

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



پردیس بین‌المللی خوارزمی

رساله دکتری مهندسی تبدیل انرژی

تخمین توان منبع حرارتی موردنیاز جهت گرما درمانی تومور سینه

به روش معکوس

نگارنده : منصوره شریعتمدار طهرانی

اساتید راهنما:

دکتر محمد حسن کیهانی

دکتر محمد محسن شاهمردان

استاد مشاور:

جناب آقای دکتر محمد محمدیون

خرداد ۱۳۹۹

شماره: ۱۳۹۹/۲۳۹۲۱

تاریخ: ۱۳۹۹/۴/۴

شماره:

تاریخ:

ویرایش:

باسمه تعالی



مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره ۱۱: صورت جلسه نهایی دفاع از رساله دکتری (Ph.D)

شماره ۱۲۹۳۵۵ و روی ۹۲ در تاریخ ۱۳۹۹/۲/۱۷ رساله نظری/ عملی/ خود نام عنوان: تخمین یون سمیع جراحی مورد نیاز جهت گرما در عتقی نومور سینا به روش معکوس دفاع و به اخذ نمره ۱۹ به درجه: عالی/ عالی/ تافل گردید.

الف: درجه عالی: نمره ۱۹-۲۰ ☒	ب: درجه خیلی خوب: نمره ۱۸/۹۹-۱۷ ☐
ج: درجه خوب: نمره ۱۶/۹۹-۱۵ ☐	د: درجه بد: کمتر از ۱۵ ☐

ردیف	هیئت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱	محمد حسن شاهمردان	استاد/ استادیار	دانشیار	
۲	محمد حسن گنجانی	استاد/ استادیار	استاد	
۳	محمد محمدیون	مشاور/ مشاورین	دانشیار	
۴	آقای دکتران رحیمی	استاد/ استادیار	استاد	
۵	امان خزان	استاد/ استادیار	استادیار	
۶	حمید عباسی زان	استاد مدعو/ داخلی	استادیار	
	محسن فرهنگی	سرپرست (نماینده)	مربی	
		تحصیلات تکمیلی دانشکده		

مدیر محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه:

ضمن تأیید مراتب فوق مقرر فرستید اقدامات لازم در خصوص انجام مراحل دانش آموختگی خانم منصوره شریعتمدار طهرانی عمل آید.

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده:

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:



.....تقدیم به مادر عاشق و پدر مهربانم.....

داستان زندگی هرکس منحصر به خودش است و نشانه ها فقط جهت آن را رقم می زنند،

جهتی توام با لحاظ قسمت و حکمت.

من اما داستان زندگی خود را به مادر عاشق و پدر مهربانم و تو که می دانی زندگی حاصل

خواندن ها و نوشتن هاست تقدیم می کنم، تا شاید راهی باشد برای خواندن دوباره ی این

داستان و نشانه ای برای تولد یک داستان دیگر و البته جدید.....

تقدیر و تشکر از آن کسانی است که وجودشان پر از ایثار و از خودگذشتگی است و گرمای امید بخش نگاهشان روشنگر راهی است که مقصدش ناپیداست ،همان کسانی که حامی لحظه های پر از فراز و نشیب این داستان بوده اند.....

بی شک ممکن شدن تامین این پایان نامه با راهنمایی های اساتید عزیز و پر از صبر و مهربانی، دکتر محمد محسن شاهمردان و دکتر محمد حسن کیهانی و حمایت و نگاه محبت آمیز دکتر محمد محمدیون صورت پذیرفته است....

سپاسگزارم و امیدوار، به آن که زکاتی که پرداخت نموده اید حامی لحظه هایتان باشد و تمامی تلاشم بر آن است که لیاقت پرداخت زکات را بر خود ممکن سازم.....

تعهد نامه

اینجانب منصوره شریعتمداری طهرانی ، دانشجوی دوره دکتری رشته مهندسی تبدیل انرژی دانشکده پردیس بین المللی خوارزمی دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه " تخمین توان منبع حرارتی مورد نیاز جهت گرما درمانی تومور سینه به روش معکوس " تحت راهنمایی آقایان دکتر محمد حسن کیهانی و دکتر محمد محسن شاهمردان متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا «Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آن ها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای ، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .

استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده

تعیین دقیق توزیع دما در گرما درمانی¹ به عنوان برگ خرید اساسی در به کارگیری این روش به عنوان درمان ترکیبی تومورهای سرطانی است. روش گرمادرمانی با ایجاد گرما در بافت سرطانی باعث از بین رفتن تومورهای سرطانی که توسط درمان های دیگر تضعیف شده اند می شود. نکته مهمی که باید در این روش مورد توجه قرار گیرد این است که گرما به صورت بهینه به بافت سرطانی انتقال یابد تا ضمن اثر حداکثر بر روی تومورهای سرطانی، حداقل اثر مخرب را بر روی بافت های سالم اطراف تومور داشته باشد. هدف این رساله ارائه روشی برای تخمین توان بهینه منبع حرارتی، به منظور از بین بردن سلول های سرطانی با توجه به توزیع دما در بافت سرطانی است. برای این منظور از روش معکوس برای تخمین توان منبع حرارتی استفاده شده است. بافت سینه به صورت یک نیمکره فرض شده و در حالت سه لایه (چربی، غدد و عضله) مسئله حل شده است. انتقال حرارت در بافت نرم با استفاده از معادله پنس که بر اساس هدایت حرارتی فوریه ای می باشد توصیف شده است. برای حل معادلات حاکم بعد از بی بعد سازی، از روش تفاضل محدود و روش مختصات عمومی استفاده شده و معادلات از صفحه فیزیکی به صفحه محاسباتی که دارای شبکه هموار است انتقال داده شده اند. برای حل معادلات معکوس، روش گرادیان مزدوج با مسئله الحاقی که یکی از قوی ترین روش های حل مسائل معکوس است به کار گرفته شده است. برای دنبال کردن تغییرات حرارتی از سنسور درون بافت استفاده شده است با این فرض که سنسور در محل تومور قرار گرفته باشد و مسئله در دو حالت تک سنسور و دو سنسور حل گردیده است. برای بررسی بهتر عملکرد روش پیشنهادی سه معادله برای توزیع دمای درون بافت فرض شده است و مسئله بر اساس این معادلات توزیع برای هر دو حالت تک سنسور و دو سنسور حل شده است. نتایج به دست آمده از حل معادلات و مقایسه نمودار توزیع دمای دقیق و محاسبه شده به خوبی دقت بالای روش ارائه شده را نشان می دهد. در هر مورد از معادلات انتخابی طبق مشاهده نتایج مشخص می شود اضافه کردن سنسور دوم دقت نتایج را بسیار افزایش می دهد. علاوه مسئله در حالت اضافه کردن نويز به داده های ورودی نیز بررسی شده که نتیجه به دست آمده مصدق پایداری و دقت روش در این حالت نیز می باشد.

کلمات کلیدی: هایپرترمیا، منبع حرارتی، معادله پنس، روش مختصات عمومی، روش معکوس

¹ Hyperthermia

عناوین مقالات مستخرج از رساله

شماره	عنوان	محل ارائه	سال
۱	تخمین توان منبع گرمایی موردنیاز جهت گرما درمانی تومور سینه با استفاده از روش معکوس	مجله مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز	1397
۲	Time Dependent Heat Source Estimation by Conjugate Gradient Method in Multi-Layers System for Hyperthermia of Breast cancer	Journal of Heat and Mass Transfer Research	2020
۳	تخمین توان منبع حرارتی با معادله توزیع سینوسی- کسینوسی به منظور گرما درمانی تومور سینه با استفاده از روش معکوس	2nd International Conference on New Horizons in the Engineering Science	۱۳۹۷
۴	تخمین توان منبع حرارتی با توزیع پله‌ای جهت گرمادرمانی تومورهای سرطانی پستان به روش معکوس	2nd International Conference on New Horizons in the Engineering Science	۱۳۹۷

فهرست مطالب

فصل اول : مقدمه	۱
۱-۱ مقدمه	۲
۲-۱ تاریخچه مسائل معکوس حرارتی	۸
۳-۱ تاریخچه هایپرترمیا	۱۱
۴-۱ مدل ریاضی انتقال حرارت در بافت و رگ	۱۴
۱-۴-۱ معادله انتقال حرارت زیستی پنس	۱۵
۲-۴-۱ مدل انتقال گرمای زیستی والف	۲۲
۳-۴-۱ مدل انتقال گرمای زیستی کلینگر	۲۳
۴-۴-۱ مدل انتقال گرمای زیستی چن و هولمز	۲۳
۵-۴-۱ مدل انتقال گرمای زیستی وینبام و جی جی	۲۴
۵-۱ دسته‌بندی مسائل معکوس حرارتی	۲۴
۶-۱ حل مسائل معکوس حرارتی	۲۶
۸-۱ ارزیابی روش‌های مسائل معکوس هدایت	۲۸
۹-۱ کاربرد روش‌های معکوس در مهندسی	۲۹
۱۰-۱ نوآوری‌های رساله	۳۲
۱۱-۱ ساختار و محتوای رساله	۳۳
فصل دوم : بررسی روشهای بهینه سازی توابع	۳۵
مقدمه	۳۶
۱-۲ مسائل بهینه‌سازی	۳۶
۲-۲ دسته‌بندی روش‌های بهینه‌سازی	۳۷
۳-۲ راه‌حل کلی	۳۸
۴-۲ نرخ همگرایی	۳۹

۴۰	۵-۲ گرادیان تابع
۴۲	۱-۵-۲ محاسبه گرادیان
۴۳	۲-۵-۲ تعیین طول گام بهینه در جهت کاهش تابع
۴۴	۶-۲ معیار همگرایی
۴۴	۷-۲ روش کاهش سریع
۴۵	۸-۲ روش گرادیان مزدوج
۴۵	۱-۸-۲ جهت‌های مزدوج
۴۶	۲-۸-۲ شرح روش گرادیان مزدوج
۴۸	۳-۸-۲ الگوریتم روش گرادیان مزدوج
۴۹	۴-۸-۲ دسته‌بندی روش‌های گرادیان مزدوج
۵۳	۹-۲ روش نیوتن
۵۵	۱۰-۲ روش مارکارت- لونبرگ
۵۶	۱۱-۲ روش شبه نیوتن
۵۸	۱۲-۲ مقایسه چهار روش اصلی برای حل مسائل هدایت حرارتی معکوس
۶۱	فصل سوم : بیان مسئله و روش حل
۶۲	۱-۳ استفاده از روش گرادیان مزدوج با مسئله الحاقی برای تخمین تابع
۶۳	۱-۱-۳ مسئله مستقیم
۶۴	۲-۱-۳ مسئله معکوس
۶۴	۱-۲-۱-۳ مسئله حساسیت
۶۵	۲-۲-۱-۳ مسئله الحاقی
۶۶	۳-۲-۱-۳ معادله گرادیان
۶۷	۴-۲-۱-۳ روش تکرار
۶۹	۵-۲-۱-۳ معیار توقف
۶۹	۳-۱-۳ الگوریتم حل
۷۰	۴-۱-۳ شرح برنامه

۷۱	۳-۱-۵ حل مثال
۷۸	۳-۲ تخمین توان منبع حرارتی گذرای خطی در حالت دوبعدی
۷۹	۳-۲-۱ مسئله مستقیم
۷۹	۳-۲-۲ مسئله معکوس
۸۰	۳-۲-۲-۱ مسئله حساسیت
۸۱	۳-۲-۲-۲ مسئله الحاقی
۸۵	فصل چهارم : روش تحقیق و حل مسئله
۸۶	تخمین توان منبع حرارتی جهت درمان تومور در حالت متقارن محوری
۸۶	۴-۱ روش حل مستقیم
۹۲	۴-۱-۱ تبدیل معادلات در صفحه محاسباتی:
۹۵	۴-۱-۲ تبدیل شرایط مرزی در صفحه محاسباتی:
۹۷	۴-۲ مسئله معکوس
۹۷	۴-۲-۱ مسئله الحاقی
۹۸	۴-۲-۱-۱ شرایط مرزی روی تمام مرزها
۹۸	۴-۲-۱-۲ شرایط مرزی در صفحه محاسباتی
۹۸	۴-۲-۲ مسئله حساسیت
۹۹	۴-۲-۲-۱ شرایط مرزی
۹۹	۴-۲-۲-۲ شرایط مرزی در صفحه محاسباتی
۱۰۰	۴-۲-۳ معادله گرادیان
۱۰۰	۴-۲-۴ روش تکرار
۱۰۱	۴-۲-۵ معیار توقف
۱۰۳	فصل پنجم : نتایج و بحث
۱۰۴	۵-۱ مقایسه توان منبع حرارتی به دست آمده از روش معکوس با تابع دقیق
۱۰۷	۵-۱-۱ بررسی نتایج بر روی داده های بدون نویز
۱۰۷	۵-۱-۱-۱ بررسی نتایج با استفاده از یک سنسور

۱۱۰.....	۵-۱-۱-۲ بررسی نتایج با استفاده از دو سنسور
۱۱۳.....	۵-۱-۲ بررسی نتایج بر روی داده‌های نویز دار
۱۱۴.....	۵-۱-۲-۱ بررسی نتایج با استفاده از یک سنسور
۱۱۶.....	۵-۲-۱-۲ بررسی نتایج با استفاده از دو سنسور
۱۱۹.....	۵-۱-۳ محاسبه خطای RMS
۱۲۳.....	۵-۱-۴ نمایش کانتورهای توزیع دما
۱۳۴.....	۵-۱-۶ نمایش نمودار کاهش گرادیان تابع هدف
۱۳۶.....	۵-۱-۷ محاسبه منبع توان حرارتی در مدت‌زمان ۱۰ دقیقه
۱۳۹.....	۵-۱-۸ محاسبه منبع توان حرارتی در مدت‌زمان ۳۰ دقیقه
۱۴۵.....	فصل ششم : جمع‌بندی نتایج و پیشنهادات
۱۴۶.....	۶-۱ جمع‌بندی نتایج
۱۴۷.....	۶-۲ پیشنهادات
۱۴۸.....	پیوست ۱- نحوه انتقال معادلات و محاسبات مربوط به آن‌ها از صفحه فیزیکی به صفحه محاسباتی
۱۴۸.....	پ ۱-۱ معادلات حاکم در دستگاه مختصات عمومی
۱۴۹.....	پ ۱-۲ متریک‌ها و ژاکوبین‌های تبدیل
۱۵۱.....	پ ۱-۳ تبدیل معادلات از صفحه فیزیکی به صفحه محاسباتی
۱۵۳.....	پ ۱-۴ گسسته سازی معادلات
۱۵۶.....	پیوست ۲-۱ اعتبار سنجی حل مستقیم
۱۶۰.....	منابع و مراجع

فهرست جداول :

- جدول (۱-۱) : اثر افزایش دما و تاثیر آن بر بافت [۱] ۳
- جدول (۱-۲) : دسته بندی روشهای بهینه سازی ۳۸
- جدول (۱-۴) : مشخصات حرارتی بافت سینه ۸۹
- جدول (۱-۵) : محاسبه خطای RMS برای توابع مختلف در نظر گرفته شده برای توان منبع حرارتی در حالت استفاده از یک سنسور ۱۲۰
- جدول (۲-۵) : محاسبه خطای RMS برای توابع مختلف در نظر گرفته شده برای توان منبع حرارتی در حالت استفاده از دو سنسور ۱۲۲

فهرست شکل‌ها

- شکل (۱-۱): انواع سطح بندی هایپرترمیا با توجه به مدت زمان و دمای اعمال شده [۶۲] ۱۳
- شکل (۱-۲): خون منتشر شده در بافت در یک المان از بافت [۶۷] ۱۶
- شکل (۲-۱): نمودار روند بهینه سازی تابع هدف ۳۹
- شکل (۲-۲): جهت های سریع ترین افزایش ۴۱
- شکل (۲-۳): مینیمم یک تابع درجه دوم در یک مرحله با روش نیوتن ۵۴
- شکل (۳-۱): هندسه و مختصات مورد استفاده برای حل مسئله ۶۳
- شکل (۳-۲): مقایسه تابع $g_p(t)$ محاسبه شده با استفاده از روش گرادیان مزدوج با تابع دقیق با در نظر گرفتن ۷۳
- شکل (۳-۳): مقایسه تابع $g_p(t)$ محاسبه شده با استفاده از روش گرادیان مزدوج با تابع دقیق با در نظر گرفتن ۷۳
- شکل (۳-۴): مقایسه تابع $g_p(t)$ محاسبه شده با استفاده از روش گرادیان مزدوج با تابع دقیق با در نظر گرفتن ۷۴
- شکل (۳-۵): مقایسه تابع $g_p(t)$ محاسبه شده با استفاده از روش گرادیان مزدوج با استفاده از داده های نویزدار، با تابع دقیق با در نظر گرفتن $t_f=2$ ۷۴
- شکل (۳-۶): مقایسه تابع $g_p(t)$ محاسبه شده با استفاده از روش گرادیان مزدوج با استفاده از داده های نویزدار، با تابع دقیق با در نظر گرفتن $t_f=2.2$ ۷۵
- شکل (۳-۷): مقایسه تابع $g_p(t)$ محاسبه شده با استفاده از روش گرادیان مزدوج با استفاده از داده های نویزدار، با تابع دقیق با در نظر گرفتن $t_f=2.4$ ۷۵
- شکل (۳-۸): موقعیت منبع حرارتی خطی و سنسور دما ۸۰
- شکل (۳-۹): مقایسه تابع دقیق $G(\tau)$ با مقدار محاسبه شده در مدل ۲ بعدی ۸۳
- شکل (۳-۱۰): مقایسه تابع دقیق $G(\tau)$ با مقدار محاسبه شده با داده های نویزدار در مدل ۲ بعدی ۸۳
- شکل (۴-۱): (الف) هندسه مسئله (ب) شرایط مرزی مسئله ۸۷
- شکل (۴-۲): (الف) صفحه فیزیکی (ب) صفحه محاسباتی ۸۸
- شکل (۴-۳): نمایش صفحه محاسباتی ۹۲
- شکل (۴-۴): شرایط مرزی در صفحه محاسباتی در مدل سه لایه ۹۶
- شکل (۵-۱): شبکه مورد استفاده در حل مسئله ۱۰۴
- شکل (۵-۲): بررسی تأثیر اندازه شبکه در جوابهای به دست آمده ۱۰۵
- شکل (۵-۳): شبکه مورد استفاده در حل مسئله و موقعیت منبع حرارتی و سنسور ۱۰۶

- شکل (۵-۴): شبکه مورد استفاده در حل مسئله و موقعیت منبع حرارتی و سنسورها ۱۰۶
- شکل (۵-۵): مقایسه توان حرارتی محاسبه شده با توان حرارتی دقیق پله ای با استفاده از یک سنسور ۱۰۸
- شکل (۵-۶): مقایسه توان حرارتی محاسبه شده با توان حرارتی دقیق خطی با استفاده از یک سنسور ۱۰۹
- شکل (۵-۷): مقایسه توان حرارتی محاسبه شده با توان حرارتی دقیق سینوسی-کسینوسی با استفاده از یک سنسور ۱۱۰
- شکل (۵-۸): مقایسه توان حرارتی محاسبه شده با توان حرارتی دقیق پله ای با استفاده از دو سنسور ۱۱۱
- شکل (۵-۹): مقایسه توان حرارتی محاسبه شده با توان حرارتی دقیق خطی با استفاده از دو سنسور ۱۱۲
- شکل (۵-۱۰): مقایسه توان حرارتی محاسبه شده با توان حرارتی دقیق سینوسی-کسینوسی با استفاده از دو سنسور ۱۱۳
- شکل (۵-۱۱): مقایسه توان حرارتی محاسبه شده با استفاده از داده های نویز دار با توان حرارتی دقیق پله ای با استفاده از یک سنسور ۱۱۴
- شکل (۵-۱۲): مقایسه توان حرارتی محاسبه شده با استفاده از داده های نویز دار با توان حرارتی دقیق خطی با استفاده از یک سنسور ۱۱۵
- شکل (۵-۱۳): مقایسه توان حرارتی محاسبه شده با استفاده از داده های نویز دار با توان حرارتی دقیق سینوسی-کسینوسی با استفاده از یک سنسور ۱۱۶
- شکل (۵-۱۴): مقایسه توان حرارتی محاسبه شده با استفاده از داده های نویز دار با توان حرارتی دقیق پله ای با استفاده از دو سنسور ۱۱۷
- شکل (۵-۱۵): مقایسه توان حرارتی محاسبه شده با استفاده از داده های نویز دار با توان حرارتی دقیق خطی با استفاده از دو سنسور ۱۱۸
- شکل (۵-۱۶): مقایسه توان حرارتی محاسبه شده با استفاده از داده های نویز دار با توان حرارتی دقیق سینوسی-کسینوسی با استفاده از دو سنسور ۱۱۹
- شکل (۵-۱۷): نمایش کانتورهای توزیع دمای دقیق با استفاده از منبع حرارتی با تابع پله ای ۱۲۳
- شکل (۵-۱۸): نمایش کانتورهای توزیع دمای محاسبه شده با استفاده از یک سنسور با استفاده از منبع حرارتی با تابع پله ای ۱۲۴
- شکل (۵-۱۹): نمایش کانتورهای توزیع دمای محاسبه شده با استفاده از دو سنسور با استفاده از منبع حرارتی با تابع پله ای ۱۲۵
- شکل (۵-۲۰): نمایش کانتورهای توزیع دمای محاسبه شده با استفاده از یک سنسور با استفاده از منبع حرارتی با تابع پله ای در حضور داده های نویز دار ۱۲۶
- شکل (۵-۲۱): نمایش کانتورهای توزیع دمای محاسبه شده با استفاده از دو سنسور با استفاده از منبع حرارتی با تابع پله ای در حضور داده های نویز دار ۱۲۶

- شکل (۵-۲۲): نمایش کانتورهای توزیع دمای دقیق با استفاده از منبع حرارتی با تابع خطی ۱۲۷
- شکل (۵-۲۳): نمایش کانتورهای توزیع دمای محاسبه شده با استفاده از یک سنسور با استفاده از
منبع حرارتی با تابع خطی ۱۲۸
- شکل (۵-۲۴): نمایش کانتورهای توزیع دمای محاسبه شده با استفاده از دو سنسور با استفاده از منبع
حرارتی با تابع خطی ۱۲۸
- شکل (۵-۲۵): نمایش کانتورهای توزیع دمای محاسبه شده با استفاده از یک سنسور با استفاده از
منبع حرارتی با تابع خطی در حضور داده های نویز دار ۱۲۹
- شکل (۵-۲۶): نمایش کانتورهای توزیع دمای محاسبه شده با استفاده از دو سنسور با استفاده از منبع
حرارتی با تابع خطی در حضور داده های نویز دار ۱۲۹
- شکل (۵-۲۷): نمایش کانتورهای توزیع دمای دقیق با استفاده از منبع حرارتی با تابع سینوسی -
کسینوسی ۱۳۰
- شکل (۵-۲۸): نمایش کانتورهای توزیع دمای محاسبه شده با استفاده از یک سنسور با استفاده از منبع
حرارتی با تابع سینوسی - کسینوسی ۱۳۱
- شکل (۵-۲۹): نمایش کانتورهای توزیع دمای محاسبه شده با استفاده از دو سنسور با استفاده از منبع
حرارتی با تابع سینوسی - کسینوسی ۱۳۱
- شکل (۵-۳۰): نمایش کانتورهای توزیع دمای محاسبه شده با استفاده از یک سنسور با استفاده از
منبع حرارتی با تابع سینوسی - کسینوسی در حضور داده های نویز دار ۱۳۲
- شکل (۵-۳۱): نمایش کانتورهای توزیع دمای محاسبه شده با استفاده از دو سنسور با استفاده از منبع
حرارتی با تابع سینوسی - کسینوسی در حضور داده های نویز دار ۱۳۲
- شکل (۵-۳۲): نمودار همگرایی تابع هدف بر حسب تعداد تکرارها برای تابع پله ای در حالت تک
سنسور و داده های بدون نویز ۱۳۴
- شکل (۵-۳۳): نمودار همگرایی تابع هدف بر حسب تعداد تکرارها برای تابع پله ای در حالت تک
سنسور و داده های نویز دار ۱۳۵
- شکل (۵-۳۴): نمودار همگرایی تابع هدف بر حسب تعداد تکرارها برای تابع پله ای در حالت دو سنسور
و داده های بدون نویز ۱۳۵
- شکل (۵-۳۵): نمودار همگرایی تابع هدف بر حسب تعداد تکرارها برای تابع پله ای در حالت دو سنسور
و داده های نویز دار ۱۳۶
- شکل (۵-۳۶): توان حرارتی محاسبه شده در مدت زمان ۱۰ دقیقه ۱۳۷
- شکل (۵-۳۷): توان حرارتی محاسبه شده با استفاده از داده های نویز دار ۱۳۷
- شکل (۵-۳۸): مقایسه توزیع دمای محاسبه شده در نقطه (5,2) با توزیع دمای دقیق ۱۳۸

- شکل (۵-۳۹): مقایسه توزیع دمای محاسبه شده با استفاده از داده های نويز دار در نقطه (5,2) با
 ۱۳۸ توزیع دمای دقیق
- شکل (۵-۴۰): نمایش کانتورهای توزیع دمای محاسبه شده در مدت زمان ده دقیقه ۱۳۹
- شکل (۵-۴۱): نمایش کانتورهای توزیع دمای محاسبه شده در مدت زمان ده دقیقه در حضور داده
 های نويز دار ۱۳۹
- شکل (۵-۴۲): توان حرارتی محاسبه شده در مدت زمان ۳۰ دقیقه ۱۴۰
- شکل (۵-۴۳): توان حرارتی محاسبه شده با استفاده از داده های نويز دار ۱۴۱
- شکل (۵-۴۴): مقایسه توزیع دمای محاسبه شده در نقطه (5,2) با توزیع دمای دقیق در این نقطه ۱۴۱
- شکل (۵-۴۵): مقایسه توزیع دمای محاسبه شده با استفاده از داده های نويز دار در نقطه (5,2) با
 ۱۴۲ توزیع دمای دقیق
- شکل (۵-۴۶): نمایش کانتورهای توزیع دمای محاسبه شده در مدت زمان ۳۰ دقیقه ۱۴۳
- شکل (۵-۴۷): نمایش کانتورهای توزیع دمای محاسبه شده در حضور داده های نويز دار ۱۴۳

فصل اول : مقدمه

سرطان یکی از دلایل اصلی مرگ و میر در جهان به شمار می‌رود. سالیانه افراد زیادی در اثر ابتلا به انواع سرطان‌ها جان خود را از دست می‌دهند. سرطان در واقع رشد و گسترش کنترل نشده سلول‌ها هست. سلول‌های سرطانی پس از تکثیر، با تشکیل یک توده بافتی که تومور نامیده می‌شود، به بافت‌های مجاور آسیب می‌رسانند. روش‌های مختلفی برای درمان سرطان وجود دارد که مرسوم‌ترین آن‌ها جراحی، شیمی‌درمانی و رادیوتراپی است. از آنجاکه این روش‌ها در همه موارد کارآمد نیستند و هر کدام عوارض خاص خود را دارند، امروزه روش‌های دیگری نیز برای مقابله با سرطان به کار گرفته می‌شوند. از جمله این روش‌ها می‌توان به گرما درمانی^۱، درمان فوتودینامیک^۲ و غیره اشاره کرد. گرما درمانی یا هایپرترمیا به عنوان درمانی برای بسیاری از بیماری‌ها، سالیان دراز مورد استفاده بشر بوده است. تا صدسال پیش، بشر نمی‌دانست علت درمان بیماری‌ها با بالا یا پایین بردن دمای بدن چیست. تجربه ثابت کرد که تغییر دمای بدن اثرات شگفت‌انگیزی به دنبال خواهد داشت [۱]. از صدسال گذشته تاکنون، با رشد علم و فناوری، بشر نه تنها به علت درمان بیماری‌ها با تغییر دما پی برده، بلکه این روش درمانی را کاملاً مکانیزه کرده است. به طوری که امروزه، گرما درمانی با روش‌های کاملاً پیشرفته انجام شده و یکی از کم‌ضررترین روش‌های درمان هست. نوع آسیب به بافت به دمای بافت و مدت زمان درمان بستگی دارد. تخمین دقیق پاسخ دمایی درون بافت زنده، یک موضوع مهم مورد نیاز

برای کامل کردن علم طراحی پارامترهایی برای ابزارهای درمانی جراحی هست. [۲]

هدف نهایی گرما درمانی^۳، بالا بردن دمای بافت سرطانی تا یک دمای استاندارد بین ۴۱-۵۶ درجه (دمای درمانی) توسط یک منبع حرارتی خارجی هست، به طوری که تخریب گرمایی بدون توزیع دما در سایر اعضای بدن اتفاق بیفتد [۲، ۳]. در جدول (۱-۱) محدوده دمایی و تأثیر آن بر یک بافت

¹ Thermal therapy

² Photodynamic

³ Hyperthermia

زنده آورده شده است. هایپرترمیا به شرایط درمانی اطلاق می شود که در آن دمای بافت تومور به طور کنترل شده از دمای طبیعی بدن 37°C ، برای مدت زمان مشخصی به دماهای بیشتر از 42°C افزایش یابد. در این شرایط بافت تومور با توجه به دما، مدت زمان اعمال گرما و سایر شرایط بافت نابود می شود [۱].

جدول (۱-۱) : اثر افزایش دما و تأثیر آن بر بافت [۱]

تأثیر بر بافت	محدوده دمایی $^{\circ}\text{C}$
هایپرترمیا	۴۲-۴۶
آسیب سلولی غیرقابل برگشت در ۴۵ دقیقه	۴۶-۴۸
مرگ انعقادی ^۱ در ۴-۶ دقیقه	۵۰-۵۲
مرگ آنی انعقادی	۶۰-۱۰۰
تبخیر بافت	بیشتر از ۱۱۰

مطالعات متعدد نشان می دهد که در اثر افزایش دما در بافت، پروتئین های موجود در سلول ها منعقد شده و به این ترتیب باعث مرگ سلول می شود. البته اعمال دماهای بالا در تومورهایی که در عمق بدن وجود دارند کار پیچیده ای به شمار می آید. بیشترین تأثیرات هایپرترمیا در درمان تومورها ناشی از افزایش جریان خون در سیستم عروقی تومور و افزایش اکسیژن سلول، افزایش PH سلول، تخریب غشای سلول و در نتیجه مرگ سلول است [۴]. از طرف دیگر، افزایش دما با تأثیری که روی پروتئین ها دارد باعث جلوگیری از روند ترمیم آسیب های DNA می شود و در نتیجه افزایش مرگ سلولی را به دنبال دارد [۵]. بعلاوه افزایش دما باعث افزایش میزان جذب و تأثیر داروهای شیمی درمانی می شود [۶]. پژوهش های متعددی اثرات هایپرترمیا در درمان سرطان ها را بررسی کرده اند. مثلاً اگر درصد موفقیت دو روش پرتودرمانی و هایپرترمیا را مقایسه کنیم، درصد موفقیت درمان با روش پرتودرمانی

¹ Coagulation necrosis

۴۲٪ و در روش ترکیب پرتودرمانی و هایپرترمیا ۶۶٪ گزارش شده است [۷]. همچنین در درمان تومورهای سر میزان موفقیت درمان به روش پرتودرمانی ۴۱٪ و در روش ترکیب پرتودرمانی و هایپرترمیا ۸۳٪ گزارش شده است [۸].

مدل سازی رفتار گرمایی بافت در هایپرترمیا به کمک انتقال گرمای زیستی^۱ انجام می شود. این شاخه از انتقال گرما به مدل سازی پدیده های انتقال گرما در بافت های زنده می پردازد و کاربرد وسیعی در مطالعات درمانی از قبیل درمان سرطان و سوختگی دارد [۹].

مسائل انتقال گرما به دودسته مستقیم^۲ و معکوس^۳ تقسیم بندی می شوند. در مسائل مستقیم هندسه ناحیه موردنظر، شرایط اولیه، شرایط مرزی، خواص ترموفیزیکی، محل و قدرت منبع گرمایی معلوم هست و هدف از حل مستقیم، یافتن توزیع دما و یا شار گرمایی است. در مسائل معکوس، دما و یا شار گرمایی در ناحیه موردنظر و یا در بخشی از آن معلوم است و حل معکوس به تخمین مقادیر مجهول مانند شرایط مرزی، توان منبع حرارتی، خواص ماده و غیره می پردازد.

مسائل معکوس به علت ناپایداری جواب ها، در گروه مسائل بدرفتار^۴ قرار می گیرند که این امر ناشی از حساسیت جواب ها به وجود خطاهای اندازه گیری^۵ در آزمایش ها است. با توجه به کاربردهای مختلف مسائل معکوس، آن ها را می توان به دودسته کلی مسائل تخمین متغیر و تخمین تابع دسته بندی نمود. هدف از مسائل تخمین متغیر، تخمین متغیرهایی از قبیل خواص ترموفیزیکی هست. در حالی که هدف از مسائل دسته دوم، تخمین توابع مجهول از قبیل عبارت منبع گرمایی و یا شار گرمایی سطحی موجود در مرز هست. در تقسیم بندی دیگری می توان مسائل معکوس را بسته به ماهیت پدیده انتقال گرما به مسائل معکوس هدایت، جابجایی، تشعشع و تغییر فاز دسته بندی نمود. انتقال گرمای زیستی یکی از مسائلی است که می تواند در دسته مسائل معکوس هدایت قرار گیرد. این معادلات کاربرد

¹ Bioheat transfer

² Direct

³ Inverse

⁴ Ill-posed

⁵ Measurement error

زیادی در حل مسائل زیستی همچون درمان تومورهای سرطانی دارد. یک مدل سازی ریاضی دقیق برای مطالعه فرآیند انتقال گرما درون بافت مورد نیاز است. به علت پیچیدگی هندسه رگ و تأثیر زیاد آن بر روی انتقال گرما در بافت ، مدل سازی انتقال گرما در بافت زنده فرایند پیچیده ای به شمار می رود [۱۰]. طی سال ها محققان متعددی رفتار گرمایی بافت را مدل سازی کرده اند و در نتیجه مدل های مختلفی بر اساس دو دیدگاه اصلی عنوان شده اند. در حالت اول جریان خون به همراه بافت به صورت یک واحد پیوسته قرار می گیرد که به آن مدل پیوسته گفته می شود. حالت بعدی به این صورت است که بافت را به طور جداگانه از رگ در نظر می گیرد که به آن مدل رگ دار می گویند. [۱۱]، [۱۲]. در مدل پیوسته، رگ های خونی به صورت جداگانه در نظر گرفته نمی شوند و معادله هدایت گرمایی در بافت با اضافه کردن یک عبارت اصلاح می شود. با وجود اینکه مدل پیوسته در تعیین توزیع دما در همسایگی شاخص گرمایی (رگ با قطر بیشتر از 0.2mm [۱۳]) محدودیت هایی ایجاد می کند، اما به علت سادگی روش، نسبت به مدل های رگ دار بیشتر مورد استفاده قرار می گیرد. تاکنون مدل های متعددی برای مدل سازی انتقال گرما در بافت زنده ارائه شده است که از جمله این مدل ها شامل مدل های پیوسته از جمله: مدل پنس [۱۴]، مدل والف [۱۵]، مدل کلینگر [۱۶]، مدل چن و هولمز [۱۷]، مدل وینبام و جی جی [۱۸] و مدل های گسسته از جمله مدل وینبام، جی جی و لمونز [۱۹]، مدل روتزل و ژان [۲۰، ۲۱] و مدل ناکایاما و کوهارا [۲۲] می باشند. برخلاف مدل پنس که فقط نیازمند آهنگ انتشار خون است، سایر مدل های ارائه شده نیازمند اطلاعاتی شامل ساختار بافت و رگ از جمله اندازه، هندسه رگ ها و غیره می باشند. همچنین استفاده از این مدل ها به دلیل پیچیدگی، با محدودیت هایی روبرو است. لذا این عوامل باعث شده است که مدل پنس پرکاربردترین مدل ریاضی برای بیان انتقال گرمای زیستی درون بافت به حساب بیاید. در این پژوهش نیز از این مدل در تعیین توزیع دما درون بافت سینه استفاده خواهد شد.

در اینجا ، مطالب کوتاهی در مورد مدل سازی مسائل هدایت حرارتی ارائه می شود. امروزه روش های عددی برای مدل سازی پدیده های فیزیکی به کار می رود. برای اینکه بتوان یک پدیده فیزیکی را

مدل‌سازی کرد به یک مدل ریاضی و یک روش حل نیاز هست. حل معادلات حاکم یکی از راه‌های مدل‌سازی مسائل هدایت حرارتی است. در مسائل مستقیم حرارتی به اطلاعات زیر برای حل مسئله نیاز است:

➤ هندسه ناحیه حل

➤ شرایط اولیه

➤ شرایط مرزی (دما یا شار حرارتی سطحی)

➤ خواص ترموفیزیکی

➤ محل و قدرت منبع حرارتی در صورتی که وجود داشته باشند.

با حل معادلات حاکم، می‌توان توزیع دما در داخل ناحیه حل را به دست آورد. روش‌هایی که برای حل مسائل مستقیم وجود دارند طی سالیان پیش توسعه پیدا کرده‌اند. این روش‌ها همچنین شامل حل مسائلی با هندسه پیچیده و مسائل غیرخطی می‌باشند. همچنین پایداری و یکتایی این روش‌های حل نیز مورد بررسی قرار گرفته‌اند. روش‌های اولیه عمدتاً بر مبنای حل‌های تحلیلی بوده‌اند. این روش‌ها برای مسائل خطی و با هندسه‌های ساده قابل استفاده هستند. اما روش‌های عددی این محدودیت را نداشته و برای کاربردهای مهندسی بیشتر استفاده می‌شوند.

علاوه بر این‌ها مسائل معکوس حرارتی بخش دیگری از این مسائل هستند که اخیراً به آن‌ها توجه بسیاری شده است. در مسائل معکوس یک یا تعدادی از اطلاعات مورد نیاز برای حل مستقیم، موجود نمی‌باشند و هدف از حل این مسائل این است که از طریق اندازه‌گیری دما در یک یا چند نقطه از ناحیه مورد نظر، مقادیر مجهول تخمین زده شوند.

به این ترتیب می‌توان گفت که در مسائل مستقیم حرارتی، علت مسئله (شار حرارتی، هندسه و...) مشخص و معلوم است، و هدف یافتن معلول (میدان دما) هست. اما در مسائل معکوس حرارتی، معلول (دما در بخش‌ها و یا تمام میدان)، معلوم هست، و هدف یافتن علت (منبع حرارتی، شار حرارتی، هندسه و...) است.

در مسائل انتقال حرارت معکوس که ¹IHTP نیز نامیده می‌شوند، کمیت‌های مجهول بر اساس اندازه‌گیری‌های دما و یا شار حرارتی تخمین زده می‌شوند. مثلاً، در مسائل انتقال حرارت، شار حرارتی مرزی با استفاده از اندازه‌گیری دما در جسم به دست می‌آید که در مقایسه با مسائل انتقال حرارت به روش مستقیم، شار حرارتی کمیتی معلوم است که با داشتن آن می‌توان میدان دمای جسم را محاسبه کرد. هماهنگی بین تحقیقات آزمایشگاهی و تئوری مهم‌ترین ویژگی استفاده از روش‌های حل معکوس به شمار می‌آید. به‌عنوان نمونه با استفاده از سنسور دما می‌توان دمای جسم را به‌طور آزمایشگاهی اندازه‌گیری نمود. دمای اندازه‌گیری شده به‌عنوان داده‌های معادلات تئوری برای محاسبه شار حرارتی به حساب می‌آیند. بنابراین جواب‌های حاصل هماهنگی بسیار خوبی با جواب‌های واقعی خواهند داشت. با این حال برای حل به روش معکوس همیشه مشکلاتی از جمله ناپایداری جواب‌ها نیز وجود دارند که نیاز به تشخیص دارند. به این علت مسائل IHTP در گروه مسائل بدخیم قرار می‌گیرند. درواقع، به علت وجود خطاهای اندازه‌گیری در آزمایش‌ها، احتمال اختلاف در جواب‌ها وجود دارد. برای رفع حل این مشکلات راه‌هایی وجود دارد به‌طوری‌که حساسیت جواب‌ها به خطای موجود در داده‌های ورودی را به حداقل برساند.

این در حالی است که مسائل انتقال حرارت مستقیم، خوش‌خیم می‌باشند. عنوان خوش‌خیم برای مسائل مستقیم اولین بار توسط هادامرد به‌کاربرده شد. مسائلی که دارای سه شرط زیر باشند در گروه مسائل خوش‌خیم قرار می‌گیرند:

- دارای جواب بودن (شرط قابلیت حل‌پذیری)
- منحصربه‌فرد بودن جواب آن‌ها (شرط جواب واحد)
- پایداری جواب‌ها نسبت به تغییرات کوچک داده‌های ورودی (شرط پایداری).

می‌توان گفت به علت اینکه مسائل معکوس نسبت به خطاهای تصادفی در اندازه‌گیری داده‌های ورودی حساسیت بسیار زیادی دارند، به جواب حاصل از آن نمی‌شود اطمینان کرد. به این معنی که

¹ Inverse heat transfer problems

این جواب به جز برای چند حالت خاص نمی‌تواند منحصر به فرد باشد. مثلاً اگر در اندازه‌گیری دما خطا وجود داشته باشد، شار حرارتی تخمین زده شده توسط آنالیز معکوس با مقدار حقیقی آن تفاوت زیادی خواهد داشت. برای رفع چنین مشکلی روش‌های مخصوصی جهت برآورده شدن شرایط پایداری به وجود آمده‌اند.

۱-۲ تاریخچه مسائل معکوس حرارتی

مدت‌های زیادی تصور بر این بود که در صورت نقض هر یک از شرایط مورد نیاز مسائل خوش‌خیم، ممکن بود مسئله قابل حل نباشد و یا نتایج به دست آمده مورد تأیید و اطمینان نیست. لذا این مسائل اهمیتی در عمل نداشتند و در نهایت دانشمندان تمایلی برای حل مسائل معکوس نداشتند. بعد از مدت‌ها روش‌هایی مانند روش تنظیم تیخونف^۱، تکنیک‌های تنظیم تکراری آلیفانف^۲ و روش تخمین تابع بک^۳ علاقه به حل مسائل انتقال حرارت معکوس را گسترش دادند. با پیشرفت کامپیوترها، تکنیک‌های جدید و کاربردی با سرعت بسیار زیاد، حل مسائل انتقال حرارت معکوس توسعه پیدا کرد. دهه ۱۹۵۰ را می‌توان شروعی برای انجام پژوهش‌ها بر روی موضوع انتقال حرارت معکوس به شمار آورد. شوماکوف^۴ [۲۳] پژوهشگر روسیه‌ای در این دوران مقاله‌ای در مورد مسائل انتقال حرارت معکوس چاپ نمود. یکی از مقالات اولیه در مورد این موضوع، توسط استولز^۵ [۲۴] به چاپ رسیده است. در این مقاله، نرخ انتقال حرارت را در فرآیند آب دهی اجسام با هندسه ساده و محدود محاسبه شده است. میر سپاسی [۲۵، ۲۶] این کار را با روشی مشابه برای اجسام نیمه بی‌نهایت از طریق عددی و گرافیکی انجام داده است. آغاز سفرهای فضائی از اواخر دهه ۱۹۵۰ انگیزه مهمی برای گسترش کاربردها و تحقیقات در زمینه IHCP شد. به عنوان مثال محاسبه نرخ انتقال حرارت در اثر

¹ Tikhonov's regularization procedure

² Alifanov's iterative regularization techniques

³ Beck's function estimation approach

⁴ Shumakov

⁵ Stolz

گرمایش آئروپینامیکی بر روی دماغه موشک‌ها و یا اجسامی که وارد جو زمین می‌شوند از قبیل نازل، شیپوره موشک‌ها و... ازجمله مباحث موردتوجه بود [۲۷، ۲۸]. بک^۱ [۲۹، ۳۰] طی مقالاتی در دهه ۱۹۶۰ مفاهیم و روش‌هایی را برای تخمین شار حرارتی از طریق اندازه‌گیری دما ارائه داد که در آن‌ها امکان استفاده از گام زمانی کوچک‌تری نسبت به روش استولز امکان‌پذیر بود.

روش‌های بهینه‌سازی یکی از روش‌های حل مسائل معکوس به شمار می‌رود. در منابع ذکرشده [۲۹، ۳۱] تاریخچه مسائل معکوس و مجموعه‌ای از روش‌های بهینه‌سازی آن‌ها آورده شده است. یکی از بهترین روش‌ها روش گرادیان مزدوج است که به‌طور گسترده‌ای در مسائل بهینه‌سازی مورد استفاده قرار گرفته است. برای محاسبه گرادیان تابع هدف در روش گرادیان مزدوج به روش‌های مختلفی انجام می‌شود.

پارک و چانگ^۲ [۳۲] دو روش مختلف برای محاسبه گرادیان شامل مشتق‌گیری مستقیم و استفاده از معادله الحاقی را باهم مقایسه نمودند. از مقایسه دو روش یادشده نتیجه گرفته شد باینکه روش مشتق‌گیری معمولی روشی آسان و دقیق است، اما زمان محاسبه بیشتری نیاز دارد. درحالی‌که محاسبه گرادیان با معادله الحاقی زمان محاسبه را کاهش می‌دهد، هرچند که به دست آوردن روابط موردنیاز، دارای پیچیدگی‌های ریاضی می‌باشد. جانی^۳ و دیگران [۳۳] مسئله انتقال حرارت هدایتی معکوس در حالت چندبعدی را با استفاده از روش گرادیان مزدوج و معادله الحاقی بررسی کرده‌اند. هوانگ^۴ [۳۴] مسئله تخمین شار حرارتی را برای یک جسم سه‌بعدی، در حالتی که شار به‌صورت پیوسته روی مرز تغییر می‌کند را بررسی کرد. زیانگ^۵ [۳۵] مقایسه‌ای بین روش‌های موجود IHCP انجام داد و همچنین اثر دینامیکی ترموکوپل را بر محاسبات انتقال حرارت معکوس مورد تحلیل قرارداد. شیدفر هم در مقالاتی به بررسی تکنیک‌های ریاضی حل IHCP پرداخت [۳۱، ۳۶]. کوثری

¹ Beck

³ Park and Chung

⁴ Jany

⁵ Huang

¹ Xiang

[۳۷-۳۹] و همکاران نیز با استفاده از روش گرادیان مزدوج و میزان متغیر به بررسی مسائل معکوس هدایت و تشعشع حرارتی پرداخته‌اند. عباس نژاد و همکاران [۴۰] با استفاده از روش گرادیان مزدوج، محل قرارگیری سنسور را بررسی کردند.

حل مسائل هدایت حرارتی معکوس به روش‌های مختلفی انجام می‌شود. بعضی از این روش‌های حل عبارت‌اند از: روش حل دقیق، روش معکوس انتگرال دوهامل، روش تبدیل لاپلاس، روش حجم کنترل، استفاده از معادله هلمهولتز، روش تفاضل محدود، تقریب اجزاء محدود، روش فیلترسازی دیجیتال، روش تنظیم تیخنوف، روش تنظیم تکرار الیفانف، روش گرادیان مزدوج [۳۳] و روش‌های دیگر.

جیانگ و همکاران [۴۱] شار حرارتی مرزی وابسته به زمان روی یک میله را با استفاده از روش گرادیان مزدوج با مسئله الحاقی به دست آوردند و از روش تنظیم تیخنوف مرتبه صفر برای پایدار کردن حل معکوس استفاده کردند. آن‌ها از روش تفاضل محدود برای حل مسئله موردنظر خود استفاده کردند. سانگوی و همکاران [۴۲] با استفاده از روش معکوس، توزیع دما و شار حرارتی را در فرایند سخت‌کاری به دست آوردند. آن‌ها از روش گرادیان مزدوج برای بهبود تخمین دما و شار حرارتی برای یک مسئله دوبعدی در مختصات استوانه‌ای استفاده کردند و با استفاده از روش اجزاء محدود، معادلات حاکم را حل کردند. چن و همکاران [۴۳] از روش معکوس برای تخمین شار حرارتی و دمای سطح خارجی لوله استفاده کردند. آن‌ها روش ماتریس معکوس و تقریب حداقل مربعات را برای تخمین شرایط مرزی مجهول جریان داخل لوله مورد استفاده قرار دادند. یانگ و همکاران [۴۴] به منظور تخمین شار حرارتی مجهول و توزیع دما، برای سیستمی مرکب از یک نوار کامپوزیتی چندلایه نیمه بی‌نهایت، الگوریتم معکوسی را بر مبنای روش گرادیان مزدوج مورد استفاده قرار دادند. فانگ [۴۵] از یک روش هیبریدی برای شناسایی هم‌زمان ضریب هدایت حرارتی و ظرفیت گرمایی سیال در یک مسئله انتقال حرارت معکوس استفاده کرد. روش او ترکیبی از الگوریتم ژنتیک و روش مارکارت-لونبرگ بود. چن و همکاران [۴۶] روش معکوسی را برای تخمین شار حرارتی و توزیع

دمای دیواره داخلی یک کوره، مورد استفاده قرار دادند. در الگوریتم مورد استفاده آن‌ها، از فیلتر کالمن استفاده شده بود. گیجدز و همکاران [۴۷] روش جدیدی را بر مبنای حل عددی یک مسئله معکوس به منظور تخمین رفتار حرارتی پلیمر مذاب در جریان از کانال‌های باریک، ارائه دادند. این روش مدل انتقال حرارت دقیق‌تری را به خصوص در جهت شعاعی، در کانال‌های استوانه‌ای، ارائه می‌داد.

۱-۳ تاریخچه هایپرترمیا

پیشرفت‌ها در زمینه درمان سرطان باعث شده که نرخ مرگ‌ومیر توسط آن‌ها کاهش پیدا کند، اما با این حال سرطان سینه یکی از دلایل مرگ‌ومیر در جهان به شمار می‌رود [۴۸]. سرطان سینه نرخ بالاترین علت مرگ‌ومیر در زنان در جهان را دارد [۴۹]. در این زمینه، درمان‌های اصلی که استفاده می‌شوند شامل رادیوتراپی، جراحی، شیمی‌درمانی و ... می‌باشند [۵۰-۵۲]. به علاوه این روش‌های درمانی، روش شناخته شده دیگری به نام هایپرترمیا نیز وجود دارد. درمان توسط هایپرترمیا شامل بالا بردن دمای بافتی که تحت تأثیر سلول‌های سرطانی قرار گرفته است می‌باشد، یکی از اهداف این روش درمانی این است که بافت سالم حداقل افزایش دما را داشته باشد. در هایپرترمیای غیرتهاجمی الکترومغناطیسی، تمرکز بر روی میدان مغناطیسی متأثر روی بافت تومور اهمیت بسیاری دارد، به طوری که بافت ناحیه اطراف تومور سالم باقی بماند [۵۳، ۵۴]. در درمان سرطان به روش هایپرترمیا، دمای بافت تا ۴۵ درجه بالا می‌رود. بنابراین، برای به دست آوردن نتیجه مؤثرتر درمانی و جلوگیری از افزایش دما در نقاط دیگر بافت، شناخت توزیع دما در بافت اهمیت بسیاری دارد. در موارد درمان سرطان سینه به روش هایپرترمیا، روش‌های ترکیبی مؤثر واقع شده‌اند و در برنامه درمانی، اکسیژن‌رسانی تومور در حالت به کارگیری هایپرترمیا بیشتر مشاهده شده است [۵۵]. در مطالعاتی نیز مشاهده شده که درمان ترکیبی هایپرترمیا و رادیوتراپی تا ۵۰ درصد تأثیر درمان را افزایش داده است

[۵۶]. باهدف بهبود درمان سرطان، درمان‌های ترکیبی جدید با روش‌های موجود انجام شدند که به‌عنوان مثال پاسخ ۳۹٫۸ درصدی درمان توسط رادیوتراپی را نشان می‌دهد، به‌طوری‌که در حالت ترکیب رادیوتراپی و هایپرترمیا این عدد به ۵۴٫۹ درصد افزایش می‌یابد [۵۳]. در حالت‌های دیگر نیز ترکیب شیمی‌درمانی و هایپرترمیا نیز همین افزایش تأثیر روش درمان را داریم که از عدد ۶۱ درصد به ۷۶ درصد افزایش پیدا کرده است [۵۷]. در تحقیقی دیگر تأثیر این دو روش مقایسه می‌شوند که نشان داده از میزان ۱۸٫۸ درصد به ۴۱٫۲ درصد رسیده که افزایش قابل‌توجهی دارد [۵۸].

