

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک

پایان نامه کارشناسی ارشد مهندسی تبدیل انرژی

حل تحلیلی انتقال حرارت در مخازن تحت فشار کروی کامپوزیتی غیرهمگن

نگارنده: سیدهاشم ابدی

اساتید راهنما

دکتر علی خالقی

دکتر محمود نوروزی

شهریور ۹۸

ب

شماره: ۲۹۸/۱۳۴
تاریخ: ۱۳۹۸/۸/۱۸

باسمه تعالی



مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد آقای سیدهاشم ابدی با شماره دانشجویی ۹۴۰۱۳۳۴ رشته مهندسی مکانیک گرایش تبدیل انرژی تحت عنوان حل تحلیلی انتقال حرارت در مخازن تحت فشار کروی کامپوزیتی غیر همگن که در تاریخ ۱۳۹۸/۶/۱۷ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با درجه: <u>مترسط</u>) ☒ (☐ مردود			
نوع تحقیق: ☐ عملی ☒ نظری			
عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنمای اول	علی خالقی	استادیار	
۲- استاد راهنمای دوم	محمود نوروزی	دانشیار	
۳- استاد مشاور			
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	محمد شامن	استادیار	
۵- استاد ممتحن اول	محمدحسن کیهانی	استاد	
۶- استاد ممتحن دوم	محمد محسن شاه مردان	دانشیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: محمد محسن شاه مردان

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:



تبصره: در صورتی که کسی مردود شود حداکثر یکبار دیگر (در مدت مجاز تحصیل) می تواند از پایان نامه خود دفاع نماید (دفاع مجدد نباید زودتر از ۴ ماه برگزار شود).

شکر و قدردانی

بر خود لازم می‌دانم از زحمات استاد گران قدر دکتر علی خالقی و دکتر محمود نوروزی در طول انجام پایان نامه شکر و

قدردانی نمایم چرا که همواره در طول این مسیر مشوق و معلم من بوده‌اند و در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ

کلی در این عرصه بر من دریغ نمودند.

تقدیم بہ

پدرم کہ عالمانہ بہ من آموخت تا چگونه در عرصہ زندگی، ایستادگی را تجربہ نمایم

و بہ مادرم، دریای بی کران فداکاری و عشق کہ وجودم برایش ہمہ رنج بود و وجودش برایم ہمہ مہر

و بہ ہمسرم، اسطورہ زندگیم، پناہ حستگیم و امید بودنم.

سید ہاشم ابدی تابستان ۹۸

تعمدنامه

اینجانب سیدهاشم ابدی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی مکانیک دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه حل تحلیلی انتقال حرارت در مخازن تحت فشار کروی کامپوزیتی غیرهمگن، تحت راهنمایی دکتر علی خالقی و دکتر محمود نوروزی متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود . استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده

در مطالعه حاضر یک حل تحلیلی دقیق برای انتقال حرارت ناهمگن پایا، ناپایا و دوبعدی در مخازن کروی کامپوزیتی چندلایه ارائه شده است. لمینیت موردنظر کروی شکل بوده و رشته‌ها به دوره کره پیچیده شده‌اند. همچنین راستای رشته‌ها در هر لایه می‌تواند با لایه‌های دیگر متفاوت باشد. این تحقیق با تمرکز بر روی انتقال حرارت متقارن محوری با در نظر گرفتن انتقال حرارت هدایتی در جهت محیطی و شعاعی انجام شده است. شرایط مرزی به صورت کلی در نظر گرفته شده و شامل همرفت، هدایت و تشعشع است. یافتن یک حل دقیق با استفاده از شرایط مرزی پیچیده و همچنین ناهمگن بودن ضریب انتقال حرارت با دما از نوآوری‌های این تحقیق می‌باشد.

به منظور حل مسئله در حالت پایا، با استفاده از تبدیل کیرشهف، تابع دمایی در مختصات کروی و شرایط مرزی، همگن می‌شود. برای حل مسئله در محیط کیرشهف، از روش جداسازی متغیرها استفاده می‌شود، سپس شرایط مرزی در حل به دست آمده قرار داده می‌شود و در انتها با تبدیل معکوس کیرشهف تابع دمایی در محیط فیزیکی موردنظر به دست آورده می‌شود.

در حالت ناپایا با اعمال روش برهم‌نهی معادله به دو قسمت پایا و ناپایا تبدیل می‌شود و سپس با استفاده از تبدیل کیرشهف و روش جداسازی متغیرها تابع دمایی قسمت ناپایا، به دست آورده می‌شود. تابع دمایی کلی به صورت مجموع قسمت ناپایا و قسمت پایا به دست آورده می‌شود.

در پایان برای حل تحلیلی تابع دما، برای شرایط مرزی متفاوت از جمله توابع شار مختلف بر روی کره، شرایط مرزی همرفتی بر روی کره و چندین شرایط مرزی دیگر از نرم‌افزار متلب استفاده شده است. برای

صحت از انجام درستی کار، مقادیر دما و همچنین نمودارهای به‌دست‌آمده از حل تحلیلی، با مقادیر به‌دست‌آمده از حل عددی مقایسه شده است. در نهایت نتیجه‌گیری و جمع‌بندی از مطالعه حاضر صورت گرفته و پیشنهادهایی ارائه گردید.

کلیدواژه: حل تحلیلی دقیق، مخازن کروی کامپوزیتی چندلایه، ضریب انتقال حرارت متغیر، روش جداسازی متغیرها، حل پایا، حل ناپایا

فهرست مطالب

مقدمه

۲	 ۱-۱ مقدمه
۲	 ۲-۱ تعریف و طبقه بندی مخازن تحت فشار
۳	 ۱-۲-۱ طبقه بندی بر اساس شکل
۳	 ۱-۱-۲-۱ مخازن استوانه‌ای
۴	 ۲-۱-۲-۱ مخازن کروی
۵	 ۲-۲-۱ طبقه بندی بر اساس فشار
۵	 ۱-۲-۲-۱ مخازن تحت فشار داخلی
۵	 ۱-۲-۲-۲ مخازن تحت فشار خارجی
۶	 ۳-۱ تاریخچه و کاربرد مواد مرکب
۸	 ۴-۱ فرایندهای انتقال حرارت
۹	 ۱-۴-۱ انتقال حرارت هدایتی
۱۰	 ۵-۱ روش‌های حل
۱۰	 ۱-۵-۱ روش تجربی
۱۱	 ۲-۵-۱ روش تحلیلی
۱۱	 ۳-۵-۱ روش عددی
۱۲	 ۶-۱ مخازن کامپوزیتی
۱۴	 ۷-۱ انگیزه انجام پژوهش
۱۵	 ۸-۱ اهداف و نوآوری پایان‌نامه
۱۵	 ۹-۱ ساختار پایان‌نامه
۱۶	 ۱۰-۱ تحقیقات پیشین

بررسی مفاهیم پایه

۲۲	 ۱-۲ مقدمه
۲۲	 ۲-۲ دسته‌بندی کامپوزیت‌ها بر اساس زمینه
۲۲	 ۱-۲-۲ کامپوزیت‌های سرامیکی
۲۳	 ۲-۲-۲ کامپوزیت‌های پلیمری
۲۳	 ۳-۲-۲ کامپوزیت‌های فلزی
۲۴	 ۴-۲-۲ کامپوزیت‌های کربن-کربن
۲۴	 ۳-۲ انواع ساختار کامپوزیت
۲۵	 ۱-۳-۲ ساختار لایه‌ای
۲۵	 ۲-۳-۲ ساختار ساندویچی
۲۵	 ۳-۳-۲ ساختار ساندویچی شانه عسلی
۲۶	 ۴-۲ بررسی الیاف مهم استفاده شونده در مواد کامپوزیت
۲۶	 ۱-۴-۲ الیاف شیشه
۲۸	 ۲-۴-۲ الیاف کربن
۲۸	 ۳-۴-۲ الیاف آرامید
۲۹	 ۵-۲ انتقال حرارت هدایتی
۳۱	 ۶-۲ اصول انتقال حرارت در مواد مرکب
۳۵	 ۷-۲ جمع‌بندی

مواد و روش‌ها

۳۸	 ۱-۳ مقدمه
۳۸	 ۲-۳ معادله انتقال حرارت در مختصات کروی
۴۰	 ۳-۳ تئوری حل
۴۳	 ۴-۳ حل پایا
۵۲	 ۵-۳ حل ناپایا

نتایج

۶۲	 ۱-۴ هندسه مورد بررسی
۶۳	 ۲-۴ حل پایا
۷۴	 ۳-۴ حل ناپایا
۸۷	 ۴-۴ بررسی اثر چگالی و ظرفیت گرمایی ویژه بر نتایج حاصل از حل ناپایا
۹۳	 ۵-۴ بررسی اثر زاویه الیاف بر پروفایل دمای ایجاد شده در نیمکره
۹۶	 ۶-۴ بررسی اثر همزمان همرفت و شار حرارتی در سطح خارجی نیمکره با لایه‌های یکسان و دمای ثابت در سطح داخلی آن
۱۰۰	 ۷-۴ بررسی اثر نیمکره با لایه‌های یکسان با شرط مرزی دما ثابت در سطح داخلی و انتقال حرارت جابجایی در سطح خارجی
۱۱۲	 ۸-۴ نیمکره با لایه‌های غیر یکسان با شرط مرزی دما ثابت در دو سطح داخلی و خارجی

نتیجه‌گیری و پیشنهاد

۱۲۰	 ۱-۵ نتیجه‌گیری
۱۲۱	 ۲-۵ پیشنهادها
۱۲۳	 منابع و مأخذ

فهرست جداول

۲۷	جدول ۱-۲ ترکیب شیمیایی انواع الیاف شیشه
۲۷	جدول ۲-۲ مزایا و معایب الیاف شیشه
۲۸	جدول ۳-۲ مزایا و معایب الیاف کربن
۶۵	جدول ۱-۴ ورودی برنامه برای مورد ۱.....
	جدول ۲-۴ بیشینه دمای به دست آمده در نیم کره به ازای تعداد جملات لژاندر در نظر گرفته شده
۶۹	مورد ۱.....
۷۱	جدول ۳-۴ مقایسه مقادیر بیشینه و کمینه ی دما در دو حل تحلیلی و عددی مورد ۲
	جدول ۴-۴ مقایسه مقادیر بیشینه و کمینه ی دما در دو حل تحلیلی و عددی به ازای مقادیر
۷۴	مختلف شار حرارتی در سطح خارجی نیم کره
۷۶	جدول ۵-۴ ورودی های برنامه برای حل ناپایای مورد ۱
۸۸	جدول ۶-۴ ورودی های برنامه برای بررسی اثر چگالی و ظرفیت گرمایی ویژه مورد ۵
۹۱	جدول ۷-۴ ورودی های برنامه برای بررسی اثر چگالی و ظرفیت گرمایی ویژه مورد ۶
۹۴	جدول ۸-۴ ورودی های برنامه برای بررسی اثر زاویه الیاف بر پروفیل دمای ایجاد شده در نیم کره
	جدول ۹-۴ دمای حالت پایا در سطح خارجی نیم کره ($r=0/36$) و $\theta = 90^\circ$ ، به ازای زوایای
۹۵	الیاف مختلف
	جدول ۱۰-۴ ورودی های برنامه در حل پایا با شرط مرزی دما ثابت در داخل و انتقال حرارت
۱۰۰	جابجایی در سطح خارجی
۱۰۳	جدول ۱۱-۴ ورودی های برنامه در حل ناپایا برای مورد ۷.....
۱۱۲	جدول ۱۲-۴ ورودی های برنامه برای حل پایای مورد ۱۰.....
۱۱۴	جدول ۱۳-۴ ورودی های برنامه برای حل ناپایای مورد ۱۰.....

فهرست شکل؛

۴	 شکل ۱-۱ نمونه یک مخزن تحت فشار افقی
۵	 شکل ۲-۱ نمونه ای از مخازن کروی
۶	 شکل ۳-۱ مخزن تحت فشار خارجی یا همان مخزن وکیوم
۸	 شکل ۴-۱ انواع فرآیندهای انتقال حرارت
۹	 شکل ۵-۱ شماتیک انتقال حرارت هدایتی
۱۳	 شکل ۶-۱ ساخت مخزن تحت فشار کامپوزیتی
۲۵	 شکل ۱-۲ ساختار ساندویچی
۳۰	 شکل ۲-۲ نمودار توزیع دما در درون جسم
۳۹	 شکل ۱-۳ شارهای حرارتی در یک المان کروی
۴۳	 شکل ۲-۳ الیاف پیچیده شده به اطراف کره چندلایه
۶۲	 شکل ۱-۴ شکل شماتیک هندسه ی مورد بررسی
۶۶	 شکل ۲-۴ کانتور دما به دست آمده در حل تحلیلی برای مورد ۱
۶۶	 شکل ۳-۴ کانتور دما به دست آمده در حل عددی برای مورد ۱
۶۷	 گرفته شده برابر ۱
	 شکل ۵-۴ نمودار دما بر حسب شعاع نیمکره در زوایای 0° ، 45° و 90° به ازای تعداد
۶۸	 جملات لژاندر برابر ۱
	 شکل ۶-۴ کانتور دما به دست آمده در حل تحلیلی برای مورد ۱ تعداد جملات لژاندر
۶۸	 در نظر گرفته شده برابر ۲
	 شکل ۷-۴ نمودار دما بر حسب شعاع نیمکره در زوایای 0° ، 45° و 90° به ازای
۶۹	 تعداد جملات لژاندر برابر ۲
۷۰	 شکل ۸-۴ کانتور دما به دست آمده در حل تحلیلی برای مورد ۲
۷۱	 شکل ۹-۴ کانتور دما به دست آمده در حل عددی برای مورد ۲
۷۲	 شکل ۱۰-۴ کانتور دما به دست آمده در حل تحلیلی برای مورد ۳
۷۲	 شکل ۱۱-۴ کانتور دما به دست آمده در حل عددی برای مورد ۳
۷۳	 شکل ۱۲-۴ کانتور دما به دست آمده در حل تحلیلی برای مورد ۴

۷۳	 شکل ۴-۱۳ کانتور دما به دست آمده در حل عددی برای مورد ۴
۷۵	 شکل ۴-۱۴ کانتور دمای نیمکره در زمان اولیه
۷۷	 شکل ۴-۱۵ کانتور دما برای حل تحلیلی در زمان ۴۲ ثانیه
۷۷	 شکل ۴-۱۶ کانتور دما برای حل عددی در زمان ۴۲ ثانیه
۷۸	 شکل ۴-۱۷ کانتور دما برای حل تحلیلی در زمان ۸۴ ثانیه
۷۹	 شکل ۴-۱۸ کانتور دما برای حل عددی در زمان ۸۴ ثانیه
۷۹	 شکل ۴-۱۹ کانتور دما برای حل تحلیلی در زمان ۱۲۶ ثانیه
۸۰	 شکل ۴-۲۰ کانتور دما برای حل عددی در زمان ۱۲۶ ثانیه
۸۰	 شکل ۴-۲۱ کانتور دما برای حل تحلیلی در زمان ۱۶۸ ثانیه
۸۱	 شکل ۴-۲۲ کانتور دما برای حل عددی در زمان ۱۶۸ ثانیه
۸۱	 شکل ۴-۲۳ کانتور دما برای حل تحلیلی در زمان ۲۱۰ ثانیه
۸۲	 شکل ۴-۲۴ کانتور دما برای حل عددی در زمان ۲۱۰ ثانیه
۸۲	 شکل ۴-۲۵ کانتور دما برای حل تحلیلی در زمان ۲۵۲ ثانیه
۸۳	 شکل ۴-۲۶ کانتور دما برای حل عددی در زمان ۲۵۲ ثانیه
۸۳	 شکل ۴-۲۷ کانتور دما برای حل تحلیلی در زمان ۴۲۰ ثانیه
۸۴	 شکل ۴-۲۸ کانتور دما برای حل عددی در زمان ۴۲۰ ثانیه
۸۴	 شکل ۴-۲۹ نمودار دما در راستای شعاعی در $\theta = 90^\circ$ در زمان ۴۲ ثانیه
۸۵	 شکل ۴-۳۰ نمودار دما در راستای شعاعی در $\theta = 90^\circ$ در زمان ۲۱۰ ثانیه
۸۵	 شکل ۴-۳۱ نمودار دما در راستای شعاعی در $\theta = 90^\circ$ در زمان ۴۲۰ ثانیه
	 شکل ۴-۳۲ نمودار تغییرات دما در سه نقطه‌ی $r = 0/3, r = 0/33, r = 0/36$ و $\theta = 90^\circ$
۸۶	 برحسب زمان برای مورد ۱
	 شکل ۴-۳۳ نمودار تغییرات دما، سه نقطه‌ی $r = 0/3, r = 0/33, r = 0/36$ و $\theta = 90^\circ$
۸۷	 برحسب زمان برای مورد ۲
۸۹	 شکل ۴-۳۴ کانتور دما برای حل تحلیلی مورد ۵ در زمان ۴۲ ثانیه
	 شکل ۴-۳۵ نمودار تغییرات دما در سه نقطه‌ی $r = 0/3, r = 0/33, r = 0/36$ و $\theta = 90^\circ$
۸۹	 برحسب زمان در مدت زمان ۴۲۰ ثانیه برای مورد ۵
	 شکل ۴-۳۶ نمودار تغییرات دما در سه نقطه‌ی $r = 0/3, r = 0/33, r = 0/36$ و $\theta = 90^\circ$
۹۰	 برحسب زمان در مدت زمان ۸۴۰ ثانیه برای مورد ۵
۹۲	 شکل ۴-۳۷ کانتور دما برای حل تحلیلی مورد ۶ در زمان ۴۲ ثانیه

- شکل ۳۸-۴ نمودار تغییرات دما در سه نقطه‌ی $r=0/36$ ، $r=0/33$ ، $r=0/3$ و $\theta = 90^\circ$
- ۹۳ برحسب زمان در مدت زمان ۴۲۰ ثانیه برای مورد ۶
- شکل ۳۹-۴ نمودار دمای به دست آمده در حل تحلیلی در $\theta = 90^\circ$
- ۹۴ برحسب شعاع به ازای زوایای الیاف مختلف
- شکل ۴۰-۴ کانتور دما به دست آمده در حل تحلیلی برای مورد ۱
- ۹۷ و ضریب انتقال حرارت همرفت $50 \frac{W}{m^2K}$
- شکل ۴۱-۴ کانتور دما به دست آمده در حل تحلیلی برای مورد ۱
- ۹۸ و ضریب انتقال حرارت همرفت $100 \frac{W}{m^2K}$
- شکل ۴۲-۴ کانتور دما به دست آمده در حل تحلیلی برای مورد ۱
- ۹۸ و ضریب انتقال حرارت همرفت $200 \frac{W}{m^2K}$
- ۹۹ شکل ۴۳-۴ نمودار دما در سطح خارجی نیمکره و $\theta = 90^\circ$ ، برحسب زمان
- شکل ۴۴-۴ کانتور دمای حالت پایای حل تحلیلی به ازای ضریب انتقال حرارت همرفت
- ۱۰۱ $50 \frac{W}{m^2K}$ کلوین در سطح خارجی نیمکره و دمای ثابت ۴۰۰ کلوین
- شکل ۴۵-۴ کانتور دمای حالت پایای حل تحلیلی به ازای ضریب انتقال حرارت
- ۱۰۲ همرفت $100 \frac{W}{m^2K}$ در سطح خارجی نیمکره و دمای ثابت ۴۰۰ کلوین
- شکل ۴۶-۴ کانتور دمای حالت پایای حل تحلیلی به ازای ضریب انتقال حرارت همرفت
- ۱۰۲ $200 \frac{W}{m^2K}$ در سطح خارجی نیمکره و دمای ثابت ۴۰۰ کلوین
- ۱۰۴ شکل ۴۷-۴ کانتور دما برای حل تحلیلی مورد ۷، در زمان اولیه
- ۱۰۴ شکل ۴۸-۴ کانتور دما برای حل تحلیلی مورد ۷، در زمان ۱۰۰۰ ثانیه
- ۱۰۵ شکل ۴۹-۴ کانتور دما برای حل تحلیلی مورد ۷، در زمان ۲۰۰۰ ثانیه
- ۱۰۵ شکل ۵۰-۴ کانتور دما برای حل تحلیلی مورد ۷، در زمان ۵۰۰۰ ثانیه
- ۱۰۶ شکل ۵۱-۴ کانتور دما برای حل تحلیلی مورد ۷، در زمان ۱۰۰۰۰ ثانیه
- ۱۰۷ شکل ۵۲-۴ کانتور دما برای حل تحلیلی مورد ۸، در زمان ۱۰۰۰ ثانیه
- ۱۰۷ شکل ۵۳-۴ کانتور دما برای حل تحلیلی مورد ۸، در زمان ۲۰۰۰ ثانیه
- ۱۰۸ شکل ۵۴-۴ کانتور دما برای حل تحلیلی مورد ۸، در زمان ۵۰۰۰ ثانیه
- ۱۰۸ شکل ۵۵-۴ کانتور دما برای حل تحلیلی مورد ۸، در زمان ۱۰۰۰۰ ثانیه
- ۱۰۹ شکل ۵۶-۴ کانتور دما برای حل تحلیلی مورد ۹، در زمان ۱۰۰۰ ثانیه
- ۱۰۹ شکل ۵۷-۴ کانتور دما برای حل تحلیلی مورد ۹، در زمان ۲۰۰۰ ثانیه
- ۱۱۰ شکل ۵۸-۴ کانتور دما برای حل تحلیلی مورد ۹، در زمان ۵۰۰۰ ثانیه

- شکل ۵۹-۴ کانتور دما برای حل تحلیلی مورد ۹، در زمان ۱۰۰۰۰ ثانیه ۱۱۰
- شکل ۶۰-۴ نمودار تغییرات دما در سطح خارجی نیمکره بر حسب زمان به ازای
ضرایب انتقال حرارت جابجایی ۵۰، ۱۰۰ و ۲۰۰ وات بر مترمربع بر کلوین ۱۱۱
- شکل ۶۱-۴ کانتور دما به دست آمده در حل پایا برای مورد ۱۰ ۱۱۳
- شکل ۶۲-۴ کانتور دما در زمان ۱۰۰ ثانیه، برای مورد ۱۰ ۱۱۵
- شکل ۶۳-۴ کانتور دما در زمان ۲۰۰ ثانیه، برای مورد ۱۰ ۱۱۵
- شکل ۶۴-۴ کانتور دما در زمان ۳۰۰ ثانیه، برای مورد ۱۰ ۱۱۶
- شکل ۶۵-۴ کانتور دما در زمان ۴۰۰ ثانیه، برای مورد ۱۰ ۱۱۶
- شکل ۶۶-۴ کانتور دما در زمان ۵۰۰ ثانیه، برای مورد ۱۰ ۱۱۷
- شکل ۶۷-۴ کانتور دما در زمان ۱۰۰۰ ثانیه، برای مورد ۱۰ ۱۱۷
- شکل ۶۸-۴ کانتور دما در زمان ۲۰۰۰ ثانیه، برای مورد ۱۰ ۱۱۸

جدول علائم

r_0 شعاع درونی کره	A_i مساحت سطح (m^2)
T_∞ دمای محیط (K)	a_1, a_2 ضرایب ثابت
T دما (K)	C ظرفیت گرمایی (J/KgK)
V حجم m^3	h ضریب انتقال حرارت جابجایی ($W/m^2 K$)
v_f درصد حجمی الیاف	J_v تابع بسل اصلاح شده نوع اول
v_m درصد حجمی زمینه	k_f ضریب هدایتی الیاف (w/mK)
Y_v تابع بسل اصلاح شده نوع دوم	k_0 ضریب هدایت حرارتی در دمای مرجع (w/mK)
ρ چگالی Kg/m^3	k_{ij} ضریب هدایتی در جهات فرعی (w/mK)
θ زاویه اصلی ($^\circ$)	k_m ضریب هدایتی زمینه (w/mK)
ψ زاویه الیاف با محور افقی ($^\circ$)	m_l مقدار $\cos \theta$
β ضریب هدایت حرارتی ($1/K$)	n_l مقدار $\sin \theta$
φ دمای اصلاح شده (K)	q_i شار حرارتی (W/m^2)
v مرتبه توابع بسل	r_{nl} شعاع بیرونی کره

فصل اول

مقدمه

۱-۱ مقدمه

در این فصل مخازن تحت فشار و طبقه‌بندی آن‌ها و انواع انتقال حرارت به‌ویژه انتقال حرارت هدایتی در این مواد بررسی می‌شود و در ادامه، تاریخچه و کاربرد مواد مرکب بیان می‌شود. پس از آن مروری بر تحقیقات پیشین و ضرورت انجام تحقیق صورت گرفته، بیان می‌شود. در نهایت اهداف موردنظر تحقیق و ساختار کلی آن بیان می‌گردد.

۲-۱ تعریف و طبقه‌بندی مخازن تحت فشار

مخزن تحت فشار^۱ عبارت است از محفظه‌ای بسته که جهت نگهداری سیال در فشاری متفاوت از فشار محیط، طراحی شده است. اختلاف فشار یک عامل خطرناک است و بر اثر تغییرات این عامل در مخازن تحت فشار، امکان انفجار و تخریب آن وجود دارد. در نتیجه، طراحی، ساخت و بهره‌برداری از این مخازن، توسط سازمان‌های مهندسی تحت نظارت قانونی قرار می‌گیرد. تعریف مخازن تحت فشار از کشوری به کشور دیگر متفاوت است اما پارامتر ثابت در این تعریف، حداکثر فشار و درجه حرارت مناسب مخزن هست.

این مخازن در صنعت به‌عنوان نگه‌دارنده‌ی هوای فشرده، منبع ذخیره آب، بویلر ها، ذخیره‌ی انواع گازها، اتاقک تحت فشار، برج‌های تقطیر، مخازن راکتور هسته‌ای، مخازن هوای فضاپیماها، مخازن هوای زیردریایی، پنوماتیک مخزن، مخزن هیدرولیک تحت فشار، مخازن ذخیره‌سازی برای گازهای مایع مانند آمونیاک، کلر، پروپان، بوتان و گاز مایع و... مورد استفاده قرار می‌گیرند. همچنین در مصارف غیر صنعتی به‌عنوان تانک‌های

¹ Pressure vessel

ذخیره آبگرم خانگی، کپسول‌های اکسیژن و... استفاده می‌شوند. بیشترین کاربرد مخازن تحت فشار در صنعت نفت، گاز و پتروشیمی می‌باشد [۱].

به‌طور کلی مخازن تحت فشار را می‌توان بر اساس شکل و فشار تقسیم‌بندی کرد.

۱-۲-۱ طبقه‌بندی بر اساس شکل

مخازن تحت فشار را از لحاظ هندسی می‌توان به چند دسته تقسیم کرد که مرسوم‌ترین آن‌ها مخازن استوانه‌ای و کروی می‌باشند.

۱-۱-۲-۱ مخازن استوانه‌ای

اغلب به‌صورت یک استوانه با دو سر عدسی ساخته می‌شوند. این نوع مخازن رایج‌ترین نوع مخازن هستند. مخازن استوانه‌ای بلند ممکن است عمودی یا افقی باشند. نیاز عملیاتی یک برج تعیین‌کننده نوع افقی یا عمودی بودن آن است. برای مثال برج‌هایی که نیاز به ثقل جهت جداسازی فازها دارند، به‌صورت عمودی نصب می‌شوند. درحالی‌که مبدل‌های حرارتی هم می‌توانند به‌صورت افقی و هم عمودی نصب گردند. در مورد مبدل‌های حرارتی این انتخاب عموماً به‌وسیله روش انتقال گرما و عبور سیال صورت می‌گیرد. در مخازن ذخیره محل نصب عمدتاً عامل انتخاب هست [۲]. در شکل ۱-۱ نمونه‌ای از این مخازن آورده شده است.



شکل ۱-۱ نمونه یک مخزن تحت فشار افقی [۳].

۲-۱-۲-۱ مخازن کروی

پوسته‌های کروی در حالت کلی سازه‌هایی هستند که در برابر نیروها و فشار، مقاومت مطلوبی دارند و استفاده از آن‌ها در صنایع گوناگون به دلیل قابلیت خوب طراحی و کنترل مناسب تنش‌های ایجادشده هرروز در حال گسترش است. مطالعه رفتار و به‌کارگیری نظریه‌های مختلف برای تحلیل پوسته‌های کروی از گذشته‌های نه‌چندان دور موردتوجه پژوهشگران قرار گرفت و به دلیل کاربرد فراوان این توجه همچنان ادامه دارد. با توجه به این امر لزوم انجام تحقیقات در بسیاری از سازه‌های مهندسی ازجمله کره‌های جدار ضخیم تحت بارگذاری‌های مختلف به‌ویژه بارهای حرارتی که امروزه به‌صورت روزافزون در صنایع هوافضا، علوم نظامی و هسته‌ای و... مورداستفاده قرار می‌گیرند، بیش‌ازپیش ضروری به نظر می‌رسد.

به علت استحکام ذاتی شکل کروی این مخازن اصولاً برای فشارهای بالا بکار می‌روند. از لحاظ تئوری شکل کروی بهترین حالت برای ساخت یک مخزن تحت فشار است. ساخت مخازن کروی مشکل است و هزینه بالایی را به همراه دارد. مخازن ذخیره بزرگ که تحت فشار متوسط قرار دارند معمولاً شکل کروی یا شبه کروی دارند. در شکل ۲-۱ نمونه‌ای از این مخازن کروی آورده شده است [۲].



شکل ۱-۲ نمونه‌ای از مخازن کروی [۴].

۲-۲-۱ طبقه‌بندی بر اساس فشار

مخازن تحت فشار بر اساس طبقه‌بندی بر اساس فشار را می‌توان به دو نوع تقسیم کرد:

۱-۲-۲-۱ مخازن تحت فشار داخلی

در این نوع مخزن معمولاً سیالی با فشار بالاتر از فشار اتمسفر وجود دارد.

۲-۲-۲-۱ مخازن تحت فشار خارجی

مخازن تحت فشاری که با شرایط خلأ مرتبط هستند، باید برای فشار خارجی طراحی شوند در غیر این صورت متلاشی خواهند شد. این مخازن عمدتاً برای هوا زدایی، رطوبت‌زدایی یا ایجاد خلأ در محیطی خاص استفاده

می‌شوند. در شکل ۱-۳ نمونه‌ای از این مخازن دیده می‌شود [۲].



شکل ۳-۱ مخزن تحت فشار خارجی یا همان مخزن وکیوم [۵].

۳-۱ تاریخچه و کاربرد مواد مرکب

مواد زیادی در طبیعت جزو مواد اورتروپیک محسوب می‌شوند. خواص مکانیکی این مواد به جهت وابسته هستند. این رفتار در بعضی از مواد همچون فلزات قابل چشم‌پوشی است، اما این رفتار در مواد خام و به‌ویژه کانی‌ها رفتار غالب است. استفاده از برخی مواد جهت بهبود رفتار مکانیکی مواد خام از گذشته رایج بوده است. به‌عنوان مثال کاه‌گل در معماری سنتی از این دسته به شمار می‌آید. و همچنین استفاده از پیچش محیطی جهت افزایش مقاومت در مقابل ازهم‌گسیختگی سازه‌ها در گذشته متداول بوده است.

با کشف نفت تغییرات عمده‌ای در زندگی بشر ایجاد شد که یکی از آن‌ها ساخت مواد پلیمری بود. مواد پلیمری مواد نسبتاً ارزان و مقاوم در مقابل خوردگی بودند. مشکلات عمده‌ی مواد پلیمری ترموپلاستیک شامل مقاومت مکانیکی ضعیف آن‌ها نقطه ذوب پایین و قابلیت اشتعال می‌باشد. از اواسط قرن بیستم تکنیک‌های مختلفی در جهت بهبود این مواد به کار گرفته شده است. مشهورترین مواد مرکب فایبرگلاس‌ها

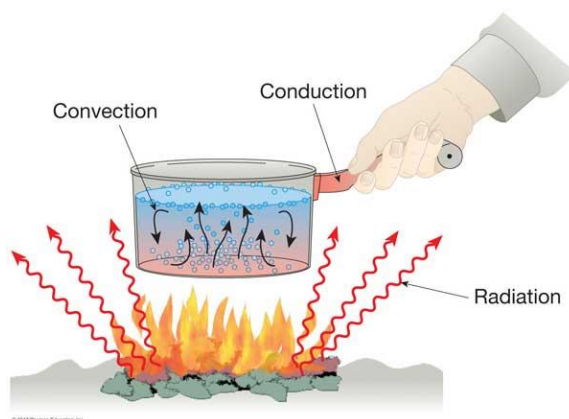
هستند. به دلیل سبکی و رفتار مناسب در مقابل خوردگی و استحکام کافی استفاده از آن‌ها جهت ساخت قایق‌ها و تجهیزات آبی به سرعت افزایش یافت.

از کاربردهای اخیر از مخازن کامپوزیتی استفاده از آن به عنوان مخازن ذخیره گاز طبیعی فشرده برای استفاده در خودروها می‌باشد. سبکی، استحکام مناسب، سهولت ساخت، مقرون به صرفه بودن و مشکلات مخازن فلزی باعث افزایش استفاده از این مخازن شده است. از کاربردهای دیگر مواد مرکب در صنعت هوانوردی و حمل و نقل است. مقاومت مکانیکی بالا در مقایسه با وزن کم این مواد باعث به کارگیری گسترده ی آن‌ها در صنعت هوانوردی و فضانوردی گردیده است. در شاتل‌های فضایی استفاده از مواد کامپوزیتی پایه کربن در اگزوزهای خروجی نیز از سایر کاربردهای این مواد است. از دیگر کاربردهای این مواد استفاده‌ی آن در صنعت حمل و نقل ریلی و جاده‌ای است که باعث کاهش مصرف سوخت و همچنین کاهش شوک و ارتعاش وارده به بدنه وسیله نقلیه می‌شود. سایر استفاده مواد کامپوزیتی مربوط به تجهیزات ورزشی، پزشکی، الکترونیک و نظامی است [۶].

۴-۱ فرایندهای انتقال حرارت

بسیاری از کاربردهای مهندسی با مسائل انتقال حرارت^۱ ناپایا و گذرا روبرو هستند. منظور از حالت ناپایا^۲ یعنی دما همواره با زمان متغیر است. درحالی که واژه گذرا^۳ برای مواقعی به کار می رود که دمای جسم پس از گذشت زمان معینی به شرایط دائمی و مستقل از زمان برسد. به بیان ساده می توان این گونه بیان کرد که انتقال گرما، گذر انرژی بر اثر اختلاف دما است. زمانی که بین دونقطه گرادیان دمایی (اختلاف دما) وجود داشته باشد، بین آنها انتقال حرارت صورت می گیرد.

از نظر فیزیک کلاسیک انتقال حرارت توسط سه روش زیر صورت می گیرد. به طور کلی حرارت به سه روش هدایت، جابجایی و تابش منتقل می شود. انتقال حرارت هدایتی نیاز به محیط مادی داشته و در



شکل ۴-۱ انواع فرایندهای انتقال حرارت [۷]

¹ Heat transfer

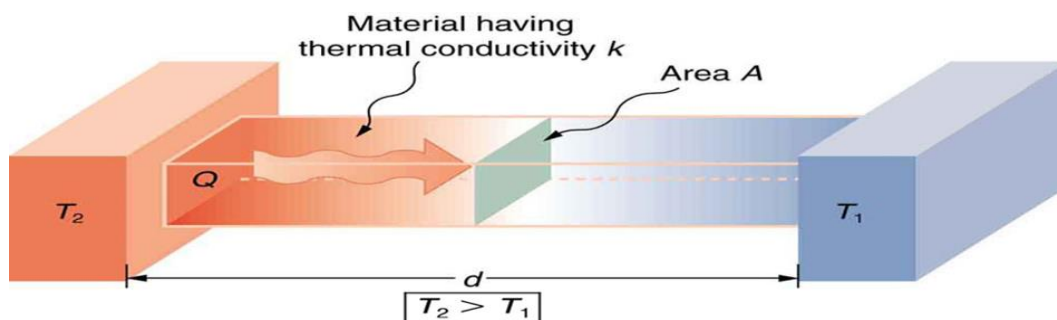
² Unsteady

³ Transient

جامدات و سیالات رخ می‌دهد. انتقال حرارت جابجایی نیز نیاز به محیط مادی دارد و زمانی رخ می‌دهد که یک سیال بر روی یک سطح حرکت کند. انتقال حرارت تشعشعی نیاز به محیط مادی نداشته و همیشه بین اجسامی که اختلاف دما دارند روی می‌دهد [۸].

