بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک

پایان‌نامه کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک گرایش طراحی کاربردی

کنترل فعال ارتعاشات پوسته مخروطی ناقص تحت بارگذاری هارمونیک با استفاده از عملگر پیزوالکتریک

نگارنده: سید مرتضی فاطمی مقدم

استاد راهنما

دکتر حبیب احمدی

شهریور ۱۳۹۸

در این صفحه صورت جلسه دفاع را قرار دهید. لازم است پس از صحافی این صفحه مجدداً توسط دانشکده مهر گردد و استاد راهنما با امضای خود اصلاحات پایان‌نامه را تایید کند.

تقدیم اثر

تقدیم به خانواده عزیز و بزرگوارم که همواره در سختی‌ها یار و یاور من بوده و در سختی‌ها پشتیبانی بزرگ در این راه برای من بوده‌اند.

تشکر و قدردانی

بر خود لازم می‌دانم تا از استاد گرامیم جناب آقای دکتر احمدی بسیار تشکر کنم زیرا اگر دلسوزی‌ها و راهنمایی‌های ایشان نبود امکان انجام این امر پژوهشی وجود نداشت.

تعهدنامه

اینجانب **سید مرتضی فاطمی مقدم** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد **رشته مهندسی مکانیک- طراحی کاربردی** دانشکده **مهندسی مکانیک و مکاترونیک** دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان‌نامه **سید مرتضی فاطمی مقدم** تحت راهنمائی **دکتر حبیب احمدی** متعهد می‌شوم.

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایح اصلی پایان‌نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .

استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان‌نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پایان نامه مطالعه ارتعاشات غیر خطی و کنترل فعال ارتعاشات اجباری پوسته مخروطی ناقص مدرج تابعی مورد بررسی قرار گرفته است. بدین منظور ابتدا معادله دینامیکی پوسته ناقص مخروطی از جنس مدرج تابعی استخراج گردیده است. سپس با استفاده از روش گالرکین و تابع خیز پیشنهادی، معادلات دیفرانسیل معمولی سیستم بدست آمده است. در ادامه با استفاده از روش‌های نیمه تحلیلی تئوری اغتشاشات، تحلیل‌های رزونانسی از جمله (رزونانس اولیه، مافوق هارمونیک و مادون هارمونیک) برای بررسی رفتار سفت شوندگی یا نرم‌شوندگی سیستم انجام شده است. جهت کنترل فعال سیستم دولایه پیزوالکتریک به سیستم اضافه شد که لایه بیرونی مربوط به عملگر و لایه داخلی برای سنسور در نظر گرفته شده است. با توجه به لایه‌های پیزوالکتریک اضافه شده، معادلات حاکم بر سیستم استخراج و به روش قبلی معادلات دیفرانسیل معمولی سیستم بدست آمده است. با استفاده از سنسورهای پیزوالکتریک کنترل فعال ارتعاشات این سازه و همچنین تاثیر سنسورهای پیزوالکتریک بر روی رفتار نرم شوندگی و یا سفت شوندگی سازه مورد بررسی قرار گرفته است. تحلیل‌های مورد نظر برای این سازه در زوایای مختلف راس مخروط، توزیع‌های مختلف کسر حجمی برای ماده مدرج تابعی و بارگذاری مختلف بررسی شده است.

کلمات کلیدی: ارتعاشات غیرخطی، کنترل فعال، پیزوالکتریک، ماده مدرج تابعی، پوسته ناقص مخروطی

فهرست مطالب

فهرست جداول

فهرست اشکال

فصل اول: مقدمه

۱-۱ مقدمه

در این فصل توضیحاتی در زمینه سیستم‌های ممتد، کاربرد پوسته‌ها و پوسته‌های مخروطی، مواد FGM و مروری بر کارهای پیشین ارائه می‌شود.

۱-۲ سیستم‌های ممتد

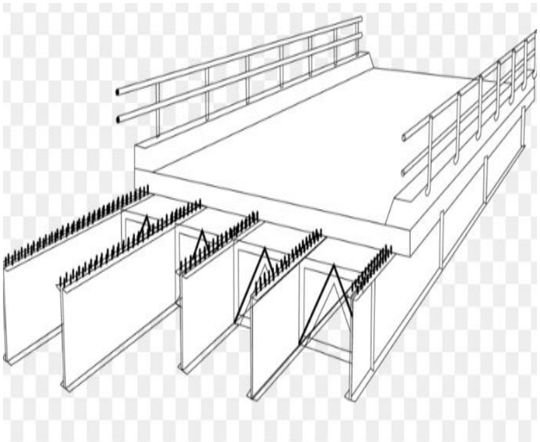
همانند دیدگاه‌های مدل‌سازی پدیده‌ها در ریاضیات به دو صورت خطی و غیرخطی، در فیزیک نیز چنین دیدگاهی برای سیستم‌های پیوسته و گسسته وجود دارد. پارامترهای پدیده‌های فیزیکی که در طبیعت وجود دارد را نمی‌توان به صورت جداگانه مدل کرد، لذا در طبیعت پدیدهای فیزیکی به صورت پیوسته می‌باشد. در حوزه مهندسی سازه‌هایی از قبیل میله، غشا، تیر، ورق و پوسته جز سیستم‌های ممتد به حساب می‌آیند. برای بررسی رفتار دینامیکی این نوع از سازه‌ها بر خلاف سیستم‌های گسسته باید پس از بدست آوردن مدل دینامیکی آن‌ها به جداسازی معادلات حاکم بر این نوع سازه‌ها با استفاده از روش‌های مختلف پرداخته شود. ویژگی اصلی سیستم‌های پیوسته که در بررسی رفتارهای دینامیکی مخصوصا در تحلیل ارتعاشات خود را بروز می‌دهد و تفاوت قابل ملاحظه‌ای با سیستم‌های گسسته دارد در تعداد شکل مودهای ارتعاشی، نحوه انتقال انرژی بین مودها، کنترل و کاهش ارتعاشات در شرایط مختلف (هندسی، بارگذاری، شرایط مرزی) می‌باشد. همچنین به علت استفاده زیاد این نوع از قطعات در صنایع مختلف و علوم مهندسی و حساسیت کاربرد آن‌ها بررسی و تحلیل‌های استاتیکی و دینامیکی این نوع از ساختارها از اهمیت بالایی برخوردار است [۱].

۱-۳ کاربرد ورق‌ها و پوسته‌ها

۱-۳-۱ ورق ها

فاصله بین دو صفحه تشکیل دهنده ورق‌ها را ضخامت (h) ورق می‌گویند که در ورق‌های نازک مقدار این ضخامت نسبت به سایر ابعاد هندسی (طول، عرض، ارتفاع، قطر و ...) کوچک می‌باشد. بارهای اعمالی استاتیکی و دینامیکی به ورق‌ها معمولا به صورت عمودی وارد می‌شوند. عمل بارگذاری روی این قطعات تقریبا مشابه سایر سیستم‌های پیوسته مانند تیرها و کابل‌ها می‌باشد. بنابراین ورق‌ها را می‌توان با تعداد نامتناهی شبکه‌ای از تیرها و یا شبکه نامحدودی از کابل‌های به هم پیوسته، بسته به مقدار سختی و انعطاف پذیری سازه تقریب زد. از آن‌جا که بارگذاری در صفحات در حالت کلی در دو بعد انجام می‌شود و بدلیل اهمیت استحکام پیچشی در ورق‌های ایزوتروپیک و تحمل انواع بارها در این نوع از سیستم‌ها، همچنین داشتن ضخامت کم و سفتی بیشتر نسبت به تیرها، از اهمیت ویژه‌ای

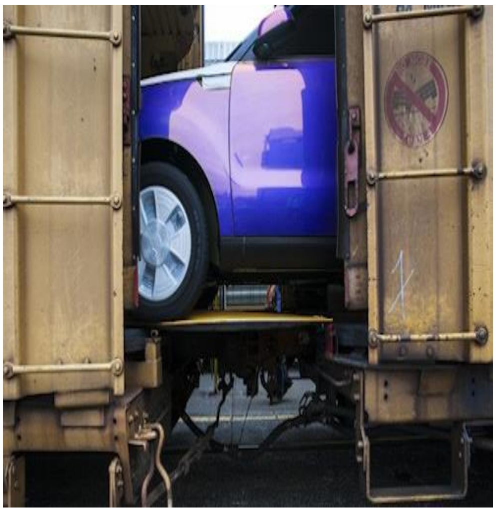
برخوردار می‌باشند. به دلیل مزایای ذکر شده، این نوع از سازه‌ها به طور گسترده در انواع زمینه‌های صنعتی ازجمله پل‌ها، موشک، کشتی، ابزارآلات صنعتی، راهسازی، زیردریایی، سازه‌های هیدرولیکی (دریچه سدها- پل‌های متحرک) و ... مورد استفاده قرار می‌گیرند. شکل‌های (۱-۱) تا (۱-۷) اشاره‌ای به برخی از کاربردهای ورق‌ها دارد.



شکل ۱-۱: نمونه‌ای از کاربرد ورق در پل سازی

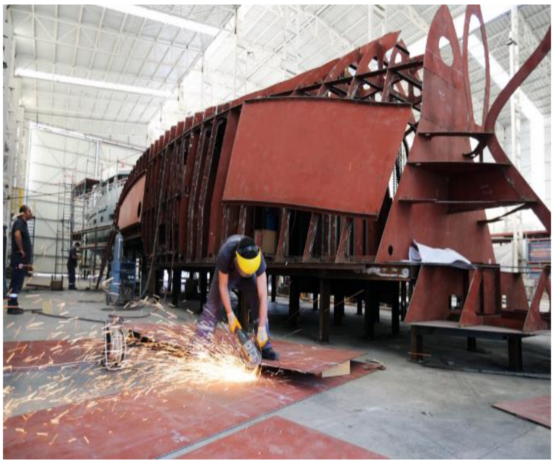
شکل ۱-۲: استفاده از ورق در راهسازی

شکل ۱-۳: استفاده از ورق ها در صنایع هوایی



شکل ۱-۴: استفاده از ورق ها در حمل و نقل

شکل ۱-۶: استفاده از ورق‌ها در صنعت کشتی سازی



شکل ۱-۵ استفاده از ورق‌ها در صنعت کشتی سازی

شکل ۱-۷: استفاده از ورق ها در خودرو سازی بعد از فرم دهی

۱-۳-۲ پوسته‌ها

- ✓ در این قسمت برخی از تعاریف و مبانی موجود در پوسته‌ها بیان خواهد شد. در اصطلاح پوسته به اجسامی گفته می‌شود که توسط دو سطح منحنی محدود شده‌اند. که فاصله میان این سطوح در مقایسه با سایر ابعاد جسم کوچک می‌باشد. مکان هندسی نقاطی که در فاصله مساوی از دو سطح قرار دارند سطح متوسط پوسته را تعیین می‌کنند و طول بخشی که عمود بر دو سطح منحنی است نشان دهنده ضخامت پوسته می‌باشد. به طور کلی هندسه پوسته‌ها با مشخص کردن ضخامت و مشخص کردن صفحه میانی آن‌ها مشخص می‌شود. تمام ویژگی‌هایی که در قسمت بالا برای ورق‌ها بیان شد برای پوسته‌ها نیز صادق می‌باشد، علاوه بر این، پوسته‌ها نسبت به ورق‌ها دارای انحنای اضافی می‌باشند. پوسته‌ها را بر اساس شکل منحنی‌هایی که دارند طبقه بندی می‌کنند. بسته به نوع انحنا، پوسته‌ها به مدل‌های استوانه (گرد و غیرگرد) مخروطی، بیضوی، سهموی، هذلولوی، هذلولوی سهموی و ... تقسیم بندی می‌شوند. به دلیل وجود انحنا در پوسته‌ها، تحلیل آن‌ها نسبت به ورق‌ها پیچیده‌تر است زیرا انحنای به وجود آمده در این پوسته‌ها سبب ایجاد کشش می‌شود که قابل صرف نظر کردن

نیست. همچنین ورق‌ها نوع خاصی از پوسته‌های بدون انحنا بوده که در برخی موارد به آن‌ها ورق‌های منحنی نیز گفته می‌شود. نظریه عمومی تیرها، ورق‌ها و پوسته‌ها بر اساس مجموعه‌ای از مفروضات مشابه هستند. اما ساز وکار مقاومت آن‌ها در هنگام اعمال بار با یکدیگر متفاوت است. پوسته‌ها را می‌توان به صورت طبقه‌ای از ورق‌های نازک منحنی شکل در نظر گرفت.

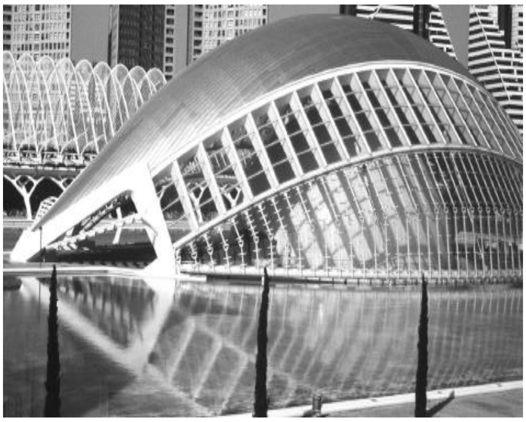
✓ پوسته‌ها سازه‌هایی هستند که نقش بسیار ویژه‌ای در مهندسی ایفا می‌کنند. نمونه‌ای از کاربردهای پوسته‌ها در علوم مختلف مهندسی که شامل مهندسی عمران، معماری، مکانیک، هوافضا و غیره می‌باشد عبارت است از: در مهندسی عمران و معماری استفاده در سقف‌های بزرگ، سازه‌های نگه‌دارنده مایع مخازن آب، پوسته‌های مهارکننده نیروگاه‌های هسته‌ای و گنبد بتونی قوسی شکل این نیروگاه‌ها، در مهندسی مکانیک اشکال مختلف پوسته در سیستم‌های لوله‌کشی، دیسک‌های توربین و فن‌آوری مخازن تحت فشار استفاده می‌شود. هواپیما، موشک، کشتی و زیردریایی نیز نمونه هایی از استفاده از پوسته‌ها در مهندسی هواپیما و صنایع دریایی است. یکی دیگر از کاربردهای پوسته‌ها در مهندسی در زمینه بیومکانیک می‌باشد. پوسته‌ها در اشکال مختلف بیولوژیکی مانند چشم، جمجه، اشکال گیاهی و حیوانی یافت می‌شود.

استفاده گسترده از این نوع سازه‌ها در مهندسی بخاطر وجود مزایای زیر می‌باشد:

۱- کارایی و توانایی در تحمل بار
۲- داشتن ساختار یکپارچه و درجه بالای استحکام
۳- استحکام بالا نسبت به وزن. این معیار معمولا برای تخمین باردهی ساختار سازه استفاده می‌شود. هر مقدار که این نسبت بزرگتر باشد ساختار مطلوب‌تر است. با توجه به این معیار، سازه‌های پوسته بسیار بهتر از سایر سیستم‌های پیوسته با ابعاد مشابه عمل می‌کنند.
۴- سفتی بسیار زیاد

علاوه بر مزایای مکانیکی، پوسته‌ها ارزش بسیار بالایی در زیباسازی و طرح‌های معماری دارند. تصاویر (۱-۸) تا (۱-۱۲) اشاره‌ای به کاربرد پوسته‌ها دارد.

شکل۱-۸: کاربرد پوسته ها در مخازن



شکل۱-۹:کاربرد پوسته‌ها در معماری

شکل۱-۱۰: کاربرد پوسته‌ها در علوم فضایی

شکل۱-۱۱: کاربرد پوسته‌ها در بدنه توربین‌ها

شکل۱-۱۲:کاربرد پوسته‌ها در صنایع هسته‌ای

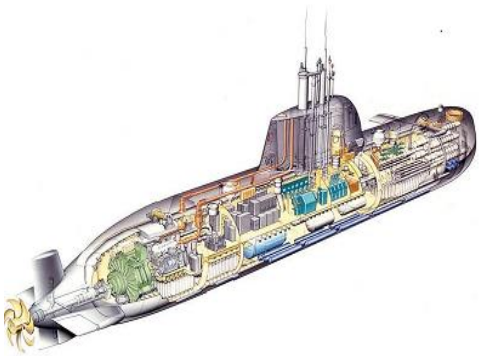
۱-۴پوسته‌های مخروطی

پوسته های مخروطی نوع خاص دیگری از پوسته‌ها می‌باشند ویژگی‌های آن‌ها تا حدودی مشابه پوسته‌های استوانه‌ای می‌باشد. اما در برخی از ویژگی‌های هندسی از جمله زاویه راس و مولد با یکدیگر متفاوت می‌باشند. پوسته‌های مخروطی کاربرد خاصی از پوسته‌ها را در صنایع هوافضا و صنایع دریایی ارائه می‌دهد. در صنایع هوافضا در دماغه موشک‌ها و شاتل‌های فضایی که برای غلبه بر جاذبه با سرعت‌های مافوق صوت مواجه هستند به علت وجود مسائل آیرودینامیکی از قبیل وجود پدیدهای گردابه، جدایش و غیره و بدست آوردن نیروی بالابرنده بهینه برای سازه در حال حرکت با تغییر زاویه راس پوسته‌های استوانه‌ای، نوع خاصی از پوسته‌ها را ایجاد می‌کنند. در صنایع دریایی نیز، از قبیل زیردریایی‌ها انتهای آن‌ها را به علت وجود برخی مسائل طراحی به صورت مخروطی می‌سازند. شکل‌های (۱-۱۳) تا (۱-۱۶) نشان دهنده برخی از کاربردهای پوسته‌های مخروطی می‌باشد.

شکل۱-۱۳: پوسته‌های مخروطی در دماغه موشک

شکل۱-۱۴: پوسته‌های مخروطی در دماغه موشک

شکل۱-۱۵: انتهای زیر دریایی دارای بدنه مخروطی

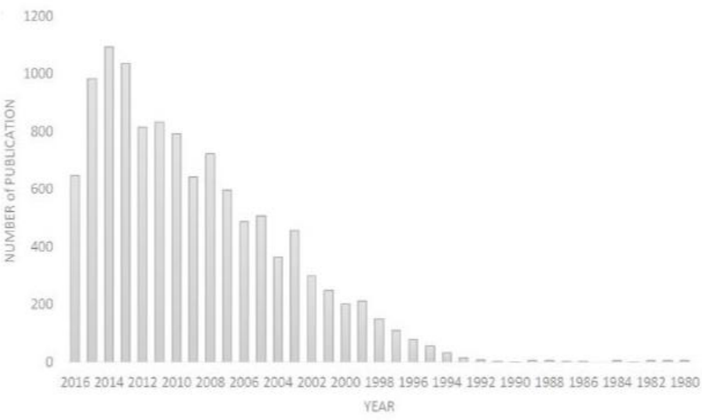


شکل۱-۱۶: انتهای زیر دریایی دارای بدنه مخروطی

۱-۵ مواد FGM[1]

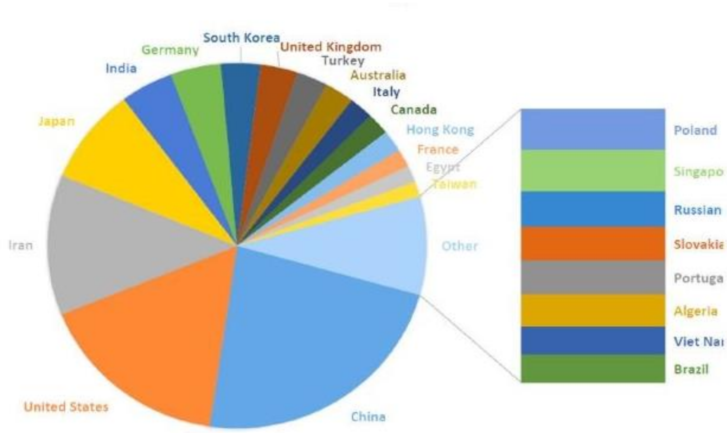
در این قسمت به وضعیت دانش در انتخاب، ساخت، تجزیه و تحلیل و مدل‌سازی مواد مدرج تابعی (FGM) با تاکید خاص بر شناسایی روابط ساختاری پرداخته شده است. همچنین در این قسمت چالش‌هایی که در زمینه ساخت مواد مدرج تابعی و زمینه‌های عملی مختلف آن وجود دارد بیان شده است.

توانایی درک و تغییر مواد برای توسعه و پایه‌ریزی تکنیکی در طول زمان از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. امروزه دانشمندان و مهندسان اهمیت استفاده از مواد نوآورانه را به دلایل اقتصادی و زیست محیطی حائز اهمیت می‌دانند. مواد مدرج تابعی مواد مهندسی پیشرفته‌ای هستند که برای انجام عملکرد خاصی، خواص خود را در یک پیکربندی مکانی به طور پیوسته منتقل می‌کنند، که این امر به وسیله نوع موقعیت ریزساختارهای این مواد می‌باشد. مواد مدرج تابعی جز مواد طبیعی رایج نیست که به طور عمده در صنایع و یا موارد تزئینی بدون هیچ فرایند خاصی مورد استفاده قرار بگیرد. لذا فرایند ساخت این مواد پیچیده و همراه با چالش می‌باشد. بِوِر و همکاران در سال ۱۹۷۲ به بررسی تئوریک مواد مدرج تابعی و کامپوزیتی پرداختند اما با توجه به در دسترس نبودن این مواد موفق به توسعه بیشتر نشدند. حدود یک دهه بعد اصطلاح " مواد مدرج تابعی " برای اولین بار در ژاپن در سال ۱۹۸۴ ارائه گردید. توسعه و تولید این مواد و توجه به خواص مکانیکی و حرارتی خاص آن‌ها باعث رشد توسعه و تحقیق، در زمینه این نوع از ساختارها شد. به علت توانایی‌های خاص و تنوع در ساختار این نوع از مواد و کاربردی بودن نقش آن‌ها در صنایع پیشرفته مانند هوافضا، مهندسی زیستی و صنایع هسته‌ای باعث شد تا این مواد بسیار مورد توجه قرار گرفته شوند. به همین علت تعداد تحقیقات در این حوزه از تحقیق در طی چند سال اخیر افزایش چشمگیری داشته است.



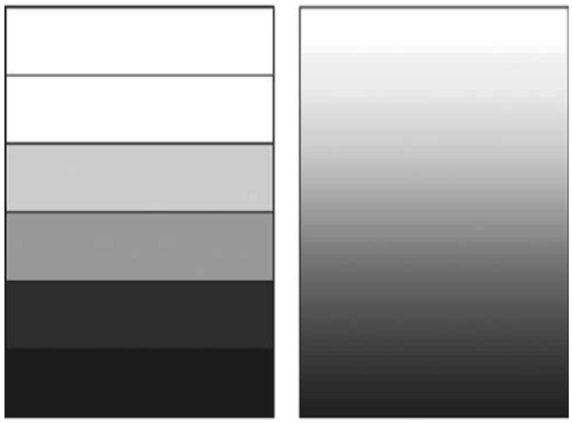
شکل۱-۱۷: تعداد انتشار سالانه در زمینه مواد مدرج تابعی به استناد پایگاه اسکوپوس[۲]

[1] -functionally graded material



شکل۱-۱۸: سهم کشورهای مختلف در زمینه تولید دانش برای این مواد[۲]

مواد مدرج تابعی، اغلب دارای یک پیکربندی خاص از مواد تشکیل دهنده مانند فلزات، سرامیک و پلیمرها در ساختار خود می‌باشند. دستیابی به مورفولوژی‌های (ریخت شناسی) خاص و بهبود خواص ساختاری مانند خواص فیزیکی و مکانیکی این مواد مزیت عمده این نوع از ساختارها در میان کامپوزیت‌های دیگر است. شکل زیر نشان دهنده شماتیکی از مواد مدرج تابعی می‌باشد.



شکل۱-۱۹: شکل سمت راست ماده مدرج تابعی و سمت چپ یک کامپوزیت [۲]

روش‌های متعددی برای بدست آوردن و تغییر ترکیبات در کامپوزیت‌ها وجود دارد. این روش‌ها شامل فاز گاز، فاز مایع و فاز جامد می‌باشد که می‌تواند به صورت فیزیکی و شیمیایی خواص مورد نظر را بدست آورد. رسوب بخار شیمیایی (PVD)[۱]، جوش یون، پاشش پلاسما و مخلوط کردن یون، نمونه‌هایی از روش‌های مبتنی بر گاز است که برای ساخت مواد مدرج تابعی مورد استفاده قرار می‌گیرد. در فرایندهای فاز مایع مانند اسپری پلاسما به علت انعطاف پذیری بالا و میزان بالای رسوب و ساخت هندسه‌های پیچیده، این روش را برای کاربردهای پوشش دهی محبوب کرده است. در روش الکترواستاتیک، گرادیان ترکیب به طور مستقیم به عواملی از قبیل نوع الکترود شیمیایی و انتخاب

[1] physical vapour deposition

مناسب ماده الکترولیت بستگی دارد. جهت گیری ساده غیر همگن ماده مدرج تابعی و تنظیم این ساختار بر روی بستر در فرایند تولید از مراحل اصلی ساخت این نوع از مواد می‌باشد. بدلیل پیوستگی در توزیع ماده در مواد مدرج تابعی خواص مکانیکی، حرارتی و مغناطیسی حالت پیوسته‌ای پیدا می‌کنند که موجب استحکام بیشتر ماده می‌شوند و همین تغییرات تدریجی مواد در ساختار آن‌ها موجب استحکام ماده بین لایه‌های مختلف می‌شود. نوع رایجی از این نوع مواد، ترکیب پیوسته‌ای از سرامیک و فلز می‌باشد. این مواد از مخلوط پودر فلز و سرامیک بدست می‌آیند. در صورتی که در مواد کامپوزیتی لایه چینی شده، تداخل بین ساختارهای الیافی و لایه‌ای نوعی ناهماهنگی در خواص سیستم مورد نظر را ایجاد کرده و سبب کاهش استحکام ماده و افزایش پدیده تمرکز تنش می‌شوند. با توجه به پیشرفت‌های قابل توجه در فرایند تولید مواد مدرج تابعی مختلف، سرمایه‌گذاری‌های بزرگ تحقیقاتی توسط صنایع مختلف برای تولید انبوه این مواد انجام شده است. تغییرات تدریجی و پیوسته این نوع ماده ناهمگن باعث به وجود آمدن خواص مفید ماکروسکوپیک از جمله سختی، مقاومت در برابر خوردگی و سایش، حفاظت حرارتی، تراکم توده و غیره سبب کاربردهای فراوانی از جمله در پوشش زره برای سربازان و استفاده در مواد هوشمند مانند پیزوالکتریک‌ها شده است. امروزه دی‌الکتریک‌های درجه‌بندی شده و ترموالکتریک‌ها، فیلم‌های نازک تهیه شده از رسوبات شیمیایی، پیزوالتریک‌های مدرج تابعی (برای استفاده از مبدل‌های التراسونیک) و الکترودهای مدرج سوخت جامد به طور گسترده‌ای در زمینه‌های انرژی مورد استفاده قرار می‌گیرند. کاربردهای دیگر آن‌ها نیز در زمینه‌های سنسورها، کنتاکتورها و خازن‌ها می‌باشد. توانایی طراحی قطعات با توجه به خواص حرارتی، مکانیکی و الکتریکی این موارد را یک گزینه ایده‌آل برای تولید محصولات پیشرفته قرار داده است.

۱-۶ کاربرد تحلیل ارتعاشات[۳]

در این بخش به نقش ارتعاشات و تاثیر آن در بخش‌های مختلف اشاره خواهد شد.

- ✓ دستگاه‌ها و ابزارهای دقیق: سیستم‌های متعددی در مهندسی ابزار دقیق به ویژه سیستم‌های نوری وجود دارد که در معرض ارتعاشات قراردارند. مانند هارد دیسک‌ها، دی وی دی خوان‌ها، تلسکوپ‌ها ، گوشی‌های موبایل و میکروسکوپ‌های نوری
- ✓ تخریب : تخریب و شکست در سازه‌ها بر اثر ارتعاشات از موارد مهمی بشمار می‌رود. این آسیب‌ها معمولا بر اثر کرنش‌های بزرگ در حالت هارمونیک با دامنه بالا و یا با فرکانس بالا در سیستم‌ها رخ می‌دهد که باعث تخریب در سازه‌های مکانیکی می‌شود. همچنین سازه‌های ساختمانی در اثر ارتعاشات گذار(زمین لرزه) دچار آسیب یا تخریب می‌شوند. لرزش پل‌های بزرگ معلق در اثر باد و قرار گرفتن در معرض نیروهای هارمونیک نیز موجب آسیب به این نوع از سازه‌ها می‌شود.

- ✓ راحتی: مثال‌ها و مواردی نیز وجود دارد که نشان می‌دهد زمانی که انسان تحت تاثیر تحریک‌های هارمونیک قرار می‌گیرد آسایش و راحتی شخص مختل شده و در زندگی فرد مشکل ایجاد می‌کند. آلودگی‌های صوتی در صنایع و ایجاد صداهای هارمونیک دستگاه‌های صنعتی نمونه‌ای از این موارد می‌باشد. از مثال‌های دیگری که می‌توان به مورد بالا اضافه کرد تحت تاثیر قرار گرفتن اشخاص بر اثر تحریکات هارمونیک مکانیکی آن هم در مدت طولانی مانند ارتعاشات صندلی خودرو، ارتعاشات قطار، هواپیما و غیره می‌باشد.

۱-۷ روش‌های کاهش ارتعاشات[۳]

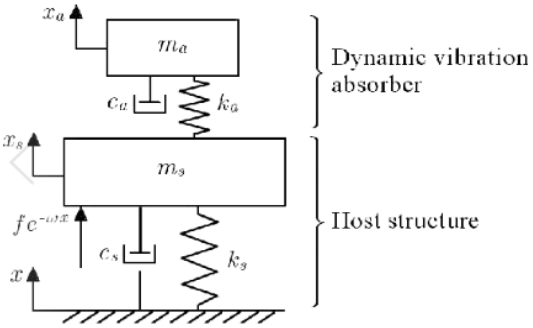
برای کاهش ارتعاشات در سیستم‌ها روش‌های مختلفی را پیشنهاد می‌دهند که مرسوم‌ترین آن‌ها افزایش سفتی سیستم، میرا کردن و یا جداسازی ارتعاش از سیستم است. افزایش سفتی سیستم شامل تغییر فرکانس رزونانس مجموعه به فراتر از محدوده فرکانس تحریک می‌باشد. میرا کردن سیستم شامل کاهش قله رزونانس با از بین بردن انرژی ارتعاشی و جداسازی شامل جلوگیری از انتشار اختلالات به بخش‌های حساس مجموعه است. میرایی ممکن است به صورت غیر فعال با میرا کننده‌های مایع، جریان گردابی، الاستومرها، اجزای هیستریتی و یا با انتقال انرژی به جذب کننده دینامیکی ارتعاش بدست آید. همچنین می‌توان از مبدل‌ها برای تبدیل انرژی ارتعاشی به انرژی الکتریکی برای تخلیه و یا ذخیره در شبکه‌های الکتریکی استفاده کرد (برداشت انرژی[۱]). اخیرا تجهیزاتی به نام دستگاه‌های نیمه فعال (یا نیمه غیرفعال نیز نامگذاری می‌شوند.) در دسترس قرار گرفته‌اند؛ که شامل دستگاه‌های غیرفعال با قابلیت کنترل پذیری می‌باشند. میرا کننده‌های مایع مغناطیسی [۲]یک نمونه معروف از این دستگاه‌ها می‌باشند. هنگامی که در مجموعه‌ها به عملکردهای بالا برای کنترل ارتعاشات نیاز باشد، کنترلرهای فعال مورد استفاده قرار می‌گیرد. که این مجموعه شامل قطعاتی از سنسورها (فشار- شتاب- سرعت- نیرو) و مجموعه‌ای از عملگرهای (نیرو- اینرسی- کرنشی) و یک الگوریتم کنترلی (بازخوردی[۳] یا پسخوردی[۴]) است.

طراحی یک سیستم کنترل فعال شامل بسیاری از مسائل مانند چگونگی پیکربندی حسگرها و عملگرها و چگونگی حفظ پایداری سیستم از مسائل مهم در این نوع روش می‌باشد. برای استفاده از این نوع کنترلرها برای کاهش ارتعاش نیاز به توان مشخصی می‌باشد. لذا برای کاهش انرژی، جایگزینی برای این نوع سیستم‌ها را پیشنهاد می‌دهند که دارای ویژگی‌های مجموعه‌های فعال و غیرفعال می‌باشد به این نوع از ساختارها کنترلرهای ترکیبی می‌گویند.

1 -Energy harvest
2 - magneto-rheological fluid
3 -feed back
4 -feed forward

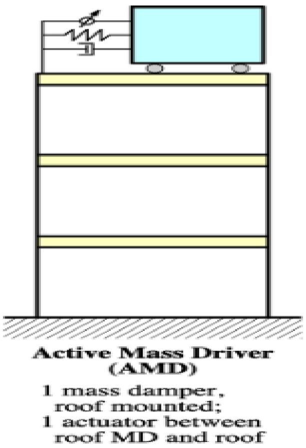
۱-۷-۱ تکنیک‌های کنترل در مجموعه‌ها

- ✓ جاذب‌های دینامیکی ارتعاش [1] به وسیله یک توده جرمی شناخته می‌شوند که جرم میراگر نام دارند و برای زمانی مورد استفاده قرار می‌گیرند که فرکانس سیستم هدف به اندازه کافی پایدار باشد. تصویر زیر شماتیکی ساده از جاذب‌های دینامیکی ارتعاش می‌باشد.



شکل۱-۲۰: جاذب‌های دینامیکی ارتعاش[۳]

- ✓ جرم میراگر فعال [2]یک دستگاه دارای اینرسی است که می‌تواند با یک نیروی محرک جفت شود و فرکانس طبیعی آن کمتر از فرکانس طبیعی سازه می‌باشد. سیستم جرم میراگر فعال با یک سنسور سرعت سنج و یا شتاب سنج جفت می‌شود. همچنین عملکرد کنترلی آن نیز به صورت یک تابع حلقه باز دارای قطب و صفر متغیر است و این موضوع مسئله‌ای کلیدی در پایداری این نوع سیستم است. شکل‌های زیر نشان دهنده جرم میراگر فعال در حالت واقعی و شماتیک است.

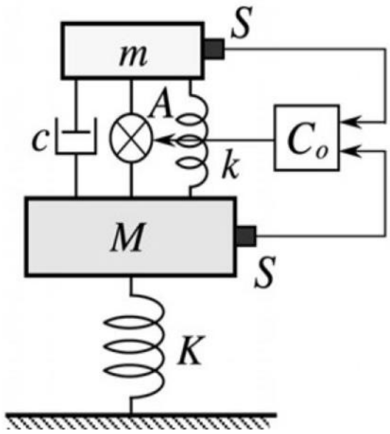


شکل۱-۲۱: جرم میراگر فعال[۳]

---

[1] -Dynamic vibration absorber (DVA)
[2]-Active mass damper

✓ کنترلرهای نوع سومی که به معرفی آن‌ها پرداخته شده است ساختاری ترکیبی از حالت جاذب دینامیکی ارتعاش همراه با میراگر جرم فعال است تا بتوان از مزایای سیستم در دو حالت استفاده کرد. به این ترتیب با توجه به کاهش فعالیت کنترلر در مقایسه با حالت اول به علت وجود جرم میراگر فعال، در حالی که عملکرد سیستم نسبت به حالت اول افزایش یافته است و می‌تواند گستره وسیع تری را پوشش دهد. در شکل زیر شماتیکی از سیستم‌های کنترل ترکیبی نشان داده شده است.



شکل۱-۲۲: سیستم‌های کنترل ترکیبی[۳]

اما روش‌های ذکر شده دارای محدودیت‌هایی از جمله دامنه ارتعاش، وابستگی به خواص سازه‌ای و هندسی، وزن بالا و عدم سازگاری با تغییرات محیطی در هنگام ارتعاش است؛ لذا امروزه از سیستم‌های کنترلی با مواد هوشمند برای کنترل ارتعاشات در سیستم‌ها مخصوصا سیستم‌های پیوسته استفاده می‌کنند. از بین این مواد هوشمند پیزوالکتریک‌ها به علت کارایی بالا، وزن کم و مقاومت در برابر تغییرات محیطی از اهمیت ویژه‌ای در کنترل ارتعاشات سازه‌ها برخوردارند.

۱-۸ کنترل ارتعاشات توسط مواد هوشمند[۴]

۱-۸-۱ مفهوم پیزوالکتریک :

اثر پیزوالکتریکی در مواد به صورت طبیعی و یا مصنوعی وجود دارد. کوارتز، نمک راشل، فسفات آمونیوم، پارافین، استخوان و حتی چوب، برخی از مواد پیزوالکتریک طبیعی هستند. همچنین مواد پیزوالکتریک مصنوعی نیز وجود دارند که شامل این مواد می‌باشند. زیرکونات تیتانات (PbZrTio3-PbTio3) که به عنوان (PZT) شناخته می‌شوند، باریوم تیتانات، باریوم استرانیوم تیتانات (BaSTO)، سرب لانتیوم زیرکونات تیتانات (PLZT)، سولفات لیتیوم و پلی ویندیلین فلوراید

(PVDF) و کوپلیمرها (PVDF) از جمله موادی هستند که می‌توان از آن‌ها نام برد. اکثر مواد پیزوالکتریک مصنوعی طبیعتی ایزوتروپیک دارند و برای ایجاد اثر پیزوالکتریکی حالت دوقطبی ندارند. از این جهت این مواد باید فرایندی به نام قطبی شدن را تجربه کنند که در این عمل از یک میدان الکتریکی قوی برای تنظیم دو قطبی مولکولی استفاده می‌شود.

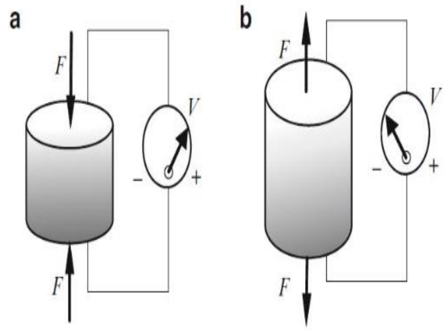
از دیدگاه ساختاری مواد پیزوالکتریک را می‌توان به دو بخش سرامیکی و پلیمری تقسیم کرد. سرامیک‌های پیزوالکتریک جز محبوب ترین ترکیبات (PZT) هستند که خواص آن‌ها با توجه به کاربردهای خاص قابل تنظیم است. خواص مکانیکی این نوع از مواد آن‌ها را برای استفاده در کاربردهای مختلف ایده‌آل کرده است که می‌توان به چند مورد از آن‌ها در زیر اشاره کرد:

- به عنوان مبدل انرژی الکتریکی
- به عنوان مبدل‌های انرژی صوتی به انرژی الکتریکی (دیسک‌های صوتی، میکروفون، استفاده در سنسورهای التراسونیک)
- تولید ولتاژ، سیستم‌های جرقه زنی، استفاده در ماشین آلات، پزشکی، پرینترهای جوهرافشان و ...

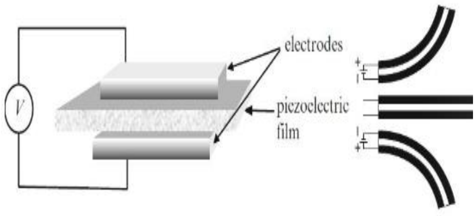
۱-۸-۲ رفتار مواد پیزوالکتریک

پیزوالکتریک بر اثر پدیده الکترومکانیکی در مواد جامد خاصی بوجود می‌آید که نشان دهنده اتصال بین حالت‌های الکتریکی، مکانیکی و حرارتی بوسیله اعمال فشار مکانیکی به بلورهای دی‌الکتریک است. کلمه "پیزو" از یک کلمه یونانی به معنای فشار گرفته شده است. نخستین آزمایش تجربی ارتباط بین پدیده ماکروسکوپیک پیزوالکتریک و ساختار کریستالوگرافی در سال ۱۸۸۰ توسط برادران کوری[۱] گزارش شد. وقتی این مواد تحت تاثیر تغییر شکل مکانیکی قرار می‌گیرند (تنش یا کرنش) می‌توانند بارالکتریکی تولید کنند (اثر مستقیم) و برعکس هنگامی که میدان الکتریکی روی این مواد اعمال می‌شود، منجر به تنش یا کرنش مکانیکی (اثر معکوس) می‌شود. کاربرد دو منظوره، این مواد را برای استفاده به عنوان سنسور(اثر مستقیم) و عملگر(اثر معکوس) برای استفاده در کنترل ارتعاشات سیستم‌های مکانیکی ایده‌آل کرده است. شکل‌های (۱-۲۳) و (۱-۲۴) نشان دهنده رفتار پایه‌ای مواد پیزوالکتریک (پیزو سرامیک و پیزو پلیمر) می‌باشد.

[1] - Curie brothers

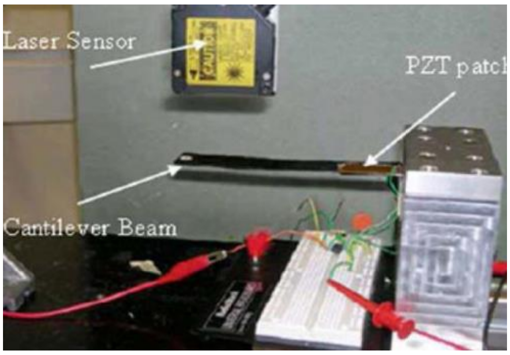


شکل۱-۲۳: شماتیک تاثیر نیروی محوری بر پیزوها[۴]



شکل۱-۲۴: شماتیک تاثیر خمش بر پیزوها[۴]

به طور خلاصه پیزوالکتریک اثر برهمکنش مکانیکی و الکتریکی یک سری از مواد خاص می‌باشد که از این خاصیت پیزوالکتریک‌ها برای کاهش و کنترل ارتعاشات در سیستم‌های پیوسته استفاده می‌کنند. بدین صورت که در این نوع از سیستم‌های کنترلی، بر اثر ارتعاشات سیستم، حسگرهای پیزوالکتریک تحریکات را به صورت ورودی به سیستم پردازشی به عنوان یک سیگنال انتقال داده و سیستم پردازش با استفاده از عملگرهای پیزو ولتاژی را در محدوده این عملگرها تولید کرده که این ولتاژ باعث ایجاد کرنش مکانیکی می‌شود. کرنش مکانی ایجاد شده در جهت معکوس حرکت سیستم عمل کرده و باعث کاهش دامنه ارتعاشات سازه می‌شود. شکل (۱-۲۵) نمونه‌ای از کاربرد پیزوالکتریک‌ها برای کاهش ارتعاشات سیستم‌های پیوسته می‌باشد.



شکل۱-۲۵: نمونه از است کنترل یک تیر یک سر گیردار توسط پیزوالکتریک‌ها

۱-۹ تاریخچه تحقیقات بر روی ارتعاشات و کنترل ارتعاشات پوسته‌ها

در این قسمت به تاریخچه‌ای از تحقیقاتی که بر روی پوسته‌ها انجام شده پرداخته خواهد شد. که بترتیب، ارتعاشات پوسته های استوانه‌ای، ارتعاشات پوسته‌های استوانه ای همراه با تقویت کننده، کنترل فعال ارتعاشات پوسته‌های استوانه می‌باشد. درادامه نیز ارتعاشات پوسته‌های مخروطی، ارتعاشات پوسته های مخروطی همراه با تقویت کننده، و کنترل فعال ارتعاشات پوسته های مخروطی بیان خواد شد.

۱-۹-۱ ارتعاشات پوسته‌های استوانه‌ای

عده‌ای از محققان به مطالعه و بررسی بر روی ارتعاشات پوسته‌های استوانه‌ای پرداخته اند. ژانگ و همکاران [۵] به بررسی پاسخ های رزونانسی یک پوسته استوانه‌ای پوشیده از غشا همراه با پیش کشش اولیه تحت شرایط دمایی و اغتشاشات متناوب پرداختند. آن‌ها با بررسی پارامتر دما بر روی ارتعاشات غیرخطی سیستم به این نتیجه رسیدند که پارامتر دما می‌تواند تاثیر زیادی بر پاسخ‌های رزونانسی سیستم داشته باشد و می‌تواند عامل مهمی در کنترل پاسخ‌های ارتعاشات غیرخطی سیستم باشد. کوریلو و آمابیلی [۶] به بررسی ارتعاشات غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای یک سرگیردار و یک سرآزاد پرداخته‌اند. آن‌ها از تئوری پوسته غیرخطیساندرز-کایتر برای مدل خود استفاده کرده‌اند. آن‌ها سیستم پیوسته را با توجه به مدهای طبیعی سیستم و با استفاده از تابع ریلی جداسازی کرده‌اند و با استفاده از روش‌های عددی به بررسی اثرات پایداری، هندسی و دامنه تحریک سیستم پرداخته‌اند. شنگ و همکاران [۷] به بررسی ارتعاشات غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای درجه‌بندی شده که توسط پایه الاستیک محصور شده است پرداخته‌اند. آن‌ها بر مبنای اصل همیلتون و با استفاده از تئوری غیر خطی فون کارمن، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول معادلات سیستم را استخراج کرده‌اند. مدل الاستیک محیطی از نوع وینکلر-پسترناک غیرخطی می‌باشد. آن‌ها برای بررسی سیستم غیرخطی مورد نظر و بررسی نوع رفتار ارتعاش (سخت شوندگی-نرم شوندگی) از روش مقیاس‌های چندگانه استفاده کرده‌اند. رحیمی مقدم و همکاران [۸] آنالیز فرکانسی مطلق[1] امواج در حال حرکت در یک پوسته استوانه‌ای لایه‌ای کامپوزیتی نازک در حال چرخش را که بر روی دو تکیه‌گاه الاستیک قرار گرفته است را مورد بررسی قرارداده‌اند. همچنین در پژوهش خود روش‌هایی را برای تعیین فرکانس مطلق امواج، برای پوسته استوانه‌ای لایه‌ای متخلخل در حال چرخش بررسی کرده‌اند. آن‌ها با استفاده از تئوری سندرز برای پوسته‌ها و با توجه به اصل همیلتون، معادلات حاکم بر سیستم را استخراج کرده و در آن اثر تنش‌های اولیه هوپ، نیروهای گریز از مرکز و اثر نیروی کوریولیس که به علت چرخش سازه به وجود می‌آید را نیز در نظر گرفته‌اند. آمابیلی [۹] به بررسی ارتعاشات غیرخطی یک پوسته منحنی شکل تحت دامنه بزرگ پرداخته‌است. وی از تئوری غیرخطی مرتبه سوم برشی برای بررسی پوسته تحت کشش که همراه

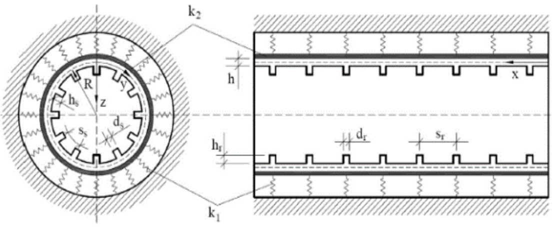
---

[1] - Absolute

با نقص‌های هندسی می‌باشد پرداخته است. همچنین نتایج پژوهش خود را با تئوری برشی مرتبه سوم کاهش یافته مقایسه کرده است. سوفیه و هوی [۱۰] بررسی پایداری و ارتعاشات پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی همراه با شرایط مرزی ترکیبی را با استفاده از نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول مورد مطالعه قرارداده‌اند. معادلات حاکم بر پوسته استوانه‌ای در سیستم با استفاده از نظریه دانل بدست آمده است. نوآوری آن‌ها در تحقیقشان ارائه روش حلی به فرم بسته برای مسئله مقدار ویژه با توجه به شرایط مرزی ترکیبی است. آن‌ها در نهایت تاثیر کسر حجمی ماده مدرج تابعی و شرایط مرزی را بر روی سیستم مورد مطالعه قرارداده‌اند.

۱-۹-۲ ارتعاشات پوسته‌های استوانه‌ای همراه با تقویت کننده

عده‌ای از محققان به تحلیل ارتعاشات پوسته‌های استوانه‌ای همراه با تقویت کننده پرداخته‌اند. دانگ و نام [۱۱] به بررسی رفتار دینامیک غیرخطی پوسته استوانه‌ای با تقویت کننده تحت بارهای خمشی در بستر الاستیک پرداخته‌اند.



