بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک و مکاترونیک

رساله‌ی دکترای مهندسی طراحی کاربردی

تحلیل الاستیک غیرخطی استوانه‌های ضخیم تحت فشار با جدار متغیر از مواد هایپرالاستیک به کمک تئوری تغییر شکل برشی

نگارنده: حامد قارونی

استاد راهنما

دکتر مهدی قنّاد

مهرماه ۱۳۹۸

شماره:
تاریخ:
ویرایش:

باسمه تعالی

مدیریت تحصیلات تکمیلی

صورت جلسه نهایی دفاع از رساله دکتری (Ph.D)

بدینوسیله گواهی می شود آقای **حامد قارونی** دانشجوی دکتری رشته **مهندسی مکانیک** به شماره دانشجویی **۹۲۱۶۹۶۵** ورودی **مهرماه** ماه سال **۱۳۹۲** در تاریخ **۹۸/۰۷/۰۴** از رساله **نظری** ■/ **عملی**☐ خود با عنوان: **تحلیل الاستیک غیرخطی استوانه‌های ضخیم تحت فشار با جدارمتغیر از مواد هایپرالاستیک به کمک تئوری تغییر شکل برشی**
دفاع و با اخذ نمره .... به درجه : .... نائل گردید.

الف) درجه عالی: نمره ۲۰-۱۹☐	ب) درجه بسیار خوب: نمره ۱۸/۹۹ – ۱۷☐
ج) درجـه خوب: نمره۱۶/۹۹– ۱۵☐	د) غیر قـابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد ☐
ه) رساله نیاز به اصلاحات دارد ☐	

ردیف	نام و نام خانوادگی	هیئت داوران	مرتبه علمی	امضاء
۱	دکتر مهدی قناد	استاد راهنما	دانشیار	
۲	دکتر حمیدرضا ایپک‌چی	استاد مدعو داخلی	دانشیار	
۳	دکتر محمد جعفری	استاد مدعو داخلی	دانشیار	
۴	دکتر مسعود طهانی	استاد مدعو خارجی	استاد	
۵	دکتر حبیب احمدی	نماینده تحصیلات تکمیلی دانشکده	استادیار	

مدیر محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه:

ضــمن تأیید مراتب فوق مقرر فرمائید اقدامات لازم در خصــوص انجام مراحل دانش آموختگی آقای **حامد قارونی** بعمل آید.

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر محمد محسن شاه مردان

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

« وَ تَوَكَّلْ عَلَى اللَّهِ وَ كَفَى بِاللَّهِ وَكِيلاً »

اثر حاضر را - اگر ارزشی باشد -
با افتخار و عشق پیشکش می کنم به خانواده عزیزتر از جانم،

به پدرم؛ کوهی استوار که حامی من در طول تمام زندگی است.

به مادرم؛ سنگ صبوری که الفبای زندگی به من آموخت.

به خواهرم؛ که در سایه همیاری و همدلی او به این منظور نائل شدم.

به خواهرزاده ام؛ امید بخش جانم که آسایش او آرامش من است.

به پاس حمایت ها، زحمات و کمک های بی دریغ خالصانه و صمیمانه آنها.

تشکر و قدردانی

اکنون که به یاری خداوند این دوره را به پایان رسانیده‌ام،

بر خود واجب می‌دانم بیش و پیش از همه، از پدر و مادر عزیزم که بزرگ‌ترین نعمت الهی در زندگی من بوده و هستند، به سبب کمک‌ها و حمایت‌های بی‌دریغ مادّی و معنوی آنها سپاس‌گزاری نمایم. از درگاه خداوند متعال برایشان طلب سلامتی و عمر با عزت دارم.

نیز، از خواهر عزیزم و خواهرزاده دلبندم به خاطر همفکری‌ها، همزبانی‌ها و همدلی‌های صمیمانه آنها تشکر می‌کنم.

همچنین، از استاد فرزانه و معلم بزرگوار خویش، که به حق تجسم کامل معنای معلم هستند، جناب آقای دکتر مهدی قنّاد، که به عنوان استاد راهنما در مراحل مختلف این رساله همواره با سعه صدر و گشاده‌رویی در کنار من بودند و در طول مدت تحصیل از راهنمایی‌های اخلاقی و علمی و حمایت‌های ایشان بهره جسته‌ام، تشکر و قدردانی می‌نمایم و برای ایشان طول عمر توام با سربلندی را آرزومندم.

در پایان، از تمامی معلمان و اساتیدی که توفیق دانش‌آموزی و دانشجویی در محضرشان را داشتم، به‌خصوص جناب آقای دکتر حمیدرضا ایپک‌چی، سپاسگزارم. همینطور از همکاری‌ها و کمک‌های دوستان ارجمندم آقایان دکتر محمد پرهیزکار، دکتر مهدی جبّاری، دکتر محمد حسین سوهانی و دکتر احد فروندی متشکرم و از درگاه خداوند برای تمام این عزیزان حسن عاقبت خواستارم.

امیدوارم این رساله بخشی هرچند ناچیز از زحمات و همراهی‌های خانواده، استادان و دوستان عزیزم را جبران کرده باشد.

حامد قارونی

مهرماه ۱۳۹۸

تعهد نامه

اینجانب **حامد قارونی** دانشجوی دوره‌ی دکترای رشته‌ی مهندسی مکانیک دانشکده‌ی مهندسی مکانیک و مکاترونیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده‌ی پایان‌نامه با عنوان **"**تحلیل الاستیک غیرخطی استوانه‌های ضخیم تحت فشار با جدار متغیر از مواد هایپرالاستیک به کمک تئوری تغییر شکل برشی" تحت راهنمائی دکتر مهدی قنّاد متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این رساله توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در رساله تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه‌ی حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا «Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آمدن نتایج اصلی رساله تأثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از رساله رعایت می گردد.
- در کلیه‌ی مراحل انجام این رساله، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه‌ی مراحل انجام این رساله، در مواردی که به حوزه‌ی اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است؛ اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ: **۹۸/۰۷/۰٤**

امضای دانشجو:

مالکیت نتایج و حق نشر

کلیه‌ی حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب ، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.

استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در رساله بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

هدف از انجام این پژوهش، ارائه‌ی روشی تحلیلی برای بررسی رفتار الاستیک غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای و مخروطی جدار ضخیم با ضخامت متغیر تحت فشار متغیر، ساخته‌شده از مواد هایپرالاستیک در حالت تعادل استاتیکی است. جنس پوسته از مادّه‌ی هایپرالاستیک ناهمگن و همسانگرد بر اساس مدل ساختاری مونی-ریولین دوجمله‌ای و نئوهوکین در حالت تقریباً تراکم‌ناپذیر با تغییرات خواص در راستای شعاعی پوسته انتخاب شده است. در حالت عمومی تغییرات جدار و فشار داخلی و خارجی به‌صورت تابعی غیرخطی بر حسب متغیر طولی پوسته درنظر گرفته شده و مسأله در حالت تقارن محوری بررسی می‌شود. معادلات حاکم بر مسأله با فرض برقراری روابط سینماتیک (کرنش-جابه‌جایی) و روابط ساختاری (تنش-کرنش) غیرخطی با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل استخراج شده است. دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی با ضرایب متغیر حاکم بر مسأله بر اساس نظریه‌ی اغتشاشات برای شرایط مرزی گیردار حل شده است. در روش ارائه‌شده به کمک بسط مجانبی تطبیق‌یافته، معادلات هر یک از حل‌های خارجی و داخلی به همراه ماتریس‌های ضرایب و بردارهای ناهمگنی تا بسط اغتشاشی مرتبه‌ی دو نشان داده شده‌اند. نهایتاً با اعمال شرایط مرزی و استفاده از شروط انطباقی، یک حل یکنواخت برای مؤلفه‌های جابه‌جایی پوسته ارائه شده و تنش‌های کوشی به کمک روابط سینماتیک و ساختاری غیرخطی محاسبه شده است. بررسی درستی نتایج، از طریق مقایسه‌ی نتایج پژوهش جاری با نتایج حاصل از مدل‌سازی عددی به کمک بسته‌ی نرم‌افزاری اجزای محدود ANSYS انجام شده است. نتایج حاصل از حل تحلیلی و مدل‌سازی عددی برای پوسته‌های استوانه‌ای و مخروطی جدار متغیر در حالت همگن و ناهمگن همگرایی حل‌ها را نشان می‌دهند.

کلمات کلیدی: استوانه‌ی جدار متغیر، مخروط جدار ضخیم، نظریه‌ی تغییر شکل برشی، نظریه‌ی اغتشاشات، روش بسط مجانبی تطبیق‌یافته، مدل مونی-ریولین، مواد هایپرالاستیک تقریباً تراکم‌ناپذیر.

لیست مقالات مستخرج از پایان‌نامه

۱- حامد قارونی، مهدی قنّاد؛ "حل تحلیلی استوانه تحت فشار داخلی از جنس ماده‌ی نئوهوک تقریباً تراکم‌ناپذیر به کمک تئوری تغییر شکل برشی"، پنجمین کنفرانس بین‌المللی پژوهش‌های کاربردی در مهندسی برق، مکانیک و مکاترونیک (EMME)، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران، ۱۳۹۷.

۲- حامد قارونی، مهدی قنّاد؛ "حل تحلیلی غیرخطی استوانه‌ی ضخیم تحت فشار از جنس ماده‌ی هایپرالاستیک تقریباً تراکم‌ناپذیر"، بیست و هفتمین همایش سالانه‌ی بین‌المللی مهندسی مکانیک ایران (ISME)، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران، ۱۳۹۸.

3- Hamed Gharooni, Mehdi Ghannad; "Nonlinear analytical solution of nearly incompressible hyperelastic cylinder with variable thickness under non-uniform pressure by perturbation technique", Journal of Computational Applied Mechanics (JCAMECH), Accepted, 2019, (ISC).

4- Hamed Gharooni, Mehdi Ghannad; "Nonlinear analysis of radially functionally graded hyperelastic cylindrical shells with axially-varying thickness and non-uniform pressure loads based on perturbation theory", Journal of Computational Applied Mechanics (JCAMECH), Accepted, 2019, (ISC).

5- Hamed Gharooni, Mehdi Ghannad; "New nonlinear solution of nearly incompressible hyperelastic FGM cylindrical shells with arbitrary variable thickness and non-uniform pressure based on perturbation theory", Latin American Journal of Solids and Structures (LAJSS), Published, Vol. 16, No. 8, 2019, (ISI), https://doi.org/10.1590/1679-78255622.

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها و نمودارها .... س

فهرست جدول‌ها .... ط

فهرست نمادها .... ع

فصل ۱. مقدمه و مرور مقالات ۱

۱-۱ مقدمه ۲

۱-۲ پوسته‌ها ۴

۱-۲-۱ دسته‌بندی پوسته‌ها ۴

۱-۲-۲ نظریه‌های تحلیل پوسته‌ها ۶

۱-۲-۲-۱ نظریه‌ی پوسته‌های نازک ۶

۱-۲-۲-۲ نظریه‌ی پوسته‌های ضخیم ۸

۱-۲-۳ نظریه‌های غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای ۱۱

۱-۲-۳-۱ نظریه‌ی غیرخطی دانل ۱۱

۱-۲-۳-۲ نظریه‌ی فلوگه-لور-بیرنه ۱۳

۱-۲-۳-۳ نظریه‌ی غیرخطی نووژیلوف ۱۳

۱-۲-۳-۴ نظریه‌ی غیرخطی سندرز-کویتر ۱۴

۱-۲-۳-۵ نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل غیرخطی ۱۴

۱-۳ مواد هایپرالاستیک ۱۵

۱-۳-۱ تعریف مواد هایپرالاستیک ۱۵

۱-۳-۲ انواع مواد هایپرالاستیک ۱۷

۱-۳-۳ مواد هایپرالاستیک (گرین-الاستیک) از دیدگاه مکانیک محیط پیوسته ۲۰

۱-۳-۴ اصول حاکم بر مدل‌های ساختاری ۲۳

۱-۳-۵ روابط ساختاری مواد هایپرالاستیک همسانگرد ۲۶
۱-۳-۵-۱ روابط ساختاری برای مواد تراکم‌پذیر ۲۶
۱-۳-۵-۲ بسط سری‌های انرژی کرنشی ۲۸
۱-۳-۵-۳ روابط ساختاری برای مواد تراکم‌ناپذیر ۲۸
۱-۳-۶ مدل‌های ساختاری خاص مواد هایپرالاستیک ۲۹
۱-۳-۷ روش‌های انرژی جهت تحلیل مواد هایپرالاستیک تراکم‌ناپذیر ۳۸
۱-۴ پیشینه‌ی پژوهش ۴۲
۱-۴-۱ تحلیل الاستیک خطی پوسته‌های جدار ثابت و متغیر ۴۲
۱-۴-۲ تحلیل غیرخطی هندسی پوسته‌های جدار ثابت و متغیر ۴۶
۱-۴-۳ تحلیل پوسته‌های هایپرالاستیک ۴۸
۱-۵ جمع‌بندی ۵۶

فصل ۲. معادلات حاکم ۵۹
۲-۱ توصیف مسأله ۶۰
۲-۲ نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول ۶۰
۲-۳ روابط سینماتیک غیرخطی ۶۲
۲-۴ روش تابع خطا ۶۷
۲-۵ معادله‌ی ساختاری مدل مونی-ریولین دوجمله‌ای ۶۹
۲-۶ اصل کار مجازی برای مواد هایپرالاستیک ۷۲
۲-۷ جمع‌بندی ۷۷

فصل ۳. حل تحلیلی ۷۹
۳-۱ مقدمه ۸۰
۳-۲ آماده‌سازی معادلات جهت حل اغتشاشی ۸۰
۳-۳ حل خارجی ۸۳
۳-۴ حل داخلی ۸۶

۳-۵ حل کلی یکنواخت ۹۵
۳-۶ مدل‌سازی عددی اجزای محدود ۹۷
۳-۷ جمع‌بندی ۹۸

فصل ۴. بررسی نتایج ۱۰۱
۴-۱ مقدمه ۱۰۲
۴-۲ بررسی عوامل مؤثر بر حل تحلیلی ۱۰۴
۴-۳ استوانه‌های جدار متغیرخارجی تحت فشار داخلی ۱۱۱
۴-۳-۱ استوانه‌ی همگن ۱۱۱
۴-۳-۲ استوانه‌ی ناهمگن ۱۱۵
۴-۴ مخروط جدار متغیر تحت فشار متغیر داخلی و خارجی ۱۳۰
۴-۴-۱ مخروط همگن ۱۳۲
۴-۴-۲ مخروط ناهمگن ۱۴۰
۴-۵ بررسی اثر مدل مادّه بر روابط و رفتار پوسته‌ی استوانه‌ای ۱۴۵
۴-۶ جمع‌بندی ۱۵۷

فصل ۵. نتیجه‌گیری و پیشنهادها ۱۵۹
۵-۱ مقدمه ۱۶۰
۵-۲ بحث و نتیجه‌گیری ۱۶۰
۵-۳ پیشنهادها ۱۶۹

مراجع ۱۷۱

فهرست شکل‌ها و نمودارها

شکل ۱-۱ مولکول‌های لاستیک ۱۸

شکل ۱-۲ نمودار تنش-کرنش مواد شبه‌لاستیک [۶] ۱۹

شکل ۲-۱ متغیرهای هندسی، بارگذاری و شرایط مرزی در مقطع پوسته‌ی مخروطی ضخیم جدار متغیر ۶۱

شکل ۳-۱ نمونه‌ی گره‌بندی پوسته‌های استوانه‌ای و مخروطی شکل مدل‌سازی شده ۹۸

شکل ۴-۱ نمودارهای تنش-کرنش و نمونه‌های آزمایش (الف) کشش تک‌محوری (ب) برش ساده (ج) حجمی [۱۱۱] ۱۰۳

شکل ۴-۲ اثر ضخامت بر دقت FSDT و MAE در تحلیل (الف) خطی (شکل ۳ از مرجع [۱۱۴]) (ب) غیرخطی پوسته‌ی استوانه‌ای ۱۰۶

شکل ۴-۳ اثر متغیر k بر درصد اختلاف جابه‌جایی شعاعی حاصل از حل تحلیلی و عددی برای مقادیر مختلف $\bar{R}$ و $P_i/(C_1+C_2)$ ۱۰۸

شکل ۴-۴ اثر متغیر k بر جابه‌جایی شعاعی در لایه‌ی میانی پوسته‌ی استوانه‌ای ۱۰۹

شکل ۴-۵ اثر متغیر k بر جابه‌جایی محوری در لایه‌ی داخلی پوسته‌ی استوانه‌ای ۱۰۹

شکل ۴-۶ اثر متغیر ε بر درصد اختلاف جابه‌جایی شعاعی حاصل از حل تحلیلی و عددی برای مقادیر مختلف $\bar{R}$ ۱۱۰

شکل ۴-۷ اثر متغیر ε بر (الف و ب) جابه‌جایی شعاعی در لایه‌ی میانی و (ج و د) جابه‌جایی محوری در لایه‌ی داخلی پوسته‌ی استوانه‌ای ۱۱۰

شکل ۴-۸ متغیرهای هندسی، بارگذاری و شرایط مرزی در مقطع پوسته‌ی استوانه‌ای ضخیم جدار متغیر ۱۱۱

شکل ۴-۹ توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد در راستای (الف) طولی (ب) شعاعی در لایه-های مختلف ۱۱۲

شکل ۴-۱۰ توزیع جابه‌جایی محوری بی‌بعد در راستای (الف) طولی (ب) شعاعی در لایه‌های مختلف ۱۱۳

شکل ۴-۱۱ توزیع تنش‌های کوشی بی‌بعد (الف) محیطی (ب) برشی در راستای طولی برای لایه‌های مختلف ۱۱۳

شکل ۴-۱۲ اثر ضخامت و فشار بر (الف و ب) جابه‌جایی شعاعی و (ج و د) جابه‌جایی محوری در لایه‌ی داخلی پوسته‌ی استوانه‌ای جدار و فشار متغیر خطی ۱۱۴

شکل ۴-۱۳ اثر شعاع داخلی بر (الف و ب) جابه‌جایی شعاعی و (ج و د) جابه‌جایی محوری در لایه‌ی داخلی پوسته‌ی استوانه‌ای جدار و فشار متغیر خطی ۱۱۵

شکل ۴-۱۴ نمایش سه‌بعدی جابه‌جایی (الف) شعاعی (ب) محوری حاصل از مدل‌سازی اجزای محدود در گسترش ۳/۴ مقطع پوسته ($n=2, P_{\mathrm{i}}(\bar{x})=P_{\mathrm{i}1}, h(\bar{x})=h_1$) ۱۲۰

شکل ۴-۱۵ توزیع بی‌بعد جابه‌جایی (الف) شعاعی (ب) محوری برای لایه‌های مختلف در راستای طولی استوانه ($n=2, P_{\mathrm{i}}(\bar{x})=P_{\mathrm{i}1}, h(\bar{x})=h_1$) ۱۲۱

شکل ۴-۱۶ توزیع بی‌بعد تنش‌های کوشی (الف) محیطی (ب) محوری (ج) برشی و (د) فشار هیدرواستاتیک برای لایه‌های مختلف در راستای طولی استوانه ($n=2, P_{\mathrm{i}}(\bar{x})=P_{\mathrm{i}1}, h(\bar{x})=h_1$) ۱۲۱

شکل ۴-۱۷ توزیع بی‌بعد تنش کوشی شعاعی در لایه‌ی میانی در راستای طولی استوانه برای مرتبه‌های مختلف روش MAE ($n=2, P_{\mathrm{i}}(\bar{x})=P_{\mathrm{i}1}, h(\bar{x})=h_1$) ۱۲۱

شکل ۴-۱۸ توزیع بی‌بعد توانی ثابت‌های مادّه در راستای شعاعی پوسته برای ثابت‌های ناهمگنی مختلف ۱۲۳

شکل ۴-۱۹ اثر ثابت ناهمگنی بر توزیع بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی حاصل از دو روش حل در راستای (الف) طولی لایه‌ی داخلی (ب) شعاعی در $\bar{x}=0.15$ ($P_{\mathrm{i}}(\bar{x})=P_{\mathrm{i}1}, h(\bar{x})=h_1$) ۱۲۴

شکل ۴-۲۰ اثر ثابت ناهمگنی بر توزیع بی‌بعد جابه‌جایی محوری حاصل از دو روش حل در راستای (الف) طولی لایه‌ی داخلی (ب) شعاعی در $\bar{x}=0.65$ ($P_{\mathrm{i}}(\bar{x})=P_{\mathrm{i}1}, h(\bar{x})=h_1$) ۱۲۴

شکل ۴-۲۱ اثر ثابت ناهمگنی بر توزیع بی‌بعد (الف) تنش کوشی محوری (ب) فشار هیدرواستاتیک در راستای طولی لایه‌ی داخلی پوسته ($P_{\mathrm{i}}(\bar{x})=P_{\mathrm{i}1}, h(\bar{x})=h_1$) ۱۲۴

شکل ۴-۲۲ اثر ثابت ناهمگنی بر توزیع بی‌بعد تنش کوشی محیطی در راستای (الف) طولی لایه‌ی داخلی (ب) شعاعی در $\bar{x}=0$ ($P_{\mathrm{i}}(\bar{x})=P_{\mathrm{i}1}, h(\bar{x})=h_1$) ۱۲۵

شکل ۴-۲۳ توزیع توابع فشار داخلی در راستای طولی پوسته ۱۲۶

شکل ۴-۲۴ اثر تابع فشار بر توزیع بی‌بعد (الف) جابه‌جایی شعاعی (ب) جابه‌جایی محوری (ج) فشار هیدرواستاتیک در راستای طولی لایه‌ی میانی پوسته $(n=2, h(\bar{x})=h_1)$ ۱۲۷
شکل ۴-۲۵ اثر توابع ضخامت بر توزیع بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی $(n=2, P_i(\bar{x})=P_{i1})$ ۱۲۹
شکل ۴-۲۶ اثر توابع ضخامت بر توزیع بی‌بعد جابه‌جایی محوری $(n=2, P_i(\bar{x})=P_{i1})$ ۱۲۹
شکل ۴-۲۷ اثر توابع ضخامت بر توزیع بی‌بعد فشار هیدرواستاتیک $(n=2, P_i(\bar{x})=P_{i1})$ ۱۳۰
شکل ۴-۲۸ نمایش توابع فشار متغیر وارد بر مخروط جدار متغیر ۱۳۱
شکل ۴-۲۹ اثر تغییر زاویه‌ی لایه‌ی خارجی بر توزیع بی‌بعد جابه‌جایی (الف) شعاعی (ب) محوری در پوسته‌ی مخروطی همگن تحت فشار داخلی $(P_i(\bar{x})=P_1, r_{ia}=0.055\text{m})$ ۱۳۵
شکل ۴-۳۰ اثر تغییر زاویه‌ی لایه‌ی داخلی بر توزیع بی‌بعد جابه‌جایی (الف) شعاعی (ب) محوری در پوسته‌ی مخروطی همگن تحت فشار خارجی $(P_o(\bar{x})=P_1, r_{oa}=0.07\text{m})$ ۱۳۵
شکل ۴-۳۱ نمایش سه‌بعدی اثر تغییر زاویه‌ی لایه‌ی خارجی بر توزیع بی‌بعد جابه‌جایی (الف) شعاعی (ب) محوری در پوسته‌ی مخروطی همگن تحت فشار داخلی $(P_i(\bar{x})=P_6, r_{ia}=0.055\text{m})$ ۱۳۶
شکل ۴-۳۲ نمایش سه‌بعدی اثر تغییر زاویه‌ی لایه‌ی داخلی بر توزیع بی‌بعد جابه‌جایی (الف) شعاعی (ب) محوری در پوسته‌ی مخروطی همگن تحت فشار خارجی $(P_o(\bar{x})=P_6, r_{oa}=0.07\text{m})$ ۱۳۶
شکل ۴-۳۳ اثر تابع شعاع داخلی بر توزیع بی‌بعد جابه‌جایی (الف) شعاعی (ب) محوری در پوسته‌ی مخروطی جدار متغیر همگن تحت فشار داخلی خطی حاصل از MAE و FEM ۱۳۸
شکل ۴-۳۴ نمایش دوبعدی اثر تابع شعاع داخلی بر توزیع بی‌بعد جابه‌جایی (الف) شعاعی (ب) محوری در پوسته‌ی مخروطی همگن جدار متغیر تحت فشار داخلی خطی ۱۳۹
شکل ۴-۳۵ نمایش سه‌بعدی اثر تابع شعاع داخلی بر توزیع بی‌بعد جابه‌جایی (الف) شعاعی (ب) محوری در پوسته‌ی استوانه‌ای همگن با جدار داخلی متغیر تحت فشار داخلی ثابت ۱۳۹
شکل ۴-۳۶ مؤلفه‌ی محوری فشار داخلی برای هندسه‌های مختلف در راستای طولی در حالت (الف) مخروط جدار متغیر تحت فشار خطی (ب) استوانه با جدار داخلی متغیر تحت فشار ثابت ۱۴۰

شکل ۴-۳۷ توزیع بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی پوسته‌ی مخروطی جدار متغیر برای (الف) $n = 2$ (ب) $n = -2$ در راستای طولی لایه‌های مختلف ($P_{\mathrm{i}}(\bar{x}) = P_1$) ۱۴۲

شکل ۴-۳۸ توزیع بی‌بعد جابه‌جایی محوری پوسته‌ی مخروطی جدار متغیر برای (الف) $n = 2$ (ب) $n = -2$ در راستای طولی لایه‌های مختلف ($P_{\mathrm{i}}(\bar{x}) = P_1$) ۱۴۲

شکل ۴-۳۹ توزیع بی‌بعد تنش محیطی پوسته‌ی مخروطی جدار متغیر برای (الف) $n = 2$ (ب) $n = -2$ در راستای طولی لایه‌های مختلف ($P_{\mathrm{i}}(\bar{x}) = P_1$) ۱۴۲

شکل ۴-۴۰ توزیع بی‌بعد تنش طولی پوسته‌ی مخروطی جدار متغیر برای (الف) $n = 2$ (ب) $n = -2$ در راستای طولی لایه‌های مختلف ($P_{\mathrm{i}}(\bar{x}) = P_1$) ۱۴۲

شکل ۴-۴۱ توزیع بی‌بعد تنش برشی پوسته‌ی مخروطی جدار متغیر برای (الف) $n = 2$ (ب) $n = -2$ در راستای طولی لایه‌های مختلف ($P_{\mathrm{i}}(\bar{x}) = P_1$) ۱۴۳

شکل ۴-۴۲ توزیع بی‌بعد فشار هیدرواستاتیک پوسته‌ی مخروطی جدار متغیر برای (الف) $n = 2$ (ب) $n = -2$ در راستای طولی لایه‌های مختلف ($P_{\mathrm{i}}(\bar{x}) = P_1$) ۱۴۳

شکل ۴-۴۳ توزیع بی‌بعد توانی ثابت‌های مادّه در مخروط جدار متغیر برای ثابت‌های ناهمگنی مختلف ۱۴۳

شکل ۴-۴۴ اثر ثابت ناهمگنی بر توزیع بی‌بعد جابه‌جایی (الف) شعاعی (ب) محوری در راستای طولی لایه‌ی داخلی مخروط جدار متغیر ($P_{\mathrm{i}}(\bar{x}) = P_1$) ۱۴۴

شکل ۴-۴۵ اثر ثابت ناهمگنی بر توزیع بی‌بعد تنش کوشی (الف) محیطی (ب) محوری و (ج) فشار هیدرواستاتیک در راستای طولی لایه‌ی داخلی مخروط جدار متغیر ($P_{\mathrm{i}}(\bar{x}) = P_1$) ۱۴۴

شکل ۴-۴۶ اثر تابع فشار بر توزیع بی‌بعد جابه‌جایی (الف) شعاعی (ب) محوری در راستای طولی لایه‌ی داخلی مخروط جدار متغیر ۱۴۵

شکل ۴-۴۷ توزیع بی‌بعد جابه‌جایی (الف) شعاعی (ب) محوری و تنش کوشی (ج) محیطی (د) محوری برای لایه‌های مختلف در راستای طولی استوانه ($n = 2, P_{\mathrm{i}}(\bar{x}) = P_{\mathrm{i}1}, h(\bar{x}) = h_1, \mathrm{MC}_{12}$) ۱۵۶

شکل ۴-۴۸ اثر ثابت ناهمگنی بر توزیع بی‌بعد جابه‌جایی (الف) شعاعی (ب) محوری و (ج) فشار هیدرواستاتیک در راستای طولی لایه‌ی داخلی پوسته ($P_{\mathrm{i}}(\bar{x}) = P_{\mathrm{i}1}, h(\bar{x}) = h_1, \mathrm{MC}_{11}$) ۱۵۶

فهرست جدول‌ها

جدول ۱-۱ چگالی انرژی کرنشی مربوط به مدل‌های ناهمسانگرد پرکاربرد در بافت‌های زنده‌ی مختلف [۲۷] ۳۶

جدول ۱-۲ چگالی انرژی کرنشی مربوط به مدل‌های همسانگرد پرکاربرد در بافت‌های زنده‌ی مختلف [۲۷] ۳۷

جدول ۴-۱ مشخصات ثابت‌های مدل مونی-ریولین ۱۰۴

جدول ۴-۲ اثر متغیرهای ضخامت و بارگذاری بر جابه‌جایی شعاعی برای ثابت‌های مختلف مادّه ۱۰۶

جدول ۴-۳ اثر متغیرهای ضخامت و بارگذاری بر جابه‌جایی محوری برای ثابت‌های مختلف مادّه ۱۰۶

جدول ۴-۴ مشخصات توابع فشار متغیر ۱۱۷

جدول ۴-۵ مشخصات توابع فشار متغیر ۱۱۷

جدول ۴-۶ مقادیر جابه‌جایی و فشار هیدرواستاتیک در مقاطع مختلف لایه‌ی داخلی پوسته‌ی ناهمگن برای توابع ضخامت و فشار مشابه ($n = 2$) ۱۳۰

جدول ۴-۷ مشخصات توابع فشار متغیر ۱۳۱

جدول ۴-۸ اثر متغیرهای زاویه‌ی مخروط و بارگذاری بر جابه‌جایی شعاعی برای ثابت‌های مختلف مادّه ۱۳۳

جدول ۴-۹ مشخصات توابع شعاع داخلی و خارجی و فشار داخلی مورد مطالعه ۱۳۸

جدول ۴-۱۰ مشخصات ثابت‌های مدل نئوهوکین ۱۵۳

جدول ۴-۱۱ اثر متغیرهای ضخامت و بارگذاری بر جابه‌جایی شعاعی برای ثابت‌های مختلف مادّه ۱۵۴

جدول ۴-۱۲ اثر متغیرهای ضخامت و بارگذاری بر جابه‌جایی محوری برای ثابت‌های مختلف مادّه ۱۵۴

جدول ۴-۱۳ مقادیر جابه‌جایی و فشار هیدرواستاتیک در مقاطع مختلف پوسته‌ی ناهمگن برای ثابت‌های ناهمگنی مختلف ($P_{\mathrm{i}}(\bar{x}) = P_{\mathrm{i1}},\ h(\bar{x}) = h_1, \mathrm{MC}_{15}$) ۱۵۷

جدول ۴-۱۴ مقادیر جابه‌جایی و فشار هیدرواستاتیک در مقاطع مختلف لایه‌ی داخلی پوسته‌ی ناهمگن برای توابع ضخامت و فشار مشابه $(n = 2, \mathrm{MC}_{16})$ ۱۵۷

فهرست نمادها

r	فاصله‌ی هر نقطه‌ی مادّی پوسته تا محور تقارن آن
z	فاصله‌ی هر نقطه‌ی مادّی پوسته تا لایه‌ی میانی آن
$R(x)$	فاصله‌ی لایه‌ی میانی پوسته تا محور تقارن آن
x	مختصه‌ی طولی در دستگاه مختصات استوانه‌ای
θ	مختصه‌ی محیطی در دستگاه مختصات استوانه‌ای
$r_{\mathrm{i}}(x)$	شعاع داخلی پوسته
$r_{\mathrm{o}}(x)$	شعاع خارجی پوسته
$h(x)$	ضخامت پوسته
L	طول پوسته
r_{ia}	شعاع داخلی پوسته در $x=0$
r_{ib}	شعاع داخلی پوسته در $x=L$
$r_{\mathrm{i\,ab}}$	شعاع داخلی پوسته در $x=L/2$
r_{i0}	شعاع نزدیکترین نقطه‌ی (نقاط) پوسته به محور دوران
r_{oa}	شعاع خارجی پوسته در $x=0$
r_{ob}	شعاع خارجی پوسته در $x=L$
$r_{\mathrm{o\,ab}}$	شعاع خارجی پوسته در $x=L/2$
h_{a}	ضخامت پوسته در $x=0$
h_{b}	ضخامت پوسته در $x=L$
h_{ab}	ضخامت پوسته در $x=L/2$
h_0	ضخامت مشخصه (کمترین ضخامت پوسته)
β	زاویه‌ی لایه‌ی داخلی پوسته در $x=L$
γ	زاویه‌ی لایه‌ی خارجی پوسته در $x=L$
u,φ	مؤلفه‌های جابه‌جایی محوری در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل

w, ψ	مؤلفه‌های جابه‌جایی شعاعی در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل
U_r, U_x, U_z, U_θ	مؤلفه‌های فیزیکی جابه‌جایی
$\mathbf{P}$	تانسور تنش پیولا-کیرشهف اوّل
$\mathbf{F}$	تانسور گرادیان تغییر شکل
$\mathbf{S}$	تانسور تنش پیولا-کیرشهف دوّم
$\mathbf{E}$	تانسور کرنش گرین-لاگرانژ
$\mathbf{C}$	تانسور کرنش کوشی-گرین راست
$\mathbf{T}$	تانسور تنش بایت
$\mathbf{U}$	تانسور کشیدگی راست
$\boldsymbol{\sigma}$	تانسور تنش کوشی
$\boldsymbol{\tau}$	تانسور تنش کیرشهف
$\mathbf{B}$	تانسور کرنش کوشی-گرین چپ
V_0	حجم پوسته در پیکربندی نخست
ΔV	تغییر حجم پوسته
J	نسبت حجمی (ژاکوبین تغییر شکل)
$I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, \ldots$	پایاهای عددی تانسور کرنش کوشی-گرین راست (چپ)
$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$	نسبت کشیدگی‌های اصلی
$S^{zz}, S^{\theta\theta}, S^{xx}, S^{zx}$	مؤلفه‌های فیزیکی تانسور تنش پیولا-کیرشهف دوّم
$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$	کرنش گرین-لاگرانژ در نمایش شبه‌برداری ویت
$\varepsilon_{zz}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{xx}, \gamma_{zx}$	مؤلفه‌های کرنش گرین-لاگرانژ در نمایش شبه‌برداری ویت
$C_{zz}, C_{\theta\theta}, C_{xx}, C_{zx}$	مؤلفه‌های کرنش کوشی-گرین
$\vec{\mathbf{G}}_{\mathrm{i}}$	بردار پایه‌ی همگرد در پیکربندی نخست
$\vec{\mathbf{G}}^{\mathrm{i}}$	بردار پایه‌ی پادگرد در پیکربندی نخست
G_{ij}	مؤلفه‌های ضرایب سنجه در پیکربندی نخست
$\vec{\mathbf{g}}_{\mathrm{i}}$	بردار پایه‌ی همگرد در پیکربندی جاری
$\vec{\mathbf{g}}^{\mathrm{i}}$	بردار پایه‌ی پادگرد در پیکربندی جاری

g_{ij}	مؤلفه‌های ضرایب سنجه در پیکربندی جاری
$\vec{\mathbf{X}}$	بردار موقعیت
$\Gamma_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{k}}$	نماد کریستوفل نوع دوّم
$\hat{\mathbf{i}}_{\mathrm{j}},\hat{\mathbf{i}}^{\mathrm{j}}$	بردار پایه در دستگاه مختصات کارتزین
q^{i}	مختصه‌های دستگاه خمیده‌خط متعامد
U_{i}	مؤلفه‌های همگرد بردار جابه‌جایی
U^{i}	مؤلفه‌های پادگرد بردار جابه‌جایی
$\mathbf{I}$	تانسور همانی
Ψ	انرژی کرنشی بر واحد جرم (انرژی کرنشی مخصوص)
ρ_0	چگالی در پیکربندی نخست
Π_{int}	پتانسیل الاستیک کل جسم
$\dot{\Pi}$	توان تنش کل جسم
W	تابع (چگالی) انرژی کرنشی
$\hat{W}(I_1,I_2,J)$	انرژی کرنشی مربوط به تغییر شکل تراکم‌ناپذیر
$W^*(I_1,I_2)$	بخشی از انرژی کرنشی تغییر شکل تراکم‌ناپذیر که بر اساس مدل مادّه‌ی انتخابی تعیین می‌شود
$H(J)$	بخشی از انرژی کرنشی تغییر شکل تراکم‌ناپذیر که تضمین‌کننده‌ی عدم وجود تنش اوّلیه در جسم است
$\tilde{W}$	بخش حجمی انرژی کرنشی
$G(J)$	تابع خطا به منظور اعمال حدی قید تراکم‌ناپذیری
λ	پارامتر خطا (ضریب تابع خطا)
k	مدول بالک
μ	مدول برشی
ν	نسبت پواسون
C_1,C_2	ثابت‌های مدل مونی-ریولین
p_0	مقدار اوّلیه‌ی فشار هیدرواستاتیک که تضمین‌کننده‌ی عدم وجود تنش اوّلیه در جسم است

n	ثابت ناهمگنی
C_{1n}, C_{2n}	ثابت‌های مدل مونی-ریولین در پوسته‌ی ناهمگن
k_n	مدول بالک در پوسته‌ی ناهمگن
p_{0n}	مقدار اوّلیه‌ی فشار هیدرواستاتیک در پوسته‌ی ناهمگن که تضمین‌کننده‌ی عدم وجود تنش اوّلیه در جسم است
P	فشار هیدرواستاتیک
A_0	سطح مرزی جسم در پیکربندی نخست
$A_{0\mathbf{y}}$	قسمتی از سطح مرزی جسم که جابه‌جایی‌ها بر آن وارد می‌شوند
$A_{0\boldsymbol{\sigma}}$	قسمتی از سطح مرزی جسم که نیروهای سطحی بر آن وارد می‌شوند
t	زمان
$\vec{\mathbf{a}}$	شتاب حرکت جسم
$\vec{\mathbf{b}}_0$	نیروی حجمی در پیکربندی نخست
$\vec{\mathbf{t}}_0$	نیروی سطحی در پیکربندی نخست
$\vec{\mathbf{y}}$	بردار جابه‌جایی جسم
$\begin{cases} N_z, N_\theta, N_\theta^*, \\ N_x, N_{zx} \end{cases}$	منتجه‌های تنش مرتبه‌ی صفر
$\begin{cases} M_z, M_\theta, M_\theta^*, \\ M_x, M_{zx} \end{cases}$	منتجه‌های تنش مرتبه‌ی یک
$\begin{cases} Q_z, Q_\theta, Q_\theta^*, \\ Q_x, Q_{zx} \end{cases}$	منتجه‌های تنش مرتبه‌ی دو
K_S	ضریب تصحیح برشی
$P_{\mathrm{i}}(x)$	فشار داخلی پوسته
$P_{\mathrm{o}}(x)$	فشار خارجی پوسته
P_{iz}	مؤلفه‌ی شعاعی فشار داخلی
P_{oz}	مؤلفه‌ی شعاعی فشار خارجی
P_{ix}	مؤلفه‌ی طولی فشار داخلی
P_{ox}	مؤلفه‌ی طولی فشار خارجی
P_{ia}	فشار داخلی پوسته در $x=0$

P_{ib}	فشار داخلی پوسته در $x = L$
$P_{\mathrm{i\,ab}}$	فشار داخلی پوسته در $x = L/2$
P_{oa}	فشار خارجی پوسته در $x = 0$
P_{ob}	فشار خارجی پوسته در $x = L$
$P_{\mathrm{o\,ab}}$	فشار خارجی پوسته در $x = L/2$
$\mathrm{L_i}$	عملگرهای دیفرانسیلی پیشروی خطی
$\hat{\mathrm{L}}_{\mathrm{i}}$	عملگرهای دیفرانسیلی پیروی غیرخطی
$\{\mathbf{F_i}\}$	بخش ناهمگنی معادلات اغتشاشی
$(\bar{\ })$	حالت بی‌بعد هر متغیر
ε	متغیر اغتشاشی
$\mathit{II}\,(\mathrm{i,j})$	انتگرال در جهت ضخامت به منظور تسهیل در نمایش معادلات
c_0, c_7	ثابت‌های انتگرال‌گیری در معادلات
$\bar{v}$	متغیر کمکی تعریف شده به جای $\bar{u}$
$\overline{C_2}, \overline{C_{12}}, \overline{Ck_1}, \ldots, \overline{Ck_9}$	ثابت‌های بی‌بعد تعریف شده بر حسب خواص مادّه به منظور تسهیل در نمایش معادلات
$\hat{K}_s$	ثابت بی‌بعد تعریف شده بر حسب ضریب تصحیح برشی به منظور تسهیل در نمایش معادلات
$\{\bar{\mathbf{y}}_{\mathrm{O\,i}}(\bar{x})\}$	بردار جابه‌جایی در حل خارجی مرتبه‌ی i
$[\mathbf{A}_{\mathrm{O}}]$	ماتریس ضرایب در معادلات حل خارجی
$\{\mathbf{F}_{\mathrm{Oi}}\}$	بردار ناهمگنی در معادلات حل خارجی مرتبه‌ی i
$\{\mathbf{F}_{\mathrm{O2}}^{\mathit{II}}\}$	بخشی از بردار ناهمگنی حل مرتبه‌ی دوّم خارجی شامل $\overline{\mathit{II}}(\bar{x})$
$\{\mathbf{F}_{\mathrm{O2}}^{\mathit{II}'}\}$	بخشی از بردار ناهمگنی حل مرتبه‌ی دوّم خارجی شامل مشتق $\overline{\mathit{II}}(\bar{x})$
$\tilde{x}_\alpha$	متغیر سریع (کشیده شده) در مرز α
$\mathrm{D}(\ )_\alpha$	مشتق متغیرهای (هندسی و بارگذاری) تابع مختصه‌ی طولی پوسته نسبت به متغیر سریع مرز α
$\{\bar{\mathbf{y}}_{\alpha\mathrm{i}}(\tilde{x}_\alpha)\}$	بردار جابه‌جایی در حل داخلی مرتبه‌ی i در مرز α
$[\mathbf{A}_{\alpha1}], [\mathbf{A}_{\alpha2}], [\mathbf{A}_{\alpha3}]$	ماتریس ضرایب در معادلات حل داخلی مرز α

$\{\mathbf{F}_{\alpha \mathrm{i}}\}$	بردار ناهمگنی در معادلات حل داخلی مرتبه‌ی i
$\{\mathbf{F}_{\alpha 2}^{II\alpha}\}$	بخشی از بردار ناهمگنی حل مرتبه‌ی دوّم داخلی شامل $\overline{II}(\bar{x})$
$\{\mathbf{F}_{\alpha 2}^{\mathrm{D}II\alpha}\}$	بخشی از بردار ناهمگنی حل مرتبه‌ی دوّم داخلی شامل مشتق $\overline{II}(\bar{x})$
$\{\mathbf{F}_{\alpha 2}^{\mathrm{D}A\alpha}\}$	بخشی از بردار ناهمگنی حل مرتبه‌ی دوّم داخلی ایجاد شده در اثر بسط تیلور ماتریس‌های ضرایب حل مرتبه‌ی اوّل
$\{\mathbf{F}_{\alpha 2}^{P\alpha}\}$	بخشی از بردار ناهمگنی حل مرتبه‌ی دوم داخلی شامل بارگذاری‌ها
$\{\mathbf{F}_{\alpha 2}^{\mathrm{D}P\alpha}\}$	بخشی از بردار ناهمگنی حل مرتبه‌ی دوم داخلی شامل مشتق بارگذاری‌ها
$\{\bar{\mathbf{y}}_{\alpha \mathrm{i}}\}_{\mathrm{gen.}}$	پاسخ عمومی دستگاه معادلات حل داخلی مرتبه‌ی i در مرز α
$\{\bar{\mathbf{y}}_{\alpha \mathrm{i}}\}_{\mathrm{par.}}$	پاسخ خصوصی دستگاه معادلات حل داخلی مرتبه‌ی i در مرز α
$m_{\alpha \mathrm{i}}$	مقادیر ویژه‌ی معادلات حل داخلی در مرز α
$\{V_\alpha\}$	بردارهای ویژه‌ی معادلات حل داخلی در مرز α
$c_{\alpha \mathrm{i}}\,(\mathrm{i}=1,2,3)$	ثابت‌های پاسخ عمومی معادلات حل داخلی در مرز α
$\{\bar{\mathbf{y}}_{\alpha 2}\}_{\mathrm{par.}}^{\mathrm{pol.}}$	بخش چندجمله‌ای در پاسخ خصوصی دستگاه معادلات حل داخلی مرتبه‌ی دوّم در مرز α
$\{\bar{\mathbf{y}}_{\alpha 2}\}_{\mathrm{par.}}^{\exp(\mathrm{mi}).}$	بخش نمایی یکسان با ریشه‌ی معادله‌ی مشخصه در پاسخ خصوصی دستگاه معادلات حل داخلی مرتبه‌ی دوّم در مرز α
$\{\bar{\mathbf{y}}_{\alpha 2}\}_{\mathrm{par.}}^{\exp(\mathrm{q\,j}).}$	بخش نمایی متفاوت با ریشه‌ی معادله‌ی مشخصه در پاسخ خصوصی دستگاه معادلات حل داخلی مرتبه‌ی دوّم در مرز α
$\{B_0\},\{B_1\},\{B_2\}$	ضرایب نامعین پاسخ خصوصی دستگاه معادلات حل داخلی مرتبه‌ی دوّم
$\{\bar{\mathbf{y}}_{\mathrm{O}}^{\alpha=0}\}$	بخش مشترک حل خارجی با حل داخلی مرز چپ
$\{\bar{\mathbf{y}}_{\mathrm{O}}^{\alpha=1}\}$	بخش مشترک حل خارجی با حل داخلی مرز راست
$\{\bar{\mathbf{y}}_{\mathrm{comp.}}\}$	حل کلی یکنواخت پوسته
$\mathrm{grad}(\ )$	عملگر گرادیان
$\mathrm{div}(\ )$	عملگر دیورژانس
$\det(\ )$	عملگر دترمینان

فصل ۱

مقدمه و مرور مقالات

۱-۱ مقدمه

در این فصل ابتدا به تعریف موضوع پیشنهادی رساله و اهمیت آن پرداخته می‌شود. سپس پوسته‌ها از دیدگاه‌های مختلف دسته‌بندی شده و نظریه‌های تحلیل آن‌ها بیان می‌شود. همچنین نظریه‌های غیرخطی معروف پوسته‌های استوانه‌ای از دیدگاه هندسی معرفی خواهند شد. در بخش بعدی، ضمن تعریف و دسته‌بندی مواد هایپرالاستیک[1]، اصول حاکم بر این مواد از دیدگاه مکانیک محیط پیوسته، روابط ساختاری[2] مواد هایپرالاستیک همسانگرد[3] و مدل‌های ساختاری خاص این مواد معرفی و مورد بررسی قرار گرفته است. سپس روش‌های انرژی که در تحلیل مواد مواد هایپرالاستیک مورد استفاده قرار می‌گیرند، بیان شده است. در انتهای این فصل، به مطالعه و بررسی پژوهش‌های انجام شده در زمینه‌های مرتبط با موضوع پیشنهادی این رساله پرداخته شده است و با جمع‌بندی نهایی، ضرورت انجام پژوهش حاضر و جنبه‌های نوآوری آن بیان خواهد شد.

پوسته‌ها یا سازه‌های پوسته‌ای، از فراوان‌ترین و متنوع‌ترین انواع سازه‌ها هستند که در دنیای فیزیکی اطراف ما یافت می‌شوند. پوسته‌ها در اشکال طبیعی مانند جمجمه‌ی سر انسانها و حیوانات و نیز اجزای محافظ اندام جانوری مانند لاک و صدف مشاهده می‌شوند؛ در اشکال مصنوعی در صنایع مختلف ساختمانی، نیروگاهی، خودروسازی، نظامی، هوا و فضا و ... کاربرد دارند. پوسته‌ها به طور کلی، سازه‌های خمیده هستند که از نظر هندسی، ضخامت این سازه‌ها در مقایسه با ابعاد دیگر آنها بسیار کوچک‌تر است و از جهت کیفیت رفتاری و مقاومت در برابر نیروها و لنگرهای وارد شده، در بالاترین مرتبه‌ی تکاملی سازه‌ها قرار می‌گیرند. به تناسب مطلوبیت رفتاری، پیچیدگی تحلیل آنها نیز حائز اهمیت می‌باشد. روش های تحلیلی تقریبی موجود برای تحلیل پوسته‌ها بر اساس فرضیاتی است که تئوری پوسته‌ها را تشکیل می‌دهند. از میان انواع پوسته‌ها، پوسته‌های استوانه‌ای به دلیل فراوانی کاربرد، از اهمیت ویژه‌ای

1. Hyperelastic
2. Constitutive relations
3. Isotropic

برخوردارند. مطالعه‌ی رفتار این گونه پوسته‌ها از گذشته‌ی نه چندان دور تا به امروز مورد توجه دانشمندان بوده و همچنان ادامه دارد. دانش‌پژوهان پیگیر اعمال تغییرات بر روی هندسه و مادّه‌ی پوسته‌ها بوده‌اند که بتوانند مقاومت آنها را در برابر انواع تنش‌های مکانیکی افزایش و درصورت امکان، وزن آنها را کاهش دهند. همچنین امروزه به دلیل استفاده از این پوسته‌ها در محیط‌های فشار غیریکنواخت و متغیر و اهمیت بهینه‌سازی وزن سازه‌ها در برخی کاربردها، مهندسان توجه خود را معطوف استفاده از پوسته‌ها با ضخامت متغیر ساخته‌اند.

یک مسأله‌ی اساسی در نظریه‌ی الاستیسیته یافتن رابطه‌ای بین تنش و کرنش در یک جسم تحت بارگذاری خارجی است. در تغییر شکل‌های کوچک، الاستیسیته‌ی خطی بر رابطه‌ی تنش-کرنش حاکم است؛ در حالی که در تغییر شکل‌های بزرگ در محدوده‌ی الاستیک، مواد رفتار الاستیک غیرخطی با عنوان هایپرالاستیسیته[۱] از خود نشان می‌دهند. مواد هایپرالاستیک گروهی از مواد هستند که می‌توانند تغییر شکل‌های بزرگ[۲] الاستیک و بازگشت‌پذیر[۳] داشته باشند. از جمله‌ی مواد هایپرالاستیک می‌توان به لاستیک‌ها[۴]، مواد شبه‌لاستیک[۵] و الاستومرها[۶] اشاره کرد که توسط مدل‌های مواد هایپرالاستیک ایده‌آل مدل‌سازی می‌شوند. از این مواد در صنایع مختلف از جمله بخش‌های مربوط به خودروسازی، نشت‌بندها، درزگیرها، سیستم‌های تعلیق، ضربه‌گیرها، تسمه‌ها و ... استفاده می‌شود. بافت‌های زیستی نرم[۷] نیز رفتار مواد هایپرالاستیک را از خود نشان می‌دهند. بررسی بافت‌های زیستی در تشخیص، پیشگیری و درمان بیماری‌های مختلف اطلاعات مفیدی در اختیار دانشمندان قرار می‌دهد.

اگرچه امروزه حل مسائل با استفاده از کامپیوتر و بهره‌گیری از نرم‌افزارهای صنعتی و روش‌های عددی بسیار رواج یافته است؛ اما تمایل به استفاده از روش‌های تحلیلی در حل مسائل همچنان به قوت

1. Hyperelasticity
2. Large deformations
3. Reversible
4. Rubbers
5. Rubber-Like matrerials
6. Elastomers
7. Soft biological tissues

خود پابرجاست. مزیت استفاده از روش‌های تحلیلی در این است که ارتباط رفتار سیستم با پارامترهای آن از قبیل هندسه، بارگذاری، شرایط مرزی و .... به راحتی قابل توصیف است. به ویژه زمانی که هدف مطالعه‌ی پارامتریک اثر یک متغیر بر روی رفتار سیستم و بهینه‌سازی آن با سعی و خطا باشد، روش تحلیلی می‌تواند زمان محاسبات را به مقدار قابل توجهی کاهش دهد. در واقع استفاده‌ی همزمان از روش‌های عددی و تحلیلی با توجه به محدودیت‌های هرکدام، می‌تواند ابزاری سودمند را برای پژوهشگران جهت تحلیل مسائل فراهم آورد.

هدف از انجام این پژوهش ارائه‌ی روشی تحلیلی برای بررسی رفتار الاستیک غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای و مخروطی جدار ضخیم با ضخامت متغیر تحت فشار متغیر در حالت تقارن محوری، با فرض برقراری روابط سینماتیک[1] و ساختاری غیرخطی است. جنس پوسته از مادّه‌ی هایپرالاستیک ناهمگن و همسانگرد انتخاب شده است و تغییرات ضخامت و بارگذاری تابعی از متغیر مسأله در راستای طول پوسته است. معادلات حاکم بر مسأله با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل استخراج و دستگاه معادلات حاکم توسط نظریه‌ی اغتشاشات[2] حل خواهد شد. نهایتاً مقادیر تنش و جابه‌جایی در پوسته به‌صورت مطالعه‌ی موردی محاسبه و اثر عوامل مختلف بر حل تحلیلی بررسی خواهد شد.

۱-۲ پوسته‌ها

در این بخش، ضمن دسته‌بندی پوسته‌ها، نظریه‌های تحلیل آنها شامل پوسته‌های نازک و ضخیم و نظریه‌های غیرخطی هندسی مورد بررسی قرار می‌گیرد [۱].

۱-۲-۱ دسته‌بندی پوسته‌ها

پوسته‌ها را می‌توان از دیدگاه هندسی، مادّی و رفتاری به شکل زیر دسته‌بندی نمود.

1. Kinematic relations
2. Perturbations theory

الف) دیدگاه هندسی

پوسته‌ی حاصل از انتقال[1]: از انتقال یک منحنی یا سطح مادی در امتداد خط راست خارج از صفحه‌ی قوس، حاصل می‌شود.

پوسته‌ی حاصل از دوران[2]: از دوران یک منحنی یا سطح مادی حول محور واقع در صفحه‌ی قوس، حاصل می‌شود.

پوسته‌ی جدار نازک[3]: پوسته‌ای که نسبت ضخامت هر مقطع (منطبق بر خط انتقال یا محور دوران) به شعاع انحنای سطح میانی[4] آن مقطع کوچک‌تر از ۱/۲۰ باشد.

پوسته‌ی جدار ضخیم[5]: پوسته‌ای که نسبت ضخامت هر مقطع (منطبق بر خط انتقال یا محور دوران) به شعاع انحنای سطح میانی آن مقطع بزرگ‌تر از ۱/۲۰ باشد.

ب) دیدگاه مادّی

پوسته‌ی همگن و همسانگرد[6]: خواص مکانیکی مادّه‌ی پوسته در نقاط مختلف و در تمام جهات (در هر نقطه از پوسته) یکسان است.

پوسته‌ی همگن و ناهمسانگرد[7]: خواص مکانیکی مادّه‌ی پوسته در نقاط مختلف جسم یکسان است ولی در هر نقطه، در جهات مختلف یکسان نیست.

پوسته‌ی ناهمگن و همسانگرد[8]: خواص مکانیکی مادّه‌ی پوسته در نقاط مختلف جسم یکسان نیست ولی در هر نقطه، در جهات مختلف یکسان است.

پوسته‌ی ناهمگن و ناهمسانگرد[9]: خواص مکانیکی مادّه‌ی پوسته هم در نقاط مختلف جسم و هم در جهات مختلف (در هر نقطه از پوسته) یکسان نیست.

---

1. Shell of translation
2. Shell of revolution
3. Thin shell
4. Middle surface
5. Thick shell
6. Homogeneous and isotropic shell
7. Homogeneous and anisotropic shell
8. Inhomogeneous and isotropic shell
9. Inhomogeneous and anisotropic shell

ج) دیدگاه رفتاری

پوسته با تغییر شکل‌های کوچک: جابه‌جایی هر نقطه از پوسته بین شرایط تحت بار و بی‌باری، کوچک است (رفتار خطی از نظر هندسی).

پوسته با تغییر شکل‌های بزرگ: جابه‌جایی هر نقطه از پوسته بین شرایط تحت بار و بی‌باری، کوچک نیست (رفتار غیرخطی از نظر هندسی).

پوسته با رفتار الاستیک[1]: تغییر شکل‌ها بازگشت‌پذیرند و مدل رفتاری این مواد فقط وابسته به تغییر شکل جاری هستند (رفتار خطی یا غیرخطی از نظر مادی).

پوسته با رفتار پلاستیک[2]: تغییر شکل‌ها بازگشت‌ناپذیرند و هنگامی رخ می‌دهد که تنش‌ها (کرنش‌های الاستیک) از مقدار بحرانی خود یعنی حد الاستیک عبور کنند (رفتار غیرخطی از نظر مادی).

پوسته‌ی مورد مطالعه در این رساله از نوع جدار ضخیم، دارای مادّه‌ی ناهمگن و همسانگرد و رفتار غیرخطی هندسی و مادّی (الاستیک غیرخطی) است.

۱-۲-۲ نظریه‌های تحلیل پوسته‌ها

در این بخش نظریه‌های تحلیل پوسته به دو بخش نظریه‌ی پوسته‌های نازک و ضخیم تقسیم‌بندی می‌شوند و سپس توضیح مختصر برخی از این نظریه‌ها بیان می‌گردد.

۱-۲-۲-۱ نظریه‌ی پوسته‌های نازک

در پوسته‌های نازک با یک انحناء، نسبت ضخامت پوسته h به شعاع سطح میانی هر مقطع R (منطبق بر خط انتقال یا محور دوران پوسته) کوچک‌تر از ۱/۲۰ می‌باشد. نظریه‌ی این دسته از پوسته‌ها بر مبنای نظریه‌ی الاستیسیته‌ی خطی بنا شده است. به‌طور کلی به دلیل کوچک بودن یک بعد نسبت به ابعاد دیگر، نظریه‌ی الاستیسیته‌ی سه بعدی استفاده نمی‌شود؛ بلکه با ساده‌سازی روابط الاستیسیته،

1. Elastic behavior
2. Plastic behavior

روش‌های تحلیلی-تقریبی برای تحلیل پوسته‌های نازک استفاده می‌شود. دقت نتایج نظریه‌های ارائه شده بستگی به درجه‌ی ساده‌سازی روابط الاستیسیته دارد. اولین فرضیات را کیرشهف[1] (۱۸۵۰) درباره‌ی ورق‌ها ارائه کرد که پس از آن در بسط نظریه‌ی پوسته‌ها به‌کاربرده شد. ارون[2] (۱۸۷۴) نظریه‌ی پوسته‌ها را مبتنی بر فرضیات کیرشهف معرفی کرد، اما کار وی کامل نبود. لاو[3] (۱۸۸۸) معادلات عمومی پوسته‌های نازک را ارائه کرد که اکنون به عنوان نظریه‌ی کلاسیک پوسته‌های نازک یا نظریه‌ی لاو-کیرشهف مشهور است. فرضیات لاو-کیرشهف عبارتند از [۲]:

۱- نسبت ضخامت پوسته به شعاع انحنای سطح میانی در مقایسه با واحد، کوچک است (پوسته‌ی نازک)؛

۲- خیزها در مقایسه با ضخامت پوسته، کوچک هستند (خیز کوچک)؛

۳- مؤلفه‌ی تنش عمود بر سطح میانی نسبت به سایر مؤلفه‌های تنش، قابل چشم‌پوشی است (تنش صفحه‌ای)؛

۴- مقاطع مستوی و عمود بر سطح میانی پوسته، پس از بارگذاری و تغییر شکل، همچنان مستوی و عمود باقی می‌مانند. با این فرض، کرنش‌های برشی و مؤلفه‌ی کرنش عمود بر سطح میانی، صفر درنظر گرفته می‌شوند (کرنش صفحه‌ای).

رایسنر[4] (۱۹۱۲) با استفاده از فرضیات لاو تحلیل پوسته‌های حاصل از دوران متقارن محوری[5] را ارائه نمود. فلوگه[6] (۱۹۳۲) اولین کسی بود که نظریه‌ی پوسته‌ها با تقریب مرتبه‌ی دو را با لحاظ کردن خیزهای کوچک ارائه کرد. معادلات وی به عنوان معادلات استاندارد پوسته‌های نازک شناخته می‌شود که فقط در حالت‌های خاص قابل حل می‌باشند. با ساده‌سازی آن‌ها نظریه‌ی پوسته‌ها با تقریب مرتبه‌ی یک و صفر به‌دست می‌آیند.

1. Kirchhoff
2. Aron
3. Love
4. Reissner
5. Axisymmetric shell of revolution
6. Flugge

نظریه‌ی عمومی پوسته‌های نازک را می‌توان به این‌گونه تقسیم‌بندی کرد.

الف) نظریه با تقریب مرتبه‌ی صفر (نظریه‌ی غشایی[1])؛

ب) نظریه با تقریب مرتبه‌ی یک (نظریه‌ی خمشی[2])؛

ج) نظریه با تقریب مرتبه‌ی دو (نظریه‌ی فلوگه).

۱-۲-۲ نظریه‌ی پوسته‌های ضخیم

اولین بار لامه[3] (۱۸۵۲) با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی[4]، حل دقیق استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری با جدار ثابت را تحت فشار یکنواخت داخلی برای مادّه‌ی همگن و همسانگرد ارائه کرد [۳]. گالرکین[5] (۱۹۳۰) روابط پوسته‌های ضخیم را با استفاده از معادلات اساسی الاستیسیته به‌دست آورد. ولاسف[6] (۱۹۴۹) با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی خطی، معادلات قابل حلی برای پوسته‌های ضخیم ارائه کرد. نقدی (۱۹۵۶) با در نظر گرفتن اثر برش عرضی و اینرسی دورانی، نظریه‌ی تغییر شکل برشی[7] را برای پوسته‌های ضخیم پایه‌گذاری کرد. میرسکی[8] و هرمان[9] (۱۹۵۸) با به‌کارگیری نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول[10]، تحلیل ارتعاشی پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم را ارائه کردند [۴]. گرینس‌پن[11] (۱۹۶۰) مقادیر ویژه‌ی استوانه‌ی جدار ضخیم را با نظریه‌های مختلف پوسته‌های نازک و ضخیم مقایسه کرد.

نظریه‌ی عمومی پوسته‌های ضخیم را می‌توان به این‌گونه تقسیم‌بندی کرد.

1. Membrane theory
2. Bending theory
3. Lame´
4. Plane elasticity theory (PET)
5. Galerkin
6. Vlassov
7. Shear deformation theory (SDT)
8. Mirsky
9. Hermann
10. First-order shear deformation theory (FSDT)
11. Greenspon

الف) نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی

به طور کلی درنظریه‌ی الاستیسیته‌ی سه‌بعدی، ۱۵ معادله وجود دارد که می‌توان ۱۵ مجهول را به‌دست آورد؛ معادلات عبارت‌اند از: سه معادله‌ی تعادل (تنش)، شش معادله‌ی سینماتیک (کرنش-جابه‌جایی) و شش معادله‌ی رفتاری (تنش-کرنش) و مجهولات عبارت‌اند از: شش مؤلفه‌ی تنش (تانسور متقارن تنش)، شش مؤلفه‌ی کرنش (تانسور متقارن کرنش) و سه مؤلفه‌ی جابه‌جایی (بردار جابه‌جایی). نظریه‌ی الاستیسیته‌ی سه‌بعدی هر چند مشخصات رفتاری پوسته‌ها را به طور کامل توصیف می‌کند و منجر به حل دقیق می‌شود؛ ولی حل معادلات آن بسیار پیچیده است و عملاً به‌کارگیری آن‌ها امکان‌ناپذیر است. با فرضیات ساده شونده‌ای می‌توان معادلات بالا را کاهش داد و نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی را برای تحلیل استوانه‌ها به‌کار برد. درنظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی، فرض می‌شود که مقاطع مستوی و عمود بر محور استوانه، پس از اعمال فشار و تغییر شکل، همچنان مستوی و عمود بر محور استوانه باقی می‌مانند. در حقیقت کرنش برشی و تنش برشی صفر درنظر گرفته می‌شود؛ اما برخلاف نظریه‌ی کلاسیک پوسته‌های نازک، جابه‌جایی هر نقطه از پوسته برابر جابه‌جایی سطح میانی درنظر گرفته نمی‌شود. این نظریه را لامه برای استوانه‌ی جدار ثابت متقارن محوری از مادّه‌ی همگن و همسانگرد به‌کار برد و توزیع تنش را در استوانه‌ها به‌دست آورد. نظریه‌ی لامه به نظریه‌ی کلاسیک استوانه‌های ضخیم مشهور است.

ب) نظریه‌ی تغییر شکل برشی

در این نظریه، جابه‌جایی هر نقطه از پوسته با جابه‌جایی سطح میانی توصیف نمی‌شود؛ بلکه با مجموع جابه‌جایی سطح میانی و جابه‌جایی آن نقطه نسبت به سطح میانی بیان می‌شود در این نظریه، میدان جابه‌جایی پوسته حول لایه میانی به کمک بسط تیلور با توابعی با ضرایب متغیر بیان می‌شود. به طور کلی فاصله‌ی هر نقطه از پوسته تا محور تقارن (r) برابر با فاصله‌ی سطح میانی از محور تقارن (R) بعلاوه‌ی فاصله‌ی آن نقطه از سطح میانی (z) است، در این صورت:

$$r = R + z \ , \quad \left| \frac{z}{R} \right| < 1 \qquad (۱-۱)$$

این کار، سبب تغییر مختصه و جزء دیفرانسیلی[1]، از r به z می‌گردد و میدان جابه‌جایی هر نقطه از پوسته به‌صورت رابطه‌ی (۱-۲) خواهد بود.

$$\begin{cases} U_z = U_z(z,\theta,x) \\ U_\theta = U_\theta(z,\theta,x) \\ U_x = U_x(z,\theta,x) \end{cases} \qquad (۲-۱)$$

در رابطه‌ی فوق U_z، U_θ و U_x به ترتیب مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی در راستای شعاعی، محیطی و محوری هستند. با نوشتن بسط تیلور مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی حول لایه‌ی میانی پوسته نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} U_z = U_z(0,\theta,x) + z\left.\frac{\partial U_z(z,\theta,x)}{\partial z}\right|_{z=0} + \frac{z^2}{2!}\left.\frac{\partial^2 U_z(z,\theta,x)}{\partial z^2}\right|_{z=0} + \frac{z^3}{3!}\left.\frac{\partial^3 U_z(z,\theta,x)}{\partial z^3}\right|_{z=0} + \dots \\ U_\theta = U_\theta(0,\theta,x) + z\left.\frac{\partial U_\theta(z,\theta,x)}{\partial z}\right|_{z=0} + \frac{z^2}{2!}\left.\frac{\partial^2 U_\theta(z,\theta,x)}{\partial z^2}\right|_{z=0} + \frac{z^3}{3!}\left.\frac{\partial^3 U_\theta(z,\theta,x)}{\partial z^3}\right|_{z=0} + \dots \\ U_x = U_x(0,\theta,x) + z\left.\frac{\partial U_x(z,\theta,x)}{\partial z}\right|_{z=0} + \frac{z^2}{2!}\left.\frac{\partial^2 U_x(z,\theta,x)}{\partial z^2}\right|_{z=0} + \frac{z^3}{3!}\left.\frac{\partial^3 U_x(z,\theta,x)}{\partial z^3}\right|_{z=0} + \dots \end{cases} \qquad (۳-۱)$$

رابطه‌ی فوق را به‌صورت زیر می‌توان بازنویسی کرد.

$$\begin{cases} U_z = U_{z0}(x,\theta) + z\,U_{z1}(x,\theta) + z^2 U_{z2}(x,\theta) + z^3 U_{z3}(x,\theta) + \dots \\ U_\theta = U_{\theta 0}(x,\theta) + z\,U_{\theta 1}(x,\theta) + z^2 U_{\theta 2}(x,\theta) + z^3 U_{\theta 3}(x,\theta) + \dots \\ U_x = U_{x0}(x,\theta) + z\,U_{x1}(x,\theta) + z^2 U_{x2}(x,\theta) + z^3 U_{x3}(x,\theta) + \dots \end{cases} \qquad (۴-۱)$$

براساس رابطه‌ی (۱-۴)، جابه‌جایی به‌صورت یک چندجمله‌ای بر حسب z نوشته می‌شود. درنظر گرفتن $z = 0$، نشانگر جابه‌جایی سطح میانی پوسته است. اگر فقط جمله‌ی اوّل درنظر گرفته شود، تحلیل با تقریب مرتبه‌ی صفر پوسته‌های جدار ضخیم می‌شود که مشابه نظریه‌ی خمشی (نظریه‌ی مرتبه‌ی یک در پوسته‌های نازک) و اگر دو جمله از این بسط درنظر گرفته شود، تحلیل با تقریب مرتبه‌ی

1. Differential element

یک پوسته‌های جدار ضخیم حاصل می‌شود که مشابه نظریه‌ی فلوگه (نظریه‌ی مرتبه‌ی دو در پوسته‌های نازک) است.

نظریه با تقریب مرتبه‌ی یک به نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل میرسکی-هرمان[1] شهرت دارد که تعمیم نظریه‌ی تیموشنکو در تیرها و همچنین نظریه‌ی میندلین[2] در ورق‌ها می‌باشد. در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، مقاطع مستوی و عمود بر سطح میانی، پس از تغییر شکل، مستوی باقی می‌مانند، ولی الزاماً عمود نیستند؛ یعنی کرنش برشی و تنش برشی صفر درنظر گرفته نمی‌شوند. هرچند به‌کارگیری نظریه‌ی الاستیسیته‌ی سه‌بعدی، منجر به حل دقیق مسائل می‌شود، ولی به دلیل این که تاکنون هیچ راه حل کاملی برای پوسته‌های جدار ضخیم (به غیر از موارد خاص) با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی سه‌بعدی ارائه نشده است، نظریه‌ی تغییر شکل برشی برای تحلیل سازه‌های پوسته‌ای مختلف با انواع جداره، مواد، بارگذاری و شرایط مرزی روش مناسبی می‌باشد.

در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، توزیع کرنش برشی عرضی در ضخامت ثابت است که منجر به تنش برشی ثابت می‌شود. سطوح بالایی و پایینی پوسته به وضوح برشی را تحمل نمی‌کنند؛ بنابراین نتیجه تنها یک تقریب اوّلیه است. توزیع واقعی تنش برشی در ضخامت متفاوت است و در طول سطوح بالا و پایین دارای مقدار صفر است. به همین دلیل ضروری است که یک ضریب تصحیح برش عرضی در معادلات وارد شود.

۱-۲-۳ نظریه‌های غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای

در این قسمت نظریه‌های غیرخطی مربوط به پوسته‌های استوانه‌ای به طور مختصر معرفی می‌شوند [۵].

۱-۲-۳-۱ نظریه‌ی غیرخطی دانل[3]

یک پوسته‌ی استوانه‌ای با شعاع میانگین R، ضخامت h و طول L مفروض است. نظریه‌ی دانل برای

1. Mirsky-Hermann first-order shear deformation theory
2. Mindlin theory
3. Donnel’s nonlinear theory

تغییر شکل‌های بزرگ w (در جهت شعاعی) یک پوسته‌ی استوانه‌ای ارائه شده است. در این نظریه، فرض‌های زیر برقرارند.

۱- پوسته نازک است؛ $h << R,L$.

۲- مرتبه‌ی بزرگی خیز w با مرتبه‌ی بزرگی ضخامت h برابر است؛ بنابراین با توجه به فرض اول، خیز نسبت به ابعاد R و L کوچک است؛ یعنی $w << R,L$.

۳- شیب در هر نقطه کوچک است؛ $|\partial w/\partial x| << 1$ و $|\partial w/(R\partial\theta)| << 1$.

۴- تمام مؤلفه‌های کرنش کوچک هستند، بنابراین الاستیسیته‌ی خطی معتبر است.

۵- فرضیات لاو-کیرشهف برقرار است؛ یعنی تنش‌ها در جهت عمود بر لایه‌ی میانی پوسته قابل صرف نظر هستند و کرنش‌ها به‌صورت خطی با ضخامت تغییر می‌کنند. این فرضیات تقریب‌های خوبی برای پوسته‌های نازک هستند. اگرچه در حضور بارهای خارجی عمود بر سطح پوسته، تنش‌ها در جهت عمودی به وجود می‌آیند، حتی اگر اندازه‌ی آنها (به جز در همسایگی بارهای متمرکز) از سایر تنش‌ها کوچک‌تر باشد.

۶- جابه‌جایی‌های مماسی u و v بسیار کوچک هستند و در روابط کرنش- جابه‌جایی تنها جملات غیرخطی شامل w دیده می‌شود. از سایر جملات غیرخطی صرف نظر می‌شود.

جابه‌جایی نقطه‌ای دلخواه از پوسته در جهت‌های محوری، محیطی و شعاعی به ترتیب با u_1، u_2 و u_3 نشان داده می‌شود که u، v و w جابه‌جایی نقطه‌ای روی لایه‌ی میانی پوسته هستند. با توجه به فرض پنجم، میدان جابه‌جایی زیر برای پوسته درنظر گرفته می‌شود.

$$u_1 = u(\mathrm{x},\theta) - z\,\frac{\partial w}{\partial x},\quad u_2 = v(\mathrm{x},\theta) - \frac{\mathrm{z}}{R}\frac{\partial w}{\partial \theta},\quad u_3 = w(\mathrm{x},\theta) \qquad (۱-۵)$$

از این نظریه می‌توان برای تحلیل پوسته‌های استوانه‌ای کامل یا ناقص[1] استفاده کرد.

1. Panel

۱-۲-۳-۲ نظریه‌ی فلوگه-لور-بیرنه[1]

در این نظریه از فرض نازک‌بودن پوسته صرف نظر می‌شود. همچنین فرض ششم نظریه‌ی دانل نیز معتبر نخواهد بود. بنابراین میدان جابه‌جایی به‌شکل زیر درنظر گرفته می‌شود.

$$u_1 = u(\mathrm{x},\theta) - z\,\frac{\partial w}{\partial x},\quad u_2 = v(\mathrm{x},\theta) - \frac{\mathrm{z}}{R}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v\right),\quad u_3 = w(\mathrm{x},\theta) \tag{۶-۱}$$

در این نظریه از ضخامت در برابر شعاع و طول چشم‌پوشی نمی‌شود و برای درنظر گرفتن اثر ضخامت از تقریب‌هایی استفاده می‌شود.

۱-۲-۳-۳ نظریه‌ی غیرخطی نووژیلوف[2]

بر اساس نظریه‌ی غیرخطی نووژیلف، میدان جابه‌جایی در پوسته به‌شکل زیر درنظر گرفته می‌شود.

$$u_1 = u + z\,\Theta,\quad u_2 = v + \mathrm{z}\,\Psi,\quad u_3 = w + w_0 + z\,\chi \tag{۷-۱}$$

که در آن داریم.

$$\begin{aligned}
\Theta &= -\frac{\partial w}{\partial x}\left(1 + \frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R}\right) + \frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v\right)\frac{\partial u}{\partial \theta} \\
\Psi &= -\frac{1}{R}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v\right)\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} \\
\chi &\cong \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R} + \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w\right) - \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial v}{\partial x}
\end{aligned} \tag{۸-۱}$$

نووژیلف این روابط را با فرض این که تارهای مستقیم و عمود بر سطح میانی پوسته پس از تغییر شکل همچنان مستقیم و عمود بر سطح میانی باقی می‌مانند و دچار کشیدگی نمی‌شوند؛ به‌دست آورد. این فرض جایگزین بخش دوّم در فرض شماره‌ی پنجم نظریه‌ی دانل می‌شود. فرض ششم نیز برقرار نیست.

1. Flügge-Lur'e-Byrne nonlinear shell theory
2. Novozholov nonlinear shell theory

۱-۲-۳-۴ نظریه‌ی غیرخطی سندرز-کویتر[1]

سندرز در سال ۱۹۶۳ نظریه‌ی بهبودیافته‌ی غیرخطی پوسته را در شکل تانسوری ارائه کرد. تقریباً همزمان با او همین معادلات توسط کویتر در سال ۱۹۶۶ نیز به‌دست آمد، که منجر به معادلات سندرز-کویتر گردید. این معادلات با درنظر گرفتن فرضیات مشابه با نظریه‌های قبل به منظور یافتن عبارت‌های ریاضی منطبق با مکانیک پوسته و نیز نگهداشتن جملات هم‌مرتبه به‌دست آمده‌اند و برای تغییر شکل-های محدود با کرنش و دوران‌های کوچک مناسب هستند؛ بنابراین فرض شماره‌ی شش نظریه‌ی دانل برقرار نخواهد بود. همچنین از برش‌های عرضی چشم‌پوشی می‌گردد. تغییرات انحنا و پیچش با توجه به نظریه‌ی غیرخطی سندرز-کویتر، خطی هستند.

۱-۲-۳-۵ نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل غیرخطی

نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل غیرخطی پوسته‌ها نخستین بار توسط ردی[2] در سال ۱۹۸۵ معرفی شد. از پنج متغیر وابسته، سه جابه‌جایی u، v و w و دو دوران ϕ_1 و ϕ_2 برای توصیف تغییر شکل پوسته استفاده می‌شود. این نظریه را می‌توان نسخه‌ی جدار ضخیم نظریه‌ی سندرز برای جملات خطی و نظریه‌ی غیرخطی دانل برای جملات غیرخطی دانست.

فرضیات این نظریه برای یک پوسته با دو انحنای ثابت در راستاهای x و y یعنی R_x و R_y عبارتند از:

۱- ضخامت پوسته در مقایسه با شعاع‌های انحنای اصلی کوچک است، بنابراین این نظریه تنها برای پوسته‌های نسبتاً ضخیم مناسب است.

۲- تنش عمودی عرضی σ_z قابل چشم‌پوشی است. در حالت کلی می‌توان نشان داد که σ_z در مقایسه با τ_{xz} و τ_{yz}، به جز در نزدیکی لبه‌های پوسته، کوچک است. بنابراین این نظریه تقریب خوبی

1. Sanders-Koiter nonlinear shell theory
2. Reddy

از رفتار پوسته‌های نسبتاً ضخیم به شمار می‌رود.

۳- خطوط مستقیم و عمود بر رویه‌ی میانی پوسته پس از تغییر شکل همچنین مستقیم باقی می‌مانند، اما لزوماً عمود بر رویه‌ی میانی نیستند؛ یعنی فرض لاو-کیرشهف در این نظریه برقرار نیست.

میدان جابه‌جایی نقطه‌ی دلخواهی از پوسته به کمک روابط زیر توصیف می‌شود.

$$u_1=\left(1+\frac{z}{R_x}\right)u+z\,\phi_1,\quad u_2=\left(1+\frac{z}{R_y}\right)v+z\,\phi_2,\quad u_3=w \tag{۱-۹}$$

می‌توان با اضافه کردن جملات مشابه به میدان برداری فوق، به نظریه‌های مرتبه‌ی بالاتر (بر حسب z) نیز دست یافت. از آنجا که کرنش‌های برشی عرضی کوچک فرض شده‌اند، با صرف نظر از جملات غیرخطی، معادلات سینماتیک زیر برای برش عرضی به‌دست می‌آید.

$$\gamma_{xz}=\frac{\partial u_1}{\partial z}+\frac{1}{R_x\left(1+z/R_x\right)}\left(\frac{\partial u_1}{\partial\psi}-u_1\right) \tag{۱-۱۰الف}$$

$$\gamma_{yz}=\frac{\partial u_2}{\partial z}+\frac{1}{R_y\left(1+z/R_y\right)}\left(\frac{\partial u_3}{\partial\theta}-u_2\right) \tag{۱-۱۰ب}$$

در روابط فوق ψ و θ مختصات زاویه‌ای هستند.

۱-۳ مواد هایپرالاستیک

در این قسمت ضمن تعریف مواد هایپرالاستیک و بررسی انواع آنها، اصول حاکم بر مدل‌های ساختاری این مواد از دیدگاه مکانیک محیط پیوسته و مدل‌های ساختاری خاص آنها بیان شده‌اند. همچنین روش‌های انرژی جهت تحلیل مواد هایپرالاستیک تراکم‌ناپذیر معرفی شده‌اند.

۱-۳-۱ تعریف مواد هایپرالاستیک

مواد هایپرالاستیک گروهی از مواد هستند که می‌توانند تغییر شکل‌های بزرگ الاستیک و بازگشت‌پذیر داشته باشند. قوانین ساختاری مواد هایپرالاستیک به منظور مدل‌سازی موادی به‌کار می‌روند که تحت

کرنش‌های بسیار بزرگ رفتار الاستیک از خود نشان می‌دهند. این قوانین برای دو حالت اصلی استفاده می‌شوند.

حالت اوّل برای مدل‌سازی رفتار مواد غیرخطی مانند رفتار لاستیکی[۱] مواد پلیمری[۲] می‌باشد. به همین دلیل به این نوع مواد شبه‌لاستیک نیز گفته می‌شود. خواص این مواد نزدیک به مواد الاستیک ایده‌آل است؛ یعنی تنش، صرفاً تابعی از کرنش جاری و مستقل از نرخ و سابقه‌ی بارگذاری بوده و تغییر شکل‌ها بازگشت‌پذیر هستند. این مواد همسانگرد هستند. همچنین در برابر تغییر حجم از خود مقاومت نشان می‌دهند؛ به‌صورتی که مدول بالک[۳] آنها با فلزات قابل مقایسه است. همچنین این مواد در مقابل برش مقاومت بسیار کمی از خود نشان می‌دهند.

حالت دوّم در مدل‌سازی تغییر شکل‌های بزرگ همچون فوم‌های پلیمری[۴] با قابلیت تغییر شکل‌های بزرگ بازگشت‌پذیر (مانند اسفنج‌ها[۵]) استفاده می‌شود. وابستگی این مواد به نرخ و یا سابقه‌ی بارگذاری بسیار اندک بوده و قابل صرف‌نظر است. بر خلاف لاستیک‌ها، اغلب فوم‌ها دارای تراکم‌پذیری[۶] بالایی هستند؛ به نحوی که مدول بالک و برشی آنها از یک مرتبه هستند. همچنین فوم‌ها با توجه به ساختار سلولی خود می‌توانند خاصیت ناهمسانگردی نیز داشته باشند.

لازم به ذکر است که رفتار مواد پلیمری در حالت کلی به شدت تابع دما، نرخ کرنش و نرخ بارگذاری هستند. رفتار این مواد شامل سه بخش شیشه‌مانند[۷]، ویسوالاستیک[۸] و لاستیکی[۹] است که میزان هرکدام از این سه بخش و جزئیات رفتار آنها وابسته به ساختار مولکولی این مواد است. در زیر دمای بحرانی که به آن دمای تبدیل شیشه‌ای[۱۰] نیز گفته می‌شود، پلیمرها رفتاری مشابه شیشه دارند. نزدیک این دما،

1. Rubbery behavior
2. Polymeric materials
3. Bulk modulus
4. Polymeric foams
5. Sponges
6. Compressibility
7. Glassy
8. Viscoelastic
9. Rubbery
10. Glass transition temperature

تنش‌ها به شدت وابسته به نرخ کرنش هستند و در خود این دما، مدول برشی به شدت کاهش می‌یابد. در دماهای بالاتر از این دما، مادّه رفتار لاستیکی از خود نشان می‌دهد.

