بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک

پایان نامه کارشناسی ارشد مهندسی طراحی کاربردی

آنالیز ارتعاشی میکرولوله ازجنس ماده هایپرالاستیک حاوی جریان سیال

نگارنده: مصطفی حزبه‌پور

استاد راهنما

دکتر اردشیر کرمی محمدی

بهمن ۱۳۹۸

شماره: ۲۰،۹۹،۲۴۰،د۲
تاریخ: ۹۸،۱۲،۲۷

مدیریت تحصیلات تکمیلی

باسمه‌تعالی

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد آقای **مصطفی حزبه‌پور** با شماره دانشجویی **۹۵۰۴۴۸۴** رشته: **مکانیک گرایش طراحی کاربردی** تحت عنوان: **آنالیز ارتعاشی میکرولوله از جنس ماده هایپرالاستیک حاوی جریان سیال** که در تاریخ **۹۸/۱۱/۰۸** با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می‌گردد:

الف) درجه عالی: نمره ۲۰-۱۹ ☐ ب) درجه خیلی خوب: نمره ۱۸/۹۹ – ۱۸ ☐
ج) درجه خوب: نمره۱۷/۹۹ – ۱۶ ☐ د) درجه متوسط: نمره ۱۵/۹۹-۱۴ ☑
ه) کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد ☐
نوع تحقیق: نظری ■ عملی ☐

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ استادراهنمای اول	اردشیر کرمی‌محمدی	دانشیار	
۲- استادراهنمای دوم	ــــــ	ــــــ	ــــــ
۳- استاد مشاور	ــــــ	ــــــ	ــــــ
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	مهدی حیدری	استادیار	
۵- استاد ممتحن اول	حمیدرضا ایپک‌چی	دانشیار	
۶ـ استاد ممتحن دوم	حبیب احمدی	دانشیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: مهدی گردویی

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

4

تقدیم به پدرومادر و همسر عزیز ومهربانم

به پاس تعبیر عظیم و انسانی شان از کلمه ایثار و از خودگذشتگی

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان که در سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است

به پاس قلب‌های بزرگشان که فریادرس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می‌گراید

و به پاس محبت‌های بی‌دریغشان که هرگز فروکش نمی‌کند

"و تقدیم به خانواده مهربانم که در تمام طول تحصیل همراه و همگام من بوده است"

سپاسگزاری

از جناب آقای **دکتر اردشیر کرمی محمدی** که در تمام سعه‌صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این پایان‌نامه را بر عهده گرفتند، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

تعهدنامه

اینجانب مصطفی حزبه‌پور دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی طراحی کاربردی دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده رساله « آنالیز ارتعاشی میکرولوله ازجنس ماده هایپرالاستیک حاوی جریان سیال» تحت راهنمایی آقای دکتر اردشیر کرمی محمدی متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این رساله توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققین دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در این رساله تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود است و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا «Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی رساله تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج شده از رساله رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این رساله، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این رساله، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن ()مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود است. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این رساله بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

دراین تحقیق به آنالیز ارتعاشی میکرولوله از جنس ماده هایپرالاستیک حاوی جریان سیال پرداخته می‌شود. در مدل‌سازی میکرولوله به منظور در نظر گرفتن مدلی نزدیک‌تر به مدل واقعی در این تحقیق ازمدل میکروتیری ازجنس ماده هایپرالاستیک که رابطه‌ی تنش،کرنش آن غیرخطی می‌باشد مورد مطالعه قرار گرفته است. واثرسیال به آن اضافه می شود. از مدل یئو یکی ازمدل های هایپرالاستیک می‌باشد، استفاده شده است. این‌مدل‌ها به خوبی رفتارلاستیکی و رابطه غیرخطی تنش وکرنش دراین مواد را پیش‌بینی کرده و می‌توان توسط آنها، عامل غیرخطی ماده را درکناردیگرعوامل دربررسی رفتار ماده دخیل نمود. برای این منظور ارتعاش آزاد میکرولوله حاوی جریان سیال رابراساس تئوری تیر اویلر برنولی با شرایط مرزی تکیه گاه دوسرمفصل(پین ـ پین) و با درنظرگرفتن مدل هایپرالاستیک یئومورد بررسی می گردد. برای استخراج معادله حاکم بر سیستم ازتئوری اویلر برنولی و با بکارگیری اصل هامیلتون بهره بردیم،که در ابتدا باید انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل مورد محاسبه گردد. سپس معادله حاکم بر سیستم را بی‌بعدسازی کرده آنگاه شرایط مرزی بی‌بعدسازی را نیز بدست آوردیم. معادلات ارتعاشی حاکم برسیستم بااستفاده از روش گالرکین به یک معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل شده است به پایداری سیستم وفرکانس‌های طبیعی و سرعت بحرانی به ازای سرعت‌های مختلف سیال،طول و ضخامت مورد بررسی قرار گرفته است. برای حل معادلات قسمت غیرخطی ازروش تئوری اغتشاشات تحلیلی ،مقیاس‌های چندگانه استفاده گردیده است. و نمودارهای تاثیر سرعت بر فرکانس بی‌بعد غیرخطی رابدست آوردیم.

کلمات کلیدی

مدل هایپرالاستیک یئو،تئوری اویلر برنولی،میکرولوله حاوی جریان سیال، ارتعاشات آزاد

فهرست مطالب

فهرست جداول

فهرست شکل‌ها

فهرست علائم

علائم لاتین

سطح مقطع	$\mathcal{A}$
تانسور چپ کوشی- گرین	$\mathbf{B}$
عرض میکرولوله	$\mathcal{B}$
تانسور راست کوشی-گرین	$\mathbf{C}$
ثوابت مدل یئو	c_3،c_2،c_1
ضخامت میکرولوله	$\mathcal{D}$
کرنش لاگرانژی	E_{ij}
تانسور گرادیان شکل	$\mathcal{F}$
ثوابت کرنشی	I_1،I_2
طول میکرولوله	$\mathcal{L}$
انرژی جنبشی	$\mathcal{T}$
انرژی پتانسیل	$\mathcal{U}$

مولفه‌های جابه‌جایی در راستای محورهای x، y و z	u، v و w
چگالی انرژی کرنشی	u
جرم میکرولوله	$\mathcal{M}$
جرم سیال	$\mathcal{M}$

- **علائم یونانی**

تانسور تنش	σ
تابع دلتا کرانکر	δ
نسبت‌های کشیدگی	λ_i
پارامتر کوچک اغتشاشی	ε
مولفه کرنش	ε_i
چگالی	ρ

- **بالانویس‌ها**

بی‌بعد	❋

فصل ۱: کلیات میکرولوله از جنس هایپرالاستیک

حاوی جریان سیال

۱-۱ – مقدمه

لوله‌های حاوی جریان سیال درابعاد میکرو دارای کاربردهای متعددی در زمینه‌های مهندسی و پزشکی می‌باشند. از جمله کاربردها می‌توان به استفاده آنها جهت تزریق دارو با دبی‌های پایین اشاره کرد. در لیتوگرافی مستقیم نیز از لوله‌های فوق به عنوان نازل جهت حمل مایع حلال استفاده می‌شود. نوعی از تجهیزات اندازه گیری دبی جرمی، دانسیتیه و ویسکوزیته نیز بر مبنای تغییرات مشخصه‌های فرکانسی لوله‌های حمل مایع در مقیاس میکرو کار می‌کنند. با افزایش سرعت سیال حامل احتمال ناپایداری در سیستم وجود خواهد داشت. محققان نشان داده‌اند که ابعاد هندسی، سرعت سیال و جنس لوله‌های فوق عوامل موثر در پایداری می‌باشند. فن‌آوری میکرو و نانو[1] هم اکنون سهم قابل توجهی را در پیشرفت‌های فن‌آوری در شماری از صنایع شامل الکترونیک[2]، بیوشیمی[3]، مواد، هوا فضا، عکاسی و به تازگی صنایع وابسته به انرژی، به خوداختصاص داده‌اند. فن‌آوری میکرو و فن‌آوری نانو این ظرفیت و پتانسیل را دارند که تغییرات متحول‌کننده‌ای را در حوزه‌های مختلف نفت و گاز نظیر اکتشاف، حفاری، ازدیاد برداشت و پالایش و پخش به وجود آوردند. به عنوان مثال به کمک نانو حسگرها[4] می‌توان اطلاعات و داده‌های بسیار دقیق‌تر و جزئی‌تری از یک مخزن نفتی بدست آورد. میکرولوله‌ها و نانولوله‌ها به دلیل هندسه توخالی و خواص مکانیکی کاربردهای گسترده‌ای در سیستم‌های میکروالکترونیکی و میکرومکانیکی مانند سنسورها، محرک‌ها، انتقال دهنده‌های سیال و تزریق دارو[5] پیدا کرده‌اند. با پیشرفت فن‌آوری‌های تولید اندازه مشخصه لوله‌ها می‌تواند کوچک و کوچک‌تر شوند. در تحقیقات اخیر برای قطر داخلی میکرولوله‌های دایروی بازه‌ای در حدود ۱ تا ۱۰۰ میکرومتر درنظر گرفته شده است. مطالعه بر روی ارتعاشات و پایداری میکرولوله‌ها جهت طراحی سیستم‌های کوچک یکی از موضوعات ضروری

[1] Nanotechnology and Micro
[2] Electronics
[3] Biochemistry
[4] Nanosensors
[5] Drug delivery

می‌باشد. در تحقیقات گذشته، محققان تلاش کردند یک مدل تئوری برای بررسی خواص ارتعاشی نانولوله‌هایی با جریان داخلی پیش‌بینی کنند. اغلب این مطالعات بر پایه مکانیک محیط پیوسته کلاسیک هستند. یکی از زمینه‌هایی که کاربرد مواد هوشمند اهمیت ویژه‌ای پیدا می‌کند، ساختارهایی با ابعاد میکرو و نانو می‌باشد. میکرولوله‌های یک‌سرگیردار و دوسر گیردار به‌صورت گسترده در سیستم‌های میکروالکترومکانیکی (MEMS) به‌کار می‌روند.

۱-۲ - فن‌آوری میکرو و نانو

درطول تاریخ بشر از زمان یونان باستان مردم وبه ویژه دانشمندان آن دوران بر این باور بودند که ماده را می‌توان آن قدر به پاره‌های کوچک تقسیم نمود تابه ذره‌های رسید که دیگر خردناشدنی باشند واین ذره‌ها بنیان مواد تشکیل می‌دهند، شاید بتوان دموکریتوس[1] فیلسوف یونانی را پدر فن‌آوری و دانش نانو دانست بخاطر اینکه در حدود ۴۰۰ سال پیش از میلاد مسیح او نخستین کسی بود که واژه اتم را که به معنی تقسیم نشدنی در زبان یونانی است برای توصیف ذره‌های سازنده ماده به کار برد. یک نانومتر یک میلیاردم یک متر است. ماده‌هایی درمقیاس نانو هستند که دست کم یک بعد آن‌ها در محدوده نانومتر (بین ۱ تا ۱۰۰ نانومتر) است. در این اندازه‌های بسیار کوچک، اثرهای کوانتومی قابل‌توجه بوده و ماهیت گسسته‌ی ماده افزایش می‌یابد واین پدیده‌های جالب گاهی درمقیاس ماکرو[2]قابل مشاهده هستند. این ویژگی جالب را می‌توان کنترل و دست‌کاری کرد وبرای ساخت و گسترش سیستم‌های نوین به کاربرد. فن‌آوری نانو زمینه‌ای از دانش است که با شتاب روبه رشد است و با گسترش ماده‌ها، سازه‌ها و سیستم‌هایی درمقیاس نانو، درارتباط است. امروزه از فن‌آوری نانو در زمینه‌های گوناگون مانند ارتباطات شیمی، محیط زیست، مهندسی نساجی، هوافضا، پزشکی و... استفاده می‌شود.

---
[1] Democritus
[2] Macro

در سال ۱۹۵۹ ریچاردفاینمن[1] مقاله‌ای را درباره توانایی فن‌آوری نانو منتشر ساخت و این نقطه عطفی درتاریخ فن آوری نانو بود. با وجود موفقیت‌هایی که توسط بسیاری تا آن زمان کسب شده بود، ریچارد فاینمن را به عنوان پایه گذار این دانش می‌شناسند. سخنرانی او شامل این مطلب بود که می‌توان تمام دایره المعارف بریتانیا را بر روی اندازه‌ی واقعیش کوچک می‌شود. اوگفت به شرطی$\frac{1}{100}$یک سنجاق نگارش کرد. یعنی اندازه‌ی آن به اندازه‌ی توان به این هدف دست پیداکرد که کارها درمقیاس اتم و مولکول انجام شود و اتم‌ها را آن‌گونه که خود می‌خواهیم کنار یکدیگر قرار بدهیم. در سال ۱۹۹۰ درمرکز تحقیقات آل مدن آی.بی.ام برای نخستین باردانشمندی اتم‌ها راجابه جا کرد و با اتم‌ها جمله"این جالب است" را نوشت. به این ترتیب رویای دانشمندی که حدود ۳۰ سال پیش از این تاریخ تئوری خودش را مطرح کرده بود به وقوع پیوست. اکنون فن‌آوری نانو یکی ازپنج فن‌آوری قرن ۲۱ است و با خود انقلاب صنعتی جدیدی به همراه می‌آورد. به تازگی نانوسازه ها، در میان گروه‌های تحقیق نظری وتجربی اهمیت شایان توجهی یافته است. این نانوسازه‌ها عبارتند از نانوتیرها، نانومیله‌ها، نانوحلقه‌ها، نانونوارها، نانوورق‌ها، نانوپوسته‌ها و نانوسوئیچ‌ها. سازه‌ها دراین مقیاس کوچک، دارای ویژگی‌های فوق العاده‌ی مکانیکی، الکتریکی و گرمایی در مقایسه با سازه‌ها در مقیاس معمول هستند. کاربردهای بسیار گسترده و نوینی برای این نانوسازه‌ها درسال‌های آینده پیش‌بینی شده است. این کاربردها در زمینه‌های هوافضا، میکروالکترونیک و... هستند.

توجه به مطالعه‌ی سیستم‌های الکترومکانیکی در ابعاد میکرو، همانند فن‌آوری نانو، باگفته‌های ریچارد فاینمن آغاز شد. پنج سال بعد، درسال ۱۹۶۴، ناتانسون وهمکارانش، درویستینگ هاوس اولین دسته از دستگاه‌های میکروالکترومکانیک را تولید کردند. مدل‌سازی ریاضی نقشی کلیدی در گسترش این سیستم‌ها ایفا می‌کرد. البته برخلاف نانوسیستم‌های الکترومکانیکی، اصول عملکرد و مبنای اساسی سیستم‌های الکترومکانیکی رایج در ابعاد ماکرو ومیکرو سیستم‌های الکترومکانیکی یکسان است. به بیان دیگرپژوهشگران ازمبانی کلاسیک مکانیک نیوتنی ولاگرانژی ونیز الکترومغناطیس برای مطالعه این سیستم‌ها استفاده می‌کنند. ساخت اولین

[1] Richard Feynman

میکروپردازشگر در سال ۱۹۷۰، جرقه‌ای را برای توجه به روش‌های ساخت به کمک لیتوگرافی در ذهن پژوهشگران زد که تأثیر زیادی بر روش‌های ساخت میکرو سیستم‌های الکترومکانیکی گذاشت. درسال ۱۹۷۹ اولین شتاب‌سنجی که بر پایه این سیستم‌ها استواربود، دردانشگاه استنفورد ساخته شد. این شتاب‌سنج به اولین محصول تجاری سیستم‌های الکترومکانیکی در ابعاد میکرو تبدیل شد.

۱-۳ - اهمیت موضوع و تعریف مساله

مطالعه بر روی ارتعاشات و پایداری میکرولوله‌های حاوی جریان سیال یک مساله کلیدی در طراحی موفق و عملکرد دستگاه‌های میکرو می‌باشد. از این رو برای بسیاری از محققان موضوع جالب توجهی می‌باشد. در سال‌های گذشته رفتار وابسته به مواد میکرو به وسیله کارهای آزمایشگاهی در مقیاس میکرو مشاهده شده است.تاکنون در زمینه ارتعاشات میکرولوله ازجنس ماده هایپرالاستیک مطالعه‌ای مشاهده نشده است.

۱ ـ ۴ - مواد لاستیکی[1]

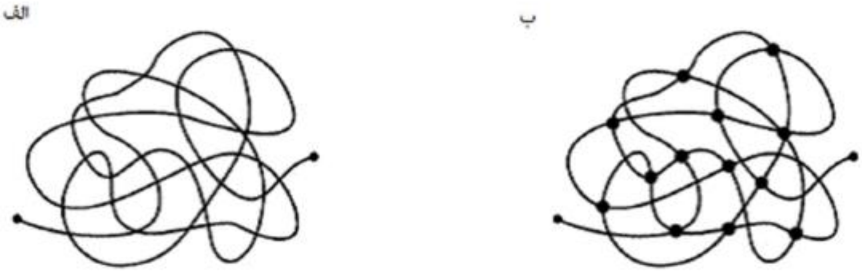
۱-۴-۱ - مرور تاریخی بر مواد لاستیک

لاستیک طبیعی درحقیقت ازترشحات درخت مو که در ظاهر شیری‌رنگ است می‌باشد. این مواد درحالت بکر، بیشترشامل هیدروکربن (درحد ۹۲ تا ۹۸ درصد) بوده وبه فرم‌های شیره گیاهی، صمغ، موادمعدنی، پروتئین‌ها وآب می‌باشند.

گفته می‌شود که مصریان اولین افرادی بودند که ازلاستیک طبیعی استفاده نمودند. قبیله‌های آفریقایی وآمریکایی ازمواد انعطاف‌پذیربرای ساخت کفه‌کفش استفاده نموده و در ورزش‌ها نیز ازضربه زدن به توپ

[1] Rubber

لاستیکی بازانو وشانه‌هایشان بهره می‌بردند. اما تا کشف روش ولکانیزاسیون[1]، لاستیک بدلیل حساسیت بالا به محیط، دارای کاربردصنعتی چندانی نبود. لاستیک طبیعی دراثر حرارت‌دهی اندک، نرم وچسبنده، سپس سخت ودراثرسردشدن شکننده می‌گردد. ولکانیزاسیون خواص فیزیکی لاستیک راطوری تغییر می‌دهد که قابلیت حل شدنش کاهش یافته، مقاومت کششی ومقاومتش به حرارت افزایش یافته وضمناحالت الاستیک خود را دردمای پایین‌تر حفظ می‌کند. لاستیک طبیعی دریک سطح معمولی متشکل از مولکول هابازنجیره بلند است که درشکل (۱ ـ ۱) نشان داده شده است. ولکانیزاسیون فرآیندی است که بااتصالات شیمیایی، زنجیره‌ها را به هم وصل می‌کند تا یک شبکه سه‌بعدی الاستیک تشکیل دهد [۱]. اتصال عرضی مولکول‌ها با زنجیره بلند در شکل (۱-۱) آمده است.



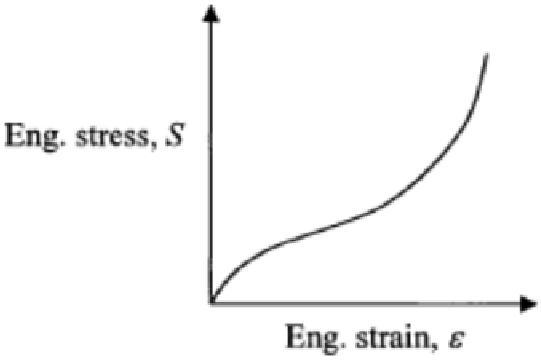
شکل (۱-۱)-بیان شماتیک تئوری مولکول‌ها با زنجیره بلند-الف) مولکول‌های لاستیک طبیعی ب) اتصال عرضی تقویت شده مولکول‌های لاستیک طبیعی [۱]

ترکیبات لاستیک عموماً متشکل از لاستیک پایه (مثل لاستیک طبیعی)، یک پر کننده (مثل کربن سیاه) و سخت کننده (مثل سولفور) می‌باشد. ویژگی‌های فیزیکی معمول که در ترکیبات اندازه‌گیری شده شامل سختی، مقاومت کششی نهایی، کشیدگی[2] نهایی و ... می‌باشد. هر عامل و ذره‌ای می‌تواند مستقلاً بر این ویژگی‌های فیزیکی اثرگذار باشد. همواره منجر به تغییر دیگر ویژگی‌ها، چه بهتر وچه بدترشدن، خواهد شد [۲]. بهبود دادن هر ویژگی،اجزاء لاستیکی در کنار کاربرد در لاستیک اتوموبیل در چندین نوع کاربرد استفاده می‌شوند. آن‌ها به دلیل هدایت حرارتی و الکتریکی پایین در روکش سیم، ارینگ‌ها و آب‌بند وسایل الکتریکی

[1] دراین روش، لاستیک اکسیده می شودوسولفور کاهیده به سولفید تبدیل می شودکه توسط گودیرو هانکوک درسال ۱۸۳۹ ارائه شد.
[2] elongation

به دلیل ظرفیت جذب صدا و ارتعاش در ایزوله کردن یاتاقان‌ها [۳]، بوش‌ها و اتصالات و نیز به علت نفوذناپذیری در بارانی‌ها، آب بندها و ... مورد استفاده قرار می‌گیرند. برخی مواد لاستیکی قابلیت کشیدگی ۵ تا ۶ برابری نسبت به طول اولیه خود را دارند.

رفتار غیرخطی تنش ـ کرنش در مواد لاستیکی با نرم‌شوندگی آنی مدول الاستیسیته در کرنش‌های کم ومتوسط و سپس سخت شوندگی در نزدیکی بیشینه کرنش ماده مشخص می‌شود که این امر درشکل (۱-۲) نشان داده شده است. اولین تلاش‌ها برای بیان رفتار الاستیک در لاستیک نیازمند درنظرگرفتن تئوری تغییرشکل محدود بوده و منجر به قوانین سازگاری ماده از طریق توابع انرژی کرنشی گردیده و با عنوان هایپرالاستیسیته شناخته می‌شود [۴]. کارهای اولیه ترلوآر[1] [۵] توسعه بیشتری را در مدل‌های هایپرالاستیک به راه انداخت که نشان از سخت‌شدگی مواد لاستیکی در نزدیکی حد کشیدگی[2] آنها داشت.



شکل (۱-۲): بیان کیفی رابطه غیر خطی تنش-کرنش در مواد لاستیکی که نشان از نرم شوندگی اولیه و سخت شوندگی در محدوده کشیدگی ماده دارد [۴]

[1] Treloar
[2] Elongation limit

۱-۴-۲ - مزیت‌های مکانیکی مواد لاستیکی

از رفتار تنش- کرنش مواد لاستیکی موارد متعددی قابل استخراج است. یکی از مهمترین پدیده‌های مشاهده شده رفتار الاستیک غیرخطی است که دراین قسمت مورد بررسی قرار می‌گیرد. در ابتدا مفاهیم پایه و اصولی مربوطه، سپس مواد هایپرالاستیسیته، مدل‌های در دسترس و در نهایت معرفی تست‌های موجود برای تحقق و دستیابی به پارامترهای مدل و تکمیل آنها ارائه می‌گردد [۵].

