

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مکانیک

گروه تبدیل انرژی

حل عددی انتقال حرارت در محیط متخلخل در شرایط عدم تعادل حرارتی همراه با تولید گرما

دانشجو :

عطاءاله عباسی

استاد راهنما :

دکتر محمد حسن کیهانی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

شهریور 89

شماره :
تاریخ :
پیوست :



دانشکده: مکانیک

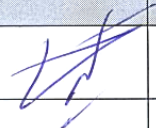
گروه: تبدیل انرژی


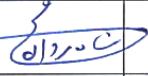

پایان نامه کارشناسی ارشد آقای عطا... عباسی

تحت عنوان:

حل عددی انتقال حرارت در یک محیط متخلخل در شرایط عدم تعادل حرارتی همراه با تولید گرما

در تاریخ ۱۳۸۹/۰۶/۲۹ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد (رساله دکتری) مورد ارزیابی و با درجه عالی مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور	امضاء	اساتید راهنما
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی : محمدحسن کیهانی
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :

امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
	نام و نام خانوادگی : مجتبی قطعی		نام و نام خانوادگی : محمدحسن شاهمردان
			نام و نام خانوادگی : محمود چهارطاقی
			نام و نام خانوادگی :
			نام و نام خانوادگی :

* تقدیم اثر:

تقدیم به پدر، مادر و خانواده مهربانم
سنگ صبورانم

* شکر و قدردانی:

خداوند منان را شاکرم که برایم افرادی را وسیله قرار داد تا بسوی تعالی حرکت کنم و اگر

لطف و رحمت بی دریغش نبود، گذر از این راه دشوار میسر نبود.

از پدر و مادر دلسوز و مهربانم شکر می‌کنم که تنها با دلگرمی ایشان توانستم در این مسیر

پیشرفت کنم. در اینجا بر خود فرض می‌دانم از همه عزیزان در دانشکده مهندسی

مکانیک خاصه استاد کرامت‌قدم جناب آقای دکتر محمد حسن کیهانی که بنده را در پیشبرد

این پروژه راهنمایی کردند، شکر و قدردانی نمایم.

تعهد نامه

اینجانب عطای اله عباسی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد / دکتری رشته مکانیک - سازه های فلزی
دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه / رساله حل مسئله استخوان حویلی
در مجلس تخصصی تحت عنوان تحت راهنمایی دکتر سید علی حسینی متعهد می شوم :
حزین دهنوردی مدرس

- تحقیقات در این پایان نامه / رساله توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصلیت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه/رساله تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچگونه مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در بدست آمدن نتایج اصلی پایان نامه / رساله تاثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه/رساله رعایت می گردد .
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه/رساله ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه/رساله ، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا از آن استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ : ۱۹/۶/۲۹

امضاء دانشجوی

عطای اله عباسی

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و این مطلب باشد به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه / رساله بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد .

- متن این صفحه نیز باید در ابتدای نسخه های تکثیر شده پایان نامه/رساله وجود داشته باشد .

چکیده

بحث پیرامون ویژگی فازهای سیال و جامد، در بسیاری از جریان های غیر هم دما در محیط های متخلخل بسیار ضروری است. در پایان نامه حاضر اثر تغییر ناگهانی دما در مرز $x=0$ و همچنین اثر ترم تولید گرما بر ایجاد شرایط عدم تعادل حرارتی در یک محیط متخلخل نیمه بینهایت مورد بررسی قرار می گیرد. در غیاب جریان سیال، معادلات انرژی در حالت گذرا و در وضعیت عدم تعادل حرارتی محلی در حضور ترم تولید گرما، به عنوان معادلات حاکم مورد استفاده قرار می گیرند. معادلات حاکم جزئی در هر فاز بی بعد شده و سپس با استفاده از روش های عددی حل شده اند. برای محاسبه مشتقات جزئی روش اختلاف محدود فشرده و برای پیشروی در زمان، روش رانج کوتای مرتبه چهار بکار گرفته شده است. همچنین برای تست و معتبر سازی نتایج نرخ انتقال حرارت در زمان های خیلی دور و نزدیک، روش تقریبی اغتشاشات استفاده شده است. در هنگام کار با روش اغتشاشات معادلاتی ظاهر می شوند که برای حل آن ها روش عددی پرتابی بکار گرفته شده است. نرخ انتقال حرارت بین فازها در وضعیت های مختلف در قالب گراف های متنوع نشان داده شده است. نتایج نشان می دهند، اثر تغییر ناگهانی دما در مرز محیط و اثر ترم تولید گرما پس از گذشت زمان مهار شده و گرادیان های حرارتی هر دو فاز بر اثر ایجاد شرایط تعادل حرارتی محلی در یک مقدار ثابت بر هم منطبق خواهند شد. در این زمان گراف های گرادیان حرارتی با یک مقدار ثابت و شیب صفر به سمت بینهایت حرکت می کنند. همچنین با تعریف پارامترهای بی بعد و بررسی تغییرات آن ها، نتایج مختلفی در رفتار گرادیان های حرارتی فازها حاصل می شود، که به تفصیل آمده است.

کلمات کلیدی

تولید گرما، عدم تعادل حرارتی محلی، محیط متخلخل، نسبت رسانایی گرمایی، نسبت ضریب پخش

* مقالات مستخرج از پایان نامه

1. Study of Local Thermal Non-equilibrium in Porous Media Due to Temperature Sudden Change and Heat Generation - SCIENTIFIC JOURNAL MECHANIKA (ISI) - Status: *In Review*.

2. Study of Local Thermal Non-equilibrium in the porous Media due to temperature Sudden Change - ICTE2010 - Netherlands - Status: *Accepted for Oral Presentation*

3. مطالعه عدم تعادل حرارتی ناشی از تغییر ناگهانی دما در مرز یک محیط متخلخل - ژورنال علمی - پژوهشی مهندسی مکانیک - انجمن مهندسان مکانیک ایران - وضعیت: *تحت بررسی*

4. Numerical Solution of Heat Transfer under LTNE in the Porous Media in Presence of Heat Generation - Asian Journal of Scientific Research - Status: *Accepted*

فهرست مطالب

عنوان	صفحه
صفحه نخست	أ
صفحه عنوان	ب
تصویب نامه	ج
تقدیم اثر	د
تقدیر و تشکر	ه
اقرار نامه	و
چکیده فارسی پایان نامه	ز
مقالات مستخرج از پایان نامه	ح
فهرست مطالب	ط
فهرست جداول	ل
فهرست اشکال	م
فهرست علائم و اختصارات	ع
فصل اول * مقدمه ای بر انتقال حرارت	1
فصل دوم * انتقال حرارت در محیط های متخلخل	5
1-2 انتقال حرارت و جرم در محیط متخلخل	6
2-2 قوانین اصلی	7
1-2-2 قانون پیوستگی در محیط متخلخل	8
2-2-2 معادله انرژی در محیط متخلخل در حالت تعادل حرارتی محلی	10
3-2-2 معادلات انرژی در محیط متخلخل در حالت عدم تعادل حرارتی محلی	15
1-3-2-2 بررسی روابط تجربی ضریب انتقال حرارت بین فازی	18
4-2-2 معادله مومنتوم در محیط متخلخل (توسعه قانون دارسی)	20
1-4-2-2 مدل های غیر احتمالی (قطعی)	20

21 مدل های آماری 2-4-2-2
22 تعمیم قانون داری 3-4-2-2
25 فصل سوم * کاربردهای عملی محیط های متخلخل
26 مقدمه 1-3
26 کاربرد محیط های متخلخل به عنوان تیغه متخلخل در کانال مبدل های حرارتی 2-3
32 کاربرد محیط های متخلخل در مشعل متخلخل 3-3
35 فصل چهارم * مروری بر منابع
36 مقدمه 1-4
36 تحقیقات انجام شده پیرامون مسئله عدم تعادل حرارتی 2-4
44 اهداف پایان نامه 3-4
45 فصل پنجم * روش های حل مسئله
46 مقدمه 1-5
46 معرفی روش تفاضل محدود فشرده 2-5
48 روش تفاضل محدود فشرده در محاسبه مشتقات 1-2-5
50 روش رانج کوتای مرتبه چهار 3-5
51 بررسی دقت روش اختلاف محدود فشرده 4-5
55 روش پرتابی 5-5
57 حل معادله دیفرانسیل غیر خطی با استفاده از روش پرتابی 1-5-5
59 حل مسائل مقدار مرزی در متلب با استفاده از bvp4c 2-5-5
61 روش اغتشاشات 6-5
62 دقت تقریب اغتشاشات 1-6-5
66 فصل ششم * مطالعه عددی عدم تعادل حرارتی در محیط های متخلخل
67 مقدمه 1-6
67 معادلات حاکم در محیط های متخلخل 2-6
69 بی بعد سازی 1-2-6

71 3-6 روش حل
72 4-6 نتایج حل عددی
78 5-6 اعتبار سنجی نتایج حل عددی
79 1-5-6 تقریب اغتششات برای زمان های زود
81 2-5-6 تقریب اغتششات برای زمان های دیر
82 3-5-6 نتایج تقریب اغتششات
86 فصل هفتم * بررسی تغییرات نتایج فصل ششم در حضور ترم تولید گرما
87 1-7 مقدمه
87 2-7 مدلسازی
89 3-7 نتایج حل عددی
96 4-7 اعتبار سنجی نتایج حل عددی
96 1-4-7 تقریب اغتششات برای زمان های زود
97 2-4-7 تقریب اغتششات برای زمان های دیر
98 3-4-7 نتایج تقریب اغتششات
101 پیوست
110 مراجع

فهرست جداول

عنوان	صفحه
جدول (1-2): ویژگی های مواد متخلخل	8
جدول (1-3): مشخصات سیال	28
جدول (2-3): مشخصات کانال	28
جدول (3-3): مشخصات هوای بیرون	28
جدول (4-3): مشخصات تیغه های متخلخل	29
جدول (1-5): خطای حاصل از بکارگیری روش تفاضل محدود فشرده برای مثال اول	52
جدول (2-5): خطای حاصل از بکارگیری روش تفاضل محدود فشرده برای مثال دوم	52
جدول (1-6): مقایسه خطای حاصل از حل عددی و تقریبی	85
جدول (1-7): مقایسه خطای حاصل از حل عددی و تقریبی	100

فهرست اشکال

عنوان	صفحه
شکل (1-2): حجم کنترل که با ساختار دانه ای نامنظم پر شده است	9
شکل (2-2): حجم کنترل و سیستم در زمان های t و $t+\Delta t$	10
شکل (3-2): بردار شار حرارتی	12
شکل (4-2): سیال عبوری از منفذ محیط متخلخل	13
شکل (1-3): تیغه های متخلخل نصب شده در سطح داخلی کانال	29
شکل (2-3): نمای برشی شکل (1-3)	29
شکل (3-3): نحوه کاهش دمای سیال در حین عبور از کانال با تیغه های متخلخل	30
شکل (4-3): نحوه کاهش دمای سیال در حین عبور از کانال با تیغه های صلب	30
شکل (5-3): نحوه افزایش افت فشار سیال در حین عبور از کانال با تیغه های متخلخل	30
شکل (6-3): نحوه افزایش افت فشار سیال در حین عبور از کانال با تیغه های صلب	30
شکل (7-3): تشکیل گردابه در کانال با تیغه های متخلخل	31
شکل (8-3): تشکیل گردابه در کانال با تیغه های صلب	31
شکل (9-3): جریان 3 بعدی سیال از کانال با تیغه های صلب	31
شکل (10-3): جریان 3 بعدی سیال از کانال با تیغه های متخلخل	31
شکل (11-3): نمونه ای از مشعل های متخلخل	33
شکل (12-3): گرمایش لوله های پلاستیکی توسط مشعل متخلخل	33
شکل (13-3): پیش گرمایش قالب های ریخته گری توسط مشعل متخلخل	34
شکل (1-4): شکاف پر شده با محیط متخلخل	39
شکل (1-5): نقاط پیوسته در یک شبکه برای میان یابی مرتبه چهار در مشتق مرتبه دو	47
شکل (2-5): مسیرهای ایجاد شده در اثر انتگرال گیری	56
شکل (3-5): انطباق نتایج روش تفاضل محدود و روش پرتابی	59
شکل (1-6): محیط یک بعدی مفروض	69

- شکل (2-6): گراف های گرادیان حرارتی برای $\alpha = 2$ و $\gamma = 1$ 73
- شکل (3-6): گراف های گرادیان حرارتی برای $\alpha = 0.2$ و $\gamma = 1$ 73
- شکل (4-6): گراف های گرادیان حرارتی برای $\alpha = 1$ و γ متفاوت 74
- شکل (5-6): بزرگنمایی شکل (4-6) 74
- شکل (6-6): گراف های گرادیان حرارتی برای $\alpha = 4$ و γ متفاوت 75
- شکل (7-6): بزرگنمایی شکل (6-6) 76
- شکل (8-6): مقادیر اختلاف گرادیان حرارتی برای $\alpha = 4$ و γ متفاوت 76
- شکل (9-6): مقادیر اختلاف گرادیان حرارتی برای $\alpha = 1$ و γ متفاوت 77
- شکل (10-6): خطای میان روش های عددی و تقریبی برای حالت $\alpha = 2$ و $\gamma = 1$ 83
- شکل (11-6): بزرگنمایی شکل (10-6) در زمان های زود 84
- شکل (12-6): بزرگنمایی شکل (10-6) در زمان های دیر 84
- شکل (13-6): بزرگنمایی شکل (12-6) 84
- شکل (14-6): گراف های گرادیان حرارتی برای $\alpha = 2$ و $\gamma = 1$ در زمان های t 85
- شکل (15-6): بزرگنمایی شکل (14-6) 85
- شکل (1-7): گراف های گرادیان حرارتی برای $\alpha = 0.2$ و $\gamma = 1$ 91
- شکل (2-7): گراف های گرادیان حرارتی برای $\alpha = 2$ و $\gamma = 1$ 91
- شکل (3-7): گراف های گرادیان حرارتی برای $\alpha = 1$ و γ متفاوت 92
- شکل (4-7): بزرگنمایی شکل (3-7) 92
- شکل (5-7): گراف های گرادیان حرارتی برای $\alpha = 4$ و $\gamma = 0.6$ 93
- شکل (6-7): گراف های گرادیان حرارتی برای $\alpha = 4$ و $\gamma = 6$ 93
- شکل (7-7): گراف های گرادیان حرارتی برای $\alpha = 4$ و γ متفاوت 94
- شکل (8-7): مقادیر اختلاف گرادیان حرارتی برای $\alpha = 1$ و γ متفاوت 95
- شکل (9-7): مقادیر اختلاف گرادیان حرارتی برای $\alpha = 4$ و γ متفاوت 96
- شکل (10-7): خطای میان روش های عددی و تقریبی برای حالت $\alpha = 4$ و $\gamma = 1$ در زمان های زود 99
- شکل (11-7): خطای میان روش های عددی و تقریبی برای حالت $\alpha = 4$ و $\gamma = 1$ در زمان های دیر 99
- شکل (12-7): گراف های گرادیان حرارتی برای $\alpha = 4$ و $\gamma = 1$ در زمان های t 100

شکل (13-7): بزرگنمایی شکل (12-7) 100

فهرست علائم و اختصارات

- v : بردار سرعت
 T_0 : دمای اولیه محیط متخلخل
 T_s : دمای فاز جامد
 T_f : دمای فاز سیال
 k : رسانایی گرمایی
 h : ضریب انتقال حرارت بین فازی
 $LTNE$: عدم تعادل حرارتی محلی
 H : فرم بی بعد h
 c : ظرفیت گرمایی ویژه
 L : مقیاس طول

علائم یونانی

- ε : تخلخل محیط
 ρ : چگالی
 α : ضریب پخش حرارتی
 ϕ : فرم بی بعد دمای فاز جامد
 θ : فرم بی بعد دمای فاز سیال
 μ : لزجت سینماتیکی
 γ : نسبت رسانایی در مقیاس تخلخل

زیرنویس ها

- g : جامد
 f : سیال

* فصل اول – مقدمه ای بر انتقال حرارت

انرژی از طریق برهم کنش های سیستم با اطرافش انتقال می یابد. این برهم کنش ها را کار و گرما می گویند. امروزه انتقال گرما در حقیقت موضوعی است مرتبط با سایر علوم و صرفاً بخش جالبی از علوم مهندسی نیست. پدیده های انتقال گرما در بسیاری از مسائل صنعتی و محیطی نقش مهمی را ایفا می کنند. هیچ کاربرد ساده ای در زمینه مسائل صنعتی و محیطی نیست که به طریقی با انتقال گرما سر و کار نداشته باشد. در تولید انرژی الکتریکی ناشی از شکافت یا جوش هسته ای، احتراق سوخت های فسیلی و در استفاده از منابع زمین گرمایی¹، انتقال گرما نقش اصلی را ایفا می کند. مسائلی در این زمینه شامل فرآیندهای رسانش، جابجایی و تشعشع هستند و به طراحی وسایلی از قبیل بویلرها، کندانسرها و توربین ها مربوط می شوند. دغدغه اصلی در اینگونه مسائل این است که آهنگ انتقال گرما به ماکزیمم برسد و ضمناً مواد در دماهای بالا به صورت مواد اولیه باقی بمانند.

در ارتباط با طراحی سیستم هایی که از تبدیل انرژی خورشیدی برای گرمایش و تولید انرژی استفاده می کنند، مسائل انتقال گرمای بسیاری پیش روی محققین قرار دارد. فرآیندهای انتقال گرما بر عملکرد سیستم های پیشران، مانند موتورهای احتراق داخلی، توربین های گاز و موتور جت تاثیر می گذارند. طراحی سیستم های گرمایش هوا و آب در طراحی کوره های زباله سوز و وسایل ذخیره کریورژنیک²، خنک کردن وسایل الکترونی، طراحی سیستم های سرمایشی و تهویه مطبوع و بسیاری از فرآیندهای ساخت و تولید، مسائل انتقال گرما نقش عمده ای دارند. انتقال گرما با آلودگی آب و هوا نیز ارتباط دارد و بر آب و هوای محلی و جهانی تاثیر می گذارد.

انتقال حرارت رسانشی به انتقال انرژی ناشی از شیب دما در یک محیط گفته می شود و مکانیزم فیزیکی آن از نوع فعالیت های اتمی یا مولکولی است. این نوع انتقال گرما با قانون معروف فوریه بیان می شود و برای استفاده از این قانون در تعیین شار گرما باید تغییرات دما در محیط معلوم باشد. قانون فوریه اساس انتقال گرمای رسانشی است، با این مشخصه مهم که نمی توان آن را از اصول اولیه بدست آورد، بلکه تعمیمی مبتنی بر گواه آزمایشی است و همچنین عبارتی است که یکی از خواص

1 Geothermal

2 Cryogenic

مهم ماده یعنی رسانندگی گرمایی را تعریف می کند. این قانون یک عبارت برداری است که نشان می دهد شار گرما بر سطح تک دما عمود بوده و در جهت کاهش دما است.

رسانش گرمایی در محیط های متخلخل یکی از مباحث مهم در زمینه علوم انتقال حرارت است. مطالعه انتقال حرارت در این زمینه میدان تحقیقاتی جدایی را در سه دهه قبل بوجود آورد. در نیم قرن گذشته افراد زیادی بر روی اصول محیط های متخلخل کار کرده اند. بطور کلی انتقال حرارت و جابجایی جرم توسط یک سیال در یک محیط متخلخل شاخه ای از علوم مکانیک سیالات است که کاربردهای صنعتی فراوانی دارد. سیال در لایه های متخلخل زیر زمینی جریان یافته و باعث انتقال جرم و انرژی در بین این مواد می گردد. این انتقال انرژی در محیط متخلخل در صنایع زمین گرمایی و نفت بسیار پر اهمیت است. انتقال حرارت در محیط های متخلخل نسبت به انتقال جرم از مباحث نسبتاً جدیدتر به حساب می آید. بررسی انتقال حرارت در محیط های متخلخل برای تحلیل و طراحی انواع کاتالیزورها و عایق های حرارتی اهمیت بیشتری پیدا کرد. در سیستم های عایق کاری، مواد با رسانندگی کم با هم ترکیب شده و مواد با رسانندگی گرمایی کمتر را بوجود می آورند. این سیستم های متخلخل با رسانندگی گرمایی موثر مشخص می شوند. رسانندگی گرمایی موثر به رسانندگی گرمایی و خواص تشعشعی سطح ماده جامد و همچنین به ماهیت و کسر حجمی فضای حفره ای بستگی دارد. بحث پیرامون انتقال حرارت در محیط های متخلخل و کاربرد فراوان آن نیاز به ذکر جزئیات دقیق تر دارد که در فصل های این پایان نامه به آن اشاره می شود.

هدف این پایان نامه بررسی انتقال حرارت هدایتی در محیط های متخلخل است، هنگامی که بطور همزمان تولید گرما نیز در این محیط رخ می دهد. در این فصل مقدمه ای کوتاهی پیرامون اهمیت انتقال حرارت، مخصوصاً در محیط های متخلخل بیان شد. فصل دوم اختصاص به اساس محیط های متخلخل دارد و در آن به تشریح اصول و قوانین حاکم در این محیط ها پرداخته شده است. در فصل سوم دو نمونه از کاربردهای مهم محیط های متخلخل همراه با توضیح کامل ارائه شده است. در فصل چهارم منابع مرتبط و تحقیقات انجام شده توسط محققین مرور شده و در حد توان مقالات مرتبط با

موضوع پایان نامه بررسی شده اند. در فصل پنجم روش های مورد استفاده در حل عددی و تقریبی تشریح شده اند. این روش ها برای حل معادلات حاکم در محیط متخلخل مورد نظر ارائه شده است. در فصل ششم این پایان نامه مراحل بی بعد سازی، ساده سازی و حل عددی معادلات انرژی در حالت عدم تعادل حرارتی آمده است. در این فصل عدم تعادل حرارتی، تنها ناشی از تغییر ناگهانی دما در مرز یک محیط متخلخل می باشد. همچنین کلیه نتایج حل عددی در قالب گراف های متنوع ارائه شده است. اعتبارسنجی نتایج حل عددی در زمان های زود و دیر نیز در این فصل ارائه شده است. فصل هفتم به بررسی تغییرات نتایج عددی فصل ششم اختصاص داده شده است، زمانی که عدم تعادل حرارتی ناشی از تغییر ناگهانی دما در مرز یک محیط متخلخل در حضور ترم تولید گرما باشد. همچنین در دو فصل ششم و هفتم سعی شده تا تفسیری کامل پیرامون رفتار گراف های گرادیان حرارتی ارائه گردد. کد عددی مورد استفاده برای حل معادلات حاکم در قسمت پیوست ارائه شده است. منابع و مراجع مورد استفاده در بخش انتهایی پایان نامه گنجانده شده است.

* فصل دوم – انتقال حرارت در محیط های متخلخل

2-1 انتقال حرارت و جرم در محیط متخلخل

انتقال حرارت و جرم از میان یک محیط متخلخل، یکی از پیشرفت های مهم علمی است که مهندسان و فیزیکدانان را بیش از یک قرن به خود مشغول کرده است. مطالعه انتقال حرارت میدان تحقیقاتی جدایی را در سه دهه قبل بوجود آورد تا جایی که مطالعات آن یک بخش از مبحث جابجایی شد. در نیم قرن گذشته افراد زیادی بر روی اصول محیط های متخلخل کار کرده اند. افرادی چون اسکینیجر¹ [1]، بیر² [2]، بژان³ [3]، کاویانی⁴ [4]، اینگام و پاپ⁵ [5و6]، وفایی⁶ [7]، پاپ و اینگام⁷ [8]، بژان و همکاران⁸ [9] در این زمینه بسیار تلاش کردند.

بطور کلی انتقال حرارت و جابجایی جرم توسط سیال در یک محیط متخلخل شاخه ای از علوم مکانیک سیالات است که کاربردهای صنعتی فراوانی دارد. سیال در مواد متخلخلی همچون شن و ماسه و خرده سنگ های زیر زمینی تحت تأثیر اختلاف فشار محلی جریان یافته و باعث انتقال جرم و انرژی در بین این مواد می گردد. این انتقال انرژی در محیط متخلخل در صنایع زمین گرمایی و نفت بسیار پر اهمیت است. به علت مدیریت مناسب سفره های زیر زمینی آب و مهندسی سیستم های آبیاری، ایده های اصلی در این شاخه از مکانیک سیالات - مدل جریان داری - در قرن نوزدهم در ارتباط با مهندسی منابع طبیعی بنا نهاده شد. اما انتقال حرارت در محیط های متخلخل از مباحث نسبتاً جدیدتر به حساب می آید.

