بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد مهندسی طراحی کاربردی

عنوان

محاسبه ضرایب شدت تنش در یک محیط محدود اورتوتروپیک ترک‌دار تحت شوک گرمایی با در نظر گرفتن تئوری ترموالاستیسیته لرد شولمان و استفاده از روش المان محدود توسعه‌یافته

نگارنده: جوانشیر لطفی

استاد راهنما

دکتر محمد باقر نظری

شهریور ۱۳۹۸

شماره: ۱۲۶/۲۹۸/دم
تاریخ: ۹۸/۷/۱۳

باسمه‌تعالی

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم / آقای **جوانشیر لطفی** با شماره دانشجویی **۹۵۱۲۸۹۴** رشته مهندسی مکانیک **گرایش طراحی کاربردی** تحت عنوان **محاسبه ضرایب شدت تنش در یک محیط محدود ارتوتروپیک ترک‌دار تحت شوک گرمایی با در نظر گرفتن تئوری ترموالاستیسیته لرد شولمان و استفاده از روش المان محدود توسعه‌یافته** که در تاریخ ۱۳۹۸/۰۶/۱۷ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می‌گردد:

قبول (با درجه: عالی/خوب) ☑ مردود ☐

نوع تحقیق: نظری ■ عملی ☐

عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱- استاد راهنمای اول	دکتر محمد باقر نظری	استادیار	
۲- استاد راهنمای دوم	----------	----------	----------
۳- استاد مشاور	----------	----------	----------
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر حبیب احمدی	استادیار	
۵- استاد ممتحن اول	دکتر حسین توزنده جانی	استادیار	
۶- استاد ممتحن دوم	دکتر محمد جعفری	دانشیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر محمد محسن شاه مردان

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

تبصره: در صورتی که کسی مردود شود حداکثر یکبار دیگر (در مدت مجاز تحصیل) می‌تواند از پایان نامه خود دفاع نماید (دفاع مجدد نباید زودتر از ۴ ماه برگزار شود).

۳

صفحه تقدیم

با نام یاد خدا؛

اینجانب رساله‌ام را به مادر و پدرم تقدیم می‌کنم. که صادقانه تمام تلاششان را برای پیشرفت من انجام دادند. سخن را کوتاه می‌کنم و فقط این رساله را تقدیم به آن‌ها می‌کنم.

صفحه تشکر و قدردانی

سخت معتقدم، که هر پیشرفت و حرکتی که برای شخص یا اشخاصی حاصل می‌شود، از پیشرفت اجتماعی گرفته تا تحصیلی نتیجه راهنمایی‌های یک یا چند معلم است. البته که تلاش خود فرد یا افراد نیز در پیشرفت تاثیر به سزایی دارند، اما نقش معلم همانند نقشه راه است که خدایی نکرده اگر اشتباه باشد مصداق سخن زیبای صائب تبریزی می‌شود که "خشت اول چو نهد معمار کج تا ثریا می‌رود دیوار کج!" معمار در این بیت همان معلم یا همان نشان‌دهنده راه می‌باشد و به نظر اینجانب همین وظیفه خطیر و حساس معلم است که باعث بالا رفتن مقام معلم در ادبیات و فرهنگ ما شده‌است تا جایی که معملی در ادبیات ما همان شغل انبیاست و این مقام بسیار والایی است. این معلم می‌تواند استاد دانشگاه باشد می‌تواند خانواده ما باشد می‌تواند حتی یک دوست باشد به نظر اینجانب هرکسی که راه را به ما نشان دهد معلم ماست.

باعث افتخار من است که در طول مسیر زندگی خصوصا در این دوره سه ساله کارشناسی ارشد در دانشگاه صنعتی شاهرود، معلمین خوبی داشته‌ام و از صمیم قلب از همه این بزرگواران تشکر می‌کنم. خصوصا از دکتر محمدباقر نظری استاد دانشمندم که اگر راهنمایی‌ها و زحمات ایشان نبود هرگز نمی-توانستم این رساله را بنویسم، از مادر، پدر و خانواده‌ام تشکر می‌کنم که معلمین زندگی من بوده‌اند. در ادامه از تمام عزیزان معلمین دوره قبل دانشگاه اساتید دانشگاهی و تمام دوستان و سرورانی که مرا در نگارش این رساله یاری کرده‌اند تشکر می‌کنم. در پایان سخت امیدوارم این معلمین و این دوره‌های تحصیلی باعث عمیق‌تر نگاه کردن به مسائل شود تا بتوان آن‌ها را به بهترین نحو حل کرد فرقی نمی‌کند مسئله مکانیکی یا یک مسئله زندگی و اجتماعی سخن را کوتاه کنم، خلاصه این طور نشود که ما همه شیران ولی شیر علم.

تعهدنامه

اینجانب **جوانشیر لطفی** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد **رشته مهندسی مکانیک- طراحی کاربردی** دانشکده **مهندسی مکانیک و مکاترونیک** دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان‌نامه **محاسبه ضرایب شدت تنش در یک محیط محدود اورتوتروپیک ترک‌دار تحت شوک گرمایی با در نظر گرفتن تئوری ترموالاستیسیته لرد شولمان و استفاده از روش المان محدود** تحت راهنمایی **دکتر محمدباقر نظری** متعهد می‌شوم:

* تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است.

* در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.

* مطالب مندرج در پایان‌نامه تا کنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچگونه مدرک یا امتیاز ارائه نشده است.

* کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.

* در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا از آن استفاده شده است، اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاقی انسانی رعایت شده است.

تاریخ :

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

* کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم افزارها و ...) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد.

* استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پایان‌نامه، از روش المان محدود توسعه یافته (XFEM) برای مدل‌سازی ورق اورتوتروپیک محدودی شامل ترک استفاده شده که در آن وجه دارای ترک در معرض شوک حرارتی یا مکانیکی قرار گرفته‌است. معادلات حاکم بر مسئله در این رساله با سه تئوری ترموالاستیسیته غیرکوپل؛ کوپل و لردشلمان (هر تئوری در یک فصل) در حالت دینامیکی و به کمک روش نیومارک حل شده‌اند. در هر یک از این فصول برای رسیدن به مش بندی مطلوب تست همگرایی گرفته شده‌است. و ضرایب شدت تنش دینامیکی به روش انتگرال J بدست آمده‌اند. در ادامه نیز تغییر زاویه الیاف و تاثیر آن بر روی مقدار ضریب شدت تنش دینامیکی بررسی شده، و نشان داده شده‌است که با بالارفتن زاویه الیاف مقدار ضریب شدت تنش دینامیکی مودهای اول و دوم (K1 وK2) بیشتر می‌شود. همچنین در فصل پنجم (تحلیل با تئوری ترموالاستیسیته کوپل) و ششم (تحلیل با تئوری ترموالاستیسیته لردشلمان) با انجام تست استقلال از مسیر، مستقل از مسیر بودن روش انتگرال J نیز تحقیق و بررسی شده‌است. در انتها نیز با مقایسه نتایج حاصل از سه فصل چهارم، پنجم و ششم (ترموالاستیسیته غیرکوپل، ترموالاستیسیته کوپل و ترموالاستیسته لردشلمان) این نتیجه حاصل شده است که مقدار ضریب شدت تنش دینامیکی مود اول (K1) در تئوری ترموالاستیسته لردشلمان از نظر زمانی دیرتر از تئوری‌های ترموالاستیسته کوپل و غیرکوپل بیشینه می‌شود.

واژه‌های کلیدی: کامپوزیت، اورتوتروپیک، روش المان محدود توسعه یافته، ضرایب شدت تنش دینامیکی، تنش حرارتی، تنش مکانیکی، غنی سازی

چکیده

در این پایان‌نامه، از روش المان محدود توسعه یافته (XFEM) برای مدل‌سازی ورق اورتوتروپیک محدودی شامل ترک استفاده شده که در آن وجه دارای ترک در معرض شوک حرارتی یا مکانیکی قرار گرفته‌است. معادلات حاکم بر مسئله در این رساله با سه تئوری ترموالاستیسیته غیرکوپل؛ کوپل و لردشلمان (هر تئوری در یک فصل) در حالت دینامیکی و به کمک روش نیومارک حل شده‌اند. در هر یک از این فصول برای رسیدن به مش بندی مطلوب تست همگرایی گرفته شده‌است. و ضرایب شدت تنش دینامیکی به روش انتگرال J بدست آمده‌اند. در ادامه نیز تغییر زاویه الیاف و تاثیر آن بر روی مقدار ضریب شدت تنش دینامیکی بررسی شده، و نشان داده شده‌است که با بالارفتن زاویه الیاف مقدار ضریب شدت تنش دینامیکی مودهای اول و دوم (K1 وK2) بیشتر می‌شود. همچنین در فصل پنجم (تحلیل با تئوری ترموالاستیسیته کوپل) و ششم (تحلیل با تئوری ترموالاستیسیته لردشلمان) با انجام تست استقلال از مسیر، مستقل از مسیر بودن روش انتگرال J نیز تحقیق و بررسی شده‌است. در انتها نیز با مقایسه نتایج حاصل از سه فصل چهارم، پنچم و ششم (ترموالاستیسیته غیرکوپل، ترموالاستیسیته کوپل و ترموالاستیسته لردشلمان) این نتیجه حاصل شده است که مقدار ضریب شدت تنش دینامیکی مود اول (K1) در تئوری ترموالاستیسته لردشلمان از نظر زمانی دیرتر از تئوری‌های ترموالاستیسته کوپل و غیرکوپل بیشینه می‌شود.

واژه‌های کلیدی: کامپوزیت، اورتوتروپیک، روش المان محدود توسعه یافته، ضرایب شدت تنش دینامیکی، تنش حرارتی، تنش مکانیکی، غنی سازی

فهرست مطالب

فهرست مطالب ..... د

فهرست جدول‌ها ..... ز

فهرست شکل‌ها ..... م

فهرست علامت‌ها ..... س

فصل ۱: مفاهیم و کلیات ۱

۱-۱ مقدمه ۲

۱-۲ مروری برتحقیقات انجام شده ۳

۱-۳ خلاصه‌ای از مباحث مطرح شده در این رساله ۵

۱-۴ مقدمه‌ای بر مواد کامپوزیتی ۶

۱-۴-۱ معرفی مواد کامپوزیتی ۶

۱-۴-۲ رفتار مکانیکی لمیناها: ۹

۱-۴-۳ اورتوتروپیک‌ها درفضای دو بعد ۱۴

فصل ۲: روش المان محدود توسعه یافته و انتگرال برهم‌کنش ۱۹

۲-۱ مقدمه‌ای بر روش المان محدود ۲۰

۲-۱-۱ تاریخچه روش المان محدود ۲۱

۲-۱-۲ روند حل مسئله در روش المان محدود ۲۱

۲-۲ روش المان محدود توسعه یافته ۳۰

۲-۲-۱ خلاصه‌ای از روش المان محدود توسعه یافته ۳۰

۲-۲-۲ افراز واحد المان‌های محدود غنی شده ۳۱

۲-۳ مدل سازی ترک در روش المان محدود توسعه یافته ۳۳
۲-۳-۱ روابط بنیادی غنی‌سازی ۳۵
۲-۳-۲ روابط مدل‌سازی ترک در مواد اورتوتروپیک ۳۷
۲-۴ روش انتگرال برهم‌کنش ۴۴
۲-۴-۱ معرفی روش انتگرال برهم‌کنش ۴۴
۲-۴-۲ میدان‌های کمکی در روش انتگرال برهم‌کنش ۴۶
۲-۴-۳ فرمول‌بندی حل با انتگرال برهم‌کنش ۴۷
۲-۴-۴ استخراج ضرایب شدت تنش ۴۹
فصل ۳: تحلیل دینامیکی ۵۱
۳-۱ مقدمه ۵۳
۳-۲ معادلات حاکم و گسسته‌سازی در حالت دینامیکی ۵۳
۳-۲-۱ تاثیر پارامتر زمان در معادلات حاکم ۵۳
۳-۲-۲ محاسبه ماتریس جرم برای انواع المان‌ها ۵۴
۳-۲-۳ حل مسئله دینامیکی ۵۵
۳-۳ انتگرال برهم‌کنش در حالت دینامیکی ۵۶
فصل ۴: تحلیل و نتایج ورق اورتوتروپیک ترک‌دار تحت شوک حرارتی با تئوری غیرکوپل ۵۸
۴-۱ مقدمه ۵۹
۴-۲ معرفی معادلات حاکم و گسسته سازی ۵۹
۴-۲-۱ معادلات ناویر ۶۰
۴-۲-۲ معادله انرژی ۶۱
۴-۳ چیدمان درجات آزادی در برنامه رایانه‌ای ۷۲
۴-۴ حل مسائل عددی و تحلیل آن‌ها ۷۴

۴-۴-۱ ترک لبه‌ای استاتیکی و صحت سنجی کد ۷۴
۴-۴-۲ ترک لبه‌ای برای ماده اورتوتروپیک در حالت دینامیکی ۷۷
۴-۴-۳ ترک لبه‌ای برای ماده اورتوتروپیک در حالت دینامیکی تحت بار حرارتی ۸۰
فصل ۵: تحلیل و نتایج ورق اورتوتروپیک ترک‌دار تحت شوک حرارتی با تئوری کوپل ۸۸
۵-۱ مقدمه ۸۹
۵-۲ معرفی معادلات حاکم و گسسته‌سازی ۸۹
۵-۳ چیدمان درجات آزادی در برنامه رایانه‌ای ۹۸
۵-۴ حل مثال عددی و تحلیل نتایج ۱۰۰
۵-۴-۲ تست استقلال از مسیر انتگرال برهم‌کنش ۱۰۴
فصل ۶: تحلیل و نتایج ورق اورتوتروپیک ترک‌دار تحت شوک حرارتی با تئوری لرد شلمان ۱۰۶
۶-۱ مقدمه ۱۰۷
۶-۲ معرفی معادلات حاکم و گسسته‌سازی ۱۰۷
۶-۳ چیدمان درجات آزادی در برنامه رایانه‌ای ۱۱۰
۶-۴ حل مثال عددی و تحلیل نتایج ۱۱۲
۶-۴-۲ تست استقلال از مسیر انتگرال برهم‌کنش ۱۱۷
۶-۵ توضیحات تکمیلی حول ترموالاستیسته لردشلمان و کوپل ۱۱۷
فصل ۷: نتیجه گیری کلی و پیشنهادات ۱۲۰
۷-۱ خلاصه نتیجه‌گیری ۱۲۱
۷-۲ پیشنهادات برای پژوهش‌های بعدی ۱۲۱
منابع و مراجع ۱۲۴

فهرست جدول‌ها

جدول ۱-۱) خلاصه ای از تعداد ضرایب مواد ۱۶

جدول ۴-۱) خواص مکانیکی ماده ۷۴

جدول ۴-۲) مقایسه نتایج با نتایج پسترناک ۷۵

جدول ۴-۳) مقایسه روش‌ها با روش XFEM و BEM ۷۶

فهرست شکل‌ها

شکل ۱-۱) زاویه ناهمسانگردی برای on axis و off axis ۱۸
شکل ۲-۱) مش بندی صفحه مستطیلی با المانهای ۴ گرهای ۲۳
شکل ۲-۲) نگاشت تبدیل یک ناحیه ۴ گره ای به یک مستطیل استاندارد ۲۴
شکل ۲-۳) نمایش یک شبکه المان محدود توسعه یافته شامل ترک و گرههای غنی شده ۳۴
شکل ۲-۴) صفحه دوبعدی اورتوتروپیک شامل ترک لبهای به همراه مختصاتهای قطبی و دکارتی محلی نوک ترک ۴۶
شکل ۲-۵) تبدیل فرم کانتوری انتگرال J به فرم ناحیه‌ای ۴۸
شکل ۴-۱) شرایط مرزی مختلف اعمال شده در حالت کلی..... ۶۳
شکل ۴-۲) شرایط و هندسه مسئله ۴-۴-۱ ..... ۷۶
شکل ۴-۳) صفحه اورتوتروپیک دارای ترک لبه‌ای تحت بار دینامیکی هندسه (الف) بارهای وارده و مش‌بندی صفحه (ب)..... ۷۸
شکل ۴-۴) مقایسه نتایج حل به روش XFEM (حل ارائه شده) با حل به روش BEM (حل سانچز) در زمان بی بعد TOW..... ۷۹
شکل ۴-۵) حل با زوایای مختلف الیاف..... ۸۰
شکل ۴-۶) صفحه اورتوتروپیک ترک دار تحت با حرارتی..... ۸۲
شکل ۴-۷) تست همگرایی صفحه اورتوتروپیک ترکدار تحت بار حرارتی با توابع غنیسازی اورتوتروپیک و جدید ۸۳
شکل ۴-۸) مقایسه حل نگارنده با حل حاجی محمدی ۸۴
شکل ۴-۹) مقادیر K1 صفحه اورتوتروپیک ترکدار تحت بار حرارتی با روش ارائه شده در حالت Off axis. ۸۵

شکل ۴-۱۰) مقادیر K2 صفحه اورتوتروپیک ترکدار تحت بار حرارتی با روش ارائه شده در حالت Off axis ۸۵
شکل ۴-۱۱) حل مسئله با چند dt ۸۶
شکل ۵-۱) صفحه اورتوتروپیک ترک دار تحت با حرارتی ۱۰۱
شکل ۵-۲) تست همگرایی صفحه اورتوتروپیک ترکدار تحت بار حرارتی با توابع غنیسازی اورتوتروپیک و جدید ۱۰۲
شکل ۵-۳) مقایسه حل کوپل و غیرکوپل ۱۰۲
شکل ۵-۴) مقادیر K1 صفحه اورتوتروپیک ترکدار تحت بار حرارتی با روش ارائه شده در حالت Off axis. ۱۰۳
شکل ۵-۵) مقادیر K2 صفحه اورتوتروپیک ترکدار تحت بار حرارتی با روش ارائه شده در حالت Off axis. ۱۰۴
شکل ۵-۶) تست استقلال از مسیر ۱۰۵
شکل ۶-۱) صفحه اورتوتروپیک ترک دار تحت با حرارتی ۱۱۳
شکل ۶-۲) تست همگرایی صفحه اورتوتروپیک ترکدار تحت بار حرارتی با توابع غنی سازی اورتوتروپیک و جدید با درنظر گرفتن ترموالاستیسیته لرد شلمان و $\tau_0 = 0.1$ ۱۱۴
شکل ۶-۳) مقایسه حل کوپل و غیرکوپل با حل لردشلمان ۱۱۵
شکل ۶-۴) مقادیر K1 صفحه اورتوتروپیک ترکدار تحت بار حرارتی با روش ارائه شده در حالت Off axis. ۱۱۶
شکل ۶-۵) مقادیر K2 صفحه اورتوتروپیک ترکدار تحت بار حرارتی با روش ارائه شده در حالت Off axis. ۱۱۶
شکل ۶-۶) تست استقلال از مسیر ۱۱۷

فهرست علامت‌ها

a	طول ترک، (m)
$\mathbf{a_n}$	بردار مجهولات گره‌ای
$\mathbf{b_n}$	بردار مجهولات گره‌ای
$\mathbf{B^U}$	ماتریس مشتق توابع شکل جابجایی
$\boldsymbol{B^T}$	ماتریس مشتق توابع شکل دمایی
$[\mathbf{C}]$	ماتریس میرایی
N	مرتبه تانسور
M	تعداد ابعاد فضا
$\mathbf{C_{nm}}$	بردار مجهولات گره‌ای
$\mathbf{C}_{ijkl}$	تنسور سفتی
E	مدول یانگ، (N/m^2)
$\mathbf{F}$	بردار نیروهای گره‌ای، (N)
F_m	توابع غنی‌سازی نوک ترک، ($m^{0.5}$)
$\mathbf{f}$	بردار نیروی حجمی، (N/m^3)
G	مدول برشی
H	ارتفاع باریکه، (m)
$H_{(z)}$	تابع پله‌ای یکه
J	انتگرال J، (N/m)
J^{aux}	انتگرال J برای میدان کمکی
$[\mathbf{K}]$	ماتریس سختی

K_I	ضریب شدت تنش مود یک، ($N.m^{-1.5}$)
K_{II}	ضریب شدا تنش مود دو، ($N.m^{-1.5}$)
l	طول مشخصه، (m)
$[\mathbf{M}]$	ماتریس جرم، (kg)
M	انتگرال برهم‌کنش، (N/m)
$\mathbf{m_j}$	بردار نرمال بر مسیر انتگرال‌گیری در انتگرال J
N_I	توابع شکل استاندارد
$\mathbf{n_j}$	بردار نرمال بر مسیر انتگرال‌گیری در انتگرال J
q	تابع وزنی برای محاسبه انتگرال برهم‌کنش
q_I	مقادیر گره‌ای مجهول
R	ثابت جهانی گازها، (J/K.mol)
r	شعاع ناحیه انتگرال‌گیری، (m)
r_n	مولفه دستگاه قطبی، (m)
S_A	گره‌های بریده نشده توسط ترک
S_c	گره‌های غنی‌سازی شده نوک ترک
S_H	گره‌های غنی سازی شده گام در مسیر ترک
t	زمان، (s)
$\mathbf{u}$	بردار جابجایی
$\dot{\mathbf{u}}$	بردار سرعت
$\ddot{\mathbf{u}}$	بردار شتاب
U_I	درجات آزادی استاندارد گره‌ای
A	تعداد درایه‌های ماتریس
W	عرض نمونه، (m)

w	چگالی انرژی کرنشی، (N/m^2)
w^{int}	چگالی انرژی کرنشی برهم‌کنش، (N/m^2)
$x1$	مولفه افقی دستگاه مختصات دکارتی
$x2$	مولفه عمودی دستگاه مختصات دکارتی
T	دما، (K)
$T0$	دمای اولیه، (K)

علامت های یونانی

σ	تنسور تنش، (N/m^2)
ρ	چگالی، (kg/m^3)
μ	ثابت لامه، (N/m^2)
ε	تنسور کرنش
γ	ضریب وابستگی
λ	ثابت لامه، (N/m^2)
δ	تابع دلتای کرونیکر
υ	نسبت پواسون
ψ	تابع شکل غنی‌سازی شده برای المان‌های نوک ترک
φ_I	تابع شکل غنی سازی شده برای المان‌های مسیر ترک
$\boldsymbol{\varphi}^{\mathbf{U}}$	توابع شکل جابجایی
$\boldsymbol{\varphi}^{T}$	توابع شکل دما
Γ_s	مسیر انتگرال‌گیری در انتگرال J
κ	ضریب کوپل

$\boldsymbol{\kappa}$	تابع دلتای دیراک
β	مدول تنش دما

بالانویس‌ها

aux	مخفف واژه auxiliary ، مربوط به میدان کمکی
int	مخفف واژه interaction ، مربوط به برهم کنش
s	مربوط به حالت برهم‌نهی

زیرنویس‌ها

0	مربوط به حالت اولیه
I	شمارنده، مربوط به تابع شکل ، شمارنده مود ضریب شدت تنش
(z)	مربوط به تابع z
m	شمارنده، مربوط به تابع غنی‌سازی نوک ترک
n	شمارنده، مربوط به بردار مجهولات گره‌ای
nm	شمارنده، مربوط به بردار مجهولات گره‌ای
s	مربوط به سطوح مرزی
tip	مربوط به نوک ترک
j	شمارنده، مربوط به بردار نرمال بیرونی
C	نامگذاری برای موقعیت المان‌های نوک
H	نامگذاری برای موقعیت المان‌های مسیر
A	نامگذاری موقعیت المان‌های شکل

فصل ۱: مفاهیم و کلیات

۱) مقدمه

۲) مروری بر تحقیقات انجام شده

۳) خلاصه‌ای از مباحث مطرح شده در این رساله

۴) مقدمه‌ای بر مواد کامپوزیتی

۱-۱ مقدمه

یکی از مهمترین ویژگی‌های مواد کامپوزیتی[۱] نسبت بالای استحکام به وزن آن‌ها نسبت به سایر مواد مهندسی متعارف است؛ به عبارت بهتر یک ماده کامپوزیتی استحکام بالاتری نسبت به نمونه هم وزن خود از سایر جنس‌ها از جمله فلز دارد که باعث شده تا کاربردهای مهندسی و صنعتی این مواد در سال‌های اخیر توسعه یابد. با توجه به مقاومت مواد کامپوزیتی، این مواد معمولا به صورت لایه‌های نازک ساخته می‌شوند که رفتاری اورتوتروپیک دارند. رفتار این لایه‌ها به صورت ورق‌های نازک و پوسته‌ها بسیار کارآمد می‌باشند. ایجاد ترک یکی از رایج‌ترین آسیب‌ها در این مواد است که در شرایط مختلف رخ می‌دهد، ترک‌ها در اثر عواملی چون وجود ضعف اولیه در مقاومت مواد تشکیل‌دهنده آن، ایجاد خستگی و یا وجود نقص در هنگام ساخت حاصل می‌شوند. وجود ترک در سازه‌ها باعث گسیختگی سازه‌ها در بارهای کمتر از مقدار مورد انتظار می‌شود. از ویژگی‌ها و مشکلات تحلیل ترک‌خوردگی این مواد، ایزوتروپیک نبودن آن است که سبب می‌شود تا ویژگی‌های مادی آن در زوایای مختلف متفاوت گردد [۱]

حضور هم‌زمان ترک و گرما در سازه‌ها خصوصا سازه‌های کامپوزیتی به دلیل اثر بالا در عمر سازه در صنعت اهمیت بسیاری دارند. تحلیل مسائل ترک با حضور گرما معمولا به هر دو روش عددی و تحلیلی انجام می‌شود[۲] که شامل سه بخش اصلی تئوری مکانیک شکست (مطالعه رشد ترک)، تئوری کامپوزیت-ها و تئوری ترموالاستیسیته می‌باشد؛ می‌توان تئوری مکانیک شکست و کامپوزیت‌ها را زیر مجموعه تئوری ترموالاستیسیته قرارداد؛ در نتیجه می‌توان گفت تئوری حاکم بر اینگونه مسائل تئوری ترموالاستیسیته می‌باشد. تئوری ترموالاستیسیته، رفتار اجسام الاستیک تحت اثر میدان‌های دمای غیر یکنواخت را توصیف می‌کند. و در حقیقت تعمیمی از تئوری الاستیسیته می‌باشد. در چند دهه اخیر

---

[۱] مواد مرکب

[۲] لازم به ذکر است در این رساله تحلیل با روش عددی رایج XFEM صورت گرفته است که در ادامه توضیح داده می‌شود.

مطالعات بسیاری درباره حضور گرما در الاستیسیته (ترموالاستیسیته) انجام شده‌است؛ که این مطالعات در ابتدا سبب به‌وجود آمدن تئوری کلاسیک ترموالاستیسیته شد؛ در این تئوری معادلات حرکت و یا تعادل شامل پارامتر دما هستند؛ اما معادلات انتقال گرما مستقل از میدان کرنش است. پیشرفت بعدی معرفی ترموالاستیسیته کوپل توسط بیوت درسال ۱۹۵۶ بود. این تئوری شامل دو معادله دیفرانسیل جزئی کوپل شده در بردار جا به جایی و میدان دما است که یکی از آن‌ها هایپربولیک و دیگری پارابولیک است [۱].

تئوری ترموالاستیسیته دینامیکی براساس معادلات هدایت گرمایی فوریه تئوری کلاسیک ترموالاستیسیته دینامیکی شناخته می‌شود؛ در تئوری کلاسیک فرض می‌شود که اغتشاشات گرمایی با سرعت‌های نا محدود در محیط انتشار می‌یابند.

برای تئوری ترموالاستیسیته دینامیکی در حالت کوپل و غیر کوپل [۱]راه حل‌های زیادی هم به صورت تحلیلی و هم به صورت عددی پیشنهاد شده است؛ منتها همانطور که در بخش بعد به آن اشاره خواهدشد. در حضور ترک روش المان محدود توسعه‌یافته از دقت بیشتری برای شبیه‌سازی ناپیوستگی سطح ترک و تکینی نوک آن برخوردار است.

۱-۲ مروری برتحقیقات انجام شده

همانطور که پیشتر گفته شد طبیعت مواد، فرآیند ساخت و ... باعث می‌شود اغلب سازه‌ها و قطعات ماشین‌ها دارای خصوصیات غیرهمسانگرد باشند. بطوریکه معمولا فرض می‌شود ورق‌های فلزی علاوه بر صفحات کامپوزیتی دارای خصوصیات اورتوتروپیک هستند. از طرفی، وجود عیوب و ترک باعث کاهش

[۱] - در حالت کوپل درجات آزادی جا به جایی (u,v) با درجه آزادی دما (t) جفت هستند. یعنی با اعمال شوک حرارتی یا هرگونه تغییر دما جا به جایی گره‌ها نیز تغییر می‌کنند و بالعکس اما در حالت غیر کوپل یا غیر جفت شده درجات آزادی جا به جایی و دما مستقل از هم هستند. تفاوت معادلات کوپل و غیر کوپل در ترم کوپل است که در فصول آتی به طور کامل درباره آن بحث خواهد شد.

ظرفیت باربری یا عمر مورد انتظار سازه و ماشین می‌شود. مطالعه تحلیلی ترک در مواد اورتوتروپیک تحت بار مکانیکی توسط محققانی از جمله موشخلیشویلی [۱]، لخنیتسکی [۲]، سی و همکاران [۳] ارائه شده است. نوبایل و کارلونی [۴] با حل تحلیلی مساله مقدار مرزی در مواد ناهمسانگرد به تجزیه و تحلیل یک ترک ایستا تحت بارگذاری دینامیکی پرداختند. علی‌آبادی و همکاران، از روش المان مرزی برای انتشار ترک و تجزیه و تحلیل دینامیکی ترک در مواد اورتوتروپیک استفاده کردند [۵]. سانچز و همکارانش نیز با استفاده از روش المان مرزی، ترک در مواد جامد الاستیک دوبعدی، همگن و ناهمسانگرد که تحت بار دینامیکی قرار دارد را بررسی کردند [۶].

روش المان محدود توسعه‌یافته با توسعه دادن محلی[۱] تقریب در مدل المان محدود حول ترک، کاستی این روش را برطرف ساخته است. این روش اجازه می‌دهد ناپیوستگی سطح ترک و تکینی نوک آن شبیه‌سازی شود، بدون اینکه صریحا ترک در المان‌بندی لحاظ شود. در سال ۱۹۹۸ بلیچکو و بلک برای اولین بار از روش المان محدود توسعه‌یافته در مسایل مکانیک شکست استفاده کردند [۷]. با استفاده از این روش مدل‌سازی رشد ترک می‌تواند بدون شبکه‌بندی مجدد صورت پذیرد. در این روش یکسری توابع خاص در قالب پیکره‌بندی واحد به تقریب المان محدود اضافه می‌گردد. دالبو جزئیات مربوط به تعیین گره‌های اطراف ترک و غنی‌سازی آن‌ها را بیان کرد و روابط پایه جهت اضافه کردن توابع پله‌ای واحد و تکین را برای مدل‌های ساده با المان‌های چهارگره‌ای ارائه کرد [۸]. توسعه توابع جدید غنی‌سازی برای مواد اورتوتروپیک و کاربرد آن در روش المان محدود توسعه‌یافته، توسط اسدپور و همکاران گزارش شد [۹]. تورق در مواد مرکب چندلایه در اثر بار مکانیکی نیز توسط اثنی‌عشری و محمدی [۱۰] گزارش شده است. معتمدی و محمدی ضرایب شدت تنش را برای ترک ساکنی تحت بار دینامیکی [۱۱] و رشد ترک دینامیکی را مطالعه کردند [۱۲و ۱۳]. حسینی و همکاران [۱۴] و

---

[۱] Local

همچنین گلی و همکاران [۱۵] با استفاده از روش المان محدود توسعه‌یافته به محاسبه ضرایب شدت تنش و بررسی رشد ترک در مواد مرکب تابعی اورتوتروپیک تحت بار حرارتی پایا پرداخته‌اند. بایسته و همکاران نیز با روش هم‌هندسه، ضرایب شدت تنش برای یک ترک ساکن در محیط محدود اورتوتروپیک تحت بار گرمایی پایا را گزارش کرده‌اند [۱۶]. اخیرا بوهالا و همکاران [۱۷] انتشار ترک در مواد مونوکلینیک در شرایط مرزی متفاوت را با استفاده از روش المان محدود توسعه‌یافته مورد بررسی قرار دادند و ضرایب شدت تنش در این حالت را گزارش کرده‌اند.

۱-۳ خلاصه‌ای از مباحث مطرح شده در این پایان‌نامه

در این رساله، برای یک ورق اورتوتروپیک در حالت دوبعدی تنش صفحه‌ای، ضرایب شدت تنش دینامیکی تحت بارگذاری حرارتی با استفاده از انتگرال مستقل از مسیر برهم‌کنش (که در مکانیک شکست به آن انتگرال J گفته می‌شود) محاسبه شده است. همچنین مجموعه‌ای جدید از توابع غنی‌سازی برای مدل‌سازی ترک برای بارگذاری حرارتی و مکانیکی در مواد اورتوتروپیک با استفاده از روش عددی المان محدود توسعه یافته[۱] ارائه گردیده است. در این رساله مسائل با سه تئوری ترموالاستیسیته غیرکوپل؛ کوپل (کلاسیک) و لردشلمان حل شده‌اند. همچنین در این رساله ابتدا تمام کد نویسی‌ها و تحلیل‌ها بر اساس تئوری کلاسیک غیرکوپل و سپس کوپل جلو رفته و درنهایت اثر لردشلمان در مسئله اعمال و تحلیل می‌شود. در انتها نیز تاثیر تغییر زاویه الیاف ورق اورتوتروپیک در مقدار ضرایب شدت تنش بررسی خواهدشد.