۱-۴-۱ انتقال حرارت هدایتی^۱

هدایت حرارتی به انتقال گرما در جامدات و یا محیط‌های سیال ساکن که در اثر اختلاف دما در این محیط‌ها انجام می‌گیرد، گفته می‌شود. به‌طور کلی فرض بر این است که در اثر جابجایی ماکروسکوپی محیط، گرما از یک نقطه به نقطه‌ای دیگر منتقل نمی‌شود بلکه انتقال گرما توسط عواملی مانند حرکت تصادفی مولکول‌های گازی و یا ارتعاش شبکه‌ی کریستالی جامد انجام می‌شود. در کتب کلاسیک انتقال حرارت، مبحث



شکل ۱-۵ شماتیک انتقال حرارت هدایتی [۹]

انتقال حرارت به حالت‌های یک‌بعدی، دوبعدی، چندبعدی و دائمی و غیردائمی تقسیم‌بندی شده است.

معادله‌ی حاکم بر انتقال حرارت هدایتی، به قانون فوریه^۲ معروف است [۸].

^۱ Conduction

^۲ Fourier's law

۱-۵ روش‌های حل

با توجه به اینکه برای پیدا کردن مقدار شار حرارتی و گرادیان‌های دما باید معادلات دیفرانسیل متعددی با شرایط مرزی و اولیه متفاوت حل شوند. روش‌های تجربی، تحلیلی و عددی برای حل آن‌ها استفاده می‌شود که در زیر به توضیح هر یک از آن‌ها می‌پردازیم.

۱-۵-۱ روش تجربی

روش تجربی که به‌طور گسترده در مسائل انتقال حرارت مورد استفاده قرار می‌گیرد، دارای مزایا و محدودیت‌هایی هست. مزیت اولیه و دلیل اصلی استفاده از روش تجربی این است که در بسیاری از مواقع، آزمایش تنها راه به دست آوردن جواب واقعی و مقایسه با روش‌های دیگر است. از طرف دیگر گرچه اطلاعات تجربی به دست آمده در مورد رفتار فیزیکی، تا حد زیادی راهنمایی می‌کند، ولی عملاً خارج از محدوده‌ی داده‌های بکار رفته، نمی‌توان اطلاعاتی را برونیابی نمود. شناخت محدودی که از آزمون‌های تجربی حاصل می‌شود، می‌تواند منجر به خطا شود و حتی استفاده از آن، برای پیش‌بینی رفتار فیزیکی اشتباه خواهد بود. تکنیک‌های نیمه تجربی نیز معمولاً به‌طور موازی بکار می‌روند. در این روش‌ها به کمک اطلاعاتی که از آزمایش حاصل شده، معادلات جبری به دست می‌آیند که برای پیش‌بینی رفتار مواد و همچنین جهت بررسی و مقایسه با مقادیر پیش‌بینی شده از نظریه‌ها و مدل‌های تحلیلی مفید هستند.

مسئله هزینه یکی از ملاحظات مهم در روش‌های تجربی است. معمولاً تهیه مدل و تجهیزات آزمایشگاهی مورد نیاز هزینه زیادی دارد. آزمون‌های با مقیاس واقعی نیز علاوه بر هزینه زیاد، مشکلات اجرایی خاص خود را دارند. زمان و هزینه محدودیت‌هایی هستند که همیشه اجازه نمی‌دهند با تغییر پارامترها اطلاعات مناسبی به اندازه کافی به دست آید [۱۰].

۱-۵-۲ روش تحلیلی

در این روش، با تمرکز بر روی یک یا چند روش انتقال حرارت (از قبیل هدایت، جابه‌جایی، تابش) و فرضیات ساده‌کننده، معادلات فیزیکی حاکم بر جسم به معادلات جبری یا دیفرانسیلی یک‌بعدی یا دوبعدی تبدیل‌شده و حل می‌شوند. در اغلب مدل‌های تحلیلی نیاز به داده‌های تجربی از قبیل خواص مواد و ... وجود دارد. اما بزرگ‌ترین مشکل در استفاده از روش تحلیلی مشکل آن در حل مسائل پیچیده است [۱۱].

۱-۵-۳ روش عددی

در این حل از روش‌های حل عددی استفاده می‌شود که امروزه در بسیاری از نرم‌افزارها وجود دارند. این حل نیز مشکلات مربوط به خود را دارد و در صورت استفاده حتماً باید نتایج آن صحت‌سنجی شوند. اگر یک حل کامل از مسئله موردنظر باشد، باید با تکنیک‌های عددی از قبیل المان محدود یا تفاضل محدود انجام شود و جواب عددی معادلات حاکم بر فیزیک پیوسته را به دست آورد. روش‌های عددی می‌توانند پدیده‌های گذرا را به دقت مدل کنند. استفاده از روش‌های عددی تشخیص‌گنگی از اثر پارامترهای موجود در مسئله را به‌طور مجزا ارائه می‌دهد، در صورتی که یک حل تحلیلی اثر هر پارامتر را خیلی صریح بیان می‌کند. اگر بخواهیم اطلاعات مشابهی را از روش عددی به دست آوریم محاسبات باید در دفعات بسیاری تکرار گردد و در هر مرحله پارامتر موردنظر تغییر یابد که این کار در مدل‌های با المان‌های زیاد وقت‌گیر است. روشن است که روش‌های تجربی، تحلیلی و عددی هیچ‌کدام به‌تنهایی نمی‌توانند کافی باشند بلکه ترکیبی از آن‌ها می‌تواند درک ما را نسبت به پدیده‌های فیزیکی گسترش دهد [۱۱].

۱-۶ مخازن کامپوزیتی

مخازن تحت فشار کامپوزیتی از جدیدترین انواع مخازن تحت فشار هستند که نسبت به مدل‌های قدیمی‌تر فلزی کارایی بهتری پیدا کرده‌اند. کامپوزیت‌ها دارای استحکام ویژه بالایی نسبت به فلزات می‌باشند. مخازن تحت فشار کامپوزیتی می‌توانند جهت نگهداری سیالات مختلف در فشارهای نسبتاً بالا نیز استفاده گردند. مخازن تحت فشار کامپوزیتی کاربرد گسترده‌ای در حوزه صنایع تصفیه آب دارند. این مخازن با توجه به نوع رزین، ابعاد، نوع الیاف و لاینر داخلی که در تماس با سیال می‌باشند، می‌توانند فشارهای نسبتاً بالایی را تحمل کنند.

مخازن پلیمری تقویت‌شده با فیبر (FRP^۱) تا قطرهای حدود ۲ متر، قابلیت ساخت دارند. لاینر داخلی این مخازن به صورت عمده با استفاده از پلی‌اتیلن‌های زیگلر-ناتا^۲ یا پلی‌اتیلن‌های روتومول‌دینگ^۳ تولید می‌شوند. پیش‌بینی می‌شود که در آینده مخازن تحت فشار کامپوزیتی به صورت چشمگیری جایگزین مخازن فلزی تحت فشار، می‌شوند. مخازن کامپوزیتی تحت فشار در صنایع خودروسازی، هواپیماسازی و تصفیه فاضلاب کاربردهای فراوانی دارند. از آنجایی که این مخازن دارای مقاومت خوردگی بالا، وزن اندک و استحکام ویژه بالایی می‌باشند، کاربرد این مخازن روز به روز گسترده‌تر می‌شود. مخازن تحت فشار کامپوزیتی با توجه به جنس لاینر، نوع رزین و الیاف مصرفی می‌توانند شرایط فشار و خلأ متفاوتی را تحمل کنند. مخازن کامپوزیتی تهیه‌شده با استفاده از رزین پلی‌استر (GRP^۴) در محیط‌های خورنده، می‌توانند بسیار

^۱ Fiber Reinforced Polymer

^۲ ziegler-natta polymers

^۳ rotomolding polymers

^۴ Glassfiber Reinforced Plastic Pipe

کاربردی باشند. با توجه به وزن اندک، این مخازن قابلیت جابجایی و نصب بسیار آسانی داشته و کاربرد گسترده‌ای در صنایع تصفیه آب خانگی و نیمه‌صنعتی را دارا می‌باشند.

طراحی و تولید مخازن کامپوزیتی یکی از پیچیده‌ترین مسائل در حوزه صنعت کامپوزیت هست. از آنجایی که تحلیل ساختاری مخازن تحت فشار کامپوزیتی تحت تأثیر متغیرهای گوناگون هست، لزوم استفاده از نرم‌افزارهای تحلیلی، قبل از آغاز فرایند تولید، بسیار مهم است. تحلیل‌های صورت گرفته زاویه پیچش الیاف و ضخامت نهایی در نقاط مختلف را جهت ساخت، پیش‌بینی می‌کند و در نهایت محصولی با ایمنی و طول عمر بالا، تولید می‌شود.

به صورت کلی مخازن تحت فشار کامپوزیتی بر اساس نوع سیال و فشار دارای دو بخش اصلی جداره داخلی و جداره بیرونی می‌باشند. این سیال می‌تواند گاز و یا مایع و یا ترکیبی از هر دو حالت باشد. مخازن تحت فشار کامپوزیتی با توجه به صنعت مورد استفاده، طراحی و تولید می‌گردند. لایرهای داخلی می‌توانند



شکل ۱-۶ ساخت مخزن تحت فشار کامپوزیتی [۱۳]

از جنس فلز یا پلاستیک پیش‌ساخته باشند که توسط فرآیند رشته پیچی پوشیده می‌گردند. مخازن تحت فشار کامپوزیتی با لایرهای پلاستیکی کاربرد گسترده‌ای در صنایع تصفیه فاضلاب دارند. لایرهای داخلی از جنس پلی‌اتیلن یا پلی‌پروپیلن بوده که توسط فرآیند روتومولدینگ تولید می‌گردند و پوشش

بیرونی با استفاده از فرایند رشته پیچی تولید می‌گردد. زوایای پیچیده شده، ضخامت نهایی و نوع رزین و الیاف، استحکام نهایی مخازن تحت فشار کامپوزیتی را مشخص می‌کنند [۱۲].

۷-۱ انگیزه انجام پژوهش

مواد کامپوزیتی، در مهندسی مدرن جایگاه ویژه‌ای دارند. ازجمله مزایای گسترده این مواد می‌توان به نسبت بالای مقاومت به دانسیته، مقاومت بالا در برابر نفوذ و پلاستیسیته^۱ بالا در مقایسه با سایر مواد صنعتی اشاره نمود. علاوه بر این، افزایش تکنولوژی‌های تولید مواد کامپوزیتی باعث کاهش هزینه‌ی تولید این مواد در سال‌های اخیر گردیده است. امروزه مواد کامپوزیتی به‌طور وسیع در صنایع هوا و فضا، دریایی، مخازن تحت فشار، لوله‌ها و ... استفاده می‌شوند. همچنین دانش مواد کامپوزیتی با گسترش کاربردهای آن پیشرفت چشم‌گیری یافته است.

مسئله انتقال حرارت در مواد کامپوزیتی ازجمله مسائل مهم و ضروری در دانش کامپوزیت‌ها است. تحلیل‌های حرارتی به دلایل متعددی نظیر تحلیل تنش در لمینیت‌های کامپوزیتی انجام می‌شوند. ازجمله کاربردهای دیگر انتقال حرارت در مواد کامپوزیتی می‌توان به مسئله کاهش یا افزایش انتقال حرارت و نیز کنترل دمای مخازن اشاره نمود. به‌نحوی که با تغییر در مواد کامپوزیتی می‌توان انتقال حرارت صورت گرفته در آن‌ها را کنترل نمود.

¹ Plasticity

۸-۱ اهداف و نوآوری پایان نامه

همان طور که قبلاً گفته شد در این تحقیق انتقال حرارت در یک کره کامپوزیتی غیر همگن بررسی می شود. کاهش و افزایش انتقال حرارت و به تبع آن کنترل انتقال حرارت در کره کامپوزیتی و همچنین کنترل دمای مواد داخل مخزن کروی، از اهداف این تحقیق می باشد. همچنین به دست آوردن چگونگی توزیع دما برای بررسی تحلیل تنش های حرارتی از دیگر اهداف این تحقیق است. همان طور که قبلاً گفته شد به دست آوردن اهداف گفته شده در شرایطی است که ضریب انتقال حرارت هدایتی تابع دما است. همچنین نوآوری این تحقیق شامل غیر همگن بودن مسئله که ناشی از وابستگی ضریب هدایت به دما در یک کره کامپوزیتی و بررسی انتقال حرارت در آن است. که این تحقیق پایه ی تحلیل های عددی و آزمایشگاهی دیگر خواهد شد.

۹-۱ ساختار پایان نامه

در بخش اول به تعاریف کلی، انگیزه انجام پژوهش و اهداف و نوآوری پایان نامه پرداخته شد. بخش دوم به مفاهیم پایه ای در مورد موضوع پایان نامه و کارهای صورت گرفته پرداخته خواهد شد. در فصل سوم نحوه انجام آزمایش در پایان نامه بیان می گردد. نهایتاً در فصل چهارم نتایج پیاده سازی و نمودارهای مربوطه با تحلیل هر یک آورده شده است. در فصل پنجم نتایج حاصل جمع بندی و پیشنهادها برای کارهای آینده ارائه می گردد.

۱-۱۰ تحقیقات پیشین

تحقیقات انجام شده بر روی این مواد بیشتر در زمینه تغییر خواص آن‌ها، تحت بارگذاری‌های مکانیکی و دما بوده است [۱۴] و کمتر به بررسی انتقال حرارت در این مواد توجه شده است. فعالیت‌های انجام شده در زمینه تحلیل انتقال حرارت در مواد غیر ایزوتروپ به صورت یک بعدی بوده است [۱۵].

همچنین گیرینگارد [۱۶] تئوری انتقال حرارت و تعیین خواص هدایتی در مواد مرکب را مورد بررسی قرار داده است. مقاله مولهلند [۱۷] در مورد پدیده‌های پخش غیردائمی در یک استوانه اورتروپ، یکی از اولین فعالیت‌ها در این زمینه است. نور و بورتان [۱۸] با استفاده از روش عددی، انتقال حرارت پایدار هدایتی را در ورق‌های کامپوزیتی مورد بررسی قرار دادند، به این طریق که با استفاده از روش عددی پاسخ میدان دما را به دست آوردند و اثر آن بر جدایش لایه‌ها را بررسی کردند. اینگار [۱۹] با استفاده از روش المان محدود، انتقال حرارت غیردائمی را در یک ورق کامپوزیتی به دست آورد. سینگ و همکاران [۲۰] حل تحلیلی انتقال حرارت هدایتی در مختصات قطبی چند لایه در جهت شعاعی را مورد بررسی قرار داده اند.

چینما چنگ و حسن [۲۱] حل تحلیلی انتقال حرارت هدایتی در محیط‌های چندلایه‌ی غیر ایزوتروپیک را با استفاده از یک تبدیل مختصات خطی حل کردند. به این روش که مسئله ایزوتروپ را به شکل ساده ایزوتروپ تبدیل، و مسئله را برای دو حالت بدون در نظر گرفتن منبع گرمایی و همراه با گرمایش داخلی حل کردند.

آرگیریس و همکاران [۲۲] بررسی تحلیلی را بر روی انتقال حرارت در لمینیت های تخت مثلثی انجام دادند. آن‌ها در فرمولاسیون خود اثر هر سه مکانیزم انتقال حرارت هدایتی، همرفتی و تشعشعی را بر لمینیت در نظر گرفتند. فرمولاسیون آن‌ها بر مبنای انتقال حرارت مرتبه‌ی اول لمینیت کامپوزیتی بوده و تغییرات خطی را برای انتقال حرارت در جهت ضخامت لایه‌ها در نظر گرفتند و در نهایت نشان دادند که استفاده از

این فرمولاسیون از نظر هزینه محاسباتی بسیار مؤثرتر از محاسبات عددی است. در زمینه ارائه تحلیل‌های دقیق (غیر عددی) حرارتی برای مواد مرکب نیز تلاش‌هایی صورت گرفته است. به عنوان نمونه سان [۲۳] در مقاله خود حل تحلیلی از انتقال حرارت یک‌بعدی غیر دائم در یک بلوک کامپوزیتی ارائه کرده است. اوسلوکا [۲۴] نیز با استفاده از توابع گرین و فرمول‌بندی انتگرالی معادله انتقال حرارت، پاسخی برای انتقال حرارت در واسط‌های کامپوزیتی به دست آورده است.

سونائو و همکاران [۲۵] حل عددی را برای انتقال حرارت پایدار هدایتی در ورق‌های کامپوزیتی ارائه نمودند. آن‌ها اثر انتقال حرارت بر روی لایه داخلی را که ناشی از القا خاصیت ترموپلاستیک ماده است، مورد بررسی قرار دادند. تارن و وانگ [۲۶] انتقال حرارت در مواد طبقه‌بندی‌شده تابعی (FGM)^۱ را مطالعه کردند. گولوچان و آرتمنکو [۲۷] تحلیل انتقال حرارت در لمینیت‌های دارای الیاف با مسیر نوسانی را بررسی کردند. لو و همکاران [۲۸] انتقال حرارت در جداره‌های مرکب استوانه‌ای شکل را با استفاده از روش جداسازی متغیرها بررسی کردند و به این نتیجه رسیدند که حل آن‌ها تطابق بالایی با محاسبات عددی دارد. گائو [۲۹] با استفاده از روش عددی و المان محدود انتقال حرارت هدایتی غیردائمی را در حالتی که تولید انرژی در داخل لمینیت وجود داشت، در لمینیت‌های ضخیم مورد بررسی قرار داد.

شی - کیانگ و جیا-چن [۳۰] نشان دادند که انتقال حرارت ماکروسکوپی در یک حالت خاصی از توزیع الیاف، می‌تواند یکنواخت باشد. چترجی و همکاران [۳۱] با استفاده از فرمولاسیون مرز محدود، اقدام به محاسبه انتقال حرارت پایدار در کامپوزیت‌های سه‌بعدی نمودند. سادوفسکی [۳۲] و همکاران اثر سرمایش سریع بر استوانه‌های FGM را مورد بررسی قرار دادند. چیو و همکاران [۳۳] نیز با استفاده از تشابه

¹ Functionally Graded Material

مقاومت‌های الکتریکی و نیز روش تخمین پارامترها اقدام به تعیین ضرایب مؤثر در انتقال حرارت هدایتی در لمینیت های مارپیچی کردند. کاراگرافیس و لسنیک [۳۴] یک حل برای هدایت حرارتی در مواد کامپوزیتی با ضریب هدایت وابسته به دما و شرایط مرزی شامل جابجایی و تشعشع با استفاده از روش حل پایه‌ای ارائه دادند. حاجی شیخ و همکاران [۳۵] یک فرمولاسیون ریاضی برای میدان دما در حالت پایدار در اجسام چندبعدی و چندلایه به دست آوردند.

اونیجکوه [۳۶] یک حل دقیق برای انتقال حرارت در محیط‌های کامپوزیتی با استفاده از تئوری انتگرال مرزی ارائه داد. همچنین نوروزی و همکارانش [۳۷] یک حل دقیق برای یک پوسته‌ی استوانه‌ای کامپوزیتی ناهمسانگرد غیرمتقارن ارائه کردند که در آن، الیاف با زوایای دلخواه به دور پوسته استوانه‌ای پیچیده شده‌اند و این حل برای شرایط مرزی و شارهای مختلف بررسی شد. حل دقیقی برای یک کره چندلایه از ورقه‌های کامپوزیتی توسط نوروزی و همکارانش [۳۸] با استفاده از روش جداسازی متغیرها نیز ارائه شد. بررسی انتقال حرارت برای اشکال هندسی دیگر از اهمیت فراوانی برخوردار است. مانند حل دقیق انتقال حرارت یک پوسته‌ی مخروطی کامپوزیتی ناهمسانگرد که توسط نوروزی [۳۹] انجام شده است. امیری دلویی و همکارانش [۴۰] یک حل دقیق برای انتقال حرارت ناپایای متقارن در یک سیلندر شکل گرفته از لایه‌های کامپوزیتی ارائه کردند. یک حل کلی برای یک استوانه‌ی چندلایه از ورقه‌های کامپوزیتی پژوهشی بود که توسط کیهانی و همکارانش [۴۱] انجام شده است.

دانشجو و همکاران [۴۲] حلی برای معادله هدایت گرما برای سیلندر توخالی FGM در حضور منبع گرما و وابسته به زمان در حالتی که خصوصیات ماده در جهت شعاع تغییر می‌کند با استفاده از تبدیل لاپلاس به دست آوردند. یانگ و همکاران [۴۳] نیز با یک روش کارآمد، یک حل تحلیلی برای سیلندرهای کامپوزیتی توخالی با هر تعداد لایه و شرایط مرزی عمومی ارائه دادند.

همچنین ملیکا میکویچ و همکاران [۴۴] حل تحلیلی انتقال حرارت هدایتی در ساختار صفحه‌ای کامپوزیتی با تعداد لایه‌های دلخواه و با استفاده از روش تابع گرین را ارائه دادند. این حل تحلیلی برای توزیع مکانی و زمانی دما محاسبه و به صورت انتگرال جمع بیان می‌شود.

فصل دوم

بررسی مفاهیم پایه

۲-۱ مقدمه

در تحقیق حاضر مسئله انتقال حرارت در مخازن کروی غیر همگن مورد بررسی قرار گرفته است. حال آنکه یافتن پاسخی تحلیلی برای انتقال حرارت در مخازن کامپوزیتی کروی غیر همگن می‌تواند در زمینه فرآیند تولید این مخازن به‌ویژه مبحث عایق‌بندی، تحلیل تنش‌های حرارتی وارد بر آن‌ها و کنترل دمای مواد داخل آن‌ها به‌ویژه مواد قابل اشتعال مفید باشد. در این فصل به بررسی اصطلاحات اولیه انتقال حرارت هدایتی و همچنین دسته‌بندی مواد کامپوزیتی پرداخته شده است.

۲-۲ دسته‌بندی کامپوزیت‌ها بر اساس زمینه

- سرامیکی
- پلیمری
- فلزی
- کربن-کربن

۲-۲-۱ کامپوزیت‌های سرامیکی (CMC)^۱:

سرامیک‌ها به‌عنوان موادی که پیوندهای یونی و کووالانسی دارند شناخته می‌شوند. محاسنی چون مقاومت در برابر خوردگی، نقطه ذوب بالا، مقاومت در دمای بالا، استحکام فشاری مناسب، باعث شده که کامپوزیت‌ها با زمینه سرامیکی در ساختن قطعاتی که در دمای بالا، مثلاً بالاتر از ۱۵۰۰ درجه سانتی‌گراد کار می‌کنند، استفاده شوند. از آنجایی که مدول الاستیسیته این مواد پایین است و نظر به اینکه این مواد کرنش کششی

¹ Ceramic Matrix Composite

پایینی دارند بایستی از تقویت‌کننده‌هایی با مدول الاستیسیته بالا استفاده شود. چنانچه ضریب انبساط حرارتی مواد تقویت‌کننده کمتر از سرامیک باشد، این کار باعث پایین آمدن استحکام کامپوزیت تولیدی می‌گردد. این امر نشان‌دهنده‌ی این موضوع است که علاوه بر مدول الاستیسیته ضریب انبساط حرارتی نیز از اهمیتی بالایی برخوردار است [۴۵].

۲-۲-۲ کامپوزیت‌های پلیمری (PMCs)^۱ :

از محاسن کامپوزیت‌ها با این زمینه می‌توان به قابلیت شکل‌پذیری خوب، وزن کم و خواص مکانیکی خوب اشاره کرد. رایج‌ترین این مواد رزین‌های اپوکسی^۲ و رزین‌های پلی‌استر^۳ هستند [۴۵].

۳-۲-۲ کامپوزیت‌های فلزی (MMCs)^۴ :

این کامپوزیت‌ها دارای استحکام بالا، چقرمگی شکست و سفتی هستند که این خواص موجب گسترش مصرف این کامپوزیت‌ها در مقایسه با سایر کامپوزیت‌ها شده است. این مواد مقاومت بالایی در محیط‌های خورنده و درجه حرارت‌های بالا دارند. بیشتر فلزات می‌توانند به‌عنوان فاز زمینه در کامپوزیت‌ها استفاده شوند. تیتانیوم، آلومینیوم و منیزیم از جمله فلزاتی هستند که در فاز زمینه فلزی استفاده می‌شوند. اگر کامپوزیت زمینه فلزی با استحکام بالا نیاز باشد، باید از تقویت‌کننده‌هایی با مدول بالا استفاده شود [۴۵].

¹ Polymer Matrix Composite

² Epoxy resins

³ Polyester resins

⁴ Metal Matrix Composite

۴-۲-۲ کامپوزیت‌های کربن/کربن (CCs)^۱ :

این دسته از کامپوزیت‌ها عمدتاً برای قطعاتی که بایستی در شرایط دمایی سخت کار کنند، گسترش یافته‌اند. زمینه این کامپوزیت‌ها کربن است و تقویت‌کننده‌ها شامل، فیبرهای سه‌بعدی کربن در فرم‌های تابیده و بافته شده هستند. کامپوزیت‌های کربن/کربن، به دلیل اینکه در شرایط دمایی سخت، توانایی حفظ استحکام و حتی افزایش استحکام را دارند، کاربردهای گسترده‌ای از صنایع موشکی و نظامی گرفته تا هوافضا دارند. از مزایای کامپوزیت‌های کربن/کربن، موارد ذیل را می‌توان بیان کرد

- مقاومت در دماهای بسیار بالا (۱۹۳۰ تا ۲۷۶۰ درجه سانتی‌گراد)
- افزایش استحکام با افزایش دما (تا ۱۹۳۰ درجه سانتی‌گراد)
- استحکام و سختی بالا
- مقاومت خوب در برابر شوک حرارتی [۴۵]

۳-۲ انواع ساختار کامپوزیت

ساختار یا ساختمان کامپوزیت‌ها به سه دسته تقسیم می‌شود: ساختار لایه‌ای^۲، ساختار ساندویچی^۳ و ساختار ساندویچی شانه عسلی^۴

¹ Carbon Composite

² Layer structure

³ Sandwich structure

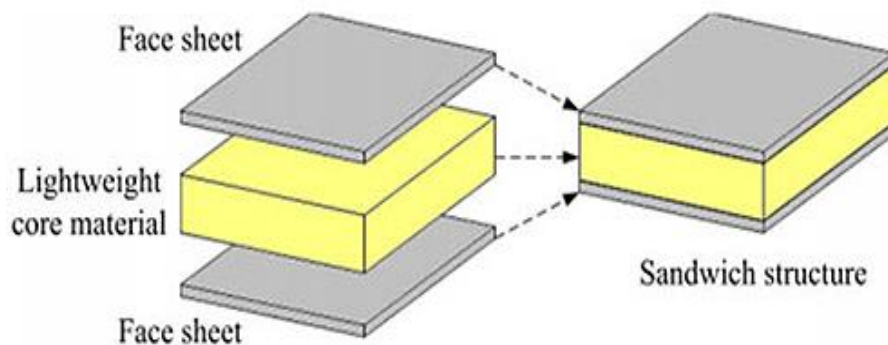
⁴ honey comb sandwich layer

۲-۳-۱ ساختار لایه‌ای

در ساختار لایه‌ای، لایه‌ها به صورت ورقه ورقه، با جهت‌گیری صحیح روی یکدیگر چیده می‌شوند. مثالی از این نوع ساختار در بردهای مدار چاپی است که لایه‌هایی از پلاستیک تقویت‌شده و مس برای هدایت الکتریکی و عایق‌کاری، روی هم چیده شده‌اند.

۲-۳-۲ ساختارهای ساندویچی

به ساختارهایی گفته می‌شود که از سه لایه (لایه رویی کامپوزیتی، هسته فومی و لایه زیری کامپوزیتی یا آلومینیومی) ساخته شده باشند. برای کاربردهایی که سفتی یا مدول بالا همراه با وزن پایین حائز اهمیت است (نظیر قایق‌ها، خودروها، هواپیما و ...) از این گونه ساختارها استفاده می‌شود. از موارد مهم در طراحی این ساختارها (تعیین ضخامت سه لایه مختلف آن و انتخاب هسته مناسب فومی) و پارامترهای مؤثر بر آن است. شکل ۱-۲ طرح‌واره‌ای از این نوع ساختار را نشان می‌دهد.



شکل ۱-۲ ساختار ساندویچی

۲-۳-۳ ساختار ساندویچی شانه عسل

این ساختار مشابه ساختار ساندویچی بوده با این تفاوت که دارای هسته‌ای به شکل شانه عسل است که دانسیته پایینی دارد و مابین صفحات اصلی و لایه چسبنده قرار می‌گیرد.

۴-۲ بررسی الیاف مهم استفاده شونده در مواد کامپوزیت

۴-۲-۱ الیاف شیشه

الیاف شیشه، مشهورترین تقویت کننده‌ی مورد استفاده در صنعت کامپوزیت هستند و انواع مختلفی از آن، به صورت تجاری وجود دارند ترکیبات شیمیایی این الیاف باهم متفاوت هستند و هر کدام برای کاربرد خاصی مناسب هستند جدول ۱-۲. تقریباً ۹۰ درصد الیاف مورد استفاده در کامپوزیت‌های مهندسی، الیاف شیشه هستند. الیاف شیشه استحکام و سختی مناسبی دارند. خواص مکانیکی خود را در دماهای بالا حفظ می‌کنند. مقاومت رطوبت و خوردگی مناسبی دارند و نسبتاً ارزان می‌باشند. تقسیم‌بندی شش نوع الیاف شیشه در ادامه نشان داده شده است.

Glass- E مصارف عمومی (عایق جریان الکتریسیته)

Glass- R خواص مکانیکی بالاتر

Glass- S خواص مکانیکی بالاتر (الیاف با استحکام بسیار بالا)

Glass- C مقاومت شیمیایی مناسب (الیاف مقاوم در برابر مواد شیمیایی)

Glass- ECR مقاومت اسید و باز خوب

Glass- AR مقاومت اسید و باز خوب [۴۶]

جدول ۱-۲ ترکیب شیمیایی انواع الیاف شیشه [۴۶]

<i>AR</i>	<i>ECR</i>	<i>C</i>	<i>S</i>	<i>R</i>	<i>E</i>	
۶۱	۵۸.۴	۶۴.۶	۶۴.۴	۶۰	۵۴.۲	<i>SiO₂</i>
۰.۵	۱۱	۴.۱	۲۵	۲۵	۱۴	<i>Al₂O₃</i>
۵	۲۲	۱۳.۴	-	۹	۱۷.۲	<i>CaO</i>
۰.۰۵	۲.۲	۳.۳	۱۰.۳	۶	۴.۶	<i>MgO</i>
۱۴	.۹	۹.۶	-	-	.۸	<i>Na₂O, K₂O, Li₂O</i>
-	.۰۹	۴.۷	-	-	۱۰.۶	<i>B₂O₃</i>
-	-	۰.۹	-	-	-	<i>BaO</i>
-	۳	-	-	-	-	<i>ZnO</i>
۱۳	-	-	-	-	-	<i>ZrO₂</i>
۵.۵	۲.۱	-	-	-	-	<i>TiO₂</i>
.۵	.۲۶	-	-	-	۰.۴	<i>Fe₂O₃</i>
۲.۷۴	۲.۶	۲.۴۵	۲.۴۹	۲.۵۸	۲.۵۶	وزن مخصوص
۲.۵	۳.۴	-	۴.۵	۴.۴	۳.۶	مدول استحکامی (Gpa)
۸۰	۷۳	-	۸۶	۸۵	۷۶	مدول کششی (Gpa)

جدول ۲-۲ مزایا و معایب الیاف شیشه [۴۶]

مزایا	معایب
قیمت پایین	شکننده بودن
استحکام کششی بالا	وزن مخصوص نسبتاً بال
مقاومت شیمیایی بال	حساسیت به سایش
خواص عایق عالی	مقاومت خستگی پایین

۲-۴-۲ الیاف کربن

اگرچه اکثر الیاف مورد استفاده در صنعت کامپوزیت، از جنس شیشه هستند ولی مدول آن‌ها نسبتاً پایین است. در سال‌های پیش، تلاش‌های زیادی انجام گرفت تا تقویت‌کننده‌های جدید با مدول بالاتر نسبت به الیاف شیشه ساخته شوند. مشخصه الیاف کربن، سبکی، استحکام و سفتی بالا است. با اعمال کمی کشش و تغییر آرایش و با کاهش قطر الیاف از ۷ به ۵ میکرومتر، استحکام و مدول الیاف افزایش می‌یابد [۴۶].

جدول ۲-۳ مزایا و معایب الیاف کربن [۴۶]

مزایا	معایب
نسبت بسیار زیاد استحکام به وزن	شکننده بودن
نسبت بالای مدول کششی به وزن	هادی الکتریکی
استحکام بالای خستگی	کرنش کم در شکست
ضریب انبساط حرارتی بسیار پایین	قیمت بالا
مقاومت بالا در مقابل خوردگی	

۲-۴-۳ الیاف آرامید

الیاف آرامید که در حدود سال ۱۹۷۰ معرفی شدند، ترکیب آلی حلقوی از کربن، هیدروژن، اکسیژن و نیتروژن هستند. دانسیته کم و استحکام کششی بالا در این الیاف، موجب تشکیل یک ساختار چقرمه و مقاوم به ضربه با سفتی حدود نصف الیاف کربن می‌شود. الیاف آرامید در ابتدا به منظور جایگزینی فولاد در تایرهای رادیال ساخته شدند و بعداً کاربردهای دیگری پیدا کردند. جلیقه ضد گلوله از موفقیت‌آمیزترین کاربردهای الیاف آرامید است. خواص الیاف آرامید به شرح زیر است:

- نسبت استحکام و مدول به وزن بسیار عالی

-مقاومت ضربه عالی

-مقاومت در برابر شکست ناشی از خزش

-مقاومت خستگی خوب

-عدم حساسیت به شکاف یا ترک

- مقاومت بالا در مقابل اسیدها و بازها

-خواص خوب اتلاف انرژی ارتعاشی

-خواص دی الکتریک عالی نسبت به شیشه

-خواص خود خاموش کنی با نشر دود کم

-امکان استفاده مداوم تا دمای حدود ۱۸۰ درجه سانتی گراد[۴۶]

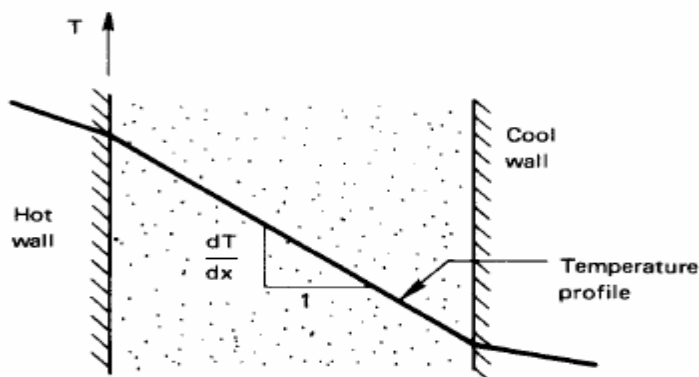
۲-۵ انتقال حرارت هدایتی

از آنجاکه پرداختن به کار آیی هدایت حرارتی در درون مخازن کروی، یکی از هدف‌های این پایان‌نامه است، از این‌رو در این بخش به‌صورت مختصر، پدیده انتقال حرارت هدایتی بیان می‌شود. در این راستا ابتدا به‌مرور روابط انتقال حرارت یکنواخت، پرداخته خواهد شد. از میان معادلات عمومی معرفی‌شده، گسترش معادلات هدایت حرارتی در مختصات کروی مورد استفاده در این پایان‌نامه، بیان خواهد شد.

