دانشکده مکانیک

گروه طراحی کاربردی

رساله دکتری

محاسبه پارامترهای شکست در صفحات مستطیلی ساخته‌شده از مواد مرکب تابعی تحت بار مکانیکی و حرارتی

محمدباقر نظری

اساتید راهنما

دکتر محمود شریعتی

دکتر محمدرضا اسلامی

استاد مشاور

دکتر بهروز حسنی

رساله دکتری جهت اخذ درجه دکتری

اسفند ۱۳۸۹

تشکر و قدردانی

در ابتدا لازم می‌دانم از اساتید محترم جناب آقای دکتر شریعتی و جناب آقای دکتر اسلامی که در طول مدت تحصیل از راهنماییهای ایشان بهره‌مند شدم، صمیمانه تشکر نمایم. همچنین، از جناب آقای دکتر حسنی نیز بخاطر زحمات و راهنماییهای بیدریغشان کمال تشکر را دارم.

از بحثهای جالب و مفید زمانهای استراحت با دانشجویان دوره دکتری آقایان دکتر رشیدی، دکتر نوروزی، دکتر عباس‌نژاد و آقای مهدیزاده بسیار آموختم؛ از تمامی آنان سپاسگزارم. کمکهای دوست عزیزم آقای جواد شاه‌حسینی و خانواده محترمش اقامت در تهران را برای من بسیار آسان نمود؛ از آنان نیز کمال تشکر و سپاس را دارم.

از روشنی‌بخش راه زندگی‌ام، پدر و مادر عزیزم، که همواره مشوق من هستند و در ایام تحصیلم متحمل رنج فراوان شدند؛ خالصانه تشکر می‌کنم و خاضعانه دستشان را می‌بوسم. تلاشها و مشقتهای همسرم در به سرانجام رسیدن این رساله نقش حیاتی دارد؛ از وی و فاطمه *کوچولو* – که این رساله بخشی از خاطرات کودکی‌اش است- صمیمانه سپاسگزارم. در پایان از برادران، خواهرم و خانواده‌اش و همچنین خانواده همسرم تشکر می‌نمایم.

دانشجو تأیید می نماید که مطالب مندرج دراین رساله نتیجه تحقیقات خودش می باشد و در صورت استفاده از نتایج دیگران مرجع آن را ذکر نموده است.

اسفند ۸۹

چکیده

از آنجایی که بسیاری از سازه‌ها و ماشین‌ها تحت گرادیان دما و یا دمای بالا قرار می‌گیرند؛ تحلیل تنش‌های حرارتی یکی از مهمترین موضوع‌های مهندسی است. طبق تحقیقات، شکست تحت بارهای حرارتی یکی از مرسوم‌ترین و پیچیده‌ترین حالت‌های گسیختگی در سازه‌ها می‌باشد. موضوع اصلی مورد بحث، بررسی رفتار ترک در مواد مرکب تابعی بصورت محاسبه پارامترهای شکست (ضرایب شدت تنش و تنش T) با استفاده از روش بدون‌المان گلرکین می‌باشد. برای محاسبه پارامترهای شکست حرارتی، علاوه بر اینکه روش انتگرال برهم کنش توسعه یافته است؛ روش‌های انتگرال J و همبستگی تغییرمکان‌ها نیز بکار رفته‌اند. مدلسازی ترک شامل فرآیند غنی‌سازی حوزه نوک ترک برای رصد مناسب تکنیکی میدان‌های ترموالاستیک و اعمال ناپیوستگی متغیر میدان در سطح ترک با استفاده از مجموعه بردارهای مرتبه‌ای انجام شده است. در مسائل ترموالاستیک که بصورت خطی در نظر گرفته شده؛ معادله هدایت گرمایی گذرا بصورت نیمه‌تحلیلی حل شده است. ابتدا این معادله با اعمال روش بدون‌المان گلرکین بصورت یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول خطی در فضا در آمده است. سپس با استفاده از روش تحلیلی تجزیه مودی، حل دستگاه مذکور نسبت به زمان بدست آمده است. در مثالهای عددی، صفحات مستطیلی در نظر گرفته شده است که در آنها تغییر خصوصیات فیزیکی هم با استفاده از توابع پیوسته مثل تابع نمایی مدل شده است و هم با استفاده از مدل‌های میکرومکانیک مواد مرکب بیان شده که در مراجع مختلف برای مواد مرکب تابعی توسعه یافته‌اند. همچنین اثر تغییر خصوصیات فیزیکی، روی ضریب شدت تنش مود I حرارتی برای توابع پیوسته مورد بحث قرار گرفته است.

واژه‌های کلیدی: مواد مرکب تابعی، روش بدون‌المان گلرکین، ضرایب شدت تنش، تنش T، انتگرال پایستار، تنش حرارتی.

فهرست مطالب

صفحه

فهرست شکل‌ها

صفحه

فهرست جدولها

علائم اختصاری

طول ترک	a
ضرایب مجهول در تقریب MLS	**a**
ماتریس moment در تقریب MLS	**A**
ماتریس ضرایب در تقریب MLS	**B**
نیروی کالبدی	**b**
گرمای ویژه	c
تانسور ساختاری	$\tilde{\mathrm{C}}$
ماتریس نرمی هدایت گرمایی	$\mathbf{C}$, $\mathbf{C}_{ij}$
تانسور ساختاری دو بعدی	**D**
مدول یانگ	E
ضریب در رابطه ساختاری ترموالاستیسیته. کرنش صفحه‌ای:F=1+ν و تنش صفحه‌ای: F=1	**F**
بردار نیرو در معادلات گسسته	**F**
ضریب همرفت	h
فضای سوبولوف	H
ماتریس همانی	**I**
انتگرال مستقل از مسیر J	J
ضریب هدایت گرمایی	**k**,k
ضریب شدت تنش	K
ماتریس سختی در معادلات گسسته	**K**
فرم مرتبه دو	L
ماتریس مودی	**M**
بردار یکه و عمود رو به خارج روی کانتور یا مرز	**n**, n
بردار پایه	**p**
پارامتر غیرهمگنی خصوصیات ماده	P
ماتریسی که بردارهای پایه گره‌ها سطرهای آن می‌باشند	**P**
تابع وزنی تعریف‌شده روی ناحیه انتگرالگیری	**q**
منبع حرارت در پیوستار جامد	Q
مختصه شعاعی در مختصات قطبی، فاصله تا نوک ترک	r
پارامتر کاهنده مودی	s
ماتریس برای اعمال شرایط مرزی اساسی	**S**
زمان	t

بردار دمای گرهی در معادلات گسسته	$\mathbf{T}$
میدان تغییرمکان	u
پارامتر گرهی تغییرمکان	U
تابع وزنی در تقریب MLS	w
عرض صفحه	W
تابع چگالی انرژی کرنشی	W
ماتریس تابع وزنی در تقریب MLS	$\mathbf{W}$
مختصات دکارتی عمومی، $i=1, 2$	$\mathbf{x}, \mathbf{x}_i$
ضریب انبساط حرارتی	α
پارامتر خصوصیات ماده: $\beta= \alpha/(1-2\nu)$	β
ضریب پنالتی	γ
کانتور انتگرال J	Γ
تابع دلتای کرونکر	δ_{ij}
میدان کرنش	$\varepsilon, \varepsilon_{ij}$
تابع آزمون	η
میدان کلی دما	θ
مختصه زاویه‌ای در مختصات قطبی	θ
پارامتر خصوصیات ماده. کرنش صفحه‌ای: $\kappa=3-4\nu$ و تنش صفحه‌ای: $(3-\nu)/(1+\nu)$	κ
ضریب لامه	λ
طرف راست معادلات غیرکوپل هدایت گرمایی	$\mathbf{\Lambda}$
مدول برشی	μ
نسبت پواسون	ν
چگالی	ρ
میدات تنش	σ, σ_{ij}
زمان نرمال‌شده	τ
تابع شکل MLS	$\varphi, \boldsymbol{\varphi}$
مقادیر گرهی تابع شکل MLS	Φ
متغیر زمان در معادلات غیرکوپل هدایت گرمایی	ψ
قسمتی از فضا که توسط جسم اشغال شده	Ω

بالانویسها

مقدار معلوم	$\bar{}$

مشتق‌گیری نسبت به زمان	$\cdot$
میدان کمکی	aux
متغیر تقریبی	h
بخش مکانیکی	m
ترانهاده	T
بخش حرارتی	th
پارامتر پنالتی	γ

زیرنویسها

مقدار مرجع	0
مقذار محیطی	∞
مساحت	A
همرفتی	c
همبستگی	cor
الاستیک	e
شرط مرزی اساسی	ess
شمارنده	i, j, k
تابع آزمون در فرم ضعیف	I
دما	θ

فصل اول

مواد مرکب تابعی

۱-۱- مقدمه

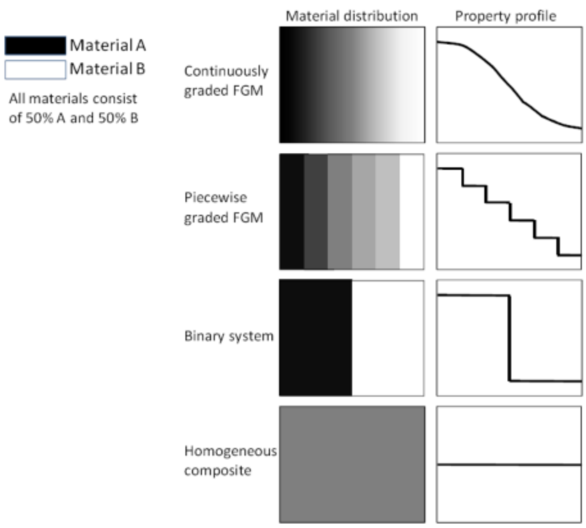
امروزه در بسیاری از موارد، اجزای سازه‌ها و ماشین‌ها علاوه بر نیروهای مکانیکی در معرض بارگذاری حرارتی نیز قرار می‌گیرند. مخازن تحت‌فشار و لوله‌ها در راکتور نیروگاههای هسته‌ای، اجزای داخلی راکتورهای شیمیایی و بدنه هواپیماهای فوق‌سریع در دماهای بالا، تحت گرادیان شدید و تغییر نوسانی دما قرار می‌گیرند. بررسی‌های عددی نشان می‌دهد؛ در یک فضاپیما که با سرعت ۸ ماخ مسافت ۲۶۸۰۰ متر را طی می‌کند، دما در نوک دماغه به ۲۰۶۶ K و در وسط آن به ۱۰۳۳ K می‌رسد، [۱] به نقل از [۲]. با توجه به محدودیت خصوصیات مواد همگن در دماهای بالا، انتخاب مواد با خواص مکانیکی و حرارتی قابل‌قبول از مهمترین چالشهای طراحی در این زمینه می‌باشد. برای مثال، در این شرایط موادی نیاز است که علاوه بر مقاومت سایشی و حرارتی، از چقرمگی مکانیکی و قابلیت هدایت گرمایی بالایی نیز برخوردار باشند. برای ساخت چرخدنده‌ها و یاتاقانها، ماده همگنی یافت نمی‌شود که در دماهای بالا چقرمگی و مقاومت سایشی کافی داشته باشد.

در سالهای اخیر، استفاده از پوششهای سرامیکی برای قطعات از جنس سوپرآلیاژها گسترش یافته است؛ تا بتوان از خصوصیات مطلوب حرارتی سرامیکها بهمراه خصوصیات مکانیکی ویژه سوپرآلیاژها بهره برد. اما کاربرد مواد همگن با پوشش ضدحرارتی، دارای مشکلاتی مانند ایجاد تنشهای حرارتی پسماند بالا در قطعه و جدا شدن پوشش از ماده همگن بخاطر استحکام نسبی پایین اتصال می‌باشد[۳]. برای رفع این نقایص بجای استفاده از پوشش همگن، ترکیب پیوسته پوشش و فلز همگن پیشنهاد شده است. بطوریکه در پوشش جدید ترکیب ماده از ۱۰۰ درصد فلز روی سطح اولیه بطور پیوسته تا ۱۰۰ درصد سرامیک روی سطح پوشش تغییر می‌کند. این مواد جدید، مواد مرکب تابعی[۱] نامیده می‌شوند.

---

[1]- Functionally Graded Materials- FGMs

اولین بار مفهوم FGM توسط نینو[۱] و همکارانش در آزمایشگاه ملی هوافضای سندای[۲] در ژاپن بعنوان مواد ضدحرارت[۳] معرفی شد [۲]. هدف نینو تولید پوششی با مقاومت حرارتی بسیار بالا برای بدنه هواپیماهای فوق‌سریع بود که کاهش تنش حرارتی و افزایش مقاومت در برابر گرما را در پی داشته باشد. اما امروزه FGM کاربردهای وسیعتری یافته است. مهمترین مختصه FGM تغییر پیوسته خصوصیات فیزیکی است که بخاطر تغییر پیوسته ترکیب، ساختار کلی، ریزساختار و یا ساختار کریستالی از یک سطح تا سطح دیگر ماده اتفاق می‌افتد. معمولاً FGM بصورت ترکیب پیوسته دو ماده مختلف در نظر گرفته می‌شود (مطابق شکل (۱-۱)). یک سرامیک صنعتی برای مقاومت در برابر بارگذاری حرارتی و یک فلز سبک برای تامین خصوصیات مکانیکی مثل چقرمگی و صلبیت در ساخت FGM بکار می‌رود. بطور کلی، خواص FGM علاوه بر پروفیل ترکیب، تابع خواص فلز و سرامیک انتخابی نیز می‌باشد. خصوصیات FGM که از مخلوط شدن سرامیک و فلز بدست می‌آیند؛ با استفاده از قوانین اختلاط[۴] و مدلهای میکرومکانیک بیان می‌شوند.



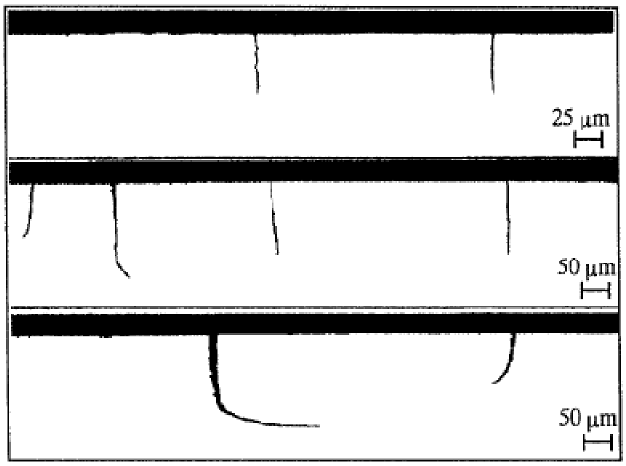
شکل ۱-۱- نمای کلی از یک FGM با تغییر پیوسته ساختار میکروسکوپی و تفاوت آن با مواد مرکب چند لایه و مواد همگن [۵]

---

[1]- Niino
[2]- Sendai
[3]- Thermal Barrier Materials
[4]- mixture laws

تحلیل‌ها و آزمایش‌ها نشان می‌دهند؛ وقتی سطح سرامیکی FGM تحت شوک حرارتی قرار گیرد؛ ترکهایی در سطح سرامیکی ایجاد می‌شود. چنانکه معمولترین مود گسیختگی در FGM ایجاد این ترکها می‌باشد. آزمایشهای کاواساکی[1] و واتانابه[2] نشان می‌دهد؛ وقتی سطح سرامیکی FGM تحت شوک حرارتی قرار گیرد، در مرحله سرد شدن، ممکن است ترکهایی در سطح سرامیکی ایجاد شود [۴]و [۵] به نقل از[۲]. این ترکها می‌تواند عمود بر سطح و یا به‌صورت منحنی باشند (شکل (۱-۲)). ترکهای سطحی لبه‌ای طی فرایندهای گرمایش با اشعه لیزر (گرمایش لیزری[3]) و گرمایش کوره‌ای[4] نیز مشاهده شده است [۶-۹] به نقل از [۲].

در مطالعه اجسام دارای ترک، مکانیک شکست یکی از ابزارهای بسیار مهم است. داشتن اطلاعاتی در مورد ترک اهمیت ویژه‌ای در ارزیابی ایمنی و عمر قطعات و سازه‌ها دارد.



شکل ۱-۲- ترکهای ایجاد شده در سطح سرامیکیFGM تحت شوک حرارتی [۴]

۱-۲- روش‌های بدون المان[5]

محدودیت‌های روش‌های تحلیلی و تجربی در حل مسایل عملی منجر به گسترش روز افزون کاربرد روشهای عددی شده است. در بسیاری از مسایل مکانیک جامدات، شامل گرادیان شدید تغییر

---

[1]- Kawasaki
[2]- Watanabe
[3]- laser heating
[4]- burner heating
[5] - Meshless/Meshfree Methods

شکل, رشد ترک یا ناپیوستگی و غیره نیاز به روشهایی است که علاوه بر سادگی بتواند مسایل را با دقت مناسب مدلسازی کنند.

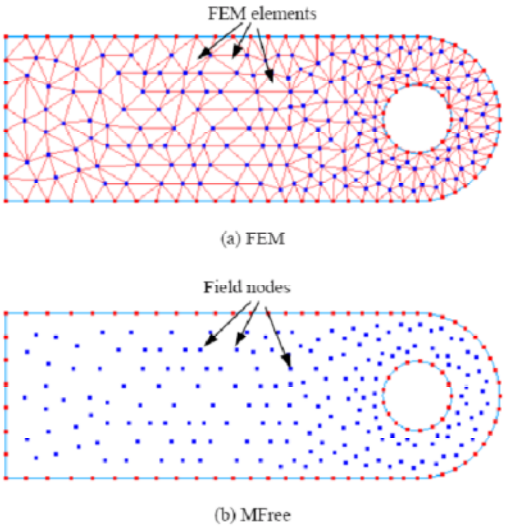
امروزه روشهای عددی متداولی مثل روش المان محدود در تحلیل مکانیک شکست سازه‌ها بکار می‌روند. اگر چه روش المان محدود با توجه به قابلیتهای آن بطور گسترده در بررسی مسایل شامل تغییر پیوسته هندسه بکار می‌رود؛ اما دارای محدودیتهای جدی در این رابطه می‌باشد. تحلیل رشد ترک یکی از مواردی است که استفاده از روش المان محدود در آن نیازمند مش‌بندی مجدد هندسه می‌باشد. در اینگونه موارد استفاده از روشهای بر پایه مش مشکل، پرهزینه و زمانبر است. علاوه بر این، منطبق نبودن گره‌ها در مش‌بندیهای مجدد باعث زیاد شدن خطا و حتی واگرایی حل در رشد ترک می‌شود و مشکلاتی در بیان تاریخچه حل از ابتدا پدید می‌آورد. در سالهای اخیر دسته‌ای از روشهای بدون‌المان به شرح زیر گسترش یافته‌اند:

۱- Smooth Particle Hydrodynamics (SPH)
۲- Diffuse Element Method (DEM)
۳- Element Free Galerkin Method (EFG)
۴- h-p clouds
۵- Reproducing Kernel Particle Method (RKPM)
۶- Meshless Local Petrov-Galerkin Method (MLPGM)
۷- Local Boundary Integral Equation Method (LBIEM)

این روشها توانایی قابل قبولی در حل مسایل شامل مرزهای متغیر مثل رشد ترک دارند. طبق تعریف لیو[۱] [۱۰] یک روش بدون‌مش، روشی است که بدون ریز کردن ناحیه حل با مش‌های از پیش تعریف‌شده، بتواند دستگاه معادلات جبری را برای کل ناحیه حل بنا کند. هر چند عملاً در بسیاری از روشهای بدون‌مش برای انتگرال‌گیری عبارتهای حاصل از اعمال شکل ضعیف[۲] لازم است از مش‌بندی ساده ناحیه حل استفاده نمود.

[1] - Liu
[2] - weak formation

در روش‌های بدون‌المان با پخش کردن گره‌ها، ناحیه حل و مرزهای آن مشخص می‌شود. شکل (۱-۳) مدلسازی گسسته یک هندسه با روشهای المان محدود و بدون‌المان را نشان می‌دهد.

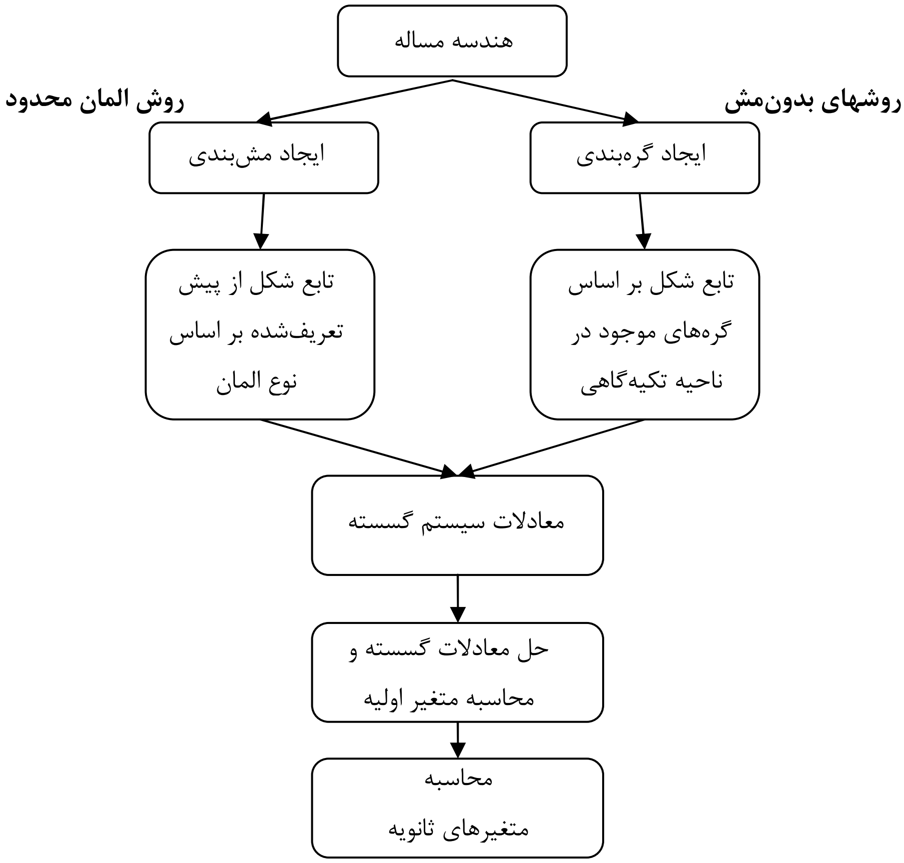


شکل ۱-۳- مدل گسسته هندسه در روش المان محدود (بالا) و روشهای بدون‌المان (پایین)[۱۰]

فرم کلی دستگاه معادلات جبری که با این روشها بدست می‌آید؛ شبیه دستگاه معادلاتی است که با روش المان محدود ایجاد می‌شود. در روشهای بدون‌المان معادله مربوط به هر گره، با توجه به گره‌هایی که در ناحیه تکیه‌گاهی[1] این گره قرار می‌گیرند و تابع وزنی[2] انتخابی بدست می‌آید. تفاوت اساسی روشهای بدون‌المان و روش المان محدود در ایجاد تابع شکل است. در روش المان محدود تابع شکل برای هر گره با توجه به نوع المان، تعریف شده و قبل از شروع مدلسازی مساله مشخص است؛ ولی در روشهای بدون‌المان تابع شکل گره‌ها حین مدلسازی مساله و با توجه به انتخاب ناحیه پشتیبان و تابع وزن محاسبه می‌شود. در شکل (۱-۴) فرآیند کلی حل مساله با روشهای بدون‌المان و روش المان محدود نشان داده شده است.

---

[1] - support domain
[2] - weight function



شکل ۱-۴- فرآیند حل مساله با روشهای بدون‌المان و روش المان محدود [۱۰]

در جدول (۱-۱) قابلیتهای مختلف روشهای بدون‌المان و روش المان محدود مقایسه شده است.

در تحلیل مسایل مکانیک، روشهای بدون‌المان متعددی بکار گرفته می‌شوند. بطور کلی این روشها بر اساس نوع فرمولبندی مساله، تابع تخمین و یا میانیابی مورد استفاده و نوع ناحیه حل دسته‌بندی می-شوند[۱۰]. روش بدون‌المان گلرکین یکی از روشهای مرسوم در تحلیل مسایل مکانیک شکست می-باشد. این روش در سال ۱۹۹۴ توسط بلیچکو[1] با توسعه روش DEM معرفی شد [۱۰] و بتدریج جنبه‌های عددی و کاربرد آن در زمینه‌های مختلف مکانیک تبیین گردید. در روش بدون‌المان گلرکین از فرم ضعیف معادله دیفرانسیل تعادل روی کل ناحیه حل[2] برای فرمولبندی مدل و از روش حداقل مربعات متحرک[3] برای میانیابی متغیر میدان استفاده می‌شود.

---

[1] - Belytschko
[2] - global weak form
[3] - Moving Least Square- MLS

جدول ۱-۱- مقایسه قابلیتهای مختلف روشهای بدون المان و روش المان محدود [۱۰]

قابلیت	روش المان محدود	روشهای بدون‌المان
نیاز به مش	دارد	ندارد
تولید تابع شکل	برپایه المانهای از پیش تعریف‌شده	برپایه ناحیه تکیه‌گاهی محدود
ماتریس سختی مدل گسسته	بانددار و متقارن	بانددار و بسته به روش ممکن است متقارن باشد یا نه.
اعمال شرایط مرزی	با روشهای استاندارد براحتی انجام می‌شود	با روشهای خاصی انجام می‌شود
سرعت محاسبات	سریع	معمولا کندتر از المان محدود
دقت	دقیقتر از روش اختلاف محدود	دقیقتر از روش المان محدود
آنالیز تطبیقی	مشکل بخصوص در سه‌بعد	آسانتر از روش المان محدود
میزان گسترش	کاملا استاندارد و گسترش یافته	در آستانه گسترش
نرم‌افزارهای تجاری در دسترس	دارد	ندارد

۱-۳- مرور انجام‌شده مطالعات در شکست حرارتی FGM

هر چند مطالعه رفتار مواد غیرایزوتروپیک و از جمله مکانیک شکست آنها تقریباً همزمان با مواد ایزوتروپیک مطرح شده است. اما معرفی و آشکار شدن جنبه‌های کاربردی FGM در دهه ۹۰ میلادی، این مطالعات را وارد مرحله جدید و کاربردی نمود. از اینرو در مرور مطالعات انجام شده، مطالعاتی ذکر شده‌اند که با رویکرد FGM انجام شده است. بطور کلی مطالعات در زمینه مکانیک شکست FGM را می‌توان به دو دسته تقسیم نمود. در دسته اول که در آن یک رهیافت تحلیلی دنبال می‌شود؛ به حل مسأله الاستیسیته یا ترموالاستیسیته شامل ترک پرداخته می‌شود. مسأله با اعمال شرایط مرزی ترک به معادلات انتگرالی تکین تبدیل شده و بطور تحلیلی و یا عددی حل می‌شود. دسته دوم مسائلی هستند که اساساً در حوزه مکانیک شکست محاسباتی تعریف می‌شوند. در این گونه مسائل یک روش عددی برای محاسبه کمیتهای مکانیک شکست در مسأله بکار گرفته می‌شود. در ادامه فصل مطالعات طبق دسته‌بندی فوق بررسی شده است.

۱-۳-۱- مطالعات تحلیلی و نیمه‌تحلیلی

در سال ۱۹۹۳، نودا[1] و جین[2] ضریب شدت تنش حرارتی[3] را برای ترکی در محیط بی‌نهایت از FGM محاسبه نمودند[۱۱]. در این بررسی فرض شد؛ سطوح ترک تحت شار حرارتی پایا قرار دارد. با استفاده از تبدیل فوریه حلی برای تابع تنش ایری و مولفه‌های تنش بدست آمد که با اعمال شرایط مرزی، مساله تبدیل به معادلات انتگرالی فردهلم[4] نوع دوم شد. حل این معادله انتگرالی با قسمت تکین[5] کرنل، میدان تنش در حوزه نوک ترک و نهایتا مقادیر ضریب شدت تنش و باز شدن ترک[6] را مشخص نمود. در سال ۱۹۹۴، جین و نودا مقادیر TSIF را برای یک محیط نیمه بی‌نهایت (نیم‌صفحه) FGM حاوی ترک لبه‌ای موازی با جهت گرادیان خواص بدست آوردند[۱۲]. در این مطالعه فرض شد، مرز نیم‌صفحه تحت شار حرارتی پایا قرار دارد و ترک خللی در توزیع دما وارد نمی‌کند. با اعمال شرایط مرزی و استفاده از تبدیل فوریه، روابط تنشهای صفحه‌ای به فرم معادلات انتگرالی در می‌آید که با درنظر گرفتن هسته تکین آنها و حل عددی، مقادیر TSIF بدست می‌آید. آنها همچنین با روش مذکور ترکی را در فصل مشترک دو نیم‌صفحه تحت بارگذاری حرارتی گذرا مطالعه نمودند[۱۳]. حل این مساله به روش قبل و در فضای لاپلاس انجام شد. در بررسیهای مذکور، وابستگی مقدار TSIF به گرادیان خواص ماده بخصوص مدول الاستیسیته و ضریب هدایت گرمایی نشان داده شد و انتخاب مناسب پارامترهای مربوط به خصوصیات مواد برای رسیدن به کمترین TSIF مورد توجه قرار گرفت. همچنین نرخ تغییرات TSIF نسبت به زمان بصورت افزایش ابتدایی و سپس کاهش سریع تا مقدار پایا نشان داده شد.

در سال ۱۹۹۶، جین و بترا[7] اثر غیرهمگنی مواد روی مقادیر TSIF برای یک باریکه[8] از جنس FGM را مطالعه کردند[۱۴]. در این بررسی، باریکه تحت شوک حرارتی بصورت کاهش دما

---

1 - Noda
2 - Jin
3 - Thermal Stress Intensity Factor (TSIF)
4 - Fredholm
5 - singular
6 - Crack Opening Displacement (COD)
7 - Batra
8 - layer/strip

روی یک مرز قرار گرفت. ترک روی همین مرز, عمود بر آن و موازی با جهت گرادیان خواص فرض شد. همچنین تغییر مدول برشی و تغییر ضریب هدایت گرمایی به شکل تابع نمایی در نظر گرفته شد. با نوشتن معادلات الاستیسیته صفحه‌ای و تقسیم کرنل به دو قسمت تکین و غیرتکین، مقادیر TSIF با حل عددی معادله انتگرالی تکین بدست آمد. نتایج این تحقیق نشان می‌دهد؛ مقادیر TSIF شدیدا تابع ضریب هدایت گرمایی می‌باشد. نعمت‌ا..[1] و نودا رفتار ترک را در یک نیم‌صفحه FGM بررسی نمودند. در این بررسی، تغییرات خصوصیات ماده بصورت تابع نمایی در جهت راستای ترک در نظرگرفته شد؛ بجز ضریب انبساط خطی که طبق این تابع در دو جهت[2] تغییر می‌کرد. در این مطالعات، نیم‌صفحه تحت بارگذاری حرارتی گذرا در یک جهت [۱۵و ۱۶] و دو جهت [۱۷] فرض شد. در این حالتها، معادلات الاستیسیته حاکم در حوزه نوک ترک بصورت معادلات انتگرالی تکین کوشی ظاهر می‌شود. با استفاده از تبدیل فوریه حل آنها به دست آمده و TSIF از آنها استخراج می‌شود. در نهایت اثر تغییر خواص FGM و نقش آنها به خصوص ضریب انبساط خطی در کاهش مقادیر TSIF بحث شده است.

وو[3] و اردگن[4] برای تغییرات SIF مود I در یک باریکه حاوی ترک لبه‌ای تحت بارگذاری حرارتی حرارتی پایا [۱۸] و مکانیکی [۱۹] حل تحلیلی ارائه کردند. آنها برای هر دو نوع بارگذاری با اعمال اصل برهم نهی مناسب و استفاده از تقارن، مساله را به نیم‌صفحه حاوی ترکی تبدیل نمودند که تنها نیروی خارجی وارد بر آن، به سطح ترک وارد می شود. مساله اخیر با روش اغتشاشی[5] به طور تحلیلی تحلیلی قابل حل است. در این روش ابتدا یک فرم کلی برای حل معادلات نویه[6] در نظر گرفته شد. سپس با جایگزینی این فرم کلی در این معادلات و برخی شرایط مرزی، تعدادی از پارامترهای آن مشخص شد. پس از آن، با محاسبه مولفه‌های تنش و اعمال شرایط مرزی باقیمانده، توزیع تنش

---

[1] - Nemat–Alla
[2] - bi-directional FGM
[3] - Wu
[4] - Erdogan
[5] - Perturbation
[6] - Navier

بصورت معادلات انتگرالی بدست آمد. عبارت توزیع تنش در حوزه نوک ترک با تقسیم کرنل و منظور کردن قسمت تکین آن در معادله انتگرالی حاصل شد. در نهایت با در نظر گرفتن سری چند جمله-ایهای چبیشف[1] نوع اول، حل معادله انتگرالی تکین مذکور و عبارت ضریب شدت تنش بدست آمد. حل ارائه شده توسط وو و اردگن به خاطر محدود بودن ابعاد هندسه در یک جهت قابل توجه است و حلهای عددی بسیاری با استفاده از آن ارزیابی شده است.

در سال ۲۰۰۸، نودا و گو[2] با استفاده از روش اغتشاشی و حل معادلات انتگرالی برای یک باریکه از جنس FGM که تحت شوک سرمایشی قرار داشت؛ ضریب شدت تنش را محاسبه نمودند [۲۰].

جین و پائولینو[3] با استفاده از مدل چند لایه‌ای ماده[4]، ضریب شدت تنش حرارتی را برای یک ترک لبه‌ای واقع بر یک باریکه از FGM بدست آوردند که تحت شوک حرارتی قرار داشت [۲۱]. مدل چندلایه‌ای یکی از روشهای مرسوم مدلسازی FGM برای تحلیل مسایل مختلف است که روابط مکانیک اجسام مرکب بر آن حاکم است. دقت نتایج این روش به تئوری مورد استفاده در مدلسازی و فرضیات چگونگی تغییر خواص در یک لایه بستگی دارد. در این بررسی، توزیع گذرای دما و تنشهای حرارتی با استفاده از مدل چندلایه‌ای محاسبه می‌شود. سپس مقادیر تنشهای حرارتی متناظر با زمانهای ابتدایی اعمال شوک با حدگیری در فضای لاپلاس بدست می‌آید. حل معادلات انتگرالی تکین در فضای فوریه منجر به محاسبه ضریب شدت تنش می‌شود. نتایج بدست آمده، به زمانهای ابتدایی شوک حرارتی و ترکهای با طول کم محدود می‌شود. علاوه بر این، در این تحقیق خصوصیات مکانیکی ماده همگن فرض شده است. از روش فوق ونگ[5] و همکارانش برای بررسی دو ترک در فصل مشترک یک لایه FGM با لایه‌های فلزی و سرامیکی و چند ترک موازی با مرز در یک باریکه FGM استفاده

---

1 - Chebyshev
2 - Guo
3 - Paulino
4 - multi-layered materials model
5 - Wang

کردند که تحت بارگذاری حرارتی گذرا قرار داشت [۲۲]. ونگ و نودا نیز دو ترک هم‌راستا و موازی مرز را در یک باریکه FGM مطالعه کردند [۲۳]. این باریکه FGM نیز به‌صورت چند لایه‌ای مدل شد و ضرایب شدت تنش با استفاده از حل عددی دستگاه معادلات انتگرالی حاصل بدست آمد. نودا و همکارانش یک باریکه FGM دارای تغییر خواص به شکل یک تابع پیوسته دلخواه و حاوی ترک عمود بر مرز را با استفاده از مدل چند لایه‌ای تحلیل کردند. آنها خواص هر لایه را به صورت همگن [۲۴] و یا دارای تغییرات نمایی [۲۵] در نظر گرفتند. بعلاوه فرض شد؛ باریکه تحت تغییر دمای یکنواخت قرار دارد. در هر دو مدل با استفاده از روش تبدیلات انتگرالی، تئوری باقیمانده‌ها و تئوری معادلات انتگرالی تکین، ضرایب شدت تنش محاسبه شد و نتایج حاصل با نتایج روش المان محدود مقایسه گردید.

۱-۳-۲- مطالعات عددی

مطالعات عددی را می‌توان به دو دسته کلی تقسیم نمود. یک دسته شامل بررسی پدیده‌های شکست در FGM است؛ که در آن, هدف اصلی اغلب مطالعه کیفیت شکست و تغییرات کیفی پارامترهای شکست می‌باشد. این مطالعات نوعا با استفاده از نرم‌افزارهای تجاری انجام می‌گیرد. در این مطالعات کارایی روش عددی در درجه دوم اهمیت قرار دارد و اغلب به جزئیات آن اشاره نمی‌شود. این مطالعات معمولاً با المانهای معمولی، مش‌بندی بسیار ریز و در محیط نرم‌افزارهای تجاری یا دانشگاهی انجام می‌گیرد. اما گروه دیگری از مطالعات با هدف توسعه یک روش برای محاسبه کمیت یا کمیتهای مکانیک شکست -و در چند مورد خاص ارائه روش جدیدی برای مدلسازی ترک (ناپیوستگی)- انجام شده‌اند. توسعه روشهای محاسبه کمیتهای مکانیک شکست برای FGM معمولاً منجر به توسعه نرم افزارهای دانشگاهی موجود تحلیل مکانیک شکست شده است که کاربرد آنها محدود به مواد همگن بود.

با استفاده از روش المان محدود، والترز[1] و همکارانش فرم ناحیه‌ای[2] انتگرال J را برای یک ترک سه‌بعدی سطحی در محیط FGM توسعه دادند[۲۶]. در این بررسی توزیع دما بصورت پایا فرض شد.

با استفاده از المانهای غنی شده[3]، ییلدیریم[4] و اردگن رفتار ترکی محیطی در فصل مشترک پوشش و هسته[5] و یا موازی با آن را مطالعه کردند که در حالت تقارن محوری[6] تحت کاهش دمای یکنواخت قرار داشت [۲۷]. در این شرایط، مقادیر ضرایب شدت تنش مود I و II برای فواصل مختلف ترک از فصل مشترک هسته و پوشش و پروفیلهای مختلف تابع توانی محاسبه شد.

ییلدریم و همکارانش با استفاده از روش المان محدود، ضریب شدت تنش مود I را برای یک ترک نیم‌بیضی در پوشش FGM بررسی و نتایج را با حلهای تحلیلی مکانیکی معادل موجود مقایسه کردند [۲۸]. در این تحقیق یک سطح پوشش‌دار حاوی ترک، تحت بارگذاری حرارتی گذرا بصورت کاهش دما از یک دمای معین و بار مکانیکی کرنش معین بطور جداگانه قرار گرفت و ضریب شدت تنش برای هر دو حالت با روش المان محدود در محیط ANSYS® محاسبه شد.

ییلدریم با استفاده از فرمولبندی المان محدود انتگرال ناحیه‌ای، رفتار ترک لبه‌ای در یک صفحه FGM تحت بارگذاری حرارتی پایا بصورت مود I را تحلیل نمود [۲۹]. در این مطالعه از المان مثلثی ایزوپارامتریک شامل ده گره (T10) در نرم‌افزار FRAC2D استفاده شد. وی همچنین یک سطح پوشش‌دار حاوی ترکهای پریودیک و تحت بار حرارتی گذرا را با همین روش بررسی کرد. طبق این گزارش، نتایج این روش با نتایج روش المان محدود غنی‌شده انطباق خوبی دارد.

دگ[7] نیز با استفاده از روش المان محدود و المان T10، ضرایب شدت تنش مود مختلط را برای یک صفحه FGM با ترکی عمود بر گرادیان خواص بدست آورد. در این بررسیها، بارگذاری

---

[1] - Walters
[2] - Equivalent Domain Integral-EDI
[3] - enriched element
[4] - Yildirim
[5] - substrate
[6] - axisymmetric
[7] - Dag

بصورت حرارتی گذرا و ماده بصورت ایزوتروپیک در نظر گرفته شد[۳۰]. همچنین وی با کاربرد انتگرال ناحیه‌ای ضریب شدت تنش گذرای مود I را برای یک ترک لبه‌ای در یک صفحه مستطیلی آزاد ارتوتروپیک FGM محاسبه نمود [۳۱].

چن[۱] با استفاده از دو روش معادلات انتگرالی و بدون‌المان گلرکین، ضرایب شدت تنش را برای ترکی در فصل مشترک هسته و پوشش محاسبه کرد. این سازه تحت بار حرارتی پایا قرار گرفت [۳۲].

در سال ۲۰۰۰، نودا و فوجیموتو[۲] رشد ترک در یک صفحه از جنس FGM تحت شوک حرارتی را مطالعه نمودند [۳۳]. در این بررسی، سطح سرامیکی صفحه تحت شوک حرارتی بصورت گرمایش یکنواخت پایا و سپس کاهش ناگهانی دما تا دمای اولیه قرار می‌گیرد. تحلیل با روش المان محدود و در محیط نرم‌افزار MSC-MARC انجام شده و زاویه رشد ترک با استفاده از معیار حداکثر تنش مماسی[۳] بدست آمده است. در مطالعه فوق از تنش T در محاسبه زاویه رشد ترک صرف نظر شده است. در سال ۲۰۰۱ آنها اثر متقابل دو ترک لبه‌ای تحت شوک حرارتی به شکل (۲-۳۴) را روی مسیر رشد یکدیگر بررسی نمودند [۳۴]. ضمن این مطالعات مشخص گردید، هنگامی که فاصله دو ترک از یکدیگر به حد کافی کم باشد؛ دو ترک روی مسیر یکدیگر اثر گذاشته و مسیر رشد یکدیگر را تغییر می‌دهند. برای اغلب فاصله‌های مورد بحث، دو ترک پس از مدتی موازی با مرز صفحه به رشد خود ادامه دادند. ضرایب شدت تنش در هر لحظه با استفاده از روش المان محدود محاسبه شده و برای تعیین جهت رشد ترک از معیار صفر بودن ضریب شدت تنش مود دوم در این راستا استفاده شده است. البته مطالعات آزمایشگاهی زیر نظر لمبروس در سال ۲۰۰۶ نشان می‌دهد که رشد ترک در FGM با این معیار تا حدی تطابق ندارد [۳۵].

---

[1] - Chen
[2] - Fujimoto
[3] - maximum hoop stress

۱-۴- نتیجه‌گیری

در مورد مطالعات انجام‌شده در زمینه مکانیک شکست حرارتی FGM ذکر چند نکته ضروری است. هر چند بررسی این مسائل با رویکرد تحلیلی منجر به نتایج ارزشمند و قابل اتکا می‌شود؛ اما حل تحلیلی و نیمه‌تحلیلی با محدودیتهایی مواجه است:

۱- بدلیل مشکلات اعمال شرایط مرزی مسأله الاستیسیته، این روش عموماً محدود به حل مسائل شامل محیطهای بی‌نهایت و نیمه بی‌نهایت شده است که در عمل کاربرد کمتری دارند.

۲- حل تحلیلی محدود به در نظر گرفتن تغییرات خصوصیات فیزیکی مواد بصورت توابع پیوسته *خاص* مثل تابع نمایی و همچنین ثابت در نظرگرفتن برخی خصوصیات مثل ضریب پواسون می‌گردد. کاربرد پروفیلهای پیوسته دیگر یا مدلهای میکرومکانیک و یا منظور کردن تغییر خصوصیات مواد مثل ضریب پواسون در این رهیافت با محدودیتهایی مواجه است.

۳- کمیت قابل محاسبه در این روش ضریب شدت تنش و بخصوص ضریب شدت تنش مود I می‌باشد. حل تنش T -بخصوص برای نواحی محدود- تاکنون گزارش نشده است.

در مطالعات عددی نیز در عمده کارهای انجام‌شده، سعی بر این بوده است که کمیتهای مکانیک شکست و خصوصاً انتگرال J با استفاده از مش‌بندی بسیار ریز در نوک ترک محاسبه شود که کاربرد آنرا برای قطعات پیچیده تقریباً غیرممکن می‌سازد. منظور کردن مش‌بندی بسیار ریز مستلزم بکار گرفتن امکانات نرم‌افزاری و سخت‌افزاری خاص می‌باشد. این مشکلات برای مسائل شامل شوک حرارتی -که شامل کمیتهای متغیر با زمان می‌باشد- جدی‌تر است.

۱-۵- موضوع پایان‌نامه

موضوع اصلی تحقیق حاضر، بررسی رفتار ترک در مواد مرکب تابعی بصورت محاسبه پارامترهای شکست (ضرایب شدت تنش و تنش T) با استفاده از روش بدون‌المان گلرکین می‌باشد. اهداف کلی بصورت زیر قابل بیان است.

- توسعه روش انتگرال برهم کنش -بعنوان یک ابزار کارآمد- برای محاسبه ضرایب شدت تنش مختلط و تنش T در مواد مرکب تابعی که تحت بارگذاری حرارتی قرار دارند.
- نشان دادن دقت و کارآمدی روش بدون‌المان گلرکین برای محاسبه پارامترهای شکست -با روشهای مختلف عددی- در پیوستارهای دو بعدی تحت بارگذاری مکانیکی و حرارتی.

۱-۶- ساختار پایان‌نامه

پایان‌نامه حاضر شامل هفت فصل می‌باشد؛ رئوس مطالب فصلهای بعد بشرح زیر است.

فصل دوم، شامل فرمولبندی روش بدون‌المان گلرکین برای میدانهای الاستیسیته و هدایت گرمایی و همچنین ملاحظات و جنبه‌های عددی کاربرد این روش است. در این فصل روش تجزیه مودی برای بدست آوردن میدان دمای گذرا بیان شده است و روابط مطرح شده، برای مثالهای مختلف با نتایج تحلیلی مقایسه شده است. فصل سوم شامل توسعه مکانیک شکست برای FGM، روشهای عددی محاسبه ضرایب شدت تنش و مدلسازی ترک در روش بدون‌المان گلرکین با روشهای کلاسیک و استفاده از مجموعه بردارهای مرتبه‌ای است. در انتها نیز کاربرد این روشها برای تحلیل ترک در صفحات دو بعدی و تحت بار مکانیکی در قالب چند مثال بررسی شده است. در فصل چهارم نتایج استفاده از روش انتگرال J و همبستگی تغییرمکانها برای محاسبه ضرایب شدت تنش در صفحات FGM تحت بار حرارتی گذرا آمده است. علاوه بر این، اثر گرادیان خصوصیات فیزیکی FGM روی تغییرات زمانی ضریب شدت تنش نیز بررسی شده است. در فصل پنجم روش انتگرال بر هم کنش برای محاسبه پارامترهای شکست حرارتی FGM توسعه یافته‌اند و ضرایب شدت تنش و تنش T با استفاده از این انتگرال بدست آمده‌اند.

در فصل ششم نیز نتیجه‌گیری مباحث مطرح‌شده و پیشنهادهایی برای ادامه تحقیق آمده است.

فصل دوم

روش بدون‌المان گلرکین

۲-۱- مقدمه

در روشهای بدون‌مش بر مبنای فرم ضعیف روی کل دامنه[1] غالباً از فـرم ضـعیف گلـرکین روی کل دامنه تعریف مساله[2] استفاده می‌شود که در آن، توابع شکل دارای ناحیه تکیه‌گاهی محدود بکـار می‌رود. Diffuse Element Method -DEM اولین روش بدون‌مش برمبنای فرم ضعیف روی کل دامنـه می‌باشد که در سال ۱۹۹۲ توسط نایرلس[3] و همکارانش معرفی شد[۳۶]. در DEM از تقریـب حـداقل مربعات متحرک برای ایجاد توابع شکل استفاده می‌شود. در این روش، فرم ضعیف گلـرکین روی کـل ناحیه تعریف مساله برای ساخت دستگاه معادلات گسسته بکار می‌رود.

در سال ۱۹۹۴, بلیچکو[4] و همکارانش روش بدون‌المان گلرکین[5] را ارائـه نمودنـد[۳۷]. در ایـن روش از تقریب حداقل مربعات متحرک در فرم ضعیف گلرکین برای ساخت دستگاه معـادلات جبـری (گسسته) استفاده می‌شود. در روش بدون‌المان گلرکین دامنه تعریف مساله با مجموعـه‌ای از گـره‌هـا بیان می‌شود که به طور مناسب در دامنه تعریف مساله توزیع شده‌اند. برای ساخت تابع شکل از تقریب حداقل مربعات متحرک استفاده می‌شود که در آن تعداد محدودی از گره‌های یک ناحیه مشخص بکار می‌روند. البته شبکه‌بندی زمینه نیز برای ارزیابی انتگرلهای ناشی از اعمال فرم ضعیف گلرکین باید در نظر گرفته شود.

گزارشهای بلیچکو و همکارانش نشان می‌دهد؛ در تحلیل مسائل مکانیـک جامـدات, روش EFG دقت مناسبی دارد[۳۷]و [۳۸] و براساس آزمونهای عددی، نرخ همگرایی بهتری نسبت به روش المان

---

[1] - meshfree global weak-form methods

[2] - global problem domain

[3] - Nayroles

[4] - Belytschko

[5] - Element Free Galerkin -EFG

محدود دارد[۳۷]. علاوه بر این، توزیع نامنظم گره‌ها اثری روی کارکرد روش EFG ندارد[۳۷]. در حال حاضر، کاربرد روش EFG نسبتا گسترده شده است و برای تحلیل مسائل مختلفی در حوزه‌ی مهندسی مکانیک استفاده می‌شود که می‌توان به برخی موارد اشاره نمود.

۱- مسائل مختلف الاستیک خطی و غیرخطی در دو و سه بعد[۳۷]و [۳۹-۴۲].

۲- مسائل مکانیک شکست و رشد ترک[۴۳-۴۶].

۳- تحلیل سازه‌های ورق و پوسته[۴۷-۴۹].

۴- تحلیل سازه‌های شامل پیزوالکتریک[۱][۵۰].

روش EFG قابلیت کوپل شدن با روشهای عددی دیگر را دارد تا از قابلیتها و مزایای این روشـها نیز در تحلیل مسائل استفاده شود. روشهای کوپل EFG با روش المان محدود در [۵۱] و [۵۲] و کوپل با روش المانهای مرزی[۲] در [۵۳-۵۵] مطرح شده است. گسترش سریع و متداول شدن کـاربرد روش EFG در مسائل مختلف مکانیک نشان می‌دهد؛ در حوزه‌ی مکانیک محاسباتی این روش بتدریج به یک رهیافت قابل اعتنا و از نظر محاسباتی موثر تبدیل شده است. این ویژگـی بخـاطر اسـتفاده از تقریـب MLS و فرایند باقیمانده وزنی گلرکین است. تقریـب MLS باعـث پایـداری در تقریـب تـابع مطلـوب و استفاده از فرایند باقیمانده وزنی گلرکین منجر به ایجاد دستگاه معادلات گسسته پایدار و خوش‌رفتـار برای کل سیستم می‌شود. علی‌رغم توسعه این روش هنوز مسائل بسیاری وجود دارد که نیاز به بررسی و بهبود دارد.

۲-۲- فرمولبندی و گسسته‌سازی معادلات در روش EFG

[1] - piezoelectric

[2] - Boundary Element Methods-BEM

معادله دیفرانسیل حاکم و شرایط مرزی یک مسئله دوبعدی الاستیستیه خطی بصورت زیر است:

معادله دیفرانسیل تعادل:

$$\boldsymbol{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{b} = 0 \qquad \text{in } \Omega \tag{۱-۲}$$

شرایط مرزی طبیعی

$$\boldsymbol{\sigma n} = \bar{\boldsymbol{t}} \qquad \text{on } \Gamma_t \tag{۲-۲}$$

شرایط مرزی اساسی

$$\boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{u}} \quad \Gamma_u \quad \text{on} \tag{۳-۲}$$

که در معادله فوق و شرایط مرزی، L عملگر دیفرانسیلی بصورت زیر است.

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{۴-۲}$$

σ: تانسور تنش است.

u : بردار تغییرمکان یا جابجایی با مولفه‌های u وv است {u v}=**u.**

b : بردار نیروهای کالبدی با مولفه‌های b_x و b_y است$\{b_x;b_y\}$=**b.**

$\bar{\mathbf{t}}$: بردار تنش معلوم روی قسمتی مشخص از مرز مساله (مرز طبیعی) است.

$\bar{\mathbf{u}}$: تغییرمکان معلوم روی قسمتی مشخص از مرز مساله (مرز اصلی) است.

n: بردار یکه و عمود رو به خارج در بخشی از مرز مساله است

فرم استاندارد تغییراتی یا ضعیف معادله‌ی تعادل(۲-۱) بصورت زیر است:

$$\int_{\Omega}(\boldsymbol{L}\delta\boldsymbol{u})^T(\boldsymbol{DLu})d\Omega - \int_{\Omega}\delta\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{b}d\Omega - \int_{\Gamma_t}\delta\boldsymbol{u}^T\bar{\boldsymbol{t}}d\Gamma = 0 \qquad (۲\text{-}۵)$$

که در آن، D ماتریس الاستیک برای حالت تنش صفحه‌ای با فرم زیر

$$D = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \qquad (۲\text{-}۶)$$

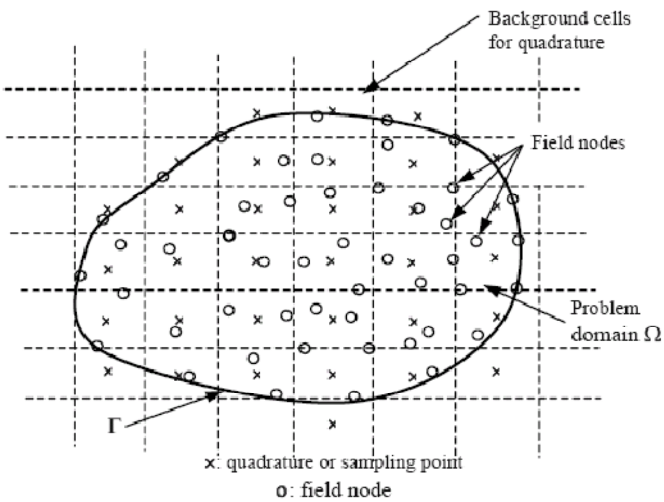
و برای حالت کرنش صفحه‌ای با فرم

$$D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \qquad (۲\text{-}۷)$$

است.

معادله (۲-۵) فرم ضعیفی است که روی کل ناحیه حل Ω تعریف شده است. برای محاسبه‌ی انتگرالهای رابطه (۲-۵) ناحیه‌ی حل مسئله Ω به مجموعه‌ای از المانها یا سلولهای زمینه[1] شکسته می‌شود که هم‌پوشانی ندارند (مطابق شکل(۲-۱)). برای محاسبه انتگرالها روی شرایط مرزی طبیعی Γ_t نیز مجموعه‌ای از المانهای منحنی (برای مسئله دوبعدی) بکار می‌رود. این المانهای منحنی نیز مانند شبکه داخلی هم‌پوشانی ندارند.

[1] - background cells



شکل ۲-۱- شبکه‌بندی زمینه در روشهای بدون‌مش روی کل ناحیه. نمایش ناحیه حل با گره‌ها و استفاده از شبکه‌بندی زمینه [۱۰]

از این پس، برای تقریب متغیر میدان -در اینجا تغییرمکان- ناحیه حل مساله با مجموعه‌ی مناسبی از گره‌ها نمایش داده می‌شود. این گره‌ها به ترتیب از ۱ تا N برای کل ناحیه حل شماره‌گذاری می‌شوند. برای تخمین تغییرمکانها در هر نقطه از ناحیه حل از توابع شکل MLS و تغییرمکان گره‌های موجود در ناحیه تکیه‌گاهی نقطه مورد نظر استفاده می‌شود.

$$\boldsymbol{u}^h_{2*1}=\begin{Bmatrix}u\\v\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\phi_1&0&\cdots&\phi_n&0\\0&\phi_1&\cdots&0&\phi_n\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\v_1\\\vdots\\u_n\\v_n\end{Bmatrix}=\boldsymbol{\Phi}_{(2*2n)}\boldsymbol{u}_{(2n*1)} \qquad (۸-۲)$$

که در آن، $\boldsymbol{\Phi}$ ماتریس تابع شکل, n تعداد گره‌های موجود در ناحیه تکیه‌گاهی و **u** بردار تغییرمکانها در گره‌های ناحیه تکیه‌گاهی است. معادله (۲-۸) را بصورت مجموعی از مشخصه‌های گرهی نیز می توان نوشت.

$$\mathbf{u}^h_{(2*1)}=\sum_I^n\begin{bmatrix}\phi_1&0\\0&\phi_1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\v_1\end{Bmatrix}=\sum_I^n\mathbf{\Phi}_I\mathbf{u}_I \qquad (۹-۲)$$

در این رابطه، $\boldsymbol{\Phi}_I$ ماتریس توابع شکل گره Iام و $\mathbf{u}_I$ بردار تغییرمکان گرهی است. در رابطـه (۲-۹)، $\mathbf{u}^h$ بردار تغییرمکانی است که برای نقطه مورد نظر تخمین زده شده است. این نقطه می‌توانـد یـک نقطـه دلخواه از ناحیه حل و یا یک نقطه انتگرالگیری گوسی باشد. فرم وردشی معادلـه (۲-۹) بصـورت زیـر است:

$$\delta \boldsymbol{u}^h_{(2*1)} = \sum_I^n \boldsymbol{\Phi}_I \delta \boldsymbol{u}_I \qquad (۲\text{-}۱۰)$$

مولفه‌های کرنش با استفاده از تغییرمکانهای تخمینی بصورت زیر تقریب زده می‌شوند:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_{(3*1)} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{u}^h &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \cdots & \phi_n & 0 \\ 0 & \phi_1 & \cdots & 0 & \phi_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & 0 & \cdots & \frac{\partial \phi_n}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \phi_1}{\partial y} & \cdots & 0 & \frac{\partial \phi_n}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial \phi_n}{\partial y} & \frac{\partial \phi_n}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \end{Bmatrix} = \boldsymbol{B}_{(3*2n)} \boldsymbol{u}_{(2n*1)} \\ &= \sum_I^n \boldsymbol{B}_I \boldsymbol{u}_I \end{aligned} \qquad (۲\text{-}۱۱)$$

که در آن، **B** ماتریس کرنش و $\mathbf{B}_I$ ماتریس کرنش در گرهIام است. بطور مشابه، فرم وردشـی کـرنش بـا توجه به رابطه (۲-۱۱) بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\boldsymbol{L}\delta \boldsymbol{u}^h = \boldsymbol{L}_{(3*2)} \boldsymbol{\Phi}_{(2*2n)} \delta \boldsymbol{u}_{(2n*1)} = \boldsymbol{B}_{(3*2n)} \delta \boldsymbol{u}_{(2n*1)} = \sum_I^n (\boldsymbol{B}_I)_{(3*2)} (\boldsymbol{u}_I)_{(2*1)} \qquad (۲\text{-}۱۲)$$

.با استفاده از روابط ساختاری[1] بردار تنش در هر نقطه از ناحیه حل بصورت زیر قابل محاسبه است.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_{(3*3)}\mathbf{B}_{((3*2n)}\mathbf{u}_{((2n*1)} = \sum_{I}^{n}\mathbf{D}_{(3*3)}(\mathbf{B}_I)_{(3*2)}(\mathbf{u}_I)_{(2*1)} \qquad (۱۳\text{-}۲)$$

با در نظر گرفتن روابط (۲-۱۱)و (۲-۱۲)، عبارت اول رابطه‌ی (۲-۵) بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}(\boldsymbol{L}\delta\boldsymbol{u})^T(\boldsymbol{DLu})d\Omega &= \int_{\Omega}(\sum_{I}^{n}\boldsymbol{B}_I\delta\boldsymbol{u}_I)^T(\sum_{J}^{n}\boldsymbol{DB}_J\boldsymbol{u}_J)d\Omega \\ &= \int_{\Omega}\sum_{I}^{n}\sum_{J}^{n}\delta\boldsymbol{u}_I^T[\boldsymbol{B}_I^T\boldsymbol{DB}_J]\boldsymbol{u}_J d\Omega\end{aligned} \qquad (۱۴\text{-}۲)$$

تا این مرحله، گره‌ها در ناحیه محلی تکیه‌گاهی شماره‌گذاری می‌شوند و Iو J شماره‌های محلی گره‌ها هستند. از این پس، شماره‌گذاری گره‌ها از سیستمهای محلی به شماره‌گذاری آنها در سیستم کل تغییر می‌کند. در سیستم کل تمام گره‌های مساله دارای یک شماره واحد از ۱تا N می‌باشند. بنابراین در رابطه (۲-۱۴) شماره گره‌های I و J می‌تواند از ۱ تا N تغییر کند. اگر Iو J در یک ناحیه تکیه‌گاهی واحد قرار نداشته باشند؛ عبارت داخل انتگرال رابطه‌ی (۲-۱۴) و در نتیجه مقدار انتگرال صفر می‌شود. با در نظر گرفتن شماره‌گذاری در کل سیستم رابطه (۲-۱۴) بصورت زیر بیان می‌شود.

$$\int_{\Omega}(\mathbf{L}\delta\mathbf{u})^T(\mathbf{DLu})d\Omega = \int_{\Omega}\sum_{I}^{N}\sum_{J}^{N}\delta\mathbf{u}_I^T[\mathbf{B}_I^T\mathbf{DB}_J]\mathbf{u}_J d\Omega \qquad (۱۵\text{-}۲)$$

می‌توان عملگر انتگرالگیری را به داخل عملگرهای جمع بصورت زیر منتقل نمود.

$$\int_{\Omega}(\mathbf{L}\delta\mathbf{u})^T(\mathbf{DLu})d\Omega = \sum_{I}^{N}\sum_{J}^{N}\delta\mathbf{u}_I^T(\int_{\Omega}\mathbf{B}_I^T\mathbf{DB}_J d\Omega)\mathbf{u}_J \qquad (۱۶\text{-}۲)$$

طبق این رابطه، ماتریس ۲×۲ سختی گرهی[2] بصورت زیر تعریف می‌شود:

---

[1] - constitutive equations

[2] - nodal stiffness matrix

$$\mathbf{K}_{IJ} = \int_{\Omega} (\mathbf{B}_I^T)_{2*3} \mathbf{D}_{3*3} (\mathbf{B}_J)_{3*2} d\Omega \qquad (۱۷\text{-}۲)$$

البته اگر گره‌های I و J، هر دو در ناحیه تکیه‌گاهی یک نقطه انتگرالگیری گوسی قرار نداشته باشند؛ مقدار K_{IJ} صفر است. با در نظر گرفتن تعریف فوق، رابطه (۲-۱۶) بصورت زیر بیان می‌شود.

$$\int_{\Omega} (\mathbf{L}\delta\mathbf{u})^T (\mathbf{DLu}) d\Omega = \sum_{I}^{N} \sum_{J}^{N} \delta\mathbf{u}_I^T \mathbf{K}_{IJ} \mathbf{u}_J \qquad (۱۸\text{-}۲)$$

عملگرهای جمع در رابطه بالا، فرآیند مونتاژ را انجام می‌دهند. بسط عبارت سمت راست در رابطه (۲-۱۸) فرایند مونتاژ را نشان می‌دهد. در نهایت، فرم معادله (۲-۱۶) بصورت زیر بدست می‌آید.

$$\begin{aligned}
\sum_{i}^{n} \sum_{J}^{N} \delta\boldsymbol{u}_I^T \boldsymbol{K}_{IJ} \boldsymbol{u}_J = & \delta\boldsymbol{u}_1^T \boldsymbol{K}_{11} \boldsymbol{u}_1 + \delta\boldsymbol{u}_1^T \boldsymbol{K}_{12} \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \delta\boldsymbol{u}_1^T \boldsymbol{K}_{1N} \boldsymbol{u}_N \\
& + \delta\boldsymbol{u}_2^T \boldsymbol{K}_{21} \boldsymbol{u}_1 + \delta\boldsymbol{u}_2^T \boldsymbol{K}_{22} \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \delta\boldsymbol{u}_2^T \boldsymbol{K}_{2N} \boldsymbol{u}_N \\
& \vdots \\
& + \delta\boldsymbol{u}_1^T \boldsymbol{K}_{1N} \boldsymbol{u}_N + \delta\boldsymbol{u}_2^T \boldsymbol{K}_{2N} \boldsymbol{u}_N + \cdots + \delta\boldsymbol{u}_N^T \boldsymbol{K}_{NN} \boldsymbol{u}_N
\end{aligned} \qquad (۱۹\text{-}۲)$$

که در آن، **K** ماتریس سختی کل سیستم است. با توجه به ۲×۲ بودن ماتریس سختی گرهی و تعداد گره‌های کل مساله،N، بعد ماتریس سختی کل برابر 2N×2N می‌باشد.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \cdots & \mathbf{K}_{1N} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & \cdots & \mathbf{K}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{K}_{N1} & \mathbf{K}_{N2} & \cdots & \mathbf{K}_{NN} \end{bmatrix} \qquad (۲۰\text{-}۲)$$

با در نظر گرفتن روابط فوق، فرم نهایی رابطه (۲-۱۶) بصورت زیر است.

$$\int_{\Omega} (\mathbf{L}\delta\mathbf{u})^T (\mathbf{DLu}) d\Omega = \delta\mathbf{U}^T \mathbf{KU} \qquad (۲۱\text{-}۲)$$

در این رابطه، بردار U بردار تغییرمکان کل سیستم است و شامل تغییرمکانهای گرهی تمام گره‌های مساله می‌باشد. بردار U، 2N مولفه دارد.

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_N \\ v_N \end{Bmatrix} \qquad (۲-۲۲)$$

عبارت دوم معادله (۲-۴) با جایگزینی راطه (۲-۹) و استفاده از فرایندی مشابه فرایند ماتریس سختی, بصورت زیر نمایش داده می‌شود.

$$\int_\Omega (\delta\mathbf{u})^T \mathbf{b} d\Omega = \int_\Omega (\delta \sum_I^n \mathbf{\Phi}_I \mathbf{u}_I)^T \mathbf{b} d\Omega \qquad (۲-۲۳)$$

عبارت فوق با تغییر سیستم شماره‌گذاری محلی به سیستم شماره‌گذاری کل بصورت زیر نمایش داده می‌شود.

$$\int_\Omega (\delta\mathbf{u})^T \mathbf{b} d\Omega = \int_\Omega (\delta \sum_I^N \mathbf{\Phi}_I \mathbf{u}_I)^T \mathbf{b} d\Omega \qquad (۲-۲۴)$$

با انتقال عملگر انتگرالگیری به داخل عملگر جمع، رابطه (۲-۲۴) بصورت زیر نوشته می‌شود.

$$\int_\Omega (\delta \boldsymbol{u})^T \boldsymbol{b} d\Omega = \sum_I^N \delta \boldsymbol{u}_I^T \int_\Omega \boldsymbol{\Phi}_I^T \boldsymbol{b} d\Omega \qquad (۲-۲۵)$$

بردار نیروی کالبدی گرهی $\boldsymbol{F}_I^{(b)}$ بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\boldsymbol{F}_I^b = \int_\Omega \boldsymbol{\Phi}_I^T \boldsymbol{b} d\Omega \qquad (۲-۲۶)$$

که در آن، **b** بردار نیروی کالبدی است. بسط عبارت سمت راست رابطه (۲-۲۵) فرم ماتریسی آنرا بصورت زیر نمایش می‌دهد.

$$\begin{aligned}\sum_{I}^{N}\delta\boldsymbol{u}_I^T\int_{\Omega}\boldsymbol{\Phi}_I^T\boldsymbol{b}d\Omega &= \sum_{I}^{N}\delta\boldsymbol{u}_I^T\boldsymbol{F}_I^b \\ &= \delta\boldsymbol{u}_1^T\boldsymbol{F}_1^b + \delta\boldsymbol{u}_2^T\boldsymbol{F}_2^b + \cdots + \delta\boldsymbol{u}_N^T\boldsymbol{F}_N^b \\ &= \left\{\delta\boldsymbol{u}_1^T \quad \cdots \quad \delta\boldsymbol{u}_N^T\right\}_{(1*2N)}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{F}_1^b\\ \vdots \\ \boldsymbol{F}_N^b\end{Bmatrix}_{(2N*1)} \\ &= \delta\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{F}^b\end{aligned} \qquad (۲-۲۷)$$

در عبارت فوق، $\mathbf{F}^{(b)}$ بردار نیروی کالبدی کل است که با مونتاژ بردارهای نیروی کالبدی گرهی بصورت زیر بدست می‌آید.

$$\mathbf{F}^b = \begin{Bmatrix}\mathbf{F}_1^b\\ \mathbf{F}_2^b\\ \vdots \\ \mathbf{F}_N^b\end{Bmatrix}_{(2N*1)} \qquad (۲-۲۸)$$

عبارت آخر معادله‌ی (۲-۴) با فرآیندی دقیقاً شبیه نیروی کالبدی -روابط (۲-۲۳) تا (۲-۲۷)- بصورت زیر قابل بیان است. این عبارتها برای نیروهای خارجی محاسبه می‌شود و انتگرالگیری ناحیه‌ای با انتگرالگیری روی مرزهای طبیعی جایگزین می‌شود.

$$\int_{\Gamma_t}(\delta\boldsymbol{u})^T\bar{t}d\Gamma = \sum_{I}^{n}\delta\boldsymbol{u}_I^T\int_{\Gamma_t}\boldsymbol{\Phi}_I^T\bar{\boldsymbol{t}}d\Gamma = \delta\boldsymbol{U}^T\sum_{I}^{N}\int_{\Gamma_t}\boldsymbol{\Phi}_I^T\bar{\boldsymbol{t}}d\Gamma = \delta\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{F}^{(t)} \qquad (۲-۲۹)$$

بردار نیروی خارجی گرهی[۱] $\mathbf{F}_I^{(t)}$ بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mathbf{F}_I^{(t)} = \int_{\Gamma_t}\mathbf{\Phi}_I^T\bar{\mathbf{t}}d\Gamma \qquad (۲-۳۰)$$

در معادله (۲-۲۹). $\mathbf{F}^{(t)}$ بردار نیروی خارجی کل است که با مونتاژ نیروهای خارجی گرهی $\mathbf{F}_I^{(t)}$ بدست می‌آید.

[1] - nodal traction force

$$\mathbf{F}^{t} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1^t \\ \mathbf{F}_2^t \\ \vdots \\ \mathbf{F}_N^t \end{Bmatrix}_{(2N*1)} \qquad (۳۱-۲)$$

با جایگزینی روابط (۲-۲۱)،(۲-۲۷)و(۲-۲۹) در معادله (۲-۴)، رابطه‌ی زیر بدست می‌آید.

$$\delta\mathbf{U}^{T}\mathbf{K}\mathbf{U} - \delta\mathbf{U}^{T}\mathbf{F}^{(b)} - \delta\mathbf{U}^{T}\mathbf{F}^{(t)} = 0 \qquad (۳۲-۲)$$

چون مقدار $\delta\mathbf{U}$ اختیاری است؛ معادله بالا هنگامی برقرار می‌شود که:

$$\mathbf{K}\mathbf{U} - \mathbf{F}^{(b)} - \mathbf{F}^{(t)} = 0 \qquad (۳۳-۲)$$

یا

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}^{(b)} + \mathbf{F}^{(t)} \qquad (۳۴-۲)$$

معادله فوق را می‌توان بصورت زیر نمایش داد.

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \qquad (۳۴-۲)$$

که در آن، **F** بردار نیروی کل است و بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^{(b)} + \mathbf{F}^{(t)} \qquad (۳۵-۲)$$

رابطه‌ی (۲-۳۴) شکل نهایی معادلات گسسته سیستم در روشهای بدون‌مش روی کل ناحیه حل است. پس از اعمال شرایط مرزی اساسی, حل معادله(۲-۳۴) تغییرمکانهای گرهی را می‌دهد. پس از محاسبه تغییرمکانهای گرهی یا پارامترهای گرهی، با استفاده از روابط (۲-۱۱)و (۲-۱۳) می‌توان مولفه‌های کرنش و تنش را بدست آورد.

۲-۳- ملاحظات عددی

۲-۳-۱- انتگرالگیری عددی

در بخش قبل, تمام انتگرالگیریها روی کل ناحیه حل Ω و یا مرز ناحیه برای نیروی خارجی، Γ_t انجام شد. برای محاسبه انتگرالهای مذکور، کل ناحیه حل Ω به مجموعه‌ی مناسبی از سلولهای زمینه شکسته می‌شود (مطابق شکل(۲-۱)). با این فرض، انتگرال روی ناحیه بصورت مجموعه‌ای از انتگرالها روی سلولهای زمینه بیان می‌شود.

$$\int_{\Omega} \mathbf{G} d\Omega = \sum_{k}^{n_c} \int_{\Omega_k} \mathbf{G} d\Omega \qquad (۲-۳۶)$$

که در آن، n_c تعداد سلولهای شبکه‌بندی زمینه و Ω_k ناحیه انتگرالگیری سلول kام است. برای انتگرالگیری عددی روی این سلولها از روش گوس-لژاندر[۱] استفاده می‌شود که معمولاً در روش المان محدود کاربرد دارد. اگر n_g تعداد نقاط گوسی باشد که در هر سلول در نظر گرفته می‌شود؛ معادله‌ی (۲-۳۴) بصورت زیر قابل نمایش است:

$$\int_{\Omega} \mathbf{G} d\Omega = \sum_{k}^{n_c} \int_{\Omega_k} \mathbf{G} d\Omega = \sum_{k}^{n_c} \sum_{i=1}^{n_g} \hat{w}_i \mathbf{G}(\mathbf{x}_{Qi}) \left| \mathbf{J}_{ik}^{D} \right| \qquad (۲-۳۷)$$

در این رابطه، $\hat{w}_i$ فاکتور وزندار گوسی مربوط به نقطه گوسی iام ($\mathbf{x}_{Qi}$) و J ماتریس ژاکوبین ناحیه انتگرالگیری سلول kام است که نقطه گوسی $\mathbf{x}_{Qi}$ در آن واقع شده است. بطور مشابه، انتگرالگیری عددی روی منحنی نیز با استفاده از روش گوس-لژاندر انجام می شود.

$$\int_{\Omega} \mathbf{G} d\Omega = \sum_{l}^{n_c} \int_{\Gamma_l} \mathbf{G} d\Gamma = \sum_{l}^{n_{ct}} \sum_{i=1}^{n_{gt}} \hat{w}_i \mathbf{G}(\mathbf{x}_{Qi}) \left| \mathbf{J}_{il}^{B} \right| \qquad (۲-۳۸)$$

[1] - Gauss-Legendre quadrature

در این عبارت، $\hat{w}_i$ ضریب وزندار گوسی مربوط به نقطه گوسی iام و J ماتریس ژاکوبین انتگرال روی مسیر جزء منحنی lام برای نقطه گوسی $\mathbf{x}_{Qi}$ و n_{ct} تعداد سلولهای منحنی (جزء منحنی) است که از شکستن مرز طبیعی Γ_t بدست می‌آید و n_{gt} تعداد نقاط گوسی است که برای هر جزء منحنی در نظر گرفته می‌شود. برای محاسبه ماتریس سختی گرهی $\mathbf{K}_{IJ}$ بطور عددی, از رابطه‌ی انتگرالگیری عددی بصورت زیر استفاده می‌شود.

$$\mathbf{K}_{IJ} == \sum_{k}^{n_c} \sum_{i=1}^{n_g} \hat{w}_i \mathbf{B}_I^T(\mathbf{x}_{Qi}) \mathbf{D} \mathbf{B}_J(\mathbf{x}_{Qi}) \left|\mathbf{J}_{ik}^D\right| = \sum_{k}^{n_c} \sum_{i=1}^{n_g} (\mathbf{K}_{IJ}^{ik})_{(2*2)} \qquad (۲-۳۹)$$

با توجه به رابطه بالا، $\mathbf{K}_{IJ}^{ik}$ با عبارت زیر تعریف می‌شود.

$$\mathbf{K}_{IJ}^{ik} = \hat{w}_i \mathbf{B}_I^T(\mathbf{x}_{Qi}) \mathbf{D} \mathbf{B}_J(\mathbf{x}_{Qi}) \left|\mathbf{J}_{ik}^D\right| \qquad (۲-۴۰)$$

در رابطه (۲-۴۰)، $\mathbf{K}_{IJ}^{ik}$ یک ماتریس ۲×۲ است. طبق معادله (۲-۳۹)، ماتریس گرهی $\mathbf{K}_{IJ}$ از مجموع سهم تمام نقاط گوسی حاصل می‌شود که ناحیه تکیه‌گاهی محلی آنها شامل گرهای I و J می‌باشد. اگر گره I یا گره J در ناحیه تکیه‌گاهی محلی نقطه گوسی،$\mathbf{x}_{Qi}$ نباشد؛ مقدار $\mathbf{K}_{IJ}^{ik}$ صفر است.