---

[۱] Extended Finite Element (XFEM)

۱-۴ مقدمه‌ای بر مواد کامپوزیتی

در این بخش از رساله مطالبی به اختصار درباره مواد کامپوزیتی ارائه می‌گردد. می‌شود

۱-۴-۱ معرفی مواد کامپوزیتی

کامپوزیت‌ها یا مواد مرکب به موادی اطلاق می شود که در ساختار آن از بیش از یک جزء استفاده شـده باشـد. معمولا یک ماده کامپوزیت را به صورت یک مخلوط فیزیکی در مقیاس ماکروسکوپیک از دو یـا چنـد مـاده مختلف تعریف می‌کننـد (عموما یک ماده نقش ماتریس یا پایه[۱] و یک یا چند ماده نقش الیاف یا تقویت‌کننده را بازی می‌کنند[۲])، که این مواد خصوصیات فیزیکی و شیمیایی خودرا حفظ کرده و مرز مشـخصـی را با یکدیگر تشـکیل می دهند [۱۸و۲۰]. این مخلوط در مجموع و با توجه به برخی معیارها خواص بهتری از هریک از اجزای تشـکیل دهنده خود را دارا می باشـد؛ که در تک تک مواد مشارکت کننده به صورت مجزاء در همه حالت ها وجود ندارد. اما سوالی که دراین قسمت ممکن است پیش بیاید این است که تفاوت کامپوزیت با آلیاژ چیست؟ پاسخ این سوال را اینگونه می‌توان داد: فرض می‌کنیم کامپوزیت C از مخلوط فیزیکی و ماکروسکوپیک ماتریس A و الیاف B (برای تقویت آن) تشـکیل شده‌باشد، کامپوزیت C خواص جدیدی دارد و درحقیقت یک ماده کاملا جدید است. اما آلیاژ یک ماده با خواص جدید نیسـت بلکه همان ماده غالب با بهبود یک یا چندتا از خواص آن اسـت. برای روشن شدن بهتر تفاوت کامپوزیت و آلیاژ برای هرکدام مثالی واقعی خواهیم‌زد. بتن ماده ایست با اسـتحکام فشاری بالا اما استحکام کششی پایین، از طرف دیگر میل‌گرد فولادی استحکام کششی قابل توجهی دارد از این سو بتن آرمه؛ که از ترکیب فیزیکی بتن و میل‌گرد فولادی[۳] ساخته شده‌است دارای

---

[۱] ماده‌ای که کثر حجمی بیشتری دارد

[۲] لازم به ذکر است نحوه چیدمان الیاف‌ها و تعداد آن‌ها تاثیر به سزایی در خواص کامپوزیت دارد که خارج از بحث این رساله است.

[۳] تحت فرآیند فیزیکی آرماتوربندی

خواص کشـشی و فشاری قابل توجهی است و یک ماده کاملا جدید است[1]. اما درآلیاژها مثلا انواع آلیاژ فولاد خواص اصـلی فولاد ثابت مانده و ماده جدیدتری تولید نمی‌شـود فقط بسـته به ماده اضافه شده (مثلا کربن یا...) یکســـری خواص آلیاژها تغییر می‌کند.[2] پس به طور کلی می‌توان گفت در کامپوزیت ماده جدیدی تولید می‌شود درصورتی که در آلیاژها چنین نیست.

استفاده از این مواد در طول تاریخ نیز مرسوم بوده است. از اولین کامپوزیت‌ها ساخت بشر می‌توان به کاه‌گل و آجرهای گلی در زمان باسـتان اشاره کرد. در این مورد کاه نقش تقویت کننده و گل نقش زمینه یا ماتریس را دارد. در حقیقت با اضافه کردن کاه به گل ماده جدید کاه‌گل در برابر باد و طوفان مقاوم تر از ماده زمینه یعنی کاه است.

همانطور که پیشتر اشاره شد در کامپوزیت‌ها عموماً دو ناحیه متمایز وجود دارد که شامل ماتریس یا فاز پیوسـته[3] (زمینه) و الیاف یا فاز ناپیوسـته (تقویت کننده) می باشـد. در یک کامپوزیت به طور کلی الیاف، عضو باربر اصلی سازه هستند (مثل میل‌گرد در مثال بتن آرمه) در حالیکه ماتریس آن‌ها را در محل و آرایش مطلوب نگاه داشـــته و بعنوان یک محیط منتقل کننده بار بین الیاف عمل می کند (مانند بتن در مثال بتن آرمه)، به علاوه آن‌ها را از صدمات محیطی در اثر بالا رفتن دما و رطوبت حفظ می کند. کامپوزیت ها دارای مزیت هایی نسـبت به سـایر مواد می باشـند که از آن جمله می‌توان بالا بودن نسبت مقاومت به وزن آن‌ها (حتی تا ۱۵برابر برخی از فولادها)، مقاومت بالا نسبت به خوردگی، وجود روش های مختلف سـاخت (ازجمله دستی و...) و امکان تولید اشکال پیچیده و متنوع را نام برد. همین مزیت‌ها دلیل افزایش کاربرد آن‌ها در صنعت شده است [۱۸و۲۰].

به طور کلی کامپوزیت‌ها را می‌توان به دو دسته تقسیم کرد.

---

[1] در این کامپوزیت بتن که کسر حجمی بیشتری دارد ماتریس کامپوزیت است و میل گرد فولادی که برای تقویت بتن استفاده شده‌است الیاف کامپوزیت می‌باشد.

۱. کامپوزیت های ذره‌ای: به کامپوزیت‌هایی که نســبت طول به قطر آنها تقریبا نزدیک یک اســـت کـامپوزیت‌های ذره‌ای می‌گویند. خواص مکانیکی این نوع کامپوزیت ها به جهت الیاف بســتگی ندارد. و همچنین مدول الاستیسیته این کامپوزیت‌ها در مقایسه با نوع دوم بالاتر است.

۲. کـامپوزیـت های لیفی: در این کامپوزیت‌ها خواص مکانیکی با توجه به زاویه الیاف قابل کنترل است [۲۰].

در مطالعه کامپوزیت‌ها به طور معمول ابتدا رفتار کامپوزیت‌های تک لایه (لمینا[۱]) بررســی شده و ســپس به چندلایه‌ها (لمینت[۲]) تعمیم داده می‌شـود. قبل از آن لازم است چند تعریف بنیادی در علم کامپوزیت را مرور کنیم.

۱-۴-۱-۱ مواد ایزوتروپیک[۳] (همسانگرد)

مواد ایزوتروپیک موادی هستند که خواص مکانیکی و آزمایشگاهی آن‌ها مانند مدول الاستیسیته؛ ضریب پوآسون و مدول برشی در تمام جهات یکسان است. به عبارت بهتر خواص مکانیکی و آزمایشگاهی آن‌ها وابسته به مختصات نیست به طور مثال ماده معلوم A یک ماده ایزوتروپیک است اگر و تنها اگر خواص مکانیکی و آزمایشگاهی آن در تمام جهات مختصات دکارتی[۴] x,y,z یکی باشد یعنی بتوانیم رابطه (۱-۱) را برای ماده A بنویسیم[۵].

$$(E,G,\nu)_x = (E,G,\nu)_y = (E,G,\nu)_z \qquad (۱-۱)$$

---

[۱] Lamina

[۲] Laminate

[۳] Isotropic materials

[۴] لازم به ذکر است که **تنها مختصات** استفاده شده در این رساله مختصات دکارتی است که محورهای xyz **برهم عمودند.**

[۵] توجه شود که هیچکدام از خواص مواد در این تحقیق تابع زمان نمی‌باشند.

۱-۴-۱-۲ مواد غیر ایزوتروپیک[۱] (ناهمسانگرد)

مواد غیر ایزوتروپیک یا ناهمسانگرد به موادی گفته می‌شود که برخلاف مواد ایزوتروپیک خواص مکانیکی و آزمایشگاهی آن‌ها مانند مدول الاستیسیته؛ ضریب پوآسون و مدول برشی در تمام جهات یکسان نیست. به عبارت بهتر خواص مکانیکی و آزمایشگاهی آن‌ها وابسته به مختصات است. به طور مثال اگر ماده B یک ماده ناهمسانگرد باشد نمی‌توان رابطه (۱-۱) را برای آن نوشت.

۱-۴-۱-۳ مواد همگن[۲]

به موادی همگن گفته می‌شود که خواص آن‌ها در تمام نقاط آن ماده یکی باشد.

۱-۴-۱-۴ مواد غیر همگن[۳]

این مواد نقطه مقابل مواد همگن هستند. یعنی خواص ان‌ها در تمام نقاط ماده با یکدیگر متفاوت است.

باید توجه داشت که همگن بودن یا نبودن مواد ارتباطی به ایزوتروپ بودن یا نبودن آن‌ها ندارد. درحقیقت در ایزوتروپیک خواص در جهات و در همگن خواص در نقاط اهمیت دارند.

۱-۴-۲ رفتار مکانیکی لمیناها:

به طور کلی قانون هوک را می‌توان به صورت رابطه (۱-۲) نوشت

---

[۱] Non-Isotropic materials

[۲] Homogenous

[۳] Non- Homogenous

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad , \quad i, j = 1,2,...6 \qquad (۲-۱)$$

C_{ijkl} در این رابطه تانسور سفتی[۱] نام دارد که خواص ماده را نشان می دهد. σ_{ij} و ε_{kl} نیز به ترتیب تانسورهای تنش و کرنش می‌باشند. همانطور که مشخص است C_{ijkl} یک تانسور مرتبه ۴ و σ_{ij} و ε_{kl} تانسورهای مرتبه ۲ می‌باشند. برای بدست آوردن تعداد درایه‌های این تنسورها می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد.

$$A = \mathrm{M}^{\mathrm{N}} \qquad (۳-۱)$$

در این رابطه A تعداد درایه، M تعداد ابعاد فضا و N مرتبه تانسور مورد نظر می‌باشد. بنابراین در حالت کلی یعنی فضای سه بعد یعنی M=3 برای تانسورهای سفتی، تنش و کرنش تعداد درایه‌ها به ترتیب برابر ۸۱، ۹و۹ می‌باشد [۱۹].

رابطه (۱-۲) را می‌توان با استفاده از نوشتار ویت [۲]ساده‌تر و به صورت شبه برداری زیر بازنویسی کرد.

$$\sigma_i = C_{ij}\varepsilon_j \quad , \quad i, j = 1,2,...6 \qquad (۴-۱)$$

رابطه فوق درحقیقت حالت شـبه برداری رابطه اصلی هوک (رابطه (۱-۲)) می‌باشد که در آن C_{ij} یک ماتریس ۶×۶ و متقارن است بنابراین در کلی‌ترین حالت دارای ۲۱ عضو مستقل می باشد (رابطه (۱-۵)). همچنین σ_i و ε_j به ترتیب بردارهایی با ابعاد ۶×۱ می‌باشند [۲۰].

---

[۱] Stiffness Matrix

[۲] Voight notification

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ & & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ & & & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ & SYM & & & c_{55} & c_{56} \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix} \quad (۵-۱)$$

این ماتریس برای مواد غیر ایزوتروپیک، بدون داشـــتن هیچ صـــفحه تقارن به همین شـــکل اســـت (کلی‌ترین حالت ممکن). این مواد با نام تری‌کلینیک[۱] مشـــهور هســـتند. با توجه به آن که یک جســـم دارای یک یا چند صفحه تقارن باشد ضرایب سفتی را می توان ساده‌تر کرد. اگر خصوصیات مواد دارای **یک صـــفحه** تقارن باشـــد، این مواد مونوکلینیک[۲] نامیده می شـــوند. به عنوان مثال اگر دارای صفحه تقارن $Z = 0$ باشد، ماتریس سفتی به صورت رابطه (۱-۶) است [۲۰]:

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & c_{16} \\ & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & c_{26} \\ & & c_{33} & 0 & 0 & c_{36} \\ & & & c_{44} & c_{45} & 0 \\ & SYM & & & c_{55} & 0 \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix} \quad (۶-۱)$$

اگر ماده نسبت به دو صفحه تقارن داشته باشد حتما تقارن نسبت به صفحه سوم نیز وجود خواهد داشت، موادی که دارای این خاصیت باشد اورتوتروپیک[۳] نام دارند [۲۰]. در این حالت ماتریس سفتی به صورت رابطه (۱-۷) خلاصه می‌شود [۲۰]:

---

[۱] Triclinin

[2] Monoclinic

[۳] ماده استفاده شده در این رساله orthotropic-

$$C_{ij}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{44} & 0 & 0 \\ & SYM & & & c_{55} & 0 \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix} \qquad (۷-۱)$$

لازم به ذکر اســـت که با توجه به رابطه فوق در مواد اورتوتروپیک تنش های نرمال σ_1 ، σ_2 و σ_3 هیچ ارتباطی با کرنش های برشـــی γ_{12} ، γ_{23} و γ_{13} ندارند درســـت برخلاف مواد تری‌کلینیک که این مولفه ها به هم مرتبط هســـتند. همچنین هیچ ارتباطی بین تنش های برشـــی و کرنش های نرمال و همچنین بین تنش های برشی و صفحات کرنشی در صفحات مختلف وجود ندارد. توجه شود که ماده اورتوتروپیک مورد بررسی در این رساله همگن است.

اما حالتی بین اورتوتروپیک و ایزوتروپیک (که پیشتر بیان شده‌بود) وجود دارد که به آن ایزوتروپیک عرضی می‌گویند. ایزوتروپیک عرضی موادی هستند که در هر نقطه از آن‌ها یک صفحه وجود دارد که خواص مکانیکی آن در تمام جهات مساوی باشد. مثلا اگر صفحه ایزوتروپیک صفحه ۱-۲ باشد، آن‌گاه [۲۰]:

$$C_{ij}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{22} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{44} & 0 & 0 \\ & SYM & & & c_{44} & 0 \\ & & & & & \frac{c_{11}-c_{22}}{2} \end{bmatrix} \qquad (۸-۱)$$

اگر تعداد صفحات تقارن به تعداد نامحدودی برسد، تعداد ضرایب غیر وابسته به دو عدد تقلیل می یابد، این ماده ایزوتروپیک نامیده می شود که در بخش ۱-۴-۱-۱ درباره آن توضیح داده شد. ماتریس سفتی در این حالت به صورت زیر می‌باشد.

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} & 0 & 0 \\ & SYM & & & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} \end{bmatrix} \qquad (۹-۱)$$

با توجه به اینکه این رساله درباره مواد اورتوتروپیک می‌باشد. از این پس تنها خواص و نکات مربوط به مواد اورتوتروپیک ذکر می‌شود.

با معکوس گرفتن از ماتریس سفتی ماتریس نرمی[۱] بدست می‌آید. به عبارت بهتر ماتریس نرمی رابطه بین کرنش با تنش را مشخص می‌کند این در صورتی است که ماتریس سفتی (همانطور که نشان داده‌شد) رابطه بین تنش با کرنش را مشخص می‌کند. به عنوان مثال ماتریس نرمی برای ماده اورتوتروپیک به صورت زیر است:

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{-\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{21}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{31}}{E_3} & \frac{-\nu_{32}}{E_3} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \qquad (۱۰-۱)$$

[۱] Compliance

E_1 ، E_2 ، E_3 به ترتیب مدول یانگ در مختصات جهانی[۱] ۱ ، ۲ و ۳ می باشند [۲۰].

رابطه (۱-۱۱) که معکوس رابطه کلی هوک (رابطه (۱-۲)) می‌باشد به رابطه کرنش تنش معروف است. لازم به ذکر است به علت ساده‌تر بودن درایه‌ها در ماتریس نرمی در این پایان‌نامه بیشتر از رابطه کرنش تنش استفاده شده است [۱۸و۲۰].

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}\sigma_{kl} \quad , \quad i, j = 1,2,...6 \qquad (۱۱-۱)$$

مشابه توضیحی که پیشتر برای معادله (۱-۲) ذکر شد می‌توان معادله بالا را به صورت شبه برداری زیر نوشت [۲۰].

$$\varepsilon_i = S_{ij}\sigma_i \quad , \qquad i,j = 1,2,3 \dots .6 \qquad (۱۲-۱)$$

۱-۴-۳ اورتوتروپیک‌ها درفضای دو بعد[۲]

همانطورکه در بخش قبل نشان داده شد در حالت سه بعدی[۳] تحلیل کامپوزیت‌ها دشوار و حجیم می‌باشد. از این رو همواره به دنبال ساده کردن مسئله و تبدیل آن به حالت دو بعدی هستیم. در این رساله نیز تحلیل اورتوتروپیک به صورت دوبعدی انجام شده‌است. به طور کلی برای تبدیل یک مسئله سه بعدی به دو بعدی می‌توان یکی از سه فرض زیر را به‌کار برد.

- تقارن محوری[۴]: این فرض تنها برای هندسه‌های متقارن مثل استوانه کاربرد دارد و با اعمال این فرض تمامی مشتقات نسبت به محور θ صفر و مسئله به یک مسئله دو بعدی تبدیل می‌شود.

---

[۱] Global
[۲] 2D
[۳] 3D
[۴] Axisimetric

- کرنش صفحه‌ای[1]: در حالت کرنش صفحه‌ای مولفه کرنش در راستای ضخامت صفر و مسئله به مسئله‌ای دو بعدی تبدیل می‌شود. در صورتی می‌توانیم شرط کرنش صفحه‌ای را برای مسئله اعمال کنیم که سازه مورد تحلیل ما طویل و بار اعمالی در راستای ضخامت باشد. توجه شود وجود هر دو شرط برای فرض کرنش صفحه ای الزامی‌است.
- تنش صفحه‌ای[2] :در حالت تنش صفحه‌ای مولفه تنش در راستای ضخامت صفر و مسئله به مسئله‌ای دو بعدی تبدیل می‌شود. در صورتی می‌توانیم شرط تنش صفحه‌ای را برای مسئله اعمال کنیم که هم هندسه و هم بارگذاری صفحه ای باشد. توجه شود وجود هر دو شرط برای فرض تنش صفحه ای الزامی‌است [۲۱].

با توجه به هندسه و نوع بارگذاری مسئله مورد نظر این رساله فرض تنش صفحه‌ای برای ساده سازی مسئله و تبدیل آن به حالت دوبعدی مناسب‌ترین گزینه است. درصورت استفاده از فرض تنش صفحه‌ای معادله تنش کرنش (رابطه (۱-۱۲)) به صورت زیر بازنویسی می‌شود.[3]

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} S11 & S12 & S16 \\ S21 & S22 & S26 \\ S16 & S26 & S66 \end{vmatrix} \times \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \qquad (۱-۱۳)$$

و داریم

$$S_{11} = \frac{1}{E1}\ , S_{22} = \frac{1}{E2}\ ,\ S_{66} = \frac{1}{G12}\ ,\ S_{12} = -\frac{\vartheta 12}{E1} = -\frac{\vartheta 21}{E2},\ S_{16} = 0\ , S_{26} = 0 \qquad (۱-۱۴)$$

همانطور که از روابط بالا مشخص است برای تعریف یک ماده اورتوتروپیک در حالت دوبعدی نیاز به ۵ ثابت مستقل داریم. این ثوابت که از تست‌های آزمایشگاهی بدست می‌آیند عبارتند از مدول یانگ در دو جهت محور اصلی (E_1 ، E_2)، نسبت پوآسن (ϑ_{12} ، ϑ_{21}) و مدول‌برشی در دو صفحه (G_{21}

---

[1] Plane strain

[2] Plane stress

، G_{12}) توجه شود که تساوی دو نسبت $\frac{\vartheta 12}{E1}$ و $\frac{\vartheta 21}{E2}$ در ثابت S_{21} به معنی تساوی ϑ_{12} با ϑ_{21} و E_1 با E_2 نمی‌باشد و تنها بیانگر تساوی نسبت‌ها است.

ماتریس سفتی نیز درحالت دوبعدی با معکوس کردن ماتریس نرمی در (حالت دو بعدی) بدست می‌آید. و داریم.

$$Q_{ij} = S_{ij}^{-1} \qquad (۱۵-۱)$$

که در این رابطه Q_{ij} ماتریس سفتی در حالت دوبعدی می‌باشد و به آن ماتریس سفتی اصلاح شده[۱] می‌گویند. لازم به یادآوریست که ماتریس‌های نرمی و سفتی در تمام حالات چه سه‌بعدی چه دو بعدی متقارن هستند.

جدول (۱-۱) جمع‌بندی از دو بخش ۳-۴-۱ و ۲-۴-۱ را ارائه می‌دهد.

جدول ۱-۱) خلاصه از تعدادضرایب مواد

نوع ماده	تعداد ضرایب غیرصفر در حالت سه‌بعدی	تعداد ضرایب مستقل در حالت سه‌بعدی	تعداد ضرایب غیرصفر در حالت دوبعدی	تعداد ضرایب مستقل در حالت دوبعدی
تری کلینیک	۳۶	۲۱	۹	۶
مونوکلینیک	۲۰	۱۳	۹	۶
اورتوتروپیک	۱۲	۹	۵	۴
ایزوتروپیک[۲]	۱۲	۲	۵	۲

[۱] Modified Stiffness Matrix

[۲] همسانگرد

۱-۴-۳-۱ اورتوتروپیک *on axis* و *Off axis*

تمام روابطی که تاکنون ذکرشد زمانی صادق است که خطوط الیاف بر محور مختصات جهانی[۱] در مختصات دکارتی منطبق باشد. در مبحث کامپوزیت به این مواد کامپوزیت‌های On axis می‌گویند. اما درصورتی که خطوط الیاف با محور مختصات جهانی زاویه‌ای مانند φ داشته باشد به آن کامپوزیت‌های Off axis می‌گویند[۲]. تفاوت این دوحالت در ماتریس سفتی و نرمی آن‌هاست به طور مثال ماتریس نرمی درحالت Off axis از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$\bar{\bar{S}} = \widetilde{T^T} \times \tilde{S} \times \widetilde{T} \qquad (۱۶-۱)$$

در رابطه بالا $\bar{\bar{S}}$ ماتریس نرمی در حالت Off axis وT ماتریس تبدیل است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$T = \begin{vmatrix} cos\varphi^2 & sin\,\varphi^2 & 2cos\varphi sin\varphi \\ sin\varphi^2 & cos\varphi^2 & -2cos\varphi sin\varphi \\ -cos\varphi sin\varphi & cos\varphi sin\varphi & cos\varphi^2 - sin\varphi^2 \end{vmatrix} \qquad (۱۷-۱)$$

برخلاف S (ماتریس نرمی در حالت On axis) که دارای دو مولفه صفر S_{16} و S_{26} بود ماتریس $\bar{\bar{S}}$ (ماتریس نرمی در حالت Off axis) به علت ضرب در ماتریس تبدیل دارای مولفه صفر نمی‌باشد، اما ثابت‌های مستقل آن همچنان مانند ماتریس S، ۵ عدد می‌باشد[۳] [۲۰].

برای محاسبه ماتریس سفتی در حالت Off axis هم می‌توان از ماتریس نرمی در این حالت معکوس گرفت و یا معادله (۱-۱۱) را این بار برای تنش تکرار کرد.

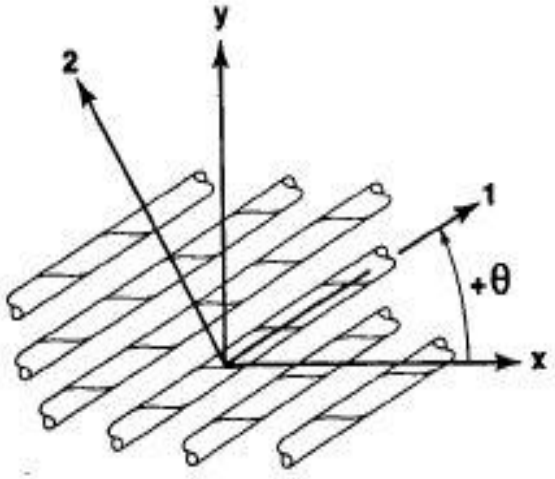
---

[۱] Global

[۲] به طور تخصصی در این رساله اورتوتروپیک‌های Off axis و On axis

[۳] به طور کلی مواد اورتوتروپیک چه Off axis و جه On axis در حالت سه بعدی دارای ۹ ثابت مستقل و در حالت دو بعدی دارای ۵ثابت مستقل می‌باشند.

در شکل ۱-۱ زاویه ناهمسانگردی (θ) و مختصات جهانی (x,y) به همراه مختصات محلی (۱و۲) به خوبی قابل مشاهده است.



شکل ۱-۱) زاویه ناهمسانگردی برای on axis و off axis [۲۰]

فصل ۲: روش المان محدود توسعه یافته[1] و انتگرال برهم‌کنش

۱) مقدمه‌ای بر روش المان محدود[2]

۲) روش المان محدود توسعه یافته

۳) مدل سازی ترک در روش المان محدود توسعه یافته

۴) روش انتگرال برهم کنش

[1] XFEM- Extended Finite Element Method

[2] FEM- Finite Element Method

۲-۱ مقدمه‌ای بر روش المان محدود

به طورکلی در پژوهش‌های مختلف برای حل مسئله سه روش پیش روی ماست:

۱) روش تحلیلی[۱]

۲) روش تجربی [۲]

۳) روش عددی [۳]

در روش تحلیلی سعی بر این است که معادلات دیفرانسیلی حاکم بر مسئله به صورت تحلیلی و دقیق حل شوند. در روش تجربی، مسئله به صورت کاملا واقعی در شرایط آزمایشگاهی آزمایش شده و نتایج گزارش می‌شود. و اما در روش عددی مسئله به صورت تقریبی حل می‌شود. روش‌های عددی امکان حل مسائل پیچیده‌ای که حل آن‌ها با روش‌های تحلیلی و تجربی هزینه و زمان زیادی می‌برد را فراهم می‌کنند. روش‌های عددی زیرمجموعه‌های زیادی دارند. روش المان محدود یکی از این زیرمجموعه-هاست که از دقت بالایی برخوردار است. قبل از بررسی و توضیح مختصر درباره این روش ابتدا به صورت خلاصه تاریخچه‌ای از این روش را بیان می‌کنیم.

---

[۱] Exact Analytical Solution

[۲] Experimental Method

[۳] Numerical Solution

۲-۱-۱ تاریخچه روش المان محدود

اصطلاح المان محدود برای اولین بار توسط کلاف[۱] در سال ۱۹۶۰ جهت حل مسائل الاستیسیته دوبعدی به کار گرفته شد. هر چند اولین شخصی که عملاً از این روش در حل مسائل پیچش استفاده نمود، کورانت[۲] در سال ۱۹۴۳ است.

روش المان محدود یکی از پرکاربردترین روش‌های عددی برای حل تقریبی معادلات دیفرانسیل می‌باشد. این روش توسط دانشمندان و مهندسان در گستره وسیعی از مسائل مهندسی در گرایش‌های متفاوت از جمله برای تخمین شکست دینامیکی سازه‌ها به کار می‌رود. [۳۱]

روش المان محدود یک نمونه بارز از روش گالرکین[۳] در حل معادلات است. در روش گالرکین؛ (المان محدود) برای محاسبه درجات آزادی از تابع درون‌یاب استفاده می‌شود که در ادامه درباره آن توضیحات بیشتری ارائه می‌شود.

۲-۱-۲ روند حل مسئله در روش المان محدود

به طور خلاصه در روش المان محدود مسئله با هندسه پیچیده به قطعات کوچک‌تری به نام المان تقسیم می‌شود که به این عمل مش‌بندی گفته می‌شود. سپس برای هر المان ماتریس سفتی محاسبه شده و پس از اسمبل ماتریس سفتی المان‌ها، ماتریس سفتی کل سازه بدست آمده و با جایگذاری شرایط مرزی؛ مسئله حل می‌شود. درحقیقت برای حل یک مسئله به کمک روش المان محدود مراحل زیر طی می‌شود [۲۲]:

---

[۱] Clough
[۲] Courant
[۳] Galerkin method

۲-۱-۲-۱ تقسیم بندی مسئله به چندین المان (مش زنی)[۱]

در اولین قدم مسئله مورد نظر را (فارغ از پیچیدگی آن) به چندین ناحیه‌ی ساده تقسیم می‌کنیم. این نواحی، المان[۲] نامیده می‌شوند. هر المان از حداقل دو نقطه تشکیل شده است به این نقاط گره‌های[۳] المان می‌گویند. المان‌ها را برحسب تعداد گره‌ای که دارند نام‌گذاری می‌کنند. به طور نمونه در شکل ۲-۱ صفحه مستطیلی به ابعاد محدود با المان‌های ۴ گره ای (Quad 4 یا به اختصار Q4) مش‌بندی شده است.

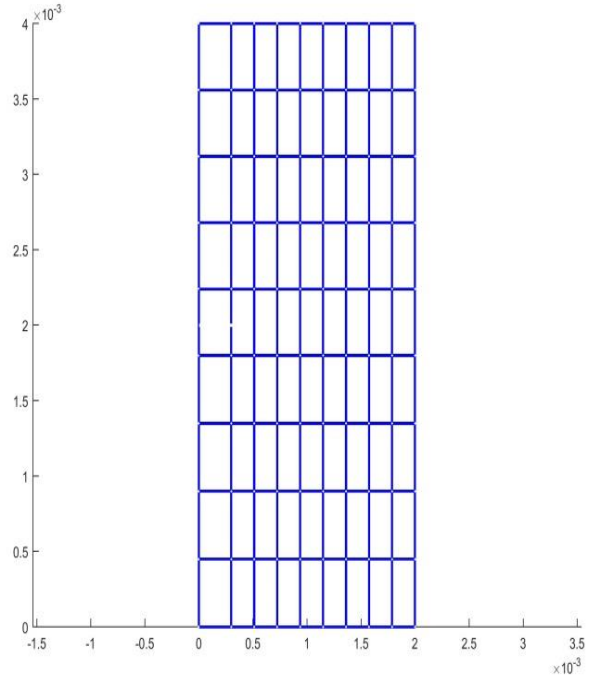
توجه شود که المان و گره از مفاهیم بسیار مهم و پایه در روش المان محدود می‌باشند [۲۲].

---

[۱] Meshing

[۲] Element

[۳] Nodes



شکل ۲-۱) مش بندی صفحه مستطیلی با المان‌های ۴ گره‌ای

همانطور که در شکل فوق پیداست صفحه مستطیلی دارای ۱۰ گره در جهت افقی محور مختصات (X) و ۱۰ گره در جهت عمودی محور مختصات (Y) می‌باشد.

پس از تقسیم هندسه موردنظر به تعدادی ناحیه، می‌توان هر نقطه درون هندسه ناحیه را با استفاده از توابع درونیابی بر حسب مختصات گره‌های ناحیه تقریب نمود. برای این تقریب مناسب‌ترین عمل، استفاده از توابع درون‌یابی چند جمله‌ای است.

گالرکین[۱] نشان داد که از نظر ریاضی ناحیه چهارضلعی مورد نظر را می‌توان با استفاده از نگاشت دوخطی به مربعی متقارن با اضلاع ۲ × ۲ در دستگاه مختصات (η ، ξ)[۲] تبدیل نماییم، که دستگاه مختصات

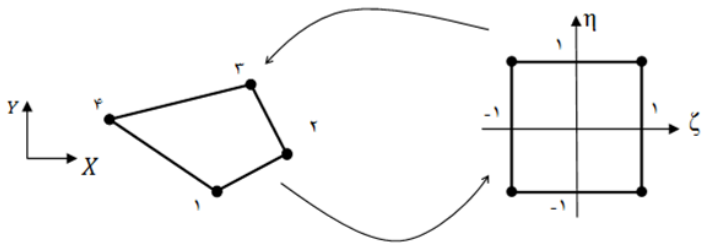
---

[۱] Galerkin method

[۲] Local coordinates

ایزوپارامتریک[۱] نامیده می‌شود. (شکل ۲-۲) توابع درونیابی به صورت معادله (۲-۱) قابل بیان خواهند بود [۲۲].

$$x = \sum_{i=1}^{4} N_i X_i \qquad , \qquad y = \sum_{i=1}^{4} N_i Y_i \qquad (۲-۱)$$



شکل ۲-۲) نگاشت تبدیل یک ناحیه ۴ گره ای به یک مستطیل استاندارد

این توابع درون‌یاب را در اصطلاح توابع شکل[۲] می‌نامند و همانطور که از رابطه (۲-۱) پیداست تعداد توابع شکل در هر المان به اندازه گره‌های آن المان می‌باشد. به طور مثال در المان Q4 ۴ گره و ۴ تابع شکل داریم. از ویژگی های مهم آن‌ها می‌توان به موارد زیر اشاره کرد.

۱) هر تابع شکل در مختصات گره خودش مقدار یک می‌باشد. (N_i در X_i و Y_i ۱ است)

۲) هر تابع شکل در مختصات گره دیگر ۰ است (N_j در X_i و Y_i ۰ است)

۳) جمع توابع شکل یک المان عدد ۱ است ($\sum_{i=1}^{4} N_i = 1$)

---

[۱] Isoperimetric

[۲] Shape function

با کمک این توابع شکل، می‌توان مختصات هر نقطه درون مربع ترسیم شده، در دستگاه مختصات ایزوپارامتریک را به نقطه مشابه در مختصات اصلی (X , Y) نگاشت. برای نمونه توابع شکل المان ۴گره‌ای به صورت رابطه (۲-۲) می‌باشد [۲۲].

$$N=\left\{\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\quad \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)\quad \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)\quad \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)\right\}^T \qquad (۲-۲)$$

که در آن علامت T به معنای ترانهاده است. یعنی در محاسبات N یک ماتریس با ۴ سطر و ۱ ستون می‌باشد. (ماتریس ۱×۴)

۲-۱-۲-۲ خصوصیات مواد

همانطور که در فصل اول گفته شد برای ماده اورتوتروپیک داریم

در حالت تنش صفحه ای :

$$[C]=\frac{1}{(1-\nu_{12}\nu_{21})}\begin{bmatrix} E_1 & \nu_{12}E_2 & 0 \\ \nu_{12}E_2 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu_{12}\nu_{21})G_{12} \end{bmatrix} \qquad (۳-۲)$$

در حالت کرنش صفحه ای:

$$[C]=\begin{bmatrix} aE_1 & bE_1 & 0 \\ cE_2 & dE_2 & 0 \\ 0 & 0 & (ad-bc)G_{12} \end{bmatrix} \qquad (۴-۲)$$

$$a=1-\nu_{23}\nu_{32}$$

$$c=\nu_{12}+\nu_{13}\nu_{32}$$

$$b=\nu_{21}+\nu_{23}\nu_{31}$$

$$d=1-\nu_{13}\nu_{31}$$

که در آن E_1 مدول یانگ در جهت x ، E_2 مدول یانگ در جهت y ، ν_{ij} ضـــریب پواســـون و G_{12} مدول برشی می‌باشد.

۲-۱-۲-۳ مشخص کردن درجات آزادی هر گره

در حالت کلی تعداد پارامترهای غیر وابسته که برای مشخص کردن موقعیت یک سیستم فیزیکی مورد استفاده قرار می‌گیرد را درجه آزادی آن سیستم می‌نامند[۱][۱۸]. به طور مثال اگر مسئله مورد نظر ما فقط تحت بارهای مکانیکی باشد هریک از گره‌های المان درحالت ۲بعدی شامل دو درجه آزادی u درجهت X و v در جهت Y می‌باشد. در این حالت برای هر المان داریم .

$$\{u\} = \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_4 \end{bmatrix} \qquad (۵-۲)$$

به بردار u بردار درجات آزادی هر المان می‌گویند[۲]. در یک مسئله تحت بارهای مکانیکی معادله (۲-۱) را می‌توان به صورت بازشده زیر برای هر المان نوشت.

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{4} N_i \begin{pmatrix} U_i \\ V_i \end{pmatrix} \qquad (۶-۲)$$

---

[۱] DOF (Degree Of Freedom)

[۲] در فصول بعدی درباره چیدمان این بردار توضیحات بیشتر و جامع‌تری ارائه خواهد شد.

