دانشکده مهندسی مکانیک

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

مهندسی مکانیک-طراحی کاربردی

تحلیل ترموالاستیک کره‌های جدارضخیم چرخان از مواد ناهمگن FG تحت فشار داخلی

یحیی بیات

اساتید راهنما:

دکتر مهدی قنّاد کهتویی

دکتر حمید رضا ایپک‌چی

شهریور ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده مهندسی مکانیک
گروه طراحی جامدات

تحلیل ترموالاستیک کره‌های جدارضخیم چرخان از مواد ناهمگن FG تحت فشار داخلی

دانشجو: **یحیی بیات**

اساتید راهنما:
دکتر مهدی قنّاد کهتویی
دکتر حمید رضا ایپک‌چی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

شهریور ۹۰

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مکانیک

گروه طراحی جامدات

پایان نامه کارشناسی ارشد آقای یحیی بیات

تحت عنوان:

تحلیل ترمو الاستیک کره‌های جدار ضخیم چرخان از مواد نا همگن FG، تحت فشار داخلی

در تاریخ .... توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد ارزیابی و با درجه .... مورد پذیرش قرار گرفت.

اساتید راهنما	امضاء	اساتید مشاور	امضاء
دکتر مهدی قنّاد		نام و نام خانوادگی :	
دکتر حمید رضا ایپک‌چی		نام و نام خانوادگی :	

اساتید داور	امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء
نام و نام خانوادگی : دکتر محمود شریعتی		نام و نام خانوادگی :	
نام و نام خانوادگی : دکتر علیرضا شاطر زاده			

تقدیم به:

او که همواره دعایش باعث آرامش و تسلی است.

مادر عزیزم

و او که حضورش انگیزه، و همواره حامی و مشوق من است.

همسر عزیزم

تشکر و قدردانی:

سپاس خدای را که دریای بیکران علم ورحمت است.آفریدگار بی نیازی که به انسان قدرت تفکر و اندیشیدن و توانایی مهر ورزیدن ارزانی داشت.حال که مراحل انجام پروژه به اتمام رسیده است بر خودلازم می‌دانم که از همکاری،یاری و محبت کلیه‌ی کسانی که در انجام این تحقیق خصوصا از زحمات بی‌دریغ، تلاش‌های بی‌وقفه و راهنمایی‌های ارزشمند اساتید گرامی جناب آقای دکتر مهدی قناد و دکتر حمید رضا ایپک‌چی در راستای انجام این پروژه در طول دو سال گذشته تشکر و قدردانی نمایم.

یحیی بیات

دانشجوی کارشناسی ارشد گروه طراحی کاربردی،

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود

شهریور ۱۳۹۰

دانشجو تأیید می نماید که مطالب مندرج دراین پـایان نامه نتیجه تحقیقات خودش می باشد و در صورت استفاده از نتایج دیگران مرجع آن را ذکر نموده است.

کلیه حقوق مادی مرتبط از نتایج مطالعات ، آزمایشات و نوآوری ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد .

شهریور ۱۳۹۰

چکیده:

تحلیل ترموالاستیک کره‌های جدار ضخیم تو خالی تحت تاثیر بارگذاری‌های دورانی، مکانیکی و انتقال حرارت یک بعدی در این پایان نامه انجام شده است. خواص مواد به صورت به صورت توانی در راستای شعاعی تغییر کند و ضریب پواسون ثابت باشد. همچنین توزیع دما به صورت تابعی از شعاع در نظر گرفته شده است. در تحلیل ارائه شده با تعریف اثر ناهمگنی به‌صورت یک پارامتر بی‌بعد $n_i\,(i=1..4)$ که می‌تواند مقداری دلخواه باشد حل تحلیلی ناویر برای سه حالت ریشه‌های حقیقی، مضاعف و مختلط به طور مجزا ارائه شده و توزیع تنش و جابجایی به صورت روابطی مجزا استخراج شده است. علاوه براین، حل ترموالاستیک کره‌های FGM[1] در دو حالت ارائه شده است. موارد بارگذاری فشاری و دمایی به طور مجزا و ترکیبی مورد مطالعه قرار گرفته است. با استفاده از روش المان محدود، دو روش تحلیلی و عددی در شرایط بارگذاری دمایی و فشاری با یکدیگر مقایسه شده است. که تطبیق مناسبی میان دو روش فوق مشاهده شده است. در مرحله‌ی بعد، بار گذاری دورانی با استفاده از روش المان محدود بررسی شده است. در انتها بارگذاری دمایی، فشاری و دورانی با استفاده از روش المان محدود به صورت مجزا و ترکیبی بررسی شده است. مشاهده شده است که در بارگذاری دورانی کره تقارن خود را در راستای نصف‌النهاری از دست داده و توزیع تنش و جابه‌جایی توابعی پریودیک می‌باشند. همچنین ثابت ناهمگنی $n_i\,(i=1..4)$ پارامتر بسیار مهمی در کنترل تنش در این سازه‌ها می‌باشد به طوری با استفاده از آن می‌توان توزیع تنش را در یک راستای دلخواه بهینه کرد. علاوه بر این، با مقایسه میان سه نوع بارگذاری مشاهده شده است که اصل جمع آثار در این بارگذاری‌ها صادق می‌باشد.

واژگان کلیدی: FGM، کره‌ی جدارضخیم، ترموالاستیک، المان محدود، کره‌ی چرخان

[1] Functionally Graded Materials

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

[1] Bayat, Y., Ghannad, M., Torabi, H., (2011). “Analytical and Numerical Analysis for the FGM Thick Sphere under Combined Pressure and Temperature Loading” **Arch Appl Mech**., DOI 10.1007/s00419-011-0552-x.

[۲] بیات ی، قنّاد م، بوژمهرانی م،(۱۳۹۰). "تحلیل تئوری و عددی کره‌های جدارضخیم تحت فشار از مواد ناهمگن"، نوزدهمین کنفرانس سالانه مهندسی مکانیک ایران، جلد دوم، ص ۵۹، بیرجند

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها

فهرست جداول

فهرست علایم و نشانه‌ها

عنوان	علامت اختصاری
تنش شعاعی	σ_r
تنش محیطی	σ_θ
تنش نصف النهاری	σ_ϕ
تنش موثر	σ_{eff}
مولفه‌های تنش برشی	$\tau_{r\theta}\,,\,\tau_{r\phi}\,,\,\tau_{\theta\phi}$
کرنش شعاعی	ε_r
کرنش محیطی	ε_θ
کرنش نصف النهاری	ε_ϕ
مولفه‌های کرنش برشی	$\gamma_{r\theta}\,,\,\gamma_{r\phi}\,,\,\gamma_{\theta\phi}$
جابجایی بی‌بعد شعاعی	u_r
جابجایی بی‌بعد محیطی	u_θ
جابجایی نصف النهاری	u_ϕ
مختصات شعاعی	R
مختصات شعاعی بی بعد	r
شعاع داخلی	a
شعاع خارجی	b
ضریب پواسون	ν
مدول الاستیسیته	E
ضریب انبساط حرارت	α
ضریب انتقال حرارت هدایتی	λ
دانسیته	ρ
مدول الاستیسیته در جدار داخلی	E_i
ضریب انبساط حرارتی در جدار داخلی	α_i
ضریب انتقال حرارت هدایتی در جدار داخلی	λ_i
دانسیته در جدار داخلی	ρ_i
ثابت‌های ناهمگنی	n_1, n_2, n_3, n_4
فشار داخلی	p_i
فشار خارجی	p_o
تغییرات دما نسبت به دمای مرجع	Θ

دمای داخلی	T_i
دمای خارجی	T_o
سرعت زاویه‌ای	ω
ثابت‌های انتگرال‌گیری	$c_1 , c_2 \ ,..., c_6$

فصل ۱

مروری بر تحلیل پوسته‌ها

۱-۱- مقدمه

پوسته‌ها به طور کلی، سازه‌های خمیده هستند که از لحاظ رفتاری در برابر نیروها و لنگرهای وارد شده، از مطلوبیت ویژه‌ای برخوردار هستند. مطالعه‌ی این رفتارها از گذشته‌ی نه چندان دور تا به امروز مورد توجه دانشمندان زیادی قرار گرفته و به دلیل فراوانی کاربرد، هم‌چنان ادامه دارد.

در این فصل ابتدا با دسته‌بندی پوسته‌ها مروری گذرا به تئوری‌هایی که تاکنون برای تحلیل پوسته‌ها ارائه شده است، انجام می‌شود. سپس به کاربردهای پوسته‌ها از جمله پوسته‌های کروی در زمینه‌های مختلف پرداخته می‌شود. در گام بعدی با بررسی چند روش معمول ساخت پوسته‌های کروی به معایب و مزایای آنها ارائه می‌شود. سپس با معرفی مواد ناهمگن یا FGM مروری بر کارهای پژوهشی که تاکنون در زمینه‌ی پوسته‌ها علی‌الخصوص پوسته‌های کروی انجام شده‌است خواهد شد. و در انتها با مشخص نمودن اهداف کلی این تحقیق روش مطالعه و نوآوری‌های آن معرفی می‌شوند.

۱-۲- دسته بندی پوسته ها[۱]

الف) از دیدگاه هندسی

پوسته‌ی حاصل ازانتقال (شامل ورق‌ها و...): از انتقال یک منحنی یا یک سطح مادی در امتداد خط راست خارج از صفحه‌ی قوس، حاصل می‌شود.

پوسته‌ی حاصل ازدوران (شامل استوانه و کره‌هاو...): از دوران یک منحنی یا یک سطح مادی حول محور واقع در صفحه‌ی قوس، حاصل می‌شود.

پوسته‌ی جدار نازک: پوسته‌ای که نسبت ضخامت به شعاع انحنای سطح میانی آن کوچکتر از $\frac{1}{20}$ باشد.

پوسته‌ی جدارضخیم: پوسته‌ای که نسبت ضخامت به شعاع انحنای سطح میانی آن بزرگتر از $\frac{1}{20}$ باشد.

ب) از دیدگاه مادی:

پوسته‌های همگن[۱]: در این نوع پوسته‌ها خواص مکانیکی مادّه‌ی پوسته در نقاط مختلف جسم یکسان است و تابع موقعیت نقاط نمی‌باشد.

پوسته‌های ناهمگن[۲]: در این نوع پوسته‌ها خواص مکانیکی مادّه‌ی پوسته در نقاط مختلف جسم یکسان نیست و تابع موقعیت نقاط می‌باشد.

پوسته‌های همسانگرد: در این نوع پوسته‌ها خواص مکانیکی (E,ν)مادّه‌ی پوسته در جهات مربوط به هر نقطه یکسان است.

پوسته‌های نا همسانگرد: در این نوع پوسته‌ها خواص مکانیکی (E,ν)مادّه‌ی پوسته در جهات مربوط به هر نقطه یکسان نیست.

ج) از دیدگاه رفتاری :

تغییر شکل کوچک[۳] : جابجایی هر نقطه از پوسته بین شرایط بارگذاری و باربرداری کوچک است، (رفتار خطی از نظر هندسی).

تغییر شکل بزرگ[۴] : جابجایی هر نقطه از پوسته بین شرایط بارگذاری و باربرداری کوچک نیست، (رفتار غیر خطی از نظر هندسی).

پوسته با رفتار کشسان: تغییر شکل‌ها بازگشت‌پذیرند و روابط تنش-کرنش از قانون عمومی هوک پیروی می‌کنند، (رفتار خطی از نظر مادی).

پوسته با رفتار مومسان: تغییر شکل‌ها بازگشت ناپذیرند و روابط تنش-کرنش از قانون عمومی هوک پیروی نمی‌کنند، (رفتار غیرخطی از نظر مادی).

---

[1]Homogeneous shells
[2]Inhomogeneous shells
[3]Small deflection
[4]Large deflection

۱-۳- تئوری پوسته ها[۱]

روش های تحلیلی تقریبی موجود برای تحلیل پوسته‌ها بر اساس فرضیاتی است که تئوری پوسته‌ها را تشکیل می دهند. تا کنون چندین تئوری برای تحلیل پوسته‌ها ارائه شده‌است. که می‌توان به‌صورت زیر تقسیم کرد:

الف-تئوری پوسته‌های نازک

برای پوسته‌های جدار نازک سه نوع تحلیل ارائه شده‌است.

- تئوری با تقریب مرتبه‌ی صفر(تئوری غشایی)
- تئوری با تقریب مرتبه‌ی یک (تئوری خمشی)
- تئوری با تقریب مرتبه‌ی دو (تئوری فلوگه [1])

ب- تئوری پوسته‌های جدار ضخیم

برای پوسته‌های جدار ضخیم دو نوع تحلیل ارائه شده‌است.

۱- تئوری کلاسیک (تئوری الاستیسیته‌ی مستوی [2])

مبنای این تئوری اولین بار توسط لامه [3] در ۱۸۵۲پایه‌گذاری شد[۲]. در تئوری الاستیسیته‌ی مستوی، فرض می‌شود که مقاطع مستوی عمود بر محور مرکزی استوانه پس از اعمال فشار و تغییر شکل، همچنان مستوی و عمود بر محور استوانه باقی بمانند. در حقیقت کرنش برشی و تنش برشی صفر در نظر گرفته می‌شود. در این تئوری مقاطع پس از بارگذاری همچنان مستوی و عمود باقی می-مانند.

۲- تئوری تغییر شکل برشی

[1] Flügge
[2] Plane Elasticity Theory(PET)
[3] Lame

نقدی[1] در سال۱۹۵۶ جزو نخستین کسانی می‌باشد که در این زمینه مطالعه کرده است[۳] . دراین تئوری مقاطع مستوی و عمود بر سطح میانی پس از تغییر شکل الزاما عمود باقی نمی‌مانند. لـذا ایـن تئوری را می‌توان به صورت زیر تقسیم بندی کرد.

تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی صفر: دراین تئوری مقاطع مستوی و عمود بر سطح میانی پس از تغییر شکل عمود باقی می‌مانند، (در واقع همان تئوری الاستیسیته‌ی مستوی).

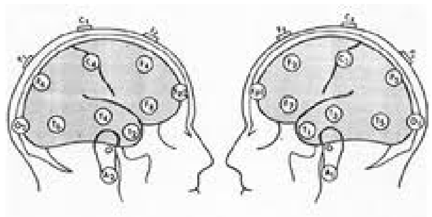
تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی یک: دراین تئوری مقاطع مستوی پس از تغییـر شـکل مـستوی باقی می‌مانند. اما برسطح میانی عمود باقی نخواهند ماند.

تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی دو و بالاتر: دراین تئوری مقاطع مستوی و عمود بر سطح میانی، پس از تغییر شکل عمود باقی نمی‌مانند. به عبارت دیگر، مقاطع مستوی پس از تغییـر شـکل، راسـت وعمود برسطح میانی باقی نمی‌مانند.

۱-۴- کاربرد پوسته های کروی[۴]

از میان پوسته‌ها، پوسته‌های استوانه‌ای و کروی بدلیل کاربردهای فراوانی که در زمینه‌های مختلف مهندسی و صنعت از قبیل زیردریایی‌ها، صنایع نظامی، کاربردهای ماوراء زمینـی، سـیلوها، لولـه‌هـای نمونه بردار[2] در کاربردهای عمرانی و راکتورهای تحت فشارآب و ... دارند، دارای اهمیت ویـژه‌ای مـی-باشند. خصوصا کاربرد پوسته‌های کروی در صنعت و حتی در طبیعت کاملا محـسوس مـی‌باشـد. بـه عنوان چند نمونه طبیعی می‌توان به هندسه‌ی کروی جمجمـه‌ی انـسان در شـکل(۱-۱) ، هندسـه‌ی کروی سیّارات و ستاره‌ها در شکل(۱-۲) و حتی پوسته‌ی سخت لاک‌پشت‌هاو... اشاره کرد. در کاربرد-های صنعتی، مخازن کروی از جمله تجهیزات ذخیره‌سازی سیالات بوده که در صنایع مختلف کـاربرد فراوانی پیدا نموده است.

1 Naghdi
2 Core barrels



شکل ۱-۱: کاربرد پوسته های کروی در جمجمه ی سر انسان

شکل ۱-۲: زمین به عنوان یک کره ی دوار

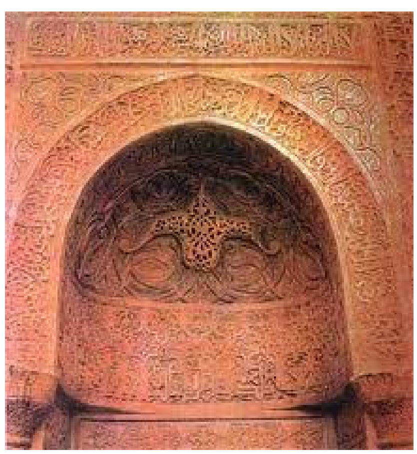
شکل ۱-۳: کاربرد کره در صنایع نفت وگاز وپتروشیمی

شکل هندسی مناسب آن در تحمل فشارهای بالا از یک سو و نحوه ساخت آن از سوی دیگر کاربری این تجهیزات را تحت الشعاع قرار می دهد.

در صنایع نفت وگاز و پتروشیمی مخازن کروی (شکل‌های (۱-۳)و (۱-۴)) از اهمیت ویژه‌ای برخوردار هستند. ذخیره سازی گاز دردمای محیط تنها به روش متراکم سازی و مایع نمودن در فشار بالا امکان پذیر می باشد و مخازن کروی به دلیل هندسه مناسب قادر به تحمل این فشارهای بالا می باشند. در برخی‌موارد می‌توان از ترکیب پوسته‌های استوانه‌ای و کروی نیز استفاده کرد.به عنوان مثال در شکل (۱-۴)از ترکیب پوسته‌های کروی و استوانه‌ای در طراحی مخازن گاز استفاده شده‌است.

شکل ۱-۴: کاربرد ترکیب پوسته‌های کروی و استوانه‌ای در صنایع نفت وگاز وپتروشیمی

در صنایع ساختمانی نیز از شکل هندسی کره در توزیع مناسب نیروهای حجمی حاصل از وزن سازه در گنبدها، طاق‌ها و... بسیار استفاده می‌شود.

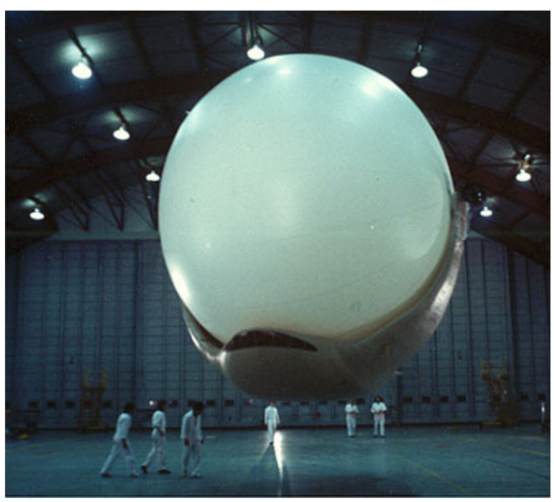


شکل ۱-۵: کاربرد در طراحی ایوان وطاق در ساختمان ها

حتی امروزه نیز مهندسین ازاین ویژگی هندسی کره در توزیع مناسب نیروهای حجمی در طراحی ساختمان‌ها بهره می‌برند.

شکل ۱-۶: کاربرد در سازه‌های پیشرفته

کره‌های چرخان نیز در کاربردهای مختلف از اهمیت ویژه ای برخوردار هستند. بررسی تغییر شکل سیّاره‌ها از جمله کره‌ی زمین در اثر دوران توسط بسیاری از دانشمندان مورد بررسی قرار گرفته است[۶،۵] . اخیراً مهندسان از مخازن کروی چرخان ساخته شده از مواد کامپوزیتی با سرعت‌های دورانی بالا در ماشین‌های پرنده استفاده کرده‌اند که وزن آن از بسیاری از ماشین‌های پرنده کمتر و قابیلت عمود پرواز بودن را دارد (شکل ۱-۷).



شکل ۱-۷: کاربرد مخازن کروی دوار در ماشین‌های پرنده

۱-۵- معرفی چند روش ساخت پوسته های کروی[۴]

روش متداول ساخت مخازن کروی به صورت شکل دهی ورق‌های فولادی و برشکاری و مونتاژ و جوشکاری می‌باشد. شکل‌دهی ورق معمولا به وسیله دستگاههای پرس و استفاده از قالب‌های سنگین که دارای انحناء مناسب می‌باشد، صورت می‌گیرد. پس از فرم‌دهی ورق‌ها، اقدام به برش ورق‌های شکل داده شده، جهت مونتاژ به یکدیگر می‌شود. به علت شکل کروی قطعات لبه ورق‌ها بایستی به صورت منحنی برش و پخ مناسب اعمال شود. این عملیات بسیار زمان بر و پر هزینه می‌باشد. در مخازن کروی با ضخامت بالا پس از اتمام مونتاژ و جوشکاری عملیات حرارتی به صورت در جا بر روی مخزن انجام می‌شود.

دیگر روش تولید این نوع مخازن روش انفجاری می‌باشد. در این روش که بر مبنای شکل دهی انفجاری می باشد، شکل دهی ورق‌ها نسبت به حالت قبل ساده‌تر بوده و حداکثر به صورت قطعات مخروطی مخزن کروی پیش‌فرم آماده می‌گردد. سپس با کمک انفجاری کنترل شده بدون نیاز به قالب مخزن به شکل کره کامل در می‌آید.

شکل ۱-۸: مخزن ساخته شده به روش شکل دهی انفجاری

مزایای این روش را می‌توان به شرح زیر برشمرد:

۱- کاهش مراحل و زمان ساخت

۲- کاهش هزینه تمام شده

۳- عدم نیاز به عملیات حرارتی

۴- کاهش و سهولت عملیات جوشکاری

۵- امکان ساخت مخازن به صورت چند جداره

۶- ساخت مخازن با ضخامت کم که به روش متداول امکان پذیر نمی‌باشد(کمتر از ۵ میلیمتر)

۱-۶- مواد FG

مواد FG اولین بار درسال۱۹۸۴توسط دانشمندان هوا فضای ژاپن مطرح شد[۷] ، و از سال ۱۹۸۶ مطالعات امکان‌سنجی تولید این مواد در ژاپن شروع شد. سازه‌هایی که از مواد تابعی ساخته می‌شوند، عموما دارای بدنه‌ای ناهمگن از دو جنس متفاوت می‌باشند که به صورت کاملا پیوسته با یکدیگر ترکیب شده‌اند، به طوری که درصد تغییرات حجمی این دو نسبت به هم در سازه می‌تواند به طور کاملا یکنواخت تغییر کند. در اکثر موارد خواص مکانیکی بین دو فاز فلزی و سرامیک تغیر می‌کنند. سرامیک در یک FGM نوعی عایق حرارتی می‌باشد، و از خوردگی و اکسیده شدن فلز جلوگیری می-کند، در حالی که این مواد با ترکیب فلزی‌شان از استحکام بالایی نیز برخوردار می‌باشند. در نتیجه این مواد قابلیت مقاومت در گرادیان‌های بالای حرارتی بدون خرابی و شکست در سازه را دارا می‌باشند. این ویژگی به خصوص درفضا و علوم مربوط به آن اهمیت ویژه‌ای دارد. در این میان استفاده از مواد FG در طراحی و ساخت پوسته‌های کروی و استوانه‌ای مورد توجه بسیاری از مهندسین و دانشمندان قرار گرفته است.

در مقایسه با مواد همگن(ایزوتروپ‌ها) و مواد ناهمسانگرد (کامپوزیت‌ها)، مواد ناهمگن FG دارای ویژگی‌هایی به شرح زیر می باشند:

۱- مقاومت زیاد در برابر گرادیان دمایی بالا. درحقیقت این گونه مواد با کاهش تنش های حرارتی، آثار منفی آنها را به نحو قابل توجهی کاهش می دهند. در واقع به کمک مواد FG می توان در مناطقی که تنش های حرارتی به حالت بحرانی می رسند، آنها را کنترل کرد به طوری که این تنش‌ها کاهش یابند. این فرایند ممکن است با تغییرات خواص ترمومکانیکی ماده به طور پیوسته در این مناطق، به نحوی که بتواند تنش‌های حرارتی را تحمل کند، باشد.

۲- مقاومت زیاد در برابر بارهای مکانیکی بالا. به کمک موادFG می توان استحکام مواد را افزایش داد تا از ورود اجسام به ناحیه‌ی مومسان و حتّی شکست تا حدود زیادی جلوگیری شود.

۳- یکی از مهم ترین ویژگی هایی مواد FG کاهش تمرکز تنش در اجسام جامد است. در بسیاری از اجسام به دلیل وجود شکل های خاص هندسی، تمرکز تنش در برخی از نقاط جسم ایجاد می شود، مانند لبه های جسم و نزدیکی سوراخ ها و گشودگی ها. به کمک مواد FG می توان آثار تمرکز تنش را به نحو چشم گیری کاهش داد. این فرایند ممکن است با تقویت خواص مکانیکی لایه‌هایی که در مجاورت مناطق بحرانی می‌باشند، به طور پیوسته صورت گیرد.

۴- بهترین ترکیب برای تغییر خواص مادّه که مانع ایجاد یا رشد ترک شود، مواد FG است.

۵- اگر پوشش ترد بر روی مواد نرم به صورت لایه های جدا انجام شود، احتمال جدا شدن لایه‌ی ترد بسیار زیاد است. به کمک مواد FG، این کار با تغییرات پیوسته و تدریجی انجام می‌پذیرد.

۶- تغییرات تدریجی خواص در ساختار مواد FG موجب استحکام بین لایه های مختلف آن می-شود. درصورتی که در کامپوزیت‌ها، تداخل بین ساختارهای زمینه و الیاف، نوعی ناهماهنگی در خواص مکانیکی ایجاد می‌کند. به عنوان مثال هنگامی که مواد کامپوزیت در معرض بارهای حرارتی بالا قرار می گیرند، ترک، ابتدا در مرز زمینه و الیاف ایجاد و سپس در لایه ها و مقاطع ضعیف داخل زمینه و الیاف منتشر می‌شود. در مواد FG به دلیل پیوستگی موجود در خواص مکانیکی، حرارتی و مغناطیسی، تنش‌ها و گرادیان آنها حالت پیوسته‌های پیدا می کنند که باعث استحکام مادّه می‌شوند.

ساخت مخازن FGM از ترکیب مواد مختلف با استفاده از روش متالورژی پودر می‌باشد. به عنوان مثال یک پروسه‌ی ساختی که می‌توان این روش را بکار برد استفاده از نیروی گریز از مرکز در ساخت مخزن می‌باشد که در آن درصد حجمی مواد مختلف در افشاننده به طور یکنواخت تغییر می‌کند.

۱-۷- پیشینه ی پژوهش

بدلیل کاربردهایی که در بخش قبل بیان شد، مطالعه برروی توزیع تنش در یک پوسته‌ی کروی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. اولین بار لامه در سال ۱۸۵۲ با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی، حل دقیق پوسته‌های استوانه‌ای همگن را تحت فشار یکنواخت ارائه کرد[۸]. هوپکینسون[1] در ۱۸۷۹تنش‌های حرارتی در یک کره ایزوتروپ را بدست آورد[۹] . چوانک[2] و همکارانش در ۱۹۷۴با استفاده از تئوری اصلاح شده‌ی پوسته‌ها، رفتار ترموالاستیک در حالت گذار کره‌های توخالی را بررسی نمودند[۱۰]. در همین زمینه راجو[3] در ۱۹۷۴با استفاده از تئوری اصلاح شده‌ی پوسته‌ها، رفتار ترموالاستیک کره‌های جدار نازک توخالی را بررسی نمودند[۱۱] . یک حل تحلیلی یک پوسته‌ی کروی تحت انتقال حرارت گذار به وسیله‌ی منبع حرارتی چرخان توسط تاکیوتی[4] در ۱۹۸۲ انجام شد[۱۲].

لیختنسکی[5] در ۱۹۸۰تئوری الاستیسیته‌ی اجسام مرکب را پایه‌گذاری نمود[۱۳] . در پوسته‌های ساخته‌شده از اجسام مرکب، بدلیل تغییر ناگهانی در ساختار مادّه، تغییرات ناگهانی در رفتار مواد ایجاد می‌شود. لذا تمرکز تنش و گسیختگی در مرز لایه‌ها ایجاد خواهد شد. از این رو مواد پیشرفته با تغییرات تدریجی خواص (مکانیکی، ترمومکانیکی، مغناطیسی) یا FGM در سال‌های اخیر مورد توجه بسیاری از مهندسین ودانشمندان قرار گرفته‌اند.

---
[1] Hopkinson
[2] Cheung
[3] Raju
[4] Takeuti
[5] Lekhnitskii

هدف محققین بررسی و مطالعه‌ی اثر ترکیب دو جنس مختلف در مواد FG بر روی تنش‌ها و طراحی بهینه‌ی مخازن استوانه‌ای و کروی می‌باشد. از این‌رو مطالعات زیادی در این زمینه انجام شده است. برای نمونه، تانیگاوا[1] در ۱۹۹۵ یک بررسی گسترده‌ای بر روی موارد مختلفی از مسائل ترموالاستیک و غیر الاستیک انجام داد. او یک لیست جامعی از مقالاتی گرد آوری کرد که درآن مدلهایی برای تحلیل رفتار ترموالاستیک مواد FG ارائه شده است[۱۴].

اوباتا[2] در ۱۹۹۴به مطالعه‌ی تنش‌های حرارتی در استوانه وکره‌های تو خالی ساخته شده از مواد FG در شرایط انتقال حرارت پایدار پرداختند[۱۵]. حل دقیق مخازن استوانه‌ای و کروی تحت فشار از مواد FG توسط توتونچو [3] و همکارش در ۲۰۰۱ انجام شد[۱۶] . در این تحلیل تنش‌های شعاعی و محیطی در استوانه و کره‌ی تحت فشار داخلی، با توزیع توانی مدول الاستیسیته به ازای توان‌های مثبت ومنفی بررسی شده است. تحلیل تنش‌های حرارتی تحت تاثیر انتقال حرارت غیر یکنواخت در یک استوانه‌ی توخالی FGM توسط کیم[4] در ۲۰۰۲ ارائه شد[۱۷]. این تحلیل بر اساس روش چند لایه‌ای کردن استوانه با استفاده از تابع گرین انجام شد. شرایط مختلف بارگذاری حرارتی و بررسی ترکیب آنها در مطالعات ردی[5] و همکارانش در سالهای۲۰۰۰ تا ۲۰۰۳ ارائه شد[۱۸ -۲۳] . آنها حل تئوری به همراه تحلیل المان محدود را برای استوانه‌ها، ورق‌ها و پوسته‌ها انجام دادند.

یو[6] و همکارانش در ۲۰۰۴ در کاری مشابه، به تحلیل مخازن کروی FG تحت فشار داخلی پرداختند[۲۴]. در این کار، با در نظر گرفتن لایه‌های همگن در جدار داخلی و خارجی کره، و لایه-های ناهمگن FG در میانه، روابط مربوط به توزیع تنش ارائه شده است. یک کار تحلیلی دیگر برای یک مخزن کروی FGM، تحت فشار در شرایط انتقال حرارت یک بعدی پایا توسط اسلامی

[1] Tanigawa
[2] Obata
[3] Tutuncu
[4] Kim
[5] Reddy
[6] You

وهمکارانش در ۲۰۰۵ ارائه شد[۲۵]. آنها درمطالعه‌ی خود خواص مکانیکی و ترمومکانیکی مواد FGM را تابعی در نظر گرفته و به حل معادله‌ی ناویر و انتقال حرارت پرداختند. وانگ[1] و همکارانش در ۲۰۰۶ به تحلیل اثر بارگذاری الکترومغانطیسی در پوسته‌های کروی پرداختند[۲۶].

در یک تحقیق جدید که توسط توتونچو در ۲۰۰۷ انجام شده است با فرض تغییرات نمایی در توزیع خواص مواد FG به تحلیل مخازن استوانه‌ای تحت فشار داخلی پرداخته شده است[۲۷]. در همین زمینه توتونچو[2] در ۲۰۰۹ یک روش جدیدی را برای تحلیل تنش در استوانه، دیسک وکره‌ی FGM ارائه دادند[۲۸]. در این کار تنش‌ها و جابجایی‌ها در شرایطی که بارگذاری فشاری و متقارن می‌باشد، با استفاده از روش تئوری الاستیسیته‌ی مستوی وهمچنین روش توابع کامپلیمنتری[3] انجام و با هم مقایسه شده‌اند.

تحلیل ترموالاستیک کره‌های FG با استفاده از تئوری گرین لیندسی[4] توسط قوش[5] و همکارانش در ۲۰۰۹ ارائه شد[۲۹]. در این تحقیق سطوح داخلی و خارجی کره بدون فشار فرض شده و دما در جدار داخلی متغیّر با زمان به صورت یک شوک حرارتی در نظر گرفته شده است، در حالی که دما در جدار خارجی ثابت فرض شده است. در کاری دیگر، قربانپور و همکارانش در ۲۰۰۹ اثر میدان مغناطیسی و انتقال حرارت گذار را در کره‌های FGM بررسی کردند[۳۰]. ایشان در این کار فرض کردند که خواص مغناطیسی و ترمومکانیکی به صورت تابعی توانی در راستای شعاع کره تغییر کند. قنّاد و همکارانش در ۲۰۰۹ با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی، یک حل عمومی برای استوانه-های تحت فشار ناهمگن ارائه کردند[۳۱]. آنها در همین زمینه، با استفاده از تئوری اصلاح شده‌ی پوسته‌ها، تحلیل استوانه‌های ناهمگن تحت فشار را ارائه کردند[۳۲]. اخیرا بوریسو[6] در ۲۰۱۰ حل

---

1 Wang
2 Temel
3 Complementary Functions method
4 Green–Lindsay theory
5 Ghosh
6 Borisov

کره‌های جدار ضخیم FG را تحت بارگذاری خارجی با استفاده از روش چند لایه‌ای[1] ارائه کرده است[۳۳]. در این کار فشار داخلی به صورت یکنواخت فرض شده است.

در جدول (۱-۱) به طور خلاصه کارهای عمده‌ای که در زمینه‌ی تحلیل بارگذاری‌های مختلف بر روی پوسته‌های کروی و استوانه‌ای بررسی شده است، آورده شده است.