۱-۴-۲-۱ - نرخ تغییر شکل و کرنش

نقطه شروع مکانیک کوانتوم ، اندازه‌گیری جابه‌جاییو تغییر شکل می باشد. نقطه p دریک جسم طبق شکل دارای بردار مکان مرجع $X = x_i e_i$ است . مکان جدید نقطه p در طی تغییر شکل و یا حرکت به نقطه p بدل می‌شود که دارای بردار مکان $X = x_i e_i$ است. رابطه بردار مکان قبلی و بردار مکان جدید توسط بردار جابجایی u طبق معادله (۱) است:

$$x_i = x_i + u_i \quad (۱-۱)$$

فرم دیفرانسیلی معادله بالا به این صورت است:

$$dx_i = \frac{\partial_{x_i}}{\partial x_j} dx_j = F_{ij}\, dX_j \quad (۱-۲)$$

که F تانسور گرادیان تغییر شکل است که به فرم ماتریسی باF_{ij} نشان داده می‌شود.

تانسور راست کوشی ـ گرین از گرادیان تغییر شکل به دست می‌آید:

$$C_{ij} = F_{m_i} F_{m_j} \quad (۱-۳)$$

یا به فرم ماتریسی زیر می‌باشد:

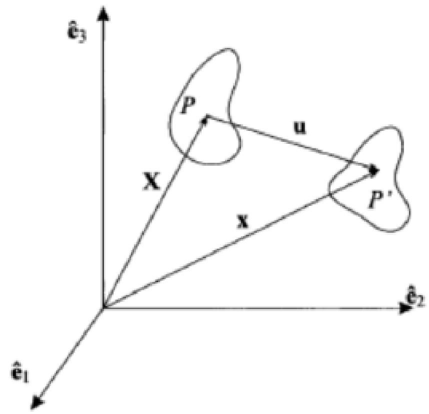
$$C = F^T \cdot F \quad (۱-۴)$$

به همین ترتیب تانسور چپ کوشی ـ گرین برابر است با:

$$B_{ij} = F_{im}F_{jm} \qquad (۵-۱)$$

یا به فرم ماترسی عبارتست از:

$$B = F \cdot F^T \qquad (۶-۱)$$



شکل (۱-۳)- بردارهای موقعیت اولیه و ثانویه [۵]

تعریف این تانسورها منجر به تعریف کرنش می‌شود. از تانسور راست کوشی ـ گرین (c) برای یافتن تانسور کرنش لاگرانژین (تانسوری که کرنش را بر اساس حالت مرجع را بیان می‌کند) معادل است با:

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(C_{ij-\delta_{ij}}\right) \qquad (۷-۱)$$

که δ_{ij} تابع دلتای کرانکر می‌باشد.

تانسور کرنش اویلری که شکلی از کرنش نسبت به موقعیت تغییر شکل یافته را بیان می‌کند برابر است با:

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\delta_{ij} - B_{ij}^{-1}\right) \qquad (۸-۱)$$

همچنین نسبت کشیدگی [۱] برای المان یک بعدی با وطول اولیه L_0 و طول ثانویه Lابرابر ست با:

$$\lambda = \frac{L}{L_0} \qquad (۹-۱)$$

[1]Strech ratio

آشناترین تعریف برای کرنش، کرنش مهندسی یا اسمی می‌باشد که براساس تغییر طول نسبت به طول اولیه بیان شده و مستقیماً از نسبت کشیدگی تعیین می‌شود:

$$\varepsilon_i = \lambda_i - 1 \qquad (۱ - ۱۰)$$

گرادیان تغییر شکل F ، بر اساس دو تانسور یعنی تانسور دوران متعامد R و تانسور راست کشیدگی متقارن مثبت معین U تانسور چپ کشیدگی V صورت زیر قابل بیان است :

$$F = R \cdot U = v \cdot R \qquad (۱ - ۱۱)$$

مقادیر ویژه تانسور راست کشیدگی، نسبت‌های کشیدگی اصلی[1] می‌باشند:

$$\det\left[U_{ij} - \lambda_n \delta_{ij}\right] = 0 \qquad (۱ - ۱۲)$$

این نسبت کشیدگی با مقادیر ویژه تانسور راست کوشی گرین از طریق معادلات مشخصه مرتبط است:

$$\det\left[C_{ij} - \lambda_n^2 \delta_{ij}\right] = 0 \qquad (۱ - ۱۳)$$

یعنی مقادیر ویژه تانسور راست کوشی-گرین برابر λ_i^2است که این مقدار برای تانسور چپ کوشی-گرین برابر λ_i^{-2} .می‌باشد

۱-۴-۲-۲ - ثابت‌های کرنش

ثوابت کرنش از طریق تانسور راست کوشی- گرین و بدون توجه به جهت مختصات قابل تعریف می‌باشد:

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = tr(c) \qquad (۱ - ۱۴)$$

$$I_2 = \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_1^2\lambda_3^2 = \frac{1}{2}\left(I_1^2 - tr(C^2)\right) \qquad (۱ - ۱۵)$$

ریشه مربعی مقادیر ویژه تانسور چپ یا راست کوشی – گرین می‌باشند.ثوابت کشیدگی $\lambda_i(i = 1،2،3)$

$$I_3 = \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2 = J^2 = \det(c) \qquad (۱ - ۱۶)$$

به همین ترتیب، دترمینان تانسورراست کشیدگی برابربا J است:

$$J = \det(U) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \qquad (۱ - ۱۷)$$

[1] Principle stretch ratio

اگر مساله مورد بررسی ما، ماده غیرقابل فشرده باشد آنگاه همواره برابر یک بوده و رابطه سودمندی را بین نسبت‌های کشیدگی اصلی برقرار می‌سازد:

$$\mathrm{J} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1 \qquad (۱-۱۸)$$

به همین ترتیب می‌توان ثوابت کرنش را از طریق تانسور تغییر شکل چپ کوشی-گرین تعریف کرد:

$$\mathrm{I}_1 = \mathrm{tr(B)} = \mathrm{B}_{kk} \qquad (۱-۱۹)$$

$$\mathrm{I}_2 = \frac{1}{2}(\mathrm{I}_1^2 - \mathrm{B}:\mathrm{B}) = \frac{1}{2}(\mathrm{I}_1^2 - \mathrm{B}_{ik}\mathrm{B}_{ki}) \qquad (۱-۲۰)$$

$$\mathrm{I}_3 = \det(\mathrm{B}) = \mathrm{J}^2 \qquad (۱-۲۱)$$

برای مواد غیرقابل فشردگی، می‌توان مجموعه ثوابت زیر را نیز برای تانسور تغییر شکل چپ کوشی – گرین به‌کار برد:

$$\bar{\mathrm{I}}_1 = \frac{\mathrm{I}_1}{\mathrm{J}^{2/3}} = \frac{\mathrm{B}_{kk}}{\mathrm{J}^{2/3}} \qquad (۱-۲۲)$$

$$\bar{\mathrm{I}}_1 = \frac{\mathrm{I}_2}{\mathrm{J}^{4/3}} = \frac{1}{2}\left(\bar{\mathrm{I}}_1^2 - \frac{\mathrm{B}\cdot\mathrm{B}}{\mathrm{J}^{4/3}}\right) = \frac{1}{2}\left(\bar{\mathrm{I}}_1^2 - \frac{\mathrm{B}_{ik}\mathrm{B}_{ki}}{\mathrm{J}^{4/3}}\right) \qquad (۱-۲۳)$$

$$\mathrm{J} = \sqrt{\det \mathrm{B}} \qquad (۱-۲۴)$$

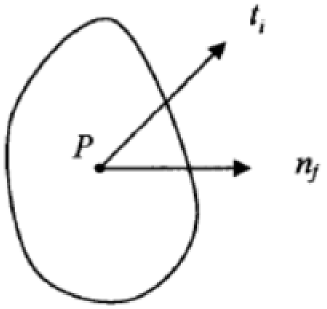
۱-۴-۲-۳ - تنش‌های اصلی

با در نظر گرفتن نقطه‌ی p در صفحه المان با بردار نرمال n_jوبردارترکنش [1] t_iطبق شکل(۳)،تنش کوشی با رابطه (۱-۲۵) تعریف می‌شود:

$$t_i = \sigma_{ji} n_j \qquad (۱-۲۵)$$

این تعریف ایجاب می‌کند که تنش در حالت تغییر شکل یافته یک نقطه بیان شود و لذا به تنش حقیقی[2] نیز معروف است.

[1] Traction vector
[2] True stress



شکل (۱-۴): بردار ترکنش و نرمال روی نقطه P [۴]

گاهی راحت‌تر است که تنش مهندسی (که به تنش اسمی، لاگرانژین یا پیولا-کرشهف اول نیز معروف است) را به فرم اندیسی نوشت:

$$s_{ij} = JF_{ij}^{-1}\sigma_{ij} \qquad (۱-۲۶)$$

۱-۵- الاستیسیته غیرخطی

۱-۵-۱ - هایپرالاستیسیته

قوانین سازگاری هایپرالاستیک برای مدل کردن موادی استفاده می‌شوند که حین مواجهه با کرنش‌های خیلی بزرگ، ازخود رفتار الاستیک نشان می‌دهند. آن‌ها رفتار غیرخطی ماده و تغییر شکل‌های بزرگ را در خود جای می‌دهند. کاربرد این تئوری در دو مورد می‌باشد: (۱) مدل کردن رفتار لاستیکی مواد پلیمری (۲) مدل کردن فوم‌های پلیمری در معرض تغییر شکلهای بزرگ برگشت‌پذیر [۶].

پاسخ مواد پلیمری شدیداً به دما، نرخ بارگذاری و کرنش‌های پیشین وابسته است. پلیمرها دارای محدوده‌های مختلف رفتاری همچون حالت شیشه‌ای[1]، ویسکوالاستیک و لاستیکی می‌باشند. در دمای بحرانی که به نام گذار شیشه‌ای[2] شناخته می‌شود، مواد پلیمری تحت تغییرات قابل توجه مکانیکی قرار می‌گیرد. در زیر این دما

[1] glassy
[2] Glass transition temperature

مانند حالت شیشه‌ای با رفتار نرم عمل کرده و در نزدیکی دمای گذار، تنش شدیداً به نرخ کرنش وابسته است. در خود دمای گذار افت قابل توجهی در مدل الاستیسیته رخ می‌دهد و در بالای این دما رفتارلاستیکی ازماده مشاهده می‌شود به طوری که رفتاراالاستیک بوده، تنش وابستگی قابل توجهی به نرخ کرنش نداشته و مدل نیز با دما افزایش می‌یابد. تمام پلیمرها این رفتار کلی را دارند اما محدوده هر رفتارو جزییات آن به ساختار مولکولی ماده بستگی دارد. دربین پلیمرها، پلیمرها با اتصال عرضی[1] یا همان الاستومرها دارای ایده‌آل ترین رفتار الاستیک بوده که ماده مورد نظر ما در این پژوهش نیز می‌باشد. مواد هایپرالاستیک چنین رفتار الاستیکی را تقریب می‌زنند.

رفتار ماده لاستیکی دارای جنبه‌های زیر می‌باشد:

(۱): ماده الاستیک ایده‌آل می‌باشد یعنی الف) وقتی ماده در دمای ثابت یا آدیاباتیک تغییرشکل می‌یابد، تنش صرفاً به کرنش آن لحظه وابسته بوده و مستقل از نرخ بار گذاری می‌باشد. ب) رفتار برگشت‌پذیر دارد یعنی در طی یک سیکل بسته از کرنش در شرایط هم‌دما یا آدیاباتیک، هیچ کار خالصی روی ماده انجام نمی‌شود.

(۲): ماده شدیداً در مقابل تغییرات حجمی مقاومت می‌کند.

(۳): مدول برشی آن در حدود برابر 10^{-5}اکثر مواد است

(۴): ماده ایزوتروپیک است یعنی پاسخ تنش ـ کرنش مستقل از جهت گیری ماده است.

(۵): مدول برشی وابسته به دما بوده و ماده در اثر حرارت‌دهی سفت‌تر می‌شود.

(۶): وقتی ماده کشیده می‌شود از خود حرارت آزاد می‌کند.

تمامی مواد هایپرالاستیک از قوانین زیر پیروی می‌کنند:

(۱): رابطه تنش و کرنش برای ماده از طریق چگالی w انرژی کرنشی. که تابعی از تانسور گرادیان تغییر شکل است بیان‌می‌شود $w = w(F)$: این امر نشان می‌دهد که ماده کاملاً الاستیک بوده و نیز بدین معنی است که

[1] Cross-linked polymers

صرفاً نیازمند کار بایک تابع اسکالر ی‌باشیم. شکل کلی تابع چگالی انرژی کرنشی با آزمایشات مشخص شده و فرمول استخراجی شامل ثوابتی است که برای هر ماده خاص قابل حصول است.

(۲): ماده تغییرشکل نیافته، ایزوتروپیک فرض می‌شود یعنی رفتار ماده مستقل از جهت‌گیری اولیه ماده نسبت به بارگذاری است. اگر تابع چگالی انرژی کرنشی تابعی از تانسور تغییرشکل چپ کوشی باشد معادله سازگاری حاصل به طور خودکار ایزوتروپیک است.

(۳): رابطه تنش ـ کرنش از طریق مشتق‌گیری نسبت به چگالی انرژی کرنشی حاصل می‌شود.

۱-۵-۲- نحوه محاسبه رابطه تنش ـ کرنش از چگالی تغییر شکل [۷]

قانون سازگاری برای ماده هایپرالاستیک ایزوتروپیک از طریق معادله‌ای بیان می‌شود که چگالی انرژی کرنشی را به گرادیان تغییر شکل یا سه ثابت تانسور کرنش برای ماده ایزوتروپیک مرتبط می‌کند:

$$w(F) = U(I_1.I_2.I_3) = \bar{U}(I_1.I_2.J)\bar{U} = (\lambda_1.\lambda_2.\lambda_3) \qquad (۱-۲۷)$$

آنگاه رابطه تنش ـ کرنش باید از مشتق‌گیری چگالی انرژی کرنشی حاصل شود. در ادامه، رابطه تنش ـ کرنش بر حسب انتخاب ثوابت آمده است:

- چگالی انرژی کرنشی بر حسب گرادیان تغییرشکل:

$$\sigma_{ij}=\frac{1}{j}F_{ik}\frac{\partial w}{\partial F_{jK}} \qquad (۱-۲۸)$$

- چگالی انرژی کرنشی بر حسب I_1،I_2،I_3 :

$$\sigma_{ij}=\frac{2}{\sqrt{I_3}}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial I_1}+I_1\frac{\partial U}{\partial I_2}\right)B_{ij}-\frac{\partial U}{\partial I_2}B_{ik}B_{kj}\right]+2\sqrt{I_3}\frac{\partial U}{\partial I_3}\delta_{ij} \qquad (۱-۲۹)$$

- چگالی انرژی کرنشی برحسب $\bar{I}_1.\bar{I}_2.J$:

$$\sigma_{ij}=\frac{2}{J}\left[\begin{array}{c}\frac{1}{J^{2,3}}\left\{\frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{I}_1}+\bar{I}_1\frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{I}_2}\right\}B_{ij}-\left\{\bar{I}_1\frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{I}_1}+2\bar{I}_2\frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{I}_2}\right\}\frac{\delta_{ij}}{3}\\ \vdots\\ -\frac{1}{J^{4,3}}\frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{I}_2}B_{ik}B_{kj}\end{array}\right]+\frac{\partial\bar{U}}{\partial J}\delta_{ij} \qquad (۱-۳۰)$$

● چگالی انرژی کرنشی برحسب $\lambda_1.\lambda_2.\lambda_3$:

$$\sigma_{ij}=\frac{\lambda_1}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}\frac{\partial\widetilde{U}}{\partial\lambda_1}b\mathrm{i}^{(1)}bj^{(1)}+\frac{\lambda_2}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}\frac{\partial\widetilde{U}}{\partial\lambda_2}b\mathrm{i}^{(2)}bj^{(2)}\frac{\lambda_3}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}\frac{\partial\widetilde{U}}{\partial\lambda_3}b\mathrm{i}^{(3)}bj^{(3)} \qquad (۳۱-۱)$$

اکثر مواد لاستیکی شدیداً در مقابل تغییر حجم مقاومت می‌کنند و لذا به صورت مواد غیرقابل فشرده[۱] تقریب زده می‌شوند. مدل‌های مختص به مواد هایپرالاستیک دارای این ویژگی‌ها می‌باشند:

(۱) برای حفظ حجم: $J=1$ باشد.

(۲): بایدچگالی انرژی کرنشی صرفاً تابعی از دو ثابت کرنش می‌باشد.

۱-۶ - مدهای سازگاری

مدل‌های هایپرالاستیک بسته به کاربردهای محققین از تابع انرژی کرنشی، به دو دسته تقسیم می‌شوند [۸]

● دسته اول ناشی از مفهوم ریاضی تابع انرژی کرنشی می‌باشند مانند سری ریولین[۲] یا آگدن[۳].

به این دسته مدل‌های پدیدارشناختی[۴] می‌گویند. تعیین پارامترهای ماده در این مدل‌ها مشکل بوده و در خارج از محدوده تغییرشکل آن‌ها ممکن است منجر به خطا شوند.

● دومین نوع از مدل‌هایی هستند که از مفاهیم فیزیکی قابل استخراج‌اند. این مدل‌ها بر اساس فیزیک شبکه زنجیره‌ای پلیمر و روش‌های آماری می‌باشند. این امر بسته به پدیده‌های میکروسکوپیک، منجر به توابع انرژی کرنشی متفاوتی می‌گردد و در اکثر موارد فرمول‌بندی ریاضی آنها کمی پیچیده است. دراین بخش تعدادی از مدل‌های حاکم بررسی می‌شوند.

[1] incompressible
[2] Rivlin
[3] Ogden
[4] Phenomenological models

۱-۶- ۱- مدل‌های پدیدارشناختی [۸]

۱-۶-۱ -۱- مدل مونی[1] (مدل مونی ـ ریولین مرتبه اول)

مونی مشاهده کرد که رفتار لاستیکی تحت بارگذاری ساده برشی، خطی می‌باشد وی تابع چگالی انرژی کرنشی را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$w = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3) \qquad (۳۲ - ۱)$$

C_1وC_2 دو پارامتر ماده هستند. این مدل به طور گسترده برای مواد لاستیکی با کرنش متوسط زیر ۲۰ درصد استفاده می‌شود.

۱-۶-۱-۲- مدل مونی ـ ریولین[2]

ریولین مدل پیشین را از طریق بسط (w) به سری‌های چند جمله‌ای از($I_2 - 3$) و (I_{1-3}) توسعه داد:

$$w = \sum_{i=0.j=0}^{\infty} C_{ij}(I_1 - 3)^{i}(I_2 - 3)^{j} \qquad (۳۳ - ۱)$$

کهC_{ij} پارامترهای ماده بوده و $C_{\infty} = 0$ می‌باشدمعمولاً جملات سری موردنظر به جملات مرتبه دوم و سوم ختم می‌شود، به عنوان مثال، نیازمندتعیین ۹ پارامتر برای جملات تا مرتبه سوم است. مدل بیان شده ریولین قابل توسعه از طریق شکل‌های دیگرثوابت کرنش می‌باشد. درهر صورت، این شکل از انرژی به صورت کلاسیک برای کرنش‌های خیلی بزرگ استفاده می‌شود.

طبق رابطه اخیر، مدل سه پارامتری و پنج پارامتری مونی ـ ریولین به صورت زیر بیان می‌شود:

$$w = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) \qquad (۳۴ - ۱)$$

[1] Mooney model
[2] The Money-Rivlin model

$$w = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3)_+ \qquad (۳۵-۱)$$

$$C_{20}(I_{1-3})^2 + C_{02}(I_2 - 3)^2$$

درمقالات اخیر، اثبات شده که مدل مونی ـ ریولین برای ترکیبات لاستیک پرنشده[۱] به مواد لاستیکی خالی از مواد غیرآلی می‌گویند، مناسب است [۹]

۱-۶-۱-۳ - مدل یئو[۲]

یئو در سال ۱۹۹۰ مدل دیگری را پیشنهاد داد که در آن ثابت کرنش دوم (I_2) دارای مقدار ثابت کشیدگی بوده و در تابع انرژی کرنشی دخیل نمی‌شود:

$$w = \sum_{i=1}^{3} C_i (I_1 - 3)^i \qquad (۳۶ - ۱)$$

این مدل دقت خوبی را برای لاستیک پرشده[۳] به همراه داشته و تنها نیازمند تست کشش دو محوره متقارن برای تطابق با داده‌هاست.

۱-۶-۱-۴ - مدل بیدرمن[۴]

بیدرمن از معادله مونی – ریولین تنها جملات i=0 یا j=0 با را حفظ نمود و به این ترتیب سه جمله اول از I_1 وجمله اول ازI_2را مد نظر قرار داد.

$$w = c_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + c_{30}(I_1 - 3)^3 \qquad (۳۷ - ۱)$$

این مدل به صورت موفقیت آمیز توسط الکساندر[۵] استفاده شد.

[1] Unfilled rubber
[2] Yeoh model
[3] Filled rubber
[4] The Biderman model
[5] Alexander

۱-۶-۱-۵ - مدل هینس-ویلسون[1]

جیمز و همکاران از مقایسه توصیف چگالی انرژی کرنشی بر حسب ثوابت کشیدگی تصمیم به حفظ شش جمله اول از سری گرفتند:

$$w = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + c_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) + c_{02}(I_2 - 3)^2 + c_{20}(I_1 - 3)^2 + c_{30}(I_1 - 3)^3 \qquad (۳۸ - ۱)$$

۱-۶-۱-۶ - مدل اگدن[2]

در سال ۱۹۷۲ اگدن، چگالی انرژی کرنشی را بر حسب ثوابت کشیدگی بیان نمود. او چگالی انرژی کرنشی را به صورت یک سری از توان‌های‌حقیقی $(\lambda_i)_{i=1.2.3}$ ارائه داد:

$$w = \sum_{n=1}^{N} \frac{\mu_n}{a_n}\left(\lambda_1^{a_n} + \lambda_2^{a_n} + \lambda_3^{a_n} - 3\right) \qquad (۳۹ - ۱)$$

به طوری که پارامترهای ماده باید شرط زیر را ارضاء کنند:

$$\mu_n a_n > O\ \forall n = 1 \text{ و } N \qquad (۴۰ - ۱)$$

۱-۶-۲ - مدل‌های فیزیکی [۷]

مدل‌های فیزیکی بر اساس پاسخ میکروسکوپ زنجیره‌های پلیمری در شبکه می‌باشند. این مدل‌ها براساس فرض‌های انجام شده در رسیدن به پاسخ با هم تفاوت دارند.