برای بسیاری از مواد، مدل الاستیک خطی، رفتار مشاهده شده از مواد را با دقت توضیح نمی‌دهد. مدل هایپرالاستیک یا گرین-الاستیک[1] در واقع یک مدل ساختاری برای گروهی از مواد ایده‌آل الاستیک می‌باشد که در آنها رابطه‌ی تنش-کرنش از یک تابع انرژی کرنشی[2] استخراج می‌شود. مادّه‌ی هایپرالاستیک حالت خاصی از مادّه‌ی الاستیک کوشی[3] است.

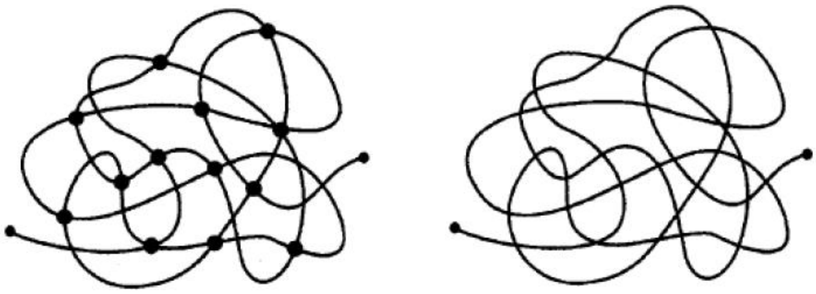
۱-۳-۲ انواع مواد هایپرالاستیک

از جمله‌ی مواد هایپرالاستیک می‌توان به لاستیک‌ها، مواد شبه‌لاستیک، الاستومرها و بافت‌های زیستی نرم اشاره کرد که در ادامه توضیحی مختصر درباره‌ی هر یک داده می‌شود.

لاستیک طبیعی از تراوشات درخت لاستیک به‌دست می‌آید که ظاهری شیری رنگ دارد. منشأ لغت کائوچو (لاستیک) یک کلمه‌ی هندی است که "درخت گریان" معنی می‌دهد. مادّه‌ی ترشح شده دارای مقدار زیادی هیدروکربن است که به عنوان لاستیک خام شناخته می‌شود. همچنین مقادیری از صمغ، مواد معدنی، پروتئین و آب در این مادّه وجود دارد. به مادّه‌ی تراوش شده برای جدا کردن لاستیک از ناخالصی‌ها گرما داده می‌شود. این درخت‌ها با این که از نظر گیاه‌شناسی از یک خانواده نیستند؛ ولی ترکیب هیدروکربنی یکسانی دارند.

لاستیک‌ها همانطور که در شکل ۱-۱ (الف) نشان داده شده است، از مولکول‌های بلند زنجیره‌ای تشکیل شده‌اند. ولکانش[4]، پیوند دادن زنجیره‌ها توسط باندهای شیمیایی است که اولین بار با اضافه کردن سولفور با لاستیک طبیعی انجام شد. مولکول تقویت شده‌ی لاستیک در شکل ۱-۱ (ب) نشان داده شده است.

1. Green-Elastic
2. Strain energy
3. Cauchy
4. Vulcanization



(ب) (الف)

شکل ۱-۱ مولکول‌های لاستیک

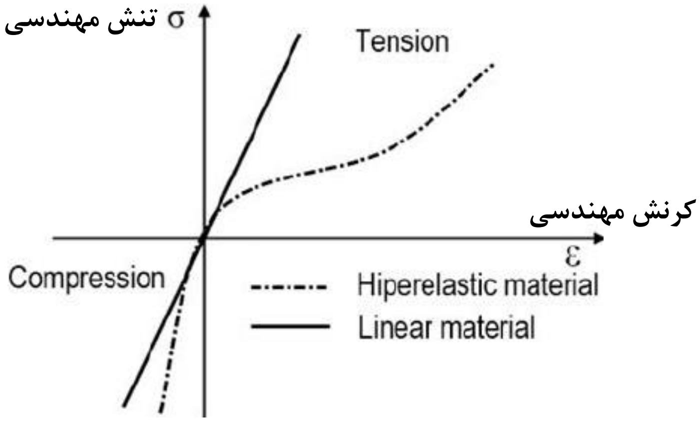
تا قبل از کشف فرایند ولکانش، لاستیک به علت حساسیت شدید نسبت به محیط، کاربرد صنعتی چندانی نداشت؛ زیرا با مقدار کمی حرارت نرم و چسبناک و با سرد کردن سخت و شکننده می‌شود. ولکانش، خواص فیزیکی لاستیک را بهبود می‌بخشد.

ترکیب‌های لاستیکی معمولاً از یک لاستیک پایه (لاستیک طبیعی)، یک پرکننده[1] مانند کربن سیاه یا اکسید روی، یک تقویت‌کننده و افزودنی‌های دیگری تشکیل شده‌اند. این افزودنی‌ها به دلیل بهبود برخی خواص همراه با تضعیف خواص دیگر، بسته به کاربرد لاستیک مشخص می‌شوند. لاستیک‌ها دارای کاربردهای مهندسی بسیار وسیعی به خصوص در حوزه‌ی مهندسی مکانیک، عمران و برق هستند. علاوه بر صنعت خودرو در موارد بسیاری مانند روکش‌ها، آب‌بندهای اجزای الکتریکی و ارینگ‌ها و واشرها (خاصیت نشت‌ناپذیری)، ضربه‌گیرها، لرزه‌گیرها و قطعات ایزولاسیون ارتعاشات در ساختمان‌ها، بوش‌ها و اتصال‌دهنده‌ها، اتصالات چسبی، تسمه‌ها و موارد بسیار دیگری به‌کار می‌روند. دلیل اصلی استفاده از اجزای لاستیکی، قابلیت کشسانی و چقرمگی[2] آنها است. برخی از لاستیک‌ها می‌توانند تا ۵ یا ۶ برابر طول اولیه‌ی خود تغییر طول دهند.

واضح‌ترین نمونه برای این مواد، مواد شبه‌لاستیک می‌باشند که در آنها رابطه تنش-کرنش را می‌توان به‌صورت رابطه‌ی الاستیک غیرخطی، همسانگرد و به‌طور کلی مستقل از نرخ کرنش بیان کرد. رفتار این مواد به این صورت است که مدول الاستیک لحظه‌ای در کرنش‌های کوچک و متوسط کاهش یافته و

1. Filler
2. Toughness

نرم می‌شود و ناگهان در کرنش‌های بزرگ، مادّه سفت شده و مدول الاستیک به‌صورت لحظه‌ای افزایش می‌یابد. به این رفتار، رفتار S شکل گفته می‌شود (شکل ۱-۲).



شکل ۱-۲ نمودار تنش-کرنش مواد شبه‌لاستیک [۶]

از جمله مواد دیگری که رفتار آنها اغلب با رفتار مواد هایپرالاستیک ایده‌آل مطابقت دارد، الاستومرهای ولکانش‌یافته‌ی پرنشده[1] هستند. الاستومرهای پرشده[2] نیز گاهی به کمک مواد هایپرالاستیک ایده‌آل مدل‌سازی می‌شوند. الاستومر، پلیمری است که به دلیل داشتن اتصالات عرضی قوی، قابلیت کشسانی زیادی دارد. نام الاستومر از دو قسمت "الاستو" (برگرفته از "الاستیک" و به معنای کشسانی) و "مر" (برگرفته از "پلیمر") تشکیل شده‌است. نسبت پواسون برخی از این مواد به ۰/۵ بسیار نزدیک است و بنابراین می‌توان آنها را تراکم‌ناپذیر فرض کرد. الاستومرها در ساخت محصولات زیادی مانند لاستیک اتومبیل، درزگیرهای آب‌بندی، برف پاک‌کن‌ها و شلنگ‌ها به‌کار می‌روند. همچنین از دیگر کاربردهای لاستیک‌ها و الاستومرها می‌توان به کف‌پوش‌ها و ضربه‌گیرها، پدهای طبی در کفش‌ها و یا مبدل‌های دی‌الکتریک الاستومری[3] که امروزه برای تولید انرژی الکتریکی از نیروهای حرکتی مختلف مثل انرژی انسان، حرکت ماشین‌ها و یا امواج دریا مورد استفاده‌ی وسیع قرار گرفته‌اند، اشاره کرد.

بافت‌های زیستی نرم نیز رفتار غیرخطی مشابه مواد هایپرالاستیک از خود نشان می‌دهند. بافت‌های

1. Unfilled,vulcanized elastomers
2. Filled elastomers
3. Dielectric elastomer transducers

زیستی مجموعه‌ای از سلول‌های مشابه هستند که بر روی هم کار مشخصی را انجام می‌دهند. از جمله‌ی آنها می‌توان به زیست‌مواد نرم[1] اشاره کرد. آزمایش‌های تک‌محوری انجام شده بر روی دیواره‌ی عروق بدن جانداران نشان‌دهنده‌ی رفتار غیرخطی تنش-کرنش این مواد با قابلیت تحمل کششی بالا در کرنش‌های کمتر و قابلیت کشش پایین‌تر در کشیدگی‌های بالاتر می‌باشد که همچون مواد شبه‌لاستیک از آن تحت عنوان کرنش-سختی[2] نام برده می‌شود [۷].

دیواره‌ی عروق می‌توانند از مواد همگن یا ناهمگن، همسانگرد یا ناهمسانگرد، تراکم‌پذیر یا تراکم-ناپذیر و ویسکوالاستیک باشند. بعضی بافت‌های زیستی همچون بافت مغز و کبد رفتار همسانگرد از خود نشان می‌دهند. بخش دیگری از زیست‌مواد نرم مانند پوست و تاندون‌ها رفتار ناهمسانگرد دارند [۷]. بررسی رفتار مکانیکی عروق (از جمله دیواره‌های رگ‌های خونی) می‌تواند اطلاعات مفیدی در زمینه‌ی شروع، پیشروی و درمان بیماری‌های قلبی عروقی در اختیار دانشمندان قرار دهد. همچنین سازه‌هایی در بدن موجودات زنده را می‌توان به کمک این مواد مدل‌سازی کرد که از جمله‌ی آن می‌توان به عروق خونی[3] نقاط مختلف بدن موجودات زنده اشاره کرد. کمک به متخصصان در تشخیص بیماری‌ها همانند بافت‌های سرطانی و یا تومورهای داخل بدن موجودات زنده از طریق بررسی رفتار غیرخطی این مواد نیز از جمله کاربردهای دیگر آنها است.

۱-۳-۳ مواد هایپرالاستیک (گرین-الاستیک) از دیدگاه مکانیک محیط پیوسته

تعاریف مختلفی برای تنش و کرنش ارائه شده است که بخشی از آنها واقعی و بخشی انتزاعی هستند که هر کدام ازاین تنش‌ها در بیان انرژی داخلی یک جسم کاربرد دارند. اگر از یک نوع کرنش به عنوان معیاری برای سنجش تغییر شکل‌های یک جسم استفاده شود، از هر تنش دلخواهی نمی‌توان برای سنجش تنش استفاده کرد. این مفهوم تحت عنوان متغیرهای مزدوج از طریق انرژی[4] بیان می‌شود. با

1. Soft biomaterials
2. Strain-Hardening
3. Blood vessels
4. Energy conjugate

تعریف نرخ انرژی داخلی ($\dot{e}$) بر واحد حجم تغییر شکل‌نیافته‌ی جسم که برابر با توان تنش[1] در جسم است ($\rho_0\dot{e}$)، در مختصات مادّی اثبات می‌شود که [۸]:

$$\rho_0\dot{e} = \mathbf{P}:\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{S}:\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{S}:\frac{1}{2}\dot{\mathbf{C}} = \mathbf{T}:\dot{\mathbf{U}} \tag{۱۱-۱}$$

هر معیاری برای سنجش تنش و هر متغیری که برای سنجش نرخ تغییر شکل به‌کار می‌رود، اگر به‌صورت انقباض دوگانه[2] توسط نرخ انرژی داخلی به یکدیگر مرتبط شوند، مزدوج از طریق انرژی هستند. گروه‌های تنش و تغییر شکل شامل تنش پیولا-کیرشهف اول[3] $(\mathbf{P})$ با گرادیان تغییر شکل[4] $(\mathbf{F})$، تنش پیولا-کیرشهف دوّم[5] $(\mathbf{S})$ با کرنش گرین-لاگرانژ[6] $(\mathbf{E})$ و کرنش کوشی-گرین راست[7] $(\mathbf{C})$، تنش بایت[8] $(\mathbf{T})$ با کشیدگی راست[9] $(\mathbf{U})$ مزدوج انرژی هستند. ρ_0 چگالی اوّلیه جسم در پیکربندی مادّی است. کمیت‌های تانسوری (مرتبه‌ی اوّل و دوّم) به‌صورت پررنگ (برجسته) نمایش داده شده‌اند.

مشخصه‌ی اصلی مواد هایپرالاستیک اصل وجود یک انرژی کرنشی $W = \rho_0\Psi$ وابسته به یک تانسور تغییر شکل یا کرنش است. این تابع انرژی کرنشی W، پتانسیل الاستیک[10] نام دارد. Ψ انرژی کرنشی بر واحد جرم یا انرژی کرنشی مخصوص[11] نام دارد. برای پتانسیل الاستیک کل جسم با انتگرال-گیری از انرژی کرنشی بر واحد حجم تغییر شکل‌نیافته می‌توان نوشت:

$$\Pi_{\text{int}} = \iiint_{V_0} W \, \mathrm{d}V_0 = \iiint_{V_0} \rho_0 \Psi \mathrm{d}V_0 \tag{۱۲-۱}$$

با فرض این که W تابعی از کرنش گرین-لاگرانژ باشد، یک مادّه در صورتی هایپرالاستیک یا گرین-الاستیک نامیده می‌شود؛ اگر تابع پتانسیل الاستیکی وجود داشته باشد $W = W(\mathbf{E})$ که مشتق مادّی

1. Stress power
2. Double contraction
3. The first Piola-Kirchhoff stress
4. Deformation gradient
5. The second Piola-Kirchhoff stress
6. Green-Lagrange strain
7. The right Cauchy-Green strain
8. Biot stress
9. Right stretch tensor
10. Elastic potential
11. Specific strain energy

آن نسبت به زمان با توان تنش برابر باشد [۹].

$$\dot{W} = \frac{\mathrm{D}W}{\mathrm{D}t} = \rho_0 \dot{e} = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{S} : \frac{1}{2}\dot{\mathbf{C}} \tag{۱۳-۱}$$

با تعریف مشتق زنجیره‌ای:

$$\dot{W} = \frac{\mathrm{D}W}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} \frac{\partial E_{ij}}{\partial t} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}} : \dot{\mathbf{E}} \tag{۱۴-۱}$$

از مقایسه‌ی روابط (۱-۱۳) و (۱-۱۴) و با توجه به رابطه‌ی $\mathbf{E}=1/2\left(\mathbf{C}\text{-}\vec{\mathbf{G}}\right)$، معادله‌ی ساختاری مواد هایپرالاستیک در فرم مادّی آنها برحسب پارامترهای تنش و کرنش مزدوج به‌دست می‌آید.

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W\left(\mathbf{E}\right)}{\partial \mathbf{E}} = 2\frac{\partial W\left(\mathbf{C}\right)}{\partial \mathbf{C}} \tag{۱۵-۱}$$

$\vec{\mathbf{G}}$ بردار پایه‌ی دستگاه مادّی است. با توجه به رابطه‌ی $\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J}(\mathbf{FSF}^{\mathrm{T}})$ و $\boldsymbol{\tau}=J\boldsymbol{\sigma}$ برای تنش کوشی[۱] $(\boldsymbol{\sigma})$ و کیرشهف[۲] $(\boldsymbol{\tau})$ در حالت فضایی نیز می‌توان رابطه‌ی مشابه را نوشت.

$$\boldsymbol{\tau}=J\boldsymbol{\sigma} = 2\frac{\partial W\left(\mathbf{B}\right)}{\partial \mathbf{B}}\mathbf{B} \tag{۱۶-۱}$$

در این روابط، $J=\det\left(\mathbf{F}\right)$ ژاکوبین[۳] (نسبت حجمی[۴]) است که $\det\left(\ \right)$ نشان‌دهنده‌ی دترمینان است. $\mathbf{B}$ نیز تانسور کرنش کوشی-گرین چپ است که در فرمول‌بندی فضایی بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای توان تنش کل جسم ($\dot{\Pi}$) می‌توان نوشت:

$$\iiint_{V_0} \rho_0\, \dot{\mathrm{e}}\, \mathrm{d}V_0 = \iiint_{V_0} \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} \mathrm{d}V_0 = \iiint_{V_0} \dot{W} \mathrm{d}V_0 = \dot{\Pi} \tag{۱۷-۱}$$

با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه‌ی فوق بین زمان‌های t_1 تا t_2 می‌توان نوشت:

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{\Pi}_{\mathrm{int}} \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}\Pi_{\mathrm{int}} = \Pi_{\mathrm{int}}\left(\mathbf{E}_2\right) - \Pi_{\mathrm{int}}\left(\mathbf{E}_1\right) \tag{۱۸-۱}$$

نتیجه‌ی مهم رابطه‌ی (۱-۱۸) این است که در هر تغییری از پیکربندی نخست به پیکربندی جاری،

---

1. Cauchy stress
2. Kirchhoff stress
3. Jacobian
4. Volume ratio

کار داخلی انجام شده توسط تنش $(\mathbf{S})$ در راستای مسیر کرنش مزدوج آن $(\mathbf{E})$ صرفاً به مقادیر نهایی کرنش‌ها یعنی $\mathbf{E}_1=\mathbf{E}(t_1)$ و $\mathbf{E}_2=\mathbf{E}(t_2)$ وابستگی داشته و کاملاً مستقل از مسیر تغییر شکل‌های پیکربندی نخست و جاری می‌باشد. بنابراین خاصیت معمول در مدل‌های مادّه‌ی هایپرالاستیک مستقل از مسیر بودن کار داخلی حاصل از تنش‌ها در راستای مسیر کرنش‌های مزدوج با آنها می‌باشد [۱۰].

از آنجا که در این پژوهش جسم مورد تحلیل از جنس مادّه‌ی هایپرالاستیک همسانگرد فرض شده است، تابع انرژی کرنشی با توجه به رابطه‌ی (۱-۱۵) بر حسب پارامترهای زیر قابل نگارش است [۱۰].

$$W\ (\mathbf{E})=W\ (\mathbf{C})=W\ (I_1,I_2,I_3) \tag{۱-۱۹}$$

I_{i}ها پایاهای عددی تانسور $\mathbf{C}$ هستند. با توجه به رابطه‌ی زیر:

$$\left(\frac{2}{J}\right)I_3\left(\frac{\partial}{\partial I_3}\right)=\frac{\partial}{\partial J} \tag{۱-۲۰}$$

رایج‌تر است که برای ساده‌سازی، چگالی انرژی کرنشی W تابعی از J (نسبت حجمی) به جای I_3 درنظر گرفته شود.

۱-۳-۴ اصول حاکم بر مدل‌های ساختاری

معادلات سینماتیک، حرکت و توان تنش را می‌توان بر حسب متغیرهای تنش و کرنش مزدوج نوشت.

$$\begin{cases}\mathbf{E}=\dfrac{1}{2}\left(\mathbf{F}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}-\mathbf{I}\right)\\ \operatorname{div}(\mathbf{F}\,\mathbf{S})+\rho_0\left(\vec{\mathbf{b}}_0-\ddot{\vec{\mathbf{x}}}\right)=0\\ \rho_0\dot{e}=\mathbf{S}:\dot{\mathbf{E}}\end{cases} \tag{۱-۲۱}$$

از بررسی معادلات فوق مشاهده می‌شود که این معادلات به تنهایی برای تحلیل مسائل مقدار مرزی اجسام جامد کافی نمی‌باشند. معادلات ساختاری به عنوان روابط یک به یک بین معیارهای مناسب سنجش تنش و کرنش مزدوج انرژی تحت شرایط مشخص هستند. معادلات سینماتیک و حرکت معادلات دقیقی هستند. بر خلاف این دو معادله، معادلات ساختاری بر اساس مشاهدات تجربی به‌صورت تقریبی از واقعیت به‌دست می‌آیند؛ هرچند شروط خاصی از نظر مکانیک محیط پیوسته بر آنها حاکم

است. اصولی که باید بر همه‌ی قوانین ساختاری حاکم باشند، در ادامه آورده شده است [۱۱].

۱- اصل جبرگرایی برای تنش‌ها[1]: طبق این اصل تنش در یک جسم توسط سابقه‌ی حرکت آن جسم تعیین می‌شود.

۲- اصل موضعی بودن[2] (اثر محلی): در تعیین تنش در یک نقطه از مادّه، با درنظر گرفتن محدوده‌ی کوچکی در اطراف این نقطه، حرکت در خارج از این محدوده قابل صرف نظر کردن است.

۳- اصل مستقل از چارچوب بودن مادّه[3]: چارچوب مرجع مجموعه‌ای از خطوط یا سطوح است که به عنوان مرجع برای تعریف مختصات یک نقطه‌ی ثابت یا متحرک به‌کار می‌روند. این خاصیت که در منابع قدیمی‌تر تحت عنوان عینی‌بودن مادّه[4] نیز بیان شده است، اشاره به نکته دارد که معادلات ساختاری شامل قیدهای داخلی یک سیستم فیزیکی و برهم‌کنش بین بخش‌های آن باید مستقل از چارچوب مرجع خارجی باشد.

۴- اصل تقارن ماده[5]: بر اساس این اصل، معادلات ساختاری تحت هر انتقال دستگاه مادّی متناظر با یک مجموعه‌ی متقارن تنش که توسط خواص تقارن آن مادّه تعیین می‌شود، باید بدون تغییر بماند.

ساده‌ترین و رایج‌ترین روش برای تعیین معادله‌ی ساختاری یک مادّه استفاده از آزمایش تجربی تک‌محوری کشش- فشار[6] است که در اکثر موارد داده‌های مربوط به متغیرهای مادّه که از این آزمایش به‌دست می‌آیند، در بارگذاری‌های دیگر پیش‌بینی ضعیفی از رفتار مکانیکی مادّه خواهند داشت. روش اوّل در رفع این محدودیت، تکمیل داده‌های تجربی توسط انجام آزمایش‌های اضافی مانند برش خالص[7]، برش ساده[8] و کشش دومحوری[9] است. در روش دوّم، آزمایش‌های تجربی بر اساس ترکیب بارگذاری‌های ساده‌ی مختلف بر روی یک نمونه با هندسه و تنظیمات یگانه انجام می‌شود که برای بررسی حالت‌های

1. Principle of determinism for stress
2. Principle of local action
3. Principle of material frame-indifference
4. Material objectivity
5. Principle of material symmetry
6. Uniaxial tension-compression
7. Pure shear
8. Simple shear
9. Biaxial tension

تغییر شکل مختلف کافی است؛ به عنوان مثال یک نمونه‌ی استوانه‌ای شکل تحت آزمایش همزمان کشش-پیچش[1] که شرایط بارگذاری ترکیبی را دارد. با درنظر گرفتن این نوع آزمایش‌ها، تعیین معادله‌ی ساختاری به تعیین رابطه‌ی تنش-کرنش متناظر با اندازه‌گیری نیرو و گشتاور ناشی از کشیدگی و پیچیدگی نمونه خلاصه می‌شود. در این حالت سه دیدگاه برای تعیین معادله‌ی ساختاری مطرح می‌شود.

الف) انتخاب یک تابع انرژی کرنشی و تعیین ضرایب آن از طریق مقایسه‌ی داده‌های حاصل از نتایج تجربی و تئوری بارگذاری؛

ب) تعیین وضعیت تنش با استفاده از نتایج تجربی، انتخاب تابع انرژی کرنشی مناسب و تعیین ضرایب آن از طریق داده‌های تجربی تنش-کرنش؛

ج) تعیین مشتق انرژی کرنشی به کمک داده‌های نتایج تجربی، انتخاب تابع انرژی کرنشی مناسب و تعیین ضرایب متناظر آن به کمک داده‌های تجربی مشتق انرژی کرنشی-کرنش.

مشکل روش اوّل که قدیمی‌تر است، فرض تابع انرژی کرنشی بدون داشتن دیدگاه اوّلیه نسبت به آن است. در روش‌های دیگر نیاز به فرض تابع انرژی کرنشی نیست. در مورد تغییر شکل‌های همگن مانند آزمایش‌های کشش تک‌محوری، برش خالص و کشش دومحوری به دلیل صریح بودن رابطه‌ی تنش و بارگذاری، عموماً از روش دوّم استفاده می‌شود. روش سوّم روشی پیچیده است؛ زیرا کمیتی که باید مشتق انرژی کرنشی نسبت به آن گرفته شود، مهم است. در بیشتر کارهای موجود، دو پایای اوّل تانسور کرنش کوشی-گرین انتخاب می‌شوند. با توجه به کمیت انتخاب شده و شرایط بارگذاری، فرض-های اساسی باید درنظر گرفته شود. مثلاً در مدل ریولین[2]، مشتقات انرژی کرنشی نسبت به پایاهای اوّل و دوّم تانسور کرنش به ترتیب ثابت و تابعی از صرفاً پایای دوّم درنظر گرفته شده است که بدون این فرض‌ها، امکان تعیین هر کدام از مشتقات انرژی کرنشی نسبت به پایاها وجود ندارد. همچنین به دلیل وابستگی پایاها و پراکندگی نتایج تجربی، تحلیل مشتقات انرژی کرنشی آسان نیست.

1. Tension-Torsion
2. Rivlin

۱-۳-۵ روابط ساختاری مواد هایپرالاستیک همسانگرد

در ادامه روابط ساختاری مواد هایپرالاستیک تراکم‌پذیر و تراکم‌ناپذیر بررسی خواهد شد.

۱-۳-۵-۱ روابط ساختاری برای مواد تراکم‌پذیر

تروسدل و نل [۹] در سال ۱۹۶۵ نشان دادند که هر تابع تانسوری همسانگرد $f\ (\mathbf{b})$ را می‌توان به‌صورت یک چندجمله‌ای درجه‌ی دوّم بر حسب تانسور $\mathbf{b}$ با ضرایبی تابع پایاهای تانسور $\mathbf{b}$ یا مقادیر ویژه‌ی این تانسور نمایش داد.

$$f\ (\mathbf{b}) = \varphi_0 \mathbf{I} + \varphi_1 \mathbf{b} + \varphi_2 \mathbf{b}^2 \quad , \left(\varphi_{\mathrm{i}} = \varphi_{\mathrm{i}} \left(I_1, I_2, I_3 \right) = \varphi_{\mathrm{i}} \left(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2 \right) ,\ \mathrm{i} = 0,1,2 \right) \tag{۱-۲۲}$$

بر اساس نظریه‌ی اشاره شده، در فرمول‌بندی فضایی برای تنش کوشی $\boldsymbol{\sigma}$ و تانسور کوشی-گرین چپ $\mathbf{B}$ توسط تابع تانسوری همسانگرد زیر می‌توان نوشت:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{B}) = \varphi_0 (I_{i\mathbf{B}}) \vec{\mathbf{g}} + \varphi_1 \left(I_{i\mathbf{B}} \right) \mathbf{B} + \varphi_2 (I_{i\mathbf{B}}) \mathbf{B}^2 \ , \qquad I_{i\mathbf{B}} = I_{1\mathbf{B}}, I_{2\mathbf{B}}, I_{3\mathbf{B}} \tag{۱-۲۳}$$

همچنین در فرمول‌بندی مادّی برای تنش پیولا-کیرشهف دوّم $\mathbf{S}$ بر حسب تانسور کوشی-گرین راست $\mathbf{C}$ می‌توان نوشت:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{C}) = J\ \varphi_0 (I_{i\mathbf{C}}) \mathbf{C}^{-1} + J\ \varphi_1 \left(I_{i\mathbf{C}} \right) \vec{\mathbf{G}} + J\ \varphi_2 (I_{i\mathbf{C}}) \mathbf{C} \tag{۱-۲۴الف}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{C}) = \gamma_0 (I_{i\mathbf{C}}) \vec{\mathbf{G}} + \gamma_1 \left(I_{i\mathbf{C}} \right) \mathbf{C} + \gamma_2 (I_{i\mathbf{C}}) \mathbf{C}^2 \tag{۱-۲۴ب}$$

در این روابط $I_{i\mathrm{C}} = I_{1\mathrm{C}}, I_{2\mathrm{C}}, I_{3\mathrm{C}}$ است. $\vec{\mathbf{G}}$ و $\vec{\mathbf{g}}$ به ترتیب بردارهای پایه‌ی دستگاه مادّی و فضایی هستند. با توجه به یکسان بودن پایاهای تانسور کوشی-گرین راست و چپ، به آنها پایاهای کرنش[1] گفته می‌شود که در اغلب مراجع با نماد $\left(I_1, I_2, I_3 \right)$ نمایش داده می‌شوند. از این روابط می‌توان به این شکل نتیجه‌گیری کرد که تانسورهای $\boldsymbol{\sigma}$ با $\mathbf{B}$ و همینطور $\mathbf{S}$ با $\mathbf{C}$ هم‌محور[2] هستند. از دیدگاه مکانیکی این

1. Strain invariants
2. Coaxial

هم‌محوری نشان‌دهنده‌ی این است که در مواد همسانگرد، تانسورهای $\boldsymbol{\sigma}$ و $\mathbf{B}$ دارای محورهای اصلی[1] یکسان $(\vec{\mathbf{n}}_{\mathrm{i}})$ می‌باشند. همچنین تانسورهای $\mathbf{S}$ و $\mathbf{C}$ نیز دارای محورهای اصلی منطبق بر یکدیگر $(\vec{\mathbf{N}}_{\mathrm{i}})$ هستند.

روابط ساختاری به‌صورت روابط (۱-۲۳) و (۱-۲۴)، در صورتی برای مواد الاستیک همسانگرد صادق خواهند بود که چگالی انرژی کرنشی W در این مواد به‌صورت یک تابع از پایاهای تانسور $\mathbf{B}$ یا $\mathbf{C}$ باشد.

$$W = W(I_1, I_2, I_3) \tag{۱-۲۵}$$

هر انرژی کرنشی برای مواد هایپرالاستیک همسانگرد که در رابطه‌ی بالا صدق کند، به عنوان یک نمونه‌ی خاص برای این مواد قابل استفاده است [۱۲].

با استفاده از اصول حاکم بر مشتقات جزئی مرتبه‌ی اوّل و دوّم توابع تانسوری و قاعده‌ی مشتق زنجیره‌ای و رابطه‌ی (۱-۱۵)، برای رابطه‌ی ساختاری می‌توان نوشت:

$$\mathbf{S} = 2\frac{\partial W(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = 2\left[\frac{\partial W}{\partial I_1}\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial W}{\partial I_2}\frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial W}{\partial I_3}\frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}}\right] \tag{۱-۲۶}$$

مشتق پایاهای تانسور متقارن $\mathbf{C}$ نسبت به خود این تانسور به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} = \vec{\mathbf{G}}, \quad \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} = I_1\vec{\mathbf{G}} - \mathbf{C}, \quad \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} = I_3\,\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^2 - I_1\mathbf{C} + I_2\vec{\mathbf{G}} \tag{۱-۲۷}$$

بنابراین رابطه‌ی ساختاری برای مواد هایپرالاستیک همسانگرد به‌شکل پایاهای تانسور کرنش بر حسب مختصات مادّی و فضایی به ترتیب به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\mathbf{S} = 2\left[(a_{\mathrm{I}} + a_{\mathrm{II}}\,I_1)\vec{\mathbf{G}} - a_{\mathrm{II}}\mathbf{C} + a_{\mathrm{III}}\,I_3\mathbf{C}^{-1}\right] \tag{۱-۲۸}$$

$$\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma} = 2\left[(a_{\mathrm{I}} + a_{\mathrm{II}}\,I_1)\mathbf{B} - a_{\mathrm{II}}\mathbf{B}^2 + a_{\mathrm{III}}\,I_3\vec{\mathbf{g}}\right] \tag{۱-۲۹}$$

که در آن:

1. Principal axes

$$a_{\mathrm{I}}=\frac{\partial W}{\partial I_1},\quad a_{\mathrm{II}}=\frac{\partial W}{\partial I_2},\quad a_{\mathrm{III}}=\frac{\partial W}{\partial I_3} \tag{۱-۳۰الف}$$

$$J=\det(\mathbf{F})=\sqrt{I_3} \tag{۱-۳۰ب}$$

۱-۳-۵-۲ بسط سری‌های انرژی کرنشی

از بسط چگالی انرژی کرنشی به‌صورت یک سری توانی به‌شکل زیر [۱۳]:

$$W=W(I_1,I_2,I_3)=\sum_{\mathrm{p,q,r=0}}^{\infty}c_{\mathrm{pqr}}(I_1-3)^{\mathrm{p}}(I_2-3)^{\mathrm{q}}(I_3-1)^{\mathrm{r}} \tag{۱-۳۱}$$

که در آن ضرایب c_{pqr} مستقل از تغییر شکل‌ها بوده و ثابت مادّه[۱] هستند؛ می‌توان یک نمایش دقیق از انرژی کرنشی دلخواه مواد هایپرالاستیک همسانگرد در حالت تراکم‌پذیر ارائه داد.

با توجه به روابط بین پایاهای تانسور کوشی-گرین چپ $\mathbf{B}$ و راست $\mathbf{C}$ و مقادیر ویژه‌ی λ_{i} تانسور کشیدگی راست $\mathbf{U}$ و رابطه‌ی $\mathbf{C}=\mathbf{U}^2$ می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} I_1=\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2 \\ I_2=\lambda_1^2\lambda_2^2+\lambda_2^2\lambda_3^2+\lambda_3^2\lambda_1^2 \\ I_3=\lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2 \end{cases} \tag{۱-۳۲}$$

در این حالت می‌توان رابطه‌ی (۱-۳۱) را بر حسب مقادیر ویژه‌ی تانسور کشیدگی راست برای مادّه‌ی هایپرالاستیک در حالت تراکم‌پذیر نوشت.

$$\begin{aligned} W=W(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\sum_{\mathrm{p,q,r=0}}^{\infty}a_{\mathrm{pqr}}\Big[\Big((\lambda_1)^{\mathrm{p}}\left((\lambda_2)^{\mathrm{q}}+(\lambda_3)^{\mathrm{q}}\right)+(\lambda_2)^{\mathrm{p}}\left((\lambda_3)^{\mathrm{q}}+(\lambda_1)^{\mathrm{q}}\right) \\ +(\lambda_3)^{\mathrm{p}}\left((\lambda_1)^{\mathrm{q}}+(\lambda_2)^{\mathrm{q}}\right)\Big)(\lambda_1\lambda_2\lambda_3)^{\mathrm{r}}-6\Big] \end{aligned} \tag{۱-۳۳}$$

در این رابطه نیز ثابت‌های مادّه (a_{pqr}) مستقل از تغییر شکل‌ها هستند.

۱-۳-۵-۳ روابط ساختاری برای مواد تراکم‌ناپذیر

روابط گذشته با تغییر اندک قابل تبدیل به روابط مواد تراکم‌ناپذیر همسانگرد هستند. در تغییر شکل‌های

1. Material constants

تراکم‌ناپذیر که به آنها هم‌حجم[1] نیز گفته می‌شود، شرایط زیر حاکم است.

$$J = \det(\mathbf{F}) = 1,\ \ I_3 = 1 \ \ \rightarrow \ \ W = W\,(I_1, I_2) \tag{۳۴-۱}$$

بنابراین انرژی کرنشی صرفاً تابعی از دو پایای اوّل و دوّم کرنش می‌باشد. در این حالت تابع a_{III} به دلیل مشخص نبودن مقدار مشتق $\partial W / \partial I_3$ قابل محاسبه نیست. به همین دلیل در شرایط تراکم‌ناپذیری $a_{\mathrm{III}} = P$ به عنوان یک متغیر مجهول متناظر با فشار هیدرواستاتیک[2] وارد روابط می‌شود. محاسبه‌ی متغیر P به کمک شرایط مرزی و تعادل صورت می‌گیرد [۱۴-۱۶].

در مواد تراکم‌ناپذیر در روابط (۱-۳۱) و (۱-۳۳) جملات دارای توان r حذف شده و ضرایب مستقل از تغییر شکل‌ها با ثابت‌های جدید مادّه به‌شکل c_{pq} و a_{pq} بازنویسی می‌شوند.

مشاهده می‌شود که معادله‌ی سازگاری و انرژی کرنشی مواد هایپرالاستیک همسانگرد برای تغییر شکل‌های کوچک در نقطه‌ی $I_1 = I_2 = 3$ و $I_3 = 1$ یا $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1{,}1{,}1)$ با مواد سن‌ونان-کیرشهف[3] یکسان می‌شوند [۱۳].

۱-۳-۶ مدل‌های ساختاری خاص مواد هایپرالاستیک

با توجه به آنچه بیان شد، در مدل‌های ساختاری مواد هایپرالاستیک، چگالی انرژی کرنشی W به‌صورت تابعی از پایاهای تانسور کوشی-گرین (I_1, I_2, I_3) و یا مقادیر ویژه‌ی تانسور کشیدگی $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ بیان می‌شود. به این دلیل W تحت عنوان تابع انرژی کرنشی[4] شناخته می‌شود. λ_iها در واقع نسبت کشیدگی‌های اصلی[5] هستند؛ که معمولاً برای سادگی، در مراجع تحت عنوان کشیدگی‌های اصلی شناخته می‌شوند.

---

1. Isochoric
2. Hydrostatic pressure
3. St-Venant-Kirchhoff
4. Strain energy function
5. Principal stretch ratio

به منظور تفکیک بخش تراکم‌پذیر و تراکم‌ناپذیر، تابع انرژی کرنشی به دو بخش انحرافی[1] و حجمی[2] تقسیم می‌شود.

$$W = W_{\mathrm{d}}(I_1, I_2) + W_{\mathrm{b}}(J) = W_{\mathrm{d}}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) + W_{\mathrm{b}}(J) \qquad (۳۵\text{-}۱)$$

بخش حجمی تابع انرژی کرنشی عموماً به‌شکل $\alpha\gamma(J)$ درنظر گرفته می‌شود که α ثابت مادّه بوده و تابع $\gamma(x)$ دارای خاصیت زیر است.

$$\gamma(x) \geq 0, \quad \gamma(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \qquad (۳۶\text{-}۱)$$

به طور کلی توابع انرژی ارائه شده در تاریخچه‌ی مواد هایپرالاستیک را می‌توان به سه گروه تقسیم کرد.

گروه اوّل بر اساس رویکرد مکانیکی[3] از نگاه بنیادی با تمرکز بر روی ساختار اساسی مادّه به بررسی رفتار آن می‌پردازند. توابعی که از توصیف فیزیکی فعل و انفعالات مولکولی[4] و یا نظریه‌های ماکرومولکولی[5] استفاده می‌کنند. توابع انرژی این گروه از دیدگاه مولکولی فرمول‌بندی می‌شوند و معمولاً پیچیده بوده و به مادّه‌ی مورد نظر بستگی دارند.

گروه دوّم از نگاه پدیدارشناختی[6] با تمرکز بر رفتار مشاهده شده از مادّه ارائه می‌شوند. در این دیدگاه، مادّه به عنوان یک محیط پیوسته درنظر گرفته می‌شود و یک تابع بر حسب پایاهای کرنش یا کشیدگی‌های اصلی برای آن ارائه می‌شود. چند پارامتر مادّی نیز برای انعکاس رفتار غیرخطی مادّه نیاز است که تعداد این پارامترها به مرتبه‌ی غیرخطی بودن مادّه و شیوه‌ی بارگذاری بستگی دارد.

گروه سوّم نیز ترکیبی از دو دیدگاه اشاره شده است.

توابع انرژی ارائه شده برای مواد هایپرالاستیک از نگاه‌های دیگر نیز قابل تقسیم‌بندی هستند؛ از

1. Deviatoric
2. Volumetric
3. Mechanistic approach
4. Molecular interply
5. Macromolecular theory
6. Phenomenological approach

آن جمله می‌توان به تراکم‌پذیر یا تراکم‌ناپذیر بودن مادّه، جنس مادّه از قبیل لاستیک، پلیمر، فوم، بافت‌های بیولوژیکی و یا برقراری فرضیه‌ی ولنیس-لندل[1] برای آنها اشاره کرد.

مدل‌های ساختاری خاص مواد هایپرالاستیک که معروف‌تر و پرکاربردتر از بقیه‌ی مدل‌ها هستند، در ادامه آورده شده است.

۱) مدل نئوهوکین[2]: این مدل توسط ریولین [۱۷] در سال ۱۹۴۸ بر اساس ترمودینامیک آماری[3] زنجیره‌های پلیمری دارای پیوندهای متقاطع[4] ارائه شده است که تابع انرژی کرنشی را بر حسب پایای اوّل کرنش بیان می‌کند. دلیل رفتار مواد شبه‌لاستیک و پلیمر بر اساس این مدل این است که زنجیره‌های پلیمر تحت تنش می‌توانند نسبت به یکدیگر حرکت نسبی داشته باشند. اما در یک حد کشیدگی حداکثر مجاز از نظر پیوندهای متقاطع کووالانسی، مدول الاستیک این مواد افزایش قابل توجهی پیدا می‌کند. به همین دلیل این مدل برای کرنش‌هایی در حدود ۳۰٪ تا ۷۰٪ و موادی با تراکم‌پذیری بسیار محدود (تقریباً تراکم‌ناپذیر) مناسب است.

$$W = C_1 \left(I_1 - 3 \right) + D_1 \left(J - 1 \right)^2 \qquad (۱-۳۷)$$

که در آن C_1 و D_1 ثابت مادّه هستند. بر اساس رفتار مکانیک آماری مقدماتی می‌توان ثابت C_1 را پیش‌بینی نمود و با توجه به تراکم‌پذیری محدود این مواد $D_1 >> C_1$ خواهد بود.

۲) مدل مونی-ریولین دوجمله‌ای[5]: این مدل توسط مونی [۱۸] در سال ۱۹۴۰ ارائه و توسط ریولین [۱۷] در سال ۱۹۴۸ بر حسب پایاهای کرنش تکمیل شد. مدل مونی-ریولین یک مدل پدیدارشناختی بسیار رایج است که تابع انرژی کرنشی به‌صورت ترکیبی خطی از پایاهای اوّل و دوّم تانسور کرنش نوشته می‌شود و مدلی مناسب برای رفتار مواد شبه‌لاستیک، پلیمرها و زیست‌مواد است. این مدل که برای کرنش‌هایی کمتر از ۱۰۰٪ قابل استفاده است، به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود.

1. Valanis-Landle
2. neo-Hookean model
3. Statistical thermodynamics
4. Cross-Linked polymer chains
5. Two-term Mooney-Rivlin model

$$W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3) + D_1(J - 1)^2 \tag{۳۸-۱}$$

ثابت‌های مادّه‌ی C_1 و C_2 متناظر با تغییر شکل‌های اعوجاجی مادّه و ثابت D_1 متناظر با تغییر شکل‌های حجمی است. این مدل از پرکاربردترین مدل‌های ساختاری مواد هایپرالاستیک است. با استفاده از مفهوم خطی‌سازی[1]، می‌توان نشان داد که برای کرنش‌های کوچک، ثابت‌های این مدل با مدول برشی μ و مدول بالک k دارای روابط زیر هستند.

$$\begin{cases} k = 2D_1 \\ \mu = 2(C_1 + C_2) \end{cases} \tag{۳۹-۱}$$

۳) مدل چندجمله‌ای عمومی[2]: ریولین و ساندرز [۱۹] در سال ۱۹۵۱ بر اساس اصول پدیدارشناختی مدل چندجمله‌ای را ارائه نمودند که تابع انرژی کرنشی این مدل به‌صورت یک چندجمله‌ای بر حسب پایاهای اوّل و دوّم تانسور کرنش نوشته می‌شود. این مدل برای کرنش‌هایی کمتر از ۳۰۰٪ قابل استفاده بوده و به آن مدل عمومی ریولین[3] نیز گفته می‌شود. فرم کلی این مدل به‌صورت زیر است.

$$W = \sum_{\mathrm{i+j=1}}^{\mathrm{N}} C_{\mathrm{ij}} (I_1 - 3)^{\mathrm{i}} (I_2 - 3)^{\mathrm{j}} + \sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{N}} D_{\mathrm{k}} (J - 1)^{2\mathrm{k}} \tag{۴۰-۱}$$

که در آن C_{ij} و D_{k} ثابت مادّه هستند. با درنظر گرفتن $\mathrm{N}=1$ و انتخاب C_{ij} مناسب، این مدل تبدیل به مدل‌های نئوهوکین $(C_{10} = C_1, C_{01} = 0)$ و مونی-ریولین دوجمله‌ای $(C_{10} = C_1, \mathrm{C}_{01} = C_2)$ می‌شود. با درنظر گرفتن مقادیر N بالاتر، مدل‌های چندجمله‌ای به‌دست می‌آیند؛ از مواد پرکاربرد می‌توان به مدل‌های مونی-ریولین پنج جمله‌ای $(\mathrm{N}=2)$ و نه جمله‌ای $(\mathrm{N}=3)$ اشاره کرد. البته به دلیل دشوار بودن برازش تعداد زیادی ثابت مادّه با نتایج تجربی، به ندرت از N بزرگ‌تر از عدد دو استفاده می‌شود. مدل‌های مرتبه‌ی بالاتر برای کرنش‌هایی تا حدود ۲۰۰٪ به‌کار می‌روند که نقاط خمیدگی

1. Linearization
2. Generalized polynomial model
3. Generalized rivlin Model

منحنی تنش-کرنش را بهتر پیش‌بینی می‌کنند.

۴) مدل آگدن[1]: آگدن [۲۰] در سال ۱۹۷۲ این مدل را بر اساس دیدگاه پدیدارشناختی ارائه کرد. این مدل تابع انرژی کرنشی را بر حسب کشیدگی‌های اصلی بیان می‌کند.

$$W = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} \frac{\mu_{\mathrm{i}}}{\alpha_{\mathrm{i}}}\left(\lambda_1^{\alpha_{\mathrm{i}}} + \lambda_2^{\alpha_{\mathrm{i}}} + \lambda_3^{\alpha_{\mathrm{i}}} - 3\right) + \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{N}} D_{\mathrm{k}}\left(J-1\right)^{2\mathrm{k}} \tag{۴۱-۱}$$

ثابت‌های مادّه‌ی این مدل شامل μ_{i} و α_{i} برای بخش اعوجاجی تغییر شکل و D_{k} برای بخش حجمی آن است که با درنظر گرفتن $\mathrm{i,k}=1$، برای این مواد $D_1 >> \mu_1$ خواهد بود. با درنظر گرفتن $\mathrm{N}=1$، $\mu_1 = 2C_1$ و $\alpha_1 = 2$ مدل نئوهوکین و $\mathrm{N}=2$، $\mu_{\mathrm{i}} = 2C_{\mathrm{i}}$، $\alpha_1 = 2$ و $\alpha_2 = -2$ مدل مونی-ریولین دوجمله‌ای حاصل می‌شود. می‌توان نشان داد که رابطه‌ی بین ثابت‌های مدل آگدن با مدول برشی و بالک برای کرنش‌های کوچک به‌صورت زیر است.

$$\begin{cases} k = 2D_1 \\ 2\mu = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} \mu_{\mathrm{i}}\,\alpha_{\mathrm{i}} \end{cases} \tag{۴۲-۱}$$

مدل آگدن معمولاً انطباق بسیار خوبی با نتایج تجربی دارد؛ اما به دلیل سنگین شدن حجم محاسبات، استفاده از این مدل در تحلیل‌ها دشوار است. از این مدل در بررسی رفتار لاستیک، پلیمرها و زیست‌مواد استفاده می‌شود. می‌توان از این مدل برای تغییر شکل‌های بزرگ با کرنش‌هایی تا حدود ۷۰۰٪ استفاده کرد.

۵) مدل یِئو[2]: این مدل که در سال ۱۹۹۳ توسط یئو [۲۱] ارائه شد، در واقع صورت کاهش‌یافته‌ی مدل چندجمله‌ای می‌باشد که فقط بر اساس پایای اوّل کرنش نوشته می‌شود.

$$W = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} C_{\mathrm{i}0}\left(I_1-3\right)^{\mathrm{i}} + \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{N}} D_{\mathrm{k}}\left(J-1\right)^{2\mathrm{k}} \tag{۴۳-۱}$$

$C_{\mathrm{i}0}$ و D_{k} ثابت مادّه هستند. این مدل عموماً با مقدار $\mathrm{N}=3$ استفاده می‌شود که برای مقادیر کرنش‌های

1. Ogden model
2. Yeoh model

بزرگ تطابق خوبی با نتایج تجربی دارد.

۶) مدل اِرودا-بویس[1]: این مدل در سال ۱۹۹۳ توسط ارودا و بویس [۲۲] جهت مدل‌سازی رفتار لاستیک‌ها و پلیمرها ارائه شده است. این مدل مکانیک آماری از بررسی آماری رفتار زنجیرهای ایجادشده از مرکز به سمت گوشه‌های المان حجمی مکعبی به‌دست آمده که تحت عنوان مدل هشت زنجیری[2] نیز شناخته می‌شود.

$$W = \mu \sum_{i=1}^{5} \frac{C_i}{\lambda_L^{2i-2}} \left(I_1^i - 3^i \right) + D_k \left(\frac{J^2 - 1}{2} - \ln J \right) \qquad (۴۴\text{-}۱)$$

در این مدل ثابت‌های مادّه (C_i) دارای معنی فیزیکی بوده و دارای مقادیر زیر هستند.

$$C_1 = \frac{1}{2}, C_2 = \frac{1}{20}, C_3 = \frac{11}{1050}, C_4 = \frac{19}{7050}, C_5 = \frac{519}{637350} \qquad (۴۵\text{-}۱)$$

λ_L نیز کشیدگی شبکه‌ای حدّی[3] است که در آن، تنش شروع به افزایش بدون حد می‌کند. این مدل بسط تابع مدل یئو به‌ازای $N=5$ بوده که برای کرنش‌هایی کمتر از ۳۰۰٪ قابل استفاده است.

برای بخش حجمی تابع انرژی کرنشی در مدل‌های مختلف از جمله مدل مونی-ریولین و یا نئوهوکین، با توجه به رابطه‌ی (۱-۳۶) توابع دیگری نیز ارائه شده است.

مدل‌های ساختاری دیگری در زمینه‌ی بافت‌های زیستی نظیر قانون توانی[4] ارائه شده توسط نلز[5] [۲۳] در سال ۱۹۷۷ و یا مدل قابلیت کشش محدود زنجیره‌های مولکولی[6] که به مدل جنت[7] [۲۴] معروف شده و در سال ۱۹۹۶ توسط جنت ارائه شده، نیز موجود است. همچنین مدل مواد هایپرفوم[8] که با نام مدل آگدن برای فوم‌ها نیز شناخته شده و شباهت بسیار زیادی به مدل آگدن دارد، برای رفتار لاستیک‌های شدیداً تراکم‌پذیر به‌کار می‌رود. مدل بلاتز-کو[9] [۲۵] نیز برای فوم‌های پلی‌اورتان تراکم‌پذیر

---

1. Arruda-Boyce
2. Eight chains
3. Limiting network stretch
4. Power law
5. Knowles
6. Limiting chain extensibility
7. Gent
8. Hyperfoam
9. Blatz-Ko

استفاده می‌شود که نسبت پواسون مؤثر برای این مدل برابر مقدار ۰/۲۵ در نظر گرفته می‌شود.

در سال ۲۰۱۷، میهای و گاریلی [۲۶] پاسخ‌های فیزیکی مواد الاستیک غیرخطی را به کمک متغیرهایی که تابع اسکالر تغییر شکل هستند، مورد بررسی قرار دادند. آنها روابطی را بین پارامترهای موجود در مدل‌های مختلف مواد هایپرالاستیک ارائه کردند که به کمک آنها می‌توان پاسخ غیرخطی مدل‌های متنوعی از لاستیک‌ها تا زیست مواد نرم را کمی‌سازی کرد.

بافت‌های زیستی از مواد ناهمگن مرکب به‌صورت ترکیبی از پوشش‌های مختلف مخاطی[۱]، اتصال-دهنده[۲]، عضلانی[۳]، عصبی[۴] و ... تشکیل شده‌اند. این بافت‌ها عموماً به‌شکل سلول‌های جهت‌داری هستند که توسط زمینه‌ی ماتریس‌های سلولی اضافه احاطه شدند و دارای رفتاری مشابه یک پوشش ناهمسانگرد پیوسته‌ی تقویت شده توسط دسته‌ای از الیاف در جهاتی متمایر هستند. نسبت و جهات ماتریس‌ها و الیاف به نوع بافت (شریان[۵]، پوست، عضله و ..) بستگی دارد. آنها می‌توانند رفتارهای دیگری مانند ویسکوالاستیسیته[۶]، کرنش-سختی و ... را نیز داشته باشند. هدف بسیاری از نظریه‌های ساختاری، توسعه‌ی مدل‌های ریاضی منطبق بر رفتار واقعی این مواد است. چگنان و همکاران [۲۷] در سال ۲۰۱۷، در فصل اوّل کتاب زیست‌مکانیک بافت‌های زنده به بررسی رفتار ناهمسانگردی زیست‌مواد نرم تراکم-ناپذیر بر اساس نظریه‌های مکانیک محیط پیوسته‌ی غیرخطی پرداختند و مدل‌های معروف و پرکاربرد ارائه شده را مورد بررسی قرار دادند. به منظور مدل‌سازی رفتار مکانیکی یک مادّه‌ی تقویت شده توسط الیاف، ابتدا لازم است جهت الیاف مشخص شود. اگر بردار یکه‌ی $\vec{\mathbf{N}}^{(i)}$، نشان‌دهنده‌ی راستای اولیه‌ی الیاف i ام باشد، تانسور جهت اوّلیه به‌شکل $\vec{\mathrm{A}}^{(i)} = \vec{\mathbf{N}}^{(i)} \otimes \vec{\mathbf{N}}^{(i)}$ محاسبه می‌شود. در طی تغییر شکل، راستای الیاف به جهت جدید $\vec{\mathbf{n}}^{(i)} = \mathbf{F}\vec{\mathbf{N}}^{(i)}$ تغییر پیدا می‌کنند که $\vec{\mathbf{n}}^{(i)}$ دیگر برداری یکه نیست.

1. Epithelial
2. Connective
3. Muscular
4. Neuronal
5. Artery
6. Viscoelasticity

معرفی جهت‌های جدید نیازمند تعریف پایاهای عددی جدید متناسب با جهت‌های مختصات است.

به عنوان مثال پایاهای I_4 و I_5 به‌شکل زیر برای جهت i تعریف می‌شوند.

$$I_4^{(i)} = \mathrm{tr}(\mathbf{CA}^{(i)}) = \vec{\mathbf{N}}^{(i)}.\mathbf{C}\vec{\mathbf{N}}^{(i)}, \quad I_5^{(i)} = \mathrm{tr}(\mathbf{C}^2\mathbf{A}^{(i)}) = \vec{\mathbf{N}}^{(i)}.\mathbf{C}^2\vec{\mathbf{N}}^{(i)}, \ \ldots \qquad (۴۶\text{-}۱)$$

به‌شکلی مشابه می‌توان پایاهای بالاتر را برای الیاف در دو راستا تعریف کرد. در پژوهش‌ها عموماً برای الیاف زیست‌مواد نرم در دو جهت اصلی (۱) و (۲) از پایاهای I_4 و I_6 استفاده می‌شود. این مواد عموماً دارای کرنش-سختی بیشتری نسبت به لاستیک‌ها بوده و به همین دلیل بخش ناهمسانگرد آنها در تابع انرژی کرنشی به‌شکل تابعی نمایی از پایاهای عددی و ثابت‌های مدل پیشنهادی درنظر گرفته می‌شود. در جدول‌های ۱-۱ و ۱-۲ به ترتیب فهرستی از چگالی انرژی کرنشی مربوط به مدل‌های ناهمسانگرد و همسانگرد پرکاربرد بافت‌های زنده‌ی مختلف بدن نشان داده شده است [۲۷].

جدول ۱-۱ چگالی انرژی کرنشی مربوط به مدل‌های ناهمسانگرد پرکاربرد در بافت‌های زنده‌ی مختلف [۲۷]

Organs/Chapters	**Anisotropic SEDFs**
Coronary/2, 9 Aorta/8	Holzapfel et al. (2005a) $W=\mu(I_1-3)+\sum_{i=1}^{2}\frac{k_1}{2k_2}\left\{\exp\left[k_2\left((1-\rho)(I_1-3)^2+\rho(I_{4i}-1)^2\right)\right]-1\right\}$
Skin/16	Holzapfel et al. (2000) $W=\frac{\mu}{2}(I_1-3)+\mu\sum_{i=1}^{2}\frac{k_{i1}}{2k_{i2}}\left\{\exp\left[k_{i2}(\mathrm{tr}(\boldsymbol{H}_i\cdot\boldsymbol{C})-1)^2\right]-1\right\}$ with $\boldsymbol{H}_i=\kappa_i\boldsymbol{I}+(1-3\kappa_i)\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_2$
Esophagus/7 Aorta/8 Small intestine/13	Fung et al. (1979) $W=\frac{C}{2}\{\exp(Q)-1\}$ with $Q=a_1E_{\theta\theta}^2+a_2E_{zz}^2+a_3E_{rr}^2+2a_4E_{\theta\theta}E_{zz}+2a_5E_{zz}E_{rr}+2a_6E_{\theta\theta}E_{rr}+a_7E_{\theta z}E_{z\theta}+a_8E_{rz}E_{zr}+a_9E_{r\theta}E_{\theta r}$
Heart/2	Holzapfel and Ogden (2009) $W=\frac{a_0}{2b_0}\{\exp[b_0(I_1-3)]-1\}+\frac{a_f}{2b_f}\left\{\exp\left[b_f(I_{4f}-1)^2\right]-1\right\}+\frac{a_s}{2b_s}\left\{\exp\left[b_s(I_{4s}-1)^2\right]-1\right\}+\frac{a_{fs}}{2b_{fs}}\left\{\exp\left[b_{fs}I_{8fs}^2\right]-1\right\}$
Esophagus/7	Sommer et al. (2013) $W=\mu(I_1-3)+W_{\mathrm{ani}}$ with $W_{\mathrm{ani}}=\frac{k_1}{2k_2}\sum_{i=1}^{2}\left\{\exp\left[k_2(I_{4i}-1)^2\right]-1\right\}$
Aorta/8	Gasser et al. (2006) $W=c_0(I_1-3)+\sum_{i=1}^{N}c_1\left\{\exp\left[c_2E_i^2\right]-1\right\}$ with $E_i=(\kappa\boldsymbol{I}+(1-3\kappa)\boldsymbol{f}_i\otimes\boldsymbol{f}_i):\boldsymbol{C}-1$
Aorta/8	Holzapfel and Gasser (2001) $W=c_0(I_1-3)+\sum_{i=1}^{N}c_{1i}\left\{\exp\left[c_{2i}(I_{4i}-1)^2\right]-1\right\}$

ادامه‌ی جدول ۱-۱

Organs/Chapters	Anisotropic SEDFs
Aorta/8	Basciano and Kleinstreuer (2009) $W=c_0(I_1-3)^2+\sum_{i=1}^{2}c_i(I_{4i}-1)^6$
Aorta/8	Celi and Berti (2012) $W=\sum_{i=1}^{3}c_{0i}(I_1-3)^i+\sum_{i=1}^{2}c_{1i}(I_{4i}-1)^i$
Heart/2, 21	$W=\frac{C}{2}[\exp Q-1]$ (Fung et al., 1979) Guccione et al. (1991) $Q=c_2E_{ff}^2+c_3\left(E_{ss}^2+E_{nn}^2+2E_{sn}E_{ns}\right)+2c_4\left(E_{fs}E_{sf}+E_{fn}E_{nf}\right)$ $=c_3\left(I_1^{*2}-2I_2^*\right)+(c_2-c_3)I_{4f}^{*2}+2(c_4-c_3)\left(I_{8fs}^{*2}+I_{8fn}^{*2}\right)$
Heart/21	Bovendeerd et al. (1992) $Q=a_1\left(E_{ss}^2+E_{nn}^2\right)+(a_1+a_2)E_{ff}^2+2a_1\left(E_{fs}E_{sf}+E_{sn}E_{ns}+E_{fn}E_{nf}\right)$ $=a_1\left(I_1^{*2}-2I_2^*\right)+a_2I_{4f}^{*2}$
Abdomen/12	Calvo et al. (2009) $W=c_1(I_1-3)+W_{\text{ani}}$ $W_{\text{ani}}=\begin{cases}0 & I_4<I_{40}\\ \frac{c_3}{c_4}\{\exp[c_4(I_4-I_{40})]-c_4(I_4-I_{40})-1\} & I_{40}<I_4<I_{4\text{ref}}\\ c_5\sqrt{I_4}+\frac{c_6}{2}\ln I_4+c_7 & I_4>I_{4\text{ref}}\end{cases}$
Aorta/8	Riveros et al. (2013) $W=c_0\{\exp[c_1(I_1-3)]-1\}+c_2\{\exp[c_3(I_4-1)]-1\}$
Heart/21	Based on Kerckhofs et al. (2003) and Bovendeerd et al. (2009) $W=a_0(\exp Q-1)+a_3\left(\exp\left\{a_4E_{ff}^2\right\}-1\right)$ with $E_{ff}^2=I_{4f}^{*2}$ $Q=a_1\left(E_{ff}^2+E_{ss}^2+E_{nn}^2\right)+2a_1E_{sn}E_{ns}+(2a_1+a_2)\left(E_{fs}E_{sf}+E_{fn}E_{nf}\right)$ $=a_1\left(I_1^{*2}-2I_2^*\right)+a_2\left(I_{8fs}^{*2}+I_{8fn}^{*2}\right)$
Breast/10	Han et al. (2014) $W=\frac{\mu}{2}(I_1-3)+\frac{\eta}{2}(I_4-1)^2$
Skeletal muscle/17	Blemker et al. this book $W=G_1\left(\frac{I_5}{I_4}-1\right)+G_2\left(\cosh^{-1}\left\{\frac{I_1I_4-I_5}{2\sqrt{I_4}}\right\}\right)^2$

جدول ۱-۲ چگالی انرژی کرنشی مربوط به مدل‌های همسانگرد پرکاربرد در بافت‌های زنده‌ی مختلف [۲۷]

Organs/Chapters	Isotropic SEDFs
Skin/16	Hendriks et al. (2003) $W=C_{10}(I_1-3)+C_{01}(I_2-3)+C_{11}(I_1-3)(I_2-3)+C_{20}(I_1-3)^2+C_{30}(I_1-3)^3$
Tongue/19 Liver/11	Gerard et al. (2003) Fu et al. (2013) and Umale et al. (2013) $W=C_{10}(I_1-3)+C_{01}(I_2-3)+C_{11}(I_1-3)(I_2-3)+C_{20}(I_1-3)^2+C_{02}(I_2-3)^2$
Tongue/19	Wilhelms-Tricarico (1995) $W=c_0\left\{\exp\left[c_1(I_1-3)^2+c_2(-2I_1+I_2+3)\right]-1\right\}$
Brain/6	Laksari et al. (2012) $W=C_{10}(I_1-3)+C_{01}(I_2-3)+C_{11}(I_1-3)(I_2-3)$

ادامه‌ی جدول ۱-۲

Organs/Chapters	Isotropic SEDFs
Brain/6 Tongue/19	Schiavone et al. (2009) $W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{30}(I_1 - 3)^3$
Calf/24 (deep tissue) Tongue/19, 20 Face/18, 20	$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2$
Larynx/20	$W = C_{01}(I_2 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2$
Breast/10; uterus/15; foot/25 (heel, skin, fat, muscle); calf/24 (surface tissue) Spine/22 (ground substance of annulus bulk, nucleus pulposus)	Neo-Hookean $W = C_{10}(I_1 - 3)$
Thigh/23 Face/18; tongue/19 Spine/22 (Ground substance of annulus bulk, nucleus pulposus)	Mooney-Rivlin $W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3)$
Liver/11 Spine/22 (ground substance of annulus bulk) Aorta/8	Yeoh model $W = \sum_{k=1}^{N} C_k (I_1 - 3)^k$
Skin/16; liver/11; rectum/14; bladder/14; spine/22 (ligaments) Aorta/8	Ogden model $W = \sum_{k=1}^{N} \frac{\mu_k}{\alpha_k}(\lambda_1^{\alpha_k} + \lambda_2^{\alpha_k} + \lambda_3^{\alpha_k} - 3)$ Ogden (1972) $W = c_0 \sum_{k=1}^{3} (\lambda_k^4 - 1)$
Liver/11	Bogen model (special case of the Ogden model) $W = \frac{\mu}{\alpha}(\lambda_1^{\alpha} + \lambda_2^{\alpha} + \lambda_3^{\alpha} - 3)$
Liver/11 Aorta/8 Tongue/19	Demiray (1981) $W = \frac{C_1}{2C_2}\{\exp[C_2(I_1 - 3)] - 1\}$
Liver/11	Logarithmic model $W = -C_1 \ln\{1 - C_2(\lambda_1^{\alpha_1} + \lambda_2^{\alpha_2} + \lambda_3^{\alpha_3} - 3)\}$
Liver/11	Exponential model $W = C_1\{\exp[C_1(\lambda_1^{\alpha_1} + \lambda_2^{\alpha_1} + \lambda_3^{\alpha_1} - 3)] - 1\}$
Liver/11	Veronda and Westmann (1970) $W = C_1\{\exp[C_3(I_1 - 3)] - 1\} + C_2(I_2 - 3)$
Skin/16	Gambarotta et al. (2005) $W = \left(\frac{\gamma_1}{2} + \mu_1\right) I_1^{*2} - 2\mu_1 I_2^* + c\left\{\exp\left[\left(\frac{\gamma_2}{2} + \mu_2\right) I_1^{*2} - 2\mu_2 I_2^*\right] - 1\right\}$

۱-۳-۷ روش‌های انرژی جهت تحلیل مواد هایپرالاستیک تراکم‌ناپذیر

با توجه به رابطه‌ی (۱-۳۴)، در واقع معادله‌ی $J - 1 = 0$ یک قید روی جابه‌جایی‌های جسم تراکم‌ناپذیر اعمال می‌کند. از آنجا که حل همزمان این معادله‌ی به شدت غیرخطی با معادلات حاکم بر مسائل

الاستیسیته دشوار بوده، بنابراین بر اساس روش‌های انرژی عمدتاً بر پایه‌ی حل اجزای محدود، تلاش می‌شود تا حل همزمان معادلات و قید اشاره شده صورت گیرد [۲۸]. از جمله‌ی این روش‌های انرژی می‌توان به روش ضریب لاگرانژ[۱]، تابع خطا[۲]، روش‌های حساب تغییرات ترکیبی (هیبرید) [۳] و ... اشاره کرد [۲۹].

در کمینه‌سازی فانکشنال‌های دارای قید، هدف پیدا کردن تابعی است که فانکشنال مورد نظر را به حداقل ممکن رساند. در این حالت تابع مجاز برای فانکشنال علاوه بر شرط‌های مرزی ضروری، باید شرط‌های (قیدهای) اضافه‌شده را نیز ارضا نماید. در واقع تغییرات متغیرها باید به‌شکلی باشند که قیدهای اضافی را نقض نکنند. اولین روش پرکاربرد دراین زمینه، روش ضریب لاگرانژ است. در این روش قیدهای اضافی مورد نظر، در فانکشنال اصلاح شده درنظر گرفته می‌شوند. به عنوان مثال، اگر فانکشنال:

$$I(u,v)=\int_a^b H(x,u,u',v,v')dx \tag{۴۷-۱}$$

تحت قید $G(u,u',v,v')=0$ قرا گیرد؛ در این حالت شرط ضروری برای کمینه‌سازی مقدار $I(u,v)$ به‌شکل $\delta I=0$ است. از آنجا که متغیرهای u و v باید قید اشاره شده را ارضا نمایند، بنابراین δu و δv از طریق شرط $\delta G=0$ به یکدیگر مرتبط می‌شوند.

روش ضریب لاگرانژ شامل ضرب $\delta G=0$ در متغیر دلخواه λ، انتگرال‌گیری در بازه‌ی داده شده و اضافه کردن عبارت حاصل به $\delta I=0$ است. به ضریب دلخواه λ همان ضریب لاگرانژ گفته می‌شود. از صفر قرار دادن تغییرات اوّل فانکشنال اصلاح شده‌ی جدید زیر می‌توان u ، v و λ را تعیین کرد.

$$\tilde{I}(u,v,\lambda)=I(u,v)+\int_a^b \lambda G(u,u',v,v')dx=\int_a^b (H+\lambda G)dx \tag{۴۸-۱}$$

روش تابع خطا در فصل بعدی به طور کامل توضیح داده خواهد شد. این روش بر اساس کاهش مسأله‌ی کمینه‌سازی قیدی به یک مسأله‌ی کمینه‌سازی بدون قید از طریق معرفی یک تابع خطا مرتبط

1. Lagrange multiplier method
2. Penalty function
3. Hybrid (mixed) variational principles

با قید مسأله صورت می‌گیرد. در این روش به طور مشابه با روش ضریب لاگرانژ، هدف کمینه‌سازی فانکشنال اصلاح شده‌ی جدیدی است که در آن قید حاکم به‌صورت یک جمله‌ی مرتبه‌ی دوّم وارد شده است. در این روش شرط مسأله در حالت حداقل مربعات بدون اضافه‌شدن متغیری جدید به‌صورت تقریبی ارضا می‌شود [۳۱،۳۰]. با توجه به ایجاد پدیده‌ی قفل‌شدگی[1] و بدشرطی[2] روش‌های ارائه شده در مواد تراکم‌ناپذیر با نسبت پواسون نزدیک به عدد ۰/۵، در پژوهش‌های مختلف سعی شده است تا با انجام اصلاحات در این روش‌ها بتوانند این مشکل را رفع کنند. به عنوان مثال روش لاگرانژ (ضریب) الحاقی[3] به‌شکل‌های مختلف در تحلیل مواد تراکم‌ناپذیر استفاده می‌شود. در این روش علاوه بر ضریب لاگرانژ و درنظر گرفتن شرط تراکم‌ناپذیری به‌شکل تابع خطا در فانکشنال مسأله، از یک ضریب الحاقی دیگر به همراه تابع متناظر آن در فانکشنال استفاده می‌شود. درنظر گرفتن جملات تابع خطا و ضریب الحاقی به‌صورت همزمان باعث حذف مشکل قفل‌شدگی نسبت به شرایط تراکم‌ناپذیری می‌شود [۳۲].

در روش‌های حساب تغییرات ترکیبی چندمیدانی مربوط به مسائل غیرخطی، علاوه بر متغیرهای وابسته‌ی اوّلیه (جابه‌جایی‌ها)، متغیرهای وابسته‌ی ثانویه (فشار هیدرواستاتیک) که خود تابعی از متغیرهای وابسته‌ی اوّلیه هستند، نیز درنظر گرفته می‌شوند. هدف اصلی از ارائه‌ی این فرمول‌بندی‌ها، محاسبه‌ی متغیرهای ثانویه به‌صورت مستقیم به جای محاسبه‌ی غیرمستقیم آنها بر حسب متغیرهای اوّلیه است. در این روش‌ها، با نوشتن یک فانکشنال جدید به‌صورت ترکیبی از متغیرهای اوّلیه و ثانویه، نسبت به کمینه‌سازی و یا بیشینه‌سازی آن بر حسب متغیرهای اوّلیه و ثانویه اقدام می‌شود. به عنوان مثال در روش ضریب لاگرانژ به عنوان حالت خاصی از این روش، فانکشنال اصلاح شده‌ی $\bar{I}(u,v,\lambda)$ در رابطه‌ی (۱-۴۷) می‌تواند نسبت به متغیرهای جابه‌جایی مقدار حداقل خود را داشته باشد؛ در حالی که نسبت به ضریب لاگرانژ مقدار حداکثر را داشته باشد. به همین دلیل به حساب تغییرات ترکیبی،

1. Locking phenomenon
2. Ill-conditioning
3. Augmented Lagrangian (multiplier) method

اصل سکون[1] هم گفته می‌شود؛ زیرا نقطه‌ی سکون به جای نقاط حداقل و حداکثر مهم است. مزیت استفاده از این اصل در ترکیب معادلات حاکم و تبدیل آنها به یک فانکشنال است. این فانکشنال‌ها می‌توانند اساس تشکیل حالت‌های مختلفی از مدل‌های اجزای محدود جدید قرار گیرند. این مدل‌ها معمولاً دقت مطلوب‌تری در تنش‌ها نسبت به مدل‌های اجزای محدود بر اساس جابه‌جایی‌ها (فانکشنال انرژی پتانسیل کل) ارائه می‌دهند [۲۸،۲۹].

عموماً در مسائل پیچیده نمی‌توان با استفاده از روش‌های انرژی اشاره شده یک حل پیوسته در کل جسم ارائه کرد. بنابراین در مسائل پیچیده عمدتاً از روش‌های مستقیم[2] مانند روش ریتز[3] [۳۳]، روش باقیمانده‌ی وزنی[4] شامل گالرکین[5]، پترو-گالرکین[6] و ... جهت حل معادلات به‌دست آمده استفاده می‌شود. در این روش‌های تقریبی که برای تمام روش‌های انرژی اشاره‌شده هم قابل استفاده هستند، با استفاده از اصول حساب وردشی یا فرمول‌بندی‌های ضعیف[7] می‌توان حلی پیوسته برای مسائل مختلف در حوزه‌ی مکانیک ارائه کرد. این روش‌ها به دنبال ارائه‌ی حل بر حسب متغیرهای قابل تنظیمی هستند که با قراردادن این حل‌ها در فانکشنال مسأله و یافتن نقطه‌ی سکون یا مقادیر کمینه و بیشینه‌ی فانکشنال نسبت به این متغیرها می‌توان آنها را محاسبه کرد. این روش‌ها به این دلیل با عنوان روش‌های مستقیم شناخته می‌شوند که حل‌های تقریبی آنها به‌صورت مستقیم با استفاده از اصول حساب وردشی یکسان با استخراج معادلات حاکم قابل محاسبه هستند. در این روش‌ها حل به‌صورت ترکیبی از متغیرهای مجهول با توابعی مناسب فرض می‌شوند. با توجه به این که حل مسائل مکانیک محیط‌های پیوسته در حالت عمومی به‌شکل مجموعه‌ای از توابع محدود قابل نمایش نیستند؛ این روش‌ها دارای خطا هستند و حل ارائه شده تنها تقریبی از جواب واقعی مسائل فیزیکی خواهد بود. هر چه تعداد

1. Stationary principle
2. Direct methods
3. Ritz method
4. Weighted residual method
5. Galerkin method
6. Petrov–Galerkin method
7. Weak formulation

متغیرهای مجهول بیشتر درنظر گرفته شود، دقت تقریب افزایش یافته و حل به مقدار واقعی نزدیکتر می‌شود.

۱-۴ پیشینه‌ی پژوهش

پژوهش‌های بسیاری در زمینه‌ی پوسته‌های استوانه‌ای و مخروطی از گذشته تا به امروز، به دلیل اهمیت و کاربرد فراوان آن‌ها انجام‌شده است. همچنین مطالعات فراوانی در زمینه‌ی مواد هایپرالاستیک و گسترش مدل‌های این مواد و نیز تحلیل سازه‌هایی از جنس مواد هایپرالاستیک انجام شده است. در این بخش به‌طور مختصر به بخش اندکی از پژوهش‌های موجود که ارتباط نزدیکی با پژوهش حاضر دارند، اشاره شده است. این پژوهش‌ها در سه زمینه‌ی تحلیل الاستیک خطی پوسته‌ها، تحلیل غیرخطی هندسی پوسته‌ها و تحلیل پوسته‌های هایپرالاستیک در ادامه آورده شده است.

۱-۴-۱ تحلیل الاستیک خطی پوسته‌های جدار ثابت و متغیر

استوانه‌های جدار ضخیم برای اولین بار در سال ۱۸۵۲ توسط لامه [۳] مورد تحلیل قرار گرفت. وی جنس استوانه‌ها را همگن و همسانگرد درنظر گرفت و با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی معادلات حاکم را استخراج کرد و حل دقیق آن‌ها را به‌دست آورد.

در سال ۱۹۹۹ هورگان و چان [۳۴] با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی، معادلات حاکم بر استوانه‌ها و دیسک‌های جدار ضخیم ساخته‌شده از مواد FG که تحت فشار داخلی و خارجی قرار داشتند را حل کردند. ایشان نسبت پواسون را ثابت و مدول الاستیسیته را به‌صورت توانی در راستای شعاعی متغیر فرض کردند.

سوزوکی و همکاران [۳۵] در سال ۱۹۸۲ معادلات حاکم بر مخزن استوانه‌ای با جدار متغیر را بر اساس نظریه‌ی تغییر شکل برشی استخراج نمودند. آنها معادلات حاصل را به کمک سری فروبنیوس[1]

1. Frobenius Series

حل کردند. روابط کرنش-جابه‌جایی در این پژوهش به‌صورت خطی درنظر گرفته شد.

سیواداس و گانسن [۳۶] در سال ۱۹۹۱ بر روی تاثیر تغییرات ضخامت بر فرکانس‌های طبیعی یک پوسته‌ی مخروطی چندلایه، به کمک نظریه‌ی پوسته‌های نازک لاو مطالعه کردند. ایشان معادلات حاصل را به کمک روش اجزای محدود حل نمودند. دو سال بعد سیواداس و گانسن [۳۷] معادلات حرکت یک پوسته‌ی استوانه‌ای جدار متغیر در حالت متقارن محوری را با استفاده از نظریه‌ی نقدی به‌دست آوردند و به کمک روش اجزای محدود، این معادلات را حل کردند.

هونگ-جان و همکاران [۳۸] با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی، استوانه‌ی جدار ضخیمی که نسبت پواسون و مدول الاستیسیته‌ی آن به‌صورت خطی و نمایی تغییر می‌کرد را به‌صورت یکپارچه و چند لایه، در سال ۲۰۰۶ مورد تحلیل قرار دادند. استوانه تحت فشار داخلی و خارجی قرار داشت و در تمامی حالت‌ها به غیر از حالت مربوط به حل تحلیلی برای استوانه‌ی یکپارچه با خواص متغیر خطی، نسبت پواسون ثابت درنظر گرفته شد. حل به‌دست آمده مربوط به حالت تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای بود.

در اوایل سال ۲۰۰۷ ژیفای و همکاران [۳۹] معادلات حاکم بر استوانه‌های جدار ضخیم ناهمگن که تحت فشار یکنواخت قرار داشتند را با استفاده از الاستیسیته‌ی مستوی، تنها در حالت کرنش صفحه‌ای استخراج کردند. آنها تغییرات خواص در استوانه‌ی ناهمگن را تنها برای مدول الاستیسیته‌ی آن درنظر گرفتند و به‌صورت خطی مدل کردند. سپس معادلات حاکم را با دو روش، یک بار با استفاده از چند لایه کردن استوانه به لایه‌هایی با خواص ثابت و به‌کارگیری حل لامه همراه با روش بازگشتی که از شرایط مرزی پیوستگی بر روی تنش و جابه‌جایی شعاعی بین لایه‌ها استفاده می‌کرد و بار دیگر با درنظر گرفتن استوانه‌ی یکپارچه با خواص متغیر، حل کردند. اندکی بعد در همین سال، توتونچو [۴۰] با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی و به‌کارگیری سری فروبنیوس، استوانه‌ی جدار ضخیم ناهمگن را که تحت فشار داخلی قرار داشت و مدول الاستیسیته آن به‌صورت نمایی تغییر می‌کرد، در حالت کرنش صفحه‌ای حل کرد. در این پژوهش اثر تغییر ثابت ناهمگنی بر روی توزیع تنش شعاعی و

محیطی و جابه‌جایی شعاعی مورد مطالعه قرار گرفت.

دوان و که [۴۱] در سال ۲۰۰۸ ارتعاشات عرضی یک پوسته‌ی استوانه‌ای جدار متغیر در حالت متقارن محوری را بررسی کردند. در این مقاله معادلات حاکم با استفاده از نظریه‌ی خطی الاستیسیته استخراج شده و به روش تحلیلی با استفاده از سری‌های فروبنیوس حل شده است.

لی و پنگ [۴۲] در سال ۲۰۰۹ با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی حل دقیق استوانه‌های جدار ضخیم ناهمگن تحت فشار داخلی را به‌دست آوردند. آنها توزیع ناهمگنی خواص را در استوانه به‌صورت دلخواه درنظر گرفتند؛ اما نتایج را تنها برای حالتی که مدول الاستیسیته، به‌صورت توزیع توانی و کسر حجمی ساده شده تغییر می‌کرد، بیان کردند.

در سال ۲۰۱۰ قناد و نژاد [۴۳] با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، استوانه‌ی همگن دو سر گیردار را که تحت فشار داخلی قرار داشت، مورد تحلیل قرار دادند و تنش برشی را در استوانه بررسی کردند. ایشان نشان دادند که در مناطق دور از مرزهای دو سر استوانه، تنش برشی به سمت صفر میل می‌کند و سبب می‌گردد تا تنش و جابه‌جایی، صرفاً تابعی از شعاع استوانه باشند.

در سال ۲۰۱۳ قناد و همکاران [۴۴] تحلیل الاستیک استوانه‌های ناهمگن جدار ضخیم متغیر را که تحت فشار داخلی قرار داشتند، با استفاده از نظریه‌ی اغتشاشات و نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل ارائه کردند. در این پژوهش تغییرات مدول الاستیک به‌صورت توانی در راستای ضخامت پوسته درنظر گرفته شد و به دلیل تغییرات اندک نسبت پواسون، این خاصیت مادّه به‌صورت مقداری ثابت فرض شد. دستگاه معادلات حاکم به‌دست آمده در این پژوهش، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی دو با ضرایب متغیر بود که با استفاده از نظریه‌ی اغتشاشات اقدام به حل آن کردند. در این پژوهش اثر گیردار بودن دو سر استوانه و ناهمگنی خواص بر روی رفتار الاستیک استوانه و توزیع تنش مورد مطالعه و بررسی قرار گرفت.

در سال ۲۰۱۴ قناد و قارونی [۴۵] حل تحلیلی استوانه‌های ناهمگن جدار ثابت با تغییرات نمایی خواص مکانیکی در راستای شعاعی استوانه را بر اساس نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل ارائه

دادند. آنها [۴۶] در سال ۲۰۱۵ با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی سوّم، تحلیل الاستیک استوانه‌های ناهمگن با تغییرات نمایی خواص مکانیکی را برای شرایط مرزی گیردار در دو انتهای استوانه ارائه کردند. در این پژوهش اثر افزایش مرتبه‌ی نظریه‌ی تغییر شکل برشی بر بهبود وضعیت تنش‌ها در حالت تغییر خواص به‌صورت نمایی بررسی شد. همچنین ماتریس‌های ضرایب دستگاه معادلات حاکم برای استوانه‌های ناهمگن به شیوه‌ای جدید در این مقاله ارائه شد. قارونی و همکاران [۴۷] در سال ۲۰۱۶ نیز تحلیل ترموالاستیک خطی استوانه‌های ناهمگن را با تغییرات توانی خواص مکانیکی و حرارتی در راستای ضخامت به کمک نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی بالا مورد بررسی قرار دادند. ایشان در این مقاله نشان دادند که تغییرات مرتبه‌ی نظریه‌ی تغییر شکل برشی در تحلیل‌های حرارتی نتایج نهایی را به خصوص در حوزه‌ی تنش‌ها به شدت بهبود می‌بخشد.

