بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده مهندسی مکانیک ومکاترونیک

پایان‌نامه کارشناسی ارشد مهندسی طراحی کاربردی

تعیین ضرایب شدت تنش برای ترکی در مسائل انتشار-ترموالاستیسیته تعمیم‌یافته با استفاده از روش المان محدود توسعه‌یافته

نگارنده

هادی بشیرنژاددهقان

اساتید راهنما

دکتر محمدباقر نظری

دکتر مسعود مهدی‌زاده رخی

شهریورماه ۱۳۹۸

تقدیم به

به پاس تعبیر عظیم و انسانی‌شان از کلمه ایثار و از خودگذشتگی

به پاس قلب‌های بزرگشان که فریادرس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می‌گراید.

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است.

و به پاس محبت‌های بی‌دریغشان که هرگز فروکش نمی‌کند

این مجموعه را به خانواده عزیزم تقدیم می‌کنم

سپاسگزاری

سپاس خدای را که طاعتش موجب قربت است به شکراندرش مزید نعمت...

ابتدا بر خود لازم می‌دانم از زحمات فراوان استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر محمدباقر نظری که با رهنمودهای ارزشمند خود مرا در انجام این پایان‌نامه یاری نموده‌اند، سپاسگزاری نمایم.

از استاد گران‌قدر جناب آقای دکتر مسعود مهدی‌زاده رخی به خاطر راهنمایی دلسوزانه سپاسگزارم.

از جناب آقای دکتر سید هادی بیات خالصانه تشکر و قدردانی می‌نمایم که بنده را بسیاری یاری نمودند.

از جناب آقای دکتر اکبرزاده، مسئول محترم مرکز تحقیقاتی مکانیک محاسباتی و آقای مهندس درازگیسو که بنده را جهت استفاده از سیستم پرسرعت یاری نموده‌اند، بسیار سپاسگزارم.

از روشنی‌بخش‌های راه زندگی‌ام، پدر و مادر عزیزم، که همواره مشوق من هستند و در تمام مراحل زندگی اعم از ایام تحصیلم متحمل رنج فراوان شدند خالصانه تشکر می‌کنم و خاضعانه دستشان را می‌بوسم. و همچنین از برادرانم و خواهرم کمال تشکر را بجا آورم.

تعهدنامه

اینجانب **هادی بشیرنژاددهقان** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته **مهندسی مکانیک - طراحی کاربردی** دانشکده **مکانیک** دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان‌نامه **تعیین ضرایب شدت تنش برای ترکی در مسائل انتشار-ترموالاستیسیته تعمیم‌یافته با استفاده از روش المان محدود توسعه‌یافته تحت** راهنمایی **دکتر محمدباقر نظری و دکتر مسعود مهدی‌زاده رخی** متعهد می‌شوم:

* تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام‌شده است.
* در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورداستفاده استناد شده است.
* مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ‌گونه مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
* کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا «Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
* حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان‌نامه تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
* در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا از آن استفاده‌شده است، اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ :

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن(مقالات، مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.

- استفاده از اطلاعات نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پایان‌نامه، رفتار یک ترک ساکن در محیط محدود انتشار- ترموالاستیسیته تعمیم‌یافته تحت شوک گرمایی و غلظت بررسی‌شده است. ترک با استفاده از روش المان محدود توسعه‌یافته مدل‌سازی و ضرایب شدت تنش با بکارگیری روش انتگرال برهم‌کنش استخراج‌شده است. انتشار گرما و غلظت بر اساس تئوری‌های تعمیم‌یافته گرین – نقدی و غیرفیک در نظر گرفته‌شده است. روش المان محدود توسعه‌یافته برای گسسته‌سازی معادلات در فضا و روش ضمنی نیومارک جهت انتگرال‌گیری زمانی مورداستفاده قرارگرفته است. برای بارگذاری‌های مختلف (شوک گرمایی و غلظت)، ضرایب شدت تنش، توزیع دمای نوک ترک و توزیع انتشار نوک ترک مطالعه شده است. همچنین اثر سرعت موج تنش، موج غلظت و موج دما روی ضرایب شدت تنش برای ترک‌های مستقیم و مایل بررسی‌شده است. نتیجه‌ای که از سرعت‌های مختلف می‌توان گرفت این است که برای حالتی که سرعت موج تنش و سرعت موج دما یکسان و بیشتر از سرعت موج غلظت است افزایش ضریب شدت تنش سریع‌تر و بیشتر از حالت‌های دیگر است.

کلیدواژگان

انتشار- ترموالاستیسیته تعمیم‌یافته، ضرایب شدت تنش، روش المان محدود توسعه‌یافته، انتگرال برهم‌کنش

فهرست

فهرست شکل‌ها

فهرست جداول

فهرست علائم و اختصارات

A	مساحت المان، (m^2)
A^*	مساحت ناحیه انتگرال برهمکنش، (m^2)
a	طول ترک، (m)
a_n	بردار مجهولات گره‌ای مربوط به توابع شکل المان محدود
b_n	بردار مجهولات گره‌ای مربوط به توابع شکل المان محدود
C	بردار مجهولات گره‌ای مربوط به توابع شکل غنی‌شده نوک ترک
[C]	ماتریس میرایی
C_P	سرعت موج تنش بی‌بعد
C_C	سرعت موج دما بی‌بعد
C_T	سرعت موج دما بی‌بعد
$[D]$	تنسور الاستیک (ماتریس خواص ماده)، (N/m^2)
E	مدول یانگ، (N/m^2)
F	بردار نیروهای گره‌ای، (N)
f	تابع زاویه‌ای میدان تنش نوک ترک
F_m	توابع غنی‌سازی نوک ترک، ($m^{0.5}$)
H	تابع هویساید
J	انتگرال J، (N/m)
K	هدایت گرمایی، ($W/(m.^{\circ}K)$)
[K]	ماتریس سفتی
K_T	ضریب شدت شار گرمایی

K_I	ضریب شدت تنش مد اول، ($N.m^{-1.5}$)
K_{II}	ضریب شدت تنش مد دوم، ($N.m^{-1.5}$)
l	طول مشخصه
[M]	ماتریس جرم، (kg)
M	انتگرال برهمکنش، (N/m)
N	تابع شکل روش المان محدود
N_A	مجموعه گره‌های شبکه
N_H	مجموعه گره‌های اطراف مسیر ترک
N_C	مجموعه گره‌های المان‌های نوک ترک
Q	تابع وزنی برای محاسبه انتگرال برهمکنش، بی‌بعد
q_i	مؤلفه‌های بردار شار گرمایی بر واحد سطح، (W/m^2)
R	ثابت جهانی گازها، (J/K.mol)
T	دما، (K)
Tr	بردار نیروی سطحی بر واحد سطح، (N/m^2)
t	زمان، (sec)
u	بردار جابه‌جایی
c	غلظت مولی
D_0	ضریب پخش
β	ثابت‌پتانسیل شیمیایی
β^C	ضریب حرارتی مکانیکی
β^T	ضریب شیمیایی مکانیکی

κ^*	ثابت ماده
C^T	گرمای ویژه
u^{aux}	میدان جابه‌جایی کمکی
V	حجم، (m^3)
v	سرعت مشخصه (m/s)
W	عرض نمونه، (m)
w	چگالی انرژی کرنشی مکانیکی
X_1 و X_2	مؤلفه‌های دستگاه مختصات دکارتی سراسری، (m)
x_1 و x_2	مؤلفه‌های دستگاه مختصات دکارتی محلی، (m)
Z	تابع فاصله علامت‌دار، (m)

علامت‌های یونانی

α	ضریب انبساط گرمایی، ($1/^{\circ}C$)
β	تنسور مدول تنش-دما
δ_{ij}	دلتای کرونکر، بی‌بعد
ε	تنسور کرنش، بی‌بعد
θ	تغییر دما، (K)
λ و μ	ثوابت لامه، (N/m^2)
κ	ضریب کلوسوف، بی‌بعد
ν	نسبت پواسون، بی‌بعد
ρ	چگالی، (kg/m^3)

φ	مؤلفه دستگاه مختصات قطبی، بی‌بعد
σ	تنسور تنش، (N/m^2)
Φ	تابع شکل غنی‌شده برای المان‌های مسیر ترک، بی‌بعد
Ψ	تابع شکل غنی‌شده برای المان‌های نوک ترک، بی‌بعد
ω	زاویه بین دستگاه‌های مختصات محلی و سراسری، بی‌بعد
Υ	بردار مجهولات گره‌ای
Γ	مسیر انتگرال‌گیری در انتگرال J

بالانویس‌ها

aux	مربوط به میدان‌های کمکی
S	مربوط به حالت برهم‌نهی
T	مربوط به دما
Th	مربوط به حالت حرارتی
u و v	به ترتیب مربوط به جابجایی در جهت محورهای مختصات افقی و قائم
E	المان مبنا

زیرنویس‌ها

i	شمارنده، مربوط به مؤلفه x دستگاه مختصات دکارتی
j	شمارنده، مربوط به مؤلفه y دستگاه مختصات دکارتی
l	شمارنده مربوط به توابع شکل و همچنین نشان‌دهنده مختصات محلی
m	شمارنده، مربوط به توابع غنی‌سازی نوک ترک
n	شمارنده، مربوط به گره‌ها، گام زمانی و مؤلفه‌های دستگاه مختصات

فصل اول

مقدمه

۱-۱- مقدمه

امروزه مسئله انتقال هم‌زمان گرما و ماده در صنایع گوناگون مشاهده می‌شود. در برخی نتایج تحلیل این مسائل براساس تئوری کلاسیک انتشار-ترموالاستیسیته[۱] با داده‌های آزمایشگاهی اختلاف فاحش دارند[۱] که در نهایت منجر به ارائه نظریه‌های انتشار- ترموالاستیسیته تعمیم‌یافته[۲] شده است. نفوذ یک گاز درون یک جامد یکی از مثال‌های مهندسی این پدیده است. وقتی یک گاز در یک فلز نفوذ می‌کند؛ عبور اتم‌های گاز از بین شبکه اتمی فلز ممکن است باعث تغییر فاصله اتمی، شکست پیوندهای اتمی فلز، جابجایی صفحات کریستالی و ... شود که به‌صورت ایجاد موج الاستیک، ترک یا پلاستیک شدن محلی دیده می‌شود. رصد مناسب این پدیده‌ها در دیدگاه ماکرو مکانیک با برهم‌کنش میدان‌های الاستیک و پدیده انتشار در نظر گرفته می‌شود. از طرفی، وجود عیوب ازجمله ترک در عملکرد و بازده سیستم‌های مذکور تأثیر قابل‌توجهی دارد. بنابراین، لازم است اثر وجود ترک در آن‌ها بررسی شود. طبق مطالعات انجام‌شده، تاکنون اثر ترک بر میدان‌های انتشار-ترموالاستیسیته برای یک محیط محدود بررسی نشده است. یکی از نواقص مهم قانون فوریه و تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک، تأثیرگذاری روی سرعت بی‌نهایت موج گرمایی است. برای رفع این مشکل، تئوری‌های مختلف ترموالاستیسیته تعمیم‌یافته ارائه‌شده‌اند که در آن‌ها انرژی گرمایی با سرعت محدود در یک جامد پیوسته در حال انتقال است [۱-۴]. هنگامی‌که نرخ زمانی اعمال شرایط مرزی دمایی بر یک پیوستار تغییر شکل‌پذیر یا نرخ تغییرات منبع تولید گرمای داخلی قابل‌توجه بوده و منجر به تحریک اینرسی شود؛ موج‌های تنش گرمایی تولید به وجود می‌آیند، در این شرایط، میدان‌های دما و تنش باید با حل هم‌زمان معادلات انرژی و تعادل (معادلات جفت شده تئوری‌های تعمیم‌یافته ترموالاستیسیته) حل گردد [۵]. سرعت انتقال امواج گرما در تئوری‌های ترموالاستیسیته تعمیم‌یافته، به علت استفاده از

---

۱) Classical theory of diffusion-thermoelasticity

۲) Generalized Thermoelasticity-Diffusion

زمان‌های آسایش و فرم هذلولوی معادله هدایت گرمایی به‌صورت محدود است که باعث گسترش تئوری‌های هدایت گرمایی غیر کلاسیک می‌شود [۶]. هتنارسکی و اسلامی نظریه‌های ترموالاستیسیته تعمیم‌یافته را موردبررسی قراردادند [۷].

۱-۲- مروری بر کارهای پیشین

مسئله انتشار-ترموالاستیسیته در موارد مختلفی اتفاق می‌افتد. به عنوان نمونه، می‌توان به دستیابی به آلیاژهای فلزی با استحکام قابل‌قبول برای کار در شرایط سخت دمایی که یکی از موضوع‌های موردعلاقه‌ی محققان علم مواد است، اشاره کرد. یکی از مشکلات فرآیند ساخت این است که سطح آلیاژهای فلزی در دماهای بالا به‌راحتی اکسید می‌شود. پس از ایجاد ناحیه سطحی اکسیدی، اکسیژن در این ناحیه نفوذ کرده و به سطح فلزی می‌رسد که براثر آن اکسید شدن سطح فلزی جدید را در پی دارد. تاکنون، مطالعاتی در مورد نقش لایه‌ی اکسیدی در ادامه‌ی فرآیند اکسیداسیون سطح فلز و پیشرفت آن انجام‌شده [۸] و [۹] که نتیجه‌ی قابل‌ذکر آن‌ها، ارائه معادلات ماکرو مکانیک این پدیده است. در پدیده اکسیداسیون، نفوذ اتم‌های اکسیژن در ناحیه اکسیدشده باعث ایجاد تنش و گرادیان دمایی در این ناحیه می‌شود به‌طوری‌که، در توصیف دقیق این پدیده برهم‌کنش سه میدان تغییر شکل، غلظت اتم‌های اکسیژن و دما در نظر گرفته می‌شود [۱۱و۱۰]. برای توصیف معادلات حاکم، مفاهیم آنتروپی اینرسیال[۱]، پتانسیل شیمیایی و غلظت اینرسیال معرفی‌شده است [۱۰]. از طرفی، قانون فیک که طبق آن، انتشار با سرعت بی‌نهایت انجام می‌شود، نمی‌تواند پدیده انتشار را در این موارد با دقت مناسب بیان کند. مشاهدات آزمایشگاهی در مقیاس‌های کوچک نیز انتشار جرم با سرعت محدود را تأیید می‌کند [۱۱]. علاوه بر این، رابطه‌ای بین تنش هیدرو استاتیک و غلظت ماده انتشاریافته مشابه رابطه تنش‌های گرمایی در مواد ایزوتروپیک ارائه‌شده است [۱۲]. زمانی که گاز در یک فلز نفوذ می‌کند، عبور اتم‌های گاز از بین شبکه‌ی اتمی فلز ممکن است باعث تغییر فاصله اتمی،

۱) Inertial entropy

شکست پیوندهای اتمی فلز، جابجایی صفحات کریستالی و … شود، که به‌صورت ایجاد موج الاستیک، ترک یا پلاستیک شدن محلی دیده می‌شود. در برخی مطالعات، این پدیده در مقیاس ماکرو مکانیک با برهم‌کنش میدان‌های الاستیک و پدیده‌ی انتشار بدون در نظر گرفتن اثر دما، بررسی‌شده است. در حوزه مسائل انتشار- الاستیسیته تعمیم‌یافته این موارد قابل اشاره می‌باشند. مسئله دینامیکی یک-بعدی انتشار- الاستیسیته کوپل به‌صورت تحلیلی حل‌شده و سرعت محدود انتشار نشان داده‌شده است [۱۳]. مسئله دوبعدی کوپل انتشار-الاستیسیته برای یک صفحه محدود همگن و غیرهمگن تابعی[۱] با روش عددی بدون المان پتروف-گلرکین حل و تغییر زمانی تنش و غلظت ماده منتشرشده در یک نقطه بررسی‌شده است [۱۴]. در حوزه مسائل انتشار-ترموالاستیسیته تعمیم‌یافته می‌توان به مواردی اشاره کرد. حل عددی مسئله دوبعدی کوپل انتشار-ترموالاستیسیته برای یک صفحه محدود همگن با روش عددی بدون المان پتروف-گلرکین نیز ارائه‌شده است [۱۵]. پاسخ زمانی یک نیم‌صفحه با در نظر گرفتن انتشار-ترموالاستیسیته تعمیم‌یافته و هدایت گرمایی و نفوذپذیری متغیر با دما با استفاده از روش المان محدود ارائه شده است [۱۶]. یک تئوری انتشار-ترموالاستیسیته اصلاح‌شده برای تحلیل مسائل در ابعاد میکرو نیز پیشنهادشده است [۱۷]. همچنین، حل تحلیلی مسئله انتشار-ترموالاستیسیته تعمیم‌یافته یک‌بعدی در حضور منبع گرمایی با استفاده از تبدیل‌های لاپلاس و فوریه برای به دست آوردن جابه‌جایی، تنش، توزیع دما و توزیع غلظت مولی ارائه‌شده است [۱۸]. اثر سورت[۲] بر پاسخ یک نیم‌صفحه به شوک گرمایی با در نظر گرفتن معادلات انتشار-ترموالاستیسیته تعمیم-یافته نیز گزارش‌شده است [۱۹]. واکنش گذرا در یک استوانه توخالی تحت شوک حرارتی و شیمیایی براساس انتشار – ترموالاستیسیته تعمیم‌یافته با استفاده مشتقات وابسته گزارش‌شده است [۲۰].

گرین و نقدی در اوایل سال ۱۹۹۰ تئوری تعمیم‌یافته گرین-نقدی را مطرح کردند [۲۱ و۲۲]. تئوری گرین-نقدی به‌صورت ترمودینامیکی سازگار استخراج‌شده و براساس انتخاب متغیرهای حالت

---

۱) Functional

۲) Sort effect

ترمودینامیکی مستقل به سه زیر نظریه تقسیم‌شده است که دامنه نسبتاً گسترده‌ای از مسائل هدایت گرمایی را دربر گرفته‌اند. در نظریه فوق رویکرد گرین و نقدی تفاوت قابل‌توجهی با روش معمول مکانیک محیط پیوسته کلاسیک دارد [۲۳]. در تئوری گرین-نقدی تعادل آنتروپی به‌عنوان معادله پایه به‌جای تعادل انرژی مورد بررسی قرارگرفته و علاوه بر این، نابرابری کلازیوس-دوهامل[۱] به‌عنوان قانون دوم ترمودینامیک استفاده نمی‌شود. در این تئوری مفهوم جابه‌جایی گرمایی[۲] ارائه گردیده که جابه‌جایی گرمایی میدانی بوده و مشتق زمانی آن دمای تجربی را ارائه می‌دهد. جابه‌جایی گرمایی یک کمیت ماکروسکوپی بوده که می‌توان برای درک بهتر متغیرهای ترمودینامیکی و آنچه در هدایت گرمایی رخ می‌دهد به‌عنوان پل بین مکانیک محیط پیوسته و نظریه مولکولی با توجه به نظریه گرین-نقدی در نظر گرفته شود [۲۴]. از دیگر ویژگی‌های روش گرین و نقدی استخراج بردار شار آنتروپی از یک تابع پتانسیل (تابع انرژی آزاد) است که تنسور تنش را نیز می‌توان از آن استخراج نمود. از تئوری گرین-نقدی نوع I نتایج تئوری کلاسیک ترموالاستیسیته حاصل گردیده که سرعت نامحدود امواج گرما را پیش‌بینی می‌کند. تئوری گرین-نقدی نوع II موج گرمایی حاصل از نوع I است و تئوری گرین-نقدی نوع III نیز حالت عمومی‌تر این تئوری است که در حالت کلی قادر به در نظر گرفتن اثر میرایی و صوت ثانویه بوده که سرعت محدود موج گرما را در پی دارد. برخی تحقیقات انجام‌شده بر روی انتشار موج ترموالاستیک یک‌بعدی با استفاده از تئوری گرین-نقدی به‌صورت تحلیلی و برخی با استفاده از روش‌های عددی مورد بررسی قرارگرفته است.

در این پایان‌نامه یک صفحه‌ی مستطیلی ایزوتروپیک شامل ترک عایق گرمایی انتشار در نظر گرفته می‌شود که تحت شوک قرار دارد. هدف، بررسی اثر برهم‌کنش متقابل میدان‌های الاستیسیته، گرما و انتشار بر تغییرات زمانی ضرایب شدت تنش است. معادلات حاکم خطی بوده و مسئله با روش المان محدود توسعه‌یافته حل می‌شود.

---

۱) Clausius-Duhamel inequality

۲) Thermal Displacement

۱-۳- ساختار پایان‌نامه

این پایان‌نامه شامل پنج فصل است که در فصل اول به مقدمه و مروری بر کارهای پیشین پرداخته‌شده است. در فصل دوم روش المان محدود توسعه‌یافته ارائه می‌شود. همچنین در ادامه انتگرال برهم‌کنش به‌صورت مختصر شرح داده‌شده و در فصل سوم معادلات حاکم بر انتشار-ترموالاستیسیته تعمیم‌یافته و انتگرال برهمکنش بیان‌شده است. فصل چهارم به ارائه و تحلیل نتایج به‌دست آمده اختصاص دارد و در فصل پنجم نتیجه‌گیری کلی و پیشنهادهایی جهت انجام پژوهش-های جدید ارائه گردیده است.

فصل دوم

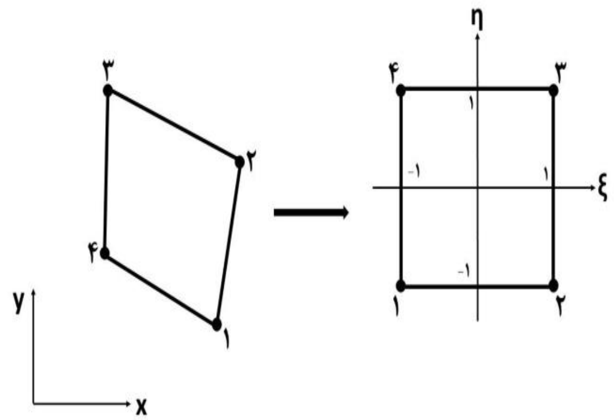
روش‌های المان محدود توسعه‌یافته و انتگرال برهمکنش

۲-۱- مقدمه

روش‌های عددی یکی از مهم‌ترین روش‌های مهم حل مسائل مهندسی است. حل مسئله از طریـق روش‌های تحلیلی یا تجربی به علت شرایط مرزی یا پیچیدگی هندسی همیشه امکان‌پذیر نیسـت. در این پایان‌نامه، برای مدل‌سازی ترک از روش اجزا محدود توسعه‌یافته استفاده‌شده است.

۲-۲- المان‌های ایزو پارامتریک

با توجه به روابط ریاضی یک ناحیه چهارضلعی را مطابق شکل(۲-۱) به یک مربع ۲×۲ نگاشت می‌شود، مختصات x , y نقاط در المان اولیه از رابطه (۲-۱) به‌دست می‌آیند[۲۵].



شکل (۲-۱) المان ایزو پارامتریک[۲۴]

همان‌طور که در شکل(۲-۱) هم مشاهده می‌کنید دستگاه مختصات(η و ξ) دستگاه مختصات ایزو پارامتریک نامیده می‌شود.

$$x = \sum_{i=1}^{4} x_i N_i \tag{۲-۱}$$

$$y = \sum_{i=1}^{4} y_i N_i \qquad (۲-۲)$$

در این رابطه، N_iها توابع شکل روش المان محدود می‌باشند.

$$N_i\left(\xi \text{ و } \eta\right) = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i) \qquad (۳-۲)$$

که رابطه (۲-۳) را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$N(\xi, \eta) = [\frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)\ \frac{1}{4}(1 + \xi)$$
$$(1 - \eta)\ \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)\ \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)] \qquad (۴-۲)$$

۲-۳- روش المان محدود توسعه‌یافته

روش المان محدود توسعه‌یافته[۱] (XFEM) برای مدل‌سازی ترک استفاده می‌شود این روش توسط بلیچکو و همکارانش [۲۶-۲۸] در شبکه‌های المان محدود جهت مدل‌سازی ناپیوستگی‌های دلخواه ارائه شده است.

مبنای المان محدود توسعه‌یافته همان روش المان محدود است که برای ترک‌ها استفاده می‌شود. روش المان محدود توسعه‌یافته توسط بلیچکو و همکاران براساس روش‌های بدون المان معرفی‌شده است[۲۸]. یکی از روش‌های نوین مدل‌سازی ناپیوستگی‌ها ازجمله ترک، روش المان محدود توسعه‌یافته است. برای مدل‌سازی ناپیوستگی‌ها (ترک) در رویکرد اجزایی که تحت تأثیر ترک هستند توابع شکل خاصی را به کار می‌برند که این کار باعث می‌شود مدل‌سازی ناپیوستگی‌ها مهیا شود. همچنین در این رویکرد برای اینکه بتوانیم از توابع غنی‌سازی شده[۲]به توابع شکل مرسوم برسیم از مدل‌سازی ناپیوستگی‌ها علاوه بر توابع شکل عادی استفاده می‌شود. برای بیان هندسه ناپیوستگی‌ها از

۱) Extended Finite Element Method (XFEM)

۲) Enriched functions

درجات آزادی مجازی برای گره‌های تحت تأثیر ناپیوستگی استفاده می‌شود [۲۶].

المان محدود توسعه‌یافته به‌طورکلی شامل دو مرحله است:

مرحله اول: شبکه‌بندی هندسی مسئله

مرحله دوم: غنی‌سازی المان‌های نوک ترک و مسیر ترک

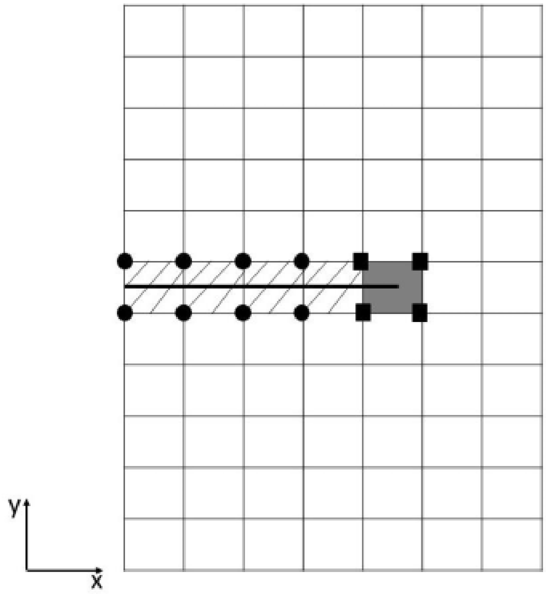
برای به دست آوردن تابع غنی‌سازی به کمک تقریب از رابطه (۲-۵) استفاده می‌شود[۳۸].

$$u(x) = \sum_{\forall i} N_i(x)\, a_i + \sum_{\forall i} \emptyset_i(x)\, \psi(X) b_i \qquad \textbf{(۲-۵)}$$

در رابطه (۲-۵) $\sum_{\forall i} N_i(x)\, a_i$ شامل تقریب المان محدود کلاسیک است که N_iها توابع شکل المان محدود کلاسیک می‌باشند. a_iها درجات آزادی المان محدود کلاسیک هستند. در رابطه (۲-۵) $\sum_{\forall i} \emptyset_i(x)\, \psi(X) b_i$ عبارت غنی‌سازی است که $\psi(X)$ تابع غنی‌سازی، $\emptyset_i(x)$ توابع شکل و b_i پارامترهای مجهول مجازی هستند. برای تقریب المان محدود کلاسیک و تعمیم‌یافته نیازی نیست که توابع شکل یکسان باشند ولی می‌توان توابع یکسانی به‌صورت $\emptyset_i(x) = N_i(x)$ در نظر گرفت[۳۹] که در این تحقیق توابع شکل به‌صورت یکسان در نظر گرفته‌شده است.