هدایت به پدیده انتقال گرما در جامدات و یا محیط‌های ساکن سیالی، بر اثر وجود اختلاف دما، اطلاق می‌گردد. در این گونه از انتقال حرارت، پیش گمانه آن است که انتقال گرما از یک بخش به بخشی دیگر بر اثر جابجایی ماکروسکوپیک محیط، روی نمی‌دهد بلکه انتقال گرما توسط عواملی مانند جنبش تصادفی مولکول‌های گازی و یا لرزش شبکه‌های کریستالی جامد، انجام می‌شود. موارد مباحث مربوط به انتقال حرارت را می‌توان به حالت‌های انتقال حرارت تک‌سویه، دوسویه، سه سویه، دائمی و غیردائمی بخش‌بندی کرد. بنا به قانون فوریه، معادله حاکم بر انتقال حرارت هدایتی در حالت تک‌سویه به گونه زیر نوشته می‌شود [۸].

$$q = -k \frac{dT}{dx} \quad ۱-۲$$

در رابطه بالا، q شار حرارتی، T درجه حرارت، $\frac{dT}{dx}$ گرادیان دما و K ضریب انتقال حرارت هدایتی است. مطابق این قانون، شار حرارتی هدایتی در یک محیط، با گرادیان دما و سطح تبادل حرارتی تناسب مستقیم دارد. مقدار k بستگی به محیطی دارد که در آن انتقال حرارت هدایتی انجام می‌گیرد، در محیط‌های فلزی، مقدار k بزرگ‌تر از محیط‌های غیرفلزی است که با فرضیه انتقال حرارت توسط الکترون‌های آزاد سازگار است. همچنین گازها مانند هوا، دارای ضریب هدایت پایین‌تری نسبت به جامدات می‌باشند. نشانه‌ی منفی در رابطه ۱-۲ بدین معنی است که در سمت افزایش مختصات x ، اندازه دما کاهش می‌یابد. به عبارت دیگر،



شکل ۲-۲ نمودار توزیع دما در درون جسم [۸]

گرادیان دما $\frac{dT}{dx}$ کوچک‌تر از صفر است ولی بزرگ‌تر یا مساوی با صفر محاسبه می‌گردد. انتقال حرارت در دیواره‌های بیرونی ساختمان‌ها، لوله‌های که سیال در آن گردش دارد و همچنین مخازن نگه‌دارنده مایعات از جمله نمونه‌های معمول و دیرینه در کاربرد هدایت هست [۸].

همچنین معادلات فوریه را برای مختصات کارتزین و کروی می‌توان به صورت زیر نوشت [۸]:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad ۲-۲$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rT)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad ۳-۲$$

۲-۶ اصول انتقال حرارت در مواد مرکب

رابطه فوریه در مواد اورتروپ به شکل زیر است:

$$\begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad ۴-۲$$

که در آن، q شار حرارت، k_{ij} ضرایب انتقال حرارت هدایتی و T دما است. طبق قاعده رفت و برگشتی^۱ در ترمودینامیک:

$$k_{ij} = k_{ji} \quad ۵-۲$$

و طبق قانون دوم ترمودینامیک مقادیر روی قطر اصلی تانسور ضرایب هدایت مثبت هستند و رابطه زیر برقرار است:

$$k_{ii}k_{jj} > k_{ij}^2 \quad \text{for } i \neq j \quad ۶-۲$$

روابط زیر نیز بین مؤلفه‌های تانسور ضرایب هدایتی مواد مرکب برقرار است:

$$k_{ii} \geq 0 \quad ۷-۲$$

$$\frac{1}{2}(k_{ii}k_{jj} - k_{ij}k_{ji}) \geq 0 \quad ۸-۲$$

$$\varepsilon_{ijk}k_{1j}k_{2j}k_{3j} \geq 0 \quad ۹-۲$$

و مقدار k_{ij} از رابطه زیر به دست می آید:

$$k_{ij} = k_{ji} = \frac{k_{ij} + k_{ji}}{2} \quad ۱۰-۲$$

در ساخت مواد مرکب با چیدن لایه‌های مختلف بر روی یکدیگر، لمینیت^۱ کامپوزیتی ایجاد می‌شود. از آنجاکه راستای الیاف عموماً باهم متفاوت است، لذا نیاز به تعریف یک دستگاه مختصات فرعی است که بتوان در جهات ثابت کمیت‌های فیزیکی را بررسی نمود. بنابراین در هر لایه بین دستگاه مختصات اصلی و فرعی به اندازه θ انحراف وجود دارد [۸].

رابطه فوریه برای ماده مرکب در دستگاه مختصات اصلی به شکل زیر است:

¹ Laminate

$$\begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{Bmatrix}_{on} = - \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} \end{bmatrix}_{on} \begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x_1} \\ \frac{\partial T}{\partial x_2} \\ \frac{\partial T}{\partial x_3} \end{Bmatrix}_{on} \quad ۱۱-۲$$

از آنجاکه با دوران به انداز θ - می توان از محور فرعی به محور اصلی رسید، بنابراین رابطه ۱۱-۲ بر حسب محور فرعی به صورت زیر است:

$$[T(-\theta)]\{q\}_{off} = -[k]_{on}[T(-\theta)]\nabla T_{off} \quad ۱۲-۲$$

$$\{q\}_{off} = -[T(-\theta)]^{-1}[k]_{on}[T(-\theta)]\nabla T_{off} \quad ۱۳-۲$$

که در آن $[T(\theta)]$ ماتریس دوران بوده و به صورت زیر تعریف می شود:

$$[T(\theta)] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ۱۴-۲$$

ماتریس دوران ماتریسی متعامد است:

$$[T(\theta)]^{-1} = [T(-\theta)] \quad ۱۵-۲$$

با جایگذاری رابطه ۱۵-۲ در ۱۳-۲ رابطه بردار شار در جهات فرعی به صورت زیر است:

$$\{q\}_{off} = -[T(\theta)][k]_{on}[T(-\theta)]\nabla T_{off} \quad ۱۶-۲$$

طبق قانون فوریه، انتقال حرارت در جهات فرعی به شکل زیر است:

$$\{q\}_{off} = -[k]_{off}\nabla T_{off} \quad ۱۷-۲$$

با مقایسه روابط ۱۶-۲ و ۱۷-۲ تانسور ضرایب انتقال حرارت در جهات فرعی بر حسب جهات اصلی به شکل زیر است:

$$\{k\}_{off} = [T(\theta)][k]_{on}[T(-\theta)] \quad ۱۸-۲$$

چنانچه تانسور ضرایب انتقال حرارت در جهات اصلی با $[k]$ و در جهات فرعی با $[\bar{k}]$ نشان دهیم و همچنین $\cos \theta$ را با m_l و $\sin \theta$ را با n_l نشان دهیم. در این صورت درایه‌های تانسور ضرایب انتقال حرارت در جهات فرعی به شکل زیر خواهند بود:

$$\begin{aligned} \bar{k}_{11} &= m_l^2 k_{11} + n_l^2 k_{22} \\ \bar{k}_{22} &= n_l^2 k_{11} + m_l^2 k_{22} \\ \bar{k}_{33} &= k_{22} \end{aligned} \quad ۱۹-۲$$

$$\bar{k}_{12} = \bar{k}_{21} = m_l n_l (k_{11} - k_{22})$$

$$\bar{k}_{13} = \bar{k}_{31} = 0$$

$$\bar{k}_{23} = \bar{k}_{32} = 0$$

برای به دست آوردن ضرایب انتقال حرارت در جهات فرعی بایستی ابتدا ضرایب انتقال حرارت در جهات اصلی را به دست آورد که با استفاده از فرمولاسیون خاصی بر اساس ضرایب هدایتی الیاف^۱، ماده زمینه^۲ و نیز درصد حجمی الیاف و بر اساس روابط زیر قابل محاسبه هستند:

$$k_{11} = v_f k_f + v_m k_m \quad ۱-۱۵-۲$$

$$k_{22} = k_m \frac{1 + \xi \eta v_f}{1 - \eta v_f} \quad 2-15-2$$

$$\eta = \frac{k_f/k_m - 1}{k_f/k_m + \xi} \quad 3-15-2$$

$$\xi = 1/(4 - 3v_m) \quad 4-15-2$$

در روابط بالا k_f ضریب هدایت حرارتی الیاف، k_m ضریب هدایت حرارتی ماده زمینه، v_f درصد حجمی الیاف و v_m درصد حجمی ماده زمینه است.

۷-۲ جمع‌بندی

در تحقیق حاضر مسئله انتقال حرارت در مخازن کروی چندلایه مورد بررسی قرار گرفته است. مطابق آنچه در پایان‌بخش پیشین آمده، تاکنون تحقیق تحلیلی در زمینه انتقال حرارت در مخازن کامپوزیتی چندلایه غیر همگن صورت نگرفته است. حال آنکه یافتن پاسخی تحلیلی برای انتقال حرارت در مخازن کامپوزیتی کروی می‌تواند در زمینه فرآیند تولید این مخازن، عایق‌بندی مخازن کامپوزیتی، تحلیل تنش‌های حرارتی وارد بر آن‌ها و کنترل دمای مواد انبارش یافته داخل آن‌ها (به‌ویژه مواد قابل اشتعال نظیر میعانات گازی) مفید باشد.

فصل سوم

مواد و روش ها

۱-۳ مقدمه

لمینیت کروی از لایه‌های مختلفی تشکیل شده که در هر یک از این لایه‌ها، الیاف در جهت دلخواهی قابل پیچش به دور مخزن هستند. این امر سبب ایجاد یک رفتار غیرایزوتروپیک نسبتاً پیچیده در کل لمینیت می‌شود. در اینجا هدایت حرارتی، در جهت $r-\theta$ در نظر گرفته شده است که r جهت شعاعی و θ زاویه کره را نشان می‌دهد. الیاف به صورت محیطی پیچیده شده‌اند. شرایط مرزی به صورت شرایط کلی خطی هست که همه مکانیزم‌های انتقال حرارت در درون و بیرون لمینت (شامل همرفت، هدایت و تشعشع) را می‌تواند ساده‌سازی نماید.

جهت حل، معادلات حاکم هدایت حرارتی اورتوتروپیک در هر لایه به دست آمده و غیر همگن بودن، در مسئله ما ناشی از وابستگی ضریب هدایت به دما است. درواقع همان‌طور که می‌دانیم در معادله‌ی انتقال حرارت اگر k تابعی از دما باشد نمی‌توان آن را از داخل گرادیان خارج کرد، پس باید ابتدا با استفاده از تبدیل کیرشهف آن را به یک معادله‌ی جدید تبدیل کرد، سپس آن را حل نمود.

۲-۳ معادله انتقال حرارت در مختصات کروی

در این تحقیق انتقال حرارت پایدار هدایتی در یک مخزن کروی کامپوزیتی مورد بررسی قرار گرفته است. در اینجا فرض شده الیاف در هر لایه به دور کره در جهت‌های مشخصی پیچیده شده است.

جهت تعیین معادله انتقال حرارت، بایستی المانی کروی مشابه شکل ۱-۳ در نظر گرفت. اگر موازنه انرژی

برای المان کروی برقرار شود، رابطه حاصله به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial q_{\phi} dA_{\phi}}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial q_{\theta} dA_{\theta}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial q_r dA_r}{\partial r} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dv \quad ۱-۳$$

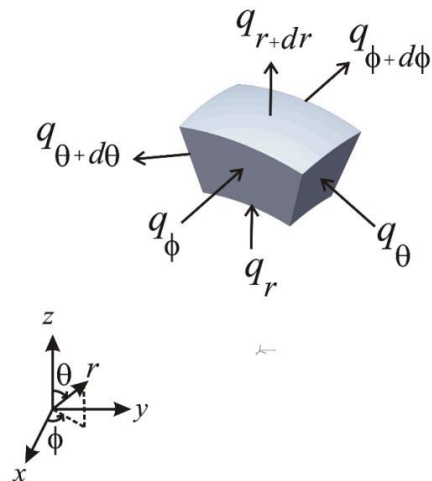
که در معادله ۱-۳ داریم:

$$dA_r = r^2 \sin \theta d\phi d\theta \quad ۲-۳$$

$$dA_\theta = r \sin \theta d\phi dr \quad ۳-۳$$

$$dA_\phi = r d\theta dr \quad ۴-۳$$

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\phi d\theta \quad ۵-۳$$



شکل ۱-۳ شارهای حرارتی در یک المان کروی

در واقع همان طور که می دانیم در معادله ی انتقال حرارت ۱-۳ اگر k تابعی از دما باشد، نمی توان آن را از

داخل گرادیان q_r ، q_ϕ ، q_θ خارج کرد، پس باید ابتدا با استفاده از تبدیل کیرشهف آن را به یک معادله ی

جدید تبدیل کرد، سپس معادله جدید حل می گردد [۸].

۳-۳ تئوری حل

در اینجا به بررسی معادله‌ی انتقال حرارت در مختصات کروی و ارائه‌ی حل تحلیلی آن‌ها می‌پردازیم. در حالت کلی، بدون در نظر گرفتن تولید حرارت، معادله‌ی انتقال حرارت به‌صورت رابطه‌ی ۳-۶، بیان می‌شود.

$$-\nabla \cdot \mathbf{q} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad ۳-۶$$

که در آن $\mathbf{q}$ بردار شار حرارتی، ρ چگالی، c ظرفیت گرمایی ویژه، T دما و t زمان است. با توجه به تعریف دیورژانس^۱ در مختصات کروی، رابطه‌ی ۳-۱ را می‌توان به‌صورت رابطه‌ی ۳-۷، نوشت.

$$-\left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 q_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (q_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial q_\varphi}{\partial \varphi} \right) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad ۳-۷$$

چنان چه تغییرات دما در راستای گرایی^۲ ناچیز باشد، ترم سوم سمت چپ معادله‌ی ۳-۷، برابر صفر خواهد شد و معادله‌ی انتقال حرارت به‌صورت دوبعدی درمی‌آید.

در پژوهش پیش رو، به حل تحلیلی معادله‌ی انتقال حرارت در مختصات کروی دوبعدی، برای دو حالت پایا و ناپایا، پرداخته می‌شود.

^۱ divergence

^۲ Azimuthal

$$\left. \begin{aligned} & \left(-\left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 q_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (q_\theta \sin \theta) \right) = 0 \right. && \text{steady} \\ & \left. -\left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 q_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (q_\theta \sin \theta) \right) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \right. && \text{unsteady} \end{aligned} \right\} \quad \text{۸-۳}$$

ترم‌های q_r و q_θ ، شار حرارتی در جهت r و θ هستند و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$q_r = -\frac{\partial(kT)}{\partial r} \quad \text{۹-۳}$$

$$q_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial(kT)}{\partial \theta} \quad \text{۱۰-۳}$$

روابط ۹-۳ و ۱۰-۳، مربوط به مواد همسانگرد^۱ هستند. ویژگی‌های فیزیکی این مواد در تمام جهات یکسان است و تحلیل آن‌ها در تمام جهات به نتایج مشابهی می‌انجامد. مواد خالص معمولاً این گونه هستند. اما در پژوهش پیش رو، کره‌ی موردبررسی از یک ماده‌ی زمینه به همراه الیافی که به دور آن پیچیده شده، تشکیل شده است. جهت پیچیده شدن الیاف بر مشخصات فیزیکی ماده تأثیر گذاشته و نوعی ناهمسانگردی در آن ایجاد می‌کند. این مواد در دسته‌ی مواد اورتوتروپ^۲ قرار می‌گیرند. در مواد اورتوتروپ، روابط ۹-۳ و ۱۰-۳ به صورت زیر درمی‌آیند:

$$q_r = -\left(\frac{\partial(k_{rr}T)}{\partial r} + \frac{\partial(k_{r\theta}T)}{r \partial \theta} \right) \quad \text{۱۱-۳}$$

$$q_\theta = -\left(\frac{\partial(k_{\theta r}T)}{\partial r} + \frac{\partial(k_{\theta\theta}T)}{r \partial \theta} \right) \quad \text{۱۲-۳}$$

^۱ isotropic

^۲ orthotropic

در پژوهش پیش رو مقادیر $k_{r\theta}$ و $k_{\theta r}$ برابر صفر در نظر گرفته شده‌اند. بنابراین خواهیم داشت:

$$q_r = - \left(\frac{\partial(k_{rr}T)}{\partial r} \right) \quad ۱۳-۳$$

$$q_\theta = - \left(\frac{\partial(k_{\theta\theta}T)}{r\partial\theta} \right) \quad ۱۴-۳$$

در مواد اورتروپ ضریب هدایت حرارتی در یک تانسور بوده و در جهات مختلف، مقادیر متفاوتی دارد. با جایگذاری روابط ۱۳-۳ و ۱۴-۳، در معادله‌ی ۸-۳، معادلات ذیل برای انتقال حرارت پایا و ناپایا به دست می‌آید:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial \left(r^2 \frac{\partial(k_{rr}T)}{\partial r} \right)}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial(k_{\theta\theta}T)}{\partial \theta} \sin \theta \right) = 0 \quad ۱۵-۳$$

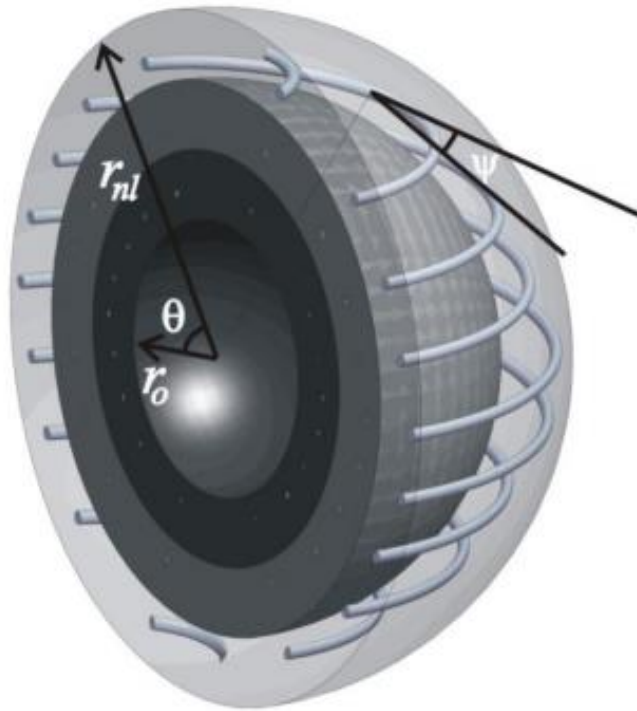
$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial \left(r^2 \frac{\partial(k_{rr}T)}{\partial r} \right)}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial(k_{\theta\theta}T)}{\partial \theta} \sin \theta \right) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad ۱۶-۳$$

در شکل ۲-۳ یک کامپوزیت چندلایه نشان داده شده است. که θ ، ψ ، r_0 ، r_{nl} به ترتیب زاویه اصلی، زاویه الیاف با محور افقی، شعاع درونی و شعاع بیرونی مخزن استوانه‌ای می‌باشند. در حالت کلی، جهت الیاف پیچیده شده، الزاماً در جهت r یا θ ، نیست. مقادیر داده شده‌ی ضرایب هدایت حرارتی برای الیاف در راستای الیاف و عمود بر آن، بیان می‌شوند. بنابراین این مقادیر را باید در راستای r و θ ، نوشت. چنان چه k_{11} و k_{22} ، به ترتیب، ضرایب هدایت حرارتی در راستای الیاف و عمود بر آن باشد، مقادیر ضرایب هدایت حرارتی در راستای r و θ به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$k_{rr} = m_l^2 k_{11} + n_l^2 k_{22} \quad ۱۷-۳$$

$$k_{\theta\theta} = n_l^2 k_{11} + m_l^2 k_{22} \quad ۱۸-۳$$

در دو رابطه‌ی ۱۷-۳ و ۱۸-۳، $m_l = \cos \Psi$ و $n_l = \sin \Psi$ که در آن Ψ ، زاویه‌ی الیاف نسبت به افق است. شکل ۲-۳، الیاف پیچیده شده در اطراف کره و زاویه‌ی آن‌ها را نشان می‌دهد.



شکل ۲-۳ الیاف پیچیده شده به اطراف کره‌ی چندلایه

۴-۳ حل پایا

به‌منظور یافتن حل پایا، باید معادله‌ی ۱۵-۳ را حل نمود. اگر در این معادله مقادیر k_{rr} و $k_{\theta\theta}$ را ثابت فرض کنیم، می‌توان با روش جداسازی متغیرها آن را حل کرد اما در پژوهش حاضر فرض بر این است که مقادیر ضریب هدایت حرارتی تابعی از دما هستند، بنابراین نمی‌توان آن‌ها را ثابت فرض نمود. برای حل

معادله‌ی انتقال حرارت با ضریب هدایت حرارتی متغیر، از تبدیل کیرشهف^۱ استفاده می‌کنیم. با تبدیل کیرشهف معادله‌ی ۳-۱۵ به یک معادله با ضرایب ثابت تبدیل می‌شود. آنگاه این معادله‌ی تبدیل یافته، در فضای کیرشهف و به روش جداسازی متغیرها حل می‌شود. سپس با استفاده از معکوس تبدیل کیرشهف جواب‌های به‌دست‌آمده در فضای کیرشهف، به فضای فیزیکی، منتقل می‌شوند. تبدیل کیرشهف یک متغیر مانند دما، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\varphi = \frac{1}{k_0} \int_0^T k(T) dT \quad ۳-۱۹$$

در رابطه‌ی ۳-۱۴، k_0 اندازه‌ی اولیه‌ی ضریب هدایت حرارتی، $k(T)$ ضریب هدایت حرارتی به‌صورت تابعی از دما و T دما است.

با توجه به رابطه‌ی ۳-۱۹، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{k_0}{k(T)} \quad ۳-۲۰$$

از طرفی:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial T}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{k_0}{k(T)} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \quad ۳-۲۱$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial T}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{k_0}{k(T)} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \quad ۳-۲۲$$

¹ Kirchhoff transform

با جایگذاری روابط ۲۱-۳ و ۲۲-۳ در معادله‌ی ۱۵-۳، معادله‌ی زیر به دست می‌آید:

$$k_{rr0} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + k_{\theta\theta 0} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0 \quad ۲۳-۳$$

با تقسیم طرفین رابطه‌ی ۱۸-۳ بر k_{rr0} ، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{k_{\theta\theta 0}}{k_{rr0}} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0 \quad ۲۴-۳$$

با تعریف - پارامتر $\mu_0 = \sqrt{\frac{k_{rr0}}{k_{\theta\theta 0}}}$ ، رابطه‌ی ۱۹-۳ را می‌توان به صورت رابطه‌ی ۲۵-۳، نوشت.

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\mu_0^2} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0 \quad ۲۵-۳$$

در پژوهش پیش رو، کره‌ی مورد بررسی چندلایه است. بنابراین معادله‌ی ۲۵-۳ را به صورت معادله‌ی ۲۶-۳، بازنویسی می‌کنیم.

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\mu_{i0}^2} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0 \quad ۲۶-۳$$

در رابطه‌ی ۲۶-۳، μ_{i0} ، مقدار μ_0 را در لایه‌ی i آ‌م نشان می‌دهد. در رابطه‌ی ۲۶-۳، ضرایب معادله در هر

لایه ثابت هستند. با استفاده از روش جداسازی متغیرها خواهیم داشت:

$$\varphi(r,\theta)=F(r).\phi(\theta) \quad 27-3$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\phi}{d\theta} \right) + \lambda \phi = 0 \quad 28-3$$

$$x = \cos \theta \quad 29-3$$

$$dx = -\sin \theta \quad 30-3$$

$$\lambda = n(n+1) \quad 31-3$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1 - \cos^2 \theta}{\sin \theta} \frac{d\phi}{d\theta} \right) + n(n+1) \phi = 0 \quad 32-3$$

$$-\frac{d}{dx} \left(\frac{1-x^2}{-1} \frac{d\phi}{dx} \right) + n(n+1)\phi = 0 \quad 33-3$$

$$(1-x^2) \frac{d^2\phi}{dx^2} - 2x \frac{d\phi}{dx} + n(n+1)\phi = 0 \quad 34-3$$

جواب معادله بالا به صورت زیر است:

$$\phi(x) = c_1 P_n(x) + c_2 Q_n(x) \quad 35-3$$

Q_n تابع لژاندر نوع ۲ است و به صورت زیر تعریف می شود:

$$1/2 \ln \frac{1+x}{1-x}, 1/2 \ln \frac{x+1}{x-1} \quad 36-3$$

همان طور که مشاهده می شود، در نقطه 1 و -1 تابع تکین می شود. از این رو ضریب Q باید صفر شود.

بنا بر معادله ۲۶-۳ معادله جداسازی شده در جهت شعاعی یک معادله اولر با حل زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial F}{\partial r} \right) - \lambda F = 0 \quad ۳۷-۳$$

$$r^2 F'' + r F' - \frac{\lambda_n}{\mu^2} F = 0 \quad \text{معادله کوشی اوپلر به ازای} \quad ۳۸-۳$$

$$n \neq 0$$

$$\begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = \frac{-n(n+1)}{\mu} \end{cases} \quad ۳۹-۳$$

$$R_n(r) = \begin{cases} B_n r^{\frac{n}{\mu^2}} + C_n r^{\frac{-(n+1)}{\mu^2}} & \text{for } n \geq 1 \\ B_0 \ln r + C_0 & \text{for } n = 0 \end{cases} \quad ۴۰-۳$$

جواب معادله‌ی ۳-۲۶ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\varphi^{(i)}(r, \theta) = \left(a_0^{(i)} \ln \left(\frac{r}{r_{nl}} \right) + b_0^{(i)} \right) P_0(\cos \theta) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^{(i)} \left(\frac{r}{r_{nl}} \right)^{\frac{n}{\mu^2}} + b_n^{(i)} \left(\frac{r}{r_{nl}} \right)^{\frac{-(n+1)}{\mu^2}} \right) P_n(\cos \theta) \quad ۴۱-۳$$

در رابطه‌ی ۳-۴۱، r_0 و r_{nl} به ترتیب شعاع داخلی و شعاع خارجی کره و $P_n(\cos \theta)$ چندجمله‌ای لژاندر مرتبه‌ی n است. $a_0^{(i)}$ ، $b_0^{(i)}$ ، $a_n^{(i)}$ و $b_n^{(i)}$ ضرایب مجهول هستند. برای به دست آوردن دما کافی است ضرایب مجهول موجود در معادله‌ی بالا محاسبه شوند. چنان چه تعداد لایه‌ها برابر nl باشد و محاسبات را تا جمله‌ی n ام لژاندر ادامه دهیم، تعداد ضرایب برابر $2nl(n+1)$ خواهد بود. معمولاً تغییرات k بر حسب دما، به صورت خطی و به صورت زیر است:

$$k_i(T) = k_{i0}(1 + \beta_i T) \quad ۴۲-۳$$

اندیس i ، شماره لایه‌های پوسته‌ی کره را نشان می‌دهد. در بیش‌تر مواد مقدار β_i منفی است. در برنامه‌ی نوشته‌شده، مقدار β_i برای هر لایه، توسط کاربر تعیین می‌شود. با توجه به رابطه‌های ۳-۱۹ و ۳-۴۲، داریم:

$$\varphi^{(i)}(r, \theta) = T^{(i)}(r, \theta) + \beta_i \frac{(T^{(i)})^2(r, \theta)}{2} \quad ۳-۴۳$$

و در نتیجه مقادیر دما به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$T^{(i)}(r, \theta) = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 2\beta_i \varphi^{(i)}(r, \theta)}}{\beta_i} \quad ۳-۴۴$$

در اینجا شرایط مرزی به سه قسمت تقسیم می‌شوند:

۱- شرط مرزی در سطح داخلی کره:

$$\left(a_1 \ln \left(\frac{r_0}{r_{nl}} \right) + b_1 \left(\frac{1}{r_0} \right) \right) a_0^{(1)} + a_1 b_0^{(1)} = F_0^0 \quad ۳-۴۵$$

$$\left(a_1 r_0^{\frac{n}{\mu_0^2}} + b_1 \frac{n}{\mu_0^2} r_0^{\frac{n}{\mu_0^2} - 1} \right) a_n^{(1)} + \left(a_1 r_0^{\frac{-(n+1)}{\mu_0^2}} + b_1 \frac{-(n+1)}{\mu_0^2} r_0^{\frac{-(n+1)}{\mu_0^2} - 1} \right) b_n^{(1)} = F_n^0 \quad ۳-۴۶$$

رابطه‌ی ۳-۴۵ مربوط به ضرایب جمله‌ی صفر آم و رابطه‌ی ۳-۴۶، مربوط به ضرایب جملات بالاتر لژاندر در

لایه‌ی اول است. در دو رابطه‌ی ۳-۴۵ و ۳-۴۶، $a_0^{(1)}$ ، $b_0^{(1)}$ ، $a_n^{(1)}$ و $b_n^{(1)}$ مجهولات مسئله هستند. ضرایب

a_1 و b_1 نیز مربوط به شرایط مرزی در سطح داخلی کره است. به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$F_n^0 = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi f_1(\theta) P_n(\cos \theta) \cdot \sin \theta d\theta \quad ۴۷-۳$$

که در آن $f_1(\theta)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$f_1(\theta) = a_1 T(r_0, \theta) + b_1 \frac{\partial T}{\partial r}(r_0, \theta) \quad ۴۸-۳$$

با توجه به رابطه ی ۴۸-۳، a_1 مربوط به شرط مرزی دما و b_1 ، مربوط به شرط مرزی شار حرارتی در سطح داخلی کره هستند.

۲- شرط مرزی در سطح خارجی کره:

$$\frac{b_2}{r_{nl}} a_0^{(nl)} + a_2 b_0^{(nl)} = F_0^{nl} \quad ۴۹-۳$$

$$\left(a_2 r_{nl}^{\frac{n}{\mu_{nl}^2}} + b_2 \frac{n}{\mu_{nl}^2} r_{nl}^{\frac{n}{\mu_{nl}^2}-1} \right) a_n^{(nl)} + \left(a_2 r_{nl}^{\frac{-(n+1)}{\mu_{nl}^2}} + b_2 \frac{-(n+1)}{\mu_{nl}^2} r_{nl}^{\frac{-(n+1)}{\mu_{nl}^2}-1} \right) b_n^{(nl)} = F_n^{nl}$$

۵۰-۳

رابطه ی ۴۹-۳ مربوط به ضرایب جمله ی صفر ام و رابطه ی ۵۰-۳ مربوط به ضرایب جملات بالاتر لژاندر در

لایه ی آخر است. همچنین منظور از nl ، تعداد لایه ها است. در دو رابطه ی ۴۹-۳ و ۵۰-۳، $a_0^{(nl)}$ ، $b_0^{(nl)}$

و $b_n^{(nl)}$ مجهولات مسئله هستند. ضرایب a_2 و b_2 نیز مربوط به شرایط مرزی در سطح خارجی

کره است. F_n^{nl} به صورت زیر محاسبه می شود:

$$F_n^{nl} = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi f_2(\theta) P_n(\cos \theta) * \sin \theta d\theta \quad ۵۱-۳$$

که در آن $f_2(\theta)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$f_2(\theta) = a_2 T(r_{nl}, \theta) + b_2 \frac{\partial T}{\partial r}(r_{nl}, \theta) \quad ۵۲-۳$$

با توجه به رابطه ی ۵۲-۳، a_2 مربوط به شرط مرزی دما و b_2 مربوط به شرط مرزی شار حرارتی در سطح خارجی کره هستند.

۳- شرط مرزی در مرز بین لایه ها:

$$\left(\ln \left(\frac{r_i}{r_{nl}} \right) a_0^{(i)} + b_0^{(i)} - \ln \left(\frac{r_i}{r_{nl}} \right) a_0^{(i+1)} - b_0^{(i+1)} \right) = 0 \quad ۵۳-۳$$

$$\left(\frac{r_i}{r_{nl}} \right)^{\frac{n}{\mu_i^2}} a_n^{(i)} + \left(\frac{r_i}{r_{nl}} \right)^{\frac{-(n+1)}{\mu_i^2}} b_n^{(i)} - \left(\frac{r_i}{r_{nl}} \right)^{\frac{n}{\mu_{i+1}^2}} a_n^{(i+1)} - \left(\frac{r_i}{r_{nl}} \right)^{\frac{-(n+1)}{\mu_{i+1}^2}} b_n^{(i+1)} = 0$$

۵۴-۳

$$\left(\left(\frac{1}{r_{nl}} \right) \ln \left(\frac{r_i}{r_{nl}} \right) a_0^{(i)} - \left(\frac{1}{r_{nl}} \right) \ln \left(\frac{r_i}{r_{nl}} \right) a_0^{(i+1)} \right) = 0 \quad ۵۵-۳$$

$$\frac{n}{\mu_i^2} \left(\frac{r_i}{r_{nl}} \right)^{\frac{n}{\mu_i^2} - 1} a_n^{(i)} - \frac{n+1}{\mu_i^2} \left(\frac{r_i}{r_{nl}} \right)^{\frac{-(n+1)}{\mu_i^2} - 1} b_n^{(i)} -$$

$$\frac{n}{\mu_{i+1}^2} \left(\frac{r_i}{r_{nl}} \right)^{\frac{n}{\mu_{i+1}^2} - 1} a_n^{(i+1)} + \frac{n+1}{\mu_{i+1}^2} \left(\frac{r_i}{r_{nl}} \right)^{\frac{-(n+1)}{\mu_{i+1}^2} - 1} b_n^{(i+1)} = 0 \quad ۵۶-۳$$

معادلات ۵۳-۳ و ۵۴-۳ مربوط به شرایط مرزی $\varphi(r, \theta)$ (تبدیل یافته‌ی دما در تبدیل کیرشهف) و

معادلات ۵۵-۳ و ۵۶-۳ مربوط به شرایط مرزی $\frac{\partial \varphi(r, \theta)}{\partial r}$ (تبدیل یافته‌ی انتقال حرارت در تبدیل کیرشهف)

در مرز بین لایه‌هاست. لازم به ذکر است، در معادلات ۵۳-۳ تا ۵۶-۳، i ، شماره‌ی لایه است.

معادلات ۴۵-۳، ۴۶-۳، ۴۷-۳، ۴۸-۳ و همچنین ۵۳-۳ تا ۵۶-۳، تشکیل $2nl(n+1)$ معادله می‌دهند.

فرم کلی این معادلات به صورت معادله‌ی ماتریسی $Ax = B$ درمی‌آید. ماتریس‌های A و B با توجه به

معادلات گفته شده تعیین می‌شوند. ماتریس x ماتریس مجهولات است و به صورت زیر است:

$$x = \begin{bmatrix} a_1^1 \\ b_1^1 \\ a_2^1 \\ b_2^1 \\ \vdots \\ a_n^1 \\ b_n^1 \\ a_1^2 \\ b_1^2 \\ \vdots \\ a_n^2 \\ b_n^2 \\ \vdots \\ a_n^{n_l} \\ b_n^{n_l} \end{bmatrix} \quad ۵۷-۳$$

با محاسبه‌ی ماتریس x ، ضرایب لازم برای محاسبه‌ی $\varphi(r, \theta)$ تعیین می‌شوند. آنگاه $\varphi(r, \theta)$ در هر

لایه طبق رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$\varphi^{(i)}(r, \theta) = \left(a_0^{(i)} \ln \left(\frac{r}{r_{nl}} \right) + b_0^{(i)} \right) P_0(\cos \theta) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^{(i)} \left(\frac{r}{r_{nl}} \right)^{\frac{n}{\mu_i^2}} + b_n^{(i)} \left(\frac{r}{r_{nl}} \right)^{\frac{-(n+1)}{\mu_i^2}} \right) P_n(\cos \theta)$$

۵۸-۳

با محاسبه‌ی $\varphi(r, \theta)$ ، مقادیر $T(r, \theta)$ در هر لایه، طبق رابطه‌ی ۴۴-۳ محاسبه می‌شود.

۵-۳ حل ناپایا

معادله‌ی انتقال حرارت در حالت ناپایا به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(k_{rr} r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k_{\theta\theta} \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad ۵۹-۳$$

در قسمت ۱-۳، حل معادله‌ی زیر را به دست آوردیم:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(k_{rr} r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k_{\theta\theta} \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = 0 \quad ۶۰-۳$$

جواب معادله‌ی ۵۹-۳ را می‌توان به دو قسمت زیر تجزیه کرد:

$$T = T_h + T_s \quad ۶۱-۳$$

که در آن T_h حل ناپایا و T_s حل پایا است. با جایگذاری رابطه‌ی ۶۱-۳ در رابطه‌ی ۵۹-۳، داریم:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(k_{rr} r^2 \frac{\partial (T_h + T_s)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k_{\theta\theta} \sin \theta \frac{\partial (T_h + T_s)}{\partial \theta} \right) = \rho c \frac{\partial (T_h + T_s)}{\partial t} \quad ۶۲-۳$$

از آنجا که $\frac{\partial T_s}{\partial t} = 0$ ، معادله‌ی ۶۲-۳ به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(k_{rr} r^2 \frac{\partial (T_h + T_s)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k_{\theta\theta} \sin \theta \frac{\partial (T_h + T_s)}{\partial \theta} \right) = \rho c \frac{\partial (T_h)}{\partial t} \quad ۶۳-۳$$

معادله‌ی ۶۳-۳، را می‌توان به دو معادله‌ی زیر تفکیک کرد:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(k_{rr} r^2 \frac{\partial(T_h)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k_{\theta\theta} \sin \theta \frac{\partial(T_h)}{\partial \theta} \right) &= \rho c \frac{\partial(T_h)}{\partial t} \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(k_{rr} r^2 \frac{\partial(T_s)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k_{\theta\theta} \sin \theta \frac{\partial(T_s)}{\partial \theta} \right) &= 0 \end{aligned} \right. \quad ۶۴-۳$$

حل معادله‌ی $\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(k_{rr} r^2 \frac{\partial(T_s)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k_{\theta\theta} \sin \theta \frac{\partial(T_s)}{\partial \theta} \right) = 0$ همان حل پایا است که در قسمت ۴-۳ به دست آمد.