۲-۱-۲-۴ محاسبه ماتریس سفتی[۱]

همانطور که پیشتر اشاره شد روش المان محدود زیر مجموعه روش‌های عددی است. این روش معادلات حاکم را به صورت ماتریسی گسسته کرده و سپس حل می‌کند. برای هر مسئله ماتریس سفتی[۲] و سایر ماتریس‌ها با گسسته کردن معادلات حاکم بدست می‌آید. (در فصول آینده گسسته سازی معادلات حاکم انجام می‌گردد) اما در حالت کلی ماتریس سفتی برای هر المان در مختصات محلی[۳] المان به صورت معادله (۲-۷) نوشته می‌شود [۲۲].

$$[K]_{8\times8} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [B]^{T}_{8\times3}[C]_{3\times3}[B]_{3\times8}.|j|d\xi d\eta \qquad (۲-۷)$$

در معادله (۲-۷) ماتریس C ماتریس خواص ماده معادله (۲-۳) و ماتریس j نیز ماتریس ژاکوبین می‌باشد توجه به این نکته ضروری است که در رابطه (۲-۷) علامت T در بالای ماتریس B به معنی ترانهاده [۴]ماتریس B است[۵].

انتگرال معرفی شده در معادله (۲-۷) که در دستگاه مختصات محلی (ξ ، η) باید محاسبه شود را می توان با استفاده از روش عددی انتگرال گوس محاسبه نمود. در روش عددی انتگرال گوس، کافی است که مقادیر تابع تحت انتگرال را در نقاط خاصی درون المان که نقاط گوس خوانده می شوند، حساب نموده و آنها را در ضرایب وزنی گوس ضرب کرد. با جمع این مقادیر می توان مقدار انتگرال را تعیین نمود.

---

[۱] Stiffens Matrix (K Matrix)

[۲] در بسیاری از منبع فارسی به اشتباه ماتریس سختی ترجمه شده است.

[۳] Local Coordinate

[۴] Transpose

[۵] برای توضیح بیشتر درباره ترانهاده به مرجع ۱۹ مراجعه کنید.

در این معادلات ماتریس B ماتریس کرنش جابه جایی گره‌ها بوده و شامل مشتقات تابع شکل برحسب مختصات محلی المان هستند. این ماتریس سه سطر دارد و تعداد ستون های آن به تعداد سطرهای بردار $\{u\}$ وابسته است. معادله (۲-۸) این ماتریس را برای یک المان چهارگره‌ای نشان می‌دهد.

$$[B]=\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} \qquad (۲-۸)$$

,

$$\varepsilon=[B]\{u\}$$

همانطور که در رابطه (۲-۸) مشخص است کرنش از حاصل ضرب ماتریس B در جا به جایی حاصل می‌شود.

از دترمینان ماتریس ژاکوبین ($|j|$) برای نگاشت مختصات محلی به اصلی استفاده می‌شود. (معادله (۲-۹))

$$[J]=\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{4}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}X_i & \sum_{i=1}^{4}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}Y_i \\ \sum_{i=1}^{4}\frac{\partial N_i}{\partial \eta}X_i & \sum_{i=1}^{4}\frac{\partial N_i}{\partial \eta}Y_i \end{bmatrix} \qquad (۲-۹)$$

با حذف دترمینان j معادله (۲-۷) را می‌توان در مختصات جهانی[۱] به صورت معادله (۲-۱۰) بازنویسی کرد

$$[K]_{8\times8} = \iint [B]^T_{8\times3}[C]_{3\times3}[B]_{3\times8}dxdy \qquad (۲-۱۰)$$

از نکات بسیار مهم در روش المان محدود، اندازه ماتریس سفتی است که تابع درجات آزادی هرگره از المان می‌باشد و در حالت کلی از رابطه (۲-۱۱) بدست می‌آید.

$$\text{size}([K]_{n\times n}) = (DOF \times ND)\times(DOF \times ND) \qquad (۲-۱۱)$$

در رابطه فوق DOF تعداد درجات آزادی هر گره و ND نیز تعداد گره در هر المان می‌باشد. به طور مثال در مسئله‌ای که تنها دو درجه آزادی داریم و المان‌ها از نوع مربعی چهار گره‌ای هستند (Q4) سایز ماتریس سفتی در هر گره ۸×۸ می‌باشد (۲×۴=۸) [۲۲].

۲-۱-۲-۵ مونتاژ ماتریس سفتی کل

بعد از محاسبه ماتریس سفتی برای هر المان، این ماتریس ها در یک ماتریس دیگر که به عنوان ماتریس سفتی کل شناخته می شود، نصب می‌گردند. تعداد درجات ماتریس سفتی کل نیز از همان رابطه (۲-۱۱) محاسبه می‌گردد. منتها به جای درجات آزادی هر المان درجات آزادی کل مسئله لحاظ می‌شود. برای مثال در مسئله‌ای که هر گره ۲ درجه آزادی از نوع جا به جایی و در کل ۱۰۰ گره دارد ماتریس سفتی کل در ابعاد ۲۰۰×۲۰۰ می‌باشد (مطابق رابطه (۲-۱۱)).

---

[۱] Global Coordinate

۲-۱-۲-۶ اعمال شرایط مرزی نیرو و جابه‌جایی

با توجه به نوع مسئله شرایط مرزی نیرو[۱] و جابه‌جایی[۲] نیز به المان‌های مرزی اعمال می شود.

با بدست آوردن شرایط بالا می توان معادله زیر را حل نمود:

$$K\,\vec{u} = \vec{F} \qquad (۱۲-۲)$$

و در نتیجه بردار u بدست خواهد آمد.

۲-۲ روش المان محدود توسعه یافته

در این بخش به صورت خلاصه توضیحاتی درباره روش المان محدود توسعه یافته ارائه می‌گردد.

۲-۲-۱ خلاصه‌ای از روش المان محدود توسعه یافته

به طور خلاصه روش المان محدود توسعه یافته [۳] همان روش المان محدود معمولی است که درجات آزادی المان‌های نوک ترک افزایش یافته‌اند یا به عبارت بهتر غنی شده‌اند. این غنی سازی برای افزایش دقت و صحت جواب‌ها صورت می‌گیرد. روش المان محدود توسعه یافته نتیجه کارهای بیلیچکو و همکارانش می‌باشد.

در مقایسه با تقریب کلاسیک (سنتی) برای مدل‌سازی ترک‌ها با المان محدود، با غنی‌سازی ناپیوستگی، هندسه ترک به صورت مستقل از شبکه، نمایش داده‌شده‌است. همچنین غنی‌سازی نزدیک نوک ترک در تقریب‌سازی، جهت محاسبه درست ضرایب شدت تنش، به کار گرفته شده‌است.

---

[۱] Natural boundary condition

[۲] Essential boundary condition

[۳] XFEM (Extended Finite Element Method)

در روش المان محدود استاندارد (همانطور که اشاره شد) به هر گره از المان تابع شکل نسبت داده می‌شود و در حالت دو بعدی هر گره ۲ درجه آزادی دارد که ترکیب خطی حاصل‌ضرب تابع شکل هر نقطه داخل المان در تغییر مکان‌های گره‌ای می‌تواند تغییر مکان نقاط داخل المان را مشخص کند (معادله گالرکین (۲-۶)). در المان محدود توسعه یافته از همان توابع شکل المان محدود استاندارد استفاده می‌شود و تنها درجات آزادی گره‌های اطراف ترک افزایش پیدا می‌کند (غنی‌سازی) که این کار بر اساس مفهوم افراز واحد[۱] انجام می‌شود. [۱۸و۲۳]

۲-۲-۲ افراز واحد المان‌های محدود غنی شده

همانطور که پیشتر ذکر شد مفهوم و مبنا روش المان محدود توسعه‌یافته مفهوم افراز واحد برای المان‌های محدود غنی شده یا تقریب‌های بدون المان است. افراز واحد در یک قلمرو مشخص مثل Ω، یک مجموعه از توابع $\phi_i(x)$ است به نحوی که معادله (۲-۱۳) را ارضا کند.

$$\sum_{\forall i}\phi_i(x)=1,\ \ \forall x\in\Omega \qquad (۱۳-۲)$$

خاصیت افراز واحد در المان محدود توسعه یافته این است که هر تابع ψ که بر حسب بردار موقعیت است را می‌توان به صورت مجموع حاصل‌ضرب توابع افراز واحد با ψ بازنویسی کرد. به معادله (۲-۱۵) توجه کنید.

$$\sum_{\forall i}\phi_i(x)\psi(x)=\psi(x) \qquad (۱۴-۲)$$

با استفاده از این خاصیت در المان محدود توسعه یافته می‌توان معادله (۲-۶) را به صورت معادله زیر بازنویسی کرد [۱۸و۲۴].

---

[۱] Partition of unity

$$u(x)=\sum_{\forall i} N_i(x)\,\mathrm{u}_i+\sum_{\forall i}\phi_i(x)\psi(x)b_i \qquad (۱۵-۲)$$

در این رابطه u_i درجات آزادی گره‌های معمولی هستند. منظور از گره‌های معمولی گره‌هایی است که المان‌های آن‌ها توسط ترک شکافته نشده و یا نوک ترک در آن‌ها حضور ندارند. (در بخش آینده بیشتر در این‌باره توضیح خواهیم داد.) N_i ها نیز توابع شکل در المان محدود کلاسیک هستند. این توابع برای المان چهارگره‌ای در رابطه (۲-۲) معرفی شده‌اند. بخش دوم در رابطه (۲-۱۶) بخش انساتز[۱] نامیده می‌شود. مقادیر گره‌ای b_i پارامترهای مجهول مجازی هستند که باعث می‌شوند تا دقت غنی‌سازی بالاتر برود. ψ نیز تابع غنی سازی[۲] و مبتنی بر حل‌های مجانبی در مکانیک شکست است که حل‌های دقیقی به حساب نمی‌آیند. بنابراین انساتز لازم نیست دقیقا حل موضوعی برای مسئله مورد نظر باشد. در این رابطه (انساتز)؛ $\phi_i(x)$ تابع شکل در حالت توسعه یافته (غنی شده) است.

در حالت کلی توابع شکل برای تقریب مورد استفاده در روش‌های المان محدود کلاسیک (سنتی) و تعمیم یافته (XFEM) ممکن است یکسان نباشند؛ اما استفاده از توابع یکسان منجر به محدودیتی در حل مسئله نمی‌شود [۲۵]. در این پژوهش این دوتابع یکسان فرض شده است. یعنی:

$$\phi_i(x)=N_i(x) \qquad (۱۶-۲)$$

لازم به ذکر است که تمام توابع شکل المان محدود لاگرانژی خاصیت افراز واحد را ارضا می‌کنند. زیرا این خاصیت برای همگرایی و عبور از آزمون پیوستگی ضروری است.

یکی از بهترین مزیت‌های روش المان محدود توسعه یافته نسبت به سایر روش‌های تحلیل عددی مکانیک شکست این است که رشد و موقعیت ترک در این روش کاملا مستقل از مش‌بندی است. منتها نوک ترک نمی‌تواند روی یکی از گره‌ها باشد.

---

[۱] Ansatz

[۲] Enrichment Function(s)

۲-۳ مدل سازی ترک در روش المان محدود توسعه یافته [۱]

در این بخش مراحل مدل‌سازی ترک در روش المان محدود توسعه یافته شرح داده می‌شود. قبل از هرچیز چند تعریف را که در مدل‌سازی ترک کاربردیست بیان می‌کنیم.

به طور کلی در روش المان محدود توسعه یافته المان‌ها و گره‌ها به سه دسته تقسیم می‌شوند (شکل ۲-۳) .

۱) المان‌های معمولی[۲]، المان‌هایی هستند که دور از ناحیه ترک واقع شده اند. این المان‌ها با کمک المان محدود کلاسیک تحلیل و حل می‌شوند. یعنی نیاز به غنی سازی ندارند.

۲) المان‌های اسپلیت[۳]، المان‌هایی هستند که توسط ترک بریده شده‌اند و ترک در این المان‌ها واقع شده است.[۴] این المان‌ها نیاز به غنی‌سازی دارند که در بخش بعد درباره آن توضیح داده می‌شود.

۳) المان‌های نوک ترک (المان‌های تیپ)[۵]، المانی است که نوک ترک در آن حضور دارد[۶]. این المان نیز مانند المان‌های اسپلیت نیاز به غنی‌سازی دارد.

و اما انواع گره‌ها:

۱) گره‌های معمولی[۷]، گره‌های المان‌های معمولی هستند.

---

[۱] در بسیاری از مراجع فارسی زبان به روش المان محدود توسعه یافته، المان محدود غنی شده یا المان محدود تعمیم یافته نیز می‌گویند . تمام این‌ها ترجمه Extended finite element می‌باشد. به نظر نگارنده ترجمه المان محدود توسعه یافته؛ ترجمه بهتر و روان‌تری نسبت به سایر موارد است. از این رو در این تحقیق از این ترجمه استفاده شده‌است. غنی سازی بیشتر یه نوع فرآیند است که برای tip element و split element به کار می‌رود. که ترجه کلمه Enrichment می‌باشد.

[۲] Normal elements

[۳] Split elements

[۴] در اکثر مراجع فارسی زبان ترجمه صحیحی برای Split elements ارائه نشده است و نگارنده نیز نتوانست ترجمه قابل قبولی را برای این کلمه پیدا کند. از این رو در این رساله از معادله انگلیسی Split element با نگارش فارسی به شکل المان‌های اسپلیت استفاده می‌شود.

[۵] Tip elements

[۶] المان نوک ترک ترجمه‌است که اکثر کتب فارسی آن را انتخاب کردند.

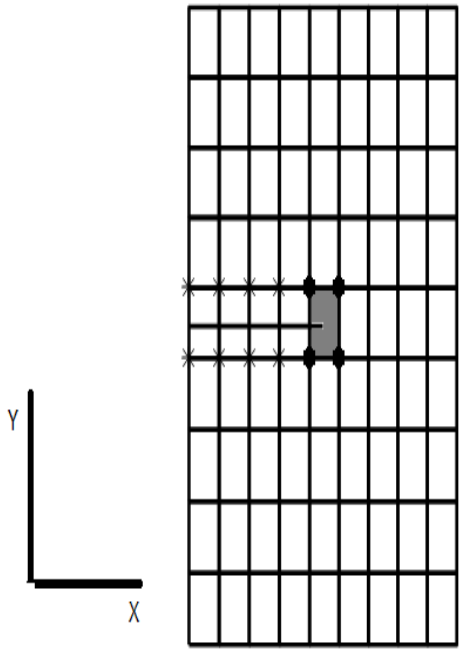
[۷] Normal nodes

۲) گره‌های اسپلیت[۱]، گره‌های المان‌های اسپلیت هستند.

۳) گره‌های نوک[۲] ترک، گره‌های المان نوک ترک هستند.

لزومی ندارد هر چهار گره یک المان از یک نوع باشند. به طور مثال دو المان مجاور هم را در نظر بگیرید که اولی از نوع اسپلیت و دومی المان نوک ترک باشد. در این صورت دو گره مرزی این دو المان از نوع گره‌های نوع گره‌های نوک ترک هستند.

شکل ۲-۳ مطالب بالا را به طور خلاصه بیان می‌کند.



شکل ۲-۳) نمایش یک شبکه المان محدود توسعه یافته شامل ترک و گرههای غنی شده

همانطور که در شکل ۲-۳ قابل مشاهده‌است؛ المان خاکستری رنگ المان نوک ترک و چهار المان سمت چپ آن که توسط ترک بریده شده‌اند المان اسپلیت و سایر المان‌ها نیز المان‌های معمولی هستند.

---

[۱] Split nodes

[۲] Tip nodes

در شکل قابل مشاهده است که چهار گره نوک ترک وجود دارد که با دایره سیاه مشخص شده اند، هشت گره اسپلیت وجود دارد که با ستاره مشخص شده‌اند و ما بقی گره‌ها نیز گره‌های ساده هستند. همانطور که پیشتر در قالب نکته ذکر شد لزومی ندارد هر چهار گره المان از یک نوع باشند، اولویت در انتخاب گره با گره نوک ترک سپس اسلیت و در آخر گره‌های معمولی است.

۲-۳-۱ روابط بنیادی غنی‌سازی

همانطور که پیشتر ذکر شد مفهوم و مبنا روش المان محدود توسعه‌یافته مفهوم افراز واحد برای المان‌های محدود غنی شده یا تقریب‌های بدون المان است. فرض کنید که یک نقطه x در فضای R^2 (برای محیط دو بعدی) درون مدل المان محدود داشته باشید. مجموعه گره‌ای T به صورت $T=\{n_1,n_2,\ldots,n_m\}$ و m تعداد گره‌های یک المان است، با توجه به معادله (۲-۱۶) تابع تقریبی غنی شده برای میدان جابجایی $u(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود. [۱۸و۳۱]

$$u^h(x)=\sum_{\substack{n\\ n_I\in T}} N_I(x)u_I+\sum_{\substack{J\\ n_J\in T^E}} N_J(x)\psi(x)u_J \qquad (۲-۱۷)$$

در رابطه (۲-۱۸) u_I درجات آزادی گره کلاسیک در مدل المان محدود است و u_J درجات آزادی اضافی تغییر مکانی نسبت به مجموعه استاندارد مدل المان محدود است. (همان b_iدر رابطه (۲-۱۶)) این درجات آزادی اضافی به ازا هر گره اسپلیت یک و به ازا هر گره نوک ترک به تعداد توابع غنی‌سازی است. به طور مثال اگر در مسئله‌ای ۸ گره اسپلیت و ۴ گره نوک ترک داشته‌باشیم درضمن تعداد توابع غنی‌سازی نیز ۴ باشد در این صورت تعداد گره‌های مجازی در این مسئله برابر با ۲۴عدد می‌باشد. N_I تابع شکل مربوط به گره‌های معمولی (T) همچنین N_j تابع شکل در حالت توسعه یافته (غنی شده) است. همانطور که در معادله (۲-۱۷) مشاهده شد توابع شکل در حالت کلاسیک و غنی‌سازی در این

تحقیق یکسان درنظر گرفته شده‌اند[1]. $\psi(x)$ تابع (توابع) غنی‌سازی و T^E شامل تمام نقاطی است که ترک را در بر می‌گیرد.[2] به طور نمونه گره‌هایی که با دایره توپر[3] و ستاره[4] در شکل ۲-۳ مشخص شده‌اند به همراه گره‌های مجازی آن‌ها همگی با این توابع غنی‌سازی می‌شوند (تعداد توابع غنی‌سازی با توجه به نوع مسئله و جنس ماده تعیین می‌شوند که در ادامه درباره آن توضیحاتی ارائه می‌گردد.). به طور کلی تابع غنی‌سازی $\psi(x)$ با توجه به نوع ناپیوستگی تعیین می‌گردد.

هر تابعی که در سرتاسر فضا R ناپیوسته است می تواند برای مدل کردن یک گسستگی دلخواه در $u^h(x)$ استفاده شود، ولی شاید ساده‌ترین انتخاب، یک تابع ثابت که در طول ترک تغییر علامت می‌دهد؛ از این رو برای راحتی تابع زیر (تابع H(Z)) را در نظر می‌گیریم که مقدار ۱ را روی یک سمت و ۱- را در سمت دیگر دارد. (معادله (۲-۱۹))

$$H(z)=\begin{cases}+1 & ;y>0\\ -1 & ;y<0\end{cases} \qquad (۱۸-۲)$$

در معادله (۲-۱۹)، z تابعی از موقعیت یک نقطه نسبت به مسیر ترک است. به عبارت بهتر اگر نقطه مطلوب بالای سطح ترک باشد مقدار تابع ثابت غنی‌سازی برای آن ۱ و در غیر این صورت ۱- است. به این تغییر علامت در مکانیک شکست پرش از سطح ترک می‌گویند [۳۱و۱۸].

حال که روابط بنیادی در غنی‌سازی داده شد به شرح روابط مدل‌سازی ترک در ماده مورد نظر این تحقیق یعنی ماده اورتوتروپیک می‌پردازیم.

---

[1] $N_I=N_J$

[2] گره‌های نوک ترک، اسپلیت و گره‌های مجازی این‌ها

[3] گره‌های نوک ترک

[4] گره‌های اسپلیت

۲-۳-۲ روابط مدل‌سازی ترک در مواد اورتوتروپیک

با توجه به مطالبی که پیشتر گفته‌شد، میدان جا به جایی در روش المان محدود توسعه یافته برای یک المان غنی شده شامل ترک را می‌توان به صورت معادله (۲-۲۰) نوشت. توجه شود تعداد توابع غنی سازی برای ماده اورتوتروپیک معمولا ۴ عدد می‌باشد. [۲۷]

$$u^h(x) = \sum_n N_n(x) u_n + \sum_I N_I(x) H(x) b_I + \sum_{k \in J} N_k(x) \left(\sum_{l=1}^{4} C_k^l F_l(\mathrm{r}, \theta) \right) \qquad (۱۹-۲)$$

در رابطه فوق عبارت اول مربوط به المان محدود کلاسیک[۱]، عبارت دوم برای غنی سازی المان‌های اسپلیت و عبارات سوم جهت غنی سازی المان‌های نوک ترک به کار برده می شود. در این رابطه $\mathbf{N_n}$، $\mathbf{N_I}$ و $\mathbf{N_k}$ به ترتیب توابع شکل المان‌های معمولی، اسپلیت و نوک ترک هستند و همانطور که در رابطه (۲-۱۷) اشاره شد در این تحقیق هرسه این توابع یکسان درنظر گرفته شده‌اند. $\mathbf{H(X)}$ نیز تابع هویسایدی است که برای پرش از سطح ترک در المان‌های اسپلیت درنظر گرفته شده‌است، $\mathbf{U_n}$ درجات آزادی گره کلاسیک و $\boldsymbol{b_I}$ و $\boldsymbol{C_k^l}$ درجات آزادی گرهی اضافی‌اند[۲]. همچنین $F_l(\mathrm{r}, \theta)$ توابع غنی‌سازی ماده اورتوتروپیک هستند. این توابع برحسب مختصات محلی نوک ترک $(\mathbf{r},\theta)$ قابل بیان هستند (معادله ۲-۳۹).

ذکر این نکته واجب است که این تحقیق شامل تحلیل‌های دمایی و مکانیکی می‌باشد. بنابراین دو جنس تابع غنی‌سازی داریم. تابع غنی‌سازی دمایی و تابع غنی‌سازی جا به جایی. در تحلیل با تئوری

---

[۱] برای المان‌های معمولی

[۲] همانطور که قبلا گفته شد تعداد این گره‌های مجازی برای هر گره اسپلیت ۱ عدد و برای هر گره نوک ترک به اندازه تعداد توابع غنی‌سازی (در اینجا ۴) است. این درجات آزادی در انتهای بردار u معرفی شده در معادله ۲-۵ قرار می‌گیرند.

ترموالاستیسیته جفت‌شده و یا لردشلمان تعداد توابع غنی‌سازی دما و جا به جایی باید یکسان باشند. در ادامه درباره این تحلیل‌های ترموالاستیسیته بیشتر توضیح خواهیم داد.

۲-۳-۲-۲ توابع غنی‌سازی جا به جایی برای مواد اورتوتروپیک

جابجایی‌های مماســـی واقعی نزدیک نوک و میدان تنش در حوزه نوک ترک در جســـم دو بعدی اورتوتروپیک در معرض بارگذاری عمومی با تعریف توابع $f_{ij}(\theta)$ و $g_i(\theta)$ به‌صورت زیر است [۲۷]:

$$u_i = K_I \sqrt{\frac{2r}{\pi}} g_i^I(\theta) + K_{II} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} g_i^{II}(\theta) \tag{۲-۲۰}$$

$$\sigma_{ij} = K_I (2\pi r)^{-\frac{1}{2}} f_{ij}^I(\theta) + K_{II} (2\pi r)^{-\frac{1}{2}} f_{ij}^{II}(\theta) \tag{۲-۲۱}$$

که در آن، K_I و K_{II} ضـرایب شدت تنش مود I و II می‌باشد.(در ادامه درباره آن‌ها بیشتر توضیح داده خواهد شد) توابع $f_{ij}(\theta)$ و $g_i(\theta)$ به صورت زیر بیان شده‌اند [۲۷].

$$f_{11}^I(\theta) = \mathrm{Re}\left[\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1-\mu_2}\left\{\frac{\mu_2}{\sqrt{\cos\theta+\mu_2\sin\theta}} - \frac{\mu_1}{\sqrt{\cos\theta+\mu_1\sin\theta}}\right\}\right] \tag{۲-۲۲}$$

$$f_{11}^{II}(\theta) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\left\{\frac{\mu_2^{\,2}}{\sqrt{\cos\theta+\mu_2\sin\theta}} - \frac{\mu_1^{\,2}}{\sqrt{\cos\theta+\mu_1\sin\theta}}\right\}\right] \tag{۲-۲۳}$$

$$f_{22}^I(\theta) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\left\{\frac{\mu_1}{\sqrt{\cos\theta+\mu_2\sin\theta}} - \frac{\mu_2}{\sqrt{\cos\theta+\mu_1\sin\theta}}\right\}\right] \tag{۲-۲۴}$$

$$f_{22}^{II}(\theta) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\left\{\frac{1}{\sqrt{\cos\theta+\mu_2\sin\theta}} - \frac{1}{\sqrt{\cos\theta+\mu_1\sin\theta}}\right\}\right] \tag{۲-۲۵}$$

$$f_{12}^I(\theta) = \mathrm{Re}\left[\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1-\mu_2}\left\{\frac{1}{\sqrt{\cos\theta+\mu_1\sin\theta}} - \frac{1}{\sqrt{\cos\theta+\mu_2\sin\theta}}\right\}\right] \tag{۲-۲۶}$$

$$f_{12}^{II}(\theta) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\left\{\frac{\mu_1}{\sqrt{\cos\theta+\mu_1\sin\theta}} - \frac{\mu_2}{\sqrt{\cos\theta+\mu_2\sin\theta}}\right\}\right] \tag{۲-۲۷}$$

و در ادامه :

$$g_1^I(\theta) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{\mu_1 - \mu_2}\left\{\mu_1 p_2 \sqrt{\cos\theta + \mu_2 \sin\theta} - \mu_2 p_1 \sqrt{\cos\theta + \mu_1 \sin\theta}\right\}\right] \quad (۲۸-۲)$$

$$g_1^{II}(\theta) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{\mu_1 - \mu_2}\left\{p_2 \sqrt{\cos\theta + \mu_2 \sin\theta} - p_1 \sqrt{\cos\theta + \mu_1 \sin\theta}\right\}\right] \quad (۲۹-۲)$$

$$g_2^I(\theta) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{\mu_1 - \mu_2}\left\{\mu_1 q_2 \sqrt{\cos\theta + \mu_2 \sin\theta} - \mu_2 q_1 \sqrt{\cos\theta + \mu_1 \sin\theta}\right\}\right] \quad (۳۰-۲)$$

$$g_2^{II}(\theta) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{\mu_1 - \mu_2}\left\{q_2 \sqrt{\cos\theta + \mu_2 \sin\theta} - q_1 \sqrt{\cos\theta + \mu_1 \sin\theta}\right\}\right] \quad (۳۱-۲)$$

مقدار p_k و q_k به صورت زیر تعریف می شوند:

$$p_k = a_{11}\mu_k^{\ 2} + a_{12} - a_{16}\mu_k \longrightarrow k = 1,2 \quad (۳۲-۲)$$

$$q_k = a_{12}\mu_k + \frac{a_{22}}{\mu_k} - a_{26} \longrightarrow k = 1,2 \quad (۳۳-۲)$$

و μ ریشه معادله مشخصه زیر می باشد:

$$a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22} = 0 \quad (۳۴-۲)$$

در رابطه فوق a_{ij} اعضــاء ماتریس نرمی کاهش یافته صــفحه می‌باشــند که براســاس فرض تنش صفحه‌ای یا کرنش صفحه ای به‌صورت تابعی از ماتریس نرمی S_{ij} می‌باشند [۲۱].

$$a_{ij} = S_{ij} \quad , \quad i, j = 1,2,6 \qquad \text{تنش صفحه ای} \quad (۳۵-۲)$$

$$a_{ij} = S_{ij} - \frac{S_{i3}S_{j3}}{S_{33}} \quad , \quad i, j = 1,2,6 \qquad \text{کرنش صفحه ای} \quad (۳۶-۲)$$

ثابت می‌شــود که معادله (۲-۳۵) چهار ریشــه موهومی دارد. چهار ریشــه این معادله را می توان بصورت زیر نوشت:

$$\mu_1 = \mu_{1x} + i\mu_{1y} \quad , \quad \mu_3 = \overline{\mu_1} \qquad (۳۷-۲)$$
$$\mu_2 = \mu_{2x} + i\mu_{2y} \quad , \quad \mu_4 = \overline{\mu_2}$$

در نهایت تابع چهار جمله‌ای به صورت زیر برای غنی‌سازی گره‌های اطراف نوک ترک (برحسب مختصات محلی نوک ترک $F_l\ (\mathrm{r},\theta)$) مورد استفاده قرار می‌گیرد [۲۸]:

$$\{F_l(r,\theta)\} = \{\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}\sqrt{g_1(\theta)}, \sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}\sqrt{g_2(\theta)}, \qquad (۳۸-۲)$$
$$\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{g_1(\theta)}, \sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{g_2(\theta)}\}$$

که $g_k(\theta)$ و θ_k از روابط (۲-۴۰) و (۲-۴۱) بدست می‌آیند [۲۹].

$$g_k(\theta) = \sqrt{(\cos\theta + \mu_{kx}\sin\theta)^2 + (\mu_{ky}\sin\theta)^2} \qquad (۳۹-۲)$$

$$\theta_k = arctg(\frac{\mu_{ky}\sin\theta}{\cos\theta + \mu_{kx}\sin\theta}) \qquad (۴۰-۲)$$

همانطور که در معادله (۲-۳۹) قابل مشاهده است، توابع غنی سازی برحسب مختصات محلی نوک ترک نوشته شده‌اند. لازم به ذکر است که این مختصات محلی کاملا منطبق بر نوک ترک می‌باشد [۲۹].

۲-۳-۲-۳ توابع غنی‌سازی جدید دمایی برای ماده اورتوتروپیک

همانطور که قبلا نیز ذکر شد توابع غنی‌سازی برای درجه آزادی دمایی کاملا جدید می‌باشد و تا کنون ارائه نشده‌است. روند بدست آوردن این توابع کاملا مشابه روند به دست آوردن توابع غنی‌سازی جا به جایی می‌باشد.

تابع دما در نوک ترک برای یک جسم اورتوتروپیک به صورت معادله (۲-۴۲) در نظر می‌گیریم [۲۶]:

$$T = h_0\sqrt{2ar}\ \mathrm{Re}[\frac{-1}{k}\sqrt{\cos\theta + \mu\sin\theta}] \qquad (۴۱-۲)$$

در این رابطه h_0 هدایت گرمایی، k ماتریس رسانش گرمایی (رابطه (۲-۴۳)) می‌باشند. در ضمن μ ریشه معادله مشخصه (معادله (۲-۴۴)) می‌باشد. [۲۶]

$$k = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}, \mathrm{k}_{21} = k_{22} \qquad (۴۲-۲)$$

$$k_{22}\mu^2 + (k_{12} + k_{21})\mu + k_{11} = 0 \qquad (۴۳-۲)$$

همانطور که مشخص است این معادله دو ریشه دارد دقت شود، تنها ریشه‌ای قابل قبول است که img>0 داشته باشد [۲۶].

در نهایت مانند بخش قبل توابع غنی‌سازی گره‌های اطراف نوک ترک برحسب مختصات محلی نوک ترک (مانند حالت جا به جایی) به صورت زیر بدست می‌آیند.

$$\{F_l(r,\theta)\} = \{\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}\sqrt{g(\theta)}, \sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{g(\theta)}\} \qquad (۴۴-۲)$$

که $g_k(\theta)$ و θ_k از روابط (۲-۴۶) و (۲-۴۷) بدست می‌آیند [۲۶].

$$g = \sqrt{(\cos\theta + \mu\sin\theta)^2} \qquad (۴۵-۲)$$

$$\theta = \arctan(\frac{\mu\sin\theta}{\cos\theta + \mu\sin\theta}) \qquad (۴۶-۲)$$

همانطور که پیشتر ذکر شد اگر تئوری ترموالاستیسیته مورد استفاده در تحلیل مسائل حرارتی تئوری-های جفت شده مثل لردشلمان[۱] باشد، لازم است تعداد توابع غنی سازی دمایی و جا به جایی **برابر** باشد

[۱] در ادامه در این مورد بیشتر توضیح داده می‌شود.

زیرا در حالت ترموالاستیسیته جفت شده[1] که معادلات انرژی و ناویر (معادلات به صورت توام و جفت شده حل می‌شوند[2] در نتیجه درجات آزادی گره‌ها به صورت یکپارچه در غالب بردار u مطابق معادله (۲-۴۸) چیده می‌شوند). (مطابق آنچه در معادله (۲-۵) مشاهده شد.)

$$\{u\} = \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ . \\ . \\ . \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ . \\ . \\ . \end{bmatrix} \qquad (۲-۴۷)$$

همانطور که مشاهده می‌شود چون تمام درجات آزادی در حالت کوپل داخل یک بردار واحد قراردارند. بنابراین عدم برابری توابع غنی‌سازی باعث اختلال در ابعاد ماتریس B برای جا به جایی و دما می‌شود، که این اتفاق سبب حل نشدن معادلات شده و جوابی بدست نمی‌آید. اما در حالت غیر کوپل[3] چون معادلات انرژی و ناویر (مربوط به دما و جا به جایی) جداگانه حل می‌شوند، می‌تواند تعداد توابع غنی‌سازی دمایی ۲ و تعداد توابع غنی‌سازی جا به جایی ۴ باشد. (همانگونه که در این بخش و بخش قبل معرفی شدند) با توجه به این توضیحات برای برابر کردن تعداد توابع غنی‌سازی دمایی در حالت کوپل هر دو تابع را در تابع زاویه‌ای $\sin(\theta)$ ضرب می‌کنیم و داریم :

---

[2] ترمو الاستیتیسه کوپل یا Coupled Thermoelectricity

[3] Classic Thermoelectricity

$$\{F_l(r,\theta)\} = \{\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}\sqrt{g(\theta)}, \sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{g(\theta)}, \sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}\sqrt{g(\theta)}\sin(\theta)$$
$$, \sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{g(\theta)}\sin(\theta)\} \qquad (۴۸-۲)$$

یعنی در حقیقت

$$\mathrm{F1} = \{\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}\sqrt{g(\theta)}\} \qquad (۴۹-۲)$$
$$\mathrm{F2} = \{\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{g(\theta)}\}$$
$$\mathrm{F3} = \{\mathrm{F_1} \times \mathrm{Sin}(\theta)\}$$
$$\mathrm{F4} = \{\mathrm{F_2} \times \mathrm{Sin}(\theta)\}$$

توضیحات بیشتر در این مورد در فصول آتی ارائه می‌گردد.