هایپرترمیا فرآیندی است که در آن یک منبع گرمایی موضعی بدون آسیب رساندن به ناحیه بافت سالم سلول‌های سرطانی را از بین می‌برد. اثربخشی روش هایپرترمیا با رسیدن به دمای موردنیاز در سلول‌های آسیب‌دیده در حین فرآیند درمانی رابطه دارد. یک مدل ریاضی انتقال حرارت در بافت چندلایه در فضای محدود برای پیش‌بینی پروفیل کنترل دما در شرایط هایپرترمیا پیشنهاد می‌شود. هایپرترمیا تکنیکی برای درمان تومورهای خوش‌خیم و بدخیم توسط ایجاد حرارت به روش‌های مختلف در حیطه آنکولوژی می‌باشد. دمای تومور با استفاده از یک منبع حرارتی خارجی مانند رادیو فرکانسی، ماکروویو، اشعه مادون‌قرمز، ریزدانه‌های تحریک‌شده‌ی مغناطیسی، لوله‌های حاوی آب داغ [۵۹]، اشعه لیزر یا بدون لایه‌ها و میکروویو مادون‌قرمز [۶۰] بالا می‌رود. با توجه به سطح دمایی

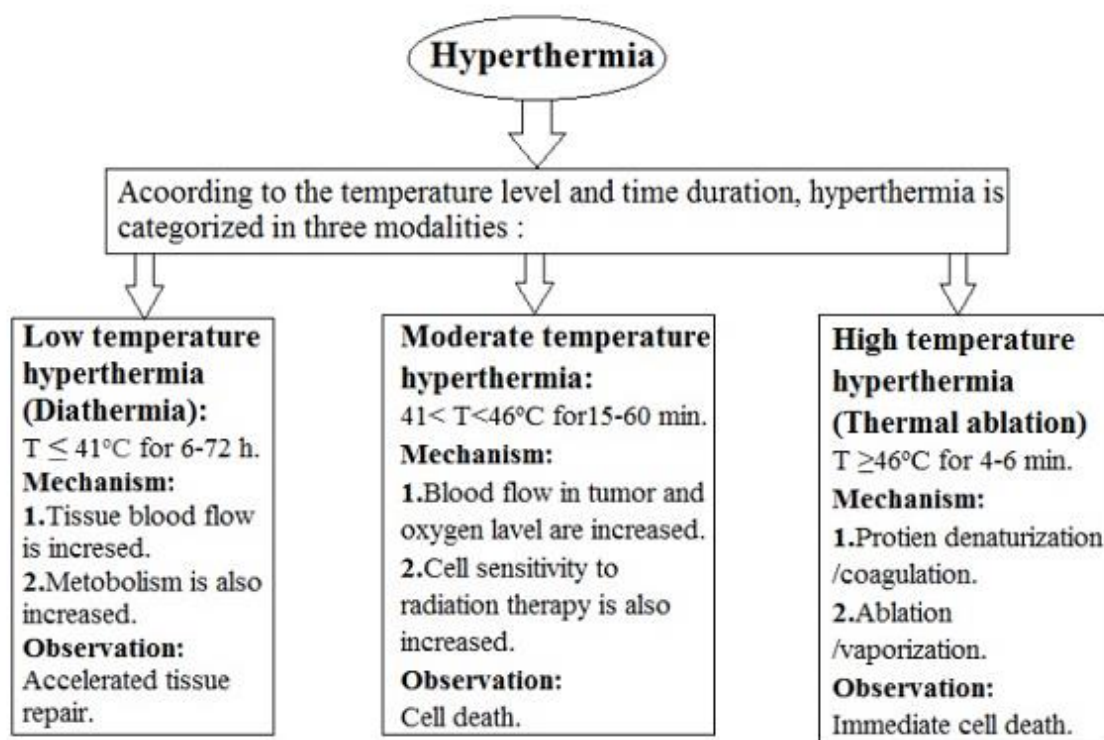
و مدت‌زمان، هایپرترمیا در سه سطح مختلف تقسیم‌بندی می‌شود. (شکل ۱-۱)

(۱) هایپرترمیای طولانی‌مدت با دمای پایین ($T < 41$ به مدت ۶-۷۲ ساعت)

(۲) هایپرترمیای دمای متوسط ($41 < T < 46$ به مدت ۱۵-۶۰ دقیقه)

(۳) هایپرترمیای دمای بالا یا ابلیشن حرارتی ($T > 46$ به مدت ۴-۶ دقیقه)

انواع مختلف هایپرترمیا درمانی به‌شدت گرمای منبع حرارتی بستگی دارد. بعلاوه، با توجه به موقعیت سلول‌های سرطانی، هایپرترمیا می‌تواند به سه روش مختلف استفاده شود که شامل هایپرترمیای موضعی، هایپرترمیای منطقه‌ای و هایپرترمیای کل بدن (WBH) در کاربردهای تراپی برای درمان سلول‌های سرطانی می‌باشد. [۶۱، ۶۲].



شکل (۱-۱): انواع سطح‌بندی هایپرترمیا با توجه به مدت‌زمان و دمای اعمال‌شده [۶۲]

در هایپرترمیای موضعی، دمای خیلی بالا در یک ناحیه‌ی کوچک (جایی که سلول‌های سرطانی در آنجا وجود دارند) برای تخریب مؤثر سلول‌های سرطانی اعمال می‌شود. هایپرترمیای منطقه‌ای روی یک ناحیه بزرگ (سلول‌های سرطانی در کل یک بافت یا ارگان وجود دارند) برای کمک به درمان‌های دیگر سرطان مانند شیمی‌درمانی و رادیوتراپی اعمال می‌شود. روش هایپرترمیای کل بدن برای درمان سرطان در حالت متاستاز استفاده می‌شود که در این حالت سلول‌های سرطانی در کل بدن منتشر شده‌اند.

انتقال حرارت در بافت چندلایه فرآیند خیلی پیچیده‌ای است [۶۳] که شامل مکانیسم‌های چندگانه‌ای مانند هدایت در بافت، همرفتی در خون، انتشار خون و انتشار در سلول‌های رگی سائز میکرو می‌شود. مطالعه انتقال حرارت و آسیب حرارتی در بافت چندلایه بسیار مهم است و در درمان‌های به روش هایپرترمیا می‌تواند مفید باشد. تاکنون برای مدل‌سازی انتقال گرمای زیستی مدل‌های مختلفی توسط دانشمندان مختلف ارائه‌شده‌اند که در ذیل به چند مدل از پرکاربردترین آن‌ها پرداخته می‌شود.

۱-۴ مدل ریاضی انتقال حرارت در بافت و رگ

طبیعت پیچیده انتقال حرارت در بافت زنده مانعی بر سر راه مدل سازی ریاضی دقیق آن به وجود می آورد. فرضیه ها و ساده سازی ها باید انجام شود تا مسئله را قابل حل کند، درحالی که ویژگی های اساسی فرآیند در نظر گرفته شوند. تاکنون مدل های مختلفی در مدل سازی انتقال گرما در بافت زنده ارائه شده است. در ادامه یک مرور مختصر از معادلات حرارت مختلف برای تخمین توزیع دما در بافت زنده آورده شده است. ما با معادله حرارت Pennes شروع خواهیم کرد که در سال ۱۹۴۸ منتشر شده است [۱۴]. چیزی که در مورد این معادله جذاب و قابل توجه است سادگی و کاربرد آن تحت شرایط خاص است. با این وجود، برای بیان کاستی های آن، محققان متعددی معادلات جایگزین را برای مدل انتقال حرارت در بافت زنده فرمول سازی کرده اند. در هر مورد هدف، تصحیح معادله پنس با در نظر گرفتن عوامل شناخته شده ای که نقش عمده ای را در فرآیند ایفا می کنند بود [۶۴].

اولین مدل ارائه شده بر اساس دیدگاه پیوسته، توسط پنس بر پایه یک سری آزمایش روی بافت بازو انجام شد. پنس در سال ۱۹۴۸ مدل انتقال حرارت را بر اساس قانون انتقال حرارت فوریه توسعه داد [۱۴].

$$q(r,t) = -k \nabla T(r,t) \quad (1-1)$$

که در اینجا $q(r,t)$ و $\nabla T(r,t)$ هر دو در یک زمان ثابت و موقعیت یکسان هستند. مدل انتقال حرارت زیستی پنس به علت پیچیدگی کمتری که دارد به طور گسترده ای برای انتقال حرارت در بافت های زنده بیولوژیکی استفاده می شود. به هر حال، پنس سرعت انتشار توزیع دما را بی نهایت فرض کرد. در واقع، گرما با سرعت محدود در ساختار داخلی ناهمگن بافت زنده منتشر می شود. رفتار انتقال حرارت در محیط ناهمگن به مقداری زمان تأخیر برای انباشته شدن انرژی کافی جهت انتقال حرارت به نزدیک ترین المان [۶۵] نیاز دارد که به طور تجربی توسط میترا و همکاران [۶۶] تأیید شده است.

پنس مدل استوانه‌ای برای بدن پیشنهاد داد و انتقال حرارت را در این نمونه در نظر گرفت. او پیشنهاد کرد که حرارت منتقل شده از رگ به بافت متناسب با اختلاف دمای خون ورودی و خروجی از بافت است. محدودیت‌های رابطه پنس این است که تمام گرمای ورودی توسط بافت جذب می‌شود.

۱-۴-۱ معادله انتقال حرارت زیستی پنس

این مدل پرکاربردترین مدل ریاضی انتقال گرما در بافت زنده به حساب می‌آید که در آن اثر گرمایی جریان خون به عنوان یک منبع گرمایی در نظر گرفته می‌شود. معادله انتقال حرارت زیستی پنس بر پایه‌ی ساده‌سازی فرضیات درباره چهار عامل اصلی زیر است:

۱- تعادل گرمایی^۱. انتقال حرارت بین خون و بافت در بسترهای کپیلاری و همچنین رگ‌ها انجام می‌شود. بنابراین انتقال حرارت بین خون و بافت قبل و بعد از ورود به بافت نادیده گرفته می‌شود.

۲- انتشار خون. فرض می‌شود جریان خون در مویرگ‌های کوچک ایزوتروپیک است. با این فرض تأثیر جهت جریان خون نادیده گرفته می‌شود.

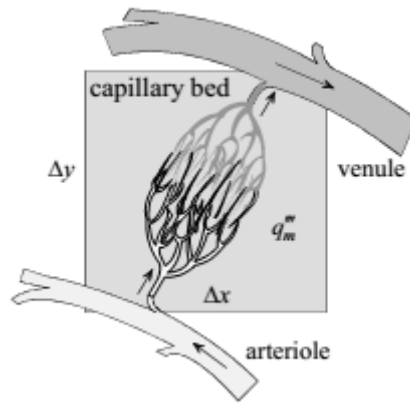
۳- آرایش رگ‌ها. رگ‌های خونی بزرگ‌تر در مجاورت بستر مویرگ‌های کپیلاری هیچ نقشی را در مبادله حرارت بین بافت و خون مویرگی ایفا نمی‌کند. بنابراین مدل پنس به هندسه رگ‌های اطراف توجهی ندارد.

۴- دمای خون. فرض می‌شود که خون با همان دمای هسته بدن T_{a_0} به مویرگ‌ها می‌رسد که به طور مداوم با بافت‌ها که در دمای T قرار دارند تبادل گرمایی می‌کنند.

بر اساس این فرضیات، معادله پنس اثر خون را به عنوان یک منبع حرارت ایزوتروپیک (یا چاه گرمایی) مدل کرده است که با نرخ جریان خون و تفاوت بین دمای هسته بدن T_{a_0} و دمای محلی بافت T متناسب است. در این مدل، خونی که مسیر خود را آغاز می‌کند، تا زمانی که به مویرگ‌ها

¹ Equilibration site

و رگ‌های در درون بافت برسد در نظر گرفته می‌شود [۶۷] (المان بافتی که خون در آن وارد شده است را در شکل (۲-۱) در نظر بگیرید).



شکل (۲-۱): خون منتشرشده در بافت در یک المان از بافت [۶۷]

در شکل (۲-۱) به خون انتشاریافته در بافت توجه کنید. این شبکه بافت-عروق به‌عنوان زنجیره‌ای که دمای مجموع آن T است در نظر گرفته‌شده است. فرمول سازی های معادله انرژی با معادله ۲-۱ به‌صورت زیر داده‌شده است:

$$\dot{E}_{in} + \dot{E}_g - \dot{E}_{out} = \dot{E} \quad (2-1)$$

در اینجا اثر جابجایی حذف می‌شود و به‌جای آن ترم مربوط به تزریق وریدی خون اضافه‌شده است. ساده‌ترین راه برای محاسبه‌ی این اثر این است که به‌عنوان تولید انرژی $\dot{E}_g$ در نظر گرفته شود. با در نظر گرفتن پارامترهای زیر:

q_b''' : نرخ انرژی اضافه‌شده توسط خون در واحد حجم بافت

q_m''' : نرخ تولید انرژی متابولیک در واحد حجم بافت

بنابراین داریم:

$$\dot{E}_g = q''' dx dy dz = (q_b''' + q_m''') dx dy dz \quad (3-1)$$

با توجه به معادله پنس، خون به بافت با در نظر گرفتن دمای مرکز بدن T_{a0} وارد می‌شود، بلافاصله تعادل برقرار می‌شود و در دمای T باقی می‌ماند. بنابراین :

$$q_b''' = \rho_b c_b \dot{w}_b (T_{a0} - T) \quad (4-1)$$

که در آن

c_b : گرمای ویژه خون

$\dot{w}_b$: نرخ جریان خون تزریق وریدی بر واحد حجم بافت

ρ_b : چگالی خون

با جایگذاری معادله (3-1) در (4-1) داریم:

$$q''' = q_m''' + \rho_b c_b \dot{w}_b (T_{a0} - T) \quad (5-1)$$

حال برگردیم به معادله انرژی ، ترم جابجایی را حذف کرده ($U=V=W=0$) و با استفاده از معادله (5-1) معادله را به دست می‌آوریم:

$$\nabla \cdot K \nabla T + \rho_b c_b \dot{w}_b (T_{a0} - T) + q_m''' = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (6-1)$$

که در این معادله :

c : گرمای ویژه بافت ، K : هدایت حرارتی بافت ، ρ : چگالی بافت می‌باشند.

اولین ترم در معادله (6-1) هدایت را در سه جهت بیان می‌کند. که با توجه به سیستم مختصات موردنظر حالت‌های زیر را می‌گیرد:

مختصات کارتزین:

$$\nabla \cdot k \nabla T = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (6-1)a$$

مختصات استوانه‌ای:

$$\nabla.k\nabla T = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (6-1)b$$

مختصات کروی:

$$\nabla.k(\nabla T) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \quad (6-1)c$$

معادله (۶-۱) به عنوان معادله حرارت زیستی پنس معروف است. معادله پنس عنوان بسیاری از مطالعات و تحقیقات بوده است [۶۸-۷۷]. در ادامه خلاصه‌ای از انتقادات انجام شده توسط محققان متعددی ارائه شده است. توجهات بر روی چهار فرضیه در ساخت فرمولاسیون معادله پنس متمرکز شده است. اختلاف بین نتایج تئوری و آزمایشگاهی به دلیل همین فرض‌ها هستند.

۱. تعادل گرمایی. طبق فرضیه پنس تعادل حرارتی در مویرگ‌ها اتفاق نمی‌افتد. در عوض در

رگ‌های pre-artery و past-venal که قطرشان در محدوده ۷۰-۵۰۰ میکرومتر است اتفاق می‌افتد. این نتیجه‌گیری بر اساس تئوری طول تعادل گرمایی L_e انجام شده است که فاصله‌ای است که خون در طول یک رگ برای رسیدن به دمای تعادل با دمای بافت اطراف طی می‌کند. برای مویرگ‌های کپیلاری این فاصله خیلی کمتر از طول L است. رگ‌هایی که در آن‌ها $\frac{L_e}{L} > 1$ است معمولاً از نظر حرارتی بسیار بااهمیت در نظر گرفته می‌شوند.

۲. انتشار خون. به‌طور مستقیم جهت انتشار خون یک عامل مهم در مبادله انرژی بین رگ‌ها و بافت‌ها است. معادله پنس این اثر را در نظر نمی‌گیرد. انتشار خون مویرگی ایزوتروپیک نیست، اما حاصل فرآیند انتشار خون از شریان به سیاهرگچه‌ها می‌باشد.

۳. آرایش رگ‌ها. معادله پنس هندسه رگ‌های اطراف را در نظر نگرفته است. بنابراین جنبه‌های مهمی از سیستم گردش خون برای آن محاسبه نمی‌شود. این شامل مبادله انرژی با رگ‌های

بزرگ، انتقال حرارت مخالف بین جفت‌های سرخرگ-سیاهرگ و منشعب شدن و کاهش یافتن رگ می‌باشد.

۴. دمای خون. دمای خون از ابتدا تا مویرگ‌ها و رگ‌ها متفاوت است. برخلاف مدل پنس دمای خون در موقع رفت و برگشت T_{a0} نیست.

صرف‌نظر از ضعف‌های معادله پنس، موفقیت در بسیاری کاربردها مانند درمان هایپرترمیا، اندازه‌گیری انتشار خون، کرایوسرجری، و شبیه‌سازی دمایی کل بدن به‌دست‌آمده است. در بعضی موارد نتایج تحلیلی سازگاری معقولی با داده‌های تجربی دارند. مطالعات نشان داده که معادله پنس در مناطقی از بافت که قطر رگ‌ها بزرگ‌تر از ۵۰۰ میکرومتر هستند و برای آن‌هایی که طول تعادل به طول کلی L_e L/L بزرگ‌تر از $0/3$ باشد قابل‌اجرا و مناسب است [۷۲].

در ادامه به بیان چند نمونه از تحقیقاتی که در این حوزه با استفاده از مسائل انتقال گرما پرداخته‌اند می‌پردازیم.

امانوئی و همکارانش [۷۸] بر اساس معادله بیوحرارت پنس با در نظر گرفتن انتشار خون ثابت، یک مدل ساده‌شده یک‌بعدی انتقال حرارت بافت بیولوژیکی زنده کروی برای استفاده در مسائل انتقال حرارت را در نظر گرفتند. در این روش با استفاده از روش جداسازی متغیرها، حل تحلیلی ساده‌ای از مسئله ارائه‌شده است. حل دقیق به‌دست‌آمده برای تحقیقات اثرات جزئیات بافت، دمای متوسط سردکننده و توزیع دمای نقطه گرما در بافت زنده مورد استفاده قرار می‌گیرد. حل تحلیلی به‌دست‌آمده می‌تواند برای بررسی رفتار گرمایی بافت در سیستم بیولوژیکی، اندازه‌گیری پارامترهای گرمایی، بازسازی میدان دمایی و درمان بالینی مفید باشد. نتایج نشان می‌دهد که ضریب انتشار η و توان‌های حرارتی $P_0(t)$ و $P_1(t)$ از گرمای فضایی برای تحلیل بیشتر توزیع دمایی قابل‌چشم‌پوشی می‌باشند، درحالی‌که چگالی بافت، گرمای ویژه بافت، و دمای متوسط سردکننده در توزیع دما باید در نظر گرفته شوند. حل مسئله انتقال حرارت زیستی در این مقاله آورده شده که برای بسیاری از مسائل حرارت زیستی مفید می‌باشد.

باغبان و همکاران [۷۹] در یک تحقیق به یکی از چالش‌های مهم در استفاده از هایپرترمیا برای درمان سرطان یعنی تخمین منبع حرارتی خارجی پرداختند به‌طوری‌که جراحات گرما محدود به بافت ناسالم شود. در این مطالعه، یک روش معکوس بر پایه روش متوالی به‌عنوان تابع زمان برای درمان هایپرترمیا برای تخمین منبع حرارتی دلخواه پیشنهاد شده است. به‌منظور شبیه‌سازی دمای اندازه‌گیری شده، مسئله مستقیم برای یک بافت چندلایه برای به دست آوردن دما در سطح پوست حل‌شده است. این داده‌ها در روش معکوس برای تخمین منبع حرارتی خارجی استفاده شده‌اند.

جلالی و همکاران [۸۰] بر روی تخمین همزمان پارامترهای قابل‌کنترل در بافت زنده در حین گرما درمانی تحقیق کردند. در حین هایپرترمیا، کنترل توزیع دما در طول بافت می‌تواند باعث مزایای درمانی بالینی شود. این کار می‌تواند با به‌کارگیری صحیح پارامترهای مؤثر در هایپرترمیا مانند منبع حرارتی خارجی و ضریب انتقال حرارت در سطح پوست به دست آید. از روش گرادیان مزدوج با مسئله الحاقی برای به دست آوردن منبع حرارتی مستقل از زمان و ضریب انتقال حرارت هم‌زمان در بافت زنده استفاده شده است. معادله تک‌بعدی پنس برای مدل کردن انتقال حرارت در بافت به کار گرفته شده است.

لانگ لی و همکاران [۸۱] بر روی یک مسئله هدایت حرارتی معکوس هایپربولیک برای تخمین شار حرارتی سطح بافت زنده مطالعه کردند. در این مقاله یک الگوریتم معکوس بر پایه روش گرادیان مزدوج و اصل اختلاف برای حل مسئله انتقال حرارت هایپربولیک در تخمین شار حرارتی سطحی مستقل از زمان در یک بافت زنده از اندازه‌گیری دما درون بافت استفاده شده است.

دوتا و همکاران [۲] در تحقیقی به حل تحلیلی دقیق مسئله انتقال حرارت به روش معکوس برای مدل ریاضی انتقال حرارت زیستی پنس [۱۴] در بافت‌های زنده که تحت درمان‌های حرارتی قرار گرفته‌اند، پرداخته‌اند. مدل ریاضی پنس به علت سادگی آن به‌خوبی پذیرفته شد، اما این مدل بر اساس قانون فوریه کلاسیک انتقال حرارت هست که بیان می‌کند موج گرمایی در هر فضایی با یک سرعت نامحدود منتشر می‌شود. در حالت عملی با توجه به غیریکنواخت بودن و غیر همگن بودن

بافت‌ها، انتشار توزیع دما بین خون و بافت همیشه در یک سرعت محدود اتفاق می‌افتد. کاتانو [۸۲] و ورنوته [۸۳] هم‌زمان مدل C-V را با تعدیل فرضیه فوریه کلاسیک به صورت زیر توسعه دادند:

$$q(\vec{r}, t + \tau_q) = -k \nabla T(\vec{r}, t) \quad (7-1)$$

معادله بالا یک‌زمان تأخیر بین استفاده از بردار شار حرارتی و ایجاد گرادیان دما را نشان می‌دهد. این زمان تأخیر بین شار حرارتی و گرادیان دما به نام زمان استراحت گرمایی τ_q تعریف می‌شود که معمولاً بین 10^{-4} تا 10^{-8} ثانیه می‌باشد. به‌هرحال، وداورز و همکاران [۸۴] پیشنهاد دادند که فاز تأخیر در بعضی از بافت‌های بیولوژیکی در محدوده ۱-۱۰۰ ثانیه در دمای اتاق می‌باشد. کمینسکی [۶۵] با توجه به آزمایش‌های تجربی زمان استراحت را ۲۵-۳۰ ثانیه برای محصولات گوشتی پیشنهاد کرد. در یک دوره‌ی خیلی قبل‌تر، بر اساس معادله حرارت زیستی پنس، مدل‌های تحلیلی بافت‌های زنده با توجه به در نظر گرفتن اثر متقابل انرژی و ذخیره آن بین مویرگ‌ها و رگ‌های خونی ایجاد شد [۱۷، ۴۲، ۸۵، ۸۶]. در دهه ۱۹۹۰ چندین محقق روش تابع گرین را برای حل مسائل یک‌بعدی انتقال حرارت زیستی پنس به کار بردند [۸۷-۹۴].

شیه و همکاران [۹۵] در سال ۲۰۰۷ بر روی پاسخ گرمایی بافت‌های بیولوژیکی نیمه-نامحدود با شرایط مرزی نوسانی در حالت یک‌بعدی معادله انتقال حرارت زیستی پنس، با حذف تولید گرمای متابولیکی، تحقیق کردند. تانگ و همکاران [۹۶] در سال ۲۰۰۹ معادله انتقال حرارت هایپربولیکی یک‌بعدی در بافت پوست را در مقایسه با مدل‌های معمول فوریه‌ای پیشنهاد داد. لیو [۹۷] در سال ۲۰۰۸ بر روی رفتار گرمایی بافت زنده تحت شرایط مختلف حرارتی در حالت یک‌بعدی با استفاده از روش تبدیل لاپلاس مطالعه کرد. لیو و چن [۹۸] در سال ۲۰۰۹ یک مطالعه‌ی دقیق از مدل‌سازی ریاضی بافت پوست در هر دو مدل فوریه‌ای و غیر فوریه‌ای یک‌بعدی در ارتباط با واکنش حرارتی-بیولوژیکی همراه با تحریک حرارتی را ارائه دادند. کوتا و همکارانش [۹۹] در سال ۲۰۱۰ تکنیک تبدیل انتگرالی تعمیم‌یافته را برای حل معادله انتقال حرارت زیستی پنس یک‌بعدی با خواص

ترموفیزیکی خطی متغیر بافت و در نظر گرفتن پارامتر پرفیوژن خون در یک محیط ناهمگن را پیشنهاد دادند.

گوپتا و همکاران [۱۰۰] در سال ۲۰۱۰ بر روی انتقال حرارت در بافت‌های بیولوژیکی در حین گرمادرمانی توسط رادیوتراپی الکترومغناطیسی به صورت عددی مطالعه کردند. عسکری زاده و احمدی کیا [۱۰۱] در سال ۲۰۱۴ مدل یک‌بعدی انتقال حرارت تأخیر فاز دوگانه را به کمک روش تبدیل لاپلاس در بافت پوست حل کردند و یک مطالعه کامل در مورد تأثیرات مضر آسیب‌های حرارتی تهیه کردند. لیو و چن [۱۰۲] در سال ۲۰۱۵ تحلیل گرمایی تابش لیزر با توان بالا در بافت‌های زنده را در معادله انتقال حرارت تأخیر فاز دوگانه یک‌بعدی نشان دادند. محمدیون [۱۰۳] در سال ۲۰۱۶ شار گرمایی مرزی مجهول وابسته به زمان را با استفاده از روش معکوس در یک هندسه چندلایه تخمین زد. محمدیون و همکاران [۱۰۴, ۱۰۵] همچنین شار گرمایی را در سیستم دولایه و سه لایه با روش معکوس تخمین زدند. همان‌گونه که از بررسی تاریخچه کارهای تحقیقاتی انجام‌شده بر روی تخمین توان منبع حرارتی و شار حرارتی در بافت زنده به دست می‌آید، بیشتر کارهای انجام‌شده در فضای یک‌بعدی مدل شده‌اند و در حالت سه لایه و به صورت سه‌بعدی تحقیقی انجام‌نشده است. لذا با توجه به ضرورت تحقیق در این زمینه و مدل‌سازی سه‌بعدی و با در نظر گرفتن بافت سه لایه در این رساله این فرضیات صورت گرفته و خلأ تحقیقاتی در این موارد را پوشش خواهد داد.

۱-۴-۲ مدل انتقال گرمای زیستی والف

بعد از انتشار معادله پنس محققان متعددی بر روی آن تحلیل و اصلاحات انجام دادند. اولین پژوهشگری که معادله پنس را اصلاح کرد والف [۸۵] بود. در مقاله‌ای [۱۶] انتقادات والف بر مدل پنس بر اساس اینکه جریان خون درون بافت گرما را در تمام جهات منتقل می‌کند منتشر شده و معادله انتقال گرمای زیستی را به شکل زیر اصلاح شده است:

$$\rho_t c_t \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k_t \nabla T) - \rho_{bl} c_{bl} V_{bl} \nabla T + q_m + S \quad (8-1)$$

در این رابطه V_{bl} سرعت محلی خون داخل بافت است. مهم‌ترین مشکل استفاده از مدل والف تعیین مقدار دبی خون در هر نقطه از بافت است [۱۰۶].

۱-۴-۳ مدل انتقال گرمای زیستی کلینگر

محقق به نام کلینگر معادله پنس را به علت صرف‌نظر کردن از اثر جهت جریان خون موردنقد قرارداد. کلینگر به‌منظور اصلاح رابطه پنس پیشنهاد داد که انتقال گرمای جابجایی درون بافت بر اساس ساختمان رگ انجام شود. مدل انتقال گرمای زیستی کلینگر به‌صورت زیر بیان شد:

$$\rho_t c_t \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k_t \nabla T) - \rho_{bl} c_{bl} V_{bl} \nabla T + q_m + S \quad (9-1)$$

درواقع این معادله کاملاً شبیه معادله اصلاحی والف می‌باشد و تفاوت در این است که این معادله برای حالت کلی میدان سرعت V_{bl} غیریکنواخت نوشته‌شده است. [۱۰۷]

۱-۴-۴ مدل انتقال گرمای زیستی چن و هولمز

چن و هولمز [۱۷] معتقد بودند که رگ‌های بزرگ باید به‌طور جداگانه از رگ‌های کوچک و بافت مدل شوند [۱۰۸]. بر طبق نظریات آن‌ها معادله پنس به‌صورت زیر اصلاح شد:

$$\rho_t c_t \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k_t + k_p) \nabla T - \rho_{bl} c_{bl} \omega (T - T_{bl}) - \rho_{bl} c_{bl} \bar{V}_{bl} \cdot \nabla T + q_m + S \quad (10-1)$$

در این معادله نسبت به معادله پنس دو جمله اضافه شده است. جمله $-\rho_{bl}c_{bl}\bar{V}_{bl}\cdot\nabla T$ بیان کننده انتقال گرمای جابجایی بین رگ و بافت است. جهت جریان خون با استفاده از بردار V_{bl} اعمال می شود. عبارت $-\rho_{bl}c_{bl}\omega(T-T_{bl})$ نشان دهنده اثرات مویرگ ها درون بافت هست. ضریب هدایت کلی به اندازه k_p به علت پرفیوژن خون افزایش می یابد. استفاده از این رابطه آسان نیست و نیازمند اطلاعات زیادی از آناتومی عروق و الگوی جریان خون است.

۱-۴-۵ مدل انتقال گرمای زیستی وینبام و جی جی

وینبام و جی جی [۸۶] مدلی را به عنوان جایگزین مدل پنس ارائه دادند. در این مدل سازوکار اصلی انتقال گرما بین جریان خون و بافت به صورت تبادل گرما بین جریان های ناهم سو در سرخرگ و سیاهرگ است. این مدل نیازمند اطلاعات بسیاری شامل اندازه، سرعت جریان خون و جهت رگ ها می باشد و در عمل فقط برای بافت سالم معتبر است زیرا بافتی که تومور دارد ساختارش متفاوت است و نیاز به مدل جدید برای آن می باشد [۱۰، ۱۰۹]. بنابراین مدل پیشنهادی قابل استفاده برای کاربردهایی مانند هایپرترمیا نیست.

۱-۵ دسته بندی مسائل معکوس حرارتی

در دسته بندی کلی مسائل معکوس حرارتی به دودسته زیر تقسیم می شود:

✓ مسائل تخمین پارامتر

✓ مسائل تخمین تابع

در مسائل نوع اول یعنی تخمین پارامتر به دنبال تخمین پارامتر و یا ثابت ها هستیم. اما در مسائل نوع دوم یعنی تخمین تابع به دنبال تخمین تابعی مانند شار حرارتی سطحی در سطح مشترک هستیم که با زمان و یا مکان تغییر می کند.

علاوه بر این مسائل معکوس حرارتی را می‌توان با در نظر گرفتن ماهیت مسئله به حالت‌های زیر

تقسیم‌بندی می‌شوند:

✓ مسائل معکوس هدایت حرارتی

✓ مسائل معکوس جابجایی (آزاد یا اجباری)

✓ مسائل معکوس تشعشع سطحی

✓ مسائل معکوس تشعشع در محیط‌های مؤثر در تشعشع

✓ مسائل معکوس هدایت و تشعشع هم‌زمان

✓ مسائل معکوس جابجایی و هدایت هم‌زمان

✓ مسائل معکوس تغییر فاز (ذوب یا انجماد)

در یک طبقه‌بندی دیگر مسائل معکوس هدایتی تخمینی به حالت‌های ذیل معرفی می‌شوند:

✓ مسائل تخمین پارامتر

✓ مسائل تخمین شرط مرزی

✓ مسائل تخمین شرایط اولیه

✓ مسائل تخمین هندسه ناحیه حل

هدف از حل مسئله‌ی تخمین پارامتر تخمین یک یا چند پارامتر می‌باشد که این مسائل معمولاً

غیرخطی هستند. پارامترهایی که در این نوع مسائل تخمین زده می‌شوند خواص فیزیکی یک جسم

مانند ضریب هدایت حرارتی، چگالی، ظرفیت گرمایی ویژه، ضریب نفوذ حرارتی و... می‌باشند.

یکی از پرکاربردترین مسئله‌ها در مسائل معکوس هدایت حرارتی، انواع تخمین شرط مرزی هستند. در

این نوع مسائل با اندازه‌گیری دما در داخل جسم شار حرارتی سطحی تخمین زده می‌شود. یافتن

شرط مرزی دما نیز هدف بعضی انواع این مسائل می‌باشد.

مسائل تخمین شرایط اولیه کمتر از دیگر مسائل موردبررسی قرار گرفته‌اند، زیرا نسبت به دیگر مسائل

معکوس کاربرد کمتری دارند.

مسائل تخمین هندسه نیز هنگامی که هندسه ناحیه حل کاملاً مشخص نیست و یا به دنبال هندسه بهینه برای یک مسئله خاص باشیم، مطرح می‌شوند.

۱-۶ حل مسائل معکوس حرارتی

همان‌طور که در بخش مقدمه اشاره کردیم مسائل معکوس از دیدگاه ریاضی جزو دسته مسائل ناهنجار هستند. بنابراین برای حل این‌گونه مسائل می‌بایست روش‌های خاصی به کار گرفته شود. وجود جواب برای مسائل معکوس حرارتی را می‌توان با استدلال فیزیکی مسئله بررسی کرد. اما یکتایی جواب تنها برای تعدادی از مسائل به صورت ریاضی اثبات شده است. همچنین مسائل معکوس نسبت به خطاهای اندازه‌گیری و اغتشاشات در ورودی‌ها و داده‌های مسئله بسیار حساس هستند و به همین دلیل بایستی روش‌های خاصی را برای یافتن جواب این‌گونه مسائل به کاربرد. برای حل این مشکل تیخونوف و آرسنین^۱ [۱۱۰] روش منظم سازی را ارائه دادند که در آن به منظور کاهش اثر خطاهای ناشی از اندازه‌گیری دما، جمله‌هایی به معادله تخمین افزوده می‌شود. الیفانوف نیز روش منظم سازی تکراری را ارائه داد که در آن بهبود جواب مسئله در یک‌روند تکراری و متوالی انجام می‌گیرد. در این روش معیار توقف روند تکرار بر اساس پایداری جواب نسبت به خطای موجود در داده‌های ورودی تعیین می‌شود.

۱-۷ طبقه‌بندی روش‌ها

حل مسائل هدایت حرارتی معکوس به روش‌های مختلفی طبقه‌بندی می‌شوند. یکی از آن‌ها توانایی روش برای حل کلیه مسائل شامل مسائل غیرخطی و خطی است. مثلاً روش تخمین تابع و منظم سازی را می‌توان برای مسائل غیرخطی نیز به کاربرد، درحالی‌که روش‌هایی مانند تبدیل لاپلاس منحصرأً برای مسائل خطی به کار می‌روند.

¹ Tikhonov and Arsenin

روش دیگر طبقه‌بندی بر اساس روش به دست آوردن جواب معادله هدایت حرارتی است، مانند روش دوهامل، تفاضل محدود، اجزای محدود و حجم محدود و... روش دوهامل تنها برای مسائل خطی کاربرد دارد درحالی‌که دیگر روش‌های ذکرشده در مسائل غیرخطی نیز می‌توانند استفاده شوند. دامنه زمانی در مسائل انتقال حرارت هدایت معکوس را می‌توان به‌عنوان معیاری برای طبقه‌بندی در نظر گرفت. در این تقسیم‌بندی روش‌های IHCP به دو گروه تقسیم می‌شوند.

۱. روش‌های متوالی

۲. روش‌های تمام دامنه

این نوع تقسیم‌بندی مهم‌ترین نوع تقسیم‌بندی روش‌های IHCP است. هر کدام از روش‌های بالا دارای مزایا و معایب مربوط به خود هستند. در روش‌های متوالی، مؤلفه‌های شار حرارتی به شکل گام‌به‌گام و یکی پس از دیگری تخمین زده می‌شوند. دو روش از این دسته، یکی روش تطابق دقیق یا استولز است و دیگری روش تخمین متوالی تابع می‌باشد. در روش اول، دماهای به‌دست‌آمده از سنسور برابر با دماهای محاسبه‌شده قرار می‌گیرند و محاسبات انجام می‌شود. این روش از نظر محاسباتی بسیار سریع و آسان است اما مشکل آن، این است که نسبت به خطاهای اندازه‌گیری بسیار حساس و در نتیجه ناپایدار است.

در روش دوم از چند دمای اندازه‌گیری شده در زمان‌های آینده نیز برای تخمین شار حرارتی در زمان حال استفاده می‌شود. این روش که توسط یک ارائه شد برخلاف روش اول به خطاهای اندازه‌گیری حساسیت کمتری دارد و می‌توان گام‌های زمانی کوچک‌تری را برای اندازه‌گیری دما به کار برد. استفاده از گام‌های زمانی کوچک این امکان را به ما می‌دهد که اطلاعات بیشتری از تغییرات شار حرارتی در طول زمان به دست آوریم.

روش تمام دامنه، روشی کارآمد است که از تمام دماهای اندازه‌گیری شده به‌طور هم‌زمان استفاده می‌کند و تمام مؤلفه‌های شار حرارتی در زمان‌های مختلف را با یکدیگر و به‌طور هم‌زمان تخمین می‌زند. این روش به خاطر امکان استفاده از گام‌های زمانی کوچک مناسب است، اما حجم محاسبات

آن در مقایسه با روش مرحله‌ای خیلی بیشتر است. روش‌های بهینه‌سازی از دسته روش‌های تمام دامنه هستند.

طبقه‌بندی دیگری که برای حل مسائل هدایت حرارتی معکوس به کار می‌روند، بر اساس ابعاد مسئله معکوس است. اگر هدف مسئله تخمین تنها یک شار حرارتی باشد، مسئله یک‌بعدی است. در روش دوهامل ابعاد فیزیکی مسئله تأثیری در نحوه حل ندارد بدین معنی که اگر هدف، تخمین تنها یک شار حرارتی باشد، روال حل برای اجسام یک، دو و سه‌بعدی یکسان است. اگر هدف تخمین دو یا چند شار حرارتی با استفاده از روش دوهامل باشد، مسئله چندبعدی است. اگر از روش‌هایی همچون تفاضل محدود، اجزاء محدود یا... در مسائل غیرخطی استفاده شود، تعداد مختصات فضایی که برای تحلیل فیزیکی انتقال حرارت هدایت در جسم به کار می‌رود، بعد مسئله را تعیین می‌کند.

۸-۱ ارزیابی روش‌های مسائل معکوس هدایت

به‌منظور ارزیابی روش‌های به کار گرفته‌شده در IHCP باید معیارهای زیر را در نظر گرفت:

۱. کمیت پیش‌بینی‌شده در صورتی که داده‌های اندازه‌گیری شده دارای دقت بالایی باشند، بایستی دقیق باشد.
۲. روش می‌بایست نسبت به خطاهای اندازه‌گیری پایدار باشد (حساسیت نداشته باشد).
۳. روش می‌بایست دارای پایه‌های آماری باشد و اجازه دهد تا توزیع‌های آماری متنوعی برای خطاهای اندازه‌گیری وجود داشته باشد.
۴. روش نباید نیازمند این باشد که داده‌های اندازه‌گیری از قبل هموار شده باشند.
۵. روش می‌بایست برای گام‌های زمانی کوچک پایدار باشد این عمل باعث دقت بهتر در تغییرات زمانی کمیت مجهول می‌شود.
۶. روش می‌بایست امکان بهره‌گیری از چندین سنسور را در اختیار ما قرار دهد.

۷. روش نباید نیازمند مشتقات اول پیوسته مجهول باشد اگرچه روش باید قادر باشد تا توابعی را که دارای ناپیوستگی هستند، بازیابی کند.
۸. دانستن زمان شروع دقیق کاربرد شار حرارتی سطح یا ترم چشمه مجهول نباید موردنیاز باشد. معمولاً زمان ابتدای اعمال شار حرارتی همزمان با زمان اندازه‌گیری دما توسط سنسور نیست. همچنین زمان دقیق تغییرات ناگهانی شار حرارتی نیز برای ما معلوم نیست.
۹. روش نباید به تعداد مشخصی از داده‌های اندازه‌گیری محدود باشد.
۱۰. روش می‌بایست قادر باشد تا در موقعیت‌های فیزیکی پیچیده شامل جامدهای مرکب، مرزهای متحرک، خواص وابسته زمانی انتقال حرارت جابجایی یا تشعشعی، مدل‌های ترکیبی از انتقال حرارت، مسائل چندبعدی و هندسه‌های غیرمتعارف عمل کند.
۱۱. روش می‌بایست جهت برنامه‌نویسی کامپیوتری ساده باشد.
۱۲. هزینه محاسبات می‌بایست متعادل باشند.
۱۳. روش نباید به گونه‌ای باشد که کاربر برای بهره‌گیری از آن در اجسام با هندسه‌های مختلف نیازمند مهارت بالایی در ریاضیات باشد.
۱۴. روش می‌بایست قادر به گسترش به بیش از یک مجهول باشد.

۹-۱ کاربرد روش‌های معکوس در مهندسی

در سالهای اخیر روش‌های معکوس کاربرد زیادی در صنایع یافته‌اند. محققین دانشگاهی و صنعتی، مسائل

مختلف مدل‌سازی، آنالیز و توسعه روش‌های عددی نوین را موردتوجه قرار داده‌اند. کاربرد روش‌های معکوس در مسائل حرارتی را به سه دسته زیر می‌توان تقسیم کرد:

۱. کاربرد در مسائل تعیین و شناخت

۲. کاربرد در مسائل طراحی

۳. کاربردهای کنترلی

متداول‌ترین کاربرد مسائل معکوس مربوط به دسته اول هست. این نوع مسائل شامل تحلیل و آنالیز داده‌های تجربی می‌باشند. در این دسته از مسائل، هدف تعیین یک تابع و یا ثابت می‌باشد که اندازه‌گیری مستقیم آن مشکل یا غیرعملی است.

دسته دوم مسائل که شامل مسائل طراحی می‌باشند معمولاً شامل اندازه‌گیری نمی‌باشند. بلکه رسیدن به یک طراحی و یا بهینه‌سازی یک طرح از طریق مینیمم کردن یک تابع تعریف‌کننده یک مسئله معکوس (تابع هدف)، هست. به عنوان مثال می‌توان به مسئله استفان اشاره کرد.

در بعضی مواقع انجماد با سرعت خاص موردنظر می‌باشد. با تعیین شرط مرزی مجهول، می‌توان سرعت انجماد موردنظر را تأمین کرد. کاربردهای دیگر این گونه مسائل را می‌توان در شاخه‌های مختلف علوم مهندسی نظیر مسائل تصفیه، محاسبه اتلاف مواد و یافتن خوردگی در سطح را مشاهده نمود.

مسائل کنترلی سومین دسته از مسائل معکوس می‌باشند. در این نوع مسائل هدف تعیین علت (پارامتر کنترل‌کننده) با اندازه‌گیری یک متغیر می‌باشد. در بسیاری از مسائل از این نوع، باید یک مسئله معکوس را حل نمود.

یکی از متداول‌ترین کاربردهای مسائل معکوس تعیین شرط مرزی مجهول و یا تخمین یک پارامتر می‌باشد. به عنوان نمونه می‌توان به تعیین ضرایب جابجایی اشاره نمود. تعیین این ضرایب نیاز به تعیین دمای سطحی، دمای سیال و شار حرارتی با توجه به رابطه زیر دارد:

$$q = h(T_s - T_a) \quad (11-1)$$

که T_s و T_a به ترتیب دماهای سطحی و سیال بوده و q شار حرارتی می‌باشد. تعیین ضرایب حرارتی با استفاده از رابطه بالا نیاز به اندازه‌گیری دمای سطح دارد. دماهای اندازه‌گیری شده به وسیله دماسنجی که بر روی سطح قرار دارد حاوی خطای بالایی است. این خطا در مواردی که سرعت سیال بالا می‌باشد، افزایش می‌یابد. راه مناسب‌تر برای محاسبه، استفاده از یک روش معکوس می‌باشد.

در مقاله استولز یک روش برای تعیین ضریب انتقال حرارت، زمانی که راهی برای قرار دادن دماسنج داخل جسم وجود ندارد، ارائه گردیده است. در این روش جسم موردنظر را در داخل یک فلز مایع با نقطه انجماد پایین غوطه ور می کنند. در نتیجه یک لایه از فلز روی جسم به وجود می آید. ضریب انتقال حرارت مجهول را می توان با حل یک مسئله استفان برای سطح خارجی به دست آورد. این روش برای اجسام بسیار نازک نیز کاربرد دارد.

مثال دیگر این کاربرد، تخمین شار حرارتی بر روی دیواره یک کوره است که با فرض انتقال حرارت یک بعدی می توان شار حرارتی را به دست آورد [۱۱۱]. یک کاربرد دیگر این نوع مسائل، جهت تعیین دمای سطحی یک ترک در یک لوله که دارای نشت، بررسی شده است [۱۱۲]. کاربرد دیگر، یک روش برای کنترل فرآیند گرم کردن یک جسم داخل کوره می باشد [۱۱۳].

انتقال حرارت در اجسام متخلخل کاربرد دیگر روش های معکوس است. مسائل موردبررسی در اجسام متخلخل، تعیین شرط مجهول یا خواص ترموفیزیکی است. کاربردهای مختلف مسائل معکوس در زمینه متالورژی را می توان به صورت زیر خلاصه کرد:

۱. کنترل فرآیند گرم کردن یک جسم داخل کوره

۲. مدل سازی فرایند سردسازی فولاد به منظور رسیدن به دمای سطحی موردنظر

۳. مدل سازی فرایند کربنیزه کردن فولاد و بررسی نفوذ کربن در فولاد

مثال های که در زمینه روش معکوس بیان گردید، نشان می دهد که بسیاری از آنها شامل تعیین یک شرط مرزی مجهول هست. در واقع تعیین خواص ترموفیزیکی که یکی دیگر از کاربردهای روش های معکوس است، در بسیاری از مواقع با روش های دیگر امکان پذیر است. یکی دیگر از کاربردهای روش های معکوس تعیین قابلیت نفوذ یک جسم جامد است. نفوذ در یک جسم جامد بسیار کند صورت می گیرد و معمولاً به حالت پایدار نمی رسد، در این حالت نیز روش های معکوس، می توانند به کار گرفته شوند. کاربردهای دیگر از روش های معکوس در مرجع [۱۱۴] بررسی شده است.

۱-۱۰ نوآوری های رساله

در این رساله هدف ارائه روش جدیدی به منظور تخمین توان منبع حرارتی می باشد. با این هدف که توزیع دما در بافت سینه به شکل مطلوبی صورت گرفته و تمرکز حرارتی با حداکثر دقت بر روی بافت تومور حاصل گردد.

تعیین دقیق توزیع دما در هایپرترمیا به عنوان فاکتور اساسی در به کارگیری این روش به عنوان درمان ترکیبی تومورهای سرطانی است. در این رساله هدف تخمین توان بهینه منبع گرمایی به منظور از بین بردن سلول های سرطانی با توجه به توزیع دما در بافت سرطانی است. برای این منظور از روش معکوس برای تخمین توان منبع گرمایی استفاده شده است. بافت سینه به صورت یک نیمکره در نظر گرفته و در حالت سه لایه (چربی، غدد و عضله) مسئله حل شده است. انتقال گرما در بافت نرم با استفاده از معادله پنس که بر اساس رسانش گرمایی فوریته ای می باشد توصیف شده است. برای حل معادلات حاکم بعد از بی بعد سازی ، از روش تفاضل محدود و روش مختصات عمومی استفاده شده و معادلات از صفحه فیزیکی به صفحه محاسباتی که دارای شبکه هموار است انتقال داده شده اند. برای حل معادلات معکوس ، روش گرادیان مزدوج با مسئله الحاقی که یکی از قوی ترین روش های حل مسائل معکوس است به کار گرفته شده است. برای دنبال کردن تغییرات حرارتی از سنسور درون بافت استفاده شده است با این فرض که سنسور در محل تومور قرار گرفته باشد و مسئله در دو حالت تک سنسور و دو سنسور حل گردیده است. معادلات حاکم با استفاده از روش تفاضل محدود و در حالت متقارن محوری حل شده اند. که حالت متقارن محوری در حل معادله پنس در سیستم چندلایه برای اولین بار ارائه شده است.

۱-۱۱ ساختار و محتوای رساله

فصل اول این رساله به مقدمه‌ای در مورد هایپرترمیا و روش‌های معکوس حل معادلات انتقال حرارت می‌پردازد. همچنین مروری بر پژوهش‌های پیشین و تاریخچه در این فصل آورده شده است. فصل دوم به بیان روش‌های بهینه‌سازی توابع پرداخته است و مسائل مختلف بهینه‌سازی معرفی شده و راه‌حل‌های موجود مورد بررسی قرار گرفته است. در فصل سوم مسئله تخمین توان حرارتی منبع بررسی شده و روش حل پیشنهادی توضیح داده شده است. در فصل چهارم روش تحقیق ارائه شده و مسئله با راهکار پیشنهادی مورد تحلیل قرار گرفته و حل مسئله بیان گردیده است. در فصل پنجم نتایج به دست آمده مورد بحث و تحلیل قرار گرفته است. فصل ششم جمع‌بندی نتایج و پیشنهادات رساله برای تحقیقات آینده می‌باشد.

فصل دوم : بررسی روش‌های بهینه سازی توابع

مقدمه

فصل دوم در مورد تعاریف بهینه‌سازی توابع و روند انجام آن در مسائل می‌باشد. روش‌های مختلف بهینه‌سازی توابع به دو روش مستقیم و غیرمستقیم می‌باشد. در این تحقیق از روش غیرمستقیم استفاده شده است. در ادامه نحوه روش‌های بهینه‌سازی توابع و نحوه انجام مراحل این کار آورده شده است.