قسمت اول معادله‌ی ۶۴-۳، به صورت زیر است:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(k_{rr} r^2 \frac{\partial(T_h)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k_{\theta\theta} \sin \theta \frac{\partial(T_h)}{\partial \theta} \right) = \frac{\rho c}{(1 + \beta T)} \frac{\partial(T_h)}{\partial t} \quad ۶۵-۳$$

با اعمال تبدیل کیرشهف بر معادله‌ی ۶۵-۳، این معادله به صورت زیر درمی آید:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} k_{rr0} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial(\varphi_h)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} k_{\theta\theta0} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial(\varphi_h)}{\partial \theta} \right) \\ = \frac{\rho c}{1 + \beta T} \frac{\partial(\varphi_h)}{\partial t} \end{aligned} \quad ۶۶-۳$$

با تقسیم دو طرف معادله‌ی ۶۶-۳ بر k_{rr0} ، داریم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial(\varphi_h)}{\partial r} \right) + \frac{k_{\theta\theta0}}{k_{rr0}} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial(\varphi_h)}{\partial \theta} \right) \\ = \frac{\rho c}{(1 + \beta T) k_{rr0}} \frac{\partial(\varphi_h)}{\partial t} \end{aligned} \quad ۶۷-۳$$

چون مقدار β در اینجا خیلی کوچک است، می‌توان از آن صرف‌نظر کرد. در نتیجه معادله‌ی ۳-۶۷ در هر

لایه معتبر است. معادله‌ی ۳-۶۷ را در لایه i آم به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial(\varphi_h^{(i)})}{\partial r} \right) + \frac{k_{\theta\theta 0i}}{k_{rr 0i}} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial(\varphi_h^{(i)})}{\partial \theta} \right) \\ = \frac{\rho_i C_i}{k_{rr 0i}} \frac{\partial(\varphi_h^{(i)})}{\partial t} \end{aligned} \quad ۳-۶۸$$

چنان‌چه $\varphi_h^{(i)}$ ، در هر لایه را به‌صورت حاصل‌ضرب سه تابع که هرکدام فقط تابع شعاع، زاویه و زمان

هستند؛ بنویسیم، داریم:

$$\varphi_h^{(i)} = f_i(r) \cdot g(\theta) \cdot n_i(t) \quad ۳-۶۹$$

در رابطه‌ی ۳-۶۵، $f_i(r)$ ، $g(\theta)$ و $n_i(t)$ توابعی هستند که به ترتیب فقط تابع شعاع، زاویه و زمان

هستند. از آنجاکه تابع g تابع $\cos \theta$ است متغیر $\mu = \cos \theta$ ، را تعریف می‌کنیم.

با جایگذاری معادله‌ی ۳-۶۹ در معادله‌ی ۳-۶۸، این معادله به‌صورت سه معادله دیفرانسیل معمولی زیر

درمی‌آید:

$$\frac{\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d(g)}{d\theta} \right)}{g} = -\lambda \quad ۳-۷۰$$

$$\lambda = \beta_m(\beta_m + 1) \quad ۳-۷۱$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1 - \cos^2 \theta}{\sin \theta} \frac{dg}{d\theta} \right) + \beta_m(\beta_m + 1)g = 0 \quad ۳-۷۲$$

$$(1 - \mu^2) \frac{d^2 g(\mu)}{d\mu^2} - 2\mu \frac{dg(\mu)}{d\mu} + \beta_m(\beta_m + 1)g(\mu) = 0 \quad ۷۳-۳$$

حل معادله‌ی ۷۳-۳، معادله‌ی لژاندر است و به‌صورت مجموع دو تابع مستقل $Q_{\beta m}(\mu)$ و $P_{\beta m}(\mu)$ که به ترتیب توابع درجه اول و دوم لژاندر هستند، به دست می‌آید.

در رابطه‌ی بالا، $g_m(\mu)$ تابع ویژه متناظر با هر کدام از مقادیر ویژه‌ی رابطه‌ی ۷۳-۳ است و به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$g_m(\mu) = \omega_{1m}P_{\beta m}(\mu) + \omega_{2m}Q_{\beta m}(\mu) \quad ۷۴-۳$$

از آنجاکه برای تمام مقادیر βm ، با نزدیک شدن مقدار θ به صفر و در نتیجه میل کرد μ به سمت ۱، مقادیر $Q_{\beta m}$ به سمت بی‌نهایت میل می‌کند، لذا ضریب تابع لژاندر درجه‌ی دوم باید برابر صفر باشد، یعنی $\omega_{2m} = 0$.

مقدار تابع زمان :

$$\frac{1}{\alpha} \frac{t'}{t} = -\lambda_n^2 \quad ۷۵-۳$$

$$\frac{1}{\alpha_i} \frac{dn_i(t)}{dt} + \lambda_i^2 n_i(t) = 0 \quad ۷۶-۳$$

$$\frac{1}{\alpha} \frac{t'}{t} = -\lambda^2 \quad ۷۷-۳$$

$$\ln t = -\lambda^2 \alpha t \quad ۷۸-۳$$

$$n(t) = e^{-\lambda^2 \alpha t} \quad ۷۹-۳$$

مقدار تابع در جهت $\mathbf{r}$:

$$-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{df(r)}{dr} \right) = [\lambda_i^2 r^2 - (\beta_m + 0.5)^2] f(r) \quad ۸۰-۳$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{df_i(r)}{dr} \right) + [\lambda_i^2 r^2 - (\beta_m + 0.5)^2] f_i(r) = 0 \quad ۸۱-۳$$

حل معادله‌ی ۸۱-۳، تابع بسل در دستگاه مختصات کروی است و به صورت مجموع دو تابع به دست می‌آید

$$f_Y(\lambda_i r) = \left(\frac{1}{\sqrt{r}} Y_{\beta_m+0.5}(\lambda_i r) \right) \text{ و } f_J(\lambda_i r) = \left(\frac{1}{\sqrt{r}} J_{\beta_m+0.5}(\lambda_i r) \right)$$

۱ و Y تابع بسل نوع ۲ است. برای اینکه تابع بسل همگرا باشد ضریب Y باید صفر باشد.

از این رو مقدار تابع ۶۸-۳ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\varphi_h^{(i)}(r, \mu, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} D_{mp} e^{-\alpha_i \lambda_{imp}^2 t} f_{imp}(\lambda_{imp} r) g_m(\mu) \quad ۸۲-۳$$

همچنین مقادیر تابع f_i به صورت زیر است:

$$f_{imp}(\lambda_{imp} r) = a_{imp} f_J(\lambda_{imp} r) + b_{imp} f_Y(\lambda_{imp} r) \quad ۸۳-۳$$

در روابط بالا، λ_i^2 و $\beta_m(\beta_m + 1)$ ثابت‌های مورد استفاده در روش جدایی متغیرها برای تابع سه متغیره

$$\alpha_i = \frac{k_{rr0i}}{\rho_i c_i} \text{ هستند. همچنین}$$

به منظور پیوستگی دما در لایه‌ها، رابطه‌ی زیر باید بین مقادیر λ در سایر لایه‌ها و لایه‌ی اول برقرار باشد:

$$\lambda_{imp} = \lambda_{1mp} \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_i}} \quad ۸۴-۳$$

در جهت θ ، در زاویه $\theta = \pi$ یا همان $\mu = -1$ ، برای نامتناهی نشدن توابع ویژه $P_{\beta m}(\mu)$ ، لازم است مقادیر βm اعداد صحیح نامنفی باشند یعنی $\beta m = \{0, 1, 2, \dots\}$.

شرایط مرزی در جهت شعاعی:

۱- در شعاع داخلی کره ($r = r_i$)

$$A_{inner} \frac{\partial \varphi_h^{(1)}(r_i, \mu, t)}{\partial r} + B_{inner} \varphi_h^{(1)}(r_i, \mu, t) = 0 \quad ۸۵-۳$$

۲- در شعاع خارجی کره ($r = r_o$)

$$A_{outer} \frac{\partial \varphi_h^{(nl)}(r_o, \mu, t)}{\partial r} + B_{outer} \varphi_h^{(nl)}(r_o, \mu, t) = 0 \quad ۸۶-۳$$

که در آن nl شماره‌ی لایه‌ی آخر است.

۳- در مرز بین لایه‌ها:

$$\varphi_h^{(i)}(r_{i-1}, \mu, t) = \varphi_h^{(i-1)}(r_{i-1}, \mu, t) \quad ۸۷-۳$$

$$k_{rr0i} \frac{\partial \varphi_h^{(i)}(r_{i-1}, \mu, t)}{\partial r} = k_{rr0(i-1)} \frac{\partial \varphi_h^{(i-1)}(r_{i-1}, \mu, t)}{\partial r} \quad ۸۸-۳$$

شرایط مرزی را در جهت r می‌توان به صورت معادله‌ی ماتریسی زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix}
 C_{1in} & C_{2in} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x_{i1} & x_{i2} & x_{i3} & x_{i4} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & y_{i1} & y_{i2} & y_{i3} & y_{i4} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x_{n-1,1} & x_{n-1,2} & x_{n-1,3} & x_{n-1,4} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & y_{n-1,1} & y_{n-1,2} & y_{n-1,3} & y_{n-1,4} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & C_{1out} & C_{2out}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 a_{1mp} \\
 b_{1mp} \\
 \dots \\
 \dots \\
 a_{imp} \\
 b_{imp} \\
 \dots \\
 \dots \\
 a_{nmp} \\
 b_{nmp}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 \dots \\
 \dots \\
 0 \\
 0 \\
 \dots \\
 \dots \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}$$

۸۹-۳

پارامترهای موجود در رابطه‌ی ۳-۸۵، به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$C_{1in} = A_{inner} f'_J(\lambda_{1mp} r_i) + B_{inner} f_J(\lambda_{1mp} r_i) \quad ۹۰-۳$$

$$C_{2in} = A_{inner} f'_Y(\lambda_{1mp} r_i) + B_{inner} f_Y(\lambda_{1mp} r_i) \quad ۹۱-۳$$

$$x_{i1} = f_J(\lambda_{imp} r_i) \quad ۹۲-۳$$

$$x_{i2} = f_Y(\lambda_{imp} r_i) \quad ۹۳-۳$$

$$x_{i3} = -f_J(\lambda_{(i+1)mp} r_i) \quad ۹۴-۳$$

$$x_{i4} = -f_Y(\lambda_{(i+1)mp} r_i) \quad ۹۵-۳$$

$$y_{i1} = k_i f'_J(\lambda_{imp} r_i) \quad ۹۶-۳$$

$$y_{i2} = k_i f'_Y(\lambda_{imp} r_i) \quad ۹۷-۳$$

$$y_{i3} = -k_{i+1}f'_J(\lambda_{(i+1)mp}r_i) \quad 98-3$$

$$y_{i4} = -k_{i+1}f'_Y(\lambda_{(i+1)mp}r_i) \quad 99-3$$

$$C_{1out} = A_{outer}f'_J(\lambda_{(ip)mp}r_o) + B_{outer}f_J(\lambda_{(ip)mp}r_o) \quad 100-3$$

$$C_{2out} = A_{outer}f'_Y(\lambda_{(ip)mp}r_o) + B_{outer}f_Y(\lambda_{(ip)mp}r_o) \quad 101-3$$

' بیانگر مشتق است. در نهایت مقادیر a_{imp} و b_{imp} از رابطه‌ی بازگشتی زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{pmatrix} a_{(i+1)mp} \\ b_{(i+1)mp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_J(\lambda_{(i+1)mp}r_i) & f_Y(\lambda_{(i+1)mp}r_i) \\ k_{rr0(i+1)}f'_J(\lambda_{(i+1)mp}r_i) & k_{rr0(i+1)}f'_Y(\lambda_{(i+1)mp}r_i) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f_J(\lambda_{imp}r_i) & f_Y(\lambda_{imp}r_i) \\ k_{rr0i}f'_J(\lambda_{imp}r_i) & k_{rr0i}f'_Y(\lambda_{imp}r_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{imp} \\ b_{imp} \end{pmatrix} \quad 102-3$$

در رابطه‌ی بالا، مقدار a_{1mp} به صورت دلخواه تعیین می‌شود و $b_{1mp} = -\frac{c_{1in}}{c_{2in}}a_{1mp}$

توابع ویژه به دست آمده به ازای مقادیر دل خواه a_{1mp} ، متناسب با یکدیگر هستند و هر کدام جواب مسئله‌ی مقدار ویژه در جهت Γ خواهند بود.

شرایط اولیه:

در زمان $t=0$ ، داریم:

$$\varphi_h^{(i)}(r, \mu, 0) = f_{int}(r, \mu) - \varphi_s^{(i)}(r, \mu) \quad ۱۰۳-۳$$

که در آن، $f_{int}(r, \mu)$ مقدار اولیه‌ی دمای تبدیل یافته در تبدیل کیرشهف در هر لایه و $\varphi_s^{(i)}(r, \mu)$ حل پایای دمای تبدیل یافته است که از حل قسمت پایا به دست می‌آید.

در نهایت ضرایب D_{mp} ، موجود در رابطه‌ی ۸۲-۳، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$D_{mp} = \frac{1}{M_{rmp} N_m} \sum_{i=1}^{nl} \frac{k_{rr0i}}{\alpha_i} \int_{\mu}^1 \int_{r_{i-1}}^{r_i} r^2 f_{imp}(\lambda_{imp} r) P_{\beta m}(\mu) \varphi_h^{(i)}(r, \mu, 0) dr d\mu \quad ۱۰۴-۳$$

N_m و M_{rmp} از طریق روابط ۱۰۵-۳ و ۱۰۶-۳ محاسبه می‌شوند.

$$\int_{\mu}^1 P_{\beta m}(\mu) P_{\beta l}(\mu) d\mu = \begin{cases} 0 & \text{if } m \neq l \\ N_m & \text{if } m = l \end{cases} \quad ۱۰۵-۳$$

$$\sum_{i=1}^{nl} \frac{k_{rr0i}}{\alpha_i} \int_{r_{i-1}}^{r_i} r^2 f_{imp}(\lambda_{imp} r) f_{imq}(\lambda_{imq} r) dr = \begin{cases} 0 & \text{if } p \neq q \\ M_{rmp} & \text{if } p = q \end{cases} \quad ۱۰۶-۳$$

با تعیین ضرایب و اعمال شرط‌های مرزی و اولیه، تابع تبدیل یافته‌ی کیرشهف دما طبق رابطه‌ی ۸۲-۳، محاسبه می‌شود که با اعمال معکوس تبدیل کیرشهف بر آن، تابع دمای ناپایا بر حسب شعاع، زاویه و زمان به دست خواهد آمد.

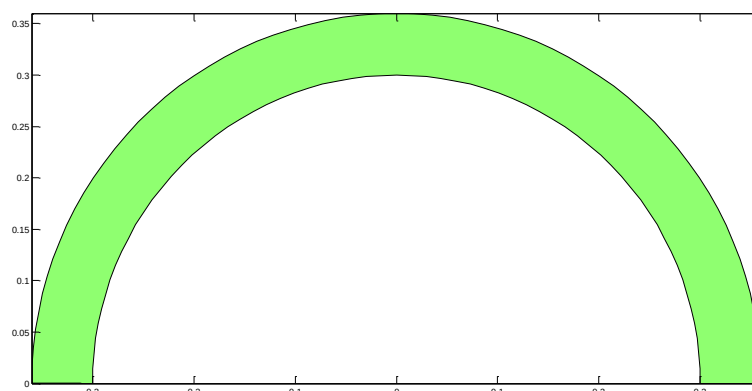
$$T_h^{(i)}(r, \theta, t) = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 2\beta_i \varphi_h^{(i)}(r, \theta, t)}}{\beta_i} \quad ۱۰۷-۳$$

فصل چہارم

نتیج

۱-۴ هندسه‌ی موردبررسی

در پژوهش پیش رو، انتقال حرارت دوبعدی در یک نیمکره‌ی چندلایه، موردبررسی قرار گرفته است. در حالت کلی هندسه‌ی نیمکره سه‌بعدی است اما در پژوهش حاضر فرض بر این است که تغییرات دما در راستای زاویه‌گرایی ناچیز بوده و بنابراین هندسه به‌صورت دوبعدی درمی‌آید. شکل شماتیک هندسه‌ی موردبررسی در شکل ۱-۴، نشان داده‌شده است.



شکل ۱-۴ شکل شماتیک هندسه‌ی موردبررسی

شکل ۱-۴، یک نیمکره‌ی توخالی با شعاع داخلی ۰/۳ متر و شعاع خارجی ۰/۳۶ متر را نشان می‌دهد. جهت شعاعی در راستای شعاع نیمکره و جهت محیطی در راستای زاویه‌ی سمت‌الرأس^۱ نیمکره است. پوسته‌ی نیمکره از لایه‌های مختلف با ضخامت و ویژگی‌های فیزیکی گوناگون تشکیل شده است که توسط کاربر برنامه‌ی کامپیوتری نوشته‌شده، قابل تعیین است.

^۱ Zenith angle

۲-۴ حل پایا

۱-۲-۴ شرایط مرزی مورد ۱

شرط مرزی در نظر گرفته شده در سطح داخلی نیمکره، شرط مرزی دما ثابت است و برابر ۳۰۰ کلوین در نظر گرفته شده است. شرط مرزی سطح خارجی نیمکره بر اساس شار حرارتی است. اندازه‌ی این شار حرارتی به صورت رابطه‌ی زیر در نظر گرفته شده است:

$$F_s = 1357(2\pi R_o^2) \left(1 + 0.5 \left| \cos \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \right| \right) \quad ۱-۴$$

در رابطه‌ی بالا، فرض شده است که چگالی شار حرارتی بر واحد سطح عمود بر تابش، ۱۳۵۷ وات بر مترمربع است. عبارت $2\pi R_o^2$ ، مساحت سطح خارجی نیمکره و θ ، زاویه‌ی سمت‌الرأس نیمکره است که مقدار آن از ۰ تا ۱۸۰ درجه متغیر است. در زوایای $\theta = 0$ و $\theta = 180$ ، شرط مرزی بی‌دررو^۱، در نظر گرفته شده است. با توجه به شرایط مرزی ذکر شده، معادلات انتقال حرارت در مختصات کروی دوبعدی به وسیله‌ی برنامه‌ی کامپیوتری نوشته شده، حل شده و نتایج به دست آمده با نتایج عددی مقایسه می‌شوند.

۲-۲-۴ ورودی‌های برنامه برای مورد ۱

ورودی‌های برنامه‌ی نوشته شده شامل ویژگی‌های فیزیکی و هندسی لایه‌هاست که در این قسمت به معرفی آن‌ها پرداخته خواهد شد.

¹ adiabatic

۱- تعداد لایه‌ها

۲- ضخامت هر لایه

۳- زاویه‌ی الیاف: این زاویه به ساختار خود لایه‌ها بستگی دارد و برای هر لایه می‌تواند مقدار متفاوتی داشته باشد.

۴- ضریب هدایت حرارتی در جهت شعاعی و محیطی (سمت الرأس کره): به علت وجود الیاف در ساختار لایه‌ها، ماده‌ی موردبررسی همسانگرد^۱ نیست. بنابراین ضریب هدایت حرارتی، در جهت‌های مختلف، متفاوت خواهد بود.

۵- ضریب تغییرات ضریب هدایت حرارتی نسبت به دما (β): این ضریب طبق رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود:

$$k = k_0(1 + \beta T) \quad ۲-۴$$

که در آن k و k_0 به ترتیب ضریب هدایت حرارتی در دمای T (برحسب کلوین) و یک دمای مرجع (T_0) است. به ازای مقادیر مثبت برای β ، رسانندگی حرارتی با افزایش دما افزایش و به ازای مقادیر منفی، رسانندگی حرارتی کاهش می‌یابد.

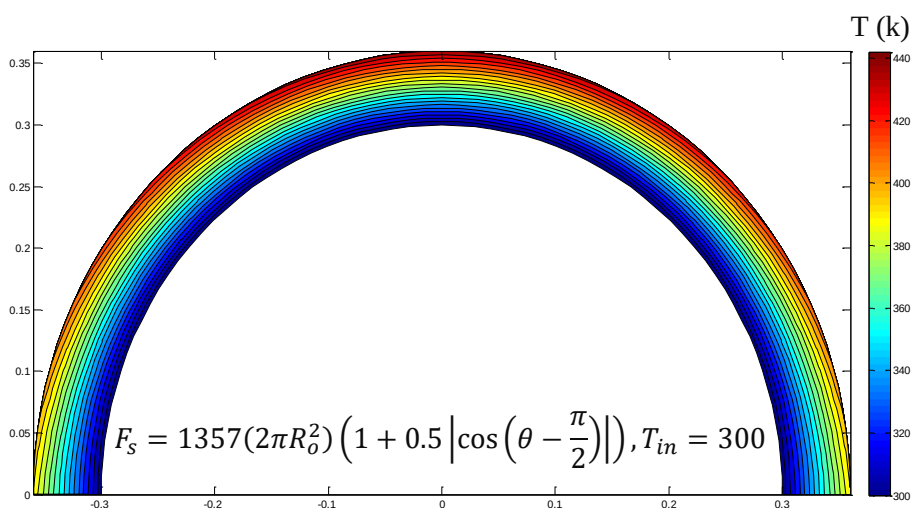
¹ isotropic

جدول ۴-۱ ورودی‌های برنامه برای مورد ۱

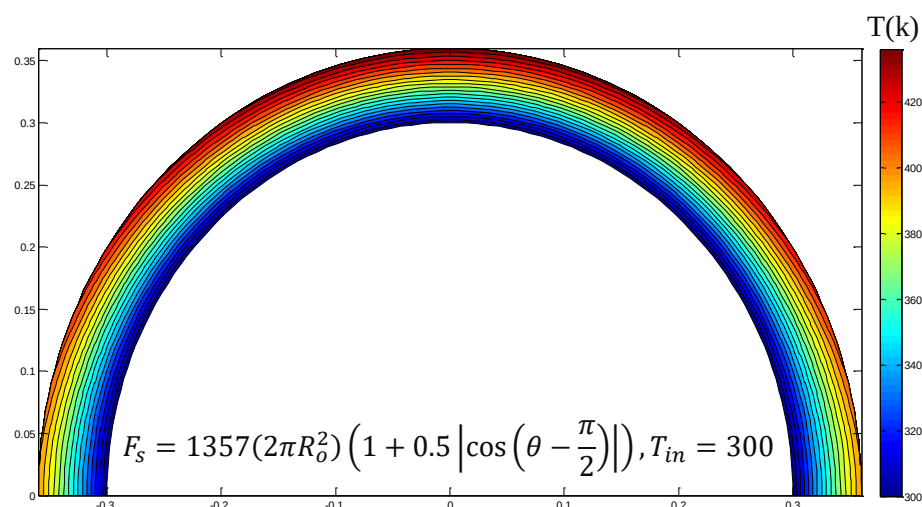
تعداد لایه‌ها	۶
ضخامت هر لایه	۱ سانتی‌متر
زاویه الیاف	۹۰ درجه
ضریب هدایت حرارتی در جهت محیطی	$10 \frac{w}{m.k}$
ضریب هدایت حرارتی در جهت شعاعی	$0.4 \frac{w}{m.k}$
β	-۰/۰۰۰۸۵
شار حرارتی در سطح خارجی	$F_s = 1357(2\pi R_o^2) \left(1 + 0.5 \left \cos \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \right \right)$
دما در سطح داخلی	۳۰۰ کلوین

۴-۲-۳- نتایج به‌دست‌آمده برای حالت پایا و مورد ۱

در این قسمت فرض شده است که هر شش لایه مشابه هم بوده و از مواد یکسان ساخته‌شده باشند



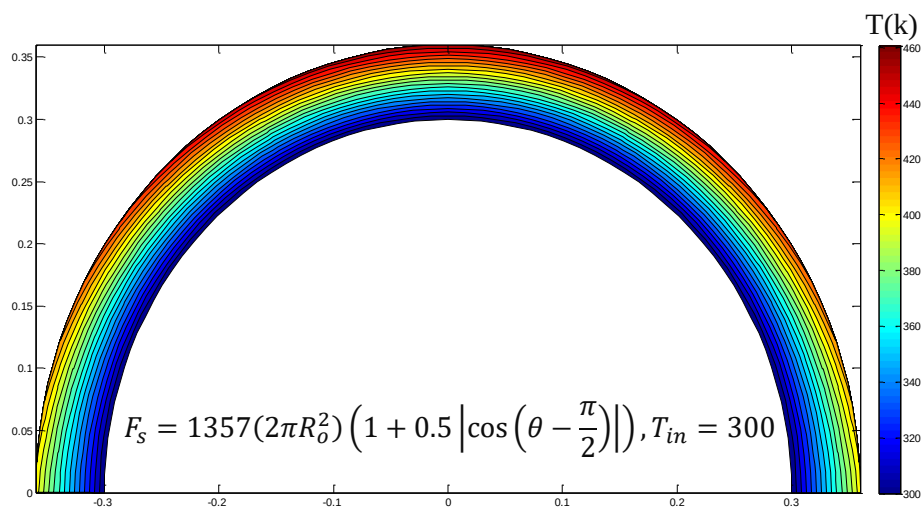
شکل ۲-۴ کانتور دما به دست آمده در حل تحلیلی برای مورد ۱



شکل ۳-۴ کانتور دما به دست آمده در حل عددی برای مورد ۱

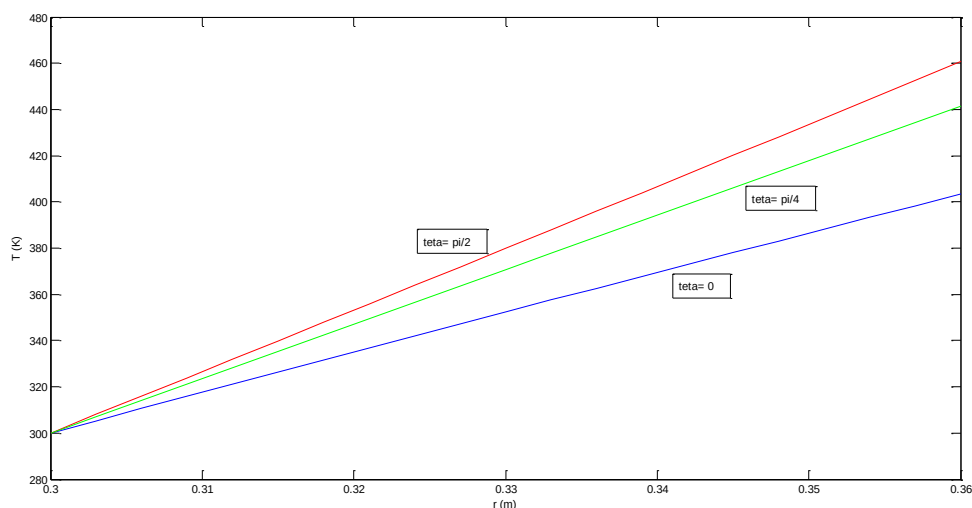
با توجه به شکل‌های ۲-۴ و ۳-۴، نتایج به دست آمده در حل تحلیلی با نتایج عددی انطباق زیادی دارد. در حل تحلیلی مقادیر کمینه و بیشینه‌ی دما به ترتیب برابر ۳۰۰ و ۴۴۲/۶۸ کلوین و در حل عددی به ترتیب ۳۰۰ و ۴۴۳/۰۱ کلوین به دست آمده است. بیشینه‌ی دما در سطح خارجی نیمکره و در $\theta = 90^\circ$ ، یعنی در جایی که شار حرارتی بیشینه است، اتفاق می‌افتد. کمینه‌ی دما نیز در سطح داخلی نیمکره ایجاد می‌شود

که بر اساس شرط مرزی در نظر گرفته شده برابر ۳۰۰ کلوین است. در شکل های ۲-۴ و ۳-۴، تعداد جملات لژاندر برابر ۶ است. برای بررسی اثر تعداد جملات لژاندر در نظر گرفته شده بر نتایج حاصل از حل تحلیلی، نتایج به دست آمده را به ازای تعداد جملات کمتر لژاندر، بررسی می کنیم:

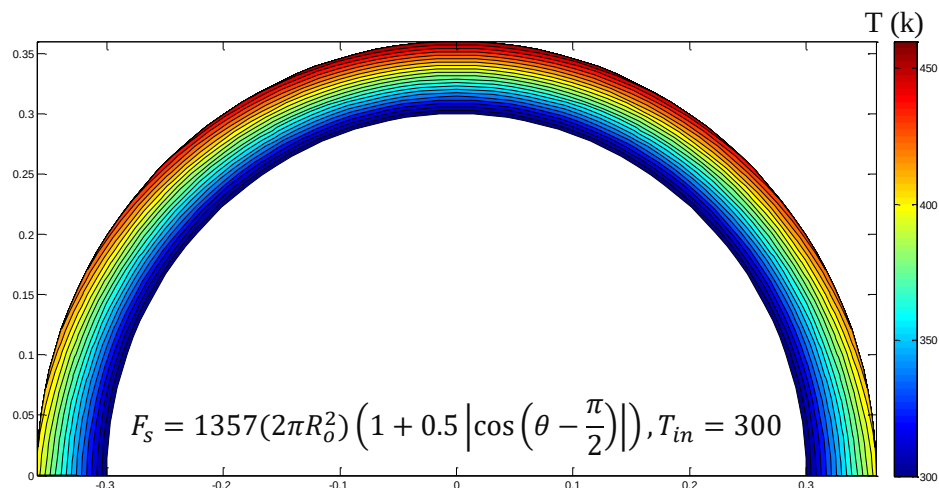


شکل ۴-۴ کانتور دما به دست آمده در حل تحلیلی برای مورد ۱ تعداد جملات لژاندر در نظر گرفته شده برابر ۱ است

با توجه به شکل ۴-۴، چنان چه فقط جمله ی اول لژاندر در محاسبات در نظر گرفته شود، بیشینه ی دما در نیمکره برابر ۴۶۰/۶۵ کلوین به دست می آید که حدود ۱۷/۹۷ کلوین خطا خواهد داشت.

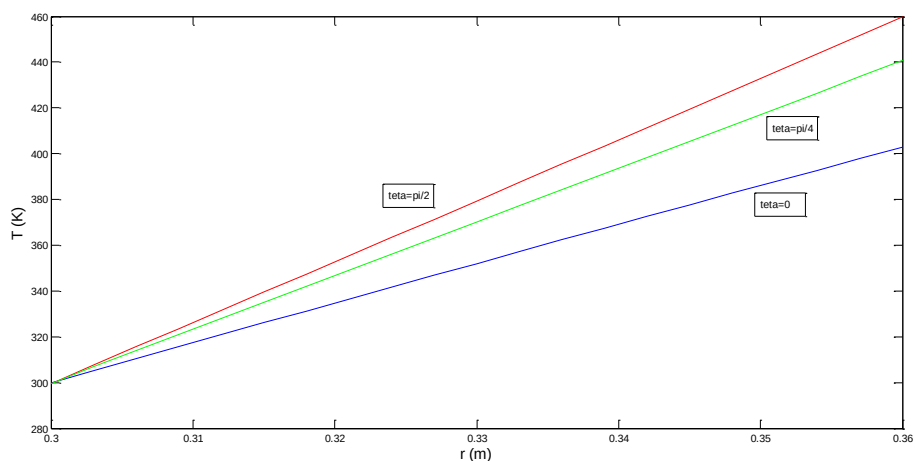


شکل ۴-۵ نمودار دما بر حسب شعاع نیمکره در زوایای 0° ، 45° و 90° به ازای تعداد جملات لژاندر برابر ۱



شکل ۴-۶ کانتور دما به دست آمده در حل تحلیلی برای مورد ۱ تعداد جملات لژاندر در نظر گرفته شده برابر ۲ است.

با توجه به شکل ۴-۶، بیشینه دمای به دست آمده در نیمکره برابر $459/91$ کلوین است. اضافه کردن جمله دوم لژاندر منجر به کاهش بیشینه دمای نیمکره از $460/65$ کلوین به $459/91$ کلوین شد. در این حالت مقدار خطای بیشینه دما نسبت به حل تحلیلی دقیق (حل با در نظر گرفتن ۶ جمله لژاندر) برابر $17/23$ کلوین است.



شکل ۴-۷ نمودار دما بر حسب شعاع نیمکره در زوایای ۰، ۴۵° و ۹۰° به ازای تعداد جملات لژاندر برابر ۲

جدول ۴-۲، مقادیر بیشینه‌ی دمای به‌دست‌آمده برای نیمکره، به ازای تعداد جملات لژاندر را نشان می‌دهد:

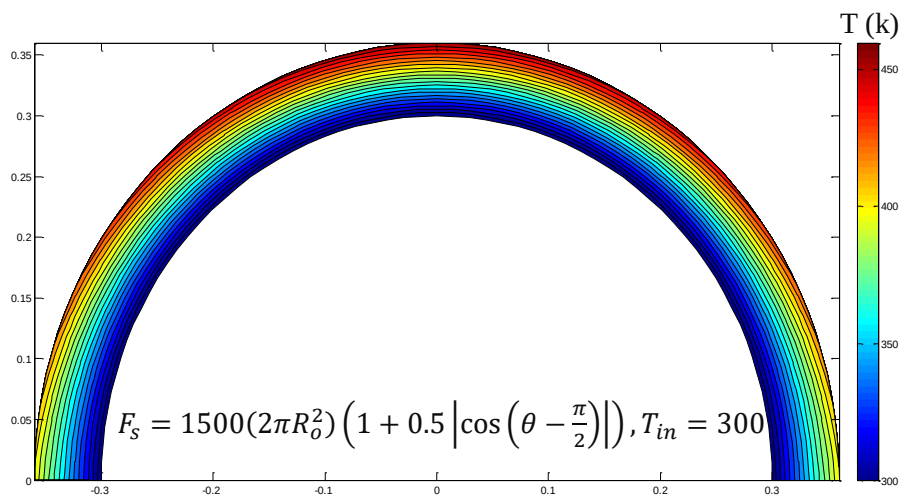
جدول ۴-۲ بیشینه‌ی دمای به‌دست‌آمده در نیمکره به ازای تعداد جملات لژاندر در نظر گرفته‌شده برای مورد ۱

تعداد جملات لژاندر در نظر گرفته‌شده	بیشینه‌ی دمای به‌دست‌آمده در نیمکره
۱	۴۶۰/۶۵
۲	۴۵۹/۹۱
۴	۴۵۷/۰۹
۶	۴۴۲/۶۸

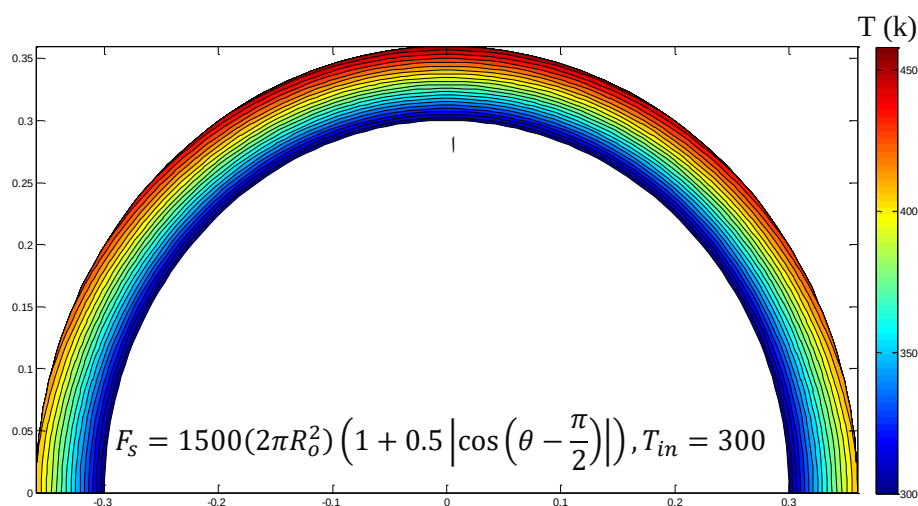
با توجه به جدول ۴-۲، با افزایش تعداد جملات لژاندر، بیشینه‌ی دمای نیمکره در حل تحلیلی به بیشینه‌ی دمای به‌دست‌آمده در حل عددی نزدیک می‌شود. با افزایش شار حرارتی سطح خارجی نیمکره، دمای پوسته‌ی آن افزایش می‌یابد.

۴-۲-۴ شرایط مرزی مورد ۲

چنان چه مقدار بیشینه‌ی چگالی شار برابر ۱۵۰۰ وات بر مترمربع باشد و دما در سطح داخلی نیمکره، شرط مرزی دما ثابت و برابر ۳۰۰ کلوین در نظر گرفته شود، کانتورهای دما در حل تحلیلی و عددی به صورت زیر خواهند بود:



شکل ۴-۸ کانتور دما به دست آمده در حل تحلیلی برای مورد ۲



شکل ۹-۴ کانتور دما به دست آمده در حل عددی برای مورد ۲

جدول ۳-۴ مقایسه‌ی مقادیر بیشینه و کمینه‌ی دما در دو حل تحلیلی و عددی مورد ۲

حل عددی	حل تحلیلی	
۴۵۸/۰۸	۴۵۹/۲۹	بیشینه‌ی دما (کلوین)
۳۰۰	۳۰۰	کمینه‌ی دما (کلوین)

با توجه به شکل‌های ۸-۴ و ۹-۴،

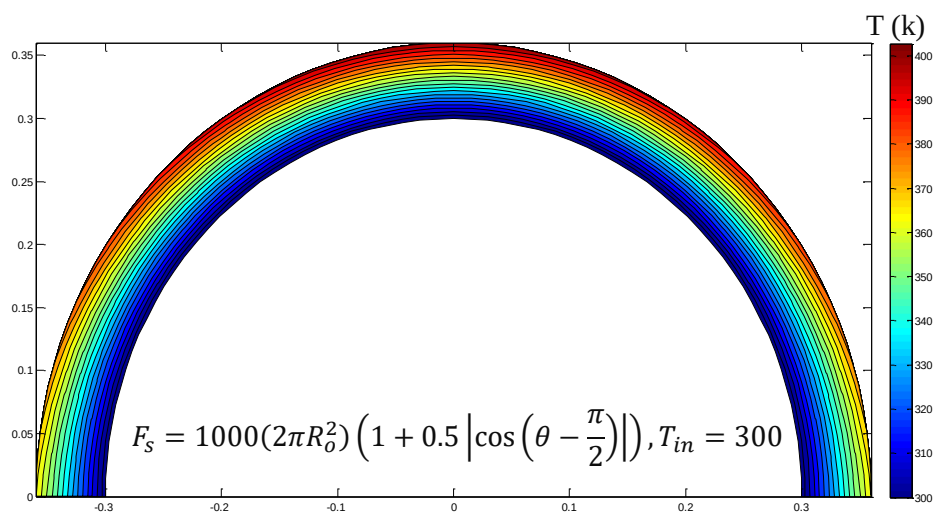
به ازای شار حرارتی $F_s = 1500(2\pi R_o^2) \left(1 + 0.5 \left|\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right|\right)$ در سطح خارجی نیمکره،

بیشینه‌ی دما برابر ۴۵۹/۲۹ کلوین خواهد شد. هم‌چنین تطابق قابل قبول بین نتایج حل عددی و نتایج

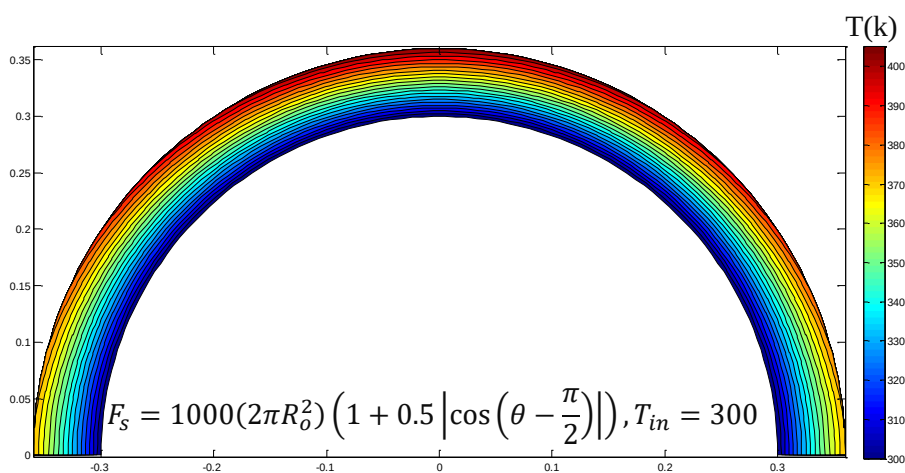
تحلیلی به دست آمده در پژوهش پیش رو مشاهده می‌شود.

۴-۲-۵ شرایط مرزی مورد ۳

چنان چه مقدار بیشینه‌ی چگالی شار برابر ۱۰۰۰ وات بر مترمربع باشد و دما در سطح داخلی نیمکره، شرط مرزی دما ثابت و برابر ۳۰۰ کلوین در نظر گرفته شود، کانتورهای دما در حل تحلیلی و عددی به صورت زیر خواهند بود:



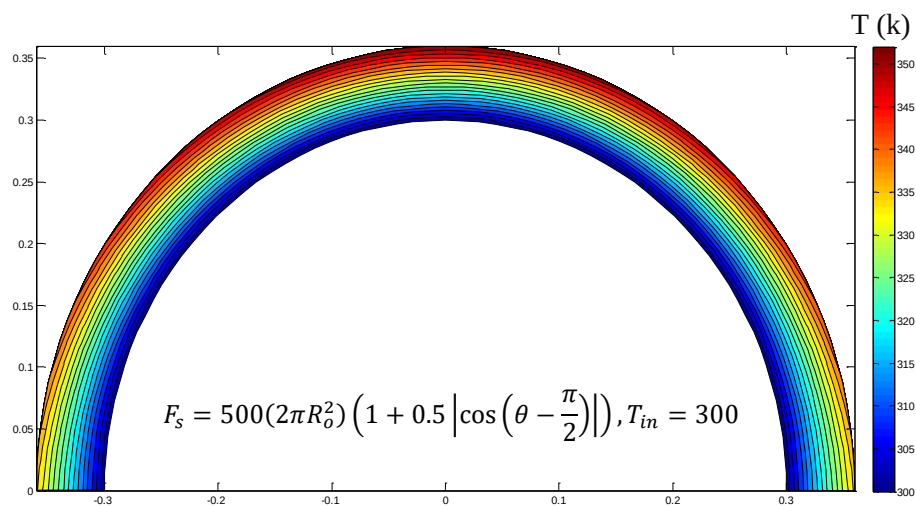
شکل ۴-۱۰ کانتور دما به دست آمده در حل تحلیلی برای مورد ۳



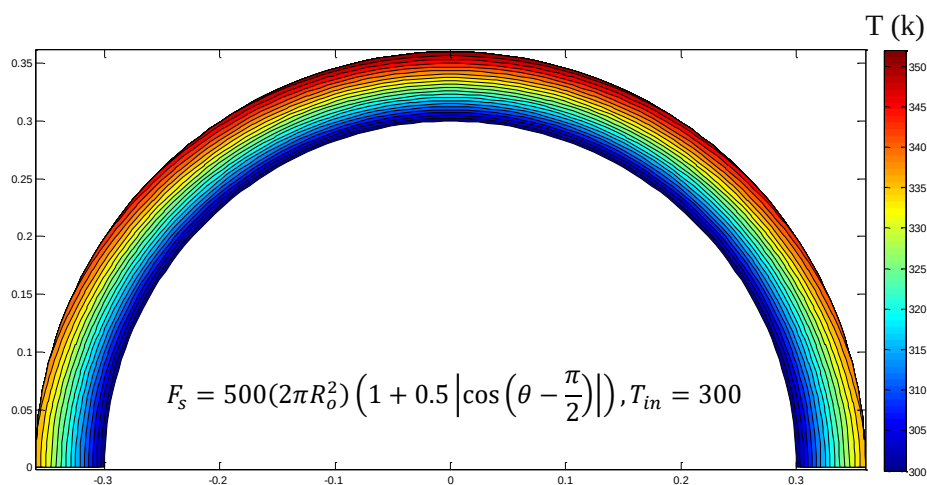
شکل ۴-۱۱ کانتور دما به دست آمده در حل عددی برای مورد ۳

۴-۲-۴ شرایط مرزی مورد ۴

چنان چه مقدار بیشینه‌ی چگالی شار برابر ۵۰۰ وات بر مترمربع باشد و دما در سطح داخلی نیمکره، شرط مرزی دما ثابت و برابر ۳۰۰ کلوین در نظر گرفته شود، کانتورهای دما در حل تحلیلی و عددی به صورت زیر خواهند بود:



شکل ۴-۲ کانتور دما به دست آمده در حل تحلیلی برای مورد ۴



شکل ۴-۲ کانتور دما به دست آمده در حل عددی برای مورد ۴

دو نمودار به دست آمده کاملاً شبیه به هم هستند. اما مقادیر دما در بعضی نقاط تا حدود ۱ درجه سانتی گراد اختلاف دارند که در مقایسه با مقادیر دما (۳۰۰ تا ۳۵۲ کلوین) مقداری ناچیز و قابل چشم پوشی است.

جدول ۴-۴ مقایسه‌ی مقادیر بیشینه و کمینه‌ی دما در دو حل تحلیلی و عددی به ازای مقادیر مختلف شار حرارتی در سطح خارجی نیمکره

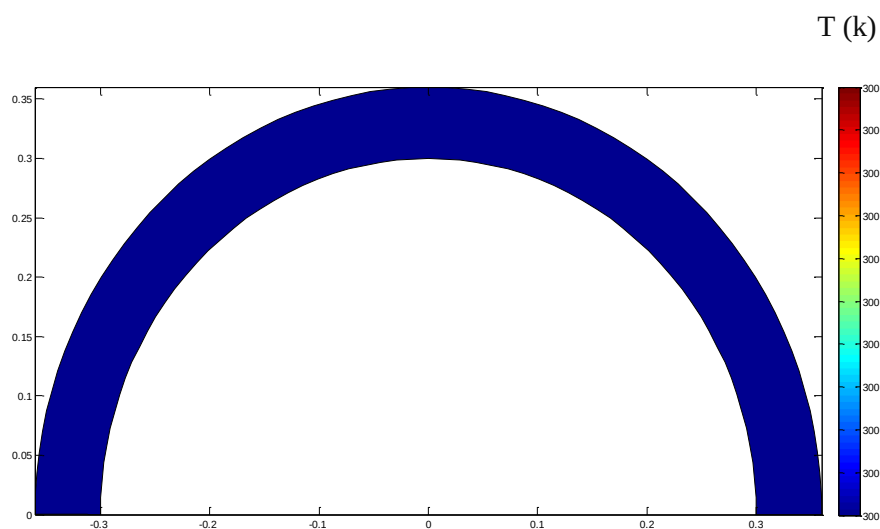
$F_s = 1000(2\pi R_o^2) \left(1 + 0.5 \left \cos \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \right \right)$		$F_s = 500(2\pi R_o^2) \left(1 + 0.5 \left \cos \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \right \right)$		
حل عددی	حل تحلیلی	حل عددی	حل تحلیلی	
۴۰۵/۳۹	۴۰۳/۴۶	۳۵۲/۶۹	۳۵۲/۱۲	بیشینه‌ی دما (کلوین)
۳۰۰	۳۰۰	۳۰۰	۳۰۰	کمینه‌ی دما (کلوین)

۳-۴ حل ناپایا

در این قسمت، نتایج مربوط به حل ناپایا ارائه می‌شود. نتایج به دست آمده در زمان‌های مختلف رسم شده و با نتایج حل عددی مقایسه خواهند شد.

۳-۴-۱ شرط مرزی و شرط اولیه

در حل ناپایا، شرایط مرزی، مشابه حل پایا در نظر گرفته شده است. به این صورت که در سطح داخلی نیمکره، مقدار دما ثابت و برابر ۳۰۰ کلوین است. در زمان اولیه، مقدار دما در تمام دامنه (به جز نواحی مرزی)، ثابت و برابر ۳۰۰ کلوین در نظر گرفته شده است.



شکل ۴-۱۴ کانتور دمای نیمکره در زمان اولیه

۲-۳-۴ ورودی‌های برنامه

حل ناپایا از مجموع دو حل پایا و حل متغیر بازمان، حاصل می‌شود. ورودی‌های برنامه برای حالت ناپایا مشابه قسمت ۲-۲-۴ است با این تفاوت که پارامترهای زیر به آن اضافه می‌شود:

- ۱- مدت‌زمان شبیه‌سازی: عبارت است از مدت‌زمان انجام انتقال حرارت. هر چه این زمان بیش‌تر باشد، حل ناپایا به حل پایا نزدیک‌تر خواهد شد. در حالت حدی با میل مدت‌زمان شبیه‌سازی به بی‌نهایت، حل ناپایا بر حل پایا منطبق خواهد شد.

۲- چگالی هر لایه

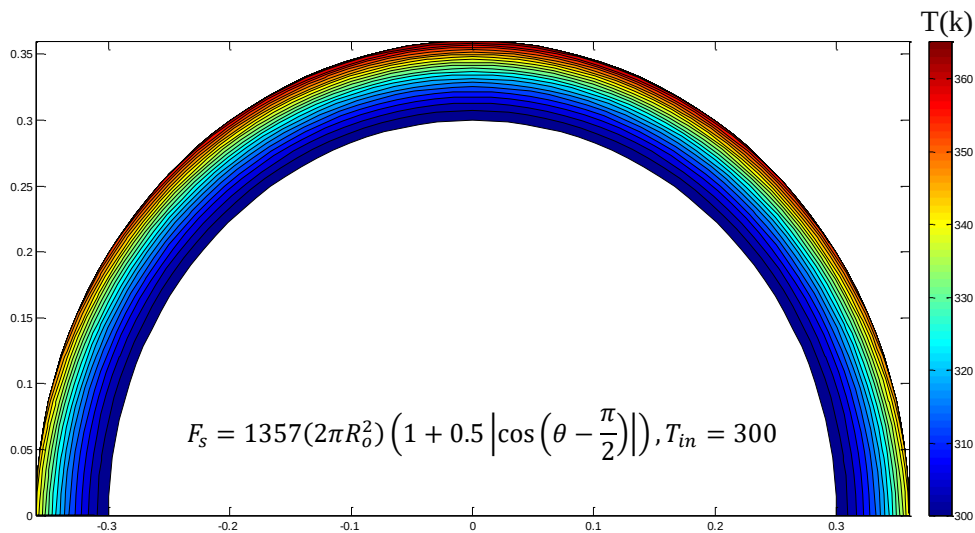
۳- ظرفیت گرمایی ویژه هر لایه

جدول ۴-۵ ورودی‌های برنامه برای حل ناپایا مورد ۱

تعداد لایه‌ها	۶
ضخامت هر لایه	۱ سانتی‌متر
زاویه الیاف	۹۰ درجه
k_{11}	$10 \frac{w}{m.k}$
k_{22}	$0.4 \frac{w}{m.k}$
β	-۰/۰۰۰۸۵
چگالی هر لایه	$500 \frac{kg}{m^3}$
ظرفیت گرمایی ویژه هر لایه	$2500 \frac{j}{kg.k}$
شار حرارتی در سطح خارجی	$F_s = 1357(2\pi R_o^2) \left(1 + 0.5 \left \cos \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \right \right)$
دما در سطح داخلی	۳۰۰ کلوین
مدت‌زمان شبیه‌سازی	۴۲۰ ثانیه

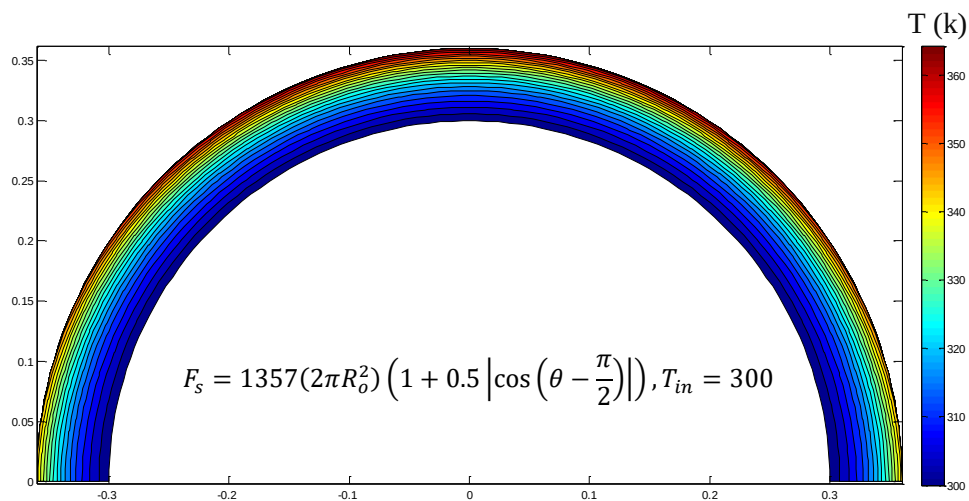
۳-۳-۴ نتایج به‌دست‌آمده برای حالت ناپایا

در این قسمت فرض شده است که هر شش لایه مشابه هم بوده و از مواد یکسان ساخته‌شده باشند.



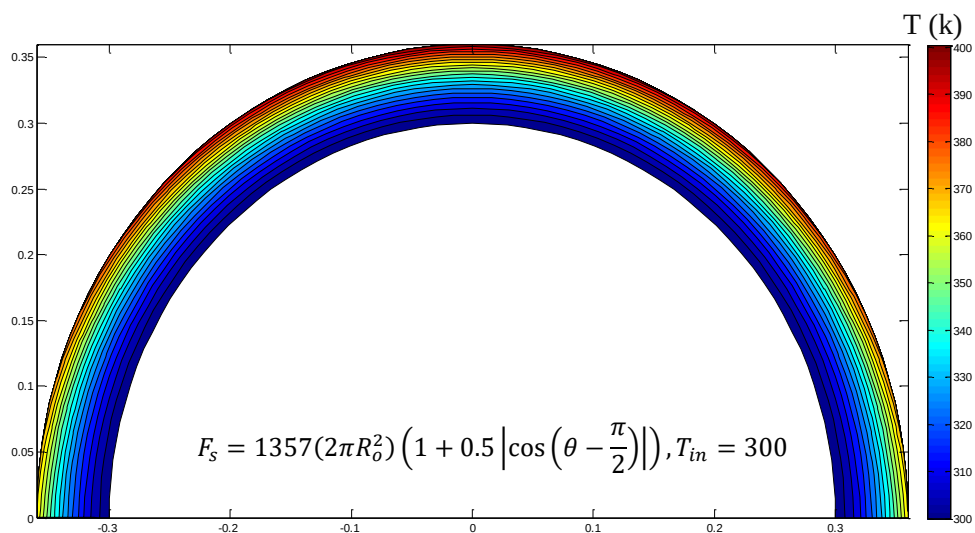
شکل ۴-۱۵ کانتور دما برای حل تحلیلی در زمان ۴۲ ثانیه

شکل ۴-۱۵، کانتور دما را در زمان ۴۲ ثانیه نشان می‌دهد. بیشینه‌ی دما در سطح خارجی نیمکره و در $\theta = 90^\circ$ ایجاد می‌شود و مقدار آن برابر $365/06$ کلوین است. کمینه‌ی دما نیز برابر 300 کلوین است. اندازه‌ی دما در سطح خارجی نیمکره و در $\theta = 0^\circ$ و $\theta = 180^\circ$ ، نیز به ترتیب برابر با $343/03$ و $343/21$ کلوین است.



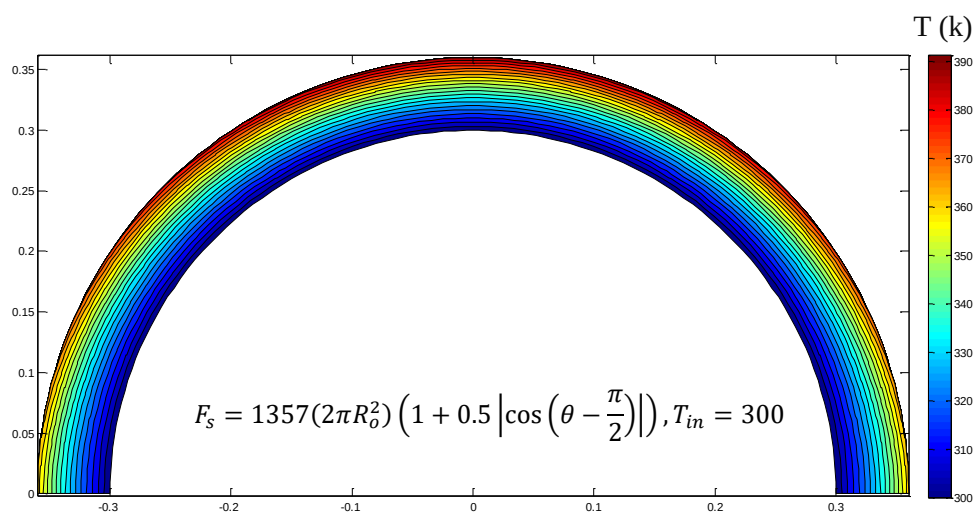
شکل ۴-۱۶ کانتور دما برای حل عددی در زمان ۴۲ ثانیه

شکل ۴-۱۶، بیشینه‌ی دما را در حل عددی برابر ۳۶۴/۱۵ کلوین و کمینه‌ی دما را برابر ۳۰۰ کلوین نشان می‌دهد. به دلیل این‌که تنها ۴۲ ثانیه از زمان حل گذشته است؛ در هر دو شکل ۴-۱۵ و ۴-۱۶، بیش‌تر نواحی داخلی کره هنوز سرد هستند. هر دو حل تحلیلی و عددی در زمان ۴۲ ثانیه تطابق خوبی دارند.

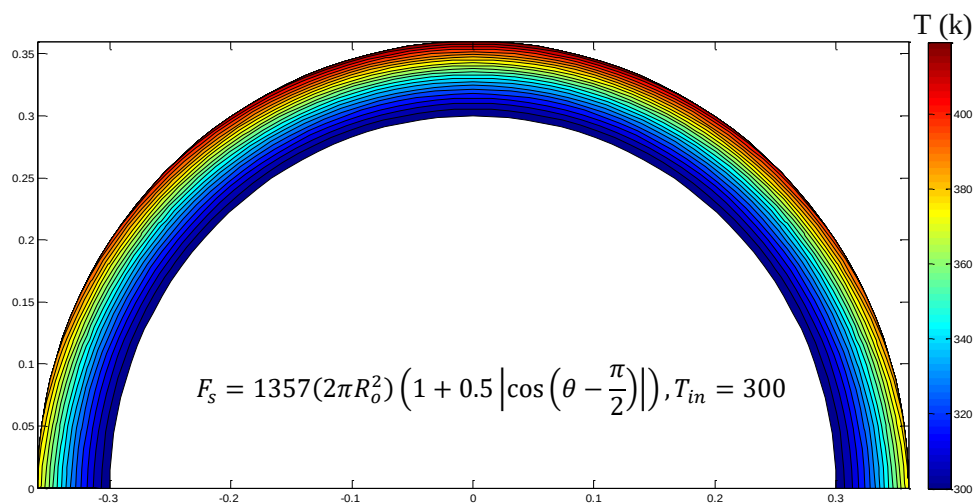


شکل ۴-۱۷ کانتور دما برای حل تحلیلی در زمان ۸۴ ثانیه

باگذشت زمان، نواحی داخلی پوسته‌ی نیمکره گرم شده و بیشینه‌ی دما نیز افزایش می‌یابد. بیشینه‌ی دمای به‌دست‌آمده در حل تحلیلی در زمان ۸۴ ثانیه برابر ۴۰۰/۴۳ کلوین است.

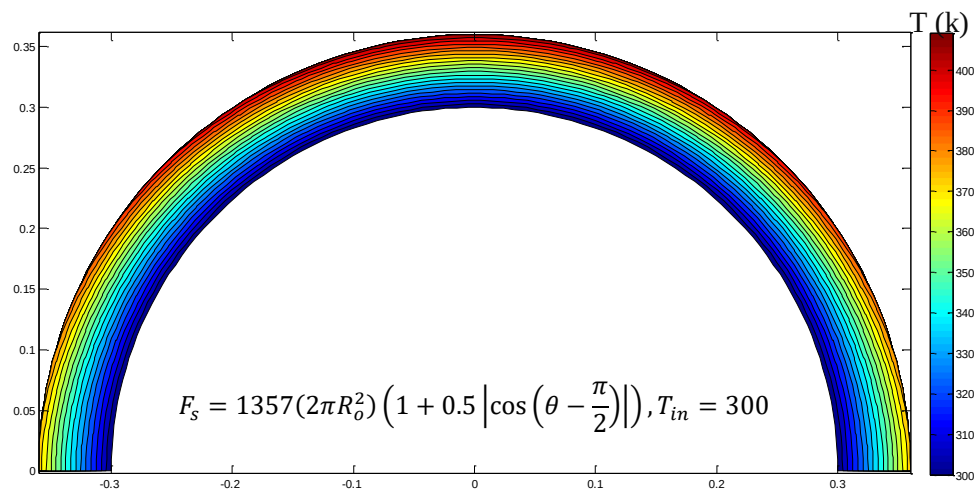


شکل ۴-۱۸ کانتور دما برای حل عددی در زمان ۸۴ ثانیه

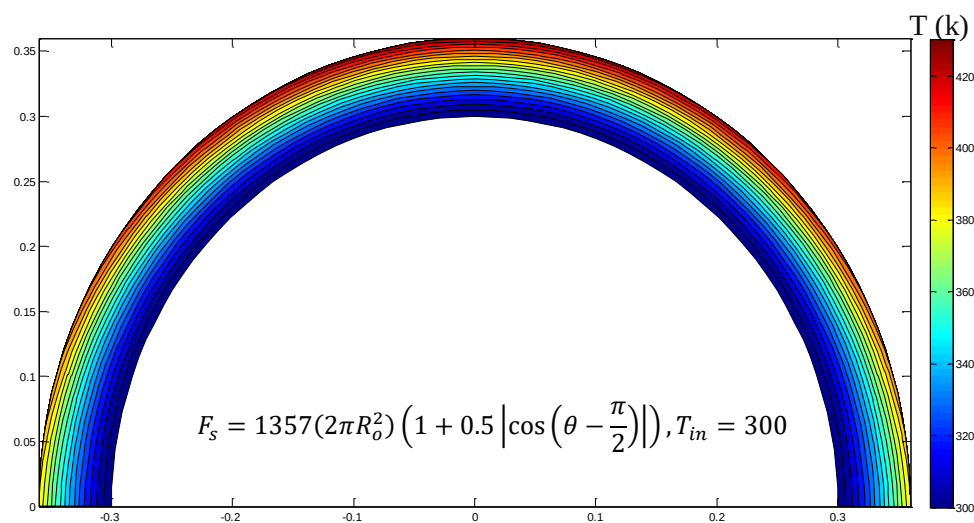


شکل ۴-۱۹ کانتور دما برای حل تحلیلی در زمان ۱۲۶ ثانیه

مقادیر دما در سطح خارجی نیمکره و در $\theta = 0^\circ$ و $\theta = 180^\circ$ ، به ترتیب برابر $378/34$ و $378/52$ کلوین است. لازم به ذکر است که در مثال پیش رو به علت تقارن شرایط مرزی، دما در $\theta = 0^\circ$ و $\theta = 180^\circ$ باید باهم برابر باشند اما به علت خطاهای محاسباتی، دما در این دونقطه حدود $0/18$ کلوین اختلاف دارند.



شکل ۴-۲۰ کانتور دما برای حل عددی در زمان ۱۲۶ ثانیه

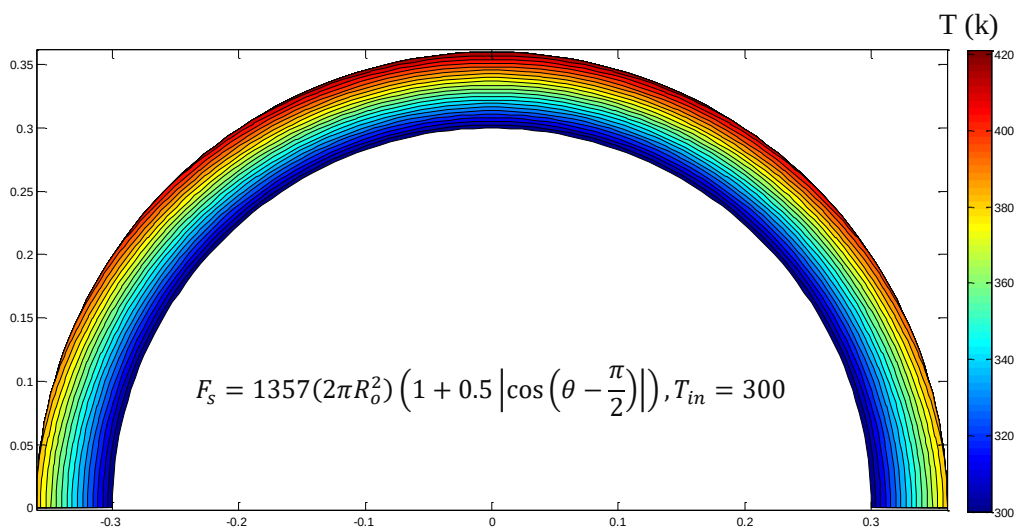


شکل ۴-۲۱ کانتور دما برای حل تحلیلی در زمان ۱۶۸ ثانیه

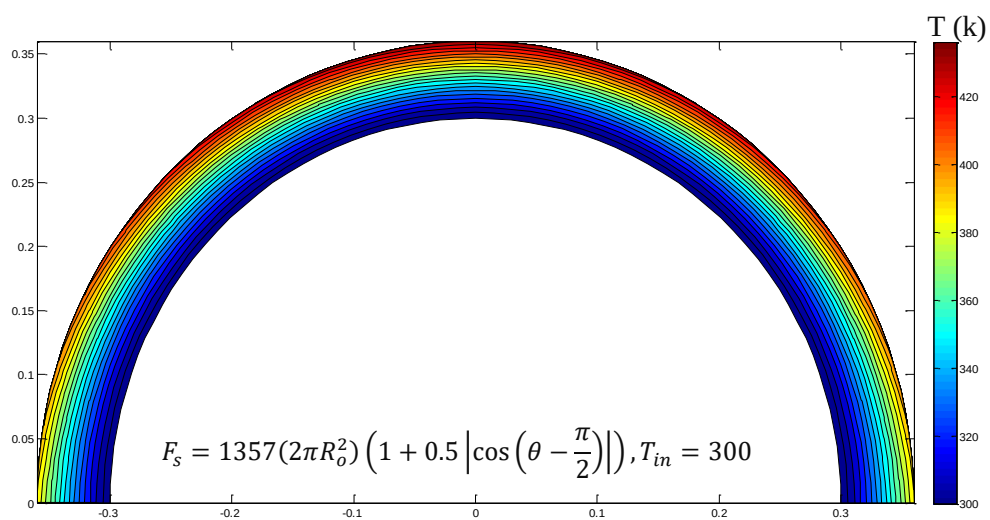
باگذشت ۱۶۸ ثانیه از اعمال شار حرارتی بر سطح خارجی نیمکره، دمای بیشینه در نیمکره که در سطح

خارجی آن و در $\theta = 90^\circ$ ، اتفاق می‌افتد، برابر $430/25$ کلوین می‌شود. دما در سطح خارجی نیمکره و در

$\theta = 0^\circ$ و $\theta = 180^\circ$ به ترتیب برابر $384/94$ و $385/11$ کلوین است.

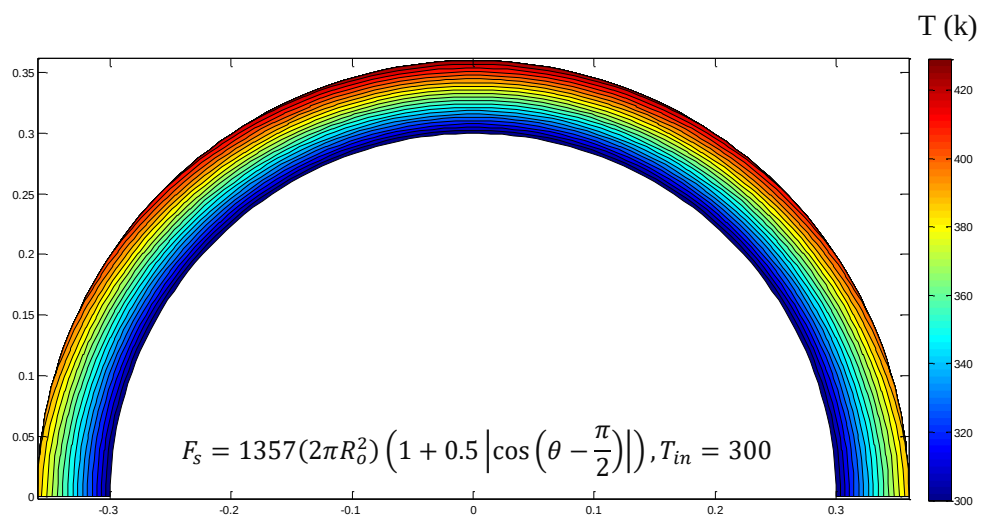


شکل ۴-۲۲ کانتور دما برای حل عددی در زمان ۱۶۸ ثانیه

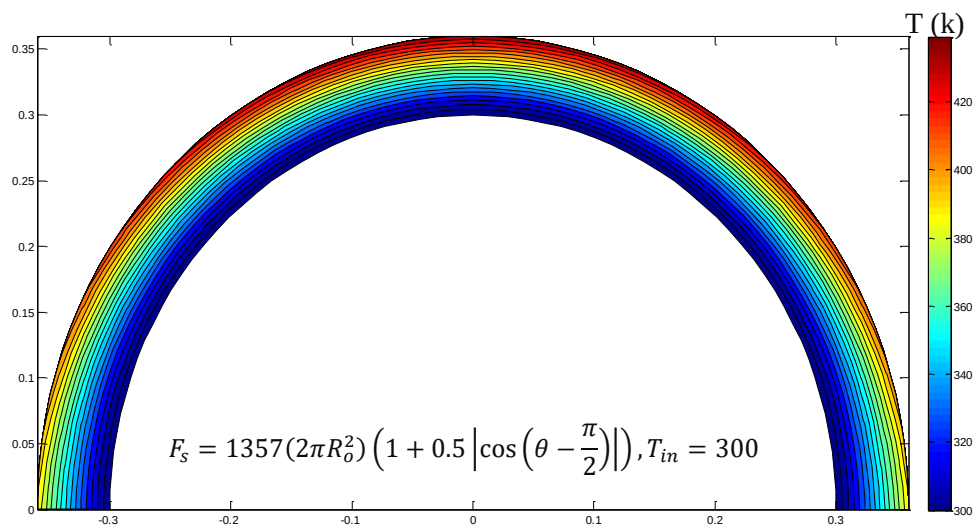


شکل ۴-۲۳ کانتور دما برای حل تحلیلی در زمان ۲۱۰ ثانیه

با توجه به شکل ۴-۲۳، بیشینه‌ی دما در نیمکره در زمان ۲۱۰ ثانیه، برابر ۴۳۵/۹۸ کلوین است. همچنین مقادیر دما در سطح خارجی نیمکره و در $\theta = 0^\circ$ و $\theta = 180^\circ$ ، به ترتیب برابر ۳۸۸/۴۸ و ۳۸۸/۶۵ کلوین است.

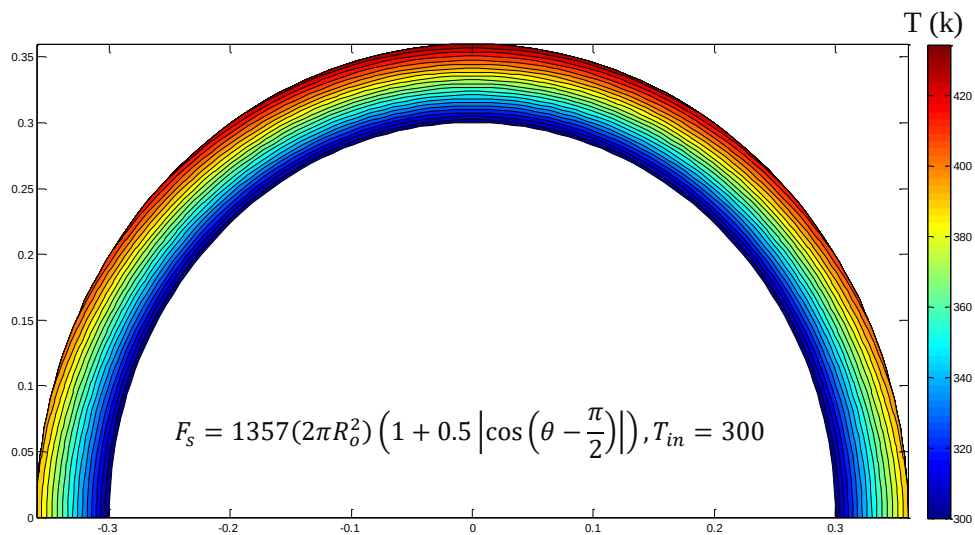


شکل ۴-۲۴ کانطور دما برای حل عددی در زمان ۲۱۰ ثانیه

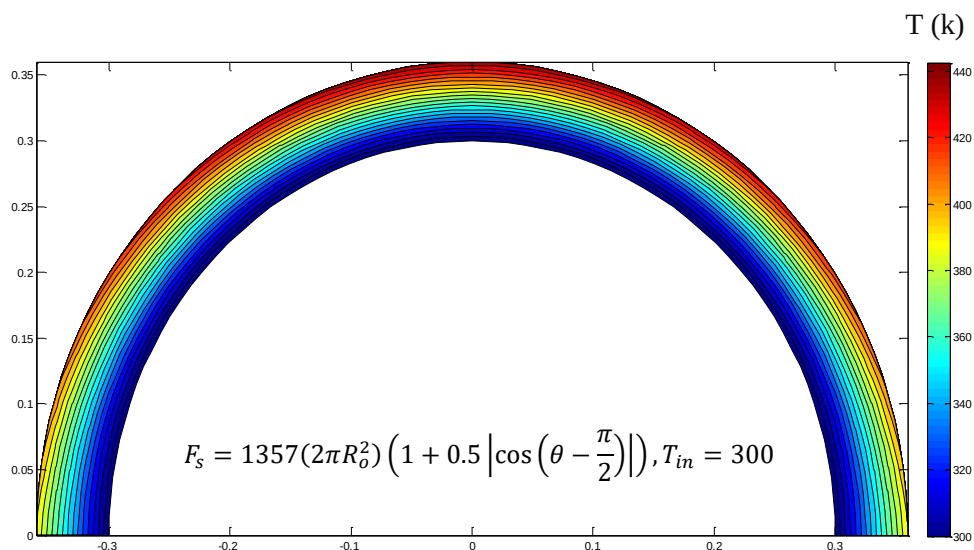


شکل ۴-۲۵ کانطور دما برای حل تحلیلی در زمان ۲۵۲ ثانیه

باگذشت ۲۵۲ ثانیه از اعمال شار حرارتی بر سطح خارجی نیمکره، دمای بیشینه در نیمکره که در سطح خارجی آن و در $\theta = 90^\circ$ ، اتفاق می‌افتد، برابر ۴۳۹/۱۱ کلوین می‌شود. دما در سطح خارجی نیمکره و در $\theta = 0^\circ$ و $\theta = 180^\circ$ ، به ترتیب برابر ۳۹۰/۳۸ و ۳۹۰/۵۴ کلوین است.

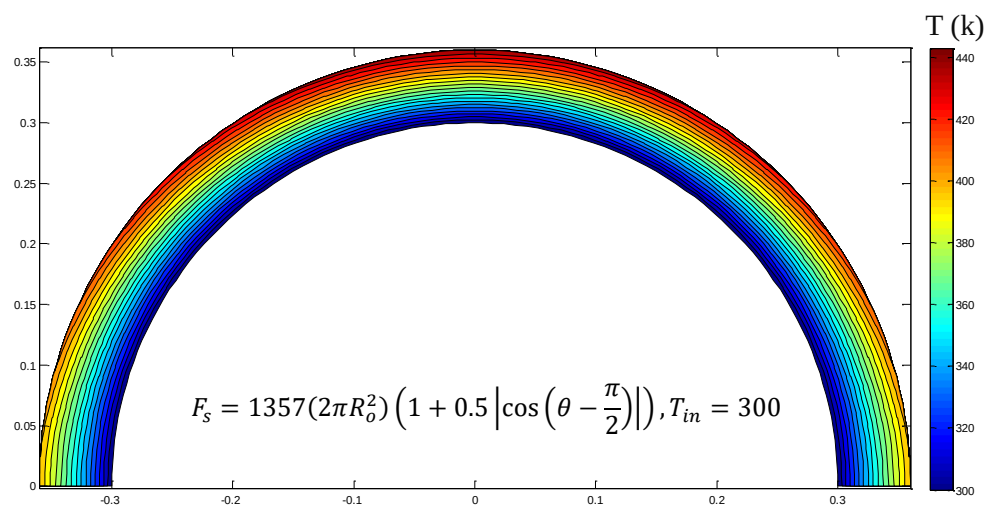


شکل ۴-۲۶ کانتور دما برای حل عددی در زمان ۲۵۲ ثانیه

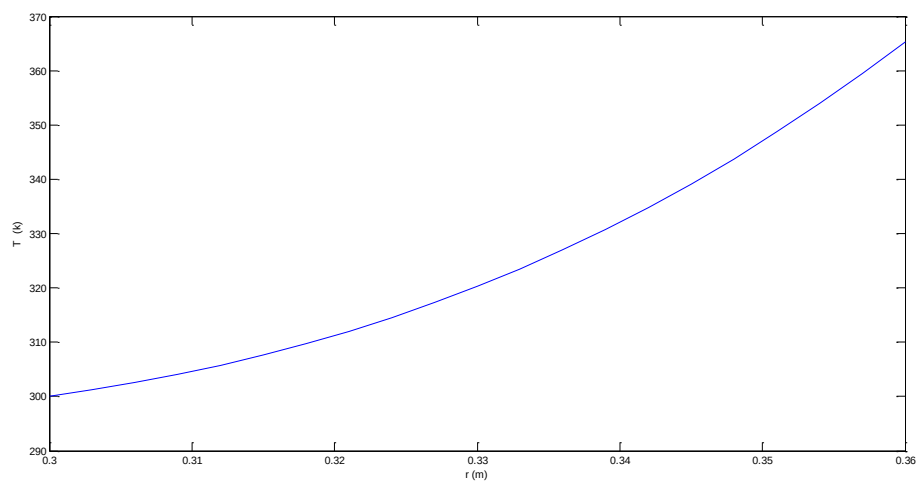


شکل ۴-۲۷ کانتور دما برای حل تحلیلی در زمان ۴۲۰ ثانیه

با توجه به شکل ۴-۲۷ بیشینه‌ی دما در نیمکره در زمان ۴۲۰ ثانیه، برابر ۴۴۲/۵۳ کلوین است. همچنین مقادیر دما در سطح خارجی نیمکره و در $\theta = 0^\circ$ و $\theta = 180^\circ$ ، به ترتیب برابر ۳۹۲/۳۸ و ۳۹۲/۵۴ کلوین است. با زیادشدن زمان، مقادیر دما به سمت دمای پایا میل می‌کنند. با توجه به شکل ۴-۲۷ بیشینه‌ی دما در حل پایا که در سطح خارجی نیمکره و در $\theta = 90^\circ$ ، اتفاق می‌افتد، برابر ۴۴۲/۶۸ کلوین و در $\theta = 0^\circ$ و $\theta = 180^\circ$ ، برابر با ۳۹۲/۴۴ کلوین است.

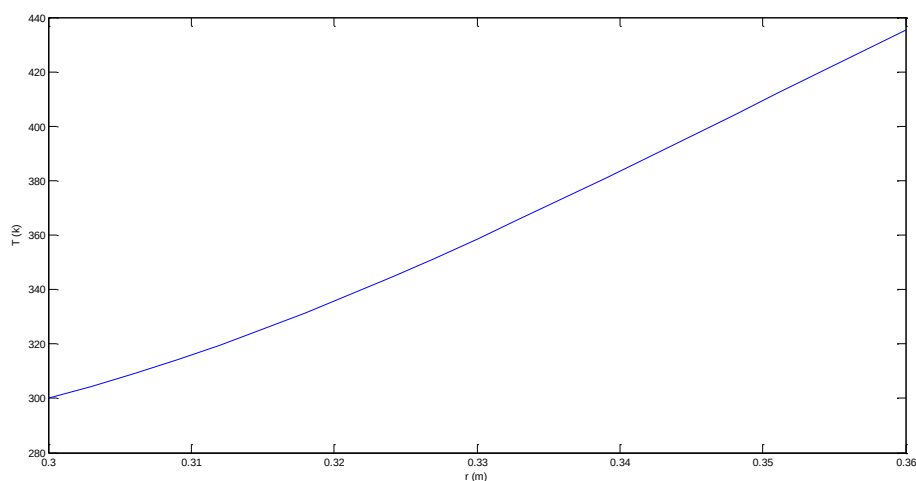


شکل ۴-۲۸ کانتور دما برای حل عددی در زمان ۴۲۰ ثانیه



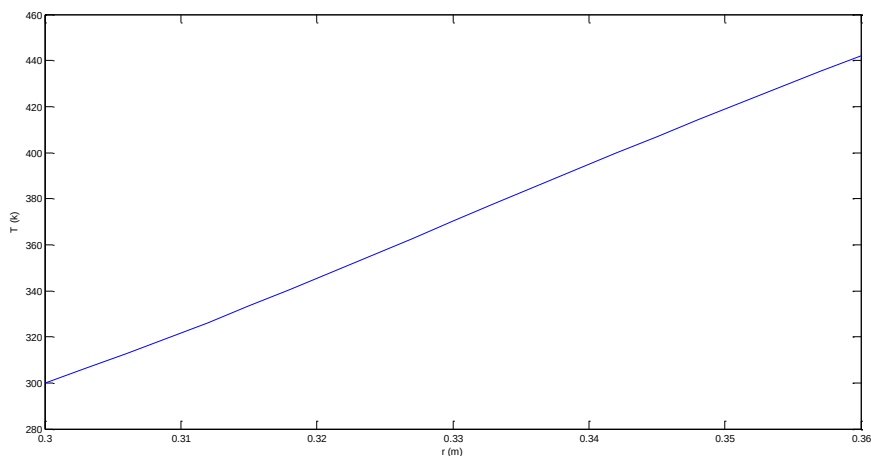
شکل ۴-۲۹ نمودار دما در راستای شعاعی در $\theta = 90^\circ$ در زمان ۴۲۰ ثانیه

با توجه به شکل ۴-۲۹، شیب نمودار دما در سطح خارجی نیمکره ($r = 0.36$)، زیاد است و با کاهش مقدار r ، شیب نمودار دما کاهش می‌یابد. به این معنا که مقدار شار حرارتی در نواحی بیرونی پوسته‌ی نیمکره زیاد است و با جذب مقداری از این حرارت توسط نیمکره، از مقدار شار حرارتی در نواحی داخلی نیمکره کاسته می‌گردد.



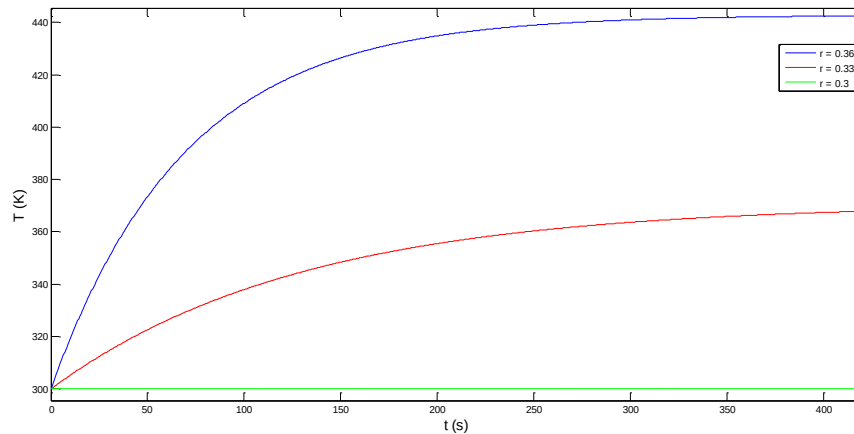
شکل ۴-۳۰ نمودار دما در راستای شعاعی در $\theta = 90^\circ$ در زمان ۲۱۰ ثانیه

باگذشت زمان و میل کردن نمودار دمای حالت ناپایا، به سمت حالت پایا، تغییرات دما نسبت به زمان کاهش می‌یابد که به معنای کاهش مقدار گرمای جذب‌شده توسط پوسته‌ی نیمکره است.



شکل ۴-۳۱ نمودار دما در راستای شعاعی در $\theta = 90^\circ$ در زمان ۴۲۰ ثانیه

در زمان ۴۲۰ ثانیه، حل به حالت پایا رسیده است و تغییرات دما نسبت به زمان، تقریباً برابر صفر است. در این زمان شار حرارتی در سطح خارجی و داخلی نیمکره باهم برابر هستند.

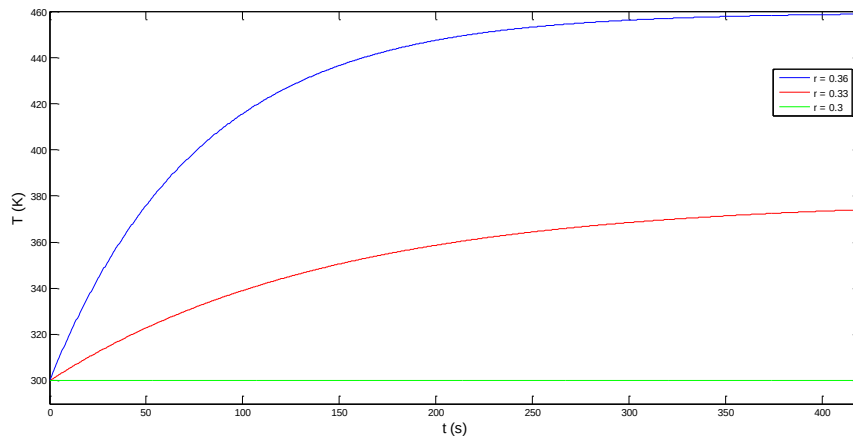


شکل ۴-۳۲ نمودار تغییرات دما در سه نقطه‌ی $\Gamma = 0/3$ ، $\Gamma = 0/33$ ، $\Gamma = 0/36$ و $\theta = 90^\circ$ برحسب زمان برای مورد

۱

شکل ۴-۳۲، تغییرات دما برحسب زمان را در سه نقطه‌ی واقع بر سطح داخلی نیمکره، میانه‌ی پوسته و سطح خارجی نیمکره نشان می‌دهد. دمای نقطه‌ی واقع بر سطح داخلی (نمودار سبزرنگ)، به علت شرط مرزی داده‌شده، ثابت و برابر ۳۰۰ کلوین است. دما در $\Gamma = 0/33$ و $\Gamma = 0/36$ ، به صورت نمایی^۱ افزایش یافته و به مقدار پایا می‌رسد. طبق شکل ۴-۳۲، مدت زمان ۲۰۴/۹۶ ثانیه طول می‌کشد تا دما در $\Gamma = 0/36$ و $\theta = 90^\circ$ به ۹۵ درصد دمای حالت پایا برسد. این عدد برای نقطه‌ی $\Gamma = 0/33$ و $\theta = 90^\circ$ ، ۳۱۶/۶۸ ثانیه است.

^۱ exponential



شکل ۴-۳ نمودار تغییرات دما در سه نقطه‌ی $r=0/36$ ، $r=0/33$ ، $r=0/3$ و $\theta = 90^\circ$ برحسب زمان برای مورد

۲

با توجه به شکل ۴-۳، مدت زمان $225/96$ ثانیه طول می‌کشد تا دما در $r=0/36$ و $\theta = 90^\circ$ به ۹۵ درصد دمای حالت پایا برسد. این عدد برای نقطه‌ی $r=0/33$ و $\theta = 90^\circ$ $330/54$ ثانیه است. با افزایش شار حرارتی در سطح خارجی نیمکره، دمای حالت پایا نیز افزایش یافته و در نتیجه زمان لازم برای پایا شدن دما نیز افزایش می‌یابد.

۴-۴ بررسی اثر چگالی و ظرفیت گرمایی ویژه بر نتایج حاصل از حل ناپایا

در قسمت حل ناپایا، چگالی و ظرفیت گرمایی ویژه هر شش لایه به ترتیب برابر 500 kg/m^3 و

2500 J/kg.K در نظر گرفته شد.

۴-۴-۱ بررسی اثر چگالی و ظرفیت گرمایی ویژه مورد ۵

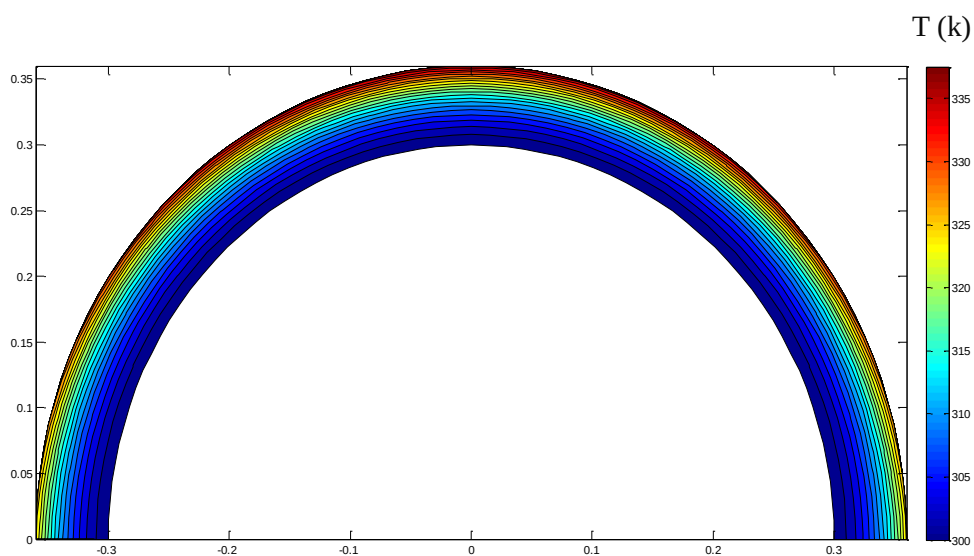
در این قسمت، به منظور بررسی اثر چگالی، مقادیر چگالی و گرمای ویژه را به ترتیب برابر 1000 kg/m^3 و 2500 J/kg.K قرار می‌دهیم. ورودی‌های برنامه به صورت زیر است:

جدول ۴-۶ ورودی‌های برنامه برای بررسی اثر چگالی و ظرفیت گرمایی ویژه مورد ۵

تعداد لایه‌ها	۶
ضخامت هر لایه	۱ سانتی‌متر
زاویه الیاف	۹۰ درجه
k_{11}	$10 \frac{W}{m.K}$
k_{22}	$0.4 \frac{W}{m.K}$
β	-0.00085
چگالی هر لایه	$1000 \frac{kg}{m^3}$
ظرفیت گرمایی ویژه هر لایه	$2500 \frac{J}{kg.K}$
شار حرارتی در سطح خارجی	$F_s = 1357(2\pi R_o^2) \left(1 + 0.5 \left \cos \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \right \right)$
دما در سطح داخلی	۳۰۰ کلوین
مدت زمان شبیه‌سازی	۴۲۰ ثانیه

واضح است که تغییر چگالی در حل پایا تغییری ایجاد نمی‌کند و مقدار بیشینه‌ی دمای نیمکره در حل پایا،

مشابه حالت قبل و برابر $442/68$ کلوین است. نتایج حل ناپایا در این حالت به صورت زیر است:



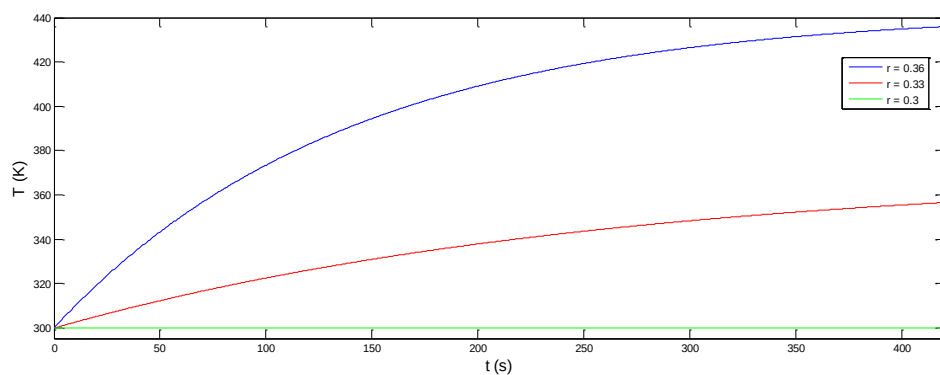
شکل ۴-۳۴ کانتور دما برای حل تحلیلی مورد ۵ در زمان ۴۲ ثانیه

با توجه به شکل ۴-۳۴، بیشینه‌ی دما در زمان ۴۲ ثانیه، برابر 337.50 کلوین است در حالی که در قسمت

قبل (چگالی برابر 500 kg/m^3 و ظرفیت گرمایی ویژه برابر 2500 J/kg.K ، بیشینه‌ی دما در زمان ۴۲

ثانیه، برابر 365.06 کلوین به دست آمد. بنابراین طبق نتایج به دست آمده افزایش چگالی منجر به کند شدن

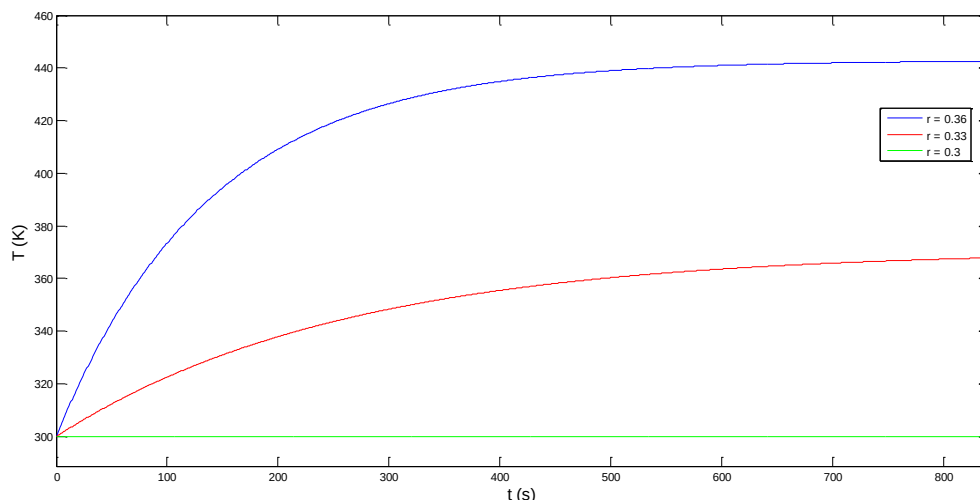
فرایند تغییر دما می‌شود.



شکل ۴-۳۵ نمودار تغییرات دما در سه نقطه‌ی $r = 0.3$ ، $r = 0.33$ ، $r = 0.36$ و $\theta = 90^\circ$ بر حسب زمان در

مدت زمان ۴۲۰ ثانیه برای مورد ۵

با توجه به شکل ۴-۳۵، باگذشت ۴۲۰ ثانیه، نمودار دما هنوز به حالت پایا نرسیده است. چنان چه زمان شبیه سازی را به ۸۴۰ ثانیه افزایش دهیم، نمودار تغییرات دما در سه نقطه‌ی $r = 0/36$ ، $r = 0/33$ ، $r = 0/3$ و $\theta = 90^\circ$ برحسب زمان، به صورت زیر شکل ۴-۳۶، خواهد بود.



شکل ۴-۳۶ نمودار تغییرات دما در سه نقطه‌ی $r = 0/36$ ، $r = 0/33$ ، $r = 0/3$ و $\theta = 90^\circ$ برحسب زمان در مدت زمان ۸۴۰ ثانیه برای مورد ۵

مدت زمانی که طول می کشد تا دما در $r = 0/36$ و $r = 0/33$ به ۹۵ درصد حالت پایا برسد به ترتیب برابر $409/92$ ثانیه و $633/36$ ثانیه است درحالی که این دو عدد در حالت قبل که در آن چگالی هر لایه برابر 500 kg/m^3 بود، به ترتیب برابر $204/96$ و $316/68$ ثانیه به دست آمد.

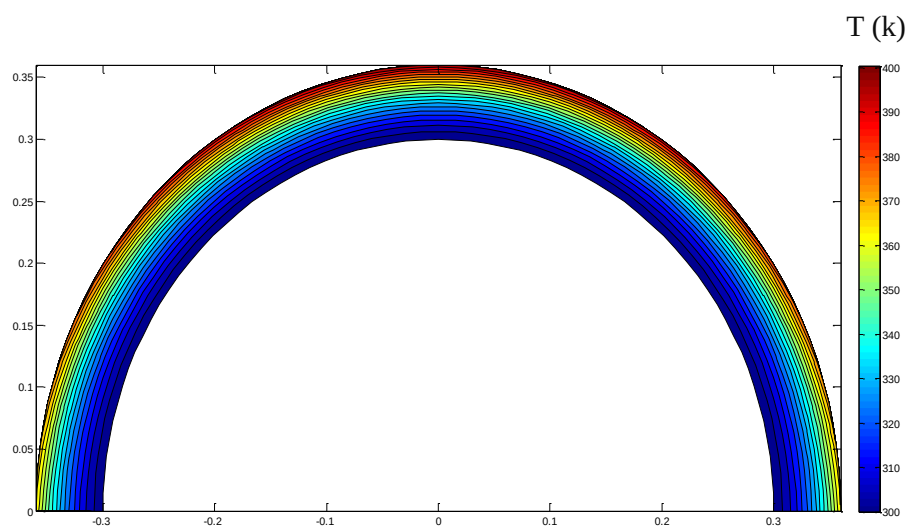
۴-۴-۲ بررسی اثر چگالی و ظرفیت گرمایی ویژه مورد ۶

برای بررسی اثر کاهش ظرفیت گرمایی ویژه بر نتایج، با ثابت در نظر گرفتن چگالی، ظرفیت گرمایی ویژه را نصف می کنیم. در این حالت ورودی های برنامه به صورت زیر است:

جدول ۴-۷ ورودی‌های برنامه برای بررسی اثر چگالی و ظرفیت گرمایی ویژه مورد ۶

تعداد لایه‌ها	۶
ضخامت هر لایه	۱ سانتی‌متر
زاویه الیاف	۹۰ درجه
k_{11}	$10 \frac{w}{m.k}$
k_{22}	$0.4 \frac{w}{m.k}$
β	-0.00085
چگالی هر لایه	$500 \frac{kg}{m^3}$
ظرفیت گرمایی ویژه هر لایه	$1250 \frac{j}{kg.k}$
شار حرارتی در سطح خارجی	$F_s = 1357(2\pi R_o^2) \left(1 + 0.5 \left \cos \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \right \right)$
دما در سطح داخلی	۳۰۰ کلوین
مدت‌زمان شبیه‌سازی	۴۲۰ ثانیه

در این حالت نیز کاهش ظرفیت گرمایی ویژه بر حل پایا تأثیری ندارد. شکل ۴-۳۷، کانتور دمای نیمکره را در زمان ۴۲ ثانیه، نشان می‌دهد.



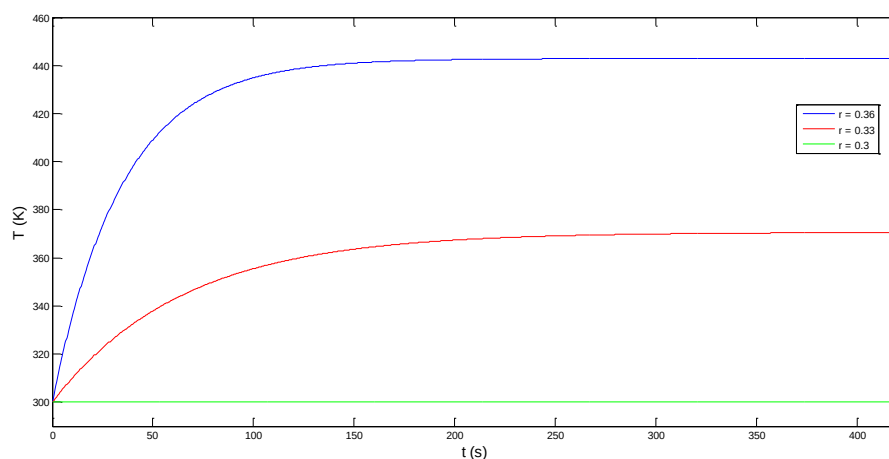
شکل ۴-۳۷ کانتور دما برای حل تحلیلی مورد ۶ در زمان ۴۲ ثانیه

بیشینه‌ی دما در شکل ۴-۳۷، برابر $400/43$ کلوین به دست آمده است. در حالتی که چگالی برابر

500 kg/m^3 و ظرفیت گرمایی ویژه برابر 2500 J/kg.K در نظر گرفته شد، بیشینه‌ی دما برابر $365/06$

کلوین به دست آمد. این نتیجه قابل انتظار است زیرا کاهش ظرفیت گرمایی ویژه منجر به سرعت گرفتن

فرایند افزایش دما می‌شود و حل تحلیلی انجام شده این امر را به وضوح نشان می‌دهد.



شکل ۴-۳۸ نمودار تغییرات دما در سه نقطه‌ی $r=0/36$ ، $r=0/33$ ، $r=0/3$ و $\theta = 90^\circ$ برحسب زمان در مدت زمان ۴۲۰ ثانیه برای مورد ۶

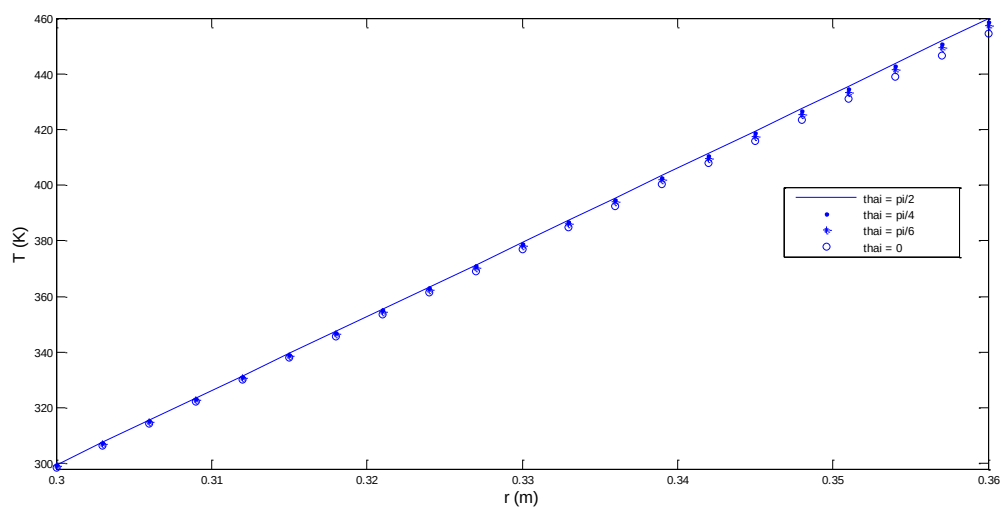
با توجه به شکل ۴-۳۸، مدت زمانی که طول می کشد تا دما در $r=0/36$ و $r=0/33$ به ۹۵ درصد حالت پایا برسد به ترتیب برابر $104/16$ ثانیه و $192/78$ ثانیه است.

۴-۵ بررسی اثر زاویه‌ی الیاف بر پروفیل دمای ایجادشده در نیمکره

در این بخش به بررسی اثر زاویه‌ی الیاف بر توزیع دمای پایای نیمکره پرداخته می‌شود. این زاویه بین 0 تا 90 درجه متغیر است. ورودی‌های برنامه به‌صورت زیر است:

جدول ۴-۸ ورودی‌های برنامه برای بررسی اثر زاویه‌ی الیاف بر پروفیل دمای ایجادشده در نیمکره

تعداد لایه‌ها	۶
ضخامت هر لایه	۱ سانتی‌متر
زاویه الیاف در هر لایه	۰ - ۳۰ - ۴۵ - ۹۰ درجه
k_{11}	$10 \frac{w}{m.k}$
k_{22}	$4 \frac{w}{m.k}$
β	-۰/۰۰۰۸۵
شار حرارتی در سطح خارجی	$F_s = 1357(2\pi R_o^2) \left(1 + 0.5 \left \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \right \right)$
دما در سطح داخلی	۳۰۰ کلوین



شکل ۴-۳۹ نمودار دمای به‌دست‌آمده در حل تحلیلی در $\theta = 90^\circ$ برحسب شعاع به ازای زوایای الیاف مختلف

با توجه به شکل ۴-۳۹، با افزایش زاویه‌ی الیاف، دما در نیمکره افزایش می‌یابد. لازم به ذکر است چنان چه ضریب هدایت حرارتی در جهت محیطی بسیار بزرگ‌تر از جهت شعاعی باشد، افزایش تعداد جملات لژاندر منجر به بزرگ شدن درایه‌های ماتریس ضرایب و واگرایی جواب‌ها می‌شود. این امر وقتی تشدید می‌شود که زاویه‌ی الیاف کم باشد (در حدود صفر). به همین علت در این قسمت تعداد جملات لژاندر را برابر ۳ در نظر گرفته‌ایم.

با توجه به وجود عبارت $a_2 r_0^{\frac{-(n+1)}{\mu_0^2}} + b_2 \frac{-(n+1)}{\mu_0^2} r_0^{\frac{-(n+1)}{\mu_0^2}-1}$ در ماتریس ضرایب، از آنجاکه در هندسه‌ی مورد بررسی، اندازه‌ی r_0 کمتر از ۱ است، کاهش مقدار μ_0 (بر اثر کم شدن زاویه‌ی الیاف و یا اختلاف زیاد بین ضرایب هدایت محیطی و شعاعی) و افزایش n (جملات لژاندر) منجر به بزرگ شدن غیرعادی ضرایب می‌گردد. به علت محدودیت دقت در محاسبات کامپیوتری، انجام تعداد محاسبات زیاد بر روی اعداد بزرگ، منجر به بروز خطاهای عددی زیاد و واگرا شدن جواب‌ها می‌شود.

با توجه به شکل ۴-۳۹، چنان چه زاویه‌ی الیاف برابر صفر رادیان باشد، دمای حالت پایا در سطح خارجی نیمکره ($r=0/36$) و $\theta = 90^\circ$ ، برابر $454/34$ کلوین خواهد بود. با افزایش زاویه‌ی الیاف، این دما نیز افزایش می‌یابد.