۱-۶-۲-۱- مدل نئو ـ هوکین[3]

[1] The Haines-Wilson model
[2] Ogden model
[3] Neo-hookean

این مدل، ساده‌ترین مدل فیزیکی موجود برای مواد لاستیکی است. این مدل در تطابق با مدل مونی ـ ریولین اما با یک پارامتر($C_2 = 0$) بوده ودر عین حال از ارتباط زنجیره مولکولی بدست می‌آید. مواد لاستیکی از طریق شبکه‌ای از زنجیره‌های انعطاف‌پذیر بلند که با اتصالات شیمیایی به هم متصلند حاصل می‌شود. الاستیسیته این شبکه عمدتاًبه سبب تغییرات آنتروپی در طی تغییر شکل بوده که آنتروپی ماده نیز توسط تعداد ترکیب‌های ممکن از زنجیره‌های ماکرومولکولی تعریف می‌گردد. ترلوآر[1] از توزیع آماری گوسین[2] استفاده و فرم انرژی کرنشی زیر را ارائه نمود:

$$w = \frac{1}{2}nkT(I_1 - 3) \qquad (۴۱ - ۱)$$

که درآن n چگالی زنجیره در واحد حجم، k ثابت بولتزمن و T دمای مطلق است. ترلوآر برای کربن طبیعی سیاه [3]ر ا مقدار $\frac{1}{2}nkT$ برابر ۰.۲ مگا پاسکال بدست آورد. مدل برش ساده و تست‌های دو محوره در تغییرشکل کمتر از ۵۰٪ بود ه است.

۱-۶-۲-۲ مدل ایشیهارا[4]

ایشیهارا تئوری غیر گوسین رابکار برده و با استفاده از خطی‌سازی معادلات مربوطه، سری ریولین را برای چگالی انرژی کرنشی بدست آورد:

$$w = c_{10}(I_1 - 3)_+ c_{2o}(I_1 - 3)^2 c_{01}(I_2 - 3) \qquad (۴۲ - ۱)$$

از آن در مدل‌های فیزیکیI_2 بوده که تاپیش باید خاطر نشان ساخت که مدل مولکولی حاضر، شامل ثابت کرنش ظاهرنشده بود. به این ترتیب مدل اشیهارا نزدیک به روابط حاکم بر مدل بیدرمن یا مونی ـ ریولین می‌باشد.

[1]Trelor
[2] Gaussian statistical distribution
[3] Carbon black-filled natural rubber
[4]Ishihara model

جدول (۱-۱) لیست برخی مدل‌ها به همراه تعداد پارامترهای مجهول [۸]

Model	Year	N.m.p
Mooney	1940	2
Neo-Hookean	1943	1
3-chain	1943	2
Ishihara	1951	3
Biderman	1958	4
Gent and Thomas	1958	2
Hart-Smith	1966	3
Valanis and Landel	1967	1
Ogden	1972	6
Haines-Wilson	1975	6
Slip-link	1981	3
Constrained junctions	1982	3
van der Waals	1986	4
8-chain	1993	2
Gent	1996	2
Yeoh and Fleming	1997	4
Tube	1997	3
Extended-tube	1999	4
Shariff	2000	5
Micro-sphere	2004	5

۱-۷ - تست‌های تعیین پارامترهای ماده

برای استفاده از مدل ارائه شده در مواردی مانند طراحی، ضروری است تا ویژگی‌های مواد در شرایط مناسب تست، تعیین می‌شود. زمانی که از ترکیب از تست‌های برای استخراج ضرایب مدل استفاده می‌شود، این داده‌ها باید در دما و نرخ کرنش یکسان تعیین گردند. این تست‌ها عبارتند از[۱۰]:

(۱): تست کشش تک‌محوره[۱]

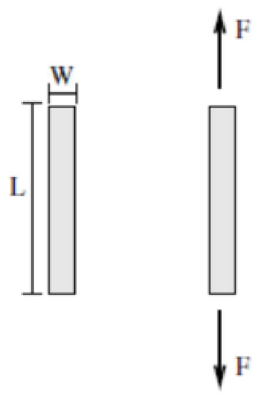
(۲): تست برش صفحه‌ای[۲]

(۳): تست کشش دو محوره[۳]

[1] Uniaxial tension test
[2] Planar shear test
[3] Equibiaxial tension test

۱-۷-۱ - تست کشش تک‌محوره

تست کشش تک‌محوره ویژگی‌های ماده را تحت تنش صفحه‌ای تعیین می‌کند. برای انجام این تست و برای بدست آوردن کرنش خالص کششی، نمونه مورد آزمایش باید در جهت کششی نسبت به عرض و ضخامت دارای طول بیشتری باشد. قابل ذکر است که از تحلیل المان محدود می‌توان به این امر دست یافت که نیاز است تا طول نمونه حداقل ده برابر عرض باشد.



شکل (۱-۵): تست کشش تک محوره [۹]

کرنش ناشی از کشش برابر خواهد بود با

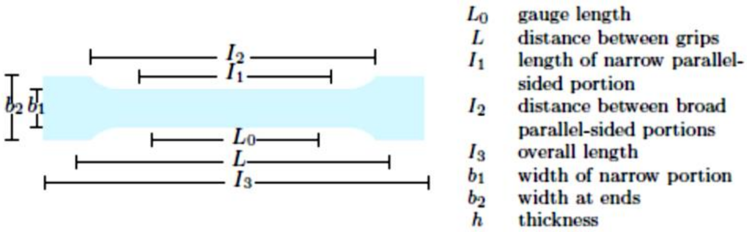
$$\lambda_1 = \frac{L}{L_o} \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_1^{-1/2} \qquad (۱ - ۴۳)$$

تنش ناشی از کشش با روابط زیر بیان می‌شود:

$$\sigma_1 = \sigma = \frac{F}{A_0} . \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \qquad (۱ - ۴۴)$$

که $\boldsymbol{\sigma}$ تنش، F بار اعمالی و A_0 سطح اولیه گونه می‌باشد.

استانداردهای مختلف برای تست کشش تک محوره برای پلاستیک [۱۱] و لاستیک [۱۲] موجود است. تفاوت اصلی بین روش‌ها برای پلاستیک و لاستیک، در هندسه نمونه و سرعت بار گذاری می‌باشد. تست‌های مربوطه بر روی نمونه استخوانی طبق شکل (۱-۶) انجام می‌گردد.



شکل (۱-۶): اندازه‌های مورد نظر نمونه تست [۱۰]

جدول (۱-۲)- مشخصه‌های استاندارد برای تست کشش [۱۰]

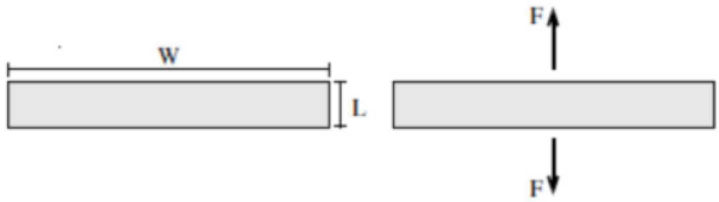
Thermoplastic and thermosetting plastics									
ISO527-2	1A	≥ 150	$104 - 113$	80 ± 2	20 ± 0.2	10 ± 0.2	4 ± 0.2	50 ± 0.5	115 ± 1
ISO527-2	1B	≥ 150	$106 - 120$	60 ± 2	20 ± 0.2	10 ± 0.2	4 ± 0.2	50 ± 0.5	$l_2 + 5$
ISO527-2	1BA	≥ 75	58 ± 2	30 ± 0.5	10 ± 0.5	5 ± 0.5	≥ 2	25 ± 0.5	$58 + 2$
ISO527-2	1BA	≥ 75	23 ± 2	12 ± 0.5	4 ± 0.2	2 ± 0.2	≥ 2	10 ± 0.2	$23 + 2$
Rubbers and Elastomers									
ISO37	1	≥ 115	-	33 ± 2	25 ± 1	6 ± 0.4	2 ± 0.2	25 ± 0.5	≥ 115
ISO37	2	≥ 75	-	25 ± 1	12.5 ± 1	4 ± 0.1	2 ± 0.2	20 ± 0.5	≥ 75
ISO37	3	≥ 50	-	16 ± 1	8.5 ± 1	4 ± 0.1	2 ± 0.2	10 ± 0.5	≥ 50
ISO37	4	≥ 35	-	12 ± 0.5	6 ± 0.5	2 ± 0.1	1 ± 0.1	10 ± 0.5	≥ 35
ASTM 412	C	≥ 115	-	33 ± 2	25 ± 1	6 ± 0.05	$1,3 \ldots 3,3$	25 ± 0.25	≥ 115
ASTM 412	A	≥ 140	-	59 ± 2	25 ± 1	12 ± 0.05	$1,3 \ldots 3,3$	50 ± 0.5	≥ 140
Thin sheetings and films									
ISO527-3	2	≥ 150	-	-	-	10	≤ 1	50 ± 0.5	100 ± 0.5

۱-۷-۲ - تست برش صفحه‌ای

تنش در تست برش صفحه‌ای، مانند تست برش خالص است. مهم‌ترین جنبه در نمونه مورد آزمایش این است که بعد نمونه در راستای کشش بسیار کوتاه‌تر نسبت به عرض می‌باشد، یعنی:

$$w \geq 10L \qquad (۴۵-۱)$$

که طبق شکل (۱-۷)L طول وW عرض نمونه می‌باشد. توصیه می‌شود که کمینه نسبت عرض به طول معیار، برابر چهار باشد. مطالعات آزمایشگاهی روی نمونه با عرض ۲۰۰ میلی متر و طول ۶۰ میلی متر و با درگیر کردن طول‌های مختلف نشان داد که نسبت عرض به طول [1] ۴ تا ۱۰ بر منحنی تنش-کرنش بی‌تأثیر است [۱۴]. پس در اینجا به جای تنش صفحه‌ای که در تست کشش تک‌محوره انجام می‌شود، گونه در حالت کرنش صفحه‌ای مورد آزمایش قرار می‌گیرد.



شکل (۱-۷): تست برش صفحه‌ای [۱۰]

کرنش صفحه‌ای-با توجه به تست، کرنش صفحه‌ای به صورت زیر خواهد بود.

$$\lambda_1 = \frac{L}{L_0}\lambda_2 = \lambda_1^{-1}\lambda_3 = 1 \qquad (۴۶-۱)$$

که L_0 $(\mathrm{i} = 1،2،3)$ λ_1نسبت کشیدگی‌درجهت‌اعمال بار ، طول اولیه و L طول ثانویه است.

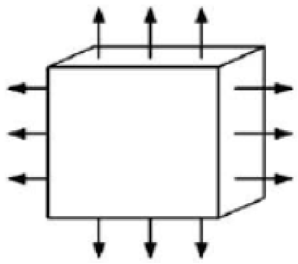
تنش صفحه‌ای-تنش صفحه‌ای نیز دارای روابط نشان داده شده در زیر می‌باشد.

$$\sigma_1 = \sigma\sigma_2 = 0\sigma_3 \neq 0 \qquad (۴۷-۱)$$

۱-۷-۳- تست کشش دو محوره

این تست نیازند اعمال تنش‌های کششی در دو راستای متعامد است که طرح واره آن در شکل(۱-۸) نشان داده شده است.

[1] Aspect ratio



شکل (۱-۸): نمونه تست برای کشش دو محوره [۱۰]

کرنش برابر است با:

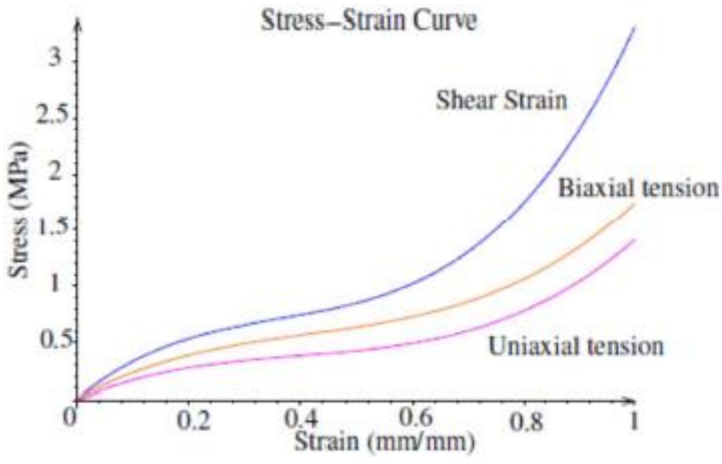
$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = \frac{L}{L_0} \lambda_3 = \lambda^{-2} \qquad (۴۸-۱)$$

کهλ کشیدگی در راستای عمود بر هم است.

تنش به صورت زیر است:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma \sigma_3 = 0 \qquad (۴۹-۱)$$

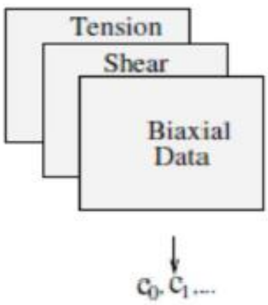
مدل‌سازی و طراحی موفقیت‌آمیز مواد هایپرالاستیک بستگی به انتخاب مناسب تابع انرژی کرنشی و تعیین صحیح ضرایب در تابع دارد. در ادامه توضیح مختصری در ارتباط با کمترین تعداد تست‌ها برای یافتن مشخصه‌های ماده هایپرالاستیک ارائه می‌شود. برخی از تست‌ها در شکل (۱-۹) آمده است.

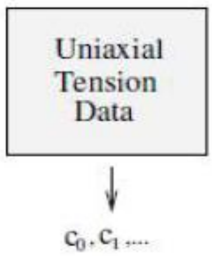


شکل (۱-۹): منحنی تنش-کرنش آزمایشگاهی برای الاستومر [۱۰]

معمولاً تمامی تست‌های لازم برای تعیین مشخصه‌های ماده هایپرالاستیک در دسترس نمی‌باشد. تنها تست کشش تک‌محوره به طور معمول موجود است. هزینه بالای انجام تست‌هایی مانند کشش دومحوره و برشی، استفاده از آنها را محدود کرده است. برای مثال، تست دومحوره نیازمند ماشین تست گران قیمت یا یک چفت و بست خاص می‌باشد.

اگر چه در ظاهر به نظر می‌رسد استفاده همزمان از چندین تست، پاسخ‌های درست‌تر و منطق‌تری را با مدل‌های مختلف به دست می‌دهد که البته اینگونه نیز هست اما قابل اثبات است که تفاوت استفاده از چندین تست و یا صرفاً یک تست (تست کشش تک‌محوره) تنها منجر به خطای اندکی می‌گردد که قابل اغماض می‌باشد. این امر را مانوئل و همکارانش در سال ۲۰۰۵ نشان دادند [۱۰]. آن‌ها یک کره صلب را در تماس با ماده‌ی هایپرالاستیک قرار داده و دو حالت مختلف را در نظر گرفتند و برای هر یک تطابق مدل‌های مختلف و نیز ضرایب را بدست آوردند:(۱) تست کشش تک‌محوری (۲)-تست‌های برشی، کششی تک‌محوره و دو محوره. آن‌ها مقدار خطاهای قابل قبول در تطابق دادههای آزمایشگاهی با مدل‌های مختلف را با استفاده از روش حداقل مربعات [1] به میزان ۳۰ درصد تعیین کردند.





شکل (۱-۱۰): تعیین ضرایب مدل از طریق دو مجموعه تست [۱۰]

[1]Least square method

$$E^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{\sigma_i^{TH}}{\sigma_i^{Exp}}\right)^2 \qquad (۵۰-۱)$$

σ_i^{Exp}تنش‌های‌تجربی ، σ_i^{TH} مقادیر تنش تئوریک و E مقدار خطاست.

نتایج تطبیق داده‌های آزمایشگاهی در استفاده از تست کشش تک‌محوره طبق جدول (۱-۳) می‌باشد.

جدول (۱-۳) نتایج انطباق با تست کشش تک‌محوره [۱۰]

مدل های هایپرالاستیک		میزان تطابق تست	درصد خطا
Mooney–Rivlin	2 Parameters	-	60
	3 Parameters	acceptable	15
	5 Parameters	good	1
	9 Parameters	best	0.01
Ogden	Order 1	-	50
	Order 2	-	54
	Order 3	-	54
Neo-Hookean		-	65
Arruda–Boyce		acceptable	30
Gent		-	880
Yeoh	Order 1	-	60
	Order 2	-	40
	Order 3	good	5
Blatz–Ko		-	200

نتایج انطباق داده‌های آزمایشگاهی در استفاده از چندین تست نیز طبق جدول (۴-۱) ارائه شد.

جدول (۱-۴)=نتایج انطباق با سه تست [۱۰]

مدل های هایپرالاستیک		میزان تطابق تست	درصد خطا
Mooney–Rivlin	2 Parameters	-	96
	3 Parameters	-	95
	5 Parameters	acceptable	30
	9 Parameters	good	18
Ogden	Order 1	-	180
	Order 2	-	-
	Order 3		-
Neo-Hookean		-	180
Arruda–Boyce		-	130
Gent		-	880
Yeoh	Order 1	-	180
	Order 2	-	140
	Order 3	-	100
Blatz-Ko		-	270

آن‌ها پس از تطابق مدل‌های متناسب با خطای مطلوب، مقدار خطای نرمال شدهe که نشان از درصد تفاوت بین تست بود را با این رابطه بدست آوردند.

$$e = 100\frac{max_{1\le i\le n}|\sigma_i^B - \sigma_i^A|}{max_{1\le i\le n}|\sigma_i^A|} \qquad (۵۱-۱)$$

در این رابطه A , B به ترتیب بیانگر حالت اول و حالت دوم تست بوده، n تعداد نودها در دامنه (به دلیل استفاده ازتحلیل المان محدود)وσ نیز بیانگر تنش می‌باشد.

به این ترتیب خطای استفاده از صرفاً تست کشش تک‌محوره در کار آن‌ها برابر ۱۵ درصد بدست آمد و لذا برای سادگی کار می‌توان بدون وارد آمدن ایرادی به اصل کار، تست‌های دیگر از جمله کشش دو محوره و برشی را حذف نمود. باید ذکر کرد که انجام تنها یک آزمایش برای تعیین پارامترهای ماده لاستیکی کفایت نمی‌کند. حتی اگر فرایند تطبیق برای یک تست مکانیکی همگرا شود هیچ اطمینانی از ارائه همان مقدار پارامترها در شرایط دیگر بار گذاری نخواهد بود. مثال مناسبی از این امر در کار سیبرت و شوچه[1] موجود است [۱۴]. لذا این مساله باید خاطر نشان شود که در مواردی که تست‌های دیگر در مواد مورد نظر در دسترس باشد، منطقی است که برای بالا بردن دقت انتخاب مدل‌ها و پارامترهای مربوطه از آن‌ها استفاده نمود. برای استخراج پارامترهای مجهول در معادلات سازگاری همانطور که در بالا ذکر شد باید به یک سری از اطلاعات آزمایشگاهی دسترسی داشت و سپس از طریق تطبیق مدل‌های تئوریک با آنها به مقادیر مجهول دست یافت. در مجموع تعداد کارهای آزمایشگاهی قابل اعتماد اندک بوده که از بین آن‌ها داده‌های مربوط به کار ترلوآر[2] بیشترین استفاده را در بین محققین داشته است [۵]. کار تطبیق با دل‌های هایپرالاستیک توسط افراد مختلف با توجه به نوع تست انجام شده که در اینجا از نتایج آن- ها به عنوان مقادیر عددی پارامترهای مجهول در

[1]
[2] Treloar

معادله استفاده می‌شود و صرفاً برای اطلاع از چگونگی کلیت استخراج این پارامترها، مروری مختصر بر آن می‌شود. داده‌های ترلوآر برای لاستیک طبیعی پرنشده همراه با ۸٪ سولفور برای کشش تک و چند محور و نیز برش خالص انجام شده است [۵]. در کنار کار وی، خروجی کار کاواباتا[1] و همکاران را نیز که به صورت تست کشش دومحوره بر روی گونه پلی سوپرین پر نشده انجام شده نیز بیان می‌شود. دلیل انتخاب این کارهای آزمایشگاهی، در دسترس و قابل اعتماد بودن دادهای بارهای کششی تک محوره و چندمحوره در آن است که علاوه بر آن به خوبی توسط مدل‌های هایپرالاستیک مدل شده است و از خروجی هر یک از آن‌ها به دلیل مشابهت دو ماده می‌توان بهره برد.

برای تعیین پارامترهای ماده باید حل‌های تئوریک$(\hat{Y})$بانتایج آزمایشگاهی Y تطبیق داده شوند. تشکیل نتایج آزمایشگاهی باnنقطه Y_i مرتبط با n مقدارتئوری$\hat{Y}_i$ تشکیل می‌شوند. تفاوت بین نتایجبا تئوریک و آزمایشگاهی به صورت کلاسیک بر حسب خطایای حداقل مربعات بیان می‌گردد:

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y}_i)^2 \qquad (۵۲-۱)$$

گاهی در عبارت بالا، برای تعدیل اثر برخی داده‌ها، فاکتورهای وزنی اضافه می‌شوند. اگر $\phi = 0$ گرددمقادیر تئوریک و آزمایشگاهی منطبق می‌شوند، با این حال نتایج آزمایشگاهی همواره از خود عدم قطعیت نشان داده و مدل‌ها نیز به فرض‌های مختلفی وابسته‌اند، لذا هدف الگوریتم‌ها در کمینه سازی ϕ می‌باشد که در این راه از الگوریتم‌های کمینه‌سازی مختلفی هم‌چون روش گرادیان کلاسیک، الگوریتم ژنتیک و...استفاده شده است. چون هدف در اینجا استخراج مجدد پارامترهای ماده نبود و صرفاً قرار است از مقادیر موجود، در این رساله استفاده شود، لذا از ذکر جزییات و تکرار کارهای دیگران خودداری و برای مطالعه بیشتر به منابع [۱۵-۱۶] ارجاع داده می‌شود.

[1] Kawabata

فصل ۲: مروری بر مقالات و کارهای گذشته

درسال‌های گذشته رفتارارتعاشی وپایداری لوله‌های دایره‌ای حامل سیال به خصوص درابعاد میکروبرای انواع مختلف وبادرنظرگرفتن شرایط مرزی گوناگون توسط محققین مختلف مطالعه شده است. دراین تحقیق برای کنترل بهترناپایداری وانعطاف‌پذیری سیستم، ساختارهای میکرواز نوع میکرولوله ازجنس ماده‌ی هایپرالاستیک رامطالعه کرده‌ایم ودراین قسمت مرورمختصری برروی کارهای گذشته خواهیم داشت.

آمابیلی، پللیکانو و پایدوسیس[۱] (۱۹۹۱): دینامیک غیرخطی و پایداری لوله‌های دوسر مفصل حاوی جریان سیال غیرقابل تراکم[۲] رابررسی کردند. آن‌ها با درنظرگرفتن لوله به عنوان یک پوسته دایره‌ای، از تئوری پوسته غیرخطی دانل[۳] در مدل‌سازی خود استفاده کردند [۱۷].

وانگ (۲۰۰۹): آن‌ها با درنظرگرفتن تئوری غیرموضعی[۴]، ارتعاشات و پایداری میکرو/نانو تیرهای دایره‌ای حامل سیال را بررسی کردند. آن‌ها در مطالعه خود اثرهای اندازه را بر رفتار این میکرو/نانو لوله‌ها بررسی کردند.