بررسی انتقال حرارت در محیط های متخلخل برای تحلیل و طراحی مبدل های گرمایی اهمیت بیشتری پیدا کرد و آن کوچک سازی وسایل انتقال حرارت است، یعنی اینکه ابعاد به طور قابل ملاحظه ای کوچک و ساختارها پیچیده هستند و در آن جریان به سمت اعداد رینولدز پایین تر سوق

1 Scheiddeger

2 Bear

3 Bejan

4 Kaviany

5 Ingham and Pop

6 Vafai

7 Pop and Ingham

8 Bejan et al.

می کند. بزرگترین نمود چنین تمایلی در سرمایش وسایل الکترونیکی در ابعاد کم و شار حرارتی بالا قابل ملاحظه است. منصفانه است که گفته شود محیط های متخلخل در مبدل های گرمایی فرمولاسیون مجددی را پیرامون طراحی و تحلیل این مبدل ها ایجاد کردند که فضای دیگری را برای توسعه تئوری مبدل های گرمایی در مقیاس کوچک بوجود آورده است [10].

2-2 قوانین اصلی

توصیف حرارت و جریان سیال در یک محیط متخلخل اشباع شده با سیال گاز یا مایع، مبتنی بر یک سری مفاهیم خاص می باشد که در انتقال حرارت سیال خالص¹ یافت نمی شود. تخلخل در یک محیط متخلخل به صورت زیر تعریف می شود:

$$\varepsilon = \frac{\text{حجم فضای خالی در نمونه محیط متخلخل}}{\text{حجم کل نمونه محیط متخلخل}} \quad (1-2)$$

مفهوم دیگری که در محیط های متخلخل به چشم می آید، فاکتور تناسبی K است. این فاکتور نفوذپذیری² یک محیط متخلخل نامیده شده و واحد آن m^2 است. در حالت عمومی نفوذپذیری یک ثابت تجربی است که با اندازه گیری افت فشار و دبی جریان از میان یک نمونه ماده متخلخل ستونی شکل بدست می آید. البته دانشمندان مدل های ساده شده ای را برای تعیین نفوذپذیری تخمین زده اند. در جدول (1-2) چند نمونه از محیط های متخلخل آمده است.

یکی از مدل های بسیار پرکاربرد در مبحث جریان در محیط های متخلخل مدل جریان دارسی³ است [11و12]، که پایه و اساس آن مشاهدات تجربی می باشد. این مشاهدات اولین بار توسط دارسی گزارش شد. او کشف کرد که سرعت متوسط سیال در یک ستون حاوی مواد متخلخل نسبت مستقیم با گرادیان فشار در آن ستون دارد.

1 Pure Fluid
2 Permeability
3 Darcy Flow Model

جدول (1-2): ویژگی های مواد متخلخل

Material	Porosity (ε)	Permeability (cm^2)
آجر	0.12 – 0.34	$4.8e-11 \sim 2.2e-9$
انواع کاتالیزورها	0.45	$5.6e-5$
فیلتر سیگار	0.17 – 0.49	$1.1e-5$
ذغال	0.02 – 0.12	-
بتون معمولی	0.02 – 0.07	$1e-9 \sim 2.3e-7$
پودر مس	0.09 – 0.34	$3.3e-6 \sim 1.5e-5$
فایبر گلاس	0.88 – 0.93	-
مو	0.95 – 0.99	-
انواع نمد	-	$8.3e-6 \sim 1.2e-5$
چرم	0.56 – 0.59	$9.5e-10 \sim 1.2e-9$
سنگ آهک	0.04 – 0.10	$2e-11 \sim 4.5e-10$
ماسه	0.37 – 0.50	$2e-7 \sim 1.8e-6$
خاک	0.43 – 0.54	$2.9e-9 \sim 1.4e-7$

منبع: اسکینیجر [1]، یژان و همکاران [9]

بر اساس آزمایشات دیده شد که سرعت متوسط سطح در مجموع با ویسکوزیته سیال نفوذپذیر در ماده متخلخل μ نسبت معکوس دارد. بر طبق این مدل:

$$\bar{u} = \frac{K}{\mu} \left(-\frac{\partial P}{\partial x} \right) \quad (2-2)$$

در حالت سه بعدی و در حضور بردار شتاب $g = (g_x, g_y, g_z)$ ، مدل داری به صورت زیر خواهد بود:

$$\bar{v} = \frac{K}{\mu} (-\nabla P + \rho g) \quad (3-2)$$

که در آن K فاکتور تناسبی نفوذپذیری است. در بخش های این فصل قوانین پیوستگی، مومنوم و انرژی در محیط های متخلخل آمده است.

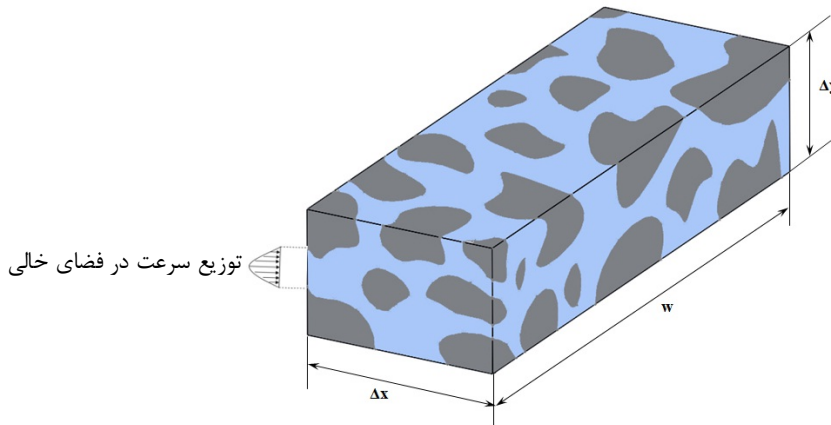
1-2-2 قانون پیوستگی در محیط متخلخل

در حجم کنترلی مطابق شکل (1-2) جریان همواره به صورت سه بعدی است. اما با توجه به حجم کنترل مورد نظر، w بسیار بزرگتر از Δx و Δy در نظر گرفته شده و در نتیجه جریان سیال و انتقال

حرارت از میان این محیط به صورت دو بعدی قابل ملاحظه است. بنابراین به منظور بررسی دبی جرمی، مهمترین نرخ جریان فقط در جهت های x و y است.

با توجه به شکل (1-2)، توزیع سرعت متغیر در سراسر فضای خالی را در جهت محور x به صورت $u_p(y, z)$ در نظر می گرفته می شود. در نتیجه نرخ جریان ورودی به حجم کنترل در جهت x به صورت زیر خواهد بود:

$$\dot{m}_x = \rho \int_y^{y+\Delta y} \int_0^w u_p(y, z) dz dy \quad (4-2)$$



شکل (1-2): حجم کنترل که با ساختار دانه ای نامنظم پر شده است

با توجه به اینکه $\dot{m} = \rho A \bar{u}$ و با در نظر گرفتن $A = w \Delta y$ می توان نوشت:

$$\bar{u} = \frac{1}{w \Delta y} \int_y^{y+\Delta y} \int_0^w u_p(y, z) dz dy \quad (5-2)$$

به طور مشابه در جهت y :

$$\dot{m}_y = \rho \int_x^{x+\Delta x} \int_0^w u_p(x, z) dz dx \xrightarrow{\dot{m} = \rho A \bar{v}} \bar{v} = \frac{1}{w \Delta x} \int_x^{x+\Delta x} \int_0^w v_p(x, z) dz dx \quad (6-2)$$

با توجه به تعریف تخلخل ε ، می توان حجم اشغال شده توسط سیال را $\varepsilon w \Delta x \Delta y$ و حجم اشغال شده توسط المان را $w \Delta x \Delta y$ در نظر گرفت. با بکار بردن قانون بقای جرم در حالتی که $\rho \neq cte$:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \varepsilon w \Delta x \Delta y) + \frac{\partial \dot{m}_x}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \dot{m}_y}{\partial y} \Delta y = 0 \quad (7-2)$$

با توجه به تعریف \dot{m}_x و \dot{m}_y می توان رابطه (7-2) را ساده سازی کرد:

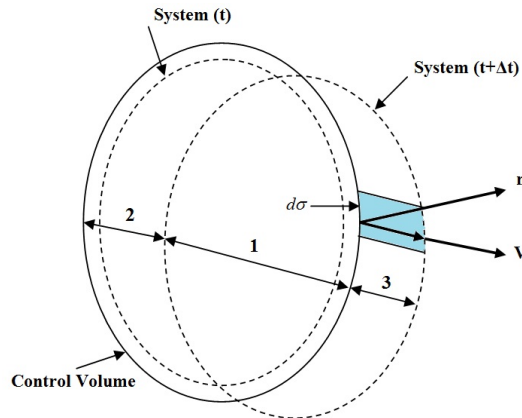
$$\varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \bar{v})}{\partial y} = 0 \quad (8-2)$$

2-2-2 معادله انرژی در محیط متخلخل در حالت تعادل حرارتی محلی¹

قانون انرژی، قانون اول ترمودینامیک است، یعنی انرژی در یک سیستم برابر است با مجموع کار و گرمای مبادله شده از سیستم. از قانون اول ترمودینامیک داریم:

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{system} = \left(\frac{\delta Q}{dt}\right)_{system} - \left(\frac{\delta W}{dt}\right)_{system} \quad (9-2)$$

ابتدا یک حجم کنترل ساکن را در نظر بگیرید که در آن B مشخصه جریان است. در زمان t سیستم منطبق بر حجم کنترل است. سیستم در زمان Δt حرکت کرده و در زمان $t+\Delta t$ فضایی را طبق شکل (2-2) اشغال می کند.



شکل (2-2): حجم کنترل و سیستم در زمان های t و $t+\Delta t$

نرخ تغییر سیستم مطابق رابطه زیر است:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dB}{dt}\right)_{system} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[B_1(t+\Delta t) + B_3(t+\Delta t)] - [B_1(t) + B_2(t)]}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{B_1(t+\Delta t) - B_1(t)}{\Delta t} + \frac{B_3(t+\Delta t)}{\Delta t} - \frac{B_2(t)}{\Delta t} \right) \end{aligned} \quad (10-2)$$

1 Local Thermal Equilibrium (LTE)

جمله اول تغییرات حجم کنترل را نشان می دهد. با توجه به اینکه $b = B/m$ و $\rho = m/V$ می توان نوشت:

$$\left(\frac{dB}{dt}\right)_V = \int \frac{\partial(b\rho)}{\partial t} dV \quad (11-2)$$

دو جمله بعد تغییرات سطح کنترل را نشان می دهد. با توجه به اینکه $x = v \times \Delta t.n$

$$\left(\frac{dB}{dt}\right)_S = \int b\rho \vec{V}.n.d\sigma \quad (12-2)$$

از ترکیب روابط (11-2) و (12-2) برای قانون انتقال می توان نوشت:

$$\left(\frac{dB}{dt}\right)_{system} = \int_{CV} \frac{\partial(b\rho)}{\partial t} dV + \int_{CS} b\rho \vec{V}.n.dS \quad (13-2)$$

فرمول تبدیل (13-2) براساس بیان فیزیکی سیستم و حجم کنترل بدست آمده است [13]. از رابطه انتقال، قانون بقای جرم به صورت زیر بدست می آید:

$$B = m \rightarrow \left(\frac{dm}{dt}\right)_{system} = \int_{CV} \frac{\partial\rho}{\partial t} dV + \int_{CS} \rho \vec{V}.n.dS = 0 \quad (14-2)$$

برای حجم کنترل V که با سطح تکه ای S در بر گرفته شده است، می توان قضیه دیورژانس را نوشت. یعنی می توان انتقال حرارت را در طول مرزهای سیستم برحسب حجم کنترل بیان کرد:

$$\int_{CS} a.n.dS = \int_{CV} \nabla.a.dV \quad (15-2)$$

با استفاده از معادله (15-2)، معادله (14-2) به فرم زیر تبدیل می شود:

$$\int_{CV} \left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla(\rho V)\right] dV = 0 \rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla(\rho V) = 0 \quad (16-2)$$

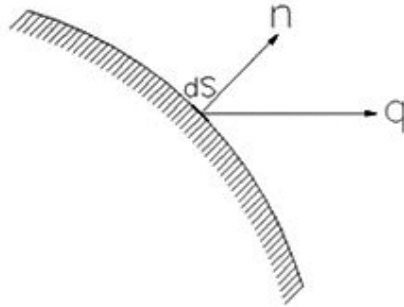
با توجه به اینکه $\rho = cte$ در نتیجه رابطه (16-2) به فرم زیر تبدیل می شود:

$$\nabla.V = 0 \quad (17-2)$$

با استفاده از روابط (15-2) و (17-2)، معادله (13-2) را به فرم زیر نوشته می شود:

$$\left(\frac{dB}{dt}\right)_{system} = \int_{CV} \rho \left(\frac{\partial b}{\partial t} + \vec{V}\nabla b\right) dV \quad (18-2)$$

از آنجاییکه در زمان t سیستم، حجم کنترل را اشغال می کند، نرخ انتقال حرارت در طول مرزهای سیستم را می توان برحسب حجم کنترل بیان کرد. با انتگرال گیری از نرخ انتقال حرارت $q.n.dS$ از المان سطح dS ، می توان انتقال حرارت را در تمام سطح کنترل بدست آورد:



شکل (3-2): بردار شار حرارتی

$$\left(\frac{\delta Q}{dt}\right)_{system} = -\int_{CS} q.n.dS = -\int_{CV} \nabla q.dV \quad (19-2)$$

همچنین در محیط مورد نظر کار انجام شده توسط اختلاف فشار، تنش های ویسکوز، نیروی شفت محوری و نیروی الکتریکی، صفر در نظر گرفته می شود. اما برای مواردی که نیروی وارد بر سیستم از یک جریان الکتریکی خارجی است، می توان نوشت:

$$\left(\frac{\delta W}{dt}\right)_{system} = -\int_{CV} u'''dV \quad (20-2)$$

در نتیجه با استفاده از رابطه (18-2) و جایگذاری معادلات (19-2) و (20-2) در معادله (9-2) رابطه زیر بدست می آید:

$$\int_{CV} \rho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \vec{V}\nabla e\right)dV = -\int_{CV} \nabla q.dV + \int_{CV} u'''dV \quad (21-2)$$

با حذف عملیات انتگرالی قانون بقای انرژی برای حجم کنترل بدست می آید:

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \vec{V}\nabla e = -\nabla.q + u''' \quad (22-2)$$

با توجه به اینکه:

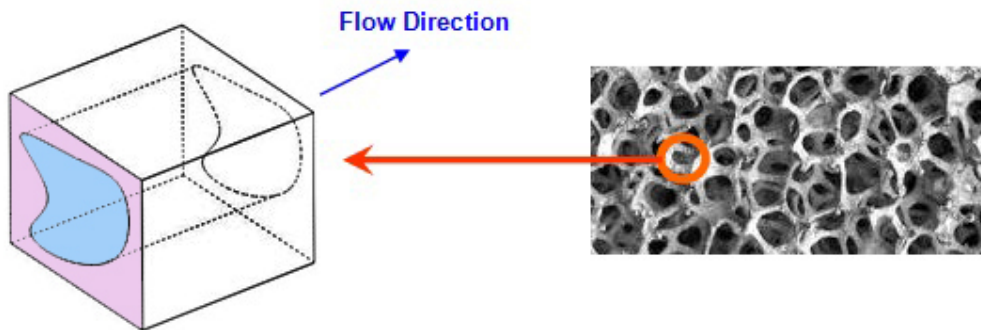
$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} = c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (23-2)$$

$$q = -k \cdot \nabla T \quad (24-2)$$

با جایگذاری روابط (23-2) و (24-2) در رابطه (22-2) معادله انرژی به فرم زیر بدست می آید:

$$(\rho c) \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho c) \nabla \nabla T = \nabla (k \nabla T) + q''' \quad (25-2)$$

ابتدا در یک منفذ مطابق شکل (4-2) معادله انرژی (25-2) را در حالت تعادل حرارتی نوشته، زمانی که سازه متخلخل و سیال در تعادل حرارتی هستند. البته این نکته قابل ذکر است که فرض حالت تعادل حرارتی برای محیط هایی با منافذ کوچک مثل عایق های حرارتی صحیح است، اما برای راکتورهای هسته ای یا قطعات الکترونیکی کوچک که دمای جامد و سیال بسیار متفاوت است، این فرض صحیح نمی باشد.



شکل (4-2): سیال عبوری از منفذ محیط متخلخل

در شکل (4-2) تخلخل به صورت زیر تعریف می شود:

$$\varepsilon = \frac{A_p \Delta x}{A \Delta x} \quad (26-2)$$

که در آن $A_p \Delta x$ حجم فضای خالی در المان حجمی $A \Delta x$ و A_p سطح مقطع متوسط فضای خالی المان است. با فرض همگن بودن محیط، معادله انرژی را برای قسمت جامد و سیال نوشته تا در نهایت معادله انرژی به صورت متوسط برای کل محیط بدست آید. معادله انرژی در فاز جامد، با در نظر گرفتن منبع حرارتی به صورت ذیل خواهد بود:

$$\rho_s c_s \frac{\partial T}{\partial t} = k_s \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + q_s''' \quad (27-2)$$

با انتگرالگیری روی حجم اشغال شده توسط فاز جامد خواهیم داشت:

$$\Delta x (A - A_p) \rho_s c_s \frac{\partial T}{\partial t} = \Delta x (A - A_p) k_s \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \Delta x (A - A_p) q_s''' \quad (28-2)$$

با فرض تراکم ناپذیری، معادله انرژی فاز سیال به صورت زیر خواهد بود:

$$\rho_f c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_p \frac{\partial T}{\partial x} \right) = k_f \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \mu \varepsilon \quad (29-2)$$

آخرین ترم سمت راست معادله (29-2) $\mu \varepsilon$ ، نشان دهنده انرژی مورد نیاز به واسطه تلفات لزجت یا افزایش آنتروپی است. این ترم برابر با قدرت مکانیکی مورد نیاز برای بیرون کشیدن سیال ویسکوز از درون منفذ است. مجدد با انتگرال گیری از معادله (29-2) روی حجم اشغال شده توسط فاز سیال خواهیم داشت:

$$\Delta x A_p \rho_f c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \Delta x A_p \rho_f c_p u \frac{\partial T}{\partial x} = \Delta x A_p k_f \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \Delta x \mu \iint_{A_p} \varepsilon dA_p \quad (30-2)$$

همچنین در ترم آخر سمت چپ معادله $Au = \iint_{A_p} u_p dA_p$ برابر Au است. در نهایت با ترکیب

کردن معادلات (28-2) و (30-2) معادله انرژی در حالت تعادل حرارتی بدست می آید:

$$\left[\varepsilon \rho_f c_{p_f} + (1 - \varepsilon) \rho_s c_s \right] \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_f c_{p_f} u \frac{\partial T}{\partial x} = \quad (31-2)$$

$$= \left[\varepsilon k_f + (1 - \varepsilon) k_s \right] \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (1 - \varepsilon) q_s''' + u \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \rho_f g_x \right)$$

در معادله (31-2) باید توجه داشت که $k_{eff} = \varepsilon k_f + (1 - \varepsilon) k_s$ است. رسانایی گرمایی کلی محیط متخلخل به شکل هندسه محیط متخلخل بستگی دارد [11]. اگر هدایت حرارتی در فازهای جامد و سیال در راستای هم اتفاق بیفتد، رسانایی گرمایی کل برابر میانگین حسابی وزن دار ضرایب رسانایی جامد k_s و سیال k_f است:

$$k_{A_{eff}} = \varepsilon k_f + (1 - \varepsilon) k_s \quad (32-2)$$

اما اگر هدایت حرارتی فازهای جامد و سیال به صورت سری و به دنبال هم اتفاق بیفتد، رسانایی گرمایی کل برابر میانگین همساز وزن دار ضرایب رسانایی جامد k_s و سیال k_f است:

$$\frac{1}{k_{H,eff}} = \frac{1-\varepsilon}{k_s} + \frac{\varepsilon}{k_f} \quad (33-2)$$

3-2-2 معادلات انرژی در محیط متخلخل در حالت عدم تعادل حرارتی محلی¹

در اکثر کاربردهای عملی محیط های متخلخل، فرض یکسان بودن دمای فازهای جامد و سیال برقرار نیست. عدم تعادل حرارتی بر اثر عوامل مختلف ایجاد می شود که در این حالت حجم محلی از فازهای جامد و سیال از تعادل حرارتی دور خواهند ماند. در ذیل چهار مورد از دلایل ایجاد عدم تعادل حرارتی محلی آمده است:

- (1) هنگامی که دما در سطوح مرزی بطور قابل ملاحظه و ناگهانی با زمان تغییر کند.
 - (2) زمانی که تولید حرارت مهمی در هر یک از فازها رخ دهد، یعنی زمانی که انتقال حرارت عمده ناشی از تولید حرارت در یک فاز است و انتقال حرارت از طریق سطوح مرزی محیط متخلخل از اهمیت کمتری برخوردار است.
 - (3) زمانی که یک سیال بسیار داغ وارد یک ساختار جامد متخلخل بسیار سرد شود.
 - (4) فازهای جامد و سیال دارای ظرفیت های حرارتی و ضرایب هدایت حرارتی متفاوت باشند، در این صورت نرخ محلی تغییر دما برای هر دو فاز مساوی نخواهد بود.
- برای بررسی انتقال حرارت بین فازهای جامد و سیال در حالت عدم تعادل حرارتی، ترم دیگری به معادلات انرژی اضافه می شود. این ترم مقدار انتقال حرارت بین دو فاز را بر مبنای اختلاف دما دو فاز و ضریب انتقال حرارت بین فازی h_{sf} بیان می کند. مدل های تقریبی مختلفی برای بیان عدم تعادل

¹ Local Thermal Non-Equilibrium (LTNE)

حرارتی بر مبنای h_{sf} توسط دانشمندان گذشته مطرح شد. کاویانی [4] سه نمونه از این مدل های تقریبی را بیان کرده است:

$$(1) \text{ مدل تقریبی شومان}^1$$

این مدل از ابتدایی ترین، ساده ترین و کم دقت ترین مدل هاست. دو معادله آن بصورت زیر می باشند:

$$\frac{\partial \langle T \rangle^f}{\partial t} + \langle u \rangle^f \frac{\partial \langle T \rangle^f}{\partial x} = h_{sf} \frac{A_0}{\varepsilon(\rho c_p)_f} (\langle T \rangle^s - \langle T \rangle^f) \quad (34-2)$$

$$\frac{\partial \langle T \rangle^s}{\partial t} = -h_{sf} \frac{A_0}{(1-\varepsilon)(\rho c_p)_s} (\langle T \rangle^s - \langle T \rangle^f) \quad (35-2)$$

جایی که $A_0 = \frac{A_{fs}}{V}$ مساحت سطح مخصوص و A_{fs} مساحت سطح در تماس دو فاز است. $u_p = \langle u \rangle^f$ سرعت متوسط سیال در حفره ها می باشد. در این مدل هدایت حرارتی محوری² و پخش³ در معادله انرژی فاز جامد به حساب نیامده اند. همچنین این مدل فقط برای مسائل گذرا ارائه شده است.

$$(2) \text{ مدل پیوسته - جامد}^4$$

در این مدل هدایت حرارت محوری در هر دو فاز با استفاده از ضرایب هدایت حرارتی موثر k_{se} و k_{fe} لحاظ شده اند. این مدل به صورت زیر می باشد:

$$\frac{\partial \langle T \rangle^f}{\partial t} + \langle u \rangle^f \frac{\partial \langle T \rangle^f}{\partial x} = \frac{\langle k \rangle^f}{\varepsilon(\rho c_p)_f} \frac{\partial^2 \langle T \rangle^f}{\partial x^2} + h_{sf} \frac{A_0}{\varepsilon(\rho c_p)_f} (\langle T \rangle^s - \langle T \rangle^f) \quad (36-2)$$

1 Schumann Approximation Model

2 Axial Heat Conduction

3 Dispersion - Thermal Diffusion

1 Continuous-Solid Model

$$\frac{\partial \langle T \rangle^s}{\partial t} = \frac{\langle k \rangle^s}{(1-\varepsilon)(\rho c_p)_s} \frac{\partial^2 \langle T \rangle^f}{\partial x^2} - h_{sf} \frac{A_0}{(1-\varepsilon)(\rho c_p)_s} (\langle T \rangle^s - \langle T \rangle^f) \quad (37-2)$$

در این مدل h_{sf} به صورت تجربی بدست آمده است.

(3) مدل مبنی بر پخش ذرات¹

این مدل بهبود یافته مدل قبلی است و در آن جمله پخش جرم² اعمال شده است. این مدل به صورت زیر می باشد:

$$\frac{\partial \langle T \rangle^f}{\partial t} + \langle u \rangle^f \frac{\partial \langle T \rangle^f}{\partial x} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\langle k \rangle}{(\rho c_p)_f} + D_{xx}^d \right) \frac{\partial^2 \langle T \rangle^f}{\partial x^2} + h_{sf} \frac{A_0}{\varepsilon(\rho c_p)_f} (T_{sf} - \langle T \rangle^f) \quad (38-2)$$

$$\frac{\partial T_s}{\partial t} = \frac{\langle k \rangle^s}{(\rho c_p)_s} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T_s}{\partial r} \right) \quad (39-2)$$

$$-k_s \frac{\partial T_s}{\partial r} = h_{sf} (T_{sf} - \langle T \rangle^f) \leftarrow \text{on} \rightarrow A_{sf} \quad (40-2)$$

که در آن $T_{sf} = T_s$ بر روی A_{sf} است. با در نظر گرفتن اینکه $Pe = \varepsilon u_p \frac{d}{\alpha_f}$ ، واکیو و کاگوی³ در

این مدل پیشنهاد کردند که $\frac{D_{xx}^d}{\alpha_f} = 0.5Pe$ است. این مدل از میان سه مدل ارائه شده بیشترین دقت

را دارا بوده و بطور گسترده برای بسترهای حاوی ذرات کروی استفاده می شود. این مدل هم فقط برای مسائل گذرا ارائه شده است.

