

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک

پایان نامه کارشناسی ارشد مهندسی هوا فضا - سازه های هوایی

تحلیل رزونانس ثانویه مخروط ناقص با تقویت مشبک تحت تحریک خارجی

نگارنده: نازنین فاطمه اسدی زاده

اساتید راهنما:

دکتر امیر جلالی

دکتر سید مهدی حسینی فراش

بهمن ۱۳۹۸

شماره: ۳/۲۸۸/۱۶۸
تاریخ: ۹۸/۱۲/۱۷

باسمه تعالی



فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم **نازنین فاطمه اسدی زاده** با شماره دانشجویی ۹۶۰۲۳۸۴ رشته **مهندسی هوا- فضا گرایش سازه های هوایی** تحت عنوان **تحلیل رزونانس ثانویه مخروط ناقص با تقویت مشبک تحت تحریک خارجی** که در تاریخ ۹۸/۱۱/۰۷ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

<input type="checkbox"/> الف) درجه عالی: نمره ۱۹-۲۰	<input type="checkbox"/> ب) درجه خیلی خوب: نمره ۱۸-۱۸/۹۹
<input checked="" type="checkbox"/> ج) درجه خوب: نمره ۱۷-۱۷/۹۹	<input type="checkbox"/> د) درجه متوسط: نمره ۱۴-۱۵/۹۹
<input type="checkbox"/> ه) کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد	
نوع تحقیق: <input checked="" type="checkbox"/> نظری <input type="checkbox"/> عملی	

عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنمای اول	دکتر امیر جلالی	استادیار	غایب
۲- استاد راهنمای دوم	دکتر سید مهدی حسینی فراش	استادیار	
۳- استاد مشاور	-----	-----	-----
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر مهدی حیدری	استادیار	
۵- استاد ممتحن اول	دکتر حبیب احمدی	دانشیار	
۶- استاد ممتحن دوم	دکتر اردشیر گرمی محمدی	دانشیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده:
تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:
۹۸/۱۲/۱۴

تقدیم

خدای را بسی شاکرم که از روی کرم پدر و مادری فداکار نصییم ساخته تا در سایه‌ی درخت پر بار وجودشان بیاسایم و از ریشه‌ی آنها شاخ و برگ گیرم و در سایه‌ی وجودشان در راه کسب علم و دانش تلاش نمایم.

والدینی که بودنشان تاج افتخاری است بر سرم و نامشان دلیلی است بر بودنم چرا که این دو وجود، پس از پروردگارم مایه‌ی هستی‌ام بوده‌اند، دستم را گرفته‌اند و راه رفتن را در این وادی زندگی پر از فراز و نشیب به من آموختند.

حال این برگه‌ی سبزی ست تحفه‌ی درویش، تقدیم آنان.

تشکر و قدردانی

سپاس و ستایش خداوند یگانه را که مرا توان آن بخشید تا گامی کوچک و ناچیز در راه دانش بردارم.

از پدر و مادر عزیزم که مهربانی‌های آنان همواره توشه‌ام بوده است، سپاس فراوان دارم.

از اساتید با کمالات و شایسته، جناب آقای دکتر امیر جلالی که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و

فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ نمودند و زحمت راهنمایی این پایان‌نامه را بر عهده

گرفتند و همچنین استاد گرامی، جناب آقای دکتر سید مهدی حسینی فراش که زحمت راهنمایی این

پایان‌نامه را بر عهده داشتند و اینجانب را با دانش خود مورد لطف بی‌پایان قرار دادند، کمال تشکر و

قدردانی را دارم.

تعهد نامه

اینجانب **فاطمه اسدی زاده** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته **مهندسی هوافضا** دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه **تحلیل رزونانس ثانویه مخروط ناقص با تقویت مشبک تحت تحریک خارجی** تحت راهنمایی **دکتر امیر جلالی و دکتر سید مهدی حسینی فراش** متعهد می‌شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آن ها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ:

امضای دانشجو:

مالکیت نتایج و حق نشر

کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .

استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پژوهش پوسته‌ی مخروطی ناقصی با تقویت‌کننده‌های رینگی و طولی از جنسی متفاوت از پوسته که به صورت مشبک نسبت به هم قرار گرفته‌اند، مورد مطالعه قرار گرفته است. در این مخروط معادله‌ی غیرخطی، فرکانس غیرخطی و خطی، ارتعاشات غیرخطی آزاد و اجباری، رزونانس‌های اولیه، معادلات پاسخ فرکانسی، نانرزونانس‌ها و رزونانس‌های ثانویه (سوپرهارمونیک و ساب‌هارمونیک)، مورد بررسی قرار گرفته‌اند. معادلات حاکم بر پوسته، با استفاده از تئوری غیرخطی پوسته‌های نازک دابل-مشرتی-والسف، با استفاده از تابع تنش ایری به صورت دو معادله‌ی کوپل به دست آمده است. برای حل این دو معادله‌ی کوپل از روش گالرکین غیرخطی استفاده شده و پس از ساده‌سازی، معادله‌ی زمانی به دست آمده، از روش تئوری هموتوپی پرتوربیشن حل گردیده است. برای اطمینان از درست بودن روش حل، نتایج حاصل با نتایج موجود در مقالات دیگر مقایسه و صحه گذاری گردیده است و پس از اطمینان از روش حل، تأثیر پارامترهای مختلف که شامل تغییر تعداد تقویت‌کننده‌های طولی، تغییر تعداد تقویت‌کننده‌های رینگی، تغییر سطح مقطع‌های تقویت‌کننده‌ها، تغییر ضخامت پوسته و تغییر نسبت قاعده‌ی بزرگ به کوچک پوسته می‌باشد، مورد بررسی قرار گرفته است. در ادامه برای بررسی ارتعاشات اجباری، نیروی هارمونیک عرضی بر پوسته وارد شده و معادله‌ی غیرخطی استخراج گردیده است و رزونانس‌های اولیه و ثانویه‌ی مخروط بر اساس روش مقیاس‌های چندگانه به صورت پاسخ فرکانسی به دست آمده است و نمودارهای پاسخ فرکانسی برای رزونانس‌ها رسم و بررسی گردیده است. همچنین در هریک از پارامترها، سیستم از نظر سخت‌شوندگی و یا نرم‌شوندگی مورد بررسی قرار گرفته است. که در این میان افزایش تعداد تقویت‌کننده‌های طولی سبب افزایش سخت‌شوندگی و افزایش تعداد تقویت‌کننده‌های رینگی و افزایش ضخامت پوسته سبب کاهش سخت‌شوندگی سیستم شده است و همچنین تغییر نسبت قاعده‌ی بزرگ به کوچک پوسته تا میزان مشخصی مطلوب و موجب سخت‌شوندگی سیستم گردیده است.

کلمات کلیدی: دابل-مشرتی-والسف، پوسته‌ی مخروطی ناقص، ارتعاشات غیرخطی، رزونانس اولیه،

رزونانس ثانویه، سوپرهارمونیک، ساب‌هارمونیک

فهرست مطالب

فصل اول :	۱
مبانی تئوری و مروری بر تحقیقات انجام شده	۱
۱-۱ مقدمه	۲
۲-۱ سیستم‌های غیرخطی	۴
۳-۱ مروری بر تحقیقات انجام شده	۶
۴-۱ اهداف انجام پایان‌نامه	۱۵
۵-۱ نوآوری پایان‌نامه	۱۶
۶-۱ مروری مختصر بر فصل‌های پایان‌نامه	۱۶
فصل دوم :	۱۹
استخراج معادلات حاکم بر مسئله	۱۹
۱-۲ تعریف مسئله	۲۰
۱-۲ فرضیات حاکم بر مسئله	۲۲
۲-۲ روابط سینماتیکی ، نیروها و گشتاورهای پوسته‌ی مخروطی	۲۳
۲-۳ (۱) محاسبه نیروها و گشتاورهای پوسته‌ی مخروطی ناقص	۲۴
۲-۴ نیروها و گشتاورهای معادل پوسته‌ی مخروطی ناقص تقویت شده	۲۷
۲-۵ انرژی جنبشی و پتانسیل پوسته‌ی مخروطی تقویت شده	۲۷
۲-۶ معادله‌ی حرکت حاکم بر پوسته‌ی مخروطی ناقص تقویت شده	۲۹
۲-۷ شرایط مرزی	۲۹
۲-۸ انتخاب روش حل معادله‌ی حاکم	۳۰
۲-۹ تعریف تابع تنش ابری و بازنویسی روابط نیروها و گشتاورها	۳۰
۲-۱۰ بازنویسی معادله‌ی حرکت	۳۲
۲-۱۱ استخراج معادله‌ی سازگاری	۳۳
۲-۱۲ (۱) طرف راست معادله‌ی سازگاری	۳۳
۲-۱۲ (۲) طرف چپ معادله‌ی سازگاری	۳۴
۲-۱۲ (۳) شکل نهایی معادله‌ی سازگاری	۳۵
فصل سوم :	۳۷
حل معادله‌ی حرکت و بررسی ارتعاشات آزاد پوسته	۳۷
۱-۳ مقدمه	۳۸
۲-۳ حل معادلات حاکم بر مسئله	۳۸
۳-۳ بررسی ارتعاشات آزاد پوسته	۳۹

۴۱	حل معادله‌ی غیرخطی حاکم بر پوسته ----- (۱-۳-۳)
۴۲	محاسبه‌ی فرکانس‌های طبیعی خطی و غیرخطی پوسته ----- (۲-۳-۳)
۴۵	فصل چهارم : -----
۴۵	بررسی نتایج ارتعاشات آزاد پوسته -----
۴۶	۱-۴ مقدمه -----
۴۶	۲-۴ اعتبار سنجی روش حل -----
۴۸	۳-۴ بررسی نمودار فرکانس طبیعی خطی پوسته‌ی مخروطی تقویت شده -----
۵۲	۴-۴ بررسی تأثیر پارامترهای مختلف بر پوسته -----
۵۲	۱-۴-۴ بررسی تأثیر تعداد تقویت‌کننده‌های طولی -----
۵۴	۲-۴-۴ بررسی تأثیر تعداد تقویت‌کننده‌های رینگ‌ی -----
۵۵	۳-۴-۴ بررسی تأثیر تغییر سطح مقطع‌های تقویت‌کننده‌ها -----
۵۷	۴-۴-۴ بررسی تأثیر تغییر ضخامت پوسته -----
۵۹	۵-۴-۴ بررسی تأثیر تغییر نسبت قاعده‌ی بزرگ به کوچک پوسته -----
۶۳	فصل پنجم : -----
۶۳	تحلیل ارتعاشات اجباری و بررسی رزونانس اولیه -----
۶۴	۱-۵ مقدمه -----
۶۴	۲-۵ استخراج معادله‌ی حرکت حاکم بر اساس ارتعاشات اجباری -----
۶۵	۳-۵ بررسی رزونانس اولیه -----
۶۸	۱-۳-۵ نمودار معادله‌ی پاسخ فرکانسی برای رزونانس اولیه -----
۷۰	۴-۵ بررسی تأثیر پارامترهای مختلف بر پوسته در حالت رزونانس اولیه -----
۷۰	۱-۴-۵ بررسی تأثیر تعداد تقویت‌کننده‌های رینگ‌ی در حالت رزونانس اولیه -----
۷۱	۲-۴-۵ بررسی تأثیر تغییر سطح مقطع‌های تقویت‌کننده‌ها در حالت رزونانس اولیه -----
۷۳	۳-۴-۵ بررسی تأثیر تغییر ضخامت پوسته در حالت رزونانس اولیه -----
۷۵	۴-۴-۵ بررسی تأثیر تغییر نسبت قاعده‌ی بزرگ به کوچک پوسته در حالت رزونانس اولیه -----
۷۹	فصل ششم : -----
۷۹	بررسی نانرزونانس و رزونانس‌های ثانویه -----
۸۰	۱-۶ مقدمه -----
۸۰	۲-۶ بررسی نانرزونانس -----
۸۱	۳-۶ بررسی رزونانس سوپرهارمونیک -----
۸۲	۱-۳-۶ نمودار معادله‌ی پاسخ فرکانسی برای رزونانس سوپرهارمونیک -----
۸۴	۴-۶ بررسی تأثیر پارامترهای مختلف بر پوسته در حالت سوپرهارمونیک -----

۸۴	بررسی تأثیر تعداد تقویت‌کننده‌های رینگی در حالت سوپرهارمونیک
۸۵	بررسی تأثیر تغییر سطح مقطع‌های تقویت‌کننده‌ها در حالت سوپرهارمونیک
۸۷	بررسی تأثیر تغییر ضخامت پوسته در حالت سوپرهارمونیک
۸۹	بررسی تأثیر تغییر نسبت قاعده‌ی بزرگ به کوچک پوسته در حالت سوپرهارمونیک
۹۱	بررسی رزونانس ساب‌هارمونیک
۹۳	نمودار معادله‌ی پاسخ فرکانسی برای رزونانس ساب‌هارمونیک
۹۴	بررسی تأثیر پارامترهای مختلف بر پوسته در حالت ساب‌هارمونیک
۹۴	بررسی تأثیر تعداد تقویت‌کننده‌های رینگی در حالت ساب‌هارمونیک
۹۵	بررسی تأثیر تغییر سطح مقطع‌های تقویت‌کننده‌ها در حالت ساب‌هارمونیک
۹۸	بررسی تأثیر تغییر ضخامت پوسته در حالت ساب‌هارمونیک
۱۰۰	بررسی تأثیر تغییر نسبت قاعده‌ی بزرگ به کوچک پوسته در حالت ساب‌هارمونیک
۱۰۴	فصل هفتم :
۱۰۴	جمع بندی و پیشنهادها
۱۰۵	۱-۷ مقدمه
۱۰۶	۲-۷ نتیجه گیری
۱۰۷	۳-۷ پیشنهادها
۱۰۸	پیوست ها
۱۱۶	مراجع و منابع

فهرست اشکال

- شکل ۱-۱: منحنی تنش- کرنش الاستیک غیر خطی [۱] ----- ۵
- شکل ۱-۲: تصویری از پوسته‌ی مورد مطالعه (پوسته مخروطی با تقویت‌کننده‌های طولی و رینگی) --- ۱۸
- شکل ۲-۱: نمای شماتیک سازه مسئله [۶۸]----- ۲۰
- شکل ۲-۲: نمایش جزئیات سازه [۶۹]----- ۲۱
- شکل ۴-۱: مقایسه فرکانس طبیعی خطی پوسته شماره ۱ با نتایج موجود ----- ۵۰
- شکل ۴-۲: مقایسه فرکانس طبیعی خطی پوسته شماره ۲ با نتایج موجود ----- ۵۰
- شکل ۴-۳: مقایسه فرکانس طبیعی خطی پوسته شماره ۳ با نتایج موجود----- ۵۱
- شکل ۴-۴: تغییرات $\omega_{nl\omega l}$ به دامنه بی بعد A به ازای تعداد تقویت‌کننده‌های طولی متفاوت----- ۵۳
- شکل ۴-۵: تغییرات $\omega_{nl\omega l}$ به دامنه بی بعد A برای پوسته‌ی شماره ۲ به ازای تعداد تقویت‌کننده‌های رینگی متفاوت ----- ۵۴
- شکل ۴-۶: تغییرات $\omega_{nl\omega l}$ به دامنه بی بعد A به ازای تغییر سطح مقطع‌های تقویت‌کننده‌ها برای پوسته ۱----- ۵۵
- شکل ۴-۷: تغییرات $\omega_{nl\omega l}$ به دامنه بی بعد A به ازای تغییر سطح مقطع‌های تقویت‌کننده‌ها برای پوسته ۲ ----- ۵۶
- شکل ۴-۸: تغییرات $\omega_{nl\omega l}$ به دامنه بی بعد A به ازای تغییر سطح مقطع‌های تقویت‌کننده‌ها برای پوسته ۳ ----- ۵۶
- شکل ۴-۹: تغییرات $\omega_{nl\omega l}$ به دامنه بی بعد A به ازای ضخامت‌های مختلف برای پوسته ۱----- ۵۷
- شکل ۴-۱۰: تغییرات $\omega_{nl\omega l}$ به دامنه بی بعد A به ازای ضخامت‌های مختلف برای پوسته ۲ ----- ۵۸
- شکل ۴-۱۱: تغییرات $\omega_{nl\omega l}$ به دامنه بی بعد A به ازای ضخامت‌های مختلف برای پوسته ۳ ----- ۵۸
- شکل ۴-۱۲: تغییرات $\omega_{nl\omega l}$ به دامنه بی بعد A به ازای $R2R1$ های مختلف برای پوسته ۱----- ۵۹
- شکل ۴-۱۳: تغییرات $\omega_{nl\omega l}$ به دامنه بی بعد A به ازای $R2R1$ های مختلف برای پوسته ۲ ----- ۶۰
- شکل ۴-۱۴: تغییرات $\omega_{nl\omega l}$ به دامنه بی بعد A به ازای $R2R1$ های مختلف برای پوسته ۳ ----- ۶۰
- شکل ۵-۱: نمودار پاسخ فرکانسی برای سه پوسته به ازای تعداد تقویت‌کننده‌های طولی متفاوت در رزونانس اولیه ----- ۶۹
- شکل ۵-۲: نمودار پاسخ فرکانسی برای پوسته ۲، به ازای تعداد تقویت‌کننده‌های رینگی متفاوت در رزونانس اولیه ----- ۷۰
- شکل ۵-۳: نمودار پاسخ فرکانسی به ازای سطح مقطع‌های متفاوت تقویت‌کننده‌ها برای پوسته ۱ در رزونانس اولیه ----- ۷۲

- شکل ۵-۴: نمودار پاسخ فرکانسی به ازای سطح مقطع‌های متفاوت تقویت‌کننده‌ها برای پوسته ۲ در رزونانس اولیه ----- ۷۲
- شکل ۵-۵: نمودار پاسخ فرکانسی به ازای سطح مقطع‌های متفاوت تقویت‌کننده‌ها برای پوسته ۳ در رزونانس اولیه ----- ۷۳
- شکل ۵-۶: نمودار پاسخ فرکانسی به ازای ضخامت‌های مختلف برای پوسته ۱ در رزونانس اولیه ----- ۷۴
- شکل ۵-۷: نمودار پاسخ فرکانسی به ازای ضخامت‌های مختلف برای پوسته ۲ در رزونانس اولیه ----- ۷۴
- شکل ۵-۸: نمودار پاسخ فرکانسی به ازای ضخامت‌های مختلف برای پوسته ۳ در رزونانس اولیه ----- ۷۵
- شکل ۵-۹: نمودار پاسخ فرکانسی به ازای $R2R1$ های متفاوت برای پوسته ۱ در رزونانس اولیه ----- ۷۶
- شکل ۵-۱۰: نمودار پاسخ فرکانسی به ازای $R2R1$ های متفاوت برای پوسته ۲ در رزونانس اولیه ----- ۷۶
- شکل ۵-۱۱: نمودار پاسخ فرکانسی به ازای $R2R1$ های متفاوت برای پوسته ۳ در رزونانس اولیه ----- ۷۷
- شکل ۶-۱: نمودار پاسخ فرکانسی برای سه پوسته به ازای تعداد تقویت‌کننده‌های طولی متفاوت در سوپرهارمونیک ----- ۸۳
- شکل ۶-۲: نمودار پاسخ فرکانسی برای پوسته شماره ۲، به ازای تعداد تقویت‌کننده‌های رینگی متفاوت در سوپرهارمونیک ----- ۸۴
- شکل ۶-۳: نمودار پاسخ فرکانسی به ازای سطح مقطع‌های متفاوت تقویت‌کننده‌ها برای پوسته ۱ در سوپرهارمونیک ----- ۸۵
- شکل ۶-۴: نمودار پاسخ فرکانسی به ازای سطح مقطع‌های متفاوت تقویت‌کننده‌ها برای پوسته ۲ در سوپرهارمونیک ----- ۸۶
- شکل ۶-۵: نمودار پاسخ فرکانسی به ازای سطح مقطع‌های متفاوت تقویت‌کننده‌ها برای پوسته ۳ در سوپرهارمونیک ----- ۸۶
- شکل ۶-۶: نمودار پاسخ فرکانسی به ازای ضخامت‌های مختلف برای پوسته ۱ در سوپرهارمونیک ----- ۸۷
- شکل ۶-۷: نمودار پاسخ فرکانسی به ازای ضخامت‌های مختلف برای پوسته ۲ در سوپرهارمونیک ----- ۸۸
- شکل ۶-۸: نمودار پاسخ فرکانسی به ازای ضخامت‌های مختلف برای پوسته ۳ در سوپرهارمونیک ----- ۸۸
- شکل ۶-۹: نمودار پاسخ فرکانسی به ازای $R2R1$ های متفاوت برای پوسته ۱ در سوپرهارمونیک ----- ۸۹
- شکل ۶-۱۰: نمودار پاسخ فرکانسی به ازای $R2R1$ های متفاوت برای پوسته ۲ در سوپرهارمونیک ----- ۹۰
- شکل ۶-۱۱: نمودار پاسخ فرکانسی به ازای $R2R1$ های متفاوت برای پوسته ۳ در سوپرهارمونیک ----- ۹۰
- شکل ۶-۱۲: نمودار پاسخ فرکانسی برای سه پوسته به ازای تعداد تقویت‌کننده‌های طولی متفاوت در سابهارمونیک ----- ۹۳
- شکل ۶-۱۳: نمودار پاسخ فرکانسی برای پوسته شماره ۲، به ازای تعداد تقویت‌کننده‌های رینگی متفاوت در سوپرهارمونیک ----- ۹۵

- شکل ۶-۱۴: نمودار پاسخ فرکانسی به ازای سطح مقطع‌های متفاوت تقویت‌کننده‌های برای پوسته ۱ در
سابهارمونیک ----- ۹۶
- شکل ۶-۱۵: نمودار پاسخ فرکانسی به ازای سطح مقطع‌های متفاوت تقویت‌کننده‌های برای پوسته ۲ در
سابهارمونیک ----- ۹۷
- شکل ۶-۱۶: نمودار پاسخ فرکانسی به ازای سطح مقطع‌های متفاوت تقویت‌کننده‌های برای پوسته ۳ در
سابهارمونیک ----- ۹۷
- شکل ۶-۱۷: نمودار پاسخ فرکانسی به ازای ضخامت‌های مختلف برای پوسته ۱ در سابهارمونیک ---- ۹۸
- شکل ۶-۱۸: نمودار پاسخ فرکانسی به ازای ضخامت‌های مختلف برای پوسته ۲ در سابهارمونیک ---- ۹۹
- شکل ۶-۱۹: نمودار پاسخ فرکانسی به ازای ضخامت‌های مختلف برای پوسته ۳ در سابهارمونیک ---- ۹۹
- شکل ۶-۲۰: نمودار پاسخ فرکانسی به ازای $R2R1$ های متفاوت برای پوسته ۱ در سابهارمونیک ----- ۱۰۰
- شکل ۶-۲۱: نمودار پاسخ فرکانسی به ازای $R2R1$ های متفاوت برای پوسته ۲ در سابهارمونیک ---- ۱۰۱
- شکل ۶-۲۲: نمودار پاسخ فرکانسی به ازای $R2R1$ های متفاوت برای پوسته ۳ در سابهارمونیک ---- ۱۰۱

فهرست جداول

- جدول ۴-۱: مشخصات هندسی و خصوصیات مکانیکی پوسته‌ی مخروطی ----- ۴۶
- جدول ۴-۲: مقایسه‌ی فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد پوسته‌ی مخروطی با دیگر مقالات ----- ۴۷
- جدول ۴-۳: مشخصات هندسی و جنس پوسته‌های مورد بررسی ----- ۴۹

علائم و اختصارات

h	ضخامت پوسته	G	مدول برشی
h_r	ارتفاع تقویت کننده رینگی	ν	نسبت پواسون
h_{st}	ارتفاع تقویت کننده طولی	I	ممان اینرسی سطح مقطع
α	زاویه رأس مخروط	J	ممان اینرسی قطبی سطح مقطع
R_1	شعاع قاعده کوچک		فاصله مرکز تقویت کننده‌ها از صفحه میانی
R_2	شعاع قاعده بزرگ	C	پوسته
	فاصله هر نقطه از صفحه میانی پوسته از		فاصله شعاعی هر نقطه از صفحه میانی
s	رأس مخروط	Z	پوسته
s_1	فاصله قاعده کوچک از رأس مخروط	sh	اندیس بیانگر پوسته
s_2	فاصله قاعده بزرگ از رأس مخروط	r	اندیس بیانگر تقویت کننده رینگی
w	مؤلفه جابجایی شعاعی	st	اندیس بیانگر تقویت کننده طولی
v	مؤلفه جابجایی محیطی	s	اندیس بیانگر جهت طولی
u	مؤلفه جابجایی طولی	θ	اندیس بیانگر جهت محیطی
A	مساحت سطح مقطع	$s\theta$	اندیس بیانگر جهت برشی
E	مدول یانگ		

فصل اول :

مبانی تئوری و مروری بر تحقیقات انجام شده

۱-۱ مقدمه

در سازه‌های هوایی و صنعت هوافضا^۱، طراحی سازه از اهمیت فوق‌العاده‌ای برخوردار است. این مسئله طراحی سازه‌هایی با مقاومت بالا و وزن کم را با اهمیت کرده است. استفاده از پوسته‌های نازک تقویت شده در بخش‌های مختلف سازه‌های هوافضایی به دلیل وزن پایین و مقاومت بالا در مقابل بارهای محوری بسیار متداول است. در میان پوسته‌ها، پوسته‌های مخروطی ناقص^۲ از جمله پرکاربردترین پوسته‌ها در صنعت می‌باشند و کاربرد گسترده‌ای در صنایع مختلف از قبیل: هوافضا، دریایی، عمران، نظامی و ... دارند؛ برای مثال در ساخت دماغه‌ی موشک‌های مافوق صوت^۳، زیردریایی‌ها^۴، کوره‌های دوار^۵، مخازن نگهداری، از پوسته‌های مخروطی ناقص استفاده می‌شود.

در تمامی این موارد سازه در معرض بارهای استاتیکی و دینامیکی گوناگون قرار دارد و به همین دلیل مطالعه‌ی پاسخ دینامیکی و بررسی ارتعاشات این پوسته‌ها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است و از این رو مطالعه‌ی رفتار سیستم و بررسی ارتعاشات و شناسایی فرکانس‌های طبیعی^۶ سازه می‌تواند باعث جلوگیری از خسارات سنگین از جمله شکست و ناپایداری در سازه‌های مختلف شود.

مطالعه‌ی رفتار سیستم‌ها می‌تواند به صورت خطی^۷ و غیرخطی^۸ صورت گیرد، که بررسی مدل‌های خطی به تنهایی برای درک رفتار سیستم کافی نیست. زمانی که دامنه‌ی نوسانات بزرگ باشد و فرکانس‌های طبیعی افزایش یافته و وابسته به دامنه‌هایشان باشند، پاسخ‌های خطی نادرست هستند. از این رو مدل‌های خطی می‌توانند گمراه کننده باشند؛ زیرا ممکن است یک حل خطی پیش‌بینی کند که سیستم پایدار است در حالی که در واقعیت ناپایدار است.

¹ Aerospace industry

² Truncated conical Shells

³ Supersonic aircraft

⁴ Submarine

⁵ Dora furnaces

⁶ Natural frequency

⁷ Linear

⁸ Nonlinear

از طرفی پدیده‌های فیزیکی جالبی در سازه‌های غیرخطی اتفاق می‌افتد که به وسیله‌ی مدل‌های خطی نمی‌توان آن‌ها را توضیح داد؛ از جمله این پدیده‌ها می‌توان به: پرش^۱، اشباع^۲، تشدیدهای ساب‌هارمونیک^۳، سوپ‌هارمونیک^۴ و ترکیبی^۵، نوسانات خود تحریک^۶ و آشوب^۷، اشاره کرد. در سیستم‌های پیوسته، جملات غیرخطی باعث کوپل شدن مدهای نرمال خطی می‌گردند و این پدیده منجر به انتقال انرژی بین مدها می‌شود. آزمایش‌ها نشان می‌دهند که این پدیده می‌تواند به شدت خطرناک باشد؛ زیرا دامنه‌ی مدهای فرکانس پایین در مقایسه با مدهای فرکانس بالا بسیار بزرگتر است. در واقعیت هیچ سیستم فیزیکی کاملاً خطی وجود ندارد و مدل‌های خطی سیستم‌های فیزیکی دارای محدودیت‌هایی هستند. بطور کلی مدل‌های خطی برای محدوده‌های بسیار کوچک کاربرد دارد. به طور مثال زمانی که دامنه‌ی ارتعاشات بسیار کوچک است. بنابراین برای شناخت و درک دقیق‌تر رفتار دینامیکی سازه تحت شرایط بارگذاری عمومی ضروری است که پارامترهای غیرخطی در مدل‌سازی سیستم در نظر گرفته شده و بررسی شوند [۱].

از طرفی دیگر در اغلب کاربردهای پوسته بخصوص ساخت تجهیزات نظامی و فضایی، کاهش وزن سازه از اهمیت بسیاری برخوردار است. بدین منظور در ساخت این تجهیزات، اغلب از پوسته‌های بسیار نازک و سبک کامپوزیتی^۸ استفاده می‌گردد. پوسته‌های کامپوزیتی، به عنوان یکی از پرکاربردترین نمونه‌های سازه‌های مشبک، به علت دارا بودن فوایدی همچون استحکام ویژه‌ی بالا، سبکی و خواص مقاومت به خوردگی، امروزه بطور وسیعی در صنایع هواپیماسازی، صنایع موشکی و دریایی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

¹ Jump

² Saturation

³ Subharmonic resonance

⁴ Superharmonic resonance

⁵ Combination

⁶ Self-excited oscillation

⁷ Chaos

⁸ Composite

پوسته‌های مخروطی تقویت شده با تقویت‌کننده‌های با جنس متفاوت از پوسته، نوع خاصی از سازه‌های مکانیکی-کامپوزیتی هستند که برای حداکثر کردن مقاومت سازه به وزن آن طراحی گردیده‌اند، که به دلیل تفاوت میان جنس پوسته و تقویت‌کننده‌ها به آن‌ها کاپوزیت دوجنسه^۱ گفته می‌شود. در سال‌های اخیر پوسته‌های مخروطی با رینگ‌ها و تقویت‌کننده‌های مارپیچ^۲ ساخته شده‌اند که به آن‌ها پوسته‌های مخروطی-کامپوزیت با تقویت مشبک پیشرفته^۳ می‌گویند.

۱-۲ سیستم‌های غیرخطی^۴

سیستم‌های غیرخطی (شکل ۱-۱)، سیستم‌هایی هستند که اصل جمع آثار در مورد آن‌ها صادق نیست. در طبیعت سیستم‌های غیرخطی فراوانی وجود دارد. در حقیقت سیستم‌های غیرخطی نه تنها استثناء نیستند، بلکه قانون و قاعده‌ی طبیعت هستند. از نظر ریاضی، یک سیستم غیرخطی است، اگر ضرب متغیرهای وابسته و مشتقات آن‌ها در معادلات حرکت، شرایط مرزی و یا روابط سازگاری وجود داشته باشد. علاوه بر این، وجود هرگونه پرش و یا ناپیوستگی در سیستم می‌تواند سبب غیرخطی شدن معادلات گردد. منشأ رفتار غیرخطی در سیستم می‌تواند جنس ماده، هندسه، اینرسی، نیروهای حجمی، استهلاک^۵، شرایط مرزی و یا تحریک خارجی باشد، که هر یک در ادامه توضیح داده شده‌اند.

- جنس ماده: این نوع غیرخطی زمانی که رابطه‌ی تنش- کرنش غیرخطی باشد، ایجاد می‌شود. لاستیک یک مثال کلاسیک این دسته است.
- هندسه: در سیستم‌هایی که تحت تغییر شکل‌ها و یا جابجایی‌های بزرگ قرار دارند، غیرخطی هندسی وجود دارد. این غیرخطی در انرژی پتانسیل سیستم ظاهر می‌شود. در سازه‌ها، تغییر شکل‌های بزرگ معمولاً منجر به روابط غیرخطی کرنش-جابجایی می‌شود.

¹ Biomaterial

² Helical

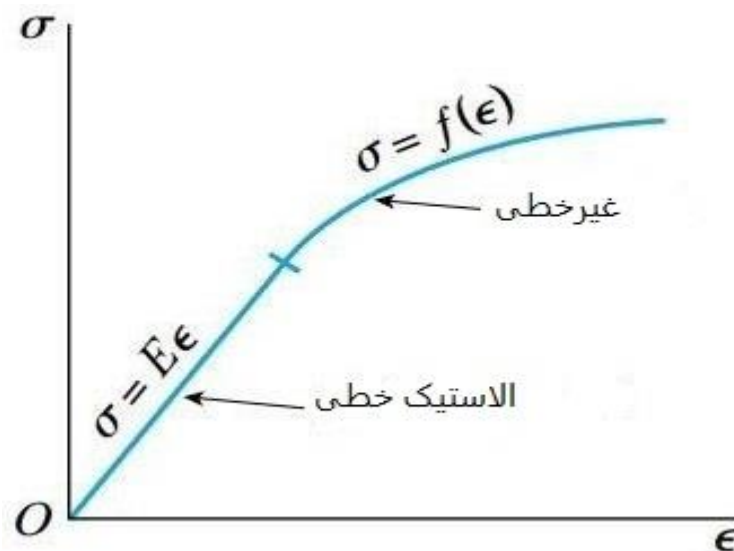
³ Advanced grid stiffened composite conical shells

⁴ Nonlinear

⁵ Damping

به عنوان مثال می‌توان به حرکت یک پاندول ساده با در نظر گرفتن زاویه‌های بزرگ و یا یک تیر یک سرگیردار با انحنای بزرگ اشاره نمود.

- اینرسی: غیرخطی اینرسی ناشی از جملات غیرخطی سرعت و شتاب در معادلات حرکت است. انرژی جنبشی سیستم منشأ ایجاد غیرخطی‌های اینرسی است. به عنوان مثال می‌توان به جملات شتاب کریولیس^۱ و مرکزگرا اشاره نمود. همچنین در معادلات توصیف حرکت یک پاندول الاستیک و یا حرکت عرضی یک تیر تحت کشش، غیرخطی‌های اینرسی وجود دارد.
- استهلاک: استهلاک اساساً یک پدیده‌ی غیرخطی است؛ زیرا نیروی استهلاک تابع غیرخطی از جابجایی و سرعت است. استهلاک ویسکوز^۲ خطی نوعی ایده‌آل سازی سیستم است. استهلاک خشک و استهلاک هیستریزیس^۳ نمونه‌هایی از استهلاک غیرخطی هستند.
- شرایط مرزی^۴ و تحریک خارجی: جملات غیرخطی ممکن است در استخراج معادلات دیفرانسیل، شرایط مرزی و یا هر دو ظاهر شوند.



شکل ۱-۱: منحنی تنش-کرنش الاستیک غیرخطی [۱]

¹ Coriolis

² Viscose damping

³ Hysteretic damping

⁴ Boundary conditions

در سال‌های اخیر، گسترش سریع تحقیقات فضایی سبب انجام تحقیقات گسترده در دینامیک و کنترل سازه‌های فضایی منعطف بزرگ مانند: کنترل کننده‌های خورشیدی، آنتن‌ها، رادارها، خرپاهای بزرگ، تلسکوپ‌های فضایی و ایستگاه‌های فضایی شده است، از این رو برای طراحی روند مناسب، برای کنترل ارتعاشات سازه‌ها با دامنه‌ی بزرگ، نیاز به درک رفتار غیرخطی دینامیکی و استاتیکی سیستم‌ها، شامل کوپلینگ مدال (انتقال انرژی میان مدهای سازه) و ناپایداری دینامیکی و استاتیکی است و این‌ها، نیازمند مدل‌سازی صحیح سیستم‌های غیرخطی می‌باشد. ایوان ایوانوسکی [۲]، نایفه و موک [۳] و مون [۴]، انواع غیرخطی‌ها را با جزئیات و بوسیله‌ی مثال‌های مختلف توضیح داده‌اند.

۱-۳ مروری بر تحقیقات انجام شده

در اواسط قرن ۱۸ میلادی برای اولین بار یک پوسته‌ی استوانه‌ای برای اهداف تجاری ساخته شد [۵]. از آن به بعد مسئله‌ی ارتعاشات پوسته‌های استوانه‌ای مورد توجه محققینی همچون لاول [۶] و رایلی^۲ [۷] قرار گرفت. لاول اولین فردی بود که تئوری کلاسیک پوسته‌های جدارنازک را ارائه کرد و لیسا [۸] بسیاری از فعالیت‌های انجام گرفته تا سال ۱۹۷۳ در زمینه پوسته‌های استوانه‌ای را در کتابی با عنوان "ارتعاشات پوسته‌ها"^۳ به صورت خلاصه آورده و تئوری‌های پوسته‌های مختلف را با هم مقایسه کرد. مارکوس^۴ [۹] هم در کتاب خود مقایسه جامعی بین تئوری‌های مختلف پوسته انجام داد. در حال حاضر روش‌های محاسباتی مختلفی برای تحلیل ارتعاشات پوسته‌های استوانه‌ای وجود دارد که از جمله آن‌ها می‌توان به روش ریتز، روش گسترش موج، روش گالرکین^۵، روش DQ ^۶ و روش المان محدود اشاره کرد. در ادامه برخی از تحقیقات انجام شده به صورت مختصر آورده شده است.

¹ Love

² Rayleigh

³ Vibration of shells

⁴ Markus

⁵ Galerkin method

⁶ Differential quadrature

فرسبرگ^۱ [۱۰] بر اساس معادلات فلوگه^۲ یک روش تحلیلی ارائه کرد و تأثیر انواع شرایط مرزی گیردار و ساده را روی مشخصات مدال پوسته استوانه‌ای بررسی کرد. چانگ^۳ [۱۱] نیز ارتعاشات پوسته‌ای استوانه‌ای در شرایط مرزی مختلف را بررسی کرد. مفخمی^۴ [۱۲] و همکاران با استفاده از تکنیک جداسازی متغیرها و بر اساس تئوری الاستیسیته سه بعدی یک حل نیمه تحلیلی عمومی ارائه کردند که بسیاری از انواع استوانه‌ها با طول محدود (شامل استوانه‌های توپر، استوانه‌های توخالی و پانل‌های انحنادار) با شرایط مرزی مختلف را شامل می‌شود.

الموسلی^۵ [۱۳] یک مطالعه‌ی مقایسه‌ای روی سه فرمول تقریبی صریح برای تخمین فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای انجام داد تا محدودیت‌های اعتبار هر فرمول را تعیین کند و همچنین محققین زیادی از رهیافت انتشار موج^۶ برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای استفاده کرده‌اند. ونگ و لای^۷ [۱۴] بر اساس معادلات لائو از رهیافت موج^۸ برای پیش‌بینی فرکانس‌های طبیعی پوسته‌ای استوانه‌ای با طول محدود و با شرایط مرزی مختلف استفاده کردند. ژنگ^۹ و همکاران [۱۵] با استفاده از رهیافت گسترش موج، مشخصات ارتعاشی پوسته‌ای استوانه‌ای جدارنازک را مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها فرکانس‌های یک پوسته با نسبت طول به قطر بالا را محاسبه کرده و نتایج خود را با نتایج المان محدود مقایسه کردند. ما^{۱۰} و همکاران [۱۶] در تحلیل ارتعاشات پوسته‌ای استوانه‌ای یک مدل مدال ارائه دادند و از ترکیب رهیافت گسترش موج و روش سری فوریه بهبود یافته استفاده کردند. آن‌ها برای به‌دست آوردن اعداد موج طولی به‌صورت تقریبی از تئوری تیر استفاده کردند.

¹ Forsberg

² Phlugge

³ Chung

⁴ Mofakhami

⁵ El-Mously

⁶ Wave propagation approach

⁷ Wang and Lai

⁸ Wave approach

⁹ Zhang

¹⁰ Ma

ژو^۱ و همکاران [۱۷] ارتعاشات پوسته‌ی استوانه‌ای با شرایط مرزی الاستیک را بررسی کردند. آن‌ها معادلات حرکت پوسته‌ی استوانه‌ای بر اساس تئوری پوسته‌های جدارنازک فلوگه را با استفاده از روش گسترش موج حل کردند و همچنین شرایط مرزی الاستیک را نیز مدل‌سازی کردند. ژوبن^۲ [۱۸] نیز ارتعاشات آزاد پوسته‌ی استوانه‌ای را با استفاده از رهیافت گسترش موج بررسی کرد. وی به منظور مقایسه، حل دقیق پوسته‌ی استوانه‌ای را نیز ارائه کرد و نشان داد که روش گسترش موج در مورد پوسته‌های استوانه‌ای بلند و با شرایط مرزی ساده دقت بالایی دارد.

از طرف دیگر، حل ارتعاشات پوسته‌های استوانه‌ای با روش ریتز هم مورد توجه محققین بوده است که به عنوان نمونه می‌توان به تحقیقات نعیم و شارما^۳ [۱۹] اشاره کرد. آن‌ها از توابع چند جمله‌ای ریتز برای مدل‌سازی مدهای محوری استفاده کرده و برای فرمول‌بندی مسئله مقدار ویژه از روش ریلی-ریتز استفاده کردند. همچنین مسینا و سولداتوس^۴ [۲۰] با استفاده از روش ریتز تأثیر شرایط مرزی روی مشخصات ارتعاشی پوسته استوانه‌ای را بررسی کردند. دای^۵ و همکاران [۲۱] ارتعاشات پوسته استوانه‌ای با شرایط مرزی الاستیک را مورد بررسی قرار داده و یک روش تحلیلی برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی چنین پوسته‌هایی ارائه دادند. آن‌ها در مطالعه خود از روش ریلی-ریتز^۶ استفاده کردند. حدادپور و همکاران [۲۲] نیز از روش گالرکین برای تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای با شرایط مرزی ساده استفاده کردند. لوی^۷ و همکاران [۲۳] ارتعاشات پوسته استوانه‌ها را با روش GDQ^۸ حل نموده و تأثیر شرایط مرزی مختلف را بررسی کردند.

¹ Zhou

² Xuebin

³ Naeem and sharma

⁴ Messina and soldatos

⁵ Dai

⁶ Rayleigh-Ritz

⁷ Loy

⁸ Generalized differential quadrature

تورنابن^۱ و همکاران [۲۴] نیز با استفاده از این روش رفتار دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای را به عنوان حالت خاصی از پوسته‌های مخروطی مورد مطالعه قرار داد. کرزاب^۲ [۲۵] یک عبارت جبری برای محاسبه مستقیم اعداد موج بر اساس معادلات حرکت فلوگه را مورد مطالعه قرار داد. الزهابی و کوالسکی^۳ [۵] انرژی‌های غشایی و خمشی در پوسته‌ی استوانه‌ای را مورد مطالعه قرار دادند و نشان دادند که نسبت انرژی کرنشی غشایی به انرژی کل در اعداد موج محیطی پایین، بالا است و با افزایش عدد موج محیطی این نسبت کاهش می‌یابد.

جین^۴ و همکاران [۲۶] در سال ۲۰۱۳ مطالعه‌ای روی ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیت با شرایط مرزی الاستیک انجام دادند. آن‌ها میدان جابجایی را به صورت سری فوریه کسینوسی همراه با توابع کمکی بیان کردند تا از همگرایی روش حل و سرعت بیشتر آن اطمینان حاصل شود و از روش ریلی-ریتز در فرآیند حل خود استفاده کردند. با این روش می‌توان شرایط مرزی مختلف شامل شرایط مرزی کلاسیک و الاستیک را مورد مطالعه قرار داد. چن^۵ و همکاران [۲۷] هم مطالعاتی روی پوسته استوانه‌ای با شرایط مرزی الاستیک غیر یکنواخت انجام دادند. آن‌ها حل دقیقی با استفاده از روش سری فوریه تغییر یافته انجام دادند که در آن میدان جابجایی را به صورت سری فوریه همراه با توابع کمکی بیان کردند. سانگ^۶ و همکاران [۲۸] هم پوسته‌ی استوانه‌ای کامپوزیت ساکن با شرایط مرزی الاستیک را با استفاده از روش ریلی-ریتز مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها پس از اعتبارسنجی به بررسی تأثیر پارامترهای مختلف از قبیل سختی‌های مرزی روی فرکانس‌های طبیعی پوسته پرداختند. علاوه بر پوسته‌های استوانه‌ای ساکن پوسته‌های استوانه‌ای دوار نیز مورد مطالعه قرار گرفته است. اولین مطالعات در زمینه پوسته دوار در سال ۱۸۹۰ توسط بریان^۷ [۲۹] گزارش شده است.