خیا و وانگ[۵] (۲۰۱۰): خیا و وانگ رفتار دینامیکی میکرولوله‌های حامل سیال را بر اساس تئوری تیر اویلر ـ برنولی و مدل تیر تیموشنکو و با استفاده ازتئوری غیرکلاسیک کوپل ـ استرس اصلاح شده[۶] بررسی کردند. آن‌ها متوجه شدند که اثر اندازه فقط زمانی مهم است که قطر خارجی میکرولوله قابل قیاس با پارامتر مقیاس طول ماده باشد [۱۸].

وانگ (۲۰۱۰): آن‌ها ناپایداری میکرولوله‌های حامل سیال را با استفاده از تئوری کوپل ـ استرس اصلاح شده بررسی کردند. آن‌ها لوله را به عنوان یک تیر اویلر ـ برنولی که حامل سیال است درنظر گرفتند اثرات اندازه را بر روی فرکانس طبیعی و سرعت بحرانی سیال برای قطرهای مختلف لوله را بررسی کردند. و همچنین نشان دادند که وقتی قطربه اندازه کافی بزرگ باشد تفاوت ما بین نتایج بدست آمده از طریق تئوری‌های کلاسیک و وابسته به اندازه ناچیز می‌باشد [۱۹].

---

[1] Amabili, M., Pellicano, F., & Paidoussis
[2] Incompressible
[3] Donnell’s shell theory
[4] Nonlocal theory
[5] Xia and Wang
[6] Modified couple stress theory

یین وهمکاران[1](۲۰۱۱): ایشان با به کارگیری تئوری گرادیان کرنش[2]، یک مدل جدید وابسته به اندازه ارائه کردند که در نتیجه‌ی آن ارتعاشات و ناپایداری میکرو لوله‌های دایره‌ای حامل سیال را بررسی کردند [۲۰].

بائوهوی وهمکارانش (۲۰۱۲): بااستفاده از تئوری تیرتیموشنکو و براساس روش موج[3]، ارتعاشات آزاد میکرو تیوب‌های حامل سیال را مطالعه کردند. وهمکارانش (۲۰۱۲): با به کارگیری تئوری پوسته غیرخطی دانل جاسازی شده با نانو تیوب‌های PVDT قربان پورآرانی ، پایداری رامطالعه کردند [۲۱].

(BNNTs) باریم نیتراید الکترو- ترمو- مکانیکی میکرو تیوب‌های هوشمند[4]قربان پور آرانی وهمکارانش (۲۰۱۳): آن‌ها پایداری میکرو لوله‌های داخلی حامل سیال که با نانولوله‌های باریم نیتراید دو جداره مدل تیر اویلر–برنولی، تئوری غیر خطی وون ـ کارمن و تئوری الاستیک تقویت شده را بررسی کردند. آن‌ها از (DWBNNT (غیر محلی استفاده کردند و تأثیر پتانسیل الکتریکی اعمالی و تغییرات دمایی را در پایداری میکرو لوله‌ها مورد مطالعه قرار دادند [۲۲].

تانگ و همکارانش (۲۰۱۴): ایشان ارتعاشات غیر خطی سه بعدی وابسته به اندازه‌ی میکروتیوب های خمیده[5] حامل سیال را بر اساس تئوری کوپل ـ تنش پیراسته را مطالعه کردند.

ستوده و افراهیم (۲۰۱۴): آن‌ها راه حلی تحلیلی برای بررسی ارتعاشات وابسته به اندازه میکرولوله ها را با در نظر گرفتن مدل غیر خطی هندسی وون ـ کارمن[6] ارائه دادند. آن‌ها نظریه تیر اویلر ـ برنولی و تئوری گرادیان کرنش را در تحلیل خود بکار بردند [۲۳].

---

[1] Yin at el
[2] Strain gradient theory
[3] Wave method
[4] Poly-vinylidene fluoride
[5] Curved
[6] Von-Karman

انصاری و همکاران (۲۰۱۵): اخیراً ارتعاشات و ناپایداری دینامیکی میکرو پوسته‌ی استوانه‌ای منتقل کننده سیال که توسط انصاری و همکاران مورد مطالعه قرار گرفت. (FGM) از مواد هوشمند ساخته شده‌اند آن‌ها از تئوری کوپل ـ استرس اصلاح شده و تئوری پوسته تغییر شکل برشی مرتبه اول استفاده کردند.

بیری لوییین[1](۱۸۸۵): بررسی یک لوله خود تحریک‌شونده حاوی جریان سیال پرداخت معادلات حاکم بر مساله را به صورت تئوری بدست آورد. او به صورت عملی وتئوری در زمینه ارتعاش یک تیر یک سر گیردار کار کرد.

اشلی[2] و هاویلند [3](۱۹۵۰): به مطالعه تأثیر سیال داخلی بر ارتعاشات لوله پرداختند [۲۴].

بلیونس[4] (۱۹۵۰):از شتاب کریولیس برای مدل کردن سیال داخل لوله استفاده کرد.

لانگ (۱۹۵۵): روی تیر یک سر گیردار کار کرد اما ناپایداری آن را نتوانست ببیند زیرا روش که استفاده می‌کرد برای سرعت‌های پایین سیال مناسب بود [۲۵].

بنجامین (۱۹۶۱): برای اولین بار تحقیقات فراگیری بر روی ارتعاشات لوله‌ها انجام داد. بنجامین تابع لاگرانژ را به صورت کامل و صحیح تعیین و معادلات حرکت را برای تیرهای کامل بدست آورد و با نتایج تجربی مقایسه کرد [۲۶].

گری گوری و پایدوسیس در سال (۱۹۶۳): به موضوع لوله‌های یک سر گیردار علاقه مندشدند و اولین افرادی بودندکه سرعت بحرانی را با روش‌های تقریبی و دقیق بدست آوردند که با نتایج عملی تطابق داشت.تفاوتی در نتایج تیر با تئوری اویلرـ برنولی نیست او در عوض پرش‌هایی در سرعت بحرانی نسبت وزنی مشخص مشاهده کرد و همچنین نشان داد که تعداد این پرش‌ها به ترم‌های در نظر گرفته شده درتقریب بستگی دارد. به گفته الیشا کوف از یک معادله حرکت دیفرانسیل خطی است که برای هر پارامتر جرمی بدون بعد β (جرم سیال به جرم کل) تنها یک سرعت بحرانی بدست آید.

---
[1] Brillouin
[2] Ashley
[3] Haviland
[4] BLEVINS

سملر[1] و پایدوسیس (۱۹۹۴): معادلات حرکت غیرخطی لوله‌های حاوی جریان سیال را بدست اوردند. آن‌ها از تئوری اویلر برنولی و تئوری جابه‌جایی‌های بزرگ استفاده کردند. با استفاده از کرنش‌های غیرخطی وون کارمن[2] معادلات حرکت عرضی و محوری به واسطه جمله‌های غیرخطی به هم وابسته می‌شوند. اگر لوله به میزان کافی باریک درنظر گرفته شود می‌توان آن را تیر درنظر گرفت[۲۷].

ردی و وانگ باهر (۲۰۰۳): دینامیک تیرهای حاوی جریان سیال دو تئوری تیراویلر برنولی و تیموشنکو مورد بررسی قرار گرفته است. معادلات مورد استفاده در آن مقاله مشابه معادلات دیگر مقالات است و برای حالت‌های کرنش‌های کوچک و پیچش متوسط به کار می‌رود. صادقی و کریمی بر روی رفتار ارتعاشاتی تیرهای حاوی جریان سیال، تحت اثر جرم متحرک، و واقع بر تکیه‌گاه فنری را بررسی کرده‌اند [۲۸] .

پیووان[3] و سامپویا[4] (۲۰۰۶): رفتار دینامیکی تیر چرخان که از مواد تقویت شده تدریجی ساخته شده است را مطالعه کردند و تأثیر تقویت کردن تدریجی را با استفاده از روش اجزامحدود بر روی میرایی و سختی تیر چرخان نشان دادند[۲۹].

یانگ[5] و پورتچای[6](۲۰۰۶): ارتعاشات آزاد غیرخطی تیر نانوکامپوزیت تقویت شده به صورت تدریجی با نانو لوله‌های تک لایه را با استفاده از تئوری تیر تیموشنکو و هندسه غیرخطی وون کارمن مورد بررسی قرار دادند. که خواص در جهت ضخامت تقویت شده به صورت تدریجی با نانولوله-های کربنی درنظر گرفته شد. آن‌ها از پارامتر بازده نانولوله‌های کربنی برای توزیع انتقال نیرو بین نانوتیوب و فاز پلیمری استفاده کردند[۳۰].

یاس و حشمتی (۲۰۰۷): خواص ارتعاشاتی تیر نانوکامپوزیتی تقویت شده به صورت تدریجی با نانولوله‌های کربنی تک‌لایه در جهت دلخواه تحت اثر نیروی متحرک را بررسی کرده-اند. انها از روش اشلبی ـ موری ـ

[1] Semler
[2] von-K´arm´an nonlinear strains
[3] Piovan
[4]Sampoia
[5] Yang
[6] Kitipornchai

تاناکا بر پایه فیبر معادل برای پیش بینی خواص تیر و همچنین روش اجزامحدود برای گسسته‌سازی مدل و حل مساله استفاده کرده‌اند[۳۱].

سبحانی‌عراق و همکارانش (۲۰۰۸): رفتار ارتعاشاتی یک صفحه استوانه‌ای تقویت شده یه صورت تدریجی با نانولوله‌های کربنی[1] را با استفاده از روش موری ـ تاناکا بررسی کرده است[۳۲].

چاترجی و پوهیت (۲۰۰۹): مدلی جامع از میکروتیر یکسر گیردار را با عوامل غیرخطی ناشی از نیروی الکتریکی، هندسی وجملات اینرسی ارائه کردند. مطالعات آنها نشان داد که گرچه نیروی الکتروستاتیک موجب خصوصیات نرم‌شوندگی می‌شود، اما عوامل هندسی غیرخطی موجب اثرسفت‌شوندگی بر میکروسازه می‌شوند. عوامل هندسی غیرخطی در نزدیکی وضعیت کششی، اثر قابل توجهی بر مشخصه‌های پاسخ سیستم در نسبت فاصله به طول بالای ۰/۳ دارد[۳۳].

مجاهدی و همکاران (۲۰۱۰) ناپایداری کشیدگی استاتیکی را در میکروتیرهای دو سرگیردار و یکسرگیردار را بررسی نمودند. از روش گالرکین برای تبدیل به معادلات جبری استفاده شد وسپس حل تحلیلی با استفاده از روش هوموتوپی بدست آمد. عوامل درنظرگرفته شده در استخراج معادله، کشدگی صفحه میانی وبارگذاری محوری بوده است. مقایسه نتایج تحلیلی با نتایج عددی نشان می‌دهد که روش هوموتوپی می‌تواند ناپایداری کشیدگی راحتی در حضور کشیدگی صفحه میانی به درستی پیش بینی نماید. [۳۴].

مستروم و همکاران (۲۰۱۰):از روش ترکیبی عددی و تحلیلی و آزمایشگاهی، دینامیک غیرخطی میکروتیر رزوناتور را بررسی نمودند. این مدل شامل عوامل غیرخطی هندسی، الکتروستاتیکی به همراه میرایی ترموالاستیک بوده است. نتایج شبیه سازی وآزمایشگاهی، هردو بستگی به پارامترهای تحریک داشته ونشان از رفتار دینامیکی سخت ونرم شوندگی دارند. نتایج شبیه سازی، تطابق خوبی با نتایج آزمایشگاهی دارد و تمام معادلات به پارامترهای فیزیکی مرتبط هستند. [۳۵].

---

[1] Eshelby-Mori-Tanaka

کای و همکاران (۲۰۱۳): روش ترکیب شده‌ای از المان محدود را برای حل مساله پس‌کمانش تیر هایپرالاستیک با خیز بزرگ استفاده نمودند. آن‌ها با استفاده از توابع شکل مستقل برای خیز و میدان تنش، تابع انرژی را به‌طور صریح برای فضای بعد محدود ارائه کردند. نتایج عددی آنها نشان داد که حل ناپایدارپس ـ کمانش شدیداً به تعداد مش‌ها وباهای خارجی حساس می‌باشد. [۳۶].

انصاری و همکاران (۲۰۱۳):رفتار پس‌کمانشی نانوتیر را با در نظرگرفتن اثر سطحی بررسی کردند. آن‌ها با تئوری گورتین-موردوچ اثر تنش سطحی را وارد تئوری کلاسیک اویلر-برنولی نمودند. آنهاازاصل کار مجازی برای استخراج معادلات استفاده نمودند. پس ازگسسته سازی معادلات توسط GDQ[1] از روش عددی نیوتن برای حل استفاده شد به طوری که پاسخ خطی به عنوان مقدار اولیه قرار داده شد. آنهانشان دادند که در اثر سطحی باتوجه به علامت و مقدار ثوابت الاستیک سطحی می‌تواند موجب نرم‌تر یاسخت تر شدن نانوتیر شود همچنین ثابت شد که برای مود اول، افزایش ضخامت منجر به سختی بیشتر نانوتیر در همه شرایط مرزی می‌شود، البته در مود دوم وسوم، این امر بستگی به شرایط تکیه گاهی دارد. درتمامی مودها وشرایط مرزی، افزایش ضخامت منجربه کاهش نقش اثر تنش سطحی بر رفتار کمانشی نانوتیر می‌شود. [۳۷].

گاونکار و همکاران (۲۰۱۳): قابلیت کاربرد یک روش کاهش مرتبه را برای شبیه‌سازی دینامیکی تیرها با عوامل غیرخطی نیرو و هندسی مورد بررسی قرار دادند. تیرهای یکسرگیردار و دوسرگیردار در این کار مورد نظر بوده‌اند. معادلات حاکم برآن‌ها باروش گالرکین گسسته سازی شده‌اند. نتیجه شبیه سازی نشان داد که استفاده از این روش منجر به بروز خطای فاز در مدل‌های ناشی از شبیه سازی دینامیکی بلند مدت می‌شود. برای بهبود پاسخ دینامیکی، اصلاح روش براساس مینیمم سازی مانده در نقطه خطی سازی ارائه شد. این روش بامدل المان محدود غیرخطی مقایسه شد ونشان از کارآیی آن داشت. مزیت این روش به خصوص در مسائل با عوامل غیرخطی هندسی والکترواستاتیک بیشتر جلوه می‌کند. [۳۸].

[1] Generalized differential quadrature

پنگ و همکاران (۲۰۱۴): تحلیل دینامیک غیرخطی میکروعملگر ساخته شده از ماده غیرخطی را بررسی نمودند. استخراج معادلات بر اساس تئوری اویلر-برنولی و اثر غیر خطی کشیدگی صفحه میانی و عامل غیرخطی از ماده انجام شد. ازنتایج عددی نشان داده می‌شود که رابطه سازگاری خطی، صرفا برای تغییرشکل کوچک یاولتاژ پایین معتبراست. درمیکروتیر بافاصله شکاف کوچک، طول زیاد و ولتاژ اعمالی بالا، رابطه سازگاری خطی، سختی تیروفرکانس طبیعی آن رابیش ازحد تخمین زده درحالی که خیز تیرراکمتر تخمین می زند. لذا در این موارد باید ازمعادلات سازگاری غیرخطی برای تحلیل صحیح استفاده شود. [۳۹].

مارکمن و ویرون (۲۰۰۵): بیست مدل هایپرالاستیک را برای مواد لاستیکی مورد مقایسه قرار دادند. توانایی این مدل‌ها در انواع مختلف بارگذاری‌ها و در قالب دو مجموعه کار آزمایشگاهی مورد بررسی قرار گرفت. پارامترهای ماده ومحدوده اعتبار هر مدل با یک فرآیند تطبیق تعیین شد. آن‌ها به این نتیجه رسیدند که مدل‌های با دو یا سه پارامتر نمی‌توانند تمامی محدودیت‌های کرنش را پیش بینی کنند. ناتوانی مدل‌ها زمانی آشکار می‌شود که در صورت تعیین پارامترهای آنها باتست تک محوره [1]دیگر قادر به پیش بینی پاسخ دو محوره[2] مواد لاستیکی نیستند. همچنین نشان دادند که برای کرنش‌های متوسط درحد دویست تادویست وپنجاه درصد مدل قدیمی مونی[3] با دو پارامتر کفایت می‌کند. برای کرنش‌های کوچک نیز مدل نئو ـ هوکین پیشنهاد شده است. [۴۰].

مارتینز و همکاران (۲۰۰۶):مطالعه‌ای مبنی بر مقایسه بین مدل‌های مختلف برای پیش‌بینی خصوصیات مواد هایپرالاستیک انجام دادند که در لاستیک‌های سیلیکونی و بافت‌های نرم کاربرد داشته است. محققین در این مقاله از روش محاسباتی/تجربی برای مطالعه رفتار دینامیکی بافت نرم بیولوژیکی تحت کشش تک محوره استفاده نموده و برای تطبیق بر داده‌های آزمایشگاهی برای اولین بار مدل مارتین[4] را ارائه نمودند. آن‌ها برای

[1] uniaxail
[2] biaxial
[3] Mooney
[4] Martin

یافتن مقادیر بهینه در هر پارامتر از الگوریتم لونبرگ ـ مارکوارت[1] بهره بردند. این فرآیند برای نمونه لاستیک سیلیکونی نیز با تست کشش تک محوربه کار برده شد. برخی نتایج حاصل شده از کار جامع آنهابه قرار زیر است: (۱): از بین هفت مدل ماده استفاده شده، شش مدل تطابق خوبی را بین داده‌های آزمایشگاهی و تئوریک بیان نمودند. (۲): بهترین نتایج برای مدل‌های آگدن[2]، یئو [3]و مارتین بوده است. (۳): بدترین نتیجه مربوط به مدل نئو ـ هوکین بوده که در هر دو ماده قابلیت بیان ویژگی های غیرخطی را ندارد. [۴۱].

سوارز و گونکالویز(۲۰۱۴):ارتعاش خطی و غیرخطی و پایداری غشاء مستطیلی هایپرالاستیکی با کشیدگی اولیه را تحت فشار جانبی هارمونیک وتغییرشکل اولیه محدود بررسی نمودند. آن‌ها ماده را از نوع ایزوتروپیک، همگن, و غی قابل فشردگی واز نوع مونی ـ ریولین انتخاب نمودند. نتایج را برای حالت خاص نئو ـ هوکین بدست آورده و با مدل اصلی مقایسه نمودند. آن‌ها پس ازاستخراج معادله، فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای غشاء را به صورت تحلیلی برای هر دو نوع ماده بدست آوردند. جزئیات تحلیل پارامتریک نشان ازتاثیر نسبت کشیدگی و پارامترهای ماده بر نوسان خطی و غیرخطی ماده دارد. [۴۲].

دانایی بارفروش و کرمی محمدی(۲۰۱۲): به مطالعه مدل یئو و نئو- هوکین در میکروتیرهای رزوناتوری در دی الکتریک پرداخته‌اند و همچنین تأثیر پارامترهای مختلف بر روی فرکانس غیرخطی میکروتیر هایپرالاستیک را مورد بررسی قرار داده‌اند. [۴۳-۴۵]

دانایی بارفروش و کرمی محمدی(۲۰۱۲): ارتعاش آزاد غیرخطی نانوتیر هایپرالاستیک با در نظر گرفتن اثرات سطح پرداخته‌اند.

دانایی بارفروش و کرمی محمدی(۲۰۱۷): ارتعاشات اجباری غیرخطی دی الکتریک الاستومر بر اساس میکروتیر هایپرالاستیک باتوجه به مدل یئو مورد تجزیه و تحلیل قرار دادند. شرایط غیرخطی ناشی از جنس

---

[1]Levenberg-Marquardt
[2] Ogden
[3] Yeoh

تیر و هندسه آن است. هندسه غیرخطی از طریق روابط جابجایی کرنش فون-کارمن و ماده غیرخطی از طریق روابط یئو مدل سازی شده است. [۴۶]

فصل ۳: مدل سازی و استخراج معادله

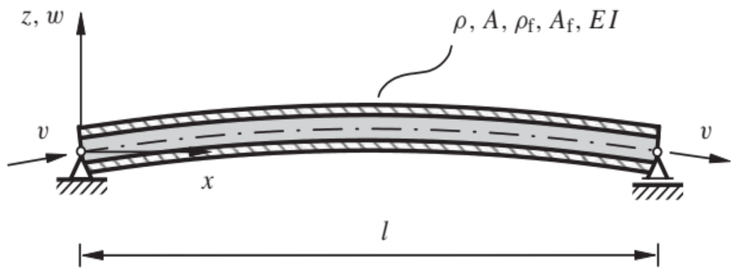
۳ ـ ۱- مقدمه

دراین فصل ارتعاش آزاد میکرولوله ازمدل یئووتئوری اویلربرنولی استفاده می‌شودو شرط مرزی ساده برای مدل یئو بررسی خواهد شد.

۳-۲- مدل سازی میکرولوله

در مدل‌سازی میکرولوله از مدل میکروتیر استفاده می‌شود که به آن اثر سیال به آن اضافه می‌شود. جنس میکرولوله از ماده هایپرالاستیک که رفتارایده آل الاستیکی رادارا می باشدرا مدنظرقرارمی دهیم. شرایط مرزی مفصلی را برای این مساله مورداستفاده می‌نماییم.

شماتیک میکرولوله ازجنس ماده هایپرالاستیک حاوی جریان سیال در شکل (۳-۱) ارائه شده است:



شکل(۳-۱): شماتیک میکرولوله حاوی جریان سیال

که سیال با سرعت v وارد میکرولوله می‌شود. دو سر میکرولوله به صورت پین – پین در نظر گرفته می‌شود. طول میکرولوله l، چگالی آن ρ، مساحت سطح در مقطع میکرولوله A، جرم میکرولوله m، مساحت سطح مقطع سیال A_f چگالی سیال ρ_f، جرم سیال M، ضریب سختی میکرولوله EI رادرنظر می گیریم ازآنجاکه ماده مدنظر برای میکرولوله ازجنس هایپرالاستیک می‌باشد به تبع آن ازقوانین سازگازی هایپرالاستیک پیروی می‌کند. فرضیات زیر درمدل‌سازی به کارگرفته می‌شود:

(۱): ماده دارای خاصیت تراکم ناپذیراست.

(۲): تغییرشکل دارای اثرات تغییرکرنش نیست.

(۳): تولیدحرارت داخلی قابل صرف نظر است.

(۴): رفتارمکانیکی ماده کاملاالستیک است.

(۵): رفتارمیکرولوله تحت تاثیرعامل غیرخطی هندسی است یعنی خیزنسبتابزرگ می‌باشد.

۳-۳ - اصل هامیلتون

برای استخراج معادله، ازاصل هامیلتون استفاده می‌شود. اصل هامیلتون بیان می‌کند که ازتمامی حالت‌های جابه جایی وابسته به زمان که معادلات سازگاری، قیود و نیزشرایط مرزی در زمان‌های ابتدایی و انتهایی را ارضا می‌کند، پاسخی حقیقی است که تابع لاگرانژ را کمینه می‌کند. بنابراین اصل هامیلتون به شکل کلی زیربیان می‌شود:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \qquad (۱-۳)$$

L در اصل هامیلتون بارابطه زیر بیان می‌شود:

$$L=T-U+W \qquad (۲-۳)$$

T دراین رابطه انرژی جنبشی،U انرژی کرنشی و W کارنیروهای غیرپتانسیلی اعمالی به سیستم است.

این سه پارامتردرادامه محاسبه ودرنهایت دراصل همیلتون جایگذاری می‌شودتا معادله حاکم استخراج گردد.

بررسی رفتار ارتعاشی میکرولوله دربخش ارتعاشات آزادباشرایط مرزی ساده مورد انجام خواهد شد.

۳-۴- ارتعاش آزاد میکرولوله با شرط مرزی دوسرمفصل، تئوری اویلربرنولی و مدل چند جمله‌ای هایپرالاستیک یئو

با توجه به میکرولوله مورد نظر برای مدل‌سازی که به صورت میکروتیرمی باشد، ازمدل اویلر ـ برنولی برای این میکرولوله استفاده شده که در اینجا به مقدمات کوتاهی از این تئوری اشاره می‌شود. میکرولوله مذکور یکنواخت، همگن ومستقیم در راستای x بوده وسطوح بالا وپایین عمود برمحور z می‌باشد.

فرضیات مورد اعمال در این تئوری به شرح زیر می‌باشد.

۱. ابعاد صفحه میانی قبل و بعد از تغیر شکل یکسان است. (جابجایی درون صفحه ایی نداریم).

۲. اینرسی دورانی در قسمت انرژی جنبشی در نظرگرفته نمی‌شود.

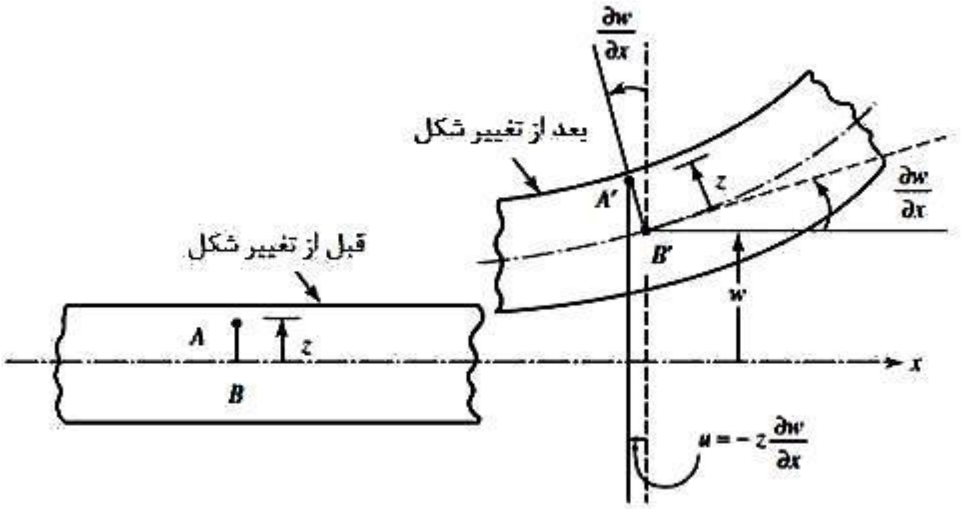
۳. از ترمهای غیرخطی در میدان کرنش صرفنظرنمی شود.

بادرنظر گرفتن این فرض‌ها، اگرجابه جایی عرضی میکرولوله برابر w باشد، آنگاه مؤلفه‌های جابه جایی در هر نقطه از سطح مقطع برابر خواهد بود با:

$$u = -z\frac{\partial w(x،t)}{\partial x}$$
$$v = 0 \qquad (۳-۳)$$
$$w = w(x،t)$$

که در آن w و u ,v به ترتیب مؤلفه‌های جابه جایی در راستای x، y و Z می‌باشند[۴۷].

پس از اعمال تعریف کرنش لاگرانژی در خیز بزرگ برای هر مؤلفه از تانسور کرنش و صرف نظر از جملات کوچک ونیزجابجایی طولی، درنهایت مؤلفه‌های کرنش رانتیجه می‌دهد:



شکل (۳-۲): تیر اویلر برنولی تحت خمش [۴۷]

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u_3}{\partial x}\right)^2\right]=-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \qquad (٤-۳)$$

$$\varepsilon_{yy}=\frac{\partial u_2}{\partial y}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u_3}{\partial y}\right)^2\right]=0 \qquad (۵-۳)$$

$$2\varepsilon_{xy}=\frac{\partial u_1}{\partial y}+\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial u_1}{\partial y}+\frac{\partial u_2}{\partial x}\frac{\partial u_2}{\partial y}+\frac{\partial u_3}{\partial x}\frac{\partial u_3}{\partial y}=0 \qquad (۶-۳)$$

که مؤلفه باقیمانده همان مؤلفه محوری فون کارمن است.

ازآنجاکه می‌توان ثوابت کرنش را براساس ثوابت کشیدگی بیان نمود وخود ثوابت کشیدگی ازتانسور کوشی ـ گرین راست بدست می‌آیند، تانسور کرنش لاگرانژی و به دنبال آن تانسورکوشی ـ گرین راست را می‌توان یافت.

تانسور کرنش لاگرانژی با محاسبات ارائه شده برابر است:

$$E=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2\varepsilon_{xx} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad (۷-۳)$$

تانسور کوشی - گرین راست نیز با تعریف قسمت پیشین برابر رابطه (۸-۳) است.

$$C=2E+I=\begin{bmatrix}2\varepsilon_{xx}+1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad (۸-۳)$$

ریشه مربعی مقادیر ویژه تانسور چپ یا راست کوشی – گرین می‌باشند.ازطرفی ثوابت کشیدگی λ_i بنابراین توسط تانسور راست کوشی – گرین تعریف شده در معادله (۳-۸) و یافتن ریشه مربعی مقادیر برابر خواهد بود با :

$$\lambda_1 = 1\lambda_2 = 1\lambda_3 = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{xx}} \qquad (۳ - ۹)$$

ثوابت کرنش عبارتند از:

$$I_1 = 2\varepsilon_{xx} + 3 \qquad (۳ - ۱۰)$$

$$I_2 = 4\varepsilon_{xx} + 3 \qquad (۳ - ۱۱)$$

ازآنجا که ماده مورد نظر در مدل، غیر قابل فشرده در نظر گرفته می‌شود و با در نظر گرفتن رابطه واینکه طبق مطالب ارائه شده در فصل اول باید برای ثابت ماندن$I_3 = \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2 = J^2 = det(C)$ باشد بنابرین چگالی انرژی کرنشی در مواد هایپرالاستیسیته صرفاً بر اساس دو ثابت کرنش حجم J= 1 اولیه بیان می‌گردد.

۳-۵ - استخراج معادله حاکم بر مدل یئو

برای استخراج معادله تحت تئوری اویلربرنولی و مدل یئو، انرژی‌های جنبشی وکرنش به ترتیب زیر دراصل همیلتون جایگزین می‌شود.

$$T = T_p + T_f = \frac{1}{2}\iiint_v \ \rho_p \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dV + \frac{1}{2}\iiint_{v_f} \qquad (۳-۱۲)$$

$$\rho_f \left[\left(\frac{\partial w}{\partial t} + V\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + V^2\right] dV_f$$

T_p:انرژی جنبشی میکرو لوله

T_f:انرژی جنبشی سیال که با لوله حرکت می‌کند

بطوری که:

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} \qquad (۳-۱۳)$$

با اعمال عملگر تغییرات خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
\delta\int_{t_1}^{t_2} T\,dt &= \delta\int_{t_1}^{t_2} T_p\,dt + \delta\int_{t_1}^{t_2} T_f\,dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2}\int_0^l m_p \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial \delta w}{\partial t}\,dx\,dt \\
&+ \int_{t_1}^{t_2}\int_0^l m_f\left[\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial \delta w}{\partial t} + V^2\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \delta w}{\partial x} + V\left(\frac{\partial \delta w}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial \delta w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial t}\right)\right]dx\,dt \\
&= -\int_{t_1}^{t_2}\int_0^l m_p\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\delta w\,dx\,dt - \int_{t_1}^{t_2}\int_0^l m_f\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\delta w\,dx\,dt \\
&+ \int_{t_1}^{t_2}\left[-\int_0^L\left(\frac{\partial\left(m_f V^2\frac{\partial w}{\partial x}\right)}{\partial x}\delta w\right)dx + \left(m_f V^2\frac{\partial w}{\partial x}\right)\delta w\Big|_0^L\right]dt \\
&+ \int_{t_1}^{t_2}\left[-\int_0^L\left(\frac{\partial\left(m_f V\frac{\partial w}{\partial x}\right)}{\partial t}\delta w + \frac{\partial\left(m_f V\frac{\partial w}{\partial t}\right)}{\partial x}\delta w\right)dx \right.\\
&\left. + \left(m_f V\frac{\partial w}{\partial t}\right)\delta w\Big|_0^L\right]dt
\end{aligned}
\tag{۱۴-۳}
$$

بطوری که:

$$m_p = \int_A \rho_p\,dA_p = \rho_p A_p\,,\; m_f = \int_{A_f}\rho_f\,dA_f = \rho_f A_f \tag{۱۵-۳}$$

چگالی انرژی کرنشی مدل یئو معادل است با:

$$u = c_1(I_1-3) + c_2(I_1-3)^2 + c_3(I_1-3)^3 \tag{۱۶-۳}$$

به طوری که:

$$I_1 = 2\varepsilon_{xx} + 3 = 2\left(-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right) + 3 = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + 3 \tag{۱۷-۳}$$

بنابراین چگالی انرژی کرنشی را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$u = c_1\left(-2z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right) + c_2\left(-2z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)^2 + c_3\left(-2z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)^3 \tag{۱۸-۳}$$

بنابراین انرژی کرنشی را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$U=\int_0^L\iint_A udA_pdx \tag{۱۹-۳}$$

$$=\int_0^L\iint_{A_p}\left(c_1\left(-2z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)+c_2\left(-2z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)^2+c_3\left(-2z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)^3\right)dA_pdx$$

$$=\int_0^L\iint_A\left(c_1\left(-2z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)+c_2\left(4z^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^4-4z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)\right.$$

$$\left.+c_3\left(-8z^3\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^3-6z\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^4\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+12z^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^6\right)\right)dA_pdx$$

می دانیم:

$$A_p=\iint_A dA_p \text{ ،} I_p=\iint_A z^2dA_p \tag{۲۰-۳}$$

$$\iint_A z\,dA_p=0\text{ ،}\iint_A z^3\,dA_p=0$$

انرژی کرنشی که انتگرال حجمی چگالی انرژی کرنشی است رابطه زیر راخواهدداشت:

$$U=\int_0^L\left(c_1A\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+c_2\left(4I\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+c_2A\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^4\right)\right.$$

$$\left.+c_3\left(12I\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+A\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^6\right)\right)dx \tag{۲۱-۳}$$

$$U=\int_0^L\left(c_1A_p\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+c_2\left(4I_p\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+A_p\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^4\right)+c_3\left(12I_p\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+A_p\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^6\right)\right)dx$$

با اعمال عملگر تغییرات خواهیم داشت:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}U\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L\left(2c_1A_p\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial\delta w}{\partial x}+c_2\left(8I_p\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2\delta w}{\partial x^2}+4A_p\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^3\frac{\partial\delta w}{\partial x}\right)\right. \tag{۲۲-۳}$$

$$\left.+c_3\left(24I_p\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2\delta w}{\partial x^2}+24I_p\frac{\partial w}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2\frac{\partial\delta w}{\partial x}+6A_p\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^5\frac{\partial\delta w}{\partial x}\right)\right)dx\,dt$$

و با استفاده از انتگرال گیری جز به جز خواهیم داشت:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} U\,dt = \int_{t_1}^{t_2}\left[\int_0^L\left(-2c_1A_p\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 8c_2I_p\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - 12c_2A_p\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 24c_3I_p\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)\right.\right.$$
$$- 24c_3I_p\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2\right) \left. - 30c_3A_p\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^4\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\delta w\,dx \qquad (۲۳-۳)$$
$$+\left(2c_1A_p\frac{\partial w}{\partial x} - 8c_2I_p\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 4c_2A_p\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^3 - 24c_3I_p\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)\right.$$
$$\left. + 24c_3I_p\frac{\partial w}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 6c_3A_p\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^5\right)\delta w\Big|_0^L$$
$$\left. + \left(8c_2I_p\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 24c_3I_p\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)\frac{\partial\delta w}{\partial x}\Big|_0^L\right]dt$$

بنابراین:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} U\,dt = \int_{t_1}^{t_2}\left[\int_0^L\left(-2c_1A_p\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 8c_2I_p\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - 12c_2A_p\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right.\right.$$
$$+ 24c_3I_p\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + 6\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial w}{\partial x} + 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^3\right)$$
$$\left. - 24c_3I_p\left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^3 + 2\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial w}{\partial x}\right) - 30c_3A_p\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^4\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\delta w\,dx$$
$$+\left(2c_1A_p\frac{\partial w}{\partial x} - 8c_2I_p\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 4c_2A_p\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^3\right. \qquad (۲۴-۳)$$
$$\left. - 24c_3I_p\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2\frac{\partial w}{\partial x}\right) + 24c_3I_p\frac{\partial w}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 6c_3A_p\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^5\right)\delta w\Big|_0^L$$
$$\left. + \left(8c_2I_p\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 24c_3I_p\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)\frac{\partial\delta w}{\partial x}\Big|_0^L\right]dt$$

معادله حاکم سیستم به صورت زیر استخراج می‌گردد:

$$
\left(m_p+m_f\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{\partial\left(m_f V^2\frac{\partial w}{\partial x}\right)}{\partial x}+2\frac{\partial\left(m_f V\frac{\partial w}{\partial x}\right)}{\partial t}-2c_1A_p\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+8c_2I_p\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}
-12c_2A_p\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+24c_3I_p\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+96c_3I_p\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial w}{\partial x}
+24c_3I_p\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^3-30c_3A_p\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^4\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \qquad (۲۵-۳)
$$

بنابراین:

$$
\left(m_p+m_f\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+m_fV^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2m_fV\frac{\partial w}{\partial t\partial x}-2c_1A_p\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+8c_2I_p\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-12c_2A_p\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}
+24c_3I_p\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+96c_3I_p\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial w}{\partial x}+24c_3I_p\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^3
-30c_3A_p\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^4\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \qquad (۲۶-۳)
$$

بادرنظر گرفتن $m_f=M$ و $m_p=m$ و$A_p=A$ و $I_p=I$ معادله حاکم بصورت زیر خواهد شد :

$$
(m+M)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+MV^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2MV\frac{\partial w}{\partial t\partial x}-2c_1A\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+8c_2I\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-12c_2A\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+
24c_3I\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+96c_3I\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial w}{\partial x}+24c_3I\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^3-30c_3A\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^4\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \qquad (۲۷\text{-}۳)
$$

شرایط مرزی قابل استخراج از روش همیلتون عبارتند از:

$$
\text{at x=0,L}\Bigg(MV^2\frac{\partial w}{\partial x}+MV\frac{\partial w}{\partial t}-2c_1A\frac{\partial w}{\partial x}+8c_2I\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}-4c_2A\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^3+24c_3I\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+
24c_3I\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2\frac{\partial w}{\partial x}-6c_3A\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^5\Bigg)\delta w\Bigg|_0^L=0 \qquad (۲۸\text{-}۳)
$$

$$
\text{at x=0,}L-\left(8c_2I\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+24c_3I\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)\frac{\partial\delta w}{\partial x}\Bigg|_0^L=0 \qquad (۲۹\text{-}۳)
$$

شرایط مرزی بدست آمده، معرف شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده می‌باشند:

$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0)=0$، $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l)=0$، $w\,(l)=0$ و $w\,(l)=0$ (۳۰-۳)

۳-۶ - بی‌بعدسازی و خطی سازی معادله حاکم

ابتدا معادله باتعریف پارامترهای زیر، بی‌بعدسازی می‌شوند:

$$x^* = \frac{x}{L} \text{ و } w^* = \frac{w}{d} \text{ و } t^* = \sqrt{\frac{c_1 I}{(M+m)L^4}}\, t \text{ و } c_{21} = \frac{c_2}{c_1} \text{ و } c_{31} = \frac{c_3}{c_1} \text{ و } c_{32} = \frac{c_3}{c_2} \text{ و } SR = \frac{L}{d} \text{ و } A^* = \frac{Ad^2}{I} \text{ و } v = \sqrt{\frac{M}{c_1 I}}\, LV \text{ و } \beta = \frac{M}{(m+M)} \quad (۳۱\text{-}۳)$$

سپس معادله حاکم را بی‌بعدسازی خواهیم کرد:

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial t^{*2}} + v^2 \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} + 2\sqrt{\beta} v \frac{\partial w^*}{\partial t^* \partial x^*} - 2A^* SR^2 \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} + 8c_{21} \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^{*4}} - 12A^* c_{21} \left(\frac{\partial w^*}{\partial x^*}\right)^2 \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} + 24 \frac{c_{31}}{SR^2} \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^{*4}} \left(\frac{\partial w^*}{\partial x^*}\right)^2 + 96 \frac{c_{31}}{SR^2} \frac{\partial^3 w^*}{\partial x^{*3}} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + 24 \frac{c_{31}}{SR^2} \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}}\right)^3 - 30 \frac{A^* c_{31}}{SR^2} \left(\frac{\partial w^*}{\partial x^*}\right)^4 \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} = 0 \quad (۳۲\text{-}۳)$$

$$\left(\frac{v^2}{A^* SR^2} \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + \frac{\sqrt{\beta} v}{A^* SR^2} \frac{\partial w^*}{\partial t^*} - 2 \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + 8 \frac{c_{21}}{A^* SR^2} \frac{\partial^3 w^*}{\partial x^{*3}} - 4 \frac{c_{21}}{SR^2} \left(\frac{\partial w^*}{\partial x^*}\right)^3 + 24 \frac{c_{31}}{A^* SR^4} \frac{\partial^3 w^*}{\partial x^{*3}} \left(\frac{\partial w^*}{\partial x^*}\right)^2 + 24 \frac{c_{31}}{A^* SR^4} \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}}\right)^2 \frac{\partial w^*}{\partial x^*} - 6 \frac{c_{31}}{SR^4} \left(\frac{\partial w^*}{\partial x^*}\right)^5\right) \delta w^* \Bigg|_0^1 = 0 \quad (۳۳\text{-}۳)$$

$$-\left(8 \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} + 24 \frac{c_{32}}{SR^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} \left(\frac{\partial w^*}{\partial x^*}\right)^2\right) \frac{\partial \delta w^*}{\partial x^*} \Bigg|_0^1 = 0 \quad (۳۴\text{-}۳)$$

فصل ۴: تحلیل خطی

۴-۱- حل معادله خطی و بررسی فرکانس

خطی شده معادله حاکم عبارتست از:

$$(M+m)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+MV^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2MV\frac{\partial w}{\partial t\partial x}-2c_1A\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+8c_2I\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}=0 \qquad (۴-۱)$$

که معادله بی بعدشده قسمت خطی عبارتست از:

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial t^{*2}}+(v^2-2A^*SR^2)\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}}+2\sqrt{\beta}v\frac{\partial w^*}{\partial t^*\partial x^*}+8c_{21}\frac{\partial^4 w^*}{\partial x^{*4}}=0 \qquad (۴-۲)$$

دربخش قبل معادله حاکم بر مساله به صورت معادله دیفرانسیل مشتقات جزئی بدست آمد. برای بررسی ویافتن فرکانس‌های طبیعی سیستم، مساله پیوسته را با استفاده از روش گالرکین گسسته‌سازی نموده ومعادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی حاکم بر مساله با معادلات دیفرانسیل معمولی جایگزین شده ومساله پیوسته، به یک سیستم با درجه آزادی محدود، تبدیل شده و فرکانس‌های طبیعی به سادگی بدست می‌آیند.

۴-۲- گسسته سازی و روش حل

دراین قسمت از روش گالرکین برای گسسته‌سازی وحل معادلات حرکت سیستم که معادلاتی بامشتقات پاره‌ای نسبت به مکان و زمان هستنداستفاده خواهد شد. در روش گالرکین برای تابع مجهول معادله یک حل تقریبی بصورت زیردرنظرگرفته می‌شود:

$$w^*\left(x^*،t^*\right)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x^*)q_i(t^*) \qquad (۴-۳)$$

$\varphi_i(x^*)$ توابع پایه نامیده شده و توابعی مستقل خطی می‌باشند شرایط مرزی معادله را ارضا می‌کند و برای سیستم با شرایط مرزی دو سر لولا به صورت زیر می‌باشد:

$$\varphi_i(x^*) = sin\,(i\pi x^*) \tag{۴-۴}$$

$q_i(t^*)$ نیز بصورت توابع مجهولی فرض می‌شوند که مختصه‌های تعمیم یافته سیستم نامیده می‌شوند. باجایگذاری معادله (۴-۳) درمعادله (۴-۲) و ضرب کردن نتیجه حاصل در $\varphi_i(x^*)$ و انتگرال‌گیری در بازه [۱ و ۰] معادلات دیفرانسیلی زیرحاصل می‌گردد:

$$M\ddot{\bar{q}} + G\dot{\bar{q}} + K\bar{q} = 0 \tag{۵-۴}$$

که در آن:

$$M_{ji} = \int_0^1 \varphi_i \varphi_j dx^* \tag{۶-۴}$$

$$K_{ji} = (v^2 - 2A^*SR^2)\int_0^1 \frac{d^2\varphi_i}{dx^{*2}}\varphi_j dx^* + 8c_{21}\int_0^1 \frac{d^4\varphi_i}{dx^{*4}}\varphi_j dx^* \tag{۷-۴}$$

$$G_{ji} = 2\sqrt{\beta}v\int_0^1 \frac{d\varphi_i}{dx^*}\varphi_j dx^* \tag{۸-۴}$$

برای بررسی سرعت بحرانی و ناپایداری سیستم، مقادیر ویژه مسئله باید حل شود. برای این کارفرض می‌کنیم حل معادله (۴-۵) به صورت زیر است:

$$\varphi_i(x^*) = \bar{\varphi}_i e^{st} \tag{۹-۴}$$

به ترتیب مقادیر ویژه و توابع مجهول دامنه ارتعاش می‌باشند. درنهایت $\overline{\varphi}_i$ و s که در آن باجایگذاری معادله (۴-۷) در معادله (۴-۵) یک معادله همگن که مربوط به مقادیر ویژه تعمیم یافته می‌باشد به دست می‌آید:

$$(s^2[M] + s[G] + [K])\{\overline{\varphi}_i\} = \{0\} \qquad (۱۰-۴)$$

برای حل معادله (۱۰-۴) باید دترمینان ماتریس ضرایب بدست آمده درمعادله صفر گردد، پس داریم:

$$\det\,(s^2[M] + s[G] + [K]) = 0 \qquad (۱۱-۴)$$

با توجه به معادله بالامقادیر ویژه بصورت عددی قابل محاسبه می‌باشد. بنابراین با درنظر گرفتن جدول (۴-۱) فرکانس طبیعی سیستم میکرولوله حامل سیال بدست می‌آیند.

