بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده مهندسی مکانیک ومکاترونیک

پایان نامه کارشناسی ارشد مهندسی طراحی کاربردی

محاسبه ضرایب شدت تنش در یک محیط محدود ایزوتروپیک تحت شوک گرمایی با در نظر گرفتن تئوری ترموالاستیسیته گرین-نقدی و با استفاده از روش المان محدود توسعه‌یافته

نگارنده

محمد شاهسون طغان

اساتید راهنما

دکتر محمدباقر نظری

دکتر مسعود مهدی‌زاده رخی

بهمن ۱۳۹۷

تقدیم اثر

تمامی تلاش چندین ماهه ی خود را در این تحقیق به خانواده محترم و همسر عزیزم که با صبر و حوصله و همراهی های بی دریغشان، اینجانب را در پیشرفت هرچه بهتر پایان نامه یاری و مساعدت نموده اند، تقدیم می نمایم . امید است بتوانم ذره ای از محبت ها و دلداری های این یاران همیشگی را جبران نمایم .

تشکر و قدردانی

اکنون که در سایه الطاف خداوند متعال این پایان نامه به انجام رسیده است، بر خود لازم میدانم از زحمات فراوان استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر محمّدباقر نظری که در منصب استاد راهنما توصیه های بی شائبه ی خود را در جهت گیری صحیح، تدوین و گردآوری پروژه ارائه نموده اند، مراتب سپاس را به جا آورم. همچنین از زحمات خالصانه جناب آقای دکتر مسعود مهدی زاده رخی که با در اختیار قرار دادن کدهای لازم و راهنمایی های خود بنده را یاری نموده اند، بسیار متشکرم.

از جناب آقای دکتر اکبرزاده، مسئول محترم مرکز تحقیقاتی مکانیک محاسباتی و آقای مهندس درازگیسو که بنده را جهت استفاده از سیستم پر سرعت یاری نموده اند، بسیار سپاسگزارم.

دوستان عزیزم آقایان مهندس وحید عصمتی و مهندس ادریس فرهی نژاد و کلیه کسانی که با سعه صدر و حمایت های بی دریغ، اینجانب را در به ثمر رساندن این تحقیق یاری رسانده اند، خالصانه تشکر و قدردانی می نمایم و از درگاه ایزد منان توفیق روزافزون ایشان را خواستارم.

تعهد نامه

اینجانب **محمد شاهسون طغان** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته **مهندسی مکانیک - طراحی کاربردی** دانشکده **مکانیک** دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان نامه **محاسبه ضرایب شدت تنش در یک محیط محدود ایزوتروپیک تحت شوک گرمایی با در نظر گرفتن تئوری ترموالاستیسیته گرین-نقدی و با استفاده از روش المان محدود توسعه-یافته** تحت راهنمایی **دکتر محمدباقر نظری و دکتر مسعود مهدی‌زاده رخی** متعهد می‌شوم:

❋ تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام‌شده است.

❋ در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورداستفاده استناد شده است.

❋ مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچگونه مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.

❋ کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا «Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.

❋ حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیر گذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.

❋ در کلیه مراحل انجام این پایان نامه در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا از آن استفاده شده است، اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ :

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

❋ کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم افزارها و ...) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد.

❋ استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پایان‌نامه، یک محیط ایزوتروپیک محدود دارای ترک تحت شوک گرمایی غیرکلاسیک مورد مطالعه قرار گرفته است. معادلات ترموالاستیسیته دینامیکی کوپل بر اساس تئوری ترموالاستیسیته گرین-نقدی[1] در نظر گرفته شده است. روش المان محدود توسعه یافته برای گسسته سازی معادلات در فضا و روش ضمنی نیومارک جهت انتگرال‌گیری زمانی مورداستفاده قرار گرفته است. ضرایب شدت تنش که با استفاده از روش انتگرال برهم‌کنش محاسبه شده‌اند؛ با تئوری‌های دیگر ترموالاستیسیته مقایسه شده‌اند. اثر ضریب میرایی بر تغییرات زمانی ضرایب شدت تنش و میدان دما مورد بررسی قرار گرفته است. بعلاوه، توزیع دمای نوک ترک که موجب ایجاد آشفتگی در توزیع دما می‌شود؛ بر اساس مدل‌های II و III تئوری گرین-نقدی مقایسه شده‌اند. نتایج شوک دمایی صفحه دارای ترک نشان می‌دهد که ضرایب شدت تنش تئوری-گرین نقدیII که تئوری ترموالاستیسیته بدون اتلاف[2] نیز گفته میشود به‌صورت چشمگیری از نتایج مدل‌های کلاسیک و لرد-شولمان[3] بزرگتر هستند. درحالی‌که بیشینه ضریب شدت تنش تحت شوک شار گرمایی تقریباً با تئوری‌های دیگر برابر است.

کلیدواژگان

ضریب شدت تنش، المان محدود توسعه یافته، شوک گرمایی، تئوری گرین-نقدی.

---

[1] Green-Naghdi (GN)

[2] Thermoelasticity Without Energy Dissipation (TWED)

[3] Lord-Shulman (LS)

مقالات مستخرج از پایان‌نامه

1. Shahsavan M., Nazari M. B. and Rokhi M. M. “Dynamic analysis of cracks under thermal shock considering thermoelasticity without energy dissipation” **J. Therm. Stress.** Accepted
2. Shahsavan M., Nazari M. B. and Rokhi M. M. “Thermal shock analysis of cracks considering Green-Naghdi theory” **Eng. Frac. Mech.** under review

فهرست عنوان‌ها

فهرست شکل‌ها

فهرست جدول‌ها

فهرست نشانه‌ها

A	مساحت المان، (m^2)
A^*	مساحت ناحیه انتگرال برهمکنش، (m^2)
a	طول ترک، (m)
$\mathbf{a}$	بردار مجهولات گره‌ای مربوط به توابع شکل المان محدود
B	بردار نیروی کالبدی بر واحد حجم، (N/m^3)
$\boldsymbol{b}$	بردار مجهولات گره‌ای مربوط به توابع شکل غنی‌شده با تابع هویساید
$\boldsymbol{c}$	بردار مجهولات گره‌ای مربوط به توابع شکل غنی‌شده نوک ترک
[C]	ماتریس میرایی
$\boldsymbol{C_P}$	سرعت موج تنش
$\boldsymbol{C_T}$	سرعت موج دما
$[D]$	تنسور الاستیک (ماتریس خواص ماده)، (N/m^2)
E	مدول یانگ، (N/m^2)
$\mathbf{F}$	بردار نیروهای گره‌ای، (N)
$\boldsymbol{f}$	تابع زاویه‌ای میدان تنش نوک ترک
F_m	توابع غنی‌سازی نوک ترک، ($m^{0.5}$)
H	تابع هویساید
$\boldsymbol{J}$	انتگرال J، (N/m)
k	هدایت گرمایی، ($W/(m.^{\circ}K)$)
[K]	ماتریس سفتی
$\boldsymbol{K_T}$	ضریب شدت شار گرمایی
$\boldsymbol{K_I}$	ضریب شدت تنش مد اول، ($N.m^{-1.5}$)
$\boldsymbol{K_{II}}$	ضریب شدت تنش مد دوم، ($N.m^{-1.5}$)
$\boldsymbol{l}$	طول مشخصه

[M]	ماتریس جرم، (kg)
M	انتگرال برهمکنش، (N/m)
N	تابع شکل روش المان محدود
$\mathbf{N_A}$	مجموعه گره‌های شبکه
$\mathbf{N_H}$	مجموعه گره‌های اطراف مسیر ترک
$\mathbf{N_C}$	مجموعه گره‌های المان‌های نوک ترک
q	تابع وزنی برای محاسبه انتگرال برهمکنش، بی‌بعد
q_i	مؤلفه‌های بردار شار گرمایی بر واحد سطح، (W/m^2)
R	گرمای تولیدشده بر واحد حجم، (W/m^3)
r	مؤلفه دستگاه مختصات قطبی، (m)
T	دما، (K)
Tr	بردار نیروی سطحی بر واحد سطح، (N/m^2)
t	زمان، (sec)
$\mathbf{U}$	بردار جابه‌جایی
u^{aux}	میدان جابه‌جایی کمکی
V	حجم، (m^3)
$\boldsymbol{v}$	سرعت مشخصه (m/s)
W	عرض نمونه، (m)
W	چگالی انرژی کرنشی مکانیکی
X_1 و X_2	مؤلفه‌های دستگاه مختصات دکارتی سراسری، (m)
x_1 و x_2	مؤلفه‌های دستگاه مختصات دکارتی محلی، (m)
$\mathbf{Z}$	تابع فاصله علامت‌دار، (m)

علامت‌های یونانی

$\boldsymbol{\alpha}$	ضریب انبساط گرمایی، (1/°C)

$\boldsymbol{\beta}$	تانسور مدول تنش-دما
$\boldsymbol{\delta_{ij}}$	دلتای کرونکر، بی‌بعد
$\boldsymbol{\varepsilon}$	تانسور کرنش، بی‌بعد
$\boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{aux}}$	تانسور کرنش کمکی، بی‌بعد
$\boldsymbol{\theta}$	تغییر دما، (K)
$\boldsymbol{\lambda}$ و $\boldsymbol{\mu}$	ثوابت لامه، (N/m^2)
$\boldsymbol{\kappa}$	ضریب کلوسوف، بی‌بعد
$\boldsymbol{\nu}$	نسبت پواسون، بی‌بعد
$\boldsymbol{\rho}$	چگالی، (kg/m^3)
$\boldsymbol{\varphi}$	مؤلفه دستگاه مختصات قطبی، بی‌بعد
$\boldsymbol{\sigma}$	تانسور تنش، (N/m^2)
$\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{aux}}$	تانسور تنش کمکی، (N/m^2)
$\boldsymbol{\Phi}$	تابع شکل غنی‌شده برای المان‌های مسیر ترک، بی‌بعد
$\boldsymbol{\Psi}$	تابع شکل غنی‌شده برای المان‌های نوک ترک، بی‌بعد
$\boldsymbol{\omega}$	زاویه بین دستگاه‌های مختصات محلی و سراسری، بی‌بعد
$\mathbf{Y}$	بردار مجهولات گره‌ای
$\boldsymbol{\Gamma}$	مسیر انتگرال‌گیری در انتگرال J

بالانویس‌ها

aux	مربوط به میدان‌های کمکی
S	مربوط به حالت برهم‌نهی
T	مربوط به دما
th	مربوط به حالت حرارتی
u و v	به ترتیب مربوط به جابجایی در جهت محورهای مختصات افقی و قائم
e	المان مبنا

زیرنویس‌ها

$\boldsymbol{g}$	نشان‌دهنده مختصات سراسری
i	شمارنده، مربوط به مؤلفه x دستگاه مختصات دکارتی
j	شمارنده، مربوط به مؤلفه y دستگاه مختصات دکارتی
l	شمارنده مربوط به توابع شکل و همچنین نشان‌دهنده مختصات محلی
m	شمارنده، مربوط به توابع غنی‌سازی نوک ترک
n	شمارنده، مربوط به گره‌ها، گام زمانی و مؤلفه‌های دستگاه مختصات

فصل ۱:

مقدمه

۱-۱- مقدمه

برخی از قوانین متعارف مبتنی بر مکانیک پیوسته کلاسیک نمی‌توانند در بعضی موقعیت‌ها، پدیده‌ها را به‌درستی توصیف کنند. یکی از این موارد هدایت گرمایی فوریه است. تئوری مرسوم هدایت گرمایی فوریه منجر به معادله حاکم بر سهموی در مسئله می‌شود. بر اساس این تئوری، اثر یک اغتشاش گرمایی در مرز یک جسم بلافاصله در نقاط دور از آن احساس می‌شود که از نظر فیزیکی قابل‌قبول نیست. از طرف دیگر، آزمایش‌ها در مواردی چون اغتشاش گرمایی در دماهای پایین، شوک‌های گرمایی[۱] در زمان‌های کوتاه و هدایت گرمایی در مقیاس میکرو، سرعت محدود موج گرما را تائید می‌کند [۱]. انتشار گرما به‌عنوان یک موج حرارتی ابتدا در سال ۱۹۴۶، پس از مشاهده سرعت محدود انتشار گرما در مایع هلیم II پیشنهاد شد [۲و۳]. انتقال انرژی گرمایی با سرعت محدود در جامدات که به‌اصطلاح صوت ثانویه نامیده می‌شود، در [۴و۵] موردبحث قرار گرفته است. بعلاوه، مشاهدات تجربی، سرعت محدود هدایت گرمایی در مسائل بیولوژیکی [۶]، هدایت گرمای میکرو / نانو یا هدایت گرمایی فوق سریع را تائید می‌کنند [۷]. در این موارد، نتایج کاربرد قانون فوریه با نتایج آزمایشگاهی اختلاف فاحش دارد [۸]. مهم‌ترین نقص قانون فوریه و تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک[۲]، منجر شدن به‌سرعت بی‌نهایت موج گرمایی است. برای رفع این مشکل، تئوری‌های مختلف ترموالاستیسیته تعمیم-یافته[۳] ارائه شده‌اند که در آن‌ها انرژی گرمایی با سرعت محدود در یک جامد پیوسته منتشر می‌شود [۹-۱۲]. از طرف دیگر هنگامی‌که نرخ زمانی اعمال شرایط مرزی دمایی بر یک پیوستار تغییر شکل‌پذیر یا نرخ تغییرات منبع تولید گرمای داخلی قابل‌توجه باشد و منجر به تحریک اینرسی شود؛ موج‌های تنش گرمایی تولید می‌شود. در چنین شرایطی میدان‌های دما و تنش باید با حل هم‌زمان معادلات انرژی و تعادل (معادلات جفت شده تئوری‌های تعمیم‌یافته ترموالاستیسیته) صورت گیرد [۱۳].

در تئوری‌های ترموالاستیسیته تعمیم‌یافته، سرعت انتقال امواج گرما به علت استفاده از زمان‌های آسایش

۱ Thermal Shock

۲ Classic Thermoelasticity (CTE)

۳ Generalized Thermoelasticity

و فرم هذلولوی معادله هدایت گرمایی محدود است. پیدایش اثر صوت ثانویه باعث تقویت و گسترش تئوری‌های هدایت گرمایی غیرکلاسیک شده است [۶]. بررسی نظریه‌های ترموالاستیسیته تعمیم یافته توسط هتنارسکی و اسلامی انجام شده‌است [۱۴].

۱-۲- مروری بر کارهای پیشین

تئوری تعمیم‌یافته گرین-نقدی در اوایل ۱۹۹۰ توسط گرین و نقدی [۱۵و۱۶] پیشنهاد شده است. تئوری گرین-نقدی به‌صورت ترمودینامیکی سازگار استخراج شده است و بر اساس انتخاب متغیرهای حالت ترمودینامیکی مستقل به سه زیر نظریه تقسیم می‌شود که دامنه نسبتاً گسترده‌ای از مسائل هدایت گرمایی را پوشش می‌دهد. رویکرد گرین و نقدی در این نظریه تفاوت قابل‌توجهی با روش معمول مکانیک محیط پیوسته کلاسیک دارد [۱۷]. در تئوری گرین-نقدی تعادل آنتروپی به‌عنوان معادله پایه به‌جای تعادل انرژی مورداستفاده قرار گرفته است. علاوه بر این، نابرابری کلازیوس-دوهامل به‌عنوان قانون دوم ترمودینامیک استفاده نمی‌شود. در این تئوری مفهوم جابه‌جایی گرمایی[۱] ارائه شده است. جابه‌جایی گرمایی میدانی است که مشتق زمانی آن دمای تجربی را نتیجه می‌دهد. جابه‌جایی گرمایی یک کمیت ماکروسکوپی است که می‌تواند - برای درک بهتر متغیرهای ترمودینامیکی و آنچه در هدایت گرمایی اتفاق می‌افتد - به‌عنوان پل بین مکانیک محیط پیوسته و نظریه مولکولی با توجه به نظریه گرین-نقدی در نظر گرفته شود [۱۸]. یکی دیگر از ویژگی‌های روش گرین و نقدی استخراج بردار شار آنتروپی از یک تابع پتانسیل (تابع انرژی آزاد) است که تانسور تنش نیز از آن استخراج می‌شود. تئوری گرین-نقدی نوع I منجر به استخراج نتایج تئوری کلاسیک ترموالاستیسیته می‌شود و سرعت نامحدود امواج گرما را پیش‌بینی می‌کند. تئوری گرین-نقدی نوع II موج گرمایی حاصل از آن نامیراست. تئوری گرین-نقدی نوع III نیز حالت عمومی‌تر این تئوری است که در حالت کلی قادر به در نظر گرفتن اثر میرایی و صوت ثانویه است که سرعت محدود موج گرما را به دنبال دارد. برخی تحقیقات انجام‌شده بر روی انتشار موج ترموالاستیک یک بعدی با استفاده از تئوری گرین-نقدی به‌صورت تحلیلی و

---

[۱] Thermal Displacement

برخی با استفاده از روش‌های عددی انجام‌شده‌اند.

تئوری ترموالاستیسیته خطی گرین نقدیII برای مطالعه موج یک بعدی در یک نیم فضا از جنس مواد همگن و همسانگرد مورد استفاده قرار گرفته است. حل دقیق به صورت فرم بسته با استفاده از تبدیل لاپلاس ارائه شده است [۱۹]. تئوری خطی ترموالاستیسیته گرین نقدیII جهت بررسی بر هم کنش جسم بی نهایت دارای یک حفره استوانه ای مورد استفاده قرار گرفته است. حل با استفاده از تکنیک لاپلاس انجام شده است [۲۰]. برهم کنش ترموالاستیک ناشی از منبع گرمای نقطه ای با استفاده از تئوری ترموالاستیسیته گرین نقدیII خطی و تبدیل لاپلاس مورد مطالعه قرار گرفته است. حل تحلیلی به شکل یک فرم بسته برای میدان-های جابه‌جایی، تنش و نیز دما ارائه شده است [۲۱]. آشفتگی ناشی از بارهای مکانیکی نقطه‌ای و منبع گرمای داخلی بر مرز یک نیم فضای ترموالاستیک همگن و همسانگرد با اعمال تبدیل‌های لاپلاس و هنکل در چارچوب ترموالاستیسیته تعمیم‌یافته مورد بررسی قرار گرفته است [۲۲]. امواج یک بعدی در یک نیم فضا تحت بارهای گرمایی با در نظر گرفتن تئوری ترموالاستیسیته گرین نقدیII مورد مطالعه قرار گرفته است [۲۳]. فرمول بندی متحد تئوری‌های ترموالاستیسیته تعمیم‌یافته شامل تئوری‌های لرد-شولمان، گرین-لیندزی و گرین-نقدی ارائه شده است. روابط حاکم متحد جهت مواد همگن و همسانگرد ارائه شده و پس از بی‌بعدسازی به‌صورت تحلیلی در فضای لاپلاس حل شده و سپس به فضای زمان نگاشت شده است [۲۴]. از فرم متحد معادلات ترموالاستیسیته شامل تئوری‌های لرد-شولمان، گرین-نقدی و گرین-لیندزی جهت بررسی انتشار امواج گرما در یک باریکه استفاده شده است. معادلات به‌صورت تحلیلی در فضای لاپلاس حل شده و سپس با استفاده تبدیل لاپلاس معکوس عددی، نتایج در فضای زمان ارائه شده است [۲۵]. حل تحلیلی معادلات حاکم ترموالاستیسیته براساس تئوری ترموالاستیسیته گرین نقدی II در حالت کوپل برای استوانه جدار ضخیم انجام شده است. فرض شده که مرز استوانه تحت شوک گرمایی یک بعدی قرار دارد. در نهایت، انتشار امواج گرمایی و الاستیک مورد بحث و بررسی قرار گرفته است [۲۶]. تحلیل ترموالاستیسیته غیرخطی کلاسیک و ترموالاستیسیته تعمیم‌یافته برای یک استوانه جدار ضخیم مدرج تابعی با خواص وابسته به دما تحت شوک گرمایی با استفاده از روش‌های عددی ارائه شده است [۲۷].

رفتار ترموالاستیسیته کوپل استوانه جدار ضخیم مدرج تابعی مورد بررسی قرار گرفته است. معادلات حاکم برای استوانه به طول محدود تحت شوک گرمایی به صورت عددی حل شده است. خواص استوانه نیز در راستای شعاعی به صورت توانی متغیر در نظر گرفته شده است [۲۸].

از سوی دیگر، ایجاد و رشد ترک ها، مد عمده شکست در سازه‌هایی است که تحت گرادیان شدید گرما قرار دارند. تخمین عمر، ارزیابی سلامت و همچنین ظرفیت بار به تحلیل کامل ترک تحت تنش‌های گرمایی نیاز دارد. روش‌های تحلیلی مانند پرتوبیشن به مسائل ساده یا شرایط خاص محدود می‌شوند. در برخی از تحقیقات انجام‌شده، ضریب شدت تنش[۱] مود I برای یک باریکه دارای ترک تحت شوک گرمایی استخراج شده است. یک باریکه مدرج تابعی بدون قید مکانیکی دارای تعادل استاتیکی در نظر گرفته شده که دارای ترک داخلی یا لبه‌ای عمود بر مرز خود باشد. مسئله ترک به یک معادله انتگرالی کاهش داده شده و با استفاده از روش‌های عددی حل شده است. ضرایب شدت تنش گرمایی برای ترک داخلی و سطحی باریکه مدرج تابعی ارائه شده است [۲۹]. رفتار شکست صفحه مدرج تابعی تحت شوک گرمایی مورد مطالعه قرار گرفته است. خواص صفحه دارای ترک، در راستای شعاعی متغیر در نظر گرفته شده است. تنش‌های گرمایی و نیز ضرایب شدت تنش گرمایی برای صفحه دارای ترک ارائه شده است [۳۰]. مسئله ترموالاستیک غیرکوپل باریکه همگن و همسانگرد شامل ترک لبه‌ای در نظر گرفته شده است. معادلات حاکم به یک معادله انتگرالی کاهش داده شده است و سپس با استفاده از روش‌های عددی حل شده است. ضرایب شدت تنش گرمایی برای ترک با طول نسبی متفاوت ارائه شده است [۳۱]. بعلاوه، روش‌های عددی نیز برای مطالعه مسائل شکست گرمایی مورداستفاده قرار گرفته است. روش المان مرزی دوگانه[۲] برای تحلیل ترک تحت بارگذاری گرمایی غیرکوپل پیشنهاد شد [۳۲و ۳۳]. همچنین، این روش برای مطالعه مسائل ترک ترموالاستیک سه بعدی توسعه داده شده است [۳۴]. روش المان مرزی-دامنه[۳] در [۳۵و۳۶] برای تعیین ضرایب شدت تنش صفحه مدرج تابعی دارای ترک تحت شوک گرمایی کلاسیک پیشنهاد شده است. روش المان مرزی با المان‌های تکین در فضای لاپلاس برای

---

۱ Stress Intensity Factor (SIF)

۲ Boundary Element Method (BEM)

۳ Boundary Domain Element Method (BDEM)

استخراج ضریب شدت تنش مود I با استفاده از روش همبستگی جابه‌جایی برای یک باریکه دارای ترک تحت شوک گرمایی بر اساس تئوری‌های کلاسیک ترموالاستیسیته [۳۷]، لرد شولمان [۳۸] و گرین-لیندزی[۱] [۳۹] مورداستفاده قرار گرفته است. اثر اینرسی و کوپل بر ضریب شدت تنش و انتگرال J برای یک باریکه دارای ترک تحت شوک گرمایی بر اساس تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک در [۴۰] موردبحث قرار گرفته است. اثر صوت ثانویه طبق مدل لرد-شولمان بر روی ضرایب شدت تنش باریکه دارای ترک در [۴۱] مورد بررسی قرار گرفته است. در این مطالعه، المان‌های چهارضلعی تکین در روش المان محدود برای محاسبه تکینی تنش در یک باریکه مورداستفاده قرار گرفته است که دارای ترک عمود بر لبه است. انتگرال J برای محاسبه ضریب شدت تنش مود I در یک باریکه مدرج تابعی دارای ترک مورداستفاده قرار گرفته است که مدل المان محدود آن شامل مش ریز غیریکنواخت با المان‌های ۸ گره‌ای تحت شوک گرمایی کلاسیک است [۴۲]. در میان روش‌های مختلف مکانیک شکست محاسباتی، روش عددی المان محدود توسعه یافته[۲] و همچنین نسخه‌های دیگر مانند روش المان محدود تعمیم‌یافته به‌عنوان یک ابزار کارآمد و قوی برای تحلیل ترک است [۴۳]. در روش المان محدود توسعه یافته، سادگی و قدرت روش المان محدود کلاسیک با کارایی و دقت روش‌های بدون مش ادغام می‌شود. مسائل پیچیده مدل‌سازی ترک در روش المان محدود کلاسیک در روش المان محدود توسعه یافته با در نظر گرفتن ترک در توابع تقریبی به‌جای هندسه، حل می‌شوند [۴۴]. در چارچوب روش المان محدود توسعه یافته، محاسبات ضرایب شدت تنش و رشد ترک در مواد غیرایزوتروپیک تحت بارگذاری گرمایی حالت پایا در [۴۵] گزارش شده است. بعلاوه، ضرایب شدت تنش دینامیکی باریکه دارای ترک تحت شوک گرمایی غیرکوپل با استفاده از انتگرال برهم‌کنش در [۴۶] محاسبه شده است. اخیراً انتگرال برهم‌کنش مبتنی بر انتگرال J برای استخراج ضرایب شدت تنش در یک صفحه ترک خورده تحت شوک گرمایی بر اساس مدل گرین-لیندزی توسعه یافته است [۴۷]. اثر شوک گرمایی غیر کلاسیک طبق تئوری LS بر تاریخچه زمانی ضرایب شدت تنش در [۴۸] موردبحث قرار گرفته است.

---

[۱] Green-Lindsay (GL)

[۲] Extended Finite Element Method (XFEM)

۱-۳- نوآوری

استفاده از روش اجزا محدود توسعه‌یافته برای ترک تحت شوک گرمایی طبق تئوری گرین-نقدی ازجمله نوآوری‌های پایان نامه حاضر است. فصل‌های بعدی این پایان‌نامه به شرح ذیل سازمان‌دهی شده‌اند: در فصل دوم روش اجزا محدود توسعه‌یافته و روش انتگرال برهم‌کنش بیان شده است. در فصل سوم به گسسته‌سازی فرم اجزا محدود معادلات حاکم ترموالاستیسیته تعمیم‌یافته دوبعدی بر اساس تئوری گرین-نقدی نوع II و نیز ارائه نتایج حاصل از این تئوری پرداخته شده است. در فصل چهارم، گسسته‌سازی فرم اجزا محدود معادلات حاکم ترموالاستیسیته تعمیم‌یافته دوبعدی بر اساس تئوری گرین-نقدی نوع III و نیز نتایج حاصل از این تئوری ارائه شده است. در فصل پنجم، معادلات المان محدود در فضای لاپلاس حل شده و روش تبدیل لاپلاس معکوس عددی شرح داده شده است. نتیجه‌گیری و پیشنهادها نیز در فصل ششم پایان نامه ارائه شده‌اند.

فصل ۲:

روش‌های المان محدود توسعه یافته و انتگرال برهم‌کنش

۲-۱- مقدمه

روش‌های عددی در حل مسائل مهندسی از فرایندهای گسترده و پرکاربرد است. به‌خصوص زمانی که حل چنین مسائلی از طریق روش‌های تحلیلی یا تجربی به علت پیچیدگی‌های هندسی یا شرایط مرزی امکان‌پذیر نباشد. در این پایان‌نامه از روش اجزا محدود توسعه‌یافته جهت مدل‌سازی ترک در یک صفحه محدود استفاده شده است که تحت شوک گرمایی غیرکلاسیک با استفاده از تئوری‌های تعمیم‌یافته ترموالاستیسیته قرار دارد.

۲-۲- روش المان محدود توسعه‌یافته

در این پایان‌نامه، از روش المان محدود توسعه‌یافته برای مدل‌سازی ترک استفاده شده است. در این روش، توابع شکل روش المان محدود در المان‌های مسیر ترک و نوک ترک غنی‌سازی می‌شوند. توابع غنی‌سازی منجر به افزایش درجات آزادی المان‌های مسیر و نیز نوک ترک نسبت به روش المان محدود می‌شوند. استفاده از روش المان محدود توسعه یافته در ابتدا توسط بلیچکو و همکارانش جهت مدل‌سازی ناپیوستگی‌های دلخواه در شبکه‌های المان محدود کلاسیک پیشنهاد شد [۴۹-۵۱]. در مدل‌سازی ترک با استفاده از روش المان محدود توسعه‌یافته در اولین گام، هندسه مسئله شبکه‌بندی می‌شود و در گام دوم المان‌های حاضر در مسیر و نوک ترک با استفاده از توابع غنی‌سازی، غنی‌سازی می‌شوند.

در این روش تابع غنی‌سازی با استفاده از تقریب زیر در دو جهت u(x)وv(x) به دست می‌آید [۵۲] :

$$\mathbf{U}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{t}) = \sum_{\forall i} N_{\boldsymbol{i}}(\mathbf{x})\mathbf{a}_{\boldsymbol{i}} + \sum_{\forall i} \boldsymbol{\phi}_{\boldsymbol{i}}(\mathbf{x})\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x})\mathbf{b}_{\boldsymbol{i}} \qquad (۲-۱)$$

در رابطه فوق، جمله اول تقریب المان محدود کلاسیک است که در آن $\boldsymbol{N_i}$ها توابع شکل روش المان محدود کلاسیک هستند. در رابطه (۲-۱)، $\mathbf{a}_i$ها درجات آزادی المان محدود کلاسیک هستند.