۲-۴- مدل‌سازی ترک درروش المان محدود توسعه‌یافته

مدل‌سازی ترک مطابق شکل (۲-۲) فرض می‌شود که در آن N_A تعداد گره‌های شبکه المان محدود، N_H تعداد گره‌های المان‌های اطراف مسیر ترک و N_C تعداد گره‌های المان‌های اطراف نوک ترک در نظر می‌شود. در شکل (۲-۲) المان‌های نوک ترک سایه خورده و المان‌های مسیر ترک با المان هاشور خورده نشان داده‌شده‌اند. گره‌هایی که با دایره نشان داده‌شده‌اند نشانگر مسیر ترک و گره‌هایی که با مربع نشان داده‌شده گره‌های غنی‌شده نوک ترک هستند.



شکل (۲-۲) شبکه اجزا محدود توسعه‌یافته دارای ترک و گره‌های غنی‌سازی شده

میدان جابجایی درروش المان محدود توسعه‌یافته برای یک المان غنی‌سازی شده به‌صورت زیر است[۲۴]:

$$u(x.y.t) = \sum_{n\in,N_A} N_n(x,y)\, a_n(t) + \sum_{n\in N_H} N_n(x,y)\, [H(Z) - H(Z_N)]b_n(t) + \sum_{m} \sum_{n\in N_C} N_n(x,y)\, [F_m(r,\varphi) - F_m(r_n,\varphi_n)]c_{nm}(t) \qquad (۲-۶)$$

در رابطه(۲-۸) $a_n(t)$، $b_n(t)$ و c_{nm} مجهولات گره‌ای هستند که تمامی این بردارها تابع زمان می‌باشند [۲۴].

$$a_n(t) = \{a_n^u(t), a_n^v(t)\}^T \qquad (۲-۷)$$

$$b_n(t) = \{b_n^u(t), b_n^v(t)\}^T \qquad (۲-۸)$$

$$c_{nm}(t) = c_{nm}^u(t), c_{nm}^v(t)\}^T \qquad (۲-۹)$$

تابع هویساید $H(Z)$ در رابطه (۲-۱۰) به‌صورت زیر است [۲۴].

$$H(Z) = \begin{cases} 1, & Z > 0 \\ 0, & Z \leq 0 \end{cases} \tag{۲-۱۰}$$

در رابطه (۲-۱۰) تابعی از موقعیت یک نقطه نسبت به مسیر ترک است که با Z نشان داده‌شده است.

در رابطه (۲-۱۱) توابع غنی‌سازی شده نوک ترک (F_m) هستند که توابع غنی‌سازی برحسب مختصات محلی نوک ترک(rوφ) به‌قرار زیر است[۲۴]:

$$\{F_m = \{\sqrt{r}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right), \sqrt{r}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right), \sqrt{r}\sin(\varphi)\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right), \sqrt{r}\sin(\varphi)\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\} \tag{۲-۱۱}$$

برای به دست آوردن مؤلفه‌های میدان جابجایی در روش المان محدود توسعه‌یافته روابط (۲-۷) تا (۲-۱۰) و (۲-۱۱) را در رابطه (۲-۶) قرار می‌گیرد که در مختصات سراسری به‌صورت زیر به دست می‌آید[۲۴]:

$$\begin{aligned} u(x.y.t) = {} & \sum_{n\in N_A} N_n(x,y)\, a_n^u(t) + \sum_{n\in N_H} N_n(x,y)\,[H(Z) - H(Z_N)]b_n^u(t) \\ & + \sum_{n\in N_c} N_n(x,y)[\sqrt{r}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{r_n}\sin(\frac{\varphi_n}{2})]c_{n1}^u(t) \\ & + \sum_{n\in N_c} N_n(x,y)[\sqrt{r}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{r_n}\cos(\frac{\varphi_n}{2})]c_{n2}^u(t) \\ & + \sum_{n\in N_c} N_n(x,y)[\sqrt{r}\sin(\varphi)\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ & - \sqrt{r_n}\sin(\varphi_n) sin(\frac{\varphi_n}{2})]c_{n3}^u(t) \\ & + \sum_{n\in N_c} N_n(x,y)[\sqrt{r}\sin(\varphi)\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ & - \sqrt{r_n}\sin(\varphi_n) cos(\frac{\varphi_n}{2})]c_{n4}^u(t) \end{aligned} \tag{۲-۱۲}$$

$$v(x.y.t) = \sum_{n\in N_A} N_n(x,y)\, a_n^v\,(t) + \sum_{n\in N_H} N_n(x,y)\,[H(Z) - H(Z_N)]b_n^v(t) \qquad (۱۳\text{-}۲)$$

$$+ \sum_{n\in N_c} N_n(x,y)[\sqrt{r}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{r_n}\sin(\frac{\varphi_n}{2})]c_{n1}^v(t)$$

$$+ \sum_{n\in N_c} N_n(x,y)[\sqrt{r}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{r_n}\cos(\frac{\varphi_n}{2})]c_{n2}^v(t)$$

$$+ \sum_{n\in N_c} N_n(x,y)[\sqrt{r}\sin(\varphi)\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$- \sqrt{r_n}\sin(\varphi_n) sin(\frac{\varphi_n}{2})]c_{n3}^v(t)$$

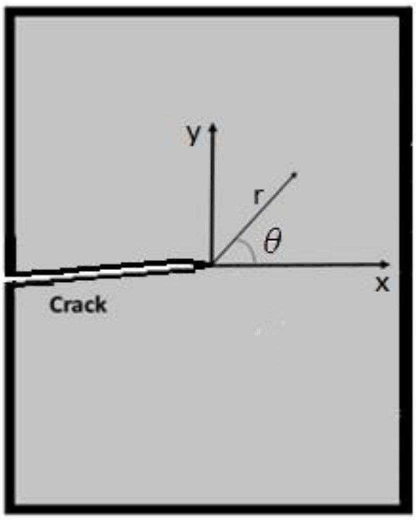
$$+ \sum_{n\in N_c} N_n(x,y)[\sqrt{r}\sin(\varphi)\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$- \sqrt{r_n}\sin(\varphi_n) cos(\frac{\varphi_n}{2})]c_{n4}^v(t$$

با فرض عایق بودن ترک میدان دما در امتداد ترک ناپیوسته است. برای در نظر گرفتن این ناپیوستگی از تابع هویساید استفاده می‌شود. شار حرارتی نیز در نوک ترک به‌صورت تکین است. میدان دمای نوک ترک مشابه میدان جابجایی مد پارگی(مد III) ترک به‌صورت زیر است[۳۱]:

$$T = -\frac{K_T}{k}\sqrt{\frac{2r}{\pi}}\sin(\frac{\varphi}{2}) \qquad (۱۳\text{-}۲)$$

در رابطه (۱۴-۲)، k ضریب هدایت حرارتی و K_T ضریب شدت تنش حرارتی می‌باشد.



شکل (۲-۳) پیوستار دوبعدی شامل ترک و دستگاه‌های مختصات دکارتی و قطبی نوک ترک

میدان دما مثل میدان جابجایی گسسته‌سازی می‌شود و فقط از اولین رابطه (۲-۱۳) برای غنی‌سازی گره‌های نوک ترک استفاده شده است، بنابراین میدان دما را می‌توان به‌صورت زیر نوشت[۴۱]:

$$\theta(x.y.t) = \sum_{n\in N_A} N_n(x,y)\, a_n^T(t) + \sum_{n\in N_H} N_n(x,y)\, [H(Z)-H(Z_N)] b_n^T(t) + \sum_{n\in N_c} N_n(x,y)[\sqrt{r}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{r_n}\sin(\frac{\varphi_n}{2})] c_{n1}^T(t) \tag{۱۵-۲}$$

در رابطه، (۲-۱۵) $a_n^T(t)$ ، $b_n^T(t)$ و $c_{n1}^T(t)$ مقادیر تغییرات دمای گره‌ها برای هر تابع شکل هست. روابط (۲-۱۱)، (۲-۱۲) و (۲-۱۳) که u جابجایی در راستای محور x و v جابجایی در راستای محور y است را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$u(x.y.t) = \sum_{n\in N_A} N_n(x,y)\, a_n^u(t) + \sum_{n\in N_H} \emptyset_n(x,y)\, a_n^u(t) + \sum_{n\in N_c}\sum_{m=1}^{4} \psi_{nm}(x,y) c_{nm}^u(t) \tag{۱۶-۲}$$

$$v(x.y.t) = \sum_{n\in N_A} N_n(x,y)\, a_n^v(t) + \sum_{n\in N_H} \emptyset_n(x,y)\, a_n^v(t) + \sum_{n\in N_c}\sum_{m=1}^{4} \psi_{nm}(x,y) c_{nm}^v(t) \tag{۱۴-۲}$$

$$\theta(x.y.t) = \sum_{n\in N_A} N_n(x,y)\, a_n^T(t) + \sum_{n\in N_H} \emptyset_n(x,y)\, a_n^T(t) + \sum_{n\in N_c} \psi_{n1}(x,y) c_{n1}^T(t) \tag{۱۸-۲}$$

در روابط بالا، $\emptyset$ و ψ توابع غنی‌سازی میدان‌های جابجایی دما می‌باشند که به ترتیب مسیر و نوک ترک را غنی‌سازی می‌کنند.

۲-۵- انتگرال J

انتگرال J اولین بار توسط رایس [۳۷] مطرح شد. رایس انتگرال J را برابر با کاهش در انرژی پتانسیل برافزایش سطح ترک و به‌صورت مستقل از مسیر تعریف کرده است. برای به دست آوردن ضریب شدت تنش روش‌های مختلفی در مکانیک شکست مرسوم است. میدان‌های تنش و کرنش در حوزه نوک ترک را با استفاده از یک پارامتری مانند انتگرال J می‌توان محاسبه کرد و همچنین ضریب

شدت تنش، میزان بازشدگی سطح ترک را نیز با این روش می‌توان تعیین کرد.

کاربرد پارامتر انتگرال J در ناحیه پلاستیک به نوک ترک بستگی دارد. اگر اندازه ناحیه به وجود آمده کوچک باشد، به این معنا که اندازه ناحیه پلاستیک در مقایسه با طول‌های مشخص‌شده دارای ترک، طول ترک، طول سازه در راستای ترک و ضخامت‌های کوچک باشد. (شرایط ناحیه تسلیم کوچک)[1] برای بیان میدان‌های تنش و کرنش حوزه نوک ترک می‌توان یکی از پارامترها را به‌عنوان خاصیت ماده بیان کرد [۳۴] با توجه به شکل (۲-۳) در دستگاه مختصات محلی، میدان‌های تنش حوزه نوک ترک برای یک پیوستار جامد به‌صورت زیر است:

$$\sigma_{ij} = K_I(2\pi r)^{\frac{1}{2}} f_{ij}^{II}(\varphi) + K_{II}(2\pi r)^{\frac{1}{2}} f_{ij}^{II}(\varphi) \qquad (۲-۱۹)$$

در رابطه (۲-۱۹) K_I ضریب شدت تنش مود اول و K_{II} ضریب شدت تنش مود دوم است. توابع f و میدان‌های جابجایی نوک ترک در پیوست‌ها قرار داده‌شده است.

جهت محاسبه ضرایب شدت تنش در سیستم‌های خطی یکی از روش‌های متداول و کارآمد، انتگرال برهمکنش است. این روش برای تئوری‌های مختلف ترموالاستیسیته قابل استفاده است.

برای محاسبه ضریب شدت تنش با استفاده از انتگرال برهمکنش لازم است که از میدان‌های کمکی (میدان کمکی جابجایی، میدان کمکی کرنش و میدان کمکی تنش) استفاده کنیم. برای یک ترک ساکن میدان‌های کمکی در پیوست‌ها آورده شده است.

۲-۶- روش نیومارک

روش نیومارک به‌صورت تک گامه یا دو گامه مورد استفاده قرار می‌گیرد. در ادامه طرح تک گامه تشریح می‌گردد که برای محاسبه پارامترها در هر مرحله زمانی تنها از اطلاعات مرحله زمانی قبل استفاده می‌شود. در طرح دو گامه پارامترها در هر مرحله زمانی به اطلاعات دو مرحله پیشین ارتباط

---

۱) small-scale yielding (SSY)

پیدا می‌کند که برای مشاهده جزئیات بیشتر می‌توان به پیوست مراجعه کرد. به‌منظور انجام آنالیز دینامیکی علاوه بر ماتریس‌های سفتی و نیرو به ماتریس جرم نیز احتیاج است که ماتریس جرم مربوطه بایستی ازنظر قرارگیری ترم‌ها با ماتریس سفتی و نیرو مطابقت داشته باشد. معادله دیفرانسیل حاکم بر مسائل الاستودینامیکی سازه‌ای، یک معادله دیفرانسیل هایپربولیک بوده که فرم کلی آن به‌صورت زیر است:

$$M\ddot{u}(x,t) + C\dot{u}(x,t) + Ku(x,t) = f \quad (۲-۲۰)$$

که در رابطه (۲-۲۰)، M ماتریس جرم، C ماتریس میرایی و K ماتریس سفتی است.

از معادلات بالا با استفاده از بسط تیلور می‌توان مقادیر تغییر مکان و مشتقات آن را در زمان $t+1$ به‌صورت زیر از مقادیر t تقریب زده می‌شود:

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t\dot{u}_n + \cdots + \frac{\Delta t^p}{p^!}u_n^p + \beta_p\frac{\Delta t^p}{p^!}\left[u_{n+1}^p - u_n^p\right] \quad (۲-۲۱)$$

$$\dot{u}_{n+1} = \dot{u}_n + \Delta t\ddot{u}_n + \cdots + \frac{\Delta t^{p-1}}{(p-1)^!}u_n^p + \beta_{p-1}\frac{\Delta t^{p-1}}{(p-1)^!}\left[u_{n+1}^p - u_n^p\right] \quad (۲-۲۲)$$

.

.

.

$$u_{n+1}^{p-1} = u_n^{p-1} + \cdots + \Delta t u_n^p + \beta_1\Delta t[u_{n+1}^p - u_n^p] \quad (۲-۲۳)$$

در معادله (۲-۲۳) پارامترهای β به‌عنوان ضریب باقی‌مانده استفاده‌شده است که با انتخاب مقادیر مناسب برای این پارامترها می‌توان مقادیر دقت تقریب را افزایش داد. روش نیومارک سری‌های فوق به‌صورت زیر استفاده می‌کنند:

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t\dot{u}_n + \frac{\Delta t^2}{2}\ddot{u}_n + \beta_2\frac{\Delta t^2}{2}[\ddot{u}_{n+1} - \ddot{u}_n] \quad (۲-۲۴)$$

$$\dot{u}_{n+1} = \dot{u}_n + \Delta t\ddot{u}_n + \beta_1 \Delta t[\ddot{u}_{n+1} - \ddot{u}_n] \quad (۲-۲۵)$$

می‌توان $\dot{u}$ را با v (سرعت) و $\ddot{u}$ را با a (شتاب) به‌صورت زیر نشان داد:

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t v_n + \frac{\Delta t^2}{2}[(1-\beta_2)a_n + \beta_2 a_{n+1}] \quad (۲-۲۶)$$

$$v_{n+1} = v_n + \Delta t[(1-\beta_1)a_n + \beta_1 a_{n+1}] \quad (۲-۲۷)$$

اگر تغییر مکان و سرعت برحسب شتاب محاسبه شود و در معادله دیفرانسیل مرتبه دو جایگذاری شود رابطه زیر استخراج می‌شود:

$$M_{eff} a_{n+1} = f_{eff} \quad (۲-۲۸)$$

$$M_{eff} = M + \frac{1}{2}\beta_2 \Delta t^2 K \quad (۲-۲۹)$$

$$f_{eff} = f_{n+1} - K[u_n + \Delta t v_n + \frac{1}{2}\Delta t^2(1-\beta_2)a_n] \quad (۲-۳۰)$$

با داشتن مقادیر مربوط به زمان t می‌توان مقدار شتاب در زمان $t+1$ را محاسبه کرد و سپس با استفاده از رابطه (۲-۳۰) مقدار سرعت و تغییر مکان را در زمان $t+1$ به دست آورد. با توجه به مطالعات انجام‌شده لازم به ذکر است که در برخی مراجع پارامتر β_1 را γ و پارامتر β_2 را β معرفی کرده‌اند. برای پارامترهای β_1 و β_2 می‌توان مقادیر متفاوتی را در نظر گرفت. برای مثال اگر برای پارامتر $\beta_1 = \frac{1}{2}$ و $\beta_2 = \frac{1}{3}$ در نظر گرفته شود. این روش، روش شتاب خطی[1] نام‌گذاری می‌شود. همان‌طور که از اسم روش خطی پیداست شتاب در طول گام زمانی به‌صورت خطی تغییر می‌کند.

اگر برای $\beta_1 = \frac{1}{2}$ و $\beta_2 = \frac{1}{2}$ در نظر گرفته شود روشی که به دست می‌آید روش شتاب میانگین ثابت[2] است. اگر از این روش برای مسائل خطی استفاده گردد نتایجی که به دست می‌آید نتایج

---

۱) *Linerar-acceleration method*

۲) *Constant-average- acceleration method*

به‌صورت غیر مشروط پایدار خواهد بود اما برای مسائل غیرخطی برای اینکه نتایج پایدار باشند باید شرایطی را در نظر گرفت.

دو روش بالا که بیان شد روش غیرصریح[۱] هستند به معنای اینکه برای یافتن شتاب در زمان $t+1$ با استفاده از رابطه (۲-۲۸) احتیاج به حل دستگاه معادلات است که این موضوع صرف زمان بیشتری می‌خواهد .اگر مقادیر $\beta_1 = 0$ و $\beta_2 = 0$ در نظر گرفته شود روش‌های صریح[۲] نام‌گذاری می‌شود که در این روش ماتریس جرم به‌صورت توده‌ای[۳] مورداستفاده قرار می‌گیرد که در این روش مقادیر شتاب را بدون نیاز به حل دستگاه معادلات می‌توان به‌دست آورد. در روش صریح پایداری به‌صورت مشروط است و برای اینکه جواب‌های به‌دست‌آمده همگرا باشند بایستی طول گام زمانی از یک مقدار بحرانی کوچک‌تر باشد. در این روش نکاتی که باید مدنظر قرار گیرد یکی پیدا کردن روشی برای توده‌ای کردن ماتریس جرم و دیگری تعیین گام زمانی بحرانی است.

۲-۷- انتگرال برهمکنش:

در رابطه (۲-۳۱) فرم معمول انتگرال J برای یک ترک با صرف‌نظر کردن از اعمال نیرو به سطوح آورده شده است:

$$J = \lim_{r_s \to 0} \int_{r_s} (W\delta_{1j} - \sigma_{ij} u_{i,1}) n_j \, dr_s \qquad (۲-۳۱)$$

که W، در رابطه (۲-۳۲) تعریف‌شده است:

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{m} \qquad (۲-۳۲)$$

۱) *Implicit*
۲) *Explicit*
۳) *Lamped Mass Matrix*

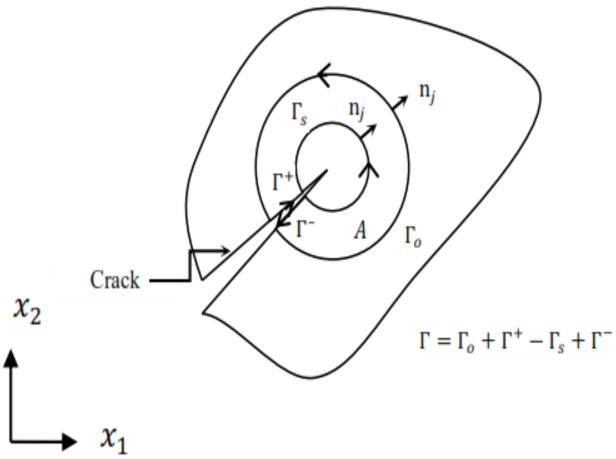
با در نظر گرفتن q (تابع پیوسته) و قضیه دیورژانس، انتگرال J با استفاده از انتگرال ناحیه‌ای معادل، در رابطه(۳۳-۲) آورده شده است[۳۵]. لازم به ذکر است که q برای مرز داخلی یک و برای مرز خارجی صفر در نظر گرفته می‌شود.

$$J = \int_A (\sigma_{ij}u_{i,1} - W\delta_{1j})q_{,j}dA + \int_A (\sigma_{ij}u_{i,1} + W\delta_{1j})_{,j}\, q dA \tag{۳۳-۲}$$

در شکل (۴-۲) A ناحیه محصور به منحنی r است که برای یک سیستم خطی با اعمال بارگذاری اصلی و بارگذاری کمکی، انتگرال J به‌صورت رابطه (۳۴-۲) بیان می‌شود .

$$J^S = J + J^{aux} + M \tag{۳۴-۲}$$

که در رابطه (۳۴-۲) J مقدار انتگرال J در حالت اصلی است و همچنین J^{aux} مقدار انتگرال J در حالت کمکی است و M هم انتگرال برهم‌کنش است که در رابطه(۳۵-۲) بیان‌شده است[۳۶].



شکل (۴-۲) تبدیل فرم کانتوری انتگرال J به فرم ناحیه‌ای[۲۲]

$$M = \int_A (\sigma_{ij}u_{i,1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux}u_{i,1} - W^{int}\delta_{1j})q_{,j}dA + \int_A (\sigma_{ij}u_{i,1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux}u_{i,1} - W^{int}\delta_{1j})_{,j}\, qdA \quad (۲-۳۵)$$

در رابطه(۲-۳۵)، W^{int} تابع چگالی انرژی کرنشی برهم‌کنش است که در رابطه (۲-۳۶) بیان‌شده است:

$$W^{int} = \frac{1}{2}(\sigma_{ik}\varepsilon_{ik}^{aux} + \sigma_{ik}^{aux}\varepsilon_{ik}^{m}) \quad (۲-۳۶)$$

از عبارت دوم رابطه (۲-۳۵) مشتق گرفته‌شده است و با توجه به رابطه تعادل ($\sigma_{ij,j} = 0$) و رابطه سازگاری میدان‌های اصلی و میدان‌های کمکی، انتگرال برهم‌کنش به‌صورت رابطه(۲-۳۷) به‌دست می‌آید.

$$M = \int_A (\sigma_{ij}u_{i,1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux}u_{i,1} - W^{int}\delta_{1j})q_{,j}dA + \int_A \left(\sigma_{ij}u_{i,1j}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux}u_{i,1j} - W_{,1}^{int}\right)qdA \quad (۲-۳۷)$$

مشتق رابطه (۲-۳۷) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\left(\frac{W^{int}}{\partial x_1}\right) = \sigma_{ij}u_{i,j1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux}u_{i,j1} + \left(\frac{\partial W^{int}}{\partial x_1}\right)_{expl} \quad (۲-۳۸)$$

در رابطه(۲-۳۸) عبارت $\left(\frac{\partial W^{int}}{\partial x_1}\right)_{expl}$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\left(\frac{\partial W^{int}}{\partial x_1}\right)_{expl} = \frac{\partial W^{int}}{\partial(\Delta T)}\frac{\partial(\Delta T)}{\partial x_1} + \frac{\partial W^{int}}{\partial(\Delta C)}\frac{\partial(\Delta C)}{\partial x_1} \quad (۲-۳۹)$$

با جایگذاری معادله ساختاری برحسب کرنش کل (ε)، اختلاف دما(ΔT) و غلظت رطوبت(ΔC) در رابطه (۲-۴۰) می‌توان انرژی کرنشی برهمکنش را به‌صورت زیر نوشت:

$$W^{int} = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^{aux} = \sigma_{11}\varepsilon_{11}^{aux} + \sigma_{22}\varepsilon_{22}^{aux} + 2\sigma_{12}\varepsilon_{12}^{aux}$$ (۲-۴۰)
$$= \{[\mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \lambda\delta_{ij}\delta_{kl}]\varepsilon_{kl} - \alpha_0^c\delta_{ij}C - \alpha_0^T\delta_{ij}T\}\varepsilon_{ij}^{aux}$$
$$= \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij}^{aux} + \lambda\delta_{ij}\delta_{kl}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij}^{aux} - \alpha_0^c\delta_{ij}C\varepsilon_{ij}^{aux}$$
$$- \alpha_0^T\delta_{ij}T\varepsilon_{ij}^{aux}$$
$$= 2\mu(\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}^{aux}) + \lambda\varepsilon_{kk}\varepsilon_{ij}^{aux} - \alpha_0^c\varepsilon_{ll}^{aux}C - \alpha_0^T\varepsilon_{ll}^{aux}T$$

با مشتق‌گیری از رابطه (۲-۴۰) نسبت به ΔC وΔT روابط (۲-۴۱) و (۲-۴۲) به دست می‌آید:

$$\frac{\partial W^{int}}{\partial(\Delta T)} = -\alpha_0^T\varepsilon_{ll}^{aux}T$$ (۲-۴۲)

$$\frac{\partial W^{int}}{\partial(\Delta C)} = -\alpha_0^C\varepsilon_{ll}^{aux}C$$ (۲-۴۳)

با جایگذاری روابط به‌دست‌آمده (۲-۴۲) و (۲-۴۳) در رابطه(۲-۳۷) فرم نهایی انتگرال برهم‌کنش برای بارگذاری گرمایی- انتشار به‌صورت رابطه (۲-۴۴) ارائه می‌شود.

$$M = \int_A (\sigma_{ij}u_{i,1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux}u_{i,1} - W^{int}\delta_{ij})q_{,j}dA + \int_A ((-\alpha_0^T\varepsilon_{ll}^{aux}T)\frac{\partial(\Delta T)}{\partial x_1})qdA$$ (۲-۴۴)
$$+ \int_A \left((-\alpha_0^c\varepsilon_{ll}^{aux}C)\frac{\partial(\Delta C)}{\partial x_1}\right)qdA$$

۲-۸- استخراج ضرایب شدت تنش

رابطه بین انتگرال J و ضرایب شدت تنش K_I و K_{II} به‌صورت ارائه می‌شود:

$$J = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E'}$$ (۲-۴۵)

همچنین، با توجه به رابطه (۲-۴۵) انتگرال برهم‌کنش M را می‌توان برحسب ضرایب شدت تنش K_I و K_{II} به‌صورت زیر بازنویسی شده است.

$$M = \frac{2}{E'}(K_I K_I^{aux} + K_{II}K_{II}^{aux})$$ (۲-۴۶)

که در رابطه بالا، E' به‌صورت زیر بیان‌شده است:

$$E' = \begin{cases} E & \text{تنش صفحه‌ای} \\ E/(1-\nu^2) & \text{کرنش صفحه‌ای} \end{cases} \tag{۴۷-۲}$$

ضرایب شدت تنش K_I و K_{II} را می‌توان با انتخاب صحیح میدان‌های کمکی (مودهای خالص I و II) و نیز با استفاده از انتگرال برهم‌کنش M، به‌صورت زیر ارائه کرد:

$$K_I = \frac{E'}{2} M^{(1)}, (K_I^{aux} = 1, K_{II}^{aux} = 0) \tag{۴۸-۲}$$

$$K_{II} = \frac{E'}{2} M^{(2)}, (K_I^{aux} = 0, K_{II}^{aux} = 1) \tag{۴۹-۲}$$

۲-۹- تئوری گرین-نقدی

تئوری گرین-نقدی از مفهوم جابه‌جایی گرمایی و موج گرما بهره‌مند است که این امر با تئوری استاندارد فوریه مغایرت داشته و امروزه تئوری گرین-نقدی موردتوجه بسیاری از محققان قرارگرفته که در مسائل موردبررسی آن‌ها، انتشار گرما با ترموالاستیسیته و برخی موارد دیگر بررسی‌شده است، تئوری گرین-نقدی یک چارچوب کلی ایجاد کرده که مسائل گرمایی گسترده‌تری را نسبت به تئوری استاندارد (فوریه و تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک) شامل شده است. این تئوری به سه نوع مختلف تقسیم می‌شود [۳۸].