¹ Tornabene

² Karczab

³ Alzahabi and Kowalski

⁴ Jin

⁵ Chen

⁶ Song

⁷ Bryan

وی ارتعاشات پوسته استوانه‌ای را با استفاده از تحلیل رینگ دوار مورد مطالعه قرار داده و پدیده‌ی مدهای پیشرونده^۱ را کشف کرد. بعد از آن محققان زیادی به صورت پیوسته دانش پوسته‌های استوانه‌ای دوار را توسعه داده‌اند. دیتارانتو و لسن^۲ [۳۰] و اسرینیواسان و لاترباخ^۳ [۳۱] اثر نیروهای گریز از مرکز و کریولیس در پوسته‌ی استوانه‌ای با طول بی‌نهایت را در سال ۱۹۶۴ مورد مطالعه قرار داده و نشان دادند این نیروها تأثیر زیادی روی فرکانس‌های موج پیش‌سو^۴ و پس‌سو^۵ پوسته دارند. زوهر و ابودی^۶ [۳۲] و سایتو و اندو^۷ [۳۳] نیز همین مسئله را در پوسته‌های استوانه‌ای با طول محدود مطالعه کردند. اندو^۸ و همکاران [۳۴] در سال ۱۹۸۴ یک مطالعه آزمایشگاهی روی رینگ جدار نازک دوار انجام داده و نتایج آزمایشگاهی را از برخی جنبه‌های تئوری مورد مطالعه قرار دادند. پنزیس و کراس^۹ [۳۵] و پادوان^{۱۰} [۳۶] نیز ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای دوار تحت پیش‌تنش را مطالعه کردند، همچنین ملک‌زاده و حیدرپور [۳۷] ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای از جنس مواد متغیر تابعی FGM^{۱۱} تحت بارگذاری حرارتی را مطالعه کردند.

به عنوان کارهای جدیدتر در این زمینه میتوان به ونگ^{۱۲} و همکاران [۳۸ و ۳۹]، اشاره کرد که پاسخ دینامیکی غیرخطی پوسته استوانه‌ای دوار را با استفاده از روش انتگرال گیری عددی همراه با تحلیل تقریبی بررسی کردند. پوسته‌ای که آن‌ها بررسی کردند یک پوسته استوانه‌ای یکسر گیردار بود که تحت تحریک هارمونیک نزدیک به یکی از پایین‌ترین فرکانس‌های طبیعی‌اش قرار داشت.

¹ Traveling-modes phenomenon

² DiTaranto and Lessen

³ Srinivasan and Lauterbach

⁴ Forward

⁵ Backward

⁶ Zohar and Aboudi

⁷ Saito and Endo

⁸ Endo

⁹ Penzes and Kraus

¹⁰ Padovan

¹¹ Functionally graded material

¹² Wang

مطالعه‌ی جامع‌تر با در نظر گرفتن ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای یک سرگیردار توسط ليو و چو^۱ [۴۰] انجام شده است. آن‌ها بر اساس تئوری پوسته جدار نازک لاو معادلات ارتعاشی غیرخطی شامل آثار نیروهای کریولیس را استخراج کرده و سپس پاسخ دینامیکی پوسته را با استفاده از روش‌های گالرکین و اغتشاشات^۲ مطالعه کردند. انجی و لم^۳ [۴۱] نیز مطالعه‌ای روی ارتعاشات و سرعت بحرانی پوسته‌ی استوانه‌ای دوار تحت بارگذاری محوری انجام دادند. با پیشرفت علم کامپیوتر، روش‌های عددی نیز در تحلیل ارتعاشات پوسته‌های استوانه‌ای دوار گسترش یافت. هوا و لم^۴ [۴۲] با استفاده از روش GDQ تأثیر شرایط مرزی را روی مشخصات فرکانسی پوسته‌ی استوانه‌ای دوار مطالعه کردند. گو^۵ و همکاران [۴۳] نیز با استفاده از روش المان محدود پوسته‌ی استوانه‌ای دوار را بررسی کردند.

ليو^۶ و همکاران [۴۴] با استفاده از روش HRKP^۷ و سیوالک و گارسس^۸ [۴۵ و ۴۶]، با استفاده از روش DSC^۹ همین مسئله را بررسی کردند. سان^{۱۰} و همکاران [۴۷] یک مطالعه‌ی تحلیلی روی مشخصات ارتعاشی پوسته استوانه‌ای دوار با شرایط مرزی مختلف انجام داده و با استفاده از روش بسط سری فوریه پارامترهای فرکانس این پوسته را به‌صورت دقیق به‌دست آوردند. سان و همکاران در یک مطالعه دیگر [۴۸] پوسته استوانه‌ای دوار با شرایط مرزی الاستیک را با استفاده از معادلات پوسته سندرس بررسی کردند. آن‌ها در مطالعه خود از فنر برای شبیه‌سازی شرایط مرزی الاستیک استفاده کردند و با استفاده از روش ریلی-ریتز معادلات فرکانسی پوسته را به‌دست آوردند.

¹ Liu and Chu

² perturbation

³ Ng and Lam

⁴ Hua and Lam

⁵ Guo

⁶ Liew

⁷ Harmonic reproducing kernel particle

⁸ Civalek and Gürses

⁹ Discrete Singular Convolution

¹⁰ Sun

سانگ^۱ و همکاران [۴۹] در تحلیل پوسته‌ی استوانه‌ای دوار کامپوزیت با شرایط مرزی الاستیک از معادلات پوسته‌ی دائل و روش ریلی- ریتز استفاده کردند. هوانگ و سوئدل^۲ [۵۰] تأثیر نیروی کریولیس روی پاسخ پوسته‌ی استوانه‌ای دوار را بررسی کردند. همچنین هوانگ و سو^۳ [۵۱] با استفاده از تئوری لاو- تیموشنکو فرکانس‌های دو شاخگی پوسته‌ی استوانه‌ای دوار تحت بارگذاری هارمونیک را به دست آوردند. لیو^۴ و همکاران [۵۲] نیز یک مدل تحلیلی ارائه داده و پاسخ غیرخطی سیستم روتور را بررسی کردند. هان و چو^۵ [۵۳] هم تأثیر دوران پوسته را روی ناپایداری پارامتریک آن در پوسته‌ای با بارگذاری پریودیک در راستای محوری بررسی کردند.

همانطور که گفته شد بیشتر مطالعات انجام شده در زمینه‌ی ارتعاشات پوسته‌های استوانه‌ای می‌باشد و در مقایسه با پوسته‌های استوانه‌ای مطالعات صورت گرفته بر روی ارتعاشات پوسته‌های مخروطی بسیار اندک است. اما با توجه به کاربرد گسترده‌ی پوسته‌های مخروطی در صنعت، ارتعاشات آن‌ها بسیار حائز اهمیت می‌باشد. لازم به ذکر است که پوسته‌ی مخروطی را می‌توان حالت جامع‌تری نسبت به پوسته‌ی استوانه‌ای در نظر گرفت. به عبارتی پوسته‌ی استوانه‌ای حالتی خاص از پوسته‌ی مخروطی است که با صفر در نظر گرفتن زاویه‌ی رأس آن حاصل می‌شود. همچنین اگر زاویه نیم‌رأس مخروط 90 درجه در نظر گرفته شود، دیسک بوجود می‌آید. در بررسی مطالعات انجام شده در زمینه پوسته‌های مخروطی می‌توان آن‌ها را به دو دسته ساکن و دوار تقسیم کرد.

¹ Song

² Huang and Soedel

³ Huang and Hsu

⁴ Liu

⁵ Han and Chu

از جمله تحقیقات محدود انجام شده در زمینه‌ی پوسته‌های مخروطی می‌توان به تحقیقات ایریه^۱ و همکاران اشاره کرد که ارتعاشات پوسته‌ی مخروطی ساکن با ضخامت متغیر را با استفاده از روش ماتریس انتقال مورد مطالعه قرار دادند [۵۴]. آن‌ها با استفاده از این روش پوسته‌هایی که ضخامتشان به صورت خطی، سهموی و نمایی تغییر می‌کنند را مطالعه کرده و تأثیر پارامترهایی از قبیل زاویه رأس مخروط، طول مخروط و ضخامت را روی فرکانس‌های طبیعی پوسته بررسی کردند.

سنکاراناریانان^۲ و همکاران [۵۵] نیز ارتعاشات پوسته‌ی مخروطی کامپوزیت با ضخامت متغیر را براساس روش ریلی-ریتز مورد مطالعه قرار دادند. سیواداس و گانسان^۳ [۵۶] رفتار پوسته‌ی مخروطی یکسر گیردار ایزوتروپ دارای ضخامت متغیر را مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها در مطالعه‌ی خود از تئوری پوسته جدارنازک لاو و روش المان محدود استفاده کردند. آن‌ها در مقاله‌ی دیگری [۵۷] پوسته‌ی مخروطی کامپوزیت با ضخامت متغیر را با همان روش قبلی مورد مطالعه قرار داده و تأثیر پارامترهایی چون تعداد لایه‌های پوسته، زاویه رأس مخروط و نسبت طول به قطر را روی فرکانس‌های طبیعی پوسته مخروطی بررسی کردند. همچنین در سال ۱۹۹۳، تانگ^۴ [۵۸] در مقاله‌ی بسیار ارزشمندی به بررسی پوسته‌ی مخروطی کامپوزیت پرداخت. ارزش مقاله‌ی وی به نوع حل معادلات او برمی‌گردد. وی در حل معادلات پوسته از روش سری توانی استفاده کرد که بعد از آن مورد توجه محققین زیادی در تحلیل ارتعاشات انواع پوسته‌ها قرار گرفت. کنگ و لیسا^۵ [۵۹] هم برای تعیین فرکانس‌های طبیعی و شکل مدهای پوسته‌ی مخروطی با ضخامت متغیر، یک روش تحلیلی سه بعدی ارائه دادند. روش آن‌ها قابل اعمال به پوسته‌های جدار نازک، ضخیم و خیلی ضخیم است.

¹ Irie

² Sankaranarianan

³ Sivadas and Ganesan

⁴ Tong

⁵ Kang and Leissa

لیو^۱ و همکاران [۶۰] در تحلیل پوسته‌ی مخروطی جدار نازک از روش بدون مش Kp-Ritz استفاده کرده و تأثیر پارامترهایی از قبیل زاویه‌ی رأس و شرایط مرزی مختلف را روی فرکانس‌های طبیعی آن بررسی کردند.

سیوالک^۲ [۶۱ و ۶۲]، در تحلیل پوسته‌ی مخروطی کامپوزیت از روش^۳ DSC و تئوری‌های پوسته‌ی لای و تغییر شکل برشی استفاده کرد. سپس به عنوان حالت‌های خاص پوسته‌ی مخروطی، پوسته‌های استوانه‌ای و دیسکی شکل را هم تحلیل کرد. وی در تحلیل پوسته‌های مخروطی ایزوتروپ هم از روش DSC استفاده کرد [۶۳]. لی^۴ و همکاران [۶۴] هم ارتعاشات آزاد و اجباری پوسته مخروطی را با استفاده از اصل هامیلتون و روش ریلی-ریتز مورد مطالعه قرار دادند.

جین و همکاران^۵ [۶۵] در سال ۲۰۱۴ به بررسی پوسته‌های مخروطی همسانگرد و ناهمسانگرد جدار ضخیم با شرایط مرزی الاستیک پرداختند. آن‌ها در فرمول‌بندی خود از روش‌های الاستیسیته سه‌بعدی و ریلی-ریتز استفاده کردند. آن‌ها توابع جابجایی در راستای محیطی را به صورت سری فوریه و در دو راستای دیگر به صورت سری فوریه کسینوسی همراه با توابع کمکی در نظر گرفتند تا از همگرایی و سرعت بیشتر روش حل اطمینان حاصل شود. جین و همکاران در مقاله‌ی دیگری [۶۶] برای بررسی پوسته‌ی مخروطی جدار نازک از روش سری فوریه بهبود یافته استفاده کردند. آن‌ها ضرایب بسط را با روش ریلی-ریتز محاسبه کرده و سپس دقت نتایج خود را با استفاده از نتایج موجود در مقالات و تحلیل المان محدود نشان دادند. و در نهایت در این تحقیق به بررسی ارتعاشات، فرکانس‌های اولیه و ثانویه پوسته‌ی مخروطی تقویت شده با استفاده از تئوری دائل پرداخته شده است و در نهایت برای صحه‌گذاری نتایج حاصل با دیگر مقالات مقایسه شده است.

¹ Liew

² Civalek

³ Discrete singular convolution

⁴ Li

⁵ Jin

۱-۴ اهداف آن

رزونانس^۱ یا تشدید، در موقعیت‌های مختلفی رخ می‌دهد، هر سیستم مکانیکی تمایل دارد در برخی از فرکانس‌ها، با بیشترین دامنه‌ی ممکن نوسان کند، به این وضعیت رزونانس (تشدید) و به این فرکانس‌ها، فرکانس رزونانسی (فرکانس تشدید) گفته می‌شود. رفتار سیستم در فرکانس رزونانس (یا نزدیک آن) به طرز عجیبی با رفتار سیستم در فرکانس‌های دیگر متفاوت است. در حالت رزونانس، سیستم تمایل به نوسان با بیشینه‌ی دامنه در فرکانس رزونانسی دارد. در چنین فرکانس‌هایی انرژی ارتعاشی در جسم ذخیره می‌شود و در نتیجه نیروی کوچک و متناوب می‌تواند باعث حرکتی نوسانی با دامنه‌ی بزرگ شود، از این رو مطالعه‌ی رزونانس و فرکانس‌های رزونانسی بسیار حائز اهمیت است.

با توجه به لزوم بررسی ارتعاشات غیرخطی و مطالعه‌ی فرکانس‌های رزونانسی و بررسی پدیده‌ی رزونانس، در این پایان‌نامه به بررسی ارتعاشات غیرخطی و پدیده‌ی رزونانس پرداخته شده است. همچنین به دست آوردن فرکانس‌های خطی و غیرخطی و بررسی پارامترهای مختلف بر فرکانس‌ها، به دست آوردن رزونانس‌های اولیه، سوپرهارمونیک و ساب‌هارمونیک بر روی پوسته‌های مخروطی ناقص و بررسی نمودار پاسخ فرکانسی آن‌ها، و مطالعه‌ی پارامترهای مختلف در حالت رزونانس‌ها و بررسی سخت‌شوندگی و نرم‌شوندگی سازه در هر کدام از حالت‌ها، از دیگر اهداف این پایان‌نامه است.

¹ Resonances

۱-۵ نوآوری پایان نامه

تاکنون کارهای انجام شده بر روی سازه‌های مشابه مخروطی با تقویت‌کننده‌های رینگی و طولی با تکیه‌گاه ساده (شکل ۱-۲)، تنها به صورت بررسی ارتعاشات آزاد و رزونانس اولیه‌ی سازه از طریق روش‌های متفاوتی بوده است. در این پایان‌نامه ارتعاشات آزاد و اجباری سازه و رزونانس‌های اولیه و ثانویه‌ی مخروط بر اساس تئوری دائل مورد بررسی قرار گرفته است.

همچنین تأثیر پارامترهای مختلف که شامل تغییر تعداد تقویت‌کننده‌های طولی، تغییر تعداد تقویت‌کننده‌های رینگی، تغییر سطح مقطع‌های تقویت‌کننده‌ها، تغییر ضخامت پوسته و تغییر نسبت قاعده‌ی بزرگ به کوچک پوسته می‌باشد، مورد بررسی قرار گرفته است.

۱-۶ مروری مختصر بر فصل‌های پایان نامه

همانطور که مشاهده شد در فصل اول، به تعریف مبانی و بررسی تاریخچه‌ی ارتعاشات غیرخطی و رزونانس‌ها پرداخته شده است.

در فصل دوم، به بررسی شماتیکی سازه‌ی مورد نظر و بررسی فرضیات حاکم بر مسئله و استخراج روابط سینماتیکی، نیروها و گشتاورهای پوسته و در نهایت به استخراج معادله‌ی حرکت حاکم بر پوسته‌ی مورد نظر با استفاده از تئوری دائل-مشتري-والسف و بررسی شرایط مرزی^۱ پرداخته شده است؛ که معادله‌ی حاکم شامل سه معادله‌ی کوپل^۲ بوده که یکی وابسته به زمان و دو معادله‌ی دیگر مستقل از زمان می‌باشند.

¹ Boundary condition

² Couple

در فصل سوم، با استفاده از تابع تنش ایری^۱، معادله‌ی حاکم به دو معادله کاهش داده شده است و سپس با استفاده از روش گالرکین و اصل جمع آثار^۲ معادلات به یک معادله‌ی دیفرانسیل زمانی تبدیل شده و سپس این معادله با استفاده از روش هموتوپی-پرتوربیشن^۳ حل گردیده و فرکانس‌های طبیعی^۴ خطی و غیرخطی محاسبه شده‌اند.

در فصل چهارم، نتایج مربوط به ارتعاشات آزاد^۵ برای یک مدل خاص از پوسته‌ی مخروطی ساده ارائه گردیده است و برای صحت روش حل، نتایج به‌دست آمده، با نتایج موجود تحلیلی و آزمایشگاهی مقایسه شده است. همچنین منحنی "فرکانس طبیعی-شماره موج عرضی" برای سه پوسته‌ی مخروطی ناقص با تعداد تقویت‌کننده‌های طولی متفاوت با نمونه‌های آزمایشگاهی مقایسه گردیده، و همین‌طور تأثیر پارامترهای مختلف بر پوسته نیز مورد بررسی قرار گرفته است.

در فصل پنجم، پوسته تحت تأثیر نیروی هارمونیک^۶ عرضی قرار گرفته و با استفاده از روش تئوری اغتشاشات و مقیاس‌های چندگانه^۷، رزونانس‌های اولیه مورد مطالعه گرفته‌اند، و سپس سکولارترم‌ها^۸ شناسایی و حذف گردیده و سپس با بررسی حالت ماندگار، پاسخ فرکانسی مسئله به‌دست آمده است و همچنین نمودار مربوط به معادله‌ی پاسخ فرکانسی نیز به ازای پارامترهای مختلف رسم گردیده‌اند.

در فصل ششم، همانند فصل قبل با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه به بررسی حالت نانرزونانس^۹ و در ادامه به تعیین معادله‌ی فرکانسی در سوپرهارمونیک و ساب‌هارمونیک و رسم منحنی آن‌ها به ازای پارامترهای مختلف پرداخته شده است.

¹ Airy's stress function

² Superposition method

³ Homotopy perturbation method

⁴ Natural frequency

⁵ Free vibration

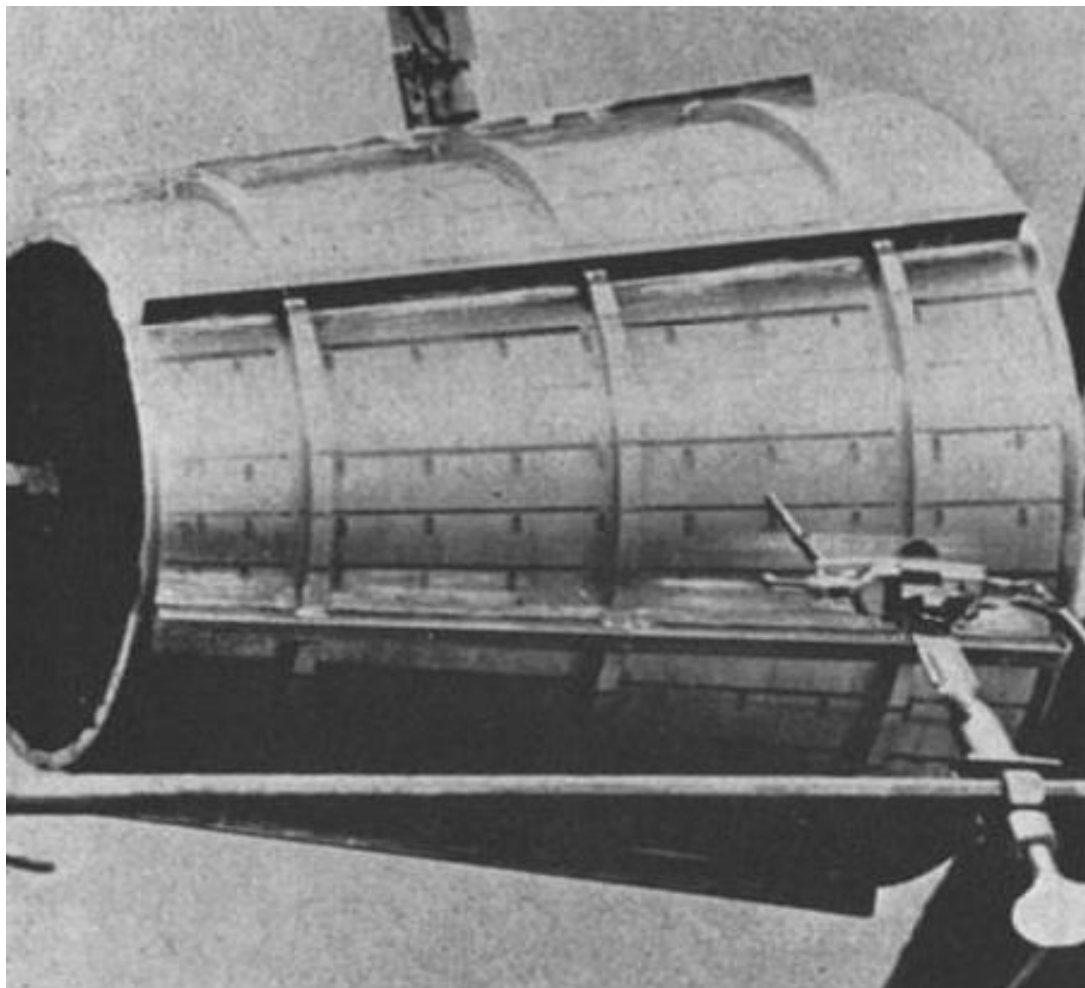
⁶ Harmonic

⁷ Multiple scale

⁸ Secular terms

⁹ Non-Resonance

در فصل هفتم، که فصل پایانی می‌باشد، به جمع بندی مطالب و ارائه‌ی پیشنهادهایی برای ادامه‌ی کار پرداخته شده است.



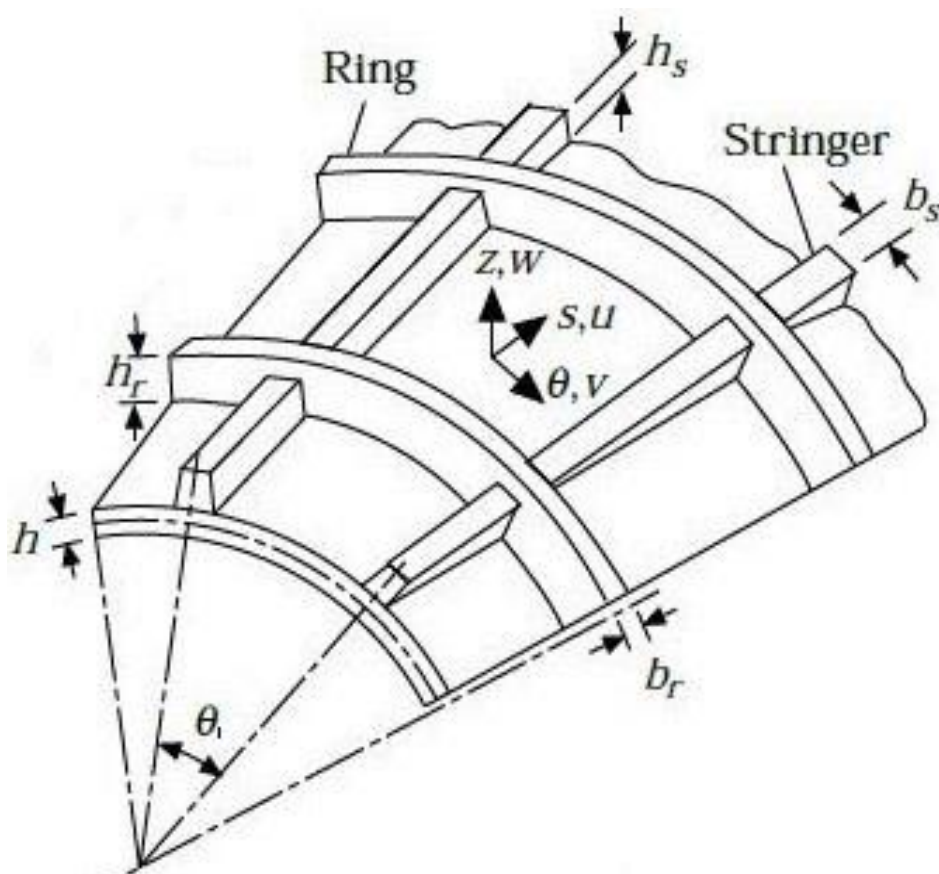
شکل ۱-۲: تصویری از پوسته‌ی مورد مطالعه (پوسته مخروطی با تقویت‌کننده‌های طولی و رینگ‌ها) [۶۷]

فصل دوم :

استخراج معادلات حاکم بر مسئله

۲-۱ تعریف مسئله

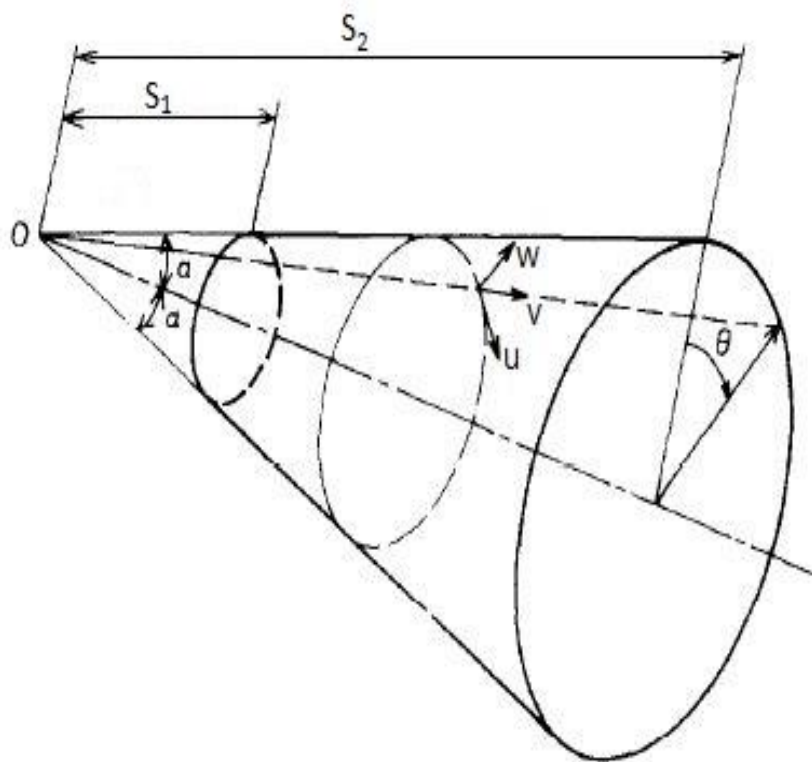
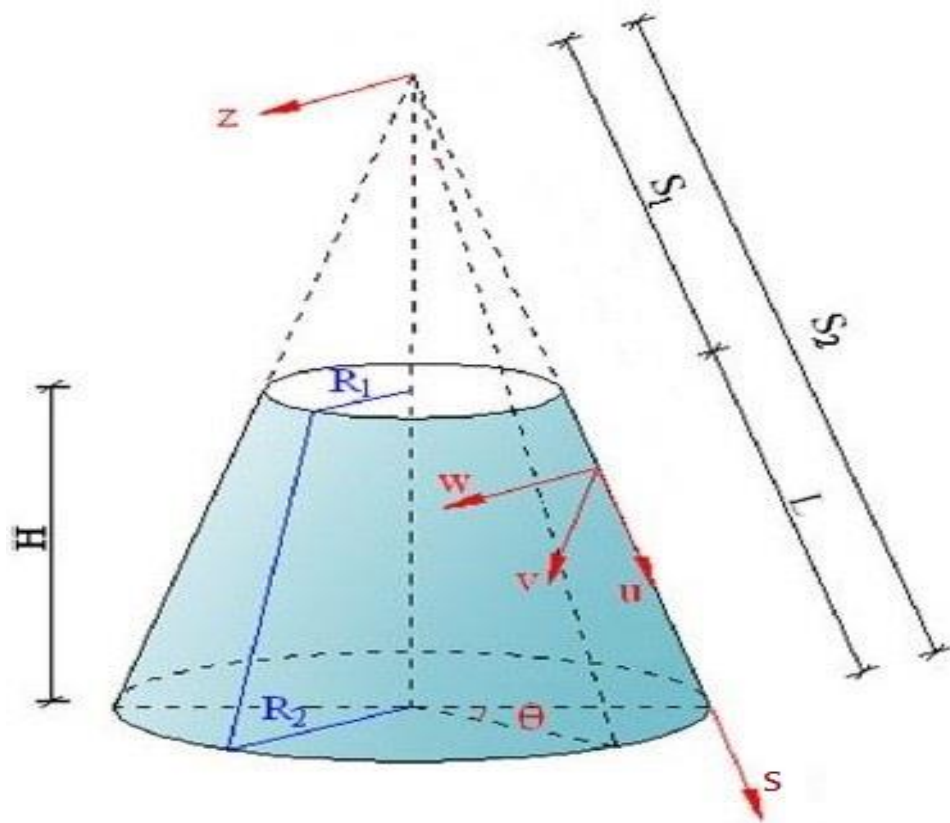
همانطور که گفته شد، در این پایان‌نامه رزونانس‌های اولیه^۱ و رزونانس‌های ثانویه^۲ پوسته‌ی مخروطی ناقصی با ضخامت h ، طول L ، زاویه رأس α ، با تقویت‌کننده‌های رینگی و تقویت‌کننده‌های طولی با ابعاد نشان داده شده در شکل (۲-۱) و شکل (۲-۲)، مورد مطالعه قرار گرفته است. برای فرمول‌بندی مسئله از سیستم مختصات استوانه‌ای (s, θ, z) ، استفاده شده که در آن s در جهت یال مخروط، θ در جهت محیط و z در جهت عمود بر ضخامت پوسته می‌باشد. u و v و w به ترتیب جابجایی در جهت s و θ و z هستند.



شکل ۲-۱: نمای شماتیک سازه مسئله [۶۸]

¹ Primary resonances

² Secondary resonances



شکل ۲-۲: نمایش جزئیات سازه [۶۹]

۲-۱ فرضیات حاکم بر مسئله

با توجه به آنچه در فصل اول در مورد تئوری دائل-مشتري-والسف^۱ برای پوسته‌های نازک گفته شد [۷۰]، در این تحقیق معادلات حرکت حاکم بر مسئله با استفاده از فرضیات این تئوری به دست آمده است. برای استخراج معادلات حرکت فرضیات زیر در نظر گرفته شده است:

- پوسته‌ی مخروطی نازک، همگن^۲ و همسانگرد^۳ است.
 - جابجایی‌ها نسبتاً بزرگ و روابط کرنش-جابجایی^۴ غیرخطی است.
 - رابطه‌ی تنش-کرنش^۵ خطی است و از رابطه‌ی هوک^۶ استفاده شده است.
 - جنس تقویت‌کننده‌ها با جنس پوسته متفاوت بوده و مجموعه، کامپوزیت دوجنسه است.
 - رینگ‌ها و تقویت‌کننده‌ها منشوری^۷ بوده و دارای سطح مقطع متقارن می‌باشند.
 - رینگ‌ها و تقویت‌کننده‌ها از ماده‌ی الاستیک خطی، همگن و ایزوتروپیک ساخته شده‌اند.
 - کرنش‌های عمودی در تقویت‌کننده‌ها، همانند کرنش‌های پوسته به صورت خطی تغییر می‌کنند.
 - نیروی برشی به طور کامل توسط پوسته تحمل می‌گردد.
 - از خمش جانبی^۸ تقویت‌کننده‌ها صرف نظر شده است.
 - از تابیدگی^۹ صرف نظر شده است.
- برای به دست آوردن نیروها و گشتاورهای معادل، انرژی جنبشی^{۱۰} و پتانسیل^{۱۱} رینگ‌ها و تقویت‌کننده‌های طولی از خاصیت توزیع^{۱۲} استفاده شده است. بدین صورت که برای مدل کردن

¹ Donnell-Mushtari-Vlasov theory

² Homogenous

³ Isotropic

⁴ Strain-Displacement

⁵ Stress-Strain relation

⁶ Hook's law

⁷ Prismatic

⁸ Lateral bending

⁹ Warping

¹⁰ Kinetic energy

¹¹ Potential energy

¹² Smearing

نیروها و گشتاورهای معادل، انرژی جنبشی و پتانسیل رینگ‌ها و تقویت‌کننده‌های طولی، مقادیر مربوط به یکی از تقویت‌کننده‌های طولی و یا رینگ‌ها برفاصله‌ی میان تقویت‌کننده‌های طولی و رینگ‌ها تقسیم گردیده است.

۲-۲ روابط سینماتیکی ۱، نیروها و گشتاورهای ۲ پوسته‌ی مخروطی

برای پوسته‌های نازک، فرضیات زیر، معادلات پوسته و مرتبه‌ی آنها را ساده می‌کند:

(۱) اگر نسبت ضخامت به شعاع انحنای پوسته یا هر پارامتر دیگر پوسته مانند پهنا یا طول، نسبت به یک، قابل صرف نظر کردن باشد می‌توان پوسته را نازک در نظر گرفت.

(۲) وقتی پوسته دچار تغییر شکل شود، صفحه‌ی میانی مستقیم و نرمال باقی بماند.

فرض اول بیان می‌دارد که از پارامترهای مشخصی در معادلات پوسته بر اساس تئوری پوسته‌ی ضخیم (شامل: z/R) می‌توان صرف نظر کرد.

فرض دوم بر این است که می‌توان از تغییر شکل برشی در معادلات سینماتیکی صرف نظر کرد و این امکان را می‌دهد که جابجایی صفحه‌ای به خطی تغییر یابد.

در نتیجه با توجه به توضیحات ذکر شده و همچنین مطابق با روابط غیرخطی کرنش-جابجایی کارمن^۳ [۶۹]، مؤلفه‌های کرنش و انحنای سطح میانی به صورت روابط (۲-۱) و (۲-۲) استخراج

گردیده‌اند [۷۱ و ۷۲].

¹ Kinematic relation

² Force and moment resultants

³ Karman equation

$$\{\varepsilon_0\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_s^0 \\ \varepsilon_\theta^0 \\ \varepsilon_{s\theta}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 \\ \frac{1}{s} \frac{\partial v}{\partial \phi} + \frac{u}{s} - \frac{w \cot(\alpha)}{s} + \frac{1}{2s^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \phi} \right)^2 \\ \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{v}{s} + \frac{1}{s} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\partial w}{\partial \phi} \end{Bmatrix} \quad (1-2)$$

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} X_s \\ X_\theta \\ X_{s\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \\ -\frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} - \frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial s} \\ -\frac{1}{s} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \phi} + \frac{1}{s^2} \frac{\partial w}{\partial \phi} \end{Bmatrix} \quad (2-2)$$

در روابط فوق، $\{\varepsilon_0\}$ بردار کرنش‌های صفحه میانی و $\{X\}$ انحناهای متناظر است و همچنین در روابط فوق فرض شده است که $\phi = \theta \sin(\alpha)$

و در نهایت همانطور که می‌دانید رابطه کرنش-جابجایی حاکم بر پوسته مخروطی ناقص را بصورت ماتریسی زیر میتوان نوشت [۷۳]:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_{s\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_s^0 \\ \varepsilon_\theta^0 \\ \varepsilon_{s\theta}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} X_s \\ X_\theta \\ X_{s\theta} \end{Bmatrix} \quad (3-2)$$

۲-۳-۱) محاسبه نیروها و گشتاورهای پوسته مخروطی ناقص

بر اساس تئوری پوسته‌های انعطاف پذیر^۱ و قانون هوک [۷۴] روابط تنش-کرنش^۲ برای پوسته‌های نازک همگن بصورت رابطه‌ی (۲-۴) بدست آمده است [۶۹و۷]:

$$\begin{bmatrix} \sigma_s \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{s\theta} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_s + zX_s \\ \varepsilon_\theta + zX_\theta \\ \varepsilon_{s\theta} + zX_{s\theta} \end{bmatrix} \quad (4-2)$$

¹ Flexural Shell theory

² Stress-Strain relations

نیروها و گشتاورهای معادل وارد بر پوسته‌ی مخروطی ناقص با انتگرال‌گیری از تنش‌ها بر روی ضخامت پوسته به دست می‌آیند، بنابراین نیروها و گشتاورها به صورت روابط (۲-۵) و (۲-۶) استخراج گردیده است [۷۷ و ۷۸]:

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_s \\ N_\theta \\ N_{s\theta} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_s \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{s\theta} \end{Bmatrix} dz \quad (۵-۲)$$

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_s \\ M_\theta \\ M_{s\theta} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_s \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{s\theta} \end{Bmatrix} z dz \quad (۶-۲)$$

با محاسبه‌ی تنش از فرمول (۲-۴) و جایگذاری آن در فرمول‌های (۲-۵) و (۲-۶) نیروها و گشتاورهای معادل پوسته‌ی مخروطی ناقص به صورت روابط (۲-۷) و (۲-۸) استخراج شده است [۶۷ و ۶۹]:

$$\begin{cases} N_{ssh} = A_{10}\varepsilon_s + A_{20}\varepsilon_\theta \\ N_{\theta sh} = A_{20}\varepsilon_s + A_{10}\varepsilon_\theta \\ N_{s\theta sh} = A_{60}\varepsilon_{s\theta} \end{cases} \quad (۷-۲)$$

$$\begin{cases} M_{ssh} = A_{12}X_s + A_{22}X_\theta \\ M_{\theta sh} = A_{22}X_s + A_{12}X_\theta \\ M_{s\theta sh} = A_{62}X_{s\theta} \end{cases} \quad (۸-۲)$$

در روابط (۲-۷) و (۲-۸)، $\{N\}$ مؤلفه‌ی نیرو و $\{M\}$ مؤلفه‌ی گشتاور پوسته‌ی مخروطی ناقص می‌باشند.

و همچنین مؤلفه‌های A به صورت رابطه‌ی (۲-۹) تعریف می‌شوند [۶۹]:

$$\begin{aligned} A_{1k} &= \frac{Eh^{k+1}}{(1-\nu^2)} \int_{-1/2}^{1/2} z^k dz \\ A_{2k} &= \frac{\nu Eh^{k+1}}{(1-\nu^2)} \int_{-1/2}^{1/2} z^k dz \\ A_{6k} &= \frac{Eh^{k+1}}{(1+\nu)} \int_{-1/2}^{1/2} z^k dz, \quad k = 0, 1, 2 \end{aligned} \quad (۹-۲)$$

2-3) روابط نیروها و گشتاورهای تقویت کننده‌های رینگی^۱ و طولی^۲

با توجه به فرضیات ذکر شده در ابتدای فصل و همچنین مطابق با روند محاسبه‌ی نیروها و گشتاورهای پوسته، نیروها و گشتاورهای معادل رینگ‌ها و تقویت کننده‌ها به صورت زیر استخراج گردیده است [۶۹]:

$$N_{sst} = A_{30}\varepsilon_s + A_{31}X_s \quad (10-2)$$

$$N_{\theta r} = A_{32}\varepsilon_\theta + A_{33}X_\theta \quad (11-2)$$

$$\begin{cases} M_{sst} = A_{31}\varepsilon_s + A_{34}X_\theta \\ M_{s\theta st} = A_{37}X_{s\theta} \end{cases} \quad (12-2)$$

$$\begin{cases} M_{\theta r} = A_{33}\varepsilon_\theta + A_{35}X_\theta \\ M_{s\theta r} = A_{36}X_{s\theta} \end{cases} \quad (13-2)$$

که در آن‌ها اندیس st بیانگر تقویت کننده‌های طولی و r بیانگر تقویت کننده‌های رینگی می‌باشد.

در روابط (۲-۱۰) تا (۲-۱۳)، مؤلفه‌های A_{30} تا A_{37} به صورت رابطه‌ی (۲-۱۴) تعریف می‌شوند [۶۹]:

$$\begin{aligned} A_{30} &= \frac{E_{st}A_{st}}{b_{st}} & A_{34} &= \frac{E_{st}A_{st}}{b_{st}}(C_{st}^2 + I_{st}^2) \\ A_{31} &= \frac{E_{st}A_{st}}{b_{st}}C_{st} & A_{35} &= \frac{E_r A_r}{b_r}(C_r^2 + I_r^2) \\ A_{32} &= \frac{E_r A_r}{b_r} & A_{36} &= \frac{G_r J_r}{b_r} \\ A_{33} &= \frac{E_r A_r}{b_r}C_r & A_{37} &= \frac{G_{st} J_{st}}{b_{st}} \end{aligned} \quad (14-2)$$

¹ Rings

² Stringers

۲-۴ نیروها و گشتاورهای معادل پوسته‌ی مخروطی ناقص تقویت شده

نیروها و گشتاورهای معادل پوسته‌ی مخروطی تقویت شده (تمام سازه)، از برآیند نیروها و گشتاورهای پوسته‌ی مخروطی، تقویت‌کننده‌های رینگی و طولی به صورت زیر به دست آمده است:

$$\begin{Bmatrix} N_s \\ N_\theta \\ N_{s\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_{ssh} + N_{sst} + N_{sr} \\ N_{\theta sh} + N_{\theta st} + N_{\theta r} \\ N_{s\theta sh} + N_{s\theta st} + N_{s\theta r} \end{Bmatrix} \quad (۱۵-۲)$$

$$\begin{Bmatrix} M_s \\ M_\theta \\ M_{s\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_{ssh} + M_{sst} + M_{sr} \\ M_{\theta sh} + M_{\theta st} + M_{\theta r} \\ M_{s\theta sh} + M_{s\theta st} + M_{s\theta e} \end{Bmatrix} \quad (۱۶-۲)$$

با جایگذاری روابط (۲-۷) و (۲-۱۰) و (۲-۱۱) در (۲-۱۵) نیروها و با جایگذاری روابط (۲-۸) و (۲-۱۲) و (۲-۱۳) در (۲-۱۶) گشتاورهای معادل پوسته‌ی مخروطی ناقص تقویت شده به صورت روابط (۲-۱۷) و (۲-۱۸) استخراج گردیده است [۶۹]:

$$\begin{cases} N_s = (A_{10} + A_{30})\varepsilon_s + A_{20}\varepsilon_\theta + A_{31}X_s \\ N_\theta = A_{20}\varepsilon_s + (A_{10} + A_{32})\varepsilon_\theta + A_{33}X_\theta \\ N_{s\theta} = A_{60}\varepsilon_{s\theta} \end{cases} \quad (۱۷-۲)$$

$$\begin{cases} M_s = A_{12}X_s + (A_{22} + A_{34})X_\theta + A_{31}\varepsilon_s \\ M_\theta = A_{22}X_s + (A_{12} + A_{35})X_\theta + A_{33}\varepsilon_\theta \\ M_{s\theta} = (A_{62} + A_{36} + A_{37})X_{s\theta} \end{cases} \quad (۱۸-۲)$$

۲-۵ انرژی جنبشی و پتانسیل پوسته‌ی مخروطی تقویت شده

در این پایان‌نامه برای به دست آوردن معادلات حاکم بر پوسته‌ی مخروطی تقویت شده، از اصل هامیلتون^۱ استفاده شده است [۷۶]. اصل هامیلتون یک اصل عمومی است که در بسیاری از مسائل مکانیک کاربرد دارد. به این اصل می‌توان به عنوان یک قاعده‌ی کلی نگریست.