جدول ۱-۱-تاریخچه ی بررسی پوسته های کروی و استوانه ای

سال	مولف	موضوع	جنس
۱۸۲۷	Navier	پایه‌گذاری تئوری الاستیسیته	ایزوتروپ
۱۸۵۲	Lamé	تحلیل استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری	ایزوتروپ
۱۸۷۹	Hopkinson	تحلیل تنش‌های حرارتی در یک کره	ایزوتروپ
۱۹۷۴	Cheung	تحلیل تنش‌های حرارتی در یک کره تحت انتقال حرارت گذار با استفاده تئوری تغییر شکل برشی	ایزوتروپ
۱۹۷۵	Raju	تنش‌های حرارتی در یک کره جدار نازک با استفاده تئوری اصلاح شده‌ی پوسته‌ها	ایزوتروپ
۱۹۸۲	Takeuti	حل تحلیلی یک پوسته‌ی کروی تحت انتقال حرارت گذار به وسیله‌ی منبع حرارتی چرخان	ایزوتروپ
۱۹۹۴	Obata	تحلیل کره‌های جدار ضخیم تحت انتقال حرارت پایا با استفاده از روش اغتشاشات(perturbation)	FGM
۲۰۰۱	Tutuncu	حل دقیق استوانه و کره‌های تحت فشار داخلی با استفاده از روش PET	FGM
۲۰۰۴	You	تحلیل مخازن کروی تحت فشار داخلی با استفاده از روش PET	ایزوتروپ-FGM
۲۰۰۵	Eslami	تحلیل مخازن کروی تحت انتقال حرارت پایدار با استفاده از روش PET	FGM
۲۰۰۶	Wang	بررسی پاسخ‌های گذار یک پوسته‌ی کروی تحت بارگذاری الکترومغناطیسی با استفاده از روش PET	ایزوتروپ
۲۰۰۸	Ghorbanpour Arani	بررسی اثر میدان مغناطیسی و انتقال حرارت گذار در پوسته‌های کروی	FGM

[1] Multilayer

		با استفاده از روش PET	
۲۰۰۹	Tutuncu	حل استوانه و کره‌های تحت فشار داخلی با استفاده از روش توابع تکمیلی(Complementary Functions)	FGM
۲۰۰۹	Ghosh	بررسی اثر شوک حرارتی در جدار داخلی با استفاده تئوری Green–Lindsay	FGM
۲۰۰۹	Ghannad	حل عمومی استوانه‌های جدار ضخیم با استفاده روش PET	FGM
۲۰۰۹	Ghannad	حل عمومی استوانه‌های جدار ضخیم با استفاده تئوری تغییرشکل برشی	FGM
۲۰۱۰	Borisov	حل الاستیک کره‌های جدار ضخیم تحت بارگذاری خارجی با استفاده از روش چند لایه (Multilayer)	FGM

۱-۸- معرفی پایان نامه‌ی حاضر

در این پایان‌نامه یک مخزن چرخان کروی ساخته شده از مواد ناهمگن، که تحت انتقال حرارت یک بعدی پایا قرار دارد، برای حالتی که بارگذاری آن به صورت کلی(دمایی-مکانیکی) می‌باشد، مورد مطالعه قرار گرفته است. خواص ترمومکانیکی مواد را به صورت تابع توانی در نظر گرفته که در راستای شعاعی تغییرات دارد. بار گذاری مکانیکی، حرارتی و دوران هرکدام به طور مجزا بررسی شده تا اثر هر کدام جداگانه و به طور ترکیبی مطالعه شود.

در فصل دوم حل تحلیلی و عددی کره‌های جدار ضخیم تحت فشار داخلی و خارجی ارائه شده است. در این فصل معادله‌ی ناویر با در نظر گرفتن سه ریشه‌ی ساده، مضاعف و مختلط حل شده است و روابط تنش و جابجایی برای سه ریشه به طور مجزا ارائه شده است.

در فصل سوم حل تحلیلی و عددی کره‌های جدار ضخیم تحت فشار داخلی و خارجی و انتقال حرارت پایدار ارائه شده است. در این فصل حل معادله‌ی انتقال حرارت در دوحالت مجزا برای مواد FG ارائه شده‌است. که به تبع آن توزیع تنش و جابجایی با روابطی مجزا ارائه شده است.

در دو فصل دوم و سوم حل تحلیلی و نتایج بدست آمده از روش المان محدود[1] با یکدیگر مقایسه و انطباق مناسبی میان دو روش مشاهده شده است. با توجه به تطابق مناسب نتایج حل عددی با حل دقیق تحلیلی، از نرم‌افزار مبتنی بر روش المان محدود در مطالعه‌ی اثر بارگذاری‌هایی که منجربه پیچیدگی مسئله می‌شود(از جمله بارهای حجمی)، استفاده شده است. از این رو در فصل چهارم حل عددی کره‌های FG چرخان تحت فشار ارائه شده است. در فصل پنجم به حل عددی کره‌ی چرخان تحت بار مکانیکی و دمایی پرداخته شده و فصل ششم به جمع‌بندی نتایج اختصاص یافته است.

[1] Finite Element Method (FEM)

فصل ۲

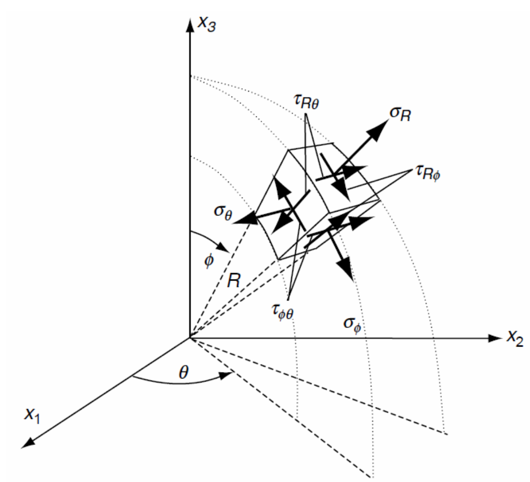
تحلیل الاستیک پوسته‌های کروی FGM

۲-۱- مقدمه

در این فصل ابتدا با ارائه‌ی روابط کلی الاستیک یا الاستیسیته حاکم بر پوسته‌های کروی، معادلات ناویر در پوسته‌های جدار ضخیم کروی از مواد همگن بدست آمده است. سپس با در نظر گرفتن اثر مواد FG در معادلات ناویر، یک حل کلی از کره‌ی FGM جدارضخیم، تحت فشارداخلی وخارجی ارائه شده است. پس از آن با استفاده از روش المان محدود به شبیه‌سازی پوسته‌های کروی FGM در نرم‌افزار ABAQUS پرداخته و در انتهای این فصل نتایج تحلیلی وعددی را با یک مثال نمونه مقایسه شده است.

۲-۲- روابط اساسی در دستگاه مختصات کروی

با درنظر گرفتن دستگاه مختصات راستگرد تنش‌های یک المان دلخواه از یک جسم در مختصات کروی به صورت شکل زیر نمایش داده می‌شود.



شکل ۲-۱: تنش های یک المان درمختصات کروی[۳۴]

که دراین المان تانسور تنش به صورت زیر می‌باشد.

$$\left[\sigma_{ij}\right]=\begin{bmatrix}\sigma_R & \tau_{R\phi} & \tau_{R\theta}\\ \tau_{R\phi} & \sigma_\phi & \tau_{\phi\theta}\\ \tau_{R\theta} & \tau_{\phi\theta} & \sigma_\theta\end{bmatrix} \qquad (۱-۲)$$

به همین ترتیب تانسور کرنش و بردار جابجایی را می‌توان به صورت زیر نشان داد.

$$\left[\varepsilon_{ij}\right]=\begin{bmatrix}\varepsilon_R & \frac{\gamma_{R\phi}}{2} & \frac{\gamma_{R\theta}}{2}\\ \frac{\gamma_{R\phi}}{2} & \varepsilon_\phi & \frac{\gamma_{\phi\theta}}{2}\\ \frac{\gamma_{R\theta}}{2} & \frac{\gamma_{\phi\theta}}{2} & \varepsilon_\theta\end{bmatrix} \qquad (۲-۲)$$

$$\{u\}=\begin{Bmatrix}u_R\\ u_\phi\\ u_\theta\end{Bmatrix} \qquad (۳-۲)$$

معادلات تعادل تنش درمختصات کروی در حالت کلی به صورت زیر می‌باشند.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\sigma_R}{\partial R}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\tau_{R\phi}}{\partial\phi}+\dfrac{1}{RSin\phi}\dfrac{\partial\tau_{R\theta}}{\partial\theta}+\dfrac{1}{R}(2\sigma_R-\sigma_\phi-\sigma_\theta+\tau_{R\phi}Cot\phi)+F_R=0\\ \dfrac{\partial\tau_{R\phi}}{\partial R}+\dfrac{1}{R}\dfrac{\partial\sigma_\phi}{\partial\phi}+\dfrac{1}{RSin\phi}\dfrac{\partial\tau_{\phi\theta}}{\partial\theta}+\dfrac{1}{R}\left[(\sigma_\phi-\sigma_\theta)Cot\phi+3\tau_{R\phi}\right]+F_\phi=0\\ \dfrac{\partial\tau_{R\theta}}{\partial R}+\dfrac{1}{R}\dfrac{\partial\tau_{\phi\theta}}{\partial\phi}+\dfrac{1}{RSin\phi}\dfrac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+\dfrac{1}{R}(2\tau_{\phi\theta}Cot\phi+3\tau_{R\theta})+F_\theta=0\end{cases} \qquad (۴-۲)$$

اگر معادلات تعادل گشتاورها نیز نوشته شود، این رابطه منجر به متقارن شدن تانسور تنش خواهد شد و تقارن تانسور کرنش با در نظر گرفتن تغییرشکل‌های بسیار کوچک نتیجه می‌شود. روابط سینماتیک در مختصات کروی به صورت زیر می‌باشند.

$$
\begin{cases}
\varepsilon_R = \dfrac{\partial u_R}{\partial R} \\
\varepsilon_\phi = \dfrac{1}{R}\left(u_R + \dfrac{\partial u_\phi}{\partial \phi}\right) \\
\varepsilon_\theta = \dfrac{1}{RSin\phi}\left(\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + Sin\phi u_R + Cos\phi u_\phi\right) \\
\varepsilon_\theta = \dfrac{1}{RSin\phi}\left(\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + Sin\phi u_R + Cos\phi u_\phi\right) \\
\gamma_{R\phi} = \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial u_R}{\partial \phi} + \dfrac{\partial u_\phi}{\partial R} - \dfrac{u_\phi}{R} \\
\gamma_{\phi\theta} = \dfrac{1}{R}\left(\dfrac{1}{Sin\phi}\dfrac{\partial u_\phi}{\partial \theta} + \dfrac{\partial u_\theta}{\partial \phi} - Cot\phi u_\theta\right) \\
\gamma_{\theta R} = \dfrac{1}{RSin\phi}\dfrac{\partial u_R}{\partial \theta} + \dfrac{\partial u_\theta}{\partial R} - \dfrac{u_\theta}{R}
\end{cases}
\qquad (۵-۲)
$$

همچنین معادلات رفتاری دریک مختصات دلخواه به صورت زیر ارائه می‌شوند.

$$
\begin{cases}
\sigma_i = \dfrac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_i + \nu(\varepsilon_j + \varepsilon_k)\right] & i, j, k = R, \phi, \theta \\
\tau_{ij} = \dfrac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{ij} & i \neq j
\end{cases}
\qquad (۶-۲)
$$

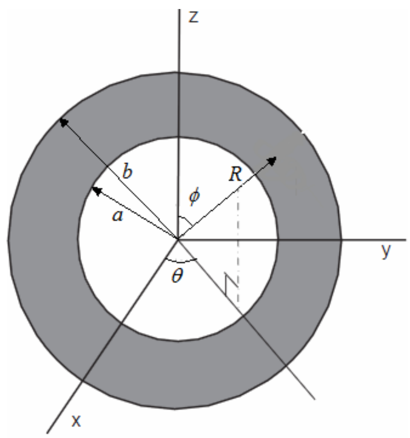
معادلات رفتاری را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت.

$$
\begin{cases}
\varepsilon_i = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_i - \nu(\sigma_j + \sigma_k)\right] & i, j, k = R, \phi, \theta \\
\gamma_{ij} = \dfrac{2(1+\nu)}{E}\tau_{ij} & i \neq j
\end{cases}
\qquad (۷-۲)
$$

۲-۳- تحلیل ریاضی پوسته های کروی همگن[۳۵]

یک کره‌ی جدار ضخیم، با شعاع داخلی a و شعاع خارجی b و شعاع بی‌بعد r که بصورت $r = \dfrac{R}{a}$ نرمالیز شده که در آن R مقداری میان a و b دارد، را درنظر بگیرید. برای تحلیل، دستگاه مختصات

کروی (R,ϕ,θ) که مبدا آن مرکز کره می‌باشد در نظر گرفته می‌شود. هندسه‌ی کره نسبت به محور-های مختصات در شکل(۲-۲) نشان داده شده است.



شکل ۲-۲: مختصات کروی

در این قسمت به دلیل تقارن در هندسه، بار گذاری و مادّه‌ی کره، تحلیل ریاضی مدل مورد نظر را می‌توان با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی(PET) انجام داد. لذا در این شرایط کره در دو جهت دارای شرایط تقارن محوری می‌باشد.

$$\frac{\partial}{\partial\theta}=0 \; , \; \frac{\partial}{\partial\phi}=0 \qquad (۸-۲)$$

همچنین $u_\theta = u_\phi = 0$ و $\sigma_\phi = \sigma_\theta$ خواهد بود. لذا با قرار دادن شرایط (۲-۸) در رابطه‌ی (۲-۵)، معادلات سینماتیک به صورت زیر ساده می‌شوند.

$$\varepsilon_r = \frac{du_r}{dr} \;\; ; \;\; \varepsilon_\phi = \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} \quad ; \quad \gamma_{r\phi} = \gamma_{\phi\theta} = \gamma_{r\theta} = 0 \qquad (۹-۲)$$

که در آن $u_r = \frac{u_R}{a}$می باشد. صفر شدن کرنش های برشی طبق رابطه‌ی (۲-۶) منجربه صفر شدن تنش‌های برشی خواهد شد. لذا تانسور تنش، تانسور کرنش و بردار جابجایی در یک کره‌ی جدار ضخیم متقارن محوری به صورت زیر حاصل می‌گردد.

$$\left[\sigma_{ij}\right]=\begin{bmatrix}\sigma_r & 0 & 0\\ 0 & \sigma_\phi & 0\\ 0 & 0 & \sigma_\phi\end{bmatrix}$$ (۱۰-۲)

$$\left[\varepsilon_{ij}\right]=\begin{bmatrix}\varepsilon_r & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_\phi & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_\phi\end{bmatrix}$$ (۱۱-۲)

$$\left[u_i\right]=\begin{Bmatrix}u_r\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}$$ (۱۲-۲)

از جایگذاری تانسور تنش بدست آمده در معادلات تعادل (۲-۱۴)معادله‌ی زیر بدست می‌آید.

$$\frac{d\sigma_r}{dr}+\frac{2}{r}(\sigma_r-\sigma_\phi)=0$$ (۱۳-۲)

با فرض همگن و همسانگرد بودن ماده‌ی کره، معادلات رفتاری ارائه شده در بخش قبل به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\begin{cases}\sigma_r=\dfrac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_r+2\nu\varepsilon_\phi\right]\\ \sigma_\phi=\sigma_\theta=\dfrac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\nu\varepsilon_r+\varepsilon_\phi\right]\end{cases}$$ (۱۴-۲)

حال می‌توان در این رابطه با استفاده از رابطه‌ی (۲-۹) به جای کرنش‌های $\varepsilon_r,\varepsilon_\phi$ از روابط مربوط به جابجایی استفاده نمود.

$$\begin{Bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\phi\end{Bmatrix}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1-\nu & 2\nu\\ \nu & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dfrac{du_r}{dr}\\ \dfrac{u_r}{r}\end{Bmatrix}$$ (۱۵-۲)

که در روابط زیر علامت $(')$نشان دهنده‌ی مشتق نسبت به r است. اکنون که دومتغیّر ارائه شده در معادله‌ی تعادل با یک متغیّر u_r بیان شده‌اند، می توان رابطه‌ی (۲-۱۵) را در معادله‌ی تعادل (۲-۱۳) قرارداد و آن را حل کرد.

$$\frac{d}{dr}\left[(1-\nu)\frac{du_r}{dr}+2\nu\frac{u_r}{r}\right]+\frac{2}{r}\left[((1-\nu)\frac{du_r}{dr}+2\nu\frac{u_r}{r})-(\nu\frac{du_r}{dr}+\frac{u_r}{r})\right]=0$$

$$\Rightarrow u_r''+2\frac{u_r'}{r}-2\frac{u_r}{r^2}=0$$

معادله‌ی بالا را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت.

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2u_r)\right]=0 \qquad (۱۶-۲)$$

با دو بار انتگرال گیری از این معادله می‌توان نوشت.

$$u_r(r)=c_1r+\frac{c_2}{r^2} \qquad (۱۷-۲)$$

که در آن c_1,c_2 ثابت‌هایی مجهول هستند که با استفاده از شرایط مرزی بدست می‌آیند.

۲-۴- تحلیل ریاضی پوسته های کروی FGM

همانطور که در فصل (۱) اشاره شد در مواد FG، خواص (مکانیکی،حرارتی، مغناطیسی) مادّه به طور پیوسته تغییر می‌کند. در این تحلیل خواص مکانیکی به جز ضریب پواسون در راستای ضخامت کره به صورت تابع توانی برحسب شعاع کره تغییر می‌کنند. لذا با در نظرگرفتن شکل هندسی و محورهای مختصات تعریف شده در بخش قبل، تغییرات مدول الاستیسیته برای مواد FG به صورت زیر فرض می‌شود.

$$E(r)=E_ir^{n_1} \qquad (۱۸-۲)$$

که در آن n_1 ثابت ناهمگنی می‌باشد. ضریب پواسون نیز ثابت فرض می‌شود. لذا این مواد فقط در معادلات رفتاری تاثیر گذاشته و در نتیجه معادلات رفتاری به صورت زیر برای مواد FG تغییر می‌کند.

$$\begin{cases} \sigma_r = \dfrac{E_i r^{n_1}}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_r + 2\nu\varepsilon_\phi\right] \\ \sigma_\phi = \sigma_\theta = \dfrac{E_i r^{n_1}}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\nu\varepsilon_r + \varepsilon_\phi\right] \end{cases} \tag{۲-۱۹}$$

لذا در اینجا نیز همان معادله‌ی تعادل (۲-۱۳) حاکم می‌باشد. برای حل این معادله می‌توان در رابطه‌ی (۲-۱۹) با استفاده از معادلات سینماتیک (۲-۹) به جای کرنش‌های $\varepsilon_r, \varepsilon_\phi$از روابط معادل جابجایی استفاده کرد.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\phi \end{Bmatrix} = \frac{E_i r^{n_1}}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & 2\nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{du_r}{dr} \\ \dfrac{u_r}{r} \end{Bmatrix} \tag{۲-۲۰}$$

اکنون که دومتغیّر ارائه شده درمعادله‌ی (۲-۱۹) با یک متغیّر u_r بیان شده‌اند، می‌توان رابطه‌ی (۲-۱۹) را در معادله‌ی تعادل(۲-۱۳) قرارداد و آن را حل کرد.

$$r^2 u_r'' + A r u_r' + B u_r = 0 \tag{۲-۲۱}$$

که در این رابطه A, B به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$A = 2 + n_1 \;\; ; \;\; B = \frac{2\left[\nu(n_1+1)-1\right]}{1-\nu} \tag{۲-۲۲}$$

معادله‌ی دیفرانسیل (۲-۲۱) یک معادله‌ی اولرکوشی همگن می‌باشد که با در نظر گرفتن یک حل کلی به صورت $u_r(r) = cr^m$ و قراردادن آن در معادله دیفرانسیل، معادله مشخصه‌ی زیر بدست می‌آید.

$$m^2 + (A-1)m + B = 0 \;\; ; \;\; \Delta = (A-1)^2 - 4B \tag{۲-۲۳}$$

ریشه‌های معادله مشخصه به صورت زیر بدست می‌آید.

الف: ریشه‌های حقیقی

اگر $\Delta > 0$ باشد، معادله دارای ریشه‌های حقیقی می‌شود.

$$m_1 = \frac{1-A+\sqrt{\Delta}}{2} \quad ; \quad m_2 = \frac{1-A-\sqrt{\Delta}}{2} \tag{۲۴-۲}$$

حل معادله‌ی اولرکوشی(۲-۲۱) در این حالت به صورت زیر می‌باشد.

$$u_r(r) = c_1 r^{m_1} + c_2 r^{m_2} \tag{۲۵-۲}$$

که در آن c_1, c_2دو ثابت دلخواه می‌باشند و m_1, m_2 مطابق رابطه‌ی (۲-۲۴) تعریف می‌شوند.

برای اینکه این دوثابت مشخص شود، بایستی از شرایط مرزی استفاده کرد. لذا ابتدا با جایگذاری رابطه‌ی (۲-۲۵) در (۲-۲۰) می توان نوشت.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\phi \end{Bmatrix} = \frac{E_i r^{n_1}}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & 2\nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_1 c_1 r^{m_1-1} + m_2 c_2 r^{m_2-1} \\ c_1 r^{m_1-1} + c_2 r^{m_2-1} \end{Bmatrix}$$

که این رابطه را می‌توان به صورت زیر مرتب کرد.

$$\begin{cases} \sigma_r = \dfrac{E_i r^{n_1}}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[c_1 Q_1 r^{m_1-1} + c_2 Q_2 r^{m_2-1} \right] \\ \sigma_\varphi = \dfrac{E_i r^{n_1}}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[c_1 G_1 r^{m_1-1} + c_2 G_2 r^{m_2-1} \right] \end{cases} \tag{۲۶-۲}$$

که در آن توابع Qو G به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{cases} Q_1 = 2\nu + (1-\nu) m_1 \quad ; \quad G_1 = 1 + \nu m_1 \\ Q_2 = 2\nu + (1-\nu) m_2 \quad ; \quad G_2 = 1 + \nu m_2 \end{cases} \tag{۲۷-۲}$$

فرض می‌شود که کره تحت فشار یکنواخت داخلی p_i در جدار داخلی و تحت فشار یکنواخت خارجی p_o در جدار خارجی قرار گیرد. شرایط مرزی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد.

$$\begin{aligned} \sigma_r \Big|_{r=1} &= -p_i \\ \sigma_r \Big|_{r=k} &= -p_o \end{aligned} \tag{۲۸-۲}$$

که در آن $k=b/a$ لذا با استفاده از رابطه‌ی (۲-۲۶) می‌توان نوشت.

$$\frac{E_i}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_1 k^{n_1} k^{m_1-1} & Q_2 k^{n_1} k^{m_2-1} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -p_i \\ -p_o \end{Bmatrix} \qquad (۲-۲۹)$$

با یک معکوس گیری از ماتریس ضرایب، دو مجهول بالا را می توان بدست آورد.

$$\begin{cases} c_1=\dfrac{(1+\nu)(1-2\nu)\left[k^{m_2} p_i-k^{1-n} p_o\right]}{E_i Q_1\left(k^{m_1}-k^{m_2}\right)} \\ \\ c_2=-\dfrac{(1+\nu)(1-2\nu)\left[k^{m_1} p_i-k^{1-n} p_o\right]}{E_i Q_2\left(k^{m_1}-k^{m_2}\right)} \end{cases} \qquad (۲-۳۰)$$

پس از جایگزینی c_1 و c_2 در معادلات (۲-۲۵) و (۲-۲۶) می توان نوشت.

$$\begin{cases} \sigma_r=\dfrac{r^{n_1-1}}{k^{m_1}-k^{m_2}}\left[r^{m_1}\left(k^{m_2} p_i-k^{(1-n_1)} p_o\right)-r^{m_2}\left(k^{m_1} p_i-k^{(1-n_1)} p_o\right)\right] \\ \sigma_\phi=\dfrac{r^{n_1-1}}{k^{m_1}-k^{m_2}}\left[\dfrac{G_1}{Q_1} r^{m_1}\left(k^{m_2} p_i-k^{(1-n_1)} p_o\right)-\dfrac{G_2}{Q_2} r^{m_2}\left(k^{m_1} p_i-k^{(1-n_1)} p_o\right)\right] \\ u_r=\dfrac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E_i\left(k^{m_1}-k^{m_2}\right)}\left[\dfrac{r^{m_1}}{Q_1}\left(k^{m_2} p_i-k^{(1-n_1)} p_o\right)-\dfrac{r^{m_2}}{Q_2}\left(k^{m_1} p_i-k^{(1-n_1)} p_o\right)\right] \end{cases} \qquad (۲-۳۱)$$

روابط (۲-۳۱) یک حل کلی ازیک کره‌ی جدارضخیم تحت تاثیرفشار داخلی p_i وفشار خارجی p_o با در نظر گرفتن ریشه‌های حقیقی معادله‌ی اولر کوشی را ارائه می دهند.

همانطور که روابط (۲-۳۱) نشان می‌دهند تنش فشاری مستقل از خواص مکانیکی بوده در حالی که تنش محیطی و جابجایی وابسته به خواص مکانیکی می‌باشند.

ب: ریشه‌های مضاعف

اگر $\Delta=0$ باشد، معادله دارای ریشه‌های مضاعف می‌شود.

$$m_{1,2}=m=\frac{1-B}{2} \qquad (۲-۳۲)$$

در این صورت حل معادله‌ی اولر کوشی (۲-۲۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$u_r(r)=\left(c_1+c_2\ln r\right)r^m \tag{۳۳-۲}$$

که در آن c_1,c_2 دو ثابت دلخواه می‌باشند. برای اینکه این دوثابت مشخص شوند بایستی از شرایط مرزی استفاده نمود. لذا ابتدا با جایگذاری رابطه‌ی (۲-۳۲) در (۲-۲۰) می توان نوشت.

$$\begin{cases}\sigma_r=\dfrac{E_i r^{n+m-1}}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[Qc_1+\left(Q\ln r+(1-\nu)\right)c_2\right]\\ \sigma_\phi=\sigma_\theta=\dfrac{E_i r^{n+m-1}}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[Gc_1+\left(G\ln r+\nu\right)c_2\right]\end{cases} \tag{۳۴-۲}$$

که در آن توابع Q و G به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$Q=2\nu+\left(1-\nu\right)m \quad ; \quad G=1+\nu m \tag{۳۵-۲}$$

با استفاده از شرایط مرزی(۲-۲۸) و جایگذاری آن در رابطه‌ی (۲-۳۳) می توان نوشت.

$$\frac{E_i}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}Q & (1-\nu)\\ Qk^{n_1}k^{m_1-1} & \left(Q\ln k+(1-\nu)\right)k^{n_1}k^{m_2-1}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}c_1\\ c_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-p_i\\ -p_o\end{Bmatrix} \tag{۳۶-۲}$$

با یک معکوس گیری از ماتریس ضرایب، دو مجهول بالا را می توان بدست آورد.

$$\begin{cases}c_1=-\dfrac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E_iQ\ln k}\left[\left(Q\ln k+(1-\nu)\right)p_i-(1-\nu)k^{1-n-m}p_o\right]\\ \\ c_2=\dfrac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E_iQ\ln k}\left[p_i-k^{1-n-m}p_o\right]\end{cases} \tag{۳۷-۲}$$

پس از جایگزینی c_1 و c_2 در معادلات (۲-۳۳) و (۲-۳۴) می توان نوشت

$$\begin{cases} \sigma_r = -\dfrac{r^{n+m-1}}{\ln k}\left[\left(\ln \dfrac{k}{r}\right) p_i + (\ln r) k^{1-n-m} p_o\right] \\ \sigma_\phi = \sigma_\theta = \dfrac{r^{n+m-1}}{(Q \ln k)}\left[\left(G \ln \dfrac{r}{k} - \dfrac{G}{Q}(1-\nu) + \nu\right) p_i \right. \\ \left. -\left(G \ln r - \dfrac{G}{Q}(1-\nu) + \nu\right) k^{1-n-m} p_o\right] \\ u_r(r) = \dfrac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E_i Q \ln k} r^m \left[\left(\ln \dfrac{r}{k} - \dfrac{(1-\nu)}{Q}\right) p_i - \left(\ln r - \dfrac{(1-\nu)}{Q}\right) k^{1-n-m} p_o\right] \end{cases} \quad (۳۸-۲)$$

روابط (۲-۳۸) یک حل کلی ازیک کره‌ی جدارضخیم تحت تاثیرفشار داخلی p_i وفشار خارجی p_o با در نظر گرفتن ریشه‌های مضاعف معادله‌ی اولرکوشی را ارائه می دهند. همانطور که این روابط نشان می‌دهند تنش فشاری مستقل از خواص مکانیکی بوده در حالی که تنش محیطی و جابجایی وابسته به خواص مکانیکی می‌باشند.

ج: ریشه‌های مختلط

اگر $\Delta < 0$ باشد، معادله دارای ریشه های مختلط می شود.

$$m_1 = z + iy \ , \ m_2 = z - iy \quad (۳۹-۲)$$

که در آن

$$z = \frac{1-A}{2} \ ; \ y = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \quad (۴۰-۲)$$

حل معادله‌ی اولرکوشی (۲-۲۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$u_r(r) = \left[c_1 \cos\left(y \ln r\right) + c_2 \sin\left(y \ln r\right)\right] r^z \quad (۴۱-۲)$$

که در آن c_1, c_2 دو ثابت دلخواه می‌باشند. با جایگذاری رابطه(۲-۴۱) در رابطه‌ی (۲-۲۰)، می‌توان رابطه‌ی تنش‌ها را به صورت زیر نوشت.

$$
\begin{cases}
\sigma_r = \dfrac{E_i r^{n+z-1}}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[c_1 q_1 + c_2 q_2\right] \\
\sigma_\phi = \sigma_\theta = \dfrac{E_i r^{n+z-1}}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[c_1 q_3 + c_2 q_4\right]
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
q_1 &= Q\cos\left(y\ln r\right) - y(1-\nu)\sin\left(y\ln r\right) \\
q_2 &= Q\sin\left(y\ln r\right) + y(1-\nu)\cos\left(y\ln r\right) \\
q_3 &= G\cos\left(y\ln r\right) - y\nu\sin\left(y\ln r\right) \\
q_4 &= G\sin\left(y\ln r\right) + y\nu\cos\left(y\ln r\right)
\end{aligned}
\qquad (۲-۴۲)
$$

که در آن توابع Qو G را به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$
Q = 2\nu + \left(1-\nu\right)z \quad ; \quad G = 1 + \nu z \qquad (۲-۴۳)
$$

با استفاده از شرایط مرزی(۲-۲۸) و جایگذاری آن در رابطه‌ی (۲-۳۳) می‌توان نوشت:

$$
\begin{cases}
c_1 = -\dfrac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E_i\left(Q^2 + y^2(1-\nu)^2\right)\sin\left(y\ln k\right)}\Big[\left(Q\sin\left(y\ln k\right) + y(1-\nu)\cos\left(y\ln k\right)\right)p_i \\
-k^{1-n-z}y(1-\nu)p_o\Big] \\
c_2 = \dfrac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E_i\left(Q^2 + y^2(1-\nu)^2\right)\sin\left(y\ln k\right)}\Big[\left(Q\cos\left(y\ln k\right) - y(1-\nu)\sin\left(y\ln k\right)\right)p_i \\
-k^{1-n-z}Qp_o\Big]
\end{cases}
\qquad (۲-۴۴)
$$

پس از جایگزینی c_1 و c_2 در معادلات (۲-۲۵) و (۲-۲۶) می‌توان نوشت:

$$
\begin{cases}
\sigma_r = -\dfrac{r^{n+z-1}}{\sin(y\ln k)}\left[p_i\sin\left(y\ln\dfrac{k}{r}\right) + p_o k^{1-n-z}\sin\left(y\ln r\right)\right] \\
\sigma_\phi = \dfrac{E_i r^{n+z-1}}{\left(Q^2 + y^2(1-\nu)^2\right)}\left\{p_i\left[\left(QG - \nu y^2(1-\nu)\right)\sin\left(y\ln\dfrac{k}{r}\right) + \left(Q\nu + G(1-\nu)\right)y\cos\left(y\ln\dfrac{k}{r}\right)\right]\right. \\
\left.-p_o k^{1-n-z}\left[\left(QG - \nu y^2(1-\nu)\right)\sin\left(y\ln r\right) + \left(Q\nu + G(1-\nu)\right)y\cos\left(y\ln r\right)\right]\right\} \\
u_r(r) = -\dfrac{(1+\nu)(1-2\nu)r^z}{E_i\left(Q^2 + y^2(1-\nu)^2\right)}\left[p_i\left(Q\sin\left(y\ln\dfrac{k}{r}\right) + y\left(1-\nu\right)\cos\left(y\ln\dfrac{k}{r}\right)\right)\right. \\
\left.+p_o k^{1-n-z}\left(Q\sin\left(y\ln r\right) - y\left(1-\nu\right)\cos\left(y\ln r\right)\right)\right]
\end{cases}
\qquad (۲-۴۵)
$$

روابط (۲-۴۵) یک حل کلی ازیک کره‌ی جدارضخیم تحت تاثیرفشار داخلی p_i وفشار خارجی p_o با در نظر گرفتن ریشه‌های مختلط معادله‌ی اولرکوشی را ارائه می دهند. همانطور که این روابط نشان می‌دهند تنش فشاری مستقل از خواص مکانیکی بوده در حالی که تنش محیطی و جابجایی وابسته به خواص مکانیکی می‌باشند.

۲-۴-۲- حالت های خاص

در این بخش با در نظر گرفتن روابط تنش و جابجایی در شرایطی که معادله‌ی ناویر دارای ریشه-های حقیقی باشد چند حالت خاص که دارای کاربرد بیشتری هستند ارائه شده است.

الف) کره تحت فشار داخلی($p_o = 0, p_i = p$)

در حالتی که کره فقط تحت فشار داخلی $p_i = p$ باشد روابط (۲-۲۸) به صورت زیر ساده می شوند:

$$\begin{cases} \sigma_r = \dfrac{p r^{n_1 - 1}}{k^{m_1} - k^{m_2}} \left[k^{m_2} r^{m_1} - k^{m_1} r^{m_2} \right] \\ \sigma_\phi = \dfrac{p r^{n_1 - 1}}{k^{m_1} - k^{m_2}} \left[\dfrac{G_1}{Q_1} k^{m_2} r^{m_1} - \dfrac{G_2}{Q_2} k^{m_1} r^{m_2} \right] \\ u_r = \dfrac{(1+\nu)(1-2\nu) p}{E_i \left(k^{m_1} - k^{m_2} \right)} \left[\dfrac{k^{m_2} r^{m_1}}{Q_1} - \dfrac{k^{m_1} r^{m_2}}{Q_2} \right] \end{cases} \qquad (۴۶\text{-}۲)$$

ب) کره تحت فشار خارجی ($p_o = p, p_i = 0$)

در حالتی که مخزن کروی فقط تحت فشار خارجی $p_o = p$ باشد روابط (۲-۲۸) به صورت زیر ساده می شوند:

$$\begin{cases} \sigma_r = \dfrac{pk^{(1-n_1)} r^{n_1-1}}{k^{m_1} - k^{m_2}} \left[-r^{m_1} + r^{m_2} \right] \\ \sigma_\phi = \dfrac{pk^{(1-n_1)} r^{n_1-1}}{k^{m_1} - k^{m_2}} \left[-\dfrac{G_1}{Q_1} r^{m_1} + \dfrac{G_2}{Q_2} r^{m_2} \right] \\ u_r = \dfrac{(1+\nu)(1-2\nu)\, pk^{(1-n_1)}}{E_i \left(k^{m_1} - k^{m_2} \right)} \left[-\dfrac{r^{m_1}}{Q_1} + \dfrac{r^{m_2}}{Q_2} \right] \end{cases} \qquad (۴۷-۲)$$

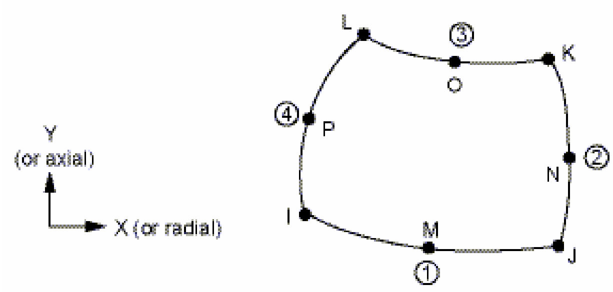
پ) کره تحت فشار داخلی وخارجی یکسان ($p_o = p_i = p$)

در حالتی که مخزن کروی تحت فشار خارجی $p_o = p$ وفشار داخلی $p_i = p$ باشد، روابط (۲-۲۸) به صورت زیر ساده می‌شوند:

$$\begin{cases} \sigma_r = \dfrac{pr^{n_1-1}}{k^{m_1} - k^{m_2}} \left[r^{m_1} \left(k^{m_2} - k^{(1-n_1)} \right) - r^{m_2} \left(k^{m_1} - k^{(1-n_1)} \right) \right] \\ \sigma_\phi = \dfrac{pr^{n_1-1}}{k^{m_1} - k^{m_2}} \left[\dfrac{G_1}{Q_1} r^{m_1} \left(k^{m_2} - k^{(1-n_1)} \right) - \dfrac{G_2}{Q_2} r^{m_2} \left(k^{m_1} - k^{(1-n_1)} \right) \right] \\ u_r = \dfrac{(1+\nu)(1-2\nu)\, p}{E_i \left(k^{m_1} - k^{m_2} \right)} \left[\dfrac{r^{m_1}}{Q_1} \left(k^{m_2} - k^{(1-n_1)} \right) - \dfrac{r^{m_2}}{Q_2} \left(k^{m_1} - k^{(1-n_1)} \right) \right] \end{cases} \qquad (۴۸-۲)$$

۲-۵- تحلیل عددی پوسته های کروی FGM

یک نمونه در نرم‌افزار ABAQUS مدل شده است. درمدل FEM مذکور بدلیل تقارن، تنها نصف کره به صورت دوبعدی (متقارن محوری) درنظر گرفته شده است. با توجه به اینکه ماژول مربوط به مدل‌سازی مواد FG در نرم‌افزار آباکوس تعریف نشده، لذا مدل مورد نظر با یک کره‌ی کامپوزیتی تقریب زده می‌شود. برای اعمال تغییرات خواص مواد، ضخامت کره به چند لایه تقسیم شده به طوری که در هر لایه، خواص مواد ثابت فرض می‌شود. المان‌های مورد استفاده در تحلیل، از نوع المان‌های هشت گره‌ای CAX8RH می‌باشند. در شکل(۲-۳) این المان نشان داده شده است.



شکل ۲-۳: نوع المان انتخاب شده

۲-۵-۱- تعیین تعداد لایه‌ها و مش‌بندی بهینه

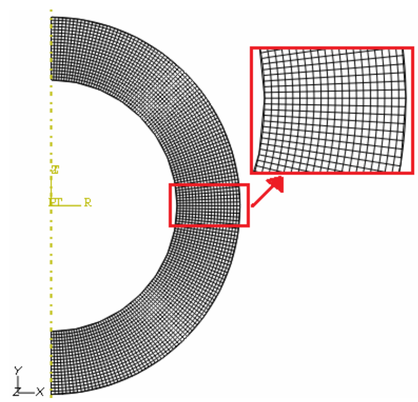
تقسیمات بهینه با روش سعی و خطا تعیین می‌شود. در جدول (۲-۱) اثر تعداد لایه‌ها و اندازه‌ی مش‌بندی بر جابجایی شعاعی یک نقطه از جدار داخلی ($\phi = 0$) برای کره‌ای به شعاع داخلی $R = 40\,mm$ و ضخامت $h = 20\,mm$ آورده شده است:

جدول۲-۱: تنش محیطی یک نقطه با هدف تعیین تعداد لایه ها و اندازه مش بهینه

اندازه مش ←	h/m	h/(2*m)		h/(4*m)	
تعداد لایه ↓ (m)	$\sigma_\phi(MPa)$	%diff	$\sigma_\phi(MPa)$	%diff	$\sigma_\phi(MPa)$
5	74.5506	0.4323	74.8534	0.12033	74.9376
10	72.4127	0.1195	72.4963	0.03056	72.5177
15	71.6314	0.0542	71.6693	0.01400	71.6791
20	71.2336	0.0330	71.2567	0.00557	71.2606
25	70.9878	0.0221	71.0033	0.00300	71.0054

در جدول فوق منظور از اندازه مش , طول ضلع مش بندی است که برای نرم افزار تعریف شده است. به عبارت دیگر تعداد المان‌هایی است که در هر لایه استفاده شده است. و $\%diff = \left|\frac{(\sigma_\phi)_m - (\sigma_\phi)_{m-1}}{(\sigma_\phi)_{Anal.}}\right| 100 \quad ; m = 2,3$ اختلاف میان نتایج المان محدود در هر مرحله که با مش‌بندی کوچکتری تحلیل شده است با مرحله‌ی قبلی می‌باشد. بر اساس این جدول, چند تحلیل تحت فشار داخلی $(p = 80MPa)$ انجام شده و مقادیر تنش محیطی در جدار داخلی تعیین شده

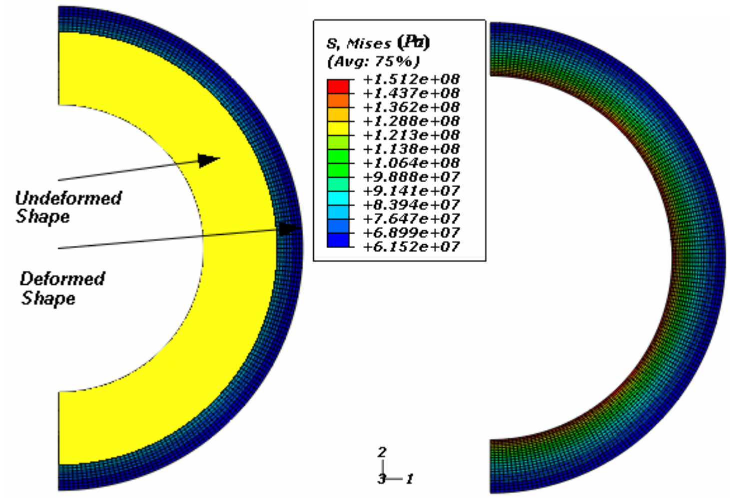
است. در این جدول ثابت ناهمگنی $n_1 = 1$ در نظر گرفته شده است. مقداری که با استفاده از روابط تحلیلی ارائه شده در این فصل در شرایطی که ریشه‌های معادله‌ی ناویر حقیقی باشد برای تنش محیطی بدست می‌آید $\sigma_\phi = 69.9736\,(\mathrm{MPa})$ می‌باشد. بر اساس جدول ۲-۱، با کوچکتر شدن اندازه‌ی مش‌بندی، مقدار خطا کاهش می‌یابد. به عبارت دیگر نتایج به یک مقدار مشخص همگرا می‌شوند. همچنین با افزایش تعداد لایه‌ها مقدار خطا کاهش می‌یابد. با افزایش تعداد لایه‌ها زمان محاسبه نیز افزایش می‌یابد لذا تعداد تقسیمات مناسب ۲۰ لایه و اندازه مش بهینه به‌گونه‌ای در نظر گرفته می‌شود که ضخامت هر المان به اندازه‌ی ضخامت یک لایه باشد. به این ترتیب تعداد المان در تحلیل ۳۱۲۰ می باشد. فرض می شود این تعداد لایه و المان , برای سایر بارگذاریهایی که در این متن اجرا شده است نیز صادق است. شکل (۲-۴) مش بندی سازه را نشان می دهد.



شکل ۲-۴: ناحیه‌ی مش بندی نیم کره

برای اعمال شرایط مرزی گره‌های مربوط به مرز افقی که امتداد آن از مرکز کره می‌گذرد بواسطه‌ی تقارن در راستای عمودی مقید شده اند. می‌توان به‌عنوان یک حالت خاص، سطح داخلی یا سطح خارجی و یا هر دو سطح را تحت فشار شعاعی p قرار داد.

شکل(۲-۵) تغییر شکل و توزیع تنش فن‌میزس در مدل را تحت فشار داخلی $(p = 80MPa)$ نشان می‌دهد. در این شکل ثابت ناهمگنی $n_1 = 1$ در نظر گرفته شده است.



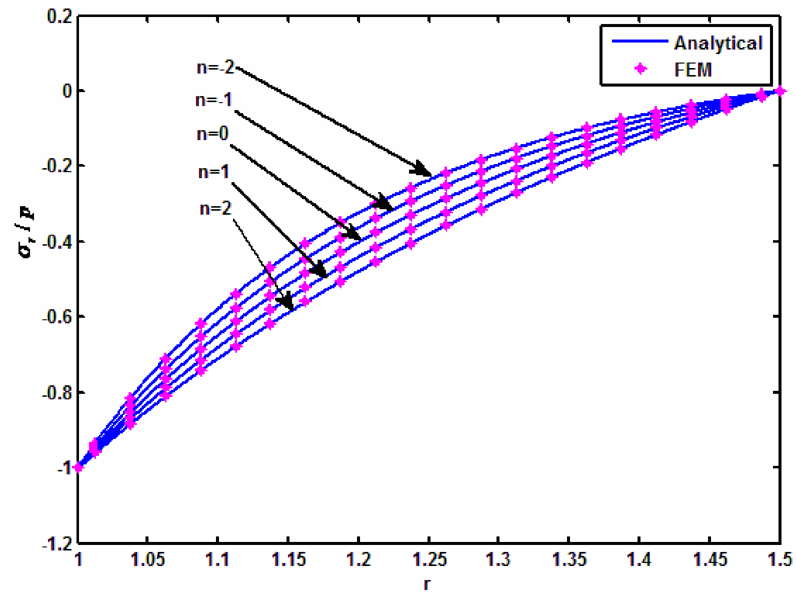
شکل ۲-۵: تغییرشکل و توزیع تنش فن میزس در کره‌ی FGM تحت فشار داخلی

۲-۶- مطالعه ی موردی

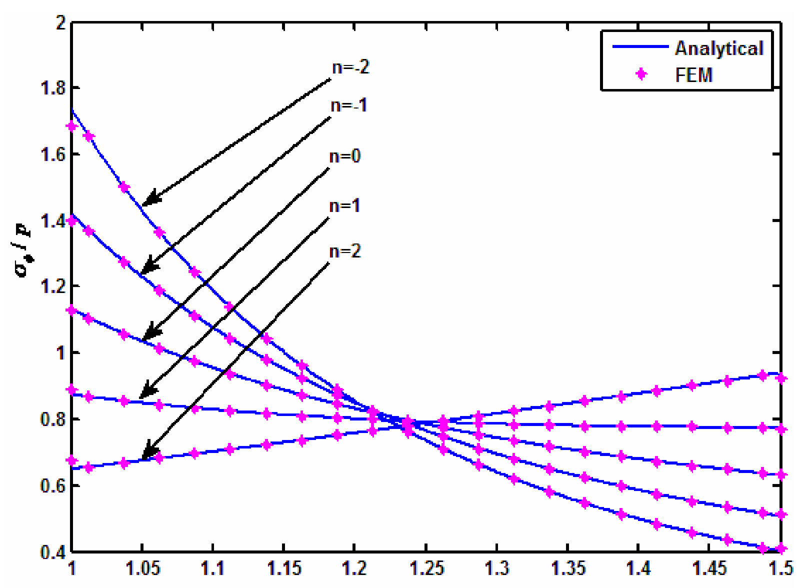
حل تحلیلی و عددی ارائه شده در این فصل را می‌توان برای مثالهای مختلفی بررسی کرد. برای مطالعه‌ی موردی، یک کره‌ی جدار ضخیم با شعاع داخلی $a=0.04\,m$ وشعاع خارجی $b=0.06\,m$ در نظر گرفته می‌شود. مدول الاستیسیته کره در جدار داخلی $E_i=200\,GPa$ در نظر گرفته و فرض می‌شود که ضریب ثابت پواسون برابر با $\nu=0.3$ باشد. ثابت ناهمگنی برای مدول الاستیسیته با $(n_1=n)$نشان داده می‌شود. فشار داخلی یا خارجی به صورت یکنواخت و برابر با $p=80MPa$ فرض می‌شود. مسئله در سه حالت $(p_i=p;\ p_o=0)$ و $(p_i=0;\ p_o=p)$ و $(p_i=p;\ p_o=p)$ با استفاده از روابط تحلیلی که در این فصل استخراج شده‌است، بررسی می‌شود. سپس مقایسه‌ی نتایج تحلیلی با نتایج بدست آمده از روش عددی که با استفاده از نرم افزارABAQUS استخراج شده‌است، ارائه می-شود. مقادیر جابجایی نسبت به شعاع داخلی و تنش ها نسبت به فشار $p=80(MPa)$ بی بعد شده است.

الف): کره تحت فشار داخلی ($p_o=0, p_i=p$)

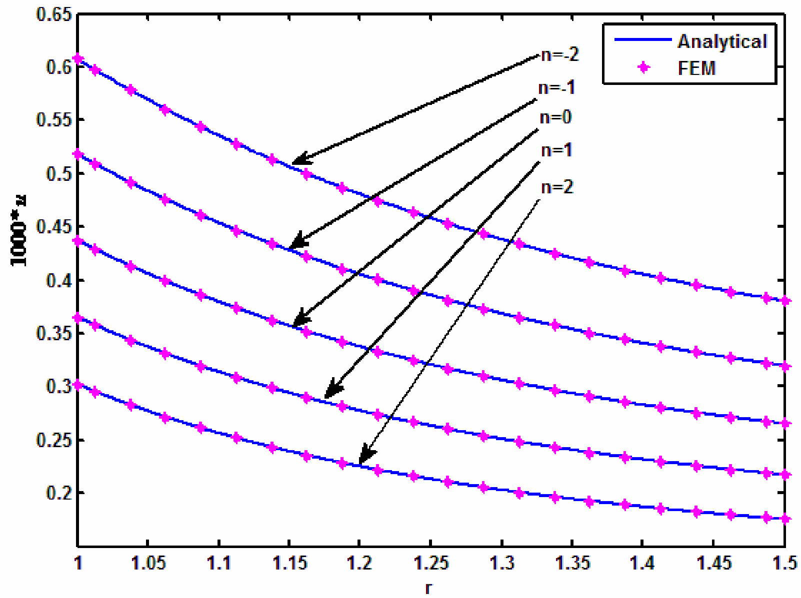
برای شرایطی که مخزن کروی فقط تحت فشار داخلی $p_i = p$ باشد با استفاده از روابط (۲-۴۶) تغییرات تنش شعاعی، تنش محیطی و جابجایی شعاعی در طول جداره، در شکل‌های (۲-۶) تا (۲-۸) آورده شده است.



شکل ۲-۶: تغییرات تنش شعاعی در امتداد ضخامت جداره $(p_i = p;\ \ p_o = 0)$



شکل ۲-۷: تغییرات تنش محیطی درطول ضخامت جداره $(p_i = p;\ \ p_o = 0)$



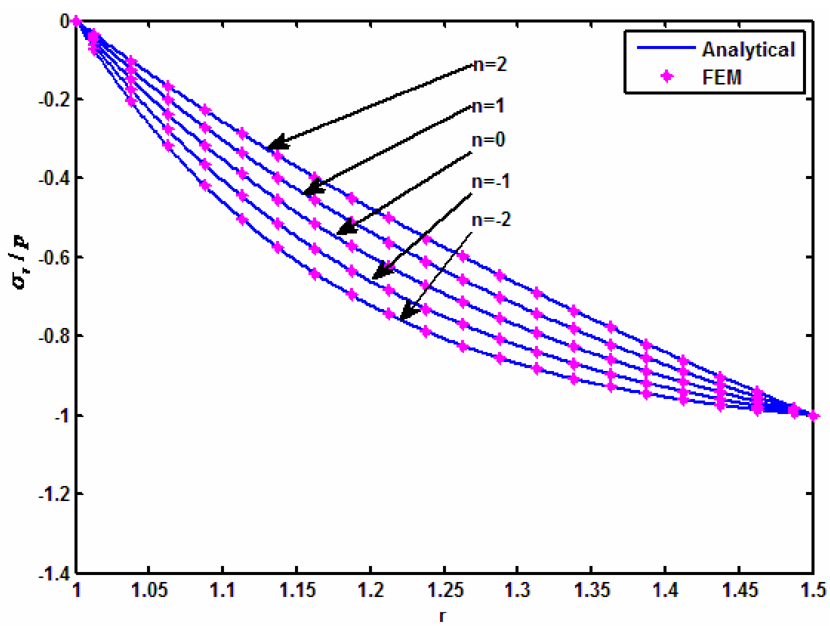
شکل ۲-۸: تغییرات جابجایی شعاعی درامتداد ضخامت جداره $(p_i = p;\ \ p_o = 0)$

همانطور که در شکل (۲-۶) مشاهده می‌شود، افزایش ثابت ناهمگنی n باعث کاهش تنش شعاعی می‌شود. همچنین می‌توان دید که در این شکل شرایط مرزی در سطح داخل و خارج کاملا ارضا می-شوند. در شکل (۲-۷) تغییرات تنش محیطی در راستای ضخامت آورده شده است. در این شکل برای $n = 2$ تنش محیطی در راستای ضخامت افزایش می‌یابد. در حالی که برای سایر مقادیر بررسی شده، وضعیت معکوس شده و تنش محیطی در راستای ضخامت کاهش می‌یابد. تنش محیطی(که تنش بیشینه نیز می‌باشد) در بازه‌ی $1 < n < 2$دارای کمترین تغییرات در راستای ضخامت است، و تقریبا ثابت می‌باشد که از نظر کنترل تنش در این نوع سازه‌ها امتیاز ویژه‌ای است. در فاصله‌ی تقریبی $1.20 < r < 1.25$ تنش محیطی به ازای تمامی مقادیر n به سمت مقدارتنش محیطی در حالت همگن $n = 0$ میل می کند. همچنین از این شکل می‌توان مشاهده نمود که تنش محیطی به ازای $n < 0$ در نیمه‌ی داخلی جداره، بیشتر از مادّه همگن و در نیمه‌ی خارجی جداره، کمتر از مادّه‌ی همگن است.

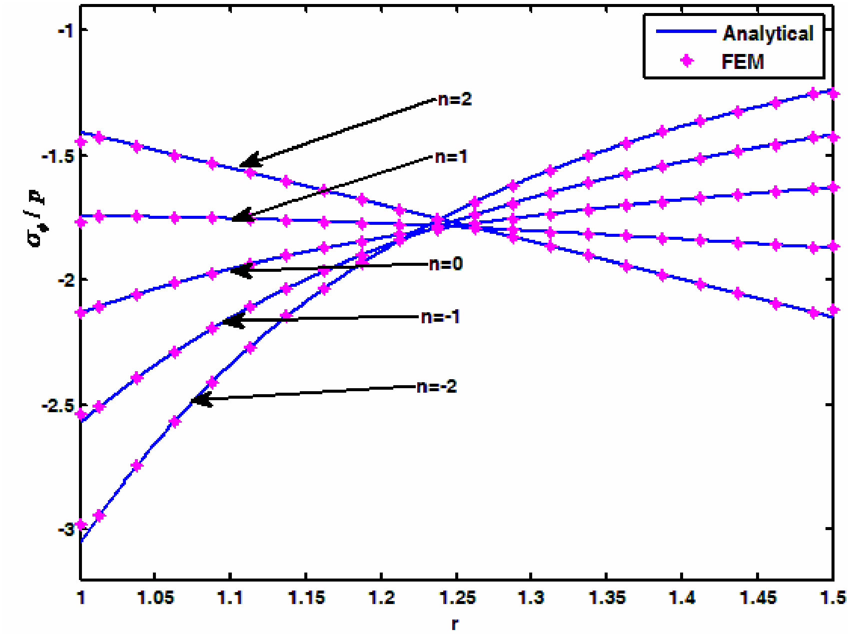
در شکل (۲-۸) تغییرات جابجایی شعاعی در راستای ضخامت آورده شده است. در اینجا موادی که ثابت ناهمگنی n بزرگتری دارند، مطابق رابطه‌ی(۲-۱۸) دارای استحکام بیشتری هستند. همانطور که در شکل (۲-۸) نیز مشاهده می‌شود، افزایش ثابت ناهمگنی n باعث کاهش جابجایی شعاعی می‌شود. به طوری که به ازای $n<0$ جابجایی کره نسبت به مادّه‌ی همگن بیشتر است و به ازای $n>0$ کمتر است. که این روند تغییرات مطابق رابطه‌ی (۲-۱۸) قابل پیش‌بینی است، به طوری که این نوع مواد با افزایش n از استحکام بیشتری برخوردارند و لذا مطابق رابطه‌ی هوک، بایستی تغییر شکل کمتر نیز نسبت به مواد همگن داشته باشند. روند تغییرات تقریبا مشابه با حالت همگن می‌باشد به طوری که برای همه‌ی مقادیر n تغییرات در راستای شعاعی نزولی می‌باشد.

ب) کره تحت فشار خارجی ($p_o = p\,, p_i = 0$)

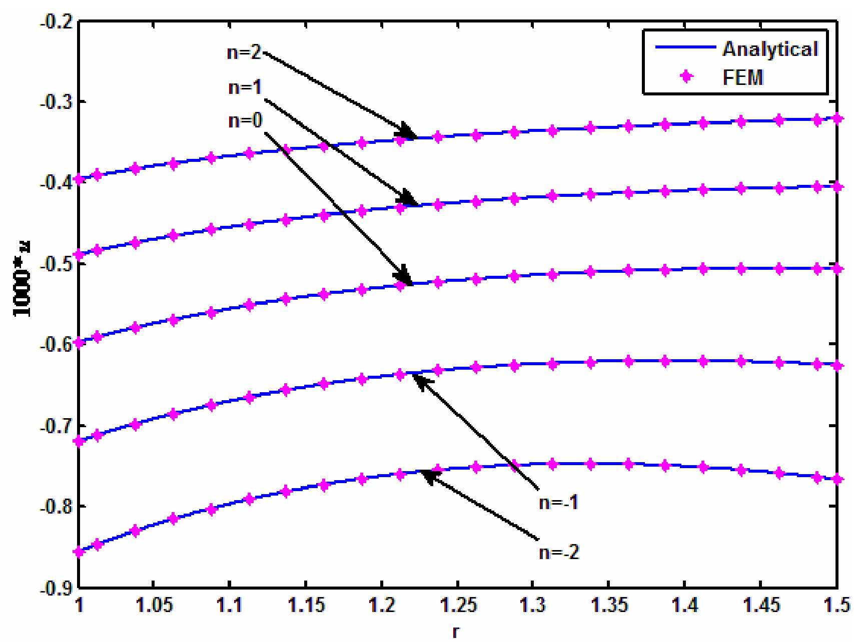
برای شرایطی که کره تحت فشار خارجی $p_o = p$ باشد، با استفاده از روابط (۲-۴۷) تغییرات تنش شعاعی، تنش محیطی و جابجایی شعاعی در طول جداره، در شکل‌های (۲-۹) تا (۲-۱۱) آورده شده‌است.



شکل ۲-۹: تغییرات تنش شعاعی در امتداد جداره $(p_i = 0;\;\; p_o = p)$



شکل ۲-۱۰: تغییرات تنش محیطی در امتداد جداره $(p_i = 0;\ \ p_o = p)$



شکل ۲-۱۱: تغییرات جابجایی در امتداد جداره $(p_i = 0;\ \ p_o = p)$

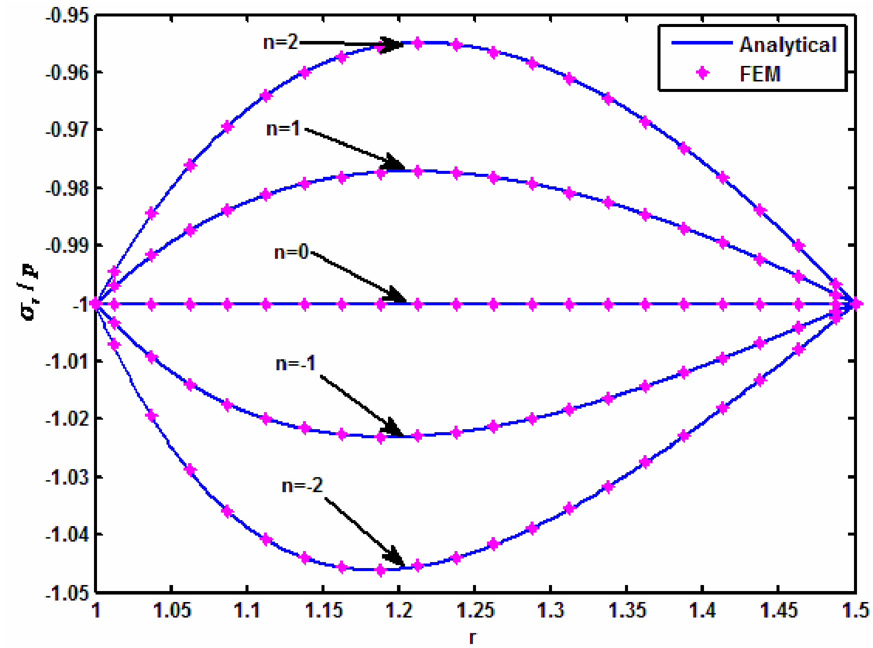
. همانطور که در شکل (۲-۹) مشاهده می شود، افزایش ثابت ناهمگنی n باعث افزایش تنش شعاعی می‌شود. همچنین می‌توان دید که در این شکل شرایط مرزی در سطح داخل و خارج کاملا

ارضا می‌شوند. در شکل (۲-۱۰) تغییرات تنش محیطی در راستای ضخامت آورده شده است. در این شکل برای $n<1$ تنش محیطی در راستای ضخامت افزایش می‌یابد. در حالی که برای $n>1$ وضعیت معکوس شده و تنش محیطی در راستای ضخامت کاهش می‌یابد. در فاصله‌ی تقریبی $1.20<r<1.25$ تنش محیطی به ازای تمامی مقادیر n به سمت مقدارتنش محیطی در حالت همگن $n=0$ میل می کند. همچنین از این شکل می‌توان مشاهده نمود که تنش محیطی به ازای $n<0$ در نیمه‌ی داخلی جداره، کمتر از مادّه همگن و در نیمه‌ی خارجی جداره، بیشتر از مادّه‌ی همگن است. و برای $n>0$ بر عکس در نیمه‌ی داخلی جداره، بیشتر از مادّه همگن و در نیمه‌ی خارجی جداره، کمتر از مادّه‌ی همگن است.

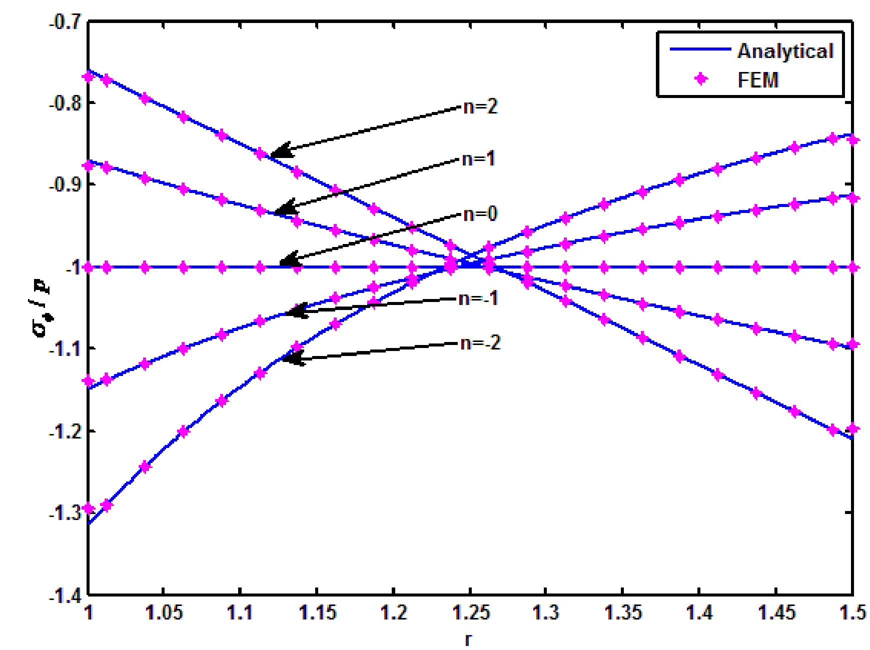
در شکل (۲-۱۱) تغییرات جابجایی در راستای ضخامت آورده شده است. همانطور که مشاهده می-شود، افزایش ثابت ناهمگنی n باعث کاهش جابجایی شعاعی می‌شود. به طوری که به ازای $n<0$ جابجایی کره نسبت به مادّه‌ی همگن بیشتر است و به ازای $n>0$ کمتر است. که این روند تغییرات مطابق رابطه‌ی (۲-۱۸) قابل پیش‌بینی است، به طوری که این نوع مواد با افزایش n از استحکام بیشتری برخوردارند لذا مطابق رابطه‌ی هوک، بایستی تغییر شکل کمتری نسبت به مواد همگن داشته باشند. روند تغییرات تقریبا مشابه با حالت همگن می‌باشد، به طوری که برای همه‌ی مقادیر n، تغییرات در راستای شعاعی تقریبا صعودی می‌باشد، به طوری که در لایه‌های نزدیک به جدار خارجی شیب تغییرات با افزایش n کاهش می‌یابد.

ج) کره تحت فشار داخلی وخارجی ($p_o = p_i = p$)

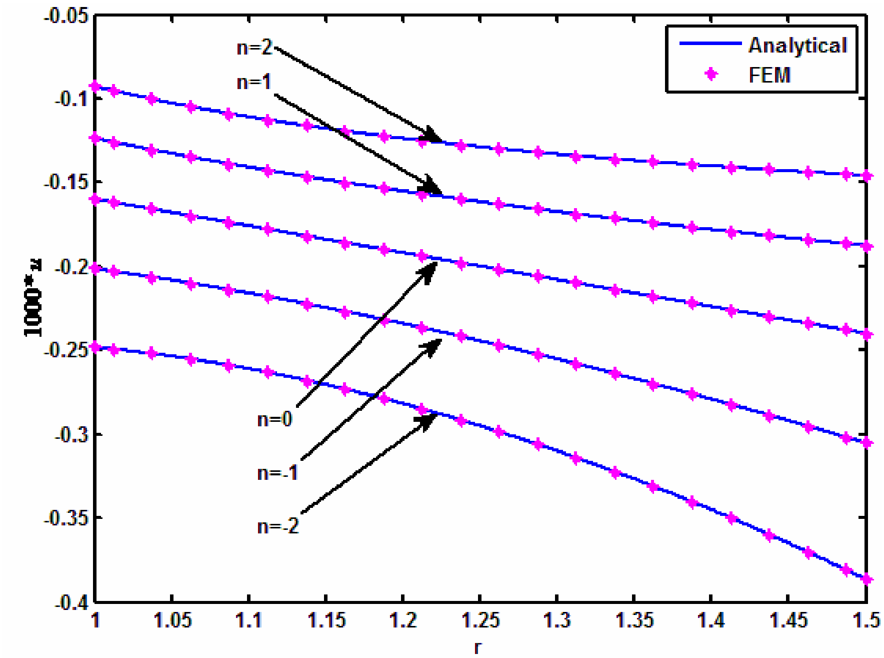
در حالتی که کره تحت فشار داخلی و خارجی $p_o = p_i = p$ باشد، تغییرات تـنش شـعاعی، تـنش محیطی و جابجایی شعاعی را در راستای جداره، در شکل‌های (۲-۱۲) تا (۲-۱۴) آورده شده است.



شکل ۲-۱۲: تغییرات تنش شعاعی در امتداد جداره $(p_i = p;\ \ p_o = p)$



شکل ۲-۱۳: تغییرات تنش محیطی در امتداد جداره $(p_i = p;\ \ p_o = p)$



شکل ۲-۱۴: تغییرات جابجایی در امتداد جداره $(p_i = p;\ \ p_o = p)$

همان رفتاری که در شکل های(۲-۹)، (۲-۱۰) و (۲-۱۱) مشاهده شد در شکل های (۲-۱۲)، (۲-۱۳) و (۲-۱۴) نیز مشاهده می شود.

۲-۷- بررسی توزیع تنش موثر در مواد FG

با توجه به تنوع بارگذاری و اثرات ثابت ناهمگنی در توزیع مولفه‌های تنش، تصمیم گیری برای طراحی سازه‌های FGM و کنترل تنش در این مواد را پیچیده می‌کند. در این بخش با تعریف تنش موثر، به طور خلاصه به بررسی توزیع تنش موثر در مواد FG پرداخته می‌شود.

تنش موثر، یا همان تنش فن میزس به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{cases} \sigma_{eff} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\sigma_{ii}-\sigma_{jj}\right)^2+\left(\sigma_{jj}-\sigma_{kk}\right)^2+\left(\sigma_{ii}-\sigma_{kk}\right)^2+3\left(\tau_{ij}^2+\tau_{jk}^2+\tau_{ik}^2\right)} \\ i,j,k=1..3 \end{cases} \tag{۴۹-۲}$$

که در این رابطه σ_{eff} تنش موثر بوده و σ_{ij} و τ_{ij} مولفه‌های تنش در یک المان دلخواه می‌باشند. رابطه‌ی (۲-۴۹) براساس تنش‌های اصلی به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\begin{cases} \sigma_{eff} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\sigma_i - \sigma_j\right)^2 + \left(\sigma_j - \sigma_k\right)^2 + \left(\sigma_i - \sigma_k\right)^2} \\ i, j, k = 1..3 \end{cases} \qquad (۵۰-۲)$$

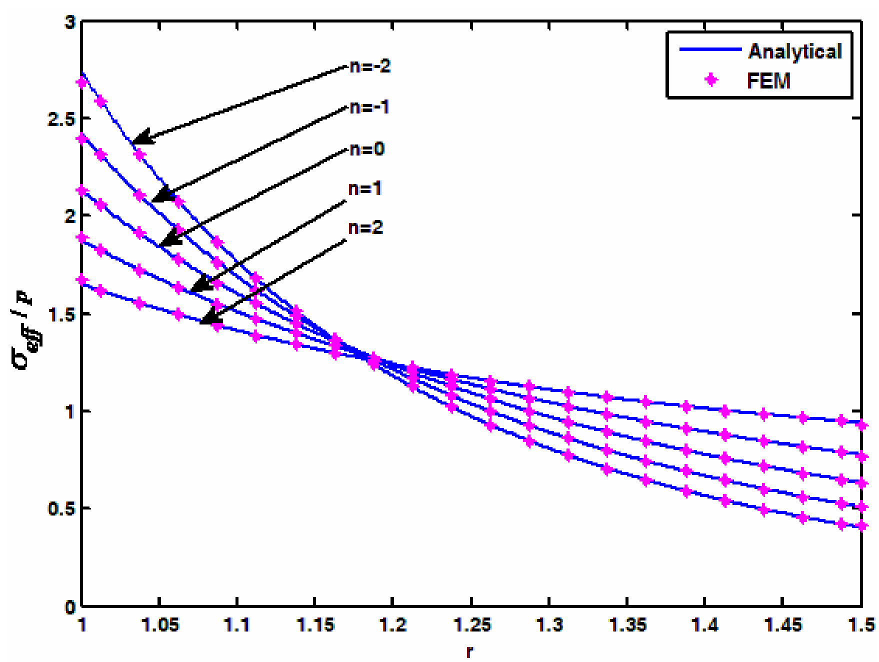
که در این رابطه σ_i تنش‌های اصلی در یک المان می‌باشد. با در نظر گرفتن رابطه‌ی (۲-۱۰) برای کره می توان نوشت.

$$\sigma_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\sigma_r - \sigma_\phi\right)^2 + \left(\sigma_\phi - \sigma_\theta\right)^2 + \left(\sigma_r - \sigma_\theta\right)^2} \qquad (۵۱-۲)$$

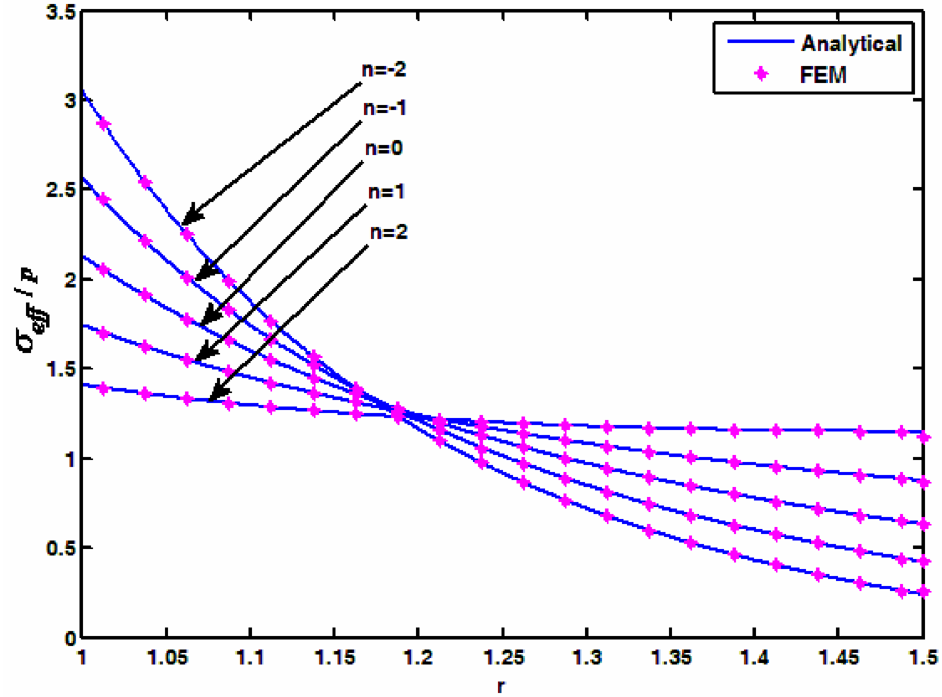
که باتوجه به تقارن $\sigma_\phi = \sigma_\theta$ رابطه‌ی(۲-۵۱) به صورت زیر ساده می‌شود.

$$\sigma_{eff} = \left|\sigma_r - \sigma_\phi\right| \qquad (۵۲-۲)$$

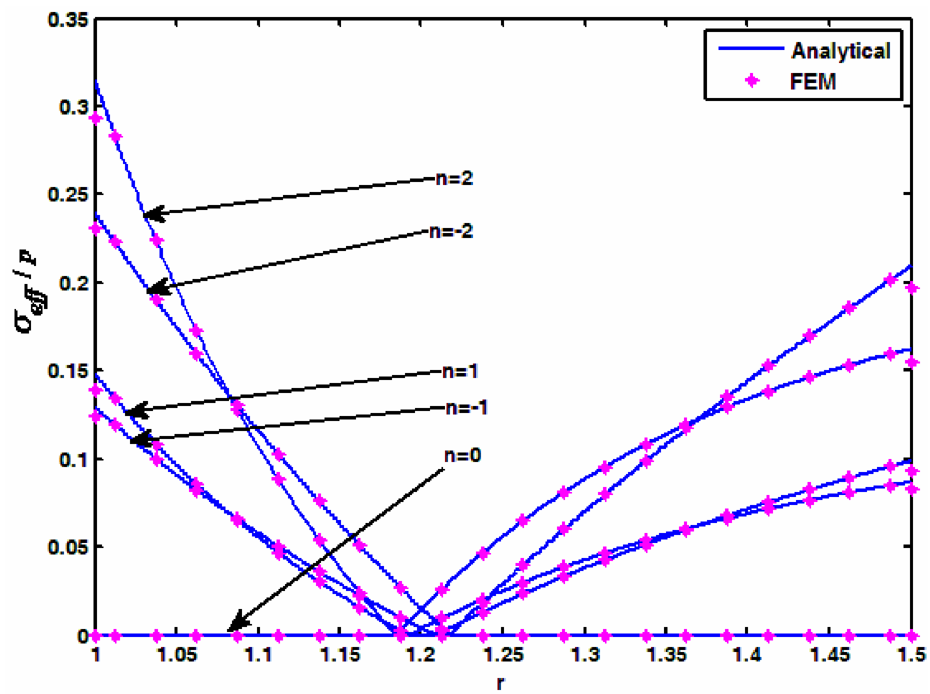
که این رابطه نشان می‌دهد در این حالت معیارهای فن‌میزس و ترسکا نتیجه یکسانی دارند. با درنظر گرفتن رابطه‌ی(۲-۵۲) و همچنین با توجه به مطالب ارائه شده در بخش قبل نمودارهای مربوط به تنش موثر به صورت زیر در سه حالت $(p_o = 0, p_i = p)$، $(p_o = p, p_i = 0)$و $(p_o = p_i = p)$ در شکل‌های (۲-۱۵) تا (۲-۱۷) آورده شده‌است.



شکل ۲-۱۵: تغییرات تنش فن میزس در امتداد جداره $(p_i = p;\ \ p_o = 0)$



شکل ۲-۱۶: تغییرات تنش فن میزس در امتداد جداره $(p_i = 0;\ \ p_o = p)$



شکل ۲-۱۷: تغییرات تنش فن میزس در امتداد جداره $(p_i = p_o = p)$

در شکل (۲-۱۵) تغییرات تنش فن میزس در راستای ضخامت در شرایطی کـه کـره تحـت فـشار داخلی باشد، آورده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، تنش فن میزس به ازای $n<0$ در نیمه-ی داخلی جداره، بیشتر از همگن و در نیمه‌ی خارجی جـداره، کمتـر از مـادّه‌ی همگـن اسـت. بـرای $n>0$ بر عکس در نیمه‌ی داخلی جداره، کمتر از مادّه همگن و در نیمه‌ی خارجی جـداره، بیـشتر از مادّه‌ی همگن است. در فاصله‌ی تقریبی $1.15<r<1.20$ تنش فن میزس به ازای تمامی مقادیر n به سمت مقدارتنش فن میزس در حالت همگن $n=0$ میل می کند. همچنـین از ایـن شـکل مـی‌تـوان مشاهده نمود که تنش فن میزس در راستای ضخامت با افزایش n هموارتر شده و در واقـع تغییـرات کمتری رخ می‌دهد.

در شکل (۲-۱۶) تغییرات تنش فن میزس در راستای ضخامت در شرایطی کـه کـره تحـت فـشار خارجی باشد، آورده شده است. تغییرات تنش فن میزس در کره تحت فشار داخلی رفتار مـشابه‌ای بـا کره تحت فشار خارجی دارد.

در شکل (۲-۱۷) تغییرات تنش فن میزس در راستای ضخامت در شرایطی کـه کـره تحـت فـشار داخلی و خارجی باشد، آورده شده است. مطابق این شکل با کاهش اندازه‌ی n مقدار تنش فن میـزس و تغییرات آن در راستای ضخامت کاهش می‌یابد، به‌طوری که برای مواد همگن تنش فـن میـزس در سرتاسر جدار برابر صفر است.

۲-۸- بررسی دقت المان محدود در تحلیل موادFG با بارگذاری مکانیکی

همانطور که در نتایج و شکل‌ها مشاهده شد، تطبیق بسیار خوبی میان نتایج حاصل از دو روش وجود دارد. در اینجا به عنوان نمونه نتایج عددی دو روش تحلیلی(دقیق) و روش المان محدود کره‌های تحت فشار داخلی برای چند مقدار دلخواه از شعاع کره در جـداول زیـر آورده شـده اسـت. در ایـن جـداول Error% نشان دهنده‌ی درصد خطا میان نتایج تحلیلی و المان محدود می‌باشد که مطابق رابطـه‌ی زیر تعریف می‌شود:

$$\%Error = \left|\frac{Anal. - FEM}{Anal.}\right|100 \qquad (۵۳-۲)$$

جدول۲-۲ : مقایسه ی نتایج تحلیلی و المان محدود برای $n=1$

r	Type	$\frac{\sigma_r}{p}$ value	$\frac{\sigma_r}{p}$ %Err	$\frac{\sigma_\phi}{p}$ value	$\frac{\sigma_\phi}{p}$ %Err	$\frac{\sigma_{eff}}{p}$ value	$\frac{\sigma_{eff}}{p}$ %Err	u_r*1000 value	u_r*1000 %Err
1	Anal.	-1	0.07550	0.87467	1.80069	1.87467	0.79988	0.36491	0.01235
	FEM	-0.99925		0.89042		1.88966		0.36486	
1.0875	Anal.	-0.71388	0.01617	0.83381	0.01515	1.54770	0.01562	0.31913	0.00673
	FEM	-0.71400		0.83394		1.54794		0.31911	
1.1875	Anal.	-0.46681	0.01474	0.80434	0.00909	1.27115	0.0117	0.28123	0.00721
	FEM	-0.46688		0.80441		1.27129		0.28121	
1.2875	Anal.	-0.27843	0.01530	0.78725	0.00519	1.06569	0.0783	0.25384	0.00723
	FEM	-0.27848		0.78729		1.06577		0.25382	
1.3875	Anal.	-0.13105	0.02079	0.77859	0.00246	0.90963	0.0510	0.23373	0.00718
	FEM	-0.13108		0.77860		0.90968		0.23371	
1.5	Anal.	0	-------	0.77574	0.84941	0.77574	0.86835	0.21721	0.00709
	FEM	0.00015		0.76916		0.76901		0.21719	

هرچندکه در تحلیل المان محدود تغییرات خواص مکانیکی، بـا تقریـب ۲۰ لایـه‌ی کـامپوزیتی در مدل مورد نظر اعمال شده است، اما همانطور که مشاهده می‌شود، خطای میان نتایج دو روش تحلیلی و المان محدود بسیار اندک است. اگرچه در جدار داخلی و خارجی افزایش خطا تا ۱,۲٪ ایجـاد مـی-شود، اما در سایر نقاط خطا کمتر از ۰,۰۲٪ می‌باشد. افزایش خطا در جدار داخلـی و خـارجی بـدلیل ثابت در نظر گرفتن خواص مواد در هر لایه می‌باشد. لذا می‌توان پیش‌بینی کرد که با افـزایش تعـداد لایه‌ها، تغییرات خواص مواد با دقت بالاتری از تغییرات خواص مواد در یک مادّه‌ی FG تبعیت می‌کند و در نتیجه خطای کمتری در نتایج خروجی ایجاد خواهد شد.

به طور کلی می‌توان در شرایطی که شکل هندسی مسئله یـا بارگـذاری پیچیـده باشـد، ازتقریـب کـامپوزیتی در روش المـــان محـــدود بـــرای تحلیـــل مـــواد FG بـــا دقـــت مناســـبی بهـــره جـــست.

فصل ۳

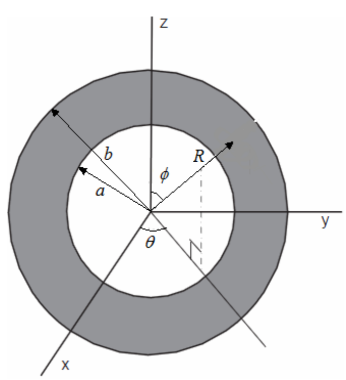
تحلیل ترموالاستیک پوسته های کروی FGM

۳-۱- مقدمه

در این فصل با در نظر گرفتن روابط کلی ترموالاستیسیته‌ی حاکم بر پوسته‌های کروی که تکمیل روابط فصل قبل می‌باشد، به تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های جدار ضخیم کروی از مواد همگن پرداخته و معادلات ناویر در آنها استخراج شده است. سپس با در نظر گرفتن اثر مواد FG در معادلات ناویر، یک حل ترموالاستیک از کره‌ی FG جدارضخیم، تحت فشارداخلی وخارجی ارائه داده شده است. سپس با استفاده از روش المان محدود به شبیه‌سازی ترموالاستیک پوسته‌های کروی FGM در نرم‌افزار ABAQUS پرداخته و در انتهای این فصل نتایج تحلیلی و عددی با یک مثال نمونه، مقایسه می‌شود.

۳-۲- تحلیل ریاضی پوسته های کروی همگن[۳۵]

یک کره‌ی جدار ضخیم، با شعاع داخلی a و شعاع خارجی b و شعاع بی‌بعد r که بصورت $r=\frac{R}{a}$ نرمالیزه شده که در آن R شعاع متغیر کره می‌باشد، فرض شده و برای تحلیل، دستگاه مختصات (R,ϕ,θ) که مبدا آن مرکز کره می‌باشد در نظر گرفته می‌شود. هندسه‌ی کره نسبت به محورهای مختصات در شکل(۳-۱) نشان داده شده است.



شکل ۳-۱: نمایش هندسه کره جدار ضخیم

مشابه آنچه در فصل قبل بیان شد به دلیل تقارن در هندسه، بارگذاری و مادّه‌ی کره $u_\theta = u_\phi = 0$ و $\sigma_\phi = \sigma_\theta$ خواهد بود و می توان نوشت:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0 \, , \, \frac{\partial}{\partial \phi} = 0 \qquad (۱-۳)$$

لذا با در نظر گرفتن معادلات سینماتیک در حالت کلی، این معادلات برای کرنش‌های مکانیکی به صورت زیر ساده خواهند شد:

$$(\varepsilon_r)_M = \frac{du_r}{dr} \; ; \; (\varepsilon_\phi)_M = (\varepsilon_\theta)_M = \frac{u_r}{r} \quad ; \quad (\gamma_{r\phi})_M = (\gamma_{\phi\theta})_M = (\gamma_{r\theta})_M = 0 \qquad (۲-۳)$$

که در آن اندیس (M) نشان دهنده‌ی مکانیکی بودن کرنش‌ها می‌باشد. صفر شدن کرنش‌های برشی باعث صفر شدن تنش های برشی خواهد شد. لذا تانسور تنش و تانسور کرنش مکانیکی و بردار جابجایی در یک کره ی جدار ضخیم به صورت روابط زیر ارائه می شوند.

$$\left[\sigma_{ij}\right] = \begin{bmatrix} \sigma_r & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\phi & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\phi \end{bmatrix} \qquad (۳-۳)$$

$$\left[\varepsilon_{ij}\right]_M = \begin{bmatrix} (\varepsilon_r)_M & 0 & 0 \\ 0 & (\varepsilon_\phi)_M & 0 \\ 0 & 0 & (\varepsilon_\phi)_M \end{bmatrix} \qquad (۴-۳)$$

$$\left[u_i\right] = \begin{bmatrix} u_r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (۵-۳)$$

از طرفی دیگر برای کرنش‌های حرارتی می توان نوشت.

$$\left[\varepsilon_T\right] = \begin{bmatrix} \alpha\Theta(r) & 0 & 0 \\ 0 & \alpha\Theta(r) & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\Theta(r) \end{bmatrix} \qquad (۶-۳)$$

که در آن αضریب انبساط حرارتی مادّه برواحد ($\frac{1}{{}^{o}c}$) می‌باشد. همچنین $\Theta(r)$تغییرات دما در راستای ضخامت به صورت تابعی از شعاع کره است که واحد آن (${}^{o}c$) می باشد. این تغییرات نسبت به دمای مرجع سنجیده می‌شود. به طوری که $\Theta(r)=T(r)-T_0$ بوده و T_0دمای مرجع می‌باشد.

لذا کرنش کلی به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\begin{cases}(\varepsilon_r)_{Total}=(\varepsilon_r)_M+\varepsilon_T\\(\varepsilon_\phi)_{Total}=(\varepsilon_\theta)_{Total}=(\varepsilon_\phi)_M+\varepsilon_T\end{cases} \tag{۷-۳}$$

این رابطه را می‌توان به کمک روابط (۳-۴) و (۳-۶) به‌صورت زیربازنویسی کرد: (از این پس از اندیس M برای کرنش‌های مکانیکی استفاده نمی‌شود و عبارات $\varepsilon_r,\varepsilon_\theta,\varepsilon_\phi$نمایانگر همان کرنش‌های مکانیکی است)

$$\left[\varepsilon_{ij}\right]=\begin{bmatrix}\varepsilon_r & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_\phi & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_\phi\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\alpha\Theta(r) & 0 & 0\\ 0 & \alpha\Theta(r) & 0\\ 0 & 0 & \alpha\Theta(r)\end{bmatrix} \tag{۸-۳}$$

حال از جایگذاری تانسور تنش بدست آمده از رابطه‌ی (۳-۳) در معادلات تعادل می‌توان نوشت:

$$\frac{d\sigma_r}{dr}+\frac{2}{r}(\sigma_r-\sigma_\phi)=0 \tag{۹-۳}$$

این معادله یک معادله‌ی دیفرانسیل با دو متغیّر می‌باشد. در این رابطه می‌توان به جای تنش-های σ_r,σ_ϕ از معادلات رفتاری ارائه شده در فصل دو (۲-۶) و با در نظرگرفتن رابطه‌ی (۳-۸) استفاده کرد. با توجه به اینکه $\varepsilon_\phi=\varepsilon_\theta$ و همچنین $\sigma_\phi=\sigma_\theta$ می توان مسأله را به صورت دوبعدی حل نمود. لذا می توان نوشت:

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_\phi\end{Bmatrix}=\frac{1}{E}\begin{bmatrix}1 & -2\nu\\ -\nu & 1-\nu\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\phi\end{Bmatrix}+\alpha\Theta(r)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \tag{۱۰-۳}$$

که در این رابطه تغییرات دما به صورت یک‌بعدی و انتقال حرارت پایا فرض شده‌است. اکنون می-توان از معادله‌ی فوق تنش‌های σ_r,σ_ϕ را استخراج کرد که به نتیجه‌ی زیر می‌انجامد:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\phi\end{Bmatrix}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1-\nu & 2\nu\\ \nu & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_\phi\end{Bmatrix}-\alpha\Theta(r)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \qquad (۱۱-۳)$$

به جای کرنش‌های $\varepsilon_r,\varepsilon_\phi$ بااستفاده از رابطه‌ی (۳-۲) از روابط معادل جابجایی استفاده می‌شود:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\phi\end{Bmatrix}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1-\nu & 2\nu\\ \nu & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial u_r}{\partial r}\\ \dfrac{u_r}{r}\end{Bmatrix}-\alpha\Theta(r)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \qquad (۱۲-۳)$$

اکنون که دومتغیّر ارائه شده در معادله‌ی تعادل با یک متغیّر u_r بیان شده‌اند، از جایگذاری رابطه‌ی (۳-۱۲) در معادله‌ی تعادل می توان نوشت:

$$\frac{d}{dr}\left\{(1-\nu)(\frac{du_r}{dr}-\alpha\Theta(r))+2\nu(\frac{u_r}{r}-\alpha\Theta(r))\right\}$$
$$+\frac{2}{r}\left\{\left[(1-\nu)\left(\frac{du_r}{dr}-\alpha\Theta(r)\right)+2\nu(\frac{u_r}{r}-\alpha\Theta(r))\right]-\left[\nu\left(\frac{du_r}{dr}-\alpha\Theta(r)\right)+\frac{u_r}{r}-\alpha\Theta(r)\right]\right\}=0$$

$$\Rightarrow u_r''+2\frac{u_r'}{r}-2\frac{u_r}{r^2}=\alpha\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{d(\Theta(r))}{dr}$$

معادله‌ی فوق در واقع معادله‌ی ناویر برای کره‌های همگن تحت کوپل دمایی می‌باشد. که می‌توان آن را به صورت زیر نیز نوشت:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2u_r)\right)=\alpha\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{d(\Theta(r))}{dr} \qquad (۱۳-۳)$$

با حل معادله دیفرانسیل (۲-۳۵) می توان نوشت:

$$\begin{cases}u_r(r)=\dfrac{\alpha}{r^2}\dfrac{1+\nu}{1-\nu}I+c_1r+\dfrac{c_2}{r^2}\\ I=\int_a^r r^2\Theta(r)dr\end{cases} \qquad (۱۴-۳)$$

که در آن c_1,c_2 دو ثابت دلخواه بوده که می‌توانند با استفاده از شرایط مرزی بدست آیند. رابطه‌ی $\Theta(r)$ در بخش۳-۴ تحلیل شده است.

۳-۳- فرمول بندی ترموالاستیک پوسته های کروی

همانطور که در فصل (۱) اشاره شد در مواد FG ، خواص (مکانیکی،ترمومکانیکی،مغناطیسی) مادّه به طور پیوسته تغییر می‌کند. در این تحلیل خواص مواد براساس توزیع توانی نسبت به شعاع در نظر گرفته می‌شود که در آن فرض شده‌است که خواص مکانیکی به جز ضریب پواسون تغییر می‌کنند. لذا با در نظر گرفتن شکل هندسی و محورهای مختصات تعریف شده در بخش قبل تغییرات مدول الاستیسیته و ضریب انبساط حرارتی برای مواد FG به صورت زیر فرض می‌شود.

$$E(r)=E_i r^{n_1}\,,\;\; \alpha(r)=\alpha_i r^{n_2} \qquad (۱۵\text{-}۳)$$

که در این رابطه n_1 و n_2 ثابت ناهمگنی و E_i و α_i به ترتیب مدول الاستیک وضریب انبساط حرارتی در جدار داخلی کره می‌باشد. لذا این مواد در معادلات رفتاری تاثیر گذاشته و در نتیجه معادلات ارائه شده در بخش قبل به صورت زیر برای مواد FG نوشته می‌شوند.

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_\phi\end{Bmatrix}=\frac{1}{E(r)}\begin{bmatrix}1 & -2\nu\\ -\nu & 1-\nu\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\phi\end{Bmatrix}+\alpha(r)\Theta(r)\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} \qquad (۱۶\text{-}۳)$$

اگر معادله‌ی فوق براساس تنش‌های σ_rو σ_θ باز نویسی شود، می توان نوشت.

$$\begin{cases}\sigma_r=\dfrac{E_i r^{n_1}}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left\{(1-\nu)\varepsilon_r+2\nu\varepsilon_\phi-(1+\nu)\alpha_i r^{n_2}\Theta(r)\right\}\\[2ex] \sigma_\phi=\dfrac{E_i r^{n_1}}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left\{\nu\varepsilon_r+\varepsilon_\phi-(1+\nu)\alpha_i r^{n_2}\Theta(r)\right\}\end{cases} \qquad (۱۷\text{-}۳)$$

و در سایر معادلات همانند مواد همگن عمل می‌کنند. لذا در اینجا نیز همان معادله‌ی تعادل (۲-۱۳) حاکم می‌باشد. برای حل این معادله می‌توان در رابطه‌ی (۳-۱۷) مجددا با استفاده از معادلات سینماتیک (۳-۲) به جای کرنش‌های $\varepsilon_r,\varepsilon_\phi$از روابط معادل جابجایی استفاده کرد.

$$\begin{cases} \sigma_r = \dfrac{E_i r^{n_1}}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ (1-\nu)\dfrac{\partial u_r}{\partial r} + 2\nu \dfrac{u_r}{r} - (1+\nu)\alpha_i r^{n_2} \Theta(r) \right\} \\ \sigma_\phi = \dfrac{E_i r^{n_1}}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ \nu \dfrac{\partial u_r}{\partial r} + \dfrac{u_r}{r} - (1+\nu)\alpha_i r^{n_2} \Theta(r) \right\} \end{cases} \qquad (۱۸-۳)$$

اگر این رابطه را درمعادله‌ی تعادل قرار داده شود پس از ساده سازی آن منجربه معادله دیفرانسیل زیر می‌شود.

$$r^2 u_r'' + A r u_r' + B u_r = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_i r^{n_2} \left\{ r(n_1+n_2)\Theta(r) + r^2 \frac{\partial \Theta(r)}{\partial r} \right\} \qquad (۱۹-۳)$$

این معادله در واقع معادله‌ی ناویر برای کره‌های ناهمگن تحت کوپل دمایی می‌باشد. که در آن ضرایب A, B طبق رابطه‌ی (۲-۲۲)در فصل ۲ تعریف می‌شود.

۳-۴- انتقال حرارت هدایتی یکنواخت یک بعدی

برای مشخص کردن رابطه‌ی $\Theta(r)$ درمعادله دیفرانسیل (۳-۱۹) فرض می‌شود که انتقال حرارت به صورت یکنواخت و در راستای شعاعی باشد. معادله انتقال حرارت در شرایط دما-حالت پایدار به صورت زیر بیان می‌شود[۳۵] :

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda r^2 \frac{\partial \Theta}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\lambda \sin\theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}(\lambda \frac{\partial \Theta}{\partial \phi}) = 0 \qquad (۲۰-۳)$$

که در این رابطه λ ضریب انتقال حرارت هدایتی می‌باشد. که برای مواد تابعی به صورت زیر فرض می‌شود.

$$\lambda(r) = \lambda_i r^{n_3} \qquad (۲۱-۳)$$

که در این رابطه n_3 ثابت ناهمگنی و λ_i ضریب انتقال حرارت هدایتی در جدار داخلی کره می‌باشد. طبق فرض چون انتقال حرارت در راستای شعاعی فرض می‌شود، لذا معادله‌ی انتقال حرارت به صورت زیر ساده می‌شود.

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\lambda(r)\frac{\partial\Theta(r)}{\partial r}\right)=0$$ (۳-۲۲)

الف) $n_3 \neq -1$

در حالتی که $n_3 \neq -1$ با حل معادله انتقال حرارت می توان نوشت.

$$\Theta(r)=c_5 r^{-(n_3+1)}+c_6$$ (۳-۲۳)

که درآن c_5 و c_6 دو ثابت دلخواه می‌باشند. شرایط مرزی دمایی برای کره‌ی توخالی FGM به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{cases}\lambda(r)\dfrac{d\Theta}{dr}=0 & on \quad r=1\\ -\lambda(r)\dfrac{d\Theta}{dr}=0 & on \quad r=k\end{cases}$$ (۳-۲۴)

پس از اعمال شرایط مرزی در معادله‌ی انتقال حرارت ثابت‌های c_5, c_6 به صورت زیر بدست می-آیند.

$$\begin{cases}c_5=-\dfrac{k\left(\Theta_i-\Theta_o\right)}{\left(\dfrac{1}{k^{n_3+1}}-1\right)}\\ c_6=\dfrac{\left(\dfrac{\Theta_i}{k^{n_3+1}}-\Theta_o\right)}{\left(\dfrac{1}{k^{n_3+1}}-1\right)}\end{cases}$$ (۳-۲۵)

که درآن Θ_i و Θ_o دمای نسبی در جداره‌ها و زیرنویس i و o مترادف با سطوح R=a و R=b به ترتیب می‌باشد. با قراردادن ثابت‌های بدست آمده دررابطه‌ی توزیع دما، معادله‌ی توزیـع دمادرشـرایط دما-حالت پایدار درطول جداره را بیان بدست می‌آید.

ب) $n_3=-1$

در حالتی که $n_3=-1$ با حل معادله انتقال حرارت می توان نوشت:

$$\Theta(r)=c_5\ln r+c_6 \qquad (۳-۲۶)$$

که درآن c_5 و c_6 دو ثابت دلخواه می‌باشند. شرایط مرزی دمایی برای کره‌ی توخالی FGM با در نظر گرفتن $n_3=-1$ به صورت زیر می‌باشد.

$$\begin{cases}\dfrac{\lambda_i}{r}\dfrac{d\Theta}{dr}=0 \qquad on \quad r=1\\[2ex] -\dfrac{\lambda_i}{r}\dfrac{d\Theta}{dr}=0 \qquad on \quad r=k\end{cases} \qquad (۳-۲۷)$$

پس از اعمال شرایط مرزی در معادله‌ی انتقال حرارت، ثابت‌های c_5 و c_6 به صورت زیر بدست می‌آیند.

$$\begin{cases}c_5=-\dfrac{\left(\Theta_i-\Theta_o\right)}{\ln k}\\[2ex] c_6=\Theta_i\end{cases} \qquad (۳-۲۸)$$

با قراردادن ثابت‌های بدست آمده در $\Theta(r)$، معادله‌ی توزیع دما درشرایط دما-حالت پایدار درطول جداره برای $n_3=-1$ بدست می‌آید.

۳-۵- حل معادله ی ناویر در پوسته های کروی FGM

الف) $n_3\neq-1$

جایگذاری رابطه‌ی $\Theta(r)$ معادله‌ی (۳-۲۳) در معادلـه‌ی نـاویر (۳-۱۹) پـس از سـاده‌سـازی، بـه رابطه‌ی زیر می‌انجامد:

$$\begin{cases} r^2u_r'' + Aru_r' + Bu_r = Cr^{n_2-n_3} + Dr^{n_2+1} \\ C = \alpha_i \dfrac{1+\nu}{1-\nu}\ (n_1+n_2-n_3-1)c_5 \\ D = \alpha_i \dfrac{1+\nu}{1-\nu}\ (n_1+n_2)c_6 \end{cases} \qquad (۳-۲۹)$$

که ثابت‌های c_5 و c_6 در رابطه‌ی (۳-۲۵) مشخص شده‌اند. این معادله دیفرانسیل دارای دو حل عمومی وخصوصی می‌باشد. حل عمومی این معادله در فصل قبل انجام شد که به صورت زیر می‌باشد:

$$u_g(r) = c_1r^{m_1} + c_2r^{m_2} \qquad (۳-۳۰)$$

حل خصوصی معادله دیفرانسیل فوق به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$u_p(r) = c_3r^{n_2-n_3} + c_4r^{n_2+1} \qquad (۳-۳۱)$$

با جایگذاری این رابطه در معادله دیفرانسیل، ثابت‌های c_3 و c_4 به صورت زیر بدست می‌آیند.

$$\begin{cases} c_3 = \dfrac{C}{(n_2-n_3-1+A)(n_2-n_3)+B} \\ c_4 = \dfrac{D}{(n_2+A)(n_2+1)+B} \end{cases} \qquad (۳-۳۲)$$

لذا حل کلی معادله دیفرانسیل (۳-۲۹) به صورت مجموع حل عمومی وخصوصی خواهد بود.

$$u(r) = u_g(r) + u_p(r)$$

لذا می توان نوشت:

$$u(r) = c_1r^{m_1} + c_2r^{m_2} + c_3r^{n_2-n_3} + c_4r^{n_2+1} \qquad (۳-۳۳)$$

با قرار دادن رابطه‌ی جابجایی در رابطه‌ی(۳-۱۸) می توان نوشت:

$$\begin{cases} \sigma_r = \dfrac{E_i r^{n_1}}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left\{c_1 Q_1 r^{m_1-1} + c_2 Q_2 r^{m_2-1} + c_3 Q_3 r^{n_2-n_3-1} + c_4 Q_4 r^{n_2} \right. \\ \left. -(1+\nu)\alpha_i r^{n_2}\Theta(r)\right\} \\ \\ \sigma_\phi = \dfrac{E_i r^{n_1}}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left\{c_1 G_1 r^{m_1-1} + c_2 G_2 r^{m_2-1} + c_3 G_3 r^{n_2-n_3-1} + c_4 G_4 r^{n_2} \right. \\ \left. -(1+\nu)\alpha_i r^{n_2}\Theta(r)\right\} \\ \\ Q_3 = (n_2 - n_3)(1-\nu) + 2\nu \;\; ; Q_4 = (n_2+1)(1-\nu) + 2\nu \\ G_3 = (n_2 - n_3)\nu + 1 \qquad ; \; G_4 = (n_2+1)\nu + 1 \end{cases} \tag{۳۴-۳}$$

که در این رابطه $\Theta(r)$طبق رابطه‌ی (۳-۲۳) می‌باشد. و c_1و c_2 دو ثابت دلخواه می‌باشند. برای اینکه این دو ثابت مشخص شوند بایستی از شرایط مرزی(۳-۳۵) استفاده کرد.

$$\begin{aligned} \sigma_r\Big|_{r=1} &= -p_i \\ \sigma_r\Big|_{r=k} &= -p_o \end{aligned} \tag{۳۵-۳}$$

لذا با استفاده از شرایط مرزی (۳-۳۵) به ساده‌گی ثابت‌های c_1و c_2به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{1}{Q_1\left(k^{m_1} - k^{m_2}\right)}\left\{c_3 Q_3 (k^{m_2} - k^{n_2-n_3}) + c_4 Q_4 (k^{m_2} - k^{n_2+1}) \right. \\ \left. -(1+\nu)\alpha_i (k^{m_2}\Theta_i - k^{n_2+1}\Theta_o)\right\} + \dfrac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E_i Q_1\left(k^{m_1} - k^{m_2}\right)}\left\{k^{m_2} p_i - k^{1-n_1} p_o\right\} \\ \\ c_2 = -\dfrac{1}{Q_2\left(k^{m_1} - k^{m_2}\right)}\left\{c_3 Q_3 (k^{m_1} - k^{n_2-n_3}) + c_4 Q_4 (k^{m_1} - k^{n_2+1}) \right. \\ \left. -(1+\nu)\alpha_i (k^{m_1}\Theta_i - k^{1+n_2}\Theta_o)\right\} - \dfrac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E_i Q_2\left(k^{m_1} - k^{m_2}\right)}\left\{k^{m_1} p_i - k^{1-n_1} p_o\right\} \end{cases} \tag{۳۶-۳}$$

اکنون با جایگذاری ثابت‌های c_1و c_2 بدست آمده در روابط (۳-۳۳) و (۳-۳۴) روابط تنش شعاعی و محیطی وهمچنین جابجایی برای یک کره‌ی جدارضخیم از مواد ناهمگن تحت انتقال حرارت پایدار در شرایطی که $n_3 \neq -1$ باشد، بدست می‌آید.

ب) $n_3 = -1$

در این شرایط با جایگذاری رابطه‌ی $\Theta(r)$ رابطه‌ی (۳-۲۶) در معادله دیفرانسیل (۳-۱۹) وپس از ساده‌سازی، رابطه‌ی زیر نتیجه می‌شود.

$$\begin{cases} r^2 u_r'' + Aru_r' + Bu_r = Cr^{n_2+1}\ln r + Dr^{n_2+1} \\ C = \alpha_i \dfrac{1+\nu}{1-\nu}\,(n_1+n_2)c_5 \\ D = \alpha_i \dfrac{1+\nu}{1-\nu}\{(n_1+n_2)c_6 + c_5\} \end{cases} \tag{۳-۳۷}$$

که ثابت‌های c_5 و c_6 در رابطه‌ی (۳-۲۸) مشخص شده‌اند. معادله دیفرانسیل فوق دارای دو حل عمومی وخصوصی می‌باشد. حل عمومی این معادله در فصل قبل انجام شد که به صورت زیر می‌باشد.

$$u_g(r) = c_1 r^{m_1} + c_2 r^{m_2} \tag{۳-۳۸}$$

حل خصوصی معادله دیفرانسیل فوق به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$u_p(r) = c_3 r^{n_2+1}\ln r + c_4 r^{n_2+1} \tag{۳-۳۹}$$

با جایگذاری این رابطه در معادله دیفرانسیل، ثابت‌های $c_3\,,c_4$ به صورت زیر بدست می‌آیند.

$$\begin{cases} c_3 = \dfrac{C}{(n_2+A)(n_2+1)+B} \\ c_4 = \dfrac{D}{(n_2+A)(n_2+1)+B} \end{cases} \tag{۳-۴۰}$$

لذا حل کلی به صورت مجموع حل عمومی وخصوصی به صورت زیر ارائه می‌شود.

$$u(r) = u_g(r) + u_p(r)$$

لذا می توان نوشت.

$$u(r) = c_1 r^{m_1} + c_2 r^{m_2} + c_3 r^{n_2+1}\ln r + c_4 r^{n_2+1} \tag{۳-۴۱}$$

با قرار دادن رابطه‌ی جابجایی در رابطه‌ی(۳-۱۸) می توان نوشت.

$$
\begin{cases}
\sigma_r = \dfrac{E_i r^{n_1}}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left\{c_1 Q_1 r^{m_1-1} + c_2 Q_2 r^{m_2-1} + c_3 Q_3 r^{n_2}\ln r + c_4 Q_4 r^{n_2}\right. \\
\left. -(1+\nu)\alpha_i r^{n_2}\Theta(r)\right\} \\
\\
\sigma_\phi = \dfrac{E_i r^{n_1}}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left\{c_1 G_1 r^{m_1-1} + c_2 G_2 r^{m_2-1} + c_3 G_3 r^{n_2}\ln r + c_4 G_4 r^{n_2}\right. \\
\left. -(1+\nu)\alpha_i r^{n_2}\Theta(r)\right\} \\
\\
Q_3 = (n_2+1)(1-\nu)+2\nu \;\; ; \; Q_4 = (\dfrac{C}{D}+n_2+1)(1-\nu)+2\nu \\
G_3 = (n_2+1)\nu+1 \qquad ; \; G_4 = (\dfrac{C}{D}+n_2+1)\nu+1
\end{cases}
\tag{۴۲-۳}
$$

که در این رابطه $\Theta(r)$طبق رابطه‌ی (۳-۲۶) بوده و c_1, c_2دو ثابت دلخواه می‌باشند. برای اینکه این دو ثابت مشخص شوند، بایستی از شرایط مرزی(۳-۳۵) استفاده کرد، لذا با استفاده از رابطه‌ی (۳-۴۲) می توان نوشت.

$$
\begin{aligned}
&\frac{E_i}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_1 k^{n_1+m_1-1} & Q_2 k^{n_1+m_2-1}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} \\
&= -\frac{E_i}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{Bmatrix} c_4 Q_4 - (1+\nu)\alpha_i\Theta_i \\ c_3 Q_3 k^{n_1+n_2}\ln k + c_4 Q_4 k^{n_1+n_2} - (1+\nu)\alpha_i k^{n_2+n_1}\Theta_o \end{Bmatrix}
\end{aligned}
\tag{۴۳-۳}
$$

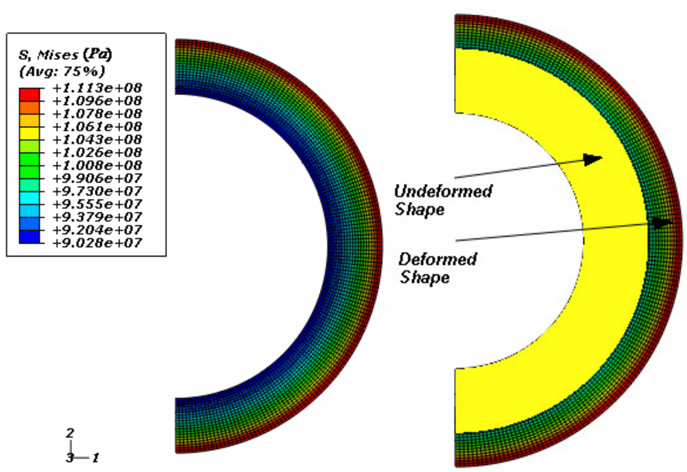
از دو معادله‌ی فوق به ساده‌گی ثابت‌های c_1 , c_2به صورت زیر بدست می‌آید.

$$
\begin{cases}
c_1 = \dfrac{1}{Q_1\left(k^{m_1}-k^{m_2}\right)}\left\{-c_3 Q_3 k^{n_2+1}\ln k + c_4 Q_4 (k^{m_2}-k^{n_2+1})\right. \\
\left. -(1+\nu)\alpha_i (k^{m_2}\Theta_i - k^{n_2+1}\Theta_o)\right\} \\
\\
c_2 = -\dfrac{1}{Q_2\left(k^{m_1}-k^{m_2}\right)}\left\{-c_3 Q_3 k^{n_2+1}\ln k c_4 Q_4 (k^{m_1}-k^{n_2+1})\right. \\
\left. -(1+\nu)\alpha_i (k^{m_1}\Theta_i - k^{1+n_2}\Theta_o)\right\}
\end{cases}
\tag{۴۴-۳}
$$

اکنون با جایگذاری ثابت‌های c_1 , c_2 بدست آمده در روابط (۳-۴۱) و(۳-۴۲)، روابط تنش شعاعی و محیطی و همچنین جابجایی برای یک کره‌ی جدارضخیم از مواد ناهمگن تحت انتقال حرارت پایدار در شرایطی که $n_3 = -1$ باشد، بدست می‌آید.

۳-۶- تحلیل عددی ترموالاستیک پوسته های کروی FGM

مدل FEM ارائه شده در فصل قبل، تحت انتقال حرارت دما-حالت پایدار حل می‌شود. بدین منظور نوع حل از حالت استاتیک به حالت دما-حالت پایدار تغییر داده می‌شود. همچنین علاوه بر شرایط مرزی بیان شده در فصل قبل، شرایط مرزی دمایی نیز به مدل اضافه می‌شود که می‌توانند به صورت کلی با تعریف ضریب انتقال حرارت جابجایی محیط و یا به صورت خاص با اعمال دما در سطح داخل و خارج باشد. المان‌های مورد استفاده در تحلیل، از نوع CAX8RHT می‌باشند. شکل (۳-۲) تغییر شکل و توزیع تنش‌های فن میزس در مدل را تحت فشار داخلی $(p = 80MPa)$ ، که در آن دمای سطح داخلی $T_i = 300(^{o}C)$ و دمای سطح خارجی $T_o = 25(^{o}C)$ می‌باشد را نشان می‌دهد. در این تحلیل ثابت ناهمگنی $n_i(i=1..3)=1$ در نظر گرفته شده است.



شکل ۳-۲: تغییرشکل جداره و توزیع تنش فن میزس در کره ی FGM تحت فشار داخلی و انتقال حرارت پایدار

۳-۷- مطالعه ی موردی

حل تحلیلی و عددی ارائه شده در این فصل برای مثالهای مختلفی بررسی می‌شود. برای مطالعه‌ی موردی یک کره‌ی جدار ضخیم با شعاع داخلی $a=0.04m$ وشعاع خارجی $b=0.06m$ در نظر گرفته می‌شود. فشار یکنواخت داخلی برابر با $p=80MPa$ است.

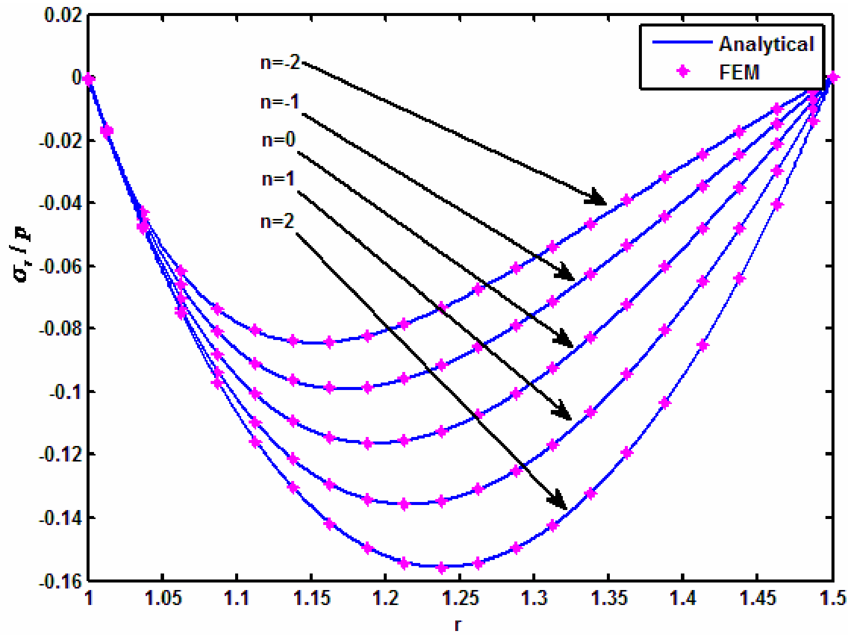
مدول الاستیسیته و ضریب انبساط حرارتی کره در جدار داخلی به ترتیب $E_i=200GPa$ و $\alpha_i=1.2\times10^{-6}/^{o}C$ در نظر گرفته و فرض می‌شود که ضریب پواسون برابر با $\nu=0.3$ باشد. در یک حالت خاص، ثابت ناهمگنی برای مدول الاستیسیته و ضریب انبساط حرارتی و همچنین ضریب انتقال حرارت هدایتی با هم برابر و $(n_1=n_2=n_3=n)$ در نظر گرفته می‌شود.

در یک حالت خاص فرض می‌شود که دمای سطح داخلی $T_i=300(^{o}C)$ و دمای سطح خارجی دمای محیط $T_o=25(^{o}C)$ باشد.

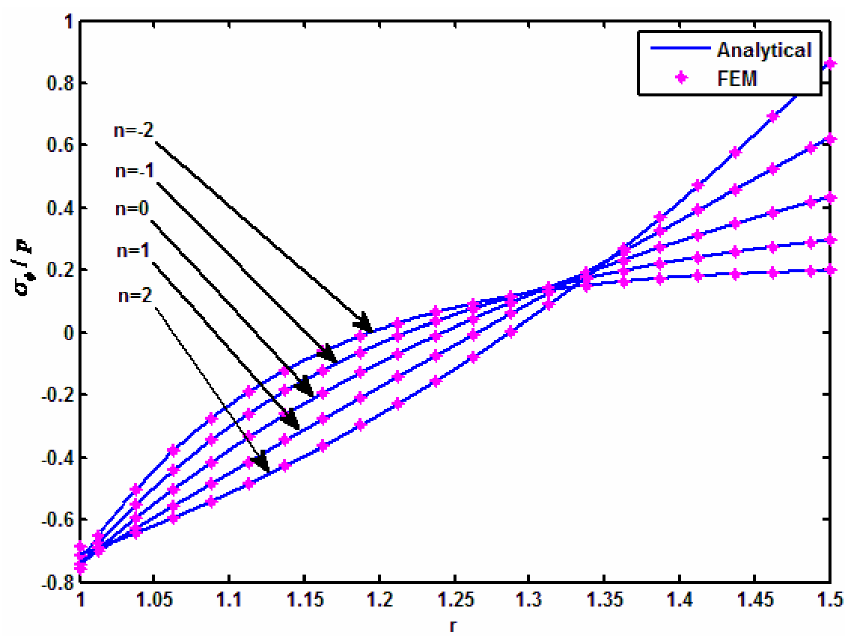
مسئله در چهار حالت $(p_i=0\ ;\ p_o=0)$، $(p_i=p;\ p_o=0)$، $(p_i=0;\ p_o=p)$ و $(p_i=p_o=p)$ با استفاده از روابط تحلیلی که در بخش (۳-۳) استخراج شده‌است بررسی می‌شود. سپس نتایج عددی که با استفاده از ABAQUS استخراج شده است، با نتایج تحلیلی مقایسه می‌شود.

الف) کره تحت انتقال حرارت پایدار بدون فشار داخلی و خارجی

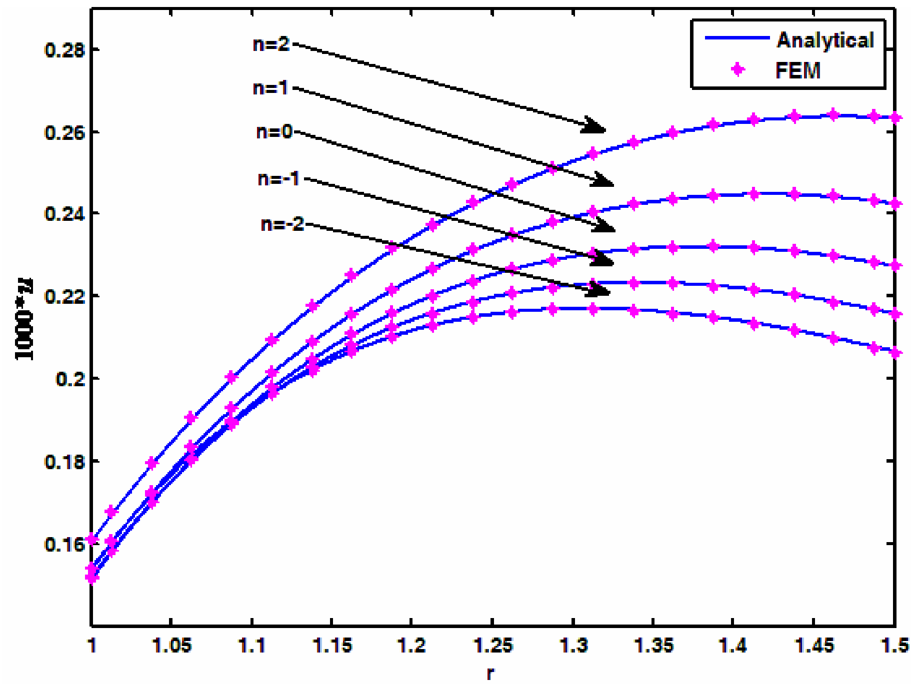
برای شرایطی که مخزن کروی تحت انتقال حرارت پایدار خالص قرار گیرد، تغییرات تنش شعاعی، تنش محیطی، جابجایی شعاعی و همچنین تغییرات دما در طول جداره، در شکل‌های (۳-۳) تا (۳-۶) آورده شده است. همانطور که در شکل (۳-۳) مشاهده می شود، تنش شعاعی در لایه‌های میانی فشاری بوده و با افزایش ثابت ناهمگنی n، اندازه‌ی این تنش فشاری افزایش می‌یابد.



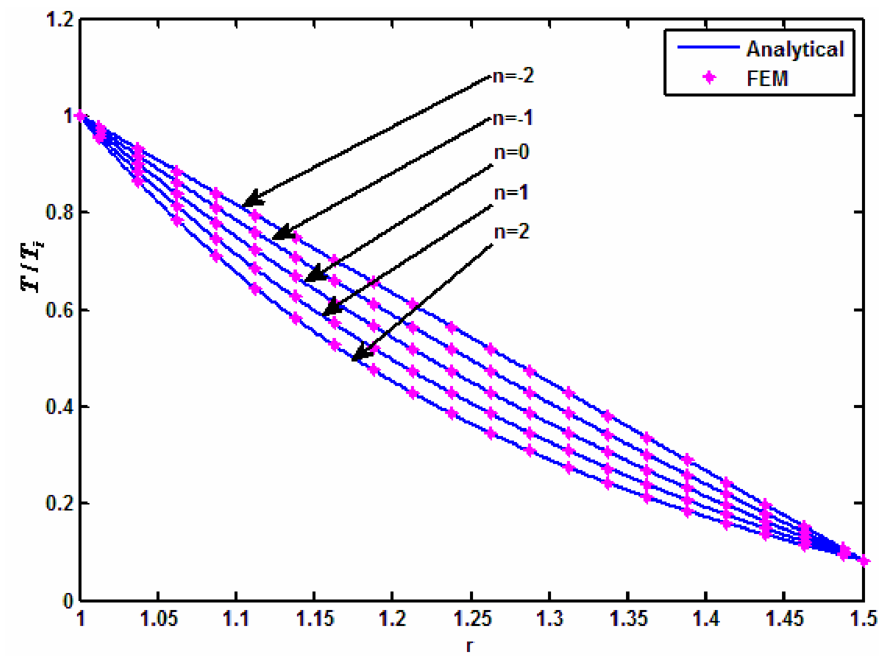
شکل ۳-۳: تغییرات تنش شعاعی در امتداد جداره کره تحت انتقال حرارت $(p_i = 0\ ;\ p_o = 0)$



شکل ۳-۴: تغییرات تنش محیطی در امتداد جداره کره تحت انتقال حرارت $(p_i = 0\ ;\ p_o = 0)$



شکل ۳-۵: تغییرات جابجایی شعاعی در امتداد جداره کره تحت انتقال حرارت $(p_i = 0\ ;\ p_o = 0)$



شکل ۳-۶: تغییرات دما در امتداد جداره کره تحت انتقال حرارت $(p_i = 0\ ;\ p_o = 0)$

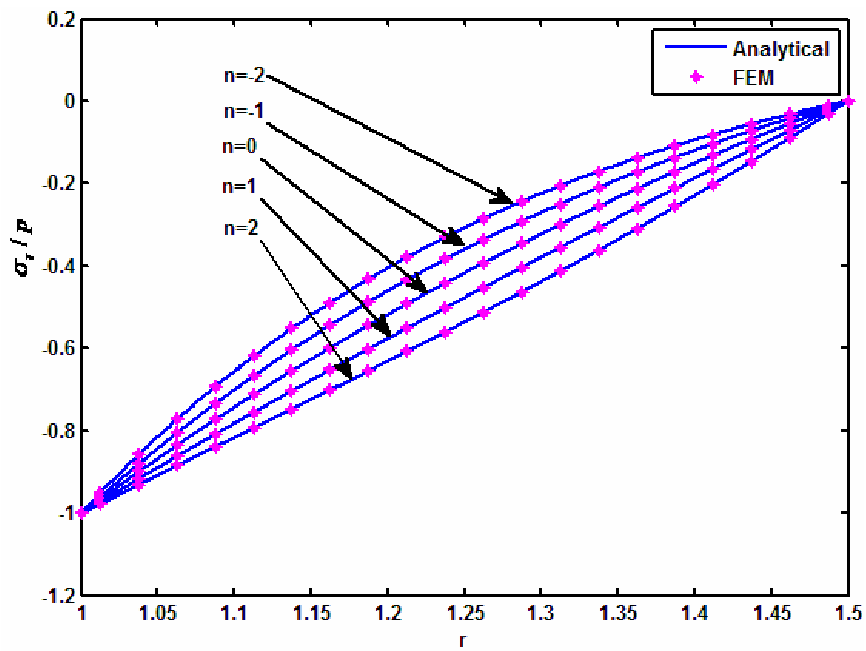
همچنین می‌توان دید که در این شکل شرایط مرزی بدون تنش در سطح داخل و خارج کاملاً ارضا می‌شوند. در شکل (۳-۴) تغییرات تنش محیطی در راستای ضخامت آورده شده است. در این شکل افزایش ثابت ناهمگنی n باعث کاهش تنش محیطی می‌شود، همچنین در دو نقطه مشاهده می‌شود که تنش محیطی به ازای تمامی مقادیر n به سمت مقدارتنش محیطی در حالت همگن $n=0$ میل می‌کند. به طوری که تقریبا در جدار داخلی و $1.30<r<1.35$، تنش محیطی به ازای تمامی مقادیر n همان مقدارتنش محیطی در حالت همگن را دارد.

در شکل (۳-۵) تغییرات جابجایی شعاعی در راستای ضخامت آورده شده است. در اینجا موادی که ثابت ناهمگنی n بزرگتری دارند، مطابق رابطه‌ی(۳-۱۵) با توجه به اینکه $n_i\ (i=1..3)=n$، دارای استحکام بیشتر و در عین حال ضریب انبساط حرارتی بزرگتری هستند. از طرفی همانطور که در شکل (۳-۵) مشاهده می‌شود، افزایش ثابت ناهمگنی n باعث افزایش جابجایی شعاعی می‌شود. به طوری که این افزایش در لایه‌های بیرونی محسوس‌تر می‌باشد. لذا می‌توان نتیجه گرفت که اگرچه در این نوع مواد با افزایش n از استحکام بیشتری برخوردارند. لذا مطابق رابطه‌ی هوک، بایستی تغییر شکل کمتر نیز نسبت به مواد همگن داشته باشند اما مطابق رابطه‌ی(۳-۱۵) در شرایطی که $n_i\ (i=1..3)=n$ با افزایش n در عین حال ضریب انبساط حرارتی بزرگتری نیز دارند و باعث می‌شود این مواد در شرایطی که تحت انتقال حرارت قرار گیرند، تغییر شکل بزرگتری نیزنسبت به مواد همگن داشته باشند. با توجه به این مطالب همانطور که در شکل (۳-۵) مشاهده می‌کنیم، با افزایشn تغییرشکل بزرگتری خصوصا در لایه‌های بیرونی ایجاد می‌شود که با توجه به مطالب بالا نشان می‌دهد که در این مواد در شرایطی که $n_i\ (i=1..3)=n$، با افزایش ثابت ناهمگنی n، تاثیر افزایش جابجایی در اثر افزایش ضریب انبساط حرارتی، غالب بر تاثیر کاهش جابجایی در اثر افزایش استحکام مادّه می‌-باشد. در شکل (۳-۶) تغییرات دما در راستای ضخامت آورده شده است. در این شکل کاهش ثابت ناهمگنی n باعث افزایش دما می‌شود. لذا دما در لایه‌های میانی به ازای $n<0$ بیشتر از مادّه همگن و

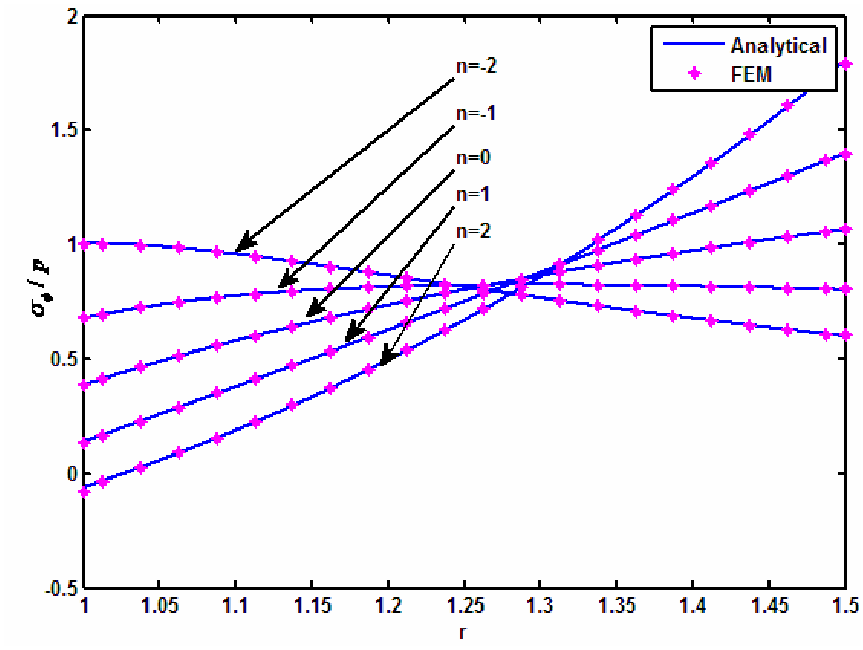
برای $n > 0$ کمتر از مادّه همگن است. این مطلب با توجه به رابطه‌ی (۳-۲۱) قابل پیش‌بینی است به طوری که مطابق این رابطه با فزایش ثابت ناهمگنی n، ضریب انتقال حرارت هدایت نیز افزایش مـی-یابد.

ب) کره تحت فشار داخلی $(p_i = p;\ p_o = 0)$ و انتقال حرارت پایدار

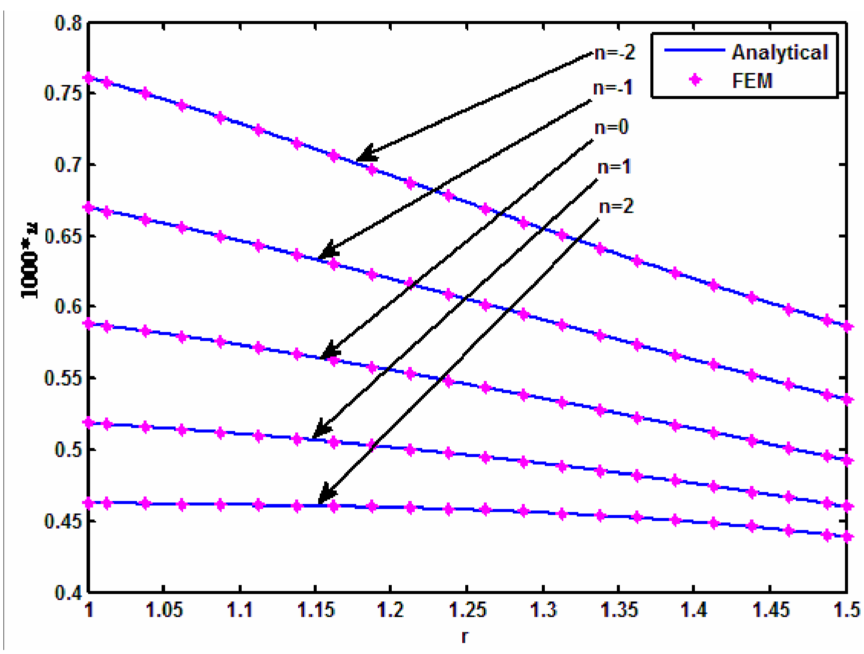
برای شرایطی که مخزن کروی تحت انتقال حرارت پایدار و فشار یکنواخـت داخلـی $p_i = p$ قـرار گیرد، تغییرات تنش شعاعی، تنش محیطی وجابجایی شعاعی در طول جداره، در شکل‌های (۳-۷) تـا (۳-۹) آورده شده است.



شکل ۳-۷: تغییرات تنش شعاعی در امتداد ضخامت کره تحت انتقال حرارت $(p_i = p;\ p_o = 0)$



شکل ۳-۸: تغییرات تنش محیطی در امتداد ضخامت کره تحت انتقال حرارت $(p_i = p;\ p_o = 0)$



شکل ۳-۹: تغییرات جابجایی شعاعی در امتداد ضخامت کره تحت انتقال حرارت $(p_i = p;\ p_o = 0)$

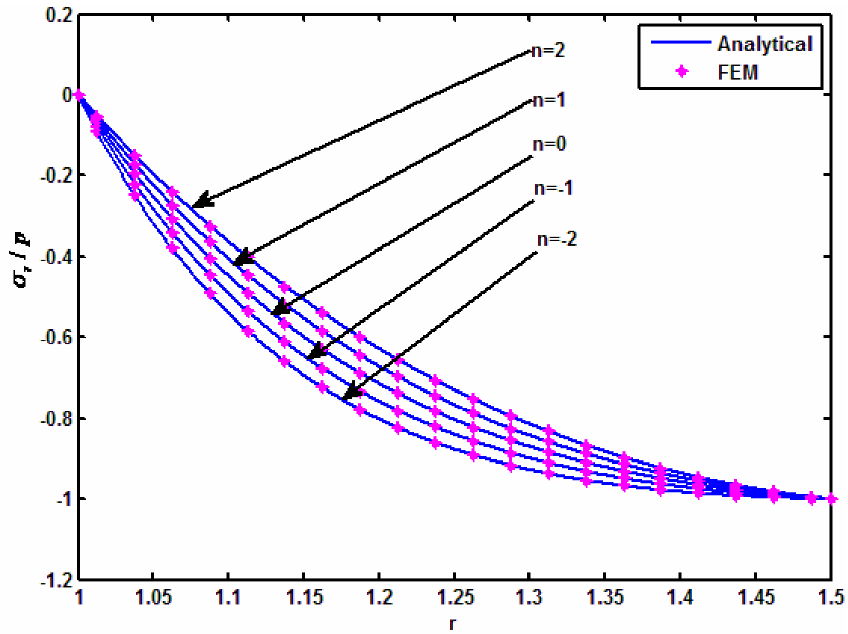
همانطور که در شکل (۳-۷) مشاهده می شود، افزایش ثابت ناهمگنی n باعث کاهش تنش شعاعی می‌شود. همچنین می‌توان دید که در این شکل شرایط مرزی در سطح داخل و خارج کاملا ارضا می-

شوند. در شکل (۳-۸) تغییرات تنش محیطی در راستای ضخامت آورده شده است. در این شکل برای $n=-2$ تنش محیطی در راستای ضخامت کاهش می‌یابد. در حالی که برای $n \geq -1$ وضعیت معکوس شده و تنش محیطی در راستای ضخامت افزایش می‌یابد. تنش محیطی در بازه-ی $-2 < n < -1$ دارای کمترین تغییرات در راستای ضخامت است و تقریبا ثابت می‌باشد که از نظر کنترل تنش در این نوع سازه‌ها امتیاز ویژه‌ای است. در فاصله‌ی تقریبی $1.25 < r < 1.30$، تنش محیطی به ازای تمامی مقادیر n به سمت مقدارتنش محیطی در حالت همگن $n=0$ میل می کند. همچنین از این شکل می‌توان مشاهده نمود که تنش محیطی به ازای $n<0$ در نیمه‌ی داخلی جداره، بیشتر از مادّه همگن و در نیمه‌ی خارجی جداره، کمتر از مادّه‌ی همگن است. برای $n>0$ در نیمه‌ی داخلی جداره، کمتر از مادّه همگن و در نیمه‌ی خارجی جداره، بیشتر از مادّه‌ی همگن است.

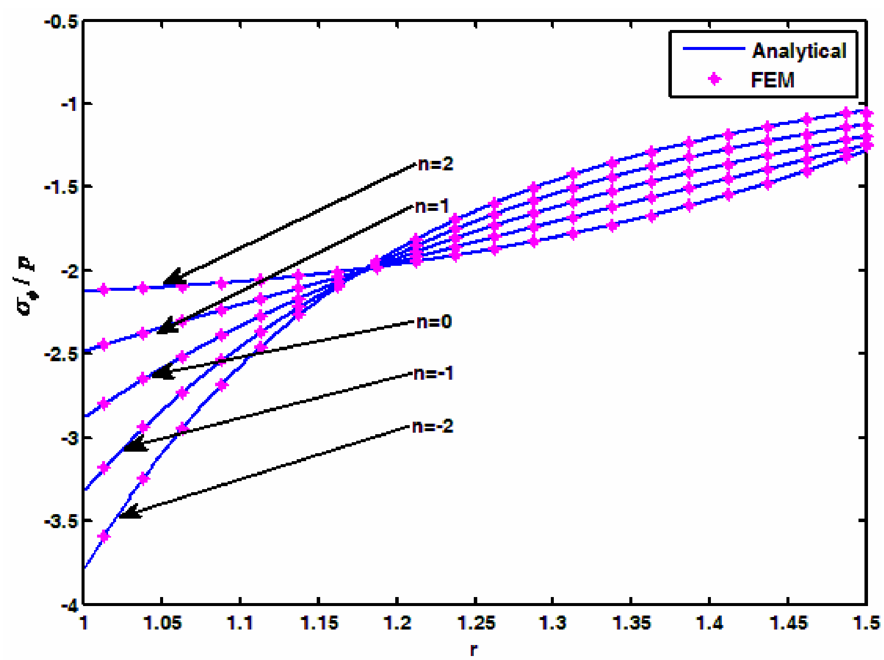
در شکل (۳-۹) تغییرات جابجایی در راستای ضخامت آورده شده است. همانطور که مشاهده می-شود، افزایش ثابت ناهمگنی n باعث کاهش جابجایی شعاعی می‌شود. به طوری که به ازای $n<0$، جابجایی کره نسبت به مادّه‌ی همگن بیشتر است و به ازای $n>0$ کمتر است. روند تغییرات تقریبا مشابه با حالت همگن می‌باشد به طوری که برای همه‌ی مقادیر n تغییرات در راستای شعاعی نزولی می‌باشد. هر چند شیب تغییرات با افزایش ثابت ناهمگنی n کاهش می‌یابد.

ج) کره تحت فشار خارجی $(p_o = p, p_i = 0)$ و انتقال حرارت پایدار

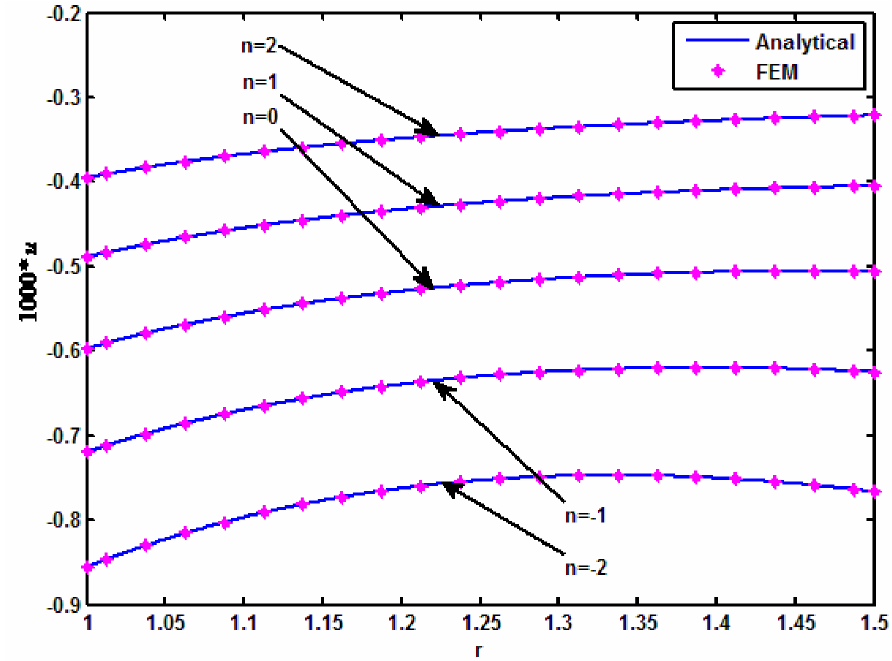
برای شرایطی که مخزن کروی تحت انتقال حرارت پایدار و فشار یکنواخت خارجی $p_o = p$ قرار گیرد، تغییرات تنش شعاعی، تنش محیطی وجابجایی شعاعی در طول جداره، در شکل‌های (۳-۱۰) تا (۳-۱۲) آورده شده است.



شکل ۳-۱۰: تغییرات تنش شعاعی در امتداد جداره کره تحت انتقال حرارت $\left(p_o = p\,, p_i = 0\right)$



شکل ۳-۱۱: تغییرات تنش محیطی درامتداد جداره کره تحت انتقال حرارت $\left(p_o = p\,, p_i = 0\right)$



شکل ۳-۱۲: تغییرات جابجایی شعاعی درامتداد جداره کره تحت انتقال حرارت $\left(p_o = p\,, p_i = 0\right)$

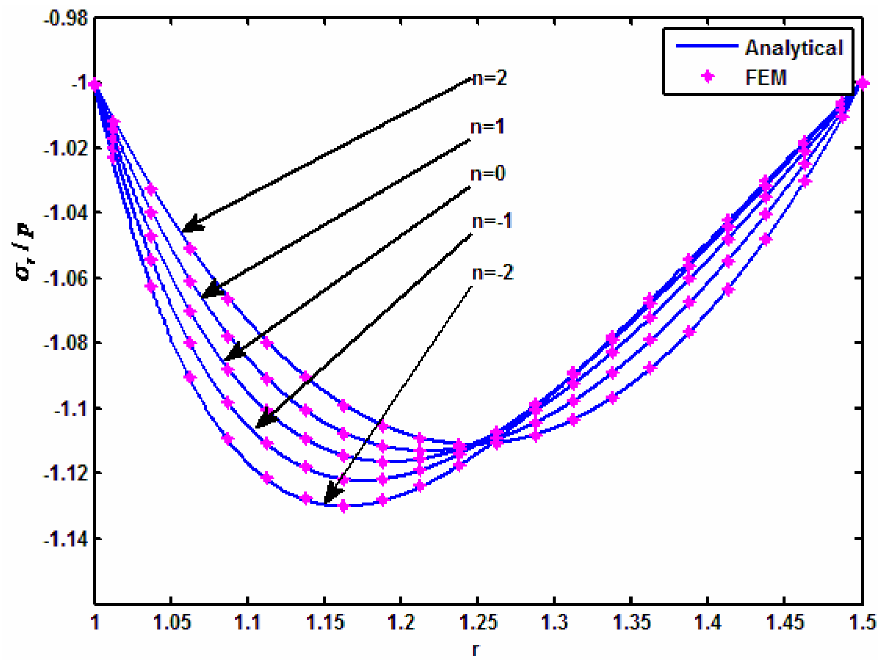
همانطور که در شکل (۳-۱۰) مشاهده می شود، افزایش ثابت ناهمگنی n باعث افزایش تنش شعاعی می‌شود.

در شکل (۳-۱۱) تغییرات تنش محیطی در راستای ضخامت آورده شده است. در این شکل در سطح داخلی تنش محیطی که به صورت فشاری خود را نشان می‌دهد، با افزایش n افزایش می‌یابد. در حالی که برای سطح خارجی وضعیت معکوس شده و تنش محیطی با افزایش n کاهش می‌یابد. به طوری که برای $n < 0$ تنش محیطی در جدار داخلی بزرگتر از حالت همگن و برای $n > 0$، کوچکتر از حالت همگن می‌باشد. برای جدار خارجی عکس این حالت رخ می‌دهد، به طوری که برای $n < 0$ تنش محیطی در جدار خارجی کوچکتر از حالت همگن و برای $n > 0$ بزرگتر از حالت همگن می‌باشد. در فاصله‌ی تقریبی $r = 1.18$ تنش محیطی به ازای تمامی مقادیر n به سمت مقدارتنش محیطی در حالت همگن $n = 0$ میل می کند.

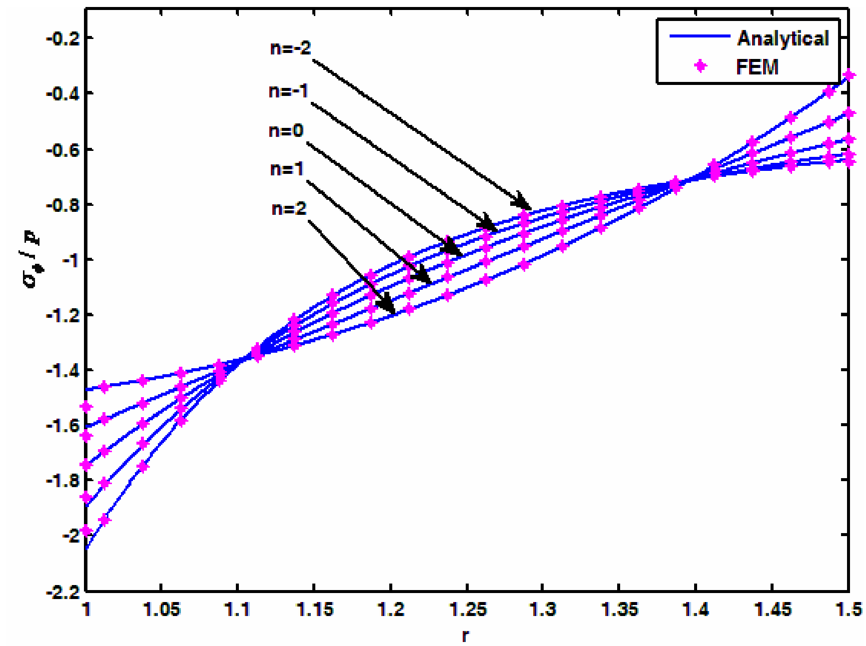
در شکل (۳-۱۲) تغییرات جابجایی در راستای ضخامت آورده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، افزایش ثابت ناهمگنی n باعث کاهش جابجایی شعاعی می‌شود. به طوری که به ازای $n<0$ جابجایی کره نسبت به مادّه‌ی همگن بیشتر است و به ازای $n>0$ کمتر است. روند تغییرات تقریبا مشابه با حالت همگن می‌باشد به طوری که برای همه‌ی مقادیر n تغییرات در راستای شعاعی تقریبا صعودی می‌باشد و در لایه‌های نزدیک به جدار خارجی شیب تغییرات با افزایش n کاهش می‌یابد.

د) کره تحت فشار داخلی وخارجی $(p_o = p_i = p)$ و انتقال حرارت پایدار

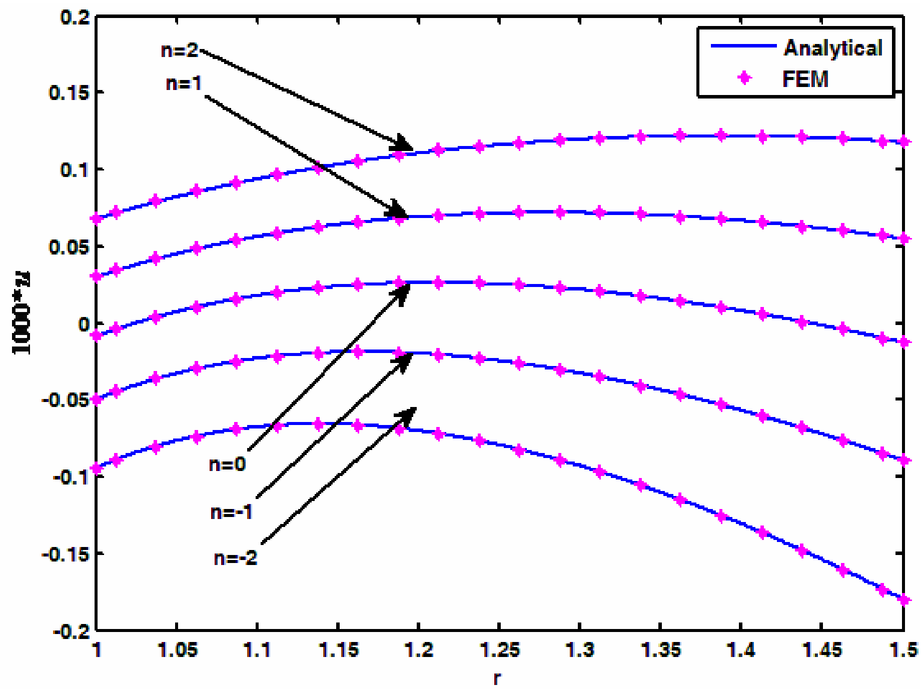
برای این شرایط تغییرات تنش شعاعی، تنش محیطی و جابجایی شعاعی در طول جداره، در شکل‌های (۳-۱۳) تا (۳-۱۵) آورده شده است.



شکل ۳-۱۳: تغییرات تنش شعاعی در امتداد جداره کره تحت انتقال حرارت $(p_o = p_i = p)$



شکل ۳-۱۴: تغییرات تنش محیطی در امتداد جداره کره تحت انتقال حرارت $(p_o = p_i = p)$



شکل ۳-۱۵: جابجایی شعاعی در امتداد جداره کره تحت انتقال حرارت $(p_o = p_i = p)$

همانطور که در شکل (۳-۱۳) مشاهده می‌شود، افزایش ثابت ناهمگنی n برای لایه‌هایی که به سطح داخلی نزدیکترند، باعث افزایش اندازه‌ی تنش شعاعی می‌شود. اما برای لایه‌هایی که به سطح خارجی نزدیکترند باعث کاهش تنش شعاعی می‌شود. در فاصله‌ی تقریبی $r=1.27$ تنش شعاعی به ازای تمامی مقادیر n به سمت مقدارتنش شعاعی در حالت همگن $n=0$ میل می‌کند. همچنین می‌توان دید که در این شکل شرایط مرزی در سطح داخل و خارج کاملا ارضا می‌شوند. لذا مطابق این شکل برای $n<0$ تنش شعاعی در لایه‌های نزدیک به جدار داخلی تنش شعاعی بزرگتری نسبت به حالت همگن و برای لایه‌هایی که به سطح خارجی نزدیکترند، تنش شعاعی کوچکتری نسبت به حالت همگن ایجاد می‌شود. و برای $n>0$ عکس این شرایط مشاهده می‌شود.

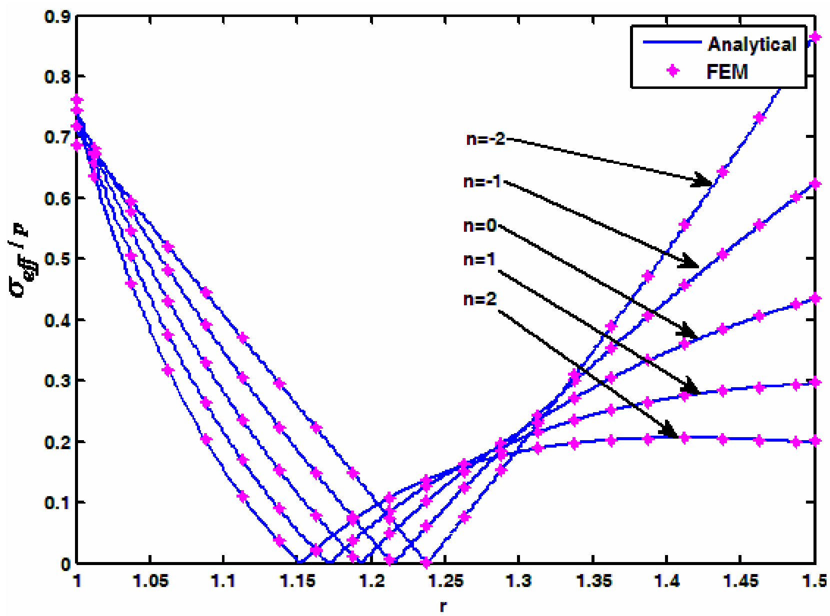
در شکل (۳-۱۴) تغییرات تنش محیطی در راستای ضخامت آورده شده است. در این شکل در سطح داخلی و خارجی اندازه‌ی تنش محیطی که به صورت تنش فشاری در این لایه‌ها ایجاد می‌شود با افزایش n کاهش می‌یابد. در حالی که برای لایه‌های میانی وضعیت معکوس شده واندازه‌ی تنش محیطی با افزایش n افزایش می‌یابد. در دو نقطه تنش محیطی به ازای تمامی مقادیر n به سمت مقدارتنش محیطی در حالت همگن $n=0$ میل می‌کند، که این نقاط به ترتیب در بازه‌های $1.1<r<1.15$ و $1.35<r<1.40$ قرار دارند. لذا برای $n<0$ در لایه‌های نزدیک به جدار داخلی و خارجی تنش محیطی بزرگتری نسبت به حالت همگن، برای لایه‌های میانی تنش محیطی کوچکتری نسبت به حالت همگن ایجاد می‌شود. و برای $n>0$ عکس این شرایط مشاهده می‌شود.

در شکل (۳-۱۵) تغییرات جابجایی در راستای ضخامت آورده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، کاهش ثابت ناهمگنی n باعث افزایش جابجایی شعاعی می‌شود.

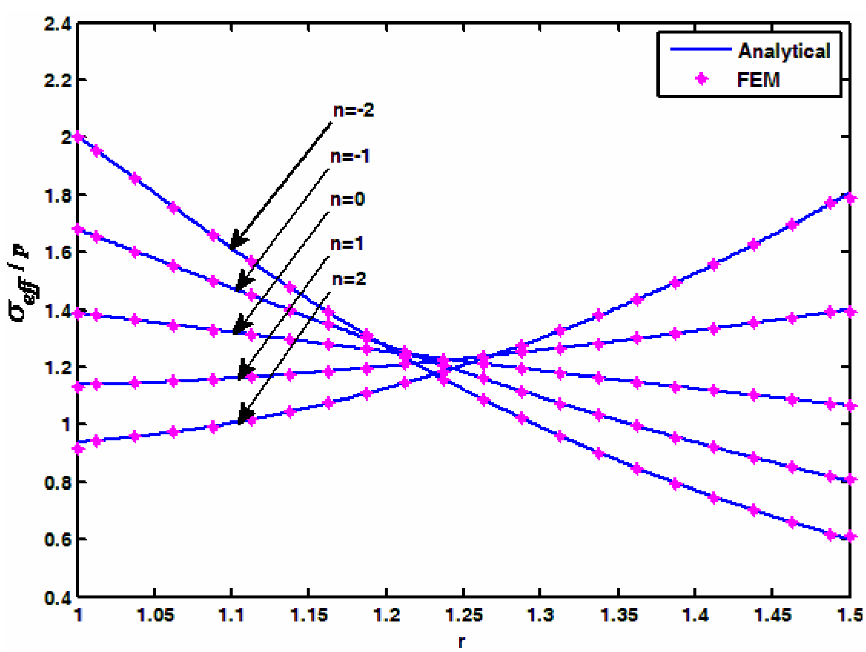
۳-۸- بررسی توزیع تنش موثر در مواد FG

با درنظر گرفتن رابطه‌ی (۲-۵۲) نمودارهای مربوط به تنش موثر به صورت زیر در چهار حالت $(p_o=p_i=0)$، $(p_o=0, p_i=p)$، $(p_o=p, p_i=0)$ و $(p_o=p_i=p)$ در شرایطی که کره

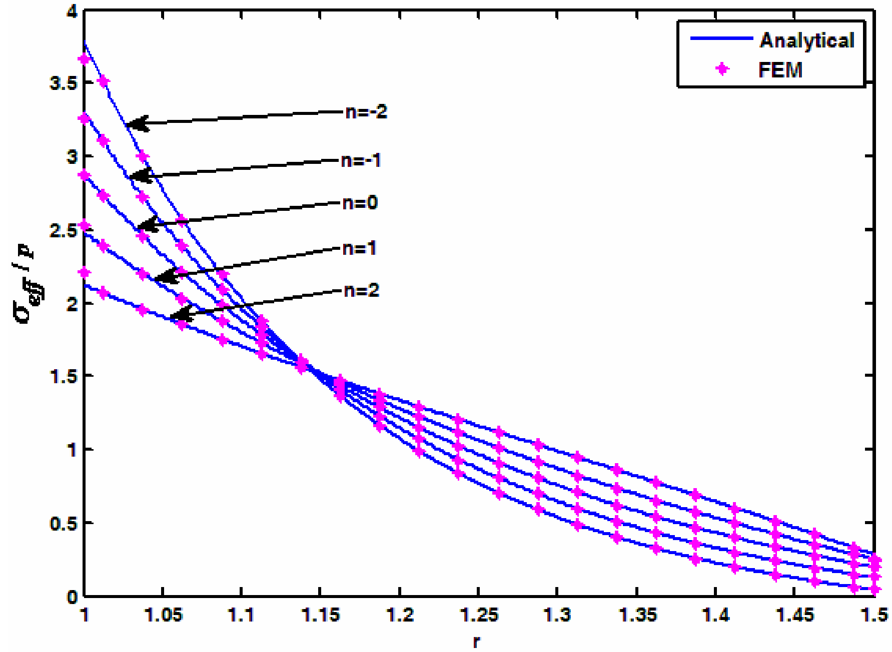
تحت انتقال حرارت پایدار قرار گیرد، آورده شده‌است. مقادیر تنش فن‌میسز نسبت به فشار $p = 80(MPa)$ بی‌بعد شده است.



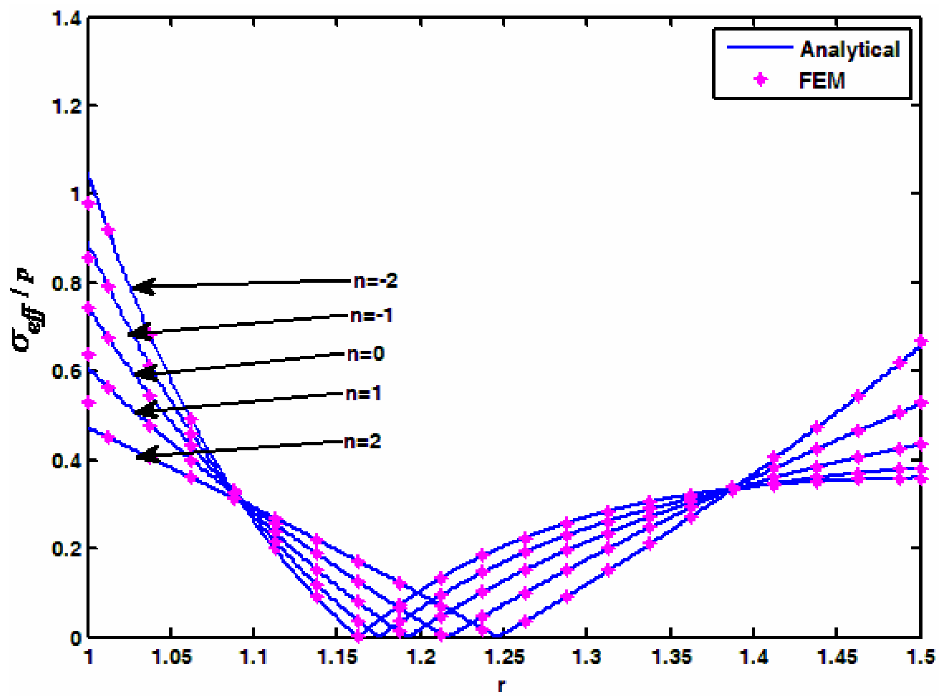
شکل ۳-۱۶: تغییرات تنش فن میسز σ_{eff} در امتداد جداره کره تحت انتقال حرارت $(p_i = p_o = 0)$



شکل ۳-۱۷: تغییرات تنش فن میسز در امتداد جداره کره تحت انتقال حرارت $(p_i = p;\ p_o = 0)$



شکل ۳-۱۸: تغییرات تنش فن میزس در امتداد جداره کره تحت انتقال حرارت $(p_i = 0;\ p_o = p)$



شکل ۳-۱۹: تغییرات تنش فن میزس در امتداد جداره کره تحت انتقال حرارت $(p_i = p_o = p)$

در شکل (۳-۱۶) تغییرات تنش فن میزس در راستای ضخامت در شرایطی که کره تحت انتقال حرارت خالص باشد، آورده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، به ازای تمامی مقادیر n کره در جدار داخلی به مقدار آن در حالت همگن $n=0$ میل می کند. در جدار میانی دارای کمترین مقدار خود و برابر صفر می‌شود. با افزایش n می‌توان لایه‌ای را که در آن تنش فن میزس صفر می‌شود به سمت جدار داخلی هدایت نمود. همچنین از این شکل می‌توان مشاهده نمود که تنش فن میزس در جدار خارجی برای $n<0$ بزرگتر از حالت همگن و برای $n>0$ کوچکتر از حالت همگن می‌باشد.

در شکل (۳-۱۷) تغییرات تنش فن میزس در راستای ضخامت در شرایطی که کره تحت فشار داخلی و انتقال حرارت پایدار باشد، آورده شده است. در این شکل برای $n\leq 0$ تنش فن میزس در راستای ضخامت کاهش می‌یابد. در حالی که برای $n\geq 1$ وضعیت معکوس شده و تنش فن میزس در راستای ضخامت افزایش می‌یابد. تنش محیطی در بازه‌ی $0<n<1$دارای کمترین تغییرات در راستای ضخامت است، و تقریبا ثابت می‌باشد که از نظر کنترل تنش در این نوع سازه‌ها امتیاز ویژه‌ای است. در فاصله‌ی تقریبی $1.20<r<1.25$ تنش فن میزس به ازای تمامی مقادیر n به سمت مقدارتنش فن میزس در حالت همگن $n=0$ میل می کند. همچنین از این شکل می‌توان مشاهده نمود که تنش محیطی به ازای $n<0$ در نیمه‌ی داخلی جداره، بیشتر از مادّه همگن و در نیمه‌ی خارجی جداره، کمتر از مادّه‌ی همگن است. و برای $n>0$ در نیمه‌ی داخلی جداره، کمتر از مادّه همگن و در نیمه‌ی خارجی جداره، بیشتر از مادّه‌ی همگن است.

در شکل (۳-۱۸) تغییرات تنش فن میزس در راستای ضخامت در شرایطی که کره تحت فشار خارجی و انتقال حرارت پایدار باشد، آورده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود تنش فن میزس به ازای $n<0$ در نیمه‌ی داخلی جداره، بیشتر از همگن و در نیمه‌ی خارجی جداره، کمتر از مادّه‌ی همگن است. وبرای $n>0$ بر عکس در نیمه‌ی داخلی جداره، کمتر از مادّه همگن و در نیمه‌ی خارجی جداره، بیشتر از مادّه‌ی همگن است. در فاصله‌ی تقریبی $1.12<r<1.15$ تنش فن میزس به ازای

تمامی مقادیر n به سمت مقدارتنش فن میزس در حالت همگن $n=0$ میل می کند. همچنین از این شکل می‌توان مشاهده نمود که تغییرات تنش فن میزس در راستای ضخامت با افـزایش n همـوارتر شده و تغییرات کمتری دارد.

در شکل (۳-۱۹) تغییرات تنش فن میزس در راستای ضخامت در شرایطی کـه کـره تحـت فـشار داخلی و خارجی و انتقال حرارت پایدار باشد، آورده شده است. در این شکل در سطح داخلی انـدازه‌ی تنش فن‌میزس با افزایش n کاهش می‌یابد. در حالی که در جدار خارجی عکس این مطلب اتفاق می-افتد و با افزایش n اندازه‌ی تنش فن میزس افزایش می‌یابد. در دو نقطـه تـنش فـن‌میـزس بـه ازای تمامی مقادیر n به سمت مقدارتنش فن‌میزس در حالت همگن $n=0$ میل می‌کند، که این نقـاط بـه ترتیب در بازه‌هـای $1.1<r<1.15$ و $1.35<r<1.40$قـرار دارنـد. همچنـین در جـدار میـانی دارای کمترین مقدار خود و برابر صفر می‌شود.

۳-۹- بررسی دقت المان محدود در تحلیل موادFG با بارگذاری مکانیکی

همانطور که در نتایج و شکل‌ها مشاهده شد، تطبیق بسیار خوبی میان نتایج حاصل از دو روش وجود دارد. در اینجا به عنوان نمونه نتایج عددی دو روش تحلیلی(دقیق) و روش المان محدود در کره‌هـای تحت فشار داخلی و انتقال حرارت پایدار برای چند مقدار دلخواه از شعاع کره در جداول زیر بـرای دو حالت $n=-1$ و $n=1$ آورده شده است.

در این جداول Error% نشان دهنده‌ی درصد خطا میان نتایج تحلیلی و المان محدود می‌باشـد که مطابق رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود:

$$\%Error=\left|\frac{Anal.-FEM}{Anal.}\right|100 \qquad (۳-۴۵)$$

جدول۳-۱: مقایسه ی نتایج تحلیلی و المان محدود برای $n=-1$ کره تحت انتقال حرارت

r	Type	$\frac{T}{T_i}$ Value	%Err	u_r*1000 value	%Err	$\frac{\sigma_r}{p}$ Value	%Err	$\frac{\sigma_\phi}{p}$ value	%Err
1	Anal.	1.00000	0	0.66977	0.00572	-1.00000	0.03888	0.67776	0.28864
	FEM	1.00000		0.66981		-0.99961		0.67972	
1.0875	Anal.	0.81036	0.01902	0.64972	0.00311	-0.73310	0.02460	0.76688	0.02103
	FEM	0.81052		0.64970		-0.73328		0.76672	
1.1875	Anal.	0.61148	0.02158	0.62312	0.00099	-0.48683	0.03391	0.81198	0.01272
	FEM	0.61162		0.62311		-0.48699		0.81187	
1.2875	Anal.	0.42870	0.02658	0.59488	0.00024	-0.29169	0.04892	0.82416	0.00791
	FEM	0.42881		0.59489		-0.29184		0.82410	
1.3875	Anal.	0.25959	0.03682	0.56649	0.00114	-0.13687	0.08734	0.81890	0.00549
	FEM	0.25968		0.56650		-0.13699		0.81885	
1.5	Anal.	0.08333	0	0.53548	0.00241	0.00000	----	0.80236	0.78734
	FEM	0.08333		0.53550		0.00009		0.80867	

جدول۳-۲: مقایسه ی نتایج تحلیلی و المان محدود برای $n=1$ کره تحت انتقال حرارت

r	Type	$\frac{T}{T_i}$ value	%Err	u_r*1000 value	%Err	$\frac{\sigma_r}{p}$ Value	%Err	$\frac{\sigma_\phi}{p}$ value	%Err
1	Anal.	1	0	0.51872	0.02139	-1	0.00300	0.13829	1.1281
	FEM	1		0.51883		-0.99997		0.13673	
1.0875	Anal.	0.74516	0.07679	0.51197	0.03757	-0.80773	0.01459	0.34923	0.06286
	FEM	0.74574		0.51216		-0.80785		0.34901	
1.1875	Anal.	0.52008	0.07952	0.50288	0.03858	-0.60100	0.01497	0.59547	0.01202
	FEM	0.52050		0.50307		-0.60109		0.59540	
1.2875	Anal.	0.34538	0.08746	0.49172	0.03975	-0.40338	0.01273	0.84718	0.00693
	FEM	0.34568		0.49192		-0.40343		0.84724	
1.3875	Anal.	0.20707	0.10594	0.47815	0.04110	-0.21159	0.00287	1.10446	0.01601
	FEM	0.20729		0.47835		-0.21159		1.10464	
1.5	Anal.	0.08333	0	0.45973	0.04140	0	------	1.40083	0.64545
	FEM	0.08333		0.45992		0.00006		1.39179	

هرچندکه در تحلیل المان محدود تغییرات خواص مکانیکی را با تقریب ۲۰ لایه‌ی کامپوزیتی در مدل مورد نظر اعمال نموده‌ایم، اما همانطور که مشاهده می‌شود، خطای میان نتایج دو روش تحلیلی و المان محدود بسیار اندک است. به‌طوری‌که بیشترین خطا مربوط به تنش‌محیطی در جدار داخلی

می‌باشد که مقدار آن از ۱,۵٪ تجاوز نمی‌کند. لذا می‌توان در شرایطی کـه شـکل هندسـی مـسئله یـا بارگذاری پیچیده باشد، از روش المان محدود با دقت مناسبی بهره جست.

فصل ۴

تحلیل الاستیک پوسته های کروی چرخان FGM

۴-۱- مقدمه

در این فصل یک کره‌ی جدارضخیم چرخان که تحت فشار داخلی قرار دارد بررسی شده است. لذا کره در واقع تحت بارهای حجمی حاصل از دوران قرار می‌گیرد. محورهـای مختـصات در ایـن فـصل نیـز مطابق فصول قبل در نظر گرفته می‌شود، لذا بدلیل ماهیت این نوع بار، کره تقارن خود را در راسـتای ϕ از دست خواهد داد، در نتیجه در این حالت تنش‌های محیطی σ_θ و نصف‌النهاری σ_ϕ بـا یکـدیگر برابر نبوده و در طول جداره تنش برشی ایجاد می‌شود. بـا در نظـر گـرفتن جـنس کـره از مـواد FG معادلات تعادل و در نتیجه معادلات ناویر یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل کوپل شده بـا مـشتقات جزیی می‌باشند.

در این فصل از مدل FEM ارائه شـده در دو فـصل قبـل اسـتفاده کـرده و در ایـن قـسمت نـوع بارگذاری به بارگذاری حجمی تغییر داده شده اسـت، و بررسـی اثـر ثابـت نـاهمگنی و همچنـین اثـر بارگذاری حجمی در توزیع تنش و جابجایی ارائه شده است.

۴-۲- فرمول بندی کره های چرخان FGM

یک کره‌ی جدار ضخیم، با شعاع داخلی a و شـعاع خـارجی b و شـعاع بـی‌بعـد r کـه بـصورت $r=\dfrac{R}{a}$ نرمالیز شده که در آن R مقداری میان a و b دارد، درنظر گرفته می‌شود.

برای تحلیل فوق دستگاه مختصات (R,ϕ,θ) که مبدا آن مرکز کره می‌باشد در نظر گرفته شـده-است. دراین قسمت بررسی تنش های ایجاد شـده در اثـردوران یـک کـره‌ی جـدار ضـخیم در حالـت الاستیک حول محورz (چنانچه در شکل زیر مشاهده می‌شود) ارائه شده است.

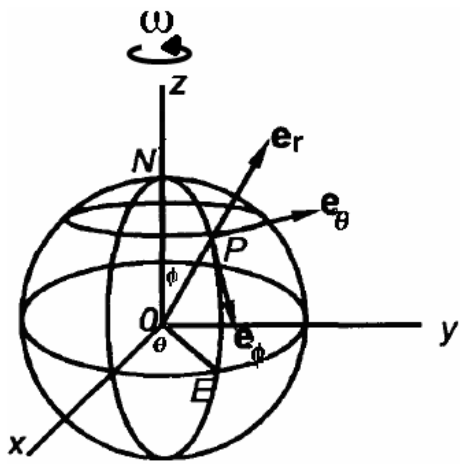
فرضیاتی که دراین قسمت درنظر گرفته می‌شود، عبارتنداز:

۱- بارگذاری فشاری که در سطوح داخلی و خارجی کره اعمال می‌شود به صورت یکنواخـت و در راستای شعاعی می‌باشد.

۲- در تحلیل پوسته‌های کروی FGM جنس کره ازمواد ناهمگن و همسانگرد می‌باشد. که در آن خواص مکانیکی به جز ضریب پواسون در راستای ضخامت کره به صورت تـابعی تـوانی از شـعاع کـره تغییر می‌کند

۳- دوران حول محور z و با سرعت زاویه‌ای ثابت می باشد.

هندسه‌ی کره نسبت به محورهای مختصات در شکل(۴-۱) نشان داده شده است.



شکل ۴-۱: مختصات کروی

به دلیل تقارن در هندسه کره و بار گذاری متقارن $u_\theta = 0$ می توان نوشت.

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0 \tag{۴-۱}$$

اما با توجه به اینکه بارگذاری دورانی نیز بر کره اعمال می‌شود، کره به بیضی‌گون تبدیل شده ولذا در راستای نصف‌انهاری، کره تقارن ندارد. $(\frac{\partial}{\partial \phi} \neq 0)$

لذا تانسور تنش وبردار جابجایی در یک کره ی جدار ضخیم به صورت روابط زیر ارائه می‌شود

$$\left[\sigma_{ij}\right] = \begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{r\phi} & 0 \\ \tau_{r\phi} & \sigma_\phi & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\theta \end{bmatrix} \tag{۴-۲}$$

$$[u_i]=\begin{Bmatrix} u_r \\ u_\phi \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (۳-۴)$$

تغییرات مدول الاستیسیته و دانسیته برای مواد FG به صورت تابعی توانی از شعاع کره به صورت زیر فرض می‌شود:

$$E(r)=E_i r^{n_1}\ ,\ \ \rho(r)=\rho_i r^{n_4} \qquad (۴-۴)$$

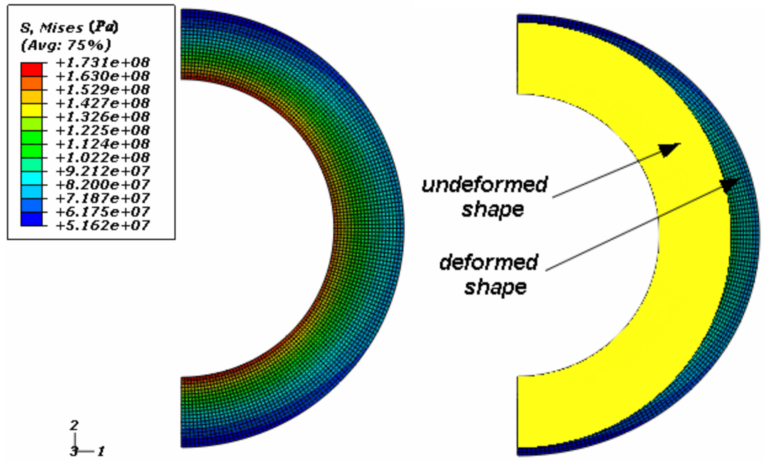
که در آن و n_1, n_4 ثابت ناهمگنی می‌باشند. با جایگذاری $r=1$ در رابطه‌ی بالا مـی‌تـوان E_i و ρ_i را که به ترتیب مدول الاستیسیته و دانسیته در جدار داخلی کـره مـی‌باشـند را بدسـت آورد. همچنـین ضریب پواسون ثابت در نظر گرفته می‌شود.

۴-۳- تحلیل المان محدود

مدل FEM ارائه شده در فصل۲ را درنظر گرفته در این قسمت نوع بارگذاری به بارگذاری حجمی تغییر می‌یابد.

لذا برای اعمال شرایط مرزی دو نوع بارگذاری لحاظ شده است. الف- بارگذاری فشاری در سطح داخلی کره ب- بارگذاری حاصل از نیروی حجمی(دورانی) که در آن بردار سرعت زاویه‌ای در راستای z می‌باشد.گره‌های مربوط به مرز افقی که امتداد آن از مرکز کره می‌گذرد بواسطه‌ی تقارن در راستای عمودی مقید شده اند.

شکل۴-۲ تغییر شکل و توزیع تنش‌های فن‌میسز در مدل را تحت فشار داخلی $(p=80MPa)$ نشان می‌دهد، که در آن کره با سرعت زاویه‌ای $\omega=1000\,Rad\,/\,S\text{ec}$ دوران می‌کند. در این شکل ثابت ناهمگنی $n_i(i=1..2)=1$ در نظر گرفته شده است.



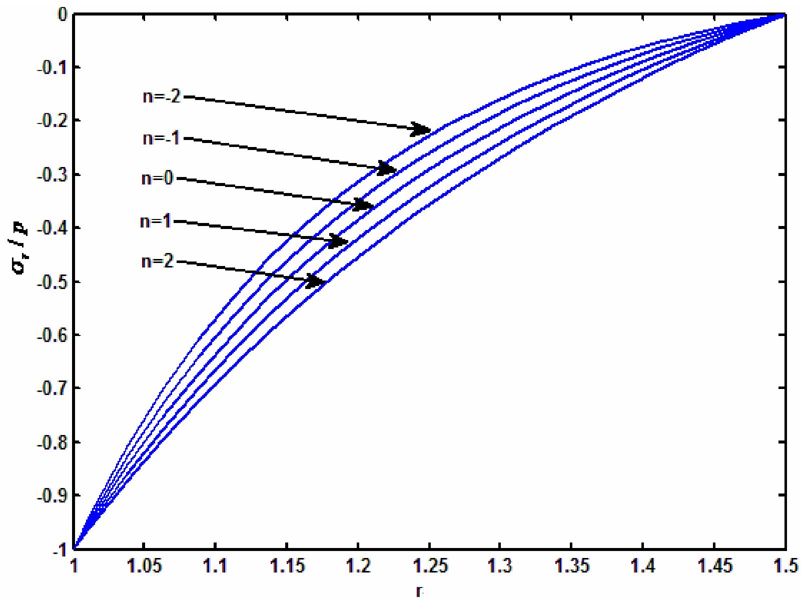
شکل ۴-۲: تغییرات تغییرشکل و توزیع تنش فن میزس در کره ی چرخان FGM تحت فشار داخلی

۴-۴- بحث و مطالعه‌ی موردی

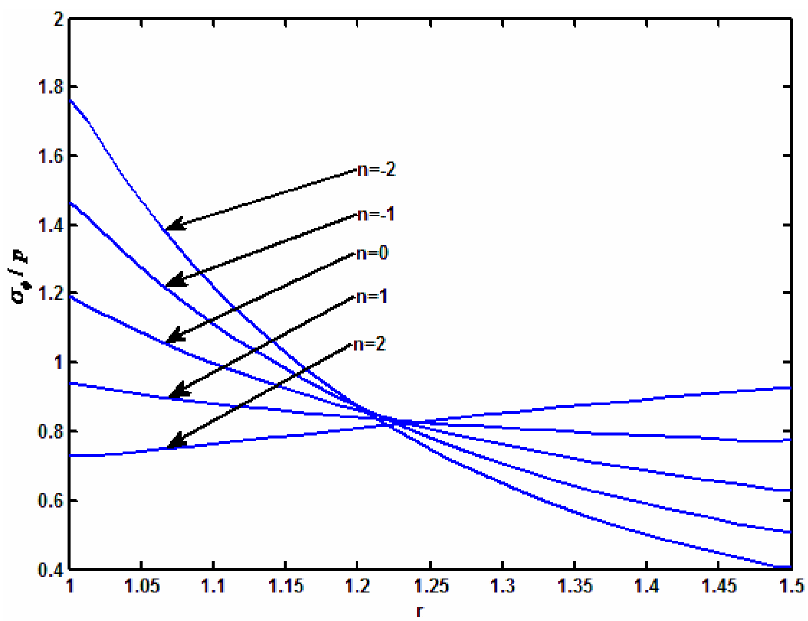
حل المان محدود ارائه شده در این فصل را می‌توان بـرای مثالهـای مختلفـی بررسـی کـرد. بـرای مطالعه‌ی موردی یک کره‌ی جدار ضخیم با شعاع داخلی $a = 0.04\,m$ وشعاع خارجی $b = 0.06\,m$ در نظر گرفته می‌شود. مدول الاستیسیته و دانسیته‌ی کره در جدار داخلی بـه ترتیـب $E_i = 200\,GPa$ و $\rho_i = 7860\,kg/m^3$ در نظر گرفته و فرض می‌شود که ضریب پواسون برابر با $\nu = 0.3$ باشد. در یک حالت خاص، ثابت ناهمگنی برای مدول الاستیسیته و دانسیته با هم برابر در نظر گرفته می‌شود. فشار یکنواخـت داخلـی برابـر بـا $(p = 80MPa)$ فـرض شـده و سـرعت زاویـه‌ای ثابـت و برابـر با $\omega = 1000\,Rad/S\mathrm{ec}$ در نظر گرفته می‌شود.

الف) تنش و جابجایی در راستای ضخامت برای $\phi = \pi/4$ (فشار داخلی و کره‌ی چرخان)

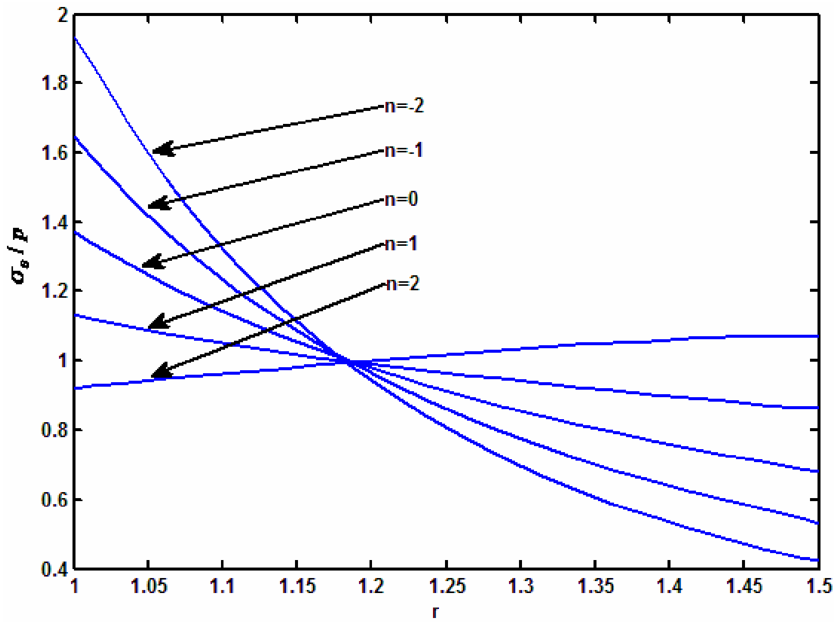
به عنوان نمونه، برای $\phi = \pi/4$ تغییرات تنش و جابجایی در راستای ضخامت، در شکل‌های (۴-۳) تا (۴-۸) آورده شده است.



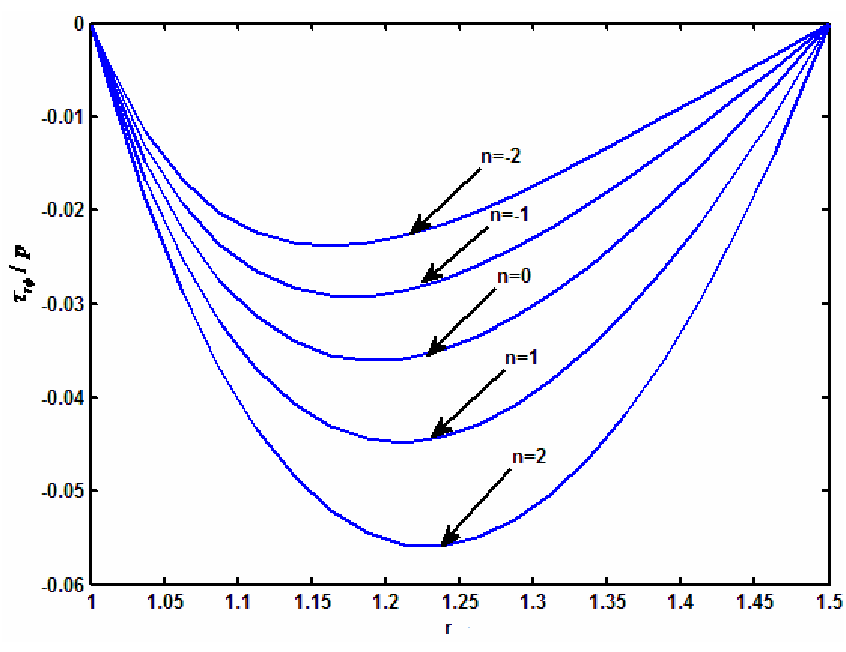
شکل ۴-۳: تغییرات تنش شعاعی در راستای ضخامت برای $\phi = \pi / 4$



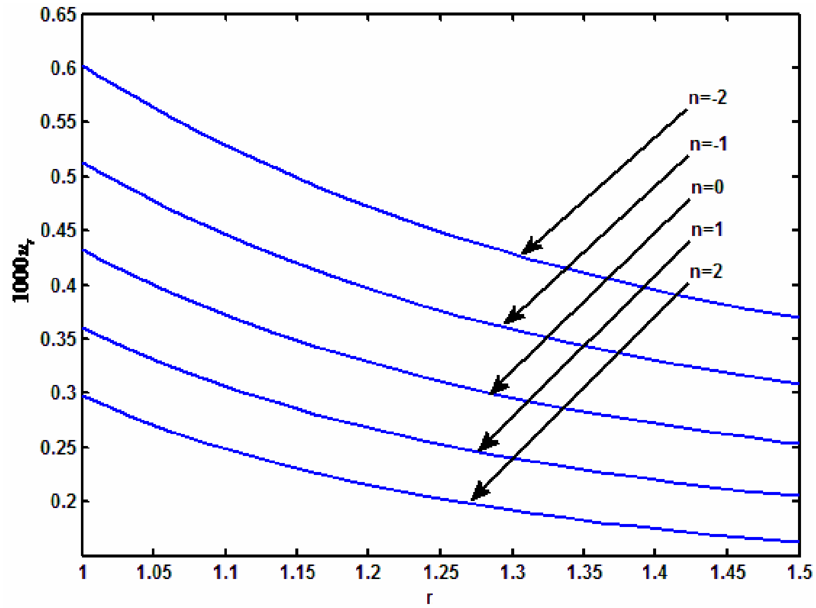
شکل ۴-۴: تغییرات تنش نصف‌النهاری در راستای ضخامت برای $\phi = \pi / 4$



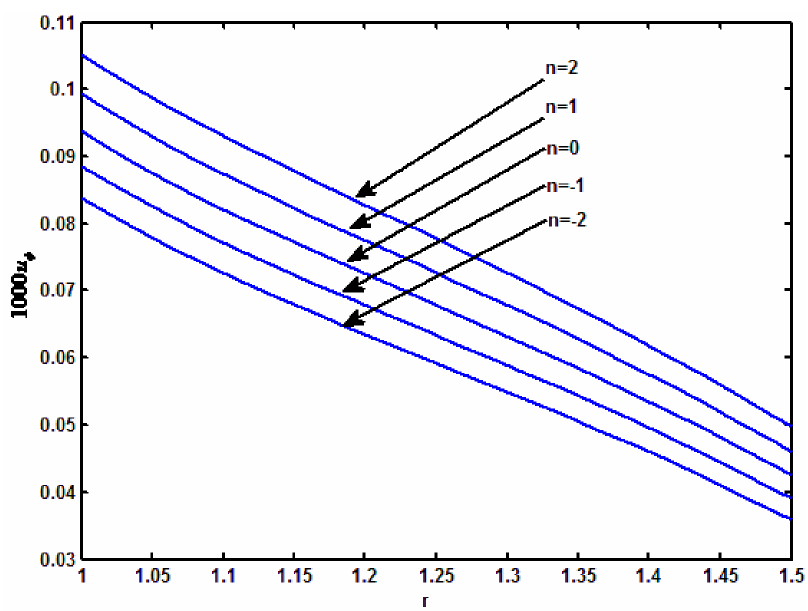
شکل ۴-۵: تغییرات تنش محیطی در راستای ضخامت برای $\phi = \pi / 4$



شکل ۴-۶: تغییرات تنش برشی در راستای ضخامت برای $\phi = \pi / 4$



شکل ۴-۷: تغییرات جابجایی شعاعی در راستای ضخامت برای $\phi = \pi / 4$



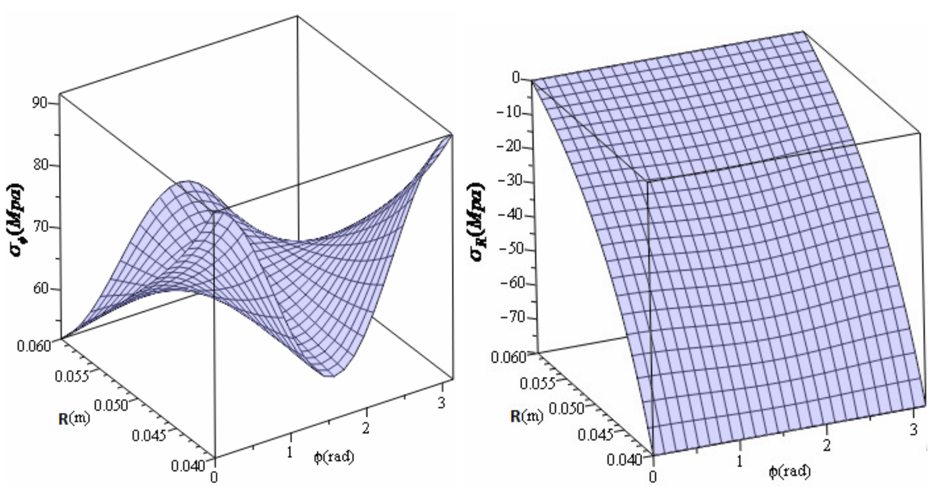
شکل ۴-۸: تغییرات جابجایی نصف‌النهاری در راستای ضخامت برای $\phi = \pi / 4$

همانطور که در این شکل‌ها مشاهده می‌شود ثابت ناهمگنی n در توزیع تنش و جابجایی تاثیر زیادی دارد. به طوری که به عنوان مثال در شکل‌های(۴-۳) و (۴-۶) و (۴-۸) کاهش n باعث کاهش

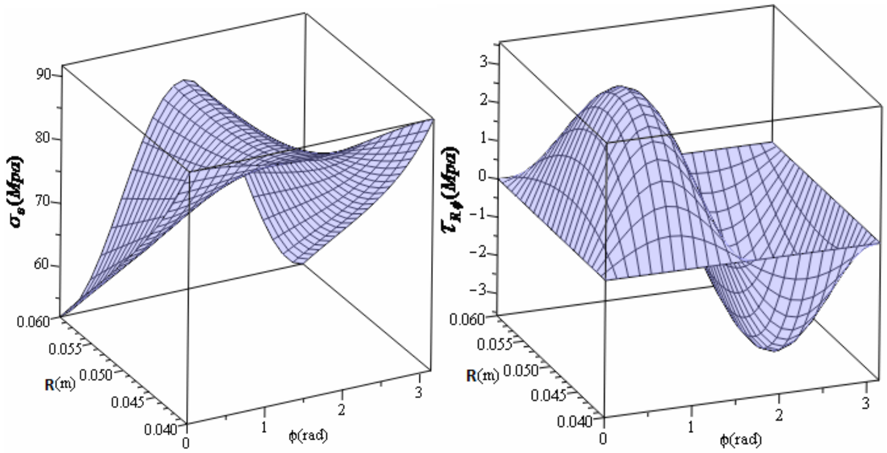
تنش شعاعی و تنش برشی و همچنین جابجایی نصف‌النهاری می‌شود، در حالی که بـرای تـنش‌هـای محیطی و نصف‌النهاری کاهش nمنجربه کاهش تنش در جدار داخلی و افزایش تنش در جدار خارجی می‌شود و برای جابجایی شعاعی کاهش ثابت ناهمگنی باعث افزایش آن می‌شود. نحوه‌ی تغییـرات در تنش نصف‌النهاری در راستای ضخامت مشابه تغییرات در راسـتای محیطـی اسـت، هرچنـد از لحـاظ عددی مقادیر تنش با هم متفاوت می‌باشند. مطابق شکل (۴-۶) تنش برشـی در مـرزهـای داخلـی و خارجی صفر بوده و در لایه‌های میانی با افزایش ثابت ناهمگنی مقـدار تـنش برشـی از لحـاظ انـدازه افزایش می‌یابد.

ب) بررسی تغییرات تنش و جابجایی و اثر دوران و فشارداخلی در توزیع آن برای $n=1$

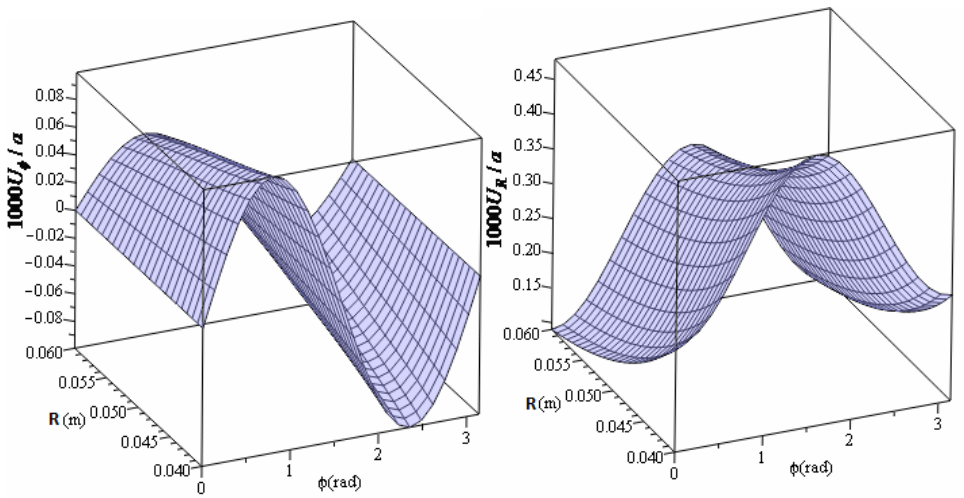
برای مطالعه‌ی تغییرات تنش وجابجایی در راستای ϕ، و همچنین مطالعه‌ی اثر دوران در توزیع آن با در نظر گرفتن $n=1$(به عنوان نمونه)، شکل‌های (۴-۹) تا (۴-۱۱) آورده شده‌است.



شکل ۴-۹: تغییرات تنش شعاعی و نصف‌النهاری برای $n=1$



شکل ۴-۱۰: تغییرات تنش برشی و محیطی برای $n = 1$



شکل ۴-۱۱: تغییرات جابجایی شعاعی و نصف‌النهاری برای $n = 1$

همانطور که در این شکل‌ها مشاهده می‌شود تغییرات تنش و جابجایی‌ها در راستای ϕ به صورت توابع سینوسی یا کسینوسی می‌باشد. البته این نوع تغییرات بدلیل پریودیک بودن بارهای حجمی دور از انتظار نیست. هرچند تغییرات تنش شعاعی بدلیل شرایط مرزی در جدار داخلی و خارجی مستقل از ϕ می‌باشد، اما این تغییرات در راستای ϕ به طور یکنواخت و پریودیک در لایه‌های میانی افزایش می‌یابد. لذا می‌توان گفت که تنش برشی و جابجایی نصف‌النهاری u_ϕ ، تغییراتی سینوسی و سایر تنش‌ها و جابجایی شعاعی تغییراتی کسینوسی در راستای ϕ دارند. مطابق شکل (۴-۹) شرایط مرزی

در بارگذاری فشاری داخلی در مورد تنش فشاری کاملا ارضا شده‌است. اما همانطور که مشاهده می‌شود بارگذاری دوارنی اثر کمتری در این تنش دارد. تغییرات تنش محیطی در جدار داخلی در راستای نصف‌النهاری عکس تغییرات آن در جدار خارجی می‌باشد. در شکل (۴-۱۰) تنش برشی در جدار داخلی و خارجی صفر بوده و همچنین در زوایای $\phi = 0, \pi/2, \pi$ مقدار این تنش صفر است. در زوایای $\phi = \pi/4, 3\pi/4$ تنش برشی بیشترین مقدار خود را دارد.

به طور خلاصه در جدول زیر برای بررسی دقیق‌تر نتایج عددی برای چند نقطه بحرانی از کره‌ی چرخان تحت فشار آورده شده است. مطابق نتایج این جدول بزرگترین تنش‌ها مربوط به تنش‌های محیطی و نصف‌النهاری می‌باشد که در جدار داخلی و در زاویه‌ی $\phi = 0$ رخ می‌دهد. مقادیر تنش‌های نصف‌النهاری و محیطی در $\phi = 0$ یکسان می‌باشد. اما همانطور که در بخش قبل مشاهده شده با توجه به پیچیدگی تغییرات دو بعدی در مولفه‌های تنش و اثرات ثابت ناهمگنی در توزیع مولفه‌های تنش، تصمیم گیری برای طراحی سازه‌های FGM و کنترل تنش در این مواد را دشوار می‌کند.

جدول ۵-۱- نتایج عددی تحلیل کره در لایه های داخلی، میانی و خارجی برای $n = 1$

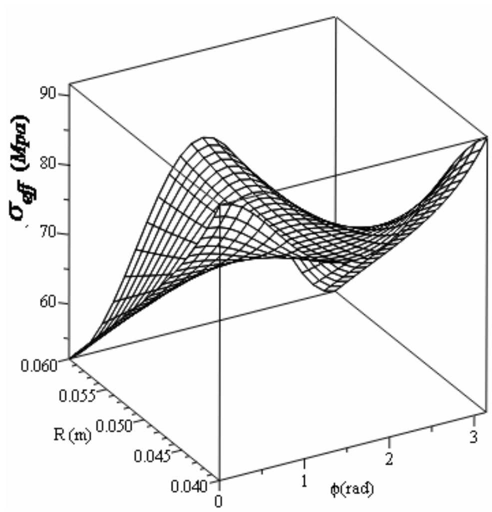
	$\sigma_r [MPa]$			$\sigma_\theta [MPa]$			$\sigma_\phi [MPa]$		
$\phi(Rad)$	*inner*	*middle*	*outer*	*inner*	*middle*	*outer*	*inner*	*middle*	*outer*
0	***-80***	***-24.741***	***0***	*91.690*	***69.176***	***52.082***	***91.690***	***69.176***	***52.082***
$\pi/4$	***-80***	***-25.865***	***0***	***90.593***	***77.209***	***68.666***	***75.307***	***66.025***	***61.583***
$\pi/2$	***-80***	***-26.989***	***0***	***89.497***	***85.243***	***85.250***	***58.925***	***62.874***	***71.084***

۴-۵- بررسی توزیع تنش موثر در مواد FG

با درنظر گرفتن رابطه‌ی(۲-۴۹)و (۲-۴) رابطه‌ی تنش فن میزس در یک کره‌ی چرخان به صورت زیر می‌باشد.

$$\sigma_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\sigma_r - \sigma_\phi\right)^2 + \left(\sigma_\phi - \sigma_\theta\right)^2 + \left(\sigma_r - \sigma_\theta\right)^2 + 3\tau_{r\phi}^2} \qquad (۴-۵)$$

با درنظر گرفتن رابطه‌ی(۴-۵)و همچنین با توجه به مطالب ارائه شده در بخش قبل نمودار مربوط به تنش موثر در حالتی که $n=1$باشد در شکل (۴-۱۲) آورده شده‌است. همانطور که در این شکل مشاهده می‌شود بیشترین تنش فن میزس در جدار داخلی و در زوایای $\phi = 0, \pi/2$ رخ می‌دهد. و کمترین تنش در جدار خارجی و در زوایای $\phi = 0, \pi/2$ رخ می‌دهد. لذا بیشترین تغییرات تنش فن میزس در راستای ضخامت، در زوایای $\phi = 0, \pi/2$ و کمترین تغییرات تنش در راستای ضخامت، در زاویه $\phi = \pi/4$اتفاق می‌افتد. لذا منطقه‌ی بحرانی در جدار داخلی و در در زوایای $\phi = 0, \pi/2$ قرار دارد که در طراحی این نوع سازه‌ها می بایست به آن توجه کرد.



شکل ۴-۱۲: تغییرات تنش فن میسز (کره‌ی چرخان تحت فشار داخلی) $n=1$

فصل ۵

تحلیل ترموالاستیک کره‌های جدارضخیم چرخان

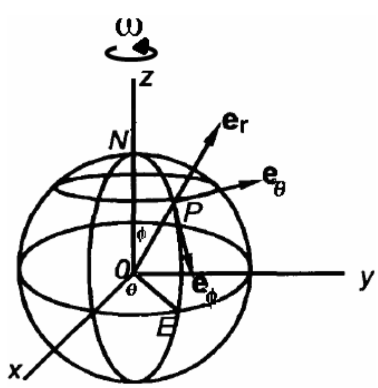
۵-۱- مقدمه

در این فصل یک کره‌ی جدارضخیم چرخان که تحت فشار داخلی و تحت انتقال حرارت پایدار قرار دارد مورد مطالعه قرار داده می‌شود. با در نظر گرفتن جنس کـره از مـواد FG معـادلات تعـادل و در نتیجه معادلات ناویر یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل کوپل شده با مشتقات جزیی می‌باشند.

لذا در این فصل نیز از مدل FEM ارائه شده در فصل قبل استفاده کرده و در این قسمت نوع بـار گذاری، به بارگذاری حجمی تغییر می‌یابد، و به بررسی اثر ثابت در توزیع تـنش و جابجـایی پرداختـه می‌شود.

۵-۲- فرمول بندی کره های چرخان FGM

یک کره‌ی جدار ضخیم، با شعاع داخلی a و شـعاع خـارجی b و شـعاع بـی‌بعـد r کـه بـصورت $r=\frac{R}{a}$ نرمالیز شده که در آن R مقداری میان a و b دارد، درنظر گرفته می‌شود. برای تحلیل فـوق دستگاه مختصات (R,ϕ,θ) که مبدا آن مرکز کره می‌باشد در نظر گرفته شده است. دراین قسمت به بررسی تنش های ایجاد شده در اثردوران یک کره‌ی جدار ضخیم در حالـت الاسـتیک حـول محـورz (چنانچه در شکل زیر مشاهده می کنیم) می‌پردازیم. هندسه‌ی کره نسبت به محورهای مختـصات در شکل(۱) نشان داده شده است.



شکل ۵-۱: مختصات کروی

فرضیاتی که دراین قسمت درنظرگرفته‌ایم عبارتنداز:

۱- بارگذاری فشاری و در راستای شعاعی می‌باشد.

۲- در تحلیل پوسته‌های کروی FGMجنس کره از مواد ناهمگن و همسانگرد می باشد. که در آن خواص مکانیکی به جز ضریب پواسون در راستای ضخامت کره به صورت تابعی توانی از شعاع کره تغییر می‌کند.

۳- انتقال حرارت به صورت یک‌بعدی و درشرایط دما-حالت پایدار صورت می‌گیرد.

۴- شرایط مرزی دمایی در سطح داخل و خارج به صورت کلی در نظر گرفته می‌شود.

۵- دوران حول محور z و با سرعت زاویه‌ای ثابت می باشد.

به دلیل تقارن در هندسه کره و بار گذاری متقارن $u_\theta = 0$ ومی توان نوشت.

$$\frac{\partial}{\partial\theta} = 0 \qquad (۱-۵)$$

لذا تانسور تنش و جابجایی در یک کره ی جدار ضخیم به صورت روابط زیر ارائه می‌شود.

$$\left[\sigma_{ij}\right] = \begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{r\phi} & 0 \\ \tau_{r\phi} & \sigma_\phi & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\theta \end{bmatrix} \qquad (۲-۵)$$

$$\left[u_i\right] = \begin{Bmatrix} u_r \\ u_\phi \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (۳-۵)$$

تغییرات مدول الاستیسیته، ضریب انبساط حرارتی، ضریب انتقال حرارت هدایت و دانسیته برای مواد FG به صورت تابعی توانی از شعاع کره به صورت زیر فرض می‌شود.

$$E(r) = E_i r^{n_1}\ ,\ \alpha(r) = \alpha_i r^{n_2}\ ,\ \lambda(r) = \lambda_i r^{n_3}\ ,\ \rho(r) = \rho_i r^{n_4} \qquad (۴-۵)$$

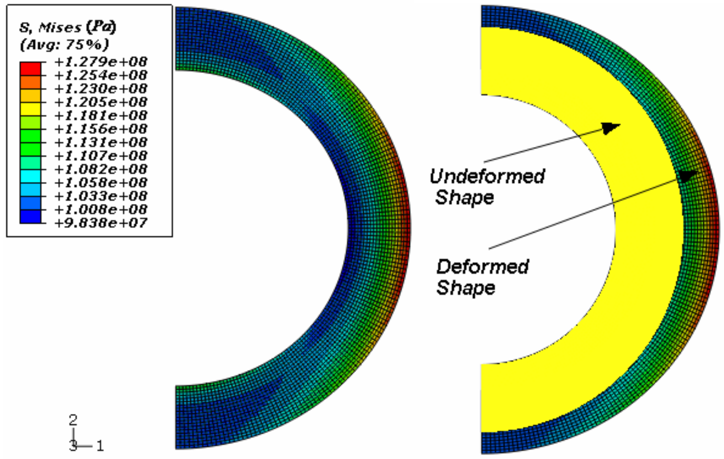
که در آن و $n_i(i=1..4)$ ثابت ناهمگنی می‌باشند. با جایگذاری $r=1$ در رابطه‌ی بالا می‌توان E_i، α_i، λ_i و ρ_i را که به ترتیب مدول الاستیسیته ، ضریب انبساط حرارتی، ضریب انتقال حرارت هدایتی و دانسیته در جدار داخلی کره می‌باشند را بدست آورد. همچنین ضریب پواسون ثابت در نظر گرفته می‌شود.