۲-۳-۲-۴ توضیحات تکمیلی

اکنون با توجه به توضیحاتی که درباره غنی‌سازی ارائه گردید می‌توان با انتخاب گره‌های مناسب اسپلیت و نوک ترک[۱] مشابه بخش ۲-۱-۲ فرمول‌بندی جدیدی را برای گره‌های غنی شده ارائه داد. در این حالت تنها ماتریس B برای گره‌های اسپلیت و نوک ترک گسترده تر شده و توسعه می‌یابد.

به طور مثال اگرگره a نیاز به غنی‌سازی نداشته باشد[۲] در حالت دو بعدی، ۲ درجه آزادی خواهد داشت و سهم آن در ماتریس *[B]* به صورت زیر خواهد بود: (مانند معادله (۲-۸))

$$B_a^u = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} \end{bmatrix} \qquad (۵۰-۲)$$

---

[۱] برای این کار روش‌های هندسی مختلفی وجود دارد که خارج از بحث این تحقیق است

[۲] گره معمولی باشد

اگرگره b نیاز به غنی‌سازی از طریق تابع H(Z) داشته باشد[1] در حالت دو بعدی ۴ درجه آزادی خواهد داشت و سهم آن در ماتریس $[B]$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$B_b = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & \left(\tilde{N}_j H(x_j)\right)_{,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & \left(\tilde{N}_j H(x_j)\right)_{,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & \left(\tilde{N}_j H(x_j)\right)_{,y} & \left(\tilde{N}_j H(x_j)\right)_{,x} \end{bmatrix} \quad (۵۱-۲)$$

اگر گره c نیاز به غنی‌سازی از طریق توابع غنی سازی[2] داشته باشد در حالت دو بعدی ۱۰ درجه آزادی خواهد داشت و سهم آن در ماتریس [B] به صورت رابطه (۲-۵۳) خواهد بود [۲۸]:

(۵۲-۲)

$$B_c\big|_{l=1,2,3,4} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & \left(\tilde{N}_k F_k^l(x_k)\right)_{,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & \left(\tilde{N}_k F_k^l(x_k)\right)_{,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & \left(\tilde{N}_k F_k^l(x_k)\right)_{,y} & \left(\tilde{N}_k F_k^l(x_k)\right)_{,x} \end{bmatrix}$$

و به این صورت مانند بخش ۲-۱-۲ ماتریس سفتی و سفتی کل محاسبه می‌شوند.

۲-۴ روش انتگرال برهم‌کنش

۲-۴-۱ معرفی روش انتگرال برهم کنش

می‌توان نشان داد که میدان تنش در حوزه نوک ترک در یک پیوستار جامد مطابق معادله زیر می‌باشد:

---

[1] گره اسپلیت باشد

[2] گره نوک ترک باشد

$$\sigma_{ij} = K_I (2\pi r)^{-\frac{1}{2}} f_{ij}^{I}(\theta) + K_{II} (2\pi r)^{-\frac{1}{2}} f_{ij}^{II}(\theta) \qquad (۵۳-۲)$$

در این معادله k_I وk_{II} به ترتیب ضرایب شدت تنش مود اول و دوم هستند.[۳۲و۲۹]

در سالیان اخیر روش‌های زیادی برای محاسبه ضرایب شدت تنش در مواد مختلف پیشنهاد شده است، این روش‌ها غالبا به دو دسته کلی زیر تقسیم بندی می‌شوند.

- روش‌های مستقیم: روش‌هایی هستند که مقادیر ضرایب شدت تنش به طور مستقیم از نتایج عددی استخراج می‌شوند مانند روش انطباق نقطه‌ای[۱] که با استفاده از تغییر مکان گره‌ها ضرایب شدت تنش را محاسبه می‌کنند.
- روش‌های انرژی: در این روش‌ها ابتدا نرخ رهایش انرژی محاسبه شده و سپس با استفاده از آن ضرایب شدت تنش محاسبه می‌شود. مثل روش انتگرال برهم‌کنش

معمولا روش‌های با مبنا انرژی دقیق‌تر هستند و بر روش‌های مستقیم ترجیح داده می‌شوند. اما روش‌های مستقیم نیز قابلیت‌هایی دارند به خصوص برای چک کردن سنجیدن صحت جواب‌های حاصل شده از روش انرژی مفید می‌باشند.

در این بخش از روش انتگرال برهم‌کنش برای محاسبه ضرایب شدت تنش در یک ماده اورتوتروپیک استفاده می‌گردد. محاسبه پارامترهای ضرایب شدت تنش با استفاده از انتگرال برهم‌کنش نیازمند استفاده از میدان‌های کمکی نظیر میدان جابجایی، میدان کرنش و میدان تنش است. در تحلیل مکانیک شکست مواد مرکب معمولاً از میدان‌های کمکی مواد همگن استفاده می‌شود.

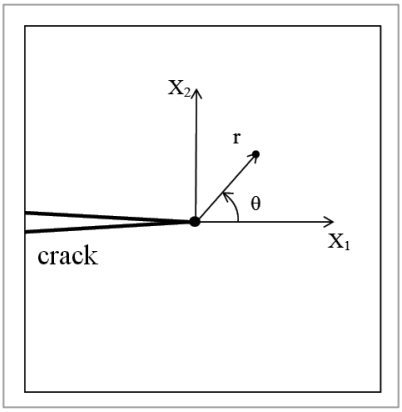
---

[۱] Point matching method

۲-۴-۲ میدان‌های کمکی در روش انتگرال برهم کنش

همانطور که پیشتر ذکر شد، بکارگیری انتگرال برهم‌کنش نیازمند کاربرد میدان‌های کمکی جا به جایی u^{aux} ، کرنش ε^{aux} و تنش σ^{aux} اســـت. میدان‌های کمکی مذکور بر حســـب نوع کمیت مورد محاســـبه یعنی ضـــرایب شـــدت تنش تعریف می‌شـــود. این میدان‌ها معمولا یا از روش‌های عددی ویا تحلیلی بدست آمده و مورد استفاده قرار می‌گیرند.

به منظور محاســـبه ضـــرایب شـــدت تنش، معمولا از حل تحلیلی ویلیامز برای یک ترک لبه‌ای در مواد همگن اســـتفاده می‌شـــود. میدان‌های مذکور برای مواد اورتوتروپیک با در نظرگرفتن خصـــوصیات ماده در نوک ترک بدســـت می‌آیند. به شـــکل ۲-۴ توجه کنید، ترک لبه‌ای با مختصـــات محلی قطبی (r,θ) و دکارتی (X_1,X_2) قابل مشاهده است.



شکل ۲-۴) صفحه دوبعدی اورتوتروپیک شامل ترک لبه‌ای به همراه مختصات‌های قطبی و دکارتی محلی نوک ترک

در مسئله شکل ۲-۴ توابع کمکی به صورت معادلات ۲-۵۵ و۲-۵۶ در نظر گرفته می‌شوند.

$$\sigma_{ij}^{aux} = K_I^{aux}(2\pi r)^{-\frac{1}{2}} f_{ij}^{I}(\theta) + K_{II}^{aux}(2\pi r)^{-\frac{1}{2}} f_{ij}^{II}(\theta) \qquad (۵۴-۲)$$

$$u_i^{aux} = K_I^{aux}\sqrt{\frac{2r}{\pi}} g_i^{I}(\theta) + K_{II}^{aux}\sqrt{\frac{2r}{\pi}} g_i^{II}(\theta) \qquad (۵۵-۲)$$

در این معادلات K_I^{aux} و K_{II}^{aux} ضرایب شدت تنش مودهای I و II **کمکی** می‌باشند، همچنین توابع زاویه‌ای $f_{ij}(\theta)$ و $g_i(\theta)$ نیز در بخش قبل معرفی گردیده اند. (بخش ۲-۲-۳-۲) [۳۳]

۲-۴-۳ فرمول‌بندی حل با انتگرال برهم کنش

انتگرال برهم‌کنش در واقع عبارت برهم‌کنش دو حالت بارگذاری مستقل و قابل قبول برای سازه حاوی ترک است که در انتگرال‌های پایستار الاستیسیته پدید می‌آید. در این بخش روند بدست آوردن انتگرال مذکور بررسی می‌شود.

فرم معمول انتگرال J برای یک ترک بدون اعمال نیرو به سطوح آن، بصورت زیر است [۳۲]:

$$J = \lim_{\Gamma_s \to 0} \int_{\Gamma_s} (W\delta_{1j} - \sigma_{ij} u_{i,1}) n_j d\Gamma_s \qquad (۵۶-۲)$$

در رابطه (۲-۴۸) u_i مولفه‌های بردار تغییرمکان n_j بردار یکه و عمود رو به خارج منحنی و W چگالی انرژی کرنشی مکانیکی به صورت زیر است (معادله (۲-۵۸)):

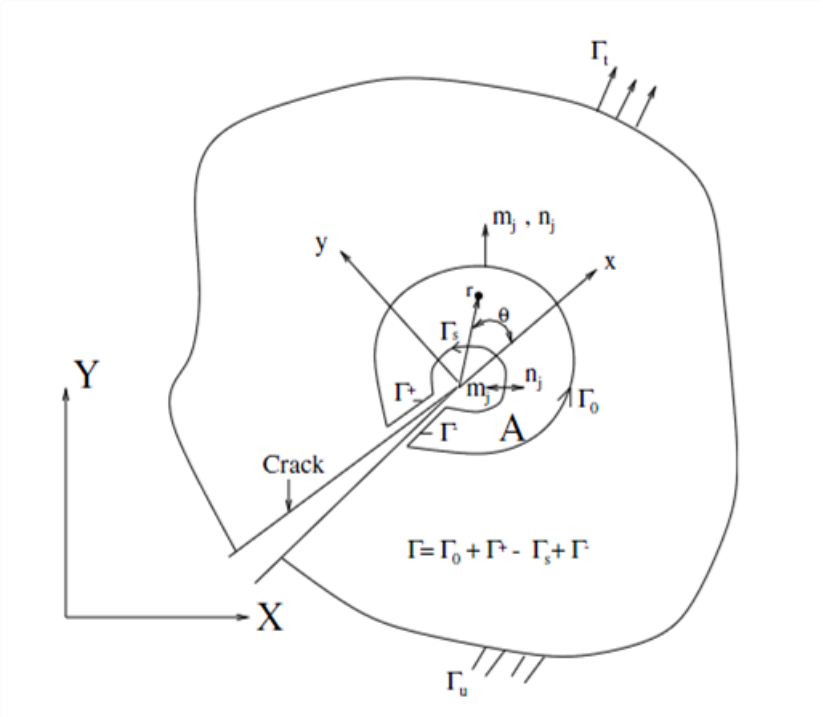
$$W = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^{\ m} = \frac{1}{2}\sigma_{ij}(e_{ij} - \varepsilon_{ij}^{th}) \qquad (۵۷-۲)$$

بدلیل محاسبه آسان‌تر و دقیق‌تر انتگرال‌های سطح به‌صورت عددی، مناسب است انتگرال خطی فوق بصورت یک انتگرال ناحیه‌ای معادل نوشته شود.

برای تبدیل فرم کانتوری انتگرال J به یک فرم ناحیه‌ای معادل انتگرال کانتوری زیر تعریف می‌شود:

$$I = \oint_{\Gamma} (W\delta_{1j} - \sigma_{ij} u_{i,1}) m_j q d\Gamma \qquad (۵۸-۲)$$

که در آن، $\Gamma = \Gamma_o + \Gamma^+ - \Gamma_s + \Gamma^-$ و m_i بردار یکه و عمود رو به خارج کانتور Γ می‌باشد. (یعنی $m_i = n_i$ روی Γ_o و $m_i = -n_i$ روی Γ_s) در این رابطه، q تابع وزنی دلخواه و همواری می باشد که از $q = 1$ روی Γ_s تا $q = 0$ روی Γ_o تغییر می‌کند. (به شکل ۲-۵ توجه کنید).



شکل ۲-۵) تبدیل فرم کانتوری انتگرال J به فرم ناحیه‌ای [۱۸]

با حدگیری از رابطه (۲-۵۰) و با توجه به اینکه روی مرز Γ_o مقدار $q = 0$ اســت و فرض بدون تنش بودن سطوح ترک، رابطه انتگرال به شکل رابطه (۲-۶۰) ساده می‌شود.

$$J = -\lim_{\Gamma_s \to 0} I = -\lim_{\Gamma_s \to 0} \oint_{\Gamma_s} (W\delta_{1j} - \sigma_{ij} u_{i,1}) m_j q d\Gamma \qquad (۲-۵۹)$$

با کاربرد قضــیه دیورژانس و با توجه تغییرات تابع وزنی q انتگرال ناحیه‌ای معادل رابطه (۲-۶۱) حاصل می‌شود.

$$J = \int_A (\sigma_{ij} u_{i,1} - W\delta_{1j}) q_{,j} dA + \int_A (\sigma_{ij} u_{i,1} - W\delta_{1j})_{,j} q dA \qquad (۲-۶۰)$$

که در آن، A ناحیه محصــور به منحنی اســت. برای یک ســیســتم خطی، انتگرال J برای اعمال همزمان بارگذاری‌های اصلی و کمکی بصورت زیر قابل بیان است:

$$J^s = \int_A \left[(\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^{aux})(u_{i,1} + u_{i,1}{}^{aux}) - \frac{1}{2}(\sigma_{ik} + \sigma_{ik}^{aux})(\varepsilon_{ik} + \varepsilon_{ik}{}^{aux})\delta_{1j} \right] q_{,j} dA \quad (۶۱-۲)$$
$$+ \int_A \left[(\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^{aux})(u_{i,1} + u_{i,1}{}^{aux}) - \frac{1}{2}(\sigma_{ik} + \sigma_{ik}^{aux})(\varepsilon_{ik} + \varepsilon_{ik}{}^{aux})\delta_{1j} \right]_{,j} q dA$$

در نتیجه می‌توان رابطه (۲-۶۲) را به صورت رابطه (۲-۶۳) نوشت:

$$J^s = J + J^{aux} + M \quad (۶۲-۲)$$

که در آن J^{aux} از معادله (۲-۶۴) حساب می‌شود

$$J^{aux} = \int_A \left(\sigma_{ij}^{aux} u_{i,1}{}^{aux} - W^{aux}\delta_{1j} \right) q_{,j} dA + \int_A \left(\sigma_{ij}^{aux} u_{i,1}{}^{aux} - W^{aux}\delta_{1j} \right)_{,j} q dA \quad (۶۳-۲)$$

که داریم:

$$W^{aux} = \frac{1}{2}\sigma_{ik}^{aux}\varepsilon_{ik}^{aux} \quad (۶۴-۲)$$

و در نهایت انتگرال برهم‌کنش M نیز از رابطه (۲-۶۶) حاصل می‌شود [۳۴]:

$$M = \int_A (\sigma_{ij} u_{i,1}{}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{i,1} - W^{\text{int}}\delta_{1j}) q_{,j} dA \quad (۶۵-۲)$$
$$+ \int_A (\sigma_{ij} u_{i,1}{}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{i,1} - W^{\text{int}}\delta_{1j})_{,j} q dA$$

که در آن W^{int} تابع چگالی انرژی کرنشی مکانیکی برهم‌کنش است و تعریف می‌شود [۳۱و۳۴و۱۹]:

$$W^{\text{int}} = \sigma_{ik}\varepsilon_{ik}{}^{aux} \quad (۶۶-۲)$$

۲-۴-۴ استخراج ضرایب شدت تنش

رابطه بین انتگرال برهم‌کنش و ضرایب شدت تنش K_I و K_{II} بصورت زیر قابل بیان است [۳۴]:

$$M = 2c_{11}K_I K_I^{aux} + c_{12}(K_I K_{II}^{aux} + K_I^{aux} K_{II}) + 2c_{22}K_{II}K_{II}^{aux} \quad (۶۷-۲)$$

و داریم:

$$c_{11} = -\frac{a_{22}}{2}\,\mathrm{Im}(\frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1\mu_2})$$
$$c_{12} = -\frac{a_{22}}{2}\,\mathrm{Im}(\frac{1}{\mu_1\mu_2}) + \frac{a_{11}}{2}\,\mathrm{Im}(\mu_1\mu_2)$$
$$c_{22} = \frac{a_{11}}{2}\,\mathrm{Im}(\mu_1 + \mu_2) \qquad (۶۸-۲)$$

در رابطه بالا a_{ij} اعضاء ماتریس نرمی کاهش یافته می‌باشند که پیشتر درباره آن‌ها توضیحاتی ارائه شد.

با انتخاب مناسب میدان‌های کمکی ضرایب شدت تنش، K_I و K_{II} با حل رابطه زیر بدست می‌آید [۳۴].

$$M^{(1)} = 2c_{11}K_I + c_{12}K_{II} \longleftarrow (K_I^{aux} = 1, K_{II}^{aux} = 0)$$
$$M^{(2)} = c_{12}K_I + 2c_{22}K_{II} \longleftarrow (K_I^{aux} = 0, K_{II}^{aux} = 1) \qquad (۶۹-۲)$$

با حل دو معادله ، دو مجهول بالا بر حسب $M^{(1)}$ و $M^{(2)}$ ، مقادیر K_I و K_{II} بدست می آید (رابطه ۲-۷۱) [۳۴].

$$K_I = \frac{2c_{22}M^{(1)} - c_{12}M^{(2)}}{4c_{11}c_{22} - c_{12}^{\ 2}}$$
$$K_{II} = \frac{2c_{11}M^{(2)} - c_{12}M^{(1)}}{4c_{11}c_{22} - c_{12}^{\ 2}} \qquad (۷۰-۲)$$

در نهایت با داشتن ضرایب شدت تنش در یک مسئله می‌توان آن مسئله را تحلیل کرد.

فصل ۳: تحلیل دینامیکی

۱) مقدمه

۲) معادلات حاکم و گسسته‌سازی در حالت دینامیکی

۳) انتگرال برهم‌کنش در حالت دینامیکی

۳-۱ مقدمه

این قسمت به شبیه سازی تجزیه و تحلیل دینامیکی ترک ثابت در مواد اورتوتروپیک با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته اختصاص یافته است. این کار در واقع گسترش مسائل دینامیکی اورتوتروپیک است که به تازگی توسعه یافته و از روش المان محدود توسعه یافته برای تجزیه و تحلیل شکست مواد اورتوتروپیک استفاده می شود.

در این فصل نیز، همانند فصل قبل، توابع هویساید و توابع غنی سازی نزدیک به نوک در قالب یک پیکربندی واحد برای مدل سازی ناپیوستگی ترک و نوک ترک در روش المان محدود استفاده می شود. برای تعیین خواص شکست، ضرایب شدت تنش دینامیکی[۱] مانند فصل قبل با استفاده از انتگرال برهم‌کنش ارزیابی می‌شود.

۳-۲ معادلات حاکم و گسسته‌سازی در حالت دینامیکی

همانطور که در بخش ۱-۳ اشاره شد تحلیل‌ها در این رساله دینامیکی است. از این رو علاوه بر پارامترهای معرفی شده در فصل ۲ زمان نیز در مسئله ادغام می‌شود. از این جهت ابتدا توضیح مختصری درباره پارامتر زمان و اضافه شدن آن در مسئله داده می‌شود

۳-۲-۱ تاثیر پارامتر زمان در معادلات حاکم

همانطور که ذکر شد در این فصل زمان نیز وارد مسأله می شود، در این حالت معادلات حرکت و شرایط مرزی و شرایط اولیه (به علت وجود پارامتر زمان) به صورت معادله (۳-۱) و (۳-۲) می‌باشند:

---

[۱] DSIFs

$$\nabla.\sigma + b = \rho\ddot{u} \quad \text{in} \quad \Omega \tag{۱-۳}$$

$$\sigma.n = \bar{t} \quad \text{on} \quad \Gamma_t \tag{۲-۳}$$

$$\sigma.n = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_d$$

$$u(x,t=o) = \bar{u}(0)$$

$$\dot{u}(x,t=o) = \bar{\dot{u}}(0)$$

که n بردار نرمال یکه می باشد. در بالا σ تانسور تنش کوشی و b چگالی نیروی حجمی است.

همچنین معادله زیر جایگزین معادله (۲-۱۲) در فصل ۲ می‌گردد:

$$\mathrm{M}\ddot{u} + \mathrm{K\,u} = \mathrm{f}^{\mathrm{ext}} \tag{۳-۳}$$

مقدار بردار نیرو f^{ext} و ماتریس سفتی K مشابه فصل ۲ بدست می‌آیند. ماتریس M، ماتریس جرم می‌باشد و مطابق زیر بدست می‌آید

۳-۲-۲ محاسبه ماتریس جرم برای انواع المان‌ها

ماتریس جرم هر المان به صورت زیر به دست می‌آید:

$$M_e = \int_{\Omega^h} [N]^T \rho [N] d\Omega \tag{۴-۳}$$

در رابطهٔ (۴-۲)، ρ چگالی ماده اســت و $[N]$ ماتریس گسسته‌سازی شده توابع شکل توسعه‌یافته می‌باشد و مولفه‌های آن به صورت زیر است:

$$[N] = \begin{bmatrix} N_i^u & N_j^a & N_k^{b1} & N_k^{b2} & N_k^{b3} & N_k^{b4} \end{bmatrix} \tag{۵-۳}$$

در این رابطه:

$$N_i^u = \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \tag{۶-۳}$$

$$N_j^a = \begin{bmatrix} N_j H(x_j) & 0 \\ 0 & N_j H(x_j) \end{bmatrix} \qquad (۷-۳)$$

$$N_k^{bl}\Big|_{l=1,2,3,4} = \begin{bmatrix} N_k F_k^l(x_k) & 0 \\ 0 & N_k F_k^l(x_k) \end{bmatrix} \qquad (۸-۳)$$

فقط باید به معیارهای غنی‌سازی که در قسمت توضیحات تکمیلی فصل ۲ (بخش ۲-۳-۲-۴) ذکر شد توجه کرد. برای جلوگیری از اتلاف وقت و حوصله از تکرار مجدد آن مطالب صرف نظر می‌کنیم.

مونتاژ کردن ماتریس M وکلا تمام ماتریس‌ها در المان محدود مانند مونتاژ کردن ماتریس سفتی است که در بخش۲-۱-۲-۵ توضیح داده شد.

۳-۲-۳ حل مسئله دینامیکی

برای حل مســـائل دینامیکی به روش عددی راه حل‌های زیادی وجود دارد. در این مطالعه، روش نیومارک نیرو کنترل[۱] مورد استفاده قرار می‌گیرد.

در هر مرحله زمانی n ، معادلات نهایی گسسته به طور همزمان بیان شده:

$$\ddot{u}_n = \frac{F - K\left(u_{n-1} + \Delta t\dot{u}_{n-1} + (1-2\beta)\frac{\Delta t^2}{2}\ddot{u}_{n-1}\right) - C\left(\dot{u}_{n-1} + (1-\alpha)\Delta t\ddot{u}_{n-1}\right)}{\left(M + \beta\Delta t^2 K + \alpha\Delta t C\right)} \qquad (۹-۳)$$

$$\dot{u}_n = \dot{u}_{n-1} + (1-\alpha)\Delta t\ddot{u}_{n-1} + \alpha\Delta t\ddot{u}_n$$

$$u_n = u_{n-1} + \Delta t\dot{u}_{n-1} + (1-2\beta)\frac{\Delta t^2}{2}\ddot{u}_{n-1} + \beta\Delta t^2\ddot{u}_n$$

---

[۱] Load control

که در آن u_n، $\dot{u}_n$ و $\ddot{u}_n$ به ترتیب بردار جابجایی، بردار سرعت و بردار شتاب گره‌ها می‌باشند. M ، K و C به ترتیب ماتریس جرم، سفتی و ماتریس میرایی (دمپینگ) می‌باشند. F بردار نیرو و Δt افزایش زمان در هر گام (n) می‌باشد. در اینجا، پارامترهای α=۰,۵ و β=۰,۲۵ در نظر گرفته می شوند [۱۸و۲۲و۳۶].

در صورتی که میرایی وجود نداشته باشد روابط بالا به صورت زیر تغییر می‌کنند.

$$\ddot{u}_n = \frac{F - K\left(u_{n-1} + \Delta t\dot{u}_{n-1} + (1-2\beta)\frac{\Delta t^2}{2}\ddot{u}_{n-1}\right)}{\left(M + \beta\Delta t^2 K + \alpha\Delta t C\right)} \qquad (۱۰-۳)$$

$$\dot{u}_n = \dot{u}_{n-1} + (1-\alpha)\Delta t\ddot{u}_{n-1} + \alpha\Delta t\ddot{u}_n$$

$$u_n = u_{n-1} + \Delta t\dot{u}_{n-1} + (1-2\beta)\frac{\Delta t^2}{2}\ddot{u}_{n-1} + \beta\Delta t^2\ddot{u}_n$$

۳-۳ انتگرال برهم‌کنش در حالت دینامیکی

با اضـــافه کردن یک ترم به انتگرال برهم‌کنش در حالت اســـتاتیکی، انتگرال برهم‌کنش در حالت دینامیکی نیز بدست می‌آید. میدان‌های کمکی مانند قبل می‌باشند (رابطه (۲-۶۷)) [۳۴].

$$M = \int_A (\sigma_{ij} u_{i,1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{i,1} - W^{\text{int}}\delta_{1j}) q_{,j} dA + \int_A (\rho \ddot{u}_i u_{i,1}^{aux}) q dA \qquad (۱۱-۳)$$

در این رابطه u_i مولفه‌های بردار تغییرمکان اســت، و $\ddot{u}_i$ مولفه‌های بردار شتاب است، که در بخش قبلی برای تمامی گره‌ها بدست آمده است.

با توجه به مولفه‌های بردار تغییرمکان و جایگذاری در روابط ((۱-۴) و (۲-۸))[1] مقدار تنش σ_{ij} نیز بدســـت می‌آید. مقادیر تنش و جابه‌جایی‌های کمکی نیز با توجه به روابط (۲-۵۵) و (۲-۵۶) بدســـت خواهند آمد. رابطه بین انتگرال برهم‌کنش و ضرایب شدت تنش K_I و K_{II} نیز در بخش ۲-۴-۴ به حد کافی توضیح داده‌شده‌اند. انتخاب مناسب میدان‌های کمکی (مود I و مود II) ضرایب شدت تنش K_I و K_{II} مشابه آنچه در آخرین بخش فصل قبل ذکر شد محاسبه می‌شوند.

[1] روابط تنش کرنش و کرنش جا به جایی

فصل ۴: تحلیل و نتایج ورق اورتوتروپیک ترک‌دار تحت شوک حرارتی با تئوری غیرکوپل[1]

۱)مقدمه

۲) معرفی معادلات حاکم و گسسته‌سازی

۳) چیدمان درجات آزادی در برنامه رایانه‌ای

۴) حل مثال‌های عددی و تحلیل نتایج

[1] Un Coupled

۴-۱ مقدمه

همانطور که در فصول گذشته ذکر شد، در این تحقیق هدف محاسبه ضرایب شدت تنش در یک ورق محدود اورتوتروپیکی است که تحت شوک حرارتی قرارگرفته است. برای این منظور جهت تحلیل و محاسبه ضرایب شدت تنش به دو معادله ناویر که همان معادلات اساسی الاستیسیته است که بر حسب جا به جایی نوشته شده (که خود در فضای دو بعدی شامل دو معادله است)، و معادله انرژی نیاز داریم. با توجه به تئوری ترموالاستیسیته مورد استفاده معادله انرژی قابل بازنویسی است [۱۹و۳۵]. در این فصل و فصول آتی نتایج سه تئوری غیرکوپل، کوپل و لرد شلمان به ترتیب بررسی شده‌است[۱].

در ترموالاستیسیته غیرکوپل معادلات حاکم، یعنی معادلات ناویر و معادله انرژی، با یکدیگر جفت نشده و به‌صورت جدا و بررسی شده و در انتها اثر هریک از آن‌ها در مسئله اعمال می‌شود. با توجه به تئوری غیرکوپل، وجود کرنش مکانیکی باعث بالارفتن دما نمی‌شود و بالعکس [۳۵].

توضیح این نکته ضروری است که معادلات ناویر، همان معادلات حرکت هستند که با تلفیق معادلات ساختاری و سینماتیک برحسب جابه‌جایی ها نوشته شده‌اند. در فصل بعد نحوه بدست آوردن معادلات ناویر به طور کامل توضیح داده شده‌است [۱۹].

۴-۲ معرفی معادلات حاکم و گسسته سازی

همانطور که در مقدمه ذکر شد معادلات ترموالاستیسیته غیرکوپل شامل معادلات ناویر (در فضای دو بعدی دو معادله) و معادله انرژی (یک معادله) می‌باشند، که جدا از هم گسسته شده و فرم ماتریسی المان محدود توسعه‌یافته آن‌ها نوشته می‌شود.

---

[۱] در فصل ششم بخش ۴ توضیح تکمیلی درباره این تئوری‌ها داده شده است .

۴-۲-۱ معادلات ناویر

همانطور که در مقدمه ذکر شد معادلات ناویر همان معادلات حرکت هستند که برحسب جا به جایی نوشته شده است. گسسته‌سازی این معادلات در فصل گذشته انجام شده است. (لازم به ذکر است در فصل گذشته برای سهولت در محاسبات مربوط به گسسته‌سازی از معادلات حرکت به‌جای معادلات ناویر استفاده شد.) در اینجا تنها برای یادآوری فرم ماتریسی معادلات و پارامترها را یادآوری می‌کنیم.

فرم ماتریسی معادله حرکت:

$$\mathrm{M}\ddot{u} + \mathrm{K}\,\mathrm{u} = \mathrm{f}^{\mathrm{ext}} \qquad (۱-۴)$$

مقدار بردار نیرو f^{ext} و ماتریس سفتی K مشابه فصل ۲ بدست می‌آیند. ماتریس M، ماتریس جرم می‌باشد. و داریم:

ماتریس سفتی:

$$K = \int_{\Omega} [B]^T [C]\,[B]\, d\Omega \qquad (۲-۴)$$

ماتریس جرم:

$$M = \int_{\Omega} [N]^T \rho [N] d\Omega \qquad (۳-۴)$$

که در این روابط Ω قلمرو المان مورد نظر برای انتگرال است.

یادآوری و ذکر چند نکته در اینجا ضروری به نظر می‌رسد:

۱) ماتریس‌های معادلات (۴-۳) و (۴-۲) در مختصات جهانی نوشته شده‌اند. برای حساب کردن آن‌ها در مختصات محلی باید مانند معادله (۲-۷) انتگرال در دترمینان ژاکوبین (det(j)) ضرب شود.

۲) باید به معیارهای غنی‌سازی که در قسمت توضیحات تکمیلی فصل ۲ (بخش ۲-۳-۲-۴) ذکر شد توجه کرد.

۴-۲-۲ معادله انرژی

قانون اول ترمودینامیک، تعادل انرژی گرمایی در یک پیوستار جامد را به صورت زیر بیان می کند:

$$-div(q)+Q=\rho c\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (۳-۴)$$

که در آن q بردار شار حرارتی ، Q نرخ تولید انرژی داخلی در پیوستار در واحد حجم و زمان واحد، T میدان اسکالر دمای مطلق، ρ چگالی جرمی و c حرارت ویژه جامد است. قانون تجربی هدایت گرمایی فوریه در یک جامد غیر همسانگرد مولفه‌های بردار شار حرارتی را به گرادیان‌های دما مربوط می کند.

$$q=-K^{cond}\quad grad(T) \qquad (۴-۴)$$

در این عبارت، K^{cond} بردار ثابت‌های هدایت گرمایی برای یک جامد غیر همسانگرد است. در حالت کلی، مولفه‌های ماتریس K^{cond} تابع دما می‌باشد، اما برای گستره کم دمایی، می توان این ضرایب را با تقریب قابل قبولی مستقل از دما و ثابت فرض نمود. بردار شار حرارتی q و ماتریس هدایت گرمایی K^{cond} در حالت صفحه ای به صورت زیر تعریف می شوند:

$$q=\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \qquad (۵-۴)$$

$$K^{cond}=\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \qquad (۶-۴)$$

با جایگزینی روابط شار حرارتی (۴-۵) و (۴-۶) در معادله تعادل گرمایی (۴-۳)، معادله حاکم بر توزیع دما در یک پیوستار جامد طی فرآیند هدایت گرمایی بدست می آید [۱۸].

شرط اولیه معادله حاکم به صورت معادله (۴-۷) است:

$$T(x,y,z,0)=T_0(x,y,z) \quad \text{in } t=0 \tag{۴-۷}$$

شرایط مرزی نیز مطابق شکل ۴-۱ به صورت یکی یا ترکیبی از شرایط زیر است:

۱- دمای سطح S_1 طی فرآیند انتقال گرما معلوم و برابر T_s باشد:

$$T(x,y,z,t)=T_s \quad \text{on } S_1 \quad \& \ t>0 \tag{۴-۸}$$

۲- شار حرارتی منتقل شده از سطح S_2 طی فرآیند انتقال دما:

$$-q.n=q'' \quad \text{on } S_2 \quad \& \ t>0 \tag{۴-۹}$$

که در آن ، n بردار یکه عمود بر سطح در هر نقطه از S_2 می باشد.

۳- روی سطح S_3 جامد با سیالی به صورت همرفت تبادل گرما داشته باشد.

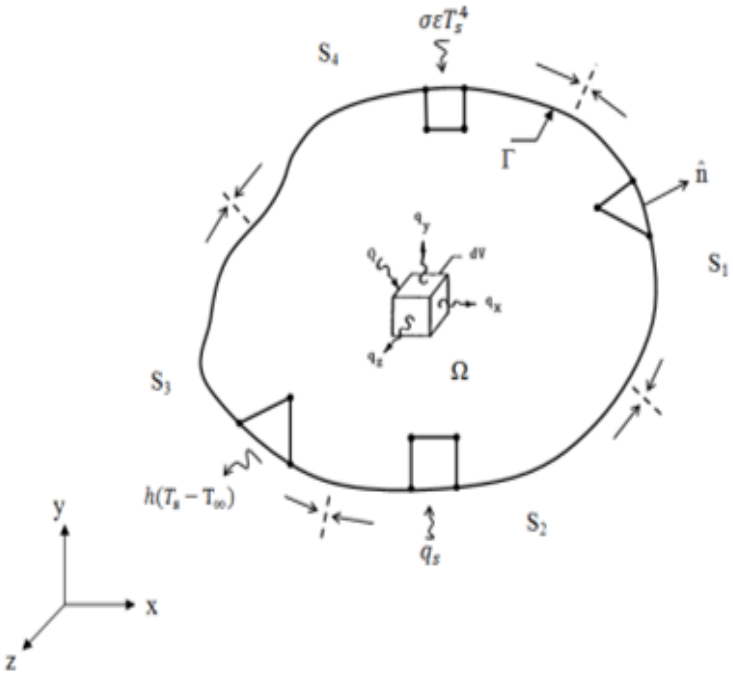
$$-q.n+h(T-T_\infty)=0 \quad \text{on } S_3 \tag{۴-۱۰}$$

در این عبارت ، h ضریب همرفت و T_∞ دمای محیط است.