اگر U ، T و W ، به ترتیب نشان دهنده‌ی انرژی کرنشی، انرژی جنبشی و کار انجام شده توسط نیروهای حجمی باشند، انرژی پتانسیل به صورت $\Pi = U - W$ ، و تابع لاگرانژین به صورت $L = T - \Pi$ تعریف می‌شود [۷۹].

¹ Hamilton principle

همچنین اصل هامیلتون بیان می‌دارد که مجموع تغییرات انرژی جنبشی و پتانسیل دستگاه و کار انجام شده توسط نیروهای غیر پتانسیل در فاصله زمانی $\Delta t = t_2 - t_1$ برابر صفر است، به عبارت دیگر [۸۰]:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T + W - U) dt = 0 \quad (۱۹-۲)$$

از اصل هامیلتون می‌توان برای یافتن مجموعه‌ای سازگار، از معادلات حرکت و شرایط مرزی برای تنش‌ها و کرنش‌های داده شده بهره جست. این امر با جایگذاری معادلات انرژی کرنش (U)، کار نیروهای خارجی (W) و انرژی جنبشی (T)، در معادله‌ی بالا به همراه انتگرال‌گیری جزء به جزء و مساوی صفر قرار دادن ضرایب تغییرات جابجایی (که به آن جابجایی مجازی هم گفته می‌شود)، محقق می‌شود [۷۴]. در نتیجه برای استفاده از اصل هامیلتون، باید انرژی پتانسیل، انرژی جنبشی و کار انجام شده توسط نیروهای خارجی محاسبه گردد. در پوسته‌ی مورد مطالعه به دلیل غیاب نیروهای خارجی، انرژی پتانسیل برابر با انرژی کرنشی پوسته‌ی مخروطی تقویت شده می‌باشد. از این رو انرژی کرنشی (پتانسیل)، پوسته‌ی مخروطی تقویت شده از رابطه‌ی (۲۰-۲) استخراج گردیده است [۸۱ و ۸۲]:

$$U = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{S_1}^{S_2} \left\{ \frac{1}{2} [N_s \varepsilon_s + N_\theta \varepsilon_\theta + N_{s\theta} \varepsilon_{s\theta} + M_s X_s + M_\theta X_\theta + 2M_{s\theta} X_{s\theta}] \right\} ds ds d\theta \quad (۲۰-۲)$$

انرژی جنبشی پوسته‌ی مخروطی تقویت شده، با استفاده از فرضیات تئوری دانل-مشرتی-والسلف به صورت رابطه‌ی (۲۱-۲) محاسبه گردیده است [۸۲]:

$$T = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{S_1}^{S_2} \left\{ \frac{1}{2} [m_{sh} + m_{st} + m_r] \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right\} ds ds d\theta \quad (۲۱-۲)$$

که در آن m_{sh} ، m_{st} و m_r به صورت رابطه‌ی (۲۲-۲) می‌باشد [۸۳]:

$$\begin{cases} m_{sh} = \rho_{sh} h \\ m_{st} = \frac{\rho_{st} A_{st}}{b_{st}} \\ m_r = \frac{\rho_r A_r}{b_r} \end{cases} \quad (۲۲-۲)$$

۲-۶ معادله‌ی حرکت حاکم^۱ بر پوسته‌ی مخروطی ناقص تقویت شده

همانطور که قبلاً اشاره شد، برای استخراج معادله‌ی حرکت حاکم [۷۶] بر پوسته‌ی مورد مطالعه تنها کافی است، روابط (۲-۲۰) و (۲-۲۱) در رابطه‌ی (۲-۱۹) جایگذاری شود و سپس با گرفتن انتگرال جزء به جزء، معادله‌ی حرکت به صورت سه معادله‌ی کوپل شده، به صورت روابط (۲-۲۳) و (۲-۲۴) و (۲-۲۵) استخراج گردیده است [۷۲ و ۷۱]:

$$\frac{\partial N_s}{\partial s} + \frac{1}{s} \frac{\partial N_{s\theta}}{\partial \theta} + \frac{N_s - N_\theta}{s} = 0 \quad (2-23)$$

$$\frac{\partial N_{s\theta}}{\partial s} + \frac{1}{s} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{N_{s\theta}}{s} = 0 \quad (2-24)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 M_s}{\partial s^2} + \frac{2}{s} \frac{\partial M_s}{\partial s} + \frac{2}{s} \frac{\partial^2 M_{s\theta}}{\partial s \partial \theta} - \frac{1}{s} \frac{\partial M_\theta}{\partial s} + \frac{2}{s^2} \frac{\partial M_{s\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 M_\theta}{\partial \theta^2} \\ & + \frac{N_\theta \cos(\alpha)}{s} + N_s \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - N_\theta \left(\frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial s} \right) \end{aligned} \quad (2-25)$$

$$-2N_{s\theta} \left(\frac{1}{s} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} - \frac{1}{s^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) - (m_{sh} + m_{st} + m_r) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

۲-۷ شرایط مرزی^۲

در این تحقیق با توجه به روش حل ارائه شده، مرزهای پوسته‌ی مخروطی ناقص به صورت تکیه گاه ساده^۳، می‌باشد [۸۵ و ۸۴]:

$$\begin{aligned} v(S_1, \theta) = v(S_2, \theta) = 0 & \quad w(S_1, \theta) = w(S_2, \theta) = 0 \\ N_s(S_1, \theta) = N_s(S_2, \theta) = 0 & \quad M_s(S_1, \theta) = M_s(S_2, \theta) = 0 \end{aligned} \quad (2-26)$$

¹ Motion equation

² Boundary conditions

³ Simply supported

۲-۸ انتخاب روش حل معادله‌ی حاکم

برای حل مسائل مربوط به پوسته‌ها، از دو روش استفاده می‌شود. در روش اول، معادلات حاکم بر حسب جابجایی‌های صفحه‌ی میانی پوسته حل می‌گردد، که در این روش سه متغیر u ، v و w در معادلات وجود دارند. در روش دوم، معادلات حاکم بر مسئله بر حسب تنش‌ها و گشتاورهای معادل حل می‌گردد. در این روش با معرفی تابع تنش ایری، تنها دو متغیر تابع تنش F و جابجایی w در مسئله باقی می‌ماند. بدین منظور، ابتدا متغیرهای مسئله، که شامل سه مؤلفه‌ی جابجایی u ، v و w می‌باشند، به کمک تعریف تابع تنش ایری به دو متغیر تابع تنش و جابجایی شعاعی کاهش یافته است، سپس با استفاده از روش گالرکین^۱ غیرخطی، معادلات به صورت معادله‌ی دیفرانسیلی بر حسب زمان نوشته شده است. معادله‌ی حاصل در فصل بعد، به روش هموتوپی پرتوربیشن^۲ حل گردیده و فرکانس‌های طبیعی خطی و غیرخطی استخراج گردیده‌اند.

۲-۹ تعریف تابع تنش ایری و بازنویسی روابط نیروها و گشتاورها

به دلیل استفاده از روش دوم برای حل معادلات در این پایان‌نامه، تابع تنش ایری [۸۶] به صورتی تعریف می‌شود که روابط زیر صادق باشد (بازنویسی نیروها براساس تابع تنش ایری):

$$N_s = \frac{1}{s} \frac{\partial F}{\partial s} + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} \quad (2-27)$$

$$N_\theta = \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} \quad (2-28)$$

$$N_{s\theta} = \frac{1}{s^2} \frac{\partial F}{\partial \phi} - \frac{1}{s} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi \partial s} \quad (2-29)$$

همانطور که مشاهده می‌شود، با انتخاب تابع تنش بدین شکل، روابط (۲-۲۳) و (۲-۲۴) ارضا می‌شوند.

¹ Galerkin method

² Homotopy perturbation

بنابراین، روابط نیروها و گشتاورهای معادل بر حسب مؤلفه‌های کرنش (که قبل تر به دست آمد) را می‌توان براساس تابع تنش ایری، به صورت رابطه‌ی (۲-۳۰) بازنویسی نمود:

$$\begin{Bmatrix} N_s \\ N_\theta \\ N_{s\theta} \\ M_s \\ M_\theta \\ M_{s\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_s^0 \\ \varepsilon_\theta^0 \\ \varepsilon_{s\theta}^0 \\ X_s \\ X_\theta \\ X_{s\theta} \end{Bmatrix} \quad (۳۰-۲)$$

ماتریس‌های $[A]$ ، $[B]$ و $[D]$ در رابطه‌ی فوق، از معادلات نیروها و گشتاورها که قبل تر گفته شد به دست می‌آیند. لازم به ذکر است که ماتریس $[A]$ ، ماتریس سفتی کششی^۱ است که N ها را به کرنش‌های لایه‌ی میانی مرتبط می‌سازد و ماتریس $[D]$ ، ماتریس سفتی خمشی^۲ است که M ها را به انحناهای لایه‌ی میانی ارتباط می‌دهد. از آنجا که ماتریس $[B]$ ، M ها را به کرنش‌های لایه‌ی میانی و N ها را به انحناهای لایه‌ی میانی مرتبط می‌کند به این ماتریس کوپلینگ خمش-کشش^۳ می‌گویند.

برای به دست آوردن روابط گشتاورها، بر اساس تابع تنش ایری، با نیمه معکوس کردن رابطه‌ی ماتریسی (۳۰-۲) داریم:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_{s\theta} \\ M_s \\ M_\theta \\ M_{s\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A^*_{11} & A^*_{12} & A^*_{16} & B^*_{11} & B^*_{12} & B^*_{16} \\ A^*_{12} & A^*_{22} & A^*_{26} & B^*_{12} & B^*_{22} & B^*_{26} \\ A^*_{16} & A^*_{26} & A^*_{66} & B^*_{16} & B^*_{26} & B^*_{66} \\ C^*_{11} & C^*_{12} & C^*_{16} & D^*_{11} & D^*_{12} & D^*_{16} \\ C^*_{12} & C^*_{22} & C^*_{26} & D^*_{12} & D^*_{22} & D^*_{26} \\ C^*_{16} & C^*_{26} & C^*_{66} & D^*_{16} & D^*_{26} & D^*_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_s \\ N_\theta \\ N_{s\theta} \\ X_s \\ X_\theta \\ X_{s\theta} \end{Bmatrix} \quad (۳۱-۲)$$

ماتریس‌های $[A^*]$ ، $[B^*]$ ، $[C^*]$ و $[D^*]$ به صورت رابطه‌ی (۲-۳۲) می‌باشند [۸۶]:

$$\begin{aligned} [A^*] &= [A^{-1}] \\ [B^*] &= -[A^{-1}][B] \\ [C^*] &= [A^{-1}][B] \\ [D^*] &= [D] - [B][A^{-1}][B] \end{aligned} \quad (۳۲-۲)$$

¹ Extensional stiffness matrix

² Bending stiffness

³ Bending-Stretching coupling

در نتیجه گشتاورهای پوسته بر اساس تابع تنش ایری، با استفاده از رابطه‌ی (۲-۳۱) به صورت زیر

استخراج می‌شوند [۸۶]:

$$M_s = C_{11}^* \left(\frac{1}{s} \frac{\partial F}{\partial s} + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} \right) + C_{12}^* \frac{\partial^2}{\partial s^2} + C_{16}^* \left(\frac{1}{s^2} \frac{\partial F}{\partial \phi} - \frac{1}{s} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi \partial s} \right) \quad (۳۳-۲)$$

$$-D_{11}^* \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - D_{12}^* \left(\frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \right) - 2D_{16}^* \left(-\frac{1}{s^2} \frac{\partial w}{\partial \phi} + \frac{1}{s} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi \partial s} \right)$$

$$M_\theta = C_{21}^* \left(\frac{1}{s} \frac{\partial F}{\partial s} + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} \right) + C_{22}^* \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} + C_{26}^* \left(\frac{1}{s^2} \frac{\partial F}{\partial \phi} - \frac{1}{s} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi \partial s} \right) \quad (۳۴-۲)$$

$$-D_{12}^* \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - D_{22}^* \left(\frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \right) - 2D_{26}^* \left(-\frac{1}{s^2} \frac{\partial w}{\partial \phi} + \frac{1}{s} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi \partial s} \right)$$

$$M_{s\theta} = 2C_{61}^* \left(\frac{1}{s} \frac{\partial F}{\partial s} + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} \right) + 2C_{62}^* \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} - 2D_{16}^* \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \quad (۳۵-۲)$$

$$+ 2C_{66}^* \left(\frac{1}{s^2} \frac{\partial F}{\partial \phi} - \frac{1}{s} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi \partial s} \right) - 2D_{26}^* \left(\frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \right)$$

$$- 4D_{66}^* \left(-\frac{1}{s^2} \frac{\partial w}{\partial \phi} + \frac{1}{s} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi \partial s} \right)$$

۲-۱۰ بازنویسی معادله‌ی حرکت

با توجه به روابط (۲-۲۷) تا (۲-۲۹) و (۲-۳۳) تا (۲-۳۵)، و در نظر گرفتن $F = F_1 \varepsilon^{2x}$ و $s = s_1 \varepsilon^x$

معادله‌ی حرکت حاکم بر پوسته بر اساس تابع تنش ایری و جابجایی شعاعی w ، به صورت رابطه‌ی

(۳۶-۲) استخراج شده است [۶۹]:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial F_1}{\partial x} + 2F_1 \right) s_1 \varepsilon^{3x} \cot(\alpha) \\ & - C_3 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \phi^4} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - 4 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ & - 2(C_4 + C_6) \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \phi^2 \partial x^2} - 2 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial \phi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \right) \\ & + \varepsilon^{2x} \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial \phi^2} + \frac{\partial F_1}{\partial x} + 2F_1 \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ & + \varepsilon^{2x} \left(\frac{\partial^2 F_1}{x^2} + 3 \frac{\partial F_1}{\partial x} + 2F_1 \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ & + 2\varepsilon^{2x} \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial \phi} + \frac{\partial F_1}{\partial \phi} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \phi} - \frac{\partial w}{\partial \phi} \right) - \rho h s_1^4 \varepsilon^{4x} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (36-2)$$

۲-۱۱ استخراج معادله‌ی سازگاری^۱

با توجه به استفاده از روش دوم برای حل معادله‌ی حرکت، برای تعریف تابع تنش نیاز به یک معادله‌ی سازگاری است. به عبارت دیگر، باید لایه‌ی میانی پوسته پس از تغییر شکل پیوسته باقی بماند. از این رو در ادامه به استخراج معادله‌ی سازگاری پرداخته شده است.

۲-۱۲-۱ طرف راست معادله‌ی سازگاری

با استفاده از رابطه‌ی (۳۷-۲) می‌توان متغیرهای u و v را از روابط کرنش-جابجایی حذف کرد و رابطه‌ی بر اساس جابجایی شعاعی w به دست آورد.

$$s \frac{\partial^2 \varepsilon_{s\theta}}{\partial s \partial \phi} + \frac{\partial \varepsilon_{s\theta}}{\partial \phi} - \frac{\partial^2 \varepsilon_s}{\partial \phi^2} + s \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial s} - 2s \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial s} - s^2 \frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial s^2} \quad (37-2)$$

¹ Compatibility equation

طرف راست معادله‌ی سازگاری با جایگذاری معادلات کرنش صفحه‌ی میانی، یعنی رابطه‌ی (۲-۱) در

معادله‌ی (۲-۳۷)، به صورت زیر که بر اساس جایجایی شعاعی است، استخراج گردیده است [۸۶]:

$$\frac{\partial w}{\partial \vartheta} \left(\frac{2}{s} \frac{\partial^2 w}{\partial \vartheta \partial s} - \frac{1}{s^2} \frac{\partial w}{\partial \vartheta} \right) + s \frac{\partial w}{\partial s} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial \vartheta^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right) \quad (۳۸-۲)$$

$$- \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \vartheta} \right)^2 + s \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \cot(\alpha) = 0$$

۲-۱۲-۲ طرف چپ معادله‌ی سازگاری

طرف چپ معادله‌ی سازگاری برابر است با کرنش‌های صفحه‌ی میانی پوسته بر اساس تابع تنش ایری،

که با استفاده از روابط (۲-۲۷) تا (۲-۲۹)، به صورت رابطه‌ی (۲-۳۹) به دست آمده است [۶۹ و ۸۶]:

$$\varepsilon_s^0 = b_1 \left(\frac{1}{s} \frac{\partial F}{\partial s} + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \vartheta^2} \right) + b_2 \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}$$

$$\varepsilon_\theta^0 = b_2 \left(\frac{1}{s} \frac{\partial F}{\partial s} + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \vartheta^2} \right) + b_1 \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} \quad (۳۹-۲)$$

$$\varepsilon_{s\theta}^0 = b_5 \left(\frac{1}{s^2} \frac{\partial F}{\partial \vartheta} - \frac{1}{s} \frac{\partial^2 F}{\partial \vartheta \partial s} \right)$$

در رابطه‌ی (۲-۳۹)، ضرایب b_1 ، b_2 و b_3 به صورت رابطه‌ی (۲-۴۰) تعریف شده‌اند [۶۹ و ۸۶]:

$$b_1 = \frac{A_{10} + A_{32}}{A_{10}^2 + A_{10}A_{32} + A_{30}A_{10} + A_{30}A_{32} - A_{20}^2}$$

$$b_2 = \frac{A_{20}}{A_{10}^2 + A_{10}A_{32} + A_{30}A_{10} + A_{30}A_{32} - A_{20}^2} \quad (۴۰-۲)$$

$$b_5 = \frac{1}{A_{60}}$$

با قرار دادن روابط (۲-۳۹) در معادله‌ی (۲-۳۷)، طرف چپ معادله‌ی سازگاری نیز به صورت رابطه‌ی

(۴۱-۲) استخراج گردیده است:

$$\begin{aligned}
 & b_1 \frac{\partial^4 F}{\partial \varnothing^4} + 2(b_2 + b_5) \frac{\partial^4 F}{\partial \varnothing^2 \partial S^2} + 4(b_2 + b_5) \frac{\partial^4 F}{\partial \varnothing^3 \partial S} \\
 & + 2(b_5 + b_2 + b_1) \frac{\partial^2 F}{\partial \varnothing^2} + b_1 \frac{\partial^4 F}{\partial S^4} + 4b_1 \frac{\partial^3 F}{\partial S^3} + 4b_1 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = 0
 \end{aligned}
 \tag{۴۱-۲}$$

۳-۱۲-۲) شکل نهایی معادله‌ی سازگاری

با استفاده از متغیرهای $S = S_1 \varepsilon^x$ و $F = F_1 \varepsilon^{2x}$ ، جهت ساده‌سازی، با برابر قرار دادن طرفین معادله،

شکل نهایی معادله‌ی سازگاری به‌صورت زیر استخراج گردیده است [۶۹]:

$$\begin{aligned}
 & b_1 \varepsilon^{2x} \frac{\partial^4 F_1}{\partial \varnothing^4} + 2(b_2 + b_5) \varepsilon^{2x} \frac{\partial^4 F_1}{\partial \varnothing^2 \partial x^2} + 4(b_2 + b_5) \varepsilon^{2x} \frac{\partial^4 F_1}{\partial \varnothing^3 \partial x} \\
 & + 4b_1 \varepsilon^{2x} \frac{\partial^3 F_1}{\partial x^3} + 4b_1 \varepsilon^{2x} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + 2(b_5 + b_2 + b_1) \varepsilon^{2x} \frac{\partial^2 F_1}{\partial \varnothing^2} - \left(\frac{\partial w}{\partial \varnothing}\right)^2 \\
 & + S_1 \varepsilon^x \cot(\alpha) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial w}{\partial \varnothing} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varnothing} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial x} + b_1 \varepsilon^{2x} \frac{\partial^4 F_1}{\partial x^4} \\
 & + \frac{\partial^2 w}{\partial \varnothing^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varnothing}\right)^2 - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial \varnothing^2} - \frac{\partial w}{\partial x} S_1 \varepsilon^x \cot(\alpha) - \left(\frac{\partial w}{\partial S}\right)^2 = 0
 \end{aligned}
 \tag{۴۲-۲}$$

فصل سوم :

حل معادله‌ی حرکت و بررسی ارتعاشات آزاد

پوسته

۳-۱ مقدمه

در فصل قبل با تعریف مسئله، به استخراج معادله‌ی حرکت حاکم بر پوسته، بیان شرایط مرزی با توجه به اصل هامیلتون و تابع تنش ایری پرداخته شد. در این فصل به حل معادله‌ی به‌دست آمده و محاسبه‌ی فرکانس‌های خطی و غیرخطی براساس تئوری اغتشاشات پرداخته شده است. برای حل معادلات غیرخطی، رهیافتی تحلیلی به کمک روش گالرکین و روش اغتشاشات و مقیاس‌های چندگانه ارائه گردیده است. بدین منظور، ابتدا با اعمال روش گالرکین بر روی دستگاه معادلات با مشتقات جزئی حاکم بر حرکت پوسته، یک معادله غیرخطی وابسته به زمان از نوع دافینگ^۱ حاصل گردیده که در نهایت با روش مقیاس‌های چندگانه حل شده است.

۳-۲ حل معادلات حاکم بر مسئله

برای حل معادله‌ی حرکت حاکم بر پوسته، بر اساس تابع تنش ایری و جابجایی شعاعی طبق رابطه‌ی (۳۶-۲)، ابتدا با توجه به شرایط مرزی، تابعی برای جابجایی شعاعی مانند رابطه‌ی (۳-۱)، حدس زده شده است [۶۹ و ۷۱]، که شرایط هندسی مسئله را ارضا کند. سپس با استفاده از روش جمع آثار و رابطه‌ی سازگاری، تابع تنش به‌دست آمده است. با در نظر گرفتن شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده در دو انتهای پوسته‌ی مخروطی ناقص، پاسخ معادله‌ی (۴۲-۲)، به‌صورت زیر در نظر گرفته شده است [۸۷]:

$$w = f(t)\varepsilon^x [\sin(\beta_1 x) \sin(\beta_2 \phi) + \psi \sin^2(\beta_1 x)] \quad (۳-۱)$$

که در آن $f(t)$ ، تابعی مجهول از زمان و ψ پارامتر ایجاد ارتباط بین قسمت‌های خطی و غیرخطی جابجایی (w) می‌باشند. همچنین $\beta_1 = \frac{m\pi}{x_0}$ ، $\beta_2 = \frac{n}{\sin(\alpha)}$ ، $x_0 = \ln\left(\frac{s_2}{s_1}\right)$ که m شماره موج‌های طولی و n شماره موج‌های محیطی است.

¹ Duffing-type

همانطور که مشاهده می‌شود، رابطه‌ی (۳-۱)، شرایط مرزی هندسی را ارضا می‌کند.

در نتیجه با قرار دادن معادله‌ی (۳-۱)، در معادله‌ی (۲-۴۲) و با استفاده از روش جمع آثار، پاسخ خصوصی تابع تنش به صورت زیر به دست آمده است [۶۹]:

$$\begin{aligned}
 F_1(x, \phi, t) = & f(t) \{ [\Lambda_{51} \psi^2 f(t) + \Lambda_{52} f(t) + \Lambda_{53} \psi] \cos(2\beta_1 x) \\
 & + [\Lambda_{61} \psi^2 f(t) + \Lambda_{62} f(t) + \Lambda_{63} \psi] \sin(2\beta_1 x) \\
 & + \Lambda_7 f(t) \cos(2\beta_2 x) \cos(2\beta_2 \phi) \\
 & + \Lambda_8 f(t) \sin(2\beta_1 x) \cos(2\beta_2 \phi) \\
 & + [\Lambda_{91} \psi f(t) + \Lambda_{92}] \cos(\beta_1 x) \sin(2\beta_2 \phi) \\
 & + [\Lambda_{101} \psi f(t) + \Lambda_{102}] \sin(\beta_1 x) \sin(2\beta_2 \phi) \\
 & + \Lambda_{11} \psi f(t) \cos(3\beta_1 x) \sin(\beta_2 \phi) \\
 & + \Lambda_{12} \psi f(t) \sin(3\beta_1 x) \sin(\beta_2 \phi) + \Lambda_{13} \psi^2 f(t) \cos(4\beta_1 x) \\
 & + \Lambda_{14} \psi^2 f(t) \sin(4\beta_1 x) + \Lambda_{15} f(t) \cos(2\beta_2 \phi) \}
 \end{aligned} \tag{۲-۳}$$

در رابطه‌ی فوق، ضرایب Λ_i ، وابسته به هندسه و خواص مکانیکی پوسته‌ی مخروطی می‌باشند که در پیوست الف آمده‌اند.

۳-۳ بررسی ارتعاشات آزاد پوسته

برای به دست آوردن معادله‌ای بر حسب زمان و سپس بررسی ارتعاشات غیرخطی^۱ پوسته‌ی مخروطی ناقص تقویت شده، ابتدا معادله‌ی تابع تنش^۲ یعنی رابطه‌ی (۳-۲)، در معادله‌ی حرکت یعنی رابطه‌ی (۳۶-۲)، جایگذاری شده، و سپس روش گالرکین به صورت روابط (۳-۳) بر معادله‌ی Π (در رابطه‌ی (۳-۳)، Π معادله‌ی (۲-۳۶)، پس از جایگذاری F_1 و W می‌باشد. در واقع با جایگذاری رابطه‌ی (۳-۱) و (۳-۲) در رابطه‌ی (۲-۳۶)، Π به دست می‌آید، اعمال شده است [۸۸]:

¹ Nonlinear oscillation

² Stress function

$$\int_0^{x_0} \int_0^{2\pi \sin(\alpha)} \Pi \varepsilon^x \sin(\beta_1 x) \sin(\beta_2 \phi) d\phi dx = 0 \quad (3-3)$$

$$\int_0^{x_0} \int_0^{2\pi \sin(\alpha)} \Pi \varepsilon^x \sin^2(\beta_1 x) d\phi dx = 0$$

بعد از محاسبه ی Π و جایگذاری آن در روابط (3-3) و انجام عملیات ریاضی، روابط زیر به ترتیب استخراج گردیده است [69]:

$$C_1 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + C_2 f + C_3 \psi f^2 + C_4 \psi^2 f^3 + C_5 f^3 = 0 \quad (4-3)$$

$$C_6 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + C_7 \psi f + C_8 f^2 + C_9 \psi^2 f^2 + C_{10} \psi^3 f^3 + C_{11} \psi f^3 = 0$$

با حذف $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ از روابط فوق، رابطه ی میان ψ و f به صورت زیر در نظر گرفته شده است [69]:

$$\psi = \lambda f \quad (5-3)$$

که در رابطه ی فوق λ ، به صورت زیر می باشد [69]:

$$\lambda = \frac{C_8 - C_{12} C_5}{C_3 C_{12} + C_2 C_{13} - C_7}, \quad C_{12} = \frac{C_6}{C_1} \quad (6-3)$$

ضرایب C_i ، در پیوست ب آمده است.

در نهایت با جایگذاری رابطه ی (5-3)، در روابط (3-4) و حذف ψ از معادلات و همچنین با در نظر گرفتن

$u(t) = \frac{f(t)}{h}$ ، معادله ی غیرخطی حاکم بر مسئله به صورت رابطه ی (3-7) استخراج گردیده است:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Q_0 u + Q_1 u^3 + Q_2 u^5 = 0 \quad (7-3)$$

در رابطه ی فوق ضرایب Q_0 ، Q_1 و Q_2 به صورت زیر می باشند:

$$Q_0 = \frac{C_2}{C_1}$$

$$Q_1 = \lambda \frac{C_3}{C_1} + \frac{C_5}{C_1} \quad (۸-۳)$$

$$Q_2 = \lambda^2 \frac{C_4}{C_1}$$

۱-۳-۳ حل معادله‌ی غیرخطی حاکم بر پوسته

در این تحقیق، برای حل معادله‌ی غیرخطی (۳-۷)، از روش هموتوپی پرتوربیشن^۱ استفاده شده است و بدین منظور هموتوپی زیر در نظر گرفته شده است [۸۹]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \omega^2 u + \varepsilon[(Q_0 - \omega^2)u + Q_1 u^3 + Q_2 u^5] = 0 \quad (۹-۳)$$

در رابطه‌ی فوق $\varepsilon \in [0,1]$ ، ضریب تأثیر است.

اگر $\varepsilon = 0$ باشد، معادله‌ی (۳-۹) به معادله‌ی خطی (۳-۱۰) تبدیل می‌شود:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \omega^2 u = 0 \quad (۱۰-۳)$$

و اگر $\varepsilon = 1$ باشد، معادله‌ی (۳-۹) به معادله‌ی اصلی (۳-۷)، تبدیل می‌شود.

همانطور که قبل‌تر اشاره شد، برای حل معادله‌ی (۳-۷)، از روش هموتوپی پرتوربیشن استفاده شده است، از این رو سری توانی زیر در نظر گرفته می‌شود [۹۰]:

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots \quad (۱۱-۳)$$

با جایگذاری معادله‌ی (۳-۱۱)، در معادله‌ی (۳-۷)، و با برابر صفر قرار دادن ضرایب جملات با توان‌های مختلف ε روابط (۳-۱۲) و (۳-۱۳) استخراج شده است:

¹ Homotopy perturbation

$$\varepsilon^0: \quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + \omega^2 u_0 = 0 \quad , \quad u_0(0) = A \quad , \quad \frac{\partial u_0(0)}{\partial t} = 0 \quad (12-3)$$

$$\varepsilon^1: \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \omega^2 u_1 + (Q_0 - \omega^2)u_0 + Q_1 u_0^3 + Q_2 u_0^5 = 0 \quad (13-3)$$

$$u_1(0) = 0 \quad , \quad \frac{\partial u_1(0)}{\partial t} = 0$$

۳-۳-۲ محاسبه‌ی فرکانس‌های طبیعی خطی و غیرخطی پوسته

برای به‌دست آوردن فرکانس‌های پوسته‌ی مخروطی ناقص، عبارت‌های سکولار^۱، یعنی عباراتی شامل $\cos(\omega t + \beta)$ و $\sin(\omega t + \beta)$ ، باید از معادله حذف گردد. با جایگذاری پاسخ همگن معادله‌ی (۱۲-۳)، در معادله‌ی (۱۳-۳)، عباراتی شامل $\cos(\omega t + \beta)$ و $\sin(\omega t + \beta)$ در معادله ظاهر می‌شوند که ایجاد سکولارترم می‌کنند، با برابر صفر قرار دادن این عبارات، فرکانس‌های طبیعی خطی و غیرخطی پوسته‌ی مخروطی مورد مطالعه به‌دست می‌آیند.

پاسخ همگن معادله‌ی (۱۲-۳)، به‌صورت رابطه‌ی (۱۴-۳) می‌باشد [۸۹]: (در رابطه‌ی زیر A دامنه‌ی بی‌بعد و ω فرکانس طبیعی ارتعاشات غیرخطی مجموعه می‌باشند).

$$u_0 = A \cos(\omega t) \quad (14-3)$$

با جایگذاری رابطه‌ی فوق در معادله‌ی (۱۳-۳) و انجام عملیات ریاضی داریم [۹۰]:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \omega^2 u_1 + \left(Q_0 - \omega^2 + \frac{3}{4} Q_1 A^2 + \frac{5}{8} Q_2 A^4 \right) A \cos(\omega t) \quad (15-3)$$

$$+ \left(Q_1 + \frac{5}{4} Q_2 A^2 \right) \frac{A^3}{4} \cos(3\omega t) + \frac{Q_2 A^5}{16} \cos(5\omega t) = 0$$

پس از بازنویسی رابطه‌ی (۱۳-۳) به‌صورت (۱۵-۳)، برای حذف جمله‌ی سکولار معادله‌ی (۱۶-۳) استخراج گردیده است:

¹ Secular terms

$$Q_0 - \omega^2 + \frac{3}{4}Q_1A^2 + \frac{5}{8}Q_2A^4 = 0 \quad (۱۶-۳)$$

با حذف جمله‌ی سکولار، فرکانس طبیعی غیرخطی^۱ پوسته‌ی مخروطی ناقص به صورت زیر به دست آمده است:

$$\omega_{NL} = (Q_0 + \frac{3}{4}Q_1A^2 + \frac{5}{8}Q_2A^4)^{0.5} \quad (۱۷-۳)$$

در رابطه‌ی فوق، با در نظر گرفتن $A = 0$ ، فرکانس طبیعی خطی^۲ به صورت رابطه‌ی (۱۸-۳) استخراج گردیده است:

$$\omega_L = (Q_0)^{0.5} \quad (۱۸-۳)$$

¹ Nonlinear natural frequency

² Linear Natural Frequency

فصل چهارم :

بررسی نتایج ارتعاشات آزاد پوسته

۴-۱ مقدمه

در این فصل، به بیان و بررسی نتایج حاصل از روش ارائه شده در فصل سوم پرداخته شده است. در ابتدا برای اطمینان از دقت روش ارائه شده، با حذف رینگ‌ها و تقویت‌کننده‌های طولی از پوسته‌ی مورد مطالعه، فرکانس‌های طبیعی خطی یک نمونه پوسته‌ی مخروطی ساده محاسبه شده و سپس نتایج حاصل، با نتایج مقالات موجود مقایسه گردیده است. پس از اطمینان از درستی روش حل، فرکانس‌های طبیعی خطی و غیرخطی یک نمونه پوسته‌ی مخروطی تقویت شده توسط رینگ‌های تقویت‌کننده به دست آمده و نتایج حاصل با نتایج موجود تحلیلی و آزمایشگاهی مقایسه گردیده است. سپس با اضافه کردن تقویت‌کننده‌های طولی به سیستم، تأثیر پارامترهای مختلف بر روی پوسته بررسی شده است. (تمامی محاسبات با استفاده از نرم افزار Matlab انجام گرفته است.)

۴-۲ اعتبار سنجی روش حل

برای بررسی صحت روش انجام شده، پوسته‌ی مخروطی ناقص همگنی بدون رینگ‌ها و تقویت‌کننده‌های طولی، با مشخصات هندسی و خصوصیات مکانیکی مطابق جدول (۴-۱)، در نظر گرفته شده است.

جدول ۴-۱: مشخصات هندسی و خصوصیات مکانیکی پوسته‌ی مخروطی

۰/۰۰۴	h : ضخامت (m)
۳۰	α : زاویه رأس (degree)
۰/۳	R_1 : شعاع قاعده کوچک (m)
۰/۴	R_2 : شعاع قاعده بزرگ (m)
۷۰	E : مدول الاستیسیته (Mpa)
۰/۳	ν : ضریب پواسون
۲۷۱۰	ρ : چگالی (kg/m^3)

با جایگذاری مقادیر فوق در رابطه‌ی (۱۸-۳)، فرکانس طبیعی خطی برای پوسته‌ای با مشخصات فوق، به دست می‌آید.

برای مقایسه‌ی نتایج به دست آمده با نتایج موجود در مقالات گوناگون، فرکانس طبیعی طبق رابطه‌ی (۱-۴) بی بعد گردیده است [۹۱] و سپس طبق جدول (۲-۴)، نتایج حاصل برای $m = 1$ و n های مختلف، با دیگر مقالات مقایسه گردیده است.

$$\omega_{1L} = \omega_L R_1 \sqrt{\frac{(1 - \nu^2)\rho}{E}} \quad (1-4)$$

جدول ۲-۴: مقایسه‌ی فرکانس‌های طبیعی بی بعد پوسته‌ی مخروطی با دیگر مقالات

n	ایریه و همکاران [۹۲]	تانگ و همکاران [۹۳]	لیو و همکاران [۹۴]	لی و همکاران [۹۵]	کربوا و همکاران [۹۶]	تحقیق حاضر
۲	۰/۷۹۱۰	۰/۷۹۱۰	۰/۷۹۰۴	۰/۸۴۳۱	۰/۷۹۰۹	۰/۷۹۴۳
۳	۰/۷۲۸۴	۰/۷۲۸۴	۰/۷۲۷۴	۰/۷۴۱۶	۰/۷۲۸۲	۰/۷۰۸۵
۴	۰/۶۳۵۲	۰/۶۳۵۳	۰/۶۳۳۹	۰/۶۴۱۹	۰/۶۳۴۹	۰/۶۱۹۹
۵	۰/۵۵۳۱	۰/۵۵۳۱	۰/۵۵۱۴	۰/۵۵۹۰	۰/۵۵۲۵	۰/۵۴۳۷
۶	۰/۴۹۴۹	۰/۴۹۴۹	۰/۴۹۳۰	۰/۵۰۰۸	۰/۴۹۳۰	۰/۴۸۹۶
۷	۰/۴۶۴۳	۰/۴۶۴۳	۰/۴۶۳۲	۰/۴۷۰۱	۰/۴۶۴۱	۰/۴۶۲۳
۸	۰/۴۶۴۵	۰/۴۶۴۴	۰/۴۶۲۳	۰/۴۶۸۷	۰/۴۶۳۱	۰/۴۶۲۷

همانطور که از جدول (۲-۴) مشاهده می‌شود، نتایج حاصل از روش حل این تحقیق مطابقت بسیار خوبی با نتایج موجود در مقالات دیگر دارد. در ادامه با حل مسئله‌ی پوسته‌ی مخروطی تقویت شده

نشان داده شده است که نتایج حاصل از این روش در مقایسه با دیگر نتایج موجود تحلیلی، بسیار به نتایج آزمایشگاهی نزدیک می‌باشد.

۳-۴ بررسی نمودار فرکانس طبیعی خطی پوسته‌ی مخروطی تقویت شده

در این تحقیق سه نوع مختلف پوسته‌ی مخروطی ناقص تقویت شده برای بررسی انتخاب گردیده است. پوسته‌ی شماره‌ی (۱)، تنها توسط سه عدد رینگ با فواصل یکسان تقویت شده است، پوسته‌ی شماره‌ی (۲)، علاوه بر سه عدد رینگ، توسط سه عدد تقویت کننده‌ی طولی نیز تقویت گردیده است و در پوسته‌ی شماره‌ی (۳)، تعداد تقویت کننده‌های رینگی ثابت و برابر سه بوده و تعداد تقویت کننده‌های طولی به شش عدد افزایش یافته است. هر سه پوسته‌ی مخروطی دارای ابعاد و جنس مشابه بوده و تفاوت آن‌ها تنها در تعداد تقویت کننده‌های طولی می‌باشد.

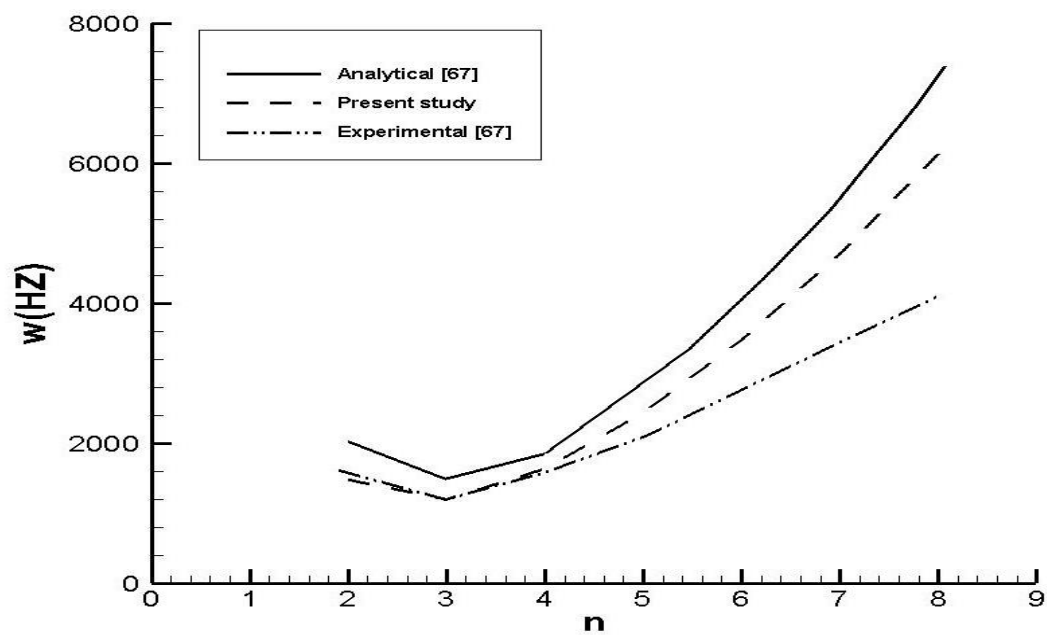
سطح مقطع رینگ‌ها و تقویت کننده‌های طولی به ترتیب مربع و مستطیل شکل در نظر گرفته شده است و فرض بر این است که تقویت کننده‌ها بر روی سطح خارجی پوسته قرار گرفته‌اند. مشخصات هندسی و جنس پوسته‌ی مخروطی ناقص، رینگ‌ها و تقویت کننده‌های طولی، در جدول (۳-۴) بیان شده است.

جدول ۳-۴: مشخصات هندسی و جنس پوسته‌های مورد بررسی

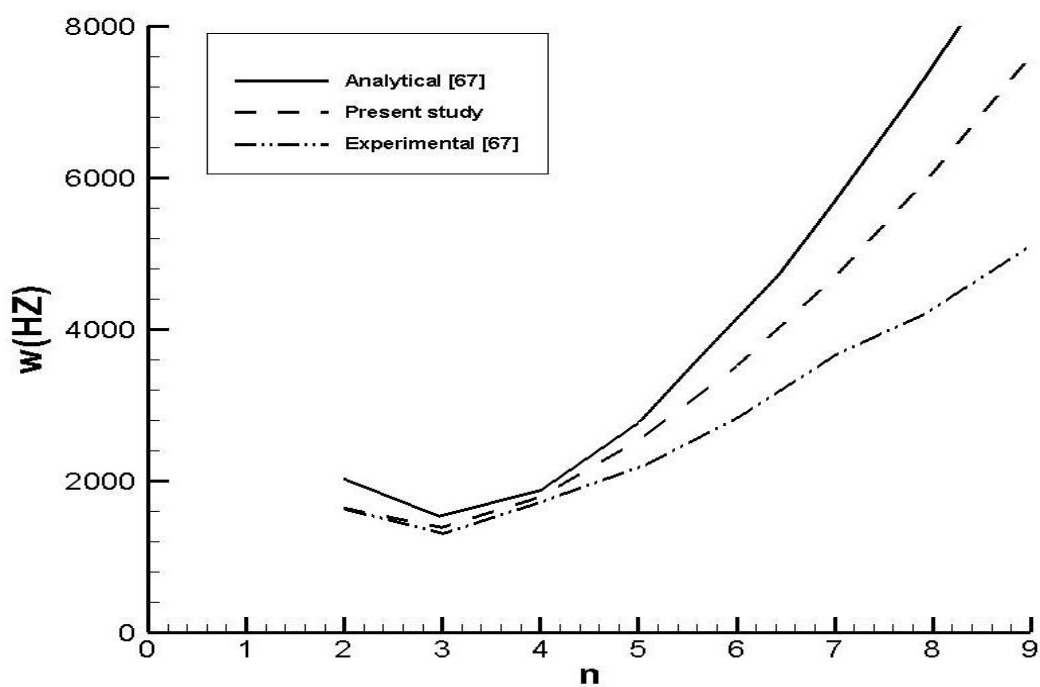
پوسته شماره (۱)	مشخصات هندسی
۰/۰۰۲۵	h : ضخامت (m)
۱۰	α : زاویه رأس (درجه)
۰/۰۸۶۹۹۵	R_1 : شعاع قاعده کوچک (m)
۰/۱۳۳۳۵	R_2 : شعاع قاعده بزرگ (m)
۰/۰۰۰۰۳۹۶	b_r : مقطع تقویت کننده رینگ
۰/۰۰۰۰۸	b_{st} : مقطع تقویت کننده طولی
۳	تعداد رینگ‌ها
۰	تعداد تقویت کننده‌های طولی
آلومینیوم ۶۰۶۱	جنس پوسته مخروطی
آلومینیوم ۶۰۶۱	جنس رینگ‌ها
آلومینیوم ۲۰۲۴	جنس تقویت کننده‌های طولی

پوسته‌های شماره (۲) و (۳) نیز دارای مشخصات فوق می‌باشند، و تنها تفاوت آن‌ها در تعداد تقویت کننده‌های طولی می‌باشد. پوسته‌ی شماره (۲)، دارای ۳ تقویت کننده‌ی طولی و پوسته‌ی شماره (۳)، دارای ۳ تقویت کننده‌ی طولی می‌باشد.