نوع I: تحت شرایط خاص ارائه‌شده و براساس رابطه ساختاری شار گرمایی تئوری استاندارد فوریه ارائه گردیده است.

نوع II: مشخصه بارز تئوری گرین- نقدی نوع II، انتشار بدون استهلاک موج گرما است.

نوع III: تئوری گرین-نقدی نوع III چارچوبی جهت تحلیل، شرح و توصیف محدوده گسترده‌تری از مسائل است. در حقیقت گرین و نقدی تئوری‌های خود را با ساختار ترمودینامیکی قوی و مستحکم ارائه داده‌اند که علاوه بر انتشار گرما در رساناهای صلب، شامل مواردی از پدیده‌های جفت‌شدگی (کوپل) مثل ترموالاستیسیته و سیالات ترموویسکوز می‌باشد [۳۸]. روابط اساسی حاکم بر تئوری ترموالاستیسیته به‌صورت زیر است:

الف) تعادل آنتروپی

برخلاف فرایند کلاسیک اصل تعادل انرژی (قانون اول) و عدم تعادل آنتروپی (قانون دوم)، تئوری گرین-نقدی براساس بیانی برای تعادل آنتروپی پایه‌گذاری شده است.

رابطه تعادل آنتروپی پیشنهادشده مطابق رابطه زیر است[۳۹].

$$\dot{\eta} = -\mathrm{div}\, h + s + \xi \qquad (۲-۵۰)$$

که در آن η، s و ξ به ترتیب نشانگر آنتروپی، منبع خارجی آنتروپی و تولید آنتروپی داخلی هستند و h بردار شار ورودی آنتروپی را نشان می‌دهد. گرین و نقدی فرض کردند که شار ورودی آنتروپی تابعی از q و r است که q بردار شار ورودی گرمایی و r منبع گرمایی خارجی است که با جریان داخلی آنتروپی و دمای مطلق متناسب است.

$$q = \theta h \;,\quad \theta s = r \;,\quad \theta > 0 \qquad (۲-۵۱)$$

در تحقیقات اخیر نشان داده‌شده است که این فرض زمانی درست است که h و q به متغیرهای حالت وابستگی همگن داشته باشند [۳۸].

ب) روابط تعادل انرژی، انرژی آزاد و تعادل آنتروپی کاهش‌یافته

با ضرب رابطه (۲-۵۰) در دمای مطلق، رابطه (۲-۵۲) به دست می‌آید:

$$\theta\dot{\eta} = -\mathrm{div} q + \theta^{-1} q \cdot \nabla\theta + r + \theta\xi \qquad (۲-۵۲)$$

رابطه تعادل انرژی به‌صورت رابطه (۲-۵۳) است:

$$\dot{\varepsilon} = -\mathrm{div} q + r \qquad (۲-۱۵)$$

همچنین انرژی آزاد هلمهولتز در واحد جرم به‌صورت رابطه (۲-۵۳) است.

$$\psi = \varepsilon - \theta\eta \qquad (۲-۵۴)$$

رابطه (۲-۵۵)، معادله آنتروپی کاهش‌یافته گرین و نقدی است.

$$\dot{\psi} + \eta\dot{\theta} + \theta^{-1}q \cdot \nabla\theta + \theta\xi = 0 \qquad (۲-۵۵)$$

که $\theta\xi$ اتلاف داخلی است.

۲-۱۰- جابه‌جایی گرمایی

رابطه (۲-۵۵) نقطه مشترک بسط ساختاری تئوری گرین- نقدی نوع I، II و III است. در تمام این تئوری‌ها، این رابطه نقش نابرابری آنتروپی کاهش‌یافته در فرآیند استاندارد کلمن-نول[۱] را ایفا می‌کند.

$$\dot{\psi} + \eta\dot{\theta} + \theta^{-1}q \cdot \nabla\theta + \theta\xi \leq 0 \qquad (۲-۵۶)$$

با این اختلاف که گرین و نقدی فرض کردند که اتلاف داخلی هرگز نباید منفی شود. اختلاف چشمگیر دیگر در هدایت گرمایی استاندارد این است که در هر سه نوع تئوری گرین-نقدی، متغیرهای حالت جابه‌جایی گرمایی α مشتق زمانی دمای تجربی هستند.

$$\dot{\alpha} = T \qquad (۲-۵۷)$$

بعلاوه در این تئوری‌ها فرض شده که دمای مطلق θ تابعی از دمای تجربی است. برای سادگی از این به بعد فرض می‌شود که دماهای مطلق و تجربی برهم منطبق هستند.

$$\dot{\alpha} = \theta \qquad (۲-۵۸)$$

مفهوم جابه‌جایی گرمایی در ابتدا توسط هلمهولتز در سال ۱۸۸۴ مورداستفاده قرار گرفت. درحالی‌که نقش اصلی این مفهوم در قوانین اساسی تعادل ترمودینامیک بدیهی است اما تفسیر فیزیکی آن به‌خصوص در مواردی که شامل تغییر مکانیکی-استاتیکی دما است از موضوعات مطلوب محققان قرارگرفته است[۳۸].

---

۱) standard Coleman-Knoll process

فصل سوم

معادلات حاکم انتشار-

ترموالاستیسیته تعمیم‌یافته

۳-۱- مقدمه

در این فصل برای سازه‌ای که تحت انتشار و گرما قرار دارد، معادلات حاکم شامل معادلات حرکت، تعادل و انرژی معرفی می‌شود. بعد از فرآیند بی‌بعد سازی معادلات حاکم، فرم گسسته آن‌ها به‌صورت ماتریسی بیان می‌شود.

۳-۲- معادلات حاکم بر انتشار در محیط ترموالاستیسیته:

در اینجا جهت تحلیل یک سازه تحت انتشار سیال از شکل کوپل معادلات انتشار-ترموالاستیسیته استفاده می‌شود. معادله حرکت، معادله تعادل جرم و معادله انرژی عبارتنداز[۱۱] :

$$\sigma_{ij,j} + f_{\mathrm{i}} = \rho\ddot{u}_i \tag{۳-۱}$$

$$\dot{\mu} + \dot{\mu}^{(a)} = \frac{I}{c_0} - \frac{\beta' J_{i,i}}{c_0} \tag{۳-۲}$$

$$C^T\ddot{T} + \gamma^T T_0 \ddot{u}_{j,j} = \kappa^* T_{,ii} \tag{۳-۳}$$

در رابطه فوق، σ تنسور تنش، f بردار نیروی کالبدی بر واحد حجم، u_i بردار جابه‌جایی، $\mu^{(a)}$ اینرسی پتانسیل شیمیایی، I منبع انتشار، c_0 غلظت مولی، ρ چگالی، T دما، T_0 دمای اولیه، κ^* ثابت ماده، C^T گرمای ویژه است.

معادلات ساختاری عبارت است از[۱۱]:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} - \alpha^c{}_{ij}c - \alpha^T_{ij}T = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} - \alpha^c{}_{ij}c\delta_{ij} - \alpha^T_{ij}T\delta_{ij} \tag{۳-۴}$$

$$\mu = \alpha^c{}_{ij}\varepsilon_{ij} + \beta c \tag{۳-۵}$$

$$\rho s = S = \alpha^T_{ij}\varepsilon_{ij} + \rho C^T T \tag{۳-۶}$$

در رابطه فوق σ_{ij} تنش، ε_{ij} تنسور کرنش ،c غلظت مولی، μ پتانسیل شیمیایی، S آنتروپی، α^c_{ij} ضریبی برای اتصال بین تنش و غلظت، α^T_{ij} ضریبی برای اتصال بین تنش و درجه حرارت، J_i شار انتشار است.

قانون فیک برای مواد ایزوتروپیک و همگن به شرح زیر است:

$$J_i = -D_{ij}c_{,j} = -D_0\delta_{ij}c_{,j} = -D_0c_{,i} \quad (۳-۷)$$

در رابطه(۳-۷) D_0 ضریب انتشار است و در رابطه (۳-۲) وابستگی $\mu^{(a)}$ به میزان غلظت نشان داده‌شده است:

$$\mu^{(a)} = \gamma^c\dot{c} \quad (۳-۸)$$

در رابطه(۳-۸)، γ ضریب وابستگی است.

$$\beta = \frac{\beta'}{c_0} = \frac{RT}{c_0} \quad (۳-۹)$$

در رابطه فوق R ثابت جهانی گازها و T دمای مطلق است.

با صرف‌نظر کردن از نیروهای کالبدی و منابع انتشار معادلات به‌صورت زیر است:

$$\sigma_{ij.j}(x,t) = \rho\ddot{u}_i(x,t) \quad (۳-۱۰)$$

$$\dot{\mu}(x,t) + \dot{\mu}^{(a)}(x,t) = -\frac{\beta' J_{i,i}}{c_0}(x,t) \quad (۳-۱۱)$$

$$C^T\ddot{T}(x,t) + \gamma^T T_0\ddot{u}_{j,j}(x,t) = \kappa^* T_{,ii}(x,t) \quad (۳-۱۲)$$

برای مواد ایزوتروپیک و همگن، تنسور الاستیسیته و ضرایب ماده به‌صورت زیر است:

$$C_{ijkl} = \frac{2\nu G}{1-2\nu}\delta_{ij}\delta_{kl} + G\delta_{ik}\delta_{jl} + G\delta_{il}\delta_{jk} \quad (۳-۱۳)$$

$$\alpha_{ij}^C = \alpha_0^c\delta_{ij} \quad (۳-۱۴)$$

$$\alpha_{ij}^T = \alpha_0^T\delta_{ij} \quad (۳-۱۵)$$

رابطه سینماتیک برای تغییرشکل‌های بسیار کوچک به‌قرار زیر است:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \quad (۳-۱۶)$$

در رابطه فوق ε تنسور کرنش کل است .

۳-۳- معادلات حاکم

معادلات حاکم بر انتشار سیال در محیط ترموالاستیسیته به ترتیب معادله(۳-۱۷) معادله حرکت، معادله(۳-۱۸) معادله تعادل جرم و معادله(۳-۱۹) معادله انرژی به‌صورت زیر تفکیک‌شده است:

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ij} + \mu u_{1,22} - \beta^C c_{,i} - \beta^T T_{,i} = \rho \ddot{u}_i \tag{۳-۱۷}$$

$$\alpha_0^c (\dot{u}_{i,i}) + \beta \dot{c} + \gamma^c \ddot{c} = \beta D_0 (c_{,ii}) \tag{۳-۱۸}$$

$$\rho c \ddot{T} + \beta^T T_0 (\ddot{u}_{i,i}) = \kappa^* (T_{,ii}) \tag{۳-۱۹}$$

در روابط فوق c غلظت مولی، β^C ضریب حرارتی مکانیکی، β^T ضریب شیمیایی مکانیکی، u جابجایی، β ثابت‌پتانسیل شیمیایی، D_0 ضریب پخش و κ^* ثابت ماده است.

۳-۴- بی‌بعد سازی معادلات حاکم

برای سادگی معادلات حاکم از پارامترهای بدون بعد استفاده می‌شود که پارامترهای بدون بعد به‌صورت زیر قابل بیان هستند:

$$\hat{x} = \frac{x}{L} \tag{۳-۲۰}$$

$$\hat{u}_i = \frac{u_i}{L} \tag{۳-۲۱}$$

$$\hat{C} = \frac{\beta^C}{\lambda + 2\mu} (C - C_0) \tag{۳-۲۲}$$

$$\hat{T} = \frac{\beta^T}{\lambda + 2\mu} (T - T_0) \tag{۳-۲۳}$$

۳-۵- معادلات بعد از فرآیند بی‌بعد سازی

معادلات حاکم بر انتشار سیال در محیط ترموالاستیسیته بعد از فرآیند بی‌بعد سازی به‌صورت زیر قابل‌بیان هستند:

$$\left(\frac{\mu}{\lambda + 2\mu}\right) \hat{u}_{i,jj} + \left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}\right) \hat{u}_{j,ij} - \hat{C}_{,i} - \hat{T}_{,i} = \frac{\rho V^2}{\lambda + 2\mu} \ddot{\hat{u}}_i \tag{۳-۲۴}$$

$$\ddot{\hat{T}} + \frac{\beta^T T_0^2}{\rho c(\lambda + 2\mu)} \ddot{\hat{u}}_{i,i} = \frac{\kappa^*}{\rho c V^2} \hat{T}_{,ii} \tag{۲۵-۳}$$

$$\frac{\gamma^c V}{\beta L} \ddot{\hat{C}} + \dot{\hat{C}} + \frac{\beta C^2}{\beta(\lambda + 2\mu)} \dot{\hat{u}}_{i,i} = D_0 \frac{1}{VL} \hat{C}_{i,i} \tag{۲۶-۳}$$

برای ساده‌سازی معادلات (۳-۲۴) تا (۳-۲۶)، پارامترها به‌صورت زیر در نظر گرفته‌شده است:

$$\left(\frac{\mu}{\lambda + 2\mu}\right) = \hat{\mu} \tag{۲۷-۳}$$

$$\left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}\right) = (\hat{\lambda} + \hat{\mu}) \tag{۲۸-۳}$$

$$\frac{\rho V^2}{\lambda + 2\mu} = \hat{\rho} \tag{۲۹-۳}$$

$$\frac{\beta^T T_0^2}{\rho c(\lambda + 2\mu)} = \varepsilon^T \tag{۳۰-۳}$$

$$\frac{\kappa^*}{\rho c V^2} = \hat{\kappa}^* \tag{۳۱-۳}$$

$$\frac{\gamma^c v}{\beta L} = \hat{\tau}_0 \tag{۳۲-۳}$$

$$\frac{\beta C^2}{\beta(\lambda + 2\mu)} = \varepsilon^c \tag{۳۳-۳}$$

$$D_0 \frac{1}{VL} = \widehat{D}_0 \tag{۳۴-۳}$$

معادلات بعد از بی‌بعد سازی به‌صورت زیر می‌باشند:

$$\hat{\mu}\hat{u}_{i,jj} + (\hat{\lambda} + \hat{\mu})\hat{u}_{j,ij} - \hat{C}_{,i} - \hat{T}_{,i} = \hat{\rho}\ddot{\hat{u}}_i \tag{۳۵-۳}$$

$$\ddot{\hat{T}} + \varepsilon^T \ddot{\hat{u}}_{i,i} = \hat{\kappa}^* \hat{T}_{,ii} \tag{۳۶-۳}$$

$$\hat{\tau}_0 \ddot{\hat{C}} + \dot{\hat{C}} + \varepsilon^c \dot{\hat{u}}_{i,i} = \widehat{D}_0 \hat{C}_{i,i} \tag{۳۷-۳}$$

در معادلات فوق $V = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$ است.

۳-۶- گسسته‌سازی معادلات انتشار- ترموالاستیسیته

برای گسسته سازی معادلات حاکم از روش گلرکین استفاده‌شده است. برای یک المان مبنا (e) که تمامی گره‌های آن توسط هر دو تابع غنی‌سازی هستند که رفتار نزدیک نوک ترک را تقریب می‌زنند. این توابع برحسب مختصات محلی نوک ترک (r و Φ) عباتنداز :

$$\Phi_{\mathrm{h}}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \mathrm{N}_{\mathrm{h}}(\mathrm{x},\mathrm{y})[H(Z) - H(\mathrm{Z}_{\mathrm{h}})] \tag{۳-۳۷}$$

$$\begin{aligned}\Psi_{\mathrm{n}} = (\mathrm{x},\mathrm{y}) = \mathrm{N}_{\mathrm{h}}(\mathrm{x},\mathrm{y})[&\sqrt{\mathrm{r}}\sin\left(\frac{\Phi}{2}\right) - \sqrt{\mathrm{r_n}}\sin\left(\frac{\Phi_{\mathrm{n}}}{2}\right), \sqrt{\mathrm{r}}\cos\left(\frac{\Phi}{2}\right)\\ &- \sqrt{\mathrm{r_n}}\cos\left(\frac{\Phi_{\mathrm{n}}}{2}\right), \sqrt{\mathrm{r}}\sin(\Phi)\sin\left(\frac{\Phi}{2}\right)\\ &- \sqrt{\mathrm{r_n}}\sin(\Phi_{\mathrm{n}})\sin\left(\frac{\Phi_{\mathrm{n}}}{2}\right), \sqrt{\mathrm{r}}\sin(\Phi)\cos\left(\frac{\Phi}{2}\right)\\ &- \sqrt{\mathrm{r_n}}\sin(\Phi_{\mathrm{n}})\cos\left(\frac{\Phi_{\mathrm{n}}}{2}\right)]\end{aligned} \tag{۳-۳۸}$$

$\mathrm{H(Z)}$تابع هویساید است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{H(Z)} = \begin{cases} 1, & \mathrm{Z} > 0 \\ 0 & \mathrm{Z} \leq 0 \end{cases} \tag{۳-۳۹}$$

در اینجا Z تابعی از موقعیت یک نقطه نسبت به مسیر ترک است.

مؤلفه‌های جابه‌جایی، دما و غلظت به‌صورت زیر بیان‌شده است:

$$\mathrm{u^e(x,y,t)} = \mathrm{N_h(x,y)a_h^u(t)} + \Phi_{\mathrm{h}}\mathrm{(x,y)b_h^u(t)} + \Psi_{\mathrm{nm}}\mathrm{(x,y)c_{hm}^u(t)} \tag{۳-۴۰}$$

$$\mathrm{v^e(x,y,t)} = \mathrm{N_h(x,y)a_h^v(t)} + \Phi_{\mathrm{h}}\mathrm{(x,y)b_h^v(t)} + \Psi_{\mathrm{nm}}\mathrm{(x,y)c_{hm}^v(t)} \tag{۳-۴۱}$$

$$\theta^{\mathrm{e}}\mathrm{(x,y,t)} = \mathrm{N_h(x,y)a_h^T(t)} + \Phi_{\mathrm{h}}\mathrm{(x,y)b_h^T(t)} + \Psi_{\mathrm{nm}}\mathrm{(x,y)c_{hm}^T(t)} \tag{۳-۴۲}$$

$$\mathrm{c^e(x,y,t)} = \mathrm{N_h(x,y)a_h^z(t)} + \Phi_{\mathrm{h}}\mathrm{(x,y)b_h^z(t)} + \Psi_{\mathrm{nm}}\mathrm{(x,y)c_{hm}^T(t)} \tag{۳-۴۳}$$

$$h = 1, \dots, ne, \quad m = 1, \dots, 4$$

۳-۷- معادلات حاکم بعد از فرآیند گسسته‌سازی

با نوشتن فرم ضعیف معادلات حاکم بی‌بعد شده درنهایت به معادله (۳-۴۴) و (۳-۴۵) فرم گسسته

شده معادله حرکت، معادله (۳-۴۶) معادله تعادل جرم و (۳-۴۷) به معادله انرژی رسیده که به‌صورت زیر بیان‌شده است:

i=1 (۳-۴۴)

$$\int_{\Omega^e}[(\hat{\lambda}+2\hat{\mu})u_{1,11}+(\hat{\lambda}+\hat{\mu})u_{1,22}+\hat{\mu}u_{2,22}-\beta^c C_{,1}-\beta^T T_{,1}-\ddot{u}_1]d\Omega$$
$$=\int_{\Omega^e}Tr_x^n N_i d\Omega$$

i=2 (۳-۴۵)

$$\int_{\Omega^e}[\hat{\mu}u_{1,12}+(\hat{\lambda}+\hat{\mu})u_{2,11}+(\hat{\lambda}+2\hat{\mu})u_{2,22}-\beta^c C_{,1}-\beta^T T_{,1}-\ddot{u}_2]d\Omega$$
$$=\int_{\Omega^e}Tr_y^n N_i d\Omega$$

$$\int_{\Omega^e}\hat{\tau}_0\ddot{c}+\dot{c}-\widehat{D}_0 c_{,ii}+\kappa^c\dot{u}_{i,i}=-\int_{\Omega^e}(q_i n_i)N_i d\Omega \tag{۳-۴۶}$$

$$\int_{\Omega^e}\ddot{T}+\kappa^T(\ddot{u}_{1,1}+\ddot{u}_{2,2})-\hat{\kappa}^*(T_{,11}+T_{,22})=-\int_{\Omega^e}(q_i n_i)N_i d\Omega \tag{۳-۴۷}$$

با گسسته سازی انتگرال‌های فوق با استفاده از روش المان محدود توسعه‌یافته و اعمال میدان‌های تقریب جابجایی، دما و غلظت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^e}[(\hat{\lambda}+2\hat{\mu})S_{L.x}\left(N_{n.x}a_n^u+\Phi_{n,x}b_n^u+\Psi_{nm,x}c_{nm}^u\right)\\
+(\hat{\lambda}+\hat{\mu})S_{L.y}\left(N_{n.y}a_n^u+\Phi_{n,y}b_n^u+\Psi_{nm,y}c_{nm}^u\right)\\
+\hat{\mu}S_{L.x}\left(N_{n.y}a_n^v+\Phi_{n,y}b_n^v+\Psi_{nm,y}c_{nm}^v\right)\\
-\beta^c S_{L.x}(N_n a_n^c+\Phi_n b_n^c+\Psi_{nm}c_{nm}^c)\\
-\beta^T S_{L.x}(N_n a_n^T+\Phi_n b_n^T+\Psi_{nm}c_{nm}^T)\\
-S_L\left(N_n\ddot{a}_n^u+\Phi_n\ddot{b}_n^u+\Psi_{nm}\ddot{c}_{nm}^u\right)]d\Omega=\int_{\Omega^e}Tr_x^n S_L d\Omega\end{aligned} \tag{۳-۴۸}$$

$$\int_{\Omega^e} \hat{\mu}\, S_{L.x}\big(N_{n.y}a_n^u + \Phi_{n,y}b_n^u + \Psi_{nm,y}c_{nm}^u\big)$$ (۴۹-۳)

$$+ \big(\hat{\lambda} + \hat{\mu}\big)S_{L.x}\big(N_{n.x}a_n^v + \Phi_{n,x}b_n^v + \Psi_{nm,x}c_{nm}^v\big) + (\hat{\lambda}$$
$$+ 2\hat{\mu})S_{L.y}\big(N_{n.y}a_n^v + \Phi_{n,y}b_n^v + \Psi_{nm,y}c_{nm}^v\big)$$
$$- \beta^c S_{L.y}(N_n a_n^c + \Phi_n b_n^c + \Psi_{nm}c_{nm}^c)$$
$$- \beta^T S_{L.y}(N_n a_n^T + \Phi_n b_n^T + \Psi_{nm}c_{nm}^T)$$
$$- S_L\big(N_n \ddot{a}_n^u + \Phi_n \ddot{b}_n^u + \Psi_{nm}\ddot{c}_{nm}^u\big)]d\Omega = \int_{\Omega^e} Tr_y^n S_L d\Omega$$

$$\int_{\Omega^e} \hat{\tau}_0\, S_L\big(N_n \ddot{a}_n^c + \Phi_n \ddot{b}_n^c + \Psi_{nm}\ddot{c}_{nm}^c\big) + S_L\big(N_n \dot{a}_n^c + \Phi_n \dot{b}_n^c + \Psi_{nm}\dot{c}_{nm}^c\big)$$ (۵۰-۳)

$$- \widehat{D}_0 S_{L.x}\big(N_{n.x}a_n^c + \Phi_{n,x}b_n^c + \Psi_{nm,x}c_{nm}^c\big)$$
$$+ S_{L.y}\big(N_{n.y}a_n^c + \Phi_{n,y}b_n^c + \Psi_{nm,y}c_{nm}^c\big)$$
$$+ \kappa^c S_{L.x}\big(N_{n.y}a_n^u + \Phi_{n,x}b_n^x + \Psi_{nm,x}c_{nm}^x\big)$$
$$+ S_{L.y}\big(N_{n.y}a_n^v + \Phi_{n,y}b_n^v + \Psi_{nm,y}c_{nm}^v\big)$$
$$= -\int_{\Omega^e} (q_x n_x) S_L d\Omega - \int_{\Omega^e} (q_y n_y) S_L d\Omega$$

$$\int_{\Omega^e} S_L(N_n a_n^T + \Phi_n b_n^T + \Psi_{nm}c_{nm}^T) + \kappa^T S_{L.x}\left(N_n \ddot{a}_n^u + \Phi_n \ddot{b}_n^u + \Psi_{nm}\ddot{c}_{nm}^u\right)$$ (۵۱-۳)

$$+ \kappa^T S_{L.y}\big(N_n \ddot{a}_n^v + \Phi_n \ddot{b}_n^v + \Psi_{nm}\ddot{c}_{nm}^v\big)$$
$$- \hat{\kappa}^* S_{L,x}\big(N_{n,x}a_n^T + \Phi_{n,x}b_n^T + \Psi_{nm,x}c_{nm}^T\big)$$
$$+ \hat{\kappa}^* S_{L,y}\big(N_{n,y}a_n^T + \Phi_{n,y}b_n^T + \Psi_{nm,y}c_{nm}^T\big)$$
$$= -\int_{\Omega^e} (q_x n_x) S_L d\Omega - \int_{\Omega^e} (q_y n_y) S_L d\Omega$$

که در این رابطه توابع وزنی $S_L(x, y)$ همان توابع شکل المان محدود توسعه‌یافته هستند یعنی،

$$S_L = \{N_1, N_2, N_3, N_4, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Psi_{1m}, \Psi_{2m}, \Psi_{3m}, \Psi_{4m}\}$$ (۵۲-۳)

m=1,…,4

در معادلات بالا $Tr=\sigma.\, n_x$ همان بردار تنش هست.