نژاد و همکاران [۴۸] در سال ۲۰۱۵ با استفاده از روش نیمه‌تحلیلی چندلایه کردن[1]، حل الاستیک استوانه‌های جدار ضخیم متغیر ناهمگن چرخان را که تحت توزیع دلخواه فشار داخلی قرار دارند، به‌دست آوردند. آنها در همان سال [۴۹] با روشی مشابه، تحلیل الاستیک خطی پوسته‌های مخروطی شکل ناقص چرخان ناهمگن جدار ثابت را تحت فشار داخلی متغیر ارائه کردند. در این پژوهش‌ها به غیر از نسبت پواسون که به دلیل تغییرات اندک ثابت درنظر گرفته شد؛ تغییرات چگالی و مدول الاستیک پوسته‌ها به‌صورت توانی در راستای محور طولی استوانه و مخروط فرض شد. با استفاده از روش انرژی معادلات حاکم بر مسأله استخراج گردید که به شکل دستگاه معادلات دیفرانسیل ناهمگن با ضرایب متغیر بودند. این دستگاه معادلات دیفرانسیل ناهمگن با ضرایب متغیر با استفاده از روش چندلایه کردن و تبدیل مقطع پوسته‌ی جدار ضخیم به چندین دیسک جدارثابت که بر روی هم قرار گرفته است، تبدیل به چندین دستگاه معادلات دیفرانسیل ناهمگن با ضرایب ثابت شد که به‌صورت تحلیلی و روش های مرسوم قابل حل هستند. معادلات مربوط به شرایط پیوستگی بین دیسک‌ها با توجه به یکسان بودن جابه‌جایی و شیب در دو انتهای دیسک‌ها درنظر گرفته شد.

1. Multilayer method

۱-۴-۲ تحلیل غیرخطی هندسی پوسته‌های جدار ثابت و متغیر

الیور و انات [۵۰] در سال ۱۹۸۶ با استفاده ازروش لاگرانژی کامل، رفتار غیرخطی هندسی پوسته‌های متقارن محوری را با روش اجزای محدود بررسی کردند.

یه و هان [۵۱] در سال ۱۹۹۵ خمش غیرخطی یک پوسته‌ی مخروطی ناهمسانگرد با ضخامت ثابت را با استفاده از یک روش نیمه‌تحلیلی بررسی کردند. آنها با استفاده از تابع گرین، معادلات غیرخطی را به یک سری معادلات انتگرالی تبدیل کرده و تأثیر توابع توزیع بارگذاری مختلف را مورد بررسی قرار دادند. در سال ۱۹۹۷ یه [۵۲] راه حلی را برای تحلیل خمش غیرخطی پوسته‌های مخروطی با جدار متغیر همانند پوسته‌های مخروطی با استفاده از روش‌های عددی ارائه کرد.

بالا و القامدی [۵۳] در سال ۲۰۰۲ فرمول‌بندی المان محدود غیرخطی یک المان پوسته‌ای چهار گره‌ای ایزوپارامتریک را بر اساس میدان جابه‌جایی مرتبه‌ی سه بر روی ضخامت ارائه کردند. آرسینیگا و ردی [۵۴] در سال ۲۰۰۷ فرمول‌بندی المان محدود غیرخطی پوسته‌ها را در مختصات خمیده‌خط به کمک نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل برای مواد ناهمگن بر اساس حساب تانسوری ارائه دادند. آن‌ها از توابع لاگرانژی مرتبه‌ی بالا برای تقریب میدان‌ها استفاده کردند و نتایج حاصل از تحلیل را برای چند مطالعه‌ی موردی بیان نمودند.

در سال ۲۰۱۰، شرعیات و همکاران [۵۵] تحلیل ترموالاستیک و ارتعاشات غیرخطی پوسته‌های جدار نازک استوانه‌ای FGM با خواص وابسته به دما را ارائه کردند. ایشان از فرمول‌بندی المان محدود هرمیتی مرتبه‌ی سه[1] استفاده کردند تا پیوستگی جابه‌جایی و تنش نرمال شعاعی تضمین شده و دقت تحلیل افزایش یابد. آنها به کمک یک روش انتگرال‌گیری زمانی تکرارشونده، معادلات به شدت غیرخطی حاکم را حل کردند.

در سال ۱۳۹۰، رضایی‌پژند و اعرابی [۵۶] به تحلیل غیرخطی پوسته‌های متقارن محوری چندلایه

1. Third-order Hermitian finite element formulation

با لایه‌ی پیزوالکتریک گسترده به کمک نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی بالا پرداختند. آن‌ها از دو گونه تابع تغییر شکل مرتبه‌ی بالا برای تقریب بهتر کرنش برشی در راستای ضخامت استفاده کردند و حل معادلات را به کمک روش نیوتن-رافسون محاسبه کردند.

در سال ۲۰۱۳ اورجسویچ و همکاران [۵۷] ارتعاشات آزاد غیرخطی یک پوسته‌ی استوانه‌ای ناهمسانگرد را بر اساس نظریه‌ی غیرخطی دانل بررسی کردند. معادلات حاکم بر مسأله با استفاده از روش بابنف-گالرکین[1] حل شده‌اند. در همان سال استروزی و پلیکانو [۵۸] ارتعاشات غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای جدار نازک FGM را به کمک اصل کار مجازی بررسی کردند. آنها از نظریه‌ی سندرز-کویتر برای مدل‌سازی ارتعاشات غیرخطی با دامنه‌ی محدود استفاده کردند و تغییر شکل پوسته را بر حسب جملات طولی، محیطی و شعاعی توصیف نمودند. شرایط مرزی در این پژوهش به‌صورت ساده، گیردار و آزاد درنظر گرفته شد. آنها میدان جابه‌جایی را در جهت طولی بر حسب چندجمله‌ای‌های متعامد چبی‌شف[2] و در جهت شعاعی بر حسب توابع هارمونیک، بسط دوگانه دادند.

دوک و همکاران [۵۹] در سال ۲۰۱۴، بر اساس نظریه‌ی کلاسیک پوسته‌ها با احتساب غیرخطی هندسی، نقص هندسی اوّلیه و بستر الاستیک از نوع پسترناک[3]، پاسخ غیرخطی متقارن محوری پوسته‌های کم‌عمق کروی FGM تحت بار مکانیکی-حرارتی و شرایط مرزی گوناگون بررسی و نتایج حاصل را با نتایج نویسندگان دیگر مقایسه کردند. نتایج پژوهش آنها با استفاده از روش بابنف-گالرکین و تابع تنش، تأثیر بستر الاستیک، فشار خارجی، دما، مادّه و خصوصیات هندسی بر کمانش و پس‌کمانش غیرخطی پوسته‌ها را نشان می‌دهد.

محبوبی و ایپک‌چی [۶۰] در سال ۲۰۱۹، بار محوری کمانش یک پوسته‌ی استوانه‌ای جدار متغیر دارای نقص اوّلیه را به کمک نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل محاسبه کردند. نقص اوّلیه به‌صورت یک جابه‌جایی شعاعی متقارن محوری درنظر گرفته شد. رابطه‌ی سینماتیک و ساختاری پوسته به ترتیب

1. Bubnov-Galerkin method
2. Chebyshev
3. Pasternak

بر اساس فرمول‌بندی غیرخطی فن-کارمن[1] و قانون هوک فرض شد. معادله‌ی پایداری حاصل، یک دستگاه معادله دیفرانسیل خطی جفت‌شده با ضرایب متغیر بود که مقادیر ویژه‌ی آن محاسبه شد. آنها در همان سال [۶۱] کمانش پوسته‌ای مشابه را تحت بارگذاری ترکیبی فشاری و محوری بررسی کردند.

۱-۴-۳ تحلیل پوسته‌های هایپرالاستیک

پژوهش‌های انجام‌شده در رابطه با مواد هایپرالاستیک را می‌توان به دو بخش عمده تقسیم‌بندی کرد. در بخش اول، تلاش‌ها برای توسعه‌ی روابط تنش-کرنش تئوری بوده است که منطبق با نتایج به‌دست آمده از آزمایش‌های انجام شده بر روی مواد هایپرالاستیک باشند. در این پژوهش‌ها با ارائه‌ی مدل‌های ساختاری جدید یا بهبود مدل‌های موجود، سعی در افزایش انطباق بین این مدل‌ها با آزمایش‌های تجربی و رفتار واقعی مواد است. همچنین سعی می‌شود تا با تکیه بر مفاهیم مکانیک محیط پیوسته، متغیرهای جدید از جنس تنش و تغییر شکل‌ها (کرنش‌ها) و یا پایاهای عددی آنها به گونه‌ای معرفی و در بررسی رفتار این مواد درنظر گرفته شوند تا محدودیت‌های تحلیل این مواد و یا محدودیت‌های ارائه‌ی مدل‌های ساختاری بر اساس متغیرهای تنش و کرنش موجود (مانند پایاهای کرنش) رفع شوند.

بخش دوّم شامل پژوهش‌هایی می‌شود که بر روی تحلیل سازه‌هایی از جنس مواد هایپرالاستیک انجام شده است. در این پژوهش‌ها سعی شده است تا از مدل‌های مواد هایپرالاستیک ایده‌آل، جهت تحلیل استاتیکی، ارتعاشی، دینامیکی و پایداری سازه‌های مختلف نظیر ورق‌ها و پوسته‌ها استفاده شود. در این پژوهش‌ها عموماً ثابت‌های مواد هایپرالاستیک بر اساس نتایج آزمایش‌های تجربی پژوهش‌های گذشته درنظر گرفته می‌شوند. در این قسمت به مهمترین پژوهش‌های مربوط به بخش دوّم که با رساله‌ی حاضر اشتراک بیشتری دارند، اشاره می‌شود.

در سال ۱۹۹۶، باشار و دینگ [۶۲] مدل‌سازی عمومی بر پایه‌ی اجزای محدود مربوط به پوسته‌های شبه‌لاستیک جدار نازک با تغییر شکل‌های بزرگ را توسط نظریه‌ی تغییر شکل برشی ارائه کردند. جنس

1. von-Karman formulas

پوسته از مواد تراکم‌ناپذیر مونی-ریولین دوجمله‌ای و نئوهوکین درنظر گرفته شد و شرایط تراکم‌ناپذیری به‌صورت قیدهای دوبعدی منجر به شروط کمکی شد. در نهایت معادلات حاصل توسط روش اجزای محدود حل شد. یکی از پوسته‌های خاص بررسی‌شده، پوسته‌ی استوانه‌ای توخالی تحت کشش در راستای طول استوانه بود.

جیانگ [۶۳] در سال ۲۰۰۱ شرایط لازم و کافی مربوط به انرژی کرنشی مواد هایپرالاستیک تراکم‌پذیر ناهمسانگرد را برای تحمل تغییر شکل‌های برشی مختلف متقارن محوری و قابل کنترل بررسی کرد. در این پژوهش سه مدل برای تابع انرژی کرنشی مواد تراکم‌پذیر هایپرالاستیک ناهمسانگرد بررسی شد. همچنین معادلات تعادل و پارامترهای تنش و کرنش مورد نیاز برای تغییر شکل‌های برشی مختلف همراه با شرایط به‌وجود آمدن این تغییر شکل‌های برشی در دستگاه استوانه‌ای ارائه شد. با توجه به ناهمسانگرد بودن استوانه، تابع انرژی کرنشی به‌صورت تابعی از سه پایای عددی اصلی شناخته شده‌ی تانسور کرنش کوشی-گرین و دو پایای عددی جدید که نشان‌دهنده‌ی مادّه‌ی ناهمسانگرد عرضی با محور متقارن می‌باشد، درنظر گرفته شد[۶۴]. سه مدل استفاده شده برای مواد ناهمسانگرد شامل مدل هادامارد[1] [۶۵]، مدل بیومکانیکی بافت‌های نرم [۶۶] و مدل پلیگنان-هورگان[2] [۶۷] بود.

زیدی [۶۸] در سال ۲۰۰۱، اثر پیش‌تنش را بر یک استوانه‌ی تقویت‌شده الاستیک غیرخطی تراکم-پذیر تحت تغییر شکل‌های مرکب بررسی کرد. او معادلات تعادل حاکم بر مسأله را با درنظر گرفتن تنش‌های برشی به‌صورت عددی حل کرد. استوانه تحت بارهای ترکیبی پیچشی همراه با برش محوری و دایروی (محیطی) بود؛ به این صورت که سطوح داخلی و خارجی استوانه مجاز به پیچش تحت بار پیچشی و برشی دایروی و مجاز به جابه‌جایی در جهت طول استوانه تحت برش طولی بودند، ولی در جهت شعاعی مجاز به جابه‌جایی نبودند. جنس استوانه از نوع همسانگرد عرضی تقویت شده‌ی مدل بلاتزکو انتخاب شد که به‌صورت الیاف یک‌بعدی تعبیه‌شده در بستر ماتریس‌ها بودند. در این مدل دو

1. Hadamard
2. Polignone and Horgan

پایای عددی جدید تانسورهای تغییر شکل علاوه بر سه پایای عددی رایج به‌شکلی درنظر گرفته شد تا اثر تقویت‌شوندگی در کنار پارامترهای چگالی تقویت‌کنندگی[1] و سختی الیاف[2] در رابطه‌ی انرژی کرنشی وارد شود.

در سال ۲۰۰۳، هورگان و ساکماندی [۷]، با بررسی مکانیک دیواره‌ی سرخرگ، نشان دادند که رابطه‌ی ساختاری بافت‌های نرم (از جمله دیواره‌ی سرخرگ) را می‌توان بر اساس روابط قابلیت کشش محدود زنجیره‌ای مدل کرد. در این پژوهش، رفتار کرنش-سختی ایجاد شده در بافت دیواره‌ی سرخرگ به کمک مدل ساختاری تراکم‌ناپذیر جنت بررسی شده و نتایج حاصل با مدل‌های تاکامیزاوا-هایاشی[3] و فانگ[4] که بر پایه‌ی روابط قانون توانی ارائه شده‌اند، مقایسه شد. دو مسأله شامل یک تسمه از جنس بافت نرم تحت کشش تک‌محوری و یک استوانه از جنس شبه‌لاستیک تحت فشار داخلی و کشش تک‌محوری بر اساس نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی تحلیل شدند و با نتایج تجربی قبلی مرتبط با بافت‌های زیستی نرم مقایسه شدند.

زو و همکاران [۶۹] در سال ۲۰۰۸، پایداری استوانه‌های جدار ضخیم از نظر رفتار انشعابی[5] تحت فشار خارجی و بارگذاری محوری ساخته‌شده از مادّه‌ی شبه‌لاستیک غیرخطی تراکم‌ناپذیر را بر اساس مدل آگدن تحلیل کردند. در این پژوهش، معادلات سه‌بعدی تعادل نموی به منظور تحلیل پایداری استوانه در دو حالت تغییر شکل انشعابی متقارن محوری و نامتقارن بررسی شد و معادلات حاصل توسط روش آدامز-ملتن[6] به‌صورت عددی حل شد.

در سال ۲۰۰۸، دای و همکارن [۷۰] معادلات تعادل حاکم بر استوانه‌های تراکم‌ناپذیر هایپرالاستیک تحت بار در راستای طولی را توسط روش بسط سری‌های مجانبی جفت شده[7] حل کردند.

1. Density of reinforcement
2. Fiber stiffness
3. Takamizawa-Hayashi
4. Fung
5. Bifurcation
6. Adams-Moulton
7. Coupled series-asymptotic expansion

باترا و بهرامی [۷۱] در سال ۲۰۰۹، تحلیل الاستیک غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای تراکم‌ناپذیر هایپرالاستیک ناهمگن را توسط نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی برای حالت‌های تنش و کرنش صفحه‌ای ارائه کردند. مدل مادّه‌ی استفاده‌شده در این پژوهش از نوع مونی-ریولین با دو ثابت مادّه به‌صورت ناهمگن دارای تغییرات توانی در راستای شعاع استوانه درنظر گرفته شد.

به کمک مدل‌های سه‌بعدی ریاضی برای شبیه‌سازی اتساع شریان‌های شکمی[1] می‌توان نشان داد که چگونه تغییر در ریزساختارهای دیواره‌ی شریان‌ها منجر به این بیماری می‌شود. این مدل‌سازی‌ها نشان می‌دهند که بخشی از ساختار بافت شریان به منظور خنثی‌سازی کمبود الاستین[2] بازسازی می‌شود. واتن و هیل [۷۲] در سال ۲۰۰۹، اثر مدل‌های مختلف مواد و عوامل مرتبط با بازسازی دیواره‌ی شریان‌های شکمی بر نرخ اتساع را مورد تحلیل و آزمایش قرار دادند. آنها خواص دینامیکی اتساع شریان‌ها را در مراحل مختلف بررسی و تخمینی از قطر حداکثر آنها در حالت فشار خون انقباضی و انبساطی ارائه کردند. آنها نشان دادند که این مدل‌های ریاضی مربوط به رشد اتساع عروقی[3] می‌توانند در آینده به دانشمندان در تشخیص و درمان این بیماری‌ها کمک کنند.

زو و همکاران [۷۳] در سال ۲۰۱۰، معادلات مربوط به استوانه‌های جدارضخیم ساخته‌شده از مواد هایپرالاستیک را تحت فشار خارجی و شرایط مرزی جابه‌جایی صفر در دو انتهای آن ارائه کردند. جنس استوانه از مادّه‌ی هایپرالاستیک مدل نئوهوکین در حالت تراکم‌ناپذیر درنظر گرفته شد. کرنش‌ها و جابه‌جایی‌ها در این مسأله از نوع بزرگ با رفتار شدیداً غیرخطی بود. آنها معادلات حاصل را برای دو حالت الاستیسیته‌ی خطی و الاستیسیته‌ی غیرخطی به کمک روش عددی گالرکین-باقیمانده‌ی وزنی و حلگر غیرخطی نیوتن-کریلر[4] توسط یک بسته‌ی نرم‌افزاری اجزای محدود حل‌کننده‌ی معادلات دیفرانسیل غیرخطی حل کردند. در این مقاله اثر تنش‌های برشی نیز وارد محاسبات شد. میدان جابه‌جایی استوانه به‌شکلی درنظر گرفته شد که جابه‌جایی شعاعی صرفاً تابعی از شعاع باشد. انطباق مدل

1. Abdominal aortic aneurysm
2. Elastin
3. Aneurysm
4. Newton-Krylor

الاستیسیته‌ی خطی و غیرخطی فقط برای مقادیر فشار خارجی کوچک با کرنش‌های کم مشاهده شد.

سراوانان [۷۴] در سال ۲۰۱۱، فرمول‌بندی استوانه‌های توخالی تحت پیش‌تنش را برای تغییر شکل‌های بزرگ در حالت فشار، کشش و پیچش توسط معادله‌ی تعادل ارائه کرد. در این پژوهش استوانه‌های دارای تنش-کرنش و کرنش-جابه‌جایی غیرخطی در دو حالت تراکم‌پذیر و تراکم‌ناپذیر بررسی و شرایط صادق بودن حل بیان شد. همچنین معادله‌ی تعادل به همراه شرط مرزی متناسب با حالت وجود پیش‌تنش در پیکربندی نخست ارائه شد. برای پیکربندی نهایی نیز به طور مشابه معادلات برای حالت کلی مادّه‌ی غیرخطی تراکم‌پذیر و مادّه‌ی غیرخطی تراکم‌ناپذیر ارائه شد. سپس معادلات در حالت تراکم‌پذیر برای مدل بلاتزکو و در حالت تراکم‌ناپذیر برای مدل نمایی ارائه شده توسط میرسکی [۷۵] ساده و حل شد. نتایج این پژوهش برای عروق خونی معتبر است.

تنویر و زو [۷۶] در سال ۲۰۱۲، ارتعاشات گذرای دامنه‌ی محدود اجسام جامد متقارن محوری از جنس مواد تراکم‌ناپذیر هایپرالاستیک مونی-ریولین را تحلیل کردند. از جمله‌ی این اجسام جامد یک استوانه‌ی توپر تحت بار فشاری وابسته به زمان در جهت محور طولی استوانه بود که معادله‌ی حرکت این استوانه به کمک اصل کار مجازی استخراج و توسط روش نیومارک به همراه تکنیک نیوتن-رافسون تکرارشونده حل شد.

هورگان و اسمیدا [۷۷] در سال ۲۰۱۲، بر اساس مدل نئوهوکین و مونی-ریولین، تست پارگی تحت کش ساده را برای زیست‌مواد نرم به‌صورت تجربی بررسی کردند. آنها با مقایسه‌ی مدل‌های اشاره شده در پژوهش‌های قبلی و آزمایش‌های تجربی حاصل، به این نتیجه رسیدند که ایجاد محل بریدگی با درنظر گرفتن این مدل‌ها تأثیر بسیار کمی در تنش بحرانی آستانه‌ی پارگی خواهد داشت.

لکتز و همکاران [۱۱] در سال ۲۰۱۴، تعیین معادله‌ی ساختاری یک مادّه‌ی هایپرالاستیک شبه-لاستیک به کمک آزمایش‌های تجربی کشش-پیچش ترکیبی بر روی یک نمونه‌ی استوانه‌ای توپر را بررسی کردند. در این مقاله، در مورد چگونگی اندازه‌گیری کمیت‌های ماکروسکوپی نظیر نیرو و گشتاور با کمترین میزان فرضیات جهت تعیین رابطه‌ی ساختاری مواد هایپرالاستیک بحث شد. در این پژوهش،

چهار متغیر جدید به عنوان کمیت‌هایی که مشتق انرژی کرنشی را می‌توان نسبت به آنها درنظر گرفت؛ شامل دو نسبت کشیدگی اصلی و دو پایای لگاریتمی ویژه متناظر با تانسور کرنش هنسکی[1] معرفی شد.

بیماری تصلب شریان‌ها[2] در اثر تجمع توده‌ی چربی در دیواره‌ی شریان‌ها ایجاد می‌شود. کریمی و همکاران [۷۸] در سال ۲۰۱۴، با استفاده از روش اجزای محدود بخش آسیب‌پذیر این توده‌ی چربی را بر اساس محل حداکثر تنش پیش‌بینی کردند. نمونه‌هایی از شریان‌های افراد مختلف مورد آزمایش کشش تک محوری قرار گرفت و خواص ماده‌ی به‌دست آمده در مدل‌سازی اجزای محدود استفاده شد. تنش‌ها برای ثابت‌های مدل مونی-ریولین محاسبه شد. این پژوهش نشان داد که شریان‌های دارای این بیماری، از سختی بسیار بیشتری نسبت به شریان‌های سالم برخوردار هستند. همچنین این توده‌های چربی دارای تنش‌های بسیار بزرگ‌تری نسبت به بافت سلولی دیواره‌ها هستند و آماده‌ی گسیختگی هستند. در نهایت نشان داده شد که نتایج این پژوهش می‌تواند اطلاعات مفیدی را در اختیار متخصصان در عمل‌های درمانی مانند آنژیوپلاستی، بای‌پس و ... قرار دهد.

غدیری‌راد و همکاران [۷۹] در سال ۲۰۱۵، پاسخ دینامیکی یک استوانه‌ی ضخیم هایپرالاستیک ناهمگن نئوهوکین را در برابر بار مکانیکی ضربه‌ای متقارن محوری به کمک روش MLPG [3] بررسی کردند. استوانه‌ی مورد بررسی از مواد دارای تغییر شکل‌های بزرگ مانند پلیمرهای پایه‌کربن که دارای رابطه‌ی ساختاری نئوهوکین ناهمگن هستند، درنظر گرفته شد. خواص ناهمگن مادّه تابعی از شعاع استوانه به‌صورت کسر حجمی درنظر گرفته شد. برای حل معادلات تعادل از روش عددی نیومارک/نیوتن-رافسون[4] استفاده شد. به منظور بررسی صحت نتایج، یک استوانه‌ی FG به‌صورت خطی تحلیل شده و با نتایج پژوهش‌های موجود مقایسه شد. بار ضربه‌ای به‌صورت فشار داخلی تابع زمان در حالت‌های خطی و غیرخطی (شیب‌دار و سینوسی) که در یک بازه‌ی زمانی کوچک حذف شده و سبب ارتعاش آزاد استوانه می‌شود، درنظر گرفته شد.

---
1. Hensky strain tensor
2. Atherosclerosis
3. Meshless local Petrov-Galerkin
4. Newmark/Newton-Raphson technique

در سال ۲۰۱۵، تقی‌زاده و همکاران [۸۰] برای استوانه‌ها و کره‌های جدار ضخیم تحت فشار ساخته شده از مواد هایپرالاستیک بر اساس نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی با صرف نظر کردن از اثر تنش برشی، یک حل بسته ارائه کردند. آنها از مدل آگدن با توان‌های صحیح برای رفتار ماده‌ی هایپرالاستیک استفاده کردند که نتایج بر اساس مدل‌های کلاسیک مونی-ریولین، نئوهوکین و وارگا[1] نیز به عنوان حالت‌های خاصی از مدل آگدن انجام شد. نتایج برای حالت‌های انتهایی بسته و باز پوسته‌ی استوانه‌ای آورده شد که نشان‌دهنده‌ی پایداری پوسته‌ی استوانه‌ای هایپرالاستیک در غیاب نیروی خارجی محوری برای هر دو حالت انتهایی باز و بسته است.

انانی و رحیمی [۸۱] در سال ۲۰۱۵، تحلیل تنش یک کره‌ی هایپرالاستیک ناهمگن را تحت فشار داخلی و خارجی به کمک نظریه‌ی الاستیسیته مستوی ارائه کردند و معادلات حاصل را برای مدل تراکم‌ناپذیر نئوهوکین به کمک شرایط مرزی و تابع گاوس- هایپرژئومتریک[2] [۸۲] حل کردند. در مدل نئوهوکین استفاده شده در این مقاله، ثابت مادّه به‌صورت ناهمگن تابعی از شعاع کره درنظر گرفته شد که ثابت مادّه در شعاع داخلی کره با توجه به روش بازگشتی غیرخطی لون‌برگ-مارکوارت[3] که توسط تریلر [۸۳] ارائه شده، تعیین شد. در این پژوهش از تنش‌های برشی صرف نظر شده است.

انانی و رحیمی [۸۴] در سال ۲۰۱۶، یک استوانه‌ی ضخیم دوار تحت فشار داخلی و خارجی که از مادّه‌ی تراکم‌ناپذیر نئوهوکین ناهمگن تشکیل شده است، به شیوه‌ای مشابه با مقاله‌ی قبل براساس نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی و صرف نظر کردن از اثر تنش‌های برشی تحلیل کردند. در این پژوهش نیز همانند مقاله‌ی قبلی، تنش‌ها و کشیدگی‌ها برای ثابت ناهمگنی مختلف مادّه‌ی هایپرالاستیک FG در راستای ضخامت پوسته بررسی شد. ثابت مدل هایپرالاستیک استفاده شده برای استوانه، برابر با مقدار حاصل از نتایج آزمایش‌های مقاله‌ی باترا [۸۵] که توسط روش غیرخطی لون‌برگ-مارکوارت به‌دست آمده، درنظر گرفته شد.

1. Varga
2. Gauss-Hypergeometric
3. Levenberg-Marquardt

حسین‌زاده و همکاران [۸۶] در سال ۲۰۱۶، مدل‌های هایپرالاستیک مربوط به غشاء حاوی املاح و پروتئین استخوان ران گاو را به کمک تست‌های تجربی و مدل‌سازی اجزای محدود در نرم‌افزار آباکوس بررسی کردند و مدل مناسب را برای این منظور انتخاب کردند. آنها از طریق آزمایش‌های تجربی فشار تک‌محوری، برش خالص و کشش دومحوری و با ترسیم انرژی کرنشی بر حسب نیرو، تابع انرژی کرنشی مناسب را به نتایج حاصل از آزمایش برازش کردند. آنها نشان دادند که مدل‌های مونی-ریولین و آگدن برای این مدل‌سازی مناسب نیستند؛ در حالی که مدل‌های نمایی-نمایی و نمایی-توانی انطباق خوبی با نتایج تجربی نشان می‌دهند.

باقری و همکاران [۸۷] در سال ۲۰۱۶، معادلات مربوط به یک استوانه‌ی جدار ضخیم چرخان ساخته شده از مادّه‌ی هایپرالاستیک را به کمک نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی و با صرف نظر کردن از اثر تنش‌های برشی ارائه کردند. جنس مادّه‌ی هایپرالاستیک از نوع آگدن با توان‌های صحیح درنظر گرفته شد. همچنین مقایسه‌ای بین نتایج تحلیلی برای توان‌های صحیح مدل آگدن با مدل‌های قدیمی مونی-ریولین، نئوهوکین و وارگا در چهار حالت استوانه‌ی چرخان، استوانه‌ی چرخان با گنجایش داخلی صلب، استوانه‌ی چرخان جازنی شده روی یک محور چرخان صلب و استوانه‌ی آزاد (بدون قید) تحت چرخش انجام شد. هدف از این مقایسه، بررسی دقت و قابلیت‌های مدل‌های کلاسیک نسبت به مدل آگدن بود. مشاهده شد که به غیر از استوانه‌ی آزاد بدون قید، در سایر موارد نتایج مدل‌های کلاسیک هم به خوبی با نتایج تجربی مطابقت دارند. در استوانه‌ی آزاد به دلیل تغییر شکل زیاد، مدل آگدن نسبت به مدل‌های کلاسیک برای پیش‌بینی رفتار استوانه مطابق با نتایج تجربی، مناسب‌تر بود. ثابت‌های مادّه‌ی مربوط به هر مدل نیز با توجه به آزمایش تریلر [۸۳] استخراج شد.

ابدصمد و همکاران [۸۸] در سال ۲۰۱۸، شریان بزرگ بدن را به عنوان یک مخزن همگن تحت فشار سیال تراکم‌ناپذیر در حالت ناپایدار به کمک نظریه‌ی پوسته‌های نازک مورد مطالعه قرار دادند. جدار شاهرگ به عنوان یک پوسته‌ی جدار نازک تحت ارتعاشات کوچک متقارن محوری درنظر گرفته شد. در این پژوهش، بسط مجانبی جریان سیال ناپایدار با پارامتر اغتشاشی کوچک متناسب با هندسه‌ی

شاهرگ تطبیق داده شد و بر اساس نظریه‌ی خطی پوسته‌های نازک و فرضیات لاو-کیرشهف مورد تحلیل قرار گرفت و تغییر شکل‌ها و تنش‌ها به کمک شبیه‌سازی عددی استخراج شدند.

۱-۵ جمع‌بندی

همانطور که اشاره شد، پوسته‌های استوانه‌ای و مخروطی ساخته شده از مواد هایپرالاستیک (تقریباً) تراکم‌ناپذیر در دو حوزه‌ی مواد شبه‌لاستیک‌ها و زیست مواد نرم دارای کاربردهای متعددی هستند. در حوزه‌ی مواد شبه‌لاستیکی و الاستومرها می‌توان به لوله‌ها و مخازن لاستیکی حاوی سیال پرفشار اشاره کرد. همچنین استوانه‌هایی که عنوان ضربه‌گیر به کمک فشار هوا از برخورد قایق‌ها در اثر امواج به دیواره‌ی اسکله‌ها جلوگیری می‌کنند، از این مواد تشکیل شده‌اند. از دیگر کاربردهای این سازه‌ها می‌توان به قطعاتی که به منظور میرا کردن لرزش‌های ایجاد شده در ماشین‌آلات مختلف استفاده می‌شوند، اشاره کرد. همچنین نشت‌بندها، کاسه‌نمدها و پکینگ‌ها به منظور آب‌بندی قطعات مختلف به‌شکل‌های استوانه‌ای و مخروطی از جنس این مواد هستند که در جک‌های هیدرولیک و پنوماتیک به‌شکل گسترده تحت فشار داخلی یا خارجی روی قطر داخلی و خارجی سیلندر و پیستون جازنی می‌شوند. در حوزه‌ی زیست‌مواد نرم، بررسی رفتار مکانیکی شریان‌ها و عروق (از جمله دیواره‌های سرخرگ‌ها) می‌تواند اطلاعات مفیدی در زمینه‌ی شروع، پیشروی و درمان بیماری‌های قلبی عروقی در اختیار دانشمندان قرار دهد. همچنین نتایج پژوهش‌های انجام‌شده در زمینه‌ی تحلیل عروق خونی می‌تواند متخصصان را در عمل‌های درمانی مانند آنژیوپلاستی، بای‌پس و ... یا پیش‌گیری و درمان بیماری‌هایی مانند اتساع عروقی و تصلب شریان‌ها یاری دهد.

با بررسی پیشینه‌ی پژوهش می‌توان دریافت که تا کنون تحلیل الاستیک غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای و مخروطی ضخیم جدار متغیر از جنس مواد هایپرالاستیک با درنظر گرفتن اثر تنش‌های برشی انجام نشده است. در بخش وسیعی از کارهای انجام‌شده در مورد پوسته‌های جدار متغیر، از فرضیات ساده‌شونده و یا نظریه‌های غیرخطی ساده‌تر برای روابط سینماتیک جهت تحلیل غیرخطی

هندسی استوانه‌ها استفاده شده است. در مورد استوانه‌های جدار متغیر و مخروط‌ها نیز عموماً از روش-های نیمه‌تحلیلی (مانند روش چندلایه کردن) و یا روش‌هایی با حجم محاسبات بسیار بالا و سرعت همگرایی کم (سری‌های فروبنیوس) برای سینماتیک خطی استفاده شده است. تحلیل‌های ارائه شده در زمینه‌ی پوسته‌های هایپرالاستیک به کمک روش انرژی، عموماً برای استوانه‌های جدارنازک با ضخامت ثابت و از طریق حل عددی معادلات نهایی ارائه شده است. پژوهش‌های زیادی جهت ارائه‌ی معادلات ساختاری جدید برای بهبود مدل‌های ساختاری قبلی و مطابقت بهتر با نتایج تجربی انجام شده است. بیشتر مطالعات انجام شده در زمینه‌ی مواد هایپرالاستیک به‌صورت تجربی به همراه مدل‌سازی عددی بوده است. کارهای تحلیلی انجام شده نیز عموماً بر روی سازه‌های تحت بارگذاری‌های ساده نظیر برش خالص، برش ساده، کشش تک محوری و دو محوری انجام گرفته است که باعث تسهیل در روابط سینماتیک و ساختاری و کاهش میزان غیرخطی بودن معادلات حاکم می‌شود. در مواردی نیز برای شرایطی نظیر تنش و کرنش صفحه‌ای و همچنین اعمال فرض‌های ساده شونده، با استفاده از روش‌های عددی و تحلیلی-تقریبی اقدام به حل معادلات تعادل استوانه‌های هایپرالاستیک شده است.

هدف از انجام این پژوهش، ارائه‌ی روشی تحلیلی برای بررسی رفتار الاستیک غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای و مخروطی جدار ضخیم با ضخامت متغیر تحت فشار متغیر در حالت تعادل استاتیکی است. از نتایج این پژوهش و حل تحلیلی ارائه شده می‌توان در طراحی و تحلیل رفتار مکانیکی پوسته‌های استوانه‌ای و مخروطی ضخیم هایپرالاستیک همگن یا ناهمگن در حالت تقریباً تراکم‌ناپذیر و تحت توابع مختلف فشار و ضخامت متغیر استفاده کرد. همچنین قابلیت‌ها و محدودیت‌های ترکیب نظریه‌ی تغییر شکل برشی و نظریه‌ی اغتشاشات در استخراج و حل معادلات این پوسته‌ها نشان داده شده است. مزیت بزرگ حل‌های تحلیلی نسبت به حل‌های عددی این است که با تغیرات اندک در ابتدای برنامه متناسب با شرایط مسأله می‌توان بدون نیاز به مدل‌سازی مجدد و سعی و خطا در مش‌بندی نهایی و همچنین با اعمال توابع به‌صورت پیوسته و دقیق مطابق با روابط ریاضی آنها می‌توان مسائل را تحلیل کرد. تمرکز اصلی نتایج در این رساله بر روی مدل مونی-ریولین دوجمله‌ای و نئوهوکین در حالت تقریباً تراکم‌ناپذیر

و برای مواد شبه‌لاستیک و الاستومری بوده است. اما از روش ارائه شده می‌توان در مدل‌های دیگر مواد هایپرالاستیک نیز بهره برد. از جمله می‌توان به مدل‌های چند جمله‌ای عمومی و یا مدل‌های مواد زیستی نرم اشاره کرد. روابط ساختاری غیرخطی این مدل‌ها را می‌توان به کمک روش جاری در معادلات وارد کرد و رفتار پوسته‌هایی با هندسه‌ی غیرخطی نزدیک به این مواد را تحلیل کرد. پژوهش‌های متعددی در این زمینه انجام گرفته است که تمرکز بخش قابل توجهی از آنها بر روی پوسته‌های ایده‌آل از نظر شکل هندسی بوده است. در سال‌های اخیر رویکرد استفاده از عروق خونی مصنوعی[1] ساخته شده از مواد الاستومر مخصوص و اندام عروقی مصنوعی[2] در پیوندهای شریانی[3] نیز به شدت افزایش یافته است. امروزه با استفاده از پرینترهای سه‌بعدی می‌توان سازه‌هایی با شکل دلخواه در زمینه‌های بافت‌ها، اعضای مصنوعی و قابل کاشت در بدن به‌شکل آزمایشی تولید کرد [۸۹]. شکل این عروق مصنوعی بر خلاف شریان‌های واقعی بسیار نزدیک‌تر به پوسته‌های استوانه‌ای و یا مخروطی جدار متغیر ایده‌آل هستند؛ بنابراین روش جاری می‌تواند در مدل‌سازی، تحلیل و طراحی این سازه‌ها از موادی منطبق بر مدل‌های استفاده شده در آنها به‌کار گرفته شود. حل تحلیلی ارائه‌شده در این پژوهش می‌تواند اطلاعات مفیدی را برای دانشمندان در خصوص تحلیل مدل‌های هایپرالاستیک واقعی‌تر برای عروق خونی، بررسی تغییرات در جدار داخلی یا خارجی عروق خونی ناشی از تصلب شریان‌ها در اثر تجمع پلاکت‌های چربی یا اتساع عروق در اثر بیماری یا افزایش سن [۹۰،۹۱،۹۲] و طراحی عروق مصنوعی ناهمگن به منظور استفاده در پیوندهای شریانی [۹۳] ارائه دهد. در این پژوهش تمرکز اصلی بر ارائه‌ی حل تحلیلی برای مسائل ناهمگن بوده است و در مورد چگونگی ساخت مواد متغیر تابعی هایپرالاستیک و یا آزمایش‌های تجربی انجام‌شده بر روی این مواد بحثی نشده است. زمانی که این مواد به‌صورت وسیع در صنایع و کاربردهای مهندسی مورد استفاده قرار گیرند، نتایج این مطالعه می‌تواند یک ابزار قابل اتکای عددی را جهت پیش‌بینی رفتار مکانیکی سازه‌هایی از این جنس در اختیار مهندسان قرار دهد.

1. Artificial blood vessels
2. Artificial vascular prostheses
3. Vascular graft

فصل ۲

معادلات حاکم

۲-۱ توصیف مسأله

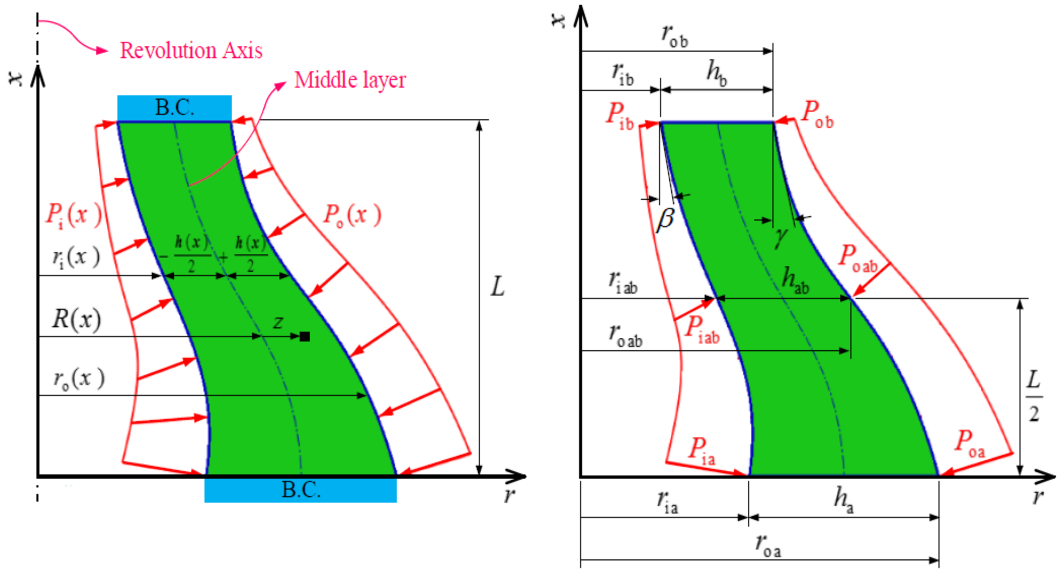
هدف از انجام این پژوهش ارائه‌ی روشی تحلیلی برای بررسی رفتار الاستیک غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای و مخروطی جدار ضخیم با ضخامت متغیر تحت فشار متغیر در حالت تعادل استاتیکی است. جنس پوسته از مادّه‌ی هایپرالاستیک ناهمگن و همسانگرد بر اساس مدل ساختاری مونی-ریولین دوجمله‌ای (و نئوهوکین) در حالت تقریباً تراکم‌ناپذیر با تغییرات خواص در راستای شعاعی پوسته انتخاب شده است. همانطور که اشاره شد، از این مدل ساختاری برای مدل‌سازی رفتار مواد شبه‌لاستیک، پلیمرها و زیست‌مواد استفاده می‌شود. تغییرات ضخامت و بارگذاری به‌صورت تابعی غیرخطی بر حسب متغیر طولی پوسته درنظر گرفته شده است. از آنجا که هندسه، جنس، بارگذاری و شرایط مرزی بر روی پوسته نسبت به محور مرکزی آن متقارن است، مسأله در حالت تقارن محوری بررسی می‌گردد. معادلات حاکم بر مسأله با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل استخراج می‌شود. نهایتاً دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی با ضرایب متغیر به کمک روش بسط مجانبی تطبیق‌یافته[1] بر اساس نظریه‌ی اغتشاشات برای شرایط مرزی گیردار حل شده و مقادیر جابه‌جایی، تنش و فشار هیدرواستاتیک در پوسته به‌صورت مطالعه‌ی موردی محاسبه خواهد شد. همچنین اثر عوامل مؤثر بر حل تحلیلی و قابلیت‌ها و محدودیت‌های تحلیل ارائه شده بررسی خواهد شد. صحت‌سنجی روش ارائه شده از طریق مقایسه‌ی نتایج پژوهش جاری با نتایج حاصل از مدل‌سازی عددی به کمک بسته‌ی نرم‌افزاری اجزای محدود انسیس[2] انجام خواهد شد.

۲-۲ نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول

مقطع پوسته‌ی مخروطی ضخیم جدار متغیر دارای تغییرات غیرخطی سطوح داخلی و خارجی آن تحت

1. Matched Asymptotic Expansion (MAE) method
2. ANSYS

فشار داخلی و خارجی متغیر و شرایط مرزی گیردار در شکل ۲-۱ نمایش داده شده است.



شکل ۲-۱ متغیرهای هندسی، بارگذاری و شرایط مرزی در مقطع پوسته‌ی مخروطی ضخیم جدار متغیر

به منظور به‌کارگیری نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل در دستگاه مختصات استوانه‌ای، مطابق شکل ۲-۱ فاصله‌ی هر نقطه‌ی مادّی پوسته‌ی مخروطی جدار متغیر تا محور تقارن آن r به‌صورت فاصله‌ی آن نقطه تا لایه‌ی میانی z به اضافه‌ی فاصله‌ی لایه‌ی میانی تا محور تقارن پوسته $R(x)$ بیان می‌شود [۹۴].

$$r = R(x) + z \ , \ -\frac{h(x)}{2} \le z \le \frac{h(x)}{2} \Rightarrow \mathrm{d}r = \mathrm{d}z \ , \ (r,\theta,x) \Rightarrow (z,\theta,x) \qquad (۱-۲)$$

تغییر مختصه‌ی شعاعی r به z سبب می‌شود که:

$$U_r(r,x) = U_z(z,x) \qquad (۲-۲)$$

شود. در روابط فوق $h(x)$ ضخامت پوسته‌ی جدار متغیر است که تابع مختصات طولی است. ضخامت و شعاع لایه‌ی میانی پوسته را می‌توان برحسب شعاع داخلی $r_i(x)$ و خارجی $r_o(x)$ آن بیان کرد.

$$h(x) = r_o(x) - r_i(x) \qquad (۳-۲)$$

$$R(x) = \frac{r_i(x) + r_o(x)}{2} \qquad (۴-۲)$$

پوسته‌ی مورد مطالعه در حالت عمومی دارای سطوح داخلی و خارجی متغیر با تابع غیرخطی برحسب مختصه‌ی طولی x درنظر گرفته می‌شود. β و γ به ترتیب زاویه‌های مماس بر سطوح داخلی و خارجی پوسته را نشان می‌دهند. با توجه به فرضیات حاکم بر مسأله‌ی مورد مطالعه و نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل (فصل ۱)، میدان جابه‌جایی برای پوسته‌ی مخروطی مورد مطالعه به‌شکل زیر بیان می‌گردد که به نظریه‌ی میرسکی-هرمان مرتبه‌ی اوّل[1] مشهور است.

$$\begin{cases} U_z(z,x) = U_z(0,x) + z \left.\dfrac{\partial U_z(z,x)}{\partial z}\right|_{z=0} = U_z^0(x) + z\,U_z^1(x) = w(x) + z\,\psi(x) \\ U_\theta = 0 \\ U_x(z,x) = U_x(0,x) + z \left.\dfrac{\partial U_x(z,x)}{\partial z}\right|_{z=0} = U_x^0(x) + z\,U_x^1(x) = u(x) + z\,\varphi(x) \end{cases} \tag{۵-۲}$$

در رابطه‌ی فوق U_z، U_θ و U_x مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی در راستای شعاعی، محیطی و طولی می‌باشند. u و w جابه‌جایی صفحه‌ی میانی پوسته به ترتیب در راستای x و r هستند. φ و ψ نیز کمیت‌هایی بی‌بعد هستند. تمامی مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی تابعی از مختصه‌ی طولی x هستند. با توجه به مستقل‌بودن هندسه‌ی پوسته، خواص مادّه و بارگذاری از جهت θ، مسأله در حالت تقارن محوری بدون چرخش صلب ($U_\theta = 0$ و $\partial()/\partial\theta = 0$) به‌صورت دوبعدی درنظر گرفته می‌شود.

۲-۳ روابط سینماتیک غیرخطی

تانسور کرنش گرین-لاگرانژ در دستگاه عمومی خمیده‌خط با رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود [۱۰].

$$\mathbf{E} = E_{ij}\vec{\mathbf{G}}^i \circ \vec{\mathbf{G}}^j = \frac{1}{2}\left(\mathbf{C} - \mathbf{I}\right) \tag{۶-۲}$$

در این رابطه $\vec{\mathbf{G}}^i$ بردار پایه‌ی پادگرد[2] در پیکربندی نخست، $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$ تانسور راست کوشی-گرین، $\mathbf{I}$ تانسور همانی و F تانسور گرادیان تغییر شکل است.

1. First-order Mirsky-Hermann's theory
2. Contravariant

$$\mathbf{I}=\vec{\mathbf{G}}_{\mathrm{i}}\circ\vec{\mathbf{G}}^{\mathrm{i}}\,,\;\mathbf{F}=\vec{\mathbf{g}}_{\mathrm{i}}\circ\vec{\mathbf{G}}^{\mathrm{i}} \qquad (۲-۷)$$

در روابط اخیر $\vec{\mathbf{G}}_{\mathrm{i}}$ و $\vec{\mathbf{g}}_{\mathrm{i}}$ به ترتیب بردارهای پایه‌ی همگرد در پیکربندی نخست و جاری هستند.

تانسور کرنش گرین-لاگرانژ در حقیقت تغییرات در توان دوّم طول بردار مادّی $\mathrm{d}\vec{\mathbf{X}}$ در پیکربندی نخست را نشان می‌هد که $\vec{\mathbf{X}}$ بردار موقعیت است. در واقع $\mathbf{E}$ ناظر را قادر می‌سازد تا تغییرات طول را با توجه به مختصات نخست محاسبه نماید. بنابراین تانسور کرنش $\mathbf{E}$ با درایه‌های همگرد[1] E_{ij} که نسبت به پیکربندی پیش از تغییر شکل تعریف می‌شوند را تانسور کرنش مادّی[2] نیز می‌نامند. با جایگذاری روابط (۲-۷) در (۲-۶)، تانسور $\mathbf{E}$ بر حسب بردارهای پایه و ضرایب سنجه[3] $G_{\mathrm{ij}}=\vec{\mathbf{G}}_{\mathrm{i}}.\vec{\mathbf{G}}_{\mathrm{j}}$ محاسبه می‌شود.

$$\mathbf{E}=E_{\mathrm{ij}}\vec{\mathbf{G}}^{\mathrm{i}}\circ\vec{\mathbf{G}}^{\mathrm{j}}=\frac{1}{2}\Big[\big(\vec{\mathbf{G}}^{\mathrm{i}}\circ\vec{\mathbf{g}}_{\mathrm{i}}\big)\big(\vec{\mathbf{g}}_{\mathrm{j}}\circ\vec{\mathbf{G}}^{\mathrm{j}}\big)-G_{\mathrm{ij}}\big(\vec{\mathbf{G}}^{\mathrm{i}}\circ\vec{\mathbf{G}}^{\mathrm{j}}\big)\Big] \qquad (۲-۸)$$

می‌توان نشان داد:

$$\vec{\mathbf{g}}_{\mathrm{i}}=\vec{\mathbf{G}}_{\mathrm{i}}+\vec{\mathbf{y}}_{,i}=\big(G_{\mathrm{ji}}+U_{\mathrm{j}}\big|_{\mathrm{i}}\big)\vec{\mathbf{G}}^{\mathrm{j}}=F_{\mathrm{ji}}\vec{\mathbf{G}}^{\mathrm{j}} \qquad (۲-۹)$$

که در آن $\vec{\mathbf{y}}=U^{\mathrm{i}}\vec{\mathbf{G}}_{\mathrm{i}}=U_{\mathrm{i}}\vec{\mathbf{G}}^{\mathrm{i}}$ میدان بردار جابه‌جایی است. بنابراین مؤلفه‌های همگرد تانسور کرنش گرین به‌شکل زیر قابل محاسبه‌اند.

$$\begin{aligned}E_{\mathrm{ij}}&=\frac{1}{2}\big(\vec{\mathbf{g}}_{\mathrm{i}}.\vec{\mathbf{g}}_{\mathrm{j}}-\vec{\mathbf{G}}_{\mathrm{i}}.\vec{\mathbf{G}}_{\mathrm{j}}\big)=\frac{1}{2}\big(g_{\mathrm{ij}}-G_{\mathrm{ij}}\big)\\&=\frac{1}{2}\big(\vec{\mathbf{G}}_{\mathrm{i}}.\vec{\mathbf{y}}_{,\mathrm{i}}+\vec{\mathbf{G}}_{\mathrm{j}}.\vec{\mathbf{y}}_{,\mathrm{i}}+\vec{\mathbf{y}}_{,\mathrm{i}}.\vec{\mathbf{y}}_{,\mathrm{j}}\big)=\frac{1}{2}\Big(U_{\mathrm{i}}\big|_{\mathrm{j}}+U_{\mathrm{j}}\big|_{\mathrm{i}}+U_{\mathrm{k}}\big|_{\mathrm{i}}U^{k}\big|_{\mathrm{j}}\Big)\end{aligned} \qquad (۲-۱۰)$$

در روابط اخیر، $(\;)_{,\mathrm{i}}$ به معنی مشتق جزئی و $(\;)\big|_{\mathrm{i}}$ به معنی مشتق همگرد است که برای مؤلفه‌های همگرد و پادگرد یک بردار به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{cases}U_{\mathrm{i}}\big|_{\mathrm{j}}=U_{\mathrm{i,j}}-U_{\mathrm{k}}\Gamma^{\mathrm{k}}_{\mathrm{ij}}\\U^{i}\big|_{\mathrm{j}}=U^{\mathrm{i}}_{\;,\mathrm{j}}+U^{\mathrm{k}}\Gamma^{\mathrm{i}}_{\mathrm{kj}}\end{cases} \qquad (۲-۱۱)$$

1. Covariant
2. Material strain tensor
3. Metric factors

$\Gamma_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{k}}$ نماد کریستوفل نوع دوّم[1] بوده و معیاری برای تغییرات بردارهای پایه است.

$$\Gamma_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{k}} = \Gamma_{\mathrm{ji}}^{\mathrm{k}} = \vec{\mathbf{G}}_{\mathrm{i,j}}.\vec{\mathbf{G}}^{\mathrm{k}} = \vec{\mathbf{G}}_{\mathrm{j,i}}.\vec{\mathbf{G}}^{\mathrm{k}} \tag{۱۲-۲}$$

بردارهای پایه‌ی همگرد و پادگرد با توجه به مشتقات زیر محاسبه می‌شوند.

$$\vec{\mathbf{G}}_{\mathrm{i}} = \vec{\mathbf{X}}_{,\mathrm{i}} . = \frac{\partial X^{\mathrm{j}}}{\partial q^{\mathrm{i}}} \hat{\mathbf{i}}_{\mathrm{j}}, \qquad \vec{\mathbf{G}}^{\mathrm{i}} = \frac{\partial q^{\mathrm{i}}}{\partial X^{\mathrm{j}}} \hat{\mathbf{i}}^{\mathrm{j}} \tag{۱۳-۲}$$

که در آن $\hat{\mathbf{i}}_{\mathrm{j}} = \hat{\mathbf{i}}^{\mathrm{j}}$ بردار پایه (و یکه) در دستگاه مختصات کارتزین و q^{i} مختصه‌های مربوط به دستگاه خمیده‌خط هستند.

با درنظر گرفتن دستگاه مختصات استوانه‌ای در حالت سه‌بعدی، می‌توان موقعیت یک نقطه‌ی مادّی در طی تغییر شکل را به ترتیب در پیکربندی نخست (بدون تغییر شکل) و جاری (تغییر شکل‌یافته) با $\left(r,\theta,x\right)$ و $\left(\hat{r},\hat{\theta},\hat{x}\right)$ نمایش داد. با درنظر گرفتن اندیس‌های ۱، ۲ و ۳ در جهات شعاعی، محیطی و طولی در روابط (۲-۱۰) تا (۲-۱۳) می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} q^1 = r,\ q^2 = \theta,\ q^3 = x \\ \vec{\mathbf{G}}_1 = \vec{\mathbf{G}}^1 = \hat{\mathbf{e}}_r = \hat{\mathbf{e}}_z \\ \vec{\mathbf{G}}_2 = r\,\hat{\mathbf{e}}_\theta,\ \vec{\mathbf{G}}^2 = \dfrac{\hat{\mathbf{e}}_\theta}{r} \\ \vec{\mathbf{G}}_3 = \vec{\mathbf{G}}^3 = \hat{\mathbf{e}}_x \end{cases} \tag{۱۴-۲}$$

$\hat{\mathbf{e}}$ها برداهای یکه (جهت) هستند. با توجه به روابط (۲-۱۲) و (۲-۱۴)، مقادیر غیر صفر نماد کریستوفل نوع دوّم در مختصات استوانه‌ای به‌شکل زیر محاسبه می‌شوند.

$$\begin{cases} \Gamma_{r\theta}^{\theta} = \Gamma_{\theta r}^{\theta} = \dfrac{1}{r} \\ \Gamma_{\theta\theta}^{r} = -r \end{cases} \tag{۱۵-۲}$$

با توجه به رابطه‌ی بین مؤلفه‌های همگرد و پادگرد و مؤلفه‌های فیزیکی[2] به‌شکل $\overset{*}{U}_{\mathrm{i}} = U_{\mathrm{i}}\left|\vec{\mathbf{g}}_{\mathrm{i}}\right|$ و $\overset{*}{U}{}^{\mathrm{i}} = U^{\mathrm{i}}\left|\vec{\mathbf{g}}^{\mathrm{i}}\right|$، در دستگاه مختصات استوانه‌ای می‌توان نوشت:

---
1. Christoffel symbol of the second kind
2. Physical components

$$\begin{cases} U_1 = U^1 = U_r = U_z \\ U_2 = rU_\theta, \qquad U^2 = \dfrac{U_\theta}{r} \\ U_3 = U^3 = U_x \end{cases} \tag{۱۶-۲}$$

با توجه به رابطه‌ی (۲-۲) و تقارن محوری پوسته $(U_\theta = 0)$، رابطه‌ی زیر برای مختصات هر نقطه‌ی مادّی از پوسته در پیکربندی جدید بر حسب جابه‌جایی‌ها برقرار است.

$$\begin{cases} \hat{r} = r + U_z(z,x) \\ \hat{x} = x + U_x(z,x) \end{cases} \tag{۱۷-۲}$$

در این حالت تانسور گرادیان تغییر شکل به‌صورت زیر قابل محاسبه است.

$$[\mathbf{F}] = \begin{bmatrix} 1+\dfrac{\partial U_z}{\partial z} & 0 & \dfrac{\partial U_z}{\partial x} \\ 0 & 1+\dfrac{U_z}{r} & 0 \\ \dfrac{\partial U_x}{\partial z} & 0 & 1+\dfrac{\partial U_x}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{۱۸-۲}$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۲-۵) در رابطه‌ی (۲-۱۸)، تانسور گرادیان تغییر شکل بر حسب مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی محاسبه می‌شود. در تمامی روابط این بخش، $(\ )' = \partial(\ )/\partial x$ است.

$$[\mathbf{F}] = \begin{bmatrix} 1+\psi & 0 & w'+\psi' z \\ 0 & 1+\dfrac{w+\psi z}{R(x)+z} & 0 \\ \varphi & 0 & 1+u'+\varphi' z \end{bmatrix} \tag{۱۹-۲}$$

با توجه به رابطه‌ی $[\mathbf{C}] = [\mathbf{F}]^{\mathrm{T}}[\mathbf{F}]$، تانسور کرنش کوشی-گرین راست نیز به‌دست می‌آید.

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} C_{zz} & 0 & C_{zx} \\ 0 & C_{\theta\theta} & 0 \\ C_{xz} & 0 & C_{xx} \end{bmatrix} \tag{۲۰-۲الف}$$

$$\begin{cases} C_{zz} = (1+\psi)^2 + \varphi^2, \qquad C_{xx} = (w'+\psi' z)^2 + (1+u'+\varphi' z)^2 \\ C_{\theta\theta} = \left(1+\dfrac{w+\psi z}{R(x)+z}\right)^2, \qquad C_{zx} = C_{xz} = (1+\psi)(w'+\psi' z) + \varphi(1+u'+\varphi' z) \end{cases} \tag{۲۰-۲ب}$$

همچنین طبق رابطه‌ی (۲-۶)، تانسور کرنش گرین-لاگرانژ را می‌توان محاسبه کرد. کرنش‌های

گرین-لاگرانژ را به‌صورت شبه‌بردار طبق نمادگذاری ویت[1] نیز می‌توان نمایش داد.

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}^{\mathrm{T}} = \{\varepsilon_{zz} \quad \varepsilon_{\theta\theta} \quad \varepsilon_{xx} \quad \gamma_{zx}\} \tag{۲-۲۱}$$

که مؤلفه‌های آن به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$\begin{cases} \varepsilon_{zz} = \psi + \dfrac{\psi^2}{2} + \dfrac{\varphi^2}{2} \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \dfrac{w + \psi z}{R(x) + z} + \dfrac{(w + \psi z)^2}{2(R(x) + z)^2} \\ \varepsilon_{xx} = u' + \dfrac{u'^2}{2} + \dfrac{w'^2}{2} + (\varphi' + u'\varphi' + w'\psi')z + \left(\dfrac{\varphi'^2}{2} + \dfrac{\psi'^2}{2}\right)z^2 \\ \gamma_{zx} = 2\varepsilon_{zx} = \varphi + u'\varphi + w' + w'\psi + (\psi' + \psi\psi' + \varphi\varphi')z \end{cases} \tag{۲-۲۲}$$

مشاهده می‌شود که کرنش‌ها نسبت به متغیر مستقل z و توابع u، φ، w و ψ غیرخطی هستند.

با توجه به این که در معادلات ساختاری، پایاهای تانسورهای تغییر شکل مورد نیاز هستند، در ادامه به محاسبه‌ی این پایاها پرداخته شده است. نسبت حجمی که همان ژاکوبین تغییر شکل بین دستگاه‌های نخست و جاری (تغییر شکل‌یافته) است، به‌صورت زیر قابل محاسبه است.

$$J = \det(\mathbf{F}) = \left(\frac{1}{R(x) + z}\right)\Big[\big(R(x) + z + w + \psi z\big)\big((1+\psi)(1 + u' + \varphi' z) - \varphi(w' + \psi' z)\big)\Big] \tag{۲-۲۳}$$

$\det(\;)$ عملگر دترمینان[2] را نشان می‌دهد. پایاهای عددی تانسور کرنش کوشی-گرین راست $\mathbf{C}$ و چپ $\mathbf{B}$ با یکدیگر برابر بوده و با توجه به رابطه‌ی (۲-۲۰) به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$\begin{cases} I_1 = C_{zz} + C_{\theta\theta} + C_{xx} \\ I_2 = C_{zz}C_{\theta\theta} + C_{\theta\theta}C_{xx} + C_{zz}C_{xx} - C_{zx}^2 \\ I_3 = C_{zz}C_{\theta\theta}C_{xx} - C_{\theta\theta}C_{zx}^2 = J^2 \end{cases} \tag{۲-۲۴}$$

1. Voigt notation
2. Determinant operator

۲-۴ روش تابع خطا

همانطور که در رابطه‌ی (۱-۳۴) اشاره شد، انرژی کرنشی در تغییر شکل‌های تراکم‌ناپذیر صرفاً تابعی از دو پایای اوّل و دوّم کرنش است. در واقع رابطه‌ی $J-1=0$ یک قید روی جابه‌جایی‌های جسم تراکم‌ناپذیر اعمال می‌کند. از آنجا که حل همزمان این معادله‌ی به شدت غیرخطی با معادلات حاکم بر مسائل الاستیسیته دشوار است، در این پژوهش از روش تابع خطا جهت اعمال قید تراکم‌ناپذیری استفاده شده است. روش تابع خطا شامل کاهش یک مسأله‌ی مقید شده‌ی اکسترمم به مسأله‌ی اکسترمم بدون قید از طریق معرفی یک تابع خطا مرتبط با قید مسأله می‌باشد. در این حالت، فانکشنال بهبودیافته‌ی انرژی پتانسیل کل از طریق واردکردن تابع درجه‌ی دو مرتبط با قید مسأله بازنویسی می‌شود. در واقع قید مسأله به‌صورت تقریبی در حالت حداقل مربعات ارضا می‌شود [۳۲،۲۹].

روش تابع خطا در مسائل غیرخطی، یک روش اعمال قید تراکم‌ناپذیری است؛ بدون این که پیکربندی، محدود به حالت تغییر شکل حجم‌ثابت باشد. در این مسائل، پتانسیل انرژی کرنشی با درنظر گرفتن تابع خطا به‌صورت زیر فرض می‌شود [۹۵].

$$W(I_1,I_2,J)=\hat{W}(I_1,I_2,J)+\tilde{W}(J) \qquad (۲-۲۵)$$

در این رابطه، $\hat{W}$ انرژی کرنشی مربوط به تغییر شکل تراکم‌ناپذیر است. $\tilde{W}$ نیز ساختار یک تابع خطا است که قید تراکم‌ناپذیری را اعمال می‌کند. در واقع عبارتی شامل کار هیدرواستاتیک با حذف شرط $I_3=1$ وارد رابطه‌ی چگالی انرژی کرنشی شده است [۹۶] که به آن بخش حجمی[۱] انرژی کرنشی گفته می‌شود. در این حالت $\tilde{W}$ را به‌صورت زیر درنظر می‌گیرند.

$$\tilde{W}(J)=\frac{1}{2}\lambda\left(G(J)\right)^2 \qquad (۲-۲۶)$$

G یک تابع خطا با خاصیت $G(J)=0 \Leftrightarrow J=1$ بوده و $\lambda>0$ نیز پارامتر خطا است که از طریق

1. Volumetric part

رابطه‌ی قید مسأله با هندسه یا جنس ماده بر اساس این پارامترها تعیین می‌شود [۲۹].

در این عبارت با درنظر گرفتن پارامتر k (معادل مدول بالک) به جای λ، قید تراکم‌ناپذیری به‌صورت حدی در بسط تراکم‌پذیری اعمال می‌شود. در واقع با میل دادن پارامتر k به سمت وضعیت تراکم‌ناپذیر به‌صورت حدی، از وضعیت تقریباً تراکم‌ناپذیر استفاده می‌شود. در این حالت k نسبت تنش حجمی (فشار هیدرواستاتیک P) به کرنش حجمی بوده که مقدار ثابتی است.

$$k = \frac{P}{\left(\frac{\Delta V}{V_0}\right)} = \frac{P}{J-1} \tag{۲-۲۷}$$

همانطور که قبلاً اشاره شد، $J = |\mathbf{C}|$ نسبت حجمی است. در یک ماده‌ی تراکم‌ناپذیر ایده‌آل، هر نوع کرنش حجمی (تغییر حجم) باید صفر باشد؛ یعنی باید $k \to \infty$ میل کند (معادل با $\nu = 0.5$). به عنوان نمونه در لاستیک‌های تقریباً تراکم‌ناپذیر، $k/\mu >> 1$ بوده (μ مدول برشی جسم است) و بازه‌ی توصیه شده برای آن $k = 10^4 - 10^5$ kPa بوده که معادل با $\nu = 0.49 - 0.499$ است [۹۷-۹۵،۳۲،۲۸].

$\hat{W}$ نیز به‌صورت زیر درنظر گرفته می‌شود.

$$\hat{W}(I_1, I_2, J) = W^*(I_1, I_2) + cH(J) \tag{۲-۲۸}$$

W^* انرژی کرنشی ماده‌ی تراکم ناپذیر است که بر اساس مدل ماده‌ی انتخابی تعیین می‌شود. ثابت c و تابع $H(J)$ با خاصیت $H(J) = 0, H'(J) = 1 \Leftrightarrow J = 1$ تضمین می‌کنند که جسم در پیکربندی نخست فاقد تنش اولیه[۱] است.

در خصوص بخش حجمی انرژی کرنشی ($\tilde{W}$) نیز شکل‌های مختلفی توسط پژوهشگران بررسی شده است که همگی آنها تابعی از مدول بالک (k) و نسبت حجمی (J) هستند [۹۹،۹۸]. این بخش حجمی باید در حالت حدی دارای خاصیت $J \to 1 \Rightarrow \tilde{W}(J) \to 0, \tilde{W}'(J) \to 0, \tilde{W}''(J) \to k$ باشد.

1. Stress free

نکته‌ی بسیار مهم این است که درنظر گرفتن مدول بالک به عنوان متغیر تراکم‌ناپذیری در این تابع فقط برای تعیین مرتبه و میزان[۱] آن است و شکل عمومی منحنی حجمی مواد هایپرالاستیک را تغییر نمی‌دهد. در واقع مرتبه‌ی مدول بالک متناسب با ثابت‌های مدل انتخابی مادّه‌ی هایپرالاستیک تعیین می‌شود تا با درنظر گرفتن آن در بخش حجمی انرژی کرنشی، مرتبه‌ی این قسمت از انرژی کرنشی متناسب با مرتبه‌ی $\hat{W}$ (بخش مربوط به تغییر شکل تراکم‌ناپذیر) شود [۹۹].

در پژوهش جاری توابع $G(J)$ و $H(J)$ به‌صورت زیر فرض می‌شوند [۱۰۰،۹۵،۳۲].

$$\begin{cases} G(J) = J - 1 \\ H(J) = \ln(J) \end{cases} \tag{۲-۲۹}$$

۲-۵ معادله‌ی ساختاری مدل مونی-ریولین دوجمله‌ای

در پژوهش جاری از مدل ساختاری مونی-ریولین دوجمله‌ای استفاده می‌شود. در این مدل انرژی کرنشی به‌صورت ترکیبی خطی از پایاهای اوّل و دوّم تانسور کرنش به‌شکل زیر نوشته می‌شود.

$$W^*(I_1, I_2) = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3) \tag{۲-۳۰}$$

C_1 و C_2 ثابت‌های مدل مونی-ریولین هستند. برای این مدل $c = -p_0 = -2(C_1 + 2C_2)$ است که فاقد هرگونه تعبیر فیزیکی است و صرفاً از نظر تحلیلی در معادلات باید لحاظ شود تا فشار هیدرواستاتیک و تنش در پیکربندی نخست صفر باشند [۱۰۲،۱۰۱،۹۵]. در نهایت می‌توان تابع انرژی کرنشی جفت‌شده‌ی[۲] مدل مونی-ریولین در حالت تقریباً تراکم‌ناپذیر را به‌شکل زیر نوشت [۱۰۱،۹۶].

$$W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3) - p_0 \ln(J) + \frac{k}{2}(J - 1)^2 \tag{۲-۳۱}$$

دو جمله‌ی اوّل در سمت راست رابطه‌ی (۲-۳۱) نشان‌دهنده‌ی تغییر شکل اعوجاجی (تراکم‌ناپذیر) انرژی کرنشی هستند. جمله‌ی سوّم تضمین‌کننده‌ی عدم وجود تنش اوّلیه در جسم است. جمله‌ی چهارم

1. Scale
2. Coupled

نشان‌دهنده‌ی تغییر شکل حجمی انرژی کرنشی بوده و مدول بالک در این جمله به منظور هم‌مرتبه کردن آن با سایر جملات انرژی کرنشی که دارای ثابت‌های مادّه‌ی مونی-ریولین (C_1,C_2) هستند، درنظر گرفته شده است. روابط مختلفی برای مدول بالک بر حسب ثابت‌های مدل مونی-ریولین در حالت اوّلیه اعلام شده است [۷۶]. به عنوان نمونه رابطه‌ی زیر را می‌توان نوشت:

$$k = \frac{2\mu(1+\nu)}{3(1-2\nu)} \tag{۲-۳۲}$$

در تمامی این روابط مدول بالک اوّلیه بر حسب ثابت‌های مادّه یا مدول برشی اوّلیه یعنی $\mu = 2(C_1+C_2)$ نوشته می‌شود. همواره در این روابط نسبت پواسون (ν) نیز وجود دارد. در مواد تقریباً تراکم‌ناپذیر نسبت پواسون با توجه به میزان تراکم‌ناپذیری در حدود $\nu = 0.49-0.499$ درنظر گرفته می‌شود. بنابراین بر اساس میزان تراکم‌ناپذیری مادّه‌ی هایپرالاستیک، می‌توان مرتبه‌ی مدول بالک را به‌شکل زیر درنظر گرفت [۹۹،۱۰۲،۱۰۳].

$$\begin{cases} \nu = 0.49 \rightarrow k \propto (C_1+C_2)\times 10^2 \\ \nu = 0.499 \rightarrow k \propto (C_1+C_2)\times 10^3 \end{cases} \tag{۲-۳۳}$$

با توجه به رابطه‌ی (۱-۱۵) و استفاده از اصول حاکم بر مشتقات جزئی مرتبه‌ی اوّل و دوّم توابع تانسوری و قاعده‌ی مشتق زنجیره‌ای، می‌توان معادله‌ی ساختاری بین مؤلفه‌های فیزیکی تانسور تنش پیولا-کیرشهف دوّم و تانسور کرنش کوشی-گرین را بر حسب مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی محاسبه کرد.

$$\mathbf{S} = 2\frac{\partial W\,(I_1,I_2,J)}{\partial \mathbf{C}} = 2\left[\frac{\partial W}{\partial I_1}\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial W}{\partial I_2}\frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial W}{\partial J}\frac{\partial J}{\partial I_3}\frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}}\right] \tag{۲-۳۴}$$

در این رابطه مشتق پایاهای تانسور متقارن $\mathbf{C}$ نسبت به خود این تانسور به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{I}, \quad \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} = I_1\mathbf{I} - \mathbf{C}, \quad \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} = J^2\ \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^2 - I_1\mathbf{C} + I_2\mathbf{I} \tag{۲-۳۵}$$

از قرار دادن روابط (۲-۳۱) و (۲-۳۵) در رابطه‌ی (۲-۳۴)، در نهایت رابطه‌ی ساختاری جفت‌شده‌ی مدل مونی-ریولین مادّه‌ی همگن و همسانگرد برای حالت تقریباً تراکم‌ناپذیر در مختصات مادّی به‌صورت

زیر به‌دست می‌آید [۴۶،۱۰].

$$\mathbf{S}=2\left[C_1+C_2I_1\right]\mathbf{I}-2C_2\mathbf{C}+\left[kJ\left(J-1\right)-p_0\right]\mathbf{C}^{-1} \qquad (۳۶\text{-}۲)$$

ثابت‌های مادّه‌ی هایپرالاســتیک شامل C_1، C_2 و k در حالت همگن و همسانگرد را می‌توان به کمک روش‌های اشاره شده در فصل قبل تعیین کرد. با توجه به رابطه‌ی (۲-۲۷)، فشار هیدرواستاتیک برابر $P=k\left(J-1\right)$ است؛ بنابراین رابطه‌ی (۲-۳۶) به‌شکل زیر قابل بازنویسی است.

$$\mathbf{S}=2\left[C_1+C_2I_1\right]\mathbf{I}-2C_2\mathbf{C}+\left[PJ-p_0\right]\mathbf{C}^{-1} \qquad (۳۷\text{-}۲)$$

در پیکربندی نخست، گرادیان تغییر شکل برابر تانسور یکه است؛ یعنی $\mathbf{F}=\mathbf{C}=\mathbf{I}$ و در نتیجه $\left(I_1,I_2,I_3,J\right)=\left(3,3,1,1\right)$ هستند. در حالت عدم وجود جمله‌ی p_0 در پیکربندی نخست، طبق رابطه‌ی (۲-۳۷) می‌توان نوشت:

$$\mathbf{S}=2\left(C_1+2C_2\right) \qquad (۳۸\text{-}۲)$$

یعنی تنش اوّلیه برابر است با $2\left(C_1+2C_2\right)$. به همین دلیل مقدار $p_0=2\left(C_1+2C_2\right)$ مشابه رابطه‌ی (۲-۳۷) از تنش کم می‌شود تا جسم در حالت نخست، فاقد تنش باشد.

مادّه‌ی هایپرالاســتیک ناهمگن و همسانگرد دارای خواص یکسان در جهات مختلف است؛ اما این خواص در نقاط مختلف متفاوتند. این تغییر خواص در پوســـته‌های اســـتوانه‌ای و مخروطی عموماً در راســتاهای شــعاعی یا طولی فرض می‌شــوند. در این پژوهش تغییر خواص در یک پوســته‌ی مخروطی ضخیم جدار متغیر ناهمگن با تغییرات توانی خواص بر حسب متغیرهای شعاعی (z) و طولی (x) در حالت عمومی به‌صورت زیر درنظر گرفته شده است [۱۰۴،۴۴].

$$\begin{cases} C_{1n}\left(x,z\right)=C_1\left(\dfrac{R(x)+z}{r_{i0}}\right)^n, & C_{2n}\left(x,z\right)=C_2\left(\dfrac{R(x)+z}{r_{i0}}\right)^n \\ k_n\left(x,z\right)=k\left(\dfrac{R(x)+z}{r_{i0}}\right)^n, & p_{0n}=2\left(C_{1n}+2C_{2n}\right) \end{cases} \qquad (۳۹\text{-}۲)$$

r_{i0} شعاع نقاطی از سطح داخلی پوسته با کمترین فاصله از محور دوران آن است که C_1، C_2 و k

خواص متناظر با این نقاط در لایه‌ی داخلی پوسته‌ی ناهمگن فرض می‌شوند. در پوسته‌ی استوانه‌ای با جدار داخلی ثابت، این متغیر همان r_i است. n نیز ثابت ناهمگنی مادّه است. کنترل خواص مادّه طبق توزیع توانی روابط (۲-۳۹) از نزدیکترین قسمت لایه‌ی داخلی به محور دوران پوسته با خواص معین C_1، C_2 و k و شعاع r_{i0} به سمت لایه‌ی خارجی بر اساس مقادیر مختلف ثابت ناهمگنی n صورت می‌گیرد. در واقع خواص بر حسب متغیر شعاعی (z) به طور پیوسته از داخلی‌ترین نقاط پوسته دارای کمترین شعاع به سمت بیرونی‌ترین نقاط پوسته با بیشترین شعاع در حال افزایش $n > 0$ یا کاهش $n < 0$ است. با توجه به این که در حالت عمومی جدار خارجی و داخلی پوسته می‌تواند متغیر به‌صورت تابعی از x باشد، مقدار خاصیت در سطوح بیرونی و درونی پوسته با توجه به‌شکل تابع آن نسبت به x تعیین می‌شود. به همین دلیل روابط (۲-۳۹) تغییرات خواص را بر حسب هر دو متغیر شعاعی (z) و طولی (x) نشان می‌دهند. در این حالت تابع انرژی کرنشی و معادله‌ی ساختاری به‌شکل زیر بازنویسی می‌شوند.

$$W = C_{1n}\left(I_1 - 3\right) + C_{2n}\left(I_2 - 3\right) - p_{0n}\ln(J) + \frac{k_n}{2}\left(J - 1\right)^2 \tag{۲-۴۰}$$

$$\mathbf{S} = 2\left[C_{1n} + C_{2n} I_1\right]\mathbf{I} - 2C_{2n}\mathbf{C} + \left[k_n J\left(J - 1\right) - p_{0n}\right]\mathbf{C}^{-1} \tag{۲-۴۱}$$

۲-۶ اصل کار مجازی برای مواد هایپرالاستیک

بر طبق اصل کار مجازی، یک جسم شکل‌پذیر زمانی در حالت تعادل است که مجموع انرژی کرنشی نیروهای داخلی و کار مجازی نیروهای خارجی ناشی از جابه‌جایی مجازی صفر باشد. این جابه‌جایی‌ها باید از نظر سینماتیکی مجاز باشند؛ یعنی، معادلات سینماتیک را ارضا کرده و با شرایط مرزی سازگار باشند. هدف اصلی در اصل کار مجازی ایجاد رابطه‌ای بین تغییر شکل‌های مجازی که از نظر سینماتیکی مجاز هستند؛ با متغیرهای نیرو و تنش ناشی از تغییر شکل واقعی جسم است.

با درنظر گرفتن معادله‌ی حرکت به‌شکل:

$$\operatorname{div}(\mathbf{P})+\rho_0\vec{\mathbf{b}}_0-\rho_0\vec{\mathbf{a}}=0 \qquad (۴۲-۲)$$

که در آن $\mathbf{P}$ تانسور تنش مادّی پیولا-کیرشهف اوّل بوده و $\operatorname{div}(\ )$ نیز عملگر دیورژانس[1] است. ρ_0 و $\vec{\mathbf{b}}_0$ به ترتیب چگالی و نیروی حجمی در پیکربندی نخست هستند. $\vec{\mathbf{a}}$ نیز شتاب حرکت جسم است. سطح مرزی A_0 شامل دو سطح $A_{0\mathbf{y}}$ و $A_{0\boldsymbol{\sigma}}$ است که به ترتیب جابه‌جایی‌ها $\vec{\mathbf{y}}$ و نیروهای سطحی (بر واحد سطح تغییر شکل‌نیافته) $\vec{\mathbf{t}}_0$ بر روی آنها وارد می‌شوند. با درنظر گرفتن $\vec{\mathbf{y}}$ و $\mathbf{F}$ به عنوان بردارهای جابه‌جایی و تانسور گرادیان تغییر شکل، تغییر شکل‌های مجازی متناسب با قیدهای سینماتیک مسأله به‌صورت زیر هستند.

$$\delta\mathbf{F}=\operatorname{grad}(\delta\vec{\mathbf{y}}) \qquad (\text{روی } V_0) \qquad (۲-۴۳\text{الف})$$

$$\delta\vec{\mathbf{y}}=0 \qquad (\text{روی } A_{0\mathbf{y}}) \qquad (۲-۴۳\text{ب})$$

در این روابط $\operatorname{grad}(\ )$ عملگر گرادیان[2] است. V_0 حجم نخست بوده و $A_{0\mathbf{y}}$ سطح مرزی نخست است که جابه‌جایی بر روی آن اعمال می‌شود. با استفاده از اصول مکانیک محیط پیوسته می‌توان نوشت:

$$\operatorname{div}\left(\delta\vec{\mathbf{y}}\,\mathbf{P}\right)=\delta\vec{\mathbf{y}}.\operatorname{div}(\mathbf{P})+\mathbf{P}:\operatorname{grad}(\delta\vec{\mathbf{y}}) \qquad (۴۴-۲)$$

با ضرب نقطه‌ای[3] معادله‌ی حرکت (۲-۴۲) در جابه‌جایی مجازی $\delta\vec{\mathbf{y}}$ و انتگرال‌گیری روی حجم تغییر شکل‌نیافته:

$$\iiint_{V_0}\delta\vec{\mathbf{y}}\,.\left(\operatorname{div}(\mathbf{P})+\rho_0\vec{\mathbf{b}}_0-\rho_0\vec{\mathbf{a}}\right)\mathrm{d}V_0=0 \qquad (۴۵-۲)$$

و استفاده از روابط (۲-۴۳) و (۲-۴۴) می‌توان نوشت:

$$\iiint_{V_0}\delta\vec{\mathbf{y}}.\operatorname{div}(\mathbf{P})\,\mathrm{d}V_0=\iiint_{V_0}\operatorname{div}\left(\delta\vec{\mathbf{y}}\,\mathbf{P}\right)\mathrm{d}V_0-\iiint_{V_0}\mathbf{P}:\boldsymbol{\delta}\mathbf{F}\,\mathrm{d}V_0 \qquad (۴۶-۲)$$

رابطه‌ی (۱-۱۱) در صورت جایگزینی مشتق مادّی زمانی $(\dot{\ })$ با نماد وردشی δ همچنان معتبر

1. Divergence operator
2. Gradient operator
3. Scalar product

خواهد بود؛ یعنی تساوی $\mathbf{P}:\delta\mathbf{F}=\mathbf{S}:\delta\mathbf{E}$ برقرار است. با استفاده از نظریه‌ی گاوس-گرین[1] می‌توان اولین جمله‌ی سمت راست تساوی (۲-۴۶) را به‌شکل زیر نوشت.

$$\iiint_{V_0} \operatorname{div}\left(\delta\vec{\mathbf{y}}\,\mathbf{P}\right) \mathrm{d}V_0 = \iint_{A_0} \left(\delta\vec{\mathbf{y}}\,\mathbf{P}\right).\hat{\mathbf{N}}\,\mathrm{d}A_0 = \iint_{A_{0\boldsymbol{\sigma}}} \delta\vec{\mathbf{y}}.\vec{\mathbf{t}}_0\,\mathrm{d}A_0 \tag{۲-۴۷}$$

$\hat{\mathbf{N}}$ بردار یکه‌ی عمود بر المان سطح تغییر شکل‌نیافته‌ی $\mathrm{d}A_0$ است.

در نهایت با استفاده از اصول حساب وردشی و روابط تانسوری بر اساس اصل کار مجازی می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\delta\Pi &= \delta\Pi_{\text{ext}} - \delta\Pi_{\text{int}} = 0\\ &= \iiint_{V_0} \delta\vec{\mathbf{y}}.\left(\rho_0\vec{\mathbf{b}}_0 - \rho_0\vec{\mathbf{a}}\right)\mathrm{d}V_0 + \iint_{A_{0\boldsymbol{\sigma}}} \delta\vec{\mathbf{y}}.\vec{\mathbf{t}}_0\mathrm{d}A_0 - \iiint_{V_0} \mathbf{S}:\delta\mathbf{E}\,\mathrm{d}V_0\end{aligned} \tag{۲-۴۸}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، اصل کار مجازی یک فرمول‌بندی دیگر از معادله‌ی حرکت به همراه شرایط مرزی دینامیکی است. رابطه‌ی (۲-۴۸) به عنوان کار نیروهای داخلی و خارجی برای هر مدل ساختاری همسانگردی صادق است و با عنوان فرمول‌بندی ضعیف معادله‌ی حرکت شناخته می‌شود [۱۰۳،۲۸،۱۰].

در این پژوهش فشار داخلی $P_{\mathrm{i}}(x)$ و خارجی $P_{\mathrm{o}}(x)$ در حالت عمومی به‌صورت متغیر با تابعی غیرخطی از مختصه‌ی طولی پوسته درنظر گرفته می‌شود. با توجه به‌شکل ۲-۱، مؤلفه‌های شعاعی و محوری فشار داخلی و خارجی طبق رابطه‌ی زیر در حالت عمومی غیرخطی قابل محاسبه هستند [۱۰۵].

$$\begin{cases} P_{\mathrm{iz}} = \dfrac{P_{\mathrm{i}}(x)\left(\dfrac{\mathrm{d}r_{\mathrm{i}}(x)}{\mathrm{d}x}\right)}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\mathrm{d}r_{\mathrm{i}}(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2}}, \qquad P_{\mathrm{ix}} = \dfrac{-P_{\mathrm{i}}(x)\left(\dfrac{\mathrm{d}r_{\mathrm{i}}(x)}{\mathrm{d}x}\right)}{L\sqrt{1+\left(\dfrac{\mathrm{d}r_{\mathrm{i}}(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2}} \\[2ex] P_{\mathrm{oz}} = \dfrac{P_{\mathrm{o}}(x)\left(\dfrac{\mathrm{d}r_{\mathrm{o}}(x)}{\mathrm{d}x}\right)}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\mathrm{d}r_{\mathrm{o}}(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2}}, \qquad P_{\mathrm{ox}} = \dfrac{-P_{\mathrm{o}}(x)\left(\dfrac{\mathrm{d}r_{\mathrm{o}}(x)}{\mathrm{d}x}\right)}{L\sqrt{1+\left(\dfrac{\mathrm{d}r_{\mathrm{o}}(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2}} \end{cases} \tag{۲-۴۹}$$

1. Gauss-Green

در حالت تغییر خطی سطوح داخلی و خارجی پوسته، مؤلفه‌های شعاعی و محوری فشار را می‌توان به‌صورت زیر نیز نوشت [۱۰۶].

$$\begin{cases} P_{\mathrm{iz}}=\dfrac{P_{\mathrm{i}}(x)L}{\sqrt{L^2+\left(r_{\mathrm{ia}}-r_{\mathrm{ib}}\right)^2}}, \qquad P_{\mathrm{ix}}=\dfrac{P_{\mathrm{i}}(x)\left|r_{\mathrm{ia}}-r_{\mathrm{ib}}\right|}{\sqrt{L^2+\left(r_{\mathrm{ia}}-r_{\mathrm{ib}}\right)^2}} \\ P_{\mathrm{oz}}=\dfrac{P_{\mathrm{o}}(x)L}{\sqrt{L^2+\left(r_{\mathrm{oa}}-r_{\mathrm{ob}}\right)^2}}, \qquad P_{\mathrm{ox}}=\dfrac{P_{\mathrm{o}}(x)\left|r_{\mathrm{oa}}-r_{\mathrm{ob}}\right|}{\sqrt{L^2+\left(r_{\mathrm{oa}}-r_{\mathrm{ob}}\right)^2}} \end{cases} \tag{۵۰-۲}$$

در حالت تعادل استاتیکی و در غیاب نیروهای حجمی، کار مجازی ناشی از مؤلفه‌های طولی و شعاعی فشار داخلی و خارجی متغیر وارد بر پوسته‌ی مخروطی جدار متغیر با المان‌های سطوح داخلی و خارجی $\mathrm{d}A_{\mathrm{i}}$ و $\mathrm{d}A_{\mathrm{o}}$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\begin{cases} \delta\Pi_{\mathrm{ext}}=\iint\limits_{A_0}\vec{\mathbf{t}}_0.\delta\vec{\mathbf{y}}\,\mathrm{d}A_0=\iint\limits_{A_{\mathrm{i}}}\left(P_{\mathrm{iz}}(x)\,\delta U_{\mathrm{z}}\big|_{z=-\frac{h(x)}{2}}+P_{\mathrm{ix}}(x)\,\delta U_{\mathrm{x}}\big|_{z=-\frac{h(x)}{2}}\right)\mathrm{d}A_{\mathrm{i}} \\ \qquad\qquad -\iint\limits_{A\mathrm{o}}\left(P_{\mathrm{oz}}(x)\,\delta U_{\mathrm{z}}\big|_{z=+\frac{h(x)}{2}}+P_{\mathrm{ox}}(x)\,\delta U_{\mathrm{x}}\big|_{z=+\frac{h(x)}{2}}\right)\mathrm{d}A_{\mathrm{o}} \\ \mathrm{d}A_{\mathrm{i}}=r_{\mathrm{i}}(x)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x, \qquad \mathrm{d}A_{\mathrm{o}}=r_{\mathrm{o}}(x)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x \end{cases} \tag{۵۱-۲}$$

با قرار دادن مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی طبق رابطه‌ی (۲-۵) در رابطه‌ی (۲-۵۱) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \frac{\delta\Pi_{\mathrm{ext}}}{2\pi}=&\int_0^L\left(P_{\mathrm{iz}}(x)\left(\delta w-\frac{h(x)}{2}\delta\psi\right)+P_{\mathrm{ix}}(x)\left(\delta u-\frac{h(x)}{2}\delta\varphi\right)\right)\left(R(x)-\frac{h(x)}{2}\right)\mathrm{d}x \\ &-\int_0^L\left(P_{\mathrm{oz}}(x)\left(\delta w+\frac{h(x)}{2}\delta\psi\right)+P_{\mathrm{ox}}(x)\left(\delta u+\frac{h(x)}{2}\delta\varphi\right)\right)\left(R(x)+\frac{h(x)}{2}\right)\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{۵۲-۲}$$

کار مجازی نیروهای داخلی برای رابطه‌ی ساختاری مواد غیرخطی در مختصات مادّی نیز با توجه به رابطه‌ی (۲-۴۸) به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\begin{cases} \delta\Pi_{\mathrm{int}}=\iiint\limits_{V_0}\mathbf{S}:\delta\mathbf{E}\mathrm{d}V_0=\iiint\limits_{V_0}S^{\mathrm{ij}}\,\delta\varepsilon_{\mathrm{ij}}\mathrm{d}V_0 \\ \mathrm{d}V_0=r(x)\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}x=\left(R(x)+\mathrm{z}\right)\mathrm{dz}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}x \end{cases} \tag{۵۳-۲}$$

با توجه به رابطه‌ی (۲-۵۳) و نمایش شبه‌برداری کرنش گرین-لاگرانژ طبق نمادگذاری ویت، برای تغییرات انرژی کرنشی پوسته‌ی مخروطی شکل جدار متغیر می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\frac{\delta\Pi_{\text{int}}}{2\pi} &= \int_0^L \int_{-h(x)/2}^{+h(x)/2} \left(S^{\text{ij}}\,\delta\varepsilon_{\text{ij}}\right) R(x)\left(1+\frac{z}{R(x)}\right)\text{dz dx} \\ &= \int_0^L \int_{-h(x)/2}^{+h(x)/2} \left[S^{\text{zz}}\,\delta\varepsilon_{\text{zz}} + S^{\theta\theta}\,\delta\varepsilon_{\theta\theta} + S^{\text{xx}}\,\delta\varepsilon_{\text{xx}} + S^{\text{zx}}\,\delta\gamma_{zx}\right] R(x)\left(1+\frac{z}{R(x)}\right)\text{dz dx}\end{aligned} \quad (۵۴\text{-}۲)$$

که S^{zz}، $S^{\theta\theta}$، S^{xx} و S^{zx} مؤلفه‌های فیزیکی غیرصفر تانسور تنش پیولا-کیرشهف دوّم هستند. تغییرات کرنش‌های گرین-لاگرانژ با توجه به رابطه‌ی (۲-۲۲) و استفاده از اصول حساب وردشی به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$\begin{cases}\delta\varepsilon_{\text{zz}} = \delta\psi + \psi\delta\psi + \varphi\delta\varphi \\ \delta\varepsilon_{\theta\theta} = \dfrac{\left(\delta w + z\,\delta\psi\right)}{\left(R(x)+z\right)^2}\left(R(x)+z+w+\psi z\right) \\ \delta\varepsilon_{\text{xx}} = \delta u' + u'\delta u' + w'\delta w' + \left(\delta\varphi' + u'\delta\varphi' + \varphi'\delta u'\right. \\ \qquad \left. + w'\delta\psi' + \psi'\delta w'\right)z + \left(\varphi'\delta\varphi' + \psi'\delta\psi'\right)z^2 \\ \delta\gamma_{\text{zx}} = \delta\varphi + u'\delta\varphi + \varphi\delta u' + \delta w' + w'\delta\psi + \psi\delta w' \\ \qquad + \left(\delta\psi' + \psi\delta\psi' + \psi'\delta\psi + \varphi\delta\varphi' + \varphi'\delta\varphi\right)z\end{cases} \quad (۵۵\text{-}۲)$$

به منظور ساده‌سازی محاسبات، منتجه‌های تنش[1] به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\left\{N_z \quad M_z \quad Q_z\right\}^{\text{T}} = \int_{-h(x)/2}^{+h(x)/2} S^{\text{zz}}\left\{1 \quad z \quad z^2\right\}^{\text{T}}\left(1+\frac{z}{R(x)}\right)\text{dz} \quad (۵۶\text{-}۲)$$

$$\left\{N_\theta \quad M_\theta \quad Q_\theta\right\}^{\text{T}} = \int_{-h(x)/2}^{+h(x)/2} S^{\theta\theta}\left\{1 \quad z \quad z^2\right\}^{\text{T}}\text{dz} \quad (۵۷\text{-}۲)$$

$$\left\{N_\theta^* \quad M_\theta^* \quad Q_\theta^*\right\}^{\text{T}} = \int_{-h(x)/2}^{+h(x)/2} S^{\theta\theta}\left\{1 \quad z \quad z^2\right\}^{\text{T}}\left(\frac{R(x)}{R(x)+z}\right)\text{dz} \quad (۵۸\text{-}۲)$$

$$\left\{N_x \quad M_x \quad Q_x\right\}^{\text{T}} = \int_{-h(x)/2}^{+h(x)/2} S^{\text{xx}}\left\{1 \quad z \quad z^2\right\}^{\text{T}}\left(1+\frac{z}{R(x)}\right)\text{dz} \quad (۵۹\text{-}۲)$$

$$\left\{N_{zx} \quad M_{zx} \quad Q_{zx}\right\}^{\text{T}} = K_S\int_{-h(x)/2}^{+h(x)/2} S^{\text{zx}}\left\{1 \quad z \quad z^2\right\}^{\text{T}}\left(1+\frac{z}{R(x)}\right)\text{dz} \quad (۶۰\text{-}۲)$$

با توجه به توزیع واقعی تنش برشی در جدار پوسته و به دلیل ملاحظات تعادل، ضروری است که

1. Stress resultants

یک ضریب تصحیح برش عرضی در معادلات وارد شود تا تنش‌ها بیش از آنچه که هستند محاسبه نشوند. بنابراین در منتجه‌های تنشی که با استفاده از تنش برشی تعریف می‌شوند، ضریب تصحیح برشی[1] K_S درنظر گرفته می‌شود. این ضریب در پژوهش حاضر برابر مقدار ۵/۶ درنظر گرفته شده است [۱۰۷].

پس از جایگذاری تغییرات کرنش از رابطه‌ی (۲-۵۵) در روابط (۲-۵۲) و (۲-۵۴)، بر اساس اصل کار مجازی $\left(\delta\Pi_{\text{ext}} = \delta\Pi_{\text{int}}\right)$ با استفاده از قاعده‌ی انتگرال‌گیری جزء به جزء، چهار معادله‌ی حاکم بر مسأله بر حسب منتجه‌های تنش به‌دست می‌آیند.

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[R(x)\big(N_{\mathrm{x}}(1+u')+M_{\mathrm{x}}\varphi'+N_{\mathrm{zx}}\varphi\big)\Big]\\&=-P_{\mathrm{ix}}(x)\left(R(x)-\frac{h(x)}{2}\right)+P_{\mathrm{ox}}(x)\left(R(x)+\frac{h(x)}{2}\right)\end{aligned} \tag{۲-۶۱}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[R(x)\big(M_{\mathrm{x}}(1+u')+Q_{\mathrm{x}}\varphi'+M_{\mathrm{zx}}\varphi\big)\Big]-R(x)\big(N_{\mathrm{z}}\varphi+N_{\mathrm{zx}}(1+u')+M_{\mathrm{zx}}\varphi'\big)\\&=\left[P_{\mathrm{ix}}(x)\left(R(x)-\frac{h(x)}{2}\right)+P_{\mathrm{ox}}(x)\left(R(x)+\frac{h(x)}{2}\right)\right]\frac{h(x)}{2}\end{aligned} \tag{۲-۶۲}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[R(x)\big(N_{\mathrm{x}}w'+M_{\mathrm{x}}\psi'+N_{\mathrm{zx}}(1+\psi)\big)\Big]-N_{\theta}-\frac{1}{R(x)}\big(N_{\theta}^{*}w+M_{\theta}^{*}\psi\big)\\&=-P_{\mathrm{iz}}(x)\left(R(x)-\frac{h(x)}{2}\right)+P_{\mathrm{oz}}(x)\left(R(x)+\frac{h(x)}{2}\right)\end{aligned} \tag{۲-۶۳}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[R(x)\big(M_{\mathrm{x}}w'+Q_{\mathrm{x}}\psi'+M_{\mathrm{zx}}(1+\psi)\big)\Big]-M_{\theta}-\frac{1}{R(x)}\big(M_{\theta}^{*}w+Q_{\theta}^{*}\psi\big)\\&-R(x)\big(N_{\mathrm{z}}(1+\psi)+N_{\mathrm{zx}}w'+M_{\mathrm{zx}}\psi'\big)\\&=\left[P_{\mathrm{iz}}(x)\left(R(x)-\frac{h(x)}{2}\right)+P_{\mathrm{oz}}(x)\left(R(x)+\frac{h(x)}{2}\right)\right]\frac{h(x)}{2}\end{aligned} \tag{۲-۶۴}$$

۲-۷ جمع‌بندی

در این فصل معادلات حاکم بر پوسته‌های جدارمتغیر استوانه‌ای و مخروطی شکل تحت فشار متغیر ساخته شده از مواد هایپرالاستیک در حالت تقریباً تراکم‌ناپذیر به کمک نظریه‌ی تغییر شکل برشی

1. Shear correction factor

محاسـبه شـده اسـت. روابط (۲-۶۱) تا (۲-۶۴)، شـکل بسـتهی معادلات حاکم بر مسـأله شامل یک دسـتگاه معادلات دیفرانسـیل غیرخطی جفتشـده با ضـرایب متغیر هسـتند. جملات سمت چپ این معادلات شـامل هندسـه، منتجههای تنش و مؤلفههای مجهول بردار جابهجایی هسـتند. سمت راست این معادلات نیز از جملاتی شـامل فشـار و هندسـهی متغیر در راسـتای محور طولی پوسـته تشکیل شـدهاند. در فصـل بعدی، حل تحلیلی دسـتگاه معادلات اشاره شده به کمک نظریهی اغتشاشات ارائه خواهد شد.

فصل ۳

حل تحلیلی

۳-۱ مقدمه

در فصل قبلی مشاهده شد که با درنظر گرفتن جملات غیرخطی معادلات سینماتیک و ساختاری و اعمال همزمان شرط تراکم‌ناپذیری به‌صورت حدی، بر اساس نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، معادلات حاکم بر پوسته‌های استوانه‌ای و مخروطی شکل هایپرالاستیک ناهمگن دارای فشار و جدار متغیر، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی ناهمگن جفت‌شده با ضرایب متغیر است. در این فصل برای حل این دستگاه معادلات غیرخطی از روش بسط مجانبی تطبیق‌یافته بر اساس نظریه‌ی اغتشاشات استفاده شده است [۱۰۸].

در این نظریه، لازم است ابتدا معادلات بی‌بعد شوند. پس از بی‌بعد سازی معادلات، حل خارجی در نقاط دور از مرز و سپس حل داخلی در نواحی مرزی به طور جداگانه محاسبه می‌شوند. در نهایت با تطبیق دادن حل‌های داخلی و خارجی و نیز اعمال شرایط مرزی، حل کلی به‌دست می‌آید.

۳-۲ آماده‌سازی معادلات جهت حل اغتشاشی

با توجه به روابط (۲-۳۹) و (۲-۴۱)، تمامی تنش‌ها در حالت مادّه‌ی ناهمگن دارای عبارت $1/{r_{i0}}^n$ هستند. از طرفی همانطور که در فصل قبل اشاره شد، C_1 خاصیت مادّه‌ی هایپرالاستیک ناهمگن در مدل مونی-ریولین در نزدیکترین نقاط سطح داخلی به محور دوران پوسته در شعاع r_{i0} است. بنابراین با ضرب عبارت ${r_{i0}}^n/C_1$ در طرفین معادلات (۲-۶۱) تا (۲-۶۴)، عبارت ${r_{i0}}^n$ تنها در سمت راست این معادلات به‌صورت ضریب جملات بارگذاری باقی می‌ماند و تمامی خواص مادّه نیز نسبت به ثابت C_1 بی‌بعد می‌شوند. همچنین با $1/C_1$ ایجاد شده در سمت راست معادلات می‌توان مؤلفه‌های فشار را بی‌بعد کرد. به منظور بی‌بعدسازی معادلات، متغیرهای بی‌بعد به‌صورت زیر درنظر گرفته می‌شوند.

$$\bar{x}=\frac{x}{L},\quad \bar{z}=\frac{z}{h_0},\quad \bar{h}=\frac{h(\bar{x})}{h_0},\quad \bar{r}_{\mathrm{i}}=\frac{r_{\mathrm{i}}(\bar{x})}{h_0},\quad \bar{r}_{\mathrm{o}}=\frac{r_{\mathrm{o}}(\bar{x})}{h_0},\quad \bar{R}=\frac{R(\bar{x})}{h_0},\quad \varepsilon=\frac{h_0}{L} \qquad \text{(۳-۱الف)}$$

$$\bar{u}=\frac{u}{h_0},\quad \bar{\varphi}=\varphi,\quad \bar{w}=\frac{w}{h_0},\quad \bar{\psi}=\psi \qquad \text{(۳-۱ب)}$$

$$\bar{r}_{\mathrm{i0}}=\frac{r_{\mathrm{i0}}}{h_0},\quad \bar{P}_{\mathrm{iz}}=\frac{P_{\mathrm{iz}}(\bar{x})\bar{r}_{\mathrm{i0}}^{\,n}}{\varepsilon C_1},\quad \bar{P}_{\mathrm{ix}}=\frac{P_{\mathrm{ix}}(\bar{x})\bar{r}_{\mathrm{i0}}^{\,n}}{\varepsilon C_1},\quad \bar{P}_{\mathrm{oz}}=\frac{P_{\mathrm{oz}}(\bar{x})\bar{r}_{\mathrm{i0}}^{\,n}}{\varepsilon C_1},\quad \bar{P}_{\mathrm{ox}}=\frac{P_{\mathrm{ox}}(\bar{x})\bar{r}_{\mathrm{i0}}^{\,n}}{\varepsilon C_1} \qquad \text{(۳-۱پ)}$$

علامت $^-$ بروی هر متغیر نشان‌دهنده‌ی حالت بی‌بعد آن است. h_0 با عنوان ضخامت مشخصه[1] شناخته می‌شود که در این پژوهش کمترین ضخامت استوانه درنظر گرفته شده است. r_{i0} کمترین فاصله‌ی لایه‌ی داخلی پوسته از محور طولی x است که دارای خاصیت C_1 است.

در حالت بی‌بعد مشتقات مرتبه‌ی یک و دو بر حسب $\bar{x}$ به‌صورت زیر بازنویسی می‌شوند.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{L}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\bar{x}},\quad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}=\frac{1}{L^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\bar{x}^2} \qquad \text{(۳-۲)}$$

با معرفی متغیر کوچک اغتشاشی ε و درنظر گرفتن بسط مجهولات (مؤلفه‌های جابه‌جایی) بر حسب آن:

$$\begin{cases}\{\bar{\mathbf{y}}(\bar{x},\varepsilon)\}=\varepsilon^{\omega}\{\bar{\mathbf{y}}_{\mathbf{1}}(\bar{x})\}+\varepsilon^{2\omega}\{\bar{\mathbf{y}}_{\mathbf{2}}(\bar{x})\}+\varepsilon^{3\omega}\{\bar{\mathbf{y}}_{\mathbf{3}}(\bar{x})\}+\dots\\ \{\bar{\mathbf{y}}\}=\{\bar{u},\bar{\varphi},\bar{w},\bar{\psi}\}^T\end{cases} \qquad \text{(۳-۳)}$$

و جایگذاری این مؤلفه‌های جابه‌جایی در معادلات بی‌بعدسازی شده، از موازنه‌ی جملات غالب[2] مقدار $\omega=1$ به‌دست می‌آید. به همین دلیل در رابطه‌ی (۳-۱پ) یک ε به‌صورت تعمدی[3] در مخرج فشارهای بی‌بعد درنظر گرفته شده است تا بتوان جملات بارگذاری را در معادلات اغتشاشی وارد کرد. با مرتب‌سازی جملات حاصل بر حسب توان‌های ε و جداسازی جملات هم‌مرتبه، شکل کلی معادلات به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned}&\varepsilon \mathrm{L}_1\{\bar{\mathbf{y}}_{\mathbf{1}}(\bar{x})\}+\varepsilon^2\left(\mathrm{L}_2\{\bar{\mathbf{y}}_{\mathbf{2}}(\bar{x})\}+\hat{\mathrm{L}}_2\{\bar{\mathbf{y}}_{\mathbf{1}}(\bar{x})\}\right)\\&+\varepsilon^3\left(\mathrm{L}_3\{\bar{\mathbf{y}}_{\mathbf{3}}(\bar{x})\}+\hat{\mathrm{L}}_3\{\bar{\mathbf{y}}_{\mathbf{1}}(\bar{x}),\bar{\mathbf{y}}_{\mathbf{2}}(\bar{x})\}\right)+\dots=\varepsilon\{\mathbf{F}_{\mathbf{1}}\}+\varepsilon^2\{\mathbf{F}_{\mathbf{2}}\}+\varepsilon^2\{\mathbf{F}_{\mathbf{3}}\}\end{aligned} \qquad \text{(۳-۴)}$$

1. Characteristic thickness
2. Dominant terms
3. Bookkeeping

$\mathrm{L_i}$ و $\mathrm{\hat{L}_i}$ به ترتیب عملگرهای دیفرانسیلی[1] پیشروی[2] خطی و پیروی[3] غیرخطی هستند و $\{\mathbf{F_i}\}$ نیز بخش ناهمگنی معادلات را نشان می‌دهد. ایده‌ی اصلی روش اغتشاشات این است که پارامتر اغتشاشی ε به قدری کوچک است که ضرایب توان‌های مختلف آن از نظر بزرگی هم‌مرتبه نبوده و ضرایب ε^{i}ها باید با هم برابر باشد. از معادله‌ی حاصل از ضریب هر ε^{i}، شبه‌بردارهای جابه‌جایی متناظر $\{\bar{\mathbf{y}}(\bar{x})\}$ را می‌توان به‌دست آورد. وجود دو لایه‌ی مرزی در $\bar{x}=0,1$ منجر به دو ناحیه‌ی حل داخلی در نزدیکی مرزها و یک ناحیه‌ی حل خارجی دور از مرزها می‌شود.

در مسأله‌ی حاضر، با توجه به استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی، مشتقات بر حسب مختصه‌ی طولی $\bar{x}$ بوده و منتجه‌های تنش حاصل از انتگرال‌گیری در راستای شعاعی (ضخامت) $\bar{z}$ هستند. بنابراین جهت تسهیل در نمایش و امکان نگارش یکسان معادلات برای هر ثابت ناهمگنی دلخواه، انتگرال بی‌بعد در جهت ضخامت پوسته به‌شکل زیر تعریف می‌شود.

$$\overline{II}\,(\mathrm{i,j})=\frac{II\,(\mathrm{i,j})}{h_0^{\,\mathrm{i+j+1}}}=\int_{-\bar{h}(\bar{x})/2}^{+\bar{h}(\bar{x})/2}\bar{z}^{\,\mathrm{i}}\left(\bar{R}(\bar{x})+\bar{z}\right)^{\mathrm{j}}\mathrm{d}\,\bar{z} \tag{۳-۵}$$

انتگرال $\overline{II}\,(\mathrm{i,j})$، تابع مشخصه‌های هندسی $\bar{R}(\bar{x})$ و $\bar{h}(\bar{x})$ و ثابت ناهمگنی n است. در حالت کلی $\overline{II}\,(\mathrm{i,j})$ تابع $\bar{x}$ است که به دلیل مختصرنویسی از نمایش آن صرف نظر شده است.

به دلیل رفع معکوس‌ناپذیری ماتریس‌های ضرایب در حل‌های خارجی و داخلی و امکان تعیین حل‌های جبری و خصوصی معادلات حاصل، دو تغییر در معادلات (۲-۶۱) تا (۲-۶۴) اعمال می‌شود. اولین تغییر، انتگرال‌گیری از اولین معادله یعنی رابطه‌ی (۲-۶۱) بوده که ثابت این انتگرال به‌شکل $\bar{c}_0=\left(c_0\bar{r}_{i0}^{\;n}\right)/\left(\varepsilon C_1\right)$ ظاهر می‌شود. در این ثابت نیز ε موجود در مخرج به‌صورت تعمدی وارد شده است. همانطور که در ابتدای این بخش توضیح داده شد، با ضرب $r_{i0}^{\;n}$ در طرفین معادلات (۲-۶۱) تا (۲-۶۴) و پس از بی‌بعد سازی معادلات، عبارت $\bar{r}_{i0}^{\;n}$ تنها در سمت راست این معادلات باقی می‌ماند که

1. Differential operators
2. Follower terms
3. Leading terms

در معادله‌ی اوّل در ثابت انتگرال بی‌بعد $\bar{c}_0$ و در سایر معادلات طبق رابطه‌ی (۳-۱پ) در مؤلفه‌های فشار بی‌بعد $\bar{P}_{\mathrm{iz,x}}$ و $\bar{P}_{\mathrm{oz,x}}$ درنظر گرفته می‌شوند.

تغییر دوّم با توجه به عدم وجود مقدار $\bar{u}$ در معادلات علی‌رغم وجود $\mathrm{d}\bar{u}/\mathrm{d}\bar{x}$، تعریف متغیر جدیدی به‌صورت $\bar{v}=\varepsilon\left(\mathrm{d}\bar{u}/\mathrm{d}\bar{x}\right)$ و جایگزینی آن در معادلات است؛ بنابراین:

$$\bar{u}=\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\int\bar{v}\,\mathrm{d}\bar{x}+c_7 \tag{۳-۶}$$

دو ثابت انتگرال‌گیری حاصل از تغییرات اشاره‌شده به کمک شرایط مرزی تعیین خواهند شد.

با توجه به این که در معادلات مربوط به حل داخلی و خارجی جملاتی شامل C_1، C_2، k و K_s ایجاد خواهد شد و طرفین معادلات حاکم نیز به دلیل بی‌بعد سازی بر C_1 تقسیم شده‌اند؛ جهت تسهیل در نمایش معادلات در بخش‌های بعدی، متغیرهای کمکی زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{cases}\left(1-K_s\right)=\hat{K}_s, & \dfrac{C_2}{C_1}=\overline{C_2}, \quad \dfrac{k}{C_1}=\bar{k}, \quad \dfrac{2\left(C_1+C_2\right)}{C_1}=\overline{C_{12}} \\ \dfrac{4\left(C_1+C_2\right)-k}{C_1}=\overline{Ck_1}, & \dfrac{4\left(C_1+2C_2\right)-k}{C_1}=\overline{Ck_2}, \quad \dfrac{2\left(C_1+C_2\right)-3k}{C_1}=\overline{Ck_3} \\ \dfrac{2\left(C_1+C_2\right)-k}{C_1}=\overline{Ck_4}, & \dfrac{4\left(C_1+C_2\right)-5k}{C_1}=\overline{Ck_5}, \quad \dfrac{4\left(C_1+C_2\right)-6k}{C_1}=\overline{Ck_6} \\ \dfrac{8\left(C_1+2C_2\right)-7k}{C_1}=\overline{Ck_7}, & \dfrac{2\left(2C_1+3C_2\right)-k}{C_1}=\overline{Ck_8}, \quad \dfrac{2\left(2C_1+5C_2\right)-6k}{C_1}=\overline{Ck_9}\end{cases} \tag{۳-۷}$$

تمامی این متغیرهای کمکی حاصل از ترکیب ثابت‌های مادّه و بی‌بعد هستند. $\hat{K}_s$ نیز بر اساس ضریب تصحیح برشی بی‌بعد تعریف می‌شود.

۳-۳ حل خارجی

با درنظر گرفتن بسط مستقیم مجهولات نسبت به متغیر $\bar{x}$ به‌صورت چندجمله‌ای بر حسب ε:

$$\left\{\bar{\mathbf{y}}_{\mathrm{O}}\left(\bar{x},\varepsilon\right)\right\}=\varepsilon\left(\left\{\bar{\mathbf{y}}_{\mathrm{O1}}\left(\bar{x}\right)\right\}+\varepsilon\left\{\bar{\mathbf{y}}_{\mathrm{O2}}\left(\bar{x}\right)\right\}\right) \tag{۳-۸}$$

و جایگذاری این بسط در معادلات حاکم پس از اعمال تغییرات اشاره‌شده در قسمت قبل، دستگاه

معادلات جبری حل خارجی مرتبه‌های اوّل و دوّم به‌دست می‌آیند.

$$\begin{cases} \mathrm{O}(\varepsilon^1):[\mathbf{A}_{\mathrm{O}}]\{\bar{\mathbf{y}}_{\mathrm{O1}}\}=\{\mathbf{F}_{\mathrm{O1}}\} \\ \mathrm{O}(\varepsilon^2):[\mathbf{A}_{\mathrm{O}}]\{\bar{\mathbf{y}}_{\mathrm{O2}}\}=\{\mathbf{F}_{\mathrm{O2}}\} \\ \{\mathbf{F}_{\mathrm{O2}}\}=\{\mathbf{F}_{\mathrm{O2}}^{\mathit{II}}\}+\{\mathbf{F}_{\mathrm{O2}}^{\mathit{II}'}\} \end{cases} \tag{۹-۳}$$

بردار جابه‌جایی مجهول $\{\bar{\mathbf{y}}_{\mathrm{Oi}}\}$ در حل خارجی مرتبه‌ی i به‌شکل زیر است.

$$\begin{cases} \{\bar{\mathbf{y}}_{\mathrm{O1}}\}=\{\bar{v}_{\mathrm{O1}},\bar{\varphi}_{\mathrm{O1}},\bar{w}_{\mathrm{O1}},\bar{\psi}_{\mathrm{O1}}\}^{\mathrm{T}} \\ \{\bar{\mathbf{y}}_{\mathrm{O2}}\}=\{\bar{v}_{\mathrm{O2}},\bar{\varphi}_{\mathrm{O2}},\bar{w}_{\mathrm{O2}},\bar{\psi}_{\mathrm{O2}}\}^{\mathrm{T}} \end{cases} \tag{۱۰-۳}$$

$[\mathbf{A}_{\mathrm{O}}]$, $\{\mathbf{F}_{\mathrm{O1}}\}$و $\{\mathbf{F}_{\mathrm{O2}}\}$ به ترتیب ماتریس ضرایب و بردارهای ناهمگنی مرتبه‌های اوّل و دوّم در حل خارجی هستند. بردار ناهمگنی حل مرتبه‌ی دوّم از دو بخش $\{\mathbf{F}_{\mathrm{O2}}^{\mathit{II}}\}$ و $\{\mathbf{F}_{\mathrm{O2}}^{\mathit{II}'}\}$ به ترتیب شامل $\overline{\mathit{II}}(\bar{x})$ و مشتق $\overline{\mathit{II}}(\bar{x})$ تشکیل شده است که $\{\mathbf{F}_{\mathrm{O2}}^{\mathit{II}'}\}$ ناشی از جدار متغیر استوانه است.

در استوانه‌ی جدار ثابت $\bar{h}(\bar{x})$، $\bar{R}(\bar{x})$ و در نتیجه $\overline{\mathit{II}}(\bar{x})$ تابع $\bar{x}$ نبوده و به $\bar{h}$، $\bar{R}$ و $\overline{\mathit{II}}$ تبدیل می‌شوند؛ بنابراین $\{\mathbf{F}_{\mathrm{O2}}^{\mathit{II}'}\}=0$ است. اما در مخروط جدار ثابت فقط $\bar{h}(\bar{x})$ تابع $\bar{x}$ نبوده و تبدیل به $\bar{h}$ می‌شود. در فشار ثابت، مؤلفه‌های فشار تابع $\bar{x}$ نبوده و به $\bar{P}_{\mathrm{iz,x}}$ و $\bar{P}_{\mathrm{oz,x}}$ تبدیل می‌شوند. درایه‌های غیرصفر ماتریس‌های ضرایب و بردارهای ناهمگنی‌ها معادلات حل خارجی در ادامه آورده شده است. در این روابط $(\ )'=\mathrm{d}(\ )/\mathrm{d}\bar{x}$ است.

$$\begin{cases} [\mathbf{A}_{\mathrm{O}}]_{11}=\bar{k}\,\overline{\mathit{II}}(0,n+1) \\ [\mathbf{A}_{\mathrm{O}}]_{13}=-[\mathbf{A}_{\mathrm{O}}]_{31}=-\overline{Ck_1}\overline{\mathit{II}}(0,n) \\ [\mathbf{A}_{\mathrm{O}}]_{14}=-[\mathbf{A}_{\mathrm{O}}]_{41}=-\overline{Ck_1}\left(\overline{\mathit{II}}(1,n)+\overline{\mathit{II}}(0,n+1)\right) \\ [\mathbf{A}_{\mathrm{O}}]_{22}=-K_s\overline{C_{12}}\overline{\mathit{II}}(0,n+1) \\ [\mathbf{A}_{\mathrm{O}}]_{33}=-\bar{k}\,\overline{\mathit{II}}(0,n-1) \\ [\mathbf{A}_{\mathrm{O}}]_{34}=[\mathbf{A}_{\mathrm{O}}]_{43}=\overline{Ck_1}\overline{\mathit{II}}(0,n)-\bar{k}\,\overline{\mathit{II}}(1,n-1) \\ [\mathbf{A}_{\mathrm{O}}]_{44}=2\overline{Ck_1}\overline{\mathit{II}}(1,n)-\bar{k}\left(\overline{\mathit{II}}(0,n+1)+\overline{\mathit{II}}(2,n-1)\right) \end{cases} \tag{۱۱-۳}$$

$$\left\{\mathbf{F}_{\mathrm{O1}}\right\}=\begin{Bmatrix} \bar{c}_0-\int\frac{\bar{P}_{\mathrm{ix}}(\bar{x})}{\varepsilon}\left(\bar{R}(\bar{x})-\frac{\bar{h}(\bar{x})}{2}\right)\mathrm{d}\bar{x}+\int\frac{\bar{P}_{\mathrm{ox}}(\bar{x})}{\varepsilon}\left(\bar{R}(\bar{x})+\frac{\bar{h}(\bar{x})}{2}\right)\mathrm{d}\bar{x} \\ \bar{P}_{\mathrm{ix}}(\bar{x})\left(\frac{\bar{R}(\bar{x})\bar{h}(\bar{x})}{2}-\frac{\bar{h}^2(\bar{x})}{4}\right)+\bar{P}_{\mathrm{ox}}(\bar{x})\left(\frac{\bar{R}(\bar{x})\bar{h}(\bar{x})}{2}+\frac{\bar{h}^2(\bar{x})}{4}\right) \\ -\bar{P}_{\mathrm{iz}}(\bar{x})\left(\bar{R}(\bar{x})-\frac{\bar{h}(\bar{x})}{2}\right)+\bar{P}_{\mathrm{oz}}(\bar{x})\left(\bar{R}(\bar{x})+\frac{\bar{h}(\bar{x})}{2}\right) \\ \bar{P}_{\mathrm{iz}}(\bar{x})\left(\frac{\bar{R}(\bar{x})\bar{h}(\bar{x})}{2}-\frac{\bar{h}^2(\bar{x})}{4}\right)+\bar{P}_{\mathrm{oz}}(\bar{x})\left(\frac{\bar{R}(\bar{x})\bar{h}(\bar{x})}{2}+\frac{\bar{h}^2(\bar{x})}{4}\right) \end{Bmatrix}$$
(۱۲-۳)

$$\begin{cases} \left\{\mathbf{F}_{\mathrm{O2}}^{II}\right\}_1=\overline{Ck}_3\Big[\left(\overline{II}(2,n-1)+\overline{II}(0,n+1)\right)\bar{\psi}_{\mathrm{O1}}{}^2+2\overline{II}(1,n-1)\bar{w}_{\mathrm{O1}}\bar{\psi}_{\mathrm{O1}} \\ \qquad +2\left(\overline{II}(1,n)+\overline{II}(0,n+1)\right)\bar{v}_{\mathrm{O1}}\bar{\psi}_{\mathrm{O1}}+2\overline{II}(0,n)\bar{v}_{\mathrm{O1}}\bar{w}_{\mathrm{O1}} \\ \qquad +\overline{II}(0,n-1)\bar{w}_{\mathrm{O1}}{}^2\Big]+\overline{Ck}_7\left[\overline{II}(1,n)\bar{\psi}_{\mathrm{O1}}{}^2+\overline{II}(0,n)\bar{w}_{\mathrm{O1}}\bar{\psi}_{\mathrm{O1}}\right] \\ \qquad -\bar{k}\left[\overline{II}(1,n+1)\bar{\varphi}_{\mathrm{O1}}{}'+2\overline{II}(0,n+1)\bar{v}_{\mathrm{O1}}{}^2\right]-\hat{K}_s\overline{C_{12}}\,\overline{II}(0,n+1)\bar{\varphi}_{\mathrm{O1}}{}^2 \\ \left\{\mathbf{F}_{\mathrm{O2}}^{II'}\right\}_1=0 \end{cases}$$
(۱۳-۳)

$$\begin{cases} \left\{\mathbf{F}_{\mathrm{O2}}^{II}\right\}_2=\overline{Ck}_1\Big[\left(\overline{II}(2,n)+\overline{II}(1,n+1)\right)\bar{\psi}_{\mathrm{O1}}{}'+\overline{II}(1,n)\bar{w}_{\mathrm{O1}}{}' \\ \qquad +\hat{K}_s\overline{II}(0,n+1)\bar{v}_{\mathrm{O1}}\bar{\varphi}_{\mathrm{O1}}-\left(\overline{II}(1,n)\bar{\psi}_{\mathrm{O1}}+\overline{II}(0,n)\bar{w}_{\mathrm{O1}}\right)\bar{\varphi}_{\mathrm{O1}}\Big] \\ \qquad +K_s\overline{Ck}_2\left(\overline{II}(1,n)\bar{\psi}_{\mathrm{O1}}+\overline{II}(0,n)\bar{w}_{\mathrm{O0}}\right)\bar{\varphi}_{\mathrm{O1}} \\ \qquad +K_s\overline{C_{12}}\left(\overline{II}(0,n+1)\bar{w}_{\mathrm{O1}}{}'+\overline{II}(1,n+1)\bar{\psi}_{\mathrm{O1}}{}'\right) \\ \qquad -\bar{k}\,\overline{II}(1,n+1)\bar{v}_{\mathrm{O1}}{}'+\hat{K}_s\bar{k}\,\overline{II}(0,n+1)\bar{\varphi}_{\mathrm{O1}}\bar{\psi}_{\mathrm{O1}} \\ \left\{\mathbf{F}_{\mathrm{O2}}^{II'}\right\}_2=\overline{Ck}_1\left[\overline{II}'(2,n)\bar{\psi}_{\mathrm{O1}}+\overline{II}'(1,n)\bar{w}_{\mathrm{O1}}+\overline{II}'(1,n+1)\bar{\psi}_{\mathrm{O1}}\right]-\bar{k}\,\overline{II}'(1,n+1)\bar{v}_{\mathrm{O1}} \end{cases}$$
(۱۴-۳)

$$\begin{cases} \left\{\mathbf{F}_{\mathrm{O2}}^{II}\right\}_3=-\overline{Ck}_1\overline{II}(1,n)\bar{\varphi}_{\mathrm{O1}}{}'-\overline{Ck}_3\Big[\overline{II}(0,n)\left(\bar{v}_{\mathrm{O1}}{}^2+\bar{\psi}_{\mathrm{O1}}{}^2\right) \\ \qquad +2\left(\overline{II}(1,n-1)\bar{\psi}_{\mathrm{O1}}+\overline{II}(0,n-1)\bar{w}_{\mathrm{O1}}\right)\left(\bar{v}_{\mathrm{O1}}+\bar{\psi}_{\mathrm{O1}}\right)\Big] \\ \qquad -\overline{Ck}_7\overline{II}(0,n)\bar{v}_{\mathrm{O1}}\bar{\psi}_{\mathrm{O1}}-K_s\overline{C_{12}}\,\overline{II}(0,n+1)\bar{\varphi}_{\mathrm{O1}}{}'+2\overline{C}_2\overline{II}(0,n)\bar{\varphi}_{\mathrm{O1}}{}^2 \\ \qquad +2\bar{k}\left[\overline{II}(2,n-2)\bar{\psi}_{\mathrm{O1}}{}^2+2\overline{II}(1,n-2)\bar{w}_{\mathrm{O1}}\bar{\psi}_{\mathrm{O1}}+\overline{II}(0,n-2)\bar{w}_{\mathrm{O1}}{}^2\right] \\ \left\{\mathbf{F}_{\mathrm{O2}}^{II'}\right\}_3=-K_s\overline{C_{12}}\,\overline{II}'(0,n+1)\bar{\varphi}_{\mathrm{O1}} \end{cases}$$
(۱۵-۳)

$$\begin{cases}\left\{\mathbf{F}_{\mathrm{O}2}^{II}\right\}_4=-\overline{Ck_1}\left(\overline{II}(2,n)+\overline{II}(1,n+1)\right)\bar{\varphi}_{\mathrm{O}1}{}'-K_s\overline{C_{12}}\overline{II}(1,n+1)\bar{\varphi}_{\mathrm{O}1}{}' \\ \qquad -\overline{Ck_3}\Big[\overline{II}(2,n-1)\,\bar{\psi}_{\mathrm{O}1}\left(3\bar{\psi}_{\mathrm{O}1}+2\bar{v}_{\mathrm{O}1}\right)+2\overline{II}(0,n)\bar{w}_{\mathrm{O}1}\bar{\psi}_{\mathrm{O}1} \\ \qquad +\overline{II}(0,n+1)\bar{v}_{\mathrm{O}1}\left(2\bar{\psi}_{\mathrm{O}1}+\bar{v}_{\mathrm{O}1}\right)+\overline{II}(1,n-1)\bar{w}_{\mathrm{O}1}\left(4\bar{\psi}_{\mathrm{O}1}+2\bar{v}_{\mathrm{O}1}\right) \\ \qquad +\overline{II}(1,n)\left(3\bar{\psi}_{\mathrm{O}1}{}^2+\bar{v}_{\mathrm{O}1}{}^2\right)+2\overline{II}(0,n-1)\bar{w}_{\mathrm{O}1}{}^2\Big]-2\overline{C_2}\overline{II}(1,n)\bar{\varphi}_{\mathrm{O}1}{}^2 \\ \qquad -\overline{Ck_7}\left[\overline{II}(0,n)\bar{v}_{\mathrm{O}1}\bar{w}_{\mathrm{O}1}+2\overline{II}(1,n)\bar{v}_{\mathrm{O}1}\bar{\psi}_{\mathrm{O}1}\right]+2\bar{k}\Big[\overline{II}(1,n-2)\bar{w}_{\mathrm{O}1}{}^2 \\ \qquad +\left(\overline{II}(3,n-2)+\overline{II}(0,n+1)\right)\bar{\psi}_{\mathrm{O}1}{}^2+2\overline{II}(2,n-2)\bar{w}_{\mathrm{O}1}\bar{\psi}_{\mathrm{O}1}\Big] \\ \left\{\mathbf{F}_{\mathrm{O}2}^{II'}\right\}_4=-K_s\overline{C_{12}}\overline{II}'(1,n+1)\bar{\varphi}_{\mathrm{O}1}\end{cases} \tag{۱۶-۳}$$

دستگاه معادلات جبری (۳-۹) به‌شکل زیر قابل حل است.

$$\begin{cases}\left\{\bar{\mathbf{y}}_{\mathrm{O}1}\right\}=\left[\mathbf{A}_{\mathrm{O}}\right]^{-1}\left\{\mathbf{F}_{\mathrm{O}1}\right\} \\ \left\{\bar{\mathbf{y}}_{\mathrm{O}2}\right\}=\left[\mathbf{A}_{\mathrm{O}}\right]^{-1}\left\{\mathbf{F}_{\mathrm{O}2}\right\}\end{cases} \tag{۱۷-۳}$$

۳-۴ حل داخلی

با توجه به این که با صفر کردن ε، دو درجه از مرتبه‌ی معادلات کم می‌شود، می‌توان نتیجه گرفت که در $\bar{x}=0,1$ دو لایه‌ی مرزی وجود دارد. اصطلاحاً به نواحی اطراف $\bar{x}=0$ مرز چپ و $\bar{x}=1$ مرز راست گفته می‌شود. در حل‌های داخلی دو مرز چپ و راست در $\bar{x}=0,1$ می‌باید از متغیرهای سریع[1] (کشیده شده‌ی) $\tilde{x}_\alpha$ جهت رصد تغییرات شدید رفتار پوسته در اطراف مرزها استفاده کرد. این متغیرها در دو مرز به‌شکل زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{cases}\bar{x}=0\rightarrow\alpha=0,\quad \tilde{x}_0=\dfrac{\bar{x}}{\varepsilon} \\ \bar{x}=1\rightarrow\alpha=1,\quad \tilde{x}_1=\dfrac{\left(\bar{x}-1\right)}{\varepsilon}\end{cases} \tag{۱۸-۳}$$

تغییر مشتقات نسبت به متغیر $\tilde{x}_\alpha$ باعث ایجاد پارامتر اغتشاشی ε در معادلات می‌شود.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tilde{x}_\alpha}=\varepsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\bar{x}},\quad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tilde{x}_\alpha{}^2}=\varepsilon^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\bar{x}^2} \tag{۱۹-۳}$$

1. Fast variables

در یک پوسته‌ی مخروطی با جدار و فشار متغیر، تمامی متغیرهایی که تابع $\bar{x}$ هستند؛ باید به کمک بسط تیلور حول $\bar{x}=\alpha$ در هر مرز بازنویسی شوند. بسط تیلور برای هر متغیر $\bar{\Lambda}(\bar{x})$ در هر یک از دو مرز با انتخاب α مناسب حول $\bar{x}=\alpha$ به‌شکل‌های زیر قابل نگارش است.

$$\bar{\Lambda}(\bar{x})=\bar{\Lambda}(\bar{x}=\alpha)+\left(\bar{x}-\alpha\right)\left.\frac{\mathrm{d}\bar{\Lambda}(\bar{x})}{\mathrm{d}\bar{x}}\right|_{\bar{x}=\alpha} \qquad \left(\alpha=0,1\right) \tag{۳-۲۰الف}$$

$$\bar{\Lambda}(\tilde{x})=\bar{\Lambda}_{\alpha}+\varepsilon\tilde{x}_{\alpha}\mathrm{D}\bar{\Lambda}_{\alpha} \quad \left(\alpha=0,1\right); \quad \mathrm{D}=\frac{\mathrm{d}(\,)}{\mathrm{d}\bar{x}} \tag{۳-۲۰ب}$$

اندیس $(\ )_{\alpha}$ نشان‌دهنده‌ی قرار گرفتن $\bar{x}=\alpha$ در آن متغیر است. بنابراین در حالت عمومی، متغیرهای هندسی پوسته شامل $\bar{h}(\bar{x})$، $\bar{R}(\bar{x})$ و انتگرال $\overline{II}(\bar{x})$ و همچنین مؤلفه‌های بارگذاری فشاری پوسته شامل $\bar{P}_{\mathrm{iz}}(\bar{x})$، $\bar{P}_{\mathrm{ix}}(\bar{x})$، $\bar{P}_{\mathrm{oz}}(\bar{x})$ و $\bar{P}_{\mathrm{oz}}(\bar{x})$ را در هر یک از دو مرز بر حسب $\tilde{x}_{\alpha}$ متناظر با آن مرز می‌توان بازنویسی کرد.

$$\bar{h}(\tilde{x})=\bar{h}_{\alpha}+\varepsilon\tilde{x}_{\alpha}\mathrm{D}\bar{h}_{\alpha},\ \ \bar{R}(\tilde{x})=\bar{R}_{\alpha}+\varepsilon\tilde{x}_{\alpha}\mathrm{D}\bar{R}_{\alpha},\ \ \overline{II}_{\alpha}(\tilde{x})=\overline{II}_{\alpha}+\varepsilon\tilde{x}_{\alpha}\mathrm{D}\overline{II}_{\alpha} \quad \left(\alpha=0,1\right) \tag{۳-۲۱}$$

$$\begin{cases}\bar{P}_{\mathrm{iz}}(\tilde{x})=\bar{P}_{\mathrm{iz}\alpha}+\varepsilon\tilde{x}_{\alpha}\mathrm{D}\bar{P}_{\mathrm{iz}\alpha}, & \bar{P}_{\mathrm{ix}}(\tilde{x})=\bar{P}_{\mathrm{ix}\alpha}+\varepsilon\tilde{x}_{\alpha}\mathrm{D}\bar{P}_{\mathrm{ix}\alpha}\\ \bar{P}_{\mathrm{oz}}(\tilde{x})=\bar{P}_{\mathrm{oz}\alpha}+\varepsilon\tilde{x}_{\alpha}\mathrm{D}\bar{P}_{\mathrm{oz}\alpha}, & \bar{P}_{\mathrm{ox}}(\tilde{x})=\bar{P}_{\mathrm{ox}\alpha}+\varepsilon\tilde{x}_{\alpha}\mathrm{D}\bar{P}_{\mathrm{ox}\alpha}\end{cases} \qquad \left(\alpha=0,1\right) \tag{۳-۲۲}$$

با درنظر گرفتن بسط مستقیم مجهولات نسبت به متغیر $\tilde{x}_{\alpha}$ در هر مرز به شکل:

$$\left\{\bar{\mathbf{y}}_{\alpha}\left(\tilde{x}_{\alpha},\varepsilon\right)\right\}=\varepsilon\left(\left\{\bar{\mathbf{y}}_{\alpha1}\left(\tilde{x}_{\alpha}\right)\right\}+\varepsilon\left\{\bar{\mathbf{y}}_{\alpha2}\left(\tilde{x}_{\alpha}\right)\right\}\right) \tag{۳-۲۳}$$

و جایگذاری این بسط در معادلات حاکم در هر مرز پس از اعمال تغییرات اشاره شده در قسمت قبل، دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی ناهمگن با ضرایب ثابت مربوط به حل داخلی مرتبه‌ی اوّل و دوّم در مرز α به‌دست می‌آید.

$$\begin{cases}\mathrm{O}(\varepsilon^{1}):\left[\mathbf{A}_{\alpha1}\right]\dfrac{\mathrm{d}^{2}}{\mathrm{d}\tilde{x}_{\alpha}^{\ 2}}\left\{\bar{\mathbf{y}}_{\alpha1}\right\}+\left[\mathbf{A}_{\alpha2}\right]\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tilde{x}_{\alpha}}\left\{\bar{\mathbf{y}}_{\alpha1}\right\}+\left[\mathbf{A}_{\alpha3}\right]\left\{\bar{\mathbf{y}}_{\alpha1}\right\}=\left\{\mathbf{F}_{\alpha1}\right\}\\ \mathrm{O}(\varepsilon^{2}):\left[\mathbf{A}_{\alpha1}\right]\dfrac{\mathrm{d}^{2}}{\mathrm{d}\tilde{x}_{\alpha}^{\ 2}}\left\{\bar{\mathbf{y}}_{\alpha2}\right\}+\left[\mathbf{A}_{\alpha2}\right]\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tilde{x}_{\alpha}}\left\{\bar{\mathbf{y}}_{\alpha2}\right\}+\left[\mathbf{A}_{\alpha3}\right]\left\{\bar{\mathbf{y}}_{\alpha2}\right\}=\left\{\mathbf{F}_{\alpha2}\right\}\\ \left\{\mathbf{F}_{\alpha2}\right\}=\left\{\mathbf{F}_{\alpha2}^{II_{\alpha}}\right\}+\left\{\mathbf{F}_{\alpha2}^{\mathrm{D}A_{\alpha}}\right\}+\left\{\mathbf{F}_{\alpha2}^{\mathrm{D}II_{\alpha}}\right\}+\left\{\mathbf{F}_{\alpha2}^{P_{\alpha}}\right\}+\left\{\mathbf{F}_{\alpha2}^{\mathrm{D}P_{\alpha}}\right\}\end{cases} \tag{۳-۲۴}$$

بردار جابه‌جایی مجهول $\{\bar{\mathbf{y}}_{\alpha\mathrm{i}}\}$ در حل داخلی مرتبه‌ی i در مرز α به‌شکل زیر است.

$$\begin{cases}\{\bar{\mathbf{y}}_{\alpha1}\}=\{\bar{v}_{\alpha1},\bar{\varphi}_{\alpha1},\bar{w}_{\alpha1},\bar{\psi}_{\alpha1}\}^{\mathrm{T}}\\ \{\bar{\mathbf{y}}_{\alpha2}\}=\{\bar{v}_{\alpha2},\bar{\varphi}_{\alpha2},\bar{w}_{\alpha2},\bar{\psi}_{\alpha2}\}^{\mathrm{T}}\end{cases} \qquad (۳-۲۵)$$

$[\mathbf{A}_{\alpha1}]$، $[\mathbf{A}_{\alpha2}]$ و $[\mathbf{A}_{\alpha3}]$ ماتریس‌های ضرایب معادلات دیفرانسیل حاکم در مرز α هستند. $\{\mathbf{F}_{\alpha1}\}$ و $\{\mathbf{F}_{\alpha2}\}$ نیز به ترتیب بردارهای ناهمگنی مرتبه‌های اوّل و دوّم در مرز α هستند. در بردار ناهمگنی حل مرتبه‌ی دوّم، بخش‌های $\{\mathbf{F}^{II\alpha}_{\alpha2}\}$ و $\{\mathbf{F}^{\mathrm{D}II\alpha}_{\alpha2}\}$ به ترتیب شامل $\overline{II}_{\alpha}(\tilde{x})$ و $\mathrm{D}\overline{II}_{\alpha}(\tilde{x})$ هستند که ناشی از جدار متغیر استوانه است. $\{\mathbf{F}^{\mathrm{D}A\alpha}_{\alpha2}\}$ در اثر بسط تیلور ماتریس‌های ضرایب حل مرتبه‌ی یک و به دلیل جدار متغیر استوانه در بردار ناهمگنی حل مرتبه‌ی دوّم ظاهر شده است. بردارهای $\{\mathbf{F}^{P\alpha}_{\alpha2}\}$ و $\{\mathbf{F}^{\mathrm{D}P\alpha}_{\alpha2}\}$ به ترتیب شامل $\bar{P}_{\substack{\mathrm{i}\\ \mathrm{o}}\mathrm{x,z}\alpha}(\tilde{x}_{\alpha})$ و $\mathrm{D}\bar{P}_{\substack{\mathrm{i}\\ \mathrm{o}}\mathrm{x,z}\alpha}(\tilde{x}_{\alpha})$ هستند که $\{\mathbf{F}^{P\alpha}_{\alpha2}\}$ ناشی از جدار متغیر و $\{\mathbf{F}^{\mathrm{D}P\alpha}_{\alpha2}\}$ ناشی از فشار متغیر است.

در استوانه‌ی جدار ثابت $\mathrm{D}\bar{h}_{\alpha}=\mathrm{D}\bar{R}_{\alpha}=\mathrm{D}\overline{II}_{\alpha}=0$ هستند؛ بنابراین $\{\mathbf{F}^{\mathrm{D}II\alpha}_{\alpha1}\}=\{\mathbf{F}^{\mathrm{D}A\alpha}_{\alpha1}\}=\{\mathbf{F}^{P\alpha}_{\alpha1}\}=0$ می‌شوند. در این حالت $\bar{h}_{\alpha}(\tilde{x}_{\alpha})$، $\bar{R}_{\alpha}(\tilde{x}_{\alpha})$ و $\overline{II}_{\alpha}(\tilde{x}_{\alpha})$ تابع $\tilde{x}_{\alpha}$ نبوده و به $\bar{h}$، $\bar{R}$ و $\overline{II}$ تبدیل می‌شوند. در مخروط جدار ثابت فقط $\mathrm{D}\bar{h}_{\alpha}=0$ و $\bar{h}_{\alpha}(\tilde{x}_{\alpha})$ تبدیل به $\bar{h}$ می‌شود. در فشار ثابت نیز $\mathrm{D}\bar{P}_{\substack{\mathrm{i}\\ \mathrm{o}}\mathrm{x,z}\alpha}=0$ باعث $\{\mathbf{F}^{\mathrm{D}P\alpha}_{\alpha1}\}=0$ می‌شود. همچنین $\bar{P}_{\substack{\mathrm{i}\\ \mathrm{o}}\mathrm{x,z}\alpha}(\tilde{x}_{\alpha})$ تابع $\tilde{x}_{\alpha}$ نبوده و به $\bar{P}_{\substack{\mathrm{i}\\ \mathrm{o}}\mathrm{x,z}}$ تبدیل می‌شوند. متغیرهای فاقد ضریب α در هر دو مرز یکسان هستند. درایه‌های غیرصفر ماتریس‌های ضرایب و بردارهای ناهمگنی در ادامه آورده شده است. در هر مرز $(\ )'=\mathrm{d}(\ )/\mathrm{d}\tilde{x}_{\alpha}$ متناظر با α همان مرز است.

$$\begin{cases}[\mathbf{A}_{\alpha1}]_{22}=\bar{k}\ \overline{II}_{\alpha}(2,n+1)\\ [\mathbf{A}_{\alpha1}]_{33}=K_{s}\overline{C_{12}}\overline{II}_{\alpha}(0,n+1)\\ [\mathbf{A}_{\alpha1}]_{34}=[\mathbf{A}_{\alpha1}]_{43}=K_{s}\overline{C_{12}}\overline{II}_{\alpha}(1,n+1)\\ [\mathbf{A}_{\alpha1}]_{44}=K_{s}\overline{C_{12}}\overline{II}_{\alpha}(2,n+1)\end{cases} \qquad (۳-۲۶)$$

$$\begin{cases} \left[\mathbf{A}_{\alpha 2}\right]_{12} = \left[\mathbf{A}_{\alpha 2}\right]_{21} = \bar{k}\ \overline{II}_{\alpha}(1, n+1) \\ \left[\mathbf{A}_{\alpha 2}\right]_{23} = -\left[\mathbf{A}_{\alpha 2}\right]_{32} = -K_s \overline{C_{12}}\,\overline{II}_{\alpha}(0, n+1) - \overline{Ck_1}\,\overline{II}_{\alpha}(1, n) \\ \left[\mathbf{A}_{\alpha 2}\right]_{24} = -\left[\mathbf{A}_{\alpha 2}\right]_{42} = -K_s \overline{C_{12}}\,\overline{II}_{\alpha}(1, n+1) - \overline{Ck_1}\left(\overline{II}_{\alpha}(2, n) + \overline{II}_{\alpha}(1, n+1)\right) \end{cases} \tag{۲۷-۳}$$

$$\begin{cases} \left[\mathbf{A}_{\alpha 3}\right]_{11} = \bar{k}\ \overline{II}_{\alpha}(0, n+1) \\ \left[\mathbf{A}_{\alpha 3}\right]_{13} = -\left[\mathbf{A}_{\alpha 3}\right]_{31} = -\overline{Ck_1}\,\overline{II}_{\alpha}(0, n) \\ \left[\mathbf{A}_{\alpha 3}\right]_{14} = -\left[\mathbf{A}_{\alpha 3}\right]_{41} = -\overline{Ck_1}\left(\overline{II}_{\alpha}(0, n+1) + \overline{II}_{\alpha}(1, n)\right) \\ \left[\mathbf{A}_{\alpha 3}\right]_{22} = -K_s \overline{C_{12}}\,\overline{II}_{\alpha}(0, n+1) \\ \left[\mathbf{A}_{\alpha 3}\right]_{33} = -\bar{k}\ \overline{II}_{\alpha}(0, n-1) \\ \left[\mathbf{A}_{\alpha 3}\right]_{34} = \left[\mathbf{A}_{\alpha 3}\right]_{43} = \overline{Ck_1}\,\overline{II}_{\alpha}(0, n) - \bar{k}\ \overline{II}_{\alpha}(1, n-1) \\ \left[\mathbf{A}_{\alpha 3}\right]_{44} = 2\overline{Ck_1}\,\overline{II}_{\alpha}(1, n) - \bar{k}\left(\overline{II}_{\alpha}(0, n+1) + \overline{II}_{\alpha}(2, n-1)\right) \end{cases} \tag{۲۸-۳}$$

$$\left\{\mathbf{F}_{\alpha 1}\right\} = \begin{Bmatrix} \bar{c}_0 - \bar{P}_{\mathrm{ix}\alpha}\,\tilde{x}_{\alpha}\left(\bar{R}_{\alpha} - \dfrac{\bar{h}_{\alpha}}{2}\right) + \bar{P}_{\mathrm{ox}\alpha}\,\tilde{x}_{\alpha}\left(\bar{R}_{\alpha} + \dfrac{\bar{h}_{\alpha}}{2}\right) \\ \bar{P}_{\mathrm{ix}\alpha}\left(\dfrac{\bar{R}_{\alpha}\bar{h}_{\alpha}}{2} - \dfrac{\bar{h}_{\alpha}^2}{4}\right) + \bar{P}_{\mathrm{ox}\alpha}\left(\dfrac{\bar{R}_{\alpha}\bar{h}_{\alpha}}{2} + \dfrac{\bar{h}_{\alpha}^2}{4}\right) \\ -\bar{P}_{\mathrm{iz}\alpha}\left(\bar{R}_{\alpha} - \dfrac{\bar{h}_{\alpha}}{2}\right) + \bar{P}_{\mathrm{oz}\alpha}\left(\bar{R}_{\alpha} + \dfrac{\bar{h}_{\alpha}}{2}\right) \\ \bar{P}_{\mathrm{iz}\alpha}\left(\dfrac{\bar{R}_{\alpha}\bar{h}_{\alpha}}{2} - \dfrac{\bar{h}_{\alpha}^2}{4}\right) + \bar{P}_{\mathrm{oz}\alpha}\left(\dfrac{\bar{R}_{\alpha}\bar{h}_{\alpha}}{2} + \dfrac{\bar{h}_{\alpha}^2}{4}\right) \end{Bmatrix} \tag{۲۹-۳}$$

$$\begin{cases} \left\{\mathbf{F}_{\alpha 2}^{\mathrm{D}II_{\alpha}}\right\}_1 = 0 \\ \left\{\mathbf{F}_{\alpha 2}^{\mathrm{D}II_{\alpha}}\right\}_2 = \overline{Ck_1}\left[\left(\mathrm{D}\overline{II}_{\alpha}(2, n) + \mathrm{D}\overline{II}_{\alpha}(1, n+1)\right)\bar{\psi}_{\alpha 1} + \mathrm{D}\overline{II}_{\alpha}(1, n)\bar{w}_{\alpha 1}\right] \\ \qquad - \bar{k}\left(\mathrm{D}\overline{II}_{\alpha}(1, n+1)\bar{v}_{\alpha 1} + \mathrm{D}\overline{II}_{\alpha}(2, n+1)\,\bar{\varphi}_{\alpha 1}{}'\right) \\ \left\{\mathbf{F}_{\alpha 2}^{\mathrm{D}II_{\alpha}}\right\}_3 = -K_s \overline{C_{12}}\left[\mathrm{D}\overline{II}_{\alpha}(1, n+1)\bar{\psi}_{\alpha 1}{}' + \mathrm{D}\overline{II}_{\alpha}(0, n+1)\left(\bar{\varphi}_{\alpha 1} + \bar{w}_{\alpha 1}{}'\right)\right] \\ \left\{\mathbf{F}_{\alpha 2}^{\mathrm{D}II_{\alpha}}\right\}_4 = -K_s \overline{C_{12}}\left[\mathrm{D}\overline{II}_{\alpha}(2, n+1)\bar{\psi}_{\alpha 1}{}' + \mathrm{D}\overline{II}_{\alpha}(1, n+1)\left(\bar{\varphi}_{\alpha 1} + \bar{w}_{\alpha 1}{}'\right)\right] \end{cases} \tag{۳۰-۳}$$

$$\begin{cases}
\left\{\mathbf{F}_{\alpha 2}^{\mathrm{D}A_\alpha}\right\}_1 = \tilde{x}_\alpha \overline{Ck_1}\left[\left(\mathrm{D}\overline{II}_\alpha(1,n)+\mathrm{D}\overline{II}_\alpha(0,n+1)\right)\bar{\psi}_{\alpha 1}+\mathrm{D}\overline{II}_\alpha(0,n)\bar{w}_{\alpha 1}\right] \\
\qquad -\tilde{x}_\alpha \bar{k}\left(\mathrm{D}\overline{II}_\alpha(1,n+1)\bar{\varphi}_{\alpha 1}'+\mathrm{D}\overline{II}_\alpha(0,n+1)\bar{v}_{\alpha 1}\right) \\
\left\{\mathbf{F}_{\alpha 2}^{\mathrm{D}A_\alpha}\right\}_2 = \tilde{x}_\alpha \overline{Ck_1}\left[\left(\mathrm{D}\overline{II}_\alpha(2,n)+\mathrm{D}\overline{II}_\alpha(1,n+1)\right)\bar{\psi}_{\alpha 1}'+\mathrm{D}\overline{II}_\alpha(1,n)\bar{w}_{\alpha 1}'\right] \\
\qquad +\tilde{x}_\alpha K_s \overline{C_{12}}\left[\mathrm{D}\overline{II}_\alpha(0,n+1)\left(\bar{\varphi}_{\alpha 1}+\bar{w}_{\alpha 1}'\right)+\mathrm{D}\overline{II}_\alpha(1,n+1)\bar{\psi}_{\alpha 1}'\right] \\
\qquad -\tilde{x}_\alpha \bar{k}\left(\mathrm{D}\overline{II}_\alpha(1,n+1)\bar{v}_{\alpha 1}'+\mathrm{D}\overline{II}_\alpha(2,n+1)\bar{\varphi}_{\alpha 1}''\right) \\
\left\{\mathbf{F}_{\alpha 2}^{\mathrm{D}A_\alpha}\right\}_3 = -\tilde{x}_\alpha \overline{Ck_1}\left[\mathrm{D}\overline{II}_\alpha(1,n)\bar{\varphi}_{\alpha 1}'+\mathrm{D}\overline{II}_\alpha(0,n)\left(\bar{\psi}_{\alpha 1}+\bar{v}_{\alpha 1}\right)\right] \\
\qquad -\tilde{x}_\alpha K_s \overline{C_{12}}\left[\mathrm{D}\overline{II}_\alpha(1,n+1)\bar{\psi}_{\alpha 1}''+\mathrm{D}\overline{II}_\alpha(0,n+1)\left(\bar{\varphi}_{\alpha 1}'+\bar{w}_{\alpha 1}''\right)\right] \\
\qquad +\tilde{x}_\alpha \bar{k}\left[\mathrm{D}\overline{II}_\alpha(0,n-1)\bar{w}_{\alpha 1}+\mathrm{D}\overline{II}_\alpha(1,n-1)\bar{\psi}_{\alpha 1}\right] \\
\left\{\mathbf{F}_{\alpha 2}^{\mathrm{D}A_\alpha}\right\}_4 = -\tilde{x}_\alpha \overline{Ck_1}\left[\mathrm{D}\overline{II}_\alpha(0,n+1)\left(\bar{v}_{\alpha 1}\right)+\mathrm{D}\overline{II}_\alpha(1,n)\left(2\bar{\psi}_{\alpha 1}+\bar{v}_{\alpha 1}\right)\right. \\
\qquad \left.+\mathrm{D}\overline{II}_\alpha(0,n)\left(\bar{w}_{\alpha 1}\right)+\left(\mathrm{D}\overline{II}_\alpha(2,n)+\mathrm{D}\overline{II}_\alpha(1,n+1)\right)\bar{\varphi}_{\alpha 1}'\right] \\
\qquad -\tilde{x}_\alpha K_s \overline{C_{12}}\left[\mathrm{D}\overline{II}_\alpha(2,n+1)\bar{\psi}_{\alpha 1}''+\mathrm{D}\overline{II}_\alpha(1,n+1)\left(\bar{\varphi}_{\alpha 1}'+\bar{w}_{\alpha 1}''\right)\right] \\
\qquad +\tilde{x}_\alpha \bar{k}\left[\left(\mathrm{D}\overline{II}_\alpha(2,n-1)+\mathrm{D}\overline{II}_\alpha(0,n+1)\right)\bar{\psi}_{\alpha 1}+\mathrm{D}\overline{II}_\alpha(1,n-1)\bar{w}_{\alpha 1}\right]
\end{cases}$$
(۳۱-۳)

$$\left\{\mathbf{F}_{\alpha 2}^{P_\alpha}\right\}=\left\{\begin{array}{c}
-\dfrac{\bar{P}_{\mathrm{ix}\alpha}\tilde{x}_\alpha^{\,2}}{2}\left(\mathrm{D}\bar{R}_\alpha-\dfrac{\mathrm{D}\bar{h}_\alpha}{2}\right)+\dfrac{\bar{P}_{\mathrm{ox}\alpha}\tilde{x}_\alpha^{\,2}}{2}\left(\mathrm{D}\bar{R}_\alpha+\dfrac{\mathrm{D}\bar{h}_\alpha}{2}\right) \\
\dfrac{\bar{P}_{\mathrm{ix}\alpha}\tilde{x}_\alpha}{2}\left(\mathrm{D}\bar{h}_\alpha\bar{R}_\alpha+\bar{h}_\alpha\mathrm{D}\bar{R}_\alpha-\bar{h}_\alpha\mathrm{D}\bar{h}_\alpha\right)+\dfrac{\bar{P}_{\mathrm{ox}\alpha}\tilde{x}_\alpha}{2}\left(\mathrm{D}\bar{h}_\alpha\bar{R}_\alpha+\bar{h}_\alpha\mathrm{D}\bar{R}_\alpha+\bar{h}_\alpha\mathrm{D}\bar{h}_\alpha\right) \\
-\bar{P}_{\mathrm{iz}\alpha}\tilde{x}_\alpha\left(\mathrm{D}\bar{R}_\alpha-\dfrac{\mathrm{D}\bar{h}_\alpha}{2}\right)+\bar{P}_{\mathrm{oz}\alpha}\tilde{x}_\alpha\left(\mathrm{D}\bar{R}_\alpha+\dfrac{\mathrm{D}\bar{h}_\alpha}{2}\right) \\
\dfrac{\bar{P}_{\mathrm{iz}\alpha}\tilde{x}_\alpha}{2}\left(\mathrm{D}\bar{h}_\alpha\bar{R}_\alpha+\bar{h}_\alpha\mathrm{D}\bar{R}_\alpha-\bar{h}_\alpha\mathrm{D}\bar{h}_\alpha\right)+\dfrac{\bar{P}_{\mathrm{oz}\alpha}\tilde{x}_\alpha}{2}\left(\mathrm{D}\bar{h}_\alpha\bar{R}_\alpha+\bar{h}_\alpha\mathrm{D}\bar{R}_\alpha+\bar{h}_\alpha\mathrm{D}\bar{h}_\alpha\right)
\end{array}\right\}$$
(۳۲-۳)

$$\left\{\mathbf{F}_{\alpha 2}^{\mathrm{D}P_\alpha}\right\}=\left\{\begin{array}{c}
-\dfrac{\mathrm{D}\bar{P}_{\mathrm{ix}\alpha}\tilde{x}_\alpha^{\,2}}{2}\left(\bar{R}_\alpha-\dfrac{\bar{h}_\alpha}{2}\right)+\dfrac{\mathrm{D}\bar{P}_{\mathrm{ox}\alpha}\tilde{x}_\alpha^{\,2}}{2}\left(\bar{R}_\alpha+\dfrac{\bar{h}_\alpha}{2}\right) \\
\mathrm{D}\bar{P}_{\mathrm{ix}\alpha}\tilde{x}_\alpha\left(\dfrac{\bar{R}_\alpha\bar{h}_\alpha}{2}-\dfrac{\bar{h}_\alpha^2}{4}\right)+\mathrm{D}\bar{P}_{\mathrm{ox}\alpha}\tilde{x}_\alpha\left(\dfrac{\bar{R}_\alpha\bar{h}_\alpha}{2}+\dfrac{\bar{h}_\alpha^2}{4}\right) \\
-\mathrm{D}\bar{P}_{\mathrm{iz}\alpha}\tilde{x}_\alpha\left(\bar{R}_\alpha-\dfrac{\bar{h}_\alpha}{2}\right)+\mathrm{D}\bar{P}_{\mathrm{oz}\alpha}\tilde{x}_\alpha\left(\bar{R}_\alpha+\dfrac{\bar{h}_\alpha}{2}\right) \\
\mathrm{D}\bar{P}_{\mathrm{iz}\alpha}\tilde{x}_\alpha\left(\dfrac{\bar{R}_\alpha\bar{h}_\alpha}{2}-\dfrac{\bar{h}_\alpha^2}{4}\right)+\mathrm{D}\bar{P}_{\mathrm{oz}\alpha}\tilde{x}_\alpha\left(\dfrac{\bar{R}_\alpha\bar{h}_\alpha}{2}+\dfrac{\bar{h}_\alpha^2}{4}\right)
\end{array}\right\}$$
(۳۳-۳)

$$
\begin{aligned}
\left\{\mathbf{F}_{\alpha 2}^{II_\alpha}\right\}_1 =& \overline{Ck}_3\Big[2\Big(\big(\overline{II}_\alpha(1,n+1)+\overline{II}_\alpha(2,n)\big)\bar{\psi}_{\alpha 1}+\overline{II}_\alpha(1,n)\bar{w}_{\alpha 1}\Big)\bar{\varphi}_{\alpha 1}{}'\\
&+\big(\overline{II}_\alpha(0,n+1)+\overline{II}_\alpha(2,n-1)\big)\bar{\psi}_{\alpha 1}{}^2+2\big(\overline{II}_\alpha(1,n)+\overline{II}_\alpha(0,n+1)\big)\bar{v}_{\alpha 1}\bar{\psi}_{\alpha 1}\\
&+2\overline{II}_\alpha(1,n-1)\bar{w}_{\alpha 1}\bar{\psi}_{\alpha 1}+2\overline{II}_\alpha(0,n)\bar{v}_{\alpha 1}\bar{w}_{\alpha 1}+\overline{II}_\alpha(0,n-1)\bar{w}_{\alpha 1}{}^2\Big]\\
&-\overline{C}_{12}\Big[K_s\overline{II}_\alpha(1,n+1)\bar{\varphi}_{\alpha 1}\bar{\psi}_{\alpha 1}{}'+\overline{II}_\alpha(0,n+1)\Big(K_s\bar{\varphi}_{\alpha 1}\bar{w}_{\alpha 1}{}'+\hat{K}_s\bar{\varphi}_{\alpha 1}{}^2\Big)\Big]\\
&+\overline{Ck}_7\Big[\overline{II}_\alpha(1,n)\bar{\psi}_{\alpha 1}{}^2+\overline{II}_\alpha(0,n)\bar{w}_{\alpha 1}\bar{\psi}_{\alpha 1}\Big]-\bar{k}\Big[2\overline{II}_\alpha(2,n+1)\Big(\bar{\varphi}_{\alpha 1}{}'\Big)^2\\
&+4\overline{II}_\alpha(1,n+1)\Big(4\bar{v}_{\alpha 1}\bar{\varphi}_{\alpha 1}{}'-\bar{\varphi}_{\alpha 1}\bar{\psi}_{\alpha 1}{}'\Big)+\overline{II}_\alpha(0,n+1)\Big(2\bar{v}_{\alpha 1}{}^2-\bar{\varphi}_{\alpha 1}\bar{w}_{\alpha 1}{}'\Big)\Big]
\end{aligned}
\tag{۳۴-۳}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\{\mathbf{F}_{\alpha 2}^{II_\alpha}\right\}_2 =& \overline{Ck}_1\Big(\overline{II}_\alpha(1,n)\bar{\psi}_{\alpha 1}+\overline{II}_\alpha(0,n)\bar{w}_{\alpha 1}+\hat{K}_s\overline{II}_\alpha(0,n+1)\bar{v}_{\alpha 1}\Big)\bar{\varphi}_{\alpha 1}\\
&+K_s\overline{Ck}_2\Big[\overline{II}_\alpha(2,n)\bar{\psi}_{\alpha 1}\bar{\psi}_{\alpha 1}{}'+\overline{II}_\alpha(1,n)\Big(\big(\bar{w}_{\alpha 1}\bar{\psi}_{\alpha 1}\big)'+\bar{\psi}_{\alpha 1}\bar{\varphi}_{\alpha 1}\Big)\\
&+\overline{II}_\alpha(0,n)\Big(\bar{\varphi}_{\alpha 1}+\bar{w}_{\alpha 1}{}'\Big)\bar{w}_{\alpha 1}\Big]-K_s\overline{C}_{12}\Big(\overline{II}_\alpha(2,n+1)\bar{\psi}_{\alpha 1}{}''+\overline{II}_\alpha(1,n+1)\bar{w}_{\alpha 1}{}''\Big)\bar{\varphi}_{\alpha 1}\\
&+K_s\overline{Ck}_4\Big[\overline{II}_\alpha(0,n+1)\big(\bar{\psi}_{\alpha 1}+\bar{v}_{\alpha 1}\big)\bar{w}_{\alpha 1}{}'+\overline{II}_\alpha(1,n+1)\big(\bar{v}_{\alpha 1}+\bar{\psi}_{\alpha 1}\big)\bar{\psi}_{\alpha 1}{}'\Big]\\
&+\overline{Ck}_5\overline{II}_\alpha(2,n+1)\bar{\psi}_{\alpha 1}{}'\bar{\varphi}_{\alpha 1}{}'+\overline{Ck}_6\Big[\overline{II}_\alpha(3,n)\Big(\bar{\psi}_{\alpha 1}\bar{\varphi}_{\alpha 1}{}'\Big)'+\overline{II}_\alpha(2,n+1)\bar{\psi}_{\alpha 1}\bar{\varphi}_{\alpha 1}{}''\\
&+\overline{II}_\alpha(1,n+1)\Big(\big(\bar{\psi}_{\alpha 1}\bar{v}_{\alpha 1}\big)'+\bar{\psi}_{\alpha 1}\bar{\psi}_{\alpha 1}{}'\Big)+\overline{II}_\alpha(1,n-1)\bar{w}_{\alpha 1}\bar{w}_{\alpha 1}{}'+\overline{II}_\alpha(2,n-1)\big(\bar{w}_{\alpha 1}\bar{\psi}_{\alpha 1}\big)'\\
&+\overline{II}_\alpha(1,n)\big(\bar{w}_{\alpha 1}\bar{v}_{\alpha 1}\big)'+\overline{II}_\alpha(3,n+1)\bar{\psi}_{\alpha 1}\bar{\psi}_{\alpha 1}{}'+\overline{II}_\alpha(2,n)\Big(\big(\bar{v}_{\alpha 1}\bar{\psi}_{\alpha 1}\big)'+\Big(\bar{w}_{\alpha 1}\bar{\varphi}_{\alpha 1}{}'\Big)'\Big)\Big]\\
&+\overline{Ck}_7\Big[2\overline{II}_\alpha(2,n)\bar{\psi}_{\alpha 1}\bar{\psi}_{\alpha 1}{}'+\overline{II}_\alpha(1,n)\big(\bar{w}_{\alpha 1}\bar{\psi}_{\alpha 1}\big)'\Big]\\
&-\bar{k}\Big[\hat{K}_s\overline{II}_\alpha(0,n+1)\bar{\varphi}_{\alpha 1}\bar{\psi}_{\alpha 1}+\overline{II}_\alpha(2,n+1)\Big(4\Big(\bar{v}_{\alpha 1}\bar{\varphi}_{\alpha 1}{}'\Big)'+K_s\bar{\psi}_{\alpha 1}{}'\bar{\varphi}_{\alpha 1}{}'-\bar{\varphi}_{\alpha 1}\bar{\psi}_{\alpha 1}{}''\Big)\\
&+\overline{II}_\alpha(1,n+1)\Big(4\bar{v}_{\alpha 1}\bar{v}_{\alpha 1}{}'-\bar{\varphi}_{\alpha 1}\bar{w}_{\alpha 1}{}''+\hat{K}_s\Big(\bar{w}_{\alpha 1}{}'+\bar{\varphi}_{\alpha 1}\Big)\bar{\varphi}_{\alpha 1}{}'\Big)+4\overline{II}_\alpha(3,n+1)\bar{\varphi}_{\alpha 1}{}'\bar{\varphi}_{\alpha 1}{}''\Big]
\end{aligned}
\tag{۳۵-۳}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\{\mathbf{F}_{\alpha 2}^{II_\alpha}\right\}_3 =& \overline{Ck_1}\Big[\overline{II}_\alpha(2,n)\bar{\psi}_{\alpha 1}\bar{\psi}_{\alpha 1}'' + \overline{II}_\alpha(1,n)\left(\bar{w}_{\alpha 1}'\bar{\psi}_{\alpha 1}' + \bar{w}_{\alpha 1}\bar{\psi}_{\alpha 1}'' + \bar{\psi}_{\alpha 1}\bar{w}_{\alpha 1}''\right) \\
& + 2\overline{II}_\alpha(0,n)\bar{w}_{\alpha 1}\bar{w}_{\alpha 1}'' - \hat{K}_s\left(\overline{II}_\alpha(1,n+1)\left(\bar{\psi}_{\alpha 1}\bar{\psi}_{\alpha 1}'\right)' + \overline{II}_\alpha(0,n+1)\left(\bar{w}_{\alpha 1}\bar{\psi}_{\alpha 1}\right)'\right)\Big] \\
& - \overline{Ck_2}\Big[\overline{II}_\alpha(0,n)\left(\hat{K}_s\bar{\varphi}_{\alpha 1}\bar{w}_{\alpha 1}' + K_s\left(\left(\bar{w}_{\alpha 1}'\right)^2 + \bar{w}_{\alpha 1}\bar{w}_{\alpha 1}'' + \bar{w}_{\alpha 1}\bar{\varphi}_{\alpha 1}'\right)\right) \\
& + \overline{II}_\alpha(1,n)\left(\hat{K}_s\bar{\varphi}_{\alpha 1}\bar{\psi}_{\alpha 1}' + K_s\left(2\bar{w}_{\alpha 1}'\bar{\psi}_{\alpha 1}' + \bar{w}_{\alpha 1}\bar{\psi}_{\alpha 1}'' + \bar{\psi}_{\alpha 1}\bar{w}_{\alpha 1}'' + \bar{\psi}_{\alpha 1}\bar{\varphi}_{\alpha 1}'\right)\right) \\
& + K_s\overline{II}_\alpha(2,n)\left(\left(\bar{\psi}_{\alpha 1}'\right)^2 + \bar{\psi}_{\alpha 1}\bar{\psi}_{\alpha 1}''\right)\Big] - \overline{Ck_3}\Big[2\overline{II}_\alpha(2,n-1)\bar{\psi}_{\alpha 1}\bar{\varphi}_{\alpha 1}' \\
& + 2\overline{II}_\alpha(1,n-1)\left(\bar{w}_{\alpha 1}\bar{\varphi}_{\alpha 1}' + \bar{\psi}_{\alpha 1}^2 + \bar{v}_{\alpha 1}\bar{\psi}_{\alpha 1}\right) + 2\overline{II}_\alpha(0,n-1)\left(\bar{v}_{\alpha 1} + \bar{\psi}_{\alpha 1}\right)\bar{w}_{\alpha 1} \\
& + 2\overline{II}_\alpha(2,n)\left(\bar{\varphi}_{\alpha 1}'\right)^2 + 2\overline{II}_\alpha(1,n)\bar{v}_{\alpha 1}\bar{\varphi}_{\alpha 1}' + \overline{II}_\alpha(0,n)\left(\bar{v}_{\alpha 1}^2 + \bar{\psi}_{\alpha 1}^2\right)\Big] \\
& - K_s\overline{Ck_4}\Big[\overline{II}_\alpha(1,n+1)\left(\bar{\varphi}_{\alpha 1}\bar{\varphi}_{\alpha 1}'\right)' + \overline{II}_\alpha(0,n+1)\left(\bar{v}_{\alpha 1}\bar{\varphi}_{\alpha 1} + \bar{\varphi}_{\alpha 1}\bar{\psi}_{\alpha 1}\right)'\Big] \\
& - \overline{Ck_7}\left(\overline{II}_\alpha(0,n)\bar{v}_{\alpha 1} + \overline{II}_\alpha(1,n)\bar{\varphi}_{\alpha 1}'\right)\bar{\psi}_{\alpha 1} + 4\overline{C}_2\overline{II}_\alpha(0,n)\bar{\varphi}_{\alpha 1}^2 \\
& + \overline{Ck_8}\Big[\overline{II}_\alpha(2,n)\left(\bar{\psi}_{\alpha 1}'\right)^2 + \overline{II}_\alpha(0,n)\left(\bar{w}_{\alpha 1}'\right)^2\Big] + \hat{K}_s\bar{k}\Big[\overline{II}_\alpha(2,n+1)\left(\bar{\varphi}_{\alpha 1}'\bar{\psi}_{\alpha 1}'\right)' \\
& + \overline{II}_\alpha(1,n+1)\left(\bar{v}_{\alpha 1}\bar{\psi}_{\alpha 1}' + \bar{\varphi}_{\alpha 1}'\bar{w}_{\alpha 1}'\right)' + \overline{II}_\alpha(0,n+1)\left(\bar{v}_{\alpha 1}\bar{w}_{\alpha 1}'\right)'\Big] \\
& + 2\bar{k}\Big[\overline{II}_\alpha(2,n-2)\bar{\psi}_{\alpha 1}^2 + 2\overline{II}_\alpha(1,n-2)\bar{w}_{\alpha 1}\bar{\psi}_{\alpha 1} + \overline{II}_\alpha(0,n-2)\bar{w}_{\alpha 1}^2\Big]
\end{aligned}
\tag{۳-۳۶}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\{\mathbf{F}_{\alpha 2}^{II_\alpha}\right\}_4 =& -\overline{Ck}_1\Big[\overline{II}_\alpha(0,n+1)\bar{\varphi}_{\alpha1}\bar{w}_{\alpha1}{}' + \hat{K}_s\left(\overline{II}_\alpha(1,n+1)\bar{w}_{\alpha1}{}'' + \overline{II}_\alpha(2,n+1)\bar{\psi}_{\alpha1}{}''\right)\bar{\psi}_{\alpha1} \\
&- \overline{II}_\alpha(1,n)\bar{w}_{\alpha1}\bar{w}_{\alpha1}{}'' - \overline{II}_\alpha(2,n)\left(\left(\bar{w}_{\alpha1}\bar{\psi}_{\alpha1}{}'\right)' + \bar{\psi}_{\alpha1}\bar{w}_{\alpha1}{}''\right) - \overline{II}_\alpha(3,n)\bar{\psi}_{\alpha1}\bar{\psi}_{\alpha1}{}''\Big] \\
&- \overline{Ck}_2\Big[\overline{II}_\alpha(1,n)\left(K_s\left(\left(\bar{w}_{\alpha1}{}'\right)^2 + \bar{w}_{\alpha1}\bar{\varphi}_{\alpha1}{}' + \bar{w}_{\alpha1}\bar{w}_{\alpha1}{}''\right) + \hat{K}_s\bar{\varphi}_{\alpha1}\bar{w}_{\alpha1}{}'\right) \\
&+ \overline{II}_\alpha(2,n)\left(K_s\left(\left(\bar{w}_{\alpha1}\bar{\psi}_{\alpha1}{}'\right)' + \bar{\psi}_{\alpha1}\bar{w}_{\alpha1}{}'' + \bar{\psi}_{\alpha1}\bar{\varphi}_{\alpha1}{}'\right) + \hat{K}_s\bar{\varphi}_{\alpha1}\bar{w}_{\alpha1}{}'\right) \\
&+ K_s\overline{II}_\alpha(3,n)\left(\left(\bar{\psi}_{\alpha1}{}'\right)^2 + 2\bar{\psi}_{\alpha1}\bar{\psi}_{\alpha1}{}''\right)\Big] - \overline{Ck}_3\Big[\overline{II}_\alpha(3,n)\left(\bar{\varphi}_{\alpha1}{}'\right)^2 + \overline{II}_\alpha(0,n-1)\bar{w}_{\alpha1}{}^2 \\
&+ 2\left(\overline{II}_\alpha(2,n-1) + \overline{II}_\alpha(0,n+1)\right)\bar{v}_{\alpha1}\bar{\psi}_{\alpha1} + 2\left(2\overline{II}_\alpha(1,n-1) + \overline{II}_\alpha(0,n)\right)\bar{w}_{\alpha1}\bar{\psi}_{\alpha1} \\
&+ 3\left(\overline{II}_\alpha(1,n) + \overline{II}_\alpha(2,n-1)\right)\bar{\psi}_{\alpha1}{}^2 + \left(\overline{II}_\alpha(0,n+1) + \overline{II}_\alpha(1,n)\right)\bar{v}_{\alpha1}{}^2 + 2\overline{II}_\alpha(2,n)\bar{v}_{\alpha1}\bar{\varphi}_{\alpha1}{}' \\
&+ 2\overline{II}_\alpha(1,n-1)\bar{v}_{\alpha1}\bar{w}_{\alpha1} + 2\overline{II}_\alpha(2,n-1)\bar{w}_{\alpha1}\bar{\varphi}_{\alpha1}{}' + 2\overline{II}_\alpha(3,n-1)\bar{\psi}_{\alpha1}\bar{\varphi}_{\alpha1}{}' \\
&+ \overline{II}_\alpha(2,n+1)\left(\bar{\varphi}_{\alpha1}{}'\right)^2\Big] - \overline{Ck}_4\Big[\overline{II}_\alpha(2,n+1)\left(\hat{K}_s\left(\bar{\psi}_{\alpha1}{}'\right)^2 + K_s\left(\bar{\varphi}_{\alpha1}\bar{\varphi}_{\alpha1}{}'\right)'\right) \\
&+ K_s\overline{II}_\alpha(1,n+1)\left(\left(\bar{\varphi}_{\alpha1}\bar{v}_{\alpha1}\right)' + \bar{\psi}_{\alpha1}\bar{\varphi}_{\alpha1}{}'\right)\Big] + \overline{C}_{12}\overline{II}_\alpha(0,n+1)\left(\hat{K}_s\left(\bar{w}_{\alpha1}{}'\right)^2 + K_s\bar{\varphi}_{\alpha1}\bar{w}_{\alpha1}{}'\right) \\
&- \overline{Ck}_7\Big[2\overline{II}_\alpha(2,n)\bar{\psi}_{\alpha1}\bar{\varphi}_{\alpha1}{}' + 2\overline{II}_\alpha(1,n)\left(\bar{v}_{\alpha1}\bar{\psi}_{\alpha1} + \bar{w}_{\alpha1}\bar{\varphi}_{\alpha1}{}'\right) + \overline{II}_\alpha(0,n)\bar{v}_{\alpha1}\bar{w}_{\alpha1}\Big] \\
&+ \overline{Ck}_8\Big[\overline{II}_\alpha(3,n)\left(\bar{\psi}_{\alpha1}{}'\right)^2 + \overline{II}_\alpha(1,n)\left(\bar{w}_{\alpha1}{}'\right)^2\Big] - \overline{Ck}_9\overline{II}_\alpha(1,n+1)\left(\bar{v}_{\alpha1} + \bar{\psi}_{\alpha1}\right)\bar{\varphi}_{\alpha1}{}' \\
&+ \hat{K}_s\bar{k}\Big[\overline{II}_\alpha(3,n+1)\left(\bar{\varphi}_{\alpha1}{}'\bar{\psi}_{\alpha1}{}'\right)' + \overline{II}_\alpha(2,n+1)\left(\left(\bar{\varphi}_{\alpha1}{}'\bar{w}_{\alpha1}{}'\right)' + \left(\bar{v}_{\alpha1}\bar{\psi}_{\alpha1}{}'\right)'\right) \\
&+ \overline{II}_\alpha(1,n+1)\left(\left(\bar{v}_{\alpha1}\bar{w}_{\alpha1}{}'\right)' + \left(\bar{w}_{\alpha1}{}' + \bar{\varphi}_{\alpha1}\right)\bar{\psi}_{\alpha1}{}'\right)\Big] + 2\bar{k}\Big[\overline{II}_\alpha(1,n-2)\bar{w}_{\alpha1}{}^2 \\
&+ \left(\overline{II}_\alpha(3,n-2) + \overline{II}_\alpha(0,n+1)\right)\bar{\psi}_{\alpha1}{}^2 + 2\overline{II}_\alpha(2,n-2)\bar{w}_{\alpha1}\bar{\psi}_{\alpha1}\Big]
\end{aligned}
\tag{۳-۳۷}
$$

هر یک از معادلات اغتشاشی مرتبه‌های اوّل و دوّم رابطه‌ی (۳-۲۴)، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی ناهمگن با ضرایب ثابت نسبت به $\tilde{x}_\alpha$ در هر مرز هستند. هر یک از این معادلات دارای حل کلی شامل یک حل عمومی و یک حل خصوصی است.

$$
\begin{cases}
\left\{\bar{\mathbf{y}}_{\alpha1}\right\} = \left\{\bar{\mathbf{y}}_{\alpha1}\right\}_{\text{gen.}} + \left\{\bar{\mathbf{y}}_{\alpha1}\right\}_{\text{par.}} \\
\left\{\bar{\mathbf{y}}_{\alpha2}\right\} = \left\{\bar{\mathbf{y}}_{\alpha2}\right\}_{\text{gen.}} + \left\{\bar{\mathbf{y}}_{\alpha2}\right\}_{\text{par.}}
\end{cases}
\tag{۳-۳۸}
$$

در هر دو حل مرتبه‌های اوّل و دوّم، جواب عمومی به‌شکل کلی زیر درنظر گرفته می‌شود.

$$\{\bar{\mathbf{y}}_{\alpha}\}_{\text{gen.}} = \{V_{\alpha}\}\exp(m_{\alpha}\tilde{x}_{\alpha}) \tag{۳-۳۹}$$

در حل عمومی $\{V_{\alpha}\}$ و m_{α} به ترتیب بردار ویژه[1] و مقدار ویژه[2] هستند که از جایگذاری رابطه‌ی (۳-۳۹) در شکل همگن معادلات (۳-۲۴) به‌دست می‌آیند.

$$\left([\mathbf{A}_{\alpha 1}]m_{\alpha}^{2} + [\mathbf{A}_{\alpha 2}]m_{\alpha} + [\mathbf{A}_{\alpha 3}]\right)\{V_{\alpha}\}\exp(m_{\alpha}\tilde{x}_{\alpha}) = \{0\} \tag{۳-۴۰}$$

در حالت کلی $\exp(m_{\alpha}\tilde{x}_{\alpha}) \neq 0$؛ بنابراین معادله‌ی یک مسأله‌ی مقدار ویژه‌ی غیرخطی[3] حاصل می‌شود.

$$\left([\mathbf{A}_{\alpha 1}]m_{\alpha}^{2} + [\mathbf{A}_{\alpha 2}]m_{\alpha} + [\mathbf{A}_{\alpha 3}]\right)\{V_{\alpha}\} = \{0\} \tag{۳-۴۱}$$

شرط لازم برای جواب داشتن این معادله صفر شدن دترمینان ماتریس ضرایب است.

$$\det\left([\mathbf{A}_{\alpha 1}]m_{\alpha}^{2} + [\mathbf{A}_{\alpha 2}]m_{\alpha} + [\mathbf{A}_{\alpha 3}]\right) = 0 \tag{۳-۴۲}$$

معادله‌ی (۳-۴۲) معادله‌ی مشخصه‌ی مجموعه بوده و ریشه‌های آن مقادیر ویژه‌ی سیستم $m_{\alpha \mathrm{i}}$ هستند. از حل این معادله‌ی جبری شش ریشه در هر مرز حاصل می‌شود که از قرار دادن هر ریشه در معادله‌ی (۳-۴۱)، بردار ویژه‌ی متناظر با آن ریشه حاصل می‌شود. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه‌ی مسأله‌ی مورد بررسی مختلط مزدوج هستند. با توجه به اصل انطباق[4]، جواب‌ها باید در $\tilde{x}_{\alpha} \to \infty$ محدود باشند، بنابراین در مرز $\alpha = 0$ مقادیر ویژه با قسمت حقیقی منفی و در مرز $\alpha = 1$ مقادیر ویژه با قسمت حقیقی مثبت درنظر گرفته می‌شوند. در این حالت جواب عمومی هر مرز به‌شکل زیر به‌دست می‌آید.

$$\{\bar{\mathbf{y}}_{\alpha 1}\}_{\text{gen.}} = \{\bar{\mathbf{y}}_{\alpha 2}\}_{\text{gen.}} = \{\bar{\mathbf{y}}_{\alpha}\}_{\text{gen.}} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{3} c_{\alpha \mathrm{i}}\{V_{\alpha \mathrm{i}}\}\exp(m_{\alpha \mathrm{i}}\tilde{x}_{\alpha}) \tag{۳-۴۳}$$

که $c_{\alpha \mathrm{i}}\,(\mathrm{i}=1,2,3)$ ها سه ثابت در هر مرز هستند. بنابراین در حل عمومی در مجموع دو مرز، شش

---

1. Eigen value
2. Eigen vector
3. Nonlinear Eigen value problem
4. Matching principle

ثابت ایجاد می‌شود که به کمک شرایط مرزی تعیین خواهند شد.

از آنجا که $\{\mathbf{F}_{\alpha1}\}$ یک ناهمگنی خطی در معادلات مرتبه‌ی اوّل است، بنابراین جواب خصوص حل اغتشاشی مرتبه‌ی اوّل به راحتی به‌شکل $\{\bar{\mathbf{y}}_{\alpha1}\}_{\text{par.}}=[\mathbf{A}_{\alpha3}]^{-1}\{\mathbf{F}_{\alpha1}\}$ محاسبه می‌شود. با توجه به این که ناهمگنی $\{\mathbf{F}_{\alpha2}\}$ شامل جملات غیرخطی چندجمله‌ای $(\{\ \}^{\text{pol.}})$، نمایی یکسان با ریشه‌های معادله مشخصه $(\exp(m_{\alpha\,\text{i}}\tilde{x}_\alpha))$ و نمایی متفاوت از ریشه‌های معادله مشخصه $(\exp(q_{\alpha\,\text{j}}\tilde{x}_\alpha))$ بر حسب جواب‌های حل مرتبه‌ی اوّل هستند؛ برای محاسبه‌ی جواب‌های خصوص مرتبه‌ی دوّم از روش ضرایب نامعین[1] استفاده می‌شود. در این حالت جواب خصوصی به‌شکل کلی زیر درنظر گرفته می‌شود.

$$\begin{cases}\{\bar{\mathbf{y}}_{\alpha2}\}_{\text{par.}}=\{\bar{\mathbf{y}}_{\alpha2}\}_{\text{par.}}^{\text{pol.}}+\{\bar{\mathbf{y}}_{\alpha2}\}_{\text{par.}}^{\exp(\text{mi})}+\{\bar{\mathbf{y}}_{\alpha2}\}_{\text{par.}}^{\exp(\text{q j})}\\ \{\bar{\mathbf{y}}_{\alpha2}\}_{\text{par.}}^{\text{pol.}}=\{B_2\}\tilde{x}^2+\{B_1\}\tilde{x}+\{B_0\}\\ \{\bar{\mathbf{y}}_{\alpha2}\}_{\text{par.}}^{\exp(\text{mi})}=\sum_{\text{i}}\left(\{B_2\}_{\text{mi}}\tilde{x}^2+\{B_1\}_{\text{mi}}\tilde{x}+\{B_0\}_{\text{mi}}\right)\exp(m_{\alpha\,\text{i}}\tilde{x}_\alpha)\\ \{\bar{\mathbf{y}}_{\alpha2}\}_{\text{par.}}^{\exp(\text{q j})}=\sum_{\text{j}}\left(\{B_2\}_{\text{q j}}\tilde{x}^2+\{B_1\}_{\text{q j}}\tilde{x}+\{B_0\}_{\text{q j}}\right)\exp(q_{\alpha\,\text{j}}\tilde{x}_\alpha)\end{cases} \qquad (۴۴\text{-}۳)$$

در این روابط $\{\bar{\mathbf{y}}_{\alpha2}\}_{\text{par.}}^{\text{pol.}}$، $\{\bar{\mathbf{y}}_{\alpha2}\}_{\text{par.}}^{\exp(\text{m i})}$ و $\{\bar{\mathbf{y}}_{\alpha2}\}_{\text{par.}}^{\exp(\text{q j})}$ به ترتیب حل خصوصی متناظر با بخش‌های توانی، نمایی یکسان با ریشه‌ی معادله‌ی مشخصه و نمایی متفاوت با ریشه‌ی معادله‌ی مشخصه‌ی موجود در قسمت ناهمگن معادلات هستند. با قراردادن آنها در معادله‌ی مرتبه‌ی دوّم رابطه‌ی (۳-۲۴)، ضرایب نامعین $\{B_0\}$، $\{B_1\}$ و $\{B_2\}$ تعیین می‌شوند.

۳-۵ حل کلی یکنواخت

هشت ثابت شامل سه ثابت در حل عمومی هر یک از مرزها و دو ثابت $\bar{c}_0$ و c_7 ناشی از تغییر متغیرهای ذکر شده در انتهای بخش ۳-۲ با اعمال همزمان شرایط مرزی و شروط انطباق طبق قاعده‌ی انطباق ون‌دایک[2] قابل محاسبه هستند. در این حالت باید شرط‌های مرزی چپ به حل داخلی در $\bar{x}=0$ و

1. Method of undetermined coefficients
2. Van Dyke’s matching rule

شـــرط‌های مرزی راســـت به حل داخلی در $\bar{x}=1$ اعمال شـــوند. برای شـــرایط مرزی گیردار در حل اغتشاشی مرتبه‌ی i می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \bar{x}=0\ \left(\tilde{x}_0=0\right)\rightarrow \bar{u}_{0\mathrm{i}},\bar{\varphi}_{0\mathrm{i}},\bar{w}_{0\mathrm{i}},\bar{\psi}_{0\mathrm{i}}=0 \\ \bar{x}=1\left(\tilde{x}_1=0\right)\rightarrow \bar{u}_{1\mathrm{i}},\bar{\varphi}_{1\mathrm{i}},\bar{w}_{1\mathrm{i}},\bar{\psi}_{1\mathrm{i}}=0 \end{cases}\quad (\mathrm{i}=1,2) \tag{۴۵-۳}$$

حل‌های محاســبه شــده به‌صــورت سه بسط مجزا شامل بسط خارجی $\left\{\bar{\mathbf{y}}_{\mathrm{O}}\right\}$و دو بسط داخلی مرز چپ $\left\{\bar{\mathbf{y}}_{\alpha=0}\right\}$ و راست $\left\{\bar{\mathbf{y}}_{\alpha=1}\right\}$ به‌دست آمده است. با استفاده از روش بسط مجانبی تطبیق‌یافته، یک حل کلی از جمع بسط حل‌های داخلی و خارجی و کم کردن بخش‌های همپوشانی به‌دست می‌آید.

$$\left\{\bar{\mathbf{y}}_{\mathrm{comp.}}\right\}=\left\{\bar{\mathbf{y}}_{\mathrm{O}}\right\}+\left\{\bar{\mathbf{y}}_{\alpha=0}\right\}+\left\{\bar{\mathbf{y}}_{\alpha=1}\right\}-\left\{\bar{\mathbf{y}}_{\mathrm{O}}^{\alpha=0}\right\}-\left\{\bar{\mathbf{y}}_{\mathrm{O}}^{\alpha=1}\right\} \tag{۴۶-۳}$$

در این رابطه، $\left\{\bar{\mathbf{y}}_{\mathrm{O}}^{\alpha=0}\right\}$و $\left\{\bar{\mathbf{y}}_{\mathrm{O}}^{\alpha=1}\right\}$ بخش‌های مشـترک حل خارجی با هرکدام از حل‌های داخلی هستند که طبق قاعده‌ی ون‌دایک تعیین می‌شوند [۱۰۸،۹۴].

در نهایت بردار مجهول جابه‌جایی‌ها به‌شــکل $\left\{\bar{\mathbf{y}}\right\}=\left\{\bar{\mathbf{y}}_{\mathrm{comp.}}\right\}=\left\{\bar{u},\bar{\varphi},\bar{w},\bar{\psi}\right\}$ بر حســب مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی بی‌بعد به‌دســت می‌آید. با محاســبه مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی بی‌بعد شــده، طبق رابطه‌ی (۲-۵) می‌توان مقادیر جابه‌جایی‌های شعاعی و محوری بی‌بعد استوانه را نیز محاسبه کرد. پس از محاســبه‌ی میدان جابه‌جایی، می‌توان به کمک روابط ســینماتیک (۲-۱۹) تا (۲-۲۲)، تانســورهای کرنش $\mathbf{C}$ ، $\mathbf{F}$ و $\mathbf{E}$ را بــه‌دســـت آورد. از روابط (۲-۲۳) و (۲-۲۴) به ترتیب پایاهای $I_{1,2,3}$ و J قابل محاســبه‌اند. مقادیر فشار هیدرواستاتیک P ، چگالی انرژی کرنشی W و تنش پیولا-کیرشهف دوّم $\mathbf{S}$ به ترتیب از روابط (۲-۲۷)، (۲-۴۰) و (۲-۴۱) محاسـبه می‌شـوند. تانسور تنش کوشی نیز با توجه به رابطه‌ی $\left[\boldsymbol{\sigma}\right]=\left(1/J\right)\left[\mathbf{F}\right]\left[\mathbf{S}\right]\left[\mathbf{F}\right]^{\mathrm{T}}$ تعیین می‌شـــود. محاســـبات عددی و برنامه‌نویســـی مربوط به حل تحلیلی توسـط نرم‌افزار Maple 18 انجام شـده اسـت. مقادیر جابه‌جایی، تنش و فشار هیدرواستاتیک بی‌بعد به‌شکل زیر درنظر گرفته می‌شوند.

$$\bar{U}_z=\frac{U_z}{h_0},\quad \bar{U}_x=\frac{U_x}{h_0},\quad \bar{\boldsymbol{\sigma}}=\frac{\boldsymbol{\sigma}}{P_{\mathrm{i}0}},\quad \bar{P}=\frac{P}{P_{\mathrm{i}0}},\quad \bar{\boldsymbol{\sigma}}=\frac{\boldsymbol{\sigma}}{P_{\mathrm{o}0}},\quad \bar{P}=\frac{P}{P_{\mathrm{o}0}} \tag{۴۷-۳}$$

در حالت فشار متغیر، P_{i0} و P_{o0} به ترتیب میانگین فشار داخلی و خارجی حداقل و حداکثر وارد شده در طول پوسته هستند. در حالت فشار ثابت نیز این دو مقدار به ترتیب برابر فشارهای داخلی و خارجی درنظر گرفته می‌شود.

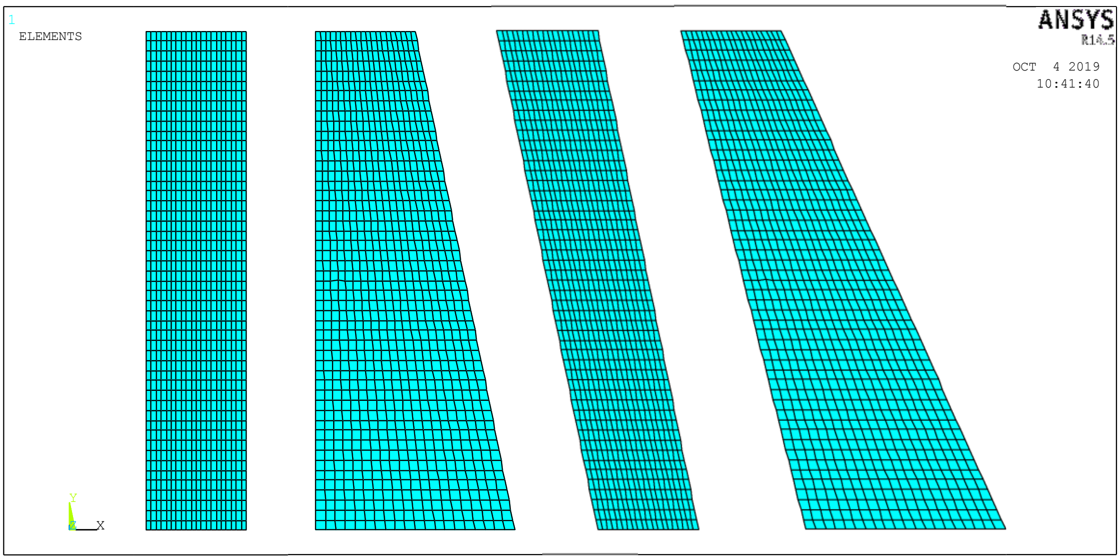
۳-۶ مدل‌سازی عددی اجزای محدود

به منظور بررسی اعتبار حل تحلیلی ارائه‌شده در پژوهش جاری، مدل‌سازی عددی این مسأله به کمک بسته‌ی نرم‌افزاری اجزای محدود انسیس انجام شده است. در این مدل‌سازی از المان PLANE183 در وضعیت متقارن محوری استفاده شده است. المان اشاره‌شده دارای هشت گره و دو درجه‌ی آزادی در جهت محوری و شعاعی برای هر گره است و دارای قابلیت فرمول‌بندی ترکیبی به منظور شبیه‌سازی مواد هایپرالاستیک تقریباً تراکم‌ناپذیر است. مدل‌سازی مخروط و استوانه‌ی جدار متغیر ساخته‌شده از ماده‌ی هایپرالاستیک ناهمگن با تغییرات توانی خواص در راستای شعاعی، از طریق کنار هم قرار گرفتن تعدادی لایه (سطوح) همگن به‌هم پیوسته در سطح مقطع پوسته که با یکدیگر ادغام[1] شده‌اند، انجام می‌شود. خواص ماده‌ی هر یک از سطوح، متناسب با فاصله‌ی محور تقارن آن سطح تا محور دوران پوسته به‌صورت تغییرات پله‌ای[2] و بر اساس تابع توانی مشابه با حل تحلیلی متناظر درنظر گرفته می‌شود. تنش‌ها و جابه‌جایی‌ها در محل تماس بین لایه‌ها برابر میانگین حد چپ و راست مقادیر موجود در نقاط مرزی درنظر گرفته می‌شوند. اگرچه افزایش تعداد لایه‌ها سبب نزدیکتر شدن توزیع ناپیوسته خواص به تابع پیوسته‌ی متناظر می‌شود؛ اما افزایش تعداد لایه‌های بیشتر از حدود ۴۰ عدد، عملاً اثری در نتایج نخواهد گذاشت. برای درنظر گرفتن مدل مونی-ریولین در حالت تقریباً تراکم‌ناپذیر در هر لایه‌ی همگن، سه ثابت شامل C_{10}، C_{01} و d باید در نرم‌افزار انسیس تعریف شود. دو ثابت اوّل به ترتیب معادل با C_{1n} و C_{2n} هستند و ثابت سوّم هم با ضریب تراکم‌ناپذیری موجود در رابطه‌ی (۲-۴۰) دارای رابطه‌ی

1. Merge
2. Step-variation

$k_n.d=2$ است [۱۱۰،۱۰۹]. همانطور که اشاره شد، این ثابت‌ها با توجه به رابطه‌ی (۲-۳۹)، ثابت ناهمگنی دلخواه، n، خواص نزدیکترین نقاط لایه‌ی داخلی به محور دوران پوسته یعنی C_1، C_2 و k و متناسب با فاصله‌ی محور تقارن هر لایه تا محور دوران پوسته تعیین می‌شوند. اعمال بارگذاری فشاری متغیر، به کمک قابلیت تعریف تابع[1] بر حسب مختصه‌ی طولی در نرم‌افزار و نسبت دادن آن به گره‌های روی لایه‌ی داخلی و خارجی به ترتیب برای فشارهای داخلی و خارجی انجام شده است. شرایط مرزی گیردار بر روی گره‌های دو مرز بالا و پایین از طریق محدود کردن درجات آزادی آنها اعمال می‌شود. تنظیمات حل متناسب با حالت تغییر شکل‌های بزرگ انجام شده است.

در شکل ۳-۱، نمونه‌ی گره‌بندی پوسته‌های استوانه‌ای و مخروطی شکل مورد بررسی در این پژوهش به کمک نرم‌افزار انسیس نمایش داده شده است.



شکل ۳-۱ نمونه‌ی گره‌بندی پوسته‌های استوانه‌ای و مخروطی شکل مدل‌سازی شده

۳-۷ جمع‌بندی

در این فصل، حل تحلیلی دستگاه معادلات حاکم بر پوسته‌های استوانه‌ای و مخروطی شکل دارای فشار و جدار متغیر ساخته شده از مواد هایپرالاستیک تقریباً تراکم‌ناپذیر برای شرایط مرزی گیردار به کمک

1. Function

تئوری اغتشاشات ارائه شد. همچنین شیوه‌ی مدل‌سازی عددی مسأله‌ی مورد بررسی به کمک بسته‌ی نرم‌افزاری اجزای محدود انسیس توضیح داده شد. در فصل بررسی نتایج، برای چند مطالعه‌ی موردی از پوسته‌های استوانه‌ای و مخروطی شکل، اثر عوامل مختلف بر نتایج حاصل از حل تحلیلی و مدل‌سازی عددی بررسی خواهد شد. در فصل بعدی، از تعریف درصد اختلاف به‌صورت زیر به منظور اندازه‌گیری میزان اختلاف نتایج حل تحلیلی و مدل‌سازی عددی استفاده می‌شود.

$$\text{Diff}\,\bar{U}_{z,x}\,(\%)=\left|\frac{\left(\bar{U}_{z,x}{}^{\text{MAE}}-\bar{U}_{z,x}{}^{\text{FEM}}\right)}{\bar{U}_{z,x}{}^{\text{FEM}}}\right|\times 100 \qquad (۴۸\text{-}۳)$$

حل تحلیلی ارائه شده در این فصل می‌تواند برای سایر مدل‌های مواد هایپرالاستیک به شکل‌های نمایی و چندجمله‌ای استفاده شود. همچنین از این روش حل می‌توان برای پوسته‌هایی از جنس مواد هایپرالاستیک ناهمگن با توزیع خواص در راستای شعاعی پوسته به شکل توابع حجمی، توابع چندجمله‌ای و نمایی نیز استفاده کرد. شرایط مرزی نیز می‌توانند به شکل‌های مختلف گیردار، آزاد و مفصلی ثابت در دو مرز در نظر گرفته شوند. همچنین به کمک این روش می‌توان پوسته‌هایی با تغییرات جدار داخلی، جدار خارجی و ضخامت به شکل توابعی پیوسته و دلخواه در جهت طولی تحت توزیع فشار داخلی و خارجی متغیر غیرخطی را تحلیل کرد.

فصل ۴

بررسی نتایج

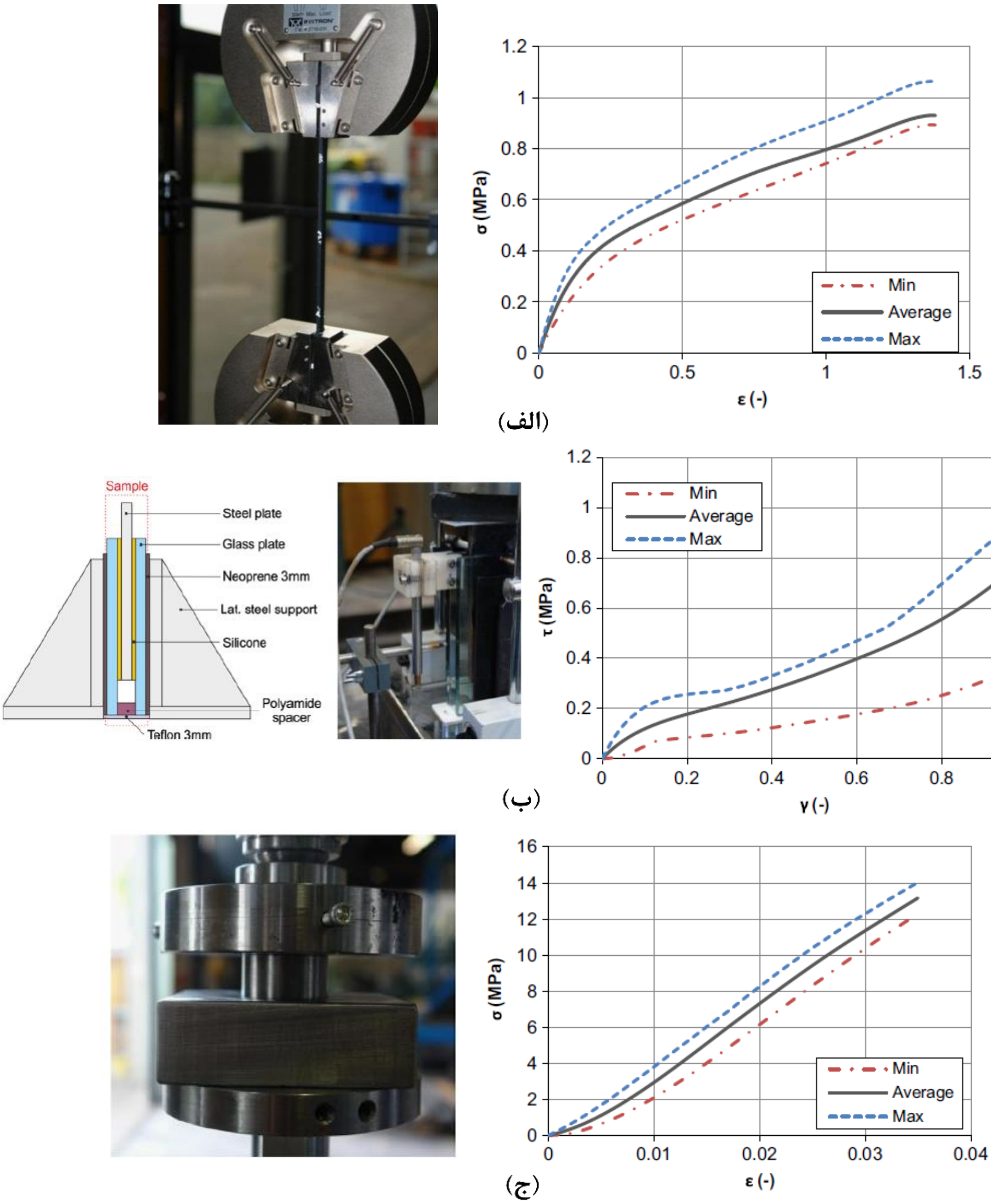
۴-۱ مقدمه

در فصل‌های قبلی روند استخراج و حل تحلیلی معادلات حاکم بر مسأله‌ی مورد بررسی معرفی شد. در این فصل، ابتدا عوامل مؤثر بر حل تحلیلی در یک استوانه‌ای همگن جدار ثابت مورد بررسی قرار خواهد گرفت. سپس توزیع جابه‌جایی، تنش و فشار هیدرواستاتیک در پوسته‌های استوانه‌ای جدار متغیر نشان داده می‌شود. در ادامه اثر ناهمگنی و توزیع تابع غیرخطی فشار و ضخامت بر این پوسته‌ها بررسی خواهد شد. در بخش بعدی پوسته‌های مخروطی جدار متغیر به همراه بررسی عوامل مختلف بر رفتار پوسته مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. در انتهای این بخش، اثر تغییر مدل مادّه بر معادلات حاکم و رفتار پوسته‌های استوانه‌ای جدار متغیر تحت فشار داخلی متغیر بیان خواهد شد.

در طول این فصل به غیر از قسمت آخر، از مدل مونی-ریولین دوجمله‌ای در حالت تقریباً تراکم‌ناپذیر استفاده شده است. ثابت‌هایی که برای مدل مونی-ریولین در این فصل استفاده خواهد شد، در جدول ۴-۱ نامگذاری شده‌اند. این ثابت‌ها یا به‌صورت مستقیم از مراجع مختلف انتخاب شداند و یا به‌صورت غیرمستقیم از نمودارها، جدول‌ها و روابط موجود در منابع اشاره‌شده محاسبه شده‌اند. در مواردی که ضریب تراکم‌ناپذیری مادّه مشخص نشده است، مقدار ۱۰ مگاپاسکال درنظر گرفته شده است [۱۱۱،۱۰۳]. ثابت‌های موجود در این جدول در پوسته‌های استوانه‌ای ناهمگن، نشان‌دهنده‌ی خواص لایه‌ی داخلی پوسته هستند. این ثابت‌ها در پوسته‌های مخروطی ناهمگن نیز خواص مربوط به نزدیکترین نقطه‌ی لایه‌ی داخلی به محور طولی پوسته را نشان می‌دهند و خواص سایر نقاط بر اساس تابع توانی در راستای ضخامت پوسته افزایش یا کاهش می‌یابد. در قسمت آخر این فصل، جدول مشابهی برای ثابت مدل نئوهوکین ارائه شده است.

در نرم‌افزار انسیس قابلیتی قرار داده شده است که می‌توان از طریق وارد کردن مقادیر تنش و کرنش حاصل از نتایج آزمایش کشش (فشار) تک محوری و دو محوری، برش خالص، برش ساده و

همچنین آزمایش حجمی[1]، ثابت‌های مواد هایپرالاستیک مورد نظر از جمله مدل مونی-ریولین دوجمله‌ای را با استفاده از روش حداقل مربعات محاسبه کرد. به عنوان نمونه می‌توان با وارد کردن نتایج آزمایش‌های کشش تک محوری، برش خالص و حجمی مرجع [۱۱۱] به ثابت‌های MC_6 رسید. نمودارها و تصاویر این سه آزمایش از مرجع اشاره شده در شکل ۴-۱ نشان داده شده است.



شکل ۴-۱ نمودارهای تنش-کرنش و نمونه‌های آزمایش

(الف) کشش تک‌محوری (ب) برش ساده (ج) حجمی [۱۱۱]

1. Volumetric test

جدول ۴-۱ مشخصات ثابت‌های مدل مونی-ریولین

شناسه‌ی ثابت مادّه	مرجع	C_1 (MPa)	C_2 (MPa)	k (MPa)	نمونه‌ی مادّه
MC_1	[۱۱۲]	0.242	0.142	10	Natural gum rubbers
MC_2	[۱۰۹]	0.251	0.263	36	TDM 600
MC_3	[۹۶]	0.177	0.045	10	Rubber bushes
MC_4	[۱۱۳]	0.16	0.015	10	Rubbers
MC_5	[۷۱]	0.1858	-0.01935	10	Rubberlike materials
MC_6	[۱۱۱]	0.423	-0.262	10.5	Silicone elastomers
MC_7	[۹۰]	0.09	0.118	10	polyurethane rubbers
MC_8	[۱۰۳]	0.1848	0.0264	10	Rubbers
MC_9	[۷۶]	0.552	0.138	10	Rubber seals

۴-۲ بررسی عوامل مؤثر بر حل تحلیلی

در جدول‌های ۴-۲ و ۴-۳ اثر دو متغیر ضخامت $\bar{R}$ و بارگذاری $P_i/(C_1+C_2)$ بر میدان جابه‌جایی در استوانه‌ی جدار ثابت تحت فشار یکنواخت برای ثابت‌های مختلف مادّه‌ی مونی-ریولین بررسی شده است. با توجه به این که حداکثر مقدار اختلاف جابه‌جایی‌های حاصل از حل تحلیلی و مدل‌سازی عددی در لایه‌ی داخلی استوانه تحت فشار داخلی رخ می‌دهد، این جدول‌ها می‌توانند معیار مناسبی برای مقایسه‌ی میزان دقت و اعتبار روش تحلیلی ارائه‌شده برای مدل‌سازی پوسته‌های استوانه‌ای ساخته‌شده از مادّه‌ی مونی-ریولین تقریباً تراکم‌ناپذیر باشند. در شکل ۴-۲، اثر ضخامت بر محدوده‌ی اعتبار تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل و همگرایی بسط مرتبه‌ی اوّل و دوّم اغتشاشی در تحلیل پوسته‌های استوانه‌ای نشان داده شده است. در قسمت (الف)، شکل ۳ از مرجع [۱۱۴] آورده شده است که محدوده‌ی اعتبار FSDT را برای $\bar{R}$های مختلف در تحلیل خطی پوسته‌های استوانه‌ای نشان می‌دهد. در قسمت (ب) شکل ۴-۲، اثر تغییر ضخامت بر دقت همگرایی مرتبه‌ی بسط اغتشاشی در محاسبه‌ی جابه‌جایی شعاعی وسط لایه‌ی داخلی پوسته برای تحلیل غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای (از جنس مواد هایپرالاستیک) بررسی شده است. طبق جدول ۴-۲، حداکثر درصد اختلاف دو روش حل برای جابه‌جایی شعاعی در

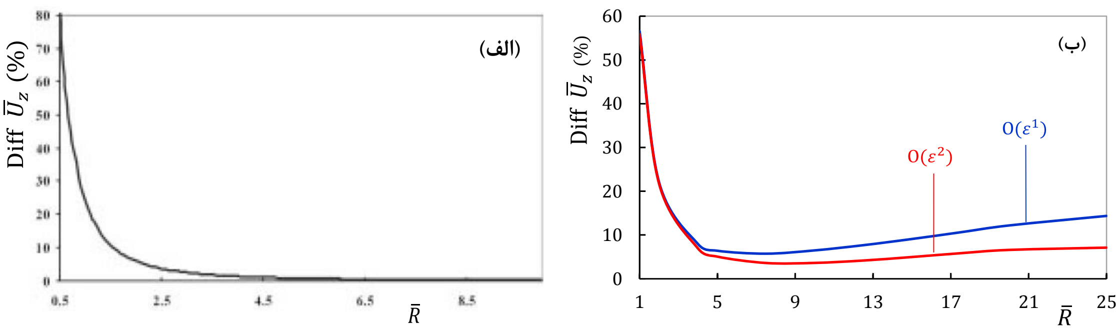
نسبت بار به مقاومت مادّه‌ی ۰/۰۲ و نسبت شعاع لایه‌ی میانی به ضخامت ۵، حدود ۶ درصد است. به طور مشابه طبق جدول ۴-۳، جابه‌جایی محوری نیز دارای حداکثر اختلافی کمتر از ۹ درصد است. قابل ذکر است که در اکثر نقاط استوانه درصد اختلاف برای تمامی حالت‌های بررسی شده کمتر از ۲ درصد است؛ اما کمترین انطباق بین دو روش حل در مقادیر جابه‌جایی متناظر با محل همپوشانی دو حل داخلی و خارجی در اطراف مرزها به‌شکل مشخص‌تری نسبت به سایر نقاط مشاهده می‌شود. به طور عمومی با افزایش مقدار $\bar{R}$ و نازکتر شدن استوانه، دقت نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل افزایش می‌یابد. اما در $\bar{R}$هایی بالاتر از مرز استوانه‌های جدار نازک و ضخیم یعنی در اعداد بالاتر از ۲۰، هر چه استوانه‌ها نازک‌تر و نسبت بار به مقاومت مادّه بیشتر شود، به دلیل افزایش میزان تغییر شکل پوسته و تشدید رفتار غیرخطی آن، انطباق نتایج MAE و FEM در تحلیل پوسته کاهش می‌یابد. بر اساس شکل ۴-۲ (ب) می‌توان دریافت که در تحلیل‌های غیرخطی، کاهش ضخامت باعث افزایش رفتار غیرخطی پوسته شده و اختلاف نتایج حل حاصل از بسط اغتشاشی مرتبه‌ی اوّل (خطی) با مرتبه‌ی دوّم (غیرخطی) افزایش پیدا می‌کند. در این حالت استفاده از حل اغتشاشی مرتبه‌ی دو و بالاتر ضروری است. از طرفی با کاهش اعتبار نظریه‌ی پوسته‌های جدار ضخیم، مطابقت حل تحلیلی و مدل‌سازی عددی برای استوانه‌های بسیار نازک کاهش می‌یابد؛ زیرا مدل‌سازی عددی بر مبنای اجزای محدود برای پوسته‌های نازک‌تر با رفتار غیرخطی هم اعتبار دارد و بارگذاری را به شکل دنبالگر متناسب با تغییر شکل‌های بزرگ جداره‌ی داخلی و خارجی پوسته در نظر می‌گیرد؛ اما در حل تحلیلی، مؤلفه‌های فشار بر اساس هندسه‌ی نخست پوسته قبل از تغییر شکل اعمال می‌شوند. در استوانه‌های بسیار ضخیم نیز نتایج حاصل از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل نسبت به نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی یا اجزای محدود دارای اختلاف می‌شود. دلیل این موضوع غلبه‌ی مقدار ضخامت بر جابه‌جایی در ضخامت-های بسیار زیاد ($\bar{R} < 4$) است که سبب می‌شود توزیع خطی (و احتمالاً مرتبه‌های بالاتر) درنظر گرفته شده برای جابه‌جایی‌ها در راستای ضخامت پوسته از توزیع واقعی آنها فاصله بگیرد.

جدول ۴-۲ اثر متغیرهای ضخامت و بارگذاری بر جابه‌جایی شعاعی برای ثابت‌های مختلف مادّه

Mat. ID	$\bar{U}_z$ ،max	$P_i/(C_1+C_2)=1/50$			$P_i/(C_1+C_2)=1/100$			$P_i/(C_1+C_2)=1/200$		
		$\bar{R}=5$	$\bar{R}=10$	$\bar{R}=20$	$\bar{R}=5$	$\bar{R}=10$	$\bar{R}=20$	$\bar{R}=5$	$\bar{R}=10$	$\bar{R}=20$
MC_1	FSDT	0.0734	0.2991	1.2127	0.0363	0.1481	0.5943	0.0182	0.0736	0.2952
	FEM	0.0759	0.3047	1.2699	0.0370	0.1488	0.5970	0.0184	0.0737	0.2930
MC_2	FSDT	0.0691	0.2859	1.1754	0.0339	0.1410	0.5760	0.0169	0.0700	0.2812
	FEM	0.0736	0.2913	1.2210	0.0359	0.1407	0.5746	0.0178	0.0706	0.2780
MC_3	FSDT	0.0701	0.2917	1.1863	0.0347	0.1437	0.5810	0.0173	0.0714	0.2876
	FEM	0.0730	0.2957	1.2319	0.0358	0.1442	0.5812	0.0180	0.0717	0.2847
MC_4	FSDT	0.0685	0.2876	1.1771	0.0340	0.1421	0.5763	0.0169	0.0706	0.2861
	FEM	0.0726	0.2921	1.2234	0.0356	0.1430	0.5766	0.0179	0.0712	0.2830
MC_5	FSDT	0.0681	0.2869	1.1762	0.0338	0.1417	0.5760	0.0168	0.0704	0.2855
	FEM	0.0725	0.2930	1.2214	0.0349	0.1419	0.5742	0.0177	0.0710	0.2824
MC_6	FSDT	0.0676	0.2832	1.1371	0.0336	0.1408	0.5682	0.0167	0.0702	0.2836
	FEM	0.0722	0.2902	1.1780	0.0362	0.1421	0.5683	0.0178	0.0708	0.2812
MC_7	FSDT	0.0696	0.2902	1.1871	0.0345	0.1433	0.5810	0.0172	0.0712	0.2875
	FEM	0.0743	0.2969	1.2375	0.0360	0.1440	0.5813	0.0181	0.0716	0.2850
MC_8	FSDT	0.0697	0.2899	1.1861	0.0346	0.1425	0.5798	0.0172	0.0712	0.2875
	FEM	0.0742	0.2970	1.2360	0.0365	0.1440	0.5799	0.0180	0.0716	0.2846

جدول ۴-۳ اثر متغیرهای ضخامت و بارگذاری بر جابه‌جایی محوری برای ثابت‌های مختلف مادّه

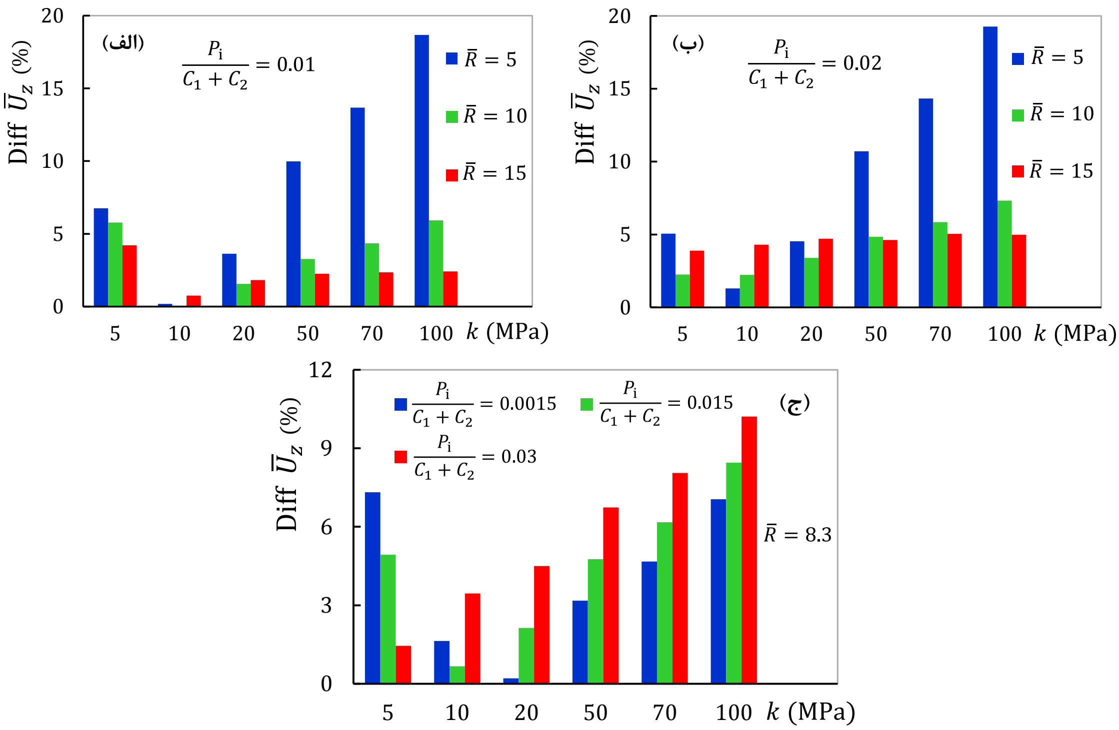
Mat. ID	$\bar{U}_x$ ،max	$P_i/(C_1+C_2)=1/50$			$P_i/(C_1+C_2)=1/100$			$P_i/(C_1+C_2)=1/200$		
		$\bar{R}=5$	$\bar{R}=10$	$\bar{R}=20$	$\bar{R}=5$	$\bar{R}=10$	$\bar{R}=20$	$\bar{R}=5$	$\bar{R}=10$	$\bar{R}=20$
MC_1	FSDT	0.0147	0.0453	0.1096	0.0073	0.0231	0.0623	0.0037	0.0117	0.0331
	FEM	0.0151	0.0469	0.1089	0.0076	0.0242	0.0621	0.0038	0.0125	0.0332
MC_2	FSDT	0.0138	0.0453	0.1162	0.0069	0.0227	0.0634	0.0035	0.0113	0.0332
	FEM	0.0149	0.0460	0.1080	0.0073	0.0239	0.0611	0.0037	0.0120	0.0333
MC_3	FSDT	0.0138	0.0445	0.1139	0.0069	0.0226	0.0628	0.0034	0.0114	0.0329
	FEM	0.0149	0.0452	0.1068	0.0075	0.0239	0.0611	0.0037	0.0121	0.0331
MC_4	FSDT	0.0136	0.0445	0.1148	0.0068	0.0225	0.0630	0.0034	0.0113	0.0329
	FEM	0.0148	0.0457	0.1069	0.0075	0.0237	0.0603	0.0037	0.0122	0.0332
MC_5	FSDT	0.0135	0.0441	0.1135	0.0068	0.0224	0.0626	0.0034	0.0113	0.0327
	FEM	0.0148	0.0456	0.1050	0.0073	0.0239	0.0602	0.0037	0.0121	0.0329
MC_6	FSDT	0.0134	0.0408	0.0960	0.0066	0.0216	0.0584	0.0034	0.0111	0.0316
	FEM	0.0145	0.0432	0.0973	0.0073	0.0224	0.0587	0.0037	0.0121	0.0318
MC_7	FSDT	0.0139	0.0454	0.1166	0.0069	0.0228	0.0640	0.0034	0.0114	0.0332
	FEM	0.0150	0.0466	0.1085	0.0075	0.0232	0.0613	0.0038	0.0123	0.0335
MC_8	FSDT	0.0137	0.0444	0.1134	0.0068	0.0226	0.0628	0.0034	0.0114	0.0329
	FEM	0.0149	0.0460	0.1063	0.0075	0.0238	0.0610	0.0037	0.0123	0.0328



شکل ۴-۲ اثر ضخامت بر دقت FSDT و MAE در تحلیل (الف) خطی (شکل ۳ از مرجع [۱۱۴])
(ب) غیرخطی پوسته‌ی استوانه‌ای

اثر متغیر تراکم‌ناپذیری بر دقت روش حل تحلیلی در شکل ۴-۳ نشان داده شده است. در این شکل اثر افزایش k بر درصد اختلاف جابه‌جایی شعاعی حاصل از دور روش حل تحلیلی و عددی برای مقادیر مختلف $\bar{R}$ و $P_i/(C_1+C_2)$ در وسط لایه‌ی میانی پوسته‌ی استوانه‌ای بررسی شده است. مقادیر مختلف این دو عامل مشابه جدول ۴-۲ درنظر گرفته شده است. مطابق شکل ۴-۳ (الف) و (ب) به طور عمومی با افزایش $\bar{R}$ مقدار درصد اختلاف دو روش کاهش می‌یابد؛ زیرا برای استوانه‌های ضخیم دقت تحلیل به کمک FSDT کاهش می‌باید. از طرفی به دلیل افزایش نسبت بارگذاری به مقاومت مادّه، در استوانه‌ی نازک‌تر با افزایش میزان تغییر شکل‌ها، اختلاف MAE و FEM افزایش می‌یابد. بنابراین عوامل اشاره‌شده به طور همزمان بر انطباق نتایج دو روش حل اثرگذار هستند. همانطور که در فصل ۲ نیز اشاره شد، در مواد تقریباً تراکم‌ناپذیر، نسبت پواسون با توجه به میزان تراکم‌ناپذیری در حدود $\nu = 0.49 - 0.499$ درنظر گرفته می‌شود. با درنظر گرفتن ثابت‌های C_1 و C_2 مطابق جدول ۴-۱ و بر اساس رابطه‌ی (۲-۳۳)، مرتبه‌ی مدول بالک در محدوده‌ی $1-100$ MPa درنظر گرفته می‌شود. به طور کلی افزایش میزان تراکم‌ناپذیری پوسته سبب افزایش رفتار غیرخطی پوسته، سهم بیشتر حل داخلی و کاهش انطباق دو روش حل می‌شود. مشاهده می‌شود که برای ثابت‌های مونی-ریولین مواد شبه‌لاستیک در محدوده‌ی جدول ۴-۱، به‌ازای ضرایب تراکم‌ناپذیری کوچک‌تر از ۲ مگاپاسکال و مقادیر بسیار بزرگ تراکم‌ناپذیری بالاتر از ۱۰۰۰ مگاپاسکال، مقادیر ویژه‌ی معادله‌ی مشخصه شکل مختلط مزدوج خود را از دست داده و حل تحلیلی واگرا می‌شود. در واقع فرمول‌بندی ارائه‌شده در این پژوهش طبق رابطه‌ی (۲-۳۳) برای حالت تقریباً تراکم‌ناپذیر دارای نتایج معتبر است. اگر میزان تراکم‌ناپذیری با توجه به مقادیر دو ثابت مادّه‌ی مونی-ریولین متناظر به سمت حالت تراکم‌ناپذیر (اعداد بزرگ یا $\nu \to 0.5$) میل کند، با از بین رفتن تناسب بین ضریب تراکم‌ناپذیری و C_1+C_2، امکان محاسبه‌ی ریشه‌های معادله‌ی مشخصه به‌شکل منطقی به دلیل به هم خوردن تناسب مرتبه‌ی ضرایب این معادله وجود نخواهد داشت. برای حالت تراکم‌پذیر (اعدادی هم‌مرتبه با C_1+C_2) نیز اعتبار فرمول‌بندی حالت تقریباً تراکم‌ناپذیر کاهش می‌باید. در این حالت شیوه‌ی محاسبه‌ی فشار هیدرواستاتیک و اعمال قید تراکم‌ناپذیری و در نتیجه رابطه‌ی

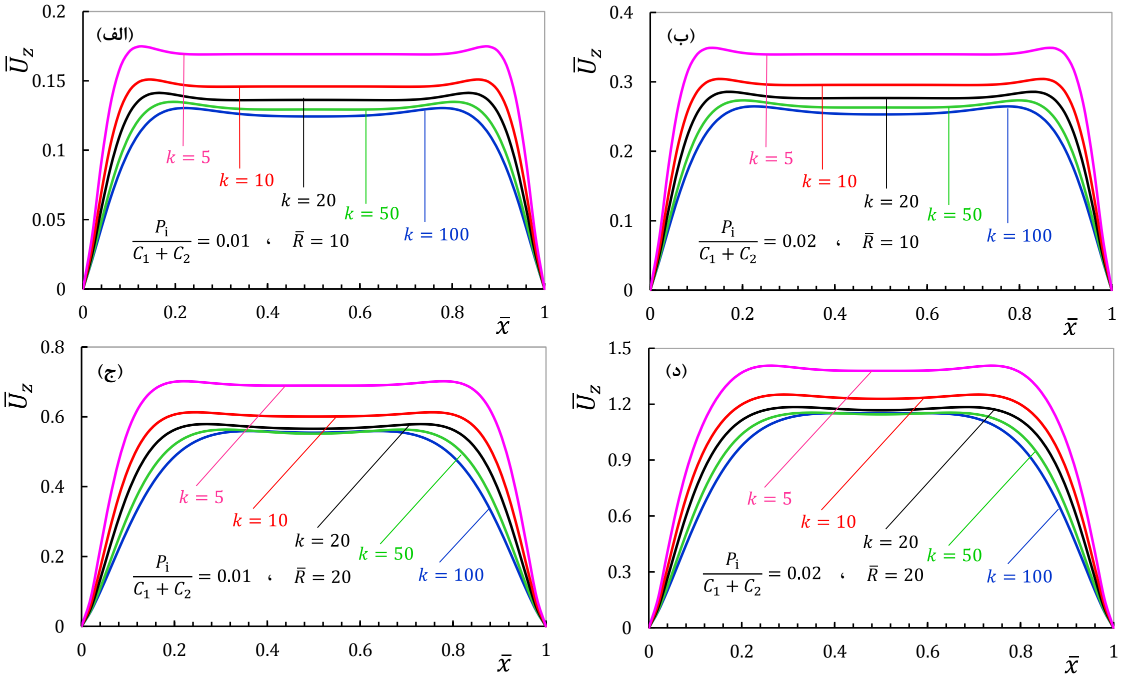
تابع انرژی کرنشی و معادلات ساختاری تغییر می‌کنند. به همین دلیل مشاهده می‌شود که با کاهش نسبت $P_i/(C_1+C_2)$ در اثر افزایش C_1+C_2، انطباق نتایج مدل‌سازی عددی با حل تحلیلی در حالت تقریباً تراکم‌ناپذیر در مرتبه‌های بالاتر تراکم‌ناپذیری متناسب با C_1+C_2 مشاهده می‌شود. در قسمت (الف) این محدوده‌ی کاهش درصد اختلاف به سمت اعداد بزرگ‌تر از ۱۰ مگاپاسکال و در قسمت (ب) به سمت اعداد کمتر از ۱۰ مگاپاسکال ایجاد می‌شود. در قسمت (ج) که تغییرات نسبت $P_i/(C_1+C_2)$ به دو قسمت (الف) و (ب) بزرگ‌تر درنظر گرفته شده است، مرتبه‌ی k متناظر با کمترین اختلاف از ۵ تا ۲۰ مگاپاسکال با کاهش نسبت بار به مقاومت تغییر می‌کند.



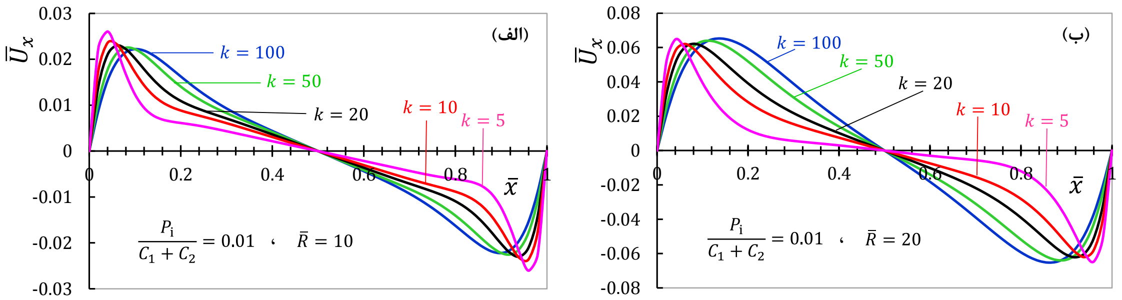
شکل ۴-۳ اثر متغیر k بر درصد اختلاف جابه‌جایی شعاعی حاصل از حل تحلیلی و عددی برای مقادیر مختلف $\bar{R}$ و $P_i/(C_1+C_2)$

شکل‌های ۴-۴ و ۴-۵ اثر متغیر تراکم‌ناپذیری بر جابه‌جایی‌های شعاعی و محوری پوسته‌ی استوانه-ای را در راستای طولی نشان می‌دهند. رفتار جابه‌جایی شعاعی در لایه‌های مختلف با لایه‌ی میانی مشابه است؛ در حالی که در جابه‌جایی محوری متفاوت هستند و مقدار حداکثر آن در لایه‌ی داخلی ایجاد می‌شود. بنابراین جابه‌جایی شعاعی در لایه‌ی میانی و جابه‌جایی محوری در لایه‌ی داخلی رسم شده‌اند.

مشاهده می‌شود که مطابق انتظار با افزایش k و نازک‌تر شدن استوانه (افزایش $\bar{R}$)، محدوده‌ی اثر شرایط مرزی بر جابه‌جایی‌ها و در نتیجه اثر حل داخلی نسبت به خارجی افزایش می‌یابد. با افزایش ضریب تراکم‌ناپذیری ضمن کاهش مقدار جابه‌جایی شعاعی، حساسیت پوسته نسبت به میزان تراکم-ناپذیری نیز کمتر می‌شود؛ در حالی که بر کاهش حداکثر جابه‌جایی محوری اثر محسوسی نمی‌گذارد.



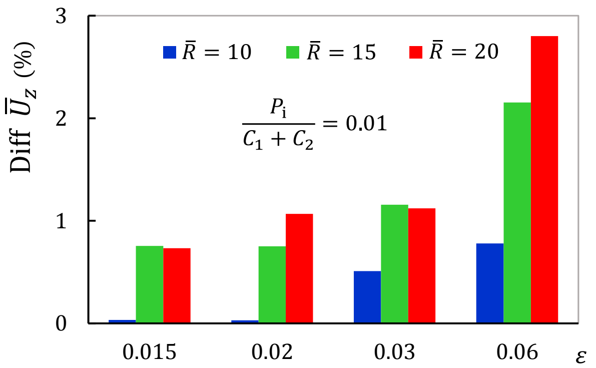
شکل ۴-۴ اثر متغیر k بر جابه‌جایی شعاعی در لایه‌ی میانی پوسته‌ی استوانه‌ای



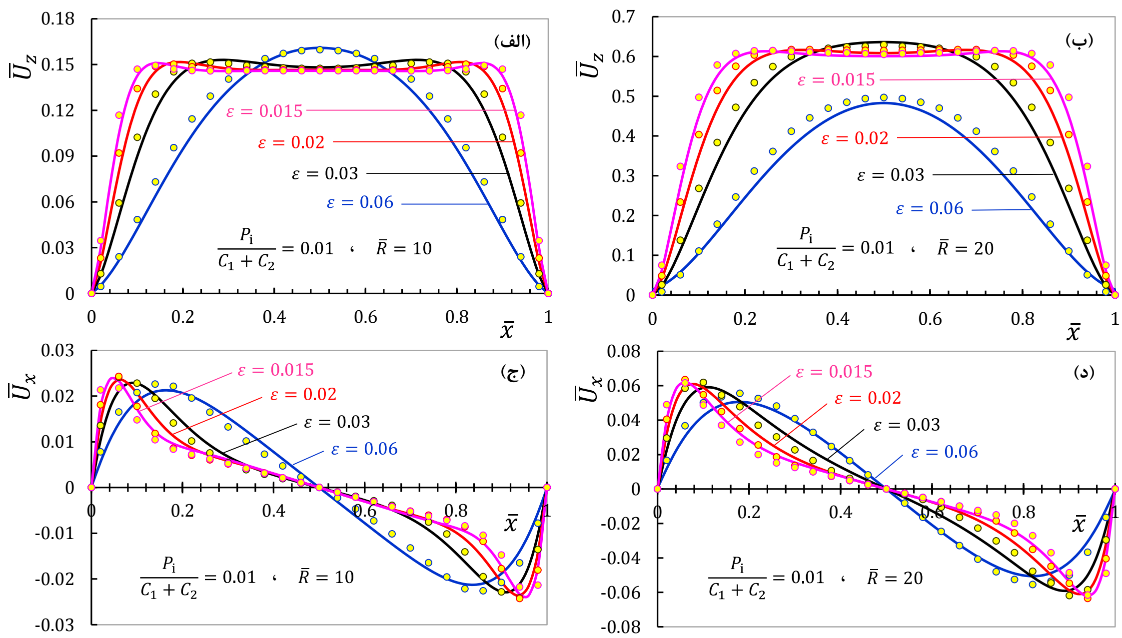
شکل ۴-۵ اثر متغیر k بر جابه‌جایی محوری در لایه‌ی داخلی پوسته‌ی استوانه‌ای

به منظور بررسی اثر تغییر طول پوسته بر نتایج حل تحلیلی، درصد اختلاف جابه‌جایی شعاعی حاصل از دو روش حل تحلیلی و عددی برای مقادیر مختلف ε در وسط لایه‌ی میانی در شکل ۴-۶ نشان داده شده است. در استوانه با ضخامت ثابت، متغیر $\varepsilon = h_0/L$ می‌تواند معیاری از بلندی استوانه باشد؛ هر چه ε بزرگ‌تر باشد، استوانه کوتاه‌تر خواهد بود. شکل ۴-۷ اثر تغییر طول را بر

جابه‌جایی‌های شعاعی و محوری پوسته‌ی استوانه‌ای حاصل از دو روش تحلیل و عددی در راستای طولی نشان می‌دهند. با افزایش ε (کاهش طول) درصد اختلاف نتایج دو روش افزایش می‌یابد. دلیل کاهش اندک دقت برای استوانه‌های دارای ε بزرگ‌تر این است که محدوده‌ی اعتبار حل‌های داخلی و خارجی با کاهش طول تغییر می‌کنند. افزایش سهم حل داخلی نسبت به خارجی و نازک‌تر شدن پوسته سبب تشدید رفتار غیرخطی آن و افزایش اندک اختلاف دو روش حل به دلیل کاهش دقت MAE می‌شود.



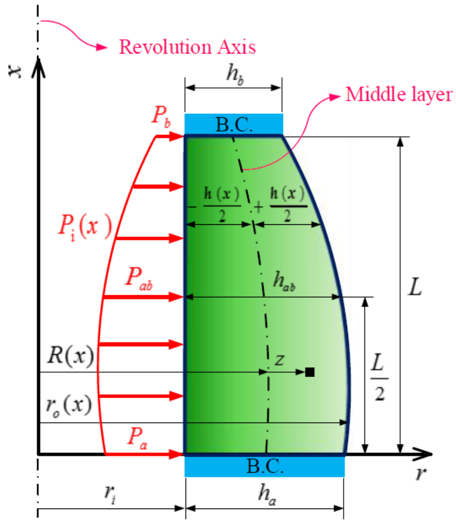
شکل ۴-۶ اثر متغیر ε بر درصد اختلاف جابه‌جایی شعاعی
حاصل از حل تحلیلی و عددی برای مقادیر مختلف $\bar{R}$



شکل ۴-۷ اثر متغیر ε بر (الف و ب) جابه‌جایی شعاعی در لایه‌ی میانی
و (ج و د) جابه‌جایی محوری در لایه‌ی داخلی پوسته‌ی استوانه‌ای

۴-۳ استوانه‌های جدار متغیرخارجی تحت فشار داخلی

در این بخش استوانه‌های جدار متغیر تحت فشار داخلی با تغییرات جدار خارجی آنها مورد بررسی قرار می‌گیرند. در شکل ۴-۸ هندسه، بارگذاری و شرایط مرزی در مقطع پوسته نشان داده شده است. در این قسمت r_{io} برابر مقدار ثابت r_{i} است.



شکل ۴-۸ متغیرهای هندسی، بارگذاری و شرایط مرزی در مقطع پوسته‌ی استوانه‌ای ضخیم جدار متغیر

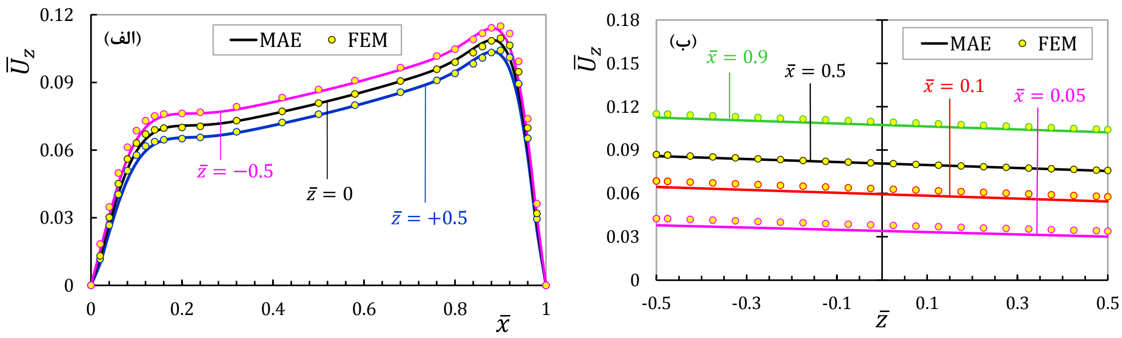
۴-۳-۱ استوانه‌ی همگن

در شکل‌های ۴-۹ تا ۴-۱۱، جابه‌جایی‌ها و تنش‌ها در استوانه‌ی جدار متغیر همگن تحت فشار داخلی ثابت ۸ کیلو پاسکال با تغییرات ضخامت بر اساس تابع خطی زیر رسم شده است.

$$h(\bar{x}) = h_{\mathrm{a}} - (h_{\mathrm{a}} - h_{\mathrm{b}})\bar{x} \qquad (۴-۱)$$

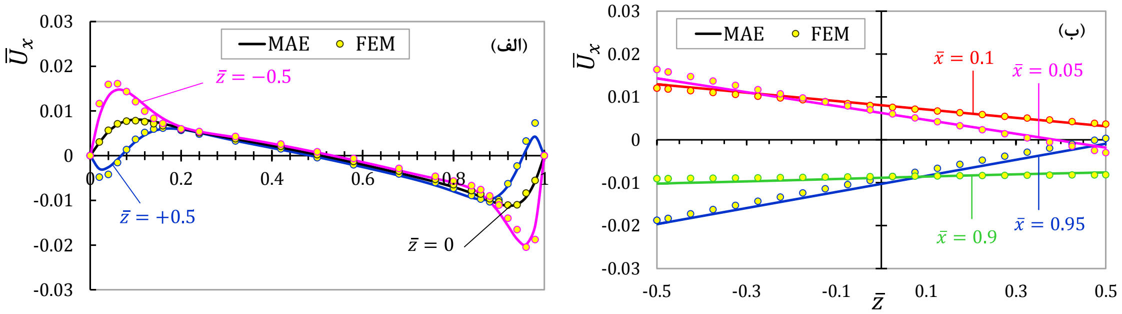
در این رابطه $h_{\mathrm{a}} = 12\,\mathrm{mm}$ و $h_{\mathrm{b}} = 6\,\mathrm{mm}$ هستند. شعاع داخلی و طول نیز برابر ۴۷ و ۴۰۰ میلیمتر درنظر گرفته شده است. ثابت‌های ماده‌ی پوسته مطابق $\mathrm{MC_9}$ فرض شده است. با توجه به ثابت‌بودن فشار داخلی و نازک‌تر شدن جداره در اطراف مرز $\bar{x} = 1$، مقادیر جابه‌جایی و تنش به سمت این مرز در حال افزایش است. بر اساس قسمت (ب) شکل‌های ۴-۹ و ۴-۱۰، جابه‌جایی‌ها دارای تغییرات خطی در راستای ضخامت استوانه‌ی جدار متغیر هستند. به طور عمومی برای پوسته‌های جدار ضخیم که

فقط تحت بارگذاری فشاری قرار گرفته باشند، درنظر گرفتن توزیع خطی طبق نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل مناسب خواهد بود. در پوسته‌های دوار و یا تحت تغییرات دمایی، نیاز به توابعی با مرتبه‌ی بالاتر به منظور تحلیل دقیق رفتار پوسته وجود دارد. به خصوص در توزیع تنش‌ها FSDT در بارگذاری‌های اشاره‌شده فاقد قابلیت پیش‌بینی صحیح رفتار پوسته هستند. از شکل ۴-۱۱ می‌توان دریافت که نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل حتی در بارگذاری‌های فشاری برای مسائل غیرخطی نیز نمی‌تواند پیش‌بینی بسیار دقیقی از تنش‌ها ارائه دهد. محاسبه‌ی غیرمستقیم تنش‌ها از مؤلفه‌های جابه‌جایی عامل اصلی افزایش خطا است. در استوانه تحت فشار داخلی، همواره لایه‌ی داخلی دارای مقادیر بالاتر تغییر شکل و تنش بوده و به عنوان لایه‌ی بحرانی جهت طراحی پوسته درنظر گرفته می‌شود. همانطور که در قسمت‌های قبل اشاره شد، انطباق نتایج دو روش حل برای مقادیر متوسط بارگذاری در ضخامت‌های کوچک‌تر بیشتر است. تغییرات جابه‌جایی و تنش در محدوده‌ی حل خارجی یکنواخت و در محدوده‌ی دو مرز تحت تاثیر شرایط مرزی دارای قله‌هایی[1] با تغییرات زیاد است. وجود تنش‌های برشی در اطراف مرزها سبب غیریکنواختی شدیدتر در مقادیر جابه‌جایی محوری کوچک‌تر نسبت به جابه‌جایی شعاعی می‌شود. با توجه به شکل ۴-۱۱ (ب)، تقریباً تمام بخش‌های استوانه به غیر از نقاطی از لایه‌خارجی در اطراف مرزها تحت تنش کششی محیطی هستند. فشار هیدرواستاتیک و تنش محوری در استوانه‌های تحت فشار داخلی و جدار خارجی متغیر نیز دارای رفتار مشابهی هستند.

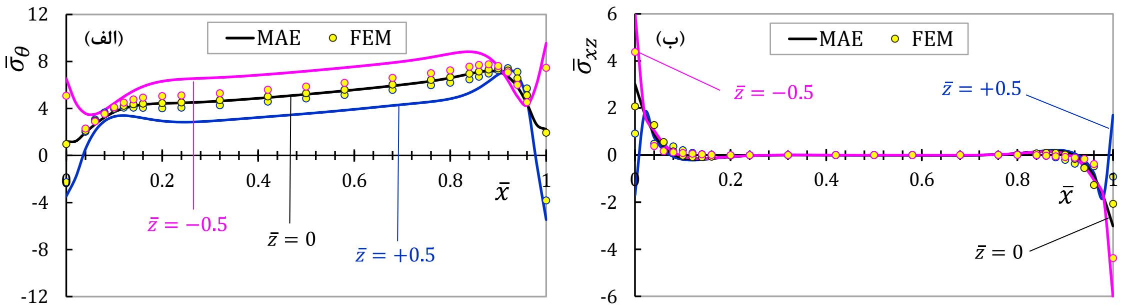


شکل ۴-۹ توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد در راستای (الف) طولی (ب) شعاعی در لایه‌های مختلف

1. Peak



شکل ۴-۱۰ توزیع جابه‌جایی محوری بی‌بعد در راستای (الف) طولی (ب) شعاعی در لایه‌های مختلف



شکل ۴-۱۱ توزیع تنش‌های کوشی بی‌بعد (الف) محیطی (ب) برشی در راستای طولی برای لایه‌های مختلف

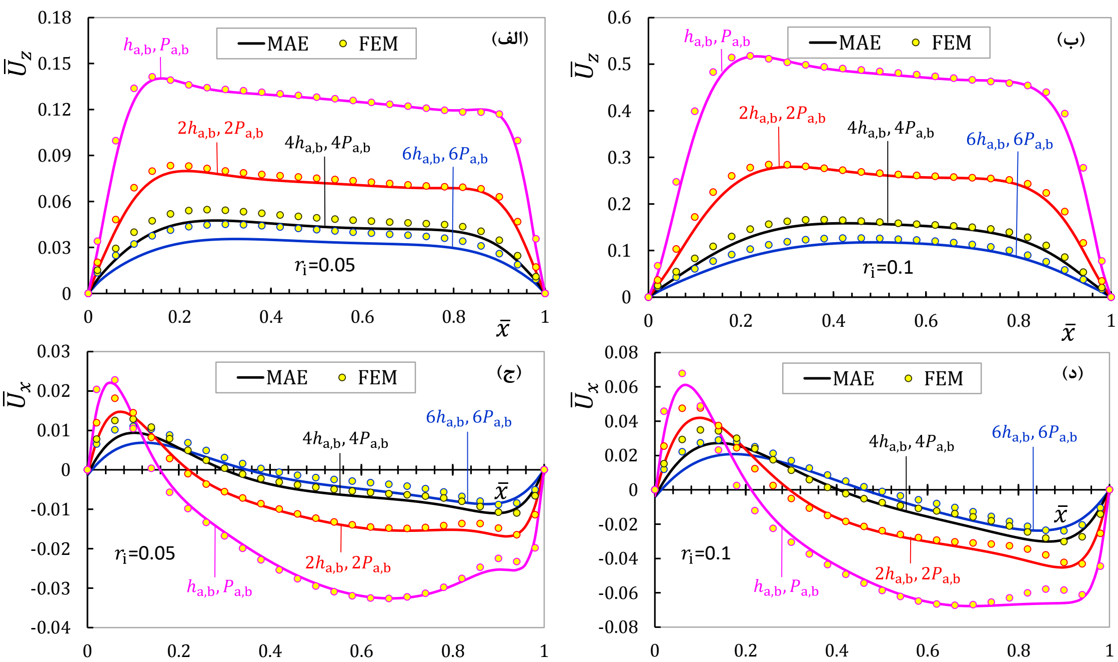
شکل‌های ۴-۱۲ و ۴-۱۳ اثر ضخامت، شعاع داخلی و بارگذاری را بر جابه‌جایی‌های شعاعی و محوری پوسته‌ی استوانه‌ای همگن جدار متغیر تحت فشار متغیر در لایه داخلی نشان می‌دهند. جدار پوسته‌ی مورد مطالعه در این بخش به‌صورت خطی طبق رابطه‌ی (۴-۱) و فشار آن به‌صورت خطی طبق رابطه‌ی زیر تغییر می‌کند.

$$P_i(\bar{x}) = P_a - \left(P_a - P_b\right)\bar{x} \qquad (۴\text{-}۲)$$

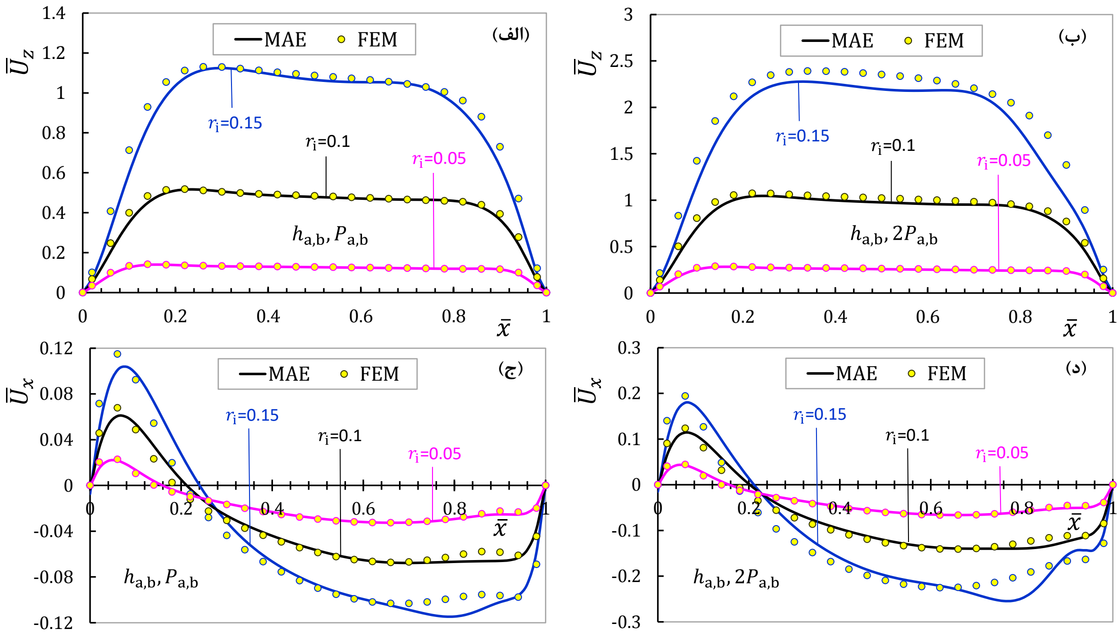
در این شکل‌ها، ثابت‌های مادّه‌ی پوسته مطابق MC_9 درنظر گرفته شده است. همچنین عوامل هندسی به‌صورت $h_a = 10\,\mathrm{mm}$، $h_b = 5\,\mathrm{mm}$ و $L = 400\,\mathrm{mm}$ و عوامل بارگذاری به‌شکل $P_a = 10\,\mathrm{kPa}$ ، $P_b = 5\,\mathrm{kPa}$ فرض شده‌اند. طبق شکل ۴-۱۲ مشاهده می‌شود که میزان افزایش ضخامت و فشار به سمت مرز چپ به شکلی است که اثر افزایش فشار غالب بوده و جابه‌جایی شعاعی در اطراف این مرز دارای مقدار بزرگ‌تری است. در این حالت با افزایش متناسب ضخامت و فشار در یک استوانه دارای جدار خارجی و فشار داخلی متغیرخطی به‌ازای شعاع داخلی و نسبت h_a/h_b ثابت، با وجود کاهش

مرتبـه‌ی جـابـه‌جایی‌ها، اختلاف نتایج دو روش حل کاهش می‌یابد. دلیل این افزایش اختلاف، کاهش دقت FSDT در اثر افزایش ضـخامت پوسـته است. از طرفی افزایش نسبت بارگذاری به ثابت‌های مادّه باعث تشدید رفتار غیرخطی پوسته و افزایش ناحیه‌ی تحت تاثیر شرایط مرزی می‌شود.

در اسـتوانه با جدار متغیر خطی ثابت، افزایش شـعاع داخلی سـبب افزایش قابل توجه مقادیر جابه‌جایی می‌شود. به بیان دیگر مقایسـه‌ی قسـمت (الف و ج) با قسمت (ب و د) شکل ۴-۱۳ نشان می‌دهد که افزایش شـعاع داخلی نسـبت به بارگذاری اثر بیشتری بر جابه‌جایی‌ها می‌گذارد. با افزایش نسـبت شـعاع داخلی به میانگین ضـخامت در طول پوسـته که عددی ثابت درنظر گرفته شده است و افزایش بارگذاری، رفتار غیرخطی پوسـته افزایش و دقت نظریه‌ی اغتشـاشات در حل معادلات کاهش می‌یابد. حداکثر اختلاف جابه‌جایی شـعاعی محاسبه شده از دو روش حل در قسمت (الف و ب) شکل ۴-۱۳ در حدود ۶ درصد است.



شکل ۴-۱۲ اثر ضخامت و فشار بر (الف و ب) جابه‌جایی شعاعی و (ج و د) جابه‌جایی محوری در لایه‌ی داخلی پوسته‌ی استوانه‌ای جدار و فشار متغیر خطی



شکل ۴-۱۳ اثر شعاع داخلی بر (الف و ب) جابه‌جایی شعاعی و (ج و د) جابه‌جایی محوری
در لایه‌ی داخلی پوسته‌ی استوانه‌ای جدار و فشار متغیر خطی

۴-۳-۲ استوانه‌ی ناهمگن

در این قسمت اثر ناهمگنی بر پوسته‌ی استوانه‌ای جدار متغیر ناهمگن تحت فشار داخلی مطابق با هندسه و شرایط مرزی شکل ۴-۸ مطالعه خواهد شد. همچنین قابلیت و دقت حل ارائه‌شده در مدل‌سازی توابع غیرخطی فشار و ضخامت و اثر این دو عامل بر جابه‌جایی، تنش و فشار هیدرواستاتیک استوانه مورد بررسی قرار می‌گیرد. مشخصات توابع ضخامت و فشار مختلف که در این قسمت به عنوان مطالعه‌ی موردی از آنها استفاده شده است، در جدول‌های ۴-۴ و ۴-۵ نشان داده شده است. طول استوانه و شعاع داخلی آن به منظور امکان مقایسه‌ی آن با نتایج بخش قبلی به ترتیب برابر ۴۰۰ و ۴۷ میلی‌متر درنظر گرفته شده است. خواص شعاع داخلی استوانه‌ی جدارمتغیر نیز طبق جدول ۴-۱ برابر MC_9 فرض شده است. در این قسمت تغییرات خواص به‌صورت تابع توانی مطابق روابط (۲-۳۹) در راستای شعاعی پوسته تغییر می‌کنند. مدل‌سازی عددی متناظر پوسته‌ی ناهمگن در نرم‌افزار اجزای محدود انسیس بر اساس توضیحات قسمت ۳-۶ انجام شده است.

از آنجا که در این پژوهش، مخازن لاستیکی تحت فشار ساخته شده از مواد هایپرالاستیک تقریباً تراکم‌ناپذیر مورد مطالعه قرار گرفته‌اند، از ترکیب نظریه‌ی تغییر شکل برشی و نظریه‌ی اغتشاشات (بسط مجانبی تطبیق‌یافته) به ترتیب برای استخراج و حل معادلات پوسته‌های ساخته شده از دیگر مواد هایپرالاستیک نیز می‌توان استفاده کرد. از جمله پرکاربردترین پوسته‌های هایپرالاستیک تقریباً تراکم‌ناپذیر می‌توان به عروق خونی اشاره کرد. در واقع ارتقاء روش ارائه‌شده در این پژوهش می‌تواند با تحلیل و مدل‌سازی اتساع عروق، نتایج مفیدی را در اختیار دانشمندان در زمینه‌ی پارگی و اطلاعات پیش از عمل‌های جراحی بر اساس پیش‌بینی قطر حداکثر و یا تنش ایجاد شده در شریان‌ها قرار دهد. در سال‌های اخیر رویکرد استفاده از عروق خونی مصنوعی ساخته‌شده از مواد الاستومر مخصوص و اندام عروقی مصنوعی در پیوندهای شریانی به شدت افزایش یافته است. شکل این عروق مصنوعی بر خلاف شریان‌های واقعی بسیار نزدیک‌تر به پوسته‌های استوانه‌ای و یا مخروطی جدار متغیر ایده‌آل هستند؛ بنابراین روش جاری می‌تواند در مدل‌سازی، تحلیل و طراحی این سازه‌ها از موادی منطبق بر مدل‌های استفاده شده در آنها به‌کار گرفته شود [۹۳]. اگرچه مدل‌های نئوهوکین و مونی-ریولین به طور وسیعی در مدل‌سازی زیست مواد در پژوهش‌های مختلف به‌کار گرفته شده‌اند [۱۱۵،۹۱]، اما همانطور که در فصل اوّل اشاره شد، مدل‌های واقع‌گرایانه‌تر عروق خونی دارای یک بخش نئوهوکین همسانگرد و یک بخش ناهمسانگرد به‌شکل نمایی بر اساس پایاهای عددی بالاتر از سه مورد در نظر گرفته شده، هستند. بنابراین مطالعه‌ی موردی استفاده شده برای تابع فشار در محدوده‌ی تغییر $5\,\mathrm{kPa}(40\,\mathrm{mmHg})-13\,\mathrm{kPa}(100\,\mathrm{mmHg})$ که میانگین فشار عروق نقاط مختلف بدن موجودات زنده است، درنظر گرفته شده است. $100\,\mathrm{mmHg}$ میانگین فشار انبساط و انقباض عضلانی[1] قلب است و $40\,\mathrm{mmHg}$ فشار خون بسیار پایین[2] عروق است [۱۱۶،۸۸]. سعی شده است تا نسبت شعاعی داخلی به میانگین ضخامت در طول پوسته، محدوده‌ی کارهای گذشته بر روی لاستیک‌ها و عروق خونی را بر

1. Mean of systolic/diastolic pressure
2. Hypotension pressure

اساس مراجع مختلف پوشش دهد [۱۱۷،۱۱۶،۷۱]. در فصل نتیجه‌گیری بیشتر به این موضوع پرداخته خواهد شد.

جدول ۴-۴ مشخصات توابع فشار متغیر

شناسه‌ی تابع فشار	روابط تابع فشار متغیر	ثابت‌های بارگذاری
P_{i0}	$P_i(\bar{x}) = P_{i0} = \text{constant}$	$P_{i0} = 9\ \text{kPa}$
P_{i1}	$P_i(\bar{x}) = P_a - (P_a - P_b)\bar{x}$	$P_a = 13\ \text{kPa},\ P_b = 5\ \text{kPa}$
P_{i2}	$P_i(\bar{x}) = P_a - (P_a - P_b)\bar{x}^2$	$P_a = 13\ \text{kPa},\ P_b = 5\ \text{kPa}$
P_{i3}	$P_i(\bar{x}) = P_a - (P_a - P_b)\bar{x}^3$	$P_a = 13\ \text{kPa},\ P_b = 5\ \text{kPa}$
P_{i4}	$P_i(\bar{x}) = P_a - 4(P_a - P_{ab})(\bar{x} - \bar{x}^2)$	$P_a = P_b = 5\ \text{kPa},\ P_{ab} = 13\ \text{kPa}$
P_{i5}	$P_i(\bar{x}) = P_a - (P_a - P_{ab})\sin(\pi\bar{x})$	$P_a = P_b = 13\ \text{kPa},\ P_{ab} = 5\ \text{kPa}$

جدول ۴-۵ مشخصات توابع ضخامت متغیر

شناسه‌ی تابع ضخامت	روابط تابع ضخامت متغیر	ثابت‌های هندسی
h_0	$h(\bar{x}) = h_0 = \text{constant}$	$h_0 = 6\ \text{mm}$
h_1	$h(\bar{x}) = h_a - (h_a - h_b)\bar{x}$	$h_a = 12\ \text{mm},\ h_b = 6\ \text{mm}$
h_2	$h(\bar{x}) = h_a - (h_a - h_b)\bar{x}^2$	$h_a = 12\ \text{mm},\ h_b = 6\ \text{mm}$
h_3	$h(\bar{x}) = h_a - (h_a - h_b)\bar{x}^3$	$h_a = 12\ \text{mm},\ h_b = 6\ \text{mm}$
h_4	$h(\bar{x}) = h_a - 4(h_a - h_{ab})(\bar{x} - \bar{x}^2)$	$h_a = h_b = 6\ \text{mm},\ h_{ab} = 12\ \text{mm}$
h_5	$h(\bar{x}) = h_a - (h_a - h_{ab})\sin(\pi\bar{x})$	$h_a = h_b = 12\ \text{mm},\ h_{ab} = 6\ \text{mm}$

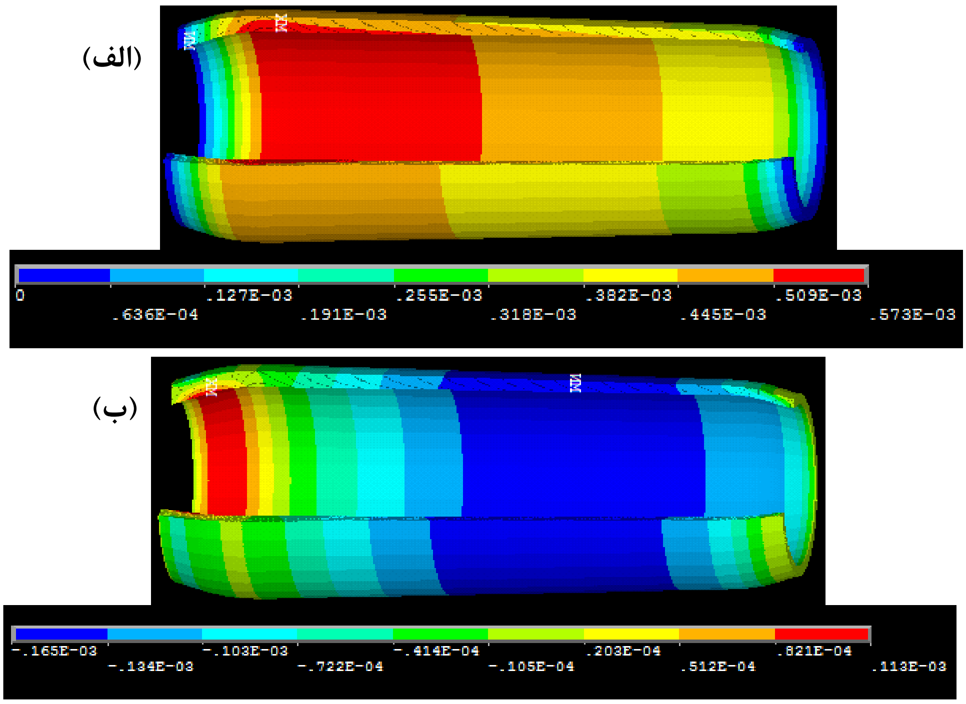
به منظور نمایش توزیع تنش و جابه‌جایی در استوانه‌ی جدار متغیر ناهمگن هایپرالاستیک تحت فشار متغیر، کاهش خطی ضخامت متناسب با تابع فشار خطی با افزایش $\bar{x}$ درنظر گرفته شده است. ثابت ناهمگنی مادّه‌ی متغیر تابعی برابر $n = 2$ فرض شده است. در شکل ۴-۱۴، نمایش سه‌بعدی جابه‌جایی‌های شعاعی و محوری حاصل از روش اجزای محدود به کمک نرم‌افزار انسیس در گسترش ۳/۴ مقطع پوسته در جهت محیطی نمایش داده شده است. در شکل ۴-۱۵ نیز توزیع بی‌بعد

جابه‌جایی‌های شـعاعی و محوری در لایه‌های مختلف در راسـتای طولی حاصل از دو روش حل آورده شـده است. به دلیل اعمال بار فشاری در راستای شعاعی، $\bar{U}_x < \bar{U}_z$ است. با توجه به مقادیر بزرگ‌تر جـابـه‌جایی‌ها در اطراف مرز $\bar{x} = 0$ می‌توان نتیجه گرفت که افزایش ضـــخامت در اطراف این مرز به اندازه‌ای نبوده اسـت که بتواند افزایش فشار اطراف آن را جبران کند. بر اساس قسمت (ب) شکل‌های ۴-۱۴ و ۴-۱۵، در نقاط دور از مرز جابه‌جایی محوری تقریباً مسـتقل از راسـتای شـعاعی اسـت. در اطراف فشـــار حداکثر ($\bar{x} = 0$)، پوســـته تمایل به حداکثر جابه‌جایی مثبت محوری دارد؛ اما به دلیل شرایط مرزی گیردار، این مقدار با فاصله کمی از این مرز مشاهده می‌شود. این تمایل به حداکثر مقدار جابه‌جایی محوری به دلیل ایجاد حداکثر جابه‌جایی شـعاعی در اثر فشـار زیادتر اطراف این مرز است. تغییرات جابه‌جایی در این بخش از سایر نقاط پوسته شدیدتر است. با افزایش فاصله‌ی طولی $\bar{x}$، نقاط مختلف پوسـته تمایل به جابه‌جایی در جهت طولی به سـمت بخش اشـاره‌شده با حداکثر تغییر شکل مثبت را دارند که این مقادیر در خلاف محور طولی بوده و منفی هستند. مجدداً با نزدیک‌شدن به مرز راسـت، جابه‌جایی‌ها به دلیل شـرایط مرزی گیردار به سمت صفر میل می‌کنند. به دلیل این که طول این قسـمت از پوسـته نسبت به بخش دارای جابه‌جایی مثبت بزرگ‌تر است، حداکثر مقدار جابه‌جایی منفی از مقدار مثبت بیشـــتر اســـت. با فاصـــله از لایه‌ی داخلی در تماس با بار فشـــاری، این تغییر یکنواخت‌تر می‌شـود. در واقع جابه‌جایی محوری نقاط پوسـته، واکنشـی به حداکثر جابه‌جایی محوری مثبت اطراف فشـار حداکثر بوده که خود این جابه‌جایی نیز تابعی از تغییر شکل شعاعی حداکثر ایجاد شـده در اطراف این نقاط تحت بار شـعاعی اسـت. هر چه مؤلفه‌های فشـار در راستای طولی نسبت به راستای شعاعی افزایش یابد (در بخش مخروط بررسی خواهد شد)، مقادیر جابه‌جایی محوری بزرگ‌تر و نقاط حداکثر جابه‌جایی محوری مثبت و منفی در نقاط دورتری از مرزها ایجاد خواهند شـــد. هر چه مؤلفه‌ی فشار شعاعی هم افزایش پیدا کند، قله‌ی ایجاد شده در جابه‌جایی شعاعی به سمت دور شدن از مرزها تمایل پیدا می‌کند. بنابراین افزایش مؤلفه‌های فشـار در دو راستا و نازکتر شدن پوسته، باعث افزایش سهم حل داخلی تحت تاثیر مرزها و رفتار غیرخطی پوسته می‌شود.

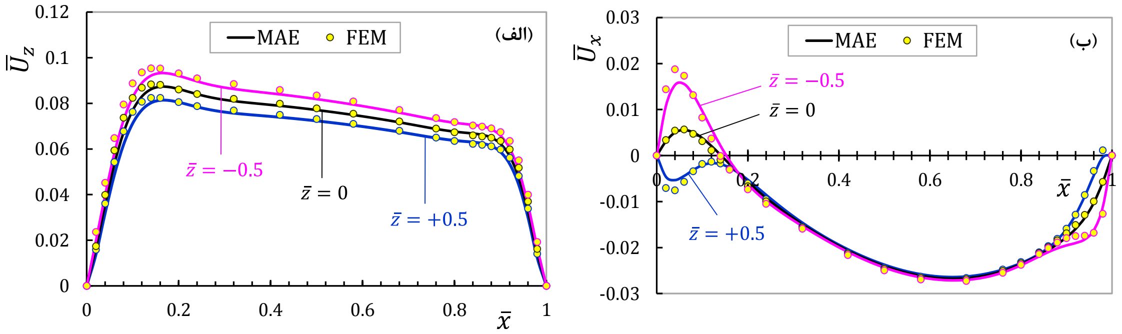
در شـــکل ۴-۱۶ مقادیر بی‌بعد تنش‌های کوشـــی محیطی، محوری و برشـــی و همچنین فشـــار هیدرواســـتاتیک در راســـتای طولی لایه‌های مختلف پوســـته رســـم شده است. در بعضی مراجع از فشار هیدرواستاتیک به عنوان میانگین تنش‌های اصلی ایجادشده در سازه نیز نام برده می‌شود. در مطالعه‌ی موردی این قســـمت، تنش‌های طولی در اطراف مرزها دارای حداکثر مقدار بوده و تنش‌های محیطی دارای مرتبه‌ی کمتری هستند. تنش برشی با مرتبه‌ی کمتری نیز در اطراف مرزها تحت شرایط مرزی گیردار ایجاد می‌شـــود. در نقاط دور از مرز، تنش‌های محیطی به دلیل جابه‌جایی‌های شـــعاعی بزرگ نسبت به تنش‌های محوری دارای مقادیر بزرگ‌تر هستند. تنش محیطی تحت تاثیر جابه‌جایی شعاعی به طور مشـابه با افزایش $\overline{x}$ کاهش می‌یابد. مشـاهده می‌شـود که تنش‌های محوری، محیطی و فشـار هیدرواســـتاتیک در اکثر نقاط پوســـته دارای مقادیر مثبت هســـتند. به دلیل تغییر شکل مثبت و بزرگ پوســـته در جهت شـعاعی، المان‌های پوسته در راستای طولی و محیطی تحت کشش قرار می‌گیرند. با دور شـــدن از لایه‌ی داخلی و کاهش جابه‌جایی شـــعاعی در اطراف مرزها، تحت تاثیر شـــرایط گیردار تنش‌ها از کشـــشـــی به فشـــاری تغییر پیدا می‌کنند. با درنظر گرفتن رابطه‌ی (۲-۲۷) و توزیع فشـــار هیدرواســـتاتیک، بازه‌ی تغییر ژاکوبین تغییر شکل به‌صورت $0.993 < J < 1.010$ خواهد بود که در واقع نشـــان‌دهنده‌ی نزدیک‌بودن حالت تقریباً تراکم‌ناپذیر به حالت دقیقاً تراکم‌ناپذیر با قید $J \approx 1$ اســـت. اثر افزایش مرتبه‌ی بسط مجانبی تطبیق‌یافته بر توزیع تنش شعاعی در شکل ۴-۱۷ نشان داده شده است. همانطور که در شـــکل ۴-۲ نیز نشـــان داده شـــد، بســـط اغتشـــاشـــی مرتبه‌ی اوّل در تحلیل‌های خطی می‌تواند مناسب باشد؛ اما در تحلیل‌های غیرخطی دارای تغییر شکل‌های بزرگ باید از بسط اغتشاشی تا مرتبه‌ی دوّم و در صـورت نیاز مرتبه‌های بالاتر استفاده کرد. شکل‌های ۴-۲ و ۴-۱۷ نشان می‌دهند که افزایش مرتبه‌ی MAE می‌تواند دقت پیش‌بینی رفتار پوسته در جابه‌جایی‌ها و در نتیجه تنش‌ها را بهبود دهد.

مقایســـه‌ی نتایج تحلیلی و عددی این قسمت دقت قابل قبول روش ارائه شده در تحلیل پوسته‌ی ناهمگن را نشـــان می‌دهد. همواره نقاطی که تغییرات ســـریع جابه‌جایی‌ها و تنش‌ها تحت تاثیر شرایط

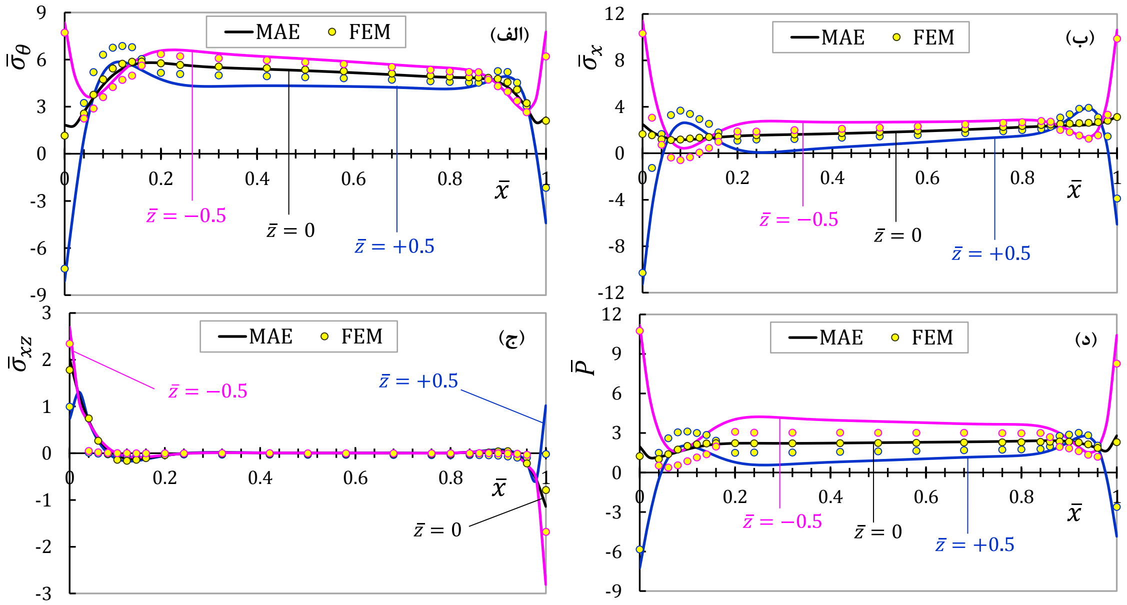
مرزی در اطراف آنها مشاهده می‌شود، مرز تلاقی حل داخلی و خارجی هستند. حداکثر اختلاف بین نتایج دو روش تحلیلی و عددی در این نقاط مشاهده می‌شود. هر چه تغییرات آرام‌تر و یکنواخت‌تر باشد، متغیر سریع انتخاب‌شده در حل‌های داخلی با دقت بیشتری می‌تواند با این تغییرات هماهنگ شود و دقت MAE بیشتر می‌شود. در مورد دقت پیش‌بینی رفتار تنش‌ها توسط نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، در لایه‌های میانی $\bar{u}$ و $\bar{w}$ به تنهایی اثر گذار هستند؛ در حالی که در لایه‌های داخلی و خارجی خطای محاسبه‌ی $\bar{\varphi}$ و $\bar{\psi}$ اضافه می‌شود. تنش‌ها در اطراف دو مرز به خوبی پیش‌بینی می‌شوند، اما دلیل اختلاف نتایج FSDT و FEM در تنش‌ها و فشار هیدرواستاتیک در نقاط میانی لایه‌های داخلی و خارجی پوسته، محاسبه‌ی غیرمستقیم تنش‌ها با رابطه‌ی سینماتیک و ساختاری غیرخطی است که منجر به تشدید خطای اندک موجود در مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی می‌شود.



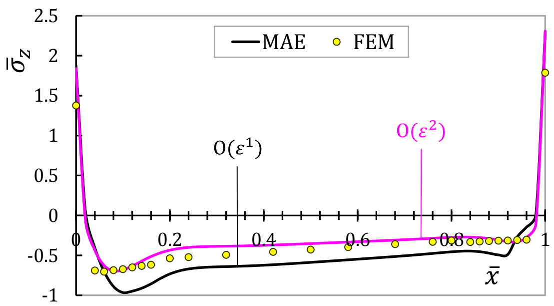
شکل ۴-۱۴ نمایش سه‌بعدی جابه‌جایی (الف) شعاعی (ب) محوری حاصل از مدل‌سازی اجزای محدود در گسترش ۳/۴ مقطع پوسته ($n = 2, P_i(\bar{x}) = P_{i1}, h(\bar{x}) = h_1$)



شکل ۴-۱۵ توزیع بی‌بعد جابه‌جایی (الف) شعاعی (ب) محوری برای لایه‌های مختلف
در راستای طولی استوانه ($n=2,\ P_i(\bar{x})=P_{i1},\ h(\bar{x})=h_1$)



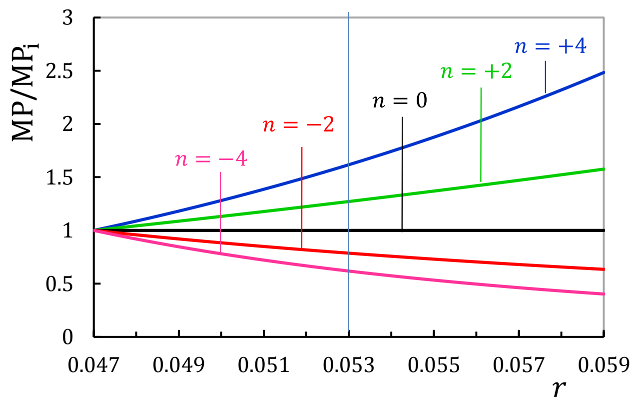
شکل ۴-۱۶ توزیع بی‌بعد تنش‌های کوشی (الف) محیطی (ب) محوری (ج) برشی و (د) فشار هیدرواستاتیک
برای لایه‌های مختلف در راستای طولی استوانه ($n=2,\ P_i(\bar{x})=P_{i1},\ h(\bar{x})=h_1$)



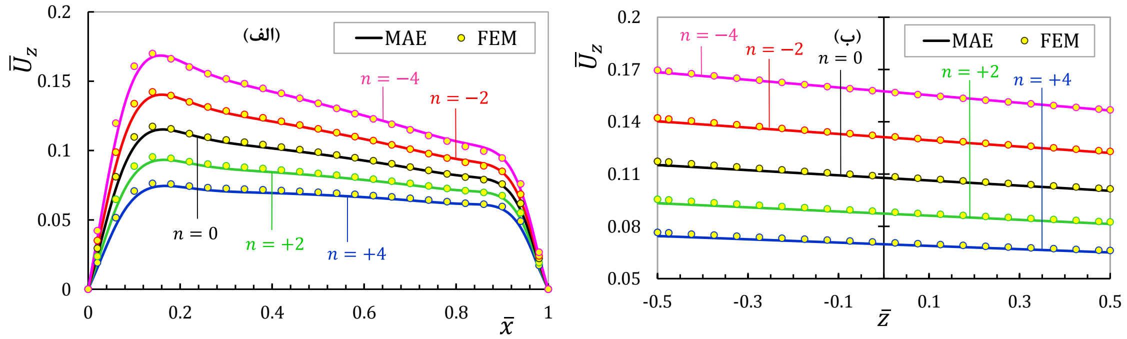
شکل ۴-۱۷ توزیع بی‌بعد تنش کوشی شعاعی در لایه‌ی میانی در راستای طولی استوانه
برای مرتبه‌های مختلف روش MAE ($n=2,\ P_i(\bar{x})=P_{i1},\ h(\bar{x})=h_1$)

توزیع ثابت‌های مادّه در راستای شعاعی طبق توزیع توانی روابط (۲-۳۹) به‌صورت بی‌بعد شده نسبت به خاصیت لایه‌ی داخلی پوسته‌ی مورد مطالعه در این بخش و برای ثابت ناهمگنی دلخواه در شکل ۴-۱۸ نشان داده شده است. همانطور که در فصل ۲ نیز توضیح داده شد، تغییرات خواص مادّه تابعی از شعاع پوسته است. اما با توجه به این که جدار متغیر خارجی پوسته تابعی از راستای طولی است، خاصیت لایه‌ی بیرونی هر مقطع از پوسته بر اساس شعاع لایه‌ی خارجی آن مقطع تعیین می‌شود که تابعی از متغیر طولی است. مقادیر مثبت ناهمگنی سبب افزایش مقاومت مادّه در پوسته نسبت به خاصیت لایه‌ی داخلی آن می‌شود؛ در حالی که مقادیر منفی ناهمگنی سبب کاهش مقاومت مادّه به سمت لایه‌ی بیرونی آن می‌شوند. در ادامه اثر ثابت ناهمگنی بر جابه‌جایی، تنش و فشار هیدرواستاتیک به‌ازای ثابت‌های ناهمگنی مختلف نشان داده شده در شکل ۴-۱۸ بررسی خواهد شد. در قسمت (الف) شکل‌های ۴-۱۹ و ۴-۲۰ به ترتیب توزیع بی‌بعد جابه‌جایی‌های شعاعی و محوری لایه‌ی داخلی پوسته به‌ازای ناهمگنی‌های مختلف در طول آن رسم شده است. در قسمت (ب) دو شکل اشاره شده، توزیع بی‌بعدجابه‌جایی‌ها در مقطعی از طول پوسته دارای حداکثر جابه‌جایی شعاعی و محوری در راستای ضخامت آن مقطع نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که تغییر ناهمگنی از مقادیر مثبت به منفی سبب افزایش مقادیر جابه‌جایی می‌شود. هر چه ثابت ناهمگنی کاهش یابد، در واقع نسبت بار به مقامت مادّه افزایش یافته و ضمن افزایش مرتبه‌ی تغییر شکل‌ها و رفتار غیرخطی پوسته، دقت حل تحلیلی اندکی کاهش می‌یابد. تغییر جابه‌جایی محوری در راستای شعاعی در $\bar{x}=0.65$ بسیار اندک است و تقریباً در این نواحی جابه‌جایی‌ها مستقل از راستای شعاعی هستند. ولی جابه‌جایی‌های شعاعی با توجه به ضخامت پوسته به سمت لایه‌ی خارجی کاهش می‌یابند. در مجموع دقت پیش‌بینی جابه‌جایی‌ها برای ثابت‌های ناهمگنی مختلف بسیار مطلوب است. توزیع مقادیر بی‌بعد تنش کوشی محوری و فشار هیدرواستاتیک در لایه‌ی داخلی پوسته در شکل ۴-۲۱ رسم شده است. مقادیر مثبت n سبب یکنواخت‌تر شدن تنش‌ها در طول جسم می‌شود. در شکل ۴-۲۲ نیز تنش محیطی در دو راستای (الف) طولی در لایه‌ی داخلی و (ب) شعاعی در $\bar{x}=0$ رسم شده است.

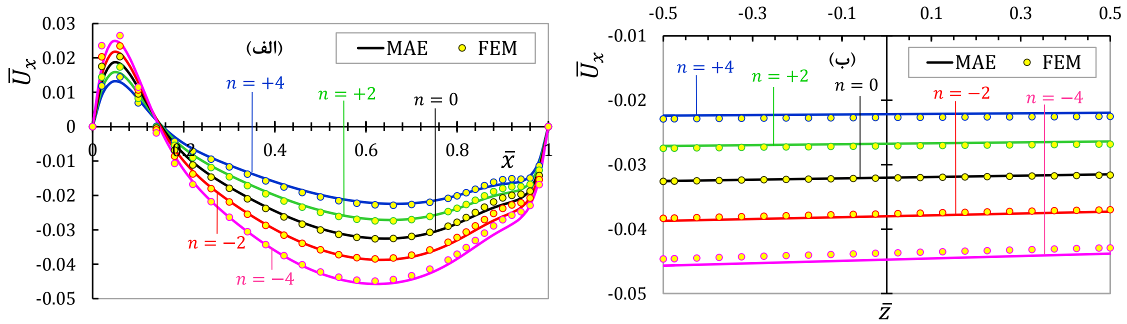
همانطور که اشـاره شد، تغییر ناهمگنی با توجه به تغییر خواص در جهت شعاعی، بیشترین تاثیر را در نقاط دور از مرز روی تنش محیطی می‌گذارد. با توجه به قسمت (الف) شکل ۴-۲۲، تغییر ناهمگنی از مقادیر منفی کوچک‌تر به مقادیر مثبت بزرگ‌تر سبب یکنواخت‌تر شدن تنش محیطی در طول پوسته می‌شـود که مشـابه جابه‌جایی شـعاعی پوسته است. با توجه به قسمت (ب) شکل، این تغییرات سبب کاهش مقادیر مثبت تنش محیطی در لایه‌ی داخلی و افزایش مقادیر منفی این تنش در لایه‌ی خارجی می‌شـود؛ اما در مجموع اثر ناهمگنی مثبت در کاهش تنش‌های کشـشـی بیشـتر از افزایش تنش‌های فشـاری در نیمه‌ی خارجی پوسته است. در خصوص تنش‌های طولی نیز همین رفتار مشاهده می‌شود. به طور کلی مقادیر مثبت ناهمگنی سـبب می‌شـود که پوسـته دارای جابه‌جایی‌های یکنواخت‌تری در راسـتای طولی شـود. تنش‌ها در پوسته با $n > 0$ در اثر افزایش شعاع، به دلیل افزایش ثابت‌های مادّه نسبت به مادّه‌ی همگن، در نیمه‌ی داخلی با تنش مثبت به‌شکل کاهشی و در نیمه‌ی خارجی با تنش فشـاری به‌شکل افزایشی تغییر می‌کنند. در حالتی که تمامی تنش‌ها در جداره‌ی پوسته مثبت باشند، نـاهمگنی‌های مثبت نسـبت به ناهمگنی‌های منفی باعث کاهش تنش‌ها در تمام جداره می‌شـوند. بنابراین nهای مثبت، مقادیر حداکثر جابه‌جایی و تنش را کاهش می‌دهند و برای طراحی پوسـته از نظر کاهش تغییر شکل و تنش مناسب هستند.



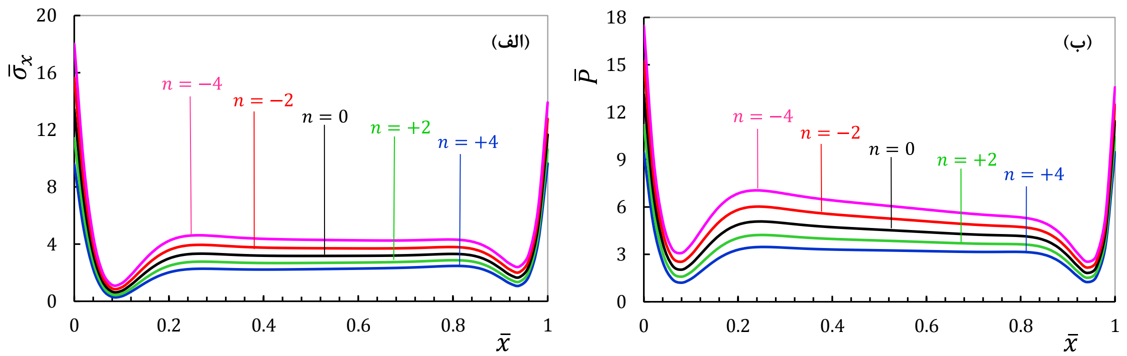
شکل ۴-۱۸ توزیع بی‌بعد توانی ثابت‌های مادّه در راستای شعاعی پوسته برای ثابت‌های ناهمگنی مختلف



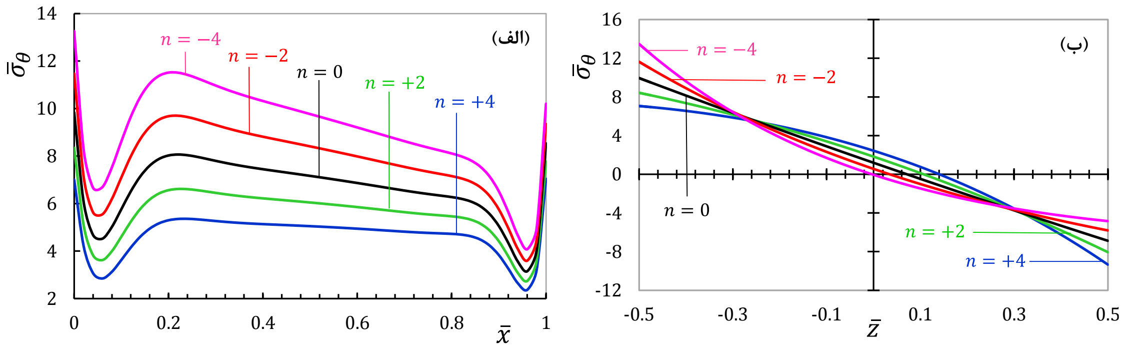
شکل ۴-۱۹ اثر ثابت ناهمگنی بر توزیع بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی حاصل از دو روش حل
در راستای (الف) طولی لایه‌ی داخلی (ب) شعاعی در $\bar{x}=0.15$ $(P_i(\bar{x})=P_{i1},\, h(\bar{x})=h_1)$



شکل ۴-۲۰ اثر ثابت ناهمگنی بر توزیع بی‌بعد جابه‌جایی محوری حاصل از دو روش حل
در راستای (الف) طولی لایه‌ی داخلی (ب) شعاعی در $\bar{x}=0.65$ $(P_i(\bar{x})=P_{i1},\, h(\bar{x})=h_1)$



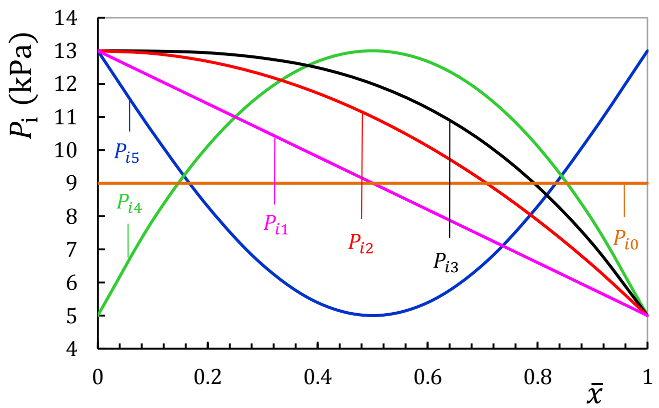
شکل ۴-۲۱ اثر ثابت ناهمگنی بر توزیع بی‌بعد (الف) تنش کوشی محوری (ب) فشار هیدرواستاتیک
در راستای طولی لایه‌ی داخلی پوسته $(P_i(\bar{x})=P_{i1},\, h(\bar{x})=h_1)$



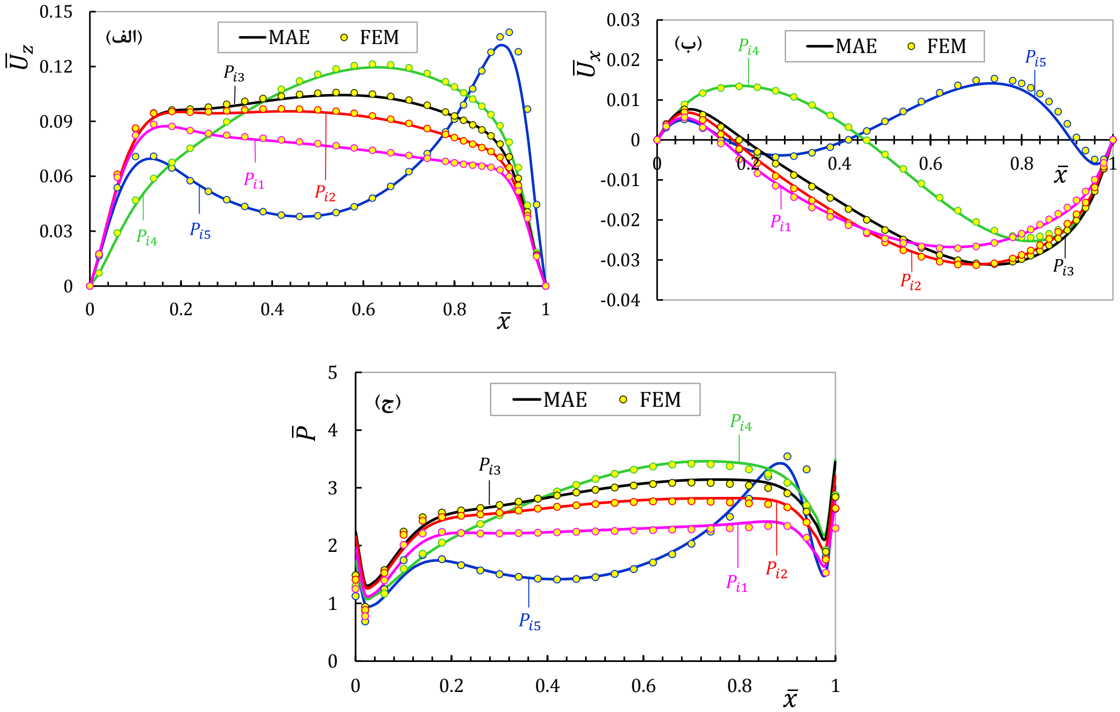
شکل ۴-۲۲ اثر ثابت ناهمگنی بر توزیع بی‌بعد تنش کوشی محیطی در راستای
(الف) طولی لایه‌ی داخلی (ب) شعاعی در $\bar{x}=0$ $(P_{\mathrm{i}}(\bar{x})=P_{\mathrm{i1}},\ h(\bar{x})=h_1)$

به منظور بررسی اثر توابع فشار متغیر غیرخطی بر رفتار پوسته و همچنین نمایش قابلیت و دقت روش ارائه‌شده در تحلیل پوسته‌های ناهمگن تحت فشارهای متغیر غیرخطی، چند نمونه تابع فشار طبق جدول ۴-۴ به پوسته‌ی استوانه‌ای جدار متغیر وارد شده است. توزیع این توابع در شکل ۴-۲۳ نشان داده شده است. قابل ذکر است که مدل‌سازی اجزای محدود فشارهای متغیر در نرم‌افزار انسیس به کمک قابلیت تعریف تابع در این نرم‌افزار انجام شده است. توزیع بی‌بعد جابه‌جایی‌های شعاعی و محوری و فشار هیدرواستاتیک در لایه‌ی میانی پوسته در شکل ۴-۲۴ نشان داده شده است. مقایسه‌ی نتایج دو روش حل، دقت بسط مرتبه‌ی دوّم روش MAE در تحلیل پوسته تحت فشار متغیر غیرخطی را نشان می‌دهد. در این حالت، فشار هیدرواستاتیک لایه‌ی میانی دارای دقت بسیار مطلوبی است. دقت در لایه‌های داخلی و خارجی مشابه حالت فشار متغیر خطی است. با افزایش فشار از وضعیت خطی به چندجمله‌ای مرتبه‌ی سه در حالت محدب، به دلیل افزایش فشار، مقادیر جابه‌جایی و تنش نیز زیاد می‌شوند؛ ولی دقت حل تغییر محسوسی نمی‌کند. با توجه به یکسان‌بودن بخش ابتدایی فشار مرتبه‌ی دو و سه که بالاتر از حالت خطی است، در نقاط اطراف مرز چپ، جابه‌جایی‌های متناظر این دو فشار تقریباً یکسان هستند. اما در $\bar{x}$ بزرگ‌تر، اختلاف جابه‌جایی و فشار هیدرواستاتیک از خطی به سمت مرتبه‌ی سه بیشتر می‌شود. در مقادیر حداکثر جابه‌جایی محوری تغییر محسوسی برای این سه فشار ایجاد نمی‌شود. در واقع می‌توان دریافت که تغییر خطی ضخامت h_1 متناسب با فشار خطی P_{i1} باعث خنثی شدن اثر افزایش بار می‌شود و جابه‌جایی شعاعی، فشارهیدرواستاتیک و تنش‌ها را در

محدوده‌ی یکنواخت‌تری در طول پوسته نگه می‌دارد. در انتهای این قسمت اثر توابع فشار و جدار مشابه بر روی رفتار پوسته بررسی خواهد شد تا میزان خنثی‌شدن اثر بار توسط افزایش ضخامت برای توابع غیرخطی نیز نشان داده شود. در توابع فشار P_{i4} و P_{i5}، مقادیر فشار حداکثر به ترتیب در وسط و دو مرز استوانه اعمال می‌شود. تغییرات سریعتر این دو تابع منجر به تغییرات سریعتر جابه‌جایی‌ها و فشار هیدرواستاتیک شده و همانطور که در قسمت‌های قبلی اشاره شد، از دقت حل در ناحیه‌ی همپوشانی بسط داخلی و خارجی کاسته می‌شود. حداکثر جابه‌جایی شعاعی و فشار هیدرواستاتیک در هر دو فشار اشاره شده نسبت به سه فشار ابتدایی افزایش می‌یابد. در P_{i5} فشار حداکثر در اطراف مرز ضخیم‌تر منجر به تغییر شکل و فشار هیدرواستاتیک کمتر می‌شود؛ در حالی که در مرز نازکتر سبب افزایش بسیار زیاد جابه‌جایی و فشار می‌شود. برای پوسته‌ی جدار ثابت می‌توان نتیجه گرفت که هر چه مقدار حداکثر بارگذاری به مرزها نزدیکتر باشد، مقادیر حداکثر جابه‌جایی و تنش کمتر خواهند شد. هر چه شیب تغییرات خطی ضخامت کاهش یابد، می‌توان انتظار داشت که قله‌های جابه‌جایی محوری و فشار هیدرواستاتیک حاصل از فشارهای متغیر غیرخطی به سمت نقاط میانی پوسته میل کنند.



شکل ۴-۲۳ توزیع توابع فشار داخلی در راستای طولی پوسته

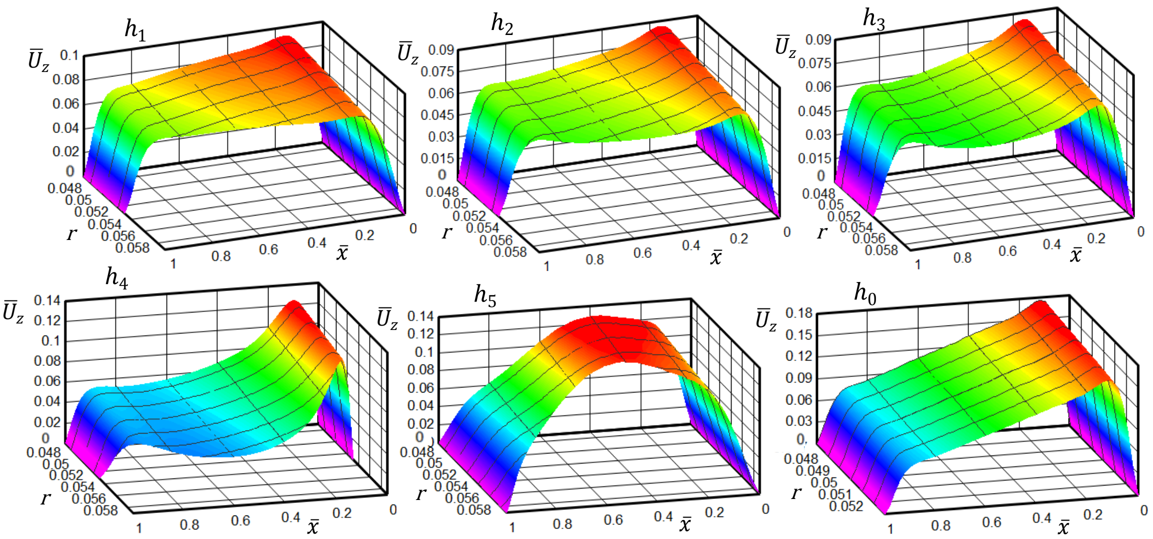


شکل ۴-۲۴ اثر تابع فشار بر توزیع بی‌بعد (الف) جابه‌جایی شعاعی (ب) جابه‌جایی محوری (ج) فشار هیدرواستاتیک در راستای طولی لایه‌ی میانی پوسته ($n=2, h(\bar{x})=h_1$)

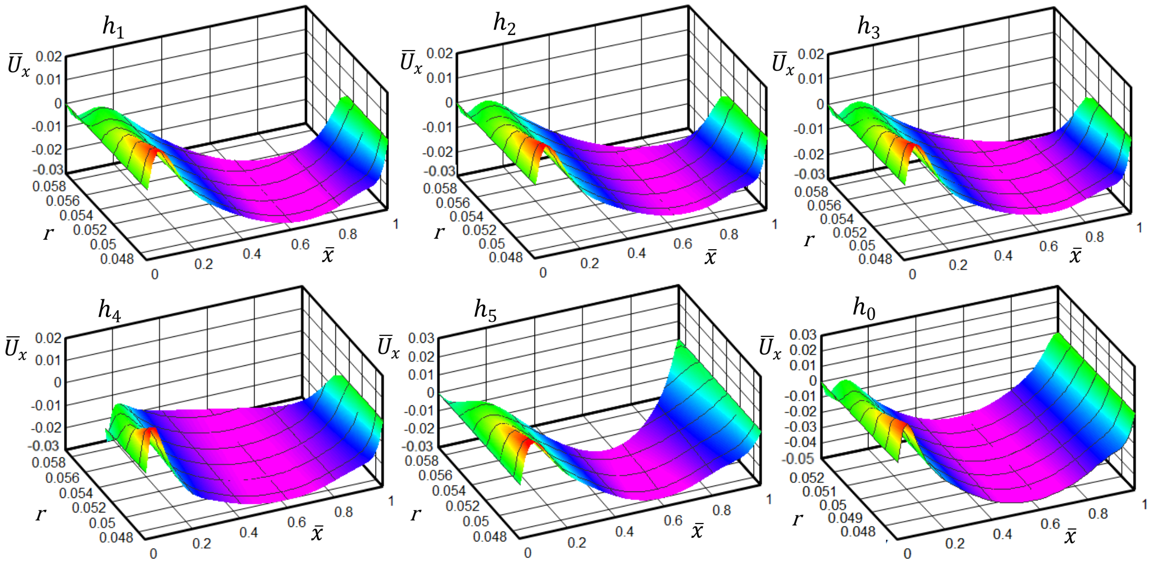
اثر توابع ضخامت غیرخطی بر توزیع بی‌بعد جابه‌جایی‌ها و فشار هیدرواستاتیک پوسته‌ی ناهمگن تحت فشار خطی P_{i1} در شکل‌های ۴-۲۵ تا ۴-۲۷ نشان داده شده است. در این شکل‌ها که به‌صورت سه‌بعدی رسم شده‌اند، می‌توان جابه‌جایی‌ها و فشار هیدرواستاتیک را در تمامی نقاط پوسته برای توابع ضخامت مختلف اشاره شده در جدول ۴-۵ با یکدیگر مقایسه کرد. توابع ضخامت مرتبه‌ی یک تا سه دارای تفاوت محسوسی از نظر $\bar{U}_x$ و $\bar{P}$ نیستند؛ اما جابه‌جایی شعاعی در آنها با افزایش ضخامت به سمت تابع مرتبه‌ی سه کاهش می‌یابد. به طور مشخص ضخامت ثابت h_0 سبب افزایش بسیار زیاد جابه‌جایی‌ها و فشار می‌شود. بنابراین با افزایش تدریجی و متناسب ضخامت با فشار می‌توان این مقادیر حداکثر را کاهش داد. در h_4 و h_5 ضخامت حداکثر به ترتیب در مرکز و دو مرز مشاهده می‌شود. می‌توان دریافت که هر چه ضخامت حداکثر دورتر از مرزها و فشار حداکثر نزدیکتر به مرزها باشد، پوسته از نظر کاهش میزان جابه‌جایی‌ها، تنش‌ها و فشار هیدرواستاتیک در وضعیت مطلوبتری است. در واقع هر چه شرایط بحرانی فشار بالا و ضخامت کمتر به مرزهای گیردار نزدیکتر باشند، مقادیر

تغییر شــکل و تنش تحت اثر مرزها قرار گرفته و در ســطح پایین‌تری باقی می‌مانند. با مقایســه‌ی مجموعه شــکل‌های ۴-۲۵ تا ۴-۲۷ با شــکل ۴-۲۴ می‌توان دریافت که در مطالعه‌ی موردی جاری، توابع غیرخطی فشـار بر سـطح جابه‌جایی‌ها و تنش‌ها نسـبت به توابع ضخامت تاثیرگذارتر هستند. در جدول ۴-۶ اثر توابع فشـار و جدار مشـابه بر روی رفتار پوســته آورده شده است تا میزان خنثی‌شدن افزایش اثر بار توسـط افزایش ضـخامت با توابع غیرخطی مشابه نشان داده شود. در این جدول مقادیر عددی بی‌بعد جابه‌جایی‌ها و فشـارهیدرواستاتیک حاصل از حل تحلیلی در مقاطع طولی لایه‌ی داخلی پوســته‌ی ناهمگن آورده شــده اســت. مقاطع طولی متناسـب با مقادیر حداکثر یا حداقل هر خروجی انتخاب شده‌اند. مشاهده می‌شود که اعمال توابع مشابه ضخامت و فشار در پوسته‌ها سبب یکنواخت‌تر شــدن توزیع جابه‌جایی و تنش و کاهش مقادیر حداکثر آنها در طول پوســته می‌شــود. بر اســاس این جدول، به غیر از جدار و فشار ثابت، حالت P_{i4}, h_4 و P_{i5}, h_5 به ترتیب دارای کمترین و بیشترین فشار هیدرواســتاتیک (و تنش) هســتند. دلیل این امر نزدیکتر بودن فشــار حداکثر به مرزها اســت. بنابراین همانطور که عنوان شــد، اثر توابع فشــار بر تابع ضــخامت غالب بوده و تاثیر بیشــتری بر رفتار پوســته می‌گذارد. در مجموع تغییرات خطی و ســینوســی فشــار و جدار (با مقادیر حداکثر در اطراف مرزها)، مناسب‌ترین توابع در طراحی این پوسته‌ها خواهند بود.

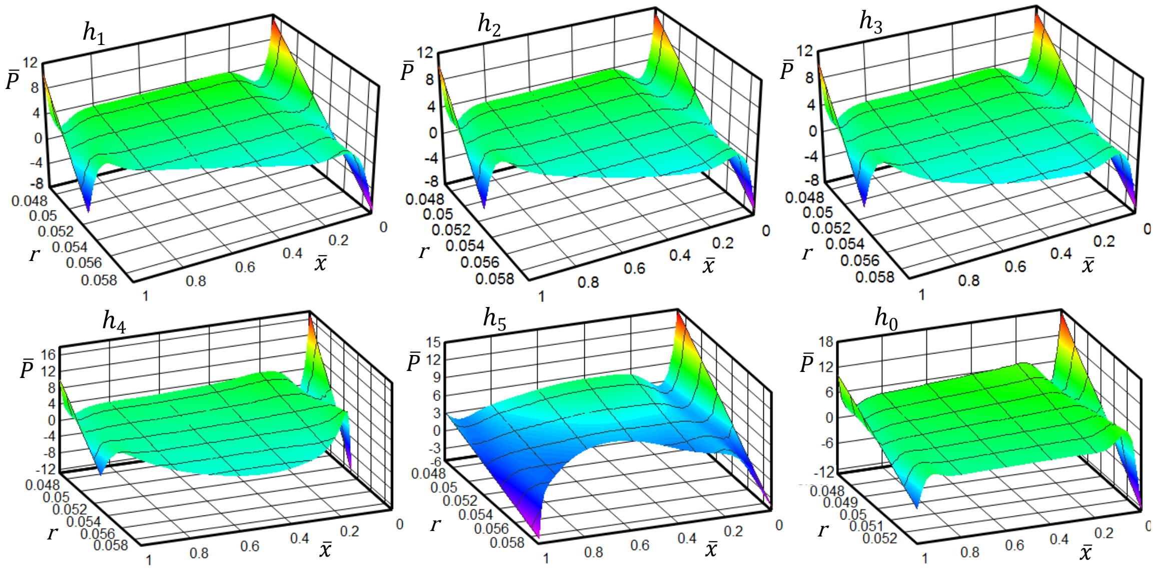
از مســائل مطرح‌شــده در این قســمت می‌توان در طراحی و تحلیل رفتار مکانیکی پوســته‌های اسـتوانه‌ای ضـخیم هایپرالاسـتیک در حالت تقریباً تراکم‌ناپذیر و تحت توابع مختلف فشـار و ضخامت متغیر به‌صـورت همگن یا ناهمگن اسـتفاده کرد. همچنین قابلیت‌ها و محدودیت‌های ترکیب نظریه‌ی تغییر شـکل برشـی و نظریه‌ی اغتشـاشـات در اسـتخراج و حل معادلات این پوسته‌ها نشان داده شد. مشـاهده می‌شود که بسط اغتشاشی مرتبه‌ی دوّم برای حل معادلات پوسته‌هایی با تغییرات غیرخطی جدار و فشار مناسب است.



شکل ۴-۲۵ اثر توابع ضخامت بر توزیع بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی $(n=2, P_i(\bar{x})=P_{i1})$



شکل ۴-۲۶ اثر توابع ضخامت بر توزیع بی‌بعد جابه‌جایی محوری $(n=2, P_i(\bar{x})=P_{i1})$



شکل ۴-۲۷ اثر توابع ضخامت بر توزیع بی‌بعد فشار هیدرواستاتیک ($n=2, P_i(\bar{x})=P_{i1}$)

جدول ۴-۶ مقادیر جابه‌جایی و فشار هیدرواستاتیک در مقاطع مختلف لایه‌ی داخلی پوسته‌ی ناهمگن برای توابع ضخامت و فشار مشابه ($n=2$)

	$\bar{U}_z$			$\bar{U}_x$			$\bar{P}$		
	$\bar{x}=0.15$	$\bar{x}=0.5$	$\bar{x}=0.85$	$\bar{x}=0.05$	$\bar{x}=0.25$	$\bar{x}=0.7$	$\bar{x}=0$	$\bar{x}=0.5$	$\bar{x}=1$
P_{i0}, h_0	0.1255	0.1214	0.1255	0.0200	0.0067	-0.0053	17.751	5.402	17.751
P_{i1}, h_1	0.0921	0.0819	0.0699	0.0155	-0.0099	-0.0268	11.177	3.876	10.419
P_{i2}, h_2	0.0924	0.0865	0.0732	0.0167	-0.0067	-0.0283	11.448	4.186	10.893
P_{i3}, h_3	0.0920	0.0882	0.0761	0.0173	-0.0040	-0.0265	11.455	4.335	11.325
P_{i4}, h_4	0.0809	0.0909	0.0809	0.0205	0.0170	-0.0141	11.743	4.407	11.743
P_{i5}, h_5	0.0914	0.0614	0.0914	0.0054	-0.0165	0.0158	3.741	3.407	3.741

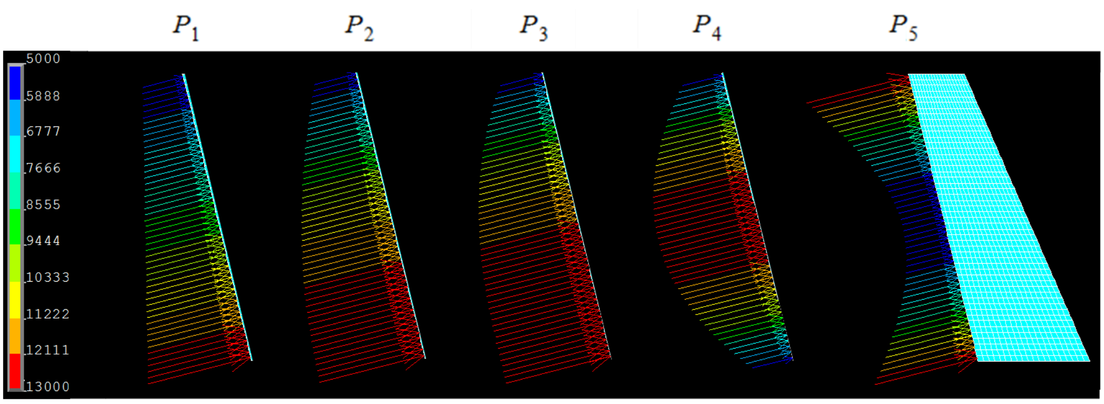
۴-۴ مخروط جدار متغیر تحت فشار متغیر داخلی و خارجی

در این بخش پوسته‌های مخروطی جدار متغیر همگن و ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی متغیر بررسی خواهند شد. همچنین قابلیت و دقت حل ارائه‌شده در مدل‌سازی توابع غیرخطی فشار و هندسه و اثر این دو عامل بر جابه‌جایی، تنش و فشار هیدرواستاتیک پوسته‌های مخروطی مورد بررسی قرار خواهد گرفت. مشخصات هندسی و بارگذاری این پوسته‌ها در شکل ۲-۱ نشان داده شده است. طول مخروط به منظور امکان مقایسه‌ی نتایج با بخش قبلی، برابر ۴۰۰ میلی‌متر درنظر گرفته شده است. خواص پوسته‌های مخروطی مورد بررسی در این قسمت (به غیر از جدول ۴-۸) در حالت همگن و

خواص نزدیکترین نقطه‌ی لایه‌ی داخلی مخروط به محور طولی در حالت ناهمگن طبق جدول ۴-۱ برابر MC_9 فرض شده است. مشخصات توابع فشار متغیر مختلف که در طول این قسمت به عنوان مطالعه‌ی موردی از آنها استفاده شده است، در جدول ۴-۷ آورده شده است. همچنین به عنوان نمونه، نمایش توابع فشار متغیر وارد بر جدار داخلی متغیر خطی پوسته‌ی مخروطی در شکل ۴-۲۸ نشان داده شده است. مدل‌سازی عددی متناظر پوسته‌ی مخروطی همگن و ناهمگن در نرم‌افزار اجزای محدود انسیس بر اساس توضیحات قسمت ۳-۶ انجام شده است. در خصوص فشار متغیر وارد بر جدار متغیر، نرم‌افزار انسیس بر اساس طول $(\bar{x})$ گره‌های هر نقطه از لایه‌ی داخلی و با توجه به تابع فشاری که تعریف می‌شود، مقدار فشار هر نقطه از لایه‌ی داخلی را عمود بر سطح آن اعمال می‌کند. در خصوص فشار خارجی نیز همین فرایند انجام می‌شود.

جدول ۴-۷ مشخصات توابع فشار متغیر

شناسه‌ی تابع فشار	روابط تابع فشار متغیر	ثابت‌های بارگذاری
P_1	$P_i(\bar{x}) = P_{ia} - (P_{ia} - P_{ib})\bar{x}$	$P_{ia} = 13\text{ kPa},\ P_{ib} = 5\text{ kPa}$
P_2	$P_i(\bar{x}) = P_{ia} - (P_{ia} - P_{ib})\bar{x}^2$	$P_{ia} = 13\text{ kPa},\ P_{ib} = 5\text{ kPa}$
P_3	$P_i(\bar{x}) = P_{ia} - (P_{ia} - P_{ib})\bar{x}^3$	$P_{ia} = 13\text{ kPa},\ P_{ib} = 5\text{ kPa}$
P_4	$P_i(\bar{x}) = P_{ia} - 4(P_{ia} - P_{iab})(\bar{x} - \bar{x}^2)$	$P_{ia} = P_{ib} = 5\text{ kPa},\ P_{iab} = 13\text{ kPa}$
P_5	$P_i(\bar{x}) = P_{ia} - (P_{ia} - P_{iab})\sin(\pi\bar{x})$	$P_{ia} = P_{ib} = 13\text{ kPa},\ P_{iab} = 5\text{ kPa}$
P_6	$P_i(\bar{x}) = P_{i6} = \text{constant}$	$P_{i0} = 8\text{ kPa}$
P_7	$P_i(\bar{x}) = P_{i7} = \text{constant}$	$P_{i0} = 13\text{ kPa}$



شکل ۴-۲۸ نمایش توابع فشار متغیر وارد بر مخروط جدار متغیر

۴-۴-۱ مخروط همگن

در جدول ۴-۸ اثر دو متغیر زاویه‌ی مخروط β و بارگذاری $P_{\mathrm{i}}/(C_1+C_2)$ بر میدان جابه‌جایی برای ثابت‌های مختلف مادّه‌ی مونی-ریولین در مخروط جدار ثابت بررسی شده است. مقدار زاویه‌ی β و γ در شکل ۲-۱ نشان داده شده است. در مخروط با تغییرات خطی جداره، این زاویه‌ها به ترتیب نشان-دهنده‌ی زاویه‌ی جدار داخلی و خارجی مخروط هستند. با توجه به این که حداکثر مقدار اختلاف جابه‌جایی‌های حاصل از دو حل تحلیلی و عددی در لایه‌ی داخلی مخروط تحت فشار داخلی رخ می‌دهد، این جدول می‌تواند معیار مناسبی برای مقایسه‌ی میزان دقت و اعتبار روش تحلیلی ارائه شده در مدل‌سازی پوسته‌های مخروطی ساخته شده از مادّه‌ی مونی‌ریولین تقریباً تراکم‌ناپذیر باشد. طبق جدول ۴-۸، حداکثر درصد اختلاف دو روش حل برای جابه‌جایی شعاعی در نسبت بار به مقاومت مادّه‌ی ۰/۰۲ و $\beta = 6$ در حدود ۹ درصد است. در اکثر نقاط استوانه درصد اختلاف برای تمامی حالت‌های بررسی شده کمتر از ۳ درصد است؛ اما کمترین انطباق بین دو روش حل در مقادیر جابه‌جایی‌های شعاعی حداکثر که متناظر با محل همپوشانی دو حل داخلی و خارجی در اطراف مرزهاست، مشاهده می‌شود. دلیل افزایش اختلاف دو روش در مخروط‌هایی با زاویه‌ی بزرگ‌تر مش‌بندی غیریکنواخت در مدل‌سازی اجزای محدود مخروط‌ها و فاصله گرفتن آنها از حالت مش‌بندی مربعی است. با افزایش زاویه‌ی مخروط، غیریکنواختی اشاره‌شده افزایش و دقت مدل‌سازی نیز می‌تواند کاهش پیدا کند و تاثیر مش‌بندی بر نتایج نهایی بیشتر می‌شود. مخروط‌های مدل‌سازی شده در جدول ۴-۸ دارای $r_{\mathrm{ib}} = 0.05\mathrm{m}$ و $h_{\mathrm{b}} = 0.006\mathrm{m}$ هستند. در واقع نسبت میانگین شعاع لایه‌ی میانی پوسته به ضخامت در حدود عدد ۱۰ درنظر گرفته شده است. در مقادیر بالاتر این نسبت، اختلاف دو روش کاهش می‌یابد. همچنین در شعاع‌های داخلی بزرگ‌تر، مقدار خطا حتی برای بارهای بالاتر، کمتر از مقادیر نشان داده شده است. بنابراین همانطور که اشاره شد، کاهش نسبت میانگین شعاع لایه‌ی میانی پوسته به ضخامت در پوسته-های بسیار ضخیم باعث کاهش دقت FSDT می‌شود. همچنین افزایش نسبت بار به مقاومت مادّه با

افزایش رفتار غیرخطی پوسته سبب کاهش دقت MAE در حل معادلات حاکم بر پوسته می‌شود. مقایسه‌ی جابه‌جایی‌های شعاعی استوانه و مخروط جدار ثابت برای نسبت مشابه $P_\mathrm{i}/(C_1+C_2)$ طبق جدول‌های ۴-۲ (برای $\bar{R}=10$) و ۴-۸ نشان می‌دهد که برای زاویه‌های کوچک ($\beta=1$)، مقدار جابه‌جایی‌های استوانه از مخروط بزرگ‌تر است. دلیل این امر، کمتربودن مؤلفه‌ی شعاعی نسبت به فشار اعمالی به پوسته در مخروط‌هاست. مؤلفه‌ی شعاعی بارگذاری با افزایش زاویه‌ی مخروط کاهش می‌یابد؛ در حالی که مؤلفه‌ی طولی افزایش پیدا می‌کند. اما جابه‌جایی شعاعی برای زاویه‌های بزرگ‌تر افزایش پیدا می‌کند. دلیل این پدیده افزایش میزان رفتار غیرخطی و کاهش مقاومت هندسه‌ی مخروط با افزایش زاویه‌ی آن است که مخروط را به سمت مقادیر بیشتر تغییر شکل و تنش میل می‌دهد.

جدول ۴-۸ اثر متغیرهای زاویه‌ی مخروط و بارگذاری بر جابه‌جایی شعاعی برای ثابت‌های مختلف ماده

Mat. ID	$\bar{U}_{z,\max}$	$P_\mathrm{i}/(C_1+C_2)=1/50$			$P_\mathrm{i}/(C_1+C_2)=1/100$			$P_\mathrm{i}/(C_1+C_2)=1/200$		
		$\beta=1^\circ$	$\beta=3^\circ$	$\beta=6^\circ$	$\beta=1^\circ$	$\beta=3^\circ$	$\beta=6^\circ$	$\beta=1^\circ$	$\beta=3^\circ$	$\beta=6^\circ$
MC_1	FSDT	0.2710	0.3521	0.4852	0.1343	0.1749	0.2426	0.0668	0.0872	0.1213
	FEM	0.2779	0.3663	0.5180	0.1362	0.1798	0.2562	0.0674	0.0893	0.1274
MC_2	FSDT	0.2572	0.3321	0.4550	0.1271	0.1644	0.2259	0.0631	0.0817	0.1125
	FEM	0.2681	0.3533	0.4993	0.1315	0.1736	0.2472	0.0651	0.0862	0.1231
MC_3	FSDT	0.2624	0.3396	0.4665	0.1298	0.1684	0.2324	0.0646	0.0838	0.1159
	FEM	0.2709	0.3570	0.5045	0.1330	0.1755	0.2499	0.0659	0.0872	0.1244
MC_4	FSDT	0.2592	0.3352	0.4592	0.1281	0.1660	0.2285	0.0637	0.0826	0.1140
	FEM	0.2688	0.3542	0.5003	0.1320	0.1742	0.2480	0.0654	0.0866	0.1235
MC_5	FSDT	0.2583	0.3339	0.4573	0.1278	0.1655	0.2276	0.0635	0.0824	0.1136
	FEM	0.2682	0.3533	0.4991	0.1318	0.1739	0.2475	0.0653	0.0864	0.1233
MC_6	FSDT	0.2547	0.3285	0.4489	0.1267	0.1638	0.2251	0.0631	0.0818	0.1126
	FEM	0.2661	0.3500	0.4956	0.1310	0.1728	0.2456	0.0651	0.0861	0.1227
MC_7	FSDT	0.2618	0.3391	0.4653	0.1295	0.1678	0.2316	0.0644	0.0835	0.1155
	FEM	0.2709	0.3571	0.5048	0.1328	0.1753	0.2498	0.0658	0.0871	0.1243
MC_8	FSDT	0.2616	0.3386	0.4648	0.1295	0.1678	0.2316	0.0644	0.0836	0.1155
	FEM	0.2704	0.3563	0.5033	0.1327	0.1752	0.2494	0.0658	0.0871	0.1242

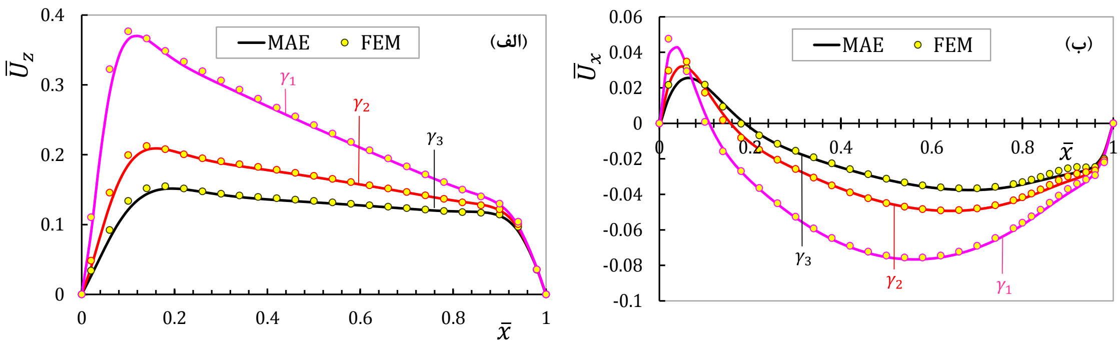
به منظور بررسی اثر زاویه‌ی لایه‌ی داخلی و خارجی و ضخامت مخروط بر مقادیر جابه‌جایی، مشخصات هندسی مخروط‌های جدار متغیر به‌صورت زیر درنظر گرفته می‌شوند.

$$\begin{cases} r_\mathrm{ib}=0.05\mathrm{m}, \quad h_\mathrm{b}=0.005\mathrm{m}, \quad \beta_0=0, \\ \beta_1=\gamma_1=0.72, \quad \beta_2=\gamma_2=1.43, \quad \beta_3=\gamma_3=2.15 \end{cases} \tag{۴-۳}$$

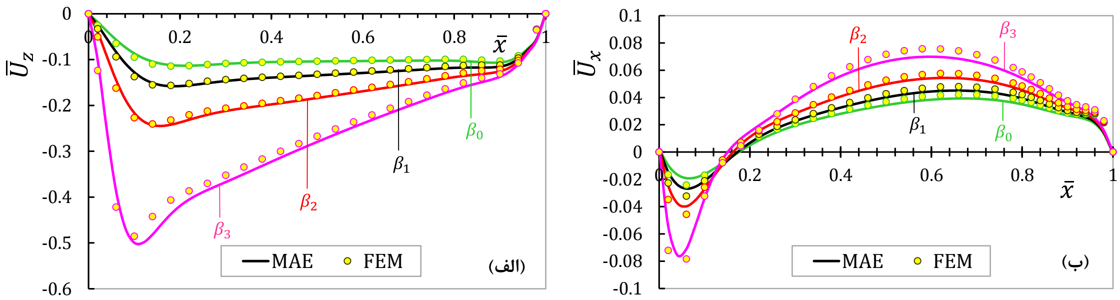
در شـــکـل‌های ۴-۲۹ و ۴-۳۰ اثر تغییر زاویه‌ی لایه‌ی خارجی و داخلی مخروط بر توزیع بی‌بعد جابه‌جایی‌های شـعاعی و محوری نشـان داده شده است. در تغییر زاویه‌ی لایه‌ی خارجی، فشار داخلی متغیر خطی بر مخروط اعمال شـده است و در تغییر زاویه‌ی داخلی، فشار خارجی متغیر درنظر گرفته شده است. همانطور که اشاره شد، با افزایش زاویه‌ی مخروط جدار متغیر، مش‌بندی آن از حالت مربعی فاصـله می‌گیرد که این مورد در قســمت دارای ضـخامت بیشـتر شدیدتر است؛ به همین دلیل انطباق نتایج دو روش در اطراف مرز $\bar{x}=0$ و در قله‌ی جابه‌جایی‌های شعاعی و محوری برای زاویه‌ی بزرگ‌تر کاهش می‌یابد. در شــکل ۴-۲۹، افزایش زاویه‌ی لایه‌ی خارجی ســبب افزایش ضـخامت متناســب با افزایش فشــار شــده و باعث توزیع یکنواخت‌تر جابه‌جایی‌ها و کاهش آنها می‌شـود. در افزایش زاویه‌ی لایه‌ی داخلی طبق شـکل ۴-۳۰، در واقع پوسـته نازک‌تر شـده و رفتار غیرخطی و سطح جابه‌جایی‌ها بیشــتر می‌شـود. مشـاهده می‌شــود که افزایش زاویه‌ی لایه‌ی داخلی نسـبت به لایه‌ی خارجی تاثیر بیشتری بر میزان تغییر جابه‌جایی‌ها و دقت MAE می‌گذارد.

در شکل‌های ۴-۳۱ و ۴-۳۲، نمایش سه‌بعدی اثر تغییر زاویه‌ی لایه‌های خارجی و داخلی پوسته بر مقادیر جابه‌جایی تحت فشـار ثابت رسـم شـده است. با کاهش شیب لایه‌ی خارجی یا افزاش شیب لایه‌ی داخلی، روند افزایش جابه‌جایی‌های شعاعی تصاعدی است. طبق شکل ۴-۳۱ (الف)، در زاویه‌ی γ_1 با فشــار ثابت، مقدار حداکثر جابه‌جایی شـــعاعی اطراف مرز $\bar{x}=0$ ایجاد می‌شـــود. بنابراین در مخروط جـدار ثـابت تحت فشــار داخلی ثابت، مقدار حداکثر جابه‌جایی در نقاطی از لایه‌ی داخلی با نسـبت شـعاع لایه‌ی میانی به ضـخامت بزرگ‌تر ایجاد می‌شود. با توجه به شکل ۴-۳۲ (الف)، زاویه‌ی β_3 یک مخروط جدار ثابت تحت فشار خارجی ثابت را نشان می‌دهد. به طور مشابه برای یک مخروط جدار ثابت با فشـار خارجی ثابت، مقدار حداکثر جابه‌جایی در نقاطی از لایه‌ی داخلی با نسـبت شـعاع لایه‌ی میانی به ضـخامت بزرگ‌تر ایجاد می‌شوند. با افزایش γ و کاهش β در قسمت (الف) شکل‌های ۴-۳۱ و ۴-۳۲، جابه‌جایی شـعاعی حداکثر ضمن کاهش یافتن، در نقاطی از لایه‌ی داخلی با ضخامت کمتر اطراف مرز $\bar{x}=1$ ظاهر می‌شود. افزایش زاویه‌ی لایه‌ی خارجی یا کاهش زاویه‌ی لایه‌ی داخلی

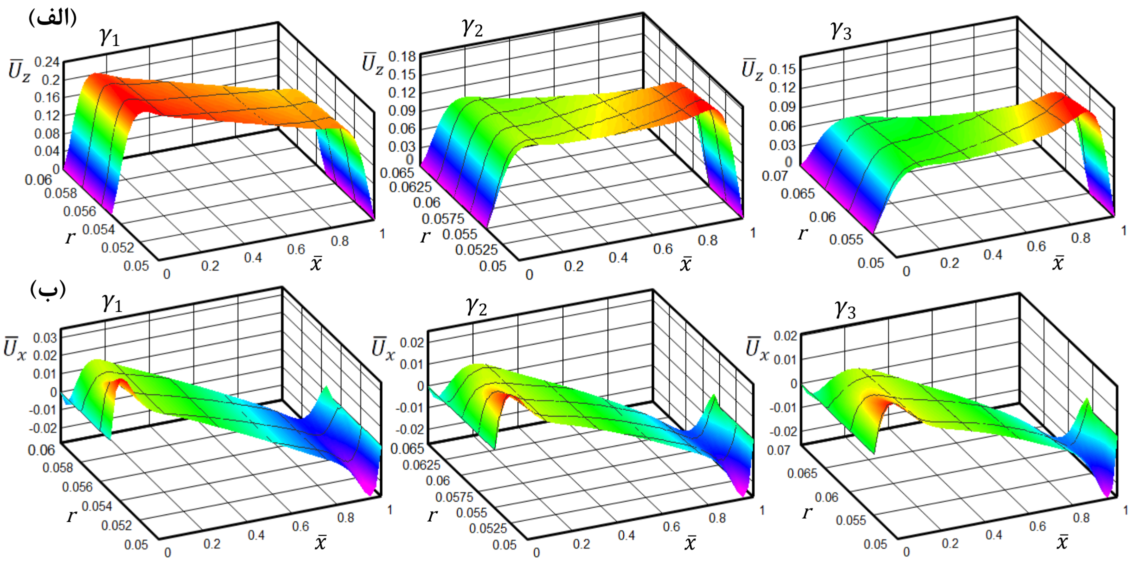
سبب ضخیم‌تر شدن پوسته می‌شود. بنابراین مخروط نسبت به استوانه‌ی جدار متغیر به تغییر ضخامت حساس‌تر است؛ به‌صورتی که افزایش اندک ضخامت سبب کاهش قابل توجه مقادیر جابه‌جایی و تنش در مخروط‌ها می‌شود. در قسمت (ب) شکل ۴-۳۱، افزایش γ سبب افزایش ضخامت مرز چپ $(\bar{x}=0)$ می‌شود. در این حالت تغییرات جابه‌جایی محوری اطراف مرز چپ آرام‌تر، دارای مقادیر کمتر و از مرز پوسته دورتر می‌شود. در حالی که در مرز راست با ثابت ماندن ضخامت h_b، مقادیر جابه‌جایی به مرز پوسته نزدیکتر و تغییرات جابه‌جایی محوری سریعتر می‌شود. در واقع رفتار غیرخطی مرز چپ کاهش یافته و به رفتار غیرخطی مرز راست افزوده می‌شود. به‌طور مشابه با توجه به قسمت (ب) شکل ۴-۳۲، افزایش ضخامت اطراف مرز $\bar{x}=0$ (کاهش β) سبب کاهش رفتار غیرخطی، آرام‌تر شدن تغییرات توزیع جابه‌جایی اطراف این مرز در طول پوسته، کاهش مقدار حداکثر جابه‌جایی و دورتر شدن آن از مرز می‌شود. در مورد مرز راست خلاف این رفتار مشاهده می‌شود.