جدول ۴-۹ دمای حالت پایا در سطح خارجی نیمکره ($r=0/36$) و $\theta = 90^\circ$ ، به ازای زوایای الیاف مختلف

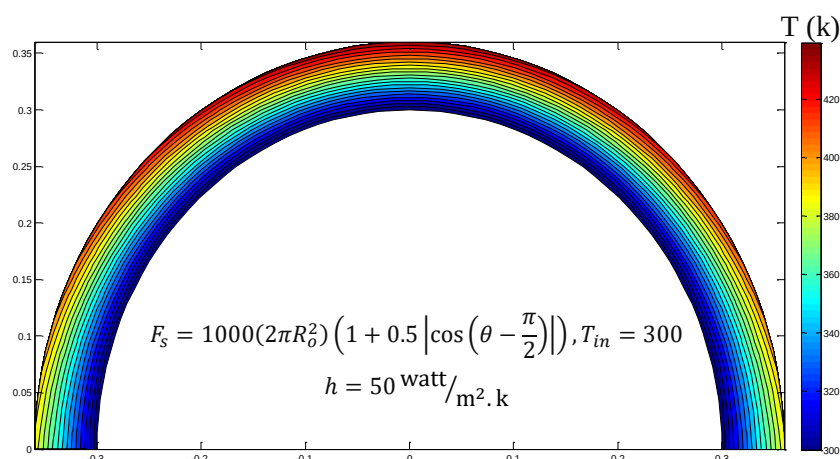
زاویه‌ی الیاف در هر لایه (رادیان)	دمای حالت پایا در سطح خارجی نیمکره ($r=0/36$) و $\theta = 90^\circ$ (کلوین)
.	۴۵۴/۳۴
$\pi/6$	۴۵۷/۲۱
$\pi/4$	۴۵۸/۷۱
$\pi/2$	۴۵۹/۹۱

۴-۶ بررسی اثر همزمان همرفت و شار حرارتی در سطح خارجی نیمکره با

لایه‌های یکسان و دمای ثابت در سطح داخلی آن

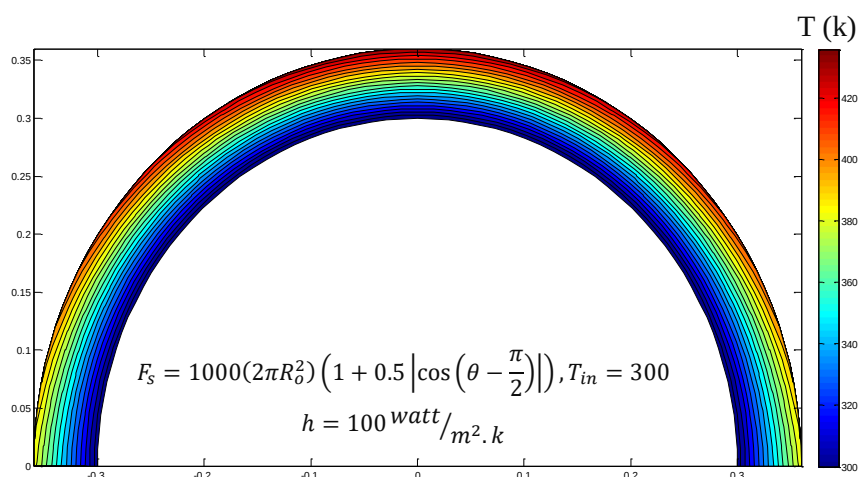
۴-۶-۱ حل پایا

در این قسمت به بررسی حل تحلیلی معادله‌ی انتقال حرارت در یک نیمکره به همراه شار حرارتی ورودی به سطح خارجی آن پرداخته می‌شود. با این تفاوت که در این قسمت، سطح بیرونی نیمکره با هوای بیرون انتقال حرارت همرفت دارد. در کد نوشته شده، اندازه‌ی ضریب انتقال حرارت همرفت در سطح بیرونی نیمکره با پارامتر DT_{oDR} تعیین می‌شود. لازم به ذکر است که در کد نوشته شده چنانچه هوای بیرون نقش خنک کننده‌ی سطح بیرونی نیمکره را داشته باشد علامت DT_{oDR} منفی و چنانچه نقش گرم کننده داشته باشد علامت آن مثبت است. بنابراین در این قسمت ورودی‌های برنامه در حالت پایا مشابه جدول ۴-۱ است. با این تفاوت که در این قسمت مقدار DT_{oDR} برابر $50 \text{ watt}/m^2.k$ ، در نظر گرفته شده است. همچنین دمای هوای محیط که سطح خارجی نیمکره با آن انتقال حرارت همرفت دارد برابر ۳۰۰ کلوین در نظر گرفته شده است.

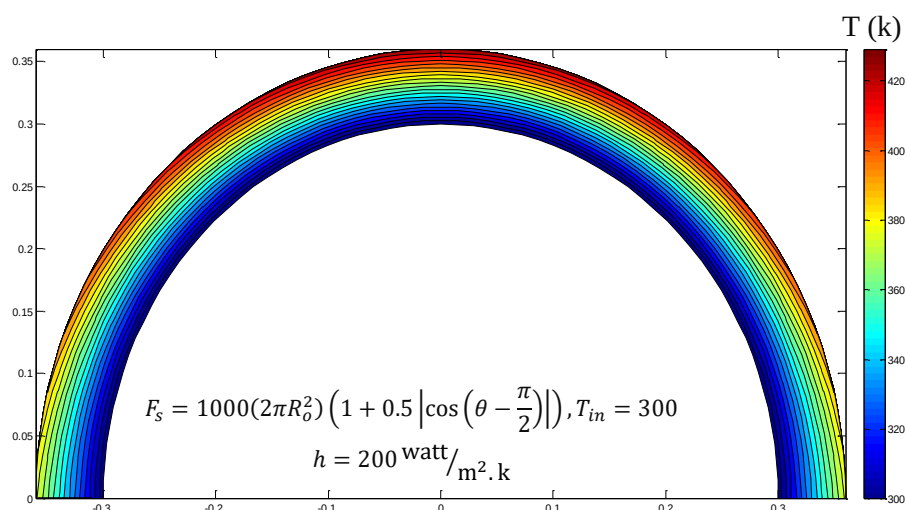


شکل ۴-۴۰ کانتور دما به دست آمده در حل تحلیلی برای مورد ۱ و ضریب انتقال حرارت همرفت $50 \frac{W}{m^2.k}$

بیشینه‌ی دما در شکل ۴-۴۰ در سطح خارجی نیمکره و در $\theta = 90^\circ$ ، اتفاق می‌افتد و مقدار آن برابر $439/18$ کلوین است. در شکل ۴-۲، که در آن خنک شدن سطح بیرونی نیمکره را در نظر نگرفتیم، بیشینه‌ی دما برابر $442/68$ کلوین به دست آمد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که ضریب انتقال حرارت همرفت برابر $50 \frac{W}{m^2.k}$ ، بیشینه‌ی دما را به اندازه‌ی $3/5$ کلوین کاهش می‌دهد. شکل‌های ۴-۴۱ و ۴-۴۲، کانتور دمای نیمکره را به ازای ضرایب انتقال حرارت همرفت $100 \frac{W}{m^2.k}$ و $200 \frac{W}{m^2.k}$ نشان می‌دهد.



شکل ۴-۴۱ کانتور دما به دست آمده در حل تحلیلی برای مورد ۱ و ضریب انتقال حرارت همرفت $100 \frac{W}{m^2.k}$

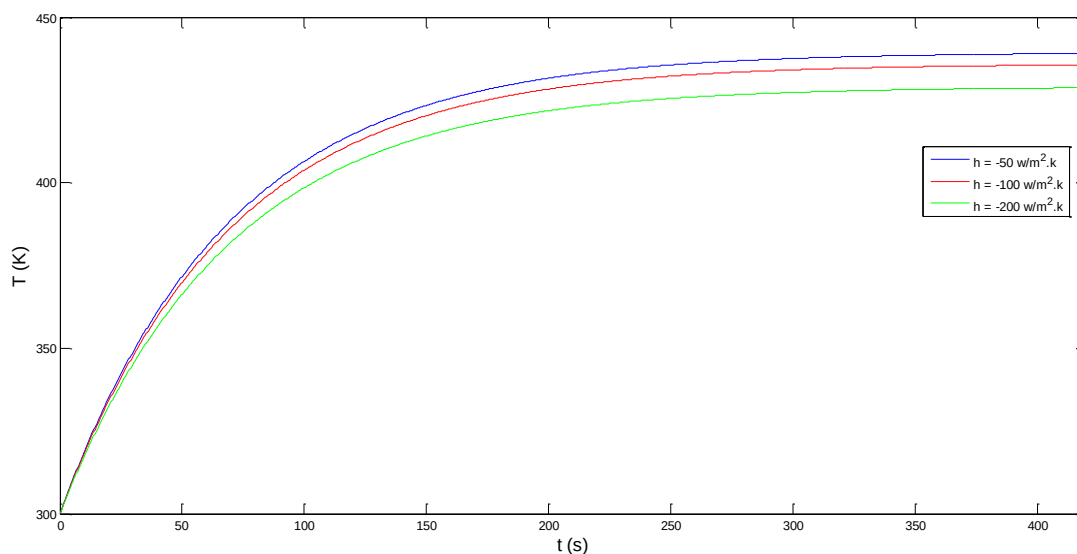


شکل ۴-۴۲ کانتور دما به دست آمده در حل تحلیلی برای مورد ۱ و ضریب انتقال حرارت همرفت $200 \frac{W}{m^2.k}$

در شکل‌های ۴-۴۰ و ۴-۴۲، بیشینه‌ی دمای نیمکره به ترتیب برابر $435/71$ و $428/8$ به دست آمد. به این معنا که با افزایش ضریب انتقال حرارت همرفت از $50 \text{ watt/m}^2.k$ به $200 \text{ watt/m}^2.k$ می‌توان بیشینه‌ی دمای نیمکره را از $439/18$ به $428/8$ کاهش داد

۴-۶-۲ حل ناپایا

در این قسمت به بررسی حل تحلیلی معادله‌ی انتقال حرارت ناپایا درون نیمکره با شار حرارتی ورودی به سطح خارجی آن به همراه انتقال حرارت همرفت سطح خارجی با محیط اطراف، پرداخته می‌شود. ورودی‌های برنامه مشابه جدول ۴-۵ بوده و مقدار DT_{DR} برابر ۵۰، ۱۰۰ و ۲۰۰ وات بر مترمربع بر کلون در نظر گرفته شده است.



شکل ۴-۴۳ نمودار دما در سطح خارجی نیمکره و $\theta = 90^\circ$ ، بر حسب زمان

مدت زمان لازم برای رسیدن جواب به حالت پایا، به عبارت $\frac{hA}{\rho VC}$ وابسته است که در آن h ضریب انتقال حرارت همرفتی، A مساحت سطح مقطع انتقال حرارت (در اینجا سطح خارجی نیمکره)، ρ چگالی، V حجم نیمکره و C ظرفیت گرمایی ویژه است. هر چه اندازه‌ی این کسر بزرگ‌تر باشد، جواب‌ها زودتر به حالت پایا می‌رسند.

۴-۷- نیمکره با لایه‌های یکسان با شرط مرزی دما ثابت در سطح داخلی و

انتقال حرارت جابجایی در سطح خارجی

هدف از این قسمت بررسی خنک شدن سطح خارجی نیمکره توسط انتقال حرارت جابجایی در سطح خارجی آن است. در این قسمت دمای سطح داخلی نیمکره ثابت و برابر مقدار ۴۰۰ کلوین در نظر گرفته شده است.

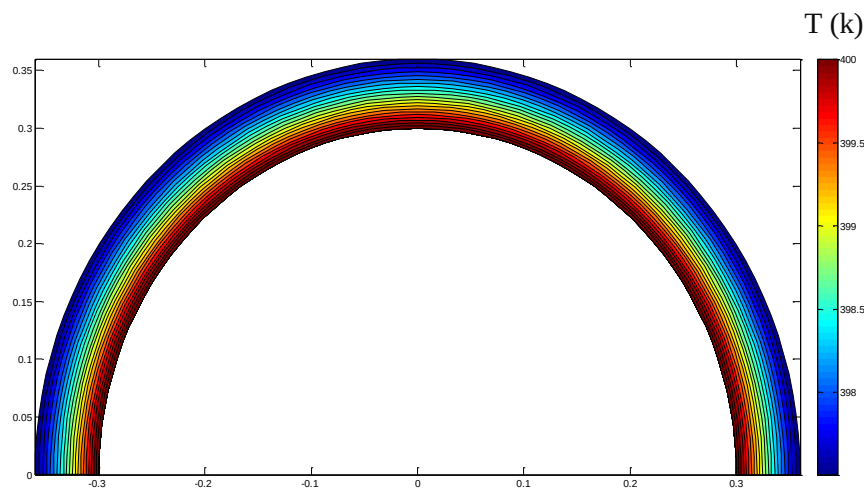
۴-۷-۱ حل پایا

ورودی‌های برنامه در قسمت حل پایا مطابق جدول ۴-۹ است:

جدول ۴-۱۰ ورودی‌های برنامه در حل پایا با شرط مرزی دما ثابت در سطح داخلی و انتقال حرارت جابجایی در سطح خارجی

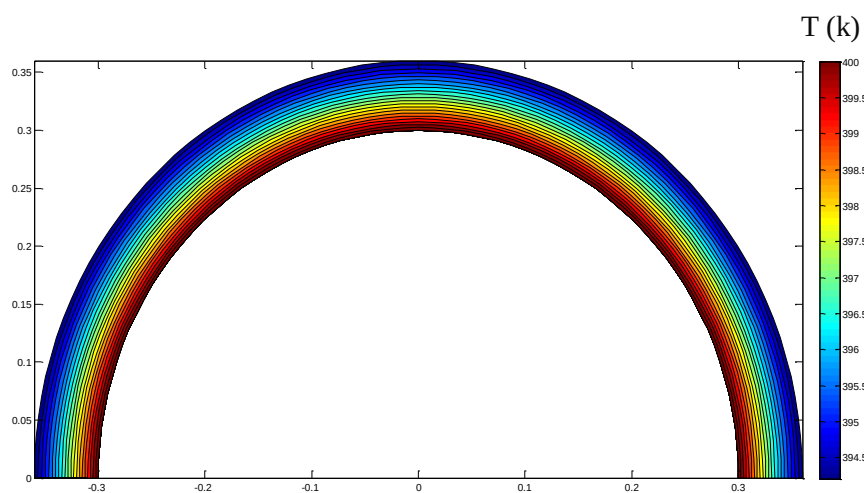
تعداد لایه‌ها	۶
ضخامت هر لایه	۱ سانتی‌متر
زاویه الیاف	۹۰ درجه
k_{11}	$10 \frac{W}{m.k}$
k_{22}	$0.4 \frac{W}{m.k}$
β	-۰/۰۰۰۸۵
شار حرارتی در سطح خارجی	۰
ضریب انتقال حرارت جابجایی در سطح خارجی (DTtoDR)	$50 \frac{W}{m^2.k}$
دما در سطح داخلی	۴۰۰ کلوین

لازم به ذکر است که دمای هوای محیط که سطح خارجی نیمکره با آن انتقال حرارت همرفت دارد برابر ۳۰۰ کلوین در نظر گرفته شده است.

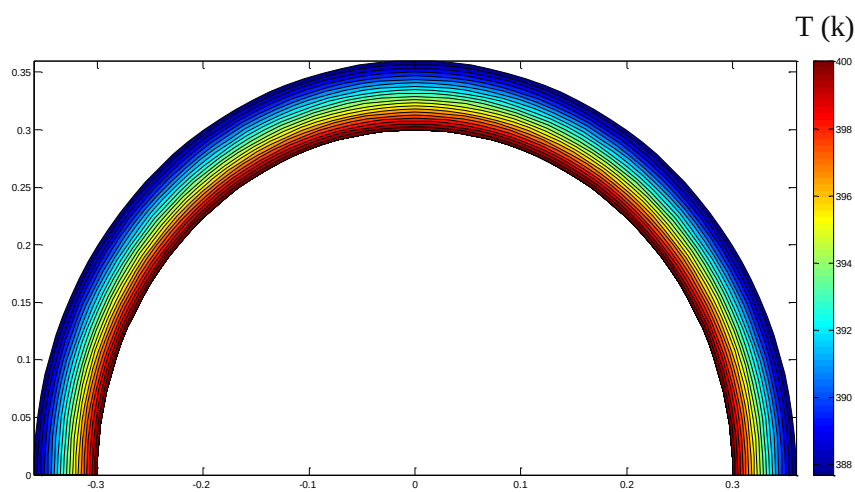


شکل ۴-۴۴ کانتور دمای حالت پایا، به دست آمده در حل تحلیلی به ازای ضریب انتقال حرارت همرفت $50 \frac{W}{m^2 \cdot K}$ کلوین در سطح خارجی نیمکره و دمای ثابت ۴۰۰ کلوین در سطح داخلی آن

با توجه به شکل ۴-۴۴، دما در حالت پایا در سطح خارجی نیمکره برابر $397/50$ کلوین است. با افزایش ضریب انتقال حرارت همرفت در سطح خارجی نیمکره، سطح آن خنک تر شده و دمای آن پایین تر می آید. با افزایش ضریب انتقال حرارت همرفت به $100 \text{ watt}/m^2 \cdot K$ و $200 \text{ watt}/m^2 \cdot K$ ، کانتور دمای پایا به صورت شکل های ۴-۴۵ و ۴-۴۶، به دست می آید.



شکل ۴-۴۵ کانتور دمای حالت پایا، به دست آمده در حل تحلیلی به ازای ضریب انتقال حرارت همرفت $100 \frac{W}{m^2 \cdot K}$ در سطح خارجی نیمکره و دمای ثابت ۴۰۰ کلوین در سطح داخلی آن



شکل ۴-۴۶ کانتور دمای حالت پایا، به دست آمده در حل تحلیلی به ازای ضریب انتقال حرارت همرفت $200 \frac{W}{m^2 \cdot K}$ در سطح خارجی نیمکره و دمای ثابت ۴۰۰ کلوین در سطح داخلی آن

در شکل‌های ۴-۴۵ و ۴-۴۶، دما در سطح خارجی نیمکره به ترتیب برابر $394/21$ و $387/66$ کلوین است.

طبق نتایج تحلیلی به دست آمده، با افزایش ضریب انتقال حرارت همرفت تا مقدار $200 \frac{W}{m^2 \cdot K}$ ، دمای سطح خارجی نیمکره‌ی مورد بررسی را می‌توان تا دمای $387/66$ خنک کرد.

۴-۷-۲ حل ناپایا مورد ۷

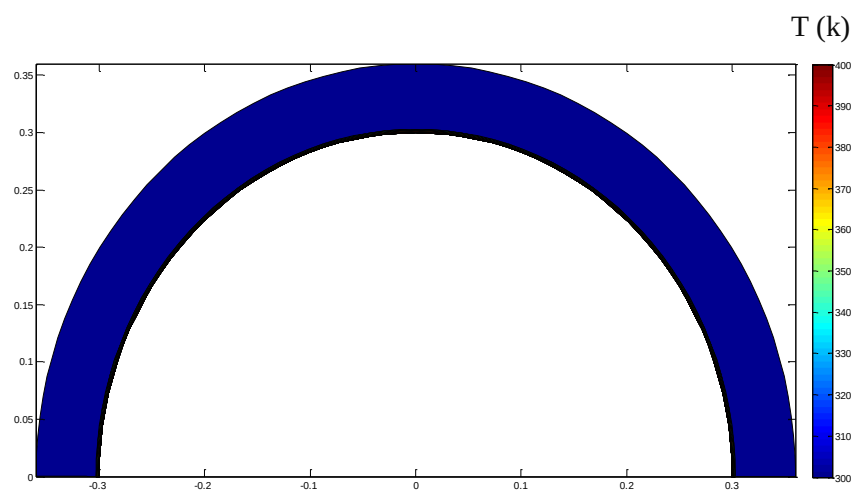
برای این مورد شرایط مرزی به این صورت است که دما در سطح داخلی نیم کره برابر ۴۰۰ کلوین و ضریب انتقال حرارت بر سطح خارجی نیم کره برابر $50 \text{ watt/m}^2 \cdot \text{K}$ است.

ورودی‌های برنامه در این قسمت به صورت زیر است:

جدول ۴-۱۱ ورودی‌های برنامه در حل ناپایا برای مورد ۷

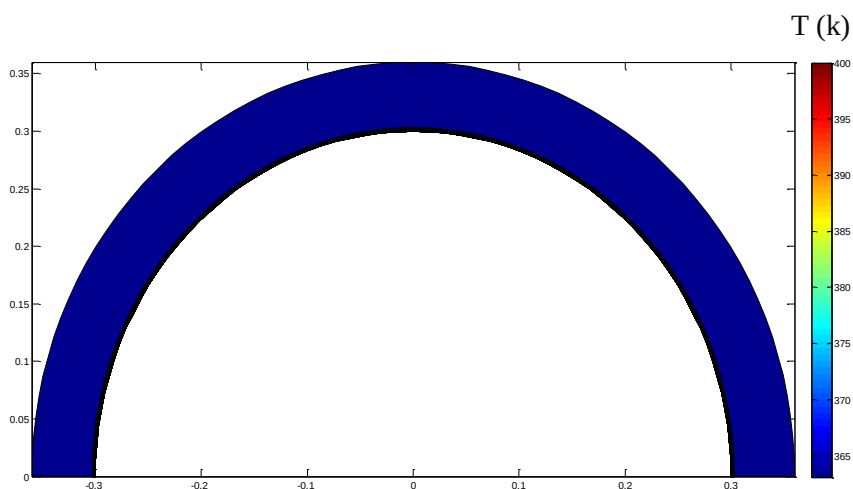
تعداد لایه‌ها	۶
ضخامت هر لایه	۱ سانتی‌متر
زاویه الیاف	۹۰ درجه
k_{11}	$10 \frac{W}{m \cdot K}$
k_{22}	$0.4 \frac{W}{m \cdot K}$
β	-۰/۰۰۰۸۵
چگالی هر لایه	$500 \frac{kg}{m^3}$
ظرفیت گرمایی ویژه هر لایه	$2500 \frac{J}{kg \cdot K}$
شار حرارتی ورودی در سطح خارجی	۰
ضریب انتقال حرارت جابجایی در سطح خارجی (DToDR)	$50 \frac{W}{m^2 \cdot K}$
دما در سطح داخلی	۴۰۰ کلوین
مدت زمان شبیه‌سازی	۱۰۰۰۰ ثانیه

در این قسمت به علت فقدان شار حرارتی در سطح خارجی، مدت زمان لازم برای پایا شدن جواب به طور قابل ملاحظه‌ای افزایش می‌یابد. به همین علت مدت زمان برابر ۱۰۰۰۰ ثانیه در نظر گرفته شده است.



شکل ۴-۴۷ کانتور دما برای حل تحلیلی مورد ۷، در زمان اولیه

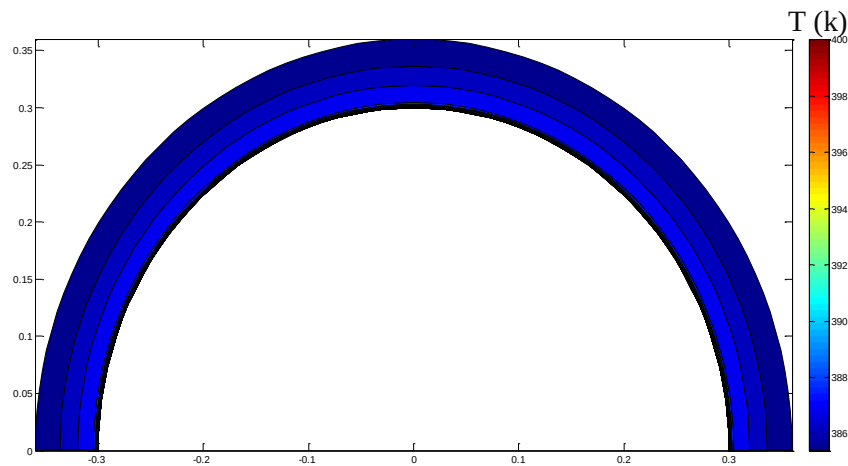
شرایط اولیه‌ی دما در کل نیمکره به‌جز سطح داخلی آن برابر ۳۰۰ کلوین در نظر گرفته‌شده است.



شکل ۴-۴۸ کانتور دما برای حل تحلیلی مورد ۷، در زمان ۱۰۰۰ ثانیه

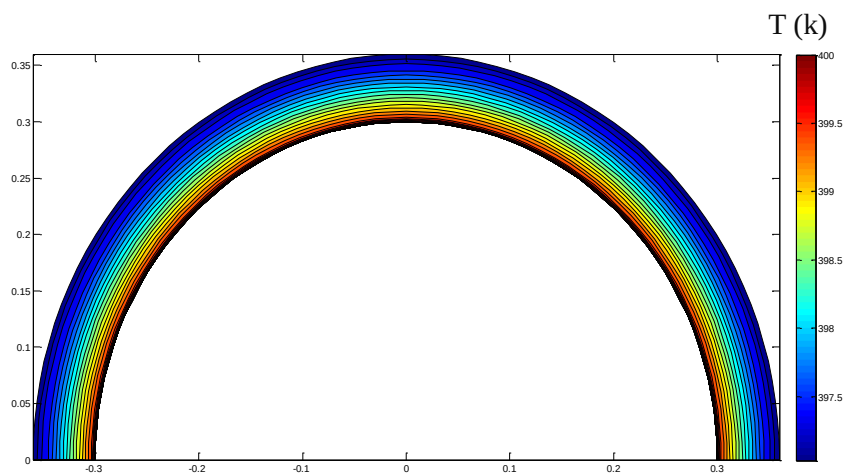
شکل ۴-۴۸، کمینه‌ی دما (دما در سطح خارجی نیمکره) را برابر $363/08$ کلوین نشان می‌دهد. دما در سطح داخلی برابر ۴۰۰ کلوین است. از آنجاکه در زمان اولیه، دما در کل نیمکره به‌جز سطح داخلی آن، ثابت و

برابر ۳۰۰ کلوین در نظر گرفته شده است، می توان نتیجه گرفت پس از گذشت زمان ۱۰۰۰ ثانیه دمای سطح خارجی ۶۳/۰۸ کلوین افزایش دما دارد.

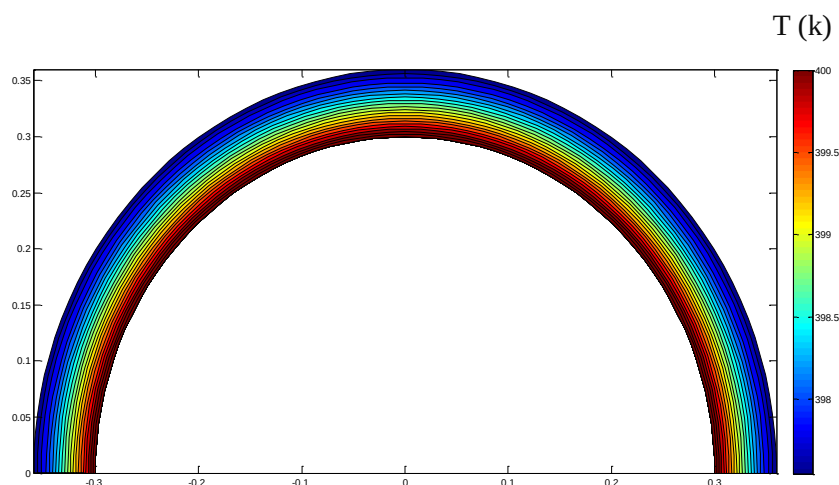


شکل ۴-۴۹ کانتور دما برای حل تحلیلی مورد ۷ در زمان ۲۰۰۰ ثانیه

با توجه به شکل ۴-۴۹، دما در سطح خارجی نیمکره در زمان ۲۰۰۰ ثانیه، برابر ۳۸۵/۳۹ کلوین به دست آمده است.



شکل ۴-۵۰ کانتور دما برای حل تحلیلی مورد ۷ در زمان ۵۰۰۰ ثانیه

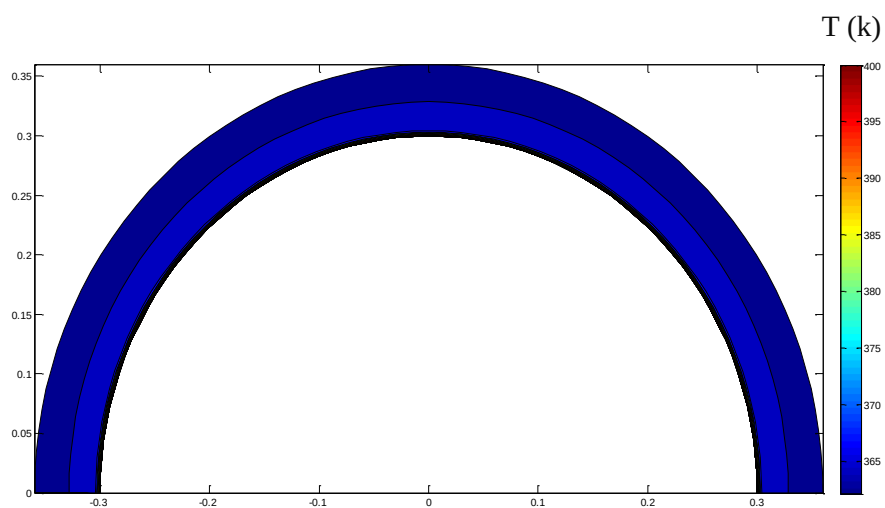


شکل ۴-۵۱ کانتور دما برای حل تحلیلی مورد ۷، در زمان ۱۰۰۰۰ ثانیه

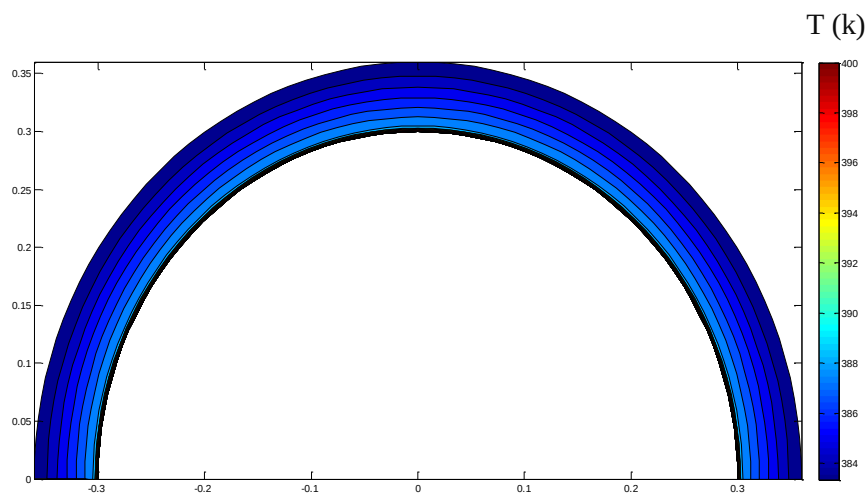
با توجه به شکل‌های ۴-۵۰ و ۴-۵۱، دما در سطح خارجی نیمکره در زمان‌های ۵۰۰۰ و ۱۰۰۰۰ ثانیه به ترتیب برابر $397/03$ و $397/49$ کلوین است. با توجه به نزدیک بودن این دو عدد، در نظر گرفتن ۱۰۰۰۰ ثانیه به عنوان زمان لازم برای پایا شدن جواب، مناسب به نظر می‌رسد. در ادامه با افزایش ضریب انتقال حرارت جابجایی در سطح خارجی کره، به بررسی اثر آن بر کانتور دمای ناپایا می‌پردازیم.

۴-۷-۳ حل ناپایا مورد ۸

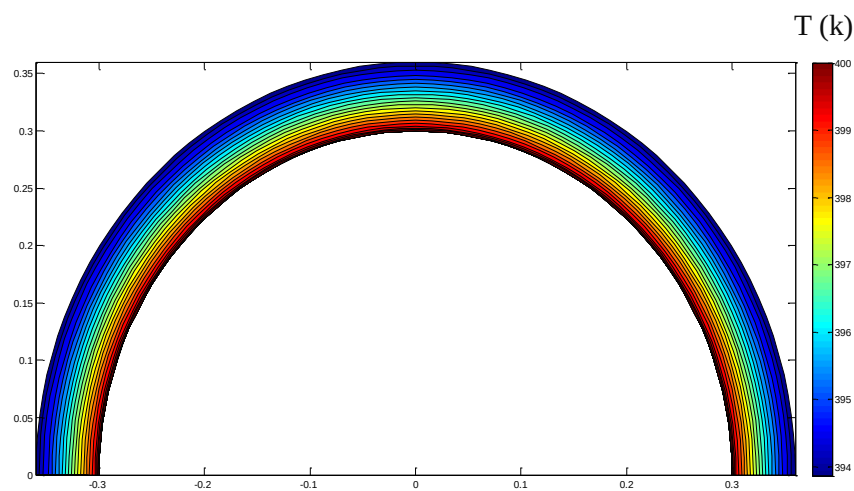
برای این مورد شرایط مرزی به این صورت است که دما در سطح داخلی نیم‌کره برابر 400 کلوین و ضریب انتقال حرارت بر سطح خارجی نیم‌کره برابر $100 \text{ watt/m}^2 \cdot \text{K}$ است.



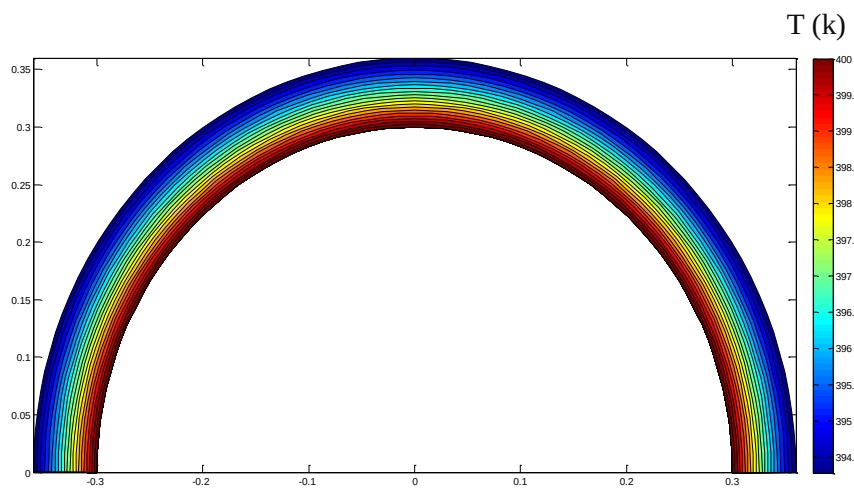
شکل ۴-۵۲ کانتور دما برای حل تحلیلی مورد ۸، در زمان ۱۰۰۰ ثانیه



شکل ۴-۵۳ کانتور دما برای حل تحلیلی مورد ۸، در زمان ۲۰۰۰ ثانیه



شکل ۴-۵۴ کانتور دما برای حل تحلیلی مورد ۸، در زمان ۵۰۰۰ ثانیه

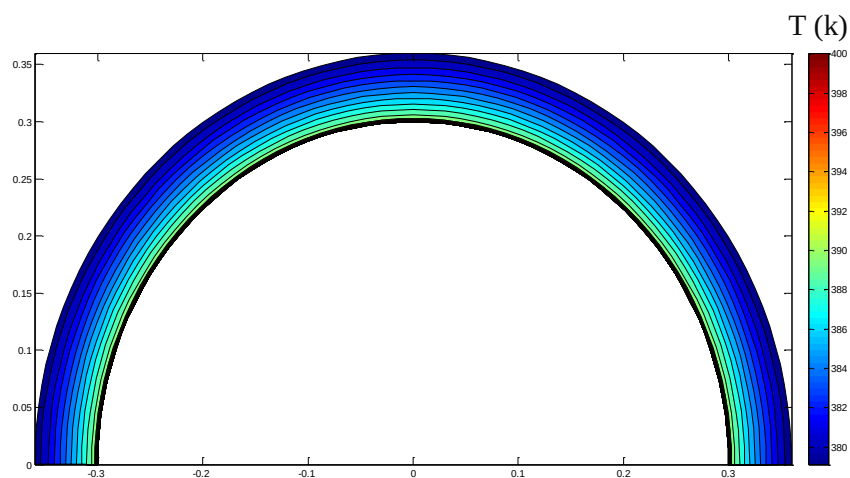


شکل ۴-۵۵ کانتور دما برای حل تحلیلی مورد ۸، در زمان ۱۰۰۰۰ ثانیه

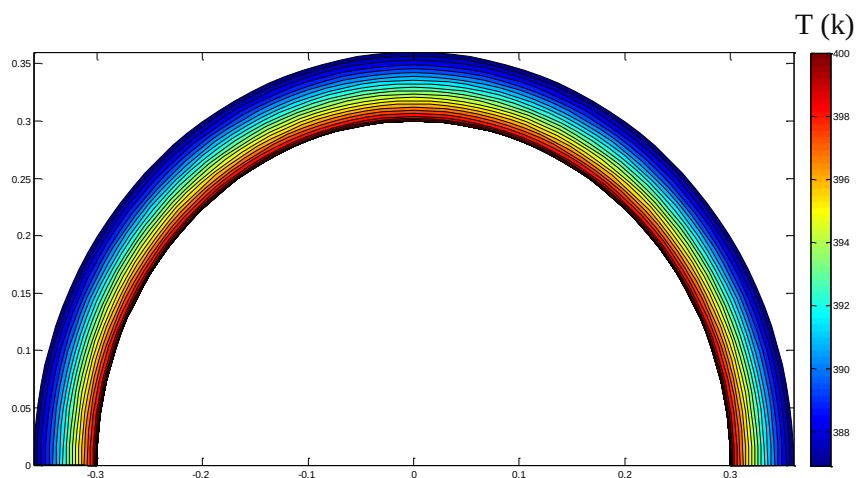
در شکل‌های ۴-۵۲ تا ۴-۵۵، دمای سطح خارجی نیمکره در زمان‌های ۱۰۰۰، ۲۰۰۰، ۵۰۰۰ و ۱۰۰۰۰ ثانیه، برابر ۳۶۲/۱۵، ۳۸۳/۳۳، ۳۹۳/۸۷ و ۳۹۴/۲۸ کلوین به‌دست‌آمده است.