بطور مشابه، مقدار بردار نیروی کالبدی گرهی $\mathbf{F}_I^{(b)}$ (رابطه(۲-۲۶)) بصورت زیر قابل محاسبه است.

$$\mathbf{F}_I^{(b)} == \sum_{k}^{n_c} \sum_{i=1}^{n_g} \hat{w}_i \mathbf{\Phi}_I^T(\mathbf{x}_{Qi}) \mathbf{b}(\mathbf{x}_{Qi}) \left|\mathbf{J}_{ik}^D\right| = \sum_{k}^{n_c} \sum_{i=1}^{n_g} \mathbf{F}_I^{ik(b)} \qquad (۲-۴۱)$$

که در آن، $\mathbf{F}_I^{ik(b)}$ دارای ۲ مولفه است و به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$\mathbf{F}_I^{ik(b)} = \hat{w}_i \mathbf{\Phi}_I^T(\mathbf{x}_{Qi}) \mathbf{b}_I(\mathbf{x}_{Qi}) \left|\mathbf{J}_{ik}^D\right| \qquad (۲-۴۲)$$

بردار نیروی خارجی گرهی $\mathbf{F}_I^{(t)}$ (رابطه(۲-۳۰)) نیز با انتگرالگیری عددی محاسبه می‌شود.

$$\mathbf{F}_I^{(t)} == \sum_{l}^{n_{ct}} \sum_{i=1}^{n_{gt}} \hat{w}_i \mathbf{\Phi}_I^T(\mathbf{x}_{Qi}) \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}_{Qi}) \left|\mathbf{J}_{il}^B\right| = \sum_{l}^{n_{ct}} \sum_{i=1}^{n_{gt}} \mathbf{F}_I^{il(t)} \qquad (۲-۴۳)$$

در این عبارت، $\mathbf{F}_I^{ik(t)}$ دو مولفه دارد و بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mathbf{F}_I^{ik(t)} = \hat{w}_i \mathbf{\Phi}_I^T(\mathbf{x}_{Qi})\mathbf{b}_I(\mathbf{x}_{Qi})\left|\mathbf{J}_{ik}^D\right| \tag{۴۴-۲}$$

در روشهای فرم ضعیف بدون‌مش که روی کل ناحیه تعریف می‌شوند؛ ماتریسها بر اساس نقاط گوسی مونتاژ می‌شوند. هر نقطه گوسی دارای ناحیه تکیه‌گاهی مخصوص بخود است و نقاط گوسی متفاوت دارای نواحی تکیه‌گاهی متفاوتی هستند و ممکن است گره‌های موجود در ناحیه تکیه‌گاهی دو نقطه گوسی یک سلول، یکسان نباشد. این بدین معناست که ماتریس تابع شکل $\mathbf{\Phi}$ و ماتریس کرنش **B** ممکن است برای نقاط گوسی مختلف، مقادیر متفاوتی داشته باشند. این موضوع در روش المان محدود شکل دیگری دارد. در روش المان محدود برای تمام نقاط گوسی یک المان از گره‌های یکسانی (گره‌های المان مورد نظر) برای انجام میانیابی استفاده می‌شود.

انتگرالگیری عددی در روشهای فرم ضعیف بدون‌مش، یکی از موضوعات مورد توجه می‌باشد و تحقیقات وسیعی در این زمینه انجام شده است[۵۷-۵۹]. از مطالعات اخیر دو نتیجه مهم قابل ذکر است:

۱- برای مسائل دوبعدی، تعداد نقاط گوسی که برای کل ناحیه در نظر گرفته می‌شود، n_Q باید حداقل۲/۳ تعداد گره‌های ناحیه حل N باشد[۶۰]. شرط فوق، یک شرط لازم است و لزوماً کافی نمی‌باشد

۲- انتخاب مناسب تعداد نقاط گوسی روی جنبه‌های عددی مساله مثل دقت و همگرایی موثر است. این موضوع با استفاده از مسائل مبنا بررسی شده است. طبق این بررسی‌ها در مسائل دوبعدی محدوده‌ای برای تعداد مناسب نقاط گوسی با توجه به تعداد گره‌های مساله ارائه شده است.

۲-۳-۲-خصوصیات ماتریس سختی

چون ماتریس خصوصیات ماده، D، متقارن است؛ می‌توان نوشت:

$$(\mathbf{B}_I^T \mathbf{D} \mathbf{B}_J)^T = \mathbf{B}_J^T \mathbf{D} \mathbf{B}_I \qquad (۴۳-۲)$$

رابطه‌ی فوق نشان می‌دهد؛ ماتریس سختی کل متقارن است.

$$\mathbf{K}_{IJ}^T = \mathbf{K}_{IJ} \qquad (۴۴-۲)$$

ماتریس سختی کل با مونتاژ ماتریسهای متناظر گرهی بدست می‌آید. در این ماتریس، اگر حداقل یک نقطه گوسی وجود نداشته باشد که گره‌های I وJ در ناحیه تکیه‌گاهی آن قرار داشته باشند؛ $K_{IJ} \neq 0$. بعبارت دیگر، اگر گره‌های I و J بقدری از هم فاصله داشته باشند که در ناحیه تکیه‌گاهی هیچ نقطه گوسی مساله قرار نگیرند؛ $K_{IJ} = 0$. از آنجایی که ناحیه تکیه‌گاهی در نظر گرفته شده برای نقاط، محدود است و فضای وسیعی از ناحیه حل را در بر نمی‌گیرد؛ برای بسیاری از گره‌ها $K_{IJ} = 0$ که باعث می‌شود ماتریس سختی کل **K** دارای درایه‌های صفر متعددی باشد (sparse باشد). اگر گره‌ها بطور مناسب شماره‌گذاری شوند؛ ماتریس سختی کل **K** باندار نیز خواهد بود.

۲-۴- فرمولبندی مسائل الاستیسیته در روش بدون المان گلرکین مقید[1]

۲-۳-۱- فرمولبندی روابط EFG

یک مساله دوبعدی مکانیک جامدات در ناحیه Ωو محصور به مرز Γ درنظر گرفته می‌شود. فرم قوی[2] معادلات حاکم در روابط (۲-۱) تا (۲-۴) آمده است. در روش بدون المان گلرکین برای ساخت توابع شکل ، از تقریب حداقل مربعات متحرک (MLS) استفاده می‌شود. چون تقریب MLS فاقد خاصیت

---

[1] - Constrained-EFG

[2] - strong form

تابع دلتای کرونکر است؛ برای اعمال شرایط مـرزی اساسـی در فـرم ضـعیف، از روش گلـرگین مقیـد بصورت زیر استفاده می‌شود:

$$\int_{\Omega} \delta(\boldsymbol{Lu})^T \boldsymbol{D}(\boldsymbol{Lu})d\Omega - \int_{\Omega} \delta\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{b} d\Omega - \int_{\Gamma} \delta\boldsymbol{u}^T \bar{\boldsymbol{t}} d\Gamma - \delta W_u = 0 \qquad (۴۵\text{-}۲)$$

که در آن، عبارت آخر بمنظور اعمال شرایط مرزی اساسی در نظر گرفته شده است. روشهای مختلفی برای اعمال شرایط مرزی اساسی بکار برده شده است که به دو روش مرسوم اشاره می‌شود.

الف- روش پنالتی

روش پنالتی ساده‌ترین روش اعمال شرایط مرزی اساسی است. در این روش، W_u بصورت زیر در نظـر گرفته می‌شود.

$$W_u = \frac{1}{2}(\boldsymbol{u} - \bar{\boldsymbol{u}})^T \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{u} - \bar{\boldsymbol{u}}) \qquad (۴۶\text{-}۲)$$

که در آن، $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1 \ \ \cdots \ \ \alpha_k]$ ماتریس قطری فاکتورهای پنالتی است. برای مسایل دوبعـدی k = 2 و برای مسایل سه‌بعدی k=3 می‌باشد. توابع پنالتی $\alpha_i \ (i = 1,2,...,k)$ می‌توانند تابع مختصه‌هـای مکـانی باشند و لزوما باهم برابر نیستند. در عمل، این فاکتورها بصورت اعداد مثبت بزرگی در نظر گرفته می‌شوند که قبل از شروع تحلیل باید مقدار آنها معلوم شود. در اسـتفاده از روش بـدون المـان گلـرکین، سازگاری تابع شکل روی کل ناحیه حل با انتخاب مناسب توابع وزنی در تقریب MLS تامین مـی‌شـود. بدین جهت، برای تامین سازگاری عبارت مقید در فرم ضعیف (۲-۴۵) لازم نیست.

در این روش، توابع شکل با استفاده از گره‌های ناحیه تکیه‌گاهی و تقریب MLS ساخته می‌شـود و میدان تغییرمکان (متغیر میدان) با کاربرد توابع شکل و پارامترهای گرهی بصورت زیـر تخمـین زده می‌شود:

$$\mathbf{u}^h_{2*1}=\begin{Bmatrix}u\\v\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\phi_1 & 0 & \cdots & \phi_n & 0\\ 0 & \phi_1 & \cdots & 0 & \phi_n\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\v_1\\\vdots\\u_n\\v_n\end{Bmatrix}=\mathbf{\Phi}_{(2*2n)}\mathbf{u}_{(2n*1)} \qquad (۴۷-۲)$$

در عبارت فوق، $\mathbf{\Phi}$ ماتریس توابع شکل است و دارای فرم زیر می‌باشد.

$$\mathbf{\Phi}=\begin{bmatrix}\phi_1 & 0 & \cdots & \phi_n & 0\\ 0 & \phi_1 & \cdots & 0 & \phi_n\end{bmatrix} \qquad (۴۸-۲)$$

در معادله (۲-۴۷) برای گره Iام v_I و u_I پارامترهای تغییرمکان هستند و مقدار آنها با تغییرمکان گره‌ها تفاوت دارد (شکل ۲-۲). چون توابع شکل MLS فاقد خاصیت تابع دلتای کرونکر هستند؛ با جایگزینی عبارت فوق در معادله فرم ضعیف (۲-۴۵) و اعمال فرآیندی دقیقا شبیه آنچه در بخش (۲-۲) طی شد؛ معادلات گسسته سیستم با روش بدون المان گلرگین بصورت زیر بدست می‌آید:

$$(\mathbf{K}+\mathbf{K}^{\alpha})\mathbf{U}=\mathbf{F}+\mathbf{F}^{\alpha} \qquad (۴۹-۲)$$

در این عبارت، **U** بردار پارامترهای گرهی تمام گره‌های ناحیه حل، **K** ماتریس سختی کل است که از مونتاژ ماتریسهای سختی گرهی بدست می‌آید و **F** بردار نیروی خارجی کل است که با مونتاژ بردارهای نیروی گرهی حاصل می‌شود، مطابق معادلات (۲-۲۳) و (۲-۲۷)، ماتریس جدید $\mathbf{K}^{\alpha}$، ماتریس سختی پنالتی کل است. این ماتریس مانند ماتریس سختی کل از مونتاژ ماتریس‌های سختی پنالتی گره‌ها، درست با همان روش، بدست می‌آید.

$$\mathbf{K}^{\alpha}_{IJ}=\int_{\Gamma_u}\mathbf{\Phi}_I^T\boldsymbol{\alpha}\mathbf{\Phi}_J\,d\Gamma \qquad (۵۰-۲)$$

ماتریس $\mathbf{K}_{IJ}^{\alpha}$، یک ماتریس ۲×۲ است. در رابطه (۲-۴۹) ، بردار نیروی $\mathbf{F}^{\alpha}$ بخاطر شرایط مرزی اساسی ایجاد می‌شود. این بردار با روشی مشابه روش مونتاژ بردار نیروی F و با کاربرد بردار نیروی پنالتی گرهی $\mathbf{F}_{I}^{\alpha}$ بدست می‌آید. بردار نیروی پنالتی گرهی بصورت زیر تعریف می شود:

$$\mathbf{F}_{I}^{\alpha} = \int_{\Gamma_u} \mathbf{\Phi}_{I}^{T} \boldsymbol{\alpha} \bar{\mathbf{u}} d\Gamma \qquad (۲-۵۱)$$

شبیه معادلات (۲-۳۷) و (۲-۴۱)، انتگرالگیری ماتریس سختی پنالتی و بردار نیروی پنالتی با استفاده از روشهای استاندارد انتگرالگیری عددی انجام می‌شود. البته انتگرالگیریهای اخیر، روابط (۲-۴۹) و (۲-۵۰)، برای مسایل دوبعدی بصورت انتگرال خطی است که روی مرزهای شرط اساسی صورت می‌گیرد. بنابراین، در ماتریس $\mathbf{K}^{\alpha}$ فقط برای گره‌های نزدیک به مرزهای اساسی Γ_u نقش دارند که در ناحیه تکیه‌گاهی نقاط گوسی واقع بر Γ_u قرار می‌گیرند. معادله (۲-۴۹) شکل نهایی معادله سیستم گسسته روش بدون المان گلرکین است که در آن با استفاده ار روش پنالتی، شرایط مرزی اساسی اعمال می‌شود. ماتریسهای سختی $\mathbf{K}$ و $\mathbf{K}^{\alpha}$ که با فرآیند بدون‌المان گلرکین بدست می‌آیند؛ ماتریسهای متقارن هستند. اگر شرایط مرزی مساله، با فرض جلوگیری از حرکت صلب جسم، ماتریس $\mathbf{K}+\mathbf{K}^{\alpha}$، مثبت معین[1] است. بنابراین می‌توان از روشهای متعارف حل دستگاه معادلات جبری خطی برای حل دستگاه معادلات (۲-۴۹) استفاده نمود و پارامترهای تغییرمکان گرهی را بدست آورد. در این بخش، در روابط بدون المان گلرکین از روش پنالتی برای اعمال شرایط مرزی اساسی استفاده شد. با کاربرد این روش خصوصیات ماتریس سختی مثل تقارن، ابعاد و مثبت معین بودن، با در نظر گرفتن فاکتورهای پنالتی مثبت، حفظ می‌شود. علاوه بر این، تقارن و بانددار بودن ماتریس سیستم حفظ می‌شود (دستگاه معادلات (۲-۴۸)).

علی رغم مزایای فوق، روش پنالتی دارای نقص‌هایی نیز می‌باشد:

---

[1] - positive definite

۱- بسته به بزرگی فاکتورهای پنالتی، شرایط مرزی اساسی بطور تقریبی ارضاء می‌شوند. از نظر تئوری، انتخاب مقادیر بزرگتر فاکتورهای پنالتی، ارضای دقیق‌تر شرایط مرزی اساسی را در پی دارد؛ اما انتخاب مقادیر بسیار بزرگ این فاکتورها باعث ایجاد مشکلات عددی در حل دستگاه معادلات می‌شود.

۲- ارائه روشی برای انتخاب مجموع فاکتورهای پنالتی مناسب برای تمام انواع مسایل مشکل است. برای انتخاب مناسب فاکتورهای پنالتی نیاز به فرآیند سعی و خطا می‌باشد.

۳- بطور کلی، نتایج حاصل از کاربرد این روش از دقت کمتری نسبت به روش ضرایب لاگرانژ برخوردار است.

علی‌رغم نقص‌های فوق، روش پنالتی بدلیل سادگی بطور گسترده استفاده می‌شود. در تحلیل مسایل هدایت گرمایی گذرا به روش تجزیه مودی، این روش بکار گرفته شده است.

ب- روش ضرایب لاگرانژ

با اینکه روش پنالتی یک روش موثر و متداول برای ارضای شرایط مرزی بشمار می‌رود[۶۱]. روشهای دیگری برای اعمال شرایط مرزی اساسی و رفع نقص‌های روش پنالتی ارائه شده است. برخی از این روش‌ها به شرح زیر می‌باشند:

- روش ضرایب لاگرانژ [۳۷].
- روش تبدیل ارتوگنال [۶۲]
- استفاده از اصل تغییراتی اصلاح شده [۳۹]
- استفاده از کوپل EFM / EFG [۶۳]
- روش MLS مقید[۶۴].

۲-۵- توابع شکل حداقل مربعات متحرک (MLS)

مهمترین تفاوت روش بدون‌المان گلرکین و روش المان محدود در ساختن توابع شکل است. در این بخش، فرآیند محاسبه توابع شکل در روش بدون‌المان گلرکین به تفصیل بیان شده است.

در ابتدا تقریب حداقل مربعات متحرک (MLS) توسط ریاضیدانان برای برازش منحنی و سطح پیشنهاد شد[۶۵]و [۶۶]. در این روش، توابع با استفاده از تکنیک سریها نمایش داده می‌شوند. امروزه تقریب در روشهای بدون‌مش برای ساخت توابع شکل بطور گسترده بکار برده می‌شود.

۲-۵-۱- فرمولبندی توابع شکل MLS

اگر **u** یک تابع اسکالر مجهول از بردار متغیر میدان **x** در ناحیه‌ی حل Ω باشد؛ تقریب MLS را می‌توان بصورت زیر تعریف کرد [۶۷]:

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{y=1}^{m} p_j(\mathbf{x}) a_j(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(x)\mathbf{a}(x) \qquad (۲-۵۲)$$

که در آن،**p(x)** بردار توابع پایه برحسب مختصه‌های مکانی -$\mathbf{x}^T=[x_1 \;\; x_2]$ برای مسائل دوبعدی- است، m نیز تعداد توابع پایه است. غالباً مجموعه توابع پایه با استفاده از یـک جملـه‌ایهـای مثلـث خیـام – پاسکال ساخته می‌شود تا حداقل مرتبه‌ی کامل‌بودن[1] را داشته باشـد. در برخـی مسـایل خـاص مثـل مسائل مکانیک شکست، که تقریب چندجمله‌ای متغیر میدان دقت قابل قبولی نـدارد؛ یکسـری توابـع دیگر به پایه‌ها اضافه می‌شود تا کارکرد تقریب MLS در آن مساله بهبود یابد. در معادلـه (۲-۵۲)، **a(x)** بردار ضرایب است و بصورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$\mathbf{a}^T(\mathbf{x})=\{a^1(\mathbf{x}) \; a^2(\mathbf{x}) \; \ldots \; a^m(\mathbf{x})\} \qquad (۲-۵۲)$$

[1] - completeness

در بردار ضرایب، مولفه‌های **a(x)** تابع مختصه‌های مکانی **x** هستند. این ضرایب را می‌توان با کمینه کردن نرم گسسته و وزندار $\mathbf{L_2}$ محاسبه نمود.

$$J = \sum_{i=1}^{n} \hat{W}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i)[\mathbf{p}^T(x_i)\mathbf{a}(x) - u_i] \qquad (۵۳-۲)$$

که در آن، n تعداد گره‌هایی است که در ناحیه تکیه‌گاهی نقطه **x** قرار دارند و دارای تابع وزنی غیرصفر می‌باشند $\hat{W}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i) \neq 0$. u_i نیز پارامترهای گرهی یا مقدار تابع مجهول u در $\mathbf{x}=\mathbf{x}_i$ است. معادله‌ی (۲-۵۳) یک تابعک یا باقیمانده وزنداری است که با استفاده از مقادیر تقریبی و پارامترهای گرهی تابع مجهول u ساخته شده است. چون در اغلب موارد، تعداد گره‌ها ،n، که در تقریب MLS بکار می‌رود، بسیار بیشتر از تعداد ضرایب مجهول ،m، است؛ مقدار اکسترمم J نسبت به **a(x)** برابر است با:

$$\partial J / \partial \mathbf{a} = 0 \qquad (۵۴-۲)$$

رابطه فوق منجر به یک دستگاه معادلات جبری خطی بصورت زیر می‌شود.

$$\boldsymbol{A(x)a(x) = B(x)U_s} \qquad (۵۵-۲)$$

که در آن، $\mathbf{U}_s$ برداری شامل مقادیر گرهی تابع مجهول (پارامترهای گرهی) برای تمام گره‌های موجود در ناحیه تکیه‌گاهی است.

$$U_s=\{u_1\ u_2\ \ldots\ u_n\} \qquad (۵۶-۲)$$

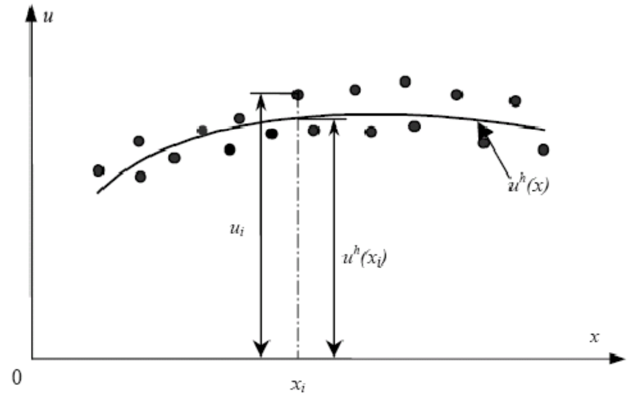
و **A(x)** ماتریس وزندار ضرایب است.

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \hat{W}_i(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_i)\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) \qquad (۵۷-۲)$$

که در آن،

$$\hat{W}_i(\mathbf{x}) = \hat{W}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i) \qquad (۵۸-۲)$$

در شکل (۲-۲) پارامترهای گرهی u_i و تابع تقریبی $u^h(x)$ نشان داده شده است که $u^h(x)$ با اسـتفاده از فرایند MLS بدست آمده است. همانطور که در شکل مشاهده می‌شود، در گـره‌هـا مقـدار پارامترهـای گرهی و تابع تقریب حاصل از MLS یکسان نیست.



شکل ۲-۲- پارامترهای گرهیu_i و تابع تقریبی $u^h(x)$ حاصل از فرایند MLS

برای یک مساله دوبعدی و با استفاده از پایه‌های خطی (m=3)، **A** یک مـاتریس۳×۳ و متقـارن است که بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{3*3}(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^{n} \hat{W}_i(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_i)\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) \\
&= \hat{W}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ x_1 & x_1^2 & x_1y_1 \\ y_1 & x_1y_1 & y_1^2 \end{bmatrix} + \hat{W}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_2)\begin{bmatrix} 1 & x_2 & y_2 \\ x_2 & x_2^2 & x_2y_2 \\ y_2 & x_2y_2 & y_2^2 \end{bmatrix} \\
&+ \ldots + \hat{W}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n)\begin{bmatrix} 1 & x_n & y_n \\ x_n & x_n^2 & x_ny_n \\ y_n & x_ny_n & y_n^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n}\hat{W}_i & \sum_{i=1}^{n}x_i\hat{W}_i & \sum_{i=1}^{n}y_i\hat{W}_i \\ \sum_{i=1}^{n}x_i\hat{W}_i & \sum_{i=1}^{n}x_i^2\hat{W}_i & \sum_{i=1}^{n}y_i\hat{W}_i \\ \sum_{i=1}^{n}y_i\hat{W}_i & \sum_{i=1}^{n}y_i\hat{W}_i & \sum_{i=1}^{n}y_i^2\hat{W}_i \end{bmatrix}_{3*3}
\end{aligned} \tag{۵۹-۲}$$

در معادله‌ی (۲-۵۵)، ماتریس **B** بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = [\hat{W}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)\mathbf{p}(\mathbf{x}_1) \quad \hat{W}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_2)\mathbf{p}(\mathbf{x}_2) \quad \dots \quad \hat{W}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n)\mathbf{p}(\mathbf{x}_n)] \qquad (۶۰\text{-}۲)$$

که برای پایه‌های خطی، یک ماتریس ۲×n است و بسط آن بصورت زیر نمایش داده می‌شود;

$$B_{3*n}(x) = \left[\hat{W}(x-x_1)\begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad \hat{W}(x-x_2)\begin{bmatrix} 1 \\ x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad \dots \quad \hat{W}(x-x_n)\begin{bmatrix} 1 \\ x_n \\ y_n \end{bmatrix} \right] \qquad (۶۱\text{-}۲)$$

با حل معادله (۲-۵۵) می‌توان ضرایب مجهول را بصورت زیر یافت.

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{U}_s \qquad (۶۲\text{-}۲)$$

با جایگزینی رابطه بالا در معادله‌ی (۲-۵۱)، تقریب تابع مجهول بدست می‌آید

$$u^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(\boldsymbol{x}) u_i = \boldsymbol{\Phi}^T(\boldsymbol{x})\boldsymbol{U}_s \qquad (۶۳\text{-}۲)$$

در این رابطه، $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x})$ بردار توابع شکل MLS متناظر با n گره واقع در ناحیه تکیه‌گاهی نقطـه **x** اسـت و بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\mathbf{\Phi}^T(\mathbf{x}) = \{\phi_1(\mathbf{x}) \quad \phi_2(\mathbf{x}) \quad \dots \quad \phi_n(\mathbf{x})\} = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}) \qquad (۶۴\text{-}۲)$$

تابع شکل برای گره iام بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\phi_i(x) = \sum_{j=1}^{m} p_j(\mathbf{x})(\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}))_{ji} = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})_i \qquad (۶۵\text{-}۲)$$

در تقریب MLS، بردار ضرایب **a** توابعی از **x** هستند که بموجب آن امکان حرکت پیوسته تقریب حداقل مربعات وزندار را فراهم می‌آورد. این حرکت پیوسته باعث می‌شود -با انتخاب مناسب توابع وزنی- تابع شکلMLS روی کل دامنه پیوسته باشد.

برای محاسبه‌ی مشتقات نسبی توابع شکل، بهتر است رابطه آن بصورت زیر نوشته شود. در شکل جدید روابط، برای محاسبه تابع شکل $\mathbf{\Phi}$ و مشتقات آن نیازی به محاسبه $\mathbf{A}^{-1}$ و مشتقات $\mathbf{A}^{-1}$ نمی‌باشد. محاسبه $\mathbf{A}^{-1}$ بطور عددی بسیار وقت‌گیر است و باعث ایجاد خطا در محاسبات می‌شود[۳۸].

$$\mathbf{\Phi}^{T}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\gamma}^{T}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}) \qquad (۶۶-۲)$$

که در آن

$$\boldsymbol{\gamma}^{T} = \mathbf{p}^{T}\mathbf{A}^{-1} \qquad (۶۷-۲)$$

از آنجایی که $\mathbf{A}$ متقارن است، معادله بالا را بصورت زیر می‌توان نوشت.

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{p} \qquad (۶۸-۲)$$

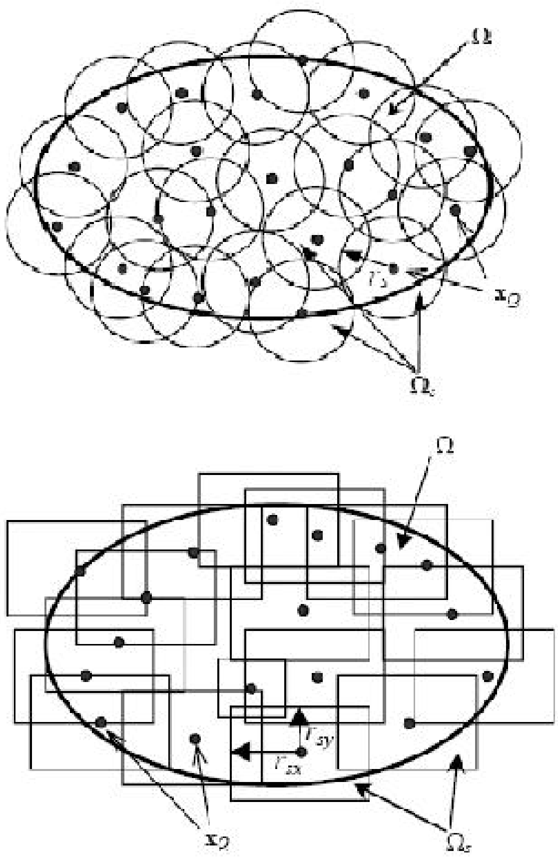
با استفاده از رابطه‌ی فوق می‌توان مشتقات نسبی متغیر γ را بدست آورد.

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\boldsymbol{\gamma}_{,i} &= \mathbf{p}_{,i} - \mathbf{A}_{,i}\boldsymbol{\gamma} \\
\mathbf{A}\boldsymbol{\gamma}_{,ij} &= \mathbf{p}_{,ij} - (\mathbf{A}_{,i}\boldsymbol{\gamma}_{,j} + \mathbf{A}_{,j}\boldsymbol{\gamma}_{,i} + \mathbf{A}_{,ij}\boldsymbol{\gamma}) \\
\mathbf{A}\boldsymbol{\gamma}_{,ijk} &= \mathbf{p}_{,ijk} - (\mathbf{A}_{,ik}\boldsymbol{\gamma}_{,j} + \mathbf{A}_{,i}\boldsymbol{\gamma}_{,jk} + \mathbf{A}_{,jk}\boldsymbol{\gamma}_{,i} + \mathbf{A}_{,j}\boldsymbol{\gamma}_{,ik} + \mathbf{A}_{,ijk}\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{A}_{,ij}\boldsymbol{\gamma}_{,k} + \mathbf{A}_{,k}\boldsymbol{\gamma}_{,ij})
\end{aligned} \qquad (۶۹-۲)$$

در روابط بالا، j،i وk نماد مختصه‌های x وy و کاما(,) علامت مشتق‌گیری جزئی نسبت به مختصه‌های فضایی اندیسی است. با محاسبه γ، $\gamma_{,i}$، $\gamma_{,ij}$و $\gamma_{,ijk}$با استفاده از روابط(۲-۶۷) می‌توان مشتقات جزئی تابع شکل $\mathbf{\Phi}$ را با عبارات زیر بیان کرد.

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Phi}^{T}_{,i} &= \boldsymbol{\gamma}^{T}_{,i}\mathbf{B} + \boldsymbol{\gamma}^{T}\mathbf{B}_{,i} \\
\mathbf{\Phi}^{T}_{,ij} &= \boldsymbol{\gamma}^{T}_{,ij}\mathbf{B} + \boldsymbol{\gamma}^{T}_{,i}\mathbf{B}_{,j} + \boldsymbol{\gamma}^{T}_{,j}\mathbf{B}_{,i} + \boldsymbol{\gamma}^{T}\mathbf{B}_{,ij} \\
\mathbf{\Phi}^{T}_{,ijk} &= \boldsymbol{\gamma}^{T}_{,ijk}\mathbf{B} + \boldsymbol{\gamma}^{T}_{,ik}\mathbf{B}_{,j} + \boldsymbol{\gamma}^{T}_{,jk}\mathbf{B}_{,i} + \boldsymbol{\gamma}^{T}_{,k}\mathbf{B}_{,ij} + \\
&\quad \boldsymbol{\gamma}^{T}_{,ij}\mathbf{B}_{,k} + \boldsymbol{\gamma}^{T}_{,i}\mathbf{B}_{,jk} + \boldsymbol{\gamma}^{T}_{,j}\mathbf{B}_{,ik} + \boldsymbol{\gamma}^{T}\mathbf{B}_{,ijk}
\end{aligned} \qquad (۷۰-۲)$$

برای تقریب MLS در نقطه مورد نظر، یک ناحیه تکیه‌گاهی مطابق شکل (۲-۳) ساخته می‌شود. گره‌هایی که در این ناحیه تکیه‌گاهی قرار می‌گیرند؛ برای تشکیل تقریب MLS تابع مجهول در این نقطه بکار می‌روند.



شکل ۲-۳- نمایش ناحیه تکیه‌گاهی نقطه x_Q بالا: ناحیه تکیه‌گاهی دایره‌ای باشعاع r_s پایین: ناحیه تکیه‌گاهی مستطیلی با ابعاد r_{sx} و r_{sy} در جهت x_1 و x_2 [۱۰]

اندازه‌ی ناحیه تکیه‌گاهی باید بقدری باشد که تعداد گره‌های موجود در آن، برای معکوس‌پذیر بودن ماتریس **A** در رابطه‌ی (۲-۶۲) کافی باشد تا پایداری میانیابی برقرار شود. انتخاب تعداد گره‌ها ،-n، به توزیع گره‌ها و تعداد تابعهای پایه ،m، بستگی دارد. بمنظور اطمینان از وجود معکوس **A** و خوش‌رفتار بودن ماتریس **A** معمولاً شرط **n>>m** در نظر گرفته می‌شود. متاسفانه بهترین مقدار تئوری n در دسترس نمی‌باشد و باید با سعی و خطا و محاسبات عددی بدست آید.

۲-۵-۲- انتخاب تابع وزنی

معادله‌ی (۲-۸۲) نشان می‌دهد؛ پیوستگی تابع شکل MLS، به پیوستگی تابع پایه **p** و هموار بودن ماتریسهای **A** و **B** بستگی دارد. هموار بودن تابع وزنی نیز روی شرط دوم (همواری **A** و **B**) موثر است. بنابراین تابع وزنی نقش مهمی در کارکرد تقریب MLS ایفاء می‌کند. در مطالعاتی که تاکنون انجام شده است؛ شرایط عمومی زیر برای تابع وزنی در نظر گرفته می‌شود:

- مثبت‌بودن تابع وزنی در تمام ناحیه تکیه‌گاهی ($\hat{W}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i) > 0$).
- صفر بودن تابع وزنی خارج از ناحیه تکیه‌گاهی ($\hat{W}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i) = 0$).
- دارای تغییرات بطور یکنوا کاهشی از نقطه‌ی موردنظر **x** (مرکز ناحیه تکیه‌گاهی).
- بقدر کافی هموار، بخصوص روی مرز ناحیه تکیه‌گاهی، Ω.

شرط چهارم ورود و خروج هموار گره‌ها به ناحیه تکیه‌گاهی را برای حرکت این ناحیه تضمین می‌کند که باعث ایجاد سازگاری تابع شکل MLS روی تمام ناحیه حل می‌شود. گذشته از چهار شرط فوق، انتخاب تابع وزنی کم و بیش اختیاری است. در مسائل عملی اغلب از توابع نمایی و یا توابع اسپیلاین[1] استفاده می‌شود.

۲-۶- انتقال حرارت در پیوستار جامد

انتقال حرارت در اجسام جامد بصورت هدایت گرمایی[2] است. قانون اول ترمودینامیک و قانون هدایت گرمایی فوریه، معادلات حاکم بر توزیع دما در جامدات می‌باشند [۶۸و ۶۹]. .قانون اول ترمودینامیک تعادل انرژی گرمایی در یک پیوستار جامد را بصورت زیر بیان می‌کند.

---

[1] - spline

[2] - heat conduction

$$-\nabla.\mathbf{q}+Q=\rho c\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (۷۱-۲)$$

که درآن، **q** بردار شار حرارتی، Q نرخ تولید انرژی داخلی در پیوستار در واحد حجم و در زمان واحد، T میدان اسکار دمای مطلق، ρ چگالی جرمی و c حرارت ویژه جامد است. قانون تجربی هدایت گرمایی فوریه در یک جامد غیرهمسانگرد[۱] مولفه‌های بردار شار حرارتی را به گرادیانهای دما مربوط می‌کند.

$$\mathbf{q}=-\mathbf{k}\nabla T \qquad (۷۲-۲)$$

در این عبارت، **k** بردار ثابتهای هدایت گرمایی برای یک جامد غیرهمسانگرد است. درحالت کلی، مولفه‌های ماتریس **k** تابع دما می‌باشد؛ اما برای گستره کم دمایی، می‌توان این ضرایب را با تقریب قابل قبولی مستقل از دما و ثابت فرض نمود. بردار شار حرارتی **q** و ماتریس هدایت گرمایی **k** بصورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\mathbf{q}=\begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{Bmatrix} \qquad (۷۳-۲)$$

$$\mathbf{k}=\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} \qquad (۷۴-۲)$$

با جایگزینی روابط شار حرارتی (۲-۷۲) در معادله تعادل گرمایی (۲-۷۱)، معادله حاکم بر توزیع دما در یک پیوستار جامد طی فرایند هدایت گرمایی بدست می‌آید.

شرط اولیه معادله حاکم به‌صورت زیر است:

---

[1]- anisotropic

$T(x,y,z,0)=T_o(x,y,z) \quad in \quad t=0$ (۷۵-۲)

شرایط مرزی نیز به صورت یکی یا ترکیبی از شرایط زیر است:

۱- دمای سطح S_1 طی فرایند انتقال گرما معلوم و برابر T_s باشد:

$T(x,y,z,t)=T_s \quad on \quad S_1 \ \& \ t>0$ (۷۶-۲)

۲- شار حرارتی منتقل شده از سطح S_2 طی فرایند انتقال دما

$on \ S_2 \quad -q.n = q'' \quad \& \ t>0$ (۷۷-۲)

که در آن، n بردار یکه عمود بر سطح در هر نقطه از S_2 می‌باشد.

۳- روی سطح S_3 جامد با سیالی به‌صورت همرفت تبادل گرما داشته باشد.

$on \ S_3 \quad -q.n + h(T - T_\infty) = 0$ (۷۸-۲)

در این عبارت، h ضریب همرفت و T_∞ دمای محیط است.

۴- سطح S_4 در معرض تابش قرار داشته باشد.

$on \ S_4 \ \& \ t>0 \quad -q.n + \sigma\varepsilon T^4 = \alpha q_r$ (۷۹-۲)

در این عبارت، σ ثابت استفان- بولتزمن[۱]، ε ثابت تابش سطح مرزی، α ضریب جذب سطح مرزی و q_r نرخ شار حرارتی واحد سطح است که به سطح مرزی می‌رسد.

۲-۷- حل عددی معادله هدایت گرمایی

[1] - Steffan-Boltzman

در این بخش، فرمولبندی مسایل هدایت گرمایی در پیوستار جامد با استفاده از روش باقیمانده وزنی گلرکین مورد بحث قرار می‌گیرد. فرم گسسته معادلات حاکم بر هدایت گرمایی و قابلیتهای این روش برای اعمال شرایط مرزی مختلف نیز بررسی می‌شود.

با استفاده از تقریب کنترویچ[۱] می‌توان فضای زمان و مکان را برای میدان دما از یکدیگر تفکیک نمود [۷۰].

$$T(x,y,z,t)=\theta(x,y,z)\overline{T}(t) \qquad (۸۰-۲)$$

در هر نقطه از ناحیه حل، دما با استفاده از پارامترهای گرهی[۲] گره‌های ناحیه تکیه‌گاهی مربوط به نقطه مورد نظر تقریب زده می‌شود:

$$\theta^h=\begin{bmatrix}\phi_1 & \phi_2 & \cdots & \phi_{n-1} & \phi_n\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \vdots\\ \theta_{n-1}\\ \theta_n\end{Bmatrix}=\mathbf{\Phi}_{(1*n)}\boldsymbol{\theta}_{(n*1)} \qquad (۸۱-۲)$$

در این عبارت، $\mathbf{\Phi}$ بردار توابع شکل، n تعداد گره‌های ناحیه تکیه‌گاهی و $\mathbf{\Theta}$ بردار دمای گره‌های ناحیه تکیه‌گاهی نقطه مورد نظر است. گرادیان دما بصورت زیر تقریب زده می‌شود:

---

[1] - Kontrovich

[2] - nodal parameter

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial z} \end{bmatrix} = \nabla \boldsymbol{\theta}^h = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 & \cdots & \phi_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_n \end{Bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial \phi_n}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial \phi_n}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial z} & \cdots & \frac{\partial \phi_n}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_n \end{Bmatrix} = \boldsymbol{B}_{(3*n)} \boldsymbol{\theta}_{(n*1)} \qquad (۸۲-۲)$$
$$= \sum_I^n \boldsymbol{B}_I \boldsymbol{\theta}_I$$

که در آن، **B** ماتریس عملگر گرادیان و **B_I** ماتریس عملگر گرادیـان گرهـی اسـت. بطـور مشـابه، فـرم وردشی گرادیان دما با توجه به رابطه (۲-۸۱) بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\nabla \delta\boldsymbol{\theta}^h = \nabla_{(3*1)} \boldsymbol{\Phi}_{(2*n)} \delta\boldsymbol{\theta}_{(n*1)} = \mathbf{B}_{(3*n)} \delta\boldsymbol{\theta}_{(n*1)} = \sum_I^n (\mathbf{B}_I)_{(3*1)} (\theta_I)_{(1*1)} \qquad (۸۳-۲)$$

تا این مرحله، گره‌ها در ناحیه محلی تکیه‌گاهی شماره‌گذاری می‌شوند و I وJ شماره‌های محلی گره‌هـا هستند. از این پس، شماره‌گذاری گره‌ها از سیستمهای محلی به شماره‌گـذاری آنهـا در سیسـتم کـل تغییر می‌کند. در سیستم کل تمام گره‌های مساله دارای یک شماره واحد از ۱تا N می‌باشند. بنـابراین در رابطه‌ی (۲-۸۳) شماره گره‌های I و J می‌تواند از ۱ تا N تغییر کند. اگر I و J در یک ناحیـه تکیـه-گاهی واحد قرار نداشته باشند؛ عبارت داخل انتگرال رابطه‌ی (۲-۱۱۶) و در نتیجه مقدار انتگرال صفر می‌شود. با در نظر گرفتن شماره‌گذاری در کل سیستم رابطه (۲-۱۱۶) بصورت زیر بیان می‌شود.

$$\int_\Omega (\nabla \delta\boldsymbol{\theta})^T (\mathbf{K} \nabla \boldsymbol{\theta}) d\Omega = \int_\Omega \sum_I^N \sum_J^N \delta\boldsymbol{\theta}_I^T [\mathbf{B}_I^T \mathbf{k} \mathbf{B}_J] \boldsymbol{\theta}_J d\Omega \qquad (۸۴-۲)$$

می‌توان عملگر انتگرالگیری را به داخل عملگرهای جمع بصورت زیر منتقل نمود.

$$\int_{\Omega}(\nabla\delta\boldsymbol{\theta})^T(\mathbf{k}\nabla\boldsymbol{\theta})d\Omega=\sum_{I}^{N}\sum_{J}^{N}\delta\boldsymbol{\theta}_I^T[\int_{\Omega}\mathbf{B}_I^T\mathbf{k}\mathbf{B}_J d\Omega]\boldsymbol{\theta}_J \tag{۸۵-۲}$$

طبق این رابطه، ماتریس سختی گرهی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{K}_{IJ}=\int_{\Omega}(\mathbf{B}_I^T)\mathbf{k}(\mathbf{B}_J)d\Omega \tag{۸۶-۲}$$

البته اگر گره‌های I و J، هر دو در ناحیه‌ی تکیه‌گاهی یک نقطه انتگرالگیری گوسی قرار نداشته باشند؛ مقدار $\mathbf{K}_{IJ}$ صفر است. با در نظر گرفتن تعریف فوق، رابطه (۲-۸۵) بصورت زیر بیان می‌شود.

$$\int_{\Omega}(\nabla\delta\boldsymbol{\theta})^T(\mathbf{K}\nabla\boldsymbol{\theta})d\Omega=\sum_{I}^{N}\sum_{J}^{N}\delta\boldsymbol{\theta}_I^T\mathbf{K}_{IJ}\boldsymbol{\theta}_J \tag{۸۷-۲}$$

عملگرهای جمع در رابطه بالا، فرآیند مونتاژ را انجام می‌دهند. بسط عبارت سمت راست در رابطه (۲-۱۱۲) فرایند مونتاژ را نشان می‌دهد. در نهایت، فرم معادله (۲-۸۶) بصورت زیر بدست می‌آید.

$$\begin{aligned}&\sum_{i}^{n}\sum_{J}^{N}\delta\boldsymbol{\theta}_I^T\mathbf{K}_{IJ}\boldsymbol{\theta}_J=\delta\boldsymbol{\theta}_1^T\mathbf{K}_{11}\boldsymbol{\theta}_1+\delta\boldsymbol{\theta}_1^T\mathbf{K}_{12}\boldsymbol{\theta}_2+\cdots+\delta\boldsymbol{\theta}_1^T\mathbf{K}_{1N}\boldsymbol{\theta}_N\\&\delta\boldsymbol{\theta}_2^T\mathbf{K}_{21}\mathbf{u}_1+\delta\boldsymbol{\theta}_2^T\mathbf{K}_{22}\boldsymbol{\theta}_2+\cdots+\delta\boldsymbol{\theta}_2^T\mathbf{K}_{2N}\boldsymbol{\theta}_N\\&\vdots\\&+\delta\boldsymbol{\theta}_1^T\mathbf{K}_{1N}\mathbf{u}_N+\delta\boldsymbol{\theta}_2^T\mathbf{K}_{2N}\boldsymbol{\theta}_N+\cdots+\delta\boldsymbol{\theta}_N^T\mathbf{K}_{NN}\boldsymbol{\theta}_N\end{aligned} \tag{۸۸-۲}$$

که در آن، **K** ماتریس سختی کل سیستم است. با توجه به اسکالر بودن میدان دما و تعداد گره‌های کل مساله،N، بعد ماتریس سختی کل برابر N×N می‌باشد.

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix}\mathbf{K}_{11}&\mathbf{K}_{12}&\cdots&\mathbf{K}_{1N}\\\mathbf{K}_{21}&\mathbf{K}_{22}&\cdots&\mathbf{K}_{2N}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\mathbf{K}_{N1}&\mathbf{K}_{N2}&\cdots&\mathbf{K}_{NN}\end{bmatrix} \tag{۸۹-۲}$$

با در نظر گرفتن روابط فوق، فرم نهایی رابطه (۲-۸۸) بصورت زیر است.

$$\int_{\Omega}(\nabla\delta\boldsymbol{\theta})^T(\mathbf{K}\nabla\boldsymbol{\theta})d\Omega=\delta\boldsymbol{\Theta}^T\mathbf{K}\boldsymbol{\Theta} \tag{۹۰-۲}$$

در این رابطه، بردار $\mathbf{\Theta}$ بردار دمای کل سیستم است و شامل دمای گرهی تمام گره‌های مســاله مــی-باشد. بردار $\mathbf{\Theta}$، N مولفه دارد.

$$\mathbf{\Theta} = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_N \end{Bmatrix} \tag{۹۱-۲}$$

بطور مشابه، فرم گسسته عبارتهای دیگر رابطه (۲-۷۱) قابل بیان است. با استفاده از تقریب کنتــرویچ عبارت اول رابطه (۲-۷۱) بصورت زیر نوشته می‌شود.

$$\int_\Omega \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \eta d\Omega = \int_\Omega \rho c \theta \dot{\bar{T}} \eta d\Omega \tag{۹۲-۲}$$

با جایگزینی تابع تقریب θ بجای تابع آزمون η، فرم گسسته رابطه بالا بصورت زیر می‌باشد.

$$\int_\Omega \rho c \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} \boldsymbol{\eta} d\Omega = \int_\Omega \rho c \delta\boldsymbol{\theta} \dot{\bar{\mathbf{T}}} \boldsymbol{\theta} d\Omega = \dot{\bar{\mathbf{T}}} \int_\Omega \delta\boldsymbol{\theta} \rho c \boldsymbol{\theta} d\Omega \tag{۹۳-۲}$$

عبارت فوق، برحسب دماهای گرهی بصورت زیر قابل بیان است.

(۹۴-۲)

$$\int_\Omega \rho c \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} \boldsymbol{\eta} d\Omega = \dot{\bar{\mathbf{T}}} \int_\Omega \rho c \sum_I^N \mathbf{\Phi}_I \delta\boldsymbol{\theta}_I \sum_J^N \mathbf{\Phi}_J \boldsymbol{\theta}_J d\Omega = \dot{\bar{\mathbf{T}}} \sum_I^N \sum_J^N \delta\boldsymbol{\theta}_I \left(\int_\Omega \rho c \mathbf{\Phi}_I \mathbf{\Phi}_J d\Omega\right) \boldsymbol{\theta}_J$$

فرم گسسته عبارت متناظر با تولید انرژی داخلی در رابطه (۲-۷۱) بصورت زیر است:

$$\int_\Omega Q \delta\boldsymbol{\theta} d\Omega = \int_\Omega Q \sum_I^N \phi_I \delta\theta_I d\Omega = \sum_I^N \delta\theta_I \int_\Omega Q \phi_I d\Omega = \sum_I^N \mathbf{F}_I^{gen} \delta\theta_I \tag{۹۵-۲}$$

در این عبارت،

$$\mathbf{F}_I^{gen} = \int_\Omega Q \phi_I d\Omega \tag{۹۶-۲}$$

فرم گسسته عبارت متناظر با شار حرارتی عبوری از مرزهای سیستم در رابطـه (۲-۷۱) بصـورت زیـر است:

$$\int_{\Omega} q''\delta\boldsymbol{\theta}d\Omega = \int_{\Omega} q''\sum_{I}^{N}\phi_I\delta\theta_I d\Omega = \sum_{I}^{N}\delta\theta_I\int_{\Omega} q''\phi_I d\Omega = \sum_{I}^{N}\mathbf{F}_I^{flux}\delta\theta_I \tag{۲-۹۷}$$

در این عبارت،

$$\mathbf{F}_I^{flux} = \int_{\Omega} q''\phi_I d\Omega \tag{۲-۹۸}$$

فرم گسسته عبارت متناظر با شرایط مرزی همرفتی مرزهای سیستم در رابطه (۲-۷۱) شامل دو تـرم بصورت زیر است:

(۲-۹۹)

$$\int_{\Gamma_{conv.}} h\boldsymbol{\theta}\delta\boldsymbol{\theta}d\Gamma = \int_{\Gamma_{conv.}} h(\sum_{I}^{N}\phi_I\delta\theta_I)(\sum_{J}^{N}\phi_J\theta_J)d\Gamma = \sum_{I}^{N}\delta\theta_I\sum_{J}^{N}\theta_J\int_{\Gamma_{conv.}} h\phi_I\phi_J d\Gamma = \sum_{I}^{N}\mathbf{K}_{IJ}^{conv.}\theta_J\delta\theta_I$$

در این عبارت،

$$\mathbf{K}_{IJ}^{conv.} = \int_{\Gamma_{conv.}} h\phi_I\phi_J d\Gamma \tag{۲-۱۰۰}$$

$$\int_{\Gamma_{conv.}} h\theta_\infty\delta\boldsymbol{\theta}d\Gamma = \int_{\Gamma_{conv.}} h\theta_\infty(\sum_{I}^{N}\phi_I\delta\theta_I)d\Gamma = \sum_{I}^{N}\delta\theta_I\int_{\Gamma_{conv.}} h\theta_\infty\phi_I d\Gamma = \sum_{I}^{N}\mathbf{F}_I^{conv.}\delta\boldsymbol{\theta}_I \tag{۲-۱۰۱}$$

در این عبارت،

$$\mathbf{F}_I^{conv.} = \int_{\Gamma_{conv.}} h\theta_\infty\phi_J d\Gamma \tag{۲-۱۰۲}$$

با جایگزینی روابط فوق در رابطه (۲-۷۱)، معادله گسسته حاکم بر هدایت گرمایی به‌شکل زیر بدسـت می‌آید.

$$\mathbf{C}\dot{\overline{\mathbf{T}}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}^{conv.} + \mathbf{K}^{rad})\overline{\mathbf{T}} = \mathbf{F} + \mathbf{F}^{gen.} + \mathbf{F}^{flux} + \mathbf{F}^{conv.} + \mathbf{F}^{rad.} \qquad (۱۰۳\text{-}۲)$$

۲-۸- هدایت گرمایی گذرا

میدان دمای گذرا از حل دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول (۲-۱۳۶) بدست می‌آید. برای حل دستگاه معادلات مذکور روشهای مختلفی وجود دارد که در اینجا تکنیک تجزیه مودها مورد کاربرد قرار می‌گیرد. تکنیک تجزیه مودها یک رهیافت تحلیلی برای حل دستگاههای معادلات دیفرانسیل معمولی است. کاربرد این روش خطایی را در در محاسبه جوابها تحمیل نمی‌کند [۶۰].

روند کلی این روش، تبدیل دستگاه معادلات کوپل‌شده به معادلات مستقل از هم است که با استفاده از بردارهای ویژه انجام می‌شود. دستگاه معادلات همگن حاکم بر هدایت گرمایی گذرا بصورت زیر است:

$$\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{T}} + \boldsymbol{K}^{th}\boldsymbol{T} = 0 \qquad (۱۰۴\text{-}۲)$$

در این رابطه، $\mathbf{K}^{th}=\mathbf{K}+\mathbf{K}^{conv}+\mathbf{K}^{rad}$. اگر صورت کلی جواب بصورت زیر در نظر گرفته شود

$$T(t) = T\,exp(-st) \qquad (۱۰۵\text{-}۲)$$

که در آن، T بردارهای مودی مجهول است و s پارامتر کاهش نمایی است. با جایگزینی حل (۲-۱۰۵) در رابطه (۲-۱۰۴)، دستگاه معادلات همگن بصورت یک مساله مقدار ویژه قابل بیان است.

$$\left(\boldsymbol{K}^{th} - s\boldsymbol{C}\right)\boldsymbol{T} = 0 \qquad (۱۰۶\text{-}۲)$$

از آنجائیکه ماتریسهای $\mathbf{K}^{th}$ و $\mathbf{C}$ مثبت معین هستند؛ پارامتر s نیز باید حقیقی و مثبت باشد. حل کامل دستگاه معادلات را می‌توان بصورت ترکیبی از تمام بردارهای ویژه دستگاه یصورت زیر بیان کرد.

$$\boldsymbol{T}(t) = \begin{bmatrix}\boldsymbol{T}_1 & \boldsymbol{T}_2 & \cdots & \boldsymbol{T}_N\end{bmatrix}\boldsymbol{\psi}(t) = \boldsymbol{M}\,\boldsymbol{\psi}(t) \qquad (۱۰۷\text{-}۲)$$

در این رابطه، $\boldsymbol{\psi}_i$ سهم هر مود در جواب کلی در لحظه t است و **M** مـاتریس مربعـی N×N اسـت کـه بردارهای ویژه ستونهای این ماتریس را تشکیل می‌دهند. با جایگزینی رابطه فوق در دستگاه معـادلات (۲-۱۰۴) و ضرب عبارت حاصل در $\mathbf{M}^T$ از چپ، یک مجموعه معـادلات مسـتقل از هـم بصـورت زیـر حاصل می‌شود.

$$\mathbf{C}^{th*}\dot{\boldsymbol{\psi}} + \mathbf{K}^{th*}\boldsymbol{\psi} = \mathbf{M}^T(\mathbf{F}^{th} + \mathbf{F}_{\gamma}^{th}) \qquad (۲-۱۰۸)$$

که در آن،

$$\mathbf{K}^{th*} = \mathbf{M}^T\mathbf{K}^{th}\mathbf{M} \qquad (۲-۱۰۹)$$

$$\boldsymbol{C}^{th*} = \boldsymbol{M}^T\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{M} \qquad (۲-۱۱۰)$$

مجموعه معادلات فوق شامل N معادله مستقل است.

$$\text{(i=1, 2, ..., N)}\ \dot{\psi}_i + s_i\psi_i = \frac{\boldsymbol{\Lambda}_i}{\mathbf{C}_{ii}^*} \qquad (۲-۱۱۱)$$

که در آن، $\boldsymbol{\Lambda}=\mathbf{M}^T(\mathbf{F}^{th}+\mathbf{F}_{\gamma}^{th})$. در این معادلات، شـرایط اولیـه $\boldsymbol{\psi}(0)$ بـا توجـه بـه رابطـه $\mathbf{T}(0) = \mathbf{M}\,\boldsymbol{\psi}(0)$ محاسبه می‌شود. بسته به پیچیدگی طرف راست این معادلات می‌تـوان آنهـا را بصـورت تحلیلـی و یـا عددی حل کرد. در این روش برای بدست آوردن حل در لحظه t نیاز به حل معادلات از ابتدا یعنـی t = 0 نیست. برخلاف روشهای مرسوم اختلاف محدود، از آنجائیکه مرتبه زمانهای انتخـابی بـرای اعمـال شوک حرارتی بسیار گسترده است و معمولا بین ۶- تا ۲ تغییر می‌کند؛ این روش برای بدسـت آوردن توزیع دمای گذرا یک روش بسیار کارآمد می‌باشد.

۲-۹- مثالهای عددی

در مسائل مطرح شده، صفحه‌ای از مواد مرکب هدفمند ارتوتروپیک بطول نامحدود و عرض محدود W در نظر گرفته می‌شود (مطابق شکل ۲-۴). این صفحه تحت بارگذاری‌های مکانیکی بصورت کرنش معین، تنش کششی یکنواخت و گشتاور خمشی روی لبه‌های بالا و پایین و بارگذاری حرارتی بصورت تغییر دمای لبه‌های چپ و راست قرار می‌گیرد. تغییر خصوصیات فیزیکی ماده بجز ضریب پواسون بصورت تابع نمایی در نظر گرفته می‌شود.

$$P(x) = P^0 e^{\beta x} \qquad (۱۱۲-۲)$$

که در آن، P^0 مقدار خصوصیت فیزیکی در $x_1=0$ یا (P(0)) است و ضریب غیرهمگنی β بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\beta = \frac{1}{W}\ln\left[\frac{P(W)}{P(0)}\right] \qquad (۱۱۳-۲)$$

ضریب پواسون ثابت منظور می‌شود. مدول الاستیسیته جهت‌های اصلی و مدول برشی صفحه‌ای بصورت زیر تعریف می‌شوند.

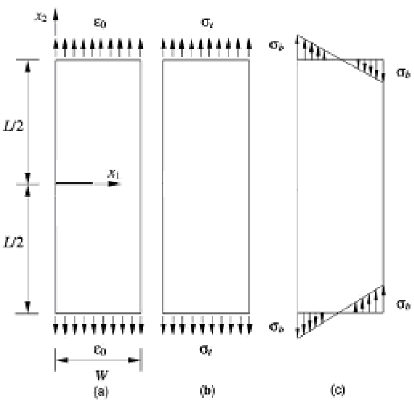
$$E_{xx}(x) = E_{xx}^0 e^{\beta_{xx} x_1} \qquad (۱۱۴-۲)$$

$$E_{yy}(x) = E_{yy}^0 e^{\beta_{yy} x_1} \qquad (۱۱۵-۲)$$

$$G_{xy}(x) = G_{xy}^0 e^{\beta_{xy} x_1} \qquad (۱۱۶-۲)$$

برای صفحه ایزوتروپیک (با فرض ایزوتروپی موضعی), مدول الاستیسیته به فرم زیر است.

$$E(x) = E^0 e^{\beta x_1} \qquad (۱۱۷-۲)$$



شکل ۲-۴ یک صفحه از جنس FGM تحت بار مکانیکی – (a) بارگذاری کرنش ثابت-(b) بارگذاری کشش-(c) بارگذاری گشتاور خمشی

برای تحلیل صفحه مذکور، بخاطر تقارن نصف صفحه (قسمت هاشورخورده در شکل (۲-۴)) با شرایط مرزی نشان داده شده، در نظر گرفته می‌شود. شرایط مرزی روی محور x_1 بصورت زیر است:

$$u(0,0) = 0 \qquad (۱۱۸-۲)$$

$$v(x_1,0) = 0 \qquad (۱۱۹-۲)$$

۲-۹-۱- بارگذاری کرنش ثابت

شرایط بارگذاری به شکل زیر بیان می‌شود.

$$\varepsilon(x,\pm L) = \varepsilon_0 \qquad (۱۲۰-۲)$$

با استفاده از معادله ساختاری, توزیع تنش بصورت زیر حاصل می‌شود.

$$\sigma_{x_2x_2}(x) = E_{yy}^0 \varepsilon_0 e^{\beta_{yy} x} \qquad (۱۲۱-۲)$$

با استفاده از روابط کرنش- تغییرمکان و اعمال شرایط مرزی (۲-۱۱۸ و ۱۱۹) میدان تغییرمکان بصورت زیر بدست می‌آید.

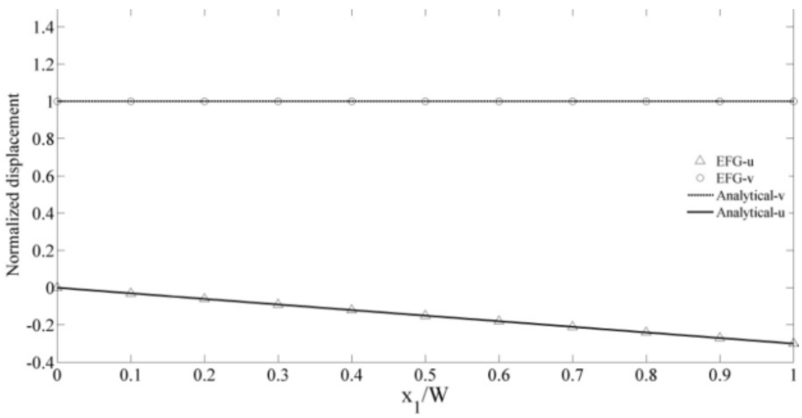
$$u_x(x_1,x_2) = -\nu_{x_1x_2} \varepsilon_0 \frac{E_{x_2x_2}^0}{E_{x_1x_1}^0} \frac{e^{(\beta_{x_2x_2}-\beta_{x_1x_1})x_1} - 1}{\beta_{x_2x_2} - \beta_{x_1x_1}} \qquad (۱۲۲-۲)$$

$$v(x_1,x_2)=\varepsilon_0 x_1 \tag{۱۲۳-۲}$$

برای مواد ایزوتروپیک مبدان تغییرمکان بصورت زیر است.

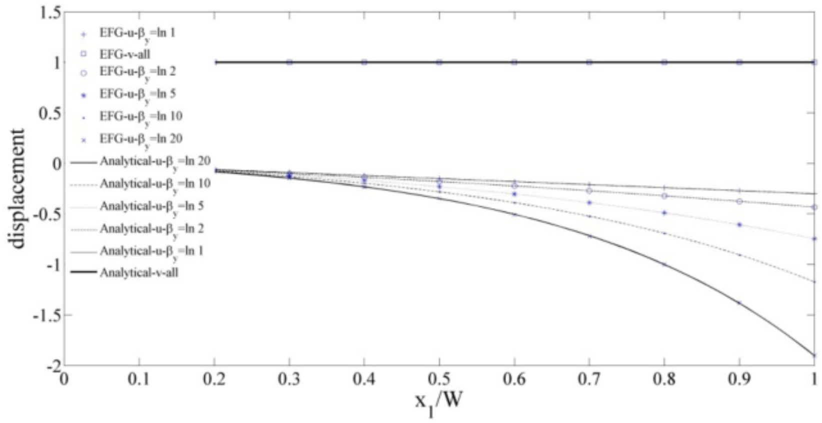
$$\begin{aligned} u(x_1,x_2) &= -\nu\varepsilon_0 x_1 \\ v(x_1,x_2) &= \varepsilon_0 x_2 \end{aligned} \tag{۱۲۴-۲}$$

در شکل (۲-۵) میدان تغییرمکان حاصل از بکارگیری روش بدون‌المان گلرکین با حل تحلیلی مقایسه شده است. این نمودارها با فرض $\varepsilon_0 = 1$ بدست آمده‌اند.

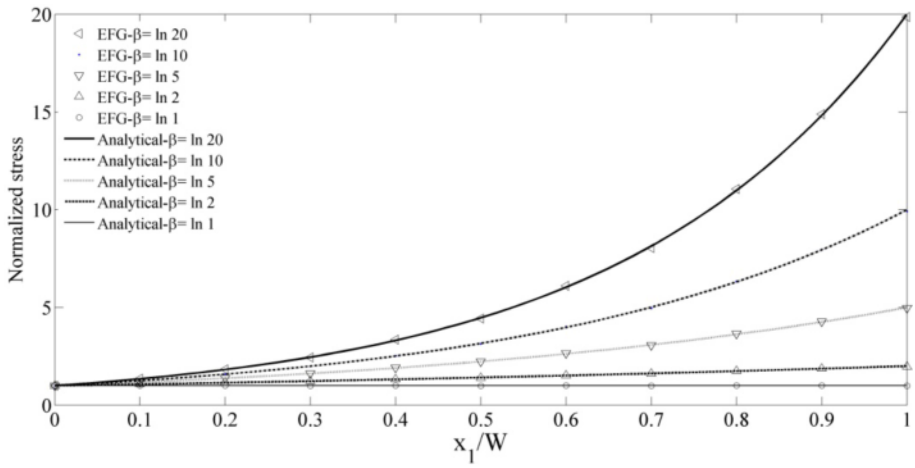


شکل ۲-۵- میدان تغییرمکان در مواد ایزوتروپیک حاصل از بکارگیری روش بدون‌المان گلرکین(راست)و حل تحلیلی تحت بارگذاری کرنش ثابت

در شکل (۲-۶)، اثر تغییرات مدول الاستیسیته در جهت y روی میدان تغییرمکانهای حاصل از بارگذاری کرنش معین در صفحه ارتوتروپیک FGM بررسی شده است. در این حالت، غیرهمگنی ماده روی مولفه عمودی تغییرمکان ($v(x_1)$) اثری ندارد؛ اما مولفه افقی ($u(x_1)$) تابع تغییرات مدول الاستیسیته می‌باشد. در این حالت، غیرهمگنی ماده روی مولفه‌های تغییرمکان اثری ندارد؛ اما توزیع تنش $\sigma_{x_2x_2}$ تابع تغییرات مدول الاستیسیته می‌باشد.



شکل۲-۶-اثر ارتوتروپی روی مولفه‌های تغییرمکان در بارگذاری کرنش معین



شکل۲-۷- اثر تغییر ضریب غیرهمگنی مدول الاستیسیته روی توزیع تنش $\sigma_{x_2x_2}$ در بارگذاری کرنش معین

۲-۹-۲- بارگذاری کششی و خمشی

بارگذاری کششی بصورت زیر اعمال می‌شود.

$$\sigma_{x_2x_2}(x_1,L)=\sigma_t \qquad (۱۲۵-۲)$$

و بارگذاری خمشی بصورت زیر اعمال می‌شود.

$$\sigma_{x_2x_2}(x_1,L)=\sigma_b(1-\frac{2}{W}x_1) \qquad (۱۲۶-۲)$$

برای این بارگذاریها, توزیع کرنش با حل معادله سازگاری $\partial^2\varepsilon_{x_2x_2}/\partial x_1^2 = 0$ بدست می‌آید.

$$\varepsilon_{x_2x_2} = Ax_1 + B \qquad (۱۲۷-۲)$$

با توجه به معادله ساختاری, توزیع تنش برای حالت تنش صفحه‌ای بصورت زیر است. در این دو حالت توزیع تنش فقط در راستای x_2 بصورت تابعی از x_1 وجود دارد.

$$\sigma_{x_2x_2}(x_1) = E^0 e^{\beta x_1}(Ax_1 + B) \qquad (۱۲۸-۲)$$

که در آن, A و B ثابتهایی برحسب پارامترهای خصوصیات ماده می‌باشند و با اعمال شرایط مرزی نیرویی بدست می‌آیند. شرایط مرزی نیرویی عبارتند از:

$$\int_0^W \sigma_{x_2x_2}(x_1)dx_1 = N \qquad (۱۲۹-۲)$$

$$\int_0^W \sigma_{x_2x_2}(x_1)x_1dx_1 = M \qquad (۱۳۰-۲)$$

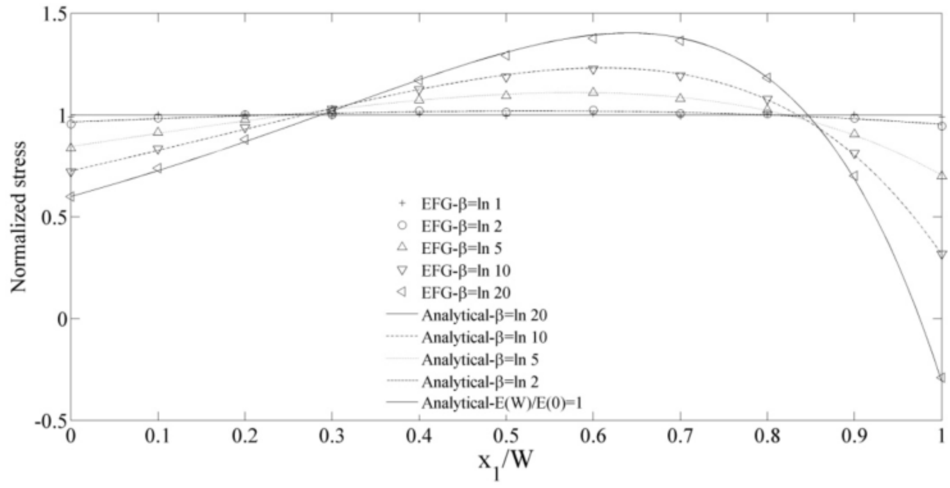
در این روابط, N نیروی کششی حاصل از برآیند تنشها در راستای x=W/2 و M گشتاور خمشی این تنشها می‌باشد. مقادیر M و N برای بارگذاری کششی یکنواخت و گشتاور خمشی به‌ترتیب بصورت زیر است.

$$N = \sigma_t W, M = NW/2 \qquad (۱۳۱-۲)$$

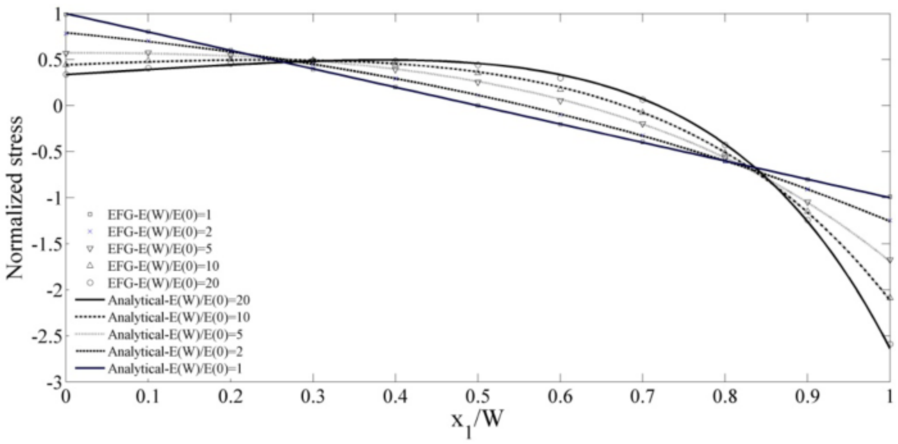
$$N = 0, M = \sigma_b W^2/6 \qquad (۱۳۲-۲)$$

در شکلهای (۲-۸) و (۲-۹) میدان تنش حاصل از بکارگیری روش بدون المان گلرکین با حل تحلیلی مقایسه شده است. این نمودارها با فرض $\sigma_t = 1$ و $\sigma_b = 1$ بدست آمده‌اند. نکته قابل توجه در این نمودارها، کاهش مقدار تنشها در نواحی نزدیک لبه‌ها است. بطوریکه برای مقادیر بزرگ ضریب

غیرهمگنی این تنشها تبدیل به تنشهای فشاری می‌شود که در جلـوگیری از رشـد ترکهـای سـطحی نقش موثری دارند.



شکل ۲-۸- میدان تنش حاصل از بکارگیری روش بدون المان گلرکین تحت بارگذاری کششی



شکل ۲-۹- میدان تنش حاصل از بکارگیری روش بدون المان گلرکین تحت بارگذاری خمشی

ج- بارگذاری حرارتی:

برای حل مساله ترموالاستیسیته فرض می‌شود شرایط شبه‌استاتیکی (بدون ترمهای دینامیکی) برقرلر است و از عبارتهای کوپل حرارت-الاستیک صرف‌نظر می‌شود. میدان دمای پایا برای شرایط

دمایی معلوم روی لبه‌های راست و چپ صفحه، با حل معادله هدایت گرمایی به ترتیب زیر بدست می‌آید.

$$T(x_1) = T(0) + (T(W) - T(0))\left(\int_0^{x_1} dx_1 \Big/ k(x_1) \right) \Big/ \left(\int_0^{W} dx_1 \Big/ k(x_1) \right) \qquad (۱۳۳\text{-}۲)$$

فرم کلی توزیع کرنش با حل معادله سازگاری $\partial^2 \varepsilon_{x_2x_2} / \partial x_1^2 = 0$ بصورت رابطه (۲-۱۶۰) حاصل می‌شود. با کاربرد معادله ساختاری توزیع تنش حرارتی قابل محاسبه است. در حالت تنش صفحه‌ای , $\sigma_{x_3x_3} = \sigma_{x_1x_1} = 0$، توزیع تنش بصورت زیر است.