۱-۲ مسائل بهینه‌سازی

در واقع می‌توان یک مسئله بهینه‌سازی را این‌چنین تعریف نمود که باید بردار $\bar{X} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ را طوری معین شود که حداقل تابع $f(\bar{X})$ تحت شرایط ذیل به دست آید.

$$\begin{cases} l_j(\bar{X}) = \alpha & j = 1, 2, \dots, p \\ g_j(\bar{X}) \leq \beta & j = 1, 2, \dots, r \end{cases} \quad (1-2)$$

در اینجا $\bar{X}$ برداری n بعدی است که به نام بردار طراحی معرفی می‌شود. $f(\bar{X})$ تابع هدف و $l_j(\bar{X})$ قید برابری و $g_j(\bar{X})$ قید نابرابری هستند. n تعداد متغیرها هستند و p و r تعداد قیدها هستند که در کل این‌ها باهم رابطه‌ای ندارند. چنین مسئله‌ای یک مسئله بهینه‌سازی مقید تعریف می‌شود. اگر در مسئله قیدی تعریف نشده باشد یک مسئله نامقید نام دارد.

اگر شرط لازم زیر در تابع هدف برقرار باشد، در این صورت نقطه X^* نقطه مینیمم یا نقطه سکون تابع هدف $f(\bar{X})$ خواهد بود:

$$\nabla f|_{X^*} = 0 \quad (2-2)$$

ماتریس H ماتریس هسین^۱ نام دارد. اگر این ماتریس معین مثبت باشد در این صورت X^* نقطه مینیمم نسبی تابع هست. تابع $f(\bar{X})$ نیز باید حتماً مشتق پذیر باشد.

$$[H]_{X^*} = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{X^*} \quad (3-2)$$

۲-۲ دسته‌بندی روش‌های بهینه‌سازی

برای حل مسائل مینیمم سازی دو روش اصلی وجود دارد که شامل روش‌های جستجوی مستقیم و روش‌های کاهش می‌شوند.

در روش مستقیم برای محاسبه نقطه مینیمم فقط به داشتن تابع هدف نیاز می‌باشد. این روش‌ها را روش‌های غیر گرادیانی روش‌های مرتبه صفر نامیده می‌شوند. در این روش از مشتقات مرتبه صفر تابع استفاده می‌شود. در واقع این روش برای حالت‌هایی می‌باشد که محاسبه مشتقات تابع پیچیده است و یا تعداد متغیرها کم می‌باشد.

در روش کاهش به مشتقات تابع نیاز می‌باشد. به این روش‌ها روش‌های گرادیانی نیز گفته می‌شود. به حالتی که به مشتق اول تابع نیاز است روش مرتبه اول نامیده می‌شود و در حالتی که به مشتق دوم نیز نیاز می‌باشد روش‌های مرتبه دوم گفته می‌شود. روش‌های کاهش کار آیی بیشتری نسبت به روش‌های مستقیم دارند. در جدول (۱-۲) تقسیم‌بندی دو روش ذکر شده در یک دسته‌بندی آورده شده است.

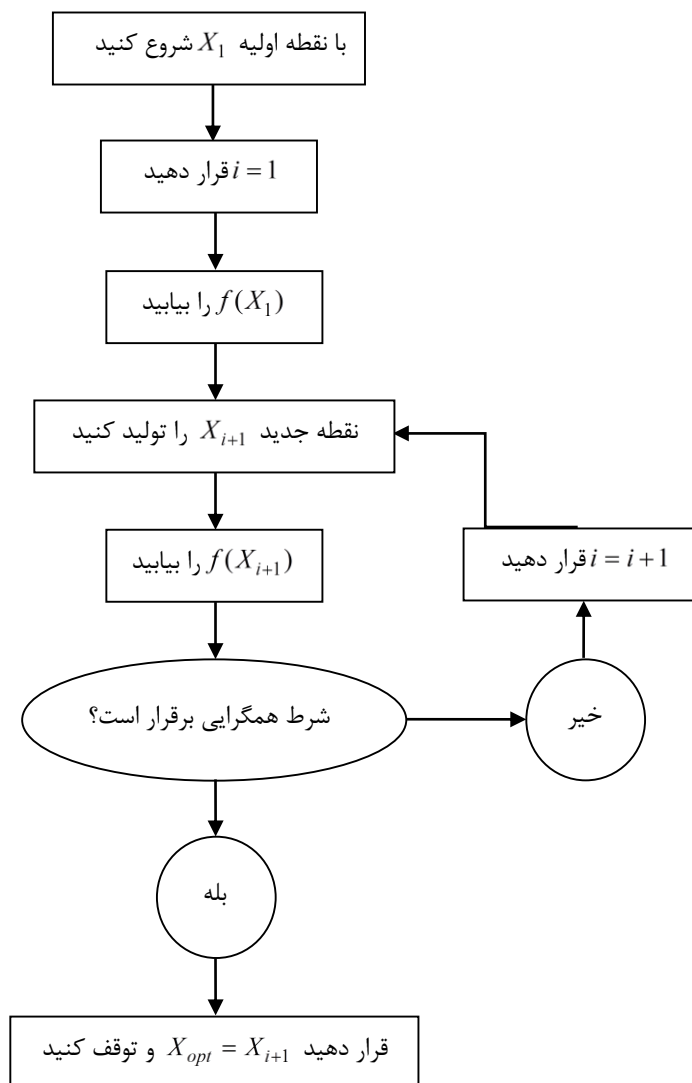
¹ Hessian Matrix

جدول (۱-۲): دسته‌بندی روش‌های بهینه‌سازی

روش‌های جستجوی مستقیم	روش‌های کاهشی
روش جستجوی تصادفی	بیشترین کاهش
جستجوی شبکه	گرادیان مزدوج
روش تک متغیر	روش نیوتن
جستجوی الگو	روش لونبرگ - مارکورات
	میزان متغیر

۲-۳ راه حل کلی

روش‌های حداقل سازی نامقید از روش تکرار استفاده می‌کنند. برای انجام این کار ابتدا باید حدس اولیه زده شود سپس به صورت ترتیبی تا پیدا کردن نقطه مینیمم ادامه پیدا می‌کند. فلوچارت کلی گام‌های این روش در شکل (۱-۲) نشان داده شده است. بنابراین در تمامی این روش‌های به نقطه اولیه X_1 برای شروع نیاز می‌باشد. تفاوت انواع روش‌ها در رسیدن به نقطه بعدی یعنی X_{i+1} می‌باشد.



شکل (۲-۱): نمودار روند بهینه سازی تابع هدف

۴-۲ نرخ همگرایی

نرخ همگرایی در انواع روش های بهینه سازی متفاوت می باشد. شماره تکرارها با i نمایش داده می شوند.

مرتبه همگرایی در یک روش بهینه سازی p می باشد در صورتی که شرط زیر برقرار شود:

$$\frac{\|X_{i+1} - X^*\|}{\|X_i - X^*\|^p} \leq l, \quad l \geq 0, p \geq 1 \quad (۴-۲)$$

در اینجا X_i و X_{i+1} نقاط محاسبه شده در پایان تکرارهای i و $i+1$ هستند. X^* نقطه بهینه و $\|X\|$ نشان دهنده طول یا نرم بردار X است که از رابطه زیر به دست می آید:

$$\|X\| = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_N^2} \quad (5-2)$$

در صورتی که $p=1$ و $0 \leq l \leq 1$ باشد، روش بهینه سازی روش همگرای خطی نامیده می شود و در صورتی که $p=2$ باشد، روش همگرای مرتبه دوم نامیده می شود. اگر شرط زیر برقرار باشد روش بهینه سازی، همگرای فوق خطی است:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\|X_{i+1} - X^*\|}{\|X_i - X^*\|^p} \rightarrow 0 \quad (6-2)$$

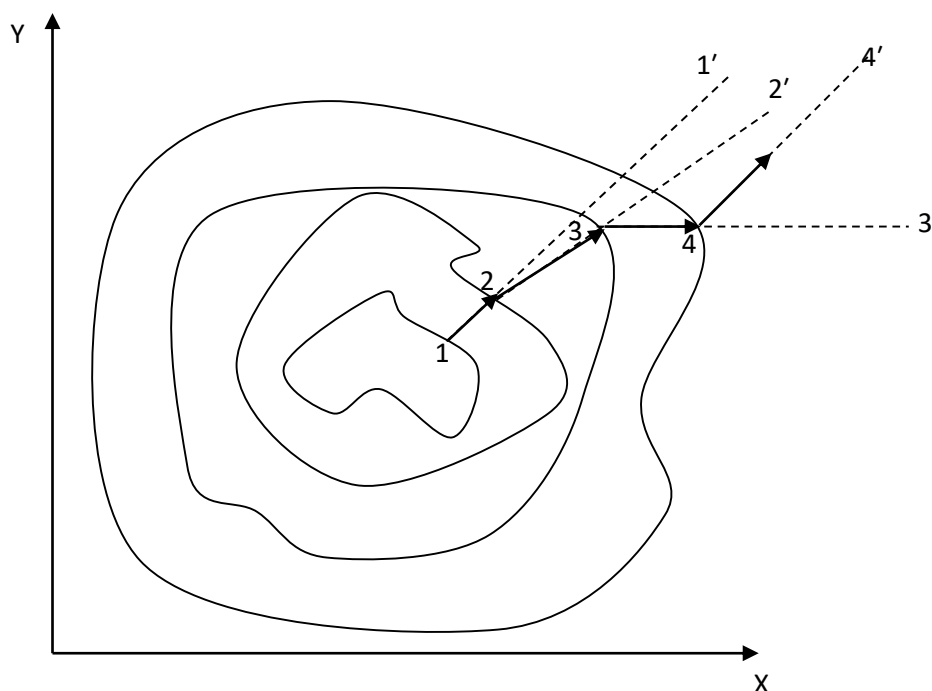
روش همگرای مرتبه دوم به این صورت تعریف می شود: در صورتی که یک روش حداقل سازی با یک روند دقیق ریاضی بتواند نقطه مینیمم یک تابع درجه دوم n متغیره را در n تکرار پیدا کند.

۲-۵ گرادیان تابع

بردار گرادیان تابع ∇f برداری با رابطه زیر می باشد:

$$\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]^T \quad (7-2)$$

جهت گرادیان، جهت بیشترین افزایش تابع می باشد. در واقع اگر از نقطه ای در فضای n بعدی در راستای گرادیان حرکت کنیم، مقدار تابع با سریع ترین نرخ افزایش می یابد.



شکل (۲-۲): جهت های سریع ترین افزایش

جهت بیشترین افزایش در شکل (۲-۲) نشان داده شده است. همان طور که با مشاهده شکل می توان دید، بردار گرادیان ∇f محاسبه شده در نقاط ۱، ۲، ۳، ۴ به ترتیب در جهت های $11'$ ، $22'$ ، $33'$ ، $44'$ قرار دارد. لذا سریع ترین نرخ افزایش تابع در جهت $11'$ وجود دارد و اگر به تعداد بی نهایت مسیر کوچک در جهت های سریع ترین افزایش حرکت کنیم، مسیر حرکت یک منحنی شبیه به منحنی ۴-۳-۲-۱ خواهد بود. همان طور که گفته شد بردار گرادیان جهت بیشترین افزایش مقدار تابع را نشان می دهد، بنابراین جهت سریع ترین کاهش را منفی بردار گرادیان نشان می دهد. پس می توان نتیجه گرفت برای سریع تر رسیدن به نقطه مینیمم باید روش هایی به کار گرفته شود که از بردار گرادیان برای بهینه سازی استفاده می کنند. بنابراین دو قضیه زیر را بدون اثبات می آوریم.

۱. بردار گرادیان جهت سریع ترین افزایش را نشان می دهد.

۲. بیشترین نرخ تغییر تابع f در هر نقطه X^* ، برابر اندازه بردار گرادیان در آن نقطه است.

۲-۵-۱ محاسبه گرادیان

برای محاسبه گرادیان به محاسبه مشتقات جزئی $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ($i=1,2,\dots,n$) نیاز می‌باشد. در بعضی حالات محاسبه گرادیان مشکل است:

۱. اگر شرط مشتق‌پذیری تابع در تمامی نقاط برقرار باشد، اما محاسبه مؤلفه‌های بردار گرادیان غیرعملی است.

در این مورد جهت تخمین مشتق جزئی می‌توان از فرمول تفاضل محدود پیشرو به صورت زیر استفاده کرد:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{x_m} = \frac{f(X_m + \Delta x_i, u_i) - f(X_m)}{\Delta x_i} \quad i=1,2,\dots,n \quad (۸-۲)$$

همچنین برای یافتن نتیجه بهتر می‌توان از فرمول اختلاف مرکزی محدود زیر استفاده کرد:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{x_m} = \frac{f(X_m + \Delta x_i, u_i) - f(X_m - \Delta x_i, u_i)}{2\Delta x_i} \quad i=1,2,\dots,n \quad (۹-۲)$$

در اینجا Δx_i یک کمیت اسکالر کوچک و u_i برداری n بعدی است که مؤلفه i ام آن یک، و مابقی صفر هستند. انتخاب Δx_i باید با دقت انجام شود، زیرا کوچک بودن بیش‌ازحد آن ممکن است اختلاف میان مقادیر محاسبه‌شده تابع در $(X_m + \Delta x_i, u_i)$ و $(X_m - \Delta x_i, u_i)$ را بسیار کوچک کرده، و موجب افزایش خطای گرد کردن شود و نتایج را با خطا همراه سازد. به همین ترتیب بزرگ بودن بیش‌ازاندازه Δx_i نیز خطای برشی را در محاسبه گرادیان ایجاد می‌کند.

۲. محاسبه مشتقات جزئی $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ نیازمند زمان محاسباتی زیادی است.

در این مورد نیز استفاده از فرمول‌های تفاضل محدود پیشنهاد می‌شود.

۳. گرادیان تابع در تمامی نقاط تعریف نشده باشد.

در این مورد فقط استفاده از روش‌های مستقیم برای مینیم کردن تابع قابل اجرا است. با توجه به این که گرادیان در تمام نقاط تعریف شده نیست، نمی‌توان از فرمول‌های تفاضل محدود استفاده کرد.

۲-۵-۲ تعیین طول گام بهینه در جهت کاهش تابع

تعیین نقطه مینیمم در یک راستای مشخص در بیشتر روش‌های بهینه‌سازی مورد نیاز است. لذا باید نرخ تغییر تابع هدف از یک نقطه مانند $\vec{X}_i$ ، در راستای مشخصی مانند $\vec{S}_i$ ، نسبت به پارامتری چون λ محاسبه شود. باید در نظر داشت که موقعیت هر نقطه در این راستا را می‌توان با توجه به نقطه X_i ، به صورت $\vec{X}_{i+1} = \vec{X}_i + \lambda \vec{S}_i$ نشان داد. بنابراین نرخ تغییر تابع نسبت به این متغیر λ در راستای $\vec{S}_i$ را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$\frac{df}{d\lambda} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial \lambda} \quad (10-2)$$

که در رابطه فوق x_j مؤلفه j -ام $\vec{X}_i$ است. از طرفی داریم:

$$\frac{\partial x_j}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda} (x_{ij} + \lambda s_{ij}) = s_{ij} \quad (11-2)$$

که x_{ij} و s_{ij} مؤلفه‌های j -ام $\vec{X}_i$ و $\vec{S}_i$ هستند. بنابراین نرخ تغییر تابع در راستای $\vec{S}_i$ برابر است با:

$$\frac{df}{d\lambda} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot s_{ij} = \nabla f^T \cdot \vec{S}_i \quad (12-2)$$

در صورتی که λ^* تابع f را در راستای $\vec{S}_i$ مینیمم کند، در نقطه $\vec{X}_i + \lambda^* \vec{S}_i$ می‌توان نوشت:

$$\left. \frac{df}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda^*} = \nabla f^T \cdot \vec{S}_i = 0 \quad (13-2)$$

بنابراین مینیمم تابع، در راستای $\vec{S}_i$ ، در نقطه $\vec{X}_i + \lambda^* \vec{S}_i$ می‌باشد.

۲-۶ معیار همگرایی

به‌منظور بررسی همگرایی در محاسبات تکراری معیارهای زیر می‌بایست به کار روند:

- در صورتی که تغییرات تابع در دو تکرار متوالی از مقدار معینی کوچک‌تر شود:

$$\left| \frac{f(\vec{X}_{i+1}) - f(\vec{X}_i)}{f(\vec{X}_i)} \right| \leq \varepsilon_1 \quad (۲-۱۴)$$

- زمانی که مشتقات جزئی (گرادیان مؤلفه‌ها) به‌اندازه کافی کوچک شود:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \leq \varepsilon_2 \quad (۲-۱۵)$$

- زمانی که تغییرات بردار موردنظر در دو تکرار متوالی کوچک شود:

$$\left| \vec{X}_{i+1} - \vec{X}_i \right| \leq \varepsilon_3 \quad (۲-۱۶)$$

که ε_1 ، ε_2 و ε_3 مقادیر معین کوچکی در نظر گرفته می‌شوند.

۲-۷ روش کاهش سریع

در روش کاهش سریع محاسبات از نقطه‌ای مانند X_1 شروع شده و طی فرآیندهای تکراری با حرکت در جهت سریع‌ترین نرخ کاهش، نهایتاً به نقطه مینیمم می‌رسد. مراحل مختلف این روش را می‌توان به‌صورت زیر در نظر گرفت:

۱. شروع محاسبات از یک نقطه $\vec{X}_1$ دلخواه به‌عنوان اولین تکرار ($i=1$)

۲. یافتن جهت $\vec{S}_i$ به‌صورت $\vec{S}_i = -\nabla f_i = -\nabla f(\vec{X}_i)$

۳. محاسبه طول گام بهینه λ_i^* در جهت $\vec{S}_i$ و قرار دادن $\vec{X}_{i+1} = \vec{X}_i + \lambda_i^* \vec{S}_i$ و یا

$$\vec{X}_{i+1} = \vec{X}_i - \lambda_i^* \nabla f_i$$

۴. بررسی بهینه بودن نقطه $\vec{X}_{i+1}$ و پایان محاسبات در صورت مینیمم بودن این نقطه، در غیر این صورت قرار دادن $i = 2$ و ادامه محاسبات از مرحله ۲.

۸-۲ روش گرادیان مزدوج

۱-۸-۲ جهت‌های مزدوج

فرض کنید A یک ماتریس متقارن $n \times n$ باشد. یک مجموعه از n بردار یا جهت $\{S_i\}$ مزدوج نامیده می‌شود اگر داشته باشیم:

$$S_i^T A S_j = 0, \quad i \neq j, \quad i=1,2,\dots,n \quad j=1,2,\dots,n \quad (17-2)$$

مشاهده می‌شود که جهات متعامد حالت خاصی از جهات مزدوج هستند.

اگر f یک تابع درجه دوم مانند زیر باشد:

$$f = \frac{1}{2} \vec{X}^T A \vec{X} + B^T \vec{X} + C \quad (18-2)$$

که به شکل ترکیبی در جهات مزدوج مینیمم شود، مینیمم تابع در n تکرار یا کمتر به دست می‌آید. سرعت همگرایی روش کاهش سریع را می‌توان با ترکیب جهت‌های کاهش تابع به میزان قابل توجهی افزایش داد. در این صورت روش گرادیان مزدوج را به دست می‌دهد که در آن از جهت‌های مزدوج برای کاهش تابع استفاده می‌شود. روش‌های مینیمم سازی که از جهت‌های مزدوج بهره می‌برند، همگرایی مرتبه ۲ دارند. این خاصیت از این جهت دارای اهمیت بسیار است که می‌تواند این اطمینان را دهد که بتواند مینیمم یک تابع مرتبه دوم n متغیره را در n یا کمتر از n تکرار پیدا کند.

از آنجاکه هر تابع دلخواهی را در نزدیکی نقطه بهینه، می‌توان با دقت خوبی به صورت یک تابع درجه دوم تقریب زد می‌توان از این روش انتظار داشت، که در تعداد تکرار کمتری نقطه مینیمم را پیدا کنند. در این روش با محاسبه گرادیان موردنظر می‌توان بعد از هر مینیمم سازی یک‌بعدی، یک‌جهت ترکیبی را به دست آورد. چگونگی ایجاد جهت‌های مزدوج و الگوریتم این روش در ادامه آورده شده است.

۲-۸-۲ شرح روش گرادیان مزدوج

توسعه الگوریتم این روش با انجام اصلاحاتی بر روی روش کاهش سریع انجام می‌گیرد و برای اعمال بر روی یک تابع درجه دوم مثل $f(\bar{X}) = \frac{1}{2} \bar{X}^T A \bar{X} + B^T \bar{X} + C$ به گونه‌ای صورت می‌گیرد که جهات جدید به وجود آمده متقابلاً باهم مزدوج باشند، فرض کنید $\bar{X}_1$ نقطه شروع فرآیند مینیمم یابی و اولین جهت جستجوی منطبق بر جهت سریع‌ترین نرخ کاهش باشد:

$$\vec{S}_1 = -\nabla f_1 = -A\bar{X}_1 - B \quad (19-2)$$

$$\bar{X}_2 = \bar{X}_1 + \lambda_1^* \vec{S}_1 \quad (20-2)$$

$$\vec{S}_1 = \frac{\bar{X}_2 - \bar{X}_1}{\lambda_1^*} \quad (21-2)$$

λ_1^* مقدار تابع را در جهت $\vec{S}_1$ مینیمم می‌کند بنابراین:

$$\vec{S}_1^T \nabla f_1|_{\bar{X}_2} = 0 \quad (22-2)$$

به این ترتیب مقدار λ_1^* را می‌توان به دست آورد:

$$\lambda_1^* = \frac{-\vec{S}_1^T (A\bar{X}_1 + B)}{\vec{S}_1^T A \vec{S}_1} = -\frac{\vec{S}_1^T \nabla f_1}{\vec{S}_1^T A \vec{S}_1} \quad (23-2)$$

جهت کاهش در مرحله دوم به صورت ترکیب خطی از $\vec{S}_1$ و ∇f_2 در نظر گرفته می شود:

$$\vec{S}_2 = -\nabla f_2 + \beta_2 \vec{S}_1 \quad (24-2)$$

مقدار β_2 به گونه ای محاسبه می شود که $\vec{S}_1$ و $\vec{S}_2$ با تعریف زیر مزدوج شوند:

$$\vec{S}_1^T A \vec{S}_2 = 0 \quad (25-2)$$

با ترکیب روابط فوق می توان برای β_2 رابطه زیر را به دست آورد:

$$\beta_2 = \frac{-\nabla f_2^T \nabla f_2}{\nabla f_1^T \vec{S}_1} = \frac{\nabla f_2^T \nabla f_2}{\nabla f_1^T \nabla f_1} \quad (26-2)$$

به همین ترتیب جهت کاهش بعدی را می توان از ترکیب خطی $\vec{S}_1$ و $\vec{S}_2$ و ∇f_3 به دست آورد:

$$\vec{S}_3 = -\nabla f_3 + \beta_3 \vec{S}_2 + \delta_3 \vec{S}_1 \quad (27-2)$$

که مقادیر β_3 و δ_3 را با مزدوج در نظر گرفتن $\vec{S}_3$ نسبت به $\vec{S}_1$ و $\vec{S}_2$ به دست می آید. با استفاده از

شرط $\vec{S}_1^T A \vec{S}_3 = 0$ مقدار $\delta_3 = 0$ به دست می آید. مقدار β_3 نیز به صورت زیر خواهد شد:

$$\beta_3 = \frac{\nabla f_3^T \nabla f_3}{\nabla f_2^T \nabla f_2} \quad (28-2)$$

و در نتیجه:

$$\vec{S}_3 = -\nabla f_3 + \beta_3 \vec{S}_2 \quad (29-2)$$

صورت کلی دو رابطه فوق را برای فرآیند تکرارپذیر می توان به شکل زیر نوشت:

$$\vec{S}_i = -\nabla f_i + \beta_i \vec{S}_{i-1} \quad (30-2)$$

$$\beta_i = \frac{\nabla f_i^T \nabla f_i}{\nabla f_{i-1}^T \nabla f_{i-1}} \quad (31-2)$$

دو رابطه اخیر مسیر جستجوی کاهش تابع را ارائه می کنند.

۲-۸-۳ الگوریتم روش گرادیان مزدوج

الگوریتم روش تکراری گرادیان مزدوج را می توان به صورت زیر در نظر گرفت:

۱. شروع محاسبات با نقطه دلخواه $\bar{X}_1$.

۲. قرار دادن اولین مسیر جستجو به صورت $\bar{S}_1 = -\nabla f(X_1) = -\nabla f_1$.

۳. یافتن نقطه $\bar{X}_2$ با توجه به $\bar{X}_2 = \bar{X}_1 + \lambda_1^* \bar{S}_1$ که λ_1^* رابطه طول گام بهینه در مسیر $\bar{S}_1$ می باشد.

۴. قرار دادن $i = 2$ برای تکرار بعدی و انجام مرحله بعد.

۵. محاسبه $\nabla f_i = \nabla f(X_i)$ و قرار دادن:

$$\bar{S}_i = -\nabla f_i + \frac{\|\nabla f_i\|^2}{\|\nabla f_{i-1}\|^2} \bar{S}_{i-1} \quad (۳۲-۲)$$

۶. محاسبه طول گام بهینه λ_i^* در جهت $\bar{S}_i$ و یافتن نقطه جدید: $\bar{X}_{i+1} = \bar{X}_i + \lambda_i^* \bar{S}_i$.

۷. بررسی نقطه $\bar{X}_{i+1}$ و پایان محاسبات در صورت بهینه بودن. در غیر این صورت با قرار دادن $i = i + 1$ محاسبات از مرحله ۴ به بعد ادامه می یابد.

در این زمینه نکات زیر قابل توجه می باشند:

روش گرادیان مزدوج در اصل به عنوان روشی برای حل دستگاه معادلات خطی بنیان گذاری شده است و اوزسیک^۱ در کتاب خود شرح کاملی از تکنیک های مختلف این روش ارائه داده است. از آنجائی که

¹ Ozisik

جهت‌های S_i استفاده شده در این روش با ماتریس A مزدوج هستند ($\bar{S}_i^T A \bar{S}_i = 0$)، این فرآیند می‌بایست برای یک تابع مرتبه دوم در n تکرار یا کمتر از آن همگرا شود. این روش برای توابع مرتبه دوم ناهنجار به تعداد بیشتری تکرار برای همگرایی نیازمند است. علت این موضوع خطای تجمعی گرد کردن است.

چون S_i از رابطه (۲-۳۰) به دست می‌آید، هر خطای ناشی از کم بودن دقت λ_i^* در محاسبه و خطای ناشی از گرد کردن تجمعی در ترم $\bar{S}_{i-1} \frac{\|\nabla f_i\|^2}{\|\nabla f_{i-1}\|^2}$ به مرحله بعدی $\bar{S}_i$ نیز راه پیدا می‌کند و جهت کاهش $\bar{S}_i$ به صورت قابل توجهی توسط این خطاها، منحرف می‌شود. بنابراین لازم است تا بعد از هر m تکرار برخلاف مقدار موجود در الگوریتم، برابر با $-\nabla f_{m+1}$ قرار گیرد. این کار شروع مجدد نام دارد. فلچر-ریوز^۱ مقدار $m = n + 1$ را برای شروع مجدد پیشنهاد دادند که n تعداد متغیرهای مجهول می‌باشد.

۲-۸-۴ دسته‌بندی روش‌های گرادیان مزدوج

روش گرادیان مزدوج برحسب چگونگی یافتن جهت مزدوج، به سه نسخه متفاوت تقسیم می‌شود در این قسمت تنها معادلات هر یک از سه نسخه آورده شده است.

صورت کلی جهت مزدوج که خود تابعی از $f(X)$ است به صورت زیر می‌باشد:

$$P^n(X) = -J'^n(x, y) + \gamma^n P^{n-1}(X) + \varphi^n P^q(X) \quad (۲-۳۳)$$

به طوری که مشاهده می‌شود این جهت ترکیبی از منفی گرادیان تابع در تکرار n ام و جهت مزدوج در تکرارهای $n-1$ ام و q ام می‌باشد. با این کار زاویه بین جهت کاهش و منفی جهت گرادیان از ۹۰ درجه کمتر می‌شود که این امر می‌تواند فرآیند یافتن مینیمم را تضمین کند. اندیس q در رابطه فوق

¹ Fletcher and Reeves

شماره تکراری است که برای بهبود روش گرادیان مزدوج، شروع مجدد در آن رخ داده است. ضرایب γ^n و φ^n در هر یک از نسخه‌های گرادیان مزدوج با روابطی که در ادامه می‌آیند تعریف می‌گردند. در نسخه اول روش گرادیان مزدوج، که به نسخه فلچر-ریوز [۱۱۵، ۱۱۶] معروف است ضرایب γ^n و φ^n به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\gamma^n = \frac{\int_{x=0}^L (J'^n)^2 dx}{\int_{x=0}^L (J'^{n-1})^2 dx}, \quad \gamma^0 = 0, \varphi^n = 0 \quad (34-2)$$

لازم به ذکر است که رابطه فوق فرم انتگرالی رابطه (۲-۳۱) است، با این تعریف همه گرادیان‌ها به صورت نقطه‌ای در نظر گرفته شده و محاسبه ضرایب مزدوج از طریق انتگرال‌گیری گرادیان‌های نقطه‌ای بر روی مرز مجهول انجام می‌گیرد. برای این کار تغییرات گرادیان بر روی هر المان به صورت خطی در نظر گرفته می‌شود. بر این اساس جهت مزدوج برای هر نقطه نیز دارای مقدار عددی است و اصلاح نقاط مرزی با جابجایی هر نقطه در راستای بردار عمود بر مرز به مقدار $\beta^n P^n(X)$ انجام می‌گیرد.

در نسخه دوم که نسخه پولاک-ریبیر^۱ [۴۵] نام دارد، ضرایب این گونه می‌باشند:

$$\gamma^n = \frac{\int_{x=0}^L (J'^n - J'^{n-1})^2 dx}{\int_{x=0}^L (J'^{n-1})^2 dx}, \quad \gamma^0 = 0, \varphi^n = 0 \quad (35-2)$$

استفاده از هر یک از روابط فلچر-ریوز و پولاک-ریبیر برای محاسبه ضرایب مزدوج می‌تواند زاویه بین جهت کاهش و منفی گرادیان را از ۹۰ درجه کمتر کند و در نتیجه می‌توان اطمینان داشت که مینیمم تابع مورد نظر را بیابند. کار آیی این دو روش برای مسائل خطی تعیین پارامتر یکسان است.

¹ Polak-Ribiere

بیل و پاول^۱ بر اساس نسخه دوم روابط زیر را برای ضرایب مزدوج ارائه کردند که نسخه پاول-بیل در روش گرادیان مزدوج نام دارد.

$$\gamma^n = \frac{\int_{x=0}^L (J'^n - J'^{n-1}) J'^n dx}{\int_{x=0}^L (J'^n - J'^{n-1}) P^{n-1} dx}, \quad \gamma^0 = 0 \text{ for } n=0 \quad (36-2)$$

$$\varphi^n = \frac{\int_{x=0}^L (J'^{q+1} - J'^q) J'^n dx}{\int_{x=0}^L (J'^{q+1} - J'^q) P^q dx}, \quad \varphi^0 = 0 \text{ for } n=0 \quad (37-2)$$

پاول استفاده از روابط (۳۶-۲) و (۳۷-۲) را مستلزم استفاده از تکنیک شروع مجدد دانسته است. از این تکنیک زمانی استفاده می شود که گرادیان ها در تکرار موردنظر نامتعامل می شود. همچنین زمانی که جهت به دست آمده به اندازه کافی کاهش تابع را به همراه نداشته باشد با شروع مجدد، جهت مزدوج اصلاح می گردد. این کار با قرار دادن $\varphi^n = 0$ در رابطه (۳۳-۲) انجام می گیرد. جزئیات بیشتر در الگوریتمی که در ادامه می آید توضیح داده شده است.

میزان نامتعامل بودن گرادیان ها در تکرار n ام را با معیار زیر می توان اندازه گیری کرد.

$$\left| \int_{x=0}^L (J'^n - J'^{n-1}) J'^n dx \right| \geq 0.2 \int_{x=0}^L (J'^n)^2 dx \quad (38-2)$$

میزان کم بودن کاهش تابع در مسیر موردنظر (بزرگ بودن زاویه بین جهت کاهش و منفی جهت گرادیان) در تکرار n ام را نیز می توان با هر یک از نامساوی های زیر بررسی نمود.

$$\int_{x=0}^L P^n J'^n dx \leq -1.2 \int_{x=0}^L (J'^n)^2 dx \quad (39-2)$$

² Bill and Powell

$$\int_{x=0}^L P^n J'^n dx \geq -0.8 \int_{x=0}^L (J'^n)^2 dx \quad (۴۰-۲)$$

ضرایب 0.2، 1.2 و 0.8 در روابط فوق تجربی می باشند.

در نسخه پاول- بیل روش گرادیان مزدوج جهت کاهش (۳۳-۲) برای $n \geq 1$ مطابق الگوریتم زیر محاسبه می شود:

- بررسی نامساوی (۳۸-۲) در صورت برقراری نامساوی، قرار دادن $q = n-1$
- محاسبه ضریب γ^n از رابطه (۳۶-۲)
- در صورتی که $n = q+1$ ، قرار دادن $\varphi^n = 0$ و در غیر این صورت محاسبه φ^n از رابطه (۳۷-۲)
- محاسبه جهت کاهش از رابطه (۳۳-۲)
- در صورتی که $n = q+1$ بررسی نامساوی (۳۹-۲) و (۴۰-۲) در صورت برقراری هر یک از آنها، قرار دادن $\varphi^n = 0$ و محاسبه مجدد جهت کاهش از رابطه (۳۳-۲)، با قرار دادن $\gamma^n = \varphi^n = 0$ در هر تکرار، جهت کاهش $P^n(X)$ همان جهت گرادیان خواهد شد که معرف روش کاهش سریع می باشد.

مطابق الگوریتم ارائه شده با برقراری این نامساوی در مسائل معکوس که درجه غیرخطی بودن آنها زیاد باشد با شروع مجدد محاسبات، الگوریتم می تواند سرعت یافتن مینیمم را نسبت به دو روش قبل افزایش دهد.

برای انجام فرآیند تکراری و اصلاح نقاط مرزی مطابق رابطه زیر لازم است طول گام بهینه یعنی β^n و گرادیان تابعی $J^n(X)$ در هر تکرار محاسبه گردد. محاسبه این دو مقدار به ترتیب از حل معادله حساسیت و معادله الحاقی انجام می پذیرد.

$$f^{n+1}(X) = f^n(X) + \beta^n P^n(X), \quad n=1,2,\dots \quad (۴۱-۲)$$

۲-۹ روش نیوتن

روش نیوتن را می‌توان برای مینیم کردن توابع چند متغیره استفاده نمود. تقریب مرتبه دوم تابع

$f(\bar{X})$ در نقطه $\bar{X} = \bar{X}_i$ با استفاده از بسط سری تیلور به صورت زیر است:

$$f(\bar{X}) = f(\bar{X}_i) + \nabla f_i^T (\bar{X} - \bar{X}_i) + \frac{1}{2} (\bar{X} - \bar{X}_i)^T [J_i] (\bar{X} - \bar{X}_i) \quad (42-2)$$

که $[J_i] = [J]_{X_i}$ ماتریس هسین نام دارد و شامل مشتقات جزئی مرتبه دوم تابع f در نقطه $\bar{X}_i$

می‌باشد. با مساوی صفر قرار دادن مشتقات در رابطه فوق برای محاسبه مینیم تابع رابطه زیر به

دست می‌آید:

$$\frac{\partial f}{\partial X_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (43-2)$$

از دو رابطه اخیر نتیجه می‌شود:

$$\nabla f = \nabla f_i + [J_i] (\bar{X} - \bar{X}_i) = 0 \quad (44-2)$$

در صورتی که $[J_i]$ غیر منفرد باشد، می‌توان از رابطه فوق تقریب بسیار خوبی (در نقطه $\bar{X} = \bar{X}_{i+1}$)

به صورت زیر به دست آورد:

$$\bar{X}_{i+1} = \bar{X}_i - [J_i]^{-1} \nabla f_i \quad (45-2)$$

با صرف نظر کردن از ترم‌های مرتبه بالا در روابط (۴۲-۲) و (۴۵-۲) می‌توان از یک فرایند تکراری برای

محاسبه جواب $\bar{X}^*$ بهینه استفاده نمود.

می‌توان نشان داد که دنباله نقاط $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_{i+1}$ در صورتی که نقطه شروع $\bar{X}_1$ به اندازه کافی به

$\bar{X}^*$ نزدیک شود و $[J_1]$ غیر منفرد باشد، می‌تواند به جواب واقعی $\bar{X}^*$ همگرا شود. همچنین از

آنجائی که در روش نیوتن از مشتقات مرتبه دوم تابع مورد نظر (به فرم ماتریس $[J_i]$) استفاده می‌شود،

روش مرتبه دوم محسوب می‌شود. در ادامه نشان داده‌شده که با روش نیوتن می‌توان مینیمم یک تابع مرتبه دوم را با یک تکرار محاسبه نمود.

فرض کنید فرم تابع f به صورت زیر باشد:

$$f(\vec{X}) = \frac{1}{2} \vec{X}^T A \vec{X} + B^T \vec{X} + C \quad (۴۶-۲)$$

مینیمم تابع f در نقطه زیر به دست می‌آید:

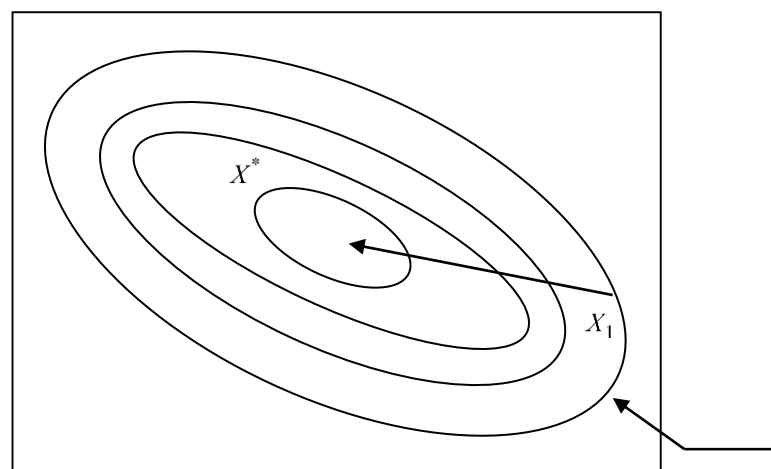
$$\vec{X}^* = -[A]^{-1} B \quad (۴۷-۲)$$

بنابراین روش تکراری با استفاده از رابطه (۴۵-۲) به صورت زیر خواهد شد:

$$\vec{X}_{i+1} = \vec{X}_i - [A]^{-1} ([A] \vec{X}_i + B) \quad (۴۸-۲)$$

که $\vec{X}_i$ نقطه شروع در تکرار i ام می‌باشد. از رابطه فوق جواب دقیق به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\vec{X}_{i+1} = \vec{X}^* = -[A]^{-1} B \quad (۴۹-۲)$$



شکل (۳-۲): مینیمم یک تابع درجه دوم در یک مرحله با روش نیوتن

شکل زیر چگونگی انجام این کار را نشان می‌دهد.

در صورتی که f تابعی مرتبه دوم نباشد، ممکن است روش نیوتن واگرا شود. برای جلوگیری از این اتفاق رابطه (۲-۴۵) را می‌بایست به صورت زیر اصلاح نمود:

$$\bar{X}_{i+1} = \bar{X}_i + \lambda_i^* \bar{S}_i = \bar{X}_i - \lambda_i^* [J_i]^{-1} \nabla f_i \quad (۲-۵۰)$$

که λ_i^* طول گام برای مینیمم کردن تابع در جهت $\bar{S} = -[J_i]^{-1} \nabla f_i$ است. این اصلاح امتیازاتی را به دنبال خواهد داشت. اول اینکه این حالت در مقایسه با روش قبلی در تعداد تکرار کمتری نقطه مینیمم را پیدا می‌کند. دوم اینکه در این روش یافتن نقطه مینیمم برای همه حالات، در صورتی که فرمولاسیون اصلی در برخی موارد، نقطه مینیمم را پیدا کند، امکان‌پذیر می‌باشد. سوم اینکه، این روش منجر به پیدا کردن نقطه ماکزیمم یا عطف نخواهد شد. با توجه به امتیازات گفته شده، خصوصیات زیر باعث می‌شود این روش در عمل آن‌چنان مؤثر نباشد:

۱. در این روش لازم است ماتریس $[J]$ با بعد $n \times n$ ذخیره شود.

۲. محاسبه درایه‌های ماتریس $[J]$ بسیار مشکل و در مواردی غیرممکن می‌باشد.

۳. در هر مرحله به محاسبه مقدار $[J_i]^{-1} \nabla f_i$ نیاز است.

خصوصیات ذکر شده، این روش را در مورد توابع پیچیده با تعداد زیاد متغیر، غیرکاربردی می‌کند.

۲-۱۰ روش مارکارت-لونبرگ^۱

روش کاهش سریع مقدار تابع را برای حالتی که بردار $\bar{X}_i$ از نقطه بهینه X^* دور باشد، کاهش می‌دهد، روش نیوتن در حالتی که بردار $\bar{X}_i$ به نقطه بهینه نزدیک باشد، از سرعت همگرایی بالایی

¹ Marquardt-Levenberg

برخوردار است. روش مارکارت روشی است که امتیازات هر دو روش گفته شده را در بردارد. این روش، درایه‌های قطری ماتریس هسین را به صورت زیر اصلاح می‌کند:

$$[J_i] = [J_i] + \alpha_i [I] \quad (51-2)$$

که $[I]$ ماتریس واحد و α_i مقدار ثابتی است که در این صورت، مثبت معین بودن ماتریس $[J_i]$ در صورتی که $[J_i]$ مثبت معین نباشد را تضمین می‌کند.

می‌توان این گونه گفت که، وقتی α_i به اندازه کافی بزرگ باشد (از مرتبه 10^4)، ترم $\alpha_i [I]$ بر ترم $[J_i]$ غالب شده و معکوس ماتریس $[J_i]$ به صورت زیر خواهد شد:

$$[J_i]^{-1} = [[J_i] + \alpha_i [I]]^{-1} \approx [\alpha_i [I]]^{-1} = \frac{1}{\alpha_i} [I] \quad (52-2)$$

در این صورت جهت کاهش $\bar{S}_i$ به صورت زیر خواهد شد:

$$\bar{S}_i = -[J_i]^{-1} \nabla f_i \quad (53-2)$$

S_i برای مقادیر بزرگ α_i همان جهت کاهش سریع است. در روش مارکارت، برای α_i در آغاز عملیات تکراری، مقدار بزرگی در نظر گرفته می‌شود و این مقدار در طول تکرارهای مختلف کاهش می‌یابد و نهایتاً به صفر می‌رسد، بنابراین با کاهش α_i از یک مقدار بزرگ به صفر، جهت جستجو در این روش، از روش کاهش سریع در آغاز عملیات تا روش نیوتن در انتها تغییر می‌کند.

$$\bar{X}_{i+1} = \bar{X}_i + \lambda_i^* \bar{S}_i = \bar{X}_i - \lambda_i^* [[J_i] + \alpha_i [I]]^{-1} \nabla f_i \quad (54-2)$$

که λ_i^* را می‌توان از بخش جستجوی یک بعدی محاسبه نمود.

۲-۱۱ روش شبه نیوتن

رابطه اصلی برای گسترش روش نیوتن، رابطه (۲-۴۴)، را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\nabla f(\bar{X}_i) = -[J_i](\bar{X} - \bar{X}_i) = 0 \quad (55-2)$$

$$\bar{X} = \bar{X}_i - [J_i]^{-1} \nabla f(\bar{X}_i) \quad (56-2)$$

که به شکل تکرارپذیر زیر نوشته می‌شود:

$$\bar{X}_{i+1} = \bar{X}_i - [J_i]^{-1} \nabla f(\bar{X}_i) \quad (57-2)$$

لازم به ذکر است که ماتریس $[J_i]$ از مشتقات مرتبه دوم تابع f تشکیل شده است. که برای یک تابع غیر مرتبه دوم (و در حالت کلی غیرخطی) با بردار X_i تغییر می‌کند. ایده اصلی در روش شبه نیوتن که به روش میزان متغیر نیز شناخته می‌شود، تقریب زدن ماتریس $[J_i]$ با ماتریس دیگری مثل $[B_i]$ می‌باشد که در آن‌ها فقط از مشتقات مرتبه اول f استفاده می‌شود. اگر $[J_i]^{-1}$ با $[B_i]$ تقریب زده شود، رابطه (53-2) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\bar{X}_{i+1} = \bar{X}_i - \lambda_i^* [B_i] \nabla f(\bar{X}_i) \quad (58-2)$$

که λ_i^* طول گام بهینه در جهت $\bar{S}_i$ می‌باشد.

$$\bar{S}_i = -[B_i] \nabla f_i \quad (59-2)$$

می‌توان مشاهده نمود که روش کاهش سریع حالت خاصی از رابطه فوق است که به ازای قرار دادن $[B_i] = [I]$ به دست می‌آید.

محاسبه $[B_i]$: برای استفاده از رابطه (55-2) می‌بایست ماتریس معکوس تقریبی $[B_i] = [A_i]^{-1}$ محاسبه شود. برای این کار می‌بایست در ابتدا گرادیان f حول یک نقطه مرجع اختیاری مثل $\bar{X}_0$ بسط تیلور داده شود. یعنی:

$$\nabla f(\bar{X}) \approx \nabla f(\bar{X}_0) + [J_0](\bar{X} - \bar{X}_0) \quad (60-2)$$

با تعریف d_i و g_i ، به صورت زیر:

$$\vec{d}_i = \vec{X}_{i+1} - \vec{X}_i \quad (۶۱-۲)$$

$$g_i = \nabla f_{i+1} - \nabla f_i \quad (۶۲-۲)$$

می‌توان رابطه زیر را به دست آورد:

$$d_i = [B_i] g_i \quad (۶۳-۲)$$

که $[B_i] = [A_i]^{-1}$ تقریبی از ماتریس $[J_0]^{-1}$ می‌باشد. رابطه فوق دستگاهی از n رابطه با n^2 درایه مجهول ماتریس $[B_i]$ را نشان می‌دهد. بنابراین برای $n > 1$ انتخاب $[B_i]$ یکتا نمی‌باشد و حتی می‌توان مقدار آن را نزدیک به $[J_0]^{-1}$ انتخاب نمود. در مقالات مختلف، روش‌های متعددی برای محاسبه $[B_i]$ طی یک فرایند تکراری (یعنی محاسبه $[B_{i+1}]$ با در اختیار داشتن $[B_i]$) پیشنهاد شده است نکته مهمی که باید به آن توجه داشت این است که با مقارن و مثبت معین بودن $[B_i]$ ماتریس $[B_{i+1}]$ نیز مقارن و مثبت معین باقی بماند.

۲-۱۲ مقایسه چهار روش اصلی برای حل مسائل هدایت حرارتی معکوس

روش اول : روش مارکارت- لونبرگ برای تخمین پارامتر.

روش دوم : روش گرادیان مزدوج برای تخمین پارامتر.

روش سوم : روش گرادیان مزدوج با مسئله الحاقی برای تخمین پارامتر.

روش چهارم : روش گرادیان مزدوج با مسئله الحاقی برای تخمین تابع.

هرچند روش‌های دیگری نیز وجود دارد چهار روش بالا به این دلیل انتخاب شده‌اند که آن‌ها برای پوشش دادن دشواری‌های مرتبط با حل مسائل هدایت حرارتی معکوس به اندازه کافی کلی، تطبیق پذیر، مستقیم و قوی هستند.

روش اول یک روش تکراری برای حل مسائل غیرخطی تخمین پارامتر است. این روش نخستین بار به وسیله لونبرگ در سال ۱۹۴۴ ارائه شد. بعداً در سال ۱۹۶۳ مارکارت روش مشابهی را با استفاده از یک تقریب متفاوت ارائه داد. هدف او به دست آوردن روشی نزدیک به روش گوس به منظور حداقل کردن نرم حداقل مربعات بود. این روش برای حل مسائل تخمین پارامتر غیرخطی کاملاً مؤثر است. هرچند ممکن است در مسائل تخمین پارامتر غیرخطی مشکلاتی به وجود آید از جمله تعداد زیاد پارامترهای مجهول و صرف زمان زیاد در محاسبه ماتریس حساسیت.

روش دوم همانند روش اول مستلزم محاسبه ماتریس حساسیت است که یک پروسه وقت گیر است به ویژه زمانی که تعداد پارامترهایی که باید تخمین زده شود زیاد باشد و به خصوص در مسائل غیرخطی.

روش سوم برای مسائل مستلزم تخمین ضرایب توابع آزمایشی مورد استفاده برای تقریب زدن یک تابع مجهول بسیار مناسب است. در این روش نیازی به محاسبه ماتریس حساسیت نمی باشد بنابراین نسبت به روش های قبلی سریع تر به جواب می رسد.

روش چهارم یک روش مبتنی بر تکرار قوی برای حل مسائل انتقال حرارت معکوس تخمین تابع است. در این روش هیچ یک از اطلاعات قبلی بر روی شکل تابعی تابع مجهول در دسترس نیست. در این روش نیازی به محاسبه ماتریس حساسیت نمی باشد بنابراین نسبت به روش های اول و دوم سریع تر به جواب می رسد.

فصل سوم : بیان مسئله و روش حل

۳-۱ استفاده از روش گرادیان مزدوج با مسئله الحاقی برای تخمین تابع^۱

این روش یک روش تکراری قوی برای حل مسائل انتقال حرارت معکوس می‌باشد. به منظور مشخص شدن قابلیت‌های این روش در حل مسائل انتقال حرارت معکوس، کاربردهای آن، در حل مسائل مختلف شامل مسئله تعیین شار حرارتی، مسئله تعیین ترم توان منبع حرارتی و مسئله تعیین شرایط مرزی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

گام‌های اساسی این روش در حل مسائل تخمین تابع به صورت زیر است:

✓ حل مسئله مستقیم

✓ حل مسئله معکوس

✓ مسئله حساسیت

✓ مسئله الحاقی

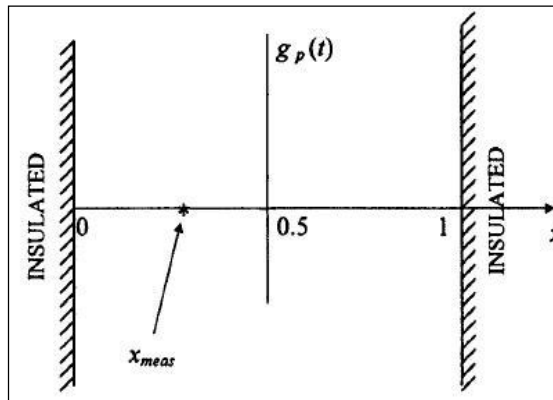
✓ معادله گرادیان

مراحل فوق را تا زمانی که به معیار توقف مورد نظر برسیم، تکرار می‌کنیم.

به منظور آشنایی بیشتر با این روش و کاربردهای آن، مثال‌های زیر مورد بررسی قرار می‌گیرند:

مثال اول مربوط به هدایت حرارتی گذرای خطی در صفحه‌ای که نسبت به ضخامت در جهت x بی‌بعد شده می‌باشد. دمای اولیه صفحه صفر درجه است و هر دو مرز در $x=0$ و $x=1$ عایق شده‌اند. برای زمان‌های $t > 0$ یک منبع حرارتی با توان $g_p(t)$ بر واحد سطح در وسط صفحه در موقعیت $x=0.5$ قرار گرفته است (مطابق شکل ۳-۱).

