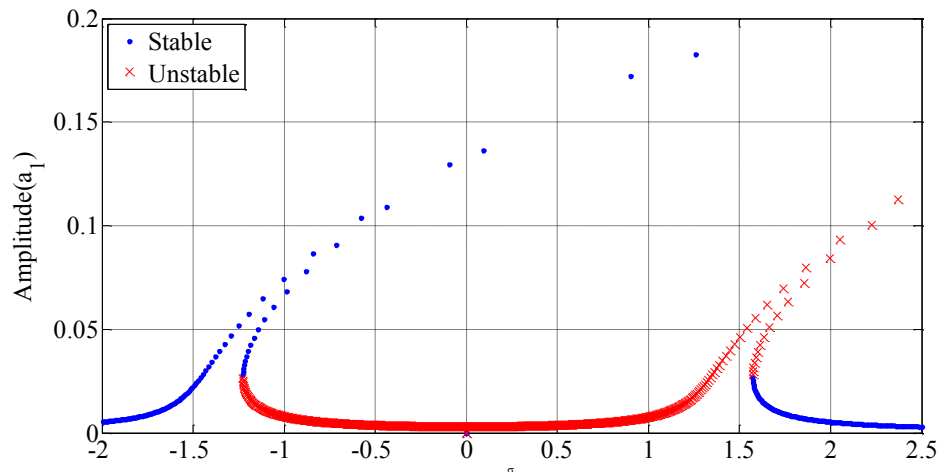
(ب)



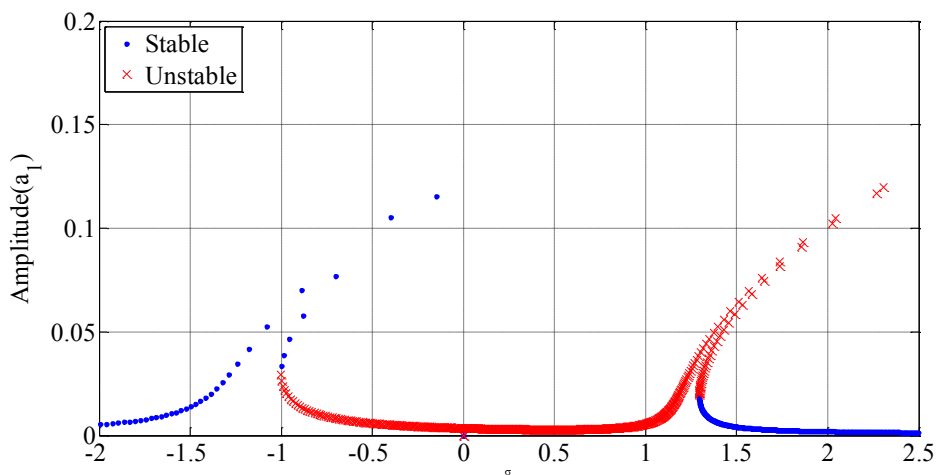
(ج)

شکل (۶-۷) منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده دوار دو سر مفصل متقارن کش ناپذیر در مد دوم و زاویه

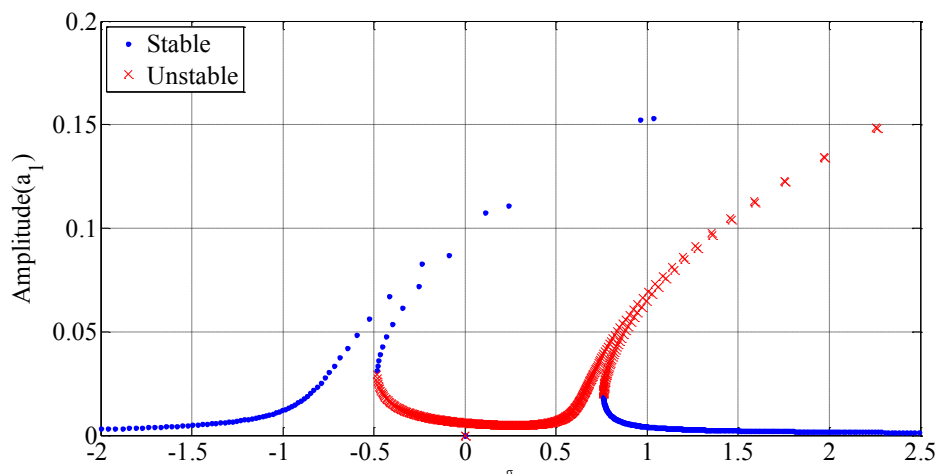
پیچش الف) $\beta_0 = 0$ ب) $\beta_0 = 30^\circ$ و ج) $\beta_0 = 60^\circ$



(الف)



(ب)



(ج)

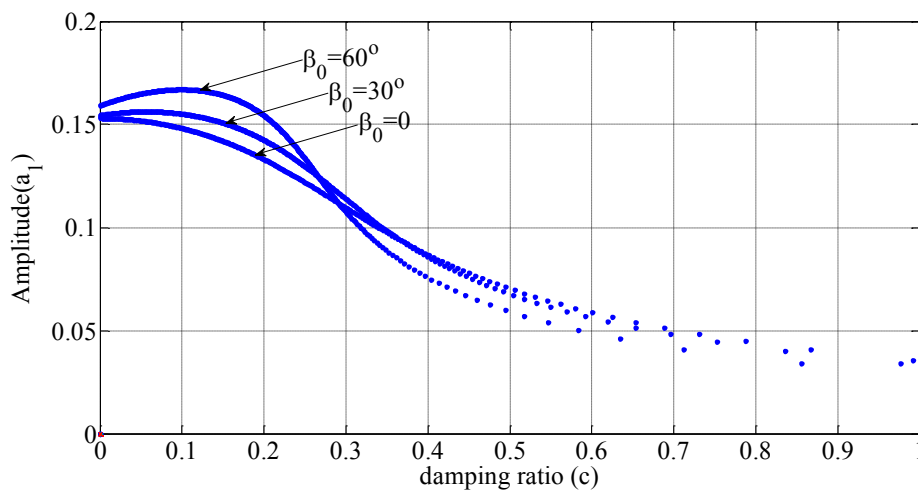
شکل (۷-۷) منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده دوار دو سر مفصل نامتقارن کش ناپذیر در مد دوم و زاویه

پیچش الف) $\beta_0 = 0$ ب) $\beta_0 = 30^\circ$ و ج) $\beta_0 = 60^\circ$

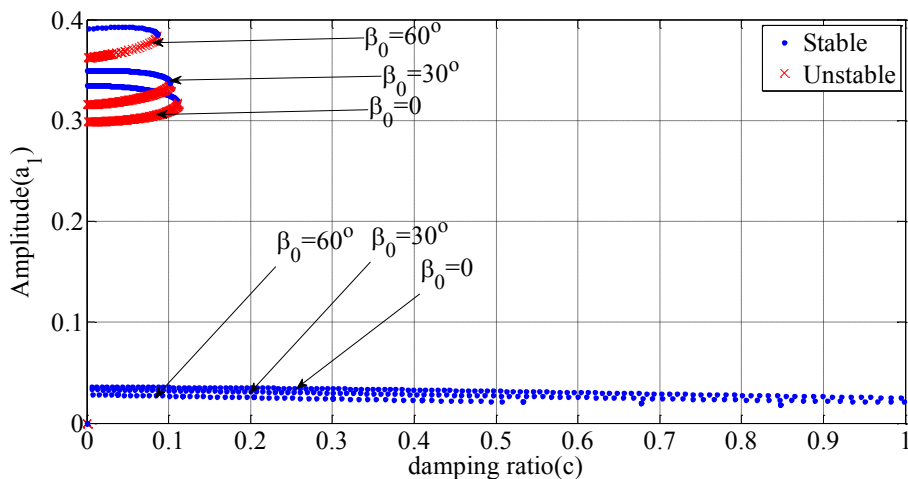
شکل (۸-۷) منحنی دامنه بر حسب نسبت میرایی تیر پیچیده شده محوری کش ناپذیر را در

زوایای پیچش مختلف و فرکانسهای طبیعی متناظر با $\sigma=0$ در مد اول نشان می‌دهد. با توجه به این شکل، می‌توان دید که در نسبتهای میرایی کوچکتر، برای مثال، $c < 0.3$ ، افزایش زاویه پیچش باعث افزایش نسبی دامنه نوسانات شده در حالی که برای $c > 0.3$ ، تغییر زاویه پیچش تأثیر محسوسی روی دامنه نداشته و با افزایش ضریب میرایی، دامنه به تدریج کاهش می‌یابد.

علاوه بر این، سیستم تنها دارای یک پاسخ پایدار در همه زوایای پیچش و ضرایب میرایی بوده که در نتیجه آن، هیچگونه دوشاخگی در سیستم وجود نخواهد داشت. اما در فرکانسهایی غیر از فرکانس رزونانس مثلاً $\sigma=0.05$ با توجه به شکل (۷-۹)، سه پاسخ وجود دارد که شامل یک پاسخ ناپایدار و دو پاسخ پایدار می‌باشد که در این حالت پدیده دوشاخگی اتفاق می‌افتد. همچنین، همانند حالت قبل مشاهده می‌شود که در مقادیر کوچکتر نسبت میرایی، هرچه زاویه پیچش بزرگتر باشد، دامنه نوسانات پایدار غیر صفر سیستم بزرگتر بوده در حالی که در نسبتهای میرایی بزرگتر، تغییر زاویه پیچش، تأثیری عمده‌ای روی دامنه نوسانات نخواهد گذاشت.

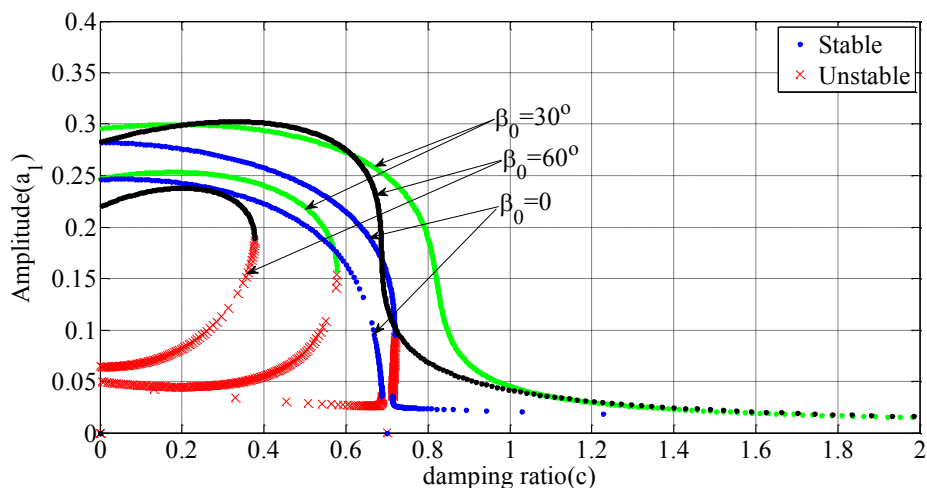


شکل (۷-۸) منحنی دامنه-نسبت میرایی تیر پیچیده شده دو سر مفصل کش ناپذیر متقارن در $\sigma=0$.

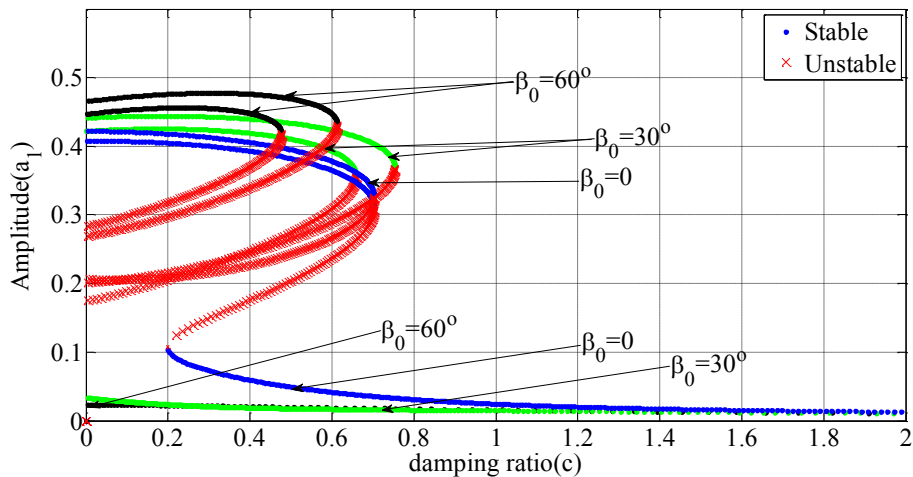


شکل (۷-۹) منحنی دامنه-نسبت میرایی تیر پیچیده شده دو سر مفصل کش ناپذیر متقارن در $\sigma=0.05$.

در حالتی که تیر پیچیده شده، نامتقارن ($\Lambda_2 \neq 0$) می‌باشد، مشابه با حالت متقارن، برای $\sigma=0$ و مد اول، با افزایش ضریب میرایی، دامنه نوسانات در همه زوایای پیچش کاهش می‌یابد (شکل ۷-۱۰). در این حالت، سه پاسخ در سیستم وجود دارد که دو پاسخ آن پایدار و دیگری ناپایدار است. در فرکانسهایی غیر از فرکانس رزونانس، برای نمونه در $\sigma=0.05$ ، همانطور که در شکل (۷-۱۱) نشان داده شده است، کاملاً مشابه با حالت تیرهای لاغر فصل دوم، ولی پنج پاسخ وجود داشته بگونه‌ای که سه پاسخ آنها پایدار و دو پاسخ دیگر ناپایدار می‌باشد. در نتیجه پدیده دوشاخگی اتفاق می‌افتد.

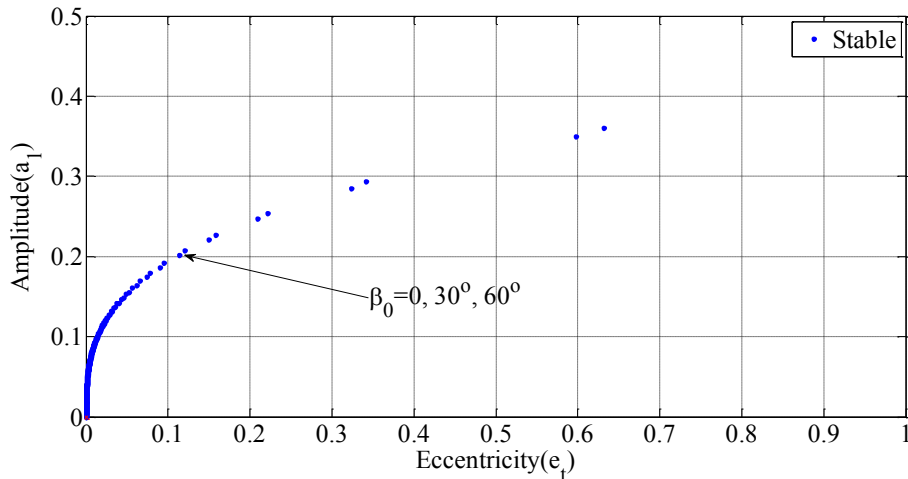


شکل (۷-۱۰) منحنی دامنه-نسبت میرایی تیر پیچیده شده دو سر مفصل کش ناپذیر نامتقارن در $\sigma=0$.

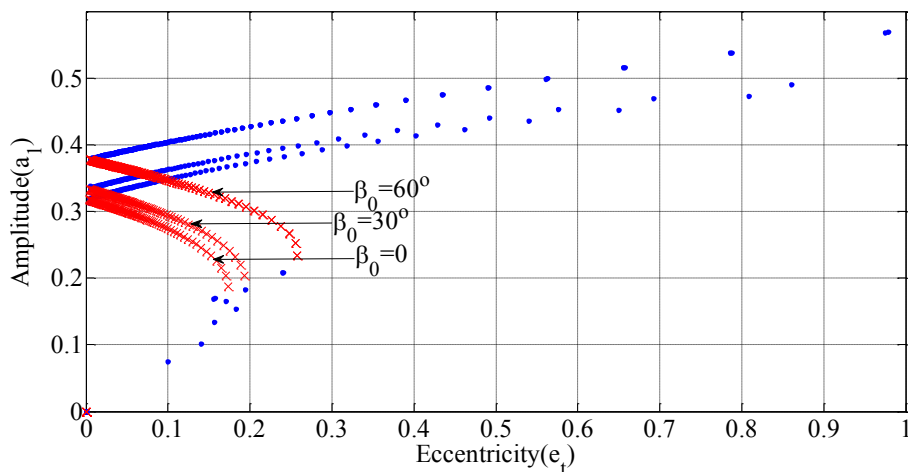


شکل (۷-۱۱) منحنی دامنه-نسبت میرایی تیر پیچیده شده دو سر مفصل کش ناپذیر نامتقارن در $\sigma=0.05$.

شکل (۷-۱۲) تا شکل (۷-۱۵) دامنه نوسانات پایای تیر پیچیده شده متقارن کش ناپذیر را برحسب خروج از مرکز تیر در فرکانس طبیعی رزونانس متناظر با $\sigma=0$ و $\sigma=0.05$ نشان می‌دهد. همانطور که در شکل (۷-۱۲) نشان داده شده است، حرکت نوسانی تیر پیچیده شده دوار مذکور در کل مقادیر خروج از مرکز تیر و زوایای پیچش مختلف آن، پایدار بوده و در نتیجه هیچگونه دوشاخگی اتفاق نمی‌افتد. همچنین، همانند تیرهایی بدون خاصیت کش‌پذیری، زاویه پیچش تأثیر ناچیزی روی دامنه نوسانات سیستم دارد. اما، در فرکانسهایی غیر از فرکانس رزونانس (برای نمونه، $\sigma=0.05$)، همانطور که در شکل (۷-۱۳) نشان داده شده است، سیستم در مقادیر کوچک خروج از مرکز، دارای دو پاسخ پایدار و یک پاسخ ناپایدار و در مقادیر بزرگتر خروج از مرکز تیر، تنها دارای یک پاسخ پایدار می‌باشند. در نتیجه، در این حالت، پدیده پرش و دوشاخگی در سیستم اتفاق می‌افتد. لازم به ذکر است که در مقادیر کوچکتر خروج از مرکز، زمانی که زاویه پیچش افزایش می‌یابد، به ازای یک مقدار مشخص از خروج از مرکز، دامنه نوسانات اندکی کاهش می‌یابد، در حالی که برای مقادیر بزرگتر خروج از مرکز وضعیت برعکس می‌باشد.



شکل (۷-۱۲) منحنی دامنه-خروج از مرکز تیر پیچیده شده دو سر مفصل کش ناپذیر متقارن در $\sigma=0$.

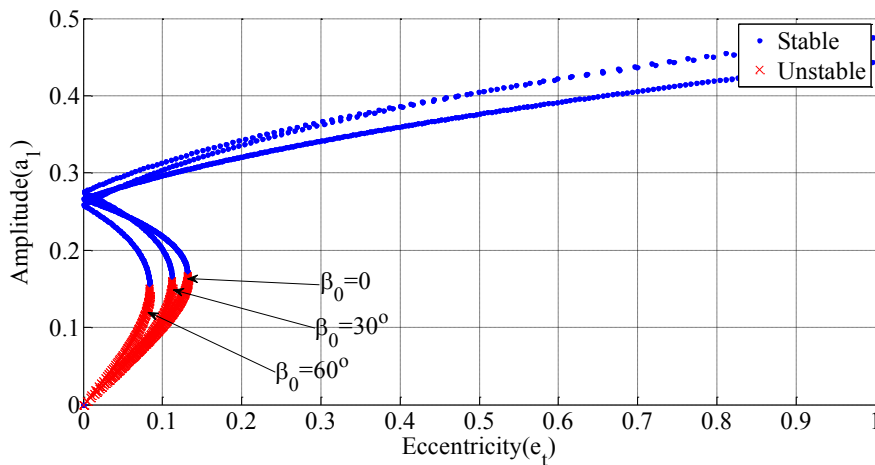


شکل (۷-۱۳) منحنی دامنه-خروج از مرکز تیر پیچیده شده دو سر مفصل کش ناپذیر متقارن در $\sigma=0.05$.

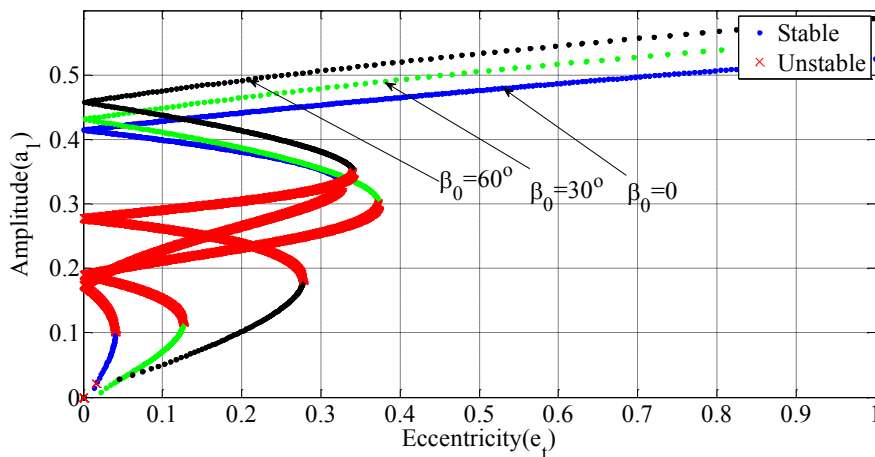
شکل (۷-۱۴) تا شکل (۷-۱۵) تأثیر زاویه پیش β_0 را روی منحنی دامنه-خروج از مرکز تیر

پیچیده شده دوار نامتقارن کش ناپذیر در نزدیکی فرکانسهای متناظر با $\sigma=0$ نشان می‌دهد. در این حالت، به ازای برخی از مقادیر مشخص خروج از مرکز تیر در $\sigma=0$ ، تنها دو بخش وجود دارد. بخش اول، در مقادیر خروج از مرکز کوچکتر بوده که شامل سه حل بوده با دو پاسخ پایدار و یک پاسخ ناپایدار، در حالی که در بخش دوم و در مقادیر خروج از مرکز بزرگتر، به ازای کلیه زوایای پیش، تنها یک پاسخ پایدار وجود دارد. در نتیجه پدیده دو شاخگی اتفاق می‌افتد. همچنین، با افزایش زاویه پیش، در یک مقدار خروج از مرکز مشخص، دامنه پایدار نوسانات سیستم نیز افزایش می‌یابد و پرش در مقادیر خروج از مرکز کوچکتری نیز اتفاق می‌افتد. در فرکانسهایی غیر از فرکانس رزونانس، برای

نمونه در فرکانس $\sigma=0.05$ ، به ازای مقادیر کوچکتر خروج از مرکز، سیستم دارای پنج پاسخ بوده که دو پاسخ پایدار و سه پاسخ ناپایدار را در بر خواهند داشت. در نتیجه، در این حالت، دو پرش در سیستم رخ داده و پدیده دو شاخگی نیز اتفاق می‌افتد. همچنین، همانند حالات قبل، در یک مقدار خروج از مرکز مشخص، دامنه ناحیه پایدار با افزایش زاویه پیچش افزایش می‌یابد که می‌توان گفت در مورد تیرهای کش ناپذیر برخلاف تیرهای کش‌پذیر، وجود زاویه پیچش نمی‌تواند به میرا شدن دامنه نوسانات تیر پیچیده شده کمک شایانی کند.



شکل (۷-۱۴) منحنی دامنه-خروج از مرکز تیر پیچیده شده دو سر مفصل کش ناپذیر نامتقارن در $\sigma=0$.



شکل (۷-۱۵) منحنی دامنه-خروج از مرکز تیر پیچیده شده دو سر مفصل کش ناپذیر نامتقارن در $\sigma=0.05$.

فصل هشتم

۸- ارتعاشات تیر پیچیده شده دوار کش ناپذیر با شرایط مرزی یک سر گیردار

۸-۱- معادلات حرکت

همانطور که گفته شد، برای تیرهایی با یک انتهای ثابت یا مفصل شده و انتهای دیگر به صورت آزاد یا لغزشی با فرض نبود هیچ باری در امتداد محور طولی تیر، فرض می‌شود تیر دارای خاصیت کش ناپذیری می‌باشد. از این‌رو، با در نظر گرفتن معادلات حاکم در فصل ۷ و با توجه به شرایط مرزی تیر یک سر گیردار و همچنین، تقریب شکل مدها به صورت شکل مدهای خطی با شرایط مرزی یک سر گیردار به صورت زیر،

$$\Phi_f = \Phi_b = \cos \gamma_n \xi - \cosh \gamma_n \xi - \frac{\cos \gamma_n + \cosh \gamma_n}{\sin \gamma_n + \sinh \gamma_n} \sin \gamma_n \xi - \sinh \gamma_n \xi$$

$$\gamma_n \approx \frac{2n-1}{2} \pi$$

معادلات غیر خطی حاکم بر تیر مذکور برابر است با،

$$\begin{aligned} & (\Lambda_{1,v} + i\Lambda_{2,v})D_2A_1 + \Lambda_{6,v}\bar{A}_1A_1^2 + (\Lambda_{5,v} + 2\Lambda_{6,v})\bar{A}_2A_2A_1 + (i\Lambda_{3,v} + \Lambda_{4,v})\bar{A}_1e^{2i\sigma T_2} \\ & - iCA_1\omega_f\Pi_{(9,\beta_0,n)} + (e_\eta + ie_\xi)\Omega^2e^{i\sigma T_2} = 0 \end{aligned} \quad (1-8)$$

$$(\Lambda_{1,w} + i\Lambda_{2,w})D_2A_2 + (\Lambda_{5,v} + 2\Lambda_{6,v})A_1A_2\bar{A}_1 + \Lambda_{6,v}A_2^2\bar{A}_2 - iCA_2\omega_b\Pi_{(9,\beta_0,n)} = 0 \quad (2-8)$$

که

$$\begin{aligned} \Lambda_{1,v} &= \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{3}{2} I_{xx} \Omega - 4 \Sigma I \omega_f \right) \beta_0 \Pi_{(1,\beta_0,n)} \\ \Lambda_{2,v} &= \frac{1}{2\pi^2} \left(\beta_0^2 \Pi_{(3,\beta_0,n)} - 2 \Pi_{(5,\beta_0,n)} \right) I_{xx} \Omega + \frac{2}{\pi^2} \left(\Pi_{(5,\beta_0,n)} + \beta_0^2 \Pi_{(3,\beta_0,n)} \right) \Sigma I \omega_f - 2 \Pi_{(3,\beta_0,n)} \omega_f \\ \Lambda_{3,v} &= \frac{2 \Delta I \omega_f \Omega}{\pi^2} \left[-\frac{4}{\pi^2} \beta_0 \Pi_{(11,\beta_0,n)}^C - \frac{3}{\pi^2} \beta_0^2 \Pi_{(8,\beta_0,n)}^S + \Pi_{(12,\beta_0,n)}^S \right] \\ &+ \frac{\Delta I \omega_f^2}{\pi^2} \left[4 \beta_0 \Pi_{(11,\beta_0,n)}^C + 3 \beta_0^2 \Pi_{(8,\beta_0,n)}^S - \Pi_{(12,\beta_0,n)}^S \right] \\ &+ \frac{\Delta D}{\pi^4} \left[-\Pi_{(10,\beta_0,n)}^S + 8 \beta_0 \Pi_{(14,\beta_0,n)}^C - 22 \beta_0^3 \Pi_{(11,\beta_0,n)}^C - 8 \beta_0^4 \Pi_{(8,\beta_0,n)}^S + 21 \beta_0^2 \Pi_{(12,\beta_0,n)}^S \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_{4,v} &= \frac{2\Delta I \omega_f \Omega}{\pi^2} \left[\frac{4}{\pi^2} \beta_0 \Pi_{(11,\beta_0,n)}^S - \frac{3}{\pi^2} \beta_0^2 \Pi_{(8,\beta_0,n)}^C + \Pi_{(12,\beta_0,n)}^C \right] \\
&+ \frac{\Delta I \omega_f^2}{\pi^2} \left[-4\beta_0 \Pi_{(11,\beta_0,n)}^S + 3\beta_0^2 \Pi_{(8,\beta_0,n)}^C - \Pi_{(12,\beta_0,n)}^C \right] \\
&+ \frac{\Delta D}{\pi^4} \left[-\Pi_{(10,\beta_0,n)}^C - 8\beta_0 \Pi_{(14,\beta_0,n)}^S + 22\beta_0^3 \Pi_{(11,\beta_0,n)}^S - 8\beta_0^4 \Pi_{(8,\beta_0,n)}^C + 21\beta_0^2 \Pi_{(12,\beta_0,n)}^C \right], \\
\Lambda_{5,v} &= (\omega_f - \omega_b)^2 \left(\beta_0^2 \int_0^1 \phi \phi'' \int_1^\xi \int_0^\xi \phi^2 dx dx dx + \int_0^1 \phi \phi'' \int_1^\xi \int_0^\xi \phi'^2 dx dx dx \right. \\
&+ i\beta_0 \left(\int_0^1 \phi \phi' \int_1^\xi \int_0^\xi \phi'^2 dx dx dx + \int_0^1 \phi^2 \int_0^\xi \phi'^2 dx dx \right) + i\beta_0^3 \left(\int_0^1 \phi^2 \int_0^\xi \phi^2 dx dx + \int_0^1 \phi \phi' \int_1^\xi \int_0^\xi \phi^2 dx dx dx \right) \Big), \\
\Lambda_{6,v} &= \frac{2}{\pi^4} \left(-4 \int_0^1 \phi \phi''' \phi' \phi'' dx - \int_0^1 \phi \phi^{(4)} \phi'^2 dx - \int_0^1 \phi \phi''^3 dx \right. \\
&- i\beta_0 \left(3 \int_0^1 \phi''' \phi'' \phi^2 dx + \int_0^1 \phi \phi'^2 \phi''' dx + \int_0^1 \phi \phi''^2 \phi' dx + \int_0^1 \phi^{(4)} \phi' \phi^2 dx \right) \\
&- \beta_0^2 \left(4 \int_0^1 \phi \phi'' \phi'^2 dx + \int_0^1 \phi''' \phi' \phi^2 dx + \int_0^1 \phi^2 \phi''^2 dx \right) \\
&- i\beta_0^3 \left(\int_0^1 \phi \phi'^3 dx + 4 \int_0^1 \phi' \phi'' \phi^2 dx + \int_0^1 \phi^3 \phi''' dx \right) \Big) \tag{۳-۸}
\end{aligned}$$

$$\Lambda_{1,w} = \frac{3}{2\pi^2} I_{xx} \beta_0 \Pi_{(1,\beta_0,n)} \Omega - 4\Sigma I \beta_0 \Pi_{(1,\beta_0,n)} \omega_b$$

$$\Lambda_{2,w} = \frac{1}{2\pi^2} \left(\beta_0^2 \Pi_{(3,\beta_0,n)} - 2\Pi_{(5,\beta_0,n)} \right) I_{xx} \Omega + \frac{1}{\pi^2} \left(-2\beta_0^2 \Pi_{(3,\beta_0,n)} \omega_b + 2\Pi_{(5,\beta_0,n)} \right) \Sigma I \omega_b - 2\Pi_{(3,\beta_0,n)} \omega_b$$

$$e_\eta = \int_0^1 \Phi_{f|b}(x) e_\eta(x) dx, e_\xi = \int_0^1 \Phi_{f|b}(x) e_\xi(x) dx$$

همچنین، همانطور که از معادلات (۱-۸) و (۳-۸) مشاهده می‌شود، ضریب جمله $e^{2i\sigma T_2}$ که

می‌باشد، اشاره به نا متقارنی در سیستم دارد. برای حذف $e^{i\sigma T_0}$ در معادلات قرار

می‌دهیم،

$$A_1(T_2) = A(T_2) e^{i\sigma T_2} \tag{۴-۸}$$

و در نهایت برای بدست آوردن پاسخ معادلات حاصل، $A(T_2)$ و $A_2(T_2)$ را به صورت قطبی

$$A = \frac{1}{2} a_1(T_2) e^{i\Theta(T_2)}, A_2 = \frac{1}{2} a_2(T_2) e^{i\Theta(T_2)} \tag{۵-۸}$$

در معادلات حاصل قرار می‌دهیم. سپس با جداسازی بخشهای حقیقی و موهومی دو معادله

حاصل، چهار معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول به شکل زیر بدست می‌آید،

$$\begin{aligned}
4(\Lambda_{1,v}^2 + \Lambda_{2,v}^2) D_2 a_1 &= 4 \left[(\Lambda_{2,v} \Lambda_{4,v} - \Lambda_{1,v} \Lambda_{3,v}) \sin(2\Theta) - (\Lambda_{1,v} \Lambda_{4,v} + \Lambda_{2,v} \Lambda_{3,v}) \cos(2\Theta) \right] a_1 \\
&+ 8\Omega^2 \left[(\Lambda_{2,v} e_\eta - \Lambda_{1,v} e_\xi) \sin(\Theta) - (\Lambda_{1,v} e_\eta + \Lambda_{2,v} e_\xi) \cos(\Theta) \right] - \Lambda_{1,v} \Lambda_{6,v} a_1^3 \\
&- (\Lambda_{1,v} \Lambda_{5,v} - 2\Lambda_{6,v} \Lambda_{1,v}) a_1 a_2^2 + 8c a_1 \omega_f \left(\Lambda_{2,v} \Pi_{(9,\beta_0,n)}^C - \Lambda_{1,v} \Pi_{(9,\beta_0,n)}^S \right) \tag{۶-۸}
\end{aligned}$$

$$4(\Lambda_{1,v}^2 + \Lambda_{2,v}^2)a_1 D_2 \Theta = 4[(-\Lambda_{1,v}\Lambda_{3,v} + \Lambda_{4,v}\Lambda_{2,v})\cos(2\Theta) + (\Lambda_{4,v}\Lambda_{1,v} + \Lambda_{3,v}\Lambda_{2,v})\sin(2\Theta)]a_1$$

$$+ (\Lambda_{6,v}\Lambda_{2,v})a_1^3 + (\Lambda_{6,v}\Lambda_{2,v} + \Lambda_{5,v}\Lambda_{1,v})a_1 a_2^2 - 4(\Lambda_{1,v}^2 + \Lambda_{2,v}^2)a_1 \sigma$$

$$+ 8\Omega^2 [(\Lambda_{2,v}e_\xi + e_\eta \Lambda_{1,v})\sin(\Theta) + (e_\eta \Lambda_{2,v} - e_\xi \Lambda_{1,v})\cos(\Theta)]$$
(۷-۸)

$$+ 8ca_1 \omega_f (\Lambda_{2,v}\Pi_{(9,\beta_0,n)}^S + \Lambda_{1,v}\Pi_{(9,\beta_0,n)}^C)$$

$$4(\Lambda_{2,w}^2 + \Lambda_{1,w}^2)D_2 a_2 = -(\Lambda_{1,w}\Lambda_{5,v} + 2\Lambda_{1,w}\Lambda_{6,v})a_2 a_1^2 - (\Lambda_{1,w}\Lambda_{6,v})a_2^3$$
(۸-۸)

$$+ 8ca_2 \omega_b (\Lambda_{2,w}\Pi_{(9,\beta_0,n)}^C - \Lambda_{1,w}\Pi_{(9,\beta_0,n)}^S)$$

$$4(\Lambda_{2,w}^2 + \Lambda_{1,w}^2)D_2 \theta = + (2\Lambda_{6,v}\Lambda_{2,w} + \Lambda_{2,w}\Lambda_{5,v})a_1^2 + (\Lambda_{6,v}\Lambda_{2,w})a_2^2$$
(۹-۸)

$$+ 8ca_2 \omega_b (\Lambda_{1,w}\Pi_{(9,\beta_0,n)}^C + \Lambda_{2,w}\Pi_{(9,\beta_0,n)}^S)$$

به منظور بررسی پایداری ارتعاشاتی تیر مورد نظر و همچنین استخراج نقاط ثابت تعادلی

معادلات مذکور، می‌بایست مشتقات زمانی آنها صفر در نظر گرفته شوند. با انجام این کار و همانطور که

از معادلات نشان داده شده مشخص است، a_{12} نیز برابر صفر خواهد شد و این بدان معنی است که تنها

لنگ زنی همسو در ارتعاشات عرضی تحریک خواهد شد. به این ترتیب، معادلات نهایی برای بررسی

پایداری سیستم مورد نظر عبارتند از،

$$4[(\Lambda_{2,v}\Lambda_{4,v} - \Lambda_{1,v}\Lambda_{3,v})\sin(2\Theta_0) - (\Lambda_{1,v}\Lambda_{4,v} + \Lambda_{2,v}\Lambda_{3,v})\cos(2\Theta_0)]a_{10}$$

$$+ 8\Omega^2 [(\Lambda_{2,v}e_\eta - \Lambda_{1,v}e_\xi)\sin(\Theta_0) - (\Lambda_{1,v}e_\eta + \Lambda_{2,v}e_\xi)\cos(\Theta_0)] - \Lambda_{1,v}\Lambda_{6,v}a_{10}^3$$
(۱۰-۸)

$$+ 8ca_{10}\omega_f (\Lambda_{2,v}\Pi_{(9,\beta_0,n)}^C - \Lambda_{1,v}\Pi_{(9,\beta_0,n)}^S) = 0$$

$$4[(-\Lambda_{1,v}\Lambda_{3,v} + \Lambda_{4,v}\Lambda_{2,v})\cos(2\Theta_0) + (\Lambda_{4,v}\Lambda_{1,v} + \Lambda_{3,v}\Lambda_{2,v})\sin(2\Theta_0)]a_{10}$$

$$+ (\Lambda_{6,v}\Lambda_{2,v})a_{10}^3 - 4(\Lambda_{1,v}^2 + \Lambda_{2,v}^2)a_{10}\sigma$$
(۱۱-۸)

$$+ 8\Omega^2 [(\Lambda_{2,v}e_\xi + e_\eta \Lambda_{1,v})\sin(\Theta_0) + (e_\eta \Lambda_{2,v} - e_\xi \Lambda_{1,v})\cos(\Theta_0)]$$

$$+ 8ca_{10}\omega_f (\Lambda_{2,v}\Pi_{(9,\beta_0,n)}^S + \Lambda_{1,v}\Pi_{(9,\beta_0,n)}^C) = 0$$

۸-۲- تحلیل پایداری

به منظور پایداری حالت پایایی معادلات مرتبه اول (۶-۸) تا (۹-۸) و با فرض $a_2(T_2)=0$ ،

ماتریس ژاکوبین، J ، طرف راست معادلات (۶-۸) و (۷-۸)، برابر است با [32]،

$$J = \frac{1}{4(\Lambda_{1,v}^2 + \Lambda_{2,v}^2)} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

$$A = \left\{ \begin{array}{l} 4(\Lambda_{2,v}\Lambda_{4,v} - \Lambda_{1,v}\Lambda_{3,v})\sin(2\Theta_0) - 4(\Lambda_{1,v}\Lambda_{4,v} + \Lambda_{2,v}\Lambda_{3,v})\cos(2\Theta_0) \\ -3\Lambda_{1,v}\Lambda_{6,v}a_{10}^2 + 8c\omega_f(\Lambda_{2,v}\Pi_{(9,\beta_0,n)}^C - \Lambda_{1,v}\Pi_{(9,\beta_0,n)}^S) \end{array} \right\}$$

$$B = 8 \left\{ \begin{array}{l} ((\Lambda_{2,v}\Lambda_{4,v} - \Lambda_{1,v}\Lambda_{3,v})\cos(2\Theta_0) + (\Lambda_{1,v}\Lambda_{4,v} + \Lambda_{2,v}\Lambda_{3,v})\sin(2\Theta_0))a_{10} \\ + \Omega^2((\Lambda_{1,v}e_\eta + \Lambda_{2,v}e_\xi)\sin(\Theta_0) + (\Lambda_{2,v}e_\eta - \Lambda_{1,v}e_\xi)\cos(\Theta_0)) \end{array} \right\}$$

$$C = \frac{1}{a_{10}} \left\{ \begin{array}{l} 4(\Lambda_{2,v}\Lambda_{4,v} - \Lambda_{1,v}\Lambda_{3,v})\cos(2\Theta_0) + 4(\Lambda_{1,v}\Lambda_{4,v} + \Lambda_{2,v}\Lambda_{3,v})\sin(2\Theta_0) \\ + 3\Lambda_{6,v}\Lambda_{2,v}a_{10}^2 - 4\sigma(\Lambda_{1,v}^2 + \Lambda_{2,v}^2) \\ + 8ca_1\omega_f(\Lambda_{2,v}\Pi_{(9,\beta_0,n)}^S + \Lambda_{1,v}\Pi_{(9,\beta_0,n)}^C) \end{array} \right\}$$

$$D = \frac{8}{a_{10}} \left\{ \begin{array}{l} (-\Lambda_{2,v}\Lambda_{4,v} - \Lambda_{1,v}\Lambda_{3,v})\sin(2\Theta_0) + (\Lambda_{1,v}\Lambda_{4,v} + \Lambda_{2,v}\Lambda_{3,v})\cos(2\Theta_0))a_{10} \\ + \Omega^2((\Lambda_{1,v}e_\eta + \Lambda_{2,v}e_\xi)\cos(\Theta_0) - (\Lambda_{2,v}e_\eta - \Lambda_{1,v}e_\xi)\sin(\Theta_0)) \end{array} \right\}$$

و مقادیر ویژه متناظر آن از معادله زیر بدست می آیند،

$$|J - \lambda I| = 0 \quad \text{یا} \quad \lambda^2 - (A+D)\lambda + AD - BC = 0 \quad (12-8)$$

با توجه به معادلات فوق، از آنجا که $(A+D) < 0$ ، اگر $AD - BC > 0$ ، حرکت دینامیکی سیستم در

نقاط ثابت تعادلی، (a_{10}, Θ_0) پایدار بوده و در غیر اینصورت ناپایدار می باشد.

۸-۳- نتایج

در این بخش، با استفاده از معادلات بدست آمده، نمودارهای پاسخ فرکانسی لازم جهت تحلیل پایداری تیرهای پیچیده شده یک سر گیردار با سرعت دورانی ثابت و در نظر گرفتن کوپلینگ ارتعاشات محوری و پیچشی گزارش شده است. در این نمودارها، تأثیر زاویه پیچش، میزان خروج از مرکز و ضریب میرایی خارجی روی رزونانس های اولیه و پارامتریک تیر پیچیده شده دورانی متقارن و نامتقارن محوری مذکور، مورد بررسی قرار خواهد گرفت. از طرفی، به منظور بررسی و صحه گذاری نتایج بدست آمده از تئوری اغتشاشات، از روش عددی رانگ-کوتا استفاده شده است. برای این منظور، پارامترهای بی بعد شده زیر مورد استفاده قرار گرفته اند: $I_{xx} = 0.001$ ، $c = 0.01$ ، $\mu = 0.0005$ ، $I_{\xi\xi} = I_{\eta\eta} = 0.002878$. بقیه پارامترهای بی بعد استفاده شده، در هر بررسی ذکر خواهند شد.

شکل (۸-۱) تا شکل (۸-۴) منحنی های پاسخ فرکانسی غیر خطی را پیرامون نقاط ثابت تعادلی

تیر پیچیده شده مذکور در مدهای اول و دوم و زوایای پیچش مختلف برای حالت متقارن و نامتقارن

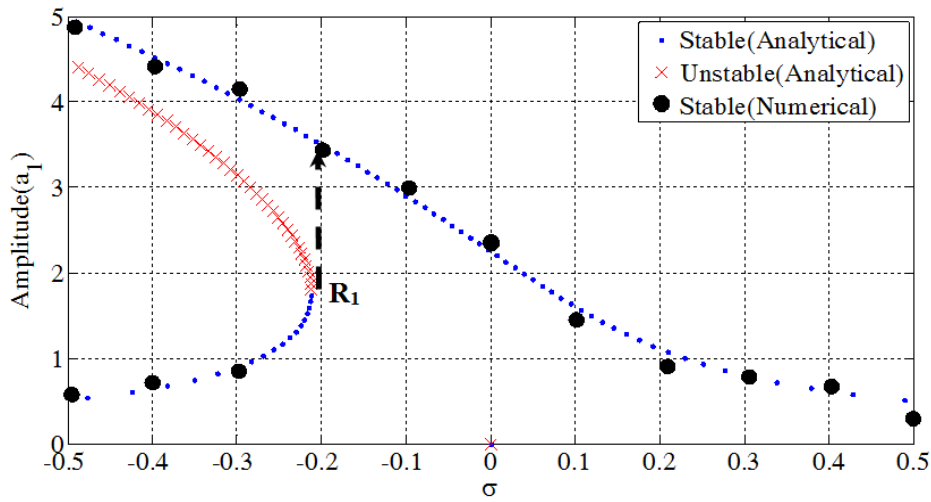
نشان می‌دهد. فرض شده است که نابالانسی‌ها در هر دو جهات اصلی تیر یکسان بوده و برابرند با، $e_\eta = e_\xi = 0.05$. همانطور که نشان داده شده است، در مد اول، در زوایای پیچش کوچکتر، منحنی‌های پاسخ فرکانسی سیستم متقارن و نامتقارن به سمت چپ خم شده است و با افزایش زاویه پیچش، این منحنی تمایل به جهش به سمت راست را دارد. این مطلب می‌رساند که فرض کش ناپذیری تیر پیچیده شده مذکور و در نظر گرفتن ارتعاشات محوری و پیچشی باعث می‌شود که در زوایای پیچش کوچکتر، تأثیر نرم شوندگی تیر بیشتر بوده، در حالی که در زوایای پیچش بزرگتر، نرم شوندگی تیر کاهش یافته و نمودار پاسخ فرکانسی به سمت راست میل می‌کند. اما، در مد دوم، نمودار به سمت راست خم شده که مؤید این است که تأثیر پارامترهای غیر خطی سیستم در مد دوم از نوع سخت شونده می‌باشد.

با توجه به شکل (۸-۱) در مد اول و حالت متقارن $\Pi=0$ ، تیر تنها دارای یک منبع تحریک بوده که همان نابالانسی با فرکانس Ω می‌باشد و در نتیجه منحنی پاسخ فرکانسی دارای یک قله بوده است. همچنین، در حالت متقارن و زوایای پیچش کوچکتر، دیده می‌شود که برای برخی از مقادیر σ ، سیستم دارای تنها یک پاسخ پایدار بوده در حالی که برای برخی دیگر، سیستم دارای سه پاسخ بوده که دوتای آنها پایدار و دیگری ناپایدار است. در نتیجه در این حالات همواره پدیده پرش و دو شاخگی اتفاق می‌افتد و نوع دو شاخگی از نوع saddle-node bifurcation در R_1 بوده اما وقتی زاویه پیچش افزایش می‌یابد، پاسخ سیستم به پاسخ پایدار نزدیک شده و نواحی ناپایدار کاهش یافته و در نتیجه احتمال بروز دو شاخگی در سیستم کاهش می‌یابد.

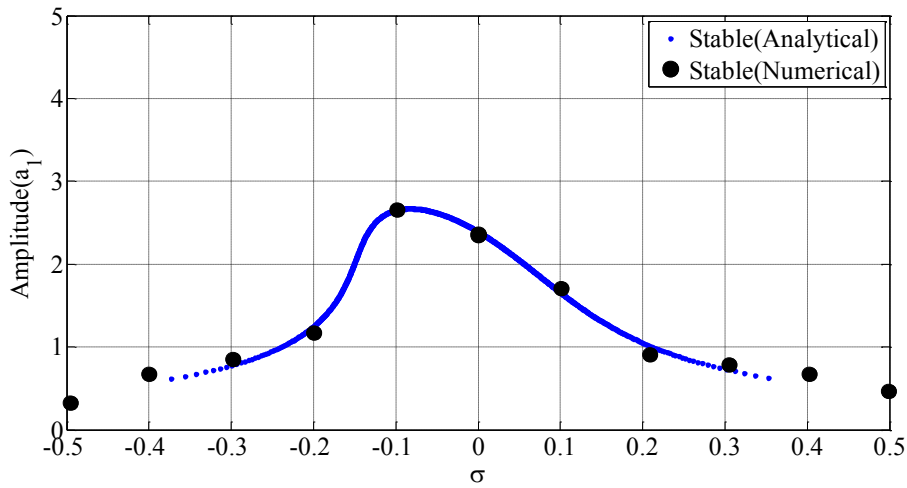
این درحالی است که وقتی نامتقارنی در سیستم وجود دارد ($\Pi \neq 0$)، علاوه بر منبع تحریک ناشی از نابالانسی با فرکانس Ω ، یک منبع تحریک دیگر با فرکانس 2Ω در سیستم بوجود می‌آید که ناشی از وجود نامتقارنی در سیستم می‌باشد و به عنوان تحریک پارامتریک در سیستم شناخته می‌شود. از این‌رو، منحنی‌های پاسخ فرکانسی دارای دو قله می‌باشد. این مطلب در شکل (۸-۲) برای تیرهای پیچیده شده نامتقارن محوری نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، در برخی از مقادیر، سیستم دارای پنج پاسخ، در برخی دیگر، یک پاسخ و در برخی دیگر دارای سه پاسخ بوده که شامل

ترکیبی از پاسخهای پایدار و ناپایدار می‌باشند. بسیار واضح است که همواره پدیده دو شاخگی اتفاق می‌افتد. همانطور که مشاهده می‌شود، در مد اول، برای تیر پیچیده شده یک سرگیردار نامتقارن، منحنی پاسخ فرکانسی در زوایای پیچش کوچکتر به شکل نمودارهای دوشاخگی از نوع saddle-node bifurcation در فرکانس‌های نقاط تغییر حالت پایای سیستم از پایدار به ناپایدار یعنی R_1 و R_2 می‌باشد بگونه‌ای که در زاویه پیچش صفر درجه، همانطور که نشان داده شده است، سیستم تمایل به پرش از پاسخ ناپایدار سیستم در saddle-node bifurcation واقع در نقطه R_1 به پاسخ پایدار در R'_1 دارد. سپس، در فرکانسهای متناظر با فاصله بین $R'_1 - R_2$ که متعلق به پاسخهای پایدار سیستم بوده، نوسان کرده و سپس از نقطه ناپایدار saddle-node bifurcation واقع در R_2 پرش دوم داشته و به پاسخ پایدار سیستم در R'_2 می‌رود. اما با افزایش زاویه پیچش سیستم، پهنای فرکانسی بین دو نقطه saddle-node bifurcation یعنی $R_1 - R_2$ افزایش یافته و میزان پرش از دو نقطه saddle-node bifurcation به تدریج افزایش می‌یابد.

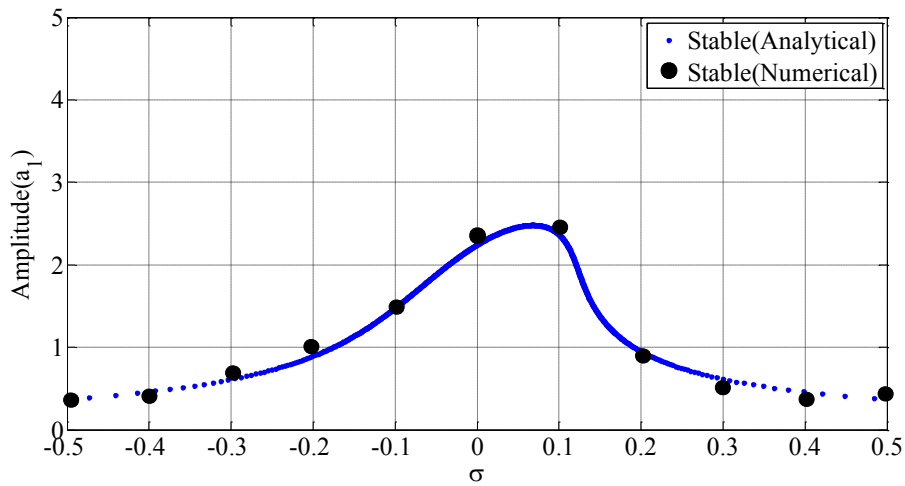
اما در مد دوم برخلاف حالت متناظر در مورد تیرهای پیچیده شده یک سر گیر دار لاغر (به فصل ۳ مراجعه شود)، نمودار دوشاخگی از نوع pitchfork bifurcation به نوع saddle-node bifurcation در R_1 و R_2 نزدیکتر خواهد شد. در این حالت مشاهده می‌شود که سیستم تمایل به پرش از حالت ناپایدار در R_1 به حالت پایدار در R'_1 داشته و با افزایش زاویه پیچش، طول پرش $R_1 R'_1$ و $R_2 R'_2$ کاهش می‌یابد. از طرفی می‌توان دید که در زوایای پیچش کوچکتر، سیستم دارای پهنای وسیعتری از پاسخهای صفر و پهنای کوچکتری از پاسخهای غیر صفر خواهد بود و اگر سیستم در فرکانسی در فاصله $R_1 - R_2$ عمل کند، با دامنه‌ای برابر با پاسخ غیر صفر، همانطور که در شکل (۸-۴) نشان داده شده است، نوسان می‌کند. همچنین، با توجه به شکل (۸-۱) و شکل (۸-۲) در مد اول، با افزایش زاویه پیچش، β_0 ، تأثیرات نرم شوندگی کاهش یافته و در نتیجه دامنه قله‌های نوسانی کاهش می‌یابد، بگونه‌ای که در زوایای پیچش بزرگتر، تأثیر نرم شوندگی به شدت کاهش یافته و سخت شوندگی سیستم تقویت خواهد شد.



(الف)



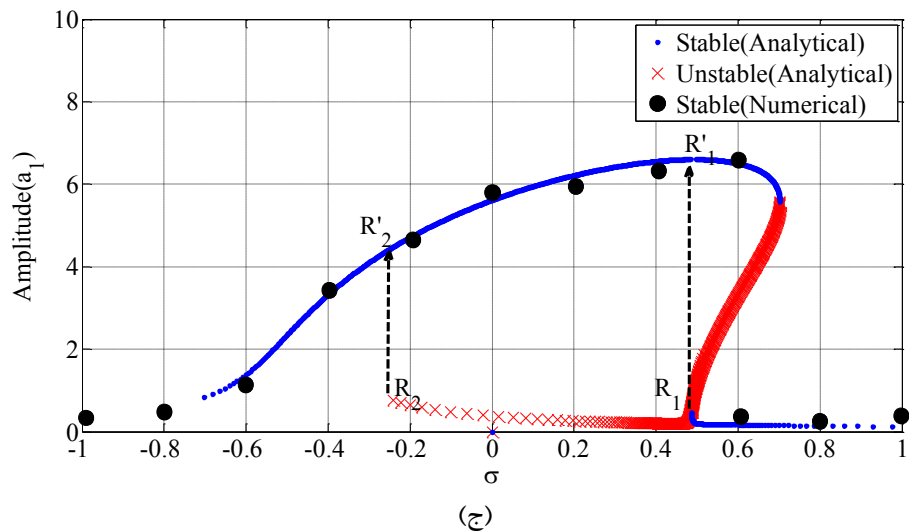
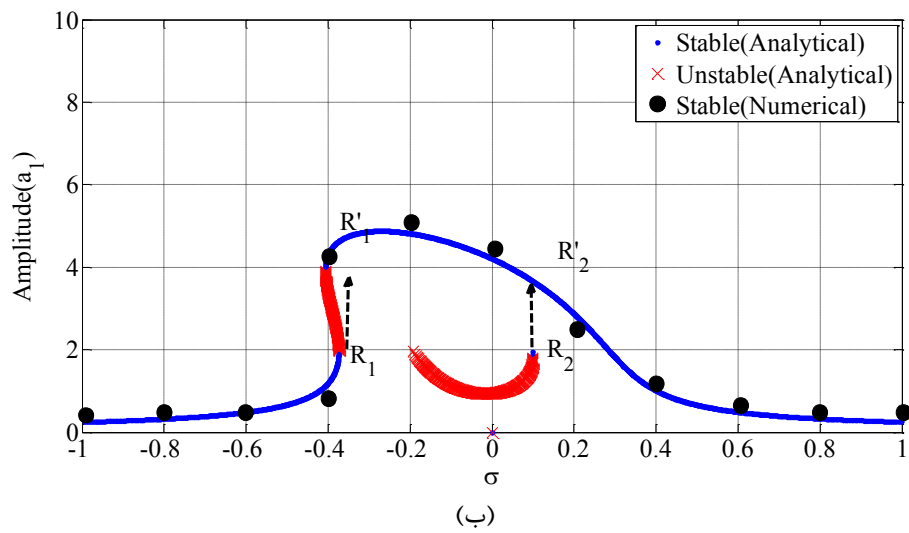
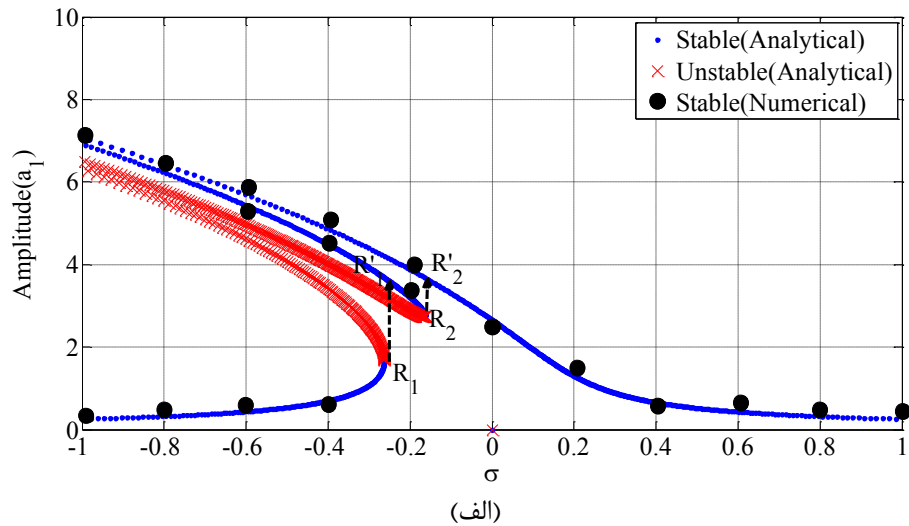
(ب)



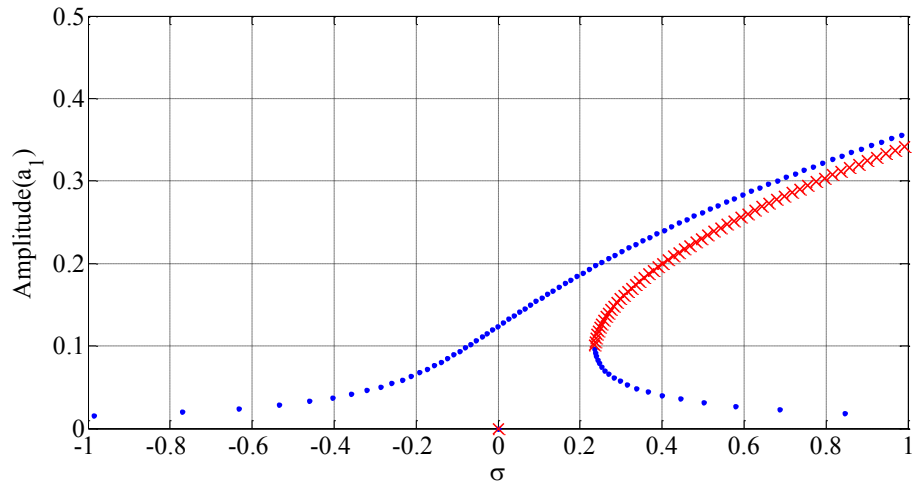
(ج)

شکل (۸-۱) منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده دوار یک سر گیر دار متقارن کش ناپذیر در مد اول و زاویه

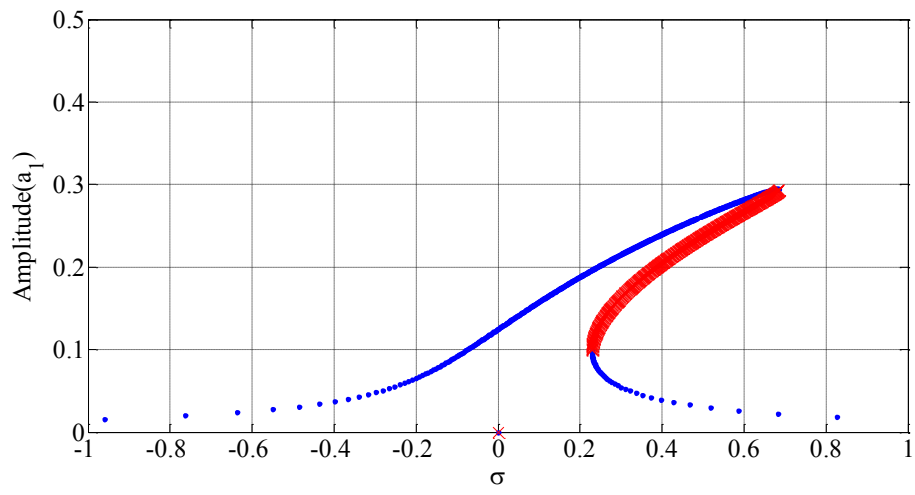
پیش الف ($\beta_0 = 0$ ب) $\beta_0 = 30^\circ$ و ج) $\beta_0 = 60^\circ$



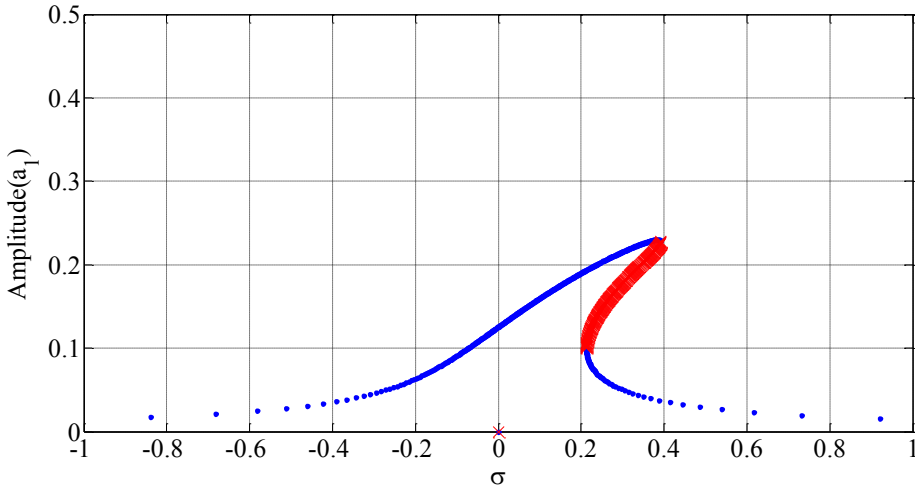
شکل (۸-۲) منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده دوار یک سر گیردار نامتقارن کش ناپذیر در مد اول و زاویه پیش الف) $\beta_0 = 0^\circ$ ب) $\beta_0 = 30^\circ$ و ج) $\beta_0 = 60^\circ$.



(الف)

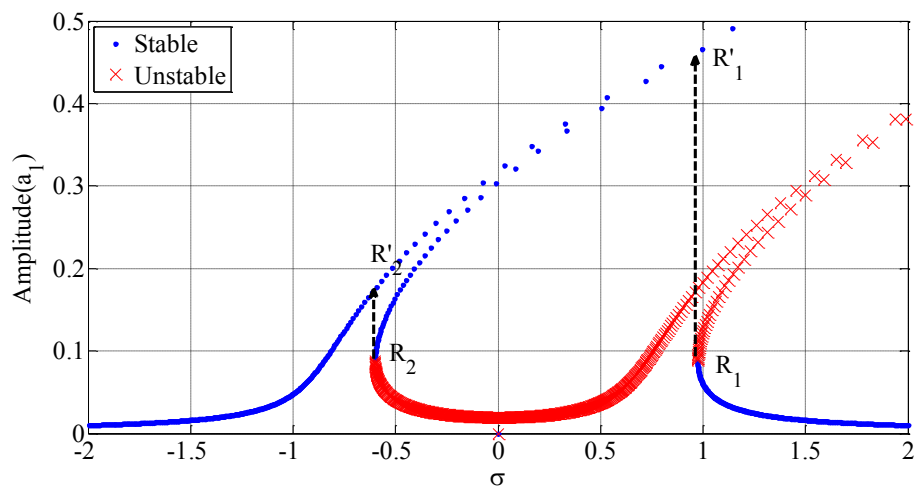


(ب)

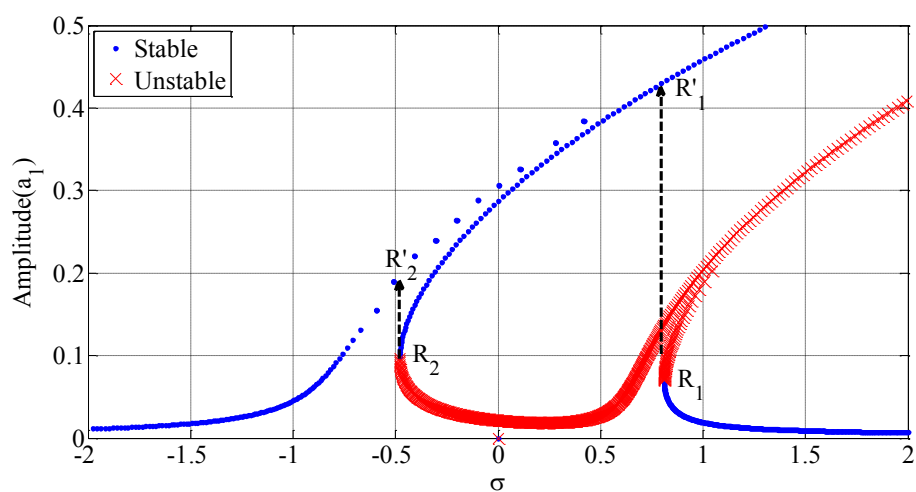


(ج)

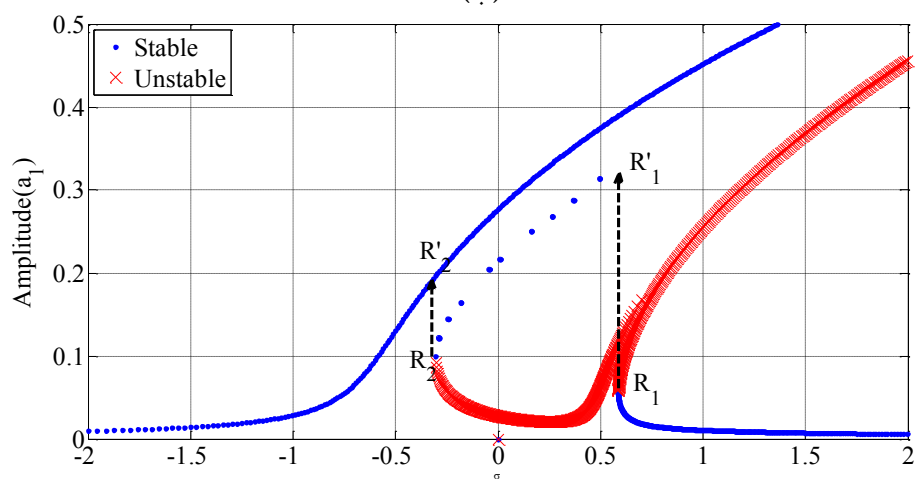
شکل (۳-۸) منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده دوار یک سر گیر دار متقارن کش ناپذیر در مد دوم و زاویه پیش‌فشار (الف) $\beta_0 = 0$ (ب) $\beta_0 = 30^\circ$ و (ج) $\beta_0 = 60^\circ$.



(الف)



(ب)



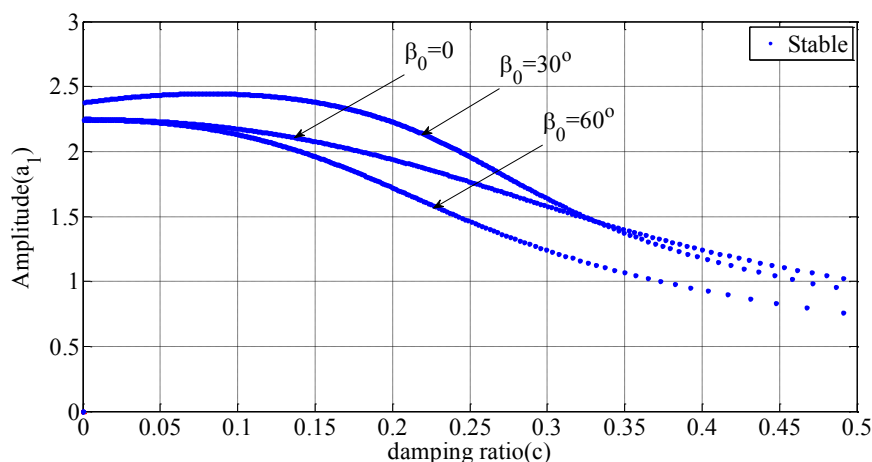
(ج)

شکل (۴-۸) منحنی پاسخ فرکانسی تیر پیچیده شده دوار یک سر گیردار نامتقارن کش ناپذیر در مد دوم و زاویه

پیچش الف) $\beta_0 = 0$ ب) $\beta_0 = 30^\circ$ و ج) $\beta_0 = 60^\circ$

از این رو، در مد اول می توان گفت وجود زاویه پیچش می تواند به عنوان یک پارامتر میرا کننده نوسانات سیستم عمل کند. در مورد مد دوم نیز شرایط مشابه می باشد، بگونه ای که با افزایش زاویه پیچش، تأثیر سخت شوندگی کاهش یافته و در نتیجه دامنه نواحی پایدار نیز کاهش می یابد. در نتیجه، می توان گفت که در تیرهای پیچیده شده یک سر گیردار کش ناپذیر، همانند حالت مربوط به تیرهای یک سر گیردار لاغر (در فصل ۳)، وجود زاویه پیچش به میرا شدن سریع تر نوسانات سیستم کمک می کند.

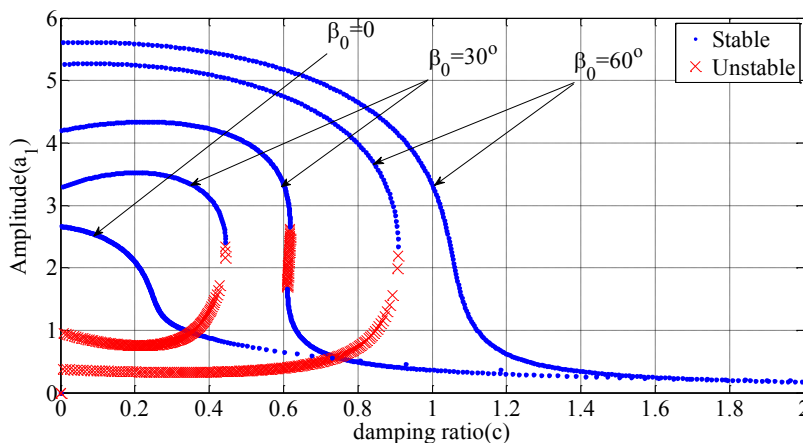
شکل (۵-۸) منحنی دامنه بر حسب نسبت میرایی تیر پیچیده شده محوری یک سر گیردار کش ناپذیر را در زوایای پیچش مختلف و فرکانسهای طبیعی متناظر با $\sigma=0$ نشان می دهد. با توجه به این شکل، می توان دید که با افزایش نسبت میرایی، دامنه نوسانات کاهش می یابد. علاوه بر این، سیستم تنها دارای یک پاسخ پایدار در همه زوایای پیچش و ضرایب میرایی بوده که در نتیجه آن، سیستم در این حالت هیچگونه دوشاخگی ندارد. از طرفی، می توان گفت افزایش زاویه پیچش، منجر به کاهش شدیدتر دامنه پایای نوسانات سیستم در محیطهای میرای یکسان می شود.



شکل (۵-۸) منحنی دامنه-نسبت میرایی تیر پیچیده شده یک سر گیردار کش ناپذیر متقارن در $\sigma=0$.

در حالتی که تیر پیچیده شده، نامتقارن ($\Pi \neq 0$) می باشد، برای $\sigma=0$ و مد اول، با افزایش ضریب میرایی، دامنه نوسانات در همه زوایای پیچش کاهش یافته و در این حالت، سه پاسخ در سیستم وجود دارد که دو پاسخ آن پایدار و دیگری ناپایدار است. اما همانگونه که در شکل (۶-۸) نشان داده

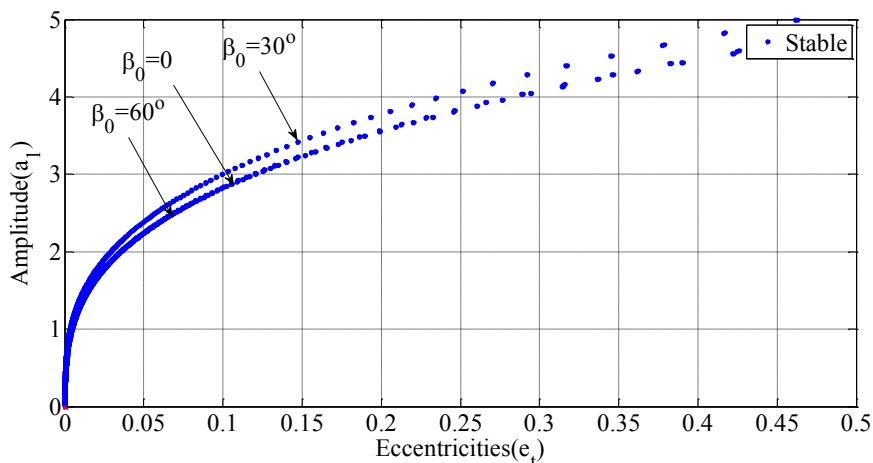
شده است، هرچه زاویه پیش بزرگتر شده، سیستم در ضریب میرایی بزرگتری شروع به میرا شدن می‌کند که می‌توان گفت در حالت نامتقارن برخلاف حالت متقارن، با افزایش زاویه پیش، جهت میرا شدن، سیستم به نسبت میرایی خارجی بزرگتری احتیاج دارد. با مقایسه نمودار بدست آمده برای تیر کش ناپذیر مذکور با حالت متناظر بدست آمده در مورد تیرهای پیچیده شده نامتقارن یک سر گیردار لاغر (فصل ۳)، مشخص است که برای میرا شدن سیستم به محیطهایی با میرایی بزرگتر احتیاج است.



شکل (۶-۸) منحنی دامنه-نسبت میرایی تیر پیچیده شده یک سر گیردار کش ناپذیر نامتقارن در $\sigma=0$.

شکل (۷-۸) و شکل (۸-۸) دامنه نوسانات را برحسب خروج از مرکز تیر پیچیده شده متقارن و

نامتقارن در فرکانس طبیعی متناظر با $\sigma=0$ نشان می‌دهد.

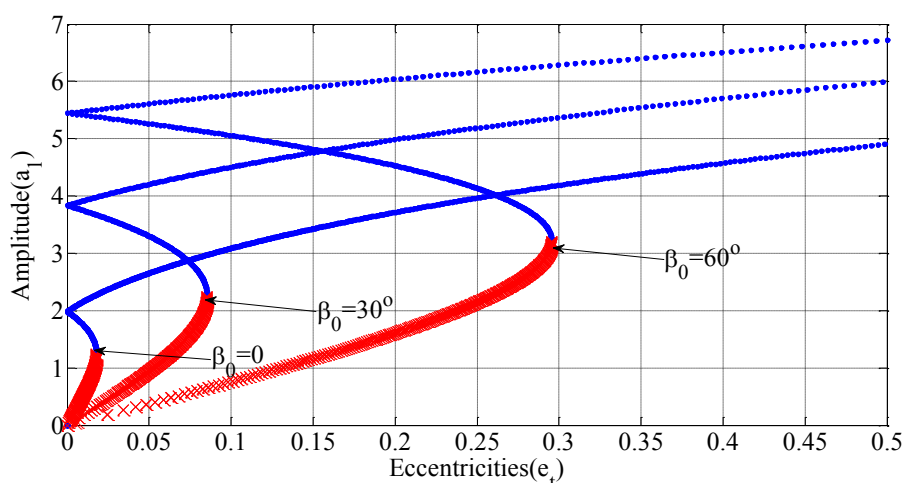


شکل (۷-۸) منحنی دامنه-خروج از مرکز تیر پیچیده شده یک سر گیردار کش ناپذیر متقارن در $\sigma=0$.

همانطور که در شکل (۷-۸) نشان داده شده است، حرکت نوسانی تیر پیچیده شده دوار یک سر

گیردار کش ناپذیر در کل مقادیر خروج از مرکز تیر و زوایای پیش مختلف آن دارای یک پاسخ پایدار

بوده و در نتیجه هیچگونه دوشاخگی اتفاق نمی‌افتد. همچنین، با توجه به شکل (۸-۷) مشاهده می‌شود که با افزایش زاویه پیچش، در یک خروج از مرکز مشخص، دامنه نوسانات سیستم به تدریج کاهش می‌یابد. شکل (۸-۸) تأثیر زاویه پیچش β_0 را روی منحنی دامنه-خروج از مرکز تیر پیچیده شده دوار یک سر گیردار نامتقارن کش ناپذیر در نزدیکی فرکانسهای رزونانس متناظر با $\sigma=0$ نشان می‌دهد. در این حالت، به ازای برخی از مقادیر مشخص خروج از مرکز تیر در $\sigma=0$ ، تنها دو بخش وجود دارد. بخش اول، در مقادیر خروج از مرکز کوچکتر بوده که شامل سه پاسخ بوده با دو پاسخ پایدار و یک پاسخ ناپایدار در حالی که در بخش دوم و در مقادیر خروج از مرکز بزرگتر، به ازای کلیه زوایای پیچش، تنها یک پاسخ پایدار وجود دارد. در نتیجه پدیده دوشاخگی و یک پرش اتفاق می‌افتد. همچنین، همانند حالت متناظر مربوط به تیرهای یک سر گیردار لاغر بدون کش ناپذیری، افزایش زاویه پیچش باعث می‌شود پرش در مقادیر بزرگتری از خروج از مرکز اتفاق افتاده ولی برعکس تیرهای یک سر گیردار لاغر بدون کش ناپذیری، دامنه پایدار نوسانات سیستم افزایش خواهد یافت. با مقایسه نتایج متناظر با تیرهای مذکور در فصل ۳ نیز می‌توان دریافت که علاوه بر اینکه دامنه نوسانات تیرهای یک سر گیردار کش ناپذیر کوچکتر بوده، پرش از پاسخ ناپایدار به پایدار نیز در مقادیر کوچکتر خروج از مرکز اتفاق می‌افتد.



شکل (۸-۸) منحنی دامنه-خروج از مرکز تیر پیچیده شده یک سر گیردار کش ناپذیر نامتقارن در $\sigma=0$.

فصل نهم

۹- ارتعاشات محوری، عرضی و پیچشی تیر پیچیده شده دوار با شرایط مرزی دو سر مفصل

اکثر تجهیزات دوار بکار رفته در صنعت از جمله پره‌های توربین، پمپ‌ها و کمپرسورهای مارپیچ، تحت تأثیر ارتعاشات در همه جهات از قبیل ارتعاشات محوری، عرضی و پیچشی قرار دارند. این ارتعاشات می‌تواند ناشی از هر عامل داخلی و خارجی مانند نابالانسی، نامتقارنی و غیره تشدید یابد. در این بخش، تأثیرات کوپلینگ حرکات محوری و پیچشی روی ارتعاشات عرضی تیر پیچیده شده دو سر مفصل مورد بررسی قرار گرفته شده است.

۹-۱- معادلات حرکت

همانند تیرهای فصل قبل، با توجه به شکل (۲-۲) هر سطح مقطع از تیر دارای یک جابجایی الاستیک در مرکز جرم C و یک دوران می‌باشد. مولفه‌های جابجایی مرکز جرم C نسبت به محورهای X ، Y و Z در موقعیت x و زمان t برابر است با $u_x(t, x)$ ، $v_y(t, x)$ ، $w_z(t, x)$. به منظور توصیف دوران سطح مقطع تیر پیچیده شده قبل و بعد از تغییر شکل تیر، از زوایای اوپلر $\phi(t, x)$ ، $\psi(t, x)$ و $\theta(t, x)$ حول محورهای X ، Y و Z استفاده می‌شود [33]. $\psi(t, x)$ و $\theta(t, x)$ ناشی از تغییر شکل خمشی تیر بوده و $\phi(t, x)$ ناشی از دوران و پیچش تیر بوده و برابر است با $\phi(t, x) = \Omega t$. تیر بکار رفته یک تیر اوپلر-برنولی و ایزوتروپیک بوده که با سرعت ثابت Ω به صورت محوری دوران می‌کند. همچنین از تغییر شکل برشی تیر صرف نظر شده، در حالی که تأثیرات ژيروسکوپ و اینرسی دورانی تیر در نظر گرفته شده است. با جایگذاری روابط انرژی جنبشی، پتانسیل و اتلافی در معادله لاگرانژین، معادلات بی بعد شده ارتعاشات محوری، عرضی و پیچشی تیر پیچیده شده دو سر مفصل برابر است با،

$$\begin{aligned}
& \left(\left(\phi''(w^2 - v^2) \right) \beta_0^3 + (-3\phi''vw' - 3\phi''v'w - \phi'''vw) \beta_0^2 + (\phi''v'' - 2\phi''w'^2 + \phi'''vv' - \phi'''w'w \right. \\
& + 2\phi''v'^2 - \phi''ww'') \beta_0 + \phi'''w'v' + \phi''v'w'' + \phi''w'v'' \cos(2\beta_0x) \\
& + (2\phi''v\beta_0^3w + (-3\phi''v'v + 1/2\phi'''w^2 + 3\phi''w'w - 1/2\phi'''v^2) \beta_0^2 + (-\phi'''v'w - \phi'''vw' - \phi''v''w \\
& - 4\phi''v'w' - \phi''w''v) \beta_0 - \phi''w''w' + 1/2\phi'''v'^2 + \phi''v''v' - 1/2\phi'''w'^2 \sin(2\beta_0x) \\
& + (\phi''v^2 + 2\phi'v'v + 2\phi'ww' + \phi''w^2) \beta_0^3 + (-3\phi''v'w + 3\phi'vw'' + 3\phi''vw' - 3\phi'vw'') \beta_0^2 \\
& + (2\phi''v'^2 + 2\phi''w'^2 + 3\phi'w'w'' - \phi''v'' - \phi''ww'' + 3\phi'v'v'' - \phi'ww''' - \phi'vv''') \beta_0 - \phi''w'v'' \\
& + \phi''v'w'' - \phi'w'v''' + \phi'v'w''') D_{xx} \\
& + \left((-\pi^2\ddot{\phi}w^2 - 11\pi^2\Omega u'v\dot{v} + \dots) \beta_0^3 + (-11/2\pi^2\Omega u''v\dot{w} - 11/2\pi^2\Omega u''w\dot{v} + \dots) \beta_0^2 + (-11/2\pi^2\Omega u'' \right. \\
& w'\dot{w} + 11/2\pi^2\Omega u''v'\dot{v} + \dots) \beta_0 + 11/2\pi^2\Omega u''v'\dot{w} - \pi^2\ddot{\phi}w'v'' + \dots \cos(2\beta_0x) \\
& + \left((-2\pi^2\ddot{\phi}vw + 11\pi^2\Omega u'v\dot{w} + \dots) \beta_0^3 + (3\pi^2\ddot{\phi}v'v + 1/2\pi^2\ddot{\phi}v'^2 + \dots) \beta_0^2 + (\pi^2\ddot{\phi}vw' + \pi^2\ddot{\phi}v'w + \dots) \beta_0 + \pi^2\ddot{\phi}w''w' \right. \\
& + 1/2\pi^2\ddot{\phi}w'^2 + \dots \sin(2\beta_0x) + \pi^2\dot{\phi}w'\dot{v}\beta_0^2 - 5/2\pi^2\Omega u''v'\dot{v}\beta_0 + \pi^2\Omega w'\dot{v}'' + \pi^2\Omega w''\dot{v}' + \dots \Big) I_x \\
& + \left((2u'w'w + u''v^2 + 2u'vv' + u''w^2 + 2w'w + 2vv') \beta_0^2 \right. \\
& + (-2wv'' + 2u''vw' + 2vw'' + 2u'vw'' - 2u'wv'' - 2u''v'w) \beta_0 + 2w'w'' \\
& + 6u'u'' + 2u'w'w'' + 2v'v'' + u''v'^2 + 2u'v'v'' + 3u'^2u'' + u''w'^2 + 2u'' \Big) \mu - \ddot{u}\pi^4 = 0
\end{aligned}$$

(1-9)

$$\begin{aligned}
& -2 \frac{w'\beta_0^3}{\pi^4} - \frac{\beta_0^2 v'' \Sigma I}{\pi^2} + 5 \frac{\beta_0^2 v''}{\pi^4} - 2 \frac{\beta_0 \dot{w}' \Sigma I}{\pi^2} + 4 \frac{\beta_0 w''}{\pi^4} + \frac{\dot{v}'' \Sigma I}{\pi^2} - \frac{v^{(4)}}{\pi^4} - \ddot{v} \\
& + \left(8 \frac{\Delta D w \beta_0^4}{\pi^4} - 22 \frac{\Delta D v' \beta_0^3}{\pi^4} + 1/8 \frac{(24\pi^2 \Delta I \ddot{w} - 48\pi^2 \Delta I \Omega \dot{v} - 168 \Delta D w'') \beta_0^2}{\pi^4} \right. \\
& \left. + 1/8 \frac{(-32\pi^2 \Delta I \ddot{v}' + 64 \Delta D v'' - 64\pi^2 \Delta I \Omega \dot{w}) \beta_0}{\pi^4} + 1/8 \frac{-8\pi^2 \Delta I \ddot{w}'' + 16\pi^2 \Delta I \Omega \dot{v}'' + 8 \Delta D w^{(4)}}{\pi^4} \right) \sin(-2\Omega t + 4\beta_0 x) \\
& + \left(-8 \frac{\Delta D v \beta_0^4}{\pi^4} - 22 \frac{\Delta D w' \beta_0^3}{\pi^4} + 1/8 \frac{(168 \Delta D v'' - 48\pi^2 \Delta I \Omega \dot{w} - 24\pi^2 \Delta I \dot{v}) \beta_0^2}{\pi^4} \right. \\
& \left. + 1/8 \frac{(64 \Delta D w'' + 64\pi^2 \Delta I \Omega \dot{v}' - 32\pi^2 \Delta I \dot{w}') \beta_0}{\pi^4} + 1/8 \frac{16\pi^2 \Delta I \Omega \dot{w}'' - 8 \Delta D v^{(4)} + 8\pi^2 \Delta I \ddot{v}''}{\pi^4} \right) \cos(-2\Omega t + 4\beta_0 x) \\
& + e_\eta \Omega^2 \cos(\beta_0 x - \Omega t) + e_\zeta \Omega^2 \sin(\beta_0 x - \Omega t) + c (\dot{w} \sin(\beta_0 x) - \dot{v} \cos(\beta_0 x)) \\
& + \frac{\mu}{\pi^4} \left((-v^2 w' - 2v'wv + \dots) \beta_0^3 + (v^2 v'' - 2vw'^2 + \dots) \beta_0^2 + (-w'^3 - 2u''w + \dots) \beta_0 + w'^2 v'' + u'^2 v'' + \dots \right) \\
& + D_{xx} \left(1/8 \frac{(36w^2 v - 4v^3) \beta_0^6}{\pi^4} + 1/8 \pi^4 (64w^2 w' - 152v'wv + \dots) \beta_0^5 + 1/8 \pi^4 (-36w^2 v'' - 96w''wv + \dots) \beta_0^4 \right. \\
& + 1/8 \pi^4 (-40w'^3 - 8\phi'v + \dots) \beta_0^3 + 1/8 \pi^4 (24v'ww'' + 16w'wv'' + \dots) \beta_0^2 + 1/8 \pi^4 (-16v''w'' + 8\phi''u''v + \dots) \beta_0 \\
& + 1/8 \pi^4 (-4\phi''w'' - 16w'v''w'' + \dots) \cos(2\beta_0 x) \\
& + 1/8 \frac{(12w^2 v - 4v^3) \beta_0^6}{\pi^4} + 1/8 \pi^4 (27w^2 w' - 54v'wv + \dots) \beta_0^5 + 1/8 \pi^4 (-22w^2 v'' - 44w''wv + \dots) \beta_0^4 \\
& + 1/8 \pi^4 (-30w'^3 + 68v'w'' + \dots) \beta_0^3 + 1/8 \pi^4 (20v'ww'' + 20w'wv'' + \dots) \beta_0^2 + 1/8 \pi^4 (-4v''w'' + \dots) \beta_0 \\
& + 1/8 \pi^4 (-3v''w'' - w'^2 v^{(4)} + \dots) \cos(4\beta_0 x) \\
& + 1/8 \frac{(24wv^2 - 16w^3) \beta_0^6}{\pi^4} + 1/8 \pi^4 (62v^2 v' - 100w'wv + \dots) \beta_0^5 + 1/8 \pi^4 (-36v^2 w'' - 96v''wv + \dots) \beta_0^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +1/8\pi^4(-40v^3-8\phi'w+\dots)\beta_0^3+1/8\pi^4(24w'vw''+16v'vw'''+\dots)\beta_0^2+1/8\pi^4(-16wv''v'''+8\phi''u''w+\dots)\beta_0 \\
& +1/8\pi^4(-4\phi''v''-16v'w''v'''+\dots)\sin(2\beta_0x) \\
& +1/8\frac{(12v^2w-4w^3)\beta_0^6}{\pi^4}+1/8\pi^4(27v^2v'-54w'wv+\dots)\beta_0^5+1/8\pi^4(-22v^2w''-44v''wv+\dots)\beta_0^4 \\
& +1/8\pi^4(-30v^3+68w'vw''+\dots)\beta_0^3+1/8\pi^4(20w'vw'''+20v'vw'''+\dots)\beta_0^2+1/8\pi^4(-4wv''v'''+\dots)\beta_0 \\
& +1/8\pi^4(-3v''w''-v''w^{(4)}+\dots)\sin(4\beta_0x) \\
& +1/8\frac{(9w^2w-4w^3)\beta_0^5}{\pi^4}+1/8\pi^4(6v^2w'-152v'wv''+\dots)\beta_0^4+1/8\pi^4(-16w^2v''-96w''wv+\dots)\beta_0^3 \\
& +1/8\pi^4(-40\phi'w^2-8\phi'^2v'+\dots)\beta_0^2+1/8\pi^4(12v'w'w''-6w'v''^2+\dots)\beta_0+1/8\pi^4(2v'v''w''+8\phi''u''^2+\dots) \\
& +I_{xx}\left(+1/8\pi^4(-12\pi^2\Omega\Omega w\dot{w}v-6\pi^2\Omega w^2\dot{w}+\dots)\beta_0^4+1/8\pi^4(-8\pi^2v^2\ddot{w}'+12\pi^2\Omega v'\dot{v}v+\dots)\beta_0^3\right. \\
& +1/8\pi^4(-6\pi^2\Omega v^2\frac{d}{d\tau\tau}w-8\pi^2\dot{\phi}u'\dot{w}+\dots)\beta_0^2+(12\pi^2w'\dot{v}^2-24\pi^2w'\dot{w}^2+\dots)\beta_0 \\
& +1/8\pi^4(-44\pi^2\Omega u''\dot{u}'w'-8\pi^2\ddot{\phi}u'w''+\dots)\cos(2\beta_0x) \\
& +(+1/8\pi^4(-16\pi^2\Omega w\dot{v}^2-12\pi^2\Omega vw\dot{w}+\dots)\beta_0^4+1/8\pi^4(-14\pi^2wv\dot{w}'+2\pi^2\Omega v'\dot{v}^2+\dots)\beta_0^3 \\
& +1/8\pi^4(-24\pi^2\Omega\dot{\phi}v'\dot{w}-8\pi^2\dot{\phi}u'\dot{w}+\dots)\beta_0^2+(\pi^2w''u'\dot{v}-20\pi^2v'\dot{w}^2+\dots)\beta_0 \\
& +1/8\pi^4(-20\pi^2\Omega u'\dot{u}'v-8\pi^2\ddot{\phi}u'w''+\dots)\cos(4\beta_0x) \\
& +(+1/8\pi^4(-12\pi^2\Omega w\dot{w}v-6\pi^2\Omega v^2\dot{v}+\dots)\beta_0^4+1/8\pi^4(-8\pi^2w^2\dot{v}'+12\pi^2\Omega w'\dot{w}w+\dots)\beta_0^3 \\
& +1/8\pi^4(-6\pi^2\Omega w^2\dot{v}-8\pi^2\dot{\phi}u'\dot{v}+\dots)\beta_0^2+(12\pi^2v'\dot{w}^2-24\pi^2v'\dot{v}^2+\dots)\beta_0 \\
& +1/8\pi^4(-44\pi^2\Omega u''\dot{u}'v-8\pi^2\ddot{\phi}u'v''+\dots)\sin(2\beta_0x) \\
& +(+1/8\pi^4(-16\pi^2\Omega v\dot{w}^2-12\pi^2\Omega vw\dot{w}+\dots)\beta_0^4+1/8\pi^4(-14\pi^2wv\dot{w}'+2\pi^2\Omega w'\dot{w}^2+\dots)\beta_0^3 \\
& +1/8\pi^4(-24\pi^2\Omega\dot{\phi}w'\dot{v}-8\pi^2\dot{\phi}u'\dot{v}+\dots)\beta_0^2+(\pi^2v''u'\dot{w}'-20\pi^2w'\dot{v}^2+\dots)\beta_0 \\
& +1/8\pi^4(-20\pi^2\Omega u'\dot{u}'w-8\pi^2\ddot{\phi}u'v''+\dots)\sin(4\beta_0x)=0
\end{aligned}$$

(Υ-9)

$$\begin{aligned}
& -2\frac{v'\beta_0^3}{\pi^4}-\frac{\beta_0^2w''\Sigma I}{\pi^2}+5\frac{\beta_0^2w''}{\pi^4}-2\frac{\beta_0\dot{v}'\Sigma I}{\pi^2}+4\frac{\beta_0v'''}{\pi^4}+\frac{\ddot{w}'\Sigma I}{\pi^2}-\frac{w^{(4)}}{\pi^4}-\dot{w} \\
& +\left.\left(\frac{8\frac{\Delta Dw\beta_0^4}{\pi^4}-22\frac{\Delta Dv'\beta_0^3}{\pi^4}+1/8\frac{(24\pi^2\Delta I\ddot{w}-48\pi^2\Delta I\Omega\dot{v}-168\Delta Dw'')\beta_0^2}{\pi^4}}{\pi^4}\right)\cos(-2\Omega t+4\beta_0x)\right. \\
& +\left.\left(\frac{1/8\frac{(-32\pi^2\Delta I\dot{v}'+64\Delta Dv''-64\pi^2\Delta I\Omega\dot{w})\beta_0}{\pi^4}+1/8\frac{-8\pi^2\Delta I\ddot{w}''+16\pi^2\Delta I\Omega\dot{v}''+8\Delta Dw^{(4)}}{\pi^4}}{\pi^4}\right)\cos(-2\Omega t+4\beta_0x)\right) \\
& +\left.\left(\frac{-8\frac{\Delta Dv\beta_0^4}{\pi^4}-22\frac{\Delta Dw'\beta_0^3}{\pi^4}+1/8\frac{(168\Delta Dv''-48\pi^2\Delta I\Omega\dot{w}-24\pi^2\Delta I\ddot{v})\beta_0^2}{\pi^4}}{\pi^4}\right)\sin(-2\Omega t+4\beta_0x)\right. \\
& +\left.\left(\frac{1/8\frac{(64\Delta Dw'''+64\pi^2\Delta I\Omega\dot{v}'-32\pi^2\Delta I\dot{w}')\beta_0}{\pi^4}+1/8\frac{16\pi^2\Delta I\Omega\dot{w}''-8\Delta Dv^{(4)}+8\pi^2\Delta I\ddot{v}''}{\pi^4}}{\pi^4}\right)\sin(-2\Omega t+4\beta_0x)\right) \\
& -e_\eta\Omega^2\sin(\beta_0x-\Omega t)-e_\zeta\Omega^2\cos(\beta_0x-\Omega t)+c(\dot{w}\cos(\beta_0x)-\dot{v}\sin(\beta_0x)) \\
& +\left(\left(-v^2w'-2v'wv+\dots\right)\beta_0^3+\left(v^2v''-2vw'^2+\dots\right)\beta_0^2+\left(-w'^3-2u''w+\dots\right)\beta_0+w'^2v''+u'^2v''+\dots\right)\frac{\mu}{\pi^4} \\
& +D_{xx}\left(\left(1/8\frac{(36w^2v-4v^3)\beta_0^6}{\pi^4}+1/8\pi^4(64w^2w'-152v'wv+\dots)\beta_0^5+1/8\pi^4(-36w^2v''-96w''wv+\dots)\beta_0^4\right.\right. \\
& +1/8\pi^4(-40w^3-8\phi'v+\dots)\beta_0^3+1/8\pi^4(24v'ww'''+16w'wv'''+\dots)\beta_0^2+1/8\pi^4(-16v''w'''+8\phi''u''v+\dots)\beta_0 \\
& +1/8\pi^4(-4\phi''w''-16w'v''w'''+\dots)\sin(2\beta_0x) \\
& +\left.1/8\frac{(12w^2v-4v^3)\beta_0^6}{\pi^4}+1/8\pi^4(27w^2w'-54v'wv+\dots)\beta_0^5+1/8\pi^4(-22w^2v''-44w''wv+\dots)\beta_0^4\right. \\
& +1/8\pi^4(-30w^3+68v'wv''+\dots)\beta_0^3+1/8\pi^4(20v'ww'''+20w'wv'''+\dots)\beta_0^2+1/8\pi^4(-4v''w'''+\dots)\beta_0 \\
& +1/8\pi^4(-3v''w''-w''v^{(4)}+\dots)\sin(4\beta_0x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (1/8 \frac{(24wv^2 - 16w^3)}{\pi^4}) \beta_0^6 + 1/8\pi^4(62v^2v' - 100w'wv + \dots)\beta_0^5 + 1/8\pi^4(-36v^2w'' - 96v''wv + \dots)\beta_0^4 \\
& + 1/8\pi^4(-40v^3 - 8\phi'w + \dots)\beta_0^3 + 1/8\pi^4(24w'v'' + 16v'v'' + \dots)\beta_0^2 + 1/8\pi^4(-16wv''v'' + 8\phi''u''w + \dots)\beta_0 \\
& + 1/8\pi^4(-4\phi''v'' - 16v'w''v'' + \dots)\cos(2\beta_0x) \\
& + (1/8 \frac{(12v^2w - 4w^3)}{\pi^4}) \beta_0^6 + 1/8\pi^4(27v^2v' - 54w'wv + \dots)\beta_0^5 + 1/8\pi^4(-22v^2w'' - 44v''wv + \dots)\beta_0^4 \\
& + 1/8\pi^4(-30v^3 + 68w'v'' + \dots)\beta_0^3 + 1/8\pi^4(20w'v'' + 20v'v'' + \dots)\beta_0^2 + 1/8\pi^4(-4wv''v'' + \dots)\beta_0 \\
& + 1/8\pi^4(-3v''w'' - v''w^{(4)} + \dots)\cos(4\beta_0x) \\
& + 1/8 \frac{(9w^2w - 4w^3)}{\pi^4} \beta_0^5 + 1/8\pi^4(6v^2w' - 152v'wv'' + \dots)\beta_0^4 + 1/8\pi^4(-16w^2v'' - 96w''w + \dots)\beta_0^3 \\
& + 1/8\pi^4(-40\phi'w^2 - 8\phi^2v' + \dots)\beta_0^2 + 1/8\pi^4(12v'w'w'' - 6w'v''^2 + \dots)\beta_0 + 1/8\pi^4(2v'v''w'' + 8\phi''u''^2 + \dots) \\
& + I_{xx} \left((1/8\pi^4(-12\pi^2\Omega\Omega w\dot{v}v - 6\pi^2\Omega w^2\dot{w} + \dots)\beta_0^4 + 1/8\pi^4(-8\pi^2v^2\ddot{w}' + 12\pi^2\Omega v'\dot{v}v + \dots)\beta_0^3 \right. \\
& + 1/8\pi^4(-6\pi^2\Omega v^2 \frac{d}{d\tau} w - 8\pi^2\dot{\phi}u'\dot{w} + \dots)\beta_0^2 + (12\pi^2w'\dot{v}^2 - 24\pi^2w'\dot{w}^2 + \dots)\beta_0 \left. \right) \\
& + 1/8\pi^4(-44\pi^2\Omega u''\dot{u}'w' - 8\pi^2\ddot{\phi}u'w'' + \dots)\sin(2\beta_0x) \\
& + (1/8\pi^4(-16\pi^2\Omega w\dot{v}^2 - 12\pi^2\Omega v\dot{w} + \dots)\beta_0^4 + 1/8\pi^4(-14\pi^2wv\dot{w}' + 2\pi^2\Omega v'\dot{v}^2 + \dots)\beta_0^3 \\
& + 1/8\pi^4(-24\pi^2\Omega \dot{\phi}'\dot{w} - 8\pi^2\dot{\phi}u'\dot{w} + \dots)\beta_0^2 + (\pi^2w''u'\dot{v}' - 20\pi^2v'\dot{w}^2 + \dots)\beta_0 \\
& + 1/8\pi^4(-20\pi^2\Omega u''\dot{u}'v - 8\pi^2\ddot{\phi}u'w'' + \dots)\sin(4\beta_0x) \\
& + (1/8\pi^4(-12\pi^2\Omega w\dot{v}v - 6\pi^2\Omega v^2\dot{v} + \dots)\beta_0^4 + 1/8\pi^4(-8\pi^2w^2\dot{v}' + 12\pi^2\Omega w'\dot{w}w + \dots)\beta_0^3 \\
& + 1/8\pi^4(-6\pi^2\Omega w^2\dot{v} - 8\pi^2\dot{\phi}u'\dot{v} + \dots)\beta_0^2 + (12\pi^2v'\dot{w}^2 - 24\pi^2v'\dot{v}^2 + \dots)\beta_0 \\
& + 1/8\pi^4(-44\pi^2\Omega u''\dot{u}'v' - 8\pi^2\ddot{\phi}u'v'' + \dots)\cos(2\beta_0x) \\
& + (1/8\pi^4(-16\pi^2\Omega v\dot{w}^2 - 12\pi^2\Omega v\dot{w} + \dots)\beta_0^4 + 1/8\pi^4(-14\pi^2wv\dot{v}' + 2\pi^2\Omega w'\dot{w}^2 + \dots)\beta_0^3 \\
& + 1/8\pi^4(-24\pi^2\Omega \dot{\phi}w'\dot{v} - 8\pi^2\dot{\phi}u'\dot{v} + \dots)\beta_0^2 + (\pi^2v''u'\dot{w}' - 20\pi^2w'\dot{v}^2 + \dots)\beta_0 \\
& + 1/8\pi^4(-20\pi^2\Omega u''\dot{u}'w - 8\pi^2\ddot{\phi}u'v'' + \dots)\cos(4\beta_0x) = 0
\end{aligned}$$

(۳-۹)

$$\begin{aligned}
& \left(\left((4vw - 8u'vw + \dots)\beta_0^4 + (-4u''w^2 + 16u'v'v' + \dots)\beta_0^3 + 12(u''vw' + \dots)\beta_0^2 \right) \cos(2\beta_0x) \right. \\
& \left. + (vv''' + 4u''w''w + \dots)\beta_0 + (-4u'v''w'' - 2u'''w'v' + \dots) \right) \\
& + \left(\left((2v^2 - 4u'v^2 - 2w^2 + 4u'w^2 + \dots)\beta_0^4 + (8v'w + 8vw' + \dots)\beta_0^3 \right) \right. \\
& \left. + (-10u'w''w + 12u'v'v + \dots)\beta_0^2 + (2u'wv''' + 2u'vw''' + \dots)\beta_0 \right) \sin(2\beta_0x) \\
& \left. + (v''^2 - w''^2 + \dots) \right) D_{xx} \\
& + \left((u''w^2 + \dots)\beta_0^3 + (3v''w - 3vw'' + \dots)\beta_0^2 - (u''v'' + \dots)\beta_0 + (2u''w''v' - v'w''' + \dots) \right) \\
& \left(\left((\pi^2w\ddot{v} - 2\pi^2u'v\ddot{w})\beta_0^2 + (-4\pi^2u'\dot{w}\dot{w}' + \pi^2w\ddot{w}')\beta_0 + (-\pi^2w'\dot{v}' - \pi^2v'\dot{w}') \right) \cos(2\beta_0x) \right) \\
& + \left(\left((-\pi^2w\ddot{w} + 2\pi^2u'w\ddot{v})\beta_0^2 + (2\pi^2\dot{v}\dot{w}' + 2\pi^2\dot{v}'\dot{w})\beta_0 + (-\pi^2\dot{v}^2 + \pi^2\dot{w}^2) \right) \sin(2\beta_0x) \right) I_{xx} = 0 \\
& \left((\pi^2v\ddot{w} + 2\pi^2u'w\ddot{v})\beta_0^2 + (2\pi^2u'w\ddot{w}' - \pi^2w\ddot{w}')\beta_0 + (-2\pi^2\ddot{\phi} - \pi^2w'\dot{v}') \right)
\end{aligned}$$

(۴-۹)

با شرایط مرزی

$$x=0 \Rightarrow \begin{cases} u=0 \\ v=v''=0 \\ w=w''=0 \\ \phi'=0 \end{cases} \quad \text{و} \quad x=L \Rightarrow \begin{cases} u=0 \\ v=v''=0 \\ w=w''=0 \\ \phi'=0 \end{cases} \quad (5-9)$$

برای ساده سازی، در معادلات فوق داریم،

$$\Delta D = \frac{(D_{\xi\xi} - D_{\eta\eta})}{2}, \quad \Delta I = \frac{(I_{\xi\xi} - I_{\eta\eta})}{2}, \quad \Sigma D = \frac{(D_{\xi\xi} + D_{\eta\eta})}{2}, \quad \Sigma I = \frac{(I_{\xi\xi} + I_{\eta\eta})}{2}, \quad (6-9)$$

$$u = u_{\xi}, \quad v = v_{\eta}, \quad w = w_{\xi},$$

در معادلات فوق فرض می‌شود از میرایی در جهت پیچشی صرف نظر شده است. همچنین

پارامترهای بی بعد شده برابرند با،

$$u^* = \frac{u}{h_0}, \quad v^* = \frac{v}{h_0}, \quad w^* = \frac{w}{h_0}, \quad x^* = \frac{x}{L}, \quad t^* = \frac{t}{\sqrt{mL^4/\pi^4\Sigma D}}, \quad \Omega^* = \frac{\Omega}{\sqrt{\pi^4\Sigma D/mL^4}},$$

$$I_{xx}^* = I_{\xi\xi}^* = \frac{\pi^2 I_{xx}}{mL^2}, \quad \Sigma I^* = \frac{\pi^2 \Sigma I}{mL^2}, \quad \Delta I^* = \frac{\pi^2 \Delta I}{mL^2}, \quad \Delta D^* = \frac{\pi^2 \Delta D}{mL^2}, \quad (7-9)$$

$$c^* = c \frac{\pi^2 \sqrt{m\Sigma D}}{L^2}, \quad \mu = \frac{h_0^2 A_{xx}}{2\Sigma D}, \quad D_{xx}^* = \frac{D_{xx}}{\Sigma D}$$

که h_0 و L ، به ترتیب اندازه ضخامت مقطع و طول تیر هستند. برای راحتی، در معادلات از علامت

(*) صرف نظر شده است.

۲-۹- تحلیل پایداری با اعمال روش مقیاس‌های چندگانه به معادلات دیفرانسیل

مشقات جزئی (PDE)

اکنون به منظور حل معادلات بی بعد شده بدست آمده، از تئوری اغتشاشات و روش مقیاس‌های

چند گانه برای تحلیل معادلات دیفرانسیل با مشتق جزئی استفاده می‌شود. به این ترتیب، با توجه به

وجود تنها جملات غیر خطی مرتبه سه در معادلات، تقریب زیر برای مولفه‌های جابجایی طولی، عرضی و

پیچشی تیر فرض می‌شود،

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \varepsilon u_1(x, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 u_2(x, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^3 u_3(x, T_0, T_1, T_2) + \dots \\ v(x,t) &= \varepsilon v_1(x, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 v_2(x, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^3 v_3(x, T_0, T_1, T_2) + \dots \\ w(x,t) &= \varepsilon w_1(x, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 w_2(x, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^3 w_3(x, T_0, T_1, T_2) + \dots \\ \phi(x,t) &= \varepsilon \phi_1(x, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 \phi_2(x, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^3 \phi_3(x, T_0, T_1, T_2) + \dots \end{aligned} \quad (8-9)$$

لازم به ذکر است اگر در تقریب فوق، جملات w_0, v_0, w_2, v_2 ظاهر شوند، پاسخ آنها در ادامه

صفر خواهد شد. $T_0 = t$ و $T_1 = \varepsilon t$ و $T_2 = \varepsilon^2 t$ از طرفی،

$$\frac{\partial}{\partial t} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \quad (9-9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 D_1^2 + 2\varepsilon^2 D_2 D_0 + \dots$$

که D_0 و D_1 و D_2 به ترتیب برابرند با، $\frac{\partial}{\partial T_0}$ و $\frac{\partial}{\partial T_1}$ و $\frac{\partial}{\partial T_2}$ به منظور بالانس پارامترهای غیرخطی در

معادلات و استخراج رزونانس‌های اولیه و پارامتریک، قرار می‌دهیم،

$$c = \varepsilon^2 \bar{c}, \Delta D = \varepsilon^2 \bar{\Delta D}, \Delta I = \varepsilon^2 \bar{\Delta I}, e_\zeta = \varepsilon^3 \bar{e}_\zeta, e_\eta = \varepsilon^3 \bar{e}_\eta, \quad (10-9)$$

به این ترتیب، با اعمال روش مقیاس‌های چندگانه و جدا سازی عبارات مرتبه $(O(\varepsilon^1))$ ، $(O(\varepsilon^2))$ و

$O(\varepsilon^3)$ داریم،

$O(\varepsilon)$

$$-D_0^2 u_1 + 2 \frac{\mu}{\pi^4} u_1'' = 0 \quad (11-9)$$

$$\frac{\Omega I_{xx}}{2\pi^2} \left[(\beta_0^2 D_0 w_1 - \beta_0 D_0 v_1') \cos(2\beta_0 x) + (D_0 v_1 \beta_0^2 + D_0 w_1' \beta_0) \sin(2\beta_0 x) \right]$$

$$- 2 \frac{\beta_0^3 w_1'}{\pi^4} + 1/2 \left(\frac{-2 \Sigma I D_0^2 v_1 \pi^2 - \Omega I_{xx} D_0 w_1 \pi^2 + 10 v_1''}{\pi^4} \right) \beta_0^2$$

$$+ 1/2 \left(\frac{-4 \Sigma I D_0^2 w_1' \pi^2 + 3 \Omega I_{xx} D_0 v_1' \pi^2 + 8 w_1''}{\pi^4} \right) \beta_0 \quad (12-9)$$

$$+ 1/2 \frac{-2 v_1^{(4)} + 2 \Sigma I D_0^2 v_1'' \pi^2 - 2 D_0^2 v_1 \pi^4 + 2 \Omega I_{xx} D_0 w_1'' \pi^2}{\pi^4} = 0$$

$$\frac{\Omega I_{xx}}{2\pi^2} \left[(\beta_0^2 D_0 v_1 + \beta_0 D_0 w_1') \cos(2\beta_0 x) + (-D_0 w_1 \beta_0^2 + D_0 v_1' \beta_0) \sin(2\beta_0 x) \right]$$

$$+ 2 \frac{\beta_0^3 v_1'}{\pi^4} + 1/2 \left(\frac{-2 \Sigma I D_0^2 w_1 \pi^2 + \Omega I_{xx} D_0 v_1 \pi^2 + 10 w_1''}{\pi^4} \right) \beta_0^2$$

$$+ 1/2 \left(\frac{4 \Sigma I D_0^2 v_1' \pi^2 + 3 \Omega I_{xx} D_0 w_1' \pi^2 - 8 v_1''}{\pi^4} \right) \beta_0 \quad (13-9)$$

$$+ 1/2 \frac{-2 w_1^{(4)} + 2 \Sigma I D_0^2 w_1'' \pi^2 - 2 D_0^2 w_1 \pi^4 - 2 \Omega I_{xx} D_0 v_1'' \pi^2}{\pi^4} = 0$$

$$-I_{xx} D_0^2 \phi_1 \pi^2 + D_{xx} \phi_1'' = 0 \quad (14-9)$$

$O(\varepsilon^2)$

$$2\mu \left(\beta_0^2 v_1' v_1 + w_1' w_1'' - \beta_0 w_1 v_1'' + \beta_0^2 w_1' w_1 + \beta_0 v_1 w_1'' + 3u_1' u_1'' + u_2'' + v_1' v_1'' \right) - 2\pi^4 D_1 D_0 u_1$$

$$- I_{xx} \pi^2 \Omega \left(\begin{aligned} & \beta_0 w_1'' D_0 w_1 - \beta_0^2 v_1' D_0 w_1 + \beta_0 w_1 D_0 w_1'' - \pi^4 D_0^2 u_2 - v_1'' D_0 w_1' - \beta_0 v_1'' D_0 v_1 + \beta_0 v_1 D_0 v_1'' \\ & + \beta_0^2 w_1' D_0 v_1 - \beta_0^2 v_1 D_0 w_1' + w_1' D_0 v_1'' + \beta_0^2 w_1 D_0 v_1' - v_1' D_0 w_1'' + w_1'' D_0 v_1' \end{aligned} \right) = 0$$

(15-9)

$$\begin{aligned}
& \left[(-\beta_0 \phi_1'' v_1 - 2\beta_0^3 \phi_1' v_1 - \phi_1'' w_1 - \phi_1'' w_1' + \beta_0 \phi' v_1'' - 3\beta_0^2 \phi_1' w_1' + \beta_0^2 \phi_1'' w_1 - 2\beta_0 \phi_1'' v_1') \cos(2\beta_0 x) \right. \\
& + (-\phi_1'' v_1' - \phi_1'' v_1'' + \beta_0^2 \phi_1'' v_1 + \beta_0 \phi_1'' w_1 + 2\beta_0^3 \phi_1' w_1 - 3\beta_0^2 \phi_1' v_1' - \beta_0 \phi_1'' w_1' + 2\beta_0 \phi_1'' w_1') \sin(2\beta_0 x) \\
& \left. - \phi_1'' w_1' + 3\beta_0^2 \phi_1'' w_1 + 3\beta_0^2 \phi_1' w_1' \right] D_{xx} \\
& + \left[(-2\Omega\beta_0^2 D_0 u_1' w_1 \pi^2 + 2\Omega\beta_0 D_0 u_1' v_1' \pi^2 + 2\beta_0 D_0^2 \phi_1' v_1' \pi^2 + \beta_0 D_0^2 \phi_1 v_1 \pi^2 + 2\Omega\beta_0 u_1' D_0 v_1' \pi^2 + D_0^2 \phi_1 w_1'' \pi^2) \cos(2\beta_0 x) \right. \\
& + (D_0^2 \phi_1' v_1' \pi^2 + D_0^2 \phi_1 v_1'' \pi^2 - 2\Omega\beta_0^2 D_0 u_1' v_1 \pi^2 - 2\Omega\beta_0 D_0 u_1' w_1' \pi^2 - 2\Omega\beta_0^2 u_1' D_0 v_1 \pi^2 + \Omega\beta_0^2 D_1 v_1 \pi^2) \sin(2\beta_0 x) \\
& + (2\Omega\beta_0^2 D_0 u_1' w_1 \pi^2 - 4\Omega\beta_0 D_0 u_1' v_1' \pi^2 - 6\Omega\beta_0 u_1' D_0 v_1' \pi^2 - 2\Omega\beta_0 D_0 u_1'' v_1 \pi^2 - 4\Omega\beta_0 u_1'' D_0 v_1 \pi^2 + D_0^2 \phi_1 w_1'' \pi^2 \\
& + D_0^2 \phi_1 w_1' \pi^2 + 2D_0 \phi_1 D_0 w_1'' \pi^2) \left. \right] I_{xx} - 4\mu(\beta_0 u_1' w_1' + \beta_0 u_1'' w_1 - u_1' v_1'') + 10\beta_0^2 v_2'' - 2D_0^2 v_2 \pi^4 - 4\beta_0^3 w_2' \\
& + (4\beta_0^2 D_1 D_0 v_1 \pi^2 - 4\beta_0 D_0^2 w_2' \pi^2 - 8\beta_0 D_1 D_0 w_1' \pi^2 - 2\beta_0^2 D_0^2 v_2 \pi^2 + 4D_1 D_0 v_1'' \pi^2 + 2D_0^2 v_2'' \pi^2) \Sigma I = 0
\end{aligned}$$

(16-9)

$$\begin{aligned}
& \left[(-\beta_0 \phi_1'' w_1 - 2\beta_0^3 \phi_1' w_1 - \phi_1'' v_1' - \phi_1'' v_1'' - \beta_0 \phi' w_1'' - 3\beta_0^2 \phi_1' v_1' + \beta_0^2 \phi_1'' v_1 - 2\beta_0 \phi_1'' w_1') \cos(2\beta_0 x) \right. \\
& + (-\phi_1'' w_1' - \phi_1'' w_1'' + \beta_0^2 \phi_1'' w_1 + \beta_0 \phi_1'' v_1 - 2\beta_0^3 \phi_1' v_1 - 3\beta_0^2 \phi_1' w_1' - \beta_0 \phi_1'' v_1'' + 2\beta_0 \phi_1'' w_1') \sin(2\beta_0 x) \\
& \left. - \phi_1'' w_1' + 3\beta_0^2 \phi_1'' w_1 + 3\beta_0^2 \phi_1' w_1' \right] D_{xx} \\
& + \left[(-2\Omega\beta_0^2 D_0 u_1' v_1 \pi^2 + 2\Omega\beta_0 D_0 u_1' w_1' \pi^2 + 2\beta_0 D_0^2 \phi_1' v_1' \pi^2 - \beta_0 D_0^2 \phi_1 w_1 \pi^2 + 2\Omega\beta_0 u_1' D_0 w_1' \pi^2 - D_0^2 \phi_1 w_1'' \pi^2) \cos(2\beta_0 x) \right. \\
& + (-D_0^2 \phi_1 w_1' \pi^2 + D_0^2 \phi_1 w_1'' \pi^2 - 2\Omega\beta_0^2 D_0 u_1' w_1 \pi^2 + 2\Omega\beta_0 D_0 u_1' v_1' \pi^2 - 2\Omega\beta_0^2 u_1' D_0 w_1 \pi^2 + \Omega\beta_0^2 D_1 w_1 \pi^2) \sin(2\beta_0 x) \\
& + (2\Omega\beta_0^2 D_0 u_1' v_1 \pi^2 + 4\Omega\beta_0 D_0 u_1' w_1' \pi^2 + 6\Omega\beta_0 u_1' D_0 v_1' \pi^2 + 2\Omega\beta_0 D_0 u_1'' v_1 \pi^2 - 4\Omega\beta_0 u_1'' D_0 v_1 \pi^2 - D_0^2 \phi_1 v_1'' \pi^2 \\
& + D_0^2 \phi_1 v_1' \pi^2) \left. \right] I_{xx} - 4\mu(\beta_0 u_1' v_1' - \beta_0 u_1'' v_1 - u_1' w_1'') - 10\beta_0^2 w_2'' + 2D_0^2 w_2 \pi^4 - 4\beta_0^3 v_2' \\
& + (4\beta_0^2 D_1 D_0 w_1 \pi^2 - 4\beta_0 D_0^2 v_2' \pi^2 - 8\beta_0 D_1 D_0 v_1' \pi^2 - 2\beta_0^2 D_0^2 w_2 \pi^2 + 4D_1 D_0 w_1'' \pi^2 + 2D_0^2 w_2'' \pi^2) \Sigma I = 0 = 0
\end{aligned}$$

(17-9)

$$\begin{aligned}
& \left[(-14\beta_0^2 v_1' w_1' + 7\beta_0 v_1' v_1'' - \beta_0 w_1 w_1''' - 5\beta_0^2 v_1'' w_1 + 2w_1'' v_1'' + \beta_0 v_1 v_1''' - 8\beta_0^3 v_1' v_1) \cos(2\beta_0 x) \right. \\
& + (2\beta_0^4 v_1'^2 + 7\beta_0^2 w_1'^2 + 8\beta_0^3 v_1 w_1' + 8\beta_0^3 v_1' w_1 - w_1' w_1''' - w_1''^2 + v_1''^2) \sin(2\beta_0 x) \\
& \left. - 2\beta_0^3 w_1' w_1 - 2\beta_0^3 v_1' v_1 - 3\beta_0 v_1' v_1'' + 3\beta_0^2 v_1'' w_1 + 2\phi_2'' - 3\beta_0^2 v_1 w_1' \right] D_{xx} \\
& + \left[(-\beta_0 v_1 D_0^2 v_1' \pi^2 - w_1' D_0^2 v_1' \pi^2 - v_1' D_0^2 w_1' \pi^2 - 2D_0 v_1' D_0 w_1' \pi^2 + \beta_0^2 w_1 D_0^2 v_1 \pi^2 + \beta_0 w_1' D_0^2 w_1 \pi^2) \cos(2\beta_0 x) \right. \\
& + (\beta_0^2 D_0 v_1'^2 \pi^2 - \beta_0^2 D_0 w_1'^2 \pi^2 + \beta_0 v_1' D_0^2 w_1 \pi^2 + \beta_0 v_1 D_0^2 w_1' \pi^2 + 2\beta_0 D_0 v_1' D_0 w_1 \pi^2) \sin(2\beta_0 x) \\
& \left. - 4D_1 D_0 \phi_1 \pi^2 + \beta_0 v_1' D_0^2 v_1 \pi^2 - \beta_0^2 w_1 D_0^2 v_1 \pi^2 - 2D_0^2 \phi_2 \pi^2 - \beta_0 w_1 D_0^2 w_1' \pi^2 - w_1' D_0^2 v_1 \pi^2 \right] I_{xx} = 0
\end{aligned}$$

(18-9)

 $O(\varepsilon^3)$

$$\begin{aligned}
& (2v_2'v_1'' + 2\beta_0^2 w_1'w_2 + 2\beta_0^2 v_2'v_1 + 2\beta_0 v_2 w_1'' - 2\beta_0 w_1 v_2'' + 2\beta_0 v_1 w_2'' - 2\beta_0 w_2 v_1'' + 2w_2'w_1'' \\
& + 6u_1' u_2'' + 6u_2' u_1'' + 2v_1' v_2'' + 2w_1' w_2'' + 2\beta_0^2 v_1' v_2 + 2\beta_0^2 w_2' w_1) \mu \\
& + (\pi^2 w_2' D_0 v_1'' + \pi^2 w_1' D_0 v_2'' + \pi^2 w_2'' D_0 v_1' + \pi^2 w_1'' D_0 v_2' - \pi^2 v_1' D_0 w_2' - \pi^2 v_1'' D_0 w_1' \\
& - \pi^2 v_2' D_0 w_1'' + \pi^2 \beta_0^2 w_1' D_0 v_2 + \pi^2 \beta_0^2 w_2' D_0 v_1 + \pi^2 \beta_0 v_2 D_0 v_1'' + \pi^2 \beta_0 v_1 D_0 v_2'' + \pi^2 \beta_0 w_1 D_0 w_2'' \\
& + \pi^2 \beta_0 w_2 D_0 w_1'' + \pi^2 \beta_0^2 w_2 D_0 v_1' + \pi^2 \beta_0^2 w_1 D_0 v_2' - \pi^2 \beta_0^2 v_2' D_0 w_1 - \pi^2 \beta_0 v_1' D_0 w_2 - \pi^2 \beta_0 v_1'' D_0 v_2 \\
& - \pi^2 \beta_0^2 v_2 D_0 w_1' - \pi^2 \beta_0^2 v_1 D_0 w_2' - \pi^2 \beta_0 w_2'' D_0 w_1 - \pi^2 \beta_0 w_1'' D_0 w_2 - \pi^2 \beta_0 v_2'' D_0 v_1) \Omega I_{xx} - 2\pi^4 D_1 D_0 u_2 + \\
& \left((u_1'' v_1'^2 + 2u_1' w_1' w_1 + 2u_1' v_1' v_1 + u_1'' w_1'^2) \beta_0^2 + (-2u_1'' v_1' w_1 + 2u_1' v_1 w_1' + 2u_1' v_1 w_1'' - 2u_1' w_1 v_1') \beta_0 \right. \\
& \left. + 2u_3'' + 3u_1'^2 u_1'' + u_1' w_1'^2 + 2u_1' v_1' v_1 + u_1'' v_1'^2 + 2u_1' w_1' w_1'' \right) \mu - 2\pi^4 D_2 D_0 u_1 - \pi^4 D_0^2 u_3 = 0
\end{aligned}$$

(19-9)

$$\begin{aligned}
& \left(8 \frac{\Delta D w_1 \beta_0^4}{\pi^4} - 22 \frac{\Delta D v_1' \beta_0^3}{\pi^4} + 1/8 \frac{(24\pi^2 \Delta I D_0^2 w_1 - 48\pi^2 \Delta I \Omega D_0 v_1 - 168 \Delta D w_1'') \beta_0^2}{\pi^4} \right. \\
& \left. + 1/8 \frac{(-32\pi^2 \Delta I D_0^2 v_1' + 64 \Delta D v_1'' - 64\pi^2 \Delta I \Omega D_0^2 w_1) \beta_0}{\pi^4} \right. \\
& \left. + 1/8 \frac{-8\pi^2 \Delta I D_0^2 w_1'' + 16\pi^2 \Delta I \Omega D_0 v_1'' + 8 \Delta D w_1^{(4)}}{\pi^4} \right) \sin(-2\Omega T_0 + 4\beta_0 x) \\
& - e_\eta \Omega^2 \cos(\beta_0 x - \Omega T_0) + e_\zeta \Omega^2 \sin(\beta_0 x - \Omega T_0) + c(D_0 w_1 \sin(\beta_0 x) - D_0 v_1 \cos(\beta_0 x)) \\
& + \left((-w_1^2 v_1' - 2w_1' w_1 v_1 + \dots) \beta_0^3 + (w_1^2 w_1'' - 2w_1 v_1'^2 + \dots) \beta_0^2 + (-v_1^3 - 2u_1'' v_1 + \dots) \beta_0 + v_1'^2 w_1'' + u_1'^2 w_1'' + \dots \right) \frac{\mu}{\pi^4} \\
& + \left(-8 \frac{\Delta D v_1 \beta_0^4}{\pi^4} - 22 \frac{\Delta D w_1' \beta_0^3}{\pi^4} + 1/8 \frac{(168 \Delta D v_1'' - 48\pi^2 \Delta I \Omega D_0 w_1 - 24\pi^2 \Delta I D_0^2 v_1) \beta_0^2}{\pi^4} \right. \\
& \left. + 1/8 \frac{(64 \Delta D w_1'' + 64\pi^2 \Delta I \Omega D_0 v_1' - 32\pi^2 \Delta I D_0^2 w_1') \beta_0}{\pi^4} + 1/8 \frac{16\pi^2 \Delta I \Omega D_0 w_1'' - 8 \Delta D v_1^{(4)} + 8\pi^2 \Delta I D_0^2 v_1''}{\pi^4} \right) \cos(-2\Omega T_0 + 4\beta_0 x) \\
& + 1/8\pi^4 \left((-40w_1'^3 - 8\phi_1' v_1 + \dots) \beta_0^3 + (24v_1' w_1 w_1'' + 16w_1' w_1 v_1'' + \dots) \beta_0^2 \right. \\
& + (-16v_1 v_1'' w_1'' + 8\phi_1'' u_1' v_1 + \dots) \beta_0 + (-4\phi_1'' w_1'' - 16w_1' v_1'' w_1'' + \dots) \cos(2\beta_0 x) \\
& + ((-40v_1'^3 - 8\phi_1' w_1 + \dots) \beta_0^3 + (24w_1' v_1 v_1'' + 16v_1' v_1 w_1'' + \dots) \beta_0^2 \\
& + (-16w_1 w_1'' v_1'' + 8\phi_1'' u_1' w_1 + \dots) \beta_0 + (-4\phi_1'' v_1'' - 16v_1' w_1'' v_1'' + \dots) \sin(2\beta_0 x) \\
& + (-16v_1'^2 w_1'' - 96v_1'' v_1 + \dots) \beta_0^3 + (-40\phi_1' v_1'^2 - 8\phi_1'^2 w_1' + \dots) \beta_0^2 \\
& + (12v_1' w_1' v_1'' - 6v_1' w_1'' + \dots) \beta_0 + 1/8\pi^4 (2w_1' w_1'' v_1'' + 8\phi_1'' u_1'' + \dots) D_{xx} \\
& + (1/8\pi^4 (-6\pi^2 \Omega v_1'^2 D_0 w_1 - 8\pi^2 D_0 \phi_1 u_1' D_0 w_1 + \dots) \beta_0^2 + (12\pi^2 w_1' D_0^2 v_1' - 24\pi^2 w_1' D_0^2 w_1' + \dots) \beta_0 \\
& + 1/8\pi^4 (-44\pi^2 \Omega u_1'' D_0 u_1' w_1' - 8\pi^2 D_2 D_0 \phi_1 u_1' w_1'' + \dots) \cos(2\beta_0 x) \\
& + (1/8\pi^4 (-8\pi^2 w_1'^2 D_2 D_0 v_1' + 12\pi^2 \Omega w_1' D_0 w_1 w_1 + \dots) \beta_0^3 + 1/8\pi^4 (-6\pi^2 \Omega w_1'^2 D_0 v_1 - 8\pi^2 D_0 \phi_1 u_1' D_0 v_1 + \dots) \beta_0^2 \\
& + (12\pi^2 v_1' D_0^2 w_1'^2 - 24\pi^2 v_1' D_0^2 v_1'^2 + \dots) \beta_0 + 1/8\pi^4 (-44\pi^2 \Omega u_1'' D_0 u_1' v_1' - 8\pi^2 D_2 D_0 \phi_1 u_1' v_1'' + \dots) \sin(2\beta_0 x) I_{xx} \\
& + \frac{1}{8\pi^4} (-16D_2 D_0 v_1 \pi^4 + 16\Sigma I D_2 D_0 v_1'' \pi^2 + 32\Sigma I \beta_0 D_2 D_0 w_1' \pi^2 - 16\Sigma I \beta_0^2 D_2 D_0 v_1 \pi^2) \\
& + \left((D_0 v_3 \beta_0^2 + D_0 w_3' \beta_0) \sin(2\beta_0 x) + (-D_0 w_3 \beta_0^2 + D_0 v_3' \beta_0) \cos(2\beta_0 x) \right. \\
& + D_0 w_3 \beta_0^2 + 3D_0 v_3' \beta_0 - D_0 w_3'' \left. \frac{\Omega I_{xx}}{2\pi^2} + 2 \frac{\beta_0^3 w_3'}{\pi^4} + 1/2 \frac{(10v_3'' - 2\Sigma I D_0^2 v_3 \pi^2) \beta_0^2}{\pi^4} \right. \\
& \left. + 1/2 \frac{(-8w_3'' + 4\Sigma I D_0^2 w_3' \pi^2) \beta_0}{\pi^4} + 1/2 \frac{-2D_0^2 v_3 \pi^4 + 2\Sigma I D_0^2 v_3'' \pi^2 - 2v_3^{(4)}}{\pi^4} \right)
\end{aligned}$$

(20-9)

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{aligned}
& 8 \frac{\Delta D w_1 \beta_0^4}{\pi^4} - 22 \frac{\Delta D v_1' \beta_0^3}{\pi^4} + 1/8 \frac{(24 \pi^2 \Delta I D_0^2 w_1 - 48 \pi^2 \Delta I \Omega D_0 v_1 - 168 \Delta D w_1'') \beta_0^2}{\pi^4} \\
& + 1/8 \frac{(-32 \pi^2 \Delta I D_0^2 v_1' + 64 \Delta D v_1'' - 64 \pi^2 \Delta I \Omega D_0^2 w_1) \beta_0}{\pi^4} \\
& + 1/8 \frac{-8 \pi^2 \Delta I D_0^2 w_1'' + 16 \pi^2 \Delta I \Omega D_0 v_1'' + 8 \Delta D w_1^{(4)}}{\pi^4}
\end{aligned} \right) \cos(-2\Omega T_0 + 4\beta_0 x) \\
& - e_\gamma \Omega^2 \sin(\beta_0 x - \Omega T_0) - e_\zeta \Omega^2 \cos(\beta_0 x - \Omega T_0) + c(D_0 w_1 \cos(\beta_0 x) - D_0 v_1 \sin(\beta_0 x)) \\
& + \left((-v_1^2 w_1' - 2v_1' w_1 v_1 + \dots) \beta_0^3 + (v_1^2 v_1'' - 2v_1' w_1^2 + \dots) \beta_0^2 + (-w_1^3 - 2u_1'' w_1 + \dots) \beta_0 + w_1^2 v_1'' + u_1^2 v_1'' + \dots \right) \frac{\mu}{\pi^4} \\
& + \left(\begin{aligned}
& -8 \frac{\Delta D v_1 \beta_0^4}{\pi^4} - 22 \frac{\Delta D w_1' \beta_0^3}{\pi^4} + 1/8 \frac{(168 \Delta D v_1'' - 48 \pi^2 \Delta I \Omega D_0 w_1 - 24 \pi^2 \Delta I D_0^2 v_1) \beta_0^2}{\pi^4} \\
& + 1/8 \frac{(64 \Delta D w_1'' + 64 \pi^2 \Delta I \Omega D_0 v_1' - 32 \pi^2 \Delta I D_0^2 w_1') \beta_0}{\pi^4} + 1/8 \frac{16 \pi^2 \Delta I \Omega D_0 w_1'' - 8 \Delta D v_1^{(4)} + 8 \pi^2 \Delta I D_0^2 v_1''}{\pi^4}
\end{aligned} \right) \sin(-2\Omega T_0 + 4\beta_0 x) \\
& + 1/8 \pi^4 \left((-40 w_1^3 - 8 \phi_1' v_1 + \dots) \beta_0^3 + (24 v_1' w_1 w_1'' + 16 w_1' v_1 v_1'' + \dots) \beta_0^2 \right. \\
& + (-16 v_1 v_1'' w_1' + 8 \phi_1'' u_1' v_1 + \dots) \beta_0 + (-4 \phi_1'' w_1'' - 16 w_1' v_1'' w_1'' + \dots) \sin(2\beta_0 x) \\
& + ((-40 v_1^3 - 8 \phi_1' w_1 + \dots) \beta_0^3 + (24 w_1' v_1 v_1'' + 16 v_1' v_1 w_1'' + \dots) \beta_0^2 \\
& + (-16 w_1 w_1'' v_1'' + 8 \phi_1'' u_1'' w_1 + \dots) \beta_0 + (-4 \phi_1'' v_1'' - 16 v_1' w_1'' v_1'' + \dots) \cos(2\beta_0 x) \\
& + (-16 w_1^2 v_1'' - 96 w_1^2 w_1 + \dots) \beta_0^3 + (-40 \phi_1' w_1^2 - 8 \phi_1^2 v_1 + \dots) \beta_0^2 \\
& \left. + (12 v_1' w_1 w_1'' - 6 w_1' v_1'' + \dots) \beta_0 + 1/8 \pi^4 (2 v_1' v_1'' w_1'' + 8 \phi_1'' u_1'' + \dots) D_{xx} \right. \\
& + (1/8 \pi^4 (-6 \pi^2 \Omega v_1^2 D_0 w_1 - 8 \pi^2 D_0 \phi_1 u_1' D_0 w_1 + \dots) \beta_0^2 + (12 \pi^2 w_1' D_0^2 v_1' - 24 \pi^2 w_1' D_0^2 w_1 + \dots) \beta_0 \\
& + 1/8 \pi^4 (-44 \pi^2 \Omega u_1'' D_0 u_1' w_1' - 8 \pi^2 D_2 D_0 \phi_1 u_1' w_1'' + \dots) \sin(2\beta_0 x) \\
& + (1/8 \pi^4 (-8 \pi^2 w_1^2 D_2 D_0 v_1' + 12 \pi^2 \Omega w_1' D_0 w_1 w_1 + \dots) \beta_0^3 + 1/8 \pi^4 (-6 \pi^2 \Omega w_1^2 D_0 v_1 - 8 \pi^2 D_0 \phi_1 u_1' D_0 v_1 + \dots) \beta_0^2 \\
& + (12 \pi^2 v_1' D_0^2 w_1^2 - 24 \pi^2 v_1' D_0^2 v_1^2 + \dots) \beta_0 + 1/8 \pi^4 (-44 \pi^2 \Omega u_1'' D_0 u_1' v_1' - 8 \pi^2 D_2 D_0 \phi_1 u_1' v_1'' + \dots) \cos(2\beta_0 x) I_{xx} \\
& + \frac{1}{8 \pi^4} (-16 D_2 D_0 w_1 \pi^4 + 16 \Sigma I D_2 D_0 w_1'' \pi^2 + 32 \Sigma I \beta_0 D_2 D_0 v_1'' \pi^2 - 16 \Sigma I \beta_0^2 D_2 D_0 w_1 \pi^2) \\
& + \left((D_0 v_3 \beta_0^2 + D_0 w_3' \beta_0) \cos(2\beta_0 x) + (-D_0 w_3 \beta_0^2 + D_0 v_3' \beta_0) \sin(2\beta_0 x) + D_0 v_3 \beta_0^2 + 3 D_0 w_3' \beta_0 - D_0 v_3'' \right) \frac{\Omega I_{xx}}{2 \pi^2} \\
& + 2 \frac{\beta_0^3 v_3'}{\pi^4} + 1/2 \frac{(10 w_3'' - 2 \Sigma I D_0^2 w_3 \pi^2) \beta_0^2}{\pi^4} + 1/2 \frac{(-8 v_3''' + 4 \Sigma I D_0^2 v_3' \pi^2) \beta_0}{\pi^4} + 1/2 \frac{-2 D_0^2 w_3 \pi^4 + 2 \Sigma I D_0^2 w_3'' \pi^2 - 2 w_3^{(4)}}{\pi^4}
\end{aligned} \tag{۲۱-۹}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{aligned}
& (-14 \beta_0^2 v_1' v_2' + 14 \beta_0^2 w_1' w_2' + 8 \beta_0^3 v_1 w_2' + 8 \beta_0^3 v_2' w_1) \sin(2\beta_0 \xi) \\
& + (4 \beta_0^4 v_1 v_2 + 8 \beta_0^3 v_2 w_1' + 8 \beta_0^3 v_1 w_2 - 4 \beta_0^4 w_1 w_2 - 2 w_1'' w_2'' + v_2' v_1''') \right) D_{xx} \\
& + \left(\beta_0 w_2 w_1''' - 3 \beta_0 v_2 v_1'' + 3 \beta_0^2 v_2'' w_1 + 3 \beta_0^2 v_1'' w_2 + \beta_0 v_2 v_1'' + \beta_0 v_1 v_2'' - 3 \beta_0 v_1' v_2'' + w_1' v_2'' + 2 \phi_3'' \right) \\
& + \left(\begin{aligned}
& (\beta_0 w_1 D_0^2 w_2' \pi^2 + \beta_0^2 w_2 D_0^2 v_1 \pi^2 - 2 \beta_0 v_1' D_1 D_0 v_1 \pi^2 + 2 \beta_0 w_1 D_1 D_0 w_1' \pi^2) \cos(2\beta_0 \xi) \\
& + (\beta_0^2 w_1 D_0^2 v_2 \pi^2 + 2 \beta_0^2 w_1 D_1 D_0 v_1 \pi^2 + \beta_0^2 v_1 D_0^2 w_2 \pi^2) \\
& + (\beta_0^2 v_2 D_0^2 v_1 \pi^2 + 2 \beta_0 D_1 v_1 D_0 w_1' \pi^2 + 2 \beta_0 D_1 v_1' D_0 w_1 \pi^2 + \beta_0^2 v_1 D_0^2 v_2 \pi^2) \\
& - (2 \beta_0^2 w_1 D_1 D_0 w_1 \pi^2 + 2 \beta_0 D_0 v_1' D_0 w_2 \pi^2 + 2 \beta_0 D_0 v_2 D_0 w_1' \pi^2 + 2 \beta_0 D_0 v_1' D_1 w_1 \pi^2) \sin(2\beta_0 \xi) \\
& + (-2 D_0^2 \phi_3 \pi^2 - 2 D_1^2 P_1 \pi^2 - 4 D_2 D_0 P_1 \pi^2 - 4 D_1 D_0 P_2 \pi^2 + \beta_0 v_1' D_0^2 v_2 \pi^2 + \beta_0 v_2' D_0^2 v_1 \pi^2)
\end{aligned} \right) I_{xx} = 0 \\
\end{aligned} \tag{۲۲-۹}$$

حل معادلات مرتبه اول ε به شکل زیر تخمین زده می شود،

$$u_1(x, T_0, T_1, T_2) = \Phi_a(x) \left(A_a(T_1, T_2) e^{i\omega_a T_0} + \bar{A}_a(T_1, T_2) e^{-i\omega_a T_0} \right) \quad (23-9)$$

$$v_1(x, T_0, T_1, T_2) = \Phi_f(x) \left(A_{f1}(T_1, T_2) e^{i\omega_f T_0} + \bar{A}_{f1}(T_1, T_2) e^{-i\omega_f T_0} \right) + \Phi_b(x) \left(A_{f2}(T_1, T_2) e^{i\omega_b T_0} + \bar{A}_{f2}(T_1, T_2) e^{-i\omega_b T_0} \right) \quad (24-9)$$

$$w_1(x, T_0, T_1, T_2) = \Phi_f(x) \left(-iA_{f1}(T_1, T_2) e^{i\omega_f T_0} + i\bar{A}_{f1}(T_1, T_2) e^{-i\omega_f T_0} \right) + \Phi_b(x) \left(-iA_{f2}(T_1, T_2) e^{i\omega_b T_0} + i\bar{A}_{f2}(T_1, T_2) e^{-i\omega_b T_0} \right) \quad (25-9)$$

$$u_1(x, T_0, T_1, T_2) = \Phi_t(x) \left(A_t(T_1, T_2) e^{i\omega_t T_0} + \bar{A}_t(T_1, T_2) e^{-i\omega_t T_0} \right) \quad (26-9)$$

که $A_a(T_1, T_2)$ ، $A_{fi}(T_1, T_2)$ و $A_t(T_1, T_2)$ توابع مختلطی هستند که از حل مرتبه ۳

بدست می‌آیند. ω_a ، ω_f و ω_b و ω_t فرکانسهای طبیعی خطی ارتعاشات طولی، عرضی همسو و ناهمسو و

پیچشی بوده که برابرند با،

$$\omega_{f,b} = \frac{1}{2} \frac{\delta_1 \pm \sqrt{\delta_3}}{\delta_2} \quad (27-9)$$

که

$$\delta_1 = I_{xx} \Omega (\beta_0^2 + 2\pi^2 n^2) \quad , \quad \delta_2 = 2 \left(\pi^2 + (\pi^2 n^2 + \beta_0^2) \Sigma I \right)$$

$$\delta_3 = \left(I_{xx} \Omega \beta_0^2 \right)^2 + 4 \left[4\pi^4 n^6 \Sigma I + 4\pi^4 n^4 + (I_{xx} \Omega \pi n \beta_0)^2 + (I_{xx} \Omega \pi^2 n^2)^2 \right]$$

$$\left[+24\Sigma I (\beta_0 \pi n^2)^2 + 20(\pi n \beta_0)^2 + 20\Sigma I (\beta_0^2 n^2)^2 \right]$$

و

$$\omega_a = \frac{m\sqrt{2\mu}}{\pi} \quad (28-9)$$

$$\omega_t = k \sqrt{\frac{D_{xx}}{I_{xx}}} \quad (29-9)$$

و شکل مدهای خطی برابرند با،

$$\Phi_a(x) = \cos(m\pi x) \quad (30-9)$$

$$\Phi_f(x) = \Phi_b(x) = \sin(n\pi x) \quad (31-9)$$

$$\Phi_t(x) = \cos(k\pi x) \quad (32-9)$$

که m ، n و k به ترتیب شماره مدهای ارتعاشات محوری، عرضی و پیچشی می‌باشند. اکنون، با قرار

دادن روابط (۲۳-۹) تا (۳۲-۹) برای u و v و w و ϕ در معادلات مرتبه ۲ (۱۵-۹) تا (۱۸-۹)، معادلات

مرتبه ۲ را با جدا کردن و مرتب سازی ضرایب $e^{i\omega_f T_0}$ و $e^{i\omega_b T_0}$ و $e^{i\omega_a T_0}$ و $e^{i\omega_t T_0}$ برای از بین بردن

ضرایب سکولار و حذف small divisorهای موجود به شکل زیر ساده می کنیم،

$$D_0^2 u_2(x, T_0, T_1, T_2) - 2 \frac{\mu}{\pi^4} u_2''(x, T_0, T_1, T_2) = P_{2,a}(x, T_1, T_2) e^{i\omega_a T_0} + CC \quad (33-9)$$

$$\begin{aligned} & \left(-\beta_0 D_0 v_2'(x, T_0, T_1, T_2) + i\beta_0^2 D_0 v_2(x, T_0, T_1, T_2) - \beta_0 D_0 w_2'(x, T_0, T_1, T_2) + \beta_0^2 D_0 w_2(x, T_0, T_1, T_2) \right) \frac{I_{xx} \Omega}{4\pi^2} e^{2i\beta_0 x} \\ & - \left(i\beta_0^2 D_0 v_2(x, T_0, T_1, T_2) + \beta_0 D_0 v_2'(x, T_0, T_1, T_2) + \beta_0^2 D_0 w_2(x, T_0, T_1, T_2) + i\beta_0 D_0 w_2'(x, T_0, T_1, T_2) \right) \frac{I_{xx} \Omega}{4\pi^2} e^{-2i\beta_0 x} \\ & + 3/2 \frac{I_{xx} \Omega \beta_0}{\pi^2} D_0 v_2'(x, T_0, T_1, T_2) - \frac{v_2^{(4)}(x, T_0, T_1, T_2)}{\pi^4} + 5 \frac{\beta_0^2 v_2''(x, T_0, T_1, T_2)}{\pi^4} - D_0^2 v_2(x, T_0, T_1, T_2) \end{aligned} \quad (34-9)$$

$$- \frac{\Sigma I \beta_0^2 D_0^2 v_2(x, T_0, T_1, T_2)}{\pi^2} + \frac{\Sigma I D_0^2 v_2''(x, T_0, T_1, T_2)}{\pi^2} - 2 \frac{\Sigma I \beta_0 D_0^2 w_2'(x, T_0, T_1, T_2)}{\pi^2} + 4 \frac{\beta_0 w_2'''(x, T_0, T_1, T_2)}{\pi^4}$$

$$+ \frac{I_{xx} \Omega D_0 w_2''(x, T_0, T_1, T_2)}{\pi^2} - 2 \frac{\beta_0^3 w_2'(x, T_0, T_1, T_2)}{\pi^4} - 1/2 \frac{I_{xx} \Omega \beta_0^2 D_0 w_2(x, T_0, T_1, T_2)}{\pi^2} =$$

$$P_{2,f,v}(x, T_1, T_2) e^{i\omega_f T_0} + P_{2,b,v}(x, T_1, T_2) e^{i\omega_b T_0} + CC$$

$$\left(-i\beta_0 D_0 v_2'(x, T_0, T_1, T_2) + \beta_0^2 D_0 v_2(x, T_0, T_1, T_2) + i\beta_0 D_0 w_2'(x, T_0, T_1, T_2) + \beta_0^2 D_0 w_2(x, T_0, T_1, T_2) \right) \frac{I_{xx} \Omega}{4\pi^2} e^{2i\beta_0 x}$$

$$- \left(\beta_0^2 D_0 v_2(x, T_0, T_1, T_2) + i\beta_0 D_0 v_2'(x, T_0, T_1, T_2) - i\beta_0^2 D_0 w_2(x, T_0, T_1, T_2) + \beta_0 D_0 w_2'(x, T_0, T_1, T_2) \right) \frac{I_{xx} \Omega}{4\pi^2} e^{-2i\beta_0 x}$$

$$+ 3/2 \frac{I_{xx} \Omega \beta_0}{\pi^2} D_0 w_2'(x, T_0, T_1, T_2) + \frac{w_2^{(4)}(x, T_0, T_1, T_2)}{\pi^4} + 5 \frac{\beta_0^2 w_2''(x, T_0, T_1, T_2)}{\pi^4} - D_0^2 w_2(x, T_0, T_1, T_2) \quad (35-9)$$

$$- \frac{\Sigma I \beta_0^2 D_0^2 w_2(x, T_0, T_1, T_2)}{\pi^2} + \frac{\Sigma I D_0^2 w_2''(x, T_0, T_1, T_2)}{\pi^2} - 2 \frac{\Sigma I \beta_0 D_0^2 v_2'(x, T_0, T_1, T_2)}{\pi^2} - 4 \frac{\beta_0 v_2'''(x, T_0, T_1, T_2)}{\pi^4}$$

$$- \frac{I_{xx} \Omega D_0 v_2''(x, T_0, T_1, T_2)}{\pi^2} + 2 \frac{\beta_0^3 v_2'(x, T_0, T_1, T_2)}{\pi^4} - 1/2 \frac{I_{xx} \Omega \beta_0^2 D_0 v_2(x, T_0, T_1, T_2)}{\pi^2} =$$

$$P_{2,f,w}(x, T_1, T_2) e^{i\omega_f T_0} + P_{2,b,w}(x, T_1, T_2) e^{i\omega_b T_0} + CC$$

$$D_0^2 \phi_2(x, T_0, T_1, T_2) - \frac{D_{xx}}{\pi^2 I_{xx}} \phi_2''(x, T_0, T_1, T_2) = P_{2,t}(x, T_1, T_2) e^{i\omega_t T_0} + CC \quad (36-9)$$

و $P_{2,b,w}(x, T, T_1)$ ، $P_{2,f,w}(x, T, T_1)$ ، $P_{2,f,v}(x, T, T_1)$ ، $P_{2,b,v}(x, T, T_1)$ ، $P_{2,a}(x, T_1, T_2)$ که

برابرند با،

$$P_{2,a}(x, T_1, T_2) = 2i\omega_a \Phi_a \frac{\partial}{\partial T_1} A_a(T_1, T_2) \quad (37-9)$$

$$\begin{aligned} P_{2,f,v}(x, T_1, T_2) = & \left(-8\Sigma I \beta_0 \Phi_f' \omega_f + 4i\Sigma I \Phi_f'' \omega_f - 4i\Phi_f \omega_f \pi^2 + iI_{xx} \Omega \beta_0^2 \Phi_f \right. \\ & \left. + 3I_{xx} \Omega \beta_0 \Phi_f' - 2iI_{xx} \Omega \Phi_f'' - 4i\Sigma I \beta_0^2 \Phi_f \omega_f - I_{xx} \Omega \beta_0 \Phi_f' e^{2i\beta_0 x} - iI_{xx} \Omega \beta_0^2 \Phi_f e^{2i\beta_0 x} \right) D_1 A_{11}(T_1, T_2) \end{aligned} \quad (38-9)$$

$$\begin{aligned} P_{2,b,v}(x, T_1, T_2) = & \left(-8\Sigma I \beta_0 \Phi_b' \omega_b - 4i\Sigma I \beta_0^2 \Phi_b \omega_b - 4i\Phi_b \omega_b \pi^2 + iI_{xx} \Omega \beta_0^2 \Phi_b \right. \\ & \left. + 3I_{xx} \Omega \beta_0 \Phi_b' - 2iI_{xx} \Omega \Phi_b'' + 4i\Sigma I \Phi_b'' \omega_b - I_{xx} \Omega \beta_0 \Phi_b' e^{2i\beta_0 x} - iI_{xx} \Omega \beta_0^2 \Phi_b e^{2i\beta_0 x} \right) D_1 A_{12}(T_1, T_2) \end{aligned} \quad (39-9)$$

$$\begin{aligned} P_{2,f,w}(x, T_1, T_2) = & \left(-8\Sigma I \beta_0 \Phi_b' \omega_b - 4i\Sigma I \beta_0^2 \Phi_b \omega_b - 4i\Phi_b \omega_b \pi^2 + iI_{xx} \Omega \beta_0^2 \Phi_b + 3I_{xx} \Omega \beta_0 \Phi_b' \right. \\ & \left. - 2iI_{xx} \Omega \Phi_b'' + 4i\Sigma I \Phi_b'' \omega_b - I_{xx} \Omega \beta_0 \Phi_b' e^{2i\beta_0 x} - iI_{xx} \Omega \beta_0^2 \Phi_b e^{2i\beta_0 x} \right) D_1 A_{11}(T_1, T_2) \end{aligned} \quad (40-9)$$

$$P_{2,b,w}(x, T_1, T_2) = \left(-8\Sigma I \beta_0 \Phi_f' \omega_f + 4i\Sigma I \Phi_f'' \omega_f - 4i\Phi_f \omega_f \pi^2 + iI_{xx} \Omega \beta_0^2 \Phi_f + 3I_{xx} \Omega \beta_0 \Phi_f' - 2iI_{xx} \Omega \Phi_f'' - 4i\Sigma I \beta_0^2 \Phi_f \omega_f - I_{xx} \Omega \beta_0 \Phi_f' e^{2i\beta_0 x} - iI_{xx} \Omega \beta_0^2 \Phi_f e^{2i\beta_0 x} \right) D_1 A_{12}(T_1, T_2) \quad (41-9)$$

$$P_{2,t}(x, T_1, T_2) = 2i\omega_t \Phi_t D_1 A_t(T_1, T_2) \quad (42-9)$$

معادلات (۳۷-۹) تا (۴۲-۹) نشان می‌دهد که هیچ جمله غیر سکولاری در حل مرتبه ۲ وجود

نداشته و در نتیجه از حل ناهمگن معادلات (۳۳-۹) تا (۳۶-۹) داریم،

$$\begin{aligned} U_2(x, T_0, T_1, T_2) &= 0 \\ V_2(x, T_0, T_1, T_2) &= 0 \\ W_2(x, T_0, T_1, T_2) &= 0 \\ \phi_2(x, T_0, T_1, T_2) &= 0 \end{aligned} \quad (43-9)$$

در نتیجه با توجه به رابطه (۴۳-۹)، باید داشته باشیم،

$$\begin{aligned} D_1 A_a(T_1, T_2) &= 0 \\ D_1 A_{11}(T_1, T_2) &= 0 \\ D_1 A_{12}(T_1, T_2) &= 0 \\ D_1 A_t(T_1, T_2) &= 0 \end{aligned} \quad (44-9)$$

معادله فوق به این معناست که A_a ، A_{11} ، A_{12} و A_t تنها تابعی از T_2 می‌باشند و در نتیجه معادله

(۲۳-۹) تا (۲۶-۹) به صورت زیر ساده می‌شود،

$$u_1(x, T_0, T_2) = \Phi_a(x) \left(A_a(T_2) e^{i\omega_a T_0} + \bar{A}_a(T_2) e^{-i\omega_a T_0} \right) \quad (45-9)$$

$$\begin{aligned} v_1(x, T_0, T_2) &= \Phi_f(x) \left(A_{11}(T_2) e^{i\omega_f T_0} + \bar{A}_{11}(T_2) e^{-i\omega_f T_0} \right) \\ &+ \Phi_b(x) \left(A_{12}(T_2) e^{i\omega_b T_0} + \bar{A}_{12}(T_2) e^{-i\omega_b T_0} \right) \end{aligned} \quad (46-9)$$

$$\begin{aligned} w_1(x, T_0, T_2) &= \Phi_f(x) \left(-iA_{11}(T_2) e^{i\omega_f T_0} + i\bar{A}_{11}(T_2) e^{-i\omega_f T_0} \right) \\ &+ \Phi_b(x) \left(-iA_{12}(T_2) e^{i\omega_b T_0} + i\bar{A}_{12}(T_2) e^{-i\omega_b T_0} \right) \end{aligned} \quad (47-9)$$

$$u_1(x, T_0, T_2) = \Phi_t(x) \left(A_t(T_2) e^{i\omega_t T_0} + \bar{A}_t(T_2) e^{-i\omega_t T_0} \right) \quad (48-9)$$

معادلات مرتبه ۳ نیز مانند معادلات مرتبه ۲ مورد بررسی قرار می‌گیرد. به منظور بیان نزدیکی

فرکانس تحریک به فرکانس طبیعی، پارامتر تنظیم کننده σ به شکل زیر تعریف می‌شود،

$$\Omega = \omega_f + \varepsilon^2 \sigma \quad (49-9)$$

با جایگذاری معادلات (۴۳-۹) و (۴۵-۹) تا (۴۹-۹) در (۱۹-۹) تا (۲۳-۹)، داریم

$$D_0^2 u_3(x, T_0, T_2) - \frac{2\mu}{\pi^4} u_3''(x, T_0, T_2) = P_{3,a}(x, T_2) e^{i\omega_a T_0} + CC + N.S.T \quad (50-9)$$

$$\begin{aligned}
& \left[\left(\beta_0^2 D_0 w_3 + i \beta_0^2 D_0 v_3 + i \beta_0 D_0 w_3' - \beta_0 D_0 v_3' \right) e^{-2i\beta_0 x} + \left(\beta_0^2 D_0 w_3 - i \beta_0^2 D_0 v_3 - i \beta_0 D_0 w_3' - \beta_0 D_0 v_3' \right) e^{2i\beta_0 x} \right. \\
& \left. + 3\beta_0 D_0 v_3' - \beta_0^2 D_0 w_3 + 2D_0 w_3'' \right] \frac{I_{xx} \Omega}{2\pi^2} + \frac{10\beta_0^2}{\pi^4} v_3'' - \frac{4\beta_0 \Sigma I}{\pi^2} D_0^2 w_3' - \frac{4\beta_0^3}{\pi^4} w_3' - 2 \frac{(\pi^2 + \beta_0^2 \Sigma I)}{\pi^2} D_0^2 v_3 \\
& + \frac{8\beta_0}{\pi^4} w_3''' - 2 \frac{v_3^{(4)}}{\pi^4} + 2 \frac{\Sigma I}{\pi^2} D_0^2 v_3'' = P_{3,f,v}(x, T_2) e^{i\omega_f T_0} + P_{3,b,v}(x, T_2) e^{i\omega_b T_0} + CC + N.S.T
\end{aligned} \tag{51-9}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\left(\beta_0^2 D_0 v_3 - i \beta_0^2 D_0 w_3 + i \beta_0 D_0 v_3' + \beta_0 D_0 w_3' \right) e^{-2i\beta_0 x} + \left(\beta_0^2 D_0 v_3 + i \beta_0^2 D_0 w_3 - i \beta_0 D_0 v_3' + \beta_0 D_0 w_3' \right) e^{2i\beta_0 x} \right. \\
& \left. + 3\beta_0 D_0 w_3' + \beta_0^2 D_0 v_3 - 2D_0 v_3'' \right] \frac{I_{xx} \Omega}{2\pi^2} + \frac{10\beta_0^2}{\pi^4} w_3'' + \frac{4\beta_0 \Sigma I}{\pi^2} D_0^2 v_3' + \frac{4\beta_0^3}{\pi^4} v_3' - 2 \frac{(\pi^2 + \beta_0^2 \Sigma I)}{\pi^2} D_0^2 w_3 \\
& - \frac{8\beta_0}{\pi^4} v_3''' - 2 \frac{w_3^{(4)}}{\pi^4} + 2 \frac{\Sigma I}{\pi^2} D_0^2 w_3'' = P_{3,f,w}(x, T_2) e^{i\omega_f T_0} + P_{3,b,w}(x, T_2) e^{i\omega_b T_0} + CC + N.S.T
\end{aligned} \tag{52-9}$$

$$D_0^2 \phi_3 - \frac{D_{xx}}{\pi^2 I_{xx}} \phi_3'' = P_{3,t}(x, T_2) e^{i\omega_t T_0} + CC + N.S.T \tag{53-9}$$

که CC و $N.S.T$ به معنی مختلط مزدوج و ضرایب غیر سکولار می‌باشند. $P_{3,a}(x, T_1, T_2)$

$P_{3,b,w}(x, T_1, T_2)$ ، $P_{3,f,w}(x, T_1, T_2)$ ، $P_{3,f,v}(x, T_1, T_2)$ ، $P_{3,b,v}(x, T_1, T_2)$

معادلات مرتبه ۳ از ε بوده و برابرند با،

$$P_{3,a}(x, T_2) = \left((2\beta_0^2 \Phi_a' \Phi_f' \Phi_f + \beta_0^2 \Phi_a'' \Phi_f'^2 + \Phi_a'' \Phi_f'^2 + 2\Phi_a' \Phi_f' \Phi_f'') \overline{A_{11}} A_a A_{11} + 9\Phi_a'^2 \Phi_a'' A_a^2 \overline{A_a} \right. \tag{54-9}$$

$$\left. + (\Phi_a'' \Phi_b'^2 + 2\Phi_a' \Phi_b' \Phi_b'' + 2\beta_0^2 \Phi_a' \Phi_b' \Phi_b + \beta_0^2 \Phi_a'' \Phi_b'^2) \overline{A_{12}} A_{12} A_a \right) \mu - 2i\pi^4 \omega_a \Phi_a D_2 A_a$$

$$P_{3,f,v} = \frac{1}{\pi^2} \left[\left(-\frac{1}{4} (\beta_0 \Phi_f' + i\beta_0^2 \Phi_f'') e^{2i\beta_0 x} + \frac{1}{4} i\beta_0^2 \Phi_f' + \frac{3}{4} \beta_0 \Phi_f' - \frac{1}{2} i\Phi_f'' \right) \Omega I_{xx} \right.$$

$$\left. - (i\beta_0^2 \Sigma I \Phi_f + 2\beta_0 \Sigma I \Phi_f' - i\Sigma I \Phi_f'' + i\pi^2 \Phi_f') \omega_f \right] A_1'$$

$$+ \frac{1}{2\pi^4} \left[(\Phi_f'' + i\beta_0 \Phi_f') \int_0^1 \Phi_b'^2 dx + (\beta_0^2 \Phi_f'' + i\beta_0^3 \Phi_f') \int_0^1 \Phi_b^2 dx + (\Phi_b'' + i\beta_0 \Phi_b') \int_0^1 \Phi_f' \Phi_b' dx \right.$$

$$\left. + (\beta_0^2 \Phi_b'' + i\beta_0^3 \Phi_b') \int_0^1 \Phi_f \Phi_b dx + (-\beta_0^2 \Phi_b' + i\beta_0 \Phi_b'') \int_0^1 \Phi_b' \Phi_f dx + (-i\beta_0 \Phi_b'' + \beta_0^2 \Phi_b') \int_0^1 \Phi_f' \Phi_b dx \right] \mu \overline{A_2} A_2 A_1$$

$$+ \frac{1}{\pi^4} (2i\beta_0 \Phi_u' \Phi_u'' \Phi_f + 2\Phi_u' \Phi_u'' \Phi_f' + \Phi_u'^2 \Phi_f'' + i\beta_0 \Phi_u' \Phi_f'') \mu \overline{A_u} A_u A_{11} \tag{55-9}$$

$$+ \frac{1}{2\pi^4} \left[(\beta_0^2 \Phi_f'' + i\beta_0^3 \Phi_f') \int_0^1 \Phi_f^2 dx + (\Phi_f'' + i\beta_0 \Phi_f') \int_0^1 \Phi_f'^2 dx \right] \mu A_1^2 \overline{A_1} - 1/2 i \varepsilon e^{i\beta_0 x} \Phi_f A_1 \omega_f$$

$$+ \frac{1}{2} (e_\eta + i e_\zeta) \Omega^2 e^{-i\beta_0 x} e^{i\sigma T_2} + \left[\frac{1}{\pi^2} (\Delta I \Phi_f'' - 4i\Delta I \beta_0 \Phi_f' - 3\Delta I \beta_0^2 \Phi_f) \Omega \omega_f \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi^4} \left(\frac{3}{2} \Delta I \Phi_f \omega_f^2 + 2 \frac{1}{2} \Delta D \Phi_f'' \right) \beta_0^2 + \frac{1}{\pi^4} (4\Delta D \Phi_f''' + 2\pi^2 \Delta I \Phi_f' \omega_f^2) i\beta_0 - \frac{1}{2\pi^2} \Delta I \omega_f^2 \Phi_f'' \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2\pi^4} \Delta D \Phi_f^{(4)} - \frac{1}{\pi^4} (4\Delta D \beta_0^4 \Phi_f + 11i\Delta D \beta_0^3 \Phi_f') \right] \overline{A_1} e^{2i\sigma T_2} e^{-4i\beta_0 x}$$

$$\begin{aligned}
P_{3,b,v} = & \frac{1}{\pi^2} \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} (\beta_0 \Phi'_b + i\beta_0^2 \Phi_b) e^{2i\beta_0 x} + \left(-i\Phi''_b + \frac{1}{2} i\beta_0^2 \Phi_b + \frac{3}{2} \beta_0 \Phi'_b \right) \right) I_{xx} \Omega \right. \\
& - \left. (i\beta_0^2 \Phi_b + 2\beta_0 \Phi'_b) \Sigma I \omega_b + (-\pi^2 \Phi_b + \Sigma I \Phi''_b) i \omega_b \right] A'_2 \\
& + \frac{1}{2\pi^4} \left[(i\beta_0 \Phi'_b + \Phi''_b) \int_0^1 \Phi_b'^2 dx + (\beta_0^2 \Phi''_b + i\beta_0^3 \Phi'_b) \int_0^1 \Phi_b^2 dx \right] \mu \bar{A}_2 A_2^2 - \frac{1}{2} ic e^{i\beta_0 x} \omega_b \Phi_b A_2 \\
& + \frac{1}{2\pi^4} \left[(\Phi''_b + i\beta_0 \Phi'_b) \int_0^1 \Phi_f'^2 dx + (i\beta_0^3 \Phi'_b + \beta_0^2 \Phi''_b) \int_0^1 \Phi_f^2 dx + (\beta_0^2 \Phi'_f - i\beta_0 \Phi''_f) \int_0^1 \Phi'_b \Phi_f dx \right. \\
& + \left. (\Phi''_f + i\beta_0 \Phi'_f) \int_0^1 \Phi'_f \Phi'_b dx + (i\beta_0 \Phi''_f - \beta_0^2 \Phi'_f) \int_0^1 \Phi'_f \Phi_b dx + (i\beta_0^3 \Phi'_f + \beta_0^2 \Phi''_f) \int_0^1 \Phi_f \Phi_b dx \right] \mu A_1 A_2 \bar{A}_1 \\
& + \frac{1}{\pi^4} (\Phi_u'^2 \Phi_b'' + i\beta_0 \Phi_u'^2 \Phi'_b + 2\Phi_u' \Phi_u'' \Phi'_b + 2i\beta_0 \Phi_u' \Phi_u'' \Phi_b) \mu A_2 A_a \bar{A}_a
\end{aligned} \tag{56-9}$$

$$\begin{aligned}
P_{3,f,w} = & \frac{1}{\pi^2} \left[1/2 \left(\left(\frac{1}{2} \beta_0^2 \Phi_f - \frac{1}{2} i\beta_0 \Phi'_f \right) e^{2i\beta_0 x} + \frac{1}{2} \beta_0^2 \Phi_f - \frac{3}{2} i\beta_0 \Phi'_f - \Phi''_f \right) \Omega I_{xx} \right. \\
& - \left. (-i\beta_0^2 \Sigma I \Phi_f + 2i\beta_0 \Sigma I \Phi'_f + \pi^2 \Phi_f + \Sigma I \Phi''_f) \omega_f \right] A'_1 \\
& + \frac{1}{2\pi^4} \left[(-i\Phi''_f + \beta_0 \Phi'_f) \int_0^1 \Phi_b'^2 dx + (-i\beta_0^2 \Phi''_f + \beta_0^3 \Phi'_f) \int_0^1 \Phi_b^2 dx + (-i\Phi''_b + \beta_0 \Phi'_b) \int_0^1 \Phi'_f \Phi'_b dx \right. \\
& + \left. (-i\beta_0^2 \Phi''_b + \beta_0^3 \Phi'_b) \int_0^1 \Phi_f \Phi_b dx + (i\beta_0^2 \Phi'_b + \beta_0 \Phi''_b) \int_0^1 \Phi'_b \Phi_f dx + (-\beta_0 \Phi''_b - i\beta_0^2 \Phi'_b) \int_0^1 \Phi'_f \Phi_b dx \right] \mu \bar{A}_2 A_2 A_1 \\
& + \frac{1}{\pi^4} (\beta_0 \Phi_u'^2 \Phi'_f - i\Phi_u'^2 \Phi''_f - 2i\Phi_u' \Phi_u'' \Phi'_f + 2\beta_0 \Phi_u' \Phi_u'' \Phi_f) \mu \bar{A}_a A_a A_1
\end{aligned} \tag{57-9}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2\pi^4} \left[(-i\beta_0^2 \Phi''_f + \beta_0^3 \Phi'_f) \int_0^1 \Phi_f^2 dx + (-\Phi''_f + \beta_0 \Phi'_f) \int_0^1 \Phi_f'^2 dx \right] \mu A_1^2 \bar{A}_1 \\
& + \left[\frac{1}{\pi^2} (-i\Phi''_f - 4\beta_0 \Phi'_f + 3i\beta_0^2 \Phi_f) \Omega \omega_f \Delta I - \frac{1}{\pi^4} (-4i\beta_0^4 \Phi_f + 11\beta_0^3 \Phi'_f) \Delta D \right. \\
& - \left. \frac{1}{\pi^4} \left(\frac{3}{2} \Delta I \Phi_f \omega_f^2 + 2\frac{1}{2} \Delta D \Phi_f \right) i\beta_0^2 + \frac{1}{\pi^4} (4\Delta D \Phi_f'' + 2\pi^2 \Delta I \Phi_f' \omega_f^2) \beta_0 \right. \\
& \left. + \frac{1}{2\pi^2} i\Delta I \omega_f^2 \Phi_f'' + \frac{1}{2\pi^4} i\Delta D \Phi_f^{(4)} \right] \bar{A}_1 e^{2i\sigma T_1} e^{-4i\beta_0 x} - \frac{1}{2} ce^{i\beta_0 x} \Phi_f A_1 \omega_f + \frac{1}{2} (-ie_\eta + e_\xi) \Omega^2 e^{-i\beta_0 x} e^{i\sigma T_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{3,b,w} = & \frac{1}{\pi^2} \left[1/2 \left(-\frac{1}{2} (i\beta_0 \Phi'_b + \beta_0^2 \Phi_b) e^{2i\beta_0 x} + \left(-\Phi''_b + \frac{1}{2} \beta_0^2 \Phi_b - \frac{3}{2} i\beta_0 \Phi'_b \right) \right) I_{xx} \Omega \right. \\
& - \left. (\beta_0^2 \Phi_b - 2i\beta_0 \Phi'_b) \Sigma I \omega_b + (-\pi^2 \Phi_b + \Sigma I \Phi''_b) \omega_b \right] A'_2 \\
& + \frac{1}{2\pi^4} \left[(\beta_0 \Phi'_b - i\Phi''_b) \int_0^1 \Phi_b'^2 dx + (-i\beta_0^2 \Phi''_b + \beta_0^3 \Phi'_b) \int_0^1 \Phi_b^2 dx \right] \mu \bar{A}_2 A_2^2 - 1/2c e^{i\beta_0 x} \omega_b \Phi_b A_2 \\
& + \frac{1}{2\pi^4} \left[(-i\Phi''_b + \beta_0 \Phi'_b) \int_0^1 \Phi_f'^2 dx + (\beta_0^3 \Phi'_b - i\beta_0^2 \Phi''_b) \int_0^1 \Phi_f^2 dx - (i\beta_0^2 \Phi'_f + \beta_0 \Phi''_f) \int_0^1 \Phi'_b \Phi_f dx \right. \\
& + \left. (-i\Phi''_f + \beta_0 \Phi'_f) \int_0^1 \Phi'_f \Phi'_b dx - (\beta_0 \Phi''_f + i\beta_0^2 \Phi'_f) \int_0^1 \Phi'_f \Phi_b dx + (\beta_0^3 \Phi'_f - i\beta_0^2 \Phi''_f) \int_0^1 \Phi_f \Phi_b dx \right] \mu A_1 A_2 \bar{A}_1 \\
& + \frac{1}{\pi^4} (\beta_0 \Phi_u'^2 \Phi'_b + 2\beta_0 \Phi_u' \Phi_u'' \Phi_b - i\Phi_u'^2 \Phi''_b - 2i\Phi_u' \Phi_u'' \Phi'_b) \mu A_2 A_a \bar{A}_a
\end{aligned} \tag{58-9}$$

$$P_{3,t}(x, T_2) = 2i\omega_t \Phi_t D_2 A_t \tag{59-9}$$

همانطور که نایفه بیان کرده است [120]، از آنجا که بخش همگن معادلات (50-9) تا (53-9)

دارای حل‌های غیر بدیهی می‌باشد، بخش غیر همگن نیز دارای پاسخ بوده اگر و تنها اگر، شرایط حل

پذیری برقرار باشند. شرایط حل پذیری در بردارنده تعامد طرف راست معادلات فوق با هر پاسخی از مسئله الحاقی خود که همان شکل مدهای خطی بوده، می‌باشد. می‌توان اثبات کرد که بخشهای همگن این معادلات نیز خود الحاق می‌باشند. بنابراین، شرایط حل پذیری آنها برابرند با،

$$\int_0^1 \Phi_a(x) P_{3,a}(x, T_2) dx = 0 \quad (60-9)$$

$$\int_0^1 \Phi_f(x) (P_{3,f,v}(x, T_2) + iP_{3,f,w}(x, T_2)) dx = 0 \quad \text{و} \quad (61-9)$$

$$\int_0^1 \Phi_b(x) (P_{3,b,v}(x, T_2) + iP_{3,b,w}(x, T_2)) dx = 0$$

$$\int_0^1 \Phi_t(x) P_{3,t}(x, T_2) dx = 0 \quad (62-9)$$

با توجه به معادله (۳۰-۹) تا (۳۲-۹) و (۵۴-۹) تا (۵۹-۹)، صورت نهایی شرایط حل پذیری

برابرند با،

$$i\omega_a D_2 A_a + \frac{9}{8} m^4 \mu A_a^2 \bar{A}_a + 1/4 (A_a A_{I1} \bar{A}_{I1} + A_a A_{I2} \bar{A}_{I2}) \left(m^2 n^2 + \frac{m^2}{\pi^2} \beta_0^2 \right) \mu = 0 \quad (63-9)$$

$$i \left[\Pi_{1,v} + \Pi_{2,v} \omega_f \right] D_2 A_{I1} + 4\mu \Pi_{3,v} A_{I1}^2 \bar{A}_{I1} + \Pi_{4,v} c \omega_f \left(\frac{1 - e^{i\beta_0}}{\beta_0} \right) A_1 + 2\mu \Pi_{3,v} A_{I1} \bar{A}_{I2} A_{I2} - \mu m^2 n^2 \Pi_{5,v} A_a \bar{A}_a A_{I1} + i \left[\Pi_{6,v} \omega_f^2 + \Pi_{7,v} \omega_f + \Pi_{8,v} \right] \left(\frac{1 - e^{-4i\beta_0}}{\beta_0} \right) e^{2i\sigma T_2} \bar{A}_{I1} \quad (64-9)$$

$$+ \Pi_{5,v} (e_\eta + i e_\xi) \Omega^2 e^{i\sigma T_2} = 0$$

$$i \Pi_{1,w} D_2 A_{I2} + 16n^2 \pi^2 c \omega_b \left(\frac{1 - e^{i\beta_0}}{\beta_0} \right) A_{I2} + \Pi_{2,w} \mu \bar{A}_{I2} A_{I2}^2 + 2 \Pi_{2,w} \mu A_{I2} A_{I1} \bar{A}_{I1} \quad (65-9)$$

$$+ 4\mu m^2 n^2 (\pi^2 \beta_0^2 - 4\pi^4 n^2) A_a \bar{A}_a A_{I2} = 0$$

$$D_2 A_t(T_2) = 0 \quad (66-9)$$

که

$$\Pi_{1,v} = (8\beta_0^6 - 18\pi^2 n^2 \beta_0^4 - 60\pi^4 n^4 \beta_0^2 + 16\pi^6 n^6) I_{xx} \Omega,$$

$$\Pi_{2,v} = [136\pi^4 n^2 \beta_0^2 - 32(\pi^4 n^4 + \pi^2 \beta_0^4) - 32(\pi^6 n^6 + \beta_0^6) \Sigma I + 104\pi^2 n^2 \beta_0^2 (\pi^2 n^2 + \beta_0^2) \Sigma I],$$

$$\Pi_{3,v} = [208\pi^2 n^4 \beta_0^2 (\pi^2 n^2 + \beta_0^2) - 64(\pi^6 n^8 + n^2 \beta_0^6)],$$

$$\Pi_{4,v} = 16\pi^4 n^2 (\pi^2 n^2 - 4\beta_0^2), \Pi_{5,v} = 4(-17\beta_0^2 n^2 \pi^4 + 4\pi^2 \beta_0^4 + 4n^4 \pi^6)$$

$$\Pi_{6,v} = (21\pi^2 n^2 \beta_0^2 - 4\pi^4 n^4 - 5\beta_0^4) \pi^2 n^2 \Delta I,$$

$$\Pi_{7,v} = (-42\pi^2 n^2 \beta_0^2 + 8\pi^4 n^4 + 10\beta_0^4) \pi^2 n^2 \Delta I \Omega,$$

$$\begin{aligned} \Pi_{8,v} &= (4\pi^6 n^8 + 36\beta_0^6 n^2 + 19\pi^4 n^6 \beta_0^2 - 149\pi^2 n^4 \beta_0^4) \Delta D, \\ \Pi_{9,v} &= [-6\pi^4 n^4 \beta_0^2 - 8\pi^6 n^6 + 162\beta_0^4 n^2 \pi^2 - 40\beta_0^6] n^2 \pi^2, \\ \Pi_{1,w} &= [2(-\beta_0^4 + 2\beta_0^2 n^2 \pi^2 + 8n^4 \pi^4) I_{xx} \Omega + 8(-3\beta_0^2 n^2 \pi^2 + \beta_0^4 - 4n^4 \pi^4) \Sigma I \omega_b \\ &+ 8(-4n^2 \pi^4 + \pi^2 \beta_0^2) \omega_b], \Pi_{2,w} = 16(n^2 \beta_0^4 - 3\beta_0^2 n^4 \pi^2 - 4n^6 \pi^4), \\ e_\eta &= \int_0^1 \Phi_{f|b}(x) e_\eta(x) dx, e_\xi = \int_0^1 \Phi_{f|b}(x) e_\xi(x) dx. \end{aligned} \quad (67-9)$$

برای حذف $e^{i\sigma T_0}$ در معادلات (۶۳-۹) تا (۶۶-۹) قرار می‌دهیم،

$$A_{l1}(T_2) = A_l(T_2) e^{i\sigma T_2} \quad (68-9)$$

و در نهایت برای بدست آوردن پاسخ معادلات حاصل، $A_l(T_2)$ و $A_{l2}(T_2)$ و A_a را به صورت قطبی

$$A_l = \frac{1}{2} a_{l1}(T_2) e^{i\theta(T_2)}, \quad A_{l2} = \frac{1}{2} a_{l2}(T_2) e^{i\theta(T_2)}, \quad A_a = \frac{1}{2} a_u(T_2) e^{i\theta(T_2)} \quad (69-9)$$

در معادلات حاصل قرار می‌دهیم. A_l ، A_{l2} و A_a به ترتیب دامنه های نوسانات عرضی همسو و

ناهمسو و نوسانات محوری بوده و $\theta(T_2)$ ، $\Theta(T_2)$ و $\mathcal{H}(T_2)$ به ترتیب فازهای نوسانات عرضی همسو و

ناهمسو و نوسانات محوری می‌باشند. سپس با جداسازی بخشهای حقیقی و موهومی معادلات حاصل،

هفت معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول به شکل زیر بدست می‌آید،

$$\omega_a D_2 \mathcal{H} = 1/32 \mu m^2 \left(9m^2 a_u^2 + (2\beta_0^2 + 2n^2) a_{l1}^2 + \left(2\pi^2 n^2 + \frac{2}{\pi^2} \beta_0^2 \right) a_{l2}^2 \right) \quad (70-9)$$

$$D_2 a_u = 0 \quad (71-9)$$

$$\begin{aligned} [\Pi_{1,v} + \Pi_{2,v} \omega_f] a_{l1} D_2 \Theta &= 1/4 \Pi_{3,v} \mu a_{l1}^3 + \Pi_{4,v} \left(\frac{1 - \cos(\beta_0)}{\beta_0} \right) c \omega_f a_{l1} + 1/2 \Pi_{3,v} \mu a_{l2}^2 a_{l1} \\ &+ [\Pi_{6,v} \omega_f^2 + \Pi_{7,v} \omega_f + \Pi_{8,v}] \left(\frac{\sin(2\Theta) - \sin(4\beta_0 + 2\Theta)}{\beta_0} \right) a_{l1} - \Pi_{5,v} \mu m^2 n^2 a_{l1} a_u^2 \\ &- [\Pi_{1,v} + \Pi_{2,v} \omega_f] \sigma a_{l1} + 2\Omega^2 \Pi_{5,v} (e_\xi \sin(\Theta) + e_\eta \cos(\Theta)) \end{aligned} \quad (72-9)$$

$$\begin{aligned} [\Pi_{1,v} + \Pi_{2,v} \omega_f] D_2 a_{l1} &= \Pi_{4,v} \sin(\beta_0) c \omega_f a_{l1} \\ &+ [\Pi_{6,v} \omega_f^2 + \Pi_{7,v} \omega_f + \Pi_{8,v}] \left(\frac{-\cos(2\Theta) + \cos(4\beta_0 + 2\Theta)}{\beta_0} \right) a_{l1} \\ &+ 2\Pi_{5,v} \Omega^2 (e_\eta \sin(\Theta) - e_\xi \cos(\Theta)) \end{aligned} \quad (73-9)$$

$$\Pi_{1,w} D_2 a_{l2} = 16n^2 \pi^4 c \omega_b \left(\frac{\sin(\beta_0)}{\beta_0} \right) a_{l2} \quad (74-9)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Pi_{1,w} a_{l2} D_2 \theta &= \frac{1}{2} \Pi_{2,w} \mu a_{l2} a_{l1}^2 + 8n^2 \pi^4 c \omega_b \left(\frac{1 - \cos(\beta_0)}{\beta_0} \right) a_{l2} + \frac{1}{8} \Pi_{2,w} \mu a_{l2}^3 \\ &+ (\pi^2 \beta_0^2 - 4\pi^4 n^2) \mu m^2 n^2 a_u^2 \end{aligned} \quad (75-9)$$

به منظور بررسی پایداری ارتعاشاتی تیر مورد نظر و همچنین استخراج نقاط ثابت تعادلی معادلات مذکور، می‌بایست مشتقات زمانی آنها صفر در نظر گرفته شوند. با انجام این کار و همانطور که از معادلات نشان داده شده مشخص است، a_{12} نیز برابر صفر خواهد شد و این بدان معنی است که تنها لنگ زنی همسو در ارتعاشات عرضی تحریک خواهد شد. به این ترتیب، معادلات نهایی برای بررسی پایداری سیستم مورد نظر عبارتند از،

$$9m^2 a_{u0}^2 + (2\beta_0^2 + 2n^2) a_{110}^2 = 0 \quad (76-9)$$

$$1/4 \Pi_{3,v} \mu a_{110}^3 + \Pi_{4,v} \left(\frac{1 - \cos(\beta_0)}{\beta_0} \right) c \omega_f a_{110} - \Pi_{5,v} \mu m^2 n^2 a_{110} a_{u0}^2 + [\Pi_{6,v} \omega_f^2 + \Pi_{7,v} \omega_f + \Pi_{8,v}] \left(\frac{\sin(2\Theta_0) - \sin(4\beta_0 + 2\Theta_0)}{\beta_0} \right) a_{110} \quad (77-9)$$

$$- [\Pi_{1,v} + \Pi_{2,v} \omega_f] \sigma a_{110} + 2\Omega^2 \Pi_{5,v} (e_\xi \sin(\Theta_0) + e_\eta \cos(\Theta_0)) = 0$$

$$\Pi_{4,v} \sin(\beta_0) c \omega_f a_{110} + [\Pi_{6,v} \omega_f^2 + \Pi_{7,v} \omega_f + \Pi_{8,v}] \left(\frac{-\cos(2\Theta_0) + \cos(4\beta_0 + 2\Theta_0)}{\beta_0} \right) a_{110} \quad (78-9)$$

$$+ 2\Pi_{5,v} \Omega^2 (e_\eta \sin(\Theta_0) - e_\xi \cos(\Theta_0)) = 0$$

اکنون با توجه به معادلات (70-9) تا (71-9) داریم،

$$a_u(T_2) = C_a \quad (79-9)$$

$$g(T_2) = \int \left[\frac{\mu m^2}{32\omega_a} \left(9m^2 C_a^2 + (2\beta_0^2 + 2n^2) a_{11}^2 + \left(2\pi^2 n^2 + \frac{2}{\pi^2} \beta_0^2 \right) a_{12}^2 \right) \right] dT_2 + D_a \quad (80-9)$$

که C_a و D_a ثوابتی بوده که از شرایط اولیه ارتعاشات محوری بدست می‌آیند.

۹-۳- تحلیل پایداری با تعیین ماتریس ژاکوبین

به منظور پایداری حالت پایای معادلات مرتبه اول (70-9) تا (75-9) و با فرض $a_{12}(T_2) = 0$

ماتریس ژاکوبین، J ، طرف راست معادلات (72-9) تا (73-9)، برابر است با [118]،

$$J = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (81-9)$$

که

$$\begin{aligned}
A &= \frac{3\Pi_{3,v}}{4\Lambda_1 a_{110}} \mu a_{110}^2 - \frac{\Pi_{5,v} \mu m^2 n^2}{\Lambda_{1,v} a_{110}} a_{u0}^2 + \frac{\Pi_{4,v}}{\Lambda_1 a_{110}} \left(\frac{1 - \cos(\beta_0)}{\beta_0} \right) c\omega_f \\
&+ \frac{\Lambda_2}{\Lambda_1 a_{110}} \left(\frac{\sin(2\Theta_0) - \sin(4\beta_0 + 2\Theta_0)}{\beta_0} \right) - \frac{\sigma}{a_{110}} \\
B &= \frac{\Lambda_2}{\Lambda_1} \left(\frac{2\cos(2\Theta_0) - 2\cos(4\beta_0 + 2\Theta_0)}{\beta_0} \right) \\
&+ 2\Omega^2 \frac{\Pi_{5,v}}{\Lambda_1 a_{110}} (e_\xi \cos(\Theta_0) - e_\eta \sin(\Theta_0)) \\
C &= \frac{\Lambda_2}{\Lambda_1} \left(\frac{-\cos(2\Theta_0) + \cos(4\beta_0 + 2\Theta_0)}{\beta_0} \right) + \frac{\Pi_{4,v}}{\Lambda_1} \sin(\beta_0) c\omega_f \\
D &= \frac{\Lambda_2}{\Lambda_1} \left(\frac{2\sin(2\Theta_0) - 2\sin(4\beta_0 + 2\Theta_0)}{\beta_0} \right) a_{110} + 2\Omega^2 \frac{\Pi_{5,v}}{\Lambda_1} (e_\eta \cos(\Theta_0) + e_\xi \sin(\Theta_0))
\end{aligned}$$

و

$$\Lambda_1 = [\Pi_{1,v} + \Pi_{2,v}\omega_f], \quad \Lambda_2 = [\Pi_{6,v}\omega_f^2 + \Pi_{7,v}\omega_f + \Pi_{8,v}] \quad (82-9)$$

که Λ_2 اشاره به نامتقارنی سیستم داشته که با فرکانس 2Ω دوران می‌کند و مقادیر ویژه متناظر

آن از معادله زیر بدست می‌آیند،

$$|J - \lambda I| = 0 \quad \text{یا} \quad \lambda^2 - (A+D)\lambda + AD - BC = 0 \quad (83-9)$$

با توجه به معادلات (81-9) تا (83-9)، از آنجا که $(A+D) < 0$ ، اگر $AD - BC > 0$ ، حرکت

دینامیکی سیستم در نقاط ثابت تعادلی، (a_{110}, Θ_0) پایدار بوده و در غیر اینصورت ناپایدار می‌باشد.

۹-۴- نتایج

شکل (۱-۹) تا شکل (۷-۹) منحنی‌های پاسخ فرکانسی غیر خطی تیر مذکور را را پیرامون نقاط

ثابت تعادلی سیستم در مدهای مختلف محوری و عرضی و زوایای پیچش مختلف برای حالات متقارن و

نامتقارن نشان می‌دهد. همانند حالات قبل، فرض شده است که نابالانسی‌ها در هر دو جهت اصلی تیر

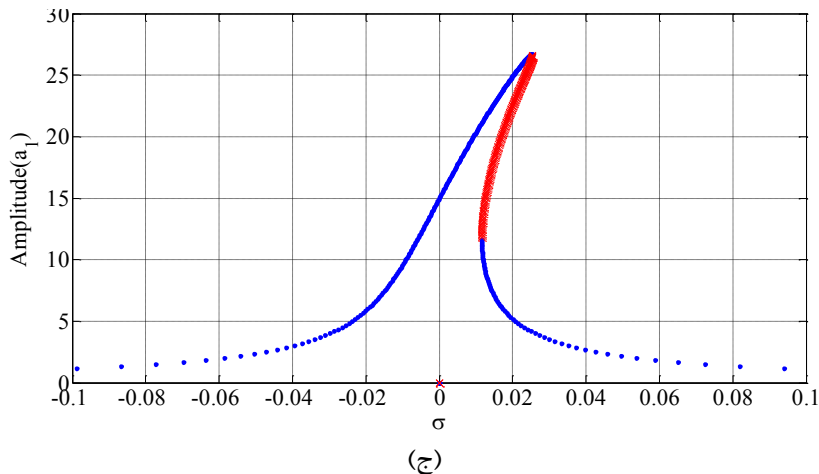
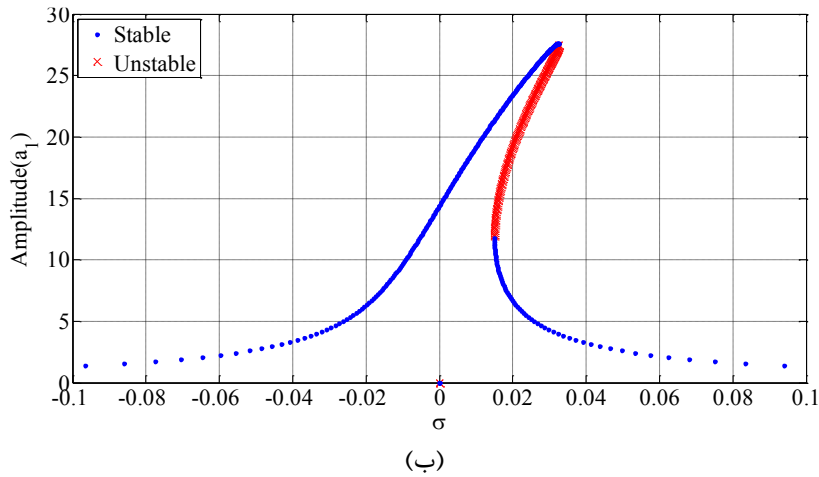
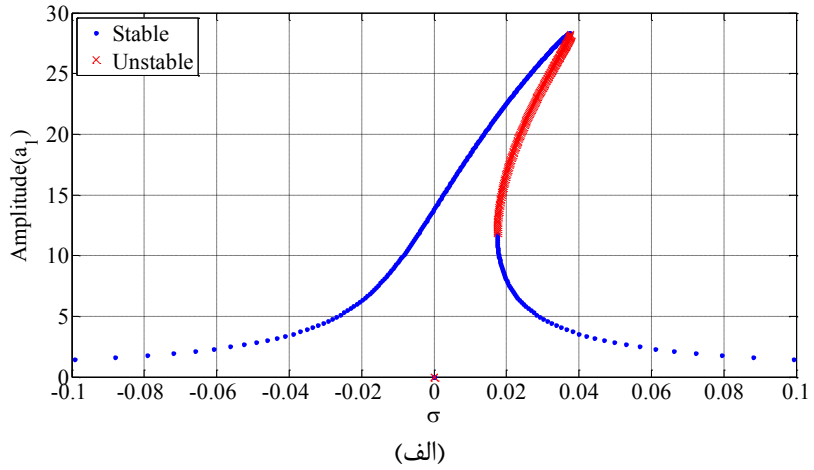
یکسان بوده و برابرند با، $e_\eta = e_\xi = 0.05$. همانطور که مشاهده شده است، از آنجا که منحنی‌ها در همه

مدها در حالات متقارن و نامتقارن به سمت راست خم شده‌اند، تأثیر پارامترهای غیرخطی از نوع سخت

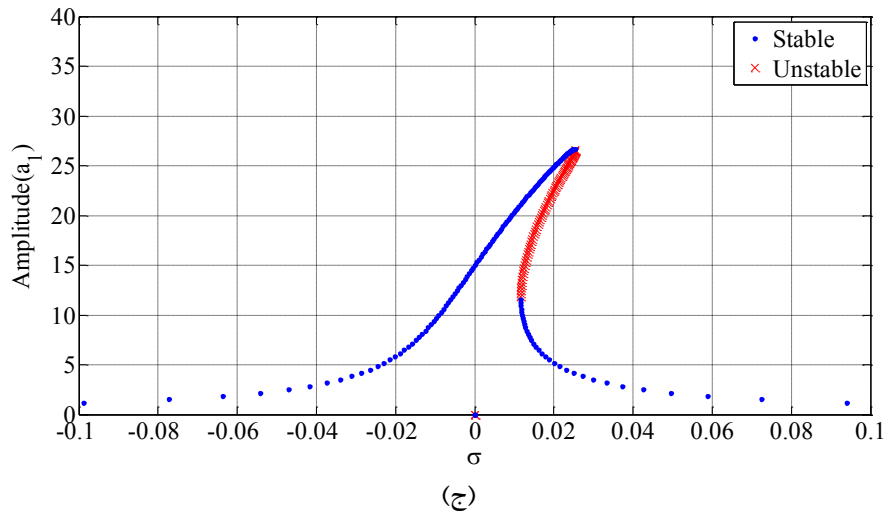
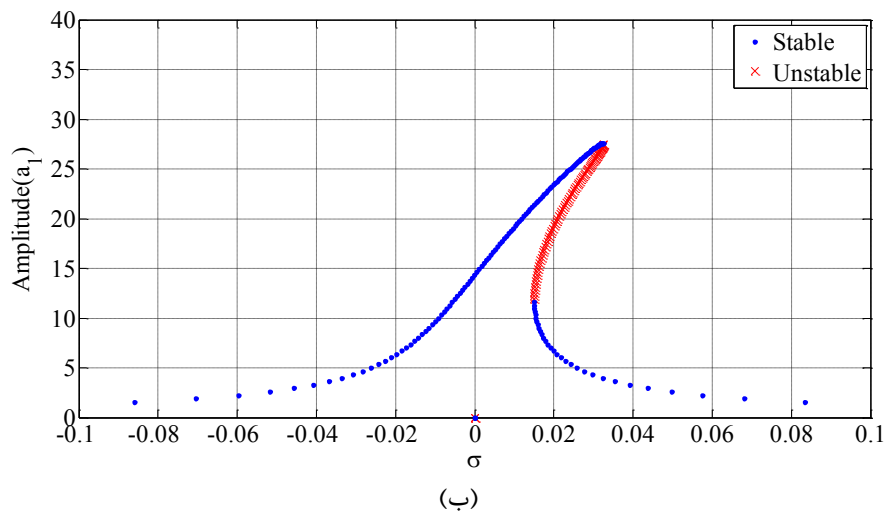
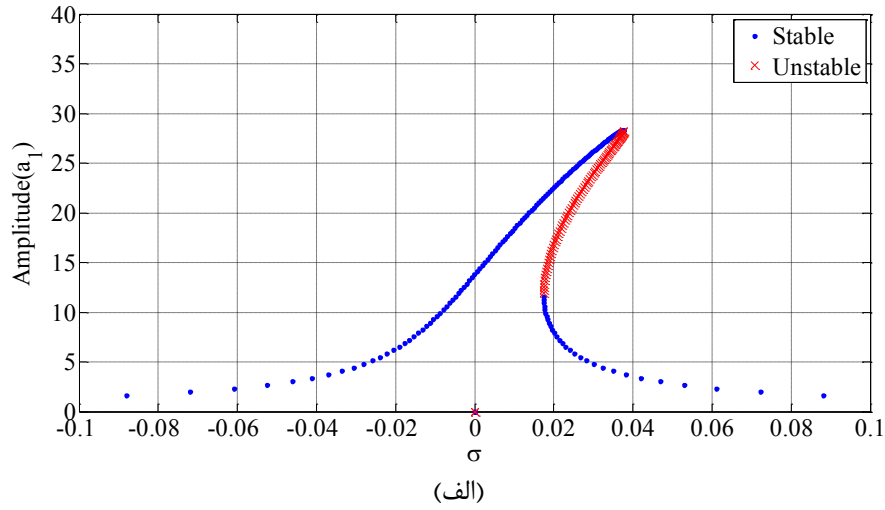
شونده می‌باشد. با توجه به شکل (۱-۹) تا شکل (۴-۹)، در حالت متقارن $\Lambda_2 = 0$ ، تیر تنها دارای یک

منبع تحریک بوده که همان نابالانسی با فرکانس Ω می‌باشد و در نتیجه منحنی پاسخ فرکانسی دارای یک قله بوده و تنها یک پرش در فرکانس رزونانس رخ می‌دهد. همچنین، در حالت متقارن، دیده می‌شود که برای برخی از مقادیر σ ، سیستم دارای تنها یک پاسخ پایدار بوده در حالی که برای برخی دیگر، سیستم دارای سه پاسخ بوده که دوتای آنها پایدار و دیگری ناپایدار است. در نتیجه در این حالات همواره پدیده پرش و دو شاخگی اتفاق می‌افتد. این درحالی است که وقتی نامتقارنی در سیستم وجود دارد ($\Lambda_2 \neq 0$)، علاوه بر منبع تحریک ناشی از نابالانسی با فرکانس Ω ، یک منبع تحریک دیگر با فرکانس 2Ω در سیستم بوجود می‌آید که ناشی از وجود نامتقارنی در سیستم می‌باشد و به عنوان تحریک پارامتریک در سیستم شناخته می‌شود. از این‌رو، منحنی‌های پاسخ فرکانسی دارای دو قله می‌باشند. این مطلب در شکل (۵-۹) تا شکل (۷-۹) برای تیرهای پیچیده شده نامتقارن محوری نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، در برخی از مقادیر، سیستم دارای پنج پاسخ، در برخی دیگر، یک پاسخ و در برخی دیگر دارای سه پاسخ بوده که شامل ترکیبی از پاسخهای پایدار و ناپایدار می‌باشند. بسیار واضح است که در این وضعیت همواره پدیده دو شاخگی اتفاق می‌افتد. با توجه به شکل (۱-۹) در مد اول عرضی و مد اول محوری یعنی $m=1, n=1$ ، با افزایش زاویه پیچش، β_0 ، دامنه قله‌های نوسانی کاهش می‌یابد. از این‌رو، در این حالت می‌توان گفت وجود زاویه پیچش می‌تواند به عنوان یک پارامتر میرا کننده نوسانات سیستم عمل کند. این استراتژی زمانی که مد دوم ارتعاشات محوری با مد اول ارتعاشات عرضی کوپل می‌شوند ($m=2, n=1$)، در حالت متقارن محوری ($\Lambda_2=0$) نیز تکرار می‌شود (شکل (۲-۹)). اما زمانی که مد دوم ارتعاشات عرضی $n=2$ با مدهای اول $m=1$ یا دوم ارتعاشات محوری $m=2$ کوپل می‌شود، با افزایش زاویه پیچش، β_0 ، تأثیرات سخت شونده‌گی به تدریج افزایش یافته و در نتیجه دامنه قله‌های نوسانی افزایش می‌یابد. از این‌رو، در این حالت می‌توان گفت وجود زاویه پیچش نمی‌تواند در کاهش نوسانات سیستم کمک شایانی کند. از طرفی، همانطور که نشان داده شده است، از آنجا که در مدهای اول و دوم ارتعاشات عرضی، $n=1, 2$ ، با افزایش زاویه پیچش، نقطه پرش از پاسخ ناپایدار به پاسخ پایدار سیستم (R_1)، به سمت چپ متمایل شده است، می‌توان گفت فرکانس نقطه پرش که همان

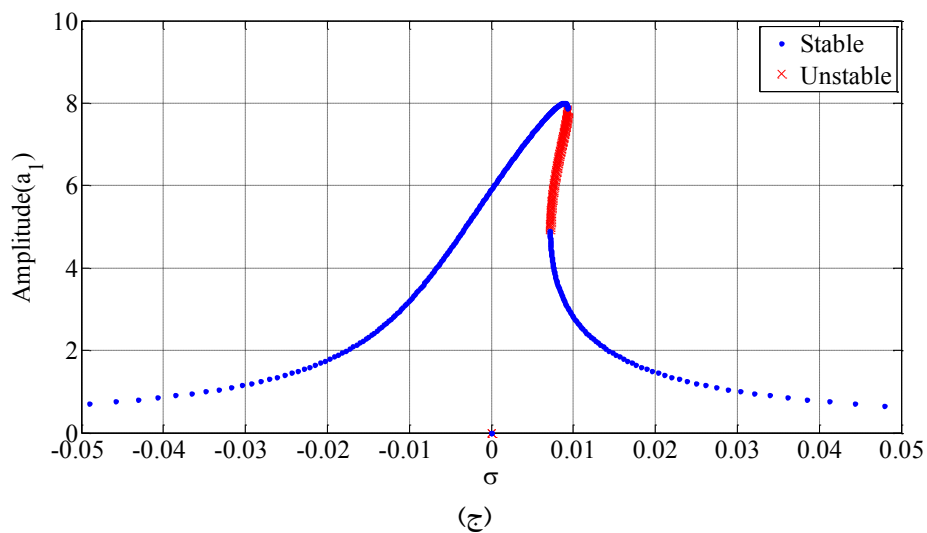
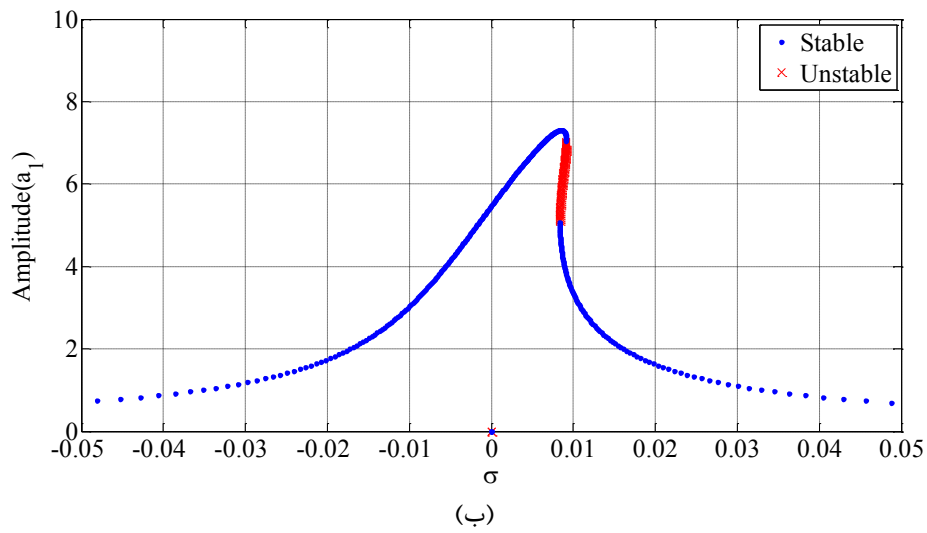
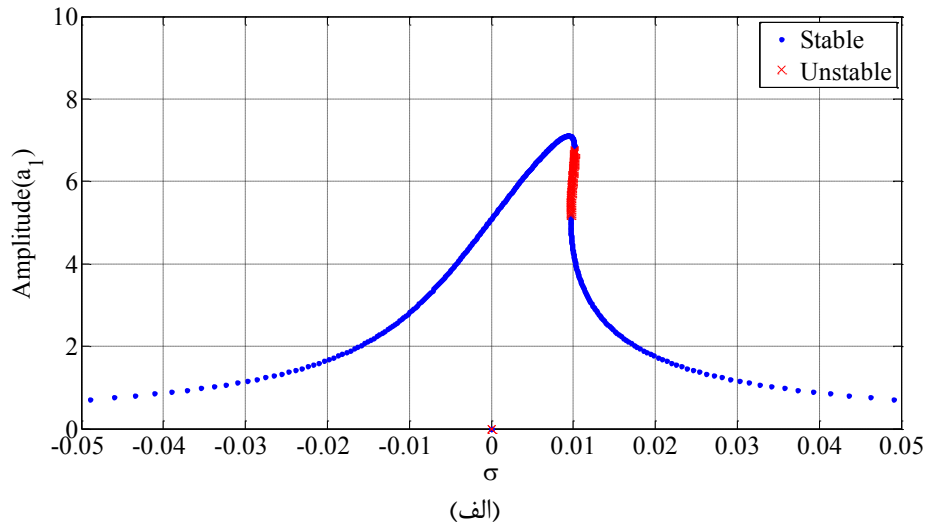
saddle-node bifurcation می‌باشد، کاهش یافته یا به عبارتی دیگر، پرش در saddle-node bifurcation در فرکانس کوچکتری رخ می‌دهد.



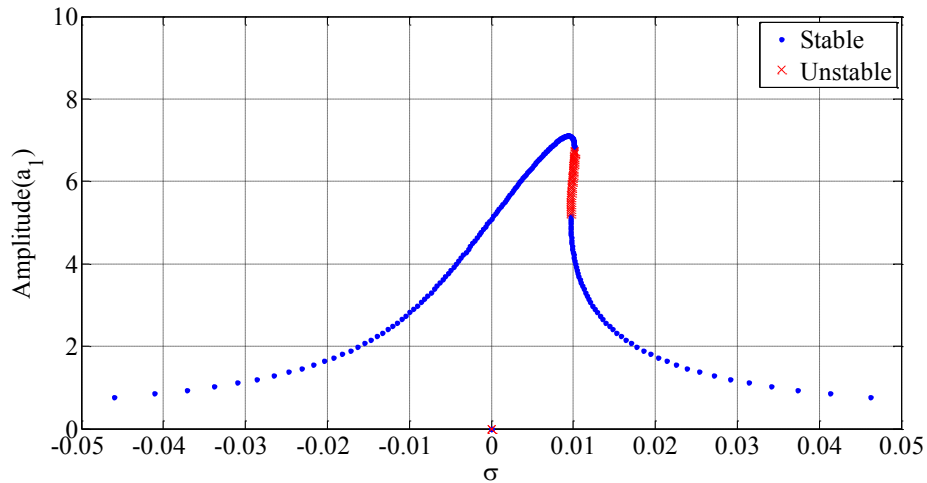
شکل (۹-۱) منحنی پاسخ فرکانسی عرضی تیر پیچیده شده دوار متقارن در مد اول خمشی ($n=1$) و مد اول طولی ($m=1$) و زاویه پیش‌فشار (الف) $\beta_0 = 0^\circ$ (ب) $\beta_0 = 30^\circ$ و (ج) $\beta_0 = 60^\circ$



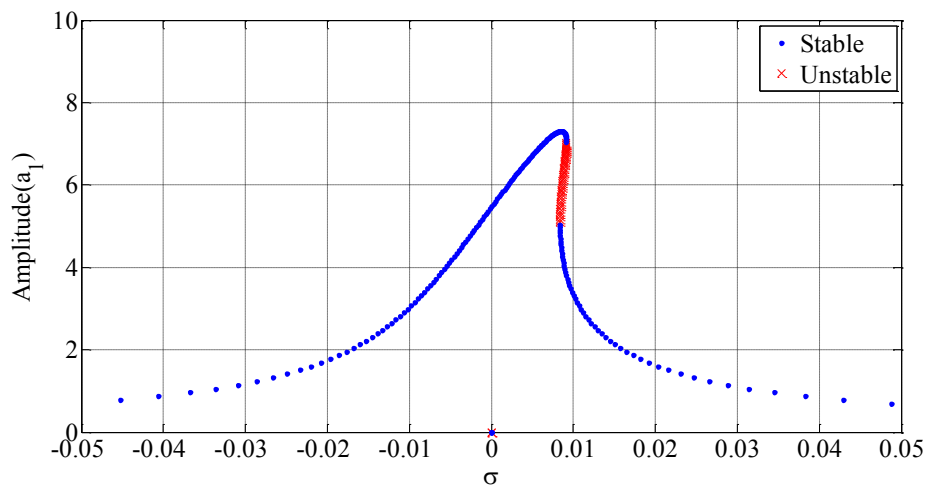
شکل (۹-۲) منحنی پاسخ فرکانسی عرضی تیر پیچیده شده دوار متقارن در مد اول خمشی ($n=1$) و مد دوم طولی ($m=2$) و زاویه پیچش الف) ($\beta_0 = 0$) ب) ($\beta_0 = 30^\circ$) و ج) ($\beta_0 = 60^\circ$)



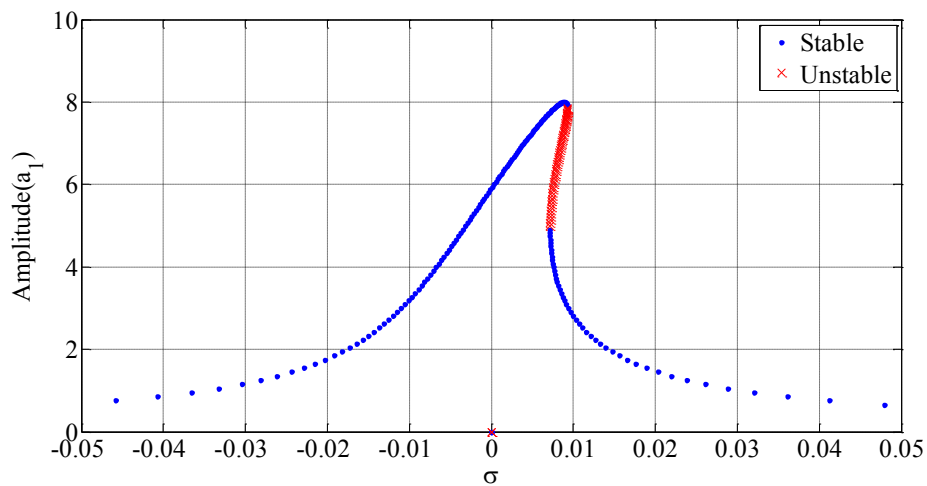
شکل (۹-۳) منحنی پاسخ فرکانسی عرضی تیر پیچیده شده دوار متقارن در مد دوم خمشی ($n=2$) و مد اول طولی ($m=1$) و زاویه پیچش الف) ($\beta_0 = 0$) ب) ($\beta_0 = 30^\circ$) و ج) ($\beta_0 = 60^\circ$)



(الف)



(ب)



(ج)

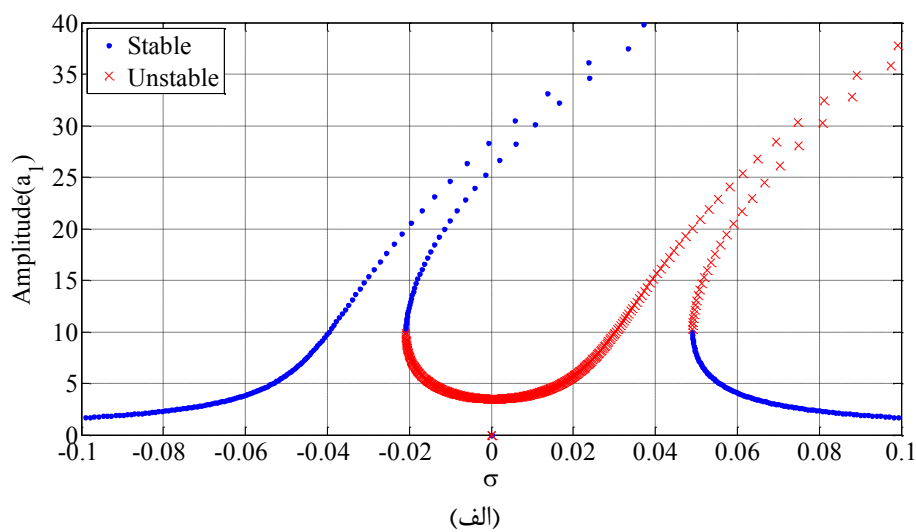
شکل (۹-۴) منحنی پاسخ فرکانسی عرضی تیر پیچیده شده دوار متقارن در مد دوم خمشی ($n=2$) و مد

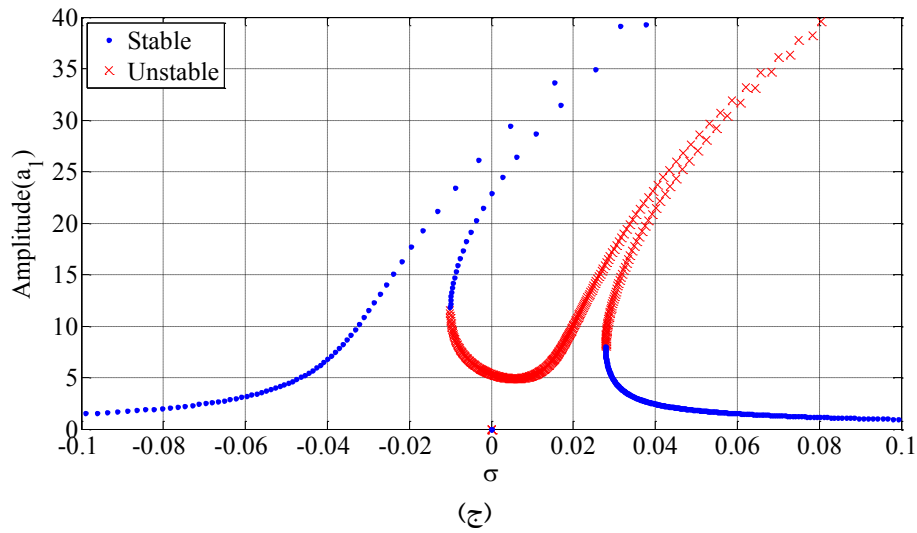
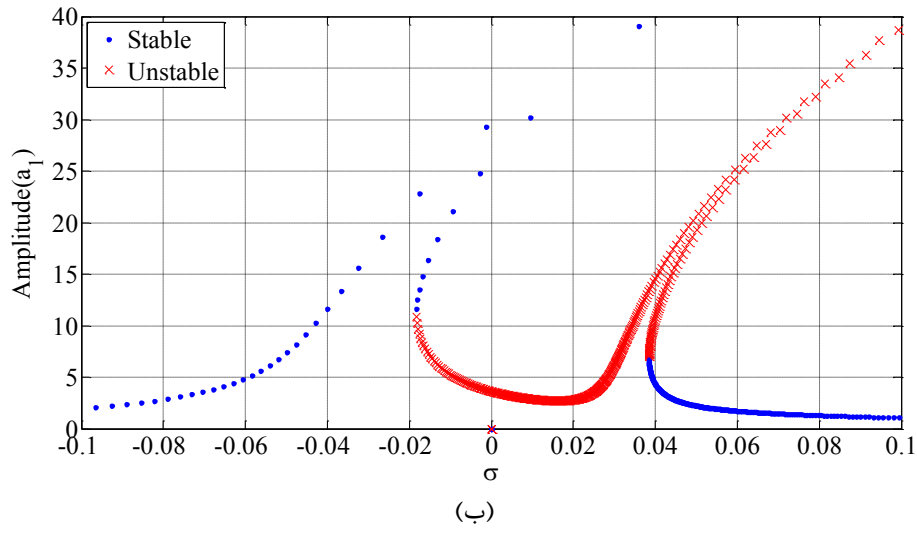
دوم طولی ($m=2$) و زاویه پیش الف) ($\beta_0 = 0$) ب) ($\beta_0 = 30^\circ$) و ج) ($\beta_0 = 60^\circ$)

در حالت نامتقارن محوری ($\Lambda_2 \neq 0$)، همانطور که در شکل (۹-۵) و شکل (۹-۶) نشان داده شده

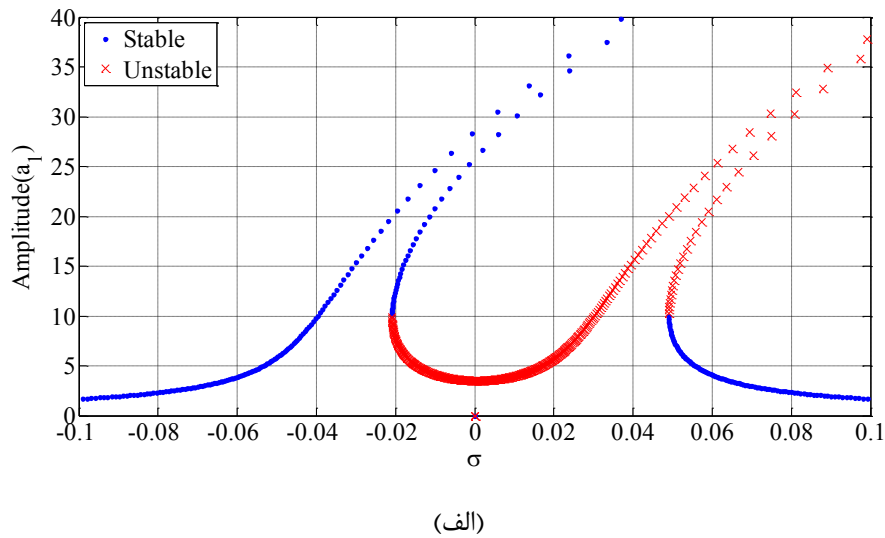
است، با افزایش زاویه پیچش در مدهای اول و دوم عرضی ($n=1,2$)، مقادیر فرکانس و فاصله بین نقاط پرش در saddle-node bifurcation (یعنی R_1 و R_2) کاهش می‌یابد. بعبارتی دیگر، پهنای فرکانسی که در آن، پاسخ‌های پایدار سیستم رخ می‌دهد (فاصله فرکانسی $R_1 - R_2$)، کاهش می‌یابد.

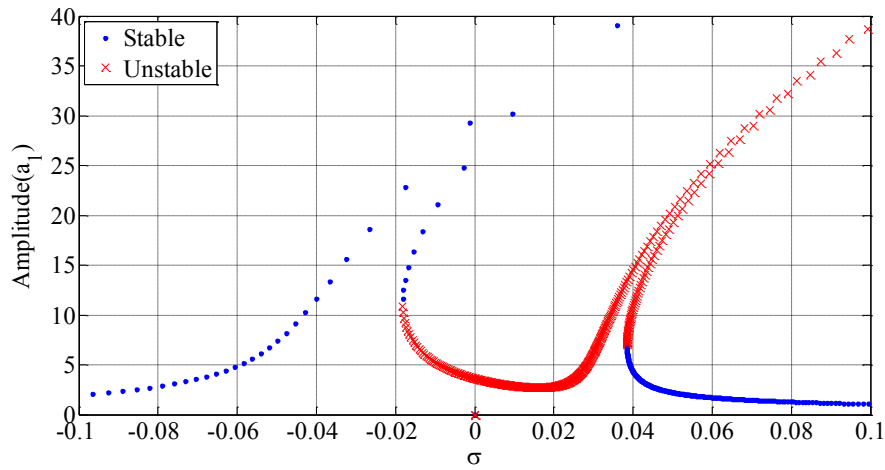
در مقایسه‌ای دیگر با توجه به نتایج متناظر بدست آمده در فصل ۲، مشاهده می‌شود که تأثیر کوپلینگ ارتعاشات محوری بر روی ارتعاشات عرضی تأثیری فزاینده در دامنه نوسانات پایدار سیستم می‌باشد. به منظور بررسی و صحت نتایج بدست آمده، با قرار دادن $\beta_0 = 0$ در معادلات (۹-۷۶) تا (۹-۷۷) تیر کوپل شده با ارتعاشات محوری تبدیل به یک تیر کوپل شده با زاویه پیچش $\beta_0 = 0$ خواهد شد. با مقایسه نتایج گزارش شده در حالت متقارن در شکل (۹-۱-الف) (ارتعاشات عرضی تیر مستقیم با در نظر گرفتن ارتعاشات محوری) و نتایج متناظر در شکل (۲-۱۰-الف) (ارتعاشات عرضی تیر مستقیم بدون در نظر گرفتن ارتعاشات محوری) می‌توان دید که وجود ارتعاشات محوری باعث افزایش دامنه نوسانات عرضی سیستم مذکور می‌شود. حال با مقایسه این رفتار، با رفتار نمودارهای پاسخ فرکانسی گزارش شده توسط حسینی و همکاران [121] مشخص است که وجود ارتعاشات محوری در کار آنها نیز منجر به افزایش دامنه نوسانات عرضی تیر مستقیم شده که مشخص است هر دو نتیجه از نظر رفتاری، همگرایی خوبی با یکدیگر دارند.



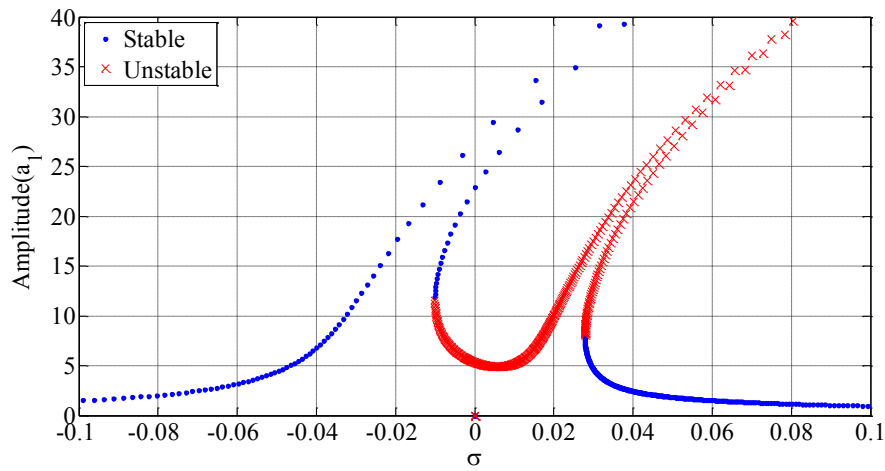


شکل (۵-۹) منحنی پاسخ فرکانسی عرضی تیر پیچیده شده دوار نامتقارن در مد اول خمشی ($n=1$) و مد اول طولی ($m=1$) و زاویه پیش‌فشار الف) ($\beta_0 = 0^\circ$ ب) ($\beta_0 = 30^\circ$ ج) و ($\beta_0 = 60^\circ$)





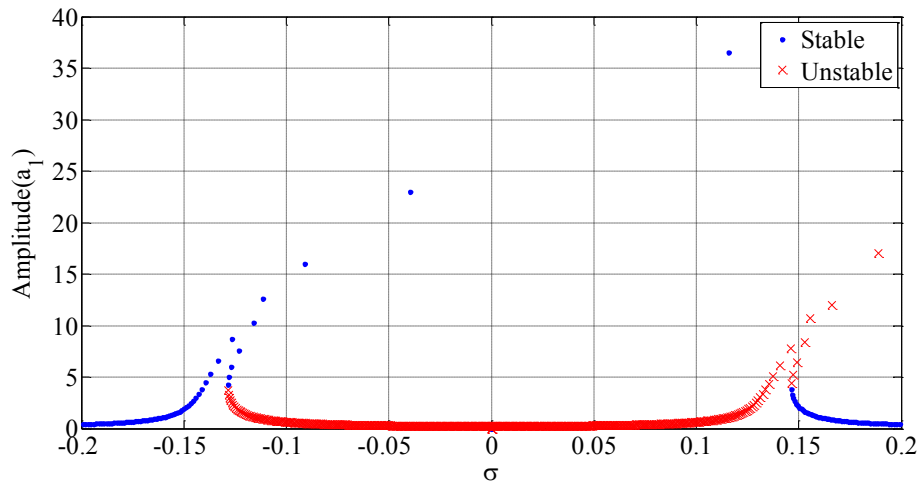
(ب)



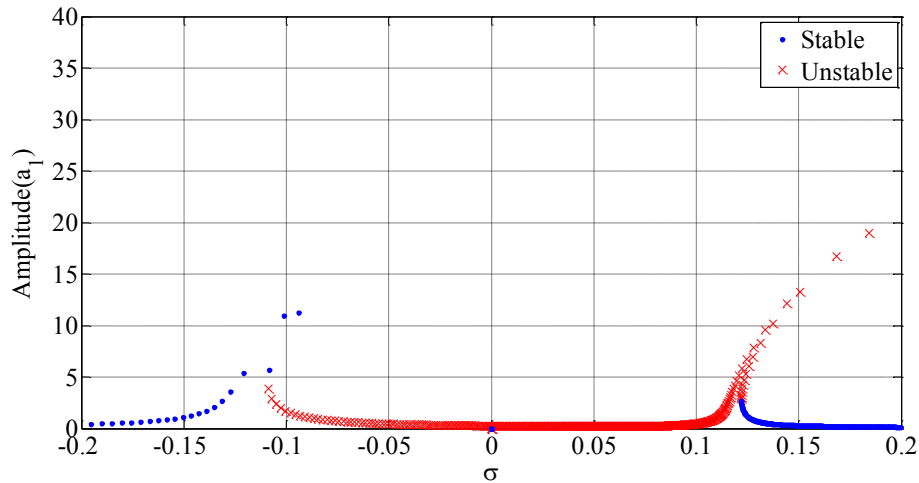
(ج)

شکل (۹-۶) منحنی پاسخ فرکانسی عرضی تیر پیچیده شده دوار نامتقارن در مد اول خمشی ($m=1$) و

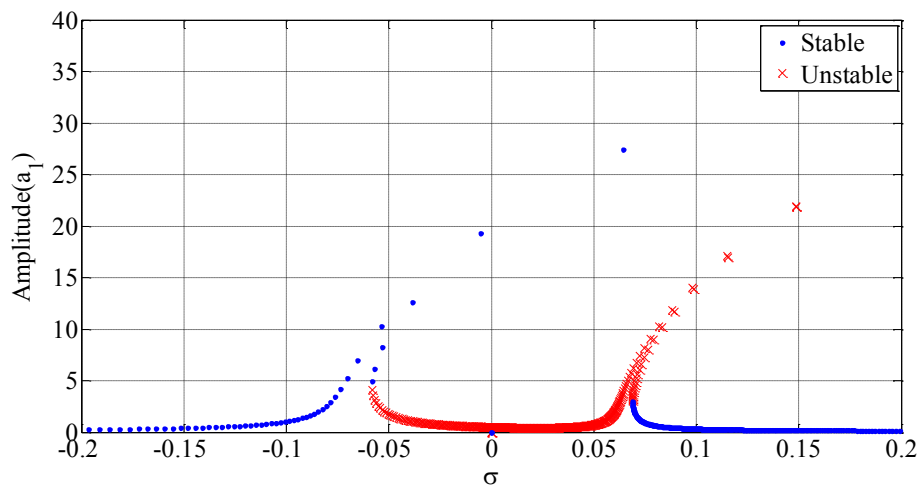
مد دوم طولی ($m=2$) و زاویه پیش الف) ($\beta_0 = 0$) ب) ($\beta_0 = 30^\circ$) و ج) ($\beta_0 = 60^\circ$)



(الف)



(ب)



(ج)

شکل (۷-۹) منحنی پاسخ فرکانسی عرضی تیر پیچیده شده دوار نامتقارن در مد دوم خمشی ($n=2$) و

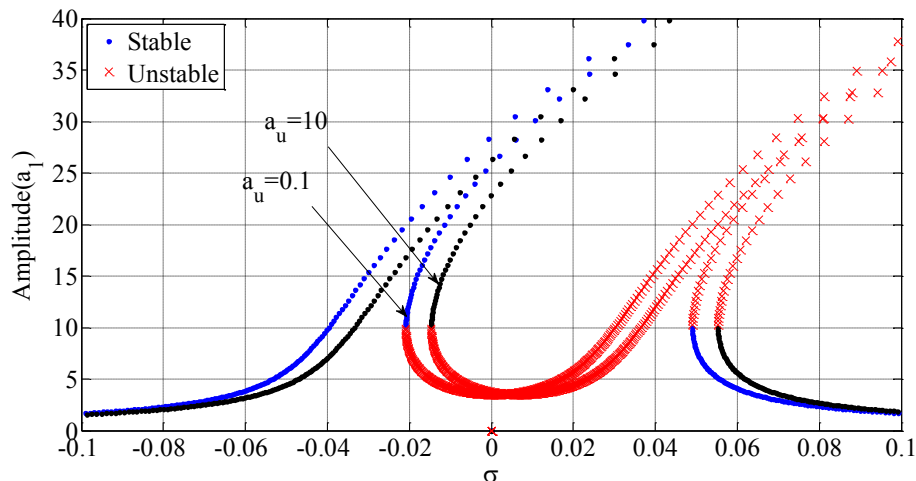
مد اول طولی ($m=1$) و زاویه پیش‌فشار الف ($\beta_0 = 0$) ب) $\beta_0 = 30^\circ$ و ج) $\beta_0 = 60^\circ$

شکل (۸-۹) و شکل (۹-۹) تأثیر مقادیر جابجایی در راستای محوری تیر پیچیده شده مذکور را

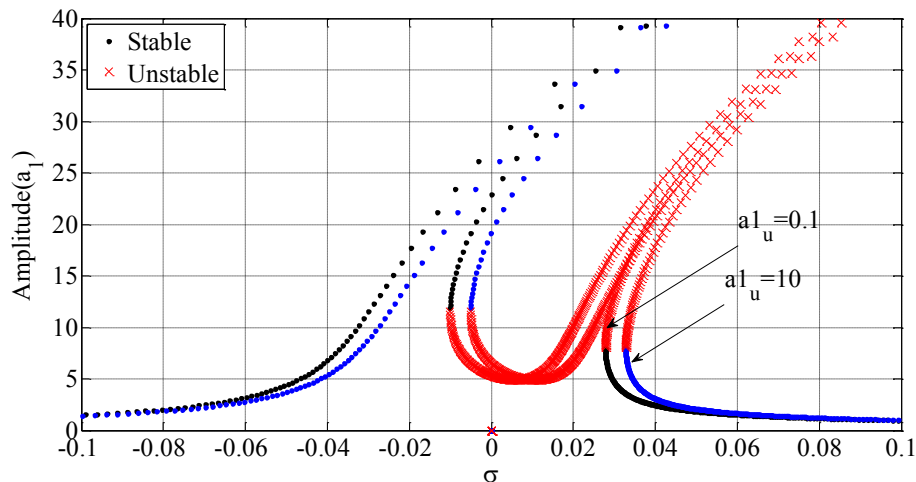
برای نمونه در حالت نامتقارن محوری در مدهای اول ارتعاشات عرضی و محوری و زوایای پیش‌فشار $\beta_0 = 0$

و $\beta_0 = 60^\circ$ نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود، افزایش مقدار ثابت ارتعاشات محوری، a_u ، در

جهت مثبت محور طولی تیر، منجر به جابجایی منحنی پاسخ فرکانسی به سمت راست می‌شود.



شکل (۸-۹) منحنی پاسخ فرکانسی عرضی تیر پیچیده شده دوار نامتقارن در مد اول خمشی ($m=1$) و مد اول طولی ($m=1$) به ازای مقادیر مختلف جابجایی محوری در زاویه صفر درجه

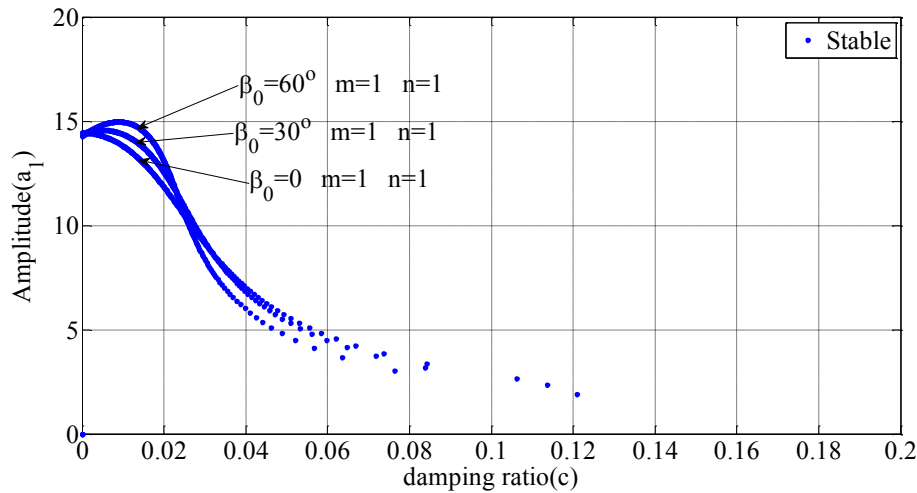


شکل (۹-۹) منحنی پاسخ فرکانسی عرضی تیر پیچیده شده دوار نامتقارن در مد اول خمشی ($m=1$) و مد اول طولی ($m=1$) به ازای مقادیر مختلف جابجایی محوری در زاویه ۶۰ درجه

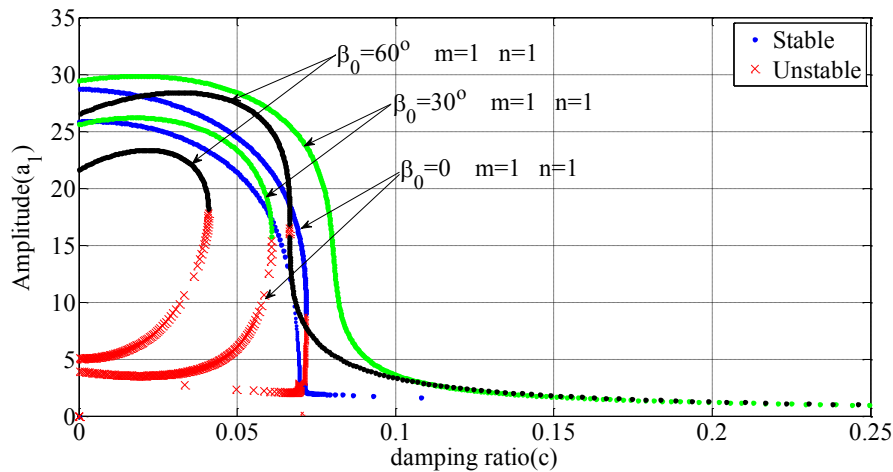
شکل (۱۰-۹) منحنی دامنه بر حسب نسبت میرایی تیر پیچیده شده محوری را در زوایای پیچش

مختلف و فرکانسهای طبیعی متناظر با $\sigma=0$ نشان می دهد. با توجه به این شکل، می توان دید که در مد اول عرضی و محوری ($m=1, n=1$)، در زوایای پیچش کوچکتر و $\sigma=0$ ، با افزایش نسبت میرایی، دامنه نوسانات کاهش یافته در حالی که در زوایای پیچش بزرگتر، به میزان میرایی بزرگتری برای میرا کردن سیستم احتیاج است. با توجه به این شکل، می توان دید که در نسبتهای میرایی کوچکتر، برای مثال، $c < 0.3$ ، افزایش زاویه پیچش باعث افزایش نسبی دامنه نوسانات شده در حالی که برای $c > 0.3$ ، تغییر زاویه پیچش تأثیر محسوسی روی دامنه نداشته و با افزایش ضریب میرایی، دامنه به تدریج کاهش می -

یابد. علاوه براین، سیستم تنها دارای یک پاسخ پایدار در همه زوایای پیچش و ضرایب میرایی بوده که در نتیجه آن، سیستم در این حالت هیچگونه دوشاخگی ندارد. با مقایسه شکل (۹-۱۰) با نتایج متناظر بدست آمده در حالت تیر متقارن محوری در فصل ۲ مشخص است که وجود ارتعاشات محوری منجر به افزایش دامنه پایدار نوسانات سیستم می‌شود.



شکل (۹-۱۰) منحنی دامنه-نسبت میرایی تیر پیچیده شده متقارن در مد اول خمشی ($n=1$) و مد اول محوری ($m=1$) و $e_\eta = e_\xi = 0.05$ و $\sigma = 0$ و زوایای پیچش مختلف.

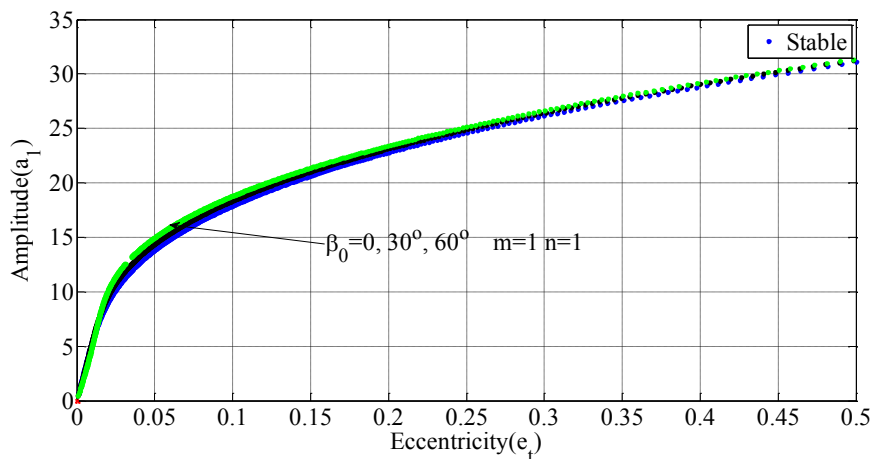


شکل (۹-۱۱) منحنی دامنه-نسبت میرایی تیر پیچیده شده نامتقارن در مد اول خمشی ($n=1$) و مد اول محوری ($m=1$) و $e_\eta = e_\xi = 0.05$ و $\sigma = 0$ و زوایای پیچش مختلف.

در حالتی که تیر پیچیده شده، نامتقارن $\Lambda_2 \neq 0$ می‌باشد، مشابه با حالت متقارن، برای $\sigma = 0$ و مد اول، با افزایش ضریب میرایی، دامنه نوسانات در همه زوایای پیچش کاهش می‌یابد. در این حالت، سه پاسخ در سیستم وجود دارد که دو پاسخ آن پایدار و دیگری ناپایدار است، بگونه‌ای که در زوایای پیچش بزرگتر، ناحیه پایدار کاهش می‌یابد. با مقایسه شکل (۹-۱۱) با نتایج متناظر بدست آمده در حالت

تیر نامتقارن محوری در فصل ۲ مشخص است که وجود ارتعاشات محوری منجر به افزایش دامنه پایدار نوسانات سیستم در مقادیر متناظر زوایای پیچش و میرایی می‌شود.

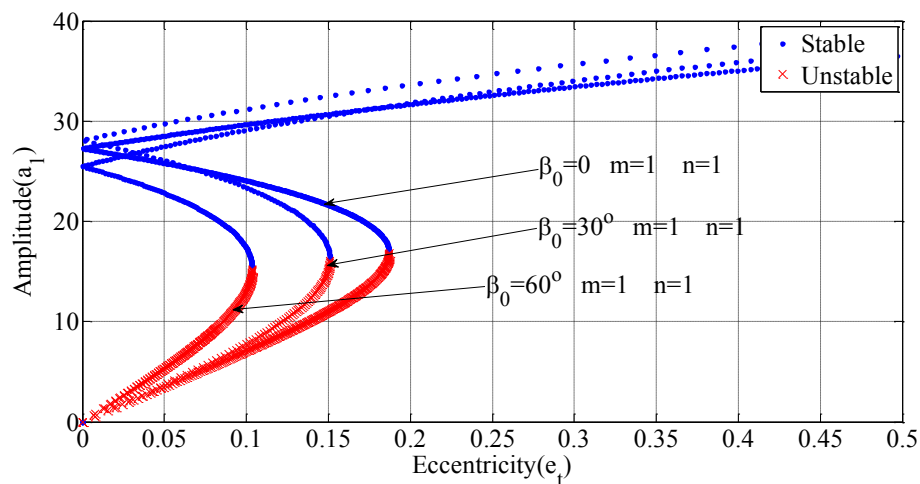
شکل (۹-۱۲) دامنه نوسانات را برحسب خروج از مرکز تیر پیچیده شده متقارن مذکور در فرکانس طبیعی متناظر با $\sigma=0$ نشان می‌دهد. همانطور که نشان داده شده است، حرکت نوسانی تیر پیچیده شده دوار با در نظر گرفتن ارتعاشات محوری، در کل مقادیر خروج از مرکز تیر و زوایای پیچش مختلف آن، پایدار بوده و در نتیجه هیچگونه دوشاخگی اتفاق نمی‌افتد. همچنین، زاویه پیچش تأثیر ناچیزی روی دامنه نوسانات سیستم دارد. با مقایسه شکل (۹-۱۲) با نتایج متناظر بدست آمده در حالت تیر متقارن محوری در فصل ۲ مشخص است که وجود ارتعاشات محوری منجر به افزایش دامنه پایدار نوسانات سیستم در مقادیر متناظر زوایای پیچش و میرایی می‌شود.



شکل (۹-۱۲) منحنی دامنه-خروج از مرکز تیر پیچیده شده متقارن در مد اول خمشی ($n=1$) و مد اول محوری ($m=1$) و $e_\eta = e_\xi = 0.05$ و $\sigma=0$ و زوایای پیچش مختلف.

شکل (۹-۱۳) تأثیر زاویه پیچش β_0 را روی منحنی دامنه-خروج از مرکز تیر پیچیده شده دوار نامتقارن با فرض وجود ارتعاشات محوری در نزدیکی فرکانسهای متناظر با $\sigma=0$ نشان می‌دهد. در این حالت، به ازای برخی از مقادیر مشخص خروج از مرکز تیر در $\sigma=0$ ، تنها دو بخش وجود دارد. بخش اول، در مقادیر خروج از مرکز کوچکتر بوده که شامل سه پاسخ بوده با دو پاسخ پایدار و یک پاسخ ناپایدار، در حالی که در بخش دوم و در مقادیر خروج از مرکز بزرگتر، به ازای کلیه زوایای پیچش، تنها یک پاسخ پایدار وجود دارد. در نتیجه پدیده دو شاخگی اتفاق می‌افتد. همچنین، با افزایش زاویه پیچش،

در یک مقدار خروج از مرکز مشخص، دامنه پایدار نوسانات سیستم نیز افزایش می‌یابد و پرش در مقادیر خروج از مرکز کوچکتری نیز اتفاق می‌افتد. با مقایسه شکل (۹-۱۳) با نتایج متناظر بدست آمده در حالت تیر نامتقارن محوری در فصل ۲ مشخص است که وجود ارتعاشات محوری منجر به افزایش دامنه پایدار نوسانات سیستم در مقادیر متناظر زوایای پیچش و میرایی شده و همچنین، نقطه دو شاخگی و پرش به سمت راست منتقل شده و پرش در مقادیر خروج از مرکز بزرگتری رخ می‌دهد.



شکل (۹-۱۳) منحنی دامنه-خروج از مرکز تیر پیچیده شده نامتقارن در مد اول خمشی ($n=1$) و مد اول محوری ($m=1$) و $e_\eta = e_\xi = 0.05$ و $\sigma = 0$ و زوایای پیچش مختلف.

فصل دهم

۱۰- ارتعاشات محوری، عرضی و پیچشی تیر پیچیده شده دوار با شرایط مرزی یک سر گیردار

برخی دیگر از تجهیزات دوار از قبیل ابزارهای براده برداری تحت تأثیر ارتعاشات محوری، عرضی و پیچشی قرار دارند. این ارتعاشات می‌تواند ناشی از هر عامل داخلی و خارجی مانند نابالانسی، نامتقارنی و غیره تشدید یابد. از این‌رو، در این بخش، تأثیرات کوپلینگ حرکات محوری و پیچشی روی ارتعاشات عرضی تیر پیچیده شده یک‌سر گیردار مورد بررسی قرار گرفته شده است.

۱۰-۱- معادلات حرکت

در این فصل همانند فصل‌های ۲ و ۹ و با توجه به شکل (۲-۲)، هر سطح مقطع از تیر دارای یک جابجایی الاستیک در مرکز جرم C و یک دوران می‌باشد. مولفه‌های جابجایی مرکز جرم C نسبت به محورهای X ، Y و Z در موقعیت x و زمان t برابر است با $u_x(t, x)$ ، $v_y(t, x)$ ، $w_z(t, x)$. به منظور توصیف دوران سطح مقطع تیر پیچیده شده قبل و بعد از تغییر شکل تیر، از زوایای اوایلر $\phi(t, x)$ ، $\psi(t, x)$ و $\theta(t, x)$ حول محورهای X ، Y و Z استفاده می‌شود [33]. $\theta(t, x)$ و $\psi(t, x)$ ناشی از تغییر شکل خمشی تیر بوده و $\phi(t, x)$ ناشی از دوران و پیچش تیر بوده و برابر است با $\varphi(t, x) = \Phi(t, x) + \Omega t$. تیر بکار رفته یک تیر اوایلر-برنولی و ایزوتروپیک بوده که با سرعت ثابت Ω به صورت محوری دوران می‌کند. همچنین از تغییر شکل برشی تیر صرف نظر شده در حالی که تأثیرات ژيروسکوپی و اینرسی دورانی تیر در نظر گرفته شده است. با استفاده از رابطه لاگرانژین، معادلات بی بعد شده ارتعاشات محوری، عرضی و پیچشی تیر پیچیده شده یک سر گیردار برابر است با،

$$\begin{aligned}
& ((\phi''(w^2 - v^2))\beta_0^3 + (-3\phi''vw' - 3\phi''v'w - \phi'''vw)\beta_0^2 + (\phi''v'' - 2\phi''w'^2 + \phi'''vv' - \phi'''w'w \\
& + 2\phi''v'^2 - \phi''ww'')\beta_0 + \phi'''w'v' + \phi''v'w'' + \phi''w'v'')\cos(2\beta_0x) \\
& + (2\phi''v\beta_0^3w + (-3\phi''v'v + 1/2\phi'''w^2 + 3\phi''w'w - 1/2\phi'''v^2)\beta_0^2 + (-\phi'''v'w - \phi'''vw' - \phi''v''w \\
& - 4\phi''v'w' - \phi''w''v)\beta_0 - \phi''w''w' + 1/2\phi'''v'^2 + \phi''v''v' - 1/2\phi'''w'^2)\sin(2\beta_0x) \\
& + (\phi''v^2 + 2\phi'v'v + 2\phi'ww' + \phi''w^2)\beta_0^3 + (-3\phi''v'w + 3\phi'vw'' + 3\phi''vw' - 3\phi'vw'')\beta_0^2 \\
& + (2\phi''v'^2 + 2\phi''w'^2 + 3\phi'w'w'' - \phi''v'' - \phi''ww'' + 3\phi'v'v'' - \phi'ww''' - \phi'vw''')\beta_0 - \phi''w'v'' \\
& + \phi''v'w'' - \phi'w'v''' + \phi'v'w''')D_{xx} + ((-\pi^2\ddot{\phi}w^2 - 11\pi^2\Omega\Omega u'v\dot{v} + \dots)\beta_0^3 \\
& + (-11/2\pi^2\Omega\Omega u''v\dot{w} - 11/2\pi^2\Omega\Omega u''w\dot{v} + \dots)\beta_0^2 + (-11/2\pi^2\Omega\Omega u'' \\
& w'\dot{w} + 11/2\pi^2\Omega\Omega u''v'\dot{v} + \dots)\beta_0 + 11/2\pi^2\Omega\Omega u''v'\dot{w}' - \pi^2\ddot{\phi}w'v'' + \dots)\cos(2\beta_0x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + ((-2\pi^2\ddot{\phi}vw + 11\pi^2\Omega\Omega u'v\dot{w} + \dots)\beta_0^3 + (3\pi^2\ddot{\phi}v'v + 1/2\pi^2\ddot{\phi}'v^2 + \dots)\beta_0^2 + (\pi^2\ddot{\phi}'vw' + \pi^2\ddot{\phi}'v'w + \dots)\beta_0 + \pi^2\ddot{\phi}w''w' \\
& + 1/2\pi^2\ddot{\phi}'w'^2 + \dots)\sin(2\beta_0x) + \pi^2\dot{\phi}w'\dot{v}\beta_0^2 - 5/2\pi^2\Omega\Omega u''v'\dot{\beta}_0 + \pi^2\Omega\Omega w'\dot{v}'' + \pi^2\Omega\Omega w''\dot{v}' + \dots)I_x \\
& + ((2u'w'w + u''v^2 + 2u'vv' + u''w^2 + 2w'w + 2vv')\beta_0^2 \\
& + (-2wv'' + 2u''vw' + 2vw'' + 2u'vw'' - 2u'wv'' - 2u''v'w)\beta_0 + 2w'w'' \\
& + 6u'u'' + 2u'w'w'' + 2v'v'' + u''v'^2 + 2u'v'v'' + 3u'^2u'' + u''w'^2 + 2u'')\mu - \ddot{u}\pi^4 = 0
\end{aligned}$$

(1-10)

$$\begin{aligned}
& -2 \frac{w' \beta_0^3}{\pi^4} - \frac{\beta_0^2 v'' \Sigma I}{\pi^2} + 5 \frac{\beta_0^2 v''}{\pi^4} - 2 \frac{\beta_0 \ddot{w}' \Sigma I}{\pi^2} + 4 \frac{\beta_0 w'''}{\pi^4} + \frac{\ddot{v}'' \Sigma I}{\pi^2} - \frac{v^{(4)}}{\pi^4} - \ddot{v} \\
& + \left(\begin{aligned} & 8 \frac{\Delta D w \beta_0^4}{\pi^4} - 22 \frac{\Delta D v' \beta_0^3}{\pi^4} + 1/8 \frac{(24 \pi^2 \Delta I \ddot{w} - 48 \pi^2 \Delta I \Omega \dot{v} - 168 \Delta D w'') \beta_0^2}{\pi^4} \\ & + 1/8 \frac{(-32 \pi^2 \Delta I \ddot{v}' + 64 \Delta D v'' - 64 \pi^2 \Delta I \Omega \ddot{w}) \beta_0}{\pi^4} + 1/8 \frac{-8 \pi^2 \Delta I \ddot{w}'' + 16 \pi^2 \Delta I \Omega \dot{v}'' + 8 \Delta D w^{(4)}}{\pi^4} \end{aligned} \right) \sin(-2\Omega t + 4\beta_0 x) \\
& + \left(\begin{aligned} & -8 \frac{\Delta D v \beta_0^4}{\pi^4} - 22 \frac{\Delta D w' \beta_0^3}{\pi^4} + 1/8 \frac{(168 \Delta D v'' - 48 \pi^2 \Delta I \Omega \dot{w} - 24 \pi^2 \Delta I \ddot{v}) \beta_0^2}{\pi^4} \\ & + 1/8 \frac{(64 \Delta D w''' + 64 \pi^2 \Delta I \Omega \dot{v}' - 32 \pi^2 \Delta I \ddot{w}') \beta_0}{\pi^4} + 1/8 \frac{16 \pi^2 \Delta I \Omega \dot{w}'' - 8 \Delta D v^{(4)} + 8 \pi^2 \Delta I \ddot{v}''}{\pi^4} \end{aligned} \right) \cos(-2\Omega t + 4\beta_0 x) \\
& + e_v \Omega^2 \cos(\beta_0 x - \Omega t) + e_w \Omega^2 \sin(\beta_0 x - \Omega t) + c(\dot{w} \sin(\beta_0 x) - \dot{v} \cos(\beta_0 x)) \\
& + \frac{\mu}{\pi^4} \left((-v^2 w' - 2v' w v + \dots) \beta_0^3 + (v^2 v'' - 2v w'^2 + \dots) \beta_0^2 + (-w'^3 - 2u'' w + \dots) \beta_0 + w'^2 v'' + u'^2 v'' + \dots \right) \\
& + D_{xx} \left(1/8 \frac{(36 w^2 v - 4 v^3) \beta_0^6}{\pi^4} + 1/8 \pi^4 (64 w^2 w' - 152 v' w v + \dots) \beta_0^5 + 1/8 \pi^4 (-36 w^2 v'' - 96 w' w v + \dots) \beta_0^4 \right. \\
& + 1/8 \pi^4 (-40 w'^3 - 8 \phi' v + \dots) \beta_0^3 + 1/8 \pi^4 (24 v' w w''' + 16 w' w v'' + \dots) \beta_0^2 + 1/8 \pi^4 (-16 v v'' w'' + 8 \phi'' u'' v + \dots) \beta_0 \\
& + 1/8 \pi^4 (-4 \phi'' w'' - 16 w' v'' w'' + \dots) \cos(2\beta_0 x) \\
& + 1/8 \frac{(12 w^2 v - 4 v^3) \beta_0^6}{\pi^4} + 1/8 \pi^4 (27 w^2 w' - 54 v' w v + \dots) \beta_0^5 + 1/8 \pi^4 (-22 w^2 v'' - 44 w' w v + \dots) \beta_0^4 \\
& + 1/8 \pi^4 (-30 w'^3 + 68 v' w v'' + \dots) \beta_0^3 + 1/8 \pi^4 (20 v' w w''' + 20 w' w v'' + \dots) \beta_0^2 + 1/8 \pi^4 (-4 v v'' w'' + \dots) \beta_0 \\
& + 1/8 \pi^4 (-3 v'' w'' - w'^2 v^{(4)} + \dots) \cos(4\beta_0 x) \\
& + 1/8 \frac{(24 w v^2 - 16 w^3) \beta_0^6}{\pi^4} + 1/8 \pi^4 (62 v^2 v' - 100 w' w v + \dots) \beta_0^5 + 1/8 \pi^4 (-36 v^2 w'' - 96 v' w v + \dots) \beta_0^4 \\
& + 1/8 \pi^4 (-40 v'^3 - 8 \phi' w + \dots) \beta_0^3 + 1/8 \pi^4 (24 w' v v''' + 16 v' v w'' + \dots) \beta_0^2 + 1/8 \pi^4 (-16 w w'' v'' + 8 \phi'' u'' w + \dots) \beta_0 \\
& + 1/8 \pi^4 (-4 \phi'' v'' - 16 v' w'' v'' + \dots) \sin(2\beta_0 x) \\
& + 1/8 \frac{(12 v^2 w - 4 w^3) \beta_0^6}{\pi^4} + 1/8 \pi^4 (27 v^2 v' - 54 w' w v + \dots) \beta_0^5 + 1/8 \pi^4 (-22 v^2 w'' - 44 v' w v + \dots) \beta_0^4 \\
& + 1/8 \pi^4 (-30 v'^3 + 68 w' v w'' + \dots) \beta_0^3 + 1/8 \pi^4 (20 w' v v''' + 20 v' v w'' + \dots) \beta_0^2 + 1/8 \pi^4 (-4 w w'' v'' + \dots) \beta_0 \\
& + 1/8 \pi^4 (-3 v'' w'' - v'^2 w^{(4)} + \dots) \sin(4\beta_0 x) \\
& + 1/8 \frac{(9 w^2 w - 4 w^3) \beta_0^5}{\pi^4} + 1/8 \pi^4 (6 v'^2 w' - 152 v' w v'' + \dots) \beta_0^4 + 1/8 \pi^4 (-16 w'^2 v'' - 96 w'' w + \dots) \beta_0^3 \\
& + 1/8 \pi^4 (-40 \phi' w'^2 - 8 \phi'^2 v' + \dots) \beta_0^2 + 1/8 \pi^4 (12 v' w' w''' - 6 w' v'' w'' + \dots) \beta_0 + 1/8 \pi^4 (2 v' v'' w'' + 8 \phi'' u'' w'' + \dots) \\
& + I_{xx} \left((+1/8 \pi^4 (-12 \pi^2 \Omega \Omega w \dot{v} - 6 \pi^2 \Omega w^2 \dot{w} + \dots) \beta_0^4 + 1/8 \pi^4 (-8 \pi^2 v^2 \dot{w}' + 12 \pi^2 \Omega v' \dot{v} + \dots) \beta_0^3 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +1/8\pi^4(-6\pi^2\Omega v'^2 \frac{d}{d\tau\tau} w - 8\pi^2\dot{\phi}u'\dot{w} + \dots)\beta_0^2 + (12\pi^2w'\dot{v}'^2 - 24\pi^2w'\dot{w}'^2 + \dots)\beta_0 \\
& +1/8\pi^4(-44\pi^2\Omega u''\dot{u}'w' - 8\pi^2\ddot{\phi}u'w'' + \dots)\cos(2\beta_0x) \\
& +(1/8\pi^4(-16\pi^2\Omega w\dot{v}'^2 - 12\pi^2\Omega vw\dot{w}' + \dots)\beta_0^4 + 1/8\pi^4(-14\pi^2wv\dot{w}' + 2\pi^2\Omega v'\dot{v}'^2 + \dots)\beta_0^3 \\
& +1/8\pi^4(-24\pi^2\Omega\dot{\phi}v'\dot{w}' - 8\pi^2\dot{\phi}u'\dot{w}' + \dots)\beta_0^2 + (\pi^2w''u'\dot{v}' - 20\pi^2v'\dot{w}'^2 + \dots)\beta_0 \\
& +1/8\pi^4(-20\pi^2\Omega u''\dot{u}'v' - 8\pi^2\ddot{\phi}u'w'' + \dots)\cos(4\beta_0x) \\
& +(1/8\pi^4(-12\pi^2\Omega w\dot{w}v' - 6\pi^2\Omega v'^2\dot{v}' + \dots)\beta_0^4 + 1/8\pi^4(-8\pi^2w^2\dot{v}' + 12\pi^2\Omega w'\dot{w}w' + \dots)\beta_0^3 \\
& +1/8\pi^4(-6\pi^2\Omega w'^2\dot{v}' - 8\pi^2\dot{\phi}u'\dot{v}' + \dots)\beta_0^2 + (12\pi^2v'\dot{w}'^2 - 24\pi^2v'\dot{v}'^2 + \dots)\beta_0 \\
& +1/8\pi^4(-44\pi^2\Omega u''\dot{u}'v' - 8\pi^2\ddot{\phi}u'v'' + \dots)\sin(2\beta_0x) \\
& +(1/8\pi^4(-16\pi^2\Omega v\dot{w}'^2 - 12\pi^2\Omega vw\dot{v}' + \dots)\beta_0^4 + 1/8\pi^4(-14\pi^2wv\dot{v}' + 2\pi^2\Omega w'\dot{w}'^2 + \dots)\beta_0^3 \\
& +1/8\pi^4(-24\pi^2\Omega\dot{\phi}w'\dot{v}' - 8\pi^2\dot{\phi}u'\dot{v}' + \dots)\beta_0^2 + (\pi^2v''u'\dot{w}' - 20\pi^2w'\dot{v}'^2 + \dots)\beta_0 \\
& +1/8\pi^4(-20\pi^2\Omega u''\dot{u}'w' - 8\pi^2\ddot{\phi}u'v'' + \dots)\sin(4\beta_0x) = 0
\end{aligned}$$

(7-10)

$$\begin{aligned}
& -2\frac{v'\beta_0^3}{\pi^4} - \frac{\beta_0^2w''\Sigma I}{\pi^2} + 5\frac{\beta_0^2w''}{\pi^4} - 2\frac{\beta_0\ddot{v}'\Sigma I}{\pi^2} + 4\frac{\beta_0v'''}{\pi^4} + \frac{\ddot{w}''\Sigma I}{\pi^2} - \frac{w^{(4)}}{\pi^4} - \ddot{w} \\
& + \left(\begin{aligned} & 8\frac{\Delta Dw\beta_0^4}{\pi^4} - 22\frac{\Delta Dv'\beta_0^3}{\pi^4} + 1/8\frac{(24\pi^2\Delta I\ddot{w} - 48\pi^2\Delta I\Omega\dot{v}' - 168\Delta Dw'')\beta_0^2}{\pi^4} \\ & + 1/8\frac{(-32\pi^2\Delta I\dot{v}' + 64\Delta Dv'' - 64\pi^2\Delta I\Omega\ddot{w}')\beta_0}{\pi^4} + 1/8\frac{-8\pi^2\Delta I\ddot{w}'' + 16\pi^2\Delta I\Omega\dot{v}'' + 8\Delta Dw^{(4)}}{\pi^4} \end{aligned} \right) \cos(-2\Omega t + 4\beta_0x) \\
& + \left(\begin{aligned} & -8\frac{\Delta Dv\beta_0^4}{\pi^4} - 22\frac{\Delta Dw'\beta_0^3}{\pi^4} + 1/8\frac{(168\Delta Dv'' - 48\pi^2\Delta I\Omega\dot{w}' - 24\pi^2\Delta I\ddot{v}')\beta_0^2}{\pi^4} \\ & + 1/8\frac{(64\Delta Dw'' + 64\pi^2\Delta I\Omega\dot{v}' - 32\pi^2\Delta I\ddot{w}')\beta_0}{\pi^4} + 1/8\frac{16\pi^2\Delta I\Omega\dot{w}'' - 8\Delta Dv^{(4)} + 8\pi^2\Delta I\ddot{v}''}{\pi^4} \end{aligned} \right) \sin(-2\Omega t + 4\beta_0x) \\
& -e_v\Omega^2 \sin(\beta_0x - \Omega t) - e_w\Omega^2 \cos(\beta_0x - \Omega t) + c(\dot{w} \cos(\beta_0x) - \dot{v} \sin(\beta_0x)) \\
& + \left((-v^2w' - 2v'wv + \dots)\beta_0^3 + (v^2v'' - 2v'w^2 + \dots)\beta_0^2 + (-w'^3 - 2u''w + \dots)\beta_0 + w^2v'' + u'^2v'' + \dots \right) \frac{\mu}{\pi^4} \\
& + D_{xx} \left((1/8\frac{(36w^2v - 4v^3)\beta_0^6}{\pi^4} + 1/8\pi^4(64w^2w' - 152v'wv + \dots)\beta_0^5 + 1/8\pi^4(-36w^2v'' - 96w''wv + \dots)\beta_0^4 \right. \\
& + 1/8\pi^4(-40w'^3 - 8\phi'v + \dots)\beta_0^3 + 1/8\pi^4(24v'wv'' + 16w'wv'' + \dots)\beta_0^2 + 1/8\pi^4(-16v''w'' + 8\phi''u''v + \dots)\beta_0 \\
& + 1/8\pi^4(-4\phi''w'' - 16w'v''w'' + \dots)\sin(2\beta_0x) \\
& + (1/8\frac{(12w^2v - 4v^3)\beta_0^6}{\pi^4} + 1/8\pi^4(27w^2w' - 54v'wv + \dots)\beta_0^5 + 1/8\pi^4(-22w^2v'' - 44w''wv + \dots)\beta_0^4 \\
& + 1/8\pi^4(-30w'^3 + 68v'wv'' + \dots)\beta_0^3 + 1/8\pi^4(20v'wv'' + 20w'wv'' + \dots)\beta_0^2 + 1/8\pi^4(-4v''w'' + \dots)\beta_0 \\
& + 1/8\pi^4(-3v''w'' - w'^2v^{(4)} + \dots)\sin(4\beta_0x) \\
& + (1/8\frac{(24wv^2 - 16w^3)\beta_0^6}{\pi^4} + 1/8\pi^4(62v^2v' - 100w'wv + \dots)\beta_0^5 + 1/8\pi^4(-36v^2w'' - 96v''wv + \dots)\beta_0^4 \\
& + 1/8\pi^4(-40v'^3 - 8\phi'w + \dots)\beta_0^3 + 1/8\pi^4(24w'v'' + 16v'wv'' + \dots)\beta_0^2 + 1/8\pi^4(-16w''w'' + 8\phi''u''w + \dots)\beta_0 \\
& + 1/8\pi^4(-4\phi''v'' - 16v'w''v'' + \dots)\cos(2\beta_0x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(1/8 \frac{(12v^2w - 4w^3)\beta_0^6}{\pi^4} + 1/8\pi^4(27v^2v' - 54w'vw + \dots)\beta_0^5 + 1/8\pi^4(-22v^2w'' - 44v''vw + \dots)\beta_0^4 \right. \\
& + 1/8\pi^4(-30v^3 + 68w'vw'' + \dots)\beta_0^3 + 1/8\pi^4(20w'v'' + 20v'vw'' + \dots)\beta_0^2 + 1/8\pi^4(-4ww''v'' + \dots)\beta_0 \\
& + 1/8\pi^4(-3v''w'' - v^2w^{(4)} + \dots)\cos(4\beta_0x) \\
& + 1/8 \frac{(9w^2w - 4w^3)\beta_0^5}{\pi^4} + 1/8\pi^4(6v^2w' - 152v'vw'' + \dots)\beta_0^4 + 1/8\pi^4(-16w^2v'' - 96w''w + \dots)\beta_0^3 \\
& + 1/8\pi^4(-40\phi'w'^2 - 8\phi^2v' + \dots)\beta_0^2 + 1/8\pi^4(12v'w'w'' - 6w'v'' + \dots)\beta_0 + 1/8\pi^4(2v'v''w'' + 8\phi''u'' + \dots) \\
& + I_{xx} \left((1/8\pi^4(-12\pi^2\Omega\Omega w\dot{v} - 6\pi^2\Omega w^2\dot{w} + \dots)\beta_0^4 + 1/8\pi^4(-8\pi^2v^2\ddot{w}' + 12\pi^2\Omega v'\dot{v} + \dots)\beta_0^3 \right. \\
& + 1/8\pi^4(-6\pi^2\Omega v'^2 \frac{d}{d\tau} w - 8\pi^2\dot{\phi}u'\dot{w} + \dots)\beta_0^2 + (12\pi^2w'v'^2 - 24\pi^2w'\dot{w}^2 + \dots)\beta_0) \\
& + 1/8\pi^4(-44\pi^2\Omega u''\dot{w}' - 8\pi^2\dot{\phi}u'w'' + \dots)\sin(2\beta_0x) \\
& + (1/8\pi^4(-16\pi^2\Omega w\dot{v}^2 - 12\pi^2\Omega vw\dot{w} + \dots)\beta_0^4 + 1/8\pi^4(-14\pi^2wv\dot{w}' + 2\pi^2\Omega v'\dot{v}^2 + \dots)\beta_0^3 \\
& + 1/8\pi^4(-24\pi^2\Omega \dot{\phi}v'\dot{w} - 8\pi^2\dot{\phi}u'\dot{w} + \dots)\beta_0^2 + (\pi^2w''u'\dot{v}' - 20\pi^2v'\dot{w}^2 + \dots)\beta_0 \\
& + 1/8\pi^4(-20\pi^2\Omega u'\dot{v}' - 8\pi^2\ddot{\phi}u'w'' + \dots)\sin(4\beta_0x) \\
& + (1/8\pi^4(-12\pi^2\Omega w\dot{w}v - 6\pi^2\Omega v^2\dot{v} + \dots)\beta_0^4 + 1/8\pi^4(-8\pi^2w^2\ddot{v}' + 12\pi^2\Omega w'\dot{w}w + \dots)\beta_0^3 \\
& + 1/8\pi^4(-6\pi^2\Omega w'^2\dot{v} - 8\pi^2\dot{\phi}u'\dot{v} + \dots)\beta_0^2 + (12\pi^2v'\dot{w}^2 - 24\pi^2v'\dot{v}^2 + \dots)\beta_0 \\
& + 1/8\pi^4(-44\pi^2\Omega u''\dot{v}' - 8\pi^2\ddot{\phi}u'v'' + \dots)\cos(2\beta_0x) \\
& + (1/8\pi^4(-16\pi^2\Omega v\dot{w}^2 - 12\pi^2\Omega vw\dot{w} + \dots)\beta_0^4 + 1/8\pi^4(-14\pi^2wv\dot{w}' + 2\pi^2\Omega w'\dot{w}^2 + \dots)\beta_0^3 \\
& + 1/8\pi^4(-24\pi^2\Omega \dot{\phi}w'\dot{v} - 8\pi^2\dot{\phi}u'\dot{v} + \dots)\beta_0^2 + (\pi^2v''u'\dot{w}' - 20\pi^2w'\dot{v}^2 + \dots)\beta_0 \\
& + 1/8\pi^4(-20\pi^2\Omega u'\dot{w}' - 8\pi^2\ddot{\phi}u'v'' + \dots)\cos(4\beta_0x) = 0
\end{aligned}$$

(۳-۱۰)

$$\begin{aligned}
& \left(\left((4vw - 8u'vw + \dots)\beta_0^4 + (-4u''w^2 + 16u'v'v' + \dots)\beta_0^3 + 12(u''vw' + \dots)\beta_0^2 \right) \cos(2\beta_0x) \right. \\
& \left. + (vv''' + 4u''w''w + \dots)\beta_0 + (-4u'v''w'' - 2u'''w'v' + \dots) \right) \\
& + \left(\left((2v^2 - 4u'v^2 - 2w^2 + 4u'w^2 + \dots)\beta_0^4 + (8v'w + 8vw' + \dots)\beta_0^3 \right) \right. \\
& \left. + (-10u'w''w + 12u''v'v + \dots)\beta_0^2 + (2u'wv''' + 2u'vw''' + \dots)\beta_0 \right) \sin(2\beta_0x) \\
& \left. + (v''^2 - w''^2 + \dots) \right) D_{xx} \\
& + \left((u''w^2 + \dots)\beta_0^3 + (3v''w - 3vw'' + \dots)\beta_0^2 - (u''v'' + \dots)\beta_0 + (2u''w''v' - v'w'' + \dots) \right) \\
& + \left(\left((\pi^2w\ddot{v} - 2\pi^2u'v\ddot{w})\beta_0^2 + (-4\pi^2u'\dot{w}\dot{w}' + \pi^2w\ddot{w}')\beta_0 + (-\pi^2w'\ddot{v}' - \pi^2v'\ddot{w}') \right) \cos(2\beta_0x) \right. \\
& \left. + \left((-\pi^2w\ddot{w} + 2\pi^2u'w\ddot{w})\beta_0^2 + (2\pi^2\dot{v}\dot{w}' + 2\pi^2\dot{v}'\dot{w})\beta_0 + (-\pi^2\dot{v}'^2 + \pi^2\dot{w}'^2) \right) \sin(2\beta_0x) \right) I_{xx} = 0 \\
& \left. + (\pi^2v\ddot{w} + 2\pi^2u'w\ddot{v})\beta_0^2 + (2\pi^2u'w\ddot{w}' - \pi^2w\ddot{w}')\beta_0 + (-2\pi^2\ddot{\phi} - \pi^2w'\ddot{v}') \right)
\end{aligned}$$

(۴-۱۰)

با شرایط مرزی

$$x=0 \Rightarrow \begin{cases} u=0 \\ v=v'=0 \\ w=w'=0 \\ \phi=0 \end{cases} \quad \text{و} \quad x=L \Rightarrow \begin{cases} u'=0 \\ v''=v'''=0 \\ w''=w'''=0 \\ \phi'=0 \end{cases} \quad (5-10)$$

برای ساده سازی، در معادلات فوق داریم،

$$\Delta D = \frac{(D_{\xi\xi} - D_{\eta\eta})}{2}, \quad \Delta I = \frac{(I_{\xi\xi} - I_{\eta\eta})}{2}, \quad \Sigma D = \frac{(D_{\xi\xi} + D_{\eta\eta})}{2}, \quad \Sigma I = \frac{(I_{\xi\xi} + I_{\eta\eta})}{2}, \quad (6-10)$$

$$u = u_{\xi}, \quad v = v_{\eta}, \quad w = w_{\xi},$$

در معادلات فوق فرض می‌شود از میرایی در جهت پیچشی صرف نظر شده است. همچنین

پارامترهای بی بعد شده برابرند با،

$$u^* = \frac{u}{h_0}, \quad v^* = \frac{v}{h_0}, \quad w^* = \frac{w}{h_0}, \quad x^* = \frac{x}{L}, \quad t^* = \frac{t}{\sqrt{mL^4/\pi^4\Sigma D}}, \quad \Omega^* = \frac{\Omega}{\sqrt{\pi^4\Sigma D/mL^4}},$$

$$I_{xx}^* = I_{\xi\xi}^* = \frac{\pi^2 I_{xx}}{mL^2}, \quad \Sigma I^* = \frac{\pi^2 \Sigma I}{mL^2}, \quad \Delta I^* = \frac{\pi^2 \Delta I}{mL^2}, \quad \Delta D^* = \frac{\pi^2 \Delta D}{mL^2}, \quad (7-10)$$

$$c^* = c \frac{\pi^2 \sqrt{m\Sigma D}}{L^2}, \quad \mu = \frac{h_0^2 A_{xx}}{2\Sigma D}, \quad D_{xx}^* = \frac{D_{xx}}{\Sigma D}$$

که h_0 و L به ترتیب اندازه ضخامت مقطع و طول تیر هستند. برای راحتی، در معادلات از علامت

(*) صرف نظر شده است.

اکنون، با در نظر گرفتن ω_a ، ω_f و ω_b و ω_t به عنوان فرکانسهای خطی ارتعاشات طولی، عرضی

همسو و ناهمسو و پیچشی تیر یک سر گیردار که از حل خطی معادلات حرکت بدست می‌آیند (ω_f) و

ω_b به صورت غیر صریح بدست آمده و ω_a و ω_t به صورت صریح بدست آمده) این فرکانسها برابرند با،

$$\omega_a = \frac{(2m+1)\sqrt{2\mu}}{2\pi} \quad (8-10)$$

$$\omega_t = \frac{(2k+1)}{2} \sqrt{\frac{D_{xx}}{I_{xx}}} \quad (9-10)$$

و شکل مدهای خطی متناظر آنها نیز برابرند با،

$$\Phi_a(x) = \cos\left(\frac{(2m+1)\pi}{2}x\right) \quad (10-10)$$

$$\Phi_f(x) = \Phi_b(x) = \cos(\gamma_n x) - \cosh(\gamma_n x) - \frac{\cos(\gamma_n) + \cosh(\gamma_n)}{\sin(\gamma_n) + \sinh(\gamma_n)} (\sin(\gamma_n x) - \sinh(\gamma_n x))$$

$$\gamma_n \approx \frac{(2n-1)\pi}{2} \quad (11-10)$$

$$\Phi_t(x) = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2} x\right) \quad (12-10)$$

که m و n و k به ترتیب شماره مدهای ارتعاشات محوری، عرضی و پیچشی می‌باشند. اکنون، با قرار دادن رابطه فوق و جواب مرتبه ۱ برای u و v و w و ϕ (معادلات متناظر در فصل ۹) در معادلات مرتبه ۲ (روابط متناظر در فصل ۹)، معادلات مرتبه ۲ را با جدا کردن و مرتب سازی ضرایب $e^{i\omega_b T_0}$ و $e^{i\omega_f T_0}$ و $e^{i\omega_a T_0}$ و $e^{i\omega_t T_0}$ برای از بین بردن ضرایب سکولار و حذف small divisorهای موجود به شکل زیر ساده می‌کنیم،

$$D_0^2 U_2(x, T_0, T_1, T_2) - 2 \frac{\mu}{\pi^4} U_2''(x, T_0, T_1, T_2) = P_2(x, T_1, T_2) e^{i\omega_a T_0} + CC \quad (13-10)$$

$$\begin{aligned} & \left(-\beta_0 D_0 V_2'(x, T_0, T_1, T_2) + i\beta_0^2 D_0 V_2(x, T_0, T_1, T_2) - \beta_0 D_0 W_2'(x, T_0, T_1, T_2) + \beta_0^2 D_0 W_2(x, T_0, T_1, T_2) \right) \frac{I_{xx} \Omega}{4\pi^2} e^{2i\beta_0 x} \\ & - \left(i\beta_0^2 D_0 V_2(x, T_0, T_1, T_2) + \beta_0 D_0 V_2'(x, T_0, T_1, T_2) + \beta_0^2 D_0 W_2(x, T_0, T_1, T_2) + i\beta_0 D_0 W_2'(x, T_0, T_1, T_2) \right) \frac{I_{xx} \Omega}{4\pi^2} e^{-2i\beta_0 x} \\ & + 3/2 \frac{I_{xx} \Omega \beta_0}{\pi^2} D_0 V_2'(x, T_0, T_1, T_2) - \frac{V_2^{(4)}(x, T_0, T_1, T_2)}{\pi^4} + 5 \frac{\beta_0^2 V_2''(x, T_0, T_1, T_2)}{\pi^4} - D_0^2 V_2(x, T_0, T_1, T_2) \\ & - \frac{\Sigma I \beta_0^2 D_0^2 V_2(x, T_0, T_1, T_2)}{\pi^2} + \frac{\Sigma I D_0^2 V_2''(x, T_0, T_1, T_2)}{\pi^2} - 2 \frac{\Sigma I \beta_0 D_0^2 W_2'(x, T_0, T_1, T_2)}{\pi^2} + 4 \frac{\beta_0 W_2'''(x, T_0, T_1, T_2)}{\pi^4} \\ & + \frac{I_{xx} \Omega D_0 W_2''(x, T_0, T_1, T_2)}{\pi^2} - 2 \frac{\beta_0^3 W_2'(x, T_0, T_1, T_2)}{\pi^4} - 1/2 \frac{I_{xx} \Omega \beta_0^2 D_0 W_2(x, T_0, T_1, T_2)}{\pi^2} = \\ & P_{2,f,v}(x, T_1, T_2) e^{i\omega_f T_0} + P_{2,b,v}(x, T_1, T_2) e^{i\omega_b T_0} + CC \end{aligned} \quad (14-10)$$

$$\begin{aligned} & \left(-i\beta_0 D_0 V_2'(x, T_0, T_1, T_2) + \beta_0^2 D_0 V_2(x, T_0, T_1, T_2) + i\beta_0 D_0 W_2'(x, T_0, T_1, T_2) + \beta_0^2 D_0 W_2(x, T_0, T_1, T_2) \right) \frac{I_{xx} \Omega}{4\pi^2} e^{2i\beta_0 x} \\ & - \left(\beta_0^2 D_0 V_2(x, T_0, T_1, T_2) + i\beta_0 D_0 V_2'(x, T_0, T_1, T_2) - i\beta_0^2 D_0 W_2(x, T_0, T_1, T_2) + \beta_0 D_0 W_2'(x, T_0, T_1, T_2) \right) \frac{I_{xx} \Omega}{4\pi^2} e^{-2i\beta_0 x} \\ & + 3/2 \frac{I_{xx} \Omega \beta_0}{\pi^2} D_0 W_2'(x, T_0, T_1, T_2) + \frac{W_2^{(4)}(x, T_0, T_1, T_2)}{\pi^4} + 5 \frac{\beta_0^2 W_2''(x, T_0, T_1, T_2)}{\pi^4} - D_0^2 W_2(x, T_0, T_1, T_2) \\ & - \frac{\Sigma I \beta_0^2 D_0^2 W_2(x, T_0, T_1, T_2)}{\pi^2} + \frac{\Sigma I D_0^2 W_2''(x, T_0, T_1, T_2)}{\pi^2} - 2 \frac{\Sigma I \beta_0 D_0^2 V_2'(x, T_0, T_1, T_2)}{\pi^2} - 4 \frac{\beta_0 V_2'''(x, T_0, T_1, T_2)}{\pi^4} \\ & - \frac{I_{xx} \Omega D_0 V_2''(x, T_0, T_1, T_2)}{\pi^2} + 2 \frac{\beta_0^3 V_2'(x, T_0, T_1, T_2)}{\pi^4} - 1/2 \frac{I_{xx} \Omega \beta_0^2 D_0 V_2(x, T_0, T_1, T_2)}{\pi^2} = \\ & P_{2,f,w}(x, T_1, T_2) e^{i\omega_f T_0} + P_{2,b,w}(x, T_1, T_2) e^{i\omega_b T_0} + CC \end{aligned} \quad (15-10)$$

$$D_0^2 \phi_2(x, T_0, T_1, T_2) - \frac{D_{xx}}{\pi^2 I_{xx}} \phi_2''(x, T_0, T_1, T_2) = P_{2,t}(x, T_1, T_2) e^{i\omega_t T_0} + CC \quad (16-10)$$

که $P_{2,a}(x, T_1, T_2)$ ، $P_{2,b,v}(x, T, T_1)$ ، $P_{2,f,v}(x, T, T_1)$ ، $P_{2,f,w}(x, T, T_1)$ ، $P_{2,b,w}(x, T, T_1)$ و $P_{2,t}(x, T_1, T_2)$ برابریند با،

$$P_{2,a}(x, T_1, T_2) = 2i\omega_u \Phi_u D_1 A_a(T_1, T_2) \quad (17-10)$$

$$P_{2,f,v}(x, T_1, T_2) = \left(-8\Sigma I \beta_0 \Phi'_f \omega_f + 4i\Sigma I \Phi''_f \omega_f - 4i\Phi_f \omega_f \pi^2 + il_{xx} \Omega \beta_0^2 \Phi_f + 3I_{xx} \Omega \beta_0 \Phi'_f - 2il_{xx} \Omega \Phi''_f - 4i\Sigma I \beta_0^2 \Phi_f \omega_f - I_{xx} \Omega \beta_0 \Phi'_f e^{2i\beta_0 x} - il_{xx} \Omega \beta_0^2 \Phi_f e^{2i\beta_0 x} \right) D_1 A_{11}(T_1, T_2) \quad (18-10)$$

$$P_{2,b,v}(x, T_1, T_2) = \left(-8\Sigma I \beta_0 \Phi'_b \omega_b - 4i\Sigma I \beta_0^2 \Phi_b \omega_b - 4i\Phi_b \omega_b \pi^2 + il_{xx} \Omega \beta_0^2 \Phi_b + 3I_{xx} \Omega \beta_0 \Phi'_b - 2il_{xx} \Omega \Phi''_b + 4i\Sigma I \Phi''_b \omega_b - I_{xx} \Omega \beta_0 \Phi'_b e^{2i\beta_0 x} - il_{xx} \Omega \beta_0^2 \Phi_b e^{2i\beta_0 x} \right) D_1 A_{12}(T_1, T_2) \quad (19-10)$$

$$P_{2,f,w}(x, T_1, T_2) = \left(-8\Sigma I \beta_0 \Phi'_b \omega_b - 4i\Sigma I \beta_0^2 \Phi_b \omega_b - 4i\Phi_b \omega_b \pi^2 + il_{xx} \Omega \beta_0^2 \Phi_b + 3I_{xx} \Omega \beta_0 \Phi'_b - 2il_{xx} \Omega \Phi''_b + 4i\Sigma I \Phi''_b \omega_b - I_{xx} \Omega \beta_0 \Phi'_b e^{2i\beta_0 x} - il_{xx} \Omega \beta_0^2 \Phi_b e^{2i\beta_0 x} \right) D_1 A_{11}(T_1, T_2) \quad (20-10)$$

$$P_{2,b,w}(x, T_1, T_2) = \left(-8\Sigma I \beta_0 \Phi'_f \omega_f + 4i\Sigma I \Phi''_f \omega_f - 4i\Phi_f \omega_f \pi^2 + il_{xx} \Omega \beta_0^2 \Phi_f + 3I_{xx} \Omega \beta_0 \Phi'_f - 2il_{xx} \Omega \Phi''_f - 4i\Sigma I \beta_0^2 \Phi_f \omega_f - I_{xx} \Omega \beta_0 \Phi'_f e^{2i\beta_0 x} - il_{xx} \Omega \beta_0^2 \Phi_f e^{2i\beta_0 x} \right) D_1 A_{12}(T_1, T_2) \quad (21-10)$$

$$P_{2,t}(x, T_1, T_2) = 2i\omega_t \Phi_t D_1 A_t(T_1, T_2) \quad (22-10)$$

معادلات (17-10) تا (22-10) نشان می‌دهند با حذف جملات سکولار، هیچ جمله سکولار دیگری

در حل مرتبه ۲ وجود نداشته و در نتیجه از حل ناهمگن معادلات فوق داریم،

$$\begin{aligned} U_2(x, T_0, T_1, T_2) &= 0 \\ V_2(x, T_0, T_1, T_2) &= 0 \\ W_2(x, T_0, T_1, T_2) &= 0 \\ \phi_2(x, T_0, T_1, T_2) &= 0 \end{aligned} \quad (23-10)$$

در نتیجه با توجه به رابطه (23-10)، باید داشته باشیم،

$$\begin{aligned} D_1 A_a(T_1, T_2) &= 0 \\ D_1 A_{11}(T_1, T_2) &= 0 \\ D_1 A_{12}(T_1, T_2) &= 0 \\ D_1 A_t(T_1, T_2) &= 0 \end{aligned} \quad (24-10)$$

معادله فوق به این معناست که A_a ، A_{11} ، A_{12} و A_t تنها تابعی از T_2 بوده و در نتیجه معادلات

مرتبه اول به صورت زیر ساده می‌شوند،

$$u_1(x, T_0, T_2) = \Phi_a(x) \left(A_a(T_2) e^{i\omega_a T_0} + \bar{A}_a(T_2) e^{-i\omega_a T_0} \right) \quad (25-10)$$

$$v_1(x, T_0, T_2) = \Phi_f(x) \left(A_{11}(T_2) e^{i\omega_f T_0} + \bar{A}_{11}(T_2) e^{-i\omega_f T_0} \right) + \Phi_b(x) \left(A_{12}(T_2) e^{i\omega_b T_0} + \bar{A}_{12}(T_2) e^{-i\omega_b T_0} \right) \quad (26-10)$$

$$w_1(x, T_0, T_2) = \Phi_f(x) \left(-iA_{11}(T_2) e^{i\omega_f T_0} + i\bar{A}_{11}(T_2) e^{-i\omega_f T_0} \right) + \Phi_b(x) \left(-iA_{12}(T_2) e^{i\omega_b T_0} + i\bar{A}_{12}(T_2) e^{-i\omega_b T_0} \right) \quad (27-10)$$

$$u_1(x, T_0, T_2) = \Phi_t(x) \left(A_t(T_2) e^{i\omega_t T_0} + \bar{A}_t(T_2) e^{-i\omega_t T_0} \right) \quad (28-10)$$

معادلات مرتبه ۳ نیز مانند مرتبه ۲ مورد بررسی قرار می‌گیرد. به منظور بیان نزدیکی فرکانس

تحریک به فرکانس طبیعی، پارامتر تنظیم کننده σ به شکل زیر تعریف می‌شود،

$$\Omega = \omega_f + \varepsilon^2 \sigma \quad (29-10)$$

با جایگذاری معادله (۲۹-۱۰) و (۲۵-۱۰) تا (۲۸-۱۰) در (۱۹-۹) تا (۲۳-۹)، داریم،

$$D_0^2 U_3(x, T_0, T_2) - \frac{2\mu}{\pi^4} U_3''(x, T_0, T_2) = P_{3,a}(x, T_2) e^{i\omega_a T_0} + CC + N.S.T \quad (30-10)$$

$$\left[(\beta_0^2 D_0 w_3 + i\beta_0^2 D_0 v_3 + i\beta_0 D_0 w_3' - \beta_0 D_0 v_3') e^{-2i\beta_0 x} + (\beta_0^2 D_0 w_3 - i\beta_0^2 D_0 v_3 - i\beta_0 D_0 w_3' - \beta_0 D_0 v_3') e^{2i\beta_0 x} + 3\beta_0 D_0 v_3' - \beta_0^2 D_0 w_3 + 2D_0 w_3'' \right] \frac{I_{xx} \Omega}{2\pi^2} + \frac{10\beta_0^2}{\pi^4} v_3'' - \frac{4\beta_0 \Sigma I}{\pi^2} D_0^2 w_3' - \frac{4\beta_0^3}{\pi^4} w_3' - 2 \frac{(\pi^2 + \beta_0^2 \Sigma I)}{\pi^2} D_0^2 v_3 \quad (31-10)$$

$$+ \frac{8\beta_0}{\pi^4} w_3''' - 2 \frac{v_3^{(4)}}{\pi^4} + 2 \frac{\Sigma I}{\pi^2} D_0^2 v_3'' = P_{3,f,v}(x, T_2) e^{i\omega_f T_0} + P_{3,b,v}(x, T_2) e^{i\omega_b T_0} + CC + N.S.T$$

$$\left[(\beta_0^2 D_0 v_3 - i\beta_0^2 D_0 w_3 + i\beta_0 D_0 v_3' + \beta_0 D_0 w_3') e^{-2i\beta_0 x} + (\beta_0^2 D_0 v_3 + i\beta_0^2 D_0 w_3 - i\beta_0 D_0 v_3' + \beta_0 D_0 w_3') e^{2i\beta_0 x} + 3\beta_0 D_0 w_3' + \beta_0^2 D_0 v_3 - 2D_0 v_3'' \right] \frac{I_{xx} \Omega}{2\pi^2} + \frac{10\beta_0^2}{\pi^4} w_3'' + \frac{4\beta_0 \Sigma I}{\pi^2} D_0^2 v_3' + \frac{4\beta_0^3}{\pi^4} v_3' - 2 \frac{(\pi^2 + \beta_0^2 \Sigma I)}{\pi^2} D_0^2 w_3 \quad (32-10)$$

$$- \frac{8\beta_0}{\pi^4} v_3''' - 2 \frac{w_3^{(4)}}{\pi^4} + 2 \frac{\Sigma I}{\pi^2} D_0^2 w_3'' = P_{3,f,w}(x, T_2) e^{i\omega_f T_0} + P_{3,b,w}(x, T_2) e^{i\omega_b T_0} + CC + N.S.T$$

$$D_0^2 \phi_3 - \frac{D_{xx}}{\pi^2 I_{xx}} \phi_3'' = P_{3,t}(x, T_2) e^{i\omega_t T_0} + CC + N.S.T \quad (33-10)$$

که CC و $N.S.T$ به معنی مختلط مزدوج و ضرایب غیر سکولار می‌باشند. $P_{3,a}(x, T_1, T_2)$

$$P_{3,t}(x, T_1, T_2) \text{ و } P_{3,b,w}(x, T_1, T_2) \text{ و } P_{3,f,w}(x, T_1, T_2) \text{ و } P_{3,f,v}(x, T_1, T_2) \text{ و } P_{3,b,v}(x, T_1, T_2)$$

معادلات مرتبه ۳ از ε بوده و برابرند با،

$$P_{3,a}(x, T_2) = \left((2\beta_0^2 \Phi_a' \Phi_f' \Phi_f + \beta_0^2 \Phi_a'' \Phi_f'^2 + \Phi_a'' \Phi_f'^2 + 2\Phi_a' \Phi_f' \Phi_f'') \bar{A}_{11} A_a A_{11} + 9\Phi_a'^2 \Phi_a'' A_a^2 \bar{A}_a + (\Phi_a'' \Phi_b'^2 + 2\Phi_a' \Phi_b' \Phi_b'' + 2\beta_0^2 \Phi_a' \Phi_b' \Phi_b + \beta_0^2 \Phi_a'' \Phi_b'^2) \bar{A}_{12} A_{12} A_a \right) \mu - 2i\pi^4 \omega_a \Phi_a D_2 A_a \quad (34-10)$$

$$\begin{aligned}
P_{3,f,v} = & \frac{1}{\pi^2} \left[\left(-\frac{1}{4} (\beta_0 \Phi'_f + i\beta_0^2 \Phi_f) e^{2i\beta_0 x} + \frac{1}{4} i\beta_0^2 \Phi_f + \frac{3}{4} \beta_0 \Phi'_f - \frac{1}{2} i\Phi_f'' \right) \Omega I_{xx} \right. \\
& \left. - (i\beta_0^2 \Sigma I \Phi_f + 2\beta_0 \Sigma I \Phi'_f - i\Sigma I \Phi_f'' + i\pi^2 \Phi_f) \omega_f \right] A'_1 \\
& + \frac{1}{2\pi^4} \left[(\Phi_f'' + i\beta_0 \Phi'_f) \int_0^1 \Phi_b'^2 dx + (\beta_0^2 \Phi_f'' + i\beta_0^3 \Phi_f') \int_0^1 \Phi_b^2 dx + (\Phi_b'' + i\beta_0 \Phi_b') \int_0^1 \Phi_f' \Phi_b' dx \right. \\
& \left. + (\beta_0^2 \Phi_b'' + i\beta_0^3 \Phi_b') \int_0^1 \Phi_f \Phi_b dx + (-\beta_0^2 \Phi_b' + i\beta_0 \Phi_b'') \int_0^1 \Phi_b' \Phi_f dx + (-i\beta_0 \Phi_b'' + \beta_0^2 \Phi_b') \int_0^1 \Phi_f' \Phi_b dx \right] \mu \bar{A}_2 A_2 A_1 \\
& + \frac{1}{\pi^4} (2i\beta_0 \Phi_u' \Phi_u'' \Phi_f + 2\Phi_u' \Phi_u'' \Phi_f' + \Phi_u'^2 \Phi_f'' + i\beta_0 \Phi_u'^2 \Phi_f') \mu \bar{A}_a A_a A_1 \\
& + \frac{1}{2\pi^4} \left[(\beta_0^2 \Phi_f'' + i\beta_0^3 \Phi_f') \int_0^1 \Phi_f^2 dx + (\Phi_f'' + i\beta_0 \Phi_f') \int_0^1 \Phi_f'^2 dx \right] \mu A_1^2 \bar{A}_1 - 1/2 ic e^{i\beta_0 x} \Phi_f A_1 \omega_f \\
& + \frac{1}{2} (e_\eta + ie_\xi) \Omega^2 e^{-i\beta_0 x} e^{i\sigma T_2} + \left[\frac{1}{\pi^2} (\Delta I \Phi_f'' - 4i\Delta I \beta_0 \Phi_f' - 3\Delta I \beta_0^2 \Phi_f) \Omega \omega_f \right. \\
& \left. + \frac{1}{\pi^4} \left(\frac{3}{2} \Delta I \Phi_f \omega_f^2 + 2\frac{1}{2} \Delta D \Phi_f'' \right) \beta_0^2 + \frac{1}{\pi^4} (4\Delta D \Phi_f'' + 2\pi^2 \Delta I \Phi_f' \omega_f^2) i\beta_0 - \frac{1}{2\pi^2} \Delta I \omega_f^2 \Phi_f'' \right. \\
& \left. - \frac{1}{2\pi^4} \Delta D \Phi_f^{(4)} - \frac{1}{\pi^4} (4\Delta D \beta_0^4 \Phi_f + 11i\Delta D \beta_0^3 \Phi_f') \right] \bar{A}_1 e^{2i\sigma T_2} e^{-4i\beta_0 x}
\end{aligned} \tag{35-10}$$

$$\begin{aligned}
P_{3,b,v} = & \frac{1}{\pi^2} \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} (\beta_0 \Phi_b' + i\beta_0^2 \Phi_b) e^{2i\beta_0 x} + (-i\Phi_b'' + \frac{1}{2} i\beta_0^2 \Phi_b + \frac{3}{2} \beta_0 \Phi_b') \right) I_{xx} \Omega \right. \\
& \left. - (i\beta_0^2 \Phi_b + 2\beta_0 \Phi_b') \Sigma I \omega_b + (-\pi^2 \Phi_b + \Sigma I \Phi_b'') i\omega_b \right] A'_2 \\
& + \frac{1}{2\pi^4} \left[(i\beta_0 \Phi_b' + \Phi_b'') \int_0^1 \Phi_b'^2 dx + (\beta_0^2 \Phi_b'' + i\beta_0^3 \Phi_b') \int_0^1 \Phi_b^2 dx \right] \mu \bar{A}_2 A_2^2 - \frac{1}{2} ic e^{i\beta_0 x} \omega_b \Phi_b A_2 \\
& + \frac{1}{2\pi^4} \left[(\Phi_b'' + i\beta_0 \Phi_b') \int_0^1 \Phi_f'^2 dx + (i\beta_0^3 \Phi_b' + \beta_0^2 \Phi_b'') \int_0^1 \Phi_f^2 dx + (\beta_0^2 \Phi_f' - i\beta_0 \Phi_f'') \int_0^1 \Phi_b' \Phi_f dx \right. \\
& \left. + (\Phi_f'' + i\beta_0 \Phi_f') \int_0^1 \Phi_f' \Phi_b' dx + (i\beta_0 \Phi_f'' - \beta_0^2 \Phi_f') \int_0^1 \Phi_f' \Phi_b dx + (i\beta_0^3 \Phi_f' + \beta_0^2 \Phi_f'') \int_0^1 \Phi_f \Phi_b dx \right] \mu A_1 A_2 \bar{A}_1 \\
& + \frac{1}{\pi^4} (\Phi_u'^2 \Phi_b'' + i\beta_0 \Phi_u'^2 \Phi_b' + 2\Phi_u' \Phi_u'' \Phi_b' + 2i\beta_0 \Phi_u' \Phi_u'' \Phi_b) \mu A_2 A_a \bar{A}_a
\end{aligned} \tag{36-10}$$

$$\begin{aligned}
P_{3,f,w} = & \frac{1}{\pi^2} \left[1/2 \left(\left(\frac{1}{2} \beta_0^2 \Phi_f - \frac{1}{2} i\beta_0 \Phi_f' \right) e^{2i\beta_0 x} + \frac{1}{2} \beta_0^2 \Phi_f - \frac{3}{2} i\beta_0 \Phi_f' - \Phi_f'' \right) \Omega I_{xx} \right. \\
& \left. - (i\beta_0^2 \Sigma I \Phi_f + 2i\beta_0 \Sigma I \Phi_f' + \pi^2 \Phi_f + \Sigma I \Phi_f'') \omega_f \right] A'_1 \\
& + \frac{1}{2\pi^4} \left[(-i\Phi_f'' + \beta_0 \Phi_f') \int_0^1 \Phi_b'^2 dx + (-i\beta_0^2 \Phi_f'' + \beta_0^3 \Phi_f') \int_0^1 \Phi_b^2 dx + (-i\Phi_b'' + \beta_0 \Phi_b') \int_0^1 \Phi_f' \Phi_b' dx \right. \\
& \left. + (-i\beta_0^2 \Phi_b'' + \beta_0^3 \Phi_b') \int_0^1 \Phi_f \Phi_b dx + (i\beta_0^2 \Phi_b' + \beta_0 \Phi_b'') \int_0^1 \Phi_b' \Phi_f dx + (-\beta_0 \Phi_b'' - i\beta_0^2 \Phi_b') \int_0^1 \Phi_f' \Phi_b dx \right] \mu \bar{A}_2 A_2 A_1 \\
& + \frac{1}{\pi^4} (\beta_0 \Phi_u'^2 \Phi_f' - i\Phi_u'^2 \Phi_f'' - 2i\Phi_u' \Phi_u'' \Phi_f' + 2\beta_0 \Phi_u' \Phi_u'' \Phi_f) \mu \bar{A}_a A_a A_1 \\
& + \frac{1}{2\pi^4} \left[(-i\beta_0^2 \Phi_f'' + \beta_0^3 \Phi_f') \int_0^1 \Phi_f^2 dx + (-\Phi_f'' + \beta_0 \Phi_f') \int_0^1 \Phi_f'^2 dx \right] \mu A_1^2 \bar{A}_1 \\
& + \left[\frac{1}{\pi^2} (-i\Phi_f'' - 4\beta_0 \Phi_f' + 3i\beta_0^2 \Phi_f) \Omega \omega_f \Delta I - \frac{1}{\pi^4} (-4i\beta_0^4 \Phi_f + 11\beta_0^3 \Phi_f') \Delta D \right.
\end{aligned} \tag{37-10}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\pi^4} \left(\frac{3}{2} \Delta I \Phi_f \omega_f^2 + 2 \frac{1}{2} \Delta D \Phi_f'' \right) i \beta_0^2 + \frac{1}{\pi^4} \left(4 \Delta D \Phi_f''' + 2 \pi^2 \Delta I \Phi_f' \omega_f^2 \right) \beta_0 \\
& + \frac{1}{2 \pi^2} i \Delta I \omega_f^2 \Phi_f'' + \frac{1}{2 \pi^4} i \Delta D \Phi_f^{(4)} \left[\bar{A}_1 e^{2i\sigma T_2} e^{-4i\beta_0 x} - \frac{1}{2} c e^{i\beta_0 x} \Phi_f A_1 \omega_f + \frac{1}{2} (-ie_\eta + e_\xi) \Omega^2 e^{-i\beta_0 x} e^{i\sigma T_2} \right. \\
P_{3,b,w} = & \frac{1}{\pi^2} \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \left(i \beta_0 \Phi_b' + \beta_0^2 \Phi_b \right) e^{2i\beta_0 x} + \left(-\Phi_b'' + \frac{1}{2} \beta_0^2 \Phi_b - \frac{3}{2} i \beta_0 \Phi_b' \right) \right) I_{xx} \Omega \right. \\
& \left. - \left(\beta_0^2 \Phi_b - 2i \beta_0 \Phi_b' \right) \Sigma I \omega_b + \left(-\pi^2 \Phi_b + \Sigma I \Phi_b'' \right) \omega_b \right] A_2' \\
& + \frac{1}{2 \pi^4} \left[\left(\beta_0 \Phi_b' - i \Phi_b'' \right) \int_0^1 \Phi_b'^2 dx + \left(-i \beta_0^2 \Phi_b'' + \beta_0^3 \Phi_b' \right) \int_0^1 \Phi_b^2 dx \right] \mu \bar{A}_2 A_2^2 - 1/2 c e^{i\beta_0 x} \omega_b \Phi_b A_2 \\
& + \frac{1}{2 \pi^4} \left[\left(-i \Phi_b'' + \beta_0 \Phi_b' \right) \int_0^1 \Phi_f'^2 dx + \left(\beta_0^3 \Phi_b' - i \beta_0^2 \Phi_b'' \right) \int_0^1 \Phi_f^2 dx - \left(i \beta_0^2 \Phi_f' + \beta_0 \Phi_f'' \right) \int_0^1 \Phi_b' \Phi_f dx \right. \\
& \left. + \left(-i \Phi_f'' + \beta_0 \Phi_f' \right) \int_0^1 \Phi_f' \Phi_b' dx - \left(\beta_0 \Phi_f'' + i \beta_0^2 \Phi_f' \right) \int_0^1 \Phi_f' \Phi_b dx + \left(\beta_0^3 \Phi_f' - i \beta_0^2 \Phi_f'' \right) \int_0^1 \Phi_f \Phi_b dx \right] \mu A_1 A_2 \bar{A}_1 \\
& + \frac{1}{\pi^4} \left(\beta_0 \Phi_u'^2 \Phi_b' + 2 \beta_0 \Phi_u' \Phi_u'' \Phi_b - i \Phi_u'^2 \Phi_b'' - 2i \Phi_u' \Phi_u'' \Phi_b' \right) \mu A_2 A_a \bar{A}_a
\end{aligned} \tag{38-10}$$

$$P_{3,t}(x, T_2) = 2i \omega_t \Phi_t D_2 A_t \tag{39-10}$$

همانطور که نایفه بیان کرده است [120]، از آنجا که بخش همگن معادلات (30-10) تا (33-10)

دارای حل‌های غیر بدیهی می‌باشد، بخش غیر همگن نیز دارای پاسخ بوده اگر و تنها اگر، شرایط حل پذیری برقرار باشند. شرایط حل پذیری دربردارنده تعامد طرف راست معادلات فوق با هر پاسخی از مسئله الحاقی خود که همان شکل مدهای خطی بوده، می‌باشد. می‌توان اثبات کرد که بخشهای همگن این معادلات نیز خود الحاق می‌باشند. بنابراین، شرایط حل پذیری آنها برابرند با،

$$\int_0^1 \Phi_a(x) P_{3,a}(x, T_2) dx = 0 \tag{40-10}$$

$$\int_0^1 \Phi_f(x) (P_{3,f,v}(x, T_2) + iP_{3,f,w}(x, T_2)) dx = 0 \quad \text{و} \tag{41-10}$$

$$\int_0^1 \Phi_b(x) (P_{3,b,v}(x, T_2) + iP_{3,b,w}(x, T_2)) dx = 0$$

$$\int_0^1 \Phi_t(x) \Psi(x, T_2) dx = 0 \tag{42-10}$$

با توجه به معادلات (10-10) تا (12-10) و (34-10) تا (39-10)، صورت نهایی شرایط حل

پذیری برابرند با،

$$i \Lambda_{1,u} D_2 A_a + \Lambda_{2,u} \mu A_a A_{t1} \bar{A}_{t1} + \Lambda_{2,u} \mu A_a A_{t2} \bar{A}_{t2} + 9 \Lambda_{3,u} \mu A_a^2 \bar{A}_{t1} = 0 \tag{43-10}$$

$$\begin{aligned}
& (\Lambda_{1,v} + i\Lambda_{2,v})D_2A_1 + (\Lambda_{5,v} + i\Lambda_{6,v})A_1A_2\bar{A}_2 + (i\Lambda_{7,v} + \Lambda_{8,v})A_1^2\bar{A}_1 + (i\Lambda_{3,v} + \Lambda_{4,v})\bar{A}_1e^{2i\sigma T_2} \\
& - iCA_1\omega_f\Pi_{(9,\beta_0,n)} + (e_\eta + ie_\xi)\Omega^2e^{i\sigma T_2} - 4(i\Lambda_{4,u} + \Lambda_{5,u})\mu A_a A_{l1}\bar{A}_{l1} = 0
\end{aligned} \tag{44-10}$$

$$\begin{aligned}
& (\Lambda_{1,w} + i\Lambda_{2,w})D_2A_2 + (\Lambda_{5,v} + i\Lambda_{6,v})A_1A_2\bar{A}_1 + (\Lambda_{8,v} + i\Lambda_{7,v})A_2^2\bar{A}_2 \\
& - iCA_2\omega_b\Pi_{(9,\beta_0,n)} - 4\mu(i\Lambda_{4,u} + \Lambda_{5,u})\bar{A}_a A_a A_{l2} = 0
\end{aligned} \tag{45-10}$$

$$D_2A_t(T_2) = 0 \tag{46-10}$$

45

$$\begin{aligned}
\Pi_{(1,\beta_0,n)} &= \int_0^1 \phi\phi' dx; \Pi_{(2,\beta_0,n)} = \int_0^1 \frac{\phi\phi'}{e^{2i\beta_0x}} dx = \Pi_{(2,\beta_0,n)}^C + i\Pi_{(2,\beta_0,n)}^S; \Pi_{(3,\beta_0,n)} = \int_0^1 \phi^2 dx; \\
\Pi_{(4,\beta_0,n)} &= \int_0^1 \frac{\phi^2}{e^{2i\beta_0x}} dx = \Pi_{(4,\beta_0,n)}^C + i\Pi_{(4,\beta_0,n)}^S; \Pi_{(5,\beta_0,n)} = \int_0^1 \phi\phi'' dx; \Pi_{(6,\beta_0,n)} = \int_0^1 \phi\phi''' dx; \\
\Pi_{(7,\beta_0,n)} &= \int_0^1 \phi\phi^{(4)} dx; \Pi_{(8,\beta_0,n)} = \int_0^1 \frac{\phi^2}{e^{4i\beta_0x}} dx = \Pi_{(8,\beta_0,n)}^C + i\Pi_{(8,\beta_0,n)}^S; \\
\Pi_{(9,\beta_0,n)} &= \int_0^1 \phi^2 e^{i\beta_0x} dx = \Pi_{(9,\beta_0,n)}^C + i\Pi_{(9,\beta_0,n)}^S; \Pi_{(10,\beta_0,n)} = \int_0^1 \frac{\phi\phi^{(4)}}{e^{4i\beta_0x}} dx = \Pi_{(10,\beta_0,n)}^C + i\Pi_{(10,\beta_0,n)}^S; \\
\Pi_{(11,\beta_0,n)} &= \int_0^1 \frac{\phi\phi'}{e^{4i\beta_0x}} dx = \Pi_{(11,\beta_0,n)}^C + i\Pi_{(11,\beta_0,n)}^S; \Pi_{(12,\beta_0,n)} = \int_0^1 \frac{\phi\phi''}{e^{4i\beta_0x}} dx = \Pi_{(12,\beta_0,n)}^C + i\Pi_{(12,\beta_0,n)}^S; \\
\Pi_{(13,\beta_0,n)} &= \int_0^1 \phi'\phi'' dx; \Pi_{(14,\beta_0,n)} = \int_0^1 \frac{\phi\phi'''}{e^{4i\beta_0x}} dx = \Pi_{(14,\beta_0,n)}^C + i\Pi_{(14,\beta_0,n)}^S; \Pi_{(15,\beta_0,n)} = \int_0^1 (\Phi'_a \Phi''_a \Phi_f^2) dx; \\
\Pi_{(16,\beta_0,n)} &= \int_0^1 (\Phi_f \Phi_a'^2 \Phi_f') dx; \Pi_{(17,\beta_0,n)} = \int_0^1 (\Phi_f \Phi_a' \Phi_a'' \Phi_f') dx; \Pi_{(18,\beta_0,n)} = \int_0^1 (\Phi_f \Phi_a'^2 \Phi_f'') dx; \\
\Pi_{(19,\beta_0,n)} &= 2\beta_0^2 \int_0^1 \Phi_a \Phi_a' \Phi_f' \Phi_f dx; \Pi_{(20,\beta_0,n)} = \beta_0^2 \int_0^1 \Phi_a \Phi_a'' \Phi_f^2 dx; \Pi_{(21,\beta_0,n)} = 2 \int_0^1 \Phi_a \Phi_a' \Phi_f' \Phi_f'' dx; \\
\Pi_{(22,\beta_0,n)} &= \int_0^1 \Phi_a \Phi_a'' \Phi_f'^2 dx; \Pi_{(23,\beta_0,n)} = -2\pi^4 \omega_a \int_0^1 \Phi_a^2 dx; \Pi_{(24,\beta_0,n)} = \int_0^1 \Phi_a \Phi_a'^2 \Phi_a'' dx;
\end{aligned}$$

9

$$\begin{aligned}
\Lambda_{1,v} &= \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{3}{2} I_{xx} \Omega - 4 \Sigma I \omega_f \right) \beta_0 \Pi_{(1,\beta_0,n)} \\
\Lambda_{2,v} &= \frac{1}{2\pi^2} \left(\beta_0^2 \Pi_{(3,\beta_0,n)} - 2 \Pi_{(5,\beta_0,n)} \right) I_{xx} \Omega + \frac{2}{\pi^2} \left(\Pi_{(5,\beta_0,n)} + \beta_0^2 \Pi_{(3,\beta_0,n)} \right) \Sigma I \omega_f - 2 \Pi_{(3,\beta_0,n)} \omega_f \\
\Lambda_{3,v} &= \frac{2 \Delta I \omega_f \Omega}{\pi^2} \left[-\frac{4}{\pi^2} \beta_0 \Pi_{(11,\beta_0,n)}^C - \frac{3}{\pi^2} \beta_0^2 \Pi_{(8,\beta_0,n)}^S + \Pi_{(12,\beta_0,n)}^S \right] \\
&+ \frac{\Delta I \omega_f^2}{\pi^2} \left[4 \beta_0 \Pi_{(11,\beta_0,n)}^C + 3 \beta_0^2 \Pi_{(8,\beta_0,n)}^S - \Pi_{(12,\beta_0,n)}^S \right] \\
&+ \frac{\Delta D}{\pi^4} \left[-\Pi_{(10,\beta_0,n)}^S + 8 \beta_0 \Pi_{(14,\beta_0,n)}^C - 22 \beta_0^3 \Pi_{(11,\beta_0,n)}^C - 8 \beta_0^4 \Pi_{(8,\beta_0,n)}^S + 21 \beta_0^2 \Pi_{(12,\beta_0,n)}^S \right] \\
\Lambda_{4,v} &= \frac{2 \Delta I \omega_f \Omega}{\pi^2} \left[\frac{4}{\pi^2} \beta_0 \Pi_{(11,\beta_0,n)}^S - \frac{3}{\pi^2} \beta_0^2 \Pi_{(8,\beta_0,n)}^C + \Pi_{(12,\beta_0,n)}^C \right] \\
&+ \frac{\Delta I \omega_f^2}{\pi^2} \left[-4 \beta_0 \Pi_{(11,\beta_0,n)}^S + 3 \beta_0^2 \Pi_{(8,\beta_0,n)}^C - \Pi_{(12,\beta_0,n)}^C \right] \\
&+ \frac{\Delta D}{\pi^4} \left[-\Pi_{(10,\beta_0,n)}^C - 8 \beta_0 \Pi_{(14,\beta_0,n)}^S + 22 \beta_0^3 \Pi_{(11,\beta_0,n)}^S - 8 \beta_0^4 \Pi_{(8,\beta_0,n)}^C + 21 \beta_0^2 \Pi_{(12,\beta_0,n)}^C \right], \\
\Lambda_{5,v} &= \frac{4}{\pi^4} \mu \left(\Pi_{(13,\beta_0,n)} \Pi_{(5,\beta_0,n)} + \beta_0^2 \Pi_{(1,\beta_0,n)} \Pi_{(5,\beta_0,n)} \right), \\
\Lambda_{6,v} &= \frac{4}{\pi^4} \mu \left(\beta_0^3 \Pi_{(1,\beta_0,n)}^2 + \beta_0 \Pi_{(13,\beta_0,n)} \Pi_{(1,\beta_0,n)} \right), \Lambda_{7,v} = \frac{2}{\pi^4} \mu \left(\beta_0 \Pi_{(13,\beta_0,n)} \Pi_{(1,\beta_0,n)} + \beta_0^3 \Pi_{(1,\beta_0,n)}^2 \right), \\
\Lambda_{8,v} &= \frac{2}{\pi^4} \mu \left(\beta_0^2 \Pi_{(1,\beta_0,n)} \Pi_{(5,\beta_0,n)} + \Pi_{(13,\beta_0,n)} \Pi_{(5,\beta_0,n)} \right), \\
\Lambda_{1,u} &= \Pi_{(23,\beta_0,n)}; \Lambda_{2,u} = \Pi_{(19,\beta_0,n)} + \Pi_{(20,\beta_0,n)} + \Pi_{(21,\beta_0,n)} + \Pi_{(22,\beta_0,n)}; \Lambda_{3,u} = \Pi_{(24,\beta_0,n)}; \\
\Lambda_{4,u} &= \left(\Pi_{(16,\beta_0,n)} + 2 \Pi_{(15,\beta_0,n)} \right), \quad \Lambda_{5,u} = \Pi_{(18,\beta_0,n)} + 2 \Pi_{(17,\beta_0,n)}, \tag{۴۷-۱۰}
\end{aligned}$$

$$\Lambda_{1,w} = \frac{3}{2\pi^2} I_{xx} \beta_0 \Pi_{(1,\beta_0,n)} \Omega - 4 \Sigma I \beta_0 \Pi_{(1,\beta_0,n)} \omega_b$$

$$\Lambda_{2,w} = \frac{1}{2\pi^2} \left(\beta_0^2 \Pi_{(3,\beta_0,n)} - 2 \Pi_{(5,\beta_0,n)} \right) I_{xx} \Omega + \frac{1}{\pi^2} \left(-2 \beta_0^2 \Pi_{(3,\beta_0,n)} \omega_b + 2 \Pi_{(5,\beta_0,n)} \right) \Sigma I \omega_b - 2 \Pi_{(3,\beta_0,n)} \omega_b$$

$$e_\eta = \int_0^1 \Phi_{fb}(x) e_\eta(x) dx, e_\xi = \int_0^1 \Phi_{fb}(x) e_\xi(x) dx$$

همچنین، همانطور که از معادلات (۴۴-۱۰) و (۴۷-۱۰) مشاهده می‌شود، ضریب جمله $e^{2i\sigma T_2}$

که $\Pi = (i\Lambda_{3,v} + \Lambda_{4,v})$ می‌باشد، اشاره به نامتقارنی در سیستم دارد. برای حذف $e^{i\sigma T_0}$ در معادلات (۱۰-)

(۴۳) تا (۴۶-۱۰) قرار می‌دهیم،

$$A_{T_1}(T_2) = A_T(T_2) e^{i\sigma T_2} \tag{۴۸-۱۰}$$

و در نهایت برای بدست آوردن پاسخ معادلات حاصل، $A_T(T_2)$ و $A_{T_2}(T_2)$ و A_a را به صورت قطبی

$$A_T = \frac{1}{2} a_{T_1}(T_2) e^{i\theta(T_2)}, \quad A_{T_2} = \frac{1}{2} a_{T_2}(T_2) e^{i\theta(T_2)}, \quad A_a = \frac{1}{2} a_a(T_2) e^{i\theta(T_2)} \tag{۴۹-۱۰}$$

در معادلات حاصل قرار می‌دهیم. A_l ، A_{l2} و A_a به ترتیب دامنه های نوسانات عرضی همسو و ناهمسو و نوسانات محوری بوده و $\theta(T_2)$ ، $\Theta(T_2)$ و $\vartheta(T_2)$ به ترتیب فازهای نوسانات عرضی همسو و ناهمسو و نوسانات محوری می‌باشند. سپس با جداسازی بخشهای حقیقی و موهومی معادلات حاصل، هفت معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول به شکل زیر بدست می‌آید،

$$\Lambda_{1,u} D_2 \vartheta = (\Lambda_{3,u} a_u^2 + \Lambda_{2,u} a_{l1}^2 + \Lambda_{2,u} a_{l2}^2) \quad (50-10)$$

$$D_2 a_u = 0 \quad (51-10)$$

$$\begin{aligned} 4(\Lambda_{1,v}^2 + \Lambda_{2,v}^2) D_2 a_{l1} = & 4[(\Lambda_{2,v} \Lambda_{4,v} - \Lambda_{1,v} \Lambda_{3,v}) \sin(2\Theta) - (\Lambda_{1,v} \Lambda_{4,v} + \Lambda_{2,v} \Lambda_{3,v}) \cos(2\Theta)] a_{l1} \\ & + 8\Omega^2 [(\Lambda_{2,v} e_\eta - \Lambda_{1,v} e_\xi) \sin(\Theta) - (\Lambda_{1,v} e_\eta + \Lambda_{2,v} e_\xi) \cos(\Theta)] - (\Lambda_{2,v} \Lambda_{7,v} + \Lambda_{1,v} \Lambda_{8,v}) a_{l1}^3 \\ & - (\Lambda_{1,v} \Lambda_{5,v} + \Lambda_{2,v} \Lambda_{6,v}) a_{l1} a_{l2}^2 + 8c a_{l1} \omega_f (\Lambda_{2,v} \Pi_{(9,\beta_0,n)}^c - \Lambda_{1,v} \Pi_{(9,\beta_0,n)}^s) \\ & + 2(\Lambda_{2,v} \Lambda_{4,u} + \Lambda_{1,v} \Lambda_{5,u}) \mu a_u^2 a_{l1} \end{aligned} \quad (52-10)$$

$$\begin{aligned} 4(\Lambda_{1,v}^2 + \Lambda_{2,v}^2) a_{l1} D_2 \Theta = & 4[(-\Lambda_{1,v} \Lambda_{3,v} + \Lambda_{4,v} \Lambda_{2,v}) \cos(2\Theta) + (\Lambda_{4,v} \Lambda_{1,v} + \Lambda_{3,v} \Lambda_{2,v}) \sin(2\Theta)] a_{l1} \\ & + (\Lambda_{8,v} \Lambda_{2,v} - \Lambda_{1,v} \Lambda_{7,v}) a_{l1}^3 + (\Lambda_{5,v} \Lambda_{2,v} - \Lambda_{1,v} \Lambda_{6,v}) a_{l1} a_{l2}^2 - 4(\Lambda_{1,v}^2 + \Lambda_{2,v}^2) a_{l1} \sigma \\ & + 8\Omega^2 [(\Lambda_{2,v} e_\xi + e_\eta \Lambda_{1,v}) \sin(\Theta) + (e_\eta \Lambda_{2,v} - e_\xi \Lambda_{1,v}) \cos(\Theta)] \\ & + 8c a_{l1} \omega_f (\Lambda_{2,v} \Pi_{(9,\beta_0,n)}^s + \Lambda_{1,v} \Pi_{(9,\beta_0,n)}^c) - 2(\Lambda_{1,v} \Lambda_{4,u} + \Lambda_{2,v} \Lambda_{5,u}) \mu a_u^2 a_{l1} \end{aligned} \quad (53-10)$$

$$\begin{aligned} 4(\Lambda_{2,w}^2 + \Lambda_{1,w}^2) D_2 a_{l2} = & -(\Lambda_{1,w} \Lambda_{5,v} + \Lambda_{2,w} \Lambda_{6,v}) a_{l2} a_{l1}^2 - (\Lambda_{1,w} \Lambda_{8,v} + \Lambda_{2,w} \Lambda_{7,v}) a_{l2}^3 \\ & + 8c a_{l2} \omega_b (\Lambda_{2,w} \Pi_{(9,\beta_0,n)}^c - \Lambda_{1,w} \Pi_{(9,\beta_0,n)}^s) + 2(\Lambda_{2,w} \Lambda_{4,u} + \Lambda_{1,w} \Lambda_{5,u}) \mu a_u^2 \end{aligned} \quad (54-10)$$

$$\begin{aligned} 4(\Lambda_{2,w}^2 + \Lambda_{1,w}^2) D_2 \theta = & (-\Lambda_{6,v} \Lambda_{1,w} + \Lambda_{2,w} \Lambda_{5,v}) a_{l1}^2 + (-\Lambda_{7,v} \Lambda_{1,w} + \Lambda_{2,w} \Lambda_{8,v}) a_{l2}^2 \\ & + 8c a_{l2} \omega_b (\Lambda_{1,w} \Pi_{(9,\beta_0,n)}^c + \Lambda_{2,w} \Pi_{(9,\beta_0,n)}^s) - 2(\Lambda_{1,w} \Lambda_{4,u} + \Lambda_{2,w} \Lambda_{5,u}) \mu a_u^2 \end{aligned} \quad (55-10)$$

به منظور بررسی پایداری ارتعاشاتی تیر مورد نظر و همچنین استخراج نقاط ثابت تعادلی معادلات مذکور، می‌بایست مشتقات زمانی آنها صفر در نظر گرفته شوند. با انجام این کار و همانطور که از معادلات نشان داده شده مشخص است، a_{l2} نیز برابر صفر خواهد شد و این بدان معنی است که تنها لنگ زنی همسو در ارتعاشات عرضی تحریک خواهد شد. به این ترتیب، معادلات نهایی برای بررسی پایداری سیستم مورد نظر عبارتند از،

$$\Lambda_{3,u} a_u^2 + \Lambda_{2,u} (a_{l1}^2 + a_{l2}^2) = 0 \quad (56-10)$$

$$4\left[(\Lambda_{2,v}\Lambda_{4,v} - \Lambda_{1,v}\Lambda_{3,v})\sin(2\Theta_0) - (\Lambda_{1,v}\Lambda_{4,v} + \Lambda_{2,v}\Lambda_{3,v})\cos(2\Theta_0)\right]a_{I10} \\ + 8\Omega^2\left[(\Lambda_{2,v}e_\eta - \Lambda_{1,v}e_\xi)\sin(\Theta_0) - (\Lambda_{1,v}e_\eta + \Lambda_{2,v}e_\xi)\cos(\Theta_0)\right] - (\Lambda_{2,v}\Lambda_{7,v} + \Lambda_{1,v}\Lambda_{8,v})a_{I10}^3 \quad (57-10)$$

$$+ 8ca_{I10}\omega_f\left(\Lambda_{2,v}\Pi_{(9,\beta_0,n)}^C - \Lambda_{1,v}\Pi_{(9,\beta_0,n)}^S\right) + 2(\Lambda_{2,v}\Lambda_{4,u} + \Lambda_{1,v}\Lambda_{5,u})\mu a_{u0}^2 a_{I10} = 0$$

$$4\left[(-\Lambda_{1,v}\Lambda_{3,v} + \Lambda_{4,v}\Lambda_{2,v})\cos(2\Theta_0) + (\Lambda_{4,v}\Lambda_{1,v} + \Lambda_{3,v}\Lambda_{2,v})\sin(2\Theta_0)\right]a_{I10} \\ + (\Lambda_{8,v}\Lambda_{2,v} - \Lambda_{1,v}\Lambda_{7,v})a_{I10}^3 - 4(\Lambda_{1,v}^2 + \Lambda_{2,v}^2)a_{I10}\sigma \quad (58-10)$$

$$+ 8\Omega^2\left[(\Lambda_{2,v}e_\xi + e_\eta\Lambda_{1,v})\sin(\Theta_0) + (e_\eta\Lambda_{2,v} - e_\xi\Lambda_{1,v})\cos(\Theta_0)\right] \\ + 8ca_{I10}\omega_f\left(\Lambda_{2,v}\Pi_{(9,\beta_0,n)}^S + \Lambda_{1,v}\Pi_{(9,\beta_0,n)}^C\right) - 2(\Lambda_{1,v}\Lambda_{4,u} + \Lambda_{2,v}\Lambda_{5,u})\mu a_{u0}^2 a_{I10} = 0$$

اکنون با توجه به معادلات (50-10) و (51-10) داریم،

$$a_u(T_2) = C_a \quad (59-10)$$

$$g(T_2) = \frac{1}{\Lambda_{1,u}} \int \left[(\Lambda_{3,u}C_a^2 + \Lambda_{2,u}(a_{I1}^2 + a_{I2}^2)) \right] dT_2 + D_a \quad (60-10)$$

که C_a و D_a ثوابتی بوده که از شرایط اولیه ارتعاشات محوری بدست می‌آیند.

۱۰-۲- تحلیل پایداری با تعیین ماتریس ژاکوبین

به منظور پایداری حالت پایای معادلات مرتبه اول (50-10) تا (55-10) و با فرض $a_2(T_2) = 0$

ماتریس ژاکوبین، J ، طرف راست معادلات فوق برابر است با [118]،

$$J = \frac{1}{4(\Lambda_{1,v}^2 + \Lambda_{2,v}^2)} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (61-10)$$

$$\begin{aligned}
A &= \left\{ \begin{aligned} &4(\Lambda_{2,v}\Lambda_{4,v} - \Lambda_{1,v}\Lambda_{3,v})\sin(2\Theta_0) - 4(\Lambda_{1,v}\Lambda_{4,v} + \Lambda_{2,v}\Lambda_{3,v})\cos(2\Theta_0) \\ &-3(\Lambda_{2,v}\Lambda_{7,v} + \Lambda_{1,v}\Lambda_{8,v})a_{10}^2 + 8c\omega_f(\Lambda_{2,v}\Pi_{(9,\beta_0,n)}^C - \Lambda_{1,v}\Pi_{(9,\beta_0,n)}^S) \\ &+2(\Lambda_{2,v}\Lambda_{4,u} + \Lambda_{1,v}\Lambda_{5,u})\mu a_u^2 \end{aligned} \right\} \\
B &= 8 \left\{ \begin{aligned} &((\Lambda_{2,v}\Lambda_{4,v} - \Lambda_{1,v}\Lambda_{3,v})\cos(2\Theta_0) + (\Lambda_{1,v}\Lambda_{4,v} + \Lambda_{2,v}\Lambda_{3,v})\sin(2\Theta_0))a_{10} \\ &+\Omega^2((\Lambda_{1,v}e_\eta + \Lambda_{2,v}e_\xi)\sin(\Theta_0) + (\Lambda_{2,v}e_\eta - \Lambda_{1,v}e_\xi)\cos(\Theta_0)) \end{aligned} \right\} \\
C &= \frac{1}{a_{10}} \left\{ \begin{aligned} &4(\Lambda_{2,v}\Lambda_{4,v} - \Lambda_{1,v}\Lambda_{3,v})\cos(2\Theta_0) + 4(\Lambda_{1,v}\Lambda_{4,v} + \Lambda_{2,v}\Lambda_{3,v})\sin(2\Theta_0) \\ &+3(\Lambda_{2,v}\Lambda_{8,v} - \Lambda_{1,v}\Lambda_{7,v})a_{10}^2 - 4\sigma(\Lambda_{1,v}^2 + \Lambda_{2,v}^2) \\ &+8ca_1\omega_f(\Lambda_{2,v}\Pi_{(9,\beta_0,n)}^S + \Lambda_{1,v}\Pi_{(9,\beta_0,n)}^C) - 2(\Lambda_{1,v}\Lambda_{4,u} + \Lambda_{2,v}\Lambda_{5,u})\mu a_u^2 \end{aligned} \right\} \\
D &= \frac{8}{a_{10}} \left\{ \begin{aligned} &-(\Lambda_{2,v}\Lambda_{4,v} - \Lambda_{1,v}\Lambda_{3,v})\sin(2\Theta_0) + (\Lambda_{1,v}\Lambda_{4,v} + \Lambda_{2,v}\Lambda_{3,v})\cos(2\Theta_0) \\ &+\Omega^2((\Lambda_{1,v}e_\eta + \Lambda_{2,v}e_\xi)\cos(\Theta_0) - (\Lambda_{2,v}e_\eta - \Lambda_{1,v}e_\xi)\sin(\Theta_0)) \end{aligned} \right\}
\end{aligned}$$

و مقادیر ویژه متناظر آن از معادله زیر بدست می‌آیند،

$$|J - \lambda I| = 0 \quad \text{or} \quad \lambda^2 - (A+D)\lambda + AD - BC = 0 \quad (62-10)$$

با توجه به معادلات فوق الذکر، از آنجا که $(A+D) < 0$ ، اگر $AD - BC > 0$ ، حرکت دینامیکی

سیستم در نقاط ثابت تعادلی، (a_{110}, Θ_0) پایدار بوده و در غیر اینصورت ناپایدار می‌باشد.

۱۰-۳- نتایج

در این بخش، با استفاده از معادلات بدست آمده، نمودارهای پاسخ فرکانسی لازم جهت تحلیل پایداری ارتعاشات عرضی تیرهای پیچیده شده یک سر گیردار با سرعت دورانی ثابت گزارش شده است. در این نمودارها، تأثیر زاویه پیچش، میزان خروج از مرکز و ضریب میرایی خارجی روی رزونانس‌های اولیه و پارامتریک تیر پیچیده شده دورانی متقارن و نامتقارن محوری یک سر گیردار، مورد بررسی قرار خواهد گرفت. برای این منظور، پارامترهای بی بعد شده زیر مورد استفاده قرار گرفته اند: $I_{xx} = 0.001$ ، $I_{\xi\xi} = I_{\eta\eta} = 0.002878$ ، $\mu = 0.0005$ ، $c = 0.01$. بقیه پارامترهای بی بعد استفاده شده، در هر بررسی ذکر خواهند شد.

شکل (۱۰-۱) تا شکل (۱۰-۴) منحنی‌های پاسخ فرکانسی غیر خطی را پیرامون نقاط ثابت

تعادلی تیر پیچیده شده یک سر گیردار در مدهای اول و دوم و زوایای پیچش مختلف برای حالت متقارن

و نا متقارن نشان می‌دهد. فرض شده است که نابالانسی‌ها در هر دو جهات اصلی تیر یکسان بوده و برابرند با، $e_{\eta} = e_{\xi} = 0.05$. همانطور که مشاهده شده است، در مد اول، منحنی‌های پاسخ فرکانسی سیستم متقارن و نا متقارن به سمت چپ و در مد دوم به سمت راست خم شده‌اند که مؤید این است که تأثیر پارامترهای غیر خطی سیستم در مد اول از نوع نرم شونده و در مد دوم از نوع سخت شونده می‌باشد.

با توجه به شکل (۱-۱۰) و شکل (۳-۱۰)، در حالت متقارن $\Pi = 0$ ، تیر تنها دارای یک منبع تحریک بوده که همان نابالانسی با فرکانس Ω می‌باشد و در نتیجه منحنی پاسخ فرکانسی دارای یک قله بوده و تنها یک پرش در فرکانس دو شاخگی رخ می‌دهد. همچنین، در حالت متقارن و زوایای پیچش کوچکتر دیده می‌شود که برای برخی از مقادیر σ ، سیستم دارای تنها یک پاسخ پایدار بوده در حالی که برای برخی دیگر، سیستم دارای سه پاسخ بوده که دوتای آنها پایدار و دیگری ناپایدار است. در نتیجه در این حالات همواره پدیده پرش و دو شاخگی اتفاق می‌افتد. اما، وقتی زاویه پیچش افزایش می‌یابد، نواحی ناپایدار کاهش یافته و در نتیجه احتمال بروز دو شاخگی در سیستم کاهش می‌یابد.

این درحالی است که وقتی نامتقارنی در سیستم وجود دارد ($\Pi \neq 0$)، علاوه بر منبع تحریک ناشی از نابالانسی با فرکانس Ω ، یک منبع تحریک دیگر با فرکانس 2Ω در سیستم بوجود می‌آید که ناشی از وجود نامتقارنی در سیستم می‌باشد و به عنوان تحریک پارامتریک در سیستم شناخته می‌شود. از این‌رو، منحنی‌های پاسخ فرکانسی دارای دو قله می‌باشد. این مطلب در شکل (۲-۱۰) و شکل (۴-۱۰) برای تیرهای پیچیده شده نامتقارن محوری نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، در برخی از مقادیر، سیستم دارای پنج پاسخ، در برخی دیگر، یک پاسخ و در برخی دیگر دارای سه پاسخ بوده که شامل ترکیبی از پاسخهای پایدار و ناپایدار می‌باشند. بسیار واضح است که همواره پدیده دو شاخگی اتفاق می‌افتد. همانطور که مشاهده می‌شود، در مد اول، برای تیر پیچیده شده یک سر گیردار نامتقارن با در نظر گرفتن ارتعاشات محوری، منحنی پاسخ فرکانسی در زوایای پیچش کوچکتر به شکل نمودارهای دوشاخگی از نوع saddle-node bifurcation در فرکانسهای نقاط تغییر حالت پایای سیستم از پایدار به ناپایدار یعنی R_1 و R_2 می‌باشد بگونه‌ای که در زاویه پیچش صفر درجه، همانطور که نشان داده شده

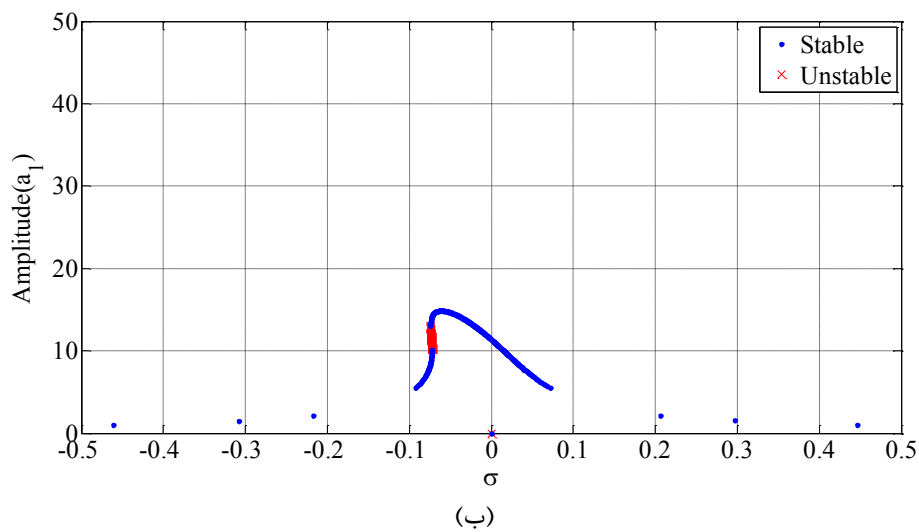
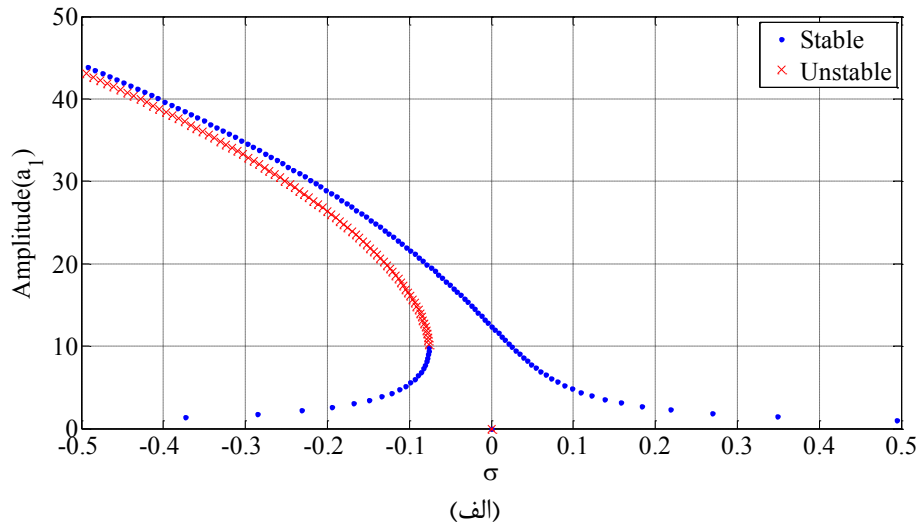
است، سیستم تمایل به پرش از پاسخ ناپایدار سیستم در saddle-node bifurcation واقع در نقطه R_1 به پاسخ پایدار در R'_1 دارد. سپس در فرکانس‌های متناظر با فاصله بین $R'_1 - R_2$ که متعلق به پاسخهای پایدار سیستم بوده، نوسان کرده و در نهایت از نقطه ناپایدار saddle-node bifurcation واقع در R_2 پرش دوم داشته و به پاسخ پایدار سیستم در R'_2 می‌رود.

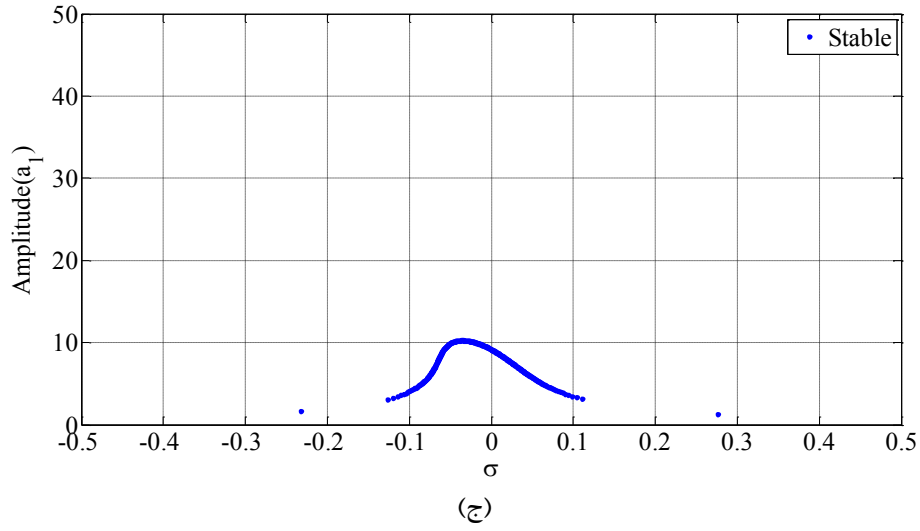
اما با افزایش زاویه پیچش سیستم، پهنای فرکانسی بین دو saddle-node bifurcation یعنی $R_1 - R_2$ افزایش یافته و میزان پرش از دو saddle-node bifurcation به تدریج کاهش می‌یابد. اما در مد دوم، نمودار دوشاخگی از نوع pitchfork خواهد بود به صورتیکه پاسخ پایای سیستم در R_1 به صورت supercritical pitchfork bifurcation بوده که با یک subcritical pitchfork bifurcation به R_2 ختم می‌شود (این موضوع برای نمونه در شکل (۱۰-۲) و برای زاویه پیچش $\beta_0 = 60^\circ$ نشان داده شده است). در این حالت، مشاهده می‌شود که سیستم تمایل به پرش از حالت ناپایدار در R_1 به حالت پایدار در R'_1 دارد. همانطور که مشاهده می‌شود، با افزایش زاویه پیچش، طول $R_1 R'_1$ این پرش کاهش می‌یابد. از طرفی می‌توان دید که در زوایای پیچش کوچکتر، سیستم دارای پهنای وسیعتری از پاسخهای صفر و پهنای کوچکتری از پاسخهای غیر صفر خواهد بود و اگر سیستم در فرکانسی در فاصله $R_1 - R_2$ عمل کند، سیستم با دامنه‌ای برابر با پاسخ غیر صفر نوسان می‌کند.

از طرفی، با توجه به شکل (۱۰-۱) و شکل (۱۰-۲)، در مد اول، با افزایش زاویه پیچش، β_0 ، تأثیرات نرم شوندگی کاهش یافته و در نتیجه دامنه قله‌های نوسانی کاهش می‌یابد. از این‌رو، در مد اول می‌توان گفت وجود زاویه پیچش می‌تواند به عنوان یک پارامتر میرا کننده نوسانات سیستم عمل کند. در مورد مد دوم نیز شرایط مشابه می‌باشد، بگونه‌ای که با افزایش زاویه پیچش، تأثیر سخت شوندگی کاهش یافته و در نتیجه دامنه نواحی پایدار نیز کاهش می‌یابد. در نتیجه، می‌توان گفت که در تیرهای پیچیده شده یک سر گیردار، وجود زاویه پیچش به میرا شدن سریع‌تر نوسانات سیستم کمک می‌کند.

با مقایسه نتایج بدست آمده در این بخش با نتایج متناظر بدست آمده در فصل ۳ (پیرامون ارتعاشات عرضی تیرهای پیچیده شده لاغر)، و همچنین معادلات بدست آمده، مشخص است که در نظر

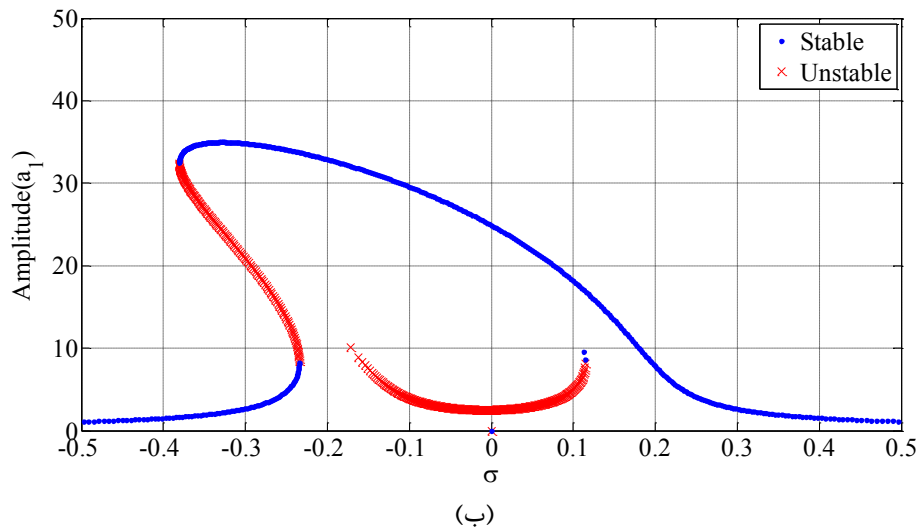
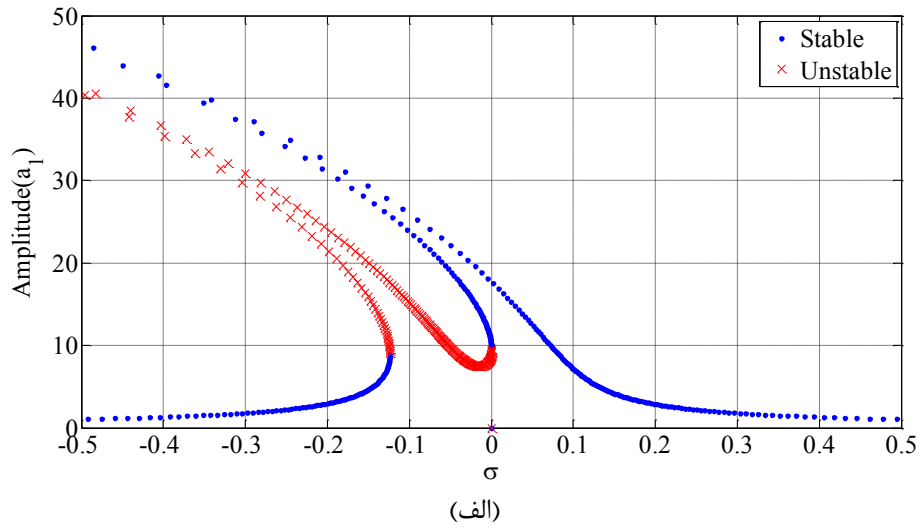
گرفتن ارتعاشات محوری (یا بزرگ بودن ضریب لاغری سیستم) در مد اول باعث افزایش نرم شوندگی سیستم نسبت به حالات متناظر در فصل ۳ و کاهش دامنه سیستم در فرکانسهای متناظر خواهد شد. در مد دوم نیز شرایط همانند مد اول بوده که این امر باعث کاهش سخت شوندگی و افزایش نرم شوندگی سیستم شده و دامنه نوسانات سیستم در فرکانسهای مشابه افزایش خواهد یافت.

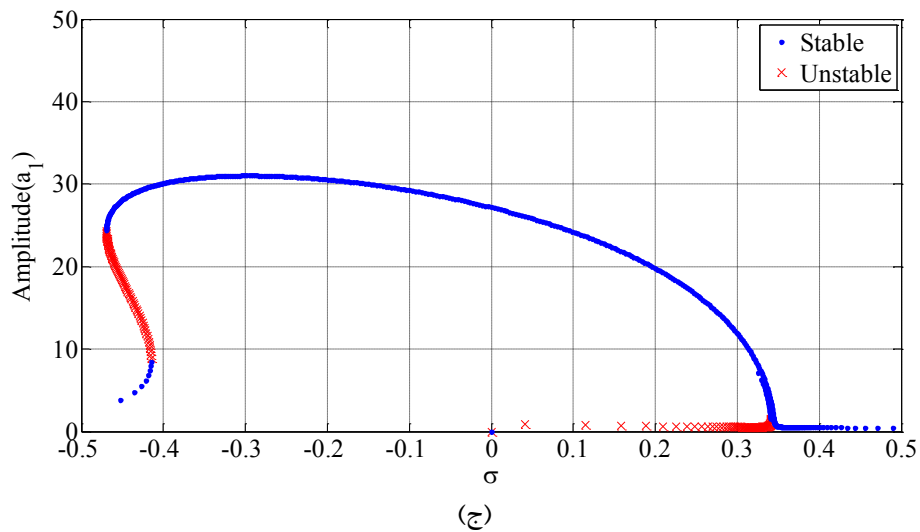




شکل (۱۰-۱) منحنی پاسخ فرکانسی عرضی تیر پیچیده شده دوار متقارن در مد اول خمشی ($n=1$) و مد اول طولی

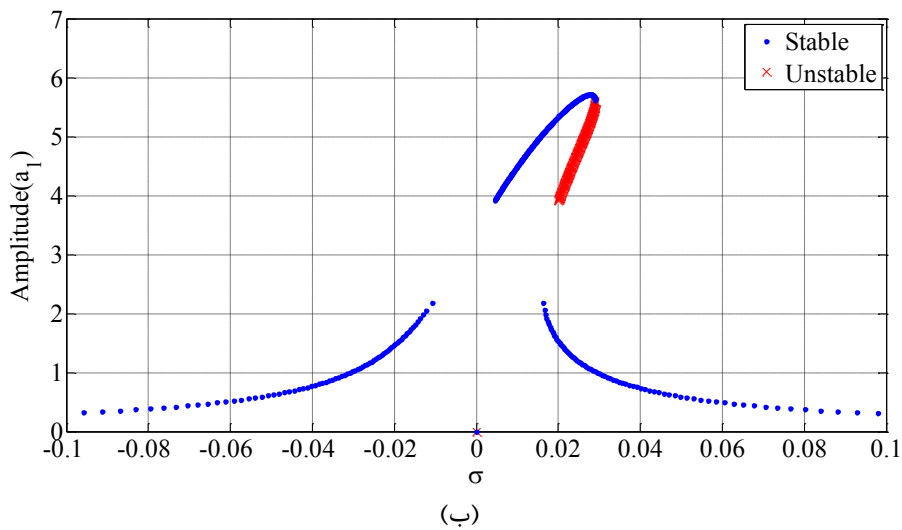
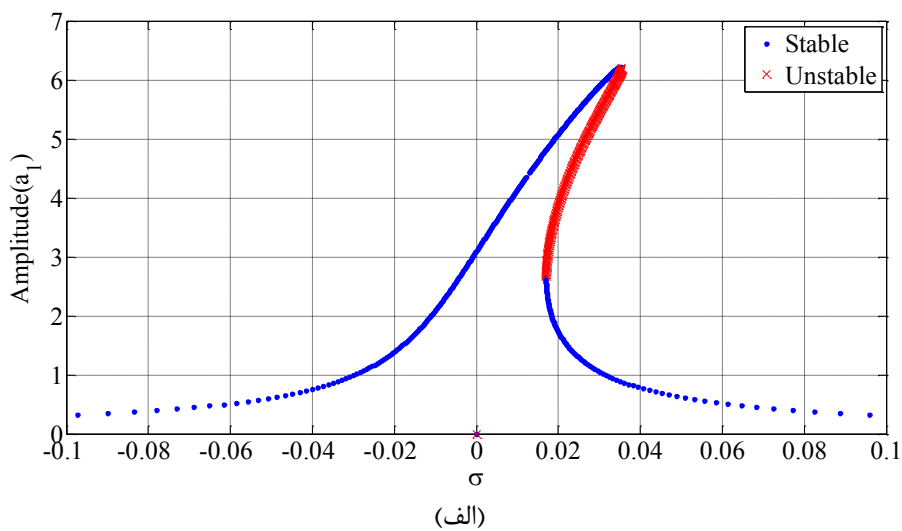
($m=1$) و زاویه پیچش الف) ($\beta_0 = 0^\circ$ ب) ($\beta_0 = 30^\circ$ ج) و ($\beta_0 = 60^\circ$)

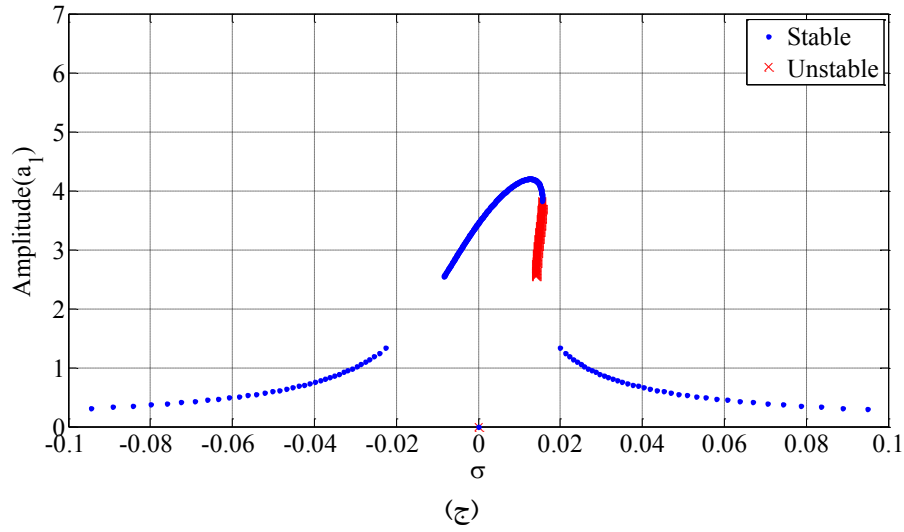




شکل (۱۰-۲) منحنی پاسخ فرکانسی عرضی تیر پیچیده شده دوار نامتقارن در مد اول خمشی ($n=1$) و مد اول

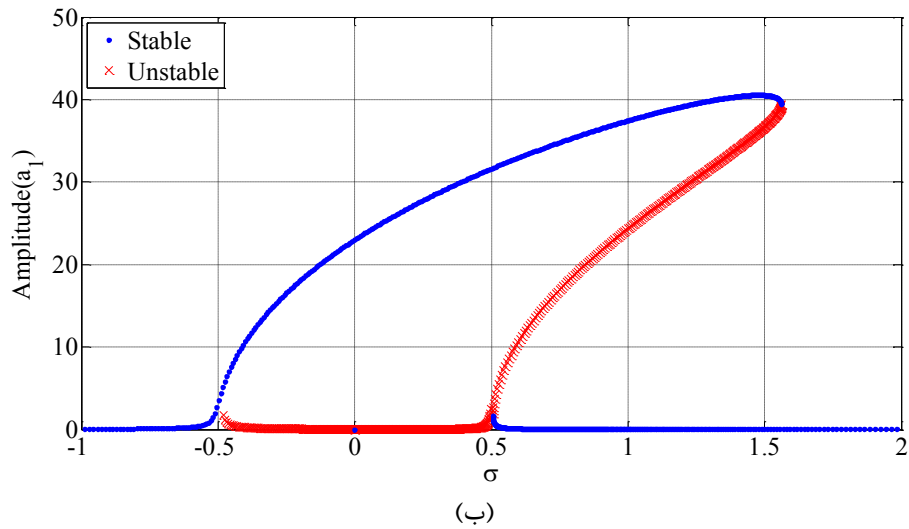
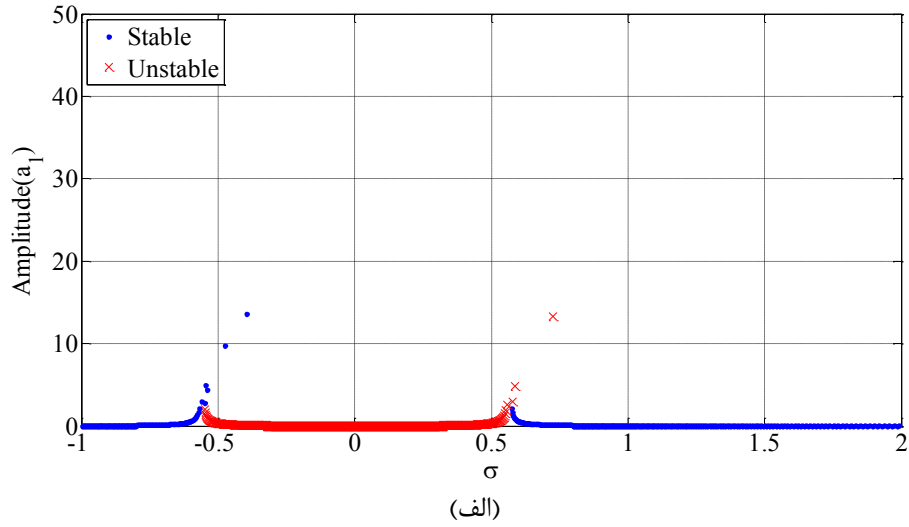
طولی ($m=1$) و زاویه پیشش الف) ($\beta_0=0$) ب) ($\beta_0=30^\circ$) و ج) ($\beta_0=60^\circ$)

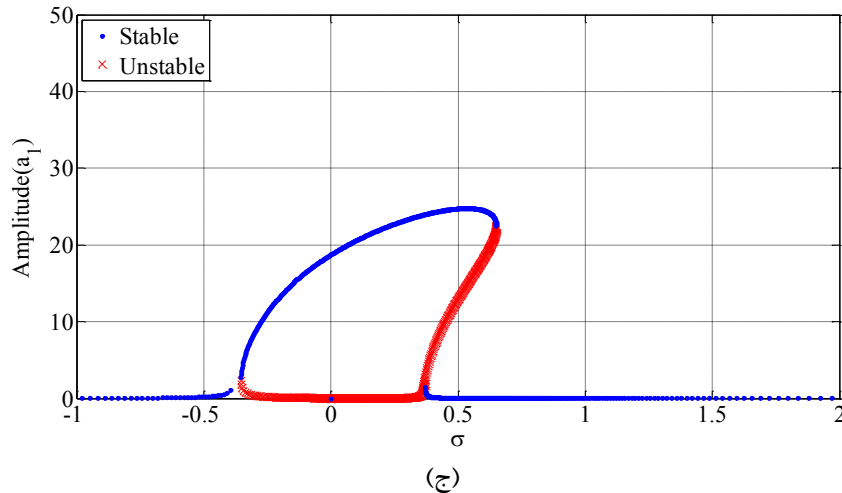




شکل (۳-۱۰) منحنی پاسخ فرکانسی عرضی تیر پیچیده شده دوار متقارن در مد دوم خمشی ($n=2$) و مد اول طولی

($m=1$) و زاویه پیچش الف) ($\beta_0 = 0$) ب) ($\beta_0 = 30^\circ$) و ج) ($\beta_0 = 60^\circ$)





شکل (۴-۱۰) منحنی پاسخ فرکانسی عرضی تیر پیچیده شده دوار نامتقارن در مد دوم خمشی ($n=2$) و مد اول

طولی ($m=1$) و زاویه پیش الف ($\beta_0=0$) ب ($\beta_0=30^\circ$) و ج ($\beta_0=60^\circ$)

شکل (۵-۱۰) منحنی دامنه بر حسب نسبت میرایی تیر پیچیده شده محوری یک سر گیردار را با

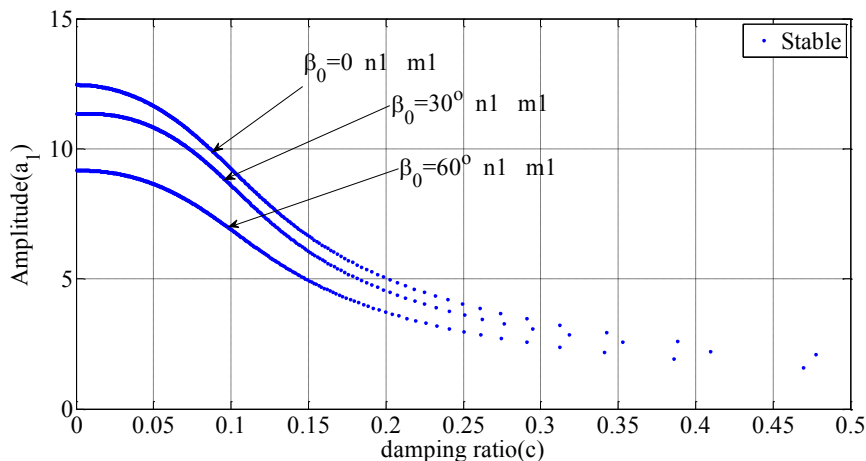
فرض لاغر نبودن تیر (در نظر گرفتن ارتعاشات محوری) در زوایای پیش مختلف و فرکانسهای طبیعی

متناظر با $\sigma=0$ نشان می‌دهد. با توجه به این شکل، می‌توان دید که با افزایش نسبت میرایی، دامنه

نوسانات کاهش می‌یابد. علاوه بر این، سیستم تنها دارای یک پاسخ پایدار در همه زوایای پیش و ضرایب

میرایی بوده که در نتیجه آن، هیچگونه دوشاخگی وجود ندارد. از طرفی، می‌توان گفت افزایش زاویه

پیش، منجر به کاهش شدیدتر دامنه نوسانات سیستم در محیطهای با ضرایب میرایی یکسان می‌شود.



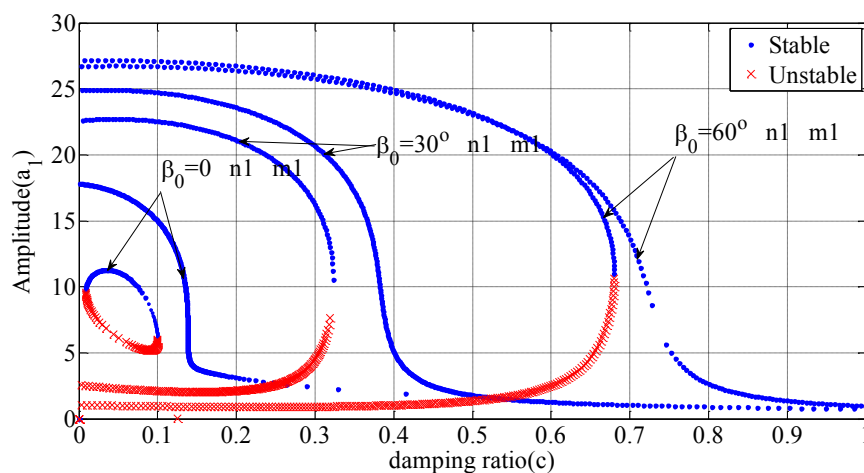
شکل (۵-۱۰) منحنی دامنه-نسبت میرایی تیر پیچیده شده متقارن در مد اول خمشی ($n=1$) و مد اول محوری

($m=1$) و $e_\eta = e_\xi = 0.05$ و $\sigma=0$ و زوایای پیش مختلف.

در حالتی که تیر پیچیده شده، نامتقارن ($\Pi \neq 0$) می‌باشد (شکل (۶-۱۰))، برای $\sigma=0$ و مد اول،

با افزایش ضریب میرایی، دامنه نوسانات در همه زوایای پیش کاهش می‌یابد. در این حالت، سه پاسخ در

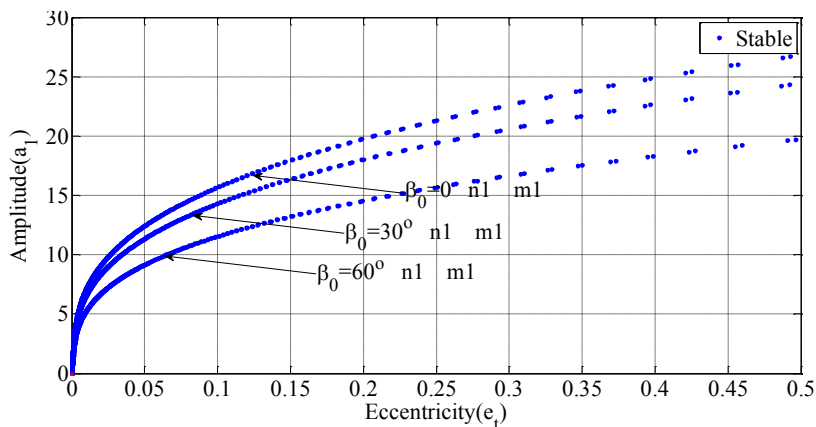
سیستم وجود دارد که دو پاسخ آن پایدار و دیگری ناپایدار است. اما، هرچه زاویه پیچش بزرگتر شده، سیستم در ضریب میرایی بزرگتری شروع به میرا شدن می‌کند که می‌توان گفت در حالت نامتقارن برخلاف حالت متقارن، با افزایش زاویه پیچش، برای میرا شدن سیستم، به محیطهایی با نسبت میرایی خارجی بزرگتر احتیاج است. با مقایسه نتایج متناظر بدست آمده در فصل ۳، مشاهده می‌شود به دلیل وجود ارتعاشات محوری، تأثیر نرم شوندگی سیستم افزایش یافته و در نتیجه دامنه نوسانات پایدار سیستم کاهش می‌یابد.



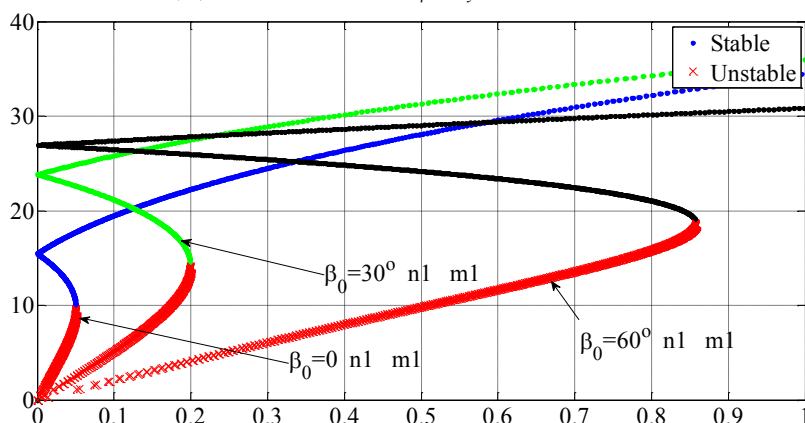
شکل (۱۰-۶) منحنی دامنه-نسبت میرایی تیر پیچیده شده نامتقارن در مد اول خمشی ($n=1$) و مد اول محوری ($m=1$) و $e_\xi = e_\eta = 0.05$ و $\sigma = 0$ و زوایای پیچش مختلف.

شکل (۱۰-۷) و شکل (۱۰-۸) دامنه نوسانات را برحسب خروج از مرکز تیر پیچیده شده متقارن و نامتقارن یک سر گیردار در فرکانس طبیعی متناظر با $\sigma = 0$ در حالتی که ارتعاشات محوری در نظر گرفته شده است، نشان می‌دهد. همانطور که در شکل (۱۰-۷) نشان داده شده است، در حالت متقارن، حرکت نوسانی تیر پیچیده شده دوار یک سر گیردار مذکور در کل مقادیر خروج از مرکز تیر و زوایای پیچش مختلف آن، پایدار بوده و در نتیجه هیچگونه دوشاخگی اتفاق نمی‌افتد. همچنین، با توجه به این شکل مشاهده می‌شود که با افزایش زاویه پیچش، در یک خروج از مرکز مشخص، دامنه نوسانات سیستم کاهش می‌یابد. شکل (۱۰-۸) تأثیر زاویه پیچش β_0 را روی منحنی دامنه-خروج از مرکز تیر پیچیده شده دوار یک سر گیردار نامتقارن در نزدیکی فرکانسهای متناظر با $\sigma = 0$ نشان می‌دهد. در این حالت،

به ازای برخی از مقادیر مشخص خروج از مرکز تیر در $\sigma=0$ ، تنها دو بخش وجود دارد. بخش اول، در مقادیر خروج از مرکز کوچکتر بوده که شامل سه حل بوده با دو پاسخ پایدار و یک پاسخ ناپایدار در حالی که در بخش دوم و در مقادیر خروج از مرکز بزرگتر، به ازای کلیه زوایای پیچش، تنها یک پاسخ پایدار وجود دارد. در نتیجه پدیده دو شاخگی و یک پرش اتفاق می‌افتد. همچنین، افزایش زاویه پیچش باعث می‌شود پرش در مقادیر بزرگتری از خروج از مرکز اتفاق افتاده و دامنه پایدار نوسانات سیستم کاهش می‌یابد. در هر دو حالت مذکور، با مقایسه نتایج متناظر بدست آمده در فصل ۳، می‌توان دید که دامنه نوسانات سیستم در حالتی که تیر لاغر نبوده و ارتعاشات محوری در نظر گرفته شده است، نسبت به حالتی که تیر لاغر می‌باشد کاهش می‌یابد.



شکل (۷-۱۰) منحنی دامنه-خروج از مرکز تیر پیچیده شده متقارن در مد اول خمشی ($n=1$) و مد اول محوری ($m=1$) و $e_\eta = e_\xi = 0.05$ و $\sigma=0$ و زوایای پیچش مختلف.



شکل (۸-۱۰) منحنی دامنه-خروج از مرکز تیر پیچیده شده نامتقارن در مد اول خمشی ($n=1$) و مد اول محوری ($m=1$) و $e_\eta = e_\xi = 0.05$ و $\sigma=0$ و زوایای پیچش مختلف.

فصل یازدهم

۱۱ - نتیجه گیری و پیشنهادها

۱۱-۱- نتیجه گیری

در این رساله، ارتعاشات غیر خطی تیرهای پیچیده شده غیرخطی با زاویه پیچش خطی و شرایط مرزی دو سر مفصل و یک سر گیردار مورد بررسی قرار گرفت. وجود نابالانسی در تیرهای مذکور به عنوان منبع تحریک اولیه با فرکانس تحریک Ω و وجود نامتقارنی به عنوان منبع تحریک پارامتریک با فرکانس 2Ω به عنوان منابع تحریک سیستم در نظر گرفته شده‌اند. در برخی از حالات، تیرهای نامتقارن با خاصیت کش پذیری یا کش ناپذیری و در برخی دیگر از حالات، تیرهای پیچیده شده با سرعت ثابت یا متغیر مورد بررسی قرار گرفتند. همچنین، با توجه به روابط بدست آمده مشخص شد که از آنجا که منحنی‌های پاسخ فرکانسی در تیرهای دو سر مفصل و در هر دو مد اول و دوم به سمت راست خم شده‌اند، تأثیر پارامترهای غیر خطی از نوع سخت شونده بوده در حالی که در تیرهای یک سر گیردار در مد اول منحنی-ها به سمت چپ خم شده و تأثیر پارامترهای غیر خطی از نوع نرم شونده بودند. در بررسی و صحنه گذاری نتایج از سه روش مقیاس‌های چند گانه، گالرکین و روش عددی رانگ-کوتا استفاده شد.

در حالتی که تیر به صورت کش پذیر در نظر گرفته شد، مشخص شد که در تیرهای پیچیده شده نامتقارن دو سر مفصل و یک سر گیر دار، افزایش زاویه پیچش در مد اول باعث کاهش دامنه نوسانات پایدار شده. از این رو می‌توان گفت که در این تیرها، زاویه پیچش در مد اول می‌تواند به عنوان یک پارامتر میرا کننده و کاهنده دامنه نوسانات نقش داشته باشد. اما در مد دوم برای تیرهای دو سر مفصل مذکور، افزایش زاویه پیچش نقشی معکوس داشته در حالی که برای تیرهای یک سر گیر دار در مد دوم نیز شرایط همانند مد اول آنها می‌باشد.

در حالتی که سرعت تیر به صورت متغیر و با اغتشاش سینوسی در نظر گرفته شده است، مشخص شد که در مدهای اول و دوم متقارن، دامنه نوسانات حالات پایای تیر پیچیده شده با وجود تغییرات سرعت در همه زوایای پیچش از مقادیر متناظر خود در حالت بدون تغییرات تغییرات سرعت بزرگتر

است. همچنین، مشاهده شد که در تیرهای متقارن بدون تغییرات سرعت، منحنی‌های پاسخ فرکانسی تنها دارای یک قله می‌باشند که این بدان معنی است که تنها منبع تحریک همان نابالانسی موجود در تیر بوده و یک پرش در سیستم اتفاق می‌افتد. اما، وقتی در تیرهای متقارن، تغییرات سرعت مشاهده می‌شود، یک منبع تحریک دیگر ناشی از تغییرات سرعت به عنوان منبع تحریک پارامتریک در سیستم ظاهر می‌شود که دو قله و در نتیجه دو پرش نزدیک به هم در سیستم مشاهده می‌شود بگونه‌ای که در زوایای پیش بزرگتر و مد اول حتی با وجود تغییرات سرعت، تنها یک پرش در سیستم رخ می‌دهد. بنابراین، در مد اول تیرهای پیچیده شده متقارن دو سر مفصل، تغییرات سرعت در زوایای پیش کوچکتر به عنوان یک منبع تحریک دیگر تأثیر گذار خواهد بود. اما در مد دوم، در هر زاویه پیش، تأثیر تغییرات سرعت حائز اهمیت خواهد بود.

علاوه بر این، مشاهده شد که در حالات با و بدون تغییرات سرعت، پدیده پرش و دو شاخگی اتفاق می‌افتد. اما در حالت نامتقارن و در حالتی که تغییرات سرعت در سیستم وجود دارد، مشاهده می‌شود که منبع تحریک سومی با فرکانس 2Ω نیز در سیستم بوجود می‌آید که به عنوان تحریک پارامتریک می‌باشند و واضح است که پدیده پرش و دوشاخگی اتفاق می‌افتد. در مرجع [41] گزارش شده است که در حضور نامتقارنی و تغییرات سرعت در تیرهای بدون زاویه پیش و مدهای پایینتر، تأثیر نامتقارنی نسبت به وجود تغییرات سرعت غالب است. به عبارت دیگر، در مدهای پایینتر، نامتقارنی به سیستم انرژی پمپ می‌کند. اما، زمانی که تیر به صورت پیچیده شده می‌باشد، وجود زاویه پیش تأثیر تغییرات سرعت را تغییر داده بگونه‌ای که اگرچه تأثیر تغییرات سرعت در مدهای پایینتر ضعیف می‌باشد، اما، افزایش زاویه پیش تأثیر تغییرات سرعت را تقویت می‌کند. به عبارت دیگر، در مدهای کوچکتر، منبع تحریک ناشی از تغییرات سرعت در زوایای پیش بزرگتر می‌تواند به پمپ انرژی در سیستم کمک کند در حالی که در زوایای پیش کوچکتر، معمولاً تأثیر نامتقارنی، انرژی را به سیستم پمپ می‌کند. همچنین، افزایش شماره مد نیز تأثیرات تغییرات سرعت را افزایش می‌دهد.

با توجه به اینکه در اکثر وسایل و تجهیزات کاربردی، همانند مته‌های سوراخکاری و حفاری، یک

نیروی محوری از طرف سطح قطعه یا محیط کار به مته وارد می‌شود، در فصل پنجم و ششم، اقدام به مدلسازی این موضوع به وسیله یک تیر دو سر مفصل و یک سر گیردار شد. در استخراج نتایج حاصل از این مدلسازی مشخص شد که پاسخ فرکانسی تیر دو سر مفصل در اثر وجود نیروی محوری فشاری به سمت چپ جابجا شده که مؤید این است که فرکانس نقطه پرش یا رزونانس کاهش می‌یابد. اما در مورد تیرهای یک سرگیردار تحت نیروی محوری، در مد اول فرکانس رزونانس نسبت به حالت بدون نیروی محوری بیشتر شده در حالی که در مد دوم برعکس می‌باشد. همچنین، دامنه پاسخهای فرکانسی تیرهای دو سر مفصل و یک سر گیردار با نیروی محوری در هر دو مد نسبت به حالت بدون نیروی محوری بیشتر بوده است.

در مبحثی دیگر، ارتعاشات غیر خطی تیرهای پیچیده شده کش ناپذیر دو سر مفصل و یک سر گیردار مورد بررسی قرار گرفت. در این بررسی مشخص شد که در مد اول و دوم، با افزایش زاویه پیچش، β_0 ، تأثیرات سخت شوندگی کاهش یافته ولی مشاهده می‌شود که دامنه نوسانات تیر پیچیده شده کش ناپذیر در فرکانسهای متناظر به تدریج افزایش می‌یابد و این می‌رساند که وجود زاویه پیچش در تیرهای پیچیده شده کش ناپذیر نسبت به تیرهای کش پذیر تأثیر معکوسی را با خود به همراه داشته و نمی‌تواند به میرا شدن سیستم کمک کند.

اما در مورد تیرهای یک سر گیر دار پیچیده شده کش ناپذیر، وضعیت بگونه‌ای است که در مد اول، در زوایای پیچش کوچکتر، منحنی‌های پاسخ فرکانسی سیستم متقارن و نا متقارن به سمت چپ خم می‌شوند و با افزایش زاویه پیچش، این منحنی تمایل به جهش به سمت راست را دارد. این مطلب می‌رساند که فرض کش ناپذیری تیر پیچیده شده مذکور و در نظر گرفتن ارتعاشات محوری و پیچشی باعث می‌شود که در زوایای پیچش کوچکتر، تأثیر نرم شوندگی تیر بیشتر بوده، در حالی که در زوایای پیچش بزرگتر، نرم شوندگی تیر کاهش یافته و نمودار پاسخ فرکانسی به سمت راست میل می‌کند. اما، در مد دوم، نمودار در همه زوایای پیچش به سمت راست خم شده که مؤید این است که تأثیر پارامترهای غیر خطی سیستم در مد دوم از نوع سخت شونده می‌باشد. همچنین، در مد اول، با افزایش زاویه پیچش،

β_0 ، تأثیرات نرم شوندگی کاهش یافته و در نتیجه دامنه قله‌های نوسانی کاهش می‌یابد، بگونه‌ای که در زوایای پیچش بزرگتر، تأثیر نرم شوندگی به شدت کاهش یافته و سخت شوندگی سیستم تقویت خواهد شد. از این‌رو، در مد اول می‌توان گفت وجود زاویه پیچش می‌تواند به عنوان یک پارامتر میرا کننده نوسانات سیستم عمل کند. در مورد مد دوم نیز شرایط مشابه می‌باشد، بگونه‌ای که با افزایش زاویه پیچش، تأثیر سخت شوندگی کاهش یافته و در نتیجه دامنه نواحی پایدار نیز کاهش می‌یابد. در نتیجه، می‌توان گفت که در تیرهای پیچیده شده یک سر گیردار کش ناپذیر، همانند حالت مربوط به تیرهای یک سر گیردار کش پذیر، وجود زاویه پیچش به میرا شدن سریع‌تر نوسانات سیستم کمک می‌کند.

اکثر تجهیزات دوار بکار رفته در صنعت از جمله پره‌های توربین، ابزارهای براده برداری و ... تحت تأثیر ارتعاشات در همه جهات از قبیل ارتعاشات محوری، عرضی و پیچشی قرار دارند. این ارتعاشات می‌تواند ناشی از هر عامل داخلی و خارجی مانند نابالانسی، نامتقارنی و غیره تشدید یابد. از این‌رو، در بخشی دیگر، برخلاف آنچه در بخشهای قبلی مطرح شده بود، ارتعاشات عرضی غیر خطی تیرهای پیچیده شده با در نظر گرفتن تأثیر کوپلینگ ارتعاشات محوری و پیچشی مورد بررسی قرار گرفت. آنچه در این بررسی بدست آمد نشان داد که در تیرهای دو سر مفصل، منحنی‌ها در همه مدها در حالات متقارن و نامتقارن به سمت راست خم شده‌اند و تأثیر پارامترهای غیرخطی از نوع سخت شونده می‌باشد. در مد اول عرضی و مد اول محوری یعنی $m=1, n=1$ ، با افزایش زاویه پیچش، β_0 ، دامنه قله‌های نوسانی کاهش می‌یابد. از این‌رو، در این حالت می‌توان گفت وجود زاویه پیچش می‌تواند به عنوان یک پارامتر میرا کننده نوسانات سیستم عمل کند. این استراتژی زمانی که مد دوم ارتعاشات محوری با مد اول ارتعاشات عرضی کوپل می‌شوند ($m=2, n=1$)، در حالت متقارن محوری ($\Lambda_2=0$) نیز تکرار می‌شود. اما زمانی که مد دوم ارتعاشات عرضی $n=2$ با مدهای اول $m=1$ یا دوم ارتعاشات محوری $m=2$ کوپل می‌شود، با افزایش زاویه پیچش، β_0 ، تأثیرات سخت شوندگی به تدریج افزایش یافته و در نتیجه دامنه قله‌های نوسانی افزایش می‌یابد. از این‌رو، در این حالت می‌توان گفت وجود زاویه پیچش نمی‌تواند در کاهش نوسانات سیستم کمک شایانی کند. از طرفی، مشاهده می‌شود که بر خلاف مواردی که کوپلینگ مخوری و

پیچشی وجود نداشته، در این حالات، در مدهای اول و دوم ارتعاشات عرضی، $n=1,2$ ، با افزایش زاویه پیچش، فرکانس نقطه پرش کاهش یافته و به عبارتی دیگر، پرش در فرکانس کوچکتری رخ می‌دهد. در حالت نامتقارن محوری، با افزایش زاویه پیچش در مدهای اول و دوم عرضی ($n=1,2$)، مقادیر فرکانس و پهنای فرکانسی که در آن، پاسخهای پایدار سیستم رخ می‌دهد، کاهش می‌یابد. همچنین، با مقایسه نتایج بدست آمده از حالات بدون در نظر گرفتن ارتعاشات محوری (فصل دوم)، مشاهده می‌شود که تأثیر کوپلینگ ارتعاشات محوری بر روی ارتعاشات عرضی تأثیری فزاینده در دامنه نوسانات پایدار سیستم می‌باشد.

در حالتی که تیر پیچیده شده مذکور به صورت یک سر گیر دار می‌باشد، در حالت متقارن و زوایای پیچش کوچکتر دیده شد که در زوایای پیچش کوچکتر، همواره پدیده دو شاخگی اتفاق می‌افتد. اما، وقتی زاویه پیچش افزایش می‌یابد، نواحی ناپایدار کاهش یافته و در نتیجه احتمال بروز دو شاخگی در سیستم کاهش می‌یابد.

در حالت نامتقارن و مد اول، دو شاخگی از نوع زینی بوده و با افزایش زاویه پیچش سیستم، پهنای فرکانسی بین دو نقطه دو شاخگی افزایش می‌یابد ولی در مد دوم، نمودار دوشاخگی از نوع چنگالی شکل بود. از طرفی، در مد اول، با افزایش زاویه پیچش، β_0 ، تأثیرات نرم شوندگی کاهش یافته و در نتیجه دامنه قله‌های نوسانی کاهش می‌یابد. از این‌رو، در این مورد نیز می‌توان گفت که در مد اول، وجود زاویه پیچش می‌تواند به عنوان یک پارامتر میرا کننده نوسانات سیستم عمل کند. در مورد مد دوم نیز شرایط مشابه می‌باشد، بگونه‌ای که با افزایش زاویه پیچش، تأثیر سخت شوندگی کاهش یافته و دامنه نواحی پایدار نیز کاهش می‌یابد که می‌توان گفت که در تیرهای پیچیده شده یک سر گیردار با در نظر گرفتن ارتعاشات محوری و پیچشی، وجود زاویه پیچش به میرا شدن سریع‌تر نوسانات سیستم کمک می‌کند.

با مقایسه نتایج بدست آمده با نتایج مربوط به حالاتی که کوپلینگ محوری و پیچشی وجود ندارد، مشخص شد که در نظر گرفتن ارتعاشات محوری (یا بزرگ بودن ضریب لاغری سیستم) در مد اول باعث افزایش نرم شوندگی و کاهش دامنه سیستم در فرکانسهای متناظر خواهد شد. در مد دوم نیز شرایط

همانند مد اول بوده که این امر باعث کاهش سخت شونده‌گی و افزایش نرم شونده‌گی سیستم شده و دامنه نوسانات آن در فرکانسهای مشابه افزایش خواهد یافت.

در پایان، آنچه مشخص است اینکه، بسیاری از سیستمهای فیزیکی، دارای رفتارهای غیرخطی هستند، اما، فقط یک چشم ناظر می‌تواند آن را تشخیص دهد. اکثر اوقات، دیدگاه "خطی" ما (یا به عبارت دیگر، نا آگاهی ما از پدیده های غیرخطی) باعث می‌شود که از چنین رفتار متفاوتی در سیستمها غافل شویم. از این رو، مزیت در آن خواهد بود که شروع به تفکر "غیرخطی" کنیم.

۱۱-۲- پیشنهادها

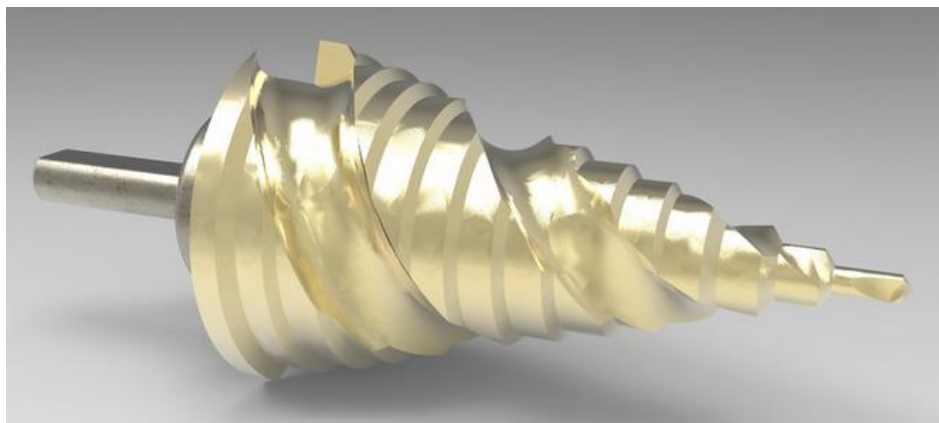
این تحقیق، بینش عمیقی را فراهم می‌کند به طوری که مسیری را برای بسیاری از کاربردهای جدید باز خواهد کرد. آنچه در این رساله بدان پرداخته شده است، تنها بخشی از دریچه‌های پیش رو در این مسیر را باز کرده و لازم است در تحقیقات بعدی، به ابعاد جامعتر و غیر خطی سازهای پیچیده شده غیر خطی پرداخت. در این بخش، برخی از موضوعات مهمی که نیاز به تحقیق در این زمینه دارند مورد خطاب قرار گرفته شده است. امید است بتوان با مطالعات عمیقی که پرداخته خواهد شد بتوان ابعاد وسیعتری از تأثیرات غیر خطی موجود در این گونه سازه‌ها را مورد بررسی قرار داده و کمک شایانی به پیشرفت علوم مهندسی در این زمینه شود.

در تمام فصل‌های مورد بحث در این رساله ارتعاشات محوری، عرضی و پیچشی تیرهای پیچیده شده محوری در حالات مختلف مورد بررسی و مطالعه قرار گرفت. یکی از پدیده‌های عملیاتی که در حین کارکرد این گونه روتورها ممکن است اتفاق بیفتد، پدیده ماند-لغزش^۱ می‌باشد که در اثر عملکرد اجسامی از قبیل مته‌های حفاری، ابزارهای براده برداری و سوراخکاری و ... بوجود می‌آید. در حضور یک استاتور یا جسمی که قرار است عملیات ماشینکاری روی آن انجام شود، تیر پیچیده شده به عنوان یک روتور می‌تواند رفتار ماند-لغزش نسبی داشته باشد. در حالت ماند، سرعت نسبی بین روتور و استاتور صفر بوده

1 Stick-Slip

درحالیکه در طول فاز لغزش، این سرعت، غیر صفر می‌باشد. بررسی این پدیده در حین عملکرد تجهیزات دوار بخصوص پمپها و کمپرسورهای مارپیچ، ابزارهای براده برادی و ... می‌تواند کمک شایانی در مطالعه دقیقتر رفتار دینامیکی و پایداری این گونه سازه‌ها داشته باشد.

همانطور که در بخش ۱ ذکر شد، زاویه پیچش تیرها در طول تیر می‌تواند به صورت خطی یا غیر خطی باشد. آنچه در این رساله بدان پرداخته شد، تیرهای پیچیده شده‌ای بود که در آنها زوایای پیچش به صورت خطی در طول تیر تغییر می‌کرد. اما در عمل، همانند مته‌های سوراخکاری مخروطی (شکل (۱۱-۱))، زاویه پیچش در طول تیر می‌تواند به صورت غیر خطی تغییر کند که در گام بعدی، می‌توان ارتعاشات و پایداری تیرهای پیچیده شده را با در نظر گرفتن این زوایای پیچش غیرخطی مورد بررسی قرار داد.

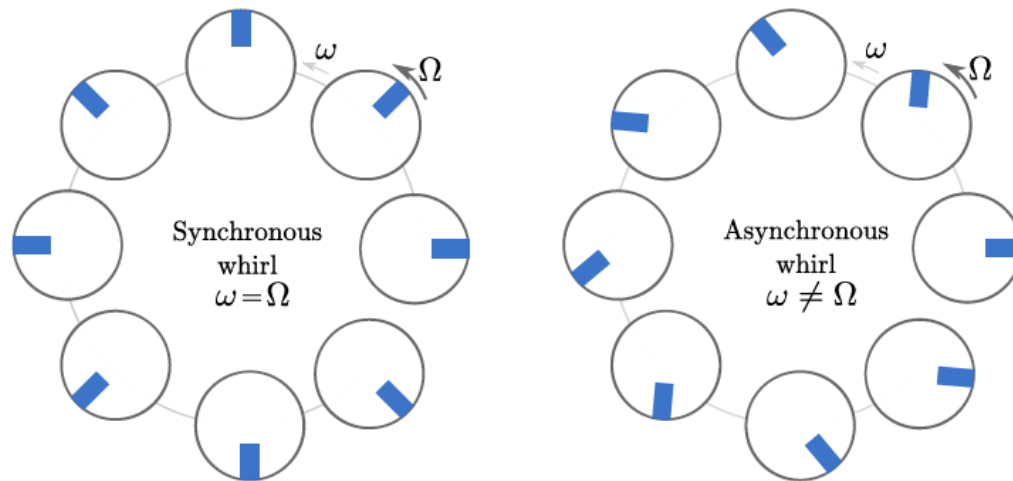


شکل (۱۱-۱) مته‌های مخروطی شکل

همانطور که در بخش ۱ توضیح داده شد، حرکت یک روتور انعطاف پذیر در یک سرعت دورانی مشخص ترکیبی از چرخش^۱ و لنگ زنی^۲ می‌باشد. اولی ناشی از سرعت کاری سیستم بوده و دومی یک حرکت دایره‌ای متناظر با یک سرعت بحرانی یا یک فرکانس طبیعی می‌باشد. چرخش با Ω نشان داده شده و یک حرکت خواسته بوده در حالی که لنگ زنی با ω نشان داده شده و یک حرکت ناخواسته می‌باشد. از آنجا که چرخش و لنگ زنی حرکات مستقل از هم هستند، فرکانسهای آنها می‌تواند متغیر باشد.

1 spin
2 Whirl

لنگ زنی هماهنگ^۱ زمانی اتفاق می‌افتد که فرکانس لنگ زنی با فرکانس چرخش برابر باشد درحالی‌که در لنگ زنی ناهماهنگ^۲، این دو فرکانس با هم برابر نیستند. شکل (۲-۱۱) این موضوع را بهتر نشان داده است.



شکل (۲-۱۱) نمایش لنگ زنی هماهنگ و ناهماهنگ

در سرتاسر این رساله، پدیده فوق به صورت لنگ زنی هماهنگ مورد بررسی قرار گرفته شده است. اما در گام بعدی می‌توان ارتعاشات و پایداری تیرهای پیچیده شده را با در نظر گرفتن لنگ زنی ناهماهنگ مورد بررسی قرار داد.

برخی از تجهیزات دارای تیرهای پیچیده شده دورانی مانند مته های حفاری، ابزارهای براده برداری و ... بر روی پایه‌هایی قرار دارند که به جهت ایفای نقش خود، پایه نیز ممکن است حرکات دورانی، انتقالی یا توأماً را داشته باشند. این حرکت پایه منجر به بروز جملات شتاب اضافی مانند شتاب کریولیس در روتورها شود. از این‌رو، در گام بعدی می‌توان با در نظر جابجایی پایه‌های تیر پیچیده شده دوار، ارتعاشات و پایداری تیر پیچیده شده را مورد بررسی قرار داد.

بررسی تأثیر و تغییرات دمپینگ داخلی روی پایداری تیرهای پیچیده شده ویسکوالاستیک نیز از جمله مباحثی است که روی پایداری تیرهای پیچیده شده تأثیرات قابل توجه را ایفا می‌کند. برای مثال،

1 Synchronous Whirling
2 Asynchronous Whirling

برای مدل کردن خاصیت ویسکو الاستیک شفت می توان از مدل کلوین-ویت^۱ استفاده کرد. از این رو، در نظر گرفتن تیرهای پیچیده شده به صورت ویسکو الاستیک از جمله اقداماتی است که می تواند در بررسی هرچه دقیقتر رفتار ارتعاشاتی این گونه سازه ها کمک شایانی کند.

در یک سیستم ارتعاشاتی پیوسته مانند یک تیر دوار، با داشتن فرکانسهای همسو ω_f و ناهمسو ω_b ، نزدیکی این فرکانسها با فرکانس تحریک Ω می تواند به شکل $n\omega_f \pm m\omega_b = k\Omega$ تعریف شود که این بدان معنی است که چندین مولفه فرکانسی می توانند به طور همزمان با هم در سازه رخ دهند. به رزونانس هایی که به صورت ترکیب فوق اتفاق می افتد، رزونانس های ترکیبی گفته می شود. آنچه در این رساله بدان پرداخته شده است، بررسی رفتار پایداری سازه های تیرگونه پیچیده شده محوری در رزونانس اولیه تیر می باشد. از این رو، به عنوان یکی از کارهای مهم می توان به بررسی رفتار پایداری تیرهای مذکور در حضور رزونانس های ترکیبی پرداخت.

1 Kelvin-voigt

- [1] Sokolnikoff. I. (1956), "Mathematical Theory of Elasticity", McGraw-Hill, New York.
- [2] Ishida Y., Yamamoto T.(2012) "Linear and Nonlinear Rotordynamics:A modern treatment with applications" 2nd Edition. Nagoya, Japan. January.
- [3] Buckley J.C. (1914) "Bilar Property of Twisted Strips" Philosophical Magazine, 28, pp778-787.
- [4] Wagner H.(1936)"Torsion and Buckling of Open Sections" NACA TM 807.
- [5] Washizu K.(1964) "Some Consideration on a Naturally Curved and Twisted Slender Beam" J Math Phys, 43, 2, pp 111-116.
- [6] Rankine M. W. J.(1869) "On the centrifugal force of rotating shafts" Glasgow university.
- [7] Tondl A.(1965) "Some Problems of Rotordynamics", Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, in coedition with Chapman & Hall, London.
- [8] Okubo H.(1950) "The Torsion and Stretching of Spiral Rods" Q J Mech Appl Math, 9, pp 263-272.
- [9] Maunder L. and Reissner E.(1957) "Pure Bending of Pretwisted Rectangular Plates" J Mech Phys Solids, 5, pp 261-266.
- [10] Goodier J.N. and Griffin D.S. (1969) "Elastic Bending of Pretwisted Bars" Int J Solids and Struct, 5, pp 1231-1245.
- [11] Carnegie W.(1959) "Vibrations of pre-twisted cantilever blading" Proc Inst Mech Eng, 173,pp 343–74.
- [12] Dawson B., Carnegie W. (1969) "Modal curves of pre-twisted beams of rectangular cross-section" J Mech Eng Sci, 11,pp 1–13.
- [13] Sabuncu M. (1985) "Coupled vibration analysis of blades with angular pre-twist of cubic distribution" AIAA J, 23,pp 1424–30.
- [14] Schilhansil M.J.(1958) "Bending frequency of a rotating cantilever beam" J Appl Mech, 25,pp 28 – 30.
- [15] Hurty W.C. and Rubinstein M.F.(1964) "Dynamics of Structures", Englewood Cliffs, N.J:Prentice Hall.
- [16] Kane T.R., Ryan R.R., and Banerjee, A.K.(1987) "Dynamics of cantilever beam attached to a moving base" AIAA, 10,2,pp 139-151.
- [17] Carnegie W.(1964) "Vibrations of pre-twisted cantilever blading allowing for rotary inertia and shear deflection"J Mech Eng Sci, 6,pp105–9.
- [18] Dawson B., Ghosh N.G., Carnegie W.(1971) "Effect of slenderness

- ratio on the natural frequencies of pre-twisted cantilever beam of uniform rectangular cross section" *J Mech Eng Sci*, 13,pp 51–9.
- [19] Gupta. R. S., Rao S.S. (1978) "Finite element eigen value analysis of tapered and twisted Timoshenko beams" *J Sound Vib*, 56,pp187–200.
- [20] Abbas B. A. H. (1979) "Simple finite elements for dynamic analysis of thick pre-twisted blades" *Aero naut J*, 83,pp450–3.
- [21] Subrahmanyam K. B., Kulkarni. S. V., Rao. J. S. (1981) "Coupled bending-bending vibrations of pre-twisted cantilever blading allowing for shear deflection and rotary by the reissner method" *Int J Mech Sci*, 23,pp517–30.
- [22] Imregun T. (1989) "Numerical derivation of FRF matrices for curved, twisted and rotating beams" *J Mech Eng Sci*; 203.
- [23] Banerjee J. R.(2004) "Development of an exact dynamic stiffness matrix for free vibration analysis of a twisted Timoshenko beam" *J Sound Vib*; 270,pp379–401.
- [24] Yardimoglu B., Yildirim T.(2004) "Finite element model for vibration analysis of pre- twisted Timoshenko beam" *J Sound Vib*, 273,pp 741–54.
- [25] Turhan O. and Bulut G. (2005) "Dynamic stability of rotating blades eccentrically clapped to a shaft with fluctuating speed" *J Sound Vib*, 280, pp 945–964.
- [26] Rao J. S., Carnegie W. (1973) "A numerical procedure for the determination of the frequencies and mode shapes of lateral vibration of blades allowing for the effect of pre-twisting and rotation" *Int J Mech Eng Edu*, 1,pp37–47.
- [27] Fu C. C.(1974) "Computer analysis of a rotating axial turbo machine blade in coupled bending-bending-torsion vibrations" *Int J Numer Methods Eng*, 8,pp569–588.
- [28] Subrahmanyam K. B, Kaza K. R. V.(1981) "Vibration and buckling of rotating, pretwisted, preconed beams including Coriolis effects" *ASME J Vib Acoust Str Rel Des*, 108,pp140–9.
- [29] Rao S. S, Gupta R. S.(2001) "Finite element vibration analysis of rotating Timoshenko beams" *J Sound Vib*, 242,pp103–24.
- [30] Subuncu M., Evran K.(2006) "Dynamic stability of a rotating pre-twisted asymmetric cross-section Timoshenko beam subjected to an axial periodic force" *Int J Mech Sci*, 48,pp579–90.
- [31] Avramov K.V., Pierre C. (2007) "Flexural-flexural-torsional Nonlinear Vibrations of Pre-twisted Rotating Beams with Asymmetric Cross-sections" *J Vib Control*, 13,pp 329–364.
- [32] Slyper H.A. (1962) "Coupled Bending Vibrations Of Pret Wisted Cantilever Beams" *J Mech Eng Sci*, 4.
- [33] Filipich C., Maurizi M., Rosales M. (1987) "Free vibrations of a spinning uniform beam with ends elastically restrained against rotation" *J*

- Sound Vib, 116,pp475-482.
- [34] Song O., Jeong N.H., Librescu L.(2000) "Vibration and stability of pretwisted spinning thin-walled composite beams featuring bending-bending elastic coupling" J Sound Vib, 237,3,pp 513–533.
- [35] Oh S.Y., Song O., Librescu. L.(2003) "Effects of pretwist and presetting on coupled bending vibrations of rotating thin-walled composite beams" Int J Solids Struct, 40,pp 1203–1224.
- [36] Warminski J., Cartmell M. P., Bochenski M., Ivanov I. (2008)"Analytical and experimental investigations of an autoparametric beam structure" J Sound Vib, 315,pp 486-508.
- [37] Cooley C. G., Parker R. G. (2014)"Vibration of Spinning Cantilever Beams With an Attached Rigid Body Undergoing Bending-Bending-Torsional-Axial Motions" J Appl Mech, 81.
- [38] Thomas O., Senechal A., Deu J.F. (2016) "Hardening/softening behavior and reduced order modeling of nonlinear vibrations of rotating cantilever beams" Nonlinear Dyn, 86,pp1293-1318.
- [39] Silva C. J., Daqaq M. F. (2017) "Nonlinear flexural response of a slender cantilever beam of constant thickness and linearly-varying width to a primary resonance excitation" J Sound Vib, 386,pp 438–453.
- [40] Spagnuolo M., Andreus U. A. (2018) "Targeted review on large deformations of planar elastic beams: extensibility, distributed loads, buckling and post-buckling" Math Mech Solids,pp 1-23.
- [41] Simo J.C. and Vu-Quoc L.(1987) "The role of non-linear theories in transient dynamics analysis of flexible structures" J Sound Vib, 119,3,pp 487-508.
- [42] Nataraj C.(1993) "On the interaction of torsion and bending in rotating shafts" J Appl Mech, 60,pp 239-241.
- [43] Nayfeh A. H. and Pai P. F.(2004)"Linear and nonlinear structural mechanics". John Wiley and Sons Inc.
- [44] Crespo D. S. and Glynn C. C.(1978) "Nonlinear Flexural-Flexural-Torsional Dynamics of Inextensional Beams" J struct mech, 6, pp 437-448.
- [45] Huang D.G.(2007) "Characteristics of torsional vibrations of a shaft with unbalance"J Sound Vib, 308,pp 692-698.
- [46] Hosseini S. A. A. and Khadem S. E. (2009a) "Free vibrations analysis of a rotating shaft with nonlinearities in curvature and inertia" Mech Mach Theory, 44,pp272-288.
- [47] Hosseini S. A. A. and Khadem S. E.(2009b) "Combination resonances in a rotating shaft" Mech Mach Theory, 44,pp1535-1547.
- [48] Khadem S.E., Shahgholi M., Hosseini S.A.A.(2010) "Primary resonances of a nonlinear in-extensional rotating shaft" Mech Mach Theory, 45,pp1067–1081.

- [49] Khadem S.E., Shahgholi M., Hosseini S.A.A. (2011) "Two-mode combination resonances of an in-extensional rotating shaft with large amplitude" *Nonlinear Dyn*, 65,pp217–233
- [50] Shahgholi M., Khadem S.E. (2012) "Primary and parametric resonances of asymmetrical rotating shafts with stretching nonlinearity" *Mech Mach Theory*, 51,pp131–144.
- [51] Shahgholi M., Khadem S. E.(2012) "Resonance analysis of gyroscopic nonlinear spinning shafts with parametric excitations and speed fluctuations" *Int J Mech Sci*, 64,pp94–109.
- [52] Shahgholi M., Khadem S. E.(2012) "Stability analysis of a nonlinear rotating asymmetrical shaft near the resonances" *Nonlinear Dyn*,70,pp1311–1325
- [53] Shahgholi M., Khadem S. E.(2013) "Resonances of an in-extensional asymmetrical spinning shaft with speed fluctuations" *Meccanica*, 48,pp103–120
- [54] Hosseini S.A.A., Zamanian M.(2013) "Multiple scales solution for free vibrations of a rotating shaft with stretching nonlinearity" *Scientia Iranica B*, 20,1,pp 131–140.
- [55] Hsieh S.C., Chen J.H. and Lee A.C.(2006) "A modified transfer matrix method for the coupling lateral and torsional vibrations of symmetric rotorbearing systems" *J Sound Vib*, 289,pp294-333.
- [56] Wu J.J.(2007) "Torsional vibration analyses of a damped shafting system using tapered shaft element" *J Sound Vib*, 306,pp946-954.
- [57] Edwards S., Lees A. W. and Friswell M. I. (1999) "The influence of torsion on rotor/stator contact in rotating machinery" *J Sound Vib*, 2554, pp767-778.
- [58] Diangui H. (2000) "Experiment on the characteristics of torsional vibration of rotor-to-stator rub in turbomachinery" *Tribol Int*, 33,pp75-79.
- [59] Mihajlovic N., van de Wouw N., Rosielle P. C. J. N., Nijmeijer, H. (2007) "Interaction between torsional and lateral vibrations in flexible rotor systems with discontinuous friction" *Nonlinear Dyn*, 50,pp679-699.
- [60] Mihajlovic N.(2005) "Torsional and lateral vibrations in flexible rotor systems with friction". Ph.D. Dissertation, Eindhoven University of Technology.
- [61] Liao C.M., Balachandran B., Karkoub M., Abdel-Magid Y.(2011) "Drill-string dynamics: Reduced-order models and experimental studies" *J Vib Acoust*, 1334.
- [62] Liao C.M., Vlajic N., Karki H. and Balachandran B.(2012) "Parametric studies on drill-string motions" *Int J Mech Sci*, 541, pp260-268.
- [63] Xianbo L., Nicholas V., Xinhua L., Guang M., Balachandran B.(2013) "Nonlinear motions of a flexible rotor with a drill bit: stick-slip and delay effects" *Nonlinear Dyn*. 72,pp61–77.

- [64] Xianbo L., Nicholas V., Xinhua L., Guang M., Balachandran B. "Coupled axial-torsional dynamics in rotary drilling with state-dependent delay: stability and control" *Nonlinear Dyn.*
- [65] Hsieh S.C., Chen J.H., Lee A.C.(2008) "A modified transfer matrix method for the coupled lateral and torsional vibrations of asymmetric rotor-bearing systems" *J Sound Vib*, 312,pp563–571.
- [66] Ding Q. (2012) "Order reduction and nonlinear behaviors of a continuous rotor system" *Nonlinear Dyn*, 67,pp251–262.
- [67] Han Q., Chu F.(2013) "Dynamic response of cracked rotor-bearing system under time-dependent base movements" *J Sound Vib*, 332,pp6847–6870
- [68] Khanlo H.M., Ghayour M., Ziaei Rad S. (2013) "The effects of lateral–torsional coupling on the nonlinear dynamic behavior of a rotating continuous flexible shaft–disk system with rub–impact " *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, 18,pp1524–1538.
- [69] Zhang G., Zhao Y., Li T., Zhu X.(2014) "Propeller Excitation of Longitudinal Vibration Characteristics of Marine Propulsion Shafting System" *Shock Vib*.
- [70] Gu L., Chu F. (2014) "An analytical study of rotor dynamics coupled with thermal effect for a continuous rotor shaft" *J Sound Vib*, 333,pp4030–4050.
- [71] Mohanty S. C.(2012) "Free vibration analysis of a pre twisted functionally graded material cantilever Timoshenko beam" *Proceedings of the International conference on metallurgical, manufacturing and mechanical engineering (ICMMME)*. Dubai(UAE); December26–272012.
- [72] Cartmell M. P., Roberts J. W. (1988) "Simultaneous Combination Resonances In An Autoparametrically Resonant System" *J Sound Vib*, 123,pp81-101.
- [73] Qian X., Du X., Pai P. F. (2010) "Experimental nonlinear dynamics of a highly flexible spinning beam using a 3D motion analysis system", *Proceedings of the 51st AIAA Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*. <https://doi.org/10.2514/6.2010-2892>
- [74] Georgiades F., Warminski J., Cartmell M.P. (2013) "Linear modal analysis of L-shaped beam structures" *Mech Syst Signal Pr*, 38,pp312–332.
- [75] Georgiades F., Latalski J., Warminski J. (2014) "Equations of motion of rotating composite beam with a nonconstant rotation speed and an arbitrary preset angle" *Meccanica*, 49,pp1833-1858.
- [76] Bekir B., Romero A.L., Burak O. (2015) "Three dimensional dynamics of rotating structures under mixed boundary conditions" *J Sound Vib*, 358,pp176–191.
- [77] Wang J., Li D., Jiang J. (2017) "Modeling And Analysis Of Coupled

- Flexural-Torsional Spinning Beams With Unsymmetrical Cross Sections" *J Theor Appl Mech*, 55,pp213-226.
- [78] Adair D., Jaeger M.(2017) "Vibration analysis of a uniform pre-twisted rotating Euler–Bernoulli beam using the modified Adomian decomposition method" *Math Mech Solids*, 23,pp1345–1363.
- [79] Mirtalaie S. H., Hajabasi M. A. (2017) "Nonlinear axial-lateral-torsional free vibrations analysis of Rayleigh rotating shaft" *Arch Appl Mech*, 87,pp1465-1494.
- [80] Warminski J. (2018) "Nonlinear model of a rotating hub-beams structure: Equations of motion" *AIP Conference Proceedings*, 100006.
- [81] Kar R.C., Hauger W. (2001) "Stability of a pre-twisted tapered cantilever beam subjected to dissipative and follower forces" *J Sound Vib*, 81,pp565-573.
- [82] Lin S. M., Wang W. R., Lee S. Y. "The dynamic analysis of non uniformly pre-twisted Timoshenko beams with elastic boundary conditions" *Int J Mech Sci*, 43,pp2385–405.
- [83] Chouksey M., Dutt J.K., Modak S.V.(2012) "Modal analysis of rotor-shaft system under the influence of rotor-shaft material damping and fluid film force" *Mech Mach Theory*, 48,pp81–93.
- [84] Chen W. R., Hsin S. W., Chu T. H. (2013) "Vibration analysis of twisted Timoshenko beams with internal Kelvin–Voigt damping" *Proc Eng*, 67,pp525–32.
- [85] Chen W.R.(2014) "Effect of local Kelvin-Voigt damping on eigen frequencies of cantilevered twisted Timoshenko beams" *Proc Eng*, J pro eng 6,325, in press.
- [86] Chen W. R.(2007) "Parametric studies on buckling loads and critical speeds of micro drill bits" *Int J Mech Sci*, 49,pp935–49.
- [87] Rincon D.M., Ulsoy A.G. (1995) "Complex Geometry, Rotary Inertia and Gyroscopic Moment Effects On Drill Vibrations" *J Sound Vib*,188,pp701-715.
- [88] Lin C.Y, Chen L.W. (2003) "Dynamic stability of rotating pre-twisted blades with a constrained damping layer" *Comput Struct*, 61,pp235–45.
- [89] Lin S.M., Lee J.F., Lee S.Y., Wang W.R.(2006) "Prediction of rotating damped beams with arbitrary pre-twist" *Int J Mech Sci*, 48,pp1494–504.
- [90] Chen W. R.(2014) "Parametric studies on bending vibration of axially-loaded twisted Timoshenko beams with locally distributed Kelvin–Voigt damping" *Int J Mech Sci*.
- [91] Karimi-Nobandegani A., Fazelzadeh S.A., Ghavanloo E.(2018) "Non-conservative stability of spinning pretwisted cantilever beams" *J Sound Vib*, 412,pp130-147.
- [92] Hagedorn P., Koval L. R.(1971) "On the parametric stability of a Timoshenko beam subjected to a periodic axial load" *Ing Arc*, 40,pp211–

- 20.
- [93] Magreb E. B., Glisin D. E.(1984) "Buckling loading and natural frequencies of drill bits and fluted cutters" *ASME J Eng Indus*;106:196–204.
- [94] Gurgeoze M. (1985) "On the dynamic stability of a pre-twisted beam subject to a pulsating axial load" *J Sound Vib*, 102,pp 415-422.
- [95] Celep Z. (1986) "Stability of pre-twisted Leipholz column" *Acta Mech*, 60,pp 157-170.
- [96] Sinha S. K.(1989) "Dynamic stability of a timoshenko beam subjected to an oscillating axial force" *J Sound Vib*, 131,pp509–14.
- [97] Tekinalp O., Ulsoy. A. G.(1989) "Modeling and finite element analysis of drill bit vibrations" *ASME J Vib Acoust Str Rel*, 111,pp148–55.
- [98] Tekinalp O., Ulsoy A. G. (1990) "Effects of geometric and process parameters on drill transverse vibrations" *ASME J Eng Ind*, 112,pp189–94.
- [99] Liao C. L., Dang. Y. H. (1992) "Structural characteristics of spinning pretwisted orthotropic beams" *Comput Struct*, 45,pp715–31.
- [100] Chen W. R., Keer L. M.(1992)"Transverse vibrations of a rotating twisted Timoshenko beam under axial loading" *ASME J Vib Acoust*, 115,pp285–94.
- [101] Lee H.P. (1994) "Dynamic stability of spinning pre-twisted beams" *Int J Sol Struct*, 31,pp2509–17.
- [102] Lee H. P.(1994) "Buckling and dynamic stability of spinning pre-twisted beams under compressive axial loads" *Int J Mech Sci*, 36,pp1011–26.
- [103] Lee H. P.(1995) "Dynamic stability of spinning pre-twisted beams subject to axial pulsating loads" *Comput Methods Appl Mech Eng*, 127,pp115–26.
- [104] Liao C. L., Huang B. W.(1995) "Parametric instability of a spinning pre-twisted beam under periodic axial force"*Int J Mech Sci*, 37,pp 423–39.
- [105] Tan T. H., Lee H. P., Leng. G. S. B. (1998) "Parametric instability of spinning pre-twisted beams subjected to sinusoidal compressive axial loads" *Comput Struct*, 6,pp745–64.
- [106] Young T. H., Gau C. Y.(2003) "Dynamic stability of pre-twisted beams with non-constant spin rates under axial random force" *Int J Sol Struct*, 18,pp4675–98.
- [107] Huang B.W. (2003) "Dynamic characteristics of a drill in the drilling process" *Proc Instn Mech Engrs Part B*; 217.
- [108] Shiau T.N., Chen E.C., Huang K.H., Hsu W.C., (2006) "Dynamic Response of a Spinning Timoshenko Beam with General Boundary Conditions under a Moving Skew Force Using Global Assumed

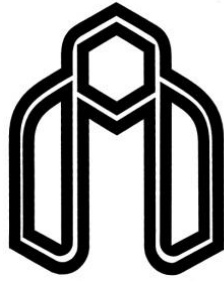
- Mode Method" JSME Int J Series C, 49.
- [109] Ho S. H., Chen C. K.(2006) "Free transverse vibration of an axially loaded non-uniform spinning twisted Timoshenko beam using differential transform" Int J Mech Sci, 48,pp1323–31.
- [110] Mohanty S.C. (2007) "Parametric instability of a pretwisted cantilever beam with localised damage" Int J Acoust Vib, 12,pp153-161.
- [111] Chen W. R.(2010) "On the vibration and stability of spinning axially loaded pre-twisted Timoshenko beams" Finite Elem Ana Des, 46,pp1037–47.
- [112] Chen W. R.(2010) "Parametric instability of spinning twisted Timoshenko beams under compressive axial pulsating loads" Int J Mech Sci,52,pp1167–75.
- [113] Huang B. W.(2011) "Instability of a cracked twisted beam with a time-dependent Boundary" Nonlinear Dyn, 63,pp 627–637.
- [114] Li W., Song Z., Gao X., Chen Zh.(2015) "Dynamic Instability Analysis of a Rotating Ship Shaft under a Periodic Axial Force by Discrete Singular Convolution" Shock Vib,48,26,7.
- [115] Luongo A., Ferretti M., Seyranian A.P. (2015)"Effects of damping on the stability of the compressed Nicolai beam" Math Mech Comp Sys, 3,pp1-26.
- [116] Latalski J., Warminski J., Rega G. (2016) "Bending–twisting vibrations of a rotating hub–thin-walled composite beam system" Math Mech Solids,pp 1–23.
- [117] Swanson E. E., Powel C. D., Weissman S.(2005) "A Practical Review of Rotating Machinery Critical Speeds and Modes" J Sound Vib, pp 10-17.
- [118] Nayfeh A. H., Balachandran B.(1995) "Applied Nonlinear Dynamics: Analytical, Computational, and Experimental Methods" Wiley-VCH.
- [119] Love A.E.H. (1906) "A transient on the mathematical theory of elasticity", New York: Cambridg.
- [120] Nayfeh A.H., Mook D.T. (1995) "Nonlinear oscillations" New York: Wiley-Interscience.
- [121] Shaban Ali Nezhad H., Hosseini S. A. A., Zamanian M. (2017) Flexural–flexural–extensional–torsional vibration analysis of composite spinning shafts with geometrical nonlinearity. Nonlinear Dyn.
- [122] Meirovitch L. (2001)"Fundamentals of vibrations", McGraw-Hill.
- [123] Nayfeh A.H., Lacarbonara W. (1998) "On the discretization of spatially continuous systems with quadratic and cubic nonlinearities", JSME Int J Ser C, 41(3) pp510–531.

Abstract

Vibration analysis and stability of twisted beam structures have been the subject of research of the many researchers in many fields of engineering and plays an important role in designing the turbine blades, drilling and drilling bits, pumps and Practically, these structures can be modeled as the twisted beams. According to the research, it is clear that there are many cases that have not been investigated by researchers in the field of stability and dynamic behavior of axially twisted beams. One of the most important is that many researches on the dynamic behavior of these beams has focused on their simplified linear equations. Also, there are not nonlinear studies on the vibrational behavior of such beams by considering the unbalance, asymmetry, stretching, in-extensionality, axial speed fluctuation and axial load variations under different boundary conditions. Therefore, in first step, this paper examines the nonlinear dynamic and vibrational behavior of axial twisted beams. In the next steps, the influence of some geometrical factors on this nonlinear investigation such as boundary condition type, axial speed fluctuation, stretching or in-extensionality, axial loads ,and axial and torsional coupling are investigated. The nonlinear equations of motion have been extracted using Hamilton's principle and the final equations have been obtained with direct method(applying multiple scales method on the partial differential equations) and indirect method(converting the partial differential equations to the ordinary differential equations by the Galerkin method and applying the multiple scales method to the ordinary differential equations). Validation of the results and equations was also performed using the Rang-Kutta numerical method and also compared with the results of other researchers. In these studies, primary and parametric resonances analysis of the system was performed and the effect of various parameters such as twist angle, mode number, longitudinal to transverse stiffness ratio of the beam, damping ratio, and eccentricity of the beam on the steady state solutions or

bifurcations of the symmetrical and asymmetrical twisted beam with above mentioned boundary conditions have been studied.

Keyword: Symmetric and Asymmetric twisted beam, nonlinear vibration, multiple scales method, Galerkin's method, primary resonance, parametric resonance, bifurcation, whirling



Shahrood University of Technology

Faculty of Mechanical and Mechatronic Engineering

Ph.D. Thesis in Applied Mechanics Engineering

Nonlinear Vibrations and Stability of Spinning Twisted Beams

By: Mohsen Tajik

Supervisor:

Dr. Ardeshir Karami Mohammadi

December 2019