بر مبنای مدل دوم نیلد و بژان⁴ [14] و کاویانی [4] معادلات انتقال حرارت زیر را برای حالت گذرا و در شرایط عدم تعادل حرارتی در محیط متخلخل ارائه کردند:

$$\varepsilon(\rho c)_f \frac{\partial T_f}{\partial t} = \varepsilon \nabla(k_f \nabla T_f) + h(T_s - T_f) + \varepsilon q''' \quad (41-2)$$

$$(1-\varepsilon)(\rho c)_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = (1-\varepsilon) \nabla(k_s \nabla T_s) + h(T_f - T_s) + (1-\varepsilon)q''' \quad (42-2)$$

2 Dispersion-Particle-Based Model

3 Mass Diffusion

4 Wakao and Kaguei

1 Neild and Bejan

از معادلات (41-2) و (42-2) به عنوان معادلات حاکم در محیط متخلخل مورد نظر در پایان نامه استفاده شده است که مراحل بی بعد سازی آن به تفصیل در فصول آینده بیان خواهد شد.

2-2-3-1 بررسی روابط تجربی ضریب انتقال حرارت بین فازی

تلاش های فراوانی برای تعیین مقادیر مناسب ضریب انتقال حرارت h طبق روش های متوسط گیری انجام شد و محققین فرضیات مختلفی را درباره آن ارائه کردند (مراجعه شود به کتاب های نوشته شده توسط ویتاکر¹ [15]، کوئنتارد و همکاران² [16]، کوئنتارد و ویتاکر [17] و مقاله ارائه شده توسط کوئنتارد [18]). با نگاهی دقیق تر در تحقیقات صورت گرفته خواهیم یافت که عبارات بیان شده برای ضریب انتقال حرارت h_{sf} بسیار بیشتر از h می باشد. این دو مقدار از طریق رابطه زیر به هم مربوط می شوند:

$$h = h_{sf} a_{sf} \xrightarrow{\text{where}} a_{sf} = \frac{6(1-\varepsilon)}{d_p} \quad (43-2)$$

در ادامه چند نمونه از روابط تجربی و عددی ضریب انتقال حرارت بین فازی h_{sf} بررسی خواهد شد. واکائو و کاگوئی [19] با استفاده از نتایج تجربی رابطه زیر را پیشنهاد کردند:

$$h_{sf} = \frac{k_f (2 + 1.1 \text{Pr}^{\frac{1}{3}} \text{Re}^{0.6})}{d_p} \quad (44-2)$$

در این رابطه $\text{Re} = \frac{\varepsilon u_p d}{\nu}$ است. زمانی که $\text{Re} \rightarrow 0$ حالت مجانبی رابطه بالا اتفاق می افتد $h_{sf} d / k_f = 2$ آن ها بیان کردند زمانیکه $\text{Re} \rightarrow 0$ ، اندازه گیری h_{sf} سخت تر شده و عدم قطعیت آزمایشگاهی بزرگتر می شود. در رینولدزهای پایین³، انتقال حرارت جابجایی بین وجهی در مقایسه با جملات دیگر معادله انرژی، مهم تر می باشد و لذا صحت حالت مجانبی پیشنهاد شده برای زمانی که $\text{Re} \rightarrow 0$ ، نمی تواند به صورت تجربی بررسی گردد.

2 Whitaker

3 Quintard et al.

1 Low Reynolds Number

هوانگ و همکاران¹ [20] نیز با استفاده از نتایج تجربی و انجام آزمایشات رابطه زیر را پیشنهاد کردند:

$$h_{sf} = \begin{cases} 0.004 \left(\frac{d_v k_f}{d_p^2} \right) \text{Pr}^{0.33} \text{Re}^{1.35} \rightarrow (\text{Re} < 75) \\ 1.064 \left(\frac{k_f}{d_p} \right) \text{Pr}^{0.33} \text{Re}^{0.59} \rightarrow (\text{Re} > 350) \end{cases} \quad (45-2)$$

در رابطه آن ها $a_{sf} = 20.364 \frac{(1-\varepsilon)\varepsilon^2}{d_p}$ و d_p قطر متوسط حفره ها می باشد. فرمول ارائه شده

توسط دیکسون و کرسول² [21] به صورت زیر است:

$$h_{sf} = \left[\frac{d_p \varepsilon}{0.2555 \text{Pr}^{\frac{1}{3}} \text{Re}^{\frac{2}{3}} k_f} + \frac{d_p}{10k_s} \right]^{-1} \quad (46-2)$$

شبيه سازی عددی جریان در یک محیط متخلخل توسط کیوواهارا و همکاران³ [22]، رابطه زیر را برای ضریب انتقال حرارت بین فازی نتیجه داد:

$$h_{sf} = \frac{k_f}{d_p} \left[\left(1 + \frac{4(1-\varepsilon)}{\varepsilon} \right) + \frac{1}{2} (1-\varepsilon)^{\frac{1}{2}} \text{Re}^{0.6} \text{Pr}^{\frac{1}{3}} \right] \quad (47-2)$$

رابطه تجربی دیگری که توسط ویتاکر [23] ارائه شد، اینچنین است:

$$h_{sf} = \frac{k_f}{d_p} \left[2 + \left(0.4 \text{Re}_d^{\frac{1}{2}} + 0.2 \text{Re}_d^{\frac{2}{3}} \right) \text{Pr}^{0.4} \right] \quad (48-2)$$

در این رابطه $\text{Re}_d = \frac{u_D d}{\nu(1-\varepsilon)}$ و $d_p = \frac{6V_s}{A_{fs}} = \frac{6(1-\varepsilon)V}{A_{fs}}$ می باشد. در روابط (45-2) و (46-2)

هنگامی که $\text{Re} = 0$ باشد، مقدار ضریب انتقال حرارت بین فازی نیز صفر خواهد بود. این بدین معنی است که در محیط متخلخل ساکن، هیچ انتقال حرارتی بین دو فاز مجزا اتفاق نمی افتد و میدان دما بطور مستقل تعیین خواهد شد. اما در روابط (44-2)، (47-2) و (48-2) در غیاب جریان سیال،

2 Hwang et al.

3 Dixon and Cresswell

4 Kuwahara et al.

مقدار ضریب انتقال حرارت بین فازی صفر نخواهد بود. نکته بسیار مهم دیگر اینکه، در این حالت ضریب انتقال حرارت بین فازی مستقل از ضریب رسانایی فاز جامد خواهد بود.

4-2-2 معادله مومنتوم در محیط متخلخل (توسعه قانون داری)

تحقیقات هنری داری [24] در زمینه آب شناسی منابع آب در یکی از شهرهای فرانسه و تجربیاتش در زمینه جریان یک بعدی دائم، تناسبی را میان نرخ جریان و اختلاف فشار به صورت زیر معلوم کرد:

$$u = -\frac{K}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (49-2)$$

که $\frac{\partial P}{\partial x}$ گرادیان فشار در مسیر جریان و μ ویسکوزیته دینامیک سیال است. ضریب K نفوذپذیری ویژه نامیده شده و مستقل از طبیعت سیال است اما این ضریب وابسته به هندسه محیط بوده و واحد آن m^2 است. معادله داری در فرم سه بعدی به صورت زیر قابل تعمیم است:

$$v = \mu^{-1} K \cdot \nabla P \quad (50-2)$$

معادله داری با نتایج بسیاری از یافته های تجربی تحقیق و بازبینی شده است. با کمک مدل های غیر احتمالی (قطعی) و آماری دیدگاه های نظری پیرامون معادله داری بازبینی شده است. از جمله افرادی که پیرامون این موضوعات تحقیقاتی را انجام داد، لیج¹ [25] است. او نشان داد که داده های اصلی داری با تغییرات ویسکوزیته ناشی از تغییر دما تحت تاثیر قرار می گیرد.

1-4-2-2 مدل های غیر احتمالی (قطعی)

اگر ضریب نفوذ پذیری ماده متخلخل K بوسیله هندسه محیط بدست آید، لذا به وضوح امکان محاسبه آن با توجه به پارامترهای هندسی امکان پذیر می شود. پیرامون این موضوع تلاش های زیادی توسط دالین² [26] انجام شد. در مورد بستر ذرات، می توان قطر متوسط موثر ذرات را به

1 Lage
1 Dullien

صورت D_p معرفی نمود. در این مورد تئوری شعاع هیدرولیکی توسط کارمن و کازنی¹ به رابطه زیر منجر شد:

$$K = \frac{D_p^2 \varepsilon^3}{180(1-\varepsilon)^2} \quad (51-2)$$

که در آن:

$$D_{p_2} = \frac{\int_0^\infty D_p^3 h(D_p) dD_p}{\int_0^\infty D_p^2 h(D_p) dD_p} \quad (52-2)$$

در این رابطه $h(D_p)$ تابع دانسیته برای توزیع قطر D_p می باشد. ثابت 180 در معادله (51-2) انطباق خوبی با نتایج تجربی دارد. معادله کارمن-کازنی نتایج رضایت بخشی را برای محیطی که شامل ذرات کروی شکل بود، به همراه داشت. این معادله برای مواردی که شکل ذرات از شکل کروی فاصله پیدا می کند و اختلاف اندازه ذرات زیاد می شود معتبر نمی باشد. تئوری اصلاح شده کارمن-کازنی توسط لیو و همکاران² [27] ارائه گردید. محیط متخلخل فیبری توسط داویس و جیمز³ [28] مدل شد. رالی و همکاران⁴ [29] نیز نشان دادند که ثابت کارمن-کازنی به تخلخل و نسبت جانبی فیبر بستگی دارد. رابطه کارمن-کازنی توسط موران و همکاران⁵ [30] برای گرافیت طبیعی که نمونه ای از محیط متخلخل غیر ایزوتروپیک است، بکار گرفته شد.

2-4-2-2 مدل های آماری

محققان بسیاری از مفاهیم آماری برای تأیید قانون داریسی استفاده نمودند. اغلب آنها فرض ها و ساده سازی های بنیادی را به منظور رسیدن به قانون داریسی انجام دادند، اما ویتاکر [31] معادله داریسی را برای سیال غیر قابل تراکم بدون هیچگونه ساده سازی بنیادی بدست آورد. حتی این دستیابی، محدود

2 Carman and Kozeny

3 Liu et al.

4 Davis and James

5 Rahli et al.

6 Mauran et al.

به محیط های متخلخل همگن یا محیط های متخلخلی که به لحاظ شکلی پریودیک هستند، نمی باشد. اما این فرض در این جا لحاظ شده است که محیط نباید دارای تغییرات ناگهانی در ساختار خود باشد.

اگر محیط دارای ساختار پریودیک باشد، روش همگن سازی می تواند برای بدست آوردن نتایج ریاضی مورد استفاده قرار گیرد. این روش با جزئیات توسط ان و پالیسوسکی¹ [32]، می و همکاران² [33] و ان [34] توضیح داده شد.

2-2-4-3 تعمیم قانون داری

همانطور که گفته شد معادلات داری در حالت یک بعدی و سه بعدی به ترتیب به فرم روابط (2-2) و (2-50) هستند. بسیاری از دانشمندان گذشته در بحث جابجایی محیط های متخلخل با بسط معادله داری از رابطه ای به فرم زیر استفاده می کردند:

$$\rho_f \left[\varepsilon^{-1} \frac{\partial v}{\partial t} + \varepsilon^{-2} (v \cdot \nabla) v \right] = -\nabla P - \frac{\mu}{K} v \quad (53-2)$$

این معادله بوسیله یک مقایسه با معادلات ناویر استوکس³ بدست آمد. بک⁴ [35] ترم $(v \cdot \nabla) v$ را در معادله (2-53) تغییر داد و به دنبال آن جوزف و همکاران⁵ [36] تغییرات مناسبی را در معادله داری به صورت زیر اعمال نمودند:

$$\nabla P = -\frac{\mu}{K} v - c_F K^{-\frac{1}{2}} v_f |v| v \quad (54-2)$$

که c_F ثابت درگ شکلی بی بعد می باشد. در سرعت های بالا درگ شکلی ناشی از موانع طبیعی از محیط متخلخل است. معادله (2-54) تصحیح معادله ای وابسته به نام های دوپویت⁶ [37] و

1 Ene and Polisevski

2 Mei et al.

3 Navier-Stokes

4 Beck

5 Joseph et al.

1 Dupuit

فورچایمر¹ [38] است. این معادله را معادله فورچایمر می نامند که این نام با توجه به آخرین ترم این معادله یعنی ترم فورچایمر انتخاب شده است. وارد² [39] بر این تصور بود که c_F می بایست یک ثابت جهانی باشد، اما مشخص شده است که c_F با طبیعت محیط متخلخل تغییر می کند و به عنوان مثال برای فیبرهای فلزی متخلخل از کف فلز 0/1 است. یک پیشنهاد برای معادله داری، معادله برینکمن³ است:

$$\nabla P = -\frac{\mu}{K}v + \tilde{\mu}\nabla^2 v \quad (55-2)$$

در این معادله دو ترم ویسکوز وجود دارد. اولی ترم داری و دومی شبیه ترم لاپلاس⁴ در معادلات ناویراستوکس است. ضریب $\tilde{\mu}$ ویسکوزیته موثر است. برینکمن ضرایب μ و $\tilde{\mu}$ را برابر هم قرار داد اما در حالت عمومی چنین فرضی صحیح نمی باشد. معادله (55-2) بسط برینکمن از قانون داری نامیده می شود اما این بیان گمراه کننده است. برینکمن هیچ ترمی را به معادله داری اضافه نکرد. بلکه او یک رابطه بین ضریب نفوذ پذیری K و ضریب تخلخل بدست آورد و هنگامی این رابطه معتبر است که تخلخل به اندازه کافی زیاد باشد ($\varepsilon > 0.6$).

هنگاهی که معادله برینکمن به عنوان معادله مومنتوم بکار گرفته شد، وضعیت رابطه بسیار پیچیده بود. در معادله (55-2)، P فشار ذاتی سیال است، همچنین تمامی ترم ها در معادله (55-2) نیرو بر واحد حجم سیال را نشان می دهند. هنگام استفاده از معادله برینکمن محاسبه تاثیر تغییرات تخلخل در نزدیکی دیواره بسیار مهم است. بعضی از دانشمندان استفاده از معادله برینکمن را در وضعیت های خاصی بسیار مناسب می دانند. مثلاً هنگامی که هدف ما مقایسه سیال در محیط متخلخل با سیال خالص باشد. هنگامی که ضریب نفوذپذیری K به سمت بینهایت میل می کند $K \rightarrow \infty$ ، معادله برینکمن به معادله ناویراستوکس تبدیل می شود و در حالتی که K به سمت صفر میل کند $K \rightarrow 0$ ،

2 Forchheimer

3 Ward

4 Brinkman

5 Laplace

معادله برینکمن به معادله دارسی کاهش می یابد. وضعیت دیگر زمانی رخ می دهد که هدف ما تطبیق راه حل ها در یک محیط متخلخل در مجاورت یک سیال ویسکوز باشد.

تعدادی از دانشمندان جمله لاپلاس را به معادله (54-2) اضافه کردند و در نهایت این رابطه، معادله برینکمن-فورچیمیر نامیده شد. اعتبار سنجی این رابطه بسیار واضح نمی باشد. دانشمندانی چون وفایی، تی ان¹ و چانگ و سو² این معادله را به صورت زیر نوشتند:

$$\rho_f \left[\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} \nabla \left(\frac{v \cdot v}{\varepsilon} \right) \right] = -\nabla P + \frac{\mu}{\varepsilon \rho_f} \nabla^2 v - \frac{\mu}{K} v - c_F \rho_f K^{-\frac{1}{2}} |v| v \quad (56-2)$$

برای سیالات غیر قابل تراکم $\nabla \cdot v = 0$ بوده و همچنین جمله $\frac{1}{\varepsilon} \nabla \left(\frac{v \cdot v}{\varepsilon} \right)$ به $\varepsilon^{-1} v \cdot \nabla (v/\varepsilon)$ کاهش می یابد.

1 Tien
2 Chang and Hsu

* فصل سوم – کاربردهای عملی محیط های متخلخل

3-1 مقدمه

محیط های متخلخل در صنایع مختلف کاربردهای بسیاری دارند و از این میان انتقال حرارت در یک محیط متخلخل از مباحث جدیدتر به حساب می آید. از آن جمله می توان به تعداد زیادی از فرآیندهای حرارتی اشاره کرد که به دانشی از انتقال حرارت و جرم از میان یک محیط متخلخل نیاز دارد. تکنولوژی خشک کردن میوه ها [40]، انتقال حرارت در بافت های بیولوژیکی [41]، تحلیل حرارتی مشعل های متخلخل و پروسه احتراق در آن [42]، از جمله کاربردهای محیط های متخلخل هستند که در آن ها تغییرات حرارتی مشهود است و در فرآیندهایی مثل کاتالیزورهای شیمیایی در صنایع ذوب [43] و راکتورهای صنعتی [44]، تولید گرما نیز بر پروسه انتقال حرارت تاثیر می گذارد. در این فصل دو نمونه از کاربردهای محیط های متخلخل شرح داده شده است.

3-2 کاربرد محیط های متخلخل به عنوان تیغه متخلخل¹ در کانال مبدل های حرارتی

یک کانال می تواند به طور کامل یا ناقص با محیط متخلخل پر شود. این محیط متخلخل می تواند به صورت یک لایه متخلخل یا به صورت بلوک های گسسته از هم باشد. اکثر مطالعات تجربی و عددی انجام شده پیرامون کانال پر شده با محیط متخلخل نشان می دهد که همواره بطور ذاتی یک افت فشار بالا در چنین کانال هایی اتفاق می افتد. بطور قطع این افت فشار در کانال هایی که به صورت ناقص با محیط متخلخل پر شده اند، کمتر است. بنابراین به منظور حداکثر انتقال حرارت، نیازی به پرکردن کامل کانال با محیط متخلخل نیست. هوانگ و وفایی² [45] نشان دادند که حضور بلوک های متخلخل در سطح خارجی صفحه در یک کانال به طور قابل توجه ویژگی های جریان سیال و انتقال حرارت را تغییر می دهند. آن ها تاثیر پارامترهای مختلف مثل اعداد دارسی، رینولدز و پرانتل را بر میدان جریان و انتقال حرارت بررسی کردند. نتایج آن ها نشان داد که انتقال حرارت محلی به دقت به میدان سرعت وابسته است. گردابه های تشکیل شده تاثیر زیادی بر ویژگی های انتقال حرارت دارد.

1 Porous Baffle

2 Huang and Vafai

یک مقایسه بین یک کانال خالی و یک کانال پر شده با محیط متخلخل نشان می دهد که در کانال دوم می توان انتقال حرارت را افزایش داد. تارگوئی و کاهالراس¹ [46] در یک تحقیق عددی، دو شکل مختلف از کانال های پر شده با محیط متخلخل را بررسی کردند. در یکی از کانال ها، محیط متخلخل در داخل یک سری شکاف حلقوی و در دیگری به صورت شطرنجی جاسازی شده بود. نتایج آن ها افزایش انتقال حرارت را نشان داد، اگرچه علاوه بر افت فشار بالا، خطوط جریان از حالت طبیعی بسیار منحرف شده بود.

تعداد زیادی از مقالات برای مدل سازی جریان آرام، درهم و انتقال حرارت، کاربرد سطوح گسترده مثل فین ها و تیغه ها را گزارش می کنند. این مقالات پیرامون مساحت سطح بهینه، شکل ها و جهت فین ها به منظور افزایش انتقال حرارت در یک دبی جرمی مشخص بحث می کنند. در این مبحث هم افرادی مثل بوهادف و همکاران² [47] و آل کام و آل نیمر³ [48]، عملکرد حرارتی محیط متخلخل را در مبدل های حرارتی لوله ای بررسی کردند. امروزه استفاده از سطوح گسترش یافته متخلخل مثل فین ها و بافل ها برای افزایش انتقال حرارت در کنار کاهش افت فشار بسیار قابل توجه است. در این قسمت جریان سیال در یک کانال مورد بررسی قرار می گیرد. در این کانال تعدادی تیغه به دیواره داخلی متصل شده اند. سیال عبوری از این کانال بخار آب می باشد که گاز ایده آل فرض شده است. سایر فرضیات به صورت خلاصه در ذیل آمده است:

- (1) سیال متقارن محوری است.
- (2) سیال در حالت سه بعدی، پایدار و بدون تولید گرمای داخلی می باشد.
- (3) سیال بخار آب می باشد که یک گاز ایدآل فرض شده است.
- (4) تمامی ویژگی های ترمو-فیزیکی ماتریس متخلخل و سیال ثابت فرض شده اند.
- (5) تیغه های متخلخل همگن، ایزوتروپیک و در حالت تعادل گرمای محلی است.

1 Targui and Kahalerras

2 Bouhadeff et al.

3 Al-Nimr and Alkam

(6) سطح کانال و هوای بیرون با ضریب انتقال حرارت ثابت بطور دائم انتقال حرارت جابجایی دارد.
 (7) طول خروجی مبدل حرارتی از آخرین تیغه به اندازه ای است که فرض جریان کاملاً توسعه یافته صحیح باشد.

مشخصات سیال در ورودی و خروجی کانال به صورت ذیل فرض شده است:

جدول (1-3): مشخصات سیال

	Temperature (c°)	Static Pressure (Pa)	Flow Rate (kg/s)
Inlet	250	-	0.01
Outlet	100	101325	-

کانال با سطح مقطع مستطیلی، بدون درز بوده و تنها یک ورودی و یک خروجی دارد. این کانال با هوای صفر درجه ی بیرون در تماس بوده و به صورت دائم با آن انتقال حرارت جابجایی دارد. پیش از ورود سیال، سطوح کانال و تیغه های داخلی با هوای بیرونی هم دما هستند. سایر ویژگی های کانال در جدول ذیل آمده است:

جدول (2-3): مشخصات کانال

Cross sectional Area (m^2)	Length (m)	Material
0.05	1.5	Aluminum

جدول (3-3): مشخصات هوای بیرون

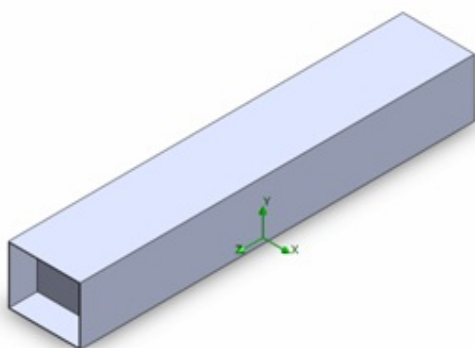
Outer Wall Thermal Condition	Heat Transfer Coefficient ($w/m^2.c^{\circ}$)	Temperature of External Fluid (c°)
	50	0

دو حالت مختلف برای نوع تیغه های نصب شده در داخل کانال در نظر گرفته می شود. در حالت اول تمامی تیغه ها متخلخل بوده و رسانای حرارت هستند. ویژگی های آن ها در جدول ذیل درج شده است:

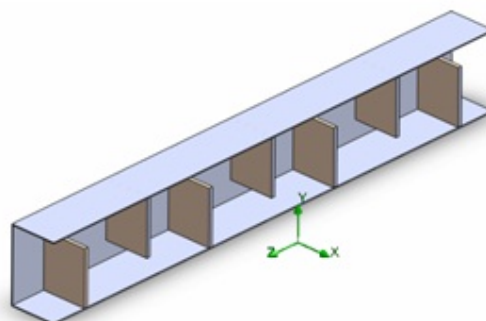
جدول (3-4): مشخصات تیغه های متخلخل

Porous Baffle Specification	Porosity	Permeability Type	Length	Area	Density of Porous Matrix	Specific Heat Capacity of Porous Matrix	Conductivity Type	Thermal conductivity
	-	-	m	m^2	kg/m^3	$J/kg.c^\circ$	-	$w/m.c^\circ$
	0.5	Isotropic	0.01	0.0375	1300	500	Isotropic	150

در حالت دوم تمامی تیغه ها را با همان ابعاد قبلی اما از جنس آلومینیوم به صورت صلب فرض می کنیم. شرایط ورودی و خروجی سیال همانند قبل است. شکل های (1-3) و (2-3) کانال مربوطه و تیغه های نصب شده را نشان می دهند.