دسته‌بندی معادلات برحسب U, V, C, T برای هر سه نیرو در روابط زیر نشان داده‌شده است :

$U = N_i U_i$,$V = N_i V_i$, $C = N_i C_i, T = N_i T_i$

$$\int_{\Omega^e}[(\hat{\lambda}+2\hat{\mu})N_{i.x}\,N_{j.x}U_i+(\hat{\lambda}+\hat{\mu})N_{i,y}N_{j,y}U_i+\hat{\mu}N_{i,x}N_{j,y}V_i$$
$$-\beta^c N_i N_{j.x}C_i-\beta^T N_i N_{j.x}T_i-N_i N_j\ddot{u}_1]d\Omega$$
$$=\int_{\Omega^e}Tr_x^n N_i d\Omega \quad (۵۳\text{-}۳)$$

$$\int_{\Omega^e}[\hat{\mu}N_{i.x}\,N_{j.y}U_i+(\hat{\lambda}+\hat{\mu})N_{i,x}N_{j,x}V_i+(\hat{\lambda}+2\hat{\mu})N_{i,y}N_{j,y}V_i$$
$$-\beta^c N_i N_{j.y}C_i-\beta^T N_i N_{j.y}T_i-N_i N_j\ddot{V}_1]d\Omega$$
$$=\int_{\Omega^e}Tr_y^n N_i d\Omega \quad (۵۴\text{-}۳)$$

$$\int_{\Omega^e}[\hat{\tau}_0 N_i N_j\ddot{C}_i+\dot{C}_i N_i N_j-\widehat{D}_0(N_{i,x}N_{j,x}+N_{i,y}N_{j,y})C_i+\kappa^c(N_i N_{j,x})\dot{U}_i$$
$$+\kappa^c(N_i N_{j,y})\dot{V}_i]d\Omega=-\int_{\Omega^e}(q_i n_i)N_i d\Omega \quad (۵۵\text{-}۳)$$

$$\int_{\Omega^e}[N_i N_j\ddot{T}_i+\kappa^T N_i N_{j,x}\ddot{U}_i+\kappa^T N_i N_{j,y}\ddot{V}_i-\hat{\kappa}^* N_{i,x}N_{j,x}T_i$$
$$-\hat{\kappa}^* N_{i,y}N_{j,y}T_i]d\Omega=-\int_{\Omega^e}(q_i n_i)N_i d\Omega \quad (۵۶\text{-}۳)$$

درنهایت معادلات گسسته‌سازی شده را می‌توان به‌صورت ماتریسی بیان کرد:

$$[\mathrm{M}]\{\ddot{\Delta}\}+[\mathrm{C}]\{\dot{\Delta}\}+[\mathrm{K}]\{\Delta\}=\{\mathrm{F}\} \quad (۵۷\text{-}۳)$$

در این رابطه $[\mathrm{M}]$، $[\mathrm{C}]$ و $[\mathrm{K}]$ به ترتیب ماتریس‌های جرم، میرایی، و سفتی هستند. $\{\Delta\}$ بردار مجهولات گره‌ای و $\{\mathrm{F}\}$ بردار نیروهای گره‌ای است. برای یک المان مبنا (e) این ماتریس‌ها و بردارها به‌صورت زیر به دست می‌آیند.

$$M=\begin{bmatrix}M^{UU} & 0 & 0\\ 0 & M^{CC} & 0\\ M^{TU} & 0 & M^{TT}\end{bmatrix} \quad (۵۸\text{-}۳)$$

$$M^{UU}=\int_{\Omega^e}[NU]^T[NU]d\Omega \quad (۵۹\text{-}۳)$$

$$M^{CC}=\hat{\tau}_0\int_{\Omega^e}[NC]^T[NC]d\Omega \quad (۶۰\text{-}۳)$$

$$M^{TU}=\int_{\Omega^e}[NT]^T[\varepsilon^T\ \varepsilon^T\ 0][BU]d\Omega \quad (۶۱\text{-}۳)$$

$$M^{TT} = \int_{\Omega^e} [NT]^T [NT] d\Omega \qquad (۶۲-۳)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ C^{CU} & C^{CC} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (۶۳-۳)$$

$$\mathrm{C^{CU}} = \int_{\Omega^e} [\mathrm{NC}]^\mathrm{T} [\varepsilon^\mathrm{C}\ \varepsilon^\mathrm{C}\ 0][\mathrm{BU}] \mathrm{d}\Omega \qquad (۶۴-۳)$$

$$\mathrm{C^{CC}} = \int_{\Omega^e} [\mathrm{NC}]^\mathrm{T} [\mathrm{NC}] \mathrm{d}\Omega \qquad (۶۵-۳)$$

$$\mathrm{K} = \begin{bmatrix} \mathrm{K^{UU}} & \mathrm{K^{UC}} & \mathrm{K^{UT}} \\ 0 & \mathrm{K^{CC}} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{K^{TT}} \end{bmatrix} \qquad (۶۶-۳)$$

$$\mathrm{K^{UU}} = \int_{\Omega^e} [\mathrm{BU}]^\mathrm{T} [\mathrm{D}][\mathrm{BU}] \mathrm{d}\Omega \qquad (۶۷-۳)$$

$$\mathrm{K^{UC}} = -\int_{\Omega^e} [\mathrm{BU}]^\mathrm{T} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} [\mathrm{NC}] \mathrm{d}\Omega \qquad (۶۸-۳)$$

$$\mathrm{K^{UT}} = -\int_{\Omega^e} [\mathrm{BU}]^\mathrm{T} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} [\mathrm{NT}] \mathrm{d}\Omega \qquad (۶۹-۳)$$

$$\mathrm{K^{CC}} = \hat{\mathrm{D}}_0 \int_{\Omega^e} [\mathrm{BC}]^\mathrm{T} [\mathrm{BC}] \mathrm{d}\Omega \qquad (۷۰-۳)$$

$$\mathrm{K^{TT}} = \int_{\Omega^e} [\mathrm{BT}]^\mathrm{T} [\mathrm{BT}] \mathrm{d}\Omega \qquad (۷۱-۳)$$

$$[\mathrm{NU}] = \begin{bmatrix} \mathrm{N_1} & 0 & \mathrm{N_2} & 0 & \mathrm{N_3} & 0 & \mathrm{N_4} & 0 \\ 0 & \mathrm{N_1} & 0 & \mathrm{N_2} & 0 & \mathrm{N_3} & 0 & \mathrm{N_4} \end{bmatrix} \qquad (۷۲-۳)$$

$$[\mathrm{NT}] = [\mathrm{N_1} \quad \mathrm{N_2} \quad \mathrm{N_3} \quad \mathrm{N_4}] \qquad (۷۳-۳)$$

$$[\mathrm{NC}] = [\mathrm{N_1} \quad \mathrm{N_2} \quad \mathrm{N_3} \quad \mathrm{N_4}] \qquad (۷۴-۳)$$

$$[\mathrm{BU}] = \begin{bmatrix} \mathrm{N_{1,x}} & 0 & \mathrm{N_{2,x}} & 0 & \mathrm{N_{3,x}} & 0 & \mathrm{N_{4,x}} & 0 \\ 0 & \mathrm{N_{1,y}} & 0 & \mathrm{N_{2,y}} & 0 & \mathrm{N_{3,y}} & 0 & \mathrm{N_{4,y}} \\ \mathrm{N_{1,y}} & \mathrm{N_{1,x}} & \mathrm{N_{2,y}} & \mathrm{N_{2,x}} & \mathrm{N_{3,y}} & \mathrm{N_{3,x}} & \mathrm{N_{4,y}} & \mathrm{N_{4,x}} \end{bmatrix} \qquad (۷۵-۳)$$

$$[\mathrm{BT}] = \begin{bmatrix} \mathrm{N_{1,x}} & \mathrm{N_{2,x}} & \mathrm{N_{3,x}} & \mathrm{N_{4,x}} \\ \mathrm{N_{1,y}} & \mathrm{N_{2,y}} & \mathrm{N_{3,y}} & \mathrm{N_{4,y}} \end{bmatrix} \qquad (۷۶-۳)$$

$$[BC] = \begin{bmatrix} N_{1,x} & N_{2,x} & N_{3,x} & N_{4,x} \\ N_{1,y} & N_{2,y} & N_{3,y} & N_{4,y} \end{bmatrix} \qquad (۷۷-۳)$$

ماتریس خواص $[D]$ برای حالت کرنش صفحه‌ای در فضای بی‌بعد به‌صورت زیر است.

$$[D] = \begin{bmatrix} \hat{\lambda} + 2\hat{\mu} & \hat{\lambda} & 0 \\ \hat{\lambda} & \hat{\lambda} + 2\hat{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\mu} \end{bmatrix} \qquad (۷۸-۳)$$

فصل چهارم

ارائه نتایج

۴-۱- مقدمه

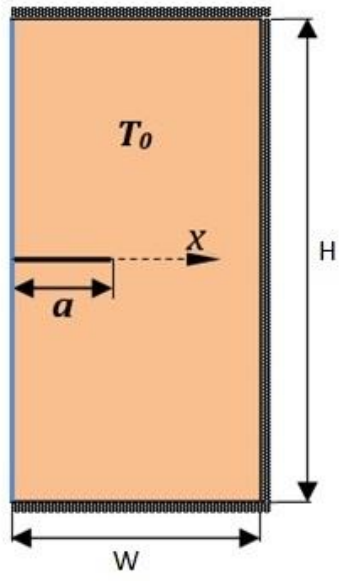
در این فصل برای استخراج نتایج عددی ابتدا دقت و کارایی روش المان محدود توسعه‌یافته بررسی گردیده است. تاریخچه زمانی ضریب شدت تنش، دمای نوک ترک و غلظت نوک ترک در سه مثال مختلف با شرایط مرزی متفاوت برای یک صفحه دارای ترک موردبررسی قرارگرفته است .

در این تحقیق برای پیاده‌سازی از روش المان محدود توسعه‌یافته و حل معادلات انتشار-ترموالاستیسیته به‌منظور شبیه‌سازی مسائل مختلف شکست از محیط برنامه‌نویسی نرم‌افزار MATLAB استفاده‌شده است.

۴-۲- صفحه دارای ترک تحت بارگذاری متقارن حرارتی – انتشار

یک صفحه به عرض W=۱ واحد و ارتفاع H=۲ واحد با یک طول ترک a=0.3 واحد در فضای بدون بعد و ترک موازی با جهت محور x انتخاب‌شده است. سرعت موج تنش برابر با یک، سرعت موج دما ۱/۲ و سرعت موج غلظت برابر با ۰/۸ در نظر گرفته‌شده است. که در شکل (۴-۱) نمایش داده‌شده است. صفحه به‌صورت محدود و همگن در نظر گرفته‌شده این صفحه، بدون هیچ قید مکانیکی در ابتدا در دمای مرجع یکنواخت (بدون تنش) T_0 = ۲۹۳K قرار دارد. یک تغییر دمای ناگهانی در لبه ترک‌خورده باریکه، به‌عنوان بارگذاری حرارتی و انتشار اعمال‌شده است. شرایط بارگذاری این‌گونه است که در بارگذاری در وجه سمت چپ تحت تأثیر یک شوک حرارتی به مقدار ۰/۰۰۱- بی‌بعد و شوک غلظتی به مقدار ۰/۰۰۵- بی‌بعد قرار دارد.

ضریب شدت تنش مود اول برای این مسئله، به‌صورت تحلیلی با صرف‌نظر از عبارت اینرسی و با استفاده از روش انتگرال برهم‌کنش به‌دست‌آمده است که ناحیه انتگرال‌گیری یک ناحیه دایروی به شعاع r/a=0.3 است. برای انتخاب تعداد المان از یک آزمون همگرایی استفاده‌شده که نتایج آن در شکل (۴-۲) نشان داده‌شده‌اند. ضریب شدت تنش با استفاده از روش انتگرال برهم‌کنش در چارچوب روش المان محدود توسعه‌یافته محاسبه گردیده است.



شکل (۴-۱) صفحه مستطیلی شامل ترک عمود بر لبه تحت شوک حرارتی و انتشار

در تحلیل المان محدود از شبکه مش بندی‌های منظم با المان‌های مستطیلی چهار گره‌ای استفاده گردیده و همچنین گام زمانیΔt=۰/۰۳ در نظر گرفته‌شده است. جنس صفحه مس بوده که خواص ماده در جدول (۴-۱) ارائه‌شده است.

جدول (۴-۱) خواص جنس صفحه

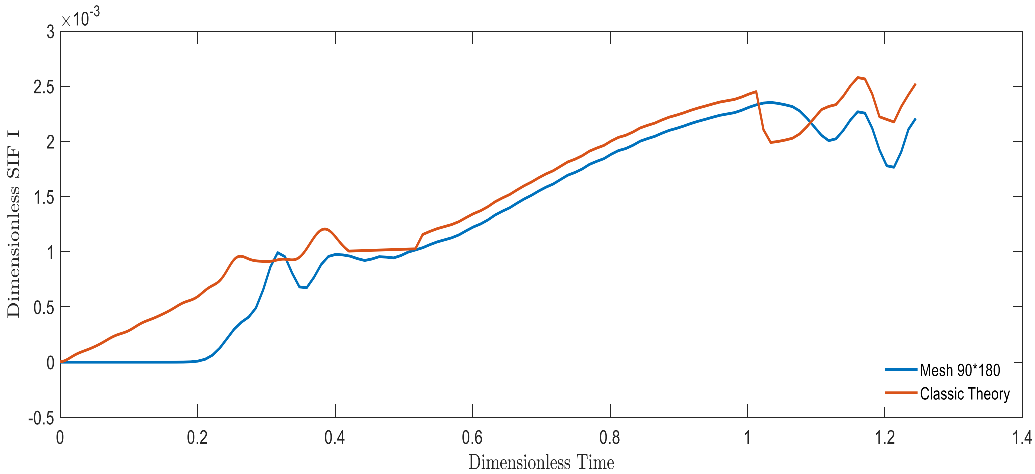
ظرفیت گرمایی ویژه (J/kg-K)	چگالی (kg/m3)	هدایت گرمایی (W/m-K)	ضریب انبساط گرمایی (10^{-6}/K)	نسبت پواسون	مدول یانگ (GPa)
۳۸۳/۱	۸۹۵۴	۳۸۶	۸/۵	۰/۳	۷۰

مطابق نتایج به‌دست‌آمده که در شکل (۴-۲) هم مشاهده می‌شود با ریزتر شدن مش نتایج همگرا می‌شوند. برای مدل‌سازی هندسه صفحه از سه شبکه متشکل از ۵۰×۱۰۰،۶۰×۱۲۰،۷۰×۱۴۰، ۸۰×۱۶۰،۹۰×۱۸۰ و ۱۰۰×۲۰۰ المان استفاده‌شده است، نتایج به‌دست‌آمده تقریباً یکسان است. شعاع انتگرال‌گیری برای انتگرال ناحیه‌ای معادل r/a=۰/۳ قرار داده‌شده است. با توجه به سرعت‌های بی‌بعد اعمالی، سرعت موج تنش یک(C_P =۱)، سرعت موج دما ۱/۲(C_T=۱/۲) و سرعت موج غلظت

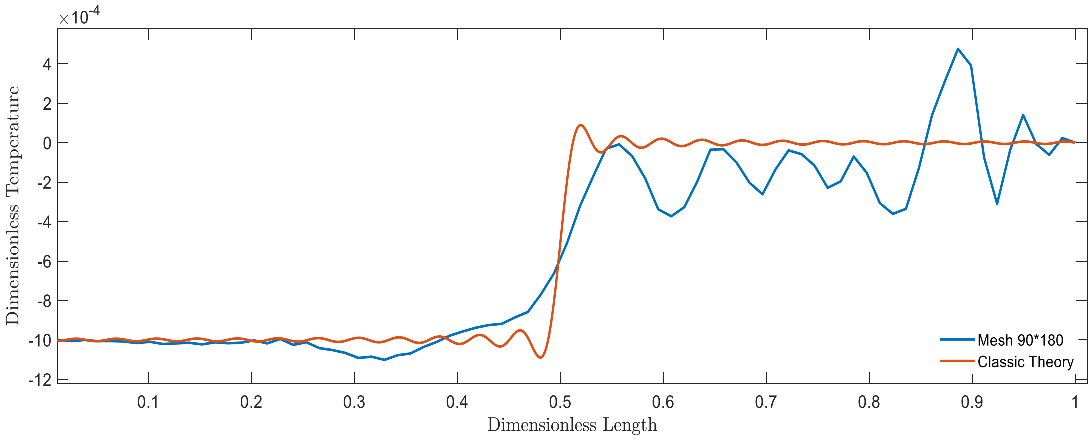
۰/۸ (C_C=۰/۸) در نظر گرفته‌شده است.

۴-۳- صحت سنجی

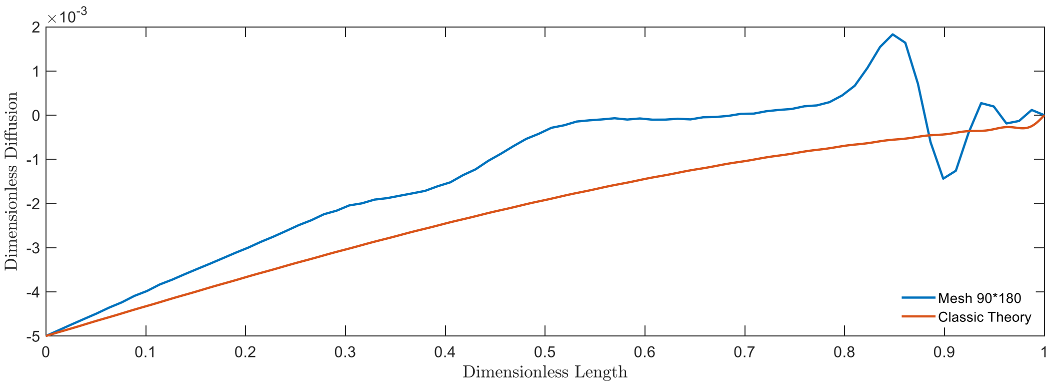
برای صحت سنجی از کوپل معادلات دما، غلظت و جابجایی صرفنظر می‌کنیم و معادلات را به صورت تحلیلی با استفاده از روش جداسازی متغییرها حل کرده تا دما و غلظت برحسب x و t به دست آید(مسئله یک بعدی است) سپس تنش را به دست آورده و با استفاده از روش تابع وزنی ضریب شدت تنش مود اول (شکل (۴-۲))، دمای نوک ترک(شکل(۴-۳)) و غلظت نوک ترک(شکل(۴-۴)) را با استفاده از نرم افزار میپل حل کرده و با نتایج به دست آمده مقایسه شده است.



شکل (۴-۲) مقایسه ضریب شدت تنش در صفحه مستطیلی شامل ترک عمود بر لبه

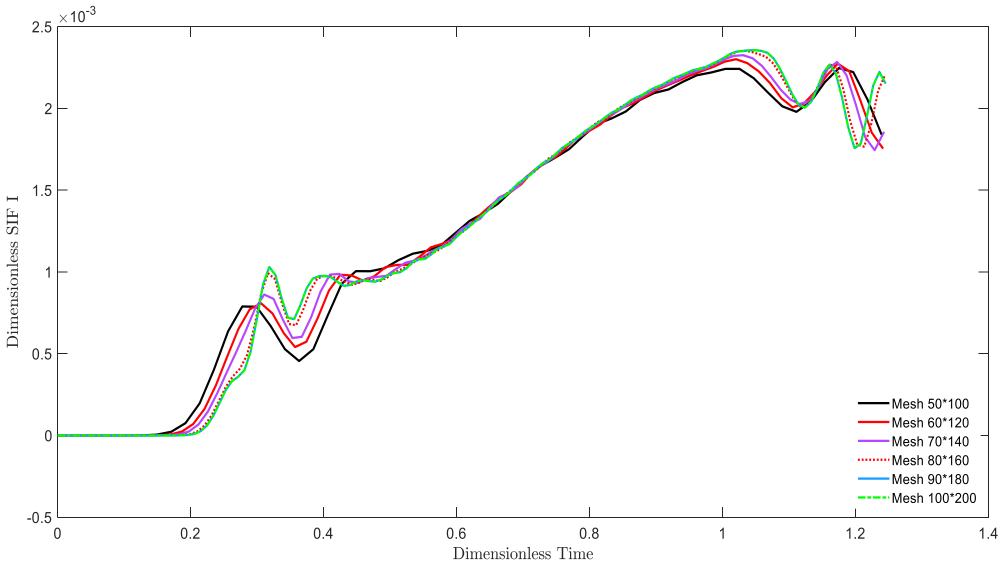


شکل (۴-۳)مقایسه دمای نوک ترک در صفحه مستطیلی شامل ترک عمود بر لبه



شکل (۴-۴) مقایسه غلظت نوک ترک در صفحه مستطیلی شامل ترک عمود بر لبه

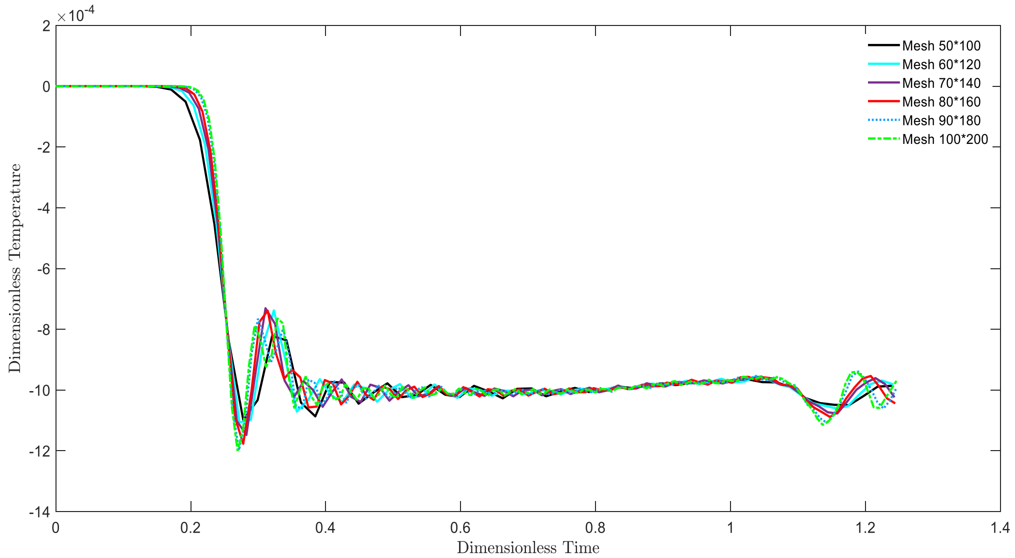
با توجه به سرعت‌های اعمالی زمان رسیدن موج تنش به نوک ترک همان‌طور که در شکل(۴-۵) هم نشان داده‌شده است در زمان t=۰/۳۷۵ ، زمان رسیدن موج غلظت به نوک ترکt=۰/۳ و زمان رسیدن موج دما به نوک ترکt=۰/۲۵ است. بعد از رد شدن موج تنش، دما و غلظت از نوک ترک همان‌طور که در شکل نیز مشاهده می‌شود ضریب شدت تنش روند افزایشی پیدا می‌کند تا اینکه امواج ذکر شده کل صفحه را پیموده و پس از برخورد به دیواره سمت راست صفحه منعکس‌شده و دوباره به نوک ترک می‌رسند که می‌توان در نمودار به‌وضوح این پدیده را مشاهده کرد.



شکل (۴-۵) نمودار ضریب شدت تنش برحسب زمان بی‌بعد در مش بندی‌های مختلف در صفحه

منحنی‌های تغییرات زمانی دما در نوک ترک برای شبکه‌بندی‌های مختلف در شکل (۴-۶) نشان

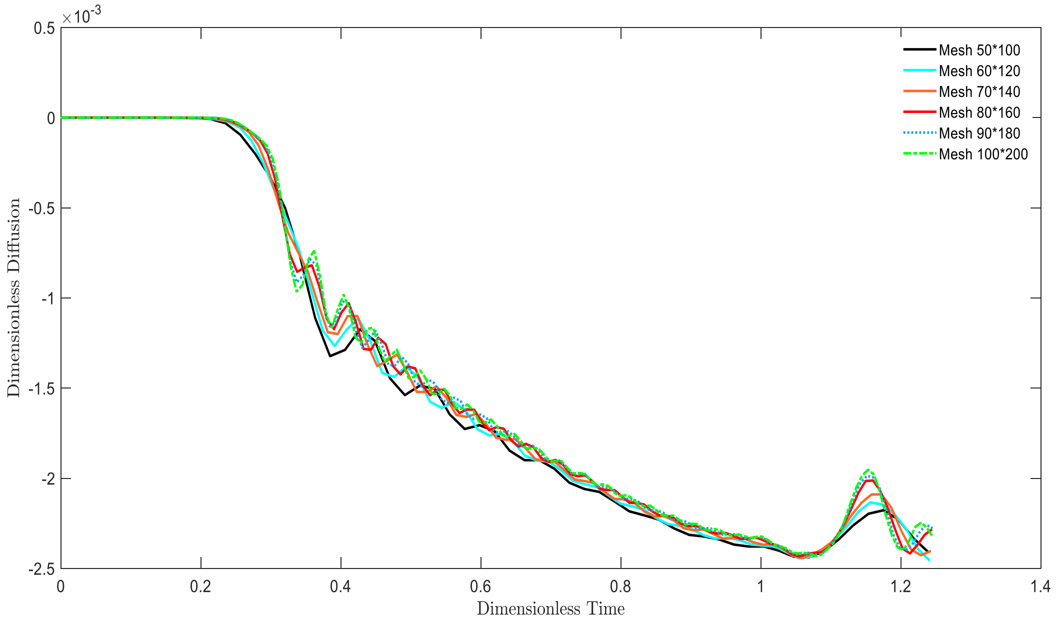
داده‌شده است. موج دما در t=۰/۲۵ در فضای بی‌بعد به نوک ترک می‌رسد که این امر موجب افت شدید دما در نوک ترک می‌شود. نوسانات اضافی در منحنی تغییرات دما به علت استفاده از روش ضمنی نیومارک واردشده است. موج تنش به همراه موج غلظت در زمان t=۰/۳ به نوک ترک می‌رسد و موجب کاهش دوباره دما در نوک ترک می‌شود. تطابق منحنی‌ها با تعداد المان‌های مختلف، نشانگر این است که نتایج به‌دست‌آمده مستقل از تعداد المان است. با رسیدن موج دما به نوک ترک در زمان بی‌بعد t=۰/۲۵ دمای نوک ترک کاهش پیداکرده است. رسیدن موج غلظت در زمانt=۰/۳ باعث افزایش دمای نوک ترک می‌شود. رسیدن موج تنش به نوک ترک در زمان t=۰/۳۷۵ باعث کاهش دمای نوک ترک شده و دما با نوسان جزئی در همین مقدار باقی می‌ماند تا اینکه امواج از لبه سمت راست دوباره به نوک ترک برسند.