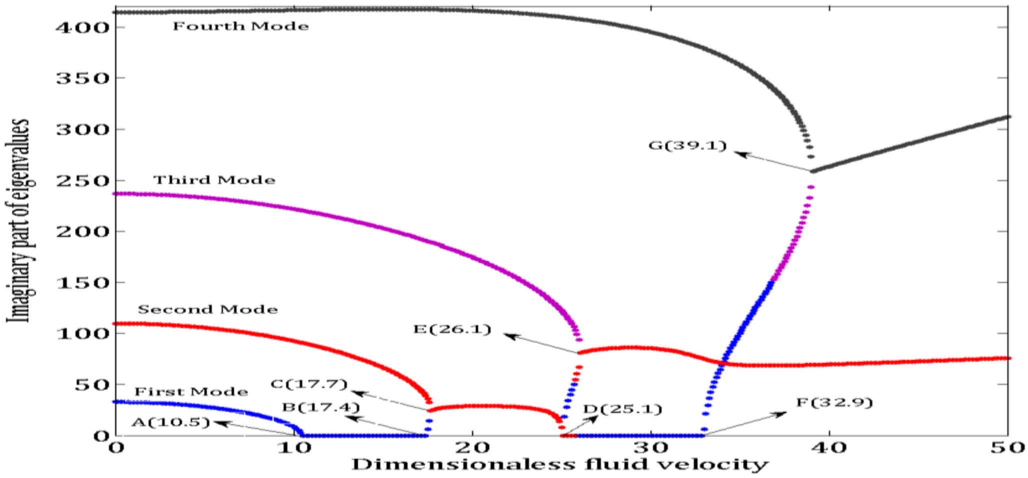
جدول (۴-۱) - پارامترهای هندسی و ماده مدل یئو

مقدار پارامتر

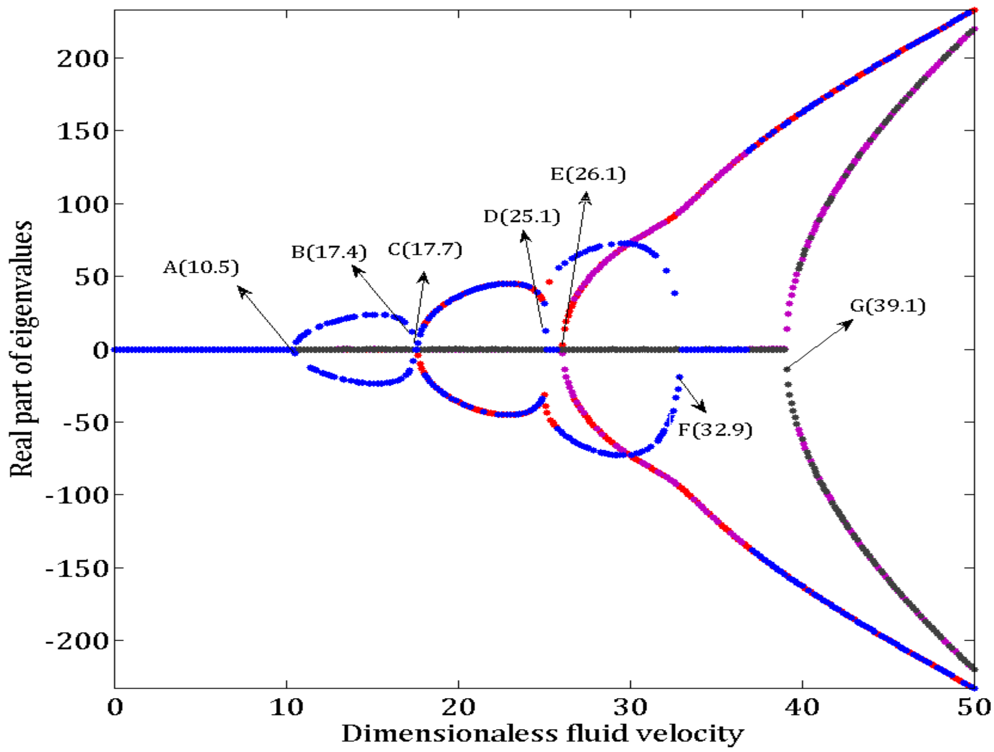
L	30 mm
d_1	16 mm
d_2	20 mm
c_1	0.24162 MPa
c_2	0.19977 MPa

۴-۳- فرکانس‌های طبیعی میکرولوله همگن دوسرمفصل

همانطور که از شکل (۴-۱-ب) مشاهده می‌شود قسمت حقیقی مقادیر ویژه تمامی مدها تا قبل از اولین جداشدگی برابر می‌باشد. همچنین با افزایش سرعت بی‌بعد قسمت موهومی تمامی مدها کاهش می‌یابد. درسرعت۱۰.۴۹۹۱ مقدارفرکانس اول صفر می‌گردد و همزمان با آن، قسمت حقیقی مقادیر ویژه ناگهان از صفر به دو مقدار مساوی و قرینه‌ی هم تبدیل می‌شود. در نتیجه درمیکرولوله دوشاخگی ازنوع کمانش اتفاق می‌افتد. این ناپایداری ادامه پیدا می‌کندتااینکه درسرعت۱۷.۴ مد اول پایداری خود را دوباره بدست می‌آورد و فرکانس آن از صفر شروع به افزایش می‌کند تا اینکه درسرعت۱۷.۷ با مد دوم ترکیب می‌شود و دوشاخگی اتفاق می‌افتد. این دوشاخگی، با یک دوشاخگی در قسمت حقیقی مقادیرویژه همراه است.بین سرعت-های۱۷.۴تا ۱۷.۷دوشاخگی بین مدهای اول و دوم خواهیم داشت. در سرعت۲۵.۱ قسمت موهومی مد دوم با افزایش سرعت بی‌بعد، افزایش می‌یابد و درسرعت۲۶.۱ با مد سوم تلاقی می‌کند وبا ایجاددوشاخگی درقسمت حقیقی مقادیر ویژه، منجربه ایجاد دوشاخگی بین مدهای دوم و سوم خواهدشد. در سرعت۳۲.۹مد اول پایداراست به طوری که با افزایش سرعت بی‌بعد فرکانس آن افزایش و قسمت حقیقی مقادیر ویژه برا بر صفرمی‌باشد تا اینکه به دوشاخگی مدهای دوم و سوم می‌رسد از آنجا به بعد در مدهای اول و دوم دوشاخگی اتفاق می‌افتد و در مد سوم افزایش فرکانس خواهیم داشت. این افزایش فرکانس تا سرعت۳۹.۱ ادامه خواهد داشت و در این سرعت با مد چهارم تلاقی پیدا می‌کند و منجر به ایجاد دوشاخگی بین مدهای سوم و چهارم خواهد شد.



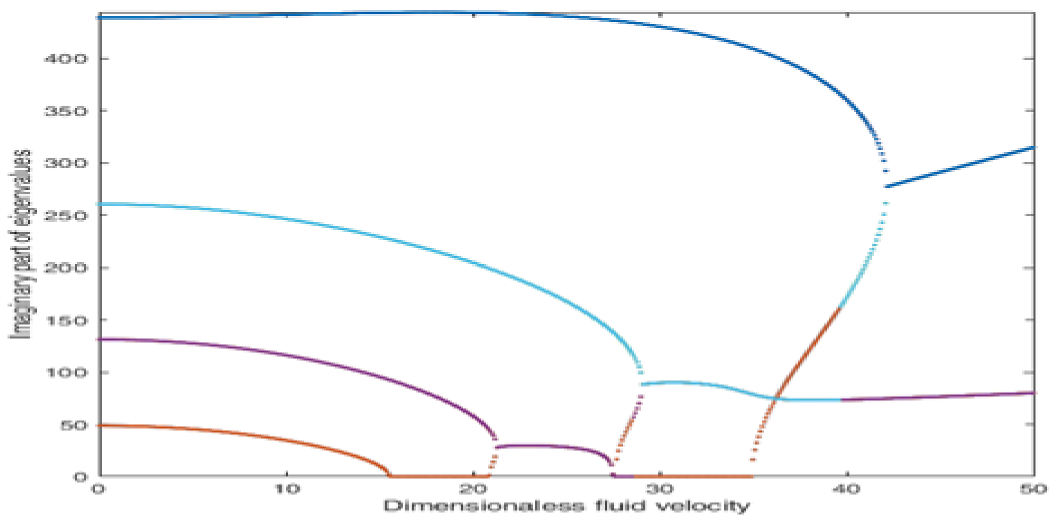
شکل (۴-۱الف) : قسمت موهومی فرکانس‌های اول تاچهارم میکرولوله همگن دوسرمفصل



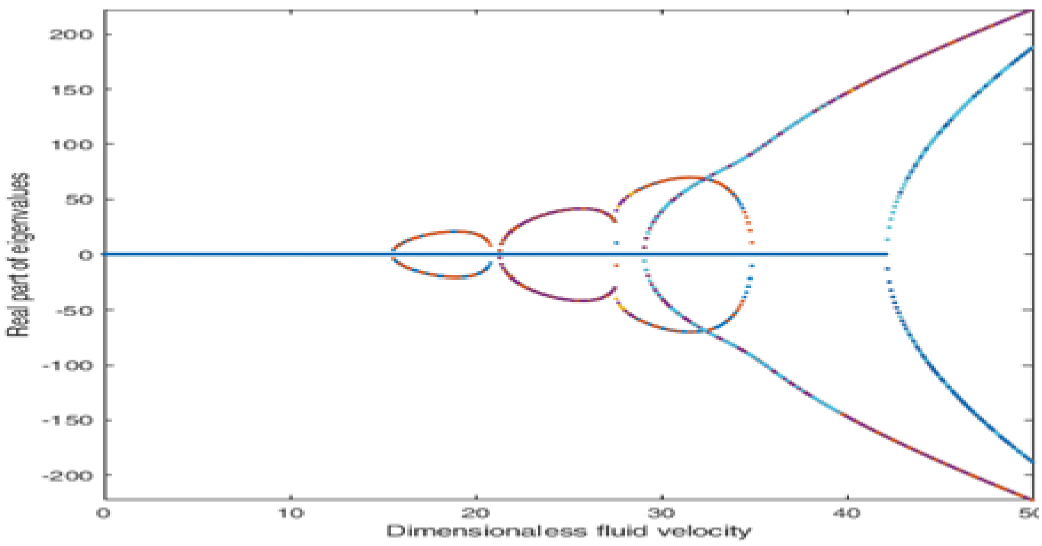
شکل (۴-۱-ب) : قسمت حقیقی فرکانس‌های اول تاچهارم میکرولوله همگن دوسرمفصل

۴-۴- تأثیر تغییرات نسبت طول به ضخامت بر روی فرکانس بی‌بعد اول

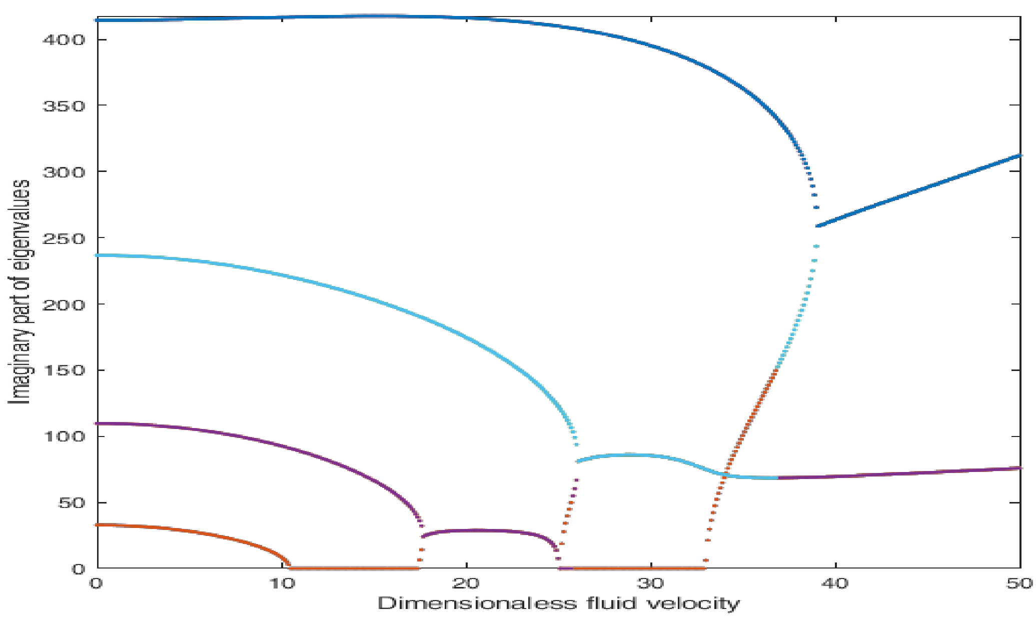
همانطور که از شکل(۴-۲-الف) تا شکل(۴-۴-ب) مشاهده می‌شودکه با افزایش نسبت لاغری فرکانس بی‌بعد کاهش می‌یابد و این امر نشان‌دهنده این است که سختی میکرولوله کاهش می‌یابد و برعکس این قضیه نیزحاکم هست که با کاهش نسبت لاغری فرکانس بی بعد افزایش و سختی میکرولوله نیز افزایش خواهد یافت. قابل ذکر است که سرعت بحرانی به سرعتی گفته می‌شود که در آن میکرولوله حامل سیال با شرایط مرزی دوسر مفصل ناپایداری کمانش معمول‌ترین نوع پایداری می‌باشد، بخاطر اینکه بدلیل کانسرواتیو بودن میکرولوله اتلاف انرژی نادیده گرفته می‌شود.



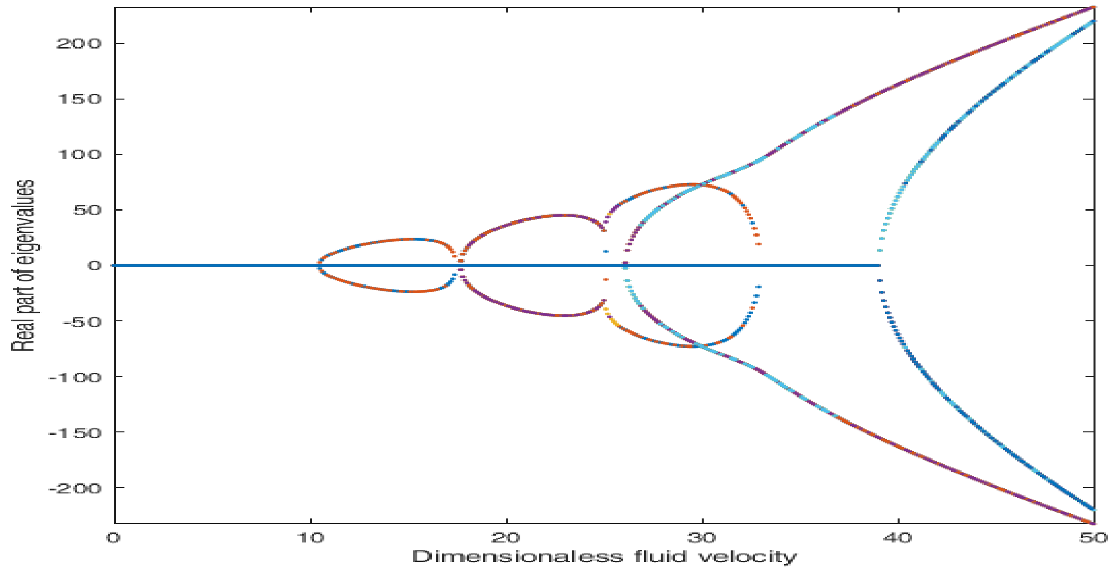
شکل (۴-۲- الف): قسمت موهومی فرکانس بی‌بعداول تاچهارم SR=3.75



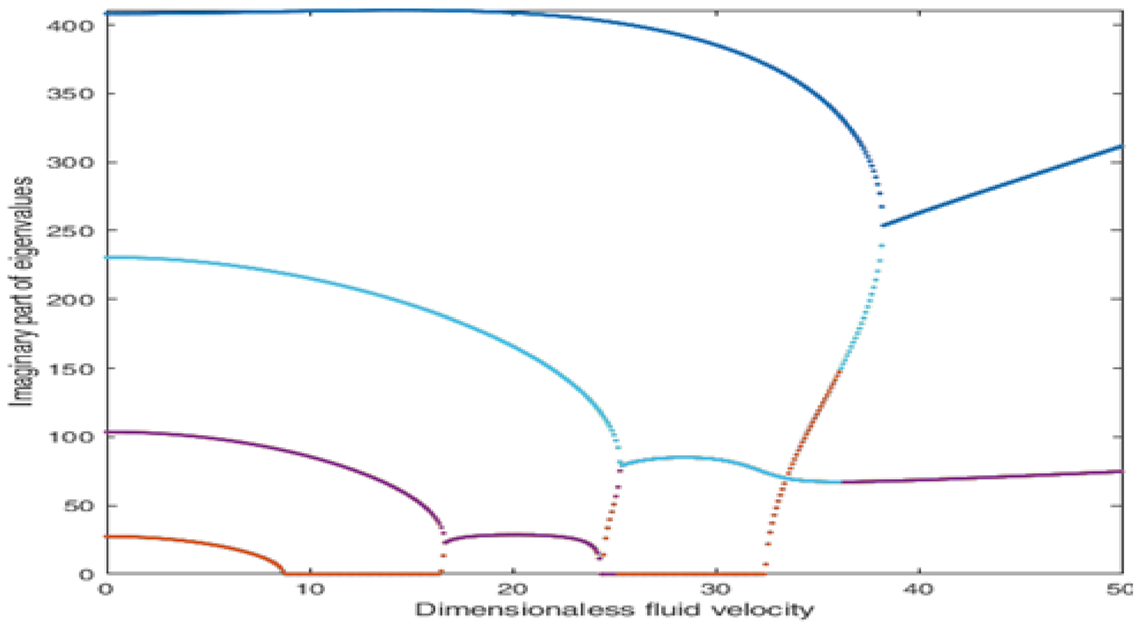
شکل (۴-۲-ب): قسمت حقیقی فرکانس بی‌بعداول تاچهارم SR=3.75



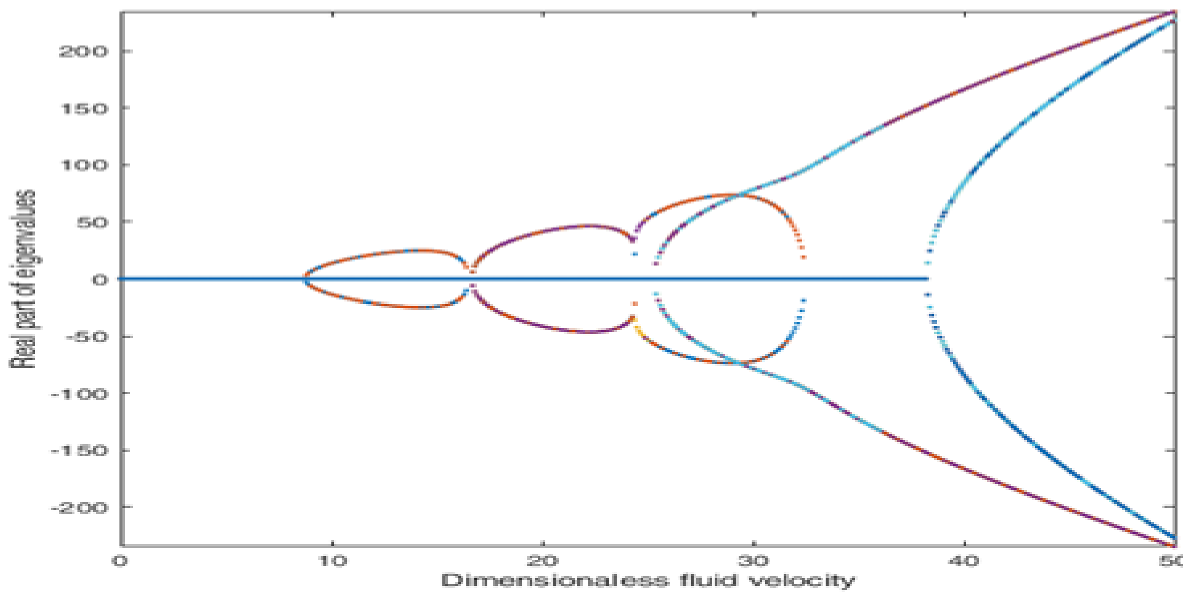
شکل (۴-۳- الف): قسمت موهومی فرکانس بی‌بعداول تاچهارم SR=7.5



شکل (۴-۳- ب): قسمت حقیقی فرکانس بی‌بعداول تاچهارم SR=7.5



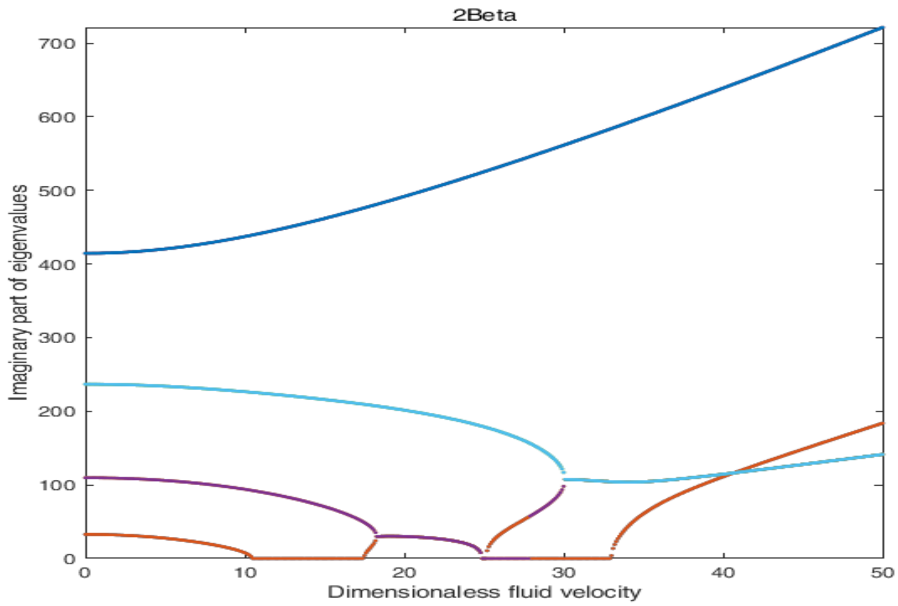
شکل (۴-۴ الف): قسمت موهومی فرکانس بی‌بعداول تاچهارم SR=15