¹ Conjugate Gradient Method With adjoint Problem for Function Estimation



شکل (۱-۳): هندسه و مختصات مورد استفاده برای حل مسئله [۱۱۵]

برای حل این مسئله، تابع $S[g_p(t)]$ به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$S[g_p(t)] = \int_{t=0}^{t=t_f} \{Y(x_{meas}, t) - T(x_{meas}, t)\}^2 dt \quad (۱-۳)$$

در تابع فوق $T(x_{meas}, t)$ دمای اندازه گیری شده با استفاده از سنسور و $Y(x_{meas}, t)$ دمای محاسبه شده با استفاده از برنامه است. این تابع، تحت شرایط خاص متناسب با مسئله مستقیم حداقل می شود.

۳-۱-۱ مسئله مستقیم

در مسئله مستقیم $g_p(t)$ معلوم است. هدف مسئله مستقیم تعیین میدان دمای گذرا $T(x, t)$ ، با مشخص بودن $g_p(t)$ در صفحه است. فرمول بندی مسئله مستقیم در حالت بی بعد به صورت زیر است:

$$\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} + g_p(t)\delta(x-0.5) = \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \quad 0 < x < 1, t > 0 \quad (۲-۳)$$

$$\frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = 0 \quad x = 0, t > 0 \quad (۳-۳)$$

$$\frac{\partial T(1, t)}{\partial x} = 0 \quad x = 1, t > 0 \quad (۴-۳)$$

$$T(x,0) = 0 \quad 0 < x < 1, t = 0 \quad (5-3)$$

در روابط فوق δ تابع دلتای کرونیگر است که این تابع در $x = x_{meas}$ برابر با یک و در موقعیت‌های دیگر برابر با صفر است.

۳-۱-۲ مسئله معکوس

در مسئله معکوس، $g_p(t)$ تابع مجهولی از زمان است درحالی که دمای گذرای اندازه‌گیری شده $Y(t)$ در موقعیت x_{meas} روی محدوده زمانی $0 \leq t \leq t_f$ با استفاده از حل مستقیم، داده شده است. تابع حساسیت $\Delta T(x,t)$ و ضریب لاگرانژ $\lambda(x,t)$ به عنوان ابزارهای روش تکرار، برای حل مسئله معکوس موردنیازند. بنابراین برای حل مسئله معکوس باید دو مسئله کمکی ایجاد کرد: مسئله حساسیت و مسئله الحاقی.

۳-۱-۲-۱ مسئله حساسیت

هدف از تعریف این مسئله بررسی تغییرات دما به ازای تغییرات توان منبع حرارتی است. برای به دست آوردن معادله حساسیت فرض می‌کنیم، زمانی که $g_p(t)$ به اندازه $\Delta g_p(t)$ تغییر می‌کند، $T(x,t)$ به اندازه $\Delta T(x,t)$ تغییر می‌کند. بنابراین در مسئله مستقیم $T(x,t)$ با $[T(x,t) + \Delta T(x,t)]$ و $g_p(t)$ با $[g_p(t) + \Delta g_p(t)]$ جایگزین می‌شود و حاصل از مسئله مستقیم کم شده و به این ترتیب معادلات حاکم بر مسئله حساسیت به دست می‌آیند. این معادلات به صورت زیر می‌باشند [۱۱۵]:

$$\frac{\partial^2 \Delta T(x,t)}{\partial x^2} + \Delta g_p(t) \delta(x-0.5) = \frac{\partial \Delta T(x,t)}{\partial t} \quad 0 < x < 1, t > 0 \quad (6-3)$$

$$\frac{\partial \Delta T(0,t)}{\partial x} = 0 \quad x=0, t>0 \quad (۷-۳)$$

$$\frac{\partial \Delta T(1,t)}{\partial x} = 0 \quad x=1, t>0 \quad (۸-۳)$$

$$\Delta T(x,0) = 0 \quad 0 < x < 1, t=0 \quad (۹-۳)$$

روش انتخاب $\Delta g_p(t)$ در قسمت‌های بعدی توضیح داده شده است.

۳-۱-۲-۲ مسئله الحاقی

برای به دست آوردن معادله الحاقی، معادله (۲-۳) در ضریب لاگرانژ یعنی $\lambda(x,t)$ ضرب شده و در محدوده تغییرات $0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq t_f$ انتگرال گرفته و به $S[g_p(t)]$ اضافه می‌شود. به این ترتیب رابطه زیر به دست می‌آید [۱۱۵]:

$$S[g_p(t)] = \int_{t=0}^{t=t_f} \{Y(x_{meas},t) - T(x_{meas},t)\}^2 dt + \int_{x=0}^{x=1} \int_{t=0}^{t=t_f} \lambda(x,t) \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + g_p(t) \delta(x-0.5) - \frac{\partial T}{\partial t} \right] dt dx \quad (۱۰-۳)$$

برای محاسبه $\Delta S[g_p(t)]$ ، فرض می‌شود زمانی که $g_p(t)$ به اندازه $\Delta g_p(t)$ تغییر می‌کند، $T(x,t)$ به اندازه $\Delta T(x,t)$ تغییر کند. تغییرات $\Delta S[g_p(t)]$ مشتق جهتی $S[g_p(t)]$ را در جهت $\Delta g_p(t)$ می‌دهد [۱۱۷-۱۱۵].

با تعویض $T(x,t)$ با $[T(x,t) + \Delta T(x,t)]$ ، $g_p(t)$ با $[g_p(t) + \Delta g_p(t)]$ و $S[g_p(t)]$ با $\{S[g_p(t)] + \Delta S[g_p(t)]\}$ در معادله (۱۰-۳) و کم کردن نتیجه به دست آمده از معادله (۱۰-۳) و نادیده گرفتن جملات مرتبه ۲ رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\Delta S[g_p(t)] = \int_{t=0}^{t=t_f} \int_{x=0}^{x=1} 2\{Y(x_{meas}, t) - T(x_{meas}, t)\}^2 \Delta T(x, t) \delta(x - x_{meas}) dx dt$$

$$+ \int_{x=0}^{x=1} \int_{t=0}^{t=t_f} \lambda(x, t) \left[\frac{\partial^2 \Delta T}{\partial x^2} + \Delta g_p(t) \delta(x - 0.5) - \frac{\partial \Delta T}{\partial t} \right] dx dt \quad (11-3)$$

انتگرال دوم در سمت راست معادله (۱۱-۳) بعد از انتگرال گیری و به کار بردن شرایط مرزی و اولیه مسئله حساسیت، ساده تر می شود و بخش هایی از انتگرال که دارای $\Delta T(x, t)$ هستند به سمت صفر میل می کنند و مسئله الحاقی به صورت زیر برای تعیین ضریب لاگرانژ $\lambda(x, t)$ به دست می آید [۱۱۵]:

$$\frac{\partial \lambda(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 \lambda(x, t)}{\partial x^2} + 2[T(x, t) - Y(t)] \delta(x - x_{meas}) = 0 \quad 0 < x < 1, 0 < t < t_f \quad (12-3)$$

$$\frac{\partial \lambda(0, t)}{\partial x} = 0 \quad x = 0, 0 < t < t_f \quad (13-3)$$

$$\frac{\partial \lambda(1, t)}{\partial x} = 0 \quad x = 1, 0 < t < t_f \quad (14-3)$$

$$\lambda(x, t_f) = 0 \quad 0 < x < 1, t = t_f \quad (15-3)$$

۳-۲-۱-۳ معادله گرادیان

بعد از ساده سازی معادله (۱۱-۳) رابطه زیر برای محاسبه $\Delta S[g_p(t)]$ به دست می آید:

$$\Delta S[g_p(t)] = \int_{t=0}^{t=t_f} \lambda(0.5, t) \Delta g_p(t) dt \quad (16-3)$$

$\Delta S[g_p(t)]$ را می توان به صورت زیر بیان کرد [۱۱۵-۱۱۷]:

$$\Delta S[g_p(t)] = \int_{t=0}^{t=t_f} \nabla S[g_p(t)] \Delta g_p(t) dt \quad (17-3)$$

که $\nabla S[g_p(t)]$ گرادیان $S[g_p(t)]$ می باشد.

با مقایسه معادلات (۱۶-۳) و (۱۷-۳) رابطه زیر به دست می آید:

$$\nabla S[g_p(t)] = \lambda(0.5, t) \quad (18-3)$$

از آنجا که تابع مجهول در وسط قرار دارد $\nabla S[g_p(t)]$ برابر $\lambda(0.5, t)$ قرار داده می شود (این تساوی به محل تابع مجهول بستگی دارد و اگر به عنوان مثال تابع مجهول در موقعیت $x = \frac{2}{3}$ قرار داشته باشد

$$\nabla S[g_p(t)] \text{ برابر } \lambda\left(\frac{2}{3}, t\right) \text{ قرار داده می شود.}$$

۳-۱-۲-۴ روش تکرار

تابع مجهول $g_p(t)$ به وسیله حداقل کردن تابع $S[g_p(t)]$ (معادله (۱-۳))، تخمین زده می شود. معادله تکراری در روش گرادیان مزدوج برای تخمین $g_p(t)$ به صورت زیر است [۱۱۵، ۱۱۷، ۱۱۸]:

$$g_p^{k+1}(t) = g_p^k(t) - \beta^k d^k(t) \quad (19-3)$$

که اندازه گام بهینه β^k و $d^k(t)$ جهت جستجو به صورت زیر تعریف می شوند:

$$d^k(t) = \nabla S[g_p^k(t)] + \gamma^k d^{k-1}(t) \quad (20-3)$$

ضریب پیوستگی γ^k را می توان با استفاده از هر یک از فرمول های زیر محاسبه کرد [۱۱۶، ۱۱۸-۱۲۰]:

$$\gamma^k = \frac{\int_{t=0}^{t=t_f} \nabla S[g_p^k(t)] \{ \nabla S[g_p^k(t)] - \nabla S[g_p^{k-1}(t)] \} dt}{\int_{t=0}^{t=t_f} \{ \nabla S[g_p^{k-1}(t)] \}^2 dt} \quad (21-3)$$

که $\gamma^0 = 0$ فرض می شود.

$$\gamma^k = \frac{\int_{t=0}^{t=t_f} \{ \nabla S[g_p^k(t)] \}^2 dt}{\int_{t=0}^{t=t_f} \{ \nabla S[g_p^{k-1}(t)] \}^2 dt} \quad (22-3)$$

در این حالت هم $\gamma^0 = 0$ فرض می شود.

اندازه گام بهینه β^k با حداقل کردن تابع $S[g_p^{k+1}(t)]$ نسبت به β^k به صورت زیر به دست می آید:

$$\beta^k = \frac{\int_{t=0}^{t=t_f} \{ T[x_{meas}, t] - Y(t) \} \Delta T[x_{meas}, t] dt}{\int_{t=0}^{t=t_f} \{ \Delta T[x_{meas}, t] \}^2 dt} \quad (23-3)$$

که $\Delta T[x_{meas}, t]$ از حل معادله حساسیت با قرار دادن $\Delta g_p^k(t) = d^k(t)$ به دست می آید.

با بررسی معادله (۱۸-۳) مشخص می شود که معادله گرادیان در زمان نهایی (t_f) برابر با صفر می شود بنابراین حدس اولیه مورد استفاده برای $g_p(t)$ در $t = t_f$ با پروسه تکرار در روش گرادیان مزدوج هرگز تغییر نمی کند. اگر حدس اولیه خیلی از حل دقیق دور باشد، تابع تخمین زده شده در همسایگی t_f می تواند از حل دقیق منحرف شود. این اشکال به آسانی و با به کار بردن یک زمان نهایی بزرگ تر پوشش داده می شود. بنابراین تأثیرات حدس اولیه در زمان واقعی مسئله قابل توجه نیست.

۳-۱-۲-۵ معیار توقف

معیار توقف به وسیله معادله زیر بیان می شود:

$$S[g_p(t)] \leq \varepsilon \quad (۲۴-۳)$$

که $S[g_p(t)]$ با توجه به معادله (۱-۳) به دست می آید. اگر از داده های بدون نویز استفاده شود دقت ε را یک مقدار کوچک انتخاب می کنیم اما اگر داده های اندازه گیری شده دارای خطا باشد، مقدار ε از رابطه $\varepsilon = \sigma^2 t_f$ به دست می آید و مقدار σ ، $0.01T_{\max}$ در نظر گرفته می شود [۱۱۵].

برای شبیه سازی نویز و خطا در داده ها از رابطه زیر استفاده شده است [۱۱۵]:

$$Y(t_i) = Y_{ex}(t_i) + \omega \sigma \quad (۲۴-۳)$$

که در رابطه فوق σ انحراف معیار خطاهای اندازه گیری و ω متغیری تصادفی با توزیع نرمال، میانگین صفر و انحراف معیار واحد است. در این پایان نامه $-2.576 \leq \omega \leq 2.576$ و مقدار $\sigma = 0.01T_{\max}$ در نظر گرفته شده است. همچنین زمانی که از داده های نویز دار استفاده می کنیم مقدار $\varepsilon = \sigma^2 t_f$ در نظر گرفته شده است که t_f زمان نهایی است.

۳-۱-۳ الگوریتم حل

ابتدا یک حدس اولیه مثل $g_p^0(t)$ برای تابع $g_p(t)$ انتخاب شده و $k = 0$ قرار می گیرد سپس مراحل زیر به ترتیب انجام می شوند:

- ۱- حل مسئله مستقیم و محاسبه $T(x, t)$ بر مبنای $g_p^k(t)$ (معادلات (۲-۳)، (۳-۳)، (۴-۳) و (۵-۳)).

۲- بررسی معیار توقف و ادامه حل مسئله در صورت عدم دستیابی به دقت موردنظر (معادله ۳-۲۴).

۳- حل معادله الحاقی و محاسبه $\lambda(0.5, t)$ با دانستن $T(x_{meas}, t)$ و دمای اندازه‌گیری شده یعنی $Y(x_{meas}, t)$ (معادلات ۳-۱۲، ۳-۱۳، ۳-۱۴ و ۳-۱۵).

۴- محاسبه $\nabla S[g_p^k(t)]$ بعد از مشخص شدن $\lambda(0.5, t)$ (معادله ۳-۱۸).

۵- محاسبه γ^k با استفاده از هر یک از معادلات (۳-۲۱) یا (۳-۲۲) و $d^k(t)$ با استفاده از معادله (۳-۲۰) بعد از مشخص شدن $\nabla S[g_p^k(t)]$.

۶- قرار دادن $\Delta g_p^k(t) = d^k(t)$ و حل مسئله حساسیت برای به دست آوردن $\Delta T(x_{meas}, t)$ (معادلات ۳-۶، ۳-۷، ۳-۸ و ۳-۹).

۷- محاسبه β^k با توجه به مشخص شدن $\Delta T(x_{meas}, t)$ (معادله ۳-۲۳).

۸- محاسبه $g_p^{k+1}(t)$ با توجه به مشخص شدن β^k و $d^k(t)$ و برگشتن به مرحله ۱ (معادله ۳-۱۹).

روش تکراری ارائه شده در بالا آن قدر ادامه می‌یابد تا با توجه به معیار توقف انتخاب شده دقت موردنظر به دست آید.

زمانی که از چند سنسور استفاده شود نیز می‌توان از الگوریتم فوق استفاده کرد.

۳-۱-۴ شرح برنامه

در برنامه کامپیوتری تهیه شده ۹ سابروتین به منظور حل مسئله مستقیم، حل معادله الحاقی، حل مسئله حساسیت، حل انتگرال‌ها و محاسبه β^k (اندازه گام بهینه) و γ^k (ضریب پیوستگی) و نمایش خروجی‌های برنامه وجود دارد. ابتدا یک حدس اولیه برای تابع مجهول موردنظر (منبع حرارتی یا شار حرارتی) در نظر گرفته می‌شود و با فراخوانی سابروتین SOLVET1 مسئله مستقیم حل می‌شود تا

میدان دما به دست آید. با توجه به معیار توقف در نظر گرفته شده و با فراخوانی سابروتین INTEGRAL5، دمای محاسبه شده با دمای دقیق یا دمایی که توسط سنسور اندازه گیری می شود مقایسه می شود. در صورت عدم دستیابی به دقت مورد نظر، سابروتین SOLVELANDA فراخوانی می شود و معادله الحاقی حل می شود. با حل معادله الحاقی و محاسبه $\lambda(x, t)$ ، با توجه به محل قرار گرفتن تابع مجهول، معادله گرادیان حل می شود و $\nabla S[g_p^k(t)]$ به دست می آید سپس سابروتین های INTEGRAL1 و INTEGRAL2، فراخوانی می شود و γ^k محاسبه می شود. بعد از محاسبه $\nabla S[g_p^k(t)]$ و γ^k ، محاسبه می شود سپس سابروتین SOLVEB، فراخوانی می شود و با توجه به رابطه $\Delta T(x_{meas}, t), \Delta g_p^k(t) = d^k(t)$ به دست می آید سپس سابروتین های INTEGRAL3 و INTEGRAL4 فراخوانی می شود و β^k محاسبه می شود. با توجه به مشخص شدن β^k و $d^k(t)$ مقدار جدید $g_p(t)$ محاسبه می شود و تمام مراحل تا رسیدن به دقت مورد نظر تکرار می شود.

برای تدوین کد مورد نظر از زبان برنامه نویسی فرترن استفاده شده است. گسسته سازی معادلات حاکم با استفاده از روش تفاضل محدود صورت گرفته و برای حل معادلات از روش های گوس سایدل و الگوریتم ماتریس سه قطری (T.D.M.A) استفاده شده است.

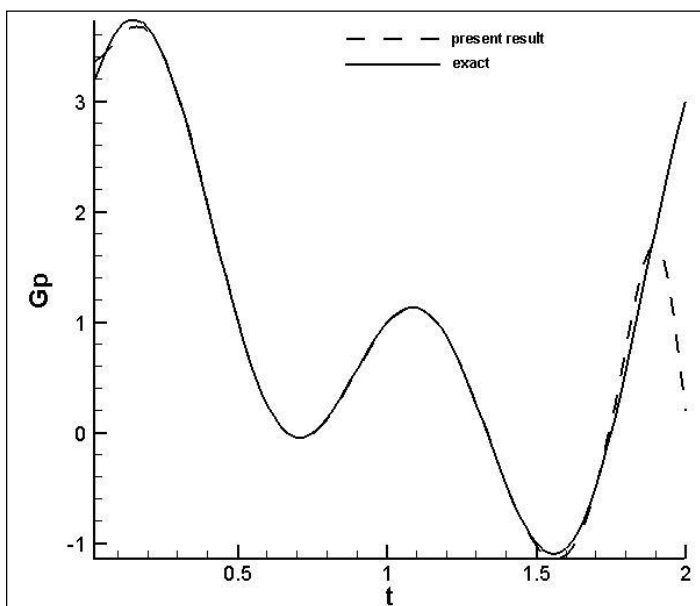
۳-۱-۵ حل مثال

همان طور که در شکل (۳-۱) نشان داده شده یک منبع حرارتی با توان $g_p(t)$ بر واحد سطح، در وسط سطح در موقعیت $x = 0.5$ قرار گرفته است. یک سنسور در وسط صفحه قرار گرفته یعنی $x_{meas} = 0.5$. زمان نهایی آزمایش (t_f) برابر 2 در نظر گرفته شده است و هدف پیدا کردن تابع $g_p(t)$ در محدوده زمانی $0 \leq t \leq t_f$ است. Δt برابر 0.02 در نظر گرفته شده است. با استفاده از روش گرادیان مزدوج، $g_p(t)$ تخمین زده می شود. در شکل های زیر نتایج به دست آمده با استفاده از

روش گرادیان مزدوج با تابع دقیق، مقایسه شده است. تابع دقیق $g_p(t)$ به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

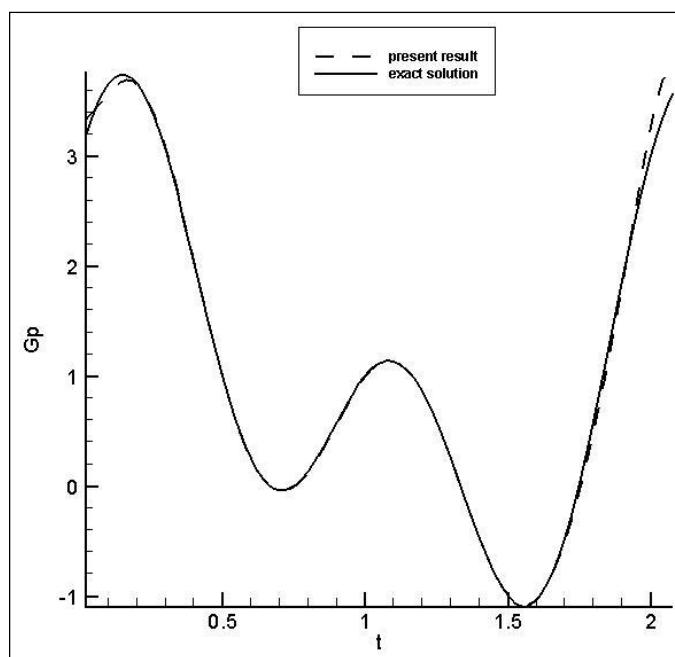
$$g_p(t) = 1 + \sin(\pi t) + \cos(\pi t) + \sin(2\pi t) + \cos(2\pi t) \quad (25-3)$$

حدس اولیه برای تابع یعنی $g^0_p(t)$ برابر با صفر در نظر گرفته شده است. همان طور که در قسمت قبل توضیح داده شد. معادله گرادیان در زمان نهایی (t_f) برابر با صفر می شود. بنابراین حدس اولیه مورد استفاده برای $g_p(t)$ در $t = t_f$ با پروسه تکرار در روش گرادیان مزدوج هرگز تغییر نمی کند. اگر حدس اولیه خیلی از حل دقیق دور باشد، تابع تخمین زده شده در همسایگی t_f می تواند از حل دقیق منحرف شود. این اشکال با کار بردن یک زمان نهایی بزرگ تر پوشش داده می شود به منظور بررسی این موضوع مطابق شکل های (۲-۳) تا (۴-۳)، تابع $g_p(t)$ با در نظر گرفتن زمان نهایی $t_f = 2$ و زمان های نهایی بزرگ تر یعنی $t_f = 2.2$ و $t_f = 2.4$ ، تخمین زده شده و مطابق شکل های (۳-۵) تا (۳-۷) تابع $g_p(t)$ با در نظر گرفتن زمان نهایی $t_f = 2$ و زمان های نهایی بزرگ تر یعنی $t_f = 2.2$ و $t_f = 2.4$ و با در نظر گرفتن داده های نويز دار که طبق رابطه (۳-۲۴) ایجاد می شوند تخمین زده شده است. در این حالت دقت لازم برای همگرایی برنامه از رابطه $\mathcal{E} = \sigma^2 t_f$ تبعیت می کند.



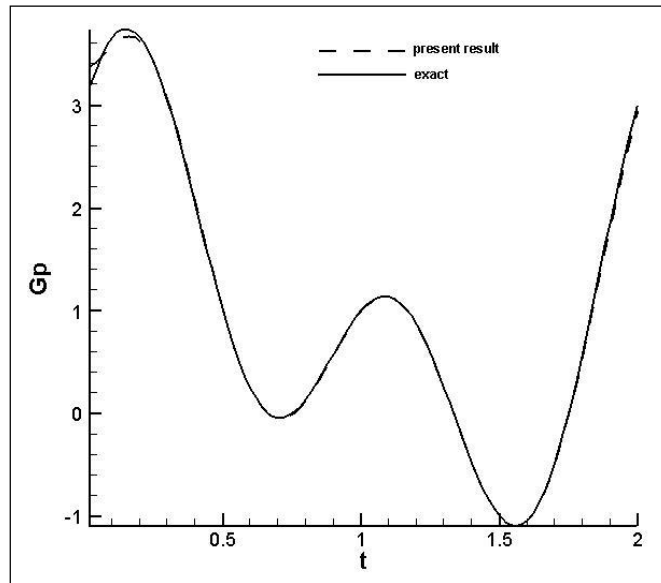
شکل (۳-۲): مقایسه تابع $g_p(t)$ محاسبه شده با استفاده از روش گرادیان مزدوج با تابع دقیق با در نظر گرفتن

$$t_f = 2$$



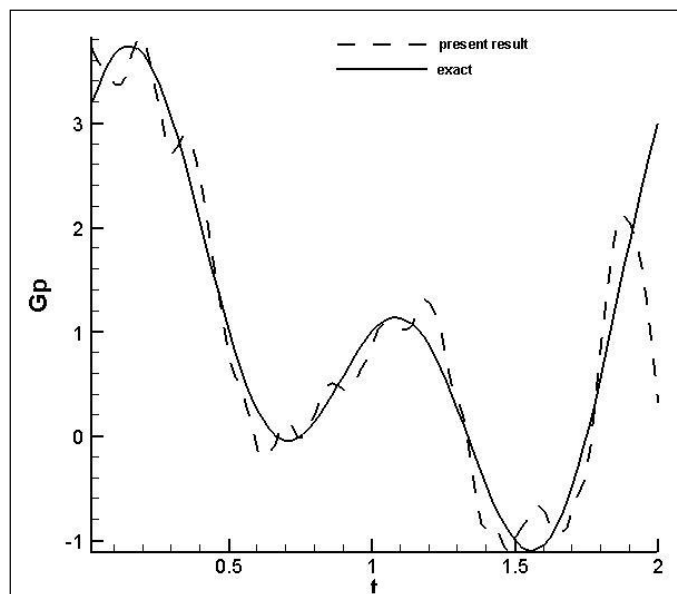
شکل (۳-۳): مقایسه تابع $g_p(t)$ محاسبه شده با استفاده از روش گرادیان مزدوج با تابع دقیق با در نظر گرفتن

$$t_f = 2.2$$

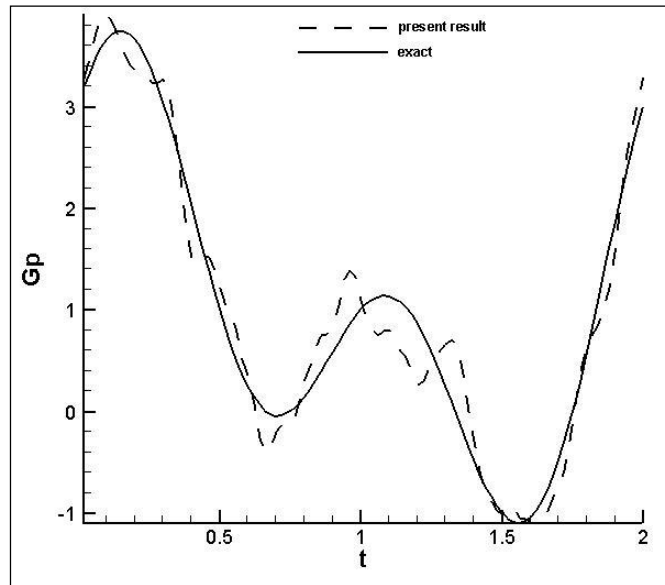


شکل (۳-۴): مقایسه تابع $g_p(t)$ محاسبه شده با استفاده از روش گرادیان مزدوج با تابع دقیق با در نظر گرفتن

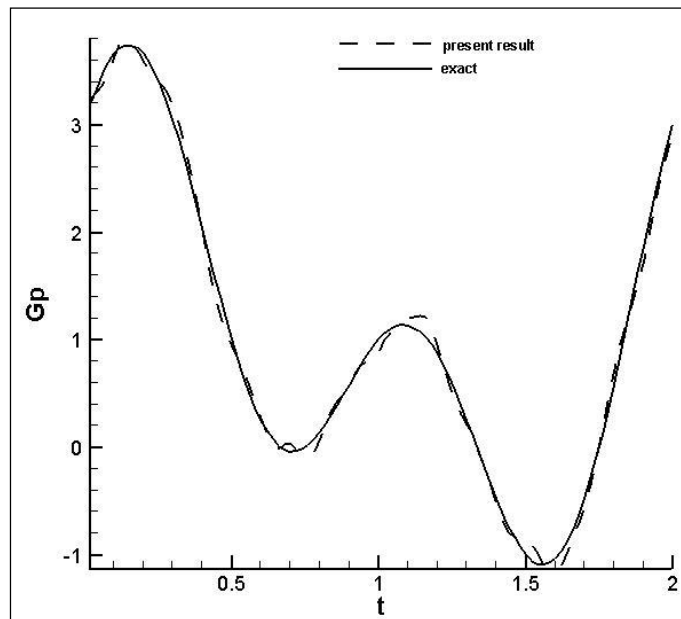
$$t_f = 2.4$$



شکل (۳-۵): مقایسه تابع $g_p(t)$ محاسبه شده با استفاده از روش گرادیان مزدوج با داده‌های نویز دار، با تابع دقیق با در نظر گرفتن $t_f = 2$



شکل (۳-۶): مقایسه تابع $g_p(t)$ محاسبه شده با استفاده از روش گرادیان مزدوج با داده‌های نویز دار، با تابع دقیق با در نظر گرفتن $t_f = 2.2$



شکل (۳-۷): مقایسه تابع $g_p(t)$ محاسبه شده با استفاده از روش گرادیان مزدوج با داده‌های نویز دار، با تابع دقیق با در نظر گرفتن $t_f = 2.4$

برای حالت اول (زمان نهایی $t_f = 2$) خطای ¹RMS و خطای ماکزیمم برای داده‌های بدون نویز به ترتیب 0.4094% و 1.03% و برای داده‌های نویز دار به ترتیب 0.4512% و 1.325% محاسبه شد. در حالت بدون نویز برنامه بعد از ۱۰۴ تکرار و در حالت با نویز برنامه بعد از ۱۴ تکرار همگرا شد.

برای حالت دوم (زمان نهایی $t_f = 2.2$) خطای RMS و خطای ماکزیمم برای داده‌های بدون نویز به ترتیب 0.05017% و 0.411% و برای داده‌های نویز دار به ترتیب 0.287% و 0.865% محاسبه شد. در حالت بدون نویز برنامه بعد از ۱۰۵ تکرار و در حالت با نویز برنامه بعد از ۱۸ تکرار همگرا شد.

برای حالت سوم (زمان نهایی $t_f = 2.4$) خطای RMS و خطای ماکزیمم برای داده‌های بدون نویز به ترتیب 0.03993% و 0.3431% و برای داده‌های نویز دار به ترتیب 0.1367% و 0.465% محاسبه شد. در حالت بدون نویز برنامه بعد از ۱۰۵ تکرار و در حالت با نویز برنامه بعد از ۱۲ تکرار همگرا شد.

همان‌طور که مشاهده می‌شود هنگامی که زمان نهایی آزمایش از $t_f = 2$ به $t_f = 2.2$ افزایش می‌یابد تغییر قابل توجهی در مقدار خطای RMS و خطای ماکزیمم، ایجاد می‌شود که به دلیل تأثیرات حدس اولیه بر روی حل مسئله است چراکه تابع گرادیان در زمان نهایی برابر با صفر می‌شود. خطای RMS برای هر دو حالت $t_f = 2$ و $t_f = 2.2$ در محدوده زمانی $(0 \leq t \leq 2)$ محاسبه می‌شود که محدوده زمانی موردنظر ما می‌باشد. هنگامی که زمان نهایی آزمایش از $t_f = 2$ به $t_f = 2.2$ افزایش می‌یابد خطای RMS تغییر چندانی نمی‌کند.

علت انحراف تابع تخمین زده شده از تابع دقیق در همسایگی $(t = t_f)$ که در شکل‌های (۳-۲) و (۳-۵) دیده می‌شود، صفر شدن گرادیان در زمان نهایی $(t = t_f)$ است. با توجه به شکل‌های (۳-۲) و (۳-۵) مشخص می‌شود که تابع تخمین زده شده در زمان نهایی برابر صفر می‌شود که دقیقاً حدس اولیه مورد استفاده برای حل مسئله است. همان‌طور که در شکل‌های (۳-۳) و (۳-۶) ملاحظه می‌شود

¹ Root Mean Square

هنگامی که t_f به 2.2 افزایش می‌یابد تأثیرات صفر شدن تابع گرادیان در زمان نهایی، در محدوده زمانی موردنظر ما یعنی $(0 \leq t \leq 2)$ عملاً قابل صرف‌نظر است. همان‌طور که در شکل‌های (۳-۴) و (۳-۷) ملاحظه می‌شود در همسایگی $t_f = 2$ با افزایش زمان نهایی از $t_f = 2.2$ به $t_f = 2.4$ ، جواب‌ها بهتر می‌شوند. در روابط فوق خطای RMS و خطای ماکزیمم با استفاده از رابطه‌های زیر محاسبه می‌شوند [۱۲۱]:

$$e_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \left[\frac{G_{est}(t_i) - G_{ex}(t_i)}{G_{ex}(t_i)} \times 100 \right]^2} \quad (۳-۲۶)$$

$$e_{max} = \frac{[G_{est}(t_i) - G_{ex}(t_i)]}{G_{ex}(t_i)} \times 100 \quad (۳-۲۷)$$

که در روابط فوق $G_{est}(t_i)$ تابع تخمین زده‌شده در زمان t_i ، $G_{ex}(t_i)$ تابع دقیق در زمان t_i و I تعداد اندازه‌گیری‌ها می‌باشد. خطای RMS مقیاسی است که تفاوت بین مقادیر تخمین زده‌شده و مقادیر واقعی را در کل تابع نشان می‌دهد. خطای ماکزیمم معیاری است برای نشان دادن بیشترین اختلاف بین مقادیر تخمین زده‌شده و مقادیر واقعی و معمولاً برحسب درصد محاسبه می‌شود.

به‌عنوان مثالی دیگر مدلی مشابه با مثال قبل در نظر گرفته می‌شود، با این تفاوت که منبع حرارتی وجود ندارد و به انتهای صفحه شار حرارتی $q(t)$ به‌صورت زیر وارد می‌شود:

$$q(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0.15 < t < 0.5 \\ 0 & \text{for } t \leq 0.15 \text{ and } t \geq 0.5 \end{cases} \quad (۳-۲۸)$$

زمان نهایی آزمایش t_f برابر با یک در نظر گرفته‌شده است. یک سنسور مورد استفاده قرار گرفته که در موقعیت $x_{meas} = 1$ قرار داده‌شده است. برای حل مسئله Δt برابر با 0.005 و ΔX برابر با 0.01 در نظر گرفته‌شده است. معادله حاکم و شرایط مرزی و اولیه در حالت بی‌بعد به‌صورت زیر می‌باشند:

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \quad 0 < x < 1, t > 0 \quad (29-3)$$

$$\frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = 0 \quad x = 0, t > 0 \quad (30-3)$$

$$\frac{\partial T(1,t)}{\partial x} = q(t) \quad x = 1, t > 0 \quad (31-3)$$

$$T(x,0) = 0 \quad 0 < x < 1, t = 0 \quad (32-3)$$

با استفاده از روش گرادیان مزدوج تابع $q(t)$ تخمین زده می شود به طوری که تابع زیر حداقل شود:

$$S[q(t)] = \int_{t=0}^{t=t_f} \{Y(x_{meas}, t) - T(x_{meas}, t)\}^2 dt \quad (33-3)$$

نکته ای که باید در حل این مسئله مورد توجه قرار گیرد این است که با توجه به این که تابع مجهول در

انتهای صفحه یعنی در موقعیت $x=1$ قرار دارد، $\nabla S[g_p(t)]$ برابر با $\lambda(1,t)$ می باشد یعنی:

$$\nabla S[g_p(t)] = \lambda(1,t) \quad (34-3)$$

سایر مراحل حل مسئله شبیه به مثال قبل می باشد.

۳-۲ تخمین توان منبع حرارتی گذرای خطی در حالت دوبعدی

در این بخش کاربرد روش گرادیان مزدوج با مسئله الحاقی برای تخمین توان یک منبع حرارتی گذرای خطی در یک مسئله هدایت حرارتی دوبعدی، مورد بررسی قرار گرفته است. فرض می شود در مورد شکل تابعی تابع مجهول، هیچ اطلاعاتی در دسترس نیست. گام های اساسی برای حل مسئله همانند گام های اساسی بیان شده در حالت یک بعدی است.

۳-۲-۱ مسئله مستقیم

مسئله در نظر گرفته شده شامل هدایت حرارتی گذرای دوبعدی در یک ناحیه مربعی بی بعد $0 < X < 1$ و $0 < Y < 1$ می باشد که در ابتدا در دمای صفر درجه سانتی گراد قرار دارد. برای زمان های $\tau > 0$ ، یک منبع حرارتی خطی با توان $G(\tau)$ برای تولید انرژی فعال شده درحالی که سطوح جانبی عایق شده اند. فرمول بندی مسئله مستقیم در حالت بی بعد به صورت زیر است [۱۱۵]:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} + G(\tau) \delta(X - X^*) \delta(Y - Y^*) = \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \quad 0 < X < 1, \quad 0 < Y < 1, \quad \tau > 0 \quad (3-35)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} = 0 \quad X=0, \quad X=1, \quad \tau > 0 \quad (3-36)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad Y=0, \quad Y=1, \quad \tau > 0 \quad (3-37)$$

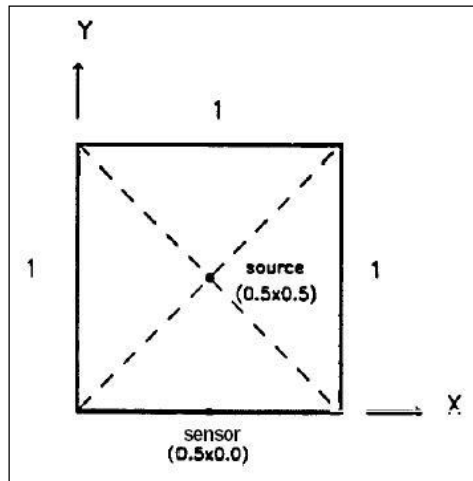
$$\theta(X, Y, \tau) = 0 \quad 0 < X < 1, \quad 0 < Y < 1, \quad \tau = 0 \quad (3-38)$$

که X^* و Y^* موقعیت منبع حرارتی را نشان می دهند. در مسئله مستقیم، هدف، تعیین میدان دما است درحالی که $G(\tau)$ معلوم فرض می شود. معادله $G(\tau)$ به صورت زیر است [۱۲۰]:

$$G(\tau) = \begin{cases} 4.5 & \text{for } 0.0148 < t < 0.0542 \\ 0 & \text{for } t \leq 0.0148 \text{ and } t \geq 0.0542 \end{cases} \quad (3-39)$$

۳-۲-۲ مسئله معکوس

مسئله معکوس شامل تخمین تغییرات زمانی توان منبع حرارتی خطی با استفاده از دماهای گذرای خوانده شده از روی یک سنسور است. شکل (۳-۸) موقعیت منبع حرارتی و سنسور را نشان می دهد.



شکل (۳-۱): موقعیت منبع حرارتی خطی و سنسور دما

مسئله معکوس باید به صورتی حل شود که تابع زیر حداقل شود:

$$S[G(\tau)] = \sum_{m=1}^M \int_{\tau=0}^{\tau_F} [Z_m(\tau) - \theta_m(\tau)]^2 d\tau \quad (۳-۴۰)$$

که $Z_m(\tau)$ و $\theta_m(\tau)$ به ترتیب دماهای اندازه‌گیری شده و تخمین زده شده هستند و M ، تعداد سنسورهاست. به عنوان ابزارهای روش تکرار، مسائل حساسیت و الحاقی به ترتیبی که در زیر توضیح داده خواهد شد، ایجاد می‌شوند.

۳-۲-۱ مسئله حساسیت

برای به دست آوردن معادله حساسیت فرض می‌شود، زمانی که $G(\tau)$ به اندازه $\Delta G(\tau)$ تغییر می‌کند، $\theta(X, Y, \tau)$ به اندازه $\Delta \theta(X, Y, \tau)$ تغییر می‌کند. بنابراین در مسئله مستقیم $\theta(X, Y, \tau)$ با $[\theta(X, Y, \tau) + \Delta \theta(X, Y, \tau)]$ و $G(\tau)$ با $[G(\tau) + \Delta G(\tau)]$ تعویض می‌شود و حاصل از مسئله مستقیم کم شده و به این ترتیب معادلات حاکم بر مسئله حساسیت به دست می‌آیند. این معادلات به صورت زیر می‌باشند [۱۱۵]:

$$\nabla^2 [\Delta\theta(X, Y, \tau)] + \Delta G(\tau) \delta(X - X^*) \delta(Y - Y^*) = \frac{\partial [\Delta\theta(X, Y, \tau)]}{\partial \tau} \quad (41-3)$$

$$0 < X < 1, 0 < Y < 1, \tau > 0$$

$$\frac{\partial(\Delta\theta)}{\partial X} = 0 \quad X=0, X=1, \tau > 0 \quad (42-3)$$

$$\frac{\partial(\Delta\theta)}{\partial Y} = 0 \quad Y=0, Y=1, \tau > 0 \quad (43-3)$$

$$\Delta\theta(X, Y, \tau) = 0 \quad 0 < X < 1, 0 < Y < 1, \tau = 0 \quad (44-3)$$

که ∇^2 بیانگر لاپلاسین در دستگاه مختصات دکارتی می باشد.

۳-۲-۲-۲ مسئله الحاقی

برای به دست آوردن معادله الحاقی، معادله (۳۵-۳) در ضریب لاگرانژ یعنی $\lambda(X, Y, \tau)$ ضرب شده و از نتایج به دست آمده روی محدوده های زمانی و مکانی انتگرال گرفته می شود سپس این نتایج به $S[G(\tau)]$ اضافه می شود. به این ترتیب رابطه زیر به دست می آید [۱۱۵]:

$$S[G(\tau)] = \sum_{m=1}^M \int_{\tau=0}^{\tau_f} [Z_m(\tau) - \theta_m(\tau)]^2 d\tau + \int_{\tau=0}^{\tau_f} \int_{Y=0}^1 \int_{X=0}^1 \lambda(X, Y, \tau) \left[\nabla^2 \theta + G(\tau) \delta(X - X^*) \delta(Y - Y^*) - \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \right] dX dY d\tau \quad (45-3)$$

برای محاسبه $\Delta S[G(\tau)]$ فرض می شود زمانی که $G(\tau)$ به اندازه $\Delta G(\tau)$ تغییر می کند، $\theta(X, \tau)$ به- اندازه $\Delta\theta(X, \tau)$ تغییر کند. با تعویض $\theta(X, \tau)$ با $[\theta(X, \tau) + \Delta\theta(X, \tau)]$ ، $G(\tau)$ با $[G(\tau) + \Delta G(\tau)]$ و $S[G(\tau)]$ با $\{S[G(\tau)] + \Delta S[G(\tau)]\}$ در معادله (۴۵-۳) و کم کردن نتیجه به دست آمده از معادله (۴۵-۳) و نادیده گرفتن جملات مرتبه ۲ رابطه الحاقی برای تعیین ضریب لاگرانژ $\lambda(X, Y, \tau)$ به صورت زیر به دست می آید [۱۱۵]:

$$\nabla^2 \lambda + \sum_{m=1}^M 2[\theta_m(\tau) - Z_m(\tau)] \delta(X - X_m) \delta(Y - Y_m) = -\frac{\partial \lambda}{\partial \tau} \quad (46-3)$$

$$0 < X < 1, 0 < Y < 1, 0 < \tau < \tau_f$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial X} = 0 \quad X=0, X=1, 0 < \tau < \tau_f \quad (47-3)$$

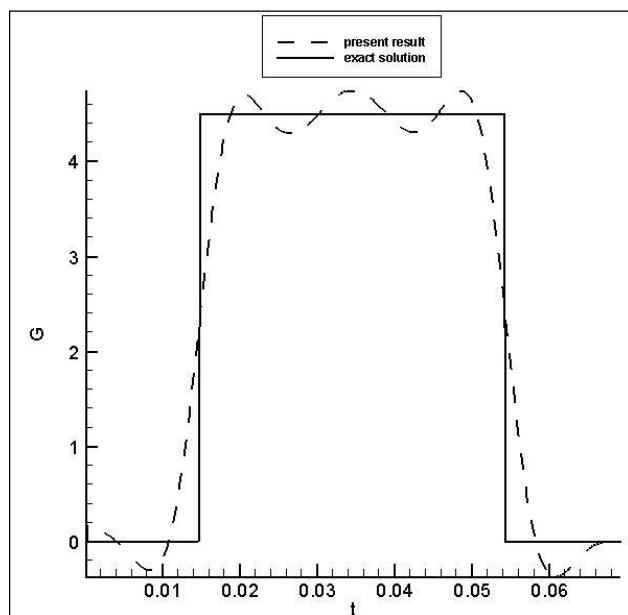
$$\frac{\partial \lambda}{\partial Y} = 0 \quad Y=0, Y=1, 0 < \tau < \tau_f \quad (48-3)$$

$$\lambda = 0 \quad 0 < X < 1, 0 < Y < 1, \tau = \tau_f \quad (49-3)$$

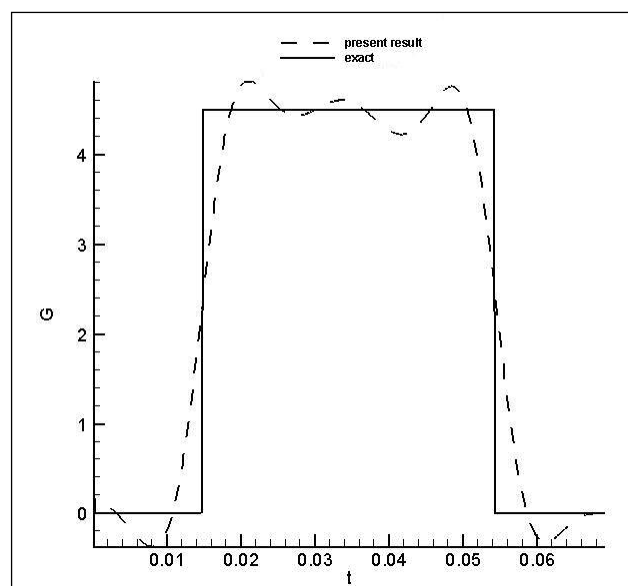
که نقاط (X_m, Y_m) موقعیت سنسور ها را نشان می دهد.

بقیه معادلات مشابه معادلات ارائه شده در قسمت های قبل می باشند.

به منظور بررسی دقت روش مورد استفاده، یک تابع پله ای برای $G(\tau)$ در نظر گرفته شده است چراکه توابعی که دارای ناپیوستگی و نقاط تیز هستند، مشکل ترین مسائل از نظر پوشش با روش های معکوس می باشند. چنین توابعی را معمولاً برای آزمایش و مقایسه الگوریتم ها و روش های مختلف حل مسائل معکوس انتخاب می کنند. از یک شبکه 25×25 برای گسسته سازی معادلات استفاده شده است. زمان بی بعد نهایی $\tau_f = 6.9 \times 10^{-2}$ در نظر گرفته شده و به 562 گام زمانی مساوی تقسیم شده است. تعداد نقاط شبکه و گام زمانی طوری انتخاب شده اند که شرط پایداری ون- نیومن برقرار باشد $\frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} \leq 0.25$. حدس اولیه برای تابع مجهول صفر در نظر گرفته شده است. در شکل (۹-۳) تابع دقیق $G(\tau)$ با مقدار محاسبه شده، مقایسه شده است و در شکل (۱۰-۳) این مقایسه به وسیله داده های نویز دار صورت گرفته است.



شکل (۳-۹): مقایسه تابع دقیق $G(\tau)$ با مقدار محاسبه شده در مدل ۲ بعدی



شکل (۳-۱۰): مقایسه تابع دقیق $G(\tau)$ با مقدار محاسبه شده با داده های نویز دار در مدل ۲ بعدی

خطای RMS و خطای ماکزیمم برای داده های بدون نویز به این ترتیب 0.521 % و 45.14% و برای داده های نویز دار به ترتیب 0.562 % و 48.31% محاسبه شد. در هنگام استفاده از داده های نویز دار دقت لازم برای همگرایی برنامه از رابطه $\varepsilon = \sigma^2 t_f$ تبعیت می کند. در حالت بدون نویز برنامه بعد

از ۱۲۸ تکرار و در حالت با نویز برنامه بعد از ۴۶ تکرار همگرا شد. برای حل این مسئله از زمان نهایی $t_f = 0.08$ استفاده شده است تا اثرات ناشی از صفر شدن تابع گرادیان در زمان نهایی قابل چشم‌پوشی باشد. همان‌طور که در شکل‌ها ملاحظه می‌شود هرچند که نوساناتی در نزدیکی نقاط ناپیوستگی دیده می‌شود، انطباق خوبی بین نتایج وجود دارد.

فصل چهارم : روش تحقیق و حل مسئله

تخمین توان منبع حرارتی جهت درمان تومور در حالت متقارن محوری

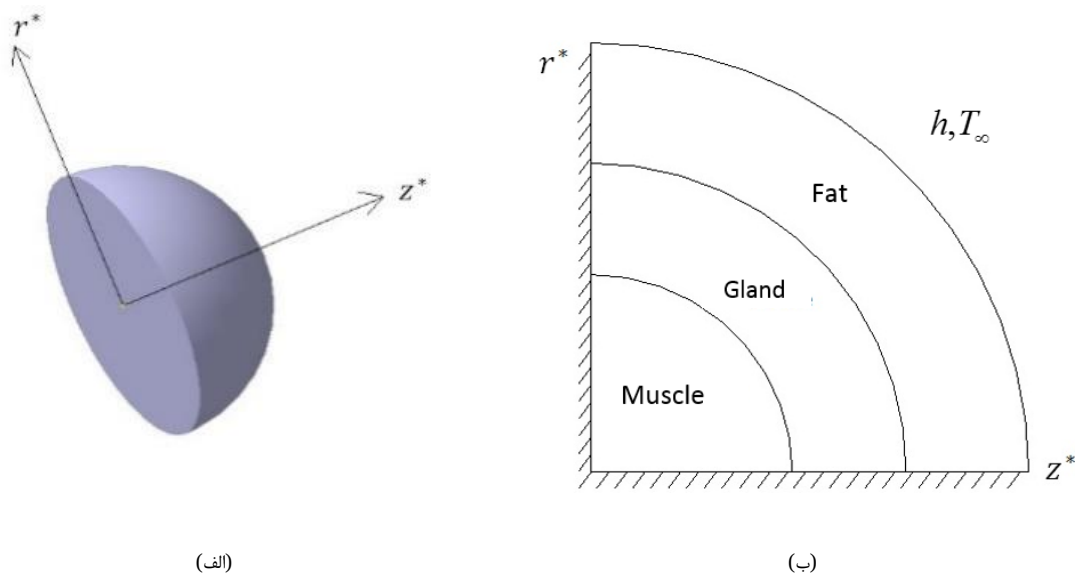
تعیین دقیق توزیع دما در گرما درمانی (هایپرترمیا) به عنوان فاکتور اساسی در به کارگیری این روش به عنوان درمان ترکیبی تومورهای سرطانی است. از دیدگاه کنترل کیفی و به منظور نتیجه بهتر درمان ، تعیین دمای بافت سالم در مکان های مختلف و همین طور بافت سرطانی با توجه به متغیرهای مختلفی نظیر انتقال حرارت از چشمه خارجی به داخل بدن، تبادل حرارتی در نواحی مختلف ، میزان انتقال خون و نقش آن در انتقال حرارت از اهمیت بسزایی برخوردار است. اثرات مخربی نظیر hot spots در سطح پوست و همین طور حساسیت بافت های سالم به دماهای بالا نیاز به مدل دقیق تئوری و اندازه گیری دقیق را بیشتر نمایان می سازد. تحقیقات نشان می دهد که هایپرترمیا به عنوان درمان الحاقی می تواند میزان اثربخشی روش های متداول درمانی همانند شیمی درمانی و رادیوتراپی را افزایش می دهد و لذا توجه به آن امری است که امروزه به طور وسیعی مورد توجه قرار گرفته است.

مهم ترین نکته در تصمیم گیری گرما درمانی این است که دمای بافت به مرحله مرگ سلولی در بافت سالم نرسد ، درعین حال که بافت های سرطانی به دمای ۴۲-۴۳ رسیده و از بین بروند. لذا محاسبات دقیق توزیع حرارت عددی که بتواند محیط و شرایط هایپرترمیا را شبیه سازی و در انتخاب نوع و مشخصات چشمه گرمایی مورد استفاده و همین طور زمان گرمادهی به پزشک کمک نماید هدف نهایی این تحقیق است.

۴-۱ روش حل مستقیم

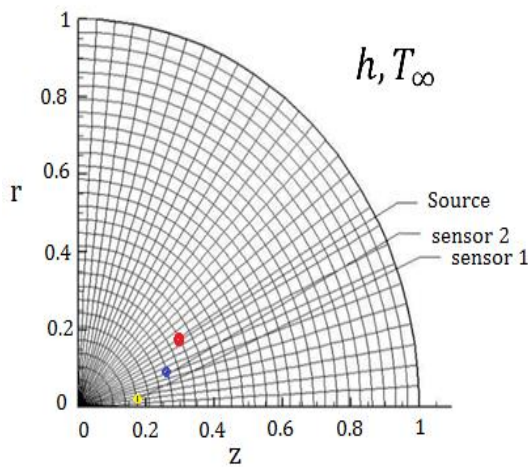
در تحقیق حاضر هدف این است که با توجه به توزیع دما در بافت سرطانی مقدار توان منبع حرارتی را که لازم است تا سلول های سرطانی از بین بروند با استفاده از روش معکوس تخمین زده شود. برای انجام این کار بافت سینه را به صورت یک نیمکره در نظر گرفته و در حالت سه لایه مسئله حل می شود. برای حل معادلات حاکم بعد از بی بعد سازی ، از روش تفاضل محدود و روش مختصات

عمومی استفاده شده و معادلات از صفحه فیزیکی به صفحه محاسباتی که دارای شبکه هموار است انتقال داده می شوند. برای حل معادلات معکوس از روش گرادیان مزدوج با مسئله الحاقی که یکی از قوی ترین روش های حل مسائل معکوس است استفاده شده است. در شکل (۴-۱) هندسه مسئله و شرایط مرزی مشخص شده اند.

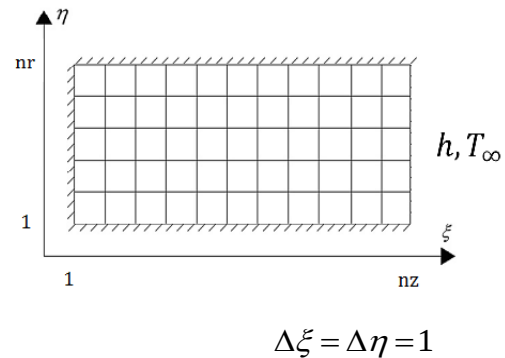


شکل (۴-۱): الف) هندسه مسئله ب) شرایط مرزی مسئله

در شکل (۴-۲) صفحه فیزیکی و صفحه محاسباتی به طور شماتیک نشان داده شده است. محل قرار گرفتن منبع حرارتی در نقطه (۵,۲) می باشد و محل قرارگیری سنسور اول در نقطه (۴,۶) و سنسور دوم در نقطه (۶,۸) می باشد.



(الف)



(ب)

شکل (۲-۴): (الف) صفحه فیزیکی (ب) صفحه محاسباتی

همان‌طور که در شکل (۲-۴) مشخص است، سطح خارجی در معرض جریان هوا قرار دارد و منبع حرارتی داخل بافت قرار گرفته است. هدف ما به دست آوردن این منبع حرارتی در فاصله زمانی $0 \leq t \leq t_f$ با استفاده از توزیع دمای مشخص در دونقطه است. داده‌های ورودی می‌توانند دارای نویز هم باشند. برای حل عددی، از روش مختصات عمومی استفاده می‌شود. در این روش محاسبات ابتدا در صفحه محاسباتی (ξ, η) که دارای شبکه هموار است انجام می‌شود و سپس نتایج به صفحه فیزیکی (r, z) منتقل می‌شوند. صفحه محاسباتی و شرایط مرزی در شکل‌های (۳-۴) و (۴-۴) نشان داده شده‌اند.

انتقال حرارت در بافت نرم می‌تواند با استفاده از معادله پنس که بر اساس هدایت حرارتی فوریه‌ای می‌باشد توصیف شود [۱۴]. مدل پنس برای بافت‌های زنده استفاده می‌شود. این مدل بر اساس فرضیه انتقال انرژی بین رگ‌های خونی و بافت اطراف آن می‌باشد. با توجه به مدل پنس، تمام مبادله انرژی توسط جریان خون با دبی جریان و اختلاف دمای بین خون و بافت متناسب است. معادله سه‌بعدی پنس به صورت زیر است:

$$\nabla^2(KT) + \rho_b c_b \dot{w}_b (T_{a0} - T) + q_m''' + G_p(t) \delta(r - r^{**}) \delta(z - z^{**}) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (۱-۴)$$

در معادله فوق r^{**} و z^{**} محل تابع مجهول (منبع حرارتی) را نشان می‌دهند.

که در آن T دما برحسب $^{\circ}\text{C}$ ، ρ چگالی بافت kg/m^3 ، c گرمای ویژه بافت برحسب $\text{J/(kg}^{\circ}\text{C)}$ ، K ضریب هدایت حرارتی بافت $\text{W/(m}^{\circ}\text{C)}$ ، $\dot{w}_b$ نرخ نفوذ خون برحسب kg/(mas) ، c_b گرمای ویژه خون، T_{a0} دمای شریان، q_m''' نرخ تولید گرمای متابولیکی W/m^3 ، می‌باشند. مقادیر واقعی این خصوصیات فیزیکی در جدول (۱-۴) نشان داده شده است [122].

	h (mm)	k (W/mK)	ρ (kg/m3)	c (J/kgK)	q_m''' (W/m3)
fat	5.0[125]	0.21[123]	930[124]	2770[124]	400[123]
Gland	43.4[125]	0.48[123]	1050[124]	3770[124]	700[123]
Muscle	15[125]	0.48[123]	1100[124]	3800[126]	700[123]
Tumor	--	0.48[123]	1050[124]	3852[126]	5000[41]

جدول (۱-۴): مشخصات حرارتی بافت سینه

معادله حرارت پنس در سیستم مختصات استوانه‌ای، در حالت متقارن محوری، به صورت زیر می‌باشد:

$$K \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \rho_b c_b \dot{w}_b (T_{a0} - T) + q_m''' + G_p(t) \delta(r - r^{**}) \delta(z - z^{**}) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (۲-۴)$$

که δ تابع دلتای کرونیکر است.

z^{**} و r^{**} محل قرار گرفتن منبع حرارتی هستند.

مدل سه لایه معادله پنس به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(Kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \rho_b c_b \dot{w}_b (T_{a0} - T) + q_m''' + G_p(t) \delta(r - r^{**}) \delta(z - z^{**}) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (۳)$$

۴)

که در اینجا K تابع دما نیست. اما برای هر بافت مقدار آن متفاوت است. با فرض متغیرهای بی بعد و

ثابت بودن K برای هر بافت داریم [۱۱۵]:

$$r^* = \frac{r}{R}, \theta = \frac{T - T_{a0}}{qR/K}, t^* = \frac{\alpha t}{R^2}, z^* = \frac{z}{R} \quad (۴-۴)$$

فرم بی بعد معادله (۳-۴) به صورت زیر استخراج می شود:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial \theta}{\partial r^*} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^{*2}} - \frac{\rho_b c_b \dot{w}_b R^2}{K} \theta + \frac{q''' R}{q_0} + G_p(t^*) \delta(r^* - r^{**}) \delta(z^* - z^{**}) = \frac{\partial \theta}{\partial t^*} \quad (۵-۴)$$

شرایط مرزی:

روی مرز سمت چپ و پایین (در صفحه فیزیکی)

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 \quad (۶-۴)$$

روی مرز بالا (در صفحه فیزیکی)

$$q - q_c = 0 \longrightarrow q = q_c \quad (۷-۴)$$

از طرفی طبق تعریف داریم:

$$-K \frac{\partial T}{\partial n} = h(T - T_\infty) \quad (۸-۴)$$

$$T = \frac{q_0 R}{K} \theta + T_{a0} \longrightarrow \frac{\partial T}{\partial n} = \frac{q_0 R}{K} \frac{\partial \theta}{\partial n} + 0$$

$$-K \frac{\partial T}{\partial n} = -q_0 R \frac{\partial \theta}{\partial n} \quad (9-4)$$

$$\theta_{\infty} = \frac{T_{\infty} - T_{a0}}{\frac{q_0 R}{K}} \longrightarrow T_{\infty} = \frac{q_0 R}{K} \theta_{\infty} + T_{a0}$$

$$T - T_{\infty} = \frac{q_0 R}{K} (\theta - \theta_{\infty}) \quad (10-4)$$

از (۸-۴) و (۹-۴) و (۱۰-۴) داریم:

$$-q_0 R \frac{\partial \theta}{\partial n} = h \frac{q_0 R}{K} (\theta - \theta_{\infty}) \quad (11-4)$$

سپس داریم:

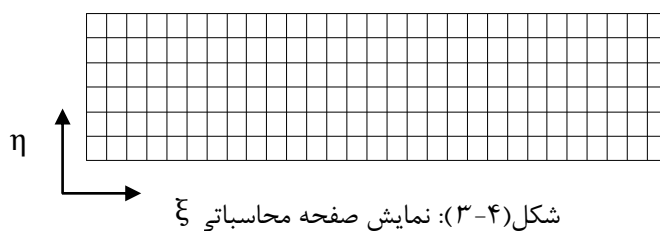
$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = -\frac{h}{K} (\theta - \theta_{\infty}) \quad (12-4)$$

از طرف دیگر به عنوان شرط اولیه مسئله هم داریم:

$$\theta(z^*, r^*, 0) = 0 \quad (13-4)$$

در روابط فوق h بر حسب $\frac{W}{m^2 K}$ و K بر حسب $\frac{W}{m K}$ می باشد.

۴-۱-۱ تبدیل معادلات در صفحه محاسباتی:



شکل (۴-۳): نمایش صفحه محاسباتی ξ

$$\Delta \xi = \Delta \eta = 1$$

شکل (۴-۳) صفحه محاسباتی را نشان می‌دهد. با اعمال روش مختصات عمومی، مشتقات از صفحه فیزیکی به صفحه محاسباتی به صورت زیر انتقال داده می‌شوند:

با توجه به اینکه محور Z محور تقارن است و با دوران حول محور Z ، مدل سه‌بعدی با تقارن محوری به دست می‌آید، حال روابط زیر بین فضای فیزیکی و محاسباتی تعریف می‌شوند:

$$z = z(\xi, \eta) \quad (۴-۱۴)$$

$$r = r(\xi, \eta) \quad (۴-۱۵)$$

قانون زنجیری برای مشتق‌های پاره‌ای به صورت زیر است:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (۴-۱۶)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (۴-۱۷)$$

مشتق‌های پاره‌ای با استفاده از اندیس‌ها نشان داده می‌شوند، مثلاً $\frac{\partial \xi}{\partial z} = \xi_z$ با توجه به اینکه z, r

توابعی از ξ, η می‌باشند محاسبه مشتق‌های آن‌ها برحسب ξ, η ساده است، همچنین می‌توان گفت ξ, η نیز به صورت ضمنی توابعی از z, r هستند و می‌توان آن‌ها را به صورت زیر نمایش داد:

$$\xi = \xi(z, r) \quad (۴-۱۸)$$

$$\eta = \eta(z, r) \quad (۱۹-۴)$$

ولی محاسبه مشتق‌های η, ξ بر حسب z, r پیچیده‌تر است و به همین دلیل از ژاکوبین‌های تبدیل استفاده می‌شود. ژاکوبین J عبارت است از : نسبت سطح (نسبت حجم در حالت سه‌بعدی) در فضای فیزیکی به سطح در فضای محاسباتی.

در معادلات قبل جمله‌هایی مانند $\eta_z, \eta_r, \xi_z, \xi_r$ ظاهر شدند این مشتق‌های تبدیل ، متریک‌های انتقال و یا به صورت ساده تر ، متریک نامیده می‌شوند . تفسیر متریک‌ها با تقریب زیر مشخص می‌شود .

$$\xi_z = \frac{\partial \xi}{\partial z} \cong \frac{\Delta \xi}{\Delta z} \quad (۲۰-۴)$$

عبارت فوق ، نشان می‌دهد که متریک‌ها نسبت طول قوس‌ها در فضای محاسباتی به طول قوس‌های مشابه در فضای فیزیکی هستند . اکنون به محاسبه متریک‌ها پرداخته می‌شود :

$$d \xi = \xi_z dz + \xi_r dr \quad (۲۱-۴)$$

$$d \eta = \eta_z dz + \eta_r dr \quad (۲۲-۴)$$

که آن‌ها را به صورت فشرده زیر می‌توان نوشت :

$$\begin{bmatrix} d \xi \\ d \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_z & \xi_r \\ \eta_z & \eta_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dz \\ dr \end{bmatrix} \quad (۲۳-۴)$$

با معکوس کردن متغیرهای مستقل معادلات زیر به دست می‌آیند :

$$dz = z_\xi d\xi + z_\eta d\eta \quad (۲۴-۴)$$

$$dr = r_\xi d\xi + r_\eta d\eta \quad (۲۵-۴)$$

حال آن‌ها به صورت فشرده زیر نوشته می‌شوند :

$$\begin{bmatrix} dz \\ dr \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_\xi & z_\eta \\ r_\xi & r_\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} \quad (۲۶-۴)$$

$$\begin{bmatrix} dz \\ dr \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_\xi & z_\eta \\ r_\xi & r_\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} \quad (27-4)$$

از مقایسه روابط (23-4) و (27-4) می توان نتیجه گرفت :

$$\begin{bmatrix} \xi_z & \xi_r \\ \eta_z & \eta_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_\xi & z_\eta \\ r_\xi & r_\eta \end{bmatrix}^{-1} \quad (28-4)$$

$$\xi_{z^*} = \frac{1}{J} r_\eta^* \quad (29-4)$$

$$\xi_{r^*} = -\frac{1}{J} z_\eta^* \quad (30-4)$$

$$\eta_{z^*} = -\frac{1}{J} r_\xi^* \quad (31-4)$$

$$\eta_{r^*} = \frac{1}{J} z_\xi^* \quad (32-4)$$

$$J = z_\xi^* r_\eta^* - r_\xi^* z_\eta^* \quad (33-4)$$

در روابط فوق ، J ژاکوبین تبدیل نامیده می شود.

$$\theta_{z^*} = \frac{1}{J} (r_\eta^* \theta_\xi - r_\xi^* \theta_\eta) \quad (34-4)$$

$$\theta_{r^*} = \frac{1}{J} (-z_\eta^* \theta_\xi - z_\xi^* \theta_\eta) \quad (35-4)$$

$$\nabla^2 \theta = \frac{1}{J^2} [\alpha \theta_{\xi\xi} - 2\beta \theta_{\xi\eta} + \gamma \theta_{\eta\eta}] + [(\nabla^2 \xi) \theta_\xi + (\nabla^2 \eta) \theta_\eta] \quad (36-4)$$

$$\alpha = z_\eta^{*2} + r_\eta^{*2} \quad (37-4)$$

$$\beta = z_\xi^* z_\eta^* + r_\xi^* r_\eta^* \quad (38-4)$$

$$\gamma = z_\xi^{*2} + r_\xi^{*2} \quad (39-4)$$

$$\nabla^2 \xi = \frac{k_1(r_{\xi\xi}^* z_{\eta}^* - z_{\xi\xi}^* r_{\eta}^*) + k_2(r_{\xi\eta}^* z_{\eta}^* - z_{\xi\eta}^* r_{\eta}^*) + k_3(r_{\eta\eta}^* z_{\eta}^* - z_{\eta\eta}^* r_{\eta}^*)}{J}, \quad (40-4)$$

$$\nabla^2 \eta = \frac{k_1(z_{\xi\xi}^* r_{\xi}^* - r_{\xi\xi}^* z_{\xi}^*) + k_2(z_{\xi\eta}^* r_{\xi}^* - r_{\xi\eta}^* z_{\xi}^*) + k_3(z_{\eta\eta}^* r_{\xi}^* - r_{\eta\eta}^* z_{\xi}^*)}{J}, \quad (41-4)$$

$$k_1 = \frac{1}{J^2} (z_{\eta}^{*2} + r_{\eta}^{*2}) \quad (42-4)$$

$$k_2 = \frac{-2}{J^2} (z_{\xi}^* z_{\eta}^* + r_{\xi}^* r_{\eta}^*) \quad (43-4)$$

$$k_3 = \frac{1}{J^2} (z_{\xi}^{*2} + r_{\xi}^{*2}) \quad (44-4)$$

۲-۱-۴ تبدیل شرایط مرزی در صفحه محاسباتی:

مشتق عمودی θ در امتداد خط ξ ثابت و η ثابت با استفاده از روابط زیر به دست می‌آیند [۱۲۷،

:۱۲۸]

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial n} \right|_{\xi=1} = \frac{1}{J\alpha^{1/2}} (\alpha\theta_{\xi} - \beta\theta_{\eta}) \quad (45-4)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial n} \right|_{\eta=1} = \frac{1}{J\gamma^{1/2}} (-\beta\theta_{\xi} + \gamma\theta_{\eta}) \quad (46-4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi=1 \longrightarrow \frac{1}{J\alpha^{1/2}} (\alpha\theta_{\xi} - \beta\theta_{\eta}) = 0 \end{array} \right. \quad (47-4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi=nz \longrightarrow \frac{1}{J\alpha^{1/2}} (\alpha\theta_{\xi} - \beta\theta_{\eta}) = -\frac{h}{K} (\theta - \theta_{\infty}) \end{array} \right. \quad (48-4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta=1, \eta=nr \longrightarrow \frac{1}{J\gamma^{1/2}} (-\beta\theta_{\xi} - \gamma\theta_{\eta}) = 0 \end{array} \right.$$

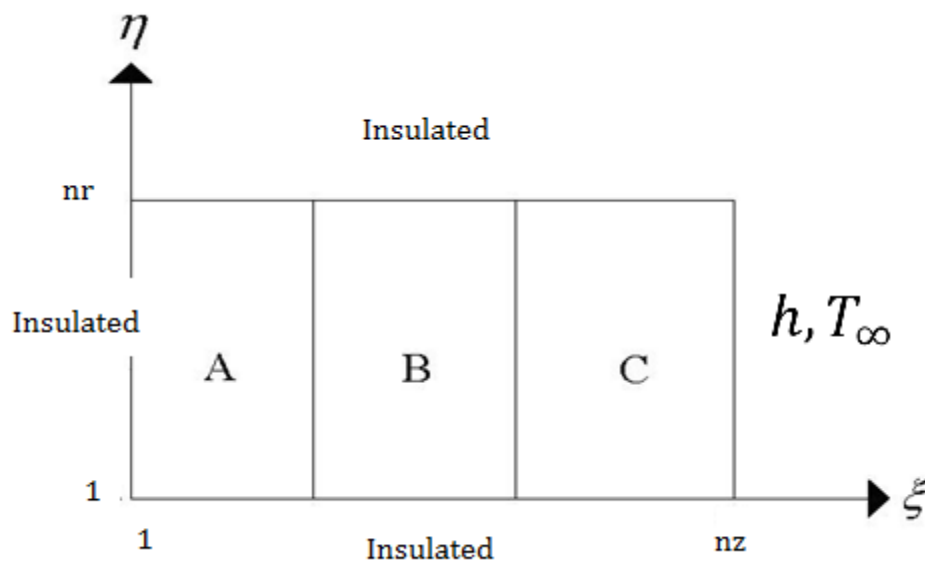
(۴۹-۴)

در فصل مشترک بافت‌ها که در شکل (۴-۴) نشان داده شده است، از روابط زیر استفاده می‌شوند:

$$q_{\xi in} + q_{\eta in} = q_{\xi out} + q_{\eta out} \quad (۵۰-۴)$$

$$k_A (\theta_{i,j} - \theta_{i-1,j}) + \frac{2k_A k_B}{k_A + k_B} (\theta_{i,j} + \theta_{i-1,j}) = k_B (\theta_{i+1,j} - \theta_{i,j}) + \frac{2k_A k_B}{k_A + k_B} (\theta_{i,j+1} + \theta_{i,j}) \quad (-۴ \quad ۵۱)$$

$$k_B (\theta_{i,j} - \theta_{i-1,j}) + \frac{2k_C k_B}{k_C + k_B} (\theta_{i,j} + \theta_{i-1,j}) = k_C (\theta_{i+1,j} - \theta_{i,j}) + \frac{2k_C k_B}{k_C + k_B} (\theta_{i,j+1} + \theta_{i,j}) \quad (-۴ \quad ۵۲)$$



شکل (۴-۴): شرایط مرزی در صفحه محاسباتی در مدل سه لایه

۴-۲ مسئله معکوس

مسئله معکوس شامل تخمین توابع منبع حرارتی وابسته به زمان با استفاده از دماهای اندازه‌گیری شده در یک یا چند نقطه است. مسئله معکوس باید به صورتی حل شود که تابع زیر به حداقل برسد [۱۱۵].

$$S[G_p(t^*)] = \frac{1}{2} \int_{t^*=0}^{t^*=t_f^*} \sum_{m=1}^{N_s} [\theta(\xi_m, \eta_m, t^*, G_p) - Y_m(t^*)]^2 dt^* \quad (۴-۵۳)$$

در رابطه فوق $\theta(\xi_m, \eta_m, t^*, G_p)$ و $Y_m(t^*)$ به ترتیب دماهای تخمین زده‌شده و اندازه‌گیری شده هستند. همچنین، تعداد سنسورها یک و دو در نظر گرفته شده است.

۴-۲-۱ مسئله الحاقی

معادله بالا باید با استفاده از روش گرادیان مزدوج که روشی مبتنی بر تکرار است مینیمم می‌شود. در این الگوریتم، جهت جستجوی توان منبع حرارتی مجهول وابسته به گرادیان تابع خطاست، که با معادلات الحاقی حل می‌شود [۱۱۵، ۱۱۸، ۱۲۹]:

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial \lambda}{\partial r^*} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z^{*2}} - \frac{\rho_b c_b \dot{W}_b R^2}{K} \lambda + \sum_{m=1}^{N_s} [\theta(\xi, \eta, t^*, G_p) - Y_m(t^*)] \delta(\eta - \eta_m) \delta(\xi - \xi_m) = \frac{\partial \lambda}{\partial t^*} \quad (۴-۵۴)$$

۵۴

)

در معادلات فوق در فصل مشترک بافت‌ها از روابط زیر استفاده می‌شود.

$$k_A (\lambda_{i,j} - \lambda_{i-1,j}) + \frac{2k_A k_B}{k_A + k_B} (\lambda_{i,j} + \lambda_{i-1,j}) = k_B (\lambda_{i+1,j} - \lambda_{i,j}) + \frac{2k_A k_B}{k_A + k_B} (\lambda_{i,j+1} + \lambda_{i,j}) \quad (۴-۵۵)$$

$$k_B(\lambda_{i,j} - \lambda_{i-1,j}) + \frac{2k_C k_B}{k_C + k_B}(\lambda_{i,j} + \lambda_{i-1,j}) = k_C(\lambda_{i+1,j} - \lambda_{i,j}) + \frac{2k_C k_B}{k_C + k_B}(\lambda_{i,j+1} + \lambda_{i,j}) \quad (56-4)$$

۴-۲-۱-۱ شرایط مرزی روی تمام مرزها

$$\frac{\partial \lambda}{\partial n} = 0 \quad (57-4)$$

$$\lambda(z^*, r^*, t_f^*) = 0 \quad (58-4)$$

۴-۲-۱-۲ شرایط مرزی در صفحه محاسباتی

$$\begin{cases} \xi = 1, \xi = n_z \longrightarrow \frac{1}{J\alpha^{\frac{1}{2}}}(\alpha\lambda_\xi - \beta\lambda_\eta) = 0 & (59-4) \\ \eta = 1, \eta = n_r \longrightarrow \frac{1}{J\alpha^{\frac{1}{2}}}(-\beta\lambda_\xi - \gamma\lambda_\eta) = 0 & (60-4) \end{cases}$$

۴-۲-۲ مسئله حساسیت

برای به دست آوردن مسئله حساسیت فرض می‌شود زمانی که $G_p(t^*)$ به اندازه $\Delta G_p(t^*)$ تغییر می‌کند، $\theta(r^*, z^*, t^*)$ به اندازه $\Delta\theta(r^*, z^*, t^*)$ تغییر می‌کند. بنابراین، در مسئله مستقیم، به جای $G_p(t^*)$ و $\theta(r^*, z^*, t^*)$ به ترتیب $[G_p(t^*) + \Delta G_p(t^*)]$ و $[\theta(r^*, z^*, t^*) + \Delta\theta(r^*, z^*, t^*)]$ قرار داده شده و نتیجه حاصل از مسئله مستقیم کم می‌شود [۱۱۵]. به این ترتیب معادله حساسیت به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial^2 \Delta\theta}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial \Delta\theta}{\partial r^*} + \frac{\partial^2 \Delta\theta}{\partial z^{*2}} - \frac{\rho_b c_b \dot{w}_b R^2}{K} \Delta\theta + \frac{q'' R}{q_0} + \Delta G_p(t) \delta(r^* - r^{**}) \delta(z^* - z^{**}) = \frac{\partial \Delta\theta}{\partial t^*} \quad (61-4)$$

که در اینجا $\Delta\theta$ دمای حساسیت می باشد. در فصل مشترک بافت ها، با استفاده از مدل شکل (۴-۴)

(۴)، روابط زیر استفاده می شوند:

$$k_A(\Delta\theta_{i,j} - \Delta\theta_{i-1,j}) + \frac{2k_A k_B}{k_A + k_B}(\Delta\theta_{i,j} + \Delta\theta_{i-1,j}) = k_B(\Delta\theta_{i+1,j} - \Delta\theta_{i,j}) + \frac{2k_A k_B}{k_A + k_B}(\Delta\theta_{i,j+1} + \Delta\theta_{i,j}) \quad (۴-۴)$$

۶۲)

$$k_B(\Delta\theta_{i,j} - \Delta\theta_{i-1,j}) + \frac{2k_C k_B}{k_C + k_B}(\Delta\theta_{i,j} + \Delta\theta_{i-1,j}) = k_C(\Delta\theta_{i+1,j} - \Delta\theta_{i,j}) + \frac{2k_C k_B}{k_C + k_B}(\Delta\theta_{i,j+1} + \Delta\theta_{i,j}) \quad (۴-۴)$$

۶۳)

۴-۲-۲-۱ شرایط مرزی

روی مرز سمت چپ پایین

$$\frac{\partial \Delta\theta}{\partial n} = 0 \quad (۴-۶۴)$$

روی مرز بالا

$$\frac{\partial \Delta\theta}{\partial n} = -\frac{h}{K} \Delta\theta \quad (۴-۶۵)$$

از طرفی به عنوان شرط اولیه مسئله داریم:

$$\Delta\theta(z^*, r^*, 0) = 0$$

۴-۲-۲-۲ شرایط مرزی در صفحه محاسباتی

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = 1 \longrightarrow \frac{1}{J\alpha^{\frac{1}{2}}}(\alpha\Delta\theta_{\xi} - \beta\Delta\theta_{\eta}) = 0 \quad (۴-۶۶) \\ \xi = n_z \longrightarrow \frac{1}{J\alpha^{\frac{1}{2}}}(\alpha\Delta\theta_{\xi} - \beta\Delta\theta_{\eta}) = -\frac{h}{K} \Delta\theta \quad (۴-۶۷) \\ \eta = 1, \eta = n_r \longrightarrow \frac{1}{J\gamma^{\frac{1}{2}}}(-\beta\Delta\theta_{\xi} - \gamma\Delta\theta_{\eta}) = 0 \quad ۹۹ \end{array} \right.$$

(۶۸-۴)

۴-۲-۳ معادله گرادیان

$$\nabla S[G_p(t^*)] = \lambda(\xi, \eta, t^*) \quad (۶۹-۴)$$

که η و ξ به محل تابع مجهول (منبع حرارتی) بستگی دارند.

۴-۲-۴ روش تکرار

توان منبع حرارتی گذرا $G_p(t^*)$ که یک تابع مجهول است. معادله تکرار برای تخمین $G_p(t^*)$ به صورت زیر است [۱۲۹, ۱۱۶, ۱۱۵]:

$$G_p^{k+1}(t^*) = G_p^k(t^*) - \beta^k d^k(t^*) \quad (۷۰-۴)$$

که k شماره تکرار است. جهت جستجو $d^k(t^*)$ به صورت زیر محاسبه می شود [۱۲۰, ۱۱۶, ۱۱۵]:

$$d^k(t^*) = \nabla S[G_p^k(t^*)] + \gamma^k d^{k-1}(t^*) \quad (۷۱-۴)$$

در اینجا ضریب γ^k به صورت زیر محاسبه می شود [۱۳۰, ۱۱۸, ۱۱۵]:

$$\gamma^k = \frac{\int_{t^*=0}^{t_f^*} \{\nabla S[G_p^k(t^*)]\}^2 dt^*}{\int_{t^*=0}^{t_f^*} \{\nabla S[G_p^{k-1}(t^*)]\}^2 dt^*} \quad (۷۲-۴)$$

که γ^0 صفر فرض می شود.

$$\gamma^0 = 0$$

جهت جستجوی گام بهینه β^k با مینیمم سازی تابع $S[G_p^{k+1}(t^*)]$ نسبت به β^k به صورت زیر به دست می آید.

$$\beta^k = \frac{\int_{t^*=0}^{t_f^*} \sum_{m=1}^{N_s} [\theta(\xi_m, \eta_m, t^*, G_p^k) - Y_m(t^*)] \Delta\theta(\xi_m, \eta_m, t^*, d^k) dt^*}{\int_{t^*=0}^{t_f^*} \sum_{m=1}^{N_s} [\Delta\theta(\xi_m, \eta_m, t^*, d^k)]^2 dt^*} \quad (73-4)$$

که $\Delta\theta(\xi_m, \eta_m, t^*, d^k) dt^*$ از حل مسئله حساسیت با در نظر گرفتن $\Delta G_p^k(t^*) = d^k(t^*)$ به دست می آید.

۵-۲-۴ معیار توقف

فرآیند تکرار که در بالا ذکر شد تا برقراری معیار توقف ادامه می یابد. معیار توقف به صورت زیر است:

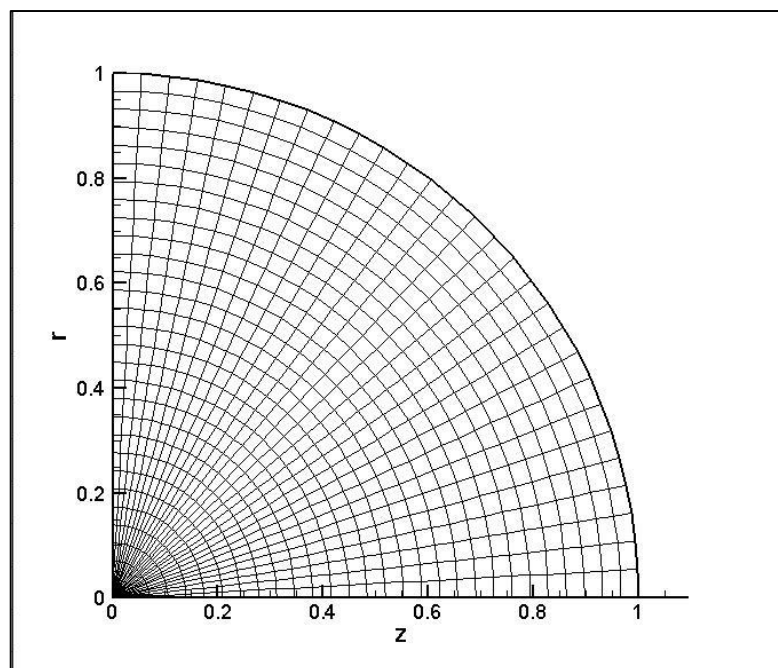
$$S[G_p(t^*)] \leq \varepsilon \quad (74-4)$$

مقدار ε طوری انتخاب می شود که اگر خطا در داده های اندازه گیری وجود داشت دقت نتایج مورد قبول باشد. با توجه به توضیحات داده شده در بخش ۳-۱-۲-۵ مقدار ε برای داده های بدون نویز مقدار بسیار کوچکی انتخاب می شود و برای داده های نویز دار مقدار ε از رابطه $\varepsilon = M\sigma^2 t_f^*$ به دست می آید که در این رابطه M تعداد سنسورها می باشد و مقدار σ ، $0.01T_{\max}$ در نظر گرفته می شود.

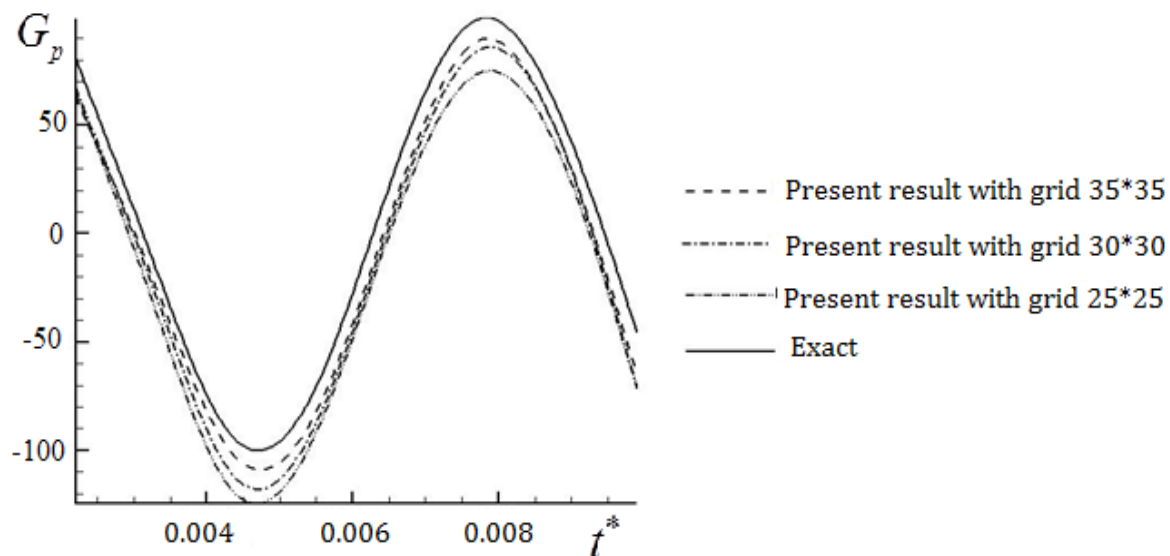
فصل پنجم : نتایج و بحث

۵-۱ مقایسه توان منبع حرارتی به دست آمده از روش معکوس با تابع دقیق

هدف ما تخمین توان منبع حرارتی برای از بین بردن سلول‌های سرطانی با روش معکوس می‌باشد. مدت زمان در نظر گرفته شده برای اعمال حرارت به سلول‌های سرطانی در دو حالت برای ده دقیقه و سی دقیقه می‌باشد. برای گسسته سازی معادلات حاکم از روش تفاضل محدود و از یک شبکه 35×35 استفاده شده است. شکل (۵-۱) شبکه مورد استفاده در حل مسئله را نشان داده است. استقلال از اندازه شبکه با استفاده از شبکه‌های 35×35 ، 45×45 و 55×55 مورد بررسی قرار گرفته است که نتیجه آن در شکل (۵-۲) نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل (۵-۲) مشاهده می‌شود اندازه شبکه تاثیری روی جواب به دست آمده ندارد و در هر سه حالت بررسی شده نتیجه یکسان است. بنابراین می‌توان هر کدام از این ابعاد را در نظر گرفت. در این تحقیق شبکه با ابعاد 35×35 انتخاب شده است.

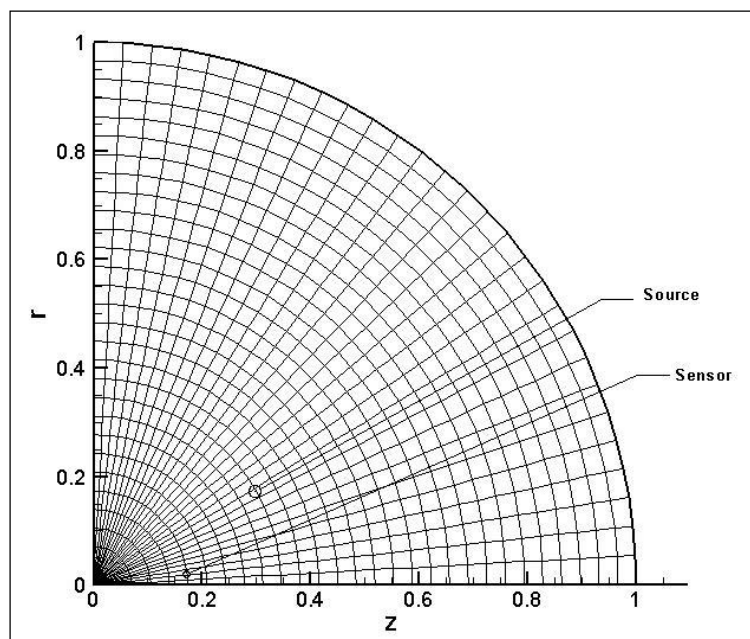


شکل (۵-۱): شبکه مورد استفاده در حل مسئله

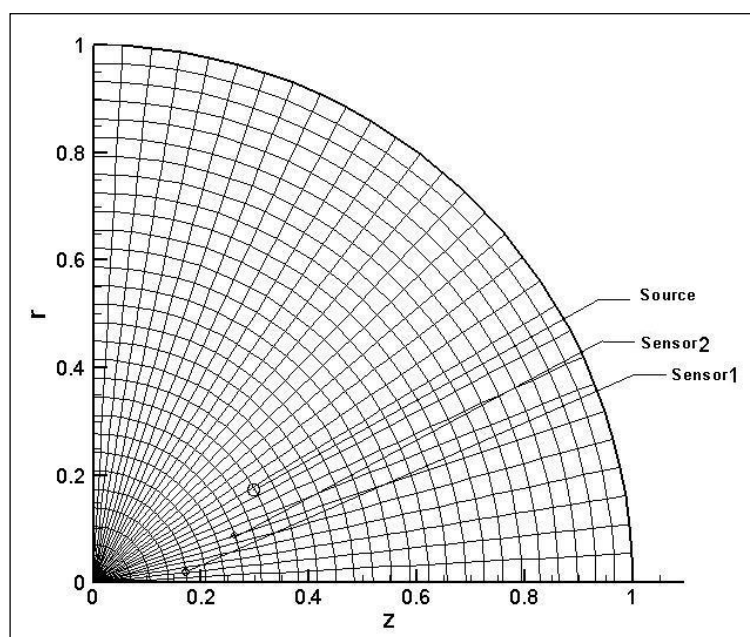


شکل (۵-۲): بررسی تأثیر اندازه شبکه در جواب‌های به‌دست‌آمده

زمان نهایی اعمال گرما به مدت زمان ۱۰ دقیقه در نظر گرفته شده که بعد از بی‌بعد سازی مقدار آن به ۰,۰۱۱ می‌رسد. بنابراین گام زمانی مورد استفاده در حل مسئله در این حالت $\Delta t = 0.0011$ در نظر گرفته شده است. در تحقیق حاضر با اندازه‌گیری دما، در یک یا دو نقطه، توان منبع حرارتی را تخمین می‌زنیم و حساسیت مسئله نسبت به داده‌های نویز دار مورد بررسی قرار گرفته است. حدس اولیه برای توان منبع حرارتی مجهول صفر در نظر گرفته شده است. در شکل‌های (۵-۳) و (۵-۴) موقعیت منبع حرارتی و سنسورها، نشان داده شده است. برای بررسی تأثیر افزودن سنسورها در دقت محاسبات و نتایج دو آزمایش مختلف یکی برای یک سنسور و دیگری با افزودن سنسور دوم انجام شد.



شکل (۳-۵): شبکه مورد استفاده در حل مسئله و موقعیت منبع حرارتی و سنسور



شکل (۴-۵): شبکه مورد استفاده در حل مسئله و موقعیت منبع حرارتی و سنسورها

به منظور بررسی دقت روش مورد استفاده، توابع پله‌ای، خطی، سینوسی-کسینوسی به صورت های زیر

برای $G_p(t^*)$ در نظر گرفته شده است:

$$G_p(t^*) = \begin{cases} 10^2 & \text{for } 0.0044 < t^* < 0.0077 \\ 0 & \text{for } t^* \leq 0.0044 \text{ and } t^* \geq 0.0077 \end{cases} \quad (1-5)$$

$$G_p(t^*) = 10^4 t^* \quad (2-5)$$

$$G_p(t^*) = 10^2 \sin 10^3 t^* + 0.1 \cos 2 \times 10^3 t^* \quad (3-5)$$

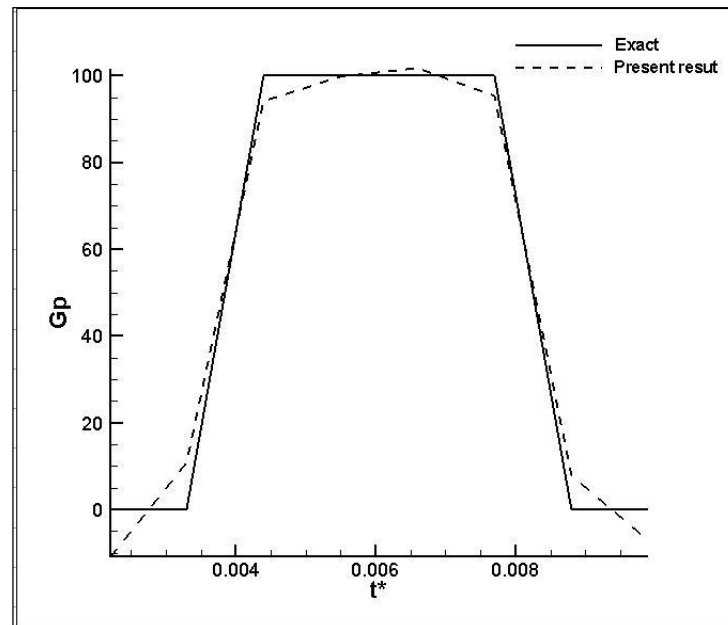
۵-۱-۱ بررسی نتایج بر روی داده‌های بدون نویز

در ابتدا ارزیابی نتایج با استفاده از داده‌های بدون نویز انجام شده و بحث می‌شود. این ارزیابی خود از دو بخش تشکیل شده که شامل استفاده از یک سنسور در حالت اول و بررسی عملکرد دو سنسور بر دقت نتایج مورد بررسی قرار گرفته است.

۵-۱-۱-۱ بررسی نتایج با استفاده از یک سنسور

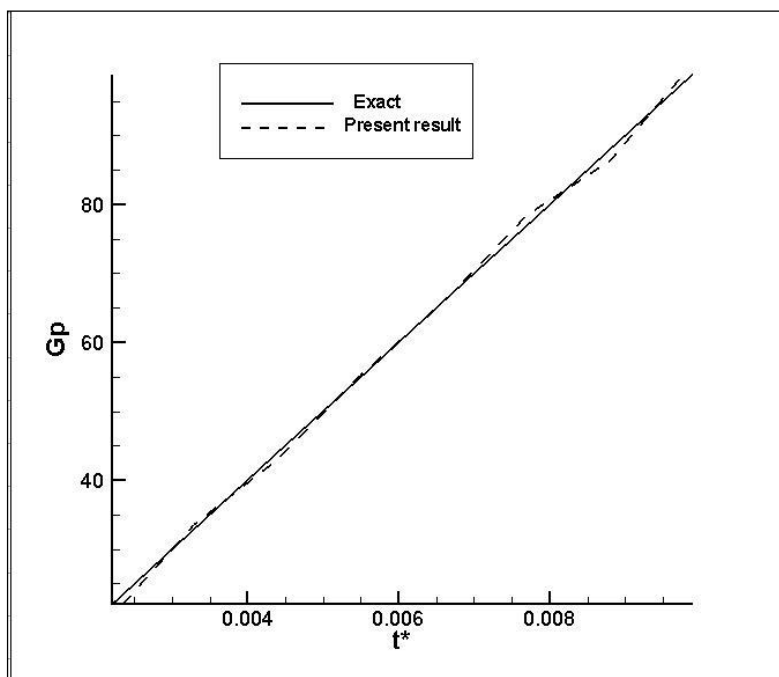
برای بررسی عملکرد روش پیشنهادی از سه تابع مختلف با ویژگی‌های متفاوت استفاده می‌شود. تابع اول یک تابع پله‌ای بوده که روند تغییرات ناپیوسته‌ای را ارائه می‌دهد. تابع دوم یک تابع خطی است و بدون روند تغییرات و تابع سوم تابع سینوسی با روند تغییرات پیوسته که هر سه مورد به صورت مجزا مورد بررسی قرار می‌گیرند. شکل (۵-۵) توان حرارتی محاسبه شده را با توان حرارتی دقیق به صورت پله‌ای در حالت استفاده از یک سنسور نمایش می‌دهد. همان‌طور که در شکل مشاهده می‌شود نتیجه به دست آمده تقریباً مطلوب می‌باشد و تنها در نقاط تیز کمی ناهماهنگی وجود دارد که این نتیجه به علت ناپیوستگی تابع برای توابع دارای نقاط تیز اجتناب‌ناپذیر می‌باشد. با توجه به محدود بودن نقاط

بروز خطا و اینکه تغییرات موجب خطای اندکی در نقاط مربوطه می شود می توان روند کلی رضایت بخشی را نتیجه گرفت.



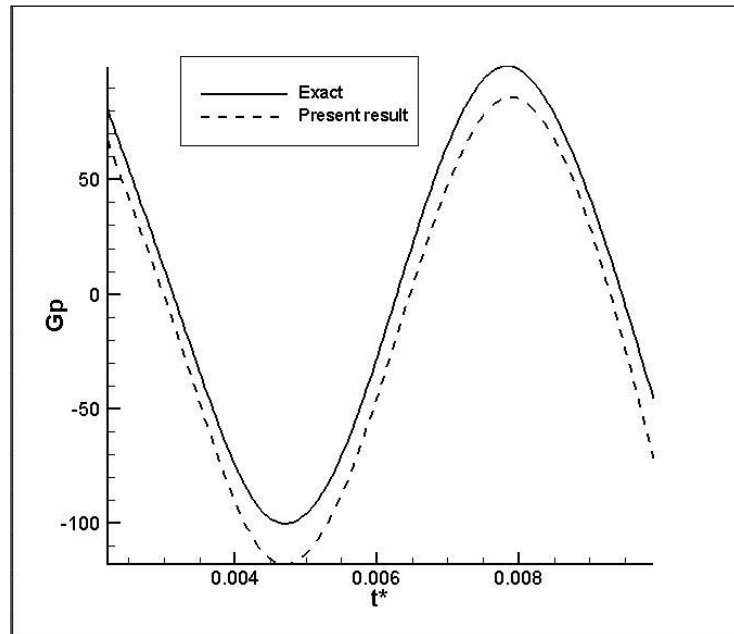
شکل (۵-۵): مقایسه توان حرارتی محاسبه شده با توان حرارتی دقیق پله ای با استفاده از یک سنسور

شکل (۵-۶) مقایسه توان حرارتی محاسبه شده با توان حرارتی دقیق که به صورت خطی می باشد را در حالت استفاده از یک سنسور نمایش می دهد. همان طور که در شکل مشاهده می شود دو نمودار مربوط به توان محاسبه شده و دقیق به طور کامل منطبق بر هم می باشند. با توجه به تغییرات یکنواخت این نوع تابع چنین نتیجه ای مورد انتظار است.



شکل (۵-۶): مقایسه توان حرارتی محاسبه شده با توان حرارتی دقیق خطی با استفاده از یک سنسور

شکل (۵-۷) توان حرارتی محاسبه شده با توان حرارتی دقیق که به صورت تابع سینوسی-کسینوسی می باشد را مقایسه کرده و در حالت استفاده از یک سنسور نمایش می دهد. همان طور که در شکل مشاهده می شود دو نمودار محاسبه شده و دقیق رفتار کاملاً همسانی داشته و در نقاطی که مشتق اول تغییر می کند به علت رفتار تابع معکوس کمی خطا قابل رؤیت است اما چون رفتار هماهنگ با تابع دقیق می باشد نتیجه رضایت بخش و قابل قبول است.

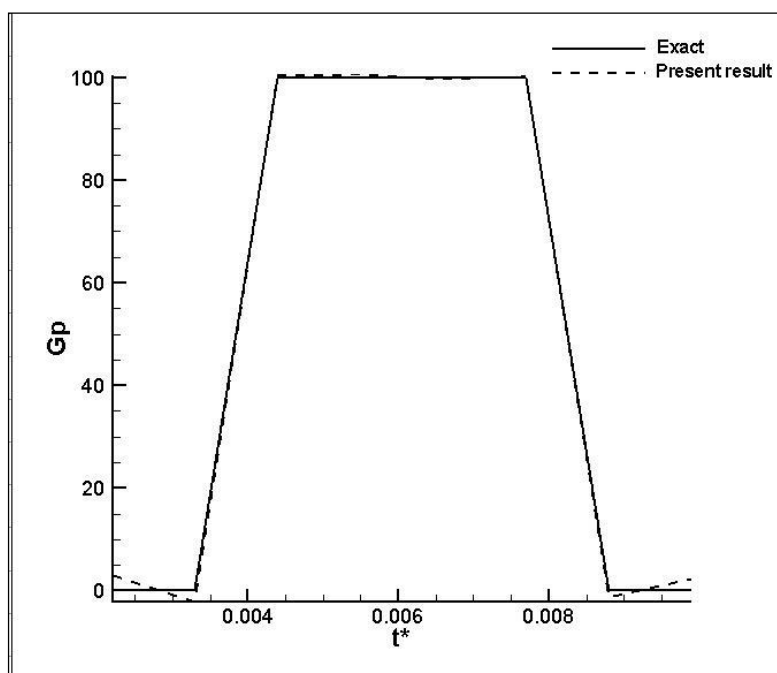


شکل (۵-۷): مقایسه توان حرارتی محاسبه شده با توان حرارتی دقیق سینوسی-کسینوسی با استفاده از یک سنسور

۵-۱-۱-۲ بررسی نتایج با استفاده از دو سنسور

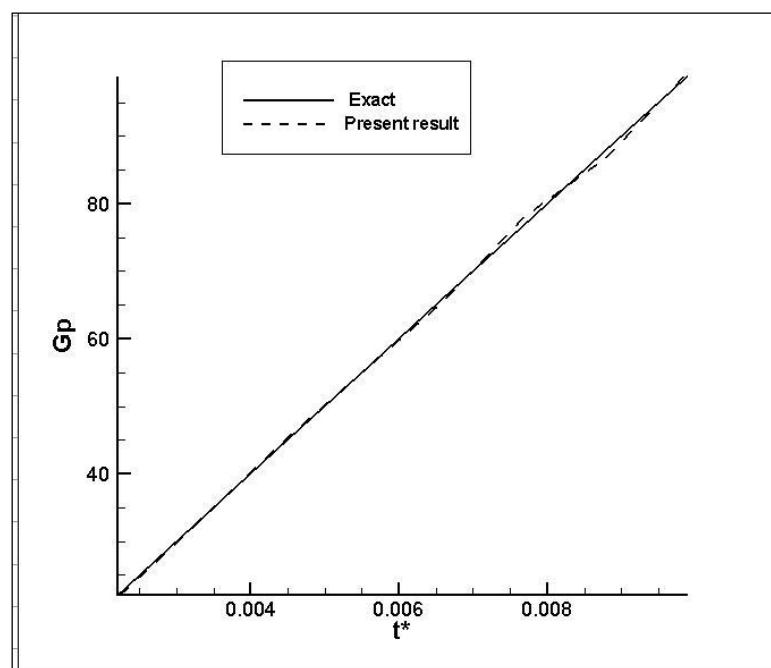
هرچند نتایج نشان داده شده در آزمون های اعمالی با استفاده از یک سنسور قابل قبول بوده و خطای اندکی را در بعضی موارد نشان می دهد، اما به منظور راستی آزمایی و بررسی عملکرد تعداد سنسورها، آزمون های یاد شده با استفاده از دو سنسور تکرار می شوند.

شکل (۵-۸) توان حرارتی محاسبه شده با توان حرارتی دقیق که به صورت تابع پله ای می باشد را مقایسه کرده و در حالت استفاده از دو سنسور نمایش می دهد. با مشاهده دو نمودار مربوط به توان محاسبه شده و دقیق می توان دریافت که در حالت استفاده از دو سنسور کاملاً توابع منطبق بر هم می باشند. این بدان معناست که با افزودن تنها یک سنسور دیگر، دقت عملکرد الگوریتم به حد ایده آل رسیده است و خطای حالت قبل از بین رفته است.



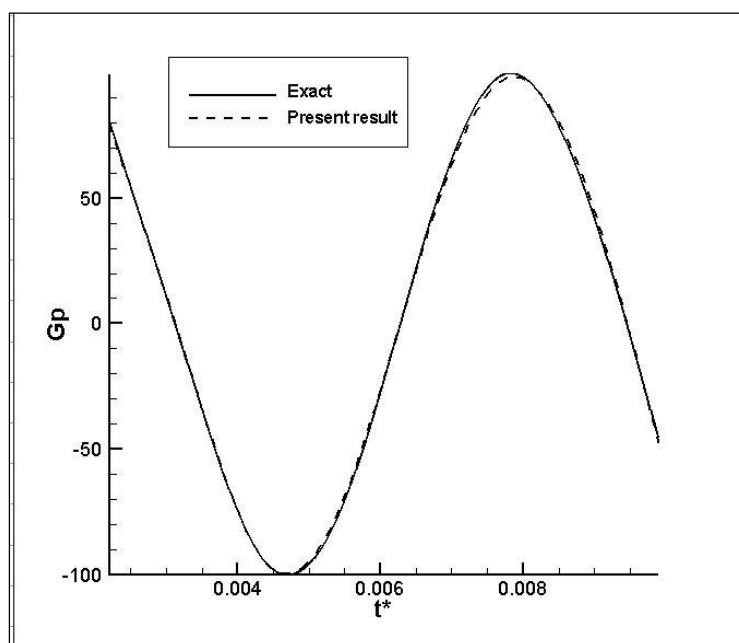
شکل (۵-۱): مقایسه توان حرارتی محاسبه شده با توان حرارتی دقیق پله‌ای با استفاده از دو سنسور

شکل (۵-۹) توان حرارتی محاسبه شده را با توان حرارتی دقیق که به صورت تابع خطی می باشد را مقایسه کرده و در حالت استفاده از دو سنسور نمایش می دهد. با مشاهده دو نمودار مربوط به توان محاسبه شده و دقیق می توان دریافت که در حالت استفاده از دو سنسور کاملاً توابع منطبق بر هم می باشند. این بدان معناست که علاوه بر تغییرات غیریکنواخت که نقطه ضعف عملکرد روش معکوس می باشد در حالت یکنواخت هم دقت افزایش فراوانی داشته است.



شکل (۵-۹): مقایسه توان حرارتی محاسبه شده با توان حرارتی دقیق خطی با استفاده از دو سنسور

در نهایت شکل (۵-۱۰) توان حرارتی محاسبه شده را با توان حرارتی دقیق که به صورت تابع سینوسی-کسینوسی می باشد را مقایسه کرده و در حالت استفاده از دو سنسور نمایش می دهد. با مشاهده دو نمودار مربوط به توان حرارتی محاسبه شده و توان دقیق می توان دریافت که در حالت استفاده از دو سنسور کاملاً توابع منطبق بر هم می باشند. با توجه به دو ارزیابی قبلی، این نتیجه قابل پیش بینی بود و مشاهده می شود در مواردی که تغییرات تابع به صورت پیوسته صورت می گیرد نیز افزودن سنسور دوم باعث بهبود عملکرد در حد ایده آل می شود.



شکل (۵-۱۰) مقایسه توان حرارتی محاسبه شده با توان حرارتی دقیق سینوسی-کسینوسی با استفاده از دو سنسور

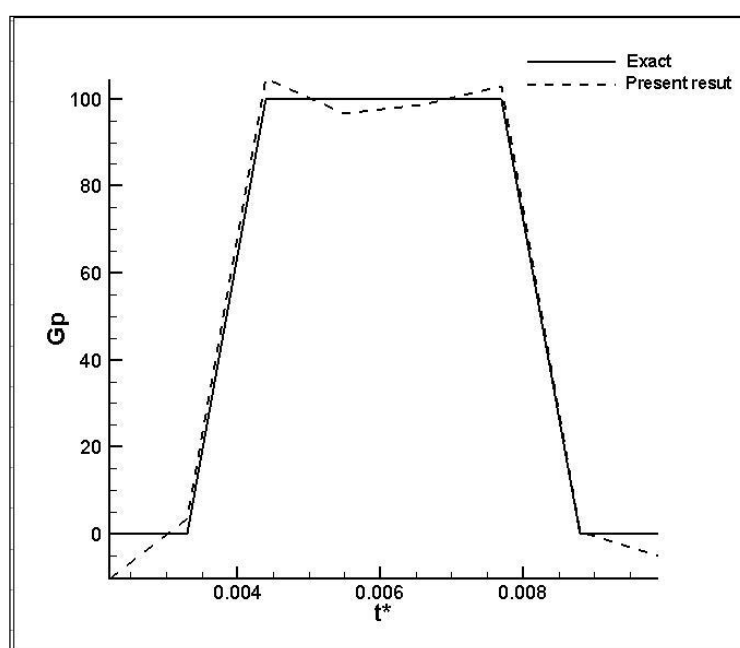
از آنجاکه افزودن تنها یک سنسور اضافی باعث بهبود قابل ملاحظه نتایج گشته و تقریباً خطای مشاهده شده نزدیک به صفر گردید، افزودن سنسورهای بیشتر توصیه نمی شود و می توان به نتایج به دست آمده با دو سنسور کاملاً اعتماد نمود.

۵-۱-۲ بررسی نتایج بر روی داده های نويز دار

پس از مقایسه توان حرارتی محاسبه شده با توان حرارتی دقیق مرتبط به سه معادله مشخص شده که توابعی خطی، پله ای و سینوسی-کسینوسی می باشند و با استفاده از یک سنسور و سپس دو سنسور، حل معکوس با استفاده از داده های نويز دار در دو حالت استفاده از یک سنسور و دو سنسور مقایسه شده است. برای بررسی عملکرد و پایداری روش پیشنهادی در مقابل نويز در این قسمت حل معکوس با داده های نويز دار ارائه شده است.

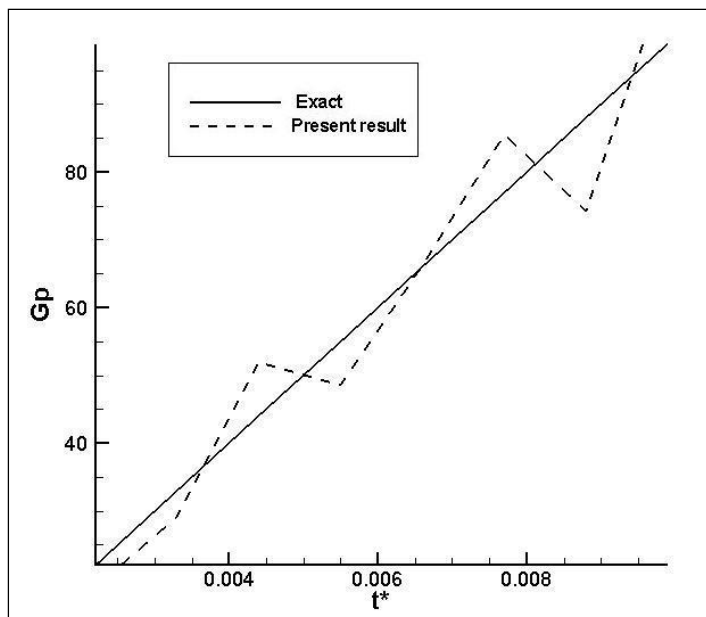
۵-۱-۲-۱ بررسی نتایج با استفاده از یک سنسور

همان‌طور که مشاهده می‌شود شکل (۵-۱۱) استفاده از داده‌های نویز دار را در حالت استفاده از یک سنسور برای تابع پله‌ای نشان می‌دهد. مانند حالت قبل و داده‌های بدون نویز عدم انطباق در استفاده از تابع پله وجود دارد نتایج نشان‌دهنده اثر نویز بر دقت نتایج بوده و خطای قابل‌ملاحظه‌ای مشاهده می‌شود. همانند قبل این تأثیر بر قسمت‌هایی از تابع با تغییرات در روند، بیشتر است.



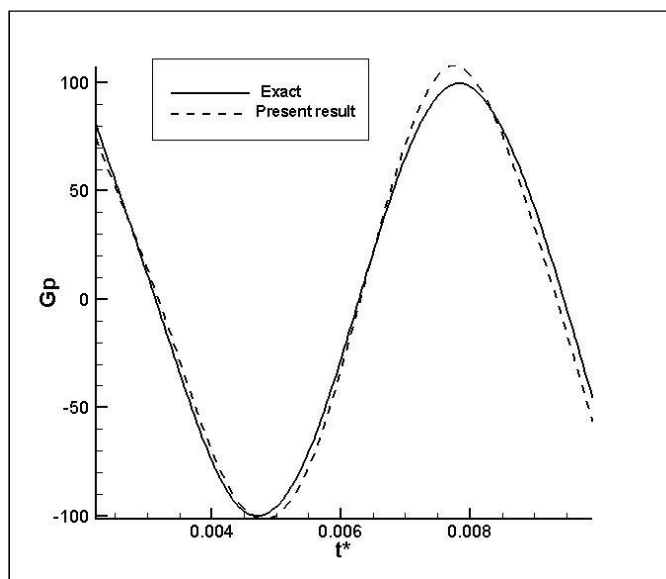
شکل (۵-۱۱): مقایسه توان حرارتی محاسبه‌شده با استفاده از داده‌های نویز دار با توان حرارتی دقیق پله‌ای با استفاده از یک سنسور

شکل (۵-۱۲) توان حرارتی محاسبه‌شده را در مقایسه با توان حرارتی دقیق دارای الگوی تابع خطی و استفاده از یک سنسور نشان می‌دهد. در این حالت، تأثیر نویز بر روی تابع محاسبه‌شده نسبت به حالت بدون نویز کاملاً مشهود بوده و خطای قابل‌توجهی ایجاد شده است. شاید بتوان دلیل این امر را تأثیر نویز بر روند همسان در تابع خطی عنوان کرد که باعث ایجاد تغییرات لحظه‌ای در مقادیر تابع شده و عکس‌العمل روش معکوس به تغییرات سریع قابل‌ملاحظه است.



شکل (۵-۱۲) مقایسه توان حرارتی محاسبه شده با استفاده از داده های نویز دار با توان حرارتی دقیق خطی با استفاده از یک سنسور

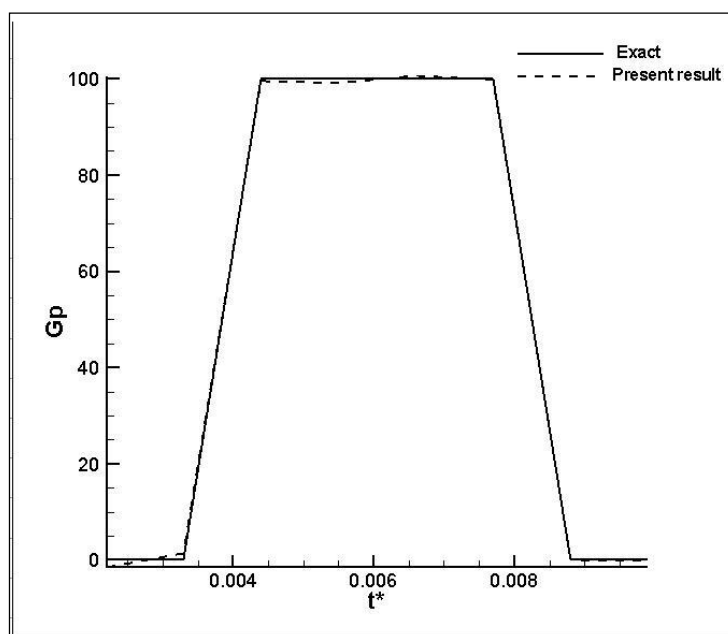
شکل (۵-۱۳) استفاده از تابع سینوسی-کسینوسی با یک سنسور و افزودن نویز به داده ها را نمایش می دهد. مقایسه توان حرارتی محاسبه شده و دقیق تطابق قابل قبول را بین این دو توان را نشان می دهد که در مقایسه با حالت بدون نویز خطای یکسانی مشاهده شده و تغییر چندانی مشاهده نمی شود. همانند حالت بدون نویز این خطا در نقاط قله که روند تابع دچار تغییر است، مشاهده می شود.



شکل (۵-۱۳): مقایسه توان حرارتی محاسبه شده با استفاده از داده های نویز دار با توان حرارتی دقیق سینوسی - کسینوسی با استفاده از یک سنسور

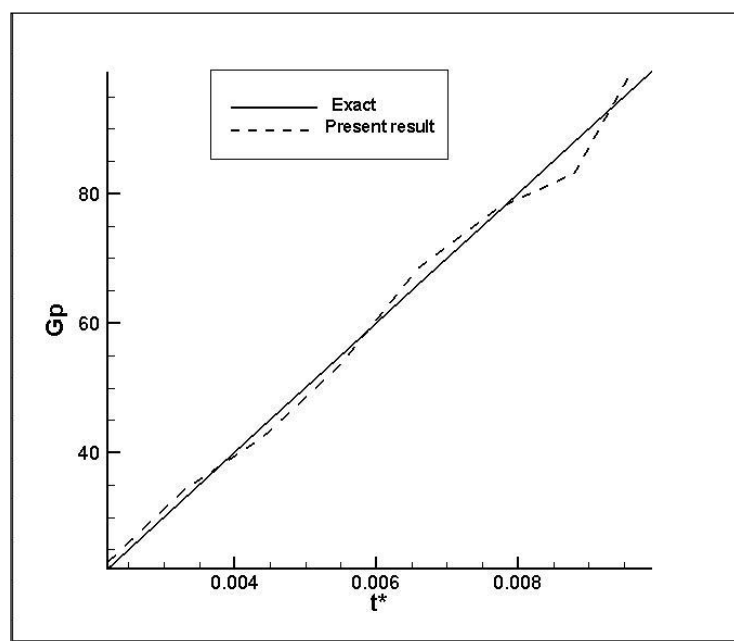
۵-۲-۱-۲ بررسی نتایج با استفاده از دو سنسور

همان طور که بررسی شد، افزودن نویز می تواند عملکرد تابع را دچار اختلال کند لذا مناسب است که تأثیر افزودن یک سنسور بر عملکرد الگوریتم، بررسی شود. شکل (۵-۱۴) مقایسه توان حرارتی محاسبه شده با استفاده از داده های نویز دار با توان حرارتی دقیق که به صورت تابع پله ای می باشد با استفاده از دو سنسور را نشان می دهد. همان طور که در شکل مشاهده می شود در این حالت نسبت به حالت تک سنسور، بهبود قابل ملاحظه ای در عملکرد الگوریتم مشاهده می شود. در مقایسه با حالت داده های بدون نویز، در حالت نویز دار نیز افزودن یک سنسور بهبود قابل ملاحظه ای روی نتایج مشاهده می شود.



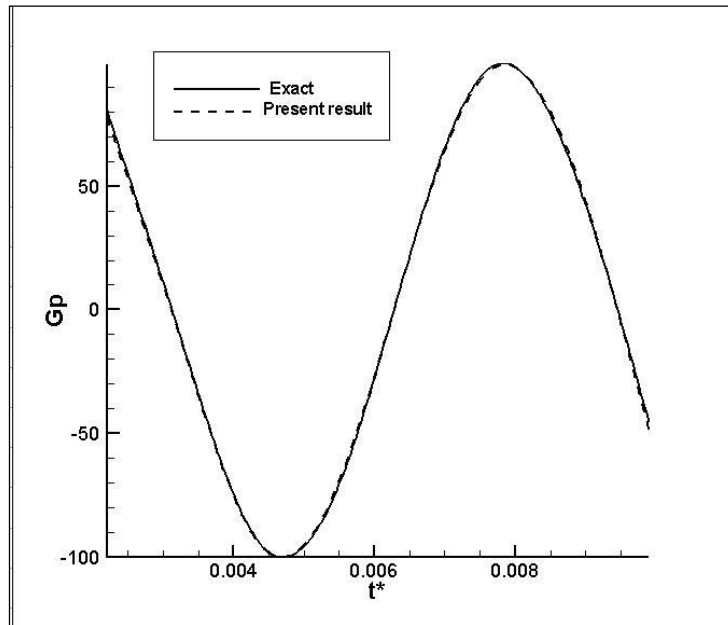
شکل (۵-۱۴): مقایسه توان حرارتی محاسبه شده با استفاده از داده های نویز دار با توان حرارتی دقیق پله ای با استفاده از دو سنسور

در شکل (۵-۱۵) نمودار حاصله از تابع خطی نشان داده شده است. کاملاً مشهود است که افزودن یک سنسور باعث افزایش دقت قابل ملاحظه ای در نتیجه شده و خطای ایجاد شده در حالت تک سنسور را تا حد زیادی برطرف کرده است.



شکل (۵-۱۵): مقایسه توان حرارتی محاسبه شده با استفاده از داده های نویز دار با توان حرارتی دقیق خطی با استفاده از دو سنسور

شکل (۵-۱۶) توان حرارتی محاسبه شده از حل معکوس را با توان به دست آمده از حل دقیق در حالت تابع سینوسی-کسینوسی نشان می دهد. اگر این شکل با شکل (۵-۱۳) مقایسه شود که در آنجا از یک سنسور استفاده شده بود نتیجه می شود نقاط غیر منطبق که در نواحی پیک تابع که در حالت تک سنسور وجود داشت در زمان استفاده از دو سنسور از بین رفته و تطابق کاملی بین دو نمودار دیده می شود.



شکل (۵-۱۶): مقایسه توان حرارتی محاسبه شده با استفاده از داده های نویز دار با توان حرارتی دقیق سینوسی-کسینوسی با استفاده از دو سنسور

۳-۱-۵ محاسبه خطای RMS^1

در عمل، خطاهایی در اندازه گیری داده ها وجود دارد. بنابراین از داده های نویز دار برای شبیه سازی خطاها استفاده شده است. داده های نویز دار با رابطه $Y(t_i) = Y_{ex}(t_i) + \omega\sigma$ ایجاد می شوند. همچنین در ایجاد داده های نویز دار $\sigma = 0.01T_{max}$ در نظر گرفته شده است. بعلاوه خطای RMS با استفاده از فرمول زیر محاسبه و ارائه شده است. در این رساله مقدار $-2.576 \leq \omega \leq 2.576$ در نظر گرفته شده است [۱۱۵].

$$e_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{I} \sum_{i=1}^I [Y_{est} - Y_{ex}]^2} \quad (۴-۵)$$

مطابق جداول (۵-۱) و (۵-۲) خطای RMS برای سه تابع معرفی شده شامل خطی، سینوسی-کسینوسی و پله ای محاسبه شده است.

¹ Root-Mean-Square

جدول (۵-۱): محاسبه خطای RMS برای توابع مختلف در نظر گرفته شده برای توان منبع حرارتی در حالت استفاده از یک سنسور

تعداد تکرار	خطای RMS	تابع	σ
141	0.121	خطی	0
102	0.117	سینوسی-کسینوسی	
127	0.312	پله‌ای	
43	0.553	خطی	$0.01T_{max}$
26	0.273	سینوسی-کسینوسی	
34	0.332	پله‌ای	

مطابق جدول (۵-۱) خطای RMS برای توابع مختلف محاسبه شده و مورد بررسی قرار گرفته است. خطای RMS مقیاسی است که تفاوت بین مقادیر تخمین زده شده و مقادیر واقعی را در کل تابع نشان می‌دهد. در جدول (۵-۱) خطای RMS و تعداد دفعات تکرار برای داده‌های بدون نویز در حالت استفاده از یک سنسور آورده شده است. برای تابع خطی مقدار خطای RMS در حالت بدون نویز و داده‌های نویز دار به ترتیب ۰,۱۲۱ و ۰,۵۵۳ می‌باشد. برای تابع سینوسی-کسینوسی مقدار خطای RMS در حالت بدون نویز و داده‌های نویز دار به ترتیب ۰,۱۱۷ و ۰,۲۷۳ می‌باشد و همان گونه که در جدول آورده شده است تعداد دفعات تکرار در حالت بدون نویز ۱۰۲ و در حالت نویز دار ۲۶ می‌باشد که نشان‌دهنده این نکته است که در حالت وجود نویز تابع نمی‌تواند به خوبی همگرا شده و انطباق بین مقادیر تخمین زده شده و مقادیر واقعی به خوبی حاصل نشده و در نتیجه خطای خروجی بیشتر است. برای تابع پله‌ای مقدار خطای RMS در حالت بدون نویز و داده‌های نویز دار به ترتیب ۰,۳۱۲ و

۰,۳۳۲ می‌باشد. لذا با توجه به نتایج مشخص می‌شود که خطای RMS در حالت داده‌های بدون نویز تابع پله‌ای بیشترین مقدار را دارد که به علت ناپیوستگی تابع می‌باشد. در حالت وجود نویز به دلیل تأثیر نویز و ایجاد نقاط ناپیوستگی در تابع خطی بیشترین مقدار خطا پدیدار می‌گردد. تابع پله‌ای به دلیلی که در حالت بدون نویز توضیح داده شد دارای رتبه بعدی وجود خطا بوده و در تابع سینوسی-کسینوسی کمترین مقدار خطا مشاهده می‌شود.

جدول (۵-۲): محاسبه خطای RMS برای توابع مختلف در نظر گرفته شده برای توان منبع حرارتی در حالت استفاده از دو سنسور

σ	تابع	خطای RMS	تعداد تکرار
0	خطی	0.0672	97
	سینوسی-کسینوسی	0.0379	83
	پله‌ای	0.1627	105
$0.01T_{max}$	خطی	0.1434	104
	سینوسی-کسینوسی	0.117	90
	پله‌ای	0.1962	112

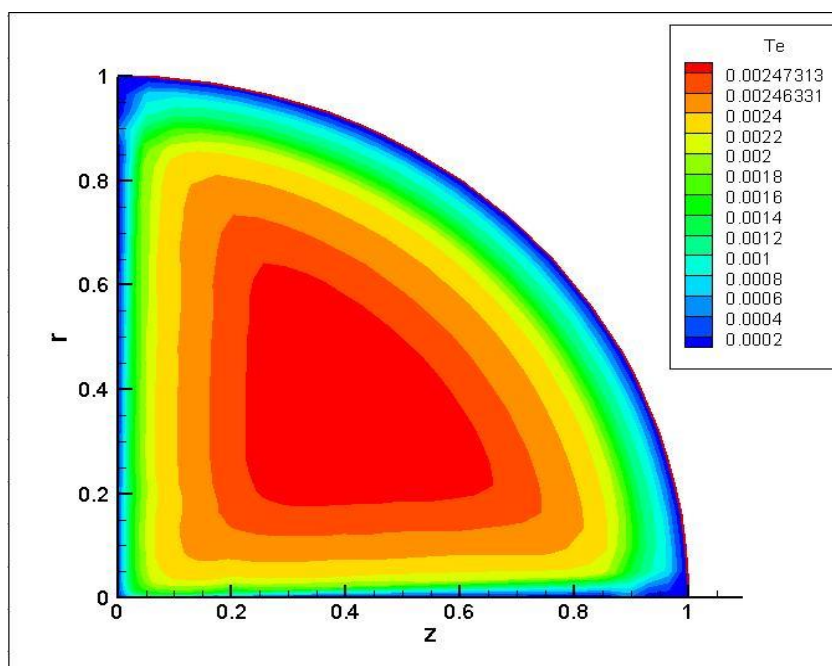
همان‌طور که در قسمت قبل توضیح داده شد، با افزودن سنسور دوم، خطای RMS به‌طور قابل‌توجهی کاهش می‌یابد. با توجه به نتایج مشخص می‌شود که خطای RMS در تابع پله‌ای بیشترین مقدار را دارد که به علت ناپیوستگی تابع می‌باشد. با توجه به جداول فوق و خطاهای محاسبه شده مشخص می‌شود که روش ارائه شده از دقت قابل قبولی برخوردار می‌باشد.

روند مشابهی در ارزیابی با استفاده از دو سنسور مشاهده می‌شود که تائید کننده فرضیه بیان شده می‌باشد.

۵-۱-۴ نمایش کانتورهای توزیع دما

شکل‌های (۵-۱۷) تا (۵-۳۰) کانتورهای توزیع دمای دقیق را برای سه معادله خطی، پله‌ای و سینوسی-کسینوسی معادلات شماره (۵-۱)، (۵-۲) و (۵-۳) را در حالت‌های یک سنسور، دو سنسور، با داده‌های بدون نویز و داده‌های نویز دار نمایش می‌دهد.

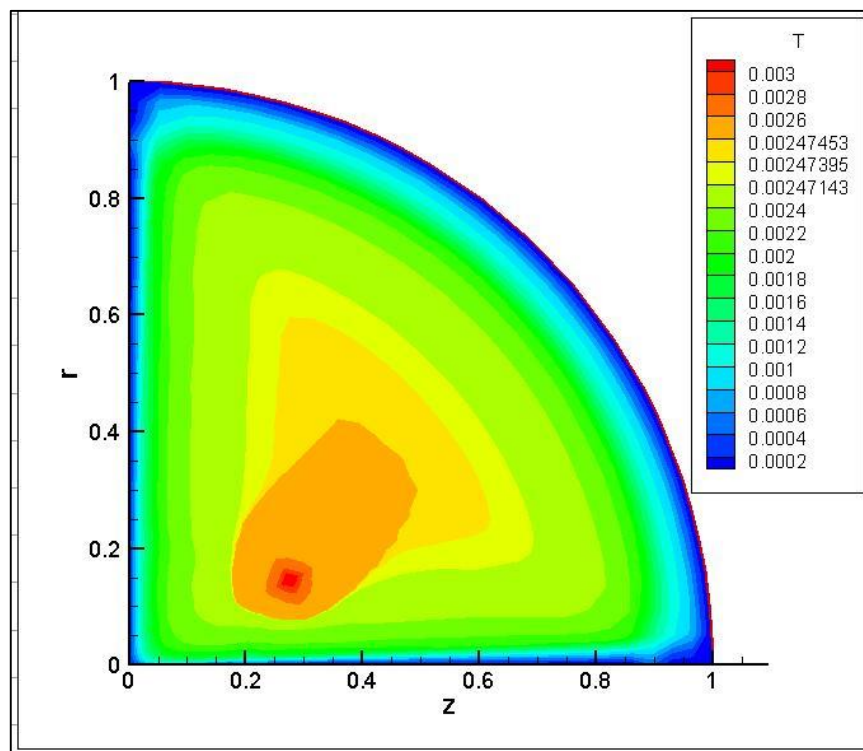
شکل (۵-۱۷) کانتور مربوط به توزیع دمای دقیق با استفاده از منبع حرارتی با تابع پله‌ای را نشان می‌دهد. در شکل‌های (۵-۱۸) و (۵-۱۹) کانتور مربوط به توزیع دمای محاسبه‌شده آن در حالت یک سنسور و دو سنسور را به ترتیب نمایش می‌دهد.



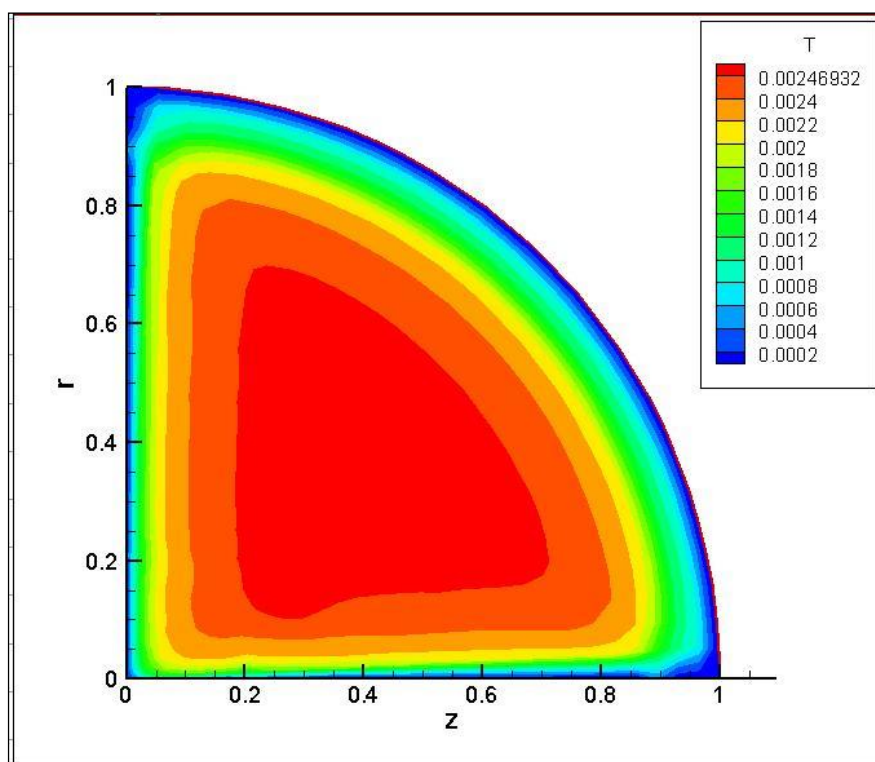
شکل (۵-۱۷): نمایش کانتورهای توزیع دمای دقیق با استفاده از منبع حرارتی با تابع پله‌ای

همان‌طور که در شکل‌ها مشاهده می‌شود، کانتور دمای محاسبه‌شده با استفاده از داده‌های بدون نویز در حالت تک سنسور، شکل (۵-۱۸) همپوشانی قابل قبولی نسبت به کانتور دمای دقیق شباهت ندارد، اما در شکل (۵-۱۹)

تشابه کانتور توزیع دمای دقیق با توزیع دمای محاسبه‌شده کاملاً مشهود است و به‌خوبی نمایانگر دقت این روش در حالت استفاده از دو سنسور می‌باشد.

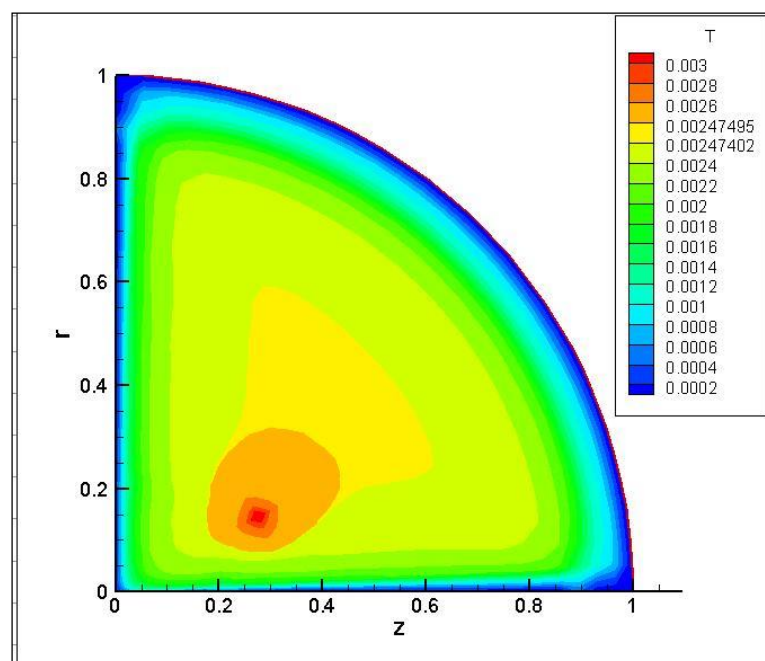


شکل (۵-۱۸): نمایش کانتورهای توزیع دمای محاسبه‌شده با استفاده از یک سنسور با استفاده از منبع حرارتی با تابع پله‌ای

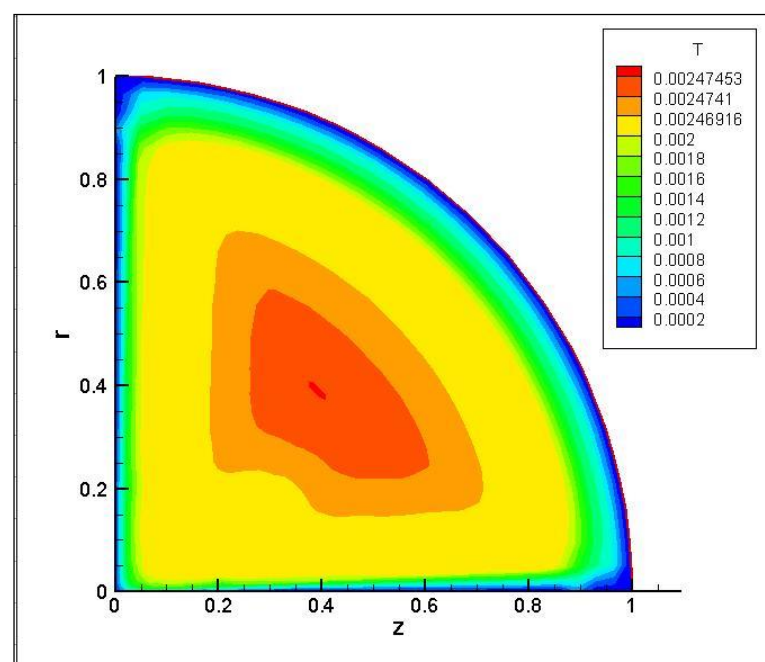


شکل (۵-۱۹): نمایش کانتورهای توزیع دمای محاسبه شده با استفاده از دو سنسور با استفاده از منبع حرارتی با تابع پله‌ای

شکل‌های (۵-۲۰) و (۵-۲۱) نیز به ترتیب توزیع دمای محاسبه شده را در حالت استفاده از داده‌های نویز دار را نشان می‌دهد. با مشاهده کانتورها در هر دو حالت می‌توان دریافت که در حالت به کارگیری دو سنسور تطابق بیشتری با توزیع دمای دقیق وجود دارد.

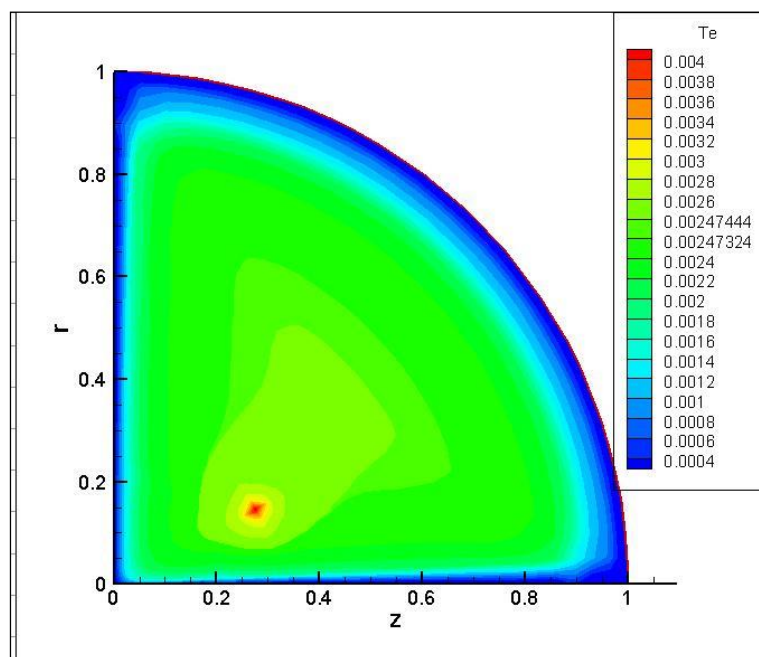


شکل (۵-۲۰): نمایش کانتورهای توزیع دمای محاسبه شده با استفاده از یک سنسور با استفاده از منبع حرارتی با تابع پله‌ای در حضور داده‌های نویز دار

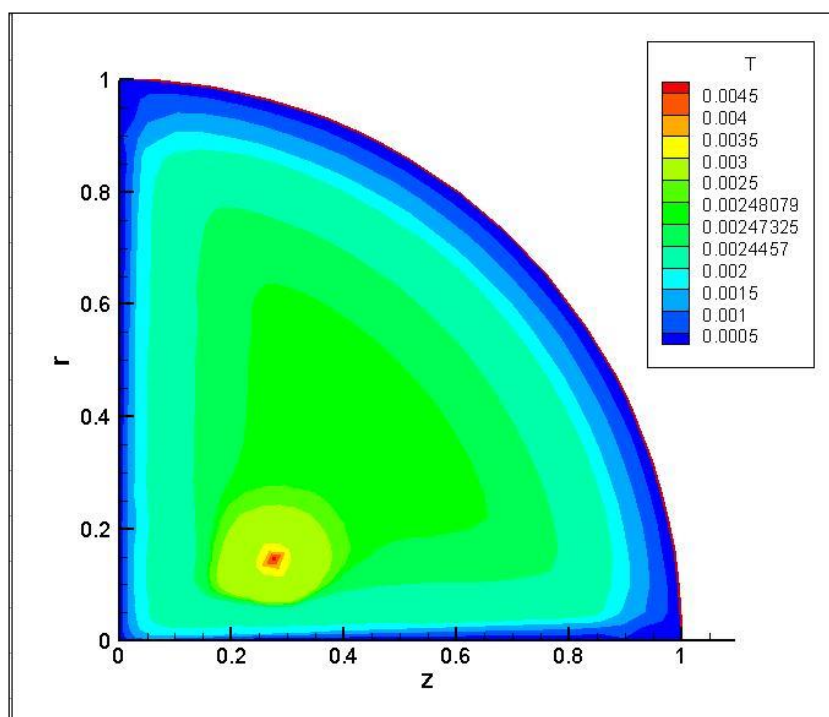


شکل (۵-۲۱): نمایش کانتورهای توزیع دمای محاسبه شده با استفاده از دو سنسور با استفاده از منبع حرارتی با تابع پله‌ای در حضور داده‌های نویز دار

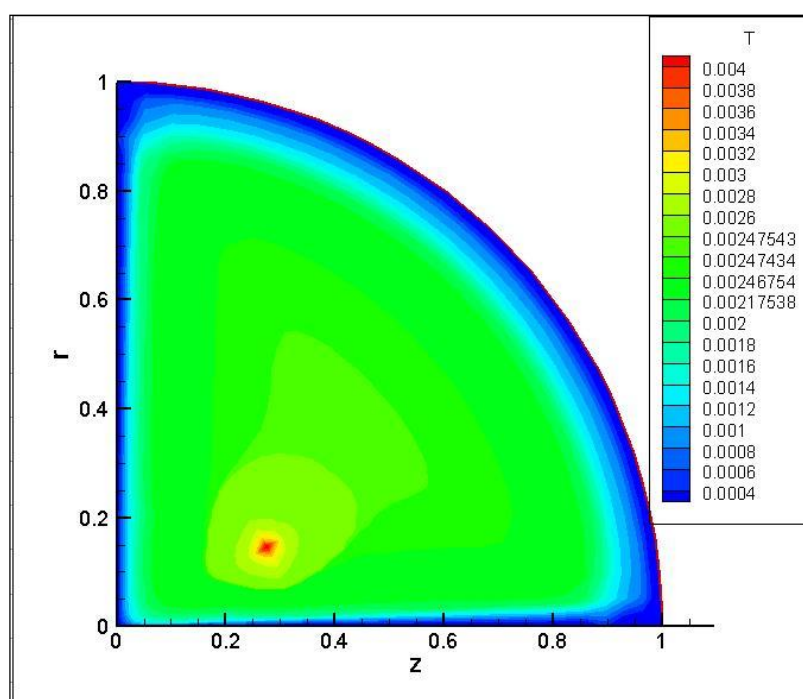
مشابه حالت قبل شکل‌های (۲۲-۵) تا (۲۶-۵) نیز کانتورهای توزیع دمای دقیق و محاسبه‌شده با استفاده از تابع خطی در حالت‌های مختلف را نمایش می‌دهد. شکل (۲۱-۵) توزیع دمای دقیق با منبع توان حرارتی تابع خطی را نشان می‌دهد. سپس کانتور توزیع دمای محاسبه‌شده در حالت تک سنسور و دو سنسور در شکل‌های (۲۳-۵) و (۲۴-۵) آورده شده است. همان‌گونه که از شکل‌ها مشخص است در حالت استفاده از داده‌های نویز دار وقتی از دو سنسور استفاده می‌شود کانتور توزیع دمای محاسبه‌شده تطابق بسیاری با کانتور توزیع دمای دقیق دارد و گواهی دقت و قبول پذیری روش مورد استفاده است. علاوه بر این هنگام استفاده از داده‌های نویز دار نیز بازهم تشابه قابل قبولی با توزیع دمای دقیق وجود دارد که این موضوع در حالت استفاده از دو سنسور ، شکل (۲۶-۵)، بیشتر مورد تأیید می‌باشد.



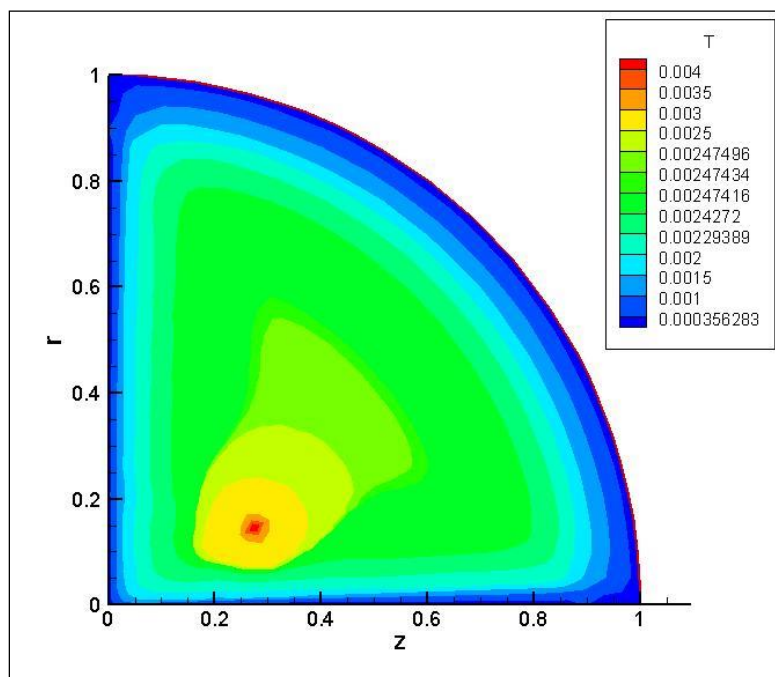
شکل (۲۲-۵): نمایش کانتورهای توزیع دمای دقیق با استفاده از منبع حرارتی با تابع خطی



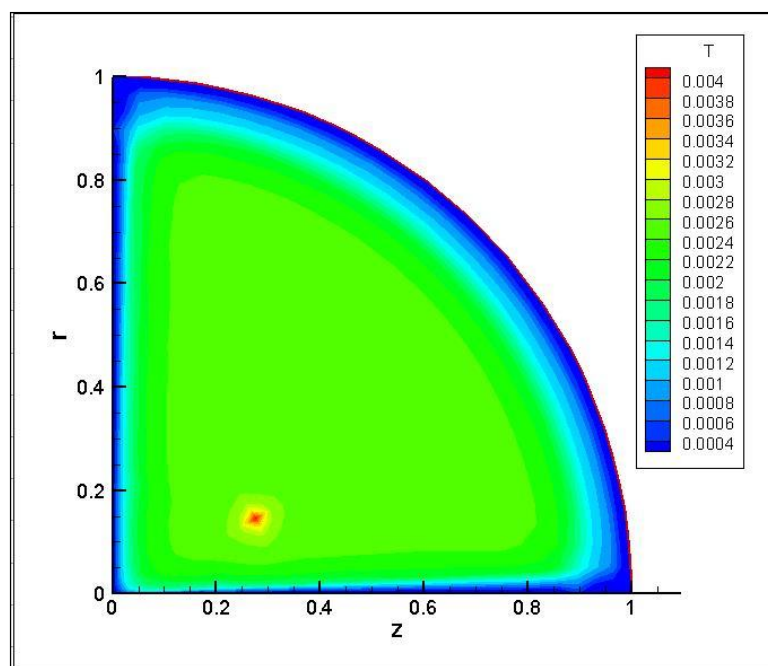
شکل (۵-۲۳): نمایش کانتورهای توزیع دمای محاسبه شده با استفاده از یک سنسور با استفاده از منبع حرارتی با تابع خطی



شکل (۵-۲۴): نمایش کانتورهای توزیع دمای محاسبه شده با استفاده از دو سنسور با استفاده از منبع حرارتی با تابع خطی



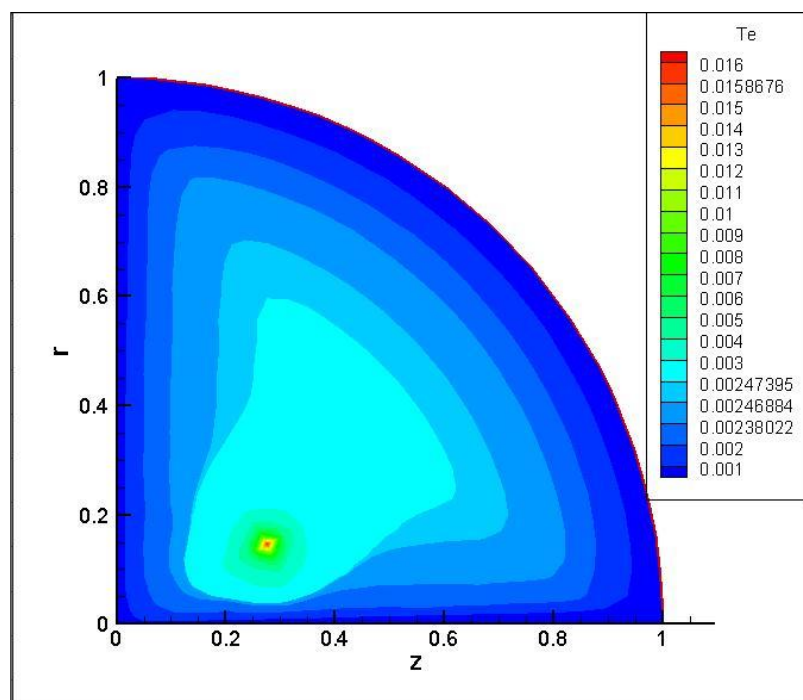
شکل (۵-۲۵): نمایش کانتورهای توزیع دمای محاسبه شده با استفاده از یک سنسور با استفاده از منبع حرارتی با تابع خطی در حضور داده‌های نویز دار



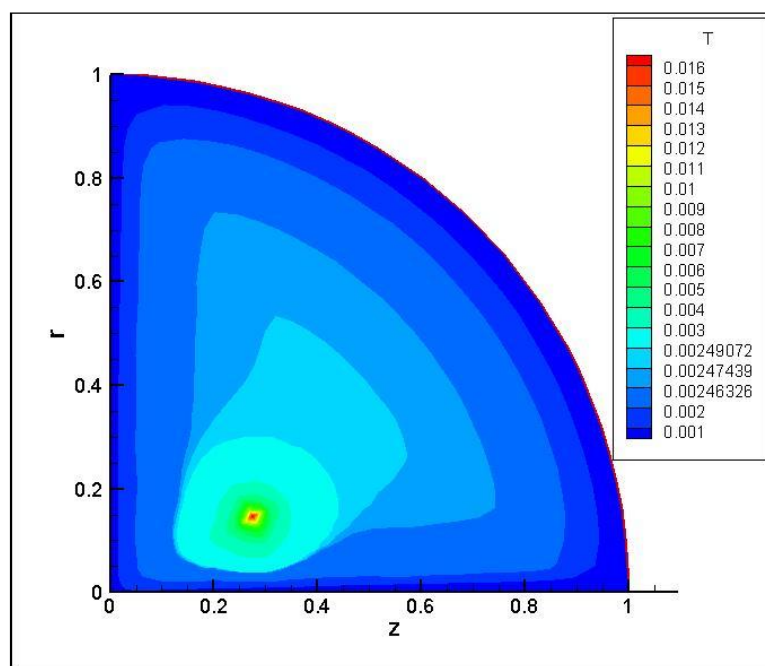
شکل (۵-۲۶): نمایش کانتورهای توزیع دمای محاسبه شده با استفاده از دو سنسور با استفاده از منبع حرارتی با تابع خطی در حضور داده‌های نویز دار

همچنین شکل‌های (۵-۲۷) تا (۵-۳۱) کانتورهای توزیع دمای دقیق و محاسبه شده در حالت‌های مختلف را برای تابع سینوسی-کسینوسی را نمایش می‌دهد. شکل (۵-۲۷) کانتور توزیع دمای دقیق را

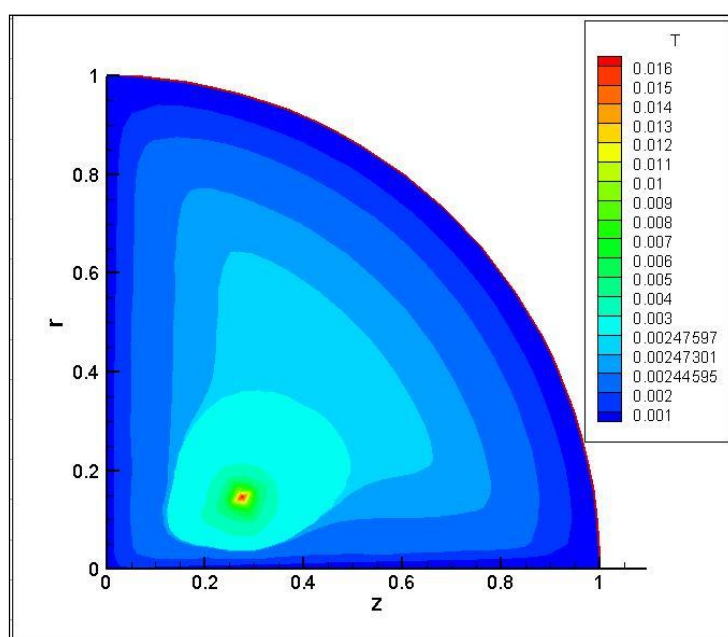
نشان می‌دهد. پس از آن به ترتیب شکل‌های (۵-۲۸) و (۵-۲۹) کانتور توزیع دمای محاسبه‌شده برای داده‌های بدون نویز را در حالت تک سنسور و دو سنسور نشان می‌دهد. به‌طوری‌که می‌توان از نمایش کانتورها دریافت در حالت استفاده از دو سنسور دقت بالا و تطابق بسیار زیادی با تابع دقیق نمایان است. بعلاوه برای حالت‌های استفاده از داده‌های نویز دار نیز در حالت دو سنسور ، شکل (۵-۳۱)، مشابهت بسیاری با توزیع دمای دقیق مشاهده می‌باشد که تائید کننده درستی و دقت روش مورد استفاده می‌باشد.