سطح S_4 در معرض تابش قرار داشته باشد.

$$-q.n+\sigma\varepsilon T^4=\alpha\, q_r \quad \text{on } S_4 \quad \& \ t>0 \tag{۴-۱۱}$$

در این عبارت ، σ ثابت استفان بولتزمن، ε ثابت تابش سطح مرزی ، α ضریب جذب سطح مرزی و q_r نرخ شار حرارتی واحد سطح است که به سطح مرزی می رسد [۱۸].



شکل ۴-۱) شرایط مرزی مختلف اعمال شده در حالت کلی [۱۸]

۴-۲-۲-۲ فرم ضعیف[۱] معادله انرژی

طبق روش گلرکین، با عمود کردن توابع شــکل بر باقیمانده معادله تعادل گرمایی، رابطه (۴-۱۲) بدست می‌آید:[۱۸و۲۲].

$$\int_{\Omega}\left(-div(q)+Q-\rho c\frac{\partial T}{\partial t}\right)\eta d\Omega=0 \qquad (۱۲-۴)$$

در این رابطه η تابع شکل است.

با اســتفاده از قضــیه انتگرال گاوس و انتگرال گیری جز به جز ، می‌توان فرم ضــعیف رابطه بالا را بدست آورد. با در نظر گرفتن رابطه (۶-۱۳) داریم:

---

[۱] Weak form

$$\nabla(\eta q) = \nabla \eta . q + \nabla q . \eta \qquad (۱۳-۴)$$

عبارت اول رابطه (۴-۱۲) به صورت زیر نوشته می شود.

$$\int_{\Omega} -\eta \nabla q d\Omega = \int_{\Omega} -\nabla(\eta q) d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \eta . q d\Omega \qquad (۱۴-۴)$$

بطور مشـابه ، با استفاده از قضیه انتگرال گاوس عبارت اول طرف راست رابطه (۴-۱۴) به انتگرال مرزی تبدیل می‌شود:

$$\int_{\Omega} -\eta \nabla q d\Omega = \int_{S} -\eta q . n dS + \int_{\Omega} \nabla \eta . q d\Omega \qquad (۱۵-۴)$$

جایگزینی رابطه (۴-۱۵) در رابطه (۴-۱۲) منجر به معادله زیر می شود:

$$\int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \eta \, d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \eta . q \, d\Omega = \int_{\Omega} Q \eta \, d\Omega - \int_{S} \eta q . n \, dS \qquad (۱۶-۴)$$

اکنون مطابق با شـرایط مرزی مسأله که یکی یا ترکیبی از روابط (۴-۸ تا ۴-۱۱) روی هر قسمت مرز می تواند باشـد. انتگرال روی مرز این معادله (۴-۱۶) به انتگرال روی قسـمت‌هایی از مرز شکسته می شـود. با لحاظ کردن شـرایط مرزی فرم ضعیف معادله بر هدایت گرمایی به صورت رابطه (۴-۱۷) نوشته می شود [۱۸].

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \eta d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \eta . q d\Omega = \int_{\Omega} Q \eta d\Omega - \int_{S_r} \eta (q . n) dS \\ &- \int_{S_q} \eta (q'' . n) dS - \int_{S_{conv}} h (T - T_{\infty}) dS - \int_{\Gamma_{rad}} \eta \left(\sigma \varepsilon T^4 - \alpha q_r \right) d\Gamma \end{aligned} \qquad (۱۷-۴)$$

طبق قانون فوریه، گرادیان دما و شار حرارتی در جهت‌های مختلف با رابطه زیر به هم مربوط می شوند:

$$q = -K^{cond} \nabla T \qquad (۱۸-۴)$$

با جایگزینی رابطه بالا در معادله (۴-۱۷) ، فرم ضـعیف معادله حاکم بر هدایت گرمایی به صورت زیر نوشته می شود [۱۸].

$$\int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \eta d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \eta . K^{cond} \nabla T d\Omega = \int_{\Omega} Q \eta d\Omega$$
$$- \int_{S_r} \eta (q.n) dS - \int_{S_q} \eta (q''.n) dS - \int_{S_{conv}} h (T - T_{\infty}) dS - \int_{S_{rad}} \eta (\sigma \varepsilon T^4 - \alpha q_r) dS \qquad (۱۹-۴)$$

طبق تقریب المان محدود گالرکین توابع شکل همان توابع شکل هستند [۲۲]. پس از این به بعد در روابط به جای η از تابع شکل (N)[۱] استفاده می‌کنیم.

۴-۲-۲-۳ گسسته‌سازی معادله انرژی و نکات پیرامون آن

اکنون از تقریب المان محدود[۲] استفاده می‌کنیم.

$$t^h == N\ t \qquad (۲۰-۴)$$

در این عبارت، N بردار توابع شکل، n تعداد گره‌های ناحیه و t بردار دمای گره‌های ناحیه تکیه‌گاهی نقطه مورد نظر است. رابطه (۴-۲۰) را می توان به مانند رابطه (۲-۱) نوشت:

$$t^h = \sum_i^n N_i t_i \qquad (۲۱-۴)$$

که در آن ، N_i تابع شکل گره i ام وt_i دمای گرهی آن است. درست مانند چیزی که در فصل دوم برای معادلات حرکت (ناویر) داشتیم.

با استفاده از تقریب المان محدود گرادیان دما به شکل رابطه (۴-۲۲) نوشته می‌شود.

$$\nabla t^h = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & \cdots & N_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{Bmatrix} = B^{th}_{(3\times n)} t_{(n\times 1)} \qquad (۲۲-۴)$$

---

[۱] توابع شکل درحالت مکانیکی و حرارتی یکسان هستند و تنها به تعداد گره‌های یک المان بستگی دارند.

[۲] فصل دوم رابطه (۲-۱)

مشابه ماتریس B که در رابطه (۲-۸) فصل دوم برای حالت مکانیکی تعریف شد[۱] ، در اینجا برای حالت حرارتی نیز ماتریس B^{TH} تعریف می‌شود، که به آن ماتریس عملگر گرادیان می‌گویند [۱۸].

همانطور که قابل مشاهده است ردیف‌های دو ماتریس B و B^{TH} برای یک المان مشابه یکی است. اما ستون‌های ماتریس B برای یک المان مشابه دو برابر ستون‌های ماتریس B^{TH} است. به عبارت بهتر اگر n تعداد گره‌های یک المان مشخص باشد. (با احتساب گره‌های مجازی در المان‌های اسپلیت و نوک ترک) سایز این دو ماتریس از رابطه (۴-۲۳) حساب می‌شود.

$$size(B) = (3 \times 2n)$$
$$size(B^{TH}) = (2 \times n) \qquad (۴-۲۳)$$

در حقیقت این دو ماتریس، جز اصلی‌ترین ماتریس‌ها در محاسبات المان محدود (چه کلاسیک و چه توسعه یافته هستند).

اکنون با توجه به روابطی که ذکر شد می‌توان جمله دوم فرم ضعیف معادله را (رابطه ۴-۱۹) به صورت رابطه (۴-۲۴) بازسازی کرد [۱۸و۲۲].

$$\int_{\Omega} (\nabla N)^{T} \left(K^{cond}\ \nabla t\right) d\Omega = \int_{\Omega} \left(\sum_{i}^{n} B^{th}{}_{i} t_i\right)^{T} \left(\sum_{J}^{n} K^{cond} B^{th}{}_{J} t_J\right) d\Omega \qquad (۴-۲۴)$$
$$= \int_{\Omega} \sum_{i}^{n} \sum_{J}^{n} N_i^{T} \left[B^{th}{}_{i}^{T} K^{cond} B^{th}{}_{J}\right] t_J d\Omega$$

لازم به یادآوری است علامت T در بالای ماتریس B به معنی ترانهاده است.

تا اینجا، گره‌ها در ناحیه محلی تکیه‌گاهی شماره‌گذاری می‌شوند، i و J شماره‌های محلی گره‌ها هستند. از این پس، شماره گذاری گره‌ها از سیستم‌های محلی به شماره‌گذاری آن‌ها در سیستم کل تغییر می‌کند. در سیستم کل (بعد از مونتاژ کردن ماتریس‌ها)[۲] تمام گره‌های مساله دارای یک شماره

---

[۱] ماتریس کرنش جابه جایی گره‌ها؛ به فصل دوم رابطه ۲-۸ رجوع شود.

[۲] مشابه بخش ۲-۱-۲-۵

واحد از ۱ تا n می‌باشند. بنابراین در رابطه (۴-۲۴) شماره گره‌های I و J می‌تواند از ۱ تا n تغییر کند. اگر I و J در یک ناحیه تکیه‌گاهی واحد قرار نداشته باشند؛ عبارت داخل انتگرال رابطه (۴-۲۴) صفر می شود. با در نظرگرفتن شماره گذاری در کل سیستم رابطه (۴-۲۴) به صورت زیر بیان می‌شود [۱۸].

$$\int_{\Omega}(\nabla N)^{T}\left(K^{cond}\ \nabla\theta\right)d\Omega=\int_{\Omega}\sum_{i}^{n}\sum_{J}^{n}N_{i}^{T}\left[B^{th}{}_{i}{}^{T}K^{cond}B^{th}{}_{J}\right]t_{J}\ d\Omega \qquad (۴-۲۵)$$

می توان عملگر انتگرالگیری را به داخل عملگرهای جمع منتقل نمود (رابطه ۴-۲۶).

$$\int_{\Omega}(\nabla N)^{T}\left(K^{cond}\ \nabla t\right)d\Omega=\sum_{i}^{n}\sum_{J}^{n}N_{i}^{T}\left[\int_{\Omega}\left[B^{th}{}_{i}{}^{T}K^{cond}B^{th}{}_{J}\right]d\Omega\, t_{J}\right] \qquad (۴-۲۶)$$

درنهایت از رابطه (۴-۲۶) رابطه ماتریس سفتی حرارتی به صورت زیر بدست می‌آید.

$$K^{th}=\int_{\Omega}\left[B^{th}{}_{i}{}^{T}K^{cond}B^{th}{}_{J}\right]d\Omega \qquad (۴-۲۷)$$

این رابطه از لحاظ ماهیت و شکل بسیار شبیه به ماتریس سفتی مکانیکی می‌باشد. منتها به دلیل تفاوت در سایز ماتریس B با ماتریس B^{th}، سایز ماتریس سفتی حرارتی با مکانیکی نیز تفاوت می‌کند. در حقیقت این تفاوت سایز در تفاوت بین درجات آزادی سیستم‌های مکانیکی و حرارتی است. سیستم‌های مکانیکی در حالت دوبعدی دارای دو درجه آزادی هستند (u,v)، حال اینکه سیستم‌های حرارتی تنها یک درجه آزادی دارند (t)، از این رو طبق رابطه (۲-۱۱) که برای یادآوری دوباره آن‌را تحت عنوان رابطه (۴-۲۸) در زیر ذکر کردیم سایز ماتریس سفتی در حالت مکانیکی در دوبعد؛ ۲ برابر سایز ماتریس سفتی حرارتی است. یادآوری این نکته ضروری است که این مقایسه تنها و تنها برای المان‌های مشابه صحیح است. یعنی نمی‌توان سایز ماتریس سفتی مکانیکی در یک المان معمولی را با سایز ماتریس سفتی حرارتی در المان نوک ترک مقایسه کرد. (زیرا همانطور که بارها ذکر شد در المان‌های اسپلیت و نوک ترک گره مجازی و افزایش سایز داریم.)

$$\text{size}([K]_{n\times n}) = (DOF \times ND) \times (DOF \times ND) \qquad (۲۸-۴)$$

در حقیقت در حالت مکانیکی DOF برابر ۲ و اما در حالت حرارتی برابر ۱ است.

با در نظرگرفتن تعریف ماتریس سـفتی حرارتی طبق معادله (۴-۲۷)، رابطه (۴-۲۶) را به صورت زیر می‌توان بیان کرد [۱۸]:

$$\int_{\Omega} (\nabla N)^{T} \left(K^{cond}\ \nabla t\right) d\Omega = \sum_{i}^{n}\sum_{j}^{n} N_i^{\,T} K_{ij}^{th} t_j \qquad (۲۹-۴)$$

بسـط عبارت سـمت راسـت در رابطه (۴-۲۹) فرآیند مونتاژ را نشان می دهد (همانند چیزی که برای حالت مکانیکی در فصل ۲ ذکر شد).

در نهایت فرم معادله (۴-۲۹) به صورت معادله (۴-۳۰) باز می‌شود: [۱۸و۱۹] (توجه به این نکته ضروری است که طبق قواعد جمع اندیسی هر دو اندیس K، یعنی i وj _مجازی[۱] هستند و عمل جمع روی آن‌ها صورت می‌گیرد [۱۹].)

$$\begin{aligned}
\sum_{i}^{n}\sum_{j}^{n} N_i^T K_{ij}^{th} t_J &= N_1^T K_{11}^{th} t_1 + N_1^T K_{12}^{th} t_2 + \ldots + N_1^T K_{1n}^{th} t_n \\
&+ N_2^T K_{21}^{th} t_1 + N_2^T K_{22}^{th} t_2 + \ldots + N_2^T K_{2n}^{th} t_N \\
&\vdots \\
&+ N_N^T K_{N1}^{th} t_1 + N_N^T K_{N2}^{th} t_2 + \ldots + N_N^T K_{NN}^{th} t_N
\end{aligned} \qquad (۳۰-۴)$$

که در آن K_{IJ}^{th} ماتریس سـفتی کل سـیسـتم اسـت. با توجه به نکاتی که پیشـتر در باب سـایز ماتریس سفتی ذکر شد حالت باز شده ماتریس سفتی حرارتی در این مسئله با n گره به صورت رابطه (۴-۳۱) و با سایز n×n است :

[۱] Dummy

$$K^{th}=\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1N} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{N1} & K_{N2} & \cdots & K_{NN} \end{bmatrix} \qquad (۳۱-۴)$$

با در نظرگرفتن روابط (۴-۳۰) و (۴-۳۱)، فرم نهایی رابطه (۴-۲۹) به صورت زیر است.

$$\int_{\Omega}(\nabla N)^{T}\left(K^{cond}\ \nabla t\right)d\Omega = N^{T}K^{th}\Theta \qquad (۳۲-۴)$$

در این رابطه، بردار Θ، بردار دمای کل سیستم است و شامل دمای گرهی تمام گره‌های مسأله می‌باشد .

$$\Theta=\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ . \\ . \\ . \\ t_n \end{bmatrix} \qquad (۳۳-۴)$$

به طور مشابه، فرم گسسته عبارت‌های دیگر رابطه (۴-۱۹) قابل بیان است، به طور مثال جمله اول رابطه (۴-۱۹) را می‌توان به صورت رابطه (۴-۳۴) بازنویسی کرد [۱۸].

$$\int_{\Omega}\rho c\,\frac{\partial T}{\partial t}\,\eta d\Omega = \int_{\Omega}\rho c t\,\dot{\bar{T}}\,\eta d\Omega \qquad (۳۴-۴)$$

با جایگزینی تابع شکل N به جای تابع η [۱]، فرم گسسته رابطه بالا به صورت زیر می باشد:

$$\int_{\Omega}\rho c\,\frac{\partial T}{\partial t}\,\eta d\Omega = \int_{\Omega}\rho c N\dot{\bar{T}}t\ d\Omega = \dot{\bar{T}}\int_{\Omega}N\ \rho c t\ d\Omega \qquad (۳۵-۴)$$

---

[۱] یادآور می‌شود که در تقریب المان محدود گالرکین توابع شکل همان توابع شکل هستند یعنی $N=\eta$ برای توضیحات بیشتر به مرجع ۲۲ مراجعه کنید.

عبارت (۴-۳۵) بر حسب دمای گره به صورت زیر قابل بیان است.

$$\int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \eta d\Omega = \dot{\bar{T}} \int_{\Omega} \rho c \sum_{i}^{n} N_i N_i \sum_{j}^{n} N_j N_j \, d\Omega = \dot{\bar{T}} \sum_{i}^{n} \sum_{j}^{n} N_i \left(\int_{\Omega} \rho c N_i N_j \, d\Omega \right) t_j \tag{۳۶-۴}$$

با استفاده از رابطه (۴-۳۶) ماتریس کامپلیانس[۱] به شکل زیر تعریف می‌شود [۱۸].

$$C^{th} = \int_{\Omega} \left[N_i^T \rho c N_j \right] d\Omega \tag{۳۷-۴}$$

در این تعریف N توابع شکل و ρ, c نیز به ترتیب ظرفیت گرمایی ویژه[۲] و چگالی می‌باشند.

فرم گسسته عبارت متناظر با تولید انرژی داخلی[۳] در رابطه (۴-۱۹) نیز به صورت زیر است [۱۸]:

$$\int_{\Omega} QN d\Omega = \int_{\Omega} Q \sum_{i}^{n} N_I N_I d\Omega = \sum_{i}^{n} N_I \int_{\Omega} QN_i d\Omega = \sum_{i}^{n} N_i F_i^{gen} \tag{۳۸-۴}$$

در این عبارت انرژی داخلی به صورت رابطه زیر تعریف می‌شود.

$$F_i^{gen} = \int_{\Omega} QN_i d\Omega \tag{۳۹-۴}$$

فرم گسسته عبارت متناظر با شار حرارتی عبوری از مرزهای سیستم در رابطه (۴-۱۹) نیز به صورت معادله زیر است:

$$\int_{S_q} q'' N d\Omega = \int_{S_q} q'' \sum_{i}^{n} N_i N_i dS = \sum_{i}^{n} N_i \int_{S_q} Q q'' dS = \sum_{i}^{n} N_i F_i^{flux} \tag{۴۰-۴}$$

در این عبارت:

---

[۱] Compliance

[۲] Specificcapacity

[۳] Heat Generation

$$F_i^{flux} = \int_{S_q} q'' N_i dS \qquad (۴۱-۴)$$

فرم گسسته عبارت متناظر با شرایط مرزی همرفتی مرزهای سیستم در رابطه (۴-۱۹) شامل دو ترم به صورت زیر است [۱۸]:

$$\int_{S_{conv}} htNd\Omega = \int_{S_{conv}} h\left(\sum_i^n N_I N_I\right)\left(\sum_j^n N_J N_J\right)dS \qquad (۴۲-۴)$$

$$= \sum_i^n N_i \sum_i^n N_j \int_{S_{conv}} hN_i N_j dS = \sum_i^n K_{ij}^{conv} t_j N_i \qquad (۴۳-۴)$$

در این عبارات همانگونه که پیشتر تعریف شد:

$$K_{ij}^{conv} = \int_{S_{conv}} hN_i N_j dS \qquad (۴۴-۴)$$

$$F_i^{conv} = \int_{S_{conv}} ht_\infty N_i dS \qquad (۴۵-۴)$$

با جایگزینی روابط فوق در رابطه (۴-۱۹) ، معادله گسسته حاکم بر هدایت گرمایی به شکل رابطه زیر بدست می‌آید:

$$C^{th}\dot{\overline{T}} + \left(K^{th} + K^{conv} + K^{rad}\right)\overline{T} = f^{gen} + f^{flux} + f^{conv} + f^{rad} = f^{th} \qquad (۴۶-۴)$$

که K^{th} ماتریس سفتی کل سیستم و C^{th} نیز ماتریس کامپلیانس کل سیستم می‌باشد [۱۸].

در این تحقیق، برای حل معادله (۴-۴۶) از روش کرانک- نیکلسون استفاده شده است. طبق این روش داریم:

$$\left[2C^{th} + \left(K^{th} + K^{conv} + K^{rad}\right)\Delta t\right]\{T\}^n = \Delta t\left(\left\{f^{th}\right\}^{n-1} + \left\{f^{th}\right\}^n\right) + \left[2C^{th} - \left(K^{th} + K^{conv} + K^{rad}\right)\Delta t\right]\{T\}^{n-1} \qquad (۴۷-۴)$$

می‌توان معادله (۴-۴۷) را به صورت معادله (۴-۴۸) بازنویسی کرد:

$$K^{EQ}\ \{T\}^{n} = F^{EQ} \qquad (۴۸-۴)$$

و تعریف می‌شوند:

$$K^{EQ} = \left[2C^{th} + \left(K^{th} + K^{conv} + K^{rad}\right)\Delta t\right] \qquad (۴۹-۴)$$

$$F^{EQ} = \Delta t\left(\{f^{th}\}^{n-1} + \{f^{th}\}^{n}\right) + \left[2C^{th} - \left(K^{th} + K^{conv} + K^{rad}\right)\Delta t\right]\ \{T\}^{n-1}$$

از این رو برای محاسبه T در هر مرحله زمانی_ داریم [۲۲]:

$$\{T\}^{n} = F^{EQ} \times (K^{EQ})^{-1}. \qquad (۵۰-۴)$$

۴-۳ چیدمان درجات آزادی در برنامه رایانه‌ای

برای حل مسائل ترموالاستیسیته غیرکوپل از نرم‌افزار Matlab استفاده شده است. دلیل استفاده از این نرم‌افزار، قدرت و توانایی این نرم‌افزار در استفاده و به کارگیری ماتریس‌ها می‌باشد.

قبل از بررسی مثال‌ها و نتایج در این بخش نحوه چیدمان درجات آزادی را برای برنامه ترموالاستیسیته غیرکوپل شرح می‌دهیم. همانطور که پیشتر توضیح داده شد در مسائل ترموالاستیسیته غیرکوپل معادلات ناویر (حرکت) و انرژی **جدا از هم** حل می‌شوند، از این جهت درجات آزادی آن‌ها نیز جدا مرتب و کد نویسی می‌شود. برای مرتب کردن درجات آزادی ابتدا درجات آزادی گره‌های حقیقی و سپس مجازی قرار می‌گیرند. از این رو درجات آزادی مکانیکی مطابق زیر کد نویسی می‌شوند.

$$\{U\}=\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ . \\ . \\ . \\ u_n \\ v_n \\ du_1 \\ dv_1 \\ du_2 \\ dv_2 \\ . \\ . \\ . \\ du_n \\ dv_n \end{bmatrix} \qquad (۵۱-۴)$$

در رابطـه (۴-۵۱) u_1,v_1 تـا u_n,v_n درجـات آزادی گره‌هـای حقیقی هســـتند و du_1,dv_1 تا du_n,dv_n درجات آزادی گره‌های مجازی هستند.

برای چیدمان درجات آزادی معادله انرژی (دمایی) نیز داریم:

$$\{T\}=\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ . \\ . \\ . \\ t_n \\ dt_1 \\ dt_2 \\ . \\ . \\ . \\ dt_n \end{bmatrix} \qquad (۵۲-۴)$$

در رابطه (۴-۵۲) نیز t_1 تا t_n درجات آزادی گره‌های حقیقی هستند و dt_1 تا dt_n درجات آزادی گره‌های مجازی هستند.

در بخش ۲-۳-۱ برای محاسبه تمام دجات آزادی یک سیستم چه گره‌های حقیقی و چه مجازی این توضـیح داده شد که: " درجات آزادی اضافی به ازا هر گره اسپلیت یک و به ازا هر گره نوک ترک به تعداد توابع غنی‌سـازی اسـت". این مطلب را در کد به صورت رابطه (۴-۵۳) برای قسمت مکانیکی (معادلات حرکت) و رابطه (۴-۵۴) برای قسمت حرارتی (معادله انرژی) می‌توان نوشت.

$$unknownDOF = 2\times\left(A + B\times 1 + C\times D\right); \qquad (۵۳-۴)$$

$$unknownDOF^{TH} = 1\times\left(A + B\times 1 + C\times D\right); \qquad (۵۴-۴)$$

که D,C,B,A به ترتیب بیان‌گر تعداد گره‌های حقیقی؛ تعداد گره‌های اســـپلیت؛ تعداد گره‌های نوک ترک و تعداد توابع غنی‌سازی هستند.

۴-۴ حل مسائل عددی و تحلیل آن‌ها

۴-۴-۱ ترک لبه‌ای استاتیکی و صحت سنجی کد

در این مثال دو هدف را دنبال می‌کنیم، هم یک مسئله با روش XFEM (که در فصل ۲ معرفی شد) حل کنیم و هم کد را صحت سنجی کنیم. از این رو مسئله ترک لبه‌ای استاتیکی را که پسترناک[۱] [۳۷] با روش المان مرزی[۲] حل کرده‌است را حل کرده و نتایج را مقایسه می‌کنیم. مسئله به شرح زیر است.

---

[۱] Pasternak

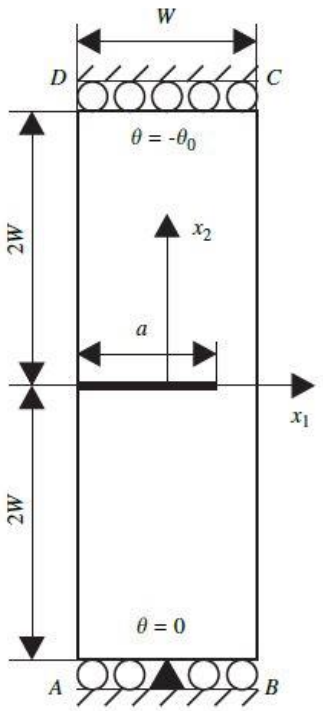
[۲] Boundary Element Method (BEM)

مطابق شکل ۴-۲ یک صفحه اورتوتروپیک محدود با مشخصات مکانیکی مطابق جدول ۴-۱ موجوداست. شرایط حل تنش صفحه‌ای فرض شده است. شرایط مرزی (همانطور که در شکل مشخص است) برای لبه بالایی دما تا θ_0 پایین می‌آید و لبه پایینی نیز عایق حرارتی است. پارامتر k_0 نیز برای بی‌بعد کردن ضریب شدت تنش مود اول، برحسب دما به صورت زیر تعریف شده است.

$$k_0 = -1 \times E22 \times \alpha 11 \times \theta_0 \times \sqrt{\Pi \times a} \qquad (۵۵-۴)$$

جدول ۴-۱) خواص مکانیکی ماده [۳۷]

E11	55GPA
E22	21GPA
ν12	0.25
G12	9.7GPA
α11	$6.3\times10^{-6}K^{-1}$
α22	$2\times10^{-6}K^{-1}$
k11/k22	3.045/0.35



شکل ۴-۲) شرایط و هندسه مسئله ۴-۴-۱

این مثال با انتخاب نسبت a/w و با چند مش مختلف حل شده و با نتایج پسترناک [۳۷] مقایسه شده‌است. (جدول ۴-۲)

جدول ۴-۲) مقایسه نتایج با نتایج پسترناک

a/w		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
K1/k0						
	BEM(Pasternak)	0.576	0.601	0.631	0.645	0.637
XFEM	Mesh size					
	60×160	0.5501	0.5885	0.6204	0.6353	0.6320
	190×240	0.5600	0.5810	0.6220	0.6361	0.6325
	120×320	0.5662	0.5846	0.6325	0.6453	0.6330
	150×400	0.5689	0.5884	0.6356	0.6557	0.6356
	180×480	0.5701	0.5981	0.6396	0.6598	0.6368

همانطور که مشاهده می‌شود هرچه مش ریزتر شود، اختلاف جواب‌های بدست آمده با جواب‌های پســـترناک کم‌تر می‌شـــود. در جدول ۴-۳ درصـــد خطا جواب‌های محاســـبه شـــده با ریزترین مش (۱۸۰×۴۸۰) با جواب‌های پسترناک نشان‌داده شده‌است.

جدول ۴-۳) مقایسه جواب‌ها با روش XFEM و BEM

a/w	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
درصد خطا با پسترناک	1.02	0.4	1.03	2.1	0.1

همانطور که مشـاهده می‌شود خطاها بسیار کم است پس می‌توان نتیجه گرفت کد نوشته شده صحیح است. (البته که با یک مثال نمی‌توان به طور قطعی قضاوت کرد!)

۴-۴-۲ ترک لبه‌ای برای ماده اورتوتروپیک در حالت دینامیکی

مسئله دومی که حل می‌کنیم مسئله‌ای است که هم ساچز و همکاران با روش المان مرزی [۶] و هم حاجی محمدی با روش المان محدود توسعه‌یافته با توابع غنی سازی پیشنهادی خودشان [۱۸] آن‌را حل کردند. در اینجا قصد داریم مسئله را با روش المان محدود توسعه‌یافته با توابع غنی سازی اورتوتروپیک (که در فصل ۲ معرفی شد) حل کرده و جواب‌های بدست آمده را با جواب‌های سانچز مقایسه کنیم (در حالت On Axis). در انتها نیز مسئله را با تغییر زوایای الیاف (حالت Off Axis) حل خواهیم کرد. و اما شرح مسئله به شکل زیر است.

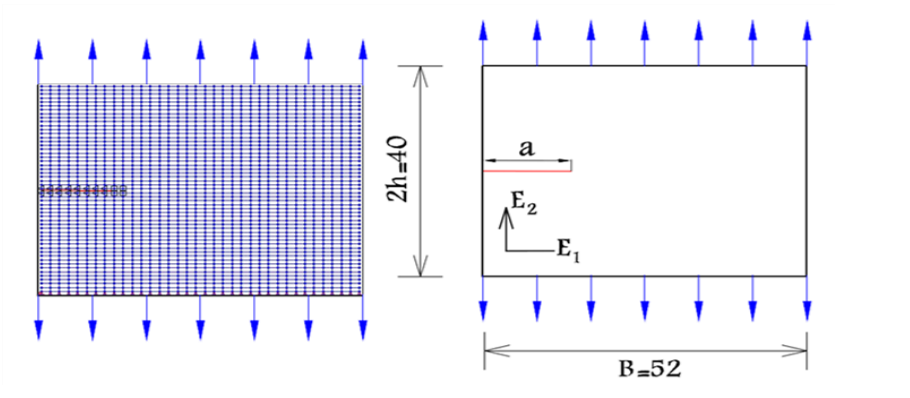
یک صفحه اورتوتروپیک با عرض ۲h =۴۰ واحد و ارتفاع w =۵۲ واحد در نظر گرفته می‌شود که دارای ترک مستقیم لبه‌ای به طول a = ۱۲ واحد است، صفحه تحت تنش ثابت σ قرار دارد (مطابق شکل ۴-۳ [۱۸]). ناهمسانگردی می‌تواند نسبت به محور افقی زاویه (α) داشته باشد. مشخصات ماده

$\upsilon_{۱۲}$ =۰,۰۸۳ ، $E_۱$ =۱۱۸,۳ GPa ، $E_۲$ =۵۴,۸ GPa و $G_{۱۲}$ =۸,۷۹ GPa و ρ=۱۹۰۰Kg/m3 می باشد و شرایط تنش صفحه ای فرض شده است. همچنین استپ‌های زمانی برابر tow=a/۳c1 در نظر گرفته شده است، که $c_1 = \sqrt{\frac{c_{22}}{\rho}}$ می باشد و c22 مولفه ماتریس سفتی می باشد، (σ = C ε) [۱۸و۶].

درضمن ضریب شدت تنش مود اول (K_I) مطابق رابطه زیر برحسب مقدار تنش بی‌بعد شده است.

$$K_{In} = \frac{K_I}{\sigma\sqrt{a\pi}} \qquad (۵۶-۴)$$

لازم به ذکر است که نتایج همگی برحسب مقدار ضریب شدت تنش مود اول بی بعد (K_{In}) بیان شده‌اند.



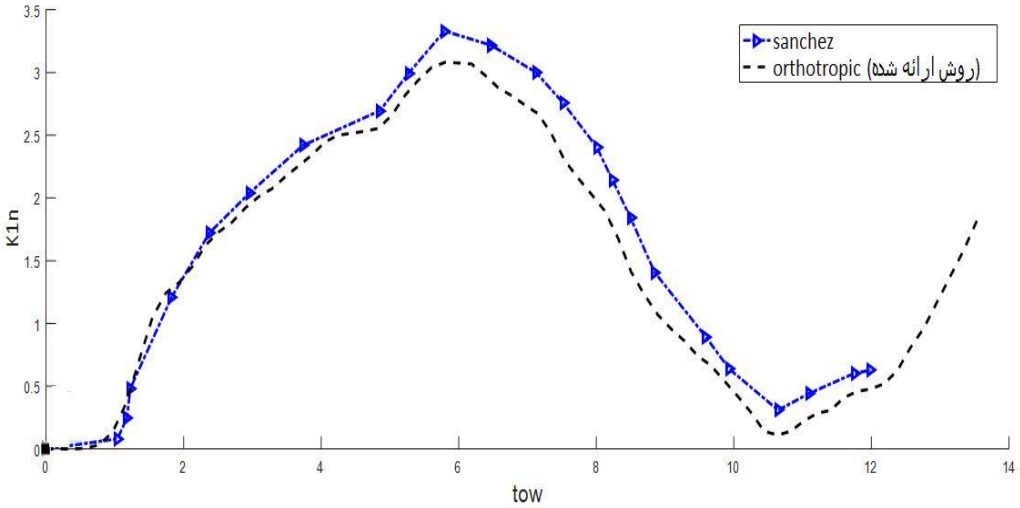
ب) الف)

شکل ۴-۳) صفحه اورتوتروپیک دارای ترک لبه‌ای تحت بار دینامیکی هندسه (الف) بارهای وارده و مش‌بندی صفحه (ب)

مقدار ضـریب شـدت تنش دینامیکی بی بعد K_{In} برای زمان‌های مختلف با مش ۶۰ × ۷۸ (مش انتخابی سـاچز [۶]) و زاویه الیاف صـفر درجه[۱] محاسبه شده‌است و نتایج در شکل ۴-۴ آورده شده

[۱] On Axis

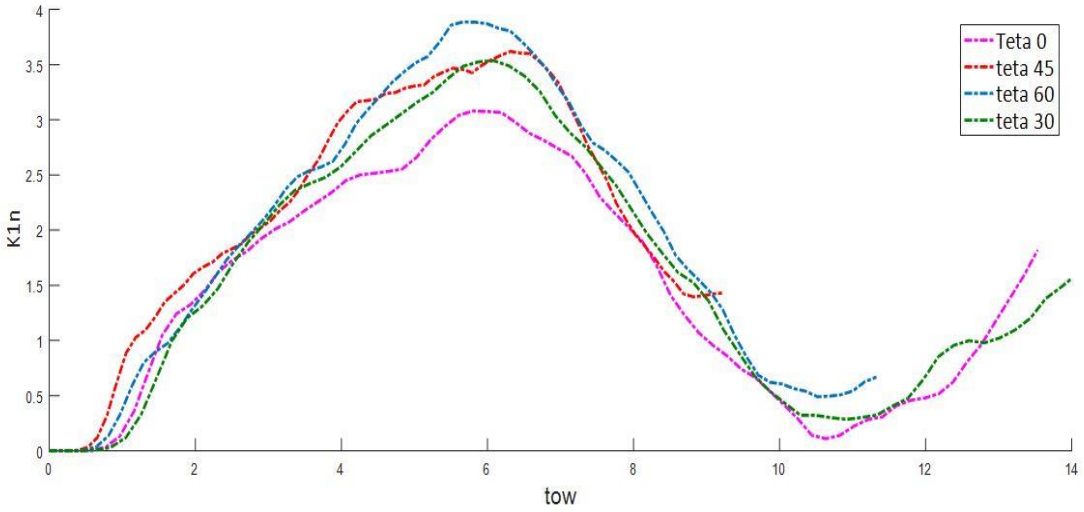
اســت. بعلاوه، نتایج بدســت آمده با ضـریب شـدت تنش دینامیکی K_{In} ارائه شـده توسـط سانچز [۶] مقایسه گردیده است.