شکل (1-3): تیغه های متخلخل نصب شده در سطح داخلی کانال



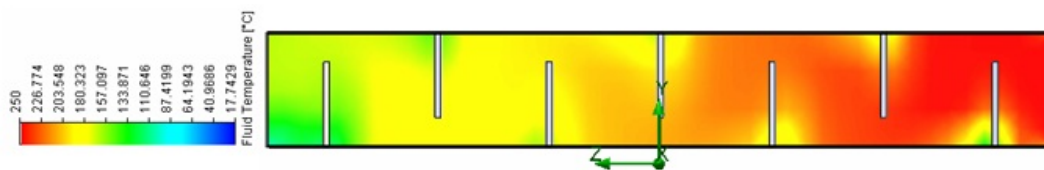
شکل (2-3): نمای برشی شکل (1-3)

برای تحلیل و بررسی جریان سیال در داخل کانال، از نرم افزار شبیه سازی جریان¹ استفاده شده است که از قابلیت های جدید نرم افزار Solid Work در نسخه سال 2010 می باشد. پس از مش بندی و تحلیل سیالاتی کانال نتایج بدست آمد که در شکل های (3-3) تا (10-3) ارائه شده است.

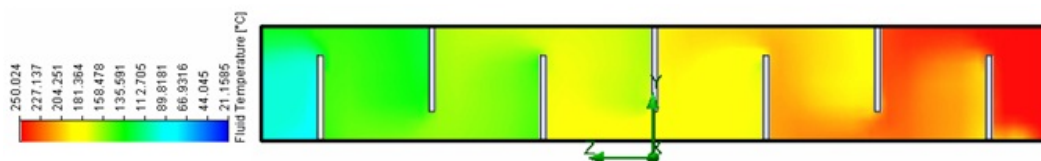
شکل های (3-3) و (4-3) کاهش دمای سیال را در هنگام عبور از کانال نشان می دهد. در تحلیل اولیه فرض دمای سیال در خروج از کانال 100 درجه سلسیوس بود. تیغه های صلب در کاهش دمای

¹ Flow Simulation Software

سیال بهتر از تیغه های متخلخل عمل نمودند، چون باعث چرخش بیشتر جریان سیال و به وجود آمدن گردابه بزرگتر می شوند.

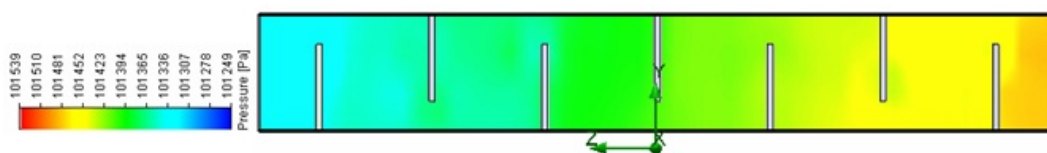


شکل (3-3): نحوه کاهش دمای سیال در حین عبور از کانال با تیغه های متخلخل

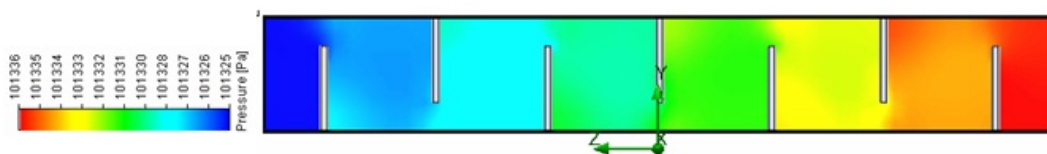


شکل (4-3): نحوه کاهش دمای سیال در حین عبور از کانال با تیغه های صلب

شکل های (5-3) و (6-3) افت فشار سیال را در حین عبور از کانال و برخورد با تیغه ها نشان می دهند. به علت وجود تیغه های متخلخل در کانال شکل (5-3)، افت فشار کمتری در طول کانال بوجود می آید که مناسب تر است. البته بررسی جریان سیال در این کانال فقط جنبه آزمایشی دارد، اما باید توجه داشت که برای خنثی نمودن افت فشار بیشتر در یک کانال می بایست از وسایلی همچون پمپ یا فن کمک گرفت.

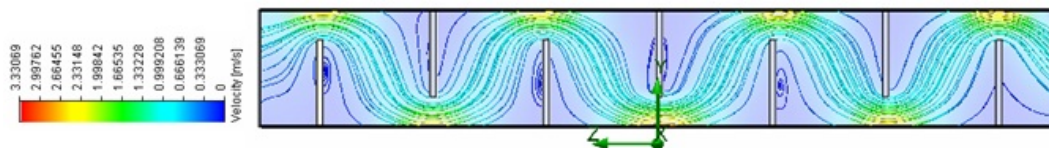


شکل (5-3): نحوه افزایش افت فشار سیال در حین عبور از کانال با تیغه های متخلخل

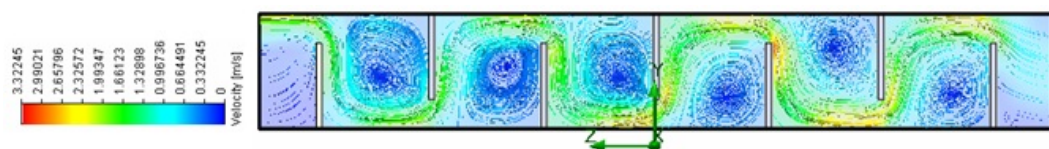


شکل (6-3): نحوه افزایش افت فشار سیال در حین عبور از کانال با تیغه های صلب

شکل های (7-3) و (8-3) نحوه تشکیل گردابه را در هر دو کانال نشان می دهند. تشکیل گردابه باعث افزایش انتقال حرارت در دیواره کانال و با هوای بیرون می شود.

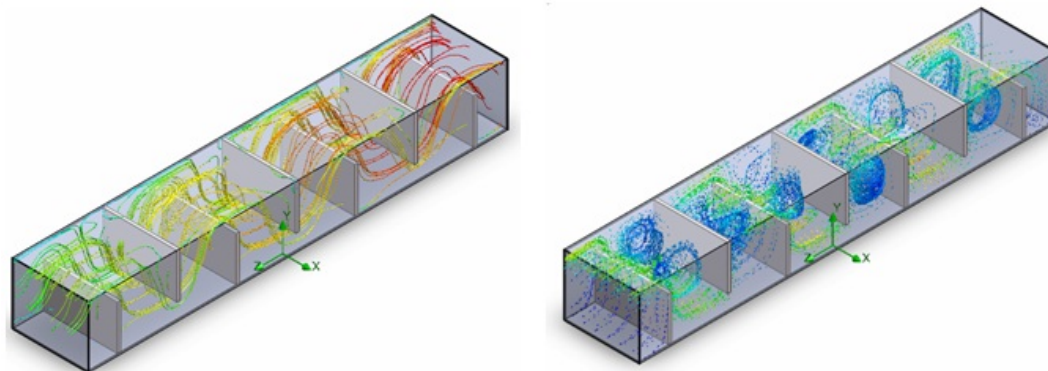


شکل (7-3): تشکیل گردابه در کانال با تیغه های متخلخل



شکل (8-3): تشکیل گردابه در کانال با تیغه های صلب

شکل های (9-3) و (10-3) جریان سیال را در حالت 3 بعدی در هنگام عبور از کانال نشان می دهند.



شکل (9-3): جریان 3 بعدی سیال از کانال با تیغه های صلب

شکل (10-3): جریان 3 بعدی سیال از کانال با تیغه های متخلخل

ویژگی های موجود در هر دو کانال شرایط تجربی بیان شده در مقالات را ارضا می کند. انتخاب نوع، جنس، میزان تخلخل و سایر ویژگی های هندسی تیغه ها بستگی به نوع استفاده، شرایط مورد انتظار و میزان افت فشار مجاز در کانال دارد.

3-3 کاربرد محیط های متخلخل در مشعل متخلخل

پیشرفت سریع در تکنولوژی و بهبود سطح زندگی اجتماعی، ملت ها را به استفاده گسترده از سوخت های فسیلی ملزم کرده است. همواره در استفاده از سوخت های فسیلی دو مشکل وجود دارد، یکی تقلیل منابع سوخت فسیلی و دیگری آلودگی محیط زیست. احتراق در محیط های متخلخل¹ یک روش موجه برای مهار کردن مشکلات فوق الذکر است که دامنه گسترده ای دارند. احتراق در محیط های متخلخل مزایای بسیار قابل توجهی دارد که آن را قابل مقایسه با احتراق معمولی² می کند. از آن جمله می توان به افزایش سرعت احتراق، افزایش رنج قدرت دینامیکی، گسترش محدوده اشتعال پذیری و کاهش نشر اشاره کرد. احتراق در محیط متخلخل بطور قابل ملاحظه ای متفاوت از اشتعال همگن است. این تفاوت به یک سری از فاکتورهای اصلی مربوط می شود:

(1) افزایش سطح داخلی محیط متخلخل جامد که یک انتقال حرارت موثر را بین محیط قابل اشتعال و جامد بی اثر نتیجه می دهد.

(2) پخش سیال واکنش دهنده از میان محیط متخلخل، قابلیت نفوذ پذیری و انتقال حرارت بین فازها را افزایش می دهد. این روش پروسه احتراق را در گستره وسیعی از سرعت واکنش دهنده ها و نسبت اکسیژن و سوخت تسهیل می کند. همچنین این روش امکان تشکیل ترکیبات نیتروژن³ و منوکسید کربن⁴ را به حداقل می رساند.

در سال های اخیر محققان زیادی بطور تجربی و تئوری بر روی گسترش تکنولوژی مشعل های محیط متخلخل متمرکز شدند. ترمیس و دراست⁵ [49] در مورد پیشرفت ها و کاربردهای محیط های متخلخل بازبینی هایی انجام دادند. اُلیورا و کاویانی⁶ [50] هم پروسه های نفوذ پذیری در عدم تعادل حرارتی و شیمیایی را در پروسه احتراق میان محیط های متخلخل بررسی کردند.

1 Porous Medium Combustion-PMC

2 Combustion Flame Free

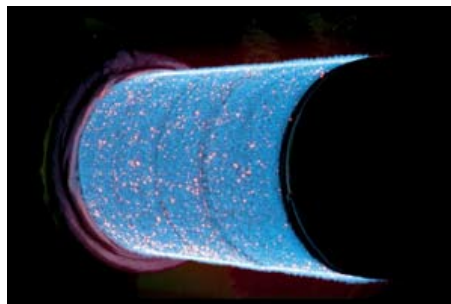
3 NOX

4 CO

5 Trimis and Drust

6 Oliveria and Kavian

استفاده از مشعل متخلخل مزایای بسیاری دارد و از آن جمله می توان به تولید ترکیبات نیتروژن بسیار پایین حتی خارج از محدوده کاری محصول، تولید منوکسید کربن بسیار پایین، کم کردن هزینه ها و سرمایه اولیه و هزینه های نگهداری بسیار پایین اشاره کرد.



شکل (3-11): نمونه ای از مشعل های متخلخل

شکل (3-12) کاربرد مشعل متخلخل را برای ایجاد شرایط گرمایش لوله های پلاستیکی در راکتورهای استوانه ای نشان می دهد. یکی از فاکتورهای مهم در انتخاب مشعل های متخلخل استفاده از آن ها برای گرمایش آرام¹ است. در مقایسه با سیستم های مشعل مرسوم، مشعل های متخلخل مزایای ویژه ای را به منظور گرمایش بدون شعله ارائه می کنند. دمای بینهایت متغیر و همگن، امکان رفتار آرام گرمایی و کنترل شده یک ماده را فراهم می کند. احتراق بطور معمول به وسیله الکتروود جرقه زن صورت می گیرد. همانند سایر مشعل ها از یک الکتروود یونیزاسیون برای مشاهده شعله استفاده می کنند.



شکل (3-12): گرمایش لوله های پلاستیکی توسط مشعل متخلخل

1 Gentle Heating

در مشعل های متخلخل توزیع گرما می تواند در فاصله کوتاهی از سطح مشعل متخلخل اتفاق بیفتد. این حالت ما را از گرمایش کامل موضوع مورد نظر مطمئن می سازد. در شکل (3-13) کاربرد مشعل متخلخل را برای پیش گرمایش قالب های ریخته گری چدن مشاهده می کنید. با جایگزینی مشعل های متخلخل به جای مشعل های مرسوم زمان پیش گرمایش تا 30% نسبت به قبل کاهش داشته است. همچنین استفاده از این مشعل ها امکان گرمایش در تمام هندسه قالب را فراهم می کند. صرفنظر از شکل قالب، این مشعل ها قابلیت گرمایش هر نوع قالبی را دارند.



شکل (3-13): پیش گرمایش قالب های ریخته گری توسط مشعل متخلخل

* فصل چهارم – مروری بر منابع

4-1 مقدمه

دانشمندان علوم مختلف بیش از یک قرن پیرامون انتقال حرارت و جرم از میان یک محیط متخلخل، تحقیق کردند. کاربردهای فراوان محیط های متخلخل همچون صنایع زمین گرمایی و نفت، مهندسی سیستم های آبیاری، صنایع هسته ای و ... محققان را به ارائه ایده های مختلف در این شاخه از مکانیک سیالات علاقمند کرد. تعداد بیشماری از مقالات در زمینه محیط های متخلخل گواه همین مطلب است. در این فصل در حد توان، تعدادی از مقالات موجود در زمینه محیط های متخلخل مرور شده است. مقالات انتخاب شده در این فصل مرتبط با اهداف پایان نامه می باشد. همچنین در انتهای این فصل بطور خلاصه، موضوع پایان نامه تشریح خواهد شد.

4-2 تحقیقات انجام شده پیرامون مسئله عدم تعادل حرارتی

عایق های گرمایی نمونه ای از محیط های متخلخل هستند که از موادی با رسانندگی کم ساخته می شوند. در این سیستم انتقال حرارت به آرامی صورت می پذیرد. اما در یک محیط متخلخل عملاً فرض یکسان بودن دمای فازهای جامد و سیال صحیح نیست. این مسئله در کاربرد محیط های متخلخل به عنوان کاتالیزور در راکتورها وجود دارد. همانطور که می دانیم، عدم تعادل حرارتی بر اثر عوامل مختلف ایجاد می شود که در این حالت نقاط دوردست نمی توانند به سرعت نسبت به تغییر ناگهانی دما در مرز عکس العمل نشان دهند. توضیحات کامل این موضوع در فصل دوم ارائه شد.

تلاش های ارزشمندی در زمینه هدایت حرارتی در یک محیط متخلخل انجام شد تا فرض تعادل حرارتی محلی هنگام مدل سازی محیط متخلخل صحیح باشد. این مسئله زمانی معتبر است که میدان دما با یک معادله انرژی تقریب زده شود. چانگ و سو [51] بازبینی بسیار خوبی پیرامون تاثیر رسانایی در یک محیط متخلخل ساکن انجام دادند. این محققین یک محیط متناوب¹ را در نظر گرفتند و هدف آن ها تعیین رسانایی گرمایی موثر بود. آن ها اطلاعات مهمی را برای هدف خود تهیه

1 Periodic Media

کردند و آن استفاده از یک مدل تک دمایی بود که با یک سیال واحد اشباع شده است. برای این مدل تنها یک معادله انرژی مورد استفاده قرار گرفت.

وجود حالت عدم تعادل حرارتی محلی در محیط های متخلخل، معادلات انتقال حرارتی را می طلبد که این حالت را ارضا کنند. در چنین مواردی پذیرش یک مدل دو دمایی ساده برای انتقال سیال در محیط متخلخل لازم می باشد. در حدود هشتاد سال پیش اولین بار مدل دو دمایی در زمینه عدم تعادل حرارتی توسط آنزلیوس¹ [52] و شومان² [53] مورد استفاده قرار گرفت. همچنین در معادلات انرژی ارائه شده توسط آنزلیوس، ترم های نفوذپذیری³ و حرکت توده ای⁴ $(u \cdot \partial T / \partial x)$ غایب هستند. چند دهه بعد کامبارنس⁵ [54] مطالعات عددی را درباره استفاده از مدل دو دمایی در انتقال گرمای جابجایی غیر خطی انجام داد. سو [55] مدل ساده شده دو معادله انرژی را برای انتقال حرارت رسانشی گذرا در یک محیط متخلخل پیشنهاد کرد و اعتبار فرض تعادل حرارتی محلی را نیز بررسی کرد. او از روش مشابه ای پیروی می کرد که قبلاً توسط کوئنتارد و ویتاکر [56] تحقیق شده بود. در معادلات انرژی ارائه شده توسط سو، ترمی وجود دارد دو معادله را به هم مربوط می کند و انحنای گرمایی⁶ نام دارد. این معادلات بصورت زیر هستند:

$$\rho_f c_{p_f} \left[\varepsilon \frac{\partial \langle T \rangle^f}{\partial t} + \langle \bar{u} \rangle \cdot \nabla \langle T \rangle^f \right] = \quad (1-4)$$

$$= \nabla \cdot \left[(\varepsilon + (1 - \sigma)G)k_f \nabla \langle T \rangle^f + k_{\text{dispersion}} \cdot \nabla \langle T \rangle^f \right] + (a_{sf} h_{sf} - k_s G \nabla^2) (\langle T \rangle^s - \langle T \rangle^f) + \varepsilon S_f$$

$$(1 - \varepsilon) \rho_s c_s \frac{\partial \langle T \rangle^s}{\partial t} = \quad (2-4)$$

$$= \nabla \cdot \left[(1 - \varepsilon + (\sigma - 1)G)k_s \nabla \langle T \rangle^s \right] - (a_{sf} h_{sf} - k_s G \nabla^2) (\langle T \rangle^s - \langle T \rangle^f) + (1 - \varepsilon) S_s$$

1 Anzelius
2 Schumann
3 Diffusion
4 Advection
5 Combarous
6 Tortuosity Parameter

در این معادلات $\langle T \rangle^s$ و $\langle T \rangle^f$ به ترتیب دمای متوسط فازهای سیال و جامد هستند. S_s و S_f به ترتیب نرخ تولید گرما را در فازهای سیال و جامد نشان می دهند. ضرایب رسانایی، ظرفیت های گرمایی ویژه و مقادیر چگالی، ثابت فرض شده اند. ضریب انتقال حرارت بین فازی h_{sf} و ضریب پخش حرارتی $k_{dispersion}$ ، به صورت تجربی تعیین می شوند. پارامتر G برای حالت عدم تعادل حرارتی بصورت زیر ارائه شده است:

$$G = \frac{\left(\frac{k_{stg}}{k_f}\right) - \varepsilon - (1 - \varepsilon)\sigma}{(\sigma - 1)^2} \quad (3-4)$$

در این عبارت $\sigma = \frac{k_s}{k_f}$ و k_{stg} رسانایی موثر سکون برای یک محیط متخلخل اشباع شده است و با استفاده از ساختار مدل به صورت تجربی تعیین می شود. دستگاه معادلات (4-1) و (4-2) برای انتقال حرارت در یک محیط متخلخل اشباع شده، حاوی تعدادی ضرایب نامشخص بود که مورد پسند واقع نشد. برای ساده کردن ضرایب موجود در این مدل واکائو و کاگویی [19] عباراتی را جایگزین آن ها کردند که همگی به صورت تجربی بدست می آمدند. ناکایاما و همکاران¹ [57] نیز توانستند با توسعه این مدل، معادلات انرژی روان تری را برای عدم تعادل حرارتی در انتقال حرارت رسانایی و جایجایی در محیط متخلخل پیشنهاد کنند، مادامی که در یک ضریب تخلخل ثابت دو معادله انرژی برای مدلسازی فازها ترکیب و به صورت تحلیلی حل شدند. برای نمونه مدل پیشنهادی آن ها برای انتقال حرارت رسانشی در یک شکاف متخلخل اشباع شده با یک سیال واحد مطابق شکل (4-1) به صورت زیر است:

$$\beta \frac{d^4 \langle T \rangle^f}{dX^4} - \frac{d^2 \langle T \rangle^f}{dX^2} = \frac{(1 - \varepsilon)S_s}{a_{sf} h_{sf} \left(\frac{k_{stg}}{k_f}\right)} \quad (4-4)$$

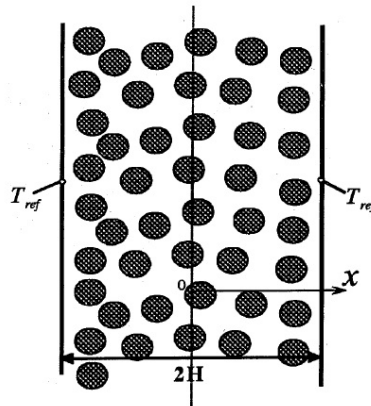
1 Nakayama et al.

$$\langle T \rangle^s = \langle T \rangle^f - \frac{\beta}{\sigma(1-\varepsilon + (\sigma-1)G)} \left(\frac{k_{sig}}{k_f} \right) \frac{d^2 \langle T \rangle^f}{dX^2} - \frac{G}{1-\varepsilon + (\sigma-1)G} \left(\frac{(1-\varepsilon)S_s}{a_{sf} h_{sf}} \right) \quad (5-4)$$

که در آن:

$$\beta = \frac{\sigma((1-\varepsilon)(\varepsilon + G) + \varepsilon\sigma G)}{\left(\frac{k_{sig}}{k_f} \right)} \quad (6-4)$$

با در نظر گرفتن شرایط مرزی، معادلات (4-4) و (5-4) حل دقیق شدند.



شکل (1-4): شکاف پر شده با محیط متخلخل

ساده ترین معادلات دو دمایی برای انتقال حرارت گذرا در یک محیط متخلخل با در نظر گرفتن پخش حرارتی و ترم سرعت فاز سیال توسط نیلد و بژان [14] در شرایط عدم تعادل حرارتی ارائه شد. همچنین محیط در نظر گرفته شده توسط آن ها با یک سیال واحد اشباع شده بود. معادلات ارائه شده توسط آن ها به صورت زیر است:

$$\varepsilon(\rho c)_f \frac{\partial T_f}{\partial t} + (\rho c)_f V \nabla T_f = \varepsilon \nabla (k_f \nabla T_f) + h(T_s - T_f) \quad (7-4)$$

$$(1-\varepsilon)(\rho c)_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = (1-\varepsilon) \nabla (k_s \nabla T_s) + h(T_f - T_s) \quad (8-4)$$

معادلات (7-4) و (8-4) در واقع همان معادلات ساده انرژی هستند که با استفاده قانون اول ترمودینامیک، قانون پیوستگی، قانون بقای جرم و تعریف یک حجم کنترل اثبات می شوند. در این

معادلات ترم $h(T_s - T_f)$ ، انتقال حرارت بین دو فاز را نشان می دهد که بر اثر اختلاف دمای فاز جامد و سیال بوجود می آید.

تولید گرما یکی از دلایل موثر در ایجاد شرط عدم تعادل حرارتی محلی است. در بسیاری از مقالات برای بررسی انتقال حرارت رسانشی، سرعت سیال را صفر در نظر می گیرند. در غیاب جریان سیال، ریز¹ [58] دو فرمولاسیون عددی و تحلیلی را برای ضریب انتقال حرارت بین فازی h در محیط های متخلخل تعیین کرد. این بررسی در حالی انجام شد که تولید گرمای یکنواخت در سیال وجود داشت و همین موضوع شرط عدم تعادل حرارتی محلی را تقویت می کرد. معادلات انرژی (7-4) و (8-4) در حالت عدم تعادل حرارتی توسط نظری و کوثری² [59] بصورت تحلیلی حل شدند. آن ها فرض کردند که انتقال حرارت رسانشی در شرایط دائم بین دو صفحه رخ می دهد که با محیط متخلخل پر شده است. در حالی که یک تولید گرمای یکنواخت در فاز جامد رخ می دهد. در این محیط یک بعدی در غیاب جریان سیال، برای ضریب تخلخل ثابت معادلات حاکم حل تحلیلی شده و در آن اثر پارامترهایی چون ضریب تخلخل، نسبت رسانایی، ضریب انتقال حرارت بی بعد بررسی شد. نتایج حل تحلیلی آن ها بصورت زیر است:

$$\theta_f = \frac{\varepsilon k_f}{\sigma^2 k_s} \left(\frac{\cosh(A'Y^*)}{\cosh(Y^*)} - 1 \right) + \frac{k_f}{2\sigma k_s} \left(\frac{H^2}{k_f} \right) (1 - Y^{*2}) \quad (9-4)$$

$$\theta_s = \frac{\varepsilon}{\sigma^2} (\sigma - 1) \left(\frac{k_f}{k_s} \right) \left(1 - \frac{\cosh(A'Y^*)}{\cosh(Y^*)} \right) + \frac{k_f}{2\sigma k_s} \left(\frac{H^2}{k_f} \right) (1 - Y^{*2}) \quad (10-4)$$

$$\theta = \frac{T - T_w}{q'''/h} \text{ و } Y^* = \frac{y}{H}, \sigma = 1 + \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \left(\frac{k_f}{k_s} \right), A' = H \sqrt{\frac{\sigma h}{\varepsilon k_f}}$$

همچنین در ادامه آن ها با استفاده از معادلات انرژی مرتبه سه برای هر فاز و حل آن بصورت عددی، توانستند شرایط انتقال حرارت رسانشی را در حالت ضریب تخلخل متغیر بررسی کنند.