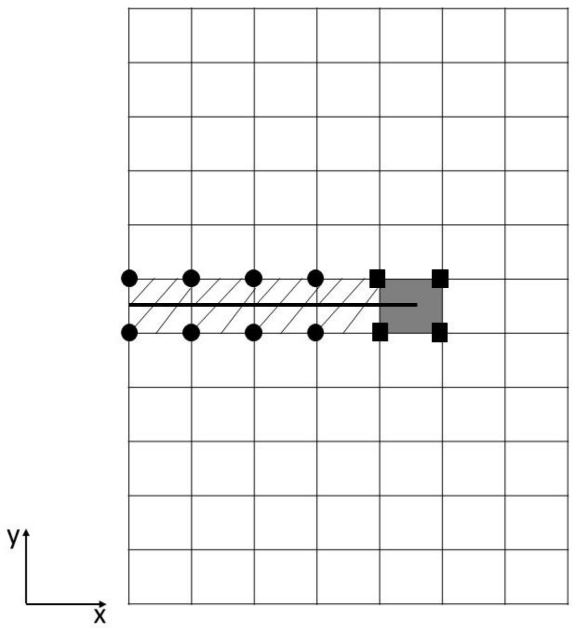
جمله دوم رابطه شامل عبارت‌های غنی‌سازی است. $\boldsymbol{\phi}_i(\mathbf{x})$ نشان‌دهنده توابع شکل، $\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x})$ تابع غنی‌سازی و $\mathbf{b}_i$ پارامترهای مجهول مجازی هستند.

در حالت کلی، توابع شکل برای تقریب مورداستفاده در روش‌های المان محدود کلاسیک و تعمیم‌یافته ممکن

است یکسان نباشند؛ اما استفاده از توابع یکسان منجر به محدودیتی در حل مسئله نمی‌شود [۵۲]. در این تحقیق توابع شکل یکسان در نظر گرفته شده است.

۲-۳- مدل‌سازی ترک در روش المان محدود توسعه‌یافته

در این بخش، فرایند مدل‌سازی ترک در روش المان محدود توسعه یافته شرح داده می‌شود. مدل المان محدود یک جسم دارای ترک در شکل (۲-۱) نشان داده شده است. مطابق شکل (۲-۱) فرض می‌شود N_A نشان‌دهنده تعداد تمام گره‌های شبکه المان محدود، N_C تعداد گره‌های المان‌های اطراف نوک ترک و N_H تعداد گره‌های المان‌های مسیر ترک باشند. در این شکل المان‌های هاشور خورده، المان‌های مسیر ترک و المان پررنگ شده، المان نوک ترک است. گره‌هایی که توسط مربع و دایره مشخص شده‌اند، به ترتیب گره‌های غنی‌شده نوک ترک و مسیر ترک هستند. مجموع این گره‌ها، به‌عنوان گره‌های غنی‌شده شناخته می‌شوند.



شکل (۲-۱) نمایش یک شبکه اجزا محدود توسعه‌یافته شامل ترک و گره‌های غنی‌شده

در روش المان محدود توسعه‌یافته میدان جابه‌جایی برای یک المان غنی‌شده شامل ترک به‌صورت زیر قابل بیان است [۵۳] :

$$\mathbf{U}(x,y,t) = \sum_{\mathrm{n}\in\mathrm{N_A}} N_\mathrm{n}(x,y)\mathbf{a}_\mathrm{n}(t) + \sum_{\mathrm{n}\in\mathrm{N_H}} N_\mathrm{n}(x,y)[\mathrm{H}(\mathrm{Z}) - \mathrm{H}(\mathrm{Z_n})]\mathbf{b}_\mathrm{n}(t) + \sum_{\mathrm{m}}\sum_{\mathrm{n}\in\mathrm{N_C}} N_\mathrm{n}(x,y)[F_\mathrm{m}(r,\varphi) - F_\mathrm{m}(r_\mathrm{n},\varphi_\mathrm{n})]\mathbf{c}_\mathrm{nm}(t) \tag{۲-۲}$$

که $\mathbf{a}_\mathrm{n}(t)$ ، $\mathbf{b}_\mathrm{n}(t)$ و $\mathbf{c}_\mathrm{nm}(t)$ در رابطه فوق، مجهولات گره‌ای هستند. این بردارهای مجهول تابع زمان هستند.

$$\mathbf{a}_\mathrm{n}(t) = \{\mathbf{a}_\mathrm{n}^\mathrm{u}(t), \mathbf{a}_\mathrm{n}^\mathrm{v}(t)\}^T \tag{۳-۲}$$

$$\mathbf{b}_\mathrm{n}(t) = \{\mathbf{b}_\mathrm{n}^\mathrm{u}(t), \mathbf{b}_\mathrm{n}^\mathrm{v}(t)\}^T \tag{۴-۲}$$

$$\mathbf{c}_\mathrm{nm}(t) = \{\mathbf{c}_\mathrm{nm}^\mathrm{u}(t), \mathbf{c}_\mathrm{nm}^\mathrm{v}(t)\}^T \tag{۵-۲}$$

در رابطه (۲-۲)، $\mathrm{H}(\mathrm{Z})$ تابع هویساید به‌صورت زیر قابل بیان است:

$$\mathrm{H}(\mathrm{Z}) = \begin{cases} 1, & \mathrm{Z} > 0 \\ 0, & \mathrm{Z} \le 0 \end{cases} \tag{۶-۲}$$

در رابطه فوق، $\mathbf{Z}$ تابعی از موقعیت یک نقطه نسبت به مسیر ترک است.

در رابطه (۲-۲)، F_m مجموعه‌ای از توابع غنی‌سازی نوک ترک است. توابع غنی‌سازی برحسب مختصات محلی نوک ترک (r و φ) به‌صورت رابطه (۲-۷) ارائه می‌شوند [۵۳].

$$\{F_\mathrm{m}\} = \left\{\sqrt{r}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right), \sqrt{r}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right), \sqrt{r}\sin(\varphi)\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right), \sqrt{r}\sin(\varphi)\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right\} \tag{۷-۲}$$

مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی در روش المان محدود توسعه‌یافته –در جهت محورهای مختصات سراسری- به‌صورت زیر تعیین می‌شوند.

$$\mathbf{u}(x,y,t) = \sum_{\mathrm{n}\in\mathrm{N_A}} N_\mathrm{n}(x,y)\mathbf{a}_\mathrm{n}^\mathrm{u}(t) + \sum_{\mathrm{n}\in\mathrm{N_H}} N_\mathrm{n}(x,y)[\mathrm{H}(\mathrm{Z}) - \mathrm{H}(\mathrm{Z_n})]\mathbf{b}_\mathrm{n}^\mathrm{u}(t) + \sum_{\mathrm{n}\in\mathrm{N_C}} N_\mathrm{n}(x,y)\left[\sqrt{r}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{r_\mathrm{n}}\sin\left(\frac{\varphi_\mathrm{n}}{2}\right)\right]\mathbf{c}_\mathrm{n1}^\mathrm{u}(t) + \sum_{\mathrm{n}\in\mathrm{N_C}} N_\mathrm{n}(x,y)\left[\sqrt{r}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{r_\mathrm{n}}\cos\left(\frac{\varphi_\mathrm{n}}{2}\right)\right]\mathbf{c}_\mathrm{n2}^\mathrm{u}(t) \tag{۸-۲}$$

$$+\sum_{n\in N_C} N_n(x,y)\left[\sqrt{r}\sin(\varphi)\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)-\sqrt{r_n}\sin(\varphi_n)\sin\left(\frac{\varphi_n}{2}\right)\right]c_{n3}^{u}(t)$$

$$+\sum_{n\in N_C} N_n(x,y)\left[\sqrt{r}\sin(\varphi)\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)-\sqrt{r_n}\sin(\varphi_n)\cos\left(\frac{\varphi_n}{2}\right)\right]c_{n4}^{u}(t)$$

$$v(x,y,t)=\sum_{n\in N_A} N_n(x,y)a_n^{v}(t)+\sum_{n\in N_H} N_n(x,y)[H(Z)-H(Z_n)]b_n^{v}(t)$$

$$+\sum_{n\in N_C} N_n(x,y)\left[\sqrt{r}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)-\sqrt{r_n}\sin\left(\frac{\varphi_n}{2}\right)\right]c_{n1}^{v}(t)$$

$$+\sum_{n\in N_C} N_n(x,y)\left[\sqrt{r}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)-\sqrt{r_n}\cos\left(\frac{\varphi_n}{2}\right)\right]c_{n2}^{v}(t)$$

$$+\sum_{n\in N_C} N_n(x,y)\left[\sqrt{r}\sin(\varphi)\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)-\sqrt{r_n}\sin(\varphi_n)\sin\left(\frac{\varphi_n}{2}\right)\right]c_{n3}^{v}(t)$$

$$+\sum_{n\in N_C} N_n(x,y)\left[\sqrt{r}\sin(\varphi)\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)-\sqrt{r_n}\sin(\varphi_n)\cos\left(\frac{\varphi_n}{2}\right)\right]c_{n4}^{v}(t)$$ (۲-۹)

فرض عایق بودن ترک، منجر به شار گرمایی تکین در نوک ترک و نیز ناپیوستگی میدان دما در امتداد ترک می‌شود. برای در نظر گرفتن ناپیوستگی مذکور از تابع هویساید استفاده می‌شود. میدان دمای نوک ترک مشابه میدان جابه‌جایی مد پارگی (مد III) ترک به‌صورت زیر است [۵۴]:

$$T=-\frac{K_T}{k}\sqrt{\frac{2r}{\pi}}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$ (۲-۱۰)

که در رابطه فوق K_T ضریب شدت شار گرمایی و k ضریب هدایت گرمایی ماده مورداستفاده است.

با توجه به رابطه (۲-۱۰)، میدان دما مشابه میدان جابه‌جایی گسسته می‌شود؛ اما فقط از اولین تابع رابطه (۲-۷) برای غنی‌سازی گره‌های نوک ترک استفاده می‌شود [۵۵]. بنابراین میدان دما به‌صورت زیر قابل بیان است:

$$\theta(x,y,t)=\sum_{n\in N_A} N_n(x,y)a_n^{T}(t)+\sum_{n\in N_H} N_n(x,y)[H(Z)-H(Z_n)]b_n^{T}(t)$$ (۲-۱۱)

$$+\sum_{\mathbf{n}\in\mathbf{N_C}} \boldsymbol{N}_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\left[\sqrt{\boldsymbol{r}}\,\mathbf{sin}\left(\frac{\boldsymbol{\varphi}}{\mathbf{2}}\right)-\sqrt{\boldsymbol{r}_{\mathbf{n}}}\,\mathbf{sin}\left(\frac{\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{n}}}{\mathbf{2}}\right)\right]\mathbf{c}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{T}}(t)$$

که در رابطه فوق $\mathbf{a}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{T}}(\boldsymbol{t})$، $\mathbf{b}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{T}}(\boldsymbol{t})$ و $\mathbf{c}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{T}}(\boldsymbol{t})$ مقدار تغییرات دمای گره‌ها برای تابع شکل مربوط به آن‌ها است.

روابط (۲-۸)، (۲-۹) و (۲-۱۱) به‌صورت زیر بازنویسی می‌شوند.

$$\mathbf{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{t}) = \sum_{\mathbf{n}\in\mathbf{N_A}} \boldsymbol{N}_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mathbf{a}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{u}}(\boldsymbol{t}) + \sum_{\mathbf{n}\in\mathbf{N_H}} \boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mathbf{b}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{u}}(\boldsymbol{t}) + \sum_{\mathbf{n}\in\mathbf{N_C}}\sum_{\mathbf{m=1}}^{\mathbf{4}} \boldsymbol{\Psi}_{\mathbf{nm}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mathbf{c}_{\mathbf{nm}}^{\mathbf{u}}(\boldsymbol{t}) \quad (۱۲\text{-}۲)$$

$$\mathbf{v}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{t}) = \sum_{\mathbf{n}\in\mathbf{N_A}} \boldsymbol{N}_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mathbf{a}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{v}}(\boldsymbol{t}) + \sum_{\mathbf{n}\in\mathbf{N_H}} \boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mathbf{b}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{v}}(\boldsymbol{t}) + \sum_{\mathbf{n}\in\mathbf{N_C}}\sum_{\mathbf{m=1}}^{\mathbf{4}} \boldsymbol{\Psi}_{\mathbf{nm}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mathbf{c}_{\mathbf{nm}}^{\mathbf{v}}(\boldsymbol{t}) \quad (۱۳\text{-}۲)$$

$$\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{t}) = \sum_{\mathbf{n}\in\mathbf{N_A}} \boldsymbol{N}_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mathbf{a}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{T}}(\boldsymbol{t}) + \sum_{\mathbf{n}\in\mathbf{N_H}} \boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mathbf{b}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{T}}(\boldsymbol{t}) + \sum_{\mathbf{n}\in\mathbf{N_C}} \boldsymbol{\Psi}_{\mathbf{n1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mathbf{c}_{\mathbf{n1}}^{\mathbf{T}}(\boldsymbol{t}) \quad (۱۴\text{-}۲)$$

قرار دادن روابط (۲-۱۲) تا (۲-۱۴) در معادلات حاکم بر مسئله موردنظر، منجر به گسسته‌سازی معادلات حاکم می‌شود.

۲-۴- روش انتگرال برهم‌کنش

میدان‌های تنش و کرنش در حوزه نوک ترک در تئوری‌های مرسوم مکانیک شکست، با یک پارامتر مانند انتگرال J، ضریب شدت تنش و یا بازشدگی سطح ترک تعیین می‌شود. کاربرد پارامترهای بیان شده به‌اندازه ناحیه پلاستیک به وجود آمده در نوک ترک وابسته است. اگر اندازه ناحیه مذکور کوچک باشد، یعنی اندازه ناحیه پلاستیک در مقایسه با طول‌های مشخصه سازه دارای ترک، مثل طول ترک، طول سازه در راستای ترک و یا ضخامت کوچک باشد (شرایط ناحیه تسلیم کوچک[۱])؛ برای توصیف میدان‌های تنش و کرنش حوزه نوک ترک، یکی از پارامترهای فوق به‌عنوان خصوصیت ماده مورداستفاده قرار می‌گیرد [۵۶].

[۱] Small Scale Yielding (SSY)

مطابق شکل (۲-۲)، میدان تنش حوزه نوک ترک در دستگاه مختصات محلی برای یک پیوستار جامد به‌صورت زیر است:

$$\boldsymbol{\sigma_{ij} = K_I(2\pi r)^{-\frac{1}{2}} f_{ij}^{I}(\varphi) + K_{II}(2\pi r)^{-\frac{1}{2}} f_{ij}^{II}(\varphi)} \qquad (۱۵-۲)$$

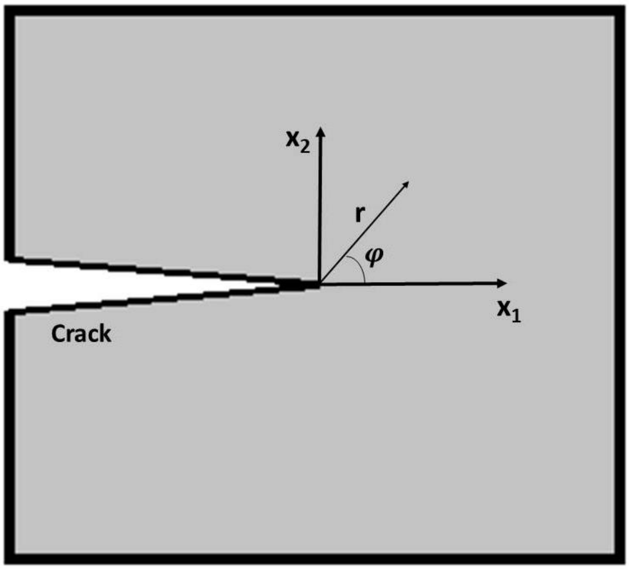
در رابطه فوق، K_I و K_{II} ضرایب شدت تنش مود I و II و $\boldsymbol{f}$ تابع زاویه ای میدان تنش نوک ترک هستند.

روش انتگرال برهم‌کنش یکی از روش‌های کارآمد جهت محاسبه ضرایب شدت تنش در سیستم‌های خطی است. روش انتگرال برهم‌کنش برای تئوری‌های مختلف ترموالاستیسیته قابل‌استفاده است. در این بخش، روش انتگرال برهم‌کنش برای تئوری گرین-نقدی بیان می‌شود. جهت محاسبه پارامترهای ضرایب شدت تنش با استفاده از روش انتگرال برهم‌کنش، از میدان‌های کمکی مثل میدان جابه‌جایی، میدان کرنش و میدان تنش استفاده می‌شود.

۲-۴-۱- میدان‌های کمکی

برای استفاده از انتگرال برهم‌کنش لازم است میدان‌های کمکی جابه‌جایی u^{aux}،کرنش ε^{aux} و تنش σ^{aux} به‌صورت تحلیلی یا عددی مورداستفاده قرار گیرند. میدان‌های کمکی انتخابی معمولاً هر سه قانون مکانیک جامدات را ارضا می‌کنند. این میدان‌ها می‌توانند برای بارگذاری‌های مکانیکی و حرارتی به‌صورت استاتیکی و دینامیکی مورداستفاده قرار گیرند.

برای محاسبه ضرایب شدت تنش، از حل تحلیلی ویلیامز برای یک ترک لبه‌ای در مواد همگن استفاده می‌شود. در شکل (۲-۲)، یک ترک در یک صفحه دو بعدی و نیز دستگاه‌های مختصات دکارتی و قطبی نوک ترک نشان داده شده است.



شکل (۲-۲) محیط دو بعدی شامل ترک و دستگاه‌های مختصات دکارتی و قطبی نوک ترک

میدان‌های کمکی برای یک ترک ایستا در پیوست الف ارائه شده است.

۲-۴-۲- فرمول‌بندی انتگرال برهم‌کنش

برهم‌کنش دو حالت بارگذاری مستقل و قابل‌قبول برای یک پیوستار دارای ترک که در انتگرال‌های پایستار الاستیسیته به وجود می‌آید؛ انتگرال برهم‌کنش نامیده می‌شود. در این قسمت انتگرال برهم‌کنش برای بارگذاری حرارتی با استفاده از تئوری گرین-نقدی بیان می‌شود.

فرم انتگرال J برای یک ترک بدون کشش و نیروی مکانیکی، به‌صورت زیر قابل بیان است:

$$\boldsymbol{J} = \lim_{\Gamma_s \to 0} \int_{\Gamma_s} \left(\boldsymbol{W}\boldsymbol{\delta}_{ij} - \boldsymbol{\sigma}_{ij}\boldsymbol{u}_{i,1}\right)\boldsymbol{n}_j \boldsymbol{d}\boldsymbol{\Gamma}_s \qquad (۱۶-۲)$$

که در رابطه فوق، u_i مؤلفه‌های بردار جابه‌جایی و n بردار یکه عمود رو به خارج منحنی است. W چگالی انرژی کرنشی مکانیکی است که به‌صورت زیر بیان می‌شود.

$$W = \int_0^t \frac{1}{2}\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}\,d\tau$$

$$= \frac{1}{2}C_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} - \beta_{kl}\varepsilon_{kl}\Delta T + \frac{1}{2}\beta_{kl}\alpha_{kl}\Delta T^2 \qquad (۱۷-۲)$$

$$+ \beta_{kl}\alpha_{kl}t_1\Delta T\dot{T} + \frac{1}{2}\beta_{kl}\alpha_{kl}{t_1}^2\dot{T}^2 - t_1\beta_{kl}\varepsilon_{kl}\dot{T}$$

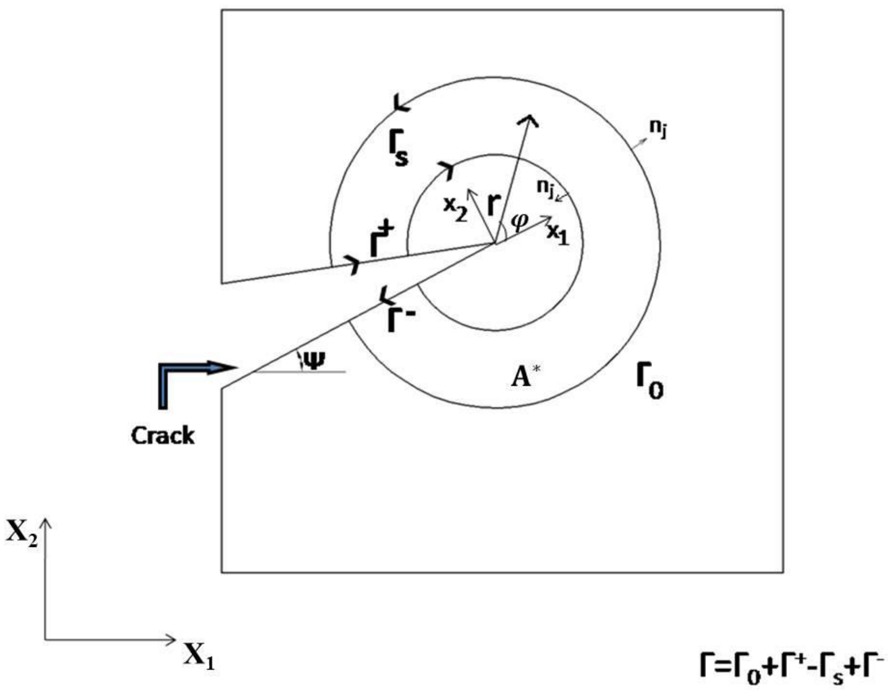
در رابطه فوق، $\boldsymbol{\varepsilon_{ij}}$ مؤلفه‌های کرنش کلی (مکانیکی و گرمایی) است.

جهت سهولت در محاسبه انتگرال به روش عددی، لازم است انتگرال خطی به یک انتگرال ناحیه‌ای تبدیل شود.

انتگرال کانتوری زیر برای تبدیل فرم کانتوری انتگرال J به یک فرم ناحیه‌ای معادل تعریف می‌شود.

$$I = \oint_{\Gamma} \left(W\delta_{ij} - \sigma_{ij}u_{i,1}\right)m_j q\,d\Gamma \qquad (۱۸-۲)$$

در رابطه فوق، $\Gamma=\Gamma_0+\Gamma^{+}+\Gamma^{-}-\Gamma_s$ و m_j بردار یکه عمود رو به خارج کانتور Γ است (یعنی $m_j=n_j$ روی Γ_0 و $m_j=-n_j$ روی Γ_s) (که در شکل (۲-۳) نشان داده شده است). همچنین، q تابع وزنی دلخواه و همواری است که از $q=1$ روی Γ_s تا $q=0$ روی Γ_0 تغییر می‌کند. حدگیری از رابطه فوق، منجر به رابطه (۲-۱۹) می‌شود.



شکل (۲-۳) تبدیل فرم کانتوری انتگرال J به فرم ناحیه‌ای [۴۷]

$$\lim_{\Gamma_s \to 0} \boldsymbol{I} = \lim_{\Gamma_s \to 0} \oint_{\Gamma} \left(W\delta_{1j} - \sigma_{ij} u_{i,1} \right) m_j q d\Gamma$$

$$= \lim_{\Gamma_s \to 0} \oint_{\Gamma_0 + \Gamma^+ + \Gamma^- - \Gamma_s} \left(W\delta_{1j} - \sigma_{ij} u_{i,1} \right) m_j q d\Gamma$$

$$= \lim_{\Gamma_s \to 0} [\oint_{\Gamma_0 + \Gamma^+ + \Gamma^-} \left(W\delta_{1j} - \sigma_{ij} u_{i,1} \right) m_j q d\Gamma \qquad (۲-۱۹)$$

$$+ \oint_{-\Gamma_s} \left(W\delta_{1j} - \sigma_{ij} u_{i,1} \right) m_j q d\Gamma]$$

$$= \lim_{\Gamma_s \to 0} [\oint_{\Gamma_0 + \Gamma^+ + \Gamma^-} \left(W\delta_{1j} - \sigma_{ij} u_{i,1} \right) m_j q d\Gamma$$

$$- \oint_{\Gamma_s} \left(W\delta_{1j} - \sigma_{ij} u_{i,1} \right) m_j q d\Gamma]$$

روی مرز Γ_0، $q=0$ است. بعلاوه، فرض می‌شود که سطوح ترک بدون کشش و نیروهای مکانیکی هستند. با استفاده از مفهوم ارائه شده در این جملات، رابطه (۲-۱۹) به‌صورت زیر ساده می‌شود.

$$\boldsymbol{J} = -\lim_{\Gamma_s \to 0} \boldsymbol{I} = \lim_{\Gamma_s \to 0} \oint_{\Gamma} \left(W\delta_{1j} - \sigma_{ij} u_{i,1} \right) m_j q d\Gamma \qquad (۲-۲۰)$$

انتگرال ناحیه‌ای معادل با استفاده از قضیه دیورژانس و با توجه به تغییرات تابع وزنی q، به‌صورت رابطه (۲-۲۱) تعیین می‌شود.

$$\boldsymbol{J} = \int_{A^*} \left(\sigma_{ij} u_{i,1} - W\delta_{1j} \right) q_{,j} dA \qquad (۲-۲۱)$$

$$+ \int_{A^*} \left(\sigma_{ij} u_{i,1} - W\delta_{1j} \right)_{,j} q dA$$

در رابطه فوق، $\boldsymbol{A}^*$ مساحت ناحیه محصور به منحنی است. در یک سیستم خطی، با اعمال هم‌زمان میدان‌های اصلی و کمکی، انتگرال J به‌صورت رابطه (۲-۲۲) تعیین می‌شود:

$$\boldsymbol{J}^s = \int_{A^*} [\left(\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^{aux} \right) \left(u_{i,1} + u_{i,1}^{aux} \right)$$

$$- \frac{1}{2} (\sigma_{ik} + \sigma_{ik}^{aux})(\varepsilon_{ik} + \varepsilon_{ik}^{aux}) \delta_{1j}] q_{,j} dA \qquad (۲-۲۲)$$

$$+ \int_{A^*} [\left(\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^{aux} \right) \left(u_{i,1} + u_{i,1}^{aux} \right) - \frac{1}{2} (\sigma_{ik} + \sigma_{ik}^{aux})(\varepsilon_{ik} + \varepsilon_{ik}^{aux}) \delta_{1j}]_{,j} q dA$$

انتگرال فوق به فرم زیر بازنویسی می‌شود.

$$J^s = J + J^{aux} + M \tag{۲-۲۳}$$

در رابطه (۲-۲۳) J^{aux} به‌صورت زیر قابل بیان است.

$$J^{aux} = \int_{A^*} \left(\sigma_{ij}^{aux} u_{i,1}^{aux} - W^{aux}\delta_{1j}\right) q_{,j} dA + \int_{A^*} \left(\sigma_{ij}^{aux} u_{i,1}^{aux} - W^{aux}\delta_{1j}\right)_{,j} q dA \tag{۲-۲۴}$$

W^{aux} در رابطه فوق، به‌صورت رابطه (۲-۲۵) تعریف می‌شود.

$$W^{aux} = \frac{1}{2}\sigma_{ik}^{aux}\varepsilon_{ik}^{aux} \tag{۲-۲۵}$$

انتگرال برهم‌کنش M به‌صورت رابطه (۲-۲۶) به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} M &= \int_{A^*} \left(\sigma_{ij} u_{i,1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{i,1} - W^{int}\delta_{1j}\right) q_{,j} dA \\ &+ \int_{A^*} \left(\sigma_{ij} u_{i,1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{i,1} - W^{int}\delta_{1j}\right)_{,j} q dA \\ &= M_1 + M_2 \end{aligned} \tag{۲-۲۶}$$

در رابطه فوق، W^{int} تابع چگالی انرژی کرنشی مکانیکی برهم‌کنش است و برای تئوری گرین-نقدی به‌صورت رابطه (۲-۲۷) قابل بیان است.

$$\begin{aligned} W^{int} &= \frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux}\varepsilon_{ij}^{m}\right) = \\ &2\mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}^{aux} + \lambda\varepsilon_{kk}\varepsilon_{ll}^{aux} - \beta(\Delta T)\varepsilon_{kk}^{aux} \end{aligned} \tag{۲-۲۷}$$

با توجه به رابطه (۲-۲۷) با مشتق‌گیری از عبارت داخل پرانتز انتگرال دوم و با توجه به اینکه $\sigma_{ij,j}^{aux} = 0$، انتگرال M را می‌توان به‌صورت زیر نوشت.

$$\begin{aligned} M &= \int_{A^*} \left(\sigma_{ij} u_{i,1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{i,1} - W^{int}\delta_{1j}\right) q_{,j} dA \\ &+ \int_{A^*} \left(\sigma_{ij,j} u_{i,1}^{aux} + \sigma_{ij} u_{i,1j}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{i,1j} - W^{int}{}_{,1}\right) q dA \end{aligned} \tag{۲-۲۸}$$

که در رابطه فوق،

$$W^{int} = 2\mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}^{aux} + \lambda\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj}^{aux} - \beta\Delta T\varepsilon_{jj}^{aux} \quad (۲-۲۹)$$

در مواد همگن و همسانگرد، انتگرال M_2 به‌صورت زیر ساده می‌شود.

$$M_2 = \int_{A^*} \left(\rho\ddot{u}_i u_{i,1}^{\mathrm{aux}} - \left(\frac{\partial W_{\mathrm{int}}}{\partial \Delta T}\frac{\partial \Delta T}{\partial x_1}\right)\right) q dA \quad (۲-۳۰)$$

که

$$\frac{\partial W_{int}}{\partial \Delta T} = -\beta\varepsilon_{jj}^{aux} \quad (۲-۳۱)$$

۲-۴-۳- استخراج ضرایب شدت تنش

رابطه بین انتگرال J و ضرایب شدت تنش K_I و K_{II} به‌صورت زیر است:

$$J = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E'} \quad (۲-۳۲)$$

همچنین، با توجه به رابطه (۲-۲۳) انتگرال برهم‌کنش **M** را می‌توان برحسب ضرایب شدت تنش K_I و K_{II} به‌صورت زیر بازنویسی کرد.

$$M = \frac{2}{E'}\left(K_I K_I^{aux} + K_{II} K_{II}^{aux}\right) \quad (۲-۳۳)$$

که در رابطه بالا E' به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E' = \begin{cases} E & \text{تنش صفحه‌ای} \\ E/(1-\nu^2) & \text{کرنش صفحه‌ای} \end{cases} \quad (۲-۳۴)$$

ضرایب شدت تنش K_I و K_{II} را می‌توان با انتخاب صحیح میدان‌های کمکی (مودهای خالص I و II) و نیز با استفاده از انتگرال برهم‌کنش **M**، به‌صورت زیر به دست آورد.

$$K_I = \frac{E'}{2} M^{(1)}, \left(K_I^{aux} = 1, K_{II}^{aux} = 0\right) \quad (۲-۳۵)$$

$$K_{II} = \frac{E'}{2} M^{(2)}, \left(K_I^{aux} = 0, K_{II}^{aux} = 1\right) \quad (۲-۳۶)$$

۲-۵- تئوری گرین-نقدی

تئوری گرین-نقدی از مفهوم جابه‌جایی گرمایی و موج گرما بهره‌مند است که این امر با تئوری استاندارد فوریه مغایرت دارد. امروزه تئوری گرین-نقدی مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است که در مسائل مورد بررسی آنها، انتشار گرما با الاستیسیته، جریان‌های لزج و برخی موارد دیگر کوپل شده است [۱۸].