۵-۳- تحلیل المان محدود

در این حالت نوع حل از حالت استاتیک به حالت دما-حالت پایدار تغییر می‌یابد. برای اعمال شرایط مرزی سه نوع بارگذاری لحاظ شده‌است. الف-بارگذاری فشاری در سطح داخل کره ب-بارگذاری حاصل از نیروی حجمی(دورانی) که در آن بردار سرعت زاویه‌ای در راستای z می‌باشد. ج-بارگذاری حاصل از از کوپل دمائئ را می‌توان با تعریف شرایط مرزی دمایی را به مدل اضافه کرد. که می‌توانند به صورت کلی با تعریف ضریب انتقال حرارت جابجایی محیط و یا به صورت خاص با اعمال دما در سطح داخل و خارج باشد. المان‌های مورد استفاده در تحلیل، از نوع CAX8RHT می‌باشند.

گره‌های مربوط به مرز افقی که امتداد آن از مرکز کره می‌گذرد بواسطه‌ی تقارن در راستای عمودی مقید شده اند.

شکل(۵-۲) تغییر شکل و توزیع تنش‌های فن میزس در مدل را تحت فشار داخلی $(p=80MPa)$ نشان می‌دهد در آن دمای سطح داخلی $T_i=300(^{o}C)$ ودمای سطح خارجی $T_o=25(^{o}C)$ و ثابت ناهمگنی $n_i(i=1..4)=1$ در نظر گرفته شده است. و کره با سرعت زاویه‌ای $\omega=1000(Rad/S\text{ec})$ دوران می‌کند.



شکل ۵-۲: تغییرشکل و توزیع تنش فن میزس در کره‌ی چرخان FGM تحت فشار داخلی و انتقال حرارت پایدار

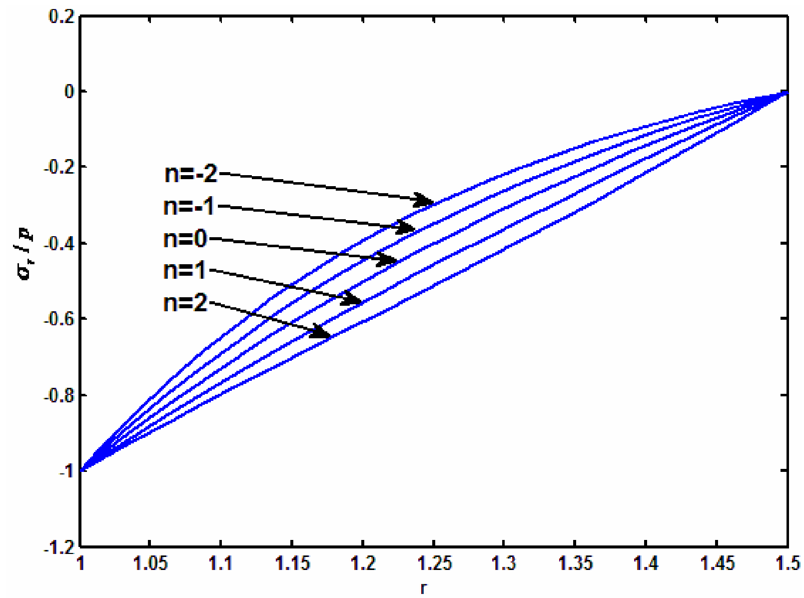
۵-۴- بحث و مطالعه ی موردی

حل المان محدود ارائه شده در این فصل را می‌توان برای مثالهای مختلفی بررسی کرد. برای مطالعه‌ی موردی یک کره‌ی جدار ضخیم با شعاع داخلی $a = 0.04\,m$ وشعاع خارجی $b = 0.06\,m$ در نظر گرفته می‌شود. مدول الاستیسیته ، ضریب انبساط حرارتی و دانسیته‌ی کره در جدار داخلی به ترتیب $E_i = 200\,GPa$ و $\alpha = 1.2\times10^{-6}\ \frac{1}{^oC}$ و $\rho_i = 7860\,kg/m^3$ در نظر گرفته و فرض می‌شود که ضریب پواسون برابر با $\nu = 0.3$ باشد. در یک حالت خاص،ثابت ناهمگنی برای مدول الاستیسیته و ضریب انبساط حرارتی و همچنین ضریب انتقال حرارت هدایتی با هم برابر $(n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n)$ فرض می‌شود.

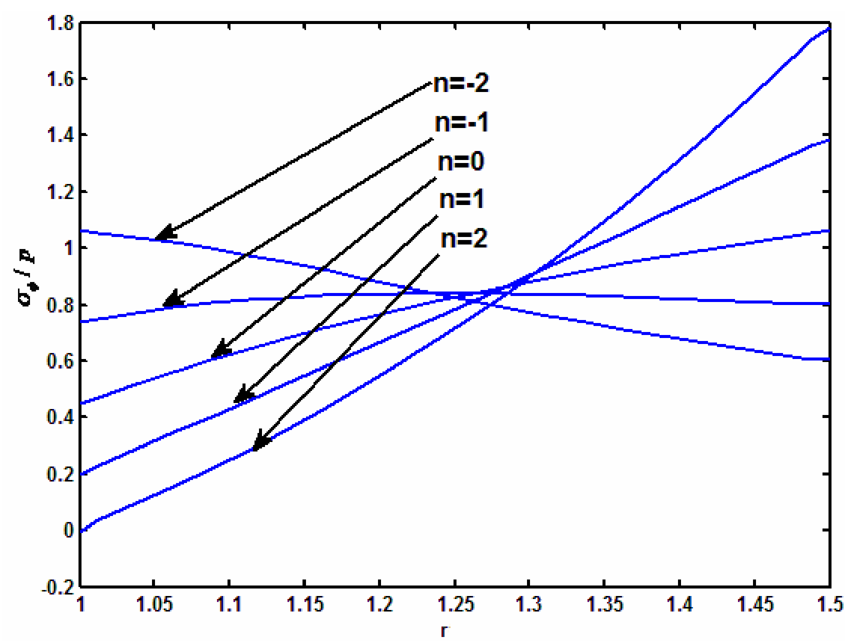
فشار یکنواخت داخلی برابر با $(p = 80MPa)$ فرض شده و سرعت زاویه‌ای ثابت و برابر با $\omega = 1000\,Rad/Sec$ در نظر گرفته می‌شود. همچنین دمای سطح داخلی $T_i = 300\,^oC$ و دمای سطح خارجی دمای محیط $T_o = 25\,^oC$ باشد.

الف) بررسی تغییرات تنش و جابجایی در راستای ضخامت برای $\phi = \pi/4$

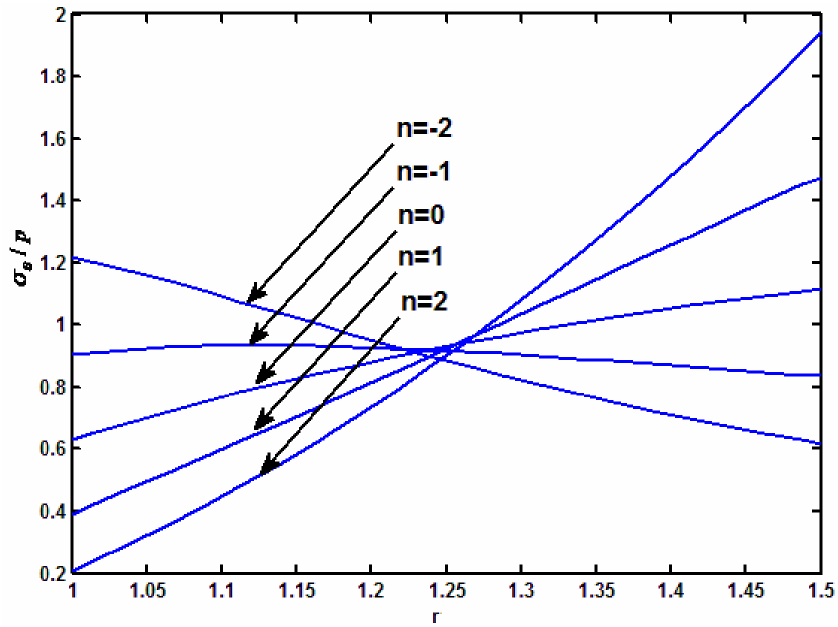
به عنوان نمونه، برای $\phi = \pi / 4$ تغییرات تنش و جابجایی در راستای ضخامت در شکل‌های (۵-۳) تا (۵-۸) آورده شده است.



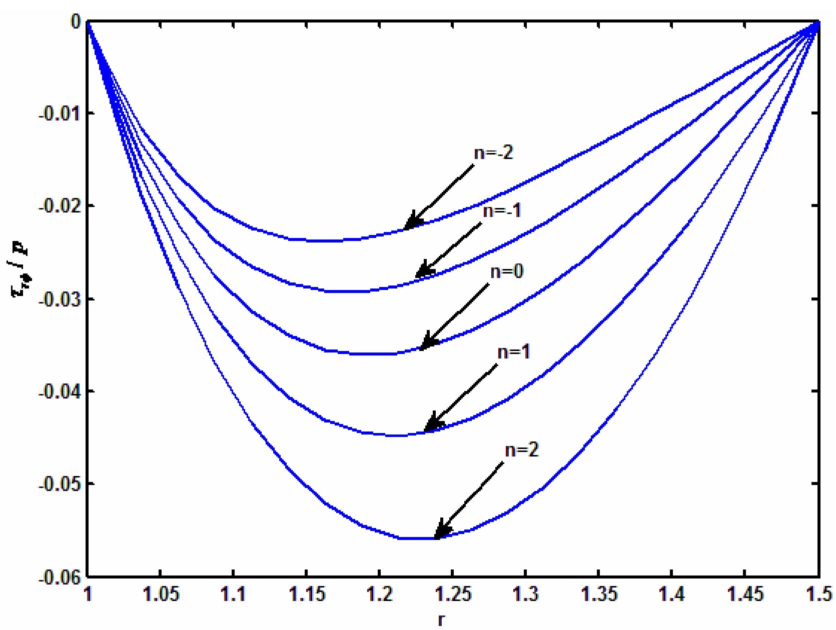
شکل ۵-۳: تغییرات تنش شعاعی در راستای ضخامت برای $\phi = \pi / 4$



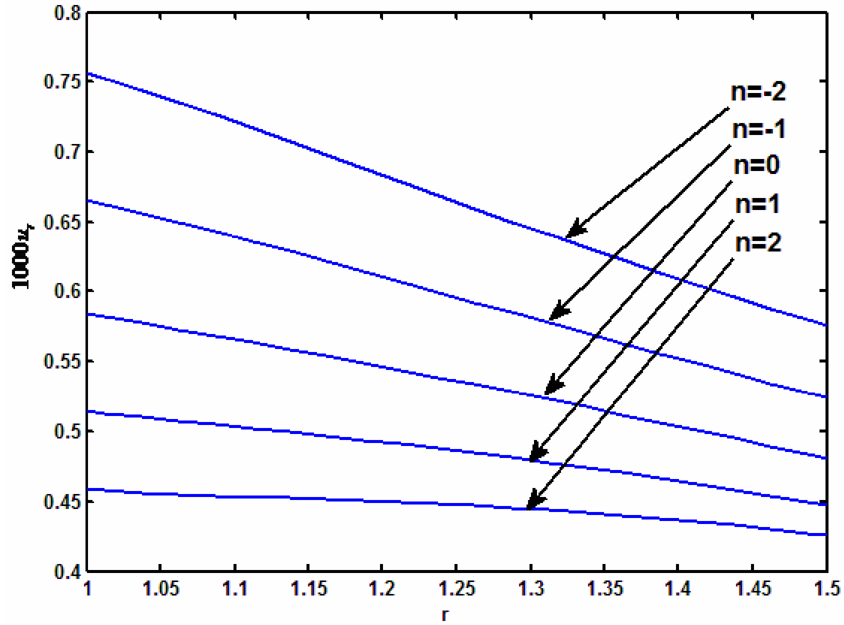
شکل ۵-۴: توزیع تنش نصف‌النهاری در راستای ضخامت برای $\phi = \pi / 4$(کره‌ی چرخان تحت فشارو دما)



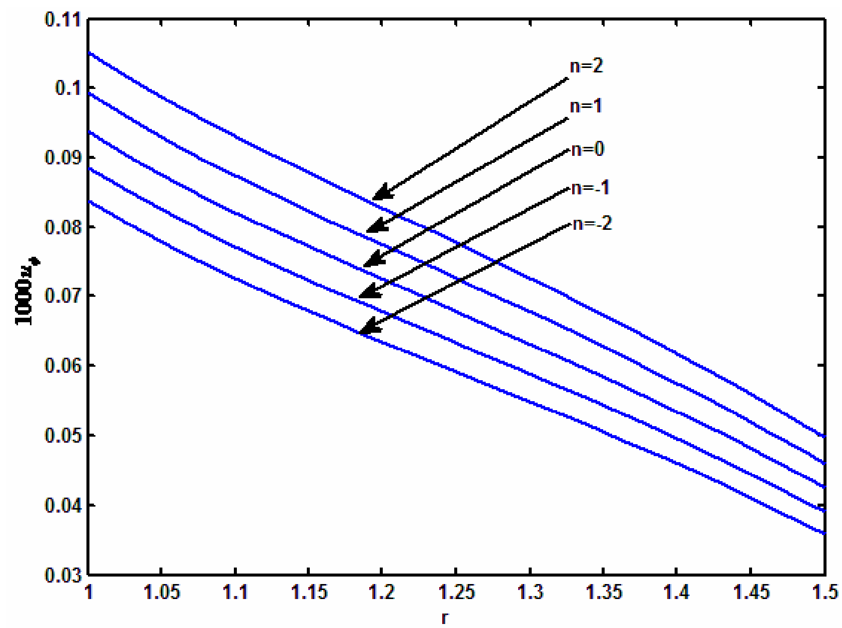
شکل ۵-۵: توزیع تنش محیطی در راستای ضخامت برای $\phi = \pi / 4$ (کره‌ی چرخان تحت فشار و دما)



شکل ۵-۶: تغییرات تنش برشی در راستای ضخامت برای $\phi = \pi / 4$ (کره‌ی چرخان تحت فشار و دما)



شکل ۵-۷: توزیع جابجایی شعاعی در راستای ضخامت برای $\phi = \pi / 4$ (کره‌ی چرخان تحت فشار و دما)



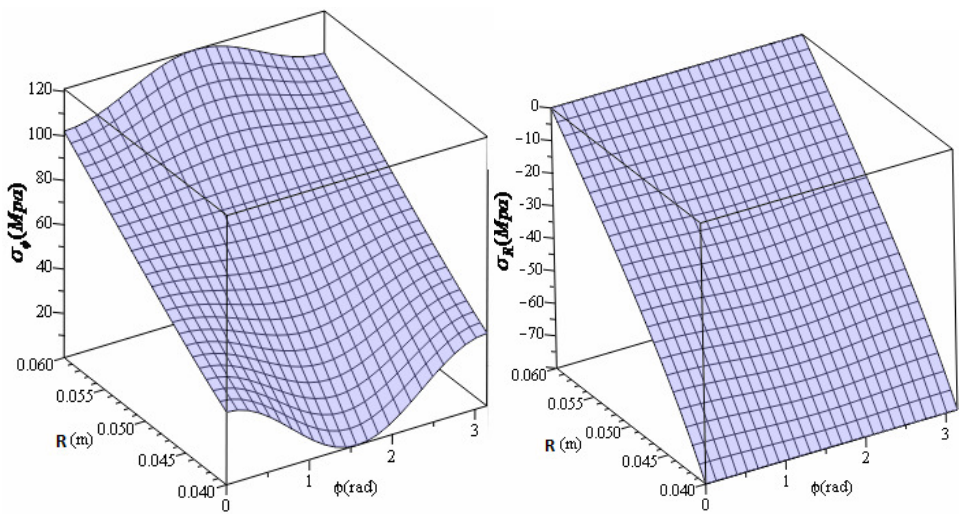
شکل ۵-۸: جابجایی نصف‌النهاری در راستای ضخامت برای $\phi = \pi / 4$ (کره‌ی چرخان تحت فشار و دما)

همانطور که در این شکل‌ها مشاهده می‌شود ثابت ناهمگنی n در توزیع تنش و جابجایی تاثیر زیادی دارد. به طوری که به عنوان مثال در شکل‌های(۵-۳) و (۵-۶) افزایش n باعث کاهش تنش

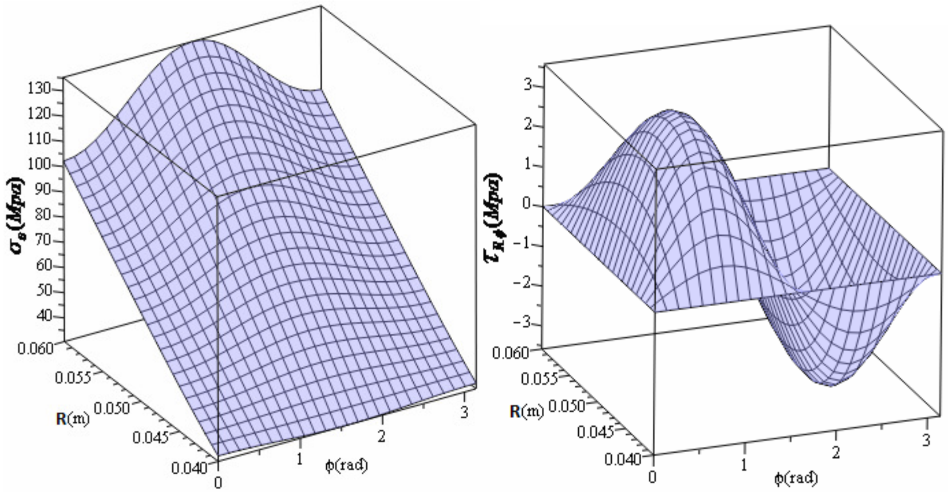
شعاعی و تنش برشی می‌شود، در حالی که برای تنش‌های محیطی و نـصف‌النهـاری افـزایش n باعـث کاهش تنش در جدار داخلی، و افزایش تنش در جدار خارجی می‌شود و برای جابجایی شعاعی افزایش ثابت ناهمگنی باعث کاهش آن می‌شود. همچنین با توجه به شکل (۵-۸) افزایش ثابت ناهمگنی باعث افزایش جابجایی نصف‌النهاری می‌شود.

ب) بررسی تغییرات تنش و جابجایی در راستای ϕ برای $n=1$

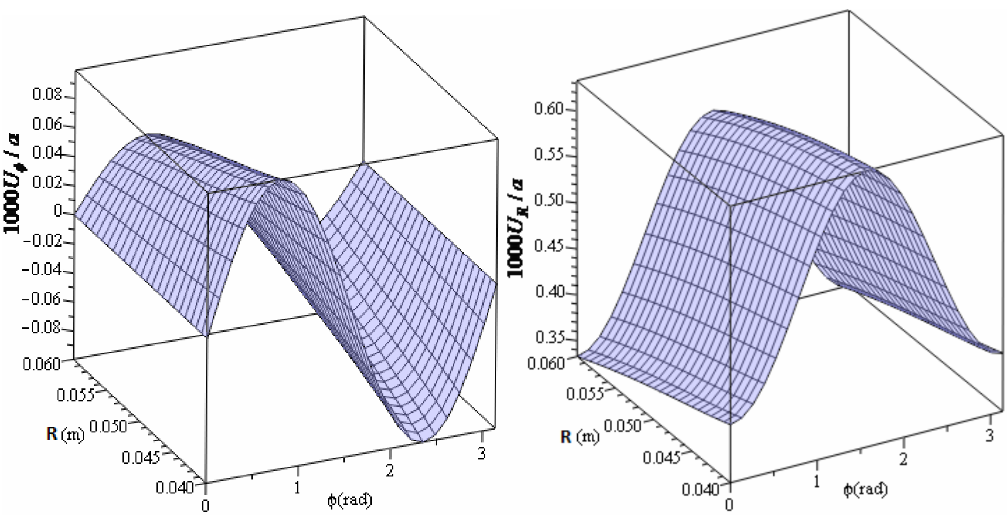
برای مطالعه‌ی تغییرات تنش وجابجایی در راستای ϕ، با در نظر گرفتن $n=1$ (بـه عنـوان نمونـه)، شکل‌های (۵-۹) تا (۵-۱۴) آورده شده‌است.



شکل ۵-۹: تغییرات تنش شعاعی و نصف‌النهاری برای $n=1$ (کره‌ی چرخان تحت فشار و دما)



شکل ۵-۱۰: تغییرات تنش برشی و محیطی برای $n=1$ (کره‌ی چرخان تحت فشار و دما)



شکل ۵-۱۱: تغییرات جابجایی شعاعی و نصف‌النهاری برای $n=1$ (کره‌ی چرخان تحت فشار و دما)

این رفتار مشابه شکل‌های (۴-۹) تا (۴-۱۱) است.

فصل ۶

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

۶-۱- مقدمه

مخازن کروی، به دلیل تقارن در هندسه، قابلیت توزیع مناسب تنش‌های ایجاد شـده در اثـر انـواع بارگذاری‌های متقارن (مکانیکی، دمایی و حجمی) از مقاومت بالایی برخوردار هستند. به طوری که این نوع سازه‌ها کاربرد فراوانی در صنعت دارند. دست یابی به روش های مختلف تحلیل این گروه از پوسته-ها ، مادّه و بارگذاری های متنوع، مورد علاقه‌ی پژوهشگران و نیاز صنعتگران بوده و همچنان می باشد.

در این پایان‌نامه، رفتار پوسته‌های کـروی جـدار ضـخیم از مـواد همگـن و نـاهمگن تحـت تـاثیر بارگذاری‌های فشاری، دمایی و دورانی بررسی شده‌است. در این فصل با نگاهی گذرا به فصول قبل بـه طور خلاصه به جمع‌بندی و نتیجه‌گیری و پیشنهادهایی برای ادامه کار پیشنهاد می‌شود.

۶-۲- نتیجه گیری

اگر مقایسه‌ای میان روابط ارائه شده انجام شود می‌توان به یک نتیجه‌گیری کلی که اصل جمع آثار برای بارگذاری‌های فشاری، دمایی و دورانی برقرا است، رسید. به طوری که به عنـوان مثـال چـون در بارگذاری حرارتی تنش برشی و جابجایی نصف النهاری ایجاد نمی‌شود لـذا تـنش برشـی و جابجـایی نصف‌النهاری در این دو فصل کانتور یکسانی دارند. لذا به طور کلی می‌توان نتیجه‌ی زیر را پوسته‌های کروی الاستیک نوشت:

تنش کلی=تنش حاصل از بارگذاری فشاری+تنش حاصل ازبارگذاری حجمی+ تنش حاصل از بارگذاری حرارتی

جابجایی کلی=جابجایی حاصل از بارگذاری فشاری+ جابجایی حاصل بارگذاری حجمی+ جابجـایی حاصل ازبارگذاری حرارتی

به طور خلاصه مواردی که می‌توان از این تحقیق نتیجه گرفت به شرح زیرمی‌باشد:

- در پوسته‌های کروی تحت فشارخالص تنش فشاری مستقل ازخواص مکانیکی در جدار داخلی می باشد، درحالی که تنش محیطی و جابجایی وابسته است.
- در بارگذاری های فشاری و دمایی، تنش محیطی عموما اثر غالب را دارد.
- ثابت ناهمگنی در FGMها پارامتر بسیار مفیدی از نقطه نظر طراحی می‌باشد که می‌تواند توزیع تنش را برای یک کاربردی خاص کنترل کند. همچنن می‌توان با استفاده از آن، توزیع تنش را در راستای جداره بهینه کرد، به طوری که تغییرات تنش در آن حداقل ممکن باشد.
- روش المان محدود در تحلیل مسائل مواد ناهمگن از دقت مناسبی برخوردار می باشد، لذا می‌توان در شرایطی که شکل هندسی مسئله یا بارگذاری پیچیده باشد از روش المان محدود با دقت مناسبی بهره جست.
- تغییرات ثابت ناهمگنی درپوسته های کروی FGM تاثیر چشم گیری در توزیع تنش شعاعی ندارد در حالیکه این تغییرات اثر قابل توجه ای در توزیع تنش های محیطی، نصف النهاری و برشی دارد به طوری که در شرایطی حتی باعث معکوس کردن روند تغییرات کاهشی و یا افزایشی در راستای شعاعی می‌شود.
- از آنجایی که بارگذاری دورانی در راستای شعاعی و نصف النهاری مولفه دارد لذا باعث ایجاد جابجایی شعاعی و نصف‌النهاری شده و در نتیجه کره تقارن خود را در راستای نصف النهاری از دست می‌دهد. اما همچنان می‌توان در این شرایط کره را در حالت تقارن محوری در راستای محیطی در نظر گرفت.
- توزیع تنش و جابجایی در کره های چرخان در راستای نصف‌النهاری به صورت پریودیک می‌باشد به طوری که این توزیع در تنش های برشی و جابجایی نصف النهاری به صورت توابع سینوسی و سایر مولفه ها به صورت توابع کسینوسی است.

- در بارگذاری دورانی تنش‌های محیطی و نصف‌النهاری (خصوصا تنش محیطی) تنش‌های بحرانی محسوب می‌شود که بایستی در طراحی مد نظر قرارگیرند در این میان تنش‌های برشی و شعاعی از اهمیت کمتری در طراحی برخوردار هستند.
- تغییرات جابجایی‌های شعاعی و نصف‌النهاری در بارگذاری دورانی در راستای نصف‌النهاری بسیار بزرگتر از مقدار آن در راستای شعاعی است.
- اصل جمع آثار برای بارهای مکانیکی، ترمومکانیکی و بارهای حجمی در پوسته های کروی FGM در صورتی که در ناحیه‌ی الاستیک تحلیل شود صادق است.

۶-۳- پیشنهادها

ازکارهایی که می‌توان پیشنهاد کرد می‌توان به موارد زیراشاره کرد:

۱-حل کره FGM تحت فشار غیر یکنواخت متغیّر با زمان $p = p(\phi, t)$

۲- حل کره FGM تحت فشار غیر یکنواخت سه بعدی $p = p(r, \phi, \theta)$

۳- حل کره FGM تحت انتقال حرارت گذار $\Theta = \Theta(\phi, t)$ با تغییرات نمایی خواص

۴-حل تحلیلی کره‌ی چرخان تحت کوپل حرارتی وفشاری

۵-حل الاستو پلاستیک کره‌ی تحت فشار و دما

۶-تحلیل کره‌های چرخان از مواد FGM در شرایطی که خواص مادّه به صورت نمایی تغییر کند.

مراجع

[3] Flugge, W., (1990); Stress in Shells, 2nd edition. Springer-Verlag, Berlin.

[4] Timoshenko, S.P. (1976); Strength of Materials: Part II (Advanced Theory and Problems), 3rd ed., Van Nostrand Reinhold Co., New York.

[5] Naghdi, P.M. Cooper R.M. (1956); Propagation of elastic waves in cylindrical shells including the effects of transverse shear and rotary inertia, J. Acoustical Sc. America., vol. 28(1), pp. 56-63.

[6] www.neyrperse.ir/fa

[7] Brown, C.B., Goodman, L.E., (1963); Gravitational stresses in accreted bodies. Proceedings of the Royal Society of London, Series A 276,

[8] Kadish, J., Barber, J.R., Washabaugh, P.D., Scheeres, D.J., (2008); Stresses in accreted planetary bodies, International Journal of Solids and Structures., vol .45, pp. 540-550.

[9] Koizumi, M. (1997); FGM activities in Japan, Composites: Part B(Engineering)., vol. 28, pp. 1-4.

[10] Timoshenko, S.P., Woinowsky-Krieger, S.; (1959). Theory of Plates and Shells, 2nd edition. McGraw-Hill, New York.

[11] Hopkinson J. (1879); Thermal stresses in a sphere, whose temperature is a function of r only, Mess. Math., vol. 8, pp. 168-175.

[12] Cheung J.B., Chen T.S., Thirumalai K. (1974); Transient thermal stresses in a sphere by local heating, Trans ASME J. Appl. Mech., vol. 41(4), pp. 930-934.

[13] Raju, P.P. (1975); On shallow shells of transversely isotropic materials, Trans. ASME J. Pressure Vessel Technology., vol. 97(3), pp.185-191.

[14] Takeuti Y., Tanigawa Y. (1982); Transient thermal stresses of a hollow sphere due to rotating heat source, J. Therm. Stresses., vol. 5(3-4), pp. 283-298.

[15] Lekhnitskii S.G.(1981); Theory of Elasticity of an Anisotropic Body, Moscow, Mir Pub.

[16] Tanigawa Y., (1995); Some basic thermoelastic problems for nonhomogeneous structural materials. Appl Mech Rev; vol. 483, pp.77–89.

[17] Obata Y., Noda N. (1994); Steady thermal stresses in a hollow circular cylinder and a hollow sphere of a functionally gradient material, J. Therm. Stresses, vol. 17(3), pp. 471–487.

[18] Tutuncu N., Ozturk M. (2001); Exact solutions for stresses in functionally graded pressure vessels, Composites, Part B, vol. 32, pp. 683–686.

[19] Kim, K.S., Noda, N., (2002); Green's function approach to unsteady thermal stresses in an infinite hollow cylinder of functionally graded material. Acta Mech; vol.156, pp.145–61.

[20] Praveen, G.N., Reddy, J.N., (1998). Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic–metal plates. Int J Solids Structure; vol. 35, pp.4457–76.

[21] Reddy, J.N., Chin, C.D., (1998). Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates. Int J Solids Struct; vol. 21, pp.593–626.

[22] Praveen, G.N., Chin, C.D., Reddy. J.N., (1999). Thermoelastic analysis of a functionally graded ceramic–metal cylinder. ASCE J Eng Mech; vol. 125, pp.1259–67.

[23] Reddy, J.N., (2000). Analysis of functionally graded plates. Int J Numer Meth Eng ; vol. 47, pp. 663–84.

[24] Reddy, J.N., Cheng, Z.Q., (2001). Three-dimensional thermomechanical deformations of functionally graded rectangular plates. Eur J Mech A: Solid; vol. 20, pp. 841–60.

[25] Reddy, J.N., Cheng, Z.Q., (2003). Frequency of functionally graded plates with three-dimensional asymptotic approach. J Eng Mec; vol. 129, pp. 896–900.

[26] You, L.H., Zhang, J.J., You, X.Y., (2004); Elastic analysis of internally pressurized thick-walled spherical pressure vessels of functionally graded materials: Int. J. of Pressure Vessels and Piping; vol. 82, pp. 347–354.

[27] Eslami, M.R., Babaei, M.H., and Poultangari, R. (2005); "Thermal and mechanical stresses in a fg thick sphere". Int. J. of Pressure Vessels and Piping, vol. 82, pp. 522-527.

[28] Wang, H.M., Ding, H.J., (2006); Transient responses of a magneto-electro-elastic hollow sphere for fully coupled spherically symmetric problem. European Journal of Mechanics A/Solids, vol. 25, pp. 965–980.

[29] Tutuncu, N., (2007); Stresses in thick-walled FGM cylinders with exponentially-varying properties. Eng. Struct. vol. 29, pp. 2032–2035.

[30] Tutuncu, N., Temel, B., (2009); A novel approach to stress analysis of pressurized FGM cylinders, disks and spheres. Composite Structures. vol. 91, pp. 385–390.

[31] Ghosh, M. K., Kanoria, M., (2009); Analysis of thermoelastic response in a functionally graded spherically isotropic hollow sphere based on Green–Lindsay theory. Acta Mech. vol. 207, pp. 51-67.

[32] Ghorbanpour, A., Salari, M., Khademizadeh, H., Arefmanesh, A., (2009); Magnetothermoelastic transient response of a functionally

graded thick hollow sphere subjected to magnetic and thermoelastic fields. Arch Appl Mech. vol. 79, pp. 481–497.

[۳۳] قنّاد، مهدی.، رحیمی، غلامحسین.، سیامک، اسماعیل زاده خادم.، (۱۳۸۹): حلّ کلی استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری ساخته شده از مواد FG با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی، مجلّه‌ی فنی مهندسی مدرس مهندسی مکانیک، دوره ۱۰، شماره ۳، ص ص ۳۱-۴۱.

[۳۴] قنّاد، مهدی.، رحیمی، غلامحسین.، سیامک، اسماعیل زاده خادم.، (۱۳۸۹): حلّ کلی استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری ساخته شده از مواد FG با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی، مجلّه‌ی فنی مهندسی مدرس مهندسی مکانیک، دوره ۱۰، شماره ۴، ص ص ۱۳-۲۶.

[35] Borisov A.V. (2010); Elastic analysis of multilayered thick-walled spheres under external load, Mechanika, Kaunas: Technologija, vol. 4(84), pp. 28-32.

[36] Sadd, H., (2009); Elasticity theory, applications, and numerics, 2e. Burlington, MA01803, USA.

[37] Hetnarski, B., Eslami, M.,(2009); Termal Stresses-Advanced Theory And Applications, Springer, USA.

Abstract

Thermo-mechanical analysis of functionally graded hollow sphere subjected to rotational, mechanical loads and one-dimensional steady-state thermal stresses is carried out in this study. The material properties are assumed to vary nonlinearly in the radial direction and the Poisson's ratio is assumed constant. The temperature distribution is assumed to be a function of radius, with general thermal and mechanical boundary conditions on the inside and outside surfaces of the sphere. In the analysis presented here the effect of non-homogeneity in FGM thick sphere was implemented by choosing a dimensionless parameter, named $n_i\,(i=1..4)$, which could be assigned an arbitrary value affecting the stresses in the sphere. It is observed that the results for $n_i\,(i=3)=-1$ are different from those obtained for other values of $n_i\,(i=1..4)$. Cases of pressure, temperature and combined loadings were considered separately. Using FEM simulations, the analytical findings for FGM spheres under the influence of internal pressure and temperature gradient were compared to finite element results. Eventually, the finite element analysis was carried on the hollow rotational sphere which were considered general boundary conditions involving mechanical and tehemomechanical bounary conditions. It is concluded that by changing the value of $n_i\,(i=1..4)$, the properties of FGM can be so modified that the lowest stress levels are reached. The present results agree well with existing results. Besides, the sopureposition laws are valided in the hollow FGM shperes.

Key words: FGM, FEM, Hallow sphere, Thermoelastic, Rotational sphere.

Shahrood University of Technology

Mechanical Engineering Faculty

Title:

Thermoelastic Analysis of FGM Rotating Thick-Walled Spheres under Internal Pressure

Yahya Bayat

Supervisor(s):

Dr. M. Ghannad

Dr. H.R. Eipakchi

Sep 2011