1 Rees

2 Nazari and Kowsary

تغییر ناگهانی دما، یکی دیگر از عوامل انتقال حرارت در محیط های متخلخل است. هنگامی که دما در مرز یک محیط متخلخل به طور ناگهانی با زمان تغییر کند، حجم محلی از فازهای جامد و سیال که در نقاط دوردست قرار دارند، نمی تواند به سرعت عکس العمل نشان دهند و در نتیجه دو معادله انرژی برای مدلسازی سیال و جامد بطور جداگانه استفاده می شود. همانطور که قبلاً هم به آن اشاره شد، این معادلات بوسیله ترمی که افت دما¹ یا افزایش دما² را حساب می کند، به یکدیگر جفت می شوند. تاثیر عدم تعادل حرارتی محلی بر انتقال حرارت دائم رسانایی در یک کانال متخلخل در حضور تولید گرمای داخلی توسط نوری بروجردی و همکاران³ [60] مورد بررسی قرار گرفت. یک منبع یکنواخت تولید گرما در هر دو فاز جامد و سیال وجود دارد. از مدل دو دمایی ارائه شده در معادلات (7-4) و (8-4) به عنوان معادلات حاکم استفاده شده است. آن ها زاویه اختلاف فاز ζ را بصورت زیر تعریف کردند:

$$\varepsilon q_f''' = Q \cos \zeta \quad \text{و} \quad (1 - \varepsilon) q_s''' = Q \sin \zeta \quad (11-4)$$

جایی که $Q^2 = [\varepsilon q_f''']^2 + [(1 - \varepsilon) q_s''']^2$ و ζ سهم هر فاز را از منبع گرمای کل متفاوت می کند. حالت $\zeta = 0$ و $\zeta = \pi/2$ تولید گرما را در یک فاز نشان می دهد. در نهایت معادلات حاکم بصورت زیر خواهند بود:

$$\theta'' + H(\phi - \theta) + \cos \zeta = 0 \quad (12-4)$$

$$\phi'' + H\gamma(\theta - \phi) + \gamma \sin \zeta = 0 \quad (13-4)$$

دو پارامتر بی بعد در این معادلات $H = \frac{hL^2}{\varepsilon k_f}$ و $\gamma = \frac{\varepsilon k_f}{(1 - \varepsilon)k_s}$ هستند. برای تمام مقادیر ζ حل

تحلیلی معادلات (12-4) و (13-4) بصورت زیر خواهد بود:

$$\theta = C_1 - C_2 x^2 + C_3 \cosh(\lambda x) \quad (14-4)$$

1 Heat loss

2 Heat Gain

3 Nouri-Borujerdi et al.

$$\phi = C_1 + \frac{(2C_2 - \cos \zeta)}{H} - C_2 x^2 - \gamma C_3 \cosh(\lambda x) \quad (15-4)$$

ثابت های C_1 ، C_2 ، C_3 و λ بصورت زیر هستند:

$$C_1 = \frac{H\gamma(\gamma+1)(\sin \zeta + \cos \zeta) + 8(\cos \zeta - \gamma \sin \zeta)}{8H(\gamma+1)^2} \quad (16-4)$$

$$C_2 = \frac{\gamma(\sin \zeta + \cos \zeta)}{2(\gamma+1)} \quad (17-4)$$

$$C_3 = \frac{\gamma \sin \zeta - \cos \zeta}{H(\gamma+1)^2 \cosh(\lambda/2)} \quad (18-4)$$

$$\lambda = \sqrt{H(\gamma+1)} \quad (19-4)$$

تاثیر عدم تعادل حرارتی محلی بر رفتار گرادیان حرارتی فازهای جامد و سیال در یک محیط متخلخل یک بعدی توسط نوری بروجردی و همکاران [61] مورد بررسی قرار گرفت. همانطور که می دانیم، هنگامی که تعادل حرارتی محلی از بین برود، رسانایی در یکی از فازها نسبت به دیگری زودتر اتفاق می افتد، هر چند تعادل حرارتی محلی پس از گذشت زمان بوجود می آید. آن ها برای مدلسازی عدم تعادل حرارتی محلی در یک محیط متخلخل نیمه بینهایت ساکن، از معادلات انرژی ارائه شده توسط توسط نیلد و پژان [14] و کاویانی [4] استفاده کردند. آن ها بعد از بی بعد سازی، با استفاده از متغیرهای تشابهی ارائه شده توسط کارسلا و جیاگر¹ [62]، معادلات حاکم را به ساده ترین شکل تبدیل کردند. این متغیرهای تشابهی در زیر آمده است:

$$\tau = Ht \quad \text{و} \quad \eta = \frac{y}{2\sqrt{t}} \quad (20-4)$$

آن ها از معادلات بدست آمده، شرایط اولیه را استخراج کرده و سپس با استفاده از روش کلر باکس²، معادلات حاکم را حل عددی کردند. گرادیان هایی حرارتی برای فازهای جامد و سیال در یک بازه زمانی مشخص، نشان دهنده تغییر شرایط از حالت عدم تعادل حرارتی محلی به حالت تعادل حرارتی محلی است. آن ها نتایج عددی را با استفاده از حل مجانبی معتبر سازی کردند. همچنین آن ها با

1 Carslaw and Jaeger

2 Keller box method

استفاده از سری های توانی (21-4) و (23-4) توانستند حل تحلیلی معادلات حاکم را در زمان های زود و دیر به صورت زیر ارائه دهند:

$$\begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_0(\eta) \\ \phi_0(\eta) \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} \theta_1(\eta) \\ \phi_1(\eta) \end{pmatrix} \quad (21-4)$$

$$\theta_0(\eta) = \operatorname{erfc}(\eta) \quad \text{و} \quad \phi_0(\eta) = \operatorname{erfc}(\sqrt{\alpha}\eta) \quad (22-4)$$

$$\theta_1(\eta) = \frac{2\alpha\eta^2 + 1}{\alpha - 1} [\operatorname{erfc}(\eta) - \operatorname{erfc}(\sqrt{\alpha}\eta)] + \frac{2\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\pi}(\alpha - 1)} [\eta e^{-\alpha\eta^2} - \sqrt{\alpha}\eta e^{-\eta^2}]$$

$$\phi_1(\eta) = \gamma \frac{2\eta^2 + 1}{\alpha - 1} [\operatorname{erfc}(\eta) - \operatorname{erfc}(\sqrt{\alpha}\eta)] + \frac{2\gamma}{\sqrt{\pi}\sqrt{\alpha}(\alpha - 1)} [\eta e^{-\alpha\eta^2} - \sqrt{\alpha}\eta e^{-\eta^2}]$$

$$\begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_0(\eta) \\ \phi_0(\eta) \end{pmatrix} + \tau^{-1} \begin{pmatrix} \theta_1(\eta) \\ \phi_1(\eta) \end{pmatrix} \quad (23-4)$$

$$\theta_0(\eta) = \phi_0(\eta) = \operatorname{erfc}\zeta \quad \text{که} \quad \zeta = \frac{\eta}{\omega} \quad \text{و} \quad \omega = \left[\frac{[\varepsilon k_f + (1 - \varepsilon)k_s] / k_f}{[\varepsilon(\rho c)_f + (1 - \varepsilon)(\rho c)_s] / (\rho c)_f} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\theta_1 = -\frac{(\omega^2 - 1)(\alpha\omega^2 - 1)}{4(\alpha + \gamma)} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \xi^3 e^{-\xi^2} + \xi e^{-\xi^2}$$

$$\phi_1 = \theta_1 - \frac{1}{4} [\theta_0'' + 2\eta\theta_0']$$

در ادامه این تحقیقات، کیهانی و همکاران¹ [63] تاثیر عدم تعادل حرارتی محلی را در یک محیط متخلخل دو بعدی تحت تاثیر تغییر دما در مرز، بررسی کردند. نواحی این محیط متخلخل با $y \geq 0$ و $x \geq 0$ معین می شوند. ابتدا این محیط در دمای T_0 قرار داشته و به طور ناگهانی دما در مرزهای $x = 0$ و $y = 0$ به مقدار T_1 افزایش پیدا می کند.

1 Kayhani et al.

3-4 اهداف پایان نامه

هدف این پایان نامه مطالعه روند پیشروی گرما در یک محیط متخلخل است. این محیط متخلخل تغییر شکل ناپذیر، با یک سیال واحد تراکم ناپذیر اشباع شده است. فرض شده است که انتقال حرارت رسانشی از مرزهای بالایی و پایینی این محیط افقی ناچیز است. بنابراین روند انتقال حرارت فقط در یک راستا صورت می گیرد. با فرض اینکه در محیط متخلخل جریان سیال وجود ندارد، $v = 0$ در نظر گرفته می شود. محیط در نظر گرفته شده افقی بوده، لذا هیچ گونه جریان القایی در آن بوجود نمی آید. در این محیط انتقال حرارت بر اثر افزایش ناگهانی دما در مرز $x = 0$ صورت می گیرد. محیط نیمه بینهایت که فاصله $x \geq 0$ را شامل می شود، ابتدا در دمای T_0 قرار دارد سپس بطور ناگهانی در مرز $y = 0$ ، دما از T_0 به T_1 تغییر می کند. در اثر این افزایش ناگهانی دما، حجم محلی از فازهای جامد و سیال از تعادل حرارتی دور خواهند بود. همچنین یک تولید گرمای یکنواخت در فاز جامد اتفاق می افتد.

با دانستن شرایط موجود در مسئله، مدلسازی انتقال حرارت نیاز به معادلاتی دارد که شرط عدم تعادل حرارتی محلی در آن ارضا شود. بعد از بکارگیری معادلات انرژی حاکم و شرایط مرزی مناسب، مراحل بی بعد سازی انجام شده و در مرحله بعد معادلات حاکم با استفاده از روش اختلاف محدود فشرده¹ حل عددی می شوند. برای اعتبارسنجی کد عددی در زمان های زود و دیر، از روش های اغتشاشات² و پرتابی³ استفاده خواهد شد.

1 Compact Finite Difference

2 Perturbation Method

3 Shooting Method

* فصل پنجم – روش های حل مسئله

5-1 مقدمه

در این فصل روش های بکار رفته در حل معادلات حاکم در محیط های متخلخل بررسی شده است. معادلات مورد نظر، معادلات انرژی در محیط های متخلخل بوده که تحت شرایط عدم تعادل حرارتی در حضور ترم تولید گرما می باشند. برای حل عددی این معادلات، از روش اختلاف محدود فشرده در مکان و برای پیشروی در زمان از روش رانج کوتای مرتبه چهارم استفاده شده است. پس از معرفی و توضیح اجمالی پیرامون روش عددی، مثال های متنوعی مورد بررسی قرار گرفته است تا صحت و دقت روش و کد عددی مورد ارزیابی قرار گیرد. همچنین برای معتبرسازی نتایج حل عددی، روش های اغتشاشات و پرتابی بررسی خواهند شد.

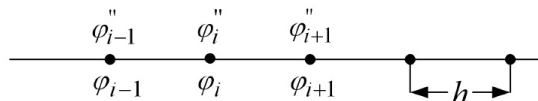
5-2 معرفی روش تفاضل محدود فشرده

روش های تفاضل محدود بسیار زودتر از روش المان محدود بوجود آمد و همواره به عنوان یک روش مستقیم و در عین حال بسیار پر کاربرد در گسسته سازی دامنه مورد استفاده قرار می گیرد. این روش در مسائلی با هندسه پیچیده به عنوان ابزاری کارآمد شناخته می شود و با ساده سازی هندسه مورد نظر بسیار سریعتر از روش المان محدود عمل می کند. روش های عددی برای مشتق گیری، انتگرال گیری و حل معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی، بر اجرای روش های تفاضلات محدود پایه ریزی می شوند. در روش تفاضل محدود، هدف توسعه داده های مقارنی است که در محاسبات و رسیدن به روابط بین تفاضلات محدود و اپراتورها استفاده می شود، زمانی که نیاز به حل معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی داریم. جدول تفاضلات محدود که توسط اپراتورهای پیشرو¹، پسرو² و مرکزی³ تولید می شود، کاربرد زیادی در مشتق گیری، انتگرال گیری و میان یابی دارد. ضرایب موجود در این

1 Forward
2 Backward
3 Central

جداول با استفاده از بسط تیلور و جایگذاری در روابط تفاضل محدود بدست می آید. همچنین می توان ضرایب موجود در یک مرتبه مشتق دلخواه را برای مرتبه خطای برشی¹ خاصی بدست آورد. ایده روش تفاضل محدود فشرده اولین با توسط کریس² [64] معرفی و توسط هریش³ [65] تکمیل شد. سپس لیل⁴ [66] استفاده از این روش را عمومی کرد. مشخصه روش تفاضل محدود فشرده، بالا بودن دقت آن است. این روش کاربردهای زیادی داشته و بعنوان یک روش کارآمد در شبیه سازی عددی انواع جریان ها و همچنین در شبیه سازی گردابه های بزرگ در جریان توربولانس بکار گرفته می شود. ناگراجان و همکاران⁵ [67] کارایی این روش را برای شبکه ای منظم در جریان تراکم پذیر بررسی کردند. پیلر و استالو⁶ [68] روش تفاضل محدود فشرده را برای جریان های تراکم ناپذیر توسعه دادند.

ایده روش تفاضل محدود فشرده بسیار ساده است. برای مثال در روش صریح⁷ تفاضل محدود فشرده در فضا، یک میان یابی سه نقطه ای برای مشتق مرتبه دو، یک تقریب با خطای برشی مرتبه دو را ارائه می دهد. اما اگر مشتق مرتبه دو بصورت ضمنی⁸ در همان سه نقطه میان یابی شود، می توان تقریبی با مرتبه بالاتر بدست آورد. شکل (5-1) توزیع سه کمیت مجهول گسسته و مشتقات مرتبه دوم آن ها را نشان می دهد. کمیت هایی که میان یابی شده اند در بالای خط و کمیت هایی که در میان یابی استفاده می شوند، در زیر خط قرار دارند.



شکل (5-1): نقاط پیوسته در یک شبکه برای میان یابی مرتبه چهار در مشتق مرتبه دو

1 Truncation Error
2 Kreiss
3 Hirsh
4 Lele
5 Nagarajan et al.
6 Piller and Stalio
7 Explicit
8 Implicit

با تعمیم همه کمیت ها در موقعیت φ_i و φ_i'' داریم:

$$\varphi_{i-1}'' = \varphi_i'' + \varphi_i''' \frac{(-h)}{1!} + \varphi_i^{(4)} \frac{(-h)^2}{2!} + \varphi_i^{(5)} \frac{(-h)^3}{3!} + O(h^4) \quad (1-5)$$

$$\varphi_{i+1}'' = \varphi_i'' + \varphi_i''' \frac{h}{1!} + \varphi_i^{(4)} \frac{h^2}{2!} + \varphi_i^{(5)} \frac{h^3}{3!} + O(h^4) \quad (2-5)$$

$$\varphi_{i-1} = \varphi_i + \varphi_i' \frac{(-h)}{1!} + \varphi_i'' \frac{(-h)^2}{2!} + \varphi_i''' \frac{(-h)^3}{3!} + \varphi_i^{(4)} \frac{(-h)^4}{4!} + \varphi_i^{(5)} \frac{(-h)^5}{5!} + O(h^6) \quad (3-5)$$

$$\varphi_{i+1} = \varphi_i + \varphi_i' \frac{h}{1!} + \varphi_i'' \frac{h^2}{2!} + \varphi_i''' \frac{h^3}{3!} + \varphi_i^{(4)} \frac{h^4}{4!} + \varphi_i^{(5)} \frac{h^5}{5!} + O(h^6) \quad (4-5)$$

با حذف φ_i' ، φ_i''' ، $\varphi_i^{(4)}$ و $\varphi_i^{(5)}$ از چهار معادله بالا معادله دورن یابی i^{th} بصورت زیر خواهد بود:

$$\frac{1}{10} \varphi_{i-1}'' + \varphi_i'' + \frac{1}{10} \varphi_{i+1}'' = \frac{6(\varphi_{i-1} - 2\varphi_i + \varphi_{i+1})}{5h^2} + O(h^4) \quad (5-5)$$

معادله (5-5) فرم ساده ای از روش تفاضل محدود فشرده برای میان یابی است.

5-2-1 روش تفاضل محدود فشرده در محاسبه مشتقات

معادلات انرژی در محیط های متخلخل و همچنین قانون فوریه، شامل مشتقات مرتبه یک و دو هستند. روش تفاضل محدود فشرده یک روش آسان برای محاسبه تمامی مراتب مشتق بوده و هدف از بررسی آن محاسبه مشتقات جزئی در معادلات انرژی است.

مقادیر یک تابع را در تعدادی از نقاط در نظر بگیرید. تقریب تفاضل محدود برای مشتق گیری از توابع، بصورت یک ترکیب خطی از مقادیر تابع بیان می شود. برای ساده سازی یک شبکه یکنواخت را در نظر بگیرید که نقاط آن با اندیس i مرتب شده اند. متغیر مستقل در گره ها برای $1 \leq i \leq N$ ، $x_i = h(i-1)$ است و مقادیر تابع با $f_i = f(x_i)$ داده می شود. تقریب تفاضل محدود f_i' در مشتق اول $(df/dx)(x_i)$ وابسته به مقادیر تابع در نقاط نزدیک i است. مثلاً برای مرتبه دوم و چهارم تفاضل محدود مرکزی، f_i' بترتیب تابع (f_{i-1}, f_{i+1}) و $(f_{i-2}, f_{i-1}, f_{i+1}, f_{i+2})$ است. در روش اختلاف محدود فشرده، f_i' وابسته به تمامی مقادیر گره ها بوده و این مورد اولین بار توسط لیل [66] ارائه

شد. با استفاده از این روش می توان مشتقات موجود در معادلات حاکم بر جریان و شرایط مرزی را با دقت بالایی محاسبه کرد. لیل فرم زیر را برای مشتق اول $f(x)$ روی بازه یک بعدی پیشنهاد کرد:

$$f'_{j-1} + \frac{1}{\alpha} f'_j + f'_{j+1} = \frac{1 + \frac{2}{3\alpha}}{3\Delta x} (f_{j+1} - f_{j-1}) + \frac{4 - \frac{1}{12\alpha}}{12\Delta x} (f_{j+2} - f_{j-2}) + O(h^4) \Big|_{\alpha=\frac{1}{4}} \quad (6-5)$$

که در آن $0 \leq j \leq J$ و $\Delta x = L_x/J$. لیل برای گره های مرزی ابتدا $j=0$ و انتها $j=J$ بترتیب روابط زیر را پیشنهاد کرد:

$$f'_0 + 2f'_1 = \frac{1}{2\Delta x} (-5f_0 + 4f_1 + f_2) \quad (7-5)$$

$$f'_J + 2f'_{J-1} = \frac{1}{2\Delta x} (5f_J - 4f_{J-1} - f_{J-2}) \quad (8-5)$$

برای گره های مجاور مرز ($j=1$ و $j=J-1$)، لیل استفاده از α' را بجای α در معادله (6-5) بصورت زیر پیشنهاد کرد. او استفاده از این رابطه را تضمین پایداری رابطه بیان می کند.

$$\alpha' = \left(\frac{16\alpha + 32}{40\alpha - 1} \right) \Big|_{\alpha=\frac{1}{4}} \quad (9-5)$$

همچنین او برای محاسبه مشتق دوم رابطه زیر ارائه کرد:

$$f''_{j-1} + \frac{1}{\alpha} f''_j + f''_{j+1} = \frac{4(\frac{1}{\alpha} - 1)}{3\Delta x^2} (f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1}) + \quad (10-5)$$

$$+ \frac{10 - \frac{1}{\alpha}}{12\Delta x^2} (f_{j-2} - 2f_j + f_{j+2}) + O(h) \Big|_{\alpha=\frac{1}{4}}$$

همانند قبل، برای گره های مرزی ابتدایی $j=0$ و انتهایی $j=J$ بترتیب روابط زیر پیشنهاد شد:

$$f''_0 + 11f''_1 = \frac{1}{\Delta x^2} (13f_0 - 27f_1 + 15f_2 - f_3) \quad (11-5)$$

$$f''_J + 11f''_{J-1} = \frac{1}{\Delta x^2} (13f_J - 27f_{J-1} + 15f_{J-2} - f_{J-3}) \quad (12-5)$$

همچنین برای گره های مجاور مرز ($j = 1$ و $j = J - 1$)، لیل استفاده از $\alpha' = \frac{1}{10}$ را بجای α در معادله (10-5) پیشنهاد کرد. روابط ارائه شده توسط این محقق برای مشتقات مرتبه اول و دوم از دقت بسیار بالایی برخوردار است. خطای حاصل از تقریب های ارائه شده برای محاسبه مشتقات، توسط سری فوریه مورد تحلیل قرار گرفت که بدلیل گستردگی مطلب از ارائه آن صرفنظر می شود، اما در بخش های بعد دقت این روابط را در چند مثال عددی بررسی خواهد شد.

3-5 روش رانج کوتای مرتبه چهار

روش های متعددی برای حل عددی معادلات دیفرانسیل با مقدار اولیه به فرم زیر وجود دارد:

$$y' = f(x, y) \quad , \quad y(x_0) = y_0 \quad (13-5)$$

با بسط سری تیلور و انتخاب n جمله اول بسط، می توان دقت جواب معادله دیفرانسیل را افزایش داد. مثلاً در روش اوایلر دو جمله اول بسط تا $y'(x_0)$ مورد استفاده قرار می گیرد، لیکن ملاحظه می شود که مشتقات مرتبه بالاتر یعنی $y''(x_0)$ و $y'''(x_0)$ برای دقت بیشتر جواب، می توانند مورد استفاده قرار بگیرند. رانج و کوتا¹ روشی را ارائه دادند که کارائی بیشتری نسبت به روش های قبلی داشته باشد، ضمن آنکه بجای محاسبه مستقیم مشتقات مرتبه بالاتر، تنها با استفاده از تابع $f(x_n, y_n)$ نتیجه حاصل می شود. این محققان بجای بسط سری تیلور تا مشتق مرتبه چهارم، فرم زیر را پیشنهاد کردند:

$$y_{n+1} = y_n + ak_1 + bk_2 + ck_3 + dk_4 \quad (14-5)$$

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf(x_n + \alpha h, y_n + \beta k_1)$$

$$k_3 = hf(x_n + \gamma h, y_n + \varphi k_1 + \theta k_2)$$

$$k_4 = hf(x_n + \delta h, y_n + \rho k_1 + \mu k_2 + \eta k_3)$$

1 Runge and Kutta

آن ها با استفاده از بسط سری تیلور $y(x_n + h)$ تا مشتق چهارم و همچنین بسط توابع دو متغیره تیلور برای k_2, k_3, k_4 و قرار دادن آن ها در رابطه y_{n+1} ، به 9 معادله با خطای موضعی از $O(h^5)$ رسیدند. رابطه مشهور زیر یکی از جواب ها است که تحت عنوان رانج-کوتای مرتبه چهار شناخته می شود:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (15-5)$$

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1)$$

$$k_3 = hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2)$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3)$$

4-5 بررسی دقت روش اختلاف محدود فشرده

بررسی خطای حاصل از روش اختلاف محدود فشرده با استفاده از تحلیل فوریه انجام می شود که بدلیل گستردگی مطلب از ارائه آن صرفنظر شده است. اما در این قسمت با حل عددی چند معادله دیفرانسیل با استفاده از روش اختلاف محدود فشرده، دقت عددی این روش را بررسی می شود.