تئوری گرین-نقدی یک چارچوب کلی ایجاد کرده است که مسائل گرمایی گسترده‌تری را نسبت به تئوری استاندارد (فوریه و تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک) شامل می‌شود. این تئوری به سه نوع مختلف تقسیم شده است [۱۸].

نوع I: تحت شرایط خاص ارائه شده و براساس رابطه ساختاری شار گرمایی تئوری استاندارد فوریه ارائه شده است.

نوع II: مشخصه بارز تئوری گرین-نقدی نوع II، انتشار بدون استهلاک موج گرما است.

نوع III: تئوری گرین-نقدی نوع III چارچوبی جهت تحلیل، شرح و توصیف محدوده گسترده‌تری از مسائل است. در حقیقت گرین و نقدی تئوری‌های خود را با ساختار ترمودینامیکی قوی و مستحکم ارائه کردند که علاوه بر انتشار گرما در رساناهای صلب، شامل مواردی از پدیده‌های جفت شدگی (کوپل) مثل ترموالاستیسیته و سیالات ترموویسکوز می‌شود [۱۸].

۲-۵-۱ ساختار جاری تئوری گرین-نقدی

۲-۵-۱-۱ تعادل انتروپی

برخلاف فرایند کلاسیک اصل تعادل انرژی (قانون اول) و عدم تعادل انتروپی (قانون دوم)، تئوری گرین-نقدی براساس بیانی برای تعادل انتروپی پایه‌گذاری شده است که اولین بار در [۱۶] ارائه شده است. رابطه تعادل انتروپی پیشنهاد شده مطابق رابطه زیر است.

$$\dot{\eta} = -div\,\boldsymbol{h} + s + \xi \qquad (۳۷\text{-}۲)$$

که در آن η، s و ξ به ترتیب نشانگر انتروپی، منبع خارجی انتروپی و تولید انتروپی داخلی هستند و $\mathbf{h}$ بردار شار ورودی انتروپی را نشان می‌دهد. گرین و نقدی فرض کردند که شار ورودی انتروپی تابعی از $\mathbf{q}$ و r است

که $\mathbf{q}$ بردار شار ورودی گرمایی و r منبع گرمایی خارجی است که با جریان داخلی انتروپی و دمای مطلق متناسب است.

$$\mathbf{q} = \theta\mathbf{h}\ ,\quad \theta s = r\ ,\quad \theta > 0 \tag{۳۸-۲}$$

در تحقیقات اخیر نشان داده شده است که این فرض زمانی درست است که $\mathbf{h}$ و $\mathbf{q}$ به متغیرهای حالت وابستگی همگن داشته باشند [۱۸].

۲-۵-۱-۲ تعادل انرژی، انرژی آزاد و تعادل انتروپی کاهش یافته

با ضرب رابطه (۲-۳۷) در دمای مطلق، رابطه (۲-۳۹) بدست می‌آید.

$$\theta\dot{\eta} = -\mathrm{div}\boldsymbol{q} + \theta^{-1}\boldsymbol{q}\cdot\nabla\theta + r + \theta\xi \tag{۳۹-۲}$$

رابطه تعادل انرژی به‌صورت رابطه (۲-۴۰) است.

$$\dot{\varepsilon} = -\mathrm{div}\mathbf{q} + r \tag{۴۰-۲}$$

همچنین انرژی آزاد هلمهولتز در واحد جرم به‌صورت رابطه (۲-۴۱) است.

$$\psi = \varepsilon - \theta\eta \tag{۴۱-۲}$$

رابطه (۲-۴۲)، معادله انتروپی کاهش یافته گرین و نقدی است

$$\dot{\psi} + \eta\dot{\theta} + \theta^{-1}\mathbf{q}\cdot\nabla\theta + \theta\xi = 0 \tag{۴۲-۲}$$

که $\theta\xi$ اتلاف داخلی است.

۲-۵-۱-۳ جابه‌جایی گرمایی

رابطه (۲-۴۲) نقطه مشترک بسط ساختاری تئوری گرین-نقدی نوع I و II و III است. در تمام این تئوری‌ها، این رابطه نقش نابرابری انتروپی کاهش یافته در فرایند استاندارد کلمن-نول را ایفا می‌کند.

$$\dot{\psi} + \eta\dot{\theta} + \theta^{-1}\mathbf{q}\cdot\nabla\theta + \theta\xi \le 0 \tag{۴۳-۲}$$

با این اختلاف که گرین و نقدی فرض کردند که اتلاف داخلی هرگز نباید منفی شود. اختلاف چشمگیر

دیگر در هدایت گرمایی استاندارد این است که در هر سه نوع تئوری گرین-نقدی، متغیرهای حالت جابه‌جایی گرمایی α مشتق زمانی دمای تجربی هستند.

$$\dot{\alpha} = T \qquad (۴۴-۲)$$

بعلاوه در این تئوری‌ها فرض شده که دمای مطلق θ تابعی از دمای تجربی است. برای سادگی از این به بعد فرض می‌شود که دماهای مطلق و تجربی برهم منطبق هستند.

$$\dot{\alpha} = \theta \qquad (۴۵-۲)$$

مفهوم جابه‌جایی گرمایی در ابتدا توسط هلمهولتز در ۱۸۸۴ مورد استفاده قرار گرفته است [۱۸]. در حالی که نقش اصلی این مفهوم در قوانین اساسی تعادل ترمودینامیک بدیهی است اما تفسیر فیزیکی آن به‌خصوص در مواردی که شامل تغییر مکانیکی-استاتیکی دما از موضوعات مطلوب محققان است.

فصل ۳:

استخراج معادلات حاکم تئوری گرین-نقدی نوع II

۳-۱- مقدمه

به دلیل استفاده از ساختار مستحکم ترمودینامیکی در تئوری گرین-نقدی، این تئوری قادر است علاوه بر مسائل هدایت گرمایی صلب، در مسائل کوپل (جفت شده) مانند ترموالاستیسیته و نیز سیالات ترموویسکوز مورداستفاده قرار گیرد. این تئوری در سه مدل مختلف ارائه شده است. اختلاف مدل‌های تئوری گرین-نقدی از اختلاف متغیرهای حالت ترمودینامیکی ناشی می‌شود. متغیرهای حالت تئوری گرین-نقدی نوع II به‌صورت زیر پیشنهاد شده است.

$$S_{II} = \{\alpha, \dot{\alpha}, \nabla\alpha\} \tag{۳-۱}$$

در رابطه فوق، α نشان‌دهنده جابه‌جایی گرمایی است که مشتق زمانی آن، دمای مطلق را نتیجه می‌دهد.

$$\dot{\alpha} = T \tag{۳-۲}$$

۳-۲- معادلات حاکم تئوری گرین نقدیII

طبق تئوری گرین-نقدیII [۱۶]، معادلات میدان حاکم در یک پیوستار ترموالاستیک برحسب میدان‌های دما و جابه‌جایی در غیاب نیروهای حجمی و منبع تولید حرارت داخلی به شرح زیر است:

$$\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{u} + (\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\mu})\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}.\mathbf{u} - \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{\rho}\ddot{\mathbf{u}} \tag{۳-۳}$$

$$\boldsymbol{\rho}\mathbf{c}\ddot{\boldsymbol{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{T}_{\mathbf{0}}\boldsymbol{\nabla}.\ddot{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\kappa}^*\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{T} \tag{۳-۴}$$

که u و T به ترتیب بردار جابه‌جایی و دمای مطلق هستند. ρ چگالی جرمی، c ظرفیت گرمایی ویژه، β مدول تنش-دما، T_0 دمای مرجع، λ و μ ثابت‌های لامه و κ^* ثابت ماده است.

پارامترهای بدون بعد به‌صورت زیر قابل بیان هستند:

$$\hat{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{\boldsymbol{l}} \tag{۳-۵}$$

$$\hat{\boldsymbol{t}} = \frac{\boldsymbol{tv}}{\boldsymbol{l}} \tag{۳-۶}$$

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{(\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{2}\boldsymbol{\mu})}{\boldsymbol{l}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{T}_{\mathbf{0}}}\mathbf{u} \tag{۳-۷}$$

$$\hat{T} = \frac{T - T_0}{T_0} \quad (۸-۳)$$

که l و v به ترتیب طول و سرعت مشخصه هستند. معادلات حاکم بدون بعد برای مواد همگن همسانگرد در غیاب نیروهای حجمی و تولید حرارت داخلی برحسب دما و جابه‌جایی به‌شکل زیر بیان می‌شوند. علامت $\widehat{}$ برای سادگی حذف شده است.

$$C_s^2 \nabla^2 \mathbf{u} + (C_p^2 - C_s^2)\nabla\nabla.\mathbf{u} - C_p^2 \nabla T = \ddot{\mathbf{u}} \quad (۹-۳)$$

$$\ddot{T} + \epsilon \nabla.\ddot{\mathbf{u}} = C_T^2 \nabla^2 T \quad (۱۰-۳)$$

که در آن،

$$C_p^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho v^2}$$

$$C_s^2 = \frac{\mu}{\rho v^2} \quad (۱۱-۳)$$

$$C_T^2 = \frac{\kappa^*}{\rho c v^2}$$

C_p، C_s و C_T به ترتیب سرعت موج الاستیک اتساعی خالص، موج برشی و گرمایی هستند. بعلاوه، $\epsilon = T_0 \beta^2 / \rho c(\lambda + 2\mu)$ ضریب کوپل کرنش-دما است.

۳-۳- فرمول‌بندی المان محدود توسعه‌یافته

یک جسم ترموالاستیک با ناحیه Ω در فضا، با سطح جانبی Γ در نظر گرفته شده است. طبق فرایند روش باقیمانده وزنی، تابع تست دما و جابه‌جایی $-\delta u$ و δT - به ترتیب بر باقیمانده معادلات حرکت و انرژی متعامد شده‌اند. فرم انتگرالی باقیمانده وزنی برای معادلات حرکت می‌توانند به‌صورت زیر بیان شوند [۵۷].

$$\int_\Omega \left(C_s^2 \nabla^2 \mathbf{u} + (C_p^2 - C_s^2)\nabla\nabla.\mathbf{u} - C_p^2 \nabla T - \ddot{\mathbf{u}}\right).\delta \mathbf{u}\, d\Omega = 0 \quad (۱۲-۳)$$

فرم ضعیف معادلات حرکت با انتگرال‌گیری و با استفاده از تئوری گاوس استخراج شده‌اند.

$$\left(\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}.\,\boldsymbol{C}_s^2\nabla\mathbf{u}.\,\mathbf{n}+\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}.\,\boldsymbol{C}_s^2\nabla\mathbf{u}^{\mathrm{T}}.\,\mathbf{n}+\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}.\left(\boldsymbol{C}_p^2-\boldsymbol{C}_s^2\right)(\nabla.\,\mathbf{u})\mathbf{I}.\,\mathbf{n}-\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}.\,\boldsymbol{C}_p^2\boldsymbol{T}\mathbf{I}.\,\mathbf{n}\right)\Big|_{\Gamma}$$

$$-\int_{\mathrm{V}}\left(\nabla\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}:\boldsymbol{C}_s^2\nabla\mathbf{u}+\nabla\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}:\boldsymbol{C}_s^2\nabla\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\right. \tag{۱۳-۳}$$

$$\left.+\nabla.\,\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}\left(\boldsymbol{C}_p^2-\boldsymbol{C}_s^2\right)\nabla.\,\mathbf{u}-\nabla.\,\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}\boldsymbol{C}_p^2\nabla\boldsymbol{T}-\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}.\,\ddot{\mathbf{u}}\right)\mathbf{d\Omega}=\mathbf{0}$$

فرم انتگرال وزنی معادله انرژی به‌صورت زیر است.

$$\int_{\Omega}\left(\ddot{\boldsymbol{T}}+\boldsymbol{\epsilon}\nabla.\,\ddot{\mathbf{u}}-\boldsymbol{C}_T^2\nabla^2\boldsymbol{T}\right)\boldsymbol{\delta T}\,\mathbf{d\Omega}=\mathbf{0} \tag{۱۴-۳}$$

به طریق مشابه، فرم ضعیف معادله انرژی به‌صورت زیر استخراج شده است.

$$-\boldsymbol{\delta T}\boldsymbol{C}_T^2\nabla\boldsymbol{T}.\,\mathbf{n}\Big|_{\Gamma}+\int_{\Omega}\left(\ddot{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\delta T}+\boldsymbol{\epsilon}\nabla.\,\ddot{\mathbf{u}}\boldsymbol{\delta T}-\nabla\boldsymbol{\delta T}\boldsymbol{C}_T^2.\,\nabla\boldsymbol{T}\right)\mathbf{d\Omega}=\mathbf{0} \tag{۱۵-۳}$$

معادلات نهایی روش المان محدود توسعه یافته برای مواد همگن و همسانگرد در غیاب نیروهای حجمی و منبع گرمایی داخلی، طبق تئوری گرین-نقدی نوع II با جاگذاری فرم گسسته توابع سعی و خطا و نیز توابع تست در فرمول‌بندی ضعیف معادلات حاکم (۳-۱۳) و (۳-۱۵) به‌صورت زیر تعیین می‌شوند.

$$\sum_{e=1}^{ne}\left(\begin{bmatrix}\mathbf{M}_{11}^{\mathbf{e}} & \mathbf{0}\\ \mathbf{M}_{21}^{\mathbf{e}} & \mathbf{M}_{22}^{\mathbf{e}}\end{bmatrix}\ddot{\mathbf{Y}}+\begin{bmatrix}\mathbf{K}_{11}^{\mathbf{e}} & \mathbf{K}_{12}^{\mathbf{e}}\\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{22}^{\mathbf{e}}\end{bmatrix}\mathbf{Y}=\mathbf{F}\right) \tag{۱۶-۳}$$

که ne تعداد المان‌ها، Y و F بردارهای مجهول و نیرو هستند و

$$\mathbf{M}_{11}^{\mathbf{e}}=\int_{\Omega^e}\boldsymbol{\varphi}^{\mathbf{T}}\,\boldsymbol{\varphi}\,\boldsymbol{d\Omega} \tag{۱۷-۳}$$

$$\mathbf{M}_{21}^{\mathbf{e}}=\int_{\Omega^e}\boldsymbol{\varphi}^{\mathbf{th}^{\mathbf{T}}}\boldsymbol{\epsilon}\,\mathbf{B}^{\mathbf{th}*}\,\boldsymbol{d\Omega} \tag{۱۸-۳}$$

$$\mathbf{M}_{22}^{\mathbf{e}}=\int_{V^e}\boldsymbol{\varphi}^{\mathbf{th}^{\mathbf{T}}}\,\boldsymbol{\varphi}^{\mathbf{th}}\boldsymbol{d\Omega} \tag{۱۹-۳}$$

$$\mathbf{K}_{11}^{\mathbf{e}}=\int_{V^e}\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{D}\mathbf{B}\boldsymbol{dV} \tag{۲۰-۳}$$

$$\mathbf{K}_{12}^{\mathbf{e}} = -\int_{V^e} \mathbf{B}^{\mathbf{th}*^{\mathbf{T}}} \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{p}}^2 \boldsymbol{\varphi}^{\mathbf{th}} \boldsymbol{dV} \tag{۳-۲۱}$$

$$\mathbf{K}_{22}^{\mathbf{e}} = \int_{V^e} \mathbf{B}^{\mathbf{th}^{\mathbf{T}}} \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{T}}^2 \mathbf{B}^{\mathbf{th}} \boldsymbol{dV} \tag{۳-۲۲}$$

در روابط فوق،

$$\boldsymbol{\varphi} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} \boldsymbol{\varphi_1} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\varphi_2} & \mathbf{0} & \cdots\boldsymbol{\varphi_n} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\varphi_1} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\varphi_2} & \cdots\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\varphi_n} \end{array}\right] \tag{۳-۲۳}$$

$$\boldsymbol{\varphi_i} = \begin{cases} \boldsymbol{N_i} & \text{گره‌های معمولی} \\ [\boldsymbol{N_i} \quad \boldsymbol{N_i}(\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H_i})] & \text{گره‌های غنی شده با تابع هویساید} \\ \left[\boldsymbol{N_i} \quad \boldsymbol{N_{is}}\left(\boldsymbol{F_j^u} - \boldsymbol{F_{is\,j}^u}\right)\right] & \text{گره‌های غنی شده نوک ترک} \end{cases} \tag{۳-۲۴}$$

$$\boldsymbol{\varphi}^{\mathbf{th}} = \left[\boldsymbol{\varphi_1^{th}} \middle| \boldsymbol{\varphi_2^{th}} \middle| \ldots \boldsymbol{\varphi_n^{th}}\right] \tag{۳-۲۵}$$

$$\boldsymbol{\varphi_i^{th}} = \begin{cases} \boldsymbol{N_i} & \text{گره‌های معمولی} \\ [\boldsymbol{N_i} \quad \boldsymbol{N_i}(\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H_i})] & \text{گره‌های غنی شده با تابع هویساید} \\ \left[\boldsymbol{N_i} \quad \boldsymbol{N_i}\left(\boldsymbol{F^T} - \boldsymbol{F_i^T}\right)\right] & \text{گره‌های غنی شده نوک ترک} \end{cases} \tag{۳-۲۶}$$

و

$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} \boldsymbol{\varphi_{1,X_1}} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\varphi_{2,X_1}} & \mathbf{0} & \cdots\boldsymbol{\varphi_{n,X_1}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\varphi_{1,X_2}} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\varphi_{2,X_2}} & \cdots\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\varphi_{n,X_2}} \\ \boldsymbol{\varphi_{1,X_2}} & \boldsymbol{\varphi_{1,X_1}} & \boldsymbol{\varphi_{2,X_2}} & \boldsymbol{\varphi_{2,X_1}} & \cdots\boldsymbol{\varphi_{n,X_2}} & \boldsymbol{\varphi_{n,X_1}} \end{array}\right] \tag{۳-۲۷}$$

$$\mathbf{B}^{\mathbf{th}} = \left[\begin{array}{c|c|c} \boldsymbol{\varphi_{1,X_1}^{th}} & \boldsymbol{\varphi_{2,X_1}^{th}} & \cdots\ \boldsymbol{\varphi_{n,X_1}^{th}} \\ \boldsymbol{\varphi_{1,X_2}^{th}} & \boldsymbol{\varphi_{2,X_2}^{th}} & \boldsymbol{\varphi_{n,X_2}^{th}} \end{array}\right] \tag{۳-۲۸}$$

$$\mathbf{B}^{\mathbf{th}*} = \left[\boldsymbol{\varphi_{1,X_1}^{th}} \boldsymbol{\varphi_{1,X_2}^{th}} \boldsymbol{\varphi_{2,X_1}^{th}} \boldsymbol{\varphi_{2,X_2}^{th}} \ldots \boldsymbol{\varphi_{n,X_1}^{th}} \boldsymbol{\varphi_{n,X_2}^{th}}\right] \tag{۳-۲۹}$$

بعلاوه، **D** تنسور الاستیک است که برای حالت کرنش صفحه‌ای در فضای بدون بعد به‌صورت زیر بیان می‌شود.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C_p^2} & \boldsymbol{C_p^2} - \mathbf{2}\boldsymbol{C_s^2} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{C_p^2} - \mathbf{2}\boldsymbol{C_s^2} & \boldsymbol{C_p^2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{C_s^2} \end{bmatrix} \tag{۳-۳۰}$$

تابع زیر انتگرال شامل توابع غنی‌سازی ناپیوسته یا غیرخطی است. به همین دلیل، روش‌های انتگرال‌گیری رایج مانند گاوس کوادراچر به تنهایی کافی نیست. در این مورد، دامنه المان به تعدادی مثلث تقسیم‌بندی می‌شود که در راستای صفحه ترک یا گره‌های المان قرار دارند. بعلاوه، برای در نظر گرفتن تکینی توابع شبکه در نوک ترک، اغلب نگاشت انتگرالی قطبی برای المان شامل نوک ترک مورداستفاده قرار می‌گیرد [۵۷].

در این تحقیق روش نیومارک برای انتگرال‌گیری زمانی در حل معادلات (۳-۱۶) مورداستفاده قرار گرفته است. در این روش، مشتقات زمانی مرتبه دوم بردار متغیرهای مجهول با گام زمانی n تعیین شده است. در ابتدا، مشتقات زمانی مرتبه اول و دوم به‌صورت زیر محاسبه شده‌اند.

$$(\mathbf{M} + A_2\Delta t^2\mathbf{K})\ddot{\mathbf{Y}}_n = \mathbf{F} - \left((1 - 2A_2)\frac{\Delta t^2}{2}\ddot{\mathbf{Y}}_{n-1}\right)\mathbf{K} \tag{۳۱-۳}$$

$$\dot{\mathbf{Y}}_n = A_1\Delta t\ddot{\mathbf{Y}}_n + (1 - A_1)\Delta t\ddot{\mathbf{Y}}_{n-1} + \dot{\mathbf{Y}}_{n-1} \tag{۳۲-۳}$$

$$\mathbf{Y}_n = A_2\Delta t^2\ddot{\mathbf{Y}}_n + (1 - 2A_2)\frac{\Delta t^2}{2}\ddot{\mathbf{Y}}_{n-1} + \Delta t\dot{\mathbf{Y}}_{n-1} + \mathbf{Y}_{n-1} \tag{۳۳-۳}$$

که M و K به ترتیب ماتریس‌های جرم و سفتی هستند و Δt نمو زمانی است. بعلاوه، A_1 و A_2 پارامترهای نیومارک هستند که دقت و پایداری حل را کنترل می‌کنند. مقادیر $A_1=0.5$ و $A_2=0.25$ برای پایداری غیرشرطی مرتبه دوم روش نیومارک انتخاب شده‌اند.

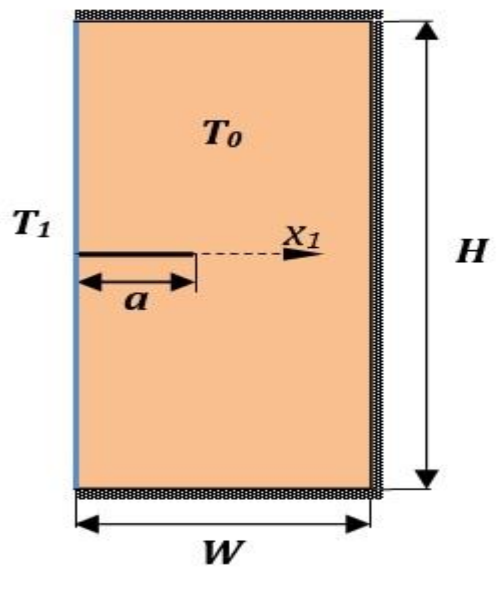
۳-۴- نتایج

در این بخش، ابتدا دقت و کارایی فرایند المان محدود توسعه یافته برای استخراج نتایج عددی مورد بررسی قرار گرفته است. تاریخچه زمانی ضریب شدت تنش مود I برای باریکه دارای ترک تحت شوک گرمایی گذرای غیرکوپل با نتایج تحلیلی مقایسه شده است. سپس رفتار صفحه دارای ترک تحت شوک گرمایی با استفاده از تئوری گرین-نقدیII در چند مثال مورد بررسی قرار گرفته است. تاریخچه زمانی ضریب شدت تنش مود I برای ترک عمود بر لبه در باریکه تحت شوک گرمایی بر اساس تئوری گرین-نقدیII تعیین شده است و با نتایج تئوری‌های ترموالاستیسیته کلاسیک، لرد-شولمان و گرین-لیندزی مقایسه شده است. بعلاوه، توزیع دما

با نتایج تحلیلی مقایسه شده است. جنبه‌های مهم نتایج مانند اثر موج تنش و موج دما بر تاریخچه زمانی ضرایب شدت تنش و توزیع دما با جزئیات کامل موردبحث قرار گرفته است. در این تحقیق در تمام مثال‌ها، فرض شده که سطح ترک عایق و بدون اعمال نیرو است.

۳-۴-۱- صفحه دارای ترک لبه‌ای تحت بارگذاری گرمایی گذرای متقارن

در مثال اول، ضریب شدت تنش که با استفاده از روش انتگرال برهم‌کنش در چارچوب روش المان محدود توسعه یافته محاسبه شده است با یک حل تحلیلی مقایسه شده است. در مرجع [۵۸]، ضریب شدت تنش در یک باریکه دارای ترک لبه‌ای ارائه شده است که ترک بر لبه صفحه عمود است. ضخامت باریکه در جهت x_3 به‌اندازه کافی بزرگ در نظر گرفته شده است تا شرایط کرنش صفحه‌ای برقرار باشد. در ابتدا صفحه بدون قیود مکانیکی در دمای بدون تنش T_0 =273 K قرار دارد. دمای لبه دارای ترک باریکه به‌صورت ناگهانی تا مقدار T_1=0.125 T_0، کاهش می‌یابد. ضریب شدت تنش مود I با استفاده از روش تابع وزنی بدون در نظر گرفتن اثر اینرسی و پارامتر کوپل کرنش-دما تعیین شده است. یک صفحه محدود همگن با عرض $W = 1$، ارتفاع $H = 2$ و طول ترک $a = 0.05$ موازی محور x_1 مطابق شکل (۳-۱) به‌عنوان مدل یک باریکه در نظر گرفته شده است.



شکل (۳-۱) صفحه مستطیلی شامل ترک عمود بر لبه تحت شوک گرمایی

دمای سطح ترک طبق رابطه $T_1=0.125\ T_0\ H(t)$ تغییر می‌کند. تمام لبه‌های دیگر صفحه و سطوح ترک عایق فرض شده‌اند. در تحلیل المان محدود از سه شبکه مش منظم با المان‌های مستطیلی چهار گره‌ای استفاده شده است. همچنین گام زمانی Δt =1e-4 در نظر گرفته شده است. معادلات حاکم تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک به‌صورت مستقیم از معادلات حاکم گرین-نقدیII به دست نمی‌آید. بنابراین، معادله تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک در این مثال با حذف جمله کوپل در نظر گرفته شده است. خواص ماده در نظر گرفته شده برای باریکه در جدول (۳-۱) نشان داده شده است.

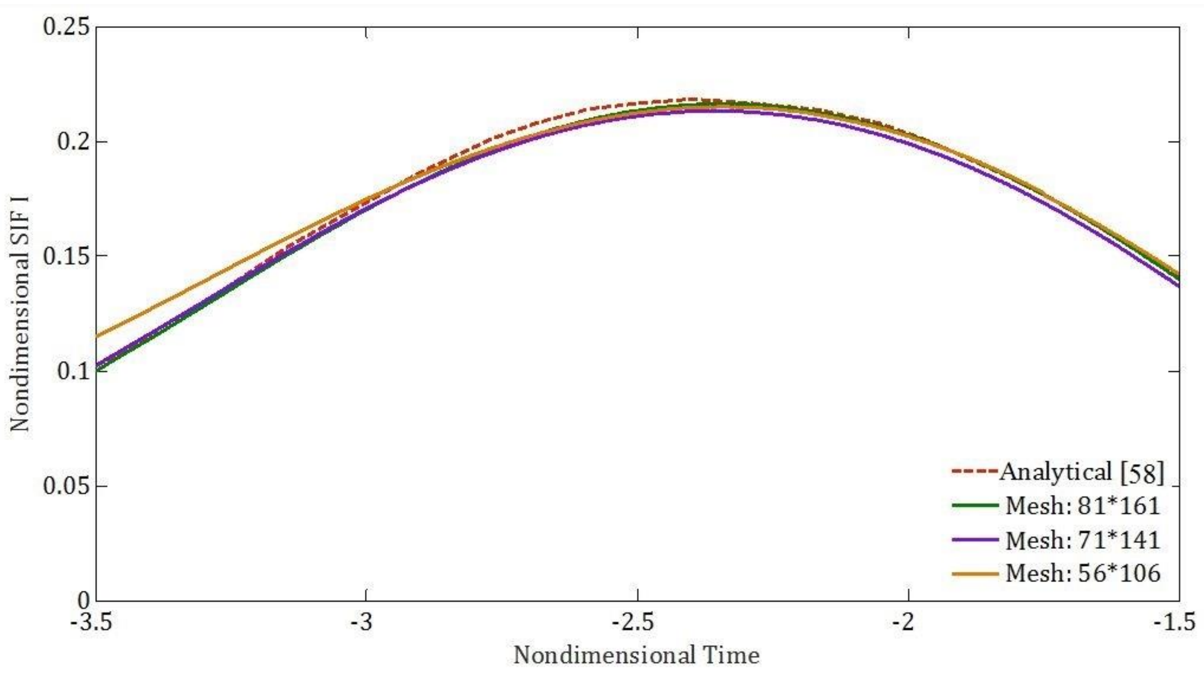
جدول (۳-۱) خواص جنس باریکه در مقاله [۵۸]

ظرفیت گرمایی ویژه (J/kg-K)	چگالی (kg/m^3)	هدایت گرمایی (W/m-K)	ضریب انبساط گرمایی (10^{-6}/K)	نسبت پواسون	مدول یانگ (GPa)
۴۶۱	۷۸۳۳	۱۷	۶/۶۸	۰/۳	۲۰۰

سرعت و طول مشخصه به ترتیب v=0.00471 m/sec و l=0.001 m در نظر گرفته شده‌اند. در این مثال، ضریب شدت تنش با تقسیم بر رابطه زیر بی‌بعد شده است.

$$\boldsymbol{K_0 = \beta(T_0 - T_1)\sqrt{l}} \tag{۳-۳۴}$$

تغییرات زمانی ضریب شدت تنش مود I بی‌بعد با مقادیر گزارش شده در مرجع [۵۸]، در شکل (۳-۲) مقایسه شده است. مطابق نتایج، ضریب شدت تنش مود I استخراج شده با ریزتر شدن مش به حل تحلیلی نزدیک می‌شود. خطای نسبی برای ریزترین مش –شامل ۸۱×۱۶۱ المان- کمتر از ٪ ۲/۶ است که نشان می‌دهد ضریب شدت تنش مود I استخراج شده تطابق خوبی با نتایج حل تحلیلی دارد.



شکل (۳-۲) تغییرات زمانی ضریب شدت تنش مود I برای ترک لبه‌ای تحت بارگذاری گرمایی شبه ایستا

۳-۴-۲- ترک افقی تحت شوک دمایی متقارن

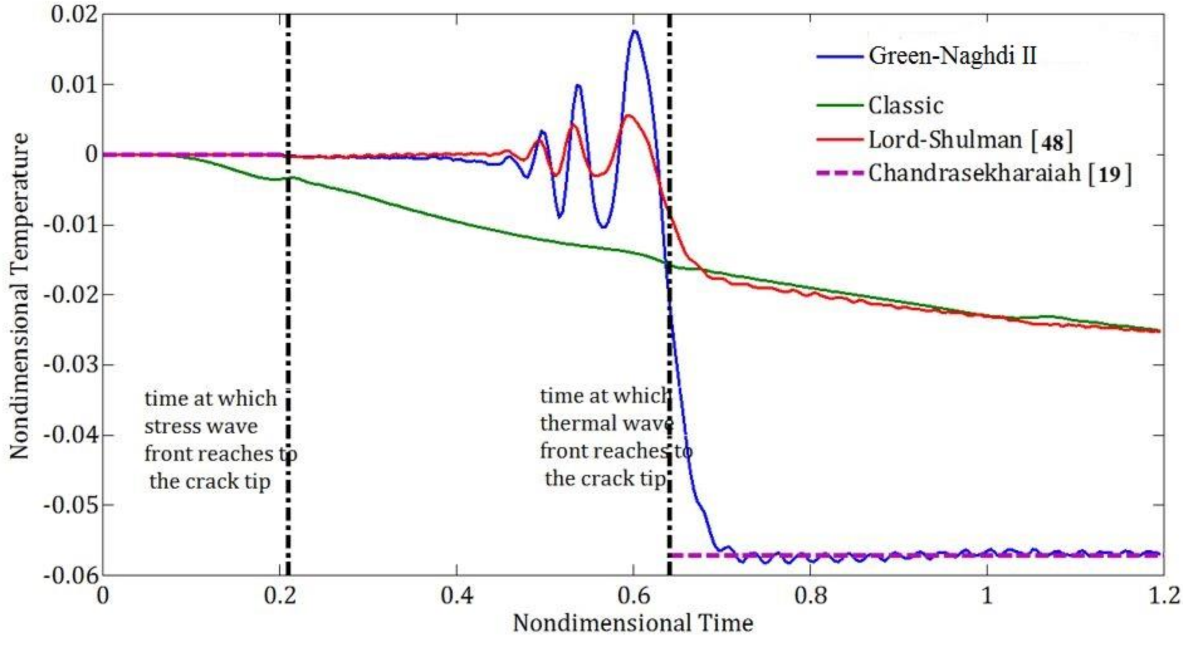
در این مثال، یک صفحه مستطیلی از جنس بیسموت دارای ترک لبه‌ای مطابق شکل (۳-۱) در نظر گرفته شده است که خواص مکانیکی و گرمایی آن در جدول (۳-۲) ارائه شده است.

جدول (۳-۲) خواص بیسموت

ظرفیت گرمایی ویژه (J/kg-K)	چگالی (kg/m^3)	هدایت گرمایی (W/m-K)	ضریب انبساط گرمایی (10^{-6}/K)	نسبت پواسون	مدول یانگ (GPa)
۰/۰۵۲	۹۷۸۰	۸۷۵	۶/۷۵	۰/۳	۴۰

عرض صفحه W=10 mm، ارتفاع آن H=40 mm و طول نسبی ترک a/W=0.5 فرض شده است. مطابق نتایج آزمایشگاهی، سرعت موج گرما در بیسموت در دمای کمتر از 3.5 K، 780 m/sec اندازه‌گیری شده است

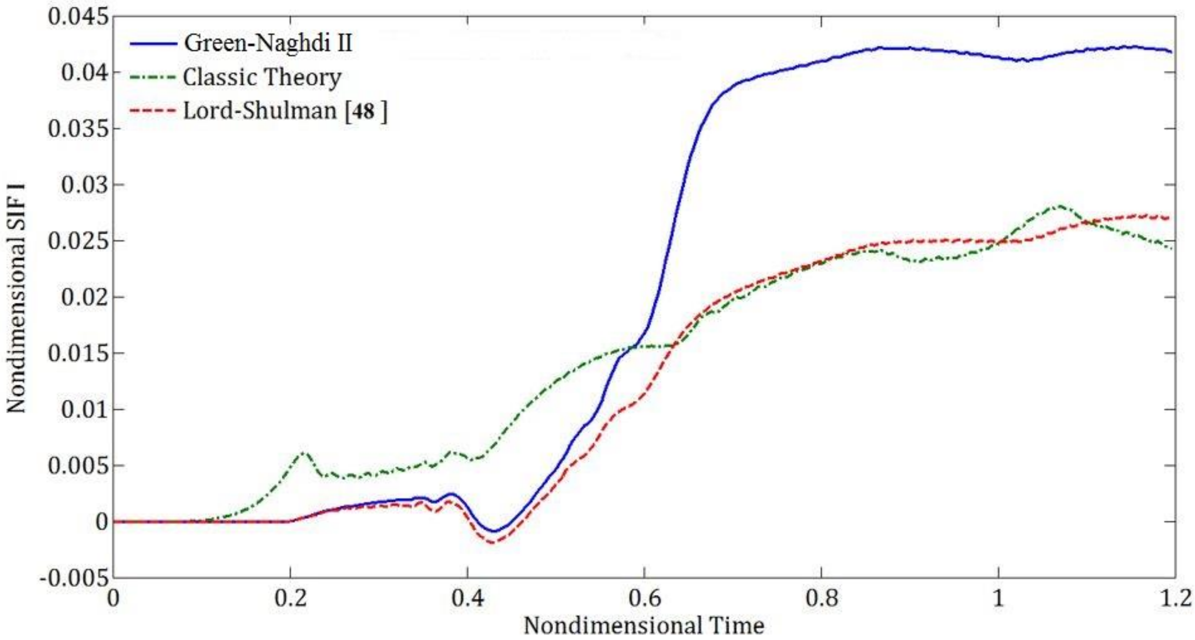
[۵۹]. در این حالت، سرعت و طول مشخصه به ترتیب v=1000 m/sec و l= 0.01 m در نظر گرفته شده‌اند. ضخامت صفحه به‌اندازه کافی بزرگ فرض شده که شرایط کرنش صفحه‌ای برقرار باشد. صفحه بدون قید و نیروهای مکانیکی در دمای اولیه 3.5 K قرار دارد. شرط مرزی دما روی لبه شامل صفحه ترک $\Delta T(0,t)$=-0.2 $H(t)$ K در نظر گرفته شده است. تغییر زمانی دمای نوک ترک بر اساس تئوری گرین-نقدیII با نتایج تحلیلی [۱۹] در شکل (۳-۳) مقایسه شده است. بعلاوه، دمای نوک ترک با در نظر گرفتن تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک و لرد-شولمان با تئوری گرین-نقدیII مقایسه شده است. در مدل المان محدود توسعه یافته مش یکنواخت شامل ۱۰۱×۴۰۱ المان مستطیلی چهار گره‌ای در نظر گرفته شده است. گام زمانی ۰/۰۰۴ در فضای بدون بعد در نظر گرفته شده است. سرعت محدود موج گرما در این شکل کاملاً مشهود است. همان‌گونه که در شکل (۳-۳) نشان داده شده است؛ موج‌های تنش و گرما در این شکل به ترتیب در زمان t=0.21 و t=0.641 به نوک ترک می‌رسند. به‌صورت تئوری یک ناپیوستگی محدود در این زمان در نمودار تاریخچه زمانی دما وجود دارد [۱۹]؛ اما در روش عددی این ناپیوستگی در یک بازه زمانی رخ می‌دهد که مرکز آن در زمان t=0.641 قرار دارد. همچنین، به دلیل استفاده از روش ضمنی نیومارک به‌عنوان روش انتگرال‌گیری زمانی، نوسان در تغییرات زمانی دما در نزدیکی نقطه ناپیوستگی در نتایج ارائه شده مشاهده می‌شود.



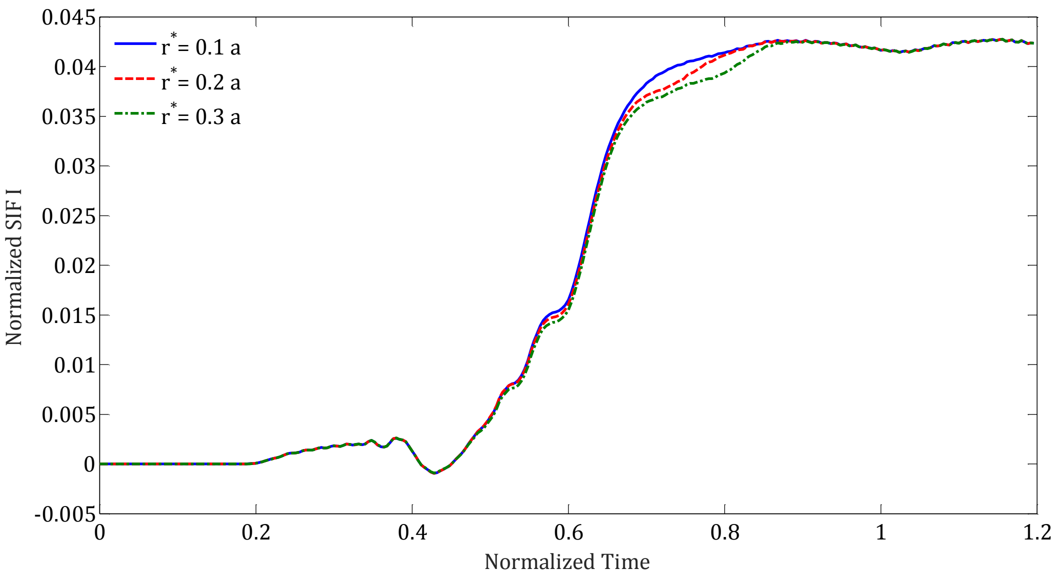
شکل (۳-۳) تاریخچه زمانی تغییرات دمای نوک ترک

تاریخچه زمانی دمای نوک ترک بر اساس تئوری گرین-نقدیII کاملاً با نتایج حاصل از تئوری‌های ترموالاستیسیته کلاسیک و لرد-شولمان متفاوت است. دمای نوک ترک تا رسیدن و عبور موج‌های گرما یا تنش از آن ثابت می‌ماند؛ درحالی‌که در تئوری لرد-شولمان و ترموالاستیسیته کلاسیک هدایت گرمایی نوک ترک و نقاط همسایگی آن در کنار عبور موج اتفاق می‌افتد. طبق تئوری ترموالاستیسیته بدون اتلاف انرژی، دمای نوک ترک با عبور اولین موج گرما –که سرعت آن از موج تنش کمتر است- به دمای مرز می‌رسد. این تغییر دما در مرجع [۱۹] گزارش شده است. بعلاوه، اثر کوپل میدان‌های کرنش-دما بر توزیع دما طبق تئوری-های ترموالاستیسیته کلاسیک، لرد-شولمان و مدل گرین-نقدیII هنگام عبور موج تنش از نوک ترک در زمان‌های t=0.21 و 0.63 مشهود است. مطابق نتایج، دمای نوک ترک از صفر در مدل گرین-نقدیII انحراف بیشتری نسبت به تئوری لرد-شولمان دارد. مطابق نتایج حل تحلیلی [۱۹]، هنگامی‌که موج تنش به نقطه‌ای می‌رسد، دما اندکی تغییر می‌کند؛ که به‌وضوح در نتایج عددی مشاهده نمی‌شود. تاریخچه زمانی ضریب شدت تنش مود I ناشی از شوک دما طبق تئوری‌های ترموالاستیسیته کلاسیک، لرد-شولمان و گرین-نقدیII در شکل (۳-۴) نشان داده شده است. موج تنش با سرعت 2.35 در زمان t=0.21 به نوک ترک می‌رسد؛ که موجب افزایش ضریب شدت تنش تا رسیدن بازتاب موج تنش و موج گرما به نوک ترک در زمان‌های t=0.63 و t=0.64 می‌شود. این امر موجب افت نرخ تغییرات ضریب شدت تنش می‌شود. بعلاوه، جهت بررسی استقلال سطح انتگرال برهم‌کنش استفاده شده، سه دامنه دایروی با شعاع مختلف در نظر گرفته شده و ضریب شدت تنش مربوط به آن‌ها در شکل (۳-۵) مقایسه شده است. نتایج نزدیکی و تطابق مناسبی دارند. در شکل (۳-۶)، حساسیت مش در محاسبه ضریب شدت تنش مود I بررسی شده است. تاریخچه زمانی ضریب شدت تنش مود I برای سه شبکه مش با تعداد المان‌های متفاوت تقریباً یکسان است. در این مثال و مثال بعدی، ضریب شدت تنش با تقسیم بر عبارت زیر بی‌بعد شده است.

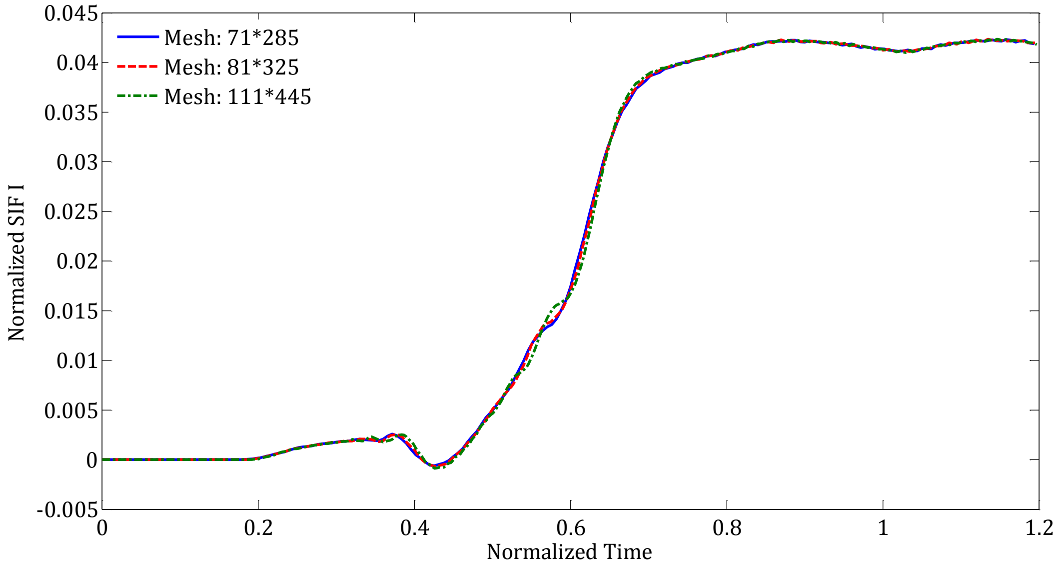
$$K_0 = \beta T_0 \sqrt{l} \qquad (۳۵-۳)$$



شکل (۳-۴) تغییرات زمانی ضریب شدت تنش مود I برای ترک نرمال تحت شوک گرمایی GNII



شکل (۳-۵) استقلال از دامنه انتگرال برهم‌کنش برای ترک افقی تحت شوک دمایی متقارن

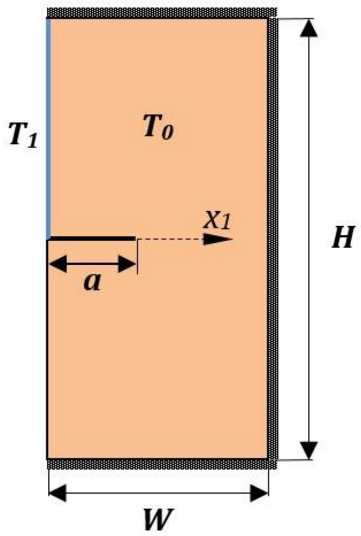


شکل (۳-۶) حساسیت مش ضریب شدت تنش مود I ترک افقی تحت شوک دمایی متقارن

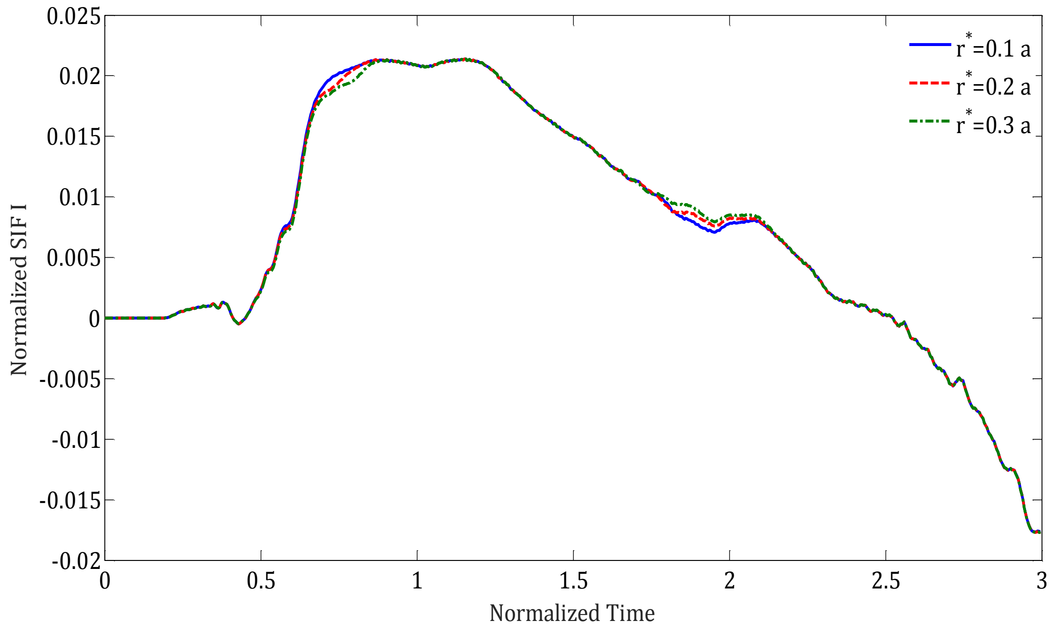
۳-۴-۳- ترک افقی تحت شوک دمایی نامتقارن

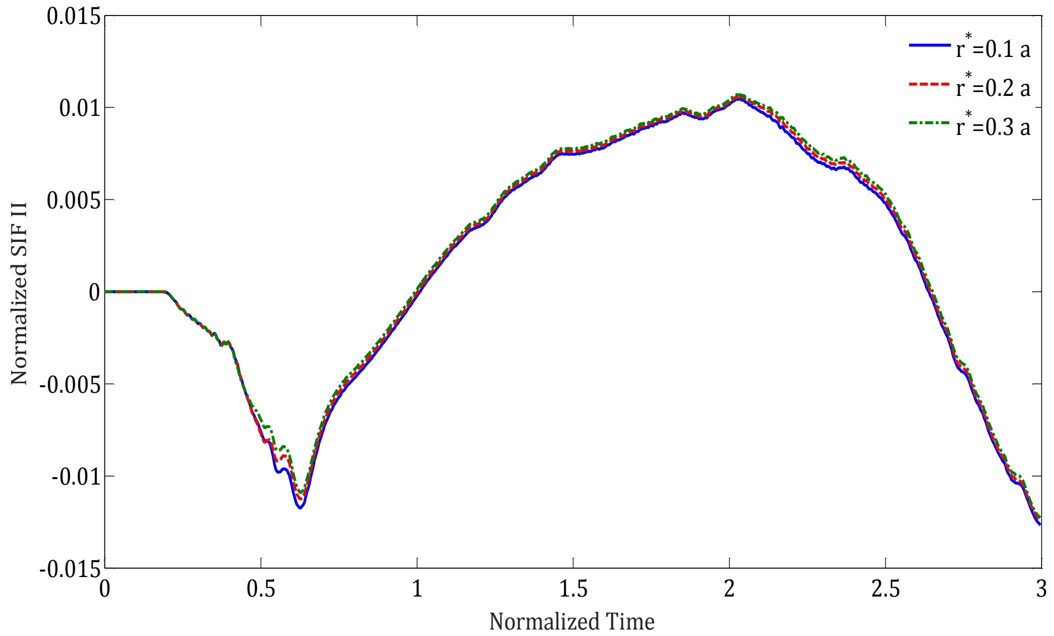
در این مثال، اثربخشی و قدرت روش مورداستفاده جهت تحلیل مسائل ترموالاستیک ترک مورد بررسی قرار گرفته است. یک صفحه از جنس بیسموت با ترک عمود بر لبه سمت چپ مطابق شکل (۳-۷) در نظر گرفته شده است که تنها نصف لبه دارای ترک تحت شرط مرزی دمایی قرار گرفته است. استقلال دامنه تاریخچه زمانی ضرایب شدت تنش مود I و II در شکل (۳-۸) و حساسیت مش در شکل (۳-۹) نشان داده‌شده‌اند. گام زمانی برای تمام موارد شبکه مش برابر با ۰/۰۰۴ انتخاب شده است. با رسیدن موج تنش به نوک ترک، ضریب شدت تنش دچار تغییر می‌شود. نرخ تغییرات ضریب شدت تنش با رسیدن بازتاب موج تنش پس از برخورد به لبه راست تغییر می‌کند. هنگامی‌که موج گرما نخستین بار به نوک ترک می‌رسد؛ ضریب شدت تنش به مقدار بیشینه خود می‌رسد. سپس جهت لغزش صفحات ترک عوض می‌شود که در شکل (۳-۸) نشان داده شده است. جهت بررسی استقلال دامنه ضرایب شدت تنش، چند دایره به مرکز نوک ترک با شعاع‌های نسبی متفاوت به‌عنوان دامنه انتگرال در نظر گرفته شده‌اند. تمام المان‌ها با حداقل یک گره درون

دایره، وارد محاسبات می‌شوند. مطابق نتایج شکل (۳-۸)، ضرایب شدت تنش بر اساس دامنه‌های مختلف تقریباً یکسان هستند. حداکثر اختلاف –به‌ویژه برای ضریب شدت تنش مود I- هنگامی رخ می‌دهد که موج گرما از نوک ترک عبور می‌کند. اثر اندازه مش بر ضریب شدت تنش در شکل (۳-۹) نشان داده شده است. شبکه مش منظم با تعداد متفاوت المان‌های چهار گره‌ای در نظر گرفته شده است. نتایج ضرایب شدت تنش برای شبکه‌های متفاوت مش بندی تقریباً بر هم منطبق شده‌اند که نشان‌دهنده استقلال نتایج از تعداد المان‌ها در مش بندی مسئله است.

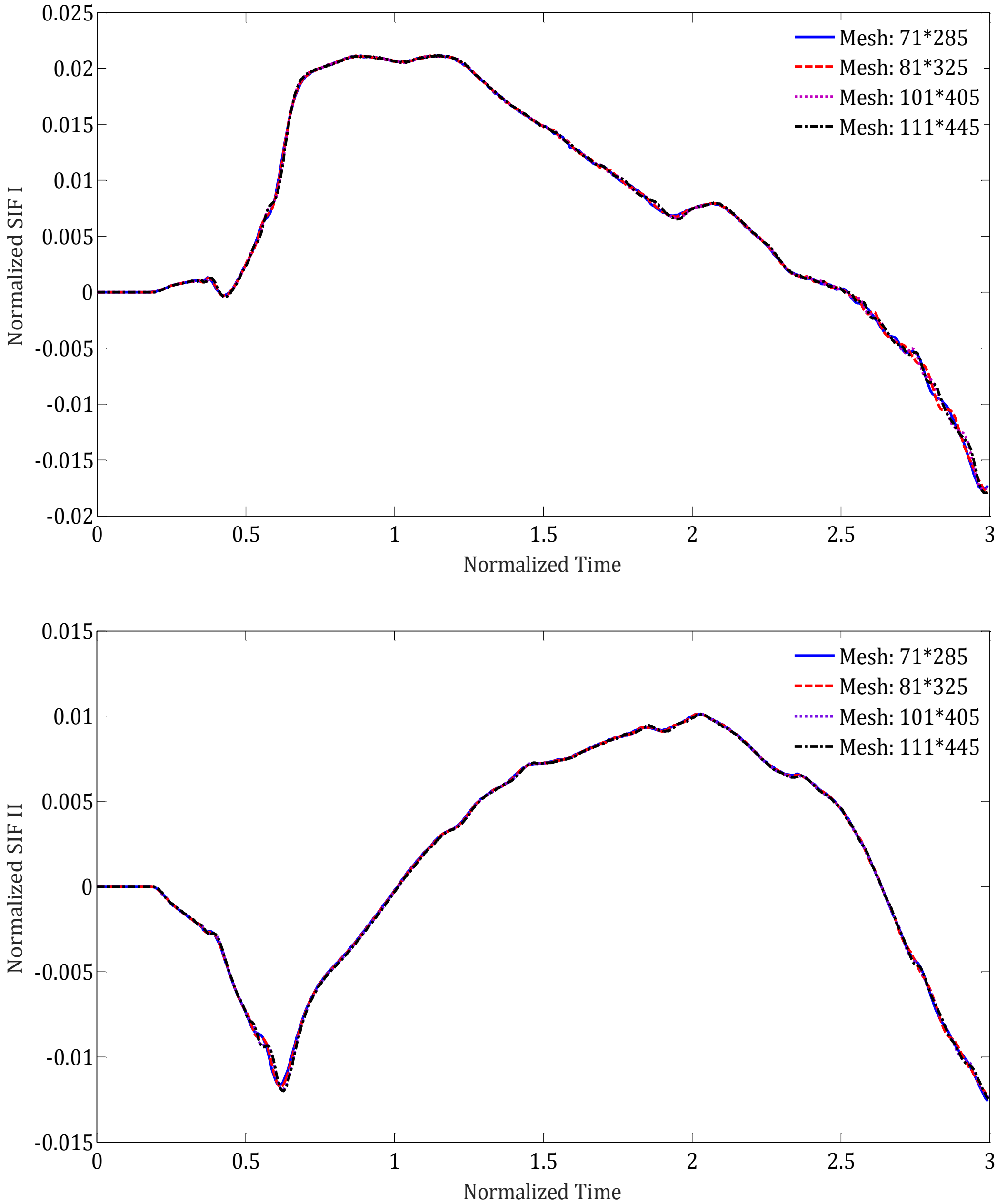


شکل (۳-۷) صفحه مستطیلی دارای ترک عمود بر لبه تحت شوک دمایی نامتقارن





شکل (۳-۸) استقلال از دامنه انتگرال برهم‌کنش برای ترک افقی تحت شوک گرمایی نامتقارن الف) مود I ب) مود II



شکل (۳-۹) حساسیت مش ضریب شدت تنش برای ترک افقی تحت شوک گرمایی نامتقارن الف) مودI ب) مودII

۳-۴-۴- ترک افقی تحت شوک شار گرمایی متقارن

در برخی از کاربردهای مهندسی، شرایط مرزی گرمایی می‌توانند به‌عنوان شار ناگهانی گرما مدل شوند. در این مثال، شار گرمایی $\hat{q}_0 = -0.05\ H(t)$ به لبه دارای ترک صفحه از جنس بیسموت مطابق شکل (۳-۱۰)

اعمال شده است. در رابطه ساختاری شار گرمایی بر اساس تئوری GNII ، شار گرمایی با گرادیان جابه‌جایی گرمایی متناسب است.

$$\mathbf{q} = -k\nabla\alpha \qquad (۳۶-۳)$$

که α، جابه‌جایی گرمایی است. رابطه ساختاری شار گرمایی برحسب دما به‌صورت زیر است:

$$\dot{\mathbf{q}} = -k\nabla T \qquad (۳۷-۳)$$

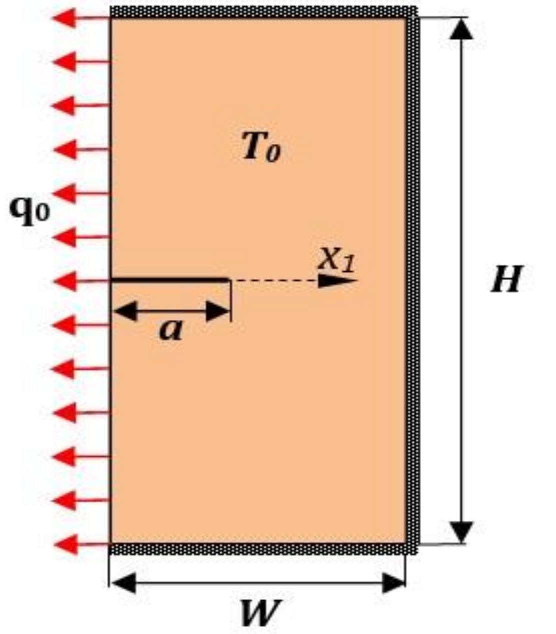
بنابراین، شرایط مرزی گرمایی تئوری GNII در فضای بدون بعد به‌صورت رابطه زیر بیان می‌شود.

$$k\nabla T|_{x_1=0} = 0.05\,\delta(t) \qquad (۳۸-۳)$$

که در رابطه فوق $\delta(t)$، تابع دلتای دیراک است. شار گرمایی بدون بعد طبق رابطه زیر تعریف می‌شود.

$$\hat{\mathrm{q}} = \frac{\mathrm{q}}{\rho c v T_0} \qquad (۳۹-۳)$$

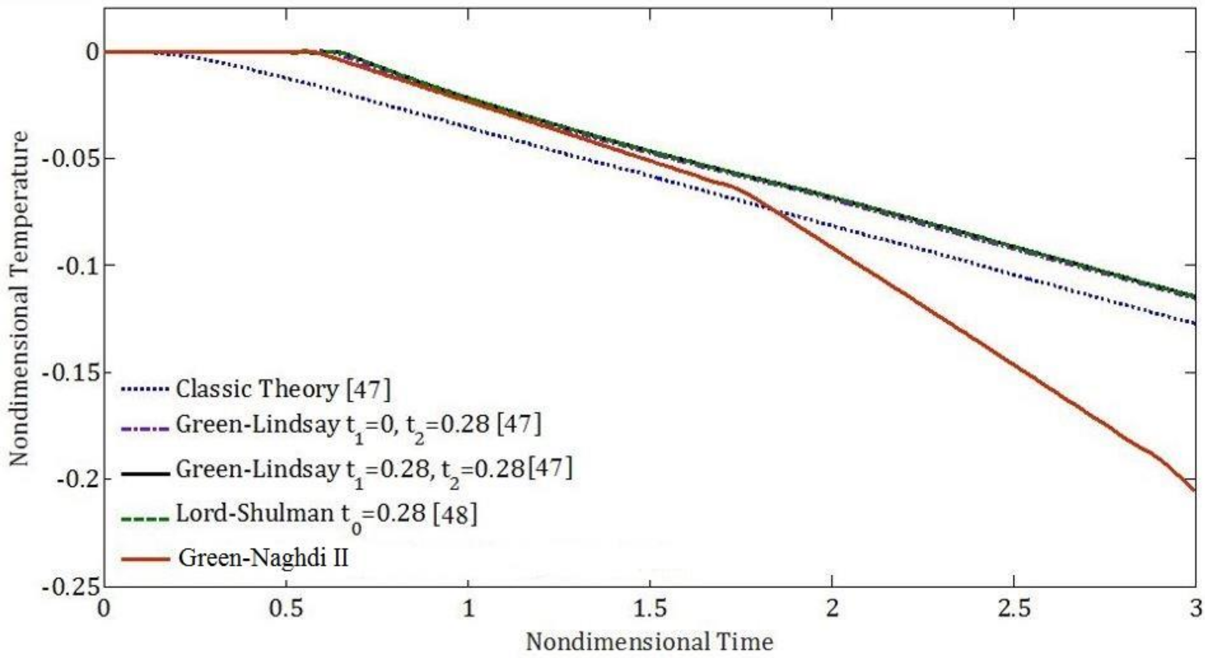
مش یکنواخت ۴۰۵×۱۰۱ المان و گام زمانی Δt=0.004 در محاسبات مورداستفاده قرار گرفته است. جهت محاسبه انتگرال EDI، از دایره‌ای به شعاع r =0.1a استفاده شده است. تاریخچه زمانی دمای نوک ترک بر اساس مدل‌های CTE، LS، GL و GNII در شکل (۳-۱۱) نشان داده شده است. اثر سرعت موج گرما –که در تئوری CTE نامحدود و در مدل‌های دیگر 0.78 است- بر دمای نوک ترک به‌وضوح قابل مشاهده است.



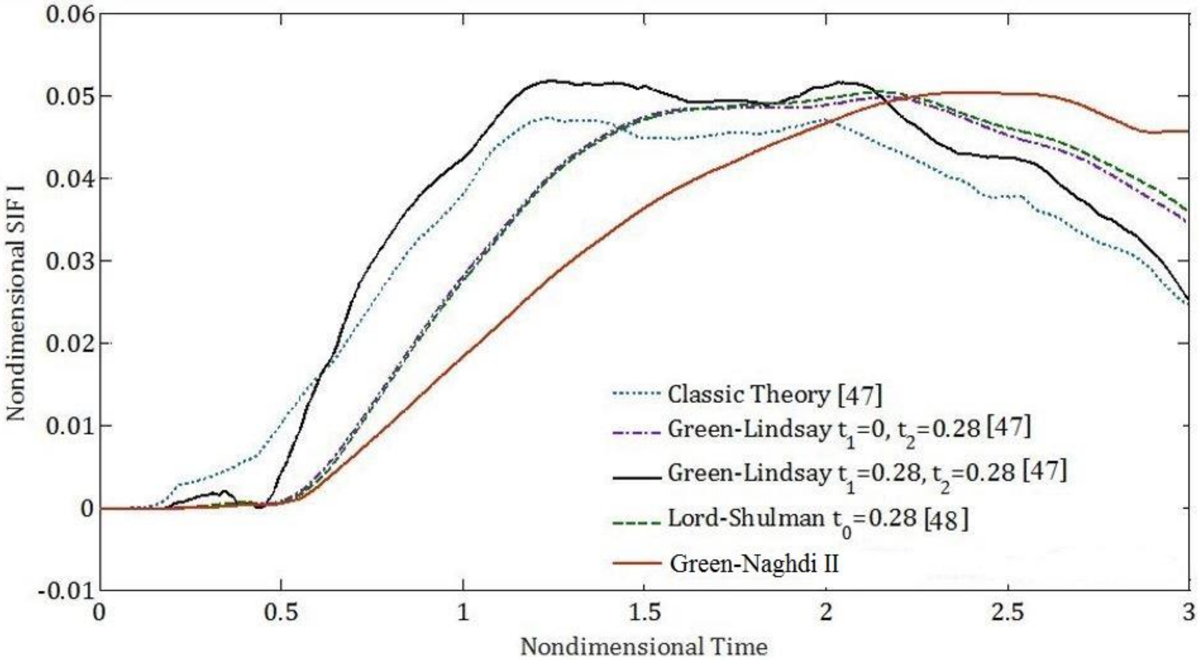
شکل (۳-۱۰) هندسه و بارگذاری ترک لبه‌ای تحت شوک شار گرمایی

در شکل (۳-۱۱)، دمای نوک ترک بر اساس تئوری‌های مختلف تا قبل از رسیدن بازتاب موج گرما به نوک ترک تقریباً یکسان هستند. اما با رسیدن این موج، درحالی‌که نرخ تغییرات مدل‌های دیگر تقریباً ثابت باقی می‌ماند؛ نرخ تغییرات دما بر اساس تئوری GNII دو برابر می‌شود که منجر به کاهش سریع دمای نوک ترک می‌شود.

در شکل (۳-۱۲)، ضریب شدت تنش مود I پس از رسیدن موج تنش به نوک ترک در زمان t=0.21 دچار تغییر می‌شود. نرخ تغییرات ضریب شدت تنش تا رسیدن موج گرما به نوک ترک برای مدل‌های LS، GL(t_1=0) و GNII تقریباً برابر هستند و سپس نرخ افزایش ضریب شدت تنش مود I برای مدل GNII ، از مدل‌های دیگر کمتر است و دیرتر از سایر تئوری‌ها به مقدار بیشینه خود می‌رسد. همچنین، بیشینه ضریب شدت تنش مود I بر اساس تئوری‌های تعمیم‌یافته از تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک بزرگتر است.



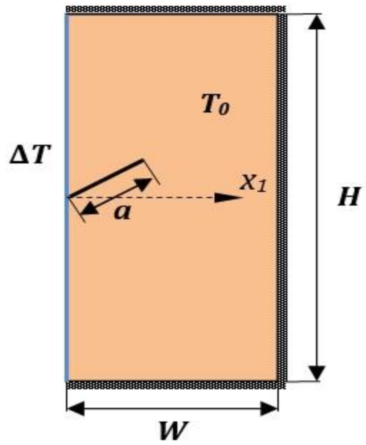
شکل (۳-۱۱) دمای نوک ترک بر اساس تئوری‌های CTE، L-S و GNII



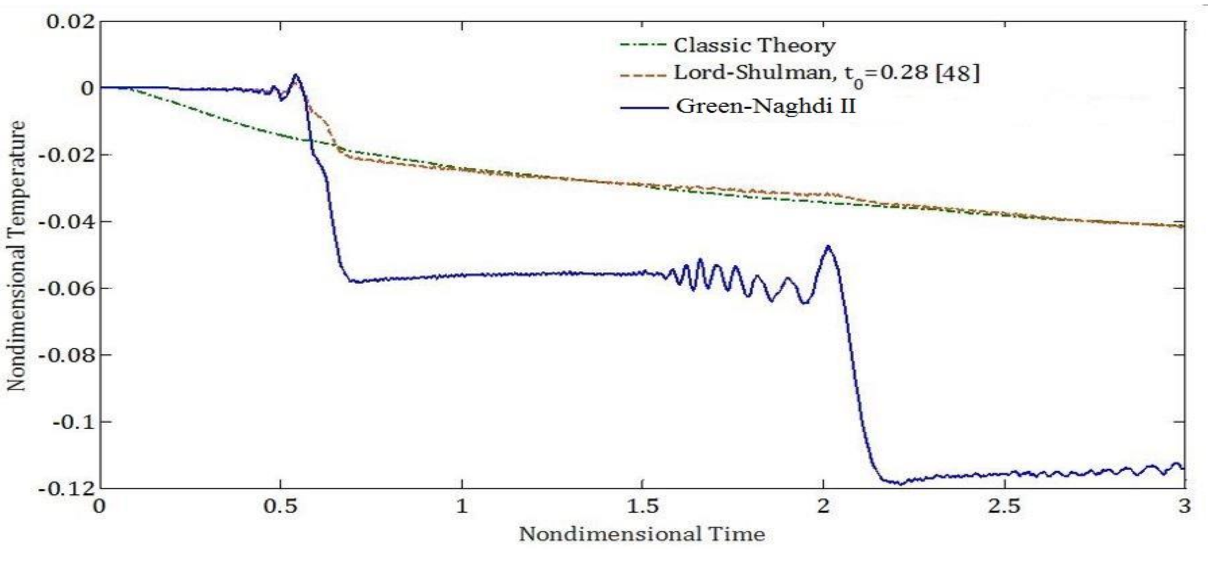
شکل (۳-۱۲) تاریخچه زمانی ضریب شدت تنش مود I بر اساس تئوری‌های CTE، L-S و GNII

۳-۴-۵- ترک مورب تحت شوک دمایی

در مثال آخر، ترک لبه‌ای مورب به طول a=0.5 و زاویه α=30° نسبت به محور x_1 در صفحه از جنس بیسموت با هندسه، بارگذاری و مشخصات بخش ۳-۴-۲ در نظر گرفته شده است. تغییر ناگهانی دما ΔT=-0.2 H(t) به لبه دارای ترک –که در دمای اولیه T_0=3.5 K قرار دارد–مطابق شکل (۳-۱۳)، اعمال می‌شود. تاریخچه زمانی دمای نوک ترک بر اساس مدل‌های CTE، LS و GNII در شکل (۳-۱۴) مقایسه شده‌اند.



شکل (۳-۱۳) هندسه و بارگذاری صفحه دارای ترک لبه‌ای مورب

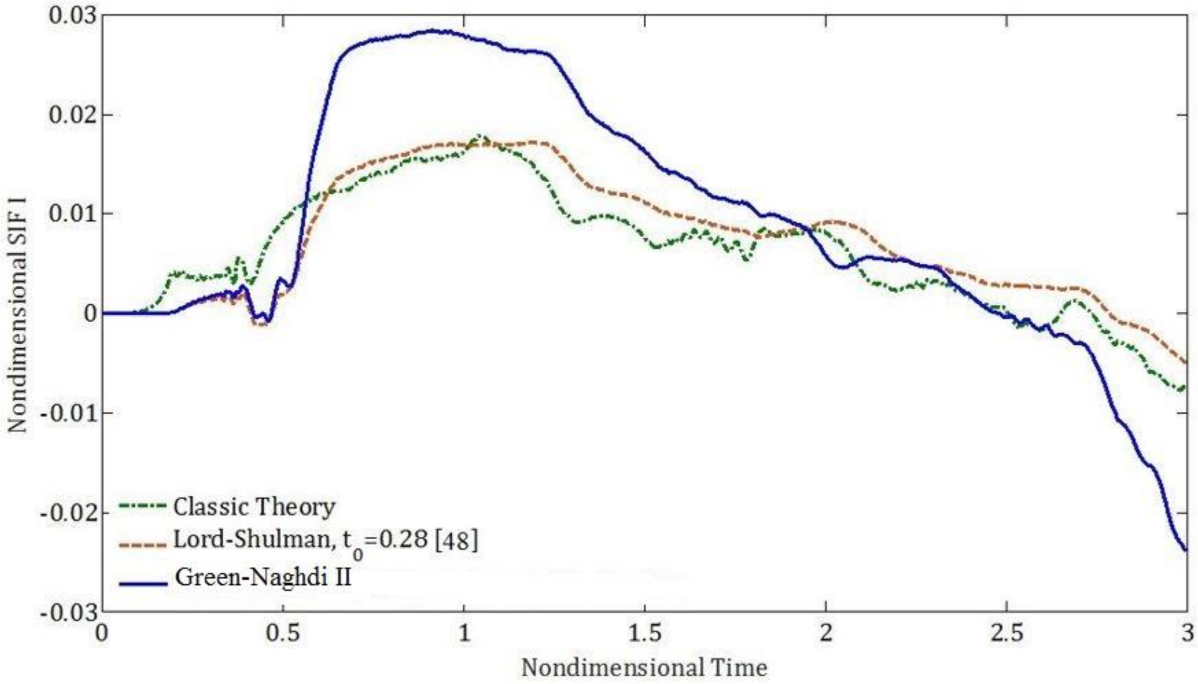


شکل (۳-۱۴) تغییرات زمانی دمای نوک ترک بر اساس تئوری‌های CTE، L-S و GNII

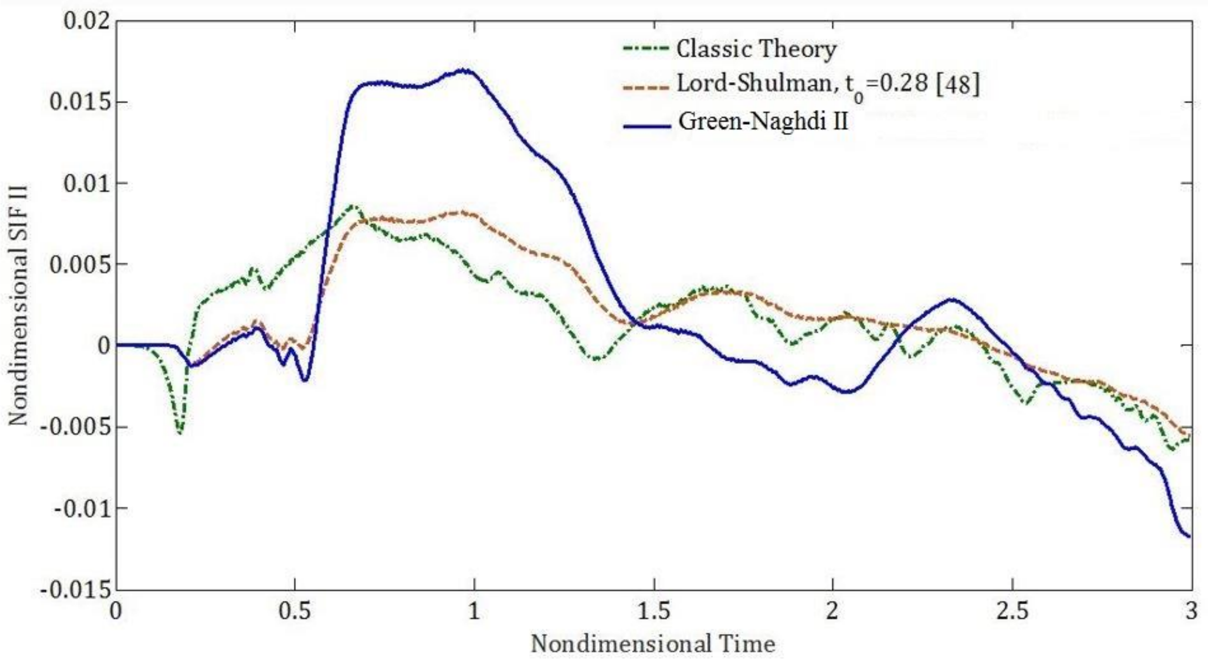
مطابق نتایج، دمای نوک ترک طبق تئوری GNII به‌صورت چشمگیری با مدل LS متفاوت است. پس از رسیدن بازتاب موج گرما به نوک ترک، مقدار دما در تئوری GNII به دو برابر شرط مرزی گرمایی اعمالی می‌رسد که از شرط مرزی گرمایی لبه راست صفحه ناشی می‌شود. مطابق شکل، صفحه به دو بخش هم‌دما تقسیم شده است؛ قبل و بعد از موج گرما. با گذشت زمان دما تا رسیدن بازتاب موج از لبه دیگر ثابت می‌ماند؛ درحالی‌که در تئوری‌های CTE و LS به‌صورت پیوسته طبق قانون فوریه دچار تغییر می‌شود. در شکل (۳-۱۵)، تغییرات زمانی ضریب شدت تنش مود I و تغییرات زمانی ضریب شدت تنش مود II در شکل (۳-۱۶) ارائه شده‌اند. تغییرات ضریب شدت تنش برای مدل LS و GNII تا رسیدن موج گرما به نوک ترک تقریباً یکسان هستند؛ که رسیدن این موج منجر به افزایش بیشینه آن‌ها می‌شود. مقدار بیشینه ضرایب شدت تنش مود I و II طبق مدل GNII تقریباً دو برابر مدل‌های LS و CTE است. الگوی کلی تاریخچه زمانی تئوری‌های LS و GNII تقریباً یکسان هستند؛ که نشان می‌دهد اثر موج‌های تنش و گرما بر تغییرات ضریب شدت تنش مشابه هستند. هرچند تغییرات ضریب شدت تنش برای مدل GNII به دلیل موج گرمای قوی‌تر، از مدل LS بزرگتر است.

در شکل (۳-۱۷)، توزیع دمای صفحه برای مدل‌های CTE و GNII در زمان‌های 1 و t=0.50, 0.70 مقایسه شده‌اند. سرعت محدود موج گرما و شرط مرزی عایق لبه راست در شکل مشهود است. بعلاوه، یک موج گرمای ثانویه ایجاد می‌شود که ممکن است دما از شرط مرزی اعمالی کمتر شود. این پدیده به دلیل تداخل موج بازتاب شده از وجوه ترک و موج گرمای اولیه رخ می‌دهد. این ناحیه سرد مسیر ترک را دنبال می‌کند تا به نوک ترک برسد. سپس موج گرمای ثانویه روی سطح ترک در جهت بازتاب حرکت می‌کند تا میرا شود. مطابق نتایج، توزیع دمای تئوری CTE بر توزیع دمای پایای صفحه منطبق است و مقدار دما در هر نقطه از صفحه، بین دمای اولیه و شرط مرزی اعمالی قرار دارد.

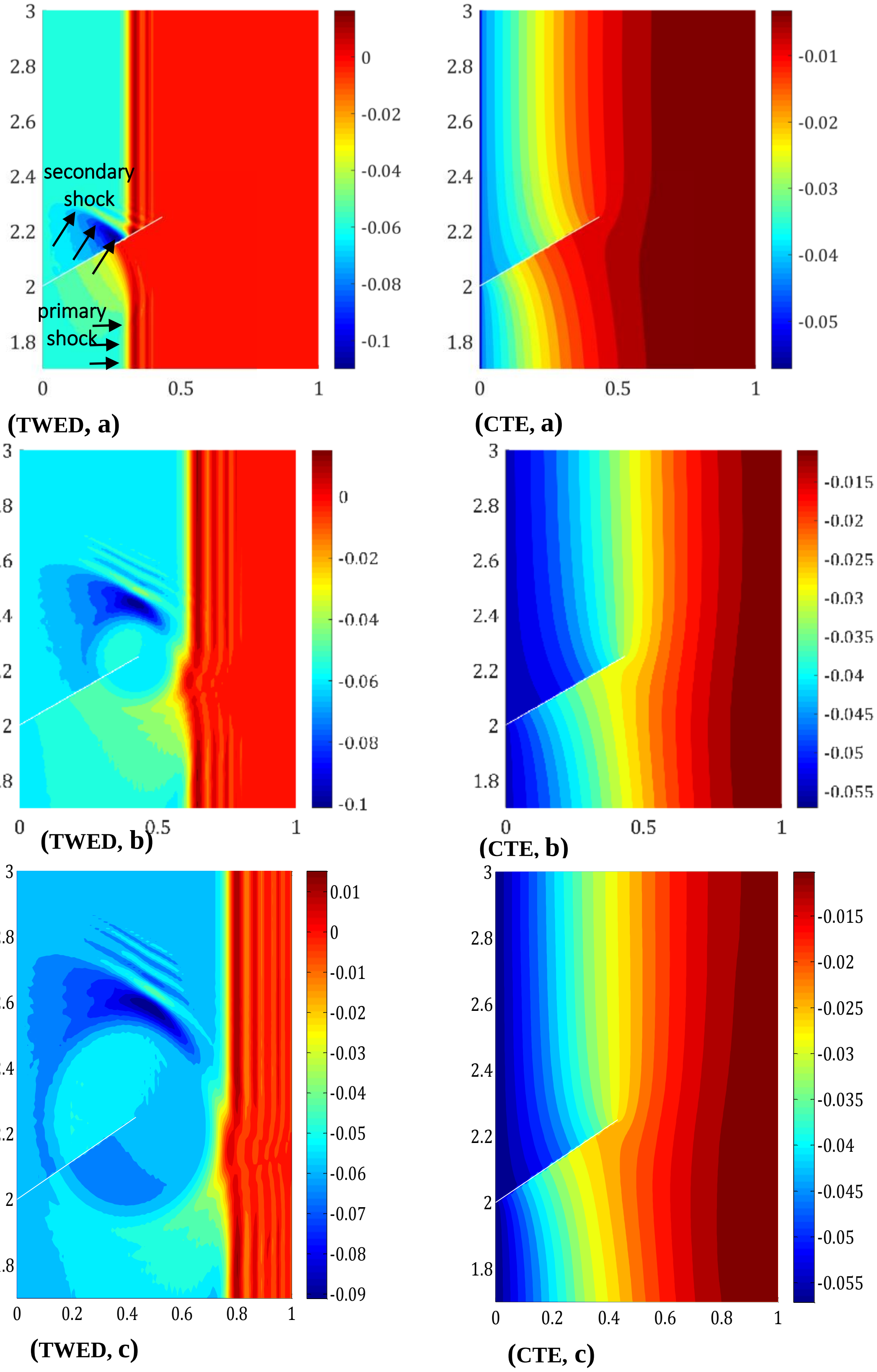
در شکل (۳-۱۸)، صفحه تغییر شکل یافته با حالت اولیه آن در زمان‌های 1 و t=0.70 مقایسه شده است. با توجه به شکل، سرعت محدود موج جابه‌جایی به‌وضوح مشهود است.



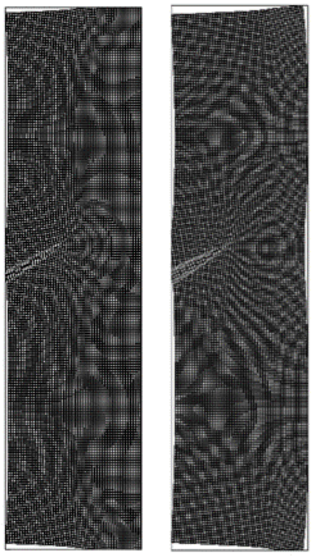
شکل (۳-۱۵) تغییرات زمانی ضریب شدت تنش مود I بر اساس تئوری‌های CTE، L-S و GNII



شکل (۳-۱۶) تغییرات زمانی ضریب شدت تنش مود II بر اساس تئوری‌های CTE، L-S و GNII



شکل (۳-۱۷) توزیع دمای نزدیک نوک ترک بر اساس تئوری کلاسیک ترموالاستیسیته (راست) و گرین-نقدیII (چپ).
(a) t=0.4, (b) t=0.8, (c) t=1.0.



شکل (۳-۱۸) تغییر شکل صفحه دارای ترک در t=0.7 (چپ) و t=1 (راست)

فصل ۴:

استخراج معادلات حاکم تئوری گرین-نقدی

نوع III

۴-۱- مقدمه

تئوری گرین-نقدی نوع III، چارچوبی جهت تحلیل، شرح و توصیف محدوده گسترده‌تری از مسائل هدایت گرمایی نسبت به تئوری‌های نوع I و II است. متغیرهای حالت تئوری گرین-نقدی نوع III در رابطه زیر نشان داده شده است[۶۰].

$$S_{III} = \{\alpha, \dot{\alpha}, \nabla\alpha, \nabla\dot{\alpha}\} \tag{۴-۱}$$

روابط ساختاری تئوری گرین-نقدی نوع III به‌صورت زیر قابل بیان هستند[۶۰].

$$\boldsymbol{\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} - \gamma\theta\delta_{ij}} \tag{۴-۲}$$

$$\boldsymbol{S = \beta\theta + \gamma\varepsilon_{kk}} \tag{۴-۳}$$

$$\boldsymbol{q_i = -(\kappa^*\beta_i + k\dot{\beta}_i)} \tag{۴-۴}$$

در روابط فوق، $\boldsymbol{\lambda}$ و $\boldsymbol{\mu}$ ثابت‌های لامه، $\boldsymbol{\theta}$ تغییر دما، $\boldsymbol{k}$ ضریب هدایت گرمایی، $\boldsymbol{\beta_i}$ مشتق مکانی جابه‌جایی گرمایی، $\boldsymbol{\beta}$ مدول تنش-دما و $\boldsymbol{S}$ تغییرات آنتروپی است.

ترکیب روابط ساختاری فوق منجر به رابطه انرژی می‌شود؛ که در کنار رابطه تعادل، معادلات میدان حاکم بر مسئله طبق تئوری گرین-نقدی هستند. رابطه تعادل به‌صورت زیر قابل بیان است.

$$\boldsymbol{\sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho\ddot{u}_i} \tag{۴-۵}$$

که σ، b، ρ و u به ترتیب تانسور تنش، بردار نیروی حجمی ، چگالی و بردار جابجایی هستند.

۴-۲- معادلات حاکم تئوری گرین-نقدی نوع III

طبق تئوری ترموالاستیسیته تعمیم‌یافته گرین-نقدی نوع III، معادلات میدان حاکم در یک پیوستار ترموالاستیک برحسب دما و جابه‌جایی در غیاب نیروهای حجمی و منبع تولید حرارت داخلی برای یک ماده همگن و همسانگرد به شرح زیر است:

$$\mu\nabla^2\mathbf{u} + (\lambda + \mu)\nabla\nabla.\mathbf{u} - \beta\nabla T = \rho\ddot{\mathbf{u}} \qquad (۶-۴)$$

$$\rho c\ddot{T} + \beta T_0\nabla.\ddot{\mathbf{u}} = \kappa^*\nabla^2 T + k\nabla^2\dot{T} \qquad (۷-۴)$$

که $\mathbf{u}$ و T به ترتیب بردار جابه‌جایی و دمای مطلق هستند. k ضریب هدایت گرمایی، ρ چگالی جرمی، c ظرفیت گرمایی ویژه، β مدول تنش-دما، T_0 دمای مرجع، λ و μ ثابت‌های لامه و κ^* ثابت ماده است.

استفاده از پارامترهای بدون بعد در فرایند حل می‌تواند به کاهش پیچیدگی‌های عددی فرایند حل منجر شود؛ بنابراین، پارامترهای بدون بعد به‌صورت زیر در نظر گرفته شده‌اند:

$$\hat{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{l} \qquad (۸-۴)$$

$$\hat{t} = \frac{tv}{l} \qquad (۹-۴)$$

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{(\lambda + 2\mu)}{l\beta T_0}\mathbf{u} \qquad (۱۰-۴)$$

$$\hat{T} = \frac{\theta}{T_0} = \frac{T - T_0}{T_0} \qquad (۱۱-۴)$$

که l و v به ترتیب طول و سرعت مشخصه هستند.

روابط فوق منجر به روابط بدون بعد زیر می‌شوند.

$$\hat{\varepsilon}_{ij} = \frac{(\lambda + 2\mu)}{\beta T_0}\varepsilon_{ij} \qquad (۱۲-۴)$$

$$\hat{\sigma}_{ij} = \frac{1}{\beta T_0}\sigma_{ij} \qquad (۱۳-۴)$$

معادلات حاکم بدون بعد برای مواد همگن همسانگرد در غیاب نیروهای حجمی و تولید حرارت داخلی برحسب دما و جابه‌جایی طبق تئوری گرین-نقدی به‌شکل زیر بیان می‌شوند. علامت $\widehat{\ }$ برای سادگی حذف شده است.

$$C_s^2\nabla^2\mathbf{u} + \left(C_p^2 - C_s^2\right)\nabla\nabla.\mathbf{u} - C_p^2\nabla T = \ddot{\mathbf{u}} \qquad (۱۴-۴)$$

$$\ddot{T} + \epsilon\nabla.\ddot{\mathbf{u}} = C_T^2\nabla^2 T + C_K^2\nabla^2\dot{T} \qquad (۱۵-۴)$$

که

$$C_p^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho v^2}$$

$$C_s^2 = \frac{\mu}{\rho v^2}$$

$$C_T^2 = \frac{\kappa^*}{\rho c v^2} \qquad (۱۶-۴)$$

$$C_K^2 = \frac{k}{\rho c l v}$$

C_p، C_s و C_T به ترتیب سرعت موج الاستیک اتساعی خالص، موج برشی و گرمایی هستند. همچنین C_K، ضریب میرایی تئوری گرین-نقدی نوع III و $\epsilon = T_0\beta^2/\rho c(\lambda+2\mu)$ پارامتر ترموالاستیک کوپل کرنش-دما است.