شکل (۴-۶)دمای نوک ترک در مش بندی‌های مختلف برحسب زمان بی‌بعد

منحنی‌های تغییرات زمانی انتشار در نوک ترک برای شبکه‌بندی‌های مختلف شکل (۴-۷) نشان داده‌شده است. موج دما در t=۰/۲۵ در فضای بی‌بعد به نوک ترک می‌رسد که این امر موجب افت شدید غلظت در نوک ترک می‌شود. نوسانات اضافی در منحنی تغییرات دما به علت استفاده از روش ضمنی نیومارک واردشده است. موج غلظت در زمان t=۰/۳ به نوک ترک می‌رسد و موجب کاهش

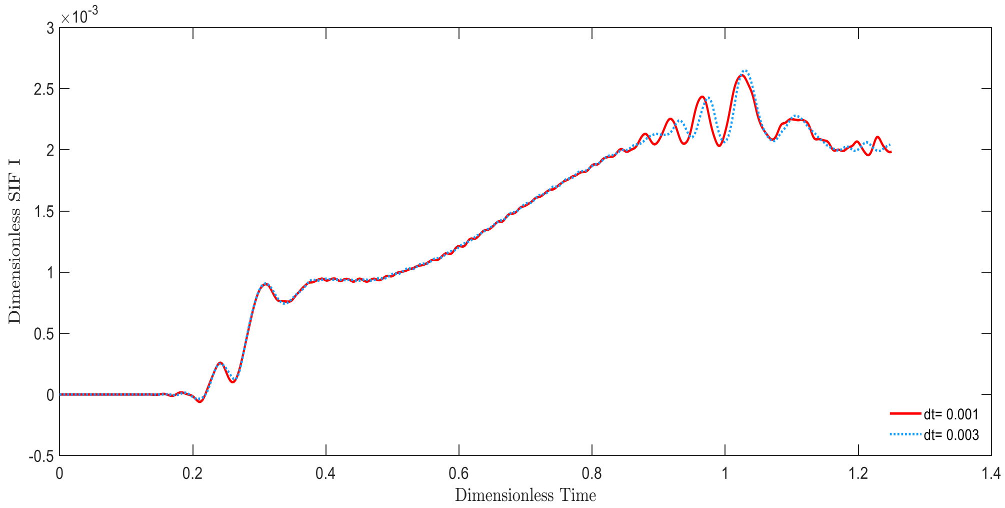
دوباره غلظت در نوک ترک می‌شود. با رسیدن موج تنش به نوک ترک در زمان بی‌بعد t=۰/۳۷۵ غلظت در نوک ترک کاهش‌یافته است.



شکل (۴-۷) انتشار در نوک ترک برای مش بندی‌های مختلف برحسب زمان بی بعد

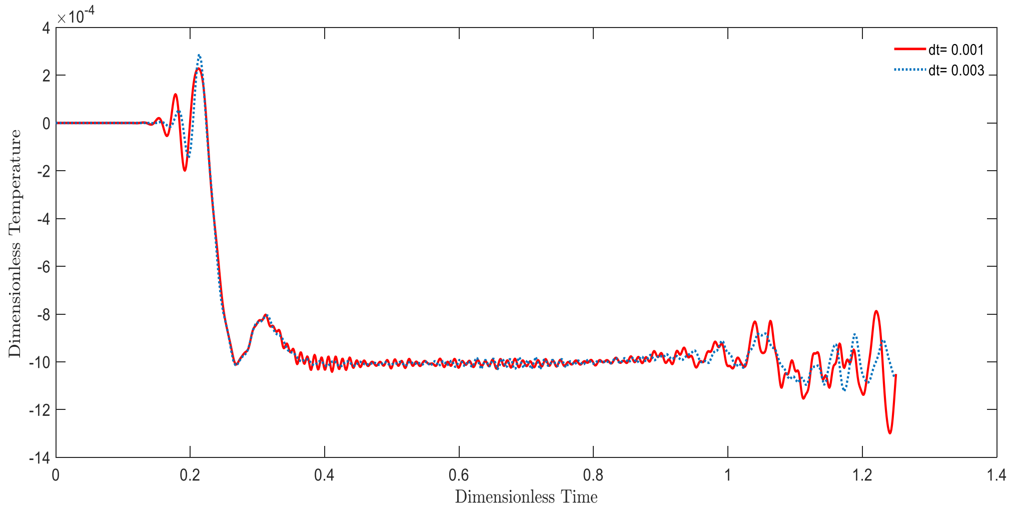
تأثیر گام زمانی بر ضریب شدت تنش مود اول برای گام‌های زمانی۰/۰۰۱ و ۰/۰۰۳ در شکل(۴-۸)بررسی شده است. برای مدل‌سازی هندسه صفحه از شبکه متشکل از ۸۰×۱۶۰، المان استفاده‌شده است، نتایج به‌دست‌آمده تقریباً یکسان است. شعاع انتگرال‌گیری برای انتگرال ناحیه‌ای معادل r/a=۰/۳ انتخاب شده است. با توجه به سرعت‌های بی‌بعد اعمالی، سرعت موج تنش یک(۱= C_P)، سرعت موج دما ۱/۲(۱/۲=C_T) و سرعت موج غلظت ۰/۸ (۰/۸=C_C) در نظر گرفته‌شده است. با رسیدن موج دما در زمان t=۰/۲۵ به نوک ترک، ضریب شدت تنش مود اول شروع به افزایش می‌کند. نوسانات اضافی در نمودار تغییرات ضریب شدت تنش مود اول به دلیل استفاده از روش ضمنی نیومارک رخداده است. با رسیدن موج غلظت در زمان t=۰/۳ به نوک ترک ضریب شدت تنش مود اول افزایش پیداکرده و در زمان t=۰/۳۷۵ با تأثیرات موج تنش ضریب شدت تنش مود اول افزایش پیداکرده و به حالت نوسانات پیوسته به افزایش خود تا انتهای ادامه می‌دهد. این نوسانات افزایش

ضریب شدت تنش تا رسیدن بازتاب موج تنش، غلظت و دما به نوک ادامه پیدا می‌کند.



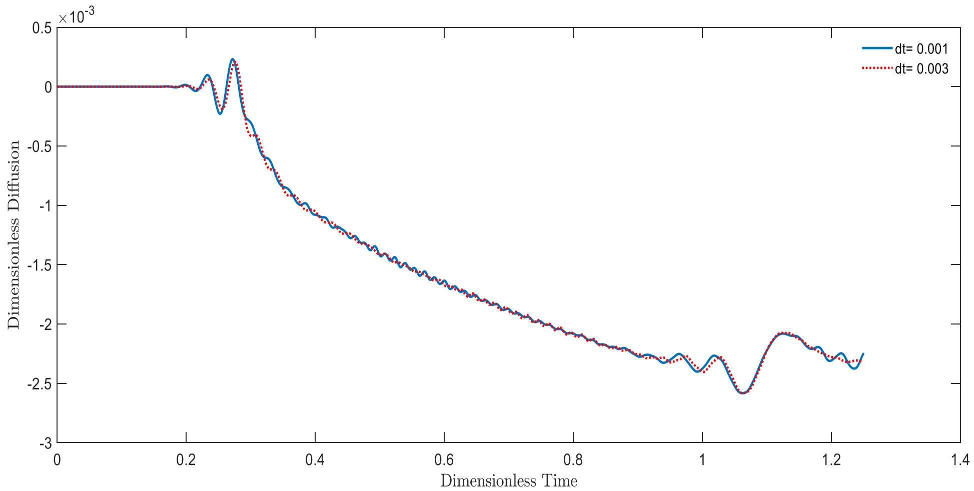
شکل (۴-۸) تأثیر گام زمانی بر ضریب شدت تنش مود اول

تغییرات دمای نوک ترک برحسب زمان برای گام‌های زمانی ۰/۰۰۱ و ۰/۰۰۳ در شکل (۴-۹) نشان داده‌شده‌اند. با رسیدن موج دما به نوک ترک در زمان t=۰/۲۵ دمای نوک ترک افزایش‌یافته است و با رسیدن موج غلظت در زمان t=۰/۳ دما در نوک ترک دوباره افزایش‌یافته تا اینکه موج تنش در زمان t=۰/۳۷۵ به نوک ترک می‌رسد و با تأثیرات آن دمای نوک ترک کاهش چشمگیری پیداکرده و به حالت نوسانات پیوسته خود تا انتهای صفحه ادامه می‌دهد. این نوسانات تا رسیدن بازتاب موج تنش، غلظت و دما به نوک ادامه پیدا می‌کند.



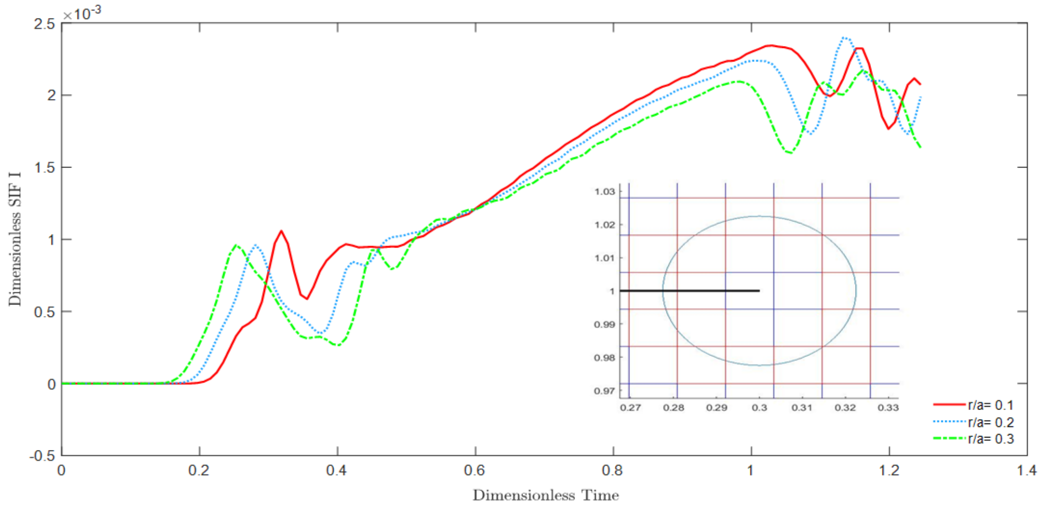
شکل (۴-۹) دمای نوک ترک در صفحه دارای ترک برحسب زمان برای گام‌های زمانی مختلف

در شکل (۴-۱۰) نیز تغییرات انتشار در نوک ترک برحسب زمان برای گام‌های زمانی ۰/۰۰۱ و ۰/۰۰۳ به تصویر کشیده شده است. با رسیدن موج دما به نوک ترک در زمان t=۰/۲۵ غلظت نوک ترک کاهش می‌یابد. با رسیدن موج غلظت در زمان t=۰/۳ غلظت نوک ترک افزایش‌یافته تا موج تنش در زمان t=۰/۳۷۵ به نوک ترک رسیده و با تأثیرات آن غلظت نوک ترک کاهش می‌یابد. این روند کاهشی همراه با نوسانات کم دامنه تا رسیدن بازتاب موج تنش، غلظت و دما به نوک ادامه پیدا می‌کند.



شکل (۴-۱۰) تغییرات انتشار نوک ترک برحسب زمان برای دو گام زمانی متفاوت

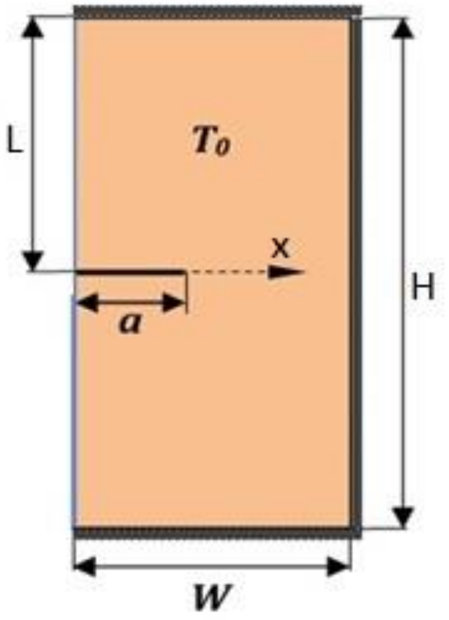
همان‌طور که در شکل (۴-۱۱) نشان داده‌شده است به‌منظور بررسی اثر اندازه ناحیه انتگرال‌گیری در مقادیر ضریب شدت تنش، این مثال با سه ناحیه انتگرال‌گیری با مساحت‌های متفاوت تحلیل‌شده است المان‌هایی که توسط یک دایره به مرکز نوک ترک و شعاع‌های نسبی مختلف (با توجه به طول ترک) محصورشده‌اند، به‌عنوان ناحیه انتگرال‌گیری در نظر گرفته‌شده‌اند. سه شعاع نسبی (r/a)، ۰/۱ تا ۰/۳ با گام ۰/۱، انتخاب‌شده‌اند.



شکل (۴-۱۱) تغییرات ضریب شدت تنش برحسب زمان برای ناحیه‌های انتگرال‌گیری متفاوت در نوک ترک

۴-۴- صفحه دارای ترک تحت بارگذاری نامتقارن حرارتی – انتشار

در مثال قبل به علت بارگذاری متقارن نسبت به ترک، تنها ضریب شدت تنش مود اول استخراج گردید. در این مثال به علت بارگذاری نامتقارن نسبت به ترک، ضریب شدت تنش مود اول و دوم خواهیم داشت که با استفاده از روش انتگرال برهمکنش در چارچوب روش المان محدود توسعه‌یافته محاسبه گردیده‌اند. صفحه به‌صورت محدود و همگن است و بدون هیچ قید مکانیکی در ابتدا در دمای مرجع یکنواخت (بدون تنش) $T_0 = ۲۹۳K$ قرار دارد. نیمه وجه چپ این صفحه تحت تأثیر یک شوک حرارتی به مقدار ۰/۰۰۱- بی‌بعد و شوک غلظتی به مقدار ۰/۰۰۵- بی‌بعد قرار دارد. ابعاد صفحه و طول ترک همانند مثال قبل در نظر گرفته‌شده‌اند که در شکل(۴-۱۲) هم نشان داده‌شده است.

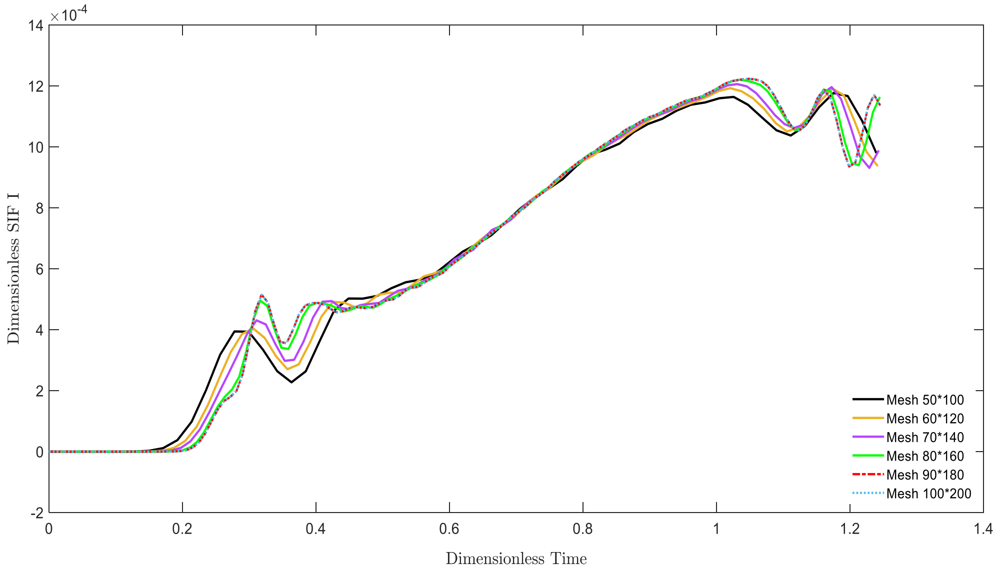


شکل (۴-۱۲) صفحه مستطیلی شامل ترک عمود بر لبه تحت شوک حرارتی و انتشار

در تحلیل المان محدود از شبکه‌بندی‌های منظم با المان‌های مستطیلی چهار گره‌ای استفاده گردیده و همچنین گام زمانیΔt=۰/۰۳ در نظر گرفته‌شده است، مطابق نتایج به‌دست‌آمده که در شکل (۴-۱۳) هم مشاهده می‌شود با ریزتر شدن مش نتایج همگرا می‌شوند. برای مدل‌سازی هندسه نیم‌صفحه از شبکه‌بندی مختلف متشکل از۵۰×۱۰۰، ۶۰×۱۲۰، ۷۰×۱۴۰، ۸۰×۱۶۰، ۹۰×۱۸۰ و ۱۰۰×۲۰۰ المان استفاده‌شده است، نتایج به‌دست‌آمده تقریباً یکسان است. شعاع نسبی ناحیه انتگرال‌گیری برای انتگرال ناحیه‌ای معادلr/a=۰/۳ قرار داده‌شده است. با توجه به سرعت‌های بی‌بعد اعمالی، سرعت موج تنش یک(C_P =۱)، سرعت موج دما ۱/۲(C_T=۱/۲) و سرعت موج غلظت ۰/۸ (C_C=۰/۸) در نظر گرفته‌شده است.

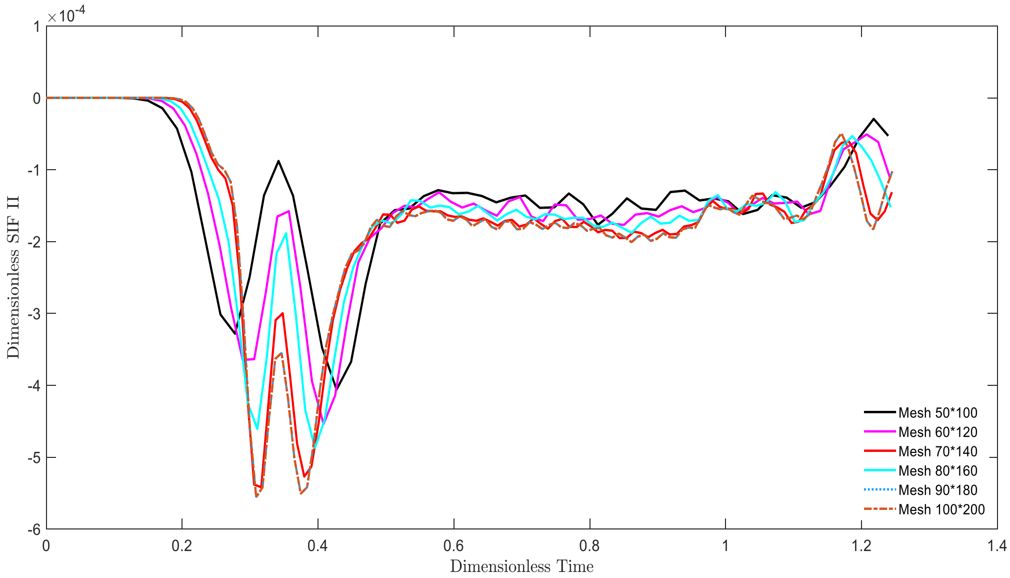
با توجه به سرعت‌های اعمالی زمان رسیدن موج تنش به نوک ترک همان‌طور که در شکل(۴-۱۳) هم نشان داده‌شده است در زمان۰/۳۷۵ ، زمان رسیدن موج غلظت به نوک ترک۰/۳ و زمان رسیدن موج دما به نوک ترک۰/۲۵ است .

بعد از عبور موج‌های تنش، دما و غلظت از نوک ترک همان‌طور که در شکل نیز مشاهده می‌شود، ضریب شدت تنش روند افزایشی پیدا می‌کند تا اینکه موج‌ها کل صفحه را پیموده و پس از برخورد به لبه سمت راست منعکس‌شده و دوباره به نوک ترک می‌رسند که می‌توان در نمودار زیر نیز به‌وضوح این پدیده را مشاهده کرد.



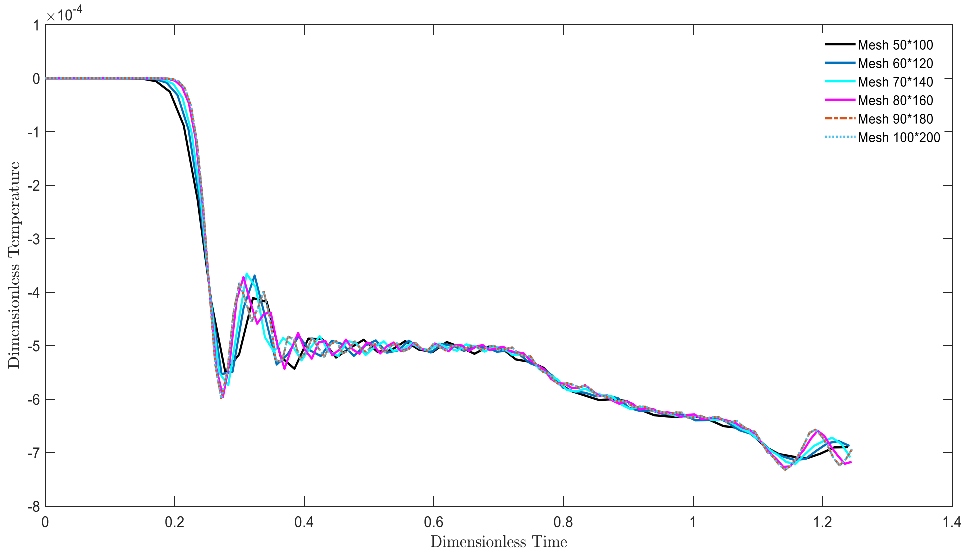
شکل (۴-۱۳) نمودار ضریب شدت تنش مود اول برحسب زمان برای شبکه‌بندی‌های مختلف

تغییرات زمانی ضریب شدت تنش مود دوم با بررسی اثر تعداد المان‌ها در شکل (۴-۱۴) بررسی‌شده است. با رسیدن موج غلظت در زمان t=۰/۲ به نوک ترک، ضریب شدت تنش مود دوم شروع به کاهش می‌کند. نوسانات اضافی در نمودار تغییرات ضریب شدت تنش مود دوم به دلیل استفاده از روش ضمنی نیومارک رخداده است. با رسیدن موج تنش در زمان t=۰/۳ ضریب شدت تنش مود دوم افزایش‌یافته تا با رسیدن موج غلظت در زمانt=۰/۳۵ مجدد کاهش پیداکرده و در زمان t=۰/۴ با تأثیرات موج تنش دوباره افزایش‌یافته و در مقدار حدود ۱/۵ نوسان می‌کند. این نوسانات تا رسیدن بازتاب موج تنش و دما به نوک ادامه پیدا می‌کند با رسیدن موج تنش و دما ضریب شدت تنش شروع به کاهش کرده و سپس افزایش می‌یابد و بعد از عبور موج‌ها دوباره به نوسانات پایدار خود می‌رسد.



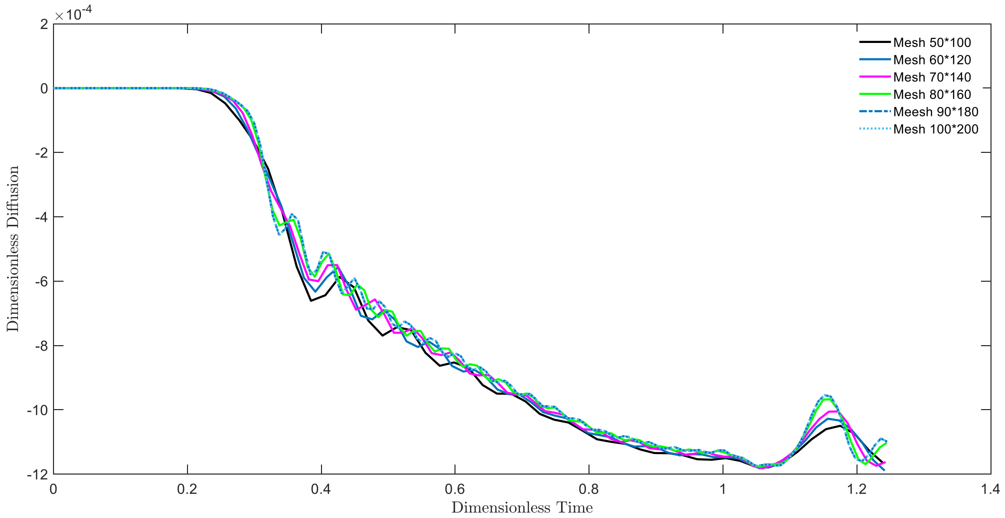
شکل (۴-۱۴) منحنی‌های ضریب شدت تنش مود دوم برحسب زمان برای شبکه‌بندی‌های مختلف

منحنی‌های تغییرات زمانی دما در نوک ترک برای شبکه‌بندی‌های متفاوت در شکل (۴-۱۵) نشان داده‌شده است. با رسیدن موج دما به نوک ترک در زمان t=۰/۲۵ دمای نوک ترک به‌طور ناگهانی کاهش‌یافته است و ممکن است از مقدار شوک دمایی اعمالی نیز تجاوز کند. با رسیدن موج غلظت در زمان t=۰/۳ دما در نوک ترک افزایش‌یافته تا اینکه موج تنش در زمان t=۰/۳۷۵ به نوک ترک می‌رسد و با تأثیرات موج تنش دمای نوک ترک کاهش پیداکرده و به حالت نوسانات پیوسته به کاهش تدریجی خود ادامه می‌دهد. این نوسانات تا رسیدن بازتاب موج تنش، غلظت و دما به نوک ادامه پیدا می‌کند.



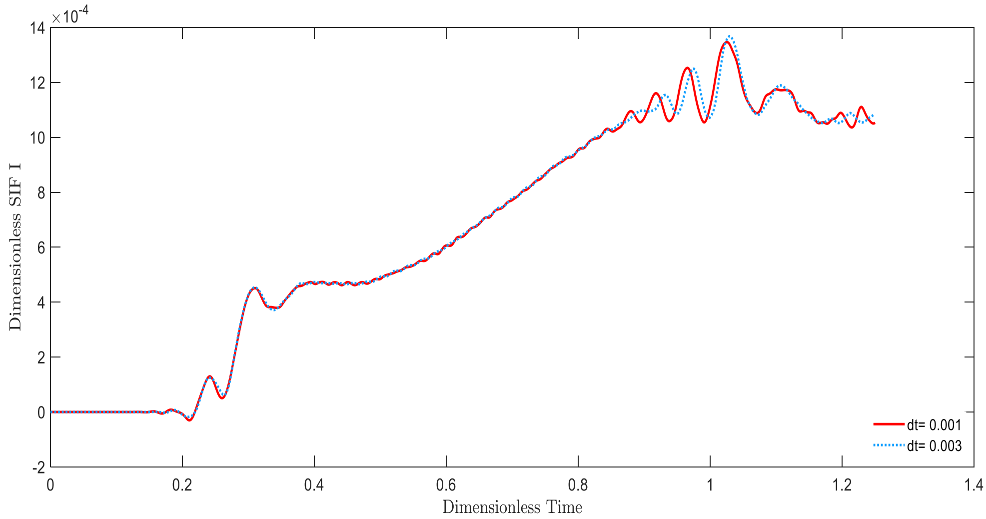
شکل (۴-۱۵) دمای نوک ترک برحسب زمان برای شبکه‌بندی‌های مختلف

منحنی‌های تغییرات زمانی انتشار در نوک ترک برای مقادیر مختلف زمان در شکل (۴-۱۶) نشان داده‌شده است. با رسیدن موج دما به نوک ترک در زمان t=۰/۲۵ دمای نوک ترک به‌طور ناگهانی کاهش‌یافته و ممکن است از مقدار شوک دمایی اعمالی نیز تجاوز کند. با رسیدن موج غلظت در زمان t=۰/۳ غلظت نوک ترک کاهش‌یافته تا موج تنش در زمان t=۰/۳۷۵ به نوک ترک رسیده با تأثیرات موج تنش غلظت نوک ترک دوباره کاهش پیداکرده و با کاهش تا انتهای صفحه باحالت نوسانات پیوسته خود ادامه می‌دهد. این نوسانات تا رسیدن بازتاب موج تنش، غلظت و دما به نوک ادامه پیدا می‌کند.