* معادله دیفرانسیلی را بصورت $\dot{y} = xy_x + y$ در نظر بگیرید که دارای شرط مرزی مکانی $y(0, t) = 0$ و شرط اولیه زمانی $y(x, 0) = x$ باشد. برای حل این معادله دیفرانسیل، از روش اختلاف محدود فشرده برای مشتقات مکانی و از روش رانج کوتای مرتبه چهار برای پیشروی در زمان استفاده شده است.

$$\dot{y} = f(t, y) \quad (16-5)$$

با فرض اینکه $[A_1][f'] = [B_1][f]$ ، می توان سمت راست معادله را بصورت زیر نوشت:

$$xy_x + y = [x.A_1^{-1}.B_1 + I]y \quad (17-5)$$

جایی که داریه های ماتریس های $[A_1]$ و $[B_1]$ از روابط (6-5) تا (9-5) حاصل می شوند. معادله (16-5) یک مسئله مقدار اولیه بوده و از روش رانج-کوتای مرتبه چهار و معادلات (15-5) می توان نوشت:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (18-5)$$

$$k_1 = \Delta t \cdot f(t_n, y_n) = \Delta t \cdot [x \cdot A_1^{-1} \cdot B_1 + I] \cdot y_n$$

$$k_2 = \Delta t \cdot f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_1\right) = \Delta t \cdot [x \cdot A_1^{-1} \cdot B_1 + I] \cdot \left(y_n + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = \Delta t \cdot f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_2\right) = \Delta t \cdot [x \cdot A_1^{-1} \cdot B_1 + I] \cdot \left(y_n + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = \Delta t \cdot f(t_n + \Delta t, y_n + k_3) = \Delta t \cdot [x \cdot A_1^{-1} \cdot B_1 + I] \cdot (y_n + k_3)$$

برای حل عددی این معادله دیفرانسیل کافی است معادلات (17-5) و (18-5) کدنویسی شوند. برای مقایسه مقدار خطای حاصل، از معیار RMS استفاده کرده که بصورت زیر تعریف می شود:

$$RMS = \sqrt{\frac{\sum (y - y_{exact})^2}{N}} \quad (19-5)$$

که در اینجا $y_{exact} = xe^{2t}$ است. تعداد گره های مکانی و زمانی و همچنین مقایسه با جواب دقیق در جدول زیر آمده است:

جدول (1-5): خطای حاصل از بکارگیری روش تفاضل محدود فشرده برای مثال اول

تعداد بازه های مکانی	10	5000	20	20000	40	200000	50	500000
تعداد بازه های زمانی	500		1000		5000		10000	
RMS	0.0087		0.0043		8.5120e-004		4.2498e-004	

برای $\Delta x = 0.1$ روی فاصله بین صفر و یک، ماتریس های $[A_1]$ و $[B_1]$ بصورت زیر خواهند بود:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.25 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.25 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (20-5)$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -22.5 & 18 & 4.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -27 & 0 & 27 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.81 & -4.5 & 0 & 4.5 & 2.81 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -27 & 0 & 27 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -27 & 0 & 27 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -27 & 0 & 27 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -27 & 0 & 27 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.81 & -4.5 & 0 & 4.5 & 2.81 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -27 & 0 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4.5 & -18 & 22.5 \end{bmatrix}$$

و با فرض اینکه $[A_2][f''] = [B_2][f]$ ، می توان ماتریس های $[A_2]$ و $[B_2]$ را بصورت زیر نوشت:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = 10^3 \times \begin{bmatrix} 1.05 & -2.18 & 1.21 & -0.08 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.97 & -1.94 & 0.97 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.04 & 0.32 & -0.72 & 0.32 & 0.04 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.04 & 0.32 & -0.72 & 0.32 & 0.04 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.04 & 0.32 & -0.72 & 0.32 & 0.04 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.04 & 0.32 & -0.72 & 0.32 & 0.04 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.04 & 0.32 & -0.72 & 0.32 & 0.04 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.04 & 0.32 & -0.72 & 0.32 & 0.04 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.97 & -1.94 & 0.97 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.08 & 1.21 & -2.18 & 1.05 \end{bmatrix}$$

* معادله دیفرانسیلی را بصورت $y_t = x^2 y_{xx} - xy_x + 2y$ در نظر بگیرید که دارای شرایط مرزی $y(0,t) = 0$ و $y(1,t) = e^{2t}$ بوده و شرط اولیه آن بصورت $y(x,0) = x^2$ می باشد. جواب این معادله دیفرانسیل به صورت $y = x^2 e^{2t}$ می باشد. همانند مثال قبل برای حل این معادله دیفرانسیل، از روش اختلاف محدود فشرده برای مشتقات مکانی و از روش رانج کوتای مرتبه چهار برای پیشروی در زمان استفاده شده است. با فرض اینکه $[A_1][f'] = [B_1][f]$ و $[A_2][f''] = [B_2][f]$ می توان سمت راست معادله را بصورت زیر نوشت:

$$y_{xx} + 3xy_x - y = [x^2 \cdot A_2^{-1} \cdot B_2 - x \cdot A_2^{-1} \cdot B_2 + 2 \cdot I]y = Ny \quad (19-5)$$

از روش رانج-کوتای مرتبه چهار و معادلات (15-5)، k_1 ، k_2 ، k_3 و k_4 بصورت زیر خواهند بود:

$$k_1 = \Delta t \cdot N \cdot y_n \quad (20-5)$$

$$k_2 = \Delta t \cdot N \cdot (y_n + \frac{1}{2} k_1)$$

$$k_3 = \Delta t \cdot N \cdot (y_n + \frac{1}{2} k_2)$$

$$k_4 = \Delta t \cdot N \cdot (y_n + k_3)$$

پس از کدنویسی معادلات (19-5) و (20-5)، برای مقایسه مقدار خطا، از معیار RMS مطابق جدول

زیر استفاده استفاده شده است:

جدول (5-2): خطای حاصل از بکارگیری روش تفاضل محدود فشرده برای مثال دوم

تعداد بازه های مکانی	10	5000	20	20000	40	200000	50	500000
تعداد بازه های زمانی	500		1000		5000		10000	
RMS	0.00651		0.0045		6.6360e-005		6.6106e-005	

5-5 روش پرتابی

معادلات دیفرانسیل بطور کلی به دو دسته خطی و غیر خطی تقسیم می شوند. همچنین معادلات دیفرانسیل خطی خود به دو دسته مسائل مقدار اولیه و مسائل مقدار مرزی تقسیم می شوند. اولر¹ و اولر تصحیح شده، رانج کوتا، آدامز² و آدامز مولتن³ از جمله روش هایی هستند که برای حل معادلات دیفرانسیل غیر خطی در مسائل مقدار اولیه بکار گرفته می شوند. روش پرتابی هم در دسته روش های حل معادلات دیفرانسیل غیر خطی با مسائل مقدار مرزی قرار دارد.

روش پرتابی مسئله مقدار مرزی را به یک مسئله مقدار اولیه جهت استفاده کردن از الگوریتم قدرتمند برای انتگرال گیری از مسائل مقدار اولیه تبدیل می کند. در این روش شرایط کلی اولیه سیستم معادلات دیفرانسیل حدس زده می شود و از معادلات بصورت پیشرو انتگرال گرفته می شود. در پایان مقادیر نهایی محاسبه شده با شرایط مرزی و شرایط اولیه حدسی مقایسه می شوند و در صورت نیاز تصحیحی بر آن صورت می گیرد. این روند ادامه تکرار می شود تا مقادیر پایانی تعیین شده در بازه، به یک معیار همگرایی برسند و این فرم عمومی پایه برای خانواده روش های پرتابی می باشد. همچنین ممکن است این فرم عمومی را در انتخاب شرایط نهایی، اولیه و انتگرال گیری معادلات در یک یا دو مسیر تغییر داد. همچنین می توان مسائل مقدار مرزی را تا زمانی که نتایج مقدار اولیه ثابت شود بکار برد و یک سری از حدس های خوب را برای شرایط کلی ایجاد کرد.

1 Euler Method

2 Adams Method

3 Adams-Moulton Method

ابتدا برای یک یا دو دسته از معادلات دیفرانسیل بسط زیر در نظر گرفته می شود:

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2) \quad \text{و} \quad \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2) \quad (21-5)$$

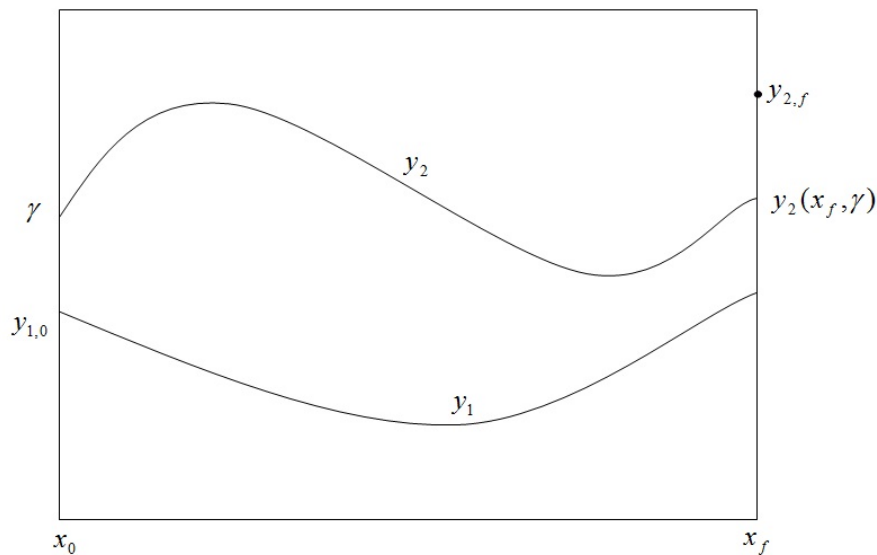
با جدا کردن شرایط مرزی:

$$y_1(x_0) = y_{1,0} \quad \text{و} \quad y_2(x_f) = y_{2,f} \quad (22-5)$$

ابتدا شرایط اولیه را برای y_2 بصورت زیر حدس می زنیم:

$$y_2(x_0) = \gamma \quad (23-5)$$

اگر از معادلات سیستم بصورت پیشرو انتگرال گیری شود، دو مسیر همانند شکل (2-5) ایجاد می شود. از آنجایی که مقدار $y_2(x_0)$ فقط یک حدس بود، مسیر y_2 هدف خود را در x_0 از دست می داده و شرط مرزی $y_2(x_f) = y_{2,f}$ را ارضا نمی کند.



شکل (2-5): مسیرهای ایجاد شده در اثر انتگرال گیری

برای حدس γ ، مقادیر محاسبه شده y_2 در x_f تحت عنوان $y_2(x_f, \gamma)$ طراحی می شود. هدف مطلوب پیدا کردن مقدار γ است، هنگامی که شرط مرزی ارضا شود که آن بصورت زیر خواهد بود:

$$y_2(x_f, \gamma) = y_{2,f} \rightarrow \phi(\gamma) = y_2(x_f, \gamma) - y_{2,f} = 0 \quad (24-5)$$

همچنین تابع در یک سری تیلور حول γ بصورت زیر بیان می شود:

$$\phi(\gamma + \Delta\gamma) = \phi(\gamma) + \frac{\partial\phi}{\partial\gamma}\Delta\gamma + O[(\Delta\gamma)^2] \quad (25-5)$$

برای درست همگرا شدن سیستم، مسیر y_2 می بایست مقدار مرزی x_f را به اصطلاح نشانه گیری کند. این بیان معادل عبارت $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \phi(y + \Delta y) = 0$ است و در نتیجه:

$$\Delta\gamma = \frac{-\phi(\gamma)}{\left[\frac{\partial\phi}{\partial\gamma}\right]} \xrightarrow{\phi(\gamma)=y_2(x_f, \gamma)-y_{2,f}=0} \Delta\gamma = \frac{-[y_2(x_f, \gamma) - y_{2,f}]}{\left[\frac{\partial y_2(x_f, \gamma)}{\partial\gamma}\right]} \quad (26-5)$$

در رابطه (26-5)، صورت کسر $\delta y = y_2(x_f, \gamma) - y_{2,f}$ اختلاف بین مقدار $y_2(x_f) = y_{2,f}$ مرز نهایی تعیین شده و $y_2(x_f, \gamma)$ مقدار محاسبه شده نهایی است که با استفاده از حدس γ بدست می آید. همچنین $\Delta\gamma$ مقدار تصحیح حدس γ برای بدست آوردن مقدار حدس جدید γ_{new} می باشد:

$$\gamma_{new} = \gamma_{old} + \Delta\gamma \quad (27-5)$$

گاهی اوقات برای جلوگیری از واگرایی ممکن است یک مرحله تصحیح جزئی لازم باشد:

$$0 < \rho \leq 1 \quad \text{که} \quad \gamma_{new} = \gamma_{old} + \rho\Delta\gamma \quad (28-5)$$

5-5-1 حل معادله دیفرانسیل غیر خطی با استفاده از روش پرتابی

در این قسمت با استفاده از توابع تعریف شده در نرم افزار متلب¹، یک معادله دیفرانسیل غیر خطی را به روش عددی حل شده است. این معادله دیفرانسیل با استفاده از روش پرتابی حل و سپس با روش تفاضل محدود مقایسه خواهد شد.

* معادله دیفرانسیل زیر برای جابجایی (خیز) تیر یک سر گیردار، با شرایط مرزی مشخص مورد استفاده قرار می گیرد:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 0.2 \cos y = 0 \quad \text{با} \quad BC.S : y(x=0) = 0, \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} = 0 \quad (29-5)$$

برای حل عددی این معادله در بازه بین صفر تا یک، به دلیل نبودن ترم $\frac{dy}{dx}$ در معادله دیفرانسیل خیز تیر، با یک معادله غیر خطی مواجه شده که می توان آن را بصورت زیر نوشت:

$$\frac{dy}{dx} = z \quad \text{و} \quad \frac{dz}{dx} = 0.2 \cos y \quad (30-5)$$

با بکارگیری عملگر ODE45 و استفاده از آن در روش پرتابی، این معادله براحتی در بازه مورد نظر قابل حل است. کد این برنامه در قسمت پیوست آمده است.

حل یک معادله غیر خطی با استفاده از روش تفاضل محدود صرفاً بدلیل غیر خطی بودن آن، مشکل است. برای حل این مشکل ابتدا معادله را برای گره اول حل می کنیم، با فرض اینکه تمامی y_i ها برابر صفر هستند. باید توجه داشت که شرط اولیه مسئله که عبارتست از $y(x=0) = y_0$ ، برقرار است. در گره اول $y(x=1) = y_1$ و در گره دوم $y(x=2) = y_2$ است. به همین ترتیب برای تمامی گره ها می توان مقادیر y را بدست آورد. در قسمت اول فرض بر این بود که مقدار اولیه y گره ها برابر صفر است. حال در قسمت دوم برای تکرار مجدد، تمامی y ها دارای یک مقدار اولیه از قسمت اول هستند. با تکرار و مقایسه می توان مقادیر y را در گره ها بدست آورد. با استفاده از جدول ضرایب مشتق و اپراتور مرکزی با خطای برشی از $O(h^2)$ می توان نوشت:

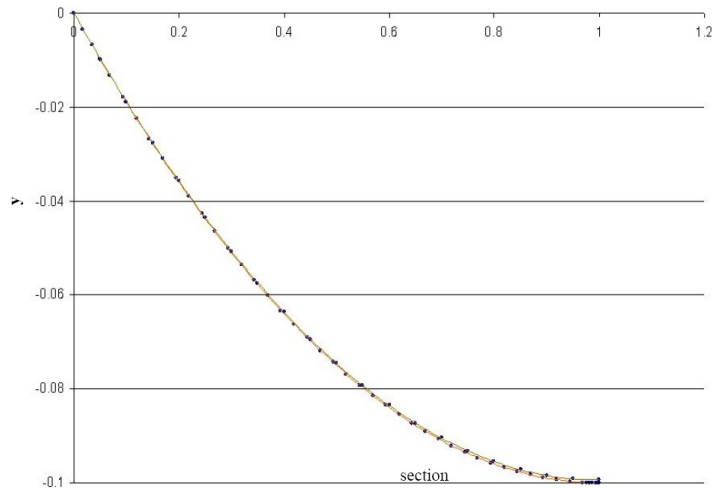
$$h^2 D^2 = y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} + O(h^2) \quad (31-5)$$

$$D^2 = 0.2 \cos y_i \rightarrow 0.2h^2 \cos y_i = y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}$$

و در نهایت رابطه زیر بدست می آید:

$$y_i = \frac{1}{2} y_{i-1} + \frac{1}{2} y_{i+1} - 0.1h^2 \cos y_i \quad (32-5)$$

با کد نویسی معادله (32-5) می توان نتایج حل عددی بدست آورد. کد این روش در قسمت پیوست آمده است. در شکل (3-5)، مقایسه ای بین نتایج روش تفاضل محدود و روش پرتابی انجام شده است. در این شکل هر دو روش شرایط مرزی را برای تیر ارضا کرده اند. هر دو روش در $x=0$ مقدار $y=0$ دارند و شیب هر دو نمودار در $x=1$ برابر صفر است.



شکل (5-3): انطباق نتایج روش تفاضل محدود و روش پرتابی

5-5-2 حل مسائل مقدار مرزی در متلب با استفاده از `bvp4c`

برنامه های حل مسائل مقدار مرزی به عملگرهایی نیاز دارند که برای توصیف اولیه حل، مقدار آن را حدس بزنند. اغلب ممکن است در این میان مجبور شویم تا پارامترهایی را برای حل در نظر بگیریم. تئوری مسائل مقدار مرزی مبنی بر مسائل مقدار اولیه برای معادلات دیفرانسیل معمولی هستند. همچنین برنامه های موثری برای هر دو وجود دارد که بطور طبیعی آن ها را در برنامه ای برای حل مسائل مقدار مرزی ترکیب می کنند. این رهیافت تحت عنوان روش پرتابی شناخته می شود.

مثال زیر نشان می دهد که چگونه یک مسئله مقدار مرزی را با استفاده از عملگر `bvp4c` می توان حل کرد. این عملگر با استفاده از یک حدس خوب برای حل، سریعترین جواب را ارائه می کند. یک مسئله مقدار مرزی شامل یک سری از معادلات دیفرانسیل معمولی، تعدادی شرایط مرزی و یک حدس برای مشخص کردن حل است. دسته معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$u' = 0.5 \frac{u(w-u)}{v} \quad (33-5)$$

$$v' = -0.5(w-u)$$

$$w' = \frac{0.9 - 1000(w-y) - 0.5w(w-u)}{z}$$

$$z' = 0.5(w-u)$$

$$y' = -100(y - w)$$

در این معادلات شرایط مرزی بصورت زیر هستند:

$$u(0) = v(0) = w(0) = 1 \quad \text{و} \quad z(0) = -10 \quad \text{و} \quad w(1) = y(1) \quad (34-5)$$

برای حل احتیاج به حدسی است که به فرم یک تابع بتواند مقادیر را در هر فاصله ارزیابی کند. برای این معادلات، یکی از حدس ها می تواند بصورت زیر باشد:

$$u(x) = 1 \quad (35-5)$$

$$v(x) = 1$$

$$w(x) = -4.5x^2 + 8.91x + 1$$

$$z(x) = -10$$

$$y(x) = -4.5x^2 + 9x + 0.91$$

برای حل این معادلات با استفاده از عملگر `bvp4c`، باید تابعی را تعیین کنیم که معادلات دیفرانسیل و باقیمانده را در شرایط مرزی ارزیابی کند. اجزای y را بصورت زیر در نظر می گیریم:

$$y(1) = u \quad (36-5)$$

$$y(2) = v$$

$$y(3) = w$$

$$y(4) = z$$

$$y(5) = y$$

این اجزاء بصورت زیر در نرم افزار کد نویسی و حل خواهند شد:

```
function dydx=F1(x,y)
dydx=[ 0.5*y(1)*(y(3)-y(1))/2
       -0.5*(y(3)-y(1))
       (0.9-1000*(y(3)-y(5))-0.5*y(3)*(y(3)-y(1)))/y(4)
       0.5*(y(3)-y(1))
       100*(y(3)-y(5))];
```

```
function res=F2(ya,yb)
```

```
res=[ ya(1) - 1
      ya(2) - 1
      ya(3) - 1
      ya(4) - 10
      yb(3) - ya(5) ];
```

```
Solinit=bvprint(linespace(0,1,5),[1 1 1 -10 0.91]);
```

```
Sol=bvp4c(@F1,@F2,solinit);
```

در پروسه کد نویسی از دو عملگر solinit و bvprint استفاده شده است. عملگر solinit وظیفه دارد اولاً حدس زده شده روی یک مش را بر رفتار پروسه حل بررسی کرده و ثانیاً حدس زده شده بر حل را در تمامی مش ها ارزیابی کند. عملگر bvprint وظیفه دارد ساختاری منظم برای تک تک حدس ها و حل ها ایجاد کند.

5-6 روش اغتشاشات

بسیاری از مهندسان، فیزیکدانان و ریاضیدانان، زمان زیادی را برای تعیین حل تقریبی مسئله ای که با آن مواجه هستند، صرف می کنند. این تقریب ها ممکن است کاملاً عددی، کاملاً تحلیلی یا ترکیبی از این دو تکنیک باشند. روش های عددی و تحلیلی در کنار یکدیگر، تشکیل یک تکنیک قدرتمند و تطبیق پذیر را می دهند.

روش اغتشاشات یکی از روش های تقریبی برای حل مسائلی می باشد که در آن ها یک پارامتر خیلی کوچک و یا خیلی بزرگ ظاهر شده باشد. در این روش معادلات بی بعد شده با استفاده از یک سری توانی توسعه داده شوند. این سری توانی مشتمل بر پارامترهای خیلی کوچک و یا معکوس پارامتر خیلی بزرگ است. پس از اعمال این سری، معادلات بدست آمده برحسب توان های پارامتر اغتشاشات مرتب شده و ضرایب آن مساوی صفر قرار داده می شوند. نتیجه این که یک سری معادلات دیفرانسیل ساده تر ظاهر شده که جواب حاصل از هر معادله برای معادله بعدی مورد استفاده قرار می گیرد.

5-6-1 دقت تقریب اغتشاشات

کلید حل مسائل پیشرفته، مدلسازی ریاضی است. در این پروسه تعدادی از المان ها نگه داشته می شوند، تعدادی حذف می شوند و بقیه تقریب زده می شوند. برای انجام چنین گامی، اولین اقدام تعیین مرتبه بزرگی¹ المان های مختلف است. این اقدام با مقایسه آن ها با یکدیگر و با المان های اصلی سیستم انجام می شود. این پروسه بی بعد سازی نامیده می شود. در نتیجه می بایست قبل از اقدام به تقریب زنی، متغیرهای بی بعد را معرفی کرد [69]. در این قسمت برای آشنایی بیشتر با روش تقریبی اغتشاشات به بررسی چند مثال پرداخته شده است.

* معادله زیر را در نظر بگیرید:

$$x^2 - (3 + 2\varepsilon)x + 2 + \varepsilon = 0 \quad \text{که} \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (37-5)$$

هنگامی که $\varepsilon = 0$ است، معادله (37-5) به $x^2 - 3x + 2 = 0$ کاهش می یابد که این معادله دارای ریشه های $x = 1$ و $x = 2$ است. معادله (37-5)، معادله مغشوش² و معادله دوم، معادله غیرمغشوش یا معادله کاهیده³ نامیده می شود. هنگامی که ε کوچک یا محدود باشد، انتظار می رود که ریشه ها مقداری از $x = 1$ و $x = 2$ منحرف شوند. اولین گام در تعیین یک حل تقریبی، فرض فرمی برای تعمیم معادله است. در اینجا فرض می شود که ریشه ها به فرم زیر توسعه یابند:

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots \quad (38-5)$$

در اکثر کاربردها، یک یا دو ترم از فرم بسط معادله مورد محاسبه قرار می گیرد. گام دوم جایگذاری بسط (38-5) در معادله (37-5) بصورت زیر است:

$$(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots)^2 - (3 + 2\varepsilon)(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots) + 2 + \varepsilon = 0 \quad (39-5)$$

گام سوم انجام عملیات اولیه ضرب، تقسیم، بسط و توسعه، اضافه و کم کردن و ... است. با استفاده از توزیع دو جمله ای، اولین ترم معادله (39-5) بصورت زیر خواهد بود:

1 Order of Magnitude

2 Perturbed Equation

3 Unperturbed Equation or Reduced Equation

$$(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots)^2 = x_0^2 + 2x_0(\varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots) + (\varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots)^2 = \quad (40-5)$$

$$= x_0^2 + 2\varepsilon x_0 x_1 + 2\varepsilon^2 x_0 x_2 + \varepsilon^2 x_1^2 + 2\varepsilon^3 x_1 x_2 + \varepsilon^4 x_2^2 + \dots$$

$$= x_0^2 + 2\varepsilon x_0 x_1 + \varepsilon^2 (2x_0 x_2 + x_1^2) + \dots$$

دومین ترم معادله (39-5) بصورت زیر مرتب خواهد شد:

$$(3 + 2\varepsilon)(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots) = 3x_0 + 3\varepsilon x_1 + 3\varepsilon^2 x_2 + 2\varepsilon x_0 + 2\varepsilon^2 x_1 + 2\varepsilon^3 x_2 = \quad (41-5)$$

$$= 3x_0 + \varepsilon(3x_1 + 2x_0) + \varepsilon^2(3x_2 + 2x_1) + \dots$$

با جایگذاری معادلات (40-5) و (41-5) در (39-5) این معادله بصورت زیر تبدیل خواهد شد:

$$(x_0 - 3x_0 + 2) + \varepsilon(2x_0 x_1 - 3x_1 - 2x_0 + 1) + \varepsilon^2(2x_0 x_2 + x_1^2 + 3x_2 - 2x_1) + \dots = 0 \quad (42-5)$$

در گام چهارم، کلیه ضرایب توان های مختلف ε را برابر صفر قرار داده که نتایج آن مطابق زیر است:

$$x_0 - 3x_0 + 2 = 0 \quad (43-5)$$

$$2x_0 x_1 - 3x_1 - 2x_0 + 1 = 0 \quad (44-5)$$

$$2x_0 x_2 + x_1^2 + 3x_2 - 2x_1 = 0 \quad (45-5)$$

گام پنجم، حل سه معادله ساده شده است. نتایج معادله (43-5) همانند حالت کاهش یافته معادله

(37-5) است و آن برابر $x_0 = 1$ و $x_0 = 2$ می باشد.