۴-۷-۴ حل ناپایا مورد ۹

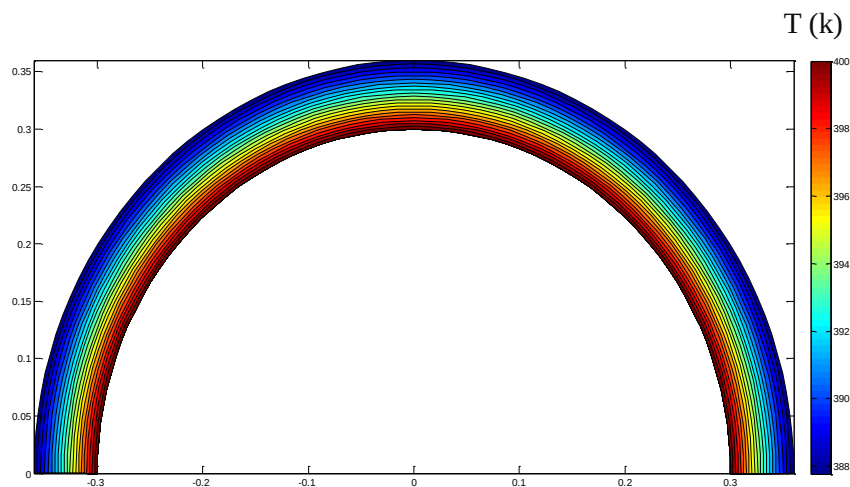
برای این مورد شرایط مرزی به این صورت است که دما در سطح داخلی نیم کره برابر ۴۰۰ کلوین و ضریب انتقال حرارت بر سطح خارجی نیم کره برابر $200 \text{ watt/m}^2 \cdot \text{K}$ است.



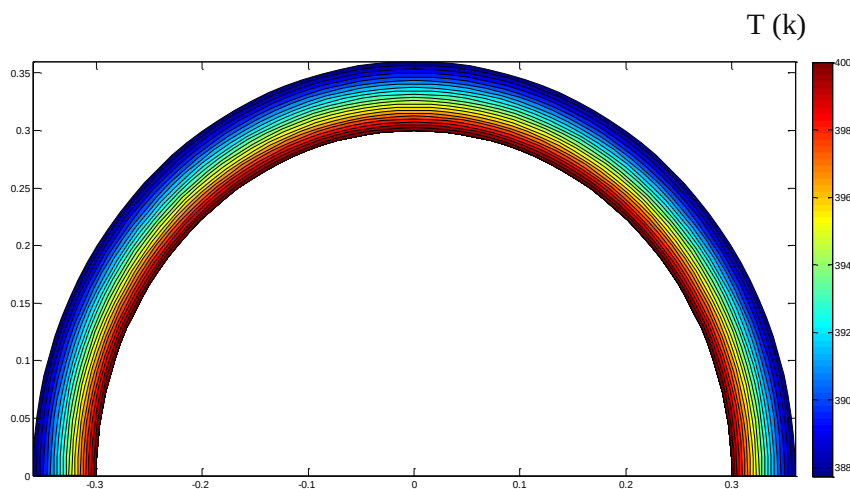
شکل ۴-۵۶ کانتور دما برای حل تحلیلی مورد ۹ در زمان ۱۰۰۰ ثانیه



شکل ۴-۵۷ کانتور دما برای حل تحلیلی مورد ۹ در زمان ۲۰۰۰ ثانیه



شکل ۴-۵۸ کانتور دما برای حل تحلیلی مورد ۹، در زمان ۵۰۰۰ ثانیه



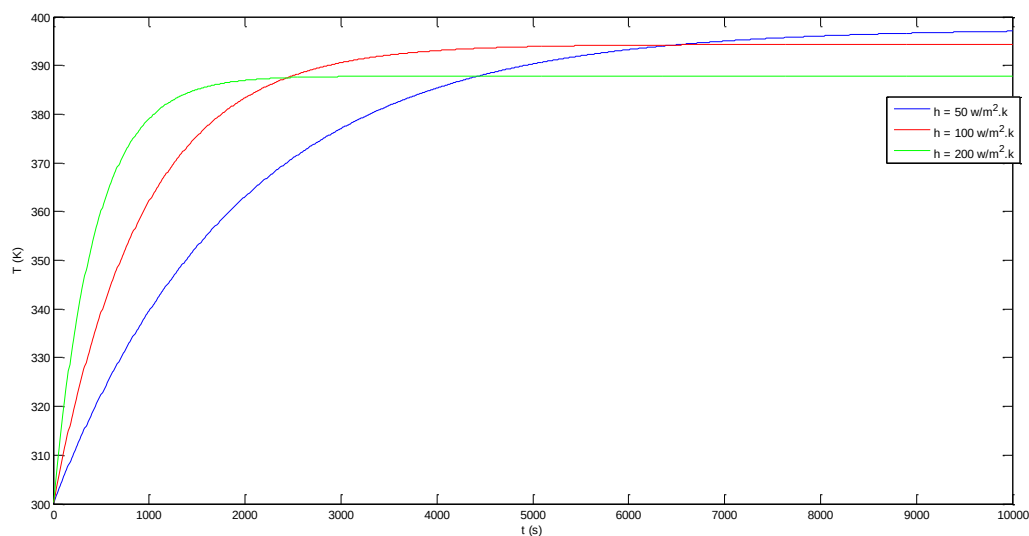
شکل ۴-۵۹ کانتور دما برای حل تحلیلی مورد ۹، در زمان ۱۰۰۰۰ ثانیه

با توجه به شکل‌های ۴-۵۶ تا ۴-۵۹، دما در سطح خارجی نیمکره در زمان‌های ۱۰۰۰، ۲۰۰۰، ۵۰۰۰ و

۱۰۰۰۰ ثانیه، به ترتیب برابر ۳۷۹/۰۳، ۳۸۶/۹۱، ۳۸۷/۶۶ و ۳۸۷/۶۶ به دست آمده است. با مقایسه‌ی کانتور

های به دست آمده در زمان‌های مختلف به ازای ضرایب انتقال حرارت جابجایی ۵۰، ۱۰۰ و ۲۰۰

وات بر مترمربع بر کلون، می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش ضریب انتقال حرارت جابجایی در سطح خارجی نیمکره، زمان لازم برای پایا شدن دما در نیمکره، کاهش می‌یابد.



شکل ۴-۶ نمودار تغییرات دما در سطح خارجی نیمکره برحسب زمان به ازای ضرایب انتقال حرارت جابجایی ۵۰، ۱۰۰ و ۲۰۰ وات بر مترمربع بر کلون

با توجه به شکل ۴-۶، می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش ضریب انتقال حرارت جابجایی در سطح خارجی نیمکره، دمای سطح خارجی آن در حالت پایا و همچنین مدت زمان لازم برای رسیدن به حالت پایا کاهش می‌یابد.

۸-۴ نیمکره با لایه‌های غیر یکسان با شرط مرزی دما ثابت در دو سطح

داخلی و خارجی

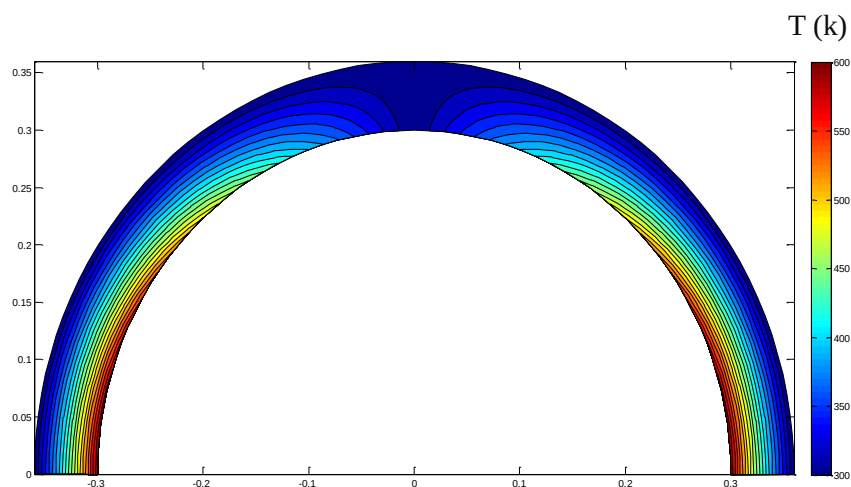
۸-۴-۱ شرط مرزی مورد ۱۰

در این قسمت از شرط مرزی دما ثابت، هم در سطح خارجی و هم در سطح داخلی نیمکره استفاده شده است. دمای سطح داخلی به صورت $300(1 + |\cos \theta|)$ و دمای سطح خارجی برابر ۳۰۰ کلوین در نظر گرفته شده است. در زوایای $\theta = 0^\circ$ و $\theta = 180^\circ$ ، شرط مرزی بی‌دررو، در نظر گرفته شده است.

جدول ۴-۱۲ ورودی‌های برنامه برای حل پایای مورد ۱۰

تعداد لایه‌ها	۳
ضخامت هر لایه	۲ سانتی‌متر
زاویه الیاف	۰ درجه
k_{11} برای لایه‌ی اول	$11/4 \frac{w}{m.k}$
k_{22} برای لایه‌ی اول	$0.74 \frac{w}{m.k}$
k_{11} برای لایه‌ی دوم	$8 \frac{w}{m.k}$
k_{22} برای لایه‌ی دوم	$0.6 \frac{w}{m.k}$
k_{11} برای لایه‌ی سوم	$1/1 \frac{w}{m.k}$
k_{22} برای لایه‌ی سوم	$0.4 \frac{w}{m.k}$
β برای تمام لایه‌ها	-۰/۰۰۰۸
دما در سطح خارجی	۳۰۰ کلوین
پروفیل دما در سطح داخلی	$300(1 + \cos \theta)$

۲-۸-۴ نتایج به دست آمده برای حالت پایا برای مورد ۱۰



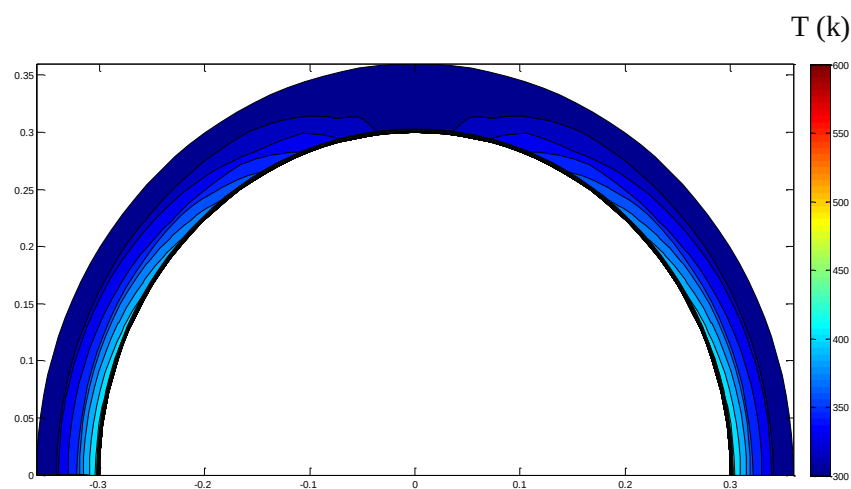
شکل ۴-۶۱ کانتور دما به دست آمده در حل پایا برای مورد ۱۰

شکل ۴-۶۱، کانتور دمای نیمکره در حالت پایا را نشان می دهد. از آنجاکه در $\theta = 90^\circ$ ، دمای سطح داخلی و خارجی نیمکره برابر 300 کلوین است، در این قسمت انتقال حرارت در جهت شعاعی برابر صفر است. بیشینه ی انتقال حرارت نیز در $\theta = 0^\circ$ و $\theta = 180^\circ$ است، زیرا در این دو ناحیه، گرادیان دما بیشینه است. مقدار انتقال حرارت بیشینه برابر 75387 وات بر مترمربع است.

۴-۸-۳- حل ناپایا برای مورد ۱۰

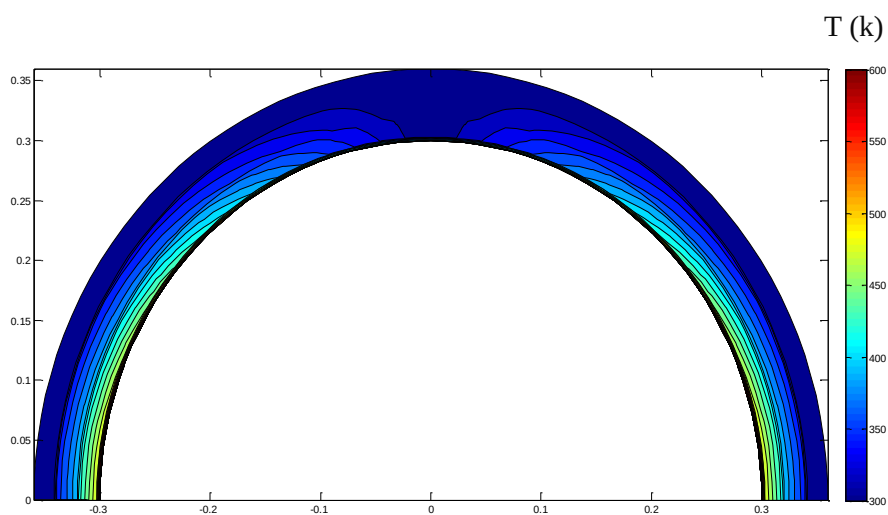
جدول ۴-۱۳ ورودی‌های برنامه برای حل ناپایای مورد ۱۰

۳	تعداد لایه‌ها
۲ سانتی‌متر	ضخامت هر لایه
۰ درجه	زاویه الیاف
$11/4 \frac{w}{m.k}$	k_{11} در لایه‌ی اول
$0/74 \frac{w}{m.k}$	k_{22} در لایه‌ی اول
$8 \frac{w}{m.k}$	k_{11} در لایه‌ی دوم
$0/6 \frac{w}{m.k}$	k_{22} در لایه‌ی دوم
$1/1 \frac{w}{m.k}$	k_{11} در لایه‌ی سوم
$0/4 \frac{w}{m.k}$	k_{22} در لایه‌ی سوم
$-0/0008$	β
$1460 \frac{kg}{m^3}$	چگالی لایه‌ی اول
$1380 \frac{kg}{m^3}$	چگالی لایه‌ی دوم
$1170 \frac{kg}{m^3}$	چگالی لایه‌ی سوم
$400 \frac{j}{kg.k}$	ظرفیت گرمایی ویژه هر لایه
۳۰۰ کلوین	دما در سطح خارجی
$300(1 + \cos \theta)$	دما در سطح داخلی
۲۰۰۰ ثانیه	مدت‌زمان شبیه‌سازی



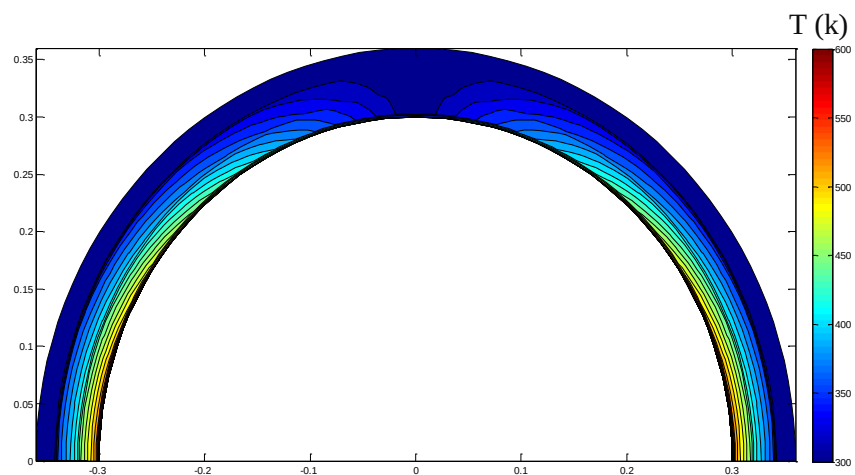
شکل ۴-۶۲ کانتور دما در زمان ۱۰۰ ثانیه، برای مورد ۱۰

با توجه به شکل ۴-۶۲، از آنجا که ضریب هدایت حرارتی در لایه بیرونی، کمتر از دولایه دیگر است، دما در این قسمت بیرونی نیمکره، تغییر محسوسی نکرده است. از آنجا که نواحی داخلی نیمکره هنوز سرد هستند، گرادیان دمای زیاد، در سطح داخلی نیمکره ایجاد می‌شود. بیشینه‌ی انتقال حرارت در این زمان برابر ۶۹۴۰۶۶ وات بر مترمربع است.

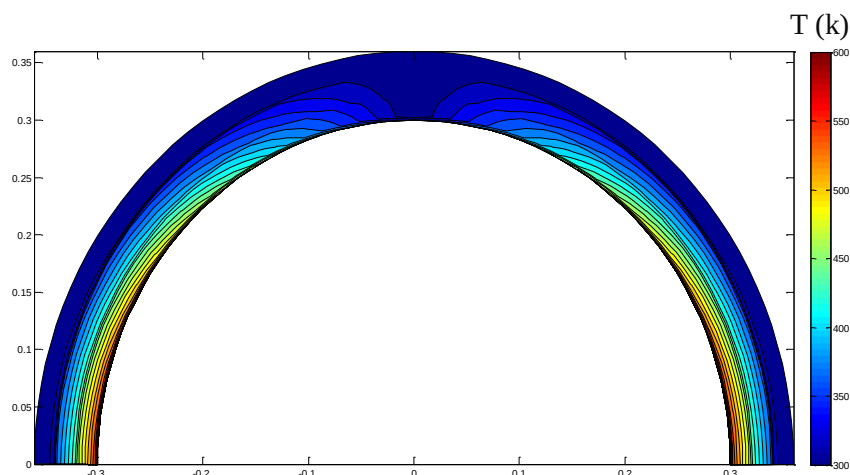


شکل ۴-۶۳ کانتور دما در زمان ۲۰۰ ثانیه، برای مورد ۱۰

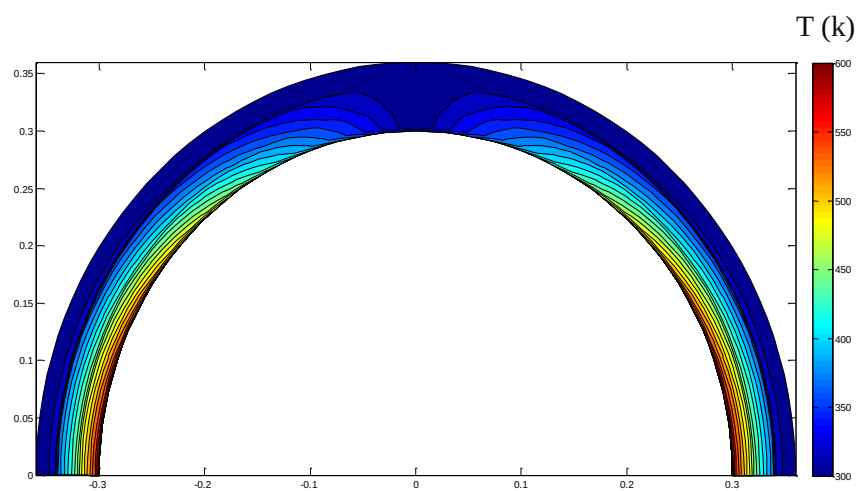
باگذشت زمان، نواحی داخلی نیمکره، گرم‌تر شده و اندازه‌ی گرادیان دما، کاهش می‌یابد و در نتیجه از نرخ انتقال حرارت نیز کاسته می‌شود. در زمان ۲۰۰ ثانیه، بیشینه‌ی نرخ انتقال حرارت در نیمکره، برابر ۴۳۴۹۲۰ وات بر مترمربع به‌دست‌آمده است.



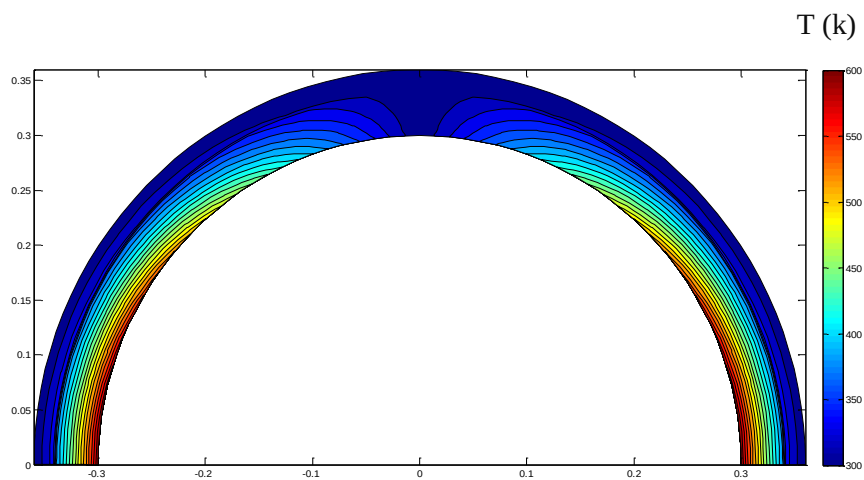
شکل ۴-۶۴ کانتور دما در زمان ۳۰۰ ثانیه، برای مورد ۱۰



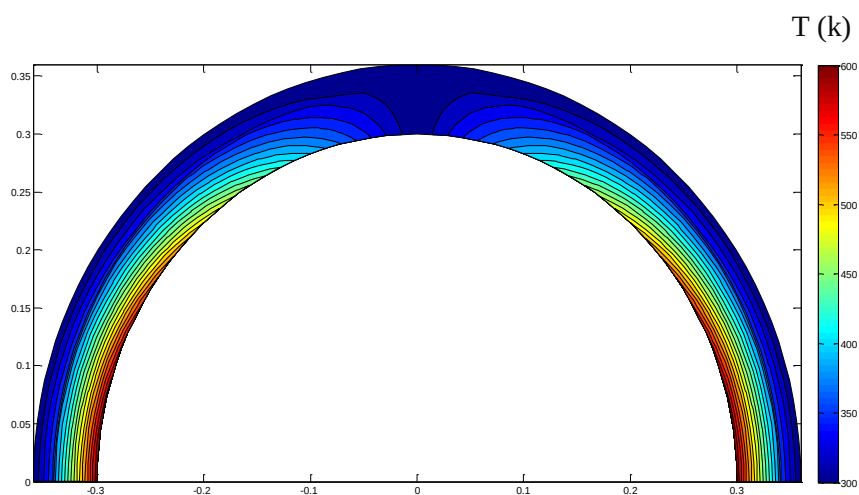
شکل ۴-۶۵ کانتور دما در زمان ۴۰۰ ثانیه، برای مورد ۱۰



شکل ۴-۶۶ کانتور دما در زمان ۵۰۰ ثانیه، برای مورد ۱۰



شکل ۴-۶۷ کانتور دما در زمان ۱۰۰۰ ثانیه، برای مورد ۱۰



شکل ۴-۶۸ کانتور دما در زمان ۲۰۰۰ ثانیه، برای مورد ۱۰

شکل‌های ۴-۶۲ تا ۴-۶۸، تغییرات تدریجی دمای پوسته‌ی نیمکره را در زمان‌های گوناگون نشان می‌دهند. با توجه به گرم شدن پوسته‌ی نیمکره و یکنواخت‌تر شدن دمای آن، مقدار بیشینه‌ی انتقال حرارت، باگذشت زمان کاهش یافته و به مقدار پایا می‌رسد. طبق نتایج به‌دست‌آمده، حدوداً ۲۰۰۰ ثانیه طول می‌کشد تا حل به‌دست‌آمده، به حالت پایا برسد. در شکل‌های ۴-۶۲ تا ۴-۶۸، تفاوت پروفیل‌های دما در هر کدام از سه لایه، کاملاً مشهود است که این تفاوت به علت تفاوت در ویژگی‌های این لایه‌هاست.

فصل پنجم

نتیجہ گیری و پیشہنہادہ

۵-۱ نتیجه‌گیری

در این پژوهش، حل دقیق تحلیلی، برای انتقال حرارت ناپایا در یک نیمکره توخالی، مورد بررسی قرار گرفت. پروفیل دمای به‌دست‌آمده تابع شعاع، زاویه‌ی سمت‌الرأس و زمان هست. حل تحلیلی دما به‌صورت حاصل‌ضرب سه تابع که هرکدام فقط تابع شعاع، زاویه‌ی سمت‌الرأس و زمان هستند، نوشته‌شده است. در هندسه‌های ساده مانند کره و نیمکره، مقادیر ویژه در جهت زاویه‌ی سمت‌الرأس، اعداد صحیح می‌باشند که به‌طور قابل‌توجهی از پیچیدگی مسئله می‌کاهد.

حل ارائه‌شده برای شرایط مرزی همگن، چه از نوع اول و چه از نوع دوم، در جهت سمت‌الرأس نیمکره، معتبر است درحالی‌که در جهت شعاعی، امکان اعمال شرط مرزی ناهمگن نیز وجود دارد. لازم به ذکر است که حل تحلیلی ارائه‌شده برای هندسه‌ی کره و نیمکره‌ی کامل (شعاع داخلی برابر صفر) نیز قابل‌استفاده است. تعداد جملات لژاندر و بسل در نظر گرفته‌شده در حل تحلیلی برابر ۶ در نظر گرفته‌شده است. با مقایسه‌ی نتایج به‌دست‌آمده در پژوهش حاضر با نتایج حاصل از حل عددی، تعداد ۶ جمله، کافی به نظر می‌رسد.

لازم به ذکر است که حل تحلیلی مسئله‌ی انتقال حرارت ناپایا و دوبعدی در مختصات کروی شبیه به مختصات کارتزین و یا استوانه‌ای نیست. در مختصات کروی، رابطه‌ی مقادیر ویژه در جهت شعاعی با مقادیر ویژه در جهت سمت‌الرأس (θ)، به‌صورت صریح^۱ نیست. این امر باعث می‌شود که مقادیر ویژه در جهت شعاعی دارای ترم موهومی^۲ نباشد.

^۱ explicit

^۲ imaginary

۵-۲ پیشنهادها

چنان چه گفته شد، در پژوهش انجام شده از تغییرات دما در راستای گرایی صرف نظر شده است. همچنین تابعیت ضریب هدایت گرمایی با دما به صورت خطی فرض شده است که برای برخی مواد فرض صحیحی نیست. بنابراین پیشنهاد می گردد که در کارهای آینده تابعیت غیرخطی ضریب هدایت گرمایی با دما نیز در نظر گرفته شود. همچنین حل تحلیلی انتقال حرارت ناپایا در مختصات کروی سه بعدی، می تواند تکمیل کننده ی پژوهش انجام شده باشد.

فصل ششم

منابع و مأخذ

- [1] <http://tpsboiler.com>
- [2] <https://namic.blogsky.com>
- [3] <https://intellico.ir>
- [4] www.shimipole.com
- [5] <http://conditionmonitoringservice.com>
- [6] <http://irannano.org>
- [7] <http://systemairan.com>
- [8] Arpaci V.S., (1966), “**Conduction Heat Transfer**”, Addison-Wesley Publishing Company, USA
- [9] <https://lamadera.net>
- [10] <http://www.holah.karoo.net>
- [11] <https://machinelearningmastery.com>
- [12] <http://www.irmakhzan.com>
- [13] <http://engpedia.ir>
- [14] Chao C.K., Che F.M. and Shen M.H. (2007), “ An exact solution for thermal stresses in a three-phase composite cylinder under uniform heat flow”, **Int. J. Solids and Structures**, **44**, pp 926-940.
- [15] Wooster W.A. (1957), “**A textbook in crystal physics**”. Cambridge University Press, London, pp 455.

- [16] L.Greenard and J.Y. Lee (2006), “Electrostatics and Heat Conduction in High Contrast Composite”, **Materials Journal of Computational Physics**,**21,1**, pp 64-76.
- [17] Mulholland G.P. (1974), “Diffusion through laminated orthotropic cylinders”, **Tokyo In Proceeding of the 5th international heat transfer conference**, pp 250–254.
- [18] Noor A.K., Burton W.S. (1990), Center for computational structures technology, University of Virginia, NASA Langley Research Center, and Hampton, VA 23665
- [19] Iyengar V. (1995), “Transient thermal conduction in rectangular fiber reinforced composite laminates”, **Adv. Compos. Mater**, **4,4**, pp 327–342.
- [20] Singh S., Jain P.K. and Rizwan-uddin. (2008), “Analytical solution to transient heat conduction in polar coordinates with multiple layers in radial direction”, **Int. J. Thermal Sciences**, **47**, pp 261–273.
- [21] ChingMa C.h. and WenChang S.h. (2004), “Analytical exact solutions of heat conduction problems for anisotropic multilayered media”, **Int. J. Heat and Mass Transfer**, **47**, pp 1643-1655.
- [21] Hsien M.H. and Ma Ch.Ch. (2002), “Analytical investigations for heat conduction problems in anisotropic thin-layer media with embedded heat sources”, **Int. J. Heat and Mass Transfer**, **45**, pp 4117-4132.
- [22] Argyris J., Tenek L. and Oberg F. (1995), “A multilayer composite triangular element for steady-state conduction/convection/radiation heat transfer in complex shells”, **Comput. Methods Appl. Mech. Eng.**, **120**, pp 271–301.
- [23] Y.Sun and I.S.Wichman. (2004), “On Transient Heat Conduction in a One-Dimensional Composite Slab”, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, **47**, pp 1555-1559.
- [24] Oseloka O. (2002), “Heat Conduction in Composite Media: A Boundary Integral Approach”, **Journal of Computers & Chemical Engineering**, **26,1**, pp 1621-1632.
- [25] Sunao S., Takashi I. (1999), “Numerical analysis of heat conduction effect corresponding to infrared stress measurements in multilamina CFRP plates”, **Adv. Compos. Mater**, **8,3**, pp 269–279.
- [26] Tarn J.Q. (2001), “Exact solutions for functionally graded anisotropic cylinders subjected to thermal and mechanical loads”, **Int. J. Solids Struct.**, **38**, pp 8189–8206.
- [26] Tarn J.Q. (2002), “state space formalism for anisotropic elasticity. Part II: cylindrical anisotropy”, **Int. J. Solids Struct.**, **39**, pp 5157–5172.

- [26] Tarn J.Q. and Wang Y.M. (2003), “Heat conduction in a cylindrically anisotropic tube of a functionally graded material”, **Chin J. Mech.**, **19**, pp 365–372.
- [26] Tarn J.Q. and Wang Y.M. (2004), “End effects of heat conduction in circular cylinders of functionally graded materials and laminated composites”, **Inter. J. Heat Mass**
- [27] V.T.Golovchan and A.G. Artemenko (2004) “Heat Conduction of Orthogonally Reinforced Composite Material” **Journal of Engineering Physics and Thermophysics.**, **51**, **2**, pp 944-949.
- [28] X. Lu, P. Tervola and M. Viljanen. (2006), “Transient Analytical Solution to Heat Conduction in Composite Circular Cylinder”, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, **49**, pp 341-348.
- [29] Guo Z.S. (2004), “Temperature distribution of thick thermo set composites”, **J. Model Simul. Mater Sci. Eng.**, **12**, pp 443–452.
- [30] D. Shi-qiang and L. Jia-chan (2005), “Homogenized Equations for Steady Heat Conduction in Composite Materials with Dilutely-Distributed Impurities”, **Journal of Applied Mathematics and Mechanics.**, **4**, **2**, pp 167-173.
- [31] Chatterjee J., Henry D.P., Ma F and Banerjee P.K. (2008), “An efficient BEM formulation for 3-dimensional steady-state heat conduction analysis of composites”, **Int. J. Heat Mass Transfer**, **51**, pp 1439–1452.
- [32] Sadowski T., Ataya S. and Nakonieczny K. (2008), “Thermal analysis of layered FGM cylindrical plates subjected to sudden cooling process at one side—Comparison of two applied methods, for problem solution”, **Computational Materials Science, in press**
- [33] Chiu C.H., Cheng C.C., Hwan C.L. and Tsai K.H. (2006), “Cylindrical orthotropic thermal conductivity of spiral woven composites. Part II: a mathematical model for their effective transverse thermal conductivity”, **Polym. Polym. Compos.**, **14**, **4**, pp 349-364.
- [33] Chiu C.H., Hwan C.L., Cheng C.C and Tsai K.H. (2007), “Cylindrical orthotropic thermal conductivity of spiral woven composites. Part III: an estimation of their thermal properties”, **Polym. Polym. Compos.**, **15**, **3**, pp 167–182.
- [34] Karageorghis A. and Lesnic D. (2008), “Steady-state nonlinear heat conduction in composite materials”, **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, **197**, pp 3122-3137.
- [35] Haji-Sheikh A., Beck J.V. and Agonater D. (2003), “Steady-state heat conduction in multi-layer bodies”, **Int. J. Heat and Mass Transfer**, **46**, pp 2363-2379.

- [36] Onyejekwe O.O. (2002), "Heat Conduction in composite media: a boundary integral approach", **Computer & Chemical Engineering**, **26**, pp 1621-1632.
- [37] Mahmood Norouzi, Hossein Rahmani, Alireza Komeili Birjandi and Amin Ahmadi Joneidi. (2016), "A general exact analytical solution for anisotropic non-axisymmetric heat conduction in composite cylindrical shells", **international Journal of Heat and Mass Transfer**, **93**, pp41-56.
- [38] M.Norouzi,A.Amiri Delouei and M. Seilsepour. (2013), "A general exact solution for heat conduction in multilayer spherecal composite laminates" , **Composite Structures** , **106**, pp 288-295
- [39] M. Norouzi and H. Rahmani, (2015), "On exact solutions for anisotropic heat conduction in composite conical shells", **International Journal of Thermal Sciences**, **94**, pp 110-125
- [40] A. Amiri Delouei, M. H. Kayhani and M. Norouzi. (2012), "Exact analytical solution of unsteady axi-symmetric conductive heat transfer in cylindrical orthotropic composite laminates", **International Journal of Heat and Mass Transfer**, **55**, 15–16, pp 4427-4436
- [41] M.H. Kayhani, M. Norouzi and A. Amiri Delouei. (2012) "A general analytical solution for heat conduction in cylindrical multilayer composite laminates", **International Journal of Thermal Sciences**, **52**, pp 73-82
- [42] K. Daneshjou., M. Bakhtiari., R. Alibakhshi and M. Fakoor.(2015), "Transient thermal analysis in 2D orthotropic FG hollow cylinder with innovations heat source", **International Journal of Heat and Mass Transfer**, **89**, pp 977-984
- [43] Bingen Yang and Shibing Liu, (2017), "Closed-form analytical solutions of transient heat conduction in hollow composite cylinders with any number of layers", **International Journal of Heat and Mass Transfer**, **108**, pp 907-917
- [44] Milica Mirkovi., Marjanovi., Radovan Gospavi., Goran Todorovi. (2019), "An analytical approach based on Green's function to thermal response factors for composite planar structure with experimental validation", **International Journal of Thermal Sciences**, **139**, pp 129-143
- [45] <https://iran-mavad.com>
- [46] <https://rasekhoon.net>

Abstract

In this study, an exact analytical solution for steady and unsteady heterogeneous conductive heat transfer in spherical laminated composite vessels is presented. This study focuses on axisymmetric heat transfer in spherical composite laminates by considering the heat conduction in Peripheral and radial dimensions. This analytical solution is also obtained for general linear thermal boundary conditions which covers combined effect of the heat conduction, convection, and radiation at boundaries.

Finding the most generalized analytical solution based on the complicated boundary conditions and heterogeneous heat transfer is one of the main innovation of current work.

for solving the steady-state problem. first, Kirchhoff transformation is used to homogenize the temperature equation and then the problem solved in the Kirchhoff environment by using the separation variable method. Finally, by Kirchhoff inverse transformation the temperature equation was obtained in the desired physical environment. in order to solve the problem unsteady state the equation was converted by the superposition method to steady and unsteady parts. and then by using Kirchhoff transformation and the separation variable method the temperature equation of the unsteady part was obtained. then the final temperature equation be came the sum of the unsteady and steady parts. Finally, MATLAB software was used for analytical solve the temperature equation for different boundary conditions and for validation of this work, the temperature values and diagrams obtained were compared with the values obtained from the numerical solution. Finally, conclusions were done from the present study and some suggestions.

Keywords: Analytical Solution, Spherical Composite Laminate, Variable Heat Transfer Coefficient, Separation Variable Method, Steady Solution, Unsteady Solution



Shahrood University of
Technology

Faculty of Mechanical and Mechatronics Engineering
M.Sc. Thesis in Energy Conversion Engineering

Analytical Solution of Heat Transfer in Heterogeneous Spherical Composite Pressure vessels

By: Seyed Hashem Abadi

Supervisors:

Dr Ali Khaleghi

Dr Mahmood Nourozi

Summer 2019