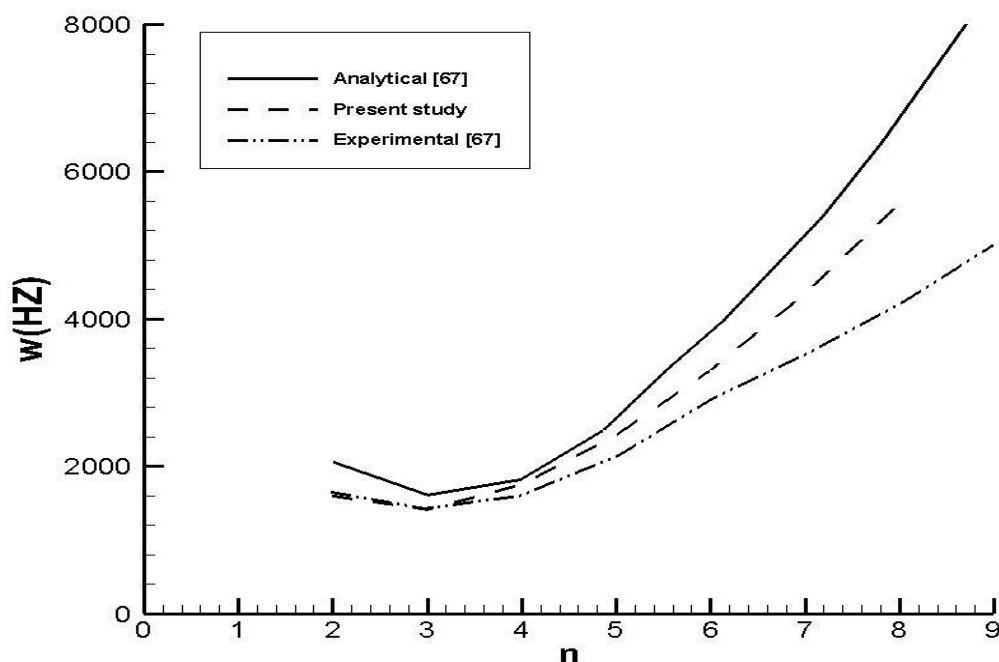
با دانستن خصوصیات هندسی و فیزیکی پوسته‌ها، طبق رابطه‌ی (۱۸-۳)، فرکانس طبیعی خطی هر یک از پوسته‌ها به ازای اولین مد طولی $m = 1$ و n های (شماره موج‌های عرضی) مختلف به دست آمده است و مطابق شکل‌های (۱-۴)، (۲-۴) و (۳-۴) نمودارهای مربوط به هر یک از پوسته‌ها به ترتیب با دیگر نتایج تحلیلی و آزمایشگاهی موجود [۶۷] مقایسه گردیده است.



شکل ۴-۱: مقایسه فرکانس طبیعی خطی پوسته شماره ۱ با نتایج موجود



شکل ۴-۲: مقایسه فرکانس طبیعی خطی پوسته شماره ۲ با نتایج موجود



شکل ۴-۳: مقایسه فرکانس طبیعی خطی پوسته شماره ۳ با نتایج موجود

همانطور که نمودارهای شکل (۴-۱)، (۴-۲) و (۴-۳)، نشان می‌دهد با توجه به اینکه n (شماره موج عرضی)، طبق فرمول $Q_0 = \frac{c_2}{c_1}$ در صورت کسر مسئله قرار گرفته است، با افزایش شماره موج‌های عرضی، فرکانس طبیعی سیستم نیز افزایش یافته است. از طرفی دیگر با بررسی این سه نمودار مشهود است که روش به کار گرفته شده در این تحقیق در مقایسه با روش تحلیلی ریلی-ریتز^۱ که از مرجع [۶۷]، استخراج شده است دارای دقت بیشتری می‌باشد و همچنین بسیار به نتایج آزمایشگاهی نزدیکتر است، از این حیث این روش از دقت قابل قبولی برخوردار می‌باشد. (لازم به ذکر است که در نمودارهای فوق روش تحلیلی و آزمایشگاهی از مرجع [۶۷] استخراج گردیده است). نتیجه‌ی دیگری که از مقایسه‌ی نتایج حاصل از حل‌های تحلیلی و نتایج آزمایشگاهی مشاهده می‌شود این است که نمونه‌ی واقعی با رینگ‌ها و تقویت‌کننده‌های طولی مجزا (نمونه‌ی آزمایشگاهی)، دارای سختی کمتری نسبت به مدل‌های در نظر گرفته شده در این تحقیق می‌باشد.

¹ Rayleigh-Ritz

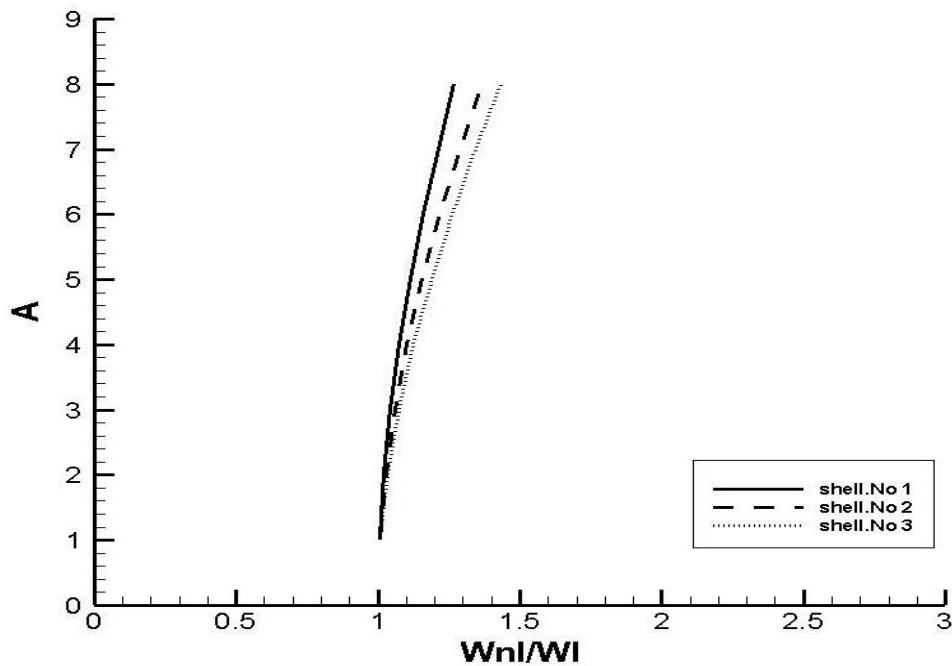
۴-۴ بررسی تأثیر پارامترهای مختلف بر پوسته

با توجه به اعتبارسنجی روش حل و مقایسه نتایج حاصل با دیگر نتایج تحلیلی و آزمایشگاهی و اطمینان از صحت و دقت نتایج، در ادامه بررسی تأثیر پارامترهای مختلف، از جمله تغییر تعداد تقویت کننده‌های طولی، تغییر تعداد تقویت کننده‌های رینگ، تغییر سطح مقطع‌های تقویت کننده‌های، تغییر ضخامت پوسته و همچنین تغییر نسبت قاعده‌ی بزرگ به قاعده‌ی کوچک پوسته مورد مطالعه قرار گرفته شده است. بدین منظور نمودار نسبت فرکانس طبیعی غیرخطی به فرکانس طبیعی خطی یعنی $\frac{\omega_{nl}}{\omega_l}$ به ازای A های (دامنه‌ی بی‌بعد) مختلف در شرایط متفاوت برای هر یک از پارامترها مورد بررسی قرار گرفته است.

۴-۴-۱) بررسی تأثیر تعداد تقویت کننده‌های طولی

برای بررسی تأثیر تعداد تقویت کننده‌های طولی، تغییرات $\frac{\omega_{nl}}{\omega_l}$ به دامنه‌ی بدون بعد^۱ برای هر سه نمونه از پوسته‌های بیان شده به ازای تعداد تقویت کننده‌های رینگ ثابت و برابر ۳ و تعداد تقویت کننده‌های طولی متغیر و برابر ۰، ۳ و ۶، به صورت نمودار (۴-۴) مورد بررسی قرار گرفته است. در این نمونه‌ها اولین موج طولی $m = 1$ و ششمین موج محیطی $n = 6$ در نظر گرفته شده است.

¹ Dimensionless amplitude



شکل ۴-۴: تغییرات $\frac{\omega_{nl}}{\omega_l}$ به دامنه بی بعد A به ازای تعداد تقویت کننده های طولی متفاوت

همانطور که از فرمول (۳-۱۷) پیداست، فرکانس طبیعی غیرخطی سیستم با A (دامنه بی بعد) رابطه ی

مستقیم دارد و چون در نسبت $\frac{\omega_{nl}}{\omega_l}$ ، ω_{nl} در صورت قرار گرفته است با افزایش A نسبت $\frac{\omega_{nl}}{\omega_l}$ نیز

افزایش می یابد که این امر دلیل بر انحناء نمودارها و میزان غیرخطی بودن آنها می باشد.

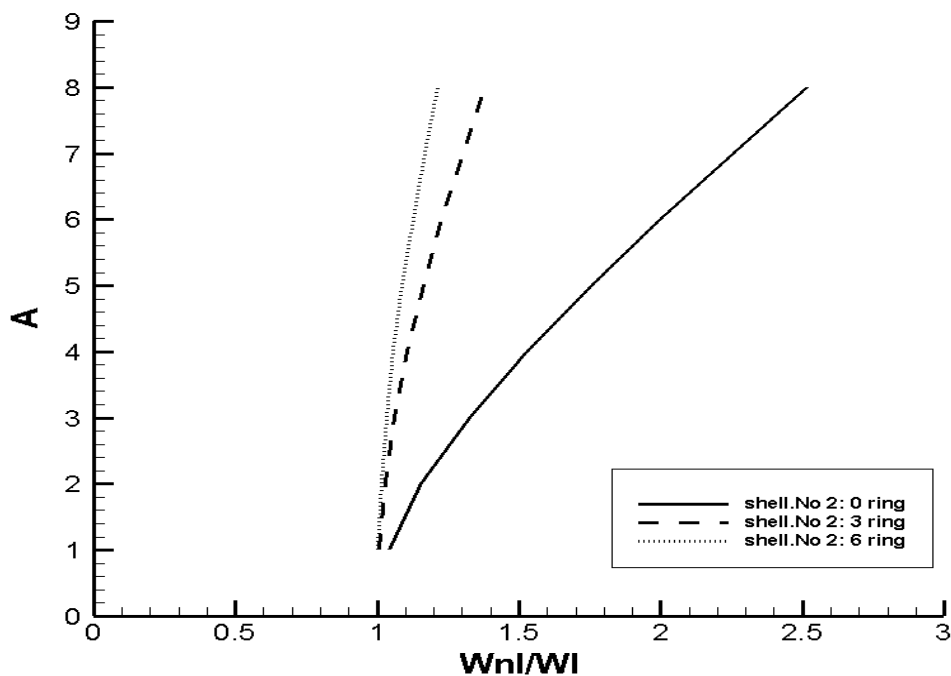
از سوی دیگر همانطور که طبق منحنی مشهود است، افزایش تعداد تقویت کننده های طولی باعث

غیرخطی تر شدن سازه می گردد، یعنی افزایش نسبت فرکانس طبیعی غیرخطی به فرکانس طبیعی

خطی، به دامنه بی بعد، با تعداد تقویت کننده های طولی نسبت مستقیم دارد.

۲-۴-۴) بررسی تأثیر تعداد تقویت‌کننده‌های رینگی

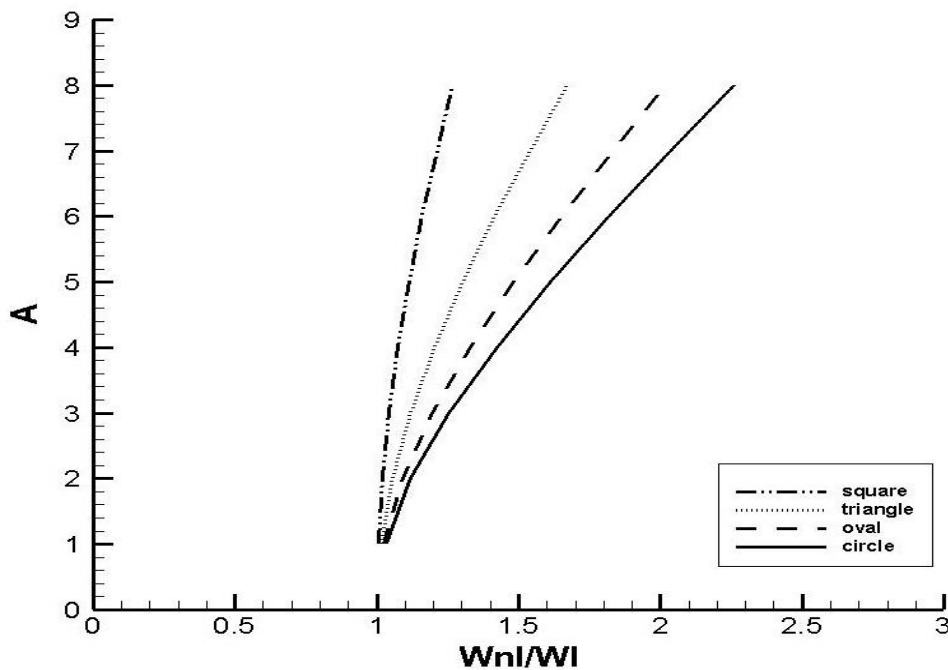
برای بررسی تأثیر تعداد تقویت‌کننده‌های رینگی، تغییرات $\frac{\omega_{nl}}{\omega_l}$ به دامنه‌ی بدون بعد برای پوسته‌ی شماره ۲ که مشخصات آن در اول فصل بیان گردید است به ازای تعداد تقویت‌کننده‌های رینگی متغیر مورد بررسی قرار گرفته است. در نتیجه در هر سه نمونه‌ی بیان شده در نمودار (۴-۵)، تعداد تقویت‌کننده‌های طولی ثابت و برابر ۳ و تعداد تقویت‌کننده‌های رینگی متغیر و برابر ۰، ۳ و ۶ بوده است. در این نمونه‌ها اولین موج طولی $m = 1$ و ششمین موج محیطی $n = 6$ در نظر گرفته شده است.



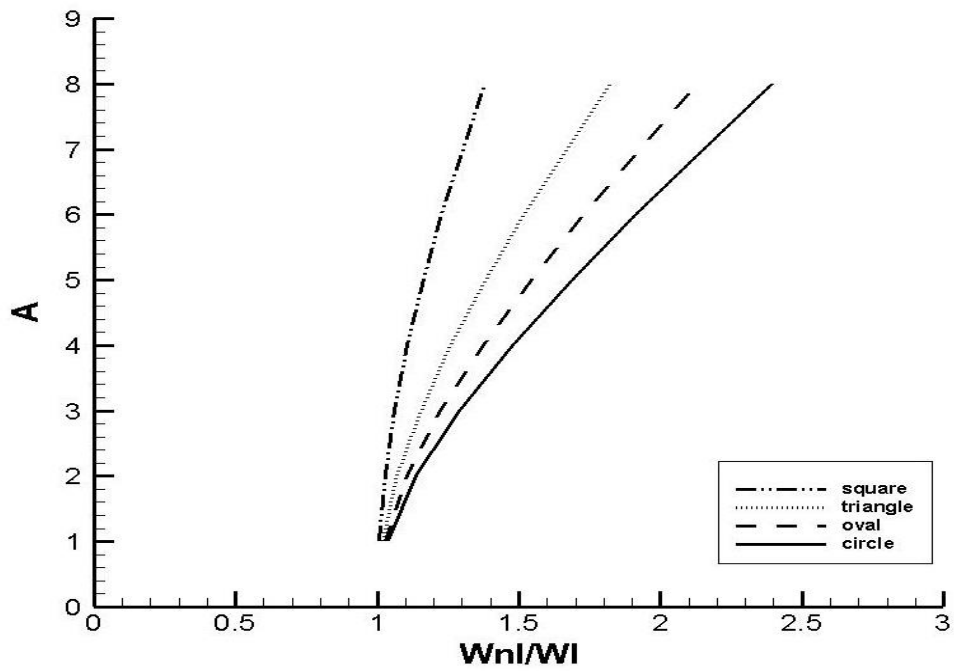
شکل ۴-۵: تغییرات $\frac{\omega_{nl}}{\omega_l}$ به دامنه بی‌بعد A برای پوسته‌ی شماره ۲ به ازای تعداد تقویت‌کننده‌های رینگی متفاوت همانطور که از منحنی مشهود است، کاهش تعداد تقویت‌کننده‌های رینگی باعث غیرخطی‌تر شدن سازه گردیده است، یعنی افزایش نسبت فرکانس طبیعی غیرخطی به فرکانس طبیعی خطی، به دامنه‌ی بدون بعد، با تعداد تقویت‌کننده‌های رینگی نسبت عکس دارد.

۳-۴-۴ بررسی تأثیر تغییر سطح مقطع‌های تقویت‌کننده‌ها

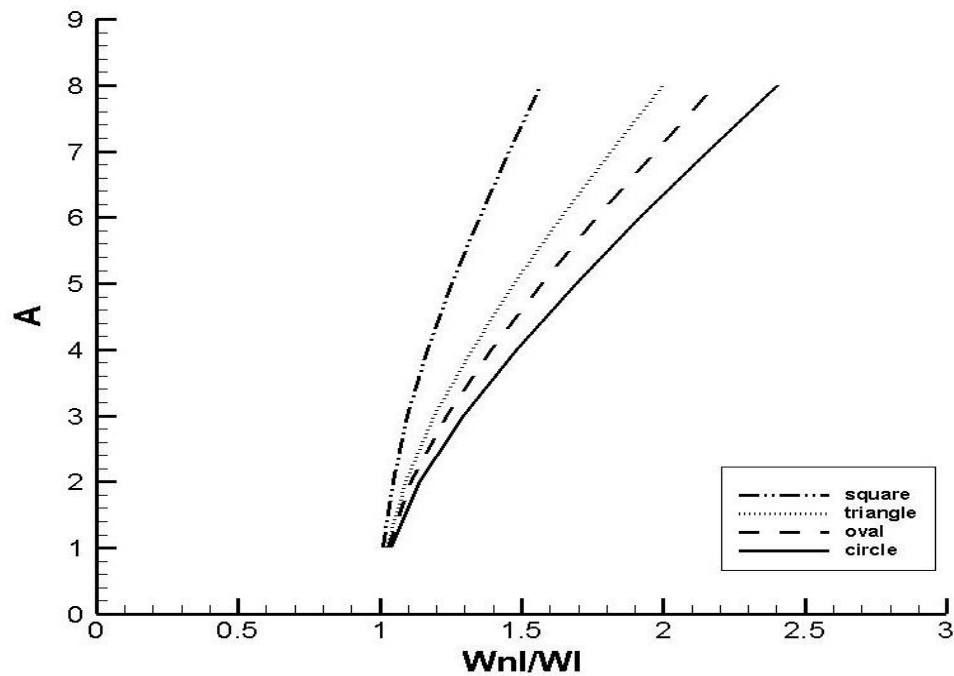
برای بررسی تأثیر تغییر سطح مقطع‌های تقویت‌کننده‌ها، نمودار تغییرات $\frac{\omega_{nl}}{\omega_l}$ به دامنه‌ی بدون بعد برای هر سه پوسته، به ازای سطح مقطع‌های متفاوت تقویت‌کننده‌ها، به صورت مربع، مثلث، بیضی و دایره، همانند نمودارهای (۴-۶)، (۴-۷) و (۴-۸) مورد بررسی قرار گرفته شده است. در این نمونه‌ها نیز اولین موج طولی $m = 1$ و ششمین موج محیطی $n = 6$ برای پوسته در نظر گرفته شده است.



شکل ۴-۶: تغییرات $\frac{\omega_{nl}}{\omega_l}$ به دامنه بی‌بعد A به ازای تغییر سطح مقطع‌های تقویت‌کننده‌ها برای پوسته ۱



شکل ۴-۷: تغییرات $\frac{\omega_{nl}}{\omega_l}$ به دامنه بی بعد A به ازای تغییر سطح مقطع‌های تقویت‌کننده‌ها برای پوسته ۲

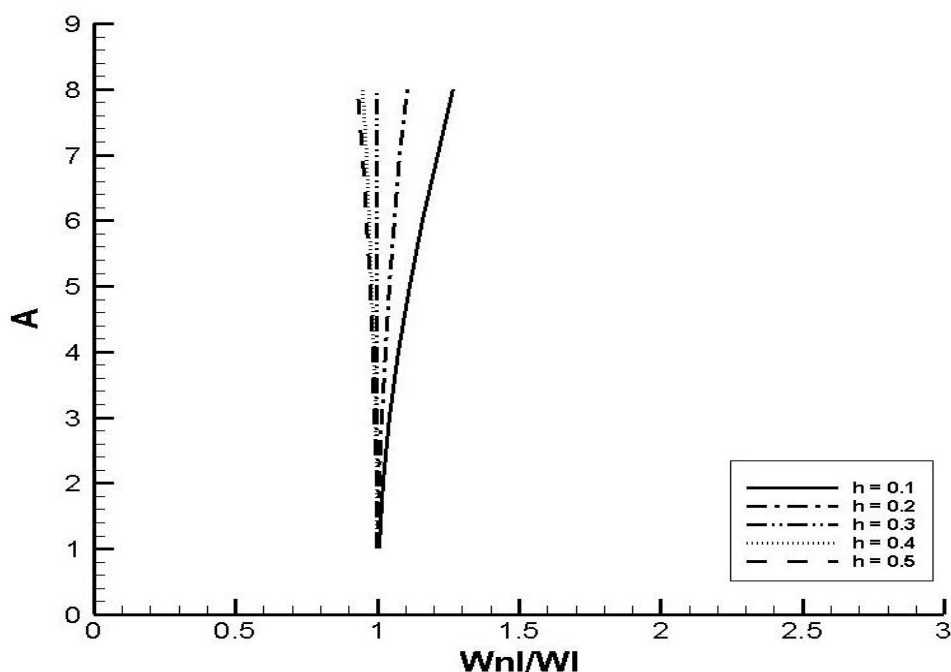


شکل ۴-۸: تغییرات $\frac{\omega_{nl}}{\omega_l}$ به دامنه بی بعد A به ازای تغییر سطح مقطع‌های تقویت‌کننده‌ها برای پوسته ۳

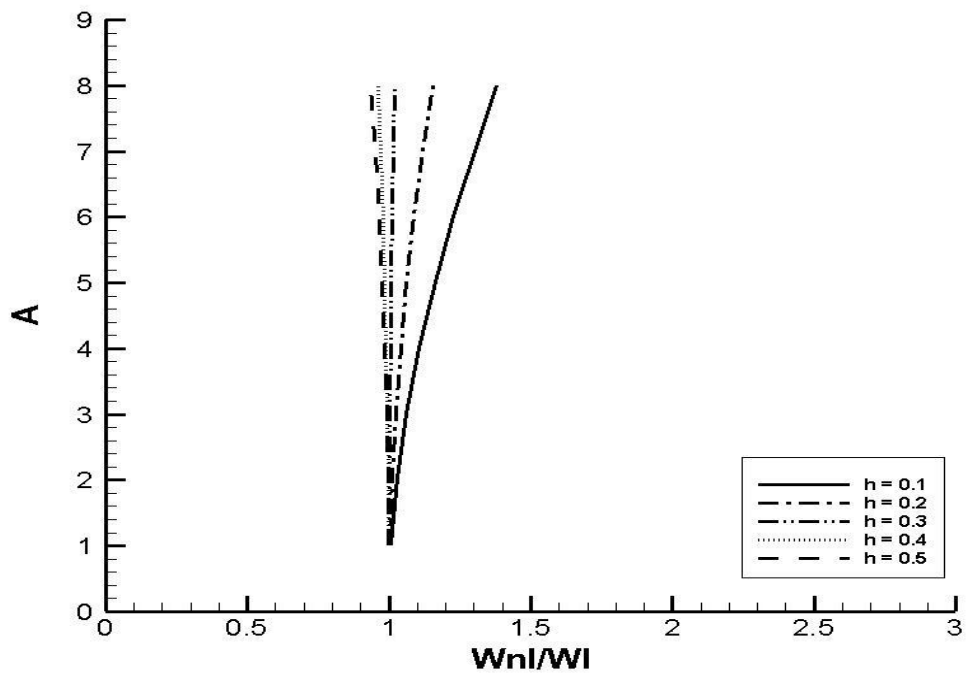
با توجه به نمودارهای فوق هر چه نسبت $\frac{\omega_{nl}}{\omega_l}$ کمتر باشد، سیستم رفتار خطی‌تری ارائه می‌دهد، در نتیجه با توجه به نمودارها بهترین رفتار سیستم به ترتیب برای سطح مقطع‌های مربع، مثلث، بیضی و دایره می‌باشد که به ترتیب نسبت $\frac{\omega_{nl}}{\omega_l}$ کمتری را دارا می‌باشند.

۴-۴-۴ بررسی تأثیر تغییر ضخامت پوسته

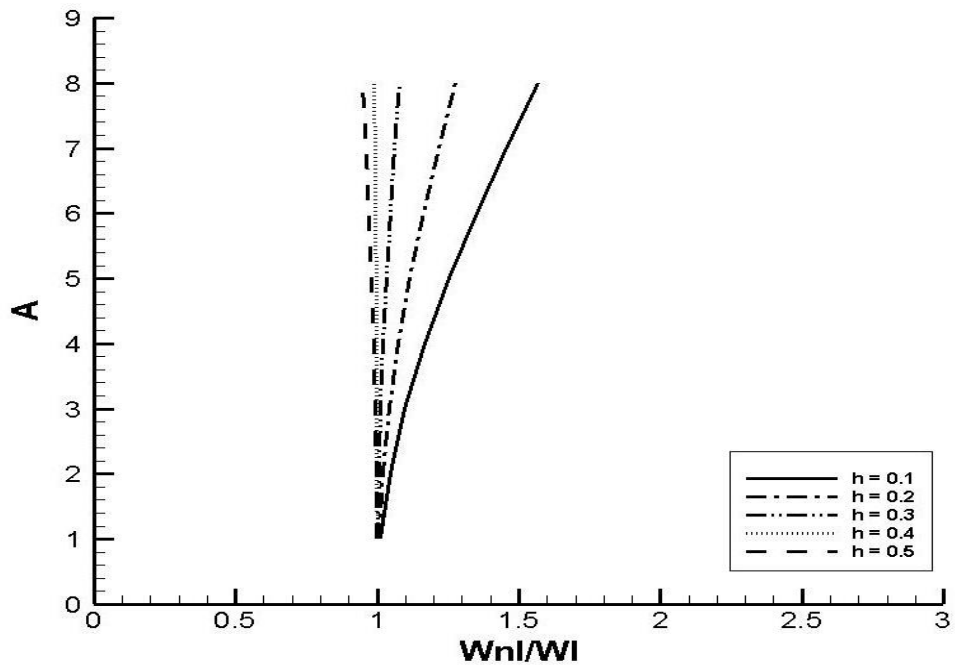
برای بررسی تأثیر تغییر ضخامت پوسته، تغییرات $\frac{\omega_{nl}}{\omega_l}$ به دامنه‌ی بدون بعد برای هر سه پوسته، به ازای ضخامت‌های ۰/۱ تا ۰/۵، به صورت نمودارهای (۴-۹)، (۴-۱۰)، و (۴-۱۱) مورد بررسی قرار گرفته شده است. در این نمونه‌ها نیز اولین موج طولی $m = 1$ و ششمین موج محیطی $n = 6$ برای پوسته در نظر گرفته شده است.



شکل ۴-۹: تغییرات $\frac{\omega_{nl}}{\omega_l}$ به دامنه بی‌بعد A به ازای ضخامت‌های مختلف برای پوسته ۱



شکل ۴-۱۰: تغییرات $\frac{\omega_{nl}}{\omega_l}$ به دامنه بی بعد A به ازای ضخامت‌های مختلف برای پوسته ۲

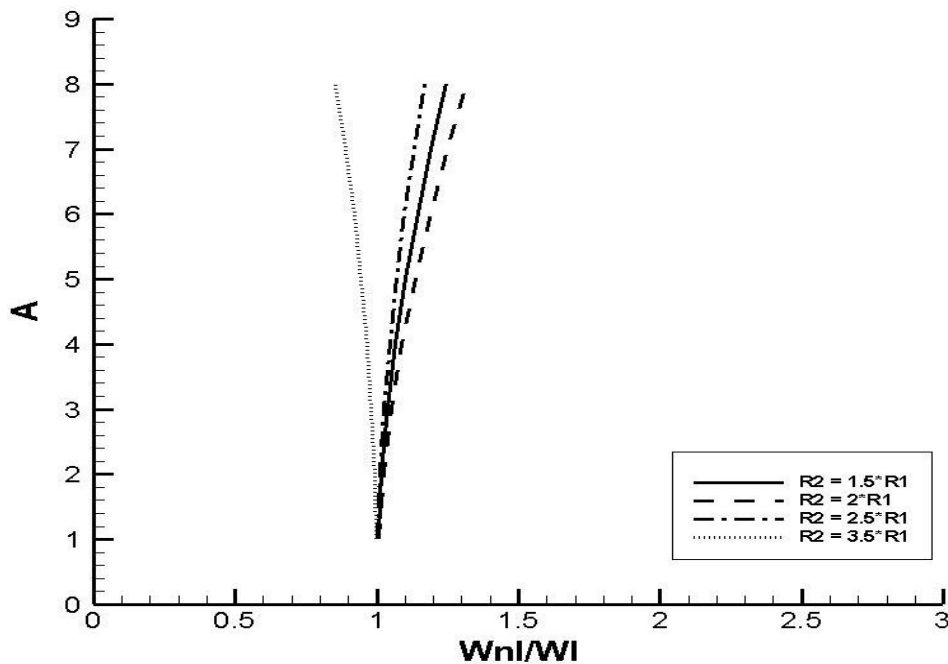


شکل ۴-۱۱: تغییرات $\frac{\omega_{nl}}{\omega_l}$ به دامنه بی بعد A به ازای ضخامت‌های مختلف برای پوسته ۳

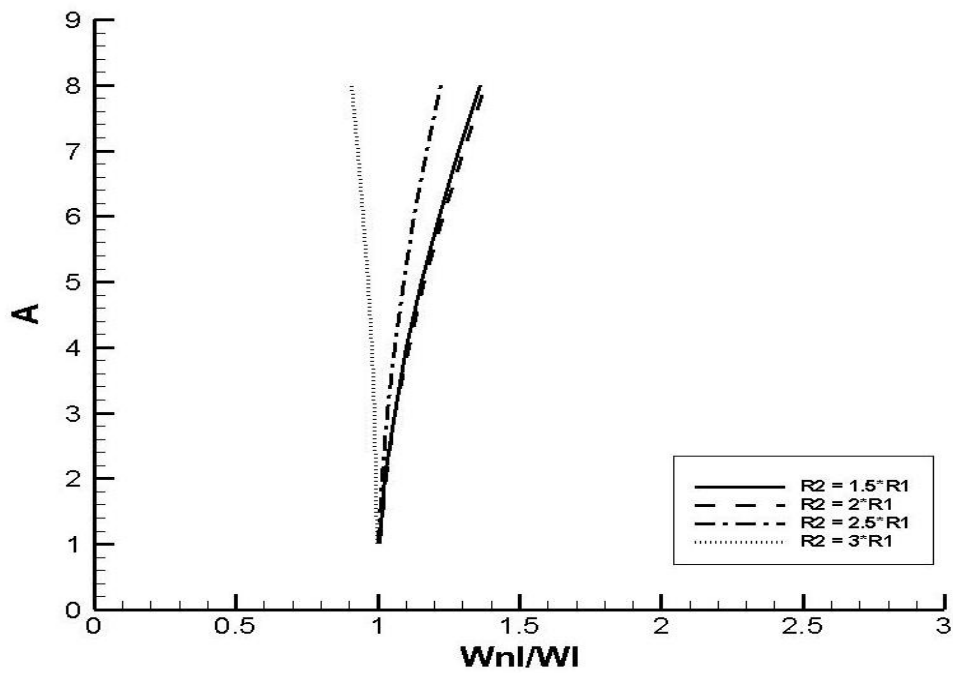
بدیهی است که افزایش ضخامت باعث کاهش میزان غیرخطی بودن سیستم می‌گردد. همانطور که نمودارهای فوق نشان می‌دهد، افزایش h باعث کاهش نسبت $\frac{\omega_{nl}}{\omega_l}$ شده است که این امر نشان دهنده‌ی رفتار خطی‌تر سیستم به ازای ضخامت‌های بیشتر است. همانطور که ملاحظه می‌شود، نسبت $\frac{\omega_{nl}}{\omega_l}$ با افزایش ضخامت کاهش یافته است.

۴-۴-۵) بررسی تأثیر تغییر نسبت قاعده‌ی بزرگ به کوچک پوسته

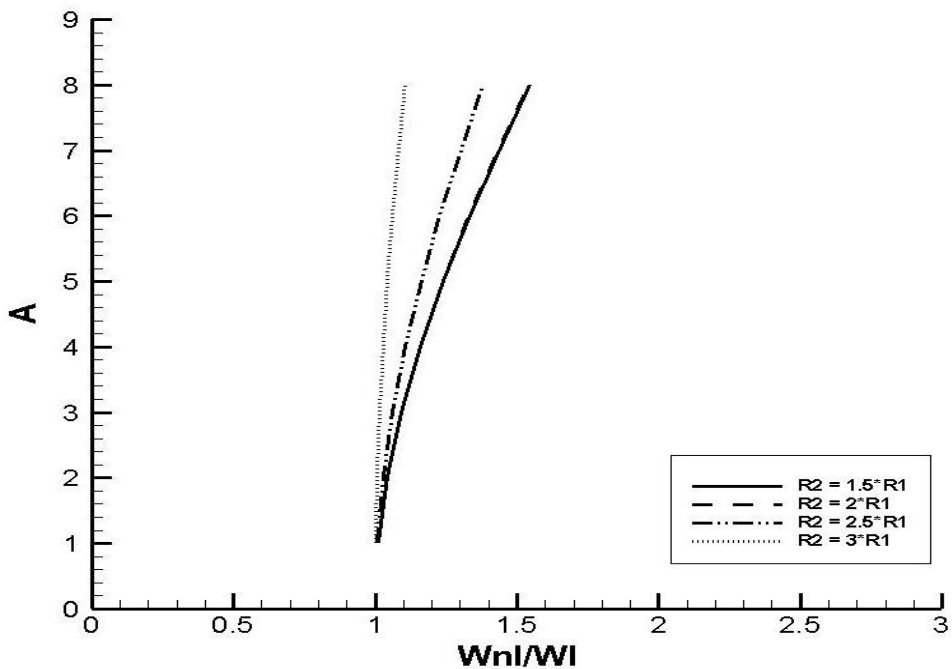
برای بررسی تأثیر تغییر نسبت قاعده‌ی بزرگ به کوچک پوسته، تغییرات $\frac{\omega_{nl}}{\omega_l}$ به دامنه‌ی بدون بعد برای هر سه پوسته، به ازای $\frac{R_2}{R_1}$ های متفاوت، به صورت نمودارهای (۴-۱۲)، (۴-۱۳) و (۴-۱۴) مورد بررسی قرار گرفته شده است. در این نمونه‌ها نیز اولین موج طولی $m = 1$ و ششمین موج محیطی $n = 6$ برای پوسته در نظر گرفته شده است.



شکل ۴-۱۲: تغییرات $\frac{\omega_{nl}}{\omega_l}$ به دامنه بی‌بعد A به ازای $\frac{R_2}{R_1}$ های مختلف برای پوسته ۱



شکل ۴-۱۳: تغییرات $\frac{\omega_{nl}}{\omega_l}$ به دامنه بی بعد A به ازای $\frac{R_2}{R_1}$ های مختلف برای پوسته ۲



شکل ۴-۱۴: تغییرات $\frac{\omega_{nl}}{\omega_l}$ به دامنه بی بعد A به ازای $\frac{R_2}{R_1}$ های مختلف برای پوسته ۳

از آنجا که با افزایش نسبت $\frac{R_2}{R_1}$ ، سیستم مخروطی تر می شود یعنی زاویه ی رأس بزرگتر می شود و به عبارت دیگر سطح پایینی مخروط افزایش می یابد و سیستم رفتار خطی تری نشان می دهد، در نتیجه همانطور که در نمودارهای مذکور نشان می دهد، با افزایش نسبت $\frac{R_2}{R_1}$ ، تا میزان مشخصی نسبت $\frac{\omega n l}{\omega l}$ کاهش یافته است که این امر بیان کننده ی رفتار خطی تر سیستم به ازای سطح قاعده ی بزرگتر می باشد. اما از میزان مشخصی به بعد با افزایش نسبت $\frac{R_2}{R_1}$ ، سازه از حالت مخروطی خارج شده و این امر سبب کاهش نسبت $\frac{\omega n l}{\omega l}$ گردیده است.

فصل پنجم :

تحليل ارتعاشات اجبارى و بررسى رزونانس

اوليه

۵-۱ مقدمه

در این فصل به بررسی ارتعاشات اجباری^۱ پوسته‌ی مخروطی ناقص تقویت‌شده با رینگ‌ها و تقویت‌کننده‌های طولی و بررسی رزونانس اولیه‌ی^۲ پوسته‌ی مخروطی پرداخته شده است. هدف از این بررسی به دست آوردن پاسخ فرکانسی^۳ و بررسی رفتار سیستم از نظر سخت شوندگی و یا نرم شوندگی می‌باشد.

۵-۲ استخراج معادله‌ی حرکت حاکم بر اساس ارتعاشات اجباری

برای بررسی ارتعاشات اجباری، سیستم تحت تأثیر نیروی هارمونیک جانبی (در جهت ضخامت) به صورت رابطه‌ی (۵-۱) قرار گرفته است [۹۷]:

$$F = f' \sin(\beta_1 x) \sin(\beta_2 \phi) \cos(\Omega t) \quad (۱-۵)$$

در رابطه‌ی فوق f' نشان دهنده‌ی دامنه‌ی تحریک می‌باشد که در ادامه برابر با عدد ثابت ۱ در نظر گرفته شده است. با بیان رابطه‌ی فوق، شکل ناهمگن رابطه‌ی (۷-۳)، به صورت رابطه‌ی (۲-۵) استخراج گردیده است [۹۷]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Q_0 u + Q_1 u^3 + Q_2 u^5 = f_1 \cos(\Omega t) \quad (۲-۵)$$

در رابطه‌ی (۲-۵)، برای آنکه تأثیر ترم‌های غیرخطی بر نیروی تحریک مشاهده شود، ترم‌های غیرخطی و نیروی هارمونیک تحریک به صورت رابطه‌ی (۳-۵)، در ε ضرب شده است تا با یکدیگر، هم مرتبه شوند.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Q_0 u + \varepsilon Q_1 u^3 + \varepsilon^2 Q_2 u^5 = \varepsilon f_1 \cos(\Omega t) \quad (۳-۵)$$

در رابطه‌ی (۳-۵)، Q_0 مربع فرکانس طبیعی خطی را نشان می‌دهد، یعنی ($Q_0 = \omega_L^2$)

¹ Forced vibration

² Primary resonance

³ Frequency response

۵-۳ بررسی رزونانس اولیه^۱

برای بررسی رزونانس اولیه یا همان تشدید پایه، فرض می‌شود که فرکانس تحریک Ω و فرکانس خطی سیستم ω_L ، به یکدیگر نزدیک هستند. از این رو بجای استفاده از فرکانس تحریک Ω یک پارامتر تنظیم^۲ σ ، که میزان نزدیکی Ω را به ω_L نشان می‌دهد به صورت رابطه‌ی (۴-۵)، تعریف می‌شود [۹۷]. این تعریف این مزیت را دارد که ترم‌هایی که در معادله‌ی حرکت، سکولار یا نزدیک سکولار می‌باشند قابل شناسایی هستند. در رابطه‌ی (۴-۵)، $\omega_0 = \omega_L$ است.

$$\Omega = \omega_0 + \varepsilon\sigma \quad (۴-۵)$$

پاسخ تقریبی مسئله با استفاده از تئوری اغتشاشات (هموتوپی پرتوربیشن)^۳ و روش مقیاس‌های چندگانه^۴ به دست خواهد آمد. از این رو بر اساس این روش، پاسخ در مقیاس‌های زمانی مختلف به صورت رابطه‌ی

$$(۵-۵) \quad (T_1 = \varepsilon t \text{ و } T_0 = t \text{ در نتیجه } T_n = \varepsilon^n t \text{ در رابطه‌ی فوق [۹۹]:})$$

$$u(t; \varepsilon) = u_0(T_0, T_1) + \varepsilon u_1(T_0, T_1) + O(\varepsilon^2) \quad (۵-۵)$$

همانطور که می‌دانید در روش مقیاس‌های چندگانه، مشتق زمانی نیز بر حسب پارامترهای چندگانه‌ی زمانی به صورت رابطه‌ی (۵-۶) بیان می‌شود [۹۸]:

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots \quad (۶-۵)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_1) + \dots$$

بر اساس تعریف‌های گفته شده، تحریک نیز بر حسب $T_0 = t$ و $T_1 = \varepsilon t$ به صورت زیر بازنویسی شده است [۹۸]:

$$F(t) = \varepsilon f_1 \cos(\omega_0 T_0 + \sigma T_1) \quad (۷-۵)$$

¹ Primary resonance

² Detuning parameter

³ Homotopy perturbation method

⁴ Multiple scale method

با جایگذاری روابط (۵-۵)، (۵-۶) و (۵-۷) در رابطه‌ی (۵-۳) و برابر صفر قرار دادن جملات با ضرایب ε^0 و ε^1 دو معادله‌ی زیر استخراج گردیده است [۹۸]:

$$\varepsilon^0: D_0^2 + \omega_0^2 u_0 = 0 \quad (۸-۵)$$

$$\varepsilon^1: D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = [f_1 \cos(\omega_0 T_0 + \sigma T_1) - 2D_0 D_1 u_0 - Q_1 u_0^3] \quad (۹-۵)$$

حال برای به دست آوردن پاسخ فرکانسی پوسته‌ی مخروطی ناقص، عبارت‌های سکولار باید از معادله حذف گردد. برای این کار ابتدا پاسخ رابطه‌ی (۵-۸) در رابطه‌ی (۵-۹) جایگذاری شده و سپس عبارات شامل $e^{i\omega_0 T_0}$ که ایجاد سکولارترم می‌کنند از معادله حذف گردیده است.

پاسخ همگن معادله‌ی (۵-۸)، به صورت رابطه‌ی (۵-۱۰) است [۹۸]:

$$u_0 = A(T_1) e^{i\omega_0 T_0} + \bar{A}(T_1) e^{-i\omega_0 T_0} \quad (۱۰-۵)$$

در رابطه‌ی (۵-۱۰)، $A(T_1)$ یک تابع مجهول و \bar{A} مزدوج مختلط آن می‌باشد، که با حذف ترم‌های سکولار از رابطه‌ی (۵-۹) به دست آمده است.

با جایگذاری رابطه‌ی (۵-۱۰) در رابطه‌ی (۵-۹) و بازنویسی $f_1 \cos(\omega_0 T_0 + \sigma T_1)$ در فرم قطبی، و حذف سکولارترم‌ها، معادله‌ی حل پذیریه به دست آمده است که ترم سکولار آن به صورت رابطه‌ی (۱۱-۵) استخراج گردیده است [۹۸]:

$$2i\omega_0 D_1 A + 3Q_1 A^2 \bar{A} - \frac{1}{2} f_1 \exp(i\sigma T_1) = 0 \quad (۱۱-۵)$$

برای حل رابطه‌ی فوق، A در فرم قطبی زیر نوشته شده است [۹۸]:

$$A = \frac{1}{2} a \exp(i\beta) \quad (۱۲-۵)$$

در رابطه‌ی (۵-۱۲)، a و β حقیقی بوده و به ترتیب دامنه و فاز می‌باشند.

