بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک

پایان‌نامه کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک طراحی کاربردی

کمانش نامتقارن ورق‌های دایره‌ای تحت بار شعاعی به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول

نگارنده:

عادل محمد قلی‌پور

استاد راهنما:

دکتر حمیدرضا ایپکچی

بهمن ۱۳۹۸

شماره: ۱۶۸/۲۹۸/پدم
تاریخ: ۹۸/۱۲/۱۷

باسمه‌تعالی

دانشگاه صنعتی شاهرود
مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد آقای **عادل محمد قلی پور** با شماره دانشجویی **۹۶۱۳۱۷۴** رشته **مکانیک** گرایش **طراحی کاربردی** تحت عنوان **کمانش نامتقارن ورق‌های دایره‌ای تحت بار شعاعی به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول** که در تاریخ **۹۸/۱۱/۰۷** با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می‌گردد:

الف) درجه عالی: نمره ۲۰-۱۹ ☐ ب) درجه خیلی خوب: نمره ۱۸/۹۹ – ۱۸ ☑
ج) درجه خوب: نمره۱۷/۹۹– ۱۶☐ د) درجه متوسط: نمره ۱۵/۹۹-۱۴ ☐
ه) کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد ☐
نوع تحقیق: نظری ■ عملی ☐

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ استادراهنمای اول	حمیدرضا ایپکچی	دانشیار	
۲- استادراهنمای دوم	—	—	—
۳- استاد مشاور	—	—	—
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	مهدی حیدری	استادیار	
۵- استاد ممتحن اول	مهدی قناد کهتویی	دانشیار	
۶ـ استاد ممتحن دوم	سید مهدی حسینی فراش	استادیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: مهدی گردویی

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده: ۹۸/۱۲/۱۴

تقدیم به

پدرم،

مادرم،

خواهرانم،

برادرم،

که تمام منند..

سپاس

سپاس ***خدایی*** را که اول و آخر وجود است، بی آنکه اولی بر او پیشی گیرد یا آخری پس از او باشد؛

خدایی که دست هر چشمی از دامان دیدارش کوتاه است و فهم هر کبوتر توصیف‌گری از پرواز در آسمان وصفش عاجز....

برخود لازم می‌دانم از استاد ارجمندم جناب آقای ***دکتر حمیدرضا پیکمی*** که بی‌دریغ مرا در مسیر رسیدن به هدفهایم و انجام این پژوهش پشتیبانی کرد، نهایت تشکر و قدردانی را داشته باشم. همچنین از، ***خانواده عزیزم،*** دوستان خوبم ***محمد اسکندری، سجاد طهماسبی، امین فدایی*** و سایر ***عزیزانی*** که در انجام این تحقیق مرا یاری کردن متشکرم.

تعهد نامه

اینجانب **عادل محمد قلی پور** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته **مهندسی مکانیک گرایش طراحی کاربردی** دانشکده **مهندسی مکانیک و مکاترونیک** دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان‌نامه کمانش نامتقارن ورق‌های دایره‌ای تحت بار شعاعی به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول تحت راهنمائی **دکتر حمیدرضا ایپکچی** متعهد می‌شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ ....

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.

چکیده

در این پایان نامه، تحلیل کمانش نامتقارن ورق‌های همگن و همسانگرد دایره‌ای که تحت نیروی شعاعی قرار دارند، با تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول مورد بررسی قرار گرفته است. بار کمانش برای ترکیب‌های مختلف شرایط مرزی آزاد، گیردار و ساده در لبه‌های ورق و نیز برای نسبت‌های ظاهری مختلف ارائه شده است. معادلات تعادل با به‌کارگیری اصل کار مجازی استخراج شده‌اند که شامل پنج معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی، کوپل به هم و ناهمگن می‌باشند. معادلات پایداری با روش تعادل در مجاورت به‌دست آورده شده‌اند که شامل پنج معادله دیفرانسیل همگن با مشتقات جزئی خطی، کوپل به هم با ضرایب متغیر است. معادلات تعادل با روش‌های تحلیلی و معادلات پایداری با روش عددی حل شده‌اند. در حل تحلیلی، از تئوری اغتشاشات استفاده شده است. در حل عددی معادلات پایداری، از روش مربعات دیفرانسیلی برای یافتن مقدار ویژه سیستم معادلات خطی کوپل به هم با ضرایب متغیر استفاده گردیده است. اثر پارامترهای هندسی بر بار کمانش نیز بررسی شده است. برای اعتبار سنجی نتایج، از سایر مراجع در حالت‌های خاص و حل عددی به کمک اجزای محدود استفاده می‌شود.

کلمات کلیدی: ورق دایره‌ای- کمانش نامتقارن- مربعات دیفرانسیلی- تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول- تئوری اغتشاشات- اصل کار مجازی- معیار تعادل در مجاورت

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها

فهرست جدول‌ها

فصل ۱:

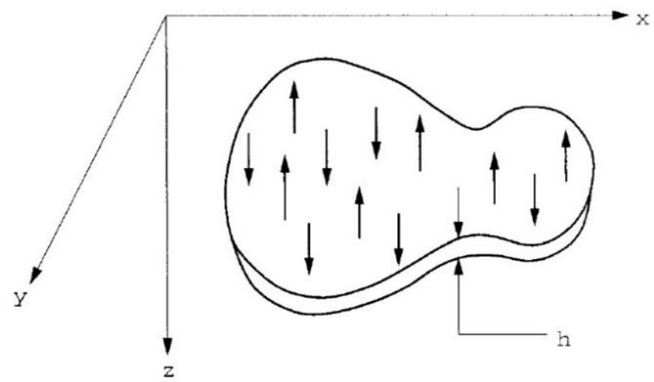
کلیات و مرور مقالات

۱-۱- مقدمه

در این فصل در ابتدا ورق‌ها[1]، تئوری‌های گوناگون موجود به‌منظور تحلیل ورق، پدیده کمانش[2] و معادلات پایداری در ورق‌ها و عوامل موثر بر آن، توضیح داده می‌شود. سپس به بررسی و مرور مقالات ارائه شده در زمینه کمانش ورق‌ها و تاریخچه مطالعات انجام شده در این زمینه پرداخته می‌شود.

۱-۲- مقدمه‌ای بر ورق‌ها

ورق‌ها عضوهای سازه‌ای مسطحی هستند که بین دو صفحه‌ی موازی که وجه[3] نامیده می‌شود و یک سطح استوانه‌ای شکل، که لبه یا مرز خوانده می‌شود؛ محدود شده‌اند. مولدهای[4] سطح استوانه‌ای شکل، بر وجه‌های صفحه عمود هستند. فاصله بین وجه‌های صفحه، ضخامت ورق(h) نامیده می‌شود. ضخامت ورق در مقایسه با سایر مشخصه‌های ابعادی وجه‌ها(طول، عرض، قطر و...)، کوچک است. در نمایش هندسی، ورق‌ها به‌واسطه یکی از مرزهای مستقیم یا منحنی، محدود می‌شوند(شکل ۱-۱).



شکل (۱-۱) نمایش هندسی محدود شدن ورق توسط مرز [1]

1 Plates
2 Buckling
3 Face
4 Generators

بارهای استاتیکی و دینامیکی وارد بر ورق‌ها، عمدتا عمود بر وجه‌های ورق هستند. اثر بار وارده به یک ورق تا حدودی مشابه تیرها می‌باشد؛ بنابراین می‌توان ورق‌ها را با توجه به صلبیت خمشی سازه‌ها و با استفاده از شبکه‌ای از تعداد نامتناهی از تیرها تقریب زد. نیروهای برشی، ممان‌های خمشی و پیچشی را برای مقاومت در برابر بارهای عرضی، تحمل می‌کند.

ورق‌ها در سازه‌های معماری، پل‌ها، سازه‌های هیدرولیکی، پیاده‌روها، ظروف، هواپیماها، موشک‌ها، کشتی‌ها، ابزارها، قطعات ماشین آلات و... به‌کار گرفته می‌شوند[1]. همچنین در میان نمونه‌های بیشتر شناخته شده ورق‌ها، درپوش‌های سوراخ‌های چاه فاضلاب خیابان‌ها، تابلوهای راهنمایی، سقف ساختمان‌ها، دیسک‌های توربین، جداسازها[1] و کف مخزن‌ها، را می‌توان معرفی کرد[2].

ورق‌ها از دیدگاه هندسی به سه دسته تقسیم می‌شوند؛ ورق‌های نازک با خیز[2] کوچک، ورق‌های نازک با خیز بزرگ و ورق‌های ضخیم. براساس معیاری که اغلب برای تعریف ورق نازک استفاده می‌شود، نسبت ضخامت به کوچک‌ترین دهانه ورق باید کمتر از 1/ 20 باشد. یک ماده همگن کاملا خواص یکسانی دارد[2].

ورق‌های نازک در برابر بارهای درون‌صفحه‌ای بسیار مقاوم هستند؛ اما در برابر خمش بسیار ضعیف و انعطاف پذیر هستند. در مهندسی می‌توان بسیاری از کاربردهای ورق‌های ساخته شده از مواد متفاوت، را ملاحظه نمود. به‌عنوان نمونه، ورق‌های بسیار نازک دایره‌ای در درایورهای هارد دیسک کامپیوتر استفاده می‌شوند؛ ورق‌های مستطیلی و ذوزنقه‌ای در باله‌ها[3] ، سطوح افقی دم، فلپ‌ها[4] و باله‌های عمودی هواپیما، استفاده می‌شوند؛ ورق‌های مستطیلی یک سر گیردار[5] به‌عنوان نانو تشدیدگرها[6] در تشخیص دارو به‌کار می‌روند و پنل‌های[7] مستطیلی تخت عمدتا در ساختمان‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرند[3].

---

1 Bulkheads
2 Deflection
3 Wings
4 Flaps
5 Cantilever
6 Nano-Resonators
7 Panels

۱-۲-۱- ورق دایره‌ای

به‌کارگیری ورق‌های دایره‌ای در بسیاری از سازه‌ها نظیر پوشش‌های نازل[1] ، درپوش[2] در مخازن تحت فشار، دیافراگم پمپ، دیسک‌های توربین، دیواره‌ی جداساز[3] در زیر دریایی‌ها و هواپیماها و... بسیار معمول می‌باشد. هنگامی که ورق‌های دایره‌ای تجزیه و تحلیل می‌شوند؛ مناسب‌تر است که معادلات دیفرانسیل حاکم در مختصات قطبی بیان شود. می‌توان این عمل را به‌راحتی با تبدیل مختصات انجام داد[1].

در عمل، عضوهایی که تحت بار عرضی هستند؛ از جمله دریچه‌ها و درپوش‌ها در مخازن تحت فشار، دیافراگم‌های پمپ، کلاچ‌ها[4]، دیسک‌های توریبن و غیره، معمولا به‌شکل دایره‌ای هستند؛ بنابراین بسیاری از برنامه‌های کابردی مهم، در محدوده‌ی فرمول‌بندی ورق‌های دایره‌ای قرار می‌گیرند[2].

۱-۳- تئوری‌های تحلیل ورق

در این بخش به برخی تئوری‌های غیرخطی هندسی ورق‌ها و پوسته‌ها مرور کوتاهی خواهد شد. در تئوری خطی کلاسیک ورق‌ها، دو روش اساسی برای حل مساله وجود دارد؛ روش اول توسط کوشی[5] و پوآسون[6] و روش دوم توسط کیرشهف[7] مطرح گردید؛ روش کوشی و پوآسون براساس بسط جابجایی در در ورق‌ها، برحسب z، فاصله از صفحه میانی بیان می‌شود. اختلاف مربوط به همگرایی این سری‌ها و شرایط مرزی ضروری، این روش را غیرمحبوب ساخته است؛ علاوه بر این، روشی که توسط کیرشهف ارائه شده است، این مزیت را دارد که مفهوم فیزیکی را در تئوری ورق‌ها معرفی کند. فن‌کارمن[8] این

1 Nozzle Covers
2 End Closures
3 Bulkhead
4 Clutches
5 Cauchy
6 Poisson
7 Kirchhoff
8 Von Karman

روش را برای مطالعه تغییر شکل محدود ورق‌ها با در نظر گرفتن جمله‌های غیرخطی، تعمیم داده است. برای ورق‌های چندلایه کامپوزیت و ضخیم‌تر، تئوری رایسنر-مندلین[1] ورق‌ها با در نظر گرفتن کرنش‌های برشی عرضی، معرفی شد. پنج متغیر در این تئوری برای توصیف تغییر شکل استفاده شده است: سه جابجایی صفحه میانی و دو چرخش؛ رویکرد رایسنر-مندلین شرایط مرزی سطح آزاد در سطح بالایی و پایینی ورق را ارضا نمی‌کند و نیروی برشی را در ضخامت ثابت فرض می‌کند. بخش‌هایی از صفحه بعد از تغییر شکل، صفحه باقی می‌مانند. به‌عنوان یک نتیجه از این تقریب، تئوری رایسنر-مندلین ورق‌ها، به یک ضریب تصحیح برشی[2] برای ملاحظات تعادل[3] نیاز دارد؛ به همین دلیل، ردی[4] یک تئوری ورق غیرخطی که جملات درجه سه نسبت به z (در فاصله از سطح میانی ورق) در سینماتیک جابجایی درون‌صفحه‌ای را شامل می‌شد، معرفی کرد. این تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر، تنش برشی عرضی صفر را در سطوح بالایی و پایینی ورق ارضا می‌کند و یک توزیع درجه دو نیروی برشی را در ضخامت، نتیجه می‌دهد. این تئوری تقریب خوبی برای تئوری سه‌بعدی الاستیسیته است و نیاز به ضریب تصحیح برشی نیز ندارد. پنج متغیر مشابه تئوری رایسنر-مندلین برای توصیف سینماتیک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر نیز استفاده می‌شوند؛ اما نیازی به ضرایب تصحیح برشی نیست[3].

۱-۳-۱- تئوری کلاسیک ورق‌ها

تئوری کلاسیک ورق‌ها[5] (CPT)، یک میدان جابجایی انتخاب شده است که فرضیات کیرشهف[6] را ارضا می‌کند؛ شکل(۱-۲) فرضیات کیرشهف را روی بخشی از صفحه نشان می‌دهد. فرضیات کیرشهف موارد زیر را بیان می‌کند[2,4]:

1 Reissner-Mindlin Theory
2 Shear Correction Factor
3 Equilibrium Considerations
4 Reddy
5 Classical Plate Theory
6 Kirchhoff Hypothesis

۱. ورق نازک است و در ابتدا صاف است(انحنایی ندارد).

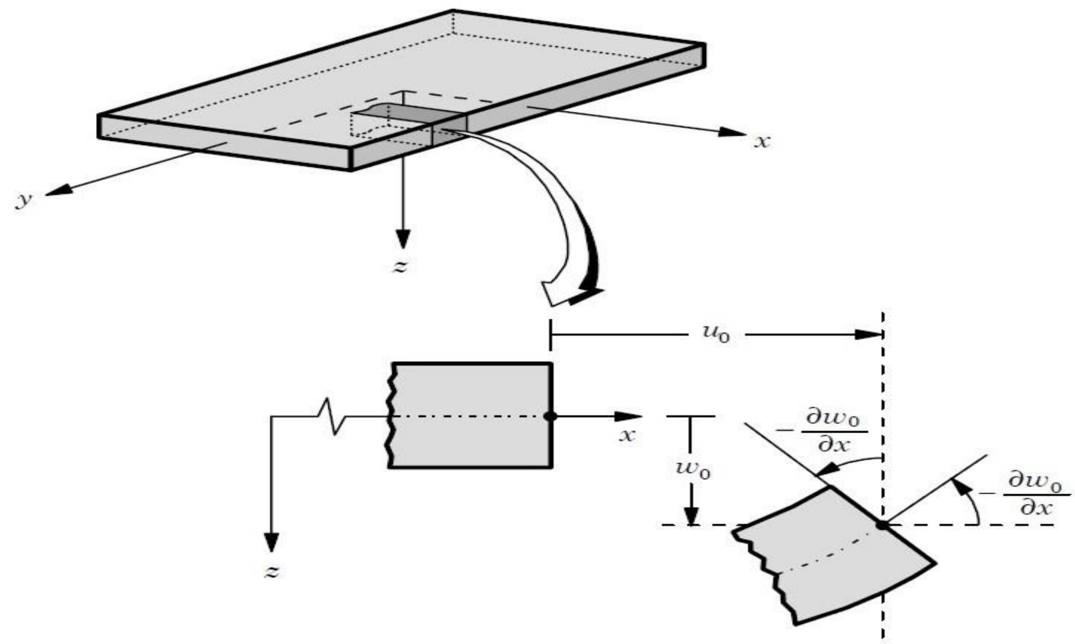
۲. ورق همگن و همسان‌گرد است.

۳. خیز صفحه میانی در مقایسه با ضخامت کوچک است؛ بنابراین از مجذور شیب در مقایسه با یک صرف نظر می‌شود($\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \text{ or } \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \ll 1$)

۴. در اثر خمش صفحه میانی کشیدگی ندارد یا کرنش آن صفر است(در حالت دمایی صدق نمی‌کند)

۵. صفحاتی که عمود بر صفحه میانی بودند؛ پس از تغییر شکل، همچنان به‌صورت صفحه‌ای و عمود بر سطح میانی باقی می‌مانند؛ بنابراین کرنش‌های برشی صفر هستند.

۶. تنش صفحه‌ای است؛ یعنی $\sigma_z = 0$ است و همچنین از تغییرات ضخامت در تعیین شکل صرف نظر می‌شود($\varepsilon_z = 0$)



شکل (۱-۲) هندسه تغییر شکل یافته و نیافته یکی از لبه‌های ورق با فرضیات کیرشهف[5]

فرضیات کیرشهف همان‌طور که در بالا مورد اشاره قرار گرفت، میدان جابجایی زیر را نتیجه می‌دهد.

$$u(x,y,z,t)=u_0(x,y,t)-z\,\frac{\partial w_0}{\partial x}$$
$$v(x,y,z,t)=v_0(x,y,t)-z\,\frac{\partial w_0}{\partial y} \qquad (۱-۲)$$
$$w(x,y,z,t)=w_0(x,y,t)$$

به‌طوری‌که (u_0,v_0,w_0) جاجایی یک نقطه مادی را در $(x,y,0)$ و در جهت (x,y,z)، نشان می‌دهد. باید توجه داشت که (u_0,v_0) به تغییر شکل انبساطی ورق مرتبط هستند؛ در حالی که w_0 خیز خمشی ورق را نشان می‌دهد[4]. ساده‌ترین تئوری خمش ورق‌ها، CPT است[6].

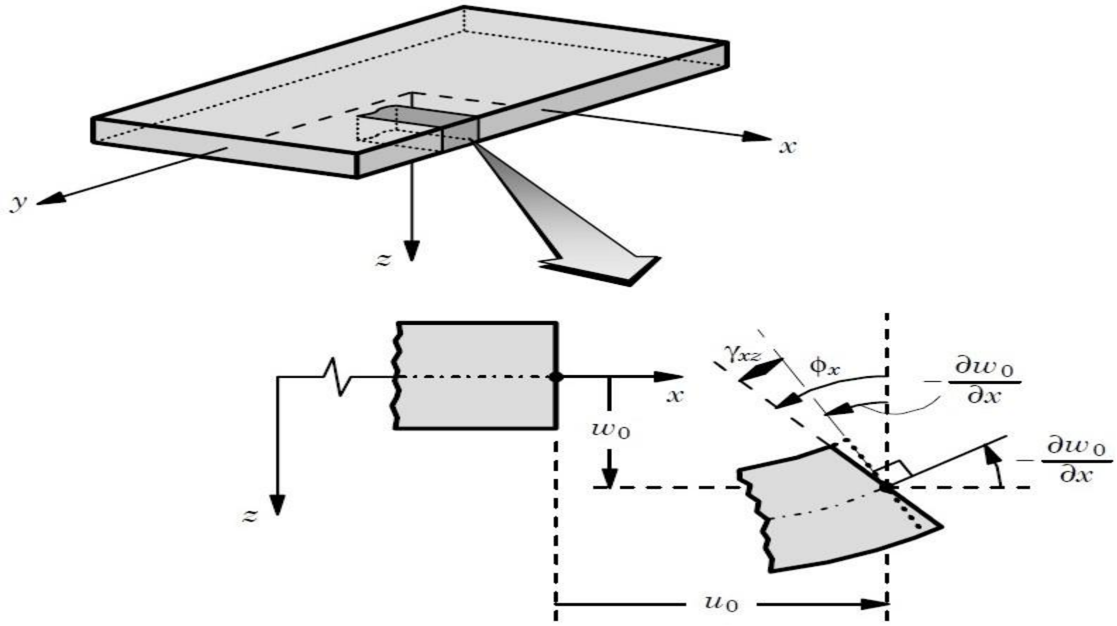
۱-۳-۲- تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول

تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول[1] (FSDT) سینماتیک تئوری کلاسیک را تعمیم می‌دهد. از جمله تفاوت قابل توجه بین تئوری مرتبه اول و کلاسیک، تاثیر تغییر شکل برشی عرضی بر روی خیزهای پیش بینی شده، فرکانس‌ها و بارهای کمانش است. CPT ، خیزهای پیش فرض و فرکانس‌های پیش‌بینی شده همچون بارهای کمانش ورق‌ها با نسبت وجه جانبی به ضخامت 20 یا کمتر(مانند ورق‌های ضخیم) را پیش بینی می‌کند؛ به همین دلیل از FSDT برای تجزیه و تحلیل ورق‌های نسبتا ضخیم استفاده می‌شود. میدان جابجایی FSDT به‌صورت زیر است[4].

$$u(x,y,z,t)=u_0(x,y,t)+z\,\phi_x(x,y,t)$$
$$v(x,y,z,t)=v_0(x,y,t)+z\,\phi_y(x,y,t) \qquad (۱-۳)$$
$$w(x,y,z,t)=w_0(x,y,t)$$

1 First-Order Shear Deformation Plate Theory

به‌طوری که $u_0, v_0, w_0, \phi_x, \phi_y$، توابع مجهول هستند که باید محاسبه شوند و u_0, v_0, w_0، جابجایی‌های یک نقطه را در صفحه $z = 0$ نشان می‌دهند؛ همچنین ϕ_y و ϕ_x به‌ترتیب، چرخش‌های یک نرمال عرضی حول محورهای x و y هستند.



شکل (۱-۳) هندسه تغییر شکل یافته و نیافته یکی از لبه‌های ورق با FSDT [5]

۱-۳-۳- تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم و بالاتر

در اصل می‌توان میدان جابجایی یک ورق را از نظر مختصات ضخامت، به هر مقدار مد نظری بسط داد؛ با این‌حال، با توجه به پیچیدگی جبری و تلاش‌های محاسباتی تئوری‌های مرتبه بالاتر در جهت افزایش دقت در محاسبات، تئوری‌های بالاتر از مرتبه سوم کمتر استفاده می‌شود.

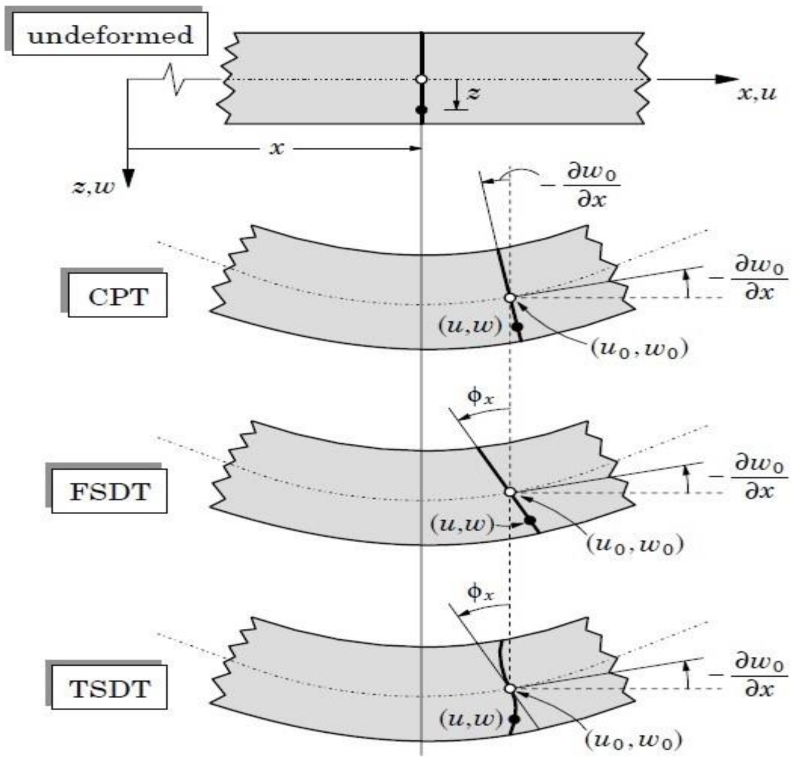
تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم(TSDT) بر اساس فرضیات مشابه تئوری ورق مرتبه اول و کلاسیک بیان می‌شود؛ به‌جزء این‌که خطوط عمود بر صفحه میانی پس از تغییر شکل نه راست باقی می‌مانند و نه عمود بر سطح میانی. میدان جابجایی در TSDT به‌صورت زیر بیان می‌شود[4]:

$$u(x,y,z,t) = u_0(x,y,t) + z\,\phi_x(x,y,t) + \frac{4z^3}{3h^2}\left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}\right) \quad (۴-۱)$$

$$v(x,y,z,t)=v_0(x,y,t)+z\,\phi_y(x,y,t)-\frac{4z^3}{3h^2}\left(\phi_y+\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)$$

$$w(x,y,z,t)=w_0(x,y,t)$$

به‌طوری که u_0,v_0,w_0 ، تعریفی مشابه FSDT دارند و ϕ_x,ϕ_y ، چرخش‌های یک نرمال عرضی حول محورهای x و y هستند. شکل(۱-۴) ، سینماتیک تغییر شکل یک نرمال عرضی روی لبه $y=0$ را در سه تئوری ورق CPT، FSDT و TSDT در یک قاب در باب مقایسه، نمایش می‌دهد.



شکل (۱-۴) هندسه تغییر شکل یافته و نیافته یکی از لبه‌های ورق با فرضیات CPT، FSDT و TSDT در یک قاب[5]

۱-۴- کمانش و معادلات پایداری

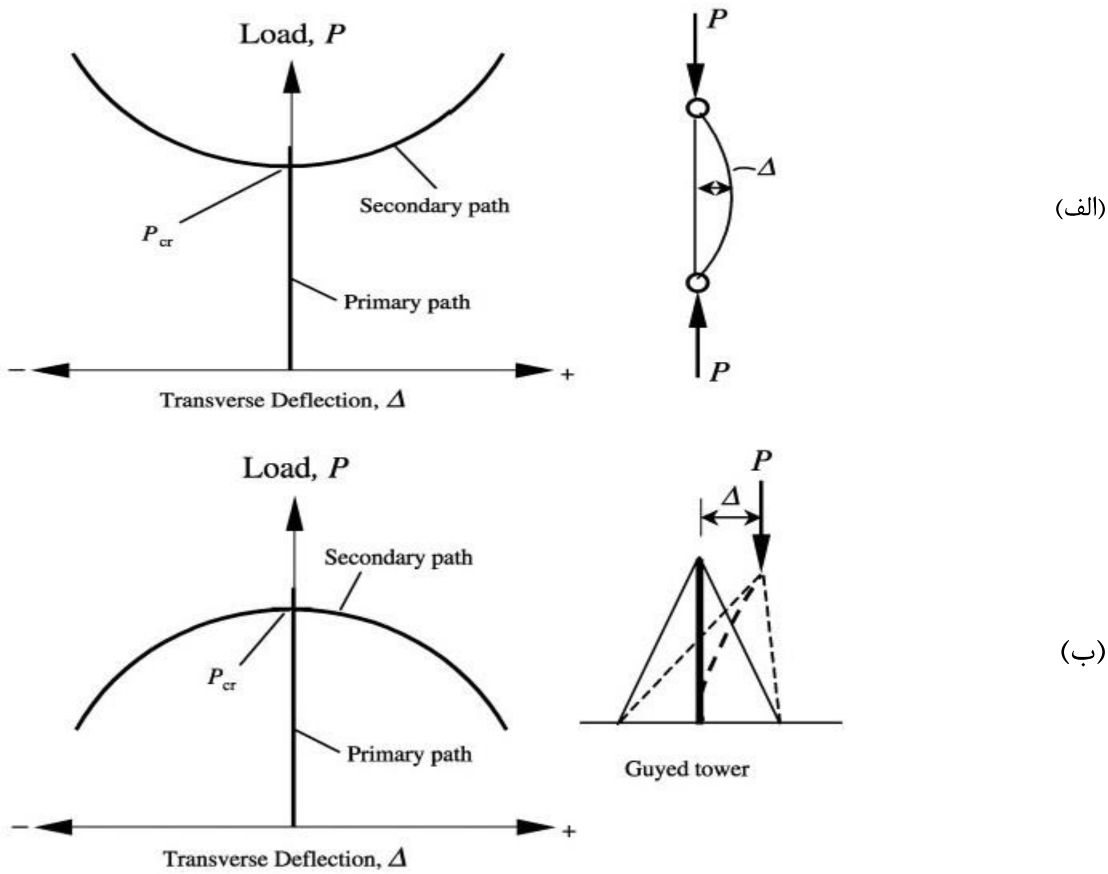
هنگامی که یک سازه باریک و بلند تحت بار فشاری قرار می‌گیرد، برای بارهای کوچک، تقریبا هیچ تغییر قابل توجهی در هندسه و توانایی تحمل بار آن ایجاد نمی‌شود. برای رسیدن به مقدار بار بحرانی[1] سازه به‌ناگهان تغییر شکل زیادی را تجربه می‌کند و ممکن است توانایی تحمل بار را از دست بدهد. در این مرحله، سازه کمانش کرده در نظر گرفته می‌شود؛ معمولا تغییر شکل ناگهانی ایجاد شده عمود بر راستای بار است. برای مثال، هنگامی‌که یک میله تحت نیروی فشاری محوری قرار می‌گیرد در ابتدا کمی کوتاه می‌شود اما در یک بار بحرانی، میله کمانی می‌شود که به آن کمانش میله گفته می‌شود. کمانش با عنوان ناپایداری[2] ساختاری نیز شناخته می‌شود؛ کمانش ممکن است به دو دسته طبقه‌بندی شود:

۱. کمانش دوشاخه‌ای[3]

۲. کمانش بار محدود[4]

در کمانش دوشاخه‌ای، خیز تحت بار فشاری از یک راستا به راستای متفاوت تغییر می‌کند(به‌عنوان مثال از کوتاه شدن محوری به خیز جانبی)؛ باری که در آن دوشاخه‌ای شدن در فضای بار-خیز اتفاق می‌افتد، بار بحرانی کمانش یا به‌طور مختصر بار بحرانی نامیده می‌شود. مسیر خیز که قبل از دوشاخه‌ای شدن وجود دارد، به‌عنوان مسیر اولیه شناخته می‌شود و مسیر خیز بعد از دوشاخه‌ای شدن را مسیر ثانویه یا مسیر پس‌کمانش می‌نامند. باتوجه به ساختار یا نوع بارگذاری، مسیر ثانویه ممکن است متقارن یا نامتقارن باشد و ممکن است که صعود و یا به زیر بار بحرانی کمانش، سقوط کند (شکل ۱-۵).

1 Critical Load
2 Instability
3 Bifurcation Buckling
4 Limit Load Buckling



شکل (۱-۵) کمانش دو شاخه‌ای[7]

(الف): دوشاخه‌ای متقارن و منحنی پس‌کمانش پایدار

(ب): دوشاخه‌ای متقارن و منحنی پس‌کمانش ناپایدار

در کمانش بار محدود، ساختارها یک بار ماکزیمم را بدون هیچ‌گونه دوشاخه‌ای قبلی، به‌دست می‌آورند؛ یعنی با تنها یک مود منفرد(حالت تنها) خیز.

سایر طبقه بندی‌های کمانش براساس مقدار جابجایی(بزرگ یا کوچک بودن)، کمانش دینامیک در مقابل کمانش استاتیک و رفتار ماده از قبیل کمانش الاستیک یا کمانش غیرالاستیک، انجام می‌گیرد[7].

کمانش دوشاخه‌ای الاستیک خطی اعضای ساختاری، ابتدایی‌ترین شکل کمانش است و مطالعه آن یک گام ضروری برای درک رفتار کمانش ساختارهای پیچیده است؛ یعنی سازه‌هایی که رفتار غیرالاستیک،

نقص‌های اولیه، تنش‌های پسماند و غیره دارند. باری که در آن کمانش خطی الاستیک رخ می‌دهد، معمولا پایه‌ی فرمول‌های کمانش استفاده شده در کدهای طراحی را فراهم می‌کند[7].

در عبارتی دیگر، کمانش یا ناپایداری سازه‌ای را می‌توان انتقال ورق از حالت پایدار تعادل به حالت ناپایدار نیز معرفی کرد[8]. اهمیت کمانش در آغاز یک الگوی خیز است به‌طوری‌که اگر بارها بیشتر از مقدار بحرانی خود افزایش یابند، به‌سرعت منجر به خیزهای جانبی بزرگ می‌شود؛ در نتیجه، منجر به تنش‌های خمشی بزرگ و در نهایت به شکستن کامل ورق می‌انجامد[1].

ورق‌های نازک با شکل‌های مختلف بکار رفته در سازه‌های دریایی و هوایی، اغلب در معرض بارهای فشاری نرمال و برشی وارد بر صفحه ی میانی ورق هستند(بارهای درون‌صفحه‌ای [1]). در شرایط خاص، چنین بارهایی می‌توانند موجب ایجاد کمانش ورق شوند. کمانش یا ناپایداری الاستیک ورق‌ها از اهمیت زیادی برخوردار است. بار کمانش به ضحامت ورق بستگی دارد؛ ورق نازک‌تر باشد بار کمانش نیز کمتر خواهد بود. در بسیاری از موارد ممکن است شکست [2] المان‌های ورق نازک به ناپایداری الاستیک نسبت داده شود و نه به عدم وجود استحکام آنها، بنابراین تجزیه و تحلیل کمانش ورق یک بخش جدایی ناپذیر از تجزیه تحلیل کلی سازه را شامل می‌شود[1].

۱-۴-۲- عوامل موثر بر کمانش ورق‌ها

عوامل مهم که بر بارهای بحرانی کمانش، شکل مدهای اولیه و رفتار پس‌کمانشی ورق‌های نازک، تاثیر می‌گذارند و در تحقیقات مورد مطالعه قرار می‌گیرند به شرح زیر می‌باشد[9]:

۱. نسبت ظاهری [3]: به‌عنوان مثال برای یک ورق مستطیلی نسبت ظاهری، نسبت اضلاع آن است و برای یک ورق حلقوی [4] ، نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی می باشد.

1 In-plane Loads
2 Failure
3 Aspect Ratios
4 Annular Plate

۲. شرایط تکیه‌گاهی[1](مرزی): لبه‌های یک ورق با روش‌های مختلفی مقید می‌شوند؛ از نظر ریاضی یک شرط تکیه‌گاهی لبه، به‌صورت یک محدودیت در خیز است. به‌عنوان مثال می‌توان از تکیه‌گاه گیردار[2] ، آزاد و ساده نام برد.

۳. شرایط بارگذاری: لبه یا لبه‌های یک ورق نازک ممکن است تحت تاثیر فشار، کشش، بارگذاری برشی یا ترکیبی از انواع آن در طول لبه‌های مختلف، قرار بگیرد.

۴. تقارن ماده[3] : برای ورق‌های نازک که رفتار ساختاری[4] خاصی را نشان می‌دهند؛ تقارن ماده در یک ورق ممکن است تاثیر قابل توجهی بر مقدار کمینه بار کمانش داشته باشد.

۵. رفتار ساختاری : بررسی‌ها از تاثیر رفتار ساختاری بر کمانش ورق‌های نازک حکایت دارد. رفتار سازه می‌تواند الاستیک، الاستیک-پلاستیک، ویسکوالاستیک و ... باشد.

۶. نقص اولیه[5] : ورق‌های نازک اغلب دارای مقداری خیز عرضی ابتدایی کوچک هستند یا ممکن است تحت بار عرضی کوچک بر حالت کمانش نکرده صاف ابتدایی یک ورق، قرار داشته باشند؛ وجود هر یک از این یا هردو این شرایط یک مقدار نقص اولیه را منجر می‌شود که می‌تواند تاثیر زیادی بر رفتار کمانشی و پس‌کمانشی ورق داشته باشد.

۱-۵- مرور مقالات

ورق‌های دایره‌ای از اجزای مهم در بسیاری از کاربردهای مهندسی سازه هستند که به مدت طولانی موضوع بسیاری از تحقیقات بوده اند[1,10]. در 1891 برایان، بارکمانش ورق‌های مدور را به روش تحلیلی با استفاده از معیار انرژی پایداری به‌دست آورد که اولین کار در این زمینه به‌حساب می‌آید[11]. در 1960 منسفیلد، تحلیل کمانش برای ورق‌های حلقوی بی‌نهایت را با استفاده از حل تحلیلی انجام داد.

1 Support Conditions
2 Clamped
3 Material Symmetry
4 Constitutive Behavior
5 Initial Imperfections

او همچنین بیان کرد که این راه حل برای ورق حلقوی محدود با بارگذاری مشابه با شرایط مرزی خاص نیز مناسب است[12]. در 1975 رامایا و ویجی کومار، پایداری الاستیک ورق‌های حلقوی تحت نیروهای فشاری یکنواخت در امتداد لبه خارجی برای شرایط مرزی گیردار، ساده و آزاد، با بارگذاری متقارن محوری را به‌صورت عددی مورد بررسی قرار دادند. آنها از روش کلاسیک رایلی-ریتز با توابع چندجمله‌ای به‌عنوان تابع مجاز[1] استفاده کردند[13]. در 1981 ردی و همکاران، با استفاده از روش تفاضلات محدود، رفتار پس کمانش ورق‌های حلقوی ایزوتروپیک و ارتوتروپیک تحت اثر بارگذاری یکنواخت شعاعی در داخل و خارج را، با شرایط تکیه‌گاهی مختلف به‌صورت تحلیلی مورد بررسی قرار دادند و برای حل مساله از سری‌های چبیشف استفاده کردند [14]. در 1986 روستوس و یانگ، کمانش نامتقارن ورق‌های مدور با رینگ تقویت کننده را به روش تحلیلی مورد بررسی قرار دادند. اثر تقویت کننده‌ها از طریق سفتی خمشی و سفتی پیچشی با توجه به نادیده گرفتن استحکام محوری، به‌دست آمد[15]. در 1992 ژی رونگ، ارتعاشات غیرخطی متقارن محوری و کمانش حرارتی یک ورق حلقوی ایزوتروپیک تحت دمای یکنواخت با شرایط گیردار را بر اساس اصل همیلتون، مورد بررسی قرار داد. او از دو تکنیک تئوری اغتشاشات[2] و روش تفاضلات محدود برای حل استفاده کرد[16]. در 1997 فلدمن و ابودی، با استفاده از یک روش بر اساس ترکیب میکرومکانیک و رویکردهای ساختاری، کمانش الاستیک ورق‌های تابعی[3](FGM) تحت بار فشاری درون‌صفحه‌ای را به روش تحلیلی بررسی کردند[17]. در 1998 سعادت‌پور و همکاران، با استفاده از روش گلرکین همراه با مختصات‌های طبیعی ورق به‌عنوان تحلیل ورق‌های عمومی، به تحلیل عددی رفتار کمانشی ورق‌های لوزی، مستطیلی و ذوزنقه‌ای پرداختند و بار بحرانی را برای آنها محاسبه نمودند[18]. در 2002 نجفی‌زاده و اسلامی، دمای بحرانی کمانش ورق‌های مدور ایزوتروپیک همگن و همچنین ورق‌های FGM را براساس فرمول‌بندی تئوری مرتبه اول، با استفاده از روش انرژی به‌طور تحلیلی به‌دست آوردند[19]. در 2002 اکبرف و رضایف، کمانش متقارن یک ورق

---

1 Admissible
2 Perturbation Theory
3 Functionaly Graded Material

مدور ضخیم کامپوزیتی(الاستیک-ویسکوالاستیک) که یک ترک به‌شکل یک سکه کوچک دارد را مطالعه کردند. آن‌ها تئوری خطی‌شده سه بعدی پایداری را برای استخراج معادلات به‌کار بردند و در نهایت نتایج عددی را با استفاده از تبدیل لاپلاس و روش اجزای محدود (FEM)[1] به‌دست آورند و با نمونه‌های شناخته شده از مطالعات کامپوزیت‌های الاستیک، مقایسه کردند[20]. در 2003 لیو و همکاران، کمانش و پس‌کمانش ورق‌های FGM پیزوالکتریک تحت بار حرارتی، الکتریکی و مکانیکی را به روش تحلیلی مورد بررسی قرار دادند که برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی حاکم از یک روش الگوریتم تکرار گلرکین- مربعات دیفرانسیلی (DQ)[2] و برای محاسبه کرنش‌های برشی عرضی از تئوری ورق تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر ردی استفاده کردند[21]. ما و وانگ در 2003، خمش غیرخطی و پس‌کمانش ورق‌های FGM تحت بارهای مکانیکی و حرارتی را در حالت متقارن محوری با استفاده از تئوری ورق فن‌کارمن غیرخطی کلاسیک مورد بررسی تحلیلی قرار دادند و برای حل عددی از یک روش حل شوتینگ استفاده کردند[22,23]. در 2004 ما و وانگ، با استفاده از TSDT و تئوری کلاسیک و با فرض این‌که خواص مکانیکی ورق‌های FGM به‌طور پیوسته در امتداد ضخامت تغییر می‌کند، خمش متقارن محوری و کمانش ورق‌های مدور FGM ایزوتروپیک، تحت بار یکنواخت را مورد بررسی قرار دادند[24]. اوآنگ و وانگ در 2005، برای معادلات سه بعدی حاکم بر رفتار کمانشی متقارن محوری ورق با استفاده از تئوری کلاسیک ورق‌های نازک، حل تحلیلی مناسبی ارائه کرد و بار بحرانی را برای ورق با شرایط مرزی مفصلی و گیردار محاسبه کرد[25]. در 2006 کومان و هاتون، یک گزارش برای بررسی تحلیلی و عددی ورق‌های حلقوی با لبه داخلی ساده و لبه خارجی آزاد و بار کششی بر روی لبه داخلی، با استفاده از خطی سازی معادلات دانل و فن‌کارمن ارائه دادند. آنها از روش ماتریس مرکب برای حل معادلات حاکم بر کمانش استفاده کردند[26]. در 2007 لی و همکاران، پس کمانش مکانیکی و حرارتی غیرخطی متقارن محوری ورق مدور FGM با نقص اولیه، با شرایط مرزی گیردار تحت بار مکانیکی و توزیع حرارت غیریکنواخت

1 Finite Element Method
2 Differential Quadrature

در ضخامت را با استفاده از تئوری ورق فن‌کارمن بررسی کردند. آن‌ها از روش شوتینگ برای حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی استفاده کردند[27]. در 2008 نجفی‌زاده و حیدری، یک حل تحلیلی دقیق برای کمانش ورق‌های مدور FGM براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر تحت فشار یکنواخت ارائه دادند. آنها نتایج به‌دست آمده را با نتایج محاسبات از طریق FSDT و CPT مقایسه کردند[28]. در 2009 سعیدی و همکاران، خمش متقارن محوری و کمانش ورق‌های مدور صلب FGM کامل را بر اساس TSDT و بدون محدودیت مورد مطالعه قرار دادند؛ این تئوری یک شرط برشی-آزاد در بالا و پایین سطح صفحه ایجاد می‌کند که می‌تواند به‌ویژه هنگامی‌که ورق در معرض اصطکاک تماسی قرار دارد یا وقتی که در یک میدان جریان ارائه می‌شود که در آن تنش برشی لایه مرزی قابل توجه است، مفید باشد. در نهایت نتایج عددی به‌دست آمده را با مقادیر حاصل از FSDT مقایسه کردند[29]. فرج‌پور و همکاران در 2011، رفتار کمانشی متقارن محوری ورق‌های مدور در مقایس نانو، تحت نیروهای درون‌صفحه‌ای را با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرمحلی[1]، به روش تحلیلی مورد بررسی قرار دادند[30]. در 2012 ناتسوکی و همکاران، کمانش ورق‌های گرافنی دو لایه مدور را با استفاده از تئوری ورق‌های نازک مورد بررسی تحلیلی قرار دادند. آن‌ها یک روش تحلیلی برای محاسبه بار کمانش ورق مد نظر ارائه دادند و با استفاده از آن رویکرد تحلیلی، تاثیر شرایط مرزی، اندازه ورق‌ها و شکل مدهای مختلف کمانش را مورد بررسی قرار دادند[31]. در 2013 تای و چوی، حل‌های تحلیلی برای تحلیل خمش، کمانش و ارتعاش ورق‌های مستطیلی نازک را با استفاده از تئوری‌های ورق اصلاح شده دو متغیره[2] معرفی کردند. آنها معادلات حرکت را از اصل همیلتون به‌دست آوردند[32]. لال و آهلاوات در 2015، روش تبدیل دیفرانسیل(یک رویکرد نیمه تحلیلی) را برای تحلیل کمانش و ارتعاش آزاد متقارن محوری ورق‌های مدور FGM ، مورد استفاده قرار دادند. آنها از CPT استفاده کردند[33]. در 2016 مجاهدین و همکاران، کمانش ورق‌های FGM متخلخل[3] را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه

1 Nonlocal
2 Two Variable Refined Plate Theories
3 Porous

بالاتر بررسی کردند که شرایط مرزی ورق، گیردار فرض شده است؛ در نهایت نتایج به‌دست آمده را با نتایج حاصل از FSDT و CPT ، مقایسه کردند[34]. در 2016 فان و همکاران، رفتار کمانش و خمش ورق مدور ساخته شده با فلز فوم[1] را مورد تحلیل قرار دادند. آن‌ها از FSDT برای تحلیل خمش متقارن محوری و از تئوری کلاسیک برای تحلیل کمانش استفاده کردند و معادلات نهایی را با استفاده از روش شوتینگ حل کردند[35]. در 2016 آهلاوات و لال، کمانش و ارتعاشات ورق‌های مدور FGM چندجهته[2] که روی یک پایه الاستیک قرار دارند و تحت بار یکنواخت صفحه‌ای هستند را بررسی کردند؛ خواص مکانیکی در دو جهت شعاعی و عرضی متفاوت فرض شده و همچنین روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته(GDQ) برای حل معادلات به‌کار گرفته شده است[36]. در 2016 ژانگ و ژائو، کمانش دینامیک یک ورق مدور FGM را با فرض این‌که سطح پایینی ورق تحت شوک حرارتی یکنواخت می‌باشد. بر اساس اصل همیلتون مورد مطالعه قرار دادند؛ آن‌ها مسأله کمانش ورق مد نظر را با روش همتافته[3] حل نمودند و تاثیر معادلات ساختاری، پارامترهای هندسی سازه و بار شوک حرارتی بر بار بحرانی را بررسی نمودند[37]. در 2017 باقری و همکاران، رفتار کمانش نامتقارن ورق‌های حلقوی همگن ایزوتروپیک که روی یک پایه الاستیک نوع وینکلر[4] قرار دارند و تحت حرارت یکنواخت هستند را مورد بررسی قرار دادند. برای به‌دست آوردن معادلات حاکم و شرایط مرزی از FSDT استفاده کردند و با استفاده از معیار تعادل در مجاورت معادلات پایداری را به‌دست آوردند؛ معادلات شامل دو بخش مربوط به ناحیه تماس و ناحیه بدون تماس هستند؛ آن‌ها با استفاده از یک روش پیوندی شامل توابع مثلثاتی تحلیلی و روش GDQ معادلات را حل کردند[38]. در 2017 فیضی و خورشیدوند، رفتار پس‌کمانش متقارن محوری یک ورق مدور همگن ایزوتروپیک ساخته شده از مواد متخلخل تحت فشار شعاعی یکنواخت را با شرایط مرزی گیردار و تکیه‌گاه ساده مورد بررسی قرار دادند؛ معادلات حاکم را بر اساس CPT و اعمال رابطه کرنش-جابجایی سندرز، به‌دست آوردند و با روش حل عددی شوتینگ معادلات حاکم را حل کردند[39].

1 Foamed Metal
2 Multi-Directional
3 Symplectic Method
4 Winkler

در 2017 یانگ و همکاران، رفتار کمانش و پس‌کمانش تیرهای نانوکامپوزیت چندلایه FGM که با مقدار کمی از پلاکت‌های گرافنی[1] تقویت شده است و روی یک پایه الاستیک قرار گرفته را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها به کمک FSDT معادلات غیرخطی حاکم را استخراج کرده، سپس به‌وسیله روش DQ آن‌ها را به یک دستگاه معادلات جبری قابل حل تبدیل کردند[40]. در 2017 میرصالحی و همکاران، ناپایداری مکانیکی و ارتعاشات آزاد میکرو ورق‌های FGM تحت بار فشاری در طول عرض ورق را بر اساس تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده[2] و با استفاده از روش نوار محدود اسپلاین[3] مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها تاثیر پارامتر طول، شرایط مرزی و ابعاد میکرو ورق‌ها بر بار کمانش و ارتعاشات طبیعی را مورد بررسی قرار دادند[41]. در 2018 محمدی‌مهر و همکاران، کمانش، خمش و ارتعاشات ورق‌های ساندویچی مدور و حلقوی میکروکامپوزیت ایزوتروپیک و همگن را که تحت بار مکانیکی، گرمایی، مغناطیسی و هیدرولیکی قرار دارند را با استفاده از روش DQ حل کردند؛ آن‌ها از FSDT و تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده برای استخراج معادلات استفاده کردند[42]. در 2018 مگناکا بلانزی و همکاران، کمانش یک ورق ساندویچی مدور سه لایه متقارن که شامل دو وجه و یک هسته فوم فلزی می‌باشد را مورد بررسی قرار دادند که خواص مکانیکی هسته ورق در طول شعاعش متفاوت است و در وجه‌ها ثابت می‌ماند؛ آن‌ها معادلات تعادل را بر اساس اصل انرژی پتانسیل کل ساکن، به‌دست آوردند و در نهایت مدل تحلیلی را با یک حل عددی المان محدود تایید کردند[43]. در 2018 ابوالقاسمی و همکاران، اثر تنش پیش‌کمانش بر تعیین بار کمانش در ورق‌های مستطیلی محدود ایزوتروپیک با برش‌های دایره‌ای که تحت بارگذاری یکپارچه و دوطرفه قرار داشتند را مورد بررسی قرار دادند؛ آن‌ها از روش پتانسیل مختلط برای محاسبه تنش‌های پیش‌کمانش توزیع شده در اطراف برش در ورق با ابعاد محدود، استفاده کردند و انرژی پتانسیل ورق را توسط FSDT محاسبه کردند؛ در نهایت با روش ریتز بار کمانش را محاسبه نمودند[44]. در 2019 فیوضات و مفید، با یک روش تحلیلی خمش استاتیک یک ورق مدور/ حلقوی

1 Graphene Platelets
2 Modified Strain Gradient
3 Spline Finite Strip Method

متقارن محوری که روی یک پایه ناهمگن وینکلر قرار دارد را با شرایط مرزی مختلف مورد بررسی قرار دادند؛ برای این منظور، از بسط سری‌های نامحدود تابع خیز استفاده کردند تا معادلات دیفرانسیل حاکم را به یک سیستم قابل حل جدید از روابط بازگشتی تبدیل کنند؛ آن‌ها به‌منظور اثبات این رویکرد تحلیلی نتایج خود را با یک مثال تحلیل المان محدود مقایسه کردند[45]. در 2019 باقری و همکارن، به بررسی رفتار کمانش یک ورق حلقوی چرخشی همگن ایزوتروپیک که تحت یک فشار یکنواخت در دو لبه بیرونی و درونی قرار دارد، پرداختند؛ همچنین فرض کردند که ورق با یک سرعت زاویه‌ای ثابت در حال چرخش است؛ آن‌ها معادلات را بر اساس FSDT که برای ورق‌های نازک و نسبتا ضخیم مناسب است، فرمول‌بندی کردند و با روش معیار تعادل در مجاورت[1] معادلات خطی شده پایداری را استخراج کرده و از دو روش GDQ و توابع مثلثاتی برای تحلیل ورق استفاده نمودند[46]. در 2019 لال و آهلاوات، یک تحلیل بر بار پیرامونی هیدرواستاتیک روی ارتعاشات آزاد و کمانش متقارن محوری ورق‌های مدور نسبتا ضخیم FGM براساس FSDT ارائه دادند؛ معادلات دیفرانسیل حاکم که به‌وسیله اصل همیلتون استخراج شده، برای شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده و گیردار را با روش مربعات دیفرانسیل هارمونیک[2] حل کردند[47]. در 2019 ژانگ و همکاران، کمانش و پس‌کمانش حرارتی دینامیکی ورق‌های مدور FGM با نقص اولیه را بر مبنای تئوری غیرخطی ورق مورد بررسی قرار دادند؛ آن‌ها معادلات دینامیک غیرخطی حاکم را با روش‌های بسط سری‌ها و روش رانگ-کوتا[3] به‌صورت عددی حل کردند و حساسیت کمانش بحرانی و پس‌کمانش دینامیک را به ماکزیمم خیز ورق‌ها، پیش‌بینی کردند[48]. در 2019 هوآنگ و همکاران، تاثیر تقریب سینماتیک در تحلیل پس‌کمانش سازه‌های ساندویچی را مورد بررسی قرار دادند؛ به‌طوری که به کمک توابع چندجمله‌ای هسته را تخمین زده و پوسته را توسط تئوری تیر اویلر-برنولی[4] مدل کردند؛ آن‌ها معادلات غیرخطی نتیجه شده را به‌وسیله روش عددی حل کردند[49]. در 2019 باقری و همکاران، کمانش ورق‌های نسبتا ضخیم حلقوی همگن ایزوتروپیک، تحت گشتاور روی لبه

---

1 Adjacent Equilibrium Criterion
2 Harmonic
3 Runge–Kutta
4 Euler-Bernoulli Beam Theory

خارجی را مورد بررسی قرار دادند؛ آن‌ها معادلات حاکم در مختصات قطبی را به کمک تئوری ورق مندلین استخراج کردند و با روش DQ حل کردند. آن‌ها نتایج را برای ترکیبات مختلف شرایط مرزی ساده، گیردار و آزاد مورد بررسی قرار دادند[50]. در 2019 یانلی و همکاران، کمانش ورق‌های نازک با سوراخ دایره‌ای تحت خمش را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها با روش عددی FE و به کمک نرم افزار آباکوس[1] ورق سوراخ شده را تحت خمش، طراحی کردند و تاثیر نسبت‌های مختلف ابعاد، نسبت عرض به ضخامت، اندازه و موقعیت سوراخ‌ها و همچنین فاصله بین سوراخ‌ها را بررسی کردند[51]. در 2020 مویتا و همکاران، فرمول‌بندی برای کمانش خطی و برای تحلیل هندسه غیرخطی ورق‌های کامپوزیت چند لایه و ورق‌های FG، تحت بارهای یکنواخت درون‌صفحه‌ای تک محوره‌ی مکانیکی و بارهای حرارتی مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها از روش FE و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر استفاده کردند و حل‌های خطی را با مدل‌های عددی مقایسه کردند[52].

1 Abaqus

۱-۶- مرور کوتاه و جدولی مقالات مطالعه شده

نویسنده	سال	شکل سازه	جنس ماده	نوع بارگذاری	سینماتیک	تئوری	نوع تحلیل	روش حل
برایان [11]	1891	مدور- مستطیل	الاستیک	نامتقارن	خطی	-	کمانش	تحلیلی
منسفیلد [12]	1960	حلقوی	الاستیک-همگن	متقارن	خطی	-	کمانش	تحلیلی
رامایا [13]	1974	حلقوی	الاستیک	یکنواخت	خطی	-	پایداری	رایلی-ریتز
ردی [14]	1980	حلقوی	ایزوتروپیک-ارتوتروپیک	یکنواخت	غیرخطی	تفاضلات محدود	پس‌کمانش	سری‌های چبیشف
ریستوس [15]	1986	مدور	-	نامتقارن	خطی	-	کمانش	تحلیلی
ژی رونگ [16]	1992	حلقوی	ایزوتروپیک(الاستیک)	متقارن-یکنواخت	غیرخطی	اصل همیلتون	ارتعاشات-کمانش	تئوری اغتشاشات -تفاضلات محدود
فلدمن [17]	1977	مستطیل	FGM(الاستیک-غیرهمگن)	متقارن	خطی	CPT	کمانش	تحلیلی
برادفورد [18]	1988	لوزی-مستطیلی-ذوزنقه	الاستیک	نامتقارن	خطی	-	کمانش	گلرکین
نجفی‌زاده [19]	2002	مدور	ایزوتزوپیک(همگن)-FGM	یکنواخت(حرارتی)	خطی-غیرخطی	FSDT	کمانش	روش انرژی
اکبرف [20]	2002	مدور	کامپوزیت(الاستیک-ویسکوالاستیک)	متقارن	غیرخطی	تئوری خطی شده سه بعدی پایداری	کمانش	تبدیل لاپلاس-FEM

لیو [21]	2003	مستطیلی	پیزوالکتریک-FGM	یکنواخت	غیرخطی	مرتبه بالاتر	کمانش-پس‌کمانش	گلرکین-DQM
ما [22]	2003	مدور	FGM	نامتقارن-یکنواخت	غیرخطی	CPT	پس‌کمانش	روش شوتینگ
ما [23]	2003	مدور	FGM	یکنواخت	غیرخطی	CPT	خمش-پس‌کمانش	روش شوتینگ
ما [24]	2004	مدور	FGM-ایزوتروپیک	متقارن محوری-یکنواخت	غیرخطی	CPT - TSDT	خمش-کمانش	تحلیلی
وانگ [25]	2005	مدور	الاستیک	متقارن	خطی	CPT	کمانش	تحلیلی
کومان [26]	2006	حلقوی	الاستیک(غیرهمگن)	یکنواخت	خطی	دانل-فن‌کارمن	کمانش	ماتریس مرکب
لی [27]	2007	مدور	FGM	متقارن(غیریکنواخت)	غیرخطی	فن‌کارمن	پس‌کمانش	شوتینگ
نجفی زاده[28]	2008	مدور	FGM	یکنواخت	غیرخطی تعادل خطی	مرتبه بالاتر	کمانش	حل دقیق
سعیدی [29]	2009	مدور	FGM-ناهمگن	متقارن	خطی	مرتبه سوم بدون محدودیت	خمش-کمانش	عددی
فرج‌پور [30]	2011	مدور	نانو-الاستیک-همگن	متقارن-یکنواخت	خطی	الاستیسته غیرمحلی	کمانش	حل دقیق
ناتسوکی [31]	2012	مدور	الاستیک	نامتقارن	خطی	CPT	کمانش	تحلیلی
تای [32]	2013	مستطیل	ایزوتروپیک	نامتقارن	خطی	همیلتون- ورق اصلاح شده دو متغیره	خمش-کمانش-ارتعاشات	تحلیلی
لال [33]	2015	مدور	FGM	متقارن-یکنواخت	غیرخطی	CPT	کمانش-ارتعاش آزاد	تبدیل دیفرانسیل

مجاهدین [34]	2016	مدور	FGM-متخلخل-همگن-ایزوتروپیک	متقارن-نامتقارن	غیرخطی	مرتبه بالاتر	کمانش	رابطه ساندرز-روش انرژی
فان [35]	2016	مدور	فوم	متقارن محوری-یکنواخت	خطی	FSDT - CPT	خمش-کمانش	شوتینگ
آهلاوات [36]	2016	مدور	FGM	متقارن محوری-یکنواخت	-	-	کمانش-ارتعاشات	GDQM
ژانگ [37]	2016	مدور	FGM-الاستیک	حرارتی-یکنواخت	خطی	اصل همیلتون	کمانش	روش همتافته
اسلامی [38]	2017	مدور	همگن-ایزوتروپیک	نامتقارن-یکنواخت	خطی	FSDT	کمانش	توابع مثلثاتی(روش پیوندی)-GDQM
فیضی [39]	2017	مدور	متخلخل(همگن-ایزوتروپیک)	متقارن محوری	غیرخطی	کلاسیک	پس‌کمانش	شوتینگ
یانگ [40]	2017	تیر	FGM-ایزوتروپیک-همگن	یکنواخت	غیرخطی	FSDT	کمانش-پس‌کمانش	DQM
میرصالحی[41]	2017	مستطیلی	FGM	فشاری-متقارن	خطی	گرادیان کرنش اصلاح شده	کمانش-ارتعاشات آزاد	روش نوار محدود اسپلاین
محمدی مهر[42]	2018	مدور-حلقوی	کامپوزیت(ایزوتروپیک- همگن)-الاستیک	متقارن محوری	خطی	FSDT - گرادیان کرنش اصلاح شده- اصل همیلتون	خمش-کمانش-ارتعاشات	DQM
مگناکا بلانزی[43]	2018	مدور-ساندویچی	الاستیک	فشاری-متقارن	غیرخطی	CPT	کمانش	تحلیلی-المان محدود

ابوالقاسمی[44]	2018	مستطیلی	ایزوتروپیک	یکپارچه-دوطرفه-درون‌صفحه‌ای	غیرخطی	FSDT	کمانش	روش ریتز
فویوزات[45]	2019	مدور-حلقوی	الاستیک	متقارن محوری	خطی	CPT	خمش	فوربنیوس تعمیم یافته- سری‌های نیرو بی‌نهایت
باقری[46]	2019	مدور	ایزوتروپیک-همگن	نامتقارن-یکنواخت	غیرخطی	FSDT	پایداری	GDQM -توابع مثلثاتی
لال[47]	2019	مدور	FGM-الاستیک	متقارن محوری	خطی	FSDT - اصل انرژی همیلتون	کمانش-ارتعاشات	مربعات دیفرانسیلی هارمونیک
ژانگ[48]	2019	حلقوی	FGM-ناهمگن-الاستیک	حرارتی	غیرخطی	CPT	کمانش-پس‌کمانش	بسط سری‌ها-روش رونگه-کوتا
هوآنگ[49]	2019	ساندویچی	الاستیک-ایزوتروپیک	فشاری	غیرخطی	اویلر-برنولی	پس‌کمانش	روش عددی تقریبی-المان محدود
باقری[50]	2019	حلقوی	ایزوتروپیک-همگن-الاستیک	گشتاور	غیرخطی	مندلین	کمانش	DQM
یانلی[51]	2019	مستطیلی	الاستیک	خمش	-	-	کمانش	FEM
مویتا [52]	2020	مستطیل	FGM-کامپوزیت	حرارتی-مکانیکی-متقارن-نامتقارن	خطی-غیرخطی	مرتبه بالاتر	کمانش	FEM

۱-۷- نوآوری

با توجه به مطالعات انجام شده در اکثر تحقیقات صورت گرفته در زمینه کمانش ورق‌های مدور از تئوری کلاسیک استفاده شده است؛ همچنین بسیاری از حل‌ها، مبتنی بر روش‌های عددی است. در این تحقیق تلاش می‌شود حل کمانش نامتقارن ورق‌های دایره‌ای با در نظر گرفتن FSDT به کمک روش‌های تحلیلی- عددی انجام شود.

۱-۸- جمع‌بندی

در این فصل ابتدا در خصوص ورق‌ها و به‌طور خاص در مورد ورق مدور توضیحاتی ارائه شد؛ سپس به انواع تئوری‌های تحلیل ورق به تفصیل پرداخته شد. همچنین به توضیح پدیده کمانش پرداخته شد و عوامل موثر در کمانش ورق‌ها شامل نوع بارگذاری، شرایط مرزی، رفتار ماده و غیره مورد بررسی قرار گرفت. در انتها به بررسی تاریخچه و مرور مقالات ارائه شده در زمینه کمانش و ورق‌های مدور پرداخته شده است.

فصل ۲:

استخراج معادلات تعادل و پایداری

۲-۱- مقدمه

در این فصل معادلات تعادل حاکم بر مساله با استفاده از اصل کار مجازی استخراج می‌گردد. با در نظر گرفتن میدان جابجایی ورق بر اساس FSDT و به‌کار گرفتن روابط فن‌کارمن، معادلات تعادل به‌دست می‌آیند. در ادامه معادلات پایداری بر اساس معیار تعادل در مجاورت استخراج می‌شوند. فرضیات زیر نیز بر مساله حاکم می‌باشد.

۱. ورق، ایزوتروپ و همگن است.

۲. ورق، توخالی[1] است.

۳. شرایط مرزی متقارن محوری است.

۴. بارگذاری به‌صورت صفحه‌ای(In-plane)، گسترده و تابعی مثلثاتی در راستای محیطی است. این بارگذاری، فشار یکنواخت روی لبه خارجی است ($\left(p = p_0 \times \mathbf{cos}\left(n \times \theta\right)\right)$).

۵- رابطه تنش-کرنش خطی است(قانون هوک).

۶. سینماتیک مساله با روابط فن کارمن تعریف می‌شود.

۷. میدان جابجایی بر اساس FSDT و بدون درنظرگرفتن تغییرات ضخامت است(خیز عرضی در تمام ضخامت یکسان است).

۸. معادلات تعادل به‌صورت تحلیلی(تئوری اغتشاشات) حل می‌شود.

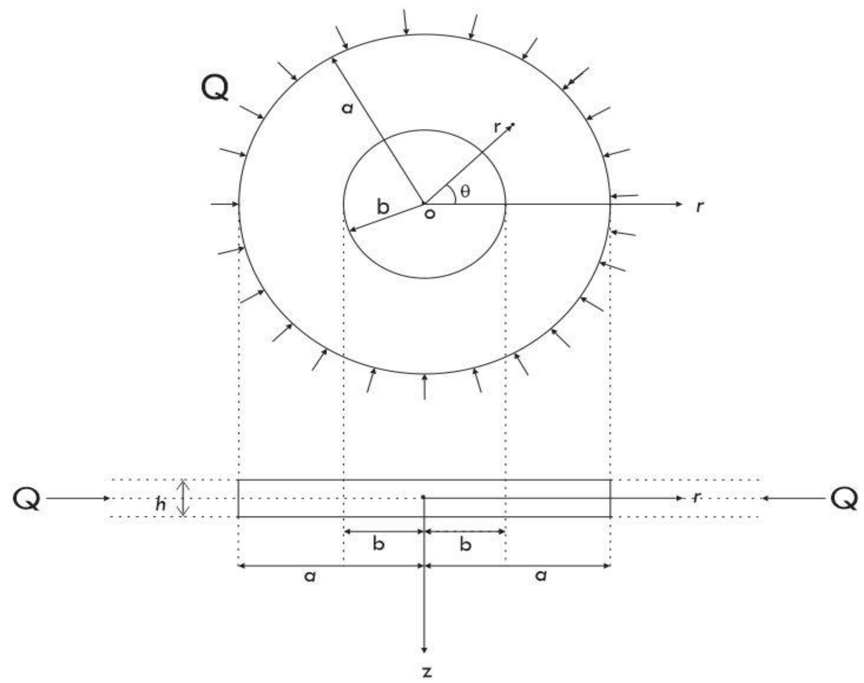
۹. معادلات پایداری با روش DQ حل می‌شود.

---

1 Annular

۲-۲- بیان مساله

مطابق شکل(۲-۱) ورق دایره‌ای با شعاع خارجی a، شعاع داخلی b و ضخامت h مد نظر است. ورق تحت بار شعاعی استاتیکی گسترده Q بر واحد طول در محیط صفحه میانی می‌باشد. فرمول بندی مساله نیز براساس مختصات استوانه‌ای (r,θ,z) بوده که در آن r جهت شعاع، θ در راستای محیطی محور و z راستای عمود بر سطح میانی، می‌باشد.



شکل (۲-۱) هندسه و دستگاه مختصات ورق

۲-۳- اصل کار مجازی

اصل جابجایی مجازی بیان می‌کند که کار مجازی انجام شده توسط نیروهای حقیقی، صفر می‌باشد، تنها و تنها اگر جسم در حالت تعادل باشد[53]:

$$\delta W = \delta W_I + \delta W_E = 0 \qquad (۱-۲)$$

در رابطه(۲-۱)، δW کار مجازی انجام شده کل می‌باشد و δW_I کار مجازی نیروهای داخلی و δW_E کار مجازی نیروهای خارجی می‌باشند که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند[4]:

$$\delta W_I = \int_\Omega \sigma_{ij}\,\delta\varepsilon_{ij}\,dv = \int_\Omega (\sigma_r \delta\varepsilon_r + \sigma_\theta \delta\varepsilon_\theta + \sigma_z \delta\varepsilon_z + \tau_{r\theta}\delta\gamma_{r\theta} + \tau_{z\theta}\delta\gamma_{z\theta} + \tau_{rz}\delta\gamma_{rz})dv \tag{۲-۲}$$

$$\delta W_E = -\left(\int_\Omega f\,.\delta u dv + \int_{\Gamma_\sigma} T\,.\delta u ds\right) \tag{۳-۲}$$

که در این روابط Ω دامنه تعریف، Γ_σ قسمتی از مرز که به آن نیرو وارد می‌شود، dv المان حجم و ds المان سطح را بیان می‌کنند؛ همچنین دیگر مولفه‌های این روابط u بردار مولفه‌های جابجایی، T بردار اثر[1] و f بردار نیروهای حجمی می‌باشند. به‌طور کلی اصل جابجایی‌های مجازی برای به‌دست آوردن معادلات حرکت و شناسایی شرایط مرزی هندسی و نیرویی، مورد استفاده قرار می‌گیرد[4].

۲-۴- استخراج معادلات حاکم

به‌دلیل کوچک بودن بعد ضخامت در ورق‌ها، اغلب نیاز نمی‌شود که آن‌ها را با معادلات سه بعدی الاستیسیته مدل کرد؛ می‌توان با تئوری‌های دوبعدی ساده ورق، تغییر شکل‌ها و تنش‌های ساختاری ورق را مورد مطالعه قرار داد[4]. در این بخش معادلات تعادل و همچنین معادلات پایداری با به‌کار گیری FSDT استخراج می‌شوند.

۲-۴-۱- معادلات تعادل

در اینجا معادلات تعادل ورق با استفاده از FSDT به‌دست می‌آیند. میدان جابجایی در FSDT به‌صورت زیر بیان می‌شود[4]:

$$u_r = u = u_0(r,\theta) + z u_1(r,\theta),\ \ u_\theta = v = v_0(r,\theta) + z v_1(r,\theta),\ \ u_z = w = w_0(r,\theta) \tag{۴-۲}$$

1 Traction

در رابطه بالا u_0 و v_0 بیانگر جابجایی درون‌صفحه‌ای صفحه میانی ورق و w_0 مربوط به تغییر شکل عرضی صفحه میانی می‌باشد؛ همچنین مولفه‌های u_1 و v_1 چرخش خط عمود بر صفحه میانی نسبت به محورهای θ و r را نشان می‌دهند.

کرنش‌های مربوط به میدان جابجایی رابطه (۲-۴) در مختصات کارتزین با توجه به رابطه زیر محاسبه می‌شوند[5]:

$$\varepsilon_{jk}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_j}+\frac{\partial u_m}{\partial x_j}\frac{\partial u_m}{\partial x_k}\right),\quad j,k,m=1,2,3 \tag{۲-۵}$$

به‌طوری‌که در رابطه بالا تساوی‌های $u_1=u,\ u_2=v,\ u_3=w$ و $x_1=r,\ x_2=\theta,\ x_3=z$ برقرار است.

بسط رابطه (۲-۵) نتیجه می‌دهد[5]:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{rr}&=\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2\right]\\
\varepsilon_{\theta\theta}&=\frac{u}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)^2\right]+\frac{1}{r^2}\left(2u\frac{\partial v}{\partial\theta}-2v\frac{\partial u}{\partial\theta}+v^2+u^2\right)\\
\varepsilon_{zz}&=\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right]\\
\varepsilon_{r\theta}&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}\right)+\frac{1}{2r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial\theta}+u\frac{\partial v}{\partial r}-v\frac{\partial u}{\partial r}\right)=\frac{1}{2}\gamma_{r\theta}\\
\varepsilon_{z\theta}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{2r}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial\theta}-v\frac{\partial u}{\partial z}+u\frac{\partial v}{\partial z}\right)=\frac{1}{2}\gamma_{z\theta}\\
\varepsilon_{rz}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\frac{1}{2}\gamma_{rz}
\end{aligned} \tag{۲-۶}$$

در این متن از روابط فن‌کارمن استفاده می‌شود. بنابراین در مختصات استوانه‌ای روابط کرنش-جابجایی عبارتند از[5]:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_r&=\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)^2\\
\varepsilon_\theta&=\frac{u_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\theta}\right)^2\\
\varepsilon_z&=\frac{\partial u_z}{\partial z}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2\\
\gamma_{r\theta}&=\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r}\frac{\partial u_z}{\partial\theta}
\end{aligned} \tag{۲-۷}$$

$$\gamma_{z\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial z}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}$$
$$\gamma_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial z}\frac{\partial u_z}{\partial r}$$

با جایگذاری رابطه (۲-۴) در روابط (۲-۷)، معادلات کرنش-جابجایی بر حسب میدان جابجایی FSDT به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_r &= \frac{\partial u_0}{\partial r} + z\,\frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 \\
\varepsilon_\theta &= \frac{u_0}{r} + z\,\frac{u_1}{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_0}{\partial \theta} + z\,\frac{\partial v_1}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{2r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2 \\
\varepsilon_z &= 0 \\
\gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_0}{\partial \theta} + z\,\frac{\partial u_1}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial v_0}{\partial r} + z\,\frac{\partial v_1}{\partial r} - \frac{1}{r}\left(v_0 + z v_1\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial \theta} \\
\gamma_{z\theta} &= v_1 + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} \\
\gamma_{rz} &= u_1 + \frac{\partial w}{\partial r}
\end{aligned} \qquad (۲-۸)$$

با جایگذاری کرنش‌های به‌دست آمده از رابطه (۲-۸) در روابط اصل کار مجازی((۲-۲) و (۲-۳)) رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}
\delta W_I = \int_{-h/2}^{h/2}\iint_\Omega & \sigma_r\left(\left(\delta\frac{\partial u_0}{\partial r} + \delta\left(z\,\frac{\partial u_1}{\partial r}\right) + \frac{1}{2}\delta\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2\right) + \sigma_\theta\left(\delta\frac{u_0}{r} + \delta\left(z\,\frac{u_1}{r}\right) + \delta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_0}{\partial \theta}\right)\right)\right. \\
& +\sigma_\theta\left(\delta\left(z\,\frac{1}{r}\frac{\partial v_1}{\partial \theta}\right) + \delta\left(\frac{1}{2r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2\right)\right) + \sigma_z\left(\delta(0)\right) + \tau_{r\theta}\left(\delta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_0}{\partial \theta}\right) + \delta\left(z\,\frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial \theta}\right)\right) \\
& +\tau_{r\theta}\left(\delta\left(\frac{\partial v_0}{\partial r}\right) + \delta\left(z\,\frac{\partial v_1}{\partial r}\right) - \delta\left(\frac{1}{r}v_0\right) - \delta\left(z\,\frac{1}{r}v_1\right) + \delta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)\right) \\
& \left.+\tau_{z\theta}\left(\delta(v_1) + \delta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)\right) + \tau_{rz}\left(\delta u_1 + \delta\frac{\partial w}{\partial r}\right)\right) dA\,dz
\end{aligned} \qquad (۲-۹)$$

با تعریف منتجه‌های تنش[1] و انتگرال‌گیری از رابطه (۲-۹) نسبت به z رابطه زیر حاصل می‌شود:

1 Stress Resultant

$$\begin{aligned}\delta W_I &= \iint_\Omega \left(rN_r \delta \frac{\partial u_0}{\partial r} + rM_r \delta \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{1}{2} rN_r \delta \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + rN_\theta \delta \frac{u_0}{r} + rM_\theta \delta \frac{u_1}{r} + rN_\theta \delta \frac{1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} \right. \\ &+ rM_\theta \delta \frac{1}{r} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + rN_\theta \delta \frac{1}{2r^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 + rN_{r\theta} \delta \frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + rM_{r\theta} \delta \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + rN_{r\theta} \delta \frac{\partial v_0}{\partial r} \\ &+ rM_{r\theta} \delta \frac{\partial v_1}{\partial r} - rN_{r\theta} \delta \frac{1}{r} v_0 - rM_{r\theta} \delta \frac{1}{r} v_1 + rN_{r\theta} \delta \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + rQ_\theta \left(\delta v_1 + \delta \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \\ &\left. + rQ_r \left(\delta u_1 + \delta \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right) dA \end{aligned} \qquad (۱۰-۲)$$

در رابطه اخیر منتجه‌های تنش و نیروهای برشی عرضی به‌صورت زیر تعریف می‌شوند[54]:

$$\begin{Bmatrix} N_r \\ N_\theta \\ N_{r\theta} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{r\theta} \end{Bmatrix} dz , \qquad \begin{Bmatrix} M_r \\ M_\theta \\ M_{r\theta} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{r\theta} \end{Bmatrix} z\, dz , \qquad \begin{Bmatrix} Q_r \\ Q_\theta \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} k_s \begin{Bmatrix} \tau_{rz} \\ \tau_{z\theta} \end{Bmatrix} dz \qquad (۱۱-۲)$$

که در آن k_s ضریب تصحیح برشی می‌باشد. برای تک تک جملات رابطه (۲-۱۰) ساده‌سازی‌های زیر صورت می‌پذیرد و به‌شکل زیر بازنویسی می‌شوند:

$$\begin{aligned} & rN_r \delta \frac{\partial u_0}{\partial r} \Rightarrow rN_r \delta u_0 - \int (\frac{\partial}{\partial r} rN_r) \delta u_0 dr \\ & rM_r \delta \frac{\partial u_1}{\partial r} = rM_r \frac{\partial \delta u_1}{\partial r} \Rightarrow rM_r \delta u_1 - \int (\frac{\partial}{\partial r} rM_r) \delta u_1 dr \\ & \frac{1}{2} N_r \delta \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 = r \frac{1}{2} N_r .2 \left(\frac{\partial w_0}{\partial r} \right) . \left(\delta \frac{\partial w_0}{\partial r} \right) \Rightarrow rN_r \frac{\partial w_0}{\partial r} \delta w_0 - \int \frac{\partial}{\partial r} \left(rN_r \frac{\partial w_0}{\partial r} \right) \delta w_0 dr \\ & rN_\theta \delta \frac{u_0}{r} \Rightarrow N_\theta \delta u_0 \\ & rM_\theta \delta \frac{u_1}{r} \Rightarrow M_\theta \delta u_1 \\ & rN_\theta \delta \frac{1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} \Rightarrow N_\theta \delta v_0 - \int \left(\frac{\partial}{\partial \theta} N_\theta \right) \delta v_0 d\theta \\ & rM_\theta \delta \frac{1}{r} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \Rightarrow M_\theta \delta v_1 - \int \left(\frac{\partial}{\partial \theta} M_\theta \right) \delta v_1 d\theta \\ & rN_\theta \delta \frac{1}{2r^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 = \frac{1}{r} N_\theta \frac{\partial w}{\partial \theta} \delta \frac{\partial w}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{1}{r} N_\theta \frac{\partial w}{\partial \theta} \delta w - \int \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} N_\theta \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \delta w d\theta \\ & rN_{r\theta} \delta \frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} \Rightarrow N_{r\theta} \delta u_0 - \int \left(\frac{\partial}{\partial \theta} N_{r\theta} \right) \delta u_0 d\theta \\ & rM_{r\theta} \delta \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \Rightarrow M_{r\theta} \delta u_1 - \int \left(\frac{\partial}{\partial \theta} M_{r\theta} \right) \delta u_1 d\theta \\ & rN_{r\theta} \delta \frac{\partial v_0}{\partial r} \Rightarrow rN_{r\theta} \delta v_0 - \int \left(\frac{\partial}{\partial r} rN_{r\theta} \right) \delta v_0 dr \end{aligned} \qquad (۱۲-۲)$$

$$rM_{r\theta}\delta\frac{\partial v_1}{\partial r}\Rightarrow rM_{r\theta}\delta v_1-\int\left(\frac{\partial}{\partial r}rM_{r\theta}\right)\delta v_1 dr$$
$$-rN_{r\theta}\delta\frac{1}{r}v_0\Rightarrow -N_{r\theta}\delta v_0$$
$$-rM_{r\theta}\frac{1}{r}\delta v_1\Rightarrow -M_{r\theta}\delta v_1$$
$$rN_{r\theta}\delta\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial\theta}=N_{r\theta}\left(\left(\delta\frac{\partial w}{\partial r}\right)\frac{\partial w}{\partial\theta}+\left(\delta\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)\frac{\partial w}{\partial r}\right)\Rightarrow$$
$$\left(\left(N_{r\theta}\frac{\partial w}{\partial\theta}\delta w\right)-\int\frac{\partial}{\partial r}\left(N_{r\theta}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)\delta w dr\right)+\left(\left(N_{r\theta}\frac{\partial w}{\partial r}\delta w\right)-\int\frac{\partial}{\partial\theta}\left(N_{r\theta}\frac{\partial w}{\partial r}\right)\delta w d\theta\right)$$
$$rQ_\theta\delta v_1\Rightarrow rQ_\theta\delta v_1$$
$$rQ_r\delta u_1\Rightarrow rQ_r\delta u_1$$
$$rQ_\theta\delta\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}=Q_\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\delta w\Rightarrow Q_\theta\delta w-\int\left(\frac{\partial}{\partial\theta}Q_\theta\right)\delta w d\theta$$
$$rQ_r\delta\frac{\partial w}{\partial r}\Rightarrow rQ_r\delta w-\int\left(\frac{\partial}{\partial r}rQ_r\right)\delta w dr$$

همچنین کار مجازی نیروی گسترده شعاعی(شکل (۲-۱)) برای ورق مد نظر به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\delta W_E=-\int_{r_i}^{r_o}\int_0^{2\pi}r.\sigma_i\delta u_i dr d\theta=-aQ.\delta u_0 \qquad (۱۳-۲)$$

که در این رابطه Q بیان‌گر بار شعاعی خارجی و a شعاع خارجی ورق می‌باشد.

در روابط اخیر، انتگرال‌های دوگانه با استفاده از تئوری گرین در صفحه[1]، به انتگرال‌های خطی روی مرز تبدیل می‌شوند؛ رابطه‌ی (۲-۱۴) تئوری گرین را معرفی می‌کند[55]:

$$\iint_R\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dxdy=\oint_C\left(F_1dx+F_2dy\right) \qquad (۱۴-۲)$$

اکنون با استفاده از روابط (۲-۱۰)، (۲-۱۲)، (۲-۱۳) و (۲-۱۴) می‌توان اصل کار مجازی را به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\delta W_I+\delta W_E=0\Rightarrow\int_{r_i}^{r_o}\int_0^{2\pi}\left(\left(\left(-\frac{\partial}{\partial r}rN_r\right)+\left(N_\theta\right)+\left(-\frac{\partial}{\partial\theta}N_{r\theta}\right)\right)\delta u_0\right.$$
$$+\left(\left(-\frac{\partial}{\partial r}rM_r\right)+\left(M_\theta\right)+\left(-\frac{\partial}{\partial\theta}rM_{r\theta}\right)+\left(rQ_r\right)\right)\delta u_1 \qquad (۱۵-۲)$$

1 Green's Theorem In The Plane

$$
\begin{aligned}
&+\left(\left(-\frac{\partial}{\partial\theta}N_{\theta}\right)+\left(-\frac{\partial}{\partial r}rN_{r\theta}\right)+\left(-N_{r\theta}\right)\right)\delta v_{0}\\
&+\left(\left(-\frac{\partial}{\partial\theta}rM_{\theta}\right)+\left(-\frac{\partial}{\partial r}rM_{r\theta}\right)+\left(-rM_{r\theta}\right)+\left(rQ_{\theta}\right)\right)\delta v_{1}\\
&+\left(-\frac{\partial}{\partial r}\left(rN_{r}\frac{\partial w_{0}}{\partial r}\right)-\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r}N_{\theta}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)-\frac{\partial}{\partial\theta}\left(N_{r\theta}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)-\frac{\partial}{\partial r}\left(N_{r\theta}\frac{\partial w}{\partial r}\right)\right)\delta w\\
&+\left(-\left(\frac{\partial}{\partial\theta}Q_{\theta}\right)-\left(\frac{\partial}{\partial r}rQ_{r}\right)\right)\delta w\Bigg)drd\theta\\
&+\left(rN_{r}+N_{r\theta}-rQ\right)\delta u_{0}+\left(rM_{r}+rM_{r\theta}\right)\delta u_{1}+\left(N_{\theta}+rN_{r\theta}\right)\delta v_{0}+\left(rM_{\theta}+rM_{r\theta}\right)\delta v_{1}\\
&+\left(\frac{1}{r}N_{\theta}\frac{\partial w}{\partial\theta}+N_{r\theta}\frac{\partial w}{\partial\theta}+N_{r\theta}\frac{\partial w}{\partial r}+Q_{\theta}+rQ_{r}\right)\delta w=0
\end{aligned}
$$

رابطه اخیر تنها درصورتی صادق است که ضرایب $\delta u_0,\delta u_1,\delta v_0,\delta v_1,\delta w_0$ در آن برابر صفر باشد؛ بنابراین معادلات تعادل ورق دایره‌ای تحت بار شعاعی بر اساس FSDT و با استفاده از روش کار مجازی استخراج می‌گردد؛ رابطه (۲-۱۶) معادلات تعادل را نشان می‌دهد.

$$
\begin{aligned}
&\delta u_{0}:\ \left(-\frac{\partial}{\partial r}rN_{r}\right)+\left(N_{\theta}\right)+\left(-\frac{\partial}{\partial\theta}N_{r\theta}\right)=0\\
&\delta u_{1}:\ \left(-\frac{\partial}{\partial r}rM_{r}\right)+\left(M_{\theta}\right)+\left(-\frac{\partial}{\partial\theta}M_{r\theta}\right)+\left(rQ_{r}\right)=0\\
&\delta v_{0}:\ \left(-\frac{\partial}{\partial\theta}N_{\theta}\right)+\left(-\frac{\partial}{\partial r}rN_{r\theta}\right)+\left(-N_{r\theta}\right)=0\\
&\delta v_{1}:\ \left(-\frac{\partial}{\partial\theta}M_{\theta}\right)+\left(-\frac{\partial}{\partial r}rM_{r\theta}\right)+\left(-M_{r\theta}\right)+\left(rQ_{\theta}\right)=0\\
&\delta w\ :\ -\frac{\partial}{\partial r}\left(rN_{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right)-\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r}N_{\theta}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)-\frac{\partial}{\partial r}\left(N_{r\theta}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)-\frac{\partial}{\partial\theta}\left(N_{r\theta}\frac{\partial w}{\partial r}\right)\\
&-\left(\frac{\partial}{\partial\theta}Q_{\theta}\right)-\left(\frac{\partial}{\partial r}rQ_{r}\right)=0
\end{aligned}
\qquad (۲-۱۶)
$$

همچنین شرایط مرزی استخراج شده از معادلات مربوطه نیز به‌صورت زیر می‌باشد:

$$
\begin{aligned}
&u_{0}=0 && \text{یا} && rN_{r}-\alpha Q=0\\
&u_{1}=0 && \text{یا} && rM_{r}=0\\
&v_{0}=0 && \text{یا} && rN_{r\theta}=0\\
&v_{1}=0 && \text{یا} && rM_{r\theta}=0\\
&w_{0}=0 && \text{یا} && N_{r\theta}\frac{\partial w}{\partial\theta}+rN_{r}\frac{\partial w}{\partial r}+rQ_{r}=0
\end{aligned}
\qquad (۲-۱۷)
$$

شرایط مرزی مختلف با توجه به رابطه (۲-۱۷) برای یک ورق حلقوی و مدور به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

شرایط مرزی گیردار:

$$\begin{aligned} &r = r_i: \quad u_0 = u_1 = v_0 = v_1 = w_0 = 0 \\ &r = r_o: \quad u_1 = v_0 = v_1 = w_0 = 0, \quad rN_r - aQ = 0 \end{aligned} \tag{۲-۱۸}$$

شرایط مرزی ساده:

$$r = r_i, r_o \begin{cases} w_0 = 0, \; rM_r = 0, \; rN_{r\theta} = 0 \\ rN_r - aQ = 0, \; rM_{r\theta} = 0 \end{cases} \tag{۲-۱۹}$$

شرایط مرزی آزاد:

$$r = r_i, r_o \begin{cases} N_{r\theta}\dfrac{\partial w}{\partial \theta} + rN_r\dfrac{\partial w}{\partial r} + rQ_r = 0, \quad rM_{r\theta} = 0 \\ rN_r - aQ = 0, \quad rM_r = 0, \; rN_{r\theta} = 0 \end{cases} \tag{۲-۲۰}$$

شرایط مرزی در مرکز ورق:

$$r = r_i = 0 \begin{cases} N_{r\theta}\dfrac{\partial w}{\partial \theta} + rN_r\dfrac{\partial w}{\partial r} + rQ_r = 0, \quad rM_{r\theta} = 0, \; rN_{r\theta} = 0 \\ u_0 = 0, \quad u_1 = 0 \end{cases} \tag{۲-۲۱}$$

۲-۴-۲- معادلات تعادل بر حسب جابجایی

معادلات (۲-۱۶) را می‌توان برحسب مولفه‌های جابجایی نیز نوشت که بدین منظور از رابطه تنش-کرنش استفاده می‌شود. شکل عمومی قانون هوک به‌صورت زیر می‌باشد[56]:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij} \;, \quad i, j, k = r, \theta, z \tag{۲-۲۲}$$

در روابط بالا نمادهای G و λ، به‌ترتیب بیانگر مدول برشی و ثابت لامه می‌باشند و به‌صورت زیر تعریف می‌گردند:

$$\lambda=\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)},\quad G=\frac{E}{2(1+\nu)} \tag{۲۳-۲}$$

در رابطه (۲-۲۳)، E مدول الاستیسیته و ν ضریب پوآسون می‌باشند. رابطه تنش-کرنش(قانون هوک) یکبار برای حالت تنش صفحه‌ای($\sigma_z=0$) نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\sigma_r=\frac{E}{\left(1-\nu^2\right)}\left(\varepsilon_r+\nu\varepsilon_\theta\right) && \sigma_\theta=\frac{E}{\left(1-\nu^2\right)}\left(\varepsilon_\theta+\nu\varepsilon_r\right)\\
&\sigma_z=A\varepsilon_z+\lambda\left(\varepsilon_r+\varepsilon_\theta\right) && \tau_{r\theta}=G\gamma_{r\theta}\\
&\tau_{rz}=G\gamma_{rz} && \tau_{z\theta}=G\gamma_{z\theta}
\end{aligned} \tag{۲۴-۲}$$

یکبار نیز برای حالت کرنش صفحه‌ای($\varepsilon_z=0$) نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\sigma_r=A\varepsilon_r+\lambda\left(\varepsilon_\theta+\varepsilon_z\right) && \sigma_\theta=A\varepsilon_\theta+\lambda\left(\varepsilon_r+\varepsilon_z\right)\\
&\sigma_z=A\varepsilon_z+\lambda\left(\varepsilon_r+\varepsilon_\theta\right) && \tau_{r\theta}=G\gamma_{r\theta}\\
&\tau_{rz}=G\gamma_{rz} && \tau_{z\theta}=G\gamma_{z\theta}
\end{aligned} \tag{۲۵-۲}$$

که در آن $A=\lambda+2G$ است. اکنون با جایگذاری روابط (۲-۲۵) در روابط منتجه‌های تنش(۲-۱۱) و در نهایت قرار دادن در معادلات تعادل اولیه(۲-۱۶)، می‌توان معادلات تعادل بر حسب مولفه‌های میدان جابجایی را به‌صورت زیر بازنویسی کرد.

$$\begin{aligned}
&2Ar^2\frac{\partial u_0}{\partial r}+Ar^2\left(\frac{\partial w_0}{\partial r}\right)^2-\lambda\left(\frac{\partial w_0}{\partial \theta}\right)^2+2Ar^3\frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2}+2Ar^3\frac{\partial w_0}{\partial r}\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2}\\
&+2\lambda\frac{\partial^2 v_0}{\partial\theta\partial r}r^2+2\lambda\frac{\partial w_0}{\partial\theta}\frac{\partial^2 w_0}{\partial\theta\partial r}r-2Au_0r-2A\frac{\partial v_0}{\partial\theta}r-A\left(\frac{\partial w_0}{\partial\theta}\right)^2\\
&-\lambda r^2\left(\frac{\partial w_0}{\partial r}\right)^2+2Gr\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial\theta^2}\right)+2Gr^2\frac{\partial^2 v_0}{\partial\theta\partial r}-2Gr\frac{\partial v_0}{\partial\theta}\\
&+2Gr\frac{\partial w_0}{\partial\theta}\frac{\partial^2 w_0}{\partial\theta\partial r}+2Gr\frac{\partial w_0}{\partial r}\frac{\partial^2 w_0}{\partial\theta^2}=0
\end{aligned} \tag{۲۶-۲}$$

$$\begin{aligned}
&h^2A\frac{\partial u_1}{\partial r}r+h^2A\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2}r^2+h^2\lambda\frac{\partial^2 v_1}{\partial\theta\partial r}r-h^2Au_1-h^2A\frac{\partial v_1}{\partial\theta}\\
&+Gh^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial\theta^2}+Gh^2\frac{\partial^2 v_1}{\partial\theta\partial r}r-Gh^2\frac{\partial v_1}{\partial\theta}-12r^2k_sGu_1-12r^2k_sG\frac{\partial w_0}{\partial r}=0
\end{aligned} \tag{۲۷-۲}$$

$$
\begin{aligned}
&A\frac{\partial u_0}{\partial\theta}r+A\frac{\partial^2 v_0}{\partial\theta^2}r+A\frac{\partial w_0}{\partial\theta}\frac{\partial^2 w_0}{\partial\theta^2}+\lambda r^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial\theta\partial r}+\lambda r^2\frac{\partial w_0}{\partial r}\frac{\partial^2 w_0}{\partial\theta\partial r}+Gr\frac{\partial u_0}{\partial\theta}\\
&+Gr^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial\theta\partial r}+Gr^3\frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2}+Gr^2\frac{\partial v_0}{\partial r}-Grv_0+Gr\frac{\partial w_0}{\partial r}\frac{\partial w_0}{\partial\theta}+Gr^2\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2}\frac{\partial w_0}{\partial\theta}\\
&+Gr^2\frac{\partial w_0}{\partial r}\frac{\partial^2 w_0}{\partial\theta\partial r}=0
\end{aligned}
\qquad (۲۸\text{-}۲)
$$

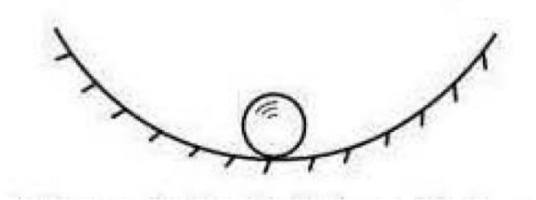
$$
\begin{aligned}
&h^2A\frac{\partial u_1}{\partial\theta}+h^2A\frac{\partial^2 v_1}{\partial\theta^2}+h^2\lambda\frac{\partial^2 u_1}{\partial\theta\partial r}r+Gh^2\frac{\partial u_1}{\partial\theta}+Gh^2\frac{\partial v_1}{\partial r}r-Gh^2v_1+Gh^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial\theta\partial r}r\\
&+Gh^2\frac{\partial^2 v_1}{\partial r^2}r^2-12r^2k_sGv_1-12rk_sG\frac{\partial w_0}{\partial\theta}=0
\end{aligned}
\qquad (۲۹\text{-}۲)
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial w_0}{\partial r}\right)^3r^3A+2\frac{\partial w_0}{\partial r}r^3A\frac{\partial u_0}{\partial r}-\frac{\partial w_0}{\partial r}r\lambda\left(\frac{\partial w_0}{\partial\theta}\right)^2+2\frac{\partial w_0}{\partial r}r^3\lambda\frac{\partial u_0}{\partial r}+2\frac{\partial w_0}{\partial\theta}A\frac{\partial u_0}{\partial\theta}r\\
&-2G\frac{\partial w_0}{\partial\theta}r\frac{\partial u_0}{\partial\theta}-2G\frac{\partial w_0}{\partial\theta}r^2\frac{\partial v_0}{\partial r}+2G\frac{\partial w_0}{\partial\theta}rv_0-2G\left(\frac{\partial w_0}{\partial\theta}\right)^2r\frac{\partial w_0}{\partial r}\\
&-2G\frac{\partial w_0}{\partial r}r^2\frac{\partial v_0}{\partial\theta}+2r^3k_sG\frac{\partial v_1}{\partial\theta}+2r^3k_sGu_1+2r^3k_sG\frac{\partial w_0}{\partial r}+2r^4k_sG\frac{\partial u_1}{\partial r}\\
&+8G\frac{\partial w_0}{\partial\theta}r^2\frac{\partial^2 w_0}{\partial\theta\partial r}+4\frac{\partial w_0}{\partial r}r^2\lambda\frac{\partial w_0}{\partial\theta}\frac{\partial^2 w_0}{\partial\theta\partial r}+3A\left(\frac{\partial w_0}{\partial\theta}\right)^2\frac{\partial^2 w_0}{\partial\theta^2}+2\frac{\partial w_0}{\partial r}r^4A\frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2}\\
&+3\left(\frac{\partial w_0}{\partial r}\right)^2r^4A\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2}+2\frac{\partial w_0}{\partial r}r^3\lambda\frac{\partial^2 v_0}{\partial\theta\partial r}+2r^4\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2}A\frac{\partial u_0}{\partial r}+2r^3\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2}\lambda u_0\\
&2r^3\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2}\lambda\frac{\partial v_0}{\partial\theta}+r^2\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2}\lambda\left(\frac{\partial w_0}{\partial\theta}\right)^2+2\frac{\partial w_0}{\partial\theta}A\frac{\partial^2 v_0}{\partial\theta^2}r+2\frac{\partial w_0}{\partial\theta}\lambda r^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial\theta\partial r}\\
&+2\frac{\partial^2 w_0}{\partial\theta^2}Au_0r+2\frac{\partial^2 w_0}{\partial\theta^2}A\frac{\partial v_0}{\partial\theta}r+2\frac{\partial^2 w_0}{\partial\theta^2}\lambda\frac{\partial u_0}{\partial r}r^2+\frac{\partial^2 w_0}{\partial\theta^2}\lambda r^2\left(\frac{\partial w_0}{\partial r}\right)^2\\
&+2G\frac{\partial w_0}{\partial\theta}r^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial\theta\partial r}+2G\frac{\partial w_0}{\partial\theta}r^3\frac{\partial^2 v_0}{\partial r^2}+2G\left(\frac{\partial w_0}{\partial\theta}\right)^2r^2\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2}+4G\frac{\partial^2 w_0}{\partial\theta\partial r}r^2\frac{\partial u_0}{\partial\theta}\\
&+4G\frac{\partial^2 w_0}{\partial\theta\partial r}r^3\frac{\partial v_0}{\partial r}-4G\frac{\partial^2 w_0}{\partial\theta\partial r}r^2v_0+2G\frac{\partial w_0}{\partial r}r^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial\theta^2}+2G\frac{\partial w_0}{\partial r}r^3\frac{\partial^2 v_0}{\partial\theta\partial r}\\
&+2G\left(\frac{\partial w_0}{\partial r}\right)^2r^2\frac{\partial^2 w_0}{\partial\theta^2}+2r^2k_sG\frac{\partial^2 w_0}{\partial\theta^2}2r^4k_sG\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2}=0
\end{aligned}
\qquad (۳۰\text{-}۲)
$$

معادلات تعادل، شامل پنج معادله غیرخطی کوپل به‌هم با ضریب متغیر می‌باشد.

۲-۴-۳- معادلات پایداری

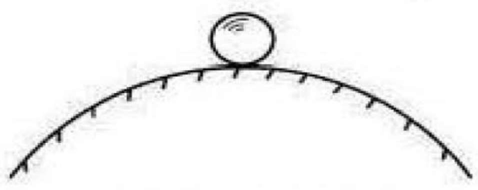
حالت تعادل یا پیکربندی[1] یک بخش سازه‌ای، سازه یا سیستم مکانیکی، پایدار است اگر هر اختلال[2] کوچک سیستم تنها به یک عکس العمل کوچک منجر شود که بعد از آن سازه به حالت تعادل اول خود برگردد. ساده ترین مثال یک سیستم مکانیکی پایدار، یک توپ صلب(گوی) در یک دره، مانند شکل (۲-۲) است؛ می‌توان با کمی ضربه زدن به گوی، اختلال ایجاد کرد اما گوی همیشه به ته دره برمی‌گردد که در آن (گوی) در حالت تعادل پایدار قرار دارد.



شکل (۲-۲) گوی درون دره در حالت تعادل پایدار[8]

حالت تعادل یا پیکربندی یک عضو ساختاری، یک سازه یا یک سیستم مکانیکی، ناپایدار است اگر هرگونه اختلال کوچک سیستم منجر به تغییر ناگهانی در حالت تغییر شکل[3] یا مقدار جابجایی شود که پس از آن سیستم به حالت تعادل اصلی خود باز نمی‌گردد. ساده‌ترین مثال یک سیستم مکانیکی ناپایدار یک گوی است که بالای یک تپه قرار گرفته است(شکل (۲-۳))؛ اگر گوی دچار اندکی اختلال شود، بلافاصله به پایین تپه غلت می‌خورد و هرگز به بالای تپه برنمی‌گردد. بنابراین گوی در بالای تپه، در حالت تعادل ناپایدار قرار دارد.

1 Configuration
2 Disturbance
3 Deformation



شکل (۲-۳) گوی روی تپه در حالت تعادل ناپایدار[8]

برای بارگذاری تعریف شده روی یک عضو ساختاری یا یک سازه، ابتدا پیکربندی تعادل تعیین می‌شود؛ یعنی ماهیت پیکربندی تعادل به‌عنوان تابعی از بار اعمال شده، ایجاد می‌شود.

یکی از روش‌های به‌دست آوردن معادلات پایداری، روش انرژی و اصل حداقل انرژی پتانسیل است که در آن اکسترمم فانکشنال انرژی پتانسیل نسبت به متغیرهای وابسته باید محاسبه شود. قبل از حد پایداری، یک سیستم مکانیکی در حالت تعادل پایدار است، به‌طوری که $\delta V = 0$ و $\Delta V > 0$ می‌باشد(که V معرف انرژی پتانسیل است)؛ پس از حد پایداری، سیستم ناپایدار است و $\delta V = 0$ اما $\Delta V < 0$ است؛ بنابراین کمانش زمانی رخ می‌دهد که $\Delta V = 0$ باشد. شرط $\Delta V = 0$ را می‌توان به کمک سری‌های تیلور [1] بسط داد.

$$\Delta V = \delta V + \frac{1}{2!}\delta^2 V + \frac{1}{3!}\delta^3 V + \cdots = 0 \qquad (۳۱-۲)$$

که در آن δV بیان کننده فانکشنالی است که تابعی خطی از تغییرات میدان جابجایی می‌باشد و $\delta^2 V$ فانکشنالی است که تابعی مرتبه دو از تغییرات میدان جابجایی بوده و تغییرات دوم انرژی پتانسیل نامیده می‌شود؛ رابطه (۲-۳۱) به‌وضوح یک معیار عملی را(به‌دلیل تعداد نامحدود عبارات)، نشان نمی‌دهد؛ پس باید تعیین شود کدام یک از پیکربندی‌های تعادل، به‌عنوان مرز بین $\Delta V > 0$ (پایدار) و $\Delta V < 0$ (ناپایدار)، $\Delta V = 0$ دارد؛ چنین شرطی به‌عنوان یک معیار کمانش نامیده می‌شود.

1 Taylor Series

یک پیکربندی تعادل، خنثی[1] است اگر حداقل یک حالت مجاور با بار وجود داشته باشد که در آن اولین وریئیشن[2] انرژی پتانسیل آن ناپدید شود؛ این شکل از روش تعادل خنثی به‌عنوان روش تعادل در مجاورت نیز شناخته می‌شود که یکی از روش‌های به‌دست آورن معادلات پایداری می‌باشد؛ اگر پیکربندی مرجع(حالت تعادل اولیه) با زیرنویس R و پیکربندی مجاور(حالت تعادل در مجاورت) با زیرنویس A نمایش داده شود و اگر هر دو پیکربندی در حالت تعادل باشند؛ می‌توان نوشت:

$$\delta V_R = 0,\ \ \delta V_A = 0 \tag{۲-۳۲}$$

انرژی پتانسیل مرجع بعلاوه تغییرات آن تحت وریئیشن به‌صورت زیر است.

$$V_R + \Delta V_R = V_R + \delta V_R + \frac{1}{2!}\delta^2 V_R + \frac{1}{3!}\delta^3 V_R + \cdots \tag{۲-۳۳}$$

چنان‌چه دو حالت بی‌نهایت به‌هم نزدیک باشند:

$$V_A = V_R + \Delta V_R \tag{۲-۳۴}$$

اگر $\frac{1}{3!}\delta^3 V_R$ و جمله‌های مرتبه بالاتر نادیده گرفته شود:

$$V_A = V_R + \delta V_R + \frac{1}{2!}\delta^2 V_R \tag{۲-۳۵}$$

براساس رابطه (۲-۳۲) معادله (۲-۳۵) به معادله زیر کاهش می‌یابد.

$$V_A = V_R + \frac{1}{2!}\delta^2 V_R \tag{۲-۳۶}$$

اکنون با اعمال وریئیشن به دو سمت رابطه (۲-۳۶)، این رابطه به‌شکل زیر تبدیل می‌شود.

$$\delta V_A = \delta V_R + \frac{1}{2!}\delta\left(\delta^2 V_R\right) \tag{۲-۳۷}$$

در نهایت با توجه به رابطه (۲-۳۲)، رابطه (۲-۳۷) به‌شکل زیر خواهد شد.

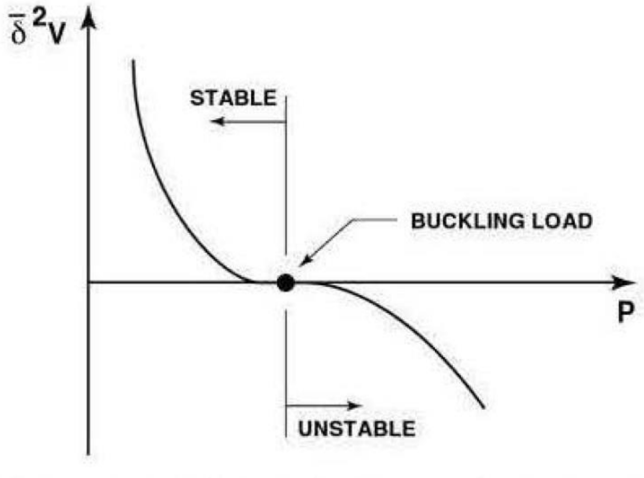
1 Neutral
2 Variation

$$\delta\left(\delta^2 V_R\right)=0 \qquad (۳۸-۲)$$

از آنجا که $\delta^2 V_R$ در حالت تعادل مرجع ارزیابی می‌شود؛ زیرنویس R از آن حذف می‌شود و رابطه (۲-۳۸) که معیار کمانش تعادل در مجاورت می‌باشد و با عنوان معیار کمانش ترفتز[1] نیز شناخته می‌شود، به‌شکل زیر بازنویسی خواهد شد.

$$\delta\left(\bar{\delta}^2 V\right)=0 \qquad (۳۹-۲)$$

مقدار $\bar{\delta}^2 V$ در حالت کمانش ثابت می‌باشد(نه لزوما یک حداکثر و نه لزوما یک حداقل بلکه بیشتر یک نقطه عطف)[8]. (شکل ۲-۴)



شکل (۲-۴) وریئیشن دوم انرژی پتانسیل کل در حالت تعادل بر حسب پارامتر بار[8]

برای به‌دست آوردن معادلات پایداری از روش تعادل در مجاورت استفاده می‌شود. بر اساس این روش، اگر $u_0^0, u_1^0, v_0^0, v_1^0$ و w_0^0 جابجایی‌ها در حالت تعادل باشند و $u_0^1, u_1^1, v_0^1, v_1^1$ و w_0^1 نموهای بی‌نهایت کوچک تغییر مکان که در مجاورت تعادل اولیه قرار دارند، معرفی شوند، میدان جابجایی مربوط به حالت تعادل در مجاورت را می‌توان به‌صورت رابطه زیر بیان کرد[57].

$$u_0=u_0^0+u_0^1,\quad u_1=u_1^0+u_1^1,\quad v_0=v_0^0+v_0^1,\quad v_1=v_1^0+v_1^1,\quad w_0=w_0^0+w_0^1 \qquad (۴۰-۲)$$

1 Trefftz Buckling Criterion

با جایگذاری رابطه (۲-۴۰) در معادلات تعادل می‌توان معادلات پایداری را استخراج نمود؛ به این صورت که حاصل جمع جملات با بالاوند صفر، به‌دلیل این‌که معادلات تعادل را ارضا می‌کنند، صفر خواهد بود؛ نهایاتا معادلات پایداری به‌دست می‌آیند که فصل چهارم ارائه خواهند شد.

۲-۵- جمع‌بندی

در این فصل ابتدا فرضیات مسأله و شرایط هندسی ورق مد نظر بیان شد و در مرحله بعد اصل کار مجازی که توسط آن معادلات تعادل و شرایط مرزی مسأله استخراج می‌گردد، توضیح داده شد و در انتها معادلات پایداری به کمک معیار تعادل در مجاورت استخراج گردید.

فصل ۳:

حل تحلیلی معادلات تعادل

۳-۱- مقدمه

به‌منظور محاسبه بار کمانش یک ورق، نخست باید معادلات مربوط به حالت تعادل اولیه یا معادلات پیش‌کمانش حل شوند. در این فصل معادلات تعادل استخراج شده از فصل قبل، به‌صورت تحلیلی با استفاده از تئوری اغتشاشات حل می‌شوند؛ ابتدا معادلات بی‌بعد خواهند شد و پس از بی‌بعد سازی با کمک بسط مستقیم[1] معادلات مرتبه صفر و یک استخراج شده و در نهایت به حل معادلات پرداخته می‌شود.

۳-۲- بی‌بعد سازی معادلات

به‌منظور بی‌بعد سازی معادلات باید مقادیری که دارای بعد هستند را با تعاریفی جدید بی‌بعد کرد که در رابطه (۳-۱) این تعاریف آورده شده است.

$$
\begin{gathered}
r_O = a, \quad k_1 = \varepsilon, \quad r^* = \frac{r}{r_O}, \quad \varepsilon = \frac{h}{r_O}, \;\; \beta_1 = \frac{\lambda}{A}, \;\; \beta_2 = \frac{G}{A}, \quad Q = \varepsilon \times Q^* \times h \times A \\
\theta^* = \frac{\theta}{k_1}, \quad u_0{}^* = \frac{u_0}{h}, \quad w_0{}^* = \frac{w_0}{h}, \quad v_0{}^* = \frac{v_0}{h}, \quad u_1{}^* = u_1, \quad v_1{}^* = v_1
\end{gathered} \qquad (۳-۱)
$$

در رابطه بالا پارامتر r^* بیانگر شعاع بی‌بعد است و $u_0{}^*, v_0{}^*, w_0{}^*, u_1{}^*, v_1{}^*$، جابجایی‌های بی‌بعد شده هستند؛ همان‌طور که مشخص است مقادیر u_1 و v_1 از ابتدا بی‌بعد هستند و به‌منظور یک دست بودن و سهولت در کار به‌صورت $u_1{}^*$ و $v_1{}^*$ نوشته می‌شوند؛ همچنین Q معرف بار شعاعی خارجی، Q^* مولفه بی‌بعد بار شعاعی خارجی می‌باشد. با اعمال پارامترهای بی‌بعد تعریف شده در معادلات تعادل بر حسب مولفه‌های جابجایی((۲-۲۶) تا (۲-۳۰)) و همچنین تعریف تغییر متغیرهای زیر:

$$
X = \frac{r^* - 1}{\varepsilon} \;, \;\; a^* = X \Big|_{r=r_i} = X_i \;\;, \;\;\; b^* = X \Big|_{r=r_o} = X_o \qquad (۳-۲)
$$

1 Straight Forward Expansion

که در آن ε پارامتر کوچکی است که به‌عنوان پارامتر اغتشاش در معادلات اعمال می‌شود و b^* و a^* نیز به‌ترتیب مقادیر بی‌بعد شعاع داخلی و شعاع خارجی می‌باشند. بدین‌صورت معادلات تعادل بی‌بعد به شکل زیر بازنویسی می‌شوند:

$$
\begin{aligned}
&\left(-2k_1^2-6k_1^2\varepsilon^2X^2-6k_1^2\varepsilon X-2k_1^2\varepsilon^2X^3\right)\frac{\partial^2u_0^*}{\partial X^2}+\left(-2\beta_2\varepsilon^2-2\beta_2\varepsilon^3X\right)\frac{\partial^2u_0^*}{\partial\theta^{*2}}\\
&+\left(-2k_1\varepsilon\beta_2-2k_1\varepsilon\beta_1-2k_1\varepsilon^3\beta_2X-4k_1\varepsilon^2\beta_2X-2k_1\varepsilon^3\beta_1X^2-4k_1\varepsilon^2\beta_1X\right)\frac{\partial^2v_0^*}{\partial\theta^*\partial X}\\
&+\left(-2k_1-6k_1^2\varepsilon^2X^2-6k_1^2\varepsilon X-2k_1^2\varepsilon^3X^3\right)\frac{\partial w_0^*}{\partial X}\frac{\partial^2w_0^*}{\partial X^2}+\left(-2\varepsilon^2\beta_1-2\beta_2\varepsilon^3X\right.\\
&\left.-2\beta_2\varepsilon^2-2\varepsilon^3\beta_1X\right)\frac{\partial w_0^*}{\partial\theta^*}\frac{\partial^2w_0^*}{\partial\theta^*\partial X}+\left(-2\beta_2\varepsilon^2-2\beta_2\varepsilon^3X\right)\frac{\partial w_0^*}{\partial X}\frac{\partial^2w_0^*}{\partial\theta^{*2}}\\
&+\left(-2k_1^2\varepsilon^3X^2-4k_1^2\varepsilon^2X-2k_1^2\varepsilon\right)\frac{\partial u_0^*}{\partial X}+\left(2k_1\varepsilon^2+2k_1\varepsilon^3X+2k_1\varepsilon^3\beta_2X\right.\\
&\left.+2k_1\varepsilon^2\beta_2\right)\frac{\partial v_0^*}{\partial\theta^*}+\left(k_1^2\varepsilon\beta_1-k_1^2\varepsilon^3X^2+2k_1^2\varepsilon^2\beta_1X-2k_1^2\varepsilon^2X+k_1^2\varepsilon^3\beta_1X^2-k_1^2\varepsilon\right)\\
&\left(\frac{\partial w_0^*}{\partial X}\right)^2+\left(\beta_1\varepsilon^3+\varepsilon^3\right)\left(\frac{\partial w_0^*}{\partial\theta^*}\right)^2+\left(2k_1^2\varepsilon^3X+2k_1^2\varepsilon^2\right)u_0^*=0
\end{aligned}
\tag{۳-۳}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(-k_1^2\varepsilon^2X^2-2k_1^2\varepsilon X-k_1^2\right)\frac{\partial^2u_1^*}{\partial X^2}-\left(\beta_2\varepsilon^2\right)\frac{\partial^2u_1^*}{\partial\theta^{*2}}+\left(-k_1\varepsilon^2\beta_1X-k_1\varepsilon^2\beta_2X\right.\\
&\left.-k_1\varepsilon\beta_2-k_1\varepsilon\beta_1\right)\frac{\partial^2v_1^*}{\partial\theta^*\partial X}+\left(-k_1^2\varepsilon^2X-k_1^2\varepsilon\right)\frac{\partial u_1^*}{\partial X}+\left(k_1\varepsilon^2+k_1\varepsilon^2\beta_2\right)\frac{\partial v_1^*}{\partial\theta^*}\\
&\left(12k_s\beta_2k_1^2\varepsilon^2X^2+24k_s\beta_2k_1^2\varepsilon X+12k_s\beta_2k_1^2\right)\frac{\partial w_0^*}{\partial X}\\
&\left(24k_s\beta_2k_1^2\varepsilon X+12k_s\beta_2k_1^2+12k_s\beta_2k_1^2\varepsilon^2X^2+k_1^2\varepsilon^2\right)u_1^*=0
\end{aligned}
\tag{۴-۳}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(-\varepsilon k_1^2\beta_2-2k_1^2\varepsilon^2\beta_1X-\varepsilon^3k_1^2\beta_2X^2-2\varepsilon^2k_1^2\beta_2X-k_1^2\varepsilon^3\beta_1X^2-k_1^2\varepsilon\beta_1\right)\frac{\partial^2u_0^*}{\partial\theta^*\partial X}\\
&+\left(-3\beta_2k_1^3\varepsilon^2X^2-3\beta_2k_1^3\varepsilon X-\beta_2k_1^3-\beta_2k_1^3\varepsilon^3X^3\right)\frac{\partial^2v_0^*}{\partial X^2}+\left(-k_1\varepsilon^2-k_1\varepsilon^3X\right)\\
&\frac{\partial^2v_0^*}{\partial\theta^{*2}}+\left(-\varepsilon^3k_1^2\beta_2X^2-2\varepsilon^2k_1^2\beta_2X-\varepsilon k_1^2\beta_2\right)\frac{\partial w_0^*}{\partial\theta^*}\frac{\partial^2w_0^*}{\partial X^2}+\left(-k_1^2\varepsilon^3\beta_1X^2\right.\\
&\left.-2k_1^2\varepsilon^2\beta_1X-2\varepsilon^2k_1^2\beta_2X-k_1^2\varepsilon\beta_1-\varepsilon k_1^2\beta_2-\varepsilon^3k_1^2\beta_2X^2\right)\frac{\partial w_0^*}{\partial X}\frac{\partial^2w_0^*}{\partial\theta^*\partial X}\\
&-\left(\varepsilon^3\right)\frac{\partial w_0^*}{\partial\theta^*}\frac{\partial^2w_0^*}{\partial\theta^{*2}}+\left(-\varepsilon^2k_1^2\beta_2-k_1^2\varepsilon^2-\varepsilon^3k_1^2\beta_2X-k_1^2\varepsilon^3X\right)\frac{\partial u_0^*}{\partial\theta^*}\\
&+\left(-\beta_2k_1^3\varepsilon-\beta_2k_1^3\varepsilon^3X^2-2\beta_2k_1^3\varepsilon^2X\right)\frac{\partial v_0^*}{\partial X}+\left(-\varepsilon^2k_1^2\beta_2-\varepsilon^3k_1^2\beta_2X\right)\frac{\partial w_0^*}{\partial\theta^*}\\
&\frac{\partial w_0^*}{\partial X}+\left(\beta_2k_1^3\varepsilon^2+\beta_2k_1^3\varepsilon^3X\right)v_0^*=0
\end{aligned}
\tag{۵-۳}
$$

$$\begin{aligned}&\left(-k_1\varepsilon^2\beta_1X-k_1\varepsilon^2\beta_2X-k_1\varepsilon\beta_2-\beta_1k_1\varepsilon\right)\frac{\partial^2u_1^*}{\partial\theta^*\partial X}+\left(-2k_1^2\beta_2\varepsilon X-k_1^2\beta_2\right.\\&\left.-k_1^2\beta_2\varepsilon^2X^2\right)\frac{\partial^2v_1^*}{\partial X^2}-\left(\varepsilon^2\right)\frac{\partial^2v_1^*}{\partial\theta^{*2}}+\left(-k_1\varepsilon^2\beta_2-k_1\varepsilon^2\right)\frac{\partial u_1^*}{\partial\theta^*}+\left(-\varepsilon^2k_1^2\beta_2X\right.\\&\left.-\varepsilon k_1^2\beta_2\right)\frac{\partial v_1^*}{\partial X}+\left(12k_s\beta_2k_1\varepsilon+12k_s\beta_2k_1\varepsilon^2X\right)\frac{\partial w_0^*}{\partial\theta^*}+\left(24k_s\beta_2k_1^2\varepsilon X\right.\\&\left.+12k_s\beta_2k_1^2+12k_s\beta_2k_1^2\varepsilon^2X^2+\varepsilon^2k_1^2\beta_2\right)v_1^*=0\end{aligned}\qquad(۶-۳)$$

۳-۳- حل تحلیلی به کمک تئوری اغتشاشات

راه حل‌های دقیق در بسیاری از شاخه‌های مکانیک سیالات، مکانیک جامدات، حرکت و فیزیک به‌دلیل غیرخطی بودن‌ها، غیرهمگن بودن‌ها و شرایط مرزی عمومی، بسیار کم است؛ از این‌رو مهندسان، فیزیک‌دانان و ریاضی‌دانان مجبورند که یک راه حل تقریبی برای مسائلی که با آن مواجه هستند، تعیین کنند؛ این تقریب ممکن است صرفا عددی، صرفا تحلیلی یا ترکیبی از این دو تکنیک باشد[58]. مزیت داشتن یک فرمول تقریبی برای حل، نسبت به برنامه‌های کامپیوتری که فقط عدد می‌دهند، این است که فرمول امکان بررسی نقش متغیرها و پارامترهای مختلف در حل را فراهم می‌کند. در میان تکنیک‌های تحلیلی، یک روش، تئوری اغتشاشات است که تابعی از پارامترها با مختصات کوچک و بزرگ است. با استفاده از تئوری اغتشاشات حل کامل معادله با استفاده از یک سری اغتشاشی بیان می‌شود. این سری به‌صورت بسطی شامل یک پارامتر(کوچک یا بزرگ) بیان می‌شود که پارامتر مزبور یا به‌طور طبیعی در معادله بی بعد وجود دارد یا این‌که جهت راحتی کار به‌طور مصنوعی[1] وارد معادلات می‌شود[58]. تئوری اغتشاشات برای معادلات تعادل از طریق بسط مستقیم، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}&u_0^*=\varepsilon\left(u_{00}^*+\varepsilon u_{01}^*+\ldots\right),\ \ u_1^*=\varepsilon\left(u_{10}^*+\varepsilon u_{11}^*+\ldots\right),\ \ \mathrm{w}_0^*=\varepsilon\left(w_{00}^*+\varepsilon w_{01}^*+\ldots\right)\\&v_0^*=\varepsilon\left(v_{00}^*+\varepsilon v_{01}^*+\ldots\right),\ \ \mathrm{v}_1^*=\varepsilon\left(v_{10}^*+\varepsilon v_{11}^*+\ldots\right)\end{aligned}\qquad(۷-۳)$$

1 Book Keeping

در نتیجه با اعمال رابطه (۳-۷) در معادلات بی‌بعد شده تعادل((۳-۳) تا (۳-۷)) و جدا سازی معادلات حاصل بر حسب مرتبه‌های ε^0 و ε^1 (بالانویس این مولفه‌ها به معنی توان آن‌ها می‌باشد)، معادلات مرتبه صفر و یک حاصل می‌شود؛ بدین صورت که ضرایب ε^0 معادلات مرتبه صفر($O(\varepsilon^0)$) و ضرایب ε^1 معادلات مرتبه یک($O(\varepsilon^1)$) را تشکیل می‌دهند.

معادلات مرتبه صفر:

$$-\beta_1 \frac{\partial^2 v_{00}^*}{\partial\theta^*\partial X} - \beta_2 \frac{\partial^2 v_{00}^*}{\partial\theta^*\partial X} - \frac{\partial^2 u_{00}^*}{\partial X^2} - \beta_2 \frac{\partial^2 u_{00}^*}{\partial\theta^{*2}} = 0 \tag{۳-۸}$$

$$-\left(\beta_2+\beta_1\right)\frac{\partial^2 v_{10}^*}{\partial\theta^*\partial X} - \beta_2 \frac{\partial^2 u_{10}^*}{\partial\theta^{*2}} - \frac{\partial^2 u_{10}^*}{\partial X^2} + 12k_s\beta_2 \frac{\partial w_{00}^*}{\partial X} + 12k_s\beta_2 u_{10}^* = 0 \tag{۳-۹}$$

$$-\left(\beta_2+\beta_1\right)\frac{\partial^2 u_{00}^*}{\partial\theta^*\partial X} - \beta_2 \frac{\partial^2 v_{00}^*}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 v_{00}^*}{\partial\theta^{*2}} = 0 \tag{۳-۱۰}$$

$$-\left(\beta_2+\beta_1\right)\frac{\partial^2 u_{10}^*}{\partial\theta^*\partial X} - \beta_2 \frac{\partial^2 v_{10}^*}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 v_{10}^*}{\partial\theta^{*2}} + 12k_s\beta_2 \frac{\partial w_{00}^*}{\partial\theta^*} + 12k_s\beta_2 v_{10}^* = 0 \tag{۳-۱۱}$$

$$-\frac{\partial^2 w_{00}^*}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 w_{00}^*}{\partial\theta^{*2}} - \frac{\partial v_{10}^*}{\partial\theta^*} - \frac{\partial u_{10}^*}{\partial X} = 0 \tag{۳-۱۲}$$

معادلات مرتبه یک:

$$\begin{aligned}
&-2\beta_2 \frac{\partial^2 v_{01}^*}{\partial\theta^*\partial X} - 2\frac{\partial^2 u_{01}^*}{\partial X^2} - 2\beta_2 \frac{\partial w_{00}^*}{\partial\theta^*}\frac{\partial^2 w_{00}^*}{\partial\theta^*\partial X} - 4\beta_2 X \frac{\partial^2 v_{00}^*}{\partial\theta^*\partial X} + 2\frac{\partial v_{00}^*}{\partial\theta^*} \\
&-4\beta_1 X \frac{\partial^2 v_{00}^*}{\partial\theta^*\partial X} - 2\beta_1 \frac{\partial^2 v_{01}^*}{\partial\theta^*\partial X} - 2\frac{\partial w_{00}^*}{\partial X}\frac{\partial^2 w_{00}^*}{\partial X^2} - 2\beta_2 X \frac{\partial^2 u_{00}^*}{\partial\theta^{*2}} + 2\beta_2 \frac{\partial v_{00}^*}{\partial\theta^*} - 2\frac{\partial u_{00}^*}{\partial X} \\
&-2\beta_1 \frac{\partial w_{00}^*}{\partial\theta^*}\frac{\partial^2 w_{00}^*}{\partial\theta^*\partial X} - 6X \frac{\partial^2 u_{00}^*}{\partial X^2} - 2\beta_2 \frac{\partial w_{00}^*}{\partial X}\frac{\partial^2 w_{00}^*}{\partial\theta^{*2}} - 2\beta_2 \frac{\partial^2 u_{01}^*}{\partial\theta^{*2}} = 0
\end{aligned} \tag{۳-۱۳}$$

$$\begin{aligned}
&-\beta_1 \frac{\partial^2 v_{11}^*}{\partial\theta^*\partial X} + 12k_s\beta_2 u_{11}^* + 24k_s\beta_2 X \frac{\partial w_{00}^*}{\partial X} - \beta_2 \frac{\partial^2 u_{11}^*}{\partial\theta^{*2}} - \frac{\partial u_{10}^*}{\partial X} - \beta_2 \frac{\partial^2 v_{11}^*}{\partial\theta^*\partial X} + \frac{\partial v_{10}^*}{\partial\theta^*} \\
&-2X \frac{\partial^2 u_{10}^*}{\partial X^2} - \beta_2 X \frac{\partial^2 v_{10}^*}{\partial\theta^*\partial X} + 24k_s\beta_2 X u_{10}^* - \beta_1 X \frac{\partial^2 v_{10}^*}{\partial\theta^*\partial X} + \beta_2 \frac{\partial v_{10}^*}{\partial\theta^*} \\
&+12k_s\beta_2 \frac{\partial^2 w_{01}^*}{\partial X} - \frac{\partial^2 u_{11}^*}{\partial X^2} = 0
\end{aligned} \tag{۳-۱۴}$$

$$
\begin{aligned}
&-\beta_2 \frac{\partial^2 v_{01}^{*}}{\partial X^{2}} - \frac{\partial w_{00}^{*}}{\partial \theta^{*}} \frac{\partial^2 w_{00}^{*}}{\partial \theta^{*2}} - \frac{\partial^2 v_{01}^{*}}{\partial \theta^{*2}} - \frac{\partial u_{00}^{*}}{\partial \theta^{*}} - \beta_2 \frac{\partial^2 u_{01}^{*}}{\partial \theta^{*} \partial X} - 2\beta_2 X \frac{\partial^2 u_{00}^{*}}{\partial \theta^{*} \partial X} - X \frac{\partial^2 v_{00}^{*}}{\partial \theta^{*2}} \\
&-3\beta_2 X \frac{\partial^2 v_{00}^{*}}{\partial X^{2}} - \beta_2 \frac{\partial v_{00}^{*}}{\partial X} - \beta_1 \frac{\partial w_{00}^{*}}{\partial X} \frac{\partial^2 w_{00}^{*}}{\partial \theta^{*} \partial X} - \beta_2 \frac{\partial u_{00}^{*}}{\partial \theta^{*}} - 2\beta_1 X \frac{\partial^2 u_{00}^{*}}{\partial \theta^{*} \partial X} - \beta_1 \frac{\partial^2 u_{01}^{*}}{\partial \theta^{*} \partial X} \\
&-\beta_2 \frac{\partial w_{00}^{*}}{\partial X} \frac{\partial^2 w_{00}^{*}}{\partial \theta^{*} \partial X} - \beta_2 \frac{\partial^2 w_{00}^{*}}{\partial X^{2}} \frac{\partial w_{00}^{*}}{\partial \theta^{*}} = 0
\end{aligned}
\tag{۱۵-۳}
$$

$$
\begin{aligned}
&-2\beta_2 X \frac{\partial^2 v_{10}^{*}}{\partial X^{2}} - \beta_2 X \frac{\partial^2 u_{10}^{*}}{\partial \theta^{*} \partial X} + 12\beta_2 k_s \frac{\partial w_{01}^{*}}{\partial \theta^{*}} + 24 k_s \beta_2 X v_{10}^{*} + 12\beta_2 k_s v_{11}^{*} \\
&+12 k_s \beta_2 X \frac{\partial w_{00}^{*}}{\partial \theta^{*}} - \beta_2 \frac{\partial^2 v_{11}^{*}}{\partial X^{2}} - \beta_2 \frac{\partial^2 u_{11}^{*}}{\partial \theta^{*} \partial X} - \beta_2 \frac{\partial v_{10}^{*}}{\partial X} - \beta_1 \frac{\partial^2 u_{11}^{*}}{\partial \theta^{*} \partial X} - \frac{\partial^2 v_{11}^{*}}{\partial \theta^{*2}} - \frac{\partial u_{10}^{*}}{\partial \theta^{*}} \\
&-\beta_2 \frac{\partial u_{10}^{*}}{\partial \theta^{*}} - \beta_1 X \frac{\partial^2 u_{10}^{*}}{\partial \theta^{*} \partial X} = 0
\end{aligned}
\tag{۱۶-۳}
$$

$$
\begin{aligned}
&-2k_s \beta_2 \frac{\partial w_{00}^{*}}{\partial X} - 2\beta_1 \frac{\partial w_{00}^{*}}{\partial X} \frac{\partial^2 v_{00}^{*}}{\partial \theta^{*} \partial X} - 2 \frac{\partial w_{00}^{*}}{\partial \theta^{*}} \frac{\partial^2 v_{00}^{*}}{\partial \theta^{*2}} - 2\beta_2 \frac{\partial w_{00}^{*}}{\partial X} \frac{\partial^2 u_{00}^{*}}{\partial \theta^{*} \partial X} \\
&-2 \frac{\partial^2 w_{00}^{*}}{\partial X^{2}} \frac{\partial u_{00}^{*}}{\partial X} - 2\beta_2 \frac{\partial w_{00}^{*}}{\partial \theta^{*}} \frac{\partial^2 u_{00}^{*}}{\partial \theta^{*} \partial X} - 4 k_s \beta_2 X \frac{\partial^2 w_{00}^{*}}{\partial \theta^{*2}} - 2\beta_1 \frac{\partial^2 w_{00}^{*}}{\partial X^{2}} \frac{\partial v_{00}^{*}}{\partial \theta^{*}} \\
&-8 k_s \beta_2 X \frac{\partial^2 w_{00}^{*}}{\partial X^{2}} - 2\beta_1 \frac{\partial^2 w_{00}^{*}}{\partial \theta^{*2}} \frac{\partial u_{00}^{*}}{\partial X} - 2\beta_1 \frac{\partial w_{00}^{*}}{\partial \theta^{*}} \frac{\partial^2 u_{00}^{*}}{\partial \theta^{*} \partial X} - 4\beta_2 \frac{\partial^2 w_{00}^{*}}{\partial \theta^{*} \partial X} \frac{\partial v_{00}^{*}}{\partial X} \\
&-2\beta_2 k_s \frac{\partial u_{11}^{*}}{\partial X} - 6 k_s \beta_2 X \frac{\partial v_{10}^{*}}{\partial \theta^{*}} - 2\beta_2 \frac{\partial w_{00}^{*}}{\partial X} \frac{\partial^2 v_{00}^{*}}{\partial \theta^{*} \partial X} - 2\beta_2 k_s \frac{\partial^2 w_{01}^{*}}{\partial \theta^{*2}} - 2 \frac{\partial w_{00}^{*}}{\partial X} \frac{\partial^2 u_{00}^{*}}{\partial X^{2}} \\
&-2 \frac{\partial^2 w_{00}^{*}}{\partial \theta^{*2}} \frac{\partial v_{00}^{*}}{\partial \theta^{*}} - 2\beta_2 k_s \frac{\partial v_{11}^{*}}{\partial \theta^{*}} - 4\beta_2 \frac{\partial^2 w_{00}^{*}}{\partial \theta^{*} \partial X} \frac{\partial u_{00}^{*}}{\partial \theta^{*}} - 2 k_s \beta_2 u_{10}^{*} - 8 k_s \beta_2 X \frac{\partial u_{10}^{*}}{\partial X} \\
&-2\beta_2 \frac{\partial w_{00}^{*}}{\partial \theta^{*}} \frac{\partial^2 v_{00}^{*}}{\partial X^{2}} - 2\beta_2 k_s \frac{\partial^2 w_{01}^{*}}{\partial X^{2}} = 0
\end{aligned}
\tag{۱۷-۳}
$$

۳-۴- حل تحلیلی معادلات مرتبه صفر و یک

معادلات مرتبه صفر شامل پنج معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی همگن با ضرایب ثابت و کوپل به یکدیگر هستند که معادلات (۳-۸) و (۳-۱۰) با یکدیگر و سه معادله دیگر نیز با هم‌دیگر کوپل هستند. معادلات مرتبه یک نیز شامل پنج معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی ناهمگن و با ضریب متغیر هستند که معادلات (۳-۱۳) و (۳-۱۵) با یکدیگر و معادلات (۳-۱۴)، (۳-۱۶) و (۳-۱۷) نیز با یکدیگر کوپل هستند. به‌منظور حل این معادلات، با تعریف بسط مثلثاتی زیر، جملات معادله‌ها تنها به یک متغیر وابسته کاهش پیدا می‌کند.

$$\begin{aligned}
&u_{00}^{*}\left(X,\theta^{*}\right)=u_{00}\left(X\right)\times\cos\left(n\times\theta^{*}\right),\;\; u_{10}^{*}\left(X,\theta^{*}\right)=u_{10}\left(X\right)\times\cos\left(n\times\theta^{*}\right)\\
&u_{01}^{*}\left(X,\theta^{*}\right)=u_{01}\left(X\right)\times\cos\left(n\times\theta^{*}\right),\;\; u_{11}^{*}\left(X,\theta^{*}\right)=u_{11}\left(X\right)\times\cos\left(n\times\theta^{*}\right)\\
&v_{00}^{*}\left(X,\theta^{*}\right)=v_{00}\left(X\right)\times\sin\left(n\times\theta^{*}\right),\;\; \mathrm{v}_{10}^{*}\left(X,\theta^{*}\right)=v_{10}\left(X\right)\times\sin\left(n\times\theta^{*}\right)\\
&v_{01}^{*}\left(X,\theta^{*}\right)=v_{01}\left(X\right)\times\sin\left(n\times\theta^{*}\right),\;\; \mathrm{v}_{11}^{*}\left(X,\theta^{*}\right)=v_{11}\left(X\right)\times\sin\left(n\times\theta^{*}\right)\\
&w_{00}^{*}\left(X,\theta^{*}\right)=w_{00}\left(X\right)\times\cos\left(n\times\theta^{*}\right),\;\; \mathrm{w}_{10}^{*}\left(X,\theta^{*}\right)=w_{10}\left(X\right)\times\cos\left(n\times\theta^{*}\right)
\end{aligned}\tag{۱۸-۳}$$

با جایگذاری رابطه (۳-۱۸) در معادلات (۳-۸) تا (۳-۱۷) و دسته‌بندی معادلات مربوطه بر حسب ضرایب سینوس و کسینوس و در نهایت با برابر صفر قرار دادن معادلات و حذف سینوس و کسینوس از معادلات، شکل یک بعدی معادلات مرتبه صفر و مرتبه یک تعادل، حاصل می‌شود.

معادلات مرتبه صفر در شکل یک بعدی:

$$EQ_{10}:-\frac{d^2u_{00}}{dX^2}-\left(\beta_2+\beta_1\right)\frac{dv_{00}}{dX}n+\beta_2u_{00}n^2=0 \tag{۱۹-۳}$$

$$EQ_{20}:-\frac{d^2u_{10}}{dX^2}-\left(\beta_2+\beta_1\right)\frac{dv_{10}}{dX}n+12k_s\beta_2\frac{dw_{00}}{dX}+12k_s\beta_2u_{10}+\beta_2u_{10}n^2=0 \tag{۲۰-۳}$$

$$EQ_{30}:-\beta_2\frac{d^2v_{00}}{dX^2}+\left(\beta_2+\beta_1\right)\frac{du_{00}}{dX}n+v_{00}n^2=0 \tag{۲۱-۳}$$

$$EQ_{40}:-\beta_2\frac{d^2v_{10}}{dX^2}+\left(\beta_2+\beta_1\right)\frac{du_{10}}{dX}n-12k_s\beta_2w_{00}+12k_s\beta_2v_{10}+v_{10}n^2=0 \tag{۲۲-۳}$$

$$EQ_{50}:\frac{d^2w_{00}}{dX^2}+\frac{du_{10}}{dX}-w_{00}n^2+v_{10}n=0 \tag{۲۳-۳}$$

معادلات مرتبه یک در شکل یک بعدی:

$$\begin{aligned}
&EQ_{11}:-3X\frac{d^2u_{00}}{dX^2}-\frac{d^2u_{01}}{dX^2}-2\left(\beta_2+\beta_1\right)X\frac{dv_{00}}{dX}n-\left(\beta_2+\beta_1\right)\frac{dv_{01}}{dX}n-\frac{du_{00}}{dX}\\
&+\beta_2Xu_{00}n^2+\beta_2u_{01}n^2+\beta_2v_{00}n+nv_{00}=0
\end{aligned}\tag{۲۴-۳}$$

$$\begin{aligned}
&EQ_{21}:2X\frac{d^2u_{10}}{dX^2}+\frac{d^2u_{11}}{dX^2}-24k_s\beta_2X\frac{dw_{00}}{dX}+\left(\beta_2+\beta_1\right)X\frac{dv_{10}}{dX}n+\left(\beta_2+\beta_1\right)\frac{dv_{11}}{dX}n\\
&-12k_s\beta_2\frac{dw_{01}}{dX}+\frac{du_{10}}{dX}-24k_s\beta_2Xu_{10}-12k_s\beta_2u_{11}-\beta_2u_{11}n^2-\beta_2v_{10}n-v_{10}n=0
\end{aligned}\tag{۲۵-۳}$$

$$\begin{aligned}
&EQ_{31}:3\beta_2X\frac{d^2u_{00}}{dX^2}+\beta_2\frac{d^2v_{01}}{dX^2}-2\left(\beta_2+\beta_1\right)X\frac{du_{00}}{dX}n-\left(\beta_2+\beta_1\right)\frac{du_{01}}{dX}n+\beta_2\frac{dv_{00}}{dX}\\
&-Xv_{00}n^2-\beta_2u_{00}n-v_{01}n^2-u_{00}n=0
\end{aligned}\tag{۲۶-۳}$$

$$\begin{aligned}
&EQ_{41}:-\beta_2\frac{d^2v_{11}}{dX^2}-2\beta_2X\frac{d^2v_{10}}{dX^2}+\left(\beta_2+\beta_1\right)X\frac{du_{10}}{dX}n+\left(\beta_2+\beta_1\right)\frac{du_{11}}{dX}n-\beta_2\frac{dv_{10}}{dX}\\
&-12k_s\beta_2Xw_{00}n+24k_s\beta_2Xv_{10}-12\beta_2k_sw_{01}n+12\beta_2k_sv_{11}+\beta_2u_{10}n+v_{11}n^2\\
&+u_{10}n=0
\end{aligned}\tag{۲۷-۳}$$

$$EQ_{51}:4X\ \frac{d^2w_{00}}{dX^2}+\frac{d^2w_{01}}{dX^2}+4X\ \frac{du_{10}}{dX}+\frac{du_{11}}{dX}+\frac{dw_{00}}{dX}-2Xw_{00}n^2+3Xv_{10}n-w_{01}n^2$$
$$+v_{11}n+u_{10}=0 \qquad (۲۸-۳)$$

همچنین به‌منظور اعمال شرایط مرزی در معادلات یک بعدی حاصل، معادلات شرایط مرزی نیز باید به حالت یک بعدی تبدیل شوند که برای این منظور تعریف جدید $Q^*=Q_0^*\times\mathbf{cos}\left(n\times\theta^*\right)$ برای بار شعاعی بی‌بعد در نظر گرفته می‌شود و سپس با جایگذاری رابطه (۳-۱۸) در معادلات شرایط مرزی مانند معادلات تعادل مرتبه صفر و یک، شرایط مرزی یک بعدی را می‌توان استخراج نمود؛ بدین‌صورت معادلات شرایط مرزی یک بعدی برای مرتبه صفر به‌شکل زیر:

$$BC_{10}:\frac{du_{00}}{dX}+\beta_1v_{00}n-Q_0^* \qquad (۲۹-۳)$$

$$BC_{20}:\frac{du_{10}}{dX}+\beta_1v_{10}n \qquad (۳۰-۳)$$

$$BC_{30}:\frac{dv_{00}}{dX}-u_{00}n \qquad (۳۱-۳)$$

$$BC_{40}:-\frac{dv_{10}}{dX}+u_{10}n \qquad (۳۲-۳)$$

$$BC_{50}:\frac{dw_{00}}{dX}+u_{10} \qquad (۳۳-۳)$$

و معادلات شرایط مرزی یک بعدی برای مرتبه یک در قالب روابط زیر به‌دست می‌آیند.

$$BC_{11}:2X\ \frac{du_{00}}{dX}+\beta_1v_{00}nX\ -Q_0^*X\ +\beta_1v_{01}n+\frac{du_{01}}{dX}+\beta_1u_{00} \qquad (۳۴-۳)$$

$$BC_{21}:X\ \frac{du_{10}}{dX}+\frac{du_{11}}{dX}+\beta_1u_{10}+\beta_1v_{11}n \qquad (۳۵-۳)$$

$$BC_{31}:2u_{01}\frac{dv_{01}}{dX}n-u_{01}^2n^2-v_{00}u_{01}n+\frac{dv_{00}}{dX}Xu_{01}n-\frac{dv_{00}}{dX}X\ \frac{dv_{01}}{dX}-\left(\frac{dv_{01}}{dX}\right)^2$$
$$+v_{00}\frac{dv_{01}}{dX}=0 \qquad (۳۶-۳)$$

$$BC_{41}:u_{11}^2n^2-2u_{11}\frac{dv_{11}}{dX}n-\frac{dv_{10}}{dX}Xu_{11}n+\frac{dv_{10}}{dX}X\ \frac{dv_{11}}{dX}+\left(\frac{dv_{11}}{dX}\right)^2+v_{10}u_{11}n$$
$$-\frac{dv_{11}}{dX}v_{10}=0 \qquad (۳۷-۳)$$

$$BC_{51}: -\frac{dw_{00}}{dX}\varepsilon_1\frac{dv_{00}}{dX}\frac{dw_{01}}{dX} - 6k_s\frac{dw_{00}}{dX}X\frac{dw_{01}}{dX}\pi n + \frac{dw_{00}}{dX}\varepsilon_1 u_{00}\frac{dw_{01}}{dX}n - \frac{dw_{00}}{dX}\varepsilon_1\frac{dv_{00}}{dX}u_{11}n$$
$$-6k_s u_{10}X\frac{dw_{01}}{dX}\pi n - 6k_s\frac{dw_{00}}{dX}Xu_{11}\pi n + \frac{dw_{00}}{dX}\varepsilon_1 u_{00}u_{11} - 6k_s\frac{dw_{01}}{dX}u_{11}\pi n - 3k_s\left(\frac{dw_{01}}{dX}\right)^2\pi n \quad (۳۸-۳)$$
$$-3k_s\left(u_{11}\right)^2\pi n - 6k_s u_{10}Xu_{11}\pi n = 0$$

۳-۴-۱- حل تحلیلی معادلات مرتبه صفر

حل معادلات مرتبه صفر((۳-۱۹) تا (۳-۲۳)) به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{Bmatrix} u_{00}\left(X,\theta_s\right) \\ v_{00}\left(X,\theta_s\right) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{2}\{V_i\}\exp(\mu_i X)\begin{Bmatrix} \cos\left(n*\theta_s\right) \\ \sin\left(n*\theta_s\right) \end{Bmatrix},\quad \{V_i\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad (۳۹-۳)$$

$$\begin{Bmatrix} u_{10}\left(X\right) \\ v_{10}\left(X\right) \\ w_{00}\left(X\right) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{6}\{V_i\}\exp(s_i X),\quad \{V_i\} = \begin{Bmatrix} F_2 \\ F_4 \\ F_5 \end{Bmatrix} \quad (۴۰-۳)$$

در روابط بالا $\{V_i\}$ بردار ویژه، s_i و μ_i بیان کننده مقادیر ویژه می‌باشند، با جایگذاری رابطه (۳-۳۹) در معادلات (۳-۱۹) و (۳-۲۱) که با یکدیگر کوپل هستند؛ یک دستگاه معادلات جبری حاصل می‌شود که به‌شکل ماتریسی زیر نوشته خواهد شد.

$$\begin{bmatrix} 2\beta_2 n^2 - 2\mu^2 & -2\mu n(\beta_1+\beta_2) \\ \mu n(\beta_1+\beta_2) & n^2 - \beta_2\mu^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_3 \end{Bmatrix} = 0 \quad (۴۱-۳)$$

همچنین با جایگذاری رابطه (۳-۴۰) در معادلات کوپل EQ_{20} ، EQ_{40} و EQ_{50}، دستگاه معادلات جبری دیگری به‌دست می‌آید که به‌صورت ماتریسی زیر نمایش داده می‌شود.

$$\begin{bmatrix} 12k_s\beta_2 - s^2 + \beta_2 n^2 & -s(\beta_1+\beta_2)n & 12k_s\beta_2 s \\ s(\beta_1+\beta_2)n & 12k_s\beta_2 - \beta_2 s^2 + n^2 & -12k_s\beta_2 n \\ -2k_s\beta_2 s & -2k_s\beta_2 n & -2k_s\beta_2(s^2-n^2) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} F_2 \\ F_4 \\ F_5 \end{Bmatrix} = 0 \quad (۴۲-۳)$$

برای وجود جواب غیرصفر دترمینان ماتریس ضرایب روابط (۳-۴۱) و (۳-۴۲) باید صفر شود. با جایگذاری $\left(\mu=\sqrt{m}\right)$ در معادله حاصل از صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه معادلات اول و حل آن، دو مقدار برای m به‌دست می‌آید که در نتیجه مقدار ویژه μ نیز حاصل می‌شود که به دلیل وجود مقدار ویژه تکراری، حل به‌صورت زیر اصلاح می‌شود.

$$\begin{Bmatrix} u_{00}\left(X,\theta_s\right) \\ v_{00}\left(X,\theta_s\right) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{2} \{V_i\}\exp(\mu_i X)\begin{Bmatrix} \cos\left(n*\theta_s\right) \\ \sin\left(n*\theta_s\right) \end{Bmatrix},\quad \{V_i\}=\begin{Bmatrix} A_1+X*B_1 \\ A_2+X*B_2 \end{Bmatrix} \qquad (۴۳\text{-}۳)$$

با جایگذاری رابطه (۳-۴۳) در معادلات (۳-۸) و (۳-۱۰) و بازنویسی معادلات دو رابطه برای X^0 و X^1 ، چهار معادله جبری جدید حاصل می‌شود.

$$-2\left(B_2 n+A_2\mu n\right)\left(\beta_1+\beta_2\right)-2\beta_2\left(B_2 n+A_2\mu n\right)-2A_1\mu^2+2B_2A_1n^2-4B_1\mu \qquad (۴۴\text{-}۳)$$

$$-2B_2\mu n\left(\beta_1+\beta_2\right)+2\beta_2B_1n^2-2\beta_1\mu^2 \qquad (۴۵\text{-}۳)$$

$$-\beta_2\left(2B_2\mu+A_2\mu^2\right)+\left(B_1n+A_1\mu n\right)\left(\beta_1+\beta_2\right)+A_2n^2 \qquad (۴۶\text{-}۳)$$

$$-2\beta_2B_2\mu^2+B_2n^2+B_1\mu n\left(\beta_1+\beta_2\right) \qquad (۴۷\text{-}۳)$$

با حل معادله (۳-۴۴) مقدار B_1 بر حسب B_2 به‌دست می‌آید و با جایگذاری مقدار به‌دست آمده برای B_1 در رابطه (۳-۴۵) و حل آن، مقدار A_1 بر حسب A_2 و B_2 حاصل می‌شود که با قرار دادن مقادیر حاصل و تساوی‌های $\left(A_2=c_1\ ,\ \mathrm{B}_2=c_2\right)$ یکبار برای μ و $\left(A_2=c_3\ ,\ \mathrm{B}_2=c_4\right)$ یکبار برای $-\mu$ در رابطه (۳-۴۳) و جمع این دو رابطه، بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه به‌دست می‌آید؛ حل کلی به‌شکل رابطه (۳-۴۳) می‌باشد که به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$\begin{Bmatrix} u_{00}\left(X,\theta_s\right) \\ v_{00}\left(X,\theta_s\right) \end{Bmatrix} = \left| \begin{array}{l} c_1\{V_1\}\exp(\mu X)+c_2\{V_2\}\exp(-\mu X)+c_3\{V_3\}\exp(\mu X) \\ +c_4\{V_4\}\exp(-\mu X) \end{array} \right. \qquad (۴۸\text{-}۳)$$

همچنین از حل معادله حاصل از صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه معادلات دوم، شش مقدار ویژه $s_i\,(i=1..6)$ حاصل می‌شود که با اعمال مقادیر ویژه به‌دست آمده در رابطه (۳-۴۲)، بردار ویژه $\{V_i\}$ که متناظر با مقادیر ویژه s_i می‌باشد، حاصل می‌شود. پس از به‌دست آوردن مقادیر ویژه و

بردارهای ویژه متناظر، حل کلی معادلات به‌شکل رابطه (۳-۴۰) می‌باشد که به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$\begin{Bmatrix} u_{10}(X) \\ v_{10}(X) \\ w_{00}(X) \end{Bmatrix} = \left| \begin{matrix} c_1\{V_1\}\exp(s_1X) + c_2\{V_2\}\exp(s_2X) + c_3\{V_3\}\exp(s_3X) \\ + c_4\{V_4\}\exp(s_4X) + c_5\{V_5\}\exp(s_5X) + c_6\{V_6\}\exp(s_6X) \end{matrix} \right. \tag{۴۹-۳}$$

۳-۴-۲- حل تحلیلی معادلات مرتبه یک

معادلات اول و سوم مرتبه یک(EQ_{11} و EQ_{31}) به‌دلیل ناهمگن بودن، دارای دو حل عمومی و خصوصی می‌باشند که با جمع حل عمومی و خصوصی جواب کلی آن‌ها به‌دست می‌آید. معادلات دوم، چهارم و پنجم مرتبه یک(EQ_{21} ، EQ_{41} و EQ_{51}) نیز مانند معادلات مرتبه صفر همگن هستند و حلی مشابه دارند. بدین ترتیب، ابتدا حل معادلات اول و سوم تعادل بررسی می‌شود و سپس به حل سه معادله دیگر پرداخته می‌شود.

بخش همگن معادلات اول و سوم مرتبه یک به‌ترتیب، به‌صورت روابط زیر می‌باشند.

$$EQ_{11}\_H = -2\frac{d^2u_{01}}{dX^2} - (\beta_2+\beta_1)2n\frac{dv_{01}}{dX} + 2n^2\beta_2 u_{01} \tag{۵۰-۳}$$

$$EQ_{31}\_H = -\beta_2\frac{d^2v_{01}}{dX^2} + (\beta_2+\beta_1)n\frac{du_{01}}{dX} + n^2 v_{01} \tag{۵۱-۳}$$

بخش همگن مرتبه یک با بخش همگن مرتبه صفر یکسان است؛ بنابراین حل آن نیز مشابه قبل است.

حل خصوصی معادلات EQ_{11} و EQ_{31} نیز به‌شکل در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{Bmatrix} u_{01}(X) \\ v_{01}(X) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{2}\{V_i\}\exp(\mu X), \quad \{V_i\} = \begin{Bmatrix} \left(a_4[i]X^3 + a_3[i]X^2 + a_2[i]X + a_1[i]\right) \\ \left(b_4[i]X^3 + b_3[i]X^2 + b_2[i]X + b_1[i]\right) \end{Bmatrix} \tag{۵۲-۳}$$

در رابطه (۳-۵۲)، μ مقدار ویژه و $\{V_i\}$ بردارهای ویژه می‌باشند، همچنین a_1,a_2,a_3,a_4 و b_1,b_2,b_3,b_4 نیز مقادیر ثابت هستند؛ مقادیر ویژه برای حل خصوصی، همان مقادیر به‌دست آمده در حل همگن می‌باشند.

حل‌های در نظر گرفته شده در رابطه (۳-۵۲) در روابط EQ_{11} و EQ_{31} جایگذاری می‌شود و برای مقادیر i دستگاه معادلات به‌صورت جداگانه حل می‌شود؛ برای $i=1$ ، دستگاه معادلات بر حسب ضریب نمایی معادلات ($e^{\mu X}$) نوشته شده، سپس معادلات حاصل ابتدا برحسب ضرایب X^3 نوشته و حل می‌شوند که مقادیر $b_4[1]$ و $a_4[1]$ بر حسب یکدیگر حاصل می‌شوند، در مرحله بعد معادلات برحسب ضرایب X^2 به‌دست آورده می‌شوند، حل قبلی جایگذاری می‌شود و معادلات برای $b_4[1]$ حل می‌شوند که مقدار $b_4[1]$ برحسب $a_3[1]$ و $b_3[1]$ حاصل می‌شوند؛ حال معادلات بر حسب ضرایب X^1 مرتب می‌شود و حل‌های حاصل از دو مرحله قبل جایگذاری می‌شوند و معادلات برای $b_3[1]$ و $b_2[1]$ حل می‌شوند که $b_3[1]$ و $b_2[1]$ برحسب $a_2[1]$ و $a_3[1]$ حاصل می‌شوند؛ این‌بار معادلات برحسب ضرایب X^0 بازنویسی می‌شوند و با جایگذاری حل‌های قبلی معادلات برای مقادیر $a_2[1]$ و $a_3[1]$ حل می‌شوند که $a_2[1]$ و $a_3[1]$ بر حسب $a_1[1]$ و $b_1[1]$ به‌دست می‌آیند؛ در انتها حل‌های به‌دست آمده در رابطه (۳-۵۲) جایگذاری می‌شوند و با اعمال $b_1[1]=0$ و $a_1[1]=0$(با توجه به بی تاثیر بودن در رابطه) جواب کلی برای مقدار $i=1$ حاصل می‌شود؛ برای $i=2$ نیز دستگاه معادلات بر حسب ضریب نمایی معادلات ($e^{-\mu X}$) نوشته شده و به‌صورت مشابه عمل می‌شود. در نهایت با جمع نمودن مقادیر به‌دست آمده برای دو مقدار $i=1,2$، حل خصوصی تکمیل می‌گردد. حل کلی معادلات نیز با جمع حل خصوصی و عمومی حاصل می‌گردد.

حل دستگاه معادلات دو، چهار و پنج مرتبه یک نیز مشابه حل بخش همگن معادلات یک و سه مرتبه یک در نظر گرفته می‌شود.

لازم به‌ذکر است که با افزایش تعداد جملات رابطه (۳-۷)، مرتبه معادلات تعادل($\mathrm{O}(\varepsilon^n)$, n=0,1,2,3...)نیز افزایش یافته که با روشی مشابه حل‌های ارائه شده در مرتبه صفر و یک، معادلات مرتبه بالاتر نیز حل می‌شوند.

۳-۵- جمع‌بندی

در این فصل هدف، حل معادلات تعادل به روش تحلیلی بود که ابتدا با تعریف پارامترهای بی‌بعد معادلات تعادل استخراج شده از فصل دو، بی‌بعد شدند؛ سپس با تعریف بسط مستقیم از تئوری اغتشاشات معادلات تعادل به دو بخش مرتبه صفر و یک تقسیم شدند که معادلات مرتبه صفر همگن و معادلات مرتبه یک ناهمگن بودند که در نهایت جداگانه با روش‌های تحلیلی حل شدند.

فصل ۴:

حل معادلات پایداری

۴-۱- مقدمه

در این فصل حل عددی معادلات پایداری با استفاده از روش DQ بررسی می‌گردد؛ روش DQ و انواع روش‌های اعمال شرایط مرزی در این روش شرح داده می‌شود. همچنین یک دستگاه معادلات ساده با روش مذکور به‌منظور آشنایی بیشتر با نحوه عملکرد این روش، حل می‌شود.

۴-۲- روش مربعات دیفرانسیلی(DQM)

روش DQ یک روش حل عددی برای مسائل مقدار اولیه و یا مقدار مرزی است. این روش توسط ریچارد ارنست بلمن[1] و همکاران در اوایل دهه ۷۰ میلادی توسعه یافت و از آن زمان، این روش با موفقیت در زمینه‌های مختلف علوم مهندسی و علوم فیزیکی مورد استفاده قرار گرفته است. روش پیش بینی شده توسط طرفداران آن به‌عنوان جایگزین بالقوه از تکنیک‌های حل عددی متعارف مانند تفاضلات محدود و روش‌های المان محدود است.

در کنار پیشرفت فزاینده ماشین‌های محاسبات سریع، تحقیق در زمینه توسعه روش‌های جدید برای حل عددی مسائل در علوم و مهندسی نیز در حال گسترش است. به‌عنوان مثال، شبیه‌سازی بسیاری از سیستم‌های دینامیکی اغلب نیاز به راه‌حل عددی بسیار سریع‌تر از معادلات مدل ریاضی سیستم دارد. مثال دیگر فرایند طراحی کامپیوتری است که در آن پایگاه داده اغلب نیاز به ذخیره‌سازی بزرگ کامپیوتری دارد و دستکاری‌های درونی برای پارامترهای طراحی عملی، ممکن است دقت کم‌تری داشته باشد و همچنین زمان زیادی صرف کند. در چنین مواردی، راه حل سریع عددی معادلات سیستم، امکان تجزیه، تحلیل و طراحی دقیق و کارآمد در زمان واقعی را فراهم می‌کند. روش DQ یک روش کاربردی است که در حوزه‌های مختلف از قبیل علوم بیولوژیکی، فرآیندهای حمل و نقل، مکانیک سیالات، مکانیک

1 Richard Ernest Bellman

ساختاری استاتیک و دینامیکی، استاتیک ایرواالاستیک و مکانیک روانکاری استفاده می‌شود. ادعا شده است که روش DQ توانایی تولید راه‌حل‌های بسیار دقیق، با حداقل تلاش محاسباتی دارد[59].

۴-۲-۱- قوانین مربعات

روش‌های عددی برای حل مسائل مقدار اولیه و یا مقدار مرزی، به‌طور کلی به‌دنبال تغییر از طریق یک فرمول دیفرانسیلی یا انتگرالی می‌باشند. در روش DQ ، معادلات دیفرانسیل به‌طور مستقیم گسسته سازی و حل می‌شوند؛ بدین‌صورت که ابتدا دامنه مساله به یک سری نقاط گره‌ای تقسیم بندی می‌شود و سپس مشتقات جزئی یا انتگرال‌های موجود در معادله دیفرانسیل به‌صورت مجموع ضرایب وزنی مقادیر تابع در تمام نقاط گسسته در آن جهت تقریب زده می‌شود[59].

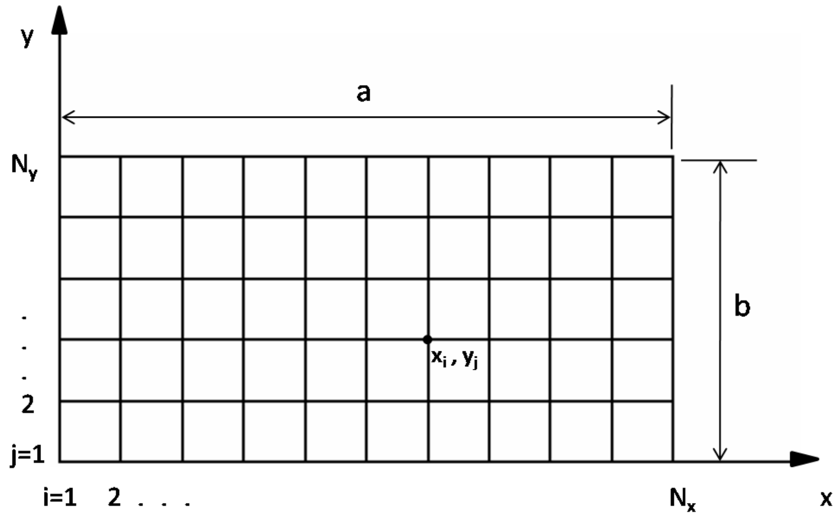
به‌منظور آشنایی با اساس ریاضی روش DQ ، تابع $\psi(x,y)$ را در یک دامنه مستطیلی $0 \le X \le a$ و $0 \le y \le b$ در نظر بگیرید. فرض می‌شود در دامنه داده شده، مقادیر تابع در یک شبکه از نقاط نمونه برداری شناخته شده، مشخص هستند، به‌طوری که، همان‌طور که در شکل (۴-۱) نشان داده شده، با قرار دادن N_x و N_y نقطه، به‌ترتیب در جهت x و y، شبکه مد نظر به‌دست می‌آید. سپس یک مشتق جزئی نسبت به x و مرتبه r، از تابع $\psi(x,y)$ در نقطه $x = x_i$ در امتداد هر خط $y = y_i$ (موازی با محور x)، به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\left.\frac{\partial^r \psi}{\partial x^r}\right|_{x=x_1} = \sum_{K=1}^{N} A_{ik}^{(r)} \psi_{kj}; \quad i = 1,2,\ldots,N_x \qquad (۴-۱)$$

همچنین یک مشتق جزئی نسبت به y و مرتبه s، در یک نقطه گسسته $y = y_i$ در امتداد هر خط $x = x_i$ موازی با محور x ، به‌صورت زیر نوشته خواهد شود.

$$\left.\frac{\partial^s \psi}{\partial y^s}\right|_{y=y_1} = \sum_{l=1}^{N_y} B_{jl}^{(s)} \psi_{il}; \quad j = 1,2,\ldots,N_y \qquad (۴-۲)$$

به‌طوری که ${A_{ik}}^{(r)}$ و $B_{il}^{(s)}$ ، ضرایب وزنی مناسب هستند و همچنین $\psi_{ij} = \psi(x_i, y_j)$ می‌باشد.



شکل (۴-۱) شبکه‌بندی در دامنه مستطیلی[60]

معادلات (۴-۱) و (۴-۲)، قوانین مربعات را برای مشتقات تابع در نقاط گسسته از دامنه تابع بیان می‌کنند که برای روش DQ ، بسیار اساسی است. برای اجرای روش DQ ، نخست باید ضرایب وزنی مشخص شود؛ این کار را می‌توان با تقریب توابع در جهت مختصات مربوطه انجام داد. توابع تقریب با عنوان توابع تست نیز شناخته می‌شوند؛ الزام اولیه برای انتخاب توابع تست، مشابه انتخاب توابع درون‌یابی به‌عنوان یک نیاز در تجزیه و تحلیل اجزای محدود ضروری است.

توابع تست باید حالت‌های یکنواخت ممکن از متغیرهای زمینه را نشان دهد و دارای مشتق پذیری تا بالاترین مرتبه مشق ظاهر شده در معادله دیفرانسیل حاکم باشد. اگرچه برای انتخاب توابع تست گزینه‌های متفاوتی وجود دارد، مناسب‌ترین آن توابع تست چندجمله‌ای می‌باشد؛ بنابراین تابع $\psi(x,y)$ را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد.

$$\psi(x,y) = F(x)G(y) \tag{۳-۴}$$

که در این رابطه $F(x)$ و $G(y)$، توابع تست به‌ترتیب در جهت x و y می‌باشند، به‌طوری که:

$$F(x) = x^{\nu-1} \;\; ; \;\; \nu=1,2,...,N_x \tag{۴-۴}$$

$$G(y) = y^{\mu-1} \;\; ; \;\; \mu=1,2,...,N_y \tag{۵-۴}$$

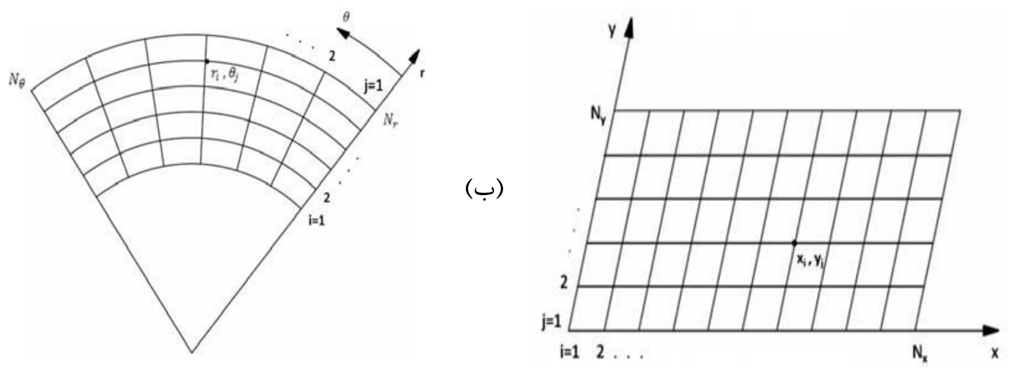
با جایگذاری معادلات (۴-۳) تا (۴-۵) در معادلات (۴-۱) و (۴-۲)، سیستم معادلات وندرموند[1] به‌دست می‌آید.

$$\sum_{k=1}^{N_x}\left(x_k^{\nu-1}\right)A_{ik}^{(r)}=\frac{\partial^r}{\partial x^r}\left(x^{\nu-1}\right)\Big|_{x=x_i}\quad ;\quad i,\nu=1,2,\ldots,N_x \tag{۶-۴}$$

$$\sum_{k=1}^{N_y}\left(y_l^{\mu-1}\right)B_{jl}^{(s)}=\frac{\partial^s}{\partial y^s}\left(y^{\mu-1}\right)\Big|_{y=y_j}\quad ;\quad j,\mu=1,2,\ldots,N_y \tag{۷-۴}$$

کاملا واضح است که برای توابع تست به این شکل، معادلات (۴-۴) و (۴-۵)، برای هر مشتقی که مرتبه آن بزرگتر یا مساوی تعداد نقاط شبکه باشد، ضرایب وزنی صفر می‌باشند. از عبارت مذکور مشخص است که ضرایب وزنی مشتق x ($A_{ik}^{(r)}$)، تنها به نقاط شبکه ($x_i\ ,\ i=1,2,\ldots,N_x$) در بازه $0\le X\le a$ بستگی دارد. به‌طور مشابه، ضرایب وزنی مشتق y ($B_{il}^{(s)}$)، تنها به نقاط شبکه ($y_i\ ,\ i=1,2,\ldots,N_y$) در بازه $0\le y\le b$ بستگی دارد. بنابراین در قوانین مربعات(معادله (۴-۱) و (۴-۲)) الزامی است که، مرزهای متغیر دامنه میدان با محورهای x و y، همتراز[2] باشند؛ با این حال، هیچ محدودیتی وجود ندارد که محورهای مرجع، دکارتی باشند؛ یعنی این معادلات تنها برای دستگاه دکارتی قابل استفاده نیستند، بلکه برای محور مرجع مورب و منحنی نیز قابل استفاده هستند؛ بنابراین، برای مثال می‌توان ضرایب وزنی مشتقات نسبت به مختصات مورب برای استفاده در یک دامنه متوازی الاضلاع (شکل(۴-۲)-الف) و مشتقات نسبت به مختصات قطبی در دامنه‌ای از قطاع دایره (شکل(۴-۲)-ب) را نیز به‌دست آورد.

1 Vandermonde
2 Aligned



شکل (۴-۲) شبکه‌بندی مربعات، در دامنه متوازی الاضلاع(الف) و در دامنه قطاعی، مدور و متحدالمرکز(ب)[61]

با توجه به قوانین مربعات می‌توان معادله (۴-۱) را به‌صورت ماتریسی زیر بازنویسی کرد.

$$\{\psi_x^{(r)}\}_j = [A^{(r)}]\{\psi\}_j \qquad (۴-۸)$$

به‌طوری که $\{\psi\}_j$ و $\left\{\psi_x{}^{(r)}\right\}_j$ به‌ترتیب، بردار ستونی مقادیر N_x مربوط به هر تابع و مشتق مرتبه r آن می‌باشند که در نقاط شبکه واقع بر خط $y = y_j$ به‌کار می‌روند. همچنین، $\left[A^{(r)}\right]$ ماتریس $N_x \times N_x$ ضرایب وزنی مربوط به مشتق مرتبه r می‌باشد. علاوه‌بر این، با توجه به تعریف عملگر دیفرانسیل:

$$\frac{\partial^r \psi}{\partial x^r} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{(r-1)}\psi}{\partial x^{(r-1)}}\right) = \frac{\partial^{(r-1)}}{\partial x^{(r-1)}}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) \qquad (۴-۹)$$

می‌توان معادله (۴-۱) را به‌شکل زیر نوشت.

$$\left.\frac{\partial^r \Psi}{\partial x^r}\right|_{x=x_i} = \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik}^{(l)} \sum_{m=1}^{N_x} A_{km}^{(r-1)} \Psi_{mj} = \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik}^{(r-1)} \sum_{m=1}^{N_x} A_{km}^{(1)} \Psi_{mj} \qquad (۴-۱۰)$$

بدین ترتیب به‌راحتی می‌توان از روابط (۴-۸) و (۴-۱۰) رابطه بازگشتی زیر را برای ضرایب وزنی به‌دست آورد.

$$\left[A^{(r)}\right] = \left[A^{(1)}\right]\left[A^{(r-1)}\right] = \left[A^{(r-1)}\right]\left[A^{(1)}\right] \qquad (۴-۱۱)$$

با توجه به رابطه (۴-۱۱) با داشتن ماتریس $\left[A^{(1)}\right]$ مربوط به ضرایب وزنی مشتق مرتبه اول، می‌توان ضرایب وزنی مشتقات مرتبه بالا را با ضرب متوالی ماتریس $\left[A^{(1)}\right]$ در خودش به‌دست آورد. معادلات (۴-۸) تا (۴-۱۱) مربوط به مشتقات جزئی نسبت به x هستند. معادلات برای مشتقات جزئی نسبت به y، با روشی مشابه محاسبه می‌شوند.

قوانین مربعات برای انتگرال نسبت به متغیر x از تابع $\psi\left(x,y\right)$ روی هر خط $y=y_j$، به‌صورت زیر است.

$$\int_{x=0}^{a}\Psi(x,y_j)dx=\sum_{k=1}^{N_x}C_k\Psi_{kj} \qquad (۴-۱۲)$$

و برای انتگرال نسبت به y روی هر خط $x=x_i$ نیز، به‌صورت زیر است.

$$\int_{y=0}^{b}\Psi(x_i,y)dy=\sum_{l=1}^{N_y}D_l\Psi_{il} \qquad (۴-۱۳)$$

معادلات (۴-۱۲) و (۴-۱۳) قوانین انتگرال مربعات هستند؛ که در آن C_k و D_l، به‌ترتیب ضرایب وزنی برای انتگرال در راستای x و y هستند. با اعمال روابط (۴-۳) تا (۴-۵) در معادلات (۴-۱۲) و (۴-۱۳) روابط زیر به‌دست می‌آید.

$$\sum_{k=1}^{N_x}\left(x_k^{\ \nu-1}\right)C_k=\frac{a^\nu}{\nu};\quad \nu=1,2,\ldots,N_x \qquad (۴-۱۴)$$

$$\sum_{l=1}^{N_y}\left(y_l^{\ \mu-1}\right)D_l=\frac{b^\mu}{\mu};\quad \mu=1,2,\ldots,N_y \qquad (۴-۱۵)$$

قوانین مربعات که در معادلات (۴-۱)، (۴-۲)، (۴-۱۴) و (۴-۱۵) بیان شده است، ممکن است برای ترکیب‌های خطی از مشتق و انتگرال توابع نیز مورد استفاده قرار گیرد.

۴-۲-۲- محاسبه ضرایب وزنی و نقاط گره‌ای

دو عامل بسیار مهم در دقت حل روش DQ ، دقت ضرایب وزنی و انتخاب نقاط نمونه برداری می‌باشد. می‌توان با حل سیستم معادلات وندرموند مانند، معادلات (۴-۶)، (۴-۷)، (۴-۱۴) و (۴-۱۵) با استفاده از حل‌کننده معادلات خطی معمول، ضرایب وزنی را بدست آورد؛ در حقیقت تجربه نشان می‌دهد ضرایب وزنی که با حل مستقیم معادلات وندرموند به‌دست می‌آیند با افزایش تعداد نقاط شبکه با خطای بیشتری مواجه می‌شوند. ضرایب وزنی ممکن است صرف‌نظر از تعداد و نقاط شبکه، به‌صورت مستقیم و با دقتی خوب، با استفاده از فرمول صریح کوان و چانگ[1] و شو و ریچارد[2] محاسبه شوند. در اینجا این فرمول بسیار مفید تنها نسبت به متغیر x ارائه شده است. و برای متغیر y، فرمول‌ها به روشی مشابه محاسبه می‌گردد. درایه‌های غیرقطری ماتریس ضرایب وزنی مشتق مرتبه اول به‌صورت زیر بیان می‌شود.

$$A_{ik}^{1} = \frac{\Pi(x_i)}{(x_i - x_k)\Pi(x_k)} \; ; \quad i,k = 1,2,\ldots,N_x \; , \quad k \neq i \qquad (۱۶\text{-}۴)$$

به‌طوری که:

$$\Pi(x_i) = \prod_{\nu=1,\nu\neq i}^{N_x} \left(x_i - x_\nu\right), \quad \Pi(\mathrm{x}_k) = \prod_{\nu=1,\nu\neq k}^{N_x} \left(x_k - x_\nu\right) \qquad (۱۷\text{-}۴)$$

درایه‌های غیرقطری ماتریس ضرایب وزنی مربوط به مشتق مرتبه دوم و بالاتر نیز با استفاده از رابطه بازگشتی زیر محاسبه می‌شود.

$$A_{ik}^{(r)} = \left[A_{ii}^{(r-1)} A_{ik}^{1} - \frac{A_{ik}^{(r-1)}}{x_i - x_k} \right] ; \quad i,k = 1,2,\ldots,N_x \; , \mathrm{k} \neq \mathrm{i}, \quad 2 \leq r \leq \left(N_x - 1\right) \qquad (۱۸\text{-}۴)$$

درایه‌های قطری ماتریس ضرایب وزنی نیز به‌شکل زیر نوشته می‌شود.

$$A_{ii}^{(r)} = -\sum_{\nu=1,\nu\neq i}^{N_x} A_{i\nu}^{(r)} \; ; \quad i,k = 1,2,\ldots,N_x \, , \quad 1 \leq r \leq \left(N_x - 1\right) \qquad (۱۹\text{-}۴)$$

---

1 Quan And Chang
2 Shu And Richards

لازم به‌ذکر است که با داشتن ضرایب وزنی مشتق مرتبه اول، می‌توان ضرایب وزنی مشتق مرتبه دوم و بالاتر را از طریق رابطه بازگشتی (۴-۱۱) به‌دست آورد. در هرصورت محاسبه ضریب وزنی با این رابطه شامل N_x ضرب و $(N_x - 1)$ جمع می‌باشد که در مجموع $(2N_x - 1)$ عملیات محاسباتی بایستی انجام شود. از طرف دیگر رابطه بازگشتی (۴-۱۸) شامل دو ضرب، یک تقسیم و یک تفریق می‌باشد؛ یعنی در مجموع چهار عملیات محاسباتی برای به‌دست آوردن هر ضریب وزنی غیرقطری لازم است که این تعداد عملیات مستقل از N_x می‌باشد. همچنین محاسبه ضرایب وزنی قطری از معادله (۴-۱۹) شامل $(N_x - 2)$ تفریق است. بنابراین مجموع عملیات محاسباتی در معادلات (۴-۱۸) و (۴-۱۹) بسیار کم‌تر از معادله (۴-۱۱) می‌باشد. در نتیجه با افزایش تعداد نقاط شبکه و به‌علت کاهش خطای گردکردن در معادلات (۴-۱۸) و (۴-۱۹)، این معادلات نسبت به معادله (۴-۱۱) از دقت بیشتری برخوردار می‌باشند. راحت‌ترین روش برای انتخاب نقاط دقت در دامنه محاسباتی، انتخاب نقاط دقت با فاصله برابر در راستای مختصات دامنه محاسباتی است که به‌صورت روابط زیر می‌باشد.

$$x_i = \frac{i-1}{N_x - 1} a \; ; \; \text{i=1,2,...,N}_x \tag{۴-۲۰}$$

$$y_i = \frac{i-1}{N_y - 1} b \; ; \; \text{i=1,2,...,N}_y \tag{۴-۲۱}$$

که به‌ترتیب در راستای x و y می‌باشند؛ با این‌حال نشان داده شده است که توزیع غیریکنواخت نقاط دقت، نتایج بهتری را نسبت به نقاط دقت با فاصله مساوی می‌دهد. اگرچه چنین نقاطی ممکن است به‌صورت آزمایشی انتخاب شوند، اما اساس منطقی نقاط شبکه از صفرهای چندجمله‌ای متعامد نتیجه می‌شود. برخی از انواع توزیع نقاط دقت را می‌توان به‌شرح زیر بیان کرد[61].

۱. ریشه‌های چندجمله‌ای چبیشف نوع اول:

$$X_i = \frac{z_i - z_1}{z_{N_x} - z_1}, \quad \text{z}_i = \cos\left(\left(\frac{2i-1}{2N_x}\right)\pi\right), \quad i = 1,2,\ldots,N_x \tag{۴-۲۲}$$

۲. ریشه‌های چندجمله‌ای چبیشف نوع دوم:

$$X_i = \frac{z_i - z_1}{z_{N_x} - z_1}, \quad z_i = \cos\left(\frac{i\pi}{N_x + 1}\right), \quad i = 1,2,...,N_x \tag{۲۳-۴}$$

۳. ریشه‌های چندجمله‌ای نوع لژاندر:

$$X_i = \frac{z_i - z_1}{z_{N_x} - z_1}, \quad z_i = \left(1 - \frac{1}{8{N_x}^2} + \frac{1}{8{N_x}^3}\right)\cos\left(\frac{4i-1}{4N_x+2}\pi\right), \quad i = 1,2,...,N_x \tag{۲۴-۴}$$

۴. توزیع نقاط نمونه درجه دوم:

$$X_i = \begin{cases} 2\left(\dfrac{i-1}{N-1}\right)^2, & i = 1,2,...,\dfrac{N_x+1}{2} \\ -2\left(\dfrac{i-1}{N-1}\right)^2 + 4\left(\dfrac{i-1}{N-1}\right) - 1, & i = \left(\dfrac{N_x+1}{2}\right) + 1,...,N_x \end{cases} \tag{۲۵-۴}$$

۵. نقاط نمونه چبیشف-گاوس-لباتو:

$$X_i = \frac{1 - \cos\left(\dfrac{i-1}{N_x - 1}\right)\pi}{2}, \quad i = 1,2,...,N_x \tag{۲۶-۴}$$

در راستای y نیز توزیع نقاط دقت مشابه فرمول‌های ذکر شده می‌باشد.

۴-۲-۳- روش‌های اعمال شرایط مرزی چندگانه

یکی از گام‌های کلیدی برای موفقیت در کاربرد روش DQ، استفاده از روش دقیق برای اعمال شرایط مرزی است. برای معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم، تنها یک شرط مرزی در هر نقطه مرزی باید ارضا شود. انجام این کار توسط روش DQ برای ارضای شرایط مرزی با قرار دادن شرایط مرزی گسسته در نقاط مرزی، آسان است. با این حال برای معادلات دیفرانسیل مرتبه بالاتر، شرایط مرزی چندگانه باید در هر نقطه مرزی اعمال شود. روش ارضای شرایط مرزی برای به‌دست آوردن راه حل‌های مطمئن و دقیق با استفاده از روش DQ مهم است.

برای کاربردهای موفق از روش DQ، روش‌های مختلفی برای اعمال شرایط مرزی چندگانه پیشنهاد شده است؛ در ادامه این روش‌ها معرفی می‌شوند و به برخی از آنها به‌طور خلاصه پرداخته می‌شود[62].

الف- رویکرد δ

روش δ نخستین روشی است که برای اعمال شرایط مرزی چندگانه با استفاده از روش DQ ، به‌کار می‌رود. در روش δ، شبکه‌های 2 و $N-1$ نیز به‌عنوان نقاط مرزی در کنار شبکه‌های 1 و N دیده می‌شوند. شبکه‌های 1 و 2 (یا شبکه‌های N و $N-1$) با فاصله بسیار کم δL در مقایسه با طول تیر L ، از یکدیگر جدا شده‌اند. این دو شرط مرزی به‌ترتیب در نقاط 1 و 2 یا در نقاط N و $N-1$ اعمال می‌شوند. روش δ برای برنامه نویسی ساده است و می‌تواند برای تمام ترکیبات شرایط مرزی به‌کار برود. با این حال نقص آن این است که روش بسیار دقیقی نیست و گاهی δ وابسته به مساله است. معمولا δ به مقدار 0.001 تنظیم می‌شود.

ب- رویکرد معادله جایگزین

روش معادله جایگزین یا CBCGE[1] (به‌طور مستقیم شرایط مرزی را با معادلات حاکم کوپل می‌کند) شبیه روش δ است. در این روش یکی از دو شرط مرزی در جمله‌های مربعات دیفرانسیل معمولا در نقطه درونی نزدیک نقطه مرزی، یعنی در نقاط 2 و $N-1$ قرار داده می‌شود؛ به‌عبارتی دیگر، معادله حاکم بر حسب مربعات دیفرانسیل در نقاط 2 و $N-1$ مورد استفاده قرار نمی‌گیرد اما به‌وسیله شرایط مرزی جایگزین می‌شود.

از آن‌جایی که این روش مشابه با روش δ است؛ برنامه نویسی برای آن ساده است و همچنین می‌تواند برای تمام ترکیبات شرایط مرزی مورد استفاده قرار گیرد. با این حال، ایراد این روش این است که بسیار دقیق و حساس به فاصله شبکه برای مسائل خاص نیست. اگر شرایط مرزی چندگانه به‌وسیله روش

1 Directly Coupling the Boundary Conditions With the Governing Equations

معادله جایگزین اعمال شوند؛ روش DQ معادل با روش‌های تلفیقی-ترکیبی[1] است. بنابراین می‌توان یکی از دو معادله مرزی را در هر نقطه درونی قرار داد. تجربه عددی نشان می‌دهد که دقت راه حل، زمانی بالاتر است که معادلات مرزی در نقطه درونی نزدیک نقطه مرزی قرار داده شود. تفاوت روش معادله جایگزین با روش δ این‌است که ضروری نیست که نقطه 2 (یا $N-1$) با نقطه 1 (یا N) فاصله به مقدار δL داشته باشد. نتایج منتشر شده نشان داده است که دقت این روش به‌اندازه روش δ، به‌خصوص برای مسائل ورق با گوشه‌های آزاد خوب نیست.