شکل ۴-۴) مقایسه نتایج حل به روش XFEM (حل ارائه شده) با حل به روش BEM (حل سانچز) در زمان بی بعد TOW

همانطور که مشاهده می‌شود ماکزیمم مقدار K_{1n} در حل ارائه شده ۵,۷ است که در زمان ۳,۳ رخ داده‌است، در حالی که این مقادیر برای حل سانچز به ترتیب ۵,۸ و ۳,۰۸ است. بر این اساس درصد خطا روش ارائه شده (XFEM با توابع غنی‌سازی اورتوتروپیک) با روش ساچز (BEM) در مقدار K_{1n} و زمان به ترتیب ۱,۷۲ و ۱,۵۹ درصد می‌باشد. که قابل قبول است.

همین مسئله با روش XFEM این بار به صورت Off Axis حل شده و نتایج در شکل ۴-۵ با هم مقایسه گردیدند.



شکل ۴-۵) حل با زوایای مختلف الیاف

همانطور که در شکل ۴-۵ قابل مشاهده است، مقدار ضریب شدت تنش بیشینه در زاویه الیاف صفر درجه کمترین مقدار و در زاویه الیاف ۶۰ درجه بیشترین مقدار را دارد.

۴-۴-۳ ترک لبه‌ای برای ماده اورتوتروپیک در حالت دینامیکی تحت بار حرارتی

این مسئله که آخرین مسئله این بخش نیز هست، بارگذاری حرارتی در مسائل مکانیک شکست را با استفاده از توابع غنی‌سازی اورتوتروپیک و توابع غنی‌سازی دمایی جدید (که در فصل دوم رابطه (۲-۴۹) معرفی شدند) و تئوری ترموالاستیسیته غیرکوپل مورد بررسی قرار می‌دهد و توسط حاجی محمدی [۱۸] با توابع غنی‌سازی ایزوتروپیک و تئوری ترموالاستیسیته غیرکوپل نیز حل شده است، شرح مسئله به صورت زیر است.

صفحه دو بعدی اورتوتروپیک با طول ۲h =۴mm و عرض w =۱mm در نظر گرفته می‌شود که دارای ترک مستقیم به طول a =۰,۴ mm است (شکل ۴-۶). صفحه در لبه چپ به سرعت تا دمای ۱۰- درجه (T_e) سرد می شود. تمامی لبه های دیگر عایق و شرایط کرنش صفحه ای در نظر گرفته شده است.

مشخصات ماده $\upsilon_{۱۲}$ =۰,۲۸ ، $\upsilon_{۱۳}$ =۰,۲۷ ، $\upsilon_{۳۱}$ =۰,۲۱ ، $\upsilon_{۳۲}$ =۰,۱۴ ، $E_۱$ =۱۱۶,۳۶ GPa ، $E_۲$ =۹۰,۴۳GPa و $G_{۱۲}$ =۳۸,۲۱ GPa و ρ=۳۹۸۰Kg/m3 می باشد. همچنین ضریب انبساط حرارتی α_1 =۷,۵ × ۱۰ $^{-۶}K^{-1}$ ، α_2 =۸ × ۱۰ $^{-۶}K^{-1}$، α_3 =۹ × ۱۰ $^{-۶}K^{-1}$، ظرفیت گرمایی ویژه C =۷۷۵ J/kg.K و ضریب هدایت حرارتی k1 =۲۹,۸۲ W/m.K ، k2 =۲۱,۲۵ W/m.K می باشد. و مقدار زمان t و K_I وK_{II} مطابق فرمول‌های زیر بی بعد شده‌اند [۱۸].

لازم به ذکر است همین مسئله در فصل بعد و فصل آخر نیز با تئوری‌های ترموالاستیسیته کوپل و لردشلمان نیز حل شده است.

$$\mathrm{Ct/h} = \frac{k_{xx} t}{\rho c W^{2}} \qquad (۵۷-۴)$$

$$\mathrm{K1} = \frac{K_I}{\alpha E \sqrt{W}\, \Delta T}, \qquad (۵۸-۴)$$

$$\mathrm{K2} = \frac{K_{II}}{\alpha E \sqrt{W}\, \Delta T}$$

در رابطه (۴-۵۸) K1 وK2 به ترتیب حالت بی‌بعد K_I و K_{II} هستند. همچنین ΔT نیز اختلاف دما اولیه و دما معلوم T_e است. (رابطه (۴-۵۹))

$$\Delta T = T_0 - T_e \qquad (۵۹-۴)$$

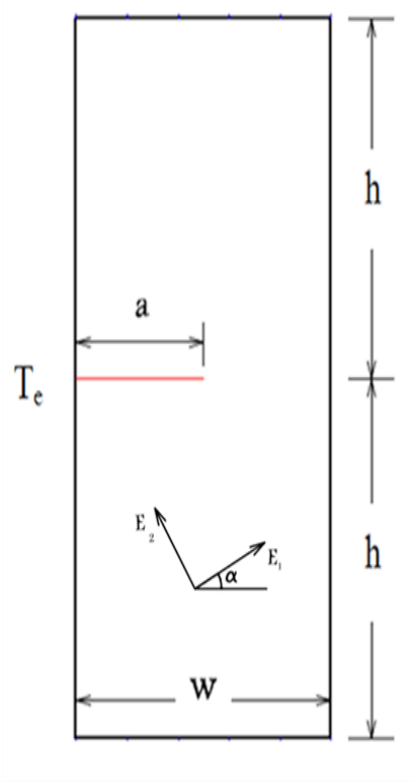
همچنین برای حل این مسئله مقدار dt مطابق رابطه (۴-۶۰) حساب شده است.

$$dt = \frac{10 \times to}{(k_{xx})} \times (\rho \times c \times w^{2}), \qquad (۶۰-۴)$$

$$to = \frac{(finaltime - starttime)}{1000}$$

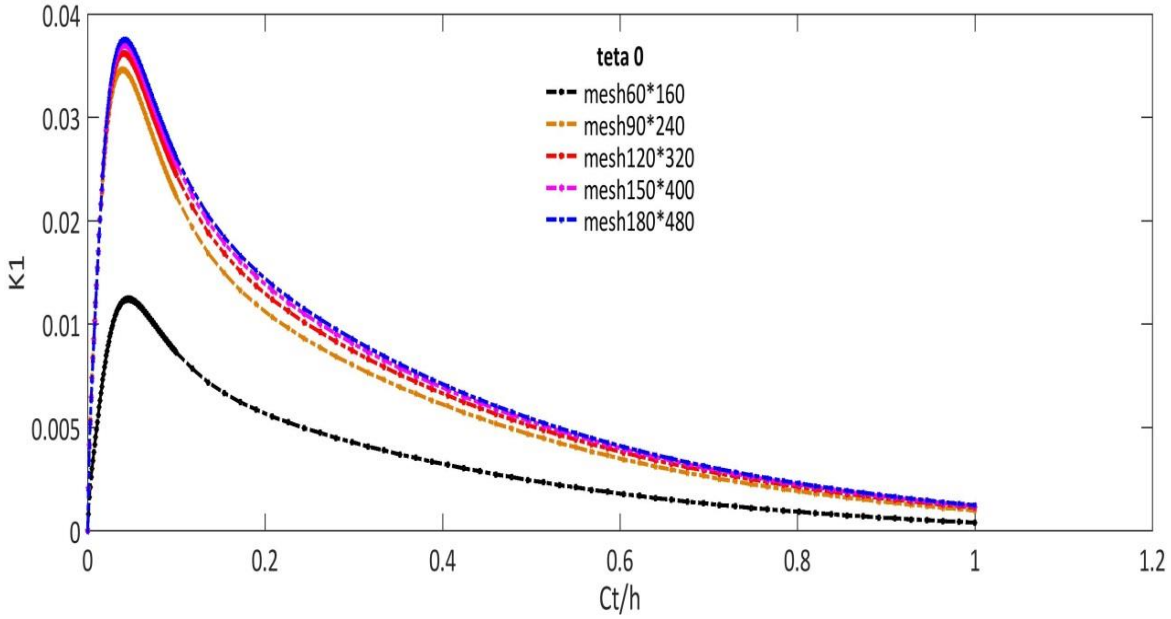
که در این مسئله مقدار finaltime و starttime به ترتیب ۱ و ۰ ثانیه می‌باشند. بنابراین با توجه به مشخصات ماده مقدار dt برابر با $dt = 2.79 \times 10^{-4}$ می‌باشد.

ابتدا مسئله برای رسیدن به همگرایی با چند مش مختلف حل می‌شود (انجام تست همگرایی) و سپس حل مسئله با مش همگرا شده را با حل حاجی محمدی (حل با توابع غنی‌سازی ایزوتروپیک) مقایسه خواهد شد.



شکل ۴-۶) صفحه اورتوتروپیک ترک دار تحت با حرارتی

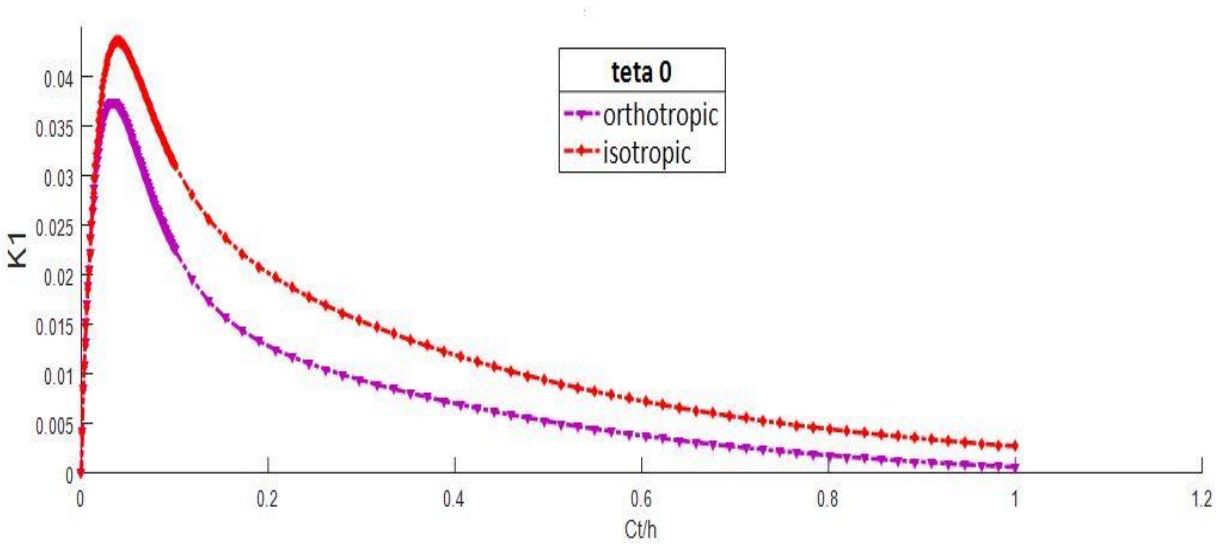
شکل ۴-۷؛ تست همگرایی مسئله را نشان می‌دهد، در این تست مسئله با ۵ مش مختلف حل شده و نتایج با هم مقایسه شده‌اند تا همگرایی آن‌ها چک شود. در شکل مشخص است که جواب‌های مسئله از مش ۲۴۰×۹۰ وارد ناحیه همگرایی شده‌است. مش ۴۸۰×۱۸۰ را به عنوان مش همگرا برای مسئله انتخاب کرده و تمامی نتایج را با این مش بدست می‌آوریم.



شکل ۴-۷) تست همگرایی صفحه اورتوتروپیک ترک‌دار تحت بار حرارتی با توابع غنی‌سازی اورتوتروپیک و جدید

شکل ۴-۸ حل مسئله با روش ارائه شده[1] را با حل حاجی محمدی در حالت On axis مقایسه می‌کند. لازم به ذکر است که در این شکل منظور از teta زاویه الیالف، isotropic؛ حل آقای حاجی محمدی [۱۸] (حل با توابع غنی‌سازی ایزوتروپیک) و orthotropic؛ حل نگارنده (حل با توابع غنی‌سازی اورتوتروپیک و جدید دمایی، معرفی شده در فصل ۲) می‌باشد.

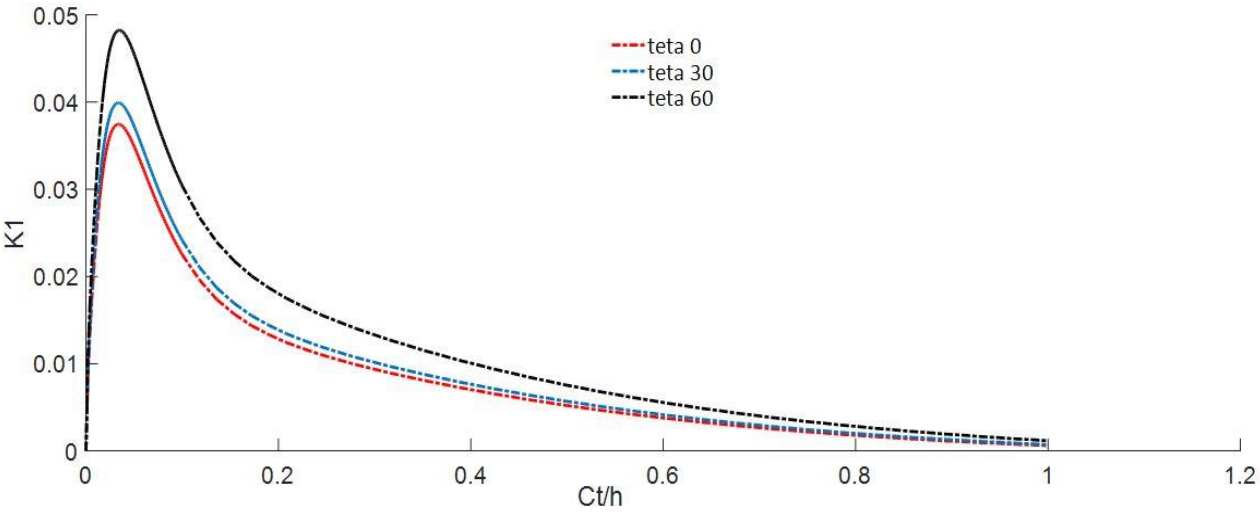
[1] توابع غنی سازی اورتوتروپیک و توابع غنی سازی دمایی جدید



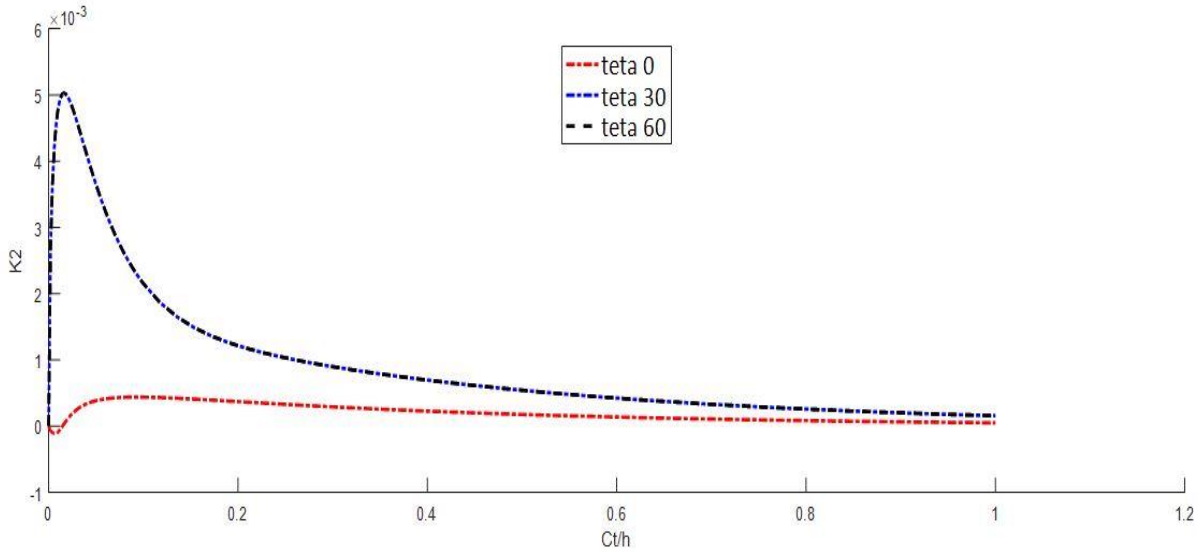
شکل ۴-۸) مقایسه حل نگارنده با حل حاجی محمدی

در شکل ۴-۸ قابل مشاهده است که پیک نمودار حاجی محمدی (isotropic) مقدار K1=0.043 در زمان بی‌بعد ۰٫۰۴۲ می‌باشد. این مقادیر در نمودار Orthotropic به ترتیب K1= 0.039 در زمان بی‌بعد ۰٫۰۳۷ می‌باشد. که درصد خطای دو نمودار برای K1 چیزی در حدود ۹درصد و برای زمان بی‌بعد چیزی در حدود ۱۱ درصد می‌باشد و این بدین معناست که حل پیشنهادی اینجانب نتایج صحیحی به همراه دارد.

در ادامه نیز مسئله را برای چند زاویه الیاف مختلف حل و نمودار K1 و K2 آن‌ها با یکدیگر مقایسه گردیده است. (شکل ۴-۹و شکل ۴-۱۰)



شکل ۴-۹) مقادیر K1 صفحه اورتوتروپیک ترک‌دار تحت بار حرارتی با روش ارائه شده در حالت Off axis.



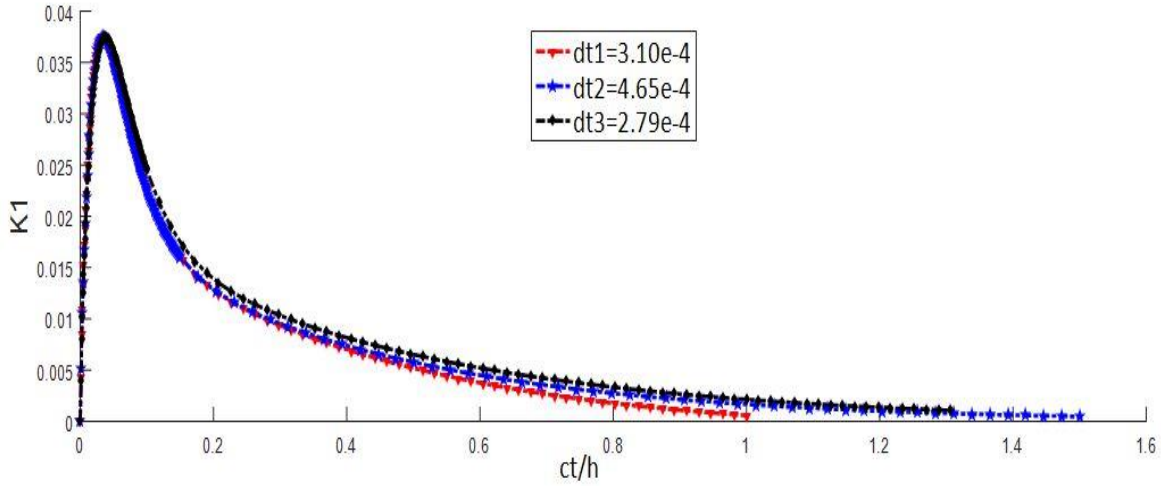
شکل ۴-۱۰) مقادیر K2 صفحه اورتوتروپیک ترک‌دار تحت بار حرارتی با روش ارائه شده در حالت Off axis

با افزایش زاویه ناهمسانگردی مقدار بیشینه ضریب شدت تنش دینامیکی K1 و K2 نیز افزایش می یابد.

در انتها نیز همین مسئله با دو dt دیگر نیز حل شده است. همانطور که در شکل ۴-۱۱ مشاهده می‌شود، نمودارها در dt های مختلف برهم منطبق هستند و این یعنی حل مسئله مستقل از مقدار dt

است و تنها باید نسبت ثابتی بین dt و تعداد استپ‌های زمانی (numstep) برقرار باشد. (رابطه (۴-۶۱))

$$dt_1 \times (numstep)_1 = dt_2 \times (numstep)_2 = ... \qquad (۶۱-۴)$$



شکل ۴-۱۱) حل مسئله با چند dt

فصل ۵: تحلیل و نتایج ورق اورتوتروپیک ترک‌دار تحت شوک حرارتی با تئوری کوپل[1]

۱)مقدمه

۲) معرفی معادلات حاکم و گسسته‌سازی

۳) چیدمان درجات آزادی در برنامه رایانه‌ای

۴) حل مثال عددی و تحلیل نتایج

[1] Coupled

۵-۱ مقدمه

در این فصل توضیحاتی درباره تئوری کوپل داده می‌شود. در تئوری کوپل معادلات ناویر و انرژی توام با یکدیگر گسسته و حل می‌شوند. در این تئوری، بر خلاف تئوری غیرکوپل، وجود کرنش مکانیکی باعث بالارفتن دما می‌شود و بالعکس [۳۵].

همانطور که در فصل ۲ به طور کامل توضیح داده شد، برای حل مسئله با تئوری کوپل باید تعداد توابع غنی‌سازی مکانیکی و حرارتی[۱] با یکدیگر برابر باشد (هر کدام ۴ تابع).

لازم به ذکر است که تئوری‌های کوپل و غیرکوپل زیر مجموعه ترموالاستیسیته کلاسیک[۲] می‌باشد یعنی سرعت انتقال موج گرما در آن‌ها بی‌نهایت است [۳۵]. در واقع تئوری کوپل و غیرکوپل به نحوه گسسته-سازی و حل معادلات حاکم به صورت توام و یا جدا اشاره دارد.

در این فصل نیز مانند فصل قبل ابتدا معادلات حاکم معرفی و گسسته می‌شوند (شکل و روش گسسته-سازی معادلات در این فصل با فصل ۳و۴ تفاوت دارد)، سپس درجات آزادی و چیدمان آن‌ها در برنامه رایانه‌ای توضیح داده‌شده و در انتها مثال عددی حل خواهد شد.

۵-۲ معرفی معادلات حاکم و گسسته‌سازی

معادلات حرکت و انرژی حاکم بر مسئله ترموالاستیسیته کوپل را می‌توان به شکل زیر نوشت. توجه شود برای راحتی در نوشتن معادلات حاکم از اندیس گذاری انیشتین استفاده می‌شود [۳۰]:

---

[۱] همانطور که پیشتر ذکر شد توابع غنی‌سازی حرارتی در این تحقیق جدید می‌باشند (فصل ۲)

[۲] Classic thermoelectricity

$$\sigma_{ij,j} + X_i - \rho \ddot{u}_i = 0 \quad \mathrm{i,j} = 1,2 \qquad (1)$$ (۱-۵)

$$[k_{ij} t_{,j}]_{,i} + \rho c \dot{t} + \beta_{ij} t_0 \dot{u}_{i,\mathrm{j}} - Q = 0 \quad \mathrm{i,j} = 1,2 \qquad (2)$$

معادله (۱)، که در فضای دو بعد شامل ۲ معادله است، همان معادلات حرکت معرفی شده در معادله (۳-۱) هستند. معادله (۲) نیز معادله انرژی در تئوری کوپل است. جمله دوم این معادله شامل ترم کوپل $\dot{u}$ است، تنها فرق این معادله با معادله (۴-۳)، که معادله انرژی در تئوری غیرکوپل بود نیز همین جمله است.

در معادلات (۵-۱) σ_{ij} مولفه‌های تانسور تنش کوشی، u میدان جا به جایی، b_i مولفه‌های نیروی حجمی[۱]، Q نرخ تولید انرژی داخلی در پیوستار در واحد حجم و زمان واحد، k_{ij} مولفه‌های ماتریس هدایت گرمایی (رابطه (۴-۶))، t میدان اسکالر دمای مطلق، t_0 دمای اولیه، ρ چگالی جرمی و c حرارت ویژه جامد است. β نیز مدول تنش حرارت نامیده می‌شود. که در فضای سه‌بعدی از رابطه (۵-۲) محاسبه می‌شود [۳۵] .

$$\beta_{ij} = -\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \Delta t}$$ (۵-۲)

رابطه تنش کرنش با حضور کرنش‌های حرارتی در فضای سه‌بعدی به صورت رابطه (۵-۳) می‌باشد [۲۱و۳۰].

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{\mathrm{mechanic}}$$ (۵-۳)

رابطه (۵-۳) را می‌توان برحسب کرنش دمایی به صورت زیر بازنویسی کرد

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl}^{total} - \varepsilon_{kl}^{thermal})$$ (۵-۴)

---

[۱] Body force

کرنش دمایی نیز به تنهایی از رابطه (۵-۵) محاسبه می‌شود [۲۱].

$$\varepsilon_{kl}^{thermal} = \alpha_{kl}\Delta t \qquad (۵-۵)$$

با تلفیق روابط (۵-۵) و (۵-۴) در رابطه (۵-۳) داریم:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl}^{total} - \alpha_{kl}\Delta t) \qquad (۶-۵)$$

در روابط فوق α، C، σ، $\varepsilon^{mechanic}$، $\varepsilon^{thermal}$ و ε^{total} به ترتیب معرف ضریب انبساط دمایی[۱]، ماتریس سفتی ماده اورتوتروپیک، ماتریس تنش، ماتریس کرنش مکانیکی، ماتریس کرنش حرارتی و ماتریس کرنش کل[۲] می‌باشند.

با توجه به روابط (۵-۲) و (۵-۶) می‌توان در فضای سه‌بعدی رابطه زیر را برای β نوشت

$$\beta_{ij} = C_{ijkl}\alpha_{kl} \qquad (۷-۵)$$

با توجه به نکاتی که در فصل ۱ ذکر شد، معادله (۵-۲) را در **حالت دوبعدی** می‌توان به صورت بازشده زیر نوشت. (رجوع شود به بخش ۱-۴-۳)

$$\begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_{12} \end{Bmatrix} \qquad (۸-۵)$$

در این رابطه ماتریس Q ماتریس سفتی کاهش یافته است که از رابطه (۱-۱۵) (فصل اول بخش ۱-۴-۳) بدست می‌آید.

روابط کرنش جا به جایی نیز به صورت زیر است.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad i,j = 1,2 \qquad (۹-۵)$$

---

[۱] Thermal expansion

[۲] مجموع ماتریس کرنش مکانیکی و حرارتی

همانطور که در فصل پیش نیز اشاره شد با تلفیق معادلات کرنش جا به جایی و تنش کرنش در معادله حرکت معادلات ناویر حاصل می‌شود، این معادلات و معادله انرژی معادلات حاکم مسئله ترموالاستیسیته کوپل را تشکیل می‌دهند [۱۹و۳۰].

با فرض صفر بودن X و Q معادلات ناویر به صورت (۵-۱۰) بازسازی می‌شوند (در دستگاه دوبعد (x1,x2)). لازم به ذکر است در تمام معادلات این فصل **t نماد زمان و T نماد میدان دما می‌باشند.**

$$Q_{11}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+Q_{12}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1\partial x_2}+Q_{13}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\partial x_2}+Q_{13}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}+Q_{31}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\partial x_2}+Q_{32}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}$$
$$+Q_{33}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\partial x_2}+Q_{33}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1\partial x_2}-\beta_1\frac{\partial T}{\partial x_1}-\beta_{12}\frac{\partial T}{\partial x_2}-(\rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2})=0 \qquad (1) \qquad (۱۰-۵)$$

$$Q_{13}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+Q_{32}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1\partial x_2}+Q_{33}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\partial x_2}+Q_{33}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1\partial x_2}+Q_{21}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\partial x_2}+Q_{22}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}$$
$$+Q_{23}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}+Q_{23}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1\partial x_2}-\beta_{12}\frac{\partial T}{\partial x_1}-\beta_2\frac{\partial T}{\partial x_2}-(\rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2})=0 \qquad (2)$$

معادله انرژی نیز به صورت زیر باز می‌شود.

$$k_{11}\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2}+k_{21}\frac{\partial^2 T}{\partial x_1\partial x_2}+k_{12}\frac{\partial^2 T}{\partial x_1\partial x_2}+k_{22}\frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2}-\rho c(\frac{\partial T}{\partial t})-\beta_1 t_0\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\partial t}$$
$$-\beta_2 T_0\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2\partial t}-\beta_{12}T_0\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2\partial t}=0 \qquad (۱۱-۵)$$

رابطه (۲-۶) را به صورت زیر برای درجات آزادی بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ T \end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{4} N_{i(x1,x2)}\begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ T_i \end{pmatrix}_{(T)} \qquad (۱۲-۵)$$

با توجه به رابطه فوق و نکاتی که در فصل ۲ ذکر شد معادله اول ناویر در قلمرو المانی Ω به شکل زیر متعامد می‌شود. لازم به ذکر است برای اختصار در نوشتار از اندیس گذاری نیوتنی استفاده شده است.

$$\int_{\Omega}[Q_{11}N_{i,11}u_1+Q_{12}N_{i,12}u_2+Q_{13}(N_{i,12}u_1+N_{i,11}u_2)+Q_{31}N_{i,12}u_1 \\ +Q_{32}N_{i,22}u_2+Q_{33}(N_{i,12}u_2+N_{i,12}u_1)-(\beta_1 N_{i,1}T)-(\beta_{12}N_{i,2}T) \\ -\mathrm{N}_i\ \rho(\ddot{\mathrm{u}}_i)]\ \mathrm{N}_j\ d\Omega=0 \qquad (۱۳-۵)$$

همانطور که در فصل قبل ذکر شد، برای پایین‌تر آوردن درجه پیوستگی معادله (۵-۱۳) فرم ضعیف آن به شکل معادله (۵-۱۴) نوشته می‌شود.

$$\int_{\Omega}[Q_{11}N_{i,1}N_{\mathrm{j},1}u_1+Q_{12}N_{i,1}N_{j,2}u_2+Q_{13}(N_{i,1}N_{\mathrm{j},2}u_1+N_{i,1}N_{\mathrm{j},2}u_2) \\ +Q_{31}N_{i,1}N_{\mathrm{j},2}u_1+Q_{32}N_{i,2}N_{\mathrm{j},2}u_2+Q_{33}(N_{i,1}N_{\mathrm{j},2}u_2+N_{i,1}N_{\mathrm{j},2}u_1) \\ -(\beta_1 N_i N_{\mathrm{j},1}T)-(\beta_{12}N_i N_{\mathrm{j},2}T)-\mathrm{N}_i\ N_{\mathrm{j}}\rho(\ddot{\mathrm{u}}_i)]\ d\Omega=F_1 \qquad (۱۴-۵)$$

در معادله فوق ماتریس ستونی F_1 شامل تمام ترم‌های بیرون از انتگرال در فرم ضعیف می‌باشد.

به این ترتیب فرم ضعیف معادله دوم ناویر نیز به صورت رابطه (۵-۱۵)نوشته می‌شود.

$$\int_{\Omega}[Q_{31}N_{i,1}N_{\mathrm{j},1}u_1+Q_{32}N_{i,1}N_{j,2}u_2+Q_{33}(N_{i,1}N_{\mathrm{j},2}u_1+N_{i,1}N_{\mathrm{j},2}u_2) \\ +Q_{21}N_{i,1}N_{\mathrm{j},2}u_1+Q_{23}N_{i,2}N_{\mathrm{j},2}u_2+Q_{23}(N_{i,2}N_{\mathrm{j},2}u_1+N_{i,1}N_{\mathrm{j},2}u_2) \\ -(\beta_2 N_i N_{\mathrm{j},2}T)-(\beta_{12}N_i N_{\mathrm{j},1}T)-\mathrm{N}_i\ N_{\mathrm{j}}\rho(\ddot{\mathrm{u}}_i)]\ d\Omega=F_2 \qquad (۱۵-۵)$$

در معادله فوق ماتریس ستونی F_2 شامل تمام ترم‌های بیرون از انتگرال در فرم ضعیف می‌باشد.

همین مراحل برای معادله انرژی نیز طی می‌شود. یعنی ابتدا معادله انرژی به صورت زیر متعامد می‌شود.

$$\int_{\Omega}[k_{11}N_{i,11}T+k_{21}N_{i,12}T+k_{12}N_{i,21}T+k_{22}N_{i,22}T-N_i\rho c\dot{T}$$
$$-\beta_1T_0N_{i,1}\dot{u}_1-\beta_2T_0N_{i,2}\dot{u}_2-\beta_{12}T_0N_{i,2}\dot{u}_1]\ N_j\ d\Omega=0 \qquad (۱۶-۵)$$

به این ترتیب فرم ضعیف معادله انرژی نیز به شکل معادله زیر است.

$$\int_{\Omega}[k_{11}N_{i,1}N_{j,1}T+k_{21}N_{i,1}N_{j,2}T+k_{12}N_{i,1}N_{j,2}T$$
$$+k_{22}N_{i,2}N_{j,2}T-N_iN_j\rho c\dot{T}-\beta_1T_0N_iN_{j,1}\dot{u}_1$$
$$-\beta_2T_0N_iN_{j,2}\dot{u}_2-\beta_{12}T_0N_iN_{j,2}\dot{u}_1]\ d\Omega=F_q \qquad (۱۷-۵)$$

در معادله (۵-۱۷)؛ F_q نیز مانند F_1 و F_2 شامل تمام ترم‌های بیرون از انتگرال در فرم ضعیف معادله انرژی می‌باشد.

در المان محدود فرم کلی معادلات در حالت دینامیکی به صورت معادله (۵-۱۸) می‌باشد [۲۲و۳۶].

$$\mathrm{M}\ddot{\Delta}+C\dot{\Delta}+\mathrm{K}\,\mathrm{u}=F \qquad (۱۸-۵)$$

که در رابطه (۵-۱۸) M، C، K، Δ، F به ترتیب ماتریس جرم، دمپر، سفتی، درجات آزادی و نیرو می‌باشند.