شکل۱-۲۶: پیکربندی پوسته استوانه‌ای تقویت شده در محیط الاستیک[۱۱]

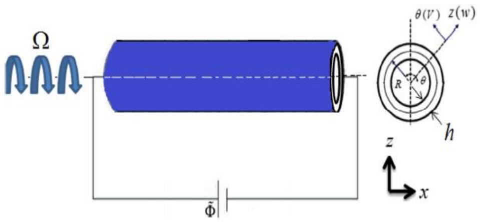
احمدی و فروتن [۱۲] به بررسی رزونانس‌های اولیه یک پوسته استوانه‌ای غیرخطی مدرج تابعی همراه با تقویت کننده مارپیچ با زاوایای مختلف پرداخته‌اند. آن‌ها رفتار سفت شوندگی و نرم شوندگی پوسته تقویت شده را برای حالت‌های مختلف قرارگیری تقویت کننده‌ها در زوایای مختلف مورد بررسی قرار داده‌اند. مهندس و قاسمی [۱۳] تحلیل ارتعاشات پوسته استوانه‌ای دایره‌ای تقویت شده با پلاکت‌های گرافن را مورد بررسی قرارداده‌اند. آن‌ها از تئوری غیرخطی دانل برای فرموله کردن مدل خود استفاده کرده‌اند. خصوصیات مواد تقویت کننده گرافن توسط مدل هالپین-تسای ارزیابی می‌شود. آن‌ها با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه[1] به تحلیل ارتعاشات غیرخطی سیستم با توجه به توزیع های مختلف گرافن پرداخته‌اند. سوفیه و همکاران [۱۵-۱۴] تاثیرات تنش‌های برشی و اینرسی چرخشی را در ارتعاشات پوسته‌های استوانه‌ای مدرج ساندویچی پوشش داده شده که بر روی بستر الاستیک نوع پاسترناک می‌باشد مورد بررسی قرارداده‌اند. آن‌ها ماده مدرج تابعی را در جهت ضخامت متغیر در نظر گرفته‌اند. همچنین معادلات سیستم مورد نظر را با استفاده از تئوری دانل بر بستر الاستیک استخراج کرده‌اند.

[1] -Multiple scale

معادله پایه سیستم آن‌ها یک معادله جبری کاهش یافته مرتبه شش می‌باشد. آن‌ها برای حل این معادله و بدست آوردن فرکانس‌های طبیعی از روش‌های عددی استفاده کرده‌اند. سوفیه و همکاران [۱۶] به بررسی پایداری و ارتعاشات پوسته‌های استوانه‌ای ساندویچی دارای هسته مدرج تابعی که تحت تاثیر همزمان تنش‌های برشی و اینرسی چرخشی است پرداخته‌اند.

۱-۹-۳ کنترل ارتعاشات پوسته استوانه‌ای

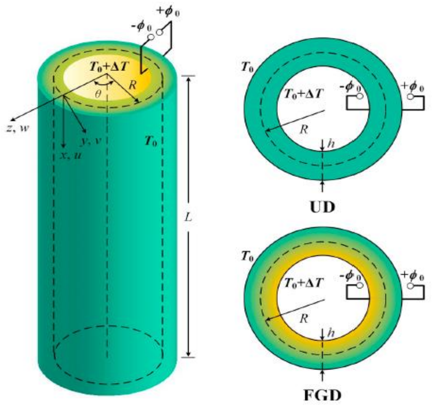
برخی از محققان کنترل ارتعاشات پوسته‌های استوانه‌ای را مد نظر قرارداده‌اند. کیم و همکاران[۱۷]. زاویه الکترود را به عنوان متغیر طراحی در نظر گرفتند. سپس با استفاده از روش الگوریتم ژنتیک و LQG به کنترل ارتعاشات پوسته استوانه‌ای پرداختند. سانگ و همکاران [۱۸] به مطالعه ارتعاشات بر روی نانوتیوب استوانه‌ای تقویت شده با کربن تحت شرایط دمایی پرداختند. آن‌ها با استفاده سنسورها و عملگرهای پیزو که بر روی سطح داخلی و خارجی استوانه قرار دارد با استفاده از روش LQR و کنترل فیدبک منفی به کنترل ارتعاشات سیستم مورد نظر پرداختند. آن‌ها نتیجه گرفتند که روش LQR تحت شرایط دمایی پاسخ‌های بهتری ارائه می‌دهد. صفرپور و همکاران [۱۹] در مطالعه خود به تحلیل رفتار ارتعاش آزاد و کمانش یک پوسته استوانه‌ای نانو تیوب لوله کربنی پیزوالکتریکی تقویت شده در حال چرخش پرداختند. آن‌ها در هر دو حالت ارتعاش آزاد و کمانش، توزیع یکنواخت الگوهای FG را مورد بررسی قرارداده‌اند. دقت مطالعات مدل ارائه شده با مطالعات قبلی و همچنین با روش تحلیلی ناویر تایید شده است. نوآوری آن‌ها در این طرح بررسی تاثیر ولتاژ بحرانی پیزوها و تقویت کننده‌ها و نیز ارضای شرایط مرزی مختلف در پوسته استوانه‌ای چرخشی نانوتیوب کربنی انجام شده است.



شکل۱-۲۷: هندسه پوسته پیزوالکتریک استوانه ای چرخشی[۱۹]

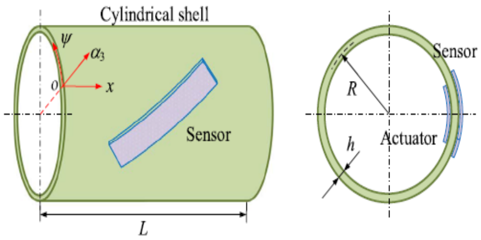
ژو و همکاران [۲۰] به بررسی و حل دقیق ارتعاشات آزاد حرارتی، الکترومکانیکی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی تقویت شده با فیبر پیزوالکتریک بر پایه مکانیک همیلتونی پرداخته‌اند.آن‌ها با استفاده از روش مکانیک همیلتونی معادله حاکم بر سیستم را بدست آورده و پاسخ‌های فرکانسی و شکل مودها را استخراج کرده‌اند. آن‌ها نتیجه گرفتند فرکانس پایه‌ای پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی تقویت شده با فیبر

پیزوالکتریک با افزایش دما یا افزایش ولتاژ الکتریکی به طور یکنواخت کاهش پیدا می‌کند. نمونه‌ای از این مدل در شکل (۱-۲۸) مشاهده می‌شود.



شکل۱-۲۸: پوسته استوانه‌ای در محیط ترموالاستیک همراه با رشته‌های تقویتی پیزو [۲۰]

لی وهمکاران [۲۱] به مطالعه یک پوسته استوانه‌ای همراه با پچ‌های پیزو که به صورت قطری روی پوسته استوانه‌ای با تکیه‌گاه ساده قرار گرفته است پرداخته‌اند. آن‌ها تغییرات زاویه سنسور و عملگر را در کاهش ارتعاشات پوسته استوانه‌ای را مورد بررسی قراردادند. شکل (۱-۲۹) مدل ساده‌ای از پوسته استوانه‌ای همراه با پچ‌های پیزو که به صورت محیطی روی استوانه نصب شده است.



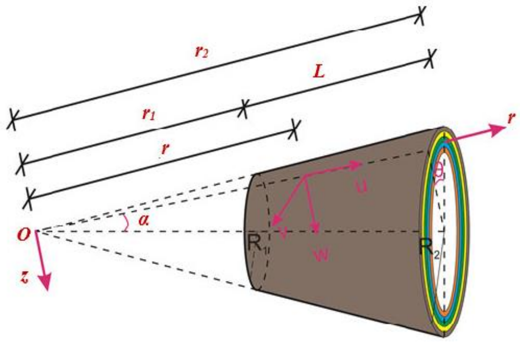
شکل۱-۲۹: سنسور پیزوالکتریک مورب بر روی پوسته استوانه ای با عملگر پیزوالکتریک [۲۱]

شنگ و ونگ [۲۲] با استفاده از روش‌های تحلیلی و استفاده از اصل همیلتون کنترل فعال ارتعاشات پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی را مورد مطالعه قرارداده‌اند. آن‌ها با استفاده از انواع مختلف پیزوهای سرامیکی و استفاده از الگوریتم فیدبک منفی سرعت به کنترل فعال ارتعاشات سیستم پرداخته‌اند. شنگ و ونگ [۲۳] با استفاده از الگوریتم سرعت منفی و با استفاده از عملگر پیزوالکتریک به مطالعه کنترل فعال ارتعاشات غیر خطی پوسته استوانه‌ای پرداخته‌اند. کی و همکاران [۲۴] ارتعاشات مکانیکی-حرارتی- الکتریکی را برای یک نانو پوسته استوانه‌ای پیزوالکتریکی مورد بررسی قرارداده‌اند. آن‌ها با استفاده از اصل همیلتون و روش‌های تحلیلی سیستم مورد را در شرایط مرزی مختلف مورد بررسی قرارداده‌اند.

۱-۹-۴ ارتعاشات پوسته‌های مخروطی

موارد گفته شده در بالا خلاصه‌ای از فعالیت‌ها و پژوهش‌ها بر روی پوسته‌های استوانه‌ای که نمونه‌ای از سازه‌های پیوسته می‌باشد. اکنون با توجه به این تحقیق به طور خاص به پژوهش‌های انجام شده در زمینه پوسته‌های مخروطی پرداخته خواهد شد. ژیانگولانگ و همکاران [۲۵] به بررسی ارتعاشات آزاد و اجباری یک پوسته استوانه‌ای-مخروطی با شرایط مرزی اختیاری پرداخته‌اند. با توجه به این که هندسه آن‌ها در قسمت اتصال بین پوسته استوانه‌ای و مخروط ناپیوستگی وجود دارد، آن‌ها ضرایب معادله ارتعاشی را از روش ریلی ریتز بدست آورده‌اند. سپس با استفاده از روش المان محدود اعتبار مدل خود را مورد بررسی قرار داده‌اند. روش تحلیل آن‌ها یک الگوریتم عمومی مناسب برای تحلیل ارتعاشات آزاد و اجباری سیستم‌های ترکیبی است. تیانگ و همکاران [۲۶] به معرفی یک رابطه یکپارچه برای تحلیل ارتعاشات پوسته‌ها از جمله استوانه‌ای، مخروطی و کروی با شرایط مرزی دلخواه پرداخته‌اند. آن‌ها از تئوری کلاسیک پوسته‌ها و چندجمله‌ای چبی‌شف و روش ریلی ریتز برای مدل سازی هندسه مورد نظر خود استفاده کرده‌اند. در مدل آن‌ها جابجایی هر نوع از پوسته‌ها بدون در نظر گرفتن نوع و شرایط مرزی با استفاده از روش چبی‌شف گسترش می‌یابد. سپس از طریق روش ریلی ریتز ضرایب مربوط به معادله بدست می‌آید. آن‌ها همگرایی و اعتبار پاسخ‌های خود را با روش آزمایشگاهی مورد تایید قرارداده‌اند. سوفیه [۲۷] به بررسی ارتعاشات با تحریک پارامتریک پوسته مخروطی FGM در حالت استاتیکی و اعمال بار یکنواخت جانبی با تکیه‌گاه آزاد پرداخته است. وی معادله حاکم بر پوسته را با استفاده از تئوری دانل استخراج کرده است. او با بکارگیری روش گالرکین معادله حاکم بر سیستم خود را جداسازی کرده و به یک معادله دیفرانسیل کاهش یافته معمولی رسیده است، معادله بدست آمده برای بررسی ارتعاشات سیستم با تحریک پارامتریک پوسته مخروطی مورد استفاده قرار می‌گیرد. سپس فرکانس‌های بی‌بعد را بدست آورده و به بررسی ارتعاشات سیستم می‌پردازد. وی نتایج خود را با حل‌های گذشته مورد بررسی قرار داده است. کان و همکاران [۲۸] به تحلیل ارتعاشات آزاد و اجباری پوسته مخروطی پله‌ای با شرایط مرزی اختیاری پرداخته‌اند. روش آن‌ها برای پوسته‌های مخروطی پله‌ای متصل به هم با توجه به ناپیوستگی در مکان اتصال پله‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد. اساس کار آن‌ها با استفاده از تئوری فلوکوت و روش سری توانی است. آن‌ها نتیجه گرفتند که وجود ناپیوستگی در پوسته پله‌ای تاثیر زیادی بر مودهای فرکانسی دارد. همچنین نتیجه گرفتند که افزایش سفتی در هندسه مورد نظر باعث کاهش پاسخ ارتعاشی و افزایش دمپینگ سازه باعث کاهش پیک‌های رزونانسی می‌شود. سپس نتایج خود را با شبیه سازی های عددی حاصل از نرم افزار انسیس بررسی کرده‌اند. شکوری و کوچک‌زاده [۲۹] در مطالعه خود به بررسی یک روش تحلیلی ساده برای تعیین فرکانس‌های طبیعی پوسته‌های مخروطی و استوانه‌ای لایه‌ای با شرایط مرزی اختیاری پرداخته‌اند. آن‌ها معادلات حاکم بر سیستم را با استفاده از تئوری دانل مربوط به پوسته‌های نازک استخراج کرده‌اند. سپس تاثیر اتصالات کششی-

خمشی، زاویه راس مخروط، طول نصف‌النهاری، ضخامت پوسته، شرایط مرزی و توالی لایه‌ها را بر روی فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای و مخروطی مورد بررسی قرارداده‌اند. یکی از نتایجی که از پژوهش خود بدست آوردند این بود که افزایش ضخامت و کاهش طول مخروط باعث افزایش فرکانس طبیعی برای تمام زوایای قرارگیری لایه‌ها و توالی آن‌ها می‌شود. سوفیه [۳۰] به مطالعه ارتعاش آزاد پوسته‌های مخروطی ارتوتروپیک لایه‌ای بر اساس تئوری تغییر شکل اصلاح شده مرتبه اول برشی پرداخته است. برای بدست آوردن معادله حرکت حاکم بر سیستم از تئوری دانل استفاده شده است. وی از روش گالرکین برای حل معادله حاکم و بدست آوردن روابط فرکانسی استفاده کرده است. همچنین تاثیر پارامترهای مختلف از جمله تنش برشی و نسبت ابعاد را بر روی فرکانس‌های پوسته مخروطی لایه‌ای بررسی کرده است. او برای بررسی صحت نتایج، پژوهش خود را با سایر کارها مورد بررسی قرارداده است. شکل (۱-۳۰) نشان دهنده یک پوسته ارتوتروپیک لایه‌ای می‌باشد.



شکل۱-۳۰: پوسته مخروطی ارتوتروپیک لایه‌ای [۳۰]

عده‌ای از محققان [۳۱-۳۴] به بررسی ارتعاشات غیرخطی پوسته‌های مخروطی پرداخته‌اند. آن‌ها با استفاده از روابط فون-کارمن سیستم مخروطی را به صورت غیرخطی در نظر گرفته و با استفاده از روش‌های مثل گالرکین، سری توانی، ریلی ریتز و ... به جداسازی معادله حاکم بر سیستم پرداخته‌اند. روش‌های حل آن‌ها عمدتا به صورت الگوریتم‌های عددی بوده است. سوفیه [۳۵] به بررسی ارتعاشات خطی و غیرخطی پوسته مخروطی ناقص ارتوتروپیک بر روی بستر الاستیک پرداخته است. او از تئوری دانل برای مدل‌سازی پوسته خود استفاده کرده است. مدل بستر الاستیک از نوع پسترناک می‌باشد. وی از روش گالرکین برای جداسازی معادله سیستم استفاده کرده است. سپس با استفاده از روش هوموتوپی پرتوربیشن به تحلیل ارتعاشات سیستم مورد نظر پرداخته است. سوفیه و کوروغلو [۳۶] به بررسی ارتعاشات یک مخروط ناقص با دامنه بزرگ تحت عیب اولیه پرداخته است. سوفیه [۳۷] به بررسی ارتعاشات آزاد غیرخطی یک مخروط ناقص FGM با روش بالانس هارمونیک پرداخته است. سوفیه [۳۸] با استفاده از تئوری غیرخطی دانل-فون‌کارمن به بررسی کمانش غیرخطی یک مخروط ناقص FGM تحت اثر بار محوری پرداخته است. او در تحلیل خود ماده FGM را در چهار حالت خطی،

مربعی، معکوس مربعی و مکعبی پرداخته است. هاو و همکاران [۳۹] به مطالعه ارتعاشات غیرخطی یک پنل مخروطی FGM تحت تاثیر نیروی in-plane پرداخته‌اند. آن‌ها خواص ماده را وابسته به دما و به صورت پایا در نظر گرفته‌اند. آن‌ها معادلات را با استفاده از اصل اصل همیلتون استخراج و سپس با استفاده از روش گالرکین به جداسازی معادلات مورد نظر پرداخته‌اند. همچنین نتایج پژوهش خود را بر اساس شبیه سازی‌های عددی، گراف پوانکاره، نمودارهای فازی و نمودارهای دوشاخگی مورد بررسی قرارداده‌اند. سوفیه و همکاران [۴۰] به بررسی ارتعاشات آزاد غیرخطی پوسته‌های مخروطی نازک ارتوتروپیک با استفاده از نظریه تغییر شکل بزرگ دانل پرداخته‌اند. سپس با استفاده از اصل جمع آثار و روش گالرکین معادله حاکم را حل کرده و به معادله دیفرانسل معمولی غیرخطی دست یافته‌اند. آن‌ها تاثیر پارامترهای هندسی و بررسی توالی لایه‌ها را بر رفتار ارتعاش غیرخطی پوسته مخروطی مورد بررسی قرارداده‌اند. ستوده و همکاران [۴۱] به تجزیه و تحلیل رفتار دینامیکی و ارتعاش آزاد پوسته مخروطی ناقص مدرج تابعی شده با ضخامت غیر یکنواخت تحت شوک‌های مکانیکی پرداخته‌اند. خواص مواد در سیستم مورد نظر در جهت ضخامت متغیر است. آن‌ها اثر پارامترهای مختلف هندسی و مواد مختلف را بر رفتار پوسته‌های FG مورد بررسی قرارداده‌اند. سرخیل و فومنی[۴۲] به بررسی ارتعاشات آزاد یک پوسته استوانه‌ای-مخروطی در حال چرخش در حضور نیروی‌های گریز از مرکز با حضور تنش اولیه ناشی از چرخش پوسته پرداخته‌اند. سپس برای اعتبار سنجی مدل مورد نظر نتایج حاصل را با نتایج پژوهش‌های گذشته حاصل از المان محدود برای پوسته‌های استوانه‌ای-مخروطی مورد بررسی قرارداده‌اند. علاوه بر این آن‌ها اثرات پارامترهای مختلف مانند سرعت چرخش، زاویه مخروط، طول موج ، طول به نسبت شعاع، و ضخامت پوسته در فرکانس امواج پیشرونده و پسرونده بررسی کرده‌اند. سوفیه [۴۳] به تحقیق در مورد ارتعاشات پوسته‌های مخروطی FGM تحت فشار هیدرواستاتیک با شرایط مرزی مخلوط پرداخته است. او معادلات را بر اساس پوسته خطی دانل استخراج و با استفاده از روش گالرکین به حل آن‌ها پرداخته است. نوآوری وی در این کار بدست آوردن روابط فشارهای هیدرواستاتیک بحرانی و سیکل‌های فرکانسی بوده است که در نهایت تاثیر شاخص گردایان ماده را مورد بررسی قرار داده‌اند. تورنابین[۴۴] در پژوهش خود بر اساس نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول رفتار دینامیکی پوسته‌های مخروطی، استوانه‌ای و صفحات حلقوی مدرج تابعی در حالت ضخیم مورد بررسی قرارداده‌است. وی برای بیان توزیع کسر حجمی سرامیک در ماده مدرج تابعی از دو حالت برای بررسی چهار پارامتر در سیستم استفاده کرده است. در حالت اول سطح زیرین ساختار را غنی از سرامیک در نظر گرفته است در حالی که سطح بالای آن می‌تواند غنی از فلز یا ترکیب فلز و سرامیک باشد. و در حالت دوم قانون کسرحجمی را به صورت متقارن و نامتقارن در نظر گرفته است. سوفیه[۴۵] به بررسی پایداری پوسته ناقص مخروطی مدرج تابعی تحت بار هارمونیک ضربه‌ای پرداخته است. خواص پوسته مخروطی مدرج تابعی به صورت پیوسته در جهت ضخامت تغییر می‌کند. پژوهش وی نشان دهنده تاثیر

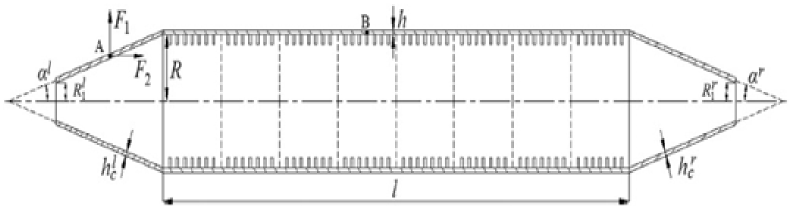
تغیرات پارامترهایی مانند زاویه راس مخروط، تغییرات بارگذاری، و تغییر پیکربندی در ساختار ماده در بررسی پایداری سازه است. همچنین نتایج گذشته صحت کار او را تایید می‌کنند. سوفیه[۴۶] به بررسی کمانش پوسته مخروطی ناقص مدرج تابعی که در معرض فشار کششی و فشار هیدرواستاتیکی قرار گرفته پرداخته است. او پوسته مخروط مدرج تابعی را به صورت تکیه‌گاه ساده در لبه‌ها در نظر گرفته است. سوفیه و اشناک [۴۷] تجزیه و تحلیل ارتعاشات پوسته‌های ناقص مخروطی همراه با پایه الاستیک مد نظر قرار داده‌اند. بستر الاستیک موجود در پژوهش آن‌ها از نوع وینکلر-پسترناک می‌باشد. آن‌ها بدنه پوسته مخروطی را از نوع مدرج تابعی که ترکیبی از فلز و سرامیک می‌باشد در نظرگرفته‌اند. آن‌ها تاثیرات بستر الاستیک، تغییرات نسبت شعاع کوچک به شعاع بزرگ، نسبت طول به شعاع، ترکیب مواد و مقدار حجم تشکیل دهنده را بر روی پارامترهای فرکانس بی‌بعد بررسی کرده‌اند. سوفیه و همکاران [۴۸] به بررسی ارتعاشات پوسته ناقص مخروطی سرامیک سه لایه که دارای یک لایه ماده مدرج تابعی است و در معرض بار فشاری و محوری قرار گرفته است پرداخته‌اند. آن‌ها برای اولین بار روابط اساسی معادلات دینامیکی، تعادل، سازگاری را برای پوسته مخروطی سه لایه بدست آورده‌اند. سوفیه و سلبغلو [۴۹] تاثیر مواد مدرج تابعی ساندویچ شده را در ارتعاشات پوسته ناقص مخروطی با توجه به تغییر شکل برشی مرتبه اول مورد تحلیل و بررسی قرارداده‌اند. آن‌ها برای بررسی پارامتر فرکانس طبیعی سازه مدرج تابعی را در جهت ضخامت به دو صورت لایه‌ای که در حالت اول سرامیک را در لایه میانی و دو لایه مدرج تابعی در اطرف آن و در حالت دیگر ماده فلزی را در وسط در نظر گرفته‌اند. سوفیه[۵۰] کمانش پوسته ناقص مخروطی را با استفاده از تئوری تغییر شکل مرتبه اول برشی و تئوری دانل تحت فشار هیدرواستاتیک مورد بررسی قرار داده است. محمود خانی و همکاران [۵۱] به تحلیل ایروترموالاستیسیته یک پوسته مخروطی مدرج تابعی درجه بندی شده وابسته به دما با تکیه‌گاه ساده در معرض جریان هوای مافوق صوت قرار گرفته پرداخته‌اند. آن‌ها انتقال حرارت را به صورت پایا در نظر گرفتند. همچنین آن‌ها مرزهای فلاتر را بر روی پوسته مخروطی مدرج تابعی با زاویه‌های مختلف در راس مخروط، توزیع‌های مختلف درجه حرارت و شاخص‌های کسر حجمی مختلف بدست آوردند. بیچ و همکاران[۵۲] با استفاده از یک رویکرد تحلیلی به بررسی کمانش خطی پانل‌های ناقص مخروطی ساخته شده از مواد مدرج تابعی که در معرض فشار محوری، فشار خارجی و ترکیبی از این بارها قرار دارد پرداخته‌اند. در تحلیل آن‌ها خواص ماده مستقل از دما فرض شده است. آن‌ها در پژهش خود تاثیر خواص مواد، هندسه و بارگذاری ترکیبی، پایداری پانل‌های مخروطی را مورد بررسی قرارداده‌اند. یانگ و همکاران [۵۳] ارتعاشات غیرخطی پوسته مخروطی ناقصی را تحت نیروی آیرودینامیک و نیروهای داخلی در طول خط نصف‌النهاری مخروط برای رزونانس‌های داخلی مورد بررسی قرارداده‌اند. آن‌ها خواص پوسته را به صورت وابسته به دما و توزیع ماده مدرج تابعی در جهت ضخامت را توسط یک رابطه توانی در نظر گرفته‌اند. آن‌ها با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه رزونانس‌های داخلی و رزونانس مادون هارمونیک سیستم

را مورد بررسی قرارداده‌اند. توربیانو[۵۴] و همکاران یک روش دیفرانسل دو بعدی را برای تحلیل ارتعاشات پوسته‌های مخروطی، استوانه‌ای و صفحات سوراخ دار دایروی مدرج تابعی را ارائه کرده‌اند. آن‌ها برای صحت سنجی روش خود از نرم‌افزارهایی مانند آباکوس، انسیس و نسترن استفاده کرده‌اند. ژائو و لی [۵۵] به تحلیل ارتعاشات آزاد یک پنل مخروطی از جنس ماده مدرج تابعی با استفاده از روش بدون مش پرداخته‌اند. آن‌ها با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی و استفاده از کرنش‌های برشی و ممان اینرسی چرخشی با بکارگیری روش بدون مش (KP-Ritz) جابجایی پنل مخروطی را در حالت دو بعدی بررسی کرده‌اند. آن‌ها دو نوع ماده مدرج تابعی (Al/ZrO2 , Ti–6Al–4V/aluminum oxide) را برای پژوهش خود انتخاب کرده‌اند. همچنین اثرات کسر حجمی، زاویه راس مخروط، شرایط مرزی و نسبت ضخامت را بر روی ویژگی‌های فرکانس طبیعی مورد بحث قرارداده‌اند. ملک زاده و حیدرپور [۵۶] ارتعاشات آزاد پوسته ناقص مخروطی مدرج تابعی همراه با تاثیر نیروهای گریز از مرکز و کوریولیس در ترکیب با سایر پارامترهای هندسی و شرایط مرزی مختلف را مورد بررسی قرار داده‌اند. حیدرپور و همکاران [۵۷] تاثیر فشار داخلی را بر روی رفتار ارتعاشات آزاد یک پوسته ناقص مخروطی مدرج تابعی مورد بررسی قرارداده‌اند. آن‌ها برای جداسازی معادلات مورد نظر از روش دیفرانسیل مربعات استفاده کرده‌اند و تاثیر تغییرات پارامترهای زاویه راس مخروط و دیگر پارامترهای هندسی را بر روی فرکانس طبیعی در حضور فشار داخلی مورد بررسی قرار دادند. ملک‌زاده و دارایی [۵۸] به تحلیل دینامیکی یک پوسته مخروطی مدرج تابعی در معرض بار محرک نامتقارن که به صورت یک حلقه درونی می‌باشد پرداختند. آن‌ها از روش اجزا محدود همراه با انتگرال گیری به روش نیومارک معادلات حرکت در حوزه زمانی و مکانی را استخراج کردند. همچنین تاثیر تغییرات پارامترهای هندسی سازه، و سرعت حرکت بار دینامیکی را در پوسته ناقص مخروطی مدرج تابعی مورد بررسی قرارداده‌اند. آن‌ها نتایج خود را با سایر تحقیقات مقایسه کرده‌اند. ژیانگ و همکاران [۵۹] به تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته ناقص مخروطی و صفحه سوراخ دار دایروی با روش تحلیل موجک پرداختند. آن‌ها پوسته مخروطی و صفحه سوراخ دار را از جنس مدرج تابعی در نظر گرفته‌اند که در جهت ضخامت توزیع مواد در آن متفاوت می‌باشد. آن‌ها با جداسازی معادلات، استفاده از تحلیل موجک و انتگرال گیری با توجه به شرایط مرزی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی در سیستم را به معادلات جبری تبدیل کرده و به تحلیل سیستم پرداخته‌اند. زمانی نژاد و همکاران [۶۰] به بررسی یک پوسته ناقص مخروطی مدرج تابعی تحت فشار یکنواخت پرداخته‌اند. خواص مواد سازه در سیستم در امتداد جهت محوری متغیر است. آن‌ها از روش اجزا محدود برای حل معادلات سیستم استفاده کرده‌اند. دنیز و همکاران [۶۱] تاثیر بستر الاستیک را بر روی پارامترهای فرکانس طبیعی پوسته مخروطی مدرج تابعی را بر مبنای تئوری مرتبه یک برشی مورد بررسی قرار داده‌اند. آن‌ها همچنین با استفاده از روش گالرکین و تئوری مرتبه اول برشی معادلات سیستم را استخراج کرده و تاثیر پارامترهای مختلف هندسی را با توجه به وجود بستر الاستیک بر روی

فرکانس پوسته ناقص مخروطی مورد بررسی قراردادند. سوفیه و همکاران [۶۲] ناپایداری دینامیکی را در یک پوسته مخروطی مدرج تابعی با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی مورد بررسی قراردادند. جلیلی و همکاران [۶۳] پایداری پوسته‌های استوانه‌ای مخروطی کامپوزیتی تحت بار دینامیکی را با استفاده از روش‌های عددی آزمایشگاهی مورد بررسی قرارداده‌اند. آن‌ها برای انجام آزمایشات در پژوهش خود و تهیه نمونه از الیاف شیشه استفاده کرده‌اند. سپس اثر ناپایداری‌های هندسی را بر رفتار دینامیکی سیستم با استفاده از روش آزمایشگاهی و روش‌های عددی مورد تحلیل قرار داده‌اند. ترابی و انصاری [۶۴] به بررسی ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای، مخروطی، کروی و دایروی مدرج تابعی پرداخته‌اند. آن‌ها برای ساده کردن تحلیل از المان‌های ایزوپارامتریک مرتبه بالا استفاده کرده‌اند. همچنین صحت تحقیق خود را با سایر و روش‌های انجام شده مقایسه کرده‌اند.

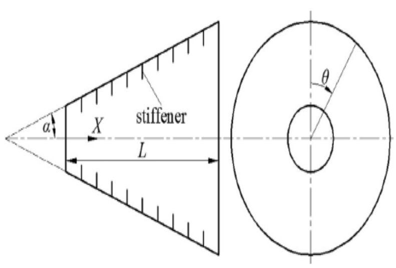
۱-۹-۵ ارتعاشات پوسته‌های مخروطی همراه با تقویت کننده

برخی از محققان پوسته‌های مخروطی را همراه با تقویت کننده در نظر گرفته‌اند. یگائو و همکاران [۶۵] یک روش اصلاح شده برای تحلیل دینامیک پوسته استوانه‌ای مخروطی با تقویت کننده‌های حلقوی ارائه کرده‌اند. آن‌ها از نظریه پوسته نازک رسینر-نقدی برای پوسته‌های ترکیبی که دارای المان‌های گسسته تقویت کننده نیز می‌باشد استفاده کرده‌اند. آن‌ها دو نیروی محوری و متمرکز را برای تحلیل ارتعاشات مورد توجه قرارداده‌اند. سپس بررسی‌های خود را برای دوحالت سیستم تقویت شده و تقویت نشده انجام داده‌اند. نتایج عددی بدست آمده از نرم افزار انسیس تطابق خوبی با نتایج آن‌ها داشت. مژیا و همکاران [۶۶] به تحلیل ویژگی‌های ارتعاش آزاد و اجباری پوسته مخروطی استوانه‌ای با شرایط مرزی اختیاری پرداخته‌اند. هندسه مورد نظر از چند بخش تشکیل شده است که به صورت اتصال پوسته-پوسته و پوسته-صفحه در محل اتصال می‌باشد. آن‌ها از تئوری فلوکوت برای توصیف حرکت پوسته استوانه‌ای مخروطی استفاده کرده‌اند. در مدل آن‌ها تقویت کننده‌ها به صورت اجزایی جداگانه دارای سطح مقطع مستطیلی می‌باشند و برای بدست آوردن معادله حرکت از معادلات صفحات دایروی توخالی استفاده کرده‌اند. آن‌ها برای بیان توابع جابجایی در بخش مخروطی استوانه‌ای و صفحه‌ای از توابع موج و بسل استفاده نموده‌اند. سپس در تحقیق خود شرایط مرزی و شرایط پیوستگی را برای تحلیل سیستم در نظر گرفته و نتایج مربوطه را با روش المان محدود تطبیق داده‌اند. علاوه بر این تاثیر شرایط مرزی و رینگ‌های تقویت کننده بر روی ارتعاشات آزاد و اثرات نیروی خارجی را بر روی ارتعاشات اجباری بررسی کرده‌اند. شکل (۱-۳۱) پوسته ترکیبی مخروطی استوانه‌ای همراه با تقویت کننده می‌باشد.



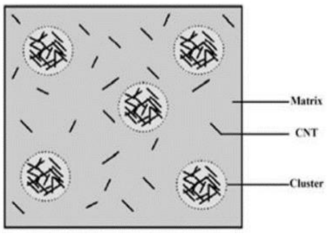
شکل۱-۳۱: پوسته ترکیبی همراه با تقویت کننده [۶۶]

ژیا و همکاران [۶۷] به تحلیل ارتعاشات آزاد و اجباری یک پوسته استوانه‌ای مخروطی تقویت شده با رینگ تحت شرایط مرزی دلخواه در فرکانس‌های پایین که به صورت غوطه‌ور در سیال است پرداخته‌اند. آن‌ها سیستم خود را به دو صورت جداگانه (پوسته-تقویت کننده) در نظر گرفته‌اند. برای بارگذاری سیال، قسمت مخروطی را به نوارهای باریک تقسیم کرده و محل مورد نظر را به صورت پوسته استوانه‌ای در نظر گرفته‌اند. سپس از نظریه فلوکوت برای توصیف حرکت نوارهای مخروطی استفاده کرده و تقویت کننده‌ها را نیز به صورت صفحات دایروی سوراخ‌دار مد نظر قرارداده‌اند. آن‌ها به مقایسه پاسخ‌های ارتعاشات آزاد و اجباری بر روی سیستم مورد نظر پرداخته و صحت پاسخ‌های خود را با روش المان محدود مورد سنجش قرارداده‌اند. سپس به این نتیجه رسیدند که اضافه کردن جرم به سیال خارجی فرکانس طبیعی را کاهش می‌دهد در حالی که کاهش مایع خارجی منجر به انتقال انرژی از پوسته به مایع می‌شود. شکل (۱-۳۲) به پوسته ناقص مخروطی تقویت شده اشاره میکند.



شکل۱-۳۲: پوسته تاقص مخروطی تقویت شده با رینگ [۶۷]

کماریان و همکاران [۶۸] به بررسی ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای مخروطی شکل تقویت شده با نانوتیوب‌های کربنی متراکم کامپوزیتی پرداخته‌اند. آن‌ها از روش اشبلی-موری-تانکا خواص پوسته مخروطی نانو کامپوزیتی خود را برآورد کرده‌اند. سپس معادله حرکت سیستم مورد نظر را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی بدست آورده و با استفاده از روش پیشنهادی برای حل معادله حاکم بر مسئله، جهت بدست آوردن فرکانس‌های طبیعی بهره گرفته‌اند. همچنین تاثیر پارامترهای تراکم حجمی نانو کامپوزیت‌های تقویت کننده، شرایط مرزی و پارامترهای هندسی بر روی ارتعاشات آزاد سیستم را مورد بررسی قرارداده‌اند. آن‌ها نتایج عددی خود را با داده‌های تجربی کارهای گذشته مقایسه کرده‌اند. شکل (۱-۳۳) شماتیکی از تقویت کننده‌های نانوتیوب‌های کربنی متراکم کامپوزیتی است.



شکل۱-۳۳: تقویت کننده‌های متراکم نانو کامپوزیت کربنی [۶۸]

کیانی و همکاران [۶۹] به تحلیل فرکانس‌های طبیعی پنل کامپوزیتی مخروطی زمینه پلیمری تقویت شده با نانو تیوب‌های کربنی که به صورت یکنواخت یا به صورت تابعی در آن توزیع شده است پرداخته‌اند. آن‌ها از تئوری تغییر شکل برشی و تئوری دانل برای بدست آوردن معادله حاکم بر سیستم خود استفاده کرده‌اند. آن‌ها انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل را در اصل همیلتون جایگزین کرده و با استفاده از روش ماتریس و روش معمول ریتز فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها را استخراج کرده‌اند. سپس براساس یک بررسی پارامتریک به این نتیجه رسیدند که نحوه توزیع تقویت کننده‌های نانو تیوب کربنی تاثیر زیادی بر روی ارتعاشات پنل‌های مخروطی کامپوزیتی دارد. یاس و همکاران [۷۰] به مطالعه و تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته مخروطی تقویت شده با فیبر مبتنی بر نظریه تئوری مرتبه سوم برشی با توسعه قانون توانی پرداخته‌اند. سیستمی که آن‌ها در نظر گرفته‌اند به دو صورت تکیه‌گاه ساده و تکیه‌گاه گیردار بوده و فیبر مورد استفاده در جهت ضخامت به صورت متقارن می‌باشد. آن‌ها برای حل معادله دینامیکی توابع جابجایی مناسبی که شرایط مرزی را ارضا کند ارائه داده‌اند و به معادلات دیفرانسل معمولی دست یافته‌اند. سپس با استفاده از روش (GDQM)[1] فرکانس‌های طبیعی سیستم را بدست آورده‌اند. همچنین اثر پارامترهای هندسی مختلف را بر ارتعاش پوسته مخروطی مورد بررسی قرارداده‌اند. انصاری و همکاران [۷۱] به بررسی ارتعاشات غیرخطی پوسته‌های مخروطی مدرج تابعی تقویت شده با نانو تیوب کربنی پرداخته‌اند. آن‌ها بررسی معادلات دیفرانسیل سیستم مورد نظر را در حالت ارتعاشات ازاد و اجباری با استفاده از روش های عددی انجام داده‌اند. دانگ و همکاران [۷۲] به مطالعه ناپایداری پوسته مخروطی تقویت شده مدرج تابعی تحت بار مکانیکی پرداخته‌اند. تمرکز پژوهش آن‌ها در بررسی بارگذاری مکانیکی کمانشی بر روی سیستم مورد نظر تحت فشار محوری و بار خارجی است. پوسته مخروطی مورد نظر با تقویت کننده‌های حلقوی و رشته‌ای تقویت شده است. خواص مواد تشکیل دهنده پوسته در جهت ضخامت با توجه به روابط مواد مدرج تابعی تغییر می‌کند. آن‌ها اثرات تقویت کننده‌ها، مواد، و ابعاد سیستم را به طور دقیق مورد تجزیه و تحلیل قرارداده‌اند. دانگ همکاران [۷۳] در پژوهش خود تحلیل رفتار ارتعاشات آزاد پوسته ناقص مخروطی مدرج تابعی همراه با تقویت کننده‌های محیطی را مد نظر قرار داده‌اند. مهری و همکاران [۷۴] کمانش و ارتعاشات یک پوسته ناقص مخروطی مدرج تابعی همراه

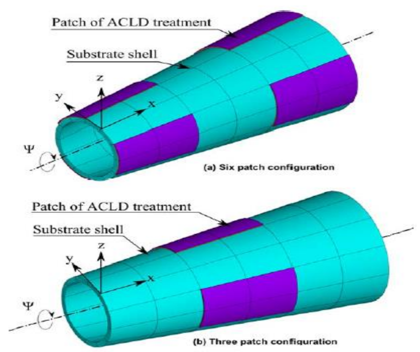
[1]-Generalized differential quadrature method

با تقویت کننده‌های درونی نانو تیوب کربنی تحت بار محوری را مورد تحلیل قرارداده‌اند. نوع تقویت کننده‌ها در این سیستم به صورت تک محور در نظر گرفته شده است. آن‌ها برای توصیف معادله حرکت از روابط سینماتیکی غیرخطی گرین لاگرانژ استفاده کرده‌اند. سپس در پژوهش خود تاثیر شرایط مرزی، زاویه راس مخروط، کسر حجمی ماده مدرج تابعی و نحوه توزیع کربن نانوتیوب‌ها را بر روی پایداری و ارتعاشات پوسته ناقص مخروطی مورد بررسی قرار داده‌اند. حیدرپور و همکاران [۷۵] به تحلیل ارتعاشات پوسته ناقص مخروطی چرخشی مدرج تابعی همراه با تقویت کننده نانو کامپوزیت کربنی پرداخته‌اند. آن‌ها تاثیر نیروهای گریز مرکز و شتاب کوریولیس را بر رفتار ارتعاش آزاد کامپوزیت‌های تقویت شده با نانو لوله کربنی کامپوزیتی بررسی کرده‌اند. خواص مواد در سیستم مد نظر آن‌ها از طریق یک مدل میکرومکانیکی تخمین زده می‌شود. آن‌ها معادلات حرکت سیستم خود را با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی و با استفاده از اصل همیلتون استخراج کرده‌اند. سپس اثرات سرعت زاویه‌ای، شتاب کوریولیس، پارامترهای هندسی، توزیع کسر حجمی ماده مدرج تابعی، نحوه توزیع نانو لوله کربنی کامپوزیتی را بر روی فرکانس طبیعی پوسته ناقص مخروطی مورد بررسی قرار داده‌اند. دین و نیون [۷۶] پاسخ دینامیکی و ارتعاشات پوسته ناقص مخروطی تقویت شده با نانو لوله کربنی کامپوزیتی که بر روی یک بستر الاستیک قرار گرفته است را مورد بررسی قرارداده‌اند. انصاری و ترابی [۷۷] ارتعاشات و کمانش یک پوسته مخروطی مدرج تابعی تقویت شده با نانو تیوب کربنی را به صورت عددی تحلیل کرده‌اند. کیانی [۷۸] در پژوهش خود ارتعاشات آزاد پیچیشی پوسته مخروطی کامپوزیتی تقویت شده با نانو لوله کربنی را مورد بررسی قرار داده است. توزیع کربن نانو تیوب‌های تقویت شده در سیستم به صورت یکنواخت و یا درجه بندی شده می‌باشد. او برای اعتبار سنجی پژوهش خود را با نمونه‌های مخروط ایزوتروپیک و صفحات سوراخ دار دایروی مقایسه کرده است. داک و همکاران [۷۹] کمانش حرارتی پوسته ناقص مخروطی مدرج تابعی تقویت شده با تقویت کننده‌های مدرج تابعی بر پایه بستر الاستیک را با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی تحلیل کرده‌اند. آن‌ها سیستم خود را تحت بار حرارتی و فشار محوری قرارداده‌اند. همچنین تغییر فاصله بین تقویت کننده‌ها، توزیع متفاوت درجه حرارت، بستر الاستیک، هسته داخلی، تقویت کننده‌ها، مواد و خواص هندسی در سیستم از جمله مواردی است که آن‌ها در پژوهش خود در نظر گرفته‌اند. کیانی [۸۰] کمانش پوسته مخروط مدرج تابعی همراه با تقویت کننده گرافن را تحت نیروی خارجی در محیط حراراتی تحلیل کرده‌اند. داک و همکاران [۸۱] پایداری مکانیکی و حرارتی یک پنل مخروطی مدرج تابعی را همراه با تقویت کننده‌های محیطی را در محیط حرارتی بر روی بستر الاستیک مورد بررسی قرارداده‌اند. داک و همکاران [۸۲] در تحقیقی دیگر، پایداری مکانیکی و حرارتی پوسته مخروطی مدرج تابعی تقویت شده با نانو تیوب‌های کربنی در بستر الاستیک مورد بررسی قرارداده‌اند. آن‌ها تاثیرات هندسی، توزیع نانو تیوب‌ها، دما و بستر الاستیک را بر روی

پایداری سیستم بررسی کرده‌اند. چانگ و همکاران [۸۳] ارتعاشات غیرخطی یک پوسته ناقص مخروطی مدرج تابعی همراه با تقویت کننده را بر روی بستر الاستیک در یک محیط حرارتی بررسی کرده‌اند.

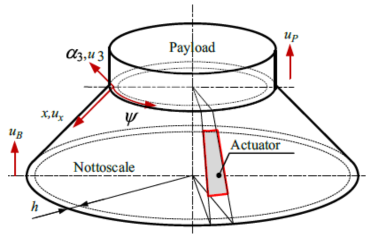
۱-۹-۶ کنترل ارتعاشات پوسته‌های مخروطی

عده‌ای از پژوهشگران نیز تحلیل کنترل ارتعاشات پوسته‌های مخروطی را مورد توجه خود قرار داده‌اند. فارِس و همکاران [۸۴] به طراحی کنترلر و بهینه سازی پارامترهای لایه‌های پوسته کامپوزیتی چند لایه مخروطی، برای به حداقل رساندن پاسخ دینامیکی و پیدا کردن کمینه مقدار نیروی کنترلی اعمالی پرداخته‌اند. آن‌ها انرژی کرنشی کل پوسته را به عنوان شاخص بهینه‌سازی پاسخ دینامیکی در نظر گرفته‌اند. ضخامت ورق و جهت زاویه فیبر را به عنوان متغیرهای طراحی بهینه‌سازی مورد توجه قرارداده‌اند. سپس از نظریه لیاپانوف-بلمن برای بدست آوردن پاسخ برای کنترل حلقه بسته استفاده کرده‌اند. شاه و ری [۸۵] در پژوهش خود به تحلیل کنترل فعال ارتعاشات پوسته استوانه‌ای مخروطی ناقص کامپوزیتی نازک با استفاده از مواد پیزوالکتریکی پرداخته‌اند. آن‌ها مدل المان محدود را برای پوسته مخروطی ناقص تقویت شده همراه با پچ‌های پیزو را توسعه داده‌اند. آن‌ها از روش فیدبک سرعت برای اعمال کنترلر روی پچ‌های پیزو استفاده کرده‌اند، همچنین اثر زاویه راس مخروط و اثر جهت گیری پچ‌های پیزو را بر روی عملکرد کنترلر مورد بررسی قرار داده‌اند. کومار و ری [۸۶] به تحلیل کنترل فعال ارتعاشات پوسته‌های مخروطی ناقص نازک دوار با استفاده از مواد پیزوالکتریک پرداخته‌اند. آن‌ها از اصل همیلتون برای بدست آوردن معادلات حرکت پوسته دوار استفاده کرده‌اند. در مدل مورد نظر اثر کوریولیس، شتاب جانب به مرکز و تنش‌های اولیه هوپ حاصل از چرخش در نظر گرفته شده است. برای کاهش ارتعاشات سیستم از روش کنترل فیدبک سرعت استفاده شده و همچنین اثر زاویه راس مخروط و سرعت چرخشی پوسته را با توجه به حضور تکه‌های پیزو مورد بررسی قرار داده‌اند. شکل (۱-۳۴) نمونه از پوسته مخروطی چرخشی همراه با پیزوالکتریک می‌باشد.



شکل۱-۳۴: سنسور پیزوالکتریک بر روی پوسته مخروطی چرخشی با عملگر پیزوالکتریک [۸۶]

لی وهمکاران [۸۷] به مطالعه، طراحی و آزمایش برای تحلیل کنترل فعال ارتعاشات یک پوسته مخروطی مطابق با شکل (۱-۳۵) پرداخته‌اند. نتایج تجربی آن‌ها نشان داد که با استفاده از روش کنترل فیدبک سرعت منفی ارتعاشات سیستم به طور قابل توجهی کاهش پیدا می‌کند.



شکل۱-۳۵: جدا کننده پوسته مخروطی با محرک متصل[۸۷]

فارِس و همکاران [۸۸] در مطالعه خود به سرکوب پاسخ ارتعاشات پوسته‌های ناقص مخروطی مدرج تابعی با کنترل فعال بهینه پرداخته‌اند. آن‌ها با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مدل هندسی خود را فرموله کرده و کمینه سازی پاسخ‌های ارتعاشی برای پوسته مخروطی ناقص با شرایط مرزی مختلف را مورد بررسی قرارده‌اند. هدف آن‌ها بهینه سازی انرژی کنترلی کل پوسته با توجه به شرایط مرزی ساده است. حاجی محمد [۸۹] و همکاران آنالیز کمانشی پوسته مخروطی تقویت شده با فیبر نانوتیوب کربنی همراه با لایه‌های پیزوالکتریکی را مورد بررسی قرارداده‌اند.