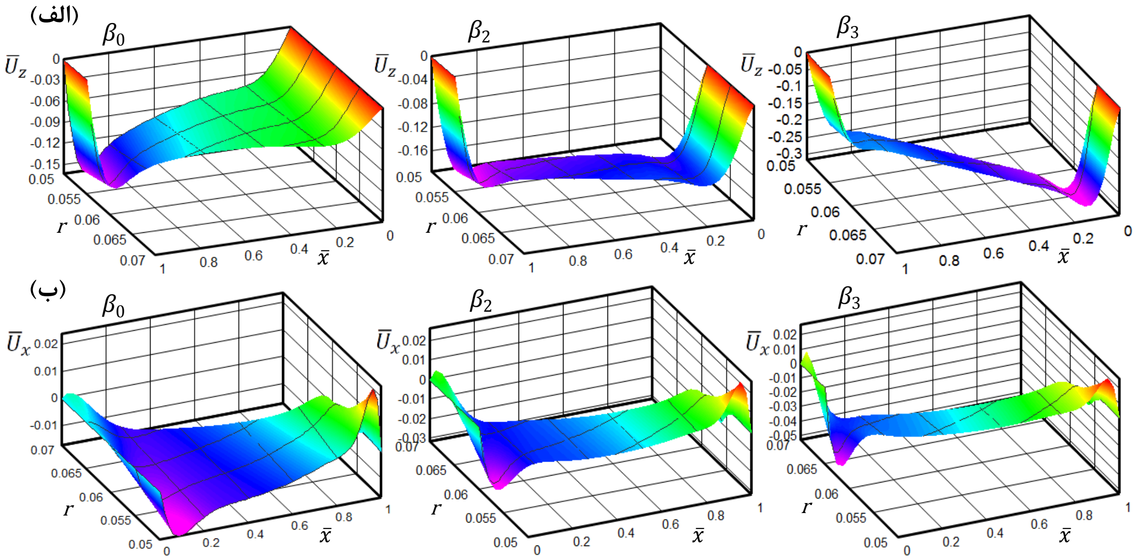
شکل ۴-۲۹ اثر تغییر زاویه‌ی لایه‌ی خارجی بر توزیع بی‌بعد جابه‌جایی (الف) شعاعی (ب) محوری در پوسته‌ی مخروطی همگن تحت فشار داخلی $(P_i(\bar{x})=P_1, r_{ia}=0.055\text{m})$



شکل ۴-۳۰ اثر تغییر زاویه‌ی لایه‌ی داخلی بر توزیع بی‌بعد جابه‌جایی (الف) شعاعی (ب) محوری در پوسته‌ی مخروطی همگن تحت فشار خارجی $(P_0(\bar{x})=P_1, r_{0a}=0.07\text{m})$



شکل ۴-۳۱ نمایش سه‌بعدی اثر تغییر زاویه‌ی لایه‌ی خارجی بر توزیع بی‌بعد جابه‌جایی (الف) شعاعی (ب) محوری در پوسته‌ی مخروطی همگن تحت فشار داخلی $(P_{\mathrm{i}}(\bar{x})=P_6, r_{\mathrm{ia}}=0.055\mathrm{m})$



شکل ۴-۳۲ نمایش سه‌بعدی اثر تغییر زاویه‌ی لایه‌ی داخلی بر توزیع بی‌بعد جابه‌جایی (الف) شعاعی (ب) محوری در پوسته‌ی مخروطی همگن تحت فشار خارجی $(P_{\mathrm{o}}(\bar{x})=P_6, r_{\mathrm{o\,a}}=0.07\mathrm{m})$

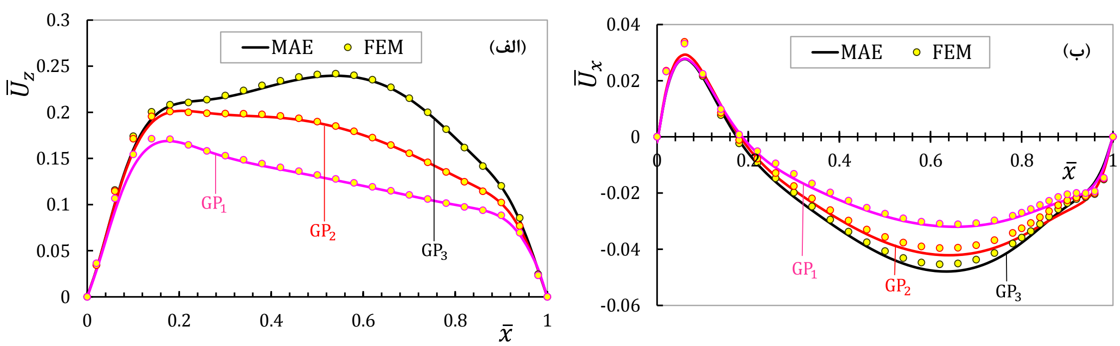
به منظور بررسی امکان تحلیل پوسته‌های مخروطی شکل دارای هندسه‌ی غیرخطی، در این قسمت اثر توابع شعاع داخلی غیرخطی بر رفتار مخروط تحت فشار داخلی مورد بررسی قرار می‌گیرد. در جدول ۴-۹ مشخصات هندسی و بارگذاری برای سه نوع مخروط با جدار داخلی متغیر غیرخطی GP_1 تا GP_3 آورده شده است. همچنین سه نوع استوانه با جدار متغیر داخلی GP_4 تا GP_6 درنظر گرفته شده است.

در شکل ۴-۳۳ اثر تابع شعاع داخلی غیرخطی بر جابه‌جایی‌های پوسته‌ی مخروطی به همراه مقایسه‌ی نتایج تحلیلی و مدل‌سازی عددی برای هندسه‌ی غیرخطی در لایه‌ی داخلی بررسی شده است. مطابقت بسیار خوب نتایج دو روش، دقت ترکیب نظریه‌ی تغییر شکل برشی و بسط اغتشاشی تا مرتبه‌ی دوّم را در استخراج و حل معادلات این پوسته‌ها نشان می‌دهد. در شکل ۴-۳۴ نیز نمایش دوبعدی توزیع جابه‌جایی‌ها در راستای ضخامت و طول پوسته از نماهای مختلف رسم شده است. توجه شود که بر خلاف استوانه با تغییرات ضخامت غیرخطی که در بخش قبلی مورد مطالعه قرار گرفت، درنظر گرفتن تابع درجه‌ی دو و سه برای ضخامت داخلی به‌شکل مشابه سبب مقعرشدن ضخامت پوسته‌ی مخروطی می‌شود. بنابراین مقدار جابه‌جایی‌ها نسبت به تغییرات خطی لایه‌ی داخلی افزایش می‌یابد. همانطور که قبلاً هم اشاره شد، مخروط نسبت به یک استوانه با طول و شعاع داخلی تقریباً مشابه، در برابر تغییر هندسه یا افزایش ضخامت حساس‌تر است. از شکل ۴-۳۴ (ب) مشخص است که با کاهش ضخامت به‌صورت غیرخطی، اختلاف مقدار حداکثر جابه‌جایی محوری منفی در نیمه‌ی راست پوسته نسبت به قله‌ی مثبت نیمه‌ی سمت چپ آن افزایش پیدا می‌کند؛ چون شدت اختلاف توابع درجه‌ی دو و سه نسبت به حالت خطی در اطراف $\bar{x}=1$ شدیدتر از نیمه‌ی دیگر پوسته است. قسمت (الف) شکل ۴-۳۶، مؤلفه‌ی محوری فشار داخلی متغیر را برای مخروط‌های GP_1 تا GP_3 نشان می‌دهد. مقایسه‌ی این قسمت با نمای عمود بر مقطع طولی پوسته در شکل ۴-۳۴ نشان می‌دهد که با کاهش فشار به‌صورت خطی بر حسب $\bar{x}$، مؤلفه‌ی محوری آن در شعاع داخلی خطی نیز کاهش می‌یابد. فشار در توابع درجه‌ی دوّم و سوّم به دلیل موازی‌شدن جدار داخلی با محور طولی در مرز چپ فاقد مؤلفه است؛ در حالی که در مرز راست به دلیل تقعر بیشتر، مؤلفه‌ی محوری فشار برای تابع درجه‌ی سه بزرگ‌تر از درجه‌ی دو است. توزیع این مؤلفه‌ها در طول پوسته نیز متناسب با درجه‌ی توابع است. دلیل افزایش اختلاف مقدار حداقل و حداکثر جابه‌جایی‌های محوری با افزایش درجه‌ی شعاع داخلی، افزایش مؤلفه‌های محوری اشاره‌شده است که باعث می‌شود جابه‌جایی طولی در $\bar{x}=1$ افزایش بیشتری پیدا کند. شکل ۴-۳۵ نمایش سه‌بعدی اثر تغییرات شعاع داخلی پوسته‌ی استوانه‌ای بر توزیع جابه‌جایی‌ها را تحت فشار داخلی

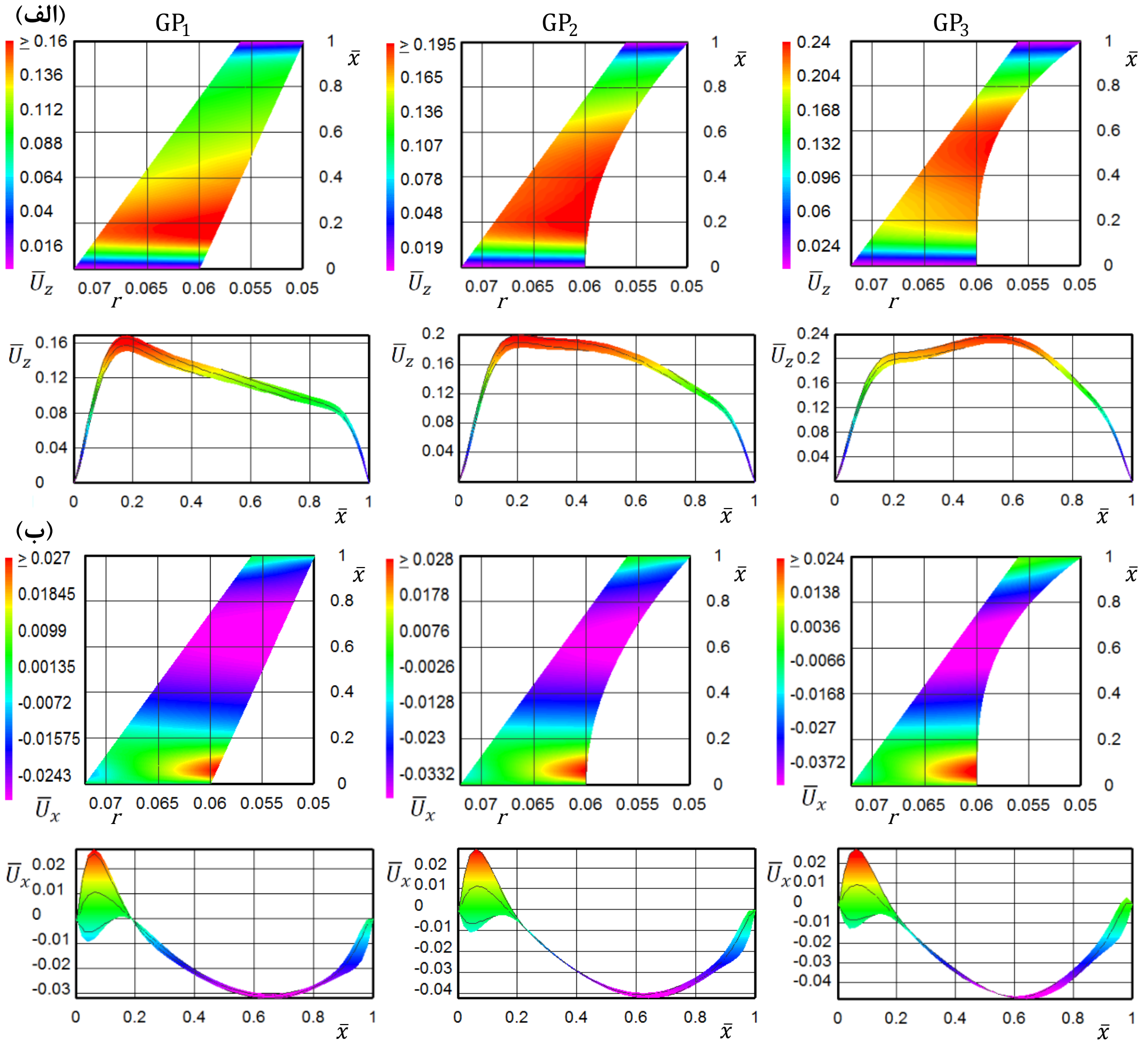
ثابت نشان می‌دهد. تغییرات شعاع داخلی به‌شکلی است که با افزایش $\bar{x}$ ، ضخامت پوسته در GP_4 و GP_5 کاهش می‌یابد. در GP_6 نیز ضخامت کمتر در اطراف مرزها قرار دارد. مؤلفه‌ی محوری فشار داخلی ثابت برای استوانه‌های GP_4 تا GP_6 در قسمت (ب) شکل ۴-۳۶ نشان داده شده است. سطح جابه‌جایی شعاعی در GP_5 و GP_6 کاهش یافته است و از نظر طراحی دارای هندسه‌ی مطلوب هستند. دلیل این امر این است که در وسط پوسته که تمام فشار داخلی در جهت شعاعی قرار گرفته است، ضخامت پوسته دارای حداکثر مقدار خود در GP_6 است؛ در حالی که مؤلفه‌ی شعاعی فشار در مرزها دارای کمترین مقدار بوده و ضخامت نیز متناسب با مؤلفه‌ی فشار کاهش یافته است. اما افزایش مؤلفه‌ی محوری فشار نزدیک مرزها در GP_6 سبب افزایش مقدار جابه‌جایی محوری نسبت به توابع داخلی دیگر شده است. نتایج این بخش نشان می‌دهد که می‌توان بدون تغییر عوامل هندسی در دو مرز مانند h_a، h_b، r_{ia} و r_{ib} سطح جابه‌جایی‌ها را کاهش داد.

جدول ۴-۹ مشخصات توابع شعاع داخلی و خارجی و فشار داخلی مورد مطالعه

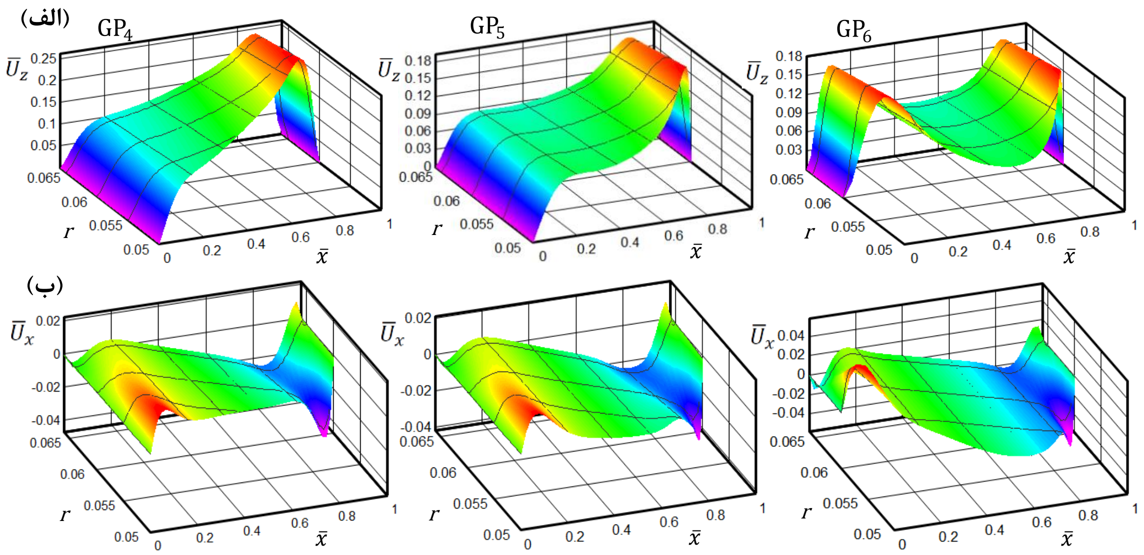
شناسه‌ی مطالعه موردی	$r_i(\bar{x})$	$r_o(\bar{x})$	$P_i(\bar{x})$	ثابت‌های هندسی (m) و بارگذاری (kPa)
GP_1	$r_{ia}-(r_{ia}-r_{ib})\bar{x}$			$r_{ia}=0.06,\ \ r_{ib}=0.05$
GP_2	$r_{ia}-(r_{ia}-r_{ib})\bar{x}^2$	$r_{oa}-(r_{oa}-r_{ob})\bar{x}$	$P_{ia}-(P_{ia}-P_{ib})\bar{x}$	$r_{oa}=0.072,\ \ r_{ob}=0.056$
GP_3	$r_{ia}-(r_{ia}-r_{ib})\bar{x}^3$			$P_{ia}=13,\ \ P_{ib}=5$
GP_4	$r_{ia}-(r_{ia}-r_{ib})\bar{x}$			$r_{ia}=0.05,\ \ r_{ib}=0.06$
GP_5	$r_{ia}-(r_{ia}-r_{ib})\bar{x}^3$	$r_o=\text{constant}$	$P_i=\text{constant}$	$r_{ias}=0.06,\ \ r_{iab}=0.05$
GP_6	$r_{ias}-(r_{ias}-r_{iab})\sin(\pi\bar{x})$			$r_o=0.066,\ \ P_i=13$



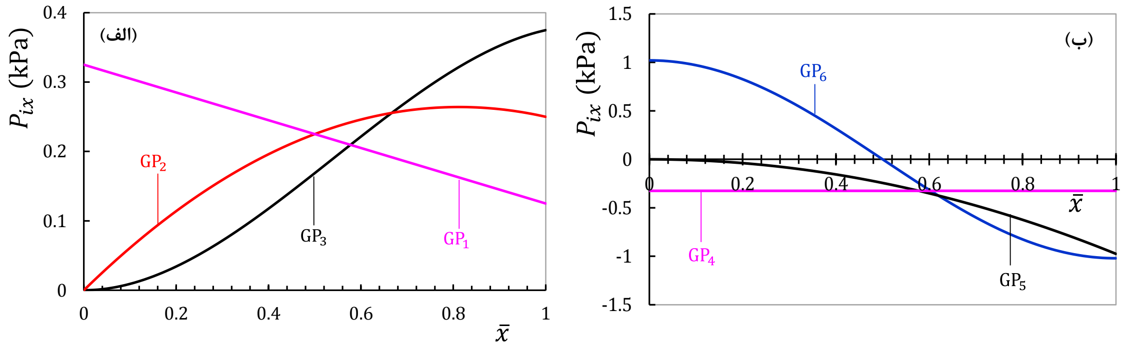
شکل ۴-۳۳ اثر تابع شعاع داخلی بر توزیع بی‌بعد جابه‌جایی (الف) شعاعی (ب) محوری در پوسته‌ی مخروطی جدار متغیر همگن تحت فشار داخلی خطی حاصل از MAE و FEM



شکل ۴-۳۴ نمایش دوبعدی اثر تابع شعاع داخلی بر توزیع بی‌بعد جابه‌جایی (الف) شعاعی (ب) محوری در پوسته‌ی مخروطی همگن جدار متغیر تحت فشار داخلی خطی



شکل ۴-۳۵ نمایش سه‌بعدی اثر تابع شعاع داخلی بر توزیع بی‌بعد جابه‌جایی (الف) شعاعی (ب) محوری در پوسته‌ی استوانه‌ای همگن با جدار داخلی متغیر تحت فشار داخلی ثابت



شکل ۴-۳۶ مؤلفه‌ی محوری فشار داخلی برای هندسه‌های مختلف در راستای طولی در حالت (الف) مخروط جدار متغیر تحت فشار خطی (ب) استوانه با جدار داخلی متغیر تحت فشار ثابت

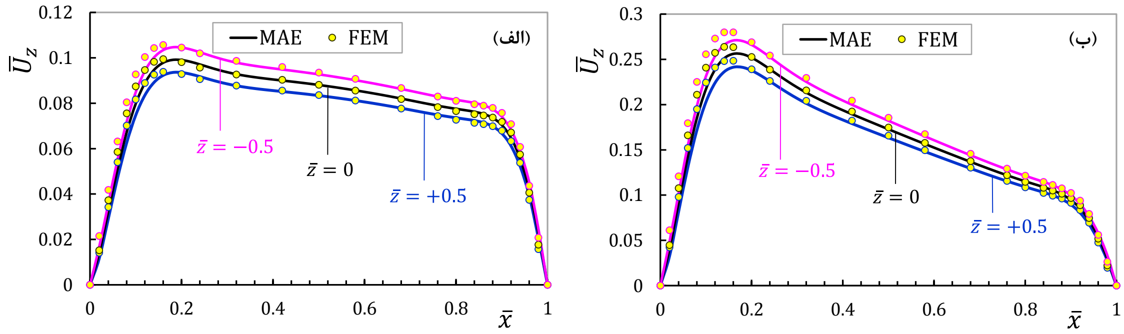
۴-۴-۲ مخروط ناهمگن

در این قسمت اثر ناهمگنی بر مخروط جدار متغیر بررسی خواهد شد. هندسه‌ی مخروط با تغییرات خطی جدار داخلی و خارجی مورد مطالعه تا انتهای این قسمت به‌شکل زیر خواهد بود.

$$\begin{cases} r_{\mathrm{ia}} = 0.06\mathrm{m}, & h_{\mathrm{a}} = 0.012\mathrm{m} \\ r_{\mathrm{ib}} = 0.05\mathrm{m}, & h_{\mathrm{b}} = 0.005\mathrm{m} \end{cases} \tag{۴-۴}$$

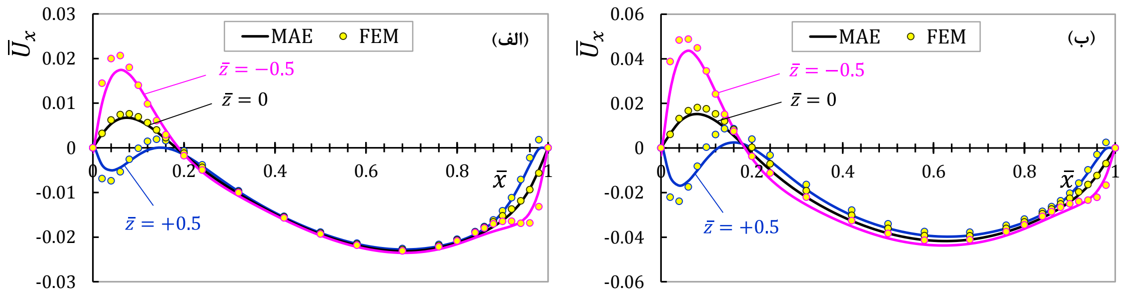
همانطور که در ابتدای بخش ۴-۴ اشاره شد، خواص نزدیکترین نقطه‌ی لایه‌ی داخلی مخروط به محور طولی در حالت ناهمگن دارای شعاع r_{io} طبق جدول ۴-۱ برابر MC_9 فرض شده است. تغییرات خواص طبق تابع توانی در راستای شعاعی پوسته افزایش $(n>0)$ یا کاهش $(n<0)$ می‌یابد. به منظور مقایسه‌ی ناهمگنی‌های مثبت و منفی بر رفتار پوسته، توزیع بی‌بعد جابه‌جایی‌ها، تنش‌ها و فشار هیدرواستاتیک مربوط به دو ثابت ناهمگنی ۲± در شکل‌های ۴-۳۷ تا ۴-۴۲ نشان داده شده است. مطابقت نتایج حل تحلیلی و مدل‌سازی عددی در لایه‌های داخلی نسبت به استوانه‌های ناهمگن اندکی کمتر است. این اختلاف به خاطر عدم امکان مش‌بندی یکنواخت در پوسته‌ی مخروطی جدار متغیر ناهمگن در نرم‌افزارهای اجزای محدود است که سبب کاهش دقت مدل‌سازی عددی پوسته می‌شود. کاهش همزمان ضخامت و دو جدار داخلی و خارجی به همراه لایه‌های ناهمگن درنظر گرفته‌شده در راستای شعاعی در کنار یکدیگر سبب محدودیت در مش‌بندی پوسته و کاهش دقت مدل‌سازی می‌شود. مزیت بزرگ حل‌های تحلیلی مشابه پژوهش جاری این است که با تغیرات اندک در ابتدای

برنامه متناسب با شرایط مسأله می‌توان بدون نیاز به مدل‌سازی مجدد و سعی و خطا در تقسیمات شعاعی و محوری و مش‌بندی نهایی و همچنین با اعمال توابع به‌صورت پیوسته و دقیق مطابق با روابط ریاضی آنها مسائل را تحلیل کرد. البته در مقادیر منفی ناهمگنی، به دلیل کاهش نسبت بار به مقاومت مادّه، مقادیر جابه‌جایی و تنش‌ها و رفتار غیرخطی پوسته افزایش یافته و انتظار است که دقت MAE کاهش یابد. هر چه مقدار ناهمگنی منفی بزرگ‌تر شود، با کاهش خواص مادّه به سمت لایه‌ی خارجی تغییرات جابه‌جایی محوری، تنش‌های محیطی و محوری و فشار هیدرواستاتیک در راستای ضخامت بیشتر می‌شود. همچنین مقادیر حداکثر جابه‌جایی، تنش و فشار هیدرواستاتیک نیز افزایش پیدا می‌کند. طبق شکل ۴-۴۳ که تغییرات توزیع بی‌بعد توانی ثابت‌های مادّه را در مخروط جدار متغیر برای ناهمگنی‌های مختلف نشان می‌دهد، میزان افزایش ثابت‌های مادّه در n های مثبت بیشتر از مقدار مشابه منفی آنها است. اما اثر کاهش این ثابت‌ها تاثیرگذارتر از افزایش آنها بوده و با اندکی کاهش منجر به افزایش زیاد جابه‌جایی و تنش در جسم می‌شود. در شکل‌های ۴-۴۴ و ۴-۴۵ جابه‌جایی‌ها، تنش‌های محیطی و محوری و فشارهیدرواستاتیک برای ثابت‌های ناهمگنی مختلف به منظور امکان مقایسه‌ی آنها رسم شده است. می‌توان تاثیرگذاری بیشتر مقدار ناهمگنی منفی بر نتایج را نسبت به مقدار عددی مثبت مشابه آن دریافت. به این دلیل، تغییرات جابه‌جایی و تنش با تغییر ضخامت در ناهمگنی‌های منفی بیشتر است. نتایج این بخش نشان می‌دهد که تنش‌های محیطی مانند جابه‌جایی‌های شعاعی در اطراف مرز چپ تحت فشار بالاتر دارای مقادیر بزرگ‌تری هستند و در میانه‌ی پوسته با حرکت به سمت مرز راست از مقدار آنها کاسته می‌شود. در این مخروط، شیب ضخامت و فشار به طور متناسب با یکدیگر به‌شکلی تغییر می‌کنند که جابه‌جایی‌های محوری در دو نیمه‌ی چپ و راست مخروط تقریباً دارای مقدار حداکثر یکسانی هستند. مشابه استوانه‌های ناهمگن، ضریب ناهمگنی منفی سبب افزایش تنش‌ها و فشار هیدرواستاتیک در جدار داخلی پوسته می‌شود؛ در حالی که این مقادیر در جدار خارجی به دلیل کاهش ثابت‌های مادّه نسبت به مادّه‌ی همگن کاهش پیدا می‌کنند. ناهمگنی مثبت دقیقاً عکس این تاثیر را روی پوسته می‌گذارد.



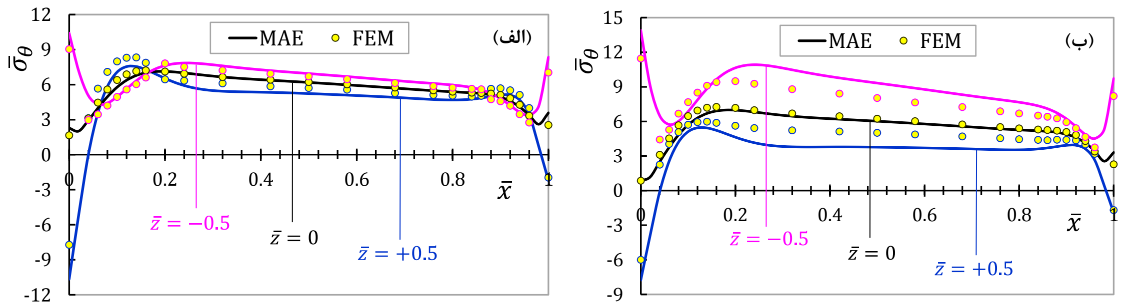
شکل ۴-۳۷ توزیع بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی پوسته‌ی مخروطی جدار متغیر برای

(الف) $n=2$ (ب) $n=-2$ در راستای طولی لایه‌های مختلف ($P_i(\bar{x})=P_1$)



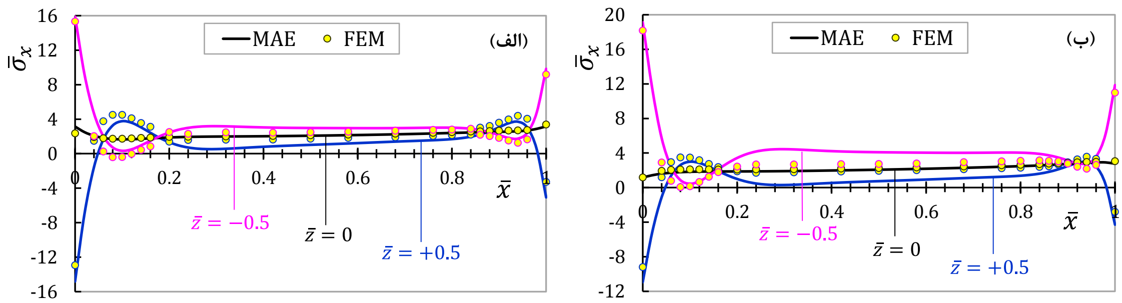
شکل ۴-۳۸ توزیع بی‌بعد جابه‌جایی محوری پوسته‌ی مخروطی جدار متغیر برای

(الف) $n=2$ (ب) $n=-2$ در راستای طولی لایه‌های مختلف ($P_i(\bar{x})=P_1$)



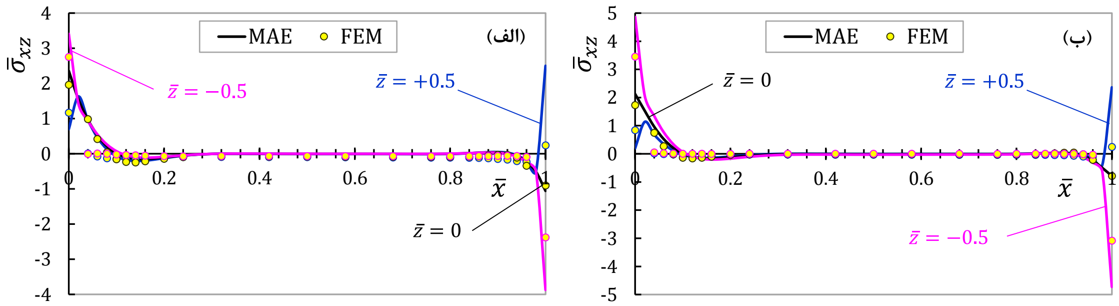
شکل ۴-۳۹ توزیع بی‌بعد تنش محیطی پوسته‌ی مخروطی جدار متغیر برای

(الف) $n=2$ (ب) $n=-2$ در راستای طولی لایه‌های مختلف ($P_i(\bar{x})=P_1$)



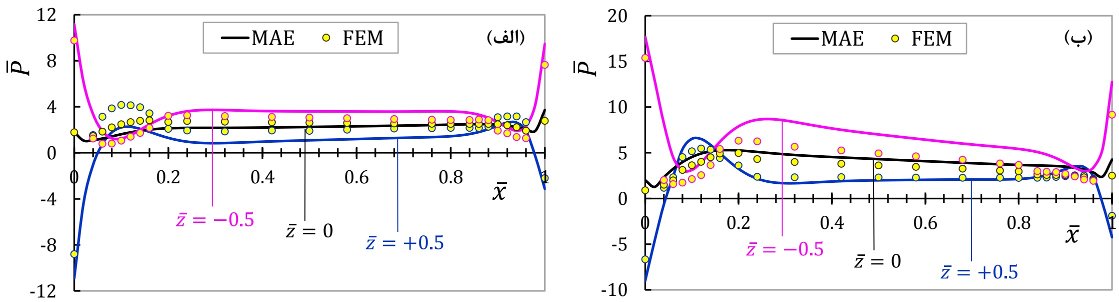
شکل ۴-۴۰ توزیع بی‌بعد تنش طولی پوسته‌ی مخروطی جدار متغیر برای

(الف) $n=2$ (ب) $n=-2$ در راستای طولی لایه‌های مختلف ($P_i(\bar{x})=P_1$)



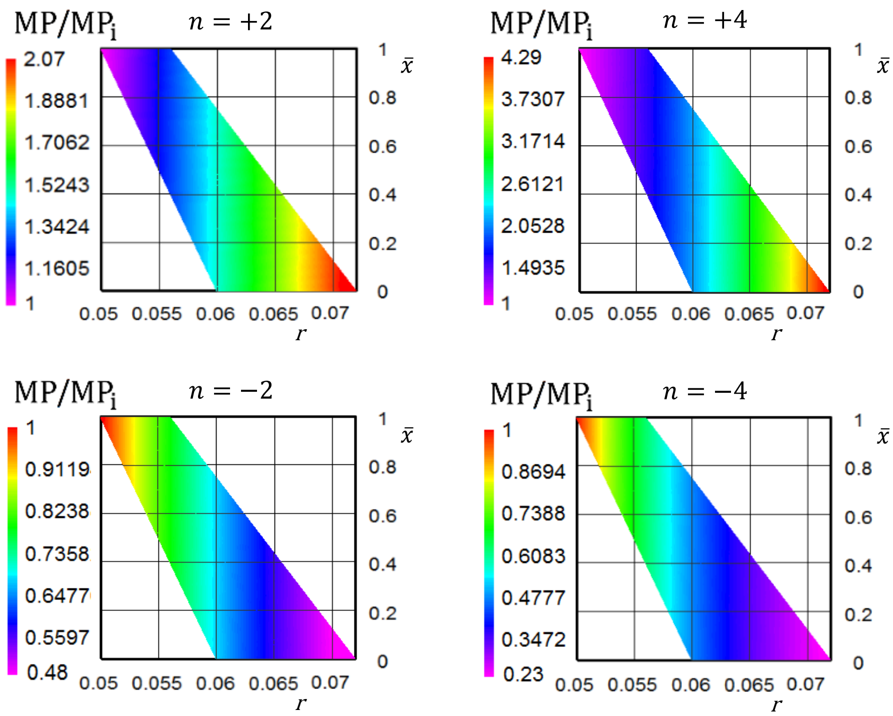
شکل ۴-۴۱ توزیع بی‌بعد تنش برشی پوسته‌ی مخروطی جدار متغیر برای

(الف) $n=2$ (ب) $n=-2$ در راستای طولی لایه‌های مختلف ($P_i(\bar{x})=P_1$)

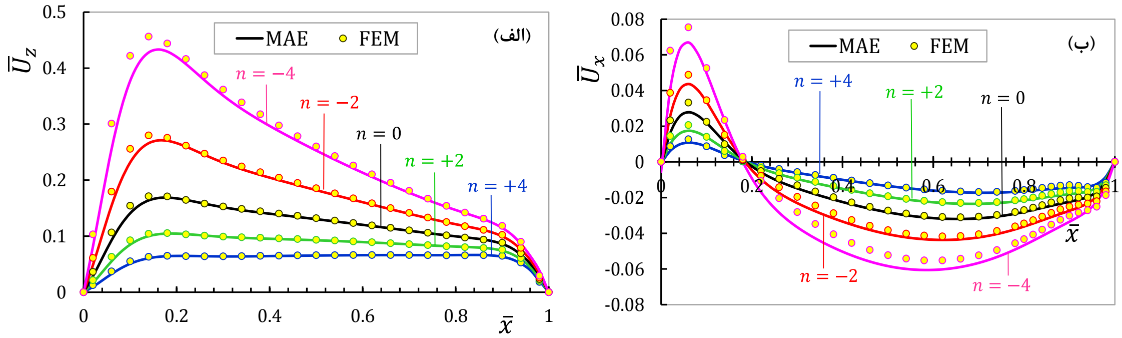


شکل ۴-۴۲ توزیع بی‌بعد فشار هیدرواستاتیک پوسته‌ی مخروطی جدار متغیر برای

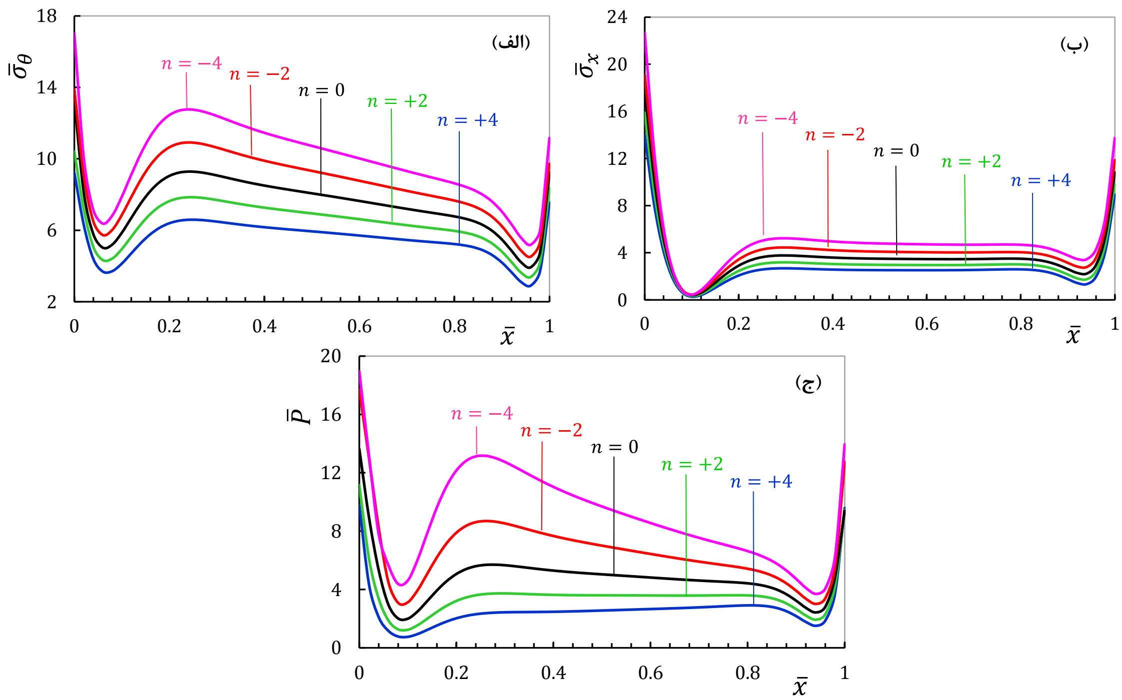
(الف) $n=2$ (ب) $n=-2$ در راستای طولی لایه‌های مختلف ($P_i(\bar{x})=P_1$)



شکل ۴-۴۳ توزیع بی‌بعد توانی ثابت‌های مادّه در مخروط جدار متغیر برای ثابت‌های ناهمگنی مختلف



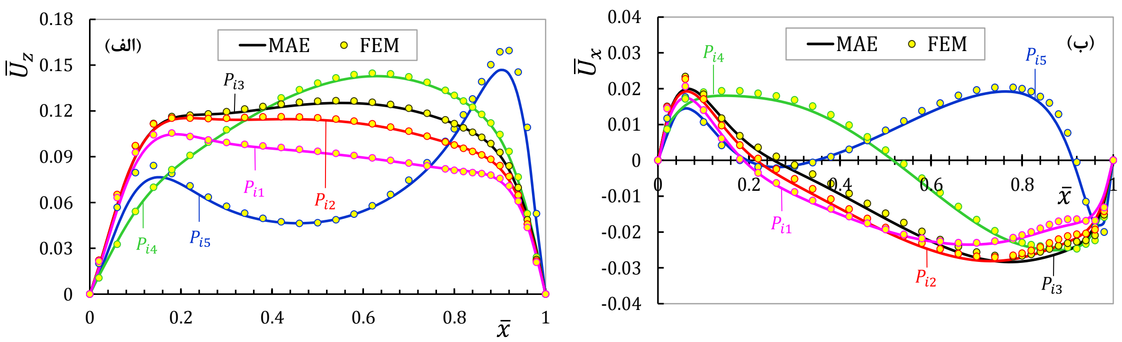
شکل ۴-۴۴ اثر ثابت ناهمگنی بر توزیع بی‌بعد جابه‌جایی (الف) شعاعی (ب) محوری
در راستای طولی لایه‌ی داخلی مخروط جدار متغیر $(P_{\mathrm{i}}(\bar{x})=P_1)$



شکل ۴-۴۵ اثر ثابت ناهمگنی بر توزیع بی‌بعد تنش کوشی (الف) محیطی (ب) محوری
و (ج) فشار هیدرواستاتیک در راستای طولی لایه‌ی داخلی مخروط جدار متغیر $(P_{\mathrm{i}}(\bar{x})=P_1)$

به منظور نمایش اثر فشار متغیر غیرخطی بر رفتار پوسته‌ی ناهمگن مخروطی شکل با جدار متغیر و بررسی قابلیت و دقت روش ارائه‌شده در تحلیل پوسته‌های ناهمگن تحت فشارهای متغیر غیرخطی، توابع فشار طبق جدول ۴-۷ به پوسته‌ی مخروطی جدار متغیر وارد می‌شود. توزیع این توابع در شکل ۴-۲۸ نشان داده شده است. توزیع بی‌بعد جابه‌جایی‌های شعاعی و محوری در لایه‌ی داخلی مخروط برای دو روش MAE و FEM در شکل ۴-۴۶ نشان داده شده است. مقایسه‌ی نتایج دو روش حل،

دقت بسط مرتبه‌ی دوّم روش MAE در تحلیل پوسته تحت فشار متغیر غیرخطی را نشان می‌دهد. اختلاف دو روش در P_{i5} به دلیل تغییرات سریع فشار نسبت به سایر توابع و وارد شدن مقدار حداکثر فشار در بخش نازک‌تر پوسته ایجاد شده است که رفتار غیرخطی پوسته را تشدید می‌کند. فشار حداکثر در P_{i5}، در اطراف مرز ضخیم‌تر منجر به تغییر شکل کمتر و در مرز نازکتر سبب افزایش جابه‌جایی می‌شود. برای مخروط جدار ثابت می‌توان نتیجه گرفت که هر چه مقدار حداکثر بارگذاری به مرزها نزدیکتر باشد، مقادیر حداکثر جابه‌جایی نیز در مخروط کمتر خواهد شد.



شکل ۴-۴۶ اثر تابع فشار بر توزیع بی‌بعد جابه‌جایی (الف) شعاعی (ب) محوری در راستای طولی لایه‌ی داخلی مخروط جدار متغیر

۴-۵ بررسی اثر مدل مادّه بر روابط و رفتار پوسته‌ی استوانه‌ای

در این بخش با تغییر مدل مادّه‌ی هایپرالاستیک از مونی-ریولین به نئوهوکین ، اثر این تغییر بر روابط انرژی کرنشی، ساختاری، معادلات حاکم و نهایتاً رفتار پوسته بررسی خواهد شد. برای مدل نئوهوکین همانطور که در فصل ۱ اشاره شد، روابط مختلفی بر اساس اولین پایای عددی تانسور کرنش کوشی-گرین راست بیان شده است. یکی از پرکاربردترین این روابط به‌صورت چندجمله‌ای مشابه رابطه‌ی مونی-ریولین ارائه شده در فصل ۲ است. این رابطه برای لاستیک‌ها و زیست‌مواد نرم پرکاربرد بوده و برای کرنش‌هایی در محدوده‌ی ۳۰ تا ۷۰ درصد می‌تواند رفتار مادّه را پیش‌بینی کند. اولین تغییر مربوط به تابع انرژی کرنشی جفت‌شده‌ی مدل نئوهوکین در حالت تقریباً تراکم‌ناپذیر و همگن است

که به‌شکل زیر نوشته می‌شود [۹۹،۱۰۳،۱۱۸].

$$W = C_1\left(I_1-3\right) - p_0\ln(J) + \frac{k}{2}\left(J-1\right)^2 \tag{۵-۴}$$

در ماده‌ی ناهمگن، انرژی کرنشی را بر حسب ثابت مادّه‌ی $C_{1n} = \mu_n/2$ می‌توان به شکل زیر نوشت که μ_n مدول برشی اولیه‌ی مادّه در حالت ناهمگن است [۸۴،۱۱۹].

$$W^*(I_1) = C_{1n}\left(I_1-3\right) \tag{۶-۴}$$

نهایتاً تابع انرژی کرنشی جفت‌شده و معادله‌ی ساختاری متناظر آن برای مدل نئوهوکین در حالت ناهمگن و تقریباً تراکم‌ناپذیر به‌شکل بازنویسی می‌شوند.

$$W = C_{1n}\left(I_1-3\right) - P_{0n}\ln(J) + \frac{k_n}{2}\left(J-1\right)^2 \tag{۷-۴}$$

$$\mathbf{S} = 2\frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} = 2C_{1n}\mathbf{I} + \left[k_n J\left(J-1\right) - P_{0n}\right]\mathbf{C}^{-1} \tag{۸-۴}$$

تغییرات ثابت‌های این مدل به‌صورت تابع توانی در راستای شعاعی پوسته‌ی استوانه‌ای جدارمتغیر درنظر گرفته می‌شوند [۷۱،۸۴].

$$\begin{cases} C_{1n}\left(x,z\right) = C_1\left(\dfrac{R(x)+z}{r_{i0}}\right)^n \\ k_n\left(x,z\right) = k\left(\dfrac{R(x)+z}{r_{i0}}\right)^n \end{cases} \tag{۹-۴}$$

اگر فشار هیدرواستاتیک در پیکربندی نخست وجود نداشته باشد، تنش اوّلیه صفر خواهد بود. به دلیل این که در پژوهش جاری جسم فاقد تنش اوّلیه فرض شده است، رابطه‌ی $P_{0n} = 2C_{1n} = \mu_n$ برقرار خواهد بود [۱۰۲،۱۱۸].

در این حالت معادلات حاکم بر مسأله تغییر نخواهند کرد. با توجه به این که در این قسمت معادلات حاکم برای یک پوسته‌ی استوانه‌ای با جدار متغیر خارجی تحت فشار داخلی بررسی می‌شوند، در روابط فصل ۳ در بی‌بعدسازی معادلات و متغیرها، r_{i0} برابر مقدار ثابت r_i می‌شود. بنابراین رابطه‌ی

(۳-۱پ) به‌شکل زیر تبدیل می‌شود.

$$\bar{r}_{\mathrm{i}}=\frac{r_{\mathrm{i}}}{h_0},\quad \bar{P}_{\mathrm{i}}=\frac{P_{\mathrm{i}}(\bar{x})\bar{r}_{\mathrm{i}}^{n}}{\varepsilon C_1} \tag{۴-۱۰}$$

بارگذاری فقط به‌صـورت فشار داخلی درنظر گرفته می‌شود. همچنین به دلیل شعاع ثابت داخلی، مؤلفه‌های طولی فشار حذف می‌شوند. ثابت بی‌بعد $\bar{c}_0$ نیز در استوانه به‌شکل زیر تعریف می‌شود.

$$\bar{c}_0=\frac{c_0\bar{r}_{\mathrm{i}}^{n}}{\varepsilon C_1} \tag{۴-۱۱}$$

با توجه به این که در معادلات مربوط مدل نئوهوکین، جملاتی شامل C_1، k و K_s ایجاد خواهد شد و طرفین معادلات حاکم نیز به دلیل بی‌بعد سازی بر C_1 تقسیم شده‌اند؛ به‌منظور تسهیل در نمایش معادلات به جای متغیرهای کمکی رابطه‌ی (۳-۷)، در این مدل متغیرهای بی‌بعد زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{cases}(1-K_s)=\hat{K}_s,\quad \dfrac{k}{C_1}=\bar{k},\quad \dfrac{2C_1-k}{C_1}=\overline{Ck_1},\quad \dfrac{4C_1-k}{C_1}=\overline{Ck_2},\\ \dfrac{2C_1-3k}{C_1}=\overline{Ck_3},\quad \dfrac{4C_1-5k}{C_1}=\overline{Ck_4},\quad \dfrac{8C_1-7k}{C_1}=\overline{Ck_5}\end{cases} \tag{۴-۱۲}$$

در این حالت درایه‌های غیرصـفر ماتریس ضرایب و بردارهای ناهمگنی‌ها در معادلات حل خارجی پوسته‌ی استوانه‌ای جدار متغیر ساخته‌شده از ماده‌ی نئوهوکین به‌شکل زیر بازنویسی می‌شوند.

$$\begin{cases}[\mathbf{A}_{\mathrm{O}}]_{11}=\bar{k}\,\overline{II}(0,n+1),\quad [\mathbf{A}_{\mathrm{O}}]_{22}=-2K_s\overline{II}(0,n+1),\\ [\mathbf{A}_{\mathrm{O}}]_{13}=-[\mathbf{A}_{\mathrm{O}}]_{31}=-\overline{Ck_2}\,\overline{II}(0,n),\quad [\mathbf{A}_{\mathrm{O}}]_{33}=-\bar{k}\,\overline{II}(0,n-1),\\ [\mathbf{A}_{\mathrm{O}}]_{14}=-[\mathbf{A}_{\mathrm{O}}]_{41}=-\overline{Ck_2}\left(\overline{II}(1,n)+\overline{II}(0,n+1)\right),\\ [\mathbf{A}_{\mathrm{O}}]_{34}=[\mathbf{A}_{\mathrm{O}}]_{43}=\overline{Ck_2}\,\overline{II}(0,n)-\bar{k}\,\overline{II}(1,n-1),\\ [\mathbf{A}_{\mathrm{O}}]_{44}=\overline{Ck_2}\,\overline{II}(1,n)-\bar{k}\left(\overline{II}(0,n+1)+\overline{II}(2,n-1)\right)\end{cases} \tag{۴-۱۳}$$

$$\{\mathbf{F}_{\mathrm{O1}}\}=\begin{Bmatrix}\bar{c}_0\\ 0\\ -\bar{P}_{\mathrm{i}}(\bar{x})\left(\bar{R}(\bar{x})-\dfrac{\bar{h}(\bar{x})}{2}\right)\\ \bar{P}_{\mathrm{i}}(\bar{x})\left(\dfrac{\bar{R}(\bar{x})\bar{h}(\bar{x})}{2}-\dfrac{\bar{h}^2(\bar{x})}{4}\right)\end{Bmatrix} \tag{۴-۱۴}$$

$$
\begin{cases}
\left\{\mathbf{F}^{\Pi}_{\mathrm{O}2}\right\}_1 = \overline{Ck}_3\Big[\left(\bar{\Pi}(2,n-1)+\bar{\Pi}(0,n+1)\right)\bar{\psi}_{\mathrm{O}1}{}^2 + 2\bar{\Pi}(1,n-1)\bar{w}_{\mathrm{O}1}\bar{\psi}_{\mathrm{O}1} \\
\qquad + 2\left(\bar{\Pi}(1,n)+\bar{\Pi}(0,n+1)\right)\bar{v}_{\mathrm{O}1}\bar{\psi}_{\mathrm{O}1} + 2\bar{\Pi}(0,n)\bar{v}_{\mathrm{O}1}\bar{w}_{\mathrm{O}1} + \bar{\Pi}(0,n-1)\bar{w}_{\mathrm{O}1}{}^2\Big] \\
\qquad + \overline{Ck}_5\left[\bar{\Pi}(1,n)\bar{\psi}_{\mathrm{O}1}{}^2 + \bar{\Pi}(0,n)\bar{w}_{\mathrm{O}1}\bar{\psi}_{\mathrm{O}1}\right] - 2\hat{K}_s\bar{\Pi}(0,n+1)\bar{\varphi}_{\mathrm{O}1}{}^2 \\
\qquad - \bar{k}\left[\bar{\Pi}(1,n+1)\bar{\varphi}_{\mathrm{O}1}{}' + 2\bar{\Pi}(0,n+1)\bar{v}_{\mathrm{O}1}{}^2\right], \qquad \left\{\mathbf{F}^{\Pi'}_{\mathrm{O}2}\right\}_1 = 0
\end{cases}
\tag{۱۵-۴}
$$

$$
\begin{cases}
\left\{\mathbf{F}^{\Pi}_{\mathrm{O}2}\right\}_2 = \overline{Ck}_2\Big[\left(\bar{\Pi}(2,n)+\bar{\Pi}(1,n+1)\right)\bar{\psi}_{\mathrm{O}1}{}' + \bar{\Pi}(1,n)\bar{w}_{\mathrm{O}1}{}' \\
\qquad - \left(\bar{\Pi}(1,n)\bar{\psi}_{\mathrm{O}1} + \bar{\Pi}(0,n)\bar{w}_{\mathrm{O}1}\right)\bar{\varphi}_{\mathrm{O}1} + K_s\left(\bar{\Pi}(1,n)\bar{\psi}_{\mathrm{O}1} + \bar{\Pi}(0,n)\bar{w}_{\mathrm{O}1}\right)\bar{\varphi}_{\mathrm{O}1} \\
\qquad + \hat{K}_s\bar{\Pi}(0,n+1)\bar{v}_{\mathrm{O}1}\bar{\varphi}_{\mathrm{O}1}\Big] + 2K_s\left(\bar{\Pi}(0,n+1)\bar{w}_{\mathrm{O}1}{}' + \bar{\Pi}(1,n+1)\bar{\psi}_{\mathrm{O}1}{}'\right) \\
\qquad - \bar{k}\,\bar{\Pi}(1,n+1)\bar{v}_{\mathrm{O}1}{}' + \hat{K}_s\bar{k}\,\bar{\Pi}(0,n+1)\bar{\varphi}_{\mathrm{O}1}\bar{\psi}_{\mathrm{O}1} \\
\left\{\mathbf{F}^{\Pi'}_{\mathrm{O}2}\right\}_2 = \overline{Ck}_2\left[\bar{\Pi}'(2,n)\bar{\psi}_{\mathrm{O}1} + \bar{\Pi}'(1,n)\bar{w}_{\mathrm{O}1} + \bar{\Pi}'(1,n+1)\bar{\psi}_{\mathrm{O}1}\right] - \bar{k}\,\bar{\Pi}'(1,n+1)\bar{v}_{\mathrm{O}1}
\end{cases}
\tag{۱۶-۴}
$$

$$
\begin{cases}
\left\{\mathbf{F}^{\Pi}_{\mathrm{O}2}\right\}_3 = -\overline{Ck}_3\left[\bar{\Pi}(0,n)\left(\bar{v}_{\mathrm{O}1}{}^2 + \bar{\psi}_{\mathrm{O}1}{}^2\right) + 2\left(\bar{\Pi}(1,n-1)\bar{\psi}_{\mathrm{O}1} + \bar{\Pi}(0,n-1)\bar{w}_{\mathrm{O}1}\right)\left(\bar{v}_{\mathrm{O}1} + \bar{\psi}_{\mathrm{O}1}\right)\right] \\
\qquad - 2K_s\bar{\Pi}(0,n+1)\bar{\varphi}_{\mathrm{O}1}{}' - \overline{Ck}_2\bar{\Pi}(1,n)\bar{\varphi}_{\mathrm{O}1}{}' - \overline{Ck}_5\bar{\Pi}(0,n)\bar{v}_{\mathrm{O}1}\bar{\psi}_{\mathrm{O}1} + 2\bar{k}\Big[\bar{\Pi}(2,n-2)\bar{\psi}_{\mathrm{O}1}{}^2 \\
\qquad + 2\bar{\Pi}(1,n-2)\bar{w}_{\mathrm{O}1}\bar{\psi}_{\mathrm{O}1} + \bar{\Pi}(0,n-2)\bar{w}_{\mathrm{O}1}{}^2\Big], \qquad \left\{\mathbf{F}^{\Pi'}_{\mathrm{O}2}\right\}_3 = -2K_s\bar{\Pi}'(0,n+1)\bar{\varphi}_{\mathrm{O}1}
\end{cases}
\tag{۱۷-۴}
$$

$$
\begin{cases}
\left\{\mathbf{F}^{\Pi}_{\mathrm{O}2}\right\}_4 = -\overline{Ck}_2\left(\bar{\Pi}(2,n)+\bar{\Pi}(1,n+1)\right)\bar{\varphi}_{\mathrm{O}1}{}' - 2K_s\bar{\Pi}(1,n+1)\bar{\varphi}_{\mathrm{O}1}{}' \\
\qquad - \overline{Ck}_3\Big[\bar{\Pi}(1,n)\left(3\bar{\psi}_{\mathrm{O}1}{}^2 + \bar{v}_{\mathrm{O}1}{}^2\right) + \bar{\Pi}(2,n-1)\bar{\psi}_{\mathrm{O}1}\left(3\bar{\psi}_{\mathrm{O}1} + 2\bar{v}_{\mathrm{O}1}\right) + 2\bar{\Pi}(0,n)\bar{w}_{\mathrm{O}1}\bar{\psi}_{\mathrm{O}1} \\
\qquad + \bar{\Pi}(0,n+1)\bar{v}_{\mathrm{O}1}\left(2\bar{\psi}_{\mathrm{O}1} + \bar{v}_{\mathrm{O}1}\right) + \bar{\Pi}(1,n-1)\bar{w}_{\mathrm{O}1}\left(4\bar{\psi}_{\mathrm{O}1} + 2\bar{v}_{\mathrm{O}1}\right) + 2\bar{\Pi}(0,n-1)\bar{w}_{\mathrm{O}1}{}^2\Big] \\
\qquad + 2\bar{k}\left[\bar{\Pi}(1,n-2)\bar{w}_{\mathrm{O}1}{}^2 + \left(\bar{\Pi}(3,n-2)+\bar{\Pi}(0,n+1)\right)\bar{\psi}_{\mathrm{O}1}{}^2 + 2\bar{\Pi}(2,n-2)\bar{w}_{\mathrm{O}1}\bar{\psi}_{\mathrm{O}1}\right] \\
\qquad - \overline{Ck}_5\left[\bar{\Pi}(0,n)\bar{v}_{\mathrm{O}1}\bar{w}_{\mathrm{O}1} + 2\bar{\Pi}(1,n)\bar{v}_{\mathrm{O}1}\bar{\psi}_{\mathrm{O}1}\right], \qquad \left\{\mathbf{F}^{\Pi'}_{\mathrm{O}2}\right\}_4 = -2K_s\bar{\Pi}'(1,n+1)\bar{\varphi}_{\mathrm{O}1}
\end{cases}
\tag{۱۸-۴}
$$

درایه‌های غیرصفر ماتریس ضرایب و بردارهای ناهمگنی‌ها در معادلات حل داخلی نیز برای پوسته‌ی مورد بررسی به‌شکل زیر تغییر می‌کنند.

$$
\begin{cases}
\left[\mathbf{A}_{\alpha 1}\right]_{22} = \bar{k}\,\bar{\Pi}_{\alpha}(2,n+1), \quad \left[\mathbf{A}_{\alpha 1}\right]_{33} = 2K_s\bar{\Pi}_{\alpha}(0,n+1) \\
\left[\mathbf{A}_{\alpha 1}\right]_{34} = \left[\mathbf{A}_{\alpha 1}\right]_{43} = 2K_s\bar{\Pi}_{\alpha}(1,n+1), \\
\left[\mathbf{A}_{\alpha 1}\right]_{44} = 2K_s\bar{\Pi}_{\alpha}(2,n+1)
\end{cases}
\tag{۱۹-۴}
$$

$$\begin{cases}\left[\mathbf{A}_{\alpha 2}\right]_{12}=\left[\mathbf{A}_{\alpha 2}\right]_{21}=\bar{k}\,\overline{\Pi}_{\alpha}(1,n+1),\\ \left[\mathbf{A}_{\alpha 2}\right]_{23}=-\left[\mathbf{A}_{\alpha 2}\right]_{32}=-2K_s\overline{\Pi}_{\alpha}(0,n+1)-\overline{Ck_2}\,\overline{\Pi}_{\alpha}(1,n)\\ \left[\mathbf{A}_{\alpha 2}\right]_{24}=-\left[\mathbf{A}_{\alpha 2}\right]_{42}=-2K_s\overline{\Pi}_{\alpha}(1,n+1)-\overline{Ck_2}\left(\overline{\Pi}_{\alpha}(2,n)+\overline{\Pi}_{\alpha}(1,n+1)\right)\end{cases} \tag{۲۰-۴}$$

$$\begin{cases}\left[\mathbf{A}_{\alpha 3}\right]_{11}=\bar{k}\,\overline{\Pi}_{\alpha}(0,n+1),\quad \left[\mathbf{A}_{\alpha 3}\right]_{22}=-2K_s\overline{\Pi}_{\alpha}(0,n+1),\\ \left[\mathbf{A}_{\alpha 3}\right]_{13}=-\left[\mathbf{A}_{\alpha 3}\right]_{31}=-\overline{Ck_2}\,\overline{\Pi}_{\alpha}(0,n),\ \left[\mathbf{A}_{\alpha 3}\right]_{33}=-\bar{k}\,\overline{\Pi}_{\alpha}(0,n-1)\\ \left[\mathbf{A}_{\alpha 3}\right]_{14}=-\left[\mathbf{A}_{\alpha 3}\right]_{41}=-\overline{Ck_2}\left(\overline{\Pi}_{\alpha}(0,n+1)+\overline{\Pi}_{\alpha}(1,n)\right),\\ \left[\mathbf{A}_{\alpha 3}\right]_{34}=\left[\mathbf{A}_{\alpha 3}\right]_{43}=\overline{Ck_2}\,\overline{\Pi}_{\alpha}(0,n)-\bar{k}\,\overline{\Pi}_{\alpha}(1,n-1),\\ \left[\mathbf{A}_{\alpha 3}\right]_{44}=2\overline{Ck_2}\,\overline{\Pi}_{\alpha}(1,n)-\bar{k}\left(\overline{\Pi}_{\alpha}(0,n+1)+\overline{\Pi}_{\alpha}(2,n-1)\right)\end{cases} \tag{۲۱-۴}$$

$$\left\{\mathbf{F}_{\alpha 1}\right\}=\begin{Bmatrix}\bar{c}_0\\ 0\\ -\bar{P}_{\mathrm{i}\alpha}\left(\bar{R}_{\alpha}-\dfrac{\bar{h}_{\alpha}}{2}\right)\\ \bar{P}_{\mathrm{i}\alpha}\left(\dfrac{\bar{R}_{\alpha}\bar{h}_{\alpha}}{2}-\dfrac{\bar{h}_{\alpha}^{2}}{4}\right)\end{Bmatrix} \tag{۲۲-۴}$$

$$\begin{cases}\left\{\mathbf{F}_{\alpha 2}^{\mathrm{DA}_\alpha}\right\}_1=\tilde{x}_{\alpha}\overline{Ck_2}\left[\left(\mathrm{D}\overline{\Pi}_{\alpha}(1,n)+\mathrm{D}\overline{\Pi}_{\alpha}(0,n+1)\right)\bar{\psi}_{\alpha 1}+\mathrm{D}\overline{\Pi}_{\alpha}(0,n)\bar{w}_{\alpha 1}\right]\\ \qquad -\tilde{x}_{\alpha}\bar{k}\left(\mathrm{D}\overline{\Pi}_{\alpha}(1,n+1)\bar{\varphi}_{\alpha 1}{}'+\mathrm{D}\overline{\Pi}_{\alpha}(0,n+1)\bar{v}_{\alpha 1}\right)\\ \left\{\mathbf{F}_{\alpha 2}^{\mathrm{DA}_\alpha}\right\}_2=\tilde{x}_{\alpha}\overline{Ck_2}\left[\left(\mathrm{D}\overline{\Pi}_{\alpha}(2,n)+\mathrm{D}\overline{\Pi}_{\alpha}(1,n+1)\right)\bar{\psi}_{\alpha 1}{}'+\mathrm{D}\overline{\Pi}_{\alpha}(1,n)\bar{w}_{\alpha 1}{}'\right]\\ \qquad +2\tilde{x}_{\alpha}K_s\left[\mathrm{D}\overline{\Pi}_{\alpha}(1,n+1)\bar{\psi}_{\alpha 1}{}'+\mathrm{D}\overline{\Pi}_{\alpha}(0,n+1)\left(\bar{\varphi}_{\alpha 1}+\bar{w}_{\alpha 1}{}'\right)\right]\\ \qquad -\tilde{x}_{\alpha}\bar{k}\left(\mathrm{D}\overline{\Pi}_{\alpha}(1,n+1)\bar{v}_{\alpha 1}{}'+\mathrm{D}\overline{\Pi}_{\alpha}(2,n+1)\bar{\varphi}_{\alpha 1}{}''\right)\\ \left\{\mathbf{F}_{\alpha 2}^{\mathrm{DA}_\alpha}\right\}_3=-\tilde{x}_{\alpha}\overline{Ck_2}\left[\mathrm{D}\overline{\Pi}_{\alpha}(1,n)\bar{\varphi}_{\alpha 1}{}'+\mathrm{D}\overline{\Pi}_{\alpha}(0,n)\left(\bar{\psi}_{\alpha 1}+\bar{v}_{\alpha 1}\right)\right]\\ \qquad -2\tilde{x}_{\alpha}K_s\left[\mathrm{D}\overline{\Pi}_{\alpha}(1,n+1)\bar{\psi}_{\alpha 1}{}''+\mathrm{D}\overline{\Pi}_{\alpha}(0,n+1)\left(\bar{\varphi}_{\alpha 1}{}'+\bar{w}_{\alpha 1}{}''\right)\right]\\ \qquad +\tilde{x}_{\alpha}\bar{k}\left[\mathrm{D}\overline{\Pi}_{\alpha}(0,n-1)\bar{w}_{\alpha 1}+\mathrm{D}\overline{\Pi}_{\alpha}(1,n-1)\bar{\psi}_{\alpha 1}\right]\\ \left\{\mathbf{F}_{\alpha 2}^{\mathrm{DA}_\alpha}\right\}_4=-\tilde{x}_{\alpha}\overline{Ck_2}\left[\mathrm{D}\overline{\Pi}_{\alpha}(0,n+1)\left(\bar{v}_{\alpha 1}\right)+\mathrm{D}\overline{\Pi}_{\alpha}(1,n)\left(2\bar{\psi}_{\alpha 1}+\bar{v}_{\alpha 1}\right)\right.\\ \qquad \left.+\mathrm{D}\overline{\Pi}_{\alpha}(0,n)\left(\bar{w}_{\alpha 1}\right)+\left(\mathrm{D}\overline{\Pi}_{\alpha}(2,n)+\mathrm{D}\overline{\Pi}_{\alpha}(1,n+1)\right)\bar{\varphi}_{\alpha 1}{}'\right]\\ \qquad -2\tilde{x}_{\alpha}K_s\left[\mathrm{D}\overline{\Pi}_{\alpha}(2,n+1)\bar{\psi}_{\alpha 1}{}''+\mathrm{D}\overline{\Pi}_{\alpha}(1,n+1)\left(\bar{\varphi}_{\alpha 1}{}'+\bar{w}_{\alpha 1}{}''\right)\right]\\ \qquad +\tilde{x}_{\alpha}\bar{k}\left[\left(\mathrm{D}\overline{\Pi}_{\alpha}(2,n-1)+\mathrm{D}\overline{\Pi}_{\alpha}(0,n+1)\right)\bar{\psi}_{\alpha 1}+\mathrm{D}\overline{\Pi}_{\alpha}(1,n-1)\bar{w}_{\alpha 1}\right]\end{cases} \tag{۲۳-۴}$$

$$\begin{cases}\left\{\mathbf{F}_{\alpha 2}^{\mathrm{D}II_\alpha}\right\}_1 = 0 \\ \left\{\mathbf{F}_{\alpha 2}^{\mathrm{D}II_\alpha}\right\}_2 = \overline{Ck}_2\left[\left(\mathrm{D}\overline{II}_\alpha(2,n)+\mathrm{D}\overline{II}_\alpha(1,n+1)\right)\bar{\psi}_{\alpha 1}+\mathrm{D}\overline{II}_\alpha(1,n)\bar{w}_{\alpha 1}\right] \\ \qquad -\bar{k}\left(\mathrm{D}\overline{II}_\alpha(1,n+1)\bar{v}_{\alpha 1}+\mathrm{D}\overline{II}_\alpha(2,n+1)\bar{\varphi}_{\alpha 1}{}'\right) \\ \left\{\mathbf{F}_{\alpha 2}^{\mathrm{D}II_\alpha}\right\}_3 = -2K_s\left[\mathrm{D}\overline{II}_\alpha(1,n+1)\bar{\psi}_{\alpha 1}{}'+\mathrm{D}\overline{II}_\alpha(0,n+1)\left(\bar{\varphi}_{\alpha 1}+\bar{w}_{\alpha 1}{}'\right)\right] \\ \left\{\mathbf{F}_{\alpha 2}^{\mathrm{D}II_\alpha}\right\}_4 = -2K_s\left[\mathrm{D}\overline{II}_\alpha(2,n+1)\bar{\psi}_{\alpha 1}{}'+\mathrm{D}\overline{II}_\alpha(1,n+1)\left(\bar{\varphi}_{\alpha 1}+\bar{w}_{\alpha 1}{}'\right)\right]\end{cases} \tag{۲۴-۴}$$

$$\left\{\mathbf{F}_{\alpha 2}^{P_\alpha}\right\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\bar{P}_{\mathrm{i}\alpha}\tilde{x}_\alpha\left(\mathrm{D}\bar{R}_\alpha-\dfrac{\mathrm{D}\bar{h}_\alpha}{2}\right) \\ \dfrac{\bar{P}_{\mathrm{i}\alpha}\tilde{x}_\alpha}{2}\left(\mathrm{D}\bar{h}_\alpha\bar{R}_\alpha+\bar{h}_\alpha\mathrm{D}\bar{R}_\alpha-\bar{h}_\alpha\mathrm{D}\bar{h}_\alpha\right)\end{Bmatrix} \tag{۲۵-۴}$$

$$\left\{\mathbf{F}_{\alpha 2}^{\mathrm{D}P_\alpha}\right\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\mathrm{D}\bar{P}_{\mathrm{i}\alpha}\tilde{x}_\alpha\left(\bar{R}_\alpha-\dfrac{\bar{h}_\alpha}{2}\right) \\ \dfrac{\mathrm{D}\bar{P}_{\mathrm{i}\alpha}\tilde{x}_\alpha\bar{h}_\alpha}{2}\left(\bar{R}_\alpha-\dfrac{\bar{h}_\alpha}{2}\right)\end{Bmatrix} \tag{۲۶-۴}$$

$$\begin{aligned}\left\{\mathbf{F}_{\alpha 2}^{II_\alpha}\right\}_1 =& \overline{Ck}_3\Big[2\left(\left(\overline{II}_\alpha(1,n+1)+\overline{II}_\alpha(2,n)\right)\bar{\psi}_{\alpha 1}+\overline{II}_\alpha(1,n)\bar{w}_{\alpha 1}\right)\bar{\varphi}_{\alpha 1}{}' \\ &+\left(\overline{II}_\alpha(0,n+1)+\overline{II}_\alpha(2,n-1)\right)\bar{\psi}_{\alpha 1}{}^2+2\left(\overline{II}_\alpha(1,n)+\overline{II}_\alpha(0,n+1)\right)\bar{v}_{\alpha 1}\bar{\psi}_{\alpha 1} \\ &+2\overline{II}_\alpha(1,n-1)\bar{w}_{\alpha 1}\bar{\psi}_{\alpha 1}+2\overline{II}_\alpha(0,n)\bar{v}_{\alpha 1}\bar{w}_{\alpha 1}+\overline{II}_\alpha(0,n-1)\bar{w}_{\alpha 1}{}^2\Big] \\ &-2\left[K_s\overline{II}_\alpha(1,n+1)\bar{\varphi}_{\alpha 1}\bar{\psi}_{\alpha 1}{}'+\overline{II}_\alpha(0,n+1)\left(K_s\bar{\varphi}_{\alpha 1}\bar{w}_{\alpha 1}{}'+\hat{K}_s\bar{\varphi}_{\alpha 1}{}^2\right)\right] \\ &-\bar{k}\Big[2\overline{II}_\alpha(2,n+1)\left(\bar{\varphi}_{\alpha 1}{}'\right)^2+4\overline{II}_\alpha(1,n+1)\left(4\bar{v}_{\alpha 1}\bar{\varphi}_{\alpha 1}{}'-\bar{\varphi}_{\alpha 1}\bar{\psi}_{\alpha 1}{}'\right) \\ &+\overline{II}_\alpha(0,n+1)\left(2\bar{v}_{\alpha 1}{}^2-\bar{\varphi}_{\alpha 1}\bar{w}_{\alpha 1}{}'\right)\Big]+\overline{Ck}_5\left[\overline{II}_\alpha(1,n)\bar{\psi}_{\alpha 1}{}^2+\overline{II}_\alpha(0,n)\bar{w}_{\alpha 1}\bar{\psi}_{\alpha 1}\right]\end{aligned} \tag{۲۷-۴}$$

$$
\begin{aligned}
\left\{\mathbf{F}_{\alpha 2}^{\Pi_\alpha}\right\}_2 = {} & \overline{Ck}_2\Big[\Big(\overline{\Pi}_\alpha(1,n)\bar\psi_{\alpha1} + \overline{\Pi}_\alpha(0,n)\bar w_{\alpha1} + \hat K_s \overline{\Pi}_\alpha(0,n+1)\bar v_{\alpha1}\Big)\bar\varphi_{\alpha1} \\
& + K_s\Big(\overline{\Pi}_\alpha(2,n)\bar\psi_{\alpha1}\bar\psi_{\alpha1}' + \overline{\Pi}_\alpha(1,n)\Big(\big(\bar w_{\alpha1}\bar\psi_{\alpha1}\big)' + \bar\psi_{\alpha1}\bar\varphi_{\alpha1}\Big) + \overline{\Pi}_\alpha(0,n)\Big(\bar\varphi_{\alpha1}+\bar w_{\alpha1}'\Big)\bar w_{\alpha1}\Big)\Big] \\
& + K_s\overline{Ck}_1\Big[\overline{\Pi}_\alpha(0,n+1)\big(\bar\psi_{\alpha1}+\bar v_{\alpha1}\big)\bar w_{\alpha1}' + \overline{\Pi}_\alpha(1,n+1)\big(\bar v_{\alpha1}+\bar\psi_{\alpha1}\big)\bar\psi_{\alpha1}'\Big] \\
& + 2\overline{Ck}_3\Big[\overline{\Pi}_\alpha(3,n)\Big(\bar\psi_{\alpha1}\bar\varphi_{\alpha1}'\Big)' + \overline{\Pi}_\alpha(2,n+1)\bar\psi_{\alpha1}\bar\varphi_{\alpha1}'' + \overline{\Pi}_\alpha(1,n-1)\bar w_{\alpha1}\bar w_{\alpha1}' \\
& + \overline{\Pi}_\alpha(1,n+1)\Big(\big(\bar\psi_{\alpha1}\bar v_{\alpha1}\big)' + \bar\psi_{\alpha1}\bar\psi_{\alpha1}'\Big) + \overline{\Pi}_\alpha(2,n-1)\big(\bar w_{\alpha1}\bar\psi_{\alpha1}\big)' + \overline{\Pi}_\alpha(1,n)\big(\bar w_{\alpha1}\bar v_{\alpha1}\big)' \\
& + \overline{\Pi}_\alpha(3,n+1)\bar\psi_{\alpha1}\bar\psi_{\alpha1}' + \overline{\Pi}_\alpha(2,n)\Big(\big(\bar v_{\alpha1}\bar\psi_{\alpha1}\big)' + \Big(\bar w_{\alpha1}\bar\varphi_{\alpha1}'\Big)'\Big)\Big] + \overline{Ck}_4\overline{\Pi}_\alpha(2,n+1)\bar\psi_{\alpha1}'\bar\varphi_{\alpha1}' \\
& + \overline{Ck}_5\Big[2\overline{\Pi}_\alpha(2,n)\bar\psi_{\alpha1}\bar\psi_{\alpha1}' + \overline{\Pi}_\alpha(1,n)\big(\bar w_{\alpha1}\bar\psi_{\alpha1}\big)'\Big] \\
& - 2K_s\Big[\overline{\Pi}_\alpha(2,n+1)\bar\psi_{\alpha1}'' + \overline{\Pi}_\alpha(1,n+1)\bar w_{\alpha1}''\Big]\bar\varphi_{\alpha1} \\
& - \bar k\Big[\hat K_s\overline{\Pi}_\alpha(0,n+1)\bar\varphi_{\alpha1}\bar\psi_{\alpha1} + \overline{\Pi}_\alpha(2,n+1)\Big(4\Big(\bar v_{\alpha1}\bar\varphi_{\alpha1}'\Big)' + K_s\bar\psi_{\alpha1}'\bar\varphi_{\alpha1}' - \bar\varphi_{\alpha1}\bar\psi_{\alpha1}''\Big) \\
& + \overline{\Pi}_\alpha(1,n+1)\Big(4\bar v_{\alpha1}\bar v_{\alpha1}' - \bar\varphi_{\alpha1}\bar w_{\alpha1}'' + \hat K_s\Big(\bar w_{\alpha1}'+\bar\varphi_{\alpha1}\Big)\bar\varphi_{\alpha1}'\Big) + 4\overline{\Pi}_\alpha(3,n+1)\bar\varphi_{\alpha1}'\bar\varphi_{\alpha1}''\Big]
\end{aligned}
$$
(۲۸-۴)

$$
\begin{aligned}
\left\{\mathbf{F}_{\alpha 2}^{\Pi_\alpha}\right\}_3 = {} & \overline{Ck}_2\Big[\overline{\Pi}_\alpha(2,n)\Big(\big(1+K_s\big)\bar\psi_{\alpha1}\bar\psi_{\alpha1}'' + \hat K_s\Big(\bar\psi_{\alpha1}'\Big)^2\Big) - \hat K_s\Big(\overline{\Pi}_\alpha(1,n+1)\Big(\bar\psi_{\alpha1}\bar\psi_{\alpha1}'\Big)' \\
& + \overline{\Pi}_\alpha(0,n+1)\big(\bar w_{\alpha1}\bar\psi_{\alpha1}\big)'\Big) + \overline{\Pi}_\alpha(1,n)\Big(\bar w_{\alpha1}'\bar\psi_{\alpha1}' + \bar w_{\alpha1}\bar\psi_{\alpha1}'' + \bar\psi_{\alpha1}\bar w_{\alpha1}'' - \hat K_s\bar\varphi_{\alpha1}\bar\psi_{\alpha1}' \\
& - K_s\Big(2\bar w_{\alpha1}'\bar\psi_{\alpha1}' + \bar w_{\alpha1}\bar\psi_{\alpha1}'' + \bar\psi_{\alpha1}\bar w_{\alpha1}'' + \bar\psi_{\alpha1}\bar\varphi_{\alpha1}'\Big)\Big) \\
& + \overline{\Pi}_\alpha(0,n)\Big(2\bar w_{\alpha1}\bar w_{\alpha1}'' + \Big(\bar w_{\alpha1}'\Big)^2 - \hat K_s\bar\varphi_{\alpha1}\bar w_{\alpha1}' - K_s\Big(\Big(\bar w_{\alpha1}'\Big)^2 + \bar w_{\alpha1}\bar w_{\alpha1}'' + \bar w_{\alpha1}\bar\varphi_{\alpha1}'\Big)\Big)\Big] \\
& - \overline{Ck}_5\Big(\overline{\Pi}_\alpha(0,n)\bar v_{\alpha1} + \overline{\Pi}_\alpha(1,n)\bar\varphi_{\alpha1}'\Big)\bar\psi_{\alpha1} - \overline{Ck}_3\Big[2\overline{\Pi}_\alpha(2,n-1)\bar\psi_{\alpha1}\bar\varphi_{\alpha1}' \\
& + 2\overline{\Pi}_\alpha(0,n-1)\big(\bar v_{\alpha1}+\bar\psi_{\alpha1}\big)\bar w_{\alpha1} + 2\overline{\Pi}_\alpha(1,n-1)\Big(\bar w_{\alpha1}\bar\varphi_{\alpha1}' + \bar\psi_{\alpha1}^{\,2} + \bar v_{\alpha1}\bar\psi_{\alpha1}\Big) \\
& + 2\overline{\Pi}_\alpha(1,n)\bar v_{\alpha1}\bar\varphi_{\alpha1}' + \overline{\Pi}_\alpha(0,n)\Big(\bar v_{\alpha1}^{\,2} + \bar\psi_{\alpha1}^{\,2}\Big)\Big] + \hat K_s\bar k\Big[\overline{\Pi}_\alpha(2,n+1)\Big(\bar\varphi_{\alpha1}'\bar\psi_{\alpha1}'\Big)' \\
& + \overline{\Pi}_\alpha(1,n+1)\Big(\bar v_{\alpha1}\bar\psi_{\alpha1}' + \bar\varphi_{\alpha1}'\bar w_{\alpha1}'\Big)' + \overline{\Pi}_\alpha(0,n+1)\Big(\bar v_{\alpha1}\bar w_{\alpha1}'\Big)'\Big] \\
& - K_s\overline{Ck}_1\Big[\overline{\Pi}_\alpha(1,n+1)\Big(\bar\varphi_{\alpha1}\bar\varphi_{\alpha1}'\Big)' + \overline{\Pi}_\alpha(0,n+1)\big(\bar v_{\alpha1}\bar\varphi_{\alpha1} + \bar\varphi_{\alpha1}\bar\psi_{\alpha1}\big)'\Big] \\
& + 2\bar k\Big[\overline{\Pi}_\alpha(2,n-2)\bar\psi_{\alpha1}^{\,2} + 2\overline{\Pi}_\alpha(1,n-2)\bar w_{\alpha1}\bar\psi_{\alpha1} + \overline{\Pi}_\alpha(0,n-2)\bar w_{\alpha1}^{\,2}\Big]
\end{aligned}
$$
(۲۹-۴)

$$
\begin{aligned}
\left\{\mathbf{F}_{\alpha 2}^{II_\alpha}\right\}_4 = & -\overline{Ck}_2\Big[\overline{II}_\alpha(0,n+1)\bar{\varphi}_{\alpha 1}\bar{w}_{\alpha 1}{}' + \hat{K}_s\left(\overline{II}_\alpha(1,n+1)\bar{w}_{\alpha 1}{}'' + \overline{II}_\alpha(2,n+1)\bar{\psi}_{\alpha 1}{}''\right)\bar{\psi}_{\alpha 1} \\
& + \overline{II}_\alpha(3,n)\left(2K_s\bar{\psi}_{\alpha 1}\bar{\psi}_{\alpha 1}{}'' - \hat{K}_s\left(\bar{\psi}_{\alpha 1}{}'\right)^2 - \bar{\psi}_{\alpha 1}\bar{\psi}_{\alpha 1}{}''\right) \\
& + \overline{II}_\alpha(2,n)\left(K_s\left(+\bar{\psi}_{\alpha 1}\bar{\varphi}_{\alpha 1}{}'\right) + \hat{K}_s\left(\bar{\varphi}_{\alpha 1}\bar{w}_{\alpha 1}{}' - \left(\bar{w}_{\alpha 1}\bar{\psi}_{\alpha 1}{}'\right)' - \bar{\psi}_{\alpha 1}\bar{w}_{\alpha 1}{}''\right)\right) \\
& + \overline{II}_\alpha(1,n)\left(K_s\bar{w}_{\alpha 1}\bar{\varphi}_{\alpha 1}{}' + \hat{K}_s\left(\bar{\varphi}_{\alpha 1}\bar{w}_{\alpha 1}{}' - \left(\bar{w}_{\alpha 1}{}'\right)^2 - \bar{w}_{\alpha 1}\bar{w}_{\alpha 1}{}''\right)\right)\Big] \\
& + 2\overline{II}_\alpha(0,n+1)\left(\hat{K}_s\left(\bar{w}_{\alpha 1}{}'\right)^2 + K_s\bar{\varphi}_{\alpha 1}\bar{w}_{\alpha 1}{}'\right) - \overline{Ck}_3\Big[\overline{II}_\alpha(3,n)\left(\bar{\varphi}_{\alpha 1}{}'\right)^2 + \overline{II}_\alpha(0,n-1)\bar{w}_{\alpha 1}{}^2 \\
& + 2\overline{II}_\alpha(1,n+1)\left(\bar{v}_{\alpha 1} + \bar{\psi}_{\alpha 1}\right)\bar{\varphi}_{\alpha 1}{}' + 2\left(\overline{II}_\alpha(2,n-1) + \overline{II}_\alpha(0,n+1)\right)\bar{v}_{\alpha 1}\bar{\psi}_{\alpha 1} \\
& + 2\left(2\overline{II}_\alpha(1,n-1) + \overline{II}_\alpha(0,n)\right)\bar{w}_{\alpha 1}\bar{\psi}_{\alpha 1} + \left(\overline{II}_\alpha(0,n+1) + \overline{II}_\alpha(1,n)\right)\bar{v}_{\alpha 1}{}^2 \\
& + 3\left(\overline{II}_\alpha(1,n) + \overline{II}_\alpha(2,n-1)\right)\bar{\psi}_{\alpha 1}{}^2 + 2\overline{II}_\alpha(1,n-1)\bar{v}_{\alpha 1}\bar{w}_{\alpha 1} + 2\overline{II}_\alpha(2,n-1)\bar{w}_{\alpha 1}\bar{\varphi}_{\alpha 1}{}' \\
& + 2\overline{II}_\alpha(2,n)\bar{v}_{\alpha 1}\bar{\varphi}_{\alpha 1}{}' + 2\overline{II}_\alpha(3,n-1)\bar{\psi}_{\alpha 1}\bar{\varphi}_{\alpha 1}{}' + \overline{II}_\alpha(2,n+1)\left(\bar{\varphi}_{\alpha 1}{}'\right)^2\Big] \\
& - \overline{Ck}_1\Big[\overline{II}_\alpha(2,n+1)\left(\hat{K}_s\left(\bar{\psi}_{\alpha 1}{}'\right)^2 + K_s\left(\bar{\varphi}_{\alpha 1}\bar{\varphi}_{\alpha 1}{}'\right)'\right) + K_s\overline{II}_\alpha(1,n+1)\left(\left(\bar{\varphi}_{\alpha 1}\bar{v}_{\alpha 1}\right)' + \bar{\psi}_{\alpha 1}\bar{\varphi}_{\alpha 1}{}'\right)\Big] \\
& - \overline{Ck}_5\Big[2\overline{II}_\alpha(2,n)\bar{\psi}_{\alpha 1}\bar{\varphi}_{\alpha 1}{}' + 2\overline{II}_\alpha(1,n)\left(\bar{v}_{\alpha 1}\bar{\psi}_{\alpha 1} + \bar{w}_{\alpha 1}\bar{\varphi}_{\alpha 1}{}'\right) + \overline{II}_\alpha(0,n)\bar{v}_{\alpha 1}\bar{w}_{\alpha 1}\Big] \\
& + \hat{K}_s\bar{k}\Big[\overline{II}_\alpha(3,n+1)\left(\bar{\varphi}_{\alpha 1}{}'\bar{\psi}_{\alpha 1}{}'\right)' + \overline{II}_\alpha(2,n+1)\left(\left(\bar{\varphi}_{\alpha 1}{}'\bar{w}_{\alpha 1}{}'\right)' + \left(\bar{v}_{\alpha 1}\bar{\psi}_{\alpha 1}{}'\right)'\right) \\
& + \overline{II}_\alpha(1,n+1)\left(\left(\bar{v}_{\alpha 1}\bar{w}_{\alpha 1}{}'\right)' + \left(\bar{w}_{\alpha 1}{}' + \bar{\varphi}_{\alpha 1}\right)\bar{\psi}_{\alpha 1}{}'\right)\Big] \\
& + 2\bar{k}\Big[\overline{II}_\alpha(1,n-2)\bar{w}_{\alpha 1}{}^2 + \left(\overline{II}_\alpha(3,n-2) + \overline{II}_\alpha(0,n+1)\right)\bar{\psi}_{\alpha 1}{}^2 + 2\overline{II}_\alpha(2,n-2)\bar{w}_{\alpha 1}\bar{\psi}_{\alpha 1}\Big]
\end{aligned}
\qquad (۳۰\text{-}۴)
$$

برای مدل‌سازی اجزای محدود مادّه‌ی نئوهوکین در حالت تقریباً تراکم‌ناپذیر، در هر لایه‌ی همگن، دو ثابت شامل μ و d باید در نرم‌افزار انسیس تعریف شوند که ثابت اوّل معادل با $2C_{1n}$ بوده و ثابت دوّم هم با ضریب تراکم‌ناپذیری دارای رابطه‌ی $k_n.d = 2$ است. همانطور که اشاره شد، این ثابت‌ها برای هر لایه‌ی همگن توسط رابطه‌ی (۴-۹) با توجه به ثابت ناهمگنی دلخواه n و خواص شعاع داخلی استوانه یعنی C_1 و k و متناسب با فاصله‌ی محور تقارن هر لایه تا محور دوران پوسته تعیین می‌شوند.

در این قسمت به‌منظور امکان مقایسه‌ی نتایج با بخش ۴-۳، مقادیر فشار داخلی و ضخامت متغیر پوسته‌ی استوانه‌ای مطابق جدول‌های ۴-۴ و ۴-۵ درنظر گرفته شده‌اند. ثابت‌های مادّه‌ی نئوهوکین که در این قسمت استفاده خواهند شد، از مراجع مختلف به‌طور مستقیم یا غیرمستقیم استخراج شده‌اند. در مراجعی که مدول بالک در آنها مشخص نشده است، مقدار آن برابر ۱۰ مگاپاسکال فرض شده است.

جدول ۴-۱۰ مشخصات ثابت‌های مدل نئوهوکین

شناسه‌ی ثابت مادّه	مرجع	μ(MPa)	k (MPa)	نمونه‌ی مادّه
MC_{11}	[۱۰۳]	1.55	10	Rubbers
MC_{12}	[۹۶،۷۶]	1.38	10	Rubber seals
MC_{13}	[۱۰۹]	1.13	9.3	TDM 600
MC_{14}	[۱۲۰]	0.90	10	Aneurysmal Abdominal Artery
MC_{15}	[۱۱۹]	0.82	10	Vulcanized rubbers
MC_{16}	[۱۱۲]	0.662	10	Natural gum rubbers
MC_{17}	[۸۱]	0.398	10	Silicone rubbers
MC_{18}	[۱۱۱]	0.346	10.5	Silicone elastomers

در جدول‌های ۴-۱۱ و ۴-۱۲ اثر متغیرهای ضـخامت $\bar{R}$ و نسبت بارگذاری به مدول برشی اوّلیه P_i / μ بر میدان جابه‌جایی استوانه‌ی جدار ثابت همگن برای ثابت‌های مختلف مدل نئوهوکین بررسی شده است. در این جدول‌های، مقادیر حداکثر جابه‌جایی در لایه‌ی داخلی که بیشترین اختلاف بین دو حل تحلیلی و عددی وجود دارد، ارائه شـــده‌اند تا معیار مناســـبی برای مقایســـه میزان اعتبار تحلیل ارائه‌شده باشند. نسبت P_i / μ به‌صورتی درنظر گرفته شده است تا با توجه به رابطه‌ی $2C_1 = \mu$ بتوان مقادیر ارائه‌شـده در جدول را با نتایج ارائه‌شـده برای مدل مونی-ریولین مقایسه کرد. طبق جدول ۴-۱۱، حداکثر درصـــد اختلاف دو روش حل برای جابه‌جایی شـــعاعی در نســـبت بار به مقاومت مادّه‌ی حداکثر و در استوانه‌های بسیار ضخیم $(\bar{R}=5)$ در حدود ۶ درصد است. جابه‌جایی محوری نیز دارای حداکثر اختلافی کمتر از ۹ درصد است. مقدار اختلاف حداکثر برای هر دو جابه‌جایی شعاعی و محوری در قلـه‌های توزیع طولی جابه‌جایی‌ها متناظر با محل همپوشـــانی دو حل داخلی و خارجی در اطراف

مرزها مشاهده می‌شود. به طور عمومی با افزایش مقدار $\bar{R}$ و نازکتر شدن استوانه، دقت نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل افزایش می‌یابد. اما در بارهای بزرگ با نازک‌تر شدن پوسته، مقدار جابه‌جایی‌ها و رفتار غیرخطی پوسته افزایش و درصد خطای روش MAE نیز افزایش می‌یابد. همچنین با کاهش مقدار μ به‌ازای نسبت P_{i}/μ ثابت، مقدار جابه‌جایی‌ها اندکی کاهش می‌یابد؛ اما افزایش سهم حل داخلی نسبت به خارجی سبب افزایش اختلاف دو روش حل می‌شود.

جدول ۴-۱۱ اثر متغیرهای ضخامت و بارگذاری بر جابه‌جایی شعاعی برای ثابت‌های مختلف مادّه

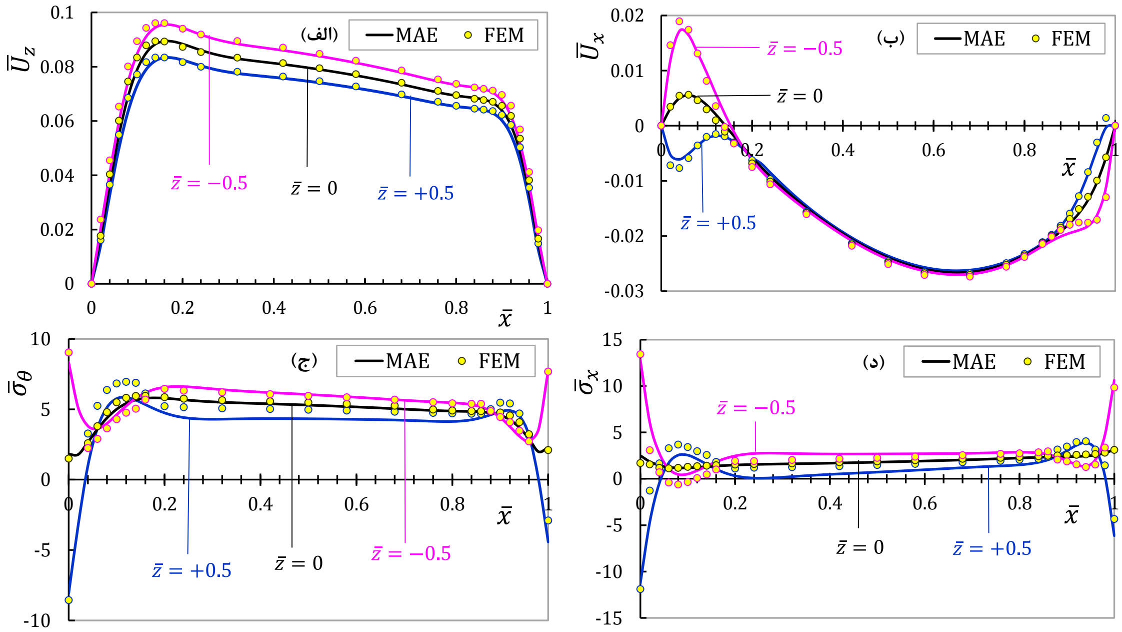
Mat. ID	$\bar{U}_z$,max	$P_{\mathrm{i}}/\mu=1/100$			$P_{\mathrm{i}}/\mu=1/200$			$P_{\mathrm{i}}/\mu=1/400$		
		$\bar{R}=5$	$\bar{R}=10$	$\bar{R}=20$	$\bar{R}=5$	$\bar{R}=10$	$\bar{R}=20$	$\bar{R}=5$	$\bar{R}=10$	$\bar{R}=20$
MC_{11}	FSDT	0.0792	0.3192	1.2895	0.0393	0.1587	0.6324	0.0196	0.0778	0.3100
	FEM	0.0799	0.3207	1.3038	0.0394	0.1579	0.6325	0.0195	0.0777	0.3099
MC_{12}	FSDT	0.0770	0.3144	1.3093	0.0388	0.1561	0.6230	0.0193	0.0770	0.3067
	FEM	0.0791	0.3174	1.3327	0.0387	0.1553	0.6244	0.0192	0.0769	0.3059
MC_{13}	FSDT	0.0768	0.3102	1.2550	0.0382	0.1538	0.6164	0.0191	0.0766	0.3049
	FEM	0.0778	0.3126	1.3053	0.0383	0.1536	0.6173	0.0190	0.0767	0.3024
MC_{14}	FSDT	0.0745	0.3023	1.2545	0.0371	0.1497	0.5992	0.0184	0.0745	0.2980
	FEM	0.0764	0.3039	1.2809	0.0378	0.1489	0.6020	0.0186	0.0744	0.2955
MC_{15}	FSDT	0.0738	0.3002	1.2171	0.0367	0.1487	0.5956	0.0183	0.0740	0.2961
	FEM	0.0761	0.3052	1.2461	0.0374	0.1491	0.5977	0.0184	0.0741	0.2937
MC_{16}	FSDT	0.0723	0.2961	1.2034	0.0359	0.1465	0.5897	0.0179	0.0721	0.2915
	FEM	0.0758	0.3016	1.2458	0.0371	0.1475	0.5909	0.0182	0.0723	0.2901
MC_{17}	FSDT	0.0694	0.2901	1.1852	0.0346	0.1434	0.5798	0.0172	0.0713	0.2876
	FEM	0.0730	0.2952	1.2312	0.0366	0.1440	0.5799	0.0178	0.0716	0.2848
MC_{18}	FSDT	0.0680	0.2899	1.1787	0.0338	0.1426	0.5733	0.0168	0.0705	0.2856
	FEM	0.0728	0.2947	1.2260	0.0357	0.1430	0.5754	0.0174	0.0713	0.2824

جدول ۴-۱۲ اثر متغیرهای ضخامت و بارگذاری بر جابه‌جایی محوری برای ثابت‌های مختلف مادّه

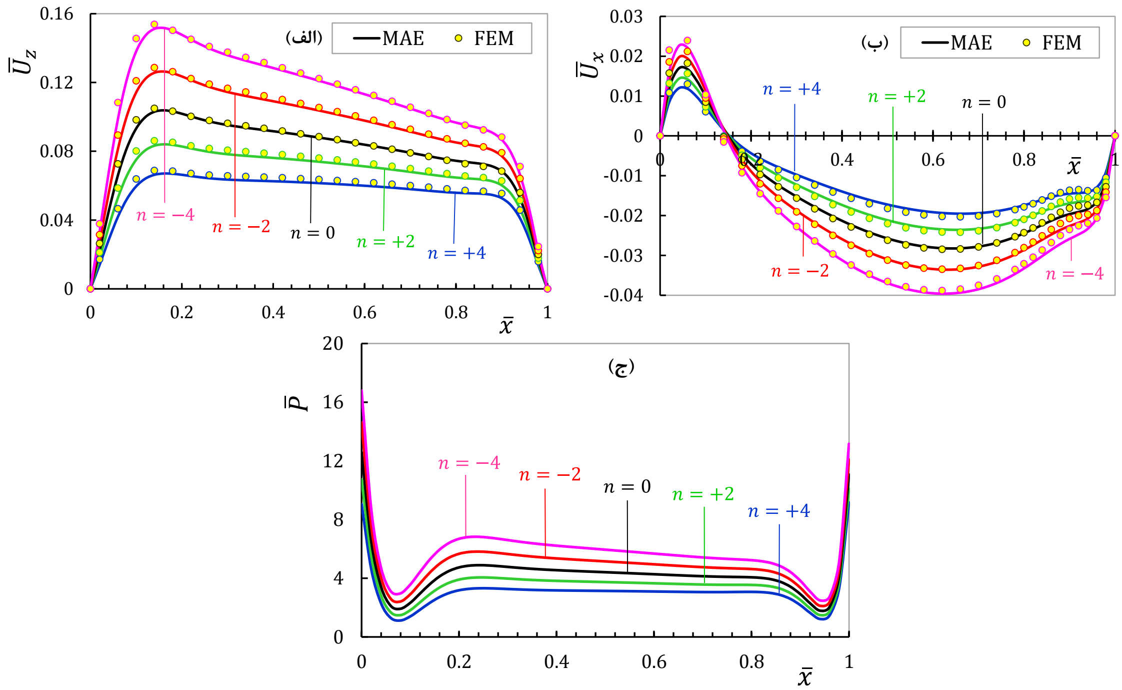
Mat. ID	$\bar{U}_x$,max	$P_{\mathrm{i}}/\mu=1/100$			$P_{\mathrm{i}}/\mu=1/200$			$P_{\mathrm{i}}/\mu=1/400$		
		$\bar{R}=5$	$\bar{R}=10$	$\bar{R}=20$	$\bar{R}=5$	$\bar{R}=10$	$\bar{R}=20$	$\bar{R}=5$	$\bar{R}=10$	$\bar{R}=20$
MC_{11}	FSDT	0.0154	0.0469	0.1023	0.0078	0.0249	0.0632	0.0039	0.0122	0.0343
	FEM	0.0159	0.0476	0.1089	0.0080	0.0250	0.0637	0.0040	0.0126	0.0343
MC_{12}	FSDT	0.0153	0.0463	0.1018	0.0077	0.0245	0.0626	0.0039	0.0119	0.0336
	FEM	0.0158	0.0474	0.1085	0.0080	0.0249	0.0633	0.0038	0.0125	0.0337
MC_{13}	FSDT	0.0141	0.0455	0.1011	0.0076	0.0242	0.0624	0.0038	0.0118	0.0332
	FEM	0.0149	0.0471	0.1082	0.0078	0.0248	0.0629	0.0038	0.0125	0.0337
MC_{14}	FSDT	0.0148	0.0447	0.1006	0.0074	0.0241	0.0613	0.0037	0.0117	0.0329
	FEM	0.0150	0.0467	0.1073	0.0076	0.0245	0.0621	0.0038	0.0124	0.0333
MC_{15}	FSDT	0.0146	0.0447	0.1006	0.0073	0.0240	0.0610	0.0037	0.0117	0.0329
	FEM	0.0150	0.0466	0.1071	0.0076	0.0244	0.0618	0.0038	0.0124	0.0332
MC_{16}	FSDT	0.0143	0.0445	0.1003	0.0072	0.0228	0.0607	0.0036	0.0115	0.0323
	FEM	0.0149	0.0461	0.1065	0.0075	0.0233	0.0613	0.0038	0.0121	0.0329
MC_{17}	FSDT	0.0137	0.0441	0.1001	0.0068	0.0225	0.0602	0.0034	0.0113	0.0321
	FEM	0.0148	0.0459	0.1057	0.0074	0.0230	0.0606	0.0037	0.0119	0.0327
MC_{18}	FSDT	0.0135	0.0440	0.0998	0.0067	0.0224	0.0602	0.0033	0.0113	0.0323
	FEM	0.0148	0.0458	0.1053	0.0074	0.0229	0.0603	0.0037	0.0121	0.0332

توزیع جابه‌جایی‌های شعاعی و محوری و تنش‌های محیطی و محوری در استوانه‌ی جدار متغیر ساخته‌شده از مادّه‌ی ناهمگن نئوهوکین با خواص جدار داخلی MC_{12} تحت فشار متغیر خطی در شکل ۴-۴۷ رسم شده است. این نمودارها علاوه بر این که دقت و قابلیت روش ارائه‌شده در تحلیل مدل‌های مختلف مواد هایپرالاستیک را نشان می‌دهد، امکان مقایسه‌ی نتایج مدل مونی-ریولین و نئوهوکین را فراهم می‌کند. در شکل‌های ۴-۱۵ و ۴-۱۶ از قسمت ۴-۳، حاصل $2(C_1+C_2)$ برای مادّه‌ی مورد استفاده برابر با μ متناظر با مادّه‌ی نئوهوکین MC_{12} است. مقایسه‌ی این شکل‌ها با شکل ۴-۴۷ نشان می‌دهد که مقادیر جابه‌جایی دو مادّه نزدیک به یکدیگر بوده و پوسته‌ی ساخته شده از این دو مادّه با مدل‌های مختلف رفتار مشابهی را نشان می‌دهد. مقادیر حداکثر تنش مربوط به MC_{12} اندکی بالاتر از MC_9 است. در شکل ۴-۴۸ اثر ثابت ناهمگنی بر توزیع جابه‌جایی‌ها و فشار هیدرواستاتیک در راستای طولی لایه‌ی داخلی پوسته برای ثابت مادّه‌ی MC_{11} نشان داده شده است. همچنین در جدول ۴-۱۳ مقادیر جابه‌جایی و فشار هیدرواستاتیک در مقاطع مختلف پوسته‌ی ناهمگن برای ثابت‌های ناهمگنی مختلف و ثابت مادّه‌ی MC_{15} آورده شده است. مقایسه‌ی مقادیر شکل ۴-۴۸ و جدول ۴-۱۳ نشان می‌دهد که کاهش مقدار μ در پوسته‌ی ناهمگن از MC_{11} به MC_{15} برای فشار یکسان، سبب کاهش مقاومت مادّه و افزایش جابه‌جایی‌ها و فشار هیدرواستاتیک می‌شود. همچنین ثابت‌های ناهمگنی مثبت باعث کاهش فشار هیدرواستاتیک و یکنواخت‌تر شدن توزیع آن در طول جداره‌ی پوسته شده و از این نظر برای طراحی پوسته مناسب‌تر هستند. در جدول ۴-۱۴ با اعمال توابع فشار و ضخامت مشابه (طبق جدول‌های ۴-۴ و ۴-۵) به پوسته‌ی ناهمگن از مادّه‌ی MC_{16}، مقدار جابه‌جایی‌ها و فشار هیدرواستاتیک در مقاطع مختلف لایه‌ی داخلی پوسته آورده شده است. مقایسه‌ی بخش توابع خطی این جدول با نتایج جدول ۴-۱۳ نشان می‌دهد که حتی با کاهش اندک در مقدار μ (حدود ۰/۱۵ مگاپاسکال)، فشار هیدرواستاتیک و جابه‌جایی افزایش یافته‌اند. مقایسه‌ی نتایج این جدول با جدول ۴-۶ که در آن حاصل $2(C_1+C_2)$ در مادّه‌ی MC_9 بزرگ‌تر از μ موجود در مادّه‌ی MC_{16} است، نشان می‌دهد که سطح تغییر شکل‌ها و تنش در مادّه‌ی MC_{16} مطابق انتظار بالاتر است.

همچنین مقایسه‌ی تغییرات جابه‌جایی و فشار هیدرواستاتیک در نقاط اشاره شده، رفتار مشابه پوسته را در این دو مدل مختلف در مقابل تغییر غیرخطی ضخامت و فشار نشان می‌دهد.



شکل ۴-۴۷ توزیع بی‌بعد جابه‌جایی (الف) شعاعی (ب) محوری و تنش کوشی (ج) محیطی (د) محوری برای لایه‌های مختلف در راستای طولی استوانه $(n=2,\ P_i(\bar{x})=P_{i1},\ h(\bar{x})=h_1, \mathrm{MC}_{12})$



شکل ۴-۴۸ اثر ثابت ناهمگنی بر توزیع بی‌بعد جابه‌جایی (الف) شعاعی (ب) محوری و (ج) فشار هیدرواستاتیک در راستای طولی لایه‌ی داخلی پوسته $(P_i(\bar{x})=P_{i1},\ h(\bar{x})=h_1, \mathrm{MC}_{11})$

جدول ۴-۱۳ مقادیر جابه‌جایی و فشار هیدرواستاتیک در مقاطع مختلف پوسته‌ی ناهمگن

برای ثابت‌های ناهمگنی مختلف $(P_i(\bar{x}) = P_{i1},\ h(\bar{x}) = h_1, \mathrm{MC}_{15})$

	$\bar{U}_z$ $(\bar{x}=0.15)$			$\bar{U}_x$ $(\bar{x}=0.65)$			$\bar{P}$ $(\bar{x}=0)$		
	$\bar{z}=-0.5$	$\bar{z}=0$	$\bar{z}=+0.5$	$\bar{z}=-0.5$	$\bar{z}=0$	$\bar{z}=+0.5$	$\bar{z}=-0.5$	$\bar{z}=0$	$\bar{z}=+0.5$
$n=+4$	0.1194	0.1112	0.1029	-0.0398	-0.0394	-0.0389	11.340	2.397	-6.544
$n=+2$	0.1495	0.1391	0.1287	-0.0482	-0.0475	-0.0468	13.408	2.235	-8.937
$n=0$	0.1847	0.1717	0.1588	-0.0578	-0.0568	-0.0559	15.673	1.779	-12.114
$n=-2$	0.2251	0.2092	0.1932	-0.0687	-0.0674	-0.0662	18.127	0.918	-16.291
$n=-4$	0.2707	0.2514	0.2321	-0.0809	-0.0793	-0.0777	20.760	-0.483	-21.726

جدول ۴-۱۴ مقادیر جابه‌جایی و فشار هیدرواستاتیک در مقاطع مختلف لایه‌ی داخلی

پوسته‌ی ناهمگن برای توابع ضخامت و فشار مشابه $(n = 2, \mathrm{MC}_{16})$

	$\bar{U}_z$			$\bar{U}_x$			$\bar{P}$		
	$\bar{x}=0.15$	$\bar{x}=0.5$	$\bar{x}=0.85$	$\bar{x}=0.05$	$\bar{x}=0.25$	$\bar{x}=0.7$	$\bar{x}=0$	$\bar{x}=0.5$	$\bar{x}=1$
P_{i0}, h_0	0.2483	0.2403	0.2483	0.0408	0.0159	-0.0125	22.595	6.942	22.595
P_{i1}, h_1	0.1820	0.1607	0.1372	0.0266	-0.0205	-0.0601	14.484	5.459	13.016
P_{i2}, h_2	0.1822	0.1695	0.1443	0.0289	-0.0105	-0.0634	14.827	6.096	13.573
P_{i3}, h_3	0.1812	0.1727	0.1505	0.0303	-0.0072	-0.0595	14.813	6.401	14.107
P_{i4}, h_4	0.1609	0.1782	0.1608	0.0422	0.0389	-0.0319	14.762	6.582	14.762
P_{i5}, h_5	0. 1708	0.1196	0.1708	0.0085	-0.0301	0.0297	5.617	4.256	5.618

۴-۶ جمع‌بندی

در فصل جاری، نتایج حاصل از حل تحلیلی برای چند مطالعه‌ی موردی از پوسته‌های استوانه‌ای و مخروطی شکل دارای ثابت‌های ماده، ثابت ناهمگنی و توابع فشار و ضخامت مختلف بررسی شد. نتایج این فصل نشان می‌دهد که نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل و بسط اغتشاشی مرتبه‌ی دوّم در تحلیل مسائل غیرخطی پوسته‌ها کارامد هستند و دارای دقت مطلوب در پیش‌بینی تنش‌ها و جابه‌جایی‌ها در پوسته‌های هایپرالاستیک ناهمگن برای هندسه و بارگذاری‌های اشاره شده هستند. به منظور افزایش بازه‌ی اعتبار حل از نظر هندسه و بارگذاری، می‌توان از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی بالاتر و یا در نظر گرفتن بارگذاری به شکل دنبالگر متناسب با تغییر شکل پوسته در طی بارگذاری استفاده کرد. در فصل بعدی، نتیجه‌گیری و جمع‌بندی نتایج ارائه شده انجام خواهد شد.

فصل ۵

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

۵-۱ مقدمه

در این پژوهش در حالت عمومی پوسته‌های مخروطی شکل جدار متغیر تحت فشار متغیر ساخته‌شده از مواد هایپرالاستیک ناهمگن با تغییرات توانی خواص در راستای شعاع پوسته در حالت تقریباً تراکم‌ناپذیر مورد تحلیل قرار گرفته‌اند. در فصل دوّم روابط سینماتیک و ساختاری غیرخطی پوسته‌های اشاره شده برای مدل مونی-ریولین دوجمله‌ای در حالت تقریباً تراکم‌ناپذیر ارائه شدند و دستگاه معادلات حاکم بر پوسته‌های مخروطی جدار متغیر تحت فشار داخلی و خارجی متغیر برای سینماتیک غیرخطی به کمک نظریه‌ی تغییر شکل برشی محاسبه شدند. در فصل سوّم پس از بی‌بعدسازی معادلات و اعمال رابطه‌ی ساختاری غیرخطی، به کمک بسط مجانبی تطبیق‌یافته (نظریه‌ی اغتشاشات) دو حل داخلی در اطراف مرزها و یک حل خارجی در نقاط دور از مرز برای مسأله درنظر گرفته شد و معادلات هر یک از این بخش‌ها به همراه ماتریس‌های ضرایب و بردارهای ناهمگنی آنها استخراج شدند. نهایتاً با اعمال شرایط مرزی گیردار و محاسبه‌ی ثابت‌ها و استفاده از شروط انطباقی، یک حل یکپارچه برای مؤلفه‌های جابه‌جایی پوسته ارائه شد و به کمک روابط ساختاری و سینماتیک، تنش‌های کوشی و فشار هیدرواستاتیک محاسبه شدند. در فصل چهارم نتایج حاصل از حل تحلیلی و مدل‌سازی عددی برای پوسته‌های استوانه‌ای و مخروطی جدار متغیر در حالت همگن و ناهمگن در قالب نمودارها و جدول‌هایی ارائه گردید و اثر عوامل مؤثر بر حل تحلیلی، قابلیت‌ها و محدودیت‌های تحلیل ارائه شده در مطالعه‌ی هندسه و فشار متغیر غیرخطی پوسته و اثر تغییر مدل مادّه‌ی هایپرالاستیک بر رفتار پوسته مورد بررسی قرار گرفت. در ادامه به تفسیر نتایج پژوهش جاری پرداخته می‌شود.

۵-۲ بحث و نتیجه‌گیری

مهمترین عوامل اختلاف نتایج حل تحلیلی و مدل‌سازی عددی ارائه شده در این پژوهش عبارتند از:

۱) هر دو حل ارائه شـده دارای تقریب هستند. در نظریه‌ی تغییر شکل برشی با افزایش مرتبه‌ی تقریب درنظر گرفته‌شـده برای توزیع جابه‌جایی‌ها در راستای ضخامت پوسته می‌توان تحلیل واقعی‌تری از مســأله‌ی مورد بررســی داشــت. این افزایش دقت در مورد پیش‌بینی تنش‌ها با افزایش مرتبـه‌ی نظریه‌ی تغییر شـــکل برشـــی ملموس‌تر خواهد بود. حل تحلیلی معادلات غیرخطی با استفاده از نظریه‌ی اغتشاشات برای بسط مجانبی تطبیق‌یافته تا مرتبه‌ی دو ارائه شـده اسـت. اگرچه به طور عمومی سرعت همگرایی نظریه‌ی اغتشاشات نسبت به استفاده از سـری‌های توانی و یا روش‌های دیگر مشـابه در حل معادلات بسیار بالاتر است، اما انجام حل اغتشاشی مرتبه‌ی بالاتر در مسائل با درجه‌ی غیرخطی بالاتر می‌تواند سبب بهبود دقت نتایج شــود. از طرفی مدل‌ســازی عددی نیازمند انجام تقســیمات شــعاعی و محوری و مش‌بندی متناسـب با هندسه و بارگذاری پوسته است. بنابراین برای هندسه‌هایی با تغییرات غیرخطی، انتخاب این تقســیمات متناســب با توابع مختلف به‌صــورت ســعی و خطا تغییر می‌کند که می‌تواند باعث ایجاد خطا شود.

۲) همواره نقاطی که تغییرات سریع جابه‌جایی‌ها و تنش‌ها تحت تاثیر شرایط مرزی در اطراف آنها مشاهده می‌شود، مرز تلاقی حل داخلی و خارجی هستند. حداکثر اختلاف بین نتایج دو روش در این نقاط مشاهده می‌شود. هر چه تغییرات آرام‌تر و یکنواخت‌تر باشد، متغیر سریع انتخاب-شده در حل‌های داخلی با دقت بیشتری می‌تواند با این تغییرات هماهنگ شود و دقت MAE بیشتر می‌شود. در مورد دقت پیش‌بینی رفتار تنش‌ها توسط نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، در لایه‌های میانی $\bar{u}$ و $\bar{w}$ به تنهایی اثرگذار هستند؛ در حالی که در لایه‌های داخلی و خارجی خطای محاسبه‌ی $\bar{\varphi}$ و $\bar{\psi}$ اضافه می‌شود. همچنین با توجه به درنظر گرفتن توزیع خطی جابه‌جایی‌ها در راستای ضخامت پوسته، با افزایش اثر متغیر z به سمت لایه‌های داخلی و خارجی، امکان کاهش دقت نسبت به لایه‌ی میانی پوسته افزایش می‌یابد. در حل ارائه‌شده، تنش‌ها در اطراف دو مرز به خوبی پیش‌بینی می‌شوند، اما دلیل اختلاف نتایج FSDT و FEM

در تنش‌ها و فشار هیدرواستاتیک در نقاط میانی لایه‌های داخلی و خارجی پوسته، محاسبه‌ی غیرمستقیم تنش‌ها با رابطه‌ی سینماتیک و ساختاری غیرخطی است که منجر به تشدید خطای اندک موجود در مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی به خصوص در حل خارجی می‌شود. در واقع محاسبه‌ی ثابت $\bar{c}_0$ که در بخش حل خارجی نیز وجود دارد، به کمک شرایط مرزی توسط حل‌های داخلی سبب ایجاد خطا در محاسبه‌ی مؤلفه‌های جابه‌جایی در نقاط دور از مرز می‌شود. این خطای اندک می‌تواند با روابط غیرخطی در محاسبه‌ی کرنش‌ها و سپس تنش‌ها تشدید شود.

۳) تغییرات جدار و فشار در راستای طولی پوسته و خواص مادّه در راستای شعاعی در حل تحلیلی به‌صورت پیوسته درنظر گرفته می‌شود؛ در حالی که اعمال توابع این تغییرات در انسیس به‌صورت نقطه‌ای بر اساس تعداد نقاط تعریف‌شده برای نرم‌افزار اعمال می‌شود. افزایش تعداد نقاط در اعمال یک تابع، هرچند سبب نزدیک‌ترشدن توزیع نقطه‌ای به پیوسته می‌شود، اما باعث بروز مشکل در مش‌بندی مسأله می‌شود. افزایش تعداد لایه‌های همگن در مدل‌سازی چندلایه‌ای مادّه‌ی ناهمگن در پوسته‌های جدار متغیر، سبب کاهش امکان مش‌بندی یکنواخت در پوسته شده و باعث کاهش دقت شبیه‌سازی در نقاطی از پوسته می‌شود.

۴) در تغییر شکل‌های بزرگ‌تر با میزان کرنش بالاتر (بالاتر از ۵۰ درصد) که در نسبت‌های بار به مقاومت مادّه‌ی بالاتر ایجاد می‌شود، بارگذاری فشاری توسط نرم‌افزار انسیس به‌صورت دنبالگر درنظر گرفته می‌شود؛ در حالی که در حل تحلیلی به‌صورت نادنبالگر بر اساس شرایط اولیه‌ی لایه‌ای از پوسته که بارگذاری به آن وارد شده است، انجام می‌شود. مهمترین دلیل اختلاف دو روش حل در بارهای بالاتر و یا مواد ضعیف‌تر همین عامل است. افزایش مرتبه‌ی بسط اغتشاشی نیز می‌تواند تا حدی در بهبود نتایج حل، تاثیرگذار باشد.

عوامل تاثیرگذار بر نتایج حل تحلیلی به شرح زیر هستند.

۱) نسبت شعاع لایه‌ی میانی به ضخامت پوسته که در استوانه‌های جدار ثابت با متغیر ثابت $\bar{R}$ نشان داده می‌شود، نشان‌دهنده‌ی میزان نازکی پوسته است. در پوسته‌های ضخیم، مرتبه‌ی بزرگی ضخامت از مرتبه‌ی بزرگی جابه‌جایی بیشتر شده و نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل نمی‌تواند تغییرات جابه‌جایی در راستای ضخامت پوسته را به‌شکل مناسبی پیش‌بینی نماید. در این حالت نیاز به افزایش درجه‌ی توزیع جابه‌جایی‌ها در راستای ضخامت پوسته بوده تا بتوان تحلیل واقعی‌تری از رفتار پوسته به‌دست آورد. به طور کلی برای پوسته‌های جدار ضخیم که فقط تحت فشار داخلی یا خارجی قرار گرفته باشند، درنظر گرفتن توزیع خطی طبق نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل مناسب خواهد بود. در پوسته‌های دوّار و یا تحت تغییرات دمایی، نیاز به توابعی با مرتبه‌ی بالاتر به منظور تحلیل دقیق رفتار پوسته وجود دارد. به خصوص در توزیع تنش‌ها، FSDT در بارگذاری‌های اشاره‌شده فاقد قابلیت پیش‌بینی دقیق رفتار پوسته است. به طور عمومی با افزایش مقدار $\bar{R}$ و نازکتر شدن استوانه، دقت نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل افزایش می‌یابد. اما در پوسته‌های نازک تحت بارهای بزرگ‌تر، با افزایش رفتار غیرخطی پوسته، اختلاف حل‌های خطی و غیرخطی نیز بیشتر شده و انتظار می‌رود که دقت روش MAE تا بسط اغتشاشی مرتبه‌ی دوّم در حل معادلات حاکم کاهش یابد.

۲) با افزایش رفتار غیرخطی پوسته، اختلاف حل داخلی و خارجی افزایش یافته و نیاز به استفاده از حل اغتشاشی مرتبه‌ی دوّم و یا بالاتر به منظور بهبود تقریب حل افزایش می‌یابد.

۳) افزایش نسبت بارگذاری به مجموع دو ثابت مدل مونی-ریولین (مدول برشی اوّلیه در مدل نئوهوکین) سبب افزایش میزان تغییر شکل‌ها و تنش در پوسته می‌شود. مشاهده شد که برای یک نسبت مشخص بارگذاری به ثابت مادّه، با کاهش مقدار μ در مدل نئوهوکین سطح جابه‌جایی و تنش‌ها نیز کاهش پیدا می‌کند.

۴) به طور کلی افزایش میزان تراکم‌ناپذیری پوسته سبب افزایش رفتار غیرخطی پوسته، سهم بیشتر حل داخلی و کاهش دقت روش MAE در حل معادلات می‌شود. هر چه پوسته نازک‌تر باشد، این رفتار تشدید خواهد شد. با افزایش ضریب تراکم‌ناپذیری ضمن کاهش مقدار جابه‌جایی شعاعی، حساسیت پوسته نسبت به میزان تراکم‌ناپذیری نیز کمتر می‌شود؛ در حالی که بر کاهش حداکثر جابه‌جایی محوری اثر محسوسی نمی‌گذارد. با توجه به این که فرمول‌بندی ارائه‌شده در این پژوهش برای حالت تقریباً تراکم‌ناپذیر دارای نتایج معتبر است، حل تحلیلی به‌ازای ضرایب تراکم‌ناپذیری بسیار کوچک و یا بسیار بزرگ قادر به پیش‌بینی صحیح رفتار پوسته نخواهد بود.

۵) تغییرات طول پوسته بیشترین اثر را در اندازه‌ی نسبی محدوده‌ی حل‌های خطی و غیرخطی نشان می‌دهد. هر چه پوسته بلندتر باشد، اثر وجود مرزها در حل کمتر شده و سهم حل خارجی در توزیع طولی جابه‌جایی و تنش افزایش می‌یابد. همواره با افزایش سهم حل داخلی نسبت به خارجی، اختلاف دو روش حل تحلیلی و مدل‌سازی عددی در راستای طولی پوسته افزایش می‌یابد.

۶) در استوانه با جدار متغیر خطی، افزایش شعاع داخلی سبب افزایش قابل توجه مقادیر جابه‌جایی می‌شود. در واقع افزایش شعاع داخلی نسبت به بارگذاری اثر بیشتری بر افزایش سطح جابه‌جایی‌ها می‌گذارد. با افزایش نسبت شعاع داخلی به میانگین ضخامت در طول پوسته و افزایش بارگذاری، رفتار غیرخطی پوسته افزایش و دقت FSDT و MAE در تحلیل پوسته کاهش می‌یابد. با افزایش متناسب ضخامت و فشار در یک استوانه با جدار خارجی و فشار داخلی متغیرخطی به‌ازای شعاع داخلی ثابت، دقت حل با وجود کاهش مرتبه‌ی جابه‌جایی‌ها کاهش پیدا می‌کند. در این حالت اثر هندسه نسبت به بارگذاری بر میزان تغییر شکل‌ها غالب خواهد بود. دلیل کاهش دقت حل در این حالت، کاهش دقت FSDT در اثر افزایش ضخامت و افزایش ناحیه‌ی تحت تاثیر شرایط مرزی پوسته است.

۷) در پوسته‌های ناهمگن، تغییر ثابت ناهمگنی مادّه از مقادیر منفی به مقادیر مثبت سبب کاهش میزان جابه‌جایی‌های شعاعی و محوری در پوسته می‌شود. همچنین ناهمگنی‌های مثبت ضمن کاهش مقادیر حداکثر تنش‌ها و فشار هیدرواستاتیک در پوسته، باعث توزیع یکنواخت‌تر فشار هیدرواستاتیک در راستای ضخامت پوسته می‌شود. در $n>0$، با افزایش ثابت‌های مادّه در راستای شعاعی، تنش‌های محیطی و محوری مثبت در جدار پوسته کاهش و تنش‌های منفی در جدار آن افزایش پیدا می‌کنند. اگر بارگذاری و هندسه به‌شکلی باشد که تمام تنش‌های اشاره‌شده مثبت باشند، ناهمگنی‌های مثبت سبب یکنواخت‌تر شدن و کاهش مقادیر حداکثر توزیع تنش در طول جداره‌ی پوسته می‌شود. اما در حالتی که تنش‌ها در نیمه‌ی داخلی پوسته کششی و در نیمه‌ی خارجی فشاری باشند، کاهش تنش‌های کششی و افزایش تنش‌های فشاری در ناهمگنی‌های مثبت در مجموع به شکلی خواهد بود که توزیع تنش نسبت به مادّه‌ی همگن دارای مقادیر حداکثر کمتری باشد. بنابراین استفاده از ناهمگنی‌های مثبت در طراحی این پوسته‌ها سبب توزیع یکنواخت‌تر و کوچک‌تر تغییر شکل و تنش می‌شود.

۸) بررسی اثر فشار متغیر غیرخطی بر رفتار پوسته‌های استوانه‌ای و مخروطی جدار متغیر برای چند نمونه تابع فشار غیرخطی، دقت FSDT و MAE در تحلیل این پوسته‌ها تحت فشار متغیر غیرخطی را نشان داد. در توابع فشاری که مقادیر فشار حداکثر در وسط و یا در مرز پوسته اعمال می‌شود؛ تغییرات سریعتر این دو تابع منجر به تغییرات سریعتر جابه‌جایی‌ها، تنش و فشار هیدرواستاتیک شده و می‌تواند از دقت حل در ناحیه‌ی همپوشانی بسط داخلی و خارجی بکاهد. در این حالت‌ها، حداکثر جابه‌جایی شعاعی، تنش‌های محوری و محیطی و فشار هیدرواستاتیک نسبت به حالت افزایش یا کاهش یکنواخت بار متناسب با تغییر ضخامت پوسته افزایش می‌یابد. می‌توان نتیجه گرفت که هر چه مقدار حداکثر بارگذاری به مرزها نزدیکتر باشد، مقادیر حداکثر جابه‌جایی‌ها و تنش‌ها در کل پوسته کمتر خواهد شد.

۹) در پوسته با توابع ضخامت غیرخطی، با افزایش تدریجی و متناسب ضخامت با فشار می‌توان مقادیر حداکثر تنش و جابه‌جایی را کاهش داد. اعمال توابع مشابه ضخامت و فشار در پوسته‌ها، سبب یکنواخت‌تر شدن توزیع جابه‌جایی و تنش و کاهش مقادیر حداکثر آنها در طول پوسته می‌شود. مقایسه‌ی پوسته در حالت‌های ضخامت حداکثر در مرکز و یا اطراف دو مرز پوسته نشان می‌دهد که هر چه ضخامت حداکثر، دورتر از مرزها و فشار حداکثر نزدیکتر به مرزها باشد، پوسته از نظر کاهش میزان جابه‌جایی‌ها، تنش‌ها و فشار هیدرواستاتیک در وضعیت مطلوبتری است. در واقع هر چه شرایط بحرانی فشار بالا و ضخامت کمتر به مرزهای گیردار نزدیکتر باشند، مقادیر تغییر شکل و تنش تحت اثر مرزها قرار گرفته و در سطح پایین‌تری باقی می‌مانند. همچنین برای موارد مطالعه‌شده در این پژوهش، توابع غیرخطی فشار اثر بیشتری بر سطح جابه‌جایی‌ها و تنش‌ها نسبت به توابع ضخامت دارند.

از مجموع قسمت‌های این پژوهش می‌توان نتیجه گرفت که در پوسته‌های مخروطی و استوانه‌ای تحت فشار، لایه‌ی داخلی دارای مقادیر بالاتر تغییر شکل و تنش بوده و به عنوان تابع هدف جهت طراحی پوسته درنظر گرفته می‌شود. همچنین مؤلفه‌های بارگذاری فشاری به‌شکلی هستند که مقدار جابه‌جایی شعاعی نسبت به محوری بیشتر است. در مورد تنش‌ها نیز مؤلفه‌ی محوری اندکی از مؤلفه‌ی محیطی بالاتر هستند. هر چه مؤلفه‌های فشار در راستای طولی نسبت به راستای شعاعی افزایش یابد، مقادیر جابه‌جایی محوری بزرگ‌تر و نقاط حداکثر جابه‌جایی محوری مثبت و منفی در نقاط دورتری از مرزها ایجاد خواهند شد. تغییرات جابه‌جایی و تنش در محدوده‌ی حل خارجی یکنواخت‌تر و در محدوده‌ی دو مرز تحت تاثیر شرایط مرزی دارای قله‌هایی با تغییرات شدیدتر است. وجود تنش‌های برشی در اطراف مرزهای گیردار سبب غیریکنواختی شدیدتر در مقادیر جابه‌جایی می‌شود. در پوسته‌های استوانه‌ای و مخروطی تحت فشار داخلی، تقریباً تمام بخش‌های پوسته به غیر از نقاطی از لایه‌ی خارجی در اطراف مرزها، تحت تنش محیطی کششی هستند. فشار هیدرواستاتیک و تنش محوری در این پوسته‌ها نیز دارای رفتار مشابهی هستند. به دلیل تغییر شکل مثبت و بزرگ پوسته در

جهت شعاعی، المان‌های پوسته در راستای طولی و محیطی تحت کشش قرار می‌گیرند. با دور شدن از لایه‌ی داخلی و کاهش جابه‌جایی شعاعی در اطراف مرزها، تنش‌ها تحت تاثیر شرایط گیردار از کششی به فشاری تغییر پیدا می‌کنند. از فشار هیدرواستاتیک به عنوان میانگین تنش‌های اصلی ایجاد شده در سازه‌ها نیز نام برده می‌شود.

از نتایج این پژوهش و حل تحلیلی ارائه‌شده می‌توان در طراحی و تحلیل رفتار مکانیکی پوسته‌های استوانه‌ای و مخروطی ضخیم هایپرالاستیک همگن یا ناهمگن در حالت تقریباً تراکم‌ناپذیر و تحت توابع مختلف فشار و ضخامت متغیر استفاده کرد. همچنین قابلیت‌ها و محدودیت‌های ترکیب نظریه‌ی تغییر شکل برشی و نظریه‌ی اغتشاشات در استخراج و حل معادلات این پوسته‌ها نشان داده شد. اگرچه امروزه حل مسائل با استفاده از کامپیوتر و بهره‌گیری از نرم‌افزارهای صنعتی و روش‌های عددی بسیار رواج یافته است؛ اما تمایل به استفاده از روش‌های تحلیلی در حل مسائل همچنان به قوت خود پابرجاست. مزیت استفاده از روش‌های تحلیلی در این است که ارتباط رفتار سیستم با پارامترهای آن از قبیل هندسه، بارگذاری، شرایط مرزی و .... به راحتی قابل توصیف است. به ویژه زمانی که هدف مطالعه‌ی پارامتریک اثر یک متغیر بر روی رفتار سیستم و بهینه‌سازی آن با سعی و خطا باشد، روش تحلیلی می‌تواند زمان محاسبات را به مقدار قابل توجهی کاهش دهد. همچنین در حل‌های تحلیلی می‌توان با تغیرات اندک در ابتدای برنامه متناسب با شرایط مسأله بدون نیاز به مدل‌سازی مجدد و سعی و خطا در تقسیمات شعاعی و محوری و مش‌بندی نهایی و همچنین با اعمال توابع به‌صورت پیوسته و دقیق مطابق با روابط ریاضی آنها مسائل را تحلیل کرد. در واقع استفاده از روش‌های عددی و تحلیلی با توجه به محدودیت‌های هرکدام، می‌تواند ابزاری سودمند را برای پژوهشگران جهت تحلیل مسائل فراهم آورد.

تمرکز اصلی نتایج در این رساله بر روی مدل مونی-ریولین دوجمله‌ای در حالت تقریباً تراکم‌ناپذیر و برای مواد شبه‌لاستیک و الاستومری بوده است. اما همانطور که اشاره شد، از روش ارائه شده می‌توان در مدل‌های دیگر مواد هایپرالاستیک نیز بهره برد. از جمله می‌توان به مدل‌های چند جمله‌ای عمومی و یا مدل‌های مواد زیست نرم اشاره کرد. مدل‌های واقع‌گرایانه‌تر عروق خونی دارای یک بخش

نئوهوکین همسانگرد و یک بخش ناهمسانگرد هستند که در بیشتر پژوهش‌ها به‌شکل نمایی بر اساس پایاهای عددی بالاتر تانسور کرنش $(I_4, I_6, ...)$ درنظر گرفته می‌شوند. روابط ساختاری غیرخطی این مدل‌ها را می‌توان به کمک روش جاری در معادلات وارد کرد و رفتار پوسته‌هایی با هندسه‌ی غیرخطی نزدیک به این عروق را تحلیل کرد. در دهه‌ی اخیر پژوهش‌های متعددی در این زمینه انجام گرفته است که تمرکز بخش قابل توجهی از آنها بر روی پوسته‌های ایده‌آل از نظر شکل هندسی بوده است. در سال‌های اخیر رویکرد استفاده از عروق خونی مصنوعی ساخته‌شده از مواد الاستومر مخصوص و اندام عروقی مصنوعی در پیوندهای شریانی نیز به شدت افزایش یافته است. شکل این عروق مصنوعی بر خلاف شریان‌های واقعی بسیار نزدیک‌تر به پوسته‌های استوانه‌ای و یا مخروطی جدار متغیر ایده‌آل هستند؛ بنابراین روش جاری می‌تواند در مدل‌سازی، تحلیل و طراحی این سازه‌ها از موادی منطبق بر مدل‌های استفاده‌شده در آنها به‌کار گرفته شود.

قابلیت‌های حل تحلیلی ارائه‌شده در این پژوهش به همراه نتایج بررسی‌شده می‌تواند اطلاعات مفیدی را برای دانشمندان در خصوص موارد زیر ارائه دهد.

۱) تحلیل مدل‌های هایپرالاستیک واقعی‌تر برای عروق خونی (طبیعی یا مصنوعی، همسانگرد یا ناهمسانگرد)

۲) بررسی تغییرات در جدار داخلی یا خارجی عروق خونی ناشی از تصلب شریان‌ها در اثر تجمع پلاکت‌های چربی یا اتساع عروق در اثر بیماری یا افزایش سن [۹۲،۹۱،۹۰]

۳) طراحی عروق مصنوعی ناهمگن به منظور استفاده در پیوندهای شریانی [۹۳]

در این پژوهش تمرکز اصلی بر ارائه‌ی حل تحلیلی برای مسائل ناهمگن بوده است و در مورد چگونگی ساخت مواد متغیر تابعی هایپرالاستیک و یا آزمایش‌های تجربی انجام‌شده بر روی این مواد بحثی نشده است. نویسنده‌ی این پژوهش معتقد است زمانی که الاستومرهای FG به‌صورت وسیع در صنایع و کاربردهای مهندسی مورد استفاده قرار گیرند، نتایج این مطالعه می‌تواند یک ابزار قابل اتکای عددی را جهت پیش‌بینی رفتار مکانیکی سازه‌های از این جنس در اختیار مهندسان قرار دهد. روش

ارائه‌شـــده می‌تواند در دو زمینه برای پژوهشـــگران حوزه‌ی مواد در طراحی مواد جدید، تحلیل تنش و طراحی ســازه‌هایی از جنس این مواد متناسب با کاربردهای مورد نظر مفید واقع شود. در زمینه‌ی اوّل می‌توان با طی فرایندی مشـــابه به محاســـبه‌ی تغییر شـــکل و تنش در مدل‌های مواد متغیر تابعی با ثابت‌های مادّه‌ی مشخص و تغییر این ثابت‌ها با تابعی مشخص برحسب متغیرهای هندسی مسأله اقدام کرد. در زمینه‌ی دوّم پژوهشـــگران می‌توانند توزیع جابه‌جایی و تنش در طول جداره‌ی پوســـته‌ها را به عنوان متغیر (تابع) هدف از طریق انتخاب و اصلاح ثابت‌های مادّه در طول جداره بر اساس سعی و خطا کنترل نمایند تا به توزیع ثابت‌های FGM مناســب دســت یابند. در شـیوه‌ی اخیر، تلاش می‌شود تا با تغییر ثابت‌های مادّه بر اســاس رسـیدن به توزیع بهینه‌ی تنش، فرکانس ارتعاشی، تغییر شکل و یا هر تابع هدف دیگری، ثابت‌های مادّه‌ی ناهمگن و تابع توزیع مطلوب خواص را تعیین نمایند. این روش در حال گسترش به مواد الاستومری FG می‌باشد [۱۲۱]. همچنین در برخی پژوهش‌ها با توجه به ماهیت توابع پاسخ مواد شبه‌لاستیک و لاستیک ناهمگن سعی شده است تا با ترکیبی از آزمایش‌های تجربی و برنـامه‌های تحلیلی به تعیین توابع پاســـخ این مواد پرداخته شـــود [۱۱۹]. با توجه به این که وجود ناهمگنی در مواد شــبه‌لاستیک سبب بروز پیچیدگی و خطا در آزمایش‌های تجربی تعیین خواص این مواد می‌شـود، در این پژوهش‌ها از یک برنامه‌ی طراحی در کنار آزمایش‌های تجربی استفاده می‌شود. این برنامه بر اســاس یک مدل ســاختاری خاص با تغییرات مشـخص خواص و منطبق بر ســاختارهای فیزیکی و شـیمیایی مورد نیاز در تغییرات خواص شـکل گرفته است. برنامه‌ی طراحی حاوی اطلاعات ضروری درباره‌ی تغیرات خواص مواد ناهمگن است که می‌تواند در فرایند طراحی این مواد به‌کار گرفته شـود. شیوه‌ی حل ارائه‌شده به همراه پژوهش‌های اشاره‌شده می‌تواند در طراحی، ساخت و بهینه‌سازی مواد شبه‌لاستیک ناهمگن به‌کار گرفته شود.

۵-۳ پیشنهادها

به منظور توسعه‌ی پژوهش حاضر، موارد زیر قابل بررسی و مطالعه هستند.

۱) استفاده از سایر نظریه‌های غیرخطی پوسته‌ها

۲) استفاده از نظریه‌های تغییر شکل برشی مرتبه‌ی بالاتر

۳) بررسی لزوم حل مرتبه‌های بالاتر در روش بسط مجانبی تطبیق‌یافته

۴) استفاده از مدل‌های دیگر مواد هایپرالاستیک (با درجات بالاتر، توزیع غیرتوانی و یا بر اساس کشیدگی‌های اصلی)

۵) استفاده از توابع دیگر برای مدل‌سازی مواد ناهمگن (تابع نمایی، توزیع حجمی)

۶) ارائه‌ی حل مشابه برای پوسته‌های ناهمسانگرد در حالت عدم وجود تقارن محوری

۷) بررسی امکان حل معادلات حاکم در حالت دقیقاً تراکم‌ناپذیر به کمک نظریه‌ی اغتشاشات

۸) دنبالگر درنظر گرفتن بار فشاری در تغییر شکل‌های بزرگ

۹) تحلیل سازه‌های دیگر از جنس مواد هایپرالاستیک مانند پوسته‌های کروی، ورق‌ها و تیرها با روشی مشابه

۱۰) استفاده از دستگاه‌های مختصات پیچیده‌تر (بیضوی، هذلولوی، سهموی و ...)

۱۱) اعمال بارگذاری‌های مکانیکی (محوری، پیچشی، خمشی و ...)، حرارتی، چرخشی و ...

۱۲) بررسی پایداری پوسته‌های مشابه و کمانش غیرخطی آن

۱۳) حل دینامیکی پوسته‌های مشابه و محاسبه‌ی فرکانس‌های طبیعی و شکل مد سازه

۱۴) استفاده از آزمایش‌های تجربی، روش تحلیلی مشابه و مدل‌سازی عددی در تعیین خواص مواد شبه‌لاستیک و الاستومر و طراحی آنها

۱۵) استفاده از آزمایش‌های تجربی، روش تحلیلی مشابه و مدل‌سازی عددی در تعیین دقیق شکل هندسی و خواص بافت‌های زنده

مراجع

[۱] قنّاد م.؛ رساله‌ی دکترا؛ **تحلیل الاستیک استوانه‌های جدار ضخیم با ضخامت متغیر از مواد ناهمگن FG تحت فشار داخلی**، دانشکده‌ی فنّی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس، ۱۳۸۷.

[2] Ugural A.C.; **Stresses in Plates and Shells**, *McGraw-Hill, New York*, 1981.

[3] Ugural A.C., Fenster S.K.; **Advanced Strength and Applied Elasticity**, 4th ed., *Prentice Hall, New Jersey*, 2003.

[4] Mirsky I., Hermann G.; **Axially motions of thick cylindrical shells**, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 25, pp. 97-102, 1958.

[5] Amabili M.; **Nonlinear Vibration and Stability of Shells and Plates**, *Cambridge University Press, Cambridge*, 2008.

[6] Baranowski P., Gieleta R., Malachowski J., Mazurkiewicz Ł.; **Rubber structure under dynamic loading– Computational studies**, *Engineering Transactions*, Vol. 61, No. 1, pp. 33-46, 2013.

[7] Horgan C.O., Saccomandi G.; **A discription of arterial wall mechanics using limiting chain extensibility constitutive models**, *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, Vol. 1, No. 4, pp. 251-266, 2003.

[8] Hill R.; **On constitutive inequalities for simple materials-I**, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 16, pp. 229-242, 1968.

[9] Truesdell C.A., Noll W.; **The Nonlinear Field Theories. In: Handbuch der Physik**, 3th ed., *Springer, Berlin*, 1965.

[10] Başar Y., Weichert D.; **Nonlinear Continuum Mechanics of Solids**, *Springer, Berlin*, 2000.

[11] Lectez A.S., Verron E., Huneau B.; **How to identify a hyperelastic constitutive equation for rubber-like materials with multiaxial tension–torsion experiments**, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 65, pp. 260-270, 2014.

[12] Ciarlet P.G.; **Mathematical Elasticity, Vol. 1, Three-Dimensional Elasticity**, *Elsevier Science Publishers, North Holland*, 1988.

[13] Ogden R.W.; **Nonlinear Elastic Deformations**, *Ellis Horwood and John Wiley, Chichester*, 1984.

[14] Green A.E., Zerna W.; **Theoretical Elasticity**, *Clarendon Press, Oxfard*, 1968.

[15] Başar Y., Ding Y.; **Shear deformation models for large-strain shell analysis**, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 34, pp. 1687-1708, 1997.

[16] Başar Y., Itskov M.; **Finite element formulation of the odgen material model with application to rubber-like shells**, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 42, pp. 1279-1305, 1998.

[17] Rivlin R.S.; **Large elastic deformations of isotropic materials. IV. Further developments of the general theory**, *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, Vol. 241, No. 835, pp. 379-397, 1948.

[18] Mooney M.; **A theory of large elastic deformation,** *Journal of Applied Physics*, Vol. 11, No. 9, pp. 582-592, 1940.

[19] Rivlin R.S., Saunders D.W.; **Large elastic deformations of isotropic materials VII. Experiments on the deformation of rubber**, *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, Vol. 243, No.865, pp. 251-288, 1951.

[20] Ogden R.W.; **Large deformation isotropic elasticity-On the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids**, *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, Vol. 326, No. 1567, pp. 565-584, 1972.

[21] Yeoh O.H.; **Some forms of the strain energy function for rubber**, *Rubber Chemistry and Technology*, Vol. 66, No. 5, pp. 754-771, 1993.

[22] Arruda E.M., Boyce M.C.; **A three-dimensional model for the large stretch behavior of rubber elastic materials**, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 41, No. 2, pp. 389-412, 1993.

[23] Knowles J.R., Albery W.J.; **Perfection in enzyme catalysis: the energetics of triosephosphate isomerase**, *Accounts of Chemical Research*, Vol. 10, No. 4, pp. 105-111, 1977.

[24] Gent A.N.; **A new constitutive relation for rubber**, *Accounts of Chemical Research*, Vol. 69, pp. 59-61, 1996.

[25] Blatz, P.J., Ko, W.L.; A**pplication of finite elastic theory to the deformation of rubbery materials**, *Transactions of the Society of Rheology*, Vol. 6, pp. 223-251, 1962.

[26] Mihai L.A., Goriely A.; **How to characterize a nonlinear elastic material? A review on nonlinear constitutive parameters in isotropic finite elasticity**, *Journal of Royal Society A*, Vol. 473, No. 2207, 20170607, 2017.

[27] Chagnon G., Ohayon J., Martiel J.L., Favier D.; **Hyperelasticity Modeling for Incompressible Passive Biological Tissues**, In: Payan Y., Ohayon J., (Eds.); **Biomechanics of Living Organs—Hyperelastic Constitutive Laws for Finite Element Modeling**, (pp. 3-30), *Academic Press, USA*, 2017.

[28] Doghri I.; **Mechanics of Deformable Solids: Linear, Nonlinear, Analytical and Computational Aspects**, *Springer, Berlin*, 2000.

[29] Reddy J.N.; **Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics**, *John Wiley, New York*, 2002.

[30] Zdunek A.B., Bercovier M.; **Numerical evaluation of finite element methods for rubber parts**, *Proceedings of the Sixth Infernationol Conference on Vehicle Structural/ Mechanics*, Society of Automotive Engineers, Detroit, 1986.

[31] Häggblad B., Sundberg J.A.; **Large strain solutions of rubbers components,** *Computers & Structures*, Vol. 17, No. 5-6, pp. 835-843, 1983.

[32] Simo J.C., Taylor R.L.; **Quasi-incompressible finite elasticity in principal stretches. Continuum basis and numerical algorithms**, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 85, No. 3, pp. 273-310, 1991.

[33] Herrmann L.R.; **Elasticity equations for incompressible and nearly incompressible Materials by a variational theorem**, *AIAA Journal*, Vol. 3, No. 10, pp. 835-843, 1965.

[34] Horgan C.O., Chan A.M.; **The pressurized hollow cylinder or disk problem for functionally graded isotropic linearly elastic materials**, *Journal of Elasticity*, Vol. 55, pp. 43-59, 1999.

[35] Suzuki K.,Konno M., Kosawada T., Takahashi S.; **Axisymmetric vibration of a vessel with variable thickness**, *JSME International Journal, Series A*, Vol. 25, No. 208, pp. 1591-1600, 1982.

[36] Sivadas K.R., Ganesan N.; V**ibration analysis of laminated conical shells with variable thickness**, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 148, No. 3, pp. 477-491, 1991.

[37] Sivadas K.R., Ganesan N.; **Axisymmetric** v**ibration analysis of thick cylindrical shell with variable thickness**, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 160, No. 3, pp. 387-400, 1993.

[38] Hongjun X., Zhifei S., Taotao Z.; **Elastic analysis of heterogeneous hollow cylinders**, *Mechanics Research Communications*, Vol. 33, pp. 681-691, 2006.

[39] Zhifei S., Taotao Z., Hongjun X.; **Exact solutions of heterogeneous elastic hollow cylinders**, *Composite Structures*, Vol. 79, pp. 140-147, 2007.

[40] Tutuncu N.; **Stresses in thick-walled FGM cylinders with exponentially-varying properties**, *Engineering Structures*, Vol. 29, pp. 2032-2035, 2007.

[41] Duan W.H., Koh, C.G.; **Axisymmetric transverse** v**ibration of circular cylindrical shells with variable thickness**, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 317, pp. 1035-1041, 2008.

[42] Li X.F.,·Peng X.L.; **A pressurized functionally graded hollow cylinder with arbitrarily varying material properties**, *Journal of Elasticity*, Vol. 96, No. 1, pp. 81-95, 2009.

[43] Ghannad M., Nejad M.Z.; **Elastic analysis of pressurized thick hollow cylindrical shells with clamped-clamped ends**, *Mechanika*, Vol. 5, No. 85, pp. 11-18, 2010.

[44] Ghannad M., Rahimi G.H., Nejad M.Z.; **Elastic analysis of pressurized thick cylindrical shells with variable thickness made of functionally graded materials**, *Composites: Part B (Engineering),* Vol. 45, pp. 388-396, 2013.

[45] Ghannad M., Gharooni H.; **Displacements and stresses in pressurized thick FGM cylinders with exponentially varying properties based on FSDT**, *Structural Engineering & Mechanics*, Vol. 51, No. 6, pp. 939-953, 2014.

[46] Ghannad M., Gharooni H.; **Elastic analysis of pressurized thick FGM cylinders with exponential variation of material properties using TSDT**, *Latin American Journal of Solids and Structures*, Vol. 12, No. 6, pp. 1024-1041, 2015.

[47] Gharooni H., Ghannad M., Nejad M.Z.; **Thermo-elastic analysis of clamped-clamped thick FGM cylinders by using third-order shear deformation theory**, *Latin American Journal of Solids and Structures*, Vol. 13, No. 4, pp. 751-775, 2016.

[48] Nejad M.Z., Jabbari M., Ghannad M.; **Elastic analysis of axially functionally graded rotating thick cylinder with variable thickness under non-uniform arbitrarily pressure loading**, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 89, pp. 86-99, 2015.

[49] Nejad M.Z., Jabbari M., Ghannad M.; **Elastic analysis of FGM rotating thick truncated conical shells with axially-varying properties under non-uniform pressure loading**, *Composite Structures*, Vol. 122, pp. 561-569, 2015.

[50] Oliver J., Onate E.; **A Total larrangian formulation for the geometrically nonlinear analysis of structures using finite elements. Part II: Arches, frames and axisymmetric shells**, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 23, pp. 253-274, 1986.

[51] Ye Z., Han R.P.S.; **On the nonlinear analysis of orthotropic shallow shells of revolution**, *Computers & Structures,* Vol. 55, No. 2, pp. 325-331, 1995.

[52] Ye Z.; **Nonlinear analysis and optimization of shallow shells of variable thickness**, *Journal of Shanghai University,* Vol. 1, No. 2, pp. 105-111, 1997.

[53] Balah M., Al-Ghamedy H.N.; **Finite element formulation of a third order laminated finite rotation shell element**, *Computers & Structures*, Vol. 80, No. 26, pp. 1975-1990, 2002.

[54] Arciniega R.A., Reddy J.N.; **Large deformation analysis of functionally graded shells**, *International Journal of Solids and Structures,* Vol. 44, pp. 2036-2052, 2007.

[55] Shariyat M., Khaghani M., Lavasani S.M.H.; **Nonlinear thermoelasticity, vibration, and stress wave propogation analysis of thick FGM cylinders with temperature-dependent material properties**, *European Journal of Mechanics A/Solids*, Vol. 29, pp. 378-391, 2010.

[۵۶] رضایی‌پژند م.، اعرابی ا.؛ **تحلیل غیرخطی هندسی پوسته‌ی متقارن محوری چندلایه با لایه‌ی پیزوالکتریک گسترده**، *مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها*، دوره ۱، ش ۲، صص ۱-۱۱، ۱۳۹۰.

[57] Awrejcewicz J., Kurpa L., Shmatko T.; **Large amplitude free vibration of orthotropic shallow shells of complex shapes with variable thickness**, *Latin American Journal of Solids and Structures*, Vol. 10, No. 1, pp. 149-162, 2013.

[58] Strozzi M., Pellicano F.; **Nonlinear vibrations of functionally graded cylindrical shells, thin-walled structures**, *Thin Walled Structures*, Vol. 76, pp. 63-77, 2013.

[59] Duc N.D., Anh V.T.T, Cong P.H.; **Nonlinear axisymmetric response of FGM shallow spherical shell on elastic foundations under uniform external pressure and temperature**, *European Journal of Mechanics A/Solids*, Vol. 45, pp. 80-89, 2014.

[60] Mahboubi Nasrekani F., Eipakchi H.; **Axisymmetric buckling of cylindrical shells with nonuniform thickness and initial imperfection**, *International Journal of Steel Structures*, Vol. 19, No. 2, pp. 435-445, 2019.

[61] Mahboubi Nasrekani F., Eipakchi H.; **Analytical solution for buckling analysis of cylinders with varying thickness subjected to combined axial and radial loads**, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 172, pp. 220-226, 2019.

[62] Başar Y., Ding Y.; **Finite-element analysis of hyperelastic thin shells with large strains**, *Computational Mechanics*, Vol. 18, pp. 200-214, 1996.

[63] Jiang Q., Beatty M.F.; **On compressible materials capable of sustaining axisymmetric shear deformations. Part 4: Helical shear of anisotropic hyperelastic materials**, *Journal of Elasticity*, Vol. 62, pp. 47-83, 2001.

[64] Ericksen J.L., Rivlin R.S.; **Large elastic deformations of homogeneous anisotropic materials**, *Journal of Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 3, pp. 281-301, 1954.

[65] Jiang Q., Beatty M.F.; **On compressible materials capable of sustaining axisymmetric shear deformations**, **Part 1: Anti-plane shear of isotropic hyperelastic materials**, *Journal of Elasticity*, Vol. 39, pp. 75-95, 1995.

[66] Humphrey J.D., Yin F.C.P.; **On constitutive relations and finite deformations of passive cardiac tissue: I. A pseudostrain-energy function**, *Journal of Biomechanical Engineering*, Vol. 109, pp. 298-304, 1987.

[67] Polignone D.A., Horgan C.O.; **Axisymmetric finite anti-plane shear of compressible nonlinearly elastic circular tubes**, *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. 50, pp. 323-341, 1992.

[68] Zidi M.; **Effects of a prestress on a reinforced, nonlinearly elastic and compressible tube subjected to combined deformations**, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 38, pp. 4657-4669, 2001.

[69] Zhu Y., Luo X.Y., Ogden R.W.; **Asymmetric bifurcations of thick-walled circular cylindrical elastic tubes under axial loading and external pressure**, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 45, pp. 3410-3429, 2008.

[70] Dai H.H., Hao Y., Chen Z.; **On constructing the analytical solutions for localizations in a slender cylinder composed of an incompressible hyperelastic material**, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 45, pp. 2613-2628, 2008.

[71] Batra R.C., Bahrami A., **Inflation and eversion of functionally graded non-linear elastic incompressible circular cylinders**, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 44, pp. 311-323, 2009.

[72] Watton P.N., Hill N.A.; **Evolving mechanical properties of a model of abdominal aortic aneurysm**, *Biomech Model Mechanobiol*, Vol. 8, pp. 25-42, 2009.

[73] Zhu Y., Luo X.Y., Ogden R.W.; **Nonlinear axisymmetric deformations of an elastic tube under external pressure**, *European Journal of Mechanics A/Solids*, Vol. 29, pp. 216-229, 2010.

[74] Saravanan U.; **On large elastic deformations of prestressed right circular annular cylinders**, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 46, pp. 96-113, 2011.

[75] Mirsky I.; **Ventricular and arterial wall stresses based on large deformation analyses**, *Biophysics Journal*, Vol. 13, pp. 1141-1157, 1973.

[76] Tanveer M., Zu J.W.; **Non-linear vibration of hyperelastic axisymmetric solids by a mixed P-type method**, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 47, pp. 30-41, 2012.

[77] Horgan C.O., Smayda M.G.; **The trousers test for tearing of soft biomaterials**, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 49, pp. 161-169, 2012.

[78] Karimi A., Navidbakhsh M., Shojaei A., Hassani K., Faghihi S.; **Study of plaque vulnerability in coronary artery using Mooney-Rivlin model: A combination of finite element and experimental method**, *Biomedical Engineering: Applications, Basis and Communications*, Vol. 26, No. 1, 1450013, 2014.

[79] Ghadiri Rad M.H., Shahabian F., Hosseini S.M.; **Geometrically nonlinear elastodynamic analysis of hyper-elastic neo-Hooken FG cylinder subjected to shock loading using MLPG method**, *Engineering Analysis With Boundary Elements*, Vol. 50, pp. 83-96, 2015.

[80] Taghizadeh D.M., Bagheri A., Darijani H.; **On the hyperelastic thick-walled spherical shells and cylindrical tubes using the analytical closed-form solutions**, *International Journal of Applied Mechanics*, Vol. 7, No. 2, pp. 1-27, 2015.

[81] Anani Y., Rahimi., G.H.; **Stress analysis of thick pressure vessel composed of functionally graded incompressible hyperelastic ,aterials**, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 104, pp. 1-7, 2015.

[82] Arfken G.; **Mathematical Methods for Physicists**, 3rd ed., *Academic Press, Orlando*, 1985.

[83] Treloar L.R.G.; **Stress-strain data for vulcanised rubber under various types of deformation**, *Transactions of the Faraday Society*, Vol. 40, pp. 59-70, 1944.

[84] Anani Y., Rahimi., G.H.; **Stress analysis of rotating cylindrical shell composed of functionally graded incompressible hyperelastic materials**, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 108-109, pp.122-128, 2016.

[85] Batra R.C., Muller I., Strehlow P.; **Treloar's biaxial test and Kearsley's bifurcation in rubber sheets**, *Mathematics and Mechanics of Solids*, Vol. 10, No. 70, pp. 5-13, 2005.

[86] Hosseinzadeh M., Ghoreishia M., Narooeib K.; **Investigation of hyperelastic models for nonlinear elastic behavior of demineralized and deproteinized bovine cortical femur bone**, *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, Vol. 59, pp. 393-403, 2016.

[87] Bagheri A., Taghizadeh D.M., Darijani H.; **On the behavior of rotating thick-walled cylinders made of hyperelastic materials**, *Meccanica*, Vol. 51, No. 3, pp. 673-692, 2016.

[88] Abdessamad M., Mohamed H., Mohamed A.; **Analytical modeling of a descending aorta containing human blood flow**, *Defect and Diffusion Forum*, Vol. 384, pp. 117-129, 2018.

[89] Liljenhjerte J., Upadhyaya P., Kumar S.; **Hyperelastic strain measurements and constitutive parameters identification of 3D printed soft polymers by image processing**, *Additive Manufacturing*, Vol. 11, pp. 40-48, 2016.

[90] Vossoughi J., Tozeren A.; **Determination of an effective shear modulus of aorta**, *Russian Journal of Biomechanics*, Vol. 1-2, pp. 20-36, 1998.

[91] Holzapfel G.A., Gasser T.C.; **Computational stress–deformation analysis of arterial walls including high-pressure response**, *International Journal of Cardiology*, Vol. 116 , pp. 78-85, 2007.

[92] Xie J., Zhou J., Fung Y.C.; **Bending of blood vessel wall: Stress-strain laws of the intima-media and adventitial layers**, *Journal of Biomechanical Engineering*, Vol. 117, pp. 136-145, 1995.

[93] Łos M.J., Panigrahi S., Sielatycka K., Grillon C.; **Successful Biomaterial-Based Artificial Organ—Updates on Artificial Blood Vessels,** In: Los M., Hudecki A., Wiechec E., (Eds.); **Stem Cells and Biomaterials for Regenerative Medicine** (pp. 203-222), *Academic Press, USA*, 2018.

[94] Eipakchi H.R.; **Third-order shear deformation theory for stress analysis of a thick conical shell under pressure**, *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, Vol. 5, No. 1, pp. 1-17, 2010.

[95] Simo J.C., Taylor R.L.; **Penalty function formulations for incompressible nonlinear elastostatics**, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 35, pp. 107-118, 1982.

[96] Sussman T., Bathe K.J.; **A finite element formulation for nonlinear incompressible elastic and inelastic analysis**, *Computers & Structures*, Vol. 26, No. 112, pp. 357-109, 1987.

[97] Mihai L.A., Goriely A.; **How to characterize a nonlinear elastic material? A review on nonlinear constitutive parameters in isotropic finite elasticity**, *Journal of Royal Society A*, Vol. 473, No. 2207, 20170607, 2017.

[98] Doll S., Schweizerhof K.; **On the development of volumetric strain energy functions**, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 97, pp. 17-21, 2000.

[99] Ghaemi H., Behdinan K., Spence A.; **On the development of compressible pseudo-strain energy density function for elastomers Part 1. Theory and experiment**, *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 178, pp. 307-316, 2006.

[100] Oden J.T.; **A theory of penalty methods for finite element approximations of highly nonlinear problems in continuum mechanics**, *Computers & Structures*, Vol. 8, pp. 445-449, 1978.

[101] Holzapfel G.A.; **Nonlinear Solid Mechanics, a Continuum Approach for Engineering**, *John Wiley, New York*, 2000.

[102] Bijelonja I., Demirdžic I., Muzaferija S.; **A finite volume method for large strain analysis of incompressible hyperelastic materials**, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 64, pp. 1594-1609, 2005.

[103] Kiendl J., Hsu M.C., Wu M.C.H., Reali A.; **Isogeometric Kirchhoff–Love shell formulations for general hyperelastic materials**, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 291, pp. 280-303, 2015.

[104] Ghannad M., Nejad M.Z., Rahimi G.H., Sabouri H.; **Elastic analysis of pressurized thick truncated conical shells made of functionally graded materials**, *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 43, No. 1, pp. 105-126, 2012.

[105] Nejad M.Z., Jabbari M., Ghannad M.; **A general disk form formulation for thermo-elastic analysis of functionally graded thick shells of revolution with arbitrary curvature and variable thickness**, *Acta Mechanica*, Vol. 228, No. 1, pp. 215-231, 2017.

[106] Jabbari M., Nejad M.Z., Ghannad M.; **Stress analysis of rotating thick truncated conical shells with variable thickness under mechanical and thermal loads**, *Journal of Solid Mechanics*, Vol. 9, No. 1, pp. 100-114, 2017.

[107] Reddy J.N.; **Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis**, 2nd ed., *CRC Press, New York*, 2004.

[108] Nayfeh, A.H.; **Introduction to Perturbation Techniques**, *John Wiley, New York*, 1981.

[109] Montella G., Calabrese A., Serino G.; **Mechanical characterization of a Tire Derived Material: experiments, hyperelastic modeling and numerical validation**, *Construction and Building Materials*, Vol. 66, pp. 336-347, 2014.

[110] Gao H., Long Q., Graves M., Gillard J.H., Li Z.Y.; **Carotid arterial plaque stress analysis using fluid–structure interactive simulation based on in-vivo magnetic resonance images of four patients**, *Journal of Biomechanics*, Vol. 42, pp. 1416-1423, 2009.

[111] Dias V., Odenbreit C., Hechler O., Scholzen F., Zineb T.B.; **Development of a constitutive hyperelastic material law for numerical simulations of adhesive steel–glass connections using structural silicone**, *International Journal of Adhesion and Adhesives*, Vol. 48, pp. 194-209, 2014.

[112] Selvadurai A.P.S., Shi M.; **Fluid pressure loading of a hyperelastic membrane**, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 47, pp. 228-239, 2012.

[113] Boyce, M.C., Arruda, E.M.; **Constitutive models of rubber elasticity: a review**, *Rubber Chemistry and Technology*, Vol. 73, No. 3, pp. 504-523, 2000.

[114] Eipakchi H.R., Rahimi G.H., Esmaeilzadeh Khadem S.; **Closed form solution for displacements of thick cylinders with varying thickness subjected to non-uniform internal pressure**, *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 16, No. 6, pp. 731-748, 2003.

[115] Lally C., Dolan F., Prendergast P.J.; **Cardiovascular stent design and vessel stresses: a finite element analysis**, *Journal of Biomechanics*, Vol. 38, pp. 1574-1581, 2005.

[116] Humphrey J.D., O’Rourke S.L.; **An Introduction to Biomechanics Solids and Fluids, Analysis and Design**, 2nd ed., *Springer, New York*, 2015.

[117] Azar D., Ohadi D., Rachev A., Eberth J.F., Uline M.J., Shazly T.; **Mechanical and geometrical determinants of wall stress in abdominal aortic aneurysms: A computational study**, *PLoS ONE*, Vol. 13, No. 2, e0192032, 2018.

[118] Lopez-Pamies O.; **A new I1-based hyperelastic model for rubber elastic materials**, *Comptes Rendus Mécanique*, Vol. 338, pp. 3-11, 2010.

[119] Bilgili E.; **Modelling mechanical behavior of continuously graded vulcanized rubbers**, *Plastics Rubber and Composites*, Vol. 33, No. 4, pp. 163-169, 2004.

[120] Scotti C.M., Shkolnik A.D., Muluk S.C., Finol E.A.; **Fluid-structure interaction in abdominal aortic aneurysms: effects of asymmetry and wall thickness**, *Biomedical Engineering Online*, Vol. 4, No. 64, pp. 1-22, 2005.

[121] Batra R.C.; **Material tailoring and universal relations for axisymmetric deformations of functionally graded rubberlike cylinders and spheres**, *Mathematics and Mechanics of Solids*, Vol. 16, No. 7, pp. 729-738, 2011.

Abstract

The aim of this study is to present an analytical solution for non-linear elastic analysis of cylindrical and truncated conical thick shells with variable thickness under non-uniform pressure made of hyperelastic materials in quasi-static state. The material of the shell is generally considered as hyperelastic functionally graded isotropic material based on two-term Mooney-Rivlin and neo-Hookean models in nearly incompressible state with radially variation of material properties. The variation of the thickness and pressure profiles of the vessel are considered in axial direction by linear and/or nonlinear functions. As geometry, loading and boundary conditions are symmetric respect to revolution axis of the shell, the axisymmetric condition is considered for the problem. Considering non-linear kinematics (strain-displacement) and constitutive (stress-strain) relations for the shell, the governing equations are derived based on first-order shear deformation theory. The system of nonlinear coupled ordinary differential equations with variable coefficients is solved by the usage of perturbation theory for clamped boundary conditions. By the usage of Matched Asymptotic Expansion (MAE) of the perturbation theory, inner and outer equations along with coefficient matrices and non-homogeneity vectors up to the second-order perturbed expansion are presented. Finally, a composite uniform solution is presented for the components of displacements by the usage of matched and boundary conditions and Cauchy stresses are calculated indirectly based on non-linear kinematics and constitutive relations. In order to validate the results of the current analytical solution, a numerical modeling based on finite element method (FEM) by the usage of ANSYS software is investigated. The results of analytical solution and numerical simulation for cylindrical and truncated conical shells with variable thickness in homogeneous and non-homogenous cases show the convergence of the presented solutions.

Keywords: Variable thickness cylinder, Thick-walled cone, Shear deformation theory, Perturbation theory, Matched Asymptotic Expansion (MAE) method, Mooney-Rivlin model, Nearly incompressible hyperelastic materials.

Shahrood University of Technology

Faculty of Mechanical and Mechatronics Engineering

Ph.D. Thesis in Applied Mechanics Engineering

Non-linear elastic analysis of pressurized thick cylinders with variable thickness under loading made of hyperelastic materials using shear deformation theory

By: **Hamed Gharooni**

Supervisor:

Dr. Mehdi Ghannad

September 2019