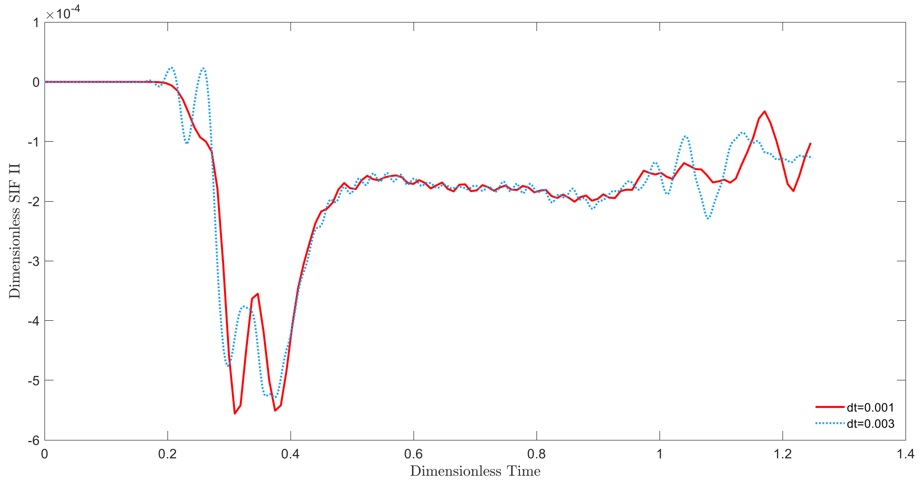
شکل (۴-۱۶) انتشار نوک ترک در مش بندی‌های مختلف

تغییرات زمان ضریب شدت تنش مود اول برای گام‌های زمانی۰/۰۰۱ و ۰/۰۰۳ انجام‌شده که این نتایج در شکل (۴-۱۷) نشان داده‌شده‌اند. با رسیدن موج غلظت در زمان t=۰/۲ به نوک ترک، ضریب شدت تنش مود اول شروع به کاهش می‌کند. نوسانات اضافی در نمودار تغییرات ضریب شدت تنش مود دوم به دلیل استفاده از روش ضمنی نیومارک رخ‌داده است. با رسیدن موج دما به نوک ترک در زمان t=۰/۲۵ ضریب شدت تنش مود اول افزایش‌یافته است. با رسیدن موج غلظت در زمانt=۰/۳ به نوک ترک ضریب شدت تنش مود اول افزایش پیداکرده و در زمان t=۰/۳۷۵ با تأثیرات موج تنش ضریب شدت تنش مود اول افزایش پیداکرده و به حالت نوسانات پیوسته به افزایش خود تا انتهای صفحه ادامه می‌دهد. این نوسانات تا رسیدن بازتاب موج تنش، غلظت و دما به نوک ادامه پیدا می‌کند.



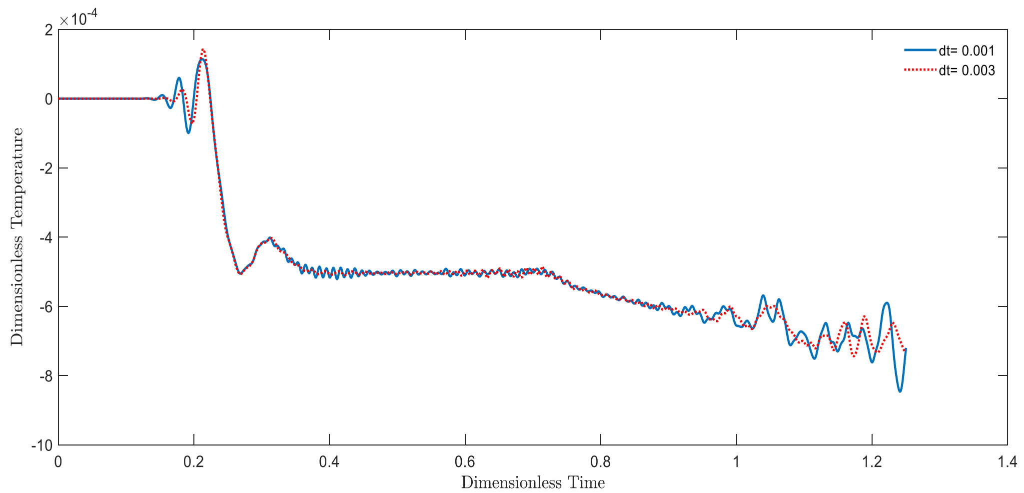
شکل (۴-۱۷) تأثیر گام زمانی بر ضریب شدت تنش مود اول

تغییرات زمان ضریب شدت تنش مود دوم برای گام‌های زمانی ۰/۰۰۱ و ۰/۰۰۳ انجام‌شده که این نتایج در شکل (۴-۱۸) نشان داده‌شده‌اند. با رسیدن موج دما در زمان t=۰/۲۵ به نوک ترک، ضریب شدت تنش مود دوم شروع به کاهش می‌کند. با رسیدن موج غلظت در زمان t=۰/۳ ضریب شدت تنش مود دوم افزایش‌یافته تا با رسیدن موج تنش در زمان t=۰/۳۷۵ مجدد کاهش پیداکرده و در زمان t=۰/۴ افزایش پیداکرده و به حالت نوسانات پیوسته خود تا انتهای صفحه ادامه می‌دهد. بعد از سپری شدن موج‌ها دوباره به نوسانات پایدار خود می‌رسد. نوسانات اضافی در نمودار تغییرات ضریب شدت تنش مود دوم به دلیل استفاده از روش ضمنی نیومارک رخ‌داده است.



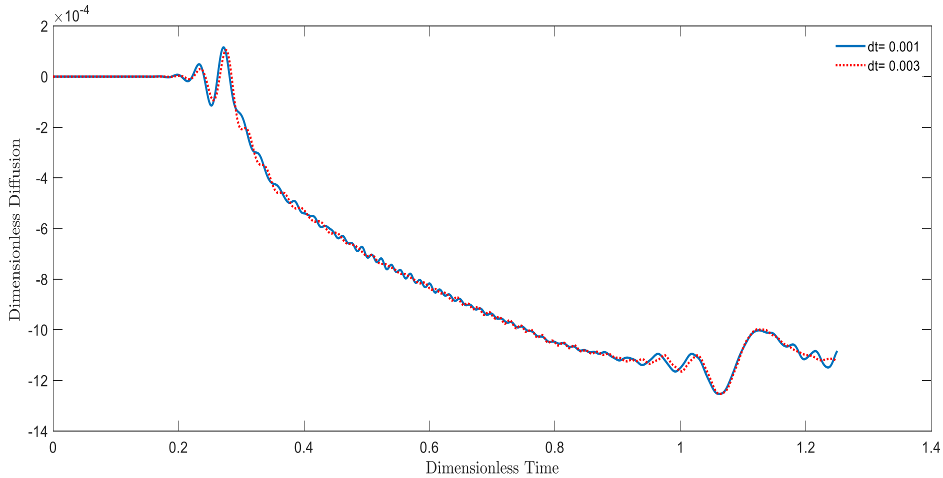
شکل (۴-۱۸) تأثیر گام زمانی بر ضریب شدت تنش مود دوم

تغییرات دمای نوک ترک برحسب زمان برای گام‌های زمانی۰/۰۰۱ و ۰/۰۰۳ انجام‌شده که این نتایج در شکل (۴-۱۹) نشان داده‌شده‌اند. با رسیدن موج دما به نوک ترک در زمان t=۰/۲۵ دمای نوک ترک افزایش‌یافته است و با رسیدن موج غلظت در زمان t=۰/۳ دما در نوک ترک کاهش‌یافته تا موج تنش در زمان t=۰/۳۷۵ به نوک ترک رسیده است با تأثیرات موج تنش، دمای نوک ترک افزایش پیداکرده و به حالت نوسانات پیوسته با کاهش تدریجی به روند خود تا انتهای صفحه ادامه می‌دهد. این نوسانات تا رسیدن بازتاب موج تنش، غلظت و دما به نوک ادامه پیدا می‌کند.



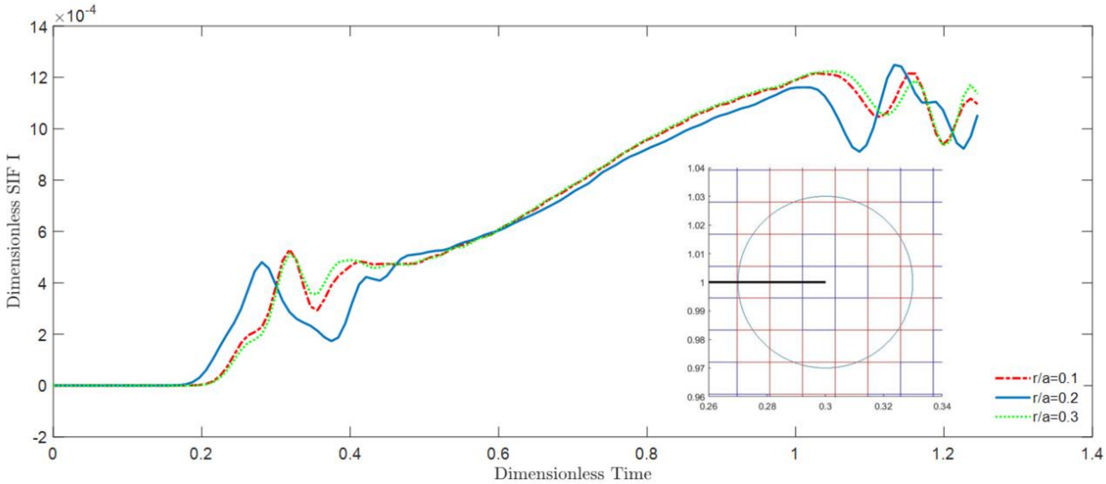
شکل (۴-۱۹) دمای نوک ترک در صفحه دارای ترک در تغییرات زمانی مختلف

در شکل (۴-۲۰) نیز تغییرات انتشار در نوک ترک برحسب زمان برای گام‌های زمانی ۰/۰۰۱ و ۰/۰۰۳ انجام و باهم مقایسه شده‌اند. با رسیدن موج دما به نوک ترک در زمان t=۰/۲۵ دمای نوک ترک افزایش‌یافته است. با رسیدن موج غلظت در زمان t=۰/۳ غلظت نوک ترک کاهش‌یافته تا موج تنش در زمان t=۰/۳۷۵ به نوک ترک رسیده با تأثیرات موج تنش غلظت نوک ترک دوباره کاهش پیداکرده و با کاهش تا انتهای صفحه باحالت نوسانات پیوسته خود ادامه می‌دهد. این نوسانات تا رسیدن بازتاب موج تنش، غلظت و دما به نوک ادامه پیدا می‌کند.



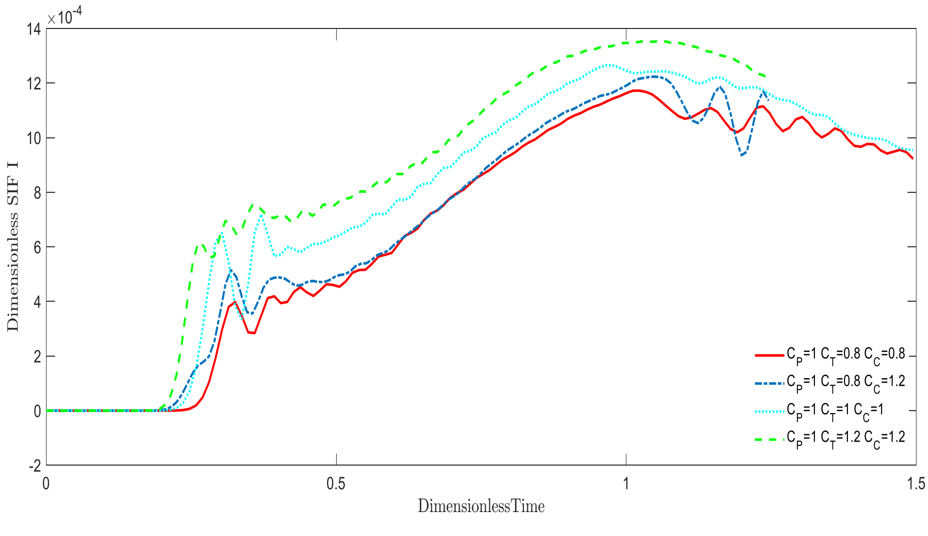
شکل (۴-۲۰) تغییرات انتشار در زمان‌های مختلف در نوک ترک در صفحه

همان‌طور که در شکل (۴-۲۱) نتایج نشان داده‌شده است به‌منظور بررسی اثر اندازه ناحیه انتگرال‌گیری در مقادیر ضریب شدت تنش مود اول، این مثال با سه ناحیه انتگرال‌گیری با مساحت‌های متفاوت تحلیل‌شده است المان‌هایی که توسط یک دایره به مرکز نوک ترک و شعاع‌های نسبی مختلف (با توجه به طول ترک) محصورشده‌اند، به‌عنوان ناحیه انتگرال‌گیری در نظر گرفته‌شده‌اند. سه شعاع نسبی (r/a)، ۰/۱ تا ۰/۳ با گام ۰/۱، انتخاب‌شده‌اند.



شکل (۴-۲۱) تأثیر اندازه ناحیه انتگرال‌گیری بر ضریب شدت تنش مود اول

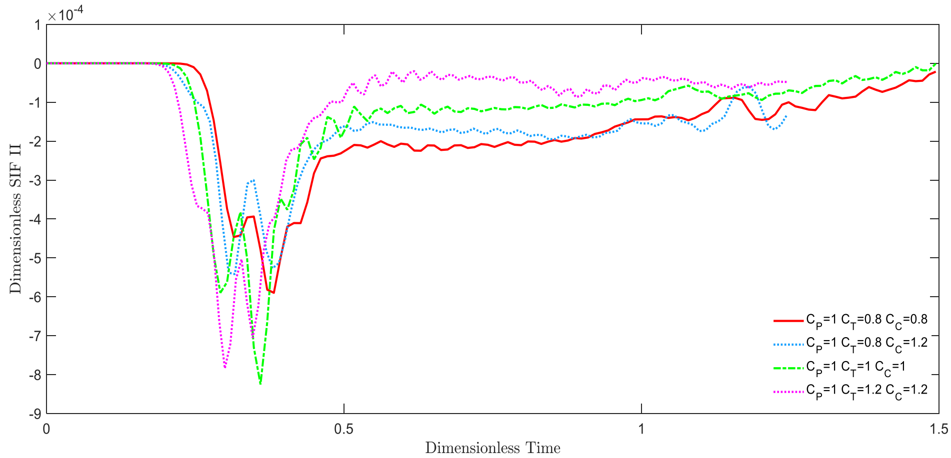
منحنی های ضریب شدت تنش مود اول برای سرعت‌های مختلف در شکل (۴-۲۲) نشان داده‌شده است. مشاهده می‌شود برای حالتی که سرعت موج تنش و سرعت موج دما یکسان و بیشتر از سرعت موج غلظت است افزایش ضریب شدت تنش سریع‌تر و بیشتر از حالت‌های دیگر است.



شکل (۴-۲۲) ضریب شدت تنش مود اول برحسب زمان برای سرعت‌های مختلف انتشار و دما

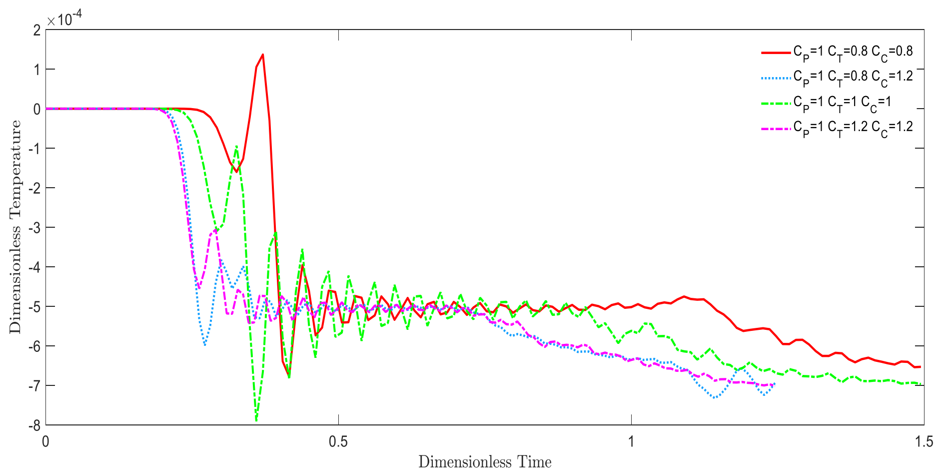
ضریب شدت تنش مود دوم به‌دست‌آمده در سرعت‌های مختلف که در شکل (۴-۲۳) نشان داده‌شده است. سرعت موج دما در زمان t=۰/۲۵ به نوک ترک می‌رسد که باعث کاهش ضریب شدت تنش مود دوم شده است. با رسیدن موج غلظت در زمان t=۰/۳ به نوک ترک افزایش ضریب شدت تنش شده است. با رسیدن سرعت موج تنش در زمان t=۰/۳۷۵ به نوک ترک باعث افزایش ضریب

شدت تنش مود دوم گردیده است. نتیجه‌ای که از سرعت‌های مختلف می‌توان گرفت این است که برای حالتی که سرعت موج تنش و سرعت موج دما یکسان و بیشتر از سرعت موج غلظت است افزایش ضریب شدت تنش مود دوم در ابتدا کاهش و با رسیدن سرعت موج تنش ضریب شدت تنش مود دوم افزایش‌یافته است .



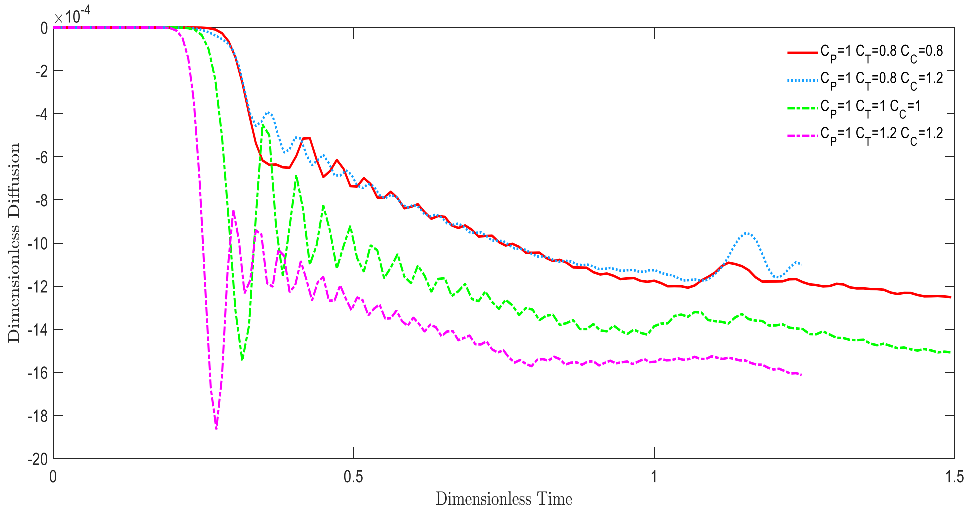
شکل (۴-۲۳) ضریب شدت تنش مود دوم برحسب زمان برای سرعت‌های مختلف انتشار و دما

تغییرات دمای نوک ترک برحسب زمان برای سرعت‌های مختلف تنش، دما و غلظت در شکل (۴-۲۴) نشان داده‌شده است. مشاهده می‌شود برای حالتی که سرعت موج تنش و سرعت موج غلظت یکسان و بیشتر از سرعت موج دما است کاهش دما سریع‌تر و بیشتر از حالت‌های دیگر است.



شکل (۴-۲۴) دمای نوک ترک برحسب زمان برای سرعت‌های مختلف دما و انتشار

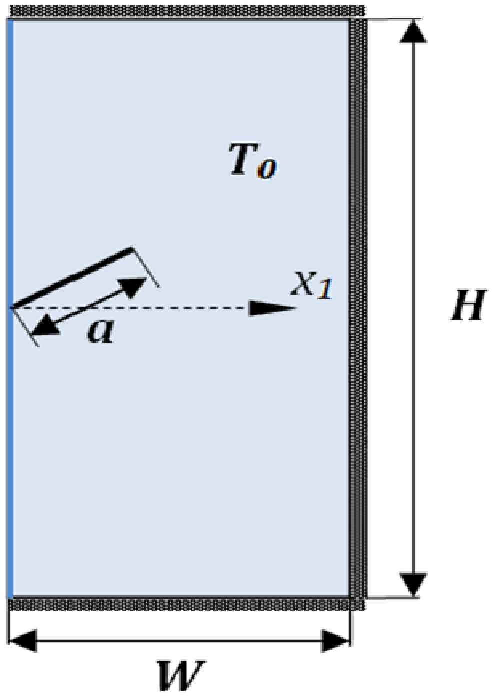
انتشار در نوک ترک در سرعت‌های مختلف که در شکل (۴-۲۵) نشان داده‌شده است. نتیجه‌ای که از سرعت‌های مختلف می‌توان گرفت این است که برای حالتی که سرعت موج تنش و سرعت موج دما یکسان و بیشتر از سرعت موج غلظت است. کاهش انتشار سریع‌تر و بیشتر از حالت‌های دیگر است.



شکل (۴-۲۵) انتشار در نوک ترک برحسب زمان برای سرعت‌های مختلف دما و انتشار

۴-۵- ترک مایل در معرض شوک دمایی و انتشار

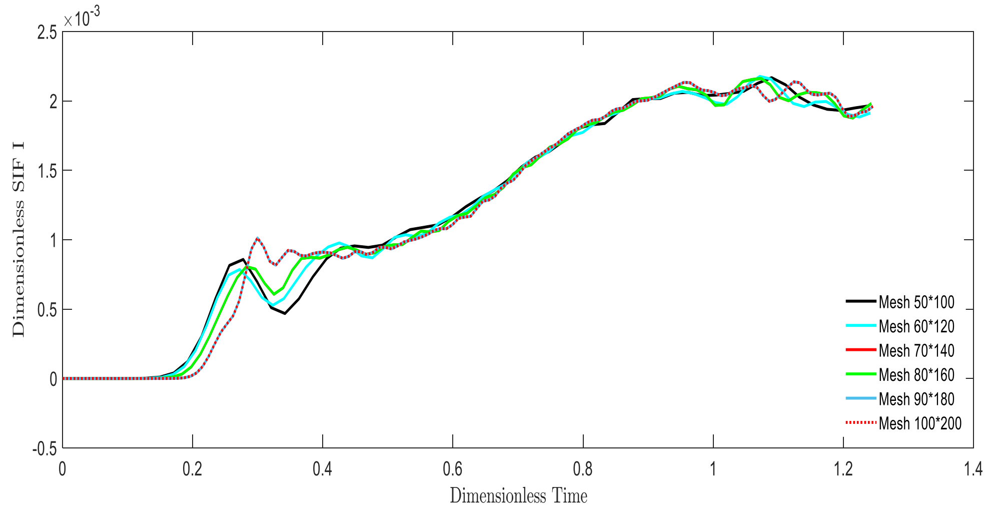
در این مثال مطابق شکل (۴-۲۶) یک صفحه دارای ترک مایل در معرض شوک دمایی و انتشار با ویژگی‌های هندسی و خواص مکانیکی مثال اول در نظر گرفته‌شده است. این صفحه حاوی یک ترک لبه‌ای مایل با زاویه ۲۰ درجه نسبت به محور x و طول a=۰/۳ در فضای بی‌بعد است. در این مثال به علت بارگذاری نامتقارن نسبت به ترک، ضریب شدت تنش مود اول و دوم خواهیم داشت که با استفاده از روش انتگرال برهمکنش در چارچوب روش المان محدود توسعه‌یافته محاسبه گردیده‌اند. صفحه به‌صورت محدود و همگن است و بدون هیچ قید مکانیکی در ابتدا در دمای مرجع یکنواخت (بدون تنش) T_0 = ۲۹۳K قرار دارد. نیمه وجه چپ این صفحه تحت تأثیر یک شوک حرارتی به مقدار ۰/۰۰۱- بی‌بعد و شوک غلظتی به مقدار ۰/۰۰۵- بی‌بعد قرار دارد. شعاع نسبی ناحیه انتگرال‌گیری برای انتگرال ناحیه‌ای معادل r/a=۰/۳ قرار داده‌شده است.



شکل (۴-۲۶) هندسه و بارگذاری یک صفحه دارای ترک لبه‌ای مایل تحت بارگذاری دما و انتشار

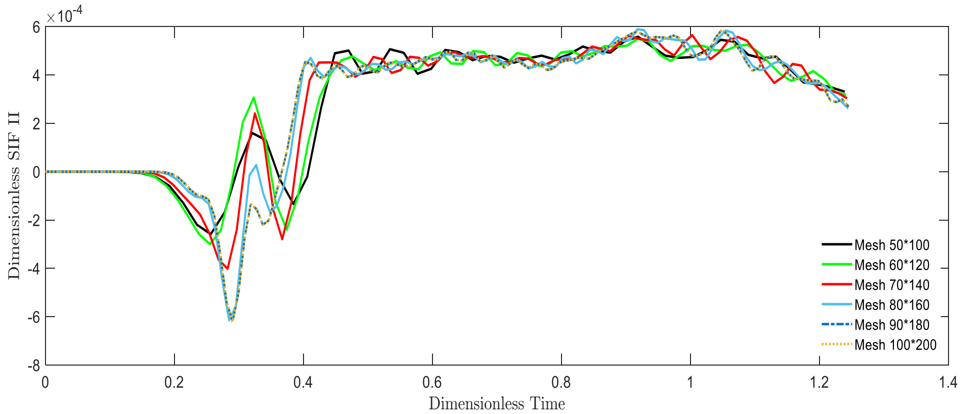
در تحلیل المان محدود از شبکه مش بندی‌های منظم با المان‌های مستطیلی چهار گره‌ای استفاده گردیده و همچنین گام زمانی Δt=۰/۰۳ در نظر گرفته‌شده است، مطابق نتایج به‌دست‌آمده که در شکل (۴-۲۷) هم مشاهده می‌شود با ریزتر شدن مش نتایج همگرا می‌شوند. برای مدل‌سازی هندسه صفحه از دو شبکه‌بندی متفاوت متشکل از۵۰×۱۰۰، ۶۰×۱۲۰، ۷۰×۱۴۰، ۸۰×۱۶۰، ۹۰×۱۸۰ و ۱۰۰×۲۰۰ المان استفاده‌شده است، نتایج به‌دست‌آمده تقریباً یکسان است.