۴-۳- فرمول‌بندی المان محدود توسعه‌یافته

برای یک جسم ترموالاستیک با مرز خارجی Ω و سطح جانبی Γ، فرم ضعیف معادلات حاکم با استفاده از فرایند باقیمانده وزنی استخراج شده است. فرم انتگرالی باقیمانده وزنی با استفاده از توابع آزمون جابه‌جایی و دما استخراج شده است.

$$\int_{\Omega} \left(C_s^2\nabla^2\mathbf{u} + \left(C_p^2 - C_s^2\right)\nabla\nabla.\mathbf{u} - C_p^2\nabla T - \ddot{\mathbf{u}}\right).\delta\mathbf{u}\, d\Omega = 0 \qquad (۱۷-۴)$$

$$\int_{\Omega} \left(\ddot{T} + \epsilon\nabla.\ddot{u} - C_T^2\nabla^2 T - C_k^2\nabla^2\dot{T}\right)\delta T\, d\Omega = 0 \qquad (۱۸-۴)$$

با انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء، معادلات حاکم به فرم ضعیف عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} &\left(\delta\mathbf{u}.C_s^2\nabla\mathbf{u}.\mathbf{n} + \delta\mathbf{u}.C_s^2\nabla\mathbf{u}^{\mathrm{T}}.\mathbf{n} + \delta\mathbf{u}.\left(C_p^2 - C_s^2\right)(\nabla.\mathbf{u})\mathbf{I}.\mathbf{n} - \delta\mathbf{u}.C_p^2 T\mathbf{I}.\mathbf{n}\right)\Big|_{\Gamma} \\ &\quad - \int_{V} \left(\nabla\delta\mathbf{u}^{\mathrm{T}}:C_s^2\nabla\mathbf{u} + \nabla\delta\mathbf{u}^{\mathrm{T}}:C_s^2\nabla\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\right. \\ &\quad \left. + \nabla.\delta\mathbf{u}\left(C_p^2 - C_s^2\right)\nabla.\mathbf{u} - \nabla.\delta\mathbf{u}C_p^2\nabla T - \delta\mathbf{u}.\ddot{\mathbf{u}}\right) d\Omega = 0 \end{aligned} \qquad (۱۹-۴)$$

$$-\delta T C_T^2 \nabla T.\mathbf{n}\big|_{\Gamma} - \delta T C_k^2 \nabla \dot{T}.\mathbf{n}\big|_{\Gamma} + \int_{\Omega} \left(\ddot{T}\delta T + \epsilon \nabla.\ddot{\mathbf{u}}\delta T - \nabla\delta T C_T^2.\nabla T - \nabla\delta T C_k^2.\nabla\dot{T}\right) \mathbf{d\Omega} = \mathbf{0} \qquad (۲۰-۴)$$

فرم ماتریسی معادلات حاکم تئوری گرین-نقدی با جاگذاری فرم تقریبی توابع آزمون در فرم ضعیف معادلات حاکم (۴-۱۹) و (۴-۲۰) به‌صورت زیر حاصل می‌شوند.

$$\sum_{e=1}^{ne} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11}^{\mathbf{e}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{21}^{\mathbf{e}} & \mathbf{M}_{22}^{\mathbf{e}} \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{Y}} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{22}^{\mathbf{e}} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{Y}} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{\mathbf{e}} & \mathbf{K}_{12}^{\mathbf{e}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{22}^{\mathbf{e}} \end{bmatrix} \mathbf{Y} = \mathbf{F} \right) \qquad (۲۱-۴)$$

که ne تعداد المان‌ها و $\mathbf{Y}$ بردار جابه‌جایی‌های مجهول گره‌ای است. همچنین F، شامل نیروهای گره‌ای و شار گرمایی است.

$$\mathbf{M}_{11}^{\mathbf{e}} = \int_{\Omega^e} \boldsymbol{\varphi}^{\mathbf{T}}\, \boldsymbol{\varphi}\; d\boldsymbol{\Omega} \qquad (۲۲-۴)$$

$$\mathbf{M}_{21}^{\mathbf{e}} = \int_{\Omega^e} {\boldsymbol{\varphi}^{\mathbf{th}}}^{\mathbf{T}} \epsilon\, \mathbf{B}^{\mathbf{th}*}\; d\boldsymbol{\Omega} \qquad (۲۳-۴)$$

$$\mathbf{M}_{22}^{\mathbf{e}} = \int_{V^e} {\boldsymbol{\varphi}^{\mathbf{th}}}^{\mathbf{T}}\, \boldsymbol{\varphi}^{\mathbf{th}} d\boldsymbol{\Omega} \qquad (۲۴-۴)$$

$$\mathbf{K}_{11}^{\mathbf{e}} = \int_{V^e} \mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{D}\mathbf{B}\,dV \qquad (۲۵-۴)$$

$$\mathbf{K}_{12}^{\mathbf{e}} = -\int_{V^e} {\mathbf{B}^{\mathbf{th}*}}^{\mathbf{T}} C_p^2 \boldsymbol{\varphi}^{\mathbf{th}} dV \qquad (۲۶-۴)$$

$$\mathbf{K}_{22}^{\mathbf{e}} = \int_{V^e} {\mathbf{B}^{\mathbf{th}}}^{\mathbf{T}} C_T^2 \mathbf{B}^{\mathbf{th}} dV \qquad (۲۷-۴)$$

$$\mathbf{C}_{22}^{\mathbf{e}} = \int_{V^e} {\mathbf{B}^{\mathbf{th}}}^{\mathbf{T}}\, C_k^2 \mathbf{B}^{\mathbf{th}} d\boldsymbol{\Omega} \qquad (۲۸-۴)$$

در روابط فوق،

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 \\ 0 & \varphi_1 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \varphi_2 & 0 \\ 0 & \varphi_2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdots\varphi_n & 0 \\ \cdots\, 0 & \varphi_n \end{matrix}\Bigg] \qquad (۲۹-۴)$$

$$\varphi_i = \begin{cases} N_i & \text{گره‌های معمولی} \\ [N_i \quad N_i(H - H_i)] & \text{گره‌های غنی‌شده با تابع هویساید} \\ [N_i \quad N_{is}(F_j^u - F_{is\,j}^u)] & \text{گره‌های غنی‌شده نوک ترک} \end{cases} \qquad (۳۰-۴)$$

$$\boldsymbol{\varphi}^{\mathbf{th}} = \left[\varphi_1^{th} \middle| \varphi_2^{th} \middle| \ldots \varphi_n^{th}\right] \qquad (۳۱-۴)$$

$$\varphi_i^{th} = \begin{cases} N_i & \text{گره‌های معمولی} \\ [N_i \quad N_i(H - H_i)] & \text{گره‌های غنی‌شده با تابع هویساید} \\ [N_i \quad N_i(F^T - F_i^T)] & \text{گره‌های غنی‌شده نوک ترک} \end{cases} \qquad (۳۲-۴)$$

و

$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} \varphi_{1,X_1} & 0 & \varphi_{2,X_1} & 0 & \cdots\varphi_{n,X_1} & 0 \\ 0 & \varphi_{1,X_2} & 0 & \varphi_{2,X_2} & \cdots\, 0 & \varphi_{n,X_2} \\ \varphi_{1,X_2} & \varphi_{1,X_1} & \varphi_{2,X_2} & \varphi_{2,X_1} & \cdots\varphi_{n,X_2} & \varphi_{n,X_1} \end{array}\right] \qquad (۳۳-۴)$$

$$\mathbf{B}^{\mathbf{th}} = \left[\begin{array}{c|c|c} \varphi_{1,X_1}^{th} & \varphi_{2,X_1}^{th} & \cdots\; \varphi_{n,X_1}^{th} \\ \varphi_{1,X_2}^{th} & \varphi_{2,X_2}^{th} & \varphi_{n,X_2}^{th} \end{array}\right] \qquad (۳۴-۴)$$

$$\mathbf{B}^{\mathbf{th}*} = \left[\varphi_{1,X_1}^{th}\varphi_{1,X_2}^{th}\varphi_{2,X_1}^{th}\varphi_{2,X_2}^{th} \ldots \varphi_{n,X_1}^{th}\varphi_{n,X_2}^{th}\right] \qquad (۳۵-۴)$$

بعلاوه، D تنسور الاستیک برای حالت کرنش صفحه‌ای است.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} C_p^2 & C_p^2 - 2C_s^2 & 0 \\ C_p^2 - 2C_s^2 & C_p^2 & 0 \\ 0 & 0 & C_s^2 \end{bmatrix} \qquad (۳۶-۴)$$

مشابه فصل قبل، روش نیومارک برای انتگرال‌گیری زمانی در حل معادلات (۴-۳۱) مورداستفاده قرار گرفته است.

۴-۴- نتایج

این بخش با بررسی یک محیط محدود دارای ترک تحت شوک گرمایی گرین-نقدی در حالات مختلف مورد مطالعه قرار می‌گیرد و در حالت خاص تئوری گرین-نقدی III با تحقیقات دیگر مقایسه می‌شود. تغییرات زمانی ضرایب شدت تنش در صفحه دارای ترک لبه‌ای تحت شوک گرمایی گرین-نقدیII با نتایج تئوری کلاسیک ترموالاستیسیته، لرد-شولمان و گرین-لیندزی مقایسه می‌شود.

بعلاوه، توزیع دما با نتایج تحلیلی نیز مقایسه می‌شود. اثر موج‌های دما و تنش بر تاریخچه زمانی ضرایب شدت تنش و توزیع دمای نوک ترک از مهم‌ترین بخش نتایج هستند که به‌دقت موردبحث قرار گرفته‌اند.

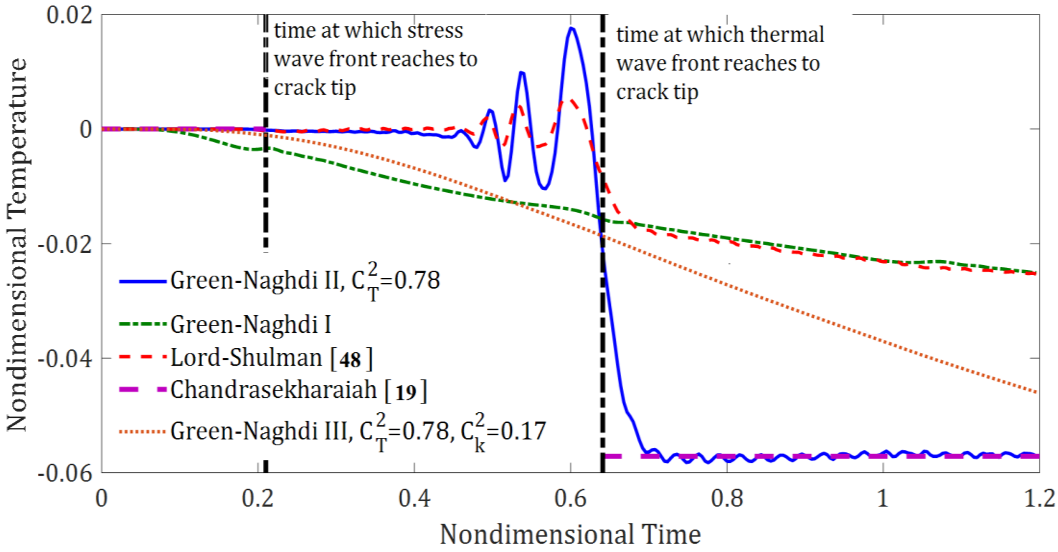
۴-۴-۱- ترک مود I تحت شوک دمایی متقارن

یک صفحه دارای ترک از جنس بیسموت با خواص مکانیکی و گرمایی ارائه شده در جدول ۳-۲، در نظر گرفته شده است. صفحه دارای عرض W=10 mm، ارتفاع H=40 mm در نظر گرفته شده است. همچنین ضخامت به‌اندازه کافی بزرگ در نظر گرفته شده تا شرایط کرنش صفحه‌ای بر مسئله حاکم باشد. طول نسبی ترک نیز a/W=0.5 در نظر گرفته شده است. طول و سرعت مرجع به ترتیب l= 0.01 m و v=1000 m/sec در نظر گرفته شده‌اند. طبق نتایج آزمایشگاهی، سرعت موج گرما در بیسموت در دمای کمتر از 3.5 K حدود 780 m/sec تخمین زده شده است [۵۹]. صفحه بدون قیدهای مکانیکی و نیز در دمای اولیه 3.5 K قرار دارد. کاهش ناگهانی دما برای وجه دارای ترک، مطابق زیر فرض شده است.

$$\Delta T(0,t) = -0.2\, H(t)\mathrm{K} \qquad (۴-۳۷)$$

مدل المان محدود توسعه یافته صفحه شامل مش یکنواخت ۱۰۱×۴۰۱ المان مستطیلی چهار گره‌ای و گام زمانی برابر با ۰/۰۰۴ در فضای بدون بعد در نظر گرفته شده است. دمای نوک ترک بر اساس مدل‌های مختلف تئوری گرین-نقدی و تئوری لرد-شولمان جهت مشاهده تغییرات دمای نوک ترک در شکل (۴-۱) نشان داده شده است. بعلاوه، دمای نوک ترک با در نظر گرفتن تئوری گرین-نقدی نوع III با نتایج روش

تحلیلی [۱۹] مقایسه شده است. خطوط عمودی در شکل (۴-۱)، نشان‌دهنده زمان رسیدن جبهه موج‌های تنش و دما به نوک ترک است که به ترتیب در زمان‌های t=0.21 و t=0.641 اتفاق می‌افتد. نتایج روش تحلیلی وجود یک ناپیوستگی کوچک محدود برای موج تنش در زمان t=0.21 و ناپیوستگی بزرگتر برای موج دما در زمان t=0.641 در اثر کوپلینگ کرنش-دما را تائید می‌کند [۱۹]. در روش عددی ناپیوستگی به‌وضوح قابل ملاحظه نیست. تغییرات زمانی دمای نوک ترک بر اساس تئوری‌های گرین-نقدی نوع II و III در مقایسه با تئوری‌های کلاسیک ترموالاستیسیته(گرین-نقدی نوع I) و لرد-شولمان کاملاً متفاوت است.

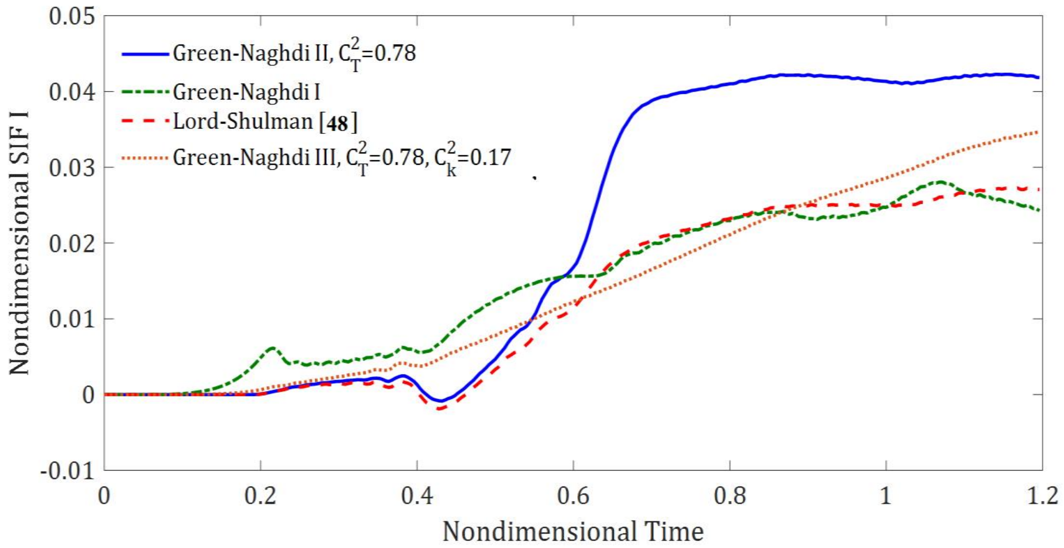


شکل (۴-۱) تاریخچه زمانی دمای نوک ترک بر اساس تئوری‌های LS، CTE و GN

در حالت خاص، هنگامی‌که سرعت موج گرما از تنش کمتر است با رسیدن موج گرما به سطوح ترک، دمای نوک ترک به مقدار خود می‌رسد؛ که این امر در حالت کلی در [۱۹] نشان داده شده است. همچنین نقش جمله کوپلینگ دما-کرنش بر تغییرات دمایی نوک ترک ناشی از رسیدن موج تنش در تئوری گرین-نقدی III نشان داده شده است.

تغییرات زمانی ضریب شدت تنش مود I طبق تئوری‌های گرین-نقدی و لرد-شولمان در شکل (۴-۲) نشان داده شده است. در ابتدای شوک گرمایی، ضریب شدت تنش تئوری گرین-نقدی نوع I به دلیل سرعت نامحدود موج گرما از صفر شروع شده و تا رسیدن موج گرما به نوک ترک در زمان t=0.21 افزایش می‌یابد. درحالی‌که

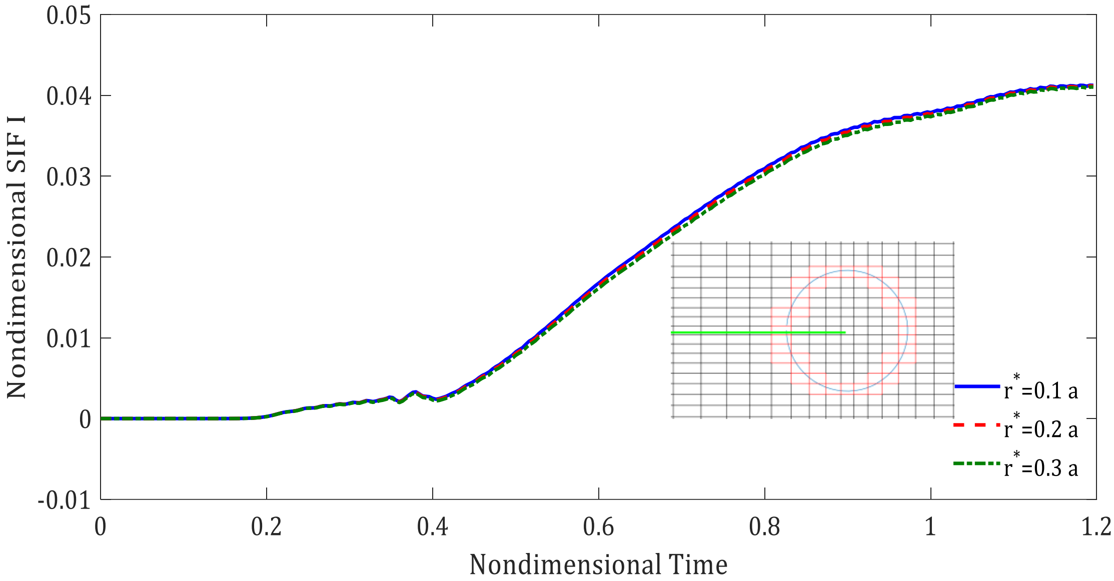
در مدل‌های دیگر ضریب شدت تنش مود I پس از رسیدن موج تنش به نوک ترک افزایش می‌یابد. نرخ رشد ضریب شدت تنش مود I پس از رسیدن بازتاب موج تنش به نوک ترک در زمان t=0.63 و موج گرما در زمان t=0.64 کاهش می‌یابد.



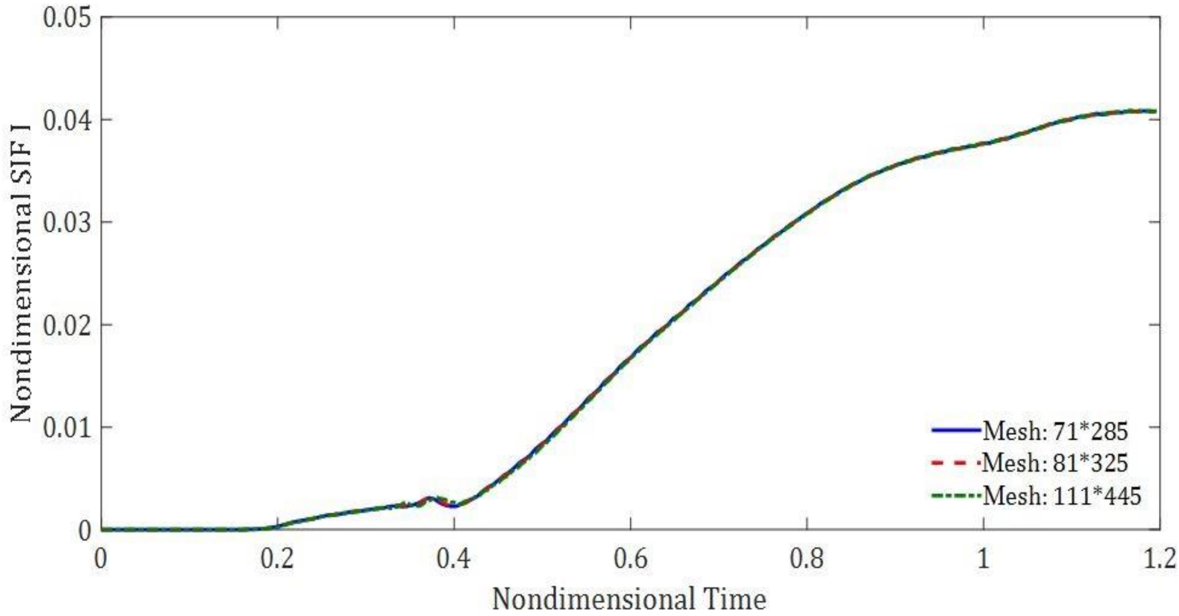
شکل (۴-۲) تاریخچه زمانی ضریب شدت تنش مود I برای ترک لبه‌ای تحت شوک گرمایی گرین-نقدی

در شکل (۴-۳)، استقلال دامنه ضریب شدت تنش مود I طبق تئوری نوع III با $C_k^2 = 0.05$ و در نظر گرفتن سه انتگرال دامنه دایروی متفاوت مورد بررسی قرار گرفته است. هر دامنه المان‌های غنی‌شده داخل یک دایره به مرکز نوک ترک را شامل می‌شود. تاریخچه زمانی ضریب شدت تنش مود I به ازای دامنه‌های مختلف تقریباً ثابت است. همچنین، مش یکنواخت با تعداد المان متفاوت جهت بررسی حساسیت مش در استخراج ضریب شدت تنش مود I در شکل (۴-۴) مورداستفاده قرار گرفته است. علاوه بر این، تاثیر گام زمانی بر ضریب شدت تنش مود I در شکل (۴-۵) و تاثیر گام زمانی بر دمای نوک ترک در شکل (۴-۶) بررسی شده‌است. با توجه به نتایج، تغییرات زمانی ضریب شدت تنش و دمای نوک ترک مود I برای گام‌های زمانی مختلف تقریبا یکسان است. در این مورد و موارد بعدی، ضریب شدت تنش با فاکتور زیر بی‌بعد شده است.

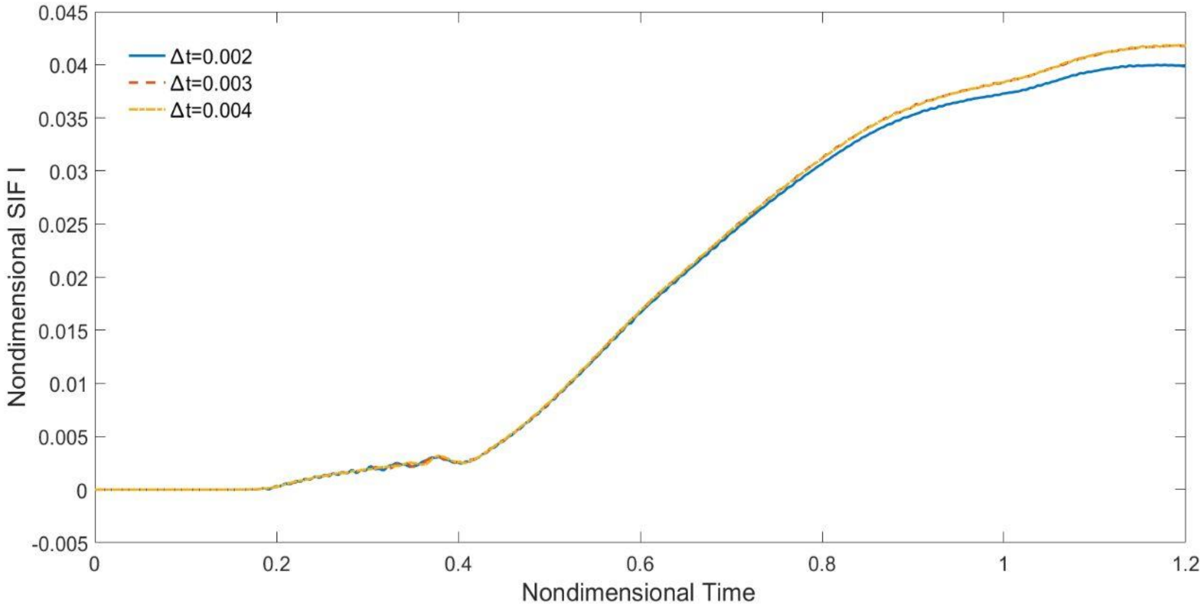
$$\boldsymbol{K_0 = \beta T_0 \sqrt{l}} \qquad (۴-۳۸)$$



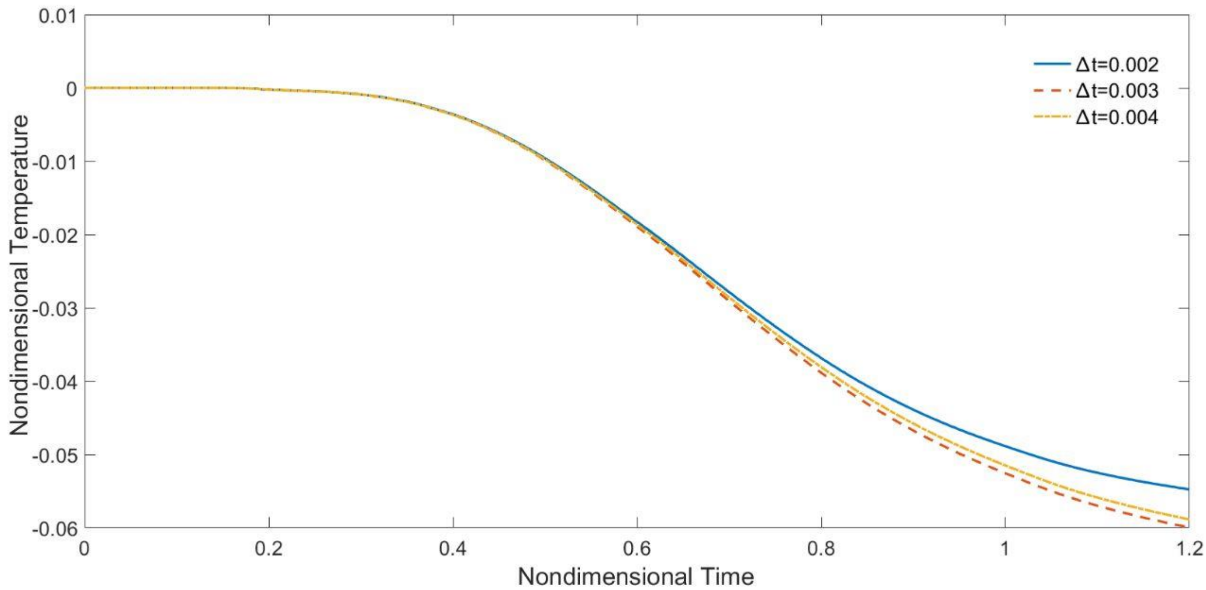
شکل (۴-۳) استقلال دامنه انتگرال برهم‌کنش برای ترک افقی تحت شوک گرمایی متقارن طبق تئوری گرین-نقدی نوع III با $C_k^2 = 0.05$



شکل (۴-۴) حساسیت مش ضریب شدت تنش مود I برای ترک افقی تحت شوک گرمایی طبق تئوری گرین-نقدی نوع III با $C_k^2 = 0.05$



شکل (۴-۵) تاثیرگام زمانی بر ضریب شدت تنش مود I برای ترک افقی تحت شوک گرمایی طبق تئوری گرین-نقدی نوع III با $C_k^2 = 0.05$

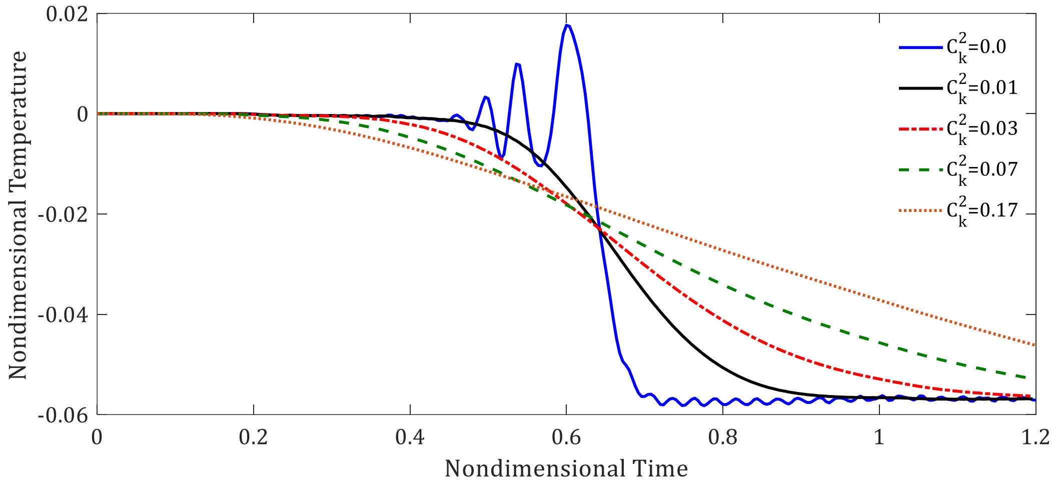


شکل (۴-۶) تاثیر گام زمانی بر دمای نوک ترک مود I برای ترک افقی تحت شوک گرمایی طبق تئوری گرین-نقدی نوع III با $C_k^2 = 0.05$

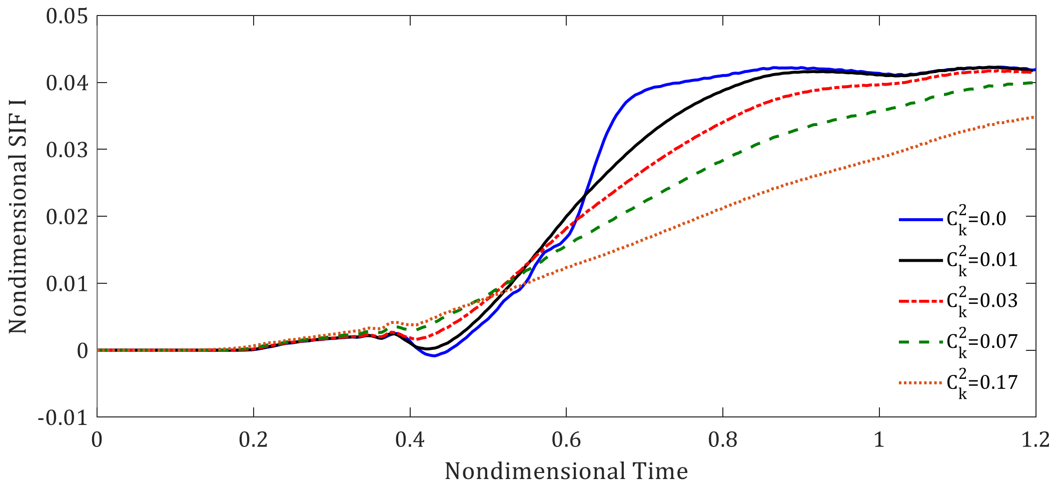
۴-۴-۲- اثر ضریب میرایی بر ضریب شدت تنش

نقش ضریب میرایی در فرم بدون بعد در تئوری گرین-نقدی با دیگر تئوری‌های ترموالاستیسیته متفاوت

است. در این مثال، اثر ضریب میرایی برای یک صفحه دارای ترک با مشخصات مثال قبل، تحت شوک دمایی و شار گرمایی مورد مطالعه قرار گرفته است. در مسئله شوک دمایی همانند مثال قبل، دمای نوک ترک و ضریب شدت تنش مود I به ازای مقادیر مختلف C_k، به ترتیب در شکل (۴-۵) و شکل (۴-۶) نشان داده شده است.