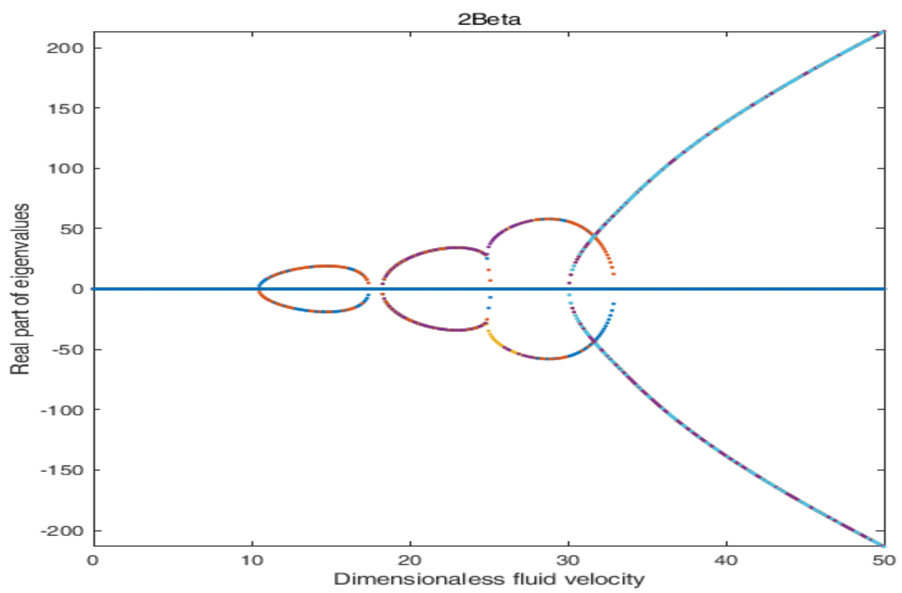
شکل (۴-۴ ب): قسمت حقیقی فرکانس بی‌بعداول تاچهارم SR=15

۴-۵ – تاثیرتغییرات جرم بی‌بعد بر روی فرکانس بی‌بعد اول:

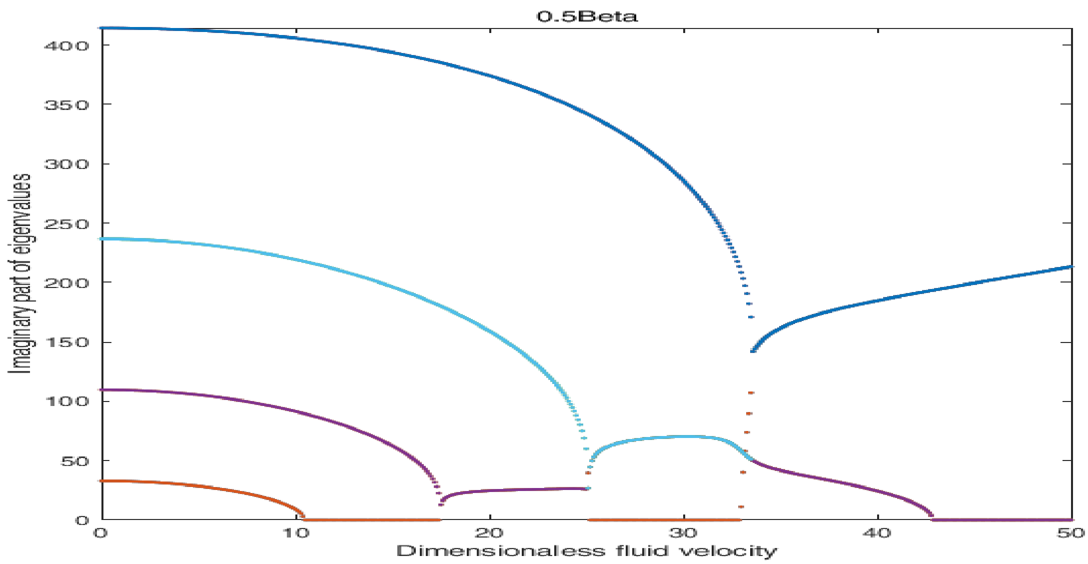
همان‌طور که از شکل (۵-۴) مشاهده می‌شود به ازای مقادیر متفاوت پارامتر بی‌بعد جرمی، سرعت بحرانی سیال تغییری نمی‌کند، بنابراین سرعت بحرانی سیستم در شرایط مرزی دوسر مفصل مستقل از پارامتر بی‌بعد جرمی است.



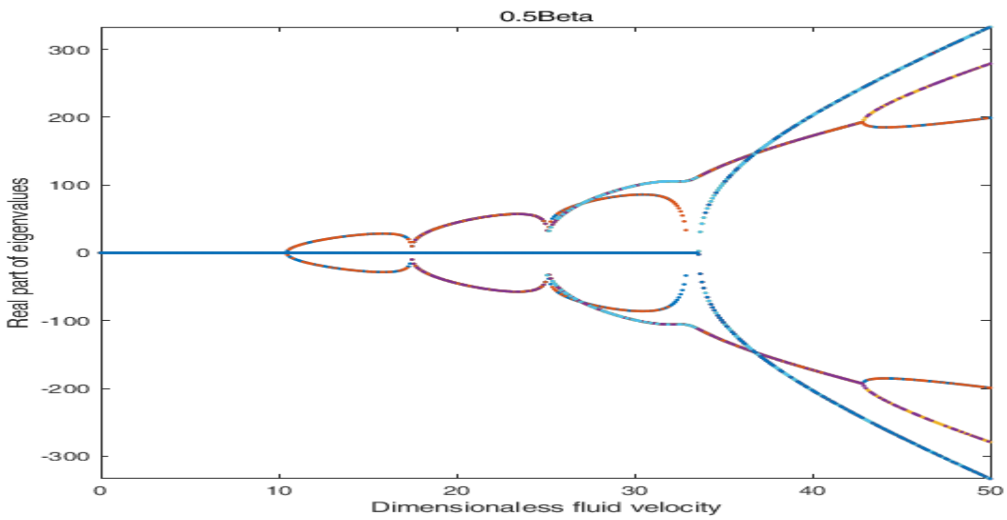
شکل (۴-۵-الف): قسمت موهومی فرکانس بی‌بعد مد اول تا چهارم به ازای پارامتر بی‌بعد جرمی



شکل (۴-۵-ب) : قسمت حقیقی فرکانس بی‌بعد مد اول تا چهارم به ازای پارامتر بی‌بعد جرمی



شکل (۴-۶-الف) : قسمت موهومی فرکانس بی‌بعد مد اول تا چهارم به ازای پارامتر بی‌بعد جرمی



شکل (۴-۶-ب) : قسمت حقیقی فرکانس بی‌بعد مد اول تا چهارم به ازای پارامتر بی‌بعد جرمی

فصل ۵: تحلیل غیرخطی

۵-۱- مقدمه

بسیاری از پدیده‌های اطراف ما به‌طور ذاتی غیرخطی هستند و با معادله‌های غیرخطی بیان یا توصیف می‌شوند. از زمان ظهور کامپیوترهای دیجیتالی، هر روزه حل معادلات خطی آسان‌تر می‌شود و این در حالی است که برای بسیاری از معادلات غیرخطی جواب دقیقی وجود ندارد. در بسیاری از موارد یافتن حل تحلیلی[1] معادلات غیرخطی بسیار مشکل‌تر از بدست آوردن حل عددی آن است، با وجود این هم‌اکنون با پیشرفت سخت‌افزار و وجود با متغییرهای سمبولیک[2] کار و ابرکامپیوترها برنامه‌های بسیار قدرتمندی همانند می‌کنند، حل بسیاری از معادلات آسان‌تر شده است. حل عددی به‌طور Mathematical و Mapple عمومی می‌تواند با محاسبات پیچیده کامپیوتری معادلات غیرخطی را حل نماید؛ این یک برتری حل عددی نسبت به حل تحلیلی است که قادر است در بعضی ازمواقع مسائل غیرخطی را ساده‌تر حل نماید. اگرچه حل عددی نقاط ناپیوستگی یک نمودار را نمایان می‌سازد اما با وجود این گاهی اوقات برای دریافت کل جواب بسیار هزینه‌بر و وقت‌گیر است و همچنین در کنار نتیجه‌های عددی، درک ماهیت مسئله غیرخطی مشکل می‌شود. مشکل حل عددی زمانی ظاهر می‌شود که مسئله غیرخطی دارای تکنیگی یا جواب‌های چندگانه باشد. حل عددی و تحلیلی مسائل غیرخطی مزایا و معایب جداگانه خود را داراست و همچنین محدودیت‌های خود را داراست؛ بنابراین این امر غیر ضروری است که ما یک روش را برگزینیم و از دیگری صرف‌نظرنماییم. عموماً حل تحلیلی مسائل در بسیاری از موارد مطلوب است.

---
[1] Analytical
[2]Symbolic

۵-۲- نظریه اغتشاشات

نظریه اغتشاشات، شامل روش‌های ریاضی است که برای یافتن پاسخ تقریبی برای مسئله‌ایی که پاسخ دقیق آن قابل دسترسی نیست، به کار می‌رود. یافتن این جواب تقریبی با یک پاسخ دقیق در یک مسئله مرتبط آغاز می‌شود. نظریه اغتشاش می‌توان به کار برد که بتوان مسئله را با افزودن یک عبارت کوچک به توصیف ریاضی مسئله‌ایی که قابل حل دقیق است، فرمول‌بندی نمود. نظریه اغتشاش به عبارتی به سری توانی از یک پارامتر کوچک برای پاسخ موردنظر منجر می‌شود که انحرافات از مسئله قابل حل کامل را به صورت کمی بیان می‌کند. اولین جمله از این سری توانی، پاسخ مسئله قابل حل دقیق است وجملات بعدی، انحراف از این پاسخ به دلیل انحراف از مسئله اصلی را توصیف می‌کند.

۵-۳- تحلیل غیرخطی میکرولوله ازجنس ماده هایپرالاستیک

اگرچه رفتار دینامیکی خطی لوله توسط بسیاری از محققان مورد تحلیل و بررسی قرار گرفته است، اما هنوز پیشرفت زیادی در بررسی رفتار غیرخطی میکرولوله صورت نگرفته است. برای تحلیل و بررسی قسمت غیرخطی میکرولوله حاوی جریان سیال از جنس ماده هایپرالاستیک ازروش مقیاس‌های چندگانه که یکی از روش‌های اغتشاشات می‌باشد، بهره می‌گیریم. برای حل این معادله ابتدا معادلات با مشتقات جزیی توسط روش گالرکین به معادلات دیفرانسیل معمولی گسسته‌سازی می‌شوند.

معادله حاکم غیرخطی بر میکرولوله حامل سیال به صورت رابطه (۵-۱) است:

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial t^{*2}} + v^2 \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} + 2\sqrt{\beta} v \frac{\partial w^*}{\partial t^* \partial x^*} - 2A^* SR^2 \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} + 8c_{21} \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^{*4}} - 12A^* c_{21} \left(\frac{\partial w^*}{\partial x^*}\right)^2 \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} + 24 \frac{c_{31}}{SR^2} \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^{*4}} \left(\frac{\partial w^*}{\partial x^*}\right)^2 + 96 \frac{c_{31}}{SR^2} \frac{\partial^3 w^*}{\partial x^{*3}} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + 24 \frac{c_{31}}{SR^2} \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}}\right)^3 - 30 \frac{A^* c_{31}}{SR^2} \left(\frac{\partial w^*}{\partial x^*}\right)^4 \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} = 0 \tag{۵-۱}$$

معادلات (۵-۱) توسط روش گالرکین به معادلات دیفرانسیل معمولی باتوجه به معادلات (۵-۲) و (۵-۳) تبدیل می‌شوند:

$$\boldsymbol{w}^*(\boldsymbol{x}^* ، \boldsymbol{t}^*) = \boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{x}^*) \boldsymbol{q}_i(\boldsymbol{t}^*) \tag{۵-۲}$$

$$-\ddot{q}(t^*) + \alpha_1 \dot{q}(t^*) + \alpha_2 q(t^*) + \alpha_3 q^3(t^*) + \alpha_4 q^5(t^*) = 0 \tag{۵-۳}$$

به‌طوری که:

$$\alpha_1 = 0 \tag{۵-۴}$$

$$\alpha_2 = -(v^2 - 2A^* SR^2)(i\pi)^2 + 8c_{21}(i\pi)^4 \tag{۵-۵}$$

$$\alpha_3 = 6A^* c_{21}(i\pi)^4 + 24 \frac{c_{31}}{SR^2} (i\pi)^6 \tag{۵-۶}$$

ریشه‌های معادله $\alpha_2 q + \alpha_3 q^3 + \alpha_4 q^5 = 0$ به شرح زیر است:

$$q_1 = 0 \tag{۵-۷}$$

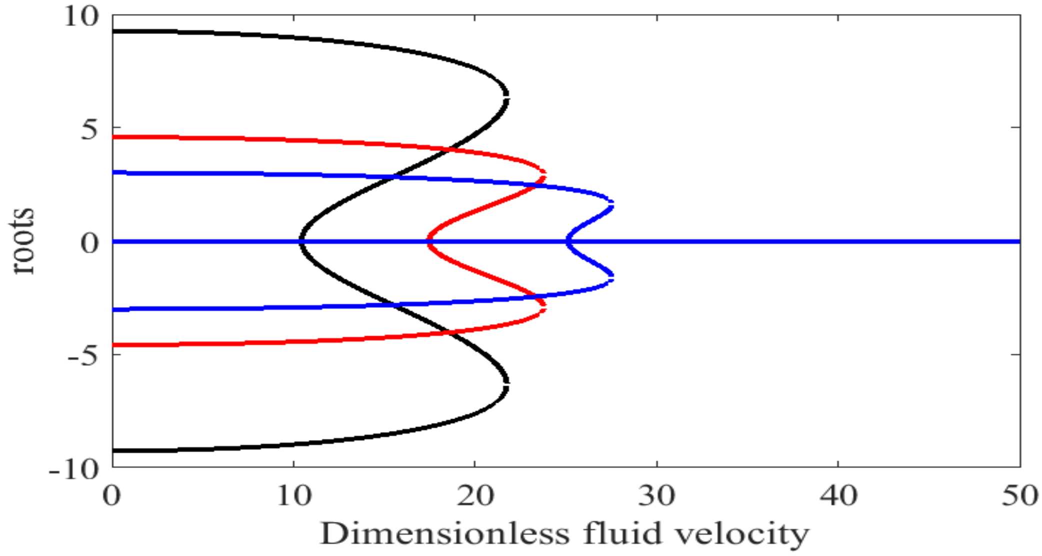
$$q_2 = -\sqrt{\frac{-\alpha_3 - \sqrt{\alpha_3^2 - 4\alpha_4\alpha_2}}{2\alpha_4}} \tag{۵-۸}$$

$$q_3 = \sqrt{\frac{-\alpha_3 + \sqrt{\alpha_3^2 - 4\alpha_4\alpha_2}}{2\alpha_4}} \tag{۵-۹}$$

$$q_4 = -\sqrt{\frac{-\alpha_3 + \sqrt{\alpha_3^2 - 4\alpha_4\alpha_2}}{2\alpha_4}} \tag{۵-۱۰}$$

$$q_5 = \sqrt{\frac{-\alpha_3 - \sqrt{\alpha_3^2 - 4\alpha_4\alpha_2}}{2\alpha_4}} \tag{۵-۱۱}$$

نمودار زیر به ازای سرعت‌های مختلف ترسیم شده‌اند که سه شکل مود را درنظرگرفته‌ایم. شکل مود اول که با رنگ مشکی نشان داده شده است که درابتدا پایدار بوده است و سپس با افزایش سرعت ناپایدارخواهد شد که فقط یک نقطه تعادل موجود می‌باشد همان‌طور که از نمودار مشاهده می‌شود که زمانی‌که مقدار ریشه‌ها منفی شود فقط یک نقطه تعادل خواهیم داشت و هنگامی‌که مقدار ریشه‌ها مثبت گردد پنج نقطه تعادل و زمانی‌که مقدار ریشه‌ها صفرگردد سه نقطه تعادل خواهیم داشت.



شکل(۵-۱): پایداری ریشه‌ها به ازای سرعت‌های مختلف

$$q = \varepsilon u \tag{۱۲-۵}$$

بنابراین معادلات حاکم به صورت رابطه (۱۳-۵) خواهد شد:

$$\varepsilon\ddot{u}(t^*) + \alpha_1\varepsilon\dot{u}(t^*) + \alpha_2\varepsilon u(t^*) + \alpha_3\varepsilon^3u^3(t^*) + \alpha_4\varepsilon^5u^5(t^*) = 0 \tag{۱۳-۵}$$

با روش چند مقیاسی معادله حاکم را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\varepsilon\left(D_0^2u + 2\varepsilon D_0D_1u + \varepsilon^2(2D_0D_2u + D_1^2u)\right) + \alpha_2\varepsilon u + \alpha_3\varepsilon^3u^3 + \alpha_4\varepsilon^5u^5 + \cdots = 0 \tag{۱۴-۵}$$

با استفاده از تقریب مرتبه دو بر حسب مقیاس‌های زمانی مختلف به صورت زیر:

$$u\left(T_0,T_1,T_2,\ldots;\varepsilon\right) = u_0\left(T_0,T_1,T_2,\ldots\right) + \varepsilon u_1\left(T_0,T_1,T_2,\ldots\right) + \varepsilon^2u_2\left(T_0,T_1,T_2,\ldots\right) + \cdots \tag{۱۵-۵}$$

معادله حاکم را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\varepsilon\Big(D_0^2[u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2u_2] &+ 2\varepsilon D_0D_1[u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2u_2]\\ &+ \varepsilon^2(2D_0D_2[u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2u_2] + D_1^2[u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2u_2])\Big)\\ &+ \alpha_2\varepsilon[u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2u_2] + \alpha_3\varepsilon^3[u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2u_2]^3\\ &+ \alpha_4\varepsilon^5[u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2u_2]^5 + \cdots = 0\end{aligned} \tag{۱۶-۵}$$

با صفر قراردادن ضرایب مراتب ε درمعادله (۵-۱۴) خواهیم داشت:

$$\epsilon^1: D_0^2 u_0 + \alpha_2 u_0 = 0 \qquad (۵\text{-}۱۷)$$

$$\epsilon^2: D_0^2 u_1 + \alpha_2 u_1 = -2D_0 D_1 u_0 \qquad (۵\text{-}۱۸)$$

$$\epsilon^3: D_0^2 u_2 + \alpha_2 u_2 = -2D_0 D_1 u_1 - 2D_0 D_2 u_0 - D_1^2 u_0 - \alpha_3 u_0^3 \qquad (۵\text{-}۱۹)$$

حل معادله (۵-۱۷) به صورت زیر می‌باشد:

$$u_0\left(T_0 و T_1 و T_2\right) = a\left(T_1 و T_2\right) cos\left(\omega_0 T_0 + \beta\left(T_1 و T_2\right)\right) = A\left(T_1 و T_2\right) e^{i\omega_0 T_0} + CC \qquad (۵\text{-}۲۰)$$

به طوری که:

$$A\left(T_1 و T_2\right) = \frac{1}{2} a\left(T_1 و T_2\right) e^{i\beta\left(T_1 و T_2\right)} \qquad (۵\text{-}۲۱)$$

با جایگذاری در معادله (۵-۱۸) خواهیم داشت:

$$D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = (-2i\omega_0 D_1 A) e^{i\omega_0 T_0} + CC \qquad (۵\text{-}۲۲)$$

با حذف جملاتی که سکولار ایجاد می‌کنند درمعادله(۲۲-۵) خواهیم داشت:

$$-2i\omega_0 D_1 A = 0 \qquad (۵\text{-}۲۳)$$

$$D_1 A = 0 \ \Rightarrow \frac{1}{2}(D_1 a) e^{i\beta} + \frac{1}{2} ai(D_1\beta) e^{i\beta} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}[(D_1 a) + ai(D_1\beta)] e^{i\beta} = 0 \qquad (۵\text{-}۲۴)$$

بنابراین:

$$(D_1 a) + ai(D_1\beta) = 0 \qquad (۵\text{-}۲۵)$$

با صفر قراردادن قسمت حقیقی و موهومی معادله (۵-۲۵) خواهیم داشت:

$$D_1 a = 0 \Rightarrow \ a = a(T_2) \qquad (۵\text{-}۲۶)$$

$$a(D_1\beta) = 0 \ \Rightarrow \ \beta = \beta(T_2) \qquad (۵\text{-}۲۷)$$

حل معادله (۵-۱۸) به صورت زیر می‌باشد:

$$u_1\left(T_0 و T_1 و T_2\right) = 0 \quad (۲۸-۵)$$

با جایگذاری در معادله (۱۹-۵) خواهیم داشت:

$$D_0^2 u_2 + \alpha_2 u_2 = -2D_0 D_2 u_0 - D_1^2 u_0 - \alpha_3 u_0^3 \quad (۲۹-۵)$$

$$D_0^2 u_2 + \alpha_2 u_2 = \left(-2i\omega_0 (D_2 A) e^{i\omega_0 T_0} + 2i\omega_0 (D_2 \bar{A}) e^{-i\omega_0 T_0}\right) - \alpha_3 \left(A e^{i\omega_0 T_0} + \bar{A} e^{-i\omega_0 T_0}\right)^3$$

$$D_0^2 u_2 + \alpha_2 u_2 = \left(-2i\omega_0 D_2 A e^{i\omega_0 T_0}\right) - \alpha_3 \left(A^3 e^{i3\omega_0 T_0} + 3A^2 \bar{A} e^{i\omega_0 T_0}\right) + CC \quad (۳۰-۵)$$

با حذف جملاتی که سکولار ایجاد می‌کنند از معادله (۳۰-۵) خواهیم داشت:

$$-2i\omega_0 D_2 A - \alpha_3 3A^2 \bar{A} = 0 \quad (۳۱-۵)$$

با نوشتن روابط در فرم قطبی خواهیم داشت:

$$-2i\omega_0 \left(\frac{1}{2}(D_2 a) e^{i\beta} + \frac{1}{2} a i (D_2 \beta) e^{i\beta}\right) - \frac{3}{8}\alpha_3 a^3 e^{i\beta} = 0 \quad (۳۲-۵)$$

با ضرب کردن طرفین معادله (۵-۳۲) در $e^{-i\beta}$ خواهیم داشت:

$$i\omega_0 (D_2 a) - a\omega_0 (D_2 \beta) + \frac{3}{8}\alpha_3 a^3 = 0 \quad (۳۳-۵)$$

با صفر قراردادن قسمت حقیقی و موهومی معادله (۵-۳۳) خواهیم داشت:

$$\omega_0 (D_2 a) = 0 \Rightarrow a = a_0 \quad (۳۴-۵)$$

$$a\omega_0 D_2 \beta = \frac{3}{8}\alpha_3 a^3 \Rightarrow \beta = \frac{3}{8}\frac{\alpha_3}{\omega_0} a^2 T_2 + \beta_0 \quad (۳۵-۵)$$

حال حل خصوصی معادله برای u_2 به صورت زیر می‌باشد:

$$D_0^2 u_2 + \alpha_2 u_2 = -\alpha_3 \left(A^3 e^{i3\omega_0 T_0} + \bar{A}^3 e^{-i3\omega_0 T_0}\right) + CC \quad (۳۶-۵)$$

$$u_2\left(T_0 و T_1 و T_2\right) = -\frac{\alpha_3}{-9\omega_0^2 + \alpha_2} A^3 e^{i3\omega_0 T_0} - \frac{\alpha_3}{-9\omega_0^2 + \alpha_2} \bar{A}^3 e^{-i3\omega_0 T_0} \quad (۳۷-۵)$$

با جایگذاری $A = \frac{1}{2} a e^{i\beta}$ و $\bar{A} = \frac{1}{2} a e^{-i\beta}$ خواهیم داشت

$$u_2\left(T_0 و T_1 و T_2\right) = -\frac{\alpha_3}{-9\omega_0^2 + \alpha_2}\frac{1}{8} a^3 e^{i(3\omega_0 T_0 + 3\beta)} - \frac{\alpha_3}{-9\omega_0^2 + \alpha_2}\frac{1}{8} a^3 e^{-i(3\omega_0 T_0 + 3\beta)} =$$

$$-\frac{\alpha_3}{-9\omega_0^2 + \alpha_2}\frac{1}{4} a^3 \cos(3\omega_0 T_0 + 3\beta) \quad (۳۸-۵)$$

بنابراین حل کلی معادله (۵-۳۸) را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$u\left(T_0 و T_1 و T_2 \ldots ; \epsilon\right) = a\cos(\omega_0 T_0 + \beta) + \epsilon^2 \frac{-\alpha_3}{-9\omega_0^2+\alpha_2}\frac{1}{4}a^3\cos(3\omega_0 T_0 + 3\beta) + \cdots \qquad (۵\text{-}۳۹)$$

حال با جایگذاری

$$a = a_0 \text{ و } \beta = \frac{3}{8}\frac{\alpha_3}{\omega_0}a^2\, T_2 + \beta_0(T_3) \text{ و } T_0 = t^* \text{ و } T_2 = \epsilon^2 t^* \qquad (۵\text{-}۴۰)$$

خواهیم داشت:

$$u(t^*;\epsilon) = a\cos\left(\omega_0 t^* + \frac{3}{8}\frac{\alpha_3}{\omega_0}a^2\,\epsilon^2 t^* + \beta_0\right) + \epsilon^2\frac{-\alpha_3}{-9\omega_0^2+\alpha_2}\frac{1}{4}a^3\cos\left(3\omega_0 t^* + 3\left(\frac{3}{8}\frac{\alpha_3}{\omega_0}a^2\,\epsilon^2 t^* + \beta_0\right)\right) + \cdots \qquad (۴۱-۵)$$

با ساده سازی معادله (۵-۴۱) خواهیم داشت:

$$u(t^*;\epsilon) = a_0\cos\left(\left(\omega_0 + \frac{3}{8}\frac{\alpha_3}{\omega_0}a_0^2\,\epsilon^2\right)t^* + \beta_0\right) + \epsilon^2\frac{-\alpha_3}{-9\omega_0^2+\alpha_2}\frac{a_0^3}{4}\cos\left(\left(3\omega_0 + \frac{9}{8}\frac{\alpha_3}{\omega_0}a_0^2\,\epsilon^2\right)t^* + 3\beta_0\right) + \cdots (۵\text{-}۴۲)$$

حال با توجه به:

$$q = \varepsilon u \qquad (۵\text{-}۱۲)$$

خواهیم داشت:

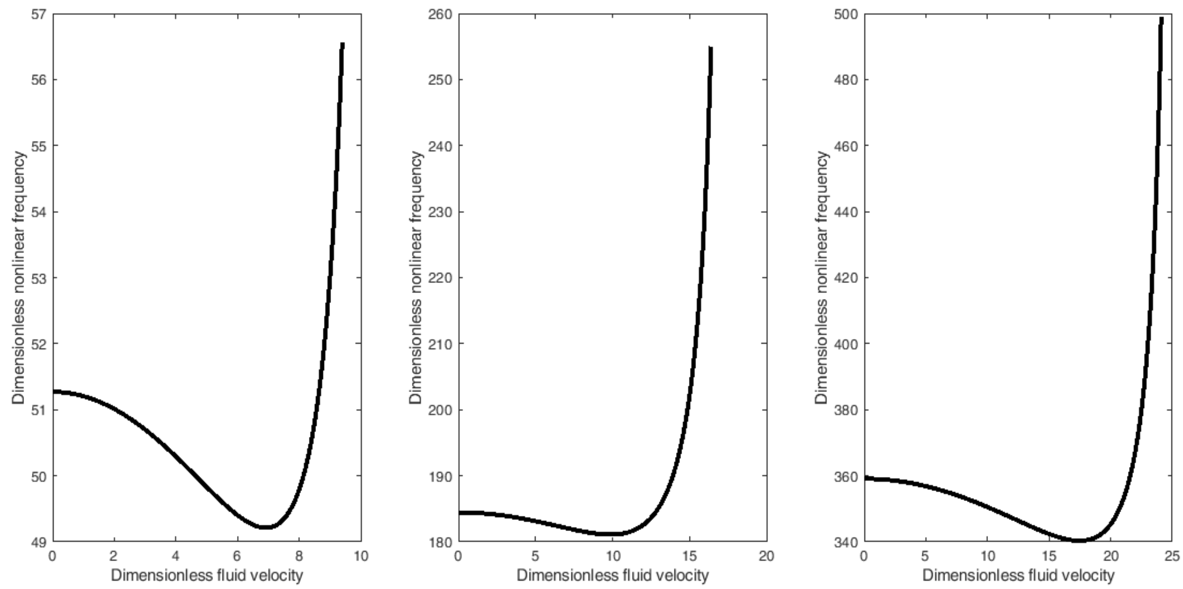
$$q(t;\epsilon) = \epsilon\left[a_0\cos\left(\left(\omega_0 + \frac{3}{8}\frac{\alpha_3}{\omega_0}a_0^2\,\epsilon^2\right)t^* + \beta_0\right) + \epsilon^2\frac{-\alpha_3}{-9\omega_0^2+\alpha_2}\frac{a_0^3}{4}\cos\left(\left(3\omega_0 + \frac{9}{8}\frac{\alpha_3}{\omega_0}a_0^2\,\epsilon^2\right)t^* + 3\beta_0\right) + \cdots\right] \qquad (۵\text{-}۴۲)$$

و پاسخ نهایی به صورت زیر می‌باشد:

$$w^*\left(x^* \text{ و } t^*\right) = \epsilon\left[a_0\cos\left(\left(\omega_0 + \frac{3}{8}\frac{\alpha_3}{\omega_0}a_0^2\,\epsilon^2\right)t^* + \beta_0\right) + \epsilon^2\frac{-\alpha_3}{-9\omega_0^2+\alpha_2}\frac{a_0^3}{4}\cos\left(\left(3\omega_0 + \frac{9}{8}\frac{\alpha_3}{\omega_0}a_0^2\,\epsilon^2\right)t^* + 3\beta_0\right) + \cdots\right]\sqrt{2}\sin(i\pi x^*) \qquad (۵\text{-}۴۳)$$

۵-۴- بررسی تأثیر سرعت بر فرکانس غیرخطی میکرولوله:

همانطور که از شکل(۵-۲) مشاهده می‌شودکه با افزایش نسبت لاغری فرکانس بی‌بعد کاهش می‌یابد و این امر نشان‌دهنده این است که سختی میکرولوله کاهش می‌یابد و برعکس این قضیه نیزحاکم هست که با کاهش نسبت لاغری فرکانس بی بعد افزایش و سختی میکرولوله نیز افزایش خواهد یافت.



شکل (۵-۲): تاثیر فرکانس غیرخطی میکرولوله ازجنس ماده هایپرالاستیک حاوی جریان سیال برحسب سرعت

فصل ۶: نتیجه گیری

۶-۱- نتیجه‌گیری

در تحقیق انجام گرفته در این پایان نامه، رفتارهای ارتعاشاتی و پایداری میکرولوله از جنس ماده هایپرالاستیک حاوی جریان سیال در حالت دوسرمفصل مورد بررسی قرار گرفته است. رفتار غیرخطی میکرولوله ناشی از جنس آن است. مواد هایپرالاستیک ذاتاً رفتار غیرخطی دارند.سیال عامل تراکم‌ناپذیر درنظر گرفته شده است. یکی از جنبه های منحصربفرد این کار استفاده از مواد هایپرالاستیک در ساختار میکرولوله‌ها می‌باشد. پس از تشریح دینامیک سیستم موردنظر این پایان نامه، با استفاده از مدل یئو و بکارگیری اصل هامیلتون، معادلات حاکم مسئله بر اساس فرض تیر اویلربرنولی بدست آمده است. وجود پارامترهای غیرخطی و جدید در معادلات حاکم از تأثیر ماده هایپرالاستیک خبر می‌دهد. سپس به بی‌بعدسازی معادله پرداختیم . ابتدا حل خطی معادله حاکم انجام شده است که وجود ترم‌های جدید در مقایسه با حالت الاستیک تیر باعث تغییرات در فرکانس طبیعی و پایداری میکرولوله شده است.برای بررسی سرعت بحرانی سیال وپایداری میکرولوله از روش گالرکین که معادلات گسسته‌سازی شده ، استفاده شده است.

تحلیل تاثیر نسبت لاغری بر روی فرکانس بی‌بعدخطی اولین هدف این پایان نامه بوده است که باتوجه به نتایج عددی بدست آمده درقسمت خطی، سختی میکرولوله و درنهایت پایداری میکرولوله می‌تواند بهبود یابد. نتایج بدست آمده نشان می‌دهد که با افزایش نسبت لاغری، میکرولوله انعطاف‌پذیر شده وفرکانس بی بعدخطی کاهش می‌یابد و ناپایداری درسرعت‌های پایین‌تری رخ می‌دهد.

تحلیل تاثیر بی‌بعد جرمی بر روی فرکانس بی‌بعدخطی یکی دیگراز هدف‌های این پایان نامه درقسمت خطی بوده است به‌طوری که به ازای مقادیر مختلف پارامتر بی‌بعد جرمی، سرعت بحرانی هیچ تغییری نمی‌کند، بنابراین سرعت بحرانی میکرولوله در شرایط مرزی دوسر مفصل مستقل از پارامتر بی‌بعد جرمی است.

درقسمت غیرخطی این تحقیق ابتدا به پایداری ریشه‌های معادله غیرخطی پرداختیم و نتیجه بدین صورت شد که درمواقعی که مقدار ریشه‌ها مثبت شوند پنج نقطه تعادل خواهیم داشت وهنگامی که مقدار ریشه‌ها

مقداری منفی شوند فقط یک نقطه تعادل خواهیم داشت و زمانی که مقدار ریشه‌ها صفرشوند سه نقطه تعادل خواهیم داشت.

تحلیل تاثیرسرعت برفرکانس غیرخطی یکی از مهم‌ترین اهداف‌های این پایان‌نامه است. نتیجه بدین صورت شد با افزایش نسبت لاغری فرکانس بی‌بعد کاهش می‌یابدو این امر نشان‌دهنده این است که سختی میکرولوله کاهش می‌یابدوبرعکس این قضیه نیزحاکم هست که با کاهش نسبت لاغری فرکانس بی بعدافزایش و سختی میکرولوله نیز افزایش خواهد یافت.

۶-۲- پیشنهاد برای کارهای آینده

- بررسی ارتعاشات و ناپایداری میکرولوله از جنس ماده هایپرالاستیک حاوی جریان سیال با تئوری تیر تیموشنکو
- بررسی ارتعاشات و ناپایداری میکرولوله از جنس ماده هایپرالاستیک حاوی جریان سیال با مدل‌های مختلف مواد هایپرالاستیک برای بدست آوردن انرژی کرنشی سیستم
- بررسی ارتعاشات و ناپایداری میکرولوله از جنس ماده هایپرالاستیک حاوی جریان سیال با شرایط مرزی مختلف
- بررسی ارتعاشات و ناپایداری میکرولوله از جنس ماده هایپرالاستیک حاوی جریان سیال در مقیاس نانو

مراجع

[1] Bettinali F. Dusi A. (٢٠٠٤) Laminated rubber bearings for Seismic applications Mechanics and Thermomechanics of Rubbrlike Solids.٤٥٢, pp..٢٣٣-٢٥٢

[2] Johnson, P.S (٢٠٠١) Rubber processing: An Introduction Hanser Publishers.

[3] Dick J.S. (٢٠٠٤) How to Improve Rubber Compounds: ١٥٠٠ Experimental ideas for Problem Solving.Hanser Publishers.

[4] Treloar L.RG. (١٩٤٣) The elastictity of a network of long-chain molecules. Transactions of the Faraday Society ٣٩,pp. ٣٦-٤١.

[5] Treloar L.RG. (١٩٤٤) Stress-strain date for a vulcanized rubber under various types of deformation Transactions of the Faraday Society ٤٠, pp ٥٩-٧٠.

[6] Cai K. Gao Y. Qing H. (٢٠١٣) Post-bucking Solutions of Hyper- elastic Beam by canonical Dual Finite Element Method Inter- national Journal for Numerical Methods in Engineering, ٢٣,pp ١-٢٠.

[7] Carpi F. et al. (٢٠٠٧) Dielectric elastomers as electromechanical transducers Elsevier.

[8] Marckmann G. Verron E. (٢٠٠٦) Comparison of hyperelastic models for rubber- like materials Rubber chemistry and technology, ٧٩.٥.pp ٨٣٥:٨٥٨.

[9] Yeoh O.H. (١٩٩٠) Characterization of elastic properties of carbon– black-filled rubber vulcanizated Rubber Chemistry and Technology, ٦٣, pp ٧٩٢-٨٠٥

[10] Manuel J. Garcia R. Oscar E. Ruiz S. Carlos L. (٢٠٠٥) Technical report, Hyperelastic material modeling. Laboratorio CAD / CAM/CAE Department op mechanical engineering, EAFIT University

[11] ISO. Iso ٥٢٧. (١٩٩٧) Plastics – determination of tensile properties – part **٥**: Test conditions for unidirectional fibre-reinforced plastic composites. Annual Book of ASTM Standars, pp ١-٩.

[12] ASTM, International. (٢٠٠٢) Astm, Standard test methods for vulcanized rubber and thermoplastic elastomers - tension Annual Book of ASTM Standers, pp ١-١٤.

[13] Crocker L. Duncan B. Maxwell A and Hunt R. (۱۹۹۹) Verification of hyperelastic test methods CMMT(A), ۲۲۶, pp 1-27.

[14] Seibert D.J. and Schoche.N. (۲۰۰۰) Direct Comparison of Some Recent Rubber Elasticity Models Rubber Chemistery and Technology. ۷۳, ۲, pp. ۳۶۶–۳۸۴.

[15] Holland J.H. (۱۹۷۵) Adapiton in natural and artificial Systems. University of Michigan press.

[16] Goldberg D.E. (۱۹۹۴) Algoritmes genetiques, exploitation, optimization et apprentissage automatique. Addison-wesley eds.

[17] Amabili, M., Pellicano, F., & Paidoussis, M.P. Non-linear dynamics and stability of circular cylindrical shells containing flowing fluid. Part I: stability. Journal of Sound and Vibration, 225(4), 655-699. (1999).

[18] Xia, W., & Wang, L. Microfluid-induced vibration and stability of structures modeled as micro scale pipes conveying fluid based on non-classical Timoshenko beam theory. Microfluidics and Nanofluidics, 9,955-962. ((2010)).

[19] Wang, L. Size-dependent vibration characteristics of fluid-conveying Micro-tubes. Journal of Fluids and Structures, 26, 675-684. ((2010)).

[20] Yin, L., Qian, Q., & Wang, L. Strain grandient beam model for dynamics of microscale pipes conveying fluid. Applied Mathematical Modelling, 35(6), 2864-2873. (2011).

[21] Ghorbanpour Arani, A., Shajari, A.R., Amir, S., & Loghman, A. Electro- thermo-mechanical nonlinear nonlocal vibration and instability of embedded micro-tube reinforced by BNNT, conveying fluid. Physica E, 45, 109- 121(2012).

[22] Ghorbanpour Arani, A., Shajari, A.R., Atabakhshian, V., Amir, S., & Loghman, A. Nonlinear dynamical response of embedded fluid-conveyed micro-tube reinforced by BNNTs. Composites: Part B, 44, 424-432. (2013).

[23] Laithier, B.E., Dynamics of Timoshenko tubular beams conveying fluid. 1981.

[24] Ashley, H. and G. Haviland, Bending vibrations of a pipe line containing flowing fluid. Journal of Applied Mechanics-Transactions of the ASME, 1950. 17(3): p. 229-232.

[25] Long, R., Experimental and theoretical study of transverse vibration of a tube containing flowing fluid. Jornal of Applied Mechanics, 1955. 77(1): p.65-68.

[26] Benjamin, T.B. Dynamics of a system of articulated pips conveying fluid. I. Theory. in Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Science

[27] Semler, C., G. Li, and M. Paidoussis, The non-linear equations of motion of pipes conveying fluid. Journal of Sound and Vibration, 1994. 169(5): p.577-599.

[28]Reddy, J. and C. Wang, Wang, Dynamics of fluid-conveying beams. Centre for Offshore Research and Engineering, National University of Singapor, CORE Report, 2004.3:p. 1-21.

[29] Piovan, M. and R. Sampaio, A study on the dynamics of rotaing beams with Functionally graded properties. Journal of Sound and Vibration, 2009. 327(1): p. 134-143.

[30] Ke, L. –L., J. Yang, and S. Kitiporsnchai, Nonlinear free vibration of functionally Graded carbon nanotube-reinforced composite beams. Composite Structures, 2010. 92(3): p. 676-683.

[31] Yas, M. and M.Heshmati, Dynamic analysis of functionally graded nanocomposit beams reinforced by randomly oriented carbon nanotube under the action of moving load. Applied Mathematical Modelling,. 2012. 36(4): p. 1371-1394

[32] Aragh, B.s., A.N. Barati, and H. Hedaayati, Eshelby-Mori-Tanaka approach for Vibrational behaviorof continuously graded carbon nanotube-reinforced cylindrical Panels. Composites Part B: Engineering, 2012. 43(4): p. 1943- 1954.

[33]Chaterjee S. Pohit G. (۲۰۰۹) "A large deflection model for the pull-in analysis of electrostatically actuated microcantilever beams" Journal of Sound and Vibration, ۳۲۲, pp ۹۶۹–۹۸۶.

[34] Mojahedi M. Moghimi Zand M. Ahmadian M.T. (۲۰۱۰) "Static pull-in analysis of electrostatically actuated microbeams using homotopy perturbation method" Applied Mathematical Modelling, ۳۴, pp ۱۰۳۲–۱۰۴۱.

[35] Mestrom R.M.C. Fey R.H.B. Phan K.L. Nijmeijer H. (۲۰۱۰) “Simulations and experiments of hardening and softening resonances in a clamped–clamped beam MEMS resonator” Sensors and Actuators A, ۱۶۲, pp ۲۲۵–۲۳۴.

[36] Cai K. Gao Y. Qing H. (۲۰۱۳) “Post-buckling Solutions of Hyper-elastic Beam by Canonical Dual Finite Element Method” International Journal for Numerical Methods in Engineering, ۲۳, pp ۱-۲۰.

[37] Ansari R. Mohammadi V. Faghih Shojaei M. Gholami R. Sahmani S. (۲۰۱۳) “Postbuckling characteristics of nanobeams based on the surface elasticity theory”, Composites: Part B, ۵۵, pp ۲۴۰–۲۴۶.

[38] Gaonkar A.K. Kulkarni S.S. (۲۰۱۳)" Model order reduction for dynamic simulation of beams with forcing and geometric nonlinearities" Finite ElementsinAnalysisandDesign, ۷۶, pp ۵۰–۶۲.

[39] Peng J.S. Yang L. Luo G.B. Yang J. (۲۰۱۴) “Nonlinear electro-dynamic analysis of micro-actuators: Effect of material nonlinearity” Applied Mathematical Modelling, ۳۸, pp ۲۷۸۱–۲۷۹۰.

[40] Marckmann G. Verron E. (۲۰۰۶) “Comparison of hyperelastic models for rubberlike materials” Rubber chemistry and technology, ۷۹. ۵. pp ۸۵۸ :۸۳۵.

[41] Martins P. A. L. Natal Jorge S. R. M. A. Ferreira J. M. A (۲۰۰۶) “A Comparative Study of Several Material Models for Prediction of Hyperelastic Properties: Application to SiliconeRubber and Soft Tissues” Blackwell Publishing Ltd j Strain. ۴۲, pp ۱۳۵–۱۴۷.

[42] Soares R.M. Gonçalves P. B. (۲۰۱۴) “Large-amplitude nonlinear vibrations of a Mooney–Rivlin rectangular membrane” Journal of Sound and Vibration, ۳۳۳, pp ۲۹۲۰–۲۹۳۵.

[43] Saeed Danaee Barforooshi and Ardeshir Karami Mohammadi, Study Neo-Hookean and Yeoh Hyper-Elastic Models in Dielectric Elastomer-Based Micro-Beam Resonators. Latin American Journal of Solids and Structures 2016. 13.10:p. 1823-1837.

[44] Saeed Danaee Barforooshi and Ardeshir Karami Mohammadi, Influence of different parameters on nonlinear frequency of hyper-elastic micro-resonators. ISME, 2016. 17:p. 26-34.

[45] Saeed Danaee Barforooshi and Ardeshir Karami Mohammadi, Nonlinear Free Vibration Of Nanobeams With Considering Surface Effects. ISAV, 2012. 2:p. 23-34.

[46] Ardeshir Karami Mohammadi and Saeed Danaee Barforooshi, Nonlinear Forced Vibration Analysis of Dielectric-Elastomer Based Micro-Beam with Considering Yeoh Hyper-Elastic Model. Latin American Journal of Solids and Structures 2017. 14.4:p. 643-656.

[47] Jagar E. W. H. Smela E. Inganas O. “ (۲۰۰۰)Microfabrication conjugated polymer actuators” Science, ۲۹۰,pp۱۵۴۵-۱۵۴۰.

[48]Chronis N. Lee L. P. “ (۲۰۰۴)Polymer MEMS-based microgripper for single cell manipulation ”Proceedings of the ۱۷th International conference on MEMS, Maastricht, The Netherlands,p.۲۲-۱۷.

[49] Nguyen N. T. Ho S. S. Low C. L. N. “ (۲۰۰۴)A polymeric microgripper with integrated thermal actuators ”Journal of Micromechanics and Microengineering. ۱۴, ۷,pp۹۶۹.

Abstract

In This Research, we analysis the vibration of hyperelastic of microtube which contains flow conduct in the modeling of microtube to consider a model. Near to the real model, we studied the modern microarrays of hyperelastic in which the relation of strain stress is nonlinear we added the waterspland used the model Yeo. These modeles forcast the lastic action and nonlinear relationship of strain stress in materials. And we can involve them to study the nonlinear factor and other factors. So, According to thory thyravilber to we studied the vibration of microtube and hyperelastic model in condition with border support of two joints. To extract the equation of system we used theory of thyravilber to and principle of Hamilton. First, we should compute the Kinetic energy and potential energy, then we should dimension the equation of system and gain the border conditions of dimension we change the vibration equations of system to differential and normal equation by using galerkin method. First we study the sustain ability of system and normal frequency and the speed, length and thickness of flow. To solve nonlinear equations we use analytical disturbances and multiple scale. We draw the chart the effect of speed on nonlinear frequencies.

Keywords: Hyperelastic, Yeo model, Free vibration, Fluid- Conveing microtubes

Shahrood University of Technology

Faculty of Mechanical and Mechatronics Engineering

M.Sc. Thesis in Applied Mechanics Engineering

Vibration analysis of Hyperelastic Fluid-Conveying Microtubes

By: Mostafa Hazbepour

Supervisor:

Dr. Ardeshir Karami Mohammadi

January 2020