با توجه به سرعت‌های اعمالی زمان رسیدن موج دما به نوک ترک همان‌طور که در شکل(۴-۲۷) هم نشان داده‌شده است در زمان‌t=۰/۲۵ است که باعث افزایش ضریب شدت تنش شده است. رسیدن موج غلظت به نوک ترک در زمان t=۰/۳ باعث کاهش ضریب شدت تنش شده و رسیدن موج تنش به نوک ترک در زمان t=۰/۳۷۵ ضریب شدت تنش را افزایش داده و تا زمان ۱ تدریج با نوسانات و افزایش ادامه پیداکرده است .



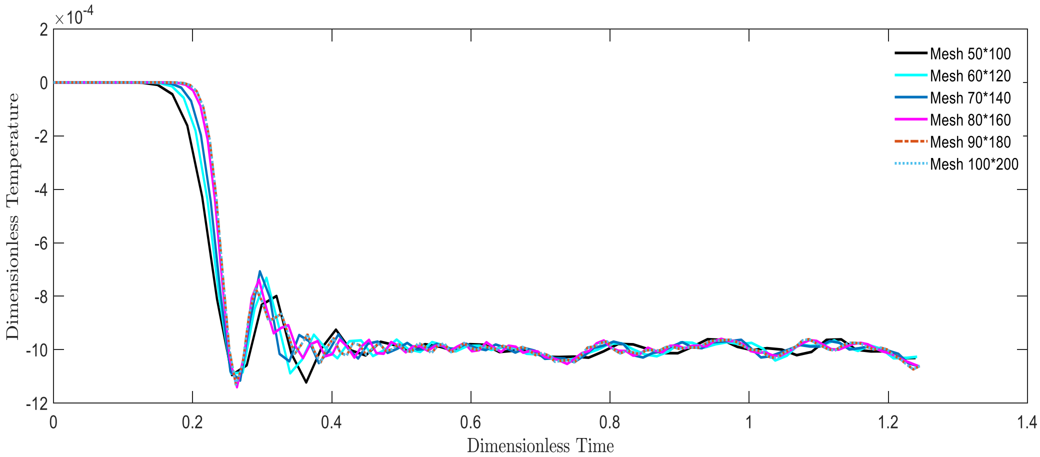
شکل (۴-۲۷) همگرایی ضریب شدت تنش مود اول برحسب زمان برای شبکه‌بندی‌های مختلف در ترک مایل

تغییرات زمانی ضریب شدت تنش مود دوم برای مدل‌سازی هندسه صفحه از دو شبکه مش بندی متشکل از۵۰×۱۰۰، ۶۰×۱۲۰، ۷۰×۱۴۰، ۸۰×۱۶۰، ۹۰×۱۸۰و ۱۰۰×۲۰۰ المان استفاده‌شده است، در شکل (۴-۲۸) نشان می‌دهد که نتایج به‌دست‌آمده تقریباً یکسان است. با رسیدن موج غلظت در زمان t=۰/۲ به نوک ترک، ضریب شدت تنش مود دوم شروع به کاهش می‌کند. نوسانات اضافی در نمودار تغییرات ضریب شدت تنش مود دوم به دلیل استفاده از روش ضمنی نیومارک رخداده است. با رسیدن موج تنش در زمان t=۰/۳ ضریب شدت تنش مود دوم کاهش‌یافته تا با رسیدن موج غلظت در زمانt=۰/۳۵ ضریب شدت تنش افزایش پیداکرده و به حالت نوسانات پیوسته خود ادامه می‌دهد. این نوسانات تا رسیدن بازتاب موج تنش و دما به نوک ادامه پیدا می‌کند با رسیدن موج تنش و دما ضریب شدت تنش شروع به کاهش و سپس افزایش رو آورده و بعد از سپری شدن موج‌ها دوباره به نوسانات پایدار خود می‌رسد.



شکل (۴-۲۸) همگرایی ضریب شدت تنش مود دوم در مش بندی‌های مختلف در ترک مایل

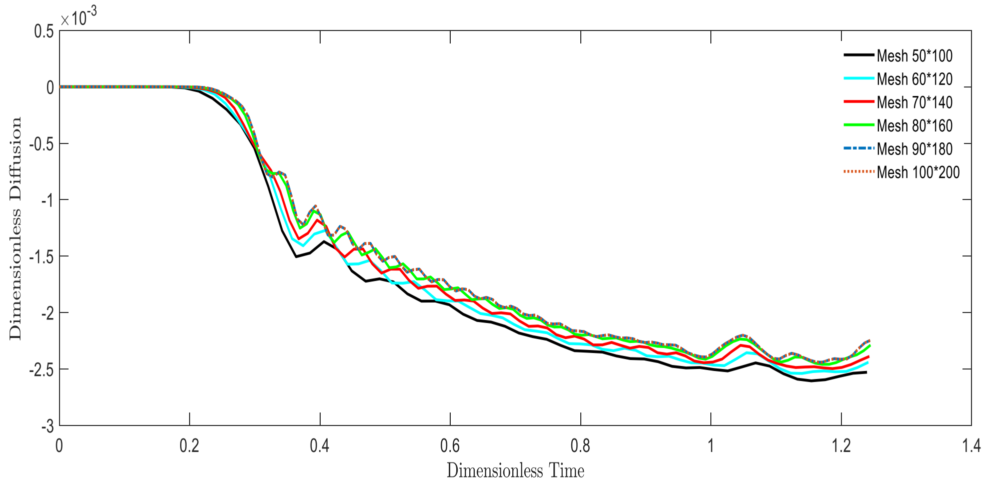
منحنی‌های تغییرات زمانی دما در نوک ترک برای مقادیر مختلف زمان در شکل (۴-۲۹) نشان داده‌شده است. با رسیدن موج دما به نوک ترک در زمان t=۰/۲۵ دمای نوک ترک به‌طور ناگهانی کاهش‌یافته است و ممکن است از مقدار شوک دمایی اعمالی نیز تجاوز کند. با رسیدن موج غلظت در زمان t=۰/۳ دما در نوک ترک افزایش‌یافته تا موج تنش در زمان t=۰/۳۷۵ به نوک ترک رسیده است با تأثیرات موج تنش دمای نوک ترک کاهش پیداکرده و به حالت نوسانات پیوسته با کاهش تدریجی به روند خود تا انتهای صفحه ادامه می‌دهد. این نوسانات تا رسیدن بازتاب موج تنش، غلظت و دما به نوک ادامه پیدا می‌کند.



شکل (۴-۲۹) دمای نوک ترک در مش بندی‌های مختلف برای ترک مایل

منحنی‌های تغییرات زمانی انتشار در نوک ترک برای مقادیر مختلف زمان در شکل (۴-۳۰) نشان

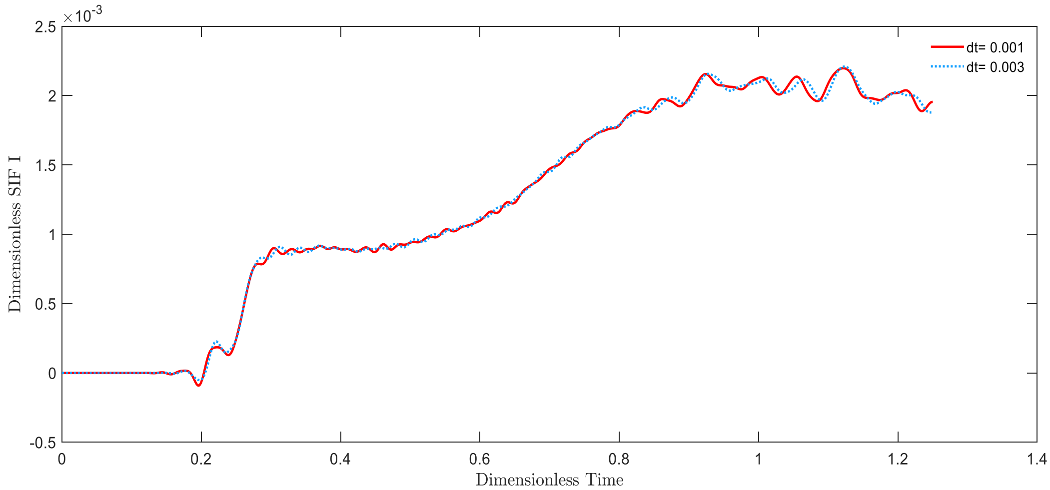
داده‌شده است. با رسیدن موج دما به نوک ترک در زمان t=۰/۲۵ دمای نوک ترک به‌طور ناگهانی کاهش‌یافته و ممکن است از مقدار شوک دمایی اعمالی نیز تجاوز کند. با رسیدن موج غلظت در زمان t=۰/۳ غلظت نوک ترک کاهش‌یافته تا موج تنش در زمان t=۰/۳۷۵ به نوک ترک رسیده با تأثیرات موج تنش غلظت نوک ترک دوباره کاهش پیداکرده و با کاهش تا انتهای صفحه باحالت نوسانات پیوسته خود ادامه می‌دهد. این نوسانات تا رسیدن بازتاب موج تنش، غلظت و دما به نوک ادامه پیدا می‌کند.



شکل (۴-۳۰) انتشار نوک ترک در مش بندی‌های مختلف در ترک مایل

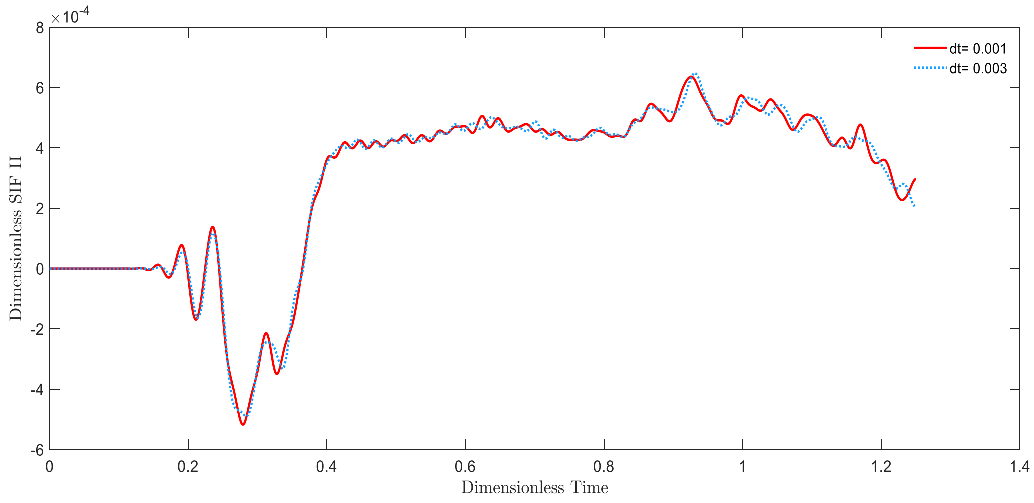
تأثیر گام زمانی بر ضریب شدت تنش مود اول، با توجه به نتایج، تغییرات زمانی ضریب شدت تنش مود اول برای گام‌های زمانی ۰/۰۰۱ و ۰/۰۰۳ بررسی گردیده است، در شکل (۴-۳۱) نشان داده‌شده است. با رسیدن موج غلظت در زمان t=۰/۲ به نوک ترک، ضریب شدت تنش مود اول شروع به کاهش می‌کند. نوسانات اضافی در نمودار تغییرات ضریب شدت تنش مود دوم به دلیل استفاده از روش ضمنی نیومارک رخ‌داده است. با رسیدن موج دما به نوک ترک در زمان t=۰/۲۵ ضریب شدت تنش مود اول افزایش‌یافته است. با رسیدن موج غلظت در زمان t=۰/۳ به نوک ترک ضریب شدت تنش مود اول افزایش پیداکرده و در زمان t=۰/۳۷۵ با تأثیرات موج تنش ضریب شدت تنش مود اول افزایش پیداکرده و به حالت نوسانات پیوسته به افزایش خود تا انتهای صفحه ادامه می‌دهد. این نوسانات تا

رسیدن بازتاب موج تنش، غلظت و دما به نوک ادامه پیدا می‌کند.



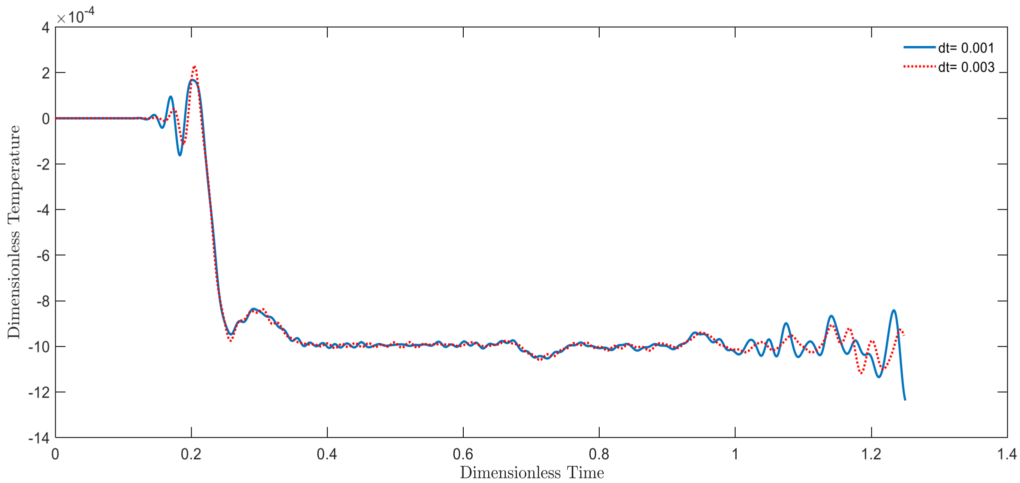
شکل (۴-۳۱) تغییرات زمانی ضریب شدت تنش مود اول

علاوه براین تأثیر گام زمانی بر ضریب شدت تنش مود دوم، با توجه به نتایج، تغییرات زمانی ضریب شدت تنش مود دوم برای گام زمان‌های ۰/۰۰۱ و ۰/۰۰۳که در شکل (۴-۳۲) نشان داده‌شده است، بررسی گردیده است. با رسیدن موج دما در زمان t=۰/۲۵ به نوک ترک، ضریب شدت تنش مود دوم شروع به کاهش می‌کند. با رسیدن موج غلظت در زمان t=۰/۳ ضریب شدت تنش مود دوم افزایش‌یافته تا با رسیدن موج تنش در زمانt=۰/۳۷۵ مجدد کاهش پیداکرده و در زمان t=۰/۴ افزایش پیداکرده و به حالت نوسانات پیوسته خود تا انتهای صفحه ادامه می‌دهد. بعد از سپری شدن موج‌ها دوباره به نوسانات پایدار خود می‌رسد. نوسانات اضافی در نمودار تغییرات ضریب شدت تنش مود دوم به دلیل استفاده از روش ضمنی نیومارک رخ‌داده است.



شکل (۴-۳۲) تغییرات زمانی ضریب شدت تنش مود دوم

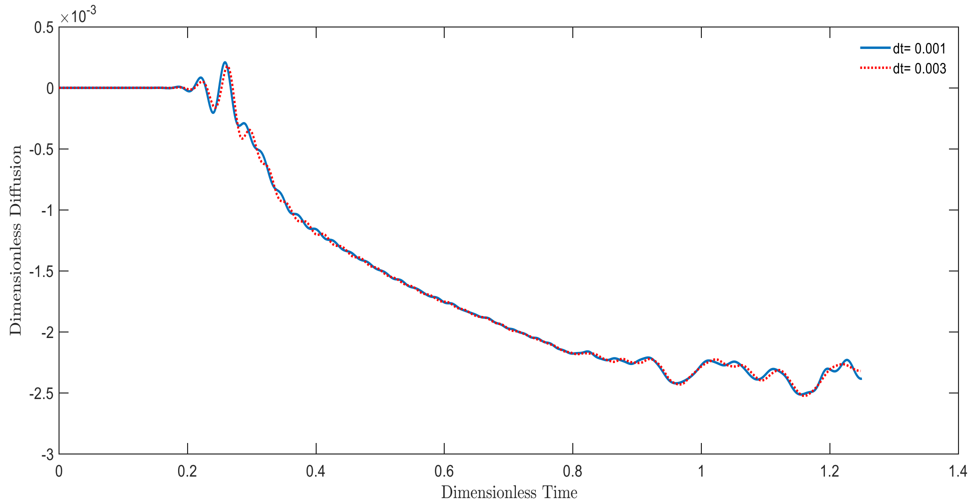
تغییرات زمانی دما در نوک ترک برای زمان‌های۰/۰۰۱ و ۰/۰۰۳ که در شکل (۴-۳۳) نشان داده‌شده است بررسی گردیده است. با رسیدن موج دما به نوک ترک در زمان t=۰/۲۵ دمای نوک ترک کاهش‌یافته است و با رسیدن موج غلظت در زمان t=۰/۳ دما در نوک ترک افزایش‌یافته تا موج تنش در زمان t=۰/۳۷۵ به نوک ترک رسیده است با تأثیرات موج تنش، دمای نوک ترک کاهش پیداکرده و به حالت نوسانات پیوسته با کاهش تدریجی به روند خود تا انتهای صفحه ادامه می‌دهد. این نوسانات تا رسیدن بازتاب موج تنش، غلظت و دما به نوک ادامه پیدا می‌کند.



شکل (۴-۳۳) دمای نوک ترک در صفحه دارای ترک مایل در تغییرات زمانی مختلف

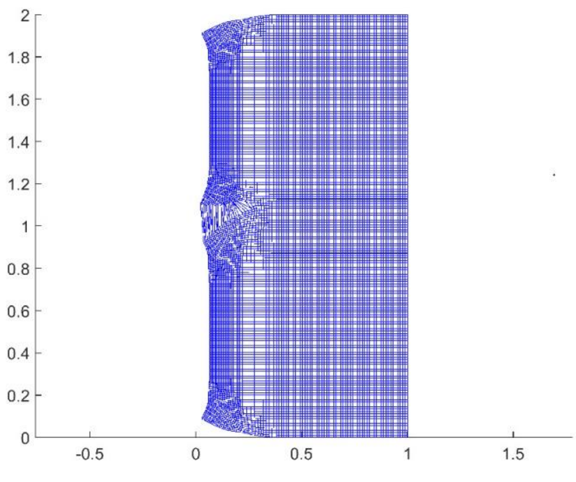
تغییرات زمانی انتشار در نوک ترک در زمان‌های ۰/۰۰۱ و ۰/۰۰۳ که در شکل (۴-۳۴) نشان

داده‌شده است بررسی گردیده است. با رسیدن موج دما به نوک ترک در زمان t=۰/۲۵ دمای نوک ترک افزایش‌یافته است. با رسیدن موج غلظت در زمان t=۰/۳ غلظت نوک ترک کاهش‌یافته تا موج تنش در زمان t=۰/۳۷۵ به نوک ترک رسیده با تأثیرات موج تنش غلظت نوک ترک دوباره کاهش پیداکرده و با کاهش تا انتهای صفحه باحالت نوسانات پیوسته خود ادامه می‌دهد. این نوسانات تا رسیدن بازتاب موج تنش، غلظت و دما به نوک ادامه پیدا می‌کند.

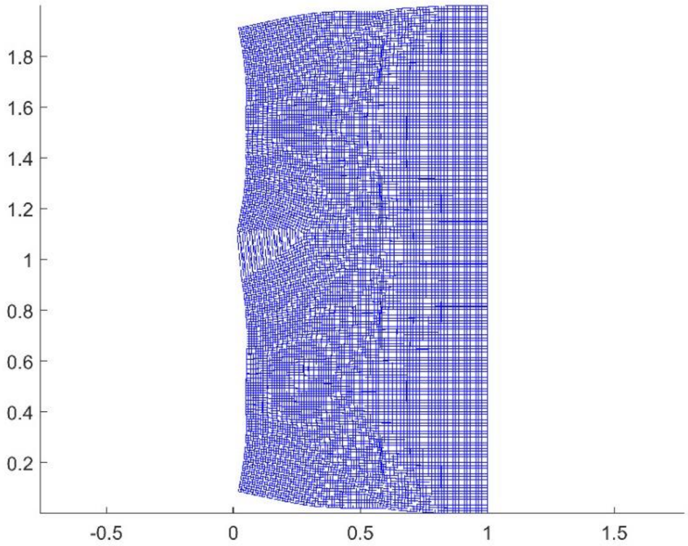


شکل (۴-۳۴) تغییرات انتشار در زمان‌های مختلف در نوک ترک در صفحه

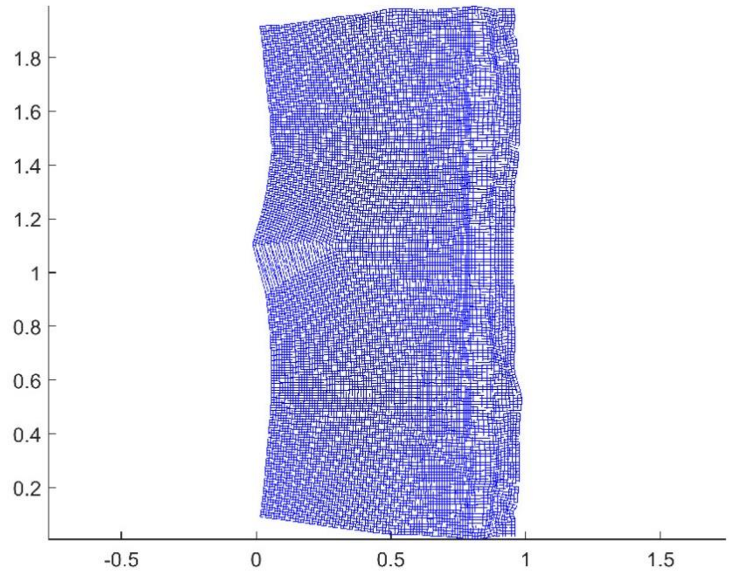
نمای تغییر شکل یافته باریکه در زمان‌های t=۰/۳ و t=۰/۷ و t=۱/۲۵ در شکل‌های (۴-۳۵) تا (۴-۳۷) نشان داده‌شده است.



شکل (۴-۳۵) نمای تغییر شکل یافته باریکه دارای ترک در t=۰/۳

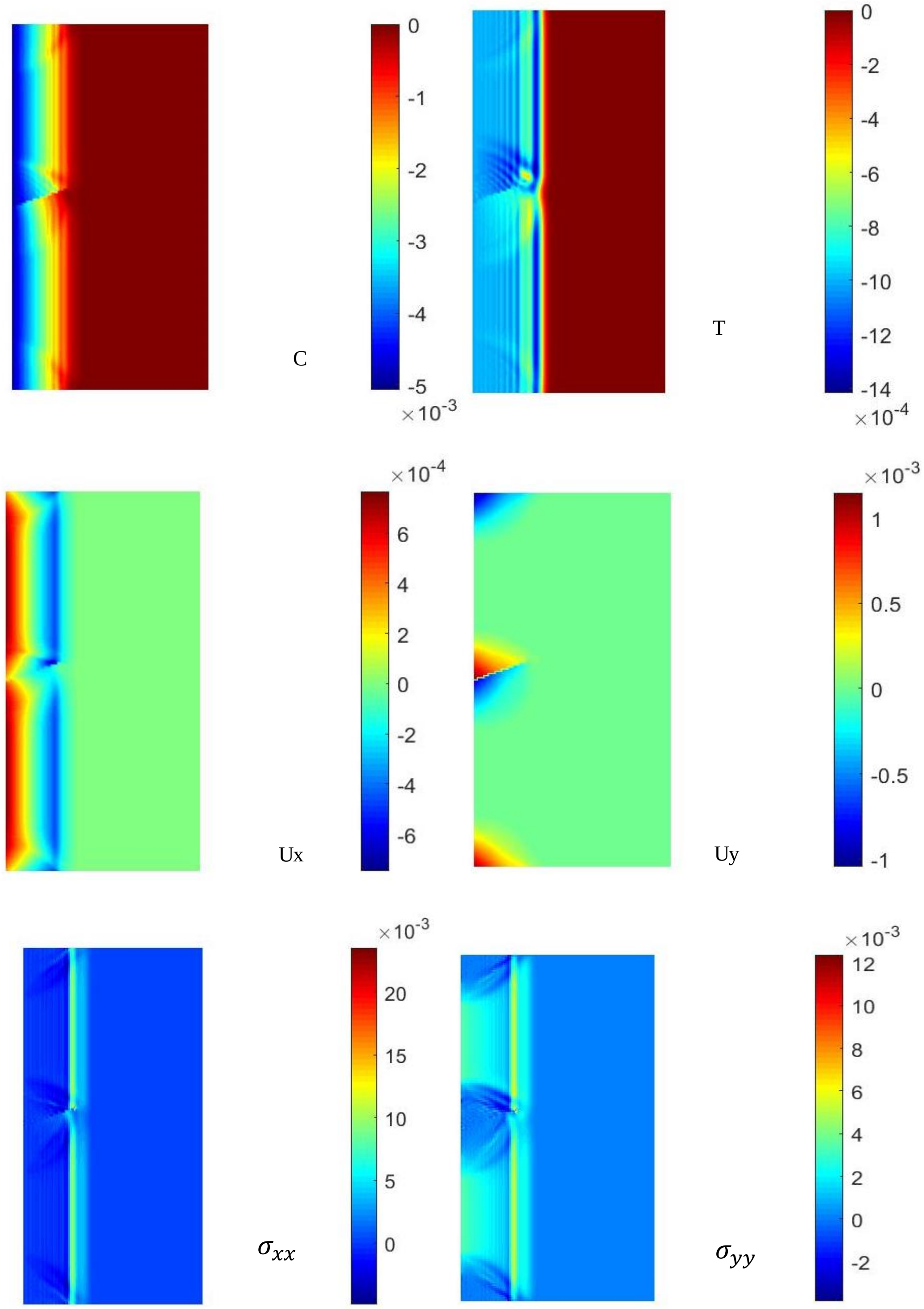


شکل (۴-۳۶) نمای تغییر شکل یافته باریکه دارای ترک در t=۰/۷



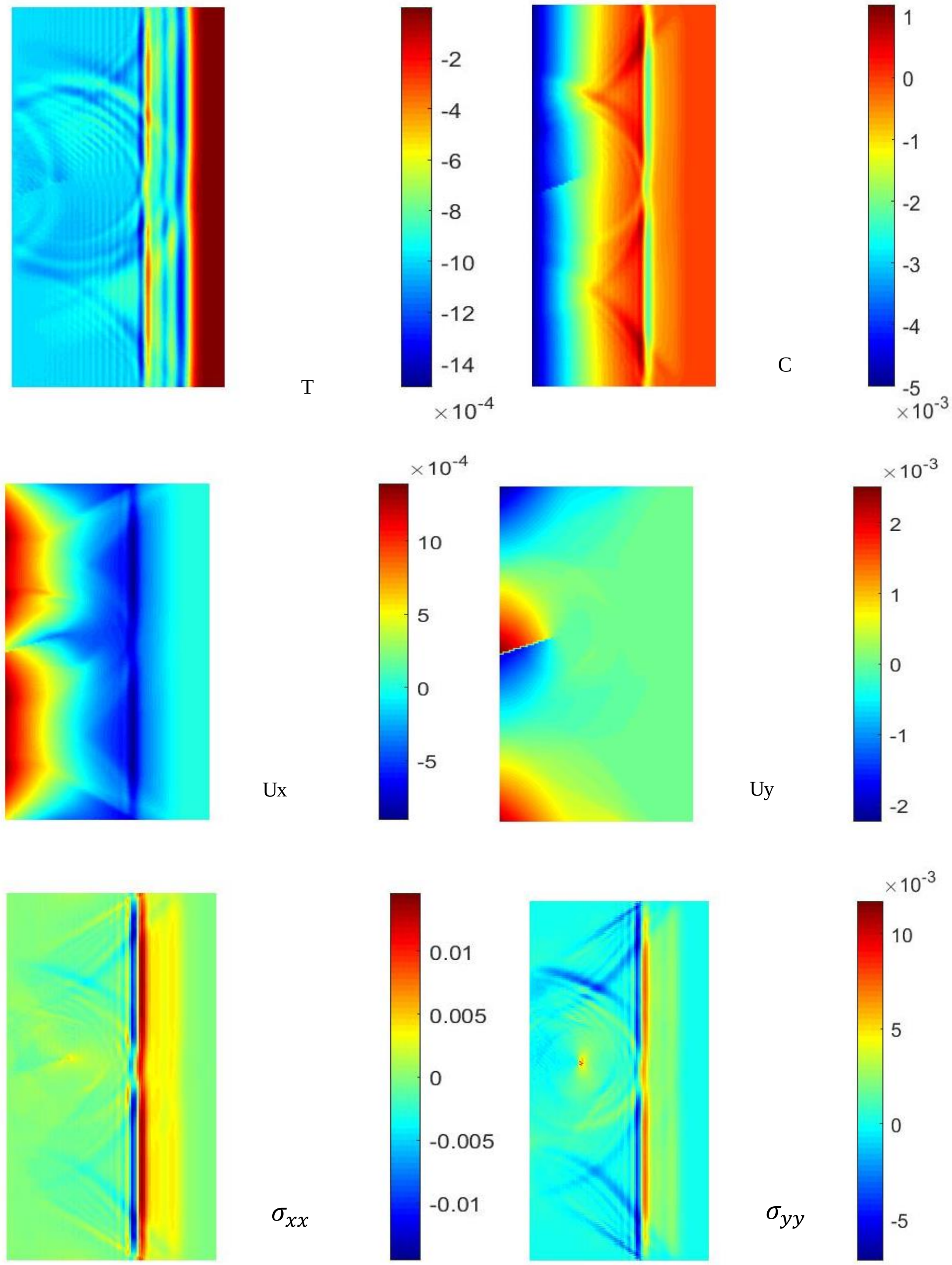
شکل (۴-۳۷) نمای تغییر شکل یافته باریکه دارای ترک در t=۱/۲۵

کانتورهای دما، انتشار، جابجایی در راستای x و y و تنش در جهت x و y در زمان t=0.3 در شکل(۴-۳۸) نشان داده‌شده است.