نتایج معادلات (44-5) و (45-5) برای $x_0 = 1$ بصورت $x_1 = -1$ و $x_2 = 3$ و برای $x_0 = 2$ بصورت

$x_1 = 3$ و $x_2 = -3$ خواهد بود. این نتایج در بسط (38-5) بصورت زیر جایگذاری خواهد شد:

$$x = 1 - \varepsilon + 3\varepsilon^2 + \dots \quad (46-5)$$

$$x = 2 + 3\varepsilon - 3\varepsilon^2 + \dots \quad (47-5)$$

برای مقایسه تقریب های (46-5) و (47-5)، می بایست آن را با جواب دقیق معادله (37-5) مقایسه

کرد که آن برابر است با:

$$x = \frac{1}{2}[3 + 2\varepsilon \mp \sqrt{(3 + 2\varepsilon)^2 - 4(2 + \varepsilon)}] \quad (48-5)$$

$$\text{یا } x = \frac{1}{2}[3 + 2\varepsilon \mp \sqrt{1 + 8\varepsilon + 4\varepsilon^2}]$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + 8\varepsilon + 4\varepsilon^2} &= 1 + \frac{1}{2}(8\varepsilon + 4\varepsilon^2) + \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})}{2!}(8\varepsilon + 4\varepsilon^2)^2 + \dots = \\ &= 1 + 4\varepsilon + 2\varepsilon^2 - \frac{1}{8}(64\varepsilon^2 + \dots) = 1 + 4\varepsilon - 6\varepsilon^2 + \dots \end{aligned} \quad (49-5)$$

با جایگذاری بسط (49-5) در معادله (48-5) داریم:

$$x = \begin{cases} \frac{1}{2}(3 + 2\varepsilon + 1 + 4\varepsilon - 6\varepsilon^2 + \dots) \\ \frac{1}{2}(3 + 2\varepsilon - 1 - 4\varepsilon - 6\varepsilon^2 + \dots) \end{cases} \quad (50-5)$$

$$\text{یا } x = \begin{cases} 2 + 3\varepsilon - 3\varepsilon^2 + \dots \\ 1 - \varepsilon + 3\varepsilon^2 + \dots \end{cases}$$

حال پاسخ دقیق (50-5) با تقریب (46-5) و (47-5) قابل مقایسه است.

* معادله دیفرانسیل $y' + y = \varepsilon y^2$ را با شرط $y(0) = 1$ در نظر بگیرید. در این معادله ε ، پارامتر

اغتشاشات نام دارد که در اینجا $\varepsilon \ll 1$. با استفاده از بسط اغتشاشات زیر:

$$y(x, \varepsilon) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \dots \quad (51-5)$$

$$y'(x, \varepsilon) = y'_0(x) + \varepsilon y'_1(x) + \varepsilon^2 y'_2(x) + \dots$$

حال کافی است تا بسط (51-5) را در معادله دیفرانسیل جایگزین کرده و در نتیجه داریم:

$$y'_0 + \varepsilon y'_1 + \varepsilon^2 y'_2 + y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 = \varepsilon (y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2)^2 \quad (52-5)$$

پس از مرتب کردن بر حسب توان های مشابه ε خواهیم داشت:

$$(y'_0 + y_0) + \varepsilon(y'_1 + y_1 - y_0^2) + \varepsilon^2(y'_2 + y_2 - 2y_0 y_1) + \dots = 0 \quad (53-5)$$

عبارت های مربوط به هر توان مشابه را صفر قرار داده و در نتیجه می توان نوشت:

$$y_0' + y_0 = 0 \quad (54-5)$$

$$y_1' + y_1 = y_0^2$$

$$y_2' + y_2 = 2y_0 y_1$$

همچنین شرط مرزی زیر حاصل می شود:

$$y(0) = 1 \xrightarrow{y(x,\varepsilon) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \dots} y_0(0) + \varepsilon y_1(0) + \varepsilon^2 y_2(0) = 1 \rightarrow \quad (55-5)$$

$$\rightarrow y_0(0) = 1 \quad \text{و} \quad y_1(0) = y_2(0) = 0$$

با توجه به شرایط مرزی (55-5)، پاسخ معادلات (54-5) بصورت زیر خواهد بود:

$$y_0(x) = -e^{-x} \quad (56-5)$$

$$y_1(x) = -e^{-2x} + e^{-x}$$

$$y_2(x) = -e^{-3x} - 2e^{-2x} + e^{-x}$$

نتایج (56-5) در بسط (51-5) بصورت زیر جایگذاری خواهد شد:

$$y(x, \varepsilon) = -e^{-x} + \varepsilon(-e^{-2x} + e^{-x}) + \varepsilon^2(-e^{-3x} - 2e^{-2x} + e^{-x}) + \dots \quad (52-5)$$

همانند مثال قبل، برای مقایسه تقریب (52-5)، می بایست آن را با جواب دقیق معادله اصلی مقایسه

کرد که آن برابر است با:

$$y = e^{-x}(1 + \varepsilon(e^{-x} - 1))^{-1} \quad (53-5)$$

روابط (52-5) و (53-5) در مقادیر مختلف x و ε ، اختلاف ناچیزی دارند.

* فصل ششم – مطالعه عددی عدم تعادل حرارتی در

محیط های متخلخل

6-1 مقدمه

در این فصل به بررسی مدل سازی و حل عددی انتقال حرارت رسانشی در محیط های متخلخل پرداخته شده است. معادلات حاکم در محیط های متخلخل معرفی شده و درباره آن توضیحاتی ارائه می شود. سپس شرایط مدل سازی و حل عددی معادلات حاکم در محیط متخلخل مورد نظر، بررسی می شود. ما فرض کردیم که انتقال حرارت از مرزهای بالایی و پایینی این محیط افقی ناچیز است. بنابراین روند انتقال حرارت فقط در یک راستا صورت می گیرد. در این محیط انتقال حرارت، در اثر تغییر ناگهانی دما در مرز محیط رخ می دهد. این محیط متخلخل تغییر شکل ناپذیر، با یک سیال واحد تراکم ناپذیر اشباع شده است. در ادامه شرایط مرزی و تطبیق آن با تعریف شرایط حاکم بررسی می شود. پس از طی پروسه حل توسط روش های عددی فصل پنجم، نتایج حاصل از آن در قالب گراف های گرادیان حرارتی نشان داده شده و توضیحی کامل پیرامون رفتار گرادیان های حرارتی با توجه به گراف های حاصله ارائه می شود. در قسمت پایانی این فصل نتایج حاصل از حل عددی با استفاده از روش های فصل پنجم معتبر سازی خواهد شد.

6-2 معادلات حاکم در محیط های متخلخل

قبل از اینکه به توضیح معادلات حاکم بپردازیم، لازم است تا محیط مورد نظر خود را معرفی کرده و توضیحاتی را ارائه نماییم. محیط متخلخل مورد نظر، یک محیط یک بعدی بوده که فاصله $x \geq 0$ را اشغال می کند. این محیط ابتدا در دمای T_0 قرار داشته و بطور ناگهانی در مرز $x = 0$ دما از T_0 به T_1 تغییر می کند. همچنین محیط یک بعدی مفروض، افقی بوده و لذا هیچ گونه جریان القایی در آن بوجود نمی آید.

همانطور که قبلاً هم به آن اشاره شد، ساده ترین معادلات دو دمایی برای انتقال حرارت گذرا در یک محیط متخلخل با در نظر گرفتن پخش حرارتی و ترم سرعت فاز سیال توسط نیلد و بژان [14] در

شرایط عدم تعادل حرارتی ارائه شد. همچنین محیط در نظر گرفته شده توسط آن ها با یک سیال واحد اشباع شده بود. معادلات ارائه شده توسط آن ها به صورت زیر است:

$$\varepsilon(\rho c)_f \frac{\partial T_f}{\partial t} + (\rho c)_f V \nabla T_f = \varepsilon \nabla(k_f \nabla T_f) + h(T_s - T_f) \quad (1-6)$$

$$(1-\varepsilon)(\rho c)_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = (1-\varepsilon) \nabla(k_s \nabla T_s) + h(T_f - T_s) \quad (2-6)$$

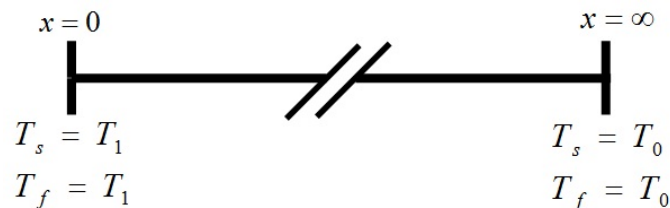
معادلات (1-6) و (2-6) در واقع همان معادلات ساده انرژی هستند که با استفاده قانون اول ترمودینامیک، قانون پیوستگی، قانون بقای جرم و تعریف یک حجم کنترل اثبات می شوند. در این معادلات، اندیس f مربوط به فاز سیال و اندیس s مربوط به فاز جامد است. ρ چگالی، c ظرفیت حرارتی ویژه، v سرعت سیال، T دما و ε تخلخل محیط است. ضریب تخلخل ε از حاصل تقسیم حجم فضای اشغال شده توسط محیط متخلخل بر حجم کل حاصل می شود.

در این معادلات ترم $h(T_s - T_f)$ ، انتقال حرارت بین دو فاز را نشان می دهد که بر اثر اختلاف دمای فاز جامد و سیال بوجود می آید. همانطور که می دانیم ضریب انتقال حرارت h ، یک مقدار تجربی است که با آزمایش بدست می آید. در فصل دوم هم به این موضوع اشاره شد. با توجه روابط (2-44)، (2-47) و (2-48) در غیاب جریان سیال، مقدار ضریب انتقال حرارت بین فازی صفر نخواهد بود. نکته بسیار مهم دیگر اینکه، در این حالت ضریب انتقال حرارت بین فازی مستقل از ضریب رسانایی فاز جامد k_s خواهد بود. با توجه به این نکته، می توان ضریب انتقال حرارت بین فازی و به دنبال آن مقیاس طول طبیعی را بر مبنای ویژگی های محیط متخلخل و سیال اشباع کننده به شکل زیر در نظر گرفت:

$$h = \frac{\varepsilon k_f}{L^2} \rightarrow L = \sqrt{\frac{\varepsilon k_f}{h}} \quad (3-6)$$

هدف این فصل صرفاً بررسی انتقال حرارت رسانشی در حال گذرا تحت شرایط مفروض در محیط متخلخل مورد نظر است، بنابراین فرض می شود که در این محیط، سیال ساکن است. در نتیجه در معادله (1-6) ترم $(\rho c)_f V \nabla T_f$ صفر خواهد بود.

در این مسئله به منظور مدل سازی، محیط متخلخل با توجه به شکل (1-6) تا لحظه $t = 0$ در دمای ثابت T_0 قرار دارد. بنابراین در معادلات انرژی کلیه مشتقات در جهت y را صفر قرار می دهیم.



شکل (1-6): محیط یک بعدی مفروض

فرض می شود دما در مرز $x = 0$ ناگهان از T_0 به T_1 افزایش می یابد. بنابراین در مرز $x = 0$ عدم تعادل حرارتی محلی رخ می دهد و ترم $h(T_s - T_f)$ به دلیل اختلاف دمای بین دو فاز جامد و سیال ارضا می شود. البته در لحظه اول دمای فازهای جامد و سیال برابر بوده و افزایش ناگهانی دما به T_1 در مرز به عنوان شرایط اولیه مسئله فرض می شود.

6-2-1 بی بعد سازی

برای بی بعد سازی معادلات انرژی (1-6) و (2-6) از روابط زیر استفاده شده است:

$$\hat{t} = \frac{\alpha_f}{L^2} t \quad (4-6)$$

که در آن $\alpha_f = \frac{k_f}{(\rho c)_f}$ ضریب پخش گرمایی فاز سیال و L مقیاس طول ماکروسکوپی است.

$$\hat{x} = \frac{x}{L} \quad (5-6)$$

$$T_f = T_0 + (T_1 - T_0) \theta_{fluid} \rightarrow \theta_{fluid} = \frac{T_f - T_0}{T_1 - T_0} \quad (6-6)$$

$$T_s = T_0 + (T_1 - T_0) \phi_{solid} \rightarrow \phi_{solid} = \frac{T_s - T_0}{T_1 - T_0} \quad (7-6)$$

با استفاده از روابط (4-6)، (5-6)، (6-6)، (7-6) و جایگذاری در معادلات انرژی (1-6) و (2-6)

داریم:

$$\text{Fluid} \rightarrow \theta_t = \theta_{xx} + H(\phi - \theta) \quad (8-6)$$

$$\text{Solid} \rightarrow \alpha\phi_t = \phi_{xx} + H\gamma(\theta - \phi) \quad (9-6)$$

که در روابط (8-6) و (9-6) پارامترهای بی بعد به فرم زیر هستند:

$$\alpha = \frac{\alpha_f}{\alpha_s} \quad (10-6)$$

$$H = \frac{hL^2}{\varepsilon k_f} \quad (11-6)$$

$$\gamma = \frac{\varepsilon k_f}{(1 - \varepsilon)k_s} \quad (12-6)$$

در روابط (10-6)، (11-6) و (12-6) پارامترهای α ، H و γ به ترتیب، نسبت ضریب پخش، ضریب انتقال حرارت بین فازی بدون بعد و نسبت رسانایی در مقیاس تخلخل نامیده می شوند.

همانطور که در فصل دوم هم به آن اشاره شد، در غیاب جریان سیال، تاثیر عدم تعادل حرارتی محلی بر رفتار گرادیان حرارتی فازهای جامد و سیال در یک محیط متخلخل یک بعدی با تخلخل ثابت، توسط نوری بروجردی و همکاران [61] مورد بررسی قرار گرفت. هنگامی که تعادل حرارتی محلی از بین برود، رسانایی در یکی از فازها نسبت به دیگری زودتر اتفاق می افتد، هر چند تعادل حرارتی محلی دوباره پس از گذشت زمان بوجود می آید. آن ها برای مدلسازی عدم تعادل حرارتی محلی، از معادلات انرژی ارائه شده توسط نیلد و بژان [14] و کاویانی [4] استفاده کردند. همچنین آن ها بعد از بی بعد سازی، با استفاده از متغیرهای تشابهی ارائه شده توسط کارسلا و جیاگر [62]، معادلات حاکم را به فرم ساده تری برای حل عددی تبدیل کردند. سپس با استخراج شرایط اولیه از معادلات بدست آمده، توانستند از روش کلر باکس حل عددی را انجام دهند. همچنین استفاده از متغیرهای تشابهی امکان حذف پارامتر H را نیز فراهم می کند. در این پایان نامه با استفاده از مقیاس طبیعی طول (3-6)، این پارامتر بی بعد برابر واحد خواهد بود.

با توجه به اینکه در این محیط عدم تعادل حرارتی محلی، بر اثر افزایش ناگهانی دما در مرز $x = 0$ ایجاد می شود، شرایط اولیه و مرزی را می توان به سادگی به فرم زیر تعریف کرد:

$$t = 0 \mapsto \theta(x = 0) = \phi(x = 0) = 1 \quad \text{شرط اولیه} \quad (13-6)$$

$$x = 0 \mapsto \theta(x = 0) = \phi(x = 0) = 1 \quad \text{شرایط مرزی} \quad (14-6)$$

$$x = \infty \mapsto T_f = T_s = T_0 \rightarrow \theta(x = \infty) = \phi(x = \infty) = 0$$

شرایط مرزی (14-6) حاکی از یک تغییر ناگهانی دما در مرز $x = 0$ محیط نیمه بینهایت است که عدم تعادل حرارتی بین فازها را ناشی می شود. همچنین شرایط مرزی استفاده شده در حل عددی، ویژگی های شرط اولیه را احراز می کنند.

باید توجه کنیم که از سطح مرزی $y = 0$ متناظر با سطح افقی، جریان گرمایی به آرامی منتقل می شود و بنابراین فقدان وجود نیروهای رانشی در این جهت در مقیاس ماکروسکوپی به طور طبیعی شرایط عدم جریان را مهیا می کند. هنگامی که سطح مرزی مایل باشد، یک جریان القایی متناسب با زاویه شیب β در طول سطح ایجاد می شود. در این حالت می بایست قانون دارسی را نیز در معادلات حاکم وارد کنیم.

3-6 روش حل

روش های عددی بسیاری برای حل معادلات دیفرانسیل عادی وجود دارد. هر کدام از این روش ها از دقت خاصی برخوردار هستند. به منظور حل معادلات (8-6) و (9-6) با شرایط اولیه و مرزی (13-6) و (14-6)، از دو روش عددی متفاوت استفاده شده است. برای پیشروی در مکان x و محاسبه مشتقات مرتبه دوم θ_{xx} و ϕ_{xx} از روش اختلاف محدود فشرده و از تکنیک تکرار شونده رانج کوتای مرتبه چهار برای پیشروی در زمان t استفاده شده است. هنگام استفاده از روش های عددی برای حل چنین معادلاتی می بایست تعداد بازه ها در زمان چندین برابر تعداد بازه ها در مکان باشد. در ذیل نتایج حاصل از بکارگیری روش های فوق در حل معادلات انرژی بتفصیل آمده است.

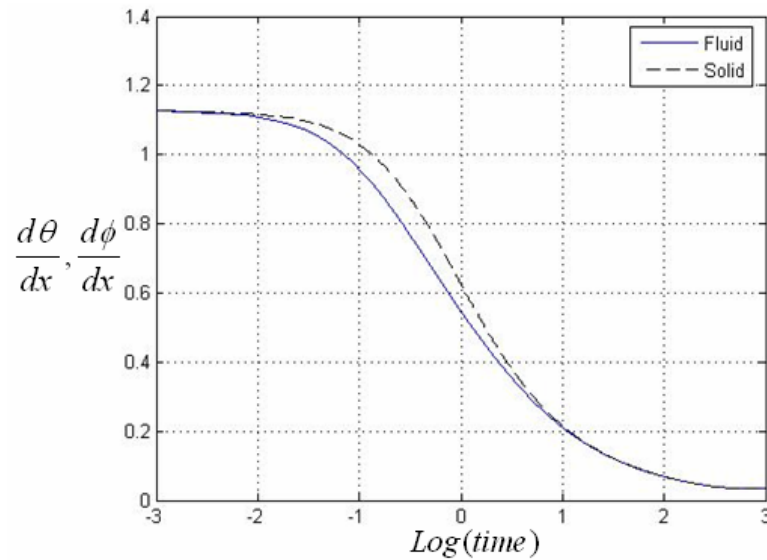
6-4 نتایج حل عددی

در این قسمت نتایج حاصل از حل عددی معادلات انرژی (8-6) و (9-6) در محیط های متخلخل با شرایط اولیه و مرزی (13-6) و (14-6) آمده است. کلیه این نتایج رفتار گرادیان های حرارتی فازهای جامد و سیال را نسبت به زمان نشان می دهند. هدف از بررسی گرادیان های حرارتی فازهای جامد و سیال، نشان دادن مدت زمانی است که شرایط عدم تعادل حرارتی به شرایط تعادل حرارتی تبدیل می شود. کلیه این نتایج، گرادیان های حرارتی فازهای جامد و سیال را در نقطه اول نشان می دهند که به ترتیب $q_f = -\theta'(x=0)$ و $q_s = -\phi'(x=0)$ هستند.

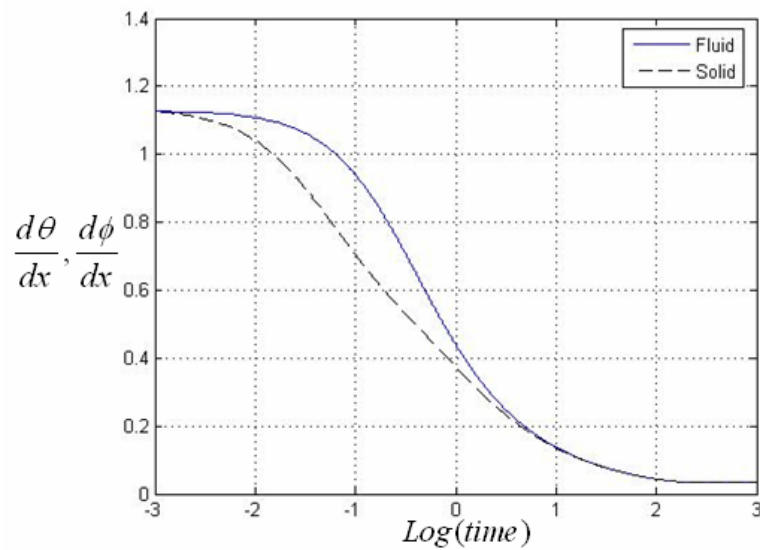
شکل های (2-6) و (3-6) گرادیان حرارتی فازهای جامد و سیال را نشان می دهند. گراف های موجود در هر شکل برای حالات خاص $\alpha = 2, \gamma = 1$ و $\alpha = 0.2, \gamma = 1$ رسم شده اند. به دلیل یکسان بودن شرایط اولیه هر دو فاز، گراف ها از یک نقطه شروع شده اند. اختلاف میان گرادیان های حرارتی هر دو فاز به دلیل تفاوت مقدار ضریب پخش حرارتی فازهای جامد α_s و سیال α_f است. با گذشت زمان این اختلاف بیشتر می شود. اما به دلیل تاثیرات دمایی فازها بر هم، این اختلاف کاهش یافته و دوباره گراف ها بر هم منطبق می شوند. انطباق گراف ها نشان دهنده تغییر شرایط، از حالت عدم تعادل حرارتی به حالت تعادل حرارتی است. در زمان های خیلی دیر، شیب گراف ها به صفر کاهش یافته و گرادیان های حرارتی هر دو فاز با یک مقدار ثابت به سمت بینهایت حرکت می کنند. هنگامی که شیب گراف ها صفر شد، هنوز هم انتقال حرارت بین تمامی گره های جامد و سیال صورت می پذیرد، اما باید توجه داشت که مقدار این انتقال حرارت به دلیل حاکم بودن شرایط تعادل حرارتی محلی، تا بینهایت همواره ثابت خواهد بود. نکته دیگر که در این گراف حائز اهمیت است، اختلاف میان گراف ها است. همانطور که بیان شد، α نسبت ضریب پخش حرارتی فاز سیال به فاز جامد است و هنگامی که $\alpha > 1$ باشد:

$$\frac{\alpha_f}{\alpha_s} > 1 \rightarrow \alpha_f > \alpha_s \rightarrow \text{Definition} \rightarrow \frac{k_f}{(\rho c)_f} > \frac{k_s}{(\rho c)_s} \rightarrow (\rho c)_s > (\rho c)_f \quad (15-6)$$

نامساوی (6-15) بیان می کند که گرمای ویژه فاز جامد بیشتر از سیال است. در مباحث فیزیکی، این بدین مفهوم است که فاز جامد دیر گرم می شود و دیر سرد می شود. بنابراین هنگامی که $\alpha > 1$ است، گراف فاز جامد همواره بالاتر از گراف فاز سیال قرار می گیرد. این نتیجه برای $\alpha < 1$ بالعکس خواهد بود. $\alpha = 2$ --- $\gamma = 1$

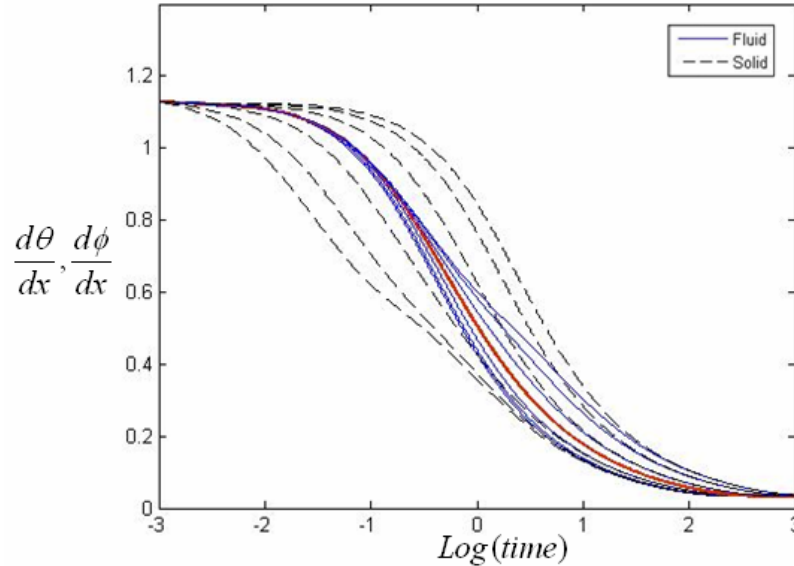


شکل (2-6): گراف های گرادیان حرارتی برای $\alpha = 2$ و $\gamma = 1$

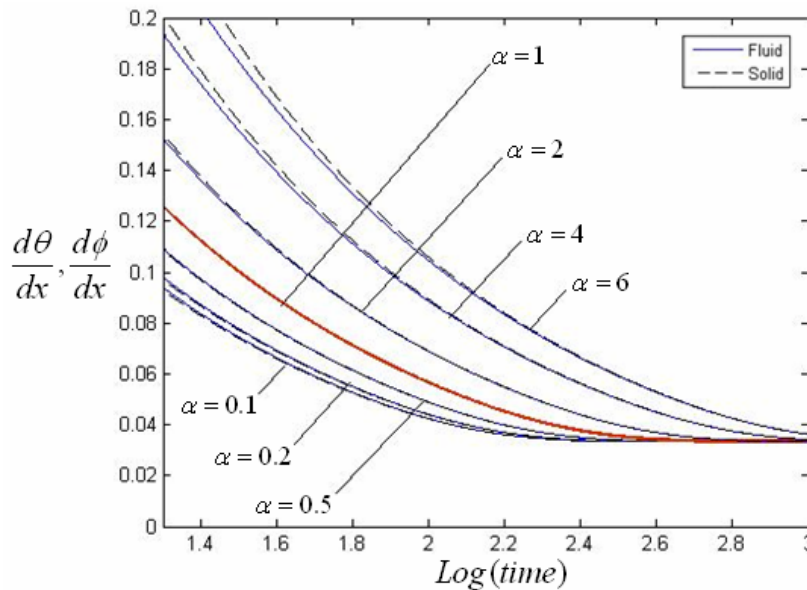


شکل (3-6): گراف های گرادیان حرارتی برای $\alpha = 0.2$ و $\gamma = 1$

شکل های (4-6) و (5-6) گرادیان حرارتی فازهای جامد و سیال را به ازای نسبت های مختلف ضریب α نشان می دهد. با توجه به نامساوی (6-15)، ظرفیت گرمای ویژه فاز جامد برای $\alpha > 1$ و $\alpha < 1$ ، به ترتیب کوچکتر و بزرگتر از ظرفیت گرمای ویژه فاز سیال است. نکته قابل توجه در شکل (4-6) این است که هر چه مقدار α افزایش یابد، مدت زمان رسیدن به تعادل حرارتی نیز افزایش می یابد.