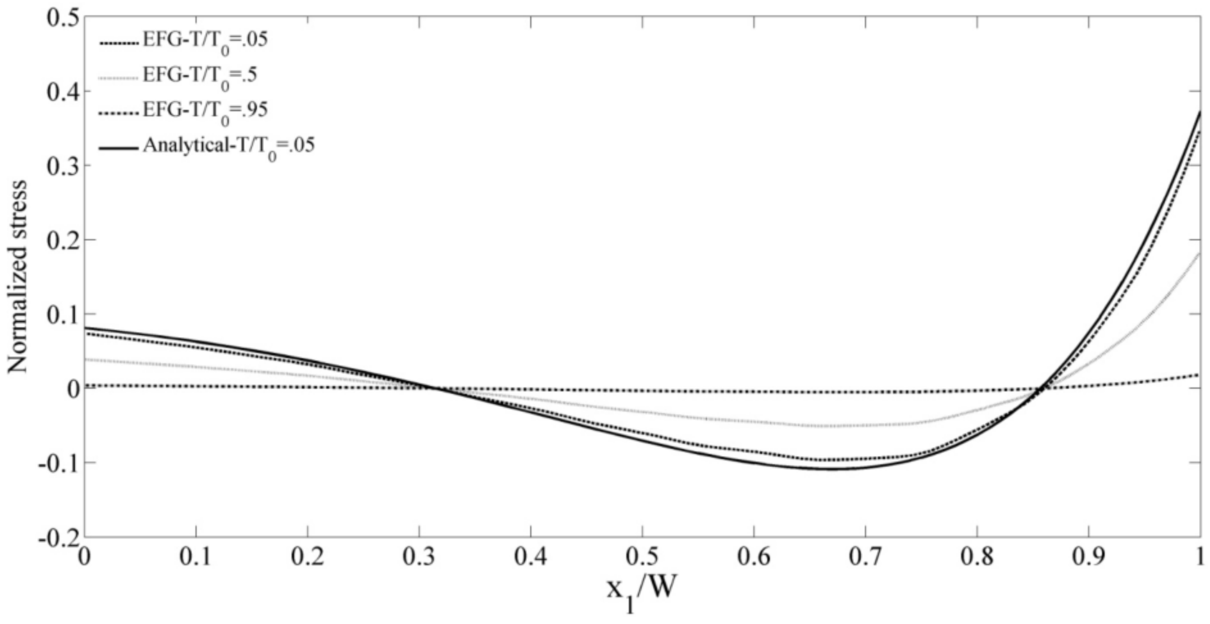
$$\sigma_{x_2x_2}(x_1) = E^0_{x_2x_2} e^{\beta_{x_2x_2} x_1} [Ax_1 + B - \alpha(x_1)(T(x_1) - T_0)] \qquad (۱۳۴\text{-}۲)$$

که در آن, ثابتهای A و B با اعمال شرایط مرزی نیرویی زیر (با فرض عدم اعمال بار مکانیکی) بدست می‌آید

$$\int_0^W \sigma_{x_2x_2}(x_1) dx_1 = 0 \qquad (۱۳۵\text{-}۲)$$

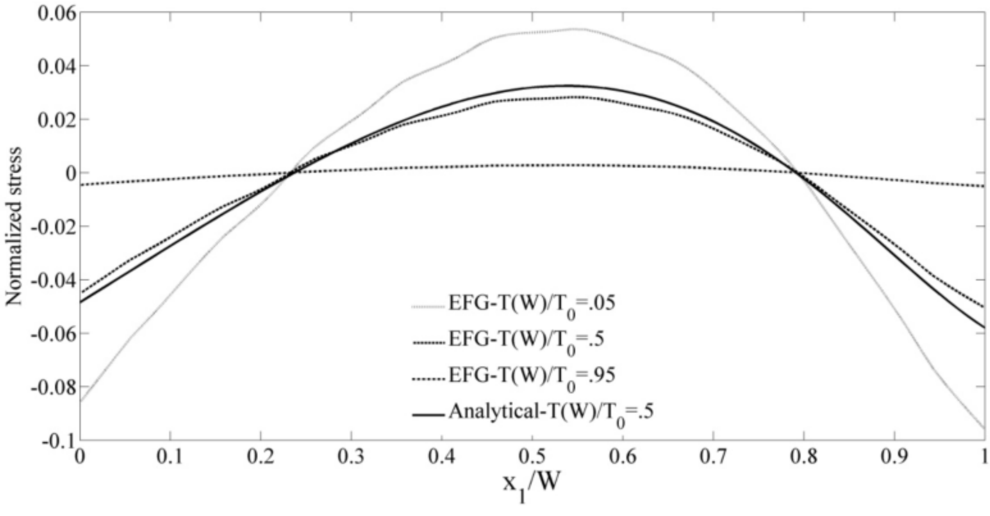
$$\int_0^W \sigma_{x_2x_2}(x_1) x_1 dx_1 = 0 \qquad (۱۳۶\text{-}۲)$$

در شکل (۲-۱۰)، تنش حرارتی ناشی از اعمال تغییر درجه حرارت یکنواخت برای دماهای نسبی مختلف رسم شده است. مدل فوق در کاربردهایی اتفاق می‌افتد که دمای محیط کاربرد کمتر از دمای ساخت باشد. برخلاف مواد همگن، در FGM تحت تغییر دمای یکنواخت، تنش بوجود می‌آید. وجود تنشهای پسماند کششی در لبه‌ها در این حالت باعث رشد زودهنگام ترکهای سطحی می‌شود.

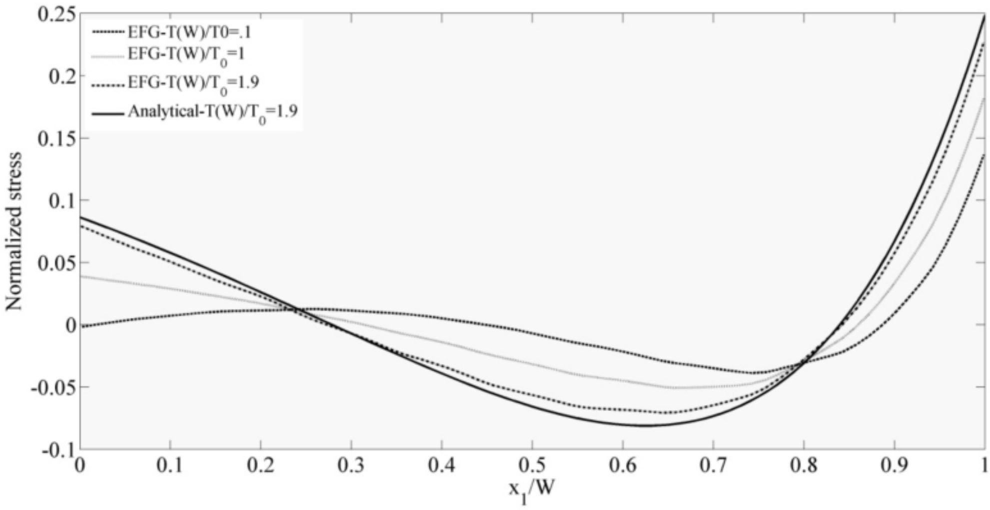


شکل ۲-۱۰- توزیع تنش حرارتی برای تغییر دمای یکنواخت

در شکلهای (۲-۱۱)و (۲-۱۲)، اثر تغییر دمای یک لبه با وجود ثابت بودن دمای لبه دیگر روی تنش حرارتی بررسی شده است. در شکل (۲-۱۱)، دمای لبه سمت چپ (x=0) در $T=T_0$ ثابت و دمای لبه سمت راست (x=W) متغیر منظور شده است. در این حالت، توزیع تنش حرارتی متقارن و در لبه‌ها فشاری و در وسط کششی می‌باشد. شکل (۲-۱۲)، توزیع تنش حرارتی را برای دمای متغیر لبه سمت راست (x_1=W) و دمای ثابت لبه سمت چپ (x_1=0) در $T=0.5T_0$ نشان می‌دهد. در این حالت، تنش در لبه‌ها کششی و در وسط صفحه فشاری است. تفاوت اصلی دو حالت اخیر در مقدار دمای لبه چپ است. در حالت اول، دمای لبه سمت چپ (x_1=0) در $T=T_0$ (برابر با دمای اولیه) ثابت منظور شده است و در حالت دوم، دمای ثابت لبه سمت چپ (x_1=0) در $T=0.5T_0$ (کمتر از دمای اولیه) نگه داشته شده است.

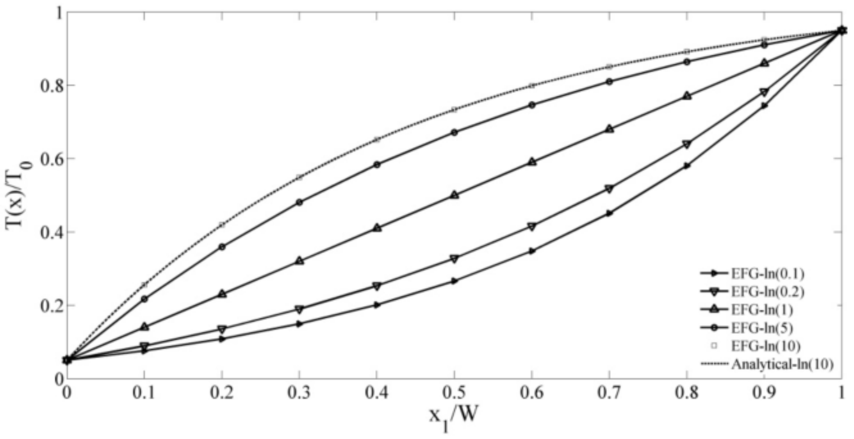


شکل ۲-۱۱- توزیع تنش حرارتی برای دمای ثابت لبه چپ (T_0) و تغییر دمای لبه راست



شکل ۲-۱۲- تغییرات توزیع تنش حرارتی برای دمای ثابت لبه چپ ($.5T_0$) و تغییر دمای لبه راست

در شکل (۲-۱۳) اثر تغییر ضریب هدایت گرمایی روی توزیع دمای پایا بررسی شده است. فرض شده است دمای لبه‌های چپ و راست صفحه معلوم و بترتیب $.05T_0$ و $.95T_0$ است. بطور کلی با افزایش ضریب غیرهمگنی، توزیع دما در صفحه به دمای لبه چپ گرایش دارد.



شکل ۲-۱۳-اثر مقادیر مختلف ضریب غیرهمگنی ضریب هدایت گرمایی روی میدان دما

فصل سوم

مکانیک شکست مواد مرکب تابعی

۳-۱- مقدمه

وجود ترک در سازه‌ها باعث گسیختگی این سازه‌ها در بارهای کمتر از مقدار مورد انتظـار مـی-شود. در تحلیل و طراحی اجسام دارای ترک، مکانیک شکست یکی از ابزارهای اساسی اسـت. داشـتن اطلاعاتی در مورد ترک اهمیت ویژه‌ای در ارزیابی ایمنی و عمر قطعات و سازه‌هـا دارد. در ایـن فصـل پس از مرور اجمالی مباحثی از مکانیک شکست محاسباتی، به مدلسـازی تـرک در روش بـدون‌المـان گلرکین پرداخته می‌شود. سپس موارد توسعه‌یافته مکانیک شکست برای FGM طـرح مـی‌گـردد و در چند مثال بکار گرفته می‌شود.

۳-۲- روشهای عددی در مکانیک شکست

امروزه روشهای مختلفی برای تحلیل ترک در روش المان محدود بکار گرفته می‌شود. ساده‌ترین روش، استفاده از المانهای استاندارد است. اما برای رصد مناسب تکینی میدان تنش حوزه نـوک تـرک نیاز به مش‌بندی بسیار ریز در نزدیکی نوک ترک می‌باشد. با بکار بردن المانهای تکین در حوزه نـوک ترک می‌توان بدون نیاز به مش‌بندی بسیار ریز به دقت قابل قبـولی دسـت یافـت. در میـان المانهـای تکین، استفاده از المانهای ۱/۴ از بقیه رایج‌تر است. در المان ۱/۴ با انتقال گره‌های وسط اضلاع منتهی به نوک ترک به فاصله ۱/۴ گره نوک ترک، تکینی در ژاکوبین المان ۸ گرهی serendipity بوجود می-آید. آکین[1] نیز المانی معرفی کرده است که تابع شکل گره نوک ترک در آن تصـحیح شـده اسـت تـا مشتقات آن شامل تکینی با مرتبه ۱/۴ باشد [۷۱].

روش دیگر رصد میدانهای تکین، استفاده از المانهای ایزوپارامتریـک غنـی‌شـده اسـت، در ایـن روش، غنی‌سازی المانها با کاربرد میدانهای حوزه نوک ترک در توابع آزمون انجام می‌شود [۷۲]. مزیت این روش، محاسبه مستقیم ضرایب شدت تنش به عنوان بخشی از حل حاصل از فراینـد معمـولی آن

[1] Akin

است. اما نتایج حاصل از بکارگیری المانهای غنی‌شده به اندازه آنها بسیار حساس است. حل مساله روند همگرایی مشخصی نسبت به اندازه المانها ندارد. به‌علاوه، گسترش ماتریس سختی و بردار نیرو برای لحاظ شدن ضرایب شدت تنش به عنوان مجهول، کاربرد این المانها را قدری پیچیده می‌نماید. در نهایت، به‌خاطر سازگار نبودن این المانها با المانهای استاندارد، برای مونتاژ به المانهای واسطه نیاز است.

در روشهای بدون‌مش و بخصوص روش بدون‌المان گلرکین روشهای مختلفی برای رصد میدان تکین حوزه نوک ترک بکار برده می‌شود. بطور کلی، محاسبه میدانهای تکین در روشهای بدون‌مش بطور قابل ملاحظه‌ای ساده‌تر و روانتر از روشهای المان محدود انجام می‌شود [۷۳].

غنی‌سازی در روشهای بدون‌مش به دو روش صورت می‌گیرد.

۱. با اضافه کردن توابع غنی‌شده به توابع آزمون.
۲. در نظر گرفتن توابع غنی‌شده در توابع پایه.

غنی‌سازی توابع آزمون (روش اول) برای مسائل شامل چند ترک کارایی بسیار خوبی دارد و با تغییرات کمی نسبت به مسائل دارای یک ترک قابل کاربرد است. اما مجهولاتی که متناظر با ضرایب شدت تنش اضافه می‌شوند؛ به اغتشاشات حساس می‌باشند و در روشهای مستقیم محاسبه ضرایب شدت تنش، نمی‌توانند مقدار دقیق را ارائه نمایند. البته با استفاده از روشهای انرژی مثل محاسبه انتگرالJ مقادیر ضرایب شدت تنش با دقت قابل قبولی محاسبه می‌شوند. برنامه‌نویسی این روش نسبت به روش دوم غنی‌سازی (غنی‌سازی پایه‌ها) پیچیده‌تر است. اهمیت روش مذکور کاربرد آن برای توصیف ترک در روشهای توسعه‌یافته است.

با در نظر گرفتن توابع خاص در پایه‌ها می‌توان تقریبی غنی‌شده را در روشهای بدون‌مش بدست آورد [۷۳]. برای مثال، در مکانیک شکست خطی پایه‌ها می‌توانند شامل جمله‌های میدان تغییرمکان حوزه نوک ترک و یا جمله کلیدی $\sqrt{r}$ باشند. انتخاب نوع و تعداد این توابع بستگی به

دقت موردنظر دارد. برای رسیدن به دقت بیشتر می‌توان از تمام جمله‌هـای میـدان مجـانبی اسـتفاده نمود. درحالیکه با لحاظ نمودن فقط جمله $\sqrt{r}$ می‌توان با سرعت بیشتری البته به نتایج با دقت کمتر دست یافت. دو روش غنی‌سازی در بخشهای بعد شرح داده می‌شوند.

۳-۲-۱- غنی‌سازی کامل

در غنی‌سازی کامل تقریب بدون‌المان گلرکین برای مسـائل مکانیـک شکسـت، تمـام جمـلات میدان تغییرمکان مجانبی حوزه نوک ترک در پایه‌ها به‌صورت زیر منظور می‌شوند.

$$\boldsymbol{p}^T(\boldsymbol{x}) = \left\{1, x, y, \sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}, \sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}, \sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta, \sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta\right\} \qquad (۳-۱)$$

سه عبارت خطی اول مربوط به میدان مجانبی تغییرمکان نیستند و برای پیوستگی میدان کلی تغییرمکان در نظر گرفته شده‌اند. با در نظر گرفتن توابع پایه فوق می‌تـوان توابـع شـکل را بـه‌ترتیـب گذشته بدست آورد و میدان تغییرمکان را بصورت زیر نمایش داد.

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n} \widetilde{\mathbf{\Phi}}_I(\mathbf{x})\mathbf{U}_I \qquad (۳-۲)$$

که در آن، $\widetilde{\mathbf{\Phi}}_I(\mathbf{x})$ تابع شکل غنی‌شده (حاصل از کاربرد توابع شکل غنی‌شده)، U پارامتر تغییرمکان و $u^h(\mathbf{x})$ تقریب میدان تغییرمکان است. برخلاف روش غنی‌سازی توابع آزمـون، در ایـن روش مجهـول جدیدی به مسأله اضافه نمی‌شود. اما به دلیل افزایش تعداد توابع پایه، ابعاد ماتریس **A(x)** بزرگتر می-شود و بدست آوردن توابع شکل، حجم محاسبات بیشتری را می‌طلبد. نکته قابل توجه در ایـن روش، امکان بدرفتار شدن ماتریس **A** و در نتیجه، کاهش دقت محاسبات مربوط به توابع شکل است. معمولا برای جلوگیری از بدرفتار شدن ماتریس **A** از دامنه اثر بزرگتری برای نقاط گوسی استفاده می‌شود. به-علاوه، برای محاسبه توابع شکل از معکوس‌گیری ماتریس **A** استفاده نمی‌شود و روش مشروح در[۷۴]و [۷۵] ترجیح داده می‌شود. در روش اخیر، بجای معکوس‌گیری کامل، از حل دستگاه معادلات خطی و

سپس جایگزینی استفاده می‌شود که در مقایسه با روش اول حجم محاسبات کمتر و دقت و پایـداری بهتری دارد. البته اگر برای تمام نقاط مسأله از توابع پایه کامل استفاده شود؛ ماتریس **A** بدرفتار نشده و اثر سوء روی دقت توابع شکل ندارد. ولی در صورت کوپل شدن توابع شکل غنی‌شده با توابـع شـکل حاصل از توابع پایه چندجمله‌ای اثر این پدیده قابل اعتنا می‌باشد. یکی دیگر از روشهای جلـوگیری از بدرفتار شدن ماتریس **A**، قطری کردن آن با استفاده از الگوریتم تعامدسازی گرام[1]-اشمیت[2] است کـه باعث افزایش استقلال خطی معادلات می‌گردد. در مکانیک شکست، بدلیل حجم محاسبات بالا معمولاً از غنی‌سازی کامل برای تمام گره‌ها استفاده نمی‌شود و کـاربرد آن بـه گـره‌هـای اطـراف نـوک تـرک محدود می‌شود. در گره‌های دیگر مسأله توابع پایه چندجمله‌ای بکار می‌روند. تفاوت تابع پایه در گره-های مختلف مسأله منجر به استفاده از روشهای کوپل توابع شکل در نواحی مرزی کاربرد آنها می‌شود.

۳-۲-۲- غنی‌سازی جزئی

غنی‌سازی جزئی تقریب بدون المان گلرکین فقط در جهت شعاعی صورت می‌گیرد و محدود به استفاده از جمله $\sqrt{r}$ در توابع پایه می‌شود. در این حالت، توابع پایه معمـولاً بـه‌صـورت زیـر درنظـر گرفته می‌شوند.

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \{1, x, y, \sqrt{r}\} \qquad (۳-۳)$$

که در آن، r فاصله شعاعی از نوک ترک است. این فرم غنی‌سازی بدین جهـت در نظـر گرفتـه شـده است که تغییرات زاویه‌ای میدانهای حوزه نوک ترک هموار است. اما تغییرات شعاعی میدانهای تنش و کرنش در نوک ترک تکین می‌باشد.

[1] Gram

[2] Schmidt

در این روش، به بردار پایه‌های اصلی فقط یک عبارت اضافه می‌شود و بنابراین محاسبه معکوس ماتریس **A** و در پی آن توابع شکل با مشکلات عددی کمتری مواجه است و نسبت به غنی‌سازی کامل ساده‌تر صورت می‌گیرد. بعلاوه، به نظر می‌رسد که نیاز به روشهای هموارسازی محاسبه تابع شکل برای نقاط اطراف نوک ترک نباشد؛ چون ناپیوستگی در جهت شعاعی ندارد. در این وضعیت، ناپیوستگی زاویه‌ای در غنی‌سازی کامل باعث کاهش دقت نتایج می‌گردد.

۳-۲-۳- کوپل تقریبهای خطی و غنی‌شده

غنی‌سازی تقریب در تمام ناحیه حل عموماً غیرضروری است و منجر به افزایش چشمگیر حجم محاسبات می‌گردد. در مکانیک شکست، میدانهای تکین حوزه نوک ترک محلی بوده و به شعاع تقریبی $0.1a$ محدود می‌شوند (a طول ترک است)[۷۵]. در ادامه دو روش برای کوپل تقریبهای خطی و غنی‌شده بحث می‌شود. در روش اول از کوپل سازگاری استفاده می‌گردد که پیوستگی مرتبه صفر میدان تغییرمکان C^{o} را حفظ می‌کند، ولی در روش دوم چنین نیست.

در روش اول تغییر تقریب از تقریب غنی‌شده به تقریب خطی، در یک ناحیه و به‌تدریج انجام می‌شود. به‌عبارت دیگر، کوپل تقریبها روی یک ناحیه گذرا صورت می‌گیرد.

ایده روش فوق از روشی گرفته شده است که برای کوپل میدانهای حاصل از روش بدون‌المان گلرکین و روش المان محدود بکار می‌رود[۷۳]. در ناحیه گذرای تقریب متغیر میدان -در اینجا تغییرمکان- به‌صورت زیر در نظرگرفته می‌شود.

$$u^{h}(\mathbf{x}) = Ru^{enr}(\mathbf{x}) + (1-R)u^{lin}(\mathbf{x}) \qquad (۴-۳)$$

در عبارت فوق، $u^{enr}(x)$ تقریب غنی‌شده و $u^{lin}(x)$ تقریب خطی میدان می‌باشد. R تابع شیب پیوسته‌ایست که در ناحیه گذرا تعریف می‌شود و روی مرز ناحیه غنی‌شده ($r = r_1$) دارای مقدار یک و روی مرز ناحیه تقریب خطی ($r = r_2$) دارای مقدار صفر می باشد (مطابق شکل (۳-۴)).

توابع چندجمله‌ای زیر به عنوان تابع شیب پیشنهاد شده‌اند:

$$R=\begin{cases}1-\xi & \text{linear}\\ 1-10\xi^3+15\xi^4-6\xi^5 & \text{quintic}\end{cases} \tag{۵-۳}$$

که در آن، $\xi=(r-r_1)/(r_2-r_1)$ و r فاصله شعاعی تا نوک ترک است.

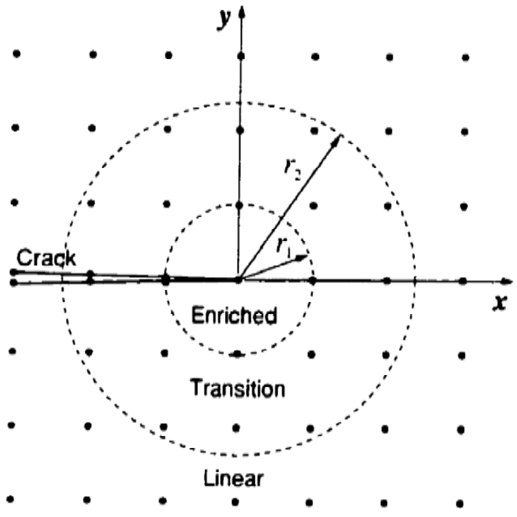
تقریب کوپل متغیر میدان را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$u^h(\mathbf{x})=\sum_{I=1}^{n}\widetilde{\mathbf{\Phi}}_I(\mathbf{x})\mathbf{U}_I \tag{۶-۳}$$

که در آن،

$$\widetilde{\Phi}^h(\mathbf{x})=R\Phi^{enr}(\mathbf{x})+(1-R)\Phi^{lin}(\mathbf{x}) \tag{۷-۳}$$

$\Phi_I^{enr}(x)$ تابع شکلی است که با استفاده از توابع پایه غنی‌شده کامل (رابطه (۳-۱)) محاسبه شده است و $\Phi_I^{lin}(x)$ تابع شکل حاصل از کاربرد توابع پایه خطی می‌باشد. کاربرد روش کوپل فوق، سازگاری میدان تغییرمکان را تضمین می‌نماید. پیوستگی میدان کرنش بستگی به پیوستگی تابع شیب R دارد. هرچند کاربرد تابع شیب خطی منجر به پیوستگی میدان تغییرمکان می‌شود؛ اما ناپیوستگی میدان کرنش در $r=r_1$ و $r=r_2$ را باعث می‌شود. استفاده از تابع شیب اسپیلاین درجه ۵ پیوستگی میدانهای تغییرمکان و کرنش را در پی دارد.



شکل ۳-۱- نمای کلی کوپل تقریبهای غنی‌شده و خطی

تجربیات ناشی از حل مثالهای عددی نشان می‌دهد؛ مقدار شعاع داخلی ناحیه گـذرا r_1 تقریباً اختیاری است و مرز آن می‌تواند از نوک ترک شروع شود. اما مقدار شعاع خـارجی r_2 بایـد بزرگتـر از شعاع محدوده تکینی حوزه نوک ترک باشد تا نتایجی با دقت مطلوب حاصل گردد.

البته می‌توان از روش کوپل استفاده نکرد و تقریب متغیر میدان بطور ساده و دفعـی از تقریـب غنی‌شده به تقریب خطی تبدیل شود. این تغییر باید در ناحیه دور از ناحیه حـوزه نـوک تـرک انجـام گیرد. مشکل استفاده از این روش ایجاد ناپیوستگی در میدان تغییرمکان در مـرز تغییـر نـوع تقریـب است. در این نقطه میدان تغییرمکان دارای پیوستگی C^1 است؛ یعنی در میدان تغییرمکـان پـرش رخ می‌دهد. هرچند از نظر تئوری ناپیوستگی متغیر میدان در روش گلرکین غیرقابل قبول است؛ امـا اگـر نقطه گذر به حد کافی دور از حوزه نوک ترک انتخاب شود، انـدازه پـرش کوچـک اسـت و اثـر قابـل توجهی روی حل نمی‌گذارد و در مجموع، همگرایی حل حفظ می‌گردد.

۳-۳- مدلسازی ترک با روش بدون‌المان گلرکین

خصوصیات پیوستگی و مشتق‌پذیری تقریب MLS به خصوصیات متناظر توابع پایه و تابع وزنـی بستگی دارد. هرچند کاربرد توابع پایه و وزنی معمول منجر به پیوستگی و مشتق‌پذیری تقریب MLS با

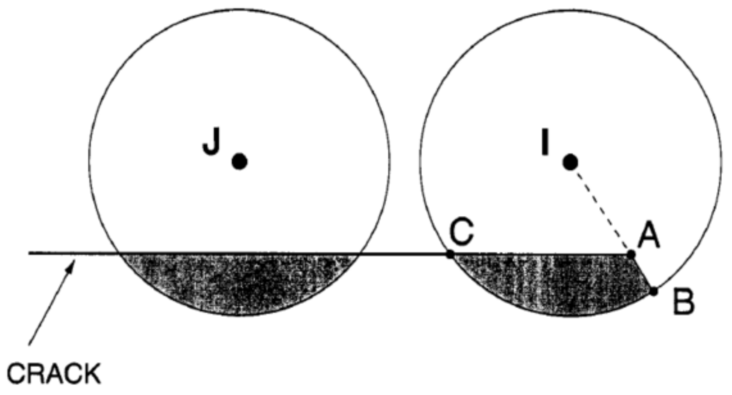
دقت نسبتاً بالایی در محیطهای پیوسته شده است؛ اما توسعه این تقریب به نواحی دارای ناپیوستگی مثل ترکها و یا فصل مشترک مواد نیازمند کاربرد روشهای ویژه‌ای برای لحاظ کردن ناپیوستگی در تقریب می‌باشد. در روشهای مرسوم، ناحیه تکیه‌گاهی گره‌ها در نزدیکی مرزهای غیرمحدب بر مبنای تئوری پرتوهای نوری تصحیح می‌گردد.

۳-۳-۱- معیار دید[1]

اولین روشی که برای مدلسازی مرزهای غیرمحدب ارائه شد؛ معیار دید می‌باشد [۳۷]. در این روش ساده، ناحیه تکیه‌گاهی گره‌ها محدود به حوزه دید از این گره می‌شود. در این روش تمام مرزهای داخلی و خارجی -از جمله ترک- مانند سطوح کدر در نظر گرفته می‌شوند. بنابراین حوزه دید (ناحیه تکیه‌گاهی) توسط این مرزها بریده و محدود می‌گردد. شرایط قرار گرفتن نقطه x در ناحیه تکیه‌گاهی یک گره مثل I یا J در شکل (۳-۲) را می‌توان بصورت زیر بیان نمود.

۱- نقطه x در ناحیه تکیه گاهی کامل گره (با فرض عدم وجود مرزها) قرار داشته باشد.

۲- پاره خط واصل نقطه x و گره، هیچ مرزی را قطع ننماید.



شکل ۳-۲- محدود شدن ناحیه تکیه‌گاهی با کاربرد معیار دید

[1] - visibility criteria

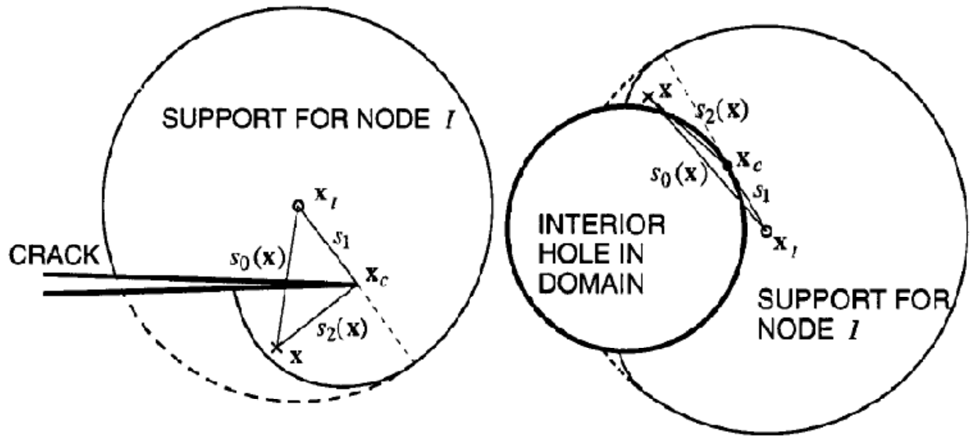
در شکل (۳-۲) نقاطی که در ناحیه هاشورخورده قرار دارند؛ از ناحیه تکیه‌گاهی گره‌های I و J حذف می‌شوند. در نتیجه، اثر ناپیوستگی در تعریف توابع وزنی و شکل گره‌هایی نظیر I و J لحاظ می‌گردد.

ضعف روش دید، مشکلی است که برای گره‌های نزدیک به نقاط انتهای ناپیوستگیها -مثل نوک ترک در مکانیک شکست- بوجود می‌آید. برش جزئی ناحیه تکیه‌گاهی -ناشی از کاربرد معیار دید - برای گره‌هایی که ناحیه تکیه‌گاهی آنها شامل نوک ترک است رخ می دهد- منجر به ناپیوستگی‌هایی در تقریب اطراف نوک ترک می‌شود. مقدار و طول این ناپیوستیگی‌ها تابع گره‌بندی اطراف نوک ترک است و با کاهش فاصله بین گره ها، ناپیوستگی نیز محدود می‌شود. تحقیقات نشان می‌دهد؛ علیرغم تقریبهای ناپیوسته‌ای که در اثر کاربرد معیار دید بوجود می‌آید، همگرایی حل حفظ می‌گردد [۷۶].

۳-۳-۲- روش پراش[1]

تقریبهای پیوسته و هموار در نزدیکی مرزهای غیرمحدب با کاربرد روش پراش قابل دستیابی است [۷۴ و ۷۷]. طبق این معیار، ناحیه تکیه‌گاهی گره‌ها مانند پراش پرتو نور حول یک گوشه تیز، حول مرزهای غیرمحدب پیچیده می‌شوند (مطابق شکل (۳-۳- چپ)).

[1] - diffraction method



شکل ۳-۳- کاربرد روش پراش برای تصحیح ناحیه تکیه‌گاهی: راست- حول یک سوراخ. چپ- حول یک ترک

همانطور که در شکل (۳-۳- چپ) دیده می‌شود؛ مطابق معیار پراش وقتی خط واصل بین گره x_I -که نوک ترک در ناحیه تکیه‌گاهی آن قرار دارد- و نقطه مورد نظر x ترک را قطع می‌کند؛ فاصله بین آنها برای محاسبه تابع وزنی بصورت زیر تصحیح می‌گردد.

$$d_I = \left(\frac{s_1 + s_2(x)}{s_0(x)}\right)^{\lambda} s_0(x) \qquad (۳-۸)$$

در این رابطه، $s_1 = \|x_I - x_c\|$ فاصله گره تا نوک ترک، $s_2 = \|x - x_c\|$ فاصله نقطه مورد نظر تا نوک ترک و $s_0 = \|x - x_I\|$ فاصله بین گره x_I و نقطه x می‌باشد. پارامتر λ برای تنظیم فاصله ناحیه تکیه-گاهی در آن طرف ترک بکار می‌رود. طبق نتایج عددی، 2 یا $\lambda=1$ کارکرد خوبی دارد. روش پراش برای مرزهای غیرمحدب دیگر مثل سوراخ نیز دارای کارکرد قابل قبولی است (شکل (۳-۳- راست)).

۳-۳-۳- روش شفافیت[1]

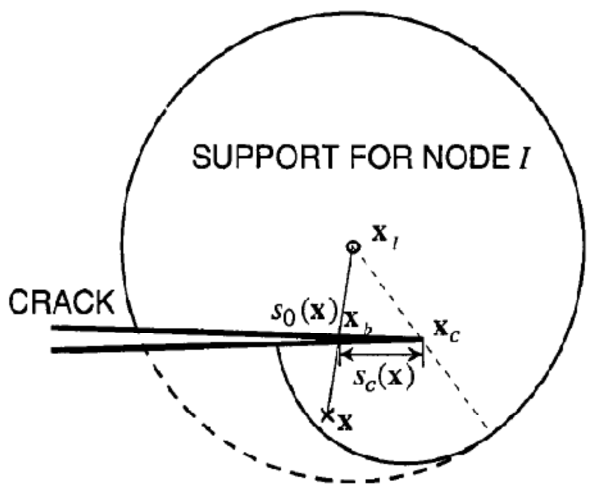
[1] - transparency method

روش دیگری که برای ساختن تقریب پیوسته بکار می‌رود؛ روش شفافیت است [۷۷]. در این روش، ترک در منطقه نزدیک نوک ترک بعنوان سطحی دارای شفافیت متغیر در نظر گرفته می‌شود؛ بطوریکه در نوک ترک کاملاً شفاف و در فاصله کوتاهی از آن کاملاً کدر فرض می‌شود.

طبق معیار شفافیت، وقتی خط واصل بین گره - دارای ناحیه تکیه‌گاهی شامل نوک ترک- و نقطه تقریب از ترک می‌گذرد (مطابق شکل (۳-۴))؛ فاصله d_I برای محاسبه تابع وزنی بصورت زیر تصحیح می‌گردد.

$$d_I(x) = s_o(x) + d_{mI}(\frac{s_c(x)}{\bar{s}_c})^{\lambda} \quad \lambda \geq 2 \tag{۹-۳}$$

که در آن، $s_0(x) = \|x - x_I\|$ و d_{mI} شعاع ناحیه تکیه‌گاهی گره I است. بعلاوه، $s_c(x)$ طول قطعه ترک بریده شده توسط خط واصل گره و نقطه تقریب است. پارامتر $\bar{s}_c$ طول قطعه‌ای از ترک است که دارای شفافیت می‌باشد و معمولاً بصورت کسری از فاصله گرهی در نظر گرفته می‌شود. کاربرد روش شفافیت برای نقاط تقریبی که در نزدیکی ترک قرار دارند؛ با مشکلاتی مواجه می‌شود.



شکل ۳-۴- کاربرد روش شفافیت برای تصحیح ناحیه تکیه‌گاهی

۳-۴- روش مجموعه بردارهای مرتبه‌ای

روش مجموعه مرتبه‌ای یک ابزار عمومی برای توصیف سطوح متحرک است و در بسیاری از مسائل مورد استفاده قرار می‌گیرد [۷۸ و ۷۹].

در این روش، سطح ناپیوستگی با یک تابع فاصله جهت‌دار و حرکت سطح با یک تابع حرکت مناسب تعریف می‌شود. تابع فاصله جهت‌دار با مجموعه‌ای از مقادیر گرهی بیان می‌شود و نیازی به توصیف صریح ترک نمی‌باشد. بعلاوه حرکت سطح ناپیوستگی نیز با روشهای عددی مثل اختلاف محدود مدل می‌گردد. در مسائل مکانیک شکست، این روش امکان توصیف سطوح ترک بسیار پیچیده را با مقادیر گرهی و بدون استفاده از اطلاعات هندسی فراهم می‌آورد. در رهیافت مجموعه مرتبه‌ای برداری یک ترک با استفاده از موقعیت نوک ترک و یک تابع برداری مجموعه مرتبه‌ای توصیف می‌شود. تابع مذکور با استفاده از توابع فاصله‌ای جهت‌دار تعریف می‌شود و در حقیقت بردار موقعیت نسبت به دستگاه مختصات محلی نوک ترک است. معمولاً این تابع برای باند نازکی از گره‌های اطراف ترک در نظر گرفته می‌شود.

توصیف مذکور امکان استفاده از تقریب جدیدی برای ترک را در روش بدون‌المان گلرکین می‌دهد. همچنین کاربرد معیار کلاسیک توصیف ترک در روش بدون‌المان گلرکین و عملیات محاسباتی حوزه نوک ترک مثل غنی‌سازی و محاسبه انتگرال J با کاربرد این روش بسیار ساده‌تر صورت می‌گیرد. کاربرد روش جدید تقریب نیازی به استفاده از روشهای مدلسازی ترک مثل روش پراش یا شفافیت ندارد. بعلاوه در این روش، تکنیی $\sqrt{r}$ بهتر از روشهای قبلی بیان می‌شود و باعث بهبودی همگرایی در حل می‌گردد. در نهایت، در این روش ناحیه تکیه‌گاهی گره‌های شامل ترک تغییر نمی‌کند.

۳-۴-۱- روش مجموعه مرتبه‌ای[1]

[1] - Level Set Method- LSM

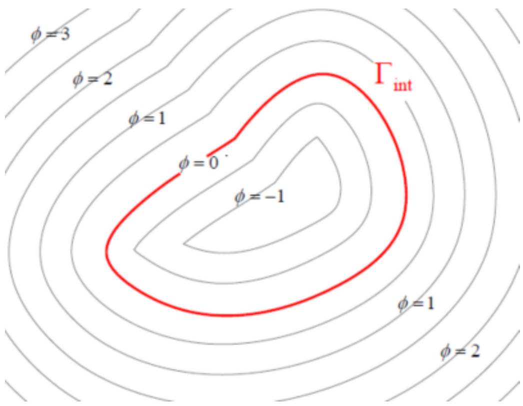
برای ارائه توضیح مختصری در مورد LSM مسألهای شامل فصل مشترک متحرک در نظر گرفته می‌شود. تابع Γ(t) فصل مشترک را نشان می‌دهد و Γ(t=0) موقعیت اولیه آنرا مشخص مـی‌کنـد. فـرض می‌شود، فصل مشترک با سرعت F در راستای عمود بر آن حرکت می‌کند. علاوه بر این، فرض می‌شود منحنی فصل مشترک در طول حرکت بسته باقی می‌ماند. بنابراین، ناحیه را به دو بخش مجزای داخل منحنی و خارج آن تقسیم می‌کند. اساس LSM، نمایش فصل مشترک با مقدار صفر تابع ϕ اسـت کـه بعد آن یکی بیشتر از بعد Γ است. معادله ϕ با این فرض که مقدار تابع ϕ در موقعیت $x(t)$ برابر صفر است که فصل مشترک در لحظه t از آن می‌گذرد یعنی $\phi(x(t),t)=0$. پس از مشـتق‌گیـری، اعمـال قاعـده زنجیـری و در نظـر گـرفتن سـرعت حرکـت فصـل مشـترک مـی‌تـوان نوشـت.

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+F\|\nabla\phi\|=0 \tag{۱۰-۳}$$

شرط اولیه بصورت یک تابع فاصله جهتدار از منحنی اولیه بیان می‌شود.

$$\phi(x,t=0)=\pm\min_{x\in\Gamma(t=0)}\|x-x_I\| \tag{۱۱-۳}$$

علامت (+) برای یک طرف منحنی Γ(t) و علامت (−) برای طرف دیگر آن است. در LSM حـل معادلـه فوق با روشهای محاسباتی روی یک شبکه گره تقریب زده می‌شود.



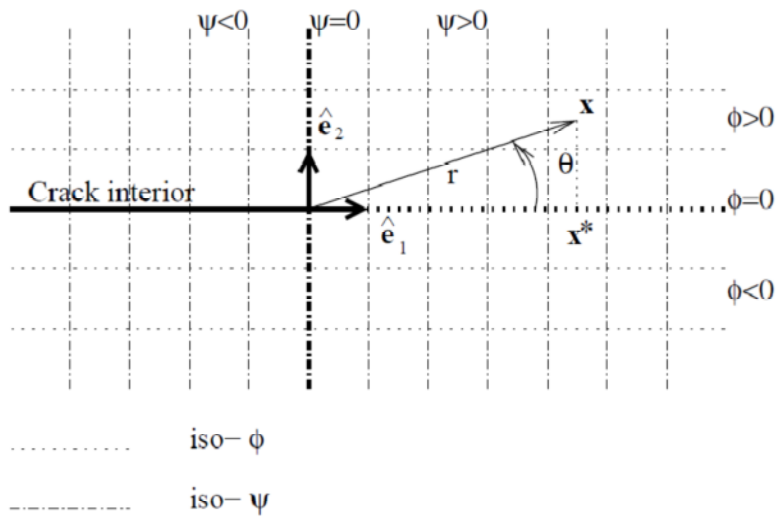
شکل ۳-۵- بیان یک فصل مشترک با استفاده از LSM

۳-۴-۲- نمایش مجموعه مرتبه‌ای یک ترک

همانطور که قبلاً ذکر شد؛ یک تابع مرتبه‌ای - به‌ترتیبی که در مورد فصل مشترک بکار می‌رود؛ برای نمایش ترک کافی نمی‌باشد. ترک در واقع یک مرز داخلی ناحیه حل است که آنرا بـه دو ناحیـه تقسیم می‌کند. در ناحیه دو بعدی، ترک یک مرز منحنی باز است که به نوک یا نوکهای آن ختم می-شود. بسط LSM برای نمایش یک مرز باز، توسط دو تابع مرتبه‌ای بصورت زیر است [۷۸].

- تابع مجموعه مرتبه‌ای عمودی ϕ که بصورت فاصله جهتدار از ترک و خطوط مماس در نوکهـای ترک تعریف می‌شود یعنی $\phi = \vec{r}.\hat{e}_2$.
- تابع مجموعه مرتبه‌ای مماسی ψ که بصورت فاصله جهتدار از خطوط گذرنده از نوکهای تـرک و عمود بر خطوط مماس آنها تعریف می‌شود یعنی $\psi = \vec{r}.\hat{e}_1$.

طبق تعربف فوق، ترک بصورت زیر مجموعه‌ای از مقدار صفر تابع ϕ تعریف می‌شود کـه ψ در آن منفی است. همچنین، جبهه ترک نیز فصل مشترک دو مقدار صفر توابـع ϕ و ψ اسـت. در شـکل (۳-۶) توصیف ترک با استفاده از توابع مجموعه مرتبه‌ای ϕ و ψ نشان داده شده است.



شکل ۳-۶- نمایش توابع φو ψ بصورت مؤلفه‌های بردار موقعیت نقطه **x**

۳-۴-۳- استفاده از توابع مجموعه مرتبه‌ای برای نمایش ناپیوستگی متغیر میدان

یک ترک در یک پیوستار جامد مرز داخلی است که میدان تغییرمکـان در طـول آن ناپیوسـته است. برای دست یافتن به یک حل منطقی و با دقت قابل قبول باید این ناپیوستگی در تقریب عـددی لحاظ شود. در این بخش، چگونگی تسهیل اعمال ناپیوستگی متغیر میدان توسط LSM تشریح خواهـد شد.

در روشهای قبلی، یک ترک با استفاده از توصیف صریح هندسی آن مدل مـی‌شـود. فضـای دو بعدی، از مجموعه‌ای از پاره‌خطها و در فضای سه بعدی، از مجموعه‌ای از المانهای هرمی بـرای لحـاظ نمودن ترک بکار گرفته می‌شوند. در سالهای اخیر، روش مجموعه مرتبه‌ای -علاوه بر روشهای مستقیم قبلی- برای نمایش ترک پیشنهاد شده است [۷۹]. روش مجموعه مرتبه‌ای یک روش عـددی اسـت و توسط اوشر[۱] و ستیان[۲] [۷۹] معرفی و توسط ستیان [۸۰] بطور مفصل بسط داده شده اسـت. اسـاس این روش، توصیف یک فصل مشترک یا مرز ناپیوستگی با مقدار صفر یک تابع است که تابع مجموعـه مرتبه‌ای نامیده می‌شود. تابع مذکور با استفاده از معادلات همیلتون-ژاکوبی و دانستن سرعت حرکـت فصل مشترک در راستای عمود بر آن، قابل اصلاح و بروز کردن می‌باشـد. اولـین بـار در سـال ۲۰۰۱ کاربرد تابع مجموعه مرتبه‌ای در روش المان محدود توسعه‌یافته[۳] مطرح گردید [۷۸].

در روش المان محدود توسعه‌یافته بـرای حـل مسـائل مکانیـک شکسـت از LSM بـرای تعیـین موقعیت ترک استفاده می‌شود و لازم نیست مش‌بندی ناحیه حل به لبه‌های ترک منطبق باشد. البتـه بین سطوح فصل مشترک در حالت کلی و ترک تفاوتهایی وجود دارد که در کاربرد LSM در مدلسازی ترک مؤثر است. فصل مشترک یک منحنی بسته است و ترک یک منحنی بـاز اسـت (در حالـت سـه

---

[1] - Osher

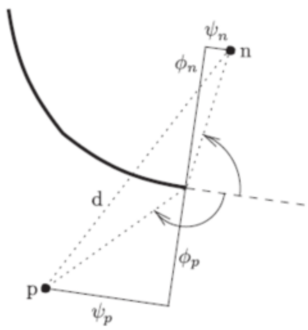
[2] - Sethian

[3] - eXtended Finite Element

بعدی یک سطح باز است) که امکان رشد از نوک ترک را دارد. در نتیجه، برای نمایش ترک دو تابع مرتبه‌ای اسکالر لازم است.

در روشهای مرسوم، ناپیوستگی متغیر میدان در توابع شکل از طریق اعمال در توابع وزنی لحاظ می‌گردد. این روشها در بخش قبل بطور مشروح آمده‌اند. نکته قابل توجه در کاربرد این روشها و معیارها، روش تشخیص قطع خط واصل بین گره‌ها و نقاط تقریب توسط ترک است که معمولاً از الگوریتمهای ریاضی مثل الگوریتم سدویک[1] استفاده می‌گردد [۷۳]. کاربرد این الگوریتمها به کدنویسی طولانی نیاز دارد. علاوه بر این، زمان قابل ملاحظه‌ای نیز در اجرا صرف می‌گردد. اما کاربرد توابع مجموعه مرتبه‌ای منجر به الگوریتم ساده‌ای می‌شود. مجموعه‌های مرتبه‌ای عمودی و مماسی، یک دستگاه مختصات محلی در نوک ترک تشکیل می‌دهند. مختصه‌های این دستگاه بسادگی مشخص می‌کنند که خط واصل بین گره n و نقطه تقریب p در شکل توسط ترک قطع می‌شود یا خیر؟ ارضای شرط زیر تقاطع را نشان می‌دهد [۸۱].

$$\left| \arctan\left(\frac{\phi_n}{\psi_n}\right) - \arctan\left(\frac{\phi_p}{\psi_p}\right) \right| > \pi \qquad (۱۲-۳)$$



شکل ۳-۷- کاربرد توابع مجموعه مرتبه‌ای برای اعمال معیارهای مرسوم در مدلسازی ترک [۸۱]

طول کوتاهترین مسیر بین نقطه تقریب p و گره n نیز بصورت زیر قابل بیان است.

[1] - Sedwich

$$\sqrt{\phi_n^2+\psi_n^2}+\sqrt{\phi_p^2+\psi_p^2} \qquad (۱۳-۳)$$

در روش المان محدود توسعه‌یافته، مش‌بندی روی مرزهای داخلی مثل ترک منطبق نمی‌شود. در عوض، درجات آزادی اضافی در گره‌هایی در نظر گرفته می‌شود که ناحیه تکیه‌گاهی آن توسط ترک بریده شده است.

توابع شکل متناظر با این درجات آزادی جدید حاصلضرب توابع شکل معمولی در تابع پرش $H(x)$ است که علامت آن در دو طرف ترک متفاوت است. با در نظر گرفتن تقریب نوک ترک، تقریب متغیر میدان (در اینجا تغییرمکان) در نقطه **x** بصورت زیر قابل بیان است.

$$u^h(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{N}\phi_i(\boldsymbol{x})q_i+\sum_{j\in N^c}\phi_j(\boldsymbol{x})H(\boldsymbol{x})a_j+\sum_{k\in N^{tip}}\phi_k(\boldsymbol{x})\sum_{\alpha=1}^{4}B_\alpha b_k^\alpha \qquad (۱۴-۳)$$

عبارت جمع دوم در طرف راست رابطه بالا، برای گره المانهایی در نظر گرفته می‌شود که توسط ترک بریده می‌شوند. درجات آزادی a_j میدان تغییرمکان باز شدن ترک را بیان می‌کند. عبارت جمع سوم در طرف راست نیز شامل گره‌هایی است که نوک ترک در ناحیه تکیه‌گاهی آنها قرار دارد و غنی‌سازی نوک ترک شامل آن می‌شود. تابع پرش $H(x)$ معمولاً بصورت تابع علامت در نظر گرفته می‌شود.

$$H(x)=sign(\phi(x)) \qquad (۱۵-۳)$$

که در آن،

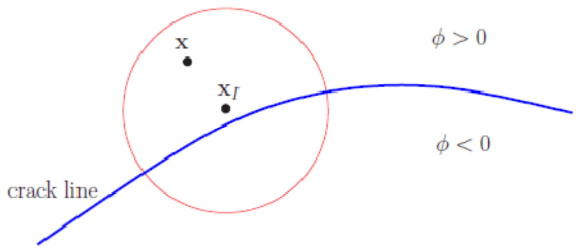
$$sign(s)=\begin{cases}+1 & S>0\\-1 & S<0\end{cases} \qquad (۱۶-۳)$$

توابع غنی‌سازی نوک ترک نیز بصورت یکی از دو فرم زیر در نظر گرفته می‌شود.

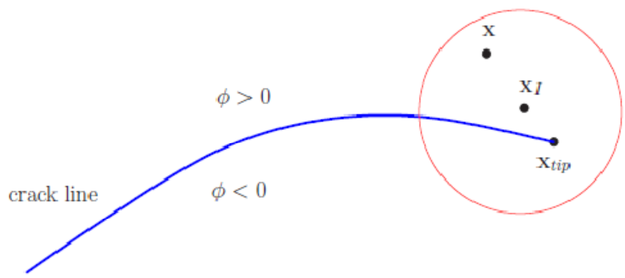
$$B(\boldsymbol{x})=\left\{\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2},\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2},\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta,\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta\right\} \qquad (۱۷-۳)$$

$$B(\boldsymbol{x})=\left\{\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2},\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2},\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}\cos\theta,\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}\cos\theta\right\} \qquad (۱۸-۳)$$

در این روابط، r و θ مختصه‌های نقطه $\boldsymbol{x}$ در مختصات محلی نوک ترک می‌باشند. مجموعه گره‌های N^c شامل گره‌هایی است که نقطه $\boldsymbol{x}$ در ناحیه تکیه‌گاهی آنها قرار دارد و ناحیه تکیه‌گاهی آنها توسط ترک بریده می‌شود. مجموعه گره‌های N^{tip} شامل گره‌هایی است که نقطه $\boldsymbol{x}$ و نوک ترک در ناحیه تکیه‌گاهی آنها قرار دارد



شکل ۳-۸- مجموعه گره‌های N^c: گره‌هایی که ناحیه تکیه‌گاهی آنها شامل نقطه $\boldsymbol{x}$ است و ناحیه تکیه‌گاهی آنها توسط ترک بریده می‌شود



شکل ۳-۹- مجموعه گره‌های N^{tip}: گره‌هایی که ناحیه تکیه‌گاهی آنها شامل نقطه $\boldsymbol{x}$ و نوک ترک است

در این روش، ماتریس **B** با روش کلاسیک EFG متفاوت است و بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$B=\begin{bmatrix}B^{std} & B^{enr}\end{bmatrix} \qquad (۱۹-۳)$$

که در آن، $\mathbf{B}^{std}$ ماتریس استاندارد **B** است و در دو بعد بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \Phi_{I,x} & 0 \\ 0 & \Phi_{I,y} \\ \Phi_{I,y} & \Phi_{I,x} \end{bmatrix} \tag{۲۰-۳}$$

و $\mathbf{B}^{enr}$ ماتریس غنی‌شده **B** است.

$$B^{enr} = \begin{bmatrix} \left(\Phi_I \Psi_I\right)_{,x} & 0 \\ 0 & \left(\Phi_I \Psi_I\right)_{,y} \\ \left(\Phi_I \Psi_I\right)_{,x} & \left(\Phi_I \Psi_I\right)_{,y} \end{bmatrix} \tag{۲۱-۳}$$

که در آن، $\Psi_I(\boldsymbol{x})$ می‌تواند تابع $H(\boldsymbol{x})$ و یا توابع غنی‌سازی نوک ترک $\mathbf{B}_\alpha(\mathbf{x})$ باشد.

۳-۶-۴- کاربرد توابع مجموعه مرتبه‌ای برای غنی‌سازی تقریب

با در نظر گرفتن اطلاعات حوزه نوک ترک در غنی‌سازی میدان تغییرمکان کیفیت حل را بطور قابل ملاحظه‌ای ارتقاء می‌دهد. در تمام روشهای غنی‌سازی، جمله‌های مربوطه برحسب فاصله شعاعی و زاویه‌ای در مختصات قطبی و محلی نوک ترک بیان می‌شود. متغیرهای r و θ را می‌توان برحسب توابع مجموعه مرتبه‌ای بصورت زیر بیان کرد.

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\phi^2 + \psi^2} \\ \theta &= arctan\left(\frac{\phi}{\psi}\right) \end{aligned} \tag{۲۲-۳}$$

۳-۵- روشهای عددی محاسبه ضریب شدت تنش

با درنظرگرفتن فرضیات مکانیک شکست خطی[1] میدانهای تنش، کرنش و تغییرمکان درحوزه نوک ترک با استفاده از ضریب شدت تنش[2] تعیین می‌شوند. در این بخش، روشهای

---

[1] Linear Elastic Fracture Mechanics- LEFM

[2] Stress Intensity Factor-SIF

عددی استخراج ضرایب شدت تنش در محدوده LEFM بررسی می‌شوند. بطور کلی روشهای استخراج ضریب شدت تنش به دو دسته تقسیم می شوند:

۱- روشهای مستقیم: مقادیر ضریب شدت تنش بطور مستقیم از نتایج عددی استخراج می‌شوند.

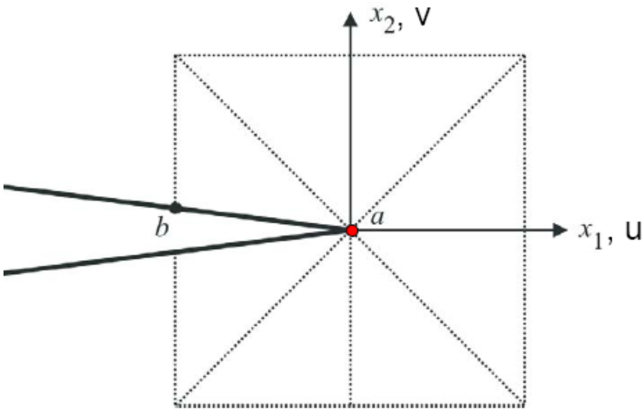
۲- رهیافت انرژی: ابتدا نرخ رهایش انرژی و سپس با استفاده از آن، ضریب شدت تنش محاسبه می‌شود.

معمولا روشهای با مبنای انرژی دقیقتر هستند و بر روشهای مستقیم ترجیح داده می‌شوند. اما روشهای مستقیم نیز قابلیتهایی دارند و بخصوص برای چک کردن نتایج رهیافت انرژی مفید می‌باشند. بیان این روشها ساده است و می‌توان با محاسبات دستی مقادیر ضریب شدت تنش را بدست آورد.

۳-۵-۱- روش همبستگی تغییرمکانها

روش همبستگی تغییرمکانها یکی از ساده‌ترین و به لحاظ تاریخی، اولین روشهایی است که برای استخراج ضریب شدت تنش از نتایج عددی بکار می‌رود و یک روش مستقیم است. در ساده‌ترین فرم این روش، تغییرمکانهای حاصل از تحلیل عددی برای یک نقطه -به نام نقطه همبستگی[1]- بطور مستقیم در عبارتهای تحلیلی میدان تغییرمکان حوزه نوک ترک جایگزین می‌شود. در شکل (۳-۱۰) کاربرد فرم ساده این روش نشان داده شده است.

[1] correlation point



شکل ۳-۱۰- کاربرد روش همبستگی تغییرمکان برای یک نقطه همبستگی

در ناحیه کنترل ضریب شدت تنش، میدان تغییرمکان بصورت زیر است.

$$u = \frac{K_{II}}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\sin\frac{\theta}{2}(\kappa - 1 + 2\cos^2\frac{\theta}{2}) \qquad (۲۳-۳)$$

$$v = \frac{K_{I}}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\sin\frac{\theta}{2}(\kappa + 1 - 2\cos^2\frac{\theta}{2}) \qquad (۲۴-۳)$$

با توجه به روابط فوق و در نظر گرفتن دو نقطه a و b و پارامترهای $r=r_{a-b}$ و $\theta = \pi$ در شکل (۳-۱۰)، تفاضل مؤلفه‌های تغییرمکان این دو نقطه بصورت زیر است.

$$v^b - v^a = \frac{K_I}{2\mu}\sqrt{\frac{r_{a-b}}{2\pi}}(\kappa + 1) \qquad (۲۵-۳)$$

$$u^b - u^a = \frac{K_{II}}{2\mu}\sqrt{\frac{r_{a-b}}{2\pi}}(\kappa + 1) \qquad (۲۶-۳)$$

در عبارتهای فوق، طرف چپ با استفاده از نتایج عددی محاسبه می‌شود. از این روابط، عبارتهای ضریب شدت تنش بصورت زیر استخراج می‌شود.

$$K_I = \frac{2\mu(v^b - v^a)}{(\kappa + 1)}\sqrt{\frac{2\pi}{r_{a-b}}} \qquad (۲۷-۳)$$

$$K_{II} = \frac{2\mu(u^b - u^a)}{(\kappa+1)}\sqrt{\frac{2\pi}{r_{a-b}}} \qquad (۲۸-۳)$$

$$K_{III} = \mu(w^b - w^a)\sqrt{\frac{\pi}{2r_{a-b}}} \qquad (۲۹-۳)$$

که در آنها μ مدول برشی، ν ضریب پواسون، r فاصله نوک ترک تا نقطه همبستگی و u، v و w به-ترتیب مولفه‌های تغییرمکان در راستاهای x، y و z در این نقطه می‌باشند. κ نیز ثابت کلسوف است.

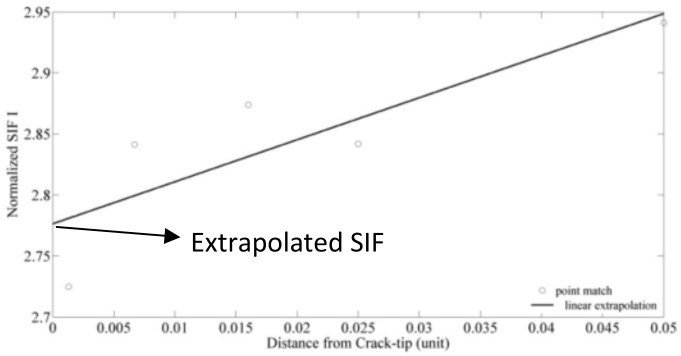
معمولا نقطه همبستگی روی سطح ترک و با تغییرمکان حداکثر، انتخاب می‌شود تا خطای نسبی در محاسبه تغییرمکانها به حداقل برسد. نتایج این روش به موقعیت نقطه همبستگی حساسیت زیادی دارد. لذا برای رسیدن به نتایج مطلوب در این روش باید در انتخاب نقطه همبستگی دقت بخرج داده شود؛ تا با وجود قرار داشتن نقطه در ناحیه کنترل ضریب شدت تنش دارای تغییرمکان مناسب نیز باشد. کاربرد این روش برای المانهای غیرتکین به مش‌بندی ریزی در حوزه نوک ترک نیاز دارد. مزیت اصلی این روش سادگی و محاسبه جداگانه ضریب شدت تنش برای هر سه مود شکست است.

یکی از روشهایی که برای حل این مشکل مورد استفاده قرار می‌گیرد، محاسبه ضریب شدت تنش برای تعدادی از نقاط در ناحیه کنترل ضریب شدت تنش است. سپس یک منحنی بر این نتایج برازش می‌شود و مقادیر ضریب شدت تنش برای حالتی برونیابی می‌شود که r به سمت صفر میل می‌کند (مطابق شکل (۳-۱۱)). در این حالت، روابط ضریب شدت تنش بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$K_{I} = \lim_{r\to 0}\frac{2\mu(u^b - u^a)}{(\kappa+1)}\sqrt{\frac{2\pi}{r}} \qquad (۳۰-۳)$$

$$K_{II} = \lim_{r\to 0}\frac{2\mu(v^b - v^a)}{(\kappa+1)}\sqrt{\frac{2\pi}{r}} \qquad (۳۱-۳)$$

$$K_{III} = \lim_{r \to 0} \mu (w^b - w^a) \sqrt{\frac{\pi}{2r}} \qquad (۳۲-۳)$$



شکل ۳-۱۱- برونیابی ضریب شدت تنش در روش همبستگی تغییرمکانها

در روش المان محدود، اگر از المانهای نوک ترک ۱/۴ استفاده شود؛ دقت مقادیر ضریب شدت تنش محاسبه شده با این روش بهبود می‌یابد [۸۲].

۳-۵-۲- روش گسترش مجازی ترک

روش گسترش مجازی ترک بر پایه رهیافت انرژی است. این روش توسط پارکس[۱] [۸۳] و هلن[۲][۸۴] بطور جداگانه پیشنهاد شده است. سالها بعد، پارکس روش مذکور را برای رفتار غیرخطی و تغییرشکل بزرگ نوک ترک تعمیم داد [۸۵]. اما امروزه این روش کاربردی ندارد. چون محاسبه نرخ تغییرات ماتریس سختی نسبت به رشد ترک در فرم گسسته آن با مشکلاتی مواجه است و از طرفی، ثابت می‌شود؛ فرم پیوسته این روش با فرم ناحیه‌ای انتگرال J معادل است [۸۶]. در این روش نرخ تغییر انرژی پتانسیل کل سیستم برای گسترش کوچک و مجازی ترک محاسبه می‌شود. این مقدار برپایه فرضیات LEFM برابر

---

[1] - Parks

[2] - Hellen

نـرخ رهـایش انـرژی مـی‌باشـد. نـرخ رهـایش انـرژی، Π، بـرای یـک سیســتم گسســته (در غیـاب نیروهای کالبدی) بشکل زیر است.

$$\Pi = \frac{1}{2}\mathbf{u}^T\mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{u}\mathbf{p} \tag{۳۳-۳}$$

که در آن، **u** بـردار تغییرمکـان گـره‌هـا، **K** مـاتریس سـختی و **p** بـردار نیـروی خـارجی اسـت. نـرخ رهایش انرژی برای گسترش کوچک و مجازی ترک بصورت زیر است:

$$\Im = \frac{\partial \Pi}{\partial a} = \frac{1}{2}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial a}\mathbf{u} - \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial a} + \frac{\partial \mathbf{u}^{\mathrm{T}}}{\partial a}[\mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{p}] \tag{۳۴-۳}$$

بـرای سـادگی، فـرض مـی‌شـود تغییـرات میـدان تغییرمکـان در اثـر رشـد مجـازی تـرک محـدود اسـت و سیسـتم نیروهـای خـارجی حـین رشـد تـرک تغییـر نمـی‌کنـد. بنـابراین، مقـدار داخل براکت صفر است و معادله بالا بصورت زیر ساده می‌شود.

$$\Im = \frac{1}{2}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial a}\mathbf{u} \tag{۳۵-۳}$$

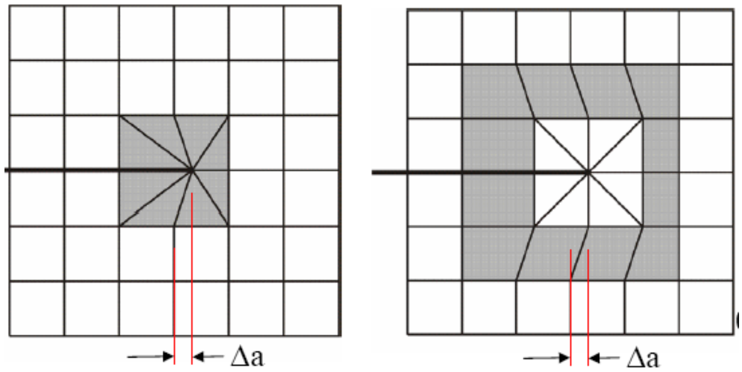
پارکس تقریب اختلاف محدود[1] را برای محاسبه $\partial \mathbf{K}/\partial a$ بکار برد [۸۳]..

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial a} = \frac{\mathbf{K}_{a+\Delta a} - \mathbf{K}_a}{\Delta a} \tag{۳۶-۳}$$

کـه در آن فقـط مـاتریس سـختی المانهـایی محاسـبه مـی‌شـود کـه تحـت تـاثیر رشـد تـرک واقـع شده و تغییرشـکل داده‌انـد. ایـن روش سـاده اسـت؛ امـا خطـای تقریـب را دربـردارد. عـلاوه بـراین، بـرای کـاربرد آن بـه معیـاری بـرای انتخـاب مقـدار Δa نیـاز اسـت. معمـولا بـرای منظـور نمـودن

[1] Finite Difference Method- FDM

تغییرشکل در میدان تغییرمکان اطراف نوک ترک دو حالت مطابق شکل (۳-۳) در نظر گرفته می‌شود.



شکل ۳-۱۲- منظور کردن اثر رشد مجازی ترک در میدان تغییرمکان. راست: حلقه‌ای از المانها حول المانهای نوک ترک. چپ: المانهای نوک ترک.

هابر[1] یک روش تحلیلی را برای محاسبه $\partial \mathbf{K}/\partial a$ معرفی نمود که اساسا قابلیتهای روش را افزایش می‌دهد [۸۷]. روابط فوق، روش گسترش مجازی ترک را برای فرم گسسته بیان می‌نمایند. دلورنزی[2] این روش را برای یک محیط پیوسته ارائه کرد [۸۸]و [۸۹] به نقل از[۸۶]. مهمترین مزایای رهیافت پیوسته، محدود نبودن روش به روشهای عددی تعریف‌شده روی ناحیه حل مثل روش المان محدود و عدم نیاز به محاسبه نرخ تغییرات ماتریس سختی نسبت به رشد ترک می‌باشد. بنک‌سیلز[3] و شرمن[4] نیز نشان دادند؛ روش مذکور بطور ریاضی معادل فرم ناحیه‌ای انتگرال J است که بعدا بدان اشاره می‌شود[۹۰].

---

[1] - Haber

[2] - deLorenzi

[3] - Bank-Sills

[4] - Sherman

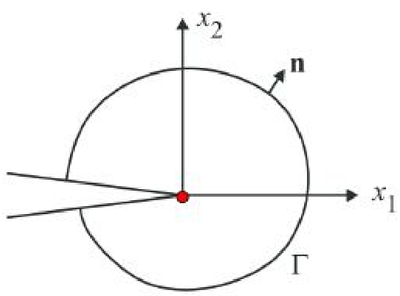
روش گسترش مجازی ترک بر مبنای رهیافت انرژی ارائه شده و انتظار می‌رود؛ درحالت کلی، برای یک مش‌بندی یکسان، از روش همبستگی تغییرمکانها دقیقتر باشد. اما همانطور که اشاره شد؛ نیاز است که نرخ رهایش انرژی کلی محاسبه شود. در این روش مودهای شکست از یکدیگر جدا نمی‌شوند. البته این نقص را می‌توان با تجزیه میدان تغییرمکان مرتفع نمود.

۳-۵-۳- انتگرال J (حالت دو بعدی)

انتگرال J یکی از پارامترهـایی اسـت کـه در مکانیـک شکسـت غیرخطـی بسـیار مـورد توجـه است. با فرض رفتار خطـی مـاده مـی‌تـوان انتگـرال J را معـادل نـرخ رهـایش انـرژی درنظـر گرفـت. در فرم ابتـدایی، انتگـرال J بصـورت انتگـرال خطـی روی کـانتور و نـرخ رهـایش انـرژی یـک جسـم دوبعدی محصور به این کـانتور بحـث شـد. بـا اسـتفاده از دسـتگاه مختصـات محلـی نـوک تـرک بـا محور x_1 مماس به لبه ترک و محور x_2 عمود بر آن، انتگرال J به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$J = \lim_{\Gamma \to 0} \int_{\Gamma} (W n_1 - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} n_j) d\Gamma \qquad (۳۷-۳)$$

که در آن، w چگالی انرژی کرنشـی، **σ** تانسـور تـنش، **n** بـردار یکـه و عمـود رو بـه خـارج کـانتور و **u** بردار تغییرمکان است (مطابق شکل (۳-۸)).



شکل ۳-۱۳- مختصات محلی نوک ترک و کانتور برای محاسبه انتگرال J

ثابت می‌شود؛ انتگرال خطی (۳-۵۹) با برقراری شرایط زیر مستقل از مسیر است.

۱. نیروهای کالبدی به سطح محصور به کانتور اعمال نشود.

۲. سطوح ترک عاری از تنش باشد (نیروی سطحی به آنها وارد نشود).

۳. مواد ایزوتروپیک و رفتار الاستیک (خطی یا غیرخطی) داشته باشند.

خاصـیت اسـتقلال از مسـیر انتگـرال J درحالتهـای وجـود نیروهـای کالبـدی یـا نیروهـای سطحی ترک درصورتی حفظ می‌شود که عبارتهایی به رابطه (۳-۵۹) اضافه شود.

کـاربرد اولیـه انتگـرال J در روش المـان محـدود، ارزیـابی مسـتقیم رابطـه (۳-۵۹) در طـول کانتوری در شبکه ناحیه حل بود. معمولا ایـن کـانتور طـوری انتخـاب مـی‌شـد کـه از نقـاط گوسـی انتگرالگیـری بگـذرد. چـون در ایـن نقـاط تنشـها بطـور دقیـق‌تـری محاسـبه مـی‌شـوند. متاسـفانه کاربرد فرم خطی انتگـرال J در روشـهای عـددی بـا خطـا همـراه اسـت و بنـدرت خاصـیت اسـتقلال از مسـیر را نشـان مـی‌دهـد. بـرای رفـع ایـن مشـکل، فرآینـدهایی اتخـاذ مـی‌شـود تـا محاسـبات عددی به مقادیر صحیح J نزدیکتر شود.

لـی[1] و همکـارانش نشـان دادنـد؛ چگونـه مـی‌تـوان انتگـرال خطـی J را بـه یـک انتگـرال سـطحی معـادل[2] تبـدیل نمـود [۹۱]. کـاربرد فـرم سـطحی انتگـرال J در روش المـان محـدود بسیار ساده‌تـر و بـا نتـایج دقیقتـری همـراه اسـت. بنـک‌سـیلز ثابـت کـرد؛ ایـن فـرم انتگـرال J نیـز خاصیت استقلال از سطح را دارا می‌باشد [۹۰]. فرم سطحی انتگرال J بصورت زیر است.

$$\bar{J} = \int_A (W\delta_{1j} - \sigma_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_1})\frac{\partial q_1}{\partial x_j}dA \qquad (۳\text{-}۳۸)$$

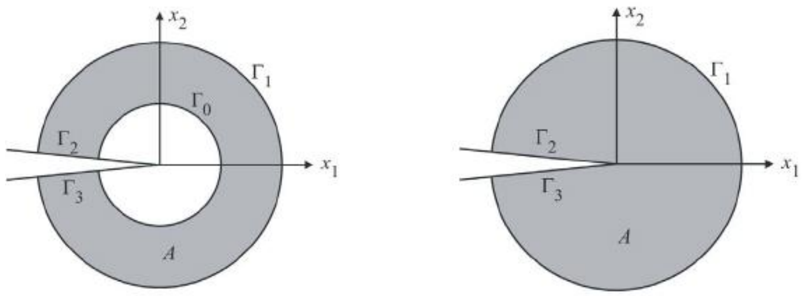
که در آن δ،تـابع دلتـای کرونکـر و q، یـک تـابع وزنـی اسـت کـه روی سـطح انتگرالگیـری تعریـف می‌شـود. بـه طـور فیزیکـی تـابع q را مـی‌تـوان بعنـوان میـدان تغییرمکـان در اثرگسـترش مجـازی ترک در نظر گرفت.

---

[1] Li

[2] Equivalent Domain Integral- EDI

ناحیه انتگرالگیری به دو روش تعریف می‌شود. ناحیه دایره‌ای توخالی که ناحیه نوک ترک را احاطه کرده است (مطابق شکل (۳-۱۴- چپ) و یا منقبض‌شدن کانتور داخلی تا نوک ترک (مطابق شکل (۳-۱۴- راست).



شکل ۳-۱۴- نواحی انتگرالگیری برای محاسبه فرم سطحی انتگرال J

حالت دوم که المانهای نوک ترک در انتگرالگیری بکار می‌رود؛ در برنامه‌های المان محدود بسیار پرکاربرد است. این دو حالت بطور مفهومی شبیه به شکل (۳-۷) هستند. ولی در اینجا هیچ تغییرمکان فیزیکی اعمال نمی‌شود. تابع q بوسیله مقادیر گرهی تعریف می-شود و روی المانهایی که داخل ناحیه انتگرالگیری هستند؛ با استفاده از فرم استاندارد توابع شکل میانیابی می‌شود.

$$q = \sum_i N_i q_i \qquad (۳-۳۹)$$

$$\frac{\partial q}{\partial x_j} = \sum \frac{\partial N_i}{\partial x_j} q_i \qquad (۳-۴۰)$$

بقیه کمیتهای معادله (۳-۵۵) در روشهای عددی براحتی محاسبه می‌شوند. تابع q باید روی کانتور داخلی در شکل (۳-۱۴-چپ) یا در نوک ترک در شکل(۳-۱۴-راست)، دارای مقدار یک و روی کانتور خارجی ناحیه دارای مقدار صفر باشد. در فضای بین دو کانتور نیز بطور معمول یک تغییر خطی برای آن در نظر گرفته می‌شود. برای مثال، اگر

ناحیه ارزیابی فقط المانهـای نـوک تـرک باشـد و از المانهـای ۱/۴ اسـتفاده شـده باشـد؛ آنگـاه بایـد مقادیر گرهـی بـرای q در گـره نـوک تـرک، یـک و درگـره هـای ۱/۴ ، ۰/۷۵ و در تمـام گـره‌هـای دیگر المان، صفر باشد.