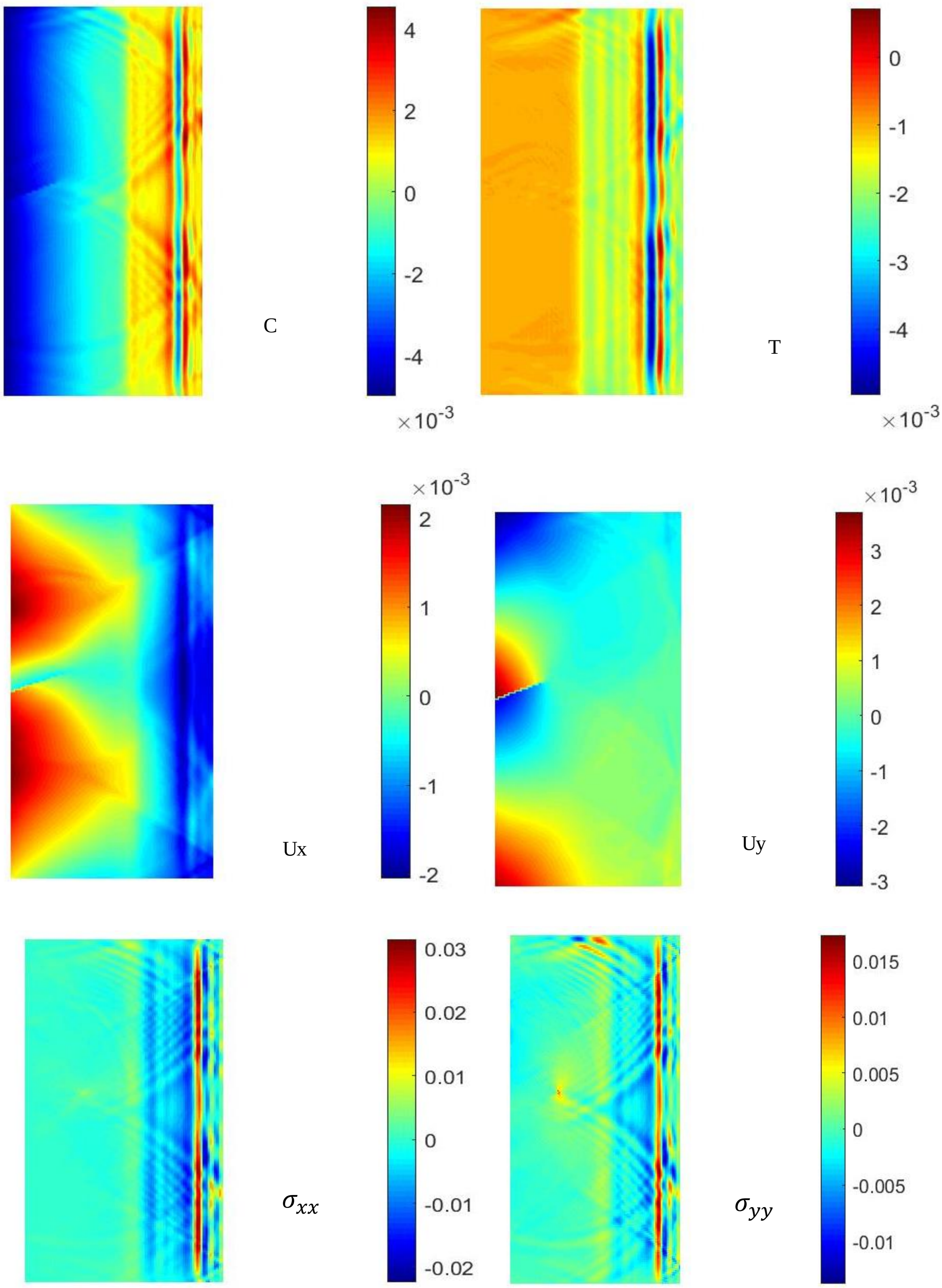
شکل (۴-۳۸) دما، انتشار، جابجایی در محورx، جابجایی در محورy، تنش در محورxx و تنش در محور yy در t=0.3

کانتورهای دما، انتشار، جابجایی در راستای x و y و تنش در جهت x و y در زمان t=0.7 در شکل(۴-۳۹) نشان داده‌شده است.



شکل (۴-۳۹) کانتورهای دما، انتشار، جابجایی در محورx، جابجایی در محورy، تنش در محورxx و تنش در محور yy در t=0.7

کانتورهای دما، انتشار، جابجایی در راستای x و y و تنش در جهت x و y در زمان t=1/25 در شکل(۴-۴۰) نشان داده‌شده است.



شکل (۴-۴۰) دما، انتشار، جابجایی در محورx، جابجایی در محورy، تنش در محورxx و تنش در محور yy در t=1.25

فصل پنجم

نتیجه گیری و

پیشنهادها

۵-۱- نتیجه‌گیری

در این پایان‌نامه، ضرایب شدت تنش برای یک صفحه دارای ترک ساکن در معرض شـوک دمـایی و غلظت براساس تئوری گرین نقدی و غیرفیک محاسبه‌شـده اسـت. تـرک بـا اسـتفاده از روش المـان محدود توسعه‌یافته مدل‌سازی شده که برای گسسته سازی معادلات در فضا و روش ضمنی نیومارک جهت انتگرال‌گیری زمانی مورداستفاده قرارگرفته است.

اثر بارگذاری‌های مختلف (شوک گرمایی و غلظت) و همچنین اثر سرعت موج‌های غلظـت و دمـا بـر روی ضرایب شدت تنش برای ترک‌های مستقیم و مایل بررسی‌شده است. این نتایج به‌دست‌آمده کـه برای حالت‌هایی که سرعت موج تنش و سرعت موج دما یکسان و بیشتر از سرعت موج غلظت اسـت افزایش ضریب شدت تنش سریع‌تر و بیشتر از حالت‌های دیگر است.

با توجه به نتایج عددی، سرعت امواج تنش، انتشـار و دمـا تـأثیر فراوانـی بـر ضـرایب شـدت تـنش به‌خصوص در شروع شوک انتشار و حرارتی داشته است. با رسیدن امواج انتشار و دما به نـوک تـرک ضرایب شدت تنش شروع به افزایش کرده و روند افزایشی پیدا می‌کند.

۵-۲-پیشنهادها

۱) بررسی رشد ترک در مسائل انتشار – ترموالاستیسیته

۲) محاسبه ضرایب شدت تنش برای ترک در مسائل انتشار – ترموالاستیسیته تعمیم‌یافتـه بـا در نظر گرفتن تئوری گرین لیندزی با استفاده از روش المان محدود توسعه‌یافته

۳) محاسبه ضرایب شدت تنش برای ترک در مسائل انتشار– الاستیسیته تعمـیم‌یافتـه بـا توزیـع دمای غیرخطی با استفاده از روش المان محدود توسعه‌یافته

۴) محاسبه ضرایب شدت تنش برای ترک در مسائل انتشار–ترموالاستیسیته تعمیم‌یافته با توزیع دمای غیرخطی با استفاده از روش المان محدود توسعه‌یافته

پیوست الف

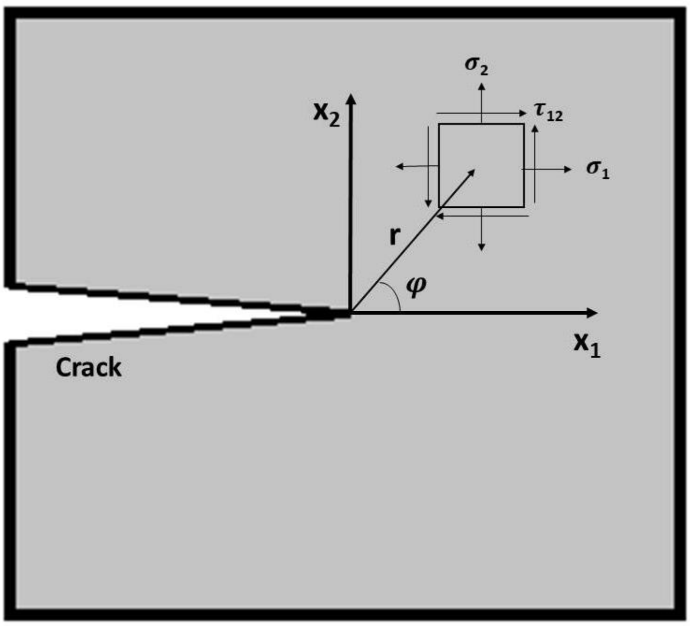
میدان‌های کمکی حوزه نوک ترک ساکن در محیط ایزوتروپیک همگن

میدان‌های تنش و جابجایی کمکی اطراف نوک ترک، میدان‌های مجانبی نوک ترک هستند. این میدان‌ها توسط ویلیامز [۴۰] ارائه‌شده‌اند. میدان‌های کمکی مد I ترک ایستا در مختصات محلی نوک ترک به‌صورت زیر هستند [۴۱] :

$$\sigma_1^{aux} = \frac{K_I^{aux}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left[1 - sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right)\right] \quad \text{(الف-۱)}$$

$$\sigma_2^{aux} = \frac{K_I^{aux}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left[1 + sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right)\right] \quad \text{(الف-۲)}$$

$$\tau_{12}^{aux} = \frac{K_I^{aux}}{\sqrt{2\pi r}} cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{3\varphi}{2}\right) \quad \text{(الف-۳)}$$



شکل الف-۱- دستگاه مختصات محلی نوک ترک

$$u_1^{aux} = \frac{K_I^{aux}}{2\mu_{Tip}}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left[\kappa_{Tip} - 1 + 2sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]$$ (الف-۴)

$$u_2^{aux} = \frac{K_I^{aux}}{2\mu_{Tip}}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left[\kappa_{Tip} + 1 - 2cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]$$ (الف-۵)

$$\kappa = \begin{cases} (3-\nu)/(1+\nu) & \text{تنش صفحه‌ای} \\ 3-4\nu & \text{کرنش صفحه‌ای} \end{cases}$$

در روابط فوق κضریب کلوسوف[1] است. (الف-۶)[۴۲]:

میدان‌های کمکی ترک مد II نیز به‌صورت زیر قابل‌بیان هستند:

$$\sigma_1^{aux} = \frac{-K_{II}^{aux}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left[2 + cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{3\varphi}{2}\right)\right]$$ (الف-۷)

$$\sigma_2^{aux} = \frac{K_{II}^{aux}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{3\varphi}{2}\right)$$ (الف-۸)

$$\tau_{12}^{aux} = \frac{K_{II}^{aux}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left[1 - sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right)\right]$$ (الف-۹)

$$u_1^{aux} = \frac{K_{II}^{aux}}{2\mu_{Tip}}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left[\kappa_{Tip} + 1 + 2cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]$$ (الف-۱۰)

$$u_2^{aux} = \frac{-K_{II}^{aux}}{2\mu_{Tip}}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left[\kappa_{Tip} - 1 - 2sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]$$ (الف-۱۱)

میدان‌های کمکی فوق، مربوط به مختصات محلی نوک ترک هستند. تنش‌های دستگاه مختصات سراسری با استفاده از روابط زیر به دستگاه مختصات محلی تبدیل می‌شوند:

$$\sigma_1^g = \sigma_1^l cos^2\omega + \sigma_2^l sin^2\omega - \tau_{12}^l \sin(2\omega)$$ (الف-۱۲)

[1] Kolosov Coefficient

$$\sigma_2^g = \sigma_1^l sin^2\omega + \sigma_2^l cos^2\omega + \tau_{12}^l \sin(2\omega) \qquad \text{(الف-۱۳)}$$

$$\tau_{12}^g = \tau_{12}^l \cos(2\omega) + 0.5(\sigma_1^l - \sigma_2^l)\sin(2\omega) \qquad \text{(الف-۱۴)}$$

در روابط فوق l نشان‌دهنده دستگاه مختصات محلی و g دستگاه مختصات سراسری است. ω زاویه بین دستگاه‌های مختصات محلی و سراسری است.

منابع

[1] D. Chandrasekharaiah, "**Hyperbolic Thermoelasticity: A Review of Recent Literature**", Applied Mechanics Reviews, vol. 51, no. 12, p. 705, 1998. Available: 10.1115/1.3098984.

[2] D. Joseph and L. Preziosi, "**Addendum to the paper "Heat waves**" [Rev. Mod. Phys. 61, 41 (1989)]", Reviews of Modern Physics, vol. 62, no. 2, pp. 375-391, 1990. Available: 10.1103/revmodphys.62.375.

[3] Fu, Z. Chen and L. Qian, "**Coupled thermoelastic analysis of a multi-layered hollow cylinder based on the C–T theory and its application on functionally graded materials**", Composite Structures, vol. 131, pp. 139-150, 2015. Available: 10.1016/j.compstruct.2015.04.053.

[4] R. Kushnir, "**Thermal Stresses – Advanced Theory and Applications**", Journal of Thermal Stresses, vol. 33, no. 1, pp. 76-78, 2009. Available: 10.1080/01495730903538421.

[5] K. Mitra, S. Kumar, A. Vedevarz and M. Moallemi, "**Experimental Evidence of Hyperbolic Heat Conduction in Processed Meat**", Journal of Heat Transfer, vol. 117, no. 3, p. 568, 1995. Available: 10.1115/1.2822615.

[6] A. Green and P. Naghdi, "**Thermoelasticity without energy dissipation**", Journal of Elasticity, vol. 31, no. 3, pp. 189-208, 1993. Available: 10.1007/bf00044969.

[7] J. Favergeon, T. Montesin and G. Bertrand, "**Mechano-Chemical Aspects of High Temperature Oxidation: A Mesoscopic Model Applied to Zirconium Alloys**", Oxidation of Metals, vol. 64, no. 3-4, pp. 253-279, 2005. Available: 10.1007/s11085-005-6563-7.

[8] H. Zhou, J. Qu and M. Cherkaoui, "**Stress–oxidation interaction in selective oxidation of Cr–Fe alloys**", Mechanics of Materials, vol. 42, no. 1, pp. 63-71, 2010. Available: 10.1016/j.mechmat.2009.09.007.

[9] E. Felten, "**High-Temperature Oxidation of Fe-Cr Base Alloys with Particular Reference to Fe-Cr-Y Alloys**", Journal of The Electrochemical Society, vol. 108, no. 6, p. 490, 1961. Available: 10.1149/1.2428122.

[10] Y. Suo and S. Shen, "**Dynamical theoretical model and variational principles for coupled temperature–diffusion–mechanics**", Acta Mechanica, vol. 223, no. 1, pp. 29-41, 2011. Available: 10.1007/s00707-011-0545-4.

[11] S. Hosseini, J. Sladek and V. Sladek, "**Two dimensional analysis of coupled non-Fick diffusion-elastodynamics problems in functionally graded materials using meshless local Petrov–Galerkin (MLPG) method**", Applied Mathematics and Computation, vol. 268, pp. 937-946, 2015. Available: 10.1016/j.amc.2015.07.009.

[12] S. Hosseini, M. Abolbashari and S. Hosseini, "**Shock-induced molar concentration wave propagation and coupled non-Fick diffusion–elasticity analysis using an analytical method**", Acta Mechanica, vol. 225, no. 12, pp. 3591-3599, 2014. Available: 10.1007/s00707-014-1161-x.

[13] F. Yang, "**Interaction between diffusion and chemical stresses**", Materials Science and Engineering: A, vol. 409, no. 1-2, pp. 153-159, 2005. Available: 10.1016/j.msea.2005.05.117.

[14] M. Othman, S. Atwa and R. Farouk, "**The effect of diffusion on two-dimensional problem of generalized thermoelasticity with Green–Naghdi theory**", International Communications in Heat and Mass Transfer, vol. 36, no. 8, pp. 857-864, 2009. Available: 10.1016/j.icheatmasstransfer.2009.04.014.

[15] C. Li, H. Guo and X. Tian, "**Time-domain finite element analysis to nonlinear transient responses of generalized diffusion-thermoelasticity with variable thermal conductivity and diffusivity**", International Journal of Mechanical Sciences, vol. 131-132, pp. 234-244, 2017. Available: 10.1016/j.ijmecsci.2017.07.008.

[16] M. Aouadi, M. Ciarletta and V. Tibullo, "**A thermoelastic diffusion theory with microtemperatures and microconcentrations**", Journal of Thermal Stresses, vol. 40, no. 4, pp. 486-501, 2016. Available: 10.1080/01495739.2016.1225271.

[17] N. Sharma, R. Kumar and P. Ram, "**Plane Strain Deformation in Generalized Thermoelastic Diffusion**", International Journal of Thermophysics, vol. 29, no. 4, pp. 1503-1522, 2008. Available: 10.1007/s10765-008-0435-8.

[18] C. Li, H. Guo and X. Tian, "**Soret effect on the shock responses of generalized diffusion-thermoelasticity**", Journal of Thermal Stresses, vol. 40, no. 12, pp. 1563-1574, 2017. Available: 10.1080/01495739.2017.1359066.

[19] A. Green and P. Naghdi, "**ON UNDAMPED HEAT WAVES IN AN ELASTIC SOLID**", Journal of Thermal Stresses, vol. 15, no. 2, pp. 253-264, 1992. Available: 10.1080/01495739208946136.

[20] C. Li, H. Guo and X. Tian, "**Transient responses of a hollow cylinder under thermal and chemical shock based on generalized diffusion-thermoelasticity with memory-dependent derivative**", Journal of Thermal Stresses, vol. 42, no. 3, pp. 313-331, 2018. Available: 10.1080/01495739.2019.1486689.

[21] A. Green and P. Naghdi, "**A Re-Examination of the Basic Postulates of Thermomechanics**", Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, vol. 432, no. 1885, pp. 171-194, 1991. Available: 10.1098/rspa.1991.0012.

[22] S. Bargmann, "**Remarks on the Green–Naghdi theory of heat conduction**", Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics, vol. 38, no. 2, 2013. Available: 10.1515/jnetdy-2012-0015.

[23] D. Chandrasekharaiah, "**ONE-DIMENSIONAL WAVE PROPAGATION IN THE LINEAR THEORY OF THERMOELASTICITY WITHOUT ENERGY DISSIPATION**", Journal of Thermal Stresses, vol. 19, no. 8, pp. 695-710, 1996. Available: 10.1080/01495739608946202.

[24] S. Mohammadi, **Extended finite element method for fracture analysis of structures. Oxford**: Blackwell Pub., 2008.

[25] M. Kirugulige, **A study of mixed-mode dynamic fracture in advanced particulate composites by optical interferometry, digital image correlation and finite element methods**. Auburn, Ala., 2007.

[26] T. Belytschko and T. Black, "**Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing**", International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 45, no. 5, pp. 601-620, 1999. Available: 10.1002/(sici)1097-0207(19990620)45:5<601::aid-nme598>3.0.co;2-s.

[27] N. Moës, J. Dolbow and T. Belytschko, "**A finite element method for crack growth without remeshing**", International Journal for Numerical Methods in

Engineering, vol. 46, no. 1, pp. 131-150, 1999. Available: 10.1002/(sici)1097-0207(19990910)46:1<131::aid-nme726>3.0.co;2-j.

[28] T. Belytschko, R. Gracie and G. Ventura, "**A review of extended/generalized finite element methods for material modeling**", Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering, vol. 17, no. 4, p. 043001, 2009. Available: 10.1088/0965-0393/17/4/043001.

[29] S. Ardakani, H. Ahmadian and S. Mohammadi, "**Thermo-mechanically coupled fracture analysis of shape memory alloys using the extended finite element method**", Smart Materials and Structures, vol. 24, no. 4, p. 045031, 2015. Available: 10.1088/0964-1726/24/4/045031.

[30] M. Duflot, "**The extended finite element method in thermoelastic fracture mechanics**", International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 74, no. 5, pp. 827-847, 2008. Available: 10.1002/nme.2197.

[31] A. Zamani and M. Eslami, "**Implementation of the extended finite element method for dynamic thermoelastic fracture initiation**", International Journal of Solids and Structures, vol. 47, no. 10, pp. 1392-1404, 2010. Available: 10.1016/j.ijsolstr.2010.01.024.

[32] A. KC and J. Kim, "**Interaction integrals for thermal fracture of functionally graded materials**", Engineering Fracture Mechanics, vol. 75, no. 8, pp. 2542-2565, 2008. Available: 10.1016/j.engfracmech.2007.07.011.

[33] J. Réthoré, A. Gravouil and A. Combescure, "**A combined space-time extended finite element method**", International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 64, no. 2, pp. 260-284, 2005. Available: 10.1002/nme.1368.

[34] P. Hosseini-Tehrani, M. Eslami and H. Daghyani, "**Dynamic Crack Analysis Under Coupled Thermoelastic Assumption**", Journal of Applied Mechanics, vol. 68, no. 4, p. 584, 2001. Available: 10.1115/1.1364490.

[35] J. Chen, A. Soh, J. Liu and Z. Liu, "**Thermal fracture analysis of a functionally graded orthotropic strip with a crack**", International Journal of Mechanics and Materials in Design, vol. 1, no. 2, pp. 131-141, 2004. Available: 10.1007/s10999-004-1489-9.

[36] N. Zarmehri, M. Nazari and M. Rokhi, "**XFEM analysis of a 2D cracked finite domain under thermal shock based on Green-Lindsay theory**", Engineering

Fracture Mechanics, vol. 191, pp. 286-299, 2018. Available: 10.1016/j.engfracmech.2017.12.039.

[37] J. Rice, "**A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks**", Journal of Applied Mechanics, vol. 35, no. 2, p. 379, 1968. Available: 10.1115/1.3601206.

[38] A. Green and P. Naghdi, "**ON UNDAMPED HEAT WAVES IN AN ELASTIC SOLID**", Journal of Thermal Stresses, vol. 15, no. 2, pp. 253-264, 1992. Available: 10.1080/01495739208946136.

[39] M. Williams, "**The Bending Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack**", Journal of Applied Mechanics, vol. 28, no. 1, p. 78, 1961. Available: 10.1115/1.3640470.

[40] T. Anderson, **Fracture Mechanics. Boca Raton**: Chapman and Hall/CRC, 2017.

[41] T. Menouillard, J. Song, Q. Duan and T. Belytschko, "**Time dependent crack tip enrichment for dynamic crack propagation**", International Journal of Fracture, vol. 162, no. 1-2, pp. 33-49, 2009. Available: 10.1007/s10704-009-9405-9.

Abstract

In this thesis, the behavior of a static crack in a generalized diffusion-thermoelasticity environment under shock is investigated. The crack is extracted using the extended finite element modeling and the stress intensity coefficients are extracted using the interactive integral method. Heat and concentration propagation are based on generalized greedy-cash and nonfickle theories. The finite element method developed for discrete space equations and the Newmark implicit method for temporal integration have been used. For different loads (heat shock and concentration), stress intensity factors, crack tip temperature distribution and crack tip propagation have been studied. The effect of stress wave velocity, concentration wave and temperature wave on stress intensity factors for direct and oblique cracks have also been investigated. The result of different speeds is that for a state where the stress wave velocity and temperature wave velocity are the same as the concentration wave velocity, the increase in the stress intensity factor is faster and higher than the other states.

key words

Diffusion - Generalized Thermoelasticity, Stress intensity factor eXtended Finite Element Method, interaction Integral

Shahrood University of Technology

Faculty of Mechanical Engineering

Determination of stress intensity factors for a crack in diffusion-thermoelasticity generalized problems using eXtended Finite Element Method

Hadi Bashir Nezhad Dehgan

Thesis

Submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M. Sc)

Supervisor

Dr. Mohammad Bagher Nazari

Dr. Masoud Mahdizadeh Rokhi

September 2019