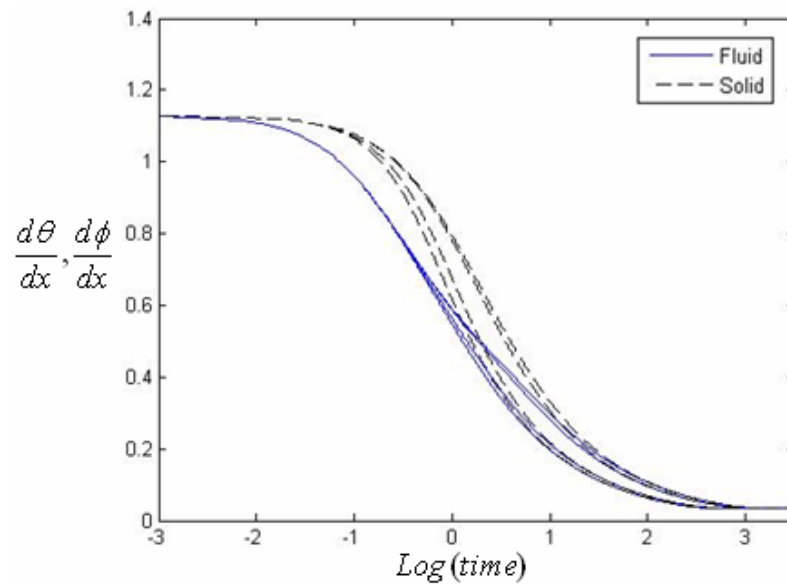
شکل (4-6): گراف های گرادیان حرارتی برای $\gamma = 1$ و α متفاوت



شکل (5-6): بزرگنمایی شکل (4-6)

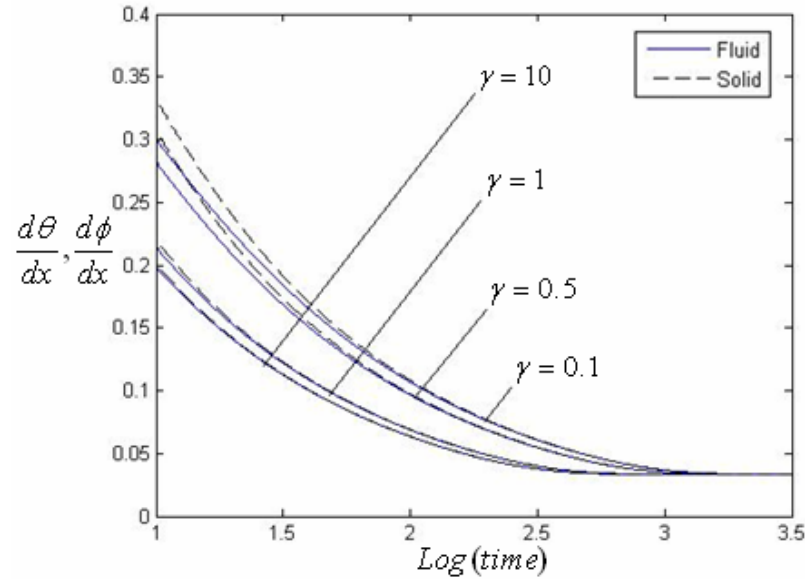
در این شکل ها، همچنین گراف میانی برای حالت خاص $\alpha = 1$ و $\gamma = 1$ رسم شده و نشان دهنده مرز میان $\alpha > 1$ و $\alpha < 1$ است. با توجه به معادلات انرژی، در این حالت خاص گراف های جامد و سیال بر هم منطبق خواهند بود.

شکل های (6-6) و (7-6) گرادیان حرارتی فازهای جامد و سیال را به ازای نسبت های مختلف ضریب γ و ضریب $\alpha = 4$ نشان می دهد. در این گراف ها هر چه مقدار γ افزایش یابد، مدت زمان رسیدن به تعادل حرارتی نیز کاهش می یابد.



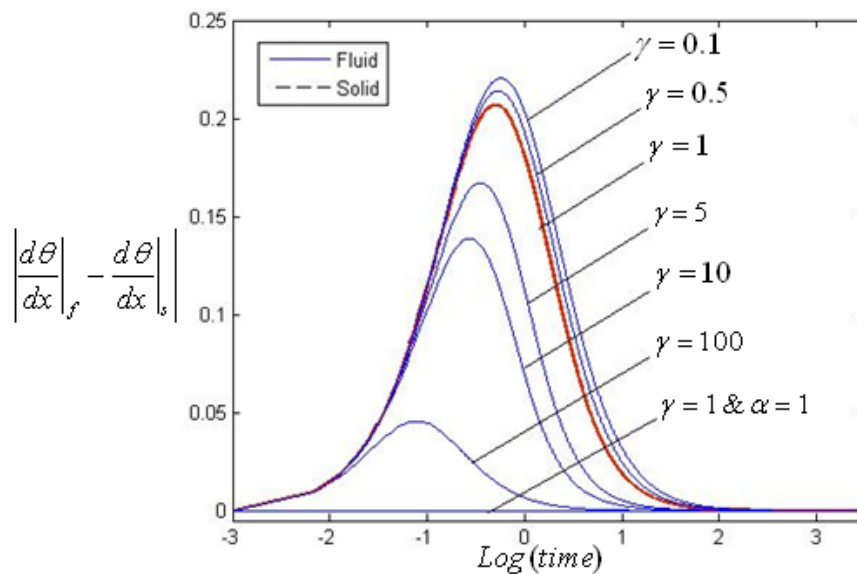
شکل (6-6): گراف های گرادیان حرارتی برای $\alpha = 4$ و γ متفاوت

با توجه به معادله (9-6)، تاثیری که ضریب α در معادله می گذارد، به مراتب بیشتر از ضریب γ است. بزرگتر بودن ضریب γ امکان خنثی کردن ضریب α را در معادله فاز جامد فراهم کرده و فازها در نقاط بیشتری از دامنه تعریف شده بر هم منطبقند. شکل (7-6) نمایی دقیق تری از زمان های دیر را نشان می دهد. در این شکل انطباق کلیه گراف ها قابل مشاهده است.

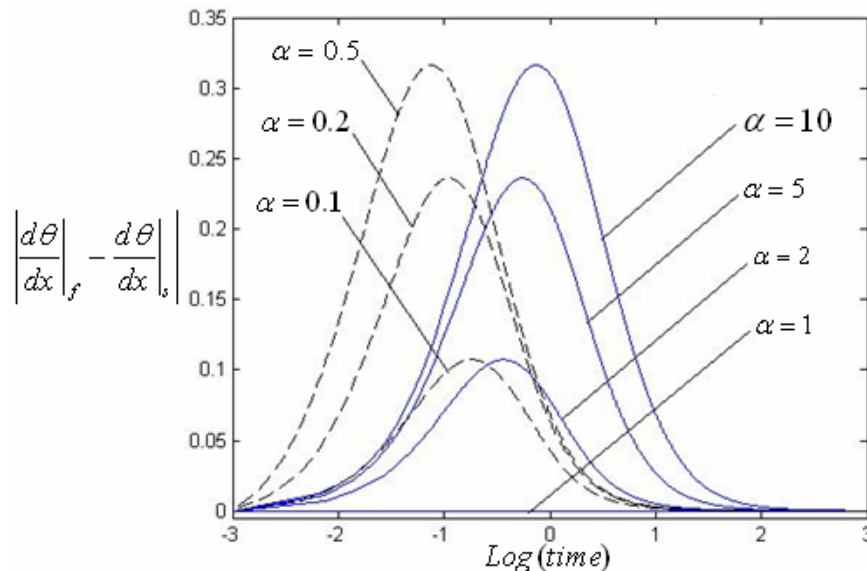


شکل (6-7): بزرگنمایی شکل (6-6)

شکل (6-8) روند اختلاف بین گرادیان حرارتی فازهای جامد و سیال را به ازای نسبت های مختلف ضریب γ و ضریب $\alpha = 4$ نشان می دهد. از گراف های حاصله اینطور نتیجه می شود که هر چه مقدار ضریب γ افزایش یابد، مقدار این اختلاف کمتر شده و گرادیان حرارتی فازهای جامد و سیال انطباق بیشتری دارند. در پایین ترین قسمت نمودار می توان مقدار اختلاف صفر را برای $\alpha = 1$ و $\gamma = 1$ مشاهده کرد.

شکل (6-8): مقادیر اختلاف گرادیان حرارتی برای $\alpha = 4$ و γ متفاوت

شکل (9-6) روند اختلاف بین گرادیان حرارتی فازهای جامد و سیال را به ازای نسبت های مختلف ضریب α و ضریب $\gamma = 1$ نشان می دهد. با توجه به این شکل، به ازای $\alpha > 1$ ، هر چه مقدار ضریب α افزایش یابد، اختلاف میان فازهای جامد و سیال افزایش پیدا می کند و بالعکس به ازای $\alpha < 1$ ، هر چه مقدار ضریب α افزایش یابد، اختلاف میان فازهای جامد و سیال کاهش پیدا می کند یا به بیان دیگر با دور شدن از مرز $\alpha = 1$ ، اختلاف میان فازهای جامد و سیال بیشتر می شود. نکته دیگر اینکه با کاهش ضریب α ، صرفنظر از اینکه ضریب α بزرگتر یا کوچکتر از یک باشد، نقطه حداکثر اختلاف گرادیان حرارتی به زمان های زود میل می کند. استدلال چنین نکته ای با توجه به توضیحات قبل بسیار آسان می باشد. با کوچک شدن ضریب α و میل کردن آن به سمت صفر $\alpha \rightarrow 0$ ، گرمای ویژه سیال به سمت بینهایت $c_f \rightarrow \infty$ و گرمای ویژه جامد به سمت صفر $c_s \rightarrow 0$ میل می کند. در نتیجه از همان لحظه اول اختلاف میان دو فاز شروع شده و در همان لحظات ابتدایی به حدکثر خود می رسد. با توجه به شکل (9-6) در پایین ترین قسمت می توان مقدار اختلاف صفر را برای $\alpha = 1$ و $\gamma = 1$ مشاهده کرد.



شکل (9-6): مقادیر اختلاف گرادیان حرارتی برای $\gamma = 1$ و α متفاوت

6-5 اعتبار سنجی نتایج حل عددی

برای اعتبار سنجی نتایج حل عددی در زمان های زود و دیر از روش تقریبی تحلیلی اغتشاشات و روش عددی پرتابی استفاده شده است. همانطور که در فصل پنجم هم اشاره به آن شد، بسیاری از محققان زمان زیادی را برای تعیین حل تقریبی مسئله ای که با آن مواجه هستند، صرف می کنند. این تقریب ها ممکن است کاملاً عددی، کاملاً تحلیلی یا ترکیبی از این دو تکنیک باشند. روش های عددی و تحلیلی در کنار یکدیگر، تشکیل یک تکنیک قدرتمند و تطبیق پذیر را می دهند. در این میان روش اغتشاشات یکی از روش های تقریبی برای حل مسائلی می باشد که در آن ها یک پارامتر خیلی کوچک و یا خیلی بزرگ ظاهر شده باشد. در این روش معادلات بی بعد شده با استفاده از یک سری توانی توسعه داده می شود. این سری توانی مشتمل بر پارامترهای خیلی کوچک و یا معکوس پارامتر خیلی بزرگ است. پس از اعمال این سری، معادلات بدست آمده برحسب توان های پارامتر اغتشاشات مرتب شده و ضرایب آن مساوی صفر قرار داده می شوند. نتیجه این که یک سری معادلات دیفرانسیل ساده تر حاصل می شود که جواب حاصل از هر معادله برای معادله بعدی مورد استفاده قرار می گیرد.

در قسمت های بعدی ابتدا با استفاده از یک سری توانی و مشتقات آن، معادلات انرژی بی بعد شده تعمیم داده می شوند. سپس با مرتب کردن هر دسته از معادلات، فرم نهایی معادلات حاصل می شود. این معادلات به صورت تحلیلی یا عددی می توانند حل شوند که در اینجا از روش عددی پرتابی برای حل آن ها استفاده شده است. سپس با توجه به شرایط مرزی و استفاده از سری توانی، شرایط مرزی جدید بدست می آیند. در نهایت با حل عددی این معادلات، استخراج نتایج و رسم آن در زمان های مناسب، نتایج حاصل از حل عددی قسمت (6-4) معتبر سازی خواهند شد.

6-5-1 تقریب اغتششات برای زمان های زود

سری های توانی زیر را برای فازهای جامد و سیال در نظر بگیرید:

$$\theta(y,t) = \theta_0(y) + t\theta_1(y) + t^2\theta_2(y) + t^3\theta_3(y) + \dots \quad (16-6)$$

$$\phi(y,t) = \phi_0(y) + t\phi_1(y) + t^2\phi_2(y) + t^3\phi_3(y) + \dots \quad (17-6)$$

در زمان های خیلی زود با توجه به اینکه t بسیار کوچک است، در نتیجه $t^2, t^3, \dots \rightarrow 0$ و معادلات

(16-6) و (17-6) به فرم زیر تبدیل می شوند:

$$\theta(y,t) = \theta_0(y) + t\theta_1(y) \quad (18-6)$$

$$\phi(y,t) = \phi_0(y) + t\phi_1(y) \quad (19-6)$$

از معادلات (18-6) و (19-6) به صورت زیر مشتق گیری می شود:

$$\theta_t(y,t) = \theta_1(y) \quad (20-6)$$

$$\theta_y(y,t) = \theta'_0(y) + t\theta'_1(y)$$

$$\theta_{yy}(y,t) = \theta''_0(y) + t\theta''_1(y)$$

$$\phi_t(y,t) = \phi_1(y) \quad (21-6)$$

$$\phi_y(y,t) = \phi'_0(y) + t\phi'_1(y)$$

$$\phi_{yy}(y,t) = \phi''_0(y) + t\phi''_1(y)$$

با جایگذاری مشتقات (20-6) و (21-6) در معادلات (8-6) و (9-6) و مرتب کردن آن ها، معادلات

زیر حاصل می شود:

$$\theta_1 = (\theta''_0 - \theta_0 + \phi_0) + t(\theta''_1 + \phi_1 - \theta_1) \rightarrow \begin{cases} \theta''_0 - \theta_0 + \phi_0 = \theta_1 \\ \theta''_1 + \phi_1 - \theta_1 = 0 \end{cases} \quad (22-6)$$

$$\alpha\phi_1 = (\phi''_0 + \gamma(\theta_0 - \phi_0)) + t(\phi''_1 + \gamma(\theta_1 - \phi_1)) \rightarrow \begin{cases} \phi''_0 + \gamma(\theta_0 - \phi_0) = \alpha\phi_1 \\ \phi''_1 + \gamma(\theta_1 - \phi_1) = 0 \end{cases} \quad (23-6)$$

با جایگذاری معادلات (18-6) و (19-6) در شرایط مرزی (14-6)، می توان شرایط مرزی منطبق با معادلات (22-6) و (23-6) را بصورت زیر بدست آورد:

$$\theta(y=0, t) = 1 \xrightarrow{(18-6)} \theta_0(0) + t\theta_1(0) = 1 \rightarrow \begin{cases} \theta_0(0) = 1 \\ \theta_1(0) = 0 \end{cases} \quad (24-6)$$

$$\theta(y=\infty, t) = 0 \xrightarrow{(18-6)} \theta_0(\infty) + t\theta_1(\infty) = 0 \rightarrow \begin{cases} \theta_0(\infty) = 0 \\ \theta_1(\infty) = 0 \end{cases}$$

$$\phi(y=0, t) = 1 \xrightarrow{(19-6)} \phi_0(0) + t\phi_1(0) = 1 \rightarrow \begin{cases} \phi_0(0) = 1 \\ \phi_1(0) = 0 \end{cases} \quad (25-6)$$

$$\phi(y=\infty, t) = 0 \xrightarrow{(19-6)} \phi_0(\infty) + t\phi_1(\infty) = 0 \rightarrow \begin{cases} \phi_0(\infty) = 0 \\ \phi_1(\infty) = 0 \end{cases}$$

پس بطور خلاصه برای اعتبار سنجی و بدست آوردن مقدار اولین نقطه از گراف گرادیان های حرارتی فازهای جامد و سیال، کفایت معادلات زیر با شرایط مرزی مشخص دوباره حل عددی شوند.

$$\begin{cases} \theta_1'' + \phi_1 - \theta_1 = 0 & \theta_1(0) = 0 \text{ و } \theta_1(\infty) = 0 \\ \phi_1'' + \gamma(\theta_1 - \phi_1) = 0 & \phi_1(0) = 0 \text{ و } \phi_1(\infty) = 0 \end{cases} \quad (26-6)$$

$$\begin{cases} \theta_0'' - \theta_0 + \phi_0 = \theta_1 & \theta_0(0) = 1 \text{ و } \theta_0(\infty) = 0 \\ \phi_0'' + \gamma(\theta_0 - \phi_0) = \alpha\phi_1 & \phi_0(0) = 1 \text{ و } \phi_0(\infty) = 0 \end{cases} \quad (27-6)$$

ابتدا با استفاده از روش پرتابی که در فصل پنجم بدان اشاره شد، معادلات (26-6) و (27-6) حل عددی می گردند. با حل این معادلات مقدار گرادیان حرارتی فازهای جامد و سیال در مرز محیط متخلخل و در زمان های زود بدست می آید. توضیحات و گراف های مربوطه در قسمت (3-5-6) بتفصیل آمده است.

6-5-2 تقریب اغتششات برای زمان های دیر

برای زمان های خیلی دور هم می توان روش قسمت (6-6) را بکار برد. در این حالت سری توانی زیر

بکار گرفته می شود:

$$\theta(y,t) = \theta_0(y) + \frac{1}{t}\theta_1(y) + \frac{1}{t^2}\theta_2(y) + \frac{1}{t^3}\theta_3(y) + \dots \quad (28-6)$$

$$\phi(y,t) = \phi_0(y) + \frac{1}{t}\phi_1(y) + \frac{1}{t^2}\phi_2(y) + \frac{1}{t^3}\phi_3(y) + \dots \quad (29-6)$$

که در زمان های خیلی دیر با توجه به اینکه $t \rightarrow \infty$ است، در نتیجه $\frac{1}{t^2}, \frac{1}{t^3}, \dots \rightarrow 0$ و معادلات

(28-6) و (29-6) به فرم زیر تبدیل می شوند:

$$\theta(y,t) = \theta_0(y) + \frac{1}{t}\theta_1(y) \quad (30-6)$$

$$\phi(y,t) = \phi_0(y) + \frac{1}{t}\phi_1(y) \quad (31-6)$$

از معادلات (30-6) و (31-6) به فرم زیر مشتق گیری می شود:

$$\theta_t(y,t) = -\frac{\theta_1(y)}{t^2} \quad (32-6)$$

$$\theta_{yy}(y,t) = \theta_0''(y) + \frac{1}{t}\theta_1''(y)$$

$$\phi_t(y,t) = -\frac{\phi_1(y)}{t^2} \quad (33-6)$$

$$\phi_{yy}(y,t) = \phi_0''(y) + \frac{1}{t}\phi_1''(y)$$

با جایگذاری مشتقات (32-6) تا (33-6) در معادلات (8-6) و (9-6) و مرتب کردن آن ها نتیجه می

شود:

$$-\theta_1 = t^2(\theta_0'' + \phi_0 - \theta_0) + t(\theta_1'' + \phi_1 - \theta_1) \rightarrow \theta_0'' - \theta_0 + \phi_0 = 0 \quad (34-6)$$

$$-\alpha\phi_1 = t^2(\phi_0'' + \gamma(\theta_0 - \phi_0)) + t(\phi_1'' + \gamma(\theta_1 - \phi_1)) \rightarrow \phi_0'' + \gamma(\theta_0 - \phi_0) = 0 \quad (35-6)$$

شرایط مرزی همانند قبل هستند. پس بطور خلاصه در روش تحلیلی برای بدست آوردن مقدار آخرین نقطه در فاز سیال و جامد کفایت معادلات زیر با شرایط مرزی مفروض، با استفاده از روش پرتابی حل عددی شوند:

$$\begin{cases} \theta_0'' - \theta_0 + \phi_0 = 0 & \theta_0(0) = 1 \text{ و } \theta_0(\infty) = 0 \\ \phi_0'' + \gamma(\theta_0 - \phi_0) = 0 & \phi_0(0) = 1 \text{ و } \phi_0(\infty) = 0 \end{cases} \quad (36-6)$$

نتایج حل عددی معادلات (36-6) به ما نشان خواهد داد که مقدار گرادیان ها حرارتی فازهای جامد و سیال در زمان های دیر با خطای بسیار کمی بر هم منطبق خواهد شد و برای تمامی حالت ها یک مقدار ثابت خواهد داشت. توضیحات و گراف های مربوطه در قسمت بعد بتفصیل ارائه شده است.

3-5-6 نتایج تقریب اغتشاشات

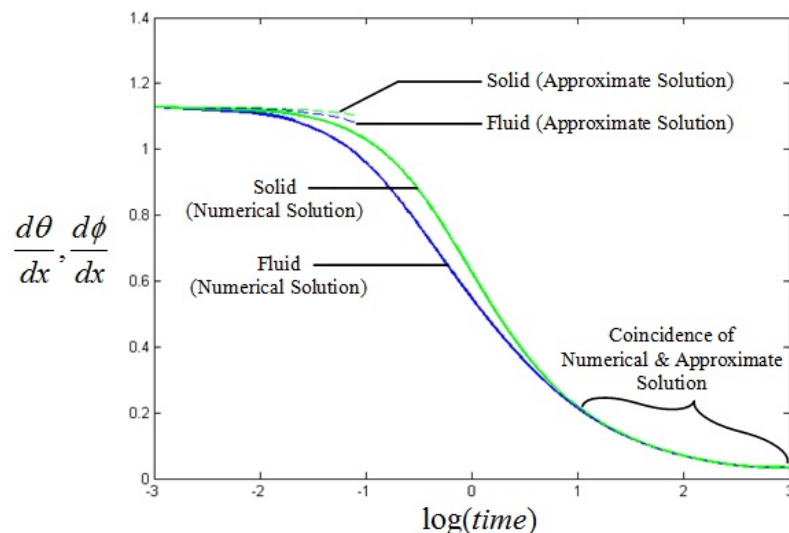
در این قسمت نتایج تقریب اغتشاشات برای زمان های زود و دیر ارائه شده است. همانطور که در توضیح روش تقریبی اغتشاشات بدان اشاره شد، این روش برای معادلاتی استفاده می شود که در آن ها یک پارامتر کوچک یا معکوس یک پارامتر بزرگ ظاهر شده باشد. همچنین استفاده از یک سری توانی برای تعمیم معادلات، موجب انحراف جواب ها از حالت حل دقیق می شود که در مثال های بخش (1-6-5) بوضوح قابل مشاهده است. بنابراین حل تقریبی اغتشاشات با حل عددی مستقیم در زمان های خیلی زود و خیلی دیر انطباق نسبتاً خوبی داشته و هر چه در طول زمان پیش می رویم انحراف حل تقریبی با عددی بیشتر خواهد شد.

با حل عددی معادلات (26-6)، (27-6) و (28-6) می توان نتایج حاصل از حل عددی مستقیم معادلات (1-6) و (2-6) را معتبر سازی کرد. در حالت خاص $\alpha = 2$ و $\gamma = 1$ انطباق روش تقریبی در زمان های زود و دیