

اللَّهُمَّ صَلِّ عَلَى مُحَمَّدٍ
وَعَلَى آلِهِ
وَسَلِّمْ



دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک

پایان نامه کارشناسی ارشد مهندسی طراحی کاربردی

تحلیل اثر پتانسیل های محلی و عمومی چاه غیرخطی انرژی بر روی جذب انرژی ارتعاشی سیستم

نگارنده: آرش خلعتبری

اساتید راهنما

دکتر امیر جلالی

دکتر حبیب احمدی

دی ماه ۱۳۹۸

شماره: ۳۵/۲۹۹/۱۰۲
تاریخ: ۹۹/۲/۳۱

باسمه تعالی



فرد شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد آقای آرش خلعتبری با شماره دانشجویی ۹۶۰۶۱۳۴ رشته مهندسی مکانیک گرایش طراحی کاربردی تحت عنوان تحلیل اثر پتانسیل های محلی و عمومی چاه غیرخطی انرژی بر روی جذب انرژی ارتعاشی سیستم که در تاریخ ۱۳۹۸/۱۱/۷ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

الف) درجه عالی: نمره ۱۹-۲۰ ب) درجه خیلی خوب: نمره ۱۸-۱۸/۹۹
 ج) درجه خوب: نمره ۱۶-۱۷/۹۹ د) درجه متوسط: نمره ۱۴-۱۵/۹۹
 ه) کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد
 نوع تحقیق: نظری عملی

عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنمای اول	دکتر امیر جلالی	استادیار	
۲- استاد راهنمای دوم	دکتر حبیب احمدی	دانشیار	
۳- استاد مشاور			
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر مهدی حیدری	استاد یار	
۵- استاد ممتحن اول	دکتر سید علی سینا	استادیار	
۶- استاد ممتحن دوم	دکتر حمیدرضا ایپکچی	دانشیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر مهدی گردویی

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:



تمامی زحمات ناپحیرم را تقدیم میکنم به خانواده ام

که در عین نیاز به حضورم

نبودم را تحمل کردند.

تشکر می‌کنم از استاد ارجمندم، جناب دکتر جلالی

و همچنین، همراهی بزرگوارانه جناب دکتر احمدی

که گام‌های سست مرا استوار کردند.

تعمیر نامه

اینجانب آرش خلعتبری دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته طراحی کاربردی دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه تحلیل اثر پتانسیل های محلی و عمومی چاه غیرخطی انرژی بر روی جذب انرژی ارتعاشی سیستم تحت راهنمایی دکتر جلالی و دکتر احمدی متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود . استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده

ارتعاشات زاید در بسیاری از موارد باعث کاهش بازده کاری سیستم، کاهش عمر قطعات و گاهی نیز منجر به از بین رفتن سیستم می شود. در همین راستا جاذب‌های ارتعاشی بسیاری ساخته شد و تا امروز پیشرفت‌های زیادی در این حوزه از مهندسی شکل گرفت. یکی از موثرترین جاذب‌های ارتعاشی غیرفعال مورد استفاده در سازه‌های مهندسی روز جهان، چاه‌های غیرخطی انرژی یا **Nonlinear Energy Sinks (NES)** هستند. یک جرم کوچک با ابعادی حدود یک صدم جرم نوسان‌گر اصلی که به یک فنر غیرخطی متصل می شود، اجزاء اصلی این نوع جاذب‌ها را تشکیل می دهند. در این پایان نامه به بررسی اثر چاه غیرخطی انرژی بر روی جذب ارتعاشات دو سیستم با نوسان‌گر یک درجه آزادی خطی پرداخته می شود که نحوه‌ی اتصالات یکی از آنها به صورت پتانسیل محلی و دیگری به صورت پتانسیل عمومی می باشد. برای این کار معادلات حرکت دو سیستم با استفاده از قانون دوم نیوتون استخراج می شود. برای بررسی پاسخ مدوله قوی با استفاده از چند تغییر متغیر از جمله مانوویچ، معادلات را ساده کرده و برای بدست آوردن پاسخ، روش مقیاس‌های چندگانه در تئوری اغتشاشات، به کار گرفته خواهد شد. برای بررسی پاسخ حالت آبخاری نیز با استفاده از چند تغییر متغیر و استفاده از روش بالانس هارمونیک، معادلات به روش تحلیلی حل خواهند شد. سپس نمودارهای منیفولد نامتغیر آهسته برای هر دو حالت و هر دو سیستم بدست خواهد آمد و بررسی خواهد شد. در نهایت نمودارهای انرژی پتانسیل و جذب انرژی بدست خواهند آمد.

کلمات کلیدی: چاه غیرخطی انرژی، منیفولد نامتغیر آهسته، پتانسیل محلی و عمومی، پاسخ مدوله

قوی، پاسخ حالت آبخاری، جذب انرژی سیستم غیرخطی

فهرست مطالب

فصل ۱: مقدمه و مرور پژوهش‌های پیشین

- ۱
- ۱-۱ مقدمه..... ۲
- ۱-۲ روش‌های کنترل ارتعاشات سیستم..... ۵
- ۱-۲-۱ جاذب‌های غیرفعال..... ۵
- ۲-۲-۱ جاذب‌های نیمه فعال..... ۶
- ۳-۲-۱ جاذب‌های فعال..... ۶
- ۴-۲-۱ جاذب‌های خطی..... ۶
- ۱-۲-۵ جاذب‌های غیرخطی..... ۸
- ۶-۲-۱ چاه غیرخطی انرژی..... ۹
- ۱-۳ مروری بر ادبیات فنی و کارهای پیشین..... ۱۳
- ۱-۳-۱ سابقه موضوعی..... ۱۳
- ۲-۳-۱ جمع‌بندی و اهداف تحقیق..... ۲۱

فصل ۲: معرفی، مدل‌سازی و تحلیل مدل I

- ۲-۱ مقدمه..... ۲۴
- ۲-۲ بررسی پاسخ مدوله قوی یک سیستم غیر متصل به زمین دارای چاه غیرخطی انرژی (مدل I)..... ۲۴
- ۲-۳ بررسی پاسخ حالت آبخاری مدل I..... ۳۸

فصل ۳: معرفی، مدل‌سازی و تحلیل مدل II

- ۱-۳ بررسی پاسخ مدوله قوی یک سیستم متصل به زمین دارای چاه غیرخطی انرژی..... ۴۶

۲-۳ بررسی پاسخ حالت آبخاری مدل II ۵۹

۳-۳ بررسی دامنه نوسانات در سیستم مدل II ۶۵

۴-۳ بررسی انرژی پتانسیل مدل II ۷۰

۵-۳ میزان جذب انرژی توسط مدل II ۷۱

فصل ۴ : نتایج و پیشنهادات ۷۷

۴-۱ بررسی کلی نتایج ۷۸

۲-۴ پیشنهادات ۷۹

پیوست ۸۰

مراجع ۸۱

فهرست جدول‌ها

جدول ۱-۲ - پارامترهای مدل I	۳۵
جدول ۱-۳ - پارامترهای مدل II	۵۶

فهرست شکل‌ها

تصویر ۱-۱ - پل تاکوما بعد از فروپاشی در اثر ارتعاشات ناشی از باد	۳
تصویر ۱-۲ - استفاده از جاذب ارتعاشاتی برای ضد زلزله کردن ساختمان‌ها	۳
تصویر ۱-۳ - استفاده از جاذب‌های ارتعاشاتی برای کنترل ارتعاشات پل	۴
تصویر ۱-۴ - پایه‌های جاذب ساخته شده برای پل گلدن گیت	۴
تصویر ۱-۵ - استفاده از لرزش‌گیر برای حذف ارتعاشات مضر اخلاص گر روی خلبان خودکار پهپاد	۴
تصویر ۱-۶ - شکل نمادین و واقعی جاذب غیرفعال استوک‌بریج [1]	۵
تصویر ۱-۷ - شمایی از دمپر جرمی تنظیم شده به کار رفته در بزرگترین برج تلوزیون ژاپن	۷
تصویر ۱-۸ - نمودار نیرو بر حسب جابجایی در فنر خطی و غیرخطی [21]	۸
تصویر ۱-۹ - انواع چاه غیرخطی انرژی - الف) چاه غیرخطی غیرمتصل به زمین. ب) چاه غیر خطی متصل به زمین [21]	۹
تصویر ۱-۱۰ - الف) چاه غیرخطی هموار. ب) چاه غیرخطی ناهموار (ارتعاشی - ضربه ای) [21]	۱۰
تصویر ۱-۱۱ - یک اسیلاتور تخفیف یافته شامل یک الاکلنگ - ذخیره آب در یک سمت و یک وزنه در سمت دیگر [21]	۱۲
تصویر ۲-۱ - مدل I - شامل یک نوسان‌گر خطی و چاه غیرخطی انرژی	۲۵
تصویر ۲-۲ - منیفولد نامتغیر آهسته برای حالت مدوله قوی برای مدل I - قسمت خط چین جواب ناپایدار مسئله می‌باشد	۳۶
تصویر ۲-۳ - منیفولد نامتغیر آهسته برای پاسخ مدوله قوی با سه مقدار برای پارامتر δ برای مدل I	۳۷
تصویر ۲-۴ - نمودار انرژی پتانسیل به جابجایی در سطح‌های مختلف از انرژی برای مدل I	۳۸
تصویر ۲-۵ - نمودار منیفولد نامتغیر آهسته (SIM) در حالت آبشاری برای مدل I	۴۳
تصویر ۲-۶ - منیفولد نامتغیر آهسته برای حالت آبشاری با سه مقدار برای پارامتر δ برای مدل I	۴۴
تصویر ۲-۷ - منیفولد نامتغیر آهسته برای مقادیر بالاتر از پارامتر δ در حالت آبشاری برای مدل I	۴۴
تصویر ۳-۱ - مدل II - سیستم مورد بررسی در این بخش	۴۶
تصویر ۳-۲ - منیفولد نامتغیر آهسته (SIM) برای حالت مدوله قوی و مدل II	۵۶
تصویر ۳-۳ - منیفولد نامتغیر آهسته (SIM) برای حالت مدوله قوی مدل II و برای مقادیر متفاوت از δ_2	۵۸

تصویر ۳-۴- منیفولد نامتغیر آهسته (SIM) برای حالت مدوله قوی مدل II و برای مقادیر متفاوت از δ_1	۵۸
تصویر ۳-۵- نمودار منیفولد نامتغیر آهسته (SIM) در حالت آبشاری برای مدل II.....	۶۳
تصویر ۳-۶- منیفولد نامتغیر آهسته (SIM) برای حالت آبشاری با مقادیر متفاوت برای پارامتر δ_2 برای مدل II.....	۶۴
تصویر ۳-۷- منیفولد نامتغیر آهسته (SIM) برای حالت آبشاری مدل II و برای مقادیر متفاوت از δ_1	۶۴
تصویر ۳-۸- نمودار ارتعاشات دامنه نوسان گر خطی و چاه غیرخطی انرژی با تحریک اولیه.....	۶۵
تصویر ۳-۹- نمودار ارتعاشات دامنه چاه غیرخطی انرژی با تحریک اولیه.....	۶۶
تصویر ۳-۱۰- نمودار دامنه به زمان سیستم برای دو تحریک پی در پی.....	۶۶
تصویر ۳-۱۱- نمودار صفحه فازی نوسان گر اصلی.....	۶۷
تصویر ۳-۱۲- نمودار صفحه فازی چاه غیرخطی انرژی.....	۶۸
تصویر ۳-۱۳- نمودار ارتعاشات دامنه نوسان گر خطی (زرد) و چاه غیرخطی انرژی (آبی) با تحریک هارمونیک.....	۶۸
تصویر ۳-۱۴- مقایسه حالت وجود(زرد) و یا عدم وجود(آبی) چاه غیرخطی انرژی در سیستم برای تحریک اولیه.....	۶۹
تصویر ۳-۱۵- مقایسه حالت وجود(زرد) و یا عدم وجود(آبی) چاه غیر خطی انرژی در سیستم برای تحریک هارمونیک.....	۶۹
تصویر ۳-۱۶- نمودار انرژی پتانسیل به جابجایی برای مدل II.....	۷۰
تصویر ۳-۱۷- نمودار انرژی پتانسیل نسبت به جابجایی y و x برای مدل II.....	۷۱
تصویر ۳-۱۸- درصد اتلاف انرژی توسط دمپر چاه غیرخطی انرژی به کل سیستم برای تحریک اولیه.....	۷۳
تصویر ۳-۱۹- درصد اتلاف انرژی برای دامنه های کوچکتر از تحریک ورودی.....	۷۳
تصویر ۳-۲۰- دامنه و درصد انرژی کل لحظه ای ذخیره شده در چاه غیرخطی انرژی برای $A=0.5$	۷۵
تصویر ۳-۲۱- دامنه و درصد انرژی کل لحظه ای ذخیره شده در چاه غیرخطی انرژی برای $A=0.1$	۷۵
تصویر ۳-۲۲- دامنه و درصد انرژی کل لحظه ای ذخیره شده در چاه غیرخطی انرژی برای $A=0.0$	۷۵
تصویر ۳-۲۳- دامنه و درصد انرژی کل لحظه ای ذخیره شده در چاه غیرخطی انرژی برای $A=0.0$	۷۵

فصل ۱:

مقدمه و مرور پژوهش‌های پیشین

۱-۱ مقدمه

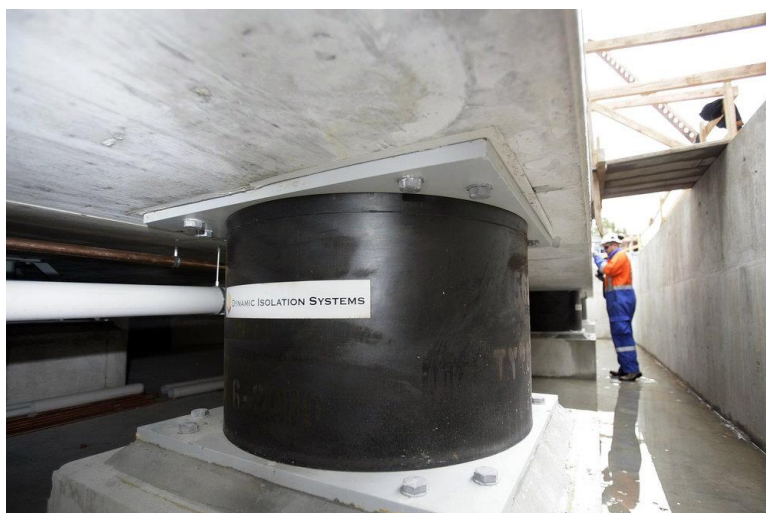
با این که ارتعاشات معمولاً نتیجه یک امر مفید یک سیستم است اما در بسیاری از موارد به عنوان یک پدیده زاید، نتیجه نامطلوبی را در پی خواهد داشت. ارتعاشات زاید در بسیاری از موارد باعث کاهش بازده کاری سیستم، کاهش عمر قطعات و گاهی نیز منجر به از بین رفتن سیستم می شود. جذب ارتعاشات ناخواسته سیستم های مکانیکی یکی از مهم ترین مشکلات در بسیاری از شاخه های مهندسی است. خودروها و هواپیماها همواره با مسائل ارتعاشی روبرو بوده اند. موتورهای رفت و برگشتی این وسایل، هر چند خوب و در شرایط بالانس طراحی و ساخته شود، باز هم به عنوان منابع ارتعاشی شناخته می شوند. در صورتی که تمهیدات ضد ارتعاشی در نظر گرفته نشود، (به عنوان مثال) موتور یک هواپیمای سبک قادر به تولید ارتعاشی خواهد شد که تنشهای ناشی از آن می تواند منجر به حوادث وخیمی شود. از منابع دیگر ارتعاش می توان به برهمکنش دو محیط اشاره نمود. به عنوان نمونه، نیروهای آیرودینامیکی بر سازه های هوایی نیز از منابع عمده ارتعاشی است. علاوه بر آن ارتعاشات در دیگر حوزه های مهندسی تاثیرگذار است که در صورت عدم کنترل می تواند به یک تخریب بزرگ بدل شود. به عنوان مثال یکی از مشهورترین حوادث ناشی از ارتعاشات زاید مربوط به پل تاکوما^۱ واقع در واشنگتن آمریکا می باشد که در سال ۱۹۴۰ میلادی در اثر بادی با سرعت ۶۷ کیلومتر بر ساعت فروریخت (تصویر ۱-۱).

^۱ Tacoma Bridge



تصویر ۱-۱- پل تاکوما بعد از فروپاشی در اثر ارتعاشات ناشی از باد

بنابراین محاسبه، بررسی و جذب ارتعاشات زاید سیستم، امری بسیار لازم و اجتناب ناپذیر می‌باشد. در همین راستا جاذب‌های ارتعاشی بسیاری ساخته شد و تا امروز پیشرفت‌های زیادی در این حوزه از مهندسی شکل‌گرفت. تصاویر زیر نشان‌دهنده کاربردهای متنوع استفاده از جاذب‌های ارتعاشاتی می‌باشد.



تصویر ۱-۲- استفاده از جاذب ارتعاشاتی برای ضد زلزله کردن ساختمان‌ها



تصویر ۱-۳- استفاده از جاذب های ارتعاشاتی برای کنترل ارتعاشات پل



تصویر ۱-۴- پایه های جاذب ساخته شده برای پل گلدن گیت^۱



تصویر ۱-۵ - استفاده از لرزش گیر برای حذف ارتعاشات مضر اخلاص گر روی خلبان خودکار پهپاد

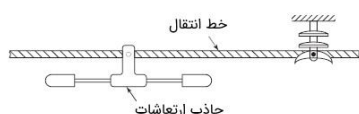
^۱ Golden gate bridge

۱-۲ روش های کنترل ارتعاشات سیستم

برای جذب ارتعاشات زاید یک سیستم از روش ها و تجهیزات متنوعی استفاده می شوند که هر کدام در کاربردها و اشکال متفاوتی استفاده می شوند. در ادامه به معرفی چند روش برای جذب ارتعاشات زاید سیستم از جمله؛ جاذب های فعال، جاذب های نیمه فعال، جاذب های غیرفعال، جاذب های خطی، جاذب های غیرخطی و چاه غیرخطی انرژی پرداخته می شود.

۱-۲-۱ جاذب های غیرفعال

کاهش ارتعاشات به صورت غیرفعال اولین و یکی از مهم ترین راه حل ها برای کنترل ارتعاشات است که مزیت اصلی آن ها در ساده بودن آنهاست. در این نوع جاذب ها احتیاج به منبع تغذیه خارجی، کنترلر، سنسورها و دیگر وسائل گران قیمت نمی باشد. جاذب های ارتعاش غیرفعال عبارتند از یک سیستم کمکی جرم و فنر قابل تنظیم با میرایی جزئی که پاسخ سیستم را به میزان بسیار زیادی کاهش می دهند. نمونه ای از جاذب های غیرفعال با نام میراگر استوک بریج^۱، در تصویر ۱-۶ قابل مشاهده می باشد. این نوع جاذب ها معمولا در کابل های انتقال برق یا سازه های خرابایی استفاده می شود [1].



تصویر ۱-۶ - شکل نمادین و واقعی جاذب غیرفعال استوک بریج [1]

¹ Stockbridge dampers

۱-۲-۲ جاذب‌های نیمه فعال

در این جاذب‌ها، کاهش ارتعاشات توسط المان‌های غیرفعال انجام می‌پذیرد. اما خواص المان‌ها را می‌توان بهبود داد. سیستم‌های کنترل الکتریکی و کنترل مغناطیسی به کار رفته در این جاذب‌ها اگر چه شبیه سیستم‌های کنترلی فعال هستند، اما نیروهای خارجی سهمی در تغییر ایزوله سازی در این جاذب‌ها ندارند. در واقع ایزولاتور نیمه فعال به یک سیستم غیرفعال و یک سیستم کنترلی فعال ضعیف اطلاق می‌شود که با توجه به منبع تغذیه ضعیف خارجی بایستی ضرایب المان‌های سیستم تصحیح شوند. در این جاذب‌ها وقتی میدان الکتریسیته یا ویسکوز سیال تغییر می‌کند، میدان مغناطیسی بر سیال اثر می‌گذارند و قادر به کنترل رفتار دینامیکی خواهد بود.

۱-۲-۳ جاذب‌های فعال

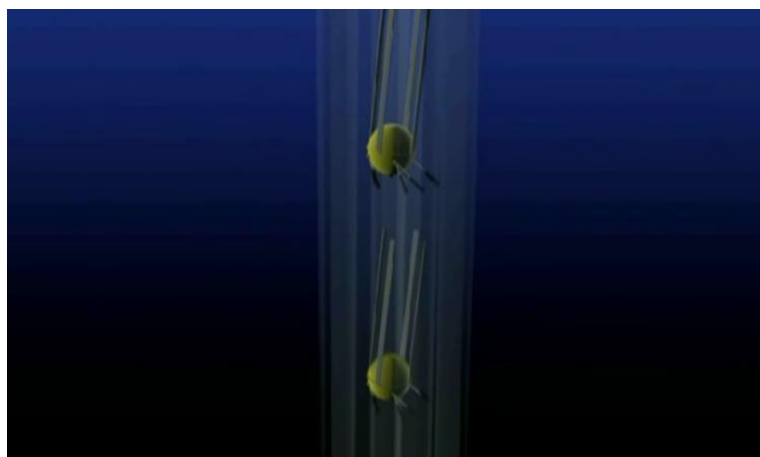
این نوع ایزولاتورها از نیرویی که توسط ابزارهای کنترلی (مانند موتورها، عملگرها و...) تولید می‌شود، برای کنترل ارتعاشات سیستم استفاده می‌کنند. از جمله ویژگی‌های این جاذب‌ها می‌توان به نیرومندی و انعطاف پذیری سیستم، کارایی و عملکرد در باند فرکانسی وسیع، عدم تأثیرپذیری سیستم کنترلی از شرایط محیطی، پیچیده و پرهزینه بودن، نیاز به تجهیزات جانبی و نیاز بیشتر به تعمیر و نگهداری آنها اشاره نمود.

۱-۲-۴ جاذب‌های خطی

جاذب‌هایی که بتوان با معادلات خطی مدل سازی کرد و یا تنها از المان‌های خطی در ساختار آن استفاده کرد را جاذب‌های خطی می‌گویند. جاذب خطی ارائه شده توسط فراهم^۱ نخستین جاذب ثابت

^۱ Frahm

شده از این نوع می‌باشد [2]. این جاذب با فراهم آوردن یک نیروی مساوی و مخالف نیروی محرک که سبب ارتعاش می‌شود، از ارتعاش در سیستم اصلی جلوگیری می‌کند. برای یک مثال مناسب از جاذب‌های خطی می‌توان به جاذب جرمی تنظیم شونده^۱ اشاره کرد که مطالعات گسترده‌ای درباره آن صورت گرفته است. مشکل جاذب خطی وقتی ایجاد می‌شود که فرکانس نیروی تحریک ثابت نباشد و جاذب در یک سری محدوده فرکانسی اثر معکوس داشته و دامنه ارتعاشات را بیشتر نماید. این سیستم‌ها علاوه بر اینکه قلّه تشدید را در منحنی پاسخ به دو قلّه کوچکتر تقسیم می‌کنند، سبب کاهش دامنه پاسخ سیستم در هر یک از قلّه‌ها نیز می‌شوند [4]، [3]. جرم جاذب جرمی تنظیم شونده در مقایسه با سازه اصلی کمتر است، در نتیجه انتقال انرژی از سازه اصلی موجب نوسانات شدیدی در جرم ثانویه می‌شود. استفاده از جاذب ارتعاش دینامیکی خطی فاقد دمپر در اغلب موارد مناسب نمی‌باشد، به خصوص در مواردی که فرکانس نیروی تحریک ثابت نیست. وقتی سیستم اصلی دقیقاً در فرکانس طبیعی خود تحریک نشده است، شیب منحنی رزونانس سیستم بعد از افزودن جاذب بسیار تیز می‌شود. سپس حتی یک تغییر کوچک در فرکانس تحریک، می‌تواند جاذب را به تقویت کننده ارتعاش تبدیل کند. پهنای باند مؤثر توسط میرایی جاذب کنترل می‌شود و یک جایگزینی مابین کاهش بازدهی و پهنای باند وجود دارد. نمونه‌ای از کاربرد دمپر جرمی تنظیم شده در تصویر ۷-۱ قابل مشاهده می‌باشد.

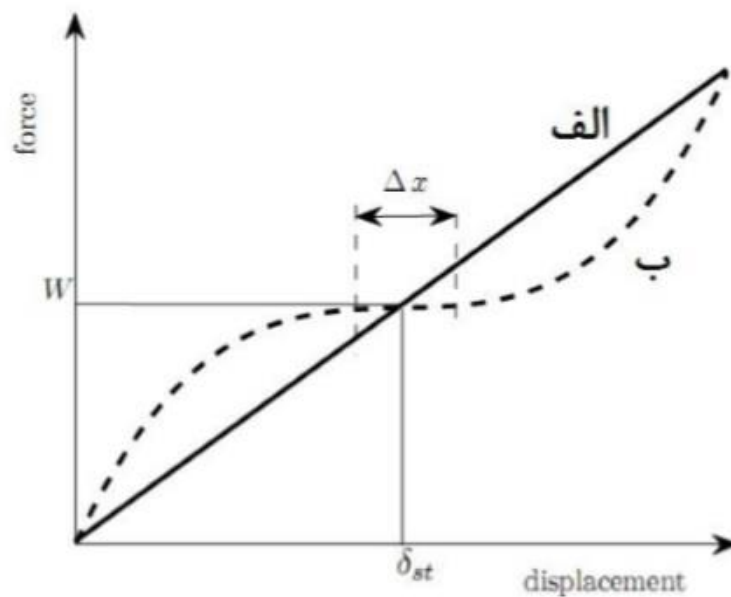


تصویر ۷-۱ - شمایی از دمپر جرمی تنظیم شده به کار رفته در بزرگترین برج تلویزیون جهان در ژاپن

^۱ Tuned Mass Damper (TMD)

۱-۲-۵ جاذب های غیر خطی

بنا به مواردی که پیش از این اشاره شد، در سیستم‌هایی که فرکانس نیروی محرک ثابت نباشد یا شامل دسته‌ای از فرکانس‌های مختلف باشد، نمی‌توان از جاذب‌های خطی استفاده کرد. بنابراین نیاز به طراحی جاذب‌هایی که در گستره وسیعی از فرکانس‌های تحریک تاثیر گذارند، منجر به مطالعه جاذب‌هایی شد که دارای مشخصه‌های غیرخطی می‌باشند.



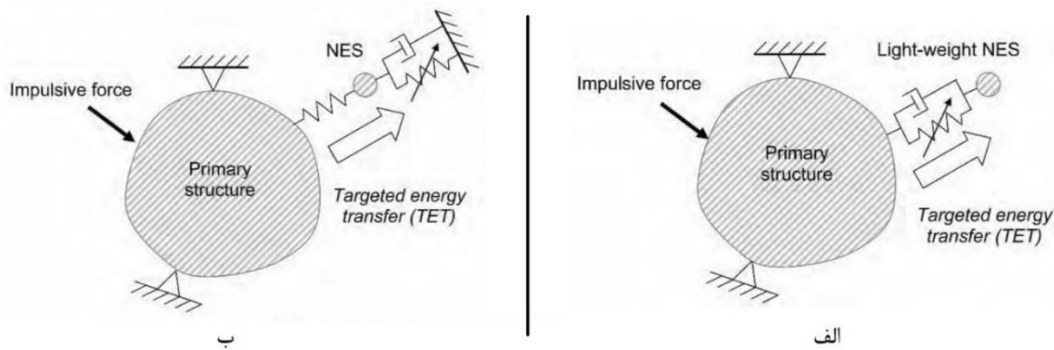
تصویر ۱-۸ - نمودار نیرو بر حسب جابجایی در فنر خطی و غیرخطی [21]

فنر خطی با ضریب K_1 را در نظر بگیرید که به صورت یک خط مشکی پر رنگ در تصویر ۱-۸ نمایش داده شده است. اگر جرم روی فنر گذاشته شود، فنر به اندازه δ_{st} جابه‌جا می‌شود تا به نقطه تعادل برسد. اگر جرم بارگذاری شده حول نقطه تعادل استاتیکی شروع به اغتشاش به اندازه Δx کند، شیب این بخش از منحنی به عنوان سفتی دینامیک، در حالت فنر خطی مطرح می‌گردد. در این حالت سفتی ثابت نیست و تابعی درجه سوم از جابه‌جایی است. فنر غیرخطی را می‌توان طوری طراحی کرد تا وقتی بار W به آن اثر کند همان جابه‌جایی استاتیکی را که در فنر خطی در تصویر ۱-۸ به صورت خط‌چین نشان داده شده است، به نمایش بگذارد. اختلاف اصلی بین حالت خطی و غیرخطی برای اغتشاشات

حول نقطه تعادل است. در گستره تغییر Δx می توان گفت که فنر غیرخطی دارای سفتی استاتیکی بیشتر و سفتی دینامیکی کمتری می باشد^۱ [5].