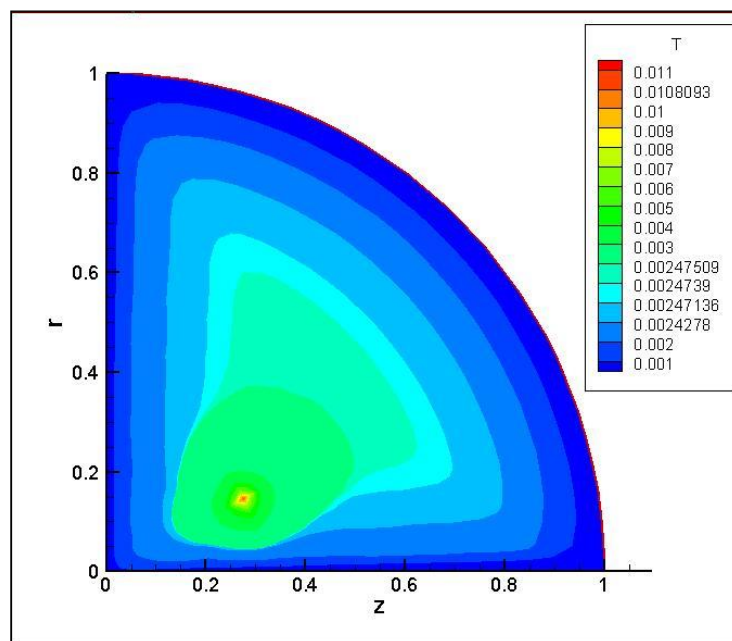
شکل (۵-۲۷): نمایش کانتورهای توزیع دمای دقیق با استفاده از منبع حرارتی با تابع سینوسی - کسینوسی



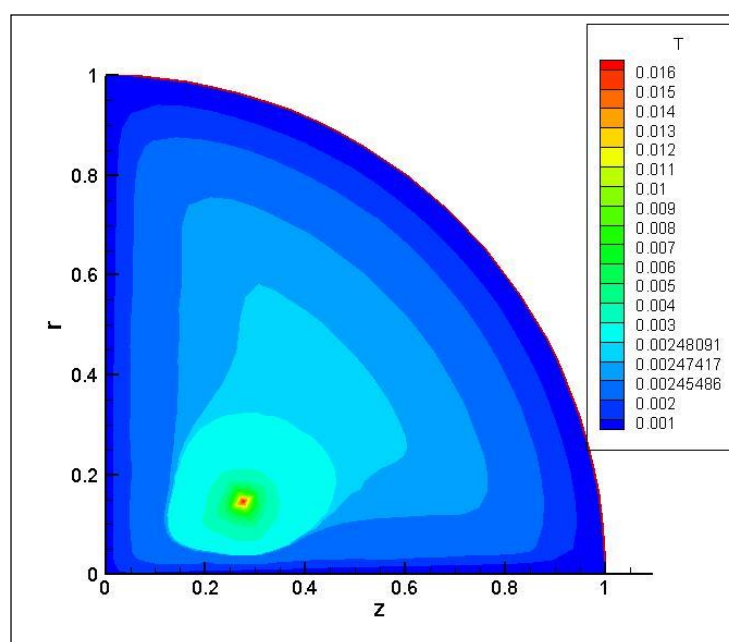
شکل (۵-۲۸): نمایش کانتورهای توزیع دمای محاسبه شده با استفاده از یک سنسور با استفاده از منبع حرارتی با تابع سینوسی - کسینوسی



شکل (۵-۲۹): نمایش کانتورهای توزیع دمای محاسبه شده با استفاده از دو سنسور با استفاده از منبع حرارتی با تابع سینوسی - کسینوسی



شکل (۵-۳۰): نمایش کانتورهای توزیع دمای محاسبه شده با استفاده از یک سنسور با استفاده از منبع حرارتی با تابع سینوسی - کسینوسی در حضور داده های نویز دار



شکل (۵-۳۱): نمایش کانتورهای توزیع دمای محاسبه شده با استفاده از دو سنسور با استفاده از منبع حرارتی با تابع سینوسی - کسینوسی در حضور داده های نویز دار

از مشاهده کانتورهای توزیع دمای برای سه تابع پله ای، خطی و سینوسی-کسینوسی می توان نتیجه گرفت که برای تابع دما به صورت پله ای، توزیع دما در حالت استفاده از دو سنسور بیشترین مطابقت

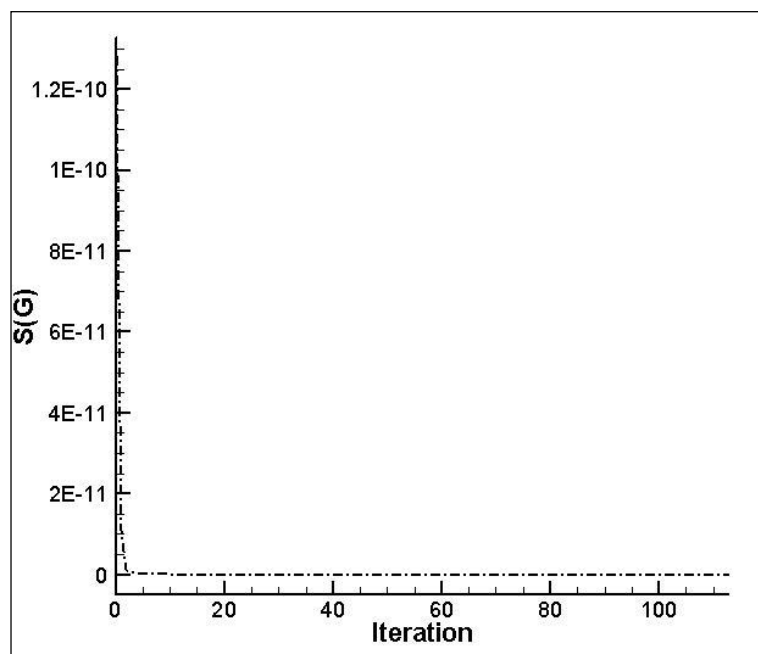
را با توزیع دمای دقیق دارد و این مشابهت در حالت استفاده از داده‌های بدون نویز بسیار بیشتر می‌باشد اما در حالت داده‌های نویز دار نیز تشابه واضحی دیده می‌شود. اما در حالت استفاده از تک سنسور خطا بیشتر شده و مشابهت کمتری به چشم می‌خورد و این امر مؤید مزیت استفاده از دو سنسور می‌باشد. همان‌طور که قبلاً بررسی شد تخمین در تابع پله‌ای به علت داشتن نقاط تیز و لبه‌ها مشکل بوده و خطای زیادی در لبه‌ها به وجود می‌آید. این خطاها در حالت تک سنسور مشهودتر بوده و توزیع دما نیز متأثر از آن می‌باشد. اما با افزودن سنسور دوم با توجه به بهبود تخمین تابع توزیع دما خطابه مقدار بسیار زیادی کاهش پیدا می‌کند. تأثیر نویز نیز در حالت دو سنسور بسیار کمتر بوده و دقت قابل قبول می‌باشد.

در مورد تابع خطی با توجه به تخمین بهتر تابع توزیع دما خطا تا حد زیادی نسبت به تابع پله‌ای کمتر است. اما در حالت نویز دار و در حالت تک سنسور، تأثیر خطای ناشی از نویز قابل توجه است که با افزودن سنسور دوم این خطا نیز تا حد زیادی کاهش پیدا می‌کند.

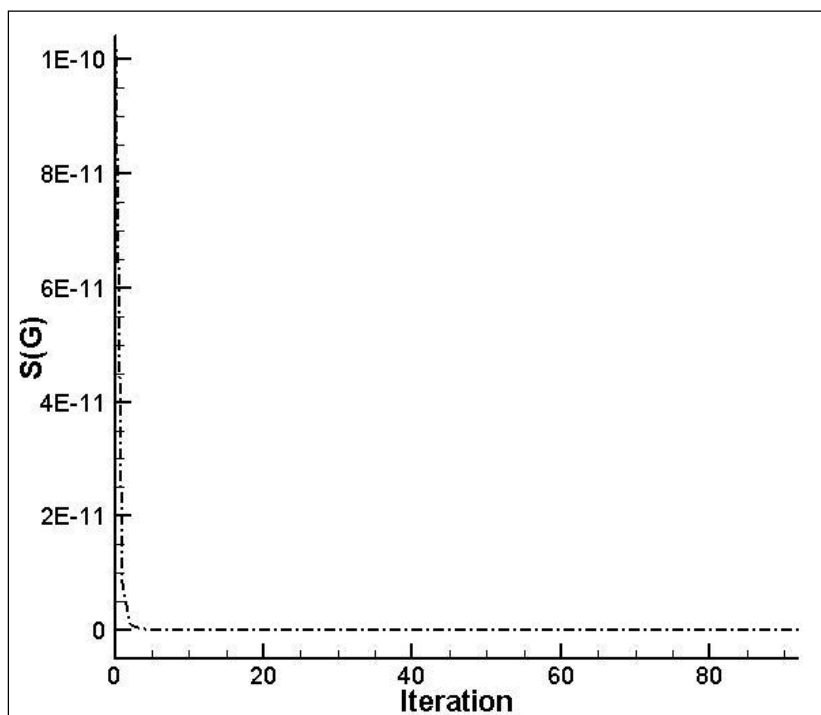
در حالت تابع سینوسی-کسینوسی نیز همان‌طور که انتظار می‌رفت با توجه به تابع تخمین زده‌شده در حالت تک سنسور و باوجود نویز ، خطا از موارد دیگر بررسی‌شده برای این تابع بیشتر است که با افزودن سنسور دوم خطا کاهش می‌یابد و در مقایسه با کانتور توزیع دمای دقیق مشابهت بیشتری وجود دارد. درواقع در حالت دو سنسور برای داده‌های بدون نویز و داده‌های نویز دار نتایج بسیار خوبی به‌دست آمده است. در حالت تک سنسور بدون وجود نویز دقت مطلوبی وجود دارد اما با افزودن نویز خطا موجب عدم مشابهت ملموسی شده است. اما درکل می‌توان نتیجه گرفت با مشابهت کانتورهای توزیع دمای محاسبه‌شده با کانتور توزیع دمای دقیق دقت و اثربخشی روش مورد تأیید قرار می‌گیرد.

۵-۱-۶ نمایش نمودار کاهش گرادیان تابع هدف

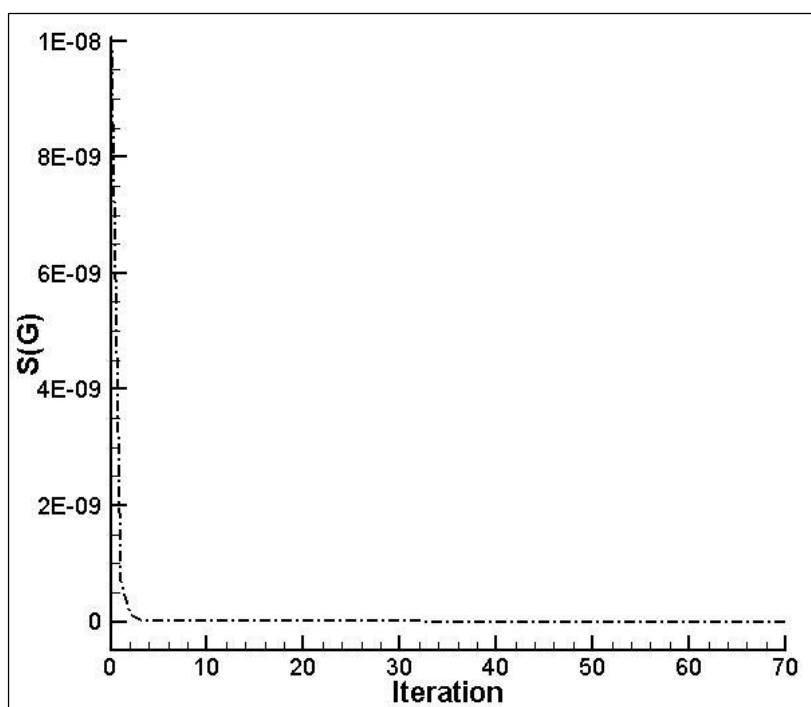
در اینجا به عنوان نمونه نمودار همگرایی تابع هدف برحسب تعداد تکرارها برای تابع پله‌ای در حالت‌های مختلف استفاده از یک سنسور و دو سنسور و در هر دو حالت استفاده از داده‌های بدون نویز و داده‌های نویز دار نشان داده شده است. شکل (۵-۳۲) نمودار همگرایی تابع هدف برحسب تعداد تکرارها برای تابع پله‌ای را در حالت تک سنسور و داده‌های بدون نویز نشان می‌دهد. همچنین شکل (۵-۳۳) نمودار همگرایی تابع هدف برحسب تعداد تکرارها برای تابع پله‌ای را در حالت تک سنسور و داده‌های نویز دار نشان می‌دهد. شکل‌های (۵-۳۴) و (۵-۳۶) نیز نمودار همگرایی تابع هدف برحسب تعداد تکرارها برای تابع پله‌ای را در حالت دو سنسور و داده‌های بدون نویز و نویز دار به ترتیب نشان می‌دهد.



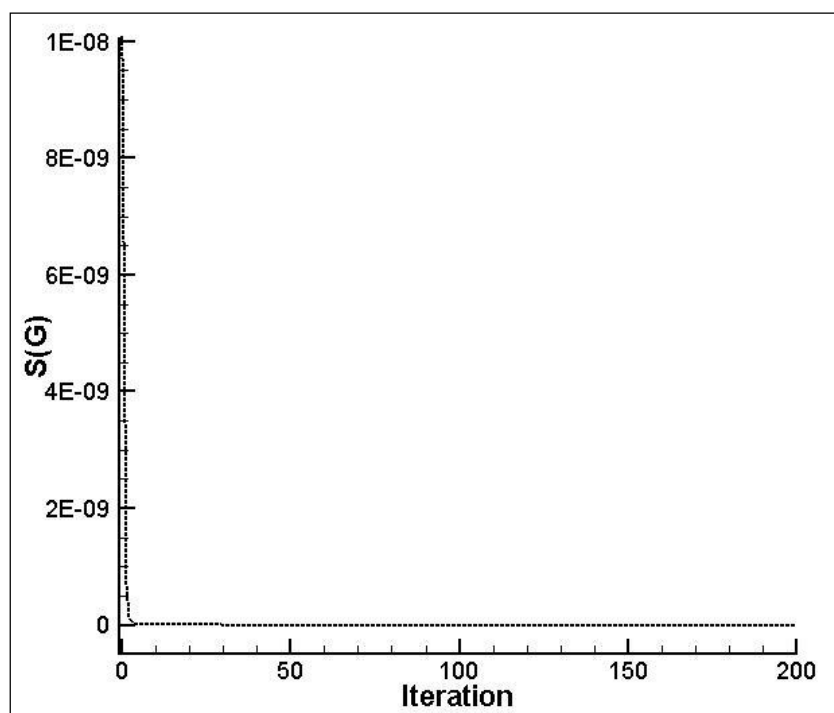
شکل (۵-۳۲) : نمودار همگرایی تابع هدف برحسب تعداد تکرارها برای تابع پله‌ای در حالت تک سنسور و داده‌های بدون نویز



شکل (۵-۳۳): نمودار همگرایی تابع هدف برحسب تعداد تکرارها برای تابع پله‌ای در حالت تک سنسور و داده‌های نویز دار



شکل (۵-۳۴): نمودار همگرایی تابع هدف برحسب تعداد تکرارها برای تابع پله‌ای در حالت دو سنسور و داده‌های بدون نویز



شکل (۵-۳۵): نمودار همگرایی تابع هدف برحسب تعداد تکرارها برای تابع پله‌ای در حالت دو سنسور و داده‌های نویز دار

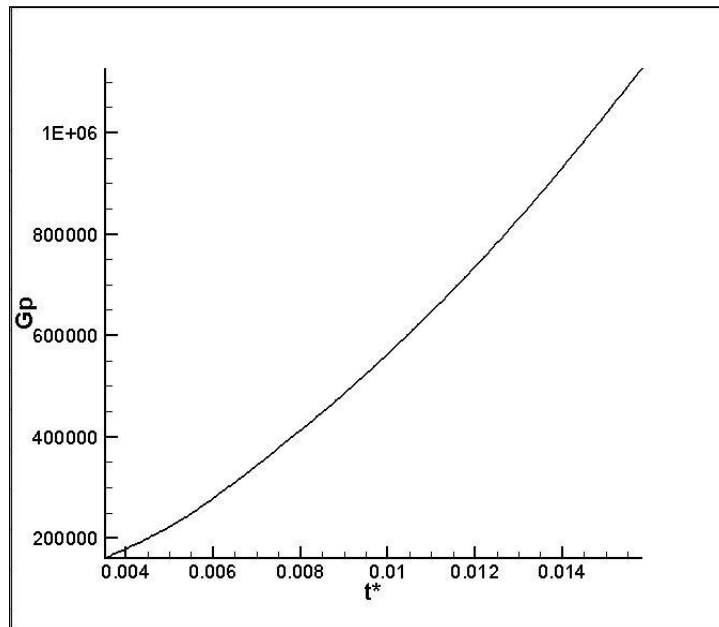
۵-۱-۷ محاسبه منبع حرارتی در مدت زمان ۱۰ دقیقه

در این تحقیق هدف این است که دما در مدت زمان ۱۰ دقیقه در نقطه (5,2) از $T_{a0}=310k$ به $T=318k$ برسد. با توجه به بی‌بعد سازی صورت گرفته برای دما و زمان، دمای بی‌بعد باید در نقطه (5,2) در زمان بی‌بعد $t^*=0.0176$ از $\theta=0$ به $\theta=3.84$ برسد. توزیع دمای بی‌بعد را در این نقطه به صورت سهموی و با رابطه $\theta = at^{*2}$ در نظر می‌گیریم بعد از محاسبه ضریب a داریم:

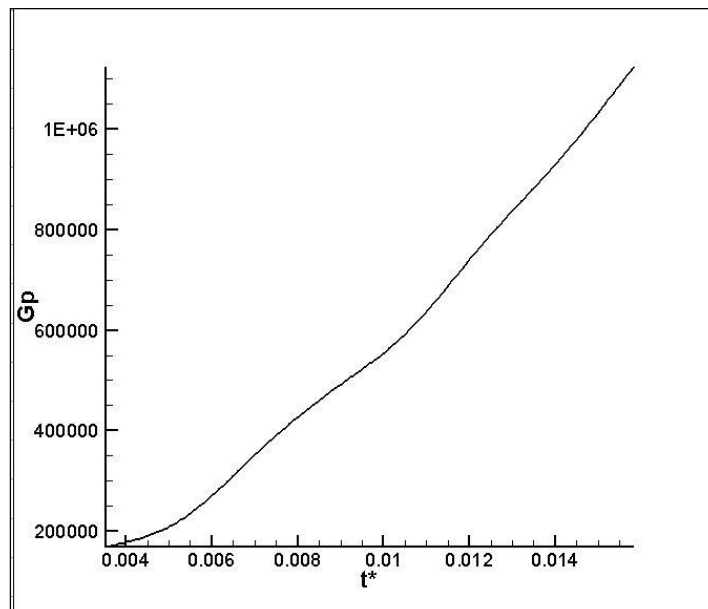
$$\theta = 12396694t^{*2} \quad (۵-۵)$$

در شکل (۵-۳۲) توان منبع حرارتی محاسبه شده در مدت زمان ده دقیقه نشان داده شده است و در شکل (۵-۳۳) توان منبع حرارتی محاسبه شده با استفاده از داده‌های نویز دار نمایش داده شده است. شکل (۵-۳۴) مقایسه توزیع دمای محاسبه شده در نقطه (5,2) با توزیع دمای دقیق در این نقطه را نشان می‌دهد. همان‌طور که از مقایسه دو توان دقیق و محاسبه شده در نقطه مذکور مشخص است،

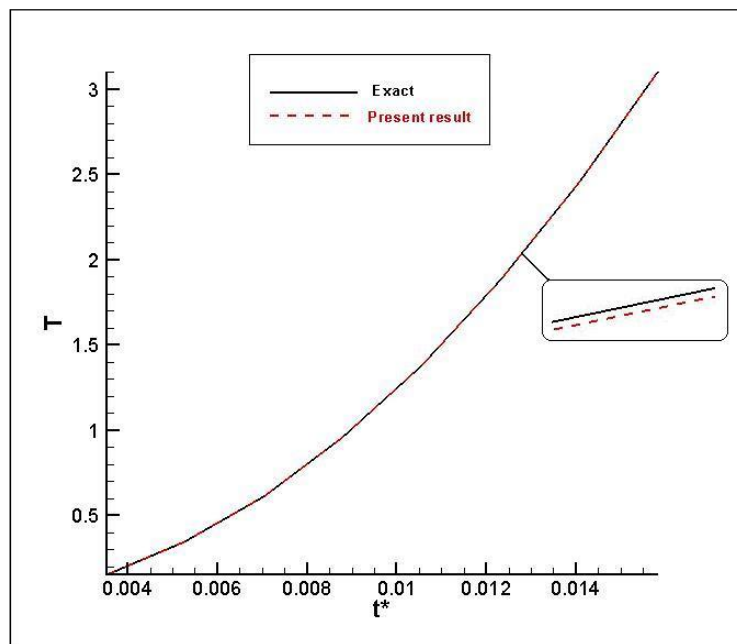
تطابق بسیار زیاد و مطلوب دو توان می باشد که نشان می دهد دقت این روش حل مورد اطمینان است. همچنین شکل (۵-۳۵) مقایسه توزیع دمای محاسبه شده با استفاده از داده های نویز دار در نقطه (5,2) با توزیع دمای دقیق در این نقطه را نمایش می دهد.



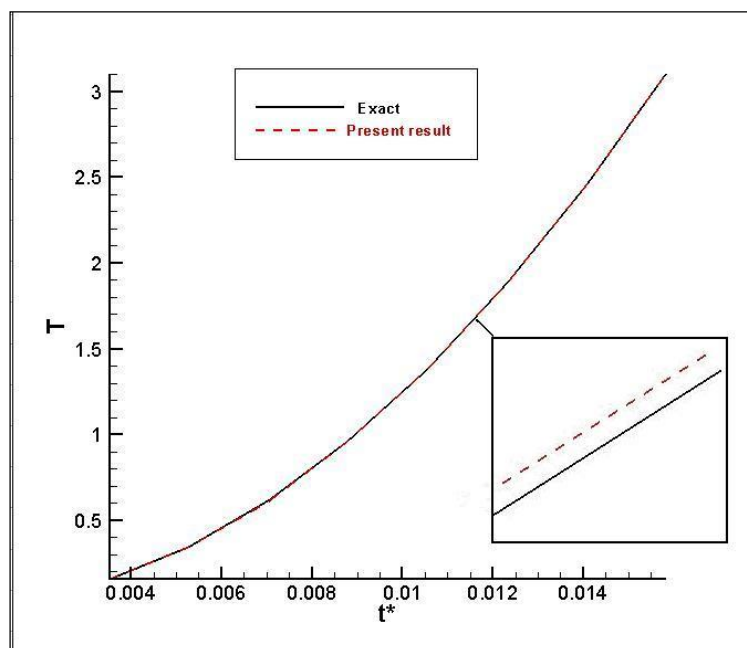
شکل (۵-۳۶): توان حرارتی محاسبه شده در مدت زمان ۱۰ دقیقه



شکل (۵-۳۷): توان حرارتی محاسبه شده با استفاده از داده های نویز دار

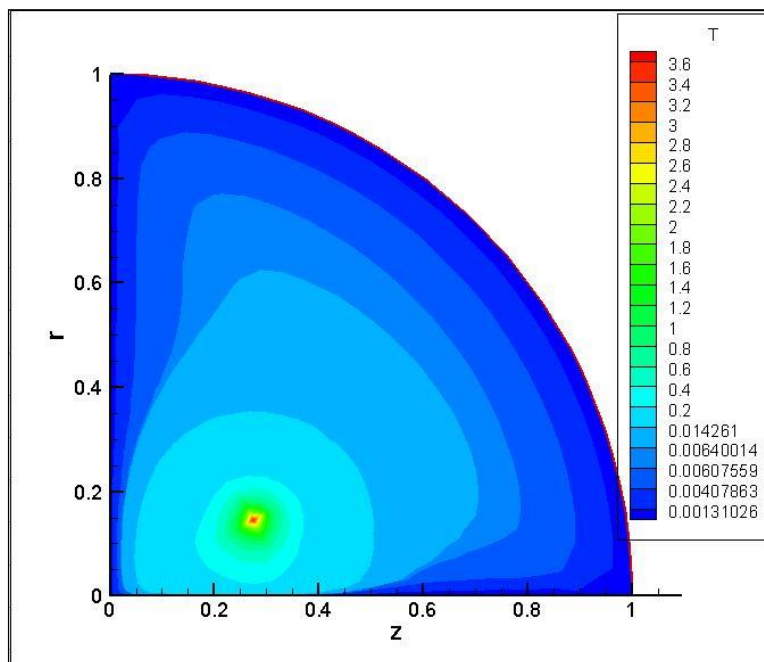


شکل (۵-۳۸): مقایسه توزیع دمای محاسبه شده در نقطه (۵,۲) با توزیع دمای دقیق

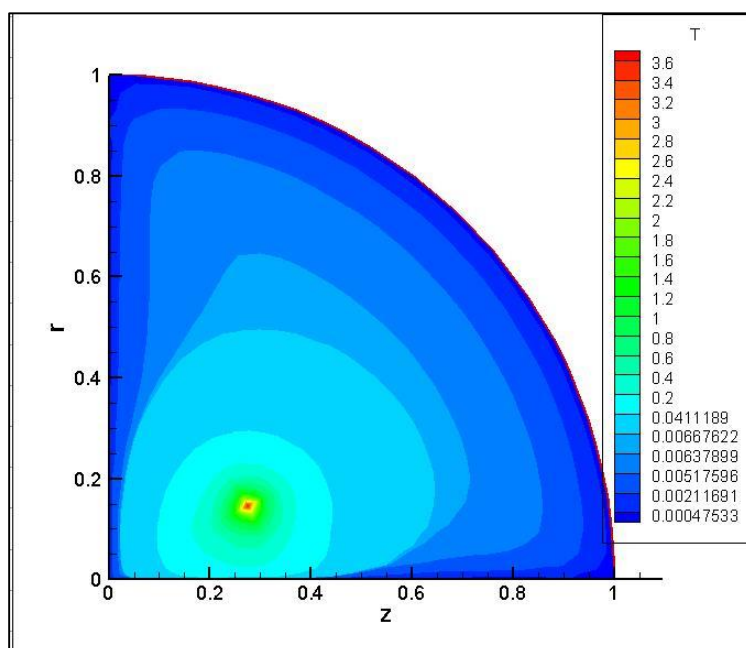


شکل (۵-۳۹): مقایسه توزیع دمای محاسبه شده با استفاده از داده های نویز دار در نقطه (۵,۲) با توزیع دمای دقیق

شکل (۵-۳۶) کانتورهای توزیع دمای محاسبه شده را نشان داده و شکل (۵-۳۷) کانتورهای توزیع دمای محاسبه شده در حضور داده های نویز دار را نشان می دهد.



شکل (۵-۴): نمایش کانتورهای توزیع دمای محاسبه شده در مدت زمان ده دقیقه



شکل (۵-۴): نمایش کانتورهای توزیع دمای محاسبه شده در مدت زمان ده دقیقه در حضور داده های نویز دار

۵-۱-۸ محاسبه منبع توان حرارتی در مدت زمان ۳۰ دقیقه

در حالت دوم هدف این است که دما در مدت زمان ۳۰ دقیقه در نقطه (5,2) از $T_{a0}=310k$ به $T=318k$ برسد. با توجه به بی بعد سازی صورت گرفته برای دما و زمان، دمای بی بعد باید در نقطه

(5,2) در زمان بی‌بعد $t^*=0.0528$ از $\theta=0$ به $\theta=3.84$ برسد. توزیع دمای بی‌بعد را در این

نقطه به صورت سهموی و با رابطه $\theta = at^{*2}$ در نظر می‌گیریم بعد از محاسبه ضریب a داریم:

$$\theta = 1377.3314 t^{*2} \quad (5-6)$$

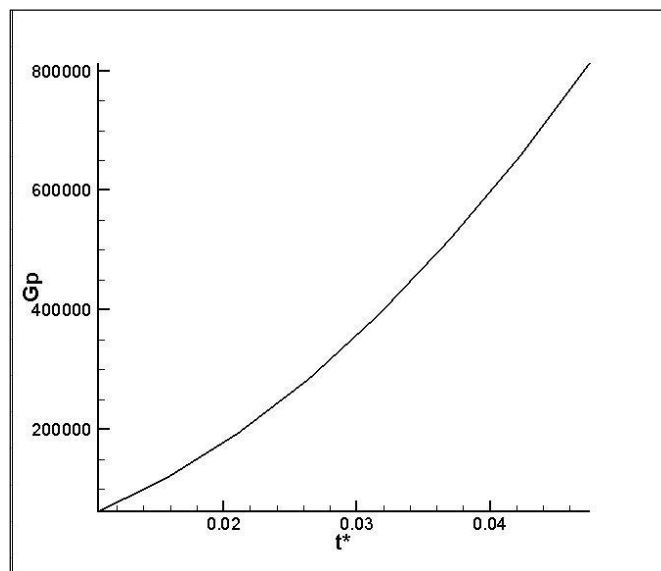
شکل (5-38) توان حرارتی محاسبه‌شده در مدت زمان ۳۰ دقیقه را نشان می‌دهد. شکل (5-39) توان

محاسبه‌شده در مدت زمان ۳۰ دقیقه با استفاده از داده‌های نویز دار را نمایش می‌دهد. ملاحظه

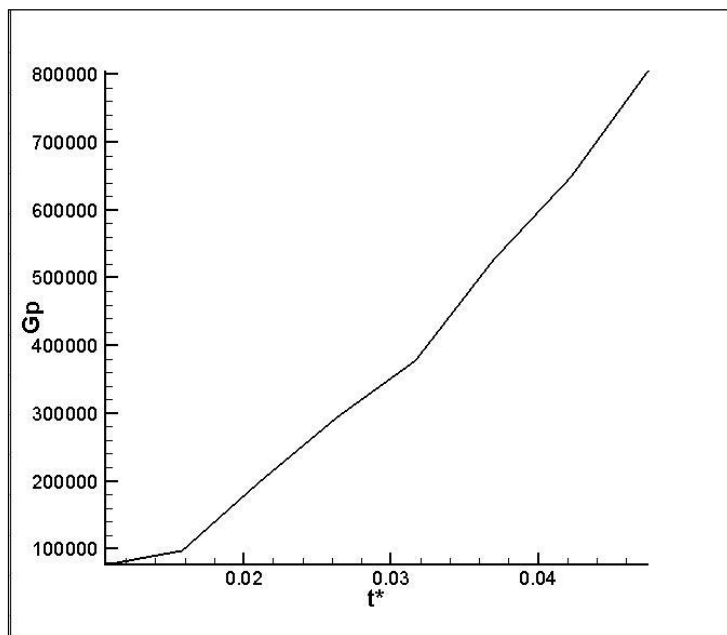
می‌شود که در این حالت میزانی انحراف به علت وجود نویز در داده‌ها به وجود آمده است. شکل (5-40)

(40) در نقطه (5,2) مقایسه بین توان حرارتی دقیق و محاسبه‌شده را نشان می‌دهد. به‌طوری‌که در

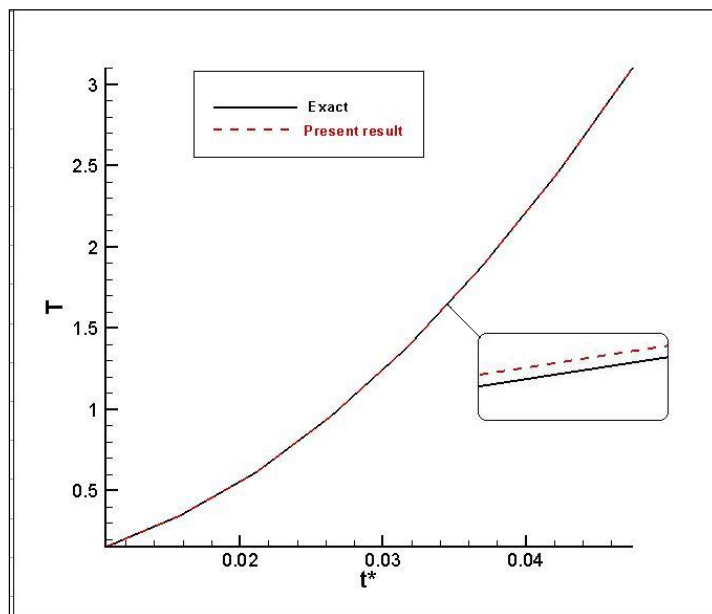
شکل مشاهده می‌شود دو نمودار تشابه یکسانی دارند و مؤید دقت بالای روش مورد استفاده است.



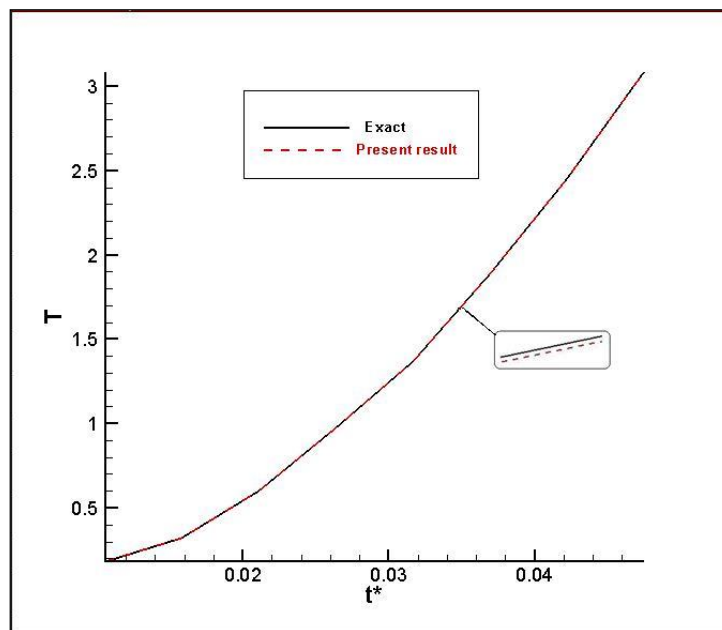
شکل (5-42): توان حرارتی محاسبه‌شده در مدت زمان ۳۰ دقیقه



شکل (۴۳-۵): توان حرارتی محاسبه شده با استفاده از داده های نويز دار

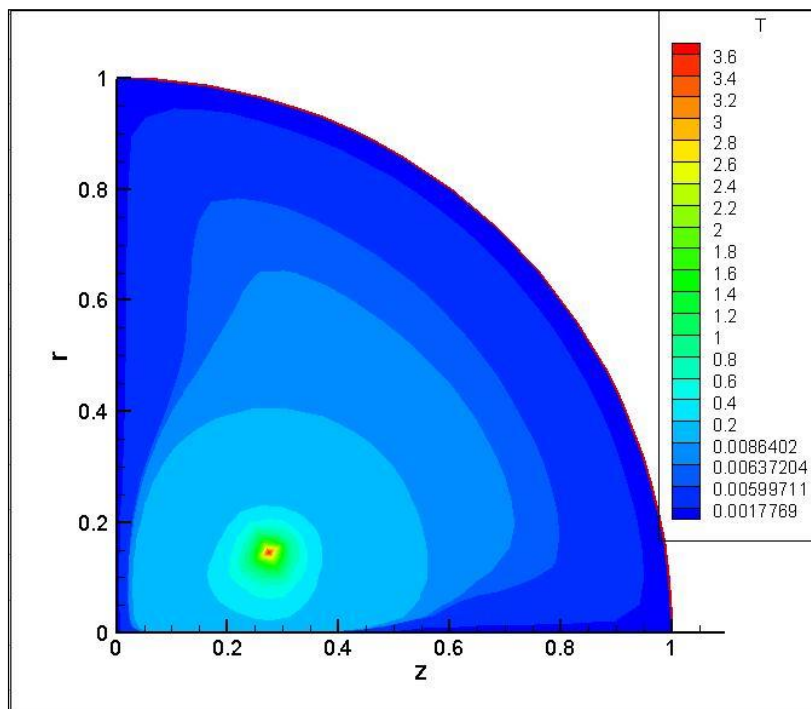


شکل (۴۴-۵): مقایسه توزیع دمای محاسبه شده در نقطه (۵,۲) با توزیع دمای دقیق در این نقطه

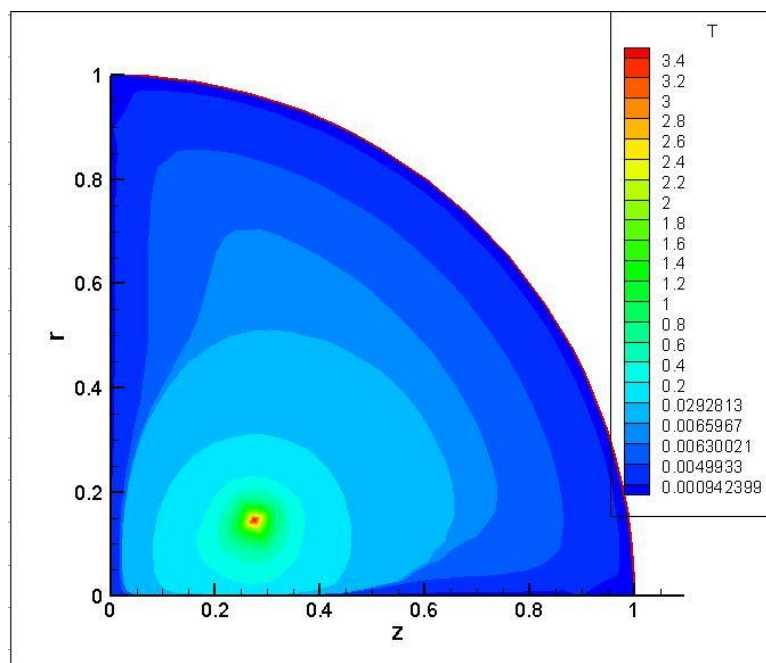


شکل (۴۵-۵): مقایسه توزیع دمای محاسبه شده با استفاده از داده های نویز دار در نقطه (۵,۲) با توزیع دمای دقیق

شکل (۴۲-۵) کانتورهای توزیع دمای محاسبه شده را نشان داده و شکل (۴۳-۵) کانتورهای توزیع دمای محاسبه شده در حضور داده های نویز دار را نشان می دهد.



شکل (۴۶-۵): نمایش کانتورهای توزیع دمای محاسبه شده در مدت زمان ۳۰ دقیقه



شکل (۴۷-۵): نمایش کانتورهای توزیع دمای محاسبه شده در حضور داده های نویز دار

فصل ششم : جمع بندی نتایج و پیشنهادات

۶-۱ جمع‌بندی نتایج

اهم نتایج پژوهش به شرح ذیل ارائه می‌گردد:

در این تحقیق به منظور تخمین توان منبع حرارتی از روش گرادیان مزدوج برای حل مسئله انتقال حرارت معکوس، با موفقیت استفاده شد که در آن از معادله پنس برای مدل‌سازی انتقال حرارت در بافت سینه با فرض تقارن محوری و در حالت سه لایه استفاده شده است. برای بررسی دقت روش ارائه‌شده، توابع مختلفی شامل توابع پله‌ای، خطی و سینوسی -کسینوسی برای توان منبع حرارتی در نظر گرفته شدند که نتایج نشان‌دهنده دقت بالای روش مورد استفاده در تخمین توان منبع حرارتی می‌باشد. برای مثال‌های مختلف خطای RMS محاسبه گردید و مشخص شد که این خطا در تابع پله‌ای بیشترین مقدار را دارد و علت آن وجود ناپیوستگی و نقاط تیز در تابع پله‌ای می‌باشد. تابع پله‌ای مشکل‌ترین تابع از نظر پوشش با روش‌های معکوس است و معمولاً آن را برای مقایسه دقت الگوریتم‌ها و روش‌های مختلف حل مسائل معکوس انتخاب می‌کنند. روش ارائه‌شده در این تحقیق یک روش کلی است و می‌تواند برای حل مسائل هدایت حرارتی معکوس دوبعدی و متقارن محوری به کار گرفته شود. با توجه به مثال‌های بررسی‌شده و با مقایسه توان منبع حرارتی به دست آمده با توان منبع حرارتی دقیق و با توجه به این نکته که در روش به کار گرفته‌شده نیازی به اطلاعات قبلی در مورد شکل تابع مجهول نیست و از پایداری نسبتاً خوبی نسبت به داده‌های نویز دار برخوردار است به این نتیجه می‌رسیم که این روش، روش مناسبی برای تخمین توان منبع حرارتی مجهول وابسته به زمان می‌باشد. در حضور داده‌های نویز دار، روش پیشنهادی از دقت خوبی برخوردار می‌باشد که پایداری مطلوب آن را در اکثر موارد نشان می‌دهد. نتایج داده‌های نویز دار در مورد تابع خطی، نشان‌دهنده مقادیری از ناپایداری می‌باشد که با توجه به استفاده از تک سنسور برای اندازه‌گیری میزان حرارت تا حدودی قابل قبول است. برای غلبه بر این ناپایداری استفاده از دو سنسور برای اندازه‌گیری حرارت پیشنهاد می‌گردد. روش استفاده‌شده برای تخمین توان منبع، در این تحقیق برای

گرما درمانی سرطان بافت سینه مورد استفاده قرار گرفته است اما می توان از آن برای بافت های مشابه که قابلیت شبیه سازی به صورت سه لایه را دارند نیز استفاده کرد.

۶-۲ پیشنهادات

موارد ذیل برای ادامه کارهای انجام شده در این تحقیق و توسعه آن ها جهت بررسی های کامل تر پیشنهاد می شود.

۱- استفاده از مدل های سه بعدی برای مواردی که مدل دارای تقارن محوری نیست با استفاده از چند سنسور.

۲- بررسی ترم پرفیوژن خون در انجام معادلات.

۳- حل معادله پنس با روش غیر فوریه ای.

۴- استفاده از داده های آزمایشگاهی بالینی در تحلیل معکوس و تخمین توزیع دما در طول گرما درمانی.

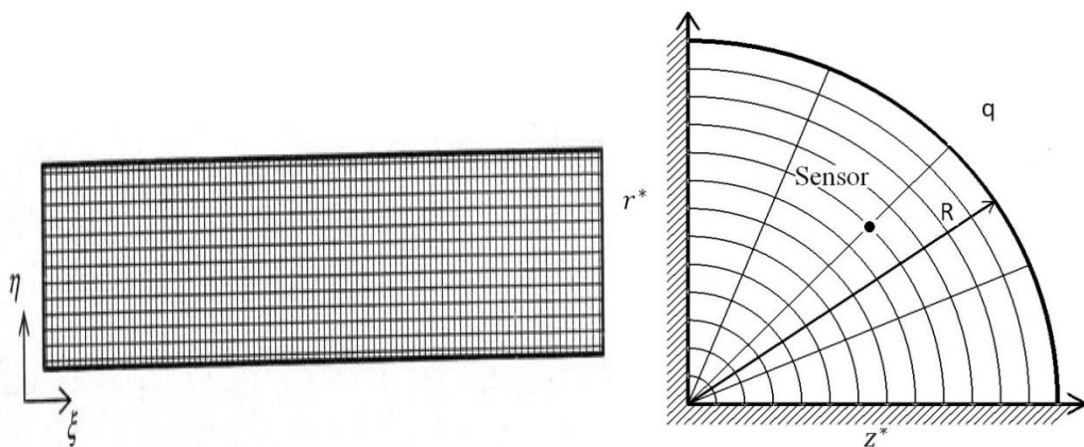
۵- حل مستقیم مسئله انتقال گرمای زیستی برای یک بافت سه بعدی با هندسه نامنظم به منظور تعیین دما در طول گرما درمانی.

۶- حل معکوس مسئله انتقال گرمای زیستی برای یک بافت سه بعدی با هندسه نامنظم به منظور تعیین دما در طول گرما درمانی.

پیوست ۱- نحوه انتقال معادلات و محاسبات مربوط به آن‌ها از صفحه فیزیکی به صفحه محاسباتی

پ ۱-۱ معادلات حاکم در دستگاه مختصات عمومی

در تدوین کد مربوط به محاسبه توزیع دما از روش مختصات عمومی استفاده شده است. در این روش محاسبات در صفحه محاسباتی که دارای شبکه‌ای هموار است انجام می‌شود و سپس نتایج در صفحه فیزیکی که معمولاً دارای پیچیدگی بیشتری می‌باشد به نمایش درمی‌آید. یک مثال در این مورد انتقال مسئله از دستگاه مختصات استوانه‌ای (صفحه فیزیکی) به صفحه محاسباتی مطابق شکل زیر می‌باشد.



شکل ۱- نمایش صفحه مختصات فیزیکی و محاسباتی

همان‌طور که در شکل ملاحظه می‌شود محور Z محور تقارن است و با دوران حول محور Z ، مدل سه‌بعدی با تقارن محوری به دست می‌آید.

حال روابط زیر را بین فضای فیزیکی و محاسباتی تعریف می‌کنیم :

$$z^* = z^*(\xi, \eta) \quad (1)$$

$$r^* = r^*(\xi, \eta) \quad (2)$$

قانون زنجیری برای مشتق‌های پاره‌ای به صورت زیر است:

$$\frac{\partial}{\partial z^*} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z^*} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z^*} \quad (3)$$

و به طریق مشابه :

$$\frac{\partial}{\partial r^*} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial r^*} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial r^*} \quad (4)$$

مشتق‌های پاره‌ای را با استفاده از اندیس‌ها نشان می‌دهیم ، مثلاً $\frac{\partial \xi}{\partial z^*} = \xi_{z^*}$ با توجه به اینکه r^* و z^* توابعی از ξ, η می‌باشند محاسبه مشتق‌های آن‌ها برحسب ξ, η ساده است ، همچنین می‌توان گفت ξ, η نیز به صورت ضمنی توابعی از r^* و z^* هستند و می‌توان آن‌ها را به صورت زیر نمایش داد :

$$\xi = \xi(z^*, r^*) \quad (5)$$

$$\eta = \eta(z^*, r^*) \quad (6)$$

ولی محاسبه مشتق‌های ξ, η برحسب r^* و z^* پیچیده‌تر است و به همین دلیل از ژاکوبین‌های تبدیل استفاده می‌کنیم.

پ ۱-۲ متریک‌ها و ژاکوبین‌های تبدیل

در معادلات قبل جمله‌هایی مانند $\xi_{z^*}, \xi_{r^*}, \eta_{z^*}, \eta_{r^*}$ ظاهر شدند این مشتق‌های تبدیل ، متریک‌های انتقال و یا به صورت ساده‌تر، متریک نامیده می‌شوند. تفسیر متریک‌ها با تقریب زیر مشخص می‌شود.

$$\xi_{z^*} = \frac{\partial \xi}{\partial z^*} \cong \frac{\Delta \xi}{\Delta z^*} \quad (7)$$

عبارت فوق ، نشان می دهد که متریک ها نسبت طول قوس ها در فضای محاسباتی به طول قوس های مشابه در فضای فیزیکی هستند . اکنون به محاسبه متریک ها می پردازیم:

$$d\xi = \xi_z \cdot dz^* + \xi_r \cdot dr^* \quad (۸)$$

$$d\eta = \eta_z \cdot dz^* + \eta_r \cdot dr^* \quad (۹)$$

که آن ها را به صورت فشرده زیر می توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_z & \xi_r \\ \eta_z & \eta_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dz \\ dr \end{bmatrix} \quad (۱۰)$$

با معکوس کردن متغیرهای مستقل معادلات زیر به دست می آیند:

$$dz^* = z_\xi \cdot d\xi + z_\eta^* d\eta \quad (۱۱)$$

$$dr^* = r_\xi d\xi + r_\eta^* d\eta \quad (۱۲)$$

حال آن ها را به صورت فشرده زیر می نویسیم :

$$\begin{bmatrix} dz \\ dr \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_\xi & z_\eta^* \\ r_\xi & r_\eta^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} \quad (۱۳)$$

از مقایسه روابط (۱۰) و (۱۳) می توان نتیجه گرفت :

$$\begin{bmatrix} \xi_z^* & \xi_r^* \\ \eta_z^* & \eta_r^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_\xi^* & z_\eta^* \\ r_\xi^* & r_\eta^* \end{bmatrix} \quad (۱۴)$$

$$\xi_r^* = -\frac{1}{J} z_\eta^* \quad (۱۵)$$

$$\xi_z^* = -\frac{1}{J} r_\eta^* \quad (۱۶)$$

$$\eta_{z^*} = -\frac{1}{J} r^*_{\xi} \quad (۱۷)$$

$$\eta_{r^*} = -\frac{1}{J} z^*_{\xi} \quad (۱۸)$$

$$J = z^*_{\xi} r^*_{\eta} - r^*_{\xi} z^*_{\eta} \quad (۱۹)$$

در روابط فوق ، J ژاکوبین تبدیل نامیده می‌شود. ژاکوبین J عبارت است از : نسبت سطح (نسبت حجم در حالت سه‌بعدی) در فضای فیزیکی به سطح در فضای محاسباتی.