اگـر نیروهـای سـطحی بـه تـرک وارد شـود (تـنش بـه سـطوح تـرک اعمـال شـود)؛ بایـد ترمهای اضافی در عبـارت انتگـرال J در نظـر گرفتـه شـود. بـرای اعمـال نیروهـای سـطحی تـرک $\mathbf{t}_i$ (مطابق شکل (۳-۱۴- چپ) داریم؛

$$\bar{J} = \bar{J}_A + \bar{J}_T = \bar{J}_A + \int_{\Gamma_3+\Gamma_2} t_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} q d\Gamma \qquad (۳\text{-}۴۱)$$

که در آن $\bar{J}_A$ با معادله (۳-۳۷) بیان شده است.

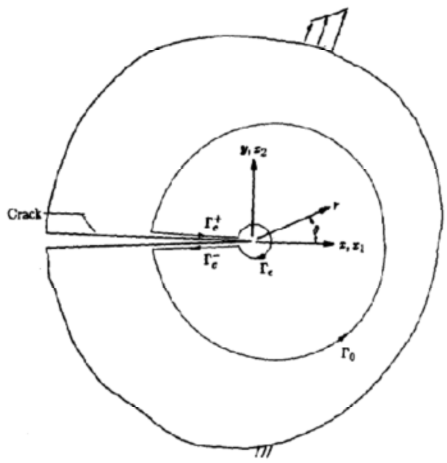
۳-۶- مکانیک شکست FGM

پیش‌بینی درست پارامترهـای شکسـت در FGM منـوط بـه داشـتن اطلاعـاتی از نحـوه تغییـر میدانهای تنش و کرنش در حوزه نوک ترک می‌باشد. از سوی دیگر، موفقیت مطالعات عددی در زمینه مکانیک شکست FGM به فهم درست میدانهای نوک ترک بستگی دارد. در این بخش میـدانهای دمـا، تنش و کرنش حوزه نوک ترک در FGM و تاثیر گرادیان خصوصـیات فیزیکـی مـواد روی پارامترهـای مکانیک شکست بررسی می‌شود. طبیعت و نوع تکین بودن میدانهای نوک ترک بدلیل اهمیت ویژه ی آنها در معیارهای شکست نیز مورد بحث قرار می‌گیرد.

در سال ۱۹۸۷، ایچن[1] میدانهای نوک ترک را در یک صفحه ی غیرهمگن با هندسـه دلخـواه و تحت بارگذاری دوردست صفحه‌ای مطالعه نمود [۹۲]. وی برای بیان فرم عمـومی میـدانهای تـنش و

1- Eischen

تغییرمکان در حوزه نوک ترک، از گسترش روش بسط تابع ویژه ویلیامز[1] [۷۰] استفاده کرد. در شکل (۳-۱۵) یک صفحه الاستیک غیرهمگن حاوی ترک نشان داده شده است.



شکل ۳-۱۵- نمای کلی صفحه غیرهمگن تحت بارگذاری دوردست صفحه‌ای [۴]

نیروهای اعمالی و قیدهای تغییرمکان روی مرزهای صفحه اعمال می‌شود. از نیروهای کالبدی صرف نظر شده و سطوح ترک عاری از تنش فرض می‌شوند. مدول الاستیسیته E و ضریب پواسون ν بصورت توابعی از موقعیت در نظر گرفته می‌شوند که در صفحه پیوسته, کراندار و مشتق پذیر می‌باشند؛ بطوریکه. $-1 \le \nu \le \frac{1}{2}, E > 0$ با در نظر گرفتن یک فرم عمومی مناسب برای آن و جایگزینی سه جمله اول بسط مک‌لورن E و νحول موقعیت نوک ترک، معادله ی حاکم بر تابع تنش با روش جداسازی متغیرها حل شده است. مولفه‌های تنش در دستگاه دکارتی به صورت زیر بدست آمده است.

$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{(2\pi r)^{\frac{1}{2}}} f_{xx}^{I}(\theta) + \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{\frac{1}{2}}} f_{xx}^{II}(\theta) + \sigma_{x0} + \sum_{i=0}^{\infty} O(r^{i-\frac{1}{2}}) \qquad (۴۲-۳)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{(2\pi r)^{\frac{1}{2}}} f_{yy}^{I}(\theta) + \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{\frac{1}{2}}} f_{yy}^{II}(\theta) + \sum_{i=0}^{\infty} O(r^{i-\frac{1}{2}}) \qquad (۴۳-۳)$$

---

[1]- Williams

$$\sigma_{xy}=\frac{K_I}{(2\pi r)^{\frac{1}{2}}}f_{xy}^{I}(\theta)+\frac{K_{II}}{(2\pi r)^{\frac{1}{2}}}f_{xy}^{II}(\theta)+\sum_{i=0}^{\infty}O(r^{i-\frac{1}{2}}) \qquad (۴۴-۳)$$

جمله‌ی آخر، عبارتهای غیرتکین[۱] از مرتبه های $r^{\frac{1}{2}}$, $r^{\frac{3}{2}}$و... را در بردارد. در رابطه (۲-۲۱) جمله‌ی σ_{x0} ترم تنش T می‌باشد. نمادهای $f_{-}^{-}(\theta)$ توابع سه‌گانه توزیع زاویه‌ای میدان تنش مواد همگن هستند. با توجه به میدان تنش در نوک ترک، نتایج زیر قابل توجه است:

۱- طبیعت تنش دقیقاً به همان شکلی است که در مواد همگن وجود دارد. به عبارت دیگر، ناهمگنی FGM روی طبیعت تکین بودن اثری ندارد.

۲- درجه تکین بودن در FGM نیز مانند مواد همگن است.

۳- در بسط مولفه‌های تنش، شکل کلی عبارتهای اول و دوم، متناظر با ترم تکین و عبارت سوم در رابطه (۳-۵۹) متناظر با ترم تنش T تحت تاثیر غیرهمگنی مواد قرار نمی‌گیرند.

۴- تغییرات زاویه‌ای ترمهای متناظر با مرتبه‌های بالاتر مولفه‌های تنش به غیرهمگنی ماده بستگی دارد. به‌عبارت دیگر، در نواحی دور از نوک ترک، تغییرات خصوصیات فیزیکی روی میدان تنش موثر است.

۵- نتایج بالا مستقل از تغییرات ν در صفحه است؛ یعنی تغییرات ضریب پواسون روی میدان تنش نوک ترک اثری ندارد.

همچنین وی حدس زد؛ ضرایب شدت تنش K_Iو K_{II} علاوه بر هندسه و بارگذاری به تغییرات مدول الاستیسیته نیز بستگی دارد. البته این مطلب با روش فوق اثبات نشد. قبل از این، اردگن [۹۳] و اردگن و دلال[۲] [۹۴] اشاره کرده‌اند؛ هرچند مطالعه عمیقی درباره میدان تنش نوک ترک انجام نشده است. اما به نظر می‌رسد، در بارگذاری مکانیکی تکین‌بودن نوک ترک به غیرهمگنی ماده وابسته

---

[1] - nonsingular

[2] - Delale

نباشد. با این فرض، برای مدتی مسایل شکست تحت بار مکانیکی و بار حرارتی مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت [۹۴]و [۹۵].

در سال ۱۹۹۴، جین و نودا میدانهای تنش و شار حرارتی در نوک ترک مواد غیرهمگن را به همراه تنش پلاستیک مطالعه نمودند [۹۶]. ایشان مسایل دو بعدی را برای FGM ایزوتروپیک بررسی کردند و نتایج آن را برای حالت سه‌بعدی و غیرایزوتروپیک قابل تعمیم دانستند. با در نظر گرفتن جملات غالب معادلات حاکم در نوک ترک، حل این معادلات در حوزه نوک ترک، دقیقاً شبیه حل در مواد همگن بدست آمد.

در سال ۲۰۰۴، جین[1] و همکارانش میدان تنش حوزه نوک ترک در یک ماده غیرهمگن، با تغییر خطی ضریب الاستیسیته را با استفاده از تابع تنش وسترگارد[2] بررسی کردند [۹۷]. آنها برای بررسی اثر غیرهمگنی ماده روی ساختار میدان تنش در حالت مود I و II و حالت ترکیبی, ۶ جمله اول بسط میدان تنش را برای ترک موازی با جهت گرادیان ماده و ۴ جمله اول بسط را برای حالت مایل ترک بدست آوردند. با استفاده از این جملات، کانتور تنش برشی حداکثر و تغییرمکان خارج از صفحه را رسم نمودند. جین و همکارانش بعلت وجود مود مختلط در نوک ترک و خودمشابه[3] ندانستن رشد ترک، کاربرد معیارهای کلاسیک نرخ رهایش انرژی بحرانی و ضریب شدت تنش بحرانی را برای پیش‌بینی رشد ترک مناسب ندانستند. آنها علت این امر را امکان منفی شدن این مقادیر برای FGM ذکر کردند و معیار چگالی انرژی کرنشی را پیشنهاد نمودند. جین و بترا چقرمگی شکست (K_{IC}) و نرخ رهایش انرژی بحرانی(G_{IC}) در FGM را با استفاده از مفهوم پل‌بندی روی ترک[4] و قوانین اختلاط بررسی

---

[1] Jain

[2] Westergaard

[3] self-similarity

[4] crack bridging

کردند [۹۸]. طبق نتایج این تحقیق، K_{IC} و G_{IC} به چقرمگی شکست و نرخ رهایش انرژی بحرانی فلز (K_{IC}^{metal} و G_{IC}^{metal}) و سرامیک (K_{IC}^{cram} و G_{IC}^{ceram}) و کسر حجمی فلز (V_m) بستگی دارد و در ساده‌ترین شکل، به صورت زیر است.

$$K_{IC} = V_m K_{IC}^{metal} + (1 - V_m) K_{IC}^{ceram} \quad (۴۵\text{-}۳)$$

$$G_{IC} = V_m G_{IC}^{metal} + (1 - V_m) G_{IC}^{ceram} \quad (۴۶\text{-}۳)$$

همچنین ضریب شدت تنش و نرخ رهایش انرژی در FGM مانند مواد همگن با روابط زیر بیان می‌شود.

$$G = \begin{cases} \dfrac{K_I^2}{E^{tip}} & plane\ stress \\ \dfrac{K_I^2(1-(\nu^{tip})^2)}{E^{tip}} & plane\ strain \end{cases} \quad (۴۷\text{-}۳)$$

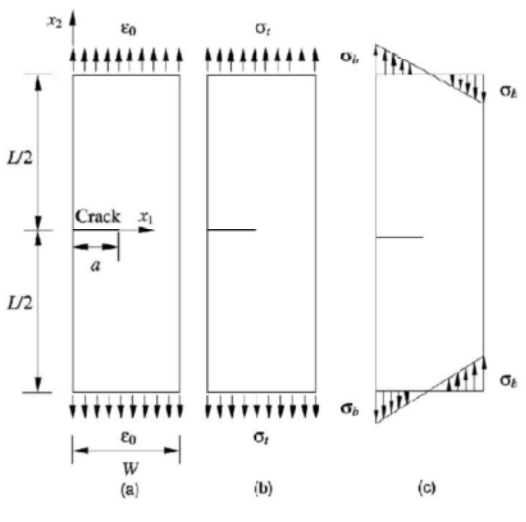
که در آن، E^{tip} و ν^{tip} مقدار مدول الاستیسیته و ضریب پواسون در نوک ترک می‌باشد. هرچند در مورد پارامترهای مکانیک شکست در حوزه نوک ترک در مواد همگن و غیرهمگن شباهتهای زیادی وجود دارد، اما پارامترهای مربوط به خارج از محدوده نوک ترک در این مواد تفاوتهای اساسی دارند. انتگرال J یکی از مهمترین این پارامترهاست. انتگرال J در مواد غیرهمگن مستقل از مسیر نیست و به علت وابستگی ترمهای آن به گرادیان خصوصیات مواد، محاسبه این انتگرال در FGM به‌سادگی مواد همگن نمی‌باشد. روابطی که بین انتگرال J و ضریب شدت تنش و نرخ رهایش انرژی در مواد همگن برقرار است؛ در این مواد فقط برای محاسبه انتگرال J در محدوده نوک ترک برقرار است [۹۹]. این مساله باعث بروز مشکلاتی در کاربرد روشهای عددی مثل المان محدود می‌شود. برای محاسبه انتگرال J در این مواد باید از مشهای بسیار ریز (طول المانها در مرتبه $۱۰^{-۵}$ طول ترک [۱۰۰]) استفاده نمود.

۳-۷- مثالهای عددی

روش بدون‌المان گلرکین برای ارزیابی ضرایب شدت تنش در صفحات حاوی ترک و تحت بار مکانیکی در چند مثال بکار گرفته شده است. در مثالهای شامل FGM، مدول الاستیسیته متغیر و ضریب پواسون ثابت فرض می‌شود. برای مدلسازی ترک از هر دو روش کلاسیک (معیار پراش و غنی-سازی کامل پایه‌ها) و روش مبتنی بر LSM استفاده می‌شود. محاسبه ضرایب شدت تنش با دو روش انرژی (انتگرال J) و روش مستقیم (همبستگی تغییرمکانها) بکار گرفته شده‌اند. انتگرال عددی روی سلولها نیز با شبکه ۱۰×۱۰ گوس – لژاندر انجام می‌گردد.

۳-۷-۱- صفحه FGM حاوی ترک لبه‌ای تحت مود I

صفحه‌ای از FGM بطول ۸ واحد و عرض ۱ واحد شامل یک ترک لبه‌ای بطول a در نظر گرفته می‌شود. ترک وسط صفحه و عمود بر لبه آن است. بارگذاری مکانیکی بصورت کرنش ثابت، تنش کششی ثابت و خمش خالص (تنش خطی) اعمال می‌گردد. بارگذاریهای مذکور در شکل (۳-۱۶) نشان داده شده است.



شکل ۳-۱۶- هندسه و بارگذاری FGP حاوی ترک لبه‌ای. (a) کرنش ثابت. (b) تنش کششی ثابت. (c) تنش خمشی

مدول الاستیسیته بصورت تابع نمایی در نظر گرفته می شود .

$$E(x_1) = E(0)\,exp(K_E x_1) \qquad 0 \le x_1 \le W \tag{۳-۴۸}$$

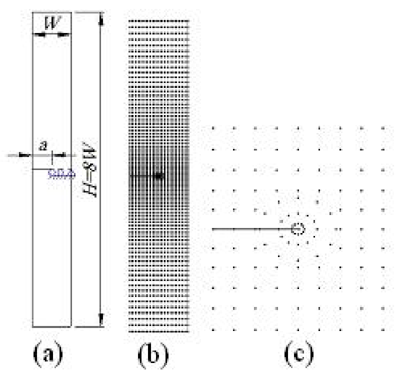
که در آن ،

$$K_E = ln(\frac{E(W)}{E(0)}) \qquad (۴۹-۳)$$

در رابطه مدول الاستیسیته، *E(0)* و K_E دو پارامتر مستقل از هم می‌باشند و تغییرات مدول الاستیسیته را کنترل می‌کنند. به عبارت دیگر، پروفیل نمایی با مشخص شدن دو پارامتر *E(0)* و K_E و یا *E(0)* و *E(W)* یعنی جنس دو طرف صفحه، کاملاً تعریف می‌شود. مقادیر عددی منظور شده بصورت زیر است.

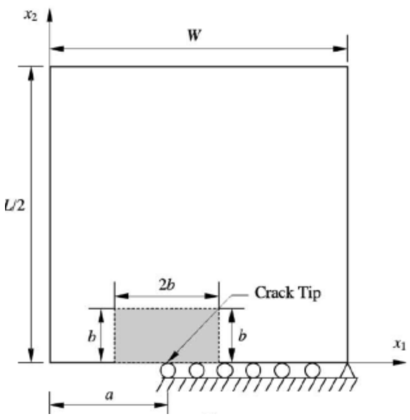
$$\frac{E(W)}{E(0)} = 0.1, 0.2, 1, 5, 10,$$
$$E(0) = 1$$
$$\frac{a}{W} = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$$

ضریب پواسون در $\nu = 0.3$ ثابت فرض می‌گردد. مسأله در حالت کرنش صفحه‌ای تحلیل می‌شود. نتایج حاصل با نتایج تحلیلی ارائه شده توسط اردگن و وو مقایسه شده است. بخاطر تقارن بارگذاری و هندسه، در روش کلاسیک فقط نصف صفحه تحلیل می‌گردد. مدل مورد استفاده در EFG شامل شکبه گرهی منظم ۱۱×۴۱ و مدل ستاره‌ای حوزه نوک ترک در روشهای کلاسیک است. شبکه سلولی ۱۰×۴۰ نیز برای انتگرالگیری عددی در نظر گرفته شده است.



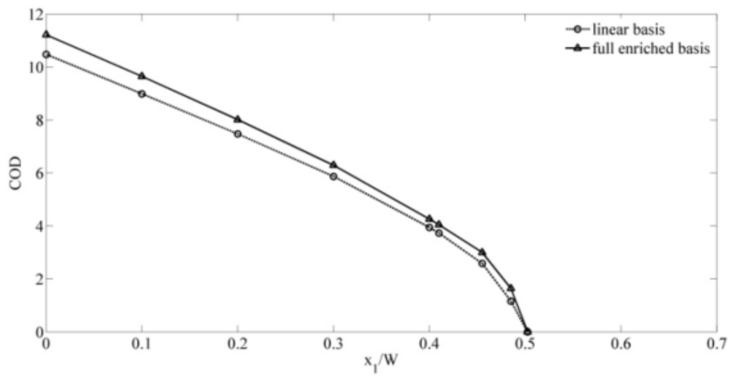
شکل ۳-۱۷- نمای کلی از (a) هندسه (b) گره‌بندی کامل (c) گره‌بندی نوک ترک برای FGP

ناحیه انتگرالگیری بصورت مربعی به مرکز نوک ترک و به طول 2b×2b است. b برحسب طول ترک ($b=0.1\,a$) و یا طول سلولهای انتگرالگیری مشخص می‌گردد.



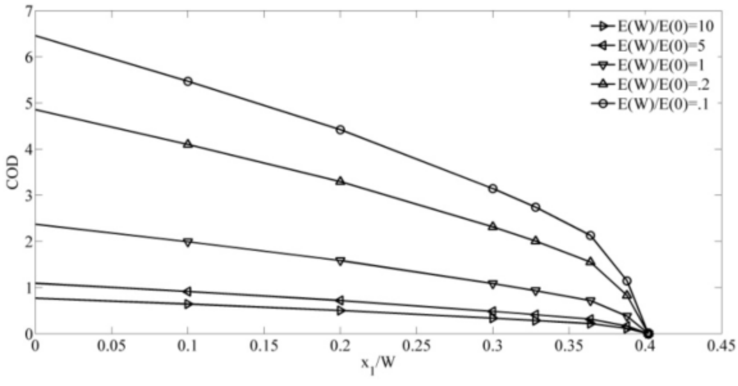
شکل ۳-۱۸- شرایط مرزی و ناحیه انتگرال J برای نصف مدل

در شکل (۳-۱۹) اثر کاربرد توابع پایه غنی‌شده روی بازشدگی سطح ترک برای بارگذاری تنش کششی یکنواخت نشان داده شده است. اختلاف COD در محاسبه مقادیر SIF با روش مستقیم DCT اثر چشمگیری دارد.



شکل ۳-۱۹- مقایسه بازشدگی سطح ترک برای توابع پایه خطی و غنی‌شده

بازشدگی سطح ترک برحسب E(W)/E(0) در شکل (۳-۲۰) آمده است. مطابق شکل، برای مقادیر کمتر E(W)/E(0) (صفحات با مواد نرمتر) بازشدگی سطح ترک بیشتر است.



شکل ۳-۲۰- بازشدگی سطح ترک برحسب E(W)/E(0)

در جدول (۳-۱) تا (۳-۳) مقادیر ضریب شدت تنش نرمالیزه شده را برای بارگذاریهای کرنش معین، کشش یکنواخت و خمش خالص نشان می‌دهد. مقادیر SIF با تقسیم بر مقدار $\sigma\sqrt{\pi a}$، نرمالیزه شده‌اند. برای کشش یکنواخت $\sigma=\sigma_t$ و برای خمش خالص $\sigma=\sigma_b$ و برای کرنش معین $\sigma=E(0)\varepsilon_0/(1-\nu^2)$ با فرض $\varepsilon_0=1$ می‌باشد (σ مقدار تنش در لبه سمت راست ($x_1=0$) صفحه بدون ترک است). نتایج برای ناحیه انتگرالگیری مربع به ضلع 2c=0.2 *a* بدست آمده است.

جدول ۳-۱- ضریب شدت تنش مود I برای یک صفحه FGM تحت بار کشش یکنواخت (کرنش ثابت)

روش	E(W)/E(0)	$K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$				
		a/W=0.2	*a*/W=0.3	*a*/W=0.4	*a*/W=0.5	*a*/W=0.6
انتگرال J	۱۰	۱/۵۷۸۳	۲/۰۷۰۱	۲/۸۹۹۵	۴/۲۱۶۵	۶/۷۴۸۸
	۵	۱/۴۹۸۸	۱/۹۱۰۸	۲/۵۹۶۹	۳/۶۶۱۵	۵/۶۷۶۷
	۱	۱/۳۷۰۵	۱/۶۵۹۶	۲/۱۳۰۰	۲/۸۲۶۸	۴/۱۱۱۹
	۰/۲	۱/۳۰۵۲	۱/۵۲۸۴	۱/۸۸۰۲	۲/۳۸۰۰	۳/۲۸۷۸
	۰/۱	۱/۲۹۸۴	۱/۴۹۸۶	۱/۸۱۷۰	۲/۲۶۰۸	۳/۰۶۳۴
DCT	۱۰	۱/۵۳۳۹	۲/۰۳۵۱	۲/۹۰۵۲	۴/۲۳۴۱	۶/۷۷۷۶
	۵	۱/۴۵۶۵	۱/۸۸۰۰	۲/۶۰۳۷	۳/۶۷۸۲	۵/۷۰۰۶
	۱	۱/۳۳۱۱	۱/۶۳۲۳	۲/۱۳۹۱	۲/۸۴۱۷	۴/۱۳۵۹
	۰/۲	۱/۲۶۶۶	۱/۵۰۸۶	۱/۸۸۵۹	۲/۳۹۳۹	۳/۳۰۳۶
	۰/۱	۱/۲۵۳۶	۱/۴۸۰۱	۱/۸۲۱۴	۲/۲۷۴۴	۳/۰۷۶۷
Erdogan & Wu [18]	۱۰	۱/۵۷۴۰	۲/۰۷۲۳	۲/۸۷۳۶	۴/۲۱۴۰	۶/۶۳۱۹
	۵	۱/۴۹۳۶	۱/۹۱۱۸	۲/۵۷۳۰	۳/۶۵۷۳	۵/۵۷۰۴
	۱	–	–	–	–	–
	۰/۲	۱/۳۰۵۸	۱/۵۳۳۰	۱/۸۷۵۱	۲/۴۰۳۱	۳/۲۹۸۱
	۰/۱	۱/۲۹۶۳	۱/۵۰۸۳	۱/۸۲۴۶	۲/۳۱۴۰	۳/۱۵۴۴

جدول ۳-۲- ضریب شدت تنش مود I برای یک صفحه FGM تحت بار غشایی یکنواخت

روش	E(W)/E(0)	$K_I / \sigma\sqrt{\pi a}$				
		a/W=0.2	a/W=0.3	a/W=0.4	a/W=0.5	a/W=0.6
انتگرال J	۱۰	۱/۰۰۵۲	۱/۲۱۹۱	۱/۵۹۰۶	۲/۱۷۹۱	۳/۲۱۶۹
	۵	۱/۱۳۵۵	۱/۳۷۰۰	۱/۷۵۱۰	۲/۳۶۸۶	۳/۴۵۳۲
	۱	۱/۳۷۰۵	۱/۶۵۹۶	۲/۱۱۳۲	۲/۸۲۶۸	۴/۰۳۸۳
	۰/۲	۱/۳۹۵۴	۱/۸۳۹۳	۲/۴۳۷۹	۳/۳۰۴۶	۴/۷۱۶۷
	۰/۱	۱/۲۹۵۰	۱/۸۵۹۲	۲/۵۶۷۴	۳/۵۰۳۰	۵/۰۱۲۴
DCT	۱۰	۰/۹۹۰۸		۱/۶۱۶۳	۲/۱۹۳۴	۳/۳۰۶۴
	۵	۱/۱۴۸۰	۱/۳۶۵۰	۱/۷۷۵۲	۲/۳۸۴۵	۳/۵۴۵۶
	۱	۱/۳۷۵۵	۱/۶۴۸۶	۲/۱۳۹۱	۲/۸۴۲۴	۴/۱۳۶۰
	۰/۲	۱/۳۸۰۹	۱/۸۳۰۳	۲/۴۵۹۷	۳/۳۱۳۹	۴/۷۸۰۰
	۰/۱	۱/۲۶۵۹	۱/۸۳۹۲	۲/۵۷۳۲	۳/۵۱۷۸	۵/۰۷۴۵
Erdogan & Wu [18]	۱۰	۱/۰۰۱۹	۱/۲۲۹۱	۱/۵۸۸۴	۲/۱۷۶۲	۳/۲۱۲۴
	۵	۱/۱۳۱۸	۱/۳۶۹۷	۱/۷۴۸۳	۲/۳۶۵۶	۳/۴۴۵۴
	۱	–	–	–	–	–
	۰/۲	۱/۳۹۵۶	۱/۸۳۹۵	۲/۴۴۸۶	۳/۳۲۶۶	۴/۷۶۱۴
	۰/۱	۱/۲۹۶۵	۱/۸۵۸۱	۲/۵۵۸۸	۳/۵۷۰۱	۵/۱۸۸۰

جدول ۳-۳- ضریب شدت تنش مود I برای یک صفحه FGM تحت بار خمش خالص

روش	E(W)/E(0)	$K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$				
		a/W=0.2	a/W=0.3	a/W=0.4	a/W=0.5	a/W=0.6
انتگرال J	۱۰	۰/۵۶۶۹	۰/۶۵۹۳	۰/۸۰۵۴	۱/۰۳۶۷	۱/۴۳۰۴
	۵	۰/۶۸۹۷	۰/۷۷۸۸	۰/۹۲۵۱	۱/۱۶۰۵	۱/۵۶۳۲
	۱	۱/۰۶۳۲	۱/۱۲۵۴	۱/۲۶۱۳	۱/۴۹۸۴	۱/۹۳۳۵
	۰/۲	۱/۵۹۳۷	۱/۶۱۳۰	۱/۷۲۲۸	۱/۹۲۹۵	۲/۳۶۶۵
	۰/۱	۱/۹۰۴۶	۱/۸۷۷۱	۱/۹۶۱۵	۲/۲۵۰۲	۲/۵۸۱۳
DCT	۱۰	۰/۵۵۹۶	۰/۶۵۹۱	۰/۸۱۷۷	۱/۰۴۴۶	۱/۴۷۸۶
	۵	۰/۶۸۰۵	۰/۷۷۸۳	۰/۹۳۸۷	۱/۱۶۹۲	۱/۶۱۰۵
	۱	۱/۰۴۳۴	۱/۱۲۴۲	۱/۲۷۸۳	۱/۵۰۹۱	۱/۹۷۰۳
	۰/۲	۱/۵۷۰۶	۱/۶۰۶۴	۱/۷۲۸۵	۱/۹۴۰۸	۲/۴۰۷۲
	۰/۱	۱/۸۸۸۵	۱/۸۷۱۳	۱/۹۶۶۹	۲/۲۶۲۳	۲/۶۲۴۰
Erdogan & Wu [18]	۱۰	۰/۵۶۴۸	۰/۶۵۸۸	۰/۸۰۴۳	۱/۰۳۵۰	۱/۴۲۸۶
	۵	۰/۶۸۷۱	۰/۷۷۷۸	۰/۹۲۳۶	۱/۱۵۱۸	۱/۵۵۹۷
	۱	–	–	–	–	–
	۰/۲	۱/۵۹۵۲	۱/۶۱۲۲	۱/۷۲۱۰	۱/۹۵۳۴	۲/۴۰۳۷
	۰/۱	۱/۹۰۴۰	۱/۸۸۵۹	۱/۹۷۷۸	۲/۲۱۵۱	۲/۷۱۷۰

نتایج نشان می‌دهد، SIF محاسبه شده با روش بدون‌المان گلرکین انطباق قابل قبولی با نتایج تحلیلی اردگن و وو دارد. تابع وزنی q – در انتگرال J- برای یک ناحیه انتگرالی به‌شکل مربع و طول ضلع 2c بصورت زیر در نظر گرفته شده است.

$$q(x_1,x_2)=\left|1-\frac{x_1}{c}\right|\left|1-\frac{x_2}{c}\right| \tag{۵۰-۳}$$

در جدولهای (۳-۴) تا (۳-۶) مقادیر SIF برای اندازه‌های مختلف ناحیه انتگرال J ارائه شده و استقلال از سطح انتگرال J بررسی شده است. مقادیر مذکور با کاربرد تابع سهمی برای نتایج جدول (۳-۴) و تابع هرمی q –با رابطه زیر- بدست آمده است.

$$q(x_1,x_2)=\begin{cases}1-\frac{x_1}{c} & -\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{4}\\ 1-\frac{x_2}{c} & \frac{\pi}{4}<\theta<\frac{3\pi}{4}\\ 1+\frac{x_1}{c} & \frac{3\pi}{4}<\theta<\frac{5\pi}{4}\\ 1+\frac{x_2}{c} & \frac{5\pi}{4}<\theta<\frac{7\pi}{4}\end{cases} \tag{۵۱-۳}$$

طبق روابط تحلیلی انتگرال ناحیه‌ای J، نتایج محاسبه EDI مستقل از نوع تابع q می‌باشد. اما نتایج عددی برای ناحیه مربعی انتگرالگیری به‌ضلع a 2c=0.2 نشان می‌دهند؛ انتخاب تابع q تا حداکثر ۰.۴٪ روی دقت نتایج موثر است. علاوه بر این، نتایج برای اندازه‌های مختلف ناحیه انتگرالگیری بهم نزدیکتر است و استقلال از سطح EDI بهتر دیده می‌شود.

جدول ۳-۴- مقادیر مقادیر SIF حاصل از انتگرال J برای طولهای مختلف ناحیه انتگرالگیری و بارگذاری کرنش ثابت

a/W	E(W)/E(0)	SIF c=0.1	SIF c=0.2	SIF c=0.3	SIF c=0.4	نتایج تحلیلی
	۱۰	۶/۶۵۵۶	۶/۶۵۵۸	۶/۶۵۶۸	۶/۶۵۷۱	۶/۶۳۱۹
	۵	۱/۵۱۶۶	۱/۵۱۵۲	۱/۵۰۰۱	۱/۴۸۴۹	۵/۵۷۰۴
۰/۶	۱	۱/۹۰۰۰	۱/۹۳۶۹	۱/۹۴۳۱	۱/۹۴۹۲	–
	./۲	۲/۳۶۷۹	۲/۴۵۵۱	۲/۴۸۴۵	۲/۵۱۳۹	۳/۲۹۸۱
	۰/۱	۲/۶۰۰۵	۲/۷۱۳۹	۲/۷۵۴۲	۲/۷۹۲۸	۳/۱۵۴۴
	۱۰	۴/۲۲۵۳	۴/۲۲۰۵	۴/۲۲۹۷	۴/۲۲۰۱	۴/۲۱۴۰
	۵	۳/۶۶۸۹	۳/۶۶۴۸	۳/۶۶۳۸	۳/۶۶۴۱	۳/۶۵۷۳
./۵	۱	۲/۸۳۲۰	۲/۸۲۸۵	۲/۸۲۷۸	۲/۸۲۷۹	–
	./۲	۲/۳۸۴۰	۲/۳۸۰۹	۲/۳۸۰۴	۲/۳۸۰۲	۲/۴۰۳۱
	۰/۱	۲/۲۶۴۴	۲/۲۶۱۵	۲/۲۶۱۰	۲/۲۶۰۸	۲/۳۱۴۰
	۱۰	۲/۸۸۲۳	۲/۸۷۷۹	۲/۸۷۷۵	۲/۸۷۷۴	۲/۸۷۳۶
	۵	۲/۵۸۱۳	۲/۵۷۷۴	۲/۵۷۷۱	۲/۵۷۶۹	۲/۵۷۳۰
۰/۴	۱	۱/۱۱۶۷	۱/۱۱۳۵	۱/۱۱۳۴	۱/۱۱۳۲	–
	./۲	۱/۸۶۸۰	۱/۸۶۵۳	۱/۸۶۵۳	۱/۸۶۵۱	۱/۸۷۵۱
	۰/۱	۱/۸۰۵۰	۱/۸۰۲۴	۱/۸۰۲۴	۱/۸۰۲۲	۱/۸۲۴۶
	۱۰	۲/۰۸۳۲	۲/۰۸۰۰	۲/۰۷۸۳		۲/۰۷۲۳
	۵	۱/۹۲۲۴	۱/۹۱۹۲	۱/۹۱۷۷		۱/۹۱۱۸
۰/۳	۱	۱/۶۶۸۶	۱/۶۶۵۳	۱/۶۶۴۱		–
	./۲	۱/۵۳۵۶	۱/۵۳۲۰	۱/۵۳۰۹		۱/۵۳۳۰
	۰/۱	۱/۵۰۵۱	۱/۵۰۱۴	۱/۵۰۰۴		۱/۵۰۸۳

۱/۵۷۴۰		۱/۵۸۵۵	۱/۵۸۷۲	۱۰	
۱/۴۹۳۶		۱/۵۰۵۷	۱/۵۰۷۴	۵	
–		۱/۳۷۶۹	۱/۳۷۸۶	۱	۰/۲
۱/۳۰۵۸		۱/۳۱۱۳	۱/۳۱۳۳	./۲	
۱/۲۹۶۳		۱/۲۹۸۴	۱/۳۰۰۷	۰/۱	

جدول ۳-۵- مقادیر SIF حاصل از انتگرال J برای طولهای مختلف ناحیه انتگرالگیری و بارگذاری کششی

a/W	E(W)/E(0)	SIF				نتایج تحلیلی
		c=0.1	c=0.2	c=0.3	c=0.4	
	۱۰	۳/۱۲۵۴	۳/۰۱۸۵	۳/۰۲۰۳	۳/۰۰۳۹	۳/۲۱۲۴
	۵	۳/۳۹۵۳	۳/۳۱۳۷	۳/۳۳۴۵	۳/۳۳۸۹	۳/۴۴۵۴
۰/۶	۱	۴/۰۶۹۶	۴/۰۴۸۱	۴/۱۱۱۲	۴/۱۵۹۰	--
	./۲	۴/۸۱۲۵	۴/۸۵۰۹	۴/۹۵۳۶	۵/۰۳۹۰	۴/۶۹۰۵
	۰/۱	۵/۱۵۳۶	۵/۲۱۷۷	۵/۳۳۶۹	۵/۴۳۷۳	۴/۹۹۵۶
	۱۰	۲/۱۳۵۰	۲/۱۷۴۱	۲/۱۳۸۵	۲/۱۰۹۰	۲/۱۷۶۲
	۵	۲/۳۳۹۹	۲/۳۹۳۹	۲/۳۷۲۰	۲/۳۵۵۲	۲/۳۶۵۶
./۵	۱	۲/۸۳۸۲	۲/۹۲۸۱	۲/۹۳۷۱	۲/۹۴۷۷	--
	۰/۲	۳/۳۵۹۵	۳/۴۸۳۴	۳/۵۱۸۹	۳/۵۵۰۷	۳/۳۲۶۶
	۰/۱	۳/۵۸۷۲	۳/۷۲۴۴	۳/۷۶۹۷	۳/۸۰۸۴	۳/۵۷۰۱
	۱۰	۱/۵۹۲۰	۱/۶۰۰۴	۱/۵۶۴۱	۱/۵۴۲۰	۱/۵۸۸۴
	۵	۱/۷۵۹۵	۱/۷۷۶۵	۱/۷۴۹۹	۱/۷۳۴۹	۱/۷۴۸۳
۰/۴	۱	۲/۱۳۸۶	۲/۱۷۶۳	۲/۱۷۳۳	۲/۱۷۴۵	--
	۰/۲	۲/۴۷۰۸	۲/۵۲۵۵	۲/۵۴۲۸	۲/۵۵۵۲	۲/۴۴۳۶
	۰/۱	۲/۵۸۶۱	۲/۶۴۵۷	۲/۶۶۹۸		۲/۵۶۹۹
	۱۰	۱/۲۶۳۵	۱/۲۶۵۵	۱/۲۳۳۱		۱/۲۲۹۱
	۵	۱/۴۶۳۴	۱/۴۴۲۸	۱/۴۰۹۹		۱/۳۶۹۷
۰/۳	۱	۱/۷۹۱۹	۱/۷۸۷۹	۱/۷۶۵۵		--
	۰/۲	۲/۰۰۵۷	۲/۰۱۵۶	۲/۰۰۲۳		۱/۸۳۹۵
	۰/۱	۱/۹۸۱۴	۲/۰۱۸۲	۲/۰۱۱۹		۱/۸۵۸۱
۰/۲	۱۰	۰/۹۶۹۳	۰/۹۷۷۲			۱/۰۰۱۹

۱/۱۳۱۸	۱/۱۱۸۹	۱/۱۰۴۷	۵
--	۱/۳۸۸۲	۱/۳۶۰۲	۱
۱/۳۹۵۶	۱/۴۴۴۱	۱/۴۱۴۵	۰/۲
۱/۲۹۶۵	۱/۳۵۱۴	۱/۳۳۰۰	۰/۱

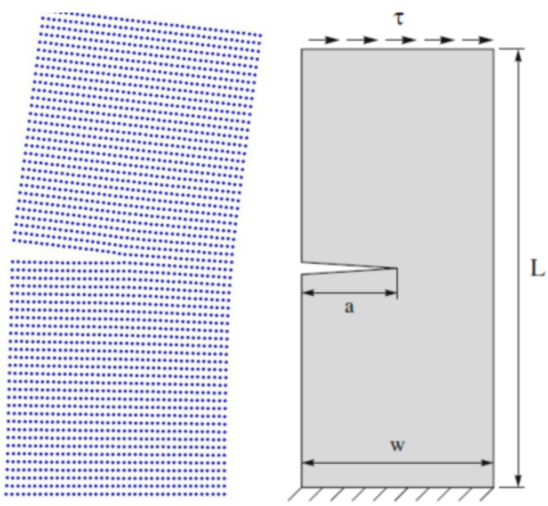
جدول ۳-۶- مقادیر مقادیر SIF حاصل از انتگرال J برای طولهای مختلف ناحیه انتگرالگیری و بارگذاری خمشی

a/W	E(W)/E(0)	SIF c=0.1	SIF c=0.2	SIF c=0.3	SIF c=0.4	نتایج تحلیلی
۰/۶	۱۰	۱/۳۷۲۸	۱/۳۵۸۰	۱/۳۳۴۵	۱/۳۱۰۰	۱/۴۲۸۶
	۵	۱/۵۱۶۶	۱/۵۱۵۲	۱/۵۰۰۱	۱/۴۸۴۹	۱/۵۵۹۷
	۱	۱/۹۰۰۰	۱/۹۳۶۹	۱/۹۴۳۱	۱/۹۴۹۲	--
	/۲	۲/۳۶۷۹	۲/۴۵۵۱	۲/۴۸۴۵	۲/۵۱۳۹	۲/۴۰۳۷
	۰/۱	۲/۶۰۰۵	۲/۷۱۳۹	۲/۷۵۴۲	۲/۷۹۲۸	۲/۷۱۷۰
/۵	۱۰	۰/۹۹۸۱	۱/۰۲۳۵	۰/۹۹۶۰	۰/۹۷۸۰	۱/۰۳۵۰
	۵	۱/۱۲۸۳	۱/۱۶۳۶	۱/۱۴۳۲	۱/۱۳۱۶	۱/۱۵۱۸
	۱	۱/۴۸۵۱	۱/۵۵۰۹	۱/۵۵۰۳	۱/۵۵۵۶	--
	/۲	۱/۹۴۲۳	۲/۰۴۷۷	۲/۰۷۱۹	۲/۰۹۶۵	۱/۹۲۳۴
	۰/۱	۲/۱۷۷۹	۲/۳۰۳۸	۲/۳۴۰۴	۲/۳۷۴۲	۲/۲۱۵۱
۰/۴	۱۰	۰/۷۷۸۲	۰/۷۹۸۶	۰/۷۷۲۷	۰/۷۶۲۷	۰/۸۰۴۳
	۵	۰/۹۰۱۲	۰/۹۳۰۱	۰/۹۰۸۰	۰/۹۰۲۱	۰/۹۲۳۶
	۱	۱/۲۵۱۲	۱/۳۰۶۲	۱/۲۹۷۲	۱/۳۰۳۷	--
	/۲	۱/۷۲۲۴	۱/۸۱۴۴	۱/۸۲۵۱	۱/۸۴۷۶	۱/۷۲۱۰
	۰/۱	۱/۹۷۴۱	۲/۰۸۶۴	۲/۱۰۸۱	۲/۱۳۹۰	۱/۹۷۷۸
۰/۳	۱۰	۰/۶۷۰۵	۰/۶۷۳۰	۰/۶۵۵۷		۰/۶۵۸۸
	۵	۰/۷۹۵۲	۰/۸۰۲۸	۰/۷۸۷۵		۰/۷۷۷۸
	۱	۱/۱۶۰۶	۱/۱۸۵۷	۱/۱۷۸۱		--
	/۲	۱/۶۷۴۷	۱/۷۲۶۹	۱/۷۳۳۲		۱/۶۱۲۲
	۰/۱	۱/۹۵۸۲	۲/۰۲۰۳	۲/۰۴۱۲		۱/۸۸۵۹

۰/۵۶۴۸		۰/۵۴۸۴	۰/۵۴۲۳	۱۰	
۰/۶۸۷۱		۰/۶۷۵۹	۰/۶۶۴۶	۵	
--		۱/۰۶۵۲	۱/۰۳۶۱	۱	۰/۲
۱/۵۹۵۲		۱/۶۴۰۹	۱/۵۸۲۲	/۲	
۱/۹۰۴۰		۱/۹۶۹۵	۱/۸۹۳۱	۰/۱	

۳-۷-۲- صفحه حاوی ترک لبه‌ای تحت بار برشی

در این مثال، صفحه‌ای شامل یک ترک لبه‌ای در نظر گرفته شده است. لبه پایینی صفحه به زمین متصل و ثابت شده است. همچنین، لبه بالایی تحت بار برشی یکنواخت τ=1 unit قرار دارد. طول صفحه L=16 units، عرض آن W=7 units و طول ترک a=W/2=3.5 units در نظر گرفته شده است. علاوه بر این، مساله در حالت کرنش صفحه‌ای و با در نظر گرفتن E=3 e7 units و ν=0.25 حل شده است.



شکل ۳-۲۱- صفحه همگن تحت برش. راست: هندسه و بارگذاری. چپ: تغییرشکل تحت بار (5 e4 برابر)

در جدول (۳-۶) نتایج با مقادیر گزارش شده مقایسه شده است.

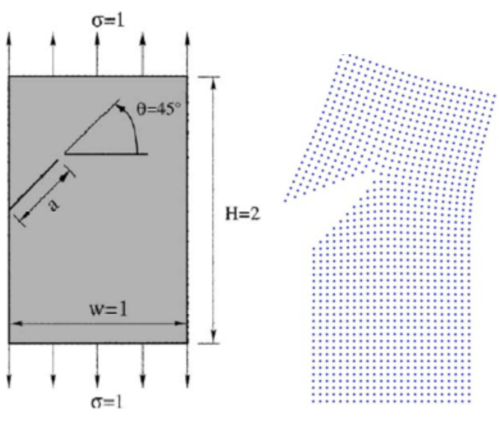
جدول ۳-۶- مقایسه نتایج صفحه همگن تحت برش با مقادیر گزارش شده

	K_I	K_{II}
نتایج (گره‌بندی ۴۰*۶۰)	۳۳/۳۱	۴/۷۰
نتایج (گره‌بندی ۲۶*۴۶)	۳۳/۱۰	۴/۷۱
مقادیر گزارش‌شده [۱۰۱]	۳۴	۴/۵۵

۳-۷-۳- صفحه حاوی یک ترک زاویه‌دار

یک ترک مایل در یک پیوستار الاستیک دو بعدی، شرایط بارگذاری مختلط را مهیا می‌کند. در شکل (۳-۲۲) یک صفحه محدود حاوی یک ترک مایل را نشان می‌دهد. بار اعمالی در راستای عمودی و به لبه بالایی بصورت کشش یکنواخت اعمال می‌گردد. شرایط مرزی تغییرمکان به لبه پایینی اعمال می‌شود. بطوریکه برای تمام گره‌ها روی این لبه تغییرمکان عمودی صفر است. علاوه بر این، تغییرمکان افقی گره سمت راست نیز صفر است. مدول الاستیسیته بطور نمایی تغییر می‌کند. بطوریکه $E(0)=1$. ضریب پواسون نیز ثابت فرض می‌شود. داده‌های دیگر بصورت زیر است:

حالت تنش صفحه‌ای، $a/W = 0.4\sqrt{2}$، $L/W = 2$ و $\nu = 0.3$.



شکل ۳-۲۲- هندسه و تغییرشکل یافته صفحه محدود FGM حاوی یک ترک مایل

نتایج حاصل با نتایج منتشر شده در مراجع مختلف در جدول (۳-۷) مقایسه شده است. اثر تغییر مدول الاستیسیته روی ضرایب شدت تنش در جدول (۳-۸) آمده است. نتایج با استفاده از انتگرال برهم کنش محاسبه شده‌اند. شرح کامل روش در فصل ششم آمده است.

جدول ۳-۷- مقایسه نتایج صفحه ایزوتروپیک با مقادیر گزارش‌شده

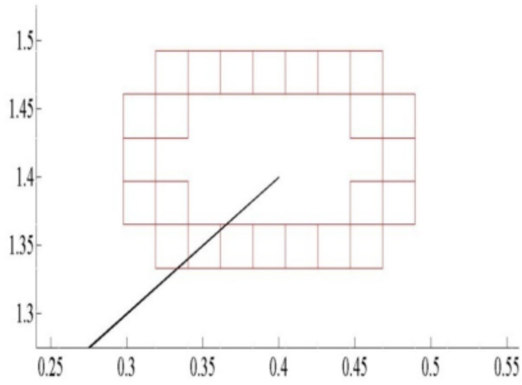
	$K_I / \sqrt{\pi a}$	$K_{II} / \sqrt{\pi a}$
نتایج	۱/۴۲۵۷	۰/۶۱۳۵
روش المان مرزی (سوترادهار و پائولینو [۱۰۲])	۱/۴۴۶	۰/۶۱۵
روش انتگرال J_k (کیم و پائولینو [۱۰۳])	۱/۴۵۱	۰/۶۰۴
روش انتگرال برهم کنش در FEM (کیم و پائولینو [۱۰۴])	۱/۴۴۶	۰/۶۱۵

جدول ۳-۸- نتایج ضرایب شدت تنش برای FGP با تغییر نمایی مدول الاستیسیته

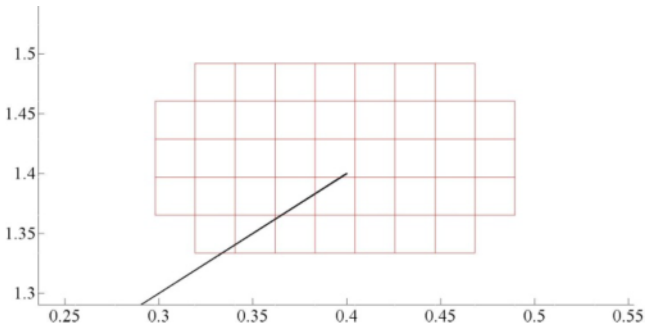
	روش	$K_I / \sqrt{\pi a}$	$K_{II} / \sqrt{\pi a}$
E(W)/E(0)=0.5	فرمولبندی نامتعادل	۱/۵۱۸۶	۰/۶۴۴۸
	فرمولبندی ناسازگار	۱/۵۰۸۱	۰/۶۸۴۲
E(W)/E(0)=2	فرمولبندی نامتعادل	۱/۳۲۴۰	۰/۵۸۴۰
	فرمولبندی ناسازگار	۱/۳۴۰۵	۰/۵۴۴۸

طبق نتایج فوق، اثر کلی تغییر مدول الاستیسیته روی پارامترهای شکست یکسان است. بطوریکه مقادیر ضرایب شدت تنش و تنش T با افزایش E(W)/E(0) افزایش می‌یابد. نتایج جدول (۳-۸) با صرف‌نظر از سلولهای نوک ترک در ناحیه انتگرالگیری برای محاسبه انتگرال برهم کنش حاصل شده است که در شکل (۳-۲۳) نشان داده شده است. در جدول (۳-۹) ضرایب شدت تنش برای دو

نوع ناحیه انتگرالگیری –با سلولهای نوک ترک و بدون سلولهای نوک ترک- مقایسه شده است. سلولهای انتگرالگیری که در حالت دوم برای محاسبه ضرایب شدت تنش دخالت داشته‌اند؛ در شکل (۳-۲۴) آمده است.



شکل ۳-۲۳- ناحیه انتگرالگیری با صرف‌نظر از سلولهای نوک ترک برای محاسبه انتگرال برهم کنش

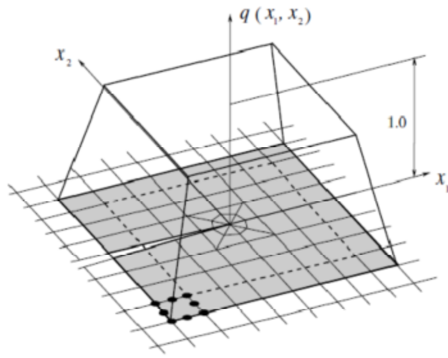


شکل ۳-۲۴- ناحیه انتگرالگیری شامل سلولهای نوک ترک برای محاسبه انتگرال برهم کنش

جدول ۳-۷- نتایج ضرایب شدت تنش برای FGP برای انواع ناحیه انتگرالگیری و E(W)/E(0)=0.5

	روش	$K_I/\sqrt{\pi a}$	$K_{II}/\sqrt{\pi a}$
ناحیه انتگرالگیری شامل سلولهای نوک ترک	فرمولبندی نامتعادل	۱/۵۱۸۶	۰/۶۴۴۸
	فرمولبندی ناسازگار	۱/۵۰۸۱	۰/۶۸۴۲
ناحیه انتگرالگیری بدون سلولهای نوک ترک	فرمولبندی نامتعادل	۱/۵۳۴۶	۰/۶۵۷۷
	فرمولبندی ناسازگار	۱/۵۶۶۰	۰/۷۲۰۲

در هر دو حالت از تابع q مسطح[1] بشکل زیر استفاده شده است.



شکل ۳-۲۵- تابع وزنی q برای محاسبه انتگرال برهم کنش

[1] - plateau function

فصل چهارم

شکست حرارتی مواد مرکب تابعی

۴-۱- مقدمه

از آنجایی که بسیاری از سازه‌ها و ماشین‌ها تحت گرادیان دما و یا دمای بالا قرار می‌گیرند؛ تحلیل تنشهای حرارتی یکی از مهمترین موضوعهای مهندسی است. طبق تحقیقات، شکست تحت بارهای حرارتی یکی از مرسوم‌ترین و پیچیده‌ترین حالتهای گسیختگی در سازه‌ها می‌باشد.

در این فصل، پس از بررسی خصوصیات کلی شکست حرارتی FGM، روابط فرم ناحیه‌ای انتگرال J مرور می‌شود. سپس در مثالهای عددی ضریب شدت تنش برای توزیع پایا و گذرای دما در حالت دو بعدی محاسبه شده است. علاوه براین، اثر تغییر خصوصیات فیزیکی روی ضریب شدت تنش برای تغییر پیوسته آنها در دو مثال یررسی شده است. برای تعیین خصوصیات فیزیکی در FGM، علاوه بر توابع پیوسته از مدل میکرومکانیک نیز استفاده شده است.

۴-۲- بررسی ترک در میدان ترموالاستیک

در این بخش، خصوصیات محلی میدانهای گرمایی دما و شار حرارتی، و الاستیک تنش، کرنش و تغییرمکان در حوزه نوک ترک و در یک پیوستار FGM بررسی می‌شود. طبق گزارش سی[۱] در مسائل ترموالاستیک خطی در مواد همگن، روابط میدان تنش با روابط مشابه در مسائل الاستیک یکسان است [۱۰۵]. بنابراین، حضور شار حرارتی باعث ایجاد تکنیکی جدید و یا تغییر درجه آن نمی-شود. طبق این گزارش، خصوصیات محلی میدانهای تنش و تغییرمکان حرارتی در حوزه نوک ترک دقیقا مشابه خصوصیات محلی تنش و تغییرمکان مکانیکی است و می‌توان این کمیتها را با استفاده از بسط تابع ویژه ویلیامز بیان نمود.

$$\sigma_{ij}^{aux} = \frac{K_I^{aux}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{I}(\theta) + \frac{K_{II}^{aux}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{II}(\theta) \tag{۴-۱}$$

$$u_i = \frac{K_I}{\mu^{tip}} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_i^{I}(\theta) + \frac{K_{II}}{\mu^{tip}} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_i^{II}(\theta) \tag{۴-۲}$$

---

[1]- Sih

در این روابط، توابع $f(\theta)$ و $g(\theta)$ توابع زاویه‌ای موجود در روابط متناظر برای مواد همگن می‌باشند. در سال ۱۹۹۴، جین و نودا میدانهای تنش و شار حرارتی در نوک ترک مواد غیرهمگن را به همراه تنش پلاستیک مطالعه نمودند[۹۶]. ایشان مسایل دو بعدی را برای FGM ایزوتروپیک بررسی کردند و نتایج آن را برای حالت سه‌بعدی و غیرایزوتروپیک قابل تعمیم دانستند که در دو بخش بعد تفصیل آن آمده است.

۴-۲-۱- توزیع دما در حوزه نوک ترک

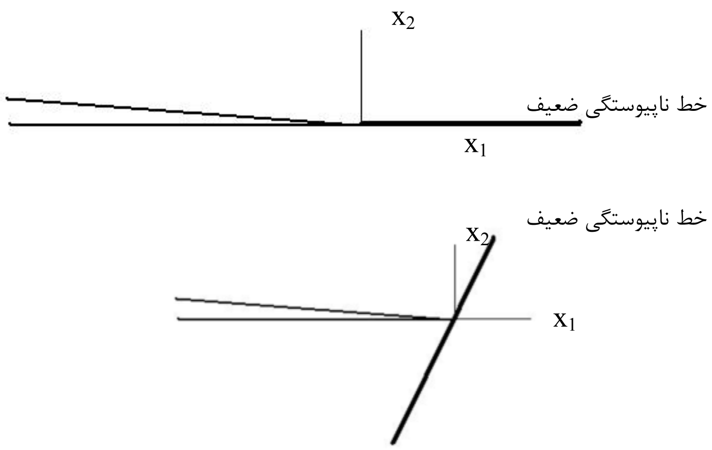
معادله هدایت گرمایی در یک پیوستار غیرهمگن بصورت زیر قابل بیان است.

$$T_{,x_i x_i} + \frac{1}{k} k_{,x_i} T_{,x_i} = \frac{1}{\kappa} T_{,t} \qquad (۳-۴)$$

شار حرارتی با توجه به رابطه تجربی فوریه بصورت زیر بدست می‌آید.

$$q_i = -kT_{,x_i} \qquad (۴-۴)$$

در این روابط، T بیانگر دما، q شار حرارتی، t زمان، k ضریب هدایت گرمایی و κ ضریب پخش گرمایی است. فرض می‌شود، ضرایب هدایت گرمایی k و پخش گرمایی κ بصورت توابعی پیوسته و قطعه‌ای مشتق‌پذیر از موقعیت باشند. بعلاوه، فرض می‌شود این مقادیر در نوک ترک صفر نباشند. مرزهای بین قطعات مشتق‌پذیر مذکور، خطوط ناپیوستگی ضعیف نامیده می‌شود. در اینجا، از خطوط ناپیوستگی ضعیف برای تعیین موقعیت کلی ترک در پیوستار جامد استفاده می‌شود. ابتدا فرض می‌شود ترک روی یکی از این خطوط منطبق است.



شکل ۴-۱- موقعیت ترک نسبت به خط ناپیوستگی ضعیف. بالا: ترک فصل مشترک. پایین: حالت کلی.

در حوزه نوک ترک، عبارت $T_{,x_ix_i}$ جمله غالب معادله هدایت گرمایی است. بنابراین حل تکنیکی توزیع دما با در نظر گرفتن جمله غالب مذکور حاصل می‌شود.

$$T_{,x_ix_i} = 0 \qquad (۵-۴)$$

بخاطر مشتق‌پذیری قطعه‌ای k، معادله فوق برای هر دو ناحیه بالا و پایین ترک معتبر است. فرض می‌شود، سطوح ترک کاملا عایق هستند. این فرض در زمانهای ابتدایی تغییر دمای پیوستار مثل اعمال شوک قابل قبول است. شرط عایق بودن سطوح ترک در مختصات قطبی و محلی نوک ترک بصورت زیر قابل بیان است.

پیوستگی k ایجاب می‌کند توزیع دما و مشتقات آن روی خطوط ناپیوستگی ضعیف از جمله خط ناپیوستگی حاوی ترک -غیر از محدوده ترک- پیوسته باشد. رابطه مجانبی هدایت گرمایی فوق دارای حلی بصورت زیر است.

$$T(r,\theta,t) = R(t)\sqrt{2r}\,sin\frac{\theta}{2} \tag{۶-۴}$$

شار حرارتی مجانبی نیز با توجه به رابطه فوریه بصورت زیر بدست می‌آید.

$$q_r = -k^{tip}\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{k^{tip}R(t)}{\sqrt{2r}}sin\frac{\theta}{2} \tag{۷-۴}$$

$$q_\theta = -k^{tip}\frac{\partial T}{r\partial\theta} = -\frac{k^{tip}R(t)}{\sqrt{2r}}cos\frac{\theta}{2} \tag{۸-۴}$$

در این روابط، k^{tip} ضریب هدایت گرمایی در نوک ترک است. در رابطه فوق، جمله $R(t)$ را نمی‌توان با تحلیل محلی فوق مشخص نمود. روابط مجانبی دما و شار حرارتی بدست‌آمده برای مواد غیرهمگن شبیه روابط متناظر برای مواد همگن است که توسط سی گزارش شده است؛ یعنی درجه تکنیکی شار حرارتی و توزیع زاویه‌ای توزیع دما و شار حرارتی برای مواد همگن و غیرهمگن یکسان است. برای حالتهای دیگر موقعیت ترک نسبت به خطوط ناپیوستگی ضعیف مثل ترکی که به یک خط ناپیوستگی ضعیف ختم می‌شود نیز نتایج بالا حاصل می‌شود.

۴-۲-۲- میدانهای الاستیک نوک ترک

رابطه ساختاری ترموالاستیک برای یک ماده غیرهمگن بصورت زیر بیان می‌شود.

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} - \beta(\Delta T)\delta_{ij} \tag{۹-۴}$$

که در آن، E ضریب الاستیک، ν ضریب پواسون و α ضریب انبساط حرارتی است. فرض می‌شود خصوصیات مذکور توابع پیوسته و قطعه‌ای مشتق‌پذیر از موقعیت است. رابطه حاکم بر تابع تنش ایری[1] برای حالت تنش صفحه‌ای بصورت زیر بیان می‌شود.

$$^{2}\left(\frac{1}{E}\nabla^2 F\right) - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\frac{1+\nu}{E}\right)\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{1+\nu}{E}\right)\frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\left(\frac{1+\nu}{E}\right)\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \tag{۱۰-۴}$$
$$\nabla^2(\alpha\,\Delta T) = 0$$

---

[1]- Airy

که در آن، ∇^2 عملگر لاپلاسین است. رابطه فوق با اعمال تبدیلهای E به $E/(1-\nu^2)$ و ν به $\nu/(1-\nu)$ برای حالت کرنش صفحه‌ای صادق است. اگر فرض شود، ضریب الاستیسیته E در نوک ترک صفر نباشد؛ معادله حاکم بر تنش ایری برای حل تکنیکی در حوزه نوک ترک بصورت زیر قابل بیان است.

$$\nabla^2\nabla^2 F = 0 \qquad (۱۱-۴)$$

حل تکنیکی برای مواد همگن، معادله بالا را ارضاء می‌کند. از آنجایی که خصوصیات مواد روی خطوط ناپیوستگی ضعیف، پیوسته هستند؛ پیوستگی مولفه‌های میدان تغییرمکان و نیروها نیز در طول این خطوط حفظ می‌گردد. بنابراین می‌توان از روابط مذکور به نتیجه زیر رسید:

درجه تکنیکی و توابع زاویه‌ای میدانهای ترموالاستیک حوزه نوک ترک برای مواد غیرهمگن با کمیتهای متناظر برای مواد همگن یکسان است.

۴-۳- انتگرال ناحیه‌ای[1] معادل برای شکست حرارتی

روشهای انتگرال ناحیه‌ای سه‌بعدی بر مبنای انتگرالهای حجمی است که برای محاسبه‌ی مقادیر انتگرال J در نقاط مختلف روی سطح ترک بکار می‌رود. این روش برای جامدات همگن با تغییرشکل در محدوده الاستیک خطی و یا پلاستیک تحت بارگذاری مکانیکی و حرارتی بکار رفته است. گو [۹۹] و چن [۱۰۶] با همکارانشان و کیم و پائولینو [۱۰۳] این روش را برای تحلیل نمونه‌های دو بعدی FGM تحت بارگذاری الاستیک خطی و همدما توسعه دادند. علاوه بر توانایی محاسبه مقادیر انتگرال J، فرمهای خاصی از این روش قابلیت محاسبه ضرایب شدت تنش در حالت مود ترکیبی را دارا می‌باشند. در این بخش، فرمولبندی فرم دوبعدی انتگرال ناحیه‌ای مرور می‌شود [۲۹] .

یک پیوستار دوبعدی از FGM حاوی ترک، تحت بارگذاری حرارتی بصورت زیر درنظر گرفته می‌شود (مطابق شکل (۴-۲)). در این شکل، C منحنی دلخواه بسته‌ای حول نوک ترک است؛ که از سطح پایین ترک شروع و به سطح بالایی آن ختم می‌شود. $\vec{n}$ بردار یکه نرمال، با جهت مثبت رو به

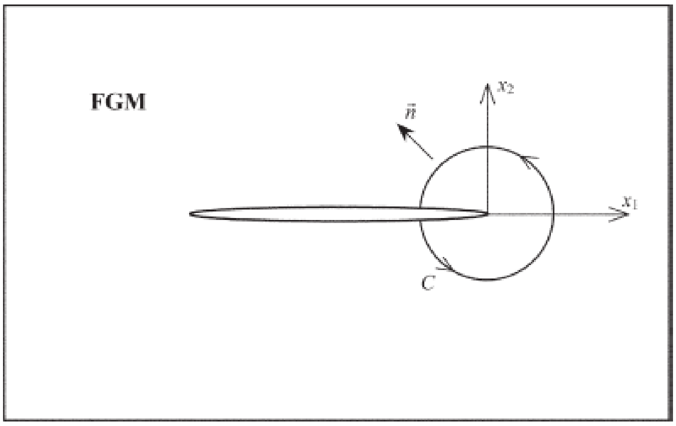
---

[1]- Equivalent Domain Integral-EDI

خارج است. برای هر دو حالت، تنش و کرنش صفحه‌ای فرم عمومی انتگرال J بصورت یک انتگرال خطی روی منحنی C به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$J = \lim_{C \to 0} \int_C (W n_1 - \sigma_{ij} n_j u_{i,1}) ds \qquad (۱۲-۴)$$

که در آن، W تابع چگالی انرژی کرنشی مکانیکی، n_j مؤلفه‌های بردار عمود **n** و σ_{ij} و u_i به‌ترتیب مؤلفه‌های تنش و تغییرمکان می‌باشند. s طول کمانی از منحنی C و $(.)_{,j} = \partial(.)/\partial x_j$ است.



شکل ۴-۲- صفحه FGM حاوی ترک نمایش کانتور C حول نوک ترک

فرم عمومی انتگرال J بصورت رابطه (۴-۱۲) برابر نرخ رهایش انرژی می‌باشد. رابطه بین نرخ رهایش انرژی و ضریب شدت تنش مود I در رابطه (۴-۱۳) آمده است.

$$J = \begin{cases} \dfrac{K_I^2}{E^{tip}} & Plane\ strain \\ \dfrac{K_I^2(1-(\nu^{tip})^2)}{E^{tip}} & Plane\ stress \end{cases} \qquad (۱۳-۴)$$

معادله ساختاری برای یک پیوستار ایزوتروپیک و حالت سه‌بعدی تنش به‌صورت زیر است:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} - \beta(\Delta T)\delta_{ij} \qquad (i,j=1, 2, 3) \qquad (۱۴-۴)$$

که در آن، $\varepsilon_{ij}\,(i,j=1, 2, 3)$ مؤلفه کرنش کل، μ و λ ضرایب لامه، δ_{ij} تابع دلتای کرونکر و ΔT تغییر دما نسبت به دمای مرجع است. ضریب β برحسب ضرایب لامه و α، ضریب انبساط حرارتی تعریف می‌شود:

$$\beta = (3\lambda + 2\mu)\alpha \qquad (۱۵-۴)$$

تابع چگالی انرژی کرنشی مکانیکی،W، با رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$W = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^{m} \qquad (i,j=1, 2, 3) \qquad (۱۶-۴)$$

این معادله برای حالت سه‌بعدی تنش معتبر است. ε_{ij}^{m} مؤلفه‌های کرنش مکانیکی است و به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\varepsilon_{ij}^{m} = \varepsilon_{ij} - \alpha(\Delta T)\delta_{ij} \qquad (i,j=1, 2, 3) \qquad (۱۷-۴)$$

با جایگزینی روابط (۴-۱۴) و (۴-۱۷) در معادله (۴-۱۶)، رابطه تابع چگالی انرژی کرنشی مکانیکی به شکل زیر ساده می‌شود:

$$W = \mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + \frac{\lambda}{2}(\varepsilon_{kk})^2 - \beta(\Delta T)\varepsilon_{kk} + \frac{3}{2}\beta\alpha(\Delta T)^2 \qquad (i,j=1, 2, 3) \qquad (۱۸-۴)$$

رابطه بالا برای حالت کرنش صفحه‌ای $(\varepsilon_{33} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{13} = 0)$ با رابطه (۴-۱۹) و برای حالت تنش صفحه‌ای $(\sigma_{33} = \sigma_{23} = \sigma_{13} = 0)$ با رابطه (۴-۲۰) بیان می‌شود:

$$W = \mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + \frac{\lambda}{2}(\varepsilon_{kk})^2 - \beta(\Delta T)\varepsilon_{kk} + \frac{3}{2}\beta\alpha(\Delta T)^2 \qquad (i, j=1,2) \qquad (۱۹-۴)$$

$$V = \mu(\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{21}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2) + \frac{\lambda}{2}(\varepsilon_{kk})^2 - \beta(\Delta T)\varepsilon_{kk} + \frac{3}{2}\beta\alpha(\Delta T)^2 \qquad (۲۰-۴)$$

که در آن،

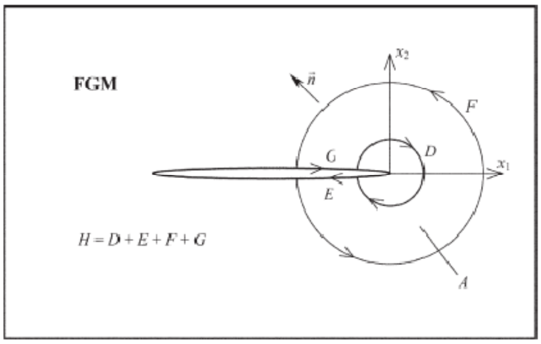
$$\varepsilon_{33} = \frac{\beta}{2\lambda + \mu}(\Delta T) - \frac{\lambda}{2\mu + \lambda}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \qquad (۲۱-۴)$$

به منظور بیان انتگرال J به صورت یک انتگرال ناحیه‌ای معادل، انتگرال I به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I = \int_{H} (\sigma_{ij} n_j u_{i,1} - W n_1) q ds \quad (i,j=1, 2) \qquad (۲۲-۴)$$

H یک منحنی بسته، مطابق شکل (۴-۳) است. در رابطه (۴-۲۲)، q تابع اختیاری و بطور قطعه‌ای پیوسته است که داخل منحنی D دارای مقدار ۱ و خارج از منحنی F دارای مقدار صفر می‌باشد. چون n_1 و مؤلفه‌های تنش σ_{12} و σ_{22} روی سطوح ترک صفر هستند؛ انتگرال I بصورت زیر ساده می شود.

$$I = \int_D (\sigma_{ij} n_j u_{i,1} - W n_1) ds \qquad (i,j=1, 2) \qquad (۲۳-۴)$$



شکل ۴-۴- نمایش کانتور D و سطح A

با تغییرجهت چرخش روی منحنی D از ساعتگرد به پادساعتگرد، این منحنی به منحنی C در شکل (۴-۳) تبدیل می‌شود. با توجه به این نکته، رابطه زیر برقرار می‌شود:

$$I = \int_D (\sigma_{ij} n_j u_{i,1} - W n_1) ds = -\int_C (\sigma_{ij} n_j u_{i,1} - W n_1) ds \qquad (i,j=1, 2) \qquad (۲۴-۴)$$

در رابطه (۴-۲۴) جهت مثبت بردار یکه نرمال در هر دو انتگرال، مطابق منحنی‌هایی است که روی آنها تعریف شده‌اند. اگر شعاع منحنی‌های C و D به سمت صفر میل کند ($C \to 0$ و $D \to 0$)، می-توان نوشت:

$$I=J \qquad (۲۵-۴)$$

با استفاده از قضیه دیورژانس، انتگرال I (رابطه (۴-۲۴)) را می‌توان بصورت انتگرال ناحیه‌ای بیان کرد.

$$I = \iint_A ((\sigma_{ij} u_{i,1} - W \delta_{1j}) q)_{,j} dA \qquad (I,j=1, 2) \qquad (۲۶-۴)$$

که در آن، A سطح بین منحنی‌های D و F در شکل (۴-۳) است. با مشتق‌گیری از عبارت داخل انتگرال و اعمال معادله تعادل $\sigma_{ij,j} = 0$، انتگرال I به‌صورت زیر در می‌آید.

$$I = \iint_A (\sigma_{ij} u_{i,1} - W \delta_{1j}) q_{,j} dA + \iint_A (\sigma_{ij} u_{i,1j} - W_{,1}) q dA \qquad (i,j=1, 2) \qquad (۲۷-۴)$$

عبارت انتگرال دوم شامل مشتق جزئی W نسبت به x_1 است. برای هر دو حالت تنش و کرنش صفحه-ای این عبارت به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial W}{\partial x_1}\right)_{expl} \qquad (۲۸-۴)$$

که $(W_{,1})_{\exp l}$ مشتق صریح W نسبت به x_1 است و با رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$(\frac{\partial W}{\partial x_1})_{\exp l} = \frac{\partial W}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial x_1} + \frac{\partial W}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x_1} + \frac{\partial W}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial x_1} + \frac{\partial W}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x_1} + \frac{\partial W}{\partial (\Delta T)}\frac{\partial (\Delta T)}{\partial x_1} \qquad (۲۹-۴)$$

عبارتهای مشتق پارامترهای خواص مواد و اختلاف دما نسبت به x_1 با روش عددی و سایر عبارتها بطور تحلیلی بدست می‌آید. در محدوده الاستیک خطی برای هر دو حالت تنش و کرنش صفحه‌ای، رابطه $\partial W/\partial \varepsilon_{ij} = \sigma_{ij}$ برقرار است. با توجه به این رابطه و رابطه کرنش-تغییرمکان بی‌نهایت کوچک، $\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$، رابطه (۴-۲۸) را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} = \sigma_{ij} u_{i,j1} + (\frac{\partial W}{\partial x_1})_{\exp l} \qquad (۳۰-۴)$$

با جایگزینی رابطه (۴-۳۰) در معادله (۴-۲۷)، انتگرال I به صورت زیر در می‌آید.

$$I = \iint_A (\sigma_{ij} u_{i,1} - W\,\delta_{1j}) q_{,j} dA - \iint_A (W_{,1})_{\exp l}\, q dA \qquad (۳۱-۴)$$

اگر شرط $D \to 0$ برقرار باشد؛ می‌توان انتگرال J را به صورت یک انتگرال ناحیه‌ای معادل بصورت زیر نمایش داد.

$$J = \iint_A (\sigma_{ij} u_{i,1} - W\,\delta_{1j}) q_{,j} dA - \iint_A W_{,1} q dA \qquad (۳۲-۴)$$

۴-۴- مثالهای عددی

در مثالهای ذکر شده، صفحه‌ای از مواد مرکب هدفمند همگن حاوی یک ترک لبه‌ای درنظر گرفته شده است. ضخامت صفحه برای تحلیل کرنش صفحه‌ای بسیار بزرگ و برای تحلیل تنش صفحه‌ای بقدر کافی نازک فرض می‌شود. ترک موازی با جهت گرادیان خصوصیات ماده در نظر گرفته می‌شود.

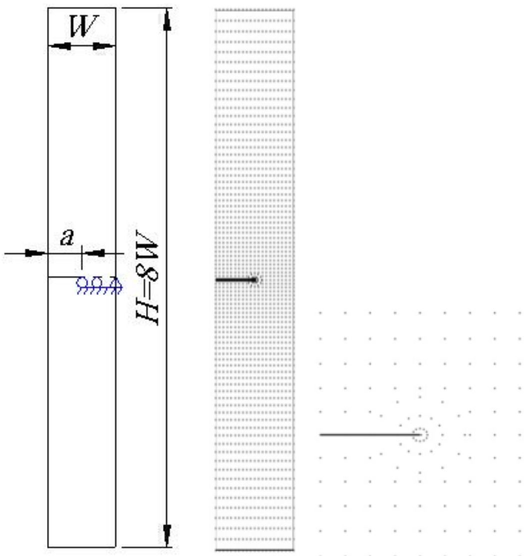
در ابتدا صفحه در دمای ساخت و بدون تنش T_0 قرار دارد که شرایط مرزی دمایی به سطوح $x_1=0$ و $x_1=W$ اعمال می‌گردد. سطوح دیگر از جمله سطوح ترک عایق فرض می‌شوند. فرضیات

دمایی فوق باعث ایجاد جریان دما در جهت x_1 و بصورت یک‌بعدی می‌گردد. در تمام حالتها، ضریب شدت تنش محاسبه‌شده، با تقسیم به عبارت زیر، نرمالیزه می‌شود.

$$K_0 = E(0)\alpha(0)T_0\sqrt{\pi a}\Big/(1-\nu(0)). \tag{۳۳-۴}$$

۴-۴-۱- صفحه با ترک لبه‌ای و خصوصیات نمایی

یک صفحه از مواد مرکب هدفمند شامل ترک لبه‌ای به طول a مطابق شکل (۴-۴) در نظر گرفته می‌شود. در شکل (۴-۴ (b)) گره‌بندی کامل ناحیه حل نمایش داده شده است که شامل ۱۶۹۵ گره منظم و ۴۰ گره ستاره‌ای می‌شود.گره‌بندی ستاره‌ای نوک ترک در شکل (۴-۵ (c)) آمده است.



شکل ۴-۴- (a) هندسه صفحه تحت بارگذاری. (b) گره‌بندی کل ناحیه. (c) گره‌بندی نوک ترک.

در این مثال، از دو دسته خصوصیات ماده استفاده می‌شود که در هر دو، تغییرات بصورت نمایی است. برای مثال، مدول الاستیسیته بصورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$E(x_1) = E(0)\exp(P_E x_1) \tag{۳۴-۴}$$

ضرایب غیرهمگنی بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$P_E = \frac{1}{W}\ln\left(\frac{E(W)}{E(0)}\right) \tag{۳۵-۴}$$

$$P_{\nu} = \frac{1}{W} ln\left(\frac{\nu(W)}{\nu(0)}\right) \tag{۳۶-۴}$$

$$P_{\alpha} = \frac{1}{W} ln\left(\frac{\alpha(W)}{\alpha(0)}\right) \tag{۳۷-۴}$$

$$P_{k} = \frac{1}{W} ln\left(\frac{k(W)}{k(0)}\right) \tag{۳۸-۴}$$

$$P_{\rho c} = \frac{1}{W} ln\left(\frac{\rho c(W)}{\rho c(0)}\right) \tag{۳۹-۴}$$

برای دسته اول خصوصیات ماده، ضرایب غیرهمگنی بصورت اختیاری انتخاب می‌شود تا بتـوان به شرایطی دست یافت که حلهای مرجع در آن بدست آمده‌اند و از طرفی، تغییرات گسترده‌تر مواد اثر آنها را روی ضریب شدت تنش بهتر مشخص می‌کند. در این حالت، از مقادیر زیر استفاده شده است

$$E(0)=k(0)=\alpha(0)=\rho c(0)=1.0 \tag{۴۰-۴}$$

$$\nu(0)=0.3 \tag{۴۱-۴}$$

در حالت دوم، ترکیب سرامیک/فلز ZrO_2/Ti-6Al-4V با خصوصیات زیر در نظر گرفته می‌شود.

جدول ۴-۱- خصوصیات فیزیکی ZrO_2 و Ti-6Al-4V [۲۰]

ماده	مدول الاستیسیته (GPa)	ضریب پواسون	ضریب انبساط حرارتی (10^{-6}/K)	ضریب هدایت گرمایی (W/(mK))	چگالی (kg/m^3)	گرمای ویژه (J/(kgK))
ZrO_2	۱۵۱	۰/۳۳	۱۰	۲/۰۹	۵۳۳۱	۴۵۶/۷
Ti-6Al-4V	۱۱۶/۷	۰/۳۳	۹/۵	۷/۵	۴۴۲۰	۵۳۷

همچنین شرایط مرزی دمایی مختلفی در حالت پایا در نظر گرفته مـی‌شـود. در حالـت گـذرا نیـز از شرایط دما معلوم در دو سطح چپ و راست استفاده می‌شود.

تغییر دمای یکنواخت

در این حالت صفحه از دمای T_0 بطور یکنواخت تا دمای T سرد می‌شود. در جدول (۴-۲) مقادیر ضرایب شدت تنش بدست آمده با انتگرال J و DCT با نتایج منتشرشده توسط اردگن و وو [۱۸]، کی‌سی و کیم [۱۰۷] و ییلدریم [۲۹] مقایسه شده است.

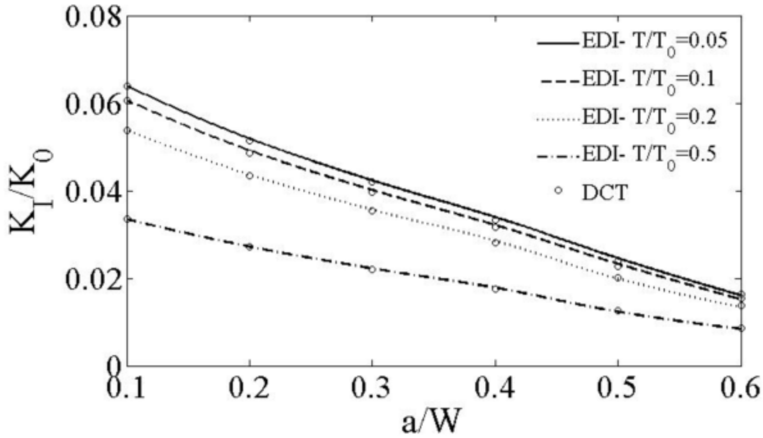
جدول ۴-۲- ضرایب شدت تنش برای سرمایش یکنواخت $WP_E=\ln(5)$، $WP_\alpha=\ln(2)$ و P_k اختیاری

بارگذاری	نوع تحلیل	ضریب شدت تنش نرمالیزه				
		مقادیر محاسبه‌شده		اردگن و وو [۱۸]	کی‌سی و کیم [۱۰۷]	ییلدریم [۲۹]
		DCT	EDI			
$T_1=0.5T_0$ $T_2=0.5T_0$	کرنش صفحه‌ای	۰/۰۱۲۶	۰/۰۱۲۴	۰/۰۱۲۵	۰/۰۱۲۸	۰/۰۱۲۸
	تنش صفحه‌ای	۰/۰۰۹۰	۰/۰۰۸۸	-	۰/۰۰۹۰	/۰۰۹۰
$T_1=0.05T_0$ $T_2=0.05T_0$	کرنش صفحه‌ای	۰/۰۲۴۶	۰/۰۲۴۰	۰/۰۲۴۵	۰/۰۲۴۴	-

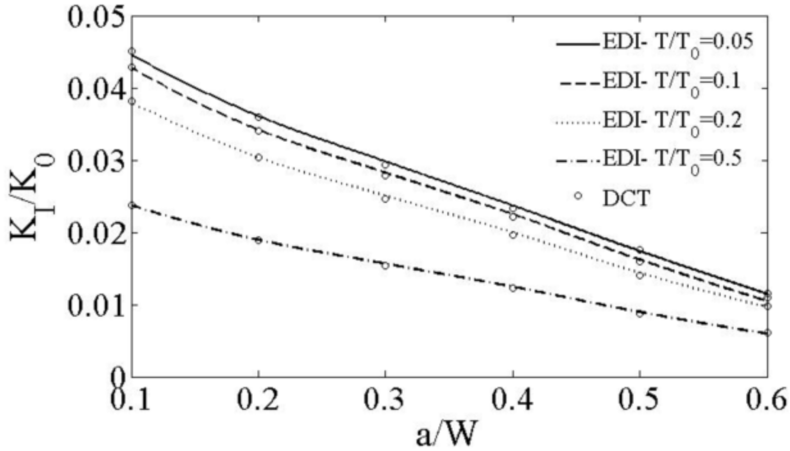
تطابق قابل قبولی بین مقادیر محاسبه شده و نتایج مذکور وجود دارد. البته این نکته قابل توجه است که مدل مورد استفاده در تحلیل شامل ۱۷۳۵ گره است؛ در حالیکه حلهای عددی منتشرشده با تعداد گره‌های بیشتری به این نتایج رسیده‌اند. بطوریکه کی‌سی و کیم با بکار بردن ۱۹۶۶ المان و ۲۹۳۷ گره کمترین تعداد گره را در میان آنها بکار برده است [۱۰۶].

شکلهای (۴-۵) و (۴-۶) اثر دمای سرمایش و طول ترک را روی مقادیر ضرایب شدت تنش نشان می‌دهند. نتایج برای تحلیلهای کرنش صفحه‌ای و تنش صفحه‌ای بدست آمده‌اند. مطابق این نتایج، با نزدیک شدن طول ترک به عرض صفحه، مقدار ضریب شدت تنش به سمت صفر میل می‌کند.

این مساله قابل انتظار است؛ چون توزیع تنش حرارتی در صفحه بطور استاتیکی در تعادل است (نیروی مکانیکی به صفحه وارد نمی‌شود).



شکل ۴-۵- ضرایب شدت تنش برحسب طول ترک و دمای سرمایش. حالت کرنش صفحه‌ای، WP_E=ln(10) و WP_α=ln(2)



شکل ۴-۶- ضرایب شدت تنش برحسب طول ترک و دمای سرمایش. حالت تنش صفحه‌ای، WP_E=ln(10) و WP_α=ln(2)

علاوه براین، مقادیر ضریب شدت تنش برای حالت کرنش صفحه‌ای از مقادیر متناظر برای حالت تنش صفحه‌ای بزرگتر است. نودا و همکارانش توزیع تنش حرارتی گذرا برای یک باریکه همگن نامحدود را بطور تحلیلی بدست آورده‌اند.

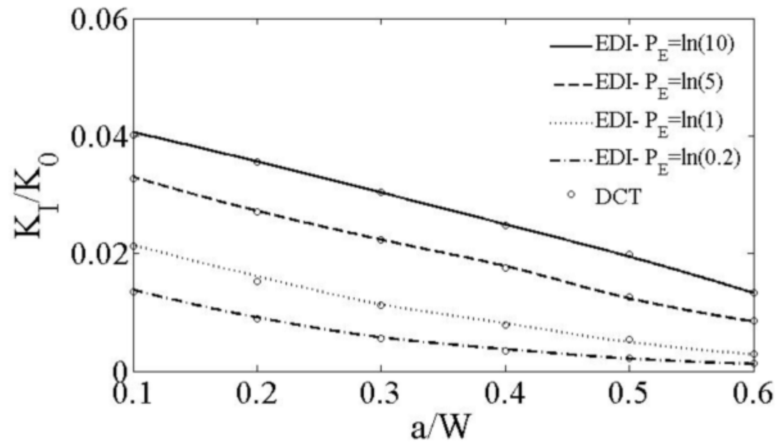
$$\sigma^{th}_{x_2x_2}=\frac{E(x_1)}{1-\nu^2}\left(C_1x_1+C_2-\alpha(x_1)(1+\nu)\Delta T(x_1,t)\right) \quad (۴۲\text{-}۴)$$

$$\sigma^{th}_{x_2x_2}=E(x_1)\left(C_1x_1+C_2-\alpha(x_1)\Delta T(x_1,t)\right), \quad (۴۳\text{-}۴)$$

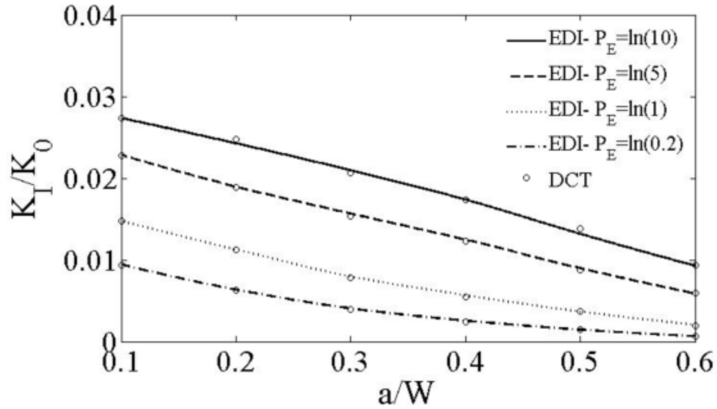
که در آنها، ثابتهای C_1و C_2 ضرایب مجهولی هستند که از تعادل نیرو و گشتاور در جهت x_1 بدست می‌آیند. مطابق این نتایج، توزیع تنش حرارتی برای حالت کرنش صفحه‌ای برابر مقدار متناظر برای

حالت تنش صفحه‌ای ضرب‌در فاکتور $1/(1-\nu)$ می‌باشد. با توجه به اینکه، فاکتور مذکور بزرگتر از یک است؛ بنابراین، توزیع تنش حرارتی و در نتیجه ضریب شدت تنش برای حالت کرنش صفحه‌ای بزرگتر از حالت تنش صفحه‌ای است که در شکلهای (۴-۵) و (۴-۶) نیز دیده می‌شود.

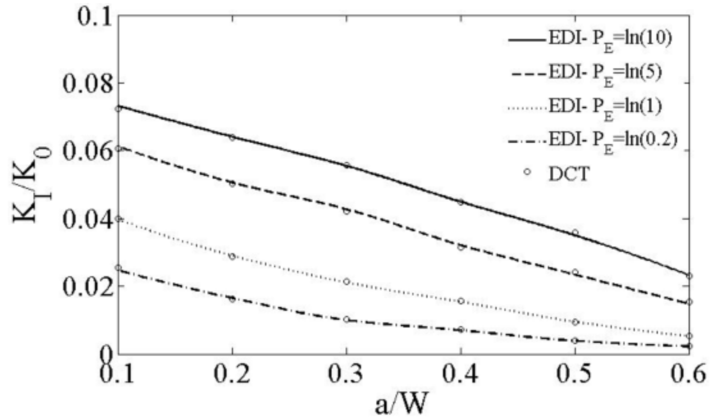
در شکل (۴-۷) تا (۴-۱۰) اثر تغییرات ضریب غیرهمگنی مدول الاستیسیته روی مقادیر ضریب شدت تنش نشان داده شده است. مقادیر ضریب شدت تنش برحسب طولهای مختلف ترک و برای حالتهای کرنش صفحه‌ای و تنش صفحه‌ای رسم شده‌اند. مطابق این شکلها، با افزایش ضریب غیرهمگنی مدول الاستیستیه و در نتیجه مدول الاستیسیته در کل صفحه، مقادیر ضریب شدت تنش افزایش می‌یابد.



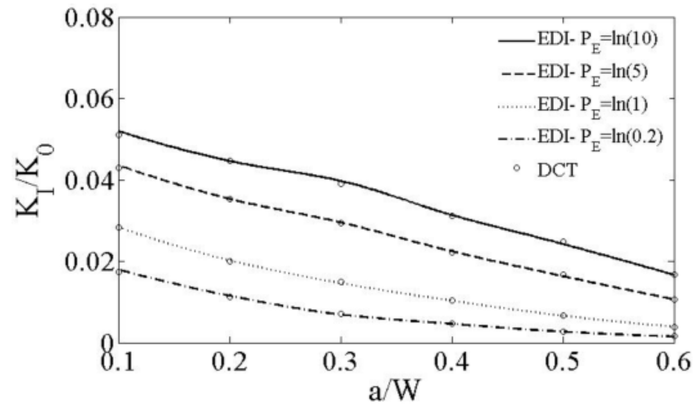
شکل ۴-۷- ضرایب شدت تنش برحسب طول ترک و دمای سرمایش. حالت کرنش صفحه‌ای، $T/T_0=0.5$ و $WP_\alpha=\ln(2)$



شکل ۴-۸- ضرایب شدت تنش برحسب طول ترک و دمای سرمایش. حالت تنش صفحه‌ای، $T/T_0=0.5$ و $WP_\alpha=\ln(2)$



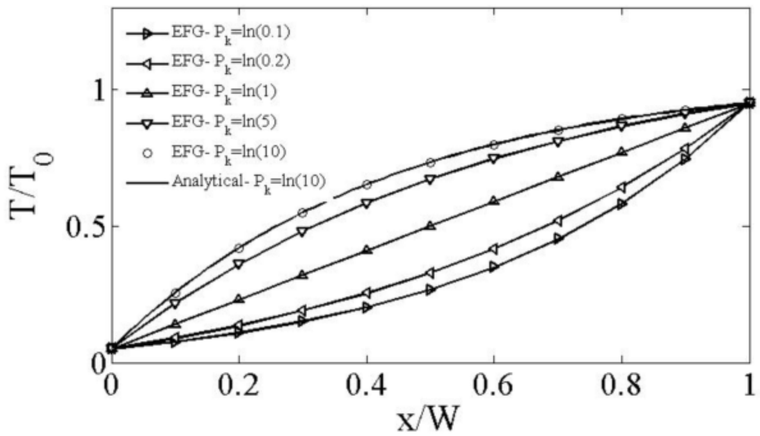
شکل ۴-۹- ضرایب شدت تنش برحسب طول ترک و دمای سرمایش. حالت کرنش صفحه‌ای، $T/T_0=0.1$ و $WP_\alpha=\ln(2)$



شکل ۴-۱۰- ضرایب شدت تنش برحسب طول ترک و دمای سرمایش. حالت تنش صفحه‌ای، $T/T_0=0.1$ و $WP_\alpha=\ln(2)$

سرمایش غیریکنواخت و پایای صفحه

در این حالت، دمای سطوح $x_1=0$ و $x_1=W$ از T_0 تا دماهای T_1 و T_2 کاهش می‌یابد. در شکل (۴-۱۱) میدان دمای پایا برای مقادیر مختلف ضریب غیرهمگنی ضریب هدایت گرمایی رسم شده‌اند. مطابق انتظار، توزیع دما برای $P_k=\ln(1)$ که متناظر با مواد همگن است؛ خطی می‌باشد. برای مقادیر دیگر، توزیع دما در صفحه به دمای سطحی نزدیکتر است که دارای ضریب هدایت گرمایی بزرگتری می‌باشد. علاوه براین، توزیع دمای محاسبه‌شده با روش بدون المان گلرکین با حل تحلیلی آن برای $P_k=\ln(10)$ مقایسه شده است.



شکل ۴-۱۱- توزیع دمای پایا برحسب ضریب غیرهمگنی ضریب هدایت گرمایی

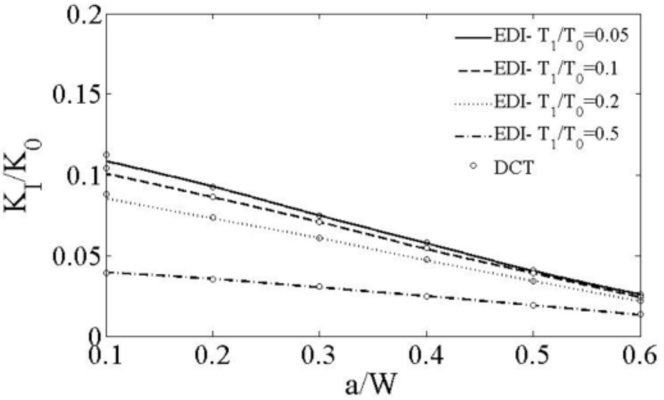
در مرحله بعد، نتایج حاصل از تحلیل ترموالاستیک صفحه در جدول (۴-۳) و شکلهای (۴-۱۲) و (۴-۱۳) آمده است. جدول (۴-۳) تطابق قابل قبولی را بین نتایج محاسبه شده با روشهای DCT و EDI و همچنین با نتایج منتشرشده نشان می‌دهد.

جدول ۴-۴- مقادیر نرمالیزه‌شده ضریب شدت تنش برای سرمایش غیریکنواخت پایا. $WP_E=\ln(10)$، $WP_\alpha=\ln(2)$ و $WP_k=\ln(10)$

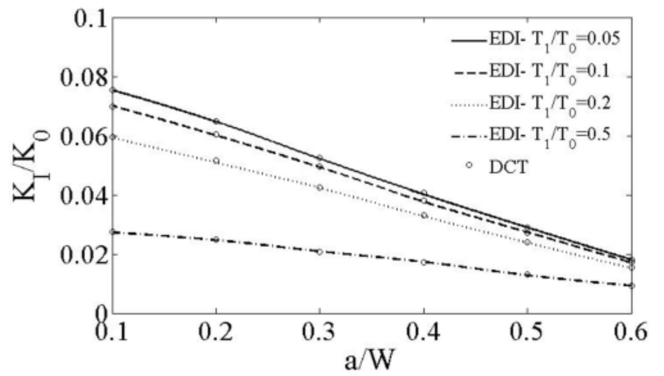
بارگذاری	نوع تحلیل	ضریب شدت تنش نرمالیزه				
		مقادیر محاسبه‌شده		اردگن و وو [۱۸]	کی‌سی و کیم [۱۰۷]	ییلدریم [۲۹]
		DCT	EDI			
$T_1=0.2T_0$ $T_2=0.5T_0$	کرنش صفحه‌ای	۰/۰۳۴۳	۰/۰۳۳۴	۰/۰۳۳۵	۰/۰۳۳۴	۰/۰۳۴
	تنش صفحه‌ای	۰/۰۲۳۹	۰/۰۲۳۴	-	۰/۰۲۳۵	۰/۰۲۴
$T_1=0.05T_0$ $T_2=0.5T_0$	کرنش صفحه‌ای	۰/۰۴۱۱	۰/۰۴۰۵	۰/۰۴۱۰	۰/۰۴۰۶	-

در شکلهای (۴-۱۲) و (۴-۱۳) اثر دمای لبه دارای ترک روی مقادیر ضریب شدت تنش برای حالتهای کرنش صفحه‌ای و تنش صفحه‌ای آمده است. دمای سطح دیگر در $T_I=0.5T_0$ ثابت نگه داشته می‌شود. طبق نتایج بدست آمده، مقادیر ضریب شدت تنش با کاهش نسبت T_I/ T_0 افزایش

می‌یابد. کاهش نسبت T_1/ T_0 افزایش گرادیان دمـا در نزدیکـی لبـه ترکـدار و در نتیجـه افـزایش در مقادیر تنشهای حرارتی و ضریب شدت تنش را در پی دارد.



شکل ۴-۱۲- ضرایب شدت تنش برحسب طول ترک و دمای لبه بدون ترک. حالت کرنش صفحه‌ای، WP_E=ln(10)، WP_α=ln(2) ، WP_k=ln(10) و $T_2/T_0=0.5$



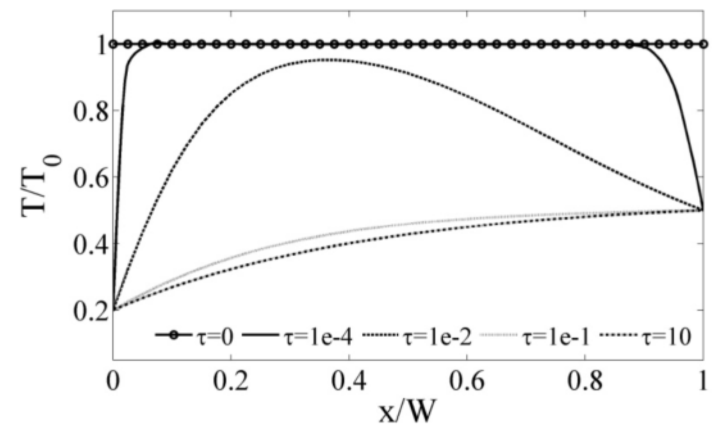
شکل ۴-۱۳- ضرایب شدت تنش برحسب طول ترک و دمای لبه بدون ترک. حالت تنش صفحه‌ای، WP_E=ln(10)، WP_α=ln(2) ، WP_k=ln(10) و $T_2/T_0=0.5$

تغییر دمای گذرا

از آنجائیکه ترکهای سطحی معمولاً حین مرحله سرمایش ایجاد می‌شوند؛ در اینجا تغییر دمای گذرا بصورت سرمایش در نظر گرفته می‌شود. شوک حرارتی بصـورت کـاهش ناگهـانی دمـای سـطوح صفحه از دمای مرجع T_0 تا دمای T_1و T_2 اعمال می‌شود. در این مرحله نتـایج بـا فـرض $T_1=0.2T_0$و $T_2=0.5T_0$ بدست آمده‌اند. توزیع دمای گذرا در صفحه برحسب زمـان نرمـال‌شـده در شـکل (۴-۱۴) رسم شده است. زمان نرمال‌شده τ بصورت زیر تعریف می‌شود.

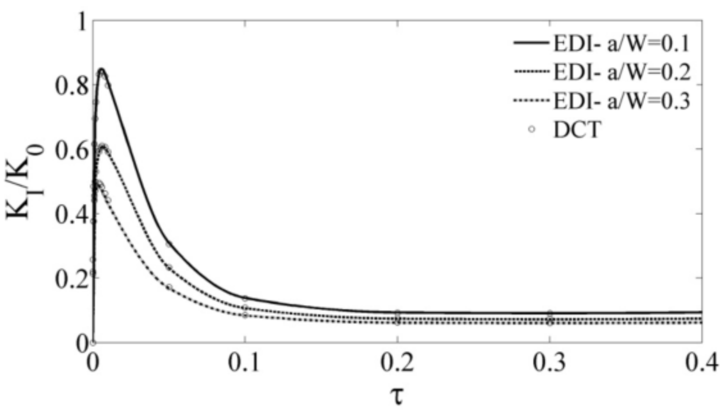
$$\tau = \frac{k(0)/\rho(0)c(0)}{W^2}t \tag{۴۴-۴}$$

طبق این نتایج، در زمانهای ابتدایی اعمال شوک حرارتی، گرادیان دما در نزدیکی لبه‌های صفحه قابل توجه است که منجر به تنشهای کششی بزرگی می‌گردد.

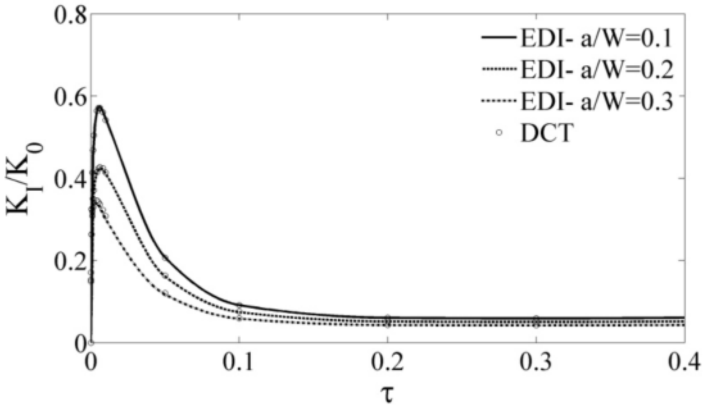


شکل ۴-۱۴-توزیع دمای گذرا در FGP برحسب زمان نرمالیزه‌شده

شکلهای (۴-۱۵) و (۴-۱۶) تغییرات زمانی ضریب شدت تنش حاصل از توزیع گذرای دما در صفحه، برحسب طولهای مختلف ترک و برای حالتهای کرنش صفحه‌ای و تنش صفحه‌ای را نشان می-دهد. مطابق این نتایج، در ابتدا مقادیر ضریب شدت تنش تا یک مقدار بیشینه افزایش یافته و سپس بسرعت تا مقدار حالت پایا کاهش می‌یابد. این تغییرات زمانی برای تمام طولهای ترک یکسان است. بعلاوه، مقادیر ضریب شدت تنش برای طولهای کوچکتر ترک هم در حالت گذرا و هم در حالت پایا بزرگتر است و در نهایت، مقادیر ضریب شدت تنش برای حالت کرنش صفحه‌ای بزرگتر از حالت تنش صفحه‌ای است.

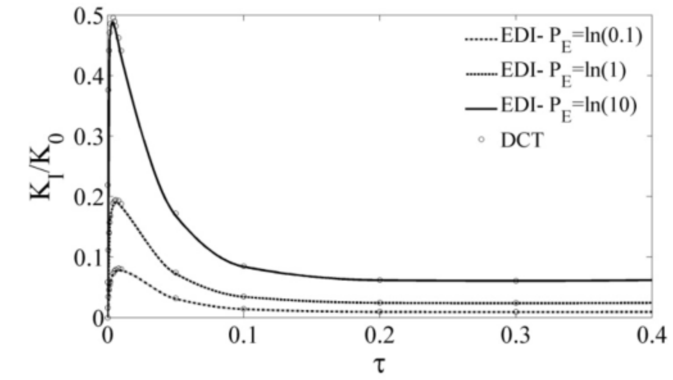


شکل ۴-۱۵- ضرایب شدت تنش گذرا در صفحه ZrO_2/Ti-6Al-4V برحسب طول ترک در حالت کرنش صفحه‌ای



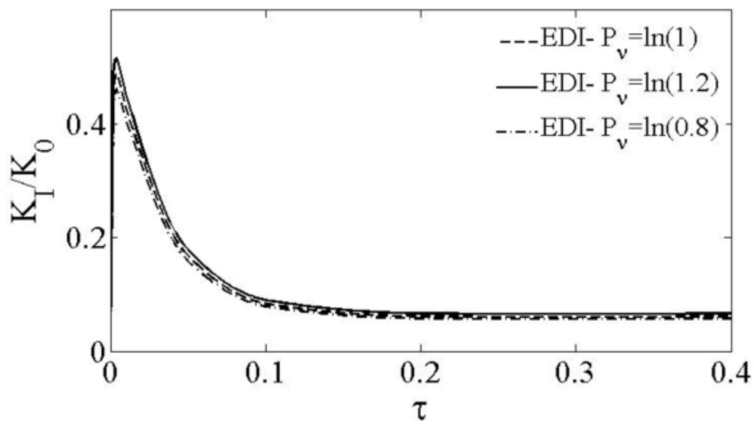
شکل ۴-۱۶- ضرایب شدت تنش گذرا در صفحه ZrO_2/Ti-6Al-4V برحسب طول ترک در حالت تنش صفحه‌ای

در این مرحله، اثر تغییرات خصوصیات ماده روی مقدار ضریب شدت تنش در قالب تحلیل حساسیت بررسی می‌شود. در شکلهای (۴-۱۷) و (۴-۱۸) اثر تغییر پارامترهای الاستیک صفحه یعنی مدول الاستیسیته و ضریب پواسون مطالعه شده است. بررسیها برای $a/W=0.3$ و حالت کرنش صفحه-ای انجام شده است. مطابق شکل (۴-۱۷)، تغییر ضریب غیرهمگنی P_E اثر قابل توجهی روی مقادیر ضریب شدت تنش و بخصوص مقدار بیشینه آن دارد. نتایج نشان می‌دهد؛ زمان رسیدن به مقدار بیشینه و زمان رسیدن به حالت پایا برای تمام مقادیر P_E تقریباً یکسان است. این مساله بخاطر مستقل‌بودن توزیع دمای گذرا از تغییرات P_E است. مطابق نتایج، تغییر P_E باعث ایجاد اختلاف زمانی ناچیز بین زمانهای متناظر با مقادیر بیشینه و رسیدن به حالت پایا می‌شود. بعلاوه، حالت $P_E=\ln(1)$ تغییرات زمانی ضریب شدت تنش را برای آن دسته از FGM می‌دهد که به‌لحاظ الاستیک همگن هستند. ولی خصوصیات گرمایی آنها نظیر هدایت گرمایی و ضریب انبساط گرمایی خطی آنها تابع مکان است. برای مثال، می‌توان از برخی مواد مرکب سرامیک/ سرامیک از جمله TiC/SiC نام برد.



شکل ۴-۱۷- ضرایب شدت تنش گذرا برحسب ضریب غیرهمگنی P_E. کرنش صفحه‌ای، $WP_\nu=\ln(1)$، $WP_\alpha=\ln(2)$ و $WP_k=\ln(10)$

اثر ضریب پواسون روی تغییرات ضریب شدت تنش برای حالت کرنش صفحه‌ای در شکل (۴-۱۸) رسم شده است. طبق این نتایج، مقادیر ضریب شدت تنش با افزایش مقدار ضریب غیرهمگنی - P_ν، مقدار ضریب شدت تنش کمی افزایش می‌یابد.

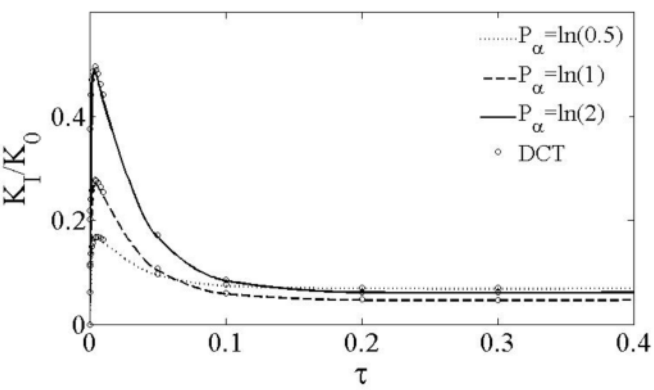


شکل ۴-۱۸- ضرایب شدت تنش گذرا برحسب ضریب غیرهمگنی P_ν. کرنش صفحه‌ای، $WP_E=\ln(10)$، $WP_\alpha=\ln(2)$ و $WP_k=\ln(10)$

نتایج محاسبه‌شده برای حالت تنش صفحه‌ای نشان می‌دهد؛ مقادیر ضریب شدت تنش نسبت به تغییرات ضریب پواسون حساسیتی ندارد و مستقل از آن می‌باشد. نتایج مذکور در متن نیامده است. حل تحلیلی توزیع تنش حرارتی در یک صفحه بدون ترک از مواد مرکب هدفمند بصورت روابط (۴-۴۲) و (۴-۴۳) است. این حل با فرض ایجاد توزیع دمای یک‌بعدی و برای حالتهای کرنش صفحه‌ای وتنش صفحه‌ای بدست آمده است. مطابق این روابط، تنشهای حرارتی یک تابع افزایش از مدول

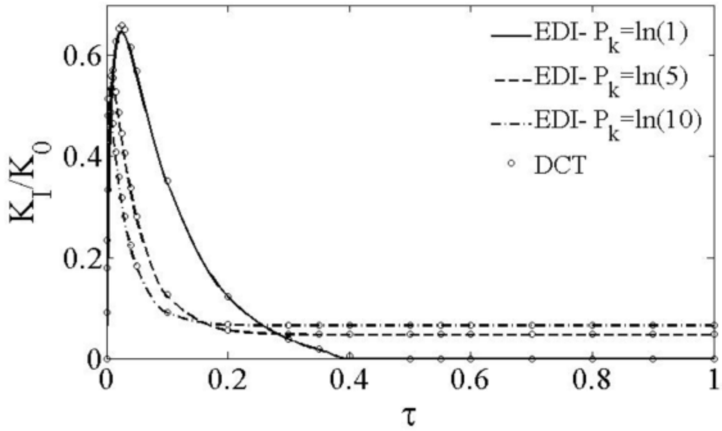
الاستیسیته می‌باشند. بعلاوه، دیده می‌شود که توزیع تنش حرارتی در حالت تنش صفحه‌ای مستقل از ضریب پواسون می‌باشد.

اثر تغییر ضرایب غیرهمگنی خصوصیات گرمایی ماده در این مرحله بررسی می‌گردد. در شکل (۴- ۱۹) اثر تغییر ضرایب غیرهمگنی ضریب انبساط حرارتی P_α روی تغییرات زمانی مقدار ضریب شدت تنش رسم شده است. طبق این نتایج، با افزایش ضریب غیرهمگنی P_α، مقدار بیشینه ضریب شدت تنش بشدت افزایش می یابد.



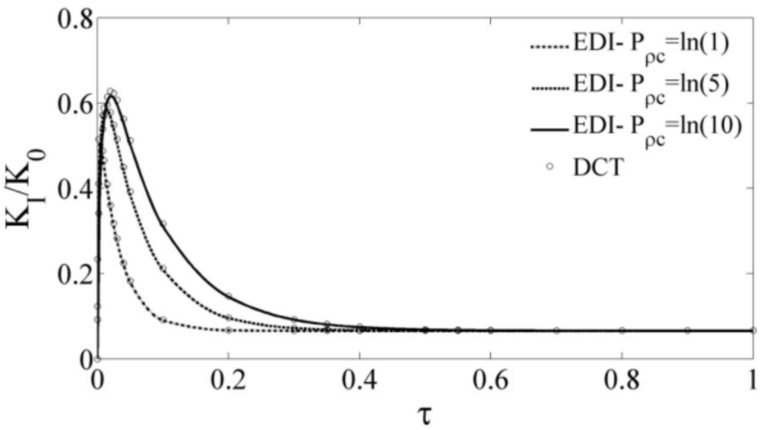
شکل ۴-۱۹- ضرایب شدت تنش گذرا برحسب ضریب غیرهمگنی P_α. کرنش صفحه‌ای، WP_E=ln(10)، WP_ν=ln(1) و WP_k=ln(10)

البته زمان متناظر با مقدار بیشینه و رسیدن به حالت پایا، تقریباً برای تمام مقادیر P_α یکسان است. بسته به مقدار P_α روند تغییرات زمانی ضریب شدت تنش ممکن است بسیار متفاوت باشد. برای مثال، اگر چه مقدار پایای ضریب شدت تنش برایWP_α=ln(2) یا WP_α=ln(1) کوچکتر از مقدار متناظر WP_α=ln(0.5) است. ولی مقدار بیشینه ضریب شدت تنش برای حالت WP_α=ln(2) بسیار بزرگتر می‌باشد. تغییرات زمانی ضریب شدت تنش برای مقادیر مختلف ضریب هدایت گرمایی P_k در شکل (۴- ۲۰) نشان داده شده است.



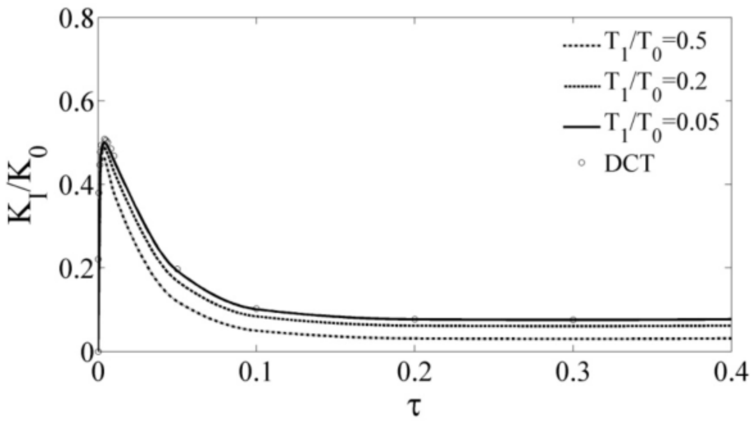
شکل ۴-۲۰- ضرایب شدت تنش گذرا برحسب ضریب غیرهمگنی P_k. کرنش صفحه‌ای، WP_E=ln(10)، WP_v=ln(1.2) و WP_α=ln(2)

طبق این نتایج، کاهش ضریب غیرهمگنی P_k باعث تاخیر در رسیدن ضریب شدت تنش به مقدار بیشینه و همچنین مقدار حالت پایا می‌گردد. البته این موارد دور از انتظار نیست، چون افزایش ضریب هدایت گرمایی موجب افزایش ضریب پخش حرارتی k/ρc می‌شود. علاوه بر این،کاهش ضریب هدایت گرمایی P_k باعث افزایش مقدار بیشینه می‌گردد. برای WP_k=ln(1) رفتار ترک در حالت گذرا و پایا کاملاً متفاوت است. در ابتدای اعمال شوک، مقدار ضریب شدت تنش افزایش یافته و به یک مقدار بیشینه مثبت می‌رسد و سپس کاهش می‌یابد؛ تا اینجا مساله تحلیل ترک است. اما پس از آن، مساله در حوزه مکانیک تماس قابل تحلیل است. از نتایج فوق می‌توان نتیجه گرفت؛ تغییرات ضریب هدایت گرمایی اثر قابل توجهی روی تغییرات زمانی ضریب شدت تنش دارد و گاهی باعث تغییر ماهیت مساله می‌گردد. تغییرات زمانی ضریب شدت تنش برحسب تغییرات ضریب غیرهمگنی ρc در شکل (۴-۲۱) نمایش داده شده است. همانطور که مورد انتظار است؛ مقادیر ضریب شدت تنش در حالت پایا مستقل از تغییرات ρc می‌باشد؛ که در شکل (۴-۲۱) نیز قابل مشاهده است. همچنین مقدار بیشینه ضریب شدت تنش زمان متناظر با مقدار بیشینه و رسیدن به حالت پایا با افزایش $WP_{\rho c}$ کمی افزایش می‌یابد.



شکل ۴-۲۱- ضرایب شدت تنش گذرا برحسب ضریب غیرهمگنی $P_{\rho c}$. کرنش صفحه‌ای، WP_E=ln(10)، WP_v=ln(1.2) و WP_α=ln(2)

اثر تغییر درجه حرارت لبه ترکدار روی تغییرات زمانی ضریب شدت تنش در شکل (۴-۲۲) آمده است. طبق این نتایج، با افزایش مقدار T_0-T_1، مقدار ضریب شدت تنش نیز افزایش می‌یابد. کاهش بیشتر دمای لبه صفحه از دمای مرجع باعث ایجاد گرادیان دمای بزرگتر می‌گردد که تنشهای حرارتی بزرگتری را نیز درپی دارد. همچنین زمان متناظر با رسیدن به مقدار بیشینه با افزایش T_0-T_1، افزایش می‌یابد. ولی زمان رسیدن به حالت پایا برای تمامی مقادیر T_0-T_1 تقریباً یکسان است.



شکل ۴-۲۲- ضرایب شدت تنش گذرا برحسب دمای لبه بدون ترک. کرنش صفحه‌ای، WP_E=ln(10)، WP_v=ln(1.2) و WP_α=ln(2)

۴-۴-۲- صفحه حاوی ترک لبه‌ای با تغییر توانی خصوصیات

صفحه‌ای از جنس Ni/TiC مطابق شکل (۴-۴) حاوی ترک لبه‌ای درنظر گرفته می‌شود.

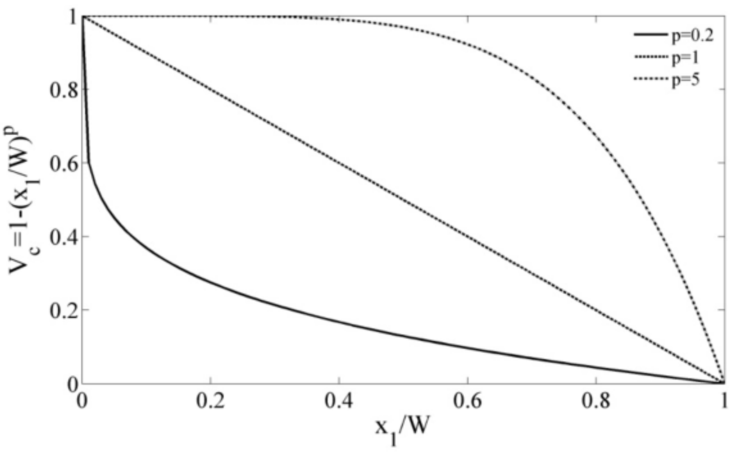
جدول ۴-۱- خصوصیات فیزیکی TiC و Ni [۲۰]

ماده	مدول الاستیسیته (GPa)	ضریب پواسون	ضریب انبساط حرارتی $(10^{-6}/K)$	ضریب هدایت گرمایی (W/(mK))	چگالی (kg/m^3)	گرمای ویژه (J/(kgK))
TiC	۳۲۰	۰/۱۹۵	۷/۴	۲۵/۱	۴۹۴۰	۱۳۴
Ni	۲۰۶	۰/۳۱۲	۱۳/۳	۹۰/۵	۸۸۹۰	۴۳۹/۵

تغییر خصوصیات مکانیکی و حرارتی در صفحه مطابق تابع توانی در جهت x_1 و بصورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

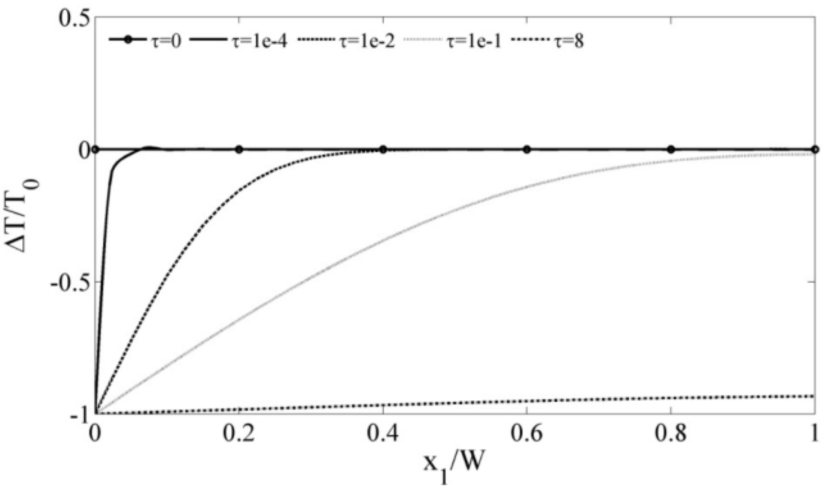
$$(x_1) = E(0) + (E(W) - E(0))(x_1/W)^p \qquad (۴۵\text{-}۴)$$

در این رابطه، توان p یک مقدار مثبت است که بعنوان پارامتر تنظیم‌کننده پروفیل خصوصیات بکار می‌رود. چون پارامتر p می‌تواند مستقل از خصوصیات اجزای تشکیل‌دهنده ماده انتخاب شود؛ تابع توانی در نمایش تغییر خصوصیات، از انعطاف‌پذیری قابل توجهی برخوردار است. به همین سبب در بسیاری از تحلیلهای عملی از این تابع برای نمایش خصوصیات FGM استفاده می‌شود.



شکل ۴-۲۳- تغییرات کسر حجمی سرامیک در FGP برحسب توان p

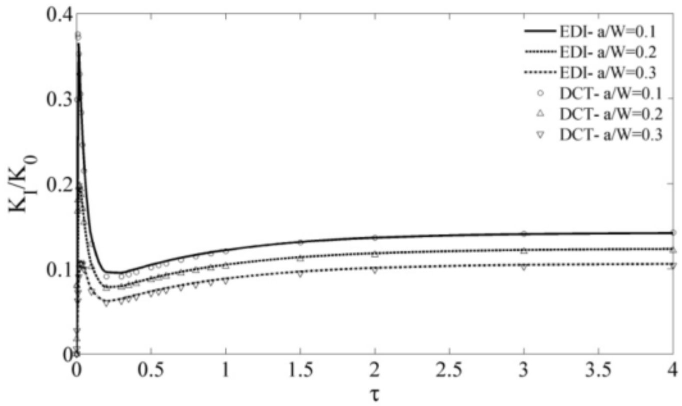
برای خصوصیات متناسب[1] مواد، پارامتر p برای تمام خصوصیات مکانیکی و حرارتی یکسان بکار برده می‌شود؛ ولی در خصوصیات غیرمتناسب[2]، هر خصوصیت می‌تواند پارامتر p متفاوتی نسبت به بقیه بگیرد. علاوه براین، شرایط مرزی حرارتی مختلفی در این مثال، روی لبه بدون‌ترک اعمال می‌گردد. به منظور اعمال شوک حرارتی، فرض می‌شود لبه ترکدار تا دمای ثابت $T_1=0$ بطور ناگهانی سرد می‌شود، در حالیکه در لبه دیگر شرایط جابجایی با ضریب $h=10\ \mathrm{W/(m^2K)}$ و با محیطی به دمای T_0 برقرار باشد. توزیع دمای گذرا در صفحه در شکل (۴-۲۴) آمده است. نتایج مذکور با فرض خصوصیات متناسب با مقدار p=5 حاصل شده است. اثر شرایط مرزی جابجایی در زمانهای نزدیک به حالت پایا بخوبی در توزیع دما مشهود است.



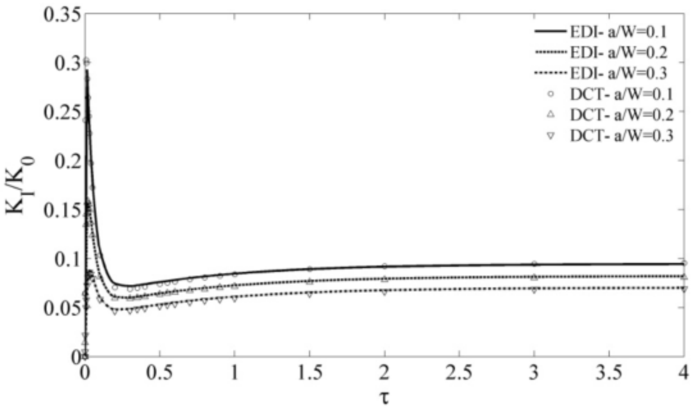
شکل ۴-۲۴-توزیع دمای گذرا در FGP برحسب زمان نرمالیزه‌شده

شکلهای (۴-۲۵) و (۴-۲۶) تغییرات زمانی ضریب شدت تنش را برای طولهای مختلف ترک و حالتهای کرنش صفحه‌ای و تنش صفحه‌ای نشان می‌دهند. در این حالت، ضریب شدت تنش تا یک مقدار بیشینه افزایش یافته و سپس مقدار آن بسرعت کاهش می‌یابد تا به مقدار کمینه برسد. پس از آن به تدریج تا مقدار حالت پایا افزابش می‌یابد.

1- Proportional material
2- Non-proportional material

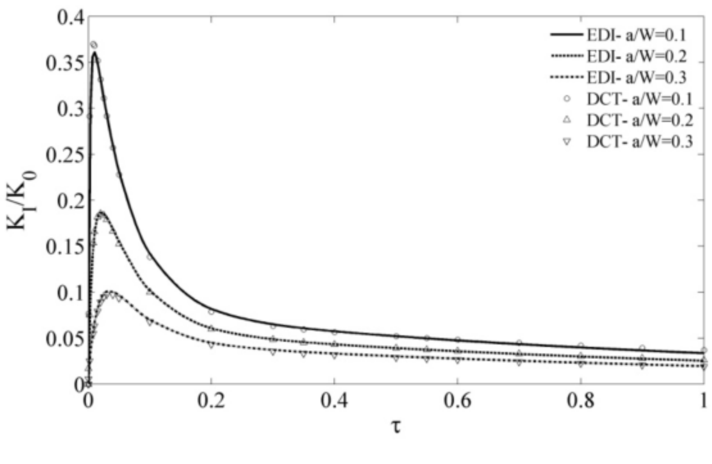


شکل ۴-۲۵- تغییرات زمانی TSIF برای طولهای مختلف ترک و حالت کرنش صفحه‌ای p=5

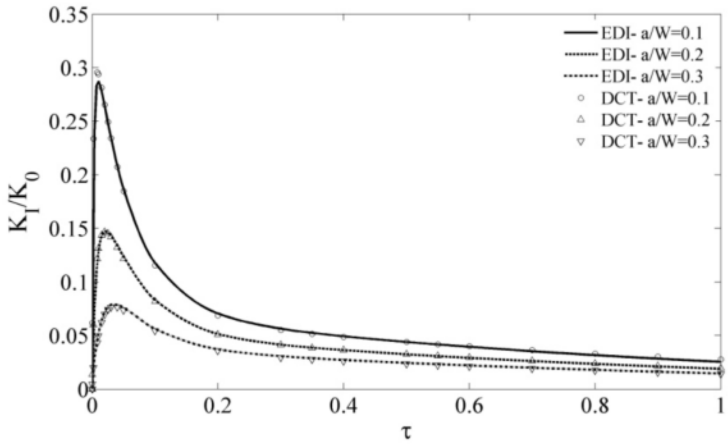


شکل ۴-۲۶- تغییرات زمانی TSIF برای طولهای مختلف ترک و حالت تنش صفحه‌ای p=5

در شکلهای (۴-۲۷) و (۴-۲۸) تغییرات زمانی ضریب شدت تنش برای طولهای مختلف ترک و توزیع خطی خصوصیات ماده (p =1) نشان داده شده است.



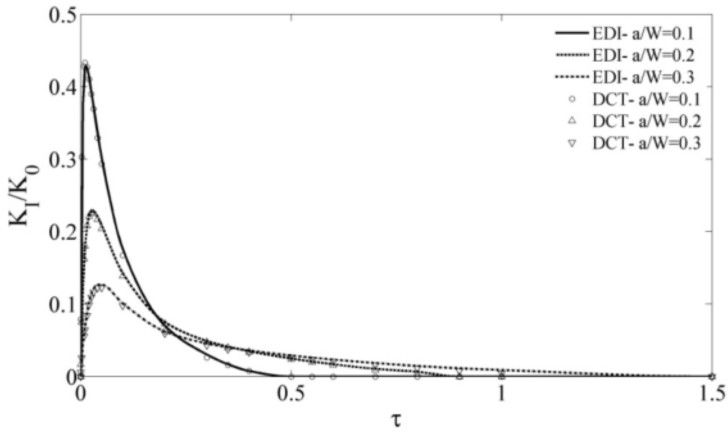
شکل ۴-۲۷- تغییرات زمانی TSIF برای طولهای مختلف ترک و حالت کرنش صفحه‌ای p=1



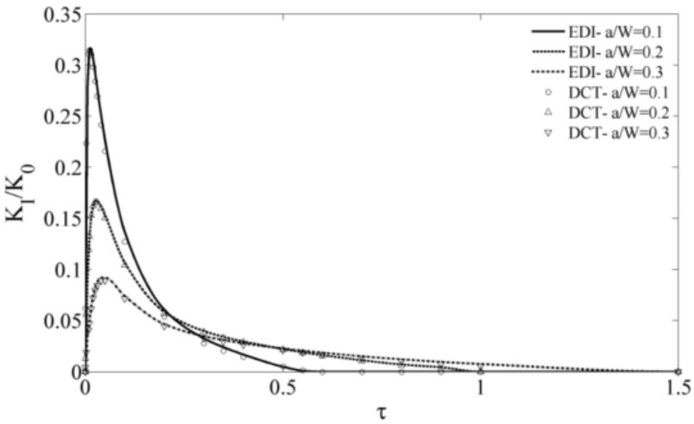
شکل ۴-۲۸- تغییرات زمانی TSIF برای طولهای مختلف ترک و حالت تنش صفحه‌ای p=1

تغییرات زمانی ضریب شدت تنش برای تغییر خطی خصوصیات شبیه تغییرات زمانی آن برای خصوصیات نمایی مواد می‌باشد. افزایش سریع به یک مقدار بیشینه و سپس کاهش کندتر تا مقدار حالت پایا روند کلی این تغییرات است. مقادیر بیشینه و حالت پایا برای طولهای ترک کوتاهتر بیشتر است. برای خصوصیات خطی مواد ترکها در حالت پایا بسته می‌شوند که در شکل نشان داده نشده است. زمان نسبی رسیدن به حالت پایا (بسته شدن ترک) در این حالت در مقایسه با مقادیر دیگر p و بخصوص p<1 بطور قابل ملاحظه‌ای بزرگتر است.

برای تغییر خصوصیات با p=0.2، تغییرات زمانی ضریب شدت تنش برای طولهای مختلف و حالتهای کرنش‌صفحه‌ای و تنش صفحه‌ای در شکلهای (۴-۲۹) و (۴-۳۰) نشان داده شده است. برای p=0.2 نیز ضریب شدت تنش سریعاً تا یک مقدار بیشینه افزایش یافته و سپس کاهش می‌یابد تا ترک بسته شود. برای طولهای کوتاهتر ترک مقدار بیشینه ضریب شدت تنش بطور قابل ملاحظه‌ای بیشتر است. کاهش بعدی مقدار ضریب شدت تنش نیز سریعتر اتفاق می‌افتد. بطوریکه ترکهای با طول کوتاهتر زودتر بسته می‌شوند.

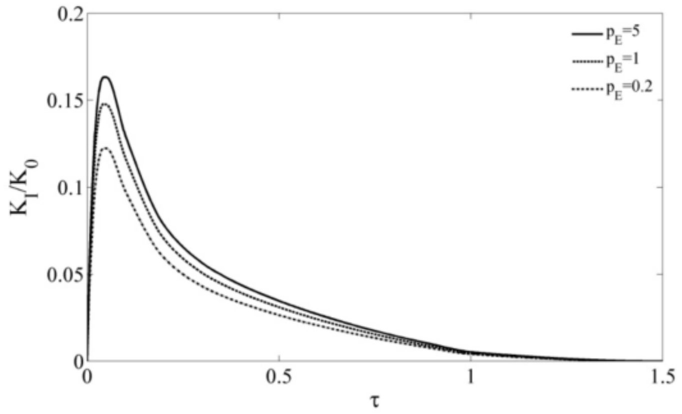


شکل ۴-۲۹- تغییرات زمانی TSIF برای طولهای مختلف ترک و حالت کرنش صفحه‌ای p=0.2



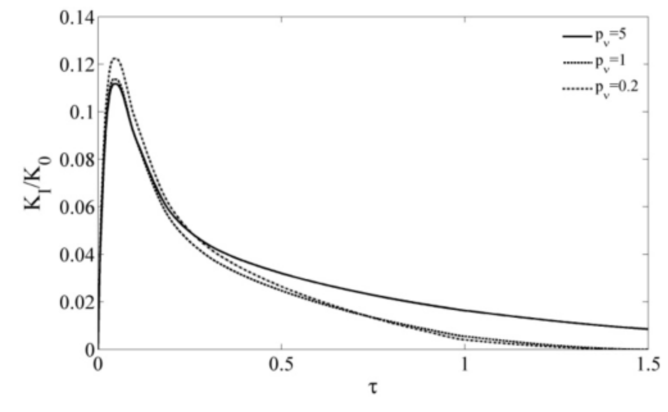
شکل ۴-۳۰- تغییرات زمانی TSIF برای طولهای مختلف ترک و حالت تنش صفحه‌ای p=0.2

در این مرحله، اثر تغییر خصوصیات ماده روی تغییرات زمانی ضریب شدت تنش بررسی می‌شود. در تمام حالتها، توان p برای تمام خصوصیات ماده بجز خصوصیت مورد مطالعه، برابر 0.2 در نظر گرفته می‌شود. ضریب شدت تنش برای طول ترک نسبی $a/W=0.3$ و حالت کرنش صفحه‌ای بدست آمده است. بدلیل نزدیکی منحنیها بخصوص در منطقه رسیدن به مقدار بیشینه، مقادیر محاسبه شده با روش DCT در نمودارها نشان داده نشده است. اثر تغییر توان پروفیل مدول الاستیسیته (p_E) روی ضریب شدت تنش در شکل (۴-۳۱) آمده است. مطابق این شکل، با افزایش پارامتر p_E، مقدار ضریب شدت تنش و بخصوص مقدار بیشینه آن، بطور قابل توجهی افزایش می‌یابد. اما زمان رسیدن به مقدار بیشینه و بسته‌شدن ترک برای تمام مقادیر p_E تقریباً یکسان است. یعنی پارامتر p_E روی زمان رسیدن به مقدار بیشینه و یا زمان رسیدن به حالت پایا اثر ناچیزی دارد.



شکل ۴-۳۱- اثر تغییر توان پروفیل مدول الاستیسیته (p_E) روی ضریب شدت تنش

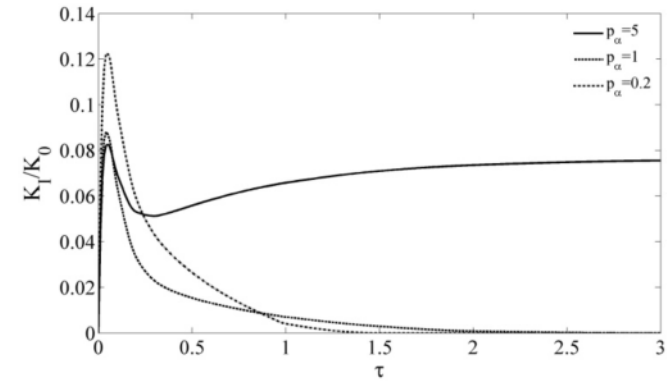
اثر تغییرات توان پروفیل ضریب پواسون p_v روی ضریب شدت تـنش در شـکل (۴-۳۲) نشـان داده شده است. طبق شکل مذکور، با کاهش پارامتر p_v، مقدار ضریب شدت تـنش و همچنـین زمـان متناظر با بسته‌شدن ترک افزایش می‌یابد. البته کاهش پـارامتر p_v منجـر بـه افـزایش توزیـع ضـریب پواسون در کل صفحه می‌شود. مقدار بیشینه ضریب شدت تنش برای حالتهای $p=1$ و $p=5$ بسیار بهم نزدیک است. روند تغییرات ضریب شدت تنش تا اندکی پس از زمـان مقـدار بیشـینه شـبیه تغییـرات ضریب شدت تنش برای تابع نمایی است.



شکل ۴-۳۲- اثر تغییرات توان پروفیل ضریب پواسون p_v روی ضریب شدت تنش

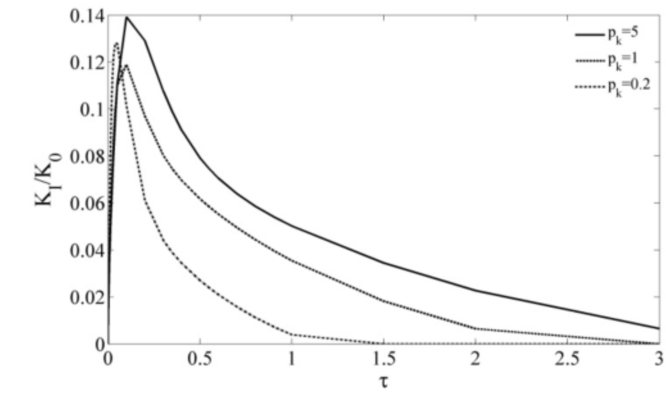
اثر تغییر خصوصیات گرمایی روی مقدار ضریب شـدت تـنش در شـکلهای (۴-۳۳)، (۴-۳۴) و (۴-۳۵) بررسی می‌شود. در شکل (۴-۳۳) تغییرات ضریب شدت تنش گذرا برحسب مقـادیر مختلـف توان ضریب انبساط حرارتی P_α نشان داده شده است. مطابق شکل مذکور، مقدار بیشینه ضریب شدت تنش برای $P_\alpha=0.2$ بزرگتر از حالتهای دیگر است. از سوی دیگر، روند تغییرات ضریب شدت تنش بـه

مقدار P_α کاملاً وابسته است. مطابق شکل، ترک برای مقادیر $P_\alpha=0.2$و $P_\alpha=1$ پس از رسیدن به مقدار بیشینه بسته می‌شود. در حالیکه، برای مقدار $P_\alpha=5$ ضریب شدت تنش پس از رسیدن به مقدار بیشینه، تا یک مقدار کمینه محلی کم می‌شود. اما پس از آن، بتدریج تا یک مقدار مثبت پایا افزایش می‌یابد.



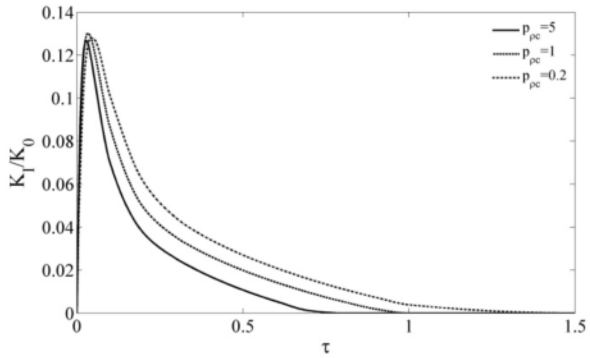
شکل ۴-۳۳- تغییرات ضریب شدت تنش گذرا برحسب مقادیر مختلف توان ضریب انبساط حرارتی

اثر تغییرات ضریب هدایت گرمایی روی مقدار ضریب شدت تنش در شکل (۴-۳۴) آمده است. مطابق این شکل، با افزایش توان P_k، تأخیری در زمان وقوع رسیدن به مقدار بیشینه و همچنین زمان رسیدن به حالت پایا رخ می‌دهد. ضریب پخش *k/ρc* تابعی افزایشی از ضریب هدایت گرمایی است. از طرفی، $P_k=0.2$ مطابق با کسر حجمی بیشتر فلز با ضریب هدایت گرمایی بزرگتر می‌باشد که منجر به بیشتر بودن نسبی ضریب هدایت صفحه نسبت به مقادیر $P_k=1$ و $P_k=5$ است. علاوه بر این، برای مقدار $P_k=5$ مقدار بیشینه ضریب شدت تنش و زمان بسته‌شدن ترک بزرگتر از حالتهای دیگر است.



شکل ۴-۳۴- اثر تغییرات ضریب هدایت گرمایی روی مقدار ضریب شدت تنش

تغییرات ضریب شدت تنش نسبت به زمان و پارامتر غیرهمگنی ρc در شکل (۴-۳۵) نشان داده شده است. نتایج نشان می‌دهد؛ مقدار $P_{\rho c}$ اثر چندانی روی مقدار بیشینه ضریب شدت تنش ندارد.

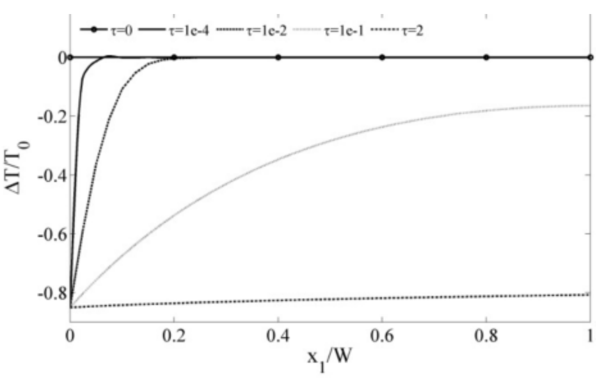


شکل ۴-۳۵- تغییرات ضریب شدت تنش نسبت به زمان و پارامتر غیرهمگنی ρc

همچنین زمان متناظر با مقدار بیشینه ضریب شدت تنش با کاهش $P_{\rho c}$ افزایش می‌یابد. این پدیده قابل انتظار است؛ زیرا برای $P_{\rho c}<1$، مقدار ρc در کل صفحه بیشتر از حالتهای دیگر می‌باشد.

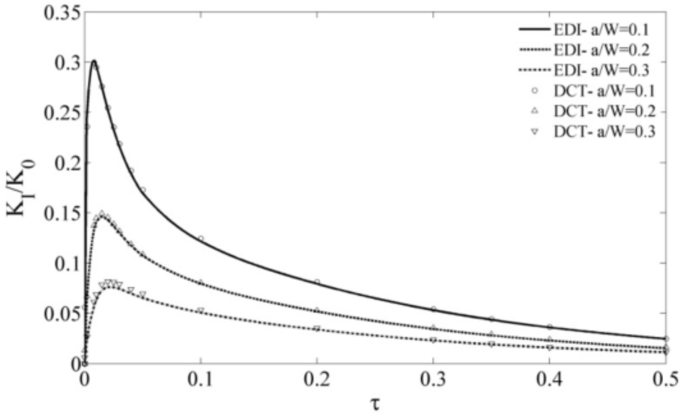
۴-۴-۳- اثر شرایط مرزی دمایی مختلف

در این بخش، اثر اعمال شرایط دمایی مختلف روی تغییرات زمانی ضریب شدت تنش مورد بررسی قرار می‌گیرد. صفحه‌ای با یک ترک لبه‌ای و با پروفیل خطی خصوصیات از جنس ZrO_2/Ti-6Al-4V در نظر گرفته می‌شود. فرض می‌شود، لبه حاوی ترک تا دمای $T_1=0.15\ T_0$ بطور ناگهانی سرد شود. ولی لبه دیگر با محیط دارای انتقال حرارت بصورت همرفت است. در شکل (۴-۳۶) توزیع دمای گذرا در صفحه برای ضریب همرفت $h=1\ W/(m^2K)$ و دمای محیط $T_\infty=T_0$ برای زمانهای مختلف رسم شده است.

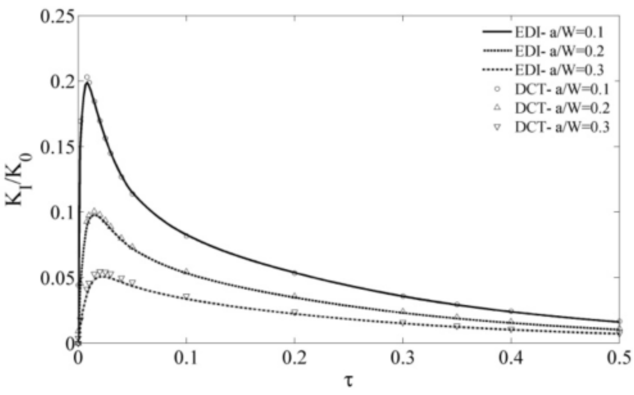


شکل ۴-۳۶- توزیع دمای گذرا در صفحه ZrO_2/Ti-6Al-4V برای p=1

تغییرات زمانی ضریب شدت تنش متناظر با توزیع دمای مذکور برای حالتهای کرنش صفحه‌ای و تنش صفحه‌ای و برحسب طولهای مختلف تـرک، در شـکلهای (۴-۳۷) و (۴-۳۸) نشـان داده شـده است.

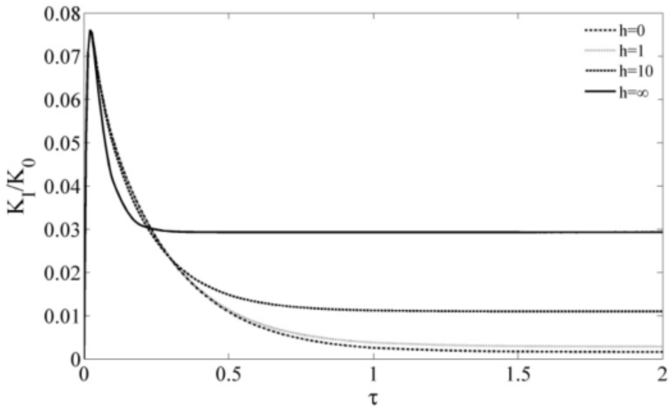


شکل ۴-۳۷- تغییرات زمانی ضریب شدت تنش در صفحه ZrO_2/Ti-6Al-4V برای کرنش صفحه‌ای



شکل ۴-۳۸- تغییرات زمانی ضریب شدت تنش در صفحه ZrO_2/Ti-6Al-4V برای تنش صفحه‌ای

طبق این نتایج، ابتدا مقدار ضریب شدت تنش سریعاً افزایش یافته و سپس کاهش مـی‌یابـد تـا نهایتاً ترک بسته شود. ترکهای با طول بیشتر زودتر بسته می‌شوند (در شکل نشان داده نشـده اسـت). در شکل (۴-۳۹) تغییرات زمانی ضریب شدت تنش برای اعمال شرایط مختلف دمایی به لبـه بـدون-ترک آمده است. نتایج برای طول ترک a/W=0.3 و حالت کرنش صفحه‌ای بدست آمده است.

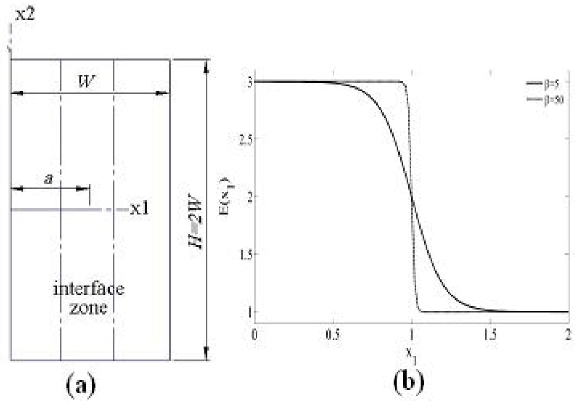


شکل ۴-۳۹- تغییرات زمانی ضریب شدت تنش برای اعمال شرایط مختلف دمایی به لبه بدون‌ترک

شرایط دمایی مختلف بصورت حالتهای خاصی از شرط دمایی جابجایی و در نظر گرفتن مقادیر خاص برای ضریب جابجایی بصورت زیر اعمال شده است. $h=0$ معادل عایق بودن لبه صفحه می‌باشد و نیز $h=\infty$ معادل شرط دما معلوم یا دما ثابت است. ضریب جابجایی از آغاز اعمال شوک تا رسیدن مقدار ضریب شدت تنش به مقدار بیشینه اثری ندارد. پس از آن، ضریب شدت تنش برای شرط مرزی دما ثابت سریعتر کاهش می‌یابد؛ اما در نهایت در مقدار پایانی بزرگتر متوقف می‌گردد. برای شرط مرزی عایق تغییرات زمانی ضریب شدت تنش از همه کندتر است؛ اما مقدار حالت پایای آن نیز از بقیه حالتها کوچکتر است.

۴-۴-۴- صفحه مرکب حاوی ترک لبه‌ای

تحلیل ترک در سازه‌های مواد مرکب مستلزم لحاظ کردن طبیعت قطعه‌ای پیوسته خصوصیات مواد تشکیل‌دهنده آن است. فصل مشترک لایه‌های تشکیل‌دهنده سازه‌های مرکب موجب ناپیوستگی در خصوصیات می‌شوند و خطوط ناپیوستگی ضعیف را در ناحیه حل مدل این سازه‌ها بوجود می‌آورند. لحاظ کردن آنها در مدل نیازمند کاربرد روشهای خاصی مثل روش پنالتی است. از طرف دیگر، در بسیاری از موارد یک لایه مواد مرکب هدفمند بین دو لایه همگن از مواد تشکیل‌دهنده آن ساخته می‌شود و طبیعتاً در تحلیل آن، هر سه لایه در نظر گرفته می‌شود. در هر دو مورد، تابع تانژانت هیپربولیک می‌تواند تغییرات خصوصیات مواد را با دقت مناسبی بیان نماید. در شکل (۴-۴۰) تغییرات تابع تانژانت هیپربولیک را برای مدلسازی مواد مرکب و مدلسازی لایه مرکب نشان می‌دهد.

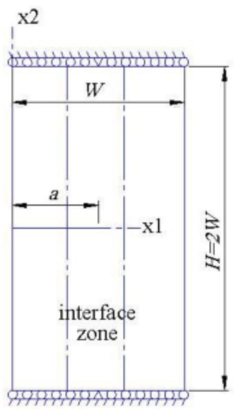


شکل ۴-۴۰- (a) مدلسازی لایه مرکب با سه لایه (b) تغییرات تابع تانژانت هیپربولیک

در این مثال، صفحه‌ای مرکب از دو ماده مختلف در نظر گرفته شده است که یک لایـه از مـواد مرکب هدفمند آنها را به یکدیگر متصل می‌کند. برای تمام صفحه، تغییرات خصوصیات مـاده بـا تـابع تانژانت هیپربولیک به‌ترتیب زیر تخمین زده می‌شود.

$$E(x_1) = \frac{E(W)+E(0)}{2} + \frac{E(0)-E(W)}{2} tanh(\eta_E(x_1+d)) \qquad (۴-۴۶)$$

در این رابطه، پارامتر d محل پرش را تعیین می‌کند. اندازه ناحیه گذرا نیز توسـط پـارامتر η_E تعیـین می‌گردد. در شکلهای (۴-۴۰) و (۴-۴۱) شکل ناحیه، موقعیت ترک و شرایط مـرزی بـرای بارگـذاری حرارتی حالت گذرا و پایا نشان داده شده است.



شکل ۴-۴۱- هندسه، موقعیت ترک و شرایط مرزی صفحه مرکب تحت بار حرارتی پایا

تحلیل برای حالتهای کرنش صفحه‌ای و تنش صفحه‌ای با در نظر گرفتن داده‌هـای زیـر انجـام شده است.

a/W=0.1-0.3, H/W=2.

d=-0.5, η_E=15, η_v= η_α= η_k= $\eta_{\rho c}$=5

(E (W), E (0))=(1,3), (v (W), v (0))=(0.1,0.3),

(α (W), α (0))=(0.03,0.01),

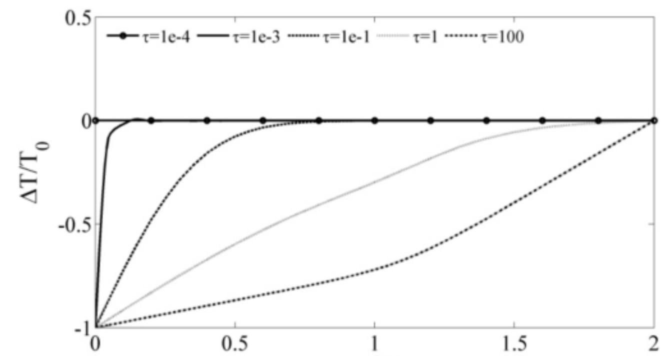
(k (W), k (0))=(3,1), (ρc (W), ρc (0))=(1,1)

در جدول (۴-۵)، نتایج در حالت پایا با نتایج منتشرشده مقایسه شده است که تطابق قابل-قبولی بین آنها دیده می‌شود.

جدول ۴-۵- مقایسه ضریب شدت تنش حرارتی پایا در صفحه مرکب با نتایج منتشرشده

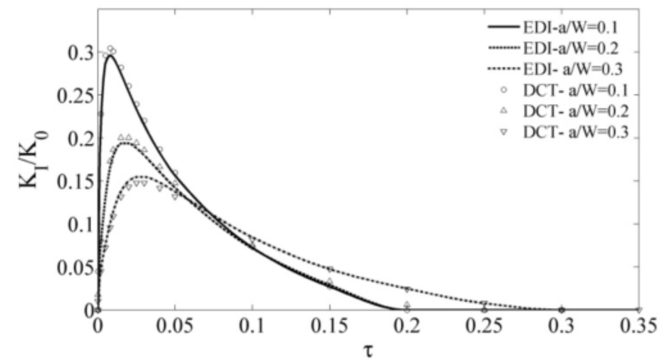
طول ترک	نوع تحلیل	کی‌سی و کیم [۱۰۷]	نتایج	
			EDI	DCT
۰/۱	کرنش صفحه‌ای	۰/۸۷۱۳	۰/۸۸۴۶	۰/۹۱۰۱
۰/۱	تنش صفحه‌ای	۰/۷۸۴۱	۰/۷۹۷۱	۰/۸۲۰۰
۰/۲	کرنش صفحه‌ای	۱/۱۷۰۰	۱/۱۳۵۱	۱/۱۵۷۳

برای حالت گذرا و اعمال شوک حرارتی، فرض می‌شود دمای لبه حاوی ترک، تا T_1=0 بطور ناگهانی کاهش می‌یابد؛ در حالیکه دمای لبه دیگر در دمای مرجع T_2= T_0 باقی می‌ماند. توزیع دمای گذرا در صفحه برحسب زمان نرمالیزه شده در شکل (۴-۴۲) آمده است. توزیع دما در حالت پایا بخوبی اختلاف ضریب هدایت گرمایی در دو لایه طرفینی صفحه را نشان می‌دهد. علاوه براین، در نواحی همگن این دو لایه، توزیع دمای پایا خطی می‌باشد؛ که مورد انتظار نیز می‌باشد.

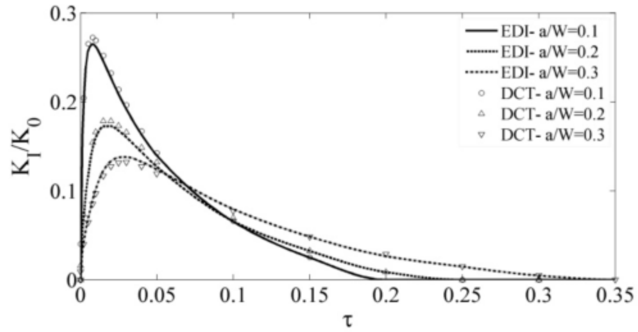


شکل ۴-۴۲- توزیع دمای گذرا در صفحه مرکب

تغییرات ضریب شدت تنش برحسب زمان برای طولهای مختلف ترک و حالتهای کرنش صفحه-ای و تنش صفحه‌ای به‌ترتیب در شکلهای (۴-۴۳) و (۴-۴۴) نشان داده شده است. طبق ایـن نتـایج، ضریب شدت تنش تا یک مقدار بیشینه افزایش یافته و سپس کاهش می‌یابد تا نهایتاً ترک بسته شود. بسته‌شدن ترک برای تمام طولهای ترک اتفاق می‌افتد. زمان متناظر با بسته‌شدن ترک با افزایش طول ترک افزایش می‌یابد.



شکل ۴-۴۳- تغییرات ضریب شدت تنش برحسب زمان برای طولهای مختلف ترک و حالت کرنش صفحه‌ای



شکل ۴-۴۴- تغییرات ضریب شدت تنش برحسب زمان برای طولهای مختلف ترک و حالت تنش صفحه‌ای

۴-۴-۵- تعیین خصوصیات صفحه با مدل میکرومکانیک

تخمین خصوصیات موثر و ماکروسکوپی مواد مرکب همواره یکی از مسایل مورد توجه در این حوزه بوده است. برای FGM نیز بعنوان مواد مرکب مدرج تعدادی از مدلهای میکرومکانیک مواد مرکب توسعه یافته‌اند. در این مثال، از مدل خودسازگار[1] برای تعیین خصوصیات ماده استفاده می‌شود.

زوکر[2] اشاره می‌کند؛ مدل خودسازگار یک تخمین ساده برای خصوصیات موثر را بدست می-دهد؛ که در مسایل بهینه‌سازی مربوط به توزیع ماده بکار می‌رود. علاوه براین، در این روش خصوصیات ماده طوری محاسبه می‌شوند که از اینکه کدام فاز بعنوان ماتریس و کدام فاز بعنوان ماده حل‌شونده باشند؛ مستقل می‌باشند [۱۰۸]. این نکته بخصوص برای FGM اهمیت دارد. چون کسر حجمی مواد تشکیل‌دهنده آن در محدوده وسیعی تغییر می‌کند.

برای FGM متشکل از دو فاز، معمولا تغییر کسر حجمی سرامیک بصورت تابع توانی در نظر گرفته می‌شود.

$$V_c=1-(x_1/W)^p \tag{۴-۴۷}$$

که در آن، W طول تغییر خصوصیات ماده است و p پارامتر تعیین پروفیل گرادیان است. در اینجا لبه $x_1=0$ متناظر با سرامیک خالص و $x_1=W$ لبه متناظر با فلز خالص است. برای مواد مرکب دو فازی، خصوصیات موثر ماده از روابط زیر بدست می‌آید [۱۰۸و ۱۰۹].

$$\frac{1}{\kappa+4\mu/3}=\frac{V_c}{\kappa_c+4\mu/3}+\frac{V_m}{\kappa_m+4\mu/3} \tag{۴-۴۸}$$

$$\left(\frac{V_c\kappa_c}{\kappa_c+4\mu/3}+\frac{V_m\kappa_m}{\kappa_m+4\mu/3}\right)+5\left(\frac{V_c\mu_m}{\mu-\mu_m}+\frac{V_m\mu_c}{\mu-\mu_c}\right)+2=0 \tag{۴-۴۹}$$

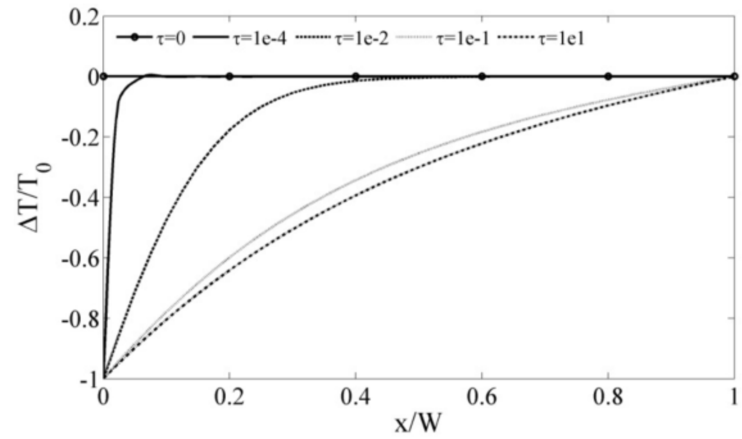
$$\alpha=\alpha_m+\frac{(\alpha_c-\alpha_m)(1/\kappa-1/\kappa_m)}{(1/\kappa_c-1/\kappa_m)} \tag{۴-۵۰}$$

$$c=c_cV_c+c_mV_m,\ \rho=\rho_cV_c+\rho_mV_m \tag{۴-۵۱}$$

---

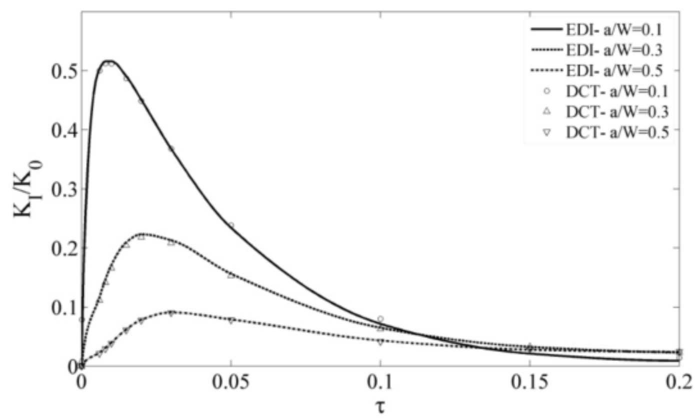
[1] - self-consistent
[2] - Zuiker

برای مثال عددی، صفحه‌ای از FGM به عرض W و ارتفاع H=8W در نظر گرفته می‌شود که حاوی یک ترک است. شرایط مرزی دمایی بصورت کاهش ناگهانی دمای لبه حاوی ترک از دمای مرجع تا $T_1=0$ و حفظ دمای مرجع در لبه دیگر در نظر گرفته شده است. شکل (۴-۴۵) توزیع دمای گذرا در صفحه تحت شرایط مرزی و اولیه ذکر شده را نشان می‌دهد.



شکل ۴-۴۵- توزیع دمای گذرا در FGP با مدل خودسازگار

تغییرات زمانی ضریب شدت تنش متناظر با توزیع دمای فوق در شکل (۴-۴۶) برای طولهای مختلف ترک و حالت کرنش صفحه‌ای نشان داده شده است.



شکل ۴-۴۶- تغییرات زمانی SIF برای طولهای مختلف ترک و حالت کرنش صفحه‌ای

طبق نتایج بدست‌آمده، در ابتدای اعمال شوک مقدار ضریب شدت تنش تا یک مقدار بیشینه سریعاً افزایش یافته و سپس بتدریج کاهش می‌یابد. البته برای طولهای کوتاهتر ترک، مقدار بیشینه

بطور قابل ملاحظه‌ای بزرگتر از طولهای بزرگتر ترک است و همینطور نرخ زمانی تغییرات نیز بیشتر است. اما در حالت پایا ضریب شدت تنش برای طولهای بزرگتر بیشتر است.

فصل پنجم

انتگرال برهم‌کنش برای تحلیل شکست حرارتی مواد مرکب تابعی

۵-۱- مقدمه

در تئوریهای مرسوم مکانیک شکست، میدان‌های تنش و کرنش حوزه نوک ترک با یک پـارامتر مثل انتگرال J، ضریب شدت تنش و یا بازشدگی سطح ترک تعیین می‌گردد. از طرف دیگر، عملاً یـک ناحیه پلاستیک در نوک ترک بوجود می‌آید که کاربرد پارامترهای ذکر شده، به اندازه نسبی این ناحیه بستگی دارد. با فرض برقراری شرایط ناحیه تسلیم کوچک[۱] -که بصورت کوچک بودن ناحیه پلاستیک در مقایسه با طولهای مشخصه سازه دارای ترک، مثـل طـول تـرک، طـول سـازه در راسـتای تـرک و ضخامت تعریف می‌شود- یکی از پارامترهای ذکرشده بعنوان یک خصوصـیت مـاده را مـی‌تـوان بـرای توصیف میدانهای حوزه نوک ترک بکار برد [۱۰۷]. اما با فرض بـزرگ بـودن ناحیـه پلاسـتیک نـوک ترک[۲]، برای تعیین میدانهای حوزه نوک ترک یک پارامتر کافی نیسـت. از اینـرو، مطالعـات تجربـی و عددی برای توصیف این میدانها با دو پارامتر انجام شده است. یکی از کمیتهایی که بعنوان پارامتر دوم شکست مطرح است؛ تنش الاستیک T می‌باشد.

تنش T مولفه‌ای از تنش با مقدار ثابت است که در جبهه ترک و موازی با سـطح تـرک اعمـال می‌شود و شکل و اندازه ناحیه پلاستیک نوک ترک و چقرمگی را کنترل می‌کند. بعلاوه، روی پایداری مسیر رشد ترک اثر قابل توجهی دارد. بدیهی است که تحلیل شکست با دو پارامتر اطلاعات کـاملتری در مورد نحوه گسیختگی سازه را بدست می‌دهد.

میدان تنش در حوزه نوک ترک در یک پیوستار جامد بصورت زیر است.

$$:K_I(2\pi r)^{-1/2} f_{ij}^{I}(\theta)+K_{II}(2\pi r)^{-1/2} f_{ij}^{II}(\theta)+T\delta_{1i}\delta_{1j} \qquad (۵-۱)$$

---

[1] - small-scale yielding (SSY)

[2] - large-scale yielding

که در آن، K_I و K_{II} ضرایب شدت تنش مود I و II و T، مولفه تنش غیرتکین است. تنش T روی زاویه شروع و رشد ترک در بارگذاری مود مختلط تأثیر دارد [۱۱۰و ۱۱۱]. همچنین پایداری مسیر ترک در بارگذاری مود I تحت تأثیر تنش T قرار می‌گیرد [۱۱۲]. مطالعات نشان می‌دهد[۱]، چقرمگی سازه در حالت کرنش صفحه‌ای به تنش T بستگی دارد [۱۱۳]. لارسون[۲] و کارلسون[۳] دریافتند؛ شکل و اندازه ناحیه پلاستیک نوک ترک به مقدار تنش T وابسته است [۱۱۴]. پس از آن، بتگن[۴] و هنکک[۵] میدانهای الاستیک- پلاستیک دو پارامتری حوزه نوک ترک را بررسی نمودند [۱۱۵]. دو[۶] و هنکک اثر تنش T روی میدانهای حوزه نوک ترک در مواد الاستیک-پلاسیتک کامل را مطالعه کردند [۱۱۶]. بعدها ادد[۷] و شی[۸] تئوری J-Q را ارائه کردند که بعنوان شاخصی برای ناحیه تسلیم کوچک و مرز تبدیل آن به ناحیه تسلیم بزرگ در نظر گرفته شد [۱۱۷]. همچنین ادد و شی نشان دادند در تئوری J-Q می‌توان چقرمگی را اندازه گرفت و در کاربردهای مهندسی بکار برد [۱۱۸]. مطالعات فوق در حیطه مواد همگن انجام شده است. برای مواد همگن، آیت الهی و همکارانش نیز با استفاده از روشهای مستقیم در میدانهای تنش و تغییرمکان، تنش T را برای بارگذاریهای مود I و مود مختلط محاسبه کردند [۱۱۹]. روشهای مستقیم مثل روش فوق بر پایه استفاده از کمیتهای محاسبه‌شده حوزه نوک ترک و بخصوص در راستای ترک، در عبارتهای تحلیلی میدانهای تنش و تغییرمکان حوزه نوک ترک بنا نهاده شده است و طبیعتاً به مقادیر محاسبه‌شده تنش و تغییرمکان حساسیت زیادی دارد. از اینرو

۱

[2] - Larsson

[3] - Carlson

[4] - Betegon

[5] - Hancock

[6] - Du

[7] - O'Dowd

[8] - Shih

روشهای انرژی بر پایه انتگرالهای پایستار مورد توجه قرار گرفتند. لیورز[1] و رادون[2] از فرم وردشی انتگرالهای پایستار برای محاسبه تنش T استفاده کردند [۱۲۰]. فوری[3] از انتگرال پایستار J که توسط کیشیموتو[4] و همکارانش ارائه شده است [۱۲۱]و کاردو[5] و همکارانش از انتگرال مستقل از مسیر J برای محاسبه تنش T تحت بار مکانیکی مود I استفاده نمودند [۱۲۲]. چن و همکارانش با استفاده از انتگرال J و قضیه بتی-ریلی[6] تنش T را تحت مود I بارگذاری محاسبه نمودند [۱۲۳].

پس از اینکه کاربردهای FGM بسرعت گسترش یافت و شکست بعنوان رایج‌ترین مود گسیختگی این مواد معرفی شد؛ مطالعات گسترده‌ای روی مکانیک شکست FGM آغاز شد. ویلیامز و اوینگ[7] [۱۱۰]و یوکیو[8] و همکارانش [۱۲۴] روی یک نمونه حاوی ترک مایل از جنس پلی‌متیل-متاکریل[9] (PMMA) آزمایشهایی انجام دادند. اما نتایج آزمایشها برای زاویه شروع ترک با نتایج حاصل از تئوری ماکزیمم تنش محیطی اختلاف داشت. طبق نتایج این تحقیقات، تنش T اثر قابل توجهی روی زاویه شروع ترک دارد. لحاظ شدن اثر تنش T در زاویه رشد ترک منجر به توسعه تئوری ماکزیمم تنش محیطی بصورت معیار ماکزیمم تنش محیطی تعمیم‌یافته[10] شده است. برای شکست ترد مواد

---

[1] - Leevers

[2] - Radon

[3] - Kfouri

[4] - Kishimoto

[5] - Cardew

[6] - Betti-Rayleigh reciprocal theorem

[7] - Ewing

[8] - Yukio

[9] - polymethyl-methacrylate

[10] - generalized maximum hoop stress criterion

الاستیک خطی، معیار مذکور شامل ضرایب شدت تنش، تنش Tو اندازه ناحیه شکست[1] r_c می‌باشد. البته r_c در مقایسه با طول ترک و ابعاد قطعه، کوچک فرض می‌شود. مطابق نتایج آزمایشگاهی چو[2] و ژنگ[3] [۱۲۵] برای نمونه‌های استاندارد PMMA -با خصوصیات فیزیکی مدول الاستیسیته $E=2.76$ GPa، تنش تسلیم $\sigma_y=55.2$ MPa، چقرمگی $K_c=1.02$ MPam^{½} و ضریب پواسون $\nu=0.33$- اندازه ناحیه شکست برای آزمایش شکست با کنترل تنش[4]، $r_c\approx0.5$ mm و برای آزمایش شکست با کنترل کرنش[5]، کرنش[5]، $r_c\approx0.03$ mm بدست آمده است. نکته قابل توجه، بزرگتر بودن r_c در هر دو حالت، از اندازه ناحیه پلاستیک نوک ترک برای شکست ترد و تحت شرایط کرنش صفحه‌ای است؛ که بصورت $r_p=(K_c/\sigma_y)^2/8\pi\approx0.0187$ mm تعریف می‌شود.

تاکنون روشهای تحلیلی و عددی برای بدست آوردن پارامترهای شکست و بخصوص ضریب شدت تنش در FGM گسترش یافته است. در این مطالعات علاوه بر ضریب شدت تنش، تنش T نیز تا حدی در نظر گرفته شده است. بکر[6] تنش T را با استفاده از اختلاف تنشهای عمودی $(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})$ در راستای ترک $(\theta=0)$ محاسبه کرد [۱۲۶]. کیم و پائولینو با کاربرد انتگرال برهم‌کنش تنش T را برای بارگذاری مکانیکی محاسبه و اثر آن را روی زاویه شروع رشد ترک بررسی نمودند [۱۲۷و ۱۲۸]. کی-سی و کیم نیز فرمولبندی نامتعادل انتگرال برهم‌کنش را برای محاسبه تنش T برای بارگذاری حرارتی پایا در FGM بکار بردند [۱۰۷و ۱۲۹]. دگ از انتگرالهای J_k برای محاسبه ضرایب شدت تنش و تنش T در FGM تحت بارگذاری مود مختلط استفاده کرد [۱۳۰و ۱۳۱]. اما این روش نیاز به محاسبه

---

[1] - fracture process zone size

[2] - Chao

[3] - Zhang

[4] - stress-controlled fracture

[5] - strain-controlled fracture

[6] - Becker

چگالی انرژی کرنشی روی سطوح ترک دارد و همچنین باید میدان تغییرمکان نوک ترک نیز در نظر گرفته شود. اسلادک[1] و همکارانش نیز از روش فوری برای تعیین تنش T در FGM تحت بار مکانیکی استفاده نمودند [۱۳۲]. در روش مذکور انتگرال پایستاری بکار رفته است که شامل یک انتگرال سطحی و یک انتگرال روی کانتوری است که به نوک ترک میل می‌کند. محاسبه انتگرال پایستار مذکور با روشهای عددی ناحیه‌ای و مرزی با مشکلات عددی همراه است. برای حالت مود I، نسبت $B = T\sqrt{\pi a}/K_I$ -که biaxiality ratio نامیده می‌شود- بعنوان یک پارامتر بدون‌بعد تعریف می‌شود که مستقل از اندازه بارگذاری است؛ اما به هندسه و نوع بارگذاری بستگی دارد. علاوه بر این، گرادیان خصوصیات فیزیکی FGM نیز روی اندازه B موثر است.

انتگرال برهم کنش یک روش کارآمد برای محاسبه پارامترهای شکست (ضریب شدت تنش و تنش T) در سیستمهای خطی می‌باشد؛ که برای مواد مرکب هدفمند نیز قابل کاربرد است. در این فصل، روش انتگرال برهم کنش برای مواد مرکب هدفمند و انتخابهای مختلف میدانهای کمکی، با یک رهیافت واحد و قابل توسعه برای برهم کنش خطی میدانهای دیگر فرمولبندی می‌گردد.

این روش برپایه انتگرالهای پایستار همراه با کاربرد میدانهای کمکی توسعه یافته است و شامل روابط اساسی مکانیک جامدات زیر می‌باشد:

۱- رابطه تعادل

۲- روابط سازگاری

۳- رابطه ساختاری

[1] - Sladek

محاسبه پارامترهای ضرایب شدت تنش و تنش T بـا اسـتفاده از انتگـرال بـرهم‌کـنش نیازمنـد استفاده از میدانهای کمکی نظیر میدان جابجـایی، میـدان کـرنش و میـدان تـنش اسـت. در تحلیـل مکانیک شکست FGM، معمولاً از میدانهای کمکی مواد همگن استفاده می‌شود. اما همانطور کـه بعـدا اشاره می‌شود؛ نقض یکی از قوانین بالا را در پی دارد. بسته بـه اینکـه کـدام یـک از قـوانین مکانیـک جامدات نقض شود؛ یک فرمولبندی مستقل برای انتگرال برهم‌کنش بدست می‌آید.

شکل کلی فرمولبندیهای مذکور نسبت به انتگرال برهم‌کنش مورد کاربرد بـرای مـواد همگـن، شامل دو ترم اضافی -یکی ناشی از گرادیان خصوصیات ماده و دیگـری بـدلیل نقـض یکـی از قـوانین اساسی مکانیـک جامـدات- مـی‌باشـد. در جـدول (۵-۱) چگـونگی انتخـاب میـدانهای کمکـی بـرای فرمولبندیهای مذکور نشان داده شده است. سطر آخر جدول نیز قانون نقض‌شده را نمایش می‌دهد.

جدول ۵-۱- چگونگی انتخاب میدانهای کمکی برای فرمولبندیهای مختلف

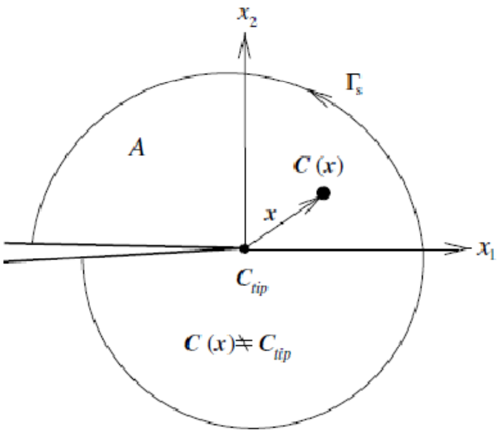
فرمولبندی نامتعادل[1]	فرمولبندی غیرسازگار[2]	فرمولبندی تانسور ثابت ساختاری[3]
u^{aux}	u^{aux}	u^{aux}
ε^{aux}	σ^{aux}	ε^{aux}
$\sigma^{aux} = \boldsymbol{C(x)}\varepsilon^{aux}$	$\varepsilon^{aux} = \boldsymbol{S(x)}\sigma^{aux}$	$\sigma^{aux} = \boldsymbol{C}_{tip}\varepsilon^{aux}$
$\nabla.\sigma^{aux} \neq 0$	$\varepsilon^{aux} \neq \nabla_{sym}u^{aux}$	$\boldsymbol{C(x)} \neq \boldsymbol{C}_{tip}$

$\mathbf{C}_{tip}$ تانسور ساختاری است که با در نظر گرفتن خصوصیات ماده در نوک ترک بدست می‌آیـد. تفـاوت $\mathbf{C}_{tip}$ و $\mathbf{C(x)}$ در شکل (۵-۱) نشان داده شده است.

[1] - non-equilibrium formulation

[2] - incompatibility formulation

[3] - constant-constitutive-tensor formulation



شکل ۵-۱- تفاوت تانسورهای ساختاری $\mathbf{C}_{tip}$ و **C(x)**

ترمهای اضافی حین عملیات بدست آوردن انتگرالهای برهم‌کنش بطور طبیعی در فرمولبندی ظاهر می‌شوند و نباید حذف شوند. فرمولبندی نامتعادل، روابط سازگاری ($\varepsilon^{aux} = \nabla_{sym} u^{aux}$) و ساختاری ($\sigma^{aux} = \boldsymbol{C(x)}\varepsilon^{aux}$) را ارضاء می‌کند؛ ولی رابطه تعادل ($\nabla.\sigma^{aux} \neq 0$) را نقض می‌کند. فرمولبندی غیرسازگار رابطه تعادل و ساختاری را ارضاء می‌کند؛ اما رابطه سازگاری ($\varepsilon^{aux} \neq \nabla_{sym} u^{aux}$) نقض می‌شود. بطور مشابه، فرمولبندی تانسور ثابت ساختاری، روابط تعادل و سازگاری را ارضاء می‌نماید؛ اما رابطه ساختاری FGM نقض می‌شود. انتگرالهای پایستار و مستقل از مسیری که بر مبنای فرضیات بالا بدست می‌آیند و کاربرد آنها برای محاسبه ضریب شدت تنش و تنش T، موضوع این فصل است.

۵-۲- میدانهای کمکی

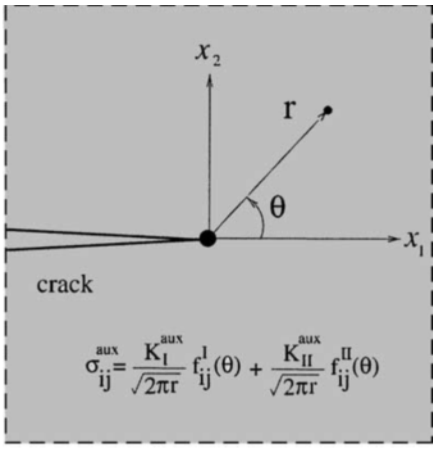
بکارگیری انتگرال برهم‌کنش نیازمند کاربرد میدانهای کمکی جابجایی u^{aux}،کرنش ε^{aux} و تنش σ^{aux} است. میدانهای کمکی مذکور برحسب نوع کمیت مورد محاسبه -ضریب شدت تنش و یا تنش T- تعریف می‌شود.

انتخابهای مختلفی برای میدانهای کمکی وجود دارد. میدانهای کمکی را می‌توان بصورت تحلیلی و یا عددی در نظر گرفت. بطور معمول میدانهای کمکی انتخابی هر سه قانون مکانیک جامدات را ارضا می‌نمایند. در حال حاضر، میدانهای کمکی با این خصوصیت، بطور عددی برای FGM

با پروفیل خاص بدست می‌آیند و کاربرد چندانی ندارند. برای FGM نیز معمولاً از میدانهای تحلیلی حوزه نوک ترک استفاده می‌شود که برای مواد همگن تحت بار مکانیکی بدست آمده است. اما کاربرد میدانهای کمکی مواد همگن که بطور تحلیلی بدست می‌آیند؛ منجر به نقض حداقل یکی از قوانین مکانیک جامدات می‌شود. میدانهای انتخابی مذکور برای بارگذاریهای مکانیکی و حرارتی بصورت استاتیکی و دینامیکی قابل کاربرد می‌باشند.

۵-۲-۱- میدانهای کمکی ضریب شدت تنش

بمنظور محاسبه ضرایب شدت تنش، معمولا از حل تحلیلی ویلیامز[1] برای یک ترک تیز در مواد همگن استفاده می‌شود. میدانهای مذکور برای FGM با در نظر گرفتن خصوصیات ماده در نوک ترک بدست می‌آیند. شکل (۵-۲) ترکی در یک پیوستار دو بعدی FGM و دستگاه‌های مختصات دکارتی و قطبی نوک ترک را نشان می‌دهد.



شکل ۵-۲- پیوستار دوبعدی FGM شامل ترک و دستگاههای مختصات دکارتی و قطبی نوک ترک و میدانهای کمکی ضریب شدت تنش

میدانهای کمکی جابجایی، کرنش و تنش بصورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

---

[1] - Williams

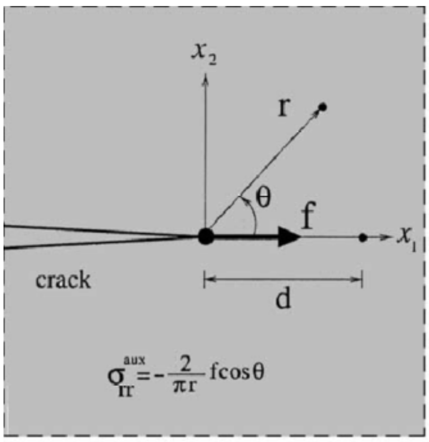
$$\sigma_{ij}^{aux}=\frac{K_I^{aux}}{\sqrt{2\pi r}}f_{ij}^{I}(\theta)+\frac{K_{II}^{aux}}{\sqrt{2\pi r}}f_{ij}^{II}(\theta) \qquad (۱-۵)$$

$$u_i^{aux}=K_I^{aux}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}g_i^{I}(\theta)+K_{II}^{aux}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}g_i^{II}(\theta) \qquad (۲-۵)$$

که در آن K_{II}^{aux}, K_I^{aux} ضرایب شدت تنش مودهای I و II می‌باشند. توابع زاویه‌ای $(\theta)_-^-$ و $f_-^-(\theta)$ و $g_-^-(\theta)$ در ضمیمه (ب) بیان شده‌اند.

۵-۲-۲- میدان‌های کمکی تنش T

برای محاسبه تنش T، میدان‌های حاصل از اعمال یک بار نقطه‌ای به نوک یک ترک نیمه بی‌نهایت واقع در محیط بی‌نهایت همگن بعنوان میدان‌های کمکی جابجایی، کرنش و تنش در نظر گرفته می‌شوند [۱۲۸].



شکل ۵-۳- میدان‌های حاصل از اعمال یک بار نقطه‌ای به نوک یک ترک نیمه بی‌نهایت واقع در محیط بی‌نهایت همگن (میدان-های کمکی تنش T)

حل مذکور بطور تحلیلی و بصورت زیر قابل بیان است [۱۲۷].

$$u_1^{aux}=-\frac{f(1+\kappa_{tip})}{8\pi\mu_{tip}}ln\frac{r}{d}-\frac{f}{4\pi\mu_{tip}}sin^2\theta \qquad (۳-۵)$$

$$u_2^{aux} = -\frac{f(\kappa_{tip}-1)}{8\pi\mu_{tip}}\theta + \frac{f}{4\pi\mu_{tip}} sin\theta cos\theta \qquad (۴-۵)$$

$$\sigma_{11}^{aux} = -\frac{f}{\pi r} cos^3\theta \qquad (۵-۵)$$

$$\sigma_{12}^{aux} = -\frac{f}{\pi r} cos^2\theta sin\theta \qquad (۶-۵)$$

$$\sigma_{22}^{aux} = -\frac{f}{\pi r} cos\theta sin^2\theta \qquad (۷-۵)$$

که در آن، f نیروی متمرکزی است که به نوک ترک و در راستای آن اعمال می‌گردد. d نیز مختصه x_1 نقطه‌ای است که در راستای این محور مقید شده است.

۵-۳- فرمولبندی انتگرال برهم‌کنش

انتگرال برهم‌کنش در واقع عبارت برهم‌کنش دو حالت بارگذاری مستقل و قابل‌قبول برای سازه حاوی ترک است که در انتگرال‌های پایستار الاستیسیته پدید می‌آید. در این بخش روند بدست آوردن انتگرال مذکور برای بارگذاری حرارتی بررسی می‌شود.

فرم معمول انتگرال J برای یک ترک بدون اعمال نیرو به سطوح آن، بصورت زیر است.

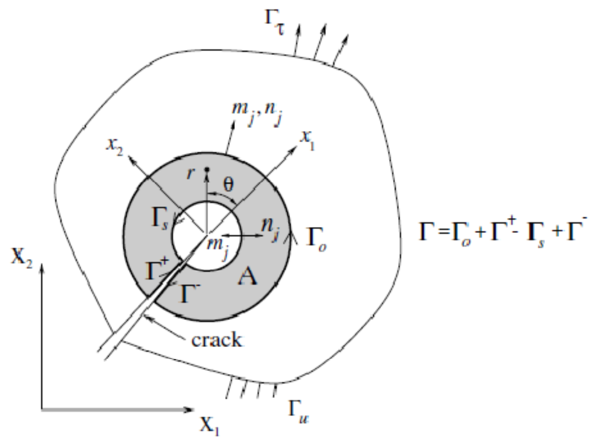
$$J = \lim_{\Gamma_s \to 0} \int_{\Gamma_s} (W\delta_{ij} - \sigma_{ij} u_{i,1}) n_j \, d\Gamma_s \qquad (۸-۵)$$

در این رابطه، u_i مولفه‌های بردار تغییرمکان، n بردار یکه و عمود رو به‌خارج منحنی و چگالی انرژی کرنشی مکانیکی بصورت زیر است.

$$W = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^m = \frac{1}{2}\sigma_{ij}(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{th}) \qquad (۹-۵)$$

که در آن، ε_{ij} مولفه‌های کرنش کل و ε_{ij}^{th} مولفه‌های کرنش حرارتی می‌باشند.

بدلیل محاسبه آسان‌تر و دقیق‌تر انتگرالهای سطح بصورت عددی، مناسب است انتگـرال خطـی فوق بصورت یک انتگرال ناحیه‌ای معادل نوشته شود.



شکل ۵-۴- تبدیل فرم کانتوری انتگرال J به فرم ناحیه‌ای

برای تبدیل فرم کانتوری انتگرال J به یک فرم ناحیه‌ای معادل انتگرال کانتوری زیر تعریف می-شود.

$$I = \oint_{\Gamma} (W\delta_{ij} - \sigma_{ij} u_{i,1}) m_j q \, d\Gamma \qquad (۱۰-۵)$$

که در آن، $\Gamma=\Gamma_0+\Gamma^++\Gamma^--\Gamma_s$ و m_i بردار یکه و عمود رو به خارج کانتور Γ می‌باشـد (یعنــی $m_i=n_j$ روی Γ_0 و $m_i=-n_j$ روی Γ_s) در این رابطه، q تابع وزنی دلخواه و هموار است کـه از $q=1$ روی Γ_s تـا $q=0$ روی Γ_0 تغییر می‌کند. با حدگیری $\Gamma_s \to 0$ داریم:

$$\begin{aligned}
\lim_{\Gamma_s \to 0} I &= \lim_{\Gamma_s \to 0} \oint_{\Gamma} (W\delta_{1j} - \sigma_{ij} u_{i,1}) m_j q d\Gamma \\
&= \lim_{\Gamma_s \to 0} \oint_{\Gamma_0+\Gamma^++\Gamma^--\Gamma_s} (W\delta_{1j} - \sigma_{ij} u_{i,1}) m_j q d\Gamma \\
&= \lim_{\Gamma_s \to 0} \left[\oint_{\Gamma_0+\Gamma^++\Gamma^-} (W\delta_{1j} - \sigma_{ij} u_{i,1}) m_j q d\Gamma + \oint_{-\Gamma_s} (W\delta_{1j} - \sigma_{ij} u_{i,1}) m_j q d\Gamma \right] \\
&= \lim_{\Gamma_s \to 0} \left[\oint_{\Gamma_0+\Gamma^++\Gamma^-} (W\delta_{1j} - \sigma_{ij} u_{i,1}) m_j q d\Gamma - \oint_{\Gamma_s} (W\delta_{1j} - \sigma_{ij} u_{i,1}) n_j q d\Gamma \right]
\end{aligned} \qquad (۱۱-۵)$$

با توجه به اینکه q=0 روی مرز Γ_0 و فرض بدون تنش بودن سطوح ترک، رابطه فوق بصورت زیر ساده می‌شود.

$$J = -\lim_{\Gamma_s \to 0} I = -\lim_{\Gamma_s \to 0} \oint_{\Gamma} (W\delta_{1j} - \sigma_{ij} u_{i,1}) m_j q d\Gamma \qquad (۱۲\text{-}۵)$$

با کاربرد قضیه دیورژانس و با توجه تغییرات تابع وزنی q، انتگرال ناحیه‌ای معادل بصورت زیر بدست می‌آید.

$$J = \int_A (\sigma_{ij} u_{i,1} - W\delta_{1j}) q_{,j} dA + \int_A (\sigma_{ij} u_{i,1} - W\delta_{1j})_{,j} q dA \qquad (۱۲\text{-}۵)$$

که در آن، A ناحیه محصور به منحنی است. برای یک سیستم خطی، انتگرال J برای اعمال همزمان بارگذاری‌های اصلی و کمکی بصورت زیر قابل بیان است.

$$\begin{aligned} &= \int_A \left[(\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^{aux})(u_{i,1} + u_{i,1}^{aux}) - \frac{1}{2}(\sigma_{ik} + \sigma_{ik}^{aux})(\varepsilon_{ik} + \varepsilon_{ik}^{aux})\delta_{1j} \right] q_{,j} dA \\ &\int_A \left[(\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^{aux})(u_{i,1} + u_{i,1}^{aux}) - \frac{1}{2}(\sigma_{ik} + \sigma_{ik}^{aux})(\varepsilon_{ik} + \varepsilon_{ik}^{aux})\delta_{1j} \right]_{,j} q dA \end{aligned} \qquad (۱۳\text{-}۵)$$

انتگرال فوق را می‌توان بصورت زیر تجزیه نمود.

$$J^s = J + J^{aux} + M \qquad (۱۴\text{-}۵)$$

که در آن J^{aux} بصورت زیر تعریف می‌گردد.

$$J^{aux} = \int_A (\sigma_{ij}^{aux} u_{i,1}^{aux} - W^{aux}\delta_{1j}) q_{,j} dA + \int_A (\sigma_{ij}^{aux} u_{i,1}^{aux} - W^{aux}\delta_{1j})_{,j} q dA \qquad (۱۵\text{-}۵)$$

که در آن،

$$W^{aux} = \frac{1}{2}\sigma_{ik}^{aux}\varepsilon_{ik}^{aux} \qquad (۱۶\text{-}۵)$$

انتگرال برهم‌کنش M نیز بصورت زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} M &= \int_A (\sigma_{ij} u_{i,1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{i,1} - W^{int} \delta_{1j}) q_{,j}\, dA \\ &+ \int_A (\sigma_{ij} u_{i,1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{i,1} - W^{int} \delta_{1j})_{,j}\, q\, dA \\ &= M_1 + M_2 \end{aligned} \quad (۱۷-۵)$$

که در آن، W^{int} تابع چگالی انرژی کرنشی مکانیکی برهم کنش است و بصورت زیر تعریف می شود.

$$W^{int} = \frac{1}{2} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} \varepsilon_{ij}^{m}) \quad (۱۸-۵)$$

بسته به انتخاب میدان‌های کمکی، فرم عمومی انتگرال برهم‌کنش را می‌توان بصورت عبارت‌های ساده‌تر و قابل تفسیر بیان نمود.

۵-۳-۱- فرمولبندی نامتعادل

فرم نهایی انتگرال برهم‌کنش براساس فرمولبندی نامتعادل در این بخش بدست می‌آید. این روش بر این اساس نامگذاری شده است که شرایط تعادل برای میدان کمکی انتخابی در حالت کلی برقرار نیست. میدان تنش کمکی انتخابی با استفاده از تانسور ساختاری FGM بصورت زیر بدست می-آید.

$$\sigma_{ij}^{aux} = C_{ijkl}(\boldsymbol{x}) \varepsilon_{kl}^{aux} \quad (۱۹-۵)$$

در حالی‌که میدان تنش کمکی همگن با استفاده از تانسور ساختاری همگن نوک ترک بدست می‌آید و با رابطه فوق تفاوت دارد.

$$\sigma_{ij}^{aux} = \left(C_{ijkl} \right)_{tip} \varepsilon_{kl}^{aux} \quad (۲۰-۵)$$

مشتق‌های میدان تنش کمکی انتخابی بصورت زیر بدست می‌آید.

$$
\begin{aligned}
\sigma_{ij,j}^{aux} &= C_{ijkl,j}(\boldsymbol{x})\varepsilon_{kl}^{aux} + C_{ijkl}(\boldsymbol{x})\varepsilon_{kl,j}^{aux} \\
&= \left(C_{ijkl}\right)_{tip}\varepsilon_{kl,j}^{aux} + C_{ijkl,j}(\boldsymbol{x})\varepsilon_{kl}^{aux} \\
&\quad + \left(C_{ijkl}(\boldsymbol{x}) - \left(C_{ijkl}\right)_{tip}\right)\varepsilon_{kl,j}^{aux} \\
&\neq 0
\end{aligned} \tag{۲۱-۵}
$$

در این رابطه، عبارت اول صفر است. اما عبارت‌های دیگر غیرصفر می‌باشند. در ادامـه، رابطـه (۵-۱۷) براساس فرمولبندی نامتعادل ساده می‌شود.

رابطه ساختاری برای بارگذاری واقعی و کمکی بصورت زیر است.

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} - \beta\,\Delta T\delta_{ij} \tag{۲۲-۵}$$

$$\sigma_{ij}^{aux} = 2\mu\varepsilon_{ij}^{aux} + \lambda\varepsilon_{kk}^{aux}\delta_{ij} \tag{۲۳-۵}$$

که در آن، پارامتر β بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\beta = (3\lambda + 2\mu)\alpha \tag{۲۴-۵}$$

تابع چگالی انرژی کرنشی مکانیکی بصورت زیر قابل بیان است.

$$W^{int} = 2\mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}^{aux} + \lambda\varepsilon_{kk}\varepsilon_{ll}^{aux} - \beta\Delta T\varepsilon_{ll}^{aux} \tag{۲۵-۵}$$

فرم عمومی انتگرال برهم کنش را می‌توان بصورت جمع دو انتگرال بیان نمود.

$$
\begin{aligned}
M &= \int_A (\sigma_{ij}u_{i,1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux}u_{i,1} - W^{int}\delta_{1j})q_{,j}\,dA \\
&\quad + \int_A (\sigma_{ij,j}u_{i,1}^{aux} + \sigma_{ij}u_{i,1j}^{aux} + \sigma_{ij,j}^{aux}u_{i,1} + \sigma_{ij}^{aux}u_{i,1j} - W_{,1}^{int})q\,dA \\
&= M_1 + M_2
\end{aligned} \tag{۲۶-۵}
$$

که در آن، انتگرال M_2 شامل $W_{,1}^{int}$، مشتق W^{int} نسبت به x_1 می‌باشد. این نکته قابل ذکر است کـه در FGM خصوصیات ماده و توزیع دما تابع مختصه‌های مکانی هستند. مشتق W^{int} نسـبت بـه x_1 بصـورت زیر قابل بیان است.

$$W_{,1}^{int} = \frac{\partial W^{int}}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_1} + \frac{\partial W^{int}}{\partial \varepsilon_{ij}^{aux}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^{aux}}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial W^{int}}{\partial x_1} \right)_{\text{expl}} \qquad (۲۷-۵)$$

در این رابطه، $\left(\partial W^{int} / \partial x_1 \right)_{\text{expl}}$ مشتق صریح W^{int} نسبت به x_1 است و به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial W^{int}}{\partial x_1} \right)_{\text{expl}} &= \frac{\partial W^{int}}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial x_1} + \frac{\partial W^{int}}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \\ &+ \frac{\partial W^{int}}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial x_1} + \frac{\partial W^{int}}{\partial (\Delta T)} \frac{\partial (\Delta T)}{\partial x_1} \end{aligned} \qquad (۲۸-۵)$$

در این رابطه، $\partial W^{int} / \partial (.)$ مشتق W^{int} نسبت به خصوصیات ماده و تغییر دما است و به صورت زیر بیان می‌شود.

$$= 2\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}^{aux} + (2\mu \varepsilon_{ij}^{aux} + \lambda \varepsilon_{kk}^{aux}) \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial \mu} + (2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} - \beta \Delta T) \frac{\partial \varepsilon_{33}^{aux}}{\partial \mu} \qquad (۲۹-۵)$$

$$= \varepsilon_{kk} \varepsilon_{ll}^{aux} + (\lambda \varepsilon_{ll}^{aux} + 2\mu \varepsilon_{33}^{aux}) \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial \lambda} + (\lambda \varepsilon_{ll} + 2\mu \varepsilon_{33} - \beta \Delta T) \frac{\partial \varepsilon_{33}^{aux}}{\partial \lambda} \qquad (۳۰-۵)$$

$$\frac{\partial W^{int}}{\partial \beta} = -\varepsilon_{kk}^{aux} \Delta T + (2\mu \varepsilon_{33}^{aux} + \lambda \varepsilon_{kk}^{aux}) \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial \beta} \qquad (۳۱-۵)$$

$$\frac{\partial W^{int}}{\partial \Delta T} = -\varepsilon_{kk}^{aux} \beta + (2\mu \varepsilon_{33}^{aux} + \lambda \varepsilon_{kk}^{aux}) \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial \Delta T} \qquad (۳۲-۵)$$

برای حالت کرنش صفحه‌ای:

$$\frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial \mu} = \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial \lambda} = \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial \beta} = \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial \Delta T} = 0 \qquad (۳۳-۵)$$

برای حالت تنش صفحه‌ای:

$$\frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial \mu} = \frac{-2}{2\mu + \lambda} \varepsilon_{33} \tag{۳۴-۵}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial \lambda} = \frac{-1}{2\mu + \lambda} \varepsilon_{kk} \tag{۳۵-۵}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial \beta} = \frac{1}{2\mu + \lambda} \Delta T \tag{۳۶-۵}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial \Delta T} = \frac{1}{2\mu + \lambda} \beta \tag{۳۷-۵}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{33}^{aux}}{\partial \mu} = \frac{-2}{2\mu + \lambda} \varepsilon_{33}^{aux} \tag{۳۸-۵}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{33}^{aux}}{\partial \lambda} = \frac{-1}{2\mu + \lambda} \varepsilon_{kk}^{aux} \tag{۳۹-۵}$$

از طرفی، با توجه به روابط (۵-۲۲و۲۳) و (۵-۲۵)، می‌توان روابط زیر را استخراج نمود.

$$\frac{\partial W^{int}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij}^{aux} \tag{۴۰-۵}$$

$$\frac{\partial W^{int}}{\partial \varepsilon_{ij}^{aux}} = \sigma_{ij} \tag{۴۱-۵}$$

جایگزینی روابط (۵-۲۹) و (۵-۳۰) در رابطه (۵-۲۷) منجر به رابطه زیر می‌گردد.

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} = \sigma_{ij}^{aux} \varepsilon_{ij,1} + \sigma_{ij} \varepsilon_{ij,1}^{aux} + (W_{,1})_{\mathrm{expl}} \tag{۴۲-۵}$$

با جایگزینی رابطه فوق و اعمال روابط سازگاری میدانهای اصلی و کمکی و همچنین رابطه تعادل میدان اصلی، فرم نهایی انتگرال ناحیه‌ای معادل بصورت زیر بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} M &= \int_A \left(\sigma_{ij}^{aux} u_{i,1} + \sigma_{ij} u_{i,1}^{aux} - W^{int}\delta_{1j} \right) q_{,j} dA \\ &- \int_A (W_{,1}^{int})_{\text{expl}} q dA \\ &+ \int_A \sigma_{ij,j}^{aux} u_{i,1} q dA \end{aligned} \tag{۴۳-۵}$$

رابطه فوق شامل سه عبارت مشخص است. انتگرال اول معادل انتگرال برهم‌کنش برای مواد همگن است. عبارت دوم شامل مشتقات صریح W^{int} نسبت به مختصه مکانی است. این عبارت در فرم ناحیه-ای انتگرال J برای FGM نیز بوجود می‌آید.

عبارت سوم، ناشی از کاربرد میدان کمکی تغییرمکان و کرنش مواد همگن برای مواد غیرهمگن است. عبارت‌های دوم و سوم بطور طبیعی در فرمولبندی انتگرال برهم‌کنش ظاهر می‌شوند و برای حفظ استقلال از سطح و همگرایی انتگرال باید درنظر گرفته شوند.

با انتخاب میدان‌های کمکی به ترتیب فوق، انتگرال برهم کنش توسط کی‌سی و کیم [۱۰۷] ارائه شده است. از این انتگرال برای محاسبه ضرایب شدت تنش و تنش T در FGM تحت بارگذاری حرارتی پایا استفاده شده است. در تحلیل مذکور از اثر ترک روی تکینی شار حرارتی صرف‌نظر شده است.

$$\begin{aligned} M &= \int_A \left(\sigma_{ij}^{aux} u_{i,1} + \sigma_{ij} u_{i,1}^{aux} - \sigma_{ik}\varepsilon_{ik}^{aux}\delta_{1j} \right) q_{,j} dA \\ &+ \int_A \left\{ \sigma_{ij,j}^{aux} u_{i,1} q dA - C_{ijkl,1}\varepsilon_{kl}^{m}\varepsilon_{ij}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux}\left(\alpha_{,1}(\Delta T) + \alpha(\Delta T)_{,1}\right)\delta_{ij} \right\} q dA \end{aligned} \tag{۴۴-۵}$$

در انتگرال دوم، عبارت دوم و سوم متناظر با مشتق صریح W^{int} (انتگرال دوم) در رابطه (۵-۴۳) است. در رابطه اخیر، محاسبه مولفه‌های کرنش مکانیکی با استفاده از مولفه‌های کرنش کل لازم است.

عبارت انتگرال برهم‌کنش فوق که شامل ترم نامتعادل باشد: برای $r \to 0$ در ادامه ثابت می‌گردد. تانسور الاستیک $C_{ijkl}(x)$ شامل توابع خصوصیات ماده از جمله $E(r,\theta)$ و $\nu(r,\theta)$ هستند که فرض می‌شود

توابعی پیوسته و مشتق‌پذیر باشند. بنابراین تانسور الاستیک را می‌توان با استفاده از بسط مک‌لورن بصورت زیر نمایش داد.

$$C_{ijkl}(r,\theta) = \left(C_{ijkl}\right)_{tip} + rC^{(1)}_{ijkl}(\theta) + \frac{r^2}{2}C^{(2)}_{ijkl}(\theta) + O(r^3) + \dots \tag{۴۴-۵}$$

که در آن، $C^{(n)}_{ijkl}(\theta)$ توابع زاویه‌ای هستند. در رابطه (۵-۲۱) عبارت اول بخاطر تعادل میدان همگن صفر می‌شود. بنابراین، عبارت سوم مورد بررسی قرار می‌گیرد. با توجه به اینکه میدانهای جابجایی و کرنش کمکی برای محاسبه ضریب شدت تنش به ترتیب بصورت $u_i^{aux}(\sqrt{r},\theta)$ و $\varepsilon_{ij}^{aux}(r^{-1/2},\theta)$ قابل بیان است. اثر عبارت سوم برای r→0 عبارت است از:

$$\begin{aligned}
\lim_{A\to 0}\int_A \sigma^{aux}_{ij,j}u_{i,1}qdA &= \lim_{r\to 0}\int_\theta\int_r \sigma^{aux}_{ij,j}u_{i,1}qrdrd\theta \\
&= \lim_{r\to 0}\int_\theta\int_r \left(C_{ijkl}(r,\theta) - \left(C_{ijkl}\right)_{tip}\right)\varepsilon^{aux}_{kl,j}u_{i,1}qrdrd\theta \\
&= \lim_{r\to 0}\int_\theta\int_r O(r)O(r^{-3/2})O(r^{-1/2})qrdrd\theta \\
&= \lim_{r\to 0} O(r)
\end{aligned} \tag{۴۵-۵}$$

برای تنش T میدانهای جابجایی و کرنش کمکی بصورت $u_i^{aux}(\ln r,\theta)$ و $\varepsilon_{ij}^{aux}(r^{-1},\theta)$ قابل بیان است. اثر عبارت سوم برای r→0 بصورت زیر است.

$$\begin{aligned}
\lim_{A\to 0}\int_A \sigma^{aux}_{ij,j}u_{i,1}qdA &= \lim_{r\to 0}\int_\theta\int_r \sigma^{aux}_{ij,j}u_{i,1}qrdrd\theta \\
&= \lim_{r\to 0}\int_\theta\int_r \left(C_{ijkl}(r,\theta) - \left(C_{ijkl}\right)_{tip}\right)\varepsilon^{aux}_{kl,j}u_{i,1}qrdrd\theta \\
&= \lim_{r\to 0}\int_\theta\int_r O(r)O(r^{-2})O(r^{-1/2})qrdrd\theta \\
&= \lim_{r\to 0} O(r^{1/2})
\end{aligned} \tag{۴۶-۵}$$

۵-۳-۲- فرمولبندی غیرسازگار

در فرمولبندی غیرسازگار، روابط تعادل ($\sigma^{aux}_{ij,j} = 0$ با فرض عدم وجود نیروهای کالبدی) و رابطه ساختاری ($\varepsilon^{aux}_{ij} = S_{ijkl}(\boldsymbol{x})\sigma^{aux}_{kl}$) در میدان کمکی برقرار است. ولی رابطه سینماتیک

تغییرشکل دیگر برقرار نیست $\varepsilon_{ij}^{aux} \neq (u_{i,j}^{aux} + u_{j,i}^{aux})/2$. روابط (۵-۲۲و ۲۳) و (۵-۲۶) برای فرمولبندی غیرسازگار نیز برقرار می‌باشد. با توجه به روابط فوق، انتگرال M_2 در رابطه (۵-۲۶) به شکل زیر قابل بیان است.

$$\begin{aligned} M_2 = &\int_A \left(\sigma_{ij,j} u_{i,1}^{aux} + \sigma_{ij} u_{i,1j}^{aux} + \sigma_{ij,j}^{aux} u_{i,1} + \sigma_{ij}^{aux} u_{i,1j}\right) q dA \\ &- \int \left(W_{,1}^{int} + \sigma_{ij}^{aux} \varepsilon_{ij,1} + \sigma_{ij} \varepsilon_{ij,1}^{aux}\right) q dA \end{aligned} \tag{۴۷-۵}$$

با توجه به برقراری رابطه تعادل میدانهای اصلی و کمکی و رابطه سازگاری برای میدان اصلی، انتگرال M_2 بصورت زیر ساده می‌شود.

$$M_2 = \int_A \left(\sigma_{ij}\left(u_{i,1j}^{aux} - \varepsilon_{ij,1}^{aux}\right) - W_{,1}^{int}\right) q \, dA \tag{۴۸-۵}$$

بنابراین، انتگرال برهم‌کنش برای فرمولبندی غیرسازگار بصورت زیر قابل بیان است.

$$\begin{aligned} M = &\int_A (\sigma_{ij}^{aux} u_{i,1} + \sigma_{ij} u_{i,1}^{aux} - W^{int} \delta_{1j}) q_{,j} dA \\ &- \int_A (W_{,1}^{int})_{\text{expl}} q dA \\ &+ \int_A \sigma_{ij} \left(u_{i,1j}^{aux} - \varepsilon_{ij,1}^{aux}\right) q dA \end{aligned} \tag{۴۹-۵}$$

در این رابطه، $\left(W_{,1}^{int}\right)_{\text{expl}}$ مشتق صریح W^{int} نسبت به x_1 است و بصورت زیر نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial W^{int}}{\partial x_1}\right)_{\text{expl}} &= \frac{\partial W^{int}}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial x_1} + \frac{\partial W^{int}}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \\ &+ \frac{\partial W^{int}}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial x_1} + \frac{\partial W^{int}}{\partial (\Delta T)}\frac{\partial (\Delta T)}{\partial x_1} \end{aligned} \tag{۵۰-۵}$$

در این رابطه، $\partial W^{int}/\partial(.)$ مشتق W^{int} نسبت به خصوصیات ماده و تغییر دما شامل عبارتهای زیر است.

$$\overset{nt}{-} = 2\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}^{aux} + (2\mu\varepsilon_{ij}^{aux} + \lambda\varepsilon_{kk}^{aux})\frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial \mu} + (2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk} - \beta\Delta T)\frac{\partial \varepsilon_{33}^{aux}}{\partial \mu} \tag{۵۱-۵}$$

$$\frac{V^{int}}{\lambda} = \varepsilon_{kk}\varepsilon_{ll}^{aux} + (\lambda\varepsilon_{ll}^{aux} + 2\mu\varepsilon_{33}^{aux})\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\lambda} + (\lambda\varepsilon_{ll} + 2\mu\varepsilon_{33} - \beta\Delta T)\frac{\partial\varepsilon_{33}^{aux}}{\partial\lambda} \qquad (۵۲\text{-}۵)$$

$$\frac{\partial W^{int}}{\partial\beta} = -\varepsilon_{kk}^{aux}\Delta T + (2\mu\varepsilon_{33}^{aux} + \lambda\varepsilon_{kk}^{aux})\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\beta} \qquad (۵۳\text{-}۵)$$

$$\frac{\partial W^{int}}{\partial\Delta T} = -\varepsilon_{kk}^{aux}\beta + (2\mu\varepsilon_{33}^{aux} + \lambda\varepsilon_{kk}^{aux})\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\Delta T} \qquad (۵۴\text{-}۵)$$

برای حالت کرنش صفحه‌ای:

$$\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\mu} = \frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\lambda} = \frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\beta} = \frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\Delta T} = 0 \qquad (۵۵\text{-}۵)$$

برای حالت تنش صفحه‌ای:

$$\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\mu} = \frac{-2}{2\mu + \lambda}\varepsilon_{33} \qquad (۵۶\text{-}۵)$$

$$\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\lambda} = \frac{-1}{2\mu + \lambda}\varepsilon_{kk} \qquad (۵۷\text{-}۵)$$

$$\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\beta} = \frac{1}{2\mu + \lambda}\Delta T \qquad (۵۸\text{-}۵)$$

$$\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\Delta T} = \frac{1}{2\mu + \lambda}\beta \qquad (۵۹\text{-}۵)$$

$$\frac{\partial\varepsilon_{33}^{aux}}{\partial\mu} = \frac{-2}{2\mu + \lambda}\varepsilon_{33}^{aux} \qquad (۶۰\text{-}۵)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{33}^{aux}}{\partial \lambda}=\frac{-1}{2\mu+\lambda}\varepsilon_{kk}^{aux} \tag{۶۱-۵}$$

عبارت سوم بخاطر غیرسازگار بودن میدان کرنش کمکی بوجود می‌آید. وجـود انتگـرال بـرهم-کنش شامل عبارت غیرسازگار برای r→0 در ادامه اثبات می‌گردد. عبارت $\sigma_{ij}\varepsilon_{ij,1}^{aux}$ را می‌توان بصـورت زیر نوشت.

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij,1}^{aux} &= \sigma_{ij}\left(S_{ijkl}(x)\sigma_{kl,1}^{aux}+S_{ijkl,1}(x)\sigma_{kl}^{aux}\right)\\ &= \sigma_{ij}\left(S_{ijkl}\right)_{tip}\sigma_{kl,1}^{aux}+\sigma_{ij}S_{ijkl,1}(x)\sigma_{kl}^{aux}+\sigma_{ij}\left(S_{ijkl}(x)-\left(S_{ijkl}\right)_{tip}\right)\sigma_{kl,1}^{aux}\\ &= \sigma_{ij}u_{i1,j}^{aux}+W_{,1}^{int}+\sigma_{ij}\left(S_{ijkl}(x)-\left(S_{ijkl}\right)_{tip}\right)\sigma_{kl,1}^{aux}\end{aligned} \tag{۶۲-۵}$$

بنابراین،

$$\sigma_{ij}\left(u_{i1,j}^{aux}-\varepsilon_{ij,1}^{aux}\right)=-W_{,1}^{int}-\sigma_{ij}\left(S_{ijkl}(x)-\left(S_{ijkl}\right)_{tip}\right)\sigma_{kl,1}^{aux} \tag{۶۳-۵}$$

تانسور S(x) شامل توابع خصوصیات ماده ازجمله *E(r,θ)* و *ν(r,θ)* هستند که بنابر فرضیات اولیه تـوابعی پیوسته و مشتق‌پذیر در حوزه نوک ترک می‌باشند. بنابراین می‌توان بسط این تانسور حول نقطه نـوک ترک را بصورت زیر نوشت:

$$S_{ijkl}(r,\theta)=\left(S_{ijkl}\right)_{tip}+rS_{ijkl}^{(1)}(\theta)+\frac{r^2}{2}S_{ijkl}^{(2)}(\theta)+O(r^3)+\ldots \tag{۶۴-۵}$$

که $S_{ijkl}^{(n)}(\theta)$ صرفا توابع زاویه‌ای می‌باشند. میدانهای جابجایی و کرنش ضریب شدت تنش به ترتیـب به صورت $u_i^{aux}(\sqrt{r},\theta)$ و $\varepsilon_{ij}^{aux}(r^{-1/2},\theta)$ قابل بیان است که با توجه به آن، اثـر عبـارت سـوم بـرای r→0 عبارت است از:

$$\begin{aligned}\lim_{A\to 0}\int_A \sigma_{ij}\left(u_{i1,j}^{aux}-\varepsilon_{ij,1}^{aux}\right)qdA &= \lim_{r\to 0}\int_\theta\int_r \sigma_{ij}\left(u_{i1,j}^{aux}-\varepsilon_{ij,1}^{aux}\right)qrdrd\theta \\ &= \lim_{r\to 0}\int_\theta\int_r \sigma_{ij}\left(S_{ijkl}(r,\theta)-\left(S_{ijkl}\right)_{tip}\right)\sigma_{kl,1}^{aux}qrdrd\theta \\ &= \lim_{r\to 0}\int_\theta\int_r O(r)O(r^{-3/2})O(r^{-1/2})qrdrd\theta \\ &= \lim_{r\to 0} O(r)=0\end{aligned} \tag{۶۵-۵}$$

برای تنش T میدانهای جابجایی و کرنش کمکی بصورت $u_i^{aux}(\ln r,\theta)$ و $\varepsilon_{ij}^{aux}(r^{-1},\theta)$ قابل بیان است. اثر عبارت سوم برای r→0 بصورت زیر است.

$$\begin{aligned}\lim_{A\to 0}\int_A \sigma_{ij}\left(u_{i1,j}^{aux}-\varepsilon_{ij,1}^{aux}\right)qdA &= \lim_{r\to 0}\int_\theta\int_r \sigma_{ij}\left(u_{i1,j}^{aux}-\varepsilon_{ij,1}^{aux}\right)qrdrd\theta \\ &= \lim_{r\to 0}\int_\theta\int_r \sigma_{ij}\left(S_{ijkl}(r,\theta)-\left(S_{ijkl}\right)_{tip}\right)\sigma_{kl,1}^{aux}qrdrd\theta \\ &= \lim_{r\to 0}\int_\theta\int_r O(r)O(r^{-2})O(r^{-1/2})qrdrd\theta \\ &= \lim_{r\to 0} O(r^{1/2})\end{aligned} \tag{۶۶-۵}$$

۵-۳-۳- فرمولبندی تانسور ساختاری ثابت

فرمولبندی تانسور ساختاری ثابت، رابطه تعادل ($\sigma_{ij.j}^{aux}=0$ با فرض عدم وجود نیروی کالبدی) و شرایط سازگاری ($\varepsilon_{ij}^{aux}=(u_{i,j}^{aux}+u_{j,i}^{aux})/2$) را ارضا می‌کند. اما رابطه ساختاری پیوستار FGM نقض می‌شود؛ یعنی $\sigma_{ij}^{aux}\neq C_{ljkl}(x)\varepsilon_{kl}^{aux}$. چون در حالت کلی برای پیوستار FGM رابطه $(C_{ijkl})_{tip}\neq C_{ijkl}(x)$ برقرار است. با توجه به توضیح فوق، رابطه $\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^{aux}\neq\sigma_{ij}^{aux}\varepsilon_{ij}$ برقرار می‌شود. بنابراین، رابطه انتگرال برهم کنش براساس فرمولبندی تانسور ساختاری ثابت بصورت زیر است.

$$\begin{aligned}M &= \int_A(\sigma_{ij}^{aux}u_{i,1}+\sigma_{ij}u_{i,1}^{aux}-W^{int}\delta_{1j})q_{,j}dA \\ &-\int_A(W_{,1}^{int})_{\text{expl}}qdA \\ &+\int_A\frac{1}{2}\left\{\left(\sigma_{ij}-\sigma_{ij}^{tip}\right)\varepsilon_{ij,1}^{aux}-\left(\sigma_{ij}^{aux}(x)-\sigma_{ij}^{aux}\right)\varepsilon_{ij,1}\right\}qdA\end{aligned} \tag{۶۷-۵}$$

رابطه فوق با اعمال رابطه تعادل و رابطه ساختاری میدانهای اصلی و کمکی بدست آمده است. انتگرال برهم کنش فوق شامل گرادیان میدانهای تنش و کرنش اصلی است که بخاطر استفاده از میدان کمکی همگن برای پیوستار FGM بوجود می‌آید و باعث کاهش دقت محاسبه انتگرال برهم‌کنش و نهایتاً پارامتر شکست می‌شود. جملات عبارت مذکور بصورت زیر قابل توضیح است.

σ_{ij}^{tip} حاصل از کاربرد میدان کرنش اصلی و تانسور ساختاری همگن نوک ترک است؛ یعنی $\sigma_{ij}^{tip}(x)=\left(C_{ijkl}\right)_{tip}\varepsilon_{kl}^{aux}$. عبارت $\left(\sigma_{ij}-\sigma_{ij}^{tip}\right)$ بیان‌کننده اختلاف میدان تنش اصلی و میدان تنش همگن فوق می‌باشد. از طرف دیگر، $\sigma_{ij}^{aux}(x)$ حاصل از کاربرد میدان کرنش کمکی و تانسور ساختاری FGM است؛ یعنی $\sigma_{ij}^{aux}(x)=C_{ijkl}(x)\varepsilon_{kl}^{aux}$. عبارت $\left(\sigma_{ij}^{aux}(x)-\sigma_{ij}^{aux}\right)$ بیان‌کننده اختلاف میدان تنش کمکی و میدان تنش FGM کمکی می‌باشد.

در رابطه (۵-۶۷)، $\left(W_{,1}^{int}\right)_{\mathrm{expl}}$ مشتق صریح W^{int} نسبت به x_1 است و بصورت زیر نوشته می‌شود.

$$\left(\frac{\partial W^{int}}{\partial x_1}\right)_{\mathrm{expl}}=\frac{\partial W^{int}}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial x_1}+\frac{\partial W^{int}}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x_1}+\frac{\partial W^{int}}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial x_1}+\frac{\partial W^{int}}{\partial (\Delta T)}\frac{\partial (\Delta T)}{\partial x_1} \qquad (۵-۶۸)$$

تابع چگالی انرژی کرنشی مکانیکی بصورت زیر قابل بیان است.

$$W^{int}=\frac{1}{2}(2\mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}^{aux}+\lambda\varepsilon_{kk}\varepsilon_{ll}^{aux}-\beta\Delta T\varepsilon_{ll}^{aux}+ +2\mu^{tip}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}^{aux}+\lambda^{tip}\varepsilon_{kk}\varepsilon_{ll}^{aux}-\beta^{tip}\Delta T\varepsilon_{ll}^{aux}) \qquad (۵-۶۹)$$

که در آن، پارامتر β^{tip} بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\beta^{tip}=(3\lambda^{tip}+2\mu^{tip})\alpha \qquad (۵-۷۰)$$

در این رابطه، $\partial W^{int}/\partial(.)$ مشتق W^{int} نسبت به خصوصیات ماده و تغییر دما شـامل عبارتهـای زیـر است.

$$\frac{\partial W^{int}}{\partial\mu}=\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}^{aux}+\frac{\beta^{tip}}{2\mu+3\lambda}+\left((\mu+\mu^{tip})\varepsilon_{33}^{aux}+\frac{1}{2}(\lambda+\lambda^{tip})\varepsilon_{kk}^{aux}\right)\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\mu} \tag{۷۱-۵}$$

$$\frac{W^{int}}{\partial\lambda}=\frac{1}{2}\left(\varepsilon_{kk}\varepsilon_{ll}^{aux}+3\frac{\beta^{tip}}{2\mu+3\lambda}+\frac{1}{2}\left((\lambda+\lambda^{tip})\varepsilon_{ll}^{aux}+2(\mu+\mu^{tip})\varepsilon_{33}^{aux}\right)\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\lambda}\right) \tag{۷۲-۵}$$

$$\frac{\partial W^{int}}{\partial\beta}=\frac{1}{2}\left(-\varepsilon_{kk}^{aux}\Delta T-\frac{3\lambda^{tip}+2\mu^{tip}}{3\lambda+2\mu}+(2\mu\varepsilon_{33}^{aux}+\lambda\varepsilon_{kk}^{aux})\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\beta}\right) \tag{۷۳-۵}$$

$$\frac{\partial W^{int}}{\partial\Delta T}=\frac{1}{2}\left(-\varepsilon_{kk}^{aux}(\beta+\beta^{tip})+\left(2(\mu+\mu^{tip})\varepsilon_{33}^{aux}+(\lambda+\lambda^{tip})\varepsilon_{kk}^{aux}\right)\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\Delta T}\right) \tag{۷۴-۵}$$

برای حالت کرنش صفحه‌ای:

$$\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\mu}=\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\lambda}=\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\beta}=\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\Delta T}=0 \tag{۷۵-۵}$$

برای حالت تنش صفحه‌ای:

$$\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\mu}=\frac{-2}{2\mu+\lambda}\varepsilon_{33} \tag{۷۶-۵}$$

$$\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\lambda}=\frac{-1}{2\mu+\lambda}\varepsilon_{kk} \tag{۷۷-۵}$$

$$\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\beta}=\frac{1}{2\mu+\lambda}\Delta T \tag{۷۸-۵}$$

$$\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\Delta T}=\frac{1}{2\mu+\lambda}\beta \tag{۷۹-۵}$$

با انتخاب میدانهای کمکی به ترتیب فوق، انتگرال برهم کنش توسط چن [۳۲] ارائه شده است. از این انتگرال بمنظور محاسبه ضرایب شدت تنش برای یک ترک در فصل مشترک هسته همگن و پوشش FGM ارتوتروپیک تحت بارگذاری حرارتی پایا استفاده شده است. در تحلیل مذکور از اثر ترک روی تکینی شار حرارتی صرف‌نظر شده است.

$$
\begin{aligned}
& \int_A \left(\sigma_{ij}^{aux} u_{i,1} + \sigma_{ij} u_{i,1}^{aux} - \frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux}\varepsilon_{ij}^{m}\right)\delta_{1j} \right) q_{,j}\, dA \\
& + \frac{1}{2}\int_A \left\{ \begin{array}{l} \left(C_{ijkl}\varepsilon_{ij}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux}\right)\left[\alpha_{ij,1}\Delta T + \alpha_{ij}\left(\Delta T\right)_{,1}\right] - C_{ijkl,1}\varepsilon_{ij}^{aux}\varepsilon_{kl}^{m} \\ -\left(C_{ijkl}\varepsilon_{kl,1}^{aux} - \sigma_{ij,1}^{aux}\right)\alpha_{ij}\Delta T - \left(C_{ijkl} - C^{tip}\right)\left(\varepsilon_{ij}^{aux}\varepsilon_{kl,1} - \varepsilon_{kl,1}^{aux}\varepsilon_{ij}\right) \end{array} \right\} q\, dA
\end{aligned}
\qquad (۸۰-۵)
$$

با در نظر گرفتن تانسور ساختاری مواد همگن و رابطه زیر، انتگرال (۵-۸۰) برای مواد همگن قابل کاربرد است.

$$
\alpha_{ij} = \alpha\,\delta_{ij} \qquad (۸۱-۵)
$$

مشتق صریح W^{int} به صورت زیر بیان می‌شود.

$$
W_{,1}^{int} = \frac{1}{2}\left(C_{ijkl,1}\varepsilon_{kl}^{m}\varepsilon_{ij}^{aux} - C_{ijkl}\left(\alpha\Delta T\right)_{,1}\delta_{kl}\varepsilon_{ij}^{aux} - C_{ijkl}^{tip}\varepsilon_{kl}^{aux}\left(\alpha\Delta T\right)_{,1}\delta_{ij}\right) \qquad (۸۲-۵)
$$

با توجه به روابط (۵-۸۱) و (۵-۸۲)، عبارتهای اول و دوم (خط اول) از انتگرال دوم در رابطه (۵-۸۰)، معادل مشتق صریح W^{int} و برابر با انتگرال دوم در رابطه (۵-۶۷) است. همچنین، عبارتهای سوم و چهارم (خط دوم) از انتگرال دوم در رابطه (۵-۸۰)، معادل انتگرال سوم در رابطه (۵-۶۷) است. بنابراین، انتگرال بدست آمده در این بخش، معادل انتگرال ارائه شده توسط چن می‌باشد.

وجود عبارت انتگرال سوم در رابطه فوق، برای r→0 در ادامه ثابت می‌شود. برای میدانهای کمکی ضریب شدت تنش $u_i^{aux}(\sqrt{r},\theta)$ و $\varepsilon_{ij}^{aux}(r^{-1/2},\theta)$ ترم اول از عبارت دوم برای r→0 بصورت زیر نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned}\lim_{A\to 0}\int_A\left(\sigma_{ij}-\sigma_{ij}^{tip}\right)\varepsilon_{ij,1}^{aux}qdA &= \lim_{r\to 0}\int_r\int_\theta\left(\sigma_{ij}-\sigma_{ij}^{tip}\right)\varepsilon_{ij,1}^{aux}qrdrd\theta \\ &= \lim_{r\to 0}\int_r\int_\theta\left(C_{ijkl}(x)-\left(C_{ijkl}\right)_{tip}\right)\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij,1}^{aux}qrdrd\theta \\ &= \lim_{r\to 0}\int_r\int_\theta O(r)O(r^{-1/2})O(r^{-3/2})qrdrd\theta \\ &= \lim_{r\to 0}O(r)=0\end{aligned} \quad (۸۳-۵)$$

برای تنش T میدانهای جابجایی و کرنش کمکی بصورت $u_i^{aux}(\ln r,\theta)$ و $\varepsilon_{ij}^{aux}(r^{-1},\theta)$ قابل بیان است. اثر ترم اول از انتگرال دوم برای r→0 بصورت زیر است.

$$\begin{aligned}\lim_{A\to 0}\int_A\left(\sigma_{ij}-\sigma_{ij}^{tip}\right)\varepsilon_{ij,1}^{aux}qdA &= \lim_{r\to 0}\int_r\int_\theta\left(\sigma_{ij}-\sigma_{ij}^{tip}\right)\varepsilon_{ij,1}^{aux}qrdrd\theta \\ &= \lim_{r\to 0}\int_r\int_\theta\left(C_{ijkl}(x)-\left(C_{ijkl}\right)_{tip}\right)\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij,1}^{aux}qrdrd\theta \\ &= \lim_{r\to 0}\int_r\int_\theta O(r)O(r^{-1/2})O(r^{-2})qrdrd\theta \\ &= \lim_{r\to 0}O(r^{1/2})=0\end{aligned} \quad (۸۴-۵)$$

۵-۴- استخراج ضرایب شدت تنش

رابطه بین انتگرال J و ضرایب شدت تنش K_I و K_{II} بصورت زیر قابل بیان است.

$$J=\frac{K_I^{\,2}+K_{II}^{\,2}}{E_{tip}^*} \quad (۸۵-۵)$$

با توجه به رابطه (۵-۱۴)، انتگرال بر هم کنش M برحسب ضرایب شدت تنش K_I و K_{II} بصورت است.

$$M=\frac{2}{E_{tip}^*}\left(K_IK_I^{aux}+K_{II}K_{II}^{aux}\right) \quad (۸۶-۵)$$

با انتخاب صحیح میدانهای کمکی (مودهای خالص I و II)، ضرایب شدت تنش K_I و K_{II} از انتگرال بر هم کنش M بصورت زیر بدست می‌آید.

$$K_I = \frac{E^*_{tip}}{2} M^{(1)}, \left(K_I^{aux} = 1, K_{II}^{aux} = 0.\right)$$
$$K_{II} = \frac{E^*_{tip}}{2} M^{(2)}, \left(K_I^{aux} = 0, K_{II}^{aux} = 1.\right) \qquad (۸۷-۵)$$

۵-۵- استخراج تنش T

با فرض میل کردن سطح A به نوک ترک، تنش T از انتگرال برهم‌کنش قابل استخراج است. فرض A→0 باعث حذف اثر جملات مرتبه بالا (مرتبه ۱/۲ و بالاتر) و جملات تکین (مرتبه ۱/۲-) در محاسبه تنش T می‌شود.

با فرض فوق، همانطور که در رابطه (۵-۴۳) نشان داده شد؛ عبارتهای نامتعادل، غیرسازگار و اختلاف تنشها در انتگرالهای برهم‌کنش صفر می‌شوند. علاوه براین، عبارت شامل مشتقات صریح تابع چگالی انرژی کرنشی نیز حذف می‌گردد [۱۰۴]. طبق فرضیات اولیه، مدول الاستیسیته در نوک ترک کراندار و مشتق‌پذیر است. بنابراین، ضرایب لامه λ و μ از مرتبه مثبت r می‌باشند؛ یعنی $O(r^{\alpha})$ که $\alpha \geq 0$. با توجه به اینکه ε_{ij} و ε_{ij}^{aux} از مرتبه ۱/۲- و ۱- از r هستند؛ برای A→0 عبارت شامل مشتقات صریح تابع چگالی انرژی کرنشی مکانیکی بصورت زیر است.

$$\begin{aligned}\int_A C_{ijkl,1}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij}^{aux} q\,dA &= \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^r C_{ijkl,1}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij}^{aux} q\,r\,dr\,d\theta \\ &\propto \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^r O(r^{\alpha})O(r^{-1/2})O(r^{-1})q\,r\,dr\,d\theta \\ &\propto O(r^{\alpha+1/2})\end{aligned} \qquad (۸۸-۵)$$

بنابراین،

$$M=\int_A(\sigma_{ij}^{aux}u_{i,1}+\sigma_{ij}u_{i,1}^{aux}-W^{int}\delta_{1j})q_{,j}dA \tag{۸۹-۵}$$

که معادل عبارت انتگرال برهم‌کنش برای مواد همگن می‌باشد و به صورت زیر نیز قابل نمایش است.

$$M=\int_A\Big((\sigma_{ij}^{aux}u_{i,1}+\sigma_{ij}u_{i,1}^{aux}-W^{int}\delta_{1j})q\Big)_{,j}dA \tag{۹۰-۵}$$

بسط انتگرال فوق بصورت دو انتگرال قابل بیان است.

$$\begin{aligned}M=&\int_A(\sigma_{ij}^{aux}u_{i,1}+\sigma_{ij}u_{i,1}^{aux}-W^{int}\delta_{1j})q_{,j}dA+\\&+\int_A(\sigma_{ij}^{aux}u_{i,1}+\sigma_{ij}u_{i,1}^{aux}-W^{int}\delta_{1j})_{,j}qdA\end{aligned} \tag{۹۱-۵}$$

انتگرال دوم با فرض A→0 حذف می‌شود. با استفاده از قضیه دیورژانس می‌توان فـرم کـانتوری رابطـه (۵-۹۱) را بصورت زیر بیان کرد.

$$M=\lim_{\Gamma_s\to 0}\oint_{\Gamma}\Big(\sigma_{ij}^{aux}u_{i,1}+\sigma_{ij}u_{i,1}^{aux}-W^{int}\delta_{1j}\Big)m_jqd\Gamma \tag{۹۲-۵}$$

با توجه به اینکه $m_j=-n_j$ و $q=1$ روی مرز Γ_s و $m_j=n_j$ و $q=0$ روی مرز Γ_0 برقرار است و سطوح تـرک نیـز عاری از تنش فرض می‌شوند؛ انتگرال M را می‌توان فقط روی مرز Γ_s نمایش داد.

$$M=\lim_{\Gamma_s\to 0}\oint_{\Gamma_s}\left(\frac{1}{2}\Big(\sigma_{ik}^{aux}\varepsilon_{ik}+\sigma_{ik}\varepsilon_{ik}^{aux}\Big)-\sigma_{ij}^{aux}u_{i,1}-\sigma_{ij}u_{i,1}^{aux}\right)n_jqdA \tag{۹۳-۵}$$

بـا توجـه بـه یکسـان بـودن تانسـور سـاختاری میـدانهای اصـلی و کمکـی در نـوک تـرک، رابطـه $\sigma_{ij}^{aux}\varepsilon_{ij}=\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^{aux}$ برقرار است و منجر به ساده شدن رابطه (۳-۵۷) می‌شود.

$$M=\lim_{\Gamma_s\to 0}\oint_{\Gamma_s}\Big(\sigma_{ik}\varepsilon_{ik}^{aux}-\sigma_{ij}^{aux}u_{i,1}-\sigma_{ij}u_{i,1}^{aux}\Big)n_jd\Gamma \tag{۹۴-۵}$$

فرم کلی میدان تنش اصلی بصورت زیر است.

$$\sigma_{ij} = K_I(2\pi r)^{-1/2} f_{ij}^I(\theta) + K_{II}(2\pi r)^{-1/2} f_{ij}^{II}(\theta) + T\delta_{1i}\delta_{1j} + O(r^{1/2}) \qquad (۹۵\text{-}۵)$$

که در آن، توابع زاویه‌ای $f_{ij}^I(\theta)$ و $f_{ij}^{II}(\theta)$ در ضمیمه (ب) آورده شده‌اند. از میدان تنش فوق، فقط اثر ترم ثابت باقی می‌ماند.

$$\sigma_{ij} = T\delta_{1i}\delta_{1j} \qquad (۹۶\text{-}۵)$$

از طرف دیگر،

$$u_{i,1} = \varepsilon_{11}^{th}\delta_{i1} = \left(\frac{\sigma_{11}}{E_{tip}^*} + C_{tip}\alpha_{tip}\Delta\theta_{tip}\right)\delta_{i1} \qquad (۹۷\text{-}۵)$$

که در آن، برای حالت کرنش صفحه‌ای $C^{tip}=1+\nu^{tip}$ و برای حالت تنش صفحه‌ای $C^{tip}=1$. وقتی کانتور Γ_s به نوک ترک میل می‌کند؛ اثر ترمهای مرتبه بالا (مثبت) حذف می‌شود و فقط جملـه شـامل تـنش T باقی می‌ماند. از طرف دیگر، چون انتگرالگیری از $-\pi$ تا $+\pi$ انجام می‌گیرد؛ اثر جملات تکین نیز که شامل توابع زاویه‌ای سینوسی می‌باشند؛ صفر می‌گردد. بنابراین، از جملات میـدان تـنش اصـلی فقـط عبارت شامل تنش T در محاسبه انتگرال برهم‌کنش باقی می‌ماند. با جایگزینی عبارت فـوق در رابطـه انتگرال برهم‌کنش، می‌توان نوشت.

$$M = -\lim_{\Gamma_s\to 0}\oint_{\Gamma_s} \sigma_{ij}^{aux} u_{i,1} n_j d\Gamma = -\left(\frac{\sigma_{11}}{E_{tip}^*} + C_{tip}\alpha_{tip}\Delta\theta_{tip}\right)\lim_{\Gamma_s\to 0}\int_{\Gamma_s} \sigma_{ij}^{aux} n_j d\Gamma \qquad (۹۸\text{-}۵)$$

در میدان کمکی، نیروی f موازی با سطوح ترک و به نوک ترک اعمال می‌شود. بنابراین، رابطه تعـادل میدان کمکی بصورت زیر قابل بیان است.

$$f = -\lim_{\Gamma_s\to 0}\oint_{\Gamma_s} \sigma_{ij}^{aux} n_j d\Gamma \qquad (۹۹\text{-}۵)$$

با جایگزینی رابطه فوق در انتگرال برهم کنش (۳-۶۱)، رابطه نهایی تنش T و انتگرال M بدست مـی-آید.

$$T = \frac{ME^{*}_{tip}}{f} + C_{tip}\alpha_{tip}\Delta\theta_{tip}E^{*}_{tip} \qquad (۱۰۰-۵)$$

که در آن، $E^{*}_{tip} = E_{tip}$ برای حالت کرنش صفحه‌ای و $E^{*}_{tip} = \frac{E_{tip}}{1-\nu^{2}_{tip}}$ برای حالت تنش صفحه‌ای است.

۵-۶- مدلسازی ترک در هدایت گرمایی

همانطور که در بخش (۵-۲) اشاره شد؛ علاوه بر میدانهای تنش و کرنش، شار حرارتی نیز در نوک ترک تکین است و باید در مدلسازی عددی لحاظ شود. تکینی شار حرارتی برای ترکی با سطوح عایق و برای ترکی با سطوح همدما برقرار است. هرچند که توزیع زاویه‌ای دما و شار حرارتی حوزه نوک ترک در این دو حالت متفاوت است؛ مانند مدلسازی ترک در الاستیسیته، برای مدلسازی دقیقتر میدان دما از توابع غنی‌سازی زیر استفاده می‌شود [۱۳۲]. برای یک ترک با سطوح همدما تابع غنی-سازی میدان دما بصورت زیر است.

$$p^{th}_{enr} = \sqrt{r}\,cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \qquad (۹۸-۵)$$

برای ترک عایق، تابع غنی‌سازی زیر استفاده می‌شود.

$$p^{th}_{enr} = \sqrt{r}\,sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \qquad (۹۹-۵)$$

با توجه به خصوصیت بازتولید تابع شکل MLS و شرایط شوک حرارتی، هر دو تابع فوق در غنی‌سازی میدان دما بکار می‌روند.

۵-۷- مدلهای میکرومکانیک توسعه‌یافته برای FGM

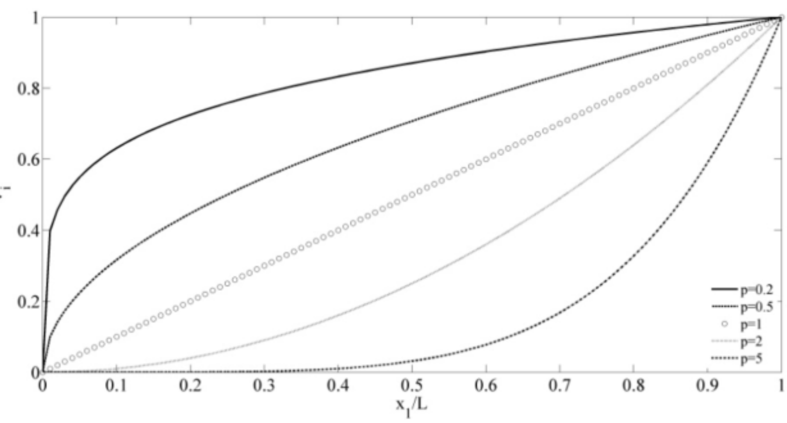
با وجود اینکه کسر حجمی اجزای تشکیل دهنده FGM در محدوده وسیعی (بین صفر و یک) تغییر می‌کند؛ خصوصیات فیزیکی مؤثر این مواد را می‌توان با استفاده از مدلهای میکرومکانیک پیش-

بینی نمود. البته برای کاربرد خصوصیات حاصل شده در مسایل مکانیک شکست نیاز به فرآیندهای مشتق‌گیری عددی می‌باشد.

در FGM دو فازی، معمولاً فرض می‌شود؛ کسر حجمی اجزای تشکیل‌دهنده مطابق یک تابع توانی تغییر می‌کند.

$$V_i=(x_1/L)^p \qquad (۱۰۰-۵)$$

که در آن، اندیس **i** نشاندهنده جزء اضافه‌شده[1] است و پارامتر L نیز طول منطقه گرادیان ماده را مشخص می‌کند. طبق رابطه x=0 معادل فاز ماتریس خالص و x=L معادل فاز اضافه‌شده خالص است. همچنین p پارامتر تعیین پروفیل گرادیان می‌باشد. شکل (۵-۵) تغییرات کسر حجمی فاز اضافه‌شده را برای مقادیر مختلف توان p نشان می‌دهد.



شکل ۵-۵- تغییرات کسر حجمی فاز اضافه‌شده برحسب توان p

توان p پروفیل کسر حجمی را کنترل می‌کند. برای مثال، مقدار بهینه p برای TiCi/Ni بین ۰/۵ تا ۰/۷ گزارش شده است [۱۳۳]. البته در مواردی نیز کسر حجمی اجزای تشکیل‌دهنده ماده با یک تابع مشخص پیوسته و صریح مثل تابع نمایی تغییر می‌کند. به‌همین خاطر، معمولاً خصوصیات

[1] - inclusion

فیزیکی ماده با فرض کسر حجمی گسسته محاسبه می‌شوند که منجر به کاربرد مشتق‌گیری عددی برای محاسبه مشتق خصوصیات فیزیکی مذکور نیز می‌گردد.

۵-۸- مدلهای میکرومکانیک انتخابی

مدلهای میکرومکانیک مختلفی برای پیش‌بینی خصوصیات فیزیکی مؤثر در FGM بکار گرفته شده‌اند که هم بر اساس رهیافت کلاسیک [۱۳۴] و هم بر اساس رهیافتهای دیگر [۱۳۵] توسعه یافته‌اند. البته فرض اصلی در کاربرد مدلهای میکرومکانیک کلاسیک برای محاسبه خصوصیات مؤثر در مواد مرکب، وجود المان حجمی نمونه[۱] (RVE) است. اما مبنای تئوری کاربرد این مدلها برای FGM دقیقاً مشخص نیست! در FGM خصوصیات فیزیکی بطور پیوسته تغییر می‌کند؛ بنابر این مفهوم RVE برای یک پیوستار FGM، یکتا نیست. در میان مدلهای مرسوم برای مواد مرکب، مدلهای موری-تاناکا و خودسازگار قابلیت تخمین خصوصیات مؤثر FGM را با دقت قابل قبولی دارند. بنابراین، در این بخش، از مدل موری-تاناکا، مدل سه‌فازی -که تعمیم‌یافته مدل خودسازگار است و کرانهای هاشین-اشتریکمن -تخمین واقعی از مدول الاستیسته مواد مرکب بدست می دهد- استفاده شده است. توضیح مختصری راجع به این روشها و روابط کلی آنها در ضمیمه (الف) آورده شده است.

۵-۸-۱- کران‌های هاشین- اشتریکمن

هاشین و اشتریکمن، کران‌های بالا و پایین مدول الاستیک مؤثر مواد چند فازی را بدست آوردند که از چند فاز همگن تشکیل شده‌اند [۱۳۶]. نتایج فوق با کاربرد اصول تغییراتی برای الاستیستیه همگن و غیرهمگن حاصل شده است.

برای مواد دو فازی، کران‌های مدول حجمی و مدول برشی بصورت زیر ارائه شده است.

---

[1] - Representative Volume Element

$$\mu_i^e = \mu_i + V_j \bigg/ \left(\frac{1}{(\mu_j - \mu_i)} + \frac{6(\kappa_i + 2\mu_i)V_i}{5\mu_i(3\kappa_i + 4\mu_i)} \right) \tag{۵-۱۰۱}$$

$$\kappa_i^e = \kappa_i + V_j \bigg/ \left(\frac{1}{(\kappa_j - \kappa_i)} + \frac{3V_i}{(3\kappa_i + 4\mu_i)} \right),\ i \neq j \tag{۵-۱۰۲}$$

که در آن، اندیس e مربوط به کمیت مؤثر، V_i کسر حجمی فاز i، μ_i مدول برشی فاز i، κ_i مدول حجمی فاز i است. بعلاوه $\kappa_2^e > \kappa_1^e$ و $\mu_2^e > \mu_1^e$.

۵-۸-۲- مدل سه‌فاز

مدل سه‌فاز، حاصل تعمیم مدل خودسازگار [۱۳۷] است و بهمین دلیل مدل خود سازگار تعمیم یافته[1] نیز نامیده می‌شود. در این مدل، فرض می‌شود؛ ذره در یک محیط بی‌نهایت با خصوصیات نامعلوم قرار دارد. مدول برشی از حل معادله درجه دوم زیر حاصل می‌شود [۱۳۸].

$$A(\mu/\mu_1)^2 + 2B(\mu/\mu_1) + C = 0 \tag{۵-۱۰۳}$$

که در آن، ثابتهای A، B و C برحسب خصوصیات فازهای ذره اضافه‌شده (μ_1, ν_1) و ماتریس (μ_2, ν_2) بیان می‌شود. مدول حجمی مؤثر نیز با استفاده از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\kappa = \kappa_1 + V_2 \left(\frac{V_2(\kappa_2 - \kappa_1)}{\left(1 + V_1\left(\frac{(\kappa_2 - \kappa_1)}{\kappa_1} + 4\mu_1/3\right)\right)} \right) \tag{۵-۱۰۴}$$

۵-۸-۳- مدل موری-تاناکا

---

[1] - generalized self-consistent

در مدل موری-تاناکا نیز مانند روش خودسازگار، میـدانهای میـانگین محلـی تـنش و کـرنش مربوط به اجزای تشکیل‌دهنده ماده مرکب برای تخمین خصوصیات مؤثر ماده بکار می‌رود. ایده اصلی این مدل کاملاً ریاضی است و برای منظور کردن بر هم کنش ذرات نیز قابل توسعه است. نتایج کاربرد مدل موری-تاناکا با در نظر گرفتن ذرات کروی و بدون برهم کنش بصورت زیر است [۱۳۹].

$$\mu = \mu_1 + V_2(\mu_2 - \mu_1) \Bigg/ \left(1 + V_1\left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + \dfrac{\mu_1(9\kappa_1 + 8\mu_1)}{6(\kappa_1 + 2\mu_1)}}\right)\right) \qquad (۱۰۵\text{-}۵)$$

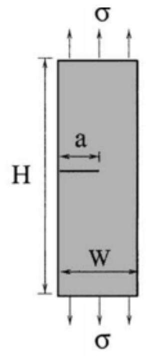
$$\kappa = \kappa_1 + V_2(\kappa_2 - \kappa_1) \Bigg/ \left(1 + V_1\left(\frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\kappa_1 + \dfrac{4\mu_1}{3}}\right)\right) \qquad (۱۰۶\text{-}۵)$$

۵-۹- مثالهای عددی

روش بدون‌المان گلرکین برای ارزیابی ضرایب شدت تنش و تنش T در صفحات حاوی تـرک و تحت بار مکانیکی یا حرارتی در چند مثال بکار گرفتـه شـده اسـت. در مثالهـای شـامل FGM، تغییـر خصوصیات فیزیکی مطابق یک تابع پیوسته و یا یک مدل میکرومکانیک فرض می‌شود. برای مدلسازی ترک از هر دو روش پراش بهمراه غنی‌سازی کامل پایه‌ها و روش مبتنی بر LSM استفاده می‌شود.

۵-۷-۱- صفحه همگن تحت بار کششی

صفحه‌ای از FGM بطول ۸ واحد و عرض ۱ واحد شامل یک ترک لبه‌ای بطول a در نظر گرفتـه می‌شود. ترک وسط صفحه و عمود بر لبه آن است. بارگذاری مکـانیکی بصـورت تـنش کششـی ثابـت اعمال می‌گردد. هندسه و بارگذاری مذکور در شکل (۵-۵) نشان داده شده است.



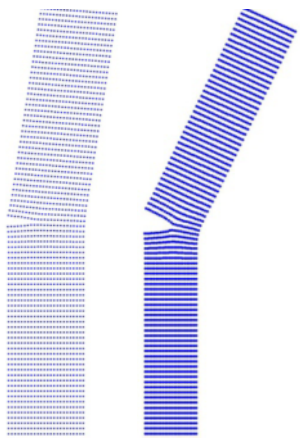
شکل ۵-۵- هندسه و بارگذاری صفحه ایزوتروپیک حاوی ترک لبه‌ای

نتایج حاصل با نتایج منتشر شده در مراجع مختلف در جدول (۵-۲) مقایسه شده است. ضرایب شدت تنش مود I و تنش T با استفاده از انتگرال برهم کنش محاسبه شده‌اند. نتایج برای حالت کرنش صفحه‌ای و مقادیر H/W=8 و W=1 و با کاربرد روش LSM بدست آمده‌اند.

جدول ۵-۲- مقایسه نتایج صفحه ایزوتروپیک با مقادیر گزارش‌شده

	$K_I/\sqrt{\pi a}$	T/σ	$B=T\sqrt{\pi a}/K_I$
	a/W=0.3		
نتایج محاسبه‌شده	۱/۶۰۷۱	-۰/۶۱۲۹	-۰/۳۸۱۳
Sutradhar & Paulino [102]	۱/۶۵۹۷	-۰/۶۱۰۵	-۰/۳۶۷۹
Fett [140]	-	-۰/۶۱۴۱	-۰/۳۶۶۴
Sham [141]	۱/۶۵۷۰	-۰/۶۱۴۲	-۰/۳۶۰۷
	a/W=0.5		
نتایج محاسبه‌شده	۲/۶۷۸۸	-۰/۳۸۹۵	-۰/۱۴۵۴
Sutradhar & Paulino [102]	۲/۸۲۴۱	-۰/۴۱۸۴	-۰/۱۴۸۱
Fett [140]	-	-۰/۴۱۸۲	-۰/۱۴۸۱
Sham [141]	۲/۸۲۱۰	-۰/۴۳۱۴	-۰/۱۵۲۹

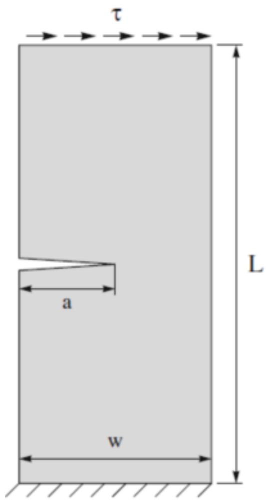
در شکل (۵-۶) تغییرشکل صفحات حاوی ترک با طولهای مختلف تحت کشش یکنواخت نشان داده شده است.



شکل ۵-۶- صفحه ایزوتروپیک تغییرشکل یافته تحت کشش یکنواخت. راست: a/W=0.5 چپ: a/W=0.3.

۵-۷-۲- صفحه همگن تحت بار برشی

صفحه‌ای شامل یک ترک لبه‌ای و عمود بر لبه در نظر گرفته شده است. لبه پایینی صفحه به زمین متصل و ثابت شده است. همچنین، لبه بالایی تحت بار برشی یکنواخت τ=1 unit قرار دارد. طول صفحه L=16 units، عرض آن W=7 units و طول ترک a=W/2=3.5 units در نظر گرفته شده است. در شکل (۵-۷) هندسه و بارگذاری صفحه نشان داده شده است. علاوه بر این، مساله در حالت کرنش صفحه‌ای و با در نظر گرفتن E=3 e7 units و ν=0.25 حل شده است.



شکل ۵-۷- هندسه و بارگذاری صفحه همگن تحت برش.

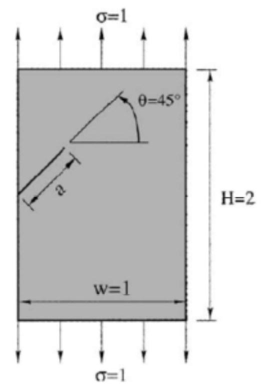
مقادیر ضریب شدت تنش مود I، تنش T و پارامتر B برای گره‌بندیهای مختلف در جدول (۵-۳) آمده است.

جدول ۵-۳- نتایج ضریب شدت تنش و تنش T در یک صفحه ایزوتروپیک تحت برش

$B = T\sqrt{\pi a} / K_I$	T/τ	$K_I / \sqrt{\pi a}$	
۰/۳۱۸۴	۳/۱۹۸۵	۱۰/۰۴۶۶	نتایج (گره‌بندی ۴۰×۶۰)
۰/۳۱۴۵	۳/۱۳۸۲	۹/۹۷۸۶	نتایج (گره‌بندی ۳۶×۴۶)

۵-۷-۳- صفحه‌ای از FGM حاوی یک ترک زاویه‌دار تحت بار مکانیکی

یک ترک مایل در یک پیوستار الاستیک دو بعدی، شرایط بارگذاری مختلط را مهیا می‌کند. در شکل (۵-۸) یک صفحه محدود حاوی یک ترک مایل را نشان می‌دهد.



شکل ۵-۸- هندسه و بارگذاری صفحه محدود FGM حاوی یک ترک مایل

بار اعمالی در راستای عمودی و به لبه بالایی بصورت کشش یکنواخت اعمال می‌گردد. شـرایط مرزی تغییرمکان به لبه پایینی اعمال می‌شود. بطوریکه برای تمام گـره‌هـا روی ایـن لبـه تغییرمکـان عمودی صفر است. علاوه بر این، تغییرمکان افقی گره سمت راست نیز صفر است. مـدول الاستیسـیته بطور نمایی تغییر می‌کند. بطوریکه *E(0)*=1 . ضریب پواسون نیز ثابت فرض می‌شـود. داده‌هـای دیگـر بصورت زیر است:

حالت تنش صفحه‌ای، $a/W = 0.4\sqrt{2}$، $L/W = 2$ و $v = 0.3$.

جدول ۵-۴- مقایسه نتایج صفحه ایزوتروپیک حاوی یک ترک مایل با مقادیر گزارش‌شده

	$K_I / \sqrt{\pi a}$	T stress	$B = T\sqrt{\pi a} / K_I$
نتایج محاسبه‌شده	۱/۴۲۵۷	۰/۷۸۱۸	۰/۵۴۸۴
روش المان مرزی (سوترادهار و پائولینو [۱۰۲])	۱/۴۴۶	۰/۷۷۵	–
روش انتگرال J_k (کیم و پائولینو [۱۰۳])	۱/۴۵۱	۰/۷۸۷	–
روش انتگرال M در FEM (کیم و پائولینو [۱۰۴])	۱/۴۴۶	۰/۷۶۴	–

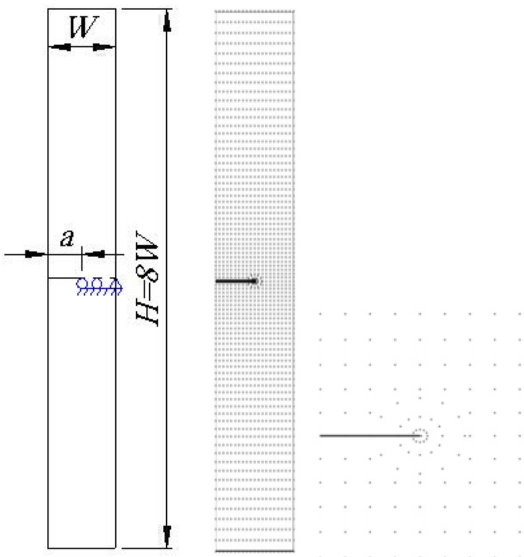
در جدول (۵-۵) پارامترهای شکست برای تغییـر نمـایی مـدول الاستیسـیته و دو فرمولبنـدی نامتعادل و غیرسازگار باهم مقایسه شده است.

جدول ۵-۵- نتایج ضرایب شدت تنش برای FGP حاوی یک ترک مایل با تغییر نمایی مدول الاستیسیته

	روش	$K_I / \sqrt{\pi a}$	T stress	$B = T\sqrt{\pi a} / K_I$
E(W)/E(0)=0.5	فرمولبندی نامتعادل	۱/۵۱۸۶	۰/۸۴۸۶	۰/۵۵۸۸
	فرمولبندی غیرسازگار	۱/۵۰۸۱	۰/۷۹۴۷	۰/۵۲۷۰
E(W)/E(0)=2	فرمولبندی نامتعادل	۱/۳۲۴۰	۰/۷۴۶۰	۰/۵۶۳۴
	فرمولبندی غیرسازگار	۱/۳۴۰۵	۰/۷۵۳۷	۰/۵۶۲۳

۵-۷-۴- صفحه FGM با ترک لبه‌ای و خصوصیات نمایی تحت شوک حرارتی

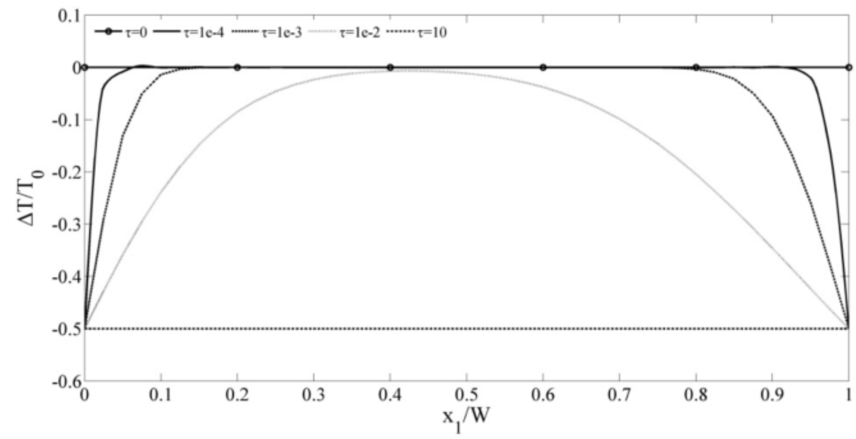
یک صفحه از مواد مرکب هدفمند شامل ترک لبه‌ای به طول a مطابق شکل (۵-۹) در نظر گرفته می‌شود. در شکل (۵-۹ وسط) گره‌بندی کامل ناحیه حل نمایش داده شده است که شامل ۱۶۹۵ گره منظم و ۴۰ گره ستاره‌ای می‌شود.گره‌بندی ستاره‌ای نوک ترک در شکل (۵-۹ چپ) آمده است.



(a) (b) (c)

شکل ۵-۹- نمای کلی از FGP حاوی ترک عمود بر لبه. (a): هندسه صفحه تحت بارگذاری. (b): گره‌بندی کل ناحیه. (c): گره‌بندی نوک ترک.

در ابتدا صفحه در دمای ساخت و بدون تنش T_0 قرار دارد که شرایط مرزی دمایی به سطوح اعمال می‌گردد. سطوح دیگر از جمله سطوح ترک عایق فرض می‌شوند. شوک حرارتی بصورت کاهش ناگهانی دمای سطوح جانبی صفحه از دمای مرجع تا دمای $T(x_1=0)=0.5$ و $T(x_1=W)=0.5$ اعمال می‌شود. توزیع دمای گذرا در صفحه برحسب زمان نرمالیزه شده در شکل (۵-۱۰) رسم شده است.



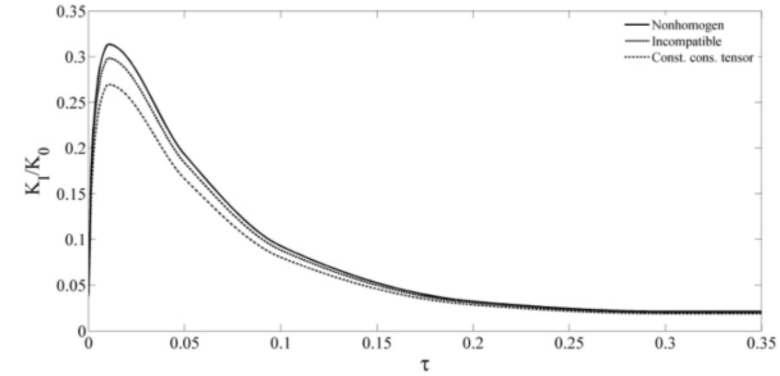
شکل ۵-۱۰- توزیع دمای گذرا در صفحه FGM برحسب زمان نرمالیزه شده

مقادیر ضریب شدت تنش و تنش T برای حالت پایا و طول ترک $a/W=0.5$ در جدول (۵-۹) با مقادیر گزارش‌شده توسط کی‌سی و کیم [۱۰۷]، مقایسه گردیده است. نتایج کی‌سی و کیم با تحلیل دو بعدی -با استفاده از نرم‌افزار FRANC2D- و تحلیل سه بعدی -با استفاده از کد شخصی در نرم‌افزار MATLAB- بدست آمده است. البته نتایج مذکور با صرف‌نظر از اثر ترک روی میدان دما بدست آمده است [۱۰۷].

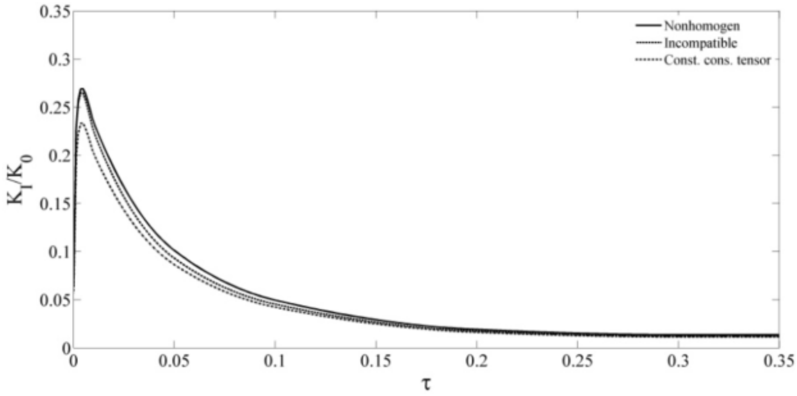
جدول ۵-۶- مقایسه نتایج ضرایب شدت تنش و تنش T برای FGP حاوی یک ترک عمود بر لبه با تغییر نمایی مدول الاستیسیته

	روش	K_I / K_0	T stress	$B = T\sqrt{\pi a} / K_I$
	نتایج محاسبه‌شده			
کرنش صفحه‌ای	فرمولبندی نامتعادل	۰/۰۱۲۵	۰/۰۵۹۳	۳/۳۱۶۶
	فرمولبندی غیرسازگار	۰/۰۱۱۳	۰/۰۶۱۱	۳/۷۸۹۲
	فرمولبندی تانسور ثابت	۰/۰۱۰۷	۰/۰۵۶۲	۳/۶۹۰۱
تنش صفحه‌ای	فرمولبندی نامتعادل	۰/۰۰۸۸	۰/۰۴۷۸	۳/۸۱۵۲
	فرمولبندی غیرسازگار	۰/۰۰۷۸	۰/۰۴۶۹	۴/۲۲۸۴
	فرمولبندی تانسور ثابت	۰/۰۰۸۰	۰/۰۴۴۲	۳/۶۳۸۲
	نتایج گزارش‌شده			
کرنش صفحه‌ای	FRANC2D	۰/۰۱۲۸	۰/۰۶۷	۳/۶۶
	FEA 3D	۰/۰۱۲۹	۰/۰۶۰	۳/۲۵
تنش صفحه‌ای	FRANC2D	۰/۰۰۹۰	۰/۰۴۶	۳/۵۸
	FEA 3D	–	–	–

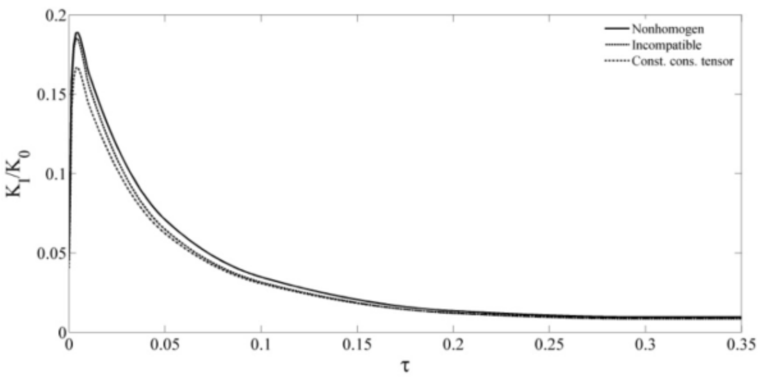
تغییرات زمانی ضریب شدت تنش مود I برای طولهای مختلف ترک در شکلهای (۵-۱۱) تا (۵-۱۳) نشان داده شده است که با کاربرد فرمولبندیهای نامتعادل، غیرسازگار و تانسور تنش ثابت انتگرال برهم کنش برای حالت کرنش و تنش صفحه‌ای بدست آمده‌اند. اختلاف ضریب شدت تنش محاسبه شده با فرمولبندیهای فوق در نزدیکی مقدار بیشینه بیشتر از زمانهای دیگر است. بطوریکه این مقدار برای فرمولبندی تانسور تنش ثابت کمتر از مقادیر متناظر فرمولبندیهای نامتعادل و غیرسازگار است. ولی در حالت پایا مقادیر ضریب شدت تنش به یک مقدار همگرا می‌شود. البته مقدار پایای ضریب شدت تنش برای فرمولبندی نامتعادل نزدیکتر به مقادیر گزارش شده است.



شکل ۵-۱۱- تغییرات زمانی ضریب شدت تنش مود I برای فرمولبندیهای مختلف انتگرال برهم کنش، حالت تنش صفحه‌ای و a/W=0.2

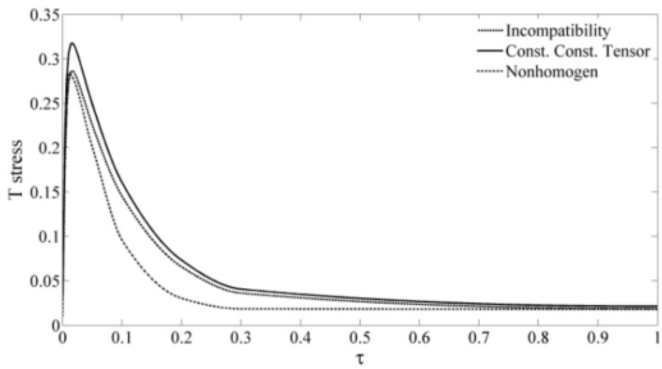


شکل ۵-۱۲- تغییرات زمانی ضریب شدت تنش مود I برای فرمولبندیهای مختلف انتگرال برهم کنش، حالت کرنش صفحه‌ای و a/W=0.5



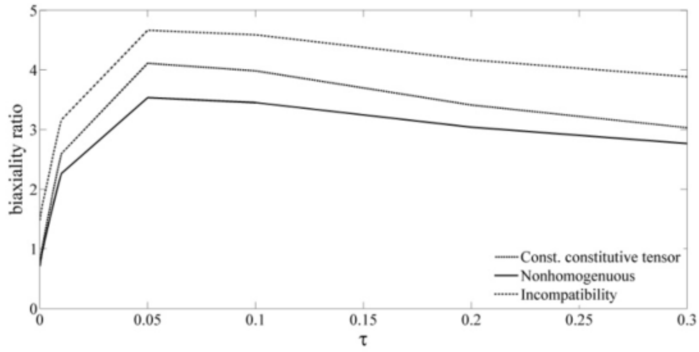
شکل ۵-۱۳- تغییرات زمانی ضریب شدت تنش مود I برای فرمولبندیهای مختلف انتگرال برهم کنش، حالت تنش صفحه‌ای و a/W=0.5

تغییرات تنش T نسبت به زمان در شکل (۵-۱۴) آمده است. مطابق این نتایج، در ابتـدا مقـدار تنش T تا یک مقدار بیشینه افزایش یافته و سپس به سرعت تـا مقـدار حالـت پایـا کـاهش مـی‌یابـد. تغییرات زمانی تنش T مشابه تغییرات ضریب شدت تنش مود I است. رونـد تغییـرات تـنش T شـبیه ضریب شدت تنش است. اما زمان رسیدن به مقدار بیشینه آنها با هم متفاوت است. مطابق این نتـایج، اگر رشد ترک در مقادیر نزدیک به بیشینه ضریب شدت تنش اتفاق بیفتد؛ تنش T روی زاویه رشـد و حتی پایداری آن اثر بیشتری خواهد داشت.



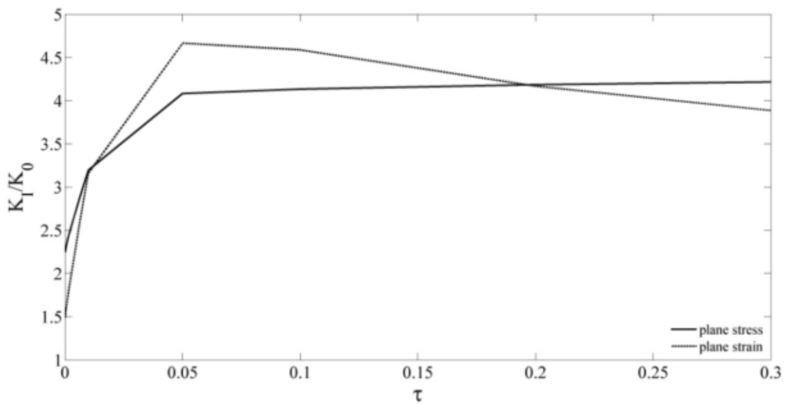
شکل ۵-۱۴- تغییرات زمانی تنش T برای فرمولبندیهای مختلف انتگرال برهم کنش، حالت کرنش صفحه‌ای و a/W=0.3

تغییرات پارامتر B نسبت به زمان برای طول ترک *a*/W=0.3 و حالت کرنش صفحه‌ای در شـکل (۵-۱۵) نشان داده شده است. مطابق این نتایج، با شروع اعمال شوک حرارتی مقدار پارامتر B تا یـک مقدار بیشینه افزایش یافته و سپس بتدریج به مقدار حالت پایا مـی‌رسـد. تغییـرات زمـانی پـارامتر B، نسبت نرخ تغییرات تنش T نسبت به نرخ تغییرات ضریب شدت تنش را نشـان مـی‌دهـد. طبـق ایـن نتایج، در ابتدای اعمال شوک حرارتی مقدار تنش T در مقایسه با ضریب شدت تـنش کوچـک اسـت. ولی نرخ رشد آن بسیار بیشتر از ضریب شدت تنش است و با گذشت زمان، انـدازه تـنش T بیشـتر از اندازه ضریب شدت تنش می‌باشد.



شکل ۵-۱۵- تغییرات زمانی پارامتر B برای فرمولبندیهای مختلف انتگرال برهم کنش، حالت کرنش صفحه‌ای و a/W=0.3

تغییرات زمانی پارامتر B برای حالتهای کرنش صـفحه‌ای و تـنش صـفحه‌ای در شـکل (۵-۱۶) نشان داده شده است. مقادیر برای طول ترک a/W=0.3 و فرمولبندی غیرسازگار بدست آمده‌اند. طبـق این نتایج، علاوه بر مقدار پارامتر B، روند تغییرات پارامتر مذکور نیـز بـرای هـر دو حالـت تـنش بهـم نزدیک است. با توجه به کمتر بودن مقدار ضریب شدت تنش برای حالت تنش صفحه‌ای، نزدیک بودن مقدار پارامتر B برای دو حالت نشان می‌دهد مقدار تنش T بـرای حالـت تـنش صـفحه‌ای نیـز بهمـان نسبت کمتر از حالت کرنش صفحه‌ای است.



شکل ۵-۱۶- تغییرات زمانی پارامتر B برای حالتهای تنش و کرنش صفحه‌ای، فرمولبندیهای غیرسازگار و a/W=0.3

۵-۷-۵- صفحه‌ای از FGM حاوی یک ترک زاویه‌دار تحت شوک حرارتی

در این مثال، یک صفحه از FGM که مطابق شکل (۵-۸) حاوی یک تـرک مایـل اسـت؛ تحـت شوک حرارتی قرار می‌گیرد. در ابتدا صفحه در دمای ساخت و بدون تنش T_0 قرار دارد و شوک حرارتی بصورت کاهش دمای لبه‌های راست و چپ صفحه تا دماهای ثابـت $T(x_1=0)=0.5$ و $T(x_1=W)=0.2$ اعمـال می‌شود. برای یک صفحه همگن با خصوصیات زیر و برای حالت کرنش صفحه‌ای، مقـادیر پارامترهـای شکست در جدول (۵-۷) آمده است.

E = 1e3, ν = 0.3,

α = 0.01,

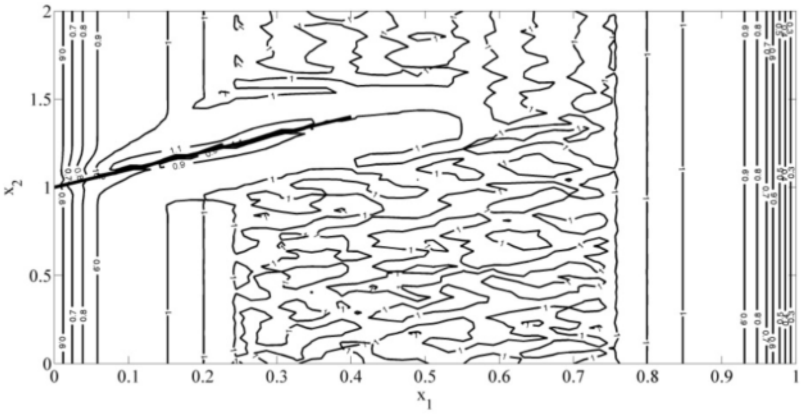
k = 1, ρc = 1.

جدول ۵-۷- پارامترهای شکست برای صفحه همگن حاوی ترک مایل تحت شوک حرارتی

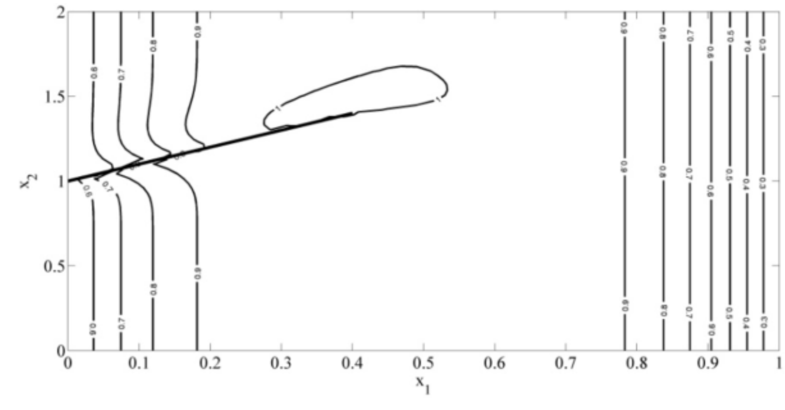
زمان نرمالیزه	فرمولبندی نامتعادل				فرمولبندی غیرسازگار			
	K_I	K_{II}	T stress	B	K_I	K_{II}	T stress	B
$۱۰^{-۴}$	۰/۰۷۷۷	−۰/۰۷۳۱	۱/۲۱۷۳	۸/۲۲۰۸	۰/۰۷۷۷	−۰/۰۷۳۱	۱/۲۱۵۸	۸/۲۱۰۳
$۱۰^{-۳}$	۰/۱۹۰۹	۰/۰۰۱۴	۱/۰۴۷۹	۲/۸۷۹۴	۰/۱۹۰۹	۰/۰۰۱۴	۱/۰۴۷۰	۲/۸۷۷۰
$۱۰^{-۲}$	۰/۴۲۸۶	۰/۰۸۷۲	۱/۹۵۰۶	۲/۳۸۶۹	۰/۴۲۸۶	۰/۰۸۷۲	۱/۹۴۸۶	۲/۳۸۴۶
$۱۰^{-۱}$	۰/۲۴۴۵	۰/۰۸۱۸	۰/۵۶۷۱	۱/۲۱۶۷	۰/۲۴۴۵	۰/۰۸۱۸	۰/۵۶۶۲	۱/۲۱۴۹

مطابق این نتایج، روند کلی تغییرات ضرایب شدت تنش در زمانهای مندرج در جدول شبیه هم و بصورت افزایش ابتدایی و سپس کاهش است. تغییرات تنش T بصورت نوسان بین بیشـینه و کمینـه محلی در زمانهای مذکور است. اما پارامتر B با گذشت زمان کاهش می‌یابد. بطوریکه مقدار تنش T در زمان $۱۰^{-۳}$ حدود ۷۵٪ مقدار آن در زمان $۱۰^{-۴}$ است. روند تغییرات پارامتر B نشان می‌دهد نرخ رشـد تنش T نسبت به نرخ رشد ضریب شدت تنش به مرور زمان کاهش می‌یابد. علاوه بر ایـن، در لحظـات

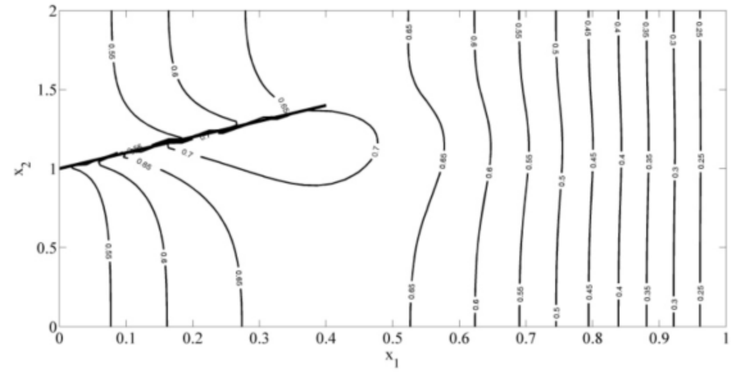
اولیه ضریب شدت تنش مود II منفی است و پس از آن مثبت می‌گردد. به‌عبارت دیگر، جهت حرکت سطوح ترک رویهم در زمانهای ابتدایی اعمال شوک حرارتی عوض می‌شود. برای هر دو فرمولبندی، مقادیر ضرایب شدت تنش با حداقل دقت $۱۰^{-۳}$ انطباق دارند. مقادیر تنش T نیز حداقل دقت $۱۰^{-۲}$ را نشان می‌دهند. در شکلهای (۵-۱۷) تا (۵-۱۹) توزیع دمای گذرا در صفحه همگن برای زمانهای نرمالیزه $۱۰^{-۴}$ تا $۱۰^{-۱}$ آمده است. اثر وجود ترک عایق در توزیع محلی دما در حوزه نوک ترک بخوبی مشهود است.



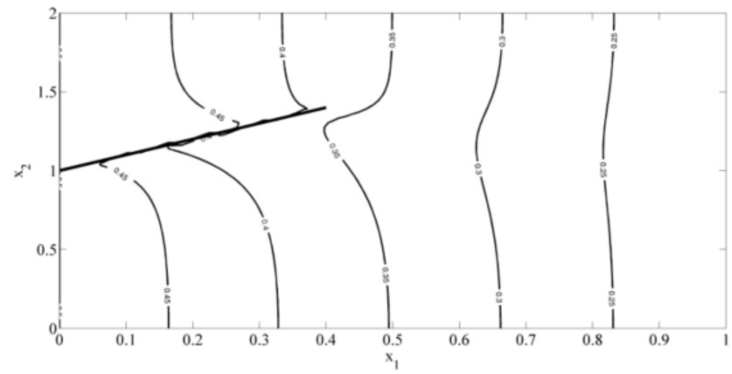
شکل ۵-۱۷- توزیع دمای گذرا در صفحه همگن در زمان نرمالیزه $۱۰^{-۳}$



شکل ۵-۱۸- توزیع دمای گذرا در صفحه همگن در زمان نرمالیزه $۱۰^{-۲}$



شکل ۵-۱۹- توزیع دمای گذرا در صفحه همگن در زمان نرمالیزه 10^{-1}



شکل ۵-۲۰- توزیع دمای گذرا در صفحه همگن در حالت پایا

با فرض تغییرات نمایی مدول الاستیسیته در صفحه FGM، تغییرات ضریب شدت تنش و تـنش T در زمانهای مختلف با خصوصیات زیر و برای حالت کرنش صـفحه‌ای، در جـدولهای (۵-۸) و (۵-۹) آمده است. تفاوت خصوصیات فیزیکی در این دو مثال، ضریب تغییرات مـدول الاستیسـیته اسـت. در حالت اول $K_E=2$ فرض شده است. روند کلی تغییرات پارامترهای شکست در این حالت نیز شبیه صفحه همگن می‌باشد.

$(E\,(W), E\,(0))= (1, 2)$ 1e3,

$(\nu\,(W), \nu\,(0))= (0.3, 0.3)$,

$(\alpha\,(W), \alpha\,(0))= (0.01, 0.009)$,

$(k\,(W), k\,(0))= (2, 1)$,

$(\rho c\,(\mathrm{W}), \rho c\,(0))= (1, 1)$.

جدول ۵-۸- پارامترهای شکست برای صفحه FGM حاوی ترک مایل و تحت شوک حرارتی

زمان نرمالیزه	فرمولبندی نامتعادل				فرمولبندی غیرسازگار			
	K_I	K_{II}	T stress	B	K_I	K_{II}	T stress	B
10^{-4}	۰/۱۳۰۱	-۰/۰۵۳۶	۱/۴۱۰۳	۵/۶۸۸۱	۰/۱۳۶۳	-۰/۰۵۸۵	۱/۴۳۰۷	۵/۵۰۶۶
10^{-3}	۰/۳۱۰۰	۰/۰۸۴۵	۱/۵۴۰۷	۲/۶۰۶۸	۰/۳۲۹۲	۰/۰۸۰۳	۱/۵۷۰۸	۲/۵۰۲۶
10^{-2}	۰/۵۵۱۶	۰/۱۶۷۰	۲/۵۳۹۷	۲/۴۱۵۴	۰/۵۹۶۰	۰/۱۵۵۲	۲/۵۹۸۳	۲/۲۸۶۷
10^{-1}	۰/۱۵۳۷	۰/۰۲۸۵	۰/۰۰۹۵	۰/۰۳۲۵	۰/۱۶۸۶	۰/۰۲۴۵	۰/۰۲۸۷	۰/۰۸۹۴

در حالت دوم K_E=0.5 در نظر گرفته شده است.

$(E(W), E(0)) = (1, 0.5)\ 10e3$,

$(v(W), v(0)) = (0.3, 0.3)$,

$(\alpha(W), \alpha(0)) = (0.01, 0.009)$,

$(k(W), k(0)) = (2, 1)$,

$(\rho c\,(\mathrm{W}), \rho c\,(0)) = (1, 1)$.

جدول ۵-۹- پارامترهای شکست برای صفحه FGM حاوی ترک مایل و تحت شوک حرارتی

زمان نرمالیزه	فرمولبندی نامتعادل				فرمولبندی غیرسازگار			
	K_I	K_{II}	T stress	B	K_I	K_{II}	T stress	B
10^{-4}	۰/۰۶۱۱	-۰/۰۵۹۱	۰/۷۸۴۸	۶/۷۳۶۷	۰/۰۵۹۸	-۰/۰۵۱۳	۰/۷۷۸۵	۶/۸۳۰۵
10^{-3}	۰/۱۵۳۴	-۰/۰۰۸۵	۰/۸۵۴۷	۲/۹۲۲۰	۰/۱۴۷۰	-۰/۰۰۶۵	۰/۸۴۳۰	۳/۰۰۷۷
10^{-2}	۰/۳۱۹۲	۰/۰۲۰۷	۱/۴۹۰۸	۲/۴۵۰۲	۰/۳۰۰۶	۰/۰۱۸۲	۱/۴۵۷۰	۲/۵۴۲۶
10^{-1}	۰/۰۹۹۲	۰/۰۰۴۴	۰/۰۲۸۱	۰/۱۴۸۶	۰/۰۹۲۹	۰/۰۰۳۲	۰/۰۲۶۸	۰/۱۵۱۲

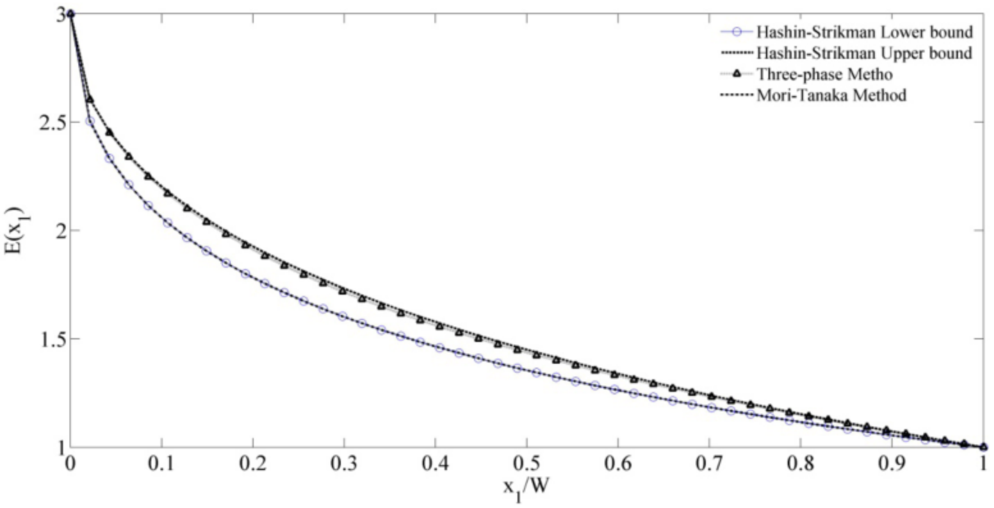
دفت نتایج برای صفحه FGM نسبت به صفحه همگن کمتر است. بخصوص ضریب شدت تـنش مـــــــــود II کـــــــــه بـــــــــاه در زمانهـــــــــای مـــــــــود
۱۹۰
۱۹۰
۱۹۰
۱۹۰
۱۹۰
۱۹۰۱۹۰۱۹۰۱۹۰ گذشت زمان اختلاف مقادبر آن برای فرمولبندیهای مختلف بیشتر مـی‌شـود. اما دقت ضریب شدت تنش مود I و تنش T انطباق بهتری است.

۵-۷-۶- صفحه‌ای از FGM حـاوی یـک تـرک زاویـه‌دار تحـت بـار مکـانیکی- مـدلهای میکرومکانیک

در این مثال، یک ترک مایل در یک صفحه محدود FGM تحت بارگذاری کشـش یکنواخـت در نظر گرفته شده و در شکل (۵-۸) نشان داده شده است. خصوصیات فیزیکی مـوثر در ایـن صـفحه بـا استفاده از مدلهای میکرومکانیک بدست آمده است. مدول الاستیسیته و ضـریب پواسـون مـوثر بـرای مدلهای موری- تاناکا، سه‌فاز و کرانهای هاشین- اشتریکمن در شکلهای (۵-۲۱) و (۵-۲۲) نشان داده شده است. برای تحلیل شکست در حالت تنش صفحه‌ای از داده‌های زیر استفاده شده است.

$(E(W), E(0)) = (1, 3)$,

$(\nu(W), \nu(0)) = (0.3333, 0.2)$,

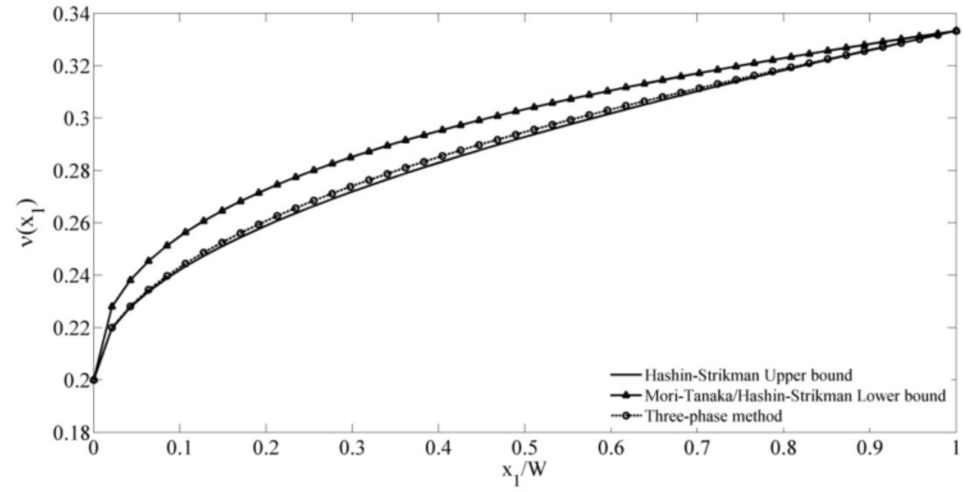


شکل ۵-۲۱- تغییرات ضریب الاستیسیته در صفحه FGM براساس مدلهای مختلف میکرومکانیک

مطابق شکل مذکور، تغییرات ضریب الاستیسیته در کل صفحه برای مدلهای موری-تاناکا و سه‌فاز در محدوده کرانهای بالا و پایین هاشین-اشتریکمن قرار دارد. علاوه بر این، تغییرات ضریب الاستیسیته حاصل از مدل موری-تاناکا بر کران پایین هاشین-اشتریکمن منطبق است. تغییرات ضزیب پواسون نیز به کرانهای هاشین-اشتریکمن محدود می‌شود. اما در این مورد کران پایین مقادیر بیشتری را نسبت به کران بالا می‌دهد. در واقع کرانهای مذکور بعنوان حدود بالا و پایین مدول برشی و مدول حجمی تعریف شده‌اند. مدول الاستیسیته و ضریب پواسون با استفاده از روابط زیر حاصل می‌شوند.

$$E=\frac{9\mu\kappa}{\mu+3\kappa} \qquad (۵-۱۰۷)$$

$$\nu=\frac{3\kappa-2\mu}{2(\mu+3\kappa)} \qquad (۵-۱۰۸)$$



شکل ۵-۲۲- تغییرات ضریب پواسون در صفحه FGM براساس مدلهای مختلف میکرومکانیک

برای این صفحه، پارامترهای شکست در جدول (۵-۱۰) آمده است. طبق نتایج زیر، مقادیر ضرایب شدت تنش و تنش T برای مدلهای مختلف بهم نزدیک است. علت این امر، اختلاف ناچیز پروفیل مدول الاستیسیته و ضریب پواسون برای مدلهای مختلف می‌باشد. علاوه بر این، ضریب شدت تنش مود I برای فرمولبندیهای مختلف با هم انطباق قابل قبولی دارند. اما ضریب شدت تنش مود II حدود ۵٪ و تنش T حدود ۸٪ با هم اختلاف دارند.

جدول ۵-۱۰- پارامترهای شکست برای صفحه FGM حاوی ترک مایل و مدلهای میکرومکانیک

مدلهای میکرومکانیک	فرمولبندی نامتعادل				فرمولبندی غیرسازگار			
	K_I	K_{II}	T stress	B	K_I	K_{II}	T stress	B
هاشین-اشتریکمن کران بالا	۱/۵۳۵۵	۰/۶۵۵۱	۰/۸۵۹۹	۰/۵۶۰۰	۱/۵۲۴۲	۰/۷۰۲۳	۰/۷۸۴۹	۰/۵۱۵۰
هاشین-اشتریکمن کران پایین	۱/۵۲۶۳	۰/۶۵۰۷	۰/۸۵۰۲	۰/۵۵۷۰	۱/۵۱۴۷	۰/۶۹۵۴	۰/۷۸۲۲	۰/۵۱۶۴
موری-تاناکا	۱/۵۲۶۳	۰/۶۵۰۷	۰/۸۵۰۲	۰/۵۵۷۰	۱/۵۱۴۷	۰/۶۹۵۴	۰/۷۸۲۲	۰/۵۱۶۴
سه‌فاز	۱/۵۳۴۴	۰/۶۵۴۵	۰/۸۵۸۶	۰/۵۵۹۵	۱/۵۲۲۹	۰/۷۰۱۷	۰/۷۸۳۹	۰/۵۱۴۸

فصل ششم

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

۶-۱- مقدمه

در این پایان نامه، شکست مواد مرکب هدفمند بصورت محاسبه ضرایب شدت تنش و تنش T بررسی شده است. مسائل در حالت دو بعدی و تحت بارگذاری مکانیکی و حرارتی در نظر گرفته شده است. پارامترهای شکست نیز با کاربرد روش انتگرال برهم کنش در مسائل شامل مود مختلط و علاوه بر آن، روش انتگرال J و همبستگی تغییرمکانها در مسائل شامل مود I شکست محاسبه شده است.

مدل گسسته مسأله الاستیک/ترموالاستیک با کاربرد روش بدون‌المان گلرکین فقط در بعدهای مکانی حاصل شده است. مدلسازی ترک شامل فرآیند غنی‌سازی حوزه نوک ترک برای رصد مناسب تکینی میدانهای ترموالاستیک در این ناحیه و اعمال ناپیوستگی متغیر میدان در سطح ترک با روشهای مرسوم در EFG و با استفاده از مجموعه بردارهای مرتبه‌ای انجام شده است. البته در روشهای مرسوم EFG نیز از پارامترهای مجموعه بردارهای مرتبه‌ای برای اعمال روش استفاده شده است. در مسائل ترموالاستیک که بصورت خطی در نظر گرفته شده؛ معادله هدایت گرمایی گذرا بصورت نیمه-تحلیلی حل شده است. ابتدا این معادله با اعمال روش بدون‌المان گلرکین بصورت یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول خطی در فضا در آمده است. سپس با استفاده از روش تحلیلی تجزیه مودی، حل دستگاه مذکور نسبت به زمان بدست آمده است.

محاسبه پارامترهای شکست با روشهای مختلفی انجام شده است. از روش انرژی انتگرال J و روش مستقیم همبستگی تغییرمکانها بمنظور بدست آوردن ضریب شدت تنش مود I استفاده شده است. برای محاسبه پارامترهای شکست در حالت مود مختلط نیز روش انتگرال برهم کنش برای بارگذاری حرارتی FGM توسعه یافته است که حاصل آن سه فرمولبندی مستقل از هم نامتعادل، ناسازگار و تانسور ثابت الاستیک می‌باشد. فرمولبندیهای مذکور ناشی از انتخابهای متفاوت میدانهای کمکی هستند و هر یک نسبت به انتگرال برهم کنش مواد همگن دارای دو ترم اضافی می‌باشند؛ یک ترم بخاطر گرادیان خصوصیات ماده -که شبیه آن یک ترم در انتگرال J نیز بوجود می‌آید- و ترم دیگر

بدلیل کاربرد بخشی از میدان کمکی همگن برای FGM است. البته ترمهای اضافی مذکور بطور طبیعی در جریان بدست آوردن روابط انتگرال برهم کنش ایجاد می‌شوند و برای حفظ استقلال از سطح/مسیر انتگرال برهم کنش باید در نظر گرفته شوند.

تغییر خصوصیات فیزیکی FGM هم با استفاده از توابع پیوسته مثل تابع نمایی مدل شده است و هم با استفاده از چند مدل میکرومکانیک مواد مرکب بیان شده که در مراجع مختلف برای FGM توسعه یافته‌اند. همچنین اثر تغییر خصوصیات فیزیکی، روی ضریب شدت تنش مود I حرارتی برای توابع پیوسته مورد بحث قرار گرفته است.

۶-۲- نتایج

۱- مدلسازی ترک در مواد مرکب هدفمند تحت بار حرارتی با استفاده از روش بدون المان گلرکین با گره‌بندی نسبتاً درشت (نسبت به روش FEM و XFEM) منجر به نتایج با دقت قابل قبول می‌گردد.

۲- با کاربرد غنی‌سازی نوک ترک، روش مستقیم همبستگی تغییرمکانها نیز مانند روشهای انرژی انتگرال J و انتگرال برهم کنش برای محاسبه ضریب شدت تنش قابل استفاده می‌باشد.

۳- اعمال بار حرارتی گذرا بصورت شوک سرمایشی، باعث افزایش قابل توجه پارامترهای شکست می‌گردد. علی‌رغم اینکه ممکن است این پارامترها در حالت پایا صفر و یا منفی باشند. بنابراین برای سازه‌هایی که تحت بار حرارتی گذرا قرار دارند؛ تحلیل مسأله در حالت گذرا لازم است.

۴- گرادیان خصوصیات فیزیکی ماده بخصوص خصوصیات حرارتی روی مقادیر ضریب شدت تنش اثر قابل توجهی دارند. از این مسأله می‌توان برای طراحی FGM و یا حتی موادی که از نظر الاستیک همگن و از نظر خصوصیات حرارتی متغیر می‌باشند؛ در برابر شکست حرارتی استفاده نمود.

۵- انتگرال برهم کنش یک ابزار کارآمد برای محاسبه ضرایب شدت تنش و تنش T می‌باشد. بطوریکه در حالت مود I شکست، نتایج حاصل از انتگرال برهم کنش دقت بهتری نسبت به نتایج انتگرال J دارند (با کاربرد میدان اصلی مود I بعنوان میدان کمکی، انتگرال برهم کنش تبدیل به انتگرال J می‌گردد).

۶- با توجه به بزرگتر بودن تنش T در FGM نسبت به مواد همگن، منظور نمودن آن در تحلیل ترک مثل محاسبه زاویه رشد ترک اهمیت بیشتری دارد.

۷- نتایج محاسبه ضرایب شدت تنش و تنش T نشان می‌دهد؛ دقت ضرایب شدت تنش محاسبه-شده با فرمولبندیهای مختلف بیشتر از دقت تنش T است.

۶-۳- پیشنهادات

۱- در حوزه ترموالاستیک خطی می‌توان اثر ترم اینرسی را روی پارامترهای شکست محاسبه نمود. حل معادله الاستودینامیک با روش تجزیه مودی بسادگی امکان‌پذیر است. برای ترکهای ساکن، نیز انتگرال برهم کنش شامل یک ترم اضافی می‌باشد.

۲- روش مورد استفاده بمنظور توسعه انتگرال برهم کنش برای بارگذاری حرارتی FGM برای مواد پیزوالکتریک[1]، مگنتوالکتروالاستیک[2] و فروالکتریک[3] و بطور کلی برهم کنش میدانهای خطی و همچنین برای حالتهای ساده شکست الاستیک-پلاستیک نیز قابل توسعه می‌باشد.

۳- رشد ترک در FGM با محاسبه ضرایب شدت تنش و تنش T با استفاده از قوانین تعمیم‌یافته رشد ترک در FGM (شامل تنش T) امکان‌پذیر است.

---

[1] - piezoelectric

[2] - magnetoelectroelastic

[3] - ferroelectric

ضمائم

ضمیمه الف

مرور چند مدل میکرومکانیک FGM

ض‌الف-۱- مقدمه

تخمین خصوصیات مؤثر و قابل اندازه‌گیری، یکی از مباحث مورد توجه در تئوری مـواد مرکـب می‌باشد؛ که معمولاً برحسب خصوصیات و کسر حجمی فازهای تشکیل‌دهنده ماده مرکب بیـان مـی-گردد. مدلهای تئوری میکرومکانیک متنوعی برای پیش‌بینی خصوصیات الاستیک مـواد مرکـب پایـه-گذاری و بکار گرفته شده‌اند. در این بخش، چند مدل میکرومکانیک مواد مرکب -که توسط محققـین برای FGMs بکار گرفته شده‌اند- بطور اجمالی معرفی می‌شود.

روش دیفرانسیلی[۱] توسط بروگمن[۲] معرفی شد و توسط روسکو[۳] تصحیح شد [۱۴۱]. ایده اصلی روش مذکور، در نظر گرفتن ماده مرکب بعنوان یک مخلوط رقیق است که ذرات اضـافه‌شـونده در آن روی یکدیگر کنشی ندارند. کرانهای بالا و پایین خصوصـیات مـؤثر یـک مـاده مرکـب همگـن توسـط هشین[۴] و اشتریکمن[۵] ارائه شد [۱۳۶]. والپل[۶] نیز علاوه بر توسعه کاربرد روابط مذکور، آنها را تصحیح نمود [۱۴۲]. روش خودسازگار[۷] توسط هرشی[۸] معرفی شد [۱۴۳]. کرونر[۹] از این روش برای مدلسازی مدلسازی رفتار مواد چندکریستالی[۱۰] استفاده نمـود. همچنـین روش خودسـازگار بـرای پیوسـتارهای

[1] - differential method

[2] - Bruggeman

[3] - Roscoe

[4] - Hashin

[5] - Shtrikman

[6] - Walpole

[7] - self-consistent method

[8] - Hershey

[9] - kroner

[10] - polycrystalline

چندفازی نیز توسط بودیانسکی[1] [۱۴۴] و هیل[2] [۱۰۹ و ۱۴۵] گسترش یافته است. مدل سه‌فازی[3] فازی[3] بعنوان تعمیم مدل خودسازگار توسط کریستنسن[4] و لو[5] فرمولبندی شده است [۱۳۷]. روش موری- تاناکا[6] نیز توسط موری و تاناکا معرفی [۱۳۸] و توسط بنونیست[7] بازنگری شده است. علاوه بر این، هوانگ[8] و همکارانش مدلهای میکرومکانیک فوق را مورد بررسی قرار داده و با هم مقایسه نموده‌اند. هوانگ و ونگ[9] نیز مدلهای فوق را برای پیوستارهای شامل ترک گسترش داده‌اند [۱۴۶].

اما موضوع مواد مرکب هدفمند متفاوت است. این مواد شامل یک یا چند فاز می‌باشند که دارای کسر حجمی متغیر (نسبت به مختصه‌های مکانی) هستند. در حوزه میکرومکانیک/ماکرومکانیک، معمولاً پاسخ یک سیستم ماکروسکوپی همگن –که از همگن‌سازی سیستم میکرومکانیک اصلی بدست آمده است- برحسب پارامترهای ترموالاستیکی توصیف می‌شود که برای یک المان حجمی نمونه[10] تحت میدانهای ترموالاستیک یکنواخت ارزیابی می‌گردد. اما المانهای حجمی مذکور برای سیستمهای شامل کسر حجمی متغیر و تحت میدانهای غیریکنواخت ترموالاستیک، براحتی قابل تعریف نیست.

---

[1] - Budiansky

[2] - Hill

[3] - three phase model

[4] - Christensen

[5] - Lo

[6] - Mori-Tanaka method

[7] - Benveniste

[8] - Huang

[9] - Hwang

[10] - Representative Volume Element

علی‌رغم مشکلات مذکور، تعدادی از روشهایی که برای توصیف خصوصیات ماکروسکوپی مواد مرکب همگن بنا شده‌اند؛ برای تحلیل ترموالاستیک FGMs نیز بکار رفته‌اند! در تحلیلهای مقدماتی، رهیافتهای مبتنی بر قانون اختلاط[1] بکار گرفته شده‌اند. فوکویی[2] و همکارانش [۱۴۷] ، لی[3] و اردگن اردگن [۱۴۸] و مارک‌ورث[4] و ساندرز[5] [۱۴۹] از قانون اختلاط در سیستمهای الاستیک استفاده کردند. جیاناکوپولوس[6] و همکارانش [۱۵۰] و فینات[7] و سورش[8] [۱۵۱] رهیافت مشابه را در سیستمهای الاستیک-پلاستیک بکار بردند. میلر[9] و لانوتی[10] [۱۵۲] پارامترهای الاستیک و متوسط کرانهای هشین- اشتریکمن را برای سیستمهایی تخمین زده‌اند که می‌توان آنها را بطور آماری همگن در نظر گرفت. البته مدلسازی میکرومکانیک FGMs دارای جنبه‌های مختلف و قابل بحثی است [۱۴۹]. روشهای مرتبه بالاتر با تعمیم رهیافت سلولی[11] [۱۳۵ و ۱۵۳] و تعمیم روش صرفا ریاضی موری-تاناکا [۱۵۴ و ۱۵۵] در مدلهای میکرومکانیک FGMs بکار گرفته شده‌اند. علاوه بر این، زوکر[12] روشهای استاندارد میکرومکانیک را بررسی کرد و با هم مقایسه نمود. ریتر[13] و وراک[1] اعتبار روشهای

---

[1] - rule of mixture

[2] - Fukui

[3] - Lee

[4] - Markworth

[5] - Saunders

[6] - Giannakopoulos

[7] - Finot

[8] - Suresh

[9] - Miller

[10] - Lannutti

[11] - cell approach

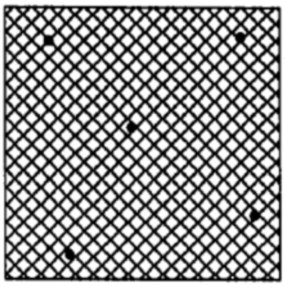
[12] - Zuiker

[13] - Reiter

میانگین‌یابی در میکرومکانیک را برای کاربرد در حوزه FGMs بررسی نمودند که تحت بارگذاری مکانیکی و حرارتی قرار گرفتند [۱۵۶ و ۱۵۷]. یین[2] و همکارانش مدلهای چندمقیاسی[3] و برهم‌کنش ذرات را ارائه نمودند که برای مواد مرکب هدفمند قابل کاربرد است [۱۵۸].

ض‌الف-۲- تقریب رقیق (بدون برهم کنش ذرات)

در مخلوط رقیق فرض می‌شود؛ یک ذره اضافه‌شونده در یک پیوستار بی‌نهایت قرار دارد. تعبیر فیزیکی این فرض آنست که ذرات اضافه‌شونده آنقدر کوچک و فاصله آنها از یکدیگر بحدی زیاد است که هیچ کنشی روی یکدیگر ندارند. در این مورد، اندازه المان حجمی منظور شده، RVE اختیاری است.



شکل ض‌الف-۱- ذرات اضافه‌شده و بدون برهم کنش در یک مخلوط رقیق

مدول حجمی

برای یک ذره کروی به شعاع a که در یک پیوستار بی‌نهایت تحت فشار هیدرواستاتیک و دوردست ε_{kk}^{0} قرار دارد، رابطه تعادل بخاطر وجود تقارن کروی بصورت زیر است.

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{2}{r}\left(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}\right) = 0 \qquad \text{(ض‌الف-۱)}$$

---

1 - Dvorak

2 - Yin

3 - multiscale

که در آن، $\sigma_{\theta\theta}=\sigma_{\phi\phi}$ لحاظ شده است. معادله تعادل فوق برحسب مؤلفه‌های میدان تغییرمکان بصورت زیر قابل نمایش است:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}u_r+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}u_r-\frac{2}{r^2}u_r=0 \qquad \text{(ض‌الف-۲)}$$

در این رابطه، r فاصله شعاعی از مرکز کره و u_r مؤلفه شعاعی تغییرمکان است. فرم کلی حل معادله تعادل فوق بصورت زیر است.

$$u_r = Ar+\frac{B}{r^2} \qquad \text{(ض‌الف-۲)}$$

$$\varepsilon_{kk}=3A \qquad \text{(ض‌الف-۳)}$$

با توجه به حل فوق، مؤلفه تنش شعاعی برحسب مجموع مؤلفه‌های عمودی کرنش بصورت زیر است.

$$\sigma_{rr}=\lambda\varepsilon_{kk}+2\mu\frac{\partial}{\partial r}u_r \qquad \text{(ض‌الف-۴)}$$

در این رابطه، λ و μ ثابتهای لامه می‌باشند. با توجه به رابطه بدست آمده، برای مؤلفه تغییرمکان شعاعی می‌توان با در نظر گرفتن ماتریس m به عنوان کره توخالی و ذره به عنوان یک کره به شعاع a روابط زیر را برای ماتریس (با اندیس m) و ذره (با اندیس i) بیان نمود.

$$u_r^m = Ar+\frac{B}{r^2}$$
$$u_r^i = Cr \qquad \text{(ض‌الف-۵)}$$

ثابتهای A، B و C با اعمال شرایط پیوستگی روی سطح ذره محاسبه می‌شوند.

$$u_r^m=u_r^i \quad at \quad r=a$$
$$\sigma_{rr}^m=\sigma_{rr}^i \quad at \quad r=a \qquad \text{(ض‌الف-۶)}$$

با توجه به مقادیر ثابتهای محاسبه شده، می‌توان نوشت:

$$\frac{\varepsilon_{kk}^{i}}{\varepsilon_{kk}^{m}} = \frac{3C}{3A} = \frac{3(\lambda_m + 2\mu_m)}{3\lambda_i + 2\mu_i + 4\mu_m} \qquad \text{(ض‌الف-۷)}$$

از طرفی،

$$C_{ijkl}^{*}\varepsilon_{kl}^{0} = C_{ijkl}^{m}\varepsilon_{kl}^{0} + c\left(C_{ijkl}^{i} - C_{ijkl}^{m}\right)\varepsilon_{kl}^{i} \qquad \text{(ض‌الف-۸)}$$

که در آن ، c کسر حجمی ذره است. در نهایت، مدول حجمی بصورت زیر قابل محاسبه است.

$$\kappa = \kappa_m + \frac{c(\kappa_i - \kappa_m)}{1 + (1-c)(\kappa_i - \kappa_m)/\left(\kappa_m + \frac{4}{3}\mu_m\right)} \qquad \text{(ض‌الف-۹)}$$

مدول برشی

در یک پیوستار همگن تحت تغییر شکل برشی، میدان تغییرمکان در مختصات دکارتی بصورت زیر قابل نمایش است.

$$\begin{aligned} u_x &= sx \\ u_y &= -sy \\ u_z &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(ض‌الف-۱۰)}$$

که در آن، s بیشترین مقدار کرنش برشی است. با تبدیل مختصات، می‌توان میـدان تغییرمکـان را در دستگاه کروی به صورت زیر نمایش داد:

$$\begin{aligned} u_r &= sr\sin^2\theta\cos z\phi \\ u_\theta &= sr\sin\theta\cos\theta\cos 2\phi \\ u_\phi &= -sr\sin\phi\sin 2\phi \end{aligned} \qquad \text{(ض‌الف-۱۱)}$$

در سیستم غیرهمگن ماتریس-ذره، شکل کلی حل بصورت زیر فرض می‌شود.

$$\begin{aligned} u_r &= U_r(r)\sin^2\theta\cos^2\phi \\ u_\theta &= U_\theta(r)\sin\theta\cos\theta\cos^2\theta \\ u_\phi &= U_\phi(r)\sin\theta\sin^2\phi \end{aligned}$$ (ض‌الف-۱۲)

در این روابط U_r، U_θ و U_φ توابع مجهولی از r هستند که با اعمال شرایط تعادل در مختصات کروی مشخص می‌شوند.

$$\begin{aligned} U_r^m &= B_1 r + \frac{3B_3}{r^4} - \frac{5-4v_m}{(1-2v_m)}\frac{B_4}{r^2} \\ U_\theta^m &= B_1 r - \frac{2B_3}{r^4} + \frac{2B_4}{r^2} \\ U_r^i &= A_1 r - \frac{6v_i}{(1-2v_i)}A_2 r^3 \\ U_\theta^i &= A_1 r - \frac{7-4v_i}{1-2v_i}A_2 r^3 \\ U_\theta &+ U_\phi = 0 \end{aligned}$$ (ض‌الف-۱۳)

با اعمال شرایط پیوستگی تغییرمکان U_r و نیروها در فصل مشترک r=a، رابطه زیر حاصل می‌گردد.

$$\frac{\varepsilon_{12}^i}{\varepsilon_{12}^o} = \frac{15(1-v_m)}{(7-5v_m)\mu_m + 2(4-5v_m)\mu_i}$$ (ض‌الف-۱۴)

با توجه به رابطه (ض‌الف-۸) مدول برشی مؤثر بصورت زیر قابل بیان است.

$$\frac{\mu}{\mu_m} = 1 - \frac{15(1-v_m)\left(1-\frac{\mu_i}{\mu_m}\right)c_i}{(7-5v_m) + 2(4-5v_m)\frac{\mu_i}{\mu_m}}$$ (ض‌الف-۱۵)

ض‌الف-۳- مدل هشین-اشتریکمن

هشین و اشتریکمن کران بالا و پایین مدول الاستیسیته را برای مواد چندفازی با هندسه فـازی دلخواه و شامل فازهای همگن محاسبه نمودنـد[۵۳]. آنهـا از اصـول تغییـرات در الاسـتیتیه خطـی و تغییرمکان سطحی معین استفاد کردند که خلاصه آن در زیر می‌آید.

فرض می‌شود σ_{ij}^0و ε_{ij}^0 به‌ترتیـب میـدانهای معلـوم تـنش و کـرنش یـک پیوسـتار الاسـتیک تغییرشکل یافته با حجم V و سطح S باشند. با فرض عدم وجود نیروهـای کالبـدی، رابطـه سـاختاری بصورت زیر بیان می‌شود.

$$\sigma_{ij}^0 = \lambda_0 \varepsilon_{kk}^0 \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}^0 = L_0\left(\varepsilon_{ij}^0\right) \qquad \text{(ض‌الف-۱۶)}$$

که در آن، λ_0و μ_0 به‌ترتیب ثابتهای لامه می‌باشند. برای سادگی فرض می‌شود؛ مقدار آنها در تمام پیوستار ثابت است. از طرفی، با توجه به رابطه سینماتیک خطی تانسور کـرنش برحسـب مؤلفـه‌هـای میدان تغییرمکان قابل بیان می‌باشد.

$$\varepsilon_{ij}^0 = \frac{1}{2}\left(u_{i,j}^0 + u_{j,i}^0\right) \qquad \text{(ض‌الف-۱۷)}$$

حال فرض می‌شود، تمام یا قسمتی از پیوستار بـا مـاده‌ای دارای مـدولهای متفـاوت λ و μ جـایگزین گردد. ممکن است λ و μ تابع موقعیت باشند.

میدانهای مجهول تنش و کرنش در پیوستار جدید به‌ترتیب با σ_{ij} و ε_{ij} نمایش داده مـی‌شـوند. تانسور پلاریزه تنش بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\sigma_{ij} = L_0\left(\varepsilon_{ij}\right) + p_{ij} \qquad \text{(ض‌الف-۱۸)}$$

همچنین تعاریف زیر در مورد مؤلفه‌های میدانهای تغییرمکان و کرنش در نظر گرفته می‌شود.

$$u_i' = u_i - u_i^0 \qquad \text{(ض‌الف-۱۹)}$$

$$\varepsilon_i' = \varepsilon_i - \varepsilon_i^0$$ (ض‌الف-۲۰)

اگر پارامترهای ε_{ij}' و p_{ij} مشخص شوند؛ میدانهای تنش σ_{ij} و کرنش ε_{ij} نیز معلـوم مـی‌گردنـد. رابطه انرژی داخلی پیوستار تغییریافته برحسب انرژی داخلی پیوستار اول و با کاربرد اصـول تغییـرات بصورت زیر قابل نمایش است.

$$U_p = U_0 - \frac{1}{2}\int \left[p_{ij} H(p_{ij}) - p_{ij}\varepsilon_{ij}' - 2p_{ij}\varepsilon_{ij}^0 \right] dV$$ (ض‌الف-۲۱)

که در آن:

$$U_0 = \frac{1}{2}\int \sigma_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^0 dV$$ (ض‌الف-۲۲)

چون در حالت دوم نیز تعادل برقرار است؛ می‌توان نوشت:

$$L_0\left(\varepsilon_{ij}\right)_{,j} + p_{ij,j} = 0$$ (ض‌الف-۲۳)

در این حالت مرزها ثابت باقی می‌مانند.

$$u_i'(S) = 0$$ (ض‌الف-۲۴)

ثابت می‌شود؛ انتگرال حجمی رابطه (ض‌الف-۲۱) دارای مقدار اکسترمم است. اگر:

$$p_{ij} = L(\varepsilon_{ij}) - L_0(\varepsilon_{ij})$$ (ض‌الف-۲۵)

که در آن:

$$L(\varepsilon_{ij}) = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}$$ (ض‌الف-۲۶)

عملگر H در رابطه (ض‌الف-۲۱) بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$H = (L - L_0)^{-1}$$ (ض‌الف-۲۷)

با جایگزینی مقدار p_{ij} می‌توان مقدار $p_{ij}\,H(p_{ij})$ در رابطه (ض‌الف-۲۱) را بصورت زیر محاسبه نمود.

$$p_{ij}H(p_{ij}) = \frac{\lambda-\lambda_0}{6(\mu-\mu_0)(\kappa-\kappa_0)}p_{kk}^0 + \frac{1}{2(\mu-\mu_0)}p_{ij}p_{ij}$$ (ض‌الف-۲۸)

که در آن،

$$\kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu$$ (ض‌الف-۲۹)

K معرف مدول حجمی است. با کاربرد رابطه سینماتیک خطی و بسط عملگر L، می‌توان رابطه تعـادل را برحسب مؤلفه‌های تغییرمکان در حالت دوم بیان کرد.

$$(\lambda_0+\mu_0)u'_{j,ij} + \mu_0 u'_{i,jj} + p_{ij,j} = 0$$ (ض‌الف-۳۰)

مقدار اکسترمم U_p -انرژی کرنشی ذخیره شده در جسم تغییرشکل یافته- به‌ازای مقـادیر زیـر دارای بیشینه مطلق است

$$\begin{aligned}\lambda &> \lambda_0\\ \mu &> \mu_0\end{aligned}$$ (ض‌الف-۳۱)

و برای مقادیر زیر دارای مقدار کمینه مطلق می‌باشد.

$$\begin{aligned}\lambda &< \lambda_0\\ \mu &< \mu_0\end{aligned}$$ (ض‌الف-۳۲)

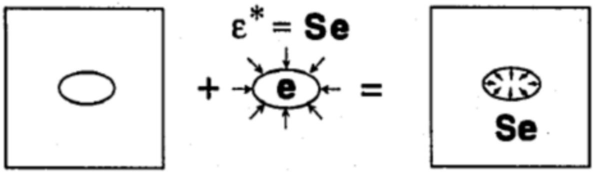
مشابه فرآیند فوق، کران بالا و پایین خصوصیات مؤثر مواد چندفازی بدست آمده است. برای مـواد دو فازی، کرانهای مدول برشی و مدول حجمی بصورت زیر است.

$$\begin{aligned}\mu_i^e &= \mu_i + V_j \Big/ \left\{\frac{1}{\mu_j-\mu_i} + \frac{6(\kappa_i+2\mu_i)V_i}{5\mu_i(3\kappa_i+4\mu_i)}\right\},\\ \kappa_i^e &= \kappa_i + V_j \Big/ \left\{\frac{1}{\kappa_j-\kappa_i} + \frac{3V_i}{(3\kappa_i+4\mu_i)}\right\}, (i \neq j)\end{aligned}$$ (ض‌الف-۳۳)

که در آن، اندیس e نشانگر مقدار مؤثر است. همچنین، V_i کسر حجمی فاز i و μ_i مدول برشی فاز i و κ_i مدول حجمی فاز i می‌باشد. علاوه بر این، روابط $\mu_2^e > \mu_1^e$ و $\kappa_2^e > \kappa_1^e$ برقرار است.

ض‌الف-۴- روش خودسازگار

این روش بعنوان ابزاری برای مدلسازی رفتار پیوستارهای یک فازی از مواد چندکریستالی معرفی شده است. در این پیوستارها، جهت‌گیری کاملاً یا تقریباً تصادفی کریستالها ممکن است موجب ناپیوستگی خصوصیات در فصل مشترک آنها گردد. در تحلیل مواد چندکریستالی با روش خودسازگار، یک کریستال غیرهمگن بعنوان یک ذره کروی شکل یا بیضوی در یک پیوستار بی‌نهایت با خصوصیات همگن مجهول مدل می‌شود.



شکل ض‌الف-۲- نمای کلی روش خودسازگار

فرض می‌شود، این سیستم تحت شرایط تنش یا کرنش یکنواخت در فاصله دور از ذره قرار می‌گیرد. سپس متوسط تنش یا کرنش جهت‌گیری شده در ذره برابر مقادیر متناظر تنش یا کرنش اعمال شده، فرض می‌شود. بدین جهت، این فرآیند خودسازگار نامیده شده است. در ادامه، روش ارائه‌شده توسط هیل بطور خلاصه آمده است. فرض می‌شود یک ذره با شکل اختیاری بیضوی در میان توده همگنی از ماده دیگری قرار دارد (مطابق شکل ض‌الف-۲). تانسورهای مدول الاستیک به‌ترتیب با L و L_1 و معکوس آنها با M و M_1 نمایش داده می‌شود. جابجایی در بی‌نهایت با کرنش یکنواخت $\bar{\varepsilon}$ متناظر با آن، توصیف می‌شود. پیوستگی جابجایی و نیرو در فصل مشترک فازها ضروری است. نکته اصلی این است که ذره بصورت یکنواخت تغییرشکل می‌دهد. تانسور مقید L^* که برای فاز L معرفی شده و

معکوس M است، بعنوان بارگذاری روی فصل مشترک منظور می‌شود. میدان یکنواخت تنش σ^* با این بارگذاری سازگار در نظر گرفته می‌شود. اگر ε^* کرنش یکنواخت متناظر باشد، روابط برقرار است.

$$\sigma^* = -L^*\varepsilon^*$$
$$\varepsilon^* = -M^*\sigma^* \qquad \text{(ض‌الف-۳۴)}$$

می‌توان حل میدان کمکی مسأله را با اعمال مجموع میدانهای $\bar{\sigma}$ و $\bar{\varepsilon}$ بدست آورد. میدانهای تنش σ^* با $\sigma_1 - \bar{\sigma}$ و کرنش ε^* با $\varepsilon_1 - \bar{\varepsilon}$ تعریف می‌شوند. در این روابط، σ_1 و ε_1 میدانهای واقعی حاکم بـر ذره می‌باشند.

$$\sigma_1 - \bar{\sigma} = L^*(\bar{\varepsilon} - \varepsilon_1)$$
$$\varepsilon_1 - \bar{\varepsilon} = M^*(\bar{\sigma} - \sigma_1) \qquad \text{(ض‌الف-۳۵)}$$

اگر e کرنش یکنواخت اعمالی به ذره بیضوی در نظر گرفته شود، می‌توان روابط زیر را نوشـت. مؤلفه‌های تانسور بی‌بعد S توابعی از نسبت مدولهای الاستیک و نسبت قطرهای بیضوی و جهت آن در دستگاه مختصات اولیه می‌باشند. با برقراری روابط زیر می‌توان رابطه‌ای بین تانسـورهای L و M یافـت [۵۷].

$$\varepsilon^* = Se$$
$$\sigma^* = L(\varepsilon^* - e) \qquad \text{(ض‌الف-۳۶)}$$

با ترکیب روابط (ض‌الف-۳۴) و (ض‌الف-۳۶) داریم:

$$L^*S = L(I - S)$$
$$(I - S)M^* = SM \qquad \text{(ض‌الف-۳۷)}$$

که در آن I تانسور واحد است. T تانسور بدون بعد دیگری است که دوگانه‌ای با تانسور S تشکیل مـی-دهند و در روابط زیر صدق می‌کند.

$$M^{*}T = MS = P$$
$$TL = L^{*}S = Q$$ (ض‌الف-۳۸)

با توجه به روابط فوق می‌توان نوشت:

$$M^{*}T = M(I - T)$$
$$(I - T)L^{*} = TL$$
$$T = L^{*}(L^{*} + L)^{-1} = (M + M^{*})^{-1}M$$ (ض‌الف-۳۹)

با توجه به این روابط می‌توان تنش σ^{*} را در ناحیه تبدیل‌یافته بصورت Ts بیان نمود که s تنش مورد نیاز برای از بین بردن کرنش e می‌باشد. تانسورهای P و Q بصورت زیر تعریف می‌شوند [۵۷].

$$PL + MQ = I$$
$$P = M(I - T)$$
$$Q = L(I - S)$$
$$P^{-1} = L^{*} + L$$
$$Q^{-1} = M^{*} + M$$ (ض‌الف-۴۰)

اگر خصوصیات فازها با اندیسهای 1 و 2 مشخص شوند و c_1 و c_2 کسر حجمی فازها باشند؛ روابط بین تنش فازها و متوسط تنش و کرنش (برای کل ماده) بصورت زیر است [۵۷].

$$c_1(\overline{\sigma}_1 - \overline{\sigma}) + c_2(\overline{\sigma}_2 - \overline{\sigma}) = 0$$
$$c_1(\overline{\varepsilon}_1 - \overline{\varepsilon}) + c_2(\overline{\varepsilon}_2 - \overline{\varepsilon}) = 0$$ (ض‌الف-۴۱)

شرایط خودسازگاری نیز با روابط زیر بیان می‌گردد.

$$\overline{\sigma}_1 - \overline{\sigma} = L^{*}(\overline{\varepsilon} - \overline{\varepsilon}_1)$$
$$\overline{\sigma}_2 - \overline{\sigma} = L^{*}(\overline{\varepsilon} - \overline{\varepsilon}_2)$$ (ض‌الف-۴۲)

روابط فوق را می‌توان بصورت زیر مرتب کرد.

(ض‌الـــف-۴۳)

$$(L^* + L_1)\bar{\varepsilon}_1 = (L^* + L_2)\bar{\varepsilon}_2 = (L^* + L)\bar{\varepsilon}$$
$$(M^* + M_1)\bar{\sigma}_1 = (M^* + M_2)\bar{\sigma}_2 = (M^* + M)\bar{\sigma}$$

با ترکیب روابط (ض‌الف-۴۲)و (ض‌الف-۴۳) با (ض‌الف-۴۰) می‌تـوان دسـتگاه معـادلاتی را برحسـب تانسورهای سفتی L و نرمی M برای کل ماده استخراج نمود.

$$c_1(L^* + L_1)^{-1} + c_2(L^* + L_2)^{-1} = (L^* + L)^{-1} = P$$
$$c_1(M^* + M_1)^{-1} + c_2(M^* + M_2)^{-1} = (M^* + M)^{-1} = Q \quad \text{(ض‌الف-۴۴)}$$

با جایگزینی تعریف تانسورهای P و Q -رابطه (الف ۴۰)- در رابطه (الف ۴۵)، این رابطـه بصـورت زیـر قابل نمایش است.

$$c_1(L^* - L_2)^{-1} + c_2(L^* - L_1)^{-1} = P$$
$$c_1(M^* - M_2)^{-1} + c_2(M^* - M_1)^{-1} = Q \quad \text{(ض‌الف-۴۵)}$$

روابط فوق برحسب تانسورهای L و M نیز قابل بیان است.

$$c_1\left(L - L_2\right)^{-1} + c_2\left(L - L_1\right)^{-1} = P$$
$$c_1\left(M - M_2\right)^{-1} + c_2\left(M - M_1\right)^{-1} = Q \quad \text{(ض‌الف-۴۶)}$$

در نهایت، فاکتورهای تانسوری متمرکز A_1 و A_2 برای کرنش و B_1 و B_2 برای تنش بـا توجـه بـه روابط (ض‌الف-۴۲) بصورت زیر تعریف می‌شوند.

$$A_1^{-1}\bar{\varepsilon}_1 = A_2^{-1}\bar{\varepsilon}_2 = \bar{\varepsilon}$$
$$B_1^{-1}\bar{\sigma}_1 = B_2^{-1}\bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma} \quad \text{(ض‌الف-۴۷)}$$

با در نظر گرفتن روابط تانسورهای A و B با تانسورهای P و Q رابطه زیر بدست می‌آید.

$$c_1 A_1 + c_2 A_2 = I = c_1 B_1 + c_2 B_2 \quad \text{(ض‌الف-۴۸)}$$

اگر فرض شود، ذرات دارای شکل کروی باشند و بصورتی در ماتریس توزیع شده باشند که کل ماده مرکب را بتوان ایزوتروپیک در نظر گرفت، تانسور همگن مرتبه چهارم را بصورت زیر می‌توان تعریف نمود.

$$L_{ijkl} = \kappa\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\left(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{il}\delta_{jk} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}\right) \qquad \text{(ض‌الف-۴۹)}$$

البته تانسور L برحسب پارامترهای هیدرواستاتیک و دیویاتریک دارای شکل ساده‌تری است.

$$L = (3\kappa, 2\mu) \qquad \text{(ض‌الف-۵۰)}$$

ماتریس M معکوس ماتریس L است و بصورت زیر قابل نمایش است.

$$M = \left(\frac{1}{3\kappa}, \frac{1}{2\mu}\right) \qquad \text{(ض‌الف-۵۱)}$$

با توجه به تعریف فوق، دستگاه معادلات (ض‌الف-۴۶) برحسب مدولهای حجمی و برشی مؤثر κ و μ بصورت زیر بیان می‌شود [۵۷].

$$\begin{aligned} &\frac{c_1}{\kappa - \kappa_2} + \frac{c_2}{\kappa - \kappa_1} = \frac{\alpha}{\kappa} \\ &\frac{c_1}{\mu - \mu_2} + \frac{c_2}{\mu - \mu_1} = \frac{\alpha}{\mu} \end{aligned} \qquad \text{(ض‌الف-۵۲)}$$

که در آن،

$$\begin{aligned} &\alpha = 3 - 5\beta = \frac{\kappa}{\kappa + \frac{4}{3}\mu} \\ &\beta = \frac{6(\kappa + 2\mu)}{5(3\kappa + 4\mu)} \end{aligned} \qquad \text{(ض‌الف-۵۳)}$$

با فرض کروی بودن شکل ذرات، پارامترهای بدون‌بعد α و β برحسب تانسور S نمایش داده می-شوند.

$$S_{ijkl}=\frac{1}{3}(\alpha-\beta)\delta_{ij}\delta_{kl}+\frac{1}{2}\beta\left(\delta_{il}\delta_{jk}+\delta_{ik}\delta_{jl}\right) \tag{ض‌الف-۵۴}$$

با استفاده از دستگاه معادلات (ض‌الف-۵۳) می‌توان رابطه‌ای برای مدول حجمی استخراج نمود.

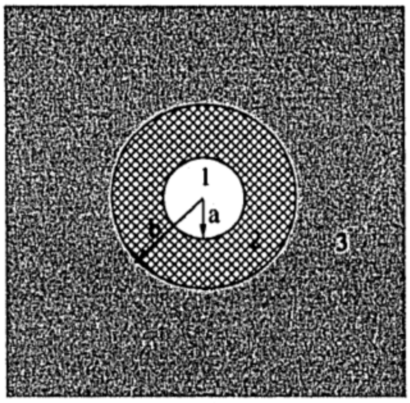
$$\frac{1}{\kappa+\frac{4}{3}\mu}=\frac{c_1}{\kappa_1+\frac{4}{3}\mu}+\frac{c_2}{\kappa_2+\frac{4}{3}\mu} \tag{ض‌الف-۵۵}$$

با جایگزینی این رابطه در یکی از معادلات دستگاه (ض‌الف-۴۶)، رابطه‌ای برای مدول برشی μ حاصل می‌شود.

$$\left(\frac{c_1\kappa_1}{\kappa_1+\frac{4}{3}\mu}+\frac{c_2\kappa_2}{\kappa_2+\frac{4}{3}\mu}\right)+5\left(\frac{c_1\mu_2}{\mu-\mu_2}+\frac{c_2\mu_1}{\mu-\mu_1}\right)+2=0 \tag{ض‌الف-۵۶}$$

ض‌الف-۵- مدل سه‌فاز

مدل سه‌فاز بعنوان تعمیم روش خودسازگار ارائه گردیده است. در این روش نیز مانند روش خودسازگار، فرض می‌شود یک محیط بی‌نهایت با خواص مؤثر مجهول، فاز ذره را دربرگرفته است. در ادامه، روش محاسبه خصوصیات مؤثر با کاربرد این مدل بطور خلاصه آمده است [۲۴]. فرض می‌شود، یک محیط بی‌نهایت تحت شرایط تغییرمکان همگن، در فاصله به‌اندازه کافی دور از مرکز مختصات قرار گرفته است. مطابق شکل (ض‌الف-۳) لایه بیرونی بعنوان فاز همگن معادل در نظر گرفته شود و دارای خصوصیات مؤثر مجهول است. فرم کلی رابطه (ض‌الف-۱۲) بعنوان حل برای اعمال تغییرشکل برشی ساده در فاصله دور از مرکز در نظر گرفته می‌شود.



شکل ض‌الف-۳- مدل میکرومکانیک سه‌فاز: ۱- ذره اضافه‌شده کروی. ۲- فاز ماتریس. ۳- پیوستار همگن معادل

توابع $U_r(r)$، $U_\theta(r)$ و $U_\phi(r)$ بصورت زیر محاسبه می‌شوند [۲۴].

$$U_r^m = B_1 r - \frac{6\nu_m B_2 r^3}{1-2\nu_m} + \frac{3B_3}{r^4} + \frac{(5-4\nu_m)}{(1-2\nu_m)}\frac{B_4}{r^2} \tag{ض‌الف-۵۷}$$

$$U_\theta^m = B_1 r - \frac{(7-4\nu_m)B_2 r^3}{1-2\nu_m} - \frac{2B_3}{r^4} + 2\frac{B_4}{r^2} \tag{ض‌الف-۵۸}$$

$$U_r^i = A_1 r - \frac{6\nu_i A_2 r^3}{1-2\nu_i} \tag{ض‌الف-۵۹}$$

$$U_\theta^i = A_1 r - \frac{7-4\nu_i}{1-2\nu_i} A_2 r^3 \tag{ض‌الف-۶۰}$$

$$U_r^e = D_1 r + \frac{3D_3}{r^4} + \frac{(5-4\nu)}{(1-2\nu)}\frac{B_4}{r^2} \tag{ض‌الف-۶۱}$$

$$U_\theta^e = D_1 r - \frac{2D_3}{r^4} + 2\frac{D_4}{r^2} \tag{ض‌الف-۶۲}$$

$$U_\theta + U_\varphi = 0 \tag{ض‌الف-۶۳}$$

که در آن، m، i و e به‌ترتیب نشانگر ماتریس، ذره اضافه‌شده و محیط مؤثر می‌باشند. با اعمال شرایط پیوند کامل در فصلهای مشترک r=a و r=b، مدول برشی μ با استفاده از رابطه زیر بدست می‌آید.

(ض‌الف-۶۴)

$$A\left(\frac{\mu}{\mu_m}\right)^2+2B\left(\frac{\mu}{\mu_m}\right)+C=0$$

که در آن،

(ض‌الف-۶۵)

$$\begin{aligned}A=&8\left(\frac{\mu_i}{\mu_m}-1\right)(4-5\nu_m)\eta_1V_f^{10/3}-2\left[63\left(\frac{\mu_i}{\mu_m}-1\right)\eta_2+2\eta_1\eta_3\right]V_f^{7/3}\\&+252\left(\frac{\mu_i}{\mu_m}-1\right)\eta_2V_f^{5/3}-50\left(\frac{\mu_i}{\mu_m}-1\right)\left(7-12\nu_m+8\nu_m^2\right)\eta_2V_f\\&+4(7-10\nu_m)\eta_2\eta_3\end{aligned}$$

(ض‌الف-۶۶)

$$\begin{aligned}B=&-2\left(\frac{\mu_i}{\mu_m}-1\right)(1-5\nu_m)\eta_1V_f^{10/3}+2\left[63\left(\frac{\mu_i}{\mu_m}-1\right)\eta_2+2\eta_1\eta_3\right]V_f^{7/3}\\&-252\left(\frac{\mu_i}{\mu_m}-1\right)\eta_2V_f^{5/3}+75\left(\frac{\mu_i}{\mu_m}-1\right)(3-\nu_m)\nu_m\eta_2V_f\\&+\frac{3}{2}(15\nu_m-7)\eta_2\eta_3\end{aligned}$$

(ض‌الف-۶۷)

$$\begin{aligned}C=&4\left(\frac{\mu_i}{\mu_m}-1\right)(5-7\nu_m)\eta_1V_f^{10/3}-2\left[63\left(\frac{\mu_i}{\mu_m}-1\right)\eta_2+2\eta_1\eta_3\right]V_f^{7/3}\\&+252\left(\frac{\mu_i}{\mu_m}-1\right)\eta_2V_f^{5/3}+25\left(\frac{\mu_i}{\mu_m}-1\right)\left(\nu_m^2-7\right)\eta_2V_f\\&-(7+5\nu_m)\eta_2\eta_3\end{aligned}$$

با

(ض‌الف-۶۸)

$$\eta_1 = \left(49 - 50\nu_i\nu_m\right)\left(\frac{\mu_i}{\mu_m} - 1\right) + 35\frac{\mu_i}{\mu_m}\left(\nu_i - 2\nu_m\right) + 35\left(2\nu_i - \nu_m\right)$$

$$\eta_2 = 5\nu_i\left(\frac{\mu_i}{\mu_m} - 8\right) + 7\left(\frac{\mu_i}{\mu_m} + 4\right)$$ (ض‌الف-۶۹)

$$\eta_3 = \frac{\mu_i}{\mu_m}\left(8 - 10\nu_m\right) + \left(7 - 5\nu_m\right)$$ (ض‌الف-۷۰)

در روابط فوق، V_f کسر حجمی ذرات اضافه‌شده و اندیس i و m نشانگر فازهای همگـن ذره و مـاتریس می‌باشند. مدول حجمی مؤثر برای محیط (فاز سوم در شکل (ض‌الف-۳)) بصورت زیر محاسبه می‌شود [۲۴و ۲۵].

$$\kappa = \kappa_m + \frac{V_f\left(\kappa_i - \kappa_m\right)}{1 + \left(1 - V_f\right)\left(\kappa_i - \kappa_m\right) \Big/ \left(\kappa_m + \frac{4}{3}\mu_m\right)}$$ (ض‌الف-۷۱)

ض‌الف-۶- روش موری-تاناکا

این روش با دیدگاه ریاضی محض حاصل شده و در پی‌ریزی تئـوری آن کمتـر بـه پارامترهـای فیزیکی مثل کرنش متوسط، تنش متوسط، تانسورهای تمرکز برای شرایط رقیق و غیـر رقیـق توجـه شده است.

روش موری-تاناکا شامل مراحل پیچیده محاسباتی و مفاهیم کـرنش ویـژه و backstress اسـت [۱۰۲]. البته فرآیندهای ساده‌تری نیز برای این روش ارئه شده است [۱۱]. برای تشریح روش مذکور، سیستمی از ماده مرکب شامل دو فاز در نظر گرفته می‌شود. این سیستم تحت میدان دوردست کرنش یکنواخت ε قرار دارد. برای این سیستم دو فازی، کرنش متوسط بصورت زیر بیان می‌شود.

$$\bar{\varepsilon} = c_1\bar{\varepsilon}_1 + c_2\bar{\varepsilon}_2$$ (ض‌الف-۷۲)

تانسور سفتی مؤثر C بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\overline{\sigma} = C\overline{\varepsilon}$$ (ض‌الف-۷۳)

رابطه فوق را می‌توان برحسب روابط ساختاری تک تک فازها بیان نمود. با توجه بـه روابـط سـاختاری فازها، رابطه (ض‌الف-۷۲) بصورت زیر قابل بیان است.

$$C\overline{\varepsilon} = C_1\overline{\varepsilon} + c_2\left[\overline{\sigma}_2 - C_1\overline{\varepsilon}_2\right]$$ (ض‌الف-۷۴)

در این رابطه،

$$\overline{\sigma}_2 = C_2\overline{\varepsilon}_2$$ (ض‌الف-۷۵)

علاوه بر این، C_1 و C_2 تانسورهای سفتی فازها می‌باشند. اگر فاز ۲ بعنوان فاز ذره در نظر گرفته شود؛ با برقراری شرایط مخلوط رقیق می‌توان نوشت.

$$\overline{\varepsilon}_2 = T\overline{\varepsilon}$$ (ض‌الف-۷۶)

که در آن T تانسور تمرکز کرنش است. با ترکیب روابط (ض‌الف-۷۲) و (ض‌الف-۷۶)، رابطه زیر بدست می‌آید.

$$C = C_1 + c_2\left(C_2 - C_1\right)T$$ (ض‌الف-۷۷)

حال می‌توان روابط روش موری-تاناکا برای شرایط مخلوط رقیق را بـا تعمـیم حـل بـالا بـرای شرایط مخلوط غیررقیق (با برهم کنش ذرات) بدست آورد. تانسور A بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\overline{\varepsilon}_2 = A\overline{\varepsilon}$$ (ض‌الف-۷۸)

برای محاسبه تانسور A، تانسور جدید G بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\overline{\varepsilon}_2 = G\overline{\varepsilon}_1$$ (ض‌الف-۷۹)

تانسور G به تمرکز فاز ذره بستگی دارد. با توجه به روابط (ض‌الف-۷۸) و (ض‌الف-۷۹) تانسور A تانسور را می‌توان برحسب تانسور G بیان نمود.

$$A = \left[c_1 I - c_2 G\right]^{-1} G \qquad \text{(ض‌الف-۸۰)}$$

با کاربرد روش موری-تاناکا برای یک ذره کروی تحت شرایط غیررقیق، می‌توان مدول برشی و حجمی را بصورت زیر محاسبه کرد [۱۰۲]:

$$\mu = \mu_m + c_2\left(\mu_i - \mu_m\right) \frac{1}{1 + \left(1 - c_2\right)\left(\mu_i - \mu_m\right) \Big/ \left[\mu_m + \mu_m\left(9\kappa_m + 8\mu_m\right) / 6\left(\kappa_m + 2\mu_m\right)\right]} \qquad \text{(ض‌الف-۸۱)}$$

$$\kappa = \kappa_m + c_2\left(\kappa_i - \kappa_m\right) \frac{1}{1 + \left(1 - c_2\right)\left(\kappa_i - \kappa_m\right) \Big/ \left(\kappa_m + \frac{4}{3}\mu_m\right)} \qquad \text{(ض‌الف-۸۲)}$$

نتایج حاصل از روش موری-تاناکا با کران پایین هشین-اشتریکمن انطباق دارد.

ض‌الف-۷- مقایسه مدلهای میکرومکانیک

در این بخش مدلهایی از میکرومکانیک با هم مقایسه می‌شوند؛ که در بخشهای قبل شرح داده شده‌اند. خصوصیات فیزیکی سیستم ماده مرکب هدفمند کربید سیلیکن-کربن (SiC/C) با مدلهای مذکور محاسبه و سپس مقایسه می‌شوند. خصوصیات الاستیک عناصر ماده مرکب هدفمند فوق بصورت زیر است.

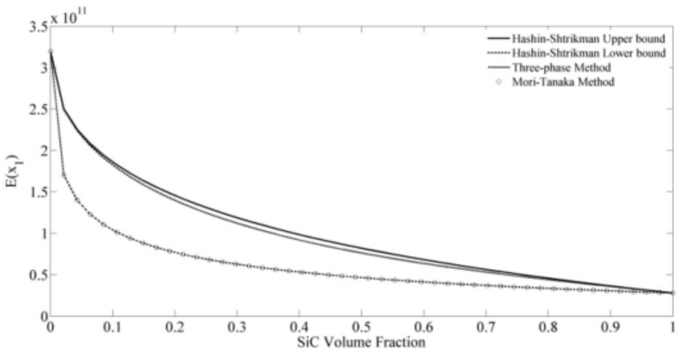
E_{SiC}=320 GPa

E_C=28 GPa

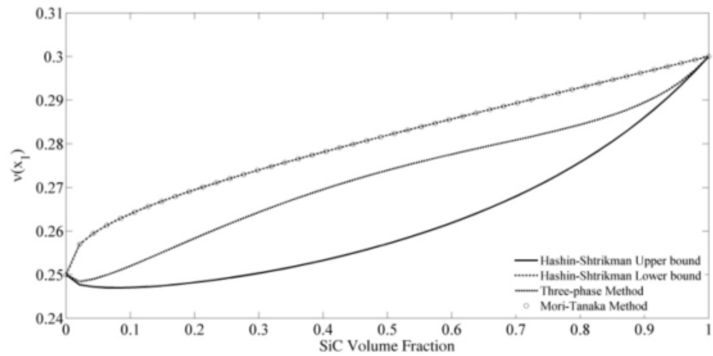
ν_{SiC}=0.25

ν_C=0.3

در شکلهای (ض‌الف-۴) و (ض‌الف-۵) مدولهای حجمی و برشی مؤثر برای مدولهای مختلف میکرومکانیک ماده مذکور با یکدیگر مقایسه شده است. در این مدلها، ماده بصورت یک ماتریس پیوسته شامل ذرات کروی در نظر گرفته شده است.



شکل ض‌الف-۴- تقریب ضریب الاستیسیته با چند مدل میکرومکانیک برای SiC/C



شکل ض‌الف-۵- تقریب ضریب پواسون با چند مدل میکرومکانیک برای SiC/C

زوکر تعدادی از مدلهای استاندارد میکرومکانیک را مورد بحث و بررسی قرار داد و ظرفیت و نیازهای هر روش را برای مدلسازی مواد مرکب هدفمند بیان نمود [۱۵۴]. اولین مشخصه هر مدل ارائه تخمین خصوصیات الاستیک مؤثر بین کرانهای بالا و پایین هشین – اشتریکمن می‌باشد. دومین مشخصه، انطباق خصوصیات مؤثر تخمینی این مدلها با نتایج حاصل از تقریب مخلوط رقیق است. در تقریب مخلوط رقیق در محدوده کران پایین، کسر حجمی عناصر بدست آمده و به ارضای فرضیات این تقریب نزدیکتر است. روش خودسازگار تخمینی از خصوصیات فیزیکی مؤثر منطبق بر نتایج تقریب مخلوط رقیق را ارائه می‌نماید.

ضمیمه ب

توابع زاویه‌ای میدانهای الاستیک حوزه نوک ترک

توابع زاویه‌ای میدانهای تحلیلی حوزه نوک ترک در این ضمیمه مطرح می‌شود. شکل کلی میدان تنش بصورت زیر است.

$$\sigma_{ij}^{aux}=\frac{K_I^{aux}}{\sqrt{2\pi r}}f_{ij}^{I}(\theta)+\frac{K_{II}^{aux}}{\sqrt{2\pi r}}f_{ij}^{II}(\theta)$$ (ض‌ب-۱)

توابع زاویه‌ای میدان تنش بصورت زیر است.

$$f_{11}^{I}(\theta)=cos\frac{\theta}{2}\left(1-sin\frac{\theta}{2}sin\frac{3\theta}{2}\right)$$ (ض‌ب-۲)

$$f_{11}^{II}(\theta)=-sin\frac{\theta}{2}\left(2+cos\frac{\theta}{2}cos\frac{3\theta}{2}\right)$$ (ض‌ب-۳)

$$f_{22}^{I}(\theta)=cos\frac{\theta}{2}\left(1+sin\frac{\theta}{2}sin\frac{3\theta}{2}\right)$$ (ض‌ب-۴)

$$f_{22}^{II}(\theta)=sin\frac{\theta}{2}cos\frac{\theta}{2}cos\frac{3\theta}{2}$$ (ض‌ب-۵)

$$f_{12}^{I}(\theta)=sin\frac{\theta}{2}cos\frac{\theta}{2}cos\frac{3\theta}{2}$$ (ض‌ب-۶)

$$f_{12}^{II}(\theta)=cos\frac{\theta}{2}\left(1-sin\frac{\theta}{2}sin\frac{3\theta}{2}\right)$$ (ض‌ب-۷)

فرم کلی میدان تغییرمکان بصورت زیر است.

$$u_i^{aux}=K_I^{aux}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}g_i^{I}(\theta)+K_{II}^{aux}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}g_i^{II}(\theta)$$ (ض‌ب-۸)

توابع زاویه‌ای میدان تغییرمکان بصورت زیر است.

$$g_1^{I}(\theta)=\frac{1}{4}\left[(2\kappa-1)cos\frac{\theta}{2}-cos\frac{3\theta}{2}\right]$$ (ض‌ب-۹)

$$g_1^{II}(\theta)=\frac{1}{4}\left[(2\kappa+3)sin\frac{\theta}{2}+sin\frac{3\theta}{2}\right]$$ (ض‌ب-۱۰)

$$g_2^{I}(\theta)=\frac{1}{4}\left[(2\kappa+1)sin\frac{\theta}{2}-sin\frac{3\theta}{2}\right]$$ (ض‌ب-۱۱)

$$g_2^{II}(\theta)=-\frac{1}{4}\left[(2\kappa-3)cos\frac{\theta}{2}+cos\frac{3\theta}{2}\right]$$ (ض‌ب-۱۲)

مــراجع

1. Steinberg M. A. (**1986**) "Materials for aerospace" **Sci. America, 255, 4,** pp **59.**

2. Noda N. (**1999**) "Thermal stresses in functionally graded materials" **J. Thermal Stresses, 22,** pp **477.**

3. Erdogan F, Wu B.H. (**1997**) "The surface crack problem for a plate with functionally graded properties" **J. Appl. Mech., Trans ASME, 64,** pp **449.**

4. Kawasaki A. and Watanabe R. (**1993**) "Thermal shock fracture mechanism of metal/ceramic functionally gradient materials" **NATO ASI, Ser. E, 241,** pp **509.**

5. Watanabe R., Kawasaki A. and Mukaida Y. (**1996**) "Fabrication of AINrW thermal barrier type of functionally gradient material and its thermal shock behavior" **Adv. Powder Metal Part Mater, 5,** pp **1651.**

6. Kawasaki A., Watanabe R., Yuki M., Nakanishi, Y. and Onabe H. (**1996**) "Effect of microstructure on thermal shock cracking of functionally graded thermal barrier coatings studied by burner heating Test" **Mater. Trans. JIM, 37, 4,** pp **788.**

7. Kawasaki R., Watanabe R. and Yeh C.-H. (**1996**) "Effect of Graded compositional profile on thermal shock cracking of functionally graded materials as studied by burner heating test" **Bull. Function Graded Materials, 8,** pp **19.**

8. Kawasaki A. and Watanabe R. (**1996**) "Effect of gradient microstructure on thermal shock crack extension in metal/ceramic functionally graded materials" **Function Graded Material,** pp **143.**

9. Wakamatsu Y., Saito T., Ueda S. and Niino M. (**1993**) "Development of a thermal shock evaluation device for functionally gradient materials for aerospace applications" **NATO ASI, Ser. E, 241,** pp **555.**.

10. Liu G. R. and Gu Y. T. (**2005**) "**An Introduction to Meshfree Methods and Their Programming**", Springer, Netherlands.

11. Noda N. and Jin Z. -H. (**1993**) "Steady thermal stresses in an infinite non-homogeneous elastic solid containing a crack" **J. Thermal Stresses, 16, 2,** pp **181.**

12. Jin Z.-H. and Noda N. (**1994**) "Edge crack in a nonhomogeneous half plane under thermal loading" **J. Thermal Stresses, 17, 4,** pp **591.**

13. Noda N. and Jin Z.-H. (**1994**) "A crack in a functionally gradient material under thermal shock" **Arch. Appl. Mech., 64, 2,** pp **99.**

14. Jin Z. -H. and Batra R. C. (**1996**) "Stress intensity relaxation at the tip of an edge crack in a functionally graded material subjected to a thermal shock" **J. Thermal Stresses, 19, 4,** pp **317.**

15. Nemat-Alla M. and Noda N. (**1996**) "Study of an edge crack problem in a semi-infinite functionally graded medium with two dimensionally nonhomogeneous coefficients of thermal expansion under thermal load" **J. Thermal Stresses, 19, 9,** pp **863.**

16. Nemat-Alla M. and Noda N. (**1996**) "Thermal Stress Intensity Factor for Functionally Gradient Half Space with an Edge Crack under Thermal Load" **Arch. Appl. Mech., 66, 8,** pp **569.**

17. Nemat-Alla M. and Noda N. (**1996**) "Edge crack problem in a semi-infinite FGM plate with a bi-directional coefficient of thermal expansion under two-dimensional thermal loading" **Acta Mech., 144,** pp **211.**

18. Erdogan F. and Wu B. H. (**1996**) "Crack Problems in FGM Layers under Thermal Stresses" **J. Thermal Stresses, 19, 3,** pp **237.**

19. Erdogan F. and Wu B. H. (**1997**) "The Surface Crack Problem for a Plate with Functionally Graded Properties" **J. Appl. Mech., Trans ASME, 64, 3,** pp **449.**

20. Noda N. and Guo L. C. (**2008**) "Thermal shock analysis for a functionally graded plate with a surface crack" **Acta Mech., 195, 1-4,** pp **157.**

21. Jin Z.-H. and Paulino G. H. (**2001**) "Transient thermal stress analysis of an edge crack in a functionally graded material" **Int. J. Frac., 107,** pp **73.**

22. Wang B. L., Han J. C. and Du S. Y. (**2000**) "Thermoelastic fracture mechanics for nonhomogeneous material subjected to unsteady thermal load" **J. Appl. Mech., Trans ASME**, 67, pp **87.**

23. Noda N. and Wang B. L. (**2002**) "The collinear cracks in an inhomogeneous medium subjected to transient load" **Acta Mech., 153,** pp **1.**

24. Wang B. L., Mai Y. -W. and Noda N. (**2002**) "Fracture mechanics analysis model for functionally graded materials with arbitrarily distributed properties" **Int. J. Frac., 116,** pp **161.**

25. Guo L. –C. and Noda N. (**2007**) "Modeling method for a crack problem of functionally graded materials with arbitrary properties—piecewise-exponential model" **Int. J. Solids Struct., 44, 21** , pp **6768.**

26. Walters M. C. and Paulino G. H. and Dodds Jr. R. H. (**2004**) "Stress-intensity factors for surface cracks in functionally graded materials under mode-I thermomechanical loading" **Int. J. Solids Struct., 41,** pp **1081.**

27. Yildirim B. and Erdogan F. (**2004**) "Edge crack problems in homogeneous and functionally graded material thermal barrier coatings under uniform thermal load" **J. Thermal Stresses, 27,** pp **311.**

28. Yildirim B., Dag S. and Erdogan F. (**2005**) "Three dimensional fracture analysis of FGM coatings under thermomechanical loading" **Int. J. Frac., 132,** pp **369.**

29. Yildirim B. (**2006**) "An equivalent domain integral method for fracture analysis of functionally graded materials under thermal stresses" **J. Thermal Stresses, 29,** pp **371.**

30. Dag S. (**2007**) "Mixed mode fracture analysis of functionally graded materials under thermal stresses" **J. Thermal Stresses, 30,** pp **269.**

31. Dag S. (**2006**) "Thermal fracture analysis of orthotropic functionally graded materials using an equivalent domain integral approach" **Eng. Frac. Mech., 73,** pp **2802**.

32. Chen J. (**2005**) "Determination of thermal stress intensity factors for an interface crack in a graded orthotropic coating-substrate structure" **Int. J. Frac., 133**, pp **303.**

33. Fujimoto T. and Noda N. (**2000**) "Crack propagation in a functionally graded plate under thermal shock" **Arch. Appl. Mech., 70,** pp **377.**

34. Fujimoto T. and Noda N. (**2001**) "Two crack growth in a functionally graded plate under thermal shock" **J. Thermal Stresses, 24, 3,** pp **237.**

35. Abanto-Bueno J. and Lambros J. (**2006**) "An experimental study of mixed mode crack initiation and growth in functionally graded materials" **Expr. Mech., 46,** pp **179.**

36. Nayroles B., Touzot G. and Villon P. (**1992**) "Generalizing the finite element method, diffuse approximation and diffuse elements" **Comput. Mech., 10,** pp **307.**

37. Belytschko T., Lu Y. Y. and Gu L. (**1994**) "Element-free Galerkin methods" **Int. J. for Num. Meth. Eng., 37,** pp **229.**

38. Belytschko T., Krongauz Y., Organ D., Fleming M. and Krysl P. (**1996**) "Meshless Method, an overview and recent development" **Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 139,** pp **3.**

39. Lu Y. Y., Belytschko T. and Gu L. (**1994**) "New implementation of the element free Galerkin method" **Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 113,** pp **397.**

40. Belytschko T., Krysl P. and Krongauz Y. (**1997**) "A three-dimensional explicit element-free Galerkin method" **Int. J. Num. Meth. Fluids, 24,** pp **1253.**

41. Jun S. (**1996**) "A. Meshless method for nonlinear solid mechanics" **RIKEN Review, 14,** pp **33.**

42. Chen W. H. and Guo X. M. (**2001**) "Element Free Galerkin Method for three-dimensional structural analysis" **CMES – Comput. Model. Eng. Sci., 20, 2,** pp **497.**

43. Belytschko T., Gu L. and Lu Y. Y. (**1994**) "Fracture and crack growth by element free Galerkin methods" **Model. Simu. Mater. Sci. Eng., 2,** pp **519.**

44. Belytschko T., Lu Y. Y., Gu L. and Tabbara M. (**1995**) "Element-free galerkin methods for static and dynamic fracture" **Int. J. Solids Struct., 32,** pp **2547.**

45. Krysl PP and Belytschko T. (**1999**) "The element free Galerkin method for dynamic propagation of arbitrary 3-D cracks" **Int. J. Numer. Meth. Eng., 44, pp 767.**

46. Lu Y.Y., Belytschko T. and Tabbara M. (**1995**) "Element-free Galerkin method for wave propagation and dynamic fracture" **Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.**, **126**, pp **131.**

47. Krysl P. and Belytschko T. (**1995**) "Analysis of thin plates by the element-free Galerkin method" **Comput. Mech., 17,** pp **26.**

48. Krysl P. and Belytschko T. (**1996**) "Analysis of thin shells by the element-free Galerkin method" **Int. J. Solids Struct., 33,** pp **3057.**

49. Chen X. L., Liu G. R. and Lim S. P. (**2003**) "An element free Galerkin method for the free vibration analysis of composite laminates of complicated shape" **Compos. Struct., 59,** pp **279.**

50. Liu G. R., Dai K.Y., Lim K. M. and Guo Y. T. (**2003**) "A radial point interpolation method for simulation of two-dimensional piezoelectric structures" **Smart Mater. Struct., 12,** pp **171.**

51. Belytschko T., Organ D. and Krongauz Y. (**1995**) "A coupled finite element-element-free Galerkin method" **Comput. Mech., 17,** pp **186.**

52. Hegen D. (**1996**) Element-free Galerkin methods in combination with finite element approaches" **Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 135,** pp **143**.

53. Liu G. R. and Gu Y. T. (**2000**) "Coupling of element free Galerkin and hybrid boundary element methods using modified variational formulation" **Comput. Mech., 26, 1,** pp **66.**

54. Gu Y. T. and Liu G. R. (**2003**) "Hybrid boundary point interpolation methods and their coupling with the element free Galerkin method" **Eng. Analy. Bound. Elem., 27,** pp **905.**

55. Gu Y. T., Liu G. R. (**2001**) "A coupled element free Galerkin/boundary element method for stress analysis of two-dimensional solids" **Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 190,** pp **4405.**

56. Beissel S. and Belytschko T. (**1996**) "Nodal integration of the element-free Galerkin method" **Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 139,** pp **49.**

57. Dolbow J. and Belytschko T. (**1999**) "Numerical integration of the Galerkin weak form in meshfree methods" **Comput. Mech., 23,** pp **219.**

58. Liu G. R. (**2002**) "**Mesh Free Methods, Moving Beyond the Finite Element Method**", CRC Press, Boca Raton.

59. Liu G. R. and Yan L. (**1999**) "A study on numerical integrations in element free methods" APCOM '99, pp 979, Singapore.

60. Zienkiewicz O. C. and Taylor R. L. (**2000**) "**The Finite Element Method**" Butterworth-Heinenmann, Oxford.

61. Zhu T. and Atluri S. N. (**1998**) "A modified collocation method and a penalty formulation for enforcing the essential boundary conditions in the element free Galerkin method" **Comput. Mech., 21,** pp **211.**

62. Atluri S. N., Kim H. G. and Cho J. Y. (**1999**) "Critical assessment of the truly Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) and Local Boundary Integral Equation (LBIE) methods" **Comput. Mech., 24,** pp **348.**

63. Krongauz Y. and Belytschko T. (**1996**) "Enforcement of essential boundary conditions in meshless approximations using finite elements" **Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 131,** pp **133.**

64. Yang K. Y. (**1999**), MSc Thesis, "**Development of meshfree techniques for stress analysis**" National University of Singapore.

65. Lancaster P. P. (**1986**) "**Curve and surface fitting, an introduction**" Academic Press,

66. Cleveland W. (**1993**) "**Visualizing Data**" AT&T Bell Laboratories, Murray Hill, NJ.

67. Liu G. R. and Liu M. B. (**2003**) "**Smoothed particle hydrodynamics – a meshfree particle method**", World Scientific, Singapore.

68. Eslami M. R. (**2003**) "**A first Course in Finite Element Analysis**", Amirkabir University, Iran.

69. Arpaci V.S. (**1966**) "**Conduction Heat Transfer**" Addison-Wesley, MA.

70. Kantrovich L. V. and Krylov V. I. (**1964**) "**Approximate Methods for Higher Analysis**" Noordhoff, Netherlands.

71. Akin J. E. (**1976**) "The Generation of Elements with Singularities" **Int. J. Numer. Meth. Eng., 10,** pp **1249.**

72. Benzley S. E. (**1974**) "Rerresentation of singularities with isoparametric finite elements" **Int. J. Numer. Meth. Eng., 8,** pp **537.**

73. Fleming M., Chu Y. A., Moran B. and Belytschko T. (**1997**) "Enriched element-free galerkin methods for crack tip fields" **Int. J. Numer. Meth. Eng., 40,** pp **1483.**

74. Belytschko T., Krongauz Y., Fleming M., Organ D. and Liu W. K. S. (**1996**) "Smoothing and accelerated computations in the element free Galerkin method" **J. Comput. Appl. Math.,74,** pp **111.**

75. Belytschko T. and Fleming M. (**1999**) "Smoothing, enrichment and contact in the element-free Galerkin method" **Comput. Struct. 71,** pp **173.**

76. Krysl P. and Belytschko T. (**1997**) "Element-free Galerkin method, Convergence of the continuous and discontinuous shape functions" **Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 148, 3-4,** pp **257.**

77. Organ D., Fleming M., Terry T., and Belytschko T. (**1996**) "Continuous meshless approximations for nonconvex bodies by diffraction and transparency" **Comput. Mech., 18, 3,** pp **225.**

78. Stolarska M., Chopp D. L., Moes N. and Belytschko T. (**2001**) "Modelling crack growth by level sets in the extended finite element method" **Int. J. Numer. Meth. Eng..** 51, 8, pp 943.

79. Osher S. and Sethian J. A. (**1988**) "Fronts propagating with curvature-dependent speed, Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations" **J. Comput. Phys., 79, 1,** pp **12.**

80. Sethian J. A. (**1999**) "**Level set methods and fast marching methods**" Cambridge University Press, Cambridge, MA.

81. Duflot M. (**2007**) "A study of the representation of cracks with level sets" **Int. J. Numer. Meth. Eng., 70, 11,** pp **1261.**

82. Shih C. F., deLorenzi H. G. and German M. D. (**1976**) "Crack extension modeling with singular quadratic isoparametric elements" **Int. J. Frac., 12,** pp **647.**

83. Parks D. M. (**1974**) "Stiffness Derivative Finite Element Technique for Determination of Crack-tip Stress Intensity Factors" **Int. J. Frac., 10,** pp **487.**

84. Hellen T. K. (**1975**) "On the method of virtual crack extensions" **Int. J. Numer. Meth. Eng., 9,** pp **187.**

85. Parks D. M. (**1977**) "The Vvirtual crack extention method for nonlinear material behavior" **Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 12,** pp **353.**

86. Anderson T. L. (**2005**) "**Fracture Mechanics, Fundamental and Applications**", CRC Press,.

87. Haber R. B., Koh H. M. (**1985**) "Explicit expressions for energy release rates using virtual crack extensions" **Int. J. Numer. Meth. Eng., 21,** pp **301.**

88. deLorenzi H. G. (**1982**) "On the energy release rate and the J-integral for 3-D crack configurations" **Int. J. Frac., 19,** pp **183.**

89. deLorenzi H. G. (**1985**) "Energy release rate calculations by the finite element method" **Eng. Frac. Mech., 21,** pp **129.**

90. Banks-Sills L. and Sherman D. (**1992**) "On the computation of stress intensity factors for three-dimensional geometries by means of the stiffness derivative and J-integral methods" **Int. J. Frac., 53,** pp **1**.

91. Li F. Z., Shih C. F. and Needleman A. (**1985**) "A comparison of methods for calculating energy release rates" **Eng. Frac. Mech., 21,** pp **405.**

92. Eischen J. W. (**1987**) "Fracture of nonhomogeneous materials" **Int. J. Frac., 34,** pp **3.**

93. Erdogan F. (**1985**) "Crack problem for bonded nonhomogeneous materials under antiplane shear loading" **Amer. Soc. Mech. Eng., 41,** pp **12.**

94. Delale F. and Erdogan F. (**1983**) "Crack problem for a nonhomogeneous plane" **J. Appl. Mech., Trans ASME, 50,** pp **609.**

95. Erdogan F. (**1983**) "Stress intensity factors" **J. of Appl. Mech, Trans ASME, 50,** pp **992.**

96. Jin Z. -H and Noda N. (**1994**) "Crack-tip singular fields in nonhomogeneous materials" **J. Appl. Mech., Trans ASME,**;61,738.

97. Jain N., Rousseau C. E. and Shukla A. (**2004**) "Crack-tip stress fields in functionally graded materials with linearly varying properties" **Theo. Appl. Frac. Mech., 42,** pp **155.**

98. Jin Z. -H and Batra R. C. (**1996**) "Some basic fracture mechanics concepts in functionally graded materials" **J. Mech. Phys. Solids, 44,** pp **1221.**

99. Gu PP, Dao M. and Asaro R. J. (**1999**) "A simplified method for calculating the crack-tip field of functionally graded materials using the domain integral" **J. Appl. Mech, Trans ASME, 66,** pp **101.**

100. Anlas G., Santare M. H. and Lambros J. (**2000**) "Numerical calculation of stress intensity factors in functionally graded materials" **Int. J. Frac., 104,** pp **131.**

101. Wilson, W. K. (**1969**) PhD thesis, "**Combined-Mode Fracture Mechanics**" University of Pittsburg.

102. Sutradhar A. and Paulino G. H. (**2004**) "Symmetric Galerkin boundary element computation of T-stress and stress intensity factors for mixed-mode cracks by the interaction integral method" **Eng. Analy. Bound. Elem., 28, 11,** pp **1335.**

103. Kim J. H. and Paulino G. H. (**2002**) "Finite element evaluation of mixed mode stress intensity factors in functionally graded materials" **Int. J. Numer. Meth. Eng., 53, 8,** pp **1903.**

104. Kim J. H. and Paulino G. H. (**2003**) "T-stress, mixed-mode stress intensity factors, and crack initiation angles in functionally graded materials, A unified approach using the interaction integral method" **Compp Meth. Appl. Mech. Eng., 192, 11-12,** pp **1463.**

105. Sih C. G. (**1962**) "On singular character of thermal stress near a crack tip" **J. Appl. Mech., Trans ASME, 51,** pp **587.**

106. Chen J., Wu L. and Du S. (**2000**) "A modified J integral for functionally graded materials" **Mech. Res. Commun., 27 , 3,** pp **301.**

107. KC A. and Kim J. H. (**2008**) "Interaction integrals for thermal fracture of functionally graded materials" **Eng. Frac. Mech. 75, 8,** pp **2542.**

108. Zuiker J. R. (**1995**) "Functionally graded materials, Choice of micromechanics model and limitations in property variation" **Compos. Eng. 5, 7,** pp **807.**

109. Hill R. (**1965**) "A self-consistent mechanics of composite materials" **J. Mech. Phys. Solids, 13, 4,** pp **213.**

110. Williams J. G. and Ewing PP D. (1972) "Fracture under complex stress - The angled crack problem" **Int. J. Frac., 8, 4,** pp **441.**

111. Smith, D. J., Ayatollahi M. R. and Pavier M. J. (**2001**) "The role of T-stress in brittle fracture for linear elastic materials under mixed-mode loading" **Fatigue Frac. Eng. Mater. Struct., 24, 2,** pp **137.**

112. Cotterell B. and Rice J. R. (**1980**) "Slightly curved or kinked cracks" **Int. J. Frac., 16, 2,** pp **155.**

113. O'Dowd N. P., Shih C. F. and Dodds Jr. R. H. (**1995**) "**Role of geometry and crack growth on constraint and implications for ductile/brittle fracture**" ASTM Special Tech. Pub.

114. Larsson S. G. and Carlsson A. J. (**1973**) "Influence of non-singular stress terms and specimen geometry on small-scale yielding at crack tips in elastic-plastic materials" **J. Mech. Phys. Solids, 21, 4,** pp **263.**

115. Betegon C. and Hancock J. W. (**1991**) "Two-parameter characterization of elastic-plastic crack-tip fields" **J. Appl. Mech, Trans ASME, 58, 1,** pp **104.**

116. Du Z. Z. and Hancock J. W. (**1991**) "The effect of non-singular stresses on crack-tip constraint" **J. Mech. Phys. Solids, 39, 4,** pp **555.**

117. O'Dowd N. P. and Shih C. F. (**1991**) "Family of crack-tip fields characterized by a triaxiality parameter-I. Structure of fields" **J. Mech. Phys. Solids, 39, 8,** pp **989.**

118. O'Dowd N. P. and Shih C. F. (**1992**) "Family of crack-tip fields characterized by a triaxiality parameter-II. Fracture applications" **J. Mech. Phys. Solids, 40, 5,** pp **939.**

119. Ayatollahi, M. R., Pavier M. J. and Smith D. J. (**1998**) "Determination of T -stress from finite element analysis for mode I and mixed mode I/II loading" **Int. J. Frac., 91, 3,** pp **283.**

120. Leevers P. S. and Radon J. C. (**1982**) "Inherent stress biaxiality in various fracture specimen geometries" **Int. J. Frac., 19, 4,** pp **311.**

121. Kfouri A. P. (**1986**) "Some evaluations of the elastic T-term using Eshelby's method" **Int. J. Frac., 30, 4,** pp **301.**

122. Cardew G. E., Goldthorpe M. R., Howard I. C. and Kfouri A. P. (**1985**) "On the elastic T-term" **Fundamentals of Deformation and Fracture, Eshelby memorial Symposium.**

123. Chen, C. S. (**2001**) "Numerical assessment of T-stress computation using a p-version finite element method" **Int. J. Frac., 107, 2,** pp **177.**

124. Yukio U. (**1983**) "Characteristics of brittle fracture under general combined modes including those under bi-axial tensile loads" **Eng. Frac. Mech., 18, 6,** pp **1131.**

125. Chao Y. J. and Zhang X. (**1997**) "Constraint effect in brittle fracture" **Fatig. Frac. Mech.,** pp **41.**

126. Becker T. L., Cannon R. M. and Ritchie R. O. (**2001**) "Finite crack kinking and T-stresses in functionally graded materials" **Int. J. Solids Struct., 38, 32-33,** pp **5545.**

127. Kim J. H. and Paulino G. H. (**2004**) "T-stress in orthotropic functionally graded materials, Lekhnitskii and Stroh formalisms" **Int. J. Frac., 126, 4,** pp **345.**

128. Kim J. H. and KC A. (**2008**) "A generalized interaction integral method for the evaluation of the T-stress in orthotropic functionally graded materials under thermal loading" **J. of Appl. Mech, Trans ASME, 75, 5,** pp **0511121.**

129. Dag S. (2007) "Mixed-mode fracture analysis of functionally graded materials under thermal stresses, A new approach using Jk-integral" **J. Thermal Stresses, 30, 3,** pp **269**.

130. Dag S. Erhan Arman E. and Yildirim B. (**2009**) "Computation of thermal fracture parameters for orthotropic functionally graded materials using Jk-integral" **Int. J. Solids Struct., 47, 25-26,** pp **3480.**

131. Sladek J. and Sladek V. (**2006**) "Evaluation of fracture parameters for crack problems in FGM by a meshless method" **J. Theo. Appl. Mech., 44,** pp **603.**

132. Duflot M. (**2008**) "The extended finite element method in thermoelastic fracture mechanics" **Int. J. Numer. Meth. Eng., 74, 5,** pp **827.**

133. Kim J. H. and Paulino G. H. (**2003**) "An accurate scheme for mixed-mode fracture analysis of functionally graded materials using the interaction integral and micromechanics models" **Int. J. Numer. Meth. Eng. 58, 10,** pp **1457.**

134. Zuiker J. R. (**1995**) "Functionally graded materials, Choice of micromechanics model and limitations in property variation" **Compos. Eng. 5, 7,** pp **807.**

135. Aboudi J., Pindera M. J. and Arnold S. M. (**1999**) "Higher-order theory for functionally graded materials" **Compos. Eng., 30, 8,** pp **777.**

136. Hashin Z. and Shtrikman S. (**1963**) "A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials" **J. Mech. Phys. Solids, 11, 2,** pp **127.**

137. Christensen R. M. and Lo K. H. (**1979**) "Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models" **J. Mech. Phys. Solids**, **27, 4,** pp **315.**

138. Mori T. and Tanaka K. (**1973**) "Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions" **Acta Metal. 21, 5,** pp **571.**

139. Sham T. L. (**1991**) "The determination of the elastic T-term using higher-order weight functions" **Int. J. Frac., 48, 2,** pp **81.**

140. Fett T. (**1998**) "T-stresses in rectangular plates and circular disks" **Eng. Frac. Mech., 60, 5–6,** pp **631.**

141. Roscoe R. (1952) "The viscosity of suspensions of rigid spheres" **Brit. J. of Appl. Phys., 3,** pp **267.**

142. Walpole L. J. (1969) "On the overall elastic moduli of composite materials" **J. of Appl. Mech, Trans ASME, 17, 4,** pp **235.**

143. Hershey A. V. (1954) "The elasticity of an isotropic aggregate of anisotropic cubic crystals" **J. of Appl. Mech, Trans ASME, 21, 2,** pp **236.**

144. Budiansky B. (1965) "On the elastic moduli of some heterogeneous materials" **J. Mech. Phys. Solids, 13, 4,** pp **223.**

145. Hill R. (1965) "Continuum micro-mechanics of elastoplastic polycrystals" **J. Mech. Phys. Solids, 13, 2,** pp **89.**

146. Huang Y. and Hwang K. C. (1995) "A unified energy approach to a class of micromechanics models for microcracked solids" **Acta Mech. Sinica, 11, 1,** pp **59.**

147. Fukui Y. and Takashima K. (1994) "Measurement of Young's modulus and internal friction in situ Al-Al_3Ni functionally graded material" **J. Mater. Sci., 29, 9,** pp **2281.**

148. Lee Y. D. and Erdogan F. (1998) "Interface cracking of FGM coatings under steady-state heat flow" **Eng. Frac. Mech., 59, 3,** pp **361.**

149. Markworth A. J. and Saunders J. H. (1995) "A model of structure optimization for a functionally graded material" **Mater. Letters, 22, 1-2,** pp **103.**

150. Giannakopoulos A. E., Suresh S., Finot M. and Olsson M. (1995) "Elastoplastic analysis of thermal cycling, layered materials with compositional gradients" **Acta Metallur. Et Mater., 43, 4,** pp **1335.**

151. Finot M. and Suresh S. (1996) "Small and large deformation of thick and thin-film multi-layers , Effects of layer geometry, plasticity and compositional gradients" **J. Mech. Phys. Solids, 44, 5,** pp **683.**

152. Miller D. P., Lannutti J. J. and Noebe R. D. (1993) "Fabrication and properties of functionally graded NiAl/Al2O3 composites" **J. Mater. Res., 8, 8,** pp **2004.**

153. Pindera M. J. and Dunn P. P. (1997) "Evaluation of the higher-order theory for functionally graded materials via the finite-element method" **Compos. Eng., 28, 1-2,** pp **109.**

154. Zuiker J. R. and Dvorak G. J. (1994) "Coupling in the mechanical response of functionally graded composite materials" **Appl. Mech. Div., AMD., 193,** pp **73.**

155. Zuiker J. and Dvorak G. (1994) "The effective properties of functionally graded composites-I. Extension of the mori-tanaka method to linearly varying fields" **Compos. Eng., 4, 1,** pp **19.**

156. Reiter T. and Dvorak G. J. (1998) "Micromechanical models for graded composite materials, II. thermomechanical loading" **J. Mech. Phys. Solids, 46, 9,** pp **1655.**

157. Reiter T., Dvorak G. J. and Tvergaard V. (1997) "Micromechanical models for graded composite materials" **J. Mech. Phys. Solids, 45, 8,** pp **1281.**

158. Yin H. M., Paulino G. H. and Sun L. Z. (**2008**) "Effective elasticity of functionally graded composites, A micromechanics framework with particle interactions" **AIP Conference Proceedings.**

Shahrood University of Technology

Mechanical Engineering Department

Fracture Parameters for Rectangular Plates Made of Functionally Graded Materials under Thermomechanical Loading

Mohammad Bagher Nazari

Supervisors

Associate Professor Mahmoud Shariati

Professor Mohammad Reza Eslami

Associate Supervisor

Associate Professor Behrooz Hassani

Feb 2011

Abstract

Thermal stress analysis is one of the most important subjects in engineering, since many structures are subjected to elevated temperature. According to numerous studies, the thermal fracture is commonly and complicated failure mode of structures. The main objective of the current study is the evaluation of fracture parameters (stress intensity factors and T stress) for functionally graded materials using element-free Galerkin method. An interaction integral is developed for calculation of thermal fracture parameters. In addition, the J-integral and the displacement correlation technique are implemented.

The level set method is used to model the discontinuities of a crack. Furthermore, the crack-tip enrichment facilitates the capture of crack-tip singularities for thermoelastic fields. In linear thermoelastic governing equations, the semi-analytical mode decomposition method which is the convenient technique for thermal shock analysis is used to obtain the transient temperature distribution. The profile of material characteristics are determined by continuous functions such as exponential function as well as micromechanics models. At last, a few parametric analyses are performed to study the influence of material properties on the thermal stress intensity factor.

Keywords: Functionally graded materials, Element-free Galerkin method, Stress intensity factors, T stress, Conservation integrals and thermal stresses.