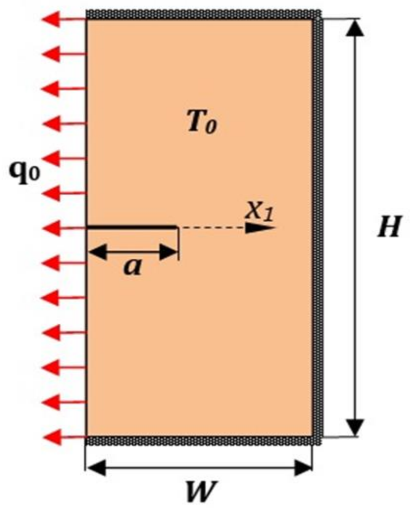
شکل (۴-۷) اثر ضریب میرایی بر دمای نوک ترک تئوری گرین-نقدی نوع III



شکل (۴-۸) اثر ضریب میرایی بر ضریب شدت تنش مود I در شوک دمایی

تاریخچه زمانی ضریب شدت تنش مود I برای مقادیر مختلف ضریب میرایی در شکل (۴-۶) ارائه شده است. با افزایش مقدار ضریب میرایی، بیشینه ضریب شدت تنش مود I کاهش‌یافته و با تأخیر بیشتری رخ می‌دهد.

از طرف دیگر، شوک ناگهانی شار گرمایی مدل مناسب‌تری از شرایط مرزی گرمایی حاکم بر بسیاری از کاربردهای مهندسی است. در این موارد شار یکنواخت $\hat{\mathbf{q}}_0 = -0.05\ H(t)$ در فضای بدون بعد به لبه دارای ترک صفحه‌ای از جنس بیسموت نشان داده در شکل (۴-۷) اعمال شده است.



شکل (۴-۹) هندسه و بارگذاری صفحه دارای ترک لبه‌ای تحت شوک شار گرمایی

شار گرمایی بدون بعد طبق رابطه زیر تعریف می‌شود.

$$\hat{\mathbf{q}} = \frac{\mathbf{q}}{\rho c v T_0} \qquad (۳۹-۴)$$

طبق رابطه ساختاری شار گرمایی تئوری گرین-نقدی نوع III، شار گرمایی تابعی خطی از گرادیان جابه‌جایی گرمایی و گرادیان دما است.

$$\mathbf{q} = -\boldsymbol{\kappa}\nabla\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{k}\nabla\boldsymbol{T} \qquad (۴۰-۴)$$

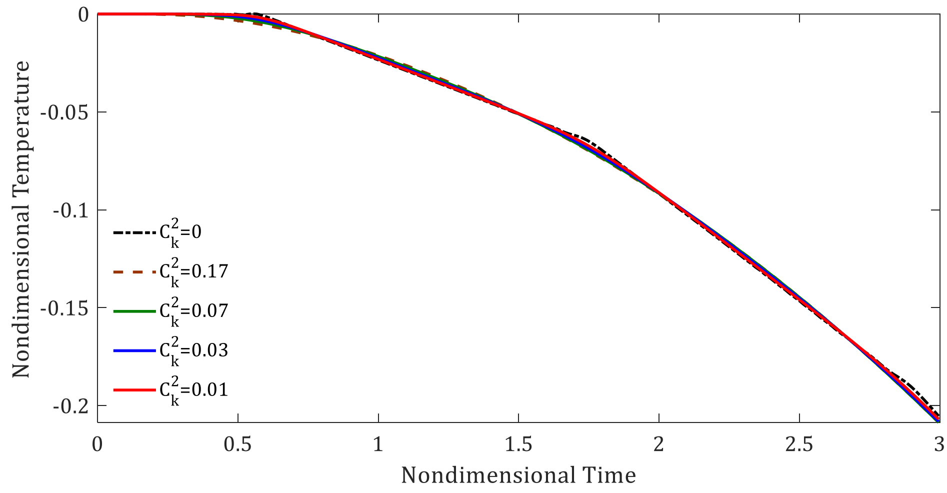
که α، جابه‌جایی گرمایی است. معادله ساختاری شار گرمایی برحسب دما به‌صورت زیر است.

$$\dot{\mathbf{q}} = -\boldsymbol{\kappa}\nabla\boldsymbol{T} - \boldsymbol{k}\nabla\dot{\boldsymbol{T}} \qquad (۴۱-۴)$$

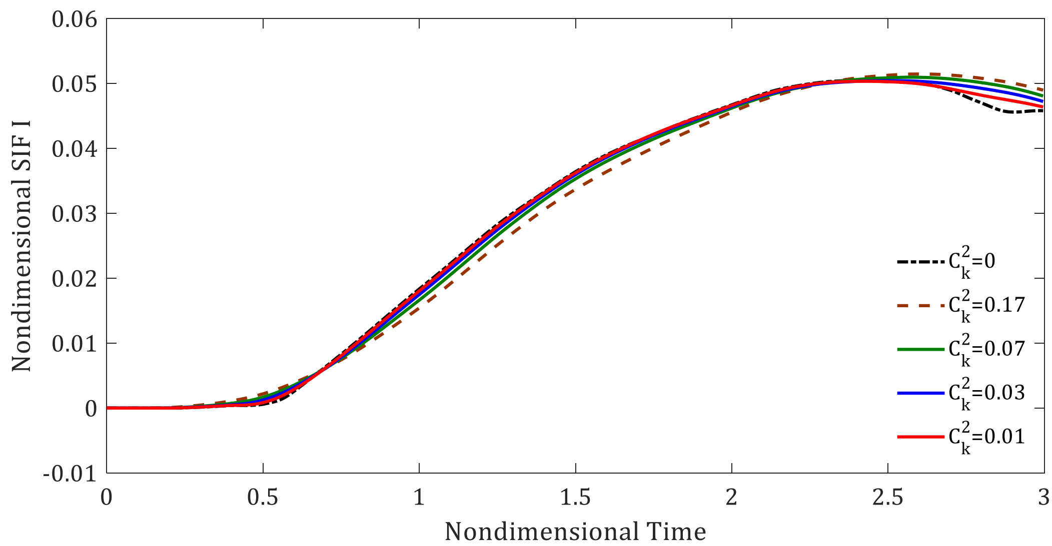
بنابراین، شرط مرزی گرمایی بی‌بعد تئوری گرین-نقدی نوع III به‌صورت زیر است.

$$C_T^2 \nabla T + C_k^2 \nabla \dot{T}\Big|_{x_1=0} = -0.05\ \delta(t) \tag{۴-۴۲}$$

که δ، تابع دلتای دیراک است. مش ۴۰۵×۱۰۱ المان چهار گره‌ای و گام زمانی Δt=0.004 در نظر گرفته شده است. تاریخچه زمانی دمای نوک ترک و ضریب شدت تنش مود I بر اساس تئوری گرین-نقدی نوع III به ازای مقادیر مختلف ضریب میرایی به ترتیب در شکل (۴-۸) و شکل (۴-۹) نشان داده شده است. برخلاف شوک دمایی، مقادیر دمای نوک ترک و ضریب شدت تنش مود I به ازای مقادیر انتخابی ضریب میرایی به هم نزدیک هستند.



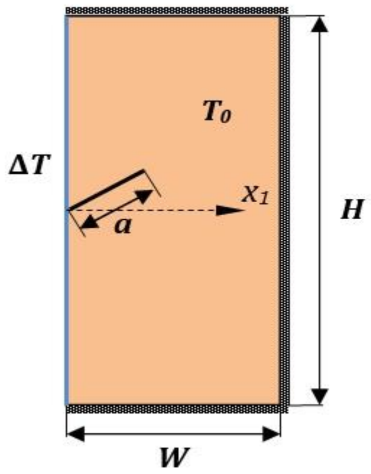
شکل (۴-۱۰) اثر ضریب میرایی بر دمای نوک ترک تئوری گرین-نقدی نوع III تحت شوک شار گرمایی



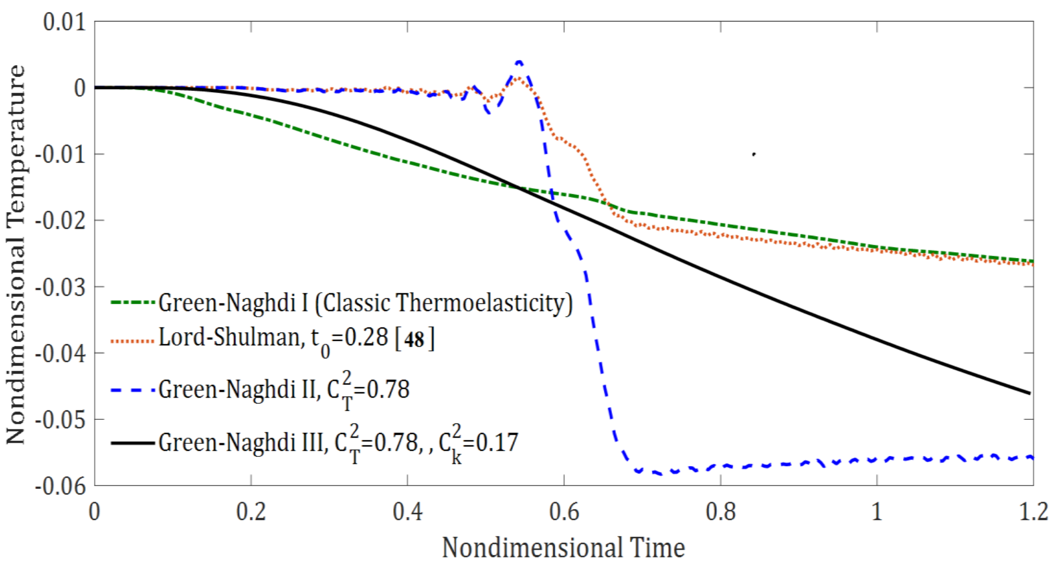
شکل (۴-۱۱) اثر ضریب میرایی بر ضریب شدت تنش مود I تئوری گرین-نقدی تحت شوک شار گرمایی

۴-۴-۳- ترک مورب تحت شوک دمایی

ترک مورب لبه‌ای به طول a/W=0.5 و زاویه α=30 نسبت به محور x_1 در صفحه از جنس بیسموت با مشخصات استفاده شده در بخش ۴-۴-۲ مفروض است. تغییر ناگهانی دما به لبه دارای ترک مطابق شکل (۴-۱۰) اعمال می‌شود. تاریخچه زمانی دمای نوک ترک بر اساس مدل‌های گرین-نقدی با تئوری لرد-شولمان در شکل (۴-۱۱) مقایسه شده است. در ابتدای اعمال شوک گرمایی تا رسیدن موج تنش به نوک ترک، تاریخچه زمانی مدل‌های تئوری گرین-نقدی و تئوری لرد-شولمان مشابه هستند.



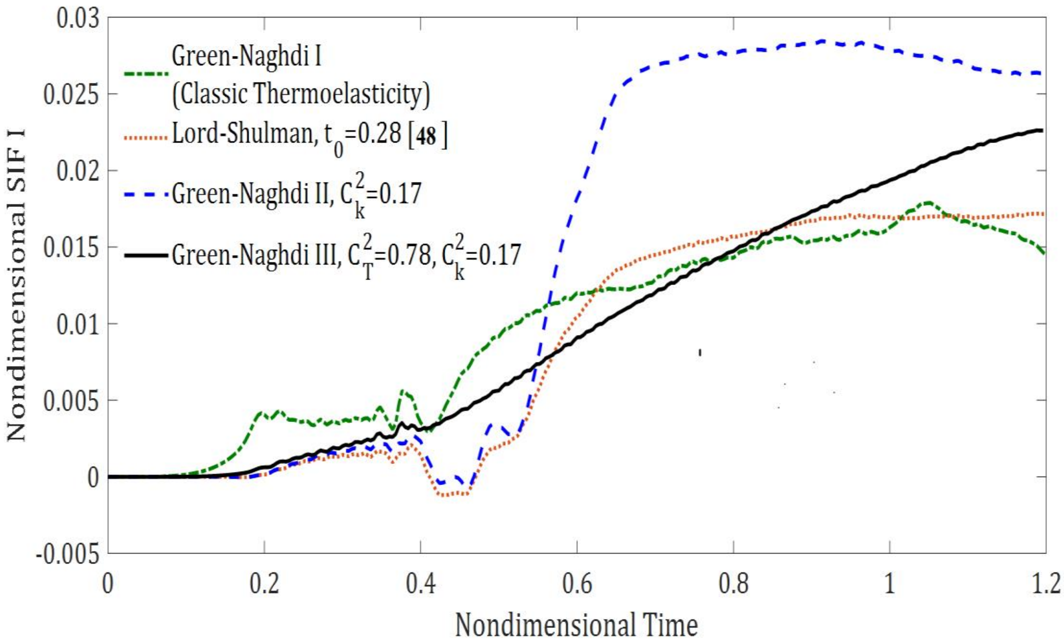
شکل (۴-۱۲) هندسه و بارگذاری صفحه دارای ترک مورب



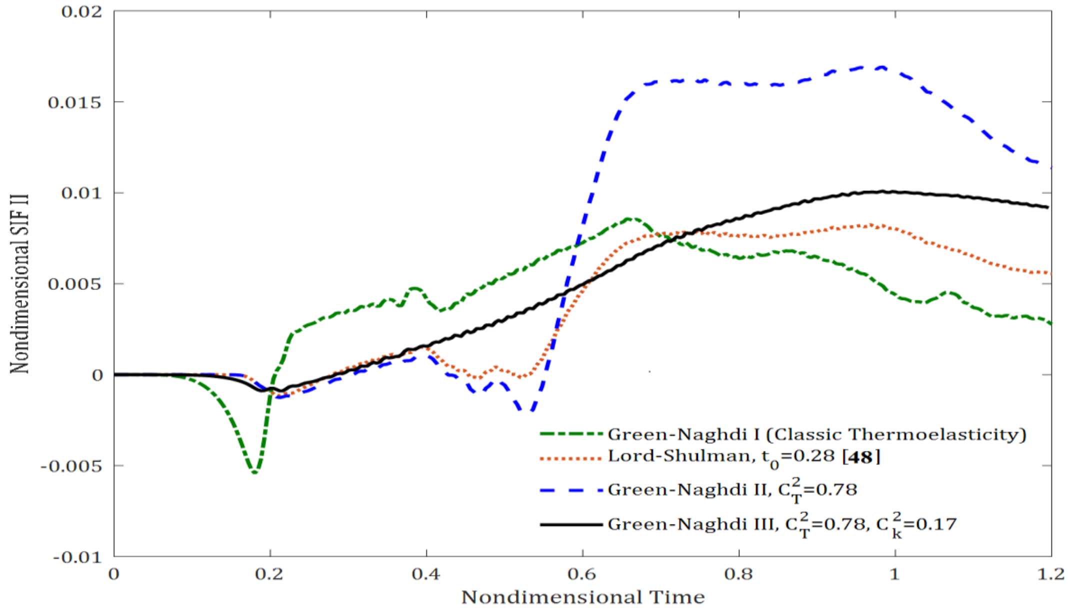
شکل (۴-۱۳) تاریخچه زمانی دمای نوک ترک بر اساس تئوری‌های گرین-نقدی و لرد-شولمان

پس از رسیدن موج گرما به نوک ترک، دمای مدل I تئوری گرین-نقدی و تئوری لرد-شولمان نزدیک هستند درحالی‌که دو مدل دیگر تقریباً دو برابر مقدار شرط مرزی گرمایی در این مثال است.

در شکل (۴-۱۲) و شکل (۴-۱۳) به ترتیب تاریخچه زمانی ضریب شدت تنش مود مختلط، ضریب شدت تنش مود I و II نشان داده شده است. تاریخچه ضریب شدت تنش مدل‌های II و III و نیز تئوری لرد-شولمان تا رسیدن موج گرما به نوک ترک یکسان هستند که موجب افزایش ضریب شدت تنش تا مقدار بیشینه خود می‌شود. مقدار بیشینه در مدل II تقریباً ۱۰۰ و مدل III تقریباً ۶۰ درصد از مقادیر تئوری‌های ترموالاستیسیته کلاسیک و لرد-شولمان بیشتر است.

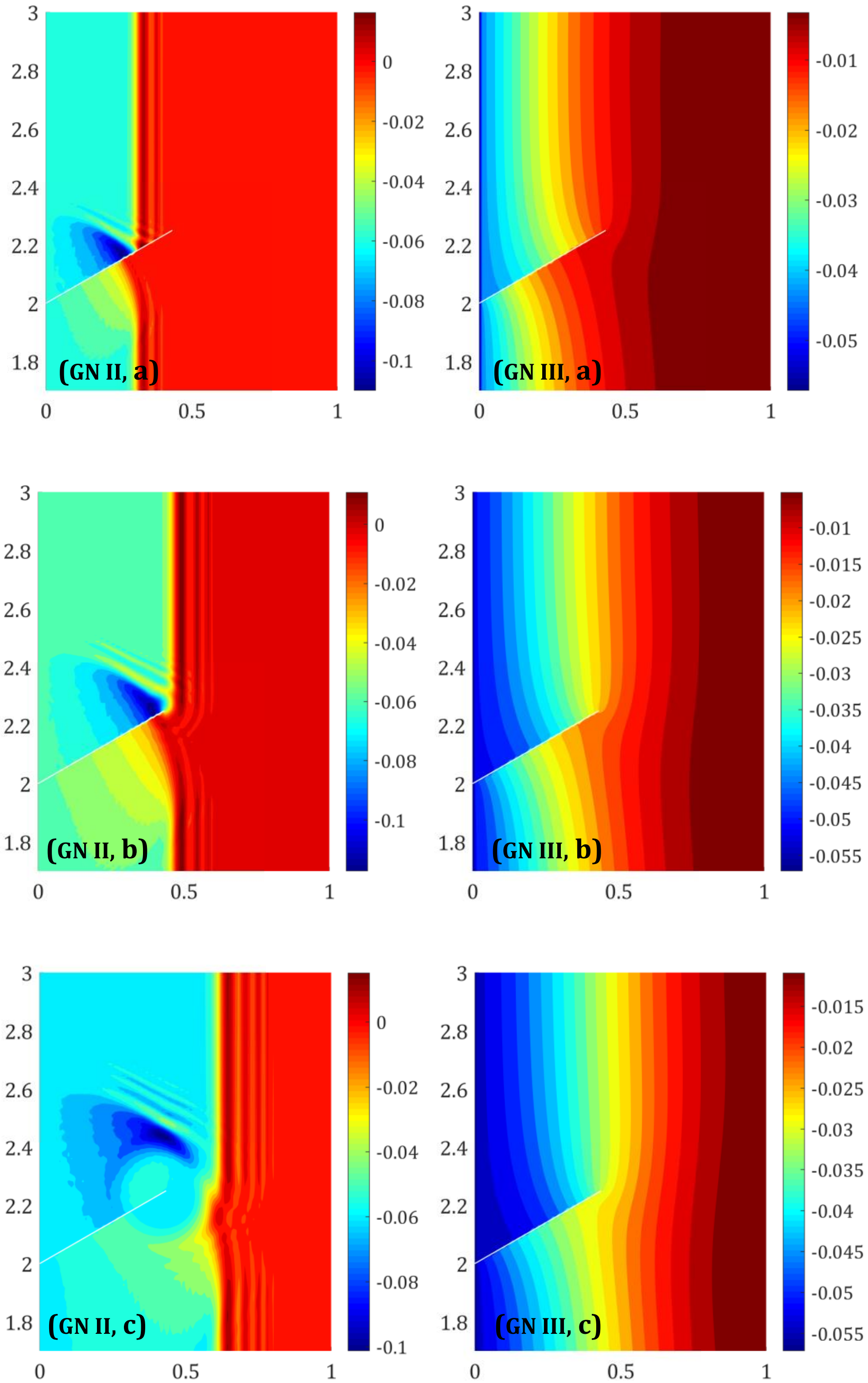


شکل (۴-۱۴) تاریخچه زمانی ضریب شدت تنش مود I طبق تئوری‌های کلاسیک ترموالاستیسیته، لرد-شولمان و گرین-نقدی



شکل (۴-۱۵) تاریخچه زمانی ضریب شدت تنش مود II بر اساس تئوری‌های کلاسیک ترموالاستیسیته، لرد-شولمان و گرین-نقدی

در شکل (۴-۱۴)، مقایسه توزیع دما در صفحه مستطیلی طبق مدل‌های II و III تئوری گرین-نقدی در زمان‌های 1 و t=0. 50, 0.70 ارائه شده است. عایق بودن وجوه ترک و سرعت محدود موج گرما به‌ویژه برای مدل II به‌وضوح قابل مشاهده است. بعلاوه، موج گرمای ثانویه (ناحیه سرد) روی لبه ترک ایجاد می‌شود که ممکن است دما در آن ناحیه از شرط مرزی گرمایی اعمال شده کمتر باشد. تداخل موج گرمای بازتاب شده از وجوه ترک با موج گرمای اولیه گذرنده از نقاط بالاتر باعث ایجاد این ناحیه می‌شود. موج گرمای ثانویه مسیر ترک را دنبال می‌کند و به نوک ترک می‌رسد و بازتاب می‌شود تا موج میرا شود.



شکل (۴-۱۶) توزیع دمای نزدیک نوک ترک بر اساس تئوری گرین-نقدی نوع III (راست) و نوع II (چپ).
(a)t=0.4, (b) t=0.6, (c) t=0.8

فصل ۵:

حل معادلات المان محدود توسعه یافته در فضای لاپلاس

۵-۱- مقدمه

در مسائل کوپل ترموالاستیسیته، گرادیان زمانی در حالت کلی با استفاده از الگوریتم تفاضل محدود گسسته سازی می‌شود. سپس حل مسئله به‌صورت گام‌به‌گام از مقدار اولیه تا رسیدن به پاسخ نهایی ادامه می‌یابد. در این شرایط، نمو زمانی باید به‌گونه‌ای انتخاب شود که منجر به پایداری عددی و نیز سرعت همگرایی بالا شود. محدودیت‌های فوق منجر به صرف زمان و هزینه بیشتر در رسیدن به پاسخ مسئله می‌شود که در این موارد، فرایند مؤثر دیگر حل معادلات المان محدود توسعه یافته در فضای لاپلاس است.

از طرف دیگر در مسائل مختلف ممکن است هندسه در نظر گرفته شده یک ماده کامپوزیت با هندسه نامنظم تحت بارگذاری مکانیکی و گرمایی وابسته به زمان، تحت شرایط شبه-استاتیکی یا دینامیکی، تحت شرایط ترموالاستیکی کوپل یا غیرکوپل و دارای سرعت محدود یا نامحدود موج گرما باشد. در چنین شرایطی پاسخ گذرا در هر لحظه می‌تواند به‌صورت مستقیم محاسبه شود.

مزایای استفاده از روش تبدیل لاپلاس در حل مسائل ترموالاستیک، منجر به استفاده گسترده از این روش در حل مسائل ترموالاستیک شده است. حسینی و ابوالبشری [۲۶]، مطالعه موج‌های گرمایی و مکانیکی طبق تئوری گرین-نقدی با استفاده از روش‌های تحلیلی را ارائه کردند. معادلات حاکم با اعمال تبدیل لاپلاس، در فضای لاپلاس با استفاده از سری‌ها حل شده‌اند و سپس با استفاده از روش تبدیل لاپلاس معکوس عددی به فضای زمان نگاشت شده‌اند. همچنین، چن و ونگ [۶۱]، روشی برای حل مسائل ترموالاستیک دینامیکی پیشنهاد کردند که در این روش محاسبات المان محدود در فضای لاپلاس صورت گرفته و حل نهایی با استفاده از روش تبدیل لاپلاس معکوس عددی به فضای زمان نگاشت شده است. در این تحقیق از فرم متحد معادلات حاکم تئوری گرین-لیندزی و لرد-شولمان استفاده شده است.

۵-۲- اعمال تبدیل لاپلاس

اعمال تبدیل لاپلاس بر رابطه (۴-۲۱) با توجه به صفر بودن شرایط اولیه مسئله، منجر به رابطه زیر در فضای لاپلاس می‌شود.

$$\left(\begin{bmatrix}\mathbf{M}_{11}^{\mathbf{e}} & \mathbf{0}\\ \mathbf{M}_{21}^{\mathbf{e}} & \mathbf{M}_{22}^{\mathbf{e}}\end{bmatrix}s^2+\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{22}^{\mathbf{e}}\end{bmatrix}s+\begin{bmatrix}\mathbf{K}_{11}^{\mathbf{e}} & \mathbf{K}_{12}^{\mathbf{e}}\\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{22}^{\mathbf{e}}\end{bmatrix}\right)\boldsymbol{Y}(s)=\frac{1}{s}\boldsymbol{F} \qquad (۱-۵)$$

نتایج رابطه فوق با استفاده از روش تبدیل لاپلاس معکوس عددی [۶۲] به فضای زمان نگاشت می‌شود.

۵-۳- تبدیل لاپلاس معکوس عددی

تبدیل انتگرالی لاپلاس در علوم مهندسی کاربرد گسترده‌ای دارد و استفاده از تبدیل لاپلاس معکوس عددی در بسیاری از تحقیقات جهت حل معادلات دیفرانسیل و انتگرالی، نشان‌دهنده اهمیت آن است [۶۲]. روش‌های متعددی جهت تبدیل لاپلاس معکوس عددی وجود دارد. از میان روش‌های موجود، تقریب سری‌های فوریه به علت سادگی و دقت بالاتر نسبت به روش‌های دیگر موردتوجه قرار گرفته است. روش بسط سری‌های فوریه در ابتدا توسط دابنر و ابیت [۶۳] مورداستفاده قرار گرفت. دورباین [۶۴] نیز در مطالعات خود این روش را بهبود بخشید.

محققین بسیاری از روش‌های شتاب‌دهی مختلفی در مطالعات خود استفاده کرده‌اند که به‌منظور افزایش سرعت همگرایی سری‌های فوریه مورداستفاده قرار می‌گیرند. جهت نگاشت تابع $\tilde{f}(s)$ از فضای لاپلاس به زمان، از سری‌های فوریه با بی‌نهایت جمله استفاده می‌شود و سپس این بی‌نهایت جمله با N جمله تقریب زده می‌شوند که موجب ایجاد خطای تجمعی در محاسبات می‌شود. برخی از روش‌های شتاب‌دهی منجر به کاهش قابل ملاحظه خطای تجمعی می‌شوند، اما اثربخشی آن‌ها به انتخاب پارامترهای دلخواه در نتایج بستگی دارد. یکی دیگر از معایب روش‌های ارائه شده، وابستگی خطاهای گسسته‌سازی[۱] و تجمعی[۲] است. در این حالت انتخاب پارامترهای آزاد به‌صورتی که باعث کاهش یک خطا شود، باعث افزایش خطای دیگر و حتی میل کردن خطا به بی‌نهایت (واگرایی) می‌شود. جهت رفع این مشکل روش پیشگویی-تصحیح پیشنهاد شده است که در آن، خطای گسسته‌سازی می‌تواند بدون اینکه موجب افزایش خطای تجمعی شود کاهش یابد. البته دقت این روش

---

[۱] Discretization Error

[۲] Accumulative Error

نیز به انتخاب پارامترهای آزاد بستگی دارد. در روش ارائه شده توسط هانیگ و هیردس [۶۲] تعیین پارامترهای آزاد به‌صورت بهینه، موجب دقت بالاتر نسبت به روش‌های دیگر می‌شود.

۵-۳-۱- روش دورباین

تبدیل لاپلاس تابع حقیقی f(t) و معکوس آن به‌صورت رابطه (۵-۲) بیان می‌شوند.

$$\tilde{f}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt \qquad \text{(۵-۲-الف)}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\tilde{f}(s)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{v-i\infty}^{v+i\infty} \tilde{f}(s) e^{st}\,ds \qquad \text{(۵-۲-ب)}$$

در روابط بالا، s متغیر استاندارد تبدیل لاپلاس به‌شکل مختلط $s = v + iw$ است. s باید برای تابع $\tilde{f}(s)$ به‌گونه‌ای انتخاب شود که v از قسمت حقیقی تمام تکین‌های تابع $\tilde{f}(s)$ بزرگتر باشد. تبدیل لاپلاس معکوس عددی با رابطه (۵-۲-ب) به‌شکل زیر محاسبه می‌شود.

$$f(t) = \frac{e^{vt}}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\mathrm{Re}\{\tilde{f}(s)\}\cos wt - \mathrm{Im}\{\tilde{f}(s)\}\sin wt\right]dw \qquad \text{(۵-۳)}$$

با استفاده از رابطه (۵-۳) و بسط سری فوریه $h(t) = e^{-vt}f(t)$ در بازه $[0, 2T]$، یک رابطه تقریبی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$f(t) = \frac{e^{vt}}{T}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\tilde{f}(s)\} + \sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{Re}\left\{\tilde{f}\left(v + i\frac{n\pi}{T}\right)\right\}\cos\frac{n\pi}{T}t - \sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{Im}\left\{\tilde{f}\left(v + i\frac{n\pi}{T}\right)\right\}\sin\frac{n\pi}{T}t\right] - Er1(v,t,T) \qquad \text{(۵-۴)}$$

که در آن، $Er1(v,t,T)$ خطای گسسته‌سازی نام دارد که به‌شکل رابطه (۵-۵) بیان می‌شود.

$$\mathrm{Er1}(v,t,T)=\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2nvT} f(2nT+t) \tag{۵-۵}$$

با توجه به رابطه (۵-۵) خطای گسسته‌سازی می‌تواند با انتخاب v به‌اندازه کافی بزرگ، کاهش یابد.

خطای تجمعی به‌صورت زیر بیان می‌شود.

$$\mathrm{Er2}(N,v,t,T)=\frac{e^{vt}}{T}\left(\sum_{n=N+1}^{\infty}\mathrm{Re}\left\{\tilde{f}(v+i\frac{n\pi}{T})\right\}\cos\frac{n\pi}{T}t-\sum_{n=N+1}^{\infty}\mathrm{Im}\left\{\tilde{f}(v+i\frac{n\pi}{T})\right\}\sin\frac{n\pi}{T}t\right) \tag{۶-۵}$$

درنهایت، مقادیر تابع f(t) در روش دورباین با استفاده از رابطه زیر تخمین زده می‌شود.

$$f_N(t)=\frac{e^{vt}}{T}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\tilde{f}(v)\}+\sum_{n=0}^{N}\left\{\mathrm{Re}\left\{\tilde{f}\left(v+i\frac{n\pi}{T}\right)\right\}\cos\frac{n\pi}{T}t-\mathrm{Im}\left\{\tilde{f}\left(v+i\frac{n\pi}{T}\right)\right\}\sin\frac{n\pi}{T}t\right\}\right] \tag{۷-۵}$$

۵-۳-۲- کاهش خطای گسسته‌سازی با استفاده از یک روش تصحیح‌کننده

با توجه به رابطه (۵-۵) و با انتخاب حاصل‌ضرب vT بزرگ، می‌توان خطای گسسته‌سازی را کاهش داد. اما با توجه به رابطه (۵-۶)، vT بزرگ موجب واگرایی خطای تجمعی می‌شود. روش تصحیح‌کننده، خطای گسسته‌سازی را بدون افزایش خطای تجمعی، کاهش می‌دهد.

با توجه به رابطه (۵-۴) و (۵-۷)، تخمین مقدار تابع در روش دوربایِن، به‌صورت زیر است.

$$f(t)=f_{\infty}(t)-\mathrm{Er1}(v,t,T) \tag{۸-۵}$$

روش تصحیح‌کننده از رابطه تقریبی زیر استفاده می‌کند.

$$f(t) = f_{\infty}(t) - e^{-2vT} f_{\infty}(2T + t) - Er2(v, t, T) \qquad (۹-۵)$$

خطای گسسته‌سازی $Er1(v, t, T)$، از خطای تجمعی $Er2(v, t, T)$ بسیار کوچکتر است [۶۲]. با فرض خطای تجمعی (۵-۶)، رابطه تقریبی تخمین $f(t)$ در روش تصحیح‌کننده به‌صورت زیر بیان می‌شود.

$$f_{NK}(t) = f_N(t) - e^{-2vT} f_{N_0}(2T + t) \qquad (۱۰-۵)$$

۵-۳-۳- شتاب همگرایی

در مطالعه هانیگ و هیردس [۶۲]، سه روش شتاب‌دهی الگوریتم ε، روش مینیمم-ماکزیمم و روش مبتنی بر برازش منحنی قابل‌استفاده هستند. برای $f_N(t)$ غیریکنوا[۱]، الگوریتم ε و روش مینیمم-ماکزیمم در حالت کلی نرخ همگرایی را به‌طور قابل ملاحظه‌ای افزایش می‌دهند. اما در مواردی چون تبدیلات اویلر توابع یکنوا منجر به نتایج غیر قابل‌قبول می‌شوند. روش مبتنی بر برازش منحنی در این حالت موجب بهبود قابل‌توجه نتایج می‌شود.

$$c_K = \frac{e^{vt}}{T}\left[\operatorname{Re}\left\{F\left(v + i\frac{n\pi}{T}\right)\right\}\cos\frac{n\pi}{T}t - \operatorname{Im}\left\{F\left(v + i\frac{n\pi}{T}\right)\right\}\sin\frac{n\pi}{T}t\right] \quad K = 0, 1, 2, \ldots \qquad (۱۱-۵)$$

در روش مبتنی بر برازش منحنی، مقدار تابع با استفاده از رابطه زیر تخمین زده می‌شود.

$$f_N(t) = \frac{1}{2}c_0 + \sum_{K=1}^{N} c_K \qquad (۱۲-۵)$$

[۱] Non-Monotonous

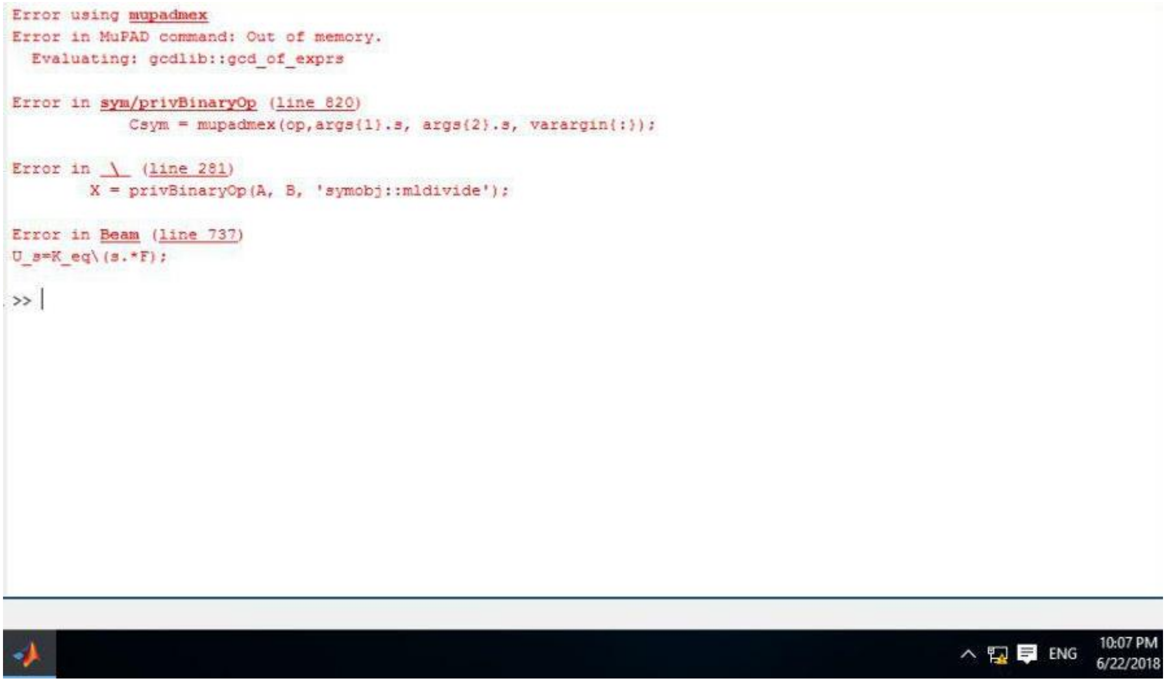
۵-۴- نتایج

در این بخش، یک صفحه دارای ترک با هندسه و خواص ماده استفاده شده در بخش ۴-۴-۱ در نظر گرفته شده است. شرط مرزی گرمایی مسئله طبق رابطه (۴-۴۲) مورداستفاده قرار گرفته است. از مش یکنواخت ۴۰۱×۱۰۱ المان مستطیلی و گام زمانی ۰/۰۰۴جهت مسئله استفاده شده است.

در حالت دوم تعداد المان‌ها ۱۱×۵ در نظر گرفته شده است.

در هر دو حالت حل مسئله به دلیل حجم بالای محاسبات و کمبود حافظه کامپیوتر متوقف شده است. متن خطای دو حالت فوق، در شکل‌های (۵-۱) و (۵-۲) نشان داده شده است.

شکل (۵-۱) متن خطای روش لاپلاس معکوس عددی با مش ۴۰۱×۱۰۱ المان



شکل (۵-۲) متن خطای روش تبدیل لاپلاس معکوس عددی با مش ۱۱×۵ المان

فصل ۶:

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

۶-۱- نتیجه‌گیری

در این پایان‌نامه، ضرایب شدت تنش ترک ایستا تحت شوک گرمایی با در نظر گرفتن تئوری ترموالاستیسیته گرین-نقدی در یک محیط محدود دوبعدی تعیین شده است. روش المان محدود توسعه‌یافته برای مدل‌سازی ترک و انتگرال برهم‌کنش جهت استخراج ضریب شدت تنش مورداستفاده قرار گرفته است. در مثال‌های متعدد نتایج تئوری گرین-نقدی با سایر تئوری‌های ترموالاستیسیته مانند لرد-شولمان، گرین-لیندزی و کلاسیک مقایسه شده است. اثر ضریب میرایی بر توزیع دمای نوک ترک و ضریب شدت تنش مورد بررسی قرار گرفته است. اثر استقلال از دامنه و نیز حساسیت مش بر نتایج مورد بررسی قرار گرفته است. بخشی از نتایج تحقیق حاضر به شرح زیر قابل بیان هستند.

۱. تغییرات زمانی دمای نوک ترک بر اساس مدل II تئوری گرین-نقدی یک موج مستطیلی است که با سایر تئوری‌های ترموالاستیسیته متفاوت است و به توزیع دمای پیش‌بینی شده توسط قانون فوریه همگرا نمی‌شود.
۲. برای ترک تحت شوک دمایی قبل از رسیدن موج گرما به نوک ترک، تاریخچه زمانی ضریب شدت تنش تئوری گرین-نقدیII و III مشابه مدل لرد-شولمان است. قله ضریب شدت تنش تئوری گرین-نقدیII و III از مدل‌های دیگر به‌طور قابل‌توجهی بزرگ‌تر است. همچنین ضریب شدت تنش با رسیدن موج گرما به نوک ترک بیشینه می‌شود.
۳. در تئوری گرین نقدیIII قله ضریب شدت تنش مود I به ازای ضرایب میرایی بزرگ‌تر تحت شوک دمایی کاهش‌یافته و به تأخیر می‌افتد. درحالی‌که توزیع دما و ضریب شدت تنش مود I تحت شوک شار گرمایی به ازای ضرایب میرایی مختلف تغییر چندانی ندارد.
۴. هنگامی‌که توزیع دما تحت تأثیر مسیر ترک قرار می‌گیرد؛ یک ناحیه سرد متحرک در طول مسیر ترک ایجاد می‌شود که ممکن است دما در آن ناحیه از شرط مرزی گرمایی اعمال شده کمتر شود.

۶-۲- پیشنهادها

- "بررسی رشد ترک با در نظر گرفتن تئوری گرین-نقدی " جهت درک بهتر رفتار ترک و سازه
- "محاسبه ضرایب شدت تنش با در نظر گرفتن تئوری گرین-نقدی برای مواد تابعی (FGM)" جهت درک رفتار مواد تابعی در مقابل ترک با توجه به استفاده روزافزون از این مواد و نیز مقایسه این مواد با مواد همگن و همسانگرد
- "محاسبه ضرایب شدت تنش با در نظر گرفتن تئوری گرین-نقدی و خواص مکانیکی و گرمایی وابسته به دما " جهت داشتن پیش‌بینی دقیق‌تر رفتار ماده و مقایسه آن با حالت خواص ثابت
- "استخراج توابع وزنی ترک لبه‌ای " با استفاده از نتایج روش المان محدود توسعه یافته جهت استقلال تعیین ضرایب شدت تنش از هندسه و بارگذاری

پیوست الف

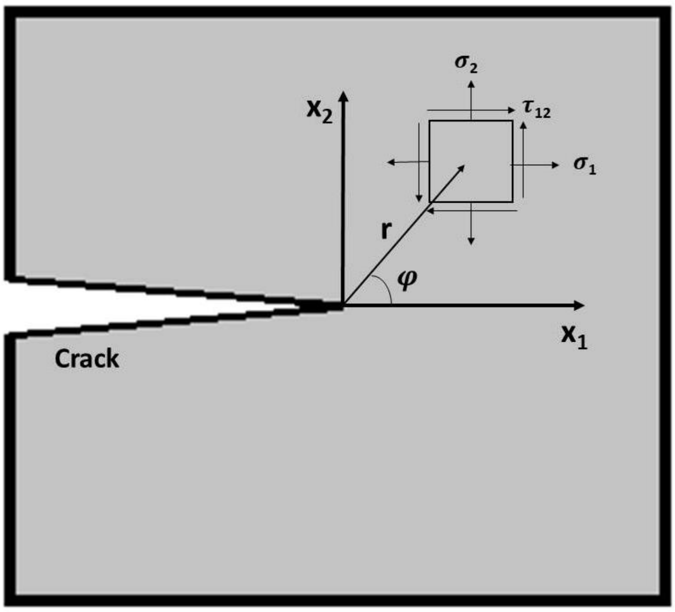
میدان‌های کمکی حوزه نوک ترک ساکن در محیط ایزوتروپیک همگن

میدان‌های تنش و جابجایی کمکی اطراف نوک ترک، میدان‌های مجانبی نوک ترک هستند. این میدان‌ها توسط ویلیامز [۶۵] ارائه شده‌اند. میدان‌های کمکی مد I ترک ایستا در مختصات محلی نوک ترک به‌صورت زیر هستند [۶۶] :

$$\sigma_1^{aux} = \frac{K_I^{aux}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left[1 - sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right)\right] \quad \text{(الف-۱)}$$

$$\sigma_2^{aux} = \frac{K_I^{aux}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left[1 + sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right)\right] \quad \text{(الف-۲)}$$

$$\tau_{12}^{aux} = \frac{K_I^{aux}}{\sqrt{2\pi r}} cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{3\varphi}{2}\right) \quad \text{(الف-۳)}$$



شکل الف-۱- دستگاه مختصات محلی نوک ترک

$$u_1^{aux} = \frac{K_I^{aux}}{2\mu_{Tip}} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left[\kappa_{Tip} - 1 + 2sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right] \quad \text{(الف-۴)}$$

$$u_2^{aux}=\frac{K_I^{aux}}{2\mu_{Tip}}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left[\kappa_{Tip}+1-2cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]$$ (الف-۵)

در روابط فوق κضریب کلوسوف[1]است.

$$\kappa=\begin{cases}(3-\nu)/(1+\nu) & \text{تنش صفحه‌ای}\\ 3-4\nu & \text{کرنش صفحه‌ای}\end{cases}$$ (الف-۶)[۶۷]:

میدان‌های کمکی ترک مد II نیز به‌صورت زیر قابل بیان هستند:

$$\sigma_1^{aux}=\frac{-K_{II}^{aux}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left[2+cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{3\varphi}{2}\right)\right]$$ (الف-۷)

$$\sigma_2^{aux}=\frac{K_{II}^{aux}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{3\varphi}{2}\right)$$ (الف-۸)

$$\tau_{12}^{aux}=\frac{K_{II}^{aux}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left[1-sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right)\right]$$ (الف-۹)

$$u_1^{aux}=\frac{K_{II}^{aux}}{2\mu_{Tip}}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left[\kappa_{Tip}+1+2cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]$$ (الف-۱۰)

$$u_2^{aux}=\frac{-K_{II}^{aux}}{2\mu_{Tip}}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left[\kappa_{Tip}-1-2sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]$$ (الف-۱۱)

میدان‌های کمکی فوق، مربوط به مختصات محلی نوک ترک هستند. تنش‌های دستگاه مختصات سراسری با استفاده از روابط زیر به دستگاه مختصات محلی تبدیل می‌شوند:

$$\sigma_1^g=\sigma_1^l cos^2\omega+\sigma_2^l sin^2\omega-\tau_{12}^l\sin(2\omega)$$ (الف-۱۲)

$$\sigma_2^g=\sigma_1^l sin^2\omega+\sigma_2^l cos^2\omega+\tau_{12}^l\sin(2\omega)$$ (الف-۱۳)

$$\tau_{12}^g=\tau_{12}^l\cos(2\omega)+0.5(\sigma_1^l-\sigma_2^l)\sin(2\omega)$$ (الف-۱۴)

در روابط فوق l نشان‌دهنده دستگاه مختصات محلی و g دستگاه مختصات سراسری است. ω زاویه بین دستگاه‌های مختصات محلی و سراسری است.

[1] Kolosov Coefficient

منابع

[1] Bagri A., and Eslami M. R. (2008) "Generalized coupled thermoelasticity of functionally graded annular disk considering the Lord–Shulman theory" **Composite Structures**, 83, pp 168-179.

[2] Peshkov V. (1947) "Determination of the velocity of propagation of the second sound in helium II'' **In Report of an international conference on fundamental particles and low temperatures: Low temperatures**, 2, pp 19-32.

[3] Peshkov V. (1944) "Second sound in liquid helium" **J. Phys.**, 8, pp 381.

[4] Ackermann C., Bertram B., Fairbank H. and Gyuer R. (1966) "Second sound in solid helium'' **Phys. Rev.**, 16, pp 789-791.

[5] Chester M. (1963) "Second Sound in Solids'' **Phys. Rev.**, 131, pp 2013-2015.

[6] Mitra K., Kumar S., Vedavarz A. and Moallemi M. K. (1995) "Experimental evidence of hyperbolic heat conduction in processed meat'' **J. Heat Transfer**, 117, pp 568-573.

[7] Tzou D. Y. (1995) "The generalized lagging response in small-scale and high-rate heating" **Int. J. Heat Mass Transfer**, 38, pp 3231-3234.

[8] Babaei M. H. and Chen Z. T. (2010) "Transient hyperbolic heat conduction in a functionally graded hollow cylinder" **Thermophys. Heat Transfer**, 24, pp 325-330.

[9] Chandrasekharaiah D. S. (1986) "Thermoelasticity with second sound" A Review, **Appl. Mech. Rev.**, 39, pp 355-376.

[10] Chandrasekharaiah D.S. (1998) "Hyperbolic Thermoelasticity" A Review of Recent Literature, **Appl. Mech. Rev.**, 51, pp 705-729.

[11] Joseph D. D. and Preziosi L. (1989) "Heat waves'' **Rev. Mod. Phys.**, 61, pp 41-73.

[12] Joseph D. D. and Preziosi L. (1990) "Heat waves: addendum'' **Rev. Mod. Phys.**, 62, pp 375-391.

[13] Fu J. W., Chen Z. T. and Qian L. F. (2015) " Coupled thermoelastic analysis of a multi-layered hollow cylinder based on the C–T theory and its application on functionally graded materials'' **compos. Struct.**, 131, pp 139-150.

[14] Hetnarski R. B. and Eslami M. R. (2009) "**Thermal Stresses – Advanced Theory and Applications**" Springer.

[15] Green A. and Naghdi P. (1993) "Thermoelasticity without energy dissipation'' **J. Elasticity**, 31, pp 189-208.

[16] Green A. and Naghdi P. (1992) "On undamped heat waves in an elastic solid'' **J. Therm. Stress.**, 15, pp 253-264.

[17] Green A. and Naghdi P. (1991) "A re-examination of the basic postulates of thermomechanics'' **Proc. Roy. Soc., London A**, 432, pp 171-194.

[18] Bargmann S. (2013) "**Remarks on the Green–Naghdi theory of heat conduction**'' J. Non-Equilib. Thermodyn.

[19] Chandrasekharaiah D. S. (1996) “One-Dimensional Wave Propagation in the Linear Theory of Thermoelasticity Without Energy Dissipation’’ **J. Therm. Stress.**, 19, pp 695-710.

[20] Chandrasekharaiah D. S. and Srinath K. S. (1997) “Axisymmetric Thermoelastic Interactions Without Energy Dissipation in an Unbounded Body with Cylindrical Cavity’’ **J. Elasticity**, 46, pp 19-31.

[21] Chandrasekharaiah D. S. and Srinath K. S. (1998) “Thermoelastic Interactions Without Energy Dissipation Due to a Point Heat Source’’ **J. Elasticity**, 50, pp 97-108.

[22] Sharma J. N. and Chauhan R. S. (2001) “Mechanical and Thermal Sources in a Generalized Thermoelastic Half-Space’’ **J. Therm. Stress.**, 24, pp 651-675.

[23] Li H. and Dhaliwal R. S. (1996) “Thermal Shock Problem in Thermoelasticity Without Energy Dissipation’’ **Indian J. Pure Appl. Math.**, 27, pp 85-101.

[24] Bagri A. and Eslami M. R. (2007) “A unified generalized thermoelasticity; solution for cylinders and spheres’’ **Int. J. Mech. Sci.**, 49, pp 1325-1335.

[25] Bagri A., Taheri H., Eslami M. R. and Fariborz S. J. (2006) “Generalized coupled thermoelasticityof a layer’’ **J. Therm. Stress**, 29, pp 359-370.

[26] Hosseini S. M. and Abolbashari M. H. (2012) “Analytical Solution for thermoelastic waves propagation analysis in thick hollow cylinder based on Green-Naghdi model of coupled thermoelasticity’’ **J. Therm. Stresses**, 35, pp 363-376.

[27] Shariyat M. (2012) “Nonlinear Transient Stress and Wave Propagation Analyses of the FGM Thick Cylinders, Employing a Unified Generalized Thermoelasticity Theory’’ **Int. J. Mech. Sci**, 65, pp 24-37.

[28] Hosseini S.M. (2009) “Coupled thermoelasticity and second sound in finite length functionally graded thick hollow cylinders (without energy dissipation)’’ **Mater. Des**, 30, pp 2011-2023.

[29] Erdogan F. and Wu B. H. (1996) “Crack problems in FGM layers under thermal stresses’’ **J. Therm. Stress.**, 19, pp 237.

[30] Noda N. and Guo L. C. (2008) “Thermal shock analysis for a functionally graded plate with a surface crack’’ **Acta Mechanica**, 195, pp 157.

[31] Vafa J. P. and Fariborz S. J. (2018) “Analysis of cracked layers under transient temperature field’’ **J. Therm. Stress.**, 41, pp 658-686.

[32] Portela A. and Aliabadi M. H. (1992) “The Dual BEM Effective Implementation for Crack Problems’’ **Int. J. Num. Meth. Eng.**, 33, pp 1269-1287.

[33] Prasad N. N. V., Aliabadi M. H. and Rooke D.P. (1996) “The Dual Boundary Element Method for Transient Thermoelastic Crack Problems’’ **Int. J. Solids Struct**, 33, pp 2695-2718.

[34] Dell’Erba D. N., Aliabadi M. H. and Rooke D. P. (1998) “Dual Boundary Element Method for Three-Dimensional Thermoelastic Crack Problems’’ **Int. J. Fract**, 94, pp 89-101.

[35] Ekhlakov A. V., Khay O. M., Zhang CH, Sladek J. and Sladek V. (2012) “A BDEM for transient thermoelastic crack problems in functionally graded materials under thermal shock’’ **Comput. Mater. Sci.**, 57, pp 30-37.

[36] Ekhlakov A. V., Khay O. M., Zhang CH., Sladek J. and Sladek V. (2012) “Thermoelastic crack analysis in functionally graded materials and structures by a BEM’’ **Fatigue & Fract. of Eng. Mater. & Struct.**, 35, pp 742-766.

[37] Hosseini-Tehrani P., Eslami M. R. and Daghyani H. R. (2001) “Dynamic Crack Analysis Under Coupled Assumption’’ **Trans. ASME J. Appl. Mech.**, 38, pp 584-588.

[38] Hosseini-Tehrani P. and Hosseini-Godarzi A. R. (2004) “Dynamic crack analysis under thermal shock considering Lord-shulman theory’’ **Int. J. Therm. Sci.**, 43, pp 1003-1010.

[39] Hosseini-Tehrani P., Eslami M. R. and Azari S. H. (2006) “Analysis of Thermoelastic Crack Problems Using Green–Lindsay Theory’’ **J. Therm. Stress.**, 29, pp 317-330.

[40] Hosseini-Tehrani P., Hosseini-Godarzi A. R. and Tavangar M. (2005) “Boundary element analysis of stress intensity factor K-I in some two-dimensional dynamic thermoelastic problems’’ **Eng. Anal. Bound. Elem.**, 29, pp 232-240.

[41] Zamani A., Hetnarski R. B. and Eslami M. R. (2011) “Second Sound in a Cracked Layer Based on the Lord-Shulman Theory’’ **J. Therm. Stress.**, 34, pp 181-200.

[42] Zamani A. and Eslami M. R. (2009) “Coupled Dynamical Thermoelasticity of a Functionally Graded Cracked Layer’’ **J. Therm. Stress.**, 32, pp 969-985.

[43] Mohammadi S. (2012) “**XFEM fracture analysis of composites**’’ Oxford, UK: Blackwell Publishing Ltd.

[44] Zamani A., Gracie R. and Eslami M. R. (2012) “Cohesive and non-cohesive fracture by higher-order enrichment of XFEM’’ **Int. J. Nume. Meth. Engin.**, 90, pp 452-483.

[45] Hosseini S. S., Bayesteh H. and Mohammadi S. (2013) “Thermo-mechanical XFEM crack propagation analysis of functionally graded materials’’ **Mater. Sci. Eng.**, 561, pp 285-302.

[46] Goli E., Bayesteh H. and Mohammadi S. (2014) “Mixed mode fracture analysis of adiabatic cracks in homogeneous and non-homogeneous materials in the frame-work of partition of unity and the path-independent interaction integral’’ **Eng. Fract. Mech.**, 131, pp 100-127.

[47] Zarmehri N. R., Nazari M. B. and Rokhi M. M. (2018) “XFEM analysis of a 2D cracked finite domain under thermal shock based on Green-Lindsay theory” **Eng. Fract. Mech.**, 191, pp 286-299.

[48] Esmati V., Nazari M. B. and Rokhi M. M. (2018) “Implementation of XFEM for Dynamic thermoelastic crack analysis under non-classic thermal shock’’ **Theor. Appl. Fract. Mec.**, 95, pp 42-58.

[49] Kirugulige M. S. (2007), Ph.D thesis, “**A study of mixed-mode dynamic fracture in advanced particulate composites by optical interferometry, digital image correlation and finite element methods**” Auburn University.

[50] Belytschko T. and Black T. (1999) “Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing” **Int. J. Nume. Meth. Engin.**, 45, pp 601-620.

[51] Moes N., Dolbow J. and Belytschko T. (1999) “A finite element method for crack growth without remeshing” **Int. J. Nume. Meth. Engin.**, 46, pp 131-150.

[52] Belytschko T., Gracie R. and Ventura G. (2009) “A Review of Extended/Generalized Finite Element Methods for Material Modelling” **Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.**, 17, pp 1-24.

[53] Mohammadi S. (2008) “**Extended Finite Element Method**” Blackwell Publishing Ltd.

[54] Duflot M. (2008) “The extended finite element method in thermoelastic fracture mechanics” **Int. J. for Num. Methods in Engin.**, 74, pp 827-847.

[55] Zamani A. and Eslami M. R. (2010) “Implementation of the extended finite element method for dynamic thermoelastic fracture initiation” **Int. J. Solids and Struct.**, 47, pp 1392-1404.

[56] KC A. and Kim J. H. (2008) “Interaction integrals for thermal fracture of functionally graded materials” **Eng. Frac. Mech.**, 75, pp 2542-2565.

[57] Chessa J., Wang H. and Belytschko T. (2003) “On the construction of blending elements for local partition of unity enriched finite elements’’ **Int. J. Numer. Meth. Eng.**, 57, pp 1015-1038.

[58] Lee K. Y. and Sim K. B. (1990) “Thermal shock stress intensity factor by Bueckner's weight function method’’ **Eng. Fract. Mech.**, 37, pp 799-804.

[59] Narayanamurti V. and Dynes R. C. (1972) “Observation of second sound in bismuth’’ **Phys. Rev. Lett.**, 28, pp 1461.

[60] El-Karamany A. S. and Ezzat M. A. (2011) “On the Two-Temperature Green–Naghdi Thermoelasticity Theories” **J. Therm. Stress.**, 34:12, pp 1207-1226.

[61] Chen T. C. and weng C. I. (1988) “Generalized coupled transient thermoelastic plane problems by laplace transform/finite element method”, **J. App. Mec.**, 55, pp 377-382.

[62] Honig G. and Hirdes U. (1984) “A method for the numerical inversion of Laplace transform’’ **J. Comp. Appl. Math.**, 10, pp 113-132.

[63] Dubner H. and Abate J. (1968) “Numerical inversion of Laplace transforms by relating them to the finite Fourier cosine transform’’ **J. ACM.**, 15, pp 115-123.

[64] Durbin F. (1973) “Numerical inversion of Laplace transforms: an effective improvement of Dubner and Abate's method’’ **Comput. J.**, 17, pp 371-376.

[65] Williams M. L. (1957) “On the stress distribution at the base of a stationary crack” **J. Appl. Mech., Trans. ASME.**, 24(1), pp 109-114.

[66] Anderson T. L. (1995) “**Fracture mechanics**” 2nd edition, CRC Press LLC, Florida, USA.

[67] Menouillard T., Song J. H., Duan Q. and Belytschko T. (2010) “Time dependent crack tip enrichment for dynamic crack propagation” **Int. J. Fract.**, 162, pp 33-49.

Abstract

In this thesis, a cracked finite isotropic medium under a non-classic thermal shock is studied. The fully coupled dynamic thermoelasticity equations based on the Green-Naghdi theory of thermoelasticity are considered. The extended finite element method is employed to discrete governing equations in the space, and the Newmark scheme is used as the time integration method. The stress intensity factors, which are extracted using the interaction integral method, are compared with other theories of thermoelasticity. The effect of damping coefficient on the time history of stress intensity factors and temperature field is investigated. Furthermore, the crack tip temperature distribution, which disturbs the temperature distribution, based on the type II and III are compared. The results of a cracked plate under temperature shock demonstrated that the stress intensity factors based on thermoelasticity without energy dissipation were significantly greater than those based on classic and Lord-Shulman models. Whereas, the peak of stress intensity factors under heat flux shock are nearly equal for various theories of thermoelasticity.

Keywords

Stress Intensity Factors (SIFs); eXtended Finite Element Method (XFEM); Thermal shock; Green-Naghdi Theory.

Shahrood University of Technology

Faculty of Mechanical Engineering

Computation of stress intensity factors for an isotropic medium subjected to thermal shock considering Green-Naghdi theory and using eXtended Finite Element Method

Mohammad Shahsavan Taqan

Thesis
Submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of
Master of Science (M. Sc)

Supervisor
Dr. Mohammad Bagher Nazari
Dr. Masoud Mahdizadeh Rokhi

January 2019