جمع بندی و نوآوری: ارتعاشات سیستم‌های پیوسته شامل پوسته‌های استوانه‌ای و مخروطی دارای اهمیت فراوانی می‌باشد. پوسته‌های مخروطی کاربردهای زیادی در صنایع مختلف از جمله صنعت هوافضا در بدنه موشک‌ها، محفظه‌های سوخت و کشتیرانی دارند. شناخت رفتار و ویژگی‌های این نوع از سازه‌های پرکاربرد تحت بارگذاریی‌های مختلف بسیار مهم می‌باشد. مرور بر تحقیقات پیشین در حوزه آنالیز رزونانسی غیرخطی مخروط نشان می‌دهد که تحقیقات اندکی در این خصوص صورت گرفته است؛ لذا در این تحقیق با توجه به ضرورت کنترل ارتعاشات در سیستم‌های فوق برای کاهش آسیب‌رسی به آن‌ها، اثر کنترلر مناسب با استفاده از روش‌های نیمه تحلیلی تئوری اغتشاشات، بررسی می‌شود. در این تحقیق با استفاده از تئوری‌های ورق-پوسته معادله حاکم بر پوسته مخروطی تحت تحریک هارمونیک استخراج می‌شود. سپس با استفاده از روش گالرکین معادلات حاکم بر سیستم جداسازی شده تا معادلات دیفرانسیل معمولی حاصل شود. با توجه به دینامیک غیرخطی سیستم مورد مطالعه، برای تحلیل‌های مختلف رزونانسی با استفاده از یک روش نیمه تحلیلی تئوری اغتشاشات مانند روش مقیاس‌های چندگانه، تحلیل‌های رزونانسی لازم انجام می‌شود. در این قسمت آنالیزهای مربوط به پاسخ فرکانسی برای پارامترهای مختلف سیستم بررسی شده و اثر دامنه تحریک، زاویه راس مخروط، شماره مود عرضی،

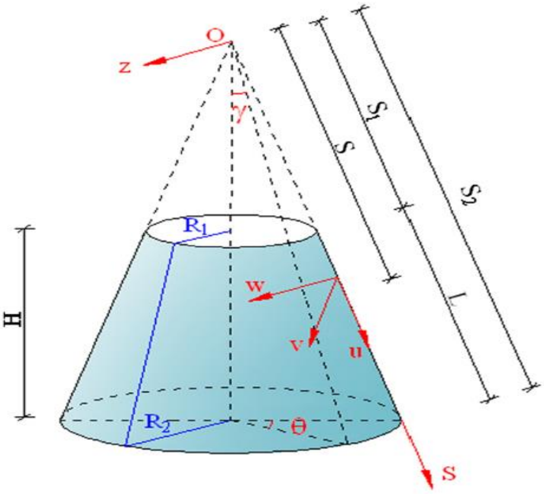
میرایی و تاثیر توزیع کسر حجمی ماده بر دامنه پاسخ سیستم ارائه می‌شود. درگام بعد به وسیله روش‌های کنترلی مناسب ارتعاشات سیستم تحت مطالعه، بررسی می‌شود. در این گام اثر پارامترهای کنترلی مختلف بر رفتار ارتعاشی سیستم بررسی می‌شود. در نهایت اثر ضرایب کنترلر به صورت تحلیلی مورد بررسی قرارگرفته و اثرات آن در آنالیزهای مربوط به پاسخ فرکانسی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. به طور خلاصه تفاوت و نوآوری تحقیق حاضر را با تحقیقات پیشین می‌توان بصورت زیر بیان نمود:

۱- آنالیز پاسخ فرکانسی برای سیستم غیر خطی مورد مطالعه با استفاده از روش نیمه تحلیلی
۲- بررسی اثر ضرایب کنترلر فوق در آنالیز پاسخ فرکانسی با استفاده از روش نیمه تحلیلی
۳- بررسی اثر کنترل فعال در کاهش ارتعاشات سیستم بصورت عددی

فصل دوم : معادلات حاکم بر سیستم

۲-۱: فرمول بندی سیستم

روابط موجود در این بخش (۲-۱) و بخش (۲-۲) با توجه به منابع شماره [۳۷] و [۳۸] می‌باشند. با توجه به شکل۲-۱ معادلات پوسته مخروطی ناقص FGM براساس دستگاه مختصات منحنی‌الخط بدست آمده است. $(S.\theta\ .z)$ که S و θ به ترتیب محور مولد مخروط روی سطح و راستای محیطی مخروط می باشد و محور z عمود بر صفحه دو محور اول بوده و در جهت نرمال درون مخروط قرار دارد. R_1 و R_2 به ترتیب شعاع مخروط در قسمت قاعده کوچک و بزرگ مخروط ناقص می‌باشد. γ نشان دهنده زاویه نصف راس مخروط. L طول و h ضخامت مخروط ناقص می‌باشد. S_2 و S_1 به ترتیب فاصله از راس مخروط برای قسمت بزرگ و کوچک مخروط ناقص. همچنین، u، v و w نشان دهنده جابه جایی در جهات مختلف برای مخروط (بر اثر بارگذاری) در یک نقطه از صفحه میانی است.



شکل ۲-۱: هندسه پوسته مخروطی ناقص

سازه مخروطی FGM مخلوطی از یک فاز فلزی است که به وسیله " m " و یک فاز سرامیکی می باشد که با زیرنویس " c "مشخص می‌شود. رابطه ترکیب مواد با توجه به رابطه (۲-۱) که شامل مدول یانگ E، ضریب پواسون ν یا چگالی می‌باشد که می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$$p = F_m V_m + F_c V_c \quad (۲-۱)$$

که F_c و F_m به ترتیب، خواص مواد سرامیکی و فلزی می‌باشند. و می‌توان به صورتی تابعی از درجه حرارت نیز بیان شود:

$$p = F_0(F_{-1}T^{-1} + 1 + F_1 T + F_2 T^2 + F_3 T^3) \quad (۲-۲)$$

که در آن $T = 300\ K$ (دمای اتاق)، F_0، F_{-1}، F_1، F_2، F_3، ضرایب دمایی $T(K)$ بیان شده به صورت کلوین بوده و جزء مشخصات منحصر بفرد ماده می‌باشند.

V_c و V_m کسر حجمی سرامیک و فلز می‌باشند و رابطه آن به صورت زیر می‌باشد:

$$V_c + V_m = 1 \qquad ۳-۲$$

فرض بر این است که روابط کسر حجمی سرامیک برای مرتبه‌های مختلف به صورت زیر است:

۱-خطی

$$V_c = \overline{z} + 0.5\,, \overline{z} = {}^{z}/_{h} \qquad ۴-۲$$

۲-مرتبه دو

$$V_c = (\overline{z} + 0.5)^2 \qquad ۵-۲$$

۳- معکوس مربع

$$V_c = 1 - (0.5 - \overline{z})^2 \qquad ۶-۲$$

۴- مرتبه سه

$$V_c = 3(\overline{z} + 0.5)^2 - 2(\overline{z} + 0.5)^3 \qquad ۷-۲$$

از معادلات. (۲-۱) و (۲-۳) ، مدول موثر یانگ، نسبت پواسون، و چگالی ماده FGM را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$E(\overline{z}) = (E_c - E_m)V_c + E_m$$

$$\nu(\overline{z}) = (\nu_c - \nu_m)V_c + \nu_m \qquad ۸-۲$$

$$\rho(\overline{z}) = (\rho_c - \rho_m)V_c + \rho_m$$

که E_c، ν_c، ρ_c، و E_m، ν_m، ρ_m به ترتیب، مدول یانگ، نسبت پواسون و چگالی برای سطوح سرامیکی و فلزی پوسته ناقص مخروطی می‌باشند.

بر طبق روابط جابجایی غیر خطی فون-کارمن، کرنش‌های صفحه میانی پوسته ناقص مخروطی به صورت زیر می‌باشد. که e_s و e_θ به ترتیب، کرنش های نرمال در دستگاه مختصات منحنی‌الخط در جهت S و θ روی سطح مرجع، $e_{s\theta}$ کرنش برشی متناظر و $\varphi = \theta\sin(\gamma)$

$$\begin{pmatrix} e_s \\ e_\theta \\ e_{s\theta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial s})^2 \\ \frac{1}{s}\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{s} - \frac{w cot\gamma}{s} + \frac{1}{2s^2}(\frac{\partial w}{\partial \varphi})^2 \\ \frac{1}{s}\frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{v}{s} + \frac{1}{s}(\frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial w}{\partial \varphi})^2 \end{bmatrix} \quad ۹-۲$$

با توجه به تئوری خمشی پوسته‌ها روابط تنش-کرنش برای پوسته نازک مخروطی ناقص به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\begin{pmatrix} \sigma_s \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{s\theta} \end{pmatrix} = \frac{E(\overline{z})}{1-\nu^2(\overline{z})} \begin{bmatrix} 1 & \nu(\overline{z}) & 0 \\ \nu(\overline{z}) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \nu(\overline{z}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_s - z\frac{\partial^2 w}{\partial S^2} \\ e_\theta - z(\frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{s}\frac{\partial w}{\partial s}) \\ e_{s\theta} - z(\frac{1}{s}\frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \varphi} + \frac{1}{s^2}\frac{\partial w}{\partial \varphi}) \end{bmatrix} \quad ۱۰-۲$$

منتجه‌های نیرو و ممان بر واحد طول مقطع پوسته ناقص مخروطی به صورت انتگرال زیر تعریف می-شود:

$$[(N_s,N_\theta,N_{s\theta}),(M_s,M_\theta,M_{s\theta})] = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_s,\sigma_\theta,\sigma_{s\theta})[1,z]dz \quad ۱۱-۲$$

رابطه میان منتجه‌ها و تابع تنش به صورت زیر می‌باشد:

$$(N_s,N_\theta,N_{s\theta}) = \left(\frac{1}{S^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{s}\frac{\partial \Phi}{\partial S}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial S^2}, -\frac{1}{S}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial S \partial \varphi} + \frac{1}{S^2}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\right) \quad ۱۲-۲$$

با جایگذاری رابطه (۲-۱۰) در (۲-۱۱) و بعد از بازنویسی، رابطه‌ی میان ممان‌ها و کرنش‌ها بدست می‌آید،

$$N_s = A_{10}e_s + A_{20}e_\theta - A_{11}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right) - A_{21}(\frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{s}\frac{\partial w}{\partial s}) \qquad ۱۳-۲$$

$$N_\theta = A_{20}e_s + A_{10}e_\theta - A_{21}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right) - A_{11}(\frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{s}\frac{\partial w}{\partial s}) \qquad ۱۴-۲$$

$$N_{s\theta} = A_{60}e_{s\theta} + A_{61}(-\frac{1}{s}\frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \varphi} + \frac{1}{s^2}\frac{\partial w}{\partial \varphi}) \qquad ۱۵-۲$$

$$M_s = A_{11}e_s + A_{21}e_\theta - A_{11}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right) - A_{22}(\frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{s}\frac{\partial w}{\partial s}) \qquad ۱۶-۲$$

$$M_\theta = A_{21}e_s + A_{11}e_\theta - A_{22}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right) - A_{12}(\frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{s}\frac{\partial w}{\partial s}) \qquad ۱۷-۲$$

$$M_{s\theta} = A_{61}e_{s\theta} + A_{62}(-\frac{1}{s}\frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \varphi} + \frac{1}{s^2}\frac{\partial w}{\partial \varphi}) \qquad ۱۸-۲$$

که مقادیر A در روابط فوق به صورت عبارات زیر است:

$$A_{1k} = h^{k+1}\int_{-1/2}^{1/2}\frac{E(\overline{z})}{1-\nu^2(\overline{z})}\overline{z}^k d\overline{z}, \qquad A_{2k} = h^{k+1}\int_{-1/2}^{1/2}\frac{\nu(\overline{z})E(\overline{z})}{1-\nu^2(\overline{z})}\overline{z}^k d\overline{z}\,,$$
$$A_{6k} = h^{k+1}\int_{-1/2}^{1/2}\frac{E(\overline{z})}{1-\nu(\overline{z})}\overline{z}^k d\overline{z}, \quad k = 0.1.2 \qquad ۱۹-۲$$

با مساوی قرار دادن معادلات (۲-۱۳) تا (۲-۱۵) با معادله (۲-۱۲) و حل جبری آن‌ها رابطه میان کرنش‌های سیستم براساس تابع تنش و تابع خیز بدست می‌آید.

$$e_s = b_1\left(\frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{s}\frac{\partial \Phi}{\partial s}\right) + b_2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} - b_3\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial s^2} - b_4(\frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{s}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial s}) \qquad ۲۰-۲$$

$$e_\theta = b_2\left(\frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{s}\frac{\partial \Phi}{\partial s}\right) + b_1\frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} - b_4\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial s^2} - b_3(\frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{s}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial s}) \qquad ۲۱-۲$$

$$e_{s\theta} = b_5\left(-\frac{1}{s}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial s \partial \varphi} + \frac{1}{s^2}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\right) + b_6(-\frac{1}{s}\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial s \partial \varphi} + \frac{1}{s^2}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial \varphi}) \qquad ۲۲-۲$$

که مقادیر b در عبارات بالا به صورت زیر است:

$$b_1 = A_{10}L_0^{-1},\ \ b_2 = A_{20}L_0^{-1}, b_3 = (A_{20}A_{21} - A_{11}A_{10})L_0^{-1}\ ,$$
$$b_4 = (A_{20}A_{11} - A_{21}A_{10})L_0^{-1},\quad b_5 = \frac{1}{A_{60}},\ b_5 = \frac{A_{61}}{A_{60}}, L_0 = A_{10}^2 - A_{20}^2 \qquad ۲۳-۲$$

با جایگذاری معادلات (۲-۲۰) تا (۲-۲۲) در معادلات (۲-۱۶) تا (۲-۱۸) ممان‌های سیستم بر اساس تابع خیز و تابع تنش بدست می‌آید.

$$M_s = c_1\left(\frac{1}{s^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{s}\frac{\partial\Phi}{\partial s}\right) + c_2\frac{\partial^2\Phi}{\partial s^2} - c_3\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial s^2} - c_4\left(\frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{s}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial s}\right) \qquad ۲۴-۲$$

$$M_\theta = c_2\left(\frac{1}{s^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{s}\frac{\partial\Phi}{\partial s}\right) + c_1\frac{\partial^2\Phi}{\partial s^2} - c_4\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial s^2} - c_3\left(\frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{s}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial s}\right) \qquad ۲۵-۲$$

$$M_{s\theta} = c_5\left(-\frac{1}{s}\frac{\partial^2\Phi}{\partial s\partial\varphi} + \frac{1}{s^2}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right) + c_6\left(-\frac{1}{s}\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial s\partial\varphi} + \frac{1}{s^2}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial\varphi}\right) \qquad ۲۶-۲$$

مقادیر c در روابط بالا به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C_1 = A_{11}b_1 + A_{21}b_2\ , C_2 = A_{11}b_2 + A_{21}b_1\ ,\ C_3 = A_{11}b_3 + A_{21}b_4 + A_{12}\ \ ,$$
$$C_4 = A_{11}b_4 + A_{21}b_3 + A_{22}\ , C_5 = A_{61}b_5\ , C_6 = A_{61}b_6 + A_{62} \qquad ۲۷-۲$$

معادلات تعادل غیرخطی سیستم با روابط (۲-۲۸) تا (۲-۳۰) و معادله سازگاری سیستم با توجه به (۲-۹) بصورت رابطه (۲-۳۱) بدست می‌آید.

$$\frac{\partial N_s}{\partial s} + \frac{1}{s}\frac{\partial N_{s\theta}}{\partial\varphi} + \frac{N_s - N_\theta}{s} = 0 \qquad ۲۸-۲$$

$$\frac{\partial N_{s\theta}}{\partial s} + \frac{1}{s}\frac{\partial N_\theta}{\partial\varphi} + \frac{2N_{s\theta}}{s} = 0 \qquad ۲۹-۲$$

$$\frac{\partial^2 M_s}{\partial s^2} + \frac{2}{s}\frac{\partial M_s}{\partial s} + \frac{2}{s}\frac{\partial^2 M_s}{\partial s\partial\varphi} - \frac{1}{s}\frac{\partial M_\theta}{\partial s} + \frac{2}{s^2}\frac{\partial M_{s\theta}}{\partial\varphi} + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 M_\theta}{\partial\varphi^2} + \frac{cot\alpha}{s}N_\theta$$
$$+ N_s\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \frac{N_\theta}{s}\left(\frac{1}{s}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial w}{\partial s}\right) - 2N_{s\theta}\left(\frac{1}{s}\frac{\partial^2 w}{\partial s\partial\varphi} - \frac{1}{s^2}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right) \qquad ۳۰-۲$$
$$= \rho_t\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \bar{\mu}\frac{\partial}{\partial t} + \widehat{K}cos(\Omega t)$$

$$\frac{cot\gamma}{s}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}-\frac{2}{s}\frac{\partial^2 e_{s\theta}}{\partial s\partial\varphi}-\frac{2}{s^2}\frac{\partial e_{s\theta}}{\partial\varphi}+\frac{\partial^2 e_\theta}{\partial s^2}+\frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 e_s}{\partial\varphi^2}+\frac{2}{s}\frac{\partial e_\theta}{\partial s}-\frac{1}{s}\frac{\partial e_s}{\partial s}$$
$$=\frac{1}{s^4}\left(\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right)^2-\frac{2}{s^3}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\frac{\partial^2 w}{\partial s\partial\varphi}-\frac{1}{s^2}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}-(\frac{\partial^2 w}{\partial s\partial\varphi})^2\right]-\frac{1}{s}\frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \quad ۳۱-۲$$

روابط (۲-۱۲)، (۲-۲۰ تا ۲-۲۲) و (۲-۲۴ تا ۲-۲۶) در معادلات تعادل (۲-۲۸) تا (۲-۳۱) ، جایگذاری می‌شود. روابط (۲-۲۸) و (۲-۲۹) ارضا خواهد شد و معادله حرکت سیستم با توجه به رابطه (۲-۳۰) بدست می‌آید. سپس برای ساده سازی عملیات ریاضی، تغییر متغیر مستقل $S = S_1 e^x$ و $\Phi = \Phi_1 e^{2x}$، بجای S و Φ جایگذاری شده و بعد از محاسبات طولانی، سیستم معادلات با مشتقات جزئی غیرخطی وابسته به زمان را بر حسب Φ_1 و w را می‌توان به صورت زیر بدست آورد.

$$L_{11}\Phi_1 + L_{12}w + L_{13}(\Phi_1,w) = 0$$
$$L_{21}\Phi_1 + L_{22}w + L_{23}(w,w) = 0 \quad ۳۲-۲$$

رابطه اول (۲-۳۲) معادله حرکت و رابطه دوم (۲-۳۲) رابطه سازگاری می‌باشد، همچنین $L_{ij}(i,j = 1,2,3)$ اپراتورهای دیفرانسیلی هستند و به صورت زیر مورد استفاده قرار می‌گیرد:

$$L_{11} = C_2 e^{2x}\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}-4\frac{\partial^3}{\partial x^3}+4\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^4}{\partial\varphi^4}+2\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)+\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+3\frac{\partial}{\partial x}+2\right)S_1 e^{3x}cot\gamma+2(C_1-C_5)e^{2x}\left(\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial\varphi^2}+2\frac{\partial^3}{\partial x\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)$$

$$L_{12} = -C_3\left(\frac{\partial^4}{\partial\varphi^4}+2\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^4}{\partial x^4}-4\frac{\partial^3}{\partial x^3}+4\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)-2(C_4-C_6)\left(\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial\varphi^2}-2\frac{\partial^3}{\partial x\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)-S_1^4 e^{4x}(\rho_t\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\bar{\mu}\frac{\partial}{\partial t}+\widehat{K}cos(\Omega t)) \quad ۳۳-۲$$

$$L_{13} = e^{2x}\left(\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial}{\partial x}+2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial}{\partial x}\right)+e^{2x}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+3\frac{\partial}{\partial x}+2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial}{\partial x}\right)-2e^{2x}(\frac{\partial^2}{\partial x\partial\varphi}+\frac{\partial}{\partial\varphi})(\frac{\partial^2}{\partial x\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial\varphi})$$

$$L_{21} = b_1e^{2x}\frac{\partial^4}{\partial\varphi^4} + 2(b_5+b_2)e^{2x}\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial\varphi^2} + 4(b_5+b_2)e^{2x}\frac{\partial^3}{\partial x\partial\varphi^2} + 2(b_5+b_2+b_1)e^{2x}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + b_1e^{2x}\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 4b_1e^{2x}\frac{\partial^3}{\partial x^3} + 4b_1e^{2x}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$L_{22} = b_4\frac{\partial^4}{\partial\varphi^4} - 2(b_6-b_3)\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial\varphi^2} + 4(b_6-b_3)\frac{\partial^3}{\partial x\partial\varphi^2} + b_4\frac{\partial^4}{\partial x^4} - 2(b_6-b_3-b_4)\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + S_1e^x cot\gamma\frac{\partial}{\partial x} - (S_1e^x cot\gamma - 4b_4)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 4b_4\frac{\partial^3}{\partial x^3}$$

$$L_{23} = (\frac{\partial}{\partial\varphi})^2 - 2\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\partial^2}{\partial x\partial\varphi} + \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial\varphi}\right)^2 + (\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x^2})\frac{\partial}{\partial x}$$

۲-۲: حل معادلات اصلی سیستم

فرض می‌شود پوسته FGM مخروطی ناقص در دو طرف به صورت تکیه‌گاه ساده می‌باشد. برای حل معادله (۲-۳۲) خیز به فرم زیر پیشنهاد می‌شود:

$$w = f(t)e^x[\sin(\beta_1 x)\sin(\beta_2\varphi) + \psi\sin^2(\beta_1 x)] \qquad ۳۴-۲$$

به صورتی که $f(t)$ تابع نامعین وابسته به زمان برای تعیین جابجایی w در حالت خطی می‌باشد و ψ پارامتری است که تعیین کننده رابطه بین پارامتر خطی و غیر خطی در w می‌باشد. با توجه به پیکربندی فضایی، اولین عبارت مربوط به پایداری برای جابجایی‌های بسیار کوچک می‌باشد. عبارت دوم، نشان دهنده انعطاف پذیری درونی داخل پوسته مخروطی هنگامی است که جابجایی‌ها بزرگ می شود. پارامترهای β_1 و β_2 به ترتیب معادل با $\beta_1 = \frac{m\pi}{x_0}$، $x_0 = ln(\frac{S_1}{S_2})$ و $\beta_2 = \frac{n}{sin\gamma}$ می‌باشند، که m تعداد نیم موج‌ها در طول مولد و n تعداد موج کامل در راستای محیطی می‌باشد.

تابع جابجایی شرایط مرزی هندسی مورد نظر را ارضا می‌کند یعنی $w = 0$ در $x = 0$ و $x = x_0$. با جایگذاری رابطه (۲-۳۴) در رابطه دوم (۲-۳۲) و حل خصوصی معادله حاصل به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\Phi_1(x,\varphi,t) = f(t)\{\Lambda_1 e^{-x}\sin(\beta_1 x)\sin(\beta_2\varphi) + \Lambda_3\psi e^{-x}\cos(2\beta_1 x) + \Lambda_4\psi e^{-x}\sin(2\beta_1 x) + [\Lambda_{51}\psi^2 f(t) + \Lambda_{52}f(t) + \Lambda_{53}\psi]\cos(2\beta_1 x) + f(t)(\Lambda_{61}\psi^2 + \Lambda_{62})\sin(2\beta_1 x) + \Lambda_7 f(t)\cos(2\beta_1 x)\cos(2\beta_2\varphi) + \Lambda_8 f(t)\sin(2\beta_1 x)\cos(2\beta_2\varphi) + [\Lambda_{91}\psi f(t) + \Lambda_{92}]\cos(\beta_1 x)\sin(\beta_2\varphi) + [\Lambda_{101}\psi f(t) + \Lambda_{102}]\sin(\beta_1 x)\sin(\beta_2\varphi) + \Lambda_{11}\psi f(t)\cos(3\beta_1 x)\sin(\beta_2\varphi) + \Lambda_{12}\psi f(t)\sin(3\beta_1 x)\sin(\beta_2\varphi) + \Lambda_{13}\psi^2 f(t)\cos(4\beta_1 x) + \Lambda_{14}\psi^2 f(t)\sin(4\beta_1 x) + \Lambda_{15}f(t)\cos(2\beta_2\varphi) + \Lambda_{16}\psi e^{-x}\}$$ ۳۵-۲

که $\Lambda_i\ (i = 1,3,4,\dots,16)$ وابسته به خواص ماده FGM و پارامترهای پوسته می‌باشد و در ضمیمه آمده است. برای بدست آوردن معادله حرکت سیستم از روش گالرکین به صورت زیر استفاده می‌شود.

$$\int_0^{x_0}\int_0^{2\pi\, sin\gamma}[L_{11}\Phi_1 + L_{12}w + L_{13}(\Phi_1,w)]e^x\sin(\beta_1 x)\sin(\beta_2\varphi)\,d\varphi dx$$ ۳۶-۲

$$\int_0^{x_0}\int_0^{2\pi\, sin\gamma}[L_{11}\Phi_1 + L_{12}w + L_{13}(\Phi_1,w)]e^x\sin^2(\beta_1 x)\,d\varphi dx$$ ۳۷-۲

با جایگذاری عبارات (۲-۳۴) و (۲-۳۵) در معادلات (۲-۳۶) و (۲-۳۷) پس از انتگرال گیری و بازنویسی معادلات زیر بدست می‌آید:

$$B_{17}(\frac{d^2f_1}{dt^2} + \bar{\mu}\frac{df_1}{dt}) + B_{11}f_1 + (B_{12} + B_{13} + B_{16})\psi f_1^2 + B_{14}\psi^2 f_1^3 + B_{15}f_1^3 = 0$$ ۳۸-۲

$$B_{30}\psi\frac{d^2f_1}{dt^2} + B_{23}\psi f_1 + (B_{25} + B_{27})f_1^2 + (B_{24} + B_{29})f_1^2\psi^2 + B_{26}\psi^3 f_1^3 + B_{28}\psi f_1^3 = 0$$ ۳۹-۲

که $f_1(t) = f(t)/h$ و $B_{ij}, i = 1,2,3\,; j = 0,1,\dots,9$ پارامترهای وابسته به پوسته مخروطی ناقص و مشخصه‌های ماده می‌باشند که در ضمیمه آورده شده است. با جایگذاری عبارت زیر در معادله (۲-۳۸)

$$\psi = \lambda f_1$$ ۴۰-۲

که رابطه میان پارامتر ψ و f_1 از حالت استاتیک بدست آمده است. و λ با توجه به منبع شماره [۹۱] روش (Tartali-cardano) بصورت زیر تعریف می‌شود[۳۸]:

$$\lambda = \frac{B_{25} + B_{27} - B_{22}B_{15}}{(B_{12} + B_{13} + B_{16})B_{22} + B_{11}B_{21} - B_{23}}$$ ۴۱-۲

با در نظر گرفتن رابطه (۲-۴۰) در معادله (۲-۳۸) معادله دینامیکی سیستم همراه با در نظر گرفتن تحریک هارمونیک به صورت زیر به دست می آید:

$$\frac{d^2 f_1}{dt^2} + \bar{\mu}\frac{df_1}{dt} + \omega_L^2 F(f_1) = \widehat{K} cos(\Omega t) \qquad ۴۲-۲$$

که ω_L فرکانس طبیعی است و با توجه به ضرایب بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\omega_L = \sqrt{\frac{B_{11}}{B_{17}}}$$

۴۳-۲

$$F(f_1) = f_1 + \lambda_{11} f_1^3 + \lambda_{22} f_1^5 \ ; \quad \lambda_{11} = \frac{(B_{13} + B_{16} + B_{12})\lambda + B_{15}}{B_{11}}$$

$$\lambda_{22} = \frac{B_{14}}{B_{11}} \lambda^2 \qquad ۴۴-۲$$

معادله (۲-۴۲) یک معادله دیفرانسل غیر همگن غیرخطی مرتبه دو و درجه پنج می‌باشد. برای تحلیل این معادله و بدست آوردن پاسخ‌های رزونانسی سیستم از روش مقیاس‌های چندگانه استفاده می‌شود.

۲-۳: تحلیل‌های رزونانسی سیستم

در این قسمت به حل نیمه تحلیلی سیستم مورد نظر با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه به تحلیل‌های رزونانسی سیستم شامل رزونانس‌های اولیه[۱]، رزونانس‌های ثانویه (مافوق‌هارمونیک[۲] و مادون هارمونیک [۳]) پرداخته خواهد شد.

۲-۳-۱ : رزونانس اولیه

برای بررسی رزونانس اولیه در سیستم باید فرکانس تحریک (Ω) سیستم تقریبا مساوی با فرکانس طبیعی سیستم فرض شود. برای بررسی پدیده رزونانس اولیه در سیستم ارتعاشی باید عباراتی شامل میرایی، تحریک و بالاترین مرتبه غیر خطی موجود، در یک مرتبه از پارامتر اغتشاش سیستم ظاهر شوند. با بازنویسی معادله (۲-۴۲) بر اساس متغیر جدید W به جای متغیر f_1 معادله زیر را می‌توان برای سیستم نوشت.

$$\ddot{W} + 2\mu\dot{W} + \omega_0^2 W + G_1 \omega_0^2 W^3 + G_2 \omega_0^2 W^5 = K cos(\Omega t) \qquad ۴۵-۲$$

[1]- primary resonance
[2] -super harmonic
[3] -sub harmonic

در رابطه فوق G_1 و G_2 همان λ_{11} ، و λ_{22} در معادله (۲-۴۲) می‌باشد. همچنین با تعریف $G_1\omega_0^2 = \widetilde{v_1}$ و $G_2\omega_0^2 = \widetilde{v_2}$ رابطه (۲-۴۶) بدست می‌آید.

$$\ddot{W} + 2\bar{\mu}\dot{W} + \omega_0^2 W + \widetilde{v_1}W^3 + \widetilde{v_2}W^5 = \widehat{K}cos(\Omega t) \qquad ۴۶-۲$$

پارامترهای جدید به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\bar{\mu} = \epsilon^4\mu; \widetilde{v_1} = \epsilon^2 v_1;\ \widetilde{v_2} = \epsilon^4 v_2; \widehat{K} = \epsilon^4 K \qquad ۴۷-۲$$

$$\ddot{W} + 2\epsilon^4\mu\dot{W} + \omega_0^2 W + \epsilon^2 v_1 W^3 + \epsilon^4 v_2 W^5 = \epsilon^4 K cos(\Omega t) \qquad ۴۸-۲$$

که ϵ یک پارامتر بسیار کوچک می‌باشد.σ یک پارامتر تنظیم، که بجای فرکانس تحریک معرفی شده است. این پارامتر به صورت کمی تعرف کننده میزان نزدیکی فرکانس تحریک (Ω) به فرکانس طبیعی (ω_0) می‌باشد. بنابراین فرکانس تحریک اعمالی به سیستم به صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$\Omega = \omega_0 + \epsilon^4\sigma \qquad ۴۹-۲$$

۲-۳-۲ : روش مقیاس‌های چندگانه

در این بخش با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه به تحلیل رزونانس اولیه سیستم پرداخته می‌شود. برای استفاده از این روش ابتدا باید یک بسط از جملات را تا مرتبه مورد نظر برای سیستم در نظر گرفته تا در سیستم جایگذاری شود.

$$W = W_0(T_0,T_1,T_2,T_3,T_4) + \epsilon W_1(T_0,T_1,T_2,T_3,T_4) + \epsilon^2 W_2(T_0,T_1,T_2,T_3,T_4) + \epsilon^3 W_3(T_0,T_1,T_2,T_3,T_4) + \epsilon^4 W_4(T_0,T_1,T_2,T_3,T_4) \qquad ۵۰-۲$$

که T_0 ، T_1 ، T_2 ، T_3 و T_4 متغیرهای مستقل زمان، و به صورت زیر می‌باشند:

$$T_E = \epsilon^E t; E = 0,1,2,3,4 \qquad ۵۱-۲$$

با توجه به معادله (۲-۴۸) باید اپراتورهای $\dot{W}$ و $\ddot{W}$ را در معادله (۲-۴۸) جایگزین کرده و معادله را بر اساس مرتبه پارامتر ϵ جدا سازی می‌شود.

$$\dot{W} = \left(\left(\frac{\partial}{\partial T_0} + \epsilon\frac{\partial}{\partial T_1} + \epsilon^2\frac{\partial}{\partial T_2} + \epsilon^3\frac{\partial}{\partial T_3} + \epsilon^4\frac{\partial}{\partial T_4}\right)W(T_0,T_1,T_2,T_3,T_4)\right) \qquad ۵۲-۲$$

$$\ddot{W} = \left(\frac{\partial^2}{\partial T_0^2} + 2\epsilon\frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} + \epsilon^2\left(\frac{\partial^2}{\partial T_1^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_2}\right) + 2\epsilon^3\left(\frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_3} + \frac{\partial^2}{\partial T_1 \partial T_2}\right) + \epsilon^4\left(2\frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_4} + 2\frac{\partial^2}{\partial T_1 \partial T_3} + \frac{\partial^2}{\partial T_2^2}\right)\right) W(T_0,T_1,T_2,T_3,T_4) \quad ۵۳-۲$$

با جایگذاری روابط (۲-۵۰) تا (۲-۵۳) در رابطه (۲-۴۸) مرتب سازی روابط بر حسب ϵ خواهیم داشت:

$$D_0^2 W_0 + \omega_0^2 W_0 = 0 \quad ۵۴-۲$$

$$D_0^2 W_1 + \omega_0^2 W_1 = -2 D_0 D_1 W_0 \quad ۵۵-۲$$

$$D_0^2 W_2 + \omega_0^2 W_2 = -2(D_0 D_2 W_0 + D_0 D_1 W_1) - D_1^2 W_0 - 3 v_1 W_0^3 \quad ۵۶-۲$$

$$D_0^2 W_3 + \omega_0^2 W_3 = -2(D_0 D_1 W_2 + D_0 D_2 W_1 + D_0 D_3 W_0 + D_1 D_2 W_0) - D_1^2 W_1 - 3 v_1 W_0^2 W_1 \quad ۵۷-۲$$

$$\begin{aligned} &D_0^2 W_4 + \omega_0^2 W_4 \\ &= -3 v_1 (W_0^2 W_2 + W_0 W_1^2) + K cos(\omega_0 T_0 + \sigma T_4) - 2\mu D_0 W_0 \\ &- 2(D_0 D_4 W_0 + D_1 D_3 W_0 + D_0 D_1 W_3 + D_0 D_2 W_2 + D_0 D_3 W_1 + D_1 D_2 W_1) - D_2^2 W_0 \\ &- D_1^2 W_2 - v_2 W_0^5 \end{aligned} \quad ۵۸-۲$$

که اپراتور D به صورت زیر تعریف می‌شود

$$D_E = \frac{\partial}{\partial T_E} \; ; E = 0, 1,2,3,4 \quad ۵۹-۲$$

پاسخ عمومی معادله (۲-۵۴) به صورت زیر می‌باشد.

$$W_0 = A(T_1,T_2,T_3,T_4) e^{i\omega_0 T_0} + \overline{A}(T_1,T_2,T_3,T_4) e^{-i\omega_0 T_0} \quad ۶۰-۲$$

با جایگذاری پاسخ عمومی معادله مرتبه صفر در معادله بعد پاسخ معادله مرتبه بعد بدست می‌آید.

$$D_0^2 W_1 + \omega_0^2 W_1 = -2i\omega_0 \frac{\partial A(T_1,T_2,T_3,T_4)}{T_1} e^{i\omega_0 T_0} + cc \quad ۶۱-۲$$

که cc عبارت مزدوج مختلط می‌باشد. با حل معادله (۲-۶۱) و حذف عبارت سکولار به صورت زیر خواهیم داشت:

$$-2i\omega_0 \frac{\partial A(T_1,T_2,T_3,T_4)}{T_1} e^{i\omega_0 T_0} = 0 \qquad ۶۲-۲$$

از رابطه بالا نتیجه می‌شود $A(T_1,T_2,T_3,T_4)$ بر حسب T_2,T_3,T_4 نبوده و به صورت $A(T_2,T_3,T_4)$ بیان می‌شود. سپس این مقدار را در معادله مرتبه اول جایگذاری کرده که نتیجه می‌دهد پاسخ معادله مرتبه اول صفر بوده و تا این مرحله عبارت A بر حسب پارامترهای T_2,T_3,T_4 می‌باشد. حال پاسخ‌های W_0 و W_1 را در معادله (۲-۵۶) جایگذاری کرده و مراحل گفته شده برای بدست آوردن پاسخ معادله مرتبه یک برای معادله (۲-۵۶) نیز تکرار می‌شود.

$$D_0^2 W_2 + \omega_0^2 W_2 = v_1 A^3 e^{3iT_0\omega_0} + \left(3v_1 A^2 \overline{A} + 2i \frac{\partial A(T_2,T_3,T_4)}{T_2} \omega_0\right) e^{i\omega_0 T_0} + cc \qquad ۶۳-۲$$

با حذف ضریب $e^{i\omega_0 T_0} = 0$ یعنی جملات ایجاد کننده عبارت سکولار در حل W_2 و حل معادله دیفرانسیل پاسخ خصوصی معادله به صورت زیر بدست می‌آید:

$$W_2 = \frac{v_1(e^{3iT_0\omega_0} A^3 + e^{-3iT_0\omega_0} \overline{A}^3)}{8\omega_0^2} \qquad ۶۴-۲$$

حال پاسخ‌های W_0، W_1 و W_2 را در معادله (۲-۵۷) قرار داده و با حذف عبارت سکولار نتایج حاصل از معادله به صورت زیر بدست می‌آید.

$$D_0^2 W_3 + \omega_0^2 W_3 = 2i\omega_0 \frac{\partial A(T_2,T_3,T_4)}{\partial T_3} e^{i\omega_0 T_0} + cc \qquad ۶۵-۲$$

با مساوی صفر قرار دادن ضریب عبارت $e^{i\omega_0 T_0}$ و حل عبارت دیفرانسلی نتیجه زیر حاصل می‌شود.

$$2i\omega_0 \frac{\partial A(T_2,T_3,T_4)}{\partial T_3} = 0 \qquad ۶۶-۲$$

که $A(T_2,T_3,T_4)$ بر حسب T_3 نبوده و W_3 نیز برابر با صفر خواهد بود.

در این قسمت پاسخ‌های W_0، W_1، W_2، و W_3 را در معادله (۲-۵۸) جایگذاری کرده و سپس با مشخص کردن عبارت ایجاد کننده ترم سکولار به حذف ضریب فوق پرداخته خواهد شد.

$$D_0^2W_4+\omega_0^2W_4$$
$$=8Kcos(\omega_0T_0+\sigma T_4)-\frac{(8v_1A^5\omega_0^2+3v_1^2A^5)e^{5i\omega_0T_0}}{8\omega_0^2}$$
$$-\frac{\left(40v_2A^4\overline{A}\omega_0^2+6v_1^2A^4\overline{A}+18iA^2v_1\omega_0\frac{\partial A(T_2,T_4)}{\partial T_2}\right)e^{3i\omega_0T_0}}{8\omega_0^2}$$
$$-\frac{(80v_2A^3\overline{A}^2\omega_0^2+3v_1^2A^3\overline{A}^2+16i\left(\mu A\omega_0^2+\omega_0^3\frac{\partial A(T_2,T_4)}{\partial T_4}\right)+8\omega_0^2\left(\frac{\partial^2A(T_2,T_4)}{\partial {T_2}^2}\right))e^{i\omega_0T_0}}{8\omega_0^2}$$
$$+cc$$ ۶۷-۲

با برابر صفر قرار دادن ضریب $e^{i\omega_0T_0}$ در رابطه فوق رابطه زیر بدست می‌آید.

$$2i_{\omega_0}\frac{\partial A(T_2,T_4)}{\partial T_4}+10v_2A^3\overline{A}^2+\frac{3}{8_{\omega_0^2}}{v_1}^2A^3\overline{A}^2+\frac{\partial^2 A(T_2,T_4)}{\partial {T_2}^2}+2i\mu\omega_0A(T_2,T_4)-Ke^{i\sigma T_4}=0$$ ۶۸-۲

برای حل معادله (۲-۶۸) از فرم قطبی به صورت زیر می‌توان استفاده کرد

$$A(T_2,T_4)=\frac{1}{2}a(T_2,T_4)e^{i\beta(T_2,T_4)}،\overline{A}=\frac{1}{2}a(T_2,T_4)e^{-i\beta(T_2,T_4)}$$ ۶۹-۲

پس از جایگذاری رابطه (۲-۶۹) در (۲-۶۸) عبارت زیر حاصل می‌شود.

$$\frac{1}{256\omega_0^2}\left(80v_2a^5\omega_0^2+3v_1^2a^5+256i\mu a\omega_0^3-128a\omega_0^2\left(\frac{\partial\beta(T_2,T_4)}{\partial T_2}\right)^2\right.$$
$$+256i\omega_0^2\left(\frac{\partial a(T_2,T_4)}{\partial T_2}\right)\left(\frac{\partial\beta(T_2,T_4)}{\partial T_2}\right)+128i\omega_0^2a\frac{\partial^2\beta(T_2,T_4)}{\partial {T_2}^2}+256i\omega_0^3\frac{\partial a(T_2,T_4)}{\partial T_4}$$
$$\left.-256a\omega_0^3\frac{\partial\beta(T_2,T_4)}{\partial T_4}-128K\omega_0^2\big(\cos(\sigma T_4-\beta)+isin(\sigma T_4-\beta)\big)+128\omega_0^2\frac{\partial^2a(T_2,T_4)}{\partial T_2^2}\right)$$
$$=0$$ ۷۰-۲

پس جداسازی قسمت‌های موهومی و حقیقی و ساده سازی عبارت زیر بدست می‌آید.

$$\frac{80v_2a^5\omega_0^2+3v_1^2a^5-256a\omega_0^3\frac{\partial\beta(T_2,T_4)}{\partial T_4}-128K\omega_0^2\cos(\sigma T_4-\beta)+128\omega_0^2\frac{\partial^2a(T_2,T_4)}{\partial T_2^2}}{256\omega_0^2}$$
$$=0$$ ۷۱-۲

$$\omega_0\mu a+\left(\frac{\partial a(T_2,T_4)}{\partial T_2}\right)\left(\frac{\partial\beta(T_2,T_4)}{\partial T_2}\right)+\frac{a\frac{\partial^2\beta(T_2,T_4)}{\partial {T_2}^2}}{2}+\omega_0\left(\frac{\partial a(T_2,T_4)}{\partial T_4}\right)-\frac{Ksin(\sigma T_4-\beta)}{2}=0$$ ۷۲-۲

سپس برای بدست آوردن حل پایا با تغییر متغیر $\sigma T_4 - \beta = \gamma$ و حذف عبارات دیفرانسیلی عبارات زیر حاصل خواهد شد.

$$\frac{5a^4 v_2}{16\omega_0} + \frac{3a^4 v_1^2}{256\omega_0^3} - \sigma - \frac{K\,cos(\gamma)}{2\omega_0 a} = 0 \qquad ۷۳-۲$$

$$\mu - \frac{K\,sin(\gamma)}{2\omega_0 a} = 0 \qquad ۷۴-۲$$

با حذف γ در روابط (۲-۷۳) ، (۲-۷۴) و ساده سازی، معادله پاسخ فرکانسی سیستم در حالت رزونانس اولیه به صورت زیر خواهد بود.

$$\frac{K^2}{4\omega_0^2 a^2} = \left(\frac{5a^4 v_2}{16\omega_0} + \frac{3a^4 v_1^2}{256\omega_0^3} - \sigma\right)^2 + \mu^2 \qquad ۷۵-۲$$

معادله (۲-۷۵) معادله پاسخ فرکانسی حالت پایای سیستم برای حالت روزنانس اولیه می‌باشد.

۲-۳-۳ : رزونانس‌های ثانویه

در این بخش به بررسی رزونانس‌های ثانویه سیستم پرداخته خواهد شد. تفاوت بین رزوناس‌های ثانویه و اولیه در نحوه قرار گرفتن عبارت تحریک است. در این نوع تحلیل عبارت تحریک سیستم در جمله اول از مرتبه اغتشاش سیستم قرار می‌گیرد و برخلاف حالتی که رزونانس اولیه سیستم بررسی می‌شود معادله اولی که بر حسب مرتبه پارامتر اغتشاش سیستم مرتب سازی شده است یک معادله غیر همگن می‌باشد.

رزونانس‌های ثانویه دارای دو حالت مافوق هارمونیک و مادون هارمونیک می‌باشند. لذا با توجه به این که در سیستم عبارات غیر خطی مرتبه سه و مرتبه پنج وجود دارد برای هر دو مرتبه غیرخطی معادله حالت پایای تحلیل فرکانسی برای حالت مافوق هارمونیک و مادون هارمونیک استخراج می‌شود.

۲-۳-۳-۱ : رزونانس مافوق هارمونیک مرتبه سه

با توجه به معادله (۲-۴۶) که معادله اصلی سیستم می‌باشد ضرایب جدید سیستم برای بررسی تحلیل‌های مافوق و مادون هارمونیک مرتبه سه به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\bar{\mu} = \epsilon\mu; \widetilde{v_1} = \epsilon v_1;\ \widetilde{v_2} = \epsilon^2 v_2; \widehat{K} = K \qquad ۷۶-۲$$

لذا معادله جدید سیستم به صورت زیر می‌باشد

$$\ddot{W} + 2\epsilon\mu\dot{W} + \omega_0^2 W + \epsilon v_1 W^3 + \epsilon^2 v_2 W^5 = Kcos(\Omega t) \qquad ۲-۷۷$$

با توجه به قسمت قبل ϵ یک پارامتر بسیار کوچک می‌باشد.

در این بخش هم با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه به تحلیل رزونانس ثانویه سیستم پرداخته می‌شود. برای استفاده از این روش ابتدا باید یک بسط از جملات را تا مرتبه مورد نظر برای سیستم در نظر گرفته تا در سیستم جایگذاری شود.

$$W = W_0(T_0 \text{،} T_1) + \epsilon W_1(T_0 \text{،} T_1) \qquad ۲-۷۸$$

که T_0 ، T_1 متغیرهای مستقل زمان، و به صورت زیر می‌باشند:

$$T_E = \epsilon^E t; E = 0,1 \qquad ۲-۷۹$$

با توجه به معادله (۲-۷۷) باید اپراتورهای $\dot{W}$ و $\ddot{W}$ را در معادله (۲-۷۷) جایگزین کرده و معادله را بر اساس مرتبه پارامتر ϵ جدا سازی کرد.

$$\dot{W} = ((\frac{\partial}{\partial T_0} + \epsilon\frac{\partial}{\partial T_1})W(T_0 \text{،} T_1)) \qquad ۲-۸۰$$

$$\ddot{W} = \left(\frac{\partial^2}{\partial T_0^2} + 2\epsilon\frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1}\right) W(T_0 \text{،} T_1) \qquad ۲-۸۱$$

با جایگذاری روابط (۲-۷۸)، (۲-۸۰) و (۲-۸۱) در معادله (۲-۷۷) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} &D_0^2 W_0 + \epsilon D_0^2 W_1 + 2\epsilon D_0 D_1 W_0 + 2\epsilon^2 D_0 D_1 W_1 + 2\epsilon\mu D_0 W_0 + 2\epsilon^2\mu(D_0 W_1 \\ &+ D_1 W_0) + 2\epsilon^3\mu D_1 W_1 + \omega_0^2 W_0 + \omega_0^2\epsilon W_1 + \epsilon v_1 W_0^3 + 3\epsilon^2 v_1 W_0^3 W_1 \\ &+ 3\epsilon^3 v_1 W_0 W_1^2 + \epsilon^4 v_1 W_1^3 + \epsilon^2 v_2 W_0^5 + 5\epsilon^3 v_2 W_0^4 W_1 + 10\epsilon^4 v_2 W_0^3 W_1^2 \\ &+ 10\epsilon^5 v_2 W_0^2 W_1^3 + 5\epsilon^6 v_2 W_0 W_1^4 + \epsilon^7 v_2 W_1^5 - Kcos(\Omega t) = 0 \end{aligned} \qquad ۲-۸۲$$

که اپراتور D به صورت زیر تعریف می‌شود

$$D_E = \frac{\partial}{\partial T_E} ; E = 0, 1 \qquad ۲-۸۳$$

با توجه به معادله (۲-۸۲) و مرتب سازی روابط بر حسب ϵ خواهیم داشت:

$$D_0^2W_0+\omega_0^2W_0=Kcos(\Omega t) \qquad ۸۴-۲$$

$$D_0^2W_1+\omega_0^2W_1=-2D_0D_1W_0-2\mu D_0W_0-v_1W_0^3 \qquad ۸۵-۲$$

در این قسمت عبارت غیرخطی مرتبه سه مد نظر است لذا پارامترهای ϵ طوری تنظیم خواهد شد که عبارت غیر خطی مد نظر در معادله مرتبه دو ظاهر شود.

پاسخ عمومی و خصوصی معادله (۲-۸۴) به صورت زیر می‌باشد.

$$W_0=A(T_1)e^{i\omega_0T_0}+\overline{A}(T_1)e^{-i\omega_0T_0}+\Lambda e^{i\Omega T_0}+\Lambda e^{-i\Omega T_0} \qquad ۸۶-۲$$

که عبارت $\Lambda=\frac{1}{2}K(\omega_0^2-\Omega^2)^{-1}$ می‌باشد. حال با جایگذاری W_0 در معادله (۲-۸۵) داریم:

$$\begin{aligned}&2iA'\omega_0e^{i\omega_0T_0}-2i\overline{A'}\omega_0e^{-i\omega_0T_0}+3v_1A^2\overline{A}e^{i\omega_0T_0}+6v_1A\Lambda^2e^{i\omega_0T_0}\\&+6v_1\overline{A}\Lambda^2e^{-i\omega_0T_0}+3v_1A\overline{A}^2e^{-i\omega_0T_0}+3v_1A^2\Lambda\,e^{2i\omega_0T_0+i\Omega T_0}\\&+3v_1A^2\Lambda e^{2i\omega_0T_0-i\Omega T_0}+3v_1A\Lambda^2e^{i\omega_0T_0+2i\Omega T_0}+3v_1A\Lambda^2e^{i\omega_0T_0-2i\Omega T_0}\\&+3v_1\overline{A}\Lambda^2e^{-i\omega_0T_0+2i\Omega T_0}+3v_1\overline{A}^2\Lambda e^{-2i\omega_0T_0+i\Omega T_0}+3v_1\overline{A}^2\Lambda^2e^{-2i\omega_0T_0-i\Omega T_0}\\&+3v_1\overline{A}\Lambda^2e^{-i\omega_0T_0-2i\Omega T_0}+v_1\Lambda^3e^{3i\Omega T_0}+3v_1\Lambda^3e^{-i\Omega T_0}+v_1\overline{A}^3e^{-3i\omega_0t}\\&+v_1\Lambda^3e^{-3i\Omega T_0}+v_1\mathrm{A}^3e^{-3i\omega_0T_0}+3v_1\Lambda^3e^{i\Omega T_0}+6v_1A\overline{\mathrm{A}}\Lambda e^{-i\Omega T_0}\\&-2i\mu\overline{A}\omega_0e^{-i\omega_0T_0}-2i\mu\Lambda\Omega e^{-i\Omega T_0}+6v_1\overline{A}A\Lambda e^{i\Omega T_0}+2i\mu\overline{A}\omega_0e^{+i\omega_0T_0}\\&+2i\mu\Lambda\Omega e^{+i\Omega T_0}+D_0^2W_1+\omega_0^2W_1=0\end{aligned} \qquad ۸۷-۲$$

با جایگذاری $\Omega=\frac{1}{3}(\omega_0+\epsilon\sigma)$ در معادله (۲-۸۷) و مرتب سازی برحسب exp و حذف ضریب عبارت سکولار عبارت زیر حاصل می‌شود.

$$6v_1\Lambda^2A+2i\omega_0(\mu A+A')+3v_1\overline{A}A^2+v_1\Lambda^3e^{i\sigma T_1}=0 \qquad ۸۸-۲$$

برای حل معادله (۲-۸۸) از فرم قطبی عبارت می‌توان استفاده کرد

$$A(T_1)=\frac{1}{2}a(T_1)e^{i\beta(T_1)}،\bar{A}=\frac{1}{2}a(T_1)e^{-i\beta(T_1)} \qquad ۸۹-۲$$

با جایگذاری عبارت (۲-۸۹) در معادله (۲-۸۸) فرم قطبی عبارت سکولار به صورت زیر خواهد بود.

$$3v_1\Lambda^2 a + \mu i a\omega_0 + \frac{3}{8}v_1 a^3 + i\omega_0 a' - \omega_0 a\beta' + v_1\Lambda^3\big(\cos(\sigma T_1 - \beta) + isin(\sigma T_1 - \beta)\big) = 0 \qquad ۲-۹۰$$

با جداسازی قسمت‌های حقیقی و موهومی معادله (۲-۹۰)، تغییر متغیر $\sigma T_1 - \beta = \gamma$ و همچنین حذف عبارات دیفرانسیلی از معادله، فرم حالت پایدار سیستم بدست می‌آید.

$$real = \frac{3v_1\Lambda^2}{\omega_0} + \frac{3a^2 v_1}{8\omega_0} - \sigma + \frac{v_1\Lambda^3\cos(\gamma)}{\omega_0 a} = 0 \qquad ۲-۹۱$$

$$image = \mu + \frac{v_1\Lambda^3\sin(\gamma)}{\omega_0 a} = 0 \qquad ۲-۹۲$$

با حذف γ در روابط (۲-۹۱) ، (۲-۹۲) و ساده سازی، پاسخ فرکانسی سیستم در حالت رزونانس ثانویه مافوق هارمونیک مرتبه سه به صورت زیر خواهد بود.

$$\frac{\Lambda^6 v_1^2}{\omega_0^2 a^2} = \frac{9}{64}\frac{a^4 v_1^2}{\omega_0^2} + \left(\frac{9}{4}\frac{v_1^2\Lambda^2}{\omega_0^2} - \frac{3}{4}\frac{v_1\sigma}{\omega_0}\right)a^2 + \frac{9v_1^2\Lambda^4}{\omega_0^2} - \frac{6v_1\Lambda^2\sigma}{\omega_0} + \mu^2 + \sigma^2 \qquad ۲-۹۳$$

۲-۳-۳-۲ : رزونانس مادون هارمونیک مرتبه سه

حال برای بررسی رزونانس مادون هارمونیک مرتبه سه سیستم با توجه به رابطه (۲-۸۷) ، جایگذاری عبارت $\Omega = 3(\omega_0 + \epsilon\sigma)$ در معادله (۲-۸۷)، مرتب سازی برحسب exp و حذف ضریب عبارت سکولار عبارت زیر حاصل می‌شود.

$$6v_1\Lambda^2 A + 2i\omega_0(\mu A + A') + 3v_1\overline{A}A^2 + 3v_1\Lambda\overline{A}^2 e^{i\sigma T_1} = 0 \qquad ۲-۹۴$$

برای حل معادله (۲-۹۴) از فرم قطبی عبارت با توجه به معادله (۲-۸۹) استفاده می‌شود.

$$3v_1\Lambda^2 a + i\mu a\omega_0 + \frac{3}{8}v_1 a^3 + i\omega_0 a' - \omega_0 a\beta' + \frac{3}{4}v_1\Lambda a^2\big(\cos(\sigma T_1 - 3\beta) + isin(\sigma T_1 - 3\beta)\big) = 0 \qquad ۲-۹۵$$

با جداسازی قسمت‌های حقیقی و موهومی معادله (۲-۹۵)، تغییر متغیر $\sigma T_1 - 3\beta = \gamma$ و همچنین حذف عبارات دیفرانسیلی از معادله (۲-۹۵) فرم حالت پایدار سیستم بدست می‌آید.

$$real = \frac{9}{4}\frac{v_1\Lambda a^2\cos(\gamma)}{\omega_0} + \frac{9av_1\Lambda^2}{4\omega_0} + \frac{9a^3 v_1}{8\omega_0} - \sigma a = 0 \qquad ۲-۹۶$$

$$image = \frac{9v_1\Lambda a^2\sin(\gamma)}{4\omega_0} + 3\mu a = 0 \qquad ۹۷-۲$$

با حذف γ در روابط (۲-۹۶) ، (۲-۹۷) و ساده سازی، پاسخ فرکانسی سیستم در حالت رزونانس ثانویه مادون هارمونیک مرتبه سه به صورت زیر خواهد بود.

$$\frac{81v_1^2\Lambda^2a^4}{16\omega_0^2} = \frac{81a^6v_1^2}{69\omega_0^2} + \left(\frac{81v_1^2\Lambda^2}{4\omega_0^2} - \frac{9v_1\sigma}{4\omega_0}\right)a^4 + \left(\frac{81v_1^2\Lambda^4}{\omega_0^2} - \frac{18v_1\Lambda^2\sigma}{\omega_0} + \sigma^2 + 9\mu^2\right)a^2 \qquad ۹۸-۲$$

۲-۳-۳-۳ : رزونانس مافوق هارمونیک مرتبه پنج

با توجه به معادله (۲-۴۶) که معادله اصلی سیستم می‌باشد ضرایب جدید سیستم برای بررسی تحلیلی‌های مافوق و مادون هارمونیک مرتبه پنج به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\bar{\mu} = \epsilon\mu; \widetilde{v_1} = \epsilon^2 v_1;\ \widetilde{v_2} = \epsilon v_2; \widehat{K} = K \qquad ۹۹-۲$$

معادله جدید سیستم به صورت زیر می‌باشد

$$\ddot{W} + 2\epsilon\mu\dot{W} + \omega_0^2 W + \epsilon^2 v_1 W^3 + \ \epsilon v_2 W^5 = \ Kcos(\Omega t) \qquad ۱۰۰-۲$$

با توجه به قسمت‌های قبل ϵ یک پارامتر بسیار کوچک می‌باشد. در این بخش هم با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه به تحلیل رزونانس ثانویه سیستم پرداخته می‌شود. برای استفاده از این روش ابتدا باید یک بسط از جملات را تا مرتبه مورد نظر برای سیستم در نظر گرفته تا در سیستم جایگذاری شود. با توجه به قسمت قبل برای بررسی رزونانس ثانویه معادلات (۲-۷۸) تا (۲-۸۰) مشابه می‌باشند اما با توجه به تغییر پارامتر اغتشاش برای سیستم مرتبه پنج معادله (۲-۸۲) تغییر کرده و به صورت زیر ظاهر می‌شود

$$\begin{aligned} &D_0^2W_0 + \epsilon D_0^2W_1 + 2\epsilon D_0D_1W_0 + 2\epsilon^2 D_0D_1W_1 + 2\epsilon\mu D_0W_0 + 2\epsilon^2\mu(D_0W_1 \\ &+ D_1W_0) + 2\epsilon^3\mu D_1W_1 + \omega_0^2W_0 + \omega_0^2\epsilon W_1 + \epsilon^2 v_1W_0^3 + 3\epsilon^3 v_1W_0^2W_1 \\ &+ 3\epsilon^4 v_1W_0W_1^2 + \epsilon^5 v_1W_1^3 + \epsilon v_2W_0^5 + 5\epsilon^2 v_2W_0^4W_1 + 10\epsilon^3 v_2W_0^3W_1^2 \\ &+ 10\epsilon^4 v_2W_0^2W_1^3 + 5\epsilon^5 v_2W_0W_1^4 + \epsilon^6 v_2W_1^5 - Kcos(\Omega t) = 0 \end{aligned} \qquad ۱۰۱-۲$$

که اپراتور D با توجه به رابطه (۲-۸۳) تعریف می‌شود. با مرتب سازی روابط بر حسب ϵ خواهیم داشت:

$$D_0^2W_0 + \omega_0^2W_0 = Kcos(\Omega t)$$ ۱۰۲-۲

$$D_0^2W_1 + \omega_0^2W_1 = -2D_0D_1W_0 - 2\mu D_0W_0 - v_2W_0^5$$ ۱۰۳-۲

در این قسمت عبارت غیرخطی مرتبه پنج مد نظر است لذا پارامترهای ϵ طوری تنظیم می‌شود که عبارت غیرخطی مد نظر در معادله مرتبه دو ظاهر شود. پاسخ عمومی و خصوصی معادله (۲-۱۰۲) به صورت معادله (۲-۸۶) می‌باشد. حال با جایگذاری W_0 در معادله (۲-۱۰۳) رابطه زیر بدست خواهد آمد:

$$\begin{aligned}
&D_0^2W_1 + \omega_0^2W_1 + 2\Lambda\left(5v_2\Lambda^4 + 30v_2\Lambda^2A\overline{A} + 15v_2A^2\overline{A}^2 + i\mu\Omega\right)e^{i\Omega T_0}\\
&+ \left(20v_2A^3\Lambda^2 + 5v_2A^4\overline{A}\right)e^{3i\omega_0T_0}\\
&+ \left(2i\omega_0A' + 2A\left(15v_2\Lambda^4 + 30v_2\Lambda^2A\overline{A} + 5v_2A^2\overline{A}^2 + i\mu\omega_0\right)\right)e^{i\omega_0T_0}\\
&+ v_2A^5e^{i\omega_0T_0} + 5v_2A^4\Lambda e^{iT_0(\Omega+4\omega_0)} + 10v_2A^5\Lambda^3e^{iT_0(3\Omega+2\omega_0)}\\
&+ 10v_2A^3\Lambda^2e^{iT_0(2\Omega+3\omega_0)} + 5v_2A\Lambda^4e^{iT_0(4\Omega+\omega_0)} + 10v_2\Lambda^3\overline{A}^2e^{iT_0(3\Omega-2\omega_0)}\\
&+ 5v_2\overline{A}\Lambda^4e^{iT_0(4\Omega-\omega_0)} + 10v_2\overline{A}^3\Lambda^2e^{iT_0(2\Omega-3\omega_0)}\\
&+ 30\Lambda\overline{A}^2v_2\left(\Lambda^2 + \frac{2A\overline{A}}{3}\right)e^{iT_0(\Omega-2\omega_0)} + 20\Lambda^2Av_2\left(\Lambda^2 + \frac{3A\overline{A}}{2}\right)e^{iT_0(2\Omega+\omega_0)}\\
&+ 30\Lambda A^2v_2\left(\Lambda^2 + \frac{2A\overline{A}}{3}\right)e^{iT_0(\Omega+2\omega_0)} + 20\Lambda^2\overline{A}v_2\left(\Lambda^2 + \frac{3A\overline{A}}{2}\right)e^{iT_0(2\Omega-\omega_0)}\\
&+ 5\overline{A}^4v_2e^{iT_0(\Omega-4\omega_0)} + 10v_2\Lambda^3\left(\Lambda^2 + 4A\overline{A}\right)\cos(3\Omega T_0) + 2v_2\Lambda^5\cos(5\Omega T_0)\\
&+ cc = 0
\end{aligned}$$ ۱۰۴-۲

با جایگذاری $\Omega = \frac{1}{5}(\omega_0 + \epsilon\sigma)$ در معادله (۲-۱۰۴) و مرتب سازی برحسب exp و حذف ضریب عبارت سکولار معادله زیر را نتیجه می‌دهد.

$$30v_2\Lambda^2A + 2i\omega_0(\mu A + A') + 60v_2\overline{A}A^2\Lambda^2 + 10v_2A^3\overline{A}^2 + v_2\Lambda^5e^{i\sigma T_1} = 0$$ ۱۰۵-۲

برای حل معادله (۲-۱۰۵) از فرم قطبی (۲-۸۹) می‌توان استفاده کرد با جایگذاری عبارت (۲-۸۹) در معادله (۲-۱۰۵) فرم قطبی عبارت سکولار به صورت زیر خواهد بود.

$$15av_2\Lambda^4+\frac{15}{2}a^3v_2\Lambda^2+\frac{5}{16}v_2a^5+i\mu a\omega_0+i\omega_0a'-\omega_0a\beta'$$
$$+v_2\Lambda^5\big(\cos(\sigma T_1-\beta)+isin(\sigma T_1-\beta)\big)=0$$ ۱۰۶-۲

با جداسازی قسمت‌های حقیق و موهومی معادله (۲-۱۰۶)، تغییر متغیر $\sigma T_1-\beta=\gamma$ و همچنین حذف عبارات دیفرانسیلی از معادله فرم حالت پایدار سیستم بدست می‌آید.

$$real=\frac{15v_2\Lambda^4}{\omega_0}+\frac{15a^2v_2\Lambda^2}{2}+\frac{5a^4v_2}{16\omega_0}-\sigma+\frac{v_2\Lambda^5\cos(\gamma)}{\omega_0a}=0$$ ۱۰۷-۲

$$image=\frac{v_2\Lambda^5\sin(\gamma)}{\omega_0a}+\mu=0$$ ۱۰۸-۲

با حذف γ در روابط (۲-۱۰۷) ، (۲-۱۰۸) و ساده سازی، پاسخ فرکانسی سیستم در حالت رزونانس ثانویه مافوق هارمونیک مرتبه پنج به صورت زیر خواهد بود.

$$\frac{\Lambda^{10}v_2^2}{\omega_0^2a^2}$$
$$=\frac{25}{256}\frac{a^8v_2^2}{\omega_0^2}+\frac{75a^6v_2^2\Lambda^2}{16\omega_0^2}+\left(\frac{525v_2^2\Lambda^4}{8\omega_0^2}-\frac{5v_2\sigma}{\omega_0}\right)a^4$$
$$+\left(\frac{225v_2^2\Lambda^6}{\omega_0^2}-\frac{15v_2\sigma\Lambda^2}{\omega_0}\right)a^2+\frac{225v_2^2\Lambda^8}{\omega_0^2}-\frac{30v_2\Lambda^4\sigma}{\omega_0}+\sigma^2+\mu^2$$ ۱۰۹-۲

۲-۳-۳-۴ : رزونانس مادون هارمونیک مرتبه پنج

حال برای بررسی روزنانس مادون هارمونیک مرتبه پنج سیستم با توجه به رابطه (۲-۱۰۴) ، جایگذاری عبارت $\Omega=5(\omega_0+\epsilon\sigma)$ در معادله (۲-۱۰۴)، مرتب سازی برحسب exp و حذف ضریب عبارت سکولار رابطه زیر بدست می‌آید.

$$30v_2\Lambda^4A+2i\omega_0(\mu A+A')+60v_2\overline{A}A^2\Lambda^2+10v_2A^3\overline{A}^2+5v_2\Lambda\overline{A}^4e^{i\sigma T_1}=0$$ ۱۱۰-۲

برای حل معادله (۲-۱۱۰) از فرم قطبی عبارت با توجه به معادله (۲-۸۹) استفاده می‌شود.

$$15av_2\Lambda^4+\frac{15}{2}a^3v_2\Lambda^2+\frac{5}{16}v_2a^5+i\mu a\omega_0+i\omega_0a'-\omega_0a\beta'$$
$$+\frac{5}{16}v_2\Lambda a^4\big(\cos(\sigma T_1-5\beta)+isin(\sigma T_1-5\beta)\big)=0$$ ۱۱۱-۲

با جداسازی قسمت‌های حقیقی و موهومی معادله (۲-۱۱۱)، تغییر متغیر $\sigma T_1-5\beta=\gamma$ و همچنین حذف عبارات دیفرانسیلی از معادله فرم حالت پایدار سیستم بدست می‌آید.

$$real = \frac{25}{16}\frac{v_2\Lambda a^4\cos(\gamma)}{\omega_0} + \frac{75av_2\Lambda^4}{\omega_0} + \frac{75a^3v_2\Lambda^2}{2\omega_0} + \frac{25a^5v_2}{16\omega_0} - \sigma a = 0 \qquad ۱۱۲\text{-}۲$$

$$image = \frac{25v_2\Lambda a^4\sin(\gamma)}{16\omega_0} + 5\mu a = 0 \qquad ۱۱۳\text{-}۲$$

با حذف γ در روابط (۲-۱۱۲) ، (۲-۱۱۳) و ساده سازی، پاسخ فرکانسی سیستم در حالت رزونانس ثانویه مادون هارمونیک مرتبه پنج به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned}
&\frac{625\Lambda^2 v_2^2 a^8}{256\omega_0^2} \\
&= \frac{625a^{10}v_2^2}{256\omega_0^2} + \frac{1875v_2^2\Lambda^2 a^8}{10\omega_0^2} + \left(\frac{13125v_2^2\Lambda^4}{8\omega_0^2} - \frac{25\sigma v_2}{8\omega_0}\right)a^6 \\
&+ \left(\frac{5625v_2^2\Lambda^6}{\omega_0^2} - \frac{75v_2^2\Lambda^2\sigma}{\omega_0}\right)a^4 \\
&+ \left(\frac{5625v_2^2\Lambda^8}{\omega_0^2} - \frac{150v_2^2\Lambda^4\sigma}{\omega_0} + \sigma^2 + 25\mu^2\right)a^2
\end{aligned} \qquad ۱۱۴\text{-}۲$$

با توجه به معادلاتی که برای پاسخ فرکانسی در حالت‌های مختلف بدست آمد در فصل بعدی با تغییر پارامترهای سیستم نتایج مربوطه بررسی خواهد شد.

فصل سوم: نتایج

تحلیل‌های رزونانسی

در این فصل با توجه به روابط معرفی شده در فصل دوم نتایج و نمودارهای تحلیل‌های رزونانسی ارائه می‌شود. در بخش اول این فصل نمودارهای حاصل از معادله حالت پایدار رزونانس اولیه سیستم مورد بررسی قرار خواهد گرفت. در بخش دوم این فصل با توجه به معادلات (۲-۹۳) و (۲-۹۸) نمودارهای پاسخ فرکانسی برای حالت مافوق هارمونیک و مادون هارمونیک مرتبه سه مورد بحث قرار خواهد گرفت. در بخش سوم این فصل نیز با توجه به معادلات (۲-۱۰۹) و (۲-۱۱۴) نمودارهای پاسخ فرکانسی برای حالت مافوق هارمونیک و مادون هارمونیک مرتبه پنج مورد بررسی قرار خواهد گرفت. در همه این تحلیل‌ها تاثیر بارگذاری، اندازه زاویه راس مخروط، میرایی، شماره مود، و نحوه توزیع ماده مدرج تابعی در جهت ضخامت در چهار حالت (خطی، مربی، معکوس مربعی و مرتبه سه) مورد بررسی می‌گیرد.

۳-۱: مشخصات ماده مورد نظر و هندسه سیستم

با توجه به معادله (۲-۲) مشخصات ماده تشکیل دهنده مخروط در جدول به صورت زیر است:

جدول ۳-۱: مشخصات ماده بکار گرفته شده [۳۷]

ضرایب	Si_3N_4			Ni		
	$E_c(pa)$	ν_c	$\rho_c(kg/m^3)$	$E_m(pa)$	ν_m	$\boldsymbol{\rho_m(kg/m^3)}$
F_0	3.4843×10^{11}	0.24	2370	2.2395×10^{11}	0.31	**8900**
F_{-1}	0	0	0	0	0	**0**
F_1	-3.07×10^{-4}	0	0	-2.794×10^{-4}	0	**0**
F_2	-2.160×10^{-7}	0	0	-3.998×10^{-4}	0	**0**
F_3	-8.946×10^{-11}	0	0	0	0	**0**
P	3.2227×10^{11}	0.24	2370	2.05098×10^{11}	0.31	**8900**

۳-۲: صحت سنجی و اعتبار پژوهش

در این بخش ابتدا قبل از بررسی نتایج باید صحت اعتبار مدل‌سازی سیستم مورد بررسی قرار گیرد. برای اعتبار سنجی با توجه به آن‌چه که در منبع شماره [۳۷] آمده است اعتبار سنجی نتایج تحقیق حاضر انجام خواهد شد. در این تحقیق برای صحت سنجی روابط استخراج شده پوسته مخروطی مدرج تابعی، هندسه مورد نظر را به صورت تماما فلز در حالت بی بعد در نظر گرفته و فرکانس بی‌بعد سیستم را با نتایج گذشته مورد بررسی قرار می‌گیرد. نتایج مربوط به این بررسی و مطالعه مقایسه‌ای در جدول (۳-۲) ارائه شده است. همانطور که از جدول مذکور مشاهده می‌شود خطا بین فرکانس بی‌بعد بدست آمده بین تحقیق حاضر و مرجع [۳۷] بسیار کم می‌باشد.

$$\omega_m = \omega_{L_m} R_2 \sqrt{(1-\upsilon_m^2)\rho_m/E_m} \tag{۳-۱}$$

رابطه (۳-۱) رابطه فرکانس بی‌بعد سیستم در حالت تماما فلز برای سیستم می‌باشد.

جدول ۳-۲: صحت سنجی پژوهش

شماره مود عرضی	تحقیق حاضر فرکانس بی‌بعد	منبع شماره[۳۷]	**در صد خطا**
2	0.8359	0.7943	**4.16**
3	0.7372	0.7085	**2.87**
4	0.6369	0.6199	**1.7**
5	0.5501	0.5437	**0.64**
6	0.4883	0.4896	**0.13**
7	0.4557	0.4623	**0.66**
8	0.4531	0.4627	**0.96**
9	0.4775	0.4882	**1.07**

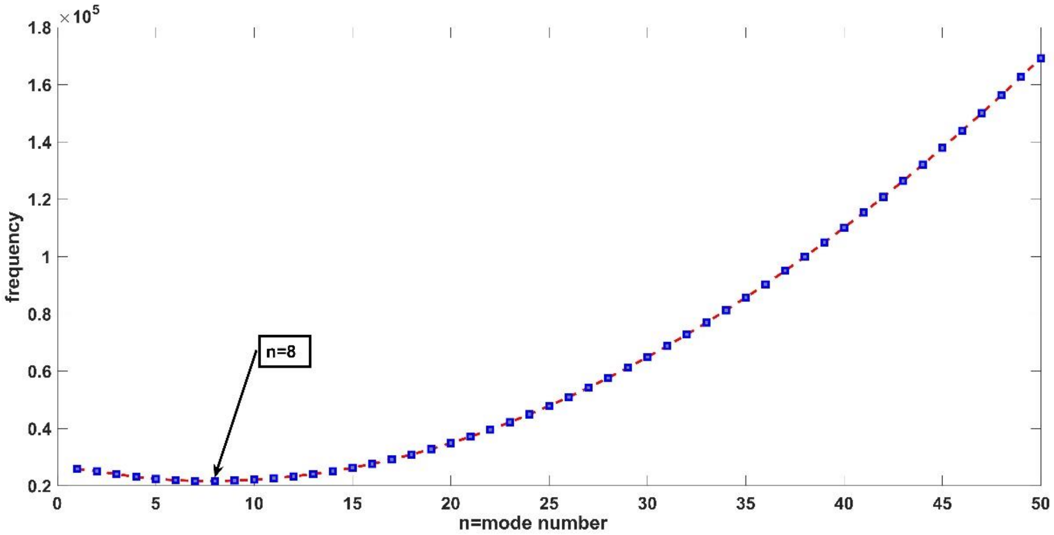
۳-۳: ابعاد پوسته

جدول ۳-۳: هندسه پوسته

ضخامت	h	0.004m
طول	L	0.2m
اندازه طول یال ناقص	S_1	0.6m
اندازه طول یال مخروط	S_2	0.8m
شعاع قاعده کوچک	R_1	0.3m
شعاع قاعده بزرگ	R_2	0.4m

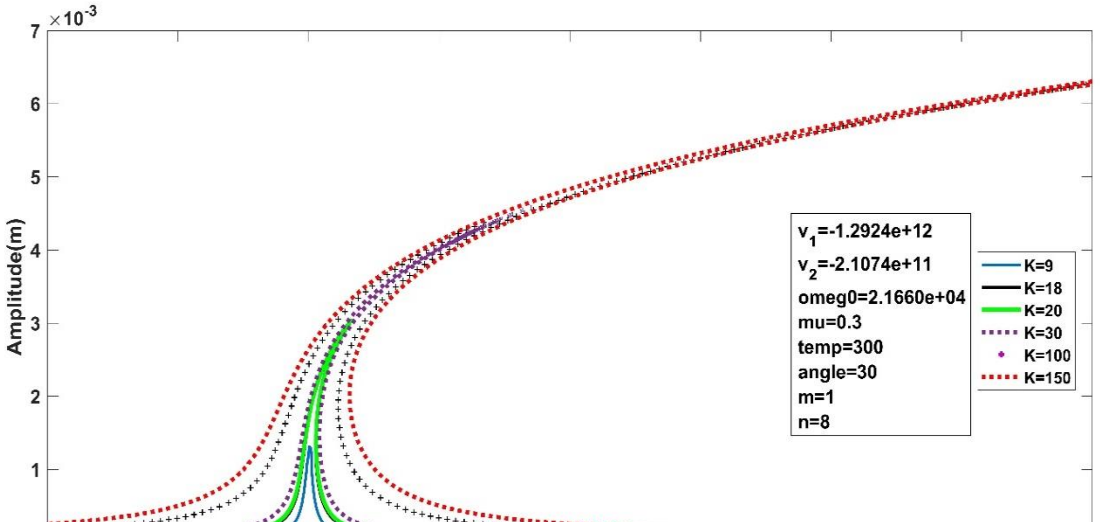
۳-۴: نتایج حاصل از تحلیل‌ها روزنانس اولیه سیستم

در این بخش مقدار فرکانس طبیعی سیستم مخروط مدرج تابعی در مودهای مختلف مورد بررسی قرار خواهد گرفت تا شماره مودی که در آن کمترین فرکانس طبیعی رخ می‌دهد بدست آید. سپس با توجه به این شماره مود نتایج حاصل از تحلیل‌های رزونانسی در قسمت‌های بعدی مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

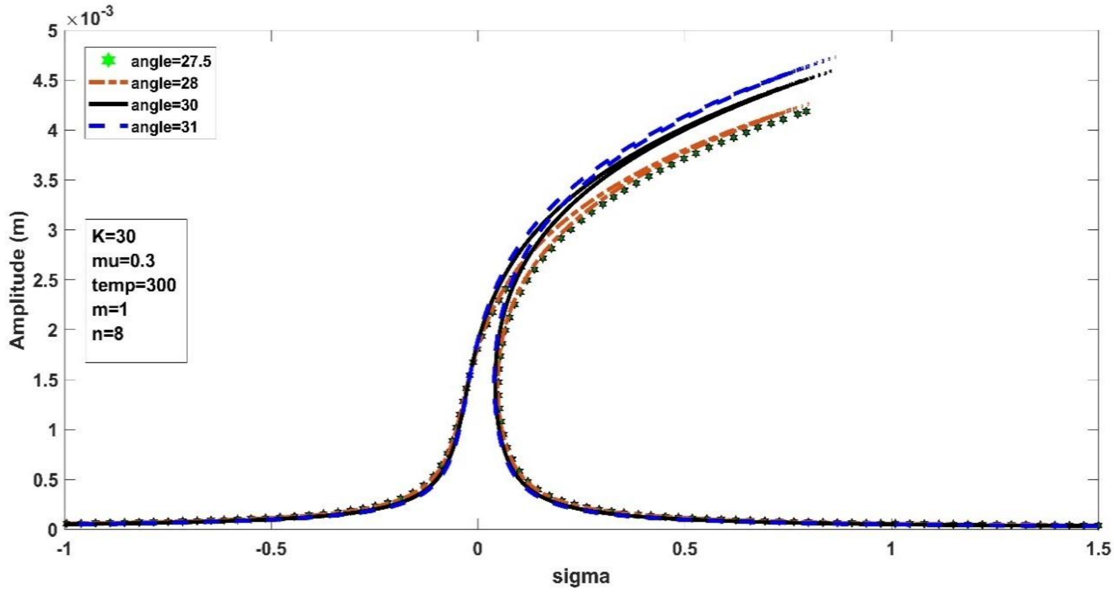


شکل۳-۱: مقدار فرکانس طبیعی سیستم در مودهای مختلف

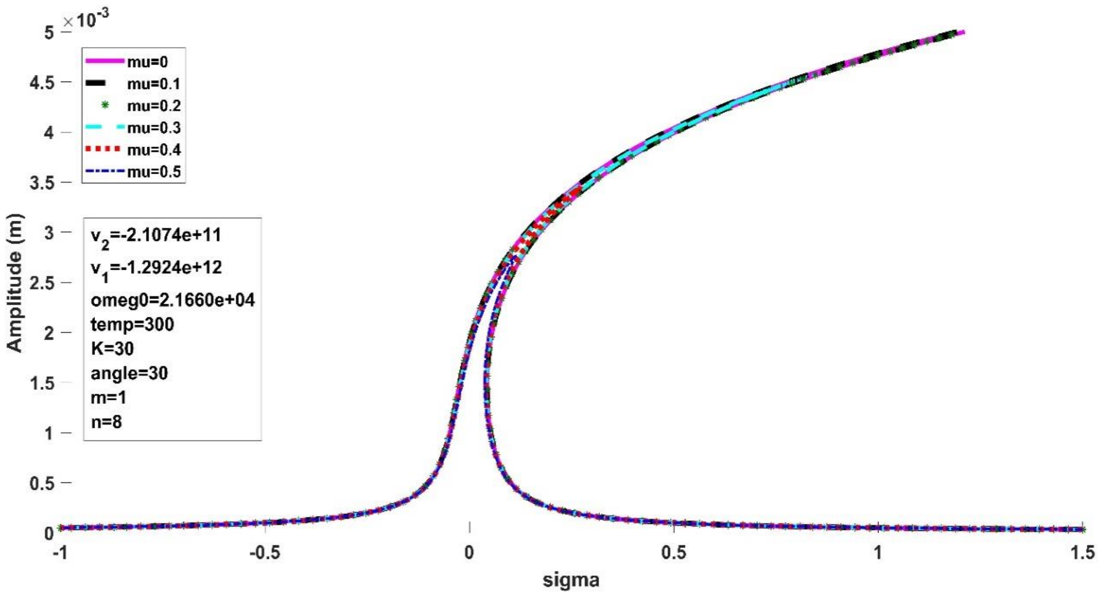
همان‌طور که در شکل نیز قابل مشاهده است مود شماره هشت کمترین مقدار فرکانس طبیعی را دارا می‌باشد. در شکل (۳-۲) تاثیر بارگذاری بر روی سیستم در حالت رزونانس اولیه سیستم مورد بررسی قرار گرفته است. بدین صورت که ابتدا با توجه به دامنه بارگذاری از مقادیر کم بارگذاری شروع کرده و بارگذاری را افزایش داده تا تاثیر آن بر روی نمودار پاسخ فرکانسی سیستم بررسی شود.



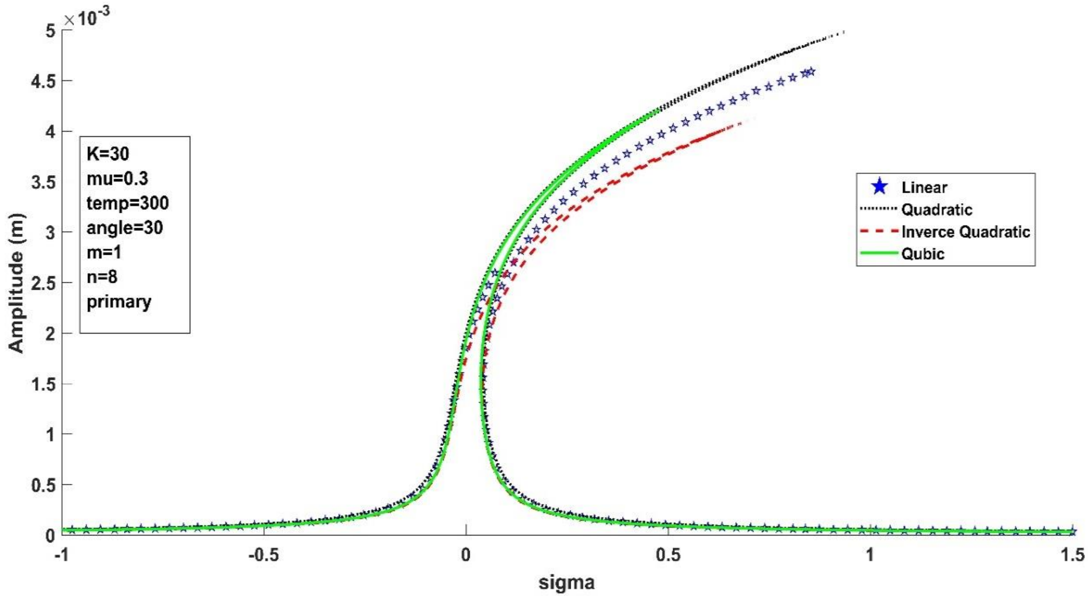
شکل۳-۲: تاثیر بارگذاری بر روی پوسته مخروطی در حالت رزونانس اولیه



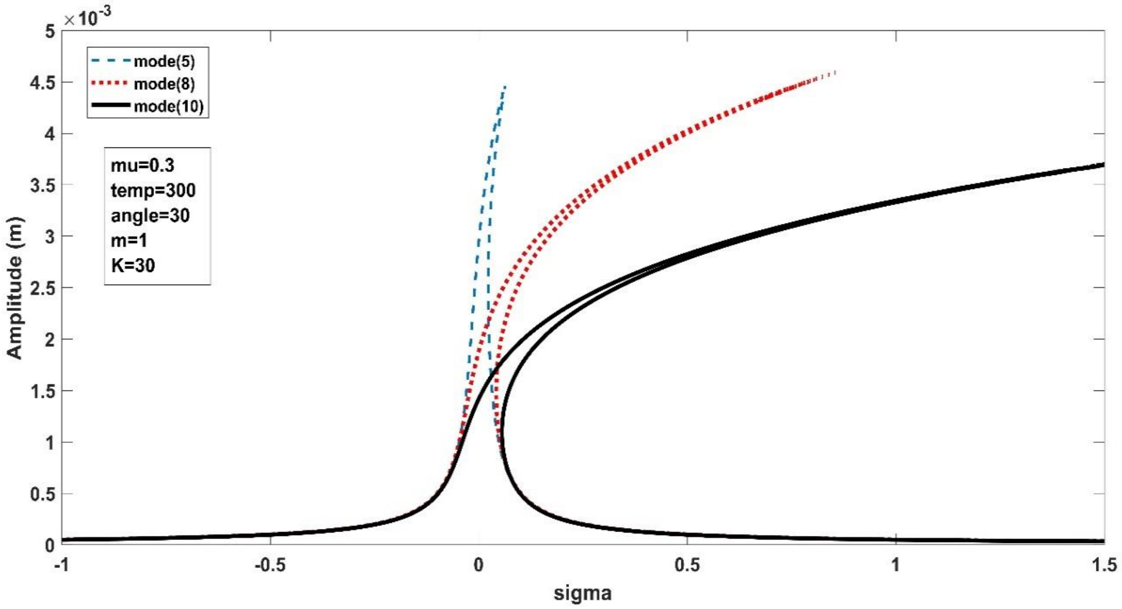
شکل۳-۳: تاثیر زاویه راس بر روی پوسته مخروطی در حالت رزونانس اولیه



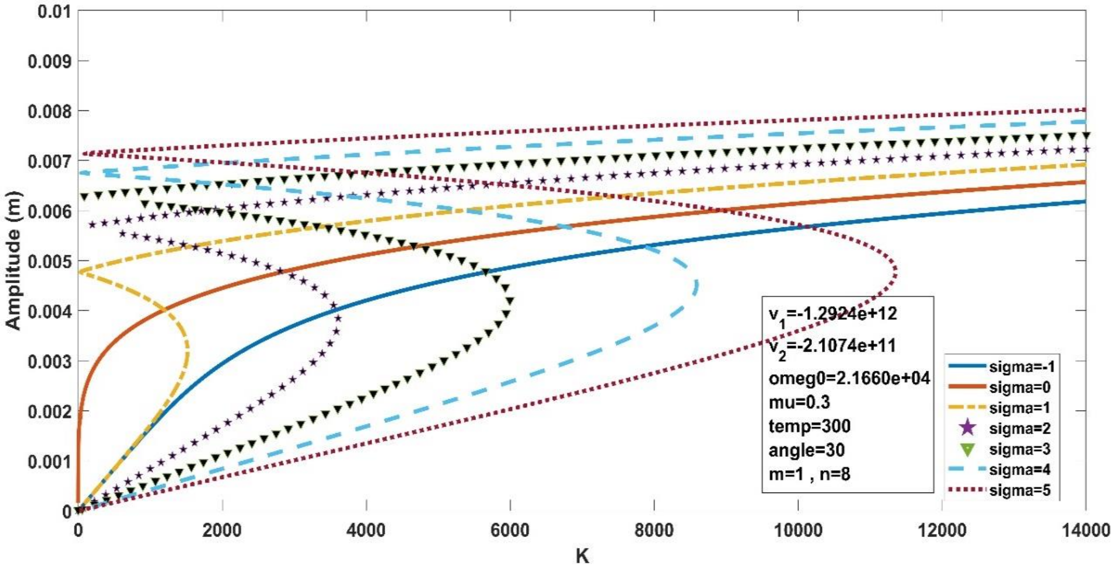
شکل۳-۴: تاثیر میرایی بر روی پوسته مخروطی در حالت رزونانس اولیه



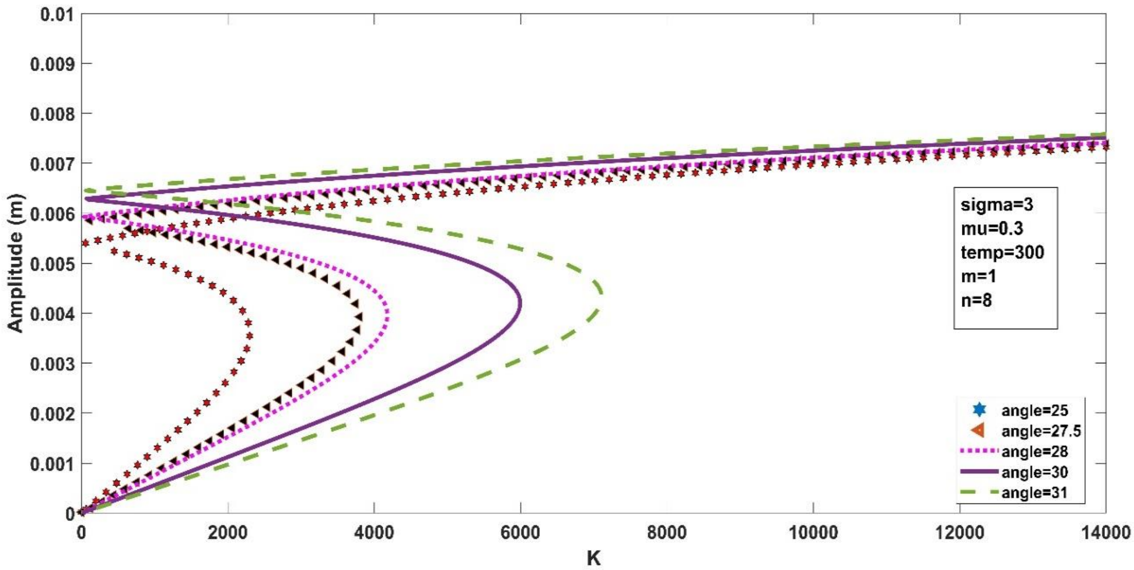
شکل۳-۵: تاثیر توزیع ماده در جهت ضخامت روی پوسته مخروطی در حالت رزونانس اولیه



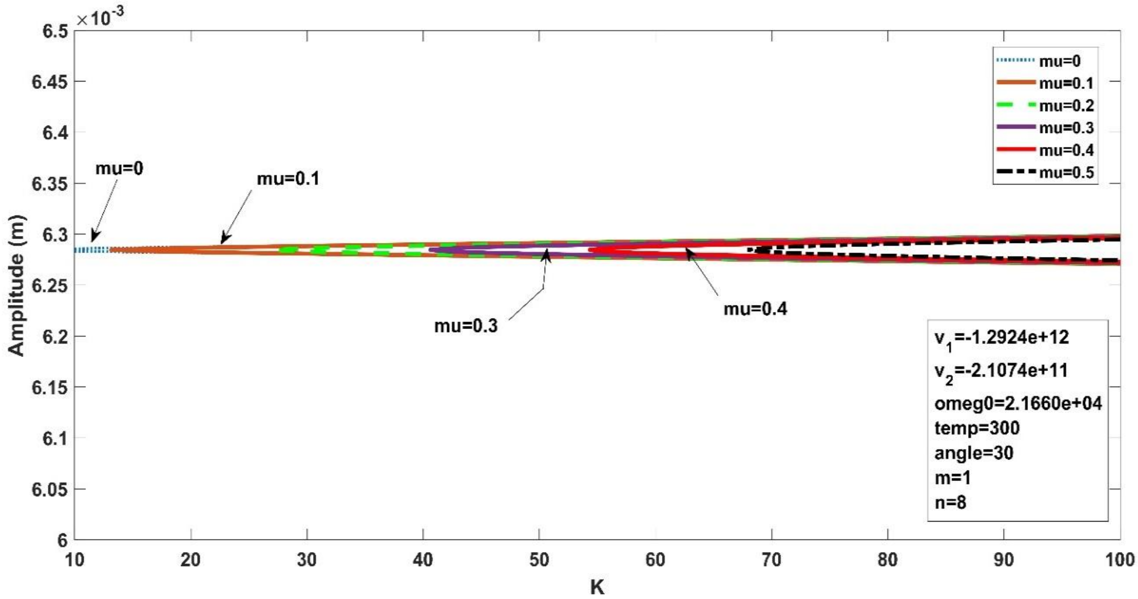
شکل۳-۶: تاثیر شماره مود پاسخ فرکانسی پوسته مخروطی در حالت رزونانس اولیه



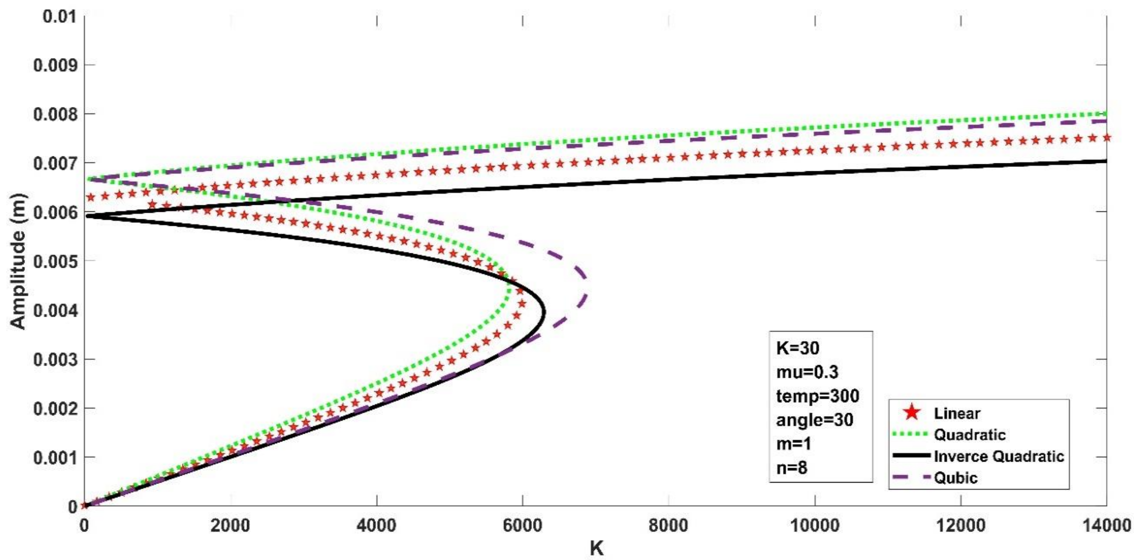
شکل۳-۷: تاثیر پارامتر تنظیم با توجه به دامنه تحریک و دامنه پاسخ در حالت رزونانس اولیه



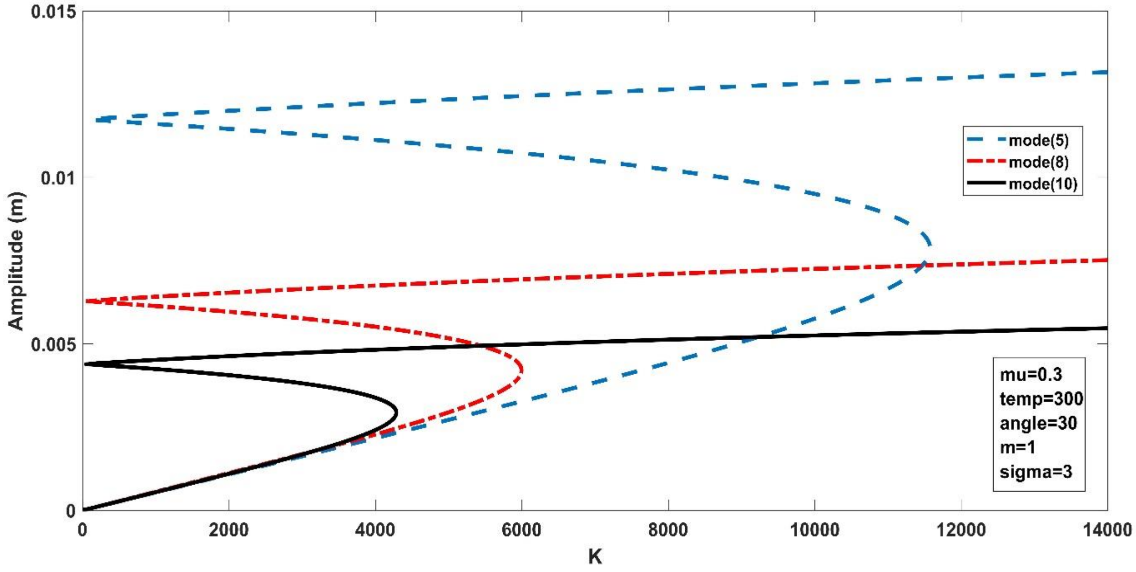
شکل۳-۸: تاثیر زایه راس در یک پارامتر تنظیم با توجه به دامنه تحریک و دامنه پاسخ



شکل۳-۹: تاثیر میرایی در یک پارامتر تنظیم ثابت با توجه به دامنه تحریک و دامنه پاسخ



شکل۳-۱۰: تاثیر توزیع ماده در یک پارامتر تنظیم ثابت با توجه به دامنه تحریک و دامنه پاسخ



شکل۳-۱۱: تاثیر شماره مود در یک پارامتر تنظیم ثابت با توجه به دامنه تحریک و دامنه پاسخ

همانطور که در شکل‌های بالا نشان داده شده شکل‌های (۳-۲) تا (۳-۱۱) تحلیل رزونانسی سیستم در حالت رزونانس اولیه می‌باشند. شکل (۳-۲) نشان دهنده تاثیر بارگذاری بر روی رفتار پاسخ فرکانسی سیستم است. با توجه به این شکل افزایش بارگذاری در سیستم باعث انحراف نمودار پاسخ فرکانسی سیستم به سمت راست شده و نشان دهنده این است که سیستم دارای رفتار سفت شونده بوده و هر چه این بارگذاری افزایش یابد این حالت شدیدتر می‌شود. لذا باعث بوجود آمدن نواحی پایدار و ناپایدار در سیستم خواهد شد. در حالتی که پاسخ‌های سیستم از حالت پایدار به ناپایدار و سپس پایدار انتقال پیدا می‌کنند پدیده پرش اتفاق می‌افتد. نمودار پاسخ فرکانسی در حالت‌های پایدار نشان دهنده چرخه‌های حدی پایدار سیستم می‌باشد. زمانی که در یک بارگذاری مقدار پارامتر تنظیم افزایش یابد دامنه سازه بر اثر تحریک در یک پارامتر تنظیم خاص به یک مقدار بیشینه می‌رسد که این مقدار بیشینه یک نقطه ناپایدار است. حال با افزایش پارامتر تنظیم از این نقطه به بعد دامنه سازه به یکباره دچار افت شده و به نوسان خود ادامه می‌دهد. این پدیده پرش نام دارد. اکنون اگر همین کار برای مقادیر بالای پارامتر تنظیم به سمت مقادیر کم انجام شود باز هم سیستم با پدیده پرش[1] مواجه خواهد شد که رفتار اول را پرش به سمت پایین[2] و رفتار دوم را پرش به سمت بالا[3] می‌گویند. ویژگی ناحیه پرش دارا بودن سه پاسخ برای سیستم است که یکی از پاسخ‌ها ناپایدار و دو پاسخ دیگر نشان دهنده پاسخ پایدار با توجه به شرایط اولیه سیستم می‌باشد. این پدیده از ویژگی‌های سیستم‌های غیرخطی است. با توجه به این که ضرایب غیرخطی سیستم وابسته به نوع ماده می‌باشد. در این بخش با افزایش بارگذاری به بررسی رفتار ارتعاشی سازه و ورود آن به ناحیه غیرخطی پرداخته می‌شود. از

---

1 -jump Phenomenon
2 -jump down
3 -jump up

ویژگی‌های رفتار غیرخطی در حالت رزونانس اولیه، با توجه به این که از نوع تحریک نرم [1] می‌باشد، پارامتر تحریک و بالاترین مرتبه غیر خطی سیستم درون بالاترین مرتبه اغتشاش قرار می‌گیرند. لذا در یک بارگذاری خاص بیشنه مقدار نمودار، وابستگی به ضرایب غیرخطی سیستم نداشته و تغییر ضریب غیرخطی سیستم فقط باعث تغییر مقدار سفت شوندگی و نرم شوندگی سازه می‌شود و روی دامنه تاثیری نخواهد داشت. در شکل (۳-۳) تاثیر تغییرات نصف زاویه راس مخروط بر روی پاسخ فرکانسی مورد بررسی قرار گرفته است. برای این کار با توجه به نمودار (۳-۲) برای بارگذاری که باعث بروز رفتار غیرخطی سیستم شده تاثیر تغییرات زاویه در این بارگذاری در دمای ثابت اتاق و مقدار میرایی ثابت بررسی شده است با توجه به اینکه با تغییر زاویه راس، ماهیت سازه تغییر می‌کند، لذا فرکانس طبیعی و ضرایب غیرخطی سازه نیز که وابسته به فرکانس طبیعی می‌باشند نیز تغییر می‌نمایند. همان‌طور که در شکل (۳-۳) نیز قابل مشاهده است در زوایای کم، در بارگذاری، میرایی و دمای ثابت مشخص، مقدار دامنه سیستم کمتر از زوایای بالاتر است ولی پدیده پرش در زوایای پایین در شرایط ثابت نسبت به زوایای بالا در دامنه‌های پایین تر اتفاق می‌افتد. شکل (۳-۴) نشان دهنده تاثیر عبارت میرایی در معادله به ازای بارگذاری، دما، زاویه راس ثابت می‌باشد. همانطور که نشان داده شده است افزایش میرایی باعث کاهش دامنه پاسخ شده تا حدی که اگر مقدار میرایی افزایش داده شود رفتار سیستم از غیرخطی به خطی تغییر پیدا می‌کند و باعث حذف پدیده پرش و تغییرات ناگهانی دامنه می‌شود. اما همان طور که در بخش‌های قبلی اشاره شد برای مواد مدرج تابعی توزیع ماده در سازه در جهت ضخامت در چهار حالت (خطی، مربعی، معکوس مربعی و مرتبه سه) انجام شده است. شکل (۳-۵) تاثیر توزیع ماده در جهت ضخامت روی پوسته مخروطی در حالت رزونانس اولیه با توجه به بارگذاری، دما، میرایی و زاویه راس ثابت می‌باشد. با توجه به این شکل مشاهده می‌شود دامنه سیستم در حالت مربعی دارای بیشترین مقدار و در حالت معکوس مربعی در حالت کمترین مقدار می‌باشد. تغییر توزیع ضخامت باعث تغییر در رفتار نمودار پاسخ فرکانسی سیستم می‌شود اما این تغییرات نسبت به بررسی سایر پارامترها دارای مقدار ناچیزی می‌باشد. شکل (۳-۶) نشان دهنده تاثیر شماره مود عرضی بر روی پاسخ فرکانسی پوسته مخروطی در حالت رزونانس اولیه می‌باشد. همانطور که در شکل نیز قابل مشاهده است با در نظر گرفتن سایر شرایط به طور یکسان با افزایش شماره مود عرضی در سیستم پدیده پرش در مقدار دامنه‌های کمتری نسبت به مودهای پایین تر اتفاق می‌افتد. در نمودارهای (۳-۲) و (۳-۴) مکان هندسی نقاط ماکزیم نمودارها یک سهمی را تشکیل می‌دهد که به اصطلاح به این منحنی (backbone curve) می‌گویند. در سیستم‌های خطی نمودار پاسخ فرکانسی حول محور عمودی رسم می‌شود و در صورت نبود میرایی ارتعاش سیستم در محل میرایی به سمت بی‌نهایت می‌باشد. اما در سیستم‌های غیرخطی در صورت نبود میرایی ارتعاش

[1]- soft excitation

سیستم در محل رزونانس به صورت مجانبی به سمت بی‌نهایت میل می‌کند و نمودار (backbone curve) در این سیستم‌ها نقش مجانب را ایفا می‌کند.