معادله (۵-۱۸) را می‌توان به صورت زیر باز کرد.

$$\begin{bmatrix}M_{11}&M_{12}&M_{13}\\M_{21}&M_{22}&M_{23}\\M_{31}&M_{32}&M_{33}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{u}_1\\\ddot{u}_2\\\ddot{T}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}C_{11}&C_{12}&C_{13}\\C_{21}&C_{22}&C_{23}\\C_{31}&C_{32}&C_{33}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{u}_1\\\dot{u}_1\\\dot{T}\end{Bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix}K_{11}&K_{12}&K_{13}\\K_{21}&K_{22}&K_{23}\\K_{31}&K_{32}&K_{33}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\T\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}F_1\\F_2\\F_q\end{Bmatrix} \qquad (۱۹-۵)$$

با مرتب کردن فرم گسسته معادلات ناویر و انرژی (معادلات (۵-۱۴) و (۵-۱۵) و (۵-۱۷)) برحسب مشتقات زمانی درجات آزادی مولفه‌های ماتریس‌های معادله (۵-۱۹) به صورت روابط (۵-۲۰) تا (۵-۴۶) محاسبه می‌شوند

$$\mathrm{M}_{11} = \int_{\Omega} \rho N_i N_j \, d\Omega \qquad (۲۰-۵)$$

$$\mathrm{M}_{12} = 0 \qquad (۲۱-۵)$$

$$\mathrm{M}_{13} = 0 \qquad (۲۲-۵)$$

$$\mathrm{M}_{21} = 0 \qquad (۲۳-۵)$$

$$\mathrm{M}_{23} = 0 \qquad (۲۴-۵)$$

$$\mathrm{M}_{31} = 0 \qquad (۲۵-۵)$$

$$\mathrm{M}_{32} = 0 \qquad (۲۶-۵)$$

$$\mathrm{M}_{33} = 0 \qquad (۲۷-۵)$$

$$\mathrm{M}_{22} = M_{11} = \int_{\Omega} N_i N_j \, d\Omega \qquad (۲۸-۵)$$

$$C_{11} = 0 \qquad (۲۹-۵)$$

$$\mathrm{C}_{12} = 0 \qquad (۳۰-۵)$$

$$C_{13} = 0 \qquad (۳۱-۵)$$

$$\mathrm{C}_{21} = 0 \qquad (۳۲-۵)$$

$$\mathrm{C}_{22} = 0 \qquad (۳۳-۵)$$

$$\mathrm{C}_{23} = 0 \qquad (۳۴-۵)$$

$$\mathrm{C}_{31} = T_0 \int_{\Omega} \beta_1 N_i N_{j,1} + \beta_{12} N_i N_{j,2} \, d\Omega \qquad (۳۵-۵)$$

$$C_{32} = T_0 \int_{\Omega} \beta_2 N_i N_{j,2} \, d\Omega \qquad (۳۶-۵)$$

$$C_{33} = \int_{\Omega} \rho c N_i N_j \, d\Omega \qquad (۳۷-۵)$$

$$K_{11} = \int_{\Omega} Q_{11} N_{i,1} N_{j,1} + Q_{13} N_{i,1} N_{j,2} + Q_{31} N_{i,1} N_{j,2} + Q_{33} N_{i,1} N_{j,2} \, d\Omega \tag{۳۸-۵}$$

$$K_{12} = \int_{\Omega} Q_{11} N_{i,1} N_{j,2} + Q_{13} N_{i,1} N_{j,1} + Q_{32} N_{i,2} N_{j,2} + Q_{33} N_{i,1} N_{j,2} \, d\Omega \tag{۳۹-۵}$$

$$K_{13} = -\int_{\Omega} \beta_1 N_i N_{j,1} + \beta_{12} N_i N_{j,2} \, d\Omega \tag{۴۰-۵}$$

$$K_{21} = K_{12} = \int_{\Omega} Q_{11} N_{i,1} N_{j,2} + Q_{13} N_{i,1} N_{j,1} + Q_{32} N_{i,2} N_{j,2} + Q_{33} N_{i,1} N_{j,2} \, d\Omega \tag{۴۱-۵}$$

$$K_{22} = \int_{\Omega} Q_{32} N_{i,1} N_{j,2} + Q_{33} N_{i,1} N_{j,2} + Q_{22} N_{i,2} + Q_{23} N_{i,1} N_{j,2} \, d\Omega \tag{۴۲-۵}$$

$$K_{23} = -\int_{\Omega} \beta_{12} N_i N_{j,1} + \beta_2 N_i N_{j,2} \, d\Omega \tag{۴۳-۵}$$

$$K_{31} = 0 \tag{۴۴-۵}$$

$$K_{32} = 0 \tag{۴۵-۵}$$

$$K_{33} = \int_{\Omega} k_{11} N_{i,1} N_{j,1} + k_{21} N_{i,1} N_{j,2} + k_{12} N_{i,1} N_{j,2} + k_{22} N_{i,2} N_{j,2} \, d\Omega \tag{۴۶-۵}$$

ماتریس نیرو نیز با استفاده از شرایط مرزی نیرویی بدست می‌آید. (در این رساله شرایط مرزی از نوع جا به جایی است از این رو ماتریس F برابر ۰ است).

برای ساده نویسی بردار درجات آزادی را به صورت رابطه زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Delta = \begin{Bmatrix} U \\ T \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ T \end{Bmatrix} \tag{۴۷-۵}$$

با استتفاده از رابطه (۵-۴۷) و سایر روابط ذکر شده معادله (۵-۱۹) به صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$\begin{bmatrix} M_u & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U} \\ \ddot{T} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C_u & C_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U} \\ \dot{T} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\theta} \\ 0 & K_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ T \end{Bmatrix} = F \tag{۴۸-۵}$$

در واقع در معادله بالا ترم $K_{u\theta}$ ترم کوپل است، اگر این ترم صفر باشد به معادلات غیرکوپل می‌رسیم.

با توجه به تمام روابط ذکر شده، پارامترهای معادله (۵-۴۸) به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$M_u = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{22} \end{bmatrix} \tag{۴۹-۵}$$

$$C_u = \begin{bmatrix} C_{31} & C_{32} \end{bmatrix} \tag{۵۰-۵}$$

$$C_\theta = \begin{bmatrix} C_{33} \end{bmatrix} \tag{۵۱-۵}$$

$$K_{uu} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \tag{۵۲-۵}$$

$$K_{u\theta} = \begin{bmatrix} K_{13} \\ K_{23} \end{bmatrix} \tag{۵۳-۵}$$

$$K_{\theta\theta} = \begin{bmatrix} K_{33} \end{bmatrix} \tag{۵۴-۵}$$

تعریف می‌کنیم:

$$N_U = \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \tag{۵۵-۵}$$

$$N_\theta = \begin{bmatrix} N_i \end{bmatrix} \tag{۵۶-۵}$$

اکنون با توجه به تعریف B و B^{th} (که در فصل ۲ و ۴ در روابط (۲-۸) و (۴-۲۲) تعریف شدند.) و روابط (۵-۵۵) و (۵-۵۶) برای ساده سازی و کدنویسی بهتر، می توان معادلات (۵-۴۹) تا (۵-۵۴) را به صورت انتگرال‌های زیر بازنویسی کرد.

$$M_u = \rho \int_{\Omega} N_U{}^T N_U \ \ d\Omega \tag{۵۷-۵}$$

$$C_u = T_0 \int_{\Omega} N_\theta{}^T \beta^T B \, d\Omega \tag{۵۸-۵}$$

$$C_\theta = \rho c \int_{\Omega} N_\theta{}^T N_\theta \, d\Omega \tag{۵۹-۵}$$

$$K_{uu} = \int_{\Omega} B \ QB^T \ d\Omega \tag{۶۰-۵}$$

$$K_{u\theta} = -\int_{\Omega} B^T \beta \ N^T \ d\Omega \tag{۶۱-۵}$$

$$K_{\theta\theta} = \int_{\Omega} B^{th\ T} k \ \ B^{th} \, d\Omega \tag{۶۲-۵}$$

تمامی این ماتریس‌ها در قلمرو المان (Ω) تعریف شده‌اند. با مونتاژ کردن این ماتریس‌ها می‌توان آن‌ها را برای کل سازه محاسبه کرد.

سایز این ماتریس‌ها با توجه به نکاتی که در فصل ۲ و۴ ذکر شد محاسبه می‌گردد. با محاسبه، مونتاژو جایگذاری این ماتریس‌ها در معادله اصلی (۵-۴۸) و استفاده از روش حل دینامیکی نیومارک (که در فصل ۳ بخش ۳-۲-۳ توضیح داده‌شد) مقادیر ماتریس درجه آزادی محاسبه می‌گردد.

۵-۳ چیدمان درجات آزادی در برنامه رایانه‌ای

در فصل ۴ بخش ۳-۴ به طور کامل درباره درجات آزادی توضیح داده‌شد که از تکرار آن‌ها صرف نظر می‌کنیم. چیدمان درجات آزادی در حالت کوپل به صورت رابطه (۵-۶۳) می‌باشد.

$$\{\Delta\} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ . \\ . \\ . \\ u_n \\ v_n \\ du_1 \\ dv_2 \\ . \\ . \\ . \\ du_n \\ dv_n \\ T_1 \\ . \\ . \\ . \\ dT_1 \\ . \\ . \\ . \\ dT_n \end{bmatrix} \qquad (۶۳-۵)$$

در رابطه (۵-۶۳) T_1,u_1,v_1 تا T_n,u_n,v_n درجات آزادی گره‌های حقیقی هستند و dT_1,du_1,dv_1 تا dT_n,du_n,dv_n درجات آزادی گره‌های مجازی هستند. به عبارت بهتر چیدمان درجات آزادی به این صورت است که ابتدا درجات آزادی گره‌های حقیقی مکانیکی (هرگره دو درجه آزادی) سپس درجات آزادی مجازی مکانیکی بعد از آن درجات آزادی گره‌های حقیقی حرارتی (هر گره یک درجه آزادی) و در انتها نیز درجات آزادی گره‌های مجازی حرارتی.

درجه آزادی کل سیستم نیز از جمع درجات آزادی مکانیکی و حرارتی که در روابط (۴-۵۳) و (۴-۵۴) ذکر شد محاسبه می‌گردد.

۵-۴ حل مثال عددی و تحلیل نتایج

در این قسمت مسئله ۴-۴-۴ فصل قبل یعنی ترک لبه‌ای برای ماده اورتوتروپیک در حالت دینامیکی تحت بار حرارتی با معادلات کوپل حل شده‌است. برای یادآوری صورت مسئله را دوباره در زیر شرح می‌دهیم. (لازم به ذکر است که توابع غنی‌سازی برای حل این مسئله در فصل ۲ معرفی شدند.)

صفحه دو بعدی اورتوتروپیک با طول ۲h = ۴mm و عرض w = ۱mm در نظر گرفته می‌شود که دارای ترک مستقیم به طول a =۰,۴ mm است (شکل ۵-۱). صفحه در لبه چپ به سرعت تا دمای ۱۰- درجه (T_e) سرد می شود. تمامی لبه های دیگر عایق و شرایط کرنش صفحه ای در نظر گرفته شده است.

مشخصات ماده $\upsilon_{۱۲}$ =۰,۲۸ ، $\upsilon_{۱۳}$ =۰,۲۷ ، $\upsilon_{۳۱}$ =۰,۲۱ ، $\upsilon_{۳۲}$ =۰,۱۴ ، $E_۱$ =۱۱۶,۳۶ GPa ، $E_۲$ =۹۰,۴۳GPa و $G_{۱۲}$ =۳۸,۲۱ GPa و ρ=۳۹۸۰Kg/m3 می باشد. همچنین ضریب انبساط حرارتی α_1 =۷,۵ × ۱۰ $^{-۶}K^{-1}$ ، α_2 =۸ × ۱۰ $^{-۶}K^{-1}$، α_3 =۹ × ۱۰ $^{-۶}K^{-1}$، ظرفیت گرمایی ویژه C =۷۷۵ J/kg.K و ضریب هدایت حرارتی k1 =۲۹,۸۲ W/m.K ، k2 =۲۱,۲۵ W/m.K می باشد. و مقدار زمان t و K_I وK_{II} مطابق فرمول‌های زیر بی بعد شده‌اند [۱۸].

$$Ct/h = \frac{k_{xx} t}{\rho c W^2} \qquad (۶۴-۵)$$

$$K1 = \frac{K_I}{\alpha E \sqrt{W}\, \Delta T}, \qquad (۶۵-۵)$$

$$K2 = \frac{K_{II}}{\alpha E \sqrt{W}\, \Delta T}$$

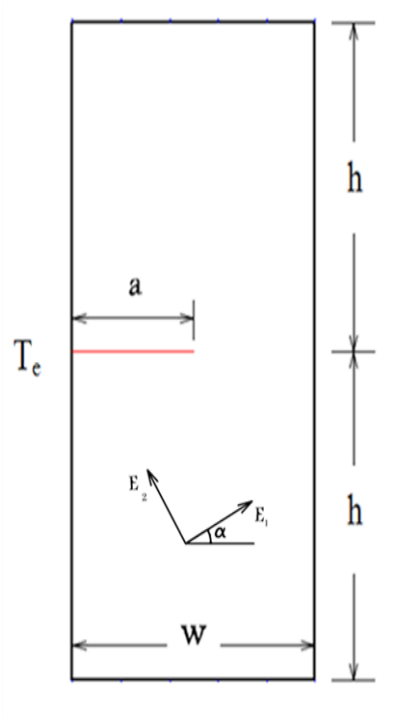
در رابطه (۵-۶۵) K1 وK2 به ترتیب حالت بی‌بعد K_I و K_{II} هستند. همچنین ΔT نیز اختلاف دما اولیه و دما معلوم T_e است. (رابطه (۵-۶۶))

$$\Delta T = T_0 - T_e \qquad (۶۶-۵)$$

همچنین برای حل این مسئله مقدار dt مطابق رابطه (۵-۶۷) حساب شده است.

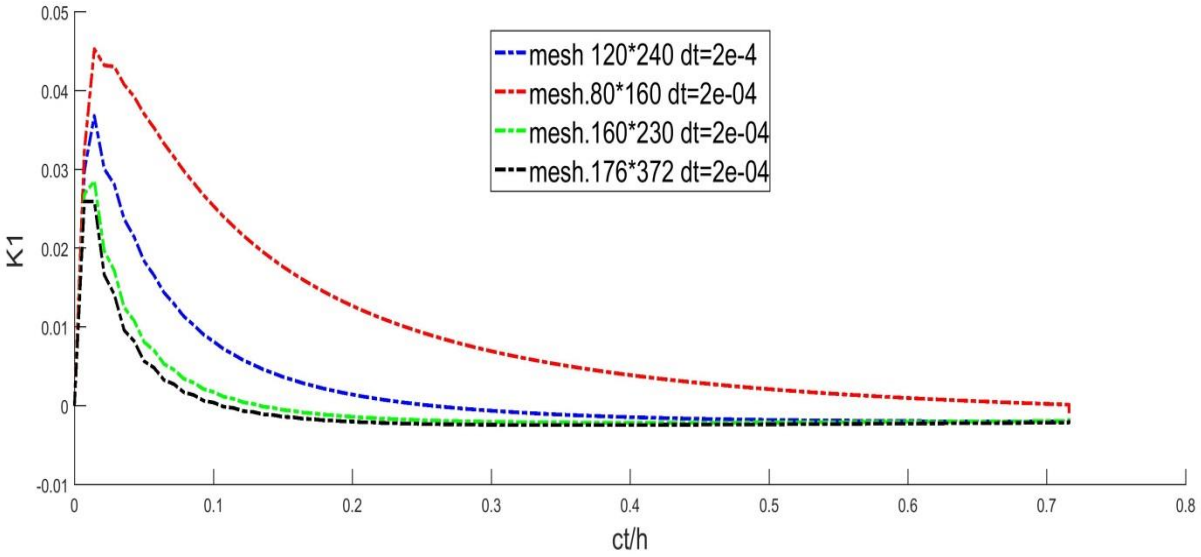
$$dt = \frac{10 \times to}{(k_{xx})} \times (\rho \times c \times w^{2}), \qquad (۶۷-۵)$$
$$to = \frac{(finaltime - starttime)}{1000}$$

که در این مسئله مقدار finaltime و starttime به ترتیب ۱ و ۰ ثانیه می‌باشند. بنابراین با توجه به مشخصات ماده مقدار dt برابر با $dt = 2.79 \times 10^{-4}$ می‌باشد.



شکل ۵-۱) صفحه اورتوتروپیک ترک دار تحت با حرارتی

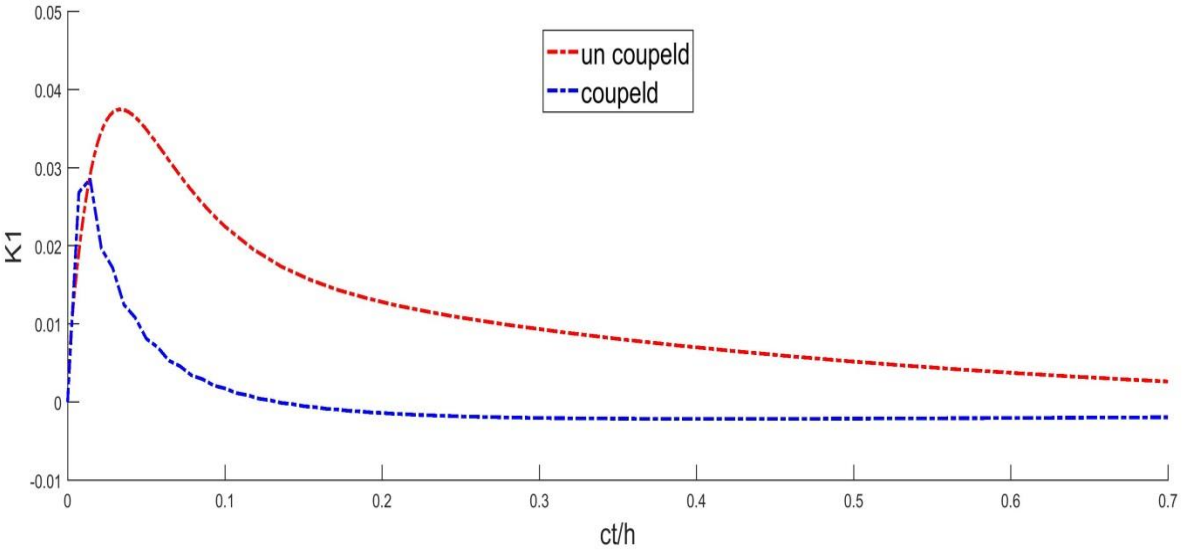
فرایند حل و تحلیل مسئله درست مانند بخش ۴-۴-۴ است یعنی ابتدا برای رسیدن به مش مطلوب تست همگرایی را با چند مش انجام داده شده‌است. نتیجه تست همگرایی در شکل ۵-۲ قابل مشاهده-است.



شکل ۵-۲) تست همگرایی صفحه اورتوتروپیک ترک‌دار تحت بار حرارتی با توابع غنی‌سازی اورتوتروپیک و جدید

همانطور که در شکل فوق مشخص است مش مطلوب برای حل مسئله مش ۲۳۰×۱۶۰ می‌باشد و تمام تحلیل‌ها و نتایج این مسئله با این مش گرفته شده‌است. این درحالی است که مش مطلوب برای حل همین مسئله در حالت غیرکوپل (فصل۴) مش ۴۸۰×۱۸۰ بود. در حقیقت لزومی ندارد که نتایج تست همگرایی برای مسائل یکسان با روش حل‌های متفاوت یکسان باشد.

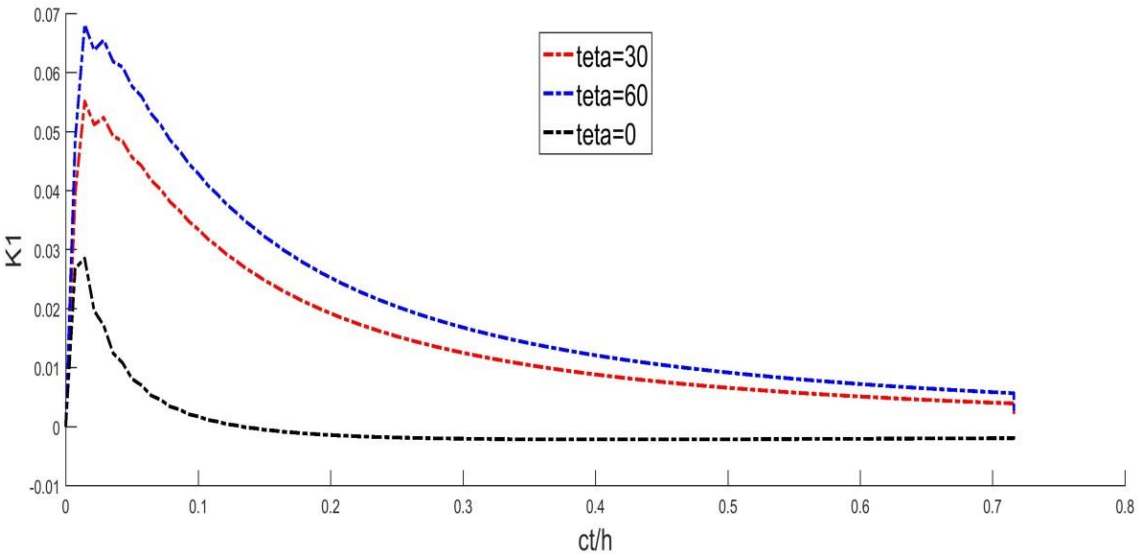
شکل ۵-۳ مقایسه حل کوپل و غیرکوپل این مسئله را برای حالت On axis نشان می‌دهد.



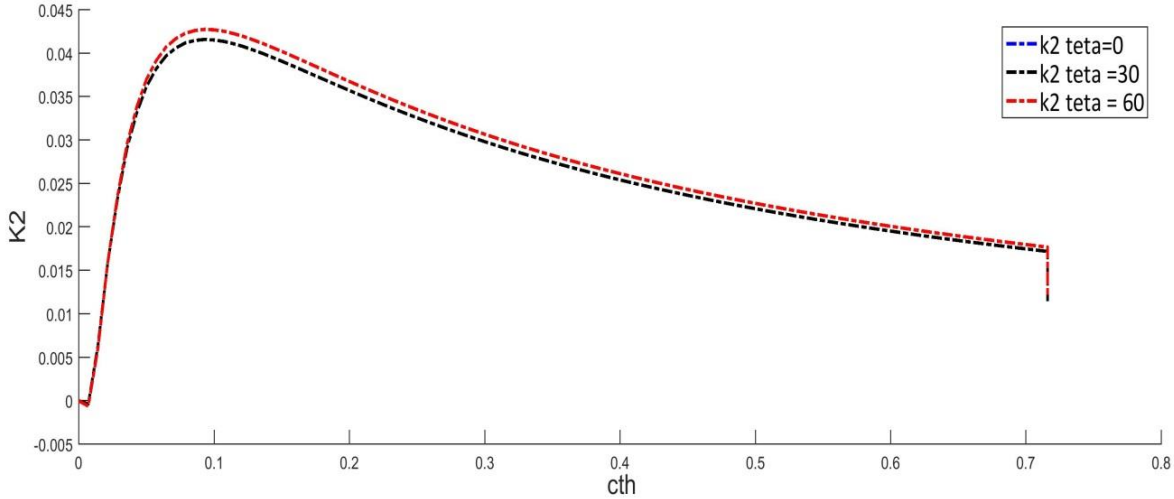
شکل ۵-۳) مقایسه حل کوپل و غیرکوپل

همانطور که در شکل ۵-۳ قابل مشاهده است، پیک نمودار un coupled به ترتیب K1= 0.039 در زمان بی‌بعد ۰,۰۳۷ می‌باشد. که این مقادیر برای نمودار Coupled به ترتیب K1= 0.029 در زمان بی بعد ۰,۰۱۴می‌باشد. که درصد اختلاف دو نمودار برای K1 چیزی در حدود ۲۵درصد و برای زمان بی‌بعد چیزی در حدود ۶۰ درصد می‌باشد. این اختلاف، اختلاف حل تئوری کوپل و غیرکوپل را نشان می‌دهد.

در ادامه نیز مسئله را برای چند زاویه الیاف مختلف حل و نمودار K1 و K2 آن‌ها با یکدیگر مقایسه گردیده است. (شکل ۵-۴و شکل ۵-۵)



شکل ۵-۴) مقادیر K1 صفحه اورتوتروپیک ترک‌دار تحت بار حرارتی با روش ارائه شده در حالت Off axis.

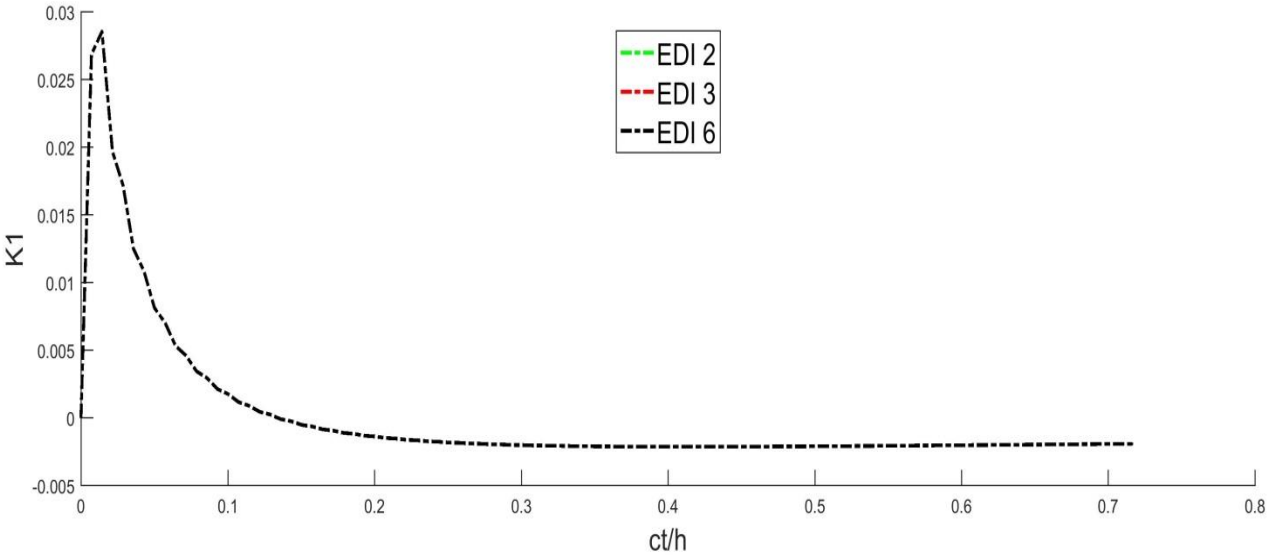


شکل ۵-۵) مقادیر K2 صفحه اورتوتروپیک ترک‌دار تحت بار حرارتی با روش ارائه شده در حالت Off axis.

همانطور که در شکل ۵-۴ و شکل ۵-۵ مشاهده می‌شود مثل حالت غیرکوپل با افزایش زاویه ناهمسانگردی مقدار بیشینه ضریب شدت تنش دینامیکی K1 و K2 نیز افزایش می یابد.

۵-۴-۲ تست استقلال از مسیر انتگرال برهم‌کنش

یکی از نکات مهم در انتگرال j، **استقلال از مسیر** آن است. یعنی وابسته به ناحیه و مسیر انتخابی برای انتگرال‌گیری نمی‌باشد. در شکل ۵-۶ قابل مشاهده است که نتایج برای ۳ شعاع مختلف انتگرال-گیری کاملا مشابه و نمودارها منطبق برهم است.



شکل ۵-۶) تست استقلال از مسیر

فصل ۶: تحلیل و نتایج ورق اورتوتروپیک ترک‌دار تحت شوک حرارتی با تئوری لرد شلمان[1]

۱)مقدمه

۲) معرفی معادلات حاکم و گسسته‌سازی

۳) چیدمان درجات آزادی در برنامه رایانه‌ای

۴) حل مثال عددی و تحلیل نتایج

۵) توضیحات تکمیلی حول ترموالاستیسیته لردشلمان و کوپل

[1] Lord-Shulman (L-S)

۶-۱ مقدمه

در تئوری ترموالاستیسیته لردشلمان برخلاف تئوری کلاسیک (کوپل و غیرکوپل) سرعت انتقال موج گرما بی نهایت نیست و محدود است [۳۵]. در این تئوری معادله انرژی و ناویر توام با یکدیگر گسسته و حل می‌شوند. (به مانند فصل قبل) اما با توجه به نکته‌ای که درباره سرعت محدود موج در تئوری لردشلمان ذکر شد معادله انرژی در آن متفاوت است، ولی معادله ناویر (همانطور که در فصول قبل ذکر شد از معادله حرکت نتیجه می‌شود.) دقیقا شبیه فرم کلاسیک (فصل قبل) است.

در این فصل نیز به مانند دو فصل قبل ابتدا معادلات حاکم معرفی و گسسته می‌شوند، سپس درجات آزادی و چیدمان آن‌ها در برنامه رایانه‌ای توضیح داده‌شده و در انتها مثال عددی حل شده در دوفصل قبل؛ این‌بار با تئوری لردشلمان حل[۱] و نتایج آن تحلیل خواهد شد.

۶-۲ معرفی معادلات حاکم و گسسته‌سازی

در رابطه (۵-۱) فصل قبل معادلات حاکم بر یک سیستم ترموالاستیسیته کوپل را به صورت زیر بیان شد.

$$\sigma_{ij,j}+X_i-\rho\ddot{u}_i=0 \quad \mathrm{i,j}=1,2 \qquad (1) \qquad (۶-۱)$$

$$[k_{ij}t_{,j}]_{,i}+\rho c\dot{t}+\beta_{ij}t_0\dot{u}_{i,\mathrm{j}}-Q=0 \quad \mathrm{i,j}=1,2 \qquad (2)$$

[۱] با همان توابع غنی سازی معرفی شده فصل دوم

با توجه به سرعت انتقال موج گرما محدود در تئوری لردشلمان، معادله انرژی کمی تغییر یافته و در نتیجه معادلات حاکم به فرم معادلات (۶-۲) درمی‌آیند [۳۵]:

$$\sigma_{ij,j}+X_i-\rho\ddot{u}_i=0 \quad \mathrm{i,j}=1,2 \qquad (1) \tag{۶-۲}$$

$$[k_{ij}t_{,j}]_{,i}-\rho c\dot{t}-\rho c\tau_0\ddot{t}-\beta_{ij}t_0[\dot{u}_{i,\mathrm{j}}+\tau_0\ddot{u}_{i,\mathrm{j}}]-Q=0 \quad \mathrm{i,j}=1,2 \qquad (2)$$

همانطور که انتظار می‌رفت، معادله ناویر در هر دو حالت ثابت باقی‌ماند[۱]. در معادله انرژی سیستم لردشلمان (معادله دوم (۶-۲)) τ_0 زمان تاخیر[۲] نامیده شده و بیانگر زمانی است که طول می‌کشد تا گرما انتقال یابد. و می‌توان آن را از رابطه زیر محاسبه کرد [۳۵].

$$\tau_0=\frac{k}{\rho c C_T^2} \tag{۶-۳}$$

که در این رابطه k هدایت گرمایی؛ ρ چگالی جرمی و c حرارت ویژه جامد و C_T نیز سرعت موج گرما[۳] می‌باشد.

مانند فصل قبل نیروی حجمی و نرخ تولید انرژی داخلی در پیوستار در واحد حجم و زمان واحد را صفر در نظر می‌گیریم. (X=Q=0) گسسته‌سازی معادلات لردشلمان کاملا مشابه گسسته‌سازی معادلات کوپل در فصل گذشته است. لازم به ذکر است که به علت وجود ضریب زمان تاخیر در معادله انرژی سیستم لردشلمان برای جملات $\ddot{T},\ddot{\mathrm{u}}$ [۴] (معادلات حاکم (۶-۲)) تنها ماتریس جرم در سیستم لردشلمان با ماتریس جرم در حالت کوپل تفاوت دارد و از رابطه زیر محاسبه می‌گردد.

---

[۱] تنها تفاوت معادلات کوپل و لردشلمان سرعت انتقال موج است. که این اختلاف تنها بر روی معادله انرژی اثر می‌گذارد.

[۲] Relaxation Time

[۳] در آزمایشگاه قابل اندازه گیری است.

[۴] همانطور که در فصل پنجم و بخش ۵-۲ به طور کامل توضیح داده شد جملاتی که مشتق مرتبه دوم زمان دارند در ماتریس جرم (M) نمایان می‌شوند.

$$\tilde{M}_L = (\tilde{C} \times \tau_0) + \tilde{M} \qquad (۴-۶)$$

در این رابطه $\tilde{C}$همان ماتریس دمپر و $\tilde{M}$ نیز ماتریس جرم معرفی شده در فصل قبل می‌باشد، همچنین $\tilde{M}_L$ نیز ماتریس جرم سیستم لردشلمان است که از ترکیب خطی ماتریس دمپر کوپل؛ جرم کوپل و زمان تاخیر بدست می‌آید.

از رابطه فوق به سادگی پیداست که اگر زمان تاخیر صفر باشد ماتریس جرم همان ماتریس جرم سیستم کوپل (کلاسیک) می‌شده و سرعت موج انتقال گرما بی‌نهایت می‌گردد.

و به این ترتیب معادله (۵-۴۸) معرفی شده در فصل قبل به صورت زیر درمی‌آید.

$$\left\{\begin{bmatrix} M_u & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C_u & C_\theta \end{bmatrix} \times \tau_0\right\}\right\}\begin{Bmatrix} \ddot{U} \\ \ddot{t} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C_u & C_\theta \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{U} \\ \dot{t} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\theta} \\ 0 & K_{\theta\theta} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U \\ t \end{Bmatrix} = F \qquad (۵-۶)$$

,

$$[M_L] = \begin{bmatrix} M_u & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C_u & C_\theta \end{bmatrix} \times \tau_0\right\}$$

و مانند فصل گذشته داریم:

$$M_u = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{22} \end{bmatrix} \qquad (۶-۶)$$

$$C_u = [C_{31} \quad C_{32}] \qquad (۷-۶)$$

$$C_\theta = [C_{33}] \qquad (۸-۶)$$

$$K_{uu} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \qquad (۹-۶)$$

$$K_{u\theta} = \begin{bmatrix} K_{13} \\ K_{23} \end{bmatrix} \qquad (۱۰-۶)$$

$$K_{\theta\theta} = [K_{33}] \qquad (۱۱-۶)$$

برای ساده سازی و کدنویسی بهتر، می توان معادلات فوق را به صورت انتگرال‌های زیر بازنویسی کرد. (مانند چیزی که در فصل پیش ذکر شد)

$$M_u = \rho \int_{\Omega} N_U{}^T N_U \ \ d\Omega \tag{۱۲-۶}$$

$$C_u = t_0 \int_{\Omega} N_\theta{}^T \beta^T B \, d\Omega \tag{۱۳-۶}$$

$$C_\theta = \rho c \int_{\Omega} N_\theta{}^T N_\theta \, d\Omega \tag{۱۴-۶}$$

$$K_{uu} = \int_{\Omega} B \ QB^T \ d\Omega \tag{۱۵-۶}$$

$$K_{u\theta} = -\int_{\Omega} B^T \beta \ N^T \ d\Omega \tag{۱۶-۶}$$

$$K_{\theta\theta} = \int_{\Omega} B^{th\ T} k \ \ B^{th} \, d\Omega \tag{۱۷-۶}$$

۶-۳ چیدمان درجات آزادی در برنامه رایانه‌ای

در فصل ۵ بخش ۳-۵ به طور کامل درباره درجات آزادی توضیح داده‌شد که از تکرار آن‌ها صرف نظر می‌کنیم. چیدمان درجات آزادی در ترموالاستیسیته لردشلمان کاملا مشابه چیدمان درجات آزادی در ترموالاستیسیته کوپل می‌باشد. داریم:

$$\{\Delta\} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ . \\ . \\ . \\ u_n \\ v_n \\ du_1 \\ dv_2 \\ . \\ . \\ . \\ du_n \\ dv_n \\ t_1 \\ . \\ . \\ . \\ dt_1 \\ . \\ . \\ . \\ dt_n \end{bmatrix} \qquad (۱۸-۶)$$

در رابطه فوق t_1,u_1,v_1 تا t_n,u_n,v_n درجات آزادی گره‌های حقیقی هستند و dt_1,du_1,dv_1 تا dt_n,du_n,dv_n درجات آزادی گره‌های مجازی هستند. به عبارت بهتر چیدمان درجات آزادی به این صورت است که ابتدا درجات آزادی گره‌های حقیقی مکانیکی (هرگره دو درجه آزادی) سپس درجات آزادی مجازی مکانیکی بعد از آن درجات آزادی گره‌های حقیقی حرارتی (هر گره یک درجه آزادی) و در انتها نیز درجات آزادی گره‌های مجازی حرارتی.

درجه آزادی کل سیستم نیز از جمع درجات آزادی مکانیکی و حرارتی که در روابط (۴-۵۳) و (۴-۵۴) ذکر شد محاسبه می‌گردد.

۶-۴ حل مثال عددی و تحلیل نتایج

در این قسمت مسئله ۴-۴-۴ دوفصل قبل (که در فصل پیش نیز بررسی شد) یعنی ترک لبه‌ای برای ماده اورتوتروپیک در حالت دینامیکی تحت بار حرارتی با معادلات ترموالاستیسیته لردشلمان حل شده‌است. برای یادآوری صورت مسئله را دوباره در زیر شرح می‌دهیم. (لازم به ذکر است که توابع غنی‌سازی در حل این مسئله مانند فصول ۴و۵ است[۱].)

صفحه دو بعدی اورتوتروپیک با طول ۲h = ۴mm و عرض w = ۱mm در نظر گرفته می‌شود که دارای ترک مستقیم به طول a =۰,۴ mm است (شکل ۶-۱). صفحه در لبه چپ به سرعت تا دمای ۱۰- درجه (T_e) سرد می شود. تمامی لبه های دیگر عایق و شرایط کرنش صفحه ای در نظر گرفته شده است.

مشخصات ماده $\upsilon_{۱۲}$ =۰,۲۸ ، $\upsilon_{۱۳}$ =۰,۲۷ ، $\upsilon_{۳۱}$ =۰,۲۱ ، $\upsilon_{۳۲}$ =۰,۱۴ ، $E_۱$ =۱۱۶,۳۶ GPa ، $E_۲$ =۹۰,۴۳GPa و $G_{۱۲}$ =۳۸,۲۱ GPa و ρ=۳۹۸۰Kg/m3 می باشد. همچنین ضریب انبساط حرارتی α_1 =۷,۵ × ۱۰ $^{-۶}K^{-1}$ ، α_2 =۸ × ۱۰ $^{-۶}K^{-1}$، α_3 =۹ × ۱۰ $^{-۶}K^{-1}$، ظرفیت گرمایی ویژه C =۷۷۵ J/kg.K و ضریب هدایت حرارتی k1 =۲۹,۸۲ W/m.K ، k2 =۲۱,۲۵ W/m.K می باشد. و مقدار زمان t و K_I وK_{II} مطابق فرمول‌های زیر بی بعد شده‌اند [۱۸]. ضمنا برای حل این مسئله مقدار زمان تاخیر ۰,۱ درنظرگرفته شده است. یعنی $\tau_0 = 0.1$

$$Ct/h = \frac{k_{xx} t}{\rho c W^2} \qquad (۱۹-۶)$$

$$K1 = \frac{K_I}{\alpha E \sqrt{W}\, \Delta T}, \qquad (۲۰-۶)$$

$$K2 = \frac{K_{II}}{\alpha E \sqrt{W}\, \Delta T}$$

---

[۱] به فصل دوم رجوع شود

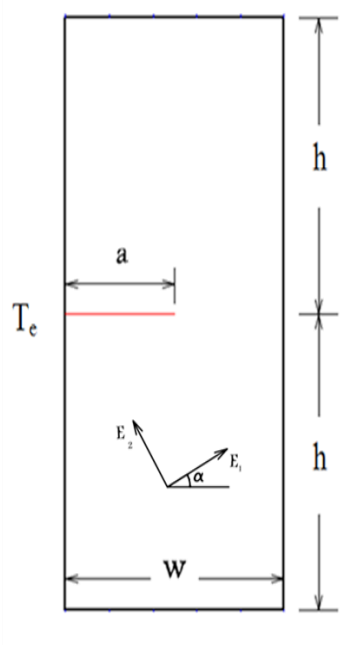
در رابطه (۶-۲۰) K1 وK2 به ترتیب حالت بی‌بعد K_I و K_{II} هستند. همچنین ΔT نیز اختلاف دما اولیه و دما معلوم T_e است. (رابطه (۶-۲۱))

$$\Delta T = T_0 - T_e \qquad (۶-۲۱)$$

همچنین برای حل این مسئله مقدار dt مطابق رابطه (۶-۲۲) حساب شده است.

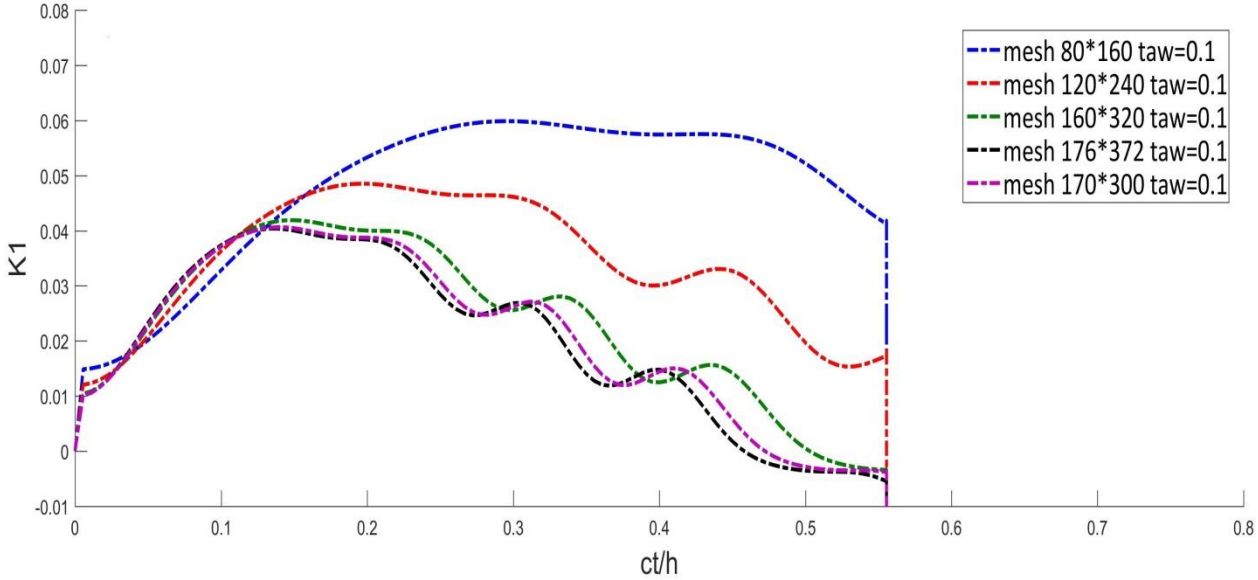
$$dt = \frac{10 \times to}{(k_{xx})} \times (\rho \times c \times w^2), \qquad (۶-۲۲)$$
$$to = \frac{(finaltime - starttime)}{1000}$$

که در این مسئله مقدار finaltime و starttime به ترتیب ۱ و ۰ ثانیه می‌باشند. بنابراین با توجه به مشخصات ماده مقدار dt برابر با $dt = 2.79 \times 10^{-4}$ می‌باشد.



شکل ۶-۱) صفحه اورتوتروپیک ترک دار تحت با حرارتی

فرایند حل و تحلیل مسئله درست مانند قبل است یعنی ابتدا برای رسیدن به مش مطلوب تست همگرایی را با چند مش انجام داده شده‌است. نتیجه این تست در شکل ۶-۲ قابل مشاهده است.



شکل ۶-۲) تست همگرایی صفحه اورتوتروپیک ترک‌دار تحت بار حرارتی با توابع غنی سازی اورتوتروپیک و جدید با درنظر گرفتن ترموالاستیسیته لرد شلمان و $\tau_0 = 0.1$

همانطور که در شکل فوق مشخص است مش مطلوب برای حل مسئله مش ۳۷۲×۱۷۶ می‌باشد و تمام تحلیل‌ها و نتایج این مسئله با این مش گرفته شده‌است.

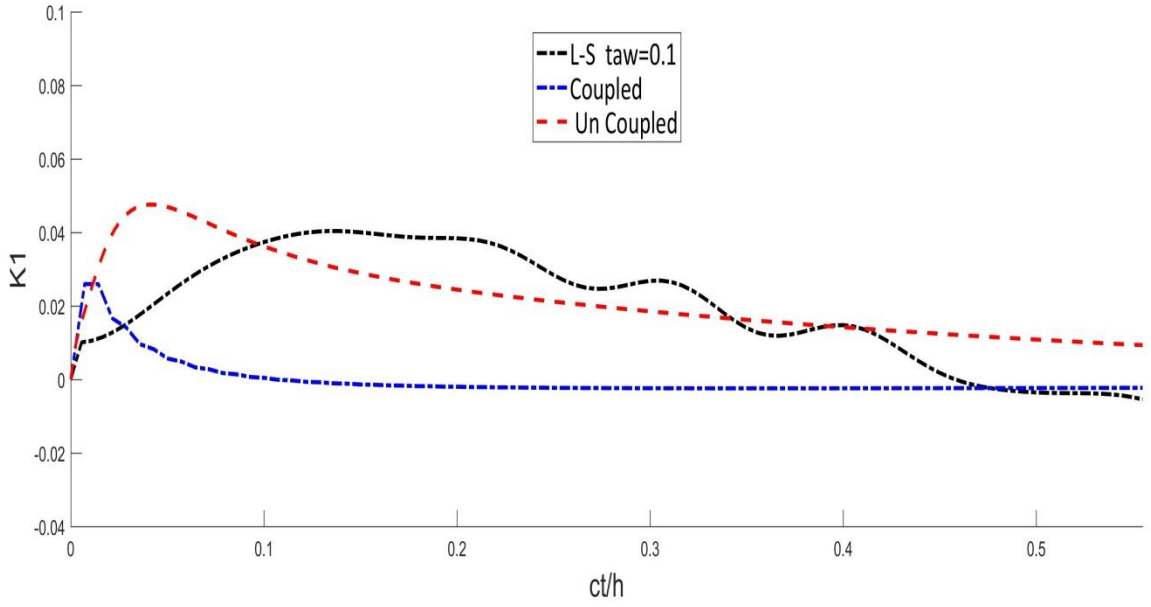
در شکل زیر برای درک بهتر تاثیر زمان تاخیر[۱] نتایج ترموالاستیسیته لردشلمان با نتایج دوفصل قبل یعنی ترموالاستیسیته کوپل[۲] و غیرکوپل[۳] مقایسه شده‌است. لازم به ذکر است که این مقایسه در حالت on axis و برای K1 انجام شده است. (شکل ۶-۳)

---

[۱] در این مسئله $\tau_0 = 0.1$

[۲] فصل پنجم

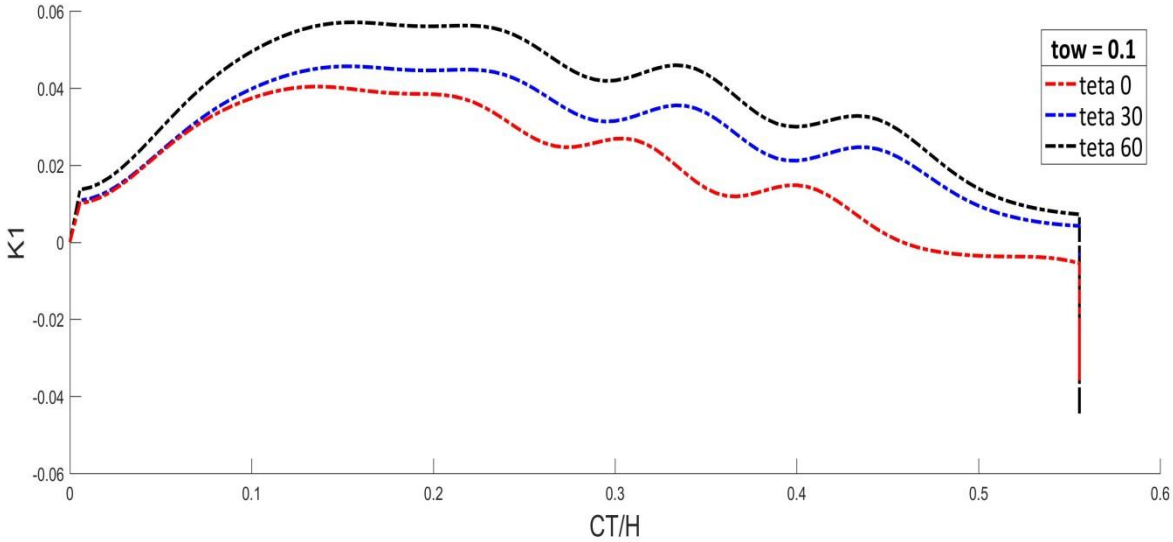
[۳] فصل چهارم



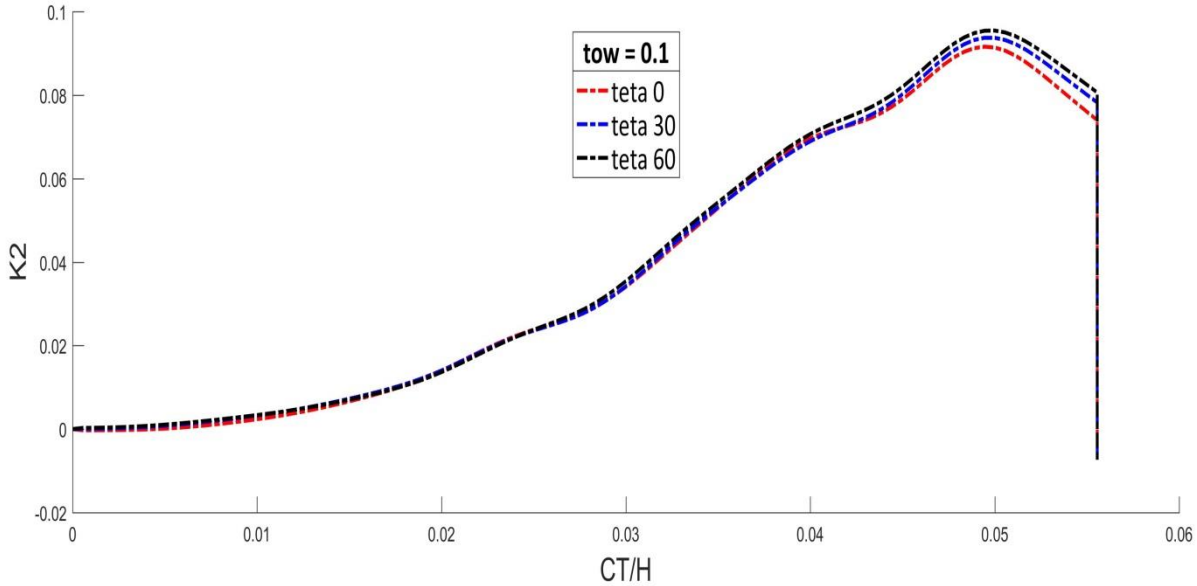
شکل ۶-۳) مقایسه حل کوپل و غیرکوپل با حل لردشلمان

همانطور که در شکل فوق قابل مشاهده است پیک نمودار لردشلمان به دلیل وجود زمان تاخیر دیرتر از حالت کوپل اتفاق می‌افتد.

در ادامه نیز مسئله را برای چند زاویه الیاف مختلف حل و نمودار K1 و K2 آن‌ها با یکدیگر مقایسه گردیده است. توجه شود که در تمام زوایا مقدار زمان تاخیر همان ۰,۱ است (شکل ۶-۴ و شکل ۶-۵)



شکل ۶-۴) مقادیر K1 صفحه اورتوتروپیک ترک‌دار تحت بار حرارتی با روش ارائه شده در حالت Off axis.

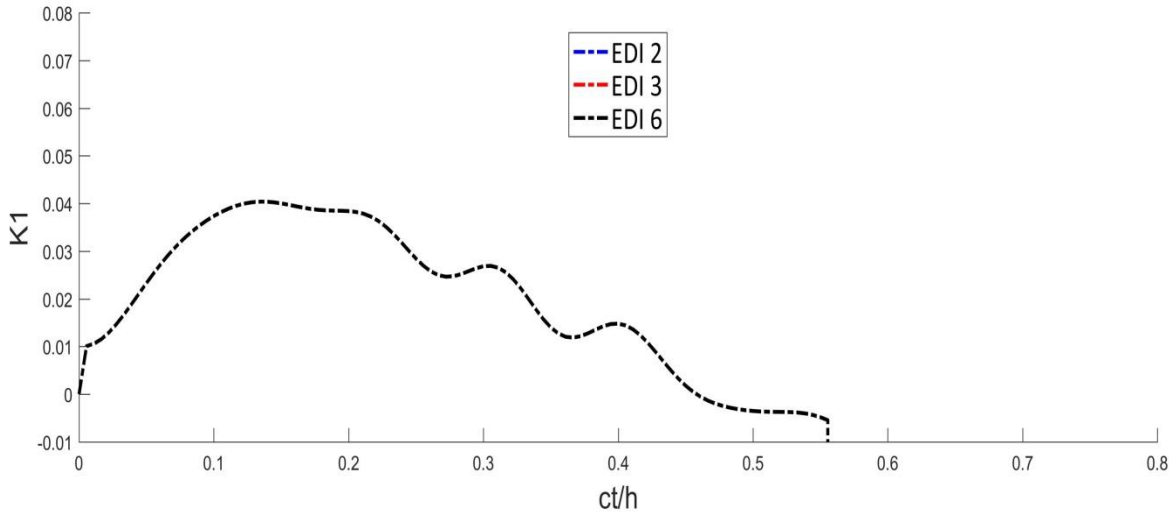


شکل ۶-۵) مقادیر K2 صفحه اورتوتروپیک ترک‌دار تحت بار حرارتی با روش ارائه شده در حالت Off axis.

همانطور که در اشکال فوق مشاهده می‌شود مثل قبل با افزایش زاویه ناهمسانگردی مقدار بیشینه ضریب شدت تنش دینامیکی K1 و K2 نیز افزایش می یابد. که این افزایش در مقدار K1 مشهودتر است.

۶-۴-۲ تست استقلال از مسیر انتگرال برهم‌کنش

همانطور که در فصل گذشته ذکر شد؛ تست استقلال از مسیر برای سه مسیر انتخابی انتگرال‌گیری م مطابق شکل زیر انجام شده است.



شکل ۶-۶) تست استقلال از مسیر

همانطور که در شکل ۶-۵ قابل مشاهده است که نتایج برای هر سه شعاع مختلف انتگرال‌گیری کاملا مشابه و نمودارها منطبق برهم است.

۶-۵ توضیحات تکمیلی حول ترموالاستیسته لردشلمان و کوپل

اکنون در انتهای این رساله قصد دارم تا درباره ترموالاستیسیته لردشلمان و کوپل که نتایج آن‌ها در این فصل و فصل قبل بررسی شد اندکی بیشتر توضیح دهم. همانطور که در این فصل و فصل پیش مشاهده شد معادلات حاکم در ترموالاستیسیته کوپل و لردشلمان به صورت جفت‌شده گسسته‌سازی شده‌اند. (و یا در حل تحلیلی به صورت ریاضی حل شده‌اند) درست برخلاف ترموالاستیسیته غیرکوپل.

تفاوت اصلی ترموالاستیسیته کوپل و لردشلمان در نوع تئوری انتقال گرما استفاده شده در آن‌هاست، در ترموالاستیسته کوپل (که به آن کلاسیک کوپل نیز گفته می‌شود) تئوری انتقال گرما استفاده شده تئوری کلاسیک فوریه می‌باشد[1] و بر اساس آن سرعت انتقال موج گرما بی‌نهایت است. در مسائل دوبعدی معادله انتقال حرارت فوریه که معادله انرژی حاکم بر ترموالاستیسیته کوپل[2] از آن بدست می‌آید به صورت زیر است [۳۵].

$$q_i = -k_{ij} T_{,i} \quad i, j = 1, 2 \qquad (۲۳-۶)$$

در رابطه فوق q_i شار گرمایی؛ k_{ij} مولفه‌های ماتریس هدایت گرمایی و $T_{,i}$ گرادیان دما می‌باشند. در مسائل دوبعدی گرادیان دما در هر دوجهت و مطابق رابطه (۶-۲۴) محاسبه می‌شود [۳۵و۱۹].

$$T_{,i} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial T}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial T}{\partial x_2} \end{Bmatrix} \qquad (۲۴-۶)$$

اما در ترموالاستیسیته لردشلمان تئوری انتقال گرما توسعه‌یافته لردشلمان استفاده شده است که براساس آن سرعت انتقال گرما بی‌نهایت نیست و محدود است. معادله (۶-۲۷)، معادله انتقال حرارت لردشلمان می‌باشد [۳۵].

$$q_i + \tau_0 \dot{q}_i = -k_{ij} T_{,i} \quad i, j = 1, 2 \qquad (۲۵-۶)$$

τ_0 همان زمان تاخیر می‌باشد. همانطور که قابل مشاهده است معادله انتقال حرارت در تئوری لردشلمان یک جمله بیشتر از تئوری ترموالاستیسیته کوپل (کلاسیک) دارد. همچین توجه شود که اگر

---

[1] درست مثل ترموالاستیته غیر کوپل. در حقیقت تنها تفاوت ترموالاستیسته کوپل و غیرکوپل جفت بودن و یا جفت نبودن معادلات آن‌هاست نه تئوری استفاده شده.

[2] و غیرکوپل

زمان تاخیر برابر صفر شد معادله (۶-۲۵) به معادله تئوری کوپل (رابطه (۶-۲۳)) تبدیل می‌شود. در حقیقت پارامتر تاخیر زمان است که سرعت انتقال موج را کنترل می‌کند.

فصل ۷: نتیجه گیری کلی و پیشنهادات

۱) خلاصه نتیجه گیری

۲) پیشنهادات برای پژوهش‌های بعدی

۷-۱ خلاصه نتیجه‌گیری

تلاش نگارنده این رساله این بوده است که روند نگارش فصول به شکلی باشد که با مقدمه شروع و با نتیجه‌گیری به پایان برسد. (انشالله که موفقیت آمیز بوده‌باشد!) اما به هرحال در این بخش خلاصه نتیجه این رساله و تحقیق نگارنده آورده شده است.

در این رساله، روش المان محدود توسعه یافته برای تحلیل دینامیکی مسائل مکانیک شکست در محیط‌های دوبعدی از مواد اورتوتروپیک تحت بارگذاری حرارتی با سه تئوری ترموالاستیسته غیرکوپل؛ کوپل و لردشلمان (برای هرکدام یک فصل مجزا از ابتدا تا انتها[1]) به کار رفته است. با آوردن چند مثال، دقت روش نگارنده با روش‌های دیگر مقایسه گردیده است. در انتها مقادیر ضریب شدت تنش در صفحه اورتوتروپیک تحت بارگذاری حرارتی بدست آمده است. درضمن در این رساله در هر سه فصل نتایج با تغییر زوایای ناهمسانگردی نیز بدست آمده است. لازم به ذکر است که توابع غنی‌سازی دمایی برای حل مسائل این رساله (در هر سه فصل) جدید بوده و تا به حال توسط شخص دیگری ارائه نشده است؛ این توابع نتایج خوب و صحیحی را به همراه داشتند و می‌توان در تحلیل‌های آتی از آن‌ها استفاده کرد. و در پایان اگر بخواهیم در یک جمله نتایج این رساله را خلاصه کنیم، آن جمله این است که در تئوری ترموالاستیسیته لردشلمان نسبت به تئوری‌های کلاسیک کوپل و غیرکوپل به علت وجود تاخیر زمانی، ضریب شدت تنش دینامیکی مود اول شکست (K_I) دیرتر به مقدار پیک می‌رسد.

۷-۲ پیشنهادات برای پژوهش‌های بعدی

موضوعات زیر به نظر نگارنده برای پژوهش‌های آتی جالب است.

---

[1] فصول ۴، ۵ و ۶

- بررسی رشد ترک در مواد اورتوتروپیک
- بررسی دما نوک ترک در انواع مواد با تئوری‌های مختلف ترموالاستیسیته
- بررسی ضرایب شدت تنش دینامیکی تحت بار حرارتی و مقایسه ترموالاستیسیته لردشلمان و گرین نقدی
- بررسی ضرایب شدت تنش دینامیکی تحت بار ترکیبی مکانیکی و حرارتی برای انواع مواد کامپوزیتی
- بررسی ضرایب شدت تنش دینامیکی تحت شار گرمایی متناوب با تئوری‌های ترموالاستیسیته تعمیم یافته برای انواع مواد (ایزوتروپیک، FGM و ....)

و در آخر به قول سعدی: **به پایان آمد این دفتر حکایت همچنان باقی**

جوانشیر لطفی

شهریور ۱۳۹۸

منابع و مراجع

[1] Muskelishvili NI., Some basic problems on the mathematical theory of elasticity, Translated by Radok JRM. Noordhoof, Groningen; 1953.

[2] Lekhnitskii SG., Theory of an anisotropic elastic body, San Francisco: Holden-Day; 1963.

[3] Sih GC., Paris PC., Irwin GR., “On cracks in rectilinearly anisotropic bodies” International Journal of Fracture Mechanics, Vol. 1, 1965, pp. 189-203.

[4] Nobile L., Carloni C., “Fracture analysis for orthotropic cracked plates” Compos Struct , Vol. 68, No. 3, 2005, pp. 285-293.

[5] Aliabadi M.H., Sollero P., “Crack growth analysis in homogeneous orthotropic laminates” Compos Sci Technol, Vol. 58 , 1998, pp. 1697-1703.

[6] Sanchez F., Zhang C., Saez A., “A two-dimensional time-domain boundary element method for dynamic crack problems in anisotropic solids” Engineering Fracture Mechanics, Vol. 75, 2008, pp. 1412-1430.

[10] Prasad, N.N.V., Aliabadi, M.H., Rooke, D.P., “The dual boundary element method for transient thermoelastic crack problems” International Journal Solids and Structures, Vol. 33, 1996, pp. 2695–2718.

[11] Dell’Erba D.N., Aliabadi M.H., Rooke D.P., “Dual boundary element method for three-dimensional thermoelastic crack problems” International Journal of Fracture, Vol. 94, 1998, pp. 89–101.

[9] Kim J.H, Paulino G.H., “The interaction integral for fracture of orthotropic functionally graded materials: evaluation of stress intensity factors” International Journal Solids and Structures, Vol. 40, 2003, pp. 3967-4001.

[7] Belytschko T., Black T., “Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing” International Journal of Fracture Mechanics, Vol. 45, 1999, pp. 601-620.

[8] Dolbow J., An extended finite element ethod with Discontinuous Enrichment for Applied Mechanics ,[PhD thesis], Theoretical and Applied Mechanics, Northwestern University , Evanston , IL, U.S.A, 1999.

[9] Asadpoure A., Mohammadi S., “Developing new enrichment functions for crack simulation in orthotropic media by the extended finite element method” International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 69, 2007, pp. 2150–2172.

[10] EsnaAshari S, Mohammadi S. Delamination analysis of composites by new orthotropic bimaterial extended finite element method. Int J Numer Methods Engng 2011;86(13):1507–43.

[11] Motamedi D, Mohammadi S. Dynamic analysis of fixed cracks in composites by the extended finite element method. Engng Fract Mech 2010;77(17):3373–93.

[12] Motamedi D, Mohammadi S. Dynamic crack propagation analysis of orthotropic media by the extended finite element method. Int J Fract 2010;161(1):21–39.

[13] Motamedi D, Mohammadi S. Fracture analysis of composites by time independent moving-crack orthotropic XFEM. Int J Mech Sci 2012;54(1):20–37.

[14] Hosseini S.S., Bayesteh H., Mohammdi S., “Thermo-mechanical XFEM Crack Propagation Analysis of Functionally Graded Materials” Materials Science and Engineering, Vol. 561, 2013, pp. 285-302.

[15] E. Goli, H. Bayesteh, S. Mohammadi, Mixed mode fracture analysis of adiabatic cracks in homogeneous and non-homogeneous materials in the frame-work of partition of unity and the path-independent interaction integral, Eng. Fract. Mech. 131 2014, pp. 100–127

[16] Bayesteh H,Afshar A,Mohammadi S.Thermo-mechanical fracture study of inhomogeneous racked solids by thee xtended isogeometric analysis method. Eur J Mech A/Solids 2015;51:123–39.

[17] Bouhala L, Makradi A, Belouettar S, Thermo-anisotropic crack propagation by XFEM, International Journal of Mechanical Sciences 103 2015,pp. 235–246

[۱۸] محاسبه پارامترهای دینامیکی شکست در مواد مرکب تحت بار حرارتی با روش اجزای محدود توسعه یافته، مجتبی حاجی محمدی، پایان‌نامه، دانشگاه صنعتی شاهرود,۱۳۹۲

[19] Lai, Krempl, Rubin, Introduction to Continuum Mechanics 4th Ed, 2010

[20] R-Jones, Mechanics-of-Composite-Materials-2nd-ed, 1999

[21] Timoshenko, Theory of Elasticity, 1951

[22] Stasa, Applied Finite Element Analysis for Engineers, 1985

[23] Melenk J.M. and Babuska I., “The Partition of Unity Finite Element Method: Basic Theory and Applications”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 139, 1996, pp.289 -314.

[24] Belytschko T., Y.Krongauz ., D.Organ ., M,Fleming , and P.Krysl., “Meshless method : An overview and recent developments”. Computer Method in Applied Mechanics and Engineering 139, 3-47,1996.

[25] Belytschko T., Gracie R. and Ventura G. “A Review of Extended/Generalized Finite Element Methods for Material Modelling” Modelling Simul. Mater. Sci. Eng., 17(4), pp 1-24.

[26] Chao, C. K., and R. C. Chang. "Thermal interface crack problems in dissimilar anisotropic media." Journal of applied physics 72.7, 1992, pp. 2598-2604.

[27] Asadpoure A., Mohammadi S., “Developing new enrichment functions for crack simulation in orthotropic media by the extended finite element method” Int J Numer Meth Engng, Vol. 69, 2007, pp. 2150–2172.

[28] Asadpoure A., Mohammadi S., Vafai A., “Crack analysis in orthotropic media using the extended finite element method” Thin-Walled Struct, Vol. 44, No. 9, 2006, pp. 1031–1038.

[29] KC A. and Kim J. H. “Interaction integrals for thermal fracture of functionally graded materials” Eng. Frac. Mech. 75, 8, 2008, pp 2542-2565

[30] Sladek, Jan, et al. "Evaluation of fracture parameters for crack problems in FGM by a meshless method." Journal of theoretical and applied mechanics 44.3, 2006, pp. 603-636.

[31] Alan T. Zehnder (auth.), Fracture Mechanics-Springer Netherlands, 2012

[32] Rice JR. “Path-independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks” Journal of Applied Mechanics, Transactions (ASME), Vol. 35, No. 2, 1968, pp. 379–386.

[33] Williams M. L.“On the stress distribution at the base of a stationary crack” J. Appl. Mech., Trans. ASME, 24(1), 1957, pp 109-114.

[34] Kim J.H, Paulino G.H., The interaction integral for fracture of orthotropic functionally graded materials: evaluation of stress intensity factors. Int J Solids Struct, Vol. 40, 2003, pp. 3967-4001

[35] M.Reza Eslami, Thermal Stresses – Advanced Theory and Applications-Springer Netherlands, 2009

[36] M. Reza Eslami (auth.), Finite Elements Methods in Mechanics-Springer International Publishing, 2014

[37] Pasternak, Iaroslav. "Boundary integral equations and the boundary element method for fracture mechanics analysis in 2D anisotropic thermoelasticity." Engineering Analysis with Boundary Elements 36.12, 2012, pp. 1931-1941.

Abstract

In this thesis, an extended finite element method (XFEM) is used to model a finite orthotropic sheet including cracks in which the crack has been subjected to thermal or mechanical shock. The equations governing the problem in this thesis are solved dynamically by Newmark's method with three non-coupled thermo-elasticity theories, coupled thermo-elasticity theories and Lordshellman's thermoelasticity; In each of these seasons a convergence test is taken to obtain the desired grating. And dynamic stress intensity coefficients were obtained by J integral method. In addition, the variation of fiber angle and its effect on the dynamic stress intensity coefficient have been studied, and it has been shown that with increasing the fiber angle the dynamic stress coefficient of the first and second modes (K1 and K2) is increased. Also in Chapter 5 (analysis by coupled thermoelasticity theory) and 6 (analysis by Lord Shellman's theory of thermoelasticity) by conducting independence test of the path, independent of the path of J integral method is also investigated. Finally, by comparing the results of the fourth, fifth, and sixth chapters (non-coupled thermoelasticity, coupled thermoelasticity and Lordshellman's thermoelasticity), it is concluded that the dynamic stress coefficient of the first mode (K1) in the thermoelasticist temporal theory Coupled and non-coupled thermoelastic theories are maximized.

Keywords

Composite, Orthotropic, Extended finite element method, SIF, Thermal stress, Mechanical stress, Enriched.

Faculty of Mechanical and Mechatronics Engineering

M.Sc. Thesis in Applied Mechanics Engineering

Computation of stress intensity factors for a cracked orthotropic medium subjected to thermal shock considering Lord-Shulman theory and using extended Finite Element Method

By

Javanshir Lotfi

Supervisor

Dr. Mohammad Bagher Nazari

September 2019