پس از جایگذاری رابطه‌ی (۵-۱۲)، در (۵-۱۱) و جدا کردن دو قسمت حقیقی و موهومی رابطه‌ی حاصل، رابطه‌ی (۵-۱۳) استخراج گردیده است [۹۸]:

$$a' = \frac{1}{2} \frac{f_1}{\omega_0} (\sin(\sigma T_1 - \beta)) \quad (۱۳-۵)$$

$$a\beta' = \frac{3}{8} \frac{Q_1}{\omega_0} a^3 - \frac{1}{2} \frac{f_1}{\omega_0} \cos(\sigma T_1 - \beta)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۵-۱۲) در (۵-۱۰) و نتیجه‌ی آن در رابطه‌ی (۵-۵)، اولین تقریب برای معادله، به صورت رابطه‌ی (۵-۱۴) به دست آمده است [۹۸].

$$u = a \cos(\omega_0 t + \beta) + O(\varepsilon) \quad (۱۴-۵)$$

در رابطه‌ی فوق a و β از رابطه‌ی (۵-۱۳)، به دست می‌آیند.

با در نظر گرفتن $\gamma = \sigma T_1 - \beta$ ، و حذف T_1 از معادلات، معادلات فوق می‌توانند به یک سیستم مستقل (خودگردان)^۱، تبدیل شوند. این تبدیل، معادلات زیر را به همراه دارد [۹۸]:

$$a' = \frac{1}{2} \frac{f_1}{\omega_0} (\sin(\gamma)) \quad (۱۵-۵)$$

$$a\gamma' = a\sigma - \frac{3}{8} \frac{Q_1}{\omega_0} a^3 + \frac{1}{2} \frac{f_1}{\omega_0} \cos(\gamma)$$

نقطه‌ای که در آن $a' = 0$ و $\gamma' = 0$ می‌باشند، متناظر با نقطه‌ی تکین معادله است که شرایط حالت پایدار را نشان می‌دهد. با جایگذاری شرایط حالت پایدار در معادلات (۵-۱۵)، معادلات (۵-۱۶) استخراج گردیده است [۹۸]:

$$\sin(\gamma) = 0 \quad (۱۶-۵)$$

$$a\sigma - \frac{3}{8} \frac{Q_1}{\omega_0} a^3 = -\frac{1}{2} \frac{f_1}{\omega_0} \cos(\gamma)$$

¹ Autonomous system

پس از به توان دو رساندن دو معادله‌ی رابطه‌ی (۵-۱۶)، و جمع آنان با یکدیگر، معادله‌ی ضمنی برای پاسخ فرکانسی a به عنوان تابعی از پارامتر تنظیم σ (یا تابعی از فرکانس تحریک) و دامنه‌ی تحریک f_1 در حالت رزونانس‌های پایه به صورت رابطه‌ی (۵-۱۷)، به دست آمده است [۹۸]:

$$\left(a\sigma - \frac{3Q_1}{8\omega_0}a^3\right)^2 = \frac{f_1^2}{4\omega_0^2} \quad (۱۷-۵)$$

با حل رابطه‌ی (۵-۱۷)، σ به صورت رابطه‌ی (۵-۱۸) استخراج گردیده است:

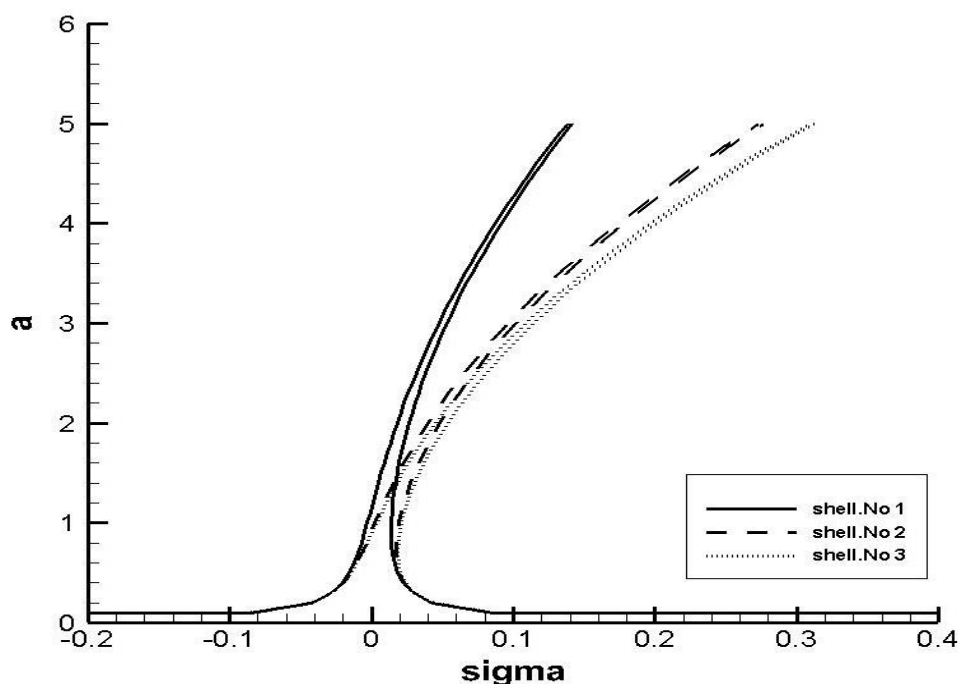
$$\sigma_{1,2} = \frac{3Q_1}{8\omega_0}a^2 \pm \left(\frac{f_1^2}{4\omega_0^2a^2}\right)^{1/2} \quad (۱۸-۵)$$

۵-۳-۱) نمودار معادله‌ی پاسخ فرکانسی^۱ برای رزونانس اولیه

با توجه به رابطه‌ی (۵-۱۷) و (۵-۱۸)، نمودار پاسخ فرکانسی برای پوسته‌ی مخروطی مذکور رسم گردیده است، این نمودار یعنی نمودار a به عنوان تابعی از σ برای f_1 های داده شده، منحنی پاسخ فرکانسی خوانده می‌شود و هر نقطه در این نمودار متناظر با یک نقطه‌ی تکین در یک فضای حالت مختلف می‌باشد.

در شکل (۵-۱)، نمودار پاسخ فرکانسی برای سه پوسته گفته شده در فصل چهار، به ازای اولین موج طولی $m = 1$ و ششمین موج محیطی $n = 6$ و مقدار یکسان ضریب ثابت $f_1 = 1$ رسم گردیده است.

^۱ Frequency-Response curve



شکل ۵-۱: نمودار پاسخ فرکانسی برای سه پوسته به ازای تعداد تقویت‌کننده‌های طولی متفاوت در رزونانس اولیه در نمودار σ برحسب a یعنی نمودار شکل (۵-۱)، انحراف منحنی به سمت راست، سخت‌شوندگی سیستم و انحراف به سمت چپ نرم‌شوندگی سیستم را نشان می‌دهد. از این رو بررسی نمودار پاسخ فرکانسی در شکل (۵-۱)، نشان می‌دهد که پوسته‌ی مخروطی تقویت شده، به‌صورت یک سیستم غیرخطی سخت‌شونده^۱ عمل کرده است.

نکته‌ی دیگری که از بررسی نمودار فوق به‌دست می‌آید این است که افزایش تعداد تقویت‌کننده‌های طولی باعث افزایش میزان انحراف منحنی پاسخ فرکانسی گردیده و در نتیجه با افزایش تعداد تقویت‌کننده‌های طولی، سازه صلب‌تر گردیده است.

¹ Hardening-type

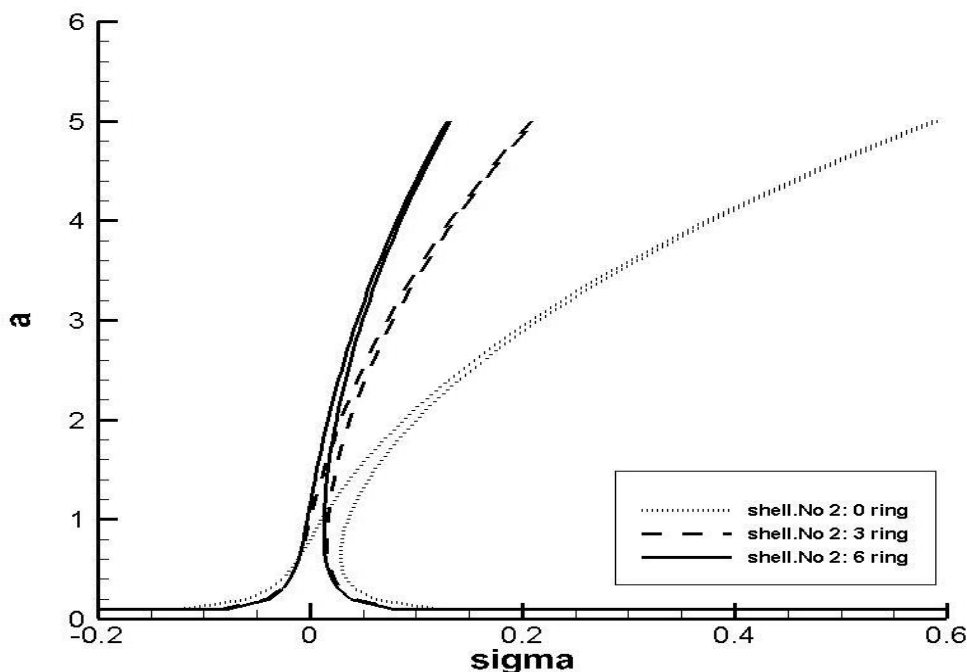
۴-۵ بررسی تأثیر پارامترهای مختلف بر پوسته در حالت رزونانس اولیه

در این بخش، همانند فصل قبل به بررسی تأثیرات پارامترهای مختلف شامل تغییر تعداد تقویت کننده‌های طولی (شکل ۵-۱، که قبل تر بررسی گردید)، تغییر تعداد تقویت کننده‌های رینگی، تغییر زاویه‌ی رأس، تغییر ضخامت پوسته و همچنین تغییر نسبت قاعده‌ی بزرگ به قاعده‌ی کوچک پوسته در حالت رزونانس اولیه پرداخته شده است.

۵-۴-۱ بررسی تأثیر تعداد تقویت کننده‌های رینگی در حالت رزونانس اولیه

در شکل (۲-۵)، نمودار پاسخ فرکانسی برای پوسته‌ی ۲، به ازای تعداد تقویت کننده‌های طولی ثابت و برابر ۳ و تعداد تقویت کننده‌های رینگی متغیر و برابر ۰، ۳ و ۶ مورد بررسی قرار گرفته است.

در این نمونه‌ها اولین موج طولی $m = 1$ و ششمین موج محیطی $n = 6$ و مقدار یکسان ضریب ثابت $f_1 = 1$ فرض شده است.



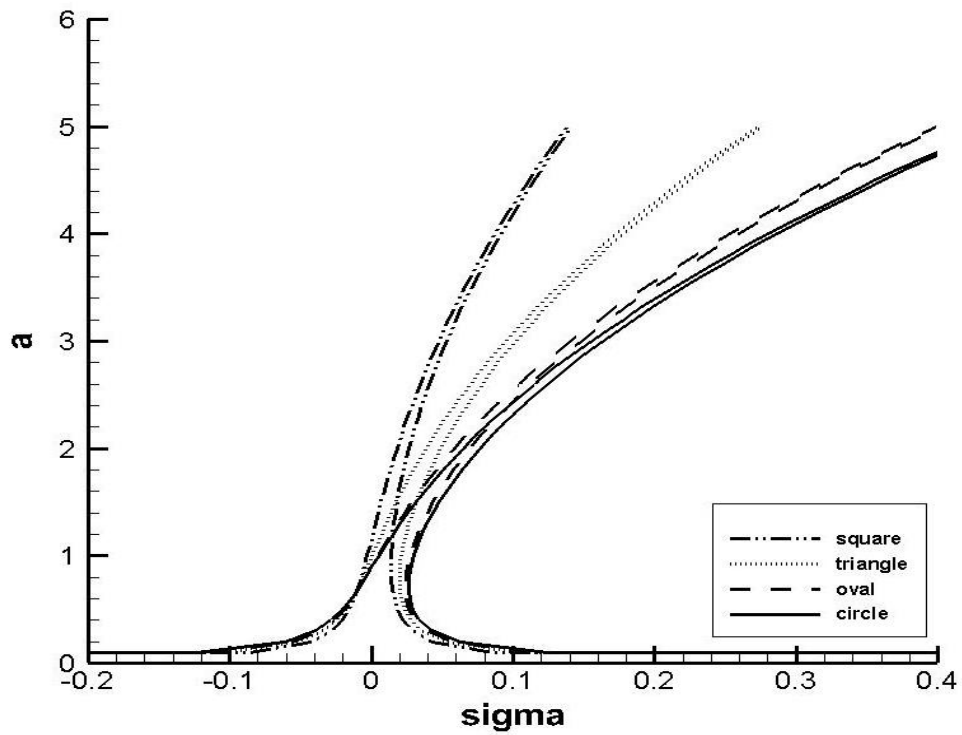
شکل ۵-۲: نمودار پاسخ فرکانسی برای پوسته ۲، به ازای تعداد تقویت کننده‌های رینگی متفاوت در رزونانس اولیه

براساس توضیحات داده شده و طبق نمودار پاسخ فرکانسی در شکل (۲-۵)، افزایش تعداد تقویت‌کننده‌های رینگی پوسته باعث کاهش میزان انحراف منحنی پاسخ فرکانسی به سمت راست گردیده است، در نتیجه با افزایش تعداد تقویت‌کننده‌های رینگی، سخت شوندگی سازه کاهش یافته است.

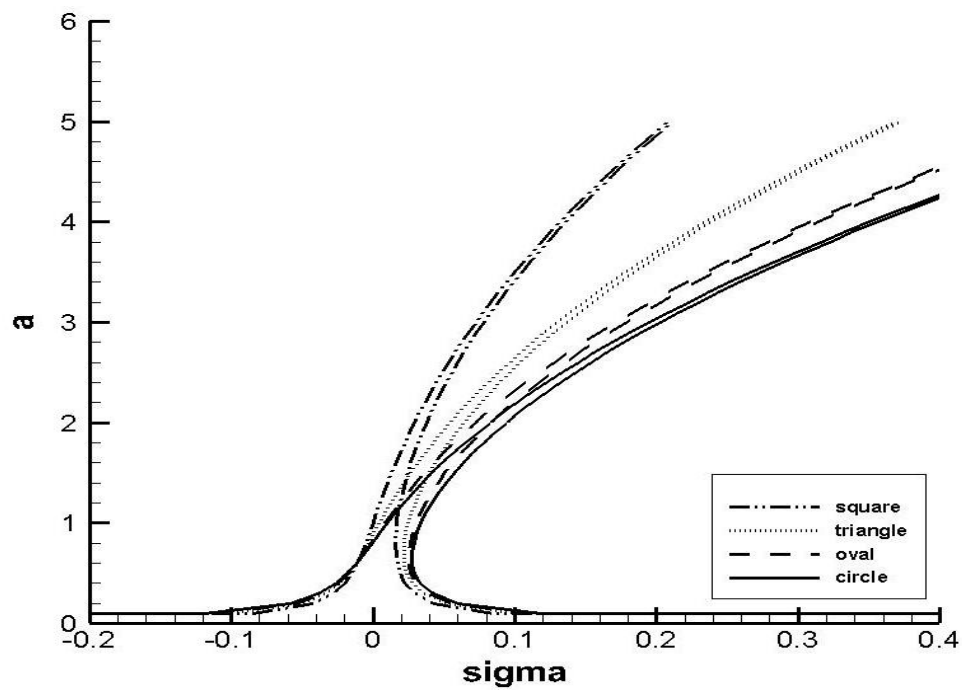
۲-۴-۵ بررسی تأثیر تغییر سطح مقطع‌های تقویت‌کننده‌ها در حالت رزونانس اولیه

برای بررسی تأثیر تغییر سطح مقطع‌های تقویت‌کننده‌ها، نمودار پاسخ فرکانسی برای هر سه پوسته به ازای سطح مقطع‌های متفاوت تقویت‌کننده‌ها، به صورت مربع، مثلث، بیضی و دایره، به صورت نمودارهای (۳-۵)، (۴-۵) و (۵-۵) مورد بررسی قرار گرفته است.

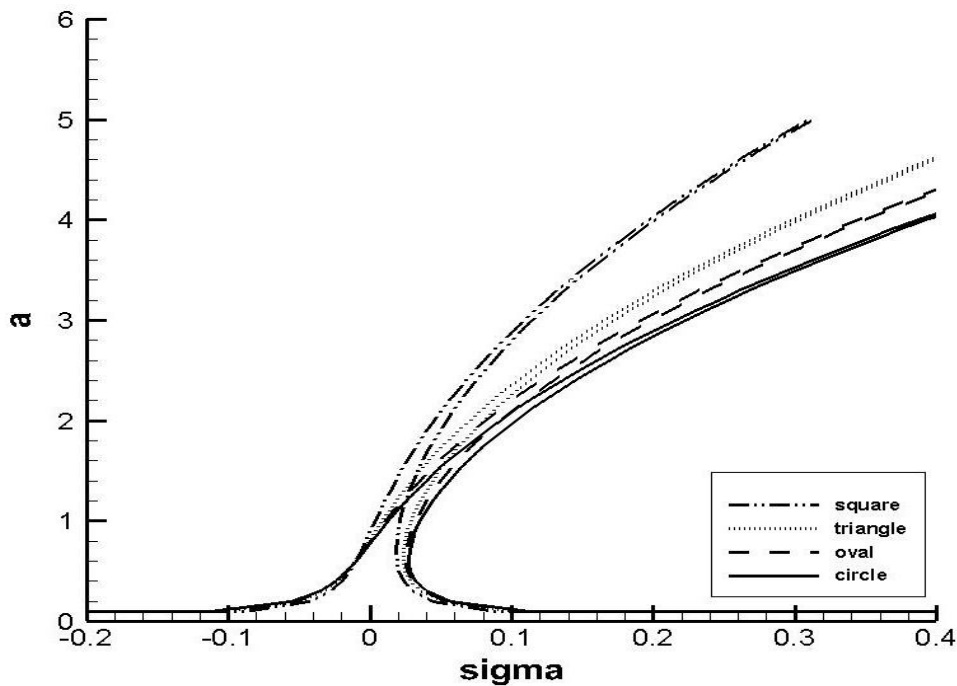
در این نمونه‌ها اولین موج طولی $m = 1$ و ششمین موج محیطی $n = 6$ و مقدار یکسان ضریب ثابت $f_1 = 1$ فرض شده است.



شکل ۳-۵: نمودار پاسخ فرکانسی به ازای سطح مقطع‌های متفاوت تقویت‌کننده‌ها برای پوسته ۱ در رزونانس اولیه



شکل ۴-۵: نمودار پاسخ فرکانسی به ازای سطح مقطع‌های متفاوت تقویت‌کننده‌ها برای پوسته ۲ در رزونانس اولیه

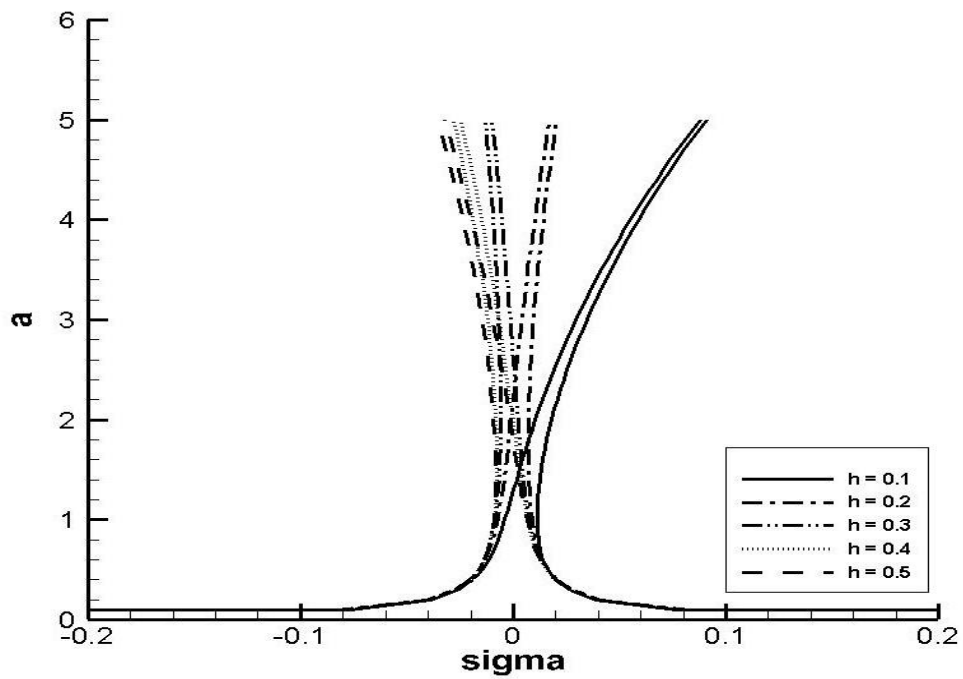


شکل ۵-۵: نمودار پاسخ فرکانسی به ازای سطح مقطع‌های متفاوت تقویت‌کننده‌ها برای پوسته ۳ در رزونانس اولیه براساس توضیحات داده شده، طبق نمودار پاسخ فرکانسی در شکل (۵-۳)، (۵-۴) و (۵-۵)، سطح مقطع مربع با کمترین میزان انحراف به سمت راست، کمترین سخت‌شوندگی و سطح مقطع نیم‌دایره با بیشترین میزان انحراف، بیشترین سخت‌شوندگی را دارا می‌باشد.

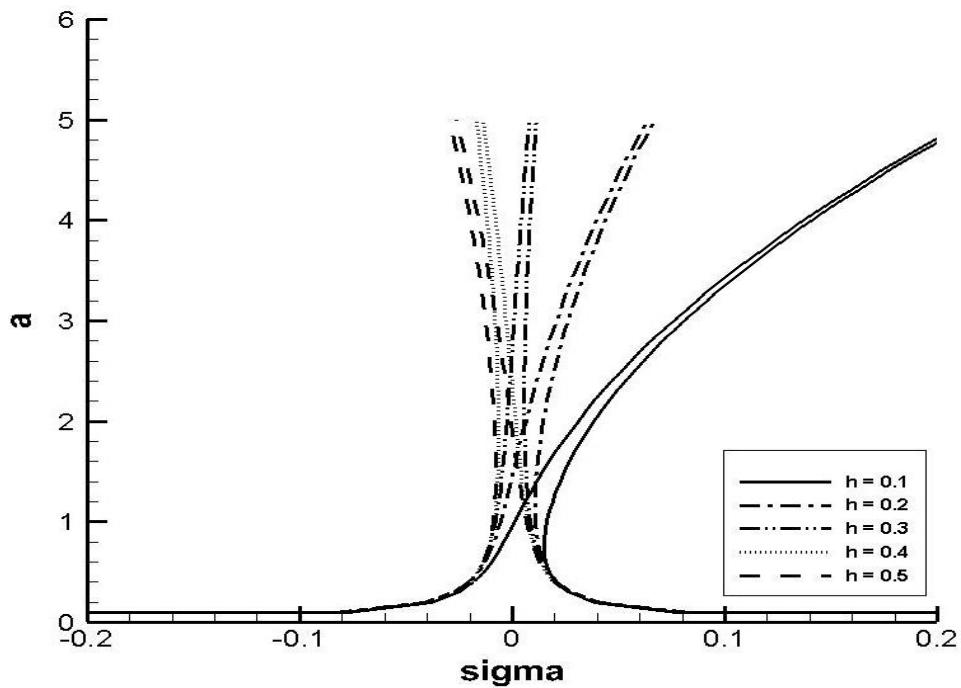
۵-۴-۳ بررسی تأثیر تغییر ضخامت پوسته در حالت رزونانس اولیه

برای بررسی تأثیر تغییر ضخامت پوسته، نمودار پاسخ فرکانسی برای هر سه پوسته به ازای ضخامت‌های ۰/۱ تا ۰/۵، به صورت نمودارهای (۵-۶)، (۵-۷) و (۵-۸) مورد بررسی قرار گرفته است.

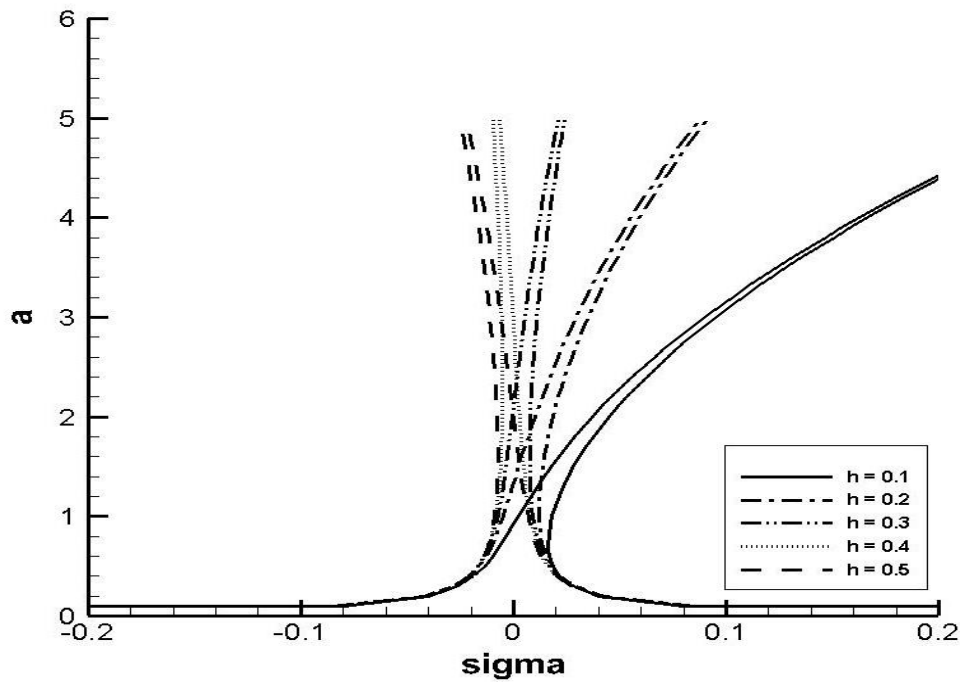
در این نمونه‌ها اولین موج طولی $m = 1$ و ششمین موج محیطی $n = 6$ و مقدار یکسان ضریب ثابت $f_1 = 1$ فرض شده است.



شکل ۵-۶: نمودار پاسخ فرکانسی به ازای ضخامت‌های مختلف برای پوسته ۱ در رزونانس اولیه



شکل ۵-۷: نمودار پاسخ فرکانسی به ازای ضخامت‌های مختلف برای پوسته ۲ در رزونانس اولیه



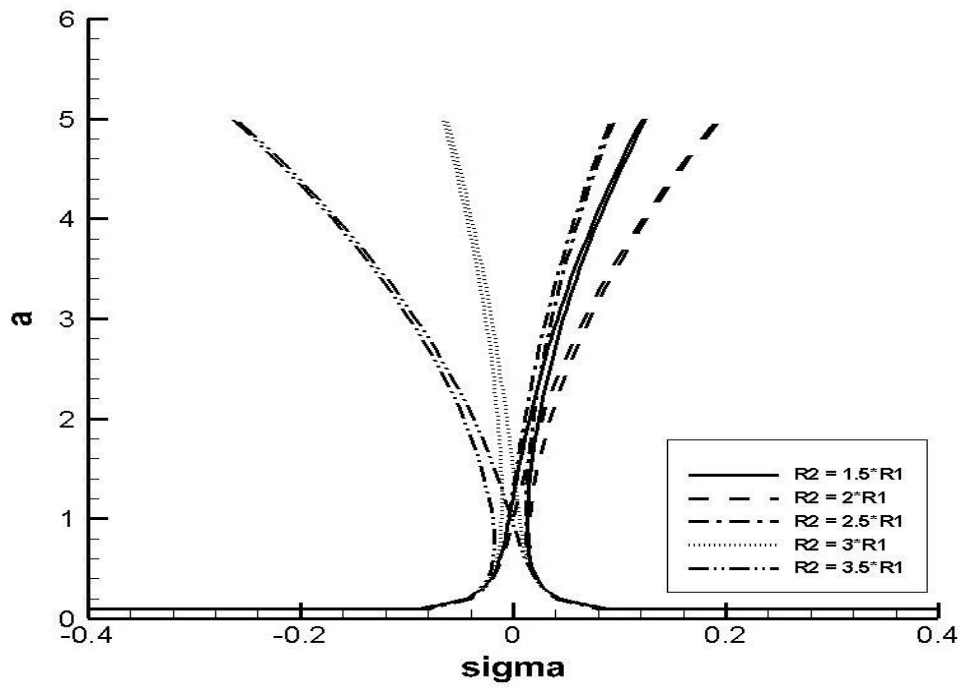
شکل ۵-۸: نمودار پاسخ فرکانسی به ازای ضخامت‌های مختلف برای پوسته ۳ در رزونانس اولیه

همانطور که در نمودارهای شکل (۵-۶)، (۵-۷) و (۵-۸) مشاهده می‌شود، افزایش ضخامت باعث انحراف منحنی به سمت چپ گردیده است که این امر موجب کاهش میزان سخت شونده‌گی سیستم شده است.

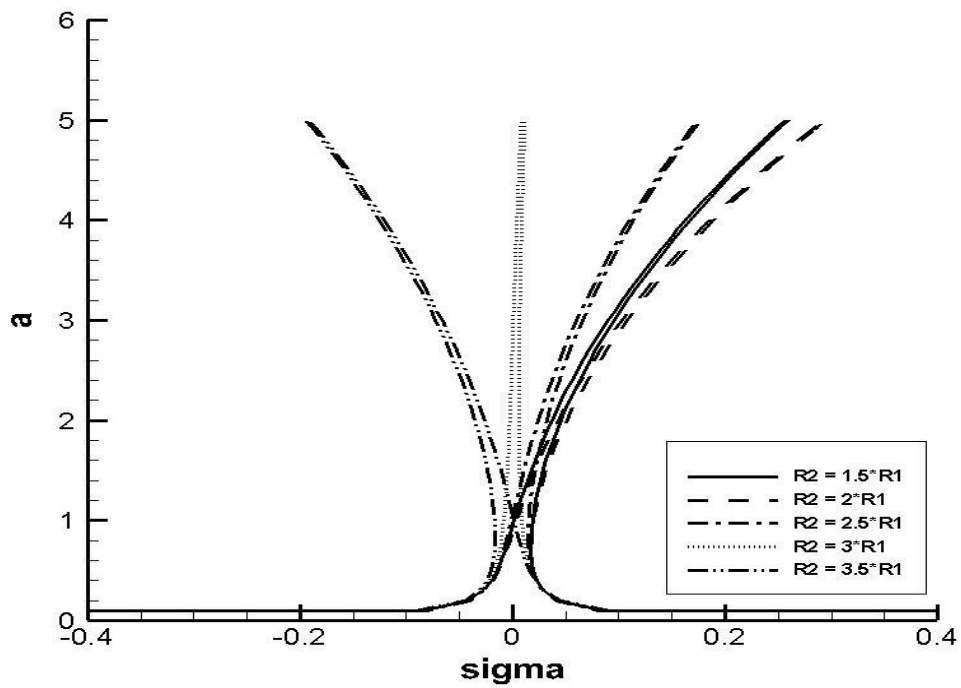
۵-۴-۴) بررسی تأثیر تغییر نسبت قاعده‌ی بزرگ به کوچک پوسته در حالت رزونانس اولیه

برای بررسی تأثیر تغییر نسبت قاعده‌ی بزرگ به کوچک پوسته، نمودار پاسخ فرکانسی برای هر سه پوسته به ازای $\frac{R_2}{R_1}$ های متفاوت، به صورت نمودارهای (۵-۹)، (۵-۱۰) و (۵-۱۱) مورد بررسی قرار گرفته است.

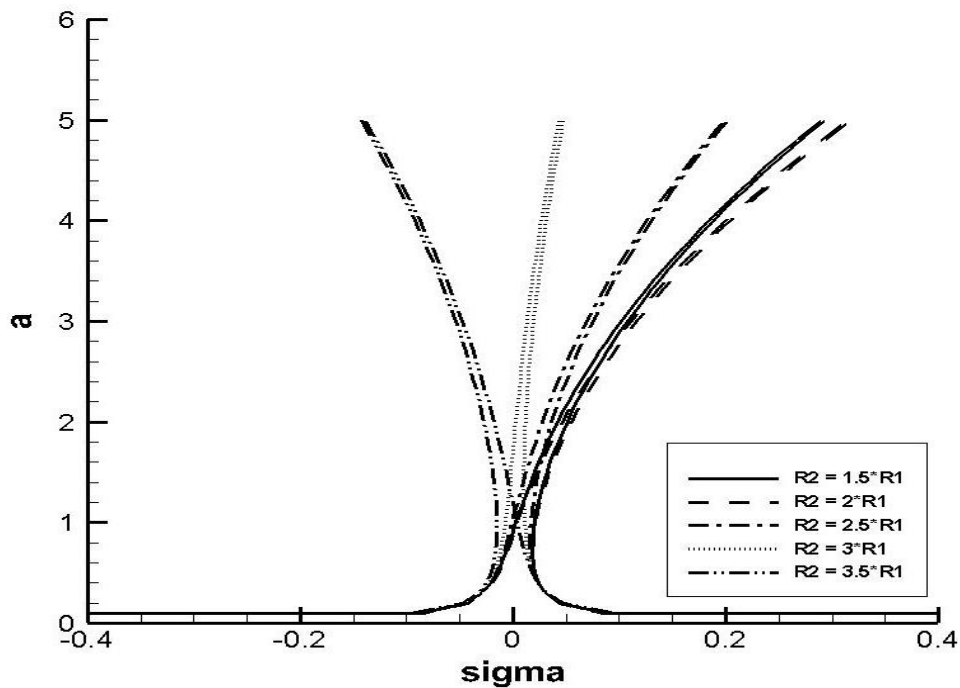
در این نمونه‌ها اولین موج طولی $m = 1$ و ششمین موج محیطی $n = 6$ و مقدار یکسان ضریب ثابت $f_1 = 1$ فرض شده است.



شکل ۵-۹: نمودار پاسخ فرکانسی به ازای $\frac{R_2}{R_1}$ های متفاوت برای پوسته ۱ در رزونانس اولیه



شکل ۵-۱۰: نمودار پاسخ فرکانسی به ازای $\frac{R_2}{R_1}$ های متفاوت برای پوسته ۲ در رزونانس اولیه



شکل ۵-۱۱: نمودار پاسخ فرکانسی به ازای $\frac{R_2}{R_1}$ های متفاوت برای پوسته ۳ در رزونانس اولیه

همانطور که در نمودارهای شکل (۵-۹)، (۵-۱۰) و (۵-۱۱) مشاهده می‌شود، افزایش نسب قاعده‌ی بزرگ به کوچک پوسته تا حدی مطلوب و موجب سخت شونده‌گی سیستم گردیده است، اما اختلاف این دو قاعده از میزان مشخصی که در نمودارها نشان داده شده است به بعد نتیجه‌ی عکس داشته و موجب انحراف منحنی به سمت چپ و در نتیجه نرم شونده‌گی سیستم گردیده است.

فصل ششم :

بررسی نانرزونانس و رزونانس های ثانویه

۶-۱ مقدمه

همانطور که در فصل قبل مشاهده شد، نیروی هارمونیک تحریک خارجی به صورت رابطه‌ی (۵-۱)، معرفی گردید و با توجه به معادله‌ی حاکم برای ارتعاشات اجباری، معادله‌ی پاسخ فرکانسی برای رزونانس اولیه طبق رابطه‌ی (۵-۱۷)، به دست آمد. در این فصل حالت نانرزونانس^۱ و رزونانس‌های ثانویه^۲ برای پوسته‌ی مخروطی ناقص، مورد مطالعه قرار گرفته است. در این حالت فرض شده است که فرکانس تحریک Ω از فرکانس خطی سیستم ω_L فاصله دارد. به عبارت دیگر دامنه‌ی تحریک مرتبه‌ی یک است.

۶-۲ بررسی نانرزونانس

در بررسی حالت نانرزونانس [۱۰۰]، فرکانس تحریک Ω از فرکانس خطی سیستم ω_L فاصله دارد و دامنه‌ی تحریک مرتبه یک می‌باشد، از این رو معادلات (۵-۸) و (۵-۹) به صورت زیر تغییر کرده است [۹۸]:

$$\varepsilon^0: D_0^2 + \omega_0^2 u_0 = f_1 \cos(\Omega T_0) \quad (۱-۶)$$

$$\varepsilon^1: D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = -2D_0 D_1 u_0 - Q_1 u_0^3 \quad (۲-۶)$$

حل عمومی معادله‌ی (۶-۱)، به صورت رابطه‌ی (۶-۳) استخراج گردیده است [۹۸]، که در آن $F = \frac{1}{2} f_1 (\omega_0^2 - \Omega^2)^{-1}$ می‌باشد.

$$u_0 = A(T_1) e^{i\omega_0 T_0} + F e^{i\Omega T_0} + C.C \quad (۳-۶)$$

با جایگذاری پاسخ u_0 در رابطه‌ی (۶-۲)، رابطه‌ی (۶-۴)، استخراج گردیده است [۹۸]:

$$\begin{aligned} D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = & -[2i\omega_0 A' + 6Q_1 A F^2 + 3Q_1 A^2 \bar{A}] e^{i\omega_0 T_0} \\ & -Q_1 [A^3 e^{3i\omega_0 T_0} + F^3 e^{3i\Omega T_0} + 3A^2 F e^{1(2\omega_0 + \Omega) T_1} + 3\bar{A}^2 F e^{i(\Omega - 2\omega_0) T_0} \\ & + 3A F^2 e^{i(\omega_0 + 2\Omega) T_0} + 3\bar{A} F^2 e^{i(\omega_0 - 2\Omega) T_0}] - [3Q_1 F^3 + 6Q_1 A \bar{A} F] e^{i\Omega T_0} \\ & + C.C \end{aligned} \quad (۴-۶)$$

¹ Non-resonance

² Secondary resonances

با توجه به رابطه‌ی فوق، در حالت نانرزونانس دو حالت تحریک سوپرهارمونیک و ساب‌هارمونیک را می‌توان مورد بررسی قرار داد.

۳-۶ بررسی رزونانس سوپرهارمونیک

در حالت رزونانس سوپرهارمونیک یا همان مافوق هارمونیک [۱۰۰]، فرکانس تحریک Ω یک سوم فرکانس خطی ω_L می‌باشد، که ارتباط بین آن‌ها با استفاده از پارامتر تنظیم σ ، به صورت زیر نشان داده شده است:

$$3\Omega = \omega_0 + \varepsilon\sigma \quad (۵-۶)$$

با توجه به رابطه‌ی (۵-۶) و همچنین معادله‌ی (۴-۶)، با حذف ترم‌های سکولار، در رزونانس سوپرهارمونیک معادله‌ی (۶-۶) استخراج گردیده است [۹۷]:

$$2i\omega_0 A' + 6Q_1 A F^2 + 3Q_1 A^2 \bar{A} + Q_1 F^3 e^{i\sigma T_1} = 0 \quad (۶-۶)$$

برای به دست آوردن معادله‌ی پاسخ فرکانسی برای حل رابطه‌ی فوق، A همانند فصل قبل در فرم قطبی به صورت رابطه‌ی (۵-۱۲) نوشته شده است. با جایگذاری رابطه‌ی (۵-۱۲)، در رابطه‌ی (۶-۶) و جدا کردن دو قسمت حقیقی و موهومی رابطه‌ی حاصل، معادلات (۶-۷) استخراج گردیده است [۹۸]:

$$a' = -\frac{Q_1 F^3}{\omega_0} (\sin(\sigma T_1 - \beta)) \quad (۷-۶)$$

$$a\beta' = \frac{3Q_1}{\omega_0} \left(F^2 + \frac{1}{8} a^2 \right) a + \frac{Q_1 F^3}{\omega_0} \cos(\sigma T_1 - \beta)$$

با در نظر گرفتن $\gamma = \sigma T_1 - \beta$ و حذف T_1 از معادلات (۶-۷)، معادلات فوق به صورت رابطه‌ی (۶-۸) بازنویسی شده است [۹۸]:

$$a' = -\frac{Q_1 F^3}{\omega_0} (\sin(\gamma)) \quad (۸-۶)$$

$$a\gamma' = a\sigma - \frac{3Q_1 F^2}{\omega_0} a - \frac{3Q_1}{8\omega_0} a^3 - \frac{Q_1 F^3}{\omega_0} \cos(\gamma)$$

در نهایت با به دست آمدن a و γ ، از رابطه‌ی (۶-۸)، اولین تقریب برای حالت رزونانس سوپرهارمونیک به صورت رابطه‌ی (۶-۹) استخراج گردیده است:

$$u = a \cos(3\Omega t - \gamma) + f(\omega_0^2 - \Omega^2)^{-1} \cos \Omega t + O(\varepsilon) \quad (۹-۶)$$

با در نظر گرفتن شرایط حالت پایدار، یعنی نقطه‌ای که در آن $a' = 0$ و $\gamma' = 0$ می‌باشند، رابطه‌ی (۶-۸)، به صورت رابطه‌ی (۶-۱۰) استخراج شده است:

$$\begin{aligned} \sin(\gamma) &= 0 \\ a\sigma - \frac{3Q_1 F^2}{\omega_0} a - \frac{3Q_1}{8\omega_0} a^3 &= \frac{Q_1 F^3}{\omega_0} \cos(\gamma) \end{aligned} \quad (۱۰-۶)$$

پس از به توان دو رساندن دو معادله‌ی رابطه‌ی (۶-۱۰)، و جمع آنان با یکدیگر، معادله‌ی پاسخ فرکانسی a به عنوان تابعی از پارامتر تنظیم σ (یا تابعی از فرکانس تحریک) و دامنه تحریک f_1 در حالت رزونانس سوپرهارمونیک به صورت رابطه‌ی (۶-۱۱) به دست آمده است:

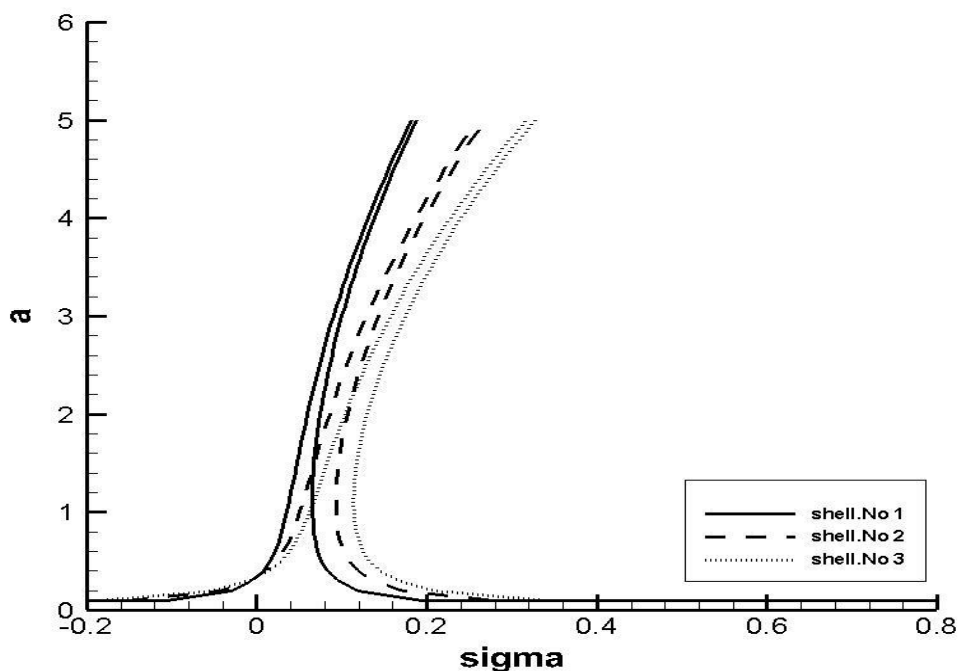
$$\left(a\sigma - \frac{3Q_1 F^2}{\omega_0} a - \frac{3Q_1}{8\omega_0} a^3\right)^2 = \frac{Q_1^2 F^6}{\omega_0^2} \quad (۱۱-۶)$$

با حل رابطه‌ی (۶-۱۲)، σ به صورت زیر استخراج گردیده است:

$$\sigma_{1,2} = \frac{3Q_1 F^2}{\omega_0} + \frac{3Q_1}{8\omega_0} a^2 \pm \left(\frac{Q_1^2 F^6}{\omega_0^2 a^2}\right)^{1/2} \quad (۱۲-۶)$$

۶-۳-۱) نمودار معادله‌ی پاسخ فرکانسی برای رزونانس سوپرهارمونیک

با توجه به رابطه‌ی (۶-۱۲) و (۶-۱۳)، نمودار پاسخ فرکانسی برای پوسته‌ی مخروطی رسم گردیده است. در شکل (۶-۱)، نمودار پاسخ فرکانسی برای سه پوسته‌ی گفته شده در فصل چهار، به ازای اولین موج طولی $m = 1$ و ششمین موج محیطی $n = 6$ و مقدار یکسان $F = 1$ رسم گردیده است.



شکل ۶-۱: نمودار پاسخ فرکانسی برای سه پوسته به ازای تعداد تقویت‌کننده‌های طولی متفاوت در سوپرهارمونیک

همانطور که در فصل قبل گفته شد، در نمودار σ بر حسب a که در بالا قرار دارد، انحراف منحنی به سمت راست، سخت‌شوندگی سیستم و انحراف به سمت چپ نرم‌شوندگی سیستم را نشان می‌دهد. از این رو بررسی نمودار پاسخ فرکانسی در شکل (۶-۱)، نشان می‌دهد که پوسته‌ی مخروطی تقویت‌شده، به‌صورت یک سیستم غیرخطی سخت‌شونده^۱ عمل کرده است و همچنین همانطور که در حالت رزونانس اولیه گفته شد افزایش تعداد تقویت‌کننده‌های طولی باعث افزایش میزان انحراف منحنی پاسخ فرکانسی به سمت راست و سخت‌شوندگی سیستم گردیده است و در نتیجه با افزایش تعداد تقویت‌کننده‌های طولی، سازه صلب‌تر گردیده است.

¹ Hardening-type

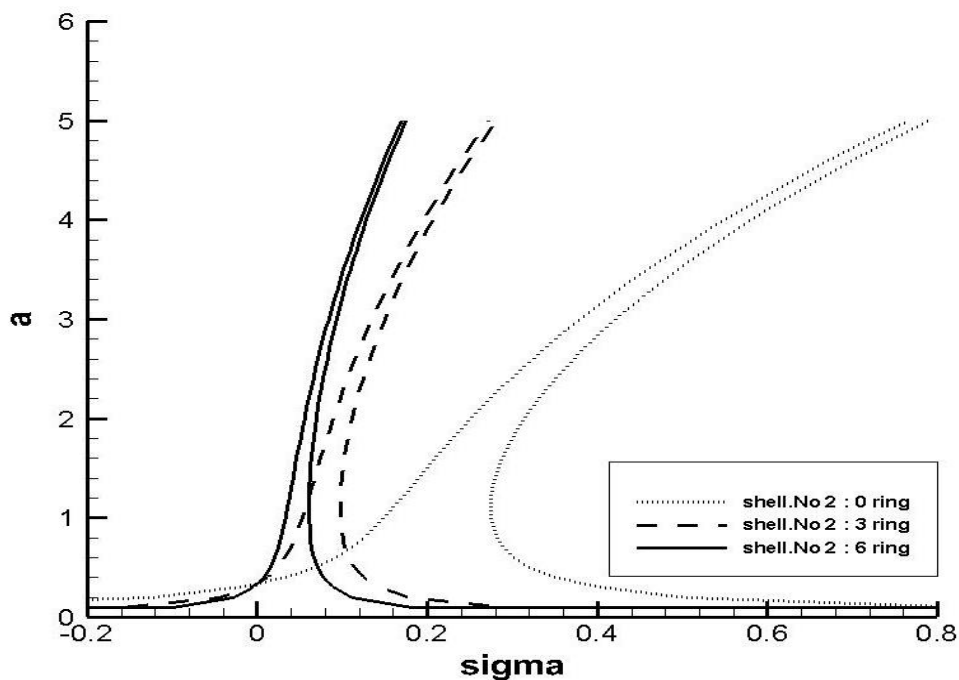
۴-۶ بررسی تأثیر پارامترهای مختلف بر پوسته در حالت سوپرهارمونیک

در این بخش، همانند دو فصل قبل به بررسی تأثیرات پارامترهای مختلف شامل تغییر تعداد تقویت‌کننده‌های طولی (شکل ۶-۱، که قبل‌تر بررسی گردید)، تغییر تعداد تقویت‌کننده‌های رینگی، تغییر سطح مقطع‌های تقویت‌کننده‌ها، تغییر ضخامت پوسته و همچنین تغییر نسبت قاعده‌ی بزرگ به قاعده‌ی کوچک پوسته در حالت رزونانس سوپرهارمونیک پرداخته شده است.

۶-۴-۱ بررسی تأثیر تعداد تقویت‌کننده‌های رینگی در حالت سوپرهارمونیک

در شکل (۶-۲)، نمودار پاسخ فرکانسی برای پوسته شماره ۲، به ازای تعداد تقویت‌کننده‌های طولی ثابت و برابر ۳ و تعداد تقویت‌کننده‌های رینگی متغیر و برابر ۰، ۳ و ۶ مورد بررسی قرار گرفته است.

در این نمونه‌ها اولین موج طولی $m = 1$ و ششمین موج محیطی $n = 6$ و مقدار یکسان ضریب ثابت $F = 1$ فرض شده است.



شکل ۶-۲: نمودار پاسخ فرکانسی برای پوسته شماره ۲، به ازای تعداد تقویت‌کننده‌های رینگی متفاوت در سوپرهارمونیک

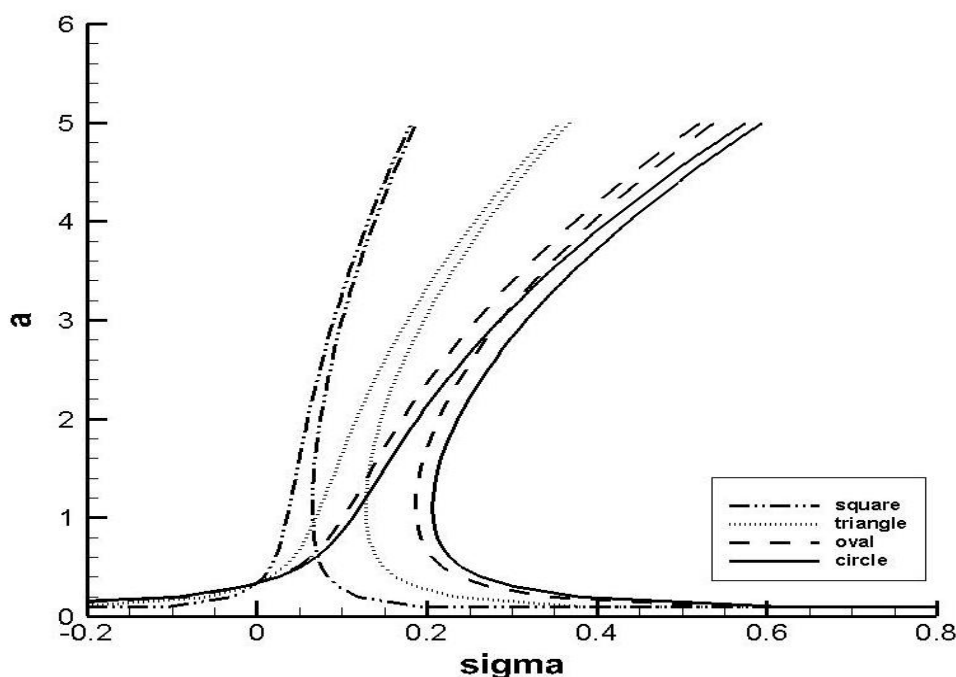
طبق نمودار پاسخ فرکانسی در شکل (۲-۶)، افزایش تعداد تقویت‌کننده‌های رینگی پوسته باعث کاهش میزان انحراف منحنی پاسخ فرکانسی به سمت راست گردیده است، به عبارت دیگر، می‌توان گفت که پدیده‌ی تشدید به ازای تعداد تقویت‌کننده‌ی رینگی بیشتر در فرکانس تحریک کوچکتری رخ می‌دهد. در نتیجه با افزایش تعداد تقویت‌کننده‌های رینگی، سخت‌شوندگی سازه کاهش یافته است.

۲-۴-۶ بررسی تأثیر تغییر سطح مقطع‌های تقویت‌کننده‌ها در حالت

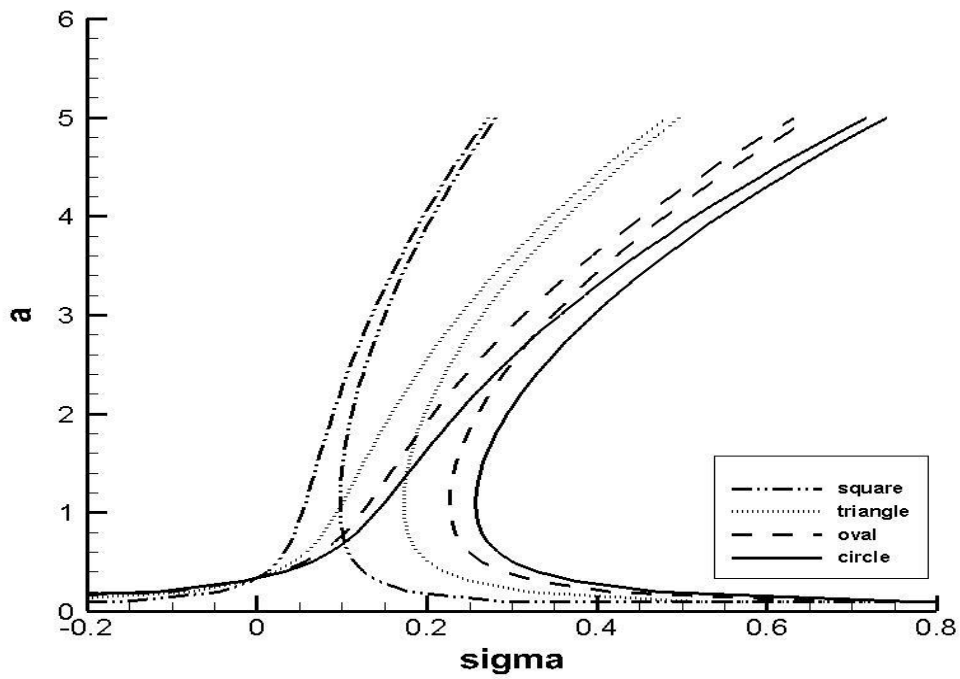
سوپرهارمونیک

برای بررسی تأثیر تغییر سطح مقطع‌های تقویت‌کننده‌ها، نمودار پاسخ فرکانسی برای هر سه پوسته به ازای سطح مقطع‌های متفاوت تقویت‌کننده‌ها، به صورت مربع، مثلث، بیضی و دایره، به صورت نمودارهای (۳-۶)، (۴-۶) و (۵-۶) مورد بررسی قرار گرفته است.

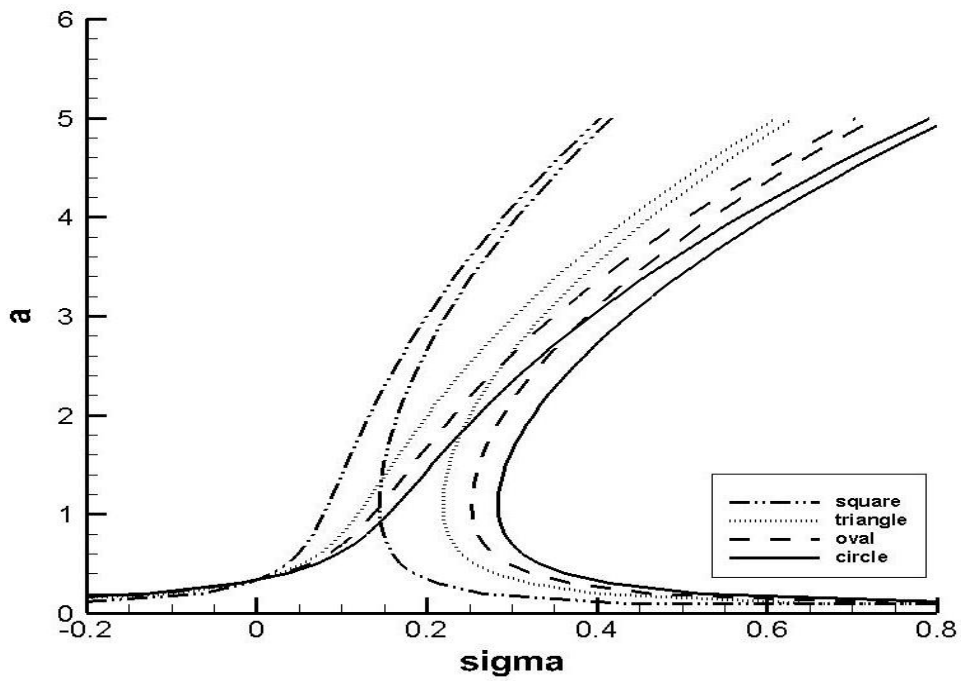
در این نمونه‌ها اولین موج طولی $m = 1$ و ششمین موج محیطی $n = 6$ و مقدار یکسان ضریب ثابت $F = 1$ فرض شده است.



شکل ۳-۶: نمودار پاسخ فرکانسی به ازای سطح مقطع‌های متفاوت تقویت‌کننده‌ها برای پوسته ۱ در سوپرهارمونیک



شکل ۴-۶: نمودار پاسخ فرکانسی به ازای سطح مقطع‌های متفاوت تقویت‌کننده‌ها برای پوسته ۲ در سوپرهارمونیک



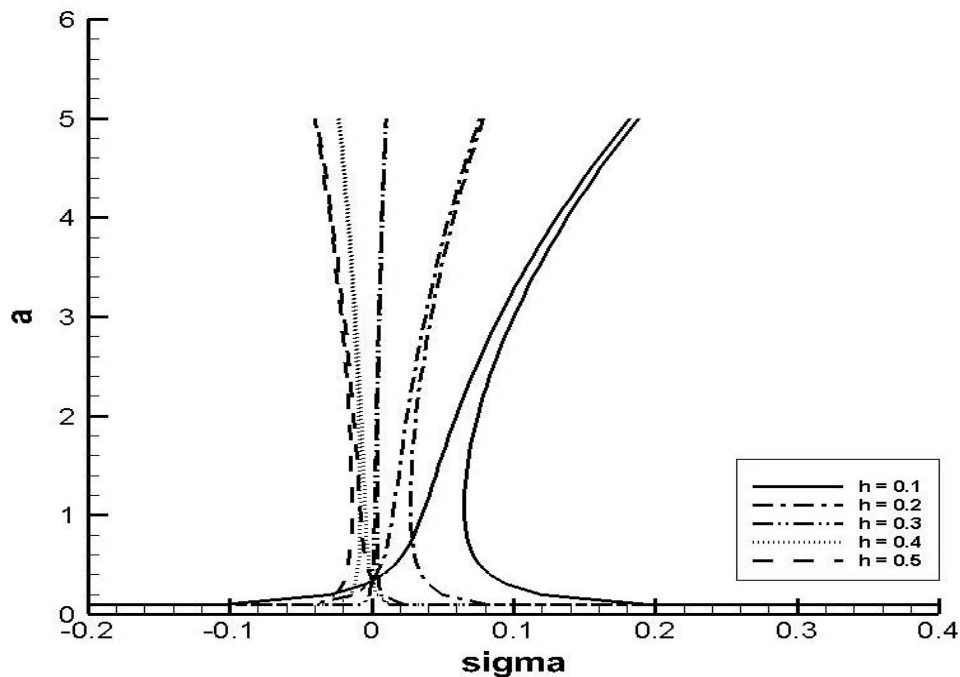
شکل ۵-۶: نمودار پاسخ فرکانسی به ازای سطح مقطع‌های متفاوت تقویت‌کننده‌ها برای پوسته ۳ در سوپرهارمونیک

با توجه به توضیحات داده شده، بر اساس نمودار پاسخ فرکانسی در شکل (۶-۳)، (۶-۴) و (۶-۵) سطح مقطع مربع با کمترین میزان انحراف به سمت راست، کمترین سخت شوندگی و سطح مقطع نیم دایره با بیشترین میزان انحراف به سمت راست، بیشترین سخت شوندگی را دارا می‌باشد.

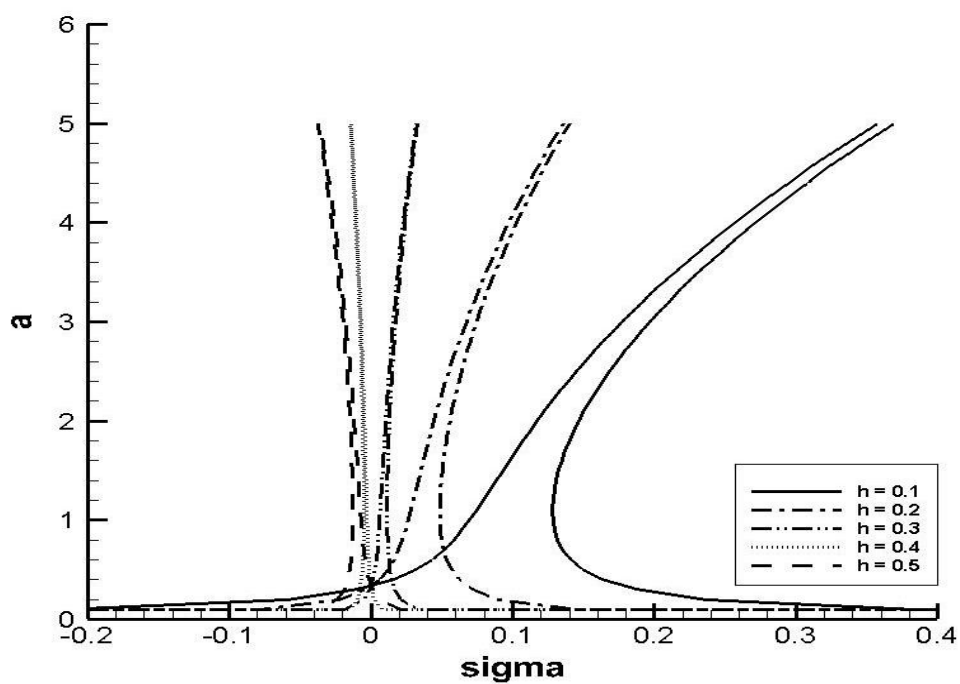
۳-۴-۶ بررسی تأثیر تغییر ضخامت پوسته در حالت سوپرهارمونیک

برای بررسی تأثیر تغییر ضخامت پوسته، نمودار پاسخ فرکانسی برای هر سه پوسته به ازای ضخامت‌های ۰/۱ تا ۰/۵، به صورت نمودارهای (۶-۶)، (۶-۷) و (۶-۸) مورد بررسی قرار گرفته است.

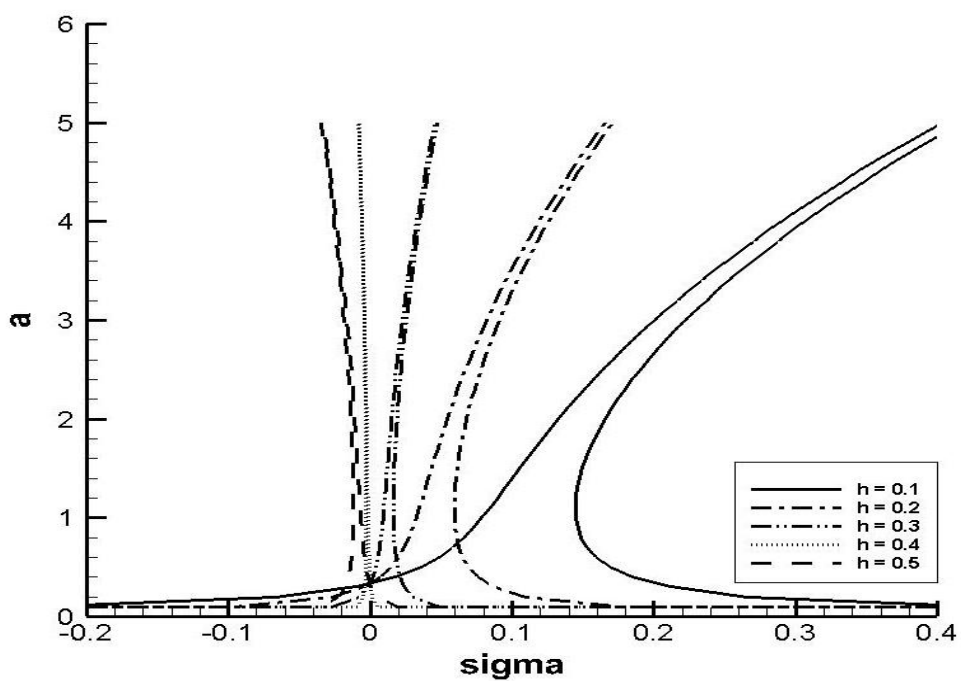
در این نمونه‌ها اولین موج طولی $m = 1$ و ششمین موج محیطی $n = 6$ و مقدار یکسان ضریب ثابت $F = 1$ فرض شده است.



شکل ۶-۶: نمودار پاسخ فرکانسی به ازای ضخامت‌های مختلف برای پوسته ۱ در سوپرهارمونیک



شکل ۶-۷: نمودار پاسخ فرکانسی به ازای ضخامت‌های مختلف برای پوسته ۲ در سوپرهارمونیک



شکل ۶-۸: نمودار پاسخ فرکانسی به ازای ضخامت‌های مختلف برای پوسته ۳ در سوپرهارمونیک

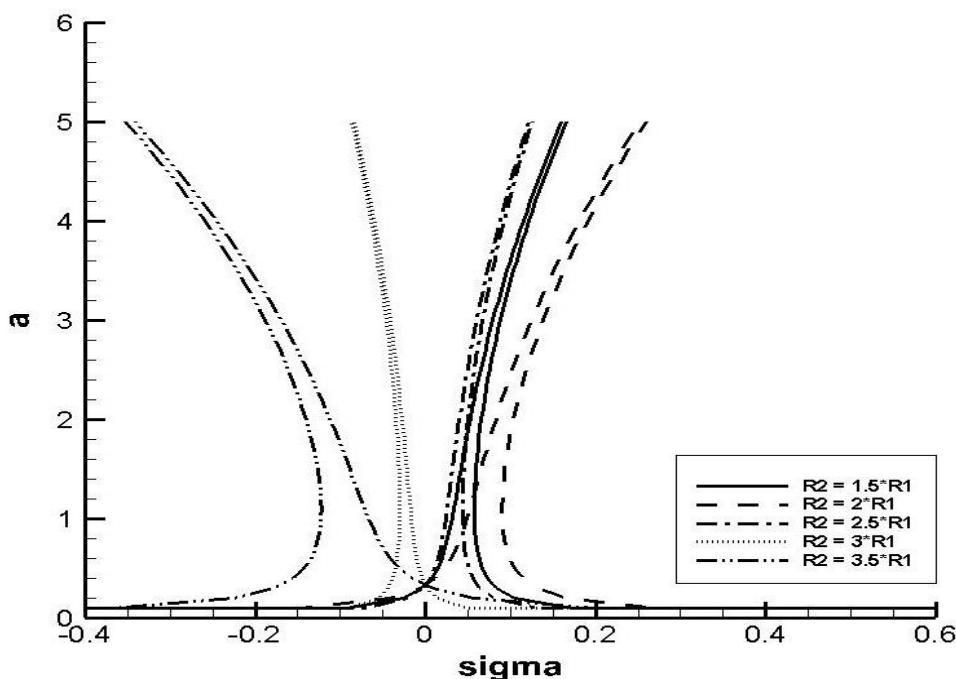
همانطور که در نمودارهای شکل (۶-۶)، (۶-۷) و (۶-۸) مشاهده می‌شود، افزایش ضخامت باعث انحراف منحنی به سمت چپ گردیده است. به عبارت دیگر با افزایش ضخامت، دامنه‌ی پاسخ در یک پارامتر تنظیم مشخص بزرگتر می‌شود، که این امر موجب کاهش میزان سخت شوندگی سیستم شده است.

۴-۴-۶ بررسی تأثیر تغییر نسبت قاعده‌ی بزرگ به کوچک پوسته در حالت

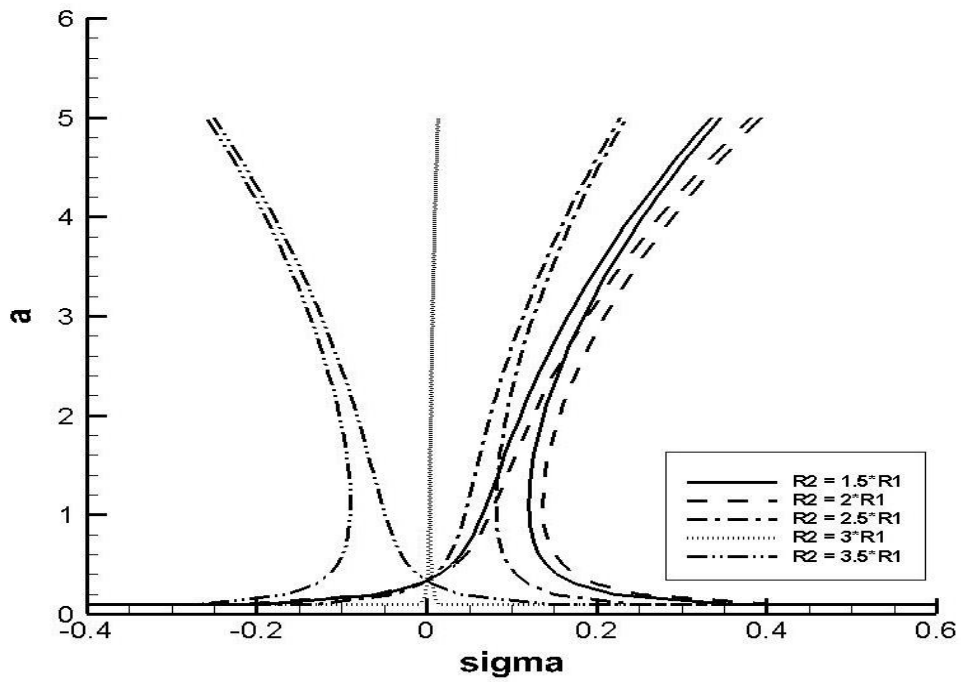
سوپرهارمونیک

برای بررسی تأثیر تغییر نسبت قاعده‌ی بزرگ به کوچک پوسته، نمودار پاسخ فرکانسی برای هر سه پوسته به ازای $\frac{R_2}{R_1}$ های متفاوت، به صورت نمودارهای (۶-۹)، (۶-۱۰) و (۶-۱۱) مورد بررسی قرار گرفته است.

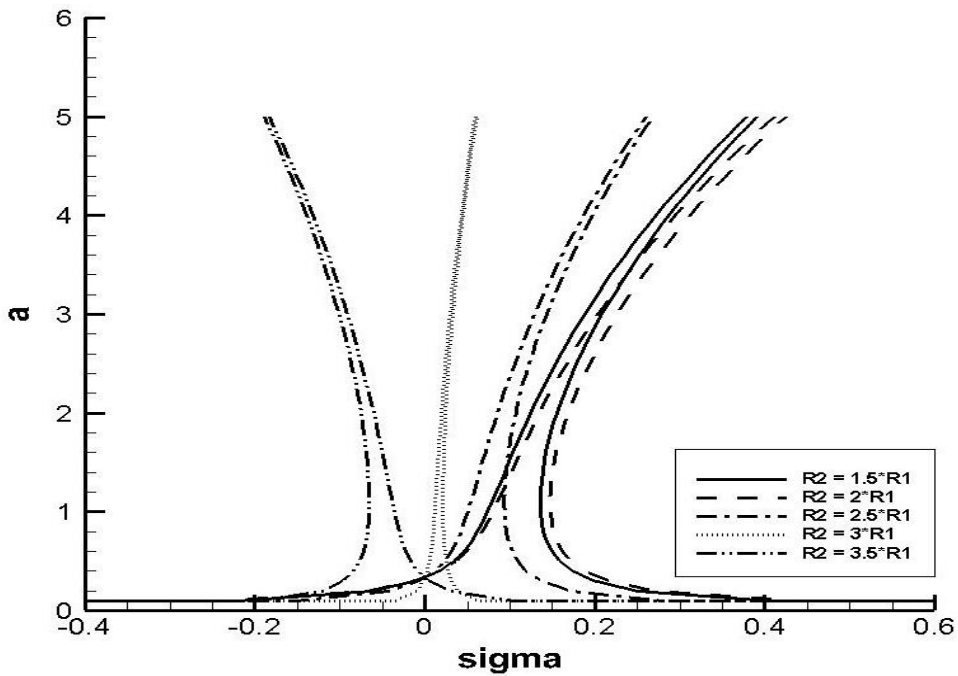
در این نمونه‌ها اولین موج طولی $m = 1$ و ششمین موج محیطی $n = 6$ و مقدار یکسان ضریب ثابت $F = 1$ فرض شده است.



شکل ۶-۹: نمودار پاسخ فرکانسی به ازای $\frac{R_2}{R_1}$ های متفاوت برای پوسته ۱ در سوپرهارمونیک



شکل ۶-۱۰: نمودار پاسخ فرکانسی به ازای $\frac{R_2}{R_1}$ های متفاوت برای پوسته ۲ در سوپرهارمونیک



شکل ۶-۱۱: نمودار پاسخ فرکانسی به ازای $\frac{R_2}{R_1}$ های متفاوت برای پوسته ۳ در سوپرهارمونیک

همانطور که در نمودارهای شکل (۶-۹)، (۶-۱۰) و (۶-۱۱) مشاهده می‌شود، افزایش نسب قاعده‌ی بزرگ به کوچک پوسته تا حدی مطلوب و موجب سخت شوندگی سیستم گردیده است، اما اختلاف این دو قاعده از میزان مشخصی که در نمودارها نشان داده شده است به بعد نتیجه‌ی عکس داشته و موجب انحراف منحنی به سمت چپ و در نتیجه نرم شوندگی سیستم شده است. به عبارت دیگر می‌توان گفت هنگامی که اختلاف قاعده‌ی بزرگ از کوچک پوسته از عدد ۲ بیشتر شود، احتمال پدیده‌ی پرش کاهش یافته است، در نتیجه سیستم رفتار نرم شوندگی از خود نشان می‌دهد.

۵-۶ بررسی رزونانس ساب‌هارمونیک

روند به‌دست آوردن معادله‌ی پاسخ فرکانسی در رزونانس ساب‌هارمونیک یا همان رزونانس مادون هارمونیک [۱۰۰]، همانند حالت رزونانس سوپرهارمونیک می‌باشد، با این تفاوت که در رزونانس ساب‌هارمونیک، فرکانس تحریک Ω سه برابر فرکانس خطی ω_L می‌باشد، که ارتباط بین آن‌ها با استفاده از پارامتر تنظیم σ ، به‌صورت رابطه‌ی (۶-۱۴) نشان داده شده است [۹۸]:

$$\Omega = 3\omega_0 + \varepsilon\sigma \quad (۱۳-۶)$$

با توجه به رابطه‌ی (۶-۱۲) و بر اساس آن، رابطه‌ی $(\Omega - 2\omega_0)T_0 = \omega_0 T_0 + \sigma T_1$ و همچنین معادله‌ی (۶-۴)، با حذف ترم‌های سکولار در رزونانس ساب‌هارمونیک، معادله‌ی (۶-۱۵) استخراج گردیده است:

$$2i\omega_0 A' + 6Q_1 A F^2 + 3Q_1 A^2 \bar{A} + 3Q_1 F \bar{A}^2 e^{i\sigma T_1} = 0 \quad (۱۴-۶)$$

برای به‌دست آوردن معادله‌ی پاسخ فرکانسی برای حل رابطه‌ی فوق، A همانند فصل قبل در فرم قطبی به‌صورت رابطه‌ی (۵-۱۲) نوشته شده است. با جایگذاری رابطه‌ی (۵-۱۲)، در رابطه‌ی (۶-۱۴) و جدا کردن دو قسمت حقیقی و موهومی رابطه‌ی حاصل، معادلات (۶-۱۵) استخراج گردیده است [۹۸]:

$$a' = -\frac{3Q_1 F}{4\omega_0} a^2 (\sin(\sigma T_1 - 3\beta)) \quad (۱۵-۶)$$

$$a\beta' = \frac{3Q_1 F}{\omega_0} \left(F^2 + \frac{1}{8} a^2 \right) a + \frac{3Q_1 F}{4\omega_0} a^2 \cos(\sigma T_1 - 3\beta)$$

با در نظر گرفتن $\gamma = \sigma T_1 - 3\beta$ ، و حذف T_1 از معادلات (۶-۱۵)، معادلات (۶-۱۵) به صورت رابطه‌ی (۶-۱۶) بازنویسی شده است [۹۸]:

$$a' = -\frac{3Q_1 F}{\omega_0} a^2 (\sin(\gamma)) \quad (۱۶-۶)$$

$$a\gamma' = a\sigma - \frac{9Q_1 F^2}{\omega_0} a - \frac{9Q_1}{8\omega_0} a^3 - \frac{9Q_1 F}{4\omega_0} a^2 \cos(\gamma)$$

در نهایت با به دست آمدن a و γ ، از رابطه‌ی (۶-۱۶)، اولین تقریب برای حالت رزونانس ساب‌هارمونیک به صورت رابطه‌ی (۶-۱۷) استخراج گردیده است:

$$u = a \cos\left(\frac{1}{3}\Omega t - \gamma\right) + f(\omega_0^2 - \Omega^2)^{-1} \cos \Omega t + O(\varepsilon) \quad (۱۷-۶)$$

با در نظر گرفتن شرایط حالت پایدار، یعنی نقطه‌ای که در آن $a' = 0$ و $\gamma' = 0$ می‌باشند، رابطه‌ی (۶-۱۷)، به صورت رابطه‌ی (۶-۱۸) استخراج گردیده است [۹۸]:

$$\sin(\gamma) = 0 \quad (۱۸-۶)$$

$$a\sigma - \frac{9Q_1 F^2}{\omega_0} a - \frac{9Q_1}{8\omega_0} a^3 = \frac{9Q_1 F}{4\omega_0} a^2 \cos(\gamma)$$

پس از به توان دو رساندن دو معادله‌ی رابطه‌ی (۶-۱۸)، و جمع آنان با یکدیگر، معادله‌ی پاسخ فرکانسی a به عنوان تابعی از پارامتر تنظیم σ (یا تابعی از فرکانس تحریک) و دامنه تحریک f_1 در حالت رزونانس ساب‌هارمونیک به صورت رابطه‌ی (۶-۱۹)، به دست آمده است:

$$\left(a\sigma - \frac{9Q_1 F^2}{\omega_0} a - \frac{9Q_1}{8\omega_0} a^3\right)^2 = \frac{81Q_1^2 F^2}{16\omega_0^2} a^4 \quad (۱۹-۶)$$

معادله‌ی (۶-۱۹)، از ساده سازی معادله‌ی فوق استخراج گردیده است:

$$\left(\sigma - \frac{9Q_1 F^2}{\omega_0} - \frac{9Q_1}{8\omega_0} a^2\right)^2 = \frac{81Q_1^2 F^2}{16\omega_0^2} a^2 \quad (۲۰-۶)$$

معادله‌ی (۶-۲۰) نشان می‌دهد که یا $a = 0$ است و یا:

$$a^2 = p \pm (p^2 - q)^{\frac{1}{2}} \quad (۲۱-۶)$$

که در آن:

$$p = \frac{8\omega_0\sigma}{9Q_1} - 6F^2 \quad (22-6)$$

$$q = \frac{64\omega_0^2}{81Q_1^2} \left(\sigma - \frac{9Q_1F^2}{\omega_0} \right)^2$$

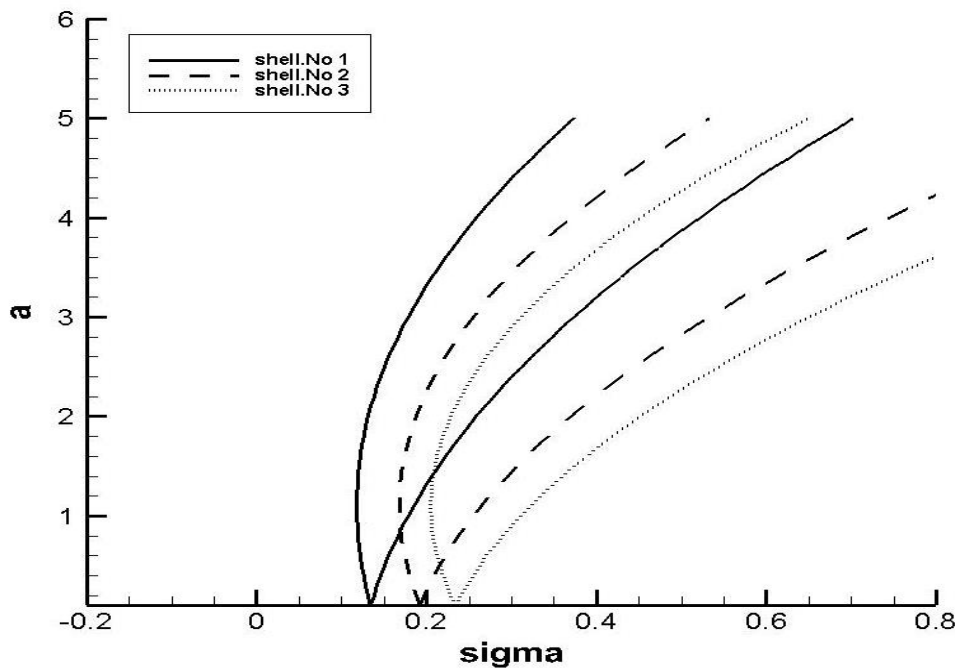
در روابط (۶-۲۲) پیدا است که، q همیشه مثبت می‌باشد و مسئله زمانی پاسخ دارد که $p > 0$ و $p^2 \geq q$ باشد، به عبارت دیگر:

$$F^2 < \frac{4\omega_0\sigma}{27Q_1} \quad (23-6)$$

$$\frac{Q_1F^2}{\omega_0} \left(\sigma - \frac{63Q_1F^2}{8\omega_0} \right) \geq 0$$

۶-۵-۱) نمودار معادله‌ی پاسخ فرکانسی برای رزونانس ساب‌هارمونیک

در شکل (۶-۱۲)، نمودار پاسخ فرکانسی برای سه پوسته‌ی گفته شده در فصل چهار، با توجه به رابطه‌ی (۶-۲۲) به ازای اولین موج طولی $m = 1$ و ششمین موج محیطی $n = 6$ و $F = 1$ رسم گردیده است.



شکل ۶-۱۲: نمودار پاسخ فرکانسی برای سه پوسته به ازای تعداد تقویت‌کننده‌های طولی متفاوت در ساب‌هارمونیک

همانطور که در قسمت سوپرهارمونیک گفته شد، در قسمت سابهارمونیک نیز، در نمودار σ برحسب a ، انحراف منحنی به سمت راست، سخت شوندگی سیستم و انحراف به سمت چپ، نرم شوندگی سیستم را نشان می‌دهد. از این رو بررسی نمودار پاسخ فرکانسی در شکل (۱۲-۶)، نشان می‌دهد که پوسته‌ی مخروطی تقویت شده، به صورت یک سیستم غیرخطی سخت شونده^۱ عمل کرده است و همچنین افزایش تعداد تقویت‌کننده‌های طولی باعث افزایش میزان انحراف منحنی پاسخ فرکانسی به سمت راست و سخت شوندگی سیستم گردیده و در نتیجه با افزایش تعداد تقویت‌کننده‌های طولی، سازه صلب‌تر گردیده است.

۶-۶ بررسی تأثیر پارامترهای مختلف بر پوسته در حالت سابهارمونیک

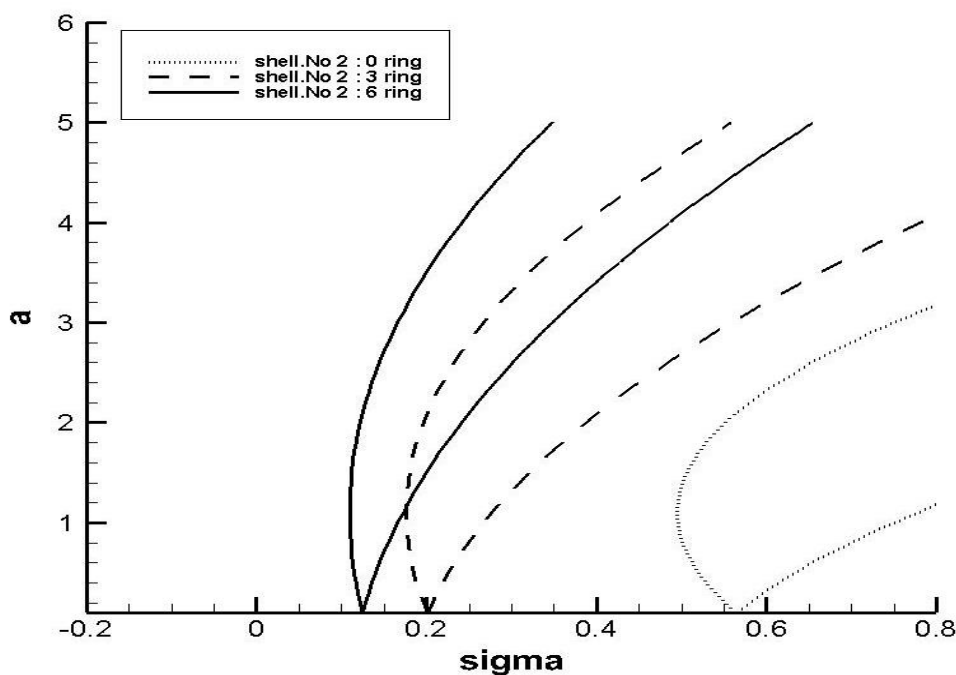
در این بخش، همانند دو فصل قبل به بررسی تأثیرات پارامترهای مختلف شامل تغییر تعداد تقویت‌کننده‌های طولی (شکل ۶-۱۲، که قبل‌تر بررسی گردید)، تغییر تعداد تقویت‌کننده‌های رینگی، تغییر سطح مقطع‌های تقویت‌کننده‌ها، تغییر ضخامت پوسته و همچنین تغییر نسبت قاعده‌ی بزرگ به قاعده‌ی کوچک پوسته در حالت رزونانس سابهارمونیک پرداخته شده است.

۶-۶-۱) بررسی تأثیر تعداد تقویت‌کننده‌های رینگی در حالت سابهارمونیک

در شکل (۶-۱۳)، نمودار پاسخ فرکانسی برای پوسته ۲، به ازای تعداد تقویت‌کننده‌های طولی ثابت و برابر ۳ و تعداد تقویت‌کننده‌های رینگی متغیر و برابر ۰، ۳ و ۶ مورد بررسی قرار گرفته است.

در این نمونه‌ها اولین موج طولی $m = 1$ و ششمین موج محیطی $n = 6$ و مقدار یکسان ضریب ثابت $F = 1$ فرض شده است.

^۱ Hardening-type



شکل ۶-۱۳: نمودار پاسخ فرکانسی برای پوسته شماره ۲، به ازای تعداد تقویت کننده‌های رینگی متفاوت در سوپرهارمونیک

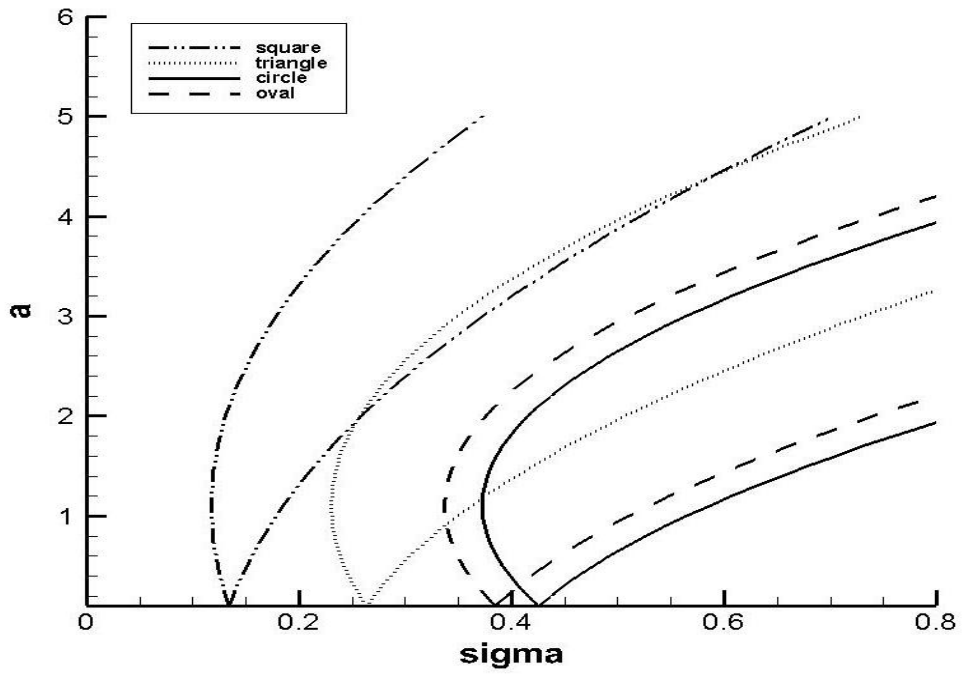
طبق نمودار پاسخ فرکانسی در شکل (۶-۱۳)، افزایش تعداد تقویت کننده‌های رینگی پوسته باعث کاهش میزان انحراف منحنی پاسخ فرکانسی به سمت راست گردیده است، در نتیجه با افزایش تعداد تقویت کننده‌های رینگی، سخت شوندگی سازه کاهش یافته است.

۶-۶-۲) بررسی تأثیر تغییر سطح مقطع‌های تقویت کننده‌ها در حالت

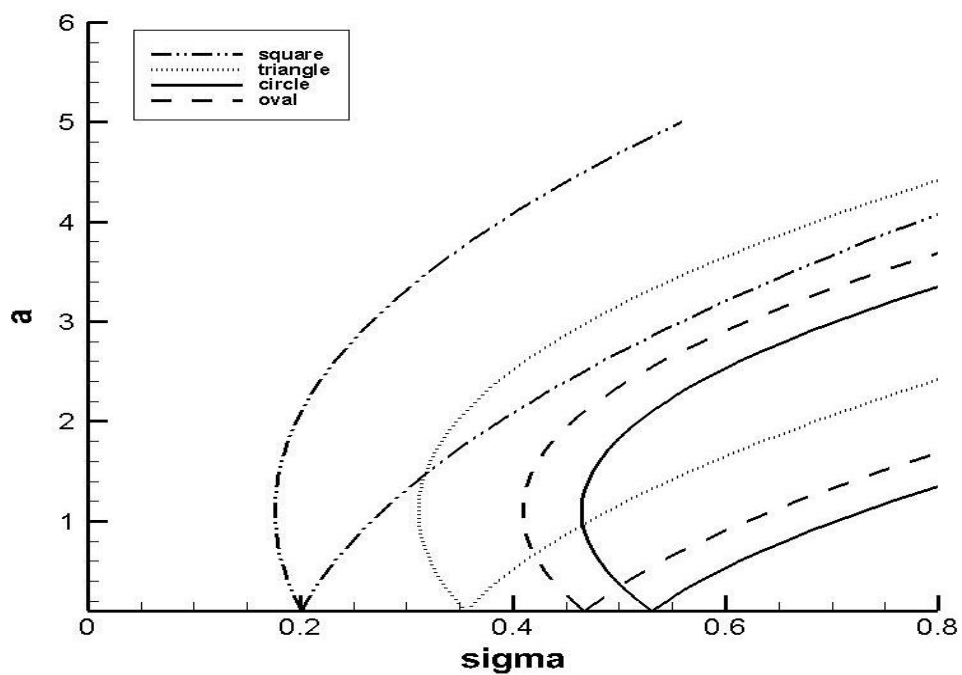
ساب‌هارمونیک

برای بررسی تأثیر تغییر سطح مقطع‌های تقویت کننده‌ها، نمودار پاسخ فرکانسی برای هر سه پوسته به ازای سطح مقطع‌های متفاوت تقویت کننده‌ها، به صورت مربع، مثلث، بیضی و دایره، به صورت نمودارهای (۶-۱۴)، (۶-۱۵) و (۶-۱۶) مورد بررسی قرار گرفته است.

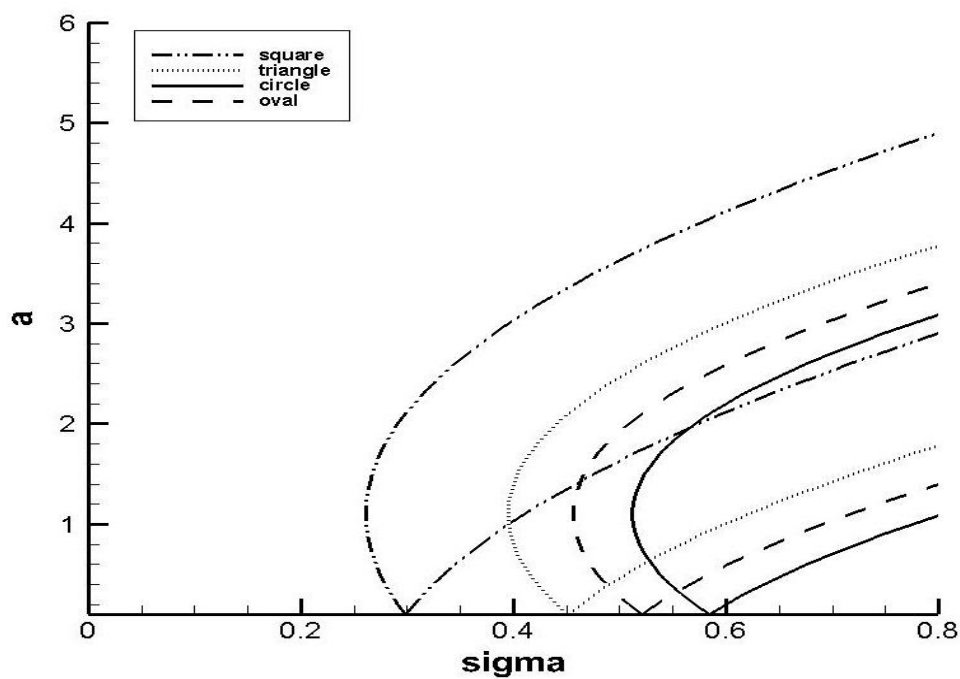
در این نمونه‌ها اولین موج طولی $m = 1$ و ششمین موج محیطی $n = 6$ و مقدار یکسان ضریب ثابت $F = 1$ فرض شده است.



شکل ۶-۱۴: نمودار پاسخ فرکانسی به ازای سطح مقطع‌های متفاوت تقویت‌کننده‌های برای پوسته ۱ در ساب‌هارمونیک



شکل ۶-۱۵: نمودار پاسخ فرکانسی به ازای سطح مقطع‌های متفاوت تقویت‌کننده‌های برای پوسته ۲ در ساب‌هارمونیک



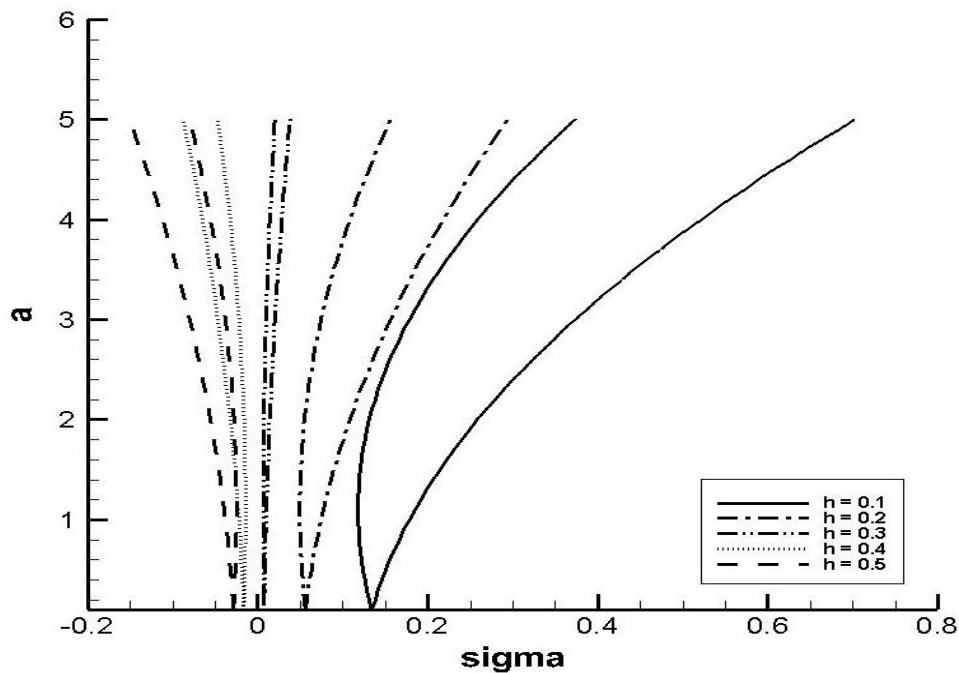
شکل ۶-۱۶: نمودار پاسخ فرکانسی به ازای سطح مقطع‌های متفاوت تقویت‌کننده‌های برای پوسته ۳ در ساب‌هارمونیک

بر اساس نمودار پاسخ فرکانسی در شکل (۶-۱۴)، (۶-۱۵) و (۶-۱۶) سطح مقطع مربع با کمترین میزان انحراف به سمت راست، کمترین سخت شوندگی و سطح مقطع نیم دایره با بیشترین میزان انحراف به سمت راست، بیشترین سخت شوندگی را دارا می‌باشد.

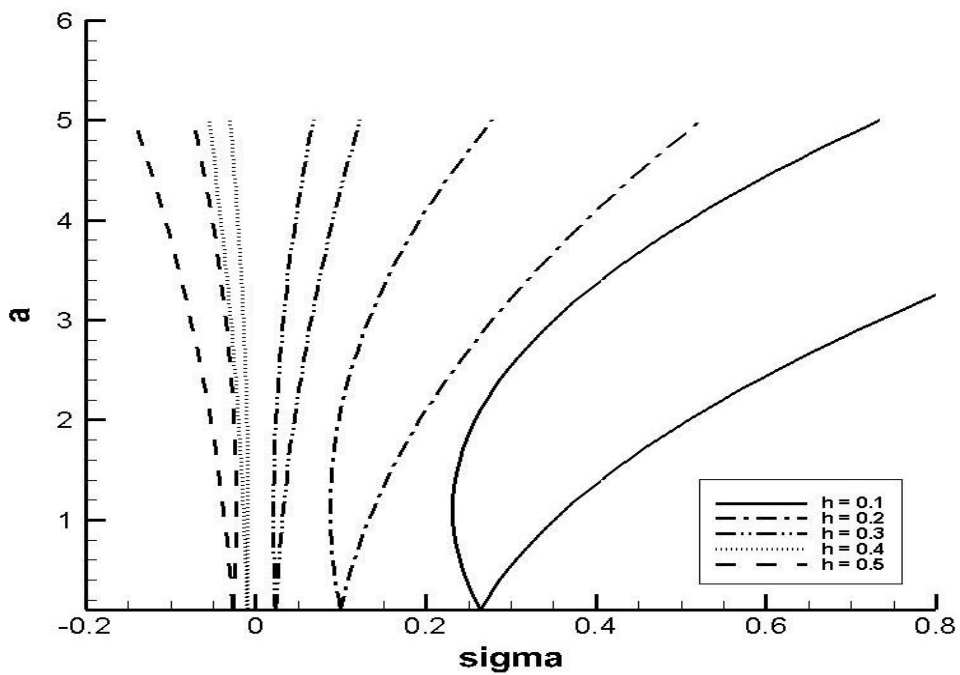
۳-۶-۶ بررسی تأثیر تغییر ضخامت پوسته در حالت ساب‌هارمونیک

برای بررسی تأثیر تغییر ضخامت پوسته، نمودار پاسخ فرکانسی برای هر سه پوسته به ازای ضخامت‌های ۰/۱ تا ۰/۵، به صورت نمودارهای (۶-۱۷)، (۶-۱۸) و (۶-۱۹) مورد بررسی قرار گرفته است.

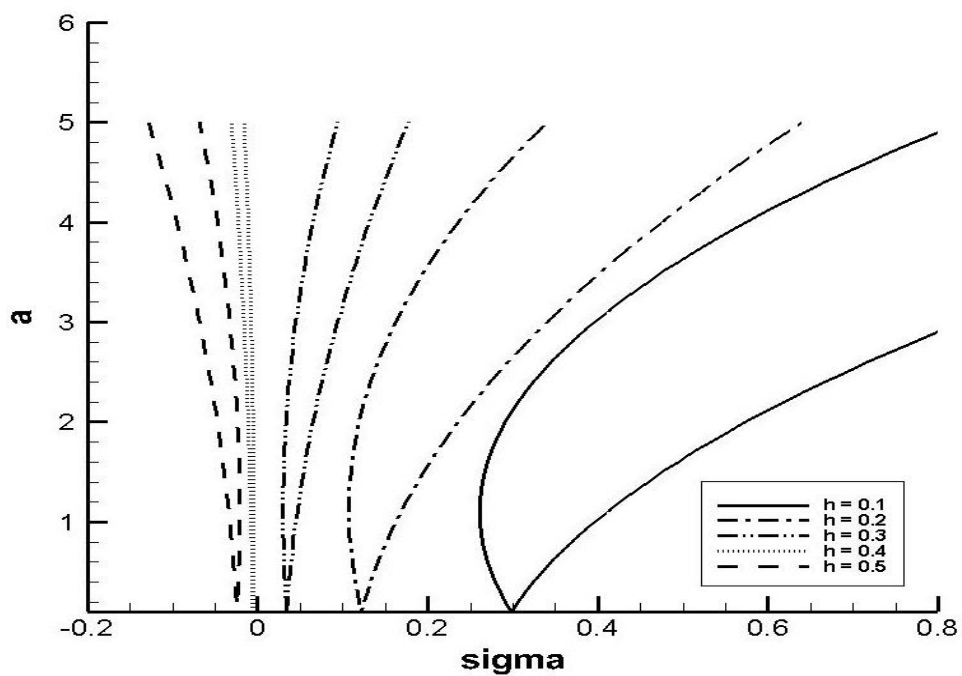
در این نمونه‌ها اولین موج طولی $m = 1$ و ششمین موج محیطی $n = 6$ و مقدار یکسان ضریب ثابت $F = 1$ فرض شده است.



شکل ۶-۱۷: نمودار پاسخ فرکانسی به ازای ضخامت‌های مختلف برای پوسته ۱ در ساب‌هارمونیک



شکل ۶-۱۸: نمودار پاسخ فرکانسی به ازای ضخامت‌های مختلف برای پوسته ۲ در ساب‌هارمونیک



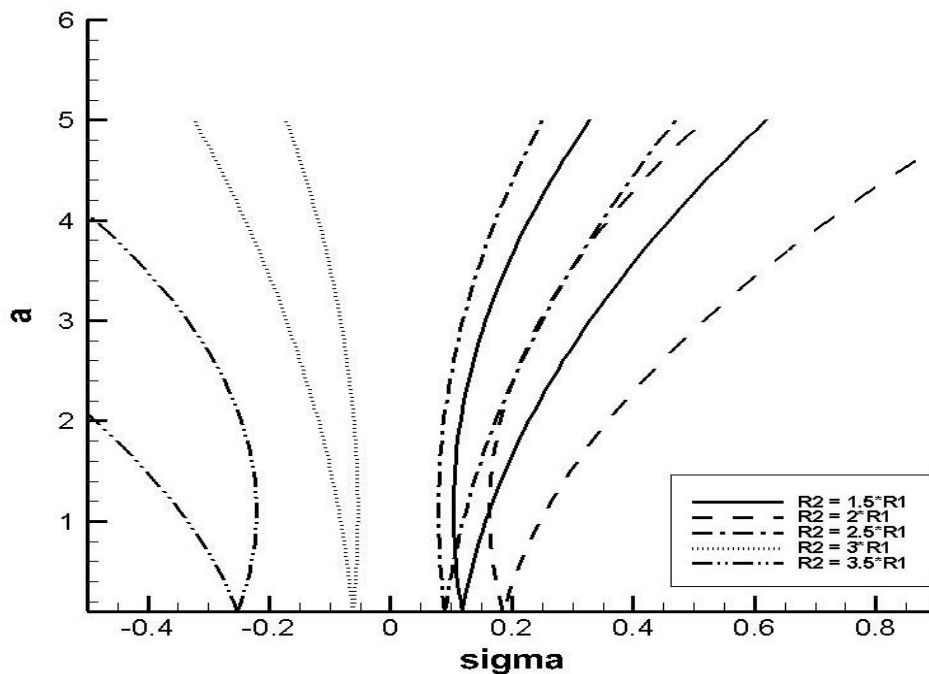
شکل ۶-۱۹: نمودار پاسخ فرکانسی به ازای ضخامت‌های مختلف برای پوسته ۳ در ساب‌هارمونیک

همانطور که در نمودارهای شکل (۶-۱۷)، (۶-۱۸) و (۶-۱۹) مشاهده می‌شود، افزایش ضخامت باعث انحراف منحنی به سمت چپ گردیده است که این امر موجب کاهش میزان سخت شونده‌گی سیستم شده است.

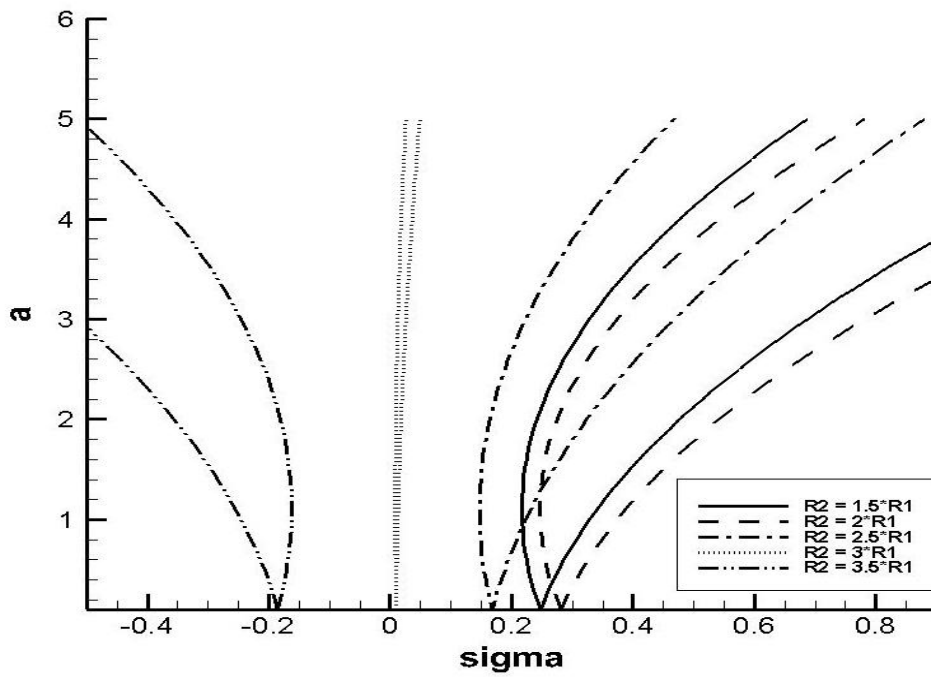
۶-۶-۴) بررسی تأثیر تغییر نسبت قاعده‌ی بزرگ به کوچک پوسته در حالت ساب‌هارمونیک

برای بررسی تأثیر تغییر نسبت قاعده‌ی بزرگ به کوچک پوسته، نمودار پاسخ فرکانسی برای هر سه پوسته به ازای $\frac{R_2}{R_1}$ های متفاوت، به صورت نمودارهای (۶-۲۰)، (۶-۲۱) و (۶-۲۲) مورد بررسی قرار گرفته است.

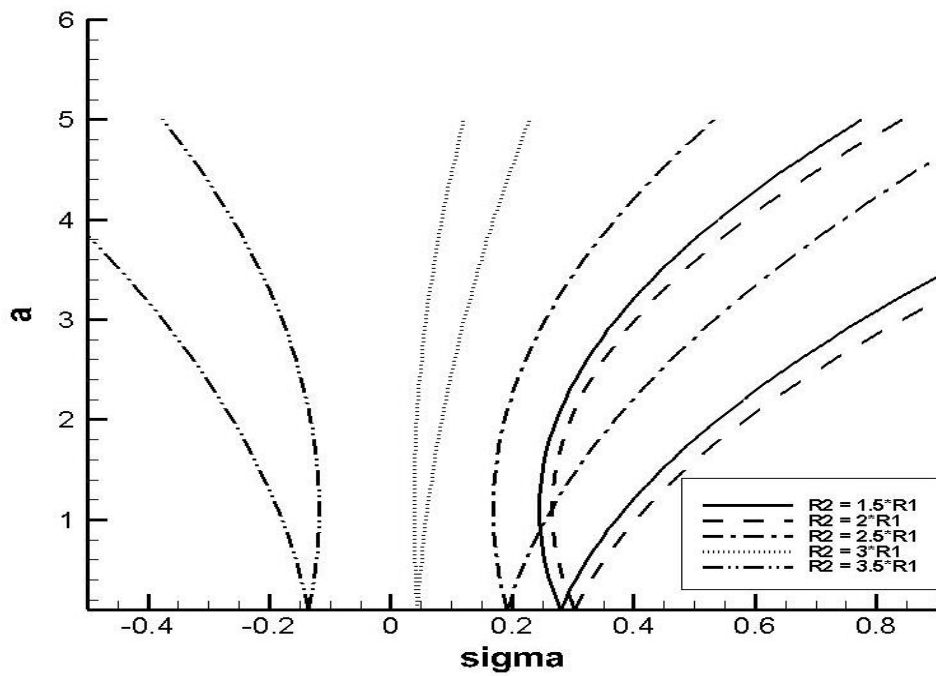
در این نمونه‌ها اولین موج طولی $m = 1$ و ششمین موج محیطی $n = 6$ و مقدار یکسان ضریب ثابت $F = 1$ فرض شده است.



شکل ۶-۲۰: نمودار پاسخ فرکانسی به ازای $\frac{R_2}{R_1}$ های متفاوت برای پوسته ۱ در ساب‌هارمونیک



شکل ۶-۲۱: نمودار پاسخ فرکانسی به ازای $\frac{R_2}{R_1}$ های متفاوت برای پوسته ۲ در ساب‌هارمونیک



شکل ۶-۲۲: نمودار پاسخ فرکانسی به ازای $\frac{R_2}{R_1}$ های متفاوت برای پوسته ۳ در ساب‌هارمونیک

همانطور که در نمودارهای شکل (۶-۲۰)، (۶-۲۱) و (۶-۲۲) مشاهده می‌شود، افزایش نسب قاعده‌ی بزرگ به کوچک پوسته تا حدی مطلوب و موجب سخت شوندگی سیستم گردیده است، اما اختلاف این دو قاعده از میزان مشخصی که در نمودارها نشان داده شده است به بعد نتیجه‌ی عکس داشته و موجب انحراف منحنی به سمت چپ و در نتیجه نرم شوندگی سیستم شده است.

فصل هفتم :

جمع بندی و پیشنهادها

۷-۱ مقدمه

در این پژوهش به حل ریاضی ارتعاشات غیرخطی پوسته‌ی مخروطی ناقص کامپوزیت با تقویت مشبک و بررسی رزونانس‌های این سیستم پرداخته شده است. در ابتدا با استفاده از تئوری دائل-مشرتی-والس و روابط کرنش-جابجایی کارمن، معادلات حاکم بر ارتعاشات غیرخطی سیستم استخراج گردیده، که این معادلات شامل دو معادله‌ی دیفرانسیل با مشتقات جزئی کوپل شده بوده که به کمک اصل هامیلتون به دست آمدند. سپس این معادلات، با در نظر گرفتن تابع تنش مناسب و استفاده از روش گالرکین غیرخطی به یک معادله‌ی دیفرانسیل برحسب زمان تبدیل گردیده است که این معادله با استفاده از روش هموتوپی پرتوربیشن حل شده است. برای اطمینان از دقت روش به کار رفته، تغییرات نسبت فرکانس‌های غیرخطی به خطی به ازای پارامترهای مختلف بررسی گردیده است. پس از اطمینان از روش حل، تأثیر پارامترهای مختلف که شامل تغییر تعداد تقویت‌کننده‌های طولی، تغییر تعداد تقویت‌کننده‌های رینگی، تغییر سطح مقطع‌های تقویت‌کننده‌ها، تغییر ضخامت پوسته و تغییر نسبت قاعده‌ی بزرگ به کوچک پوسته می‌باشد، مورد بررسی قرار گرفته است. در ادامه برای بررسی ارتعاشات اجباری، نیروی هارمونیک عرضی بر پوسته وارد شده و معادله‌ی غیرخطی استخراج گردیده است. همچنین رزونانس‌های اولیه و ثانویه مخروط بر اساس روش مقیاس‌های چندگانه به صورت پاسخ فرکانسی به دست آمده است و نمودارهای پاسخ فرکانسی برای رزونانس‌ها رسم و بررسی گردیده است. و در نهایت پارامترهای مختلفی که در بالا ذکر شده است برای هر دو رزونانس مورد بررسی قرار گرفته است و همچنین در هریک از پارامترها، سیستم از نظر سخت شوندگی و یا نرم شوندگی مورد بررسی قرار گرفته است.

۷-۲ نتیجه گیری

نتایج این پایان نامه به صورت زیر قابل بیان است:

- نتایج حاصل از روش ارائه شده نسبت به روش های موجود از دقت بسیار بالاتری برخوردار است.
- روش ارائه شده در این پایان نامه برای بسیاری از مسائل غیرخطی قابل استفاده است.
- با افزایش تعداد تقویت کننده های طولی، نسبت فرکانس طبیعی غیرخطی به فرکانس طبیعی خطی، به دامنه ی بدون بعد افزایش یافته است.
- با افزایش تعداد تقویت کننده های رینگی، نسبت فرکانس طبیعی غیرخطی به فرکانس طبیعی خطی، به دامنه ی بدون بعد کاهش یافته است.
- با افزایش ضخامت پوسته، نسبت فرکانس طبیعی غیرخطی به فرکانس طبیعی خطی، به دامنه ی بدون بعد کاهش یافته است.
- با افزایش نسبت $\frac{R_2}{R_1}$ ، نسبت فرکانس طبیعی غیرخطی به فرکانس طبیعی خطی، به دامنه ی بدون بعد کاهش یافته است.
- افزایش تعداد تقویت کننده های طولی در رزونانس اولیه و ثانویه، باعث انحراف بیشتر نمودار پاسخ فرکانسی به سمت راست شده است که بیانگر صلبیت بیشتر سیستم است.
- افزایش تعداد تقویت کننده های رینگی در رزونانس اولیه و ثانویه، باعث انحراف بیشتر نمودار پاسخ فرکانسی به سمت چپ شده است که بیانگر کاهش سخت شوندگی سیستم است.
- افزایش ضخامت پوسته در رزونانس اولیه و ثانویه، باعث کاهش انحراف نمودار پاسخ فرکانسی به سمت راست شده است که بیانگر کاهش سخت شوندگی سیستم است.
- افزایش نسبت $\frac{R_2}{R_1}$ در رزونانس اولیه و ثانویه، تا میزان مشخصی باعث انحراف بیشتر نمودار پاسخ فرکانسی به سمت راست شده است اما از مقدار مشخصی به بعد باعث کاهش انحراف نمودار پاسخ فرکانسی به سمت چپ شده است که تا حدی سخت شوندگی سیستم و از آن به بعد نرم شوندگی سیستم را نشان داده است.

۳-۷ پیشنهادها

جهت انجام مطالعه‌ی جامع‌تر، موارد زیر قابل بررسی هستند:

- استفاده از تئوری‌های دیگر پوسته.
- در نظر گرفتن و بررسی اثر اینرسی‌های صفحه‌ای، ممان‌های چرخشی و برشی در صفحه.
- در نظر گرفتن ماده به صورت تابعی هدفمند^۱.
- در نظر گرفتن ماده به صورت ویسکوالاستیک.
- در نظر گرفتن تقویت‌کننده‌های مارپیچ.

¹ Functionally graded

پیوست ها

پیوست الف - ضرایب A_i, T_i, K_i

کد نویسی‌های مربوط به نرم‌افزار متلب برای ضرایب A_i, T_i, K_i :

ضریب K_i :

$$\begin{aligned}
 K11 &= (B11 * b1^2 * b2^2 + B22 * b1^2 * b2^2 + B12 - 2 * B12 * b2^2 + B12 * b2^4 + B21 * b1^4 \\
 &+ B21 * b1^2 + B12 * b1^2); \\
 K12 &= b1 * (-b2^2 + 1 + b1^2) * (-B22 + B11); \\
 K31 &= (-0.5) * (4 * B21 * b1^2 + B12); \\
 K41 &= b1 * (-B22 + B11); \\
 K161 &= 0.5 * B12; \\
 K92 &= -b1; \\
 K102 &= b1^2; \\
 K91 &= 0.5 * b1 * (b2^2 - b1^2 - 1.5); \\
 K101 &= -b1^2 * (b2^2 - (0.75)); \\
 K111 &= -0.5 * b2^2 * b1 - (1.5) * b1^3 + (0.75) * b1; \\
 K121 &= b2^2 * b1^2 - (9/4) * b1^2; \\
 K51 &= -b1^2; \\
 K61 &= -0.5 * b1; \\
 K52 &= 0.5 * b1^2 * b2^2 - (0.5) * b1^2; \\
 K62 &= (0.25) * b1^3 - (0.25) * b1 + (0.25) * b2^2 * b1; \\
 K53 &= -2 * b1^2; \\
 K63 &= -b1; \\
 K71 &= 0.5 * b1^2; \\
 K81 &= (-0.25) * b2^2 * b1 - (0.25) * b1^3 + (0.25) * b1; \\
 K151 &= 0.5 * b1^2 * b2^2; \\
 K131 &= b1^2; \\
 K141 &= (0.25) * b1 - b1^3;
 \end{aligned}$$

ضریب T_i :

$$\begin{aligned}
 T1 &= (A11 + A11 * b1^2 + 2 * (A12 + A66) * b1^2 * b2^2 + A22 * b1^4 + A22 * b1^2 + A11 * b2^4 - 2 * A11 * b2^2); \\
 T3 &= (4 * A22 * b1^2 + A11); \\
 T16 &= A11; \\
 T5 &= 4 * A11 * b1^2 + 16 * A22 * b1^4 - 20 * A22 * b1^2; \\
 T6 &= 32 * A22 * b1^3 + 4 * A11 * b1 - 4 * A22 * b1; \\
 T7 &= 4 * A11 * b1^2 + 32 * A12 * b2^2 * b1^2 + 16 * A22 * b1^4 - 20 * A22 * b1^2 + 16 * A11 * b2^4 - 8 * A11 * b2^2 - \\
 &8 * A12 * b2^2 + 32 * A66 * b1^2 * b2^2 - 8 * A66 * b2^2; \\
 T8 &= 32 * A22 * b1^3 + 32 * A12 * b1 * b2^2 + 4 * A11 * b1 - 4 * A22 * b1 + 32 * A66 * b1 * b2^2; \\
 T9 &= A11 * b1^2 + 2 * A12 * b1^2 * b2^2 + A22 * b1^4 - 5 * A22 * b1^2 + A11 * b2^4 - 2 * A11 * b2^2 - 2 * A12 * b2^2 - \\
 &2 * A66 * b2^2 + 2 * A66 * b1^2 * b2^2; \\
 T10 &= 4 * A22 * b1^3 + 4 * A12 * b1 * b2^2 + 2 * A11 * b1 - 2 * A22 * b1 + 4 * A66 * b1 * b2^2; \\
 T11 &= 9 * A11 * b1^2 + 18 * A12 * b2^2 * b1^2 + 81 * A22 * b1^4 - 45 * A22 * b1^2 + A11 * b2^4 - 2 * A11 * b2^2 - \\
 &2 * A12 * b2^2 + 18 * A66 * b2^2 * b1^2 - 2 * A66 * b2^2; \\
 T12 &= 108 * A22 * b1^3 + 12 * A12 * b1 * b2^2 + 6 * A11 * b1 - 6 * A22 * b1 + 12 * A66 * b1 * b2^2; \\
 T14 &= 8 * A11 * b1 + 256 * A22 * b1^3 - 8 * A22 * b1; \\
 T13 &= 16 * A11 * b1^2 + 256 * A22 * b1^4 - 80 * A22 * b1^2; \\
 T15 &= 16 * A11 * b2^4 - 8 * A11 * b2^2 - 8 * A12 * b2^2 - 8 * A66 * b2^2;
 \end{aligned}$$

ضریب A_i : (برای سهولت در کدنویسی به جای A_i از AA_i استفاده شده است.)

$$\begin{aligned}
 AA1 &= K11/T1; \\
 AA2 &= K12/T1; \\
 AA3 &= K31/T3; \\
 AA4 &= K41/T3; \\
 AA51 &= (K51 * T5 - K61 * T6) / (T5^2 + T6^2); \\
 AA52 &= (K52 * T5 - K62 * T6) / (T5^2 + T6^2); \\
 AA53 &= ((K53 * T6 + K63 * T5) / (T5^2 + T6^2)) * S1 * \cot(\alpha); \\
 AA61 &= (K51 * T6 + K61 * T5) / (T5^2 + T6^2); \\
 AA62 &= (K52 * T6 + K62 * T5) / (T5^2 + T6^2); \\
 AA63 &= ((K53 * T6 + K63 * T5) / (T5^2 + T6^2)) * S1 * \cot(\alpha); \\
 AA7 &= (K71 * T7 - K81 * T8) / (T7^2 + T8^2); \\
 AA8 &= (K71 * T8 + K81 * T7) / (T7^2 + T8^2); \\
 AA91 &= (K91 * T9 - K101 * T10) / (T9^2 + T10^2); \\
 AA92 &= ((K92 * T9 - K102 * T10) / (T9^2 + T10^2)) * S1 * \cot(\alpha); \\
 AA101 &= (K91 * T10 + K101 * T9) / (T9^2 + T10^2); \\
 AA102 &= ((K92 * T10 + K102 * T9) / (T9^2 + T10^2)) * S1 * \cot(\alpha); \\
 AA11 &= (K111 * T11 - K121 * T12) / (T11^2 + T12^2); \\
 AA12 &= (K111 * T12 + K121 * T11) / (T11^2 + T12^2); \\
 AA13 &= (K131 * T13 - K141 * T14) / (T13^2 + T14^2); \\
 AA14 &= (K131 * T14 + K141 * T13) / (T13^2 + T14^2); \\
 AA15 &= (K151) / (T15); \\
 AA16 &= (K161) / (T16);
 \end{aligned}$$

که در آنها:

$$\begin{aligned}
 A11 &= (Dsh + Dr) / (Dsh^2 + Dsh * Dr + Dst * Dsh + Dst * Dr - vsh^2 * Dsh^2); \\
 A12 &= (Dsh * vsh) / (Dsh^2 + Dsh * Dr + Dst * Dsh + Dst * Dr - vsh^2 * Dsh^2); \\
 A21 &= A12; \\
 A22 &= (Dsh + Dst) / (Dsh^2 + Dsh * Dr + Dst * Dsh + Dst * Dr - vsh^2 * Dsh^2); \\
 A66 &= (-1) / ((vsh - 1) * Dsh);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B11 &= ((Dsh + Dr) * Sst) / (Dsh^2 + Dsh * Dr + Dst * Dsh + Dst * Dr - vsh^2 * Dsh^2); \\
 B12 &= (-Dsh * vsh * Sr) / (Dsh^2 + Dsh * Dr + Dst * Dsh + Dst * Dr - vsh^2 * Dsh^2); \\
 B21 &= (-Dsh * vsh * Sst) / (Dsh^2 + Dsh * Dr + Dst * Dsh + Dst * Dr - vsh^2 * Dsh^2); \\
 B22 &= ((Dsh + Dst) * Sr) / (Dsh^2 + Dsh * Dr + Dst * Dsh + Dst * Dr - vsh^2 * Dsh^2);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C11 &= -(Dsh + Dr) * Sst / (Dsh^2 + Dsh * Dr + Dst * Dsh + Dst * Dr - vsh^2 * Dsh^2); \\
 C12 &= (Dsh * vsh * Sst) / (Dsh^2 + Dsh * Dr + Dst * Dsh + Dst * Dr - vsh^2 * Dsh^2); \\
 C21 &= (Dsh * vsh * Sr) / (Dsh^2 + Dsh * Dr + Dst * Dsh + Dst * Dr - vsh^2 * Dsh^2); \\
 C22 &= -(Dsh + Dst) * Sr / (Dsh^2 + Dsh * Dr + Dst * Dsh + Dst * Dr - vsh^2 * Dsh^2);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D11 &= Ksh + Kst - ((Dsh + Dr) * Sst^2) / (Dsh^2 + Dsh * Dr + Dst * Dsh + Dst * Dr - vsh^2 * Dsh^2); \\
 D12 &= Ksh * vsh + (Dsh * vsh * Sst * Sr) / (Dsh^2 + Dsh * Dr + Dst * Dsh + Dst * Dr - vsh^2 * Dsh^2); \\
 D21 &= D12; \\
 D22 &= Ksh + Kr - ((Dsh + Dst) * Sr^2) / (Dsh^2 + Dsh * Dr + Dst * Dsh + Dst * Dr - vsh^2 * Dsh^2); \\
 D66 &= 2 * Ksh * (1 - vsh) + Tr + Tst;
 \end{aligned}$$

در روابط قبل نیز:

$$\begin{aligned}
 Dsh &= (Esh * h) / (1 - (vsh^2)); \\
 Ksh &= (Esh * h^3) / (12 * (1 - (vsh^2))); \\
 Dr &= (Er * Ar) / br; \\
 Sr &= (Er * Ar * Cr) / br; \\
 Kr &= (Er * Ar * (Ir^2 + Cr^2)) / br; \\
 Tr &= (Gr * Jr) / br; \\
 Kst &= (Est * Ast * (Ist^2 + Cst^2)) / bst; \\
 Dst &= (Est * Ast) / bst; \\
 Sst &= (Est * Ast * Cst) / bst; \\
 Tst &= (Gst * Jst) / bst; \\
 rovt &= (mr / br) + msh + (mst / bst);
 \end{aligned}$$

پیوست ب - ضریب C_i

ضریب C_i : (برای سهولت در کدنویسی به جای C_i از CC_i استفاده شده است)

$$\begin{aligned}
 CCI &= (-1/12) * (((exp(6 * m * pi / b1) - 1) * h * rovt * SI^4 * n * pi) / ((b1^2 + 9) * b2)); \\
 CC2 &= (1 / ((4 * b1^6 + 29 * b1^4 + 61 * b1^2 + 36) * b2 * sin(alfa))) * (2 * (b1^2 + 4) * n * b1 * pi * (sin(alfa) * (b1^2 + 2.25) * (0.5 * D11 - 0.5 * C12 * AA1) * b1^5 - 0.5 * AA2 * (-C22 + C11 - C12) * b1^4 + (((-0.5 * C11 - 0.5 * C22) * AA1 + D12 + D66) * b2^2 - 0.5 * AA1 * C21 + (0.5 * C11 - 0.5 * C12 + 0.5 * C22) * AA1 + 0.5 * D11 + 0.5 * D22) * b1^3 + AA2 * (0.5 * (C21 + C12) + b2^2 * C11 + 0.5 * C22 - 0.5 * C11) * b1^2 + 0.5 * (b2 - 1) * ((D22 - AA1 * C21) * b2^2 + (C11 - C22 + C21) * AA1 - D22) * b1 * (b2 + 1) + 0.5 * C21 * AA2 * (b2 - 1)^2 * (b2 + 1)^2) * exp(2 * m * pi / b1) - (1/3) * (b1^2 + 1) * ((C12 * b1^5 * AA102 + AA92 * (2.5 * C12 + C11 - C22) * b1^4 + ((C11 + C22) * b2^2 + C12 + C21 + 1.5 * C22 - 1.5 * C11) * AA102 * b1^3 - 0.5 * AA92 * ((C11 - 3 * C22) * b2^2 - C21 + 5 * C22 - 5 * C11 - 11 * C12) * b1^2 + (C12 * b2^4 + (1.5 * C11 - 2 * C21 + 2.5 * C22) * b2^2 + 3 * C21 - 3 * C12 + 3 * (C22 - C11)) * AA102 * b1 - 1.5 * b2^2 * AA92 * (C21 * b2^2 - 2 * (C22 + C21))) * sin(alfa) - ((b1^2 + 1.5) * AA1 - 0.5 * b1 * AA2) * SI * cos(alfa) * b1 * exp(3 * m * pi / b1) + 0.25 * SI * cos(alfa) * (b1^2 + 1) * (b1^2 + (4/9)) * (AA102 * b1 + AA92) * exp(4 * m * pi / b1) + ((-0.5 * D11 + (1/3) * AA102 * C12 + 0.5 * C12 * AA1) * b1^7 + (((1/3) * C22 + (5/6) * C12 + (1/3) * C11) * AA92 + 0.5 * AA2 * (-C22 + C11 - C12)) * b1^6 + (((1/3) * C22 + (1/3) * C11) * AA102 + (0.5 * C22 + 0.5 * C11) * AA1 - D12 - D66) * b2^2 + ((1/3) * AA102 + 0.5 * AA1) * C21 + (-0.5 * C11 + (2/3) * C12 + 0.5 * C22) * AA102 + (1.625 * C12 - 0.5 * C22 + 0.5 * C11) * AA1 - 1.625 * D11 - 0.5 * D22) * b1^5 + (((0.5 * C22 - (1/6) * C11) * AA92 - AA2 * C11) * b2^2 + (-0.5 * AA2 + (1/6) * AA92) * C21 + ((8/3) * C12 + (7/6) * C11 - (7/6) * C22) * AA92 + 1.625 * AA2 * (-C22 + C11 - C12)) * b1^4 + (((1/3) * AA102 + 0.5 * AA1) * C21 - 0.5 * D22) * b2^4 + ((-2/3) * AA102 - AA1) * C21 + ((7/6) * C22 + (5/6) * C11) * AA102 + (1.625 * C22 + 0.625 * C11) * AA1 - 2.25 * D66 + D22 - 2.25 * D12) * b2^2 + (1.625 * AA1 + (4/3) * AA102) * C21 + (1.5 * (C22 - C11) - (2/3) * C12) * AA102 + (1.625 * (C11 - C22) + 1.125 * C12) * AA1 - 1.625 * D22 - 1.125 * D11) * b1^3 + (-0.5 * C21 * (AA92 + AA2) * b2^4 + (C21 * (AA92 + AA2) + (1.5 * C22 - (1/6) * C11) * AA92 - 2.25 * AA2 * C11) * b2^2 + (-1.625 * AA2 + (1/6) * AA92) * C21 + ((11/6) * C12 + (5/6) * (C11 - C22)) * AA92 + 1.125 * AA2 * (-C22 + C11 - C12)) * b1^2 + (((1.125 * AA1 + (1/3) * AA102) * C21 - 1.125 * D22) * b2^4 + ((-2/3) * AA102 - 2.25 * AA1) * C21 + ((5/6) * C22 + 0.5 * C11) * AA102 + (-1.125 * C11 + 1.125 * C22) * AA1 + 2.25 * D22) * b2^2 + (1.125 * AA1 + AA102) * C21 + (-C11 - C12 + C22) * AA102 + (-1.125 * C22 + 1.125 * C11) * AA1 - 1.125 * D22) * b1
 \end{aligned}$$

$$-1.125*(AA2+(4/9)*AA92)*C21*b2^4+((AA92+2.25*AA2)*C21+AA92*C22)*b2^2-1.125*C21*AA2*\sin(\alpha)-(1/3)*((AA1+0.75*AA102)*b1^3+(0.5*AA2+0.75*AA92)*b1^2+(1.5*AA1+(27/16)*AA102)*b1+(27/16)*AA92)*S1*\cos(\alpha)*(b1^2+1));$$

$$CC3=(10e8)*(32/(3*(64*b1^8+500*b1^6+1237*b1^4+1125*b1^2+324)*b2*\sin(\alpha)))*((b1^2+4)*(b1^2+1)*(C12*b1^7*AA101+(-C22+2.5*C12+C11)*AA91+(243/4)*AA1*C12+3*AA4+1.5*AA2)*b1^6+(((C11+C22)*AA101+2*AA3+AA1)*b2^2+AA101*C21+((891/16)*C12-(81/4)*C11)*AA12+(1.5*C22-1.5*C11+(25/16)*C12)*AA101+(81/4)*AA12*C22-(17/8)*AA1-(21/4)*AA3-AA16)*b1^5+(((0.5*C11+1.5*C22)*AA91+((27/4)*C22+(27/4)*C11)*AA11+0.25*AA2+3.5*AA4)*b2^2+((27/4)*AA11+0.5*AA91)*C21+((221/32)*C12+(49/16)*C11-(49/16)*C22)*AA91+((2565/32)*C12+(405/16)*(C11+C22))*AA11+1.5*AA4-(1/16)*AA2)*b1^4+(C21*b2^4*AA101+(-2*AA101*C21+(49/16)*C22+(33/16)*C11)*AA101+(207/16)*((15/23)*C22+C11)*AA12)*b2^2+((171/16)*AA12+(57/16)*AA101)*C21+((123/32)*(C22-C11)-(39/16)*C12)*AA101+(585/32)*AA12*C22+(-(585/32)*C11+(315/16)*C12)*AA12-(9/8)*AA1-(33/16)*AA16-(69/16)*AA3)*b1^3+(-1.5*C21*(-0.5*AA11+AA91)*b2^4+((-1.5*AA11+3*AA91)*C2+(-(9/32)*C11+(123/32)*C22)*AA91+((81/32)*C11+(195/32)*C22)*AA11+(9/8)*AA4+(9/16)*AA2)*((81/32)*AA11+(9/32)*AA91)*C21+(-(45/32)*C22+(99/32)*C12+(45/32)*C11)*AA91+AA11*((405/32)*C11+(891/32)*C12-(405/32)*C22)-(9/16)*AA2)*b1^2+((27/16)*C21*((1/3)*AA101+AA12)*b2^4+(81/32)*b2^2*(C11-(4/3)*C21+(5/3)*C22)*((1/3)*AA101+AA12)+((27/16)*AA101+(81/16)*AA12)*C21+((27/16)*C22-(27/16)*(C12+C11))*AA101+(81/16)*AA12*C22+(-(81/16)*(C12+C11))*AA12-(27/32)*(AA3+AA16))*b1-(27/32)*b2^2*(C21*b2^2-2*C21-2*C22)*(AA11+AA91))*\sin(\alpha)*\exp(3*m*\pi/b1)+(9/4)*(b1^2+(9/4))*(b1^2+(9/16))+(((AA63+0.5*AA92)*b1^5+(((1/3)*AA102+(2/3)*AA53)*b2^2-(19/12)*AA102-(4/3)*AA53)*b1^4+((AA63+(1/6)*AA92)*b2^2+(8/3)*AA63-(7/6)*AA92)*b1^3+(((4/3)*AA53-(1/6)*AA102)*b2^2-2*AA53-(13/12)*AA102)*b1^2+((AA63+(2/3)*AA92)*b2^2+(5/3)*AA63-(13/6)*AA92)*b1+(2/3)*b2^2*AA53-(2/3)*AA53)*b1*\sin(\alpha)-(1/3)*(AA101*b1^5+(AA91+9*AA11)*b1^4+(18*AA12+5*AA101)*b1^3+(5*AA91+7*AA11)*b1^2+4*AA91+4*AA11+(4*AA101+12*AA12)*b1)*S1*\cos(\alpha))*\exp(4*m*\pi/b1)+(-C12*b1^11*AA101+((C22-2.5*C12-C11)*AA91-(9/8)*AA92-1.5*AA2-3*AA4-(243/4)*AA11*C12-(9/4)*AA63)*b1^10+(((C11-C22)*AA101-1.5*AA53-2*AA3-0.75*AA102-AA1)*b2^2-AA101*C21+(-1.5*C22-(105/16)*C12+1.5*C11)*AA101-(81/4)*AA12*C22+(-(891/16)*C12+(81/4)*C11)*AA12+(21/4)*AA3+(17/8)*AA1+(57/16)*AA102+3*AA53+AA16)*b1^9+(((1.5*C22+0.5*C11)*AA91+(-27/4)*(C11+C22))*AA11-3.5*AA4-(3/8)*AA92-(9/4)*AA63-0.25*AA2)*b2^2+((-27/4)*AA11-0.5*AA91)*C21+(-(621/32)*C12-(129/16)*C11+(129/16)*C22)*AA91+((405/16)*C22-(405/16)*C11-(12285/32)*C12)*AA11-(119/16)*AA2-(789/64)*AA63-(33/2)*AA4-(69/128)*AA92)*b1^8+(-C21*b2^2*AA101+(2*AA101*C21+(-(131/16)*C11-(129/16)*C22)*AA101-5*AA1-(231/32)*AA53-(111/64)*AA102-10*AA3-(207/16)*AA12*C11-(135/16)*AA12*C22)*b2^2+(-(137/16)*AA101-(171/16)*AA12)*C21-(3825/32)*AA12*C22+(-(363/32)*(C22-C11)-(75/8)*C12)*AA101+((3825/32)*(C11-C12))*AA12+(207/16)*AA53+(113/16)*AA16+(3189/256)*AA102+(489/16)*AA3+(47/4)*AA1)*b1^7+(1.5*C21*(-0.5*AA11+AA91)*b2^4+((-3*AA91+1.5*AA11)*C21+(-(363/32)*C22+(89/32)*C11)*AA91+(-(999/32)*C11-(1275/32)*C22)*AA11-(327/128)*AA92-(549/64)*AA63-(149/8)*AA4-(29/16)*AA2)*b2^2+(-(1161/32)*AA11-(89/32)*AA91)*C21+((663/32)*(C22-C11)-(381/8)*C12)*AA91+((4455/32)*C22-(5373/8)*C12-(4455/32)*C11)*AA11-(41/8)*AA2-(6009/256)*AA63+(5547/512)*AA92-(39/2)*AA4)*b1^6+(-(27/16)*(AA12+(88/29)*AA101)*C21*b2^4+(((27/8)*AA12+(89/8)*AA101)*C21+(-(663/32)*C22-(485/32)*C11)*AA101-4*AA1-(1515/128)*AA53+(27/256)*AA102-8*AA3-(2151/32)*AA12*C11-(1485/32)*AA12*C22)*b2^2+(-(47/2)*AA101-(117/2)*AA12)$$

$$\begin{aligned}
& *C21+((61/8)*C12+(861/32)*(C11-C22))*AA101-(5679/32)*AA12*C22+(113/8)*AA1+(- \\
& (2529/8)*C12+(5679/32) \\
& *C11)*AA12+(1389/32)*AA3+(1149/64)*AA53+(485/32)*AA16+(11637/1024)*AA102)*b1^5+((267/32) \\
&)*(-(31/89)*AA11+AA91)*C21*b2^4+((-267/16)*AA91+(93/16)*AA11)*C21+(- \\
& (861/31)*C22+(109/32)*C11)*AA91+((-459/32)*C11-(1893/32)*C22)*AA11-(2349/256)*AA63- \\
& (157/8)*AA4-(61/16)*AA2-(2043/512)*AA92)*b2^2+((-109/32)*AA91-(1269/32)*AA11)*C21 \\
& +((-617/32)*(C11-C22)-(1379/32)*C12)*AA91+((-5265/32)*(C11-C22)- \\
& (14715/32)*C12)*AA11+(8721/512)*AA92-6*AA4-(1161/64)*AA63+(49/16)*AA2)*b1^4+((-135/16) \\
& *((109/135)*AA101+AA12)*C21*b2^4+(((135/8)*AA12+(109/8)*AA101)*C21+((-399/32)*C11- \\
& (617/32)*C22)*AA101-(2061/32)*AA12*C11-(513/64)*AA53- \\
& (1755/32)*AA12*C22+(243/512)*AA102)*b2^2+((-363/16)*AA101-(1089/16) \\
& *AA12)*C21+((381/16)*(C11-C22)+(291/16)*C12) \\
& *AA101+(1575/16)*AA12*C22+((-855/16)*C12+(1575/16)*C11)*AA12 \\
& +(399/32)*AA16+4.5*AA1+(1269/128)*AA53+(687/32)*AA3+(3159/1024)*AA102)*b1^3+((327/32)* \\
& AA91+(3/109)*AA11)*C21*b2^4+((-39/16)*AA11-(327/16)*AA91)*C21+(- \\
& (381/16)*C22+(9/8)*C11)*AA91+((81/8)*C11-(525/16)*C22)*AA11-(729/256)*AA63-(9/4)*AA2- \\
& 4.5*AA4-(243/128)*AA92)*b2^2+((-9/8)*AA91-(81/8)*AA11)*C21+((-45/8)*(C11-C22)- \\
& (99/8)*C12)*AA91+((405/8)*(C22-C11)-(891/8)*C12)*AA11- \\
& (1215/256)*AA63+(3159/512)*AA92+(9/4)*AA2)*b1^2+((-27/4) \\
& *((AA101/3)+AA12)*C21*b2^2+((4.5*AA101+(27/2)*AA12)*C21+((-45/8)*C22-(27/8)*C11)*AA101 \\
& -(81/8)*AA12*C11-(243/128)*AA53-(135/8)*AA12*C22)*b2^2+((-27/4)*AA101- \\
& (81/4)*AA12)*C21+((27/4)*(C11-C22+C12)*AA101)+(27/8)*(AA16+AA3)- \\
& (81/4)*AA12*C22+((81/4)*(C11+C12)*AA12)+(243/128)*AA53)*b1+(27/8)*b2^2*(C21*b2^2-2*C21- \\
& 2*C22)*(AA11+AA91))*sin(alfa) \\
& +0.75*(b1^2+(9/4))*(AA101*b1^5+(AA91+9*AA11)*b1^4+(18*AA12+5*AA101)*b1^3+(5*AA91 \\
& +7*AA11)*b1^2+(4*AA101+12*AA12)*b1+4*AA91+4*AA11) \\
& *S1*(b1^2+(9/16))*cos(alfa))*b1*n*pi);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
CC4 = & -(9/8)*(1/((9*b1^6+49*b1^4+56*b1^2+16)*b2))*n*pi*(exp(4*pi*m/b1)-1)*((7.5*AA1-3*AA61- \\
& 1.5*AA91)*b1^7+((-2*AA51-AA101+AA12) \\
& *b2^2+12.75*AA12+4*AA51-12*AA13+4.75*AA101)*b1^6 \\
& +((-0.5*AA91+(16/3)*AA14-3*AA61-(13/6)*AA11)*b2^2+(43/3)*AA11-(98/3)*AA14+(17/6)*AA91- \\
& (28/3)*AA61)*b1^5+(((1/18)*AA101+(5/6)*AA12-(140/9)*AA13-(44/9)*AA51)*b2^2+(193/36)*AA101 \\
& +(70/9)*AA13+(185/12)*AA12+(70/9)*AA51)*b1^4+(((20/9)*(AA11-AA91)-(13/3)*AA61- \\
& (22/3)*AA14)*b2^2-(214/9)*AA14+(145/18)*AA91-(77/9)*AA61 \\
& +(205/18)*AA11)*b1^3+(((2/9)*AA101-(34/9)*AA51+(2/3)*AA12- \\
& (58/9)*AA13)*b2^2+(13/3)*AA12+(22/3)*AA13+(13/9)*AA101 \\
& +(14/3)*AA51)*b1^2+(((8/9)*AA11-(8/9)*AA91-(4/3)*AA61-(8/3)*AA14)*b2^2+(26/9)*AA11- \\
& (20/9)*AA61-(40/9)*AA14+(26/9)*AA91)*b1 \\
& -(8/9)*(b2-1)*(b2+1)*(AA51+AA13))*b1^2);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
CC5 = & -(10e-8)/((4*b1^6+29*b1^4+61*b1^2+36)*b2))*pi*(2.25+b1^2)*((- \\
& 1.5*AA62+0.75*AA8)*b1^5+((-AA7-AA52+AA15)*b2^2-AA7-0.5*AA15*2*AA52)*b1^4+((-1.5*AA62- \\
& 1.75*AA8)*b2^2-4*AA62+2*AA8)*b1^3 \\
& +((1.5*AA15-2*AA52-2*AA7)*b2^2-AA15+3*AA52-1.5*AA7)*b1^2+((-3.25*AA8-1.5*AA62)*b2^2- \\
& 2.5*AA62+1.25*AA8)*b1+0.5*(b2-1)*(b2+1)*(AA7-2*AA52+AA15))*exp(4*pi*m/b1)-1)*b1^2*n);
\end{aligned}$$

$$CC6 = -0.5*((exp(6*pi*m/b1)-1)*h*rovt*S1^4*b1^4*n*pi)/(9+4*b1^2)*(b1^2+9)*b2);$$

$$\begin{aligned}
CC7 = & 1/((576*b1^10+4756*b1^8+13133*b1^6+15073*b1^4+7416*b1^2+1296)*b2*sin(alfa))*((288*n \\
& *(b1^2+(4/9))*((b1^2+0.5625)*((8*C12*AA3+4*D11)*b1^4-4*AA4*(C11-3*C12- \\
& C22)*b1^3+((6*(C11-C22)+2*C21-4*C12)*AA3-2*D11+D22)*b1^2+2*(1.5*C21+C11-C22)*AA4*b1- \\
& C21*(AA3+AA16))*((b1^2+4)*(b1^2+2.25)*sin(alfa)*exp(2*m*pi/b1)+(16/3)*((b1^5*C12*AA53-0.5*(- \\
& C22-0.5*C12+C11)*AA63*b1^4+(3/8)*((2/3)*C21-C22+(17/3)*C12+C11)*AA53*b1^3-(7/8)*(-C22- \\
& (5/14)*C21+(5/14)*C12+C11)*AA63)*b1^2+(9/32)*AA53*(-C22+C21+3*C12+C11)*b1-
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (9/32)*AA63*(-C22+C11+C12-C21))*\sin(\alpha)- \\
& 0.25*((7/4)*b1^2+(9/16))*AA4+b1^3*AA3)*S1*\cos(\alpha))*b1*(b1^2+4)*(b1^2+1)*\exp(3*m*\pi/b1)- \\
& (b1^2-(9/16))*(b1^2*AA53+1.5*b1*AA63+AA53) \\
& *S1*\cos(\alpha)*(b1^2+2.25)*(b1^2+1)*\exp(4*m*\pi/b1)-(b1^2+4)* \\
& (((16/3)*AA53*C12+8*C12*AA3+4*D11)*b1^8+((-8/3)*(C11-C22)+(4/3)*C12)*AA63-4*AA4*(C11- \\
& 3*C12-C22))*b1^7+(((50/3)*C12+2*(C11-C22)+(4/3)*C21)*AA53+(18.5*C12-6*(C22- \\
& C11)+2*C21)*AA3 \\
& +D22+9.25*D11)*b1^6+((-22/3)*(C11-C22)-(1/3)*C12+(5/3)*C21)*AA63-9.25*AA4*(-C22- \\
& (135/37)*C12+C11-(12/37)*C21))*b1^5+(((17/6) \\
& *C21+(95/6)*C12+3.5*(C11-C22))*AA53+((135/8)*(C11-C22)+(37/8)*C21- \\
& (9/8)*C12)*AA3+(45/16)*D22-(9/16)*D11-C21*AA16)*b1^4+(((19/6)*C21+(37/6)*C22-(37/6)*C11- \\
& (19/6)*C12)*AA63+(9/16)*AA4*(15*C21+27*C12-C22+C11))*b1^3+((1.5*C11+4.5*C12+1.5*C21- \\
& 1.5*C22)*AA53+(-(243/32)*C22+(243/32)*C11-(9/32)*C21-(81/16)*C12)*AA3- \\
& (81/32)*D11+(81/64)*D22-(45/16)*C21*AA16)*b1^2+((1.5*(C21+C22-C11- \\
& C12))*AA63+(81/32)*(1.5*C21+C11-C22)*AA4)*b1- \\
& (81/64)*C21*(AA3+AA16))*\sin(\alpha)+(4/3)*S1*\cos(\alpha))*((AA3+0.75*AA53)*b1^6+(1.75*AA4+1.125* \\
& AA63)*b1^5+((183/64)*AA53+4*AA3)*b1^4+((121/16)*AA4+(405/128)*AA53)*b1^3+(783/256)*b1^2 \\
& *AA53+((729/512)*AA63+2.25*AA4)*b1+(243/256)*AA53)*(b1^2+1))*b1^2*\pi);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
CC8 = & -(512/3)*(1/((64*b1^6+436*b1^4+801*b1^2+324)*b2*\sin(\alpha)))*(\pi*b1^2*n* \\
& ((C12*AA52*b1^5+((0.5*C22+0.25*C12-0.5*C11)*AA62-(1/16)*AA2)*b1^4 \\
& +(((3/8)*C11+(17/8)*C12-(3/8)*C22+0.25*C21)*AA52-(1/32)*b2^2*AA1)*b1^3 \\
& +((-7/8)*C11+(5/16)*C21-(5/16)*C12+(7/8)*C22)*AA62- \\
& (1/128)*AA2*(12.5+b2^2))*b1^2+((9/32)*(C11+C21-C22)+(27/32)*C12)*AA52- \\
& (9/128)*b2^2*AA1)*b1+(9/32)*(C22+C21-C11-C12)*AA62+(9/256)*AA2*(b2^2- \\
& 1))*b1*(b1^2+4)*\sin(\alpha)*\exp(3*m*\pi/b1) \\
& -(3/64)*(b1*(b1^2*AA92+(0.5*b2^2*AA102-1.25*AA102)*b1-0.5*AA92*(b2^2-3))*\sin(\alpha) \\
& +4*S1*(1.5*b1*AA62+AA52*(b1^2+1))*\cos(\alpha)) \\
& *(b1^2+(9/16))*(b2^2+(9/4))*\exp(4*m*\pi/b1)-b1*(b1^7*C12*AA52+((0.5*C22+0.25*C12- \\
& 0.5*C11)*AA62-(3/64)*AA92- \\
& (1/16)*AA2)*b1^6+((15/256)*AA102+((49/8)*C12+0.25*C21+(3/8)*C11-(3/8)*C22)*AA52+(- \\
& (3/128)*AA102-(1/32)*AA1)*b2^2)*b1^5+(-(207/1024)*AA92-(89/256)*AA2+((11/16)*C12- \\
& (23/8)*C11+(23/8)*C22+(5/16)*C21)*AA62+((3/128)*AA92-(1/128)*AA2) \\
& *b2^2)*b1^4+(((41/32)*C21+(57/32)*(C11-C22)+(299/32)*C12)*AA52+(-(25/128)*AA1- \\
& (135/2048)*AA102)*b2^2+(675/4096)*AA102)*b1^3 \\
& +(((49/32)*(C21-C12)+(121/32)*(C22-C11)) \\
& *AA62+((1/256)*AA2+(135/2048)*AA92)*b2^2-(1035/4096)*AA92-(109/256) \\
& *AA2)*b1^2+(((9/8)*(C21-C11-C22)+(27/8)*C12)*AA52+(-(243/8192)*AA102- \\
& (9/32)*AA1)*b2^2+(1215/16384)*AA102)*b1+(9/8)*(C22+C21-C11- \\
& C12)*AA62+((9/64)*AA2+(243/8192)*AA92)*b2^2-(9/64)*AA2-(729/8192) \\
& *AA92)*\sin(\alpha) \\
& +(3/16)*S1*(b1^2+(9/16))*(1.5*b1*AA62+(b1^2+1)*AA52)*(b1^2+(9/16))*\cos(\alpha));
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
CC9 = & -(1/((576*b1^10+4756*b1^8+13133*b1^6+15073*b1^4+7416*b1^2+1296) \\
& *b2*\sin(\alpha)))*(\pi*b1^2*n*(b1^2+4)*(b1^2+1)*b1*(b1^2+(4/9))*(C12*b1^5*AA51+((0.25*C12 \\
& +0.5*C22-0.5*C11)*AA61-0.5*AA4-8*C12*AA14)*b1^4 \\
& +(((3/8)*C11+(17/8)*C12+0.25*C21-(3/8)*C22)*AA51+(14*C12+2*C22- \\
& 2*C11)*AA13+0.125*AA3+0.125*AA16)*b1^3+((0.875*C22+(15/6)*C21-(5/16)*C12- \\
& (7/8)*C11)*AA61+(-4*C11+0.5*C12+4*C22-0.5*C21)*AA14-(3/16)*AA4)*b1^2+(9/32)*(C21- \\
& C22+C11+3*C12)*(4*AA13+AA51)*b1 \\
& -(9/32)*(AA61+2*AA14)*(C11-C22-C21+C12))*\sin(\alpha)*\exp(3*\pi*m/b1) \\
& -(3/8)*(b1^3*AA63+0.5*AA53*b1^2+(13/36)*b1*AA63+(5/18)*AA53)* \\
& (b1^2+1)*b1^2*\sin(\alpha)+0.5*S1*\cos(\alpha)*(b1^6*AA51+(1.5*AA61-(8/3)*AA14)*b1^5 \\
& +((70/9)*AA13+(22/9)*AA51)*b1^4+((13/6)*AA61+ \\
& (11/3)*AA14)*b1^3+((29/9)*AA13+(17/9)*AA51)*b1^2 \\
& +((2/3)*AA61+(4/3)*AA14)*b1+(4/9)*AA13+(4/9)*AA51)*(b1^2+(9/4))*(b1^2+(9/16))*\exp(4*m*\pi/b1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&)-(b1^2+1)*b1*(C12*b1^9*AA51+((0.25*C12+0.5*C22-0.5*C11)*AA61-8*C12-0.5*AA4- \\
&(3/8)*AA63*AA14) \\
&*b1^8+(((3/8)*C11+(473/72)*C12+0.25*C21-(3/8)*C22)*AA51 \\
&+(14*C12+2*C22-2*C11)*AA13+0.125*AA3-(3/16)*AA53+0.125*AA16)*b1^7 \\
&+(((115/144)*C12+(223/72)*C22-(223/72)*C11+(5/16)*C21)*AA61+(-4*C11-0.5*C21-(631/18)*C12 \\
&+4*C22)*AA14-(347/144)*AA4- \\
&(457/384)*AA63)*b1^6+(((187/96)*C11+(401/288)*C21+(3475/288)*C12 \\
&-(187/96)*C22)*AA51+((7723/72)*C12+(9/8)*A21+(559/72)*C22-(559/72)*C11)*AA13- \\
&(485/768)*AA53 \\
&+(5/9)*AA16+(5/9)*AA3)*b1^5+(((1457/288)*C22-(353/288)*C12- \\
&(1457/288)*C11+(481/288)*C21)*AA61+(-(239/144)*C21+(2641/144)*(C22-C11))- \\
&(201/16)*C12*AA14-(31/18)*AA4-(219/256)*AA63)*b1^4 \\
&+((-23/12)*C22+(271/36)*C12+(61/36)*C21+(23/12)*C11)*AA51 \\
&+((13/9)*C11-(13/9)*C22+5*C21+(359/9)*C12)*AA13- \\
&(543/1024)*AA53+(2/9)*AA16+(2/9)*AA3)*b1^3+(((101/36)*(C22-C11)+(65/36)*(C21- \\
&C12))*AA61+((173/18)*C22-(173/18)*C11-(29/18)*C12+(29/18)*C21)*AA14-(351/2048)*AA63- \\
&(1/3)*AA4)*b1^2+((0.5*C21-0.5*C22+0.5*C11+1.5*C12)*AA51+(2*C11+6*C12+2*C21- \\
&2*C22)*AA13-(135/1024)*AA53)*b1-0.5*(AA61+2*AA14)*(C11-C22- \\
&C21+C12))*sin(alfa)+(3/16)*S1*(b1^2+2.25)*cos(alfa)*(b1^2+(9/16))* \\
&(b1^6*AA51+(1.5*AA61- \\
&(8/3)*AA14)*b1^5+((70/9)*AA13+(22/9)*AA51)*b1^4+((13/6)*AA61+(11/3)*AA14)*b1^3 \\
&+((29/9)*AA13+(17/9)*AA51)*b1^2 \\
&+((2/3)*AA61+(4/3)*AA14)*b1+(4/9)*AA13+(4/9)*AA51));
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
CC10 &= (1/((9*b1^6+49*b1^4+56*b1^2+16)*b2))*(9*(-1.5*AA14+AA61)*b1^5 \\
&+((13/3)*AA13+0.5*AA51)*b1^4+((49/36)*AA61+(139/72)*AA14)*b1^3+((7/9)*AA51+(137/72)*AA13 \\
&)*b1^2+((13/18)*AA14+(13/36)*AA61) \\
&*b1+(5/18)*AA13+(5/18)*AA51)*b1^4*n*pi*(exp(4*m*pi/b1)-1));
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
CC11 &= (1/((576*b1^10+4756*b1^8+13133*b1^6+15073*b1^4+7416*b1^2+1296)*b2))*(36*(b1^2+2.2 \\
&5)*pi*n*b1^3*(b1^2+0.5625)*(exp(4*m*pi/b1)-1)*(- \\
&6*AA11+16*AA62+2*AA91)*b1^6+((AA12+AA101)*b2^2-2.5*AA101+8*AA52-16.5*AA12)*b1^5+((- \\
&(13/3)*AA12+(13/9)*AA101)*b2^2+((-11/3)*AA11- \\
&AA91)*b2^2+(196/9)*AA62+(10/3)*AA11+(53/9)*AA91)*b1^4+(112/9)*AA52-(89/6)*AA12- \\
&(65/18)*AA101)*b1^3+((23/9)*AA11-(13/9)*AA91) \\
&*b2^2+(47/9)*AA91+(17/3)*AA11+(52/9)*AA62)*b1^2 \\
&+(((4/3)*AA12+(4/9)*AA101)*b2^2+(40/9)*AA52-(10/3)*AA12-(10/9) \\
&*AA101)*b1-(4/9)*(b2^2-3)*(AA91+AA11));
\end{aligned}$$

مراجع و منابع

References:

- [1] Malatkar P. "Nonlinear Vibrations of Cantilever Beams and plates", Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia. 2003, Ph.D. thesis.
- [2] Evan-Iwanowski R.M. "Resonance Oscillations in Mechanical Systems", 1976.
- [3] Nayfeh A.H., Mook D.T. "Nonlinear Oscillations", John Wiley & Sons, New York. 1979.
- [4] Moon F.C. "Chaotic Vibrations: An Introduction for applied Scientists and Engineers", John Wiley & Sons, New York. 1987.
- [5] Alzahabi B., Kowalski H. "Membrane and bending strain in cylindrical shell vibrations". ASME 28th International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering. 2009;58:9-95.
- [6] Love AEH. "The small free vibrations and deformation of a thin elastic shell", Philosophical Transactions of the Royal Society of London A. 1888;179: 491-546.
- [7] Rayleigh L. "Theory of Sound", The Macmillan Co, New York. 1894;1: 409.
- [8] Leissa AW. "Vibration of shells", NASA SP-288. 1973.
- [9] Markuš Š. "The mechanics of vibrations of cylindrical shells", Elsevier Science Ltd. 1988;17.
- [10] Forsberg K. "Influence of boundary conditions on the modal characteristics of thin cylindrical shells", AIAA journal. 1964;2(12):2150-7.
- [11] Chung H. "Free vibration analysis of circular cylindrical shells", Journal of Sound and Vibration. 1981;74(3):331-50.
- [12] Mofakhami MR., Toudeshky HH., Hashemi SH. "Finite cylinder vibrations with different end boundary conditions", Journal of Sound and Vibration. 2006;297(1-2):293-314.
- [13] El-Mously M. "Fundamental natural frequencies of thin cylindrical shells", a comparative study. Journal of Sound and Vibration. 2003;264(5):1167-86.
- [14] Wang C., Lai JCS. "Prediction of natural frequencies of finite length circular cylindrical shells", Applied Acoustics. 2000; 59(4):385-400.
- [15] Zhang XM., Liu GR., Lam KY. "Vibration analysis of thin cylindrical shells using wave propagation approach", Journal of Sound and Vibration. 2001;239(3): 397-403.

- [16] Ma X., Du J-t., Yang T-j., Liu Z-g. "Analysis of influence of boundary conditions on cylindrical shell dynamics based on wave propagation approach ", *Journal of Vibration Engineering*. 2009; 6:1-10.
- [17] Zhou H., Li W., Lv B., Li WL. "Free vibrations of cylindrical shells with elastic-support boundary conditions", *Applied Acoustics*. 2012;73(8):751-6.
- [18] Xuebin L. "Study on free vibration analysis of circular cylindrical shells using wave propagation", *Journal of Sound and Vibration*. 2008;311(3–5):667-82.
- [19] Naeem M., Sharma C. "Prediction of natural frequencies for thin circular cylindrical shells", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. 2000;214: 1313-28.
- [20] Messina A., Soldatos KP. "Ritz-type dynamic analysis of cross-ply laminated circular cylinders subjected to different boundary conditions ", *Journal of Sound and Vibration*. 1999;227(4):749-68.
- [21] Dai L., Yang T., Li W., Du J., Jin G. "Dynamic analysis of circular cylindrical shells with general boundary conditions using modified fourier series method", *Journal of Vibration and Acoustics*. 2012;134(4):1-12.
- [22] Haddadpour H., Mahmoudkhani S., Navazi HM. "Free vibration analysis of functionally graded cylindrical shells including thermal effects", *Thin-Walled Structures*. 2007;45(6):591-9.
- [23] Loy C., Lam K., Shu C. "Analysis of cylindrical shells using generalized differential quadrature. *Shock and Vibration*", 1997;4(3):193-8.
- [24] Tornabene F., Viola E., Inman DJ. "2-D differential quadrature solution for vibration analysis of functionally graded conical, cylindrical shell and annular plate structures", *Journal of Sound and Vibration*. 2009;328:259-90.
- [25] Karczuz DG. "Expressions for direct evaluation of wave number in cylindrical shell vibration studies using the Flügge equations of motion", *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2006;119(6):3553-7.
- [26] Jin G., Ye T., Chen Y., Su Z., Yan Y. "An exact solution for the free vibration analysis of laminated composite cylindrical shells with general elastic boundary conditions", *Composite Structures*. 2013;106: 114-27.
- [27] Chen Y., Jin G., Liu Z. "Free vibration analysis of circular cylindrical shell with non-uniform elastic boundary constraints", *International Journal of Mechanical Sciences*. 2013;74: 120-32.

- [28] Song X., Han Q., Zhai J. "Vibration analyses of symmetrically laminated composite cylindrical shells with arbitrary boundaries conditions via Rayleigh–Ritz method", *Composite Structures*. 2015;134:8.
- [29] Bryan GH. "Editor On the beats in the vibrations of a revolving cylinder or bell", *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*; 1890.
- [30] DiTaranto R., Lessen M. "Coriolis acceleration effect on the vibration of a rotating thinwalled circular cylinder" *Journal of Applied Mechanics*. 1964;31(4):700-1.
- [31] Srinivasan A., Lauterbach GF. "Traveling waves in rotating cylindrical shells", *Journal of Engineering for Industry*. 1971;93(4):1229-32.
- [32] Zohar A., Aboudi J. "The free vibrations of a thin circular finite rotating cylinder", *International Journal of Mechanical Sciences*. 1973;15(4):269-78.
- [33] Saito T., Endo M. "Vibration of finite length, rotating cylindrical shells", *Journal of Sound and Vibration*. 1986;107(1):17-28.
- [34] Endo M., Hatamura K., Sakata M., Taniguchi O. "Flexural vibration of a thin rotating ring", *Journal of Sound and Vibration*. 1984;92(2):261-72.
- [35] Penzes LE., Kraus H. "Free vibration of prestressed cylindrical shells having arbitrary homogeneous boundary conditions", *AIAA Journal*. 1972.
- [36] Padovan J. "Natural frequencies of rotating prestressed cylinders", *Journal of Sound and Vibration*. 1973;31(4):469-82.
- [37] Malekzadeh P., Heydarpour Y. "Free vibration analysis of rotating functionally graded cylindrical shells in thermal environment", *Composite Structures*. 2012;94(9):2971-81.
- [38] Wang YQ., Guo XH., Chang HH., Li HY. "Nonlinear dynamic response of rotating circular cylindrical shells with precession of vibrating shape Part I: Numerical solution", *International Journal of Mechanical Sciences*. 2010; 52:1217-24.
- [39] Wang YQ., Guo XH., Chang HH., Li HY. "Nonlinear dynamic response of rotating circular cylindrical shells with precession of vibrating shape Part II: Approximate analytical solution", *International Journal of Mechanical Sciences*. 2010; 52:1208-16.
- [40] Liu Y., Chu F. "Nonlinear vibrations of rotating thin circular cylindrical shell", *Nonlinear Dynamics*. 2012;67(2):1467-79.
- [41] Ng TY., Lam KY. "Vibration and critical speed of a rotating cylindrical shell subjected to axial loading", *Applied Acoustics*. 1999;56(4):273-82.

- [42] Hua L., Lam KY. "Frequency characteristics of a thin rotating cylindrical shell using the generalized differential quadrature method", *International Journal of Mechanical Sciences*. 1998;40(5):443-59.
- [43] Guo D., Zheng Z., Chu F. "Vibration analysis of spinning cylindrical shells by finite element method", *International Journal of Solids and Structures*. 2002;39(3):725-39.
- [44] Liew KM., Ng TY., Zhao X., Reddy JN. "Harmonic reproducing kernel particle method for free vibration analysis of rotating cylindrical shells", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2002;191 (37–38):4141-57.
- [45] Civalek Ö., Gürses M. "Free vibration analysis of rotating cylindrical shells using discrete singular convolution technique", *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. 2009;86(10):677-83.
- [46] Civalek Ö. "A parametric study of the free vibration analysis of rotating laminated cylindrical shells using the method of discrete singular convolution", *Thin-Walled Structures*. 2007.
- [47] Sun S., Chu S., Cao D. "Vibration characteristics of thin rotating cylindrical shells with various boundary conditions", *Journal of Sound and Vibration*. 2012;331(18):4170-86.
- [48] Sun S., Cao D., Han Q. "Vibration studies of rotating cylindrical shells with arbitrary edges using characteristic orthogonal polynomials in the Rayleigh–Ritz method", *International Journal of Mechanical Sciences*. 2013;68: 180-9.
- [49] Song X., Zhai J., Chen Y., Han Q. "Traveling wave analysis of rotating cross-ply laminated cylindrical shells with arbitrary boundaries conditions via Rayleigh–Ritz method", *Composite Structures*. 2015;133: 1101-15.
- [50] Huang S., Soedel W. "Effects of Coriolis acceleration on the forced vibration of rotating cylindrical shells", *Journal of applied mechanics*. 1988;55: 231-3.
- [51] Huang SC., Hsu BS. "Resonant phenomena of a rotating cylindrical shell subjected to a harmonic moving load", *Journal of Sound and Vibration*. 1990;136(2):215-28.
- [52] Liu L., Cao D., Sun S. "Dynamic characteristics of a disk–drum–shaft rotor system with rub-impact", *Nonlinear Dynamics*. 2015;80(1-2):1017-38.
- [53] Han Q., Chu F. "Effects of rotation upon parametric instability of a cylindrical shell subjected to periodic axial loads", *Journal of Sound and Vibration*. 2013;332(22):5653-61.
- [54] Irie T., Yamada G., Kaneko Y. "Free vibration of a conical shell with variable thickness", *Journal of Sound and Vibration*. 1982;82(1):83-94.

- [55] Sankaranarayanan N., Chandrasekaran K., Ramaiyan G. "Free vibrations of laminated conical shells of variable thickness", *Journal of Sound and Vibration*. 1988;123(2):357-71.
- [56] Sivadas KR., Ganesan N. "Free vibration of cantilever conical shells with variable thickness", *Computers & Structures*. 1990;36(3):559-66.
- [57] Sivadas KR., Ganesan N. "Vibration analysis of laminated conical shells with variable thickness", *Journal of Sound and Vibration*. 1991;148(3):477-91.
- [58] Tong L. "Free vibration of composite laminated conical shells", *International Journal of Mechanical Sciences*. 1993;35(1):47-61.
- [59] Kang J-H., Leissa AW. "Three-dimensional vibrations of hollow cones and cylinders with linear thickness variations", *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1999;106(2):74855.
- [60] Liew KM., Ng TY., Zhao X. "Free vibration analysis of conical shells via the element-free kp-Ritz method", *Journal of Sound and Vibration*. 2005; 281 (3–5):627-45.
- [61] Civalek Ö. "Numerical analysis of free vibrations of laminated composite conical and cylindrical shells: Discrete singular convolution (DSC) approach", *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2007;205: 251-71.
- [62] Civalek Ö. "Vibration analysis of laminated composite conical shells by the method of discrete singular convolution based on the shear deformation theory", *Composites Part B: Engineering*. 2013;45(1):1001-9.
- [63] Civalek O. "Linear vibration analysis of isotropic conical shells by discrete singular convolution (DSC)". *Structural Engineering and Mechanics*. 2007;25(1):127-30.
- [64] Li F-M., Kishimoto K., Huang W-H. "The calculations of natural frequencies and forced vibration responses of conical shell using the Rayleigh–Ritz method", *Mechanics Research Communications*. 2009;36(5):595-602.
- [65] Jin G., Su Z., Ye T., Jia X. "Three-dimensional vibration analysis of isotropic and orthotropic conical shells with elastic boundary restraints", *International Journal of Mechanical Sciences*. 2014;89: 207-21.
- [66] Jin G., Ma X., Shi S., Ye T., Liu Z. "A modified Fourier series solution for vibration analysis of truncated conical shells with general boundary conditions", *Applied Acoustics*. 2014;85: 82-96.
- [67] Crenwelge O.E., Muster D. "Free Vibration of Ring and Stringer Stiffened Conical Shells", *Journal of the Acoustical Society of America* . 1969; 49,176-185.

- [68] Mecitoglu z. "Vibration Characteristics of a Stiffened Conical Shell", Journal of Sound and Vibration. . 1996;197,191-206
- [69] Sofiyev AH. "Non-linear Buckling Behavior of FGM Truncated Conical Shells Subjected to Axial Load", Int J Non Lin Mech. 2011;46:711-9.
- [70] Donnell L.H. "Stability of thin-walled Tubes under torsion", NACA Rep. 1933;479.
- [71] Agamirov V.L. "Dynamic Problems of Nonlinear Shells Theory", Nauka, Moscow, (in Russian). 1990 .
- [72] Shen Shen H. "Nonlinear bending of functionally graded carbon nanotube reinforced composite plates in thermal environments", Composite. Structures. 9002;91:9-19.
- [73] Soedel W. "Vibrations of Shells and Plates", Marcel Dekker, Inc, New York. 2004.
- [74] Soedel W. "Vibrations of Shells and Plates", Marcel Dekker, Inc, New York. 2004.
- [75] Jones R.M. "Mechanics of Composite Materials (2nd edn)", Philadelphia, Taylor & Francis. 1999.
- [76] Mohamad Subhi Qatu. "Vibration of Laminated Shells and Plates" Professor of Michigan and Ohio University. 2004.
- [77] ع . جعفری، م .خلیلی، ر.آذرافزا. "بهینه‌سازی وزنی و دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه"، پایان‌نامه دکترا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، بهمن 1384.
- [78] علی اصغر جعفری، علی قمری. "بررسی ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با سیال درونی" پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی 1387.
- [79] Abrate S., "Impact on Composite Structures", Cambridge University Press, 1998.
- [80] Reddy J.N. "Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis", CRC press, 2004.
- [81] Mustafa B.A.J., Ali R. "An energy method for free vibration analysis of stiffend circular cylindrical shells", computers & srucures Vol. 32. No. 2, pp. 355-363. 1989;32(2):355-363
- [82] Jafari A.A., Bagheri M. "Free vibration of rotating ring stiffened cylindrical shells with non-uniform stiffener distribution", Journal of Sound and Vibration. 2006;296:353-376.
- [83] Tong L. "Free Vibration of Orthotropic Conical Shells", International Journal of Engineering Sciences. 1993;31:719-733.
- [84] Loy C.T., Lam K.Y. "Vibration of Cylindrical Shells with Ring Support ", Int. J. Mech. 1997;39: 445-471.

- [85] Shadmehri F., Hoa S.V., Hojjati M. "Buckling of conical composite shells", *Composite Structures*. 2012;94: 787-792.
- [86] Zhang G. Q. "Derivation of The Governing Equation of Anisotropic Conical Shells", Delf University of Technology, P.h.D Thesis. 1989.
- [87] Agamirov V. L. "Dynamic Problems of Nonlinear Shells Theory", Moscow, Nauka, [in Russian]. 1990.
- [88] Loy C.T., Lam K.Y. "Vibration of Cylindrical Shells with Ring Support", *International Journal of Mechanical Sciences*. 1997;39: 445– 471.
- [89] Liao S. J., Chwang A.T. "Application of Homotopy Analysis Method in Nonlinear Oscillations" *ASME J.Appl.* 1998;65: 914-922.
- [90] He J.H. "Homotopy Perturbation Technique", *Comput. Methods Appl.Mech.Eng.* 1999;178:257-262.
- [91] Daneshjou K., Talebitooti M., Saeidi H. "Dynamic Analysis and Critical Speed of Rotating Laminated Conical Shells with Orthogonal Stiffeners Using Generalized Differential Quadrature Method", *Latin Journal of Mechanical Solids and Structures*. 2013;10:349-390.
- [92] Irie T., Yamada G., Tanaka K. "Natural Frequencies of Truncated Conical Shells", *J Sound Vib.* 1984; 92:447-53.
- [93] Tong L. "Effect of Axial Load on Free Vibration of Orthotropic Conical Shells", *J Vib Acoust.* 1996; 118:164-8.
- [94] Liew KM., Ng TY., Zhao X. "Free Vibration Analysis of Conical Shells Via The Element-Free Kp-Ritz Method", *J Sound Vib* . 2005;284:627-45.
- [95] Li FM., Kishimoto K., Huang WH. "The Calculations of Natural Frequencies and Forced Vibration Responses of Conical Shell Using The Rayleigh-Ritz Method", *Mech Res Comm.* 2009; 36:595-602.
- [96] Kerboua Y., Lakis AA., Hmila M. "Vibration Analysis of Truncated Conical Shells Subjected to Flowing Fluid", *Apple Math Model* . 2010;34:791-809.
- [97] مهدی میرنژاد، "پیش‌بینی خواص مکانیکی نانو لوله‌های کربنی بوسیله‌ی مدل مکانیک مولکولی"، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه گیلان، دانشکده فنی، شهریور 1390.
- [98] Nayfeh A.H. " Perturbation Methods", Wiley, New York, 1973.
- [99] Nayfeh A.H., Mook D.T. "Nonlinear Oscillations", Wiley, New York, 1979.
- [100] Nayfeh A.H., Mook D.T. " Problems in Perturbation", Wiley, New York, (1993).

Abstract

In this research, frequency analysis of the reinforced truncated conical shell under external load is presented. The von Karman nonlinear strain-displacement relation is used to obtain the equations of motion of this structure included its reinforcing rings and stringers. Using Donnell-Mushtari-Vlasov theory and Hamilton's principle, these equations which are a system of coupled nonlinear partial differential equations with variable coefficients have been derived. The nonlinear Galerkin method along with homotopy perturbation method (HPM) have been applied to solve the equations of motion. The extracted results are in good agreement with those of other research works. Finally, a parametric study is performed to investigate the effects of the various parameters such as thickness of the shell, number of rings and stringers, on linear and nonlinear natural frequencies and primary and secondary resonances.

Key words: Donnell-Mushtari-Vlasov theory, Truncated conical shells, Nonlinear vibration, Homotopy perturbation method, Frequency response equation, Primary resonance, Secondary resonances.



Shahrood University of Technology

Faculty of Mechanical and Mechatronics Engineering

M.Sc. Thesis in Aerospace - Space Structures Engineering

Secondary resonance analysis of grid stiffened conical shells subjected to external excitations

By: Nazanin Fateme Asadizadeh

Supervisors:

Dr. Amir Jalali

Dr. seyed Mahdi Hoseini Frrash

January 2020