برای بررسی پدیده پرش در سیستم‌های ارتعاشی غیرخطی در حالت روزنانس اولیه سه نوع نمودار وجود دارد که یکی از این نوع نمودارهای پاسخ فرکانسی که به طور مستقیم از رابطه (۲-۷۵) بدست می‌آیند که در تحلیل‌های بالا نیز به آن اشاره شد. نمودارهای دیگر نمودارهای فاز بر حسب پارامتر تنظیم می‌باشند که از حل عددی روابط (۲-۷۳) و (۲-۷۴) بدست می‌آیند. نوع دیگر نیز نمودارهای پاسخ دامنه می‌باشد. در ادامه پدیده پرش با توجه به نمودارهای پاسخ دامنه در حالت رزونانس اولیه مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

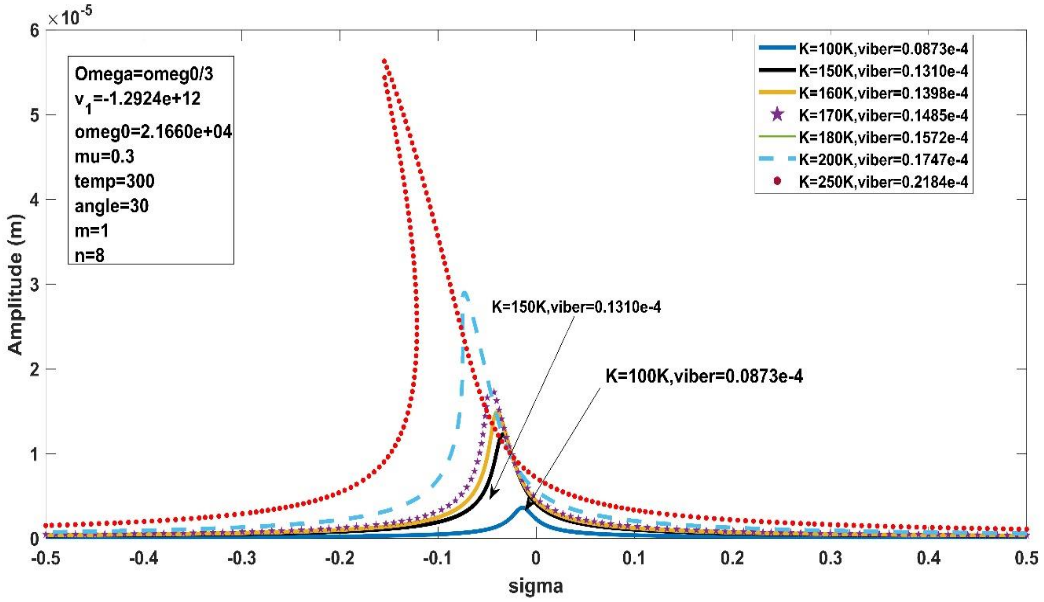
شکل (۳-۷) نشان دهنده تاثیر پارامتر تنظیم روی پوسته مخروطی در حالت رزونانس اولیه می‌باشد. برای این نمودار با توجه به شرایط دما، زاویه راس، میرایی مشخص، تاثیر تغییرات پارامتر تنظیم روی نمودار پاسخ دامنه مورد بررسی قرار گرفته است. همان‌طور که در شکل قابل مشاهده می‌باشد با افزایش مقدار پارامتر تنظیم پدیده پرش در نمودارها رخ می‌دهد. همچنین ملاحظه می‌شود که در مقادیر پایین پارامتر تنظیم این پدیده رخ نداده و رفتار سیستم شبیه به رفتار سیستم‌های خطی می‌باشد. شکل (۳-۸) نشان دهنده تاثیر زایه راس در یک پارامتر تنظیم ثابت روی پوسته مخروطی در حالت رزونانس اولیه برای نمودار پاسخ دامنه است. با توجه به نمودار مشاهده می‌شود که زاویه راس تاثیر بسیار زیادی بر روی نمودار پاسخ دامنه داشته و با تغییر زاویه از مقدار بیست‌وپنج تا سی ویک رفتار سیستم به شدت تغییر می‌کند به طوری که در زوایای کم پدیده پرش در مقادیر کمتر دامنه تحریک نسبت به زوایای بیشتر اتفاق می‌افتد. شکل (۳-۹) نشان دهنده تاثیر میرایی در یک پارامتر تنظیم ثابت روی پوسته مخروطی در حالت رزونانس اولیه می‌باشد و مشاهده می‌شود که با افزایش میرایی پاسخ سیستم دچار کاهش می‌شود. شکل (۳-۱۰) تاثیر توزیع ماده در یک پارامتر تنظیم ثابت روی پوسته مخروطی در حالت رزونانس اولیه را نشان می‌هد. با توجه به این شکل سیستم در حالت توزیع رابطه مرتبه دو برای ماده مدرج تابعی نیاز به تحریک کمتری برای بروز رفتار غیرخطی نسبت به سایر حالات توزیع ماده دارد. شکل (۳-۱۱) نیز نشان دهنده تاثیر شماره مود در یک پارامتر تنظیم ثابت روی پوسته مخروطی در حالت رزونانس اولیه می‌باشد. همان طور که در شکل (۳-۶) هم نشان داده شد هر چه شماره مود عرضی بیشتر شود پدیده پرش در مقدار دامنه‌های کمتر تحریک به اتفاق خواهد افتاد.

۳-۵: نتایج حاصل از تحلیل‌ها رزونانس ثانویه سیستم

در این بخش به بررسی نتایج حاصل از رزونانس‌های ثانویه سیستم در چهار حالت مافوق و مادون هارمونیک مرتبه سه و مافوق و مادون هارمونیک مرتبه پنج سیستم پرداخته خواهد شد و تاثیر مواردی را که در بخش قبل برای رزونانس‌های اولیه در سیستم مورد بررسی قرار گرفت برای این بخش نیز ارائه می‌شود.

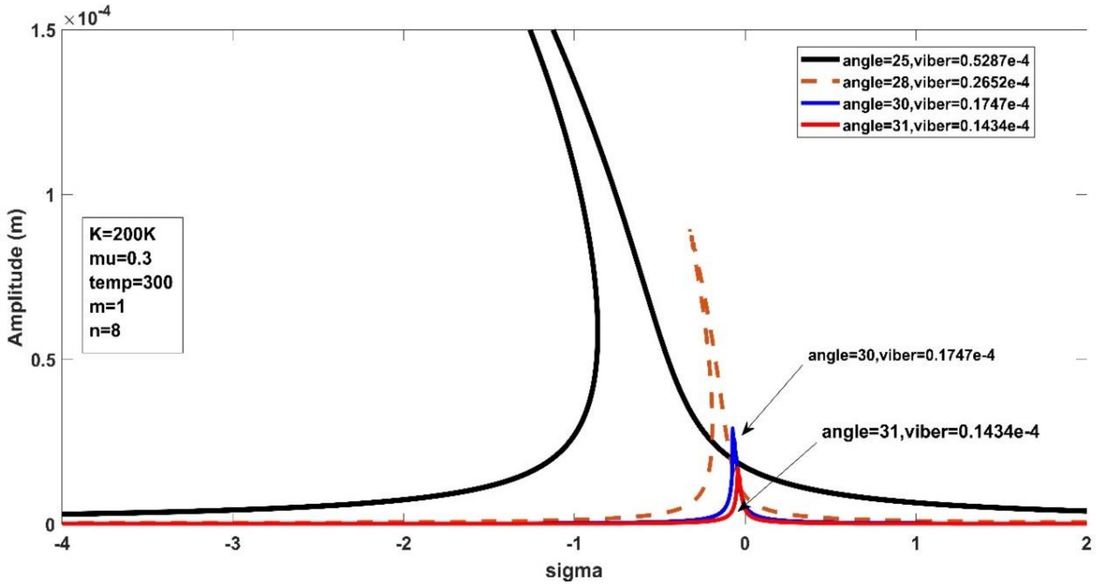
۳-۵-۱ : رزونانس مافوق هارمونیک مرتبه سه

شکل (۳-۱۲) تا (۳-۱۶) نشان دهنده تحلیل‌های رزونانسی فرکانسی مافوق هارمونیک مرتبه سه در سیستم می‌باشد.

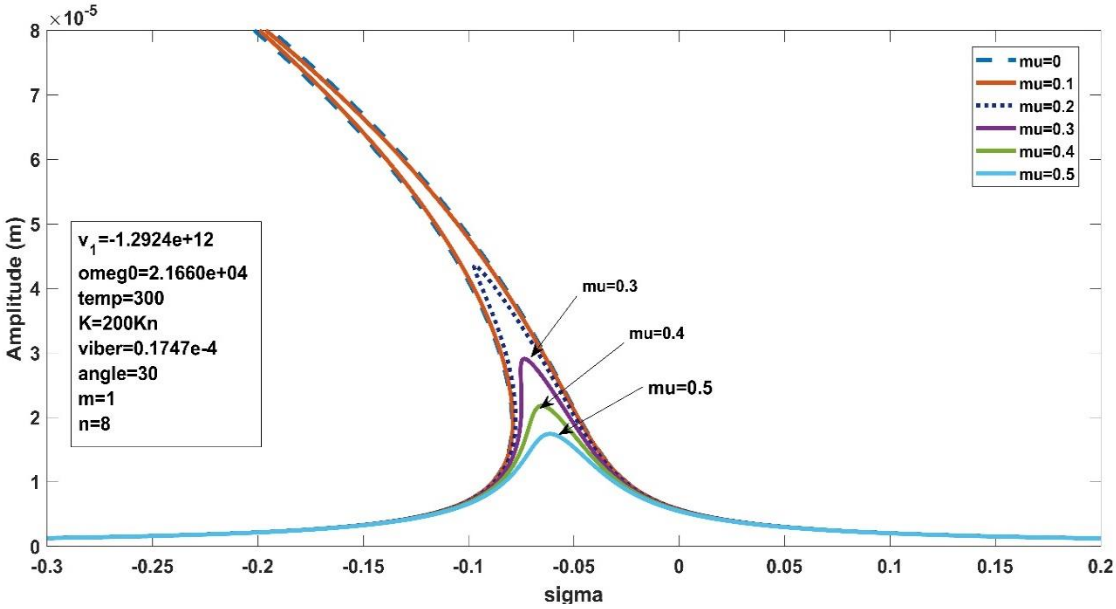


شکل۳-۱۲: تاثیر بارگذاری در حالت رزونانس ثانویه مافوق هارمونیک مرتبه سه

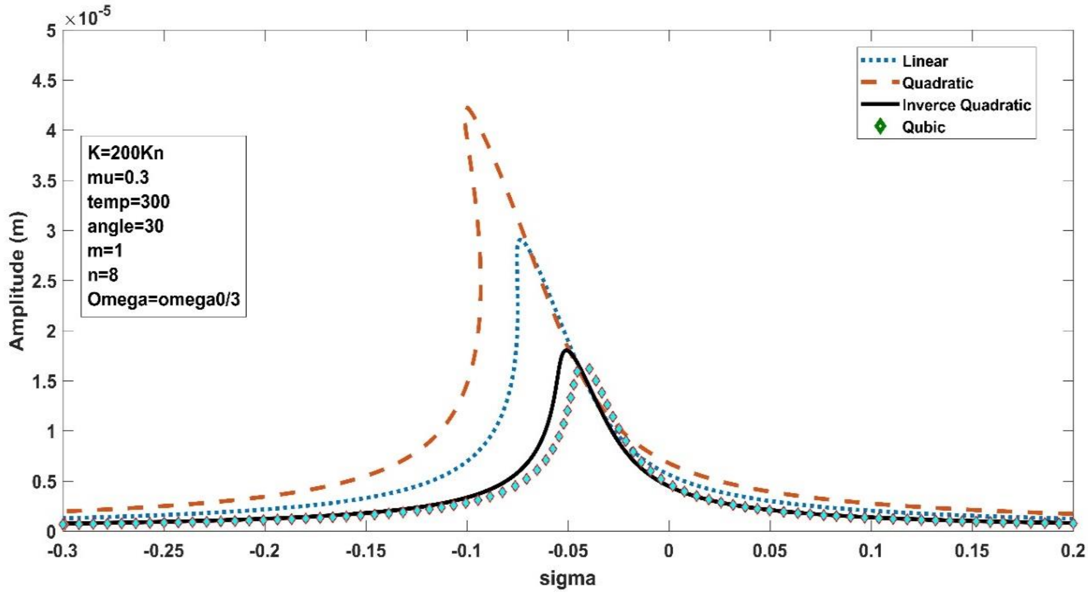
که عبارت $viber = \Lambda = \frac{1}{2}K(\omega_0^2 - \Omega^2)^{-1}$ می‌باشد.



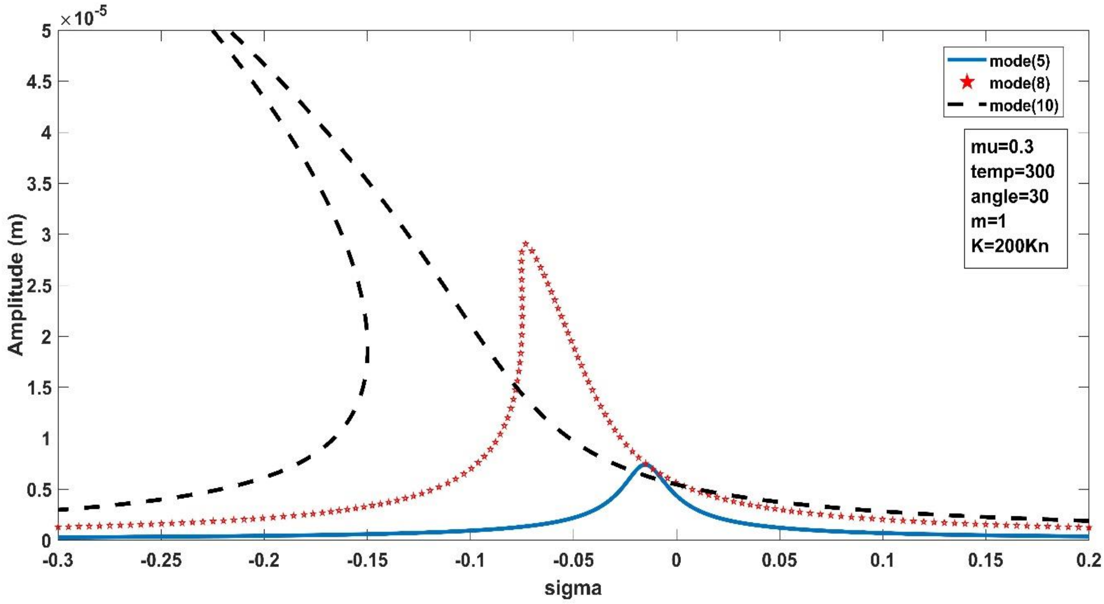
شکل۳-۱۳: تاثیر زاویه راس مخروط در حالت رزونانس ثانویه مافوق هارمونیک مرتبه سه



شکل۳-۱۴: تاثیر میرایی در حالت رزونانس ثانویه مافوق هارمونیک مرتبه سه



شکل۳-۱۵: تاثیر توزیع ماده در حالت رزونانس ثانویه مافوق هارمونیک مرتبه سه



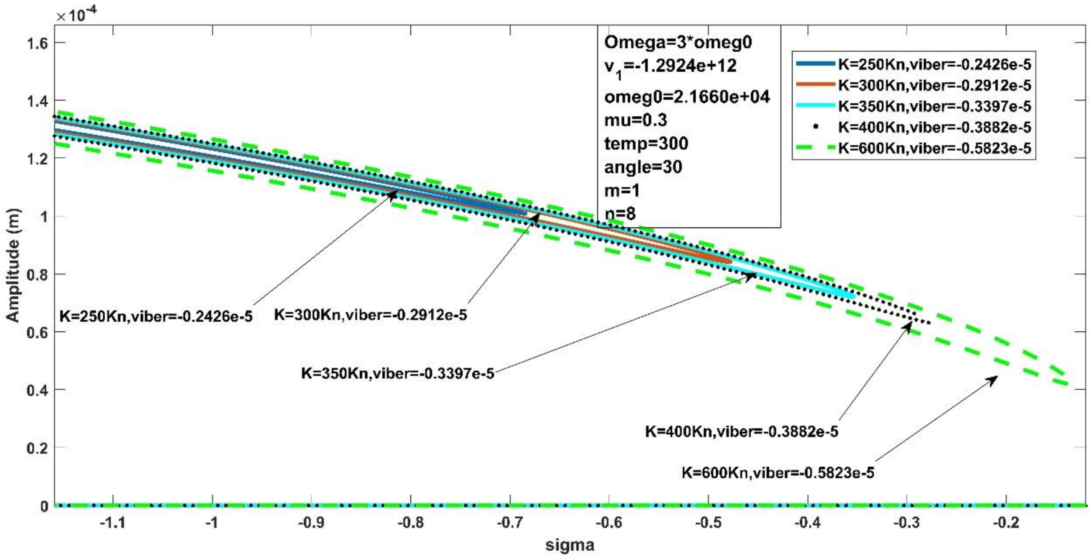
شکل۳-۱۶: تاثیر شماره مود در حالت رزونانس ثانویه مافوق هارمونیک مرتبه سه

در این تحلیل‌ها نیز مانند رزونانس‌های اولیه اثرات بارگذاری، تغییر زاویه راس، تغییر میرایی، نحوه توزیع ماده و شماره مورد بر روی نمودارهای پاسخ فرکانسی سیستم مورد بحث قرار گرفته است. نوع رفتار در این حالت بر خلاف رزونانس‌های اولیه به صورت نرم شونده می‌باشد. همچنین این تفاوت که در رزونانس‌های اولیه ضریب عبارت غیرخطی تاثیری در پیک‌های رزونانسی نمودارهای پاسخ فرکانسی نداشته و تغییر ضریب عبارات غیرخطی فقط باعث تغییر در رفتار سفت شوندگی و نرم شوندگی

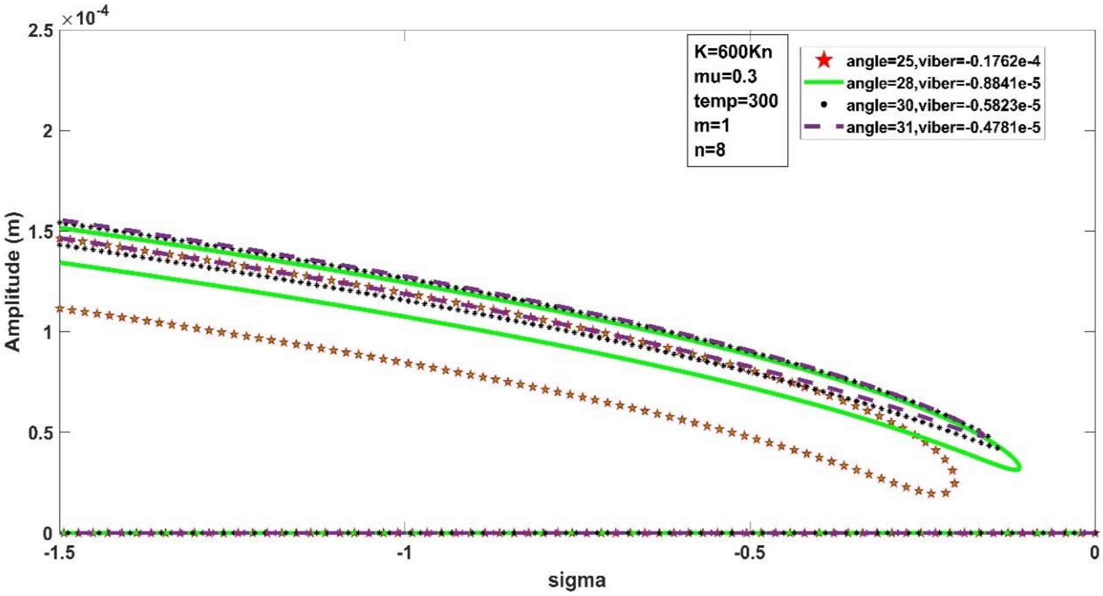
سیستم ایجاد می‌کرد. در حالت رزونانس‌های مافوق هارمونیک مقدار ضریب عبارت غیرخطی تاثیر زیادی در تغییر پیک‌های رزونانسی سیستم در حالات‌های مختلف تحلیل دارد. تاثیر گذاری ضریب عبارت غیرخطی در شکل (۳-۱۲) که تاثیر بارگذاری در حالت مافوق هارمونیک مرتبه سه در سیستم است در مقایسه با رزونانس اولیه به وضوح نمایان است و مشاهده می‌شود که رفتار سیستم در این حالت به ازای بارگذاری بیشتری نسبت به حالت رزونانس اولیه وارد ناحیه غیر خطی شده است. شکل (۳-۱۳) تاثیر زاویه راس مخروط در حالت رزونانس ثانویه مافوق هارمونیک مرتبه سه را نشان می‌دهد. با تغییر زاویه راس مخروط مقدار فرکانس طبیعی و ضرایب غیرخطی سیستم نیز که وابسته به فرکانس طبیعی می‌باشد تغییر می‌کنند. این تغییر زاویه باعث افزایش شدید پیک رزونانسی سازه و افزایش دامنه پاسخ سیستم در شرایطی که سایر پارمترها مقدار ثابتی است می‌شود. بر خلاف تغییرات زاویه راس در حالت رزونانس اولیه در حالت رزونانس ثانویه مافوق هارمونیک مرتبه سه افزایش زاویه راس باعث کاهش دامنه پاسخ سیستم می‌شود ولی با توجه به شکل (۳-۳) در حالت رزونانس اولیه مشاهده شد که با افزایش زاویه دامنه سیستم دچار افزایش شده است. شکل (۳-۱۴) نشان دهنده تاثیر میرایی در حالت رزونانس ثانویه مافوق هارمونیک مرتبه سه است. این رفتار مشابه تاثیر میرایی در حالت رزونانس اولیه می‌باشد. شکل (۳-۱۵) تاثیر تغییر توزیع ماده در تحلیل رزونانسی مافوق هامونیک مرتبه سه را نشان می‌دهد و همان طور که مشاهده می‌شود در حالت توزیع کسر حجمی به صورت مربعی دامنه پاسخ در بیشترین مقدار و در حالت مرتبه سه دامنه پاسخ در کمترین حالت می‌باشد. شکل (۳-۱۶) نیز تاثیر تغییر مود عرضی در دامنه پاسخ سیستم را نشان می‌دهد. مانند حالت رزونانس اولیه با در نظر گرفتن شرایط ثابت دمایی، هندسی و میرایی و بارگذاری دامنه پاسخ در مودهای بالا کاهش پیدا می‌کند.

۳-۵-۲ : رزونانس مادون هارمونیک مرتبه سه

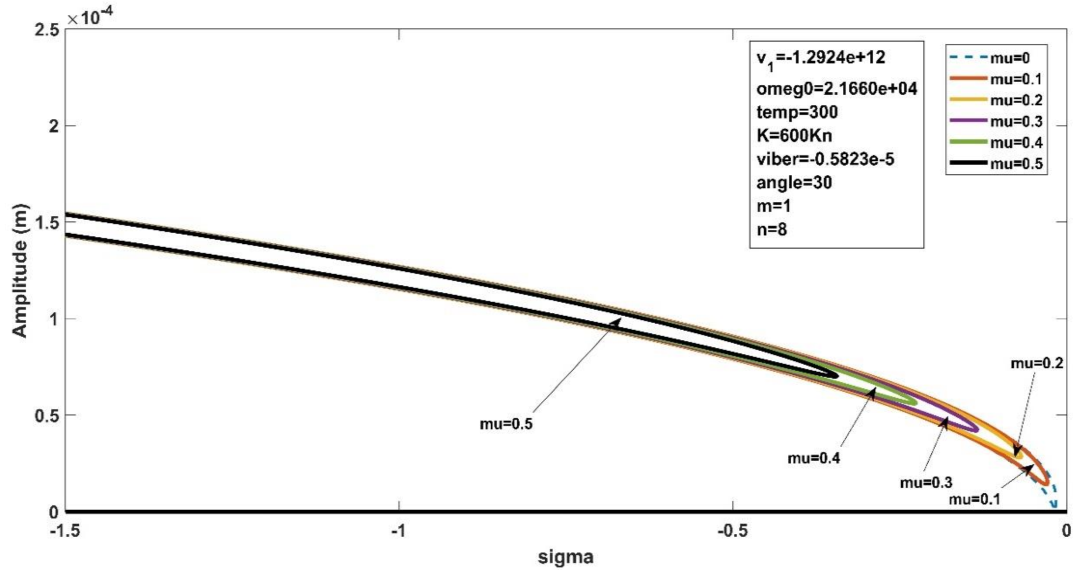
شکل (۳-۱۷) تا (۳-۲۱) نشان دهنده تحلیل‌های رزونانسی فرکانسی مادون هارمونیک مرتبه سه در سیستم می‌باشد.



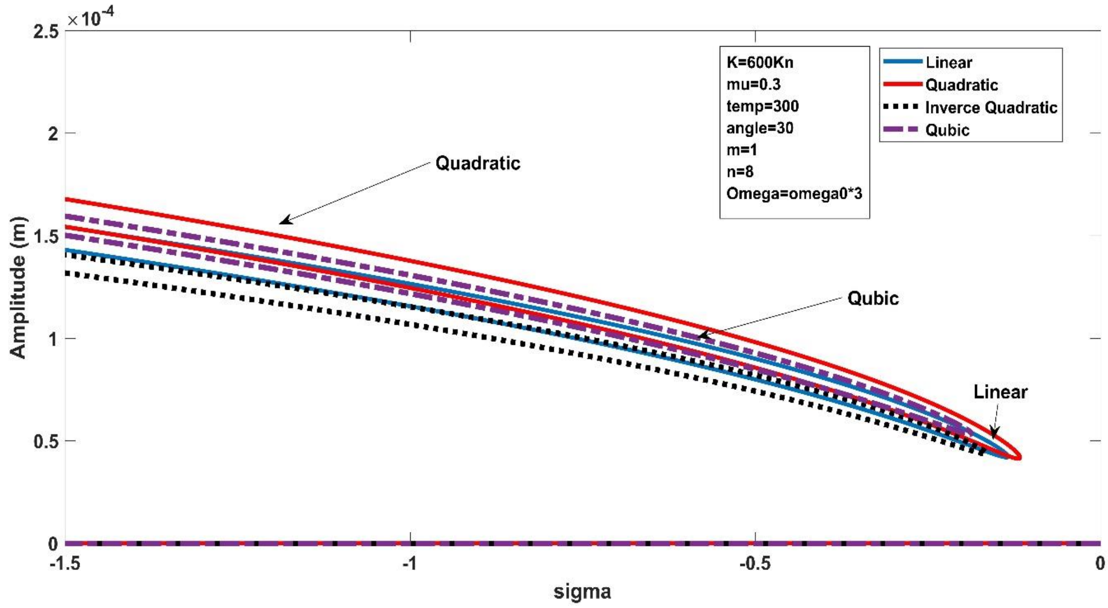
شکل۳-۱۷: تاثیر بارگذاری در حالت رزونانس ثانویه مادون هارمونیک مرتبه سه



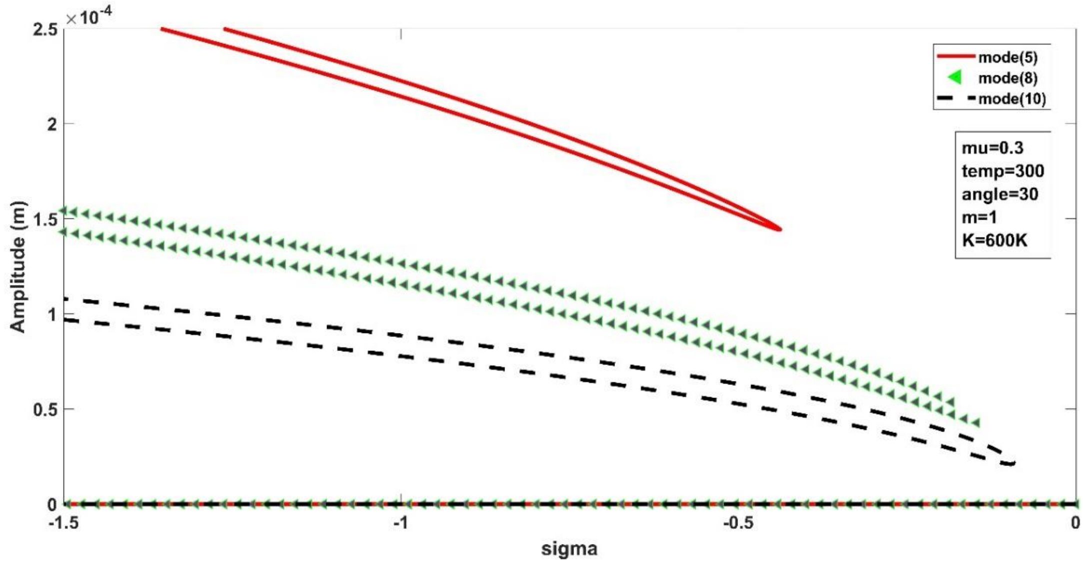
شکل۳-۱۸: تاثیر زاویه راس مخروط در حالت رزونانس ثانویه مادون هارمونیک مرتبه سه



شکل۳-۱۹: تاثیر میرایی در حالت رزونانس ثانویه مادون هارمونیک مرتبه سه



شکل۳-۲۰: تاثیر توزیع ماده در حالت رزونانس ثانویه مادون هارمونیک مرتبه سه



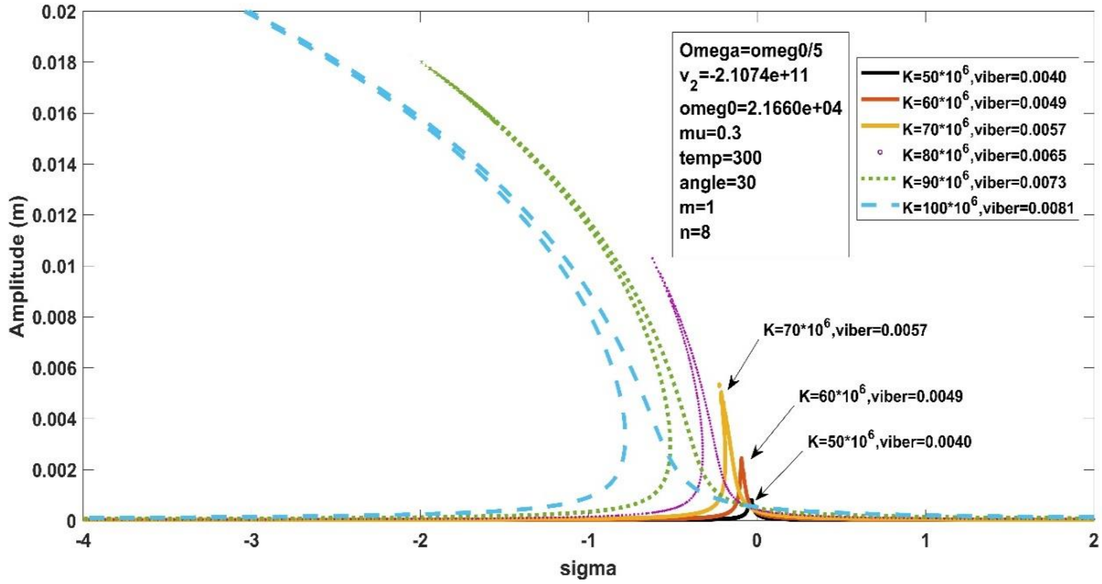
شکل۳-۲۱: تاثیر تغییر شماره مود در حالت رزونانس ثانویه مادون هارمونیک مرتبه سه

در تحلیل رزونانس مادون هارمونیک مرتبه سه برای سیستم با اینکه فرکانس تحریک سه برابر فرکانس طبیعی می‌باشد اما مقادیر دامنه ارتعاشات سیستم مقادیر بزرگی می‌باشد. در تحلیل‌های مادون هارمونیک پدیده پرش مشاهده نمی‌شود. در این نوع از تحلیل‌ها سیستم دارای سه جواب در نقطه رزونانسی مورد نظر می‌باشد که یک جواب آن بدیهی و صفر است و دو جواب دیگر بسته به شرایط اولیه متغیر است و مقدار آن ممکن است در مقدار پایین دامنه و یا در مقدار بالای دامنه اتفاق بیفتد. شکل (۳-۱۷) تاثیر بارگذاری در حالت رزونانس ثانویه مادون هارمونیک مرتبه سه را نشان می‌دهد. با توجه به شکل هرچه بارگذاری افزایش پیدا کند فاصله میان جواب‌های غیر بدیهی با توجه به شرایط اولیه افزایش پیدا می‌کند. دراین حالت رزونانسی، پاسخ‌های رزونانسی با توجه به شرایط اولیه در مقادیر بالای پارامتر تنظیم نسبت حالت مافوق هارمونیک اتفاق می‌افتد. شکل (۳-۱۸) که بیان کننده تاثیر تغییر زاویه راس مخروط در تحلیل مادون هارمونیک است نشان می‌دهد که با افزایش زاویه راس در یک بارگذاری یکسان و برای یک پارامتر تنظیم مشخص پاسخ‌های سیستم با توجه به شرایط اولیه در دامنه‌های پایین تری نسبت به زاوایای کم راس مخروط اتفاق می‌افتند. همچنین با توجه به شکل مشاهده می‌شود که در شرایط یکسان دمایی، میرایی، بارگذاری و ماده جایی که زاوایای مخروط کوچک است پاسخ ها به ازای بازه‌ای از پارامترهای تنظیم پاسخ غیر بدیهی وجود دارد اما در زوایای بالا در آن نواحی سیستم فقط دارای پاسخ بدیهی صفر است. شکل (۳-۱۹) نشان می‌دهد که کاهش تاثیر میرایی باعث نزدیک‌تر شدن پاسخ‌های بدیهی و غیر بدیهی سیستم به یکدیگر می‌شود و بلعکس. شکل (۳-۲۰) تغییر ناچیز رفتار سازه را با توجه به تغییر توزیع کسر حجمی سرامیک در شرایط توزیع در جهت ضخامت نشان می‌دهد. شکل (۳-۲۱) تاثیر تغییر مود عرضی بر رفتار سیستم برای تحلیل رزونانس

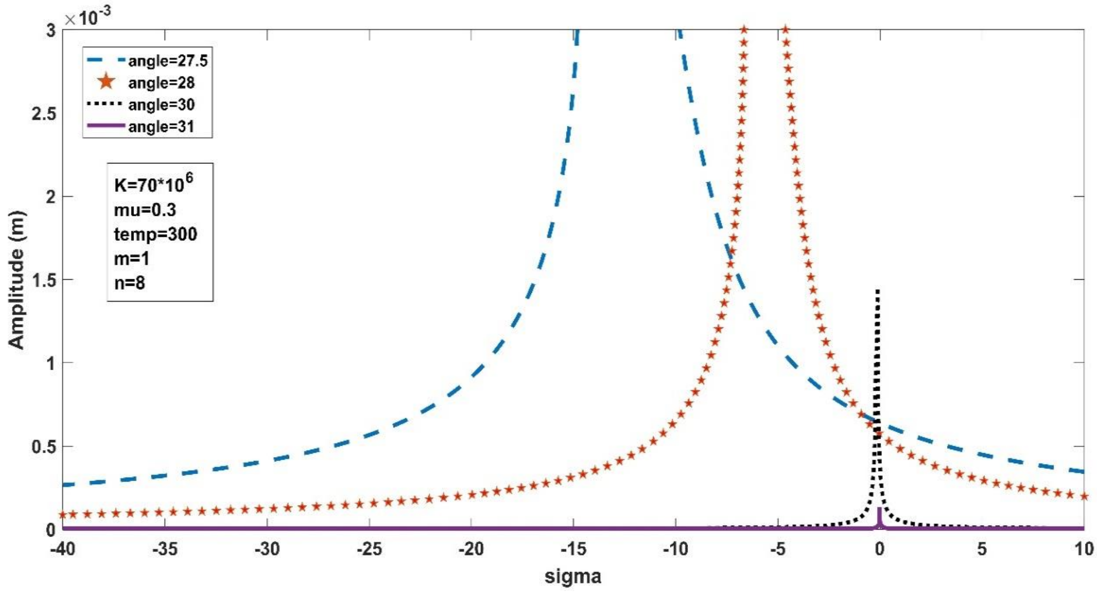
مادون هارمونیک را بیان می‌کند و نشان می‌دهد که در مودهای بالا پاسخ‌های غیر بدیهی سازه به پاسخ بدیهی سیستم نزدیک‌تر می‌باشد ولی اختلاف بین دو پاسخ بدیهی نسبت به مودهای پایین بیشتر است.

۳-۵-۳ : رزونانس مافوق هارمونیک مرتبه پنج

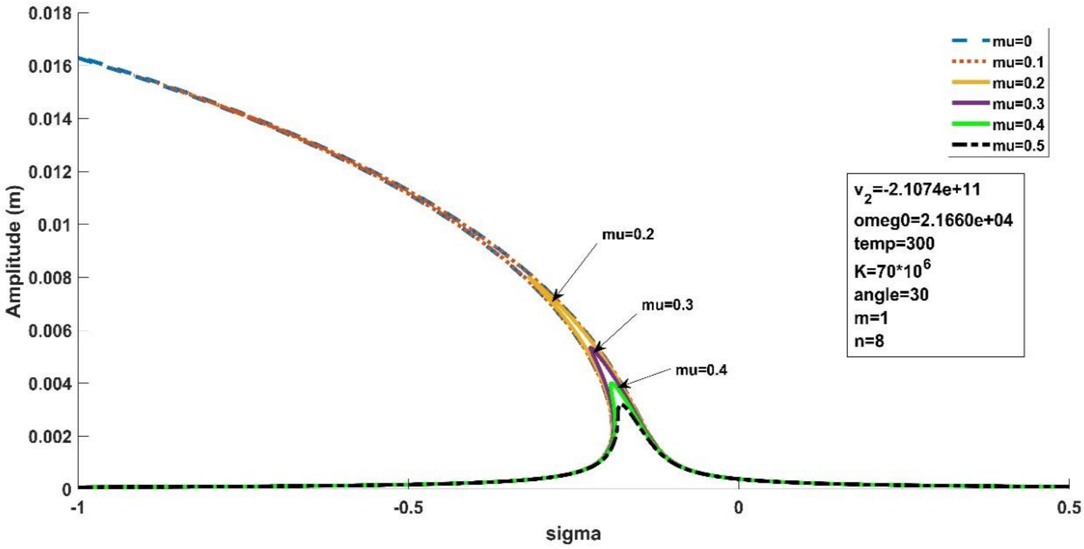
شکل (۳-۲۲) تا (۳-۲۶) نشان دهنده تحلیل‌های رزونانسی فرکانسی مافوق هارمونیک مرتبه پنج در سیستم می‌باشد.



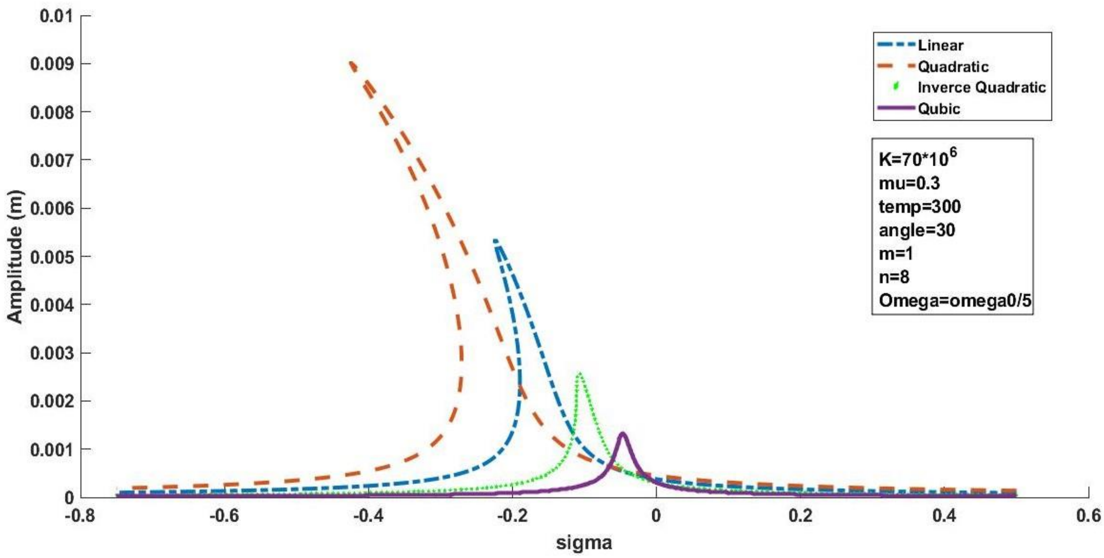
شکل۳-۲۲: تاثیر بارگذاری در حالت رزونانس ثانویه مافوق هارمونیک مرتبه پنج



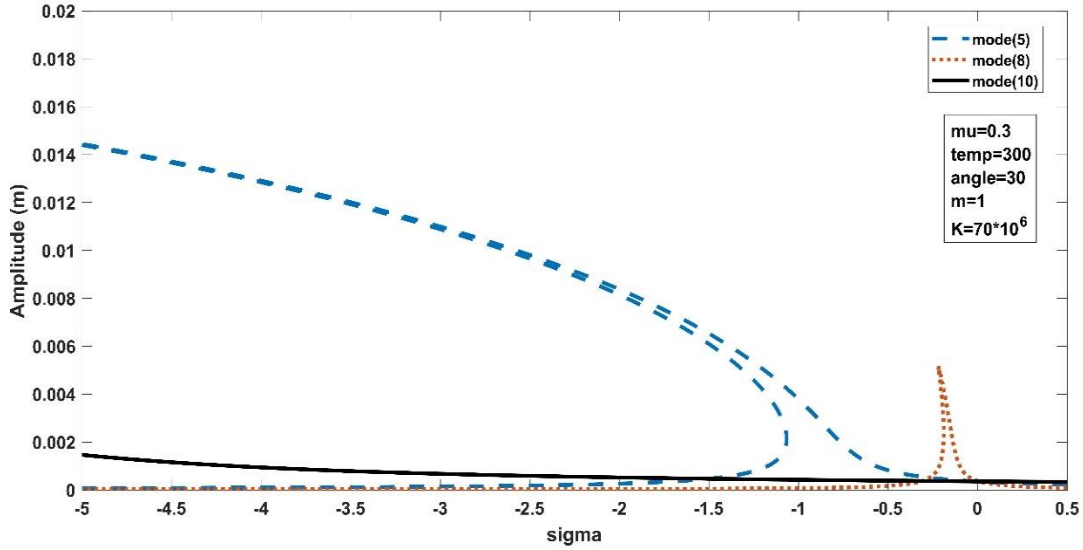
شکل۳-۲۳: تاثیر زاویه راس در حالت رزونانس ثانویه مافوق هارمونیک مرتبه پنج



شکل۳-۲۴: تاثیر میرایی در حالت رزونانس ثانویه مافوق هارمونیک مرتبه پنج



شکل۳-۲۵: تاثیر توزیع ماده در حالت رزونانس ثانویه مافوق هارمونیک مرتبه پنج

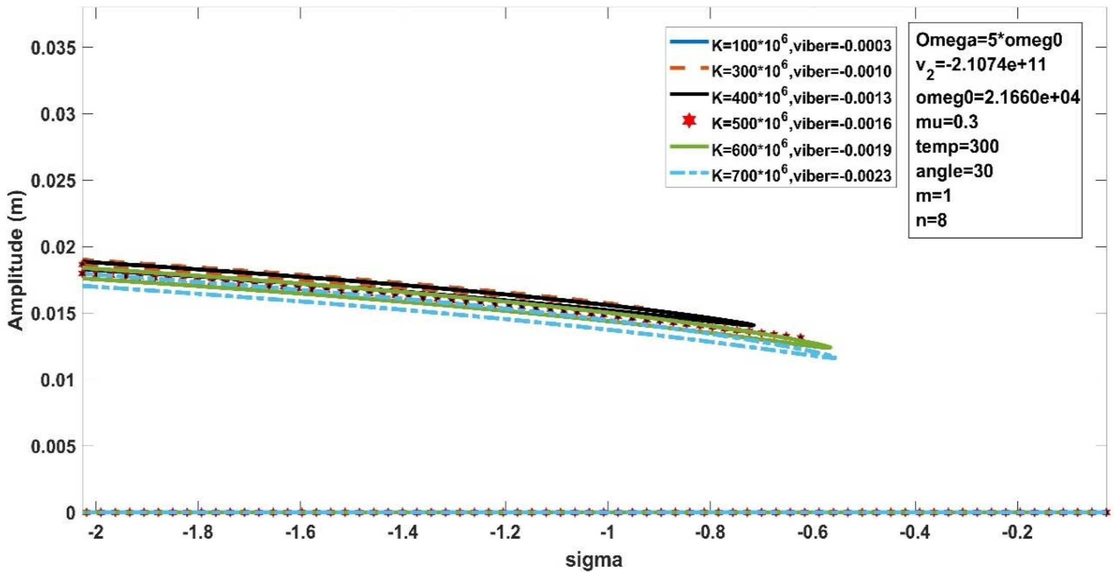


شکل۳-۲۶: تاثیر شماره مود در حالت رزونانس ثانویه مافوق هارمونیک مرتبه پنج

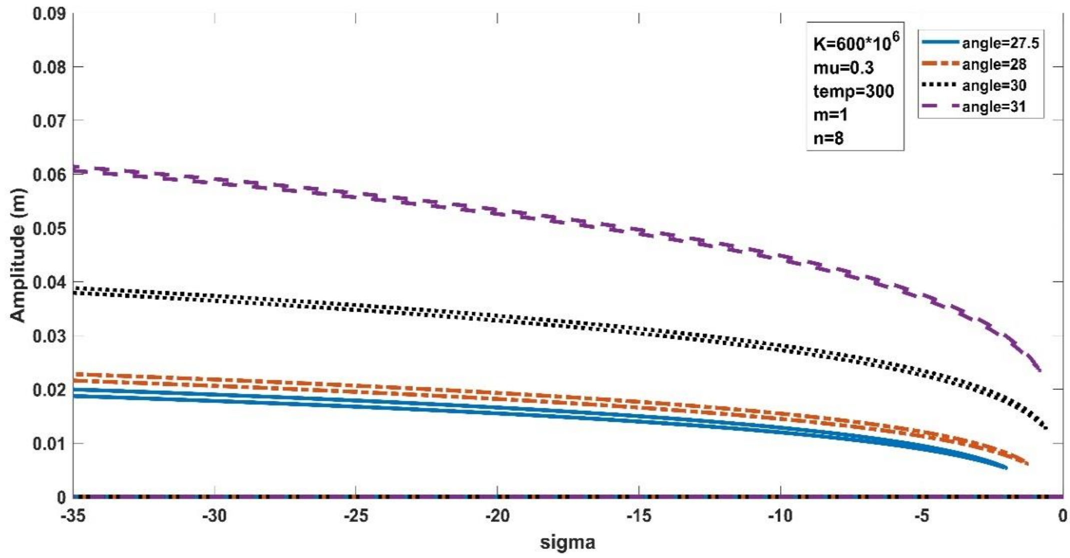
در این تحلیل فقط عبارت غیرخطی مرتبه پنج حضور داشته و باعث تاثیر در تغییر پیک رزونانسی نمودارهای پاسخ فرکانسی سیستم می‌شود. این تحلیل‌ها مشابه تحلیل‌های مافوق هارمونیک سیستم در حالت مرتبه سه است. با این تفاوت که در این قسمت مقدار ضریب غیرخطی مرتبه پنج از مقدار ضریب غیرخطی مرتبه سه کمتر است و همانطورکه در شکل‌ها نیز قابل مشاهده است در این بخش نسبت به بخش گذشته نیاز به بارگذاری بیشتری برای ورود سیستم به ناحیه غیرخطی نیاز است. شکل (۳-۲۲) در این بخش بیان کننده تاثیر بارگذاری در رفتار غیرخطی سازه با توجه به نمودار پاسخ فرکانسی می‌باشد و همانطور که در شکل مشاهده می‌شود برای تغییر رفتار سیستم و ورود آن به حالت غیرخطی از حالت خطی نیاز به بارگذاری بیشتری نسبت به حالت مرتبه سه در سیستم است. شکل (۳-۲۳) مربوط به تاثیر تغییر زاویه راس مخروط بر روی نمودار پاسخ فرکانسی سیستم می‌باشد. همان‌طور که قابل مشاهده است تغییر زاویه راس مخروط به شدت بر روی پاسخ فرکانسی سیستم و تغییر پیک رزونانسی تاثیر گذار خواهد بود. شکل (۳-۲۴) تاثیر میرایی بر روی رفتار نمودار پاسخ فرکانسی سیستم در حالت مافوق هارمونیک مرتبه پنج را نشان می‌دهد. در شکل (۳-۲۵) تاثیر تغییر توزیع کسر حجمی سرامیک در حالت‌های مختلف نشان داده شده است و ملاحظه می‌شود تاثیر تغییرات این پارامتر نسبت به سایر پارامترها ناچیز می‌باشد. با توجه به شکل (۳-۲۶) تغییر شماره مود عرضی نیز مانند تغییر زاویه راس، تاثیر به شدت زیادی در افزایش یا کاهش دامنه پاسخ در این تحلیل دارد.

۳-۵-۴ : رزونانس مادون هارمونیک مرتبه پنج

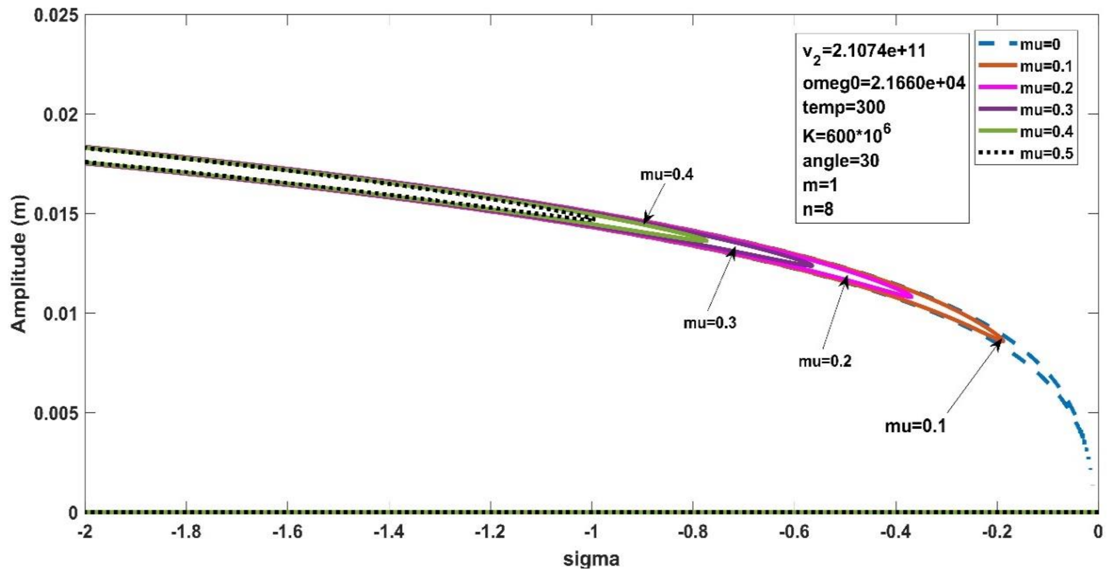
شکل‌های (۳-۲۷) تا (۳-۳۱) شامل تحلیل‌های مادون هارمونیک مرتبه پنج می‌باشند.



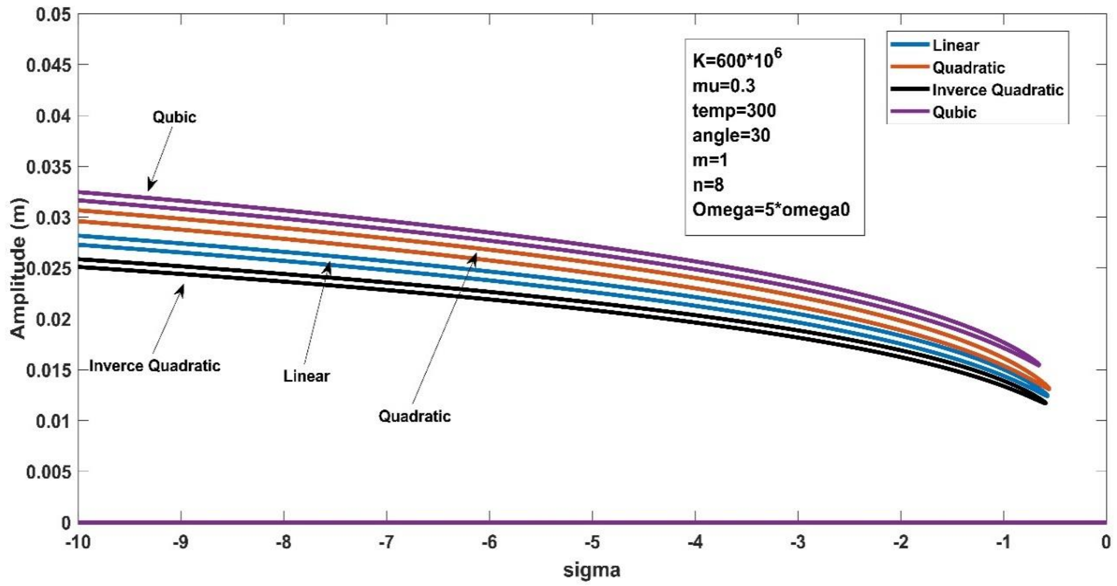
شکل۳-۲۷: تاثیر بارگذاری در حالت رزونانس ثانویه مادون هارمونیک مرتبه پنج



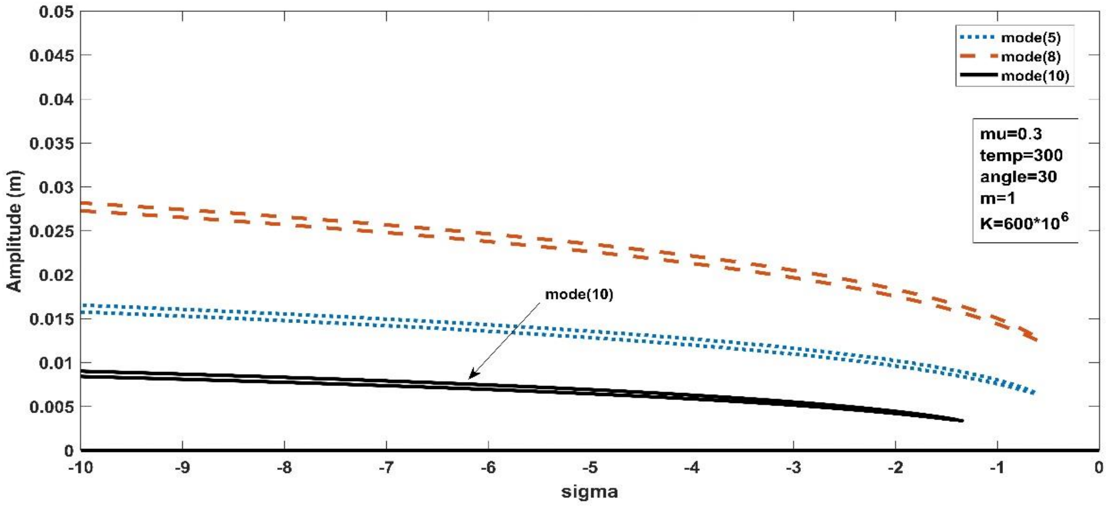
شکل۳-۲۸: تاثیر زاویه راس در حالت رزونانس ثانویه مادون هارمونیک مرتبه پنج



شکل۳-۲۹: تاثیر میرایی در حالت رزونانس ثانویه مادون هارمونیک مرتبه پنج



شکل۳-۳۰: تاثیر توزیع ماده در حالت رزونانس ثانویه مادون هارمونیک مرتبه پنج



شکل۳-۳۱: تاثیر شماره مود در حالت رزونانس ثانویه مادون هارمونیک مرتبه پنج

همان‌طور که در این شکل‌ها نیز مشاهده می‌شود تحلیل‌های این بخش نیز همانند تحلیل‌های مادون هارمونیک مرتبه سه بوده و رفتار کلی سیستم در حالت مادون هارمونیک مرتبه پنج مشابه رفتار سیستم در حالت مادون هارمونیک مرتبه سه است با این تفاوت که در این قسمت فرکانس تحریک پنج برابر فرکانس طبیعی می‌باشد. در حالت رزونانس‌های مادون هارمونیک مرتبه پنج نیاز به بارگذاری بیشتری برای مشاهده رفتار سیستم می‌باشد که علت آن نیز پایین تر بودن مقدار ضریب غیرخطی مرتبه پنج نسبت به مرتبه سه می‌باشد.

فصل چهارم : تاثیر

افزودن لایه های

پیزوالکتریک

در این بخش تاثیر افزودن لایه‌های پیزوالکتریک به مخروط ناقص مدرج تابعی و تاثیر افزودن این لایه‌ها در نتایج حاصل از تحلیل‌های رزونانسی مورد بررسی قرار می‌گیرد. در بخش اول به معرفی معادلات مخروط ناقص مدرج تابعی همراه با سنسور و عملگر پیزوالکتریک پرداخته می‌شود. در بخش دوم تاثیر افزوده شدن لایه‌های پیزوالکتریک بر روی تحلیل‌های رزونانسی بررسی خواهد شد. و در بخش آخر نیز اثر ضرایب کنترلر بر روی سیستم مورد مطالعه قرار خواهد گرفت.

۴-۱: معادلات حاکم بر پوسته مخروطی همراه با پیزو الکتریک

روابط این بخش با استفاده از منابع [۲۰]، [۲۲]، [۲۳]، [۳۷]، [۳۸]، [۸۹] و [۹۰] استخراج شده است. فرمول بندی سیستم در روابط (۲-۱) تا (۲-۸) مشابه حالت قبل می‌باشد. اما در ادامه به روابط موجود برای پوسته مخروطی مدرج تابعی عبارات دیگری نیز اضافه خواهد شد که به صورت زیر می‌باشد. معادله (۲-۱۰) مربوط به تئوری خمشی پوسته‌ها بوده و روابط تنش-کرنش برای پوسته نازک ناقص مخروطی مدرج تابعی را بیان می‌کند. رابطه (۴-۱) نیز مربوط به روابط تنش و کرنش برای لایه‌های پیزوالکتریکی پوسته ناقص مخروط با توجه به تئوری خمشی در پوسته می‌باشد که به صورت زیر است.

$$\begin{pmatrix}\sigma_{as}\\ \sigma_{a\theta}\\ \sigma_{as\theta}\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}ca_{11} & ca_{12} & 0\\ ca_{21} & ca_{22} & 0\\ 0 & 0 & ca_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\left(e_s - z\dfrac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right)\\ \left(e_\theta - z\left(\frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{s}\frac{\partial w}{\partial s}\right)\right)\\ \left(e_{s\theta} - z\left(\frac{1}{s}\frac{\partial^2 w}{\partial s\partial\varphi}+\frac{1}{s^2}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right)\right)\end{bmatrix}+E_{az} \tag{۱-۴}$$

که E_{az} برابر است با بردار (۴-۲) و a نشان دهنده (عملگر) می‌باشد. مقادیر ca مدول الاستیسیته مربوط به عملگر در جهات مختلف می‌باشد که در منبع [۹۰] مطابق با جدول (۴-۱) ذکر شده است.

$$E_{az}=\begin{bmatrix}-ea_{31}(-\beta\sin(\beta\, Z\, h)\,K(s,\varphi)-\dfrac{2\tau(x.\varphi.t)}{h})\\ -ea_{32}(-\beta\sin(\beta\, Z\, h)\,K(s,\varphi)-\dfrac{2\tau(x.\varphi.t)}{h})\\ 0\end{bmatrix} \tag{۲-۴}$$

دو رابطه بالا روابط تنش و کرنش مربوط به عملگر است. و $\tau(x.\varphi.t)$ پارامتر مربوط به ولتاژ اعمالی به پیزوها می‌باشد.

$$\begin{pmatrix}\sigma_{ss}\\ \sigma_{s\theta}\\ \sigma_{ss\theta}\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}cs_{11} & cs_{12} & 0\\ cs_{21} & cs_{22} & 0\\ 0 & 0 & cs_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\left(e_s - z\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right)\\ (e_\theta - z(\frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}+\frac{1}{s}\frac{\partial w}{\partial s}))\\ \left(e_{s\theta} - z\left(\frac{1}{s}\frac{\partial^2 w}{\partial s\partial\varphi}+\frac{1}{s^2}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right)\right)\end{bmatrix}+E_{sz} \qquad ۳-۴$$

که E_{sz} برابر است با بردار (۴-۴) است و s نشان دهنده (حسگر) می‌باشد. مقادیر cs مدول الاستیسیته مربوط به عملگر در جهات مختلف می‌باشد که در منبع [۹۰] مطابق با جدول (۴-۱) ذکر شده است.

$$E_{sz}=\begin{bmatrix}-es_{31}(-\beta\sin(\beta\, Z\, h)\,\Omega(s{,}\varphi))\\ -es_{32}(-\beta\sin(\beta\, Z\, h)\,\Omega(s{,}\varphi))\\ 0\end{bmatrix} \qquad ۴-۴$$

دو رابطه بالا روابط تنش و کرنش مربوط به حسگر است. که $\Omega(s{,}\varphi)$، $K(s{,}\varphi)$، $\tau(x.\varphi.t)$ به ترتیب توابع پتانسیل مربوط به سنسور عملگر و ولتاژ اعمالی به عملگر می‌باشند.

سپس تنش‌های بدست آمده از روابط (۴-۱) و (۴-۳) با تنش‌های مربوط به ماده مدرج تابعی یعنی رابطه (۲-۱۰) با یکدیگر جمع شده و با بکارگیری رابطه (۲-۱۱)، روابط زیر بدست می‌آید که ممان‌های نیرو و گشتاور برای پوسته ناقص مخروطی همراه با سنسور و عملگر می‌باشد.

$$\begin{aligned}N_{sT}&\\ &= A_{10T}e_s + A_{20T}e_\theta + A_{11T}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right) + A_{21T}\left(\frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{s}\frac{\partial w}{\partial s}\right) + A_{111s}\Omega(s{,}\varphi)\\ &+ A_{111a}\mathrm{K}(s{,}\varphi) + A_{222a}\tau(s{,}\varphi{,}t)\end{aligned} \qquad ۵-۴$$

$$\begin{aligned}N_{\theta T}&\\ &= A_{220T}e_s + A_{210T}e_\theta + A_{221T}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right) + A_{211T}\left(\frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{s}\frac{\partial w}{\partial s}\right) + A_{111s2}\Omega(s{,}\varphi)\\ &+ A_{111a2}\mathrm{K}(s{,}\varphi) + A_{222a2}\tau(s{,}\varphi{,}t)\end{aligned} \qquad ۶-۴$$

$$N_{s\theta T} = A_{60T}e_{s\theta} + A_{61T}(-\frac{1}{s}\frac{\partial^2 w}{\partial s\partial\varphi}+\frac{1}{s^2}\frac{\partial w}{\partial\varphi}) \qquad ۷-۴$$

$$M_{sT} = AM_{11T}e_s + AM_{21T}e_\theta + AMM_{11T}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right) + AMM_{22T}\left(\frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{s}\frac{\partial w}{\partial s}\right) + A_{111s}\Omega(s,\varphi) + A_{111a}\mathrm{K}(s,\varphi) + A_{112a}\tau(s,\varphi,t)$$ ۸-۴

$$M_{\theta T} = AM_{221T}e_s + AM_{211T}e_\theta + AM_{222T}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right) + AMM_{12T}\left(\frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{s}\frac{\partial w}{\partial s}\right) + A_{111s2}\Omega(s,\varphi) + A_{111a2}\mathrm{K}(s,\varphi) + A_{112a2}\tau(s,\varphi,t)$$ ۹-۴

$$M_{12T} = AM_{61T}e_{s\theta} + AM_{62T}(-\frac{1}{s}\frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \varphi} + \frac{1}{s^2}\frac{\partial w}{\partial \varphi})$$ ۱۰-۴

زیر نویس (T) یعنی مجموع ممان‌ها و نیروهای مربوط به ماده مدرج تابعی و پیزوها می‌باشد. همچنین ضرایب مربوط به روابط بالا در پیوست ذکر شده است.

با مساوی قرار دادن روابط (۴-۵ تا ۴-۷) با رابطه (۲-۱۲) می‌توان رابطه میان کرنش‌های e_s، e_θ، $e_{s\theta}$ ، توابع پتانسیل سنسور، عملگر و تابع تنش را بدست آورد.

$$e_s = b_1\left(\frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{s}\frac{\partial \Phi}{\partial s}\right) + b_2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} + b_3\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial s^2} + b_4\left(\frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{s}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial s}\right) + bke1\mathrm{K}(s,\varphi) + bGe1\Omega(s,\varphi) + bte1\tau(s,\varphi,t)$$ ۱۱-۴

$$e_\theta = b_{22}\left(\frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{s}\frac{\partial \Phi}{\partial s}\right) + b_{11}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} + b_{44}\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial s^2} + b_{33}\left(\frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{s}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial s}\right) + +bke2\mathrm{K}(s,\varphi) + bGe2\Omega(s,\varphi) + bte2\tau(s,\varphi,t)$$ ۱۲-۴

$$e_{s\theta} = b_{55}\left(-\frac{1}{s}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial s \partial \varphi} + \frac{1}{s^2}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\right) + b_{66}(+\frac{1}{s}\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial s \partial \varphi} - \frac{1}{s^2}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial \varphi})$$ ۱۳-۴

ضرایب مربوط به روابط بالا در پیوست ذکر شده است.

با جایگذاری روابط (۴-۱۱ تا ۴-۱۳) در روابط (۴-۸ تا ۴-۱۰) روابط مربوط به ممان‌ها بر حسب تابع تنش، تابع خیز، توابع پتانسیل و تابع ولتاژ بدست می‌آیند.

$$M_{sTT} = c_1\left(\frac{1}{s^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{s}\frac{\partial\Phi}{\partial s}\right)+c_2\frac{\partial^2\Phi}{\partial s^2}+c_3\frac{\partial^2\mathrm{w}}{\partial s^2}+c_4\left(\frac{1}{s^2}\frac{\partial^2\mathrm{w}}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{s}\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial s}\right) + cm1k\mathrm{K}(s,\varphi)+cm1g\Omega(s,\varphi)+cm1t\tau(s,\varphi,t) \qquad ۱۴-۴$$

$$M_{\theta TT} = c_{22}\left(\frac{1}{s^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{s}\frac{\partial\Phi}{\partial s}\right)+c_{11}\frac{\partial^2\Phi}{\partial s^2}+c_{44}\frac{\partial^2\mathrm{w}}{\partial s^2}+c_{33}\left(\frac{1}{s^2}\frac{\partial^2\mathrm{w}}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{s}\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial s}\right) + cm2k\mathrm{K}(s,\varphi)+cm2g\Omega(s,\varphi)+cm2t\tau(s,\varphi,t) \qquad ۱۵-۴$$

$$M_{s\theta TT} = c_{55}\left(-\frac{1}{s}\frac{\partial^2\Phi}{\partial s\partial\varphi}+\frac{1}{s^2}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right)+c_{66}(-\frac{1}{s}\frac{\partial^2\mathrm{w}}{\partial s\partial\varphi}+\frac{1}{s^2}\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial\varphi}) \qquad ۱۶-۴$$

ضرایب مربوط به روابط بالا در پیوست ذکر شده است.

معادلات تعادل غیرخطی سیستم با روابط (۴-۱۷) تا (۴-۱۹) و معادله سازگاری سیستم با توجه به (۲-۹) بصورت رابطه (۴-۲۰) بدست می‌آید.

$$\frac{\partial N_{sT}}{\partial s}+\frac{1}{s}\frac{\partial N_{s\theta T}}{\partial\varphi}+\frac{N_{sT}-N_{\theta T}}{s}=0 \qquad ۱۷-۴$$

$$\frac{\partial N_{s\theta T}}{\partial s}+\frac{1}{s}\frac{\partial N_{\theta T}}{\partial\varphi}+\frac{2N_{s\theta T}}{s}=0 \qquad ۱۸-۴$$

$$\frac{\partial^2 M_{sTT}}{\partial s^2}+\frac{2}{s}\frac{\partial M_{sTT}}{\partial s}+\frac{2}{s}\frac{\partial^2 M_{sTT}}{\partial s\partial\varphi}-\frac{1}{s}\frac{\partial M_{\theta TT}}{\partial s}+\frac{2}{s^2}\frac{\partial M_{s\theta TT}}{\partial\varphi}+\frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 M_{\theta TT}}{\partial\varphi^2} + \frac{cot\alpha}{s}N_{\theta T}+N_{sT}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}-\frac{N_{\theta T}}{s}\left(\frac{1}{s}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial w}{\partial s}\right)-2N_{s\theta T}\left(\frac{1}{s}\frac{\partial^2 w}{\partial s\partial\varphi}-\frac{1}{s^2}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right) = s_1^4e^{4x}(\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\mu\frac{\partial w}{\partial t}+Kcos(\Omega t)) \qquad ۱۹-۴$$

$$\frac{cot\gamma}{s}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}-\frac{2}{s}\frac{\partial^2 e_{s\theta}}{\partial s\partial\varphi}-\frac{2}{s^2}\frac{\partial e_{s\theta}}{\partial\varphi}+\frac{\partial^2 e_\theta}{\partial s^2}+\frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 e_s}{\partial\varphi^2}+\frac{2}{s}\frac{\partial e_\theta}{\partial s}-\frac{1}{s}\frac{\partial e_s}{\partial s} = \frac{1}{s^4}\left(\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right)^2-\frac{2}{s^3}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\frac{\partial^2 w}{\partial s\partial\varphi}-\frac{1}{s^2}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}-(\frac{\partial^2 w}{\partial s\partial\varphi})^2\right]-\frac{1}{s}\frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \qquad ۲۰-۴$$

با جایگذاری روابط (۴-۱۴) تا (۴-۱۶) در رابطه (۴-۲۰) و با در نظر گرفتن w ، Ω، K و τ به صورت (۴-۲۱) تا (۴-۲۴) می‌باشد که یک معادله دیفرانسل غیر همگن بدست خواهد آمد. سپس برای ساده سازی عملیات ریاضی، تغییر متغیر مستقل $S = S_1 e^x$ و $\Phi = \Phi_1 e^{2x}$، که بجای S و Φ جایگذاری می‌شود. بعد از محاسبات طولانی، سیستم معادلات با مشتقات جزئی غیرخطی وابسته به زمان را بر حسب Φ_1 و w می‌توان بازنویسی کرد.

$$w(x.\varphi,t) = f(t)e^x[\sin(\beta_1 x)\sin(\beta_2\varphi)] \quad \text{۴-۲۱}$$

$$K(x.\varphi,t) = K(t)e^x \sin(\beta_1 x)\sin(\beta_2\varphi) \quad \text{۴-۲۲}$$

$$\Omega(x.\varphi,t) = \Omega(t)e^x \sin(\beta_1 x)\sin(\beta_2\varphi) \quad \text{۴-۲۳}$$

$$\tau(x.\varphi.t) = (-K_v \frac{d\Omega(t)}{dt} - K_p\Omega(t))e^x \sin(\beta_1 x)\sin(\beta_2\varphi) \quad \text{۴-۲۴}$$

که K_p و K_v به ترتیب بهره کنترلی تناسبی و مشتقی سیستم می‌باشند.

با حل معادله دیفرانسل غیر همگن (۴-۲۰) تابع تنش سیستم به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\begin{aligned}
&\Phi_1(x.\varphi.t) \\
&= (\Lambda 202_4 \sin(\beta_1 x) + \Lambda 303_4 \cos(\beta_1 x))\sin(\beta_2\varphi)\, e^x \frac{d\Omega(t)}{dt} \\
&+ ((\Lambda_7 \cos(2\beta_2\varphi) + \Lambda_{52})\cos(2\beta_1 x) + (\Lambda_8 \sin(2\beta_1 x) + \Lambda_{15})\cos(2\beta_2\varphi) \\
&+ (\Lambda_{62})\sin(2\beta_1 x))\, f(t)^2 \\
&+ (((e^x\Lambda 202_1 + \Lambda_{102})\sin(\beta_1 x) \\
&+ (e^x\Lambda 303_1 + \Lambda_{92})\cos(\beta_1 x))\sin(\beta_2\varphi))f(t) \\
&+ (\Lambda 202_3 \sin(\beta_1 x) + \Lambda 303_3 \cos(\beta_1 x))\, e^x \sin(\beta_2\varphi)\, K(t) \\
&+ (\Lambda 202_2 \sin(\beta_1 x) + \Lambda 303_2 \cos(\beta_1 x))\, e^x \sin(\beta_2\varphi)\, \Omega(t)
\end{aligned} \quad \text{۴-۲۵}$$

ضرایب مربوط به Λ در پیوست ذکر شده است.

با جایگذاری روابط (۴-۱۴) تا (۴-۱۶) ، (۴-۲۱) تا (۴-۲۴)، (۲-۱۲) و (۴-۲۵) در معادله (۴-۱۹) و انتگرال گیری از این معادله مشابه معادلات (۲-۳۶) و مرتب سازی معادله حرکت به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\begin{aligned}
&B_{17}\left(\frac{d^2 f}{dt^2} + \mu\frac{df}{dt}\right) + (B_{11})f + B_{15}f^3 + B_{sensp}\Omega + B_{sensv}\frac{d\Omega}{dt} + B_{actuate}K \\
&= K_{excite}\cos(\Omega t)
\end{aligned} \quad \text{۴-۲۶}$$

پس از بدست آوردن معادله حرکت و اعمال روش گالرکین باید توابع پتانسل مربوط به سنسور و عملگر محاسبه شده و در داخل معادله اصلی حرکت قرار گیرد تا بتوان تاثیر ضرایب بهره کنترلی و تاثیر آن بر روی پاسخ زمانی و پاسخ فرکانسی سیستم را مورد مطالعه قرار داد.

۴-۱-۱ محاسبه توابع پتانسیل پیزوها [۸۹]

$$E_s^a = -\frac{\partial K^a}{\partial s} = -\sin\left(\frac{\pi\left(Z-\frac{h}{2}\right)}{h_a}\right)\frac{\partial K^a(s.\varphi.t)}{\partial s} + \frac{Z-\frac{h}{2}}{h_a}\frac{\partial \tau(s.\varphi.t)}{\partial s} \quad \text{۲۷-۴}$$

$$E_{r\varphi}^a = -\frac{\partial K^a}{\partial (r\varphi)} = -\sin\left(\frac{\pi\left(Z-\frac{h}{2}\right)}{h_a}\right)\frac{\partial K^a(s.\varphi.t)}{\partial (r\varphi)} + \frac{Z-\frac{h}{2}}{h_a}\frac{\partial \tau(s.\varphi.t)}{\partial (r\varphi)} \quad \text{۲۸-۴}$$

$$E_Z^a = -\frac{\partial K^a}{\partial Z} = \frac{\pi}{h_a}\cos\left(\frac{\pi\left(Z-\frac{h}{2}\right)}{h_a}\right)K^a(s.\varphi.t) + \frac{\tau(s.\varphi.t)}{h_a} \quad \text{۲۹-۴}$$

$$E_s^s = -\frac{\partial \Omega^s}{\partial s} = -\sin\left(\frac{\pi\left(-Z-\frac{h}{2}\right)}{h_s}\right)\frac{\partial \Omega^s(s.\varphi.t)}{\partial s} \quad \text{۳۰-۴}$$

$$E_{r\varphi}^s = -\frac{\partial \Omega^s}{\partial (r\varphi)} = -\sin\left(\frac{\pi\left(-Z-\frac{h}{2}\right)}{h_s}\right)\frac{\Omega^s(s.\varphi.t)}{\partial (r\varphi)} \quad \text{۳۱-۴}$$

$$E_Z^s = -\frac{\partial \Omega^s}{\partial Z} = -\frac{\pi}{h_s}\cos\left(\frac{\pi\left(-Z-\frac{h}{2}\right)}{h_s}\right)\Omega^s(s.\varphi.t) \quad \text{۳۲-۴}$$

روابط (۴-۲۷) تا (۴-۲۹) کرنش‌های الکتریکی مربوط به عملگر و روابط (۴-۳۰) تا (۴-۳۲) کرنش‌های الکتریکی مربوط به سنسور می‌باشند. مقادیر D یعنی میدان جابجایی‌های الکتریکی به فرم زیر می‌باشند.

$$D_s^a = \epsilon_{11}^a\left(-\frac{\partial K^a}{\partial s}\right) = -\epsilon_{11}^a\left(\sin\left(\frac{\pi\left(Z-\frac{h}{2}\right)}{h_a}\right)\frac{\partial K^a}{\partial s}\right) \quad \text{۳۳-۴}$$

$$D_\varphi^a = \epsilon_{22}^a\left(-\frac{\partial K^a}{\partial (r\varphi)}\right) = -\epsilon_{22}^a\left(\sin\left(\frac{\pi\left(Z-\frac{h}{2}\right)}{h_a}\right)\frac{\partial K^a}{\partial (r\varphi)}\right) \quad \text{۳۴-۴}$$

$$\begin{aligned} D_z^a &= \epsilon_{33}^a\left(-\frac{\partial K^a}{\partial Z}\right) - ea_{31}\varepsilon_x - ea_{32}\varepsilon_\theta \\ &= -\epsilon_{33}^a\frac{\pi}{h_a}\cos\left(\frac{\pi\left(Z-\frac{h}{2}\right)}{h_a}\right) - ea_{31}\varepsilon_x - ea_{32}\varepsilon_\theta \end{aligned} \quad \text{۳۵-۴}$$

$$D_s^s = \epsilon_{11}^s\left(-\frac{\partial\Omega^s}{\partial s}\right) = -\epsilon_{11}^s\left(\sin\left(\frac{\pi\left(-Z-\frac{h}{2}\right)}{h_s}\right)\frac{\partial\Omega^s}{\partial s}\right) \quad ۳۶\text{-}۴$$

$$D_\varphi^s = \epsilon_{22}^s\left(-\frac{\partial\Omega^s}{\partial(r\varphi)}\right) = -\epsilon_{22}^s\left(\sin\left(\frac{\pi\left(-Z-\frac{h}{2}\right)}{h_s}\right)\frac{\partial\Omega^s}{\partial(r\varphi)}\right) \quad ۳۷\text{-}۴$$

$$\begin{aligned} D_z^s &= \epsilon_{33}^s\left(-\frac{\partial\Omega^s}{\partial Z}\right) - es_{31}\varepsilon_x - es_{32}\varepsilon_\theta \\ &= -\epsilon_{33}^s\frac{\pi}{h_s}\cos\left(\frac{\pi\left(-Z-\frac{h}{2}\right)}{h_s}\right) - es_{31}\varepsilon_x - es_{32}\varepsilon_\theta \end{aligned} \quad ۳۸\text{-}۴$$

که ε_x و ε_θ کرنش‌های مکانیکی مخروط بوده و از رابطه (۲-۹) در روابط (۴-۳۵) ، (۴-۳۸) جایگزین می‌شوند. مقادیر ea_{31}، ea_{32}، es_{31} و es_{32} ضریب گذردهی الکتریکی پیزو می‌باشند که در جدول (۴-۱) بیان شده است.

جدول ۴-۱: مشخصات ماده پیزوالکتریک[۹۰]

پارامتر		$PZT-4$
مدول الاستیسیته سنسور و عملگر	$ca_{11}=cs_{11}(Gpa)$	138.499
	$ca_{12}=cs_{12}(Gpa)$	77.371
	$ca_{21}=cs_{21}(Gpa)$	77.371
	$ca_{22}=cs_{22}(Gpa)$	138.499
	$ca_{33}=cs_{33}(Gpa)$	114.745
ضریب گذردهی الکتریکی	$ea_{31}=es_{31}$	-5.2
	$ea_{32}=es_{32}$	-5.2
ضریب دی الکتریک	$\epsilon_{11}^s=\epsilon_{11}^a$	1.306
	$\epsilon_{22}^s=\epsilon_{22}^a$	1.306
	$\epsilon_{33}^s=\epsilon_{33}^a$	1.115

حال با تبدیل مختصات بالا بر حسب مختصات مخروط سیستم به $(x.\varphi)$ با توجه به رابطه $S=S_1e^x$ و بر حسب پارامتر x و φ خواهد شد. با توجه به انرژی پتانسیل سیستم و استفاده از روش حساب تغییرات و مقادیر میدان پتانسیل الکتریکی که به صورت زیر می‌باشند.

$$\delta K^{a}: \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_a} \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left(-D_x^a \sin\left(\frac{\pi\left(Z-\frac{h}{2}\right)}{h_a}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial(r\varphi)}\left(-D_\varphi^a \sin\left(\frac{\pi\left(Z-\frac{h}{2}\right)}{h_a}\right)\right) + D_Z^a \frac{\pi}{h_a} \cos\left(\frac{\pi\left(Z-\frac{h}{2}\right)}{h_a}\right) \right\} dZ \qquad ۳۹-۴$$

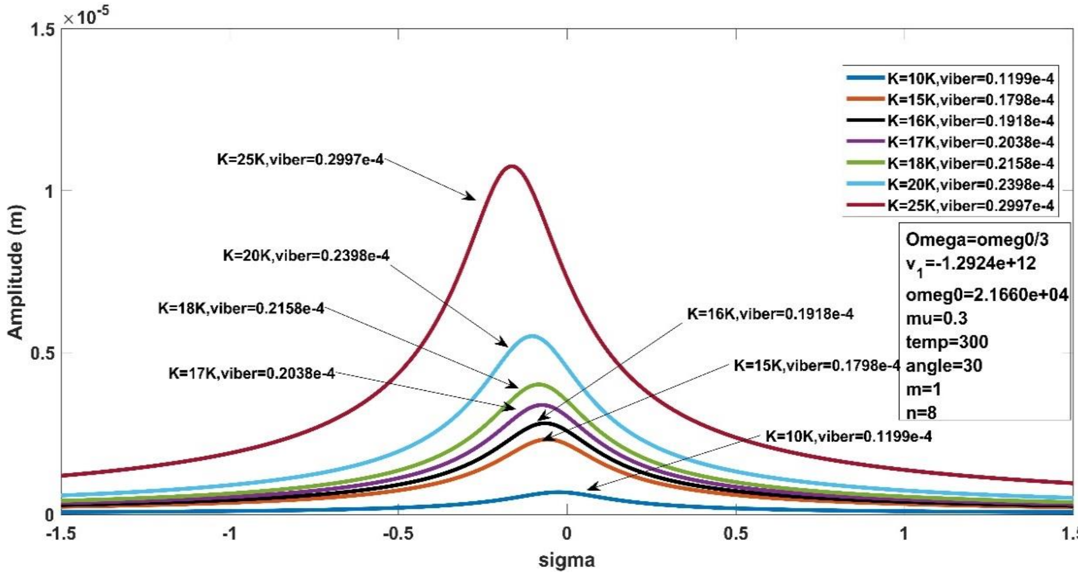
$$\delta \Omega^{s}: \int_{-\frac{h}{2}-h_c}^{-\frac{h}{2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left(-D_x^s \sin\left(\frac{\pi\left(-Z-\frac{h}{2}\right)}{h_s}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial(r\varphi)}\left(-D_\varphi^s \sin\left(\frac{\pi\left(-Z-\frac{h}{2}\right)}{h_a}\right)\right) + D_Z^s \frac{\pi}{h_a} \cos\left(\frac{\pi\left(-Z-\frac{h}{2}\right)}{h_a}\right) \right\} dZ \qquad ۴۰-۴$$

با جایگذاری روابط بالا در دو معادله (۴-۳۹) و (۴-۴۰) از معادله دوم تابع پتانسیل سنسور و از معادله اول مقدار تابع پتانسیل عملگر بدست می‌آید. با جایگذاری توابع پتانسل در معادله حرکت (۴-۲۶) مخروط مدرج تابعی شامل سنسور و عملگر خواهیم داشت.

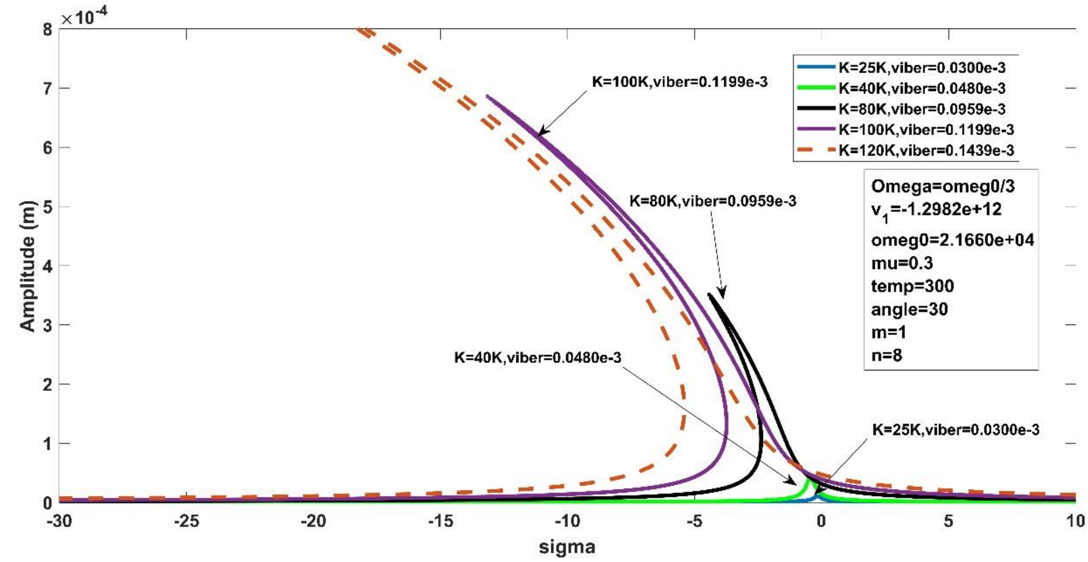
$$B_{17}\frac{d^2 f}{dt^2} + (B_{17}\mu + B_{18})\frac{df}{dt} + (B_{11})f + B_{15}f^3 = K_{excite}\cos(\Omega t) \qquad ۴۱-۴$$

۴-۲: تاثیر پیزو بر رفتار پاسخ فرکانسی سیستم

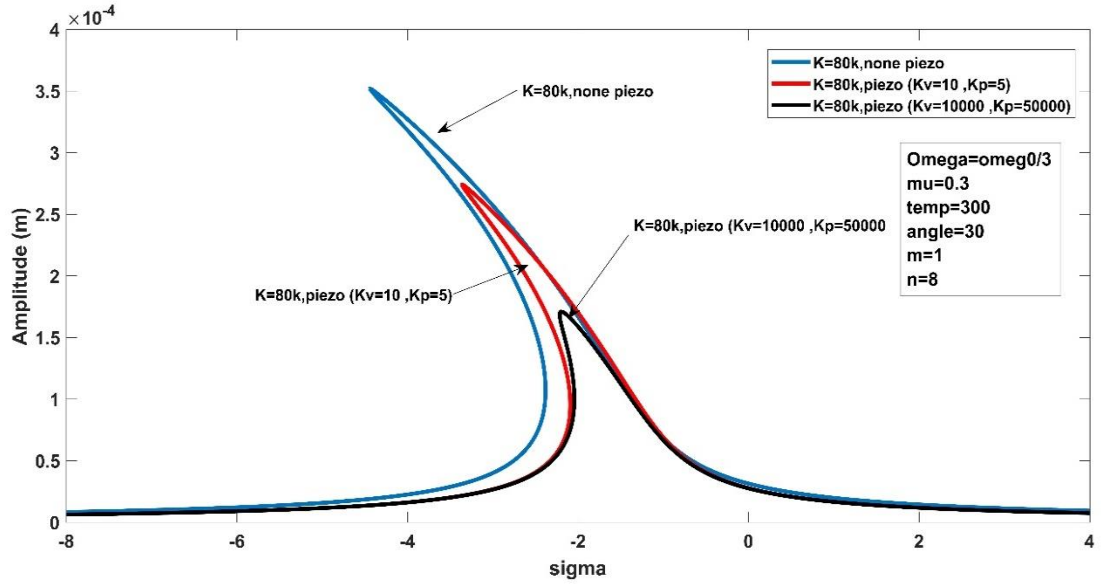
در این بخش تاثیر افزودن پیزو با بهره‌های مختلف کنترلی به مخروط مدرج تابعی در مقایسه با حالت بدون پیزو با توجه با حالت مافوق هارمونیک مرتبه سه مورد بررسی قرار می‌گیرد.



شکل۴-۱: بارگذاری سیستم در حالت مافوق هارمونیک مرتبه سه



شکل۴-۲: بارگذاری سیستم در حالت مافوق هارمونیک مرتبه سه

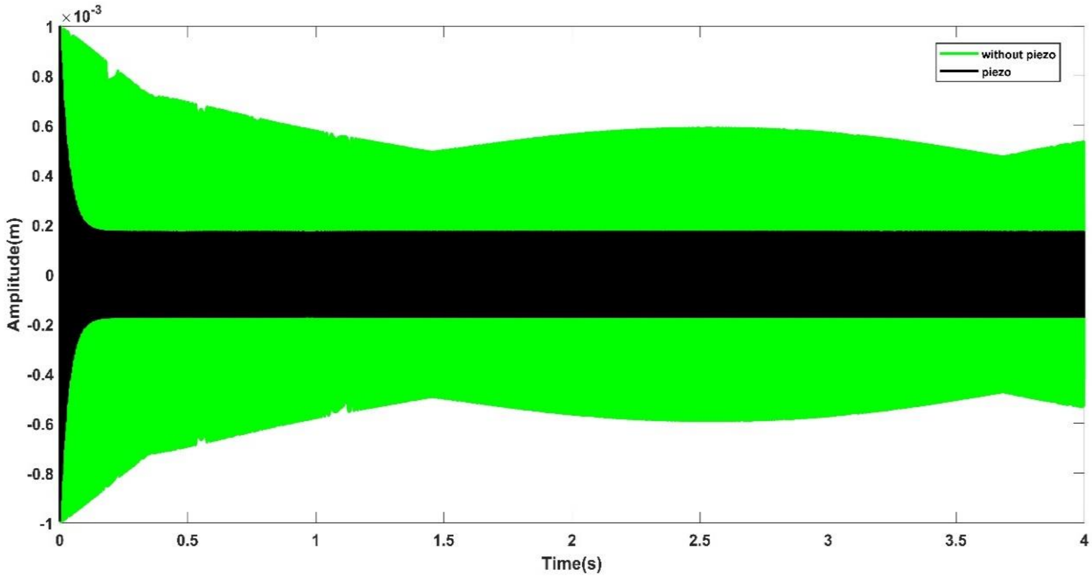


شکل۴-۳: بارگذاری سیستم در حالت مافوق هارمونیک مرتبه سه و تاثیر گذاری پیزوالکتریک

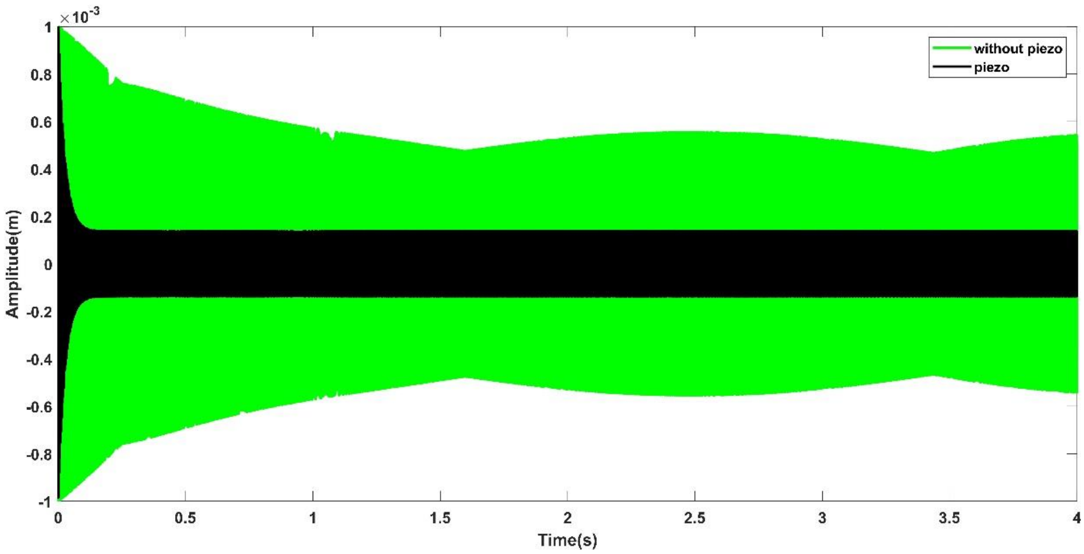
در شکل (۳-۱) ابتدا سیستم تحت بارگذاری قرارداده شده است. مشاهده می‌شود که سیستم در مقادیر بارگذاری بالا وارد ناحیه غیر خطی و ایجاد پدیده پرش شده است. در شکل (۳-۲) مقدار این بارگذاری افزایش داده شده است تا رفتار سیستم به طور کامل وارد ناحیه غیر خطی شود حال باتوجه به یکی از حالت‌هایی که باعث رفتار غیر خطی سیستم شده است تاثیر لایه‌های پیزوالکتریک با بهره‌های کنترلی مختلف با توجه به شکل (۴-۳) مورد بررسی قرار گرفته است. می‌توان مشاهده کرد با افزایش مقادیر بهره کنترلی مقدار پیک‌های رزونانسی سیستم نسبت به حالت بدون پیزو به طور قابل ملاحظه‌ای کاهش پیدا می‌کند.

۴-۳: بررسی پاسخ زمانی سیستم

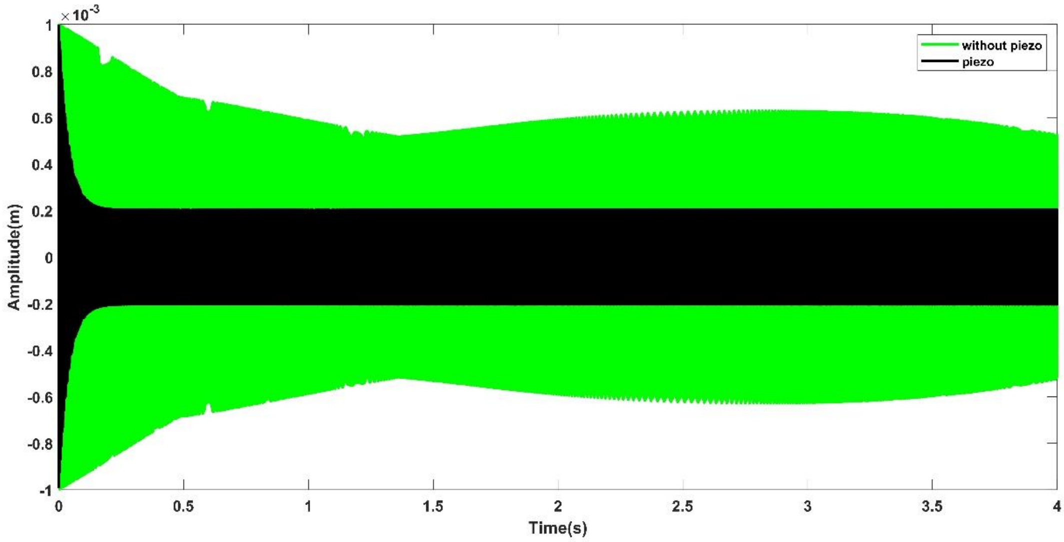
در این قسمت تاثیر لایه‌های پیزوالکتریک بر پاسخ زمانی سیستم در حالت‌های مختلف توزیع ماده در جهت ضخامت سیستم مورد بررسی قرار گرفته است. پیزوها از نوع ($PZT-4$) می‌باشند.



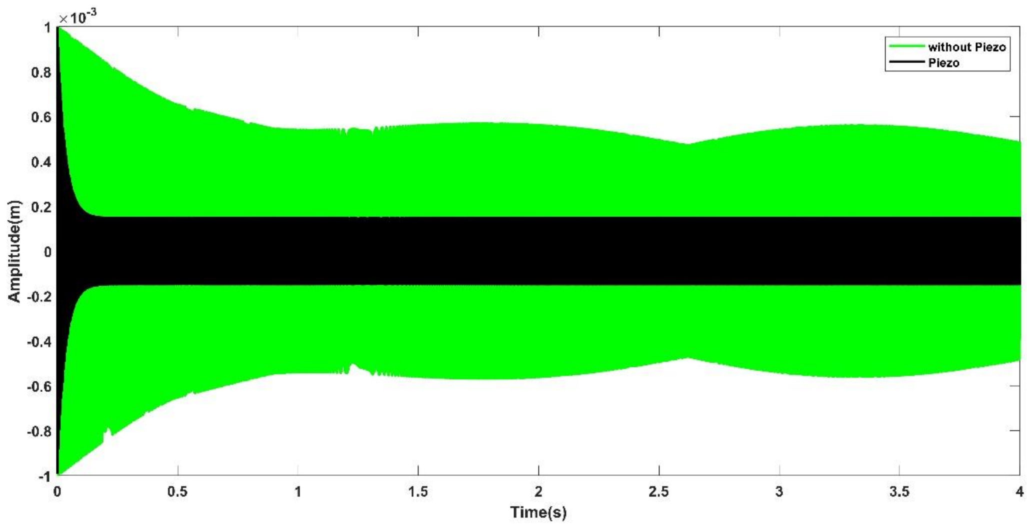
شکل۴-۴: تاثیر افزونه‌های پیزو بر پاسخ زمانی در حالت توزیع خطی مواد



شکل۴-۵: تاثیر افزونه‌های پیزو بر پاسخ زمانی در حالت توزیع معکوس مربعی



شکل۴-۶: تاثیر افزونه‌های پیزو بر پاسخ زمانی در حالت توزیع مربعی



شکل۴-۷: تاثیر افزونه‌های پیزو بر پاسخ زمانی در حالت توزیع مرتبه سه

با توجه به نمودارهای بالا مشاهده می‌شود که با افرودن مقادیر بهره کنترلی پاسخ زمانی سیستم به طور قابل ملاحظه‌ای کاهش پیدا می‌کند. همچنین مشاهده می‌شود که دامنه سیستم در حالت توزیع مربعی نسبت به بقیه حالات دارای مقدار بیشتری است.

فصل پنجم : نتیجه گیری و پیشنهادات

۵-۱: نتیجه گیری

در فصل اول این پایان نامه به معرفی کاربردی از ورق‌ها و پوسته‌ها و معرفی سیستم‌های ممتد پرداخته شد. سپس معرفی کوتاهی از ارتعاشات و نحوه کنترل ارتعاشات سیستم‌های مختلف مورد بحث قرار گرفت. در بخش بعدی این فصل کاربرد پوسته‌های مخروطی و معرفی از تاریخچه موضوع بر روی پوسته‌های استوانه‌ای و مخروطی بیان شده است.

در فصل دوم نحوه استخراج معادلات حاکم بر سیستم با توجه به منابع شماره [۳۷] و [۳۸] مورد بررسی قرار گرفت. در این نوع از پژوهش بر خلاف سایر پژوهش‌ها که برای بدست آوردن معادلات دینامیکی سیستم‌های دینامیکی ممتد از اصل همیلتون استفاده می‌شود. در این پژوهش با توجه به این منابع از روش تابع تنش و معادله سازگاری برای مخروط برای بدست آوردن معادله دینامیکی سیستم استفاده شده است.

در فصل سوم به حل نیمه تحلیلی سیستم دینامیکی مورد نظر با توجه به روش‌های تئوری اغتشاشات برای بدست آوردن رابطه حالت پایدار سیستم در حالت روزنانس‌های اولیه و ثانویه پرداخته شده است.

در فصل چهارم باتوجه به روابط بدست آمده از فصل دوم و سوم به بررسی رفتار حالت پایدار سیستم و رسم نمودارهای پاسخ فرکانسی و پاسخ دامنه برای حالت رزونانس اولیه و رسم نمودارهای پاسخ فرکانسی برای رزونانس‌های ثانویه پرداخته شد. مشاهده شد که برای ورود سیستم به ناحیه غیرخطی باید بارگذاری‌ها افزایش پیدا کند تا بتوان شاهد پدیده پرش در سیستم بود. همچنین ملاحظه شد که با افزایش مقدار ضریب میرایی سیستم قله پیک نمودار به طور مجانبی کاهش پیدا می‌کند. در این بخش تاثیر توزیع‌های متفاوت کسر حجمی بر روی نمودار پاسخ فرکانسی مورد بررسی قرار گرفت. می‌توان مشاهده کرد که در توزیع کسر حجمی مرتبه دو در جهت ضخامت قله نمودار از حالت‌های دیگر بیشتر است. نتیجه گیری کلی که از نمودارها و نتایج فصل سوم می‌توان داشت این است که سیستم مورد نظر برای ورود به ناحیه غیرخطی و بوجود آمدن ناحیه پرش در پاسخ سیستم نیازمند بارگذاری‌های بسیار زیادی می‌باشد.

در فصل پنجم با ایجاد لایه های پیزوالکتریک بر روی مخروط مدرج تابعی تاثیر لایه‌های پیزوالکتریک و اعمال قانون کنترلی به این سیستم، تاثیر بهره ضرایب کنترلی بر روی نمودار پاسخ فرکانسی و پاسخ زمانی سیستم مورد بحث قرار گرفته است. مشاهده می‌شود که افزودن لایه‌های پیزوالکتریک و اعمال ضرایب کنترلی باعث کاهش دامنه سیستم در حالت غیرخطی می‌شود. همچنین در نمودارهای پاسخ زمانی که در برای توزیع‌های مختلف ماده در جهت ضخامت ذکر شده است تاثیر ضرایب کنترلی سیستم در کاهش پاسخ زمانی سیستم مشاهده می‌شود.

۵-۲: پیشنهادات

- ✓ استفاده از سایر تئوری‌های غیرخطی و مقایسه پاسخ فرکانسی سیستم در حالت استفاده از تئوری‌های مختلف
- ✓ استفاده از الگوریتم‌های مختلف کنترلی مانند روش‌های کنترل مقاوم و کنترل فازی برای کاهش ارتعاشات سیستم
- ✓ استفاده از تقویت کننده‌های مختلف از جمله تقویت کننده‌های طولی و محیطی و یا تقویت کننده‌های نانو کربنی و بررسی رفتار رزونانسی سیستم
- ✓ بررسی ارتعاشات غیرخطی سیستم در بارگذاری‌های مختلف مانند رزونانس‌های ترکیبی و یا تحریک‌های خارجی مختلف
- ✓ بررسی ارتعاشات غیر خطی پوسته مخروطی برای حالتی که توسط سیال احاطه شده است و یا زمانی که سیالی را در خود محیط کرده است.

پیوست

$$\Lambda_1 = \frac{K_{11}}{T_1}, \Lambda_3 = \frac{K_{31}}{T_3}, \Lambda_4 = 0, \Lambda_{51} = \frac{K_{51}T_5 - K_{61}T_6}{T_5^2 + T_6^2}, \Lambda_{52} = \frac{K_{52}T_5 - K_{62}T_6}{T_5^2 + T_6^2}$$

$$\Lambda_{53} = \frac{K_{53}T_5 - K_{63}T_6}{T_5^2 + T_6^2}, \Lambda_{61} = \frac{K_{51}T_6 + K_{61}T_5}{T_5^2 + T_6^2}\ \Lambda_{62} = \frac{K_{53}T_6 + K_{62}T_5}{T_5^2 + T_6^2}, \Lambda_{63} = \frac{K_{53}T_6 + K_{63}T_5}{T_5^2 + T_6^2}$$

$$\Lambda_7 = \frac{K_{71}T_7 - K_{81}T_8}{T_7^2 + T_8^2} . \Lambda_8 = \frac{K_{71}T_8 + K_{81}T_7}{T_7^2 + T_8^2}, \Lambda_{91} = \frac{K_{91}T_9 - K_{101}T_9}{T_9^2 + T_{10}^2},$$

$$\Lambda_{92} = \frac{K_{92}T_9 - K_{102}T_{10}}{T_9^2 + T_{10}^2} S_1 \cot\gamma, \Lambda_{101} = \frac{K_{91}T_{10} + K_{101}T_9}{T_9^2 + T_{10}^2},$$

$$\Lambda_{102} = \frac{K_{92}T_{10} + K_{102}T_9}{T_9^2 + T_{10}^2} S_1 \cot\gamma, \Lambda_{11} = \frac{K_{111}T_{11} - K_{121}T_{12}}{T_{11}^2 + T_{12}^2}, \Lambda_{12} = \frac{K_{111}T_{13} + K_{121}T_{11}}{T_{11}^2 + T_{12}^2},$$

$$\Lambda_{13} = 0, \Lambda_{14} = \frac{K_{131}T_{14} + K_{141}T_{13}}{T_{13}^2 + T_{14}^2}, \Lambda_{15} = \frac{K_{151}}{T_{15}}, \Lambda_{16} = \frac{K_{161}}{T_{16}}$$

A1

$$K_{11} = b_4[(\beta_2^2 - 1)^2 + \beta_1^2] + \beta_1^2[2(b_3 - b_6)\beta_2^2 + b_4(\beta_1^2 + 1)],$$

$$K_{31} = -b_4(8\beta_1^4 + 4\beta_1^2 + 0.5), K_{41} = -2b_3\beta_1, K_{51} = -\beta_1^2,$$

$$K_{52} = 0.25\beta_1^2\beta_2^2 - 0.5\beta_1^2 + 0.25\beta_2^2, K_{53} = -1.5\beta_1^2, K_{61} = -0.5\beta_1,$$

$$K_{62} = 0.25(\beta_1\beta_2^2 + \beta_1^3 - \beta_1), K_{63} = \beta_1, K_{71} = 0.25[\beta_1^2(2 - \beta_2^2) + \beta_2^2],$$

$$K_{81} = -0.25\beta_1(\beta_2^2 + \beta_1^2 - 1), K_{91} = 0.5\beta_1(\beta_2^2 - \beta_1^2 - 1.5), K_{92} = -\beta_1$$

$$K_{101} = -\beta_1^2(\beta_2^2 + 0.25), K_{102} = \beta_1^2, K_{111} = -0.5\beta_1(\beta_2^2 + 3\beta_1^2 - 1.5)$$ A2

$K_{121} = \beta_1^2(\beta_2^2 - 13.25), K_{131} = 0.25\beta_1^2, K_{141} = \beta_1(0.25 - \beta_1^2),$

$K_{151} = 0.25\beta_2^2(\beta_1^2 + 1), K_{161} = 0.5b_4$

$T_1 = b_1\beta_1^4 + b_1\beta_2^4 + 2b_1\beta_1^2 - 2b_1\beta_2^2 + 2(b_5 + b_2)\beta_1^2\beta_2^2 + b_1,$

$T_3 = 16b_1\beta_1^4 + 8b_1\beta_1^2 + b_1, T_5 = 16b_1(\beta_1^4 - \beta_1^2), T_6 = -32b_1\beta_1^3,$

$T_7 = 16b_1(\beta_1^4 - \beta_1^2) + 32(b_5 + b_2)\beta_1^2\beta_2^2 - 8(b_5 + b_2 + b_1)\beta_2^2,$

$T_8 = -32b_1\beta_1^3 - 32(b_5 + b_2)\beta_1\beta_2^2,$

$T_9 = b_1\beta_1^4 - 4b_1\beta_1^2 + 2(b_5 + b_2)\beta_1^2\beta_2^2 - 2(b_5 + b_2 + b_1)\beta_2^2 + b_1\beta_2^4,$

$T_{10} = -4b_1\beta_1^3 - 8(b_5 + b_2)\beta_1\beta_2^2,$

$T_{11} = 81b_1\beta_1^4 - 36b_1\beta_1^2 + 18(b_5 + b_2)\beta_1^2\beta_2^2 - 2(b_5 + b_2 + b_1)\beta_2^2 + b_1\beta_2^4,$

$T_{12} = -108b_1\beta_1^3 - 12(b_5 + b_2)\beta_1\beta_2^2,$

$T_{13} = 256b_1\beta_1^4 - 64b_1\beta_1^2, T_{14} = 256b_1\beta_1^3,$

$T_{15} = -8(b_5 + b_2 + b_1)\beta_2^2 + 16b_1\beta_2^4, T_{16} = b_1$ A3

$$B_{11}=\frac{4\beta_1^2\beta_2^2(C_4+C_6)\theta_2-2\left[\beta_2^2-\beta_2^4-\left(1+\beta_1^2\right)^2\right]C_3\theta_2-2\Lambda_1[\left(2\beta_2^2-1-2\beta_1^2-\beta_1^4-\beta_2^4\right)C_2-\beta_1^2\beta_2^2(C_1-C_5)]\theta_2}{\left(2+\beta_1^2\right)S_1^2}-$$

$$\frac{8\Lambda_1(3+2\beta_1^2)(4+\beta_1^2)\theta_3 cot\gamma}{3\left(9+4\beta_1^2\right)(2+\beta_1^2)S_1}-\frac{8\left(4+\beta_1^2\right)}{2+\beta_1^2}\left[\frac{4\beta_2^2\left(\beta_1^2+2\right)(C_1-C_5)\theta_3}{3\left(9+4\beta_1^2\right)}-\frac{S_1 cot\gamma}{8}\right]\Lambda_{102}cot\gamma-$$

$$\frac{8\left(4+\beta_1^2\right)}{\left(2+\beta_1^2\right)\beta_1 S_1}\left[\frac{\left(12\beta_1^2+5\beta_1^4+6\beta_2^2-3\beta_2^4\right)C_2+2\beta_2^2\left(\beta_1^2-3\right)(C_1-C_5)\theta_3}{3\left(9+4\beta_1^2\right)}+\frac{1}{8}\right]\Lambda_{92}cot\gamma,$$

$$B_{12}=\frac{8\left(4+\beta_1^2\right)h}{\beta_1^2(2+\beta_1^2)S_1^2}\langle\frac{\Lambda_{91}\beta_1}{9+4\beta_1^2}\left[\left(\frac{5}{3}\beta_1^4+4\beta_1^2-2\beta_2^2-\beta_2^4\right)\theta_3 C_2+2\left(\frac{1}{3}\beta_1^2+1\right)\beta_2^2(C_1-C_5)\theta_3-\right.$$

$$\left.\frac{1}{2}\left(\frac{9}{4}+\beta_1^2\right)S_1 cot\gamma\right]+\frac{\Lambda_{101}\beta_1^2\{16\left[\left(\beta_2^4-2\beta_2^2+2\beta_1^2+\beta_2^4\right)C_2+2(C_1-C_5)\beta_2^2\left(2+\beta_1^2\right)\right]\theta_3-3(9+4\beta_1^2)S_1 cot\gamma\}}{12(9+4\beta_1^2)}+$$

$$\frac{\Lambda_{11}\beta_1\theta_3\{\left[324\beta_1^2+\left(927+648\beta_1^2\right)\beta_1^4-(8\beta_1^2-9)(2-\beta_2^2)\beta_2^2\right]C_2+(C_1-C_5)\beta_2^2(18+38\beta_1^2+144\beta_1^4)\}}{(9+16\beta_1^2)(9+4\beta_1^2)}+$$

$$\frac{[\Lambda_{11}\left(4+7\beta_1^2+9\beta_1^4\right)-6(2+3\beta_1^2)\Lambda_{12}\beta_1]\beta_1 S_1 cot\gamma}{8(1+\beta_1^2)(4+\beta_1^2)}+\frac{\Lambda_{12}\beta_1^2[36\left(18\beta_1^2+33\beta_1^4-\beta_2^2\right)+24(C_1-C_5)\beta_2^2(6+19\beta_1^2)]\theta_3}{2(9+16\beta_1^2)(9+4\beta_1^2)}\rangle$$

$$B_{13}$$

$$=\frac{8h\theta_3(4+\beta_1^2)}{3(2+\beta_1^2)S_1^2}\{\frac{4\Lambda_1\beta_1^4\left(8\beta_2^2-4\right)+2\Lambda_2\beta_1\left(\beta_1^4-7\beta_1^2-9+9\beta_2^2+4\beta_1^2\beta_2^2\right)-\Lambda_{17}(3+2\beta_1^2)(9+16\beta_1^2)}{(9+16\beta_1^2)(9+4\beta_1^2)}$$

$$+\frac{\Lambda_4\beta_1\left(8\beta_1^4+16\beta_1^2+9+9\beta_2^2+28\beta_1^2\beta_2^2\right)-2\Lambda_3\left(8\beta_1^4+66\beta_1^2+27+8\beta_1^4\beta_2^2\right)}{2(64\beta_1^4+180\beta_1^2+81)}\}$$

$$B_{14}=\{\frac{2\Lambda_{91}\beta_1\left(\beta_1^4+\beta_1^2-3+\beta_1^2\beta_2^2+4\beta_2^2\right)+\Lambda_{101}\beta_1^2(-\beta_1^2+5+4\beta_1^2\beta_2^2-2\beta_2^2)}{32(4+\beta_1^2)(1+\beta_1^2)}-$$

$$\frac{2\Lambda_{51}\left(\beta_1^2+3+\beta_2^2+\beta_1^2\beta_2^2\right)+\Lambda_{61}\beta_1(\beta_1^2+5+3\beta_2^2)}{8(4+\beta_1^2)}-$$

$$\frac{2\Lambda_{11}\beta_1\left(27\beta_1^2-12\beta_1^4+12-9\beta_1^6-16\beta_2^2-40\beta_1^2\beta_2^2-39\beta_1^4\beta_2^2\right)-3\Lambda_{12}\beta_1^2(65\beta_1^2+45\beta_1^4+20-8\beta_2^2-10\beta_1^2\beta_2^2-12\beta_1^4\beta_2^2)}{8(64+224\beta_1^2+196\beta_1^4+36\beta_1^6)}-$$

$$\frac{\Lambda_{13}\left(6+43\beta_1^2+42\beta_1^4+4\beta_2^2+29\beta_1^2\beta_2^2+70\beta_1^4\beta_2^2\right)+\beta_1\Lambda_{14}(20+75\beta_1^2+85\beta_1^4+12\beta_2^2+33\beta_1^2\beta_2^2-24\beta_1^4\beta_2^2)}{64+224\beta_1^2+196\beta_1^4+36\beta_1^6}\}\frac{8(4+\beta_1^2)h^2}{(2+\beta_1^2)S_1^2},$$

$$B_{15}=\frac{(4+\beta_1^2)h^2}{(2+\beta_1^2)S_1^2}\{\frac{2\Lambda_7\left(\beta_1^4+3+4\beta_1^2-7\beta_2^2-10\beta_1^2\beta_2^2\right)+\Lambda_8\beta_1(\beta_1^4+5+6\beta_1^2-3\beta_2^2+9\beta_1^2\beta_2^2)}{2(4+5\beta_1^2+\beta_1^4)}+$$

$$\frac{\Lambda_{15}\left(\beta_1^2+3-7\beta_2^2-2\beta_1^2\beta_2^2\right)-2\Lambda_{52}\left(\beta_1^2+3+\beta_2^2+\beta_1^2+\beta_1^2\beta_2^2\right)-\Lambda_{62}\beta_1(\beta_1^2+5+3\beta_2^2)}{(4+\beta_1^2)}\},$$

B(1)

$$B_{16}=\frac{(4+\beta_1^2)h\,cot\gamma}{(2+\beta_1^2)S_1}\{\frac{2\Lambda_{53}(\beta_1^2+3+\beta_2^2+\beta_1^2\beta_2^2)-\Lambda_{63}\beta_1(\beta_1^2+5+3\beta_2^2)}{4+\beta_1^2}+$$
$$\frac{2\Lambda_{92}\beta_1(\beta_1^4+\beta_1^2-3+\beta_2^2+\beta_1^2\beta_2^2)+\Lambda_{102}\beta_1^2(-\beta_1^2+5+4\beta_1^2\beta_2^2-2\beta_2^2)}{4(4+\beta_1^2)(1+\beta_1^2)}\},$$

$$B_{17}=-\frac{2(4+\beta_1^2)S_1^4\rho_t}{3\beta_1^2(2+\beta_1^2)(\beta_1^2+9)},\qquad \theta_i=\frac{e^{ix_0}-1}{e^{4x_0}-1},\ i=2،3،6$$

$$B_{21}=h\beta_1^4(1+4\beta_1^2),\quad B_{22}=-4\beta_1^2(1+\beta_1^2)S_1cot\gamma$$

$$B_{23}=\frac{16(4+\beta_1^2)(1+\beta_1^2)}{S_1^2}\{\frac{C_3(1-16\beta_1^4)\beta_1^2\theta_2+C_2[\Lambda_{16}(1+4\beta_1^2)+\Lambda_3(1+6\beta_1^2-32\beta_1^6)-\Lambda_4\beta_1(3+24\beta_1^2+48\beta_1^4)]\theta_2}{2(1+4\beta_1^2)(\beta_1^2+1)}-$$
$$\frac{[48\Lambda_{53}(32\beta_1^4+76\beta_1^2+36)\beta_1C_2+384(\Lambda_{63}C_2\beta_1^4+\Lambda_3\beta_1^2)+24\Lambda_4(28\beta_1^2+9)]\beta_1\theta_3S_1cot\gamma}{9(4\beta_1^2+9)(16\beta_1^2+9)}+\frac{[8\Lambda_{53}(\beta_1^2+1)+3\Lambda_{63}\beta_1]S_1^2cot^2\gamma}{16(\beta_1^2+4)}\},$$

$$B_{24}=-\frac{256\beta_1^3\theta_3(4+\beta_1^2)(1+\beta_1^2)h^2}{3S_1^2(4\beta_1^2+9)(16\beta_1^2+9)(1+4\beta_1^2)}\{[\Lambda_{51}\beta_1(32\beta_1^4+76\beta_1^2+36)+8\Lambda_{61}\beta_1^4](4+9\beta_1^2)+$$
$$16[\Lambda_{13}\beta_1(221\beta_1^4+64\beta_1^2+9)-64\Lambda_{14}\beta_1^4(4\beta_1^2+1)]\}C_2+\frac{4h^2\beta_1^2cot\gamma}{(9\beta_1^2+4)(9+4\beta_1^2)S_1}\{[2\Lambda_{51}(\beta_1^2+1)+$$
$$3\Lambda_{61}\beta_1]\times(4\beta_1^2+9)(9\beta_1^2+4)(\beta_1^2+1)+2\Lambda_{13}(4+29\beta_1^2+70\beta_1^4)(9\beta_1^2+4)+6\Lambda_{14}\beta_1(4+$$
$$11\beta_1^2-8\beta_1^4)(4\beta_1^2+9)\},$$

$$B_{25}=\frac{16h^2(4+\beta_1^2)(1+\beta_1^2)\beta_1^3}{S_1^2}\{\frac{4\Lambda_1(1+8\beta_1^2)\beta_1^3\theta_3}{3(81+180\beta_1^2+64\beta_1^4)}+\frac{[\Lambda_{102}\beta_1(1+4\beta_2^2)-2\Lambda_{92}(5+\beta_1^2-3\beta_2^2)]S_1cot\gamma}{32(\beta_1^4+4)}\},$$

$$B_{26}=-\frac{2h^3\beta_1^4\{2[2\Lambda_{51}(6\beta_1^2+1)+\Lambda_{61}\beta_1](\beta_1^2+1)+\beta_1\Lambda_{14}(20+59\beta_1^2-36\beta_1^4)+\Lambda_{13}(4+37\beta_1^2+180\beta_1^4)\}}{(9\beta_1^2+4)S_1^2},$$

$$B_{27}=\frac{8\beta_1^2h^2(1+\beta_1^2)}{3(4\beta_1^2+9)(16\beta_1^2+9)S_1^2}\{\Lambda_{52}[3(16\beta_1^2+9)(4\beta_1^2+9)(\beta_1^2+1)S_1cot\gamma-18(\beta_1^2+4)(32\beta_1^4+$$
$$76\beta_1^2+24)C_2\beta_1^2\theta_3]-8\Lambda_{62}\beta_1[160(\beta_1^4+4)C_2\beta_1^4\theta_3-9(4\beta_1^2+9)S_1cot\gamma]\},$$

$B_{28}=\frac{\beta_1^3 h^3}{2(9\beta_1^2+4)S_1^2}\{[2\Lambda_{91}(5+\beta_1^2-3\beta_2^2)+\Lambda_{101}\beta_1(1+4\beta_2^2)](9\beta_1^2+4)(\beta_1^2+1)-$
$8[2\Lambda_{52}(6\beta_1^2+1)+5\Lambda_{62}\beta_1]\beta_1(\beta_1^2+1)+2\Lambda_{11}[(5\beta_1^2+3\beta_1^4+5)(4+9\beta_1^2)-12\beta_2^2-$
$27\beta_1^2\beta_2^2+75\beta_1^4\beta_2^2]+3\Lambda_{12}\beta_1(21\beta_1^2+27\beta_1^4+4+16\beta_1^2+64\beta_1^2\beta_2^2-12\beta_1^4\beta_2^2)\}$,

$B_{29}=-\frac{4(1+\beta_1^2)\beta_1^4 h^4}{3(9\beta_1^2+4)S_1^2}\{3[2\Lambda_{53}(6\beta_1^2+1)+5\Lambda_{63}\beta_1]S_1 cot\gamma+256\Lambda_{16}\beta_1^2\theta_3\}$,

$B_{30}=-\frac{8(4+\beta_1^2)(1+\beta_1^2)\beta_1^4 S_1^2\rho_t h^2\theta_6}{(9+\beta_1^2)(4\beta_1^2+9)}$,

$A_{10a}=ca_{11}h_a$, $A_{20a}=ca_{12}h_a$, $A_{11a}=\frac{1}{2}h_a ca_{11}(h_a+h)$, $A_{21a}=\frac{h_a ca_{12}(h_a+h)}{2}$
$A_{111a}=-((\cos(\beta h_a)-1)\cos\left(\frac{\beta h}{2}\right)-\sin\left(\frac{\beta h}{2}\right)\sin(\beta h_a))ea_{31}$
$A_{222a}=2ea_{31}\frac{h_a}{h}$
$A_{220a}=ca_{21}h_a$, $A_{210a}=ca_{22}h_a$, $A_{221a}=\frac{h_a ca_{21}(h_a+h)}{2}$, $A_{211a}=\frac{h_a ca_{22}(h_a+h)}{2}$
$A_{111a2}=-((\cos(\beta h_a)-1)\cos\left(\frac{\beta h}{2}\right)-\sin\left(\frac{\beta h}{2}\right)\sin(\beta h_a))ea_{32}$
$A_{222a2}=2ca_{32}\frac{h_a}{h}$
$A_{60a}=ca_{33}h_a$, $A_{61a}=ca_{33}h_a(h_a+h)$

D
1

$A_{10s}=cs_{11}h_s$, $A_{20s}=cs_{12}h_s$, $A_{11s}=\frac{1}{2}h_s cs_{11}(h_s+h)$, $A_{21s}=\frac{h_s cs_{12}(h_s+h)}{2}$
$A_{111s}=((\cos(\beta h_s)-1)\cos\left(\frac{\beta h}{2}\right)-\sin\left(\frac{\beta h}{2}\right)\sin(\beta h_s))es_{31}$
$A_{220s}=cs_{21}h_s$, $A_{210s}=cs_{22}h_s$, $A_{221s}=\frac{h_s cs_{21}(h_s+h)}{2}$, $A_{211s}=\frac{h_s cs_{22}(h_s+h)}{2}$
$A_{111s2}=((\cos(\beta h_s)-1)\cos\left(\frac{\beta h}{2}\right)-\sin\left(\frac{\beta h}{2}\right)\sin(\beta h_s))es_{32}$
$A_{60s}=cs_{33}h_s$
$A_{61s}=\frac{cs_{33}h^2(\frac{1}{4}-(-\frac{1}{2}-\frac{h_s}{h})^2)}{2}$

$A_{10T}=A_{10s}+A_{10}+A_{10a}$, $A_{11T}=A_{11s}-A_{11}-A_{11a}$,
$A_{20T}=A_{20s}+A_{20}+A_{20a}$, $A_{21T}=A_{21s}-A_{21}-A_{21a}$
$A_{111s}=((\cos(\beta h_s)-1)\cos\left(\frac{\beta h}{2}\right)-\sin\left(\frac{\beta h}{2}\right)\sin(\beta h_s))es_{31}$
$A_{111a}=-((\cos(\beta h_a)-1)\cos\left(\frac{\beta h}{2}\right)-\sin\left(\frac{\beta h}{2}\right)\sin(\beta h_a))ea_{31}$ D2
$A_{222a}=2ea_{31}\frac{h_a}{h}$
$A_{210T}=A_{210s}+A_{10}+A_{210a}$, $A_{211T}=A_{211s}-A_{11}-A_{211a}$,
$A_{220T}=A_{220s}+A_{20}+A_{220a}$, $A_{221T}=A_{221s}-A_{21}-A_{221a}$

$$A_{111s2} = ((\cos(\beta h_s) - 1)\cos\left(\frac{\beta h}{2}\right) - \sin\left(\frac{\beta h}{2}\right)\sin(\beta h_s))es_{32}$$
$$A_{111a2} = -((\cos(\beta h_a) - 1)\cos\left(\frac{\beta h}{2}\right) - \sin\left(\frac{\beta h}{2}\right)\sin(\beta h_a))ea_{32}$$
$$A_{222a2} = 2ea_{32}\frac{h_a}{h}$$
$$A_{60T} = A_{60} + A_{60a} + A_{60s},\ A_{61T} = A_{61} + A_{61a} + A_{61s}$$

$$AM_{11T} = A_{11} + AM_{11a} + AM_{11s},\ AM_{21T} = A_{21} + AM_{21a} + AM_{21s}$$
$$AMM_{11T} = -A_{11} - AMM_{11a} - AMM_{11s}$$
$$AMM_{22T} = -A_{22} - AMM_{22a} - AMM_{22s}$$
$$AM_{111s} = -\frac{es_{31}\left((\beta(h+2h_s)\cos(\beta h_s) - \beta h - 2\sin(\beta h_s))\cos\left(\frac{\beta h}{2}\right) - (\beta(h+2h_s)\sin(\beta h_s) - 2 + 2\cos(\beta h_s))\sin\left(\frac{\beta h}{2}\right)\right)}{2\beta}$$
$$AM_{111a} = -\frac{ea_{31}\left((\beta(h+2h_a)\cos(\beta h_a) - \beta h - 2\sin(\beta h_a))\cos\left(\frac{\beta h}{2}\right) - (\beta(h+2h_a)\sin(\beta h_a) - 2 + 2\cos(\beta h_a))\sin\left(\frac{\beta h}{2}\right)\right)}{2\beta}$$

$$AM_{112a} = \frac{(h + h_a)ea_{31}h_a}{h}$$

$$AM_{221T} = A_{21} + AM_{221a} + AM_{221s},\ AM_{211T} = A_{11} + AM_{211a} + AM_{211s}$$
$$AM_{222T} = -(A_{22} + AM_{222a} + AM_{222s}),\ AMM_{12T} = -(A_{12} + AM_{212a} + AM_{212s})$$

$$AM_{111s2} = -\frac{es_{32}\left((\beta(h+2h_s)\cos(\beta h_s) - \beta h - 2\sin(\beta h_s))\cos\left(\frac{\beta h}{2}\right) - (\beta(h+2h_s)\sin(\beta h_s) - 2 + 2\cos(\beta h_s))\sin\left(\frac{\beta h}{2}\right)\right)}{2\beta}$$

$$AM_{111a2} = -\frac{ea_{32}\left((\beta(h+2h_a)\cos(\beta h_a) - \beta h - 2\sin(\beta h_a))\cos\left(\frac{\beta h}{2}\right) - (\beta(h+2h_a)\sin(\beta h_a) - 2 + 2\cos(\beta h_a))\sin\left(\frac{\beta h}{2}\right)\right)}{2\beta}$$

$$AM_{112a2} = \frac{(h + h_a)ea_{32}h_a}{h}$$

$$AM_{61T} = A_{61} + AM_{61a} + AM_{61s},\ AM_{62T} = A_{62} + AM_{62a} + AM_{62s}$$

$$L_0 = A_{10T}A_{210T} - A_{20T}A_{220T}$$

$$b_1 = \frac{A_{210T}}{L_0},\ b_2 = \frac{-A_{20T}}{L_0},\ b_3 = \frac{-A_{11T}A_{210T} + A_{20T}\,A_{221T}}{L_0},\ b_4 = \frac{A_{20T}\,A_{211T} - A_{210T}A_{21T}}{L_0}$$
$$bk_{e1} = \frac{-A_{111a}A_{210T} + A_{111a2}\,A_{20T}}{L_0},\ bG_{e1} = \frac{-A_{111s}A_{210T} + A_{111s2}\,A_{20T}}{L_0}, \qquad \text{D3}$$
$$bt_{e1} = \frac{A_{20T}A_{222a2} - A_{210T}\,A_{222a}}{L_0}$$

$$b_{11} = \frac{A_{10T}}{L_0},\ b_{22} = \frac{-A_{220T}}{L_0},\ b_{33} = \frac{-A_{10T}A_{211T} + A_{21T}A_{220T}}{L_0},\ b_{44} = \frac{-A_{10T}A_{221T} + A_{11T}A_{220T}}{L_0}$$

$bk_{e2} = \frac{-A_{10T}A_{111a2}+A_{111a}A_{220T}}{L_0}$, $bG_{e2} = \frac{-A_{10T}A_{111s2}+A_{111s}A_{220T}}{L_0}$,
$bt_{e2} = \frac{-A_{10T}A_{222a2}+A_{222a}A_{220T}}{L_0}$

$b_{55} = \frac{1}{A_{60T}}$, $b_{66} = \frac{A_{61T}}{A_{60T}}$

$c_1 = AM_{11T}b_1 + AM_{21T}b_{22}$, $c_2 = AM_{11T}b_2 + AM_{21T}b_{11}$
$c_3 = AM_{11T}b_3 + AM_{21T}b_{44} + AMM_{11T}$, $c_4 = AM_{11T}b_4 + AM_{21T}b_{33} + AMM_{22T}$
$cm_{1k} = AM_{11T}bk_{e1} + AM_{21T}bk_{e2} + AM_{111a}$
$cm_{1g} = AM_{11T}bG_{e1} + AM_{21T}bG_{e2} + AM_{111s}$
$cm_{1t} = AM_{11T}bt_{e1} + AM_{21T}bt_{e2} + AM_{112a}$

$c_{22} = AM_{221T}b_1 + AM_{211T}b_{22}$, $c_{11} = AM_{221T}b_2 + AM_{211T}b_{11}$
$c_{33} = AM_{221T}b_4 + AM_{211T}b_{33} + AMM_{12T}$ D4
$c_{44} = AM_{211T}b_{44} + AM_{211T}b_3 + AM_{222T}$
$cm_{2k} = AM_{211T}bk_{e2} + AM_{221T}bk_{e1} + AM_{111a2}$
$cm_{2g} = AM_{211T}bG_{e2} + AM_{221T}bG_{e1} + AM_{111s2}$
$cm_{1t} = AM_{211T}bt_{e2} + AM_{221T}bt_{e1} + AM_{112a2}$

$c_{55} = AM_{61T}b_{55}$, $c_{66} = -(AM_{61T}b_{66} - AM_{62T})$

$$\Lambda_{52} = \frac{F_9}{F_{10}}$$
$$F_9 = (-8b_{11}\beta_2^2 + 2b_2 - 2b_{22})\beta_1^4 + (-2b_1\beta_2^2 + 2b_{11}\beta_2^2 - 4b_2\beta_2^2 + 4b_{22}\beta_2^2 + b_1 - b_{11} + 3b_2 - 3b_{22})\beta_1^2 - (\beta_2 - 1)(\beta_2 + 1)(b_1 + b_2 - b_{11} - b_{22})$$
$$F_{10} = 2F_8$$ D5

$$\Lambda_{102} = -\frac{F_{11}}{F_{12}}$$

$$F_{11} = \left(S_1\beta_1^2\cos(\gamma)\left(b_{11}\beta_1^4 + \left((2b_{55} + b_2 + b_{22})\beta_2^2 + b_1 + 2b_2 - b_{11} - 2b_{22}\right)\beta_1^2 + \beta_1^4 b_1 + (-2b_1 + b_2 + b_{22} + 2b_{55})\beta_2^2 + 2b_1 + 2b_2 - 2b_{11} - 2b_{22}\right)\right)$$

F_{12}
$= \sin(\gamma)\Big(b_{11}^2\beta_1^8$
$+ (2b_{11}\beta_2^2(2b_{55}+b_2+b_{22}) + 2b_1b_{11} + b_2^2 + (-2b_{11}-2b_{22})b_2 + 6b_{11}^2 + 2b_{11}b_{22}$
$+ b_{22}^2)\beta_1^6$
$+ \Big((2b_1b_{11} + (2b_{55}+b_2+b_{22})^2)\beta_2^4$
$+ \Big((2b_2 - 4b_{11} + 2b_{22} + 4b_{55})b_1 + (10b_{11} + 4b_{22} + 4b_{55})b_2 - 4b_{22}^2$
$+ (-2b_{11} - 4b_{55})b_{22} + 8b_{11}b_{55}\Big)\beta_2^2 + b_1^2 + (2b_2 + +6b_{11} - 2b_{22})b_1 + 5b_2^2$
$+ (-10b_{11} - 10b_{22})b_2 + 9b_{11}^2 + 10b_{11}b_{22} + 5b_{22}^2\Big)\beta_1^4$
$+ \big(2b_1(2b_{55}+b_2+b_{22})\beta_2^6$
$+ \big(2b_1^2 + (2b_2 - 10b_{11} - 10b_{22} - 8b_{55})b_1 + 5b_2^2 + (2b_{22} + 12b_{55})b_2 + b_{22}^2$
$+ 4b_{22}b_{55} + 8b_{55}^2)\beta_2^4$
$+ (-4b_1^2 + (4b_2 + 20b_{11} + 16b_{22} + 12b_{55})b_1 + (8b_{11} + 4b_{22} + 4b_{55})b_2 - 4b_{22}^2$
$+ (-4b_{11} - 4b_{55})b_{22} + 4b_{11}b_{55})\beta_2^2 + 4(b_1 + b_2 - b_{11} - b_{22})^2\big)\beta_1^2$
$+ (b_1\beta_2^2 - 2b_1 - 2b_2 - 2b_{55})^2\beta_2^4\Big)$

$\Lambda_7 = \dfrac{F_1}{F_2}$
F_1
$= -\Big((-2b_{22} + 2b_2)\beta_1^4$
$+ \Big((4b_2 - 8b_{11} + 4b_{22} + 8b_{55})\beta_2^2 + b_1 + 3b_2 - b_{11} - 3b_{22}\Big)\beta_1^2$
$+ (8b_1 - 6b_2 - 2b_{22} - 8b_{55})\beta_2^4 + (-5b_1 + b_2 + b_{11} + 3b_{22} + 4b_{55})\beta_2^2 + b_1 + b_2$
$- b_{11} - b_{22}\Big)\beta_1^2$

F_2
$= \Big(256b_{11}^2\beta_1^8$
$+ (512b_{11}\beta_2^2(2b_{55}+b_2+b_{22}) + 128b_1b_{11} + 64\beta_2^2 + (-128b_{11} - 128b_{22})b_2$
$+ 6b_{11}^2 + 128b_{11}b_{22} + 64b_{22}^2)\beta_1^6$
$+ + \Big((512b_1b_{11} + 256(2b_{55}+b_2+b_{22})^2)\beta_2^4$
$+ \Big((128b_2 - 256b_{11} + 2b_{22} + 4b_{55})b_1 + (640b_{11} + 256b_{22} + 256b_{55})b_2 - 4b_{22}^2$
$+ (-128b_{11} - 256b_{55})b_{22} + 8b_{11}b_{55}\Big)\beta_2^2 + b_1^2 + (2b_2 + +6b_{11} - 2b_{22})b_1 + 5b_2^2$
$+ (-160b_{11} - 160b_{22})b_2 + 144b_{11}^2 + 10b_{11}b_{22} + 80b_{22}^2\Big)\beta_1^4$
$+ \big(512b_1(2b_{55}+b_2+b_{22})\beta_2^6$
$+ \big(2b_1^2 + (32b_2 - 96b_{11} - 10b_{22} - 8b_{55})b_1 + 320b_2^2 + (128b_{22} + 768b_{55})b_2$
$+ b_{22}^2 + 4b_{22}b_{55} + 8b_{55}^2)\beta_2^4$
$+ (-4b_1^2 + (128b_2 - 640b_{11} - 640b_{22} - 512b_{55})b_1 + (8b_{11} + 4b_{22} + 4b_{55})b_2$
$- 4b_{22}^2 + (-4b_{11} - 4b_{55})b_{22} + 4b_{11}b_{55})\beta_2^2 + 4(b_1 + b_2 - b_{11} - b_{22})^2\big)\beta_1^2$
$+ (b_1\beta_2^2 - 2b_1 - 2b_2 - 2b_{55})^2\beta_2^4\Big)$

$\Lambda_8 = \dfrac{F_3}{F_4}$

$$
\begin{aligned}
&F_3\\
&= \Big(4b_{11}\beta_1^6 + \Big((4b_1 + 4b_2 + 4b_{22} + 8b_{55})\beta_2^2 + b_1 - b_2 + 7b_{11} + b_{22}\Big)\beta_1^4\\
&+ \Big((4b_1 + 4b_2 + 4b_{22} + 8b_{55})\beta_2^4 + (-b_1 + 9b_2 - 5b_{11} - 3b_{22} + 6b_{55})\beta_2^2 + b_1\\
&- b_2 + 3b_{11} + b_{22}\Big)\beta_1^2 + 4(\beta_2 + 1)(b_1\beta_2^2 - 0.5b_1 - 0.5b_2 - 0.5b_{55})(\beta_2 - 1)\beta_2^2\Big)\beta_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&F_4\\
&= \Big(128b_{11}^2\beta_1^8\\
&+ \Big((256b_{11}(2b_{55} + b_2 + b_{22}))\beta_2^2 + 64b_1b_{11} + 32b_2^2 + b_2(-64b_{11} - 64b_{22})\\
&+ 192b_{11}^2 + 64b_{22}b_{11} + 32b_{22}^2\Big)\beta_1^6\\
&+ \Big((256b_1b_{11} + 128(2b_{55} + b_2 + b_{22})^2)\beta_2^4\\
&+ \Big((64b_2 - 128b_{11} + 64b_{22} + 128b_{55})b_1 + (320b_{11} + 128b_{22} + 128b_{55})b_2\\
&- 128b_{22}^2 + (-64b_{11} - 128b_{55})b_{22} + 256b_{11}b_{55}\Big)\beta_2^2 + 8b_1^2\\
&+ (16b_2 + 48b_{11} - 16b_{22})b_1 + 40b_2^2 + (-80b_{11} - 80b_{22})b_2 + 72b_{11}^2 + 80b_{11}b_{22}\\
&+ 40b_{22}^2\Big)\beta_1^4\\
&+ \big(256b_1\beta_2^6(2b_{55} + b_2 + b_{22})\\
&+ \big(64b_1^2 + (64b_2 - 320b_{11} - 320b_{22} - 256b_{55})b_1 + 160b_2^2\\
&+ (64b_{22} + 384b_{55})b_2 + 32b_{22}^2 + 128b_{22}b_{55} + 256b_{55}^2\big)\beta_2^4\\
&+ (-32b_1^2 + (-32b_2 + 160b_{11} + 128b_{22} + 96b_{55})b_1\\
&+ (64b_{11} + 32b_{22} + 32b_{55})b_2 - 32b_{22}^2 + (-32b_{11} - 32b_{55})b_{22} + 32b_{11}b_{55})\beta_2^2\\
&+ 8(b_1 + b_2 - b_{11} - b_{22})^2\big)\beta_1^2 + 128(b_1\beta_2^2 - 0.5b_1 - 0.5b_2 - 0.5b_{55})^2\beta_2^4\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\Lambda_{15} = -\frac{\beta_1^2}{32b_1\beta_2^2 - 16b_1 - 16b_2 - 16b_{55}}
$$

$$
\Lambda_{62} = -\frac{F_5}{F_6}
$$

$$
\begin{aligned}
&F_5\\
&= \beta_1(4b_{11}\beta_1^4 + \Big((-12\beta_2^2 + 7)b_{11} + 4b_2\beta_2^2 - 4b_{22}\beta_2^2 + b_1 - b_2 + b_{22}\Big)\beta_1^2\\
&- (\beta_2 - 1)(\beta_2 + 1)(b_1 - b_2 + 3b_{11} + b_{22}))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&F_6\\
&= 8(\beta_1^2 + 1)(16b_{11}^2\beta_1^4 + (8b_{11}^2 + (8b_1 - 8b_2 + 8b_{22})b_{11} + 4(b_2 - b_{22})^2)\beta_1^2\\
&+ (b_1 + b_2 - b_{11} - b_{22})^2)
\end{aligned}
$$

$$
\Lambda_{92} = \frac{F_7}{F_8}
$$

$$
\begin{aligned}
&F_7\\
&= -\cos(\gamma)\beta_1S_1((-b_2 + 3b_{11} + b_{22})\beta_1^4 + ((2b_2 + 2b_{55})\beta_2^2 + b_1 - b_2 + 3b_{11}\\
&+ b_{22})\beta_1^2 - (b_1\beta_1^2 - 2b_1 - 2b_2 - 2b_{55})\beta_2^2)
\end{aligned}
$$

$$F_8 = \sin(\gamma)(b_{11}^2\beta_1^8 + (2b_{11}\beta_2^2(2b_{55} + b_2 + b_{22}) + 2b_1b_{11} + b_2^2 + (-2b_{11} - 2b_{22})b_2 + 6b_{11}^2 + 2b_{11}b_{22} + b_{22}^2)\beta_1^6 + \Big((2b_1b_{11} + (2b_{55} + b_2 + b_{22})^2)\beta_2^4 + \Big((2b_2 - 4b_{11} + 2b_{22} + 4b_{55})b_1 + (10b_{11} + 4b_{22} + 4b_{55})b_2 - 4b_{22}^2 + (-2b_{11} - 4b_{55})b_{22} + 8b_{11}b_{55}\Big)\beta_2^2 + b_1^2 + (2b_2 + 6b_{11} - 2b_{22})b_1 + 5b_2^2 - 10b_2(b_{11} + b_{22}) + 9b_{11}^2 + 10b_{11}b_{22} + 5b_{22}^2\Big)\beta_1^4 + \big(2b_1\beta_2^6(2b_{55} + b_2 + b_{22}) + \big(2b_1^2 + (2b_2 - 10b_{11} - 10b_{22} - 8b_{55})b_1 + 5b_2^2 + (2b_{22} + 12b_{55})b_2 + b_{22}^2 + 4b_{22}b_{55} + 8b_{55}^2\big)\beta_2^4 + (-4b_1^2 + (-4b_2 + 20b_{11} + 16b_{22} + 12b_{55})b_1 + (8b_{11} + 4b_{22} + 4b_{55})b_2 - 4b_{22}^2 - 4b_{22}(b_{11} - b_{55}) + 4b_{11}b_{55})\beta_2^2 + 4(b_1 + b_2 - b_{11} + b_{22})^2\big)\beta_1^2 + (b_1\beta_2^2 - 2b_1 - 2b_2 - 2b_{55})^2\beta_2^4)$$

$$\Lambda 202_1 = \frac{F_{13}}{F_{14}}$$

$$F_{13} = b_{11}b_{44}\beta_1^8 + \Big(\Big((b_{22}b_{44} + b_2b_{44} + (-2b_{66} + b_3 + b_{33}))\beta_2^2 + b_1b_{44} + (-b_3 + b_{33} - 6b_{44})b_{22} + (b_3 - b_{33} + 6b_{44})b_2 - 8b_{11}(b_3 - 0.125b_4 - b_{33} + 2.75b_{44})\Big)\beta_1^6 + \Big((b_1b_{44} + (-2b_{66} + b_3 + b_{33})b_{22} + (-2b_{66} + b_3 + b_{33})b_2 + b_{11}b_4 - 4b_{55}(b_{66} - 0.5b_3 - 0.5b_{33}))\beta_2^4 + \big((-2b_{66} + b_3 + b_{33} - 2b_{44})b_1 + (12b_{66} - 8b_3 + b_4 - 4b_{33})b_{22} + (-12b_{66} - 5b_{44} + 12b_{33})b_2 + (46b_{66} - 15b_3 - 2b_4 - 31b_{33})b_{11} - 8(b_3 - 0.25b_4 - b_{33} + 0.75b_{44})b_{55}\big)\beta_2^2 + (-4b_3 + b_4 + 4b_{33} - 2b_{44})b_1 + (10b_3 - 6b_4 - 10b_{33})b_{22} - (10b_3 - 6b_4 - 10b_{33})b_2 + 20b_{11}(b_3 - 1.1b_4 - b_{33} - 0.55b_4)\Big)\beta_1^4 + \Big(\big((-2b_{66} + b_3 + b_{33})b_1 + (b_2 + b_{22} + 2b_{55})b_4\big)\beta_2^6 + \big((4b_{66} - 2b_3 + 2b_4 - 2b_{33} + b_{44})b_1 + (4b_{66} + b_3 - 8b_4 - 5b_{33})b_{22} - 23b_{11}b_4 + 16b_{55}(b_{66} - 0.25b_4 - b_{33})\big)\beta_2^4 + \big((6b_{66} + b_3 - 4b_4 - 7b_{33} - 2b_{44})b_1 + (-12b_{66} - 8b_3 + 11b_4 + 20b_{33} - 2b_{44})b_{22} + (12b_{66} - 17b_4 - 12b_{33} - 6b_{44})b_2 + (-24b_{66} - 16b_3 + 46b_4 + 40b_{33})b_{11} - 8b_{55}(b_{44} + b_3 + 0.75b_4 - b_{33})\big)\beta_2^2 + (-4b_3 - 2b_4 + 4b_{33} - 3b_{44})b_1 + (11b_3 - 11b_{33} + 6b_{44})b_{22} - (11b_3 - 11b_{33} + 6b_{44})b_2 + 28b_{11}(b_3 - 0.392b_4 - b_{33} + 0.428b_{44})\Big)\beta_1^2 + (\beta_2 - 1)^2\, b_4(\beta_2^4b_1 + (-2b_1 - 6b_2 - 2b_{22} - 8b_{55})\beta_2^2 - 3b_1 - 6b_2 + 12b_{11} + 6b_{22})(\beta_2 + 1)^2\Big)$$

$$
\begin{aligned}
&F_{14}\\
&= b_{11}^2\beta_1^8\\
&+ (2b_{11}\beta_2^2(2b_{55} + b_2 + b_{22}) + 2b_1b_{11} + b_{22}^2 + (-2b_2 - 4b_{11})b_{22} + b_2^2 - 4b_{11}b_2\\
&+ 18b_{11}^2)\beta_1^6\\
&+ \Big((2b_1b_{11} + (2b_{55} + b_2 + b_{22})^2)\beta_2^4\\
&+ \Big((2b_2 - 4b_{11} + 2b_{22} + 4b_{55})b_1 - 6b_{22}^2 + (4b_2 - 2b_{11} - 8b_{55})b_{22} + 2b_2^2\\
&+ (22b_{11} + 8b_{55})b_2 + 20b_{11}b_{55}\Big)\beta_2^2 + b_1^2 + (4\,b_2 + 12b_{11} - 4b_{22})b_1 + 14\,b_{22}^2\\
&+ (-28b_2 + 56\,b_{11})b_{22} + 14\,b_2^2 - 56b_{11}\,b_2 + 105\,b_{11}^2\Big)\beta_1^4\\
&+ \big(2b_1(2b_{55} + b_2 + b_{22})\beta_2^6\\
&+ \big(2b_1^2 + (8b_2 - 46b_{11} - 16b_{22} - 8b_{55})b_1 + 5b_{22}^2 + (14b_2 + 24b_{55})b_{22} + 13b_2^2\\
&+ 40b_{55}b_2 + 32b_{55}^2\big)\beta_2^4\\
&+ (-4b_1^2 + (-2b_2 + 92b_{11} + 38b_{22} + 36b_{55})b_1 - 30b_{22}^2\\
&+ (4b_2 - 52b_{11} - 56b_{55})b_{22} + 26b_2^2 + (20b_{11} + 56b_{55})b_2 - 32b_{11}b_{55})\beta_2^2 + 10b_1^2\\
&+ (40b_2 - 62b_{11} - 40b_{22})b_1 + 49b_{22}^2 + (-98b_2 + 196b_{11})b_{22} + 49b_2^2\\
&- 196b_{11}b_2 + 232b_{11}^2)\beta_1^2\\
&+ (\beta_2^4\,b_1 + (-2b_1 - 6\,b_2 - 2\,b_{22} - 8\,b_{55})\,\beta_2^2 - 3\,b_1 - 6b_2 + 12\,b_{11} + 6\,b_{22})^2
\end{aligned}
$$

$$
\Lambda 202_2 = -\frac{F_{15}}{F_{16}}
$$

$$
\begin{aligned}
&F_{15}\\
&= {S_1}^2 b_{11}(-bt_{e2}K_p + bG_{e2})\beta_1^6 + (((-bt_{e2}K_p + bG_{e2})b_2 + (-bt_{e2}K_p + bG_{e2})b_{22}\\
&+ (-bt_{e1}K_p + bG_{e1})b_{11} + 2b_{55}(-bt_{e2}K_p + bG_{e2}))\beta_2^2 + (-bt_{e1}K_p - 3bt_{e2}K_p\\
&+ bG_{e1} + 3bG_{e2})b_2 + (-bt_{e2}K_p + bG_{e2})b_1 + (bt_{e1}K_p + 3bt_{e2}K_p - bG_{e1}\\
&- 3bG_{e2})b_{22} - b_{11}(-7bt_{e1}K_p - bt_{e2}K_p + 7bG_{e1} + bG_{e2}))\beta_1^4 + (((-bt_{e1}K_p\\
&+ bG_{e1})b_2 + (-bt_{e2}K_p + bG_{e2})b_1 - (b_{22} + 2b_{55})(bt_{e1}K_p - bG_{e1}))\beta_2^4\\
&+ ((-2bt_{e1}K_p - 7bt_{e2}K_p + 2bG_{e1} + 7bG_{e2})b_2 + (-bt_{e1}K_p + 2bt_{e2}K_p + bG_{e1}\\
&- 2bG_{e2})b_1 + (8bt_{e1}K_p - 5bt_{e2}K_p - 8bG_{e1} + 5bG_{e2})b_{22} + (23bt_{e1}K_p\\
&- 23bG_{e1})b_{11} + 12b_{55}((1/2)bt_{e1}K_p - bt_{e2}K_p + bG_{e2} - (1/2)bG_{e1}))\beta_2^2\\
&+ (5bt_{e1}K_p - 15bt_{e2}K_p - 5bG_{e1} + 15bG_{e2})b_2 + (3bt_{e1}K_p - 7bt_{e2}K_p - 3bG_{e1}\\
&+ 7bG_{e2})b_1 + (-5bt_{e1}K_p + 15bt_{e2}K_p + 5bG_{e1} - 15bG_{e2})b_{22}\\
&- 26b_{11}((5/26bt_{e1})K_p - bt_{e2}K_p + bG_{e2} - 5/26bG_{e1}))\beta_1^2 - (2(\beta_2^4 b_1 + (-2b_1\\
&- 6b_2 - 2b_{22} - 8b_{55})\beta_2^2 - 3b_1 - 6b_2 + 12b_{11} + 6b_{22}))(((1/2)bt_{e1}K_p\\
&- (1/2)bG_{e1})\beta_2^2 + (1/2)bt_{e1}K_p - bt_{e2}K_p + bG_{e2} - (1/2)bG_{e1})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{16} &= \big(b_{11}^2\beta_1^8 + (2\, b_{11}\, (2\, b_{55} + b_2 + b_{22})\beta_2^2 + b_2^2 + (-4\, b_{11} - 2\, b_{22})\, b_2 + 2\, b_1\, b_{11} \\
&+ 18\, b_{11}^2 + 4\, b_{11}\, b_{22} + b_{22}^2)\, \beta_1^6 + ((b_2^2 + (2\, b_{22} + 4\, b_{55})\, b_2 + 2b_1\, b_{11} \\
&+ (b_{22} + 2\, b_{55})^2)\, \beta_2^4 + (2\, b_2^2 + (2\, b_1 + 22\, b_{11} + 4b_{22} + 8\, b_{55})\, b_2 + (-4\, b_{11} \\
&+ 2\, b22 + 4\, b_{55})\, b_1 - 6\, b_{22}^2 + (-2b_{11} - 8\, b_{55})\, b_{22} + 20\, b_{11}\, b_{55})\, \beta_2^2 + 14\, b_2^2 \\
&+ (4\, b_1 - 56\, b_{11} - 28\, b_{22})\, b_2 + b_1^2 + (12\, b_{11} - 4\, b_{22})\, b_1 + 105\, b_{11}^2 + 56\, b_{11}\, b_{22} \\
&+ 14\, b_{22}^2)\beta_1^4 + (2\, b_1\, (2\, b_{55} + b2 + b_{22})\beta_2^6 + (13\, b_2^2 + (8b_1 + 14\, b_{22} + 40\, b_{55})\, b2 \\
&+ 2\, b_1^2 + (-46b_{11} - 16\, b_{22} - 8\, b_{55})\, b_1 + 5\, b_{22}^2 + 24\, b_{22}\, b_{55} + 32\, b_{55}^2)\, \beta_2^4 \\
&+ (26\, b_2^2 + (-2\, b_1 + 20\, b_{11} + 4\, b_{22} + 56\, b_{55})\, b_2 - 4\, b_1^2 + (92b_{11} + 38\, b_{22} \\
&+ 36\, b_{55})\, b_1 - 30\, b_{22}^2 + (-52\, b_{11} - 56\, b_{55})\, b_{22} - 32\, b_{11}\, b_{55})\, \beta_2^2 + 49b_2^2 + (40\, b_1 \\
&- 196\, b_{11} - 98\, b_{22})\, b_2 + 10\, b_1^2 + (-62\, b_{11} - 40\, b_{22})\, b_1 + 232b_{11}^2 + 196\, b_{11}\, b_{22} \\
&+ 49\, b_{22}^2)\, \beta_1^2 \\
&+ (\beta_2^4\, b_1 + (-2\, b_1 - 6b_2 - 2\, b_{22} - 8\, b_{55})\, \beta_2^2 - 3\, b_1 - 6\, b_2 + 12\, b_{11} + 6\, b_{22})^2\big)
\end{aligned}
$$

$$\Lambda 202_3 = -\frac{F_{17}}{F_{18}}$$

$$F_{18} = F_{16}$$

$$
\begin{aligned}
F_{17} &= {S_1}^2\, bk_{e2}b_{11}\, \beta_1^6 + ((b_{11}bk_{e1} + b_2bk_{e2} + \; b_{22}bk_{e2} + 2b_{55}bk_{e2})\beta_2^2 + (bk_{e1} \\
&+ 3bk_{e2})b_2 + bk_{e2}b_1 + (-bk_{e1} - 3bk_{e2})b_{22} - 7b_{11}(bk_{e1} + (1/7)bk_{e2}))\beta_1^4 \\
&+ ((bk_{e2}b_1 + bk_{e1}b_2 + bk_{e1}(b_{22} + 2b_{55}))\beta_2^4 + ((2bk_{e1} + 7bk_{e2})b_2 + (bk_{e1} \\
&- 2bk_{e2})b_1 + (-8bk_{e1} + 5bk_{e2})b_{22} - 23b_{11}bk_{e1} - 6b_{55}bk_{e1} - 2bk_{e2}))\beta_2^2 \\
&+ (-5bk_{e1} + 15bk_{e2})b_2 + (-3bk_{e1} + 7bk_{e2})b_1 + (5bk_{e1} - 15bk_{e2})\, b_{22} \\
&+ 5b_{11}(bk_{e1} - 26bk_{e2}(1/5)))\beta_1^2 + (\beta_2^4 b_1 + (-2b_1 - 6b_2 - 2b_{22} - 8b_{55})\beta_2^2 - 3b_1 \\
&- 6b_2 + 12b_{11} + 6b_{22})(\beta_2^2 bk_{e1} + bk_{e1} - 2bk_{e2})
\end{aligned}
$$

$$\Lambda 202_4 = \frac{F_{19}}{F_{20}}$$

$$F_{20} = F_{16}$$

$$
\begin{aligned}
F_{19} &= {S_1}^2(bt_{e2}b_{11}\, \beta_1^6 + ((b_{11}bt_{e1} + b_2bt_{e2} + b_{22}bt_{e2} + 2b_{55}bt_{e2})\beta_2^2 + (bt_{e1} \\
&+ 3bt_{e2})b_2 + bt_{e2}b_1 + (-bt_{e1} - 3bt_{e2})b_{22} - 7b_{11}(bte1 + (1/7)bt_{e2}))\beta_1^4 \\
&+ ((bt_{e2}b_1 + bt_{e1}b_2 + bt_{e1}(b_{22} + 2b_{55}))\beta_2^4 + ((2bt_{e1} + 7bt_{e2})b_2 + (bt_{e1} \\
&- 2bt_{e2})b_1 + (-8bt_{e1} + 5bt_{e2})b_{22} - 23b_{11}bt_{e1} - 6b_{55}(bt_{e1} - 2bt_{e2}))\beta_2^2 \\
&+ (-5bt_{e1} + 15bt_{e2})b_2 + (-3bt_{e1} + 7bt_{e2})b_1 + (5bt_{e1} - 15bt_{e2})b_{22} + 5b_{11}(bt_{e1} \\
&- 26bt_{e2}(1/5)))\beta_1^2 + (\beta_2^4 b_1 + (-2b_1 - 6b_2 - 2b_{22} - 8b_{55})\beta_2^2 - 3b_1 - 6b_2 \\
&+ 12b_{11} + 6b_{22})(\beta_2^2 bt_{e1} + bt_{e1} - 2bt_{e2}))K_v
\end{aligned}
$$

$$\Lambda 303_1 = -\frac{F_{21}}{F_{22}}$$

$$F_{22} = F_{20} = F_{16} = F_{18}$$

F_{21}
$= 8\beta_1(-(1/8)b_{22}b_{44} + (1/8)b_2b_{44} - (1/8)b_{11}(b_3 - b_{33} + 8b_{44}))\beta_1^6$
$+ (((-3b_{44}(1/8) + (1/4)b_{66} - (1/4)b_3)b_{22} + (-5b_{44}(1/8) - (1/4)b_{66}$
$+ (1/4)b_{33})b_2 + (2b_{66} - 7b_3(1/8) - 9b_{33}(1/8))b_{11} - (1/4)b_{55}(b_3 - b_{33}$
$+ 4b_{44}))\beta_2^2 + (3b_3(1/4) - (1/8)b_4 + 5b_{44}(1/4) - 3b_{33}(1/4))b_{22}$
$+ ((1/8)b_4 + 3b_{33}(1/4) - 3b_3(1/4) - 5b_{44}(1/4))b_2 + (-(1/2)b_{44}$
$- (1/8)b_3 + (1/8)b_{33})b_1 + 11b_{11}(10b_{44}(1/11) + b3 - 4b_4(1/11)$
$- b_{33})(1/4))\beta_1^4 + (((3b_{66}(1/4) - (1/8)b_4 - (1/2)b_{33} - (1/4)b_3)b_{22}$
$+ (5b_{66}(1/4) - (1/2)b_3 + (1/8)b_4 - 3b_{33}(1/4))b_2 + (-(1/8)b_3$
$+ (1/8)b_{33})b_1 - b_{11}b_4 + (2(-5b_{33}(1/8) + b_{66} - 3b_3(1/8)))b_{55})\beta_2^4$
$+ ((-3b_{44}(1/8) - 11b_{66}(1/4) + 2b_{33} + 3b_3(1/4) - (1/8)b_4)b_{22}$
$+ (-5b_{44}(1/8) + 11b_{66}(1/4) - 11b_{33}(1/4) - 7b_4(1/8))b_2 + (b_{66}$
$- (1/8)b_3 - 7b_{33}(1/8))b_1 + (-7b_{66} + 5b_3(1/8) + 2b_4 + 51b_{33}(1/8))b_{11}$
$+ 3b_{55}(-4b_{44}(1/3) - b_{33} + b_3 - 4b_4(1/3))(1/4))\beta_2^2 + (5b_4(1/4)$
$+ 11b_{44}(1/8))b_{22} + (-5b_4(1/4) - 11b_{44}(1/8))b_2 + (-(1/2)b_{44} + (1/4)b_3$
$- (1/2)b_4 - (1/4)b_{33})b_1 + 11b_{11}(b_3 + 20b_4(1/11) - b_{33}$
$+ 28b_{44}(1/11))(1/8))\beta_1^2 + (1/8)((-3b_{22}b_4 - 5b_2b_4 + (b_3 - b_{33})b_1$
$- 8b_4b_{55})\beta_2^4 + ((-2b_3 + 14b_4 + 2b_{33})b_{22} + (-6b_3 - 6b_4 + 6b_{33})b_2 + (-2b_3$
$- 4b_4 + 2b_{33})b_1 + 28b_{11}b_4 - 8b_{55}(b_3 - b_4 - b_{33}))\beta_2^2 + (6b_3 - 11b_4$
$- 6b_{33})b_{22} + (-6b_3 + 11b_4 + 6b_{33})b_2 + (-3b_3 + 4b_4 + 3b_{33})b_1 + 12b_{11}(b_3$
$- 7b_4(1/3) - b_{33}))(\beta_2 + 1)(\beta_2 - 1)$

$$\Lambda 303_2 = -\frac{F_{23}}{F_{24}}$$

$F_{24} = F_{22} = F_{20} = F_{16} = F_{18}$
F_{23}
$= {S_1}^2\beta_1((bt_{e2}K_p - bG_{e2})b_2 + (-bt_{e2}K_p + bG_{e2})b_{22} - (5((bt_{e2}$
$+ (1/5)bt_{e1})K_p - (1/5)bG_{e1} - bG_{e2}))b_{11})\beta_1^4 + (((-2bt_{e2}K_p + 2bG_{e2})b_2$
$+ (-2bt_{e1}K_p + 2bG_{e1})b_{22} + (-8bt_{e1}K_p + 8bG_{e1})b_{11} - (2((bt_{e1} + bt_{e2})K_p$
$- bG_{e1} - bG_{e2}))b_{55})\beta_2^2 + ((-bt_{e2} - bt_{e1})K_p + bG_{e1} + bG_{e2})b_1 + ((-5bt_{e1}$
$+ 5bt_{e2})K_p + 5bG_{e1} - 5bG_{e2})b_2 + ((5bt_{e1} - 5bt_{e2})K_p - 5bG_{e1} + 5bG_{e2})b_{22}$
$- (25((bt_{e2} - 3bt_{e1}(1/5))K_p + 3bG_{e1}(1/5) - bG_{e2}))b_{11})\beta_1^2 + (((3bt_{e2}$
$- bt_{e1})K_p + bG_{e1} - 3bG_{e2})b_1 - (5(b_2 + 3b_{22}(1/5) + 8b_{55}(1/5)))(bt_{e1}K_p$
$- bG_{e1}))\beta_2^4 + (((-6bt_{e2} - 2bt_{e1})K_p + 2bG_{e1} + 6bG_{e2})b_1 + ((-8bt_{e2}$
$- 10bt_{e1})K_p + 10bG_{e1} + 8bG_{e2})b_2 + (10bt_{e1}K_p - 10bG_{e1})b_{22} + (28bt_{e1}K_p$
$- 28bG_{e1})b_{11} - 8b_{55}(bt_{e2}K_p - bG_{e2}))\beta_2^2 + ((-bt_{e2} - bt_{e1})K_p + bG_{e1}$
$+ bG_{e2})b_1 + ((-5bt_{e1} + 4bt_{e2})K_p + 5bG_{e1} - 4bG_{e2})b_2 + ((5bt_{e1} - 4bt_{e2})K_p$
$- 5bG_{e1} + 4bG_{e2})b_{22} - (20((bt_{e2} - 4bt_{e1}(1/5))K_p + 4bG_{e1}(1/5)$
$- bG_{e2}))b_{11}$

$$\Lambda 303_3 = -\frac{F_{25}}{F_{26}}$$

$F_{26} = F_{24} = F_{22} = F_{20} = F_{16} = F_{18}$

$$
\begin{aligned}
&F_{25}\\
&= {S_1}^2\beta_1(-b_2bk_{e2} + b_{22}bk_{e2} + b_{11}(bk_{e1} + 5bk_{e2}))\beta_1^4 + ((8b_{11}bk_{e1} + 2b_2bk_{e2}\\
&+ 2bk_{e1}b_{22} + 2b_{55}(bk_{e1} + bk_{e2}))\beta_2^2 + (5bk_{e1} - 5bk_{e2})b_2 + (bk_{e1} + bk_{e2})b_1\\
&+ (-5bk_{e1} + 5bk_{e2})b_{22} - 15b_{11}(bk_{e1} - 5bk_{e2}(1/3)))\beta_1^2 + ((bk_{e1} - 3bk_{e2})b_1\\
&+ (5(b2 + 3b_{22}(1/5) + 8b_{55}(1/5)))bk_{e1})\beta_2^4 + ((10bk_{e1} + 8bk_{e2})b_2 + (2bk_{e1}\\
&+ 6bk_{e2})b_1 - 28b_{11}bk_{e1} - 10bk_{e1}b_{22} + 8b_{55}bk_{e2})\beta_2^2 + (bk_{e1} + bk_{e2})b_1\\
&+ (5bk_{e1} - 4bk_{e2})b_2 + (-5bk_{e1} + 4bk_{e2})b_{22} - 16b_{11}(bk_{e1} - 5bk_{e2}(1/4))
\end{aligned}
$$

$$\Lambda 303_4 = \frac{F_{27}}{F_{28}}$$

$$F_{28} = F_{26} = F_{24} = F_{22} = F_{20} = F_{16} = F_{18}$$

$$
\begin{aligned}
&F_{27}\\
&= {S_1}^2\beta_1 K_v(-b_2bt_{e2} + b_{22}bt_{e2} + b_{11}(bt_{e1} + 5bt_{e2}))\beta_1^4 + ((8b_{11}bt_{e1} + 2b_2bt_{e2}\\
&+ 2b_{22}bt_{e1} + 2b_{55}(bt_{e1} + bt_{e2}))\beta_2^2 + (5bt_{e1} - 5bt_{e2})b_2 + (bt_{e1} + bt_{e2})b_1\\
&+ (-5bt_{e1} + 5bt_{e2})b_{22} - 15b_{11}(bt_{e1} - 5bt_{e2}(1/3)))\beta_1^2 + ((bt_{e1} - 3bt_{e2})b_1\\
&+ (5(b_2 + 3b_{22}(1/5) + 8b_{55}(1/5)))bt_{e1})\beta_2^4 + ((10bt_{e1} + 8bt_{e2})b_2 + (2bt_{e1}\\
&+ 6bt_{e2})b_1 - 28b_{11}bt_{e1} - 10b_{22}bt_{e1} + 8b_{55}bt_{e2})\beta_2^2 + (bt_{e1} + bt_{e2})b_1 + (5bt_{e1}\\
&- 4bt_{e2})b_2 + (-5bt_{e1} + 4bt_{e2})b_{22} - 16b_{11}(bt_{e1} - 5bt_{e2}(1/4))
\end{aligned}
$$

منابع

[1] E. Ventsel and T. Krauthammer, Thin Plates and Shells Theory, Analysis, and Applications. Dekker, 2001.

[2] M. Naebe and K. Shirvanimoghaddam, “Functionally graded materials: A review of fabrication and properties,” *Appl. Mater. Today*, vol. 5, no. 2352–9407, pp. 223–245, 2016.

[3] A. P. and K. Seto, Active Control of Structures. John Wiley, 2008.

[4] N. Jalili, Piezoelectric-Based Vibration Control From Macro to Micro/Nano Scale System, *Springer*, New York, 2010.

[5] W. Zhang, T. Liu, A. Xi, and Y. N. Wang, “Resonant responses and chaotic dynamics of composite laminated circular cylindrical shell with membranes,” *J. Sound Vib.*, vol. 423, pp. 65–99, 2018.

[6] Y. Kurylov and M. Amabili, “Nonlinear vibrations of clamped-free circular cylindrical shells,” *J. Sound Vib.*, vol. 330, no. 22, pp. 5363–5381, 2011.

[7] G. G. Sheng, X. Wang, G. Fu, and H. Hu, “The nonlinear vibrations of functionally graded cylindrical shells surrounded by an elastic foundation,” *Nonlinear Dynamic.*, vol. 78, no. 2, pp. 1421–1434, 2014.

[8] A. Rahimi-moghaddam, M. Danesh, and K. Torabi, “Absolute frequency analysis of traveling waves in a thin-wall laminated composite cylindrical shell rotating on two-ending elastic supports,” *Compos. Struct.*, vol. 212, no. January, pp. 129–147, 2019.

[9] M. Amabili, “A non-linear higher-order thickness stretching and shear deformation theory for large-amplitude vibrations of laminated doubly curved shells,” *Int. J. Non. Linear. Mech.*, vol. 58, pp. 57–75, 2014.

[10] A. H. So and D. Hui, “On the vibration and stability of FGM cylindrical shells under external pressures with mixed boundary conditions by using FOSDT,” *Thin-Walled Structures*, vol. 134, no. August 2018, pp. 419–427, 2019.

[11] D. Van Dung and V. H. Nam, “Nonlinear dynamic analysis of eccentrically stiffened functionally graded circular cylindrical thin shells under external pressure and surrounded by an elastic medium*,” Eur. J. Mech. A/Solids*, vol. 46, pp. 42–53, 2014.

[12] H. Ahmadi and K. Foroutan, “Nonlinear primary resonance of spiral stiffened functionally graded cylindrical shells with damping force using the method of multiple scales,” *Thin Walled Struct.*, vol. 135, no. August 2018, pp. 33–44, 2019.

[13] M. Mohandes and A. R. Ghasemi, “A new approach to reinforce the fiber of nanocomposite reinforced by CNTs to analyze free vibration of hybrid laminated cylindrical shell using beam modal function method,” *Eur. J. Mech. A/Solids*, vol. 73, no. September 2018, pp. 224–234, 2019.

[14] A. H. Sofiyev, D. Hui, A. M. Najafov, S. Turkaslan, N. Dorofeyskaya, and G. Q. Yuan, “Influences of shear stresses and rotary inertia on the vibration of functionally graded coated sandwich cylindrical shells resting on the Pasternak elastic foundation,” *J. Sandw. Struct. Mater.*, vol. 17, no. 6, pp. 691–720, 2015.

[15] A. H. Sofiyev *et al.*, “Effects of shear stresses and rotary inertia on the stability and vibration of sandwich cylindrical shells with FGM core surrounded by elastic medium,” *Mech. Based Des. Struct. Mach.*, vol. 44, no. 4, pp. 384–404, 2016.

[16] A. H. Sofiyev, D. Hui, S. E. Huseynov, M. U. Salamci, and G. Q. Yuan, “Stability and vibration of sandwich cylindrical shells containing a functionally graded material core

with transverse shear stresses and rotary inertia effects," *Proc. Inst. Mech. Eng. Part C J. Mech. Eng. Sci.*, vol. 230, no. 14, pp. 2376–2389, 2016.

[17] S. J. Kim, J. S. Hwang, and J. Mok, "Sensor/actuator optimal design for active vibration control of shell structure," *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, vol. 11, no. 11, pp. 848–856, 2000.

[18] Z. G. Song, L. W. Zhang, and K. M. Liew, "Active vibration control of CNT-reinforced composite cylindrical shells via piezoelectric patches," *Compos. Struct.*, vol. 158, pp. 92–100, 2016.

[19] H. SafarPour, B. Ghanbari, and M. Ghadiri, "Buckling and free vibration analysis of high speed rotating carbon nanotube reinforced cylindrical piezoelectric shell," *Appl. Math. Model.*, vol. 65, pp. 428–442, 2019.

[20] Z. Zhou, Y. Ni, S. Zhu, Z. Tong, J. Sun, and X. Xu, "An accurate and straightforward approach to thermo-electro-mechanical vibration of piezoelectric fiber-reinforced composite cylindrical shells," *Compos. Struct.*, vol. 207, no. June 2018, pp. 292–303, 2019.

[21] H. Li, X. Zhang, and H. Tzou, "Diagonal piezoelectric sensors on cylindrical shells," *J. Sound Vib.*, vol. 400, pp. 201–212, 2017.

[22] G. G. Sheng and X. Wang, "Active control of functionally graded laminated cylindrical shells," *Compos. Struct.*, vol. 90, no. 4, pp. 448–457, 2009.

[23] G. G. Sheng, X. Wang, G. Fu, and H. Hu, "The nonlinear vibrations of functionally graded cylindrical shells surrounded by an elastic foundation," *Nonlinear Dyn.*, vol. 78, no. 2, pp. 1421–1434, 2014.

[24] L. L. Ke, Y. S. Wang, and J. N. Reddy, "Thermo-electro-mechanical vibration of size-dependent piezoelectric cylindrical nanoshells under various boundary conditions," *Compos. Struct.*, vol. 116, no. 1, pp. 626–636, 2014.

[25] X. Ma, G. Jin, Y. Xiong, and Z. Liu, "Free and forced vibration analysis of coupled conical-cylindrical shells with arbitrary boundary conditions," *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 88, pp. 122–137, 2014

[26] T. Ye, G. Jin, Y. Chen, and S. Shi, "A unified formulation for vibration analysis of open shells with arbitrary boundary conditions," *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 81, pp. 42–59, 2014.

[27] A. H. Sofiyev, "Parametric vibration of FGM conical shells under periodic lateral pressure within the shear deformation theory," *Compos. Part B Eng.*, vol. 89, pp. 282–294, 2016.

[28] K. Xie, M. Chen, and Z. Li, "An analytic method for free and forced vibration analysis of stepped conical shells with arbitrary boundary conditions," *Thin-Walled Struct.*, vol. 111, no. November 2016, pp. 126–137, 2017

[29] M. Shakouri and M. A. Kouchakzadeh, "Analytical solution for vibration of generally laminated conical and cylindrical shells," *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 131–132, pp. 414–425, 2017.

[30] A. H. Sofiyev, "Application of the first order shear deformation theory to the solution of free vibration problem for laminated conical shells," *Compos. Struct.*, vol. 188, pp. 340–346, 2018.

[31] L. Ren-huai and L. Jun, "Non-linear vibration of shallow conical sandwich shells," *Int. J. Non. Linear. Mech.*, vol. 30, no. 2, pp. 97–109, 1995.

[32] Y. M. Fu and C. P. Chen, “Non-linear vibration of elastic truncated conical moderately thick shells in large overall motion,” *Int. J. Non. Linear. Mech.*, vol. 36, no. 5, pp. 763–771, 2001

[33] A. Deniz, “Non-linear stability analysis of truncated conical shell with functionally graded composite coatings in the finite deflection,” *Compos. Part B*, vol. 51, pp. 318–326, 2013.

[34] A. M. Najafov and A. H. Sofiyev, “The non-linear dynamics of FGM truncated conical shells surrounded by an elastic medium,” *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 66, pp. 33–44, 2013.

[35] A. H. Sofiyev, “The combined influences of heterogeneity and elastic foundations on the nonlinear vibration of orthotropic truncated conical shells,” *Compos. Part B Eng.*, vol. 61, pp. 324–339, 2014.

[36] A. H. Sofiyev and N. Kuruoglu, “Large-amplitude vibration of the geometrically imperfect FGM truncated conical shell,” *JVC/Journal Vib. Control*, vol. 21, no. 1, pp. 142–156, 2015.

[37] A. H. Sofiyev, “The non-linear vibration of FGM truncated conical shells,” *Compos. Struct.*, vol. 94, no. 7, pp. 2237–2245, 2012.

[38] A. H. Sofiyev, “Non-linear buckling behavior of FGM truncated conical shells subjected to axial load,” *Int. J. Non. Linear. Mech.*, vol. 46, no. 5, pp. 711–719, 2011

[39] Y. X. Hao, Y. Niu, W. Zhang, M. H. Yao, and S. B. Li, “Nonlinear Vibrations of FGM Circular Conical Panel Under In-Plane and Transverse Excitation,” *J. Vib. Eng. Technol.*, vol. 6, no. 6, pp. 453–469, 2018.

[40] A. M. Najafov, A. H. Sofiyev, D. Hui, F. Kadioglu, N. V. Dorofeyskaya, and H. Huang, “Non-linear dynamic analysis of symmetric and antisymmetric cross-ply laminated orthotropic thin shells,” *Meccanica*, vol. 49, no. 2, pp. 413–427, 2014.

[41] A. R. Setoodeh, M. Tahani, and E. Selahi, “Transient dynamic and free vibration analysis of functionally graded truncated conical shells with non-uniform thickness subjected to mechanical shock loading,” *Compos. Part B*, vol. 43, no. 5, pp. 2161–2171, 2012.

[42] S. Sarkheil and M. Saadat, “Thin-Walled Structures Free vibrational characteristics of rotating joined cylindrical-conical shells,” *Thin Walled Struct.*, vol. 107, pp. 657–670, 2016.

[43] A. H. Sofiyev, “The buckling and vibration analysis of coating-FGM-substrate conical shells under hydrostatic pressure with mixed boundary conditions,” *Compos. Struct.*, vol. 209, no. October 2018, pp. 686–693, 2019.

[44] F. Tornabene, “Free vibration analysis of functionally graded conical , cylindrical shell and annular plate structures with a four-parameter power-law distribution,” *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 198, no. 37–40, pp. 2911–2935, 2009.

[45] A. H. Sofiyev, “The stability of functionally graded truncated conical shells subjected to aperiodic impulsive loading,” *Int. J. Solids Struct.*, vol. 41, no. 13, pp. 3411–3424, 2004.

[46] A. H. Sofiyev, “The buckling of FGM truncated conical shells subjected to combined axial tension and hydrostatic pressure,” *Compos. Struct.*, vol. 92, no. 2, pp. 488–498, 2010.

[47] A. H. Sofiyev and E. Schnack, “The vibration analysis of FGM truncated conical shells resting on two-parameter elastic foundations,” *Mech. Adv. Mater. Struct.*, vol. 19, no. 4, pp. 241–249, 2012.

[48] A. H. Sofiyev, A. Deniz, I. H. Akçay, and E. Yusufoğlu, “The vibration and stability of a three-layered conical shell containing an FGM layer subjected to axial compressive load,” *Acta Mech.*, vol. 183, no. 3–4, pp. 129–144, 2006.

[49] A. H. Sofiyev and E. Osmancelebioglu, “The free vibration of sandwich truncated conical shells containing functionally graded layers within the shear deformation theory,” *Compos. Part B Eng.*, vol. 120, pp. 197–211, 2017

[50] A. H. Sofiyev, “Application of the first order shear deformation theory to the solution of free vibration problem for laminated conical shells,” *Compos. Struct.*, vol. 188, pp. 340–346, 2018.

[51] S. Mahmoudkhani, H. Haddadpour, and H. M. Navazi, “Supersonic flutter prediction of functionally graded conical shells,” *Compos. Struct.*, vol. 92, no. 2, pp. 377–386, 2010.

[52] D. H. Bich, N. T. Phuong, and H. Van Tung, “Buckling of functionally graded conical panels under mechanical loads,” *Compos. Struct.*, vol. 94, no. 4, pp. 1379–1384, 2012.

[53] S. W. Yang, W. Zhang, Y. X. Hao, and Y. Niu, “Nonlinear vibrations of FGM truncated conical shell under aerodynamics and in-plane force along meridian near internal resonances,” *Thin-Walled Struct.*, vol. 142, no. February, pp. 369–391, 2019.

[54] F. Tornabene, E. Viola, and D. J. Inman, “2-D differential quadrature solution for vibration analysis of functionally graded conical , cylindrical shell and annular plate structures,” *J. Sound Vib.*, vol. 328, no. 3, pp. 259–290, 2009.

[55] X. Zhao and K. M. Liew, “Free vibration analysis of functionally graded conical shell panels by a meshless method,” *Compos. Struct.*, vol. 93, no. 2, pp. 649–664, 2011.

[56] P. Malekzadeh and Y. Heydarpour, “Free vibration analysis of rotating functionally graded truncated conical shells,” *Compos. Struct.*, vol. 97, pp. 176–188, 2013.

[57] Y. Heydarpour, P. Malekzadeh, and M. M. Aghdam, “Free vibration of functionally graded truncated conical shells under internal pressure,” *Meccanica*, vol. 49, no. 2, pp. 267–282, 2014.

[58] P. Malekzadeh and M. Daraie, “Dynamic analysis of functionally graded truncated conical shells subjected to asymmetric moving loads,” *Thin-Walled Struct.*, vol. 84, pp. 1–13, 2014.

[59] X. Xie, G. Jin, T. Ye, and Z. Liu, “Free vibration analysis of functionally graded conical shells and annular plates using the Haar wavelet method,” *Appl. Acoust.*, vol. 85, pp. 130–142, 2014.

[60] M. Z. Nejad, M. Jabbari, and M. Ghannad, “Elastic analysis of FGM rotating thick truncated conical shells with axially-varying properties under non-uniform pressure loading,” *Compos. Struct.*, vol. 122, pp. 561–569, 2015.

[61] A. Deniz, Z. Zerin, and Z. Karaca, “Winkler-Pasternak foundation effect on the frequency parameter of FGM truncated conical shells in the framework of shear deformation theory,” *Compos. Part B Eng.*, vol. 104, pp. 57–70, 2016.

[62] A. H. Sofiyev, Z. Zerin, B. P. Allahverdiev, D. Hui, F. Turan, and H. Erdem, “The dynamic instability of FG orthotropic conical shells within the SDT,” *Steel Compos. Struct.*, vol. 25, no. 5, pp. 581–591, 2017.

[63] S. Jalili, J. Zamani, M. Shariyat, N. Jalili, M. A. B. Ajdari, and M. Jafari, “Experimental and numerical investigation of composite conical shells’ stability subjected to dynamic loading,” *Struct. Eng. Mech.*, vol. 49, no. 5, pp. 555–568, 2014.

[64] J. Torabi and R. Ansari, “A higher-order isoparametric superelement for free vibration analysis of functionally graded shells of revolution,” *Thin-Walled Struct.*, vol. 133, no. August, pp. 169–179, 2018.

[65] Y. Qu, Y. Chen, X. Long, H. Hua, and G. Meng, “European Journal of Mechanics A / Solids A modi fi ed variational approach for vibration analysis of ring-stiffened conical e cylindrical shell combinations,” *Eur. J. Mech. / A Solids*, vol. 37, pp. 200–215, 2013.

[66] K. Xie, M. Chen, W Jia, Kun Xu, “Free and forced vibration of submerged ring-stiffened conical shells with arbitrary boundary conditions,” Ocean Engineering., vol. 108, pp. 241–256, 2015.

[67] K. Xie, M. Chen, N. Deng, and W. Jia, “Free and forced vibration of submerged ring-stiffened conical shells with arbitrary boundary conditions,” *Thin-Walled Struct.*, vol. 96, pp. 240–255, 2015.

[68] S. Kamarian, M. Salim, R. Dimitri, and F. Tornabene, “Free vibration analysis of conical shells reinforced with agglomerated Carbon Nanotubes,” *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 108–109, pp. 157–165, 2016.

[69] Y. Kiani, R. Dimitri, and F. Tornabene, “Free vibration study of composite conical panels reinforced with FG-CNTs,” *Eng. Struct.*, vol. 172, no. May, pp. 472–482, 2018.

[70] M. H. Yas, M. Nejati, and A. Asanjarani, “Free vibration analysis of continuously graded fiber reinforced truncated conical shell via third-order shear deformation theory,” *J. Solid Mech.*, vol. 8, no. 1, pp. 212–231, 2016.

[71] R. Ansari, E. Hasrati, and J. Torabi, “Nonlinear vibration response of higher-order shear deformable FG-CNTRC conical shells,” *Compos. Struct.*, vol. 222, p. 110906, 2019.

[72] D. Van Dung, L. K. Hoa, N. T. Nga, and L. T. N. Anh, “Instability of eccentrically stiffened functionally graded truncated conical shells under mechanical loads,” *Compos. Struct.*, vol. 106, pp. 104–113, 2013.

[73] D. Van Dung, L. T. N. Anh, and L. K. Hoa, “Analytical investigation on the free vibration behavior of rotating FGM truncated conical shells reinforced by orthogonal eccentric stiffeners,” *Mech. Adv. Mater. Struct.*, vol. 25, no. 1, pp. 32–46, 2018.

[74] M. Mehri, H. Asadi, and Q. Wang, “Buckling and Vibration analysis of a Pressurized CNT Reinforced Functionally Graded Truncated Conical Shell under an Axial Compression Using HDQ Method,” *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 303, pp. 75–100, 2016.

[75] Y. Heydarpour, M. M. Aghdam, and P. Malekzadeh, “Free vibration analysis of rotating functionally graded carbon nanotube-reinforced composite truncated conical shells,” *Compos. Struct.*, vol. 117, pp. 187–200, 2014.

[76] D. N. Dinh and P. D. Nguyen, “The dynamic response and vibration of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite (FG-CNTRC) truncated conical shells resting on elastic foundations,” *Materials (Basel).*, vol. 10, no. 10, 2017

[77] R. Ansari and J. Torabi, “Numerical study on the buckling and vibration of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite conical shells under axial loading,” *Compos. Part B Eng.*, vol. 95, pp. 196–208, 2016.

[78] Y. Kiani, “Torsional vibration of functionally graded carbon nanotube reinforced conical shells,” *Sci. Eng. Compos. Mater.*, vol. 25, no. 1, pp. 41–52, 2018.

[79] N. D. Duc, K. Seung-Eock, and D. Q. Chan, “Thermal buckling analysis of FGM sandwich

truncated conical shells reinforced by FGM stiffeners resting on elastic foundations using FSDT,” *J. Therm. Stress.*, vol. 41, no. 3, pp. 331–365, 2018.

[80] Y. Kiani, “Buckling of functionally graded graphene reinforced conical shells under external pressure in thermal environment,” *Compos. Part B Eng.*, vol. 156, pp. 128–137, 2019.

[81] N. D. Duc *et al.*, “Mechanical and thermal stability of eccentrically stiffened functionally graded conical shell panels resting on elastic foundations and in thermal environment,” *Compos. Struct.*, vol. 132, pp. 597–609, 2015.

[82] N. D. Duc, P. H. Cong, N. D. Tuan, P. Tran, and N. Van Thanh, “Thermal and mechanical stability of functionally graded carbon nanotubes (FG CNT)-reinforced composite truncated conical shells surrounded by the elastic foundations,” *Thin-Walled Struct.*, vol. 115, no. January, pp. 300–310, 2017

[83] D. Q. Chan, V. T. T. Anh, and N. D. Duc, “Vibration and nonlinear dynamic response of eccentrically stiffened functionally graded composite truncated conical shells surrounded by an elastic medium in thermal environments,” *Acta Mech.*, vol. 230, no. 1, pp. 157–178, 2019.

[84] M. E. Fares, Y. G. Youssif, and A. E. Alamir, “Design and control optimization of composite laminated truncated conical shells for minimum dynamic response including transverse shear deformation,” *Compos. Struct.*, vol. 64, no. 2, pp. 139–150, 2004.

[85] P. H. Shah and M. C. Ray, “Active control of laminated composite truncated conical shells using vertically and obliquely reinforced 1-3 piezoelectric composites,” *Eur. J. Mech. A/Solids*, vol. 32, pp. 1–12, 2012.

[86] A. Kumar and M. C. Ray, “Control of smart rotating laminated composite truncated conical shell using ACLD treatment,” *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 89, pp. 123–141, 2014.

[87] H. Li, H. Y. Li, Z. B. Chen, and H. S. Tzou, “Experiments on active precision isolation with a smart conical adapter,” *J. Sound Vib.*, vol. 374, pp. 17–28, 2016.

[88] M. E. Fares, M. K. Elmarghany, and D. Atta, “Suppressing vibrational response of functionally graded truncated conical shells by active control and design optimization,” *Thin-Walled Struct.*, vol. 122, no. September 2017, pp. 480–490, 2018.

[89] M. H. Hajmohammad, M. S. Zarei, A. Farrokhian, and R. Kolahchi, “A layerwise theory for buckling analysis of truncated conical shells reinforced by CNTs and carbon fibers integrated with piezoelectric layers in hygrothermal environment,” Advances in nano research, vol. 6, no. 4, pp. 299–321, Dec. 2018.

[90] F. Ramirez, P. R. Heyliger, and E. Pan, “Free vibration response of two-dimensional magneto-electro-elastic laminated plates,” vol. 292, pp. 626–644, 2006.

[91] V. I. Lebedev, “On formulae for roots of cubic equation,” *Math.Modeling*, vol. 6, no. 4, pp. 315–324, 1991.

Abstract

In this thesis, active vibration control of truncated conical shell under harmonic excitation using piezoelectric actuator is investigated. For this purpose, first, dynamic equation of the FGM truncated conical shell is derived. Using the Galerkin method the ordinary differential equations of the system are obtained. Then, using semi-analytical perturbation theory methods, resonance analyzes (primary resonance, supersonic and subharmonics) are performed to investigate the hardening or softening behavior of the system. To active control of system, we add the outer layer as the actuator and the inner layer as the sensor to the system. Due to the added piezoelectric layers, the governing equations of the system are again extracted. Using the piezoelectric sensors, active vibration control of this structure are performed, and the effect of piezoelectric sensors on the softening or hardening behavior of the structure are investigated. The necessary analysis for this structure are represented at different vertex angles of the cone, volume fraction and loading.

keywords: Nonlinear vibration, active control, piezoelectric layers, functional graded material, truncated conical shell

Shahrood University of

Technology

Faculty of Mechanical and Mechatronics Engineering

MSc Thesis in Mechanical Engineering- Applied Design

Active vibration control of truncated conical shell under harmonic excitation using piezoelectric actuator

By:Syyed Morteza fatemi moghaddam

Supervisor:

Dr. Habib Ahmadi

September, 2019