۱-۲-۶ چاه غیرخطی انرژی^۲

چاه غیرخطی انرژی یکی از روش های جذب ارتعاشات زاید و از نوع غیر فعال می باشد که با استفاده از المان های غیرخطی شکل می گیرد. این نوع جاذب در دهه گذشته به صورت گسترده مورد مطالعه قرار گرفته است. در واقع در این روش یک انتقال انرژی به صورت یکطرفه صورت می گیرد که به آن انتقال انرژی هدفمند^۳ می گویند. سیستم های مورد استفاده در این روش معمولاً از یک جرم بسیار کوچک نسبت به جرم ارتعاش کننده اصلی، فنر غیرخطی و دمپر (خطی یا غیرخطی) تشکیل شده اند (تصویر ۹-۱ - الف). اما چاه غیرخطی انرژی در طی زمان در اشکال و کاربردهای متفاوتی استفاده شده است. چاه های غیرخطی را می توان به دسته های متصل به زمین^۴ (پتانسیل محلی) و غیرمتصل به زمین^۵ (پتانسیل عمومی)، یک درجه آزادی و چند درجه آزادی، هموار و غیرهموار، دارای میرایی خطی و میرایی غیرخطی تقسیم بندی نمود [5].



تصویر ۹-۱- انواع چاه غیرخطی انرژی- الف) چاه غیرخطی غیرمتصل به زمین. ب) چاه غیر خطی متصل به زمین [21]

^۱ High Static Low Dynamic Stiffness (HSLDS)

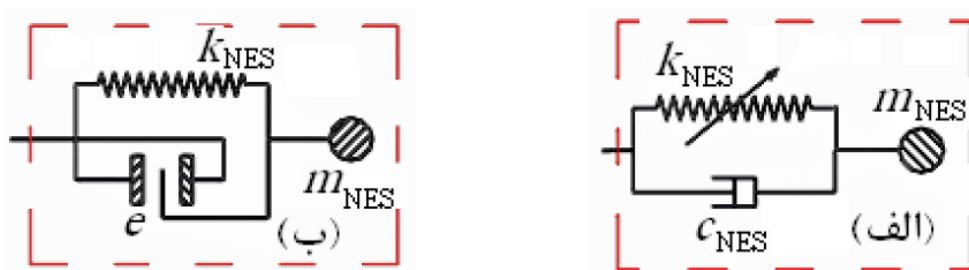
^۲ Nonlinear Energy Sink (NES)

^۳ Targeted Energy Transfer (TET)

^۴ Grounded Nonlinear Energy Sink (GNES)

^۵ Ungrounded Nonlinear Energy Sink

چاه های غیرخطی انرژی را بر حسب انواع المان بندی نیز تقسیم بندی می کنند. چاه غیرخطی انرژی نوع اول^۱ متشکل است از یک جرم کوچک که توسط فنر غیرخطی درجه سه به یک ساختار خطی یک درجه آزادی متصل شده است. چاه غیرخطی انرژی نوع سوم^۲ همان ساختار نوع اول را دارد که به یک سیستم دو درجه آزادی متصل شده است. دمپر در این دو نوع خطی می باشد در حالی که در چاه غیرخطی انرژی نوع دوم^۳ غیرخطی است. نوع دیگری از چاه غیرخطی انرژی با نام ارتعاشی - ضربه ای^۴ (غیرهموار) و نوع دیگری نیز با نام چرخشی^۵ وجود دارد که هر یک در شرایط و کاربردهای متفاوتی استفاده می شوند [6], [7].



تصویر ۱۰-۱ الف) چاه غیرخطی هموار. ب) چاه غیرخطی ناهموار (ارتعاشی-ضربه ای) [21]

برای انجام محاسبات این نوع سیستم ها معمولاً از تئوری اغتشاشات^۶ استفاده می شود و وجود جرم بسیار کوچک در این سیستم ابزاری برای استفاده از این تئوری است. در این سیستم های کاملاً غیرخطی، هیچ کدام از فرکانس های تشدید، برتری نداشته و بنابراین قادر هستند تا در محدوده فرکانسی دلخواه، با موده های سیستم اولیه هم فرکانس شده و از هر مود، مقداری انرژی جذب کنند و بدین ترتیب، سطح انرژی کلی سیستم را کاهش دهند. هنگامی که انرژی ورودی به نوسان گر خطی اعمال می شود، یک مود نرمال غیرخطی^۷، یعنی یک حل متناوب که به طور موضعی به اتصال غیرخطی

^۱ NES Type I

^۲ NES Type III

^۳ NES Type II

^۴ Vibro-Impact NES

^۵ Rotary NES (Also labeled type IV NES)

^۶ Perturbation theory

^۷ Nonlinear Normal Mode (NNM)

مربوط می‌گردد، می‌تواند تحریک شود. بنابراین، انتقال انرژی مورد نظر اتفاق افتاده و بخش قابل توجهی از انرژی اعمالی به نوسان گر اولیه، به صورت غیرفعال، یک طرفه و بازگشت ناپذیر جذب شده و به طور موضعی توسط اتصال ضرورتاً غیرخطی مستهلک می‌گردد. این اتصال و این عمل، به عنوان چاه غیرخطی انرژی شناخته می‌شود [8].

بنابر مطالعات انجام شده، برتری‌های چاه غیرخطی انرژی نسبت به جاذب دینامیکی خطی را می‌توان در چهار مورد زیر بیان کرد:

۱- در شرایط جذب یک‌سان، تغییر شکل سیستم بسیار کمتر بوده و همچنین می‌توان از جسم کوچک‌تری استفاده نمود.

۲- فرکانس رزونانس قابل ترجیح ندارد و در نتیجه قابلیت جذب ارتعاش در همسایگی فرکانس طبیعی تحریک شده را دارد و همچنین نیازی به تنظیم سیستم در یک فرکانس خاص نیست.

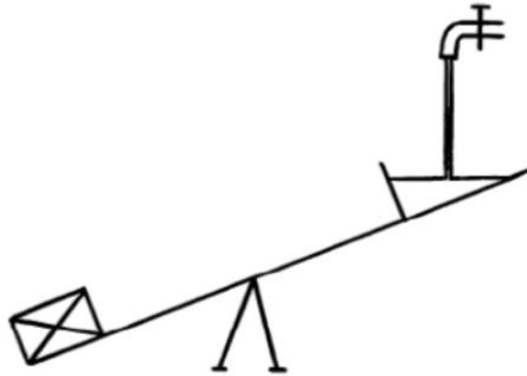
۳- پمپاژ انرژی از سیستم اولیه به چاه غیرخطی انرژی به صورت کاملاً برگشت ناپذیر انجام می‌گیرد.

۴- قابلیت جذب بالای انرژی ارتعاشی و کاهش دامنه سیستم تحت ارتعاش در محدوده فرکانسی وسیع از طریق انتقال هدفمند انرژی چند فرکانسی را دارد [5].

مطالعات اخیر نشان داده است که رژیم پاسخ بسیار جالب توجهی در بین پاسخ‌های سیستم وجود دارد. این رژیم، پاسخ مدوله بسیار قوی^۱ نامیده شده است که به طور قابل توجهی در کاهش ارتعاشات دینامیک سیستم مؤثر است. رژیم نوسانات تخفیف یافته را از طریق یک سیستم مکانیکی ساده به آسانی می‌توان درک کرد. این سیستم مکانیکی ساده، که در تصویر ۱۱-۱ نشان داده شده

^۱ Strongly Modulated Response (SMR)

است، شامل یک الاکلنگ بوده که یک ذخیره گر آب در یک طرف و یک وزنه در طرف دیگر آن می باشد. وقتی مقدار آب از وزن وزنه در طرف دیگر بیشتر شود، طرفی از الاکلنگ که شامل ذخیره گر آب است پایین می افتد. سپس ذخیره گر آب تخلیه شده و به مکان اولیه خود بازمی گردد. پریود نوسانات تخفیف یافته تابع نرخ آب ورودی و حجم آب در حالت تعادل می باشد [5].



تصویر ۱۱-۱- یک اسیلاتور تخفیف یافته شامل یک الاکلنگ- ذخیره آب در یک سمت و یک وزنه در سمت دیگر [21]

برای نوسان گرهای تقریباً خطی، یک نظریه ریاضی کم و بیش پذیرفته شده‌ای وجود دارد. یک سیستم یک درجه آزادی به فرم زیر در نظر بگیرید:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right), 0 < \varepsilon \ll 1 \quad (1-1)$$

اگر ε کوچک نباشد، این تئوری نمی تواند به کار گرفته شود و هیچ راه حل مجانبی تقریبی برای سیستم فوق نمی توان یافت و جوابها باید به صورت عددی پیدا شوند. اگرچه یک استثناء برای سیستم‌هایی از نوع زیر وجود دارد:

$$\varepsilon \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = f\left(x, \frac{dx}{dt}\right), 0 < \varepsilon \ll 1 \quad (1-2)$$

برای این سیستم می توان یک حل تقریبی پیدا کرد. با میل دادن ε به سمت صفر، معادله

(۱-۳) بدست می آید:

$$f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = 0 \quad (۱-۳)$$

این معادله به خودی خود نمی تواند دارای حل های پریودیک باشد. اگر چه می تواند تقریب خوبی از معادله ۳ در یک بازه زمانی بزرگ از چرخه باشد. بنابراین اگر به آستانه ای برسیم که این تقریب دیگر معتبر نباشد، متغیر x به سرعت در یک بازه زمانی کوتاه تغییر می کند [5].

۳-۱ مروری بر ادبیات فنی و کارهای پیشین

بیش از یک قرن است که جذب ارتعاشات موضوع بسیاری از پژوهش ها و پروژه های علمی می باشد. در این مدت طولانی ادبیات فنی در این زمینه تا حد زیادی پیشرفت داشته و تخصصی گردیده است. در ادامه با مرور مقالات و پژوهش ها، به معرفی بیشتر ادبیات فنی حاکم بر چاه غیرخطی انرژی اشاره می شود.

۱-۳-۱ سابقه موضوعی

الف) اولین پژوهش ها در جذب ارتعاشات

جاذب ارتعاشی برای اولین بار توسط فرهام در سال ۱۹۰۹ مطرح شد. این جاذب تنها متشکل از یک فنر و یک جرم بدون المان میرایی بوده که قادر به صفر کردن دامنه ارتعاش در یک فرکانس سیستم بود [2].

در سال ۱۹۲۸ اورماندروید^۱ پهنای باند بهینه برای کاهش ارتعاش را با استفاده از جاذب خطی جرم-فنر-دمپر ارائه داد. او نشان داد که معرفی میراگر نه تنها انرژی را تلف می‌کند بلکه بازه فرکانسی که در آن دستگاه فعال است را افزایش می‌دهد [9].

شاو^۲ و همکاران در سال ۱۹۸۸ به بررسی ارتعاشات حالت دائم یک چاه انرژی غیرخطی متصل به سیستمی که آن هم دارای فنر غیرخطی نوع دافینگ می‌باشد، پرداختند. در این راه از روش مقیاس‌های چندگانه استفاده کردند. آنها دریافتند که اگر فرکانس کاری جاذب، میانگین دو فرکانس طبیعی خطی سیستم باشد، ناپایداری‌هایی در پاسخ‌های سیستم بوجود می‌آید که باعث وجود همزمان پاسخ‌های پریودیک با دامنه بالا و پاسخ‌های پریودیک با دامنه پایین و پایین آمدن کارایی سیستم می‌شود [10].

ناتسیاواس^۳ در سال ۱۹۹۲ یک چاه غیرخطی انرژی نوع اول متصل به سیستمی که آن هم دارای فنر غیرخطی نوع دافینگ می‌باشد را مورد بررسی قرار دادند. آنها اثر پارامترهای سیستم به روی پاسخ‌های حالت دائم را نیز بررسی کردند. آنها دریافتند که استفاده از جاذب‌های با فنر سخت و یا نرم باعث کاهش قابل توجهی در دامنه به ترتیب در محدوده فرکانس‌های بیش از فرکانس رزونانس اصلی و یا کمتر از فرکانس رزونانس اصلی می‌شوند. همچنین دارا بودن سطح پایین میرایی و درجه غیرخطی بالا و نیروی محرک با دامنه بالا، منجر به کاهش پایداری پاسخ‌های پریودیک و مشاهده ارتعاشات شبه پریودیک با دامنه بسیار بالا می‌شود [11].

^۱ Ormondroyd

^۲ J. Shaw

^۳ S. Natsiavas

ب) بهینه سازی در چاه غیرخطی انرژی

ربرسون^۱ در سال ۱۹۵۲ پارامترهای یک چاه غیرخطی انرژی نوع اول متصل به یک سیستم اولیه یک درجه آزادی را به صورتی بهینه کرد که یک باند فرکانسی بزرگ برای فرکانس نیروی محرک به دست آید و در آن باند دامنه ارتعاش سیستم اولیه زیر یک نگه داشته شود [12].

رایس^۲ و همکارانش در سال ۱۹۸۶ پارامترهای بهینه را برای یک چاه غیرخطی انرژی ارائه کردند و همچنین چگونگی انتخاب نوع فنر را براساس فرکانس کاری سیستم، مورد بررسی قرار دادند. علاوه بر این، آنها دریافتند که سیستمهای شدیداً غیرخطی دچار ناپایداریهای هارمونیک تخریب کننده‌ای می‌شوند [13].

جوردانوو^۳ و همکاران در سال ۱۹۸۷ یک روش عددی برای بدست آوردن پارامترهای بهینه یک چاه غیرخطی انرژی و جاذب خطی ارائه کردند. آنها همچنین مقایسه‌ای مابین پارامترهای بهینه بدست آمده از این روش و پارامترهای بهینه بدست آمده با استفاده از نتایج کلاسیک را در حالت جاذب خطی بررسی نمودند [14].

استراستوستکای^۴ و جندلمن در سال ۲۰۰۹ جذب ارتعاش توسط چاه غیرخطی ارتعاشات را با دمپر غیرخطی بررسی کردند. آنها به این نتیجه رسیدند که چاه غیرخطی انرژی با میراگر درجه سه در مقایسه با میراگرهای جرمی تنظیم شده، میزان انرژی تقریباً یکسانی را دفع می‌کنند. هرچند به برتری احتمالی چاه غیرخطی انرژی در سیستم‌های چند درجه آزادی نیز اشاره نمودند [15].

کیو^۵ و همکاران در سال ۲۰۱۸ یک سیستم دو درجه آزادی شامل یک مرتعش خطی و یک چاه غیرخطی انرژی را در یک سیستم خاص بررسی نمودند و نمودار منیفولد نامتغیر آهسته را برای آن بدست آوردند. آنها در نهایت یک معیار برای طراحی بهینه چاه غیرخطی انرژی ارائه دادند [16].

^۱ R. E. Roberson

^۲ H. Rice

^۳ I. N. Jordanov

^۴ Y. Starosvetsky

^۵ D. Qiu

ج) بررسی کارایی و میزان جذب چاه غیرخطی انرژی

جندلمن^۱ در سال ۲۰۰۱ سیستم کاملاً نامتقارن شامل دو نوسان گر کوپل شده، که یکی از آنها شدیداً غیرخطی با یک فرکانس خطی کوچک و دیگری خطی با فرکانس خطی بزرگ می‌باشد را مورد بررسی قرار داد. در این بررسی نشان داده شد که به دلیل درجه بالای غیرخطی سیستم، انتقال انرژی از طریق رزونانس مادون هارمونیک انجام می‌شود. همچنین مشخص شد که بازدهی این جاذب در دامنه بحرانی کاهش می‌یابد و برای غلبه بر این مشکل می‌توان از کنترل فعال استفاده نمود [17].

واکاکیس^۲ و همکاران در سال ۲۰۰۴ مدل $n+1$ درجه آزادی با اتصال ضعیف به چاه غیرخطی انرژی را مورد بررسی قرار دادند. آنها دریافتند که چاه غیرخطی انرژی می‌تواند با هر مود در حال رزونانس سیستم اصلی به طور مجازی رزونانس کند و به طور غیرفعال مقدار معینی از انرژی آن را جذب نماید و سپس به مود بعدی برود و به این ترتیب به صورت متوالی انرژی هر مود در حال رزونانس را جذب نماید [18].

در تحقیقات کرسچن^۳ و همکاران در سال ۲۰۰۵ نشان داده شده که در چهار دهه اخیر و در حوزه جاذب های ارتعاشی غیرفعال، مطالعات گسترده‌ای روی انتقال انرژی هدفمند و چاه های غیرخطی انرژی صورت گرفته است. نتایج حاصل از این مطالعات نشان دهنده بازدهی بالای چاه های غیرخطی انرژی در جذب ارتعاشات می‌باشد [19].

جندلمن و همکاران در سال ۲۰۰۷ با تحقیقاتی بر روی جاذب های ارتعاشی، امکان استفاده از چاه غیرخطی انرژی را در کاهش ارتعاشات بررسی کردند. آنها به این نتیجه رسیدند که مشکل چاه غیرخطی انرژی در این است که در طیف محدودی از دامنه های نیروی خارجی تاثیرگذار می‌باشد. آنها همچنین برای رفع این مشکل جاذب های نیمه-فعال را پیشنهاد دادند [20].

^۱ O. V. Gendelman

^۲ A. Vakakis

^۳ G. Kerschen

واکایس و همکاران در سال ۲۰۰۹ با تالیف کتابی به بررسی کامل جذب غیرخطی انرژی در سیستم‌ها و سازه‌های مکانیکی پرداختند و همچنین معیارهایی برای بررسی میزان جذب انرژی همراه با نمودارهای هر قسمت ارائه نمودند [21].

د) استفاده از روش‌های تحلیلی تقریبی در بررسی چاه غیرخطی انرژی

منوویچ^۱ در سال ۲۰۰۱ روشی تحلیلی برای بررسی محاسبات سیستم‌های ارتعاشاتی غیرخطی کوپل شده ارائه نمود. روش معرفی شده در این پژوهش یک تغییر متغیر مختلط می‌باشد [22].

واریگاد^۲ و سوادکوهی در سال ۲۰۱۱ انتقال انرژی هدفمند را توسط چاه غیرخطی انرژی به روش تحلیلی و آزمایشگاهی بررسی نمودند. آنها استفاده از دو چاه غیرخطی انرژی به صورت موازی در مقایسه با استفاده از یک چاه غیرخطی انرژی را در پاسخ گذرا و اجباری بررسی کردند که تقسیم بهتر جرم‌ها، نیاز به سختی غیرخطی کمتر و بازدهی بالاتر از مزایای بررسی شده سیستم آنها در این مطالعه بودند [23].

جندلمن در سال ۲۰۱۲ رفتار تحلیلی سیستم‌ها با چاه غیرخطی انرژی از نوع ارتعاشی-ضربه‌ای (ناهمگن) را مورد بررسی قرار داده است. وی این تحقیق را بر اساس دو فرض ساده کننده انجام داد؛ اول این که جرم استفاده شده در چاه غیرخطی انرژی کوچک است و بنابراین می‌توان از روش مقیاس‌های چندگانه استفاده کرد و دوم این که در برخی معادلات حل را به صورت پایدار در نظر گرفت [24].

ترای‌پتی^۳ و همکاران در سال ۲۰۱۷ چاه غیرخطی انرژی و جاذب جرمی تنظیم شونده را در سیستم چند درجه آزادی مورد بررسی قرار دادند و فرایندی برای بررسی سیستم‌های n درجه آزادی

^۱ L. I. Manevitch

^۲ B. Vaurigaud

^۳ A. Tripathi

ارائه کردند. همچنین در سختی‌ها، ضریب میرایی‌ها و جرم‌های متفاوت به مقایسه چاه غیرخطی انرژی و جاذب جرمی تنظیم شونده پرداخته است [25].

حبیب^۱ و رومئو^۲ در سال ۲۰۱۷ به بررسی یک سیستم غیرخطی با دو حالت پایداری برای حالت آبشاری^۳ پرداختند. در این پژوهش از روش بالانس هارمونیک^۴ در تحلیل رفتار ارتعاشی سیستم استفاده شده است. آنها ضمن مقایسه چاه غیرخطی انرژی و جاذب جرمی تنظیم شونده، نمودارهای منیفولد نامتغیر آهسته مربوط به هر حالت را بدست آوردند [26].

ه) کاربردهای چاه غیرخطی انرژی

گو^۵ و همکاران در سال ۲۰۱۷ ارتعاشات کابل تحت جریان باد غیرخطی را به وسیله چاه غیرخطی انرژی کاهش دادند و نشان دادند بهترین مکان برای قرارگیری چاه غیرخطی ارتعاشات برای کابل‌های دوسر گیردار در مرکز آن است [27].

برگوت^۶ و همکاران در سال ۲۰۱۷ با استفاده از چاه غیرخطی انرژی انرژی تیغه‌های بالگرد را کاهش دادند. آنها روی هر باله یک چاه غیرخطی انرژی نصب نمودند و آن را تحت چهار سطح از نیرو بررسی کردند [28].

لی^۷ و همکاران در سال ۲۰۰۸ اطلاعات کاملی در مورد کاربرد انواع چاه غیرخطی انرژی به عنوان یک جاذب غیرفعال بر جذب ارتعاشات ارائه نمودند [8].

^۱ G. Habib

^۲ F. Romeo

^۳ Cascade mood

^۴ Harmonic balance

^۵ H. Guo

^۶ B. Bergeot

^۷ Y. S. Lee

ژانگ^۱ و همکاران در سال ۲۰۱۷ کاهش ارتعاش حاصل از القای شوک حرارتی در تیر دارای چرخش محوری را بررسی کردند. نتیجه، اثرکنترلی چاه غیرخطی انرژی و کارایی آن در کاهش ارتعاش تیر دارای چرخش محوری را نشان می‌دهد [29].

و) استفاده از چاه غیرخطی انرژی در جذب ارتعاشات ناشی از زلزله

شوشتری و افضلی در سال ۱۳۸۶ با بررسی رفتار ساختمان‌های بتنی در حالت بهره‌مندی از میراگر جرمی تنظیم شونده نشان دادند به طور کلی تفاوت محتوای فرکانسی زمین‌لرزه با فرکانس سازه اصلی باعث کاهش مطلوبیت جرمی متوازن می‌گردد. از سوی دیگر با توسعه تغییر شکل‌های پلاستیک در زلزله‌های شدید سختی تغییر کرده و تناسب آن با پارامترهای میراگر را به هم می‌ریزد به تعبیری تنظیم بین سازه و میراگر مختل می‌شود. لذا کارایی میراگر جرمی تنظیم شونده نیز از بین خواهد رفت، همچنین میراگر جرمی در صورتیکه در بام نصب گردد در زلزله‌های متوسط می‌تواند پاسخ سازه را در گستره زمانی آن کاهش دهد و انرژی هیستریزس جذبی توسط سازه کاهش خواهد یافت و طبیعتاً خسارت کمتری وارد خواهد شد، این خاصیت در میراگرهایی که در طبقات دیگر نصب می‌گردند کمتر مشاهده می‌شود [30].

واکایس و همکاران در سال ۲۰۱۰ با تالیف کتابی به بررسی کامل جذب ارتعاشات با استفاده از روش‌های غیرخطی پرداختند. این کتاب همچنین به بررسی سازه‌های لایه‌ای با صفحات جداگانه مانند ساختمان‌ها، پرداخته و در نهایت معیارها و نمودارهای متفاوتی از نتایج حاصل شده در هر قسمت ارائه نموده است [31].

^۱ Y. W. Zhang

لو^۱ و همکاران در سال ۲۰۱۷ با ساخت قاب‌های فولادی به عنوان مدلی از یک ساختمان و اتصال آن به چاه غیرخطی انرژی، ارتعاشات ناشی از بارگذاری لرزه‌ای در آن را بررسی نمودند. آنها اثر چاه غیرخطی انرژی را به صورت یک جرم که در یک مسیر با معادله‌ای خاص حرکت می‌کند ایجاد کردند. نتایج نشان دادند که چاه غیرخطی انرژی توانایی بالایی در کاهش ارتعاشات سازه در طیف وسیعی از ارتعاشات را داراست [32].

شودیفات^۲ و همکاران در سال ۲۰۱۷ چاه غیرخطی انرژی چرخشی که به چاه غیرخطی انرژی نوع چهارم معروف است را به صورت عددی و آزمایشگاهی مورد تحقیق قرار دادند. در این مطالعه، چاه غیرخطی انرژی به یک سازه کوچک دو طبقه (به عنوان یک سیستم دو درجه آزادی) متصل شد. در نتیجه آنها عملکرد این نوع چاه غیرخطی انرژی را برای بارگذاری ناگهانی یا شوک، ضعیف معرفی کردند اما در دیگر موارد آن را امیدوار کننده خواندند [7].

ز) چاه غیرخطی انرژی در حالت متصل و غیرمتصل به زمین

احمد آبادی و خادم در سال ۲۰۱۲ اثر وجود چاه غیرخطی انرژی بر تیر یک‌سرگردار برای دو حالت متصل به زمین و غیرمتصل به زمین را بررسی کردند. در نتیجه اتلاف انرژی برای چاه غیرخطی انرژی غیرمتصل به زمین حدود ۸۹ درصد بود. در صورتی که برای نوع متصل به زمین اتلاف انرژی قابل توجهی وجود نداشت [33].

یاو^۳ و همکاران در سال ۲۰۱۹ جذب ارتعاشات جانبی یک سیستم چرخشی (مانند روتور) را با استفاده از چاه غیرخطی متصل به زمین بررسی نمودند. آنها این نوع جذب را موثر دانستند و میزان جذب را در محاسبه عددی ۷۸ درصد و در نمونه آزمایشگاهی ۶۸ درصد اعلام کردند [34].

^۱ X. Lu

^۲ M. A. AL-Shudeifat

^۳ H. Yao

۱-۳-۲ جمع‌بندی و اهداف تحقیق

با بررسی مقالات و پژوهش‌هایی که از چاه غیرخطی انرژی در کاربردها و شرایط مختلف استفاده کرده بودند، می‌توان به کاربرد بالای این نوع جاذب پی برد. در قسمت‌های پیشین مشاهده شد که تعداد زیادی از مقالات به بررسی پاسخ مدوله قوی برای سیستم‌های دارای این نوع جاذب‌ها پرداختند. همچنین مقالات زیادی برای تحلیل این نوع سیستم‌ها، نمودار منیفولد نامتغیر آهسته را بدست آوردند. همچنین برخی از مقالات به محاسبات مربوط به حالت متصل به زمین و غیر متصل به زمین این نوع جاذب‌ها اشاره کردند. در فصل دوم به بررسی اثر چاه غیرخطی انرژی بر روی جذب ارتعاشات برای پاسخ حالت مدوله قوی و حالت آبخاری بر سیستمی با نوسان‌گر یک درجه آزادی خطی پرداخته می‌شود که نوع آن به صورت غیرمتصل به زمین (مدل I) می‌باشد. در فصل سوم نیز به بررسی اثر چاه غیرخطی انرژی بر روی جذب ارتعاشات برای پاسخ حالت مدوله قوی و حالت آبخاری بر سیستمی با نوسان‌گر یک درجه آزادی خطی پرداخته می‌شود که نوع آن به صورت متصل به زمین (مدل II) می‌باشد. برای این کار در حالت پاسخ مدوله قوی ابتدا معادلات حرکت استخراج شده و پس از بی‌بعد سازی با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه و چند تغییر متغیر از جمله مانوویچ، در نهایت نمودارهای منیفولد نامتغیر آهسته بدست خواهد آمد. برای تحلیل پاسخ حالت آبخاری نیز بعد از بدست آوردن معادلات حرکت و بی‌بعد سازی، با استفاده از چند تغییر متغیر و روش بالانس هارمونیک، نمودارهای منیفولد نامتغیر آهسته بدست خواهد آمد و سپس به تحلیل این نمودارها پرداخته خواهد شد. در انتهای این فصل به تحلیل نمودارهای پاسخ دامنه به زمان و بدست آوردن اتلاف انرژی با استفاده از روش‌های عددی برای مدل II پرداخته خواهد شد. در فصل چهارم نیز به بررسی نتایج و ارائه چند پیشنهاد پرداخته خواهد شد.

فصل ۲:

معرفی، مدل سازی و تحلیل مدل I

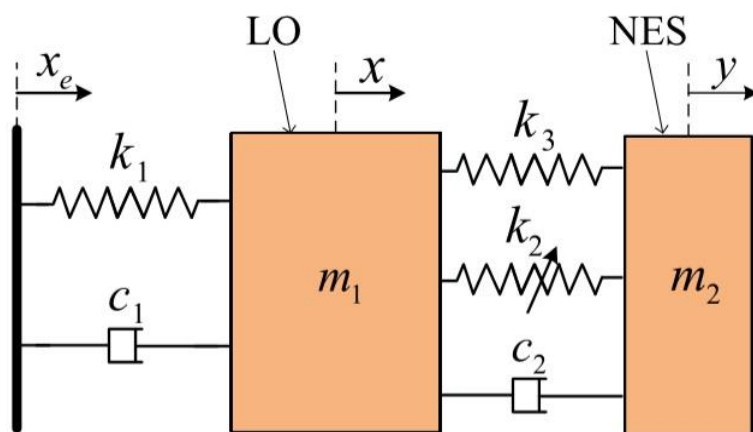
۲-۱ مقدمه

در این قسمت به معرفی و مدل سازی یک سیستم دو درجه آزادی شامل یک نوسان گر خطی و یک چاه غیرخطی انرژی غیرمتصل به زمین (پتانسیل محلی) پرداخته می شود. سپس پاسخ حالت مدوله قوی که در آن فرکانس طبیعی نوسان گر اصلی نزدیک به فرکانس طبیعی چاه غیرخطی انرژی است، بررسی خواهد شد. پس از آن نیز پاسخ سیستم، در حالت آبخاری که در آن فرکانس طبیعی نوسان گر اصلی از فرکانس طبیعی چاه غیرخطی انرژی فاصله دارد، مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

۲-۲ بررسی پاسخ مدوله قوی یک سیستم غیر متصل به زمین

دارای چاه غیرخطی انرژی (مدل I)

جهت آشنایی کامل با روش محاسبه سیستم های دارای چاه غیرخطی انرژی، به بررسی محاسبات مقاله های مرتبط به موضوع این پژوهش پرداخته می شود [16]. سیستم مورد بررسی دارای یک نوسان گر خطی با تحریک پایه می باشد که به وسیله یک فنر خطی، یک فنر غیرخطی و یک دمپر خطی به صورت پتانسیل عمومی به یک جرم کوچک متصل شده است (تصویر ۱-۲). در پاسخ مدوله قوی سیستم در حال ارتعاش حول فرکانس ۱:۱ می باشد. به این معنی که چاه غیرخطی ارتعاشات و نوسان گر اصلی در یک فرکانس مشخص و برابر نوسان می کنند. لازم به ذکر است در فرآیند حل به علت کوچک بودن جرم جاذب (m_2)، از تاثیر چاه غیرخطی انرژی بر فرکانس طبیعی سیستم اصلی (ω_0) صرف نظر شده است. سیستم معرفی شده در تصویر ۱-۲ را مدل I می نامیم که معادله حرکت آن به صورت زیر محاسبه شده است:



تصویر ۲-۱ - مدل I - شامل یک نوسان گر خطی و چاه غیرخطی انرژی

$$m_1 \frac{d^2}{dt^2} x(t) + k_1 x(t) + c_1 \frac{d}{dt} x(t) + c_2 \left(\frac{d}{dt} x(t) - \frac{d}{dt} y(t) \right) + k_2 (x(t) - y(t))^3 \quad (2-1)$$

$$+ k_3 (x(t) - y(t)) = k_1 x_e(t) + c_1 \frac{d}{dt} x_e(t)$$

$$m_2 \frac{d^2}{dt^2} y(t) + c_2 \left(\frac{d}{dt} y(t) - \frac{d}{dt} x(t) \right) + k_2 (y(t) - x(t))^3 + k_3 (y(t) - x(t)) = 0 \quad (2-2)$$

در عبارات فوق m_1 و x به ترتیب برابر جرم و جابجایی نوسان گر اصلی، m_2 و y جرم و جابجایی چاه غیرخطی انرژی، x_e اندازه جابجایی تحریک پایه سیستم، k_i ها سفتی های سیستم و c_i ها میرایی های سیستم می باشند که در تصویر ۲-۱ قابل مشاهده می باشد.

تحریک پایه x_e هارمونیک در نظر گرفته می شود، بنابراین عبارت را می توان به شکل زیر نوشت:

$$x_e = G \cos(\omega t) \quad (2-3)$$

با جایگذاری عبارت (۲-۳) در سمت راست معادله (۲-۱) عبارت (۲-۴) بدست خواهد آمد.

$$k_1 x_e(t) + c_1 \frac{d}{dt} x_e(t) = k_1 G \cos(\omega t) - c_1 G \omega \sin(\omega t) \quad (2-4)$$

جهت بی بعد سازی معادله حرکت ابتدا معادله نخست (۲-۱) بر m_1 و معادله دوم (۲-۲) بر m_2 تقسیم

می شود. سپس از روابط $X = \frac{x}{x_0}$ ، $Y = \frac{y}{y_0}$ و $X_e = \frac{x_e}{x_{e0}}$ که در آن حروف بزرگ نشان دهنده

متغیر بی بعد و اندیس صفر نشان دهنده مقدار اولیه هر پارامتر است، استفاده خواهد شد.

$$\begin{aligned} & \frac{c_2 x_0 \frac{d}{dt} X}{m_1 t_0} - \frac{c_2 y_0 \frac{d}{dt} Y}{m_1 t_0} + \frac{k_2 (X)^3 x_0^3}{m_1} - 3 \frac{k_2 (X)^2 x_0^2 Y y_0}{m_1} + 3 \frac{k_2 X x_0 (Y)^2 y_0^2}{m_1} \\ & - \frac{k_2 (Y)^3 y_0^3}{m_1} + \frac{k_3 X x_0}{m_1} - \frac{k_3 Y y_0}{m_1} = \frac{k_1 G \cos(\omega t)}{m_1} - \frac{c_1 G \omega \sin(\omega t)}{m_1} \end{aligned} \quad (2-5)$$

$$\begin{aligned} & \frac{y_0^2 \frac{d^2}{dt^2} Y}{t_0^2} + \frac{c_2 y_0 \frac{d}{dt} Y}{m_2 t_0} - \frac{c_2 x_0 \frac{d}{dt} X}{m_2 t_0} + 3 \frac{k_2 (X)^2 x_0^2 Y y_0}{m_2} - 3 \frac{k_2 X x_0 (Y)^2 y_0^2}{m_2} \\ & + \frac{k_2 (Y)^3 y_0^3}{m_2} - \frac{k_2 (X)^3 x_0^3}{m_2} + \frac{k_3 Y y_0}{m_2} - \frac{k_3 X x_0}{m_2} = 0 \end{aligned} \quad (2-6)$$

با ضرب $\left(\frac{t_0}{x_0}\right)^2$ و با جایگذاری $t_0 = \frac{1}{\omega_0}$ در عبارات (۲-۵) و (۲-۶) عبارات (۲-۷) و (۲-۸) بدست خواهد آمد.

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2} X + \frac{k_2 (X)^3}{m_1 \omega_0^2} - 3 \frac{k_2 (X)^2 Y}{m_1 \omega_0^2} + 3 \frac{k_2 X (Y)^2}{m_1 \omega_0^2} - \frac{k_2 (Y)^3}{m_1 \omega_0^2} + \frac{k_1 X}{m_1 \omega_0^2} + \frac{k_3 X}{m_1 \omega_0^2} \\ & - \frac{k_3 Y}{m_1 \omega_0^2} + \frac{c_1 \frac{d}{dT} X}{m_1 \omega_0} + \frac{c_2 \frac{d}{dT} X}{m_1 \omega_0} - \frac{c_2 \frac{d}{dT} Y}{m_1 \omega_0} = \frac{k_1 G \cos(\Omega T)}{\omega_0^2 m_1} - \frac{c_1 G \omega \sin(\Omega T)}{\omega_0^2 m_1} \end{aligned} \quad (2-7)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}Y - \frac{k_2(X)^3}{m_2\omega_0^2} + 3\frac{k_2(X)^2Y}{m_2\omega_0^2} - 3\frac{k_2X(Y)^2}{m_2\omega_0^2} + \frac{k_2(Y)^3}{m_2\omega_0^2} - \frac{k_3X}{m_2\omega_0^2} \quad (2-8)$$

$$+ \frac{k_3Y}{m_2\omega_0^2} - \frac{c_2 \frac{d}{dT}X}{m_2\omega_0} + \frac{c_2 \frac{d}{dT}Y}{m_2\omega_0} = 0$$

$$\frac{m_2}{m_1} = \varepsilon, \quad \frac{k_1}{m_1} = \omega_0^2, \quad \frac{G}{\varepsilon} = F, \quad \frac{c_1}{m_2\omega_0} = \lambda_1, \quad \frac{c_2}{m_2\omega_0} = \lambda_2, \quad \frac{k_2}{m_2\omega_0^2} = K, \quad (2-9)$$

$$\frac{k_3}{m_2\omega_0^2} = \delta, \quad T = \omega_0 t, \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$$

با تعریف عبارات (2-9)، جایگذاری آنها در معادلات (2-7) و (2-8) و با صرف نظر کردن از مرتبه‌های بالاتر از ε معادلات (2-10) و (2-11) بدست خواهند آمد.

$$\frac{d^2}{dT^2}X + X + \varepsilon\delta(X - Y) + \varepsilon\lambda_1 \frac{d}{dT}X + \varepsilon\lambda_2 \left(\frac{d}{dT}X - \frac{d}{dT}Y \right) \quad (2-10)$$

$$+ \varepsilon K (X - Y)^3 = \varepsilon F \cos(\Omega T)$$

$$\varepsilon \frac{d^2}{dT^2}Y + \varepsilon\delta(Y - X) + \varepsilon K (Y - X)^3 + \varepsilon\lambda_2 \left(\frac{d}{dT}Y - \frac{d}{dT}X \right) = 0 \quad (2-11)$$

حال با جمع دو رابطه (2-10) و (2-11) رابطه (2-12) و با تقسیم رابطه (2-11) بر ε و کم کردن (2-10) از آن، رابطه (2-13) بدست می‌آید.

$$\varepsilon\lambda_1 \frac{d}{dT}X + \varepsilon \frac{d^2}{dT^2}Y + \frac{d^2}{dT^2}X + X = \varepsilon F \cos(\Omega T) \quad (2-12)$$

$$\frac{d^2}{dT^2}X - \frac{d^2}{dT^2}Y + X + K(\varepsilon + 1)(X - Y)^3 + \varepsilon\lambda_1 \frac{d}{dT}X + \varepsilon\lambda_2 \left(\frac{d}{dT}X - \frac{d}{dT}Y \right) \quad (2-13)$$

$$+ \varepsilon\delta(X - Y) + \lambda_2 \left(\frac{d}{dT}X - \frac{d}{dT}Y \right) + \delta(X - Y) = \varepsilon F \cos(\Omega T)$$

در ادامه کار جهت ساده سازی تحلیل و محاسبات، تغییر متغیر (۲-۱۴) اعمال می شود. در این تغییر متغیر v مرکز جرم کل سیستم و w فاصله نسبی جرم چاه غیرخطی انرژی به جرم سیستم اصلی است. این تغییر متغیر از این جهت دارای اهمیت است که فاصله بین m_1 و m_2 میزان کارایی جاذب را مشخص می کند. یعنی هرچه این فاصله بیشتر باشد انرژی بیشتری از طریق جاذب دریافت می شود.

$$v = \varepsilon Y + X, \quad w = X - Y \quad (2-14)$$

با استفاده از رابطه (۲-۱۴) نتیجه گرفته می شود:

$$Y = \frac{v-w}{1+\varepsilon}, \quad X = \frac{v+\varepsilon w}{1+\varepsilon} \quad (2-15)$$

با جایگذاری این تغییر متغیر در (۲-۱۲) و (۲-۱۳)، معادلات زیر بدست می آیند:

$$\frac{d^2}{dT^2} v + \frac{\varepsilon \lambda_1 \left(\frac{d}{dT} v + \varepsilon \frac{d}{dT} w \right)}{\varepsilon + 1} + \frac{v + \varepsilon w}{\varepsilon + 1} - \varepsilon F \cos(\Omega T) = 0 \quad (2-16)$$

$$\frac{d^2}{dT^2} w + \frac{\varepsilon \lambda_1 \left(\frac{d}{dT} v + \varepsilon \frac{d}{dT} w \right)}{\varepsilon + 1} + \frac{v + \varepsilon w}{\varepsilon + 1} + \lambda_2 (\varepsilon + 1) \frac{d}{dT} w + K (\varepsilon + 1) (w)^3 + \delta (\varepsilon + 1) w - \varepsilon F \cos(\Omega T) = 0 \quad (2-17)$$

در ادامه، حل با استفاده از روش میانگین گیری مختلط ساز^۱ (CX-A) انجام می شود. این روش اولین بار توسط مانوویتچ^۲ استفاده شد [22]. نویسندگان و محققان این حوزه در مقالات بسیاری این روش را تنها روش قابل استناد در مسائل دارای چاه غیرخطی ارتعاشات بر شمرده اند. این روش را می توان از یکسو به عنوان یک حل تحلیلی-عددی جهت بررسی صحت محاسبات مورد استفاده قرارداد و از سویی دیگر توانایی اصلی آن بررسی عمیق فیزیک غیرخطی مسئله می باشد. روش میانگین گیری

^۱ Complexification-Averaging (CX-A) Technique

^۲ Manevitch

مختلط ساز، بر مبنای دو گام مختلط سازی و میانگین گیری بنا شده است. با انجام مختلط سازی، در واقع نوعی بیان مختلط از پاسخ سیستم ارائه می شود. با میانگین گیری، تنها ترمهای غالب بر فیزیک مسئله انتخاب می گردند. این کار با استفاده از ترکیبهای خطی مزدوج مختلط انجام می گیرد که به ازای هر نوسان گر شامل عبارت جابجایی و سرعت هستند و به صورت بردارهایی با اندازه مساوی که در جهات مختلف می چرخند قابل تعریف می باشند [40]–[35]. در واقع می توان به ازای هر نوسان گر، یک تابع مختلط به این صورت تعریف نمود و سپس هم سرعت و هم جابجایی را تعیین کرد. سیستم در حال ارتعاش حول فرکانس ۱:۱ می باشد، جایی که چاه و نوسان گر اصلی با اندازه مشخص Ω نوسان دارند [16].

$$\phi_1 e^{i\Omega T} = \frac{d}{dT} v + i\Omega v, \quad \phi_2 e^{i\Omega \tau} = \frac{d}{dt} w + i\Omega w \quad (2-18)$$

جملات فوق در واقع دارای یک تغییر متغیر قطبی نیز هستند. این کار برای جدا کردن قسمت تند و کند رفتار ارتعاشی سیستم است. جمله $\phi_j e^{i\Omega T}, j=1,2$ در سمت چپ عبارت فوق دارای دو بخش آهسته حرکت (ϕ_j) و بخش سریع حرکت ($e^{i\Omega T}$) می باشد.

برای بدست آوردن جملات سرعت ($\frac{d}{dT} v$ و $\frac{d}{dT} w$) و شتاب ($\frac{d^2}{dT^2} v$ و $\frac{d^2}{dT^2} w$) از مزدوج

روابط (۲-۱۸) استفاده می کنیم.

$$\bar{\phi}_1 e^{i\Omega T} = \frac{d}{dT} v - i\Omega v, \quad \bar{\phi}_2 e^{i\Omega \tau} = \frac{d}{dt} w + i\Omega w \quad (2-19)$$

حال با جمع هر عبارت (۲-۱۸) با مزدوجهایش در (۲-۱۹) جملات $\frac{d}{dT} v$ و $\frac{d}{dT} w$ و با تفریق آنها از یکدیگر جملات v و w به شکل زیر بدست خواهد آمد:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dT}v &= \frac{1}{2}\phi_1 e^{i\Omega T} + \frac{1}{2}\bar{\phi}_1 e^{-i\Omega T} \\ \frac{d}{dT}w &= \frac{1}{2}\phi_2 e^{i\Omega T} + \frac{1}{2}\bar{\phi}_2 e^{-i\Omega T} \\ v &= \frac{-i(\phi_1 e^{i\Omega T} - \bar{\phi}_1 e^{-i\Omega T})}{2\Omega} \\ w &= \frac{-i(\phi_2 e^{i\Omega T} - \bar{\phi}_2 e^{-i\Omega T})}{2\Omega}\end{aligned}\tag{۲-۲۰}$$

حال با مشتق گیری از روابط (۲-۱۸) روابط زیر حاصل خواهد شد:

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dt}\phi_1\right)e^{i\Omega t} + i\phi_1\Omega e^{i\Omega t} &= \frac{d^2}{dt^2}v + i\Omega\frac{d}{dt}v \\ \left(\frac{d}{dt}\phi_2\right)e^{i\Omega t} + i\phi_2\Omega e^{i\Omega t} &= \frac{d^2}{dt^2}w + i\Omega\frac{d}{dt}w\end{aligned}\tag{۲-۲۱}$$

با جایگذاری عبارات $\frac{d}{dT}v$ و $\frac{d}{dT}w$ از (۲-۲۰) عبارات $\frac{d^2}{dT^2}v$ و $\frac{d^2}{dT^2}w$ بصورت زیر تشکیل خواهد شد:

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dT^2}v &= \left(\frac{d}{dT}\phi_1\right)e^{i\Omega T} + \frac{1}{2}i\Omega\phi_1 e^{i\Omega T} - \frac{1}{2}i\Omega\bar{\phi}_1 e^{-i\Omega T} \\ \frac{d^2}{dT^2}w &= \left(\frac{d}{dT}\phi_2\right)e^{i\Omega T} + \frac{1}{2}i\Omega\phi_2 e^{i\Omega T} - \frac{1}{2}i\Omega\bar{\phi}_2 e^{-i\Omega T}\end{aligned}\tag{۲-۲۲}$$

با جایگذاری عبارات (۲-۲۲) در معادلات (۲-۱۶) و (۲-۱۷) و همچنین نوشتن عبارت تحریک به فرم

قطبی زیر:

$$\varepsilon F \cos(\Omega T) = \frac{1}{2}\varepsilon F(e^{i\Omega T} - e^{-i\Omega T})\tag{۲-۲۳}$$

و با صفر کردن سکولارترمها^۱ که عبارات ضریب $e^{i\Omega T}$ را تشکیل می‌دهند، عبارات زیر بدست خواهد آمد:

$$\frac{d}{dT}\phi_1 + \frac{1}{2}i(\varepsilon\sigma + 1)\phi_1 + \frac{\varepsilon\lambda_1(\varepsilon\phi_2 + \phi_1)}{2\varepsilon + 2} - \frac{1}{2} \frac{i(\varepsilon\phi_2 + \phi_1)}{(\varepsilon + 1)(\varepsilon\sigma + 1)} - \frac{1}{2}\varepsilon F = 0 \quad (2-24)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dT}\phi_2 + \frac{1}{2}i(\varepsilon\sigma + 1)\phi_2 + \frac{1}{2}\lambda_2(\varepsilon + 1)\phi_2 - \frac{3iK(\varepsilon + 1)\phi_2^2\bar{\phi}_2}{8(\varepsilon\sigma + 1)^3} - \frac{1}{2} \frac{i\delta(\varepsilon + 1)\phi_2}{\varepsilon\sigma + 1} \\ + \frac{\varepsilon\lambda_1(\varepsilon\phi_2 + \phi_1)}{2\varepsilon + 2} - \frac{1}{2} \frac{i(\varepsilon\phi_2 + \phi_1)}{(\varepsilon + 1)(\varepsilon\sigma + 1)} - \frac{1}{2}\varepsilon F = 0 \end{aligned} \quad (2-25)$$

در این مرحله از یک پارامتر تنظیم^۲ استفاده می‌شود. در این عبارت σ نشان دهنده نزدیکی فرکانس تحریک به فرکانس طبیعی سیستم اصلی می‌باشد.

$$\Omega = 1 + \varepsilon\sigma \quad (2-26)$$

پیش از این گفته شد که در مسائل غیرخطی با ارتعاشات کوچک، از تئوری اغتشاشات استفاده می‌شود. همینطور گفته شد که در این سیستم‌ها، جرم جاذب بسیار کوچک‌تر از جرم نوسان‌گر اصلی می‌باشد (≈ 1%). با کمک این پارامتر کوچک می‌توان از تئوری اغتشاشات در حل این مسئله بهره برد. در این مرحله با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه^۳ تحلیل سیستم انجام خواهد شد:

$$\phi_j(T) = \phi_j(T_0, T_1, \dots), \quad \frac{d}{dT} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \dots, \quad T_K = \varepsilon^K T, \quad K = 0, 1, \dots \quad (2-27)$$

^۱ Secular Terms

^۲ Detuning Parameter

^۳ Multiple Scales Method

بنابراین با جایگذاری عبارات (۲-۲۶) و (۲-۲۷) در معادلات (۲-۲۴) و (۲-۲۵) معادلات زیر بدست

می آیند:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial T0} \phi_1(T0, T1) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T1} \phi_1(T0, T1) + \frac{1}{2} i \phi_1(T0, T1) \varepsilon \sigma + \frac{1}{2} i \phi_1(T0, T1) \\ & + \frac{\varepsilon \lambda_1 (\varepsilon \phi_2(T0, T1) + \phi_1(T0, T1))}{2\varepsilon + 2} - \frac{1}{2} \frac{i \varepsilon \phi_2(T0, T1)}{(1+\varepsilon)(\varepsilon\sigma+1)} - \frac{1}{2} \frac{i \phi_1(T0, T1)}{(1+\varepsilon)(\varepsilon\sigma+1)} - \frac{1}{2} \varepsilon F = 0 \end{aligned} \quad (2-28)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} i \phi_2(T0, T1) \varepsilon \sigma + \frac{1}{2} i \phi_2(T0, T1) + \frac{1}{2} \lambda_2 \phi_2(T0, T1) \varepsilon + \frac{1}{2} \lambda_2 \phi_2(T0, T1) \\ & - \frac{3iK (\phi_2(T0, T1))^2 \overline{\phi_2}(T0, T1) \varepsilon}{8(\varepsilon\sigma+1)^3} - \frac{3iK (\phi_2(T0, T1))^2 \overline{\phi_2}(T0, T1)}{8(\varepsilon\sigma+1)^3} \end{aligned} \quad (2-29)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2} \frac{i \delta \phi_2(T0, T1) \varepsilon}{\varepsilon\sigma+1} - \frac{1}{2} \frac{i \delta \phi_2(T0, T1)}{\varepsilon\sigma+1} + \frac{\varepsilon \lambda_1 (\varepsilon \phi_2(T0, T1) + \phi_1(T0, T1))}{2\varepsilon + 2} \\ & - \frac{1}{2} \frac{i \phi_2(T0, T1) \varepsilon}{(1+\varepsilon)(\varepsilon\sigma+1)} - \frac{1}{2} \frac{i \phi_1(T0, T1)}{(1+\varepsilon)(\varepsilon\sigma+1)} - \frac{1}{2} \varepsilon F = 0 \end{aligned}$$

حال با استفاده از بسط تیلور مخارج، عبارات (۲-۲۸) و (۲-۲۹) را ساده می کنیم. جهت ساده سازی

در نوشتار، $\phi_j(T0, T1) = \phi_j$ نوشته خواهد شد. محاسبات مربوط به بسط تیلور در پیوست موجود

می باشد.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial T0} \phi_1 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T1} \phi_1 + i \phi_1 \varepsilon \sigma + \frac{1}{2} \varepsilon \lambda_1 (\varepsilon \phi_2 + \phi_1) - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \lambda_1 (\varepsilon \phi_2 + \phi_1) \\ & + \frac{1}{2} i \varepsilon^2 (\sigma + 1) \phi_2 + \frac{1}{2} i \varepsilon (\phi_1 - \phi_2) - \frac{1}{2} \varepsilon F = 0 \end{aligned} \quad (2-30)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial T0} \phi_2 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T1} \phi_2 - \frac{1}{2} i \varepsilon \phi_2 + \frac{1}{2} i \varepsilon^2 \phi_2 + \frac{1}{2} \lambda_2 \phi_2 \varepsilon + \frac{1}{2} \lambda_2 \phi_2 \varepsilon - \frac{3}{8} i K \phi_2^2 \overline{\phi_2} \varepsilon \\ & + \frac{1}{2} i \delta \phi_2 \varepsilon^2 \sigma + \frac{1}{2} i \varepsilon \sigma \phi_1 + \frac{1}{2} i \delta \phi_2 \varepsilon \sigma + \frac{9i}{8} K \phi_2^2 \overline{\phi_2} \varepsilon^2 \sigma - \frac{1}{2} i \delta \phi_2 \varepsilon - \frac{1}{2} i \delta \phi_2 \\ & + \frac{1}{2} i \varepsilon \phi_1 + \frac{1}{2} \varepsilon \lambda_1 (\varepsilon \phi_2 + \phi_1) - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \lambda_1 (\varepsilon \phi_2 + \phi_1) + \frac{1}{2} i \phi_2 - \frac{1}{2} i \phi_1 + \frac{1}{2} i \phi_2 \varepsilon \sigma \\ & + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sigma \phi_2 + \frac{9i}{8} K \phi_2^2 \overline{\phi_2} \varepsilon \sigma - \frac{3}{8} i K \phi_2^2 \overline{\phi_2} - \frac{1}{2} \varepsilon F = 0 \end{aligned} \quad (2-31)$$

حال ضرایب مربوط به مرتبه‌های مختلف ε ، از دو معادله (۲-۳۰) و (۲-۳۱) جدا خواهند شد:

ضرایب ε^0 :

$$\frac{\partial}{\partial T_0} \phi_1 = 0 \quad (2-32)$$

$$\frac{\partial}{\partial T_0} \phi_2 + \frac{1}{2} \lambda_2 \phi_2 + \frac{1}{2} i (\phi_2 - \phi_1) - \frac{3}{8} i K (\phi_2)^2 \bar{\phi}_2 - \frac{1}{2} i \delta \phi_2 = 0 \quad (2-33)$$

ضرایب ε^1 :

$$\frac{\partial}{\partial T_1} \phi_1 + i \phi_1 \sigma + \frac{1}{2} \lambda_1 \phi_1 + \frac{1}{2} i (\phi_1 - \phi_2) - \frac{1}{2} F = 0 \quad (2-34)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T_1} \phi_2 + \frac{1}{2} \lambda_2 \phi_2 - \frac{1}{2} i \delta \phi_2 + \frac{1}{2} i \sigma \phi_1 + \frac{1}{2} i \delta \phi_2 \sigma + \frac{9i}{8} K \phi_2^2 \bar{\phi}_2 \sigma + \frac{1}{2} \lambda_1 \phi_1 \\ - \frac{3}{8} i K \phi_2^2 \bar{\phi}_2 + \frac{1}{2} i \phi_2 \sigma + \frac{1}{2} i \phi_1 - \frac{1}{2} i \phi_2 - \frac{1}{2} F = 0 \end{aligned} \quad (2-35)$$

حال متغیرهای جدید زیر اعمال خواهند شد که در آن N_1 و N_2 دامنه نوسان و $e^{i\theta_1}$ و $e^{i\theta_2}$ زاویه فاز نوسان گر اصلی و چاه غیرخطی انرژی می‌باشند.

$$\phi_1 = N_1(T_1) e^{i\theta_1}, \quad \phi_2 = N_2(T_1) e^{i\theta_2} \quad (2-36)$$

با اعمال تغییر متغیر فوق بر معادله (۲-۳۳) معادله (۲-۳۷) بدست می‌آید که شامل دو بخش موهومی

و حقیقی می‌باشد.

$$\frac{1}{2} \lambda_2 N_2 e^{i\theta_2} + \frac{1}{2} i N_2 e^{i\theta_2} - \frac{3}{8} i K N_2^3 e^{i\theta_2} - \frac{1}{2} i \delta N_2 e^{i\theta_2} = \frac{1}{2} i N_1 e^{i\theta_1} \quad (2-37)$$

با مرتب کردن معادله (۲-۳۷) برحسب جملات موهومی و حقیقی و معادل قرار دادن اندازه‌های دو طرف آن، خواهیم داشت:

$$N_1^2 = \frac{9N_2^6 K^2}{16} + \frac{3}{2} N_2^4 K \delta - \frac{3}{2} N_2^4 K + N_2^2 \delta^2 - 2N_2^2 \delta + N_2^2 + \lambda_2^2 N_2^2 \quad (۲-۳۸)$$

در نهایت از تغییر متغیر (۲-۳۹) استفاده خواهد شد:

$$N_1^2 = Z_1, \quad N_2^2 = Z_2 \quad (۲-۳۹)$$

که نتیجه آن به صورت عبارت (۲-۴۰) خواهد بود:

$$Z_1 = \frac{9Z_2^3 K^2}{16} + \frac{3}{2} Z_2^2 K \delta - \frac{3}{2} Z_2^2 K + Z_2 \delta^2 - 2Z_2 \delta + Z_2 + \lambda_2^2 Z_2 \quad (۲-۴۰)$$

عبارت فوق در واقع منیفولد نامتغیر آهسته می‌باشد.

با اکسترمم کردن معادله فوق نسبت به Z_2 می‌توان بازه‌های حل را به صورت زیر مشخص نمود:

$$Z_2 = \frac{4 - 4\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 3\lambda_2^2 - 2\delta + 1}}{9K} \quad (۲-۴۱)$$

بنابراین شرط زیر باید صدق کند:

$$\delta < 1 - \sqrt{3}\lambda_2, \quad \delta > 1 - \sqrt{3}\lambda_2 \quad (۲-۴۲)$$

اگر δ بزرگتر از مقدار بحرانی فوق باشد، عبارت SIM یکنواخت خواهد بود و در غیر این صورت دارای اکسترمم خواهد بود و می‌تواند دارای دو شاخه پایدار و یک شاخه ناپایدار باشد.

جدول ۱-۲- پارامترهای مدل I برای حالت مدوله قوی

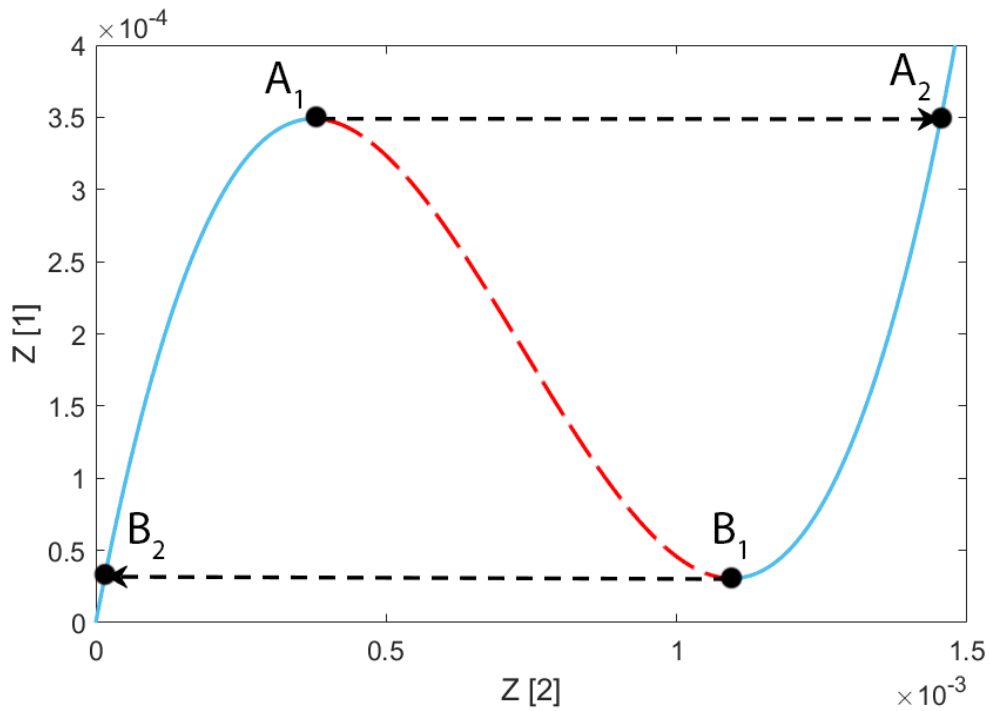
پارامترهای فیزیکی		پارامترهای کاهش یافته بی بعد	
m_1	5 Kg	ε	0.01
m_2	50 g	K	1742
c_1	4 Ns/m	δ	- 0.44
c_2	0.4 Ns/m	λ_1	1.67
k_1	11.4×10^3 N/m	λ_2	0.167
k_2	2×10^5 N/m ³		
k_3	-50 N/m		

جدول ۱-۲ شامل مقادیر پارامترهای موجود در مسئله جهت شبیه سازی عددی می باشد. با جایگذاری این مقادیر در معادله (۲-۴۰)، تصویر ۲-۲ بدست خواهد آمد که شکل معروف مربوط به منیفولد نامتغیر آهسته در مسائل چاه غیرخطی انرژی می باشد. در این نمودار قسمت های خط چین، جواب ناپایدار می باشند. در حقیقت در این قسمت پدیده پرش^۱ اتفاق افتاده است. اگر در نمودار از صفر به سمت راست حرکت کنیم، بعد از رسیدن به قله نمودار شاهد یک پرش به سمت شاخه پایدار خواهیم بود. همچنین اگر در نمودار از سمت راست به سمت چپ حرکت کنیم پدیده پرش در اکسترمم پایین نمودار ظاهر خواهد شد (حرکت پدیده پرش با فلش نشان داده شده است). پدیده ی پرش نشان دهنده تغییر ناگهانی در دامنه ارتعاشات جاذب می باشد که در فصل ۳ نشان داده خواهد شد. هر چه این پرش بزرگ تر باشد، تغییرات ناگهانی در دامنه نیز بزرگتر خواهد بود. همچنین هر چه مقادیر دو اکسترمم به هم نزدیک تر باشند، پدیده پرش کوچکتر خواهد بود [26].

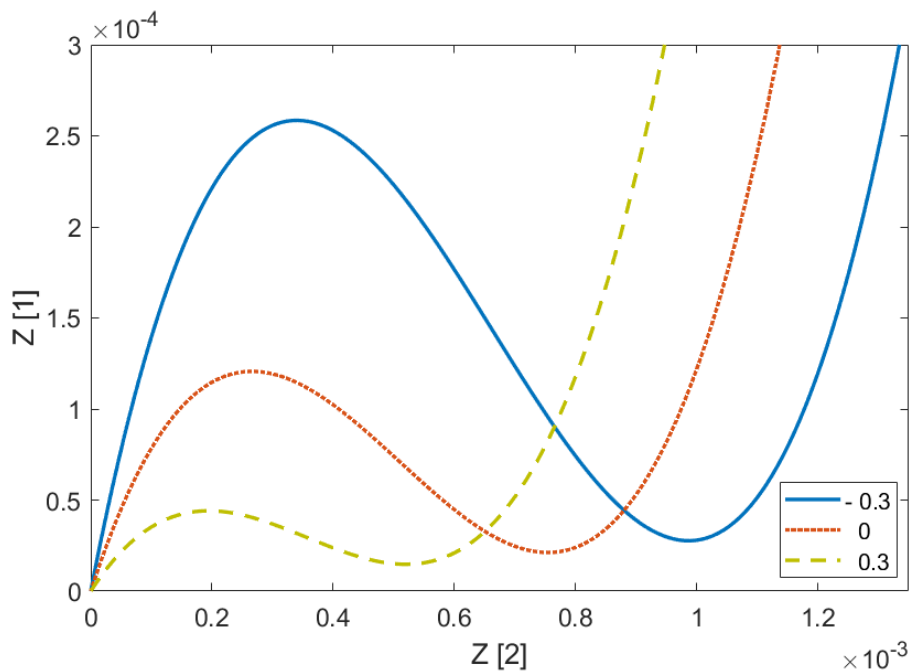
همچنین با توجه به تصویر ۲-۳، با کاهش مقدار δ ، نمودار به سمت راست و بالا حرکت می کند. در این نمودار Z_1 و Z_2 به ترتیب برابر $|\dot{v} + i\Omega v| e^{-i\Omega\tau}$ و $|\dot{w} + i\Omega w| e^{-i\Omega\tau}$ می باشد.

^۱ Jump

بنابراین می‌توان گفت با کاهش مقدار δ در بازه‌ی مشخص مورد بررسی، با افزایش فاصله بین جرم نوسان‌گر اصلی و چاه غیرخطی انرژی و دامنه ارتعاشی سیستم و کارایی جاذب در فرونشاندن ناگهانی ارتعاش افزایش خواهد یافت. همچنین اندازه سرعت تغییر مکان مرکز جرم سیستم نیز بزرگتر خواهد شد.



تصویر ۲-۲- منیفولد نامتغیر آهسته برای حالت مدوله قوی برای مدل I - قسمت خط چین جواب ناپایدار مسئله می‌باشد.



تصویر ۳-۲- منیفولد نامتغیر آهسته برای حالت مدوله قوی با سه مقدار برای پارامتر δ برای مدل I

همانطور که در تصویر ۲-۲ و نمودار انرژی پتانسیل (تصویر ۲-۴) و همچنین معادله (۲-۴۱) دیده می شود، در صورتی که یک جواب برای مسئله وجود داشته باشد آن جواب پایدار است و در صورتی که سه جواب برای مسئله وجود داشته باشد، دو جواب پایدار و یک جواب ناپایدار خواهد بود [20].

تصویر ۲-۴ برای چهار سطح از انرژی با مقدار دامنه های متفاوت رسم شده است:

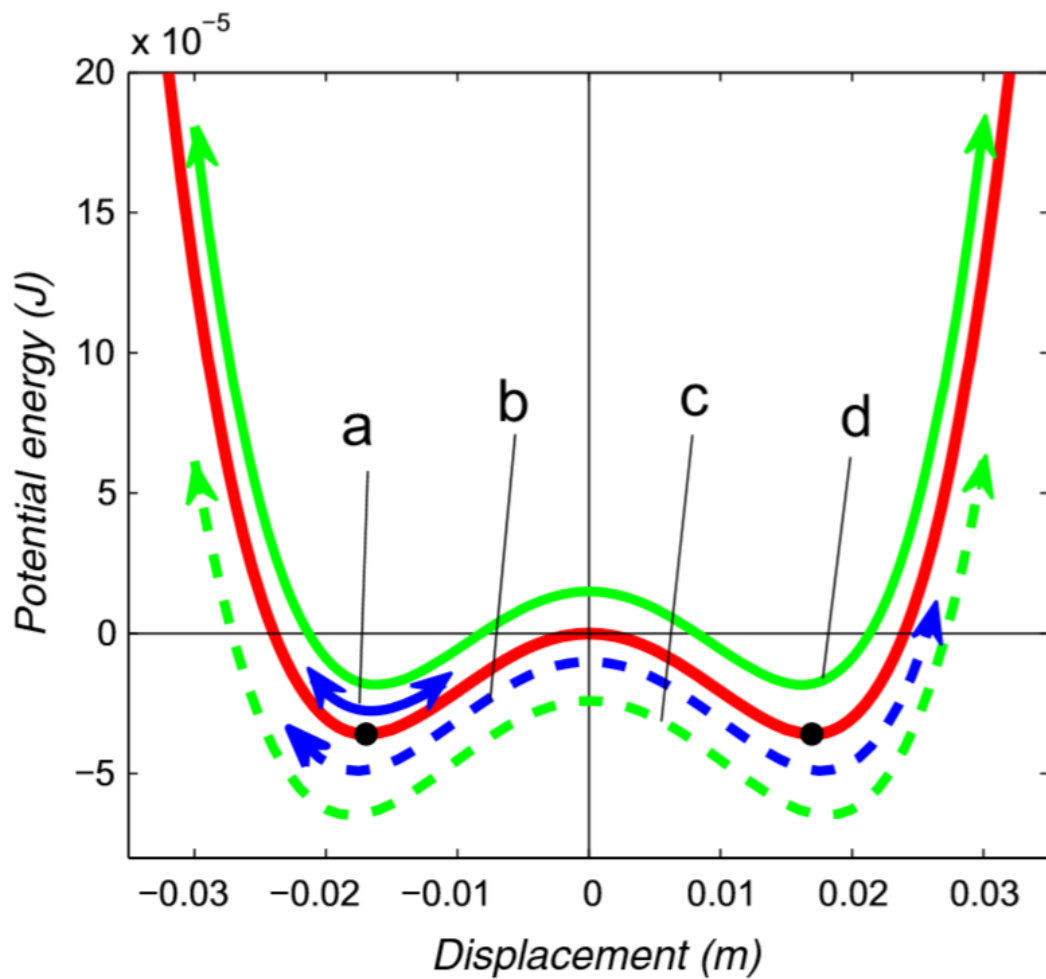
(a) دامنه با مقدار $G = 0.06 \text{ mm}$

(b) دامنه با مقدار $G = 0.1 \text{ mm}$

(c) دامنه با مقدار $G = 0.42 \text{ mm}$

(d) دامنه با مقدار $G = 0.55 \text{ mm}$

با توجه به این تصویر می توان چنین برداشت کرد که با افزایش دامنه ارتعاش، سطح انرژی سیستم افزایش می یابد. همچنین دو نقطه پایدار و یک نقطه ناپایدار سیستم قابل مشاهده می باشند.



تصویر ۲-۴- نمودار انرژی پتانسیل به جابجایی در سطح‌های مختلف از انرژی برای مدل I

۲-۳ بررسی پاسخ حالت آبخاری مدل I

در این قسمت به بررسی حالت آبخاری می‌پردازیم. حالت آبخاری اصطلاحاً به حالتی گفته می‌شود که فرکانس طبیعی نو سان‌گر اصلی از فرکانس طبیعی چاه غیرخطی ارتفاعات دور با شد. برای بررسی پاسخ حالت آبخاری از معادلات (۲-۱۰) و (۲-۱۱) که به فرم زیر بودند، فرایند مجدداً مورد بررسی قرار می‌گیرد [41], [26].

$$\frac{d^2}{dT^2} X + X + \varepsilon\delta(X - Y) + \varepsilon\lambda_1 \frac{d}{dT} X + \varepsilon\lambda_2 \left(\frac{d}{dT} X - \frac{d}{dT} Y \right) \quad (2-43)$$

$$+ \varepsilon K (X - Y)^3 = \varepsilon F \cos(\Omega T)$$

$$\varepsilon \frac{d^2}{dT^2} Y + \varepsilon\delta(Y - X) + \varepsilon K (Y - X)^3 + \varepsilon\lambda_2 \left(\frac{d}{dT} Y - \frac{d}{dT} X \right) = 0 \quad (2-44)$$

حال تغییر متغیر زیر اعمال می شوند. پارامترهای جدید معرف حرکت نوسان گر اصلی و فاصله نسبی نوسان گر اصلی و چاه غیرخطی انرژی خواهد بود.

$$v = X, \quad w = X - Y \quad (2-45)$$

با استفاده از (2-45) نتایج زیر حاصل خواهند شد:

$$Y = w - v, \quad X = v \quad (2-46)$$

با جایگذاری (2-46) در (2-43) و (2-44)، معادلات به شکل زیر بدست خواهد آمد:

$$\frac{d^2}{dT^2} v + v + \varepsilon\delta w + \varepsilon\lambda_1 \frac{d}{dT} v + \varepsilon\lambda_2 \frac{d}{dT} w + \varepsilon K w^3 = \varepsilon F \cos(\Omega T) \quad (2-47)$$

$$\frac{d^2}{dT^2} v - \frac{d^2}{dT^2} w - \delta w - K w^3 - \lambda_2 \frac{d}{dT} w = 0 \quad (2-48)$$

در ادامه کار معادلات، با مرتبه صفر از ε ادامه پیدا خواهد کرد. برای این که λ_1 در محاسبات باقی بماند، به طور اختیاری از مرتبه ε^{-1} در نظر گرفته خواهد شد. در این صورت عبارت $\varepsilon\lambda_1$ از مرتبه ε^0 خواهد بود و در معادلات باقی خواهد ماند [26]. با نگر داشتن عبارات مرتبه ε^0 ، معادلات به شکل زیر تشکیل خواهد شد:

$$\frac{d^2}{dT^2}v + v + \Lambda \frac{d}{dT}v = 0 \quad (2-49)$$

$$\frac{d^2}{dT^2}v - \frac{d^2}{dT^2}w - \delta w - Kw^3 - \lambda_2 \frac{d}{dt}w = 0 \quad (2-50)$$

که در آن $\varepsilon \lambda_1 = \Lambda$ می‌باشد.

پاسخ معادله (2-49) به شکل زیر خواهد بود.

$$v = C_1 e^{\left(-\frac{\Lambda}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\Lambda^2 - 4}\right)T} + C_2 e^{\left(-\frac{\Lambda}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\Lambda^2 - 4}\right)T} \quad (2-51)$$

که C_1 و C_2 ثوابت جواب می‌باشند. معادله فوق را می‌توان به شکل (2-52) و با ثوابت جدید تابع زمان نوشت.

$$v(T) = \tilde{C}_1(T) e^{i\left(\frac{\sqrt{4-\Lambda^2}}{2}\right)T} + \tilde{C}_2(T) e^{-i\left(\frac{\sqrt{4-\Lambda^2}}{2}\right)T} \quad (2-52)$$

در ادامه کار، جهت ساده سازی مراحل حل از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم.

$$v(T) = A_1(T) e^{i\frac{\sqrt{4-\Lambda^2}}{2}T} + C.C = A_1(T) e^{iQT} + C.C \quad (2-53)$$

در واقع روش مورد استفاده، روش بالانس هارمونیک¹ می‌باشد که در آن پاسخ معادلات به شکل هارمونیک در نظر گرفته می‌شود و در آن A_1 و A_2 مختلط می‌باشند [26].

¹ Harmonic Balance Method

$$v = A_1 e^{iQ_T} + A_2 e^{-iQ_T} \quad (2-54)$$

و پاسخ تقریبی برای w نیز به شکل زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$w = B_1 e^{iQ_T} + B_2 e^{-iQ_T} \quad (2-55)$$

با جای گذاری (2-54) و (2-55) در (2-50) عبارات زیر به دست خواهد آمد:

$$\frac{A_2 i^2 Q^2 - B_2 i^2 Q^2 - 3KB_1 B_2^2 + B_2 Qi \lambda_2 - \delta B_2}{e^{iQ_T}} - KB_1^3 (e^{iQ_T})^3 - \frac{KB_2^3}{(e^{iQ_T})^3} \quad (2-56)$$

$$+ (A_1 i^2 Q^2 - B_1 i^2 Q^2 - 3KB_1^2 B_2 - B_1 Qi \lambda_2 - \delta B_1) e^{iQ_T} = 0$$

با صفر کردن ضرایب (e^{iQ_T}) که همان سکولار ترم می‌باشد، عبارت زیر ظاهر خواهد شد:

$$A_1 i^2 Q^2 - B_1 i^2 Q^2 - 3KB_1^2 B_2 - B_1 Qi \lambda_2 - \delta B_1 = 0 \quad (2-57)$$

ضرایب عبارات هارمونیک، به شکل مختلط زیر نوشته خواهد شد:

$$A_1 = \frac{1}{2} a e^{i\alpha} \quad (2-58)$$

$$B_1 = \frac{1}{2} b e^{i\beta} \quad (2-59)$$

$$A_2 = \frac{1}{2} a e^{-i\alpha} \quad (2-60)$$

$$B_2 = \frac{1}{2}be^{-i\beta} \quad (2-61)$$

با جایگذاری عبارت (۲-۵۸) الی (۲-۶۱) در (۲-۵۷) و همچنین با توجه به $i^2 = -1$ عبارات (۲-۶۲) بدست خواهند آمد.

$$4be^{i\beta}Q^2 - 3Kb^3e^{i\beta} - 4\lambda_2be^{i\beta}iQ - 4\delta be^{i\beta} = 4ae^{i\alpha}Q^2 \quad (2-62)$$

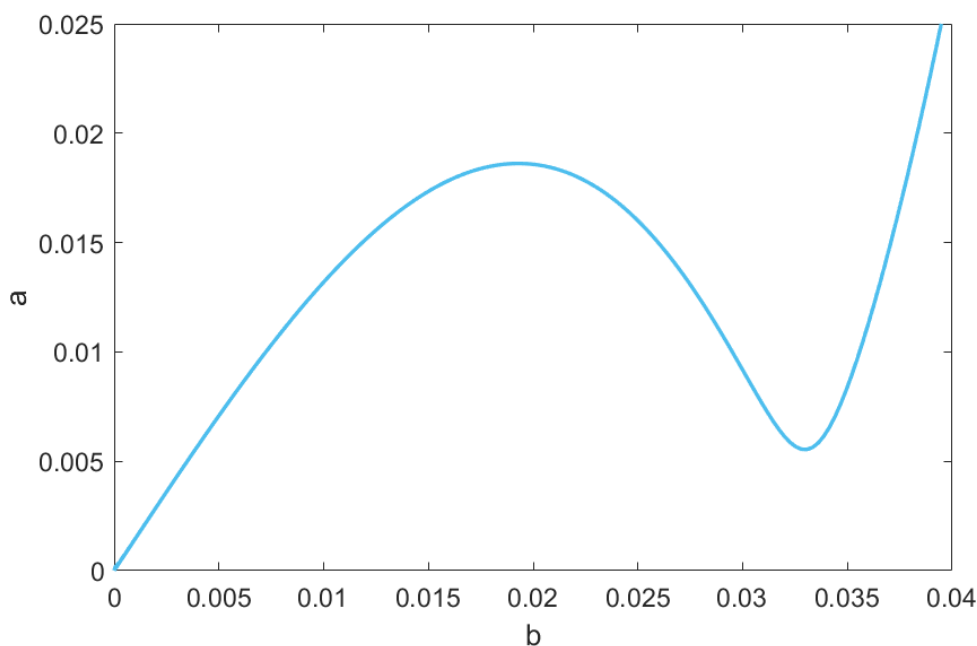
با مرتب کردن معادله (۲-۶۲) برحسب جملات موهومی و حقیقی و معادل قرار دادن اندازه‌های دو طرف آن، خواهیم داشت:

$$16a^2Q^4 = 16\lambda_2^2b^2Q^2 - 24Kb^4Q^2 + 24Kb^4\delta - 32b^2Q^2\delta + 16\delta^2b^2 + 9K^2b^6 + 16b^2Q^4 \quad (2-63)$$

با جایگذاری مجدد عبارت $Q = \frac{\sqrt{4-\Lambda^2}}{2}$ در معادله فوق، عبارت منیفولد نامتغیر آهسته به شکل زیر بدست خواهد آمد:

$$a^2\Lambda^4 - 8a^2\Lambda^2 + 16a^2 = -4\lambda_2^2b^2\Lambda^2 + 16\lambda_2^2b^2 + 8b^2\delta\Lambda^2 - 32b^2\delta + 24Kb^4\delta + 6Kb^4\Lambda^2 - 24Kb^4 + 9K^2b^6 + 16\delta^2b^2 + b^2\Lambda^4 - 8b^2\Lambda^2 + 16b^2 \quad (2-64)$$

با قرار دادن عبارات جدول ۱-۲ در معادله (۲-۶۴) نمودار SIM به صورت زیر بدست خواهد آمد:

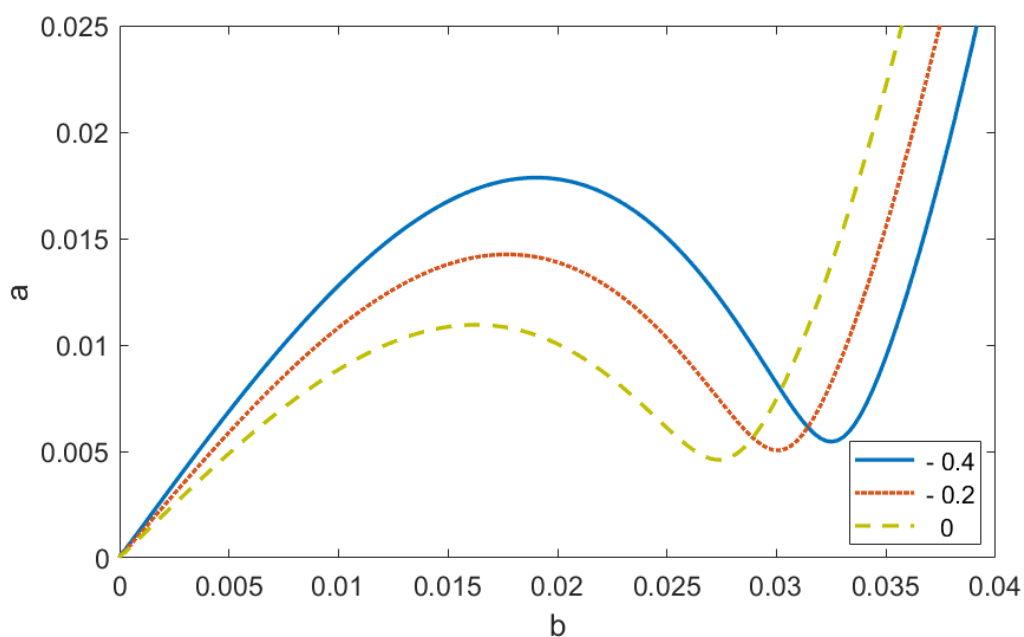


تصویر ۲-۵- نمودار منیفولد نامتغیر آهسته (SIM) در حالت آبشاری برای مدل I

در تصویر ۲-۵ مشاهده می‌شود که این بار نیز مانند قسمت ۲-۲ نمودار SIM دارای سه پاسخ در یک بازه‌ای مشخص می‌باشد که در آن دو پاسخ پایدار و یک پاسخ ناپایدار می‌باشند. همچنین پدیده پرش نیز مانند قسمت قبل رخ خواهد داد.

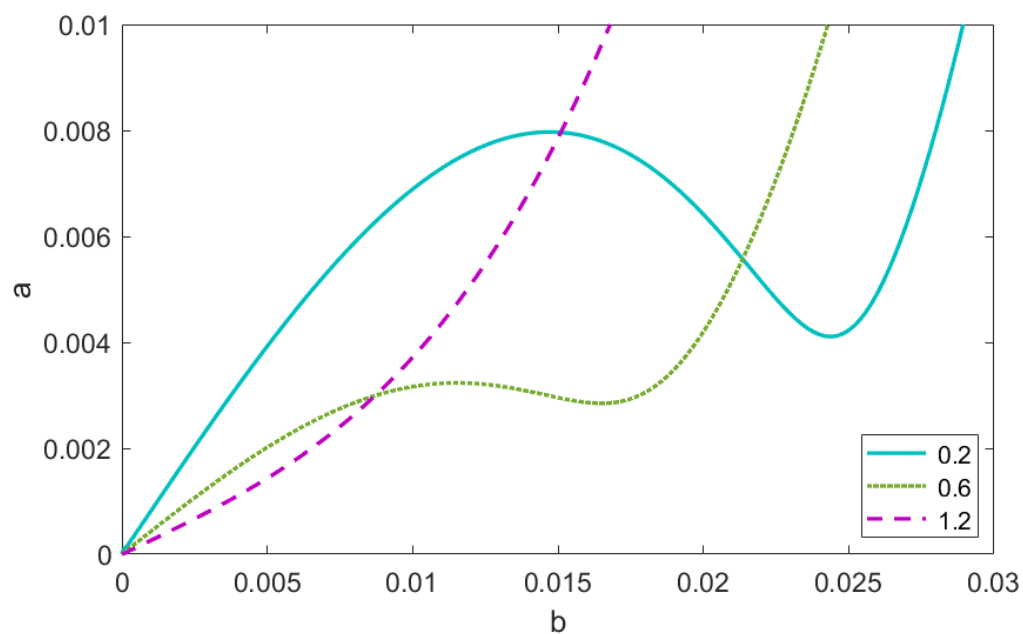
در محاسبات پیشین مشاهده کردیم که a رابطه مستقیم با v داشته و همچنین b دارای رابطه مستقیم با w می‌باشد. بنابراین می‌توان گفت با کاهش مقدار δ در بازه‌ی مشخص مورد بررسی، با افزایش فاصله بین جرم نوسان‌گر اصلی و چاه غیرخطی انرژی، دامنه ارتعاشی سیستم و کارایی NES افزایش خواهد یافت. همچنین اندازه تغییر مکان نوسان‌گر اصلی نیز بزرگتر خواهد شد.

(تصویر ۲-۶)



تصویر ۲-۶- منیفولد نامتغیر آهسته برای حالت آبخاری با سه مقدار برای پارامتر δ برای مدل I

اما اگر مقدار δ افزایش یابد (فتر k_3 قوی تر شود) به تدریج اثر پرش از بین خواهد رفت و همانطور که در قسمت قبل اشاره شد عبارت SIM در تمام نمودار دارای یک جواب پایدار خواهد بود که این به علت کم شدن اثر فتر غیرخطی می باشد (تصویر ۲-۷).



تصویر ۲-۷- منیفولد نامتغیر آهسته برای مقادیر بالاتر از پارامتر δ در حالت آبخاری برای مدل I

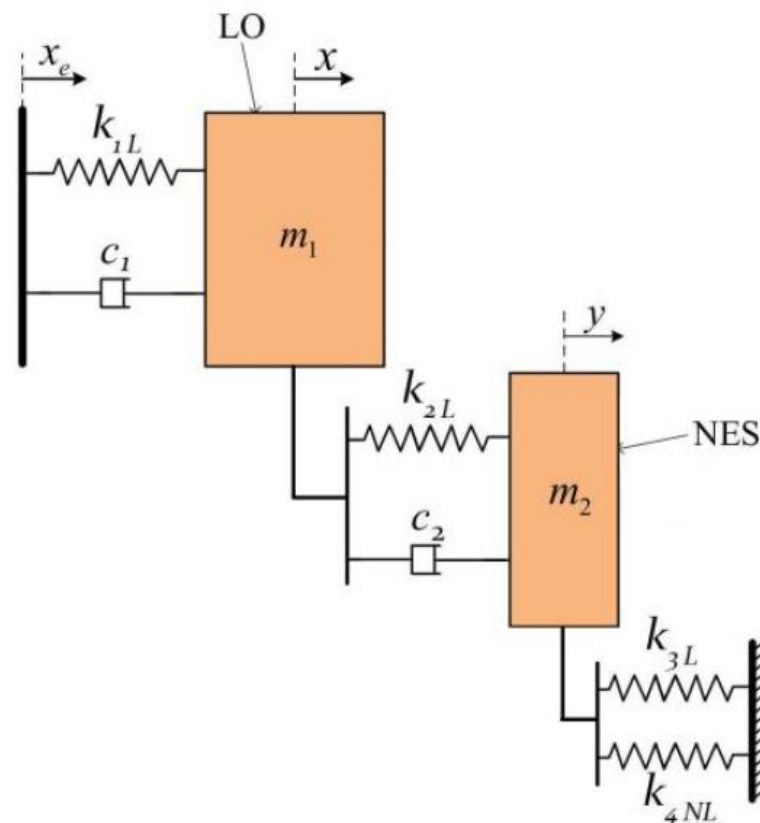
فصل ۳:

معرفی، مدل سازی و تحلیل مدل II

۳-۱ بررسی پاسخ مدوله قوی یک سیستم متصل به زمین دارای

چاه غیرخطی انرژی

سیستم اصلی مورد مطالعه در این پژوهش یک سیستم دو درجه آزادی، شامل یک نوسانگر اصلی است که از یک سو با یک فنر و دمپر خطی به پایه متحرک و از سوی دیگر با یک فنر و دمپر خطی به چاه غیرخطی انرژی متصل می‌باشد. چاه غیرخطی انرژی نیز با دو فنر خطی و غیرخطی درجه سه به صورت پتانسیل محلی زمین متصل شده است. دیاگرام آزاد سیستم مورد بررسی در این پژوهش به صورت تصویر ۳-۱ می‌باشد. این سیستم در این پژوهش مدل II نامیده می‌شود که معادله حرکت آن بنابر قانون دوم نیوتون به صورت معادلات (۳-۱) و (۳-۲) بدست می‌آید.



تصویر ۳-۱- مدل II - سیستم مورد بررسی در این بخش

$$m_1 \frac{d^2}{dt^2} x(t) + k_1 x(t) + k_2 (x(t) - y(t)) + c_2 \left(\frac{d}{dt} x(t) - \frac{d}{dt} y(t) \right) + c_1 \frac{d}{dt} x(t) \quad (3-1)$$

$$= k_1 x_e(t) + c_1 \frac{d}{dt} x_e(t)$$

$$m_2 \frac{d^2}{dt^2} y(t) - k_2 (x(t) - y(t)) - c_2 \left(\frac{d}{dt} x(t) - \frac{d}{dt} y(t) \right) + k_3 y(t) + k_4 (y(t))^3 = 0 \quad (3-2)$$

در عبارات فوق m_1 و x به ترتیب برابر جرم و جابجایی نوسان گر اصلی، m_2 و y جرم و جابجایی چاه غیرخطی انرژی، x_e اندازه جابجایی تحریک پایه سیستم، k_i ها سفتی های سیستم و c_i ها میرایی های سیستم می باشند که در تصویر ۳-۱ قابل مشاهده می باشد.

تحریک پایه x_e مانند بخش ۲-۲ هارمونیک و به صورت زیر است، بنابراین عبارت تحریک به

شکل زیر نوشته خواهد شد:

$$x_e = G \cos(\omega t) \quad (3-3)$$

با جایگذاری عبارت (۳-۳) در سمت راست معادله (۲-۱) عبارت (۲-۴) بدست خواهد آمد.

$$k_1 x_e(t) + c_1 \frac{d}{dt} x_e(t) = k_1 G \cos(\omega t) - c_1 G \omega \sin(\omega t) \quad (3-4)$$

جهت بی بعد سازی معادله حرکت، ابتدا معادله نخست (۳-۱) بر m_1 و معادله دوم (۳-۲) بر m_2 تقسیم

می شود. سپس از پارامترهای بی بعد، مانند فصل دوم، استفاده خواهد شد.

$$\frac{k_1 X(t) t_0^2}{x_0 m_1} + \frac{k_2 X(t) t_0^2}{x_0 m_1} - \frac{k_2 Y(t) y_0 t_0^2}{x_0^2 m_1} + \frac{d^2}{dt^2} X(t) + \frac{c_1 \left(\frac{d}{dt} X(t) \right) t_0}{x_0 m_1} \quad (3-5)$$

$$+ \frac{c_2 \left(\frac{d}{dt} X(t) \right) t_0}{x_0 m_1} - \frac{c_2 y_0 \left(\frac{d}{dt} Y(t) \right) t_0}{x_0^2 m_1} = \frac{t_0^2 k_1 x_{e0} X_e(t)}{x_0^2 m_1} + \frac{t_0 c_1 x_e \frac{d}{dt} X_e(t)}{x_0^2 m_1}$$

$$\frac{y_0 k_4 (Y(t))^3 t_0^2}{m_2} - \frac{k_2 X(t) x_0 t_0^2}{y_0^2 m_2} + \frac{k_2 Y(t) t_0^2}{y_0 m_2} + \frac{k_3 Y(t) t_0^2}{y_0 m_2} + \frac{d^2}{dt^2} Y(t) \quad (3-6)$$

$$- \frac{c_2 x_0 \left(\frac{d}{dt} X(t) \right) t_0}{y_0^2 m_2} + \frac{c_2 \left(\frac{d}{dt} Y(t) \right) t_0}{y_0 m_2} = 0$$

با ضرب $\left(\frac{t_0}{x_0} \right)^2$ و با جایگذاری $t_0 = \frac{1}{\omega_0}$ در عبارات (3-7) و (3-8) عبارات (3-10) و (3-11) بدست خواهد آمد.

$$\frac{k_1 X(t)}{m_1 \omega_0^2} + \frac{k_2 X(t)}{m_1 \omega_0^2} - \frac{k_2 Y(t)}{m_1 \omega_0^2} + \frac{d^2}{dt^2} X(t) + \frac{c_1 \frac{d}{dt} X(t)}{m_1 \omega_0} + \frac{c_2 \frac{d}{dt} X(t)}{m_1 \omega_0} - \frac{c_2 \frac{d}{dt} Y(t)}{m_1 \omega_0} \quad (3-7)$$

$$= \frac{k_1 G \cos(\Omega T)}{\omega_0^2 m_1} - \frac{c_1 G \omega \sin(\Omega T)}{\omega_0^2 m_1}$$

$$\frac{k_4 Y^3}{m_2 \omega_0^2} - \frac{k_2 X}{m_2 \omega_0^2} + \frac{k_2 Y}{m_2 \omega_0^2} + \frac{k_3 Y}{m_2 \omega_0^2} + \frac{d^2}{dT^2} Y - \frac{c_2 \frac{d}{dT} X}{m_2 \omega_0} + \frac{c_2 \frac{d}{dT} Y}{m_2 \omega_0} = 0 \quad (3-8)$$

با تعریف عبارات (3-9)، جایگذاری آنها در معادلات (3-7) و (3-8) و با صرف نظر کردن از مرتبه‌های بالاتر از ε معادلات (3-10) و (3-11) بدست خواهد آمد.

$$\frac{m_2}{m_1} = \varepsilon, \quad \frac{k_1}{m_1} = \omega_0^2, \quad \frac{G}{\varepsilon} = F, \quad \frac{c_1}{m_2 \omega_0} = \lambda_1, \quad \frac{c_2}{m_2 \omega_0} = \lambda_2, \quad \frac{k_2}{m_2 \omega_0^2} = \delta_1, \quad (3-9)$$

$$\frac{k_3}{m_2 \omega_0^2} = \delta_2, \quad \frac{k_4}{m_2 \omega_0^2} = \delta_3, \quad T = \omega_0 t, \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$\frac{d^2}{dT^2} X + X + \varepsilon \delta_1 (X - Y) + \varepsilon \lambda_1 \frac{d}{dT} X + \varepsilon \lambda_2 \left(\frac{d}{dT} X - \frac{d}{dT} Y \right) = \varepsilon F \cos(\Omega T) \quad (3-10)$$

$$\varepsilon \frac{d^2}{dT^2} Y - \varepsilon \delta_1 (X - Y) + \varepsilon \delta_2 Y + \varepsilon \delta_3 Y^3 - \varepsilon \lambda_2 \left(\frac{d}{dT} X - \frac{d}{dT} Y \right) = 0 \quad (3-11)$$

حال با جمع دو رابطه (3-10) و (3-11)، رابطه (3-12) و با تقسیم رابطه (3-11) بر ε و کم کردن (3-10) از آن، رابطه (3-13) تشکیل خواهد شد.

$$\frac{d^2}{dT^2} X + X + \varepsilon \lambda_1 \frac{d}{dT} X + \varepsilon \frac{d^2}{dT^2} Y + \varepsilon \delta_2 Y + \varepsilon \delta_3 Y^3 = \varepsilon F \cos(\Omega T) \quad (3-12)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dT^2} X + X - \frac{d^2}{dT^2} Y + (\varepsilon + 1) \delta_1 (X - Y) + \varepsilon \lambda_1 \frac{d}{dT} X \\ + (\varepsilon + 1) \lambda_2 \left(\frac{d}{dT} X - \frac{d}{dT} Y \right) - \delta_2 Y - \delta_3 Y^3 = \varepsilon F \cos(\Omega T) \end{aligned} \quad (3-13)$$

در ادامه تغییر متغیر زیر اعمال می‌شود. برتری این تغییر متغیر در بخش 2-2 توضیح داده شد.

$$v = \varepsilon Y + X, \quad w = X - Y \quad (3-14)$$

با استفاده از (3-14) نتایج زیر حاصل خواهند شد:

$$Y = \frac{v - w}{1 + \varepsilon}, \quad X = \frac{v + \varepsilon w}{1 + \varepsilon} \quad (3-15)$$

با جایگذاری متغیرهای فوق در رابطه (3-12) و (3-13) معادلات زیر بدست خواهد آمد.

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dT^2} v + \frac{v + \varepsilon w}{\varepsilon + 1} + \varepsilon \lambda_1 \left(\frac{\frac{d}{dT} v + \varepsilon \frac{d}{dT} w}{\varepsilon + 1} \right) + \frac{\varepsilon \delta_2 (v - w)}{\varepsilon + 1} \\ + \frac{\varepsilon \delta_3 (v - w)^3}{(\varepsilon + 1)^3} = \varepsilon F \cos(\Omega T) \end{aligned} \quad (3-16)$$

$$\frac{d^2}{dT^2} w + \frac{v + \varepsilon w}{\varepsilon + 1} + (\varepsilon + 1) \delta_1 w + \varepsilon \lambda_1 \left(\frac{\frac{d}{dT} v + \varepsilon \frac{d}{dT} w}{\varepsilon + 1} \right) \quad (3-17)$$

$$+ (\varepsilon + 1) \lambda_2 \left(\frac{d}{dT} w \right) - \frac{\delta_2 (v - w)}{\varepsilon + 1} - \frac{\delta_3 (v - w)^3}{(\varepsilon + 1)^3} = \varepsilon F \cos(\Omega T)$$

در ادامه از تغییر متغیر مختلط مانوویچ استفاده خواهد شد [22].

$$\phi_1 e^{i\Omega T} = \frac{d}{dT} v + i\Omega v, \quad \phi_2 e^{i\Omega T} = \frac{d}{dT} w + i\Omega w \quad (3-18)$$

با اعمال تغییر متغیر (3-18) و نوشتن عبارت تحریک به فرم قطبی، معادلات به شکل زیر بدست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d}{dt} \phi_1 \right) e^{i\Omega T} + \frac{1}{2} i\Omega \phi_1 e^{i\Omega T} + \frac{i\bar{\phi}_1}{2(1+\varepsilon)\Omega e^{i\Omega T}} - \frac{i\varepsilon\phi_2 e^{i\Omega T}}{2(1+\varepsilon)\Omega} + \frac{i\varepsilon\bar{\phi}_2}{2(1+\varepsilon)\Omega e^{i\Omega T}} - \frac{i\varepsilon\delta_2 \phi_1 e^{i\Omega T}}{2(1+\varepsilon)\Omega} \\ & - \frac{i\varepsilon\delta_2 \bar{\phi}_2}{2(1+\varepsilon)\Omega e^{i\Omega T}} - \frac{i\varepsilon\delta_3 \bar{\phi}_1^3}{8(1+\varepsilon)^3 \Omega^3 (e^{i\Omega T})^3} - \frac{i\varepsilon\delta_3 \phi_2^3 (e^{i\Omega T})^3}{8(1+\varepsilon)^3 \Omega^3} + \frac{3i\varepsilon\delta_3 \bar{\phi}_1 \phi_2 \bar{\phi}_2}{4(1+\varepsilon)^3 \Omega^3 e^{i\Omega T}} \\ & + \frac{3i\varepsilon\delta_3 \phi_1 e^{i\Omega T} \bar{\phi}_1 \phi_2}{4(1+\varepsilon)^3 \Omega^3} + \frac{i\varepsilon\delta_2 \bar{\phi}_1}{2(1+\varepsilon)\Omega e^{i\Omega T}} + \frac{i\varepsilon\delta_2 \phi_2 e^{i\Omega T}}{2(1+\varepsilon)\Omega} + \frac{i\varepsilon\delta_3 \phi_1^3 (e^{i\Omega T})^3}{8(1+\varepsilon)^3 \Omega^3} \\ & + \frac{i\varepsilon\delta_3 \bar{\phi}_2^3}{8(1+\varepsilon)^3 \Omega^3 (e^{i\Omega T})^3} - \frac{3i\varepsilon\delta_3 \phi_2 (e^{i\Omega T})^3 \phi_1^2}{8(1+\varepsilon)^3 \Omega^3} - \frac{3i\varepsilon\delta_3 \bar{\phi}_2^2 \phi_2}{8(1+\varepsilon)^3 \Omega^3 e^{i\Omega T}} - \frac{3i\varepsilon\delta_3 \bar{\phi}_2^2 \bar{\phi}_1}{8(1+\varepsilon)^3 \Omega^3 (e^{i\Omega T})^3} \\ & - \frac{3i\varepsilon\delta_3 \bar{\phi}_1^2 \phi_2}{8(1+\varepsilon)^3 \Omega^3 e^{i\Omega T}} - \frac{3i\varepsilon\delta_3 \bar{\phi}_1 e^{i\Omega T} \phi_1^2}{8(1+\varepsilon)^3 \Omega^3} - \frac{3i\varepsilon\delta_3 \bar{\phi}_1 e^{i\Omega T} \phi_2^2}{8(1+\varepsilon)^3 \Omega^3} + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon \lambda_1 \phi_1 e^{i\Omega T}}{1+\varepsilon} + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon \lambda_1 \bar{\phi}_1}{(1+\varepsilon) e^{i\Omega T}} \\ & + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2 \lambda_1 \phi_2 e^{i\Omega T}}{1+\varepsilon} + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2 \lambda_1 \bar{\phi}_2}{(1+\varepsilon) e^{i\Omega T}} - \frac{i\phi_1 e^{i\Omega T}}{2(1+\varepsilon)\Omega} - \frac{i\Omega \bar{\phi}_1}{2e^{i\Omega T}} + \frac{3i\varepsilon\delta_3 \phi_1^2 e^{i\Omega T} \bar{\phi}_2}{8(1+\varepsilon)^3 \Omega^3} \\ & + \frac{3i\varepsilon\delta_3 \phi_2^2 (e^{i\Omega T})^3 \phi_1}{8(1+\varepsilon)^3 \Omega^3} + \frac{3i\varepsilon\delta_3 \phi_1 \bar{\phi}_2^2}{8(1+\varepsilon)^3 \Omega^3 e^{i\Omega T}} + \frac{3i\varepsilon\delta_3 \bar{\phi}_2 e^{i\Omega T} \phi_2^2}{8(1+\varepsilon)^3 \Omega^3} + \frac{3i\varepsilon\delta_3 \bar{\phi}_1^2 \phi_1}{8(1+\varepsilon)^3 \Omega^3 e^{i\Omega T}} \\ & + \frac{3i\varepsilon\delta_3 \bar{\phi}_2 \phi_1^2}{4(1+\varepsilon)^3 \Omega^3 (e^{i\Omega T})^3} - \frac{3i\varepsilon\delta_3 \phi_1 e^{i\Omega T} \phi_2 \bar{\phi}_2}{4(1+\varepsilon)^3 \Omega^3} - \frac{3i\varepsilon\delta_3 \phi_1 \bar{\phi}_1 \bar{\phi}_2}{4(1+\varepsilon)^3 \Omega^3 e^{i\Omega T}} - \frac{1}{2} \varepsilon F (e^{i\Omega T} - e^{-i\Omega T}) = 0 \end{aligned} \quad (3-19)$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{d}{dT} \phi_2 \right) e^{i\Omega T} + \frac{i\bar{\phi}_1}{2(1+\varepsilon)\Omega e^{i\Omega T}} - \frac{i\varepsilon\phi_2 e^{i\Omega T}}{2(1+\varepsilon)\Omega} + \frac{i\varepsilon\bar{\phi}_2}{2(1+\varepsilon)\Omega e^{i\Omega T}} + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon\lambda_1\phi_1 e^{i\Omega T}}{1+\varepsilon} + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon\lambda_1\bar{\phi}_1}{(1+\varepsilon)e^{i\Omega T}} \\
& + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2\lambda_1\phi_2 e^{i\Omega T}}{1+\varepsilon} + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2\lambda_1\bar{\phi}_2}{(1+\varepsilon)e^{i\Omega T}} - \frac{i\phi_1 e^{i\Omega T}}{2(1+\varepsilon)\Omega} + \frac{3i\delta_3\phi_1 e^{i\Omega T}\phi_2\bar{\phi}_2}{4(1+\varepsilon)^3\Omega^3} + \frac{3i\delta_3\phi_1\bar{\phi}_1\bar{\phi}_2}{4(1+\varepsilon)^3\Omega^3 e^{i\Omega T}} \\
& - \frac{i\delta_1\phi_2 e^{i\Omega T}}{2\Omega} - \frac{3i\delta_3\phi_1 e^{i\Omega T}\bar{\phi}_1\bar{\phi}_2}{4(1+\varepsilon)^3\Omega^3} - \frac{3i\delta_3\bar{\phi}_1\phi_2\bar{\phi}_2}{4(1+\varepsilon)^3\Omega^3 e^{i\Omega T}} + \frac{3i\delta_3\phi_2 (e^{i\Omega T})^3 \phi_1^2}{8(1+\varepsilon)^3\Omega^3} + \frac{3i\delta_3\bar{\phi}_2^2 \bar{\phi}_1}{8(1+\varepsilon)^3\Omega^3 (e^{i\Omega T})^3} \\
& + \frac{3i\delta_3\bar{\phi}_1 e^{i\Omega T}\phi_2^2}{8(1+\varepsilon)^3\Omega^3} + \frac{3i\delta_3\bar{\phi}_2^2 \phi_2}{8(1+\varepsilon)^3\Omega^3 e^{i\Omega T}} + \frac{3i\delta_3\bar{\phi}_1^2 \phi_2}{8(1+\varepsilon)^3\Omega^3 e^{i\Omega T}} + \frac{3i\delta_3\bar{\phi}_1 e^{i\Omega T}\phi_1^2}{8(1+\varepsilon)^3\Omega^3} + \frac{1}{2} \frac{\lambda_2\bar{\phi}_2}{e^{i\Omega T}} \\
& + \frac{1}{2} \lambda_2\phi_2 e^{i\Omega T} + \frac{i\delta_3\phi_2^3 (e^{i\Omega T})^3}{8(1+\varepsilon)^3\Omega^3} + \frac{i\delta_3\bar{\phi}_1^3}{8(1+\varepsilon)^3\Omega^3 (e^{i\Omega T})^3} + \frac{i\delta_1\varepsilon\bar{\phi}_2}{2\Omega e^{i\Omega T}} - \frac{3i\delta_3\phi_1\bar{\phi}_2^2}{8(1+\varepsilon)^3\Omega^3 e^{i\Omega T}} \quad (3-20) \\
& - \frac{3i\delta_3\bar{\phi}_1^2 \phi_1}{8(1+\varepsilon)^3\Omega^3 e^{i\Omega T}} - \frac{3i\delta_3\phi_2^2 (e^{i\Omega T})^3 \phi_1}{8(1+\varepsilon)^3\Omega^3} - \frac{3i\delta_3\bar{\phi}_2 e^{i\Omega T}\phi_2^2}{8(1+\varepsilon)^3\Omega^3} - \frac{3i\delta_3\phi_1^2 e^{i\Omega T}\bar{\phi}_2}{8(1+\varepsilon)^3\Omega^3} \\
& - \frac{3i\delta_3\bar{\phi}_2\bar{\phi}_1^2}{8(1+\varepsilon)^3\Omega^3 (e^{i\Omega T})^3} + \frac{i\delta_2\phi_1 e^{i\Omega T}}{2(1+\varepsilon)\Omega} + \frac{i\delta_2\bar{\phi}_2}{2(1+\varepsilon)\Omega e^{i\Omega T}} + \frac{1}{2} \lambda_2\varepsilon\phi_2 e^{i\Omega T} + \frac{1}{2} \frac{\lambda_2\varepsilon\bar{\phi}_2}{e^{i\Omega T}} \\
& - \frac{i\Omega\bar{\phi}_2}{2e^{i\Omega T}} - \frac{i\delta_2\bar{\phi}_1}{2(1+\varepsilon)\Omega e^{i\Omega T}} - \frac{i\delta_2\phi_2 e^{i\Omega T}}{2(1+\varepsilon)\Omega} - \frac{i\delta_3\bar{\phi}_2^3}{8(1+\varepsilon)^3\Omega^3 (e^{i\Omega T})^3} - \frac{i\delta_3\phi_1^3 (e^{i\Omega T})^3}{8(1+\varepsilon)^3\Omega^3} \\
& - \frac{i\delta_1\varepsilon\phi_2 e^{i\Omega T}}{2\Omega} + \frac{i\delta_1\bar{\phi}_2}{2\Omega e^{i\Omega T}} + \frac{1}{2} i\Omega\phi_2 e^{i\Omega T} - \frac{1}{2} \varepsilon F (e^{i\Omega T} - e^{-i\Omega T}) = 0
\end{aligned}$$

با صفر کردن سکولارترم‌ها در عبارات (3-19) و (3-20)، که عبارات ضریب $e^{i\Omega t}$ را تشکیل می‌دهند،

عبارات (3-21) و (3-22) بدست می‌آید.

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dT} \phi_1 - \frac{3i\delta_3\varepsilon(\phi_1 - \phi_2)^2(\bar{\phi}_1 - \bar{\phi}_2)}{8(1+\varepsilon)^3\Omega^3} - \frac{i\varepsilon\phi_2}{2(1+\varepsilon)\Omega} + \frac{i\varepsilon\delta_2(\phi_2 - \phi_1)}{2(1+\varepsilon)\Omega} - \frac{i\phi_1}{2(1+\varepsilon)\Omega} \quad (3-21) \\
& + \frac{\varepsilon\lambda_1\phi_1}{2+2\varepsilon} + \frac{\varepsilon^2\lambda_1\phi_2}{2+2\varepsilon} + \frac{1}{2} i\Omega\phi_1 - \frac{1}{2} \varepsilon F = 0
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dT} \phi_2 + \frac{3i\delta_3(\phi_1 - \phi_2)^2(\bar{\phi}_1 - \bar{\phi}_2)}{8(1+\varepsilon)^3\Omega^3} + \frac{1}{2}\lambda_2\phi_2 + \frac{1}{2}i\Omega\phi_2 - \frac{1}{2}\frac{i\delta_1\phi_2}{\Omega}(1+\varepsilon) + \frac{1}{2}\frac{i\delta_2(\phi_1 - \phi_2)}{(1+\varepsilon)\Omega} \quad (3-22)$$

$$- \frac{1}{2}\frac{i\varepsilon\phi_2}{(1+\varepsilon)\Omega} - \frac{1}{2}\frac{i\phi_1}{(1+\varepsilon)\Omega} + \frac{\varepsilon\lambda_1\phi_1}{2+2\varepsilon} + \frac{\varepsilon^2\lambda_1\phi_2}{2+2\varepsilon} + \frac{1}{2}\lambda_2\varepsilon\phi_2 - \frac{1}{2}\varepsilon F = 0$$

در ادامه پارامتر تنظیم به صورت (۳-۲۳) در نظر گرفته می‌شود.

$$\Omega = 1 + \varepsilon\sigma \quad (3-23)$$

با قرار دادن عبارت (۳-۲۳) در (۳-۲۱) و (۳-۲۲) معادلات زیر تشکیل خواهند شد:

$$\frac{d}{dT} \phi_1 - \frac{i(\varepsilon\phi_2 + \phi_1)}{2(1+\varepsilon)(\varepsilon\sigma+1)} - \frac{3i\delta_3(\phi_1 - \phi_2)^2\varepsilon(\bar{\phi}_1 - \bar{\phi}_2)}{8(1+\varepsilon)^3(\varepsilon\sigma+1)^3} - \frac{i\varepsilon\delta_2(\phi_1 - \phi_2)}{2(1+\varepsilon)(\varepsilon\sigma+1)} \quad (3-24)$$

$$+ \frac{\varepsilon\lambda_1(\varepsilon\phi_2 + \phi_1)}{2+2\varepsilon} - \frac{1}{2}\varepsilon F + \frac{1}{2}i(\varepsilon\sigma+1)\phi_1 = 0$$

$$\frac{d}{dT} \phi_2 - \frac{1}{2}\varepsilon F + \frac{3i\delta_3(\phi_1 - \phi_2)^3}{8(1+\varepsilon)^3(\varepsilon\sigma+1)^3} + \frac{1}{2}i(\varepsilon\sigma+1)\phi_2 + \frac{\varepsilon\lambda_1(\varepsilon\phi_2 + \phi_1)}{2+2\varepsilon} + \frac{1}{2}\lambda_2\phi_2(1+\varepsilon) \quad (3-25)$$

$$- \frac{1}{2}\frac{i(\varepsilon\phi_2 + \phi_1)}{(1+\varepsilon)(\varepsilon\sigma+1)} + \frac{1}{2}\frac{i\delta_2(\phi_1 - \phi_2)}{(1+\varepsilon)(\varepsilon\sigma+1)} - \frac{1}{2}\frac{i\delta_1\phi_2(1+\varepsilon)}{\varepsilon\sigma+1} = 0$$

حال با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه حل تحلیلی مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

$$\phi_j(T) = \phi_j(T_0, T_1, \dots), \quad \frac{d}{dT} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \dots, \quad T_K = \varepsilon^K T, K = 0, 1, \dots \quad (3-26)$$

جهت ساده سازی در نوشتار، $\phi_j(T_0, T_1) = \phi_j$ نوشته خواهد شد.

با قرار دادن (۳-۲۶) در (۳-۲۴) و (۳-۲۵) معادلات زیر بدست خواهد آمد.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial T_0} \phi_1 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} \phi_1 - \frac{1}{2} \frac{i(\varepsilon \phi_2 + \phi_1)}{(1+\varepsilon)(\varepsilon \sigma + 1)} - \frac{3i\delta_3(\phi_1 - \phi_2)^2 \varepsilon (\bar{\phi}_1 - \bar{\phi}_2)}{8(1+\varepsilon)^3 (\varepsilon \sigma + 1)^3} - \frac{1}{2} \frac{i\varepsilon \delta_2(\phi_1 - \phi_2)}{(1+\varepsilon)(\varepsilon \sigma + 1)} \quad (3-27) \\ & + \frac{\varepsilon \lambda_1(\varepsilon \phi_2 + \phi_1)}{2+2\varepsilon} - \frac{1}{2} \varepsilon F + \frac{1}{2} i(\varepsilon \sigma + 1) \phi_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial T_0} \phi_2 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} \phi_2 - \frac{1}{2} \varepsilon F + \frac{3i\delta_3(\phi_1 - \phi_2)^3}{8(1+\varepsilon)^3 (\varepsilon \sigma + 1)^3} + \frac{1}{2} i(\varepsilon \sigma + 1) \phi_2 + \frac{\varepsilon \lambda_1(\varepsilon \phi_2 + \phi_1)}{2+2\varepsilon} \quad (3-28) \\ & + \frac{1}{2} \lambda_2 \phi_2 (1+\varepsilon) - \frac{1}{2} \frac{i(\varepsilon \phi_2 + \phi_1)}{(1+\varepsilon)(\varepsilon \sigma + 1)} + \frac{1}{2} \frac{i\delta_2(\phi_1 - \phi_2)}{(1+\varepsilon)(\varepsilon \sigma + 1)} - \frac{1}{2} \frac{i\delta_1 \phi_2 (1+\varepsilon)}{\varepsilon \sigma + 1} = 0 \end{aligned}$$

با استفاده از بسط تیلور جهت عبارات ظاهر شده در مخرج عبارات (3-27) و (3-28)، این عبارات به صورت زیر ساده خواهند شد.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial T_0} \phi_1 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} \phi_1 - \frac{1}{2} i(\varepsilon \phi_2 + \phi_1)(1 - (1+\sigma)\varepsilon) \quad (3-29) \\ & - \frac{3}{8} i\varepsilon \delta_3(\phi_1 - \phi_2)^2 (\bar{\phi}_1 - \bar{\phi}_2)(1 - (3\sigma+3)\varepsilon) - \frac{1}{2} i\varepsilon \delta_2(\phi_1 - \phi_2)(1 - (3\sigma+3)\varepsilon) \\ & + \frac{1}{2} \varepsilon \lambda_1(\varepsilon \phi_2 + \phi_1)(1 - \varepsilon) - \frac{1}{2} \varepsilon F + \frac{1}{2} i(\varepsilon \sigma + 1) \phi_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial T_0} \phi_2 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} \phi_2 - \frac{1}{2} \varepsilon F + \frac{3}{8} i\delta_3(\phi_1 - \phi_2)^3 (1 - (3\sigma+3)\varepsilon) + \frac{1}{2} i(\varepsilon \sigma + 1) \phi_2 \quad (3-30) \\ & + \frac{\varepsilon \lambda_1(\varepsilon \phi_2 + \phi_1)}{2+2\varepsilon} + \frac{1}{2} \lambda_2 \phi_2 (1+\varepsilon) - \frac{1}{2} i(\varepsilon \phi_2 + \phi_1)(1 - (1+\sigma)\varepsilon) \\ & + \frac{1}{2} i\delta_2(\phi_1 - \phi_2)(1 - (1+\sigma)\varepsilon) - \frac{1}{2} i\delta_1 \phi_2 (1+\varepsilon)(-\varepsilon \sigma + 1) = 0 \end{aligned}$$

حال ضرایب مربوط به مرتبه‌های مختلف ε ، از دو معادله (3-29) و (3-30) به صورت زیر معادل قرار

می‌گیرند:

ضرایب ε^0 :

$$\frac{\partial}{\partial T_0} \phi_1 = 0 \quad (3-31)$$

$$\frac{\partial}{\partial T_0} \phi_2 + \frac{1}{2} i \phi_2 + \frac{1}{2} \lambda_2 \phi_2 + \frac{1}{2} i ((-\delta_1 - \delta_2) \phi_2 + \phi_1 (\delta_2 - 1)) + \frac{3}{8} i \delta_3 (\bar{\phi}_1 - \bar{\phi}_2) (\phi_1 - \phi_2)^2 = 0 \quad (3-32)$$

ضرایب ε^1 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T_1} \phi_1 + (3\sigma + 3) \frac{\partial}{\partial T_0} \phi_1 + \frac{1}{2} i \phi_1 + \frac{1}{2} \lambda_1 \phi_1 - \frac{1}{2} F + \frac{1}{8} (-4i\delta_2 - 8i) \phi_1 + \frac{1}{2} i (\delta_2 - 1) \phi_2 \\ - \frac{3}{8} i \delta_3 (\bar{\phi}_1 - \bar{\phi}_2) (\phi_1 - \phi_2)^2 + i\sigma \phi_1 + (-3\sigma - 3) \frac{\partial}{\partial T_0} \phi_1 = 0 \end{aligned} \quad (3-33)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T_1} \phi_2 + (3\sigma + 3) \frac{\partial}{\partial T_0} \phi_2 + 2i \phi_2 \sigma + \frac{3}{2} i \phi_2 + \frac{3}{2} \lambda_2 \phi_2 \sigma + 2\lambda_2 \phi_2 + \frac{1}{2} \lambda_1 \phi_1 - \frac{1}{2} F \\ + i ((-\delta_1 - \delta_2) \phi_2 + \phi_1 (\delta_2 - 1)) \sigma + i ((-\delta_1 - \delta_2) \phi_2 + \phi_1 (\delta_2 - 1)) + \frac{1}{2} i (-2\delta_1 - 1) \phi_2 \\ + \frac{1}{8} (-3\sigma - 3) \left(8 \frac{\partial}{\partial T_0} \phi_2 + 4i \phi_2 + 4\lambda_2 \phi_2 + 4i ((-\delta_1 - \delta_2) \phi_2 + \phi_1 (\delta_2 - 1)) \right) \\ + 3i \delta_3 (\bar{\phi}_1 - \bar{\phi}_2) (\phi_1 - \phi_2)^2 = 0 \end{aligned} \quad (3-34)$$

حال متغیرهای قطبی (3-35) اعمال خواهد شد که در آن N_1 و N_2 دامنه نوسان و $e^{i\theta_1}$ و $e^{i\theta_2}$

زاویه فاز نوسان گر اصلی و چاه غیرخطی انرژی می‌باشند.

$$\phi_1 = N_1(T_1) e^{i\theta_1}, \quad \phi_2 = N_2(T_1) e^{i\theta_2} \quad (3-35)$$

با اعمال تغییر متغیر (3-35) بر معادله (3-32)، معادله زیر بدست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} -4i\delta_2 N_2 e^{i\theta_2} - 4i\delta_1 N_2 e^{i\theta_2} + 4i\delta_2 N_1 e^{i\theta_1} - 6i\delta_3 N_1^2 N_2 e^{i\theta_2} - 4iN_1 e^{i\theta_1} \\ + 4iN_2 e^{i\theta_2} + 4\lambda_2 N_2 e^{i\theta_2} - 3i\delta_3 N_2^3 e^{i\theta_2} + 6i\delta_3 N_1 e^{i\theta_1} N_2^2 + 3i\delta_3 N_1^3 e^{i\theta_1} = 0 \end{aligned} \quad (3-36)$$

با مرتب کردن معادله (۳-۳۶) و به توان دو رساندن دو طرف معادله، با توجه به وجود جملات موهومی

و حقیقی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 & -81\delta_3^2 N_1^4 N_2^2 - 54\delta_3^2 N_1^2 N_2^4 - 9\delta_3^2 N_2^6 - 72\delta_1 \delta_3 N_1^2 N_2^2 - 24\delta_1 \delta_3 N_2^4 \\
 & -72\delta_2 \delta_3 N_1^2 N_2^2 - 24\delta_2 \delta_3 N_2^4 + 72\delta_3 N_1^2 N_2^2 + 24\delta_3 N_2^4 - 16\delta_1^2 N_2^2 \\
 & -32\delta_1 \delta_2 N_2^2 - 16\delta_2^2 N_2^2 + 32\delta_1 N_2^2 + 32\delta_2 N_2^2 - 16N_2^2 \\
 & = -9\delta_3^2 N_1^6 - 54\delta_3^2 N_1^4 N_2^2 - 81\delta_3^2 N_1^2 N_2^4 - 24\delta_2 \delta_3 N_1^4 - 72\delta_2 \delta_3 N_1^2 N_2^2 \\
 & + 24\delta_3 N_1^4 + 72\delta_3 N_1^2 N_2^2 - 16\delta_2^2 N_1^2 + 16\lambda_2^2 N_2^2 + 32\delta_2 N_1^2 - 16N_1^2
 \end{aligned} \tag{۳-۳۷}$$

در ادامه از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم:

$$N_1^2 = Z_1, \quad N_2^2 = Z_2 \tag{۳-۳۸}$$

عبارت زیر بدست خواهد آمد:

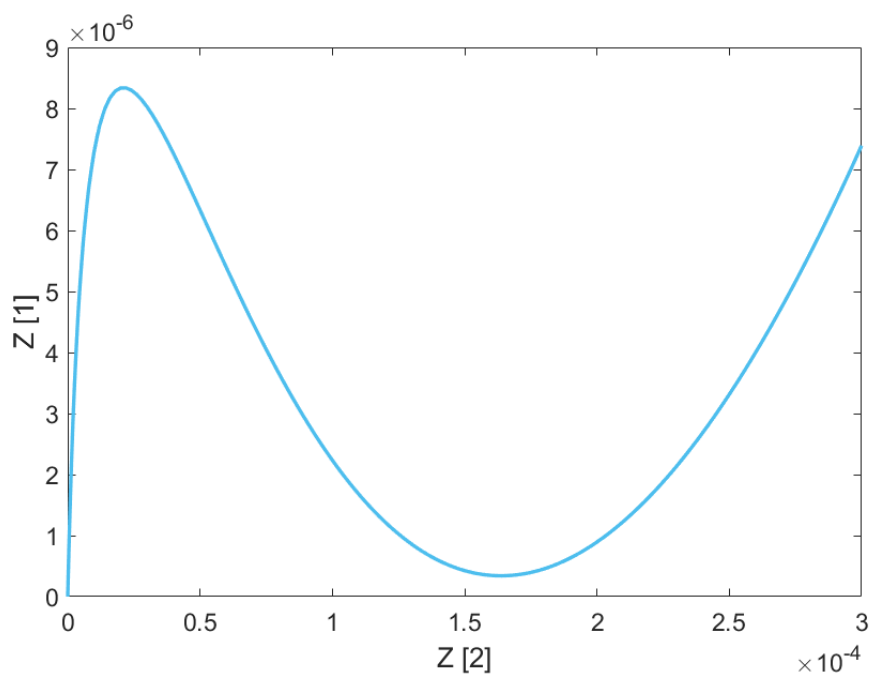
$$\begin{aligned}
 & -81Z_1^2 Z_2 \delta_3^2 - 54Z_1 Z_2^2 \delta_3^2 - 9Z_2^3 \delta_3^2 - 72Z_1 Z_2 \delta_1 \delta_3 - 72Z_1 Z_2 \delta_2 \delta_3 - 24Z_2^2 \delta_1 \delta_3 \\
 & -24Z_2^2 \delta_2 \delta_3 + 72Z_1 Z_2 \delta_3 + 24Z_2^2 \delta_3 - 16Z_2 \delta_1^2 - 32Z_2 \delta_1 \delta_2 - 16Z_2 \delta_2^2 + 32Z_2 \delta_1 \\
 & + 32Z_2 \delta_2 - 16Z_2 = -9Z_1^3 \delta_3^2 - 54Z_1^2 Z_2 \delta_3^2 - 81Z_1 Z_2^2 \delta_3^2 - 24Z_1^2 \delta_2 \delta_3 \\
 & -72Z_1 Z_2 \delta_2 \delta_3 + 24Z_1^2 \delta_3 + 72Z_1 Z_2 \delta_3 - 16Z_1 \delta_2^2 + 16Z_2 \lambda_2^2 + 32Z_1 \delta_2 - 16Z_1
 \end{aligned} \tag{۳-۳۹}$$

با جایگذاری مقادیر جدول ۳-۱ در عبارت (۳-۳۹) نمودار تصویر ۳-۲ بدست خواهد آمد که همان

منیفولد نامتغیر آهسته می‌باشد.

جدول ۱-۳ - پارامترهای مدل II برای حالت مدوله قوی

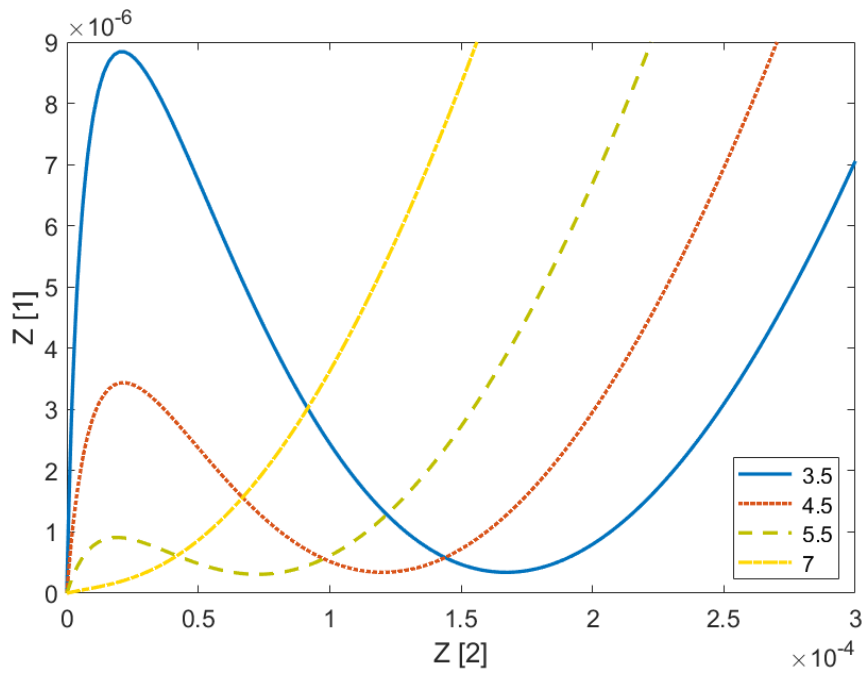
پارامترهای فیزیکی		پارامترهای کاهش یافته بی بعد	
m_1	5 Kg	ε	0.01
m_2	50 g	λ_1	0.119
c_1	0.1 Ns/m	λ_2	0.598
c_2	0.5 Ns/m	δ_1	- 6.07
k_1	14×10^2 N/m	δ_2	3.57
k_2	- 85 N/m	δ_3	28571.4
k_3	50 N/m		
k_4	4×10^5 N/m ³		



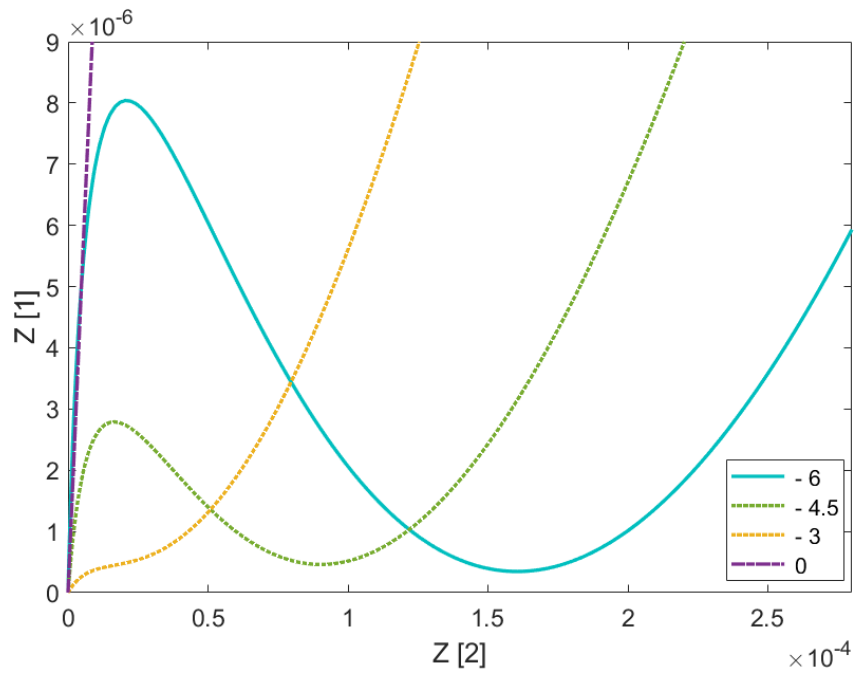
تصویر ۳-۲ - منیفولد نامتغیر آهسته (SIM) برای حالت مدوله قوی و مدل II

مشابه توضیحات قسمت ۲-۲، همانطور که در تصویر ۳-۳ قابل مشاهده است، با کاهش مقدار δ_2 ، نمودار به سمت راست و بالا حرکت می‌کند. در این نمودار Z_1 و Z_2 به ترتیب برابر $|v + i\Omega v)e^{-i\Omega T}|^2$ و $|w + i\Omega w)e^{-i\Omega T}|^2$ می‌باشد. بنابراین می‌توان گفت با کاهش مقدار δ_2 در بازه‌ی مشخص مورد بررسی، با افزایش فاصله بین جرم نوسان‌گر اصلی و چاه غیرخطی انرژی، دامنه ارتعاشی سیستم افزایش خواهد یافت. همچنین اندازه سرعت تغییر مکان مرکز جرم سیستم نیز بزرگ‌تر خواهد شد. همچنین با توجه به این که δ_2 پارامتر بی بعد مربوط به پارامتر حقیقی فنر k_3 می‌باشد می‌توان گفت، با افزایش سختی این فنر، از تاثیر سختی غیرخطی k_4 کاسته شده، بنابراین پدیده پرش از بین رفته و سیستم دارای یک پاسخ حقیقی خواهد شد و رفته رفته سیستم به سمت خطی بودن پیش می‌رود.

تصویر ۳-۴ نمودار منیفولد نامتغیر آهسته را به ازای مقادیر متفاوت از δ_1 نشان می‌دهد. در این تصویر مشخص است که به ازای برخی مقادیر δ_1 ، عبارت SIM دارای اکستریم محلی و در نتیجه دارای دو جواب و به ازای برخی مقادیر دارای یک جواب می‌باشد. همچنین مشاهده می‌شود با صفر قرار دادن δ_1 (پارامتر مرتبط با k_2)، یعنی از بین بردن ارتباط بین نوسان‌گر اصلی و چاه غیرخطی انرژی، سیستم رفتار خطی نشان خواهد داد. چرا که تنها نوسان‌گر اصلی با المان بندی خطی در سیستم باقی می‌ماند.



تصویر ۳-۳ - منیفولد نامتغیر آهسته (SIM) برای حالت مدوله قوی مدل II و برای مقادیر متفاوت از δ_2



تصویر ۳-۴ - منیفولد نامتغیر آهسته (SIM) برای حالت مدوله قوی مدل II و برای مقادیر متفاوت از δ_1

۲-۳ بررسی پاسخ حالت آبخاری مدل II

در قسمت قبل معادلات به شکل زیر بی بعد گشته بود.

$$\frac{d^2}{dT^2} X + X + \varepsilon \delta_1 (X - Y) + \varepsilon \lambda_1 \frac{d}{dT} X + \varepsilon \lambda_2 \left(\frac{d}{dT} X - \frac{d}{dT} Y \right) = \varepsilon F \cos(\Omega T) \quad (3-40)$$

$$\varepsilon \frac{d^2}{dT^2} Y - \varepsilon \delta_1 (X - Y) + \varepsilon \delta_2 Y + \varepsilon \delta_3 Y^3 - \varepsilon \lambda_2 \left(\frac{d}{dT} X - \frac{d}{dT} Y \right) = 0 \quad (3-41)$$

حال تغییر متغیر زیر اعمال می شود. همانطور که در قسمت ۲-۳ گفته شد، پارامترهای جدید معرف حرکت نوسان گر اصلی و فاصله نسبی نوسان گر اصلی و چاه غیرخطی انرژی خواهد بود.

$$v = X, \quad w = X - Y \quad (3-42)$$

با استفاده از (۳-۴۲) نتایج زیر حاصل خواهند شد:

$$Y = w - v, \quad X = v \quad (3-43)$$

با جایگذاری (۳-۴۳) در (۳-۴۰) و (۳-۴۱) معادلات به شکل زیر بدست خواهد آمد.

$$\frac{d^2}{dT^2} v + v + \varepsilon \delta_1 w + \varepsilon \lambda_1 \frac{d}{dT} v + \varepsilon \lambda_2 \frac{d}{dT} w = \varepsilon F \cos(\Omega T) \quad (3-44)$$

$$\frac{d^2}{dT^2} v - \frac{d^2}{dT^2} w - \delta_1 w + \delta_2 (v - w) + \delta_3 (v - w)^3 - \lambda_2 \frac{d}{dT} w = 0 \quad (3-45)$$

در ادامه از معادلات مرتبه صفر از ε استفاده خواهد شد. برای باقی ماندن λ_1 در محاسبات، آن را به طور اختیاری از مرتبه ε^{-1} در نظر می گیرند [26]. در این صورت عبارت $\varepsilon \lambda_1$ از مرتبه ε^0 خواهد شد و در معادلات باقی خواهد ماند. با نگر داشتن عبارات مرتبه ε^0 ، معادلات زیر تشکیل خواهند شد.

$$\frac{d^2}{dT^2}v + v + \Lambda \frac{d}{dT}v = 0 \quad (3-46)$$

$$\frac{d^2}{dT^2}v - \frac{d^2}{dT^2}w - \delta_1 w + \delta_2(v-w) + \delta_3(v-w)^3 - \lambda_2 \frac{d}{dT}w = 0 \quad (3-47)$$

که در آن $\varepsilon \lambda_1 = \Lambda$ می‌باشد.

با حل معادله (3-40)، معادلات زیر تشکیل خواهند شد.

$$v(T) = C_1 e^{\left(-\frac{\Lambda}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\Lambda^2 - 4}\right)T} + C_2 e^{\left(-\frac{\Lambda}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\Lambda^2 - 4}\right)T} \quad (3-48)$$

که C_1 و C_2 ثوابت جواب می‌باشند. معادله فوق به شکل زیر و با ثوابت جدید نوشته خواهد شد.

$$v(T) = \tilde{C}_1(T) e^{i\left(\frac{\sqrt{4-\Lambda^2}}{2}\right)T} + \tilde{C}_2(T) e^{-i\left(\frac{\sqrt{4-\Lambda^2}}{2}\right)T} \quad (3-49)$$

با استفاده از تغییر متغیر زیر، حل تحلیلی ادامه پیدا خواهد کرد.

$$v(T) = A_1(T) e^{i\frac{\sqrt{4-\Lambda^2}}{2}T} + C.C = A_1(T) e^{iQt} + C.C \quad (3-50)$$

در واقع روش مورد استفاده در این قسمت، روش بالانس هارمونیک می‌باشد که در آن پاسخ معادلات

به شکل هارمونیک در نظر گرفته می‌شود و در آن A_1 و A_2 مختلط هستند.

$$v = A_1 e^{iQt} + A_2 e^{-iQt} \quad (3-51)$$

و پاسخ تقریبی برای w نیز به شکل زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$w = B_1 e^{iQr} + B_2 e^{-iQr} \quad (3-52)$$

با جایگذاری (3-51) و (3-52) در (3-47) عبارات زیر به دست خواهد آمد.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{e^{iQr}} \left(A 2Q^2 i^2 - B 2Q^2 i^2 + 3A 1A 2^2 \delta_3 - 6A 1A 2B 2\delta_3 + 3A 1B 2^2 \delta_3 - 3A 2^2 B 1\delta_3 \right. \\ & \left. + 6A 2B 1B 2\delta_3 - 3B 1B 2^2 \delta_3 + B 2Qi \lambda_2 + A 2\delta_2 - B 2\delta_1 - B 2\delta_2 \right) \\ & + \left(A 1^3 \delta_3 - 3A 1^2 B 1\delta_3 + 3A 1B 1^2 \delta_3 - B 1^3 \delta_3 \right) \left(e^{iQr} \right)^3 \quad (3-53) \\ & + \frac{1}{\left(e^{iQr} \right)^3} \left(A 2^3 \delta_3 - 3A 2^2 B 2\delta_3 + 3A 2B 2^2 \delta_3 - B 2^3 \delta_3 \right) \\ & + \left(A 1Q^2 i^2 - B 1Q^2 i^2 + 3A 1^2 A 2\delta_3 - 3A 1^2 B 2\delta_3 - 6A 1A 2B 1\delta_3 + 6A 1B 1B 2\delta_3 \right. \\ & \left. + 3A 2B 1^2 \delta_3 - 3B 1^2 B 2\delta_3 - B 1Qi \lambda_2 + A 1\delta_2 - B 1\delta_1 - B 1\delta_2 \right) e^{iQr} = 0 \end{aligned}$$

با معادل صفر قرار دادن ضریب (e^{iQr}) که همان سکولار ترم می‌باشد، عبارت زیر بدست خواهد آمد.

$$\begin{aligned} & A 1Q^2 i^2 - B 1Q^2 i^2 + 3A 1^2 A 2\delta_3 - 3A 1^2 B 2\delta_3 - 6A 1A 2B 1\delta_3 + 6A 1B 1B 2\delta_3 \quad (3-54) \\ & + 3A 2B 1^2 \delta_3 - 3B 1^2 B 2\delta_3 - B 1Qi \lambda_2 + A 1\delta_2 - B 1\delta_1 - B 1\delta_2 = 0 \end{aligned}$$

ضرایب عبارات هارمونیک، به شکل مختلط زیر نوشته خواهد شد.

$$A_1 = \frac{1}{2} a e^{i\alpha} \quad (3-55)$$

$$B_1 = \frac{1}{2} b e^{i\beta} \quad (3-56)$$

$$A_2 = \frac{1}{2} a e^{-i\alpha} \quad (3-57)$$

$$B_2 = \frac{1}{2} b e^{-i\beta} \quad (3-58)$$

با جایگذاری عبارت (3-55) الی (3-58) در (3-54)، و همچنین با توجه به $i^2 = -1$ عبارات (3-59) بدست خواهند آمد.

$$3\delta_3 a e^{-i\alpha} b^2 - 3\delta_3 a^2 e^{-i\beta} b + 4b \left(-Q\lambda_2 i - \frac{3}{2} \delta_3 a^2 - \frac{3}{4} b^2 \delta_3 + Q^2 - \delta_1 - \delta_2 \right) e^{i\beta} \quad (3-59)$$

$$-4e^{i\alpha} \left(-\frac{3}{4} \delta_3 a^2 - \frac{3}{2} b^2 \delta_3 + Q^2 - \delta_2 \right) a = 0$$

سپس با مرتب سازی و به توان دو رساندن معادله فوق معادله (3-60) تشکیل خواهد شد.

$$10\delta_3^2 a^6 - 30\delta_3^2 a^4 b^2 + 30\delta_3^2 a^2 b^4 - 10\delta_3^2 b^6 - 24Q^2 a^4 \delta_3 + 24Q^2 b^4 \delta_3 - 72Q a^2 b^2 \delta_3 \lambda_2 \quad (3-60)$$

$$-24Q b^4 \delta_3 \lambda_2 + 16Q^4 a^2 - 16Q^4 b^2 + 32Q^3 b^2 \lambda_2 + 16Q^2 b^2 \lambda_2^2 + 24\delta_3 a^4 \delta_2$$

$$-72\delta_3 a^2 b^2 \delta_1 - 24\delta_3 b^4 \delta_1 - 24\delta_3 b^4 \delta_2 - 32Q^2 a^2 \delta_2 + 32Q^2 b^2 \delta_1 + 32Q^2 b^2 \delta_2$$

$$-32Q b^2 \delta_1 \lambda_2 - 32Q b^2 \delta_2 \lambda_2 + 16\delta_2^2 a^2 - 16\delta_1^2 b^2 - 32\delta_1 b^2 \delta_2 - 16\delta_2^2 b^2 = 0$$

با جای گذاری مجدد عبارت $Q = \frac{\sqrt{4-\Lambda^2}}{2}$ در معادله فوق، عبارت منیفولد نامتغیر آهسته به شکل

زیر بدست خواهد آمد:

$$-36 \left(\delta_3 a^2 + \frac{1}{3} b^2 \delta_3 + \frac{1}{9} \Lambda^2 + \frac{4}{9} \delta_1 + \frac{4}{9} \delta_2 - \frac{4}{9} \right) \lambda_2 b^2 \sqrt{-\Lambda^2 + 4} - 10\delta_3^2 b^6$$

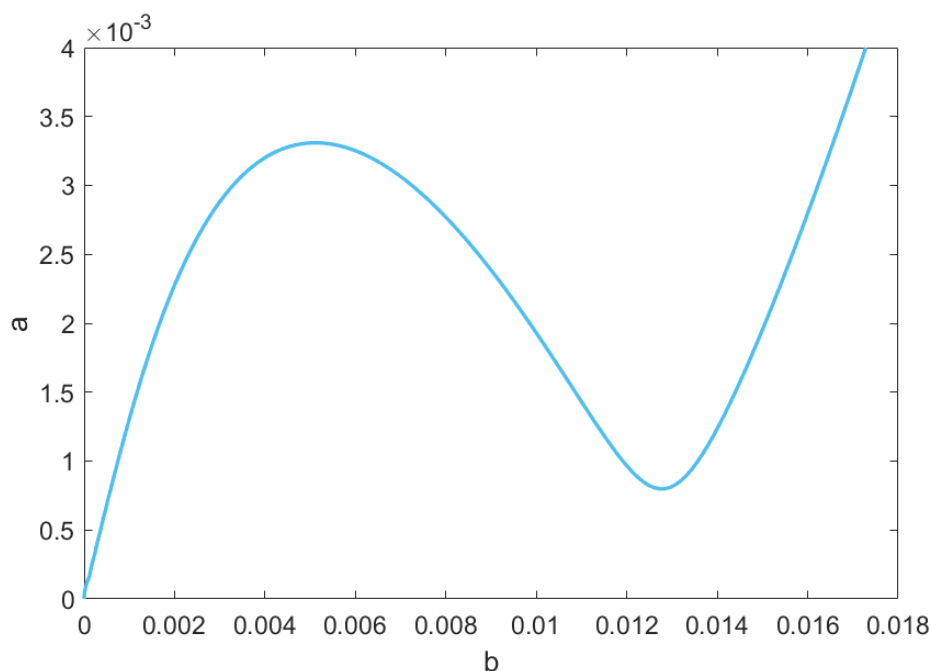
$$+ 30 \left(\delta_3 a^2 - \frac{1}{5} \Lambda^2 - \frac{4}{5} \delta_1 - \frac{4}{5} \delta_2 + \frac{4}{5} \right) \delta_3 b^4 + (-30\delta_3^2 a^4 - 72a^2 \delta_1 \delta_3 - \Lambda^4 \quad (3-61)$$

$$+ (-4\lambda_2^2 - 8\delta_1 - 8\delta_2 + 8) \Lambda^2 - 16(\lambda_2 - 1 + \delta_2 + \delta_1)(-\lambda_2 - 1 + \delta_2 + \delta_1)) b^2$$

$$+ 10a^2 \left(\delta_3^2 a^4 + \frac{3}{5} a^2 (\Lambda^2 + 4\delta_2 - 4) \delta_3 + \frac{1}{10} (\Lambda^2 + 4\delta_2 - 4)^2 \right) = 0$$

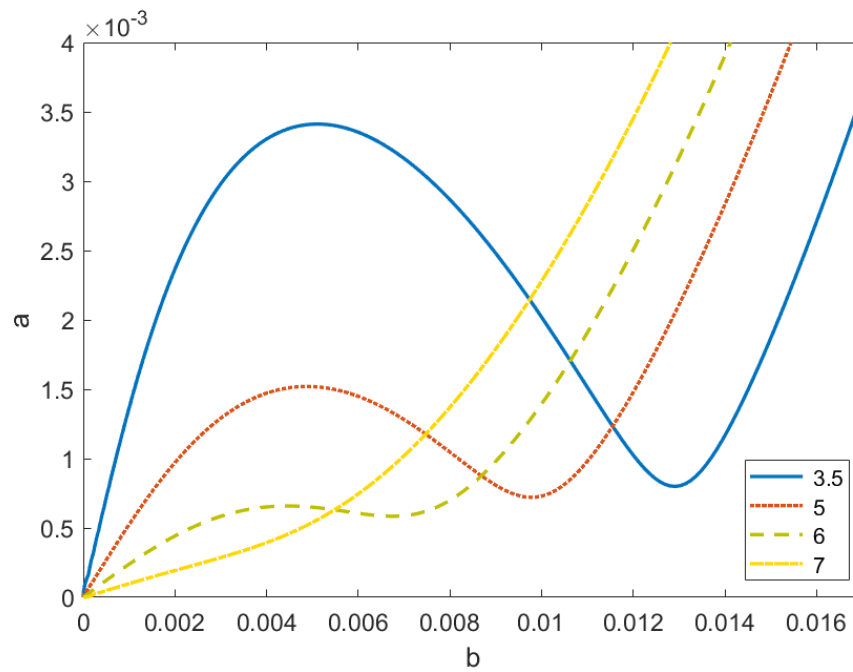
با جایگذاری مقادیر جدول 3-1 در عبارت (3-61) نمودار منیفولد نامتغیر آهسته به شکل زیر بدست

خواهد آمد:

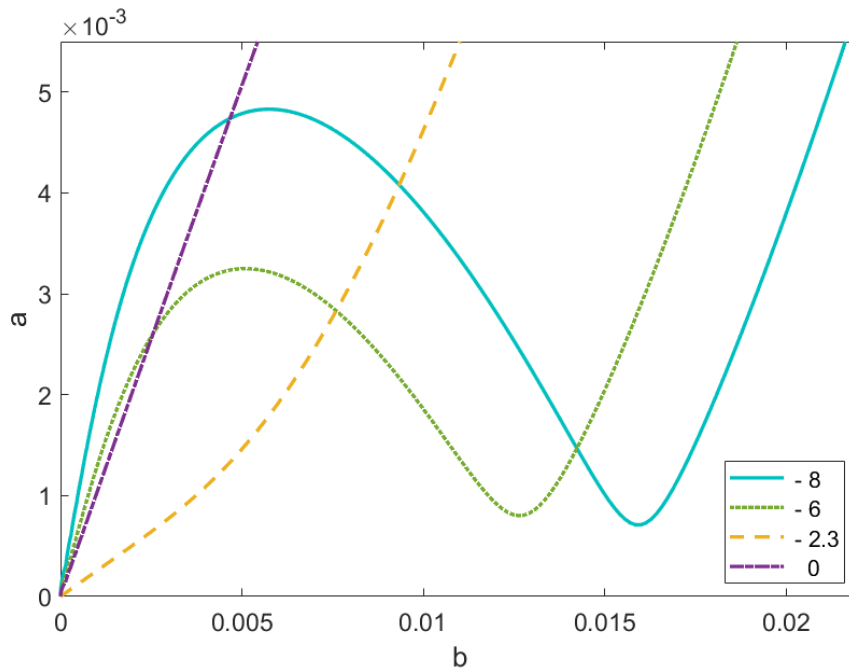


تصویر ۵-۳- نمودار منیفولد نامتغیر آهسته (SIM) در حالت آبخاری برای مدل II

تصویر ۶-۳ نمودار منیفولد نامتغیر آهسته می‌باشد که به ازای افزایش پارامتر δ_2 ، یعنی افزایش اثر فنر k_3 رفتاری مشابه با نمودارهای قسمت‌های قبل حاصل می‌شود. همچنین با ادامه روند افزایش این پارامتر، پدیده پرش از بین رفته و سیستم تنها دارای یک جواب پایدار خواهد شد که این امر ناشی از کم شدن اثر فنر غیرخطی (k_4) می‌باشد. تصویر ۷-۳ نیز مانند چیزی که پیش از این گفته شد، نمودار منیفولد نامتغیر آهسته را به ازای مقادیر متفاوت از δ_1 نشان می‌دهد که به ازای برخی مقادیر δ_1 ، عبارت SIM دارای اکستریم محلی و در نتیجه دارای دو جواب و به ازای برخی مقادیر دارای یک جواب می‌باشد. همچنین مشاهده می‌شود با صفر قرار دادن δ_1 (پارامتر مرتبط با k_2)، یعنی از بین بردن ارتباط بین نوسان گر اصلی و چاه غیرخطی انرژی، سیستم رفتار خطی نشان خواهد داد. چرا که تنها نوسان گر اصلی با المان بندی خطی در سیستم باقی می‌ماند.



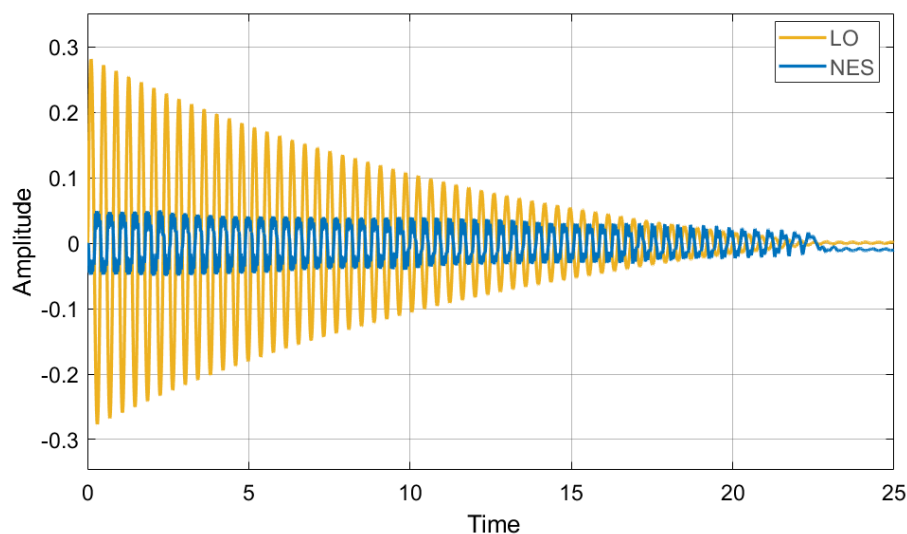
تصویر ۳-۶- منیفولد نامتغیر آهسته (SIM) برای حالت آبخاری با مقادیر متفاوت برای پارامتر δ_2 برای مدل II



تصویر ۳-۷- منیفولد نامتغیر آهسته (SIM) برای حالت آبخاری مدل II و برای مقادیر متفاوت از δ_1

۳-۳ بررسی دامنه نوسانات در سیستم مدل II

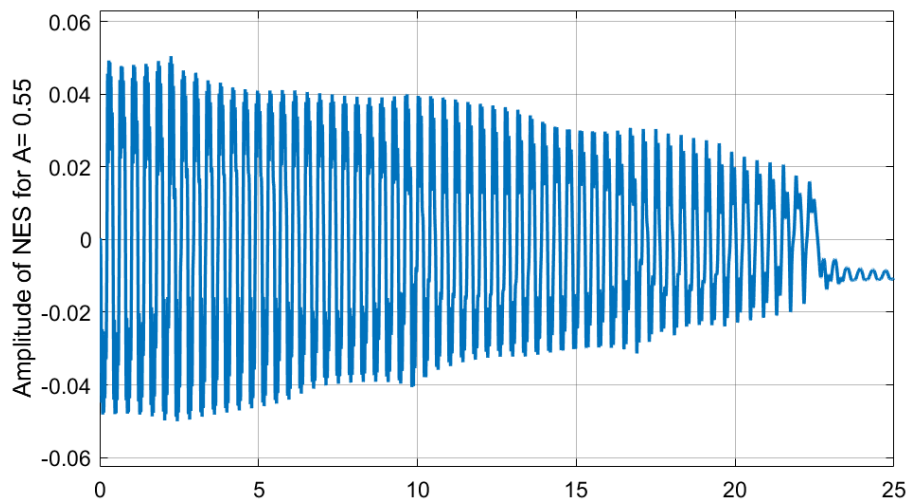
در این قسمت به بررسی رفتار سیستم، مقایسه تفاوت وجود جاذب یا عدم وجود آن پرداخته خواهد شد. تصویر ۳-۸ نمودار دامنه نوسان به زمان را برای نوسان گر اصلی و چاه غیرخطی انرژی تحت تحریک اولیه پالس و طبق المان بندی جدول ۳-۱ را نشان می‌دهد که توسط سیمولینک نرم افزار متلب^۱ مدل سازی شده است.



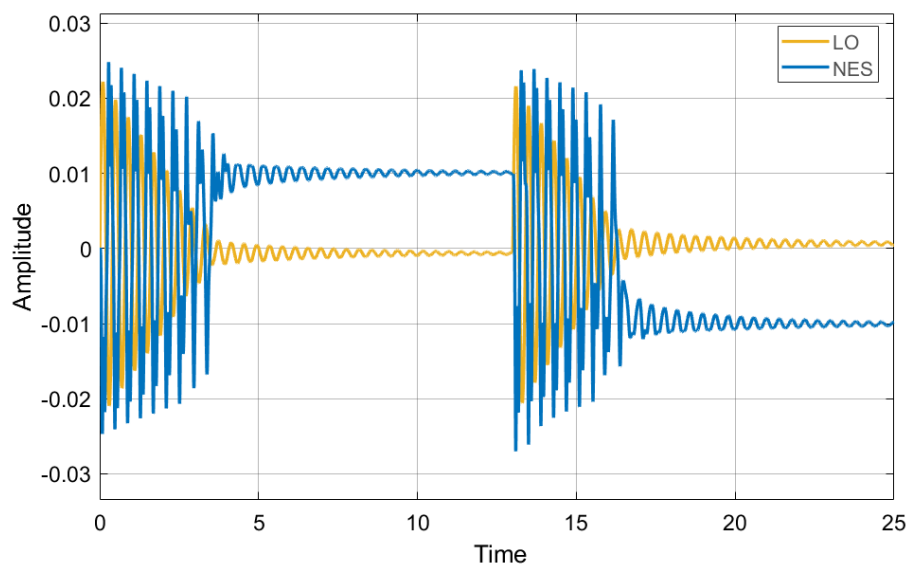
تصویر ۳-۸- نمودار ارتعاشات دامنه نوسان گر خطی (زرد) و چاه غیرخطی انرژی (آبی) با تحریک اولیه

همانطور که در تصویر ۳-۸ مشاهده می‌شود، سیستم در اثر تحریک اولیه شروع به نوسان می‌کند و دامنه نوسانات آن به علت وجود دمپر و چاه غیرخطی انرژی، به مرور زمان کاهش می‌یابد. همچنین با توجه به تصویر ۳-۹ که دامنه نوسانات چاه غیرخطی انرژی را نشان می‌دهد، می‌توان دریافت که همزمان با کاهش دامنه ارتعاشات نوسان گر اصلی، دامنه نوسانات چاه غیرخطی انرژی نیز کاهش می‌یابد و همزمان با کاهش قابل توجه دامنه ارتعاشات نوسان گر اصلی، دامنه چاه غیرخطی انرژی نیز ناگهان کاهش یافته و به سمت یکی از نقاط پایداری خود میل می‌کند.

^۱ MATLAB



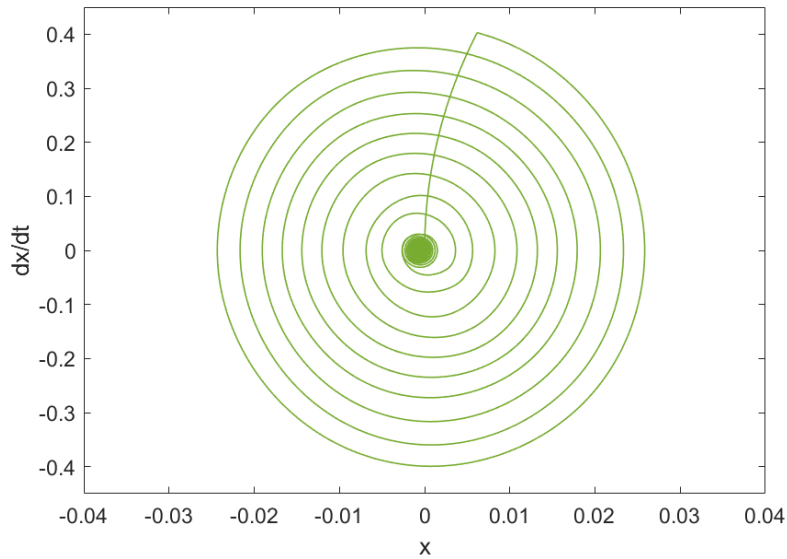
تصویر ۳-۹- نمودار ارتعاشات دامنه چاه غیرخطی انرژی با تحریک اولیه



تصویر ۳-۱۰- نمودار دامنه به زمان سیستم برای دو تحریک پی در پی

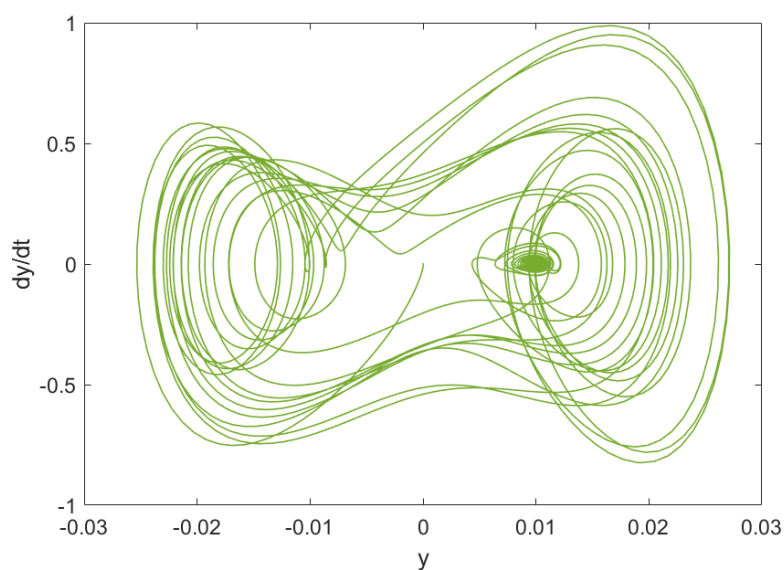
تصویر ۳-۱۰ نشان دهنده سیستم با دو تحریک ضربه می باشد که یکی در لحظه نخست و دیگری در ثانیه ۱۳ اعمال شده است. مشاهده می شود که چاه غیرخطی انرژی بعد از هر ضربه به سمت یکی از نقاط پایداری خود متمایل می شود که این نقاط پایداری در تصویر ۳-۱۲ قابل مشاهده می باشد.

نمودار صفحه فازی نوسان‌گر اصلی و چاه غیرخطی انرژی در تصویر ۳-۱۱ و تصویر ۳-۱۲ قابل مشاهده می‌باشد. همانطور در تصویر ۳-۱۱ قابل مشاهده است نوسان‌گر اصلی از نقطه تعادل خود، یعنی نقطه صفر، شروع به حرکت می‌کند و از آن فاصله می‌گیرد. سپس مجدداً به سمت آن متمایل می‌شود. صفر یک نقطه تعادل پایدار برای نوسان‌گر اصلی می‌باشد.



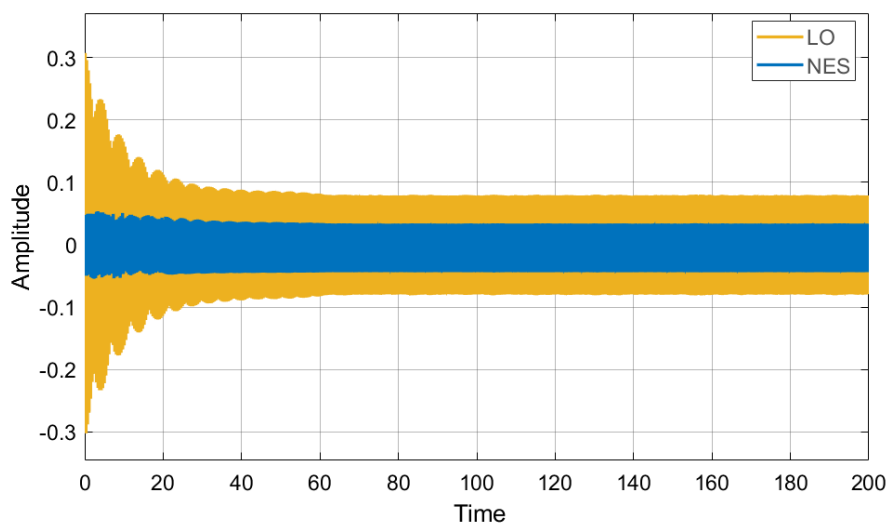
تصویر ۳-۱۱- نمودار صفحه فازی نوسان‌گر اصلی

تصویر ۳-۱۲ نمودار صفحه فازی برای چاه غیرخطی انرژی را نشان می‌دهد که دو نقطه پایدار برای آن به وضوح قابل مشاهده می‌باشد. با دقت در این نمودار می‌توان دریافت که جسم از نقطه صفر و با سرعت صفر حرکت خود را شروع کرده است و پس از آن حول دو نقطه پایدار خود که نقاط $0/01-$ و $0/01+$ می‌باشد نوسان می‌کند. این نقاط در نمودار دامنه به زمان در تصویر ۳-۹ و تصویر ۳-۱۰ نیز قابل مشاهده می‌باشد. این نکته نیز قابل ذکر است که چاه غیرخطی انرژی در نهایت به سمت نقطه تعادل $0/01$ مجانب می‌شود.



تصویر ۳-۱۲- نمودار صفحه فازی چاه غیرخطی انرژی

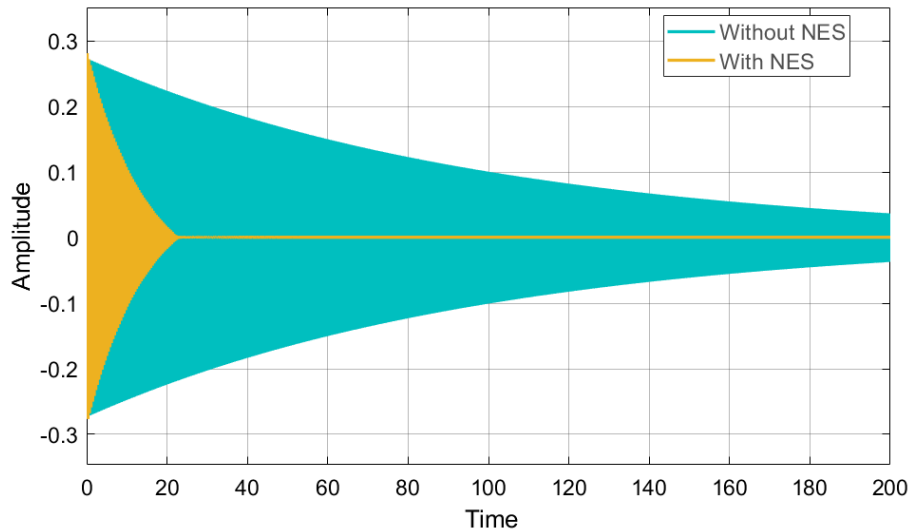
تصویر ۳-۱۳ نشان دهنده نمودار دامنه نوسانات NES و نوسان گر اصلی نسبت به زمان در حالت تحریک هارمونیک می باشد.



تصویر ۳-۱۳- نمودار ارتعاشات دامنه نوسان گر خطی (زرد) و چاه غیرخطی انرژی (آبی) با تحریک هارمونیک

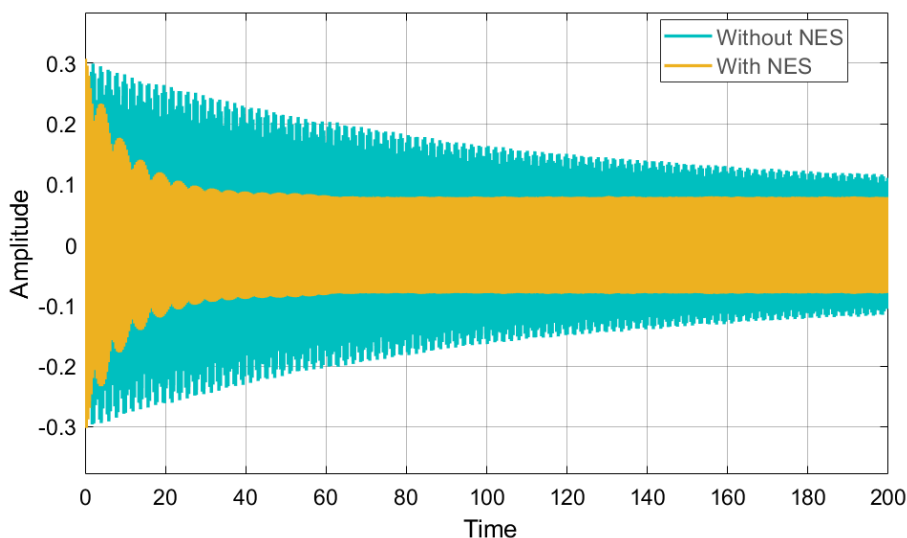
تصویر ۳-۱۴ نشان دهنده تفاوت میان وجود و یا عدم وجود چاه غیرخطی انرژی در تحریک اولیه می باشد. همانطور که مشاهده می شود در حالت وجود چاه غیرخطی انرژی، پاسخ سیستم به

صورت تقریبی در ثانیه ۲۰ به صورت قابل ملاحظه‌ای کاسته می‌شود اما در حالت بدون وجود چاه غیرخطی انرژی، این اتفاق در زمانی بعد از ثانیه ۲۰۰ اتفاق خواهد افتاد.



تصویر ۳-۱۴- مقایسه حالت وجود(زرد) و یا عدم وجود(آبی) چاه غیرخطی انرژی در سیستم برای تحریک اولیه

تصویر ۳-۱۵ نیز نشان دهنده مقایسه دو حالت وجود و یا عدم وجود چاه غیرخطی انرژی در حالت تحریک هارمونیک می‌باشد. همانطور که مشاهده می‌شود در حالت وجود چاه غیرخطی انرژی، نوسان گر اصلی در حدود ثانیه ۶۰ پایدار خواهد شد اما در حالت عدم وجود چاه غیرخطی انرژی، این اتفاق در زمانی بعد از ثانیه ۲۰۰ رخ خواهد داد.



تصویر ۳-۱۵ - مقایسه حالت وجود(زرد) و یا عدم وجود(آبی) چاه غیر خطی انرژی در سیستم برای تحریک هارمونیک

۳-۴ بررسی انرژی پتانسیل مدل II

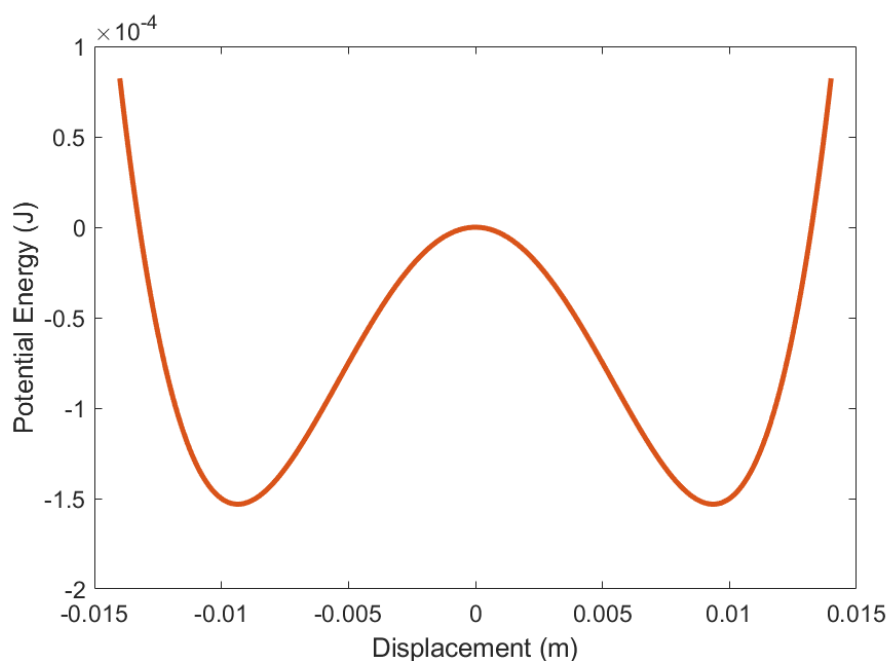
برای بررسی انرژی پتانسیل مدل II و نشان دادن دوحالت پایداری سیستم، انرژی پتانسیل به صورت زیر نوشته می‌شود. [21], [25], [31], [42]

$$V = \frac{1}{2} \left(k_1 x^2 + k_2 (x - y)^2 + k_3 y^2 + \frac{1}{2} k_4 y^4 \right) \quad (3-62)$$

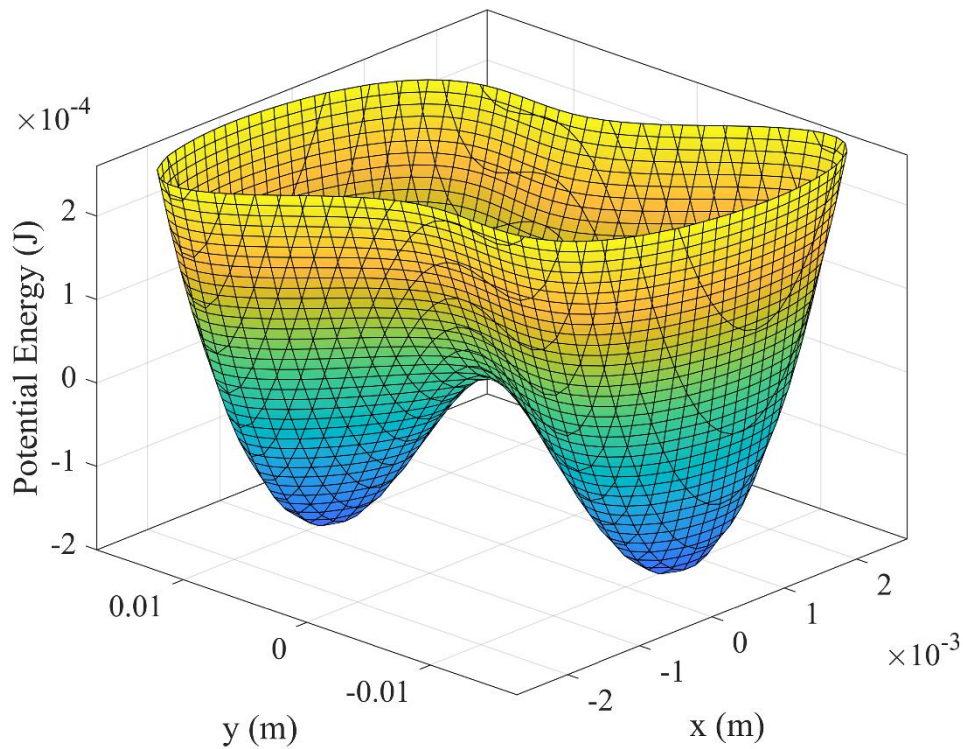
برای بی بعد سازی می‌توان معادله (۳-۶۲) را با کمک پارامترهای بی بعد شده (۳-۹) به صورت زیر نوشت.

$$V = \frac{1}{2} \left(\omega_0^2 x^2 + \varepsilon \delta_1 \omega_0^2 (x - y)^2 + \varepsilon \delta_2 \omega_0^2 y^2 + \frac{1}{2} \varepsilon \delta_3 \omega_0^2 y^4 \right) \quad (3-63)$$

نمودار دوبعدی انرژی پتانسیل نسبت به جابجایی y به صورت تصویر ۳-۱۶ و نمودار سه بعدی آن نیز به صورت تصویر ۳-۱۷ خواهد بود.



تصویر ۳-۱۶ - نمودار انرژی پتانسیل به جابجایی برای مدل II



تصویر ۳-۱۷- نمودار انرژی پتانسیل نسبت به جابجایی x و y برای مدل II

۳-۵ میزان جذب انرژی توسط مدل II

برای بررسی میزان جذب انرژی یا میزان اتلاف انرژی در سیستم‌های غیرخطی، به صورت معمول از روش‌هایی استفاده می‌شود که در اصطلاح به آنها اندازه‌گیری اتلاف انرژی^۱ گفته می‌شود، [16]

[21], [25], [31], [42]–[44].

^۱ Energy Dissipation Measure (EDM)

ابتدا با استفاده از فرمول اتلاف انرژی، اتلاف انرژی چاه غیرخطی، نسبت به اتلاف کل سیستم بدست می‌آید. اتلاف انرژی توسط نوسان‌گر اصلی و چاه غیرخطی انرژی به صورت زیر محاسبه خواهد شد.

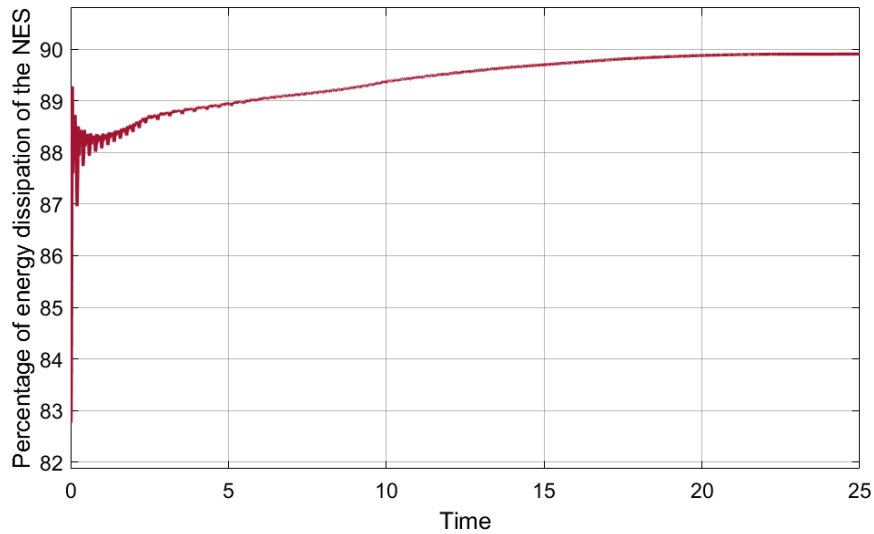
$$E_{LO} = \varepsilon \lambda_1 \int_0^t (\dot{x}_e - \dot{x})^2 dt \quad (3-64)$$

$$E_{NES} = \varepsilon \lambda_2 \int_0^t (\dot{x} - \dot{y})^2 dt \quad (3-65)$$

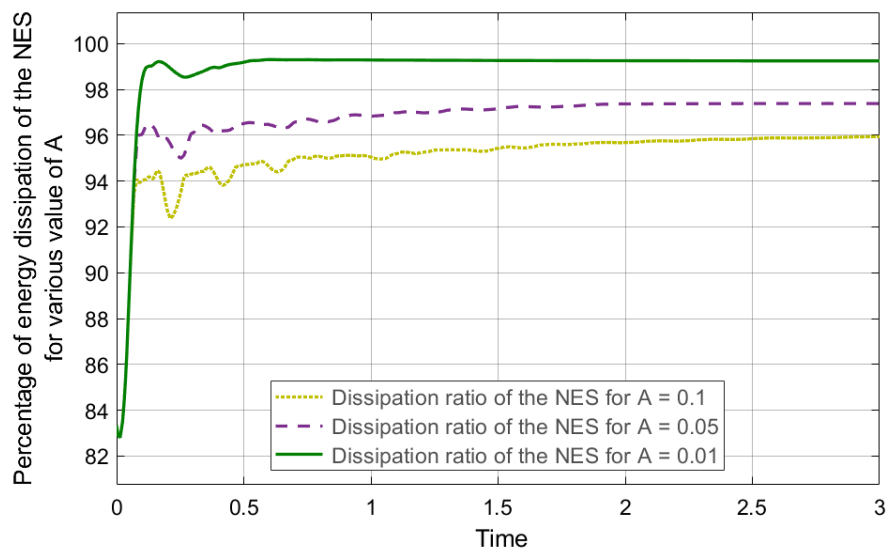
بنابراین نسبت اتلاف انرژی به صورت زیر می‌باشد:

$$r_{NES} = 100 \times \frac{E_{NES}}{E_{NES} + E_{LO}} \quad (3-66)$$

نمودار اتلاف انرژی به صورت تصویر ۳-۱۸ بدست خواهد آمد. همانطور که مشاهده می‌شود، نرخ اتلاف انرژی بعد از حدود ثانیه ۲۳، که طبق تصویر ۳-۹ ارتعاشات چاه غیرخطی انرژی کاهش محسوسی می‌یابد، تقریباً صفر خواهد شد. دلیل این امر با توجه به عدم جابجایی اجسام و معادلات (۳-۶۴) و (۳-۶۵) مشخص است. در تصویر ۳-۱۸ مشاهده می‌شود که برای مقدار دامنه تحریک ۰/۵۵ متر، که می‌توان آن را مقدار نسبتاً زیادی دانست، حدود ۹۰ درصد اتلاف توسط چاه غیرخطی انرژی انجام می‌پذیرد. در تصویر ۳-۱۹، درصد اتلاف انرژی برای دامنه‌های کوچک‌تر تحریک ورودی نمایش داده شده است. مشاهده می‌شود که برای دامنه نو سان ۰/۰۱ متر، در صد اتلاف انرژی بعد از چند ثانیه نخست به حدود ۹۹ درصد خواهد رسید.



تصویر ۳-۱۸- درصد اتلاف انرژی توسط دمپر چاه غیرخطی انرژی به دمپر کل سیستم برای تحریک اولیه



تصویر ۳-۱۹- درصد اتلاف انرژی برای دامنه‌های کوچک‌تر از تحریک ورودی

در برخی منابع برای بررسی بازدهی سیستم از انرژی ذخیره شده لحظه‌ای^۱ در سیستم استفاده می‌کنند. برای این امر، نسبت انرژی چاه غیرخطی انرژی به انرژی کل سیستم محاسبه می‌شود. انرژی چاه غیرخطی انرژی (E_{NES}) و کل سیستم (E_{Total}) به صورت زیر محاسبه می‌شود [21].

^۱ Percentage of instantaneous total energy stored in the NES

$$E_{NES} = \frac{1}{2} \left(\varepsilon \dot{y}^2 + \varepsilon \delta_1 \omega_0^2 (x-y)^2 + \varepsilon \delta_2 \omega_0^2 y^2 + \frac{1}{2} \varepsilon \delta_3 \omega_0^2 y^4 \right) \quad (3-67)$$

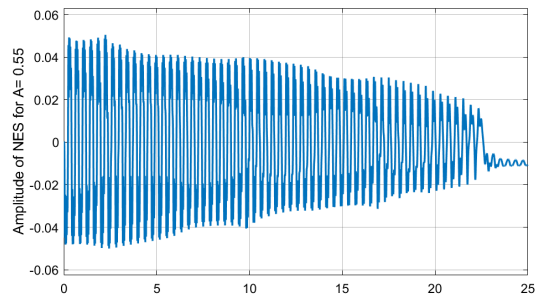
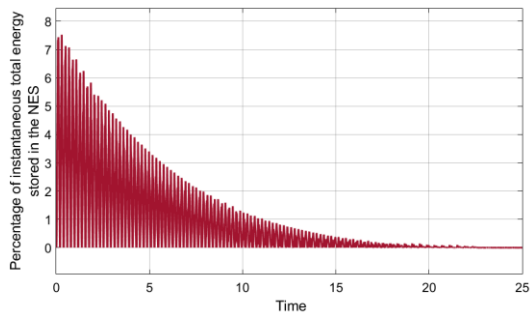
$$E_{Total} = \frac{1}{2} \left(\varepsilon \dot{y}^2 + \dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2 + \varepsilon \delta_1 \omega_0^2 (x-y)^2 + \varepsilon \delta_2 \omega_0^2 y^2 + \frac{1}{2} \varepsilon \delta_3 \omega_0^2 y^4 \right) \quad (3-68)$$

که در نهایت درصد کل انرژی لحظه‌ای ذخیره شده در چاه غیرخطی انرژی به صورت زیر محاسبه می‌گردد.

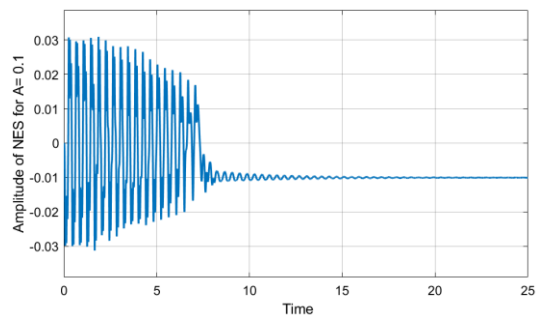
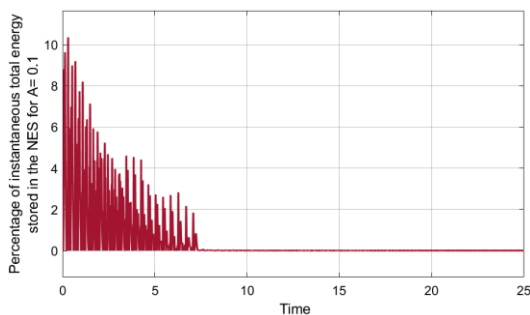
$$D(t) = 100 \times \frac{E_{NES}}{E_{Total}} \quad (3-69)$$

$$= \frac{\varepsilon \dot{y}^2 + \varepsilon \delta_1 \omega_0^2 (x-y)^2 + \varepsilon \delta_2 \omega_0^2 y^2 + \frac{1}{2} \varepsilon \delta_3 \omega_0^2 y^4}{\varepsilon \dot{y}^2 + \dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2 + \varepsilon \delta_1 \omega_0^2 (x-y)^2 + \varepsilon \delta_2 \omega_0^2 y^2 + \frac{1}{2} \varepsilon \delta_3 \omega_0^2 y^4} \times 100$$

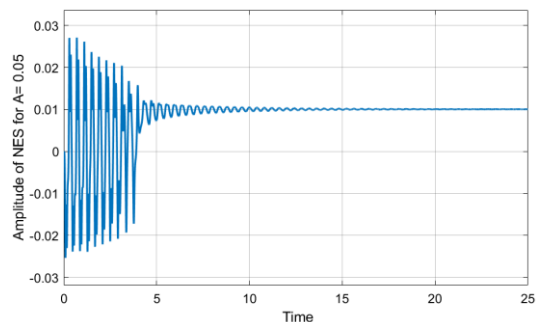
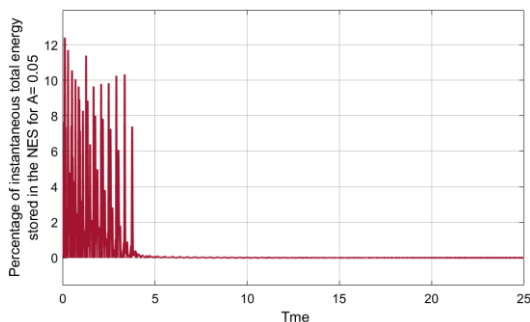
تصویر ۳-۲۰ الی تصویر ۳-۲۳ نشان دهنده دامنه نوسانات و درصد انرژی کل لحظه‌ای ذخیره شده در چاه غیرخطی انرژی به ازای دامنه تحریک متفاوت می‌باشند. نتایج بدست آمده تشابه منطقی‌ای با نتایج بدست آمده در قسمت محاسبه درصد اتلاف سیستم دارد. یعنی با کاهش دامنه تحریک، درصد انرژی لحظه‌ای چاه غیرخطی انرژی، همانگونه که میزان اتلاف انرژی افزایش می‌یافت، افزایش خواهد یافت. همچنین مشاهده می‌شود که به ترتیب در ثانیه‌های ۲۳، ۷، ۴ و ۱ که دامنه ارتعاشات سیستم کاهش محسوسی دارد، سطح انرژی سیستم نیز در همین زمان‌ها ناگهان به صفر نزدیک می‌شوند.



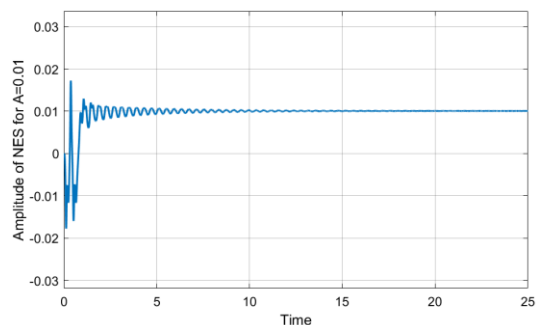
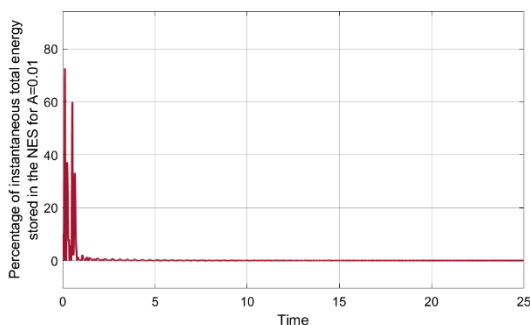
تصویر ۳-۲۰- دامنه و درصد انرژی کل لحظه ای ذخیره شده در چاه غیرخطی انرژی برای $A=0.55$



تصویر ۳-۲۱- دامنه و درصد انرژی کل لحظه ای ذخیره شده در چاه غیرخطی انرژی برای $A=0.1$



تصویر ۳-۲۲- دامنه و درصد انرژی کل لحظه ای ذخیره شده در چاه غیرخطی انرژی برای $A=0.05$



تصویر ۳-۲۳- دامنه و درصد انرژی کل لحظه ای ذخیره شده در چاه غیرخطی انرژی برای $A=0.01$

فصل ۴ :

نتایج و پیشنهادها

۴-۱ بررسی کلی نتایج

بنابر اهمیت موضوع جذب ارتعاشات زائد سیستم‌های مکانیکی و همچنین توسعه و کشف کارآیی روز افزون جاذب‌های غیرخطی، در این پایان نامه به بررسی یکی از کاربردی‌ترین نمونه‌های جاذب غیرخطی، یعنی چاه غیرخطی ارتعاشات پرداخته شد. علاوه بر شناخت شکل‌های مختلف این جاذب، همزمان با بررسی ادبیات فنی و روش‌های مرسوم، محاسبات مربوط به دو مدل متفاوت دارای چاه غیرخطی انرژی متصل و غیر متصل به زمین را برای دو حالت پاسخ مدوله قوی و حالت آبشاری بررسی شد. در نهایت برای هر دو مدل و هر دو حالت مطرح شده نمودارهای منیفولد نامتغیر آهسته و انرژی بدست آمد و همچنین نوسانات و چگونگی ذخیره و اتلاف انرژی برای مدل II مورد بررسی قرار گرفت.

بررسی نمودارهای SIM نشان داد که در بازه‌ای از پاسخ، نمودار دارای سه شاخه خواهد بود که دو شاخه پایدار و شاخه میانی ناپایدار می‌باشد. همچنین نمودار بعد از رسیدن به اکستریمم با پدیده پرش مواجه خواهد شد. سپس نمودار را با تغییر پارامترهای مختلف بررسی نمودیم که با توجه به تغییرات نمودار مشخص شد که اگر نمودار SIM شکل بزرگتری به خود بگیرد، نشان دهنده افزایش دامنه ارتعاش نوسان گر اصلی و NES، بزرگتر شدن پدیده پرش و کارایی جاذب خواهد شد. همچنین با تغییر برخی پارامترها نمودار دارای پاسخی نزدیک به رفتار سیستم‌های خطی شد.

در ادامه چند روش و معیار برای میزان جذب انرژی و بازدهی چاه غیرخطی انرژی مطرح شد که نشان داد با کاهش دامنه تحریک ورودی، درصد اتلاف انرژی توسط میرایی NES و همچنین درصد انرژی لحظه‌ای ذخیره شده در چاه غیرخطی انرژی افزایش خواهد یافت.

۲-۴ پیشنهادات

بنابر نتایج بدست آمده در این پژوهش، پیشنهاد می‌شود موارد زیر مورد مطالعه قرار بگیرند:

- بهینه سازی سیستم مدل II بررسی شده در این پژوهش.
- بررسی آزمایشگاهی مدل II بررسی شده در این پژوهش.

پوست

بسط تیلور مخارج معادلات (۲-۲۸) و (۲-۲۹):

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)(\varepsilon\sigma+1)} = 1 - (1+\sigma)\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

$$\frac{1}{(\varepsilon\sigma+1)} = 1 - \varepsilon\sigma + O(\varepsilon^2)$$

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)} = 1 - \varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

$$\frac{1}{(\varepsilon\sigma+1)^3} = 1 - 3\varepsilon\sigma + O(\varepsilon^2)$$

بسط تیلور مخارج معادلات (۲-۳۰) و (۲-۳۱):

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)^3(\varepsilon\sigma+1)^3} = 1 + (3\sigma+3)\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)(\varepsilon\sigma+1)} = 1 - (1+\sigma)\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

$$\frac{1}{(\varepsilon\sigma+1)} = 1 - \varepsilon\sigma + O(\varepsilon^2)$$

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)} = 1 - \varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

مرجع

- [1] J. A. Rice *et al.*, “Passive Vibration Mitigation for Highway Sign Trusses Susceptible to Wind-Induced Vibrations,” vol. 31, no. Sharp 1993, pp.
- [2] Frahm, “Device for damping vibrations of bodies.,” Oct. 1909.
- [3] N. Hoang, Y. Fujino, and P. Warnitchai, “Optimal tuned mass damper for seismic applications and practical design formulas,” *Eng. Struct.*, vol. 30, no. 3, pp. 707–715, Mar. 2008.
- [4] F. Weber, “Semi-active vibration absorber based on real-time controlled MR damper,” *Mech. Syst. Signal Process.*, vol. 46, no. 2, pp. 272–288, Jun. 2014.
- [5] ع. ابراهیمی ممقانی و ر. ا. حسینی “مبانی و سازوکار چاه غیرخطی انرژی در کاهش ارتعاشات” *مجله علمی ترویجی انجمن مهندسان مکانیک ایران*, vol. 25, no. 5, pp. 53–61, Nov. 2016.
- [6] J. Luo *et al.*, “Large-scale experimental evaluation and numerical simulation of a system of nonlinear energy sinks for seismic mitigation,” *Eng. Struct.*, vol. 77, pp. 34–48, Oct. 2014.
- [7] M. A. AL-Shudeifat, N. E. Wierschem, L. A. Bergman, and A. F. Vakakis, “Numerical and experimental investigations of a rotating nonlinear energy sink,” *Meccanica*, vol. 52, no. 4–5, pp. 763–779, Mar. 2017.
- [8] Y. S. Lee *et al.*, “Passive non-linear targeted energy transfer and its applications to vibration absorption: A review,” *Proc. Inst. Mech. Eng. Part K J. Multi-body Dyn.*, vol. 222, no. 2, pp. 77–134, Jun. 2008.
- [9] ORMONDROYD and J., “The Theory of the Dynamic Vibration Absorber,” *Trans., ASME, Appl. Mech.*, vol. 50, pp. 9–22, 1928.
- [10] J. Shaw, S. W. Shaw, and A. G. Haddow, “On the response of the non-linear vibration absorber,” *Int. J. Non. Linear. Mech.*, vol. 24, no. 4, pp. 281–293, Jan. 1989.
- [11] S. Natsiavas, “Steady state oscillations and stability of non-linear dynamic vibration absorbers,” *J. Sound Vib.*, vol. 156, no. 2, pp. 227–245, Jul. 1992.
- [12] R. E. Roberson, “Synthesis of a nonlinear dynamic vibration absorber,” *J. Franklin Inst.*,

- vol. 254, no. 3, pp. 205–220, Sep. 1952.
- [13] H. J. Rice and J. R. McCraith, “Practical non-linear vibration absorber design,” *J. Sound Vib.*, vol. 116, no. 3, pp. 545–559, Aug. 1987.
- [14] I. N. Jordanov and B. I. Cheshankov, “Optimal design of linear and non-linear dynamic vibration absorbers,” *J. Sound Vib.*, vol. 123, no. 1, pp. 157–170, May 1988.
- [15] Y. Starosvetsky, O. V. Gendelman, “Vibration absorption in systems with a nonlinear energy sink: Nonlinear damping,” *J. Sound Vib.*, vol. 324, no. 3–5, pp. 916–939, Jul. 2009.
- [16] D. Qiu, T. Li, S. Seguy, and M. Paredes, “Efficient targeted energy transfer of bistable nonlinear energy sink: application to optimal design,” *Nonlinear Dyn.*, vol. 92, no. 2, pp. 443–461, Apr. 2018.
- [17] O. V. Gendelman, “Transition of Energy to a Nonlinear Localized Mode in a Highly Asymmetric System of Two Oscillators,” *Nonlinear Dyn.*, vol. 25, no. 1/3, pp. 237–253, 2001.
- [18] A. F. Vakakis, D. M. McFarland, L. Bergman, L. I. Manevitch, and O. Gendelman, “Isolated Resonance Captures and Resonance Capture Cascades Leading to Single- or Multi-Mode Passive Energy Pumping in Damped Coupled Oscillators,” *J. Vib. Acoust.*, vol. 126, no. 2, pp. 235–244, Apr. 2004.
- [19] G. Kerschen, Y. S. Lee, A. F. Vakakis, D. M. McFarland, and L. A. Bergman, “Irreversible Passive Energy Transfer in Coupled Oscillators with Essential Nonlinearity,” *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 66, no. 2, pp. 648–679, Jan. 2005.
- [20] O. V. Gendelman, Y. Starosvetsky, and M. Feldman, “Attractors of harmonically forced linear oscillator with attached nonlinear energy sink I: Description of response regimes,” *Nonlinear Dyn.*, vol. 51, no. 1–2, pp. 31–46, Oct. 2007.
- [21] A. F. V. V. G. A. B. M. M. K. S. Lee, *Nonlinear Targeted Energy Transfer in Mechanical and Structural Systems*, vol. 156. Dordrecht: Springer Netherlands, 2009.
- [22] L. I. Manevitch, “The Description of Localized Normal Modes in a Chain of Nonlinear Coupled Oscillators Using Complex Variables,” *Nonlinear Dyn.*, vol. 25, no. 1/3, pp. 95–109, 2001.
- [23] B. Vaurigaud, A. Ture Savadkoohi, and C.-H. Lamarque, “Targeted energy transfer with parallel nonlinear energy sinks. Part I: Design theory and numerical results,” *Nonlinear Dyn.*, vol. 66, no. 4, pp. 763–780, Dec. 2011.
- [24] O. V. Gendelman, “Analytic treatment of a system with a vibro-impact nonlinear energy sink,” *J. Sound Vib.*, vol. 331, no. 21, pp. 4599–4608, Oct. 2012.

- [25] A. Tripathi, P. Grover, and T. Kalmár-Nagy, “On optimal performance of nonlinear energy sinks in multiple-degree-of-freedom systems,” *J. Sound Vib.*, vol. 388, pp. 272–297, Feb. 2017.
- [26] G. Habib and F. Romeo, “The tuned bistable nonlinear energy sink,” *Nonlinear Dyn.*, vol. 89, no. 1, pp. 179–196, Jul. 2017.
- [27] H. Guo, B. Liu, Y. Yu, S. Cao, and Y. Chen, “Galloping suppression of a suspended cable with wind loading by a nonlinear energy sink,” *Arch. Appl. Mech.*, vol. 87, no. 6, pp. 1007–1018, Jun. 2017.
- [28] B. Bergeot, S. Bellizzi, and B. Cochelin, “Passive suppression of helicopter ground resonance using nonlinear energy sinks attached on the helicopter blades,” *J. Sound Vib.*, vol. 392, pp. 41–55, Mar. 2017.
- [29] Y.-W. Zhang, B. Yuan, B. Fang, and L.-Q. Chen, “Reducing thermal shock-induced vibration of an axially moving beam via a nonlinear energy sink,” *Nonlinear Dyn.*, vol. 87, no. 2, pp. 1159–1167, Jan. 2017.
- [30] A. Shooshtari and H. Afzali, “A NUMERICAL APPROACH TO CONSIDER EFFECTIVENESS OF TMDS ON NONLINEAR BEHAVIOR OF REINFORCED CONCRETE FRAMES,” *14th World Congress on Earthquake Engineering*. 13-Oct-2008.
- [31] A. F. Vakakis, Ed., *Advanced Nonlinear Strategies for Vibration Mitigation and System Identification*, vol. 518. Vienna: Springer Vienna, 2010.
- [32] X. Lu, Z. Liu, and Z. Lu, “Optimization design and experimental verification of track nonlinear energy sink for vibration control under seismic excitation,” *Struct. Control Heal. Monit.*, vol. 24, no. 12, p. e2033, Dec. 2017.
- [33] Z. N. Ahmadabadi and S. E. Khadem, “Nonlinear vibration control of a cantilever beam by a nonlinear energy sink,” *Mech. Mach. Theory*, vol. 50, pp. 134–149, Apr. 2012.
- [34] H. Yao, Y. Cao, Z. Ding, and B. Wen, “Using grounded nonlinear energy sinks to suppress lateral vibration in rotor systems,” *Mech. Syst. Signal Process.*, vol. 124, pp. 237–253, 2019.
- [35] A. M. Kosevich, A. S. Kovalev, A. M. Kosevich, and A. S. Kovalev, “An introduction to nonlinear physical mechanics,” *KiIND*, 1989.
- [36] M. Feldman and M. Feldman, “Non-Linear System Vibration Analysis Using Hilbert Transform - I. Free Vibration Analysis Method ‘freevib,’” *Mech. Syst. Signal Process.*, vol. 8, pp. 309--318, 1994.

- [37] ساجده شعبانپور, “بررسی دینامیک حالت پایدار یک تیر اوپلر-برنولی متصل شده به یک چاه غیرخطی انرژی با فرض تغییرات کند پارامترهای سیستم اصلی با زمان, ”پایان نامه کارشناسی ارشد, دانشگاه صنعتی شاهرود, ۱۳۹۷.
- [38] ب. بخشی, “بررسی تاثیر پتانسیل و میرایی محلی بر تبادل انرژی بین دو اسیلاتور متصل به یگدیگر, ”پایان نامه کارشناسی ارشد, دانشگاه صنعتی شاهرود, ۱۳۹۶.
- [39] A. F. Vakakis, L. A. Bergman, D. M. McFarland, Y. S. Lee, and M. Kurt, “Current efforts towards a non-linear system identification methodology of broad applicability,” *Proc. Inst. Mech. Eng. Part C J. Mech. Eng. Sci.*, vol. 225, no. 11, pp. 2497–2515, Nov. 2011.
- [40] G. P. (ONERA) C. Stephan and I. G. Michon (University of Toulouse - ICA, CNRS, “Vibration Mitigation Based on Nonlinear Absorbers,” *Aeroelasticity Struct. Dyn.*, 2018.
- [41] K. Foroutan, A. Jalali, and H. Ahmadi, “Investigations of energy absorption using tuned bistable nonlinear energy sink with local and global potentials,” *J. Sound Vib.*, vol. 447, pp. 155–169, May 2019.
- [42] Y. Zhang, C. Wang, B. Yuan, and B. Fang, “Integration of Geometrical and Material Nonlinear Energy Sink with Piezoelectric Material Energy Harvester,” vol. 2017, 2017.
- [43] Y. M. Wei, Z. K. Peng, X. J. Dong, W. M. Zhang, and G. Meng, “Mechanism of Optimal Targeted Energy Transfer,” *J. Appl. Mech.*, vol. 84, no. January, pp. 1–9, Oct. 2017.
- [44] Y. Wei, S. Wei, Q. Zhang, X. Dong, Z. Peng, and W. Zhang, “Targeted energy transfer of a parallel nonlinear energy sink,” *Appl. Math. Mech.*, vol. 40, no. 5, pp. 621–630, May 2019.

Abstract

Nonlinear Energy Sink (NES) is one of the most efficient passive vibration absorbers that consists of a mass, attach to a nonlinear spring. In this study, two separate systems will be examined in Strongly Modulated Response (SMR) and cascade response. For the first system, the effect of the NES on a system that consists of a Linear Oscillator (LO) that has a base stimulation is studied. The second NES system that studied analytically, consists of a LO with a base stimulation and an NES that is connected to ground with a nonlinear spring called Grounded NES (GNES). For cascade response, after obtaining the equations of motion, the harmonic balance method applied to analytically solve the equations. Then, a slow invariant manifold is obtained and Its changes are examined with respect to the change of parameters. For SMR, the system is studied in the vicinity of 1:1 resonance. For this purpose, after obtaining the equations of motion, some variables were applied such as Manevitch complex variable method (CX-A) and then, multiple scale method is applied to solve the equations analytically and SIM expression is obtained. At last, the energy dissipation ratio of the NES and the percentage of the instantaneous total energy stored in the NES are obtained and compared with the amplitude-time diagram. The results show that if the effect of the nonlinearity becomes less influential, the occurrence of energy pumping will be less probable. Also, when the stimulation amplitude becomes smaller, the value of the energy dissipation ratio of the NES increase and the time to complete the process will be reduced.

Keywords: Nonlinear Energy Sink (NES), strongly modulated response (SMR), slow invariant manifold (SIM), energy dissipation measure (EDM), grounded NES



Shahrood University of Technology

Faculty of Mechanical and Mechatronic Engineering

M.Sc. Thesis in Applied Mechanic Engineering

The effects of local and global potentials of nonlinear energy sinks on vibration mitigation of the system

By: Arash Khalatbari

Supervisors:

Dr. A. Jalali

Dr. H. Ahmadi

January 2020