ت- روش تغییر ضرایب وزنی یک

از آن‌جایی که تنها یک شرط مرزی را می‌توان در نقطه مرزی به‌طور مستقیم اعمال کرد؛ یکی از دو شرط مرزی، در زمان محاسبه ضرایب وزنی مشتقات مرتبه‌های بالاتر ساخته می‌شود. این روش، روش تغییر ضرایب وزنی یک یا به‌طور ساده MMCW-1 نامیده می‌شود. تجربه عددی نشان می‌دهد اگر تعداد کل نقاط شبکه(N) کوچک باشد؛ این روش نسبت به دو روش قبل، از دقت بیشتری برخوردار است. همچنین MMCW-1 برای برنامه‌نویسی در هر دو مساله یک بعدی یا دوبعدی ساده است و دقیق‌تر از دو روش قبل است. اما عیب آن این‌است که این روش نمی‌تواند برای تیر گیردار-گیردار و تیرهای با مرز آزاد مورد استفاده قرار گیرد.

ث- روش DQEM یا GDQR

به‌منظور غلبه بر سختی اعمال شرایط مرزی چندگانه در مسائل تیرهای نازک و ورق، همچنین گسترش رنج کاربرد روش مرسوم DQ، درجات مختلفی از آزادی(DOFs) در نقاط مرزی مورد استفاده قرار می‌گیرند. تعداد درجات آزادی برابر با شرایط مرزی است. این روش، روش المان مربعات

1 Mixed Collocation Methods

دیفرانسیل[1](DQEM) یا قانون مربعات دیفرانسیل تعمیم‌یافته[2](GDQR) نامیده می‌شود. این روش می‌تواند برای تجزیه و تحلیل مسائل ساختاری با المان‌های بیشتر به‌کار رود.

عیب این روش این است که مانند سه روش قبل برنامه نویسی آن ساده نیست؛ بعلاوه، در این فرمول‌بندی صریح، محاسبه ضرایب وزنی نسبت به روش مرسوم DQ، بسیار پیچیده‌تر است. لازم به‌ذکر است که DQEM دامنه کاربرد DQM را گسترش می‌دهد؛ زیرا می‌تواند برای تجزیه و تحلیل تیرها با سطح مقطع ناپیوسته[3]، تحت بارهای توزیع شده ناپیوسته و حتی مسائل ساختاری تیرها مورد استفاده قرار گیرد.

ج- روش تغییر ضرایب وزنی دو(MMCW-2)

با این‌که MMCW-1 ساده و دقیق است اما نمی‌تواند برای تمامی ترکیبات شرایط مرزی مورد استفاده قرار بگیرد؛ از سوی دیگر، اگر چه روش درجات چندگانه آزادی(DQEM یا GDQR) را می‌توان برای تمام ترکیبات شرایط مرزی مورد استفاده قرار داد؛ اما DQEM متفاوت از DQM مرسوم است؛ زیرا چند جمله‌ای‌های نوع هرمیت[4] در تعیین ضرایب وزنی مورد استفاده قرار می‌گیرند. ترکیب این دو ایده، روش جدیدی برای اعمال شرایط مرزی ایجاد می‌کند که توسط کریمی و ملک‌زاده ارائه شده است. این روش، MMCW-2 نامیده می‌شود. تمام ترکیبات شرایط مرزی را بدون مشکل می‌توان در این روش اعمال کرد؛ برنامه‌نویسی در این روش نیز ممکن است به تلاش بیشتری، به‌خصوص برای مسائل دوبعدی نیاز داشته باشد.

ح- روش تغییر ضرایب وزنی سه(MMCW-3)

MMCW-3 یک ورژن جدید از روش DQ یا روش مربعات دیفرانسیل اصلاح شده، نامیده می‌شود؛ همچنین یک توسعه از MMCW-1 نیز می‌باشد. این روش مشابه MMCW-2 است، زیرا درجات آزادی

---

1 Differential Quadrature Element Method
2 Generalized Differential Quadrature Rule
3 Discontinuous Cross-Sectional Area
4 Hermite-Type Polynomials

اضافه در طول فرمول‌بندی مشتق‌های درجات بالاتر ضرایب وزنی، معرفی می‌شوند. تفاوت اساسی MMCW-3 از MMCW-2 در درجات آزادی اضافه است.

MMCW-3 را می‌توان به آسانی به روش DQE تعمیم داد. تفاوت عمده MMCW-3 از روش DQE یا GDQR این است که چندجمله‌ای‌های مختلفی برای مشخص کردن مشتق‌های مختلف ضرایب وزنی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

روش‌های MMCW-4، MMCW-5 و روش نقطه مرزی مجازی[1] یا LA-DQM نیز از دیگر روش‌هایی هستند که می‌توان برای اعمال شرایط مزی چندگانه از آن‌ها بهره برد.

یک نمونه دستگاه معادلات حل شده به‌روش DQ در پیوست آورده شده است.

۴-۳- حل عددی معادلات پایداری

در این بخش معادلات پایداری با روش مربعات دیفرانسیل حل می‌شوند. با توجه به رابطه‌های (۳-۱) و (۳-۲)، معادلات بی‌بعد پایداری به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$
\begin{aligned}
&(-2\varepsilon^5X^2-2\varepsilon^3-4\varepsilon^4X)\frac{\partial u_0{}^1}{\partial X}+(2\varepsilon^4X+2\varepsilon^4\beta_2X+2\varepsilon^3\beta_2+2\varepsilon^3)\frac{\partial v_0{}^1}{\partial\theta^*}+\Bigg(\frac{\partial w_0{}^1}{\partial X}(-2\varepsilon^3\\
&+2\varepsilon^5\beta_1X+2\varepsilon^3\beta_1-4\varepsilon^4X-2\varepsilon^5X^2+4\varepsilon^4\beta_1X)+(-2\varepsilon^2-6\varepsilon^4X-6\varepsilon^4X-2)\frac{\partial^2 w_0{}^1}{\partial X^2}\\
&(-2\varepsilon^2\beta_2-2\varepsilon^3\beta_2X)\frac{\partial^2 w_0{}^1}{\partial\theta^{*2}}\Bigg)\frac{\partial w_0{}^0}{\partial X}+\Bigg(\frac{\partial w_0{}^1}{\partial\theta^*}(2\varepsilon^3\beta_1+2\varepsilon^3)-(2\varepsilon^2\beta_2+2\varepsilon^2\beta_1+2\varepsilon^3\beta_2X\\
&+2\varepsilon^3\beta_1X)\frac{\partial^2 w_0{}^1}{\partial\theta^*\partial X}\Bigg)\frac{\partial w_0{}^0}{\partial\theta^*}+\Bigg(\frac{\partial^2 w_0{}^0}{\partial X^2}(-2\varepsilon^2-6\varepsilon^4X^2-6\varepsilon^3X-2\varepsilon^5X^3)+(-2\varepsilon^2\beta_2\\
&-2\varepsilon^3\beta_2X)\frac{\partial^2 w_0{}^0}{\partial\theta^{*2}}\Bigg)\frac{\partial w_0{}^1}{\partial X}+(-2\varepsilon^2\beta_2-2\varepsilon^2\beta_1-2\varepsilon^3\beta_2X-2\varepsilon^3\beta_1X)\frac{\partial^2 w_0{}^0}{\partial\theta^*\partial X}\frac{\partial w_0{}^1}{\partial\theta^*}\\
&-(2\varepsilon^2+6\varepsilon^4X^2+6\varepsilon^3X+2\varepsilon^5X^3)\frac{\partial^2 u_0{}^1}{\partial X^2}-(2\varepsilon^2\beta_2+2\varepsilon^3\beta_2X)\frac{\partial^2 u_0{}^1}{\partial\theta^{*2}}+(-2\varepsilon^2\beta_1\\
&-4\varepsilon^3\beta_2X-2\varepsilon^2\beta_2-2\varepsilon^4\beta_1X^2-4\varepsilon^3\beta_1X-2\varepsilon^4\beta_2X^2)\frac{\partial^2 v_0{}^1}{\partial\theta^*\partial X}+2\varepsilon^4u_0{}^1+2\varepsilon^5Xu_0{}^1=0
\end{aligned}
\tag{۲۷-۴}
$$

[1] Virtual Boundary Piont Method

$$\left(-\varepsilon^4 X-\varepsilon^3\right)\frac{\partial u_1^{\ 1}}{\partial X}+\left(\varepsilon^3+\beta_2\varepsilon^3\right)\frac{\partial v_1^{\ 1}}{\partial\theta^*}+\left(12k_s\beta_2\varepsilon^2+12k_s\beta_2\varepsilon^4 X^{\ 2}+24k_s\beta_2\varepsilon^3 X\right)$$
$$\frac{\partial w_0^{\ 1}}{\partial X}+\left(-2\varepsilon^3 X-\varepsilon^2-\varepsilon^4 X^{\ 2}\right)\frac{\partial^2 u_1^{\ 1}}{\partial X^{\ 2}}-\varepsilon^2\beta_2\frac{\partial^2 u_1^{\ 1}}{\partial\theta^{*2}}-\left(\varepsilon^2\beta_1+\beta_2\varepsilon^2+\varepsilon^3\beta_1 X+\beta_2\varepsilon^3 X\right) \tag{۲۸-۴}$$
$$\frac{\partial^2 v_1^{\ 1}}{\partial\theta^*\partial X}+24k_s\beta_2\varepsilon^3 X u_1^{\ 1}+\varepsilon^4 u_1^{\ 1}+12k_s\beta_2\varepsilon^4 X^{\ 2}u_1^{\ 1}+12k_s\beta_2\varepsilon^2 u_1^{\ 1}=0$$

$$\left(-\varepsilon^4\beta_2-\varepsilon^4-\varepsilon^5\beta_2 X-\varepsilon^5 X\right)\frac{\partial u_0^{\ 1}}{\partial\theta^*}+\left(-\beta_2\varepsilon^6 X^{\ 2}-\varepsilon^4\beta_2-2\varepsilon^5\beta_2 X\right)\frac{\partial v_0^{\ 1}}{\partial X}+\left(\frac{\partial w_0^{\ 1}}{\partial\theta^*}\right.$$
$$\left.\left(-\varepsilon^4\beta_2-\varepsilon^5\beta_2 X\right)+\left(-2\varepsilon^4\beta_2 X-\varepsilon^3\beta_2-\varepsilon^5\beta_2 X^{\ 2}-\varepsilon^3\beta_1-2\varepsilon^4\beta_1 X-\varepsilon^5\beta_1 X^{\ 2}\right)\frac{\partial^2 w_0^{\ 1}}{\partial\theta^*\partial X}\right)$$
$$\frac{\partial w_0^{\ 0}}{\partial X}+\left(\frac{\partial w_0^{\ 1}}{\partial X}\left(-\varepsilon^4\beta_2-\varepsilon^5\beta_2 X\right)+\left(-\varepsilon^5\beta_2 X^{\ 2}-\varepsilon^3\beta_2-2\varepsilon^4\beta_2 X\right)\frac{\partial^2 w_0^{\ 1}}{\partial X^{\ 2}}-\varepsilon^3\frac{\partial^2 w_0^{\ 1}}{\partial\theta^{*2}}\right) \tag{۲۹-۴}$$
$$\frac{\partial w_0^{\ 0}}{\partial\theta^*}+\left(-2\varepsilon^4\beta_2 X-\varepsilon^3\beta_2-\varepsilon^5\beta_2 X^{\ 2}-\varepsilon^3\beta_1-2\varepsilon^4\beta_1 X-\varepsilon^5\beta_1 X^{\ 2}\right)\frac{\partial^2 w_0^{\ 0}}{\partial\theta^*\partial X}\frac{\partial w_0^{\ 1}}{\partial X}$$
$$+\left(\frac{\partial^2 w_0^{\ 0}}{\partial X^{\ 2}}\left(-\varepsilon^5\beta_2 X^{\ 2}-\varepsilon^3\beta_2-2\varepsilon^4\beta_2 X\right)-\varepsilon^3\frac{\partial^2 w_0^{\ 0}}{\partial\theta^{*2}}\right)\frac{\partial w_0^{\ 1}}{\partial\theta^*}+\left(-2\varepsilon^4\beta_2 X-\varepsilon^3\beta_2\right.$$
$$\left.-\varepsilon^5\beta_2 X^{\ 2}-\varepsilon^3\beta_1-2\varepsilon^4\beta_1 X-\varepsilon^5\beta_1 X^{\ 2}\right)\frac{\partial^2 u_0^{\ 1}}{\partial\theta^*\partial X}+\left(-3\varepsilon^5\beta_2 X^{\ 2}-3\varepsilon^4\beta_2 X-\beta_2\varepsilon^6 X^{\ 3}\right.$$
$$\left.-\varepsilon^3\beta_2\right)\frac{\partial^2 v_0^{\ 1}}{\partial X^{\ 2}}+\left(-\varepsilon^3-\varepsilon^4 X\right)\frac{\partial^2 v_0^{\ 1}}{\partial\theta^{*2}}+\beta_2\varepsilon^6 X v_0^{\ 1}+\beta_2\varepsilon^5 v_0^{\ 1}=0$$

$$\left(-\varepsilon^3\beta_2-\varepsilon^3\right)\frac{\partial u_1^{\ 1}}{\partial\theta^*}+\left(-\varepsilon^3\beta_2-\varepsilon^4\beta_2 X\right)\frac{\partial v_1^{\ 1}}{\partial X}+\left(12k_s\beta_2\varepsilon^3 X+12k_s\beta_2\varepsilon^2\right)\frac{\partial w_0^{\ 1}}{\partial\theta^*}$$
$$\left(-\varepsilon^3\beta_1 X-\varepsilon^2\beta_2-\varepsilon^2\beta_1-\varepsilon^3\beta_2 X\right)\frac{\partial^2 u_1^{\ 1}}{\partial\theta^*\partial X}+\left(-\varepsilon^4\beta_2 X^{\ 2}-2\varepsilon^3\beta_2 X-\varepsilon^2\beta_2\right)\frac{\partial^2 v_1^{\ 1}}{\partial X^{\ 2}} \tag{۳۰-۴}$$
$$-\varepsilon^2\frac{\partial^2 v_1^{\ 1}}{\partial\theta^{*2}}+\varepsilon^4\beta_2 v_1^{\ 1}+12k_s\beta_2\varepsilon^4 X^{\ 2}v_1^{\ 1}+24k_s\beta_2\varepsilon^3 X v_1^{\ 1}+12k_s\beta_2\varepsilon^2 v_1^{\ 1}=0$$

که این معادلات، شامل پنج معادله خطی کوپل به‌هم با ضریب متغیر می‌باشد.

برای حل معادلات پایداری، ابتدا این معادلات با بسط مثلثاتی مشابه روش ارائه شده در فصل سوم(رابطه (۳-۱۷))، به شکل یک بعدی نوشته می‌شوند که به‌منظور این اقدام، بسط‌های (۴-۳۱) و (۴-۳۲) که به ترتیب مربوط به مولفه‌های تعادل و مولفه‌های پایداری می‌باشند؛ تعریف می‌شوند.

$$u_0^{\ 0}\left(X,\theta^*\right)=u_0^{\ 0}\left(X\right)\times\cos\left(n\times\theta^*\right),\ \ u_1^{\ 0}\left(X,\theta^*\right)=u_1^{\ 0}\left(X\right)\times\cos\left(n\times\theta^*\right)$$
$$v_0^{\ 0}\left(X,\theta^*\right)=v_0^{\ 0}\left(X\right)\times\sin\left(n\times\theta^*\right),\ \ v_1^{\ 0}\left(X,\theta^*\right)=v_1^{\ 0}\left(X\right)\times\sin\left(n\times\theta^*\right) \tag{۳۱-۴}$$
$$w_0^{\ 0}\left(X,\theta^*\right)=w_0^{\ 0}\left(X\right)\times\cos\left(n\times\theta^*\right),\ \ w_1^{\ 0}\left(X,\theta^*\right)=w_1^{\ 0}\left(X\right)\times\cos\left(n\times\theta^*\right)$$

بالاوند صفر بیان کننده مولفه‌های تعادل و بالاوند یک بیان کننده مولفه‌های پایداری می‌باشند.

$$\begin{aligned}
u_0^{\,1}\left(X,\theta^*\right) &= su_0^{\,1}(X)\times\sin\left(m\times\theta^*\right)+cu_0^{\,1}(X)\times\cos\left(m\times\theta^*\right)\\
u_1^{\,1}\left(X,\theta^*\right) &= su_1^{\,1}(X)\times\sin\left(m\times\theta^*\right)+cu_1^{\,1}(X)\times\cos\left(m\times\theta^*\right)\\
v_0^{\,1}\left(X,\theta^*\right) &= sv_0^{\,1}(X)\times\sin\left(m\times\theta^*\right)+cv_0^{\,1}(X)\times\cos\left(m\times\theta^*\right)\\
v_1^{\,1}\left(X,\theta^*\right) &= sv_1^{\,1}(X)\times\sin\left(m\times\theta^*\right)+cv_1^{\,1}(X)\times\cos\left(m\times\theta^*\right)\\
w_0^{\,1}\left(X,\theta^*\right) &= sw_0^{\,1}(X)\times\sin\left(m\times\theta^*\right)+cw_0^{\,1}(X)\times\cos\left(m\times\theta^*\right)
\end{aligned} \tag{۳۲-۴}$$

باید توجه داشت که m و n با هم برابر نیستند.

با اعمال حل معادلات تعادل و بسط‌های تعریف شده (۴-۳۱) و (۴-۳۲) در معادلات پایداری((۴-۲۷) تا (۴-۳۰) و با ضرب هر کدام از معادلات یکبار در $\mathbf{cos}\left(m\times\theta^*\right)$ و یکبار در $\mathbf{sin}\left(m\times\theta^*\right)$ و انتگرال‌گیری نسبت به θ^* ، معادلات پایداری ساده شده و قابل حل به روش DQ ، به‌دست می‌آید که در نهایت با توضیحات ارائه شده در بخش (۴-۳) به‌صورت عددی و با روش مربعات دیفرانسیل حل می‌گردند.

معادلات پایداری در شکل یک بعدی:

$$\begin{aligned}
&\left[A_{20}(X)\right]_{4\times4}\frac{d^2}{dX^2}\{y\}+\left[A_{10}(X)\right]\frac{d}{dX}\{y\}+\left[A_{00}(X)\right]\{y\}=\{0\};\\
&\{y\}=\left\{cu_0^{\,1}\quad sv_0^{\,1}\quad cv_0^{\,1}\quad su_0^{\,1}\right\}^T
\end{aligned} \tag{۳۳-۴}$$

$$\begin{aligned}
&\left[A_{21}(X)\right]_{6\times6}\frac{d^2}{dX^2}\{y\}+\left[A_{11}(X)\right]\frac{d}{dX}\{y\}+\left[A_{01}(X)\right]\{y\}=\{0\};\\
&\{y\}=\left\{cu_1^{\,1}\quad sv_1^{\,1}\quad cw_0^{\,1}\quad su_1^{\,1}\quad cv_1^{\,1}\quad sw_0^{\,1}\right\}^T
\end{aligned} \tag{۳۴-۴}$$

همچنین به‌طرز مشابه، با اعمال حل معادلات تعادل و بسط‌های تعریف شده (۴-۳۱) و (۴-۳۲) در معادلات شرایط مرزی پایداری و با ضرب هر کدام از معادلات یکبار در $\mathbf{cos}\left(m\times\theta^*\right)$ و یکبار در $\mathbf{sin}\left(m\times\theta^*\right)$ و انتگرال‌گیری نسبت به θ^* ، معادلات شرایط مرزی پایداری یک بعدی و ساده شده نیز استخراج می‌گردد.

معادلات شرایط مرزی پایداری:

$$\begin{aligned}
&\left[B_{20}(X)\right]_{4\times4}\frac{d^2}{dX^2}\{y\}+\left[B_{10}(X)\right]\frac{d}{dX}\{y\}+\left[B_{00}(X)\right]\{y\}=\{0\};\\
&\{y\}=\left\{cu_0^{\,1}\quad sv_0^{\,1}\quad cv_0^{\,1}\quad su_0^{\,1}\right\}^T
\end{aligned} \tag{۳۵-۴}$$

$$[B_{21}(X)]_{6\times 6}\frac{d^2}{dX^2}\{y\}+[B_{11}(X)]\frac{d}{dX}\{y\}+[B_{01}(X)]\{y\}=\{0\};$$
$$\{y\}=\{cu_1^1 \quad sv_1^1 \quad cw_0^1 \quad su_1^1 \quad cv_1^1 \quad sw_0^1\}^T \tag{۳۶-۴}$$

۴-۴- حل تحلیلی معادلات پایداری(روش میانگین)

در این روش معادلات (۴-۳۳) تا (۴-۳۴) که معادلات پایداری در شکل یک بعدی هستند و دارای ضرایب متغیر می‌باشند با حذف ضرایب متغیر و با استفاده از روش تحلیلی ارائه شده در فصل سوم حل می‌شوند؛ بدین صورت که به‌منظور ساده سازی معادلات و حذف ضرایب متغیر معادلات(X)، ضریب مولفه‌های هر معادله($T(X)$) با متوسط خود جایگزین می‌شود که مقدار این متوسط به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\frac{1}{b-a}\left(\int_a^b T(X)dx\right),\quad X=[a,b] \tag{۳۷-۴}$$

معادلات متوسط نیز به‌صورت معادلات (۴-۳۳) تا (۴-۳۶) می‌باشند؛ تنها با این تفاوت که مقدار ضریب مولفه‌ها، ثابت است.

به کمک این روش معادلات پایداری با ضریب ثابت و به‌صورت همگن استخراج می‌شود و به‌راحتی به کمک روش تحلیلی ارائه شده در فصل سوم((۳-۳۹) و (۳-۴۰))، حل می‌شوند.

۵-۴- تعیین بار کمانش با تئوری کلاسیک ورق‌ها

معادله حاکم بر ورق تحت بار درون‌صفحه‌ای در مختصات کارتزین عبارت است از:

$$\nabla^4 w=\frac{1}{D}\left(P+N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right) \tag{۳۸-۴}$$

و در مختصات قطبی:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \qquad (۳۹-۴)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} \qquad (۴۰-۴)$$

و معادله حاکم به‌شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$\nabla^4 w = \frac{1}{D}\left(N_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + N_\theta \left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right)\right) \qquad (۴۱-۴)$$

که N_r و N_θ به‌ترتیب نیروهای درون‌صفحه‌ای در راستای شعاعی و محیطی هستند.

رابطه فوق با این فرض است که نیروی عرضی گسترده و بار برشی درون‌صفحه‌ای به ورق وارد نشود. رابطه (۴-۴۱) برای یک ورق حلقوی با شعاع داخلی r_i و شعاع خارجی r_o که تحت فشار خارجی $P_0 = P_1 \cos(n\times\theta)$ است، حل می‌شود.

بر اساس روابط تئوری الاستیسیته، برای تعیین تنش‌های درون‌صفحه‌ای در یک رینگ، از حل معادله سازگاری می‌توان استفاده کرد:

$$\nabla^4 \phi = 0 \;\Rightarrow\; \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}\right) = 0 \qquad (۴۲-۴)$$

که در این رابطه ϕ تابع تنش است. شرایط مرزی نیز به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} r_i :&\quad \sigma_r = 0 \,,\quad \tau_{r\theta} = 0 \\ r_o :&\quad \sigma_r = -P_1\cos(\mathrm{n}\times\theta) \,,\quad \tau_{r\theta} = 0 \end{aligned} \qquad (۴۳-۴)$$

تابع تنش به‌صورت $\phi(r,\theta)=g(r)\cos(n\times\theta)$ در نظر گرفته می‌شود؛ با جایگزینی این تعریف در رابطه (۴-۴۲)، نتیجه می‌شود:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{n^2}{r^2}\right)\left(\frac{d^2g}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dg}{dr}-\frac{n^2}{r^2}g\right)=0 \qquad (۴۴-۴)$$

حل این معادله به ازای هر n ، شکل خاصی خواهد داشت، برای $n=2$ حل معادله به صورت زیراست:

$$g(r)=C_1+C_2r^2+\frac{C_3}{r^2}+C_4r^4 \qquad (۴۵-۴)$$

در رابطه فوق C_4,C_3,C_2,C_1 ثابت هستند. با اعمال شرایط مرزی(رابطه (۴-۴۳))، ثابت‌های حل به‌دست می‌آیند. مقادیر تنش‌ها عبارتند از:

$$\sigma_r=\left(-2C_2-\frac{4C_1}{r^2}-\frac{6C_4}{r^4}\right)\cos(2\times\theta) \qquad (۴۶-۴)$$

$$\sigma_\theta=\left(2C_2+12C_3r^2+\frac{6C_4}{r^4}\right)\cos(2\times\theta) \qquad (۴۷-۴)$$

و مقادیر منتجه‌های تنش عبارتند از:

$$N_r=\sigma_r\times h\ ,\quad N_\theta=\sigma_\theta\times h \qquad (۴۸-۴)$$

منتجه‌های تنش(رابطه (۴-۴۸)) در رابطه (۴-۴۱) جایگزین می‌شود. حل معادله حاصل به‌صورت $N=f(r)\cos(m\times\theta)$ در نظر گرفته شده و جایگزین می‌شود؛ سپس طرفین معادله در $\cos(m\times\theta)$ ضرب شده و در بازه $0\le\theta\le2\pi$ انتگرال گیری می‌شود؛ در نتیجه یک معادله دیفرانسیل معمولی با ضرایب متغیر به‌دست می‌آید. این معادله همگن است و جواب آن صفر است ولی به ازای برخی مقادیر

P_1(که مقدار ویژه معادله است) می‌تواند جواب غیر صفر داشته باشد. برای تعیین مقدار ویژه، معادله حاصل با روش DQ حل می‌شود. روند حل معادله خطی با ضرایب متغیر قبلا توضیح داده شد. نتایج CPT با FSDT مقایسه خواهد شد.

۴-۶- جمع‌بندی

در این فصل ابتدا روش DQ و انواع روش‌های اعمال شرایط مرزی در این روش، به تفصیل مورد بحث قرار گرفت؛ سپس یک دستگاه معادله دیفرانسیل به‌عنوان مثال در پیوست آورده شد؛ معادلات پایداری برای حل با روش عددی DQ ساده‌سازی شدند و در نهایت حل تحلیلی معادلات پایداری به روش میانگین ارائه شد

فصل ۵:

بررسی نتایج

۵-۱- مقدمه

در این فصل نتایج حاصل از روش‌های تحلیلی و عددی ارائه شده در فصل‌های گذشته مورد بررسی قرار می‌گیرد و با نتایج حاصل از مقاله‌های معتبر و شبیه‌سازی حل مورد نظر در نرم افزار آباکوس، در قالب جدول‌ها و شکل‌های مختلف مقایسه می‌شود. شایان به ذکر است که محاسبات ریاضی در این پایان‌نامه در محیط نرم افزار میپل[1] صورت گرفته و همچنین مش[2]بندی در نرم‌افزار آباکوس با المان چهار گره‌ای S4R که شامل شش درجه آزادی در هر گره می‌باشد، انجام شده است.

۵-۲- نتایج حل معادلات تعادل و پایداری

به‌منظور تحلیل معادلات و به‌دست آوردن نتایج ، به‌طور پیش فرض ورقی با مشخصات هندسی و خواص مکانیکی زیر در نظر گرفته شده است[56].

جدول (۵-۱) مشخصات هندسی و مکانیکی ورق از جنس فولاد

مدول الاستیسیته	$E = 2\times10^{11}$ (Pa)
ضریب پوآسون	$\nu = 0.3$
شعاع خارجی	$a = r_o = 0.15$ (m)
شعاع داخلی	$b = r_i = 0.045$ (m)
ضخامت	$h = 0.015$ (m)
ضریب تصحیح برشی	$k_s = 0.83$
بار اعمالی در محاسبه مقادیر مولفه‌های تعادل	$Q = 1000$ (N/m)

همچنین ثابت‌هایی در استخراج معادلات بکار گرفته شده است که مقادیر آن‌ها در جدول (۵-۲) آورده شده است.

1 Maple
2 Mesh

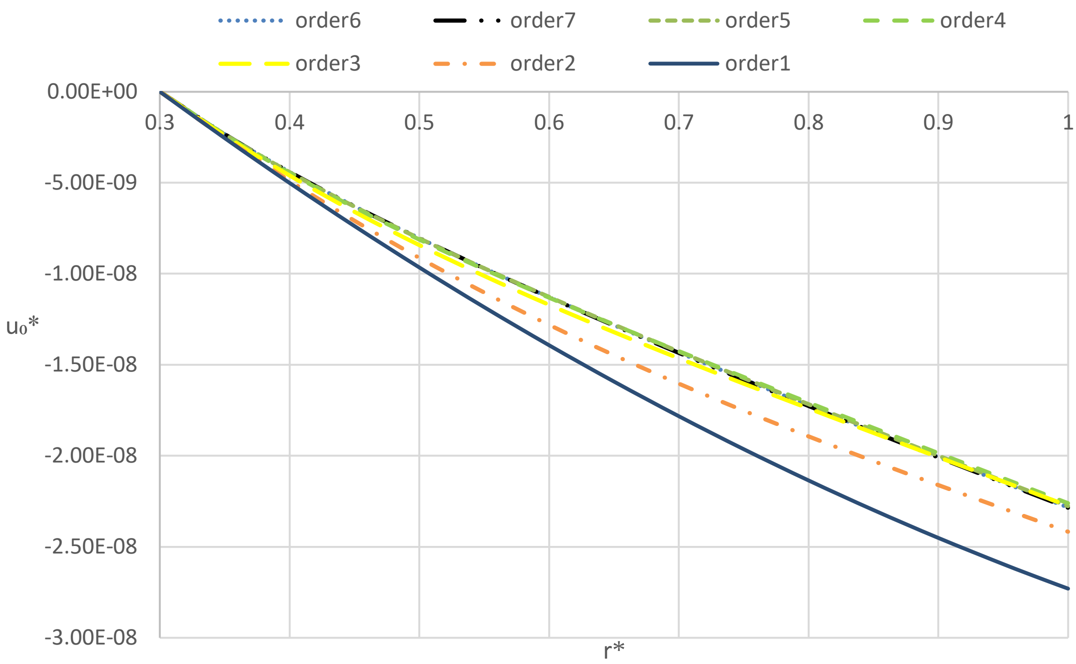
جدول (۵-۲) ثابت‌های مساله

$\eta=\frac{r_i}{r_o}$, $\varepsilon=\frac{h}{r_o}$, $n=n^*\frac{h}{r_o}$, $m=m^*\frac{h}{r_o}$, $N=15$, $n^*=1$, $m^*=1$

تمامی نتایج ارائه شده برای بار بحرانی کمانش به‌صورت بی‌بعد می‌باشد و از رابطه (۳-۱) برای بی‌بعد سازی نتایج استفاده شده است.

۵-۳- نتایج کمانش متقارن

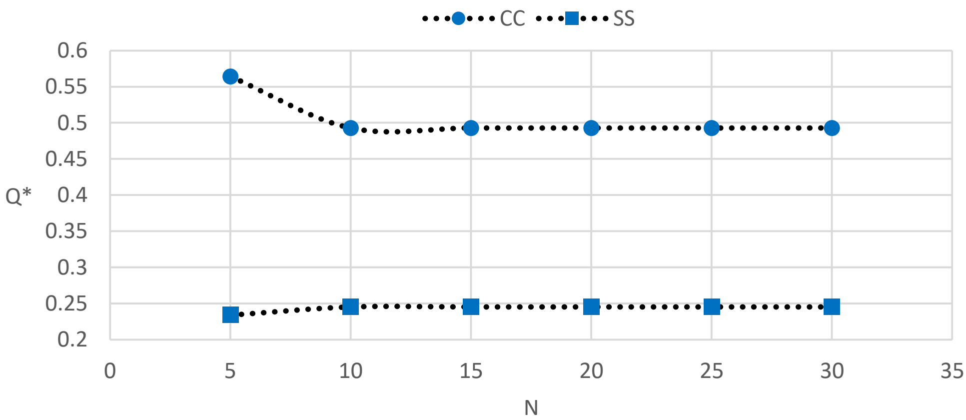
برای تحلیل معادلات تعادل و پایداری در حالت متقارن محوری کافیست مقادیر n و m در معادلات تعادل و پایداری مربوطه را برابر صفر قرار داد تا معادلات برای حالت متقارن به‌دست آید.
برای تعیین این‌که چند جمله از بسط مستقیم تئوری اغتشاشات(رابطه (۳ -۷)) باید در نظر گرفته شود، نمودار مولفه جابه‌جایی(u_0^*) معادلات تعادل تا حل مرتبه هفت($O(\varepsilon^7)$) در قالب شکل(۵-۱) به‌صورت مقایسه‌ای نشان داده است؛ برای رسم نمودار از داده‌های جدول(۵-۱) استفاده شده است(نمودار(۵-۱) برای تمام شرایط مرزی ورق حلقوی یکسان می‌باشد). از شکل(۵-۱) و کاملا منطبق بودن مسیر نمودار مرتبه شش($O(\varepsilon^6)$) و مرتبه هفت($O(\varepsilon^7)$)، کفایت حل تا مرتبه شش و همگرایی حل‌های مرتبه شش و هفت نتیجه می‌شود.



شکل (۵-۱) نمودار مولفه جابجایی u_0^* در حالت متقارن برای حل‌های مرتبه شش و مرتبه هفت

لازم به ذکر است که دیگر مولفه‌های جابجایی در حالت متقارن صفر می‌باشند.

شکل (۵-۲) دلیل انتخاب مقدار $N=15$ برای نقاط شبکه در روش DQ را مشخص می‌کند؛ همانطور که در شکل (۵-۲) مشخص است؛ بار بحرانی به‌دست آمده برای مقادیر بعد از $N=15$، مقدار یکسانی می‌باشد و در واقع در این مقدار از تعداد نقاط شبکه، بار بحرانی به‌دست آمده به یک همگرایی می‌رسد.



شکل (۵-۲) نمودار همگرایی بار بحرانی کمانش در روش DQ برای تعداد نقاط شبکه

شرایط مرزی(B.C) برای کمانش متقارن به‌صورت زیر می‌باشند.

شرایط مرزی ساده(S):

$$r = r_i\,, r_o \begin{cases} w_0{}^1 = 0 \\ \delta u_1^1 = 0 \end{cases} \tag{۱-۵}$$

شرایط مرزی گیردار(C):

$$r = r_i\,, r_o \begin{cases} w_0{}^1 = 0 \\ u_1^1 = 0 \end{cases} \tag{۲-۵}$$

شرایط مرزی آزاد(F):

$$r = r_i\,, r_o \begin{cases} \delta w_0{}^1 = 0 \\ \delta u_1^1 = 0 \end{cases} \tag{۳-۵}$$

شرایط مرزی در مرکز ورق مدور:

$$r_i = 0 \left\{ \frac{\partial w_0{}^1}{\partial X} = 0,\ u_1^1 = 0 \right. \tag{۴-۵}$$

در روابط بالا $\delta w_0{}^1, \delta u_1^1$ به‌ترتیب نشان دهنده معادلات شرایط مرزی برای $w_0{}^1, u_1^1$ می‌باشند.

از این پس در این پایان‌نامه در جدول‌ها و نمودارها، شرایط مرزی با حروف انگلیسی مشخص شده نشان داده می‌شود و برای نمایش شرایط مرزی روی دو لبه ورق، حروف انگلیسی بدون فاصله و پشت سر هم نوشته می‌شود؛ به‌عنوان مثال برای نمایش شرایط مرزی گیردار روی لبه خارجی و آزاد روی لبه داخلی ورق حلقوی، شرایط مرزی به‌صورت CF نشان داده می‌شود. همچنین شرایط مرزی برای ورق دایره‌ای با یک حرف نشان داده می‌شود.

نتایج به‌دست آمده در بخش متقارن محوری بر اساس FSDT ، با روش تئوری اغتشاشات و روش عددی DQ به‌دست آمده که به‌منظور صحت سنجی و بررسی اعتبار حل با نتایج مراجع و حل FE در قالب جدول‌ها و شکل‌های مختلف مقایسه می‌شوند، در جدول (۵-۳) بار بحرانی کمانش متقارن ورق مدور با شرایط مرزی ساده(S) و گیردار(C) برای نسبت‌های مختلف ضخامت به شعاع خارجی که با نمایش داده می‌شود؛ آورده شده است. در این جدول، نتایج بار بحرانی کمانش متقارن برای حل عددی DQ و روش میانگین که کاملا تحلیلی(FA[1]) می‌باشد در دو حالت $\sigma_z = 0$ و $\varepsilon_z = 0$ ، برای تعداد جملات مشخص به‌کار برده شده(که در جدول مشخص شده است) در حل معادلات تعادل، مورد بررسی قرار گرفته است؛ همچنین بار کمانش با روش FE نیز محاسبه شده است. در این جدول نتایج دو مرجع [28] که بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر بار بحرانی کمانش را محاسبه کرده است و مرجع [63] که از CPT استفاده کرده است، نیز آورده شده است.

جدول (۵-۳) بار بحرانی کمانش متقارن ورق مدور برای نسبت‌های مختلف h/r_o

$\frac{h}{r_o}$	Method		B.C. C	B.C. S
0.01	DQM	$\sigma_z = 0,\ O(\varepsilon^8)$	0.0100	0.0028
		$\varepsilon_z = 0,\ O(\varepsilon^7)$	0.0123	0.0037
	FA	$\sigma_z = 0,\ O(\varepsilon^8)$	0.0091	0.0034
		$\varepsilon_z = 0,\ O(\varepsilon^7)$	0.0111	0.0044
	FEM		0.0099	0.0028
	[28]		0.0099	0.0028
	[63]		0.0099	0.0028
0.03	DQM	$\sigma_z = 0,\ O(\varepsilon^8)$	0.0299	0.0085
		$\varepsilon_z = 0,\ O(\varepsilon^7)$	0.0369	0.0112
	FA	$\sigma_z = 0,\ O(\varepsilon^8)$	0.0273	0.0103
		$\varepsilon_z = 0,\ O(\varepsilon^7)$	0.0334	0.0134
	FEM		0.0298	0.0085
	[28]		0.0298	0.0085
	[63]		0.0299	0.0085
0.05	DQM	$\sigma_z = 0,\ O(\varepsilon^8)$	0.0495	0.0141

1 Full Analytical

		$\varepsilon_z = 0$, $O(\varepsilon^7)$	0.0610	0.0186
	FA	$\sigma_z = 0$, $O(\varepsilon^8)$	0.0454	0.0171
		$\varepsilon_z = 0$, $O(\varepsilon^7)$	0.0562	0.0193
	FEM		0.0494	0.0142
	[28]		0.0495	0.0142
	[63]		0.0499	0.0142
0.08	DQM	$\sigma_z = 0$, $O(\varepsilon^8)$	0.0779	0.0225
		$\varepsilon_z = 0$, $O(\varepsilon^7)$	0.0957	0.0226
	FA	$\sigma_z = 0$, $O(\varepsilon^8)$	0.0756	0.0262
		$\varepsilon_z = 0$, $O(\varepsilon^7)$	0.0858	0.0200
	FEM		0.0779	0.0226
	[28]		0.0785	0.0236
	[63]		0.0799	0.0228
0.1	DQM	$\sigma_z = 0$, $O(\varepsilon^8)$	0.0960	0.0280
		$\varepsilon_z = 0$, $O(\varepsilon^7)$	0.1175	0.0369
	FA	$\sigma_z = 0$, $O(\varepsilon^8)$	0.0874	0.0205
		$\varepsilon_z = 0$, $O(\varepsilon^7)$	0.1069	0.0249
	FEM		0.0959	0.0282
	[28]		0.0972	0.0283
	[63]		0.0998	0.0285

همان‌طور که در جدول بالا مشاهده می‌شود؛ بار بحرانی کمانش برای حل عددی DQ در حالت $\sigma_z = 0$ برای $O(\varepsilon^8)$ دارای دقت بسیار خوبی نسبت به حل FE و سایر مراجع می‌باشد؛ همچنین حل DQM در $\varepsilon_z = 0$ برای $O(\varepsilon^7)$ نیز در جدول قابل مشاهده است که نسبت به حالت $\sigma_z = 0$ دارای دقت پایین‌تری در برابر نتایج مراجع می‌باشد.

جدول (۵-۴) نیز بار بحرانی کمانش متقارن را برای ورق حلقوی در شرایط مرزی گیردار-آزاد و ساده-آزاد نشان می‌دهد. در این جدول، روش عددی DQ برای دو حالت $\sigma_z = 0$ و $\varepsilon_z = 0$ در مرتبه حل‌های مشخص با نتایج حل FE و نتایج مرجع [64] که از FSDT استفاده کرده است، مقایسه شده است. با توجه به جدول مورد نظر، دقت حل برای شرایط مرزی مورد بررسی و نسبت‌های مختلف h / r_o، در روش DQ برای حالت $\sigma_z = 0$ دارای دقت بسیار خوبی است؛ همچنین در حالت $\varepsilon_z = 0$ نتایج در مقایسه با مراجع، دارای دقت کمتری هستند. روش دیگری که در این جدول مورد بررسی قرار گرفته

است؛ روش FA می‌باشد که نتایج آن برای مرتبه حل‌های متناسب و در دو حالت $\sigma_z = 0$ و $\varepsilon_z = 0$ به‌منظور مقایسه با دیگر نتایج آورده شده است.

جدول (۵-۴) بار بحرانی کمانش متقارن ورق حلقوی برای نسبت‌های مختلف h/r_o

η	$\frac{h}{r_o}$	Method		B.C. CF	B.C. SF
0.1	0.01	DQM	$\sigma_z = 0$, $O(\varepsilon^5)$	0.0092	0.0027
			$\varepsilon_z = 0$, $O(\varepsilon^7)$	0.0102	0.0025
		FEM		0.0094	0.0027
		[64]		0.0094	0.0027
	0.05	DQM	$\sigma_z = 0$, $O(\varepsilon^5)$	0.0456	0.0136
			$\varepsilon_z = 0$, $O(\varepsilon^7)$	0.0506	0.0128
		FEM		0.0469	0.0135
		[64]		0.0469	0.0134
	0.1	DQM	$\sigma_z = 0$, $O(\varepsilon^5)$	0.0887	0.0269
			$\varepsilon_z = 0$, $O(\varepsilon^7)$	0.0978	0.0254
		FEM		0.0913	0.0267
		[64]		0.0914	0.0267
	0.2	DQM	$\sigma_z = 0$, $O(\varepsilon^5)$	0.1597	0.0522
			$\varepsilon_z = 0$, $O(\varepsilon^7)$	0.1726	0.0487
		FEM		0.1646	0.0518
		[64]		0.1647	0.0518
	0.3	DQM	$\sigma_z = 0$, $O(\varepsilon^5)$	0.2052	0.0682
			$\varepsilon_z = 0$, $O(\varepsilon^7)$	0.2156	0.0743
		FEM		0.2118	0.0737
		[64]		0.2118	0.0738

پس از تایید اعتبار و دقت فرمول‌بندی و روش حل ارائه شده، با توجه به جدول‌های (۵-۳) و (۵-۴)، مطالعات موردی برای ورق مدور و حلقوی در شرایط مرزی مختلف و نسبت‌های مختلف ضخامت و شعاع درونی به شعاع بیرونی، مورد بررسی قرار می‌گیرد.

جدول (۵-۵) بار بحرانی کمانش متقارن ورق حلقوی با شرایط مرزی گیردار-گیردار، در نسبت‌های مختلف ضخامت به شعاع بیرونی را نشان می‌دهد. همان‌طور که انتظار است، با افزایش ضخامت، بار بحرانی کمانش افزایش می‌یابد.

جدول (۵-۵) بار بحرانی کمانش متقارن ورق حلقوی CC ، با مقدار ثابت $\eta = 0.3$ و مقادیر مختلف h / r_o

$\frac{h}{r_o}$	FA		FEM	DQM	
	$\sigma_z = 0 ,\ O(\varepsilon^6)$	$\varepsilon_z = 0 ,\ O(\varepsilon^5)$		$\sigma_z = 0 ,\ O(\varepsilon^4)$	$\varepsilon_z = 0 ,\ O(\varepsilon^5)$
0.01	0.0546	0.0674	0.0515	0.0514	0.0637
0.05	0.2587	0.3153	0.2437	0.2430	0.2977
0.1	0.4430	0.5240	0.4160	0.4153	0.4075
0.2	0.5628	0.6256	0.5218	0.5221	0.4823
0.3	0.5259	0.5620	0.4763	0.4758	0.5166

جدول (۵-۶) بار بحرانی کمانش متقارن ورق حلقوی با شرایط مرزی ساده-ساده، با نسبت‌های مختلف ضخامت به شعاع بیرونی را نشان می‌دهد؛ که مانند شرایط مرزی گیردار-گیردار، برای این شرایط مرزی نیز با افزایش ضخامت، بار بحرانی کمانش افزایش می یابد.

جدول (۵-۶) بار بحرانی کمانش متقارن ورق حلقوی SS ، با مقدار ثابت $\eta = 0.3$ و مقادیر مختلف h / r_o

$\frac{h}{r_o}$	FA		FEM	DQM	
	$\sigma_z = 0 ,\ O(\varepsilon^6)$	$\varepsilon_z = 0 ,\ O(\varepsilon^5)$		$\sigma_z = 0 ,\ O(\varepsilon^4)$	$\varepsilon_z = 0 ,\ O(\varepsilon^5)$
0.01	0.0135	0.0162	0.0139	0.0140	0.0171
0.05	0.0668	0.0797	0.0688	0.0688	0.0842
0.1	0.1281	0.1516	0.1308	0.1309	0.1587
0.2	0.2195	0.2538	0.2184	0.2185	0.2580
0.3	0.2657	0.2994	0.2567	0.2568	0.2951

از جدول‌های (۵-۵) و (۵-۶) می‌توان نتیجه گرفت که در شرایط یکسان برای ورق با شرایط مرزی ساده-ساده، نسبت به ورق با شرایط مرزی گیردار-گیردار، بار بحرانی مقدار کمتری دارد.

نتایج به‌دست آمده برای بار بحرانی کمانش متقارن ورق حلقوی در شرایط مرزی گیردار-گیردار برای نسبت‌های مختلف شعاع درونی به شعاع خارجی در جدول (۵-۷) به نمایش گذاشته شده است. جدول (۵-۸) نیز بار بحرانی کمانش متقارن در نسبت‌های مختلف شعاع درونی به بیرونی را برای ورق حلقوی

با شرایط مرزی ساده-ساده نشان می‌دهد؛ همان‌طور که قابل ملاحظه است؛ برای هر دو حالت شرایط مرزی با افزایش شعاع داخلی ورق، بار بحرانی کمانش افزایش می‌یابد.

جدول (۵-۷) بار بحرانی کمانش متقارن ورق حلقوی CC ، با مقدار ثابت $h/r_o = 0.1$ و مقادیر مختلف η

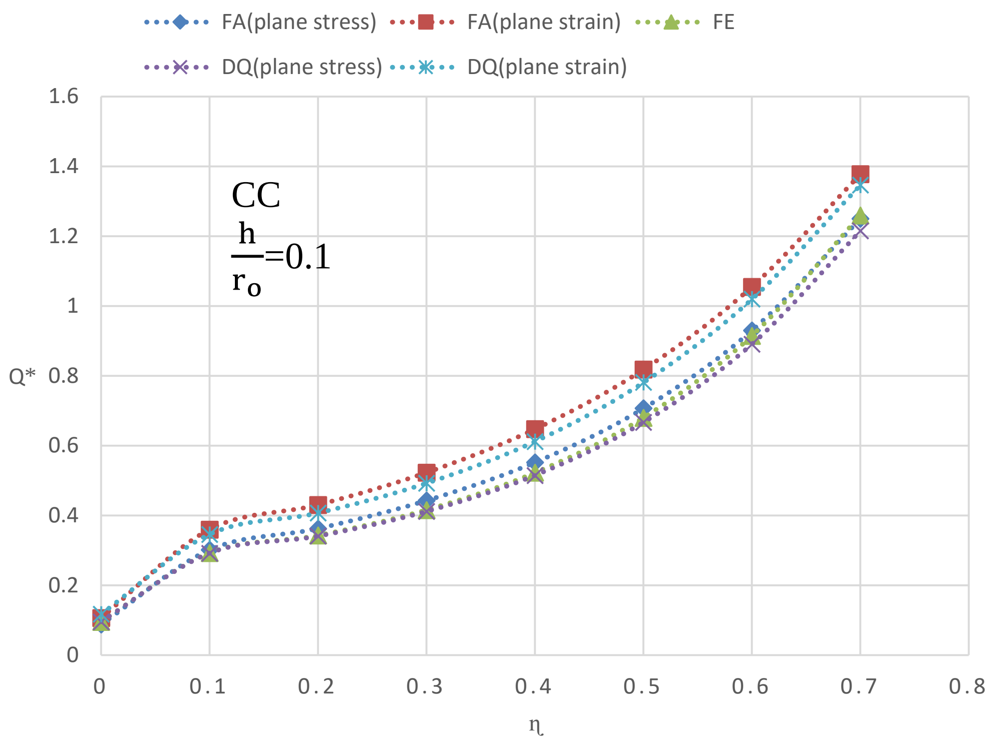
η	FA		FEM	DQM	
	$\sigma_z = 0\,,\ \ O(\varepsilon^6)$	$\varepsilon_z = 0\,,\ \ O(\varepsilon^7)$		$\sigma_z = 0\,,\ \ O(\varepsilon^6)$	$\varepsilon_z = 0\,,\ \ O(\varepsilon^7)$
0	0.0880	0.1069	0.0960	0.0960	0.1175
0.1	0.3017	0.3598	0.2927	0.2921	0.3462
0.2	0.3628	0.4304	0.3430	0.3409	0.4075
0.3	0.4430	0.5229	0.4160	0.4117	0.4927
0.4	0.5524	0.6473	0.5225	0.5150	0.6121
0.5	0.7068	0.8180	0.6801	0.6668	0.7812
0.6	0.9299	1.0551	0.9149	0.8908	1.0198
0.7	1.2500	1.3774	1.2596	1.2150	1.3463

جدول (۵-۸) بار بحرانی کمانش متقارن ورق حلقوی SS ، با مقدار ثابت $h/r_o = 0.1$ و مقادیر مختلف η

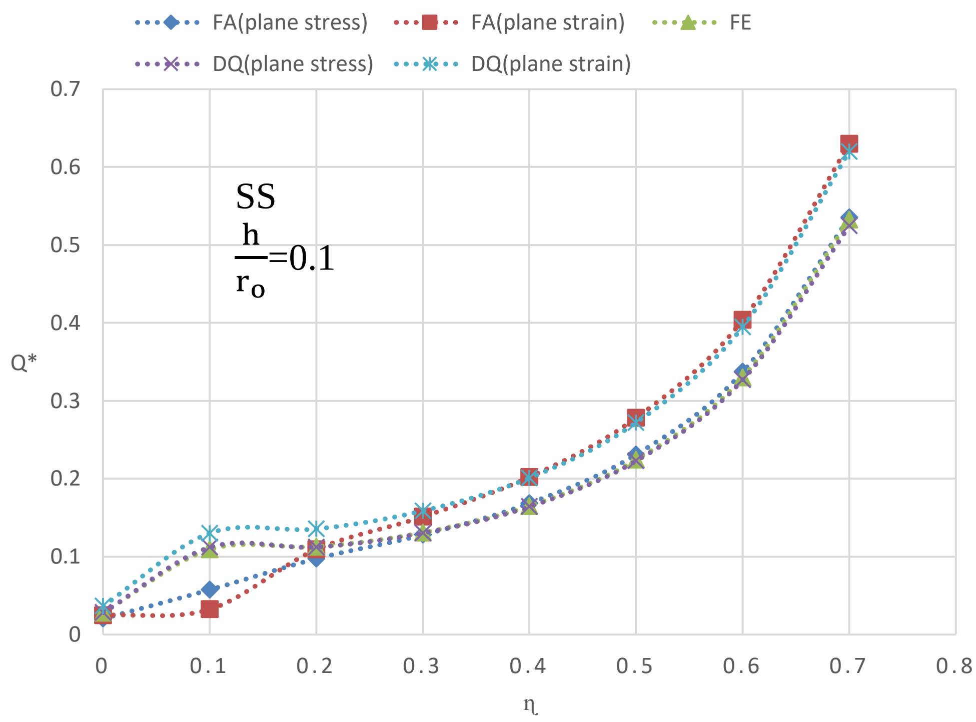
η	FA		FEM	DQM	
	$\sigma_z = 0\,,\ \ O(\varepsilon^6)$	$\varepsilon_z = 0\,,\ \ O(\varepsilon^7)$		$\sigma_z = 0\,,\ \ O(\varepsilon^6)$	$\varepsilon_z = 0\,,\ \ O(\varepsilon^7)$
0	0.0205	0.0249	0.0282	0.0283	0.0369
0.1	0.0576	0.0326	0.1093	0.1121	0.1301
0.2	0.0975	0.1094	0.1128	0.1124	0.1356
0.3	0.1281	0.1513	0.1308	0.1304	0.1588
0.4	0.1686	0.2023	0.1649	0.1643	0.2010
0.5	0.2311	0.2782	0.2242	0.2230	0.2720
0.6	0.3373	0.4038	0.3300	0.3271	0.3949
0.7	0.5354	0.6297	0.5324	0.5245	0.6198

در جدول‌های (۵-۷) و (۵-۸) دقت حل در روش DQ و روش FA با افزایش نسبت شعاع داخلی به خارجی، کاهش می‌یابد.

شکل‌های (۵-۳) و (۵-۴) نمودار بار بحرانی کمانش متقارن ورق را برای نسبت‌های مختلف شعاعی درونی به بیرونی به ترتیب در شرایط مرزی گیردار-گیردار و ساده-ساده برای روش‌های مختلف، نشان می‌دهد.

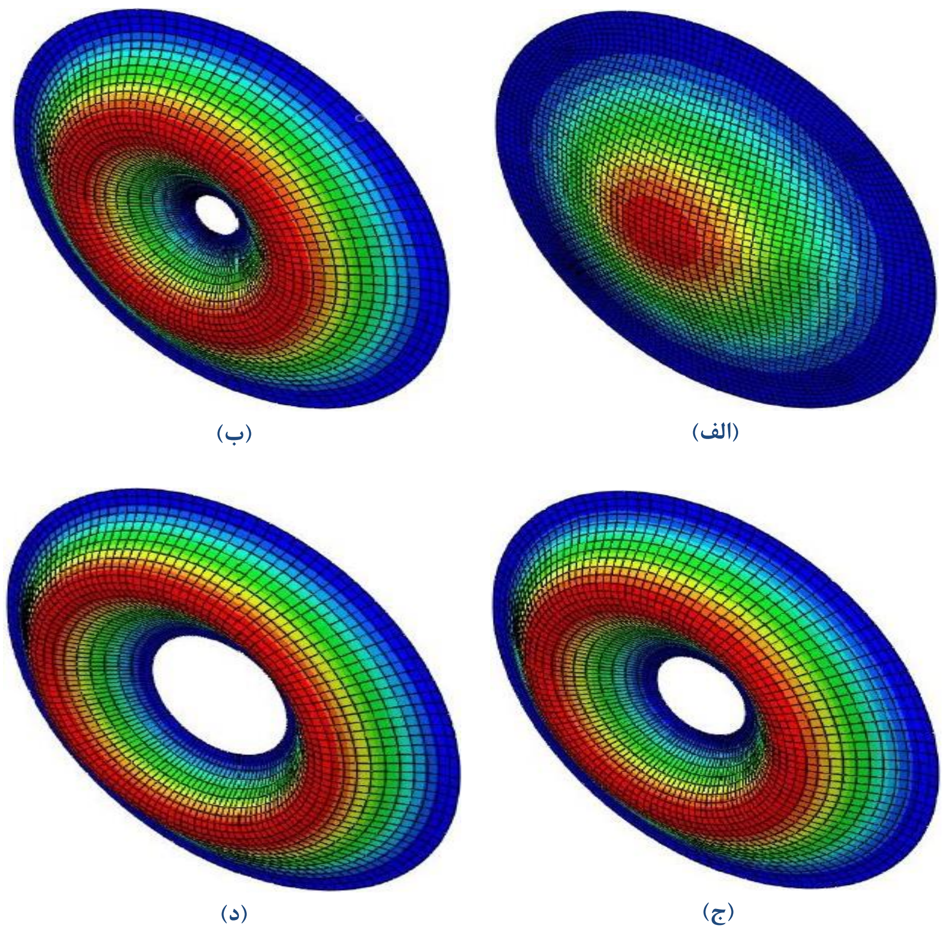


شکل (۵-۳) نمودار بار بحرانی کمانش متقارن ورق حلقوی CC ، با مقدار ثابت $h/r_o=0.1$ و مقادیر مختلف η

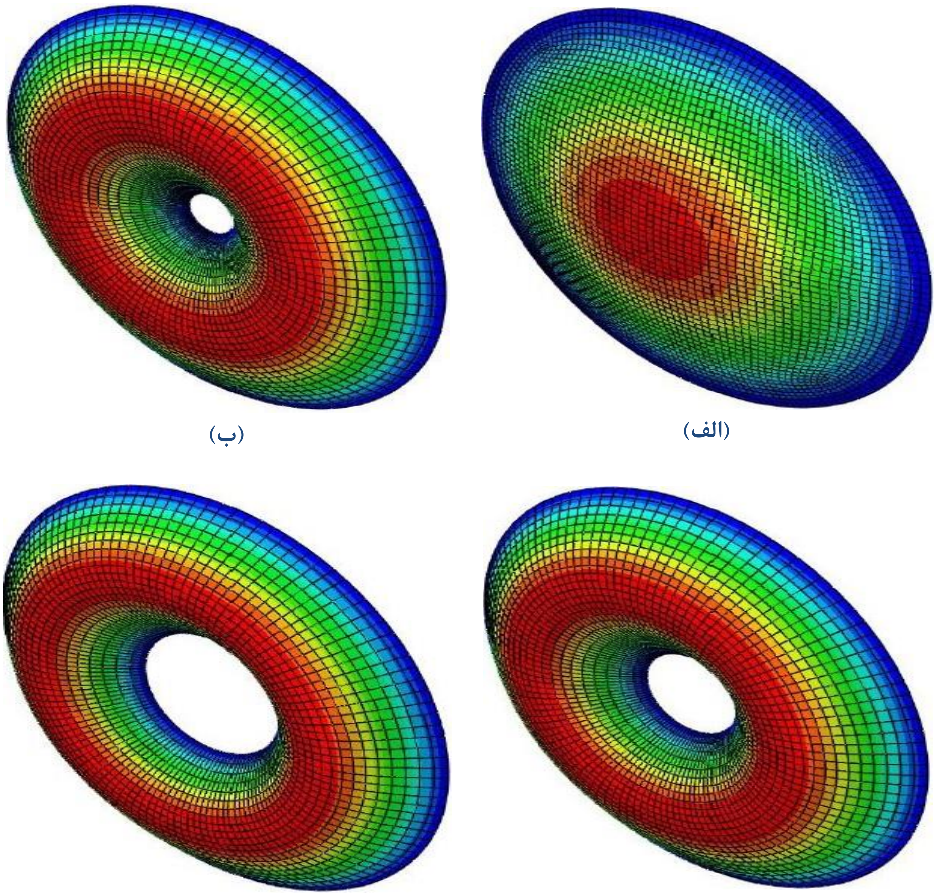


شکل (۵-۴) نمودار بار بحرانی کمانش متقارن ورق حلقوی SS ، با مقدار ثابت $h/r_o=0.1$ و مقادیر مختلف η

شکل‌های (۵-۵) و (۵-۶) شکل مد کمانش ورق حلقوی با شعاع‌های داخلی متفاوت را به‌ترتیب برای شرایط مرزی گیردار-گیردار و ساده-ساده، نشان می‌دهد. شکل مدهای آورده شده در شکل‌ها در محیط نرم افزار آباکوس رسم شده‌اند.



شکل (۵-۵) شکل مد کمانش متقارن ورق حلقوی در شرایط مرزی CC، $h/r_o = 0.1$، برای نسبت‌های مختلف شعاع داخلی به خارجی ورق. (الف) $\eta = 0$، (ب) $\eta = 0.1$، (ج) $\eta = 0.2$، (د) $\eta = 0.3$

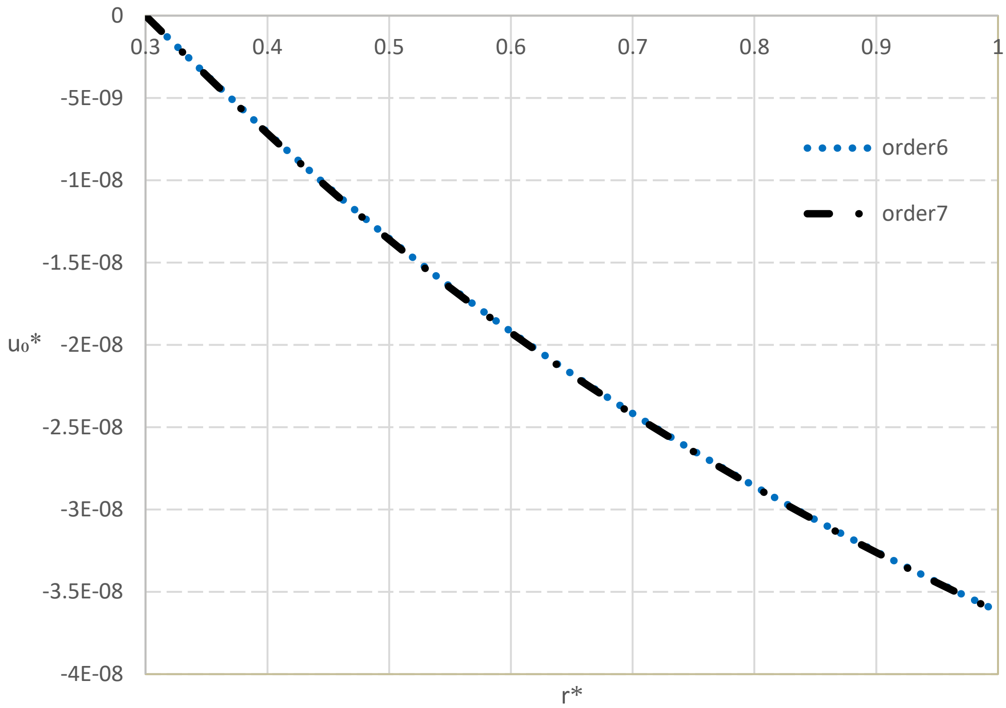


شکل (۵-۶) شکل مد کمانش متقارن ورق حلقوی در شرایط مرزی SS، $h/r_o=0.1$، برای نسبت‌های مختلف شعاع داخلی به خارجی ورق. (الف) $\eta=0$، (ب) $\eta=0.1$، (ج) $\eta=0.2$، (د) $\eta=0.3$

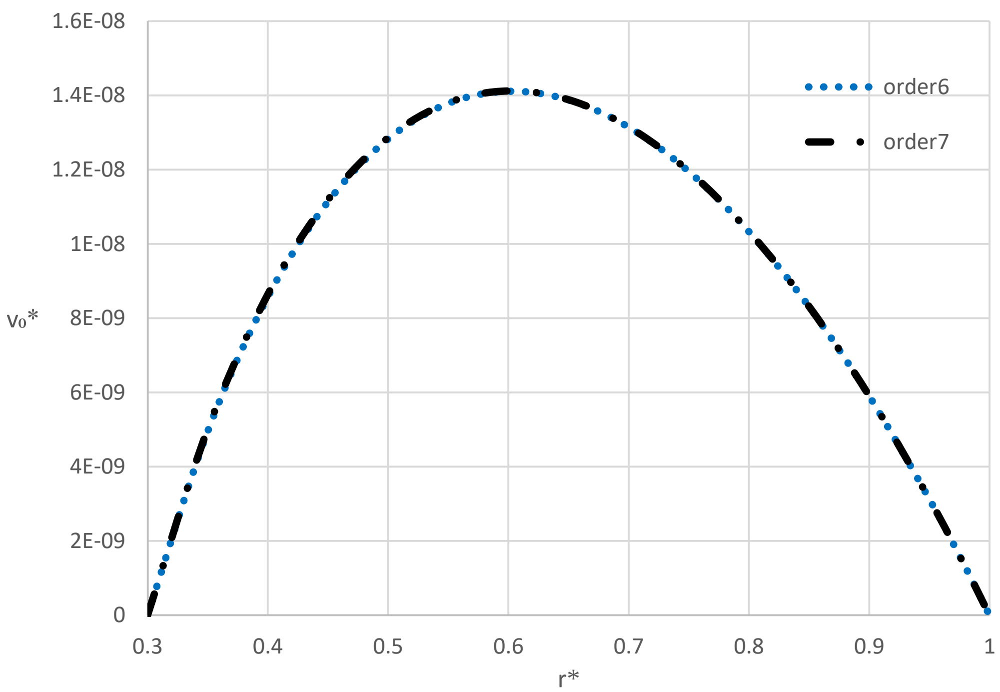
۵-۴- نتایج کمانش نامتقارن

در کمانش نامتقارن مقدار m در فرمول‌بندی معادلات پایداری نمی‌تواند صفر باشد.

شکل‌های (۵-۷) و (۵-۸) نمودارهای مولفه‌های جابجایی تعادل را برای مرتبه حل‌های مشخص نشان می‌دهد که به‌منظور تعیین تعداد جملات و بررسی همگرایی سری اغتشاشات بررسی می‌گردد. مشابه حالت متقارن، مقدار بار گسترده شعاعی در حل معادلات تعادل برای رسم نمودارهای زیر $Q=1000$ در نظر گرفته شده است.



شکل (۵-۷) نمودار مولفه جابجایی u_0^* در حالت نامتقارن برای حل‌های مرتبه شش و مرتبه هفت



شکل (۵-۸) نمودار مولفه v_0^* در حالت نامتقارن برای حل‌های مرتبه شش و مرتبه هفت

لازم به‌ذکر است که شکل‌های (۵-۷) و (۵-۸) فقط بخش مکانی جابجایی(بخش وابسته به r) را نشان می‌دهند و همچنین در این شکل‌ها، سایر مولفه‌های جابجایی صفر هستند.

با توجه به نمودارهای شکل (۵-۷) و (۵-۸) می‌توان نتیجه گرفت که سری اغتشاشات برای کمانش نامتقارن نیز یک حل همگراست و بعد از این، تمام نتایج بر اساس حل کلی بیان می‌شود. حال مطالعات موردی برای ورق مدور و حلقوی در شرایط مرزی مختلف و نسبت‌های مختلف ضخامت و شعاع درونی به شعاع بیرونی، برای کمانش نامتقارن مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در جدول‌های (۵-۹) تا (۵-۱۲) نتایج برای حل‌های مختلف DQM ، FEM و FA نمایش داده شده است. در این جدول‌ها، حل معادلات پایداری در CPT با روش DQ انجام شده است.

جدول (۵-۹) بار بحرانی کمانش نامتقارن ورق حلقوی با شرایط مرزی گیردار-گیردار، در نسبت‌های مختلف ضخامت به شعاع بیرونی را نشان می‌دهد. در بخش نامتقارن تابع بار $Q^* = Q_0^* \times \cos\left(n \times \theta^*\right)$ می‌باشد.

جدول (۵-۹) بار بحرانی کمانش نامتقارن ورق حلقوی CC ، با مقدار ثابت $\eta = 0.3$ و مقادیر مختلف h / r_o

$\frac{h}{r_o}$	FA		CPT	FEM	DQM	
	$\sigma_z = 0$, $O(\varepsilon^7)$	$\varepsilon_z \neq 0$, $O(\varepsilon^7)$			$\sigma_z = 0$, $O(\varepsilon^7)$	$\varepsilon_z \neq 0$, $O(\varepsilon^7)$
0.01	0.1616	0.2080	0.2961	0.0665	0.0945	0.1141
0.05	0.4665	0.5692	1.4801	0.3134	0.4460	0.5319
0.1	0.8433	0.9883	2.9602	0.5319	0.7595	0.8783
0.2	1.0853	1.1958	5.9202	0.6674	0.9554	1.0364
0.3	1.0240	1.0963	8.8803	0.5756	0.8861	0.9221

جدول (۵-۱۰) بار بحرانی کمانش نامتقارن ورق حلقوی با شرایط مرزی ساده-ساده، با نسبت‌های مختلف ضخامت به شعاع بیرونی را نشان می‌دهد؛ که مانند شرایط مرزی گیردار-گیردار، برای این شرایط مرزی نیز با افزایش ضخامت، بار بحرانی کمانش افزایش می یابد.

جدول (۵-۱۰) بار بحرانی کمانش نامتقارن ورق حلقوی SS ، با مقدار ثابت $\eta = 0.3$ و مقادیر مختلف h/r_o

$\frac{h}{r_o}$	FA		CPT	FEM	DQM	
	$\sigma_z = 0$, $O(\varepsilon^7)$	$\varepsilon_z = 0$, $O(\varepsilon^7)$			$\sigma_z = 0$, $O(\varepsilon^7)$	$\varepsilon_z = 0$, $O(\varepsilon^7)$
0.01	0.0539	0.0655	0.0566	0.0240	0.0300	0.0361
0.05	0.2553	0.3069	0.2833	0.1156	0.1458	0.1748
0.1	0.4385	0.5128	0.5667	0.2136	0.2718	0.3235
0.2	0.5605	0.6185	1.1335	0.3390	0.4410	0.5113
0.3	0.6393	0.6627	1.7003	0.3809	0.5127	0.5770

نتایج به‌دست آمده برای بار بحرانی کمانش نامتقارن ورق حلقوی در شرایط مرزی گیردار-گیردار برای نسبت‌های مختلف شعاع درونی به شعاع بیرونی در جدول (۵-۱۱) به نمایش گذاشته شده است. جدول (۵-۱۲) نیز بار بحرانی کمانش نامتقارن در نسبت‌های مختلف شعاع درونی به بیرونی را برای ورق حلقوی با شرایط مرزی ساده-ساده نشان می‌دهد.

جدول (۵-۱۱) بار بحرانی کمانش نامتقارن ورق حلقوی CC ، با مقدار ثابت $h/r_o = 0.1$ و مقادیر مختلف η

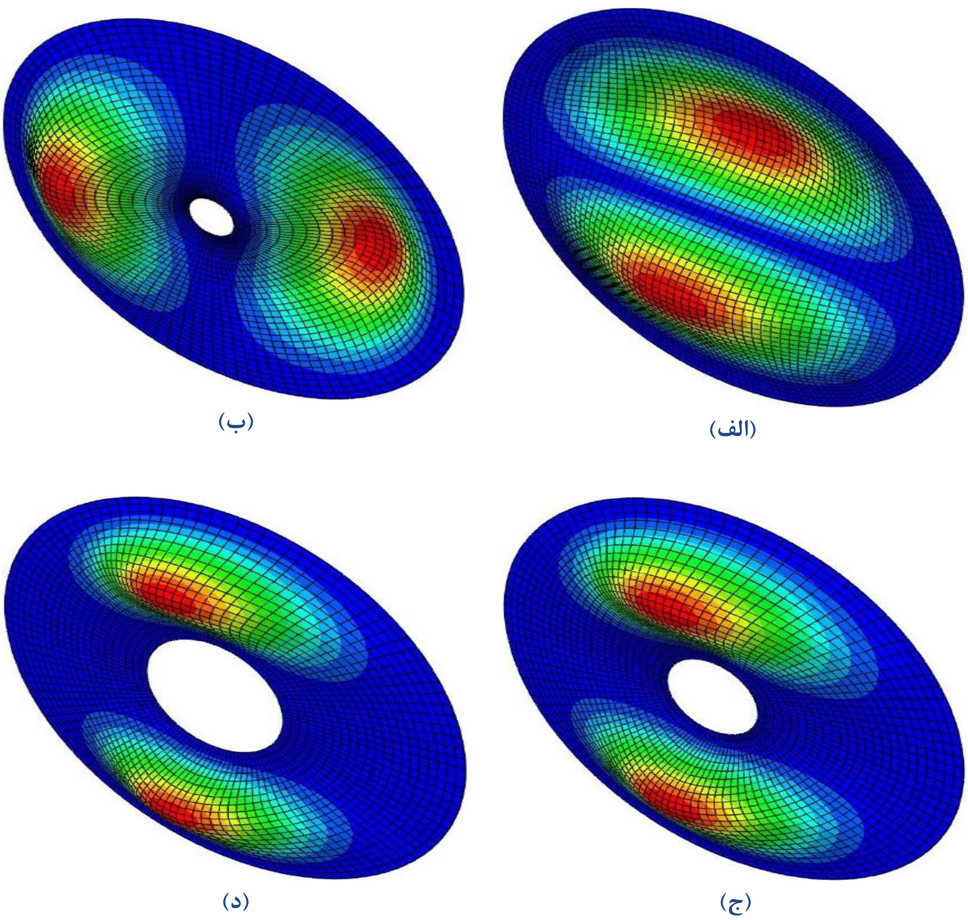
η	FA		CPT	FEM	DQM	
	$\sigma_z = 0$, $O(\varepsilon^7)$	$\varepsilon_z = 0$, $O(\varepsilon^7)$			$\sigma_z = 0$, $O(\varepsilon^7)$	$\varepsilon_z = 0$, $O(\varepsilon^7)$
0	0.5087	0.5749	-	0.3246	0.3375	0.4027
0.1	0.5491	0.6612	1.1718	0.4541	0.5027	0.5941
0.2	0.6792	0.8065	1.7425	0.4824	0.6136	0.7161
0.3	0.8433	0.9883	2.9602	0.5319	0.7595	0.8783
0.4	1.0647	1.2317	5.2607	0.6260	0.9763	1.1207
0.5	1.3811	1.5750	9.9974	0.7797	1.2991	1.4774
0.6	1.8420	2.0628	23.1543	1.0148	1.7713	1.9845
0.7	2.4994	2.7292	73.9556	1.3578	2.4409	2.6699

جدول (۵-۱۲) بار بحرانی کمانش نامتقارن ورق حلقوی SS ، با مقدار ثابت $h/r_o = 0.1$ و مقادیر مختلف η

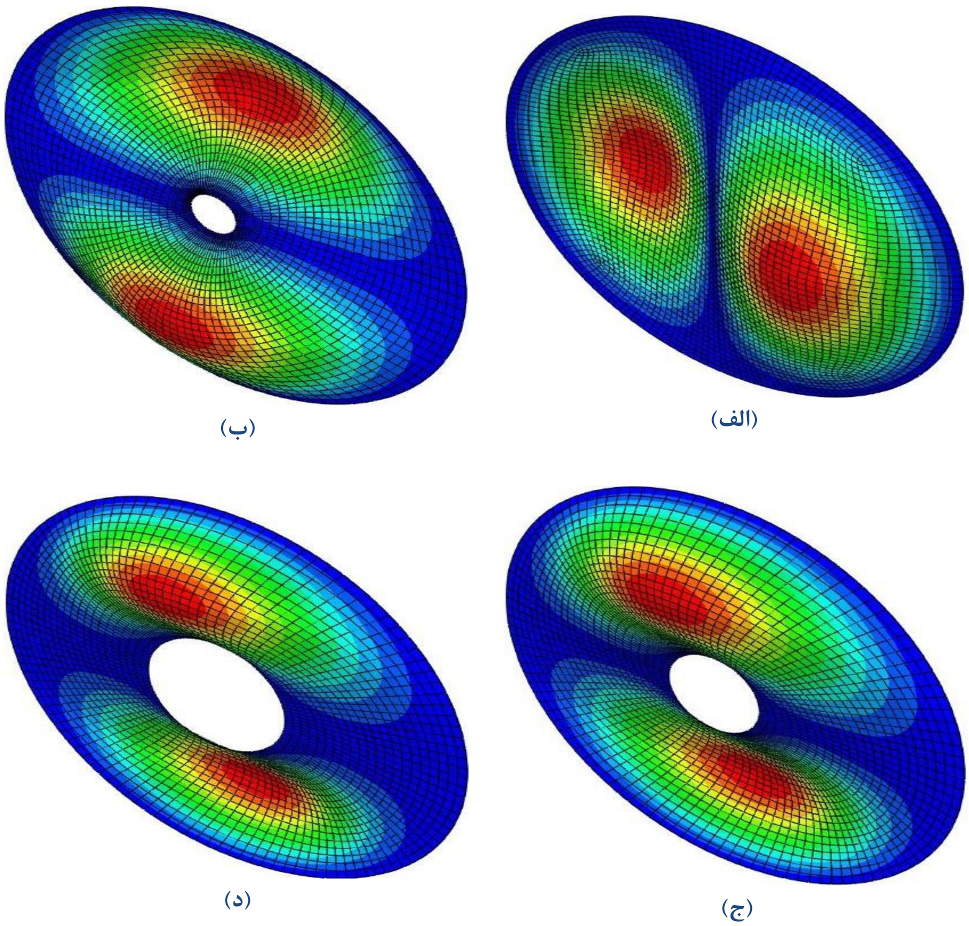
η	FA		CPT	FEM	DQM	
	$\sigma_z = 0$, $O(\varepsilon^7)$	$\varepsilon_z = 0$, $O(\varepsilon^7)$			$\sigma_z = 0$, $O(\varepsilon^7)$	$\varepsilon_z = 0$, $O(\varepsilon^7)$
0	0.1596	0.1931	-	0.1702	0.1365	0.1498
0.1	0.2776	0.3081	0.3376	0.1951	0.2055	0.2505
0.2	0.3553	0.4115	0.4126	0.2040	0.2324	0.2785
0.3	0.4385	0.5128	0.5667	0.2146	0.2718	0.3235
0.4	0.5483	0.6404	0.8732	0.2388	0.3410	0.4057
0.5	0.7023	0.8126	1.5449	0.2923	0.4608	0.5486
0.6	0.9248	1.0501	3.3243	0.3957	0.6725	0.7975
0.7	1.2439	1.3720	9.7097	0.5975	1.0698	1.2507

با توجه به جدول‌ها و نتایج ارائه شده برای کمانش متقارن، نتیجه گرفته می‌شود که تغییرات بار بحرانی کمانش نامتقارن مانند نتایج کمانش متقارن روند یکسانی دارد یعنی مثلا افزایش ضخامت منجر به افزایش بار کمانش می‌شود.

شکل‌های (۵-۹) و (۵-۱۰) شکل مد کمانش ورق حلقوی با شعاع‌های داخلی متفاوت را به‌ترتیب برای شرایط مرزی گیردار-گیردار و ساده-ساده، نشان می‌دهد. شکل مدهای آورده شده، در محیط نرم افزار آباکوس رسم شده‌اند.



شکل (۵-۹) شکل مد کمانش نامتقارن ورق حلقوی در شرایط مرزی CC، $h/r_o=0.1$، برای نسبت‌های مختلف شعاع داخلی به خارجی ورق. (الف) $\eta=0$ ، (ب) $\eta=0.1$ ، (ج) $\eta=0.2$، (د) $\eta=0.3$



شکل (۵-۱۰) شکل مد کمانش نامتقارن ورق حلقوی در شرایط مرزی CC، $h/r_o=0.1$، برای نسبت‌های مختلف شعاع داخلی به خارجی ورق. (الف) $\eta=0$ ، (ب) $\eta=0.1$ ، (ج) $\eta=0.2$، (د) $\eta=0.3$

۵-۵- جمع‌بندی

در این فصل نتایج به‌دست آمده از روش‌های بررسی شده در فصل‌های سوم و چهام در قالب شکل‌ها و جدول‌های متفاوت ارائه شده با دیگر مراجع معتبر مقایسه گردیده است. نتایج برای دو حالت کمانش متقارن و نامتقارن به‌طور مجزا در دو بخش توضیح داده شد. ابتدا برای کمانش متقارن نمودار همگرایی حل معادله تعادل در مرتبه حل‌های مشخص نشان داده شد؛ علاوه بر آن تاثیر پارامترهای مختلف از

جمله تغییر ضخامت، تغییر شعاع درونی و تغییر شرایط مرزی بر روی بار بحرانی کمانش در جدول‌های متفاوت مورد بررسی قرار گرفت؛ همچنین تاثیر تغییر پارامترهای ذکر شده بر روی پیکربندی تغییر شکل ورق بر اثر کمانش نیز ارائه گردید. برای کمانش نامتقارن نیز موارد ذکر شده مورد بررسی قرار گرفت.

فصل ۶:

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

۶-۱- مقدمه

در این پایان‌نامه کمانش ورق دایره‌ای مورد بررسی قرار گرفت؛ معادلات تعادل و شرایط مرزی توسط اصل کار مجازی استخراج گردید و به کمک معیار تعادل در مجاورت معادلات پایداری به‌دست آمد. برای حل معادلات از تئوری اغتشاشات استفاده شد و معادلات پایداری با روش DQ مورد تحلیل قرار گرفت؛ همچنین از روش میانگین نیز به‌عنوان روش دوم در حل معادلات پایداری استفاده گردید. نتایج حاصل، نشان دهنده دقت بالای روش DQ در عین سادگی روش حل می‌باشد؛ همچنین روش میانگین نیز به‌عنوان یک روش تقریبی نتایج مورد قبولی را ارائه داده است.

۶-۲- نتیجه‌گیری

با توجه به مطالعات موردی انجام شده و در نظر گرفتن تاثیر پارامترهای مختلف بر بار کمانش، نتایج زیر قابل حصول است.

- با افزایش نسبت ضخامت به شعاع خارجی بار بحرانی کمانش افزایش می‌باید.
- با افزایش نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی بار بحرانی کمانش افزایش می‌یابد.
- بار بحرانی در شرایط یکسان برای ورق با شرایط مرزی گیردار بیشتر از ورق با شرایط مرزی ساده می‌باشد.
- بررسی بار بحرانی کمانش در حالت تنش صفحه‌ای با روش‌های حل درنظر گرفته شده در این پایان‌نامه، دارای دقت بالاتری نسبت به دیگر حالت‌هاست و به FE نزدیک‌تر است.
- با افزایش نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی دقت روش DQ در حالت تنش صفحه‌ای نسبت به دیگر روش‌ها بالاتر است.
- با افزایش نسبت ضخامت به شعاع خارجی دقت روش DQ در حالت تنش صفحه‌ای نسبت به دیگر روش‌ها بالاتر است.

- همچنین روش میانگین، به‌عنوان یک روش تقریبی با استفاده از جایگزینی ضرایب متغیر معادلات با متوسط‌شان، که در آن معادلات به شکل همگن و بدون ضرایب متغیر تبدیل می‌شوند، معرفی گردید. این روش دقت قابل قبولی دارد.
- امکان حل معادلات تعادل و پایداری با روش DQ از ابتدا وجود داشت، ولی این مسأله نیاز به حل دستگاه معادلات غیرخطی داشت که پیچیده است.
- تئوری اغتشاشات این امکان را فراهم کرد که حل معادلات تعادل، به‌صورت تحلیلی به‌دست آید؛ بدون اینکه نیاز به حل معادلات غیرخطی باشد.
- روش ارائه شده برای هر بارگذاری تابع θ قابل تعمیم است.
- نتایج به‌دست آمده برای بار کمانش در FSDT نسبت به CPT، به حل FE نزدیک‌تر است.
- این روش، برای مطالعه موردی، به‌سادگی قابل اجرا است و بر خلاف روش FE برای هر هندسه خاص، نیاز به یک مش‌بندی جدید ندارد.

۶-۳- پیشنهادها

جهت انجام مطالعات جامع‌تر در رابطه با موضوع مورد بحث این پایان‌نامه، موارد زیر قابل بررسی می‌باشند که در این صورت می‌توان اعتبار نتایج FSDT را برای تعیین بار کمانش بررسی کرد، به‌عبارتی دیگر می‌توان مشخص کرد برای چه محدوده ضخامت یا شعاع FSDT معتبر است.

- استفاده از دیگر تئوری‌های ارائه شده، جهت استخراج معادلات.
- استفاده از ماده به‌صورت کامپوزیت یا FG.
- بررسی تجربی کمانش ورق دایره‌ای
- کمانش ورق دایره‌ای تحت باری که فقط در بخشی از مرز اعمال می‌شود.
- بررسی بار بحرانی کمانش ورق دایره‌ای تحت بار حرارتی.

مراجع

[1] Ventsel, E., and Krauthammer, T. (2001). Thin plates and shells: Theory: analysis, and applications. CRC Press, USA.

[2] Ugural, A. C. (1981). Stresses in plates and shells, MacGraw-Hills Inc. New York, USA.

[3] Amabili, M. (2008). Nonlinear vibrations and stability of shells and plates. Cambridge University Press, UK.

[4] Reddy, J. N. (1999). Theory and analysis of elastic plates and shells. CRC Press, USA.

[5] Reddy, J. N. (2006). Theory and analysis of elastic plates and shells, Second edition. CRC Press, USA.

[6] Wang, C. M., Reddy, J. N., and Lee, K. H. (2000). Shear deformable beams and plates: Relationships with classical solutions. Elsevier, UK.

[7] Wang, C. M., and Wang, C. Y. (2004). Exact solutions for buckling of structural members. CRC Press, USA.

[8] Jones, R. M. (2006). Buckling of bars, plates, and shells. Bull Ridge Corporation, USA.

[9] Bloom, F., and Coffin, D. (2000). Handbook of thin plate buckling and postbuckling. Chapman and Hall/CRC Press, USA.

[10] Eslami, M. R. (2010). Thermo-mechanical buckling of composite plates and shells. Amirkabir University Press, Iran.

[11] Bryan, G. H. (1890). On the stability of a plane plate under thrusts in its own plane, with applications to the “buckling” of the sides of a ship. Proceedings of the London Mathematical Society, 1(1), 54-67.

[12] Mansfield, E. H. (1960). On the buckling of an annular plate. The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 13(1), 16-23.

[13] Ramaiah, G. K., and Vijayakumar, K. (1975). Elastic stability of annular plates under uniform compressive forces along the outer edge. AIAA Journal, 13(6), 832-834.

[14] Reddy, B. S., and Alwar, R. S. (1981). Post-buckling analysis of orthotropic annular plates. Acta Mechanica, 39(3), 289-296.

[15] Rossettos, J. N., and Yang, G. (1986). Asymmetric buckling of ring stiffened circular plates. Journal of Applied Mechanics, 53(2), 475-476.

[16] Shi-Rong, L. (1992). Nonlinear vibration and thermal-buckling of a heated annular plate with a rigid mass. Applied Mathematics and Mechanics, 13(8), 771-777.

[17] Feldman, E., and Aboudi, J. (1997). Buckling analysis of functionally graded plates subjected to uniaxial loading. Composite Structures, 38(1-4), 29-36.

[18] Saadatpour, M. M., Azhari, M., and Bradford, M. A. (1998). Buckling of arbitrary quadrilateral plates with intermediate supports using the Galerkin method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 164(3-4), 297-306.

[19] Najafizadeh, M. M., and Eslami, M. R. (2002). First-order-theory-based thermoelastic stability of functionally graded material circular plates. AIAA Journal, 40(7), 1444-1450.

[20] Akbarov, S. D., and Rzayev, O. G. (2002). On the buckling of the elastic and viscoelastic composite circular thick plate with a penny-shaped crack. European Journal of Mechanics-A/Solids, 21(2), 269-279.

[21] Liew, K. M., Yang, J., and Kitipornchai, S. (2003). Postbuckling of piezoelectric FGM plates subject to thermo-electro-mechanical loading. International Journal of Solids and Structures, 40(15), 3869-3892.

[22] Ma, L. S., and Wang, T. J. (2003). Axisymmetric post-buckling of a functionally graded circular plate subjected to uniformly distributed radial compression. In Materials Science Forum (Vol. 423, pp. 719-724). Trans Tech Publications.

[23] Ma, L. S., and Wang, T. J. (2003). Nonlinear bending and post-buckling of a functionally graded circular plate under mechanical and thermal loadings. International Journal of Solids and Structures, 40(13-14), 3311-3330.

[24] Ma, L. S., and Wang, T. J. (2004). Relationships between axisymmetric bending and buckling solutions of FGM circular plates based on third-order plate theory and classical plate theory. International Journal of Solids and Structures, 41(1), 85-101.

[25] Aung, T. M., and Wang, C. M. (2005). Buckling of circular plates under intermediate and edge radial loads. Thin-Walled Structures, 43(12), 1926-1933.

[26] Coman, C. D., and Haughton, D. M. (2006). Localized wrinkling instabilities in radially stretched annular thin films. Acta Mechanica, 185(3-4), 179-200.

[27] Li, S. R., Zhang, J. H., and Zhao, Y. G. (2007). Nonlinear thermomechanical post-buckling of circular FGM plate with geometric imperfection. Thin-Walled Structures, 45(5), 528-536.

[28] Najafizadeh, M. M., and Heydari, H. R. (2008). An exact solution for buckling of functionally graded circular plates based on higher order shear deformation plate theory under uniform radial compression. International Journal of Mechanical Sciences, 50(3), 603-612.

[29] Saidi, A. R., Rasouli, A., and Sahraee, S. (2009). Axisymmetric bending and buckling analysis of thick functionally graded circular plates using unconstrained third-order shear deformation plate theory. Composite Structures, 89(1), 110-119.

[30] Farajpour, A., Mohammadi, M., Shahidi, A. R., and Mahzoon, M. (2011). Axisymmetric buckling of the circular graphene sheets with the nonlocal continuum plate model. Physica E: Low-Dimensional Systems and Nanostructures, 43(10), 1820-1825.

[31] Natsuki, T., Shi, J. X., and Ni, Q. Q. (2012). Buckling instability of circular double-layered graphene sheets. Journal of Physics: Condensed Matter, 24(13), 135004.

[32] Thai, H. T., and Choi, D. H. (2013). Analytical solutions of refined plate theory for bending, buckling and vibration analyses of thick plates. Applied Mathematical Modelling, 37(18-19), 8310-8323.

[33] Lal, R., and Ahlawat, N. (2015). Axisymmetric vibrations and buckling analysis of functionally graded circular plates via differential transform method. European Journal of Mechanics-A/Solids, 52, 85-94.

[34] Mojahedin, A., Jabbari, M., Khorshidvand, A. R., and Eslami, M. R. (2016). Buckling analysis of functionally graded circular plates made of saturated porous materials based on higher order shear deformation theory. Thin-Walled Structures, 99, 83-90.

[35] Fan, J. L., Ma, L. S., Zhang, L., and De Su, H. (2016). Bending and buckling behavior analysis of foamed metal circular plate. Journal of Applied Biomaterials and Functional Materials, 14, 15-19.

[36] Ahlawat, N., and Lal, R. (2016). Buckling and vibrations of multi-directional functionally graded circular plate resting on elastic foundation. Procedia Engineering, 144, 85-93.

[37] Zhang, J., and Zhao, X. (2016). Thermal shock buckling of a functionally graded circular plate. In ASME 2016 International Mechanical Engineering Congress and Exposition. American Society of Mechanical Engineers Digital Collection(USA).

[38] Bagheri, H., Kiani, Y., and Eslami, M. R. (2017). Asymmetric thermal buckling of annular plates on a partial elastic foundation. Journal of Thermal Stresses, 40(8), 1015-1029.

[39] Feyzi, M. R., and Khorshidvand, A. R. (2017). Axisymmetric post-buckling behavior of saturated porous circular plates. Thin-Walled Structures, 112, 149-158.

[40] Yang, J., Wu, H., and Kitipornchai, S. (2017). Buckling and postbuckling of functionally graded multilayer graphene platelet-reinforced composite beams. Composite Structures, 161, 111-118.

[41] Mirsalehi, M., Azhari, M., and Amoushahi, H. (2017). Buckling and free vibration of the FGM thin micro-plate based on the modified strain gradient theory and the spline finite strip method. European Journal of Mechanics-A/Solids, 61, 1-13.

[42] Mohammadimehr, M., Emdadi, M., Afshari, H., and Rousta Navi, B. (2018). Bending, buckling and vibration analyses of MSGT microcomposite circular-annular sandwich plate under hydro-thermo-magneto-mechanical loadings using DQM. International Journal of Smart and Nano Materials, 9(4), 233-260.

[43] Magnucka-Blandzi, E., Wiśniewska-Mleczko, K., and Smyczyński, M. J. (2018). Buckling of symmetrical circular sandwich plates with variable mechanical properties of the core in the radial direction. Composite Structures, 204, 88-94.

[44] Abolghasemi, S., Eipakchi, H. R., and Shariati, M. (2018). Investigation of pre-buckling stress effect on buckling load determination of finite rectangular plates with circular cutout. Journal of Solid Mechanics, 10(4), 816-830.

[45] Foyouzat, M. A., and Mofid, M. (2019). An analytical solution for bending of axisymmetric circular/annular plates resting on a variable elastic foundation. European Journal of Mechanics-A/Solids, 74, 462-470.

[46] Bagheri, H., Kiani, Y., and Eslami, M. R. (2019). Asymmetric compressive stability of rotating annular plates. European Journal of Computational Mechanics, 42, 1-21.

[47] Lal, R., and Ahlawat, N. (2019). Buckling and vibrations of two-directional FGM Mindlin circular plates under hydrostatic peripheral loading. Mechanics of Advanced Materials and Structures, 26(3), 199-214.

[48] Zhang, J., Pan, S., and Chen, L. (2019). Dynamic thermal buckling and postbuckling of clamped–clamped imperfect functionally graded annular plates. Nonlinear Dynamics, 95(1), 565-577.

[49] Huang, Q., Choe, J., Yang, J., Xu, R., Hui, Y., and Hu, H. (2019). The effects of kinematics on post-buckling analysis of sandwich structures. Thin-Walled Structures, 143, 106-204.

[50] Bagheri, H., Kiani, Y., and Eslami, M. R. (2019). Buckling of moderately thick annular plates subjected to torque. Archive of Mechanical Engineering, Polish Academy of Sciences.

[51] Yanli, G., Xiaoqing, S., Xiao, L., Xingyou, Y., Zhifan, X., Bin, X., and Jianyi, S. (2019). Elastic buckling of thin plate with circular holes in bending. In E3S Web of Conferences (Vol. 136, p. 04043). EDP Sciences.

[52] Moita, J. S., Araújo, A. L., Correia, V. F., Soares, C. M. M., and Herskovits, J. (2020). Buckling behavior of composite and functionally graded material plates. European Journal of Mechanics-A/Solids, 80, 103-921.

[53] Reddy, J. N. (2017). Energy principles and variational methods in applied mechanics. John Wiley and Sons, USA.

[54] Vinson, J. R., and Abrate, S. (1990). The behavior of thin walled structures, beams, plates, and shells. Journal of Applied Mechanics, 57, 1102.

[55] Kreyszig, H., and Kreyszig, E. (2012). Student solutions manual to accompany advanced engineering mathematics, Thenth edition (Vol. 1). John Wiley and Sons.

[56] Sadd, M. H. (2009). Elasticity: Theory, applications, and numerics. Academic Press. UK.

[57] Brush, D. O., and Almroth, B. O. (1975). Buckling of bars, plates, and shells (Vol. 6, No. 6). McGraw-Hill, USA.

[58] Nayfeh, A. H. (2011). Introduction to perturbation techniques. John Wiley and Sons.

[59] Bert, C. W., and Malik, M. (1996). Differential quadrature method in computational mechanics: a review. Applied mechanics reviews, 49(1), 1-28.

[60] Civalek, Ö. (2004). Application of differential quadrature (DQ) and harmonic differential quadrature (HDQ) for buckling analysis of thin isotropic plates and elastic columns. Engineering Structures, 26(2), 171-186.

[61] حسینی هاشمی شاهرخ و خرمی کمیل، (۱۳۹۰). مروری بر روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته در مکانیک محاسباتی، نشریه علمی ترویجی مهندسی مکانیک، دوره ۲۰، شماره ۷۷، صفحات ۶۶-۷۲

[62] Wang, X. (2015). Differential quadrature and differential quadrature based element methods: Theory and applications. Butterworth-Heinemann.

[63] Jawad, M., and Krivoshapko, S. (2004). Design of plate and shell structures. USA.

[64] Abolghasemi, S., Eipakchi, H., and Shariati, M. (2017). An analytical solution for axisymmetric buckling of annular plates based on perturbation technique. International Journal of Mechanical Sciences, 123, 74-83.

پیوست

یک نمونه دستگاه معادلات حل شده به‌روش DQ

دستگاه معادلات زیر مد نظر می‌باشد.

$$\begin{cases} 2\dfrac{d^2}{dX^2}u(x)+u(x)-v(x)=3 \\ 3\dfrac{d^2}{dX^2}v(x)+v(x)-2u(x)=2 \end{cases} \tag{۱}$$

شرایط مرزی نیز برای این دستگاه معادلات به‌شکل زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{cases} x=0: \quad u(x)=v(x)=0 \\ x=1: \quad \dfrac{d}{dx}u(x)+\dfrac{d}{dx}v(x)=1, \quad \dfrac{d}{dx}v(x)-u(x)=2 \end{cases} \tag{۲}$$

به‌دلیل ناهمگن بودن دستگاه معادلات رابطه (۱)، حل آن با روش تحلیلی شامل دو بخش همگن و غیرهمگن می‌باشد؛ حل همگن این رابطه به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{Bmatrix} u(x) \\ v(x) \end{Bmatrix}=\sum_{i=1}^{4}\{T_i\}\exp(m_i x), \quad \{T_i\}=\begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{Bmatrix} \tag{۳}$$

در رابطه اخیر $\{T_i\}$ بردار ویژه و m_i بیان کننده مقدار ویژه می‌باشد، با جایگذاری رابطه (۳) در معادلات (۱) یک دستگاه معادلات جبری به شکل ماتریسی حاصل می‌شود که برای وجود جواب غیر صفر، با صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب، چهار مقدار ویژه به‌دست خواهد آمد که با اعمال در رابطه (۳) بردارهای ویژه متناظر نیز به‌دست می‌آید؛ که با توجه به رابطه (۳) حل همگن به‌دست خواهد آمد؛ حل ناهمگن دستگاه معادلات مربوطه، به شکل رابطه زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$u(x)=a, \quad v(x)=b \tag{۴}$$

با جایگذاری رابطه (۴) در دستگاه معادلات (۱) و حل آن، مقادیر a و b به‌دست می‌آید که با اعمال آن‌ها در رابطه (۴) حل غیرهمگن دستگاه معادلات نیز به‌دست خواهد آمد؛ با جمع حل همگن و غیرهمگن معادلات، حل کلی به‌دست می‌آید.

دستگاه معادلات رابطه (۱) با روش DQ برای $0 \le x \le 1$، تعداد نقاط شبکه مختلف و توزیع غیریکنواخت نقاط دقت، با اعمال شرایط مرزی به روش رویکرد معادله جایگزین، حل می‌شود.

به‌عنوان نمونه برای $N = 5$، عبارات و مشتقات مرتبه یک و دوم دستگاه معادلات (۱) در شکل مربعات دیفرانسیلی به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = A^2_{i,5}u_5 + A^2_{i,4}u_4 + A^2_{i,3}u_3 + A^2_{i,2}u_2 + A^2_{i,1}u_1 \ , \quad i = 1,..,N \tag{۵}$$

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} = A^2_{i,5}v_5 + A^2_{i,4}v_4 + A^2_{i,3}v_3 + A^2_{i,2}v_2 + A^2_{i,1}v_1 \ , \quad i = 1,..,N \tag{۶}$$

$$\frac{du(x)}{dx} = A^1_{i,5}u_5 + A^1_{i,4}u_4 + A^1_{i,3}u_3 + A^1_{i,2}u_2 + A^1_{i,1}u_1 \ , \quad i = 1,...,N \tag{۷}$$

$$\frac{dv(x)}{dx} = A^1_{i,5}v_5 + A^1_{i,4}v_4 + A^1_{i,3}v_3 + A^1_{i,2}v_2 + A^1_{i,1}v_1 \ , \quad i = 1,...,N \tag{۸}$$

$$u(x) = u_i \ , \quad v(x) = v_i \ , \quad i = 1,...,N \tag{۹}$$

در روابط بالا A^2 و A^1 به‌ترتیب بیان‌گر ماتریس ضرایب وزنی برای مشتقات مرتبه دو و مشتقات مرتبه یک می‌باشند؛ با جایگذاری رابطه‌های نوشته شده برای مشتقات در دستگاه معادلات و معادلات شرایط مرزی، معادلات در شکل DQ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

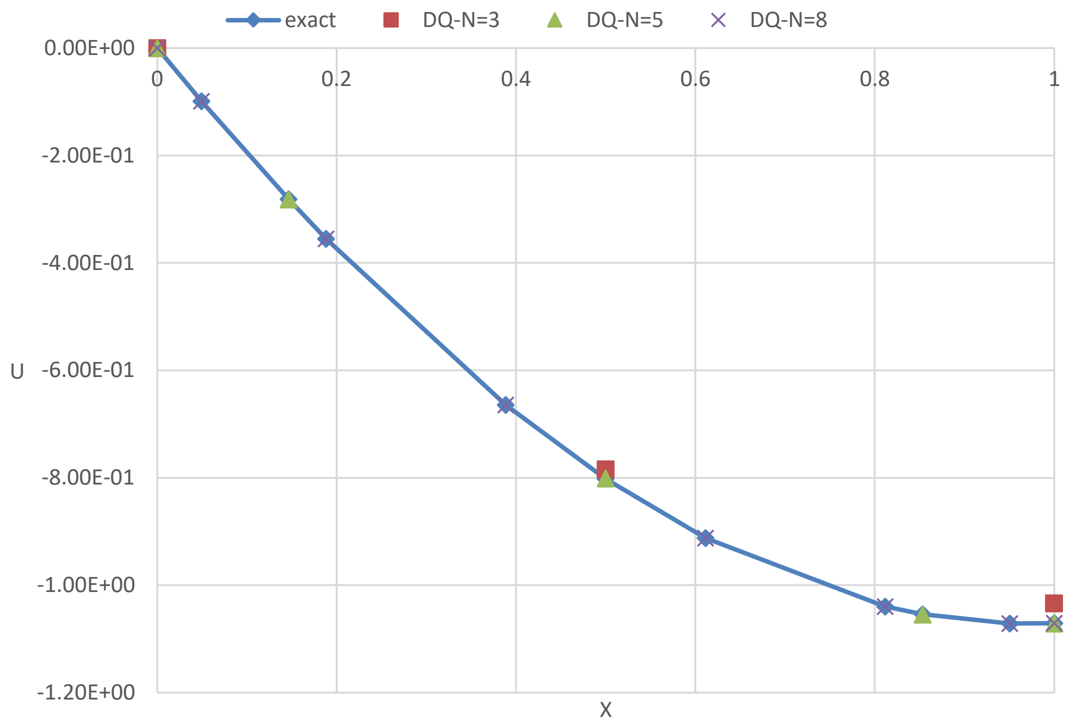
$$eq1:\ 2A^2_{i,5}u_5 + 2A^2_{i,4}u_4 + 2A^2_{i,3}u_3 + 2A^2_{i,2}u_2 + 2A^2_{i,1}u_1 + u_i - v_i - 3 = 0 \ , \ i = 2,..,N-1 \tag{۱۰}$$

$$eq2:\ 3A^2_{i,5}v_5 + 3A^2_{i,4}v_4 + 3A^2_{i,3}v_3 + 3A^2_{i,2}v_2 + 3A^2_{i,1}v_1 + v_i - 2u_i - 2 = 0 \ , \ i = 2,..,N-1 \tag{۱۱}$$

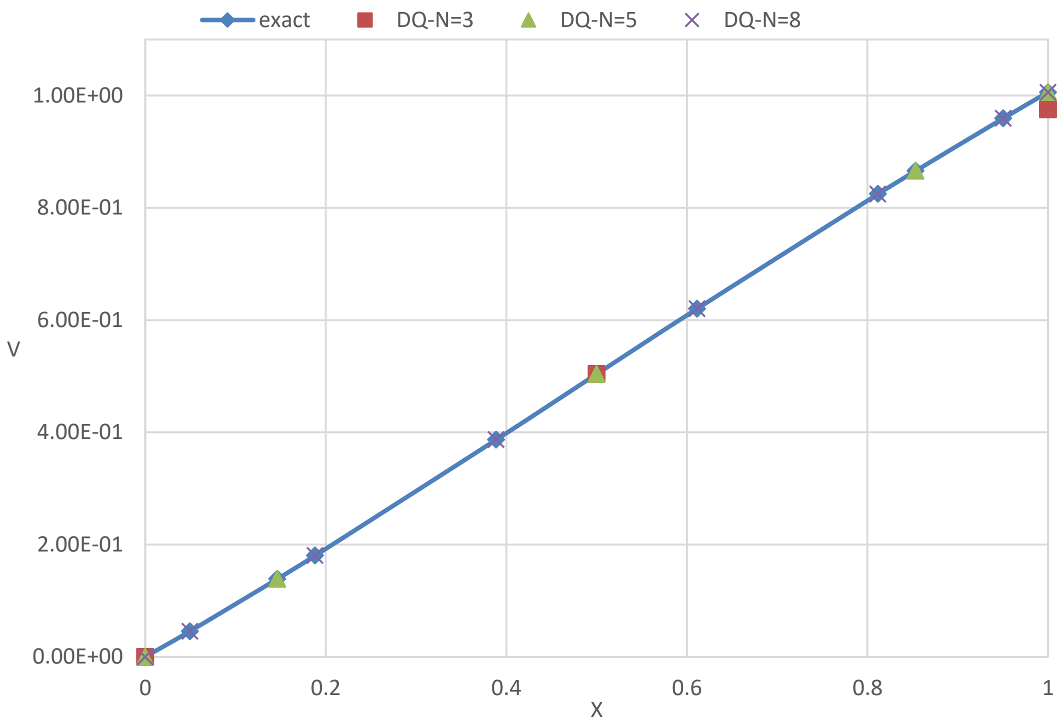
$$\begin{aligned} bc1:\ & A^1_{i,5}u_5 + A^1_{i,4}u_4 + A^1_{i,3}u_3 + A^1_{i,2}u_2 + A^1_{i,1}u_1 \\ & + A^1_{i,5}v_5 + A^1_{i,4}v_4 + A^1_{i,3}v_3 + A^1_{i,2}v_2 + A^1_{i,1}v_1 - 1 = 0 \ , \quad i = N \end{aligned} \tag{۱۲}$$

$$bc2:\ A^1_{i,5}v_5 + A^1_{i,4}v_4 + A^1_{i,3}v_3 + A^1_{i,2}v_2 + A^1_{i,1}v_1 - u_i - 2 = 0 \ , \quad i = N \tag{۱۳}$$

در آخر نیز با اعمال شرایط مرزی در روابط $eq1$ و $eq2$ و برای مقادیر مختلف i تعداد هشت معادله جبری حاصل می‌شود که به‌راحتی قابل حل می‌باشند. نتایج حاصل از حل معادلات جبری در قالب شکل‌های (۴۳) و (۴۴) و جدول‌های (۴۱) و (۴۲) با نتایج به‌دست آمده از روش تحلیلی، مقایسه می‌شوند.



شکل(۱) بررسی دقت حل روش DQ برای تعداد نقاط شبکه مختلف با حل تحلیلی در دستگاه معادلات (۴-۲۲) برای $u(x)$



شکل (۲) بررسی دقت حل روش DQ برای تعداد نقاط شبکه مختلف با حل تحلیلی در دستگاه معادلات (۴-۲۲) برای $v(x)$

جدول (۱) نتایج به‌دست آمده برای دستگاه معادلات (۴-۲۲) به دو روش دقیق و عددی برای $u(x)$

x	exact	DQ		
		$N=3$	$N=5$	$N=8$
0	0	0	0	0
0.0495	-0.0989	-	-	-0.0989
0.1464	-0.2814	-	-0.2814	-
0.1882	-0.3552	-	-	-0.3552
0.3887	-0.6645	-	-	-0.6645
0.5	-0.8017	-0.7843	-0.8018	-
0.6112	-0.9123	-	-	-0.9123
0.8117	-1.0398	-	-	-1.0398
0.8535	-1.0543	-	-1.0545	-
0.9504	-1.0713	-	-	-1.0713
1	-1.0709	-1.0343	-1.0711	-1.0709

جدول (۲) نتایج به‌دست آمده برای دستگاه معادلات (۴-۲۲) به دو روش دقیق و عددی برای $v(x)$

x	exact	DQ		
		$N=3$	$N=5$	$N=8$
0	0	0	0	0
0.0495	0.0456	-	-	0.0456
0.1464	0.1388	-	0.1388	-
0.1882	0.1804	-	-	0.1804
0.3887	0.3868	-	-	0.3868
0.5	0.5037	0.5038	0.5038	-
0.6112	0.6201	-	-	0.6201
0.8117	0.8247	-	-	0.8247
0.8535	0.8660	-	0.8661	-
0.9504	0.9595	-	-	0.9595
1	1.0059	0.9754	1.0061	1.0059

باید دقت داشت که مقادیر x_i با توجه به توزیع غیریکنواخت نقاط دقت، برای N های مختلف، متفاوت است؛ یعنی x_3 برای $N=5$ با x_3 برای $N=8$ متفاوت است.

با توجه به مقادیر به‌دست آمده با روش عددی DQ و مقایسه نتایج با حل تحلیلی، دقت بالای حل به روش DQ همزمان با بیشتر شدن تعداد نقاط شبکه مشخص می‌گردد که یکی از دقیق‌ترین و کاربردی‌ترین روش‌های حل عددی می‌باشد.

Abstract

In this thesis, the asymmetric buckling analysis of homogeneous and isotropic circular/annular plates under radial load has been performed with the first-order shear deformation theory. The buckling load has been presented for different combinations of free, clamp and simply supported boundary conditions at the plate outer edges and different aspect ratio. The equilibrium equations have been extracted using the principle of virtual work, which include five coupled non-homogeneous and nonlinear partial differential equations. The stability equations have been obtained by the adjacent equilibrium criterion, which include five coupled homogeneous linear partial differential equations with variable coefficients. The equilibrium equations have been solved analytically and the stability equations have been solved by the numerical methods. In the analytical solution, the perturbation theory has been used. In numerical solution of stability, the quadrature differential method has been used to find the eigenvalue of the system of coupled linear equations with variable coefficients. The effect of geometrical parameters on the buckling load has been investigated too. The results of the other references in special cases and numerical solution by using the finite element have been used to validate the results.

KEYWORDS: Circular/Annular Plate- Asymmetric Buckling- Differential Quadrature- First Order Shear Deformation Theory- Perturbation Theory- Principle of Virtual Work- Adjacent Equilibrium Criterion

Shahrood University of Technology

Faculty of Mechanical and Mechatronics Engineering

M.Sc. Thesis in Applied Mechanics Engineering

Asymmetric Buckling of Circular Plates Subjected to Radial Load Using First-Order Shear Deformation Theory

Adel Mohammad Qolipour

Supervisor:

Dr. Hamidreza Eipakchi

January 2020