پ ۱-۳ تبدیل معادلات از صفحه فیزیکی به صفحه محاسباتی

با استفاده از روابط زیر تمامی مشتقات جزئی مرتبه اول و مرتبه دوم متغیر وابسته θ از فضای فیزیکی به فضای محاسباتی منتقل می‌شود.

$$\frac{\partial \theta}{\partial r^*} = \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial r^*} + \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial r^*} \quad (۲۰)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z^*} = \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z^*} + \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z^*} \quad (۲۱)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^{*2}} = \xi_{r^* r^*} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) + \xi_{r^*}^2 \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \right) + 2\eta_{r^*} \xi_{r^*} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta \partial \xi} \right) + \eta_{r^* r^*} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) + \eta_{r^*}^2 \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \right) \quad (۲۱)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^{*2}} = \xi_{z^* z^*} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) + \xi_{z^*}^2 \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \right) + 2\eta_{z^*} \xi_{z^*} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta \partial \xi} \right) + \eta_{z^* z^*} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) + \eta_{z^*}^2 \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \right) \quad (۲۲)$$

با جمع روابط (۲۱) و (۲۲) داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^{*2}} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^{*2}} &= (\xi_{z^* z^*} + \xi_{r^* r^*}) \left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) + (\eta_{z^* z^*} + \eta_{r^* r^*}) \left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) + \xi_{z^*}^2 \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \right) + 2\eta_{z^*} \xi_{z^*} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta \partial \xi} \right) \\ &+ \eta_{z^*}^2 \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \right) + \xi_{r^*}^2 \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \right) + 2\eta_{r^*} \xi_{r^*} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta \partial \xi} \right) + \eta_{r^*}^2 \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \right) \end{aligned} \quad (۲۳)$$

که در آن،

$$\xi_{z^*z^*} + \xi_{r^*r^*} = \frac{1}{|J|^2} \left[\left(\frac{\partial r^*}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z^*}{\partial \eta} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial^2 r^*}{\partial \xi^2} \frac{\partial z^*}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 z^*}{\partial \xi^2} \frac{\partial r^*}{\partial \eta} \right) \quad (24)$$

$$- \frac{2}{|J|^2} \left(\frac{\partial z^*}{\partial \xi} \frac{\partial z^*}{\partial \eta} + \frac{\partial r^*}{\partial \xi} \frac{\partial r^*}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial^2 r^*}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial z^*}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 z^*}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial r^*}{\partial \eta} \right)$$

$$+ \frac{1}{|J|^2} \left[\left(\frac{\partial z^*}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial r^*}{\partial \eta} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial^2 r^*}{\partial \eta^2} \frac{\partial z^*}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 z^*}{\partial \eta^2} \frac{\partial r^*}{\partial \eta} \right)$$

$$\eta_{z^*z^*} + \eta_{r^*r^*} = \frac{1}{|J|^2} \left[\left(\frac{\partial r^*}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z^*}{\partial \eta} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial^2 z^*}{\partial \xi^2} \frac{\partial r^*}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 r^*}{\partial \xi^2} \frac{\partial z^*}{\partial \xi} \right) \quad (25)$$

$$- \frac{2}{|J|^2} \left(\frac{\partial z^*}{\partial \xi} \frac{\partial z^*}{\partial \eta} + \frac{\partial r^*}{\partial \xi} \frac{\partial r^*}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial^2 z^*}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial r^*}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 r^*}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial z^*}{\partial \xi} \right)$$

$$+ \frac{1}{|J|^2} \left[\left(\frac{\partial z^*}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial r^*}{\partial \xi} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial^2 z^*}{\partial \xi^2} \frac{\partial r^*}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 r^*}{\partial \eta^2} \frac{\partial z^*}{\partial \xi} \right)$$

بنابراین معادله حاکم در دستگاه مختصات عمومی به صورت زیر خواهد شد:

$$\left(\frac{1}{|J|^2} \left[\left(\frac{\partial r^*}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z^*}{\partial \eta} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial^2 r^*}{\partial \xi^2} \frac{\partial z^*}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 z^*}{\partial \xi^2} \frac{\partial r^*}{\partial \eta} \right) \right. \quad (26)$$

$$- \frac{2}{|J|^2} \left(\frac{\partial z^*}{\partial \xi} \frac{\partial z^*}{\partial \eta} + \frac{\partial r^*}{\partial \xi} \frac{\partial r^*}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial^2 r^*}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial z^*}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 z^*}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial r^*}{\partial \eta} \right)$$

$$+ \frac{1}{|J|^2} \left[\left(\frac{\partial z^*}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial r^*}{\partial \eta} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial^2 r^*}{\partial \eta^2} \frac{\partial z^*}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 z^*}{\partial \eta^2} \frac{\partial r^*}{\partial \eta} \right) \left. \right) \frac{\partial \theta}{\partial \xi}$$

$$+ \left(\frac{1}{|J|^2} \left[\left(\frac{\partial r^*}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z^*}{\partial \eta} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial^2 z^*}{\partial \xi^2} \frac{\partial r^*}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 r^*}{\partial \xi^2} \frac{\partial z^*}{\partial \xi} \right) \right.$$

$$- \frac{2}{|J|^2} \left(\frac{\partial z^*}{\partial \xi} \frac{\partial z^*}{\partial \eta} + \frac{\partial r^*}{\partial \xi} \frac{\partial r^*}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial^2 z^*}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial r^*}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 r^*}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial z^*}{\partial \xi} \right)$$

$$+ \left. \frac{1}{|J|^2} \left[\left(\frac{\partial z^*}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial r^*}{\partial \xi} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial^2 z^*}{\partial \xi^2} \frac{\partial r^*}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 r^*}{\partial \eta^2} \frac{\partial z^*}{\partial \xi} \right) \right) \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \xi_{z^*}^2 \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \right)$$

$$+ 2\eta_{z^*} \xi_{z^*} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta \partial \xi} \right) + \eta_{z^*}^2 \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \right) + \xi_{r^*}^2 \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \right) + 2\eta_{r^*} \xi_{r^*} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta \partial \xi} \right) + \eta_{r^*}^2 \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \right)$$

$$+ \frac{1}{r^{*2}} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \xi_{r^*} + \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \eta_{r^*} \right) - \frac{\rho_b C_b \dot{W}_b R^2}{K} \theta + \frac{q'''_m R}{q} = \frac{\partial \theta}{\partial t^*}$$

پ ۴-۱ گسسته سازی معادلات

در عبارت $\nabla^2 \theta = \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^{*2}} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial \theta}{\partial r^*}$ ضرایب گره‌های همسایه به صورت زیر محاسبه می‌شوند (در گسسته سازی معادلات از طرح تفاضل مرکزی^۱ استفاده شده است).

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^{*2}} = & \xi_{z^*} \left(\frac{\theta_{i+1,j} - \theta_{i-1,j}}{2} \right) + \xi_{z^*}^2 (\theta_{i+1,j} + \theta_{i-1,j} - 2\theta_{i,j}) \\ & + \frac{1}{4} \xi_{z^*} \eta_{z^*} (\theta_{i+1,j+1} + \theta_{i-1,j-1} - \theta_{i+1,j-1} - \theta_{i-1,j+1}) + \eta_{z^*} \left(\frac{\theta_{i,j+1} - \theta_{i,j-1}}{2} \right) \\ & + \xi_{z^*}^2 (\theta_{i,j+1} + \theta_{i,j-1} - 2\theta_{i,j}) \\ & + \frac{1}{4} \xi_{z^*} \eta_{z^*} (\theta_{i+1,j+1} + \theta_{i-1,j-1} - \theta_{i+1,j-1} - \theta_{i-1,j+1}) \end{aligned} \quad (27)$$

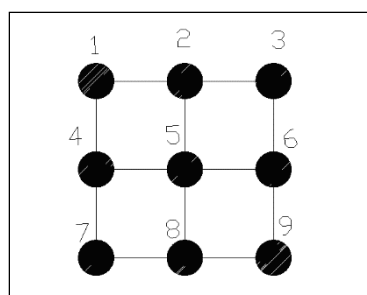
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^{*2}} = & \xi_{r^*} \left(\frac{\theta_{i+1,j} - \theta_{i-1,j}}{2} \right) + \xi_{r^*}^2 (\theta_{i+1,j} + \theta_{i-1,j} - 2\theta_{i,j}) \\ & + \frac{1}{4} \xi_{r^*} \eta_{r^*} (\theta_{i+1,j+1} + \theta_{i-1,j-1} - \theta_{i+1,j-1} - \theta_{i-1,j+1}) + \eta_{r^*} \left(\frac{\theta_{i,j+1} - \theta_{i,j-1}}{2} \right) \\ & + \eta_{r^*}^2 (\theta_{i,j+1} + \theta_{i,j-1} - 2\theta_{i,j}) \\ & + \frac{1}{4} \xi_{r^*} \eta_{r^*} (\theta_{i+1,j+1} + \theta_{i-1,j-1} - \theta_{i+1,j-1} - \theta_{i-1,j+1}) \end{aligned} \quad (28)$$

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial \theta}{\partial r^*} = \frac{1}{2r_{i,j}^*} ((\theta_{i+1,j} + \theta_{i-1,j}) \xi_{r^*} + (\theta_{i,j+1} + \theta_{i,j-1}) \eta_{r^*}) \quad (29)$$

با جمع روابط (۲۷)، (۲۸) و (۲۹) و مرتب کردن ضرایب متغیرها رابطه زیر حاصل می‌شود:

1- Central difference

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^{*2}} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial \theta}{\partial r^*} \\
&= -2(\xi_{z^*}^2 + \eta_{z^*}^2 + \xi_{r^*}^2 \eta_{r^*}^2) - \frac{1}{2}(\xi_{z^*} \eta_{z^*} + \xi_{r^*} \eta_{r^*}) \theta_{i-1,j+1} \\
&+ \frac{1}{2}(\xi_{z^*} \eta_{z^*} + \xi_{r^*} \eta_{r^*}) \theta_{i+1,j+1} + \frac{1}{2}(\xi_{z^*} \eta_{z^*} + \xi_{r^*} \eta_{r^*}) \theta_{i-1,j-1} \\
&- \frac{1}{2}(\xi_{z^*} \eta_{z^*} + \xi_{r^*} \eta_{r^*}) \theta_{i+1,j-1} \\
&+ \left(\frac{1}{2} \eta_{z^*} z^* + \frac{1}{2} \eta_{r^*} r^* + \eta_{z^*}^2 + \eta_{r^*}^2 + \frac{1}{2r_{i,j}^*} \eta_{r^*} \right) \theta_{i,j+1} \\
&+ \left(-\frac{1}{2} \xi_{z^*} z^* - \frac{1}{2} \xi_{r^*} r^* + \xi_{z^*}^2 + \xi_{r^*}^2 - \frac{1}{2r_{i,j}^*} \xi_{r^*} \right) \theta_{i-1,j} \\
&+ \left(\frac{1}{2} \xi_{z^*} z^* + \frac{1}{2} \xi_{r^*} r^* + \xi_{z^*}^2 + \xi_{r^*}^2 - \frac{1}{2r_{i,j}^*} \xi_{r^*} \right) \theta_{i+1,j} \\
&+ \left(-\frac{1}{2} \eta_{z^*} z^* - \frac{1}{2} \eta_{r^*} r^* + \eta_{z^*}^2 + \eta_{r^*}^2 + \frac{1}{2r_{i,j}^*} \eta_{r^*} \right) \theta_{i,j-1}
\end{aligned} \tag{۳۰}$$



شکل ۲- نمایش گره مرکزی و هشت گره همسایه آن

با استفاده از روش گوس سایدل، معادله (۲۶) گسسته می‌شود:

$$\begin{aligned}
\theta_{i,j}^n = & (-\psi(i,j,1)\theta_{i-1,j+1}^{n-1} - \psi(i,j,2)\theta_{i,j+1}^{n-1} - \psi(i,j,3)\theta_{i+1,j+1}^{n-1} - \psi(i,j,4)\theta_{i-1,j}^{n-1} \\
& - \psi(i,j,6)\theta_{i+1,j}^{n-1} - \psi(i,j,7)\theta_{i-1,j-1}^{n-1} - \psi(i,j,8)\theta_{i,j-1}^{n-1} \\
& - \psi(i,j,9)\theta_{i+1,j-1}^{n-1}) / \psi(i,j,5)
\end{aligned} \tag{۳۱}$$

که در رابطه فوق ضرایب به صورت زیر محاسبه شده‌اند:

$$\psi(i,j,1) = -\frac{1}{2}(\xi_{z^*} \eta_{z^*} + \xi_{r^*} \eta_{r^*}) \tag{۳۲}$$

$$\begin{aligned}\psi(i, j, 2) &= \left(\frac{1}{2} \eta_{z^* z^*} + \frac{1}{2} \eta_{r^* r^*} + \eta_{z^*}^2 + \eta_{r^*}^2 + \frac{1}{2r_{i,j}^*} \eta_{r^*} \right) = \frac{1}{2} (\xi_{z^*} \eta_{z^*} + \xi_{r^*} \eta_{r^*}) \psi(i, j, 3) \\ &= \left(-\frac{1}{2} \xi_{z^* z^*} - \frac{1}{2} \xi_{r^* r^*} + \xi_{z^*}^2 + \xi_{r^*}^2 - \frac{1}{2r_{i,j}^*} \xi_{r^*} \right) \psi(i, j, 4)\end{aligned}\quad (33)$$

$$\psi(i, j, 7) = \frac{1}{2} (\xi_{z^*} \eta_{z^*} + \xi_{r^*} \eta_{r^*}) = \left(-\frac{1}{2} \eta_{z^* z^*} - \frac{1}{2} \eta_{r^* r^*} + \eta_{z^*}^2 + \eta_{r^*}^2 - \frac{1}{2r_{i,j}^*} \eta_{r^*} \right) \psi(i, j, 8) \quad (34)$$

$$\psi(i, j, 9) = -\frac{1}{2} (\xi_{z^*} \eta_{z^*} + \xi_{r^*} \eta_{r^*}) \quad (35)$$

همچنین جملات $(\xi_{z^* z^*} + \xi_{r^* r^*})$ و $(\eta_{z^* z^*} + \eta_{r^* r^*})$ به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$\xi_{z^* z^*} + \xi_{r^* r^*} = \frac{1}{|J|} [l_1 (r_{\xi\xi}^* z_{\eta}^* - z_{\xi\xi}^* r_{\eta}^*) + l_2 (r_{\xi\eta}^* z_{\eta}^* - z_{\xi\eta}^* r_{\eta}^*) + l_3 (r_{\eta\eta}^* z_{\eta}^* - z_{\eta\eta}^* r_{\eta}^*)] \quad (36)$$

$$\eta_{z^* z^*} + \eta_{r^* r^*} = \frac{1}{|J|} [l_1 (z_{\xi\xi}^* r_{\xi}^* - r_{\xi\xi}^* z_{\xi}^*) + l_2 (z_{\xi\eta}^* r_{\xi}^* - r_{\xi\eta}^* z_{\xi}^*) + l_3 (z_{\eta\eta}^* r_{\xi}^* - r_{\eta\eta}^* z_{\xi}^*)] \quad (37)$$

که در روابط فوق l_1 ، l_2 و l_3 عبارت اند از:

$$l_1 = \frac{1}{|J|^2} (z_{\eta}^{*2} + r_{\eta}^{*2}) \quad (38)$$

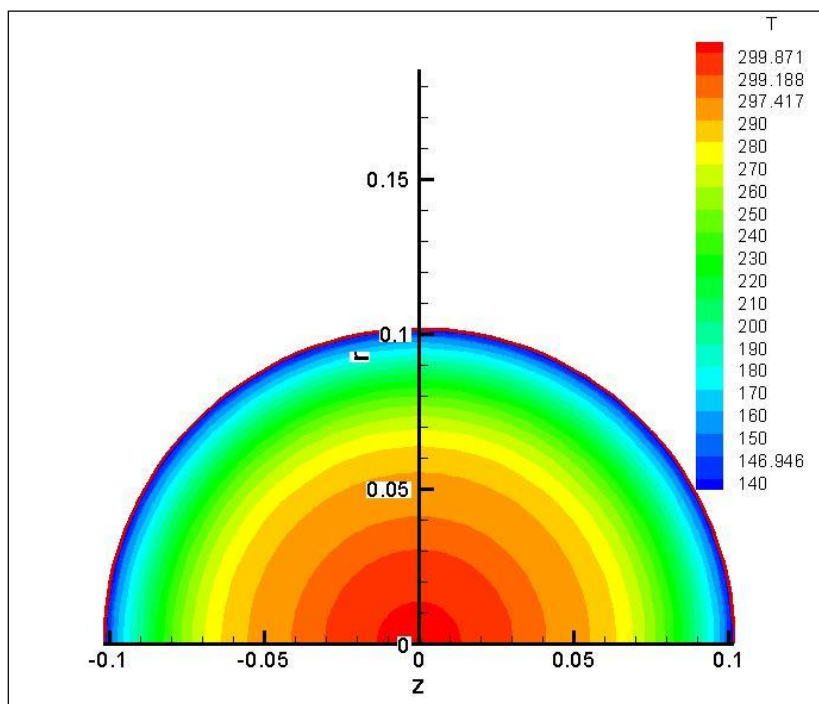
$$l_2 = -\frac{2}{|J|^2} (z_{\eta}^* z_{\xi}^* + r_{\eta}^* r_{\xi}^*) \quad (39)$$

$$l_3 = \frac{1}{|J|^2} (z_{\xi}^{*2} + r_{\xi}^{*2}) \quad (40)$$

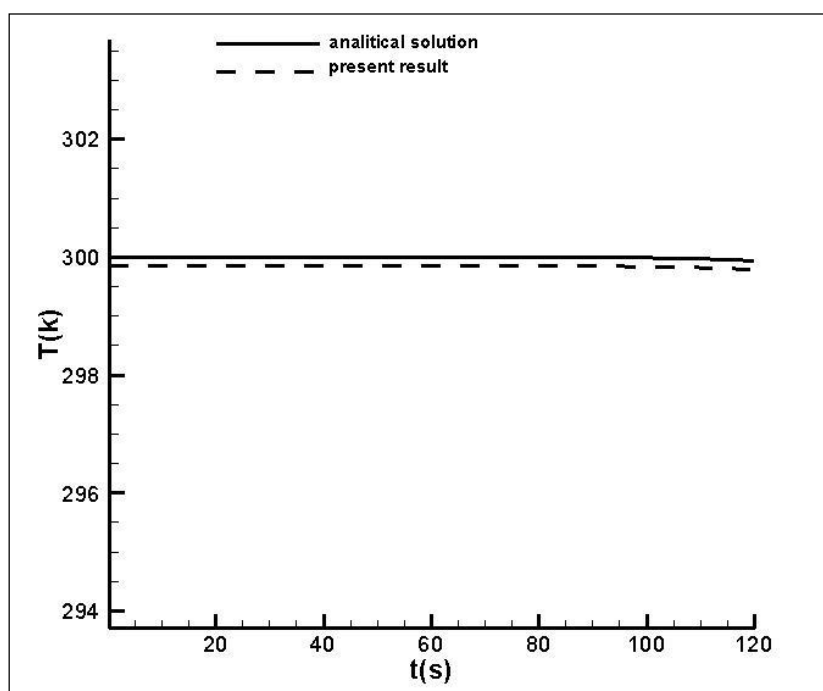
پیوست ۱-۲ اعتبار سنجی حل مستقیم

به منظور بررسی صحت کد انتقال حرارت گذرا، نتایج با حل تحلیلی ارائه شده در مرجع [۱۳۱] مقایسه گردید، به این منظور کره‌ای با شعاع ۱۰ cm از جنس سرامیک با ضریب هدایت حرارتی $k=3$ w/m.k و چگالی $\rho=1600 \text{ kg/m}^3$ و $C=0.8 \text{ kJ/kg.K}$ با دمای اولیه 300°K در داخل سیالی با شرایط $(h=200 \text{ W/m}^2.\text{K}, T_\infty=50^\circ \text{K})$ قرار گرفته است و در مدت زمان ۱۲۰ ثانیه توزیع دما در مرکز کره، در نقطه‌ای که در موقعیت $r=5\text{cm}$ قرار گرفته و در نقطه‌ای که روی سطح کره قرار گرفته با نتایج حل تحلیلی مقایسه گردید. نتیجه ارائه شده در مرجع [۱۳۱] به صورت زیر است:

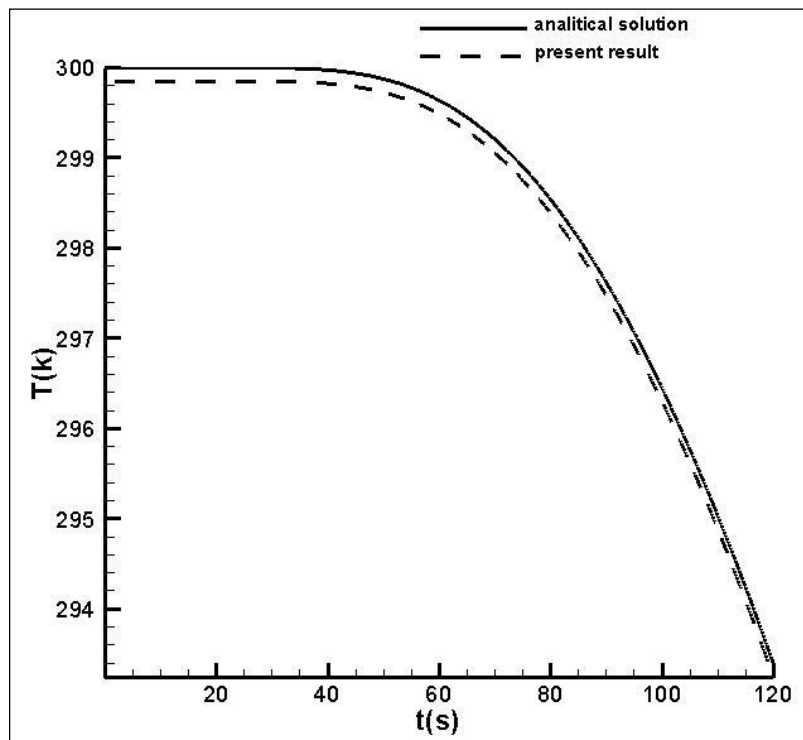
$$T = T_\infty + 4(T_0 - T_\infty) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\lambda_n R) - \lambda_n R \cos(\lambda_n R)}{2\lambda_n R - \sin(2\lambda_n R)} \frac{\sin(\lambda_n r)}{\lambda_n r} e^{-\alpha \lambda_n^2 t}$$



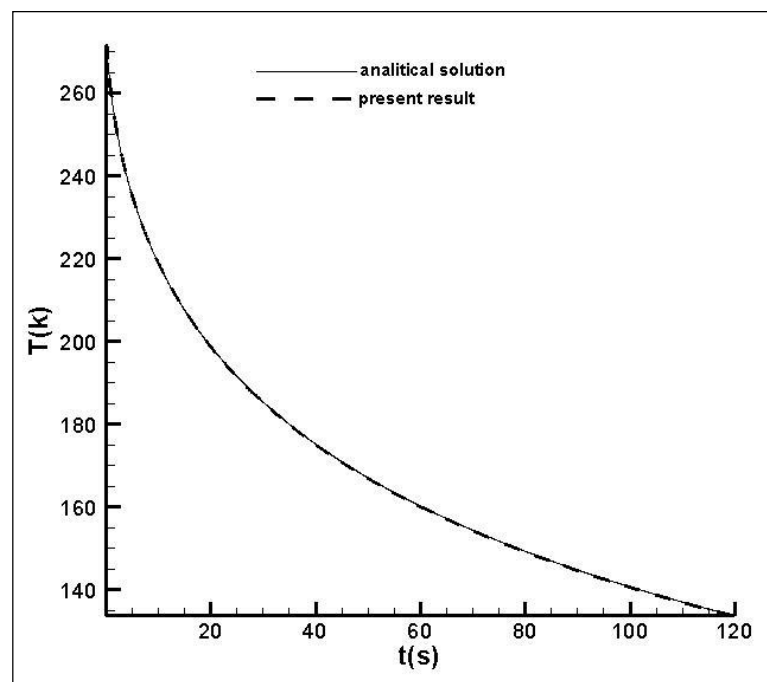
شکل ۱ نمایش کانتورهای توزیع دمای کد حاضر



شکل ۲ نمایش منحنی‌های توزیع دمای مرکز کره



شکل ۳ نمایش منحنی‌های توزیع دمای نقطه‌ای که در موقعیت $r=5\text{cm}$ قرار گرفته است



شکل ۴ نمایش منحنی‌های توزیع دمای نقطه‌ای که بر روی سطح کره قرار گرفته است

با توجه به نمایش منحنی های توزیع دما در مرکز و سطح کره و در یک نقطه مشخص به خوبی مشاهده می شود انطباق خوبی بین نتایج دقیق و حل تحلیلی وجود دارد تائید کننده نتایج کد حاضر است.

- [١]P. Wust, B. Hildebrandt, G. Sreenivasa, B. Rau, J. Gellermann, H. Riess, R. Felix, P.M. Schlag, Hyperthermia in combined treatment of cancer, *The Lancet. Oncology*, 3(8) (2002) 487-497.
- [٢]J. Dutta, B. Kundu, A revised approach for an exact analytical solution for thermal response in biological tissues significant in therapeutic treatments, *Journal of Thermal Biology*, 66 (2017) 33-48.
- [٣]J.J.W. Lagendijk, Hyperthermia treatment planning, *Phys. Med. Biol*, 45 (2000) R61–R76.
- [٤]M.-S. Kang, C.W. Song ,S.H. Levitt, Role of vascular function in response of tumors in vivo to hyperthermia, *Cancer research*, 40(4) (1980) 1130-1135.
- [٥]C. Streffer, Molecular and cellular mechanisms of hyperthermia, in: *Thermoradiotherapy and thermochemotherapy*, Springer, 19 ,٩٥pp. 47-74.
- [٦]C. Song, I. Choi, B. Nah, S. Sahu, J. Osborn, Microvasculature and perfusion in normal tissues and tumors, in: *Thermoradiotherapy and thermochemotherapy*, Springer, 1995, pp. 139-156.
- [٧]R. Valdagni, F.-F. Liu, D.S. Kapp, Important prognostic factors influencing outcome of combined radiation and hyperthermia, *International Journal of Radiation Oncology• Biology• Physics*, 15(4) (1988) 959-972.
- [٨]C.K. Lee, C.W. Song, J.G. Rhee, J.A. Foy, S.H. Levitt, Clinical experience using 8 MHz radiofrequency capacitive hyperthermia in combination with radiotherapy: Results of a phase I II study, *International Journal of Radiation Oncology• Biology• Physics*, 32(3) (1995) 733-745.
- [٩]C.K. Charny, Mathematical models of bioheat transfer,, *Advances in heat transfer*, 22 (1992) 19-155.
- [١٠]H.T.-L. Huang H. W. , Bioheat Transfer and Thermal Heating for Tumor Treatment, in: *Heat Transfer and Fluid Flow in Biological Processes*, Academic Press, Boston, (2015) 1-42.
- [١١]K.A. Raaymakers. B, Lagendijk. J, Discrete Vasculature (DIVA) Model Simulating the Thermal Impact of Individual Blood Vessels for In Vivo Heat Transfer, *Advances in Numerical Heat Transfer*, (2009) 121-148.
- [١٢]J. Zhou, J. Chen, Y. Zhang, Dual-phase lag effects on thermal damage to biological tissues caused by laser irradiation, *Computers in Biology and Medicine*, 39(3) (2009) 286-293.
- [١٣]W.-L.L. T.-L. Horng, C.-T. Liauh, T.-C. Shih, Effects of pulsatile blood flow in large vessels on thermal dose distribution during thermal therapy, *Medical physics*, 34(4) (2007) 1312-1320.
- [١٤]Pennes H. H., Analysis of tissue and arterial blood temperature in the resting human forearm, *J. Appl. Physiol.*, 1 (1948) 93–122.
- [١٥]W. Wulff, The energy conservation equation for living tissue, *The energy conservation equation for living tissue*, 6(BME-21) (1974) 494-495.
- [١٦]I.T.F. Hartnett J.P., Cho Y.I. ,, *Bioengineering heat transfer*, Academic Press.(١٩٩٢) ,
- [١٧]K.R.H. M.M. Chen, Microvascular contributions in tissue heat transfer, *Annals of the New York Academy of Sciences*, 335(1) (1980) 137-150.

- [۱۸] L.J. S. Weinbaum, A new simplified bioheat equation for the effect of blood flow on local average tissue temperature, *Journal of biomechanical engineering*, 107(2) (1985) 131-139.
- [۱۹] S. Weinbaum, Jiji, L.M., and Lemons, D.E., Theory and Experiment for the Effect of Vascular Microstructure on Surface Tissue Heat Transfer-Part I: Anatomical Foundation and Model Conceptualization, *ASME J. of Biomechanical Engineering*, , 106 (1984) 321-330.
- [۲۰] W.R. Y. Xuan, Bioheat equation of the human thermal system,, *Chemical engineering & technology*., 20(4) (1997) 268-276.
- [۲۱] X.Y. Roetzel W, Transient response of the human limb to an external stimulist, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 41(1) (1998) 229-239.
- [۲۲] F.K. Nakayama, A general bioheat transfer model based on the theory of porous media, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 51(11-12) (2008) 3190-3199.
- [۲۳] N.V. Shumakov, A Method for Experimental Study of the Process of Heating in Solid Body, *Soviet Physics Technical Physics*, 2 (1957) 771-781.
- [۲۴] G.J. Stolz, Numerical solutions to an inverse problem of heat conduc- tion for simple shapes, *ASME Journal of Heat Transfer*, 82 (1960) 20-26.
- [۲۵] T.J. Mirsepassi, Heat-transfer charts for time-variable boundary conditions--semiinfinite solid, *British Chemical Engineering*, 4 (1959) 130-136.
- [۲۶] T.J. Mirsepassi, Graphical evaluation of a convolution integral. *Mathematical Tables. and Other Aids to Computation*, (1959) 202-212.
- [۲۷] B.F. Blackwell, An Efficient Technique for the Solution of the One – Dimensional Inverse Problem of Heat Conduction, Sandia Laboratories, Thermal Test and Analysis Division, 1980.
- [۲۸] M. Imber, A Temperature Extrapolation Method for the Hollow Cylinders, *AIAA Journal*, 11 (1973) 117-118.
- [۲۹] J.V. Beck, Surface Heat Flux Determination using an Integral Method, *Nuclear Engineering Design*, 7 (1968) 170-178.
- [۳۰] J.V. Beck, Calculation of Surface Heat Flux from an Internal Temperature History, *ASME Paper*, 62HT (1962) 40.
- [۳۱] A. Shidfar, G.R. Karamali, J. Damirchi, An Inverse Heat Conduction Problem with a Nonlinear Source Term, *Nonlinear Analysis*, 65 (2006) 615-621.
- [۳۲] H.M. Park, O.Y. Chung, Comparison of Various Conjugate Gradient Methods for Inverse Heat Transfer Problems, *Chemical Engineering Communications*, 176(1) (1999) 201 - 228
- [۳۳] Y. Jarny, M.N. Ozisik, J.P. Bardon, A General Optimization Method Using Adjoint Equation for Solving Multidimensional Inverse Heat Conduction, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 34 (1991) 3387-3408.
- [۳۴] C.-H. Huang, S.-P. Wang, A three-dimensional inverse heat conduction problem in estimating surface heat flux by conjugate gradient method, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 42(18) (1999) 3387-3403.
- [۳۵] X. Xiang, Improvement of heat flux and heat conductance estimation with application to metal casting, Mississippi state university, Mississippi, 2003.

- [۳۶] A. Shidfar, A. Zakeri, A numerical technique for backward inverse heat conduction problems in one-dimensional space, *Applied Mathematics and Computation*, 171(2) (2005) 1016-1024.
- [۳۷] F. Kowsary, A. Behbahaninia, A. Pourshaghagh, Transient heat flux function estimation utilizing the variable metric method, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 33(6) (2006) 800-810.
- [۳۸] F. Kowsary, K. Pooladvand, A. Pourshaghagh, Regularized variable metric method versus the conjugate gradient method in solution of radiative boundary design problem, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 108(2) (2007) 277-294.
- [۳۹] A. Pourshaghagh, K. Pooladvand, F. Kowsary, K. Karimi-Zand, An inverse radiation boundary design problem for an enclosure filled with an emitting, absorbing, and scattering media, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 33(3) (2006) 381-390.
- [۴۰] A.A. Nejad, M. Maghrebi, H.B. Tabrizi, Effect of sensor locations on the solution of inverse Stefan problems, *Mechanics*, 83(3) (2010) 51-57.
- [۴۱] L. Jiang, Zhan, W., and Loew, M. H., Modeling Static and Dynamic Thermography of the Human Breast Under Elastic Deformation, *Physics in Medicine and Biology*, 56 (2011) 187-202.
- [۴۲] W.J. Song, S. Weinbaum, L.M. Jiji, A Theoretical Model for Peripheral Tissue Heat Transfer Using the Bioheat Equation of Weinbaum and Jiji, *Journal of Biomechanical Engineering*, 109(1) (1987) 72-78.
- [۴۳] S.G. Chen, Weng, C.I. and Lin, J., Inverse estimation of transient temperature distribution in the end quenching test, *Journal of Materials Processing Technology*, 86 (1999) 257-263.
- [۴۴] Y.-C. Yang, S.-S. Chu, W.-J. Chang, T.-S. Wu, Estimation of heat flux and temperature distributions in a composite strip and homogeneous foundation☆, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 37 (2010) 495-500.
- [۴۵] F.-B. Liu, A hybrid method for the inverse heat transfer of estimating fluid thermal conductivity and heat capacity, *International Journal of Thermal Sciences*, 50(5) (2011) 718-724.
- [۴۶] T.C.L. Chen, C. C. Jang, H.Y. and Tuan, P. C. , Inverse estimation of heat flux and temperature in multi-layer gun barrel, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 50 (2007) 2060-2068.
- [۴۷] I. Gejadze, Y. Jarny, An inverse heat transfer problem for restoring the temperature field in a polymer melt flow through a narrow channel, *International journal of thermal sciences*, 41(6) (2002) 528-535.
- [۴۸] A. Jemal, F. Bray, M.M. Center, J. Ferlay, E. Ward, D. Forman, Global cancer statistics, *CA: a cancer journal for clinicians*, 61(2) (2011) 69-90.
- [۴۹] F. Bray, J. Ferlay, I. Soerjomataram, R.L. Siegel, L.A. Torre, A. Jemal, Global cancer statistics 2018: GLOBOCAN estimates of incidence and mortality worldwide for 36 cancers in 185 countries, *CA: a cancer journal for clinicians*, 68(6) (2018) 394-424.
- [۵۰] N.K. Chalakur-Ramireddy, S.B. Pakala, Combined drug therapeutic strategies for the effective treatment of Triple Negative Breast Cancer, *Bioscience reports*, 38(1.(۲۰۱۸) (
- [۵۱] S. Naz, H. Shahzad, A. Ali, M. Zia, Nanomaterials as nanocarriers: a critical assessment why these are multi-chore vanquisher in breast cancer treatment, *Artificial cells, nanomedicine, and biotechnology*, 46(5) (2018) 899-916.

- [٥٢]T.H. Lee, J. Bu, B.H. Kim, M.J. Poellmann, S. Hong, S.H. Hyun, Sub-lethal hyperthermia promotes epithelial-to-mesenchymal-like transition of breast cancer cells: implication of the synergy between hyperthermia and chemotherapy, *RSC advances*, 9(1) (2019) 52-57.
- [٥٣]P.T. Nguyen, A. Abbosh, Focusing techniques in breast cancer treatment using non-invasive microwave hyperthermia, in: 2015 International Symposium on Antennas and Propagation (ISAP), IEEE, 2015, pp. 1-3.
- [٥٤]D.A. Iero, L. Crocco, T. Isernia, E. Korkmaz, Optimal focused electromagnetic hyperthermia treatment of breast cancer, in: 2016 10th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP), IEEE, 2016, pp. 1-2.
- [٥٥]E.L. Jones, L.R. Prosnitz, M.W. Dewhirst, P.K. Marcom, P.H. Hardenbergh, L.B. Marks, D.M. Brizel, Z. Vujaskovic, Thermochemoradiotherapy improves oxygenation in locally advanced breast cancer, *Clinical Cancer Research*, 10(13) (2004) 4287-4293.
- [٥٦]T. Refaat, S. Sachdev, V. Sathiaselvan, I. Helenowski, S. Abdelmoneim, M.C. Pierce, G. Woloschak, W. Small Jr, B. Mittal, K.D. Kiel, Hyperthermia and radiation therapy for locally advanced or recurrent breast cancer, *The Breast*, 24(4) (2015) 418-425.
- [٥٧]M. Hurwitz, P. Stauffer, Hyperthermia, radiation and chemotherapy: the role of heat in multidisciplinary cancer care, in: *Seminars in oncology*, Elsevier, 2014, pp. 714-729.
- [٥٨]K. Kitamura, K. Sugimachi, Thermoradiotherapy combined with chemotherapy for esophageal tumors, in: *Thermoradiotherapy and Thermochemotherapy*, Springer, 1996, pp. 85-94.
- [٥٩]F. Xu, T.J. Lu, K.A. Seffen, Biothermomechanical behavior of skin tissue, *Acta Mechanica Sinica*, 24(1) (2008) 1-23.
- [٦٠]L.A. Dombrovsky, V. Timchenko, M. Jackson, Indirect heating strategy for laser induced hyperthermia: An advanced thermal model, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 55(17) (2012) 4688-4700.
- [٦١]R. Habash, L. Brodsky, W. Leiss, D. Krewski, M. Repacholi, Health Risks of Electromagnetic Fields. Part I: Evaluation and Assessment of Electric and Magnetic Fields, 2003.
- [٦٢]C.S.S.R. Kumar, F. Mohammad, Magnetic nanomaterials for hyperthermia-based therapy and controlled drug delivery, *Advanced Drug Delivery Reviews*, 63(9) (2011) 789-808.
- [٦٣]A. Bhowmik, R. Singh, R. Repaka, S.C. Mishra, Conventional and newly developed bioheat transport models in vascularized tissues: A review, *Journal of Thermal Biology*, 38(3) (2013) 107-125.
- [٦٤]L. Zhu, *Heat Transfer Applications in Biological Systems*, Biomedical Engineering & Design Handbook, (2009) 33-67.
- [٦٥]W. Kaminski, Hyperbolic Heat Conduction Equation for Materials With a Nonhomogeneous Inner Structure, *Journal of Heat Transfer*, 112(3) (1990) 555-560.
- [٦٦]K. Mitra, S. Kumar, A. Vedevarz, M.K. Moallemi, Experimental Evidence of Hyperbolic Heat Conduction in Processed Meat, *Journal of Heat Transfer*, 117(3.٥٧٣-٥٦٨ (١٩٩٥) (
- [٦٧]L.M. Jiji, *Heat Conduction*, Springer Berlin Heidelberg, 2009.
- [٦٨]A. Majumdar, Microscale energy transport in solids, *Microscale Energy Transport*, (1998) 1-93.

- [۶۹]R. Fazio, H. Van Der Zant, Quantum phase transitions and vortex dynamics in superconducting networks, *Physics Reports*, 355(4) (2001) 235-334.
- [۷۰]D.G. Cahill, W.K. Ford, K.E. Goodson, G.D. Mahan, A. Majumdar, H.J. Maris, R. Merlin, S.R. Phillpot, Nanoscale thermal transport, *Journal of applied physics*, 93(2) (2003) 79۸۱۸-۳
- [۷۱]D. Li, Y. Wu, P. Kim, L. Shi, P. Yang, A. Majumdar, Thermal conductivity of individual silicon nanowires, *Applied Physics Letters*, 83(14) (2003) 2934-2936.
- [۷۲]G. Chen, *Nanoscale energy transport and conversion: a parallel treatment of electrons, molecules, phonons, and photons*, Oxford University Press, 2005.
- [۷۳]T. Tritt, D. Rowe, *Thermoelectrics handbook: macro to nano*, in, CRC Press Boca Raton, FL.; 2005.
- [۷۴]C. Yu, L. Shi, Z. Yao, D. Li, A. Majumdar, Thermal conductance and thermopower of an individual single-wall carbon nanotube, *Nano letters*, 5(9) (2005) 1842-1846.
- [۷۵]E. Pop, D. Mann, Q. Wang, K. Goodson, H. Dai, Thermal conductance of an individual single-wall carbon nanotube above room temperature, *Nano letters*, 6(1) (2006) 96-100.
- [۷۶]S. Volz, R. Carminati, P. Chantrenne, S. Dilhaire, S. Gomez, N. Trannoy, G. Tessier, *Microscale and nanoscale heat transfer*, Springer, 2007.
- [۷۷]Z.M. Zhang, *Nano/microscale heat transfer*, 2007.
- [۷۸]L.A. Kengne. E, Bioheat transfer problem for one-dimensional spherical biological tissues, *Mathematical Bioscience*, 269 (2015) 1-9.
- [۷۹]M.B.A. M.Baghban, Source term prediction in a multilayer tissue during hyperthermia, *ELSEVIER, Journal of Thermal Biology*, 52 (2015) 187-191.
- [۸۰]A. Jalali, Ayani, M.B., Baghban, M., Simultaneous estimation of controllable parameters in a living tissue during thermal therapy, *Journal of thermal biology*, 45 (2014) 37-42.
- [۸۱]T.-H.L. h.-L. Lee, W.-L. Chen, Y.-C. Yang,, An inverse hyperbolic heat conduction problem in estimating surface heat flux of a living skin tissue, *Applied Mathematical Modeling*, 37 (2013) 2630-2643.
- [۸۲]C. Cattaneo, A form of heat conduction equation which eliminates the paradox of instantaneous propagation, *Compute Rendus*, 247 (1958) 431-433.
- [۸۳]P. Vernotte, Les paradoxes de la theorie continue de l'equation de la chaleur, *compte r=Rendus*, 246 (1958) 3154-3155.
- [۸۴]A. Vedavarz, S. Kumar, M.K. Moallemi, Significance of Non-Fourier Heat Waves in Conduction, *Journal of Heat Transfer*, 116(1) (199۴۲۴-۲۲۱ (۴
- [۸۵]W. Wulff, The Energy Conservation Equation for Living Tissues, *IEEE Transactions of Biomedical Engineering*, BME-21,, (1974) 494-495.
- [۸۶]S. Weinbaum, and Jiji, L.M., A New Simplified Bioheat Equation for the Effect of Blood Flow on Local Average Tissue Temperature, *ASME J. of Biomechanical Engineering*, 107 (1985) 131-139.
- [۸۷]Z.-S. Deng, J. Liu, Analytical study on bioheat transfer problems with spatial or transient heating on skin surface or inside biological bodies, *J. Biomech. Eng.* ۶۴۹-۶۳۸ (۲۰۰۲) (۶)۱۲۴ .
- [۸۸]J. Durkee Jr, P. Antich, Characterization of bioheat transport using an exact solution of the cylindrical geometry, multi-region, time-dependent bioheat equation, *Physics in Medicine & Biology*, 36(10) (1991) 1377.

- [۱۸۹]J. Durkee Jr, P. Antich, C. Lee, Exact solutions to the multiregion time-dependent bioheat equation. I: solution development, *Physics in Medicine & Biology*, 35(7) (1990) 847.
- [۱۹۰]J.W. Durkee, P.P. Antich, C.E. Lee, Exact solutions to the multiregion time-dependent bioheat equation. I: Solution development, *Physics in Medicine and Biology*, 35(7) (1990) 847-867.
- [۱۹۱]B. Gao, S. Langer, P. Corry, Application of the time-dependent Green's function and Fourier transforms to the solution of the bioheat equation, *International journal of hyperthermia*, 11(2) (1995) 267-285.
- [۱۹۲]J. Liu, L.X. Xu, Estimation of blood perfusion using phase shift in temperature response to sinusoidal heating at the skin surface, *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 46(9) (1999) 103۱-۴۳-۷
- [۱۹۳]K. Rai, S. Rai, Effect of metabolic heat generation and blood perfusion on the heat transfer in the tissues with a blood vessel, *Heat and mass transfer*, 35(1) (1999) 75-79.
- [۱۹۴]R. Vyas, M. Rustgi, Green's function solution to the tissue bioheat equation, *Medical physics*, 19(5) (1992) 1319-1324.
- [۱۹۵]T.-C. Shih, P. Yuan, W.-L. Lin, H.-S. Kou, Analytical analysis of the Pennes bioheat transfer equation with sinusoidal heat flux condition on skin surface, *Medical Engineering & Physics*, 29(9) (2۰۰۳-۹۴۶ (۰۰۷
- [۱۹۶]M.M. Tung, M. Trujillo, J.A. López Molina, M.J. Rivera, E.J. Berjano, Modeling the heating of biological tissue based on the hyperbolic heat transfer equation, *Mathematical and Computer Modelling*, 50(5) (2009) 665-672.
- [۱۹۷]K.-C. Liu, Thermal propagation analysis for living tissue with surface heating, *International Journal of Thermal Sciences*, 47(5) (2008) 507-513.
- [۱۹۸]K.-C. Liu, H.-T. Chen, Analysis for the dual-phase-lag bio-heat transfer during magnetic hyperthermia treatment, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 52(5) (2009) 1185-1192.
- [۱۹۹]R.M. Cotta, B.P. Cotta, C.P. Naveira-Cotta, G. Cotta-Pereira, Hybrid integral transforms analysis of the bioheat equation with variable properties, *International Journal of Thermal Sciences*, 49(9) (2010) 1510-1516.
- [۲۰۰]P.K. Gupta, J. Singh, K. Rai, Numerical simulation for heat transfer in tissues during thermal therapy, *Journal of Thermal Biology*, 35(6) (2010) 295-301.
- [۲۰۱]H. Askarizadeh, H. Ahmadikia, Analytical analysis of the dual-phase-lag model of bioheat transfer equation during transient heating of skin tissue, *Heat and Mass Transfer*, 50(12) (2014) 1673-1684.
- [۲۰۲]K.-C. Liu, H.-T. Chen, Analysis of the bioheat transfer problem with pulse boundary heat flux using a generalized dual-phase-lag model, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 65 (2015) 31-36.
- [۲۰۳]M. Mohammadiun, Time-Dependent Heat Flux Estimation in Multi-Layer Systems by Inverse Method, *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 30(3) (20۱۶-۵۹۹ (۱۶
- [۲۰۴]M. Mohammadiun, A.B. Rahimi, Estimation of time-dependent heat flux using temperature distribution at a point in a two layer system, *Scientia Iranica*, 18(4) (2011) 966-973.
- [۲۰۵]M. Mohammadiun, A.B. Rahimi, I. Khazaei, Estimation of the time-dependent heat flux using the temperature distribution at a point by conjugate gradient method, *International Journal of Thermal Sciences*, 50(12) (2011) 2443-2450.

- [۱۰۶] M.M. A. Zolfaghari, Bioheat Transfer, InTech.(۲۰۱۱) ,
- [۱۰۷] H.G. Klinger, Heat Transfer in Perfused Biological Tissue-1: General Theory,, Bulletin of Mathematical Biology,, 36 (1980) 403-415.
- [۱۰۸] D.Y. Goswami, The CRC handbook of mechanical engineering, CRC press.(۲۰۰۴) ,
- [۱۰۹] E. Wissler, Comments on the new bioheat equation proposed by Weinbaum and Jiji , .(۱۹۸۷)
- [۱۱۰] A.N. Tikhonov, V.Y. Arsenin, Solution of Ill-Posed Problems, Winston & Sons, Washington DC, 1977.
- [۱۱۱] O. Tadrari, M. Lacroix, Prediction of protective banks in high temperature smelting furnaces by inverse heat transfer, International Journal of Heat and Mass Transfer, 49(13-14) (2006) 2180-2189.
- [۱۱۲] T.R. Hsu, N.S. Sun, G.G. Chen, Mathematical modeling of two dimensional inverse heat conduction analysis, ASME Journal of Heat Transfer, 114 (1992) 553-557.
- [۱۱۳] A.N. Tikhonov, V.D. Kalner, V.B. Glasko, Mathematical Modeling of Technology Processes and Inverse Problems in Mathematical Engineering, Mashinostroienei, Moscow, 1990.
- [۱۱۴] K. Kurpisz, A.J. Newak, Inverse Thermal Problems, Computational Mechanics Publication, Southampton, 1995.
- [۱۱۵] O.R.B. Ozisik M.N., Inverse Heat Transfer, Taylor & Francis, NewYork.(۲۰۰۰) ,
- [۱۱۶] O.M. Alifano, Inverse Heat Transfer Problems, Springer-Verlag, New York.(۱۹۹۴) ,
- [۱۱۷] Y. Jarny, M.N. Ozisik, and J.P. Bardon,, A General Optimization Method Using Adjoint Equation for Solving Multidimensional Inverse Heat Conduction, International Journal of Heat and Mass Transfer, 34 (1991) 3387-3408.
- [۱۱۸] Ozisik M.N., Heat Conduction, second ed. Wiley, New York.(۱۹۹۳) ,
- [۱۱۹] R. Fletcher, C.M. Reeves, Function minimization by conjugate gradients, The computer journal, 7(2) (1964) 149-154.
- [۱۲۰] J. Daniel, The approximate minimisation of functionals Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ.(۱۹۷۱) ,
- [۱۲۱] F. Kowsary, Pooladvand ,K. and Pourshaghaghay, A. , Regularized variable metric method versus the conjugate gradient method in solution of radiative boundary design problem, Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 108 (2007) 277-294.
- [۱۲۲] E.R. Dennis BH1 ,Dulikravich GS, Radons SW., Finite-element simulation of cooling of realistic 3-D human head and neck, J. Biomech. Eng., 125 (2003) 832-840.
- [۱۲۳] E.Y. Ng, and Sudharsan, N. M., An Improved Three-Dimensional Direct Numerical Modelling and Thermal Analysis of a Female Breast with Tumour, Journal of Engineering in Medicine,, 215 (2001) 25-37.
- [۱۲۴] A. Amri, Saidane, A., and Pulko, S., Thermal Analysis of a Three-Dimensional Breast Model with Embedded Tumour using the Transmission Line Matrix (TLM) Method, Computers in Biology and Medicine, 41 (2011) 76-86.
- [۱۲۵] N.M. Sudharsan, and Ng, E. Y., Parametric Optimization for Tumour Identification: Bioheat Equation using ANOVA and the Taguchi Method,, Journal of Engineering in Medicine. ۵۱۲-۵۰۵ (۲۰۰۰) ۵ ,

- [۱۲۶]M.P. Cetingul, and Herman, C., A Heat Transfer Model of Skin Tissue for the Detection of Lesions: Sensitivity Analysis, *Physics in Medicine and Biology*, , 55 (2010) 5933-5951.
- [۱۲۷]A. Goldman, Y. Kao, Numerical solution to a two-dimensional conduction problem using rectangular and cylindrical body-fitted coordinate systems.(۱۹۸۱) ,
- [۱۲۸]S. Uchikawa, R. Takeda, Use of a boundary-fitted coordinate transformation for unsteady heat conduction problems in multiconnected regions with arbitrarily shaped boundaries.(۱۹۸۵) ,
- [۱۲۹]Daniel J.W., Approximate Minimization of Functionals, Prentice-Hall Inc.,Englewood Cliffs.(۱۹۷۱) ,
- [۱۳۰]N.T.H. Jiang B.H., Prud'homme M., Control of the boundary heat flux during the heating process of a solid material, *Int.Communic. Heat. Mass.*, 32(4) (2005) 728–738.
- [۱۳۱]D. Poulikakos, Conduction heat transfer, Prentice Hall, 1994.

Abstract:

Accurate estimation of temperature distribution is a main and critical factor in hyperthermia which is considered as a combination treatment for cancer tumors. In hyperthermia very high temperatures are used to kill the cancer cells and destroy nearby blood vessels which were weaknesses by other treatment methods. Very high temperatures can kill cancer cells outright (thermal ablation), but they also can injure or kill normal cells and tissues. This is why hyperthermia must be carefully controlled.

This thesis represents a new method for estimating heating power of source in order to destroy cancer cells of breast due to the temperature distribution in the breast tissue. The geometry of breast is represented as a hemisphere containing three layers, muscle, gland and fat. The conjugate gradient method is used to solve the inverse heat conduction problem using Pennes bioheat equation in the axisymmetric coordinate system. To make the solve of the problem easier, the irregular region in the physical domain (r, z) is transformed into a rectangle in the computational domain (ξ, η) . The temperature changes across target tissue is measured using adjacent sensors. The problem was solved in two different conditions at first by employing one sensors and in another examination, temperature changes were measured using two sensors. To achieve a good accuracy, three equation are used to estimate temperature distribution during the tissue and solution was presented in two different conditions, one and two sensors, in order to achieve good evaluation of suggestion method. The results shows appropriate accuracy of algorithm that makes it practical.

Keywords: Hyperthermia, Heat source, Pennes bioheat equation, General coordinate method, Inverse method



Kharazmi International Campus

Ph.D. Thesis in Energy Conversion Engineering

Heat Source Estimation for Therapeutic Hyperthermia Treatment of Breast Tumor Using Inverse Method

By: Mansoureh Shariatmadar Tehrani

Supervisors:

Dr Mohammad.H Keyhani

Dr Mohammad.M Shahmardan

Advisor:

Dr Mohammad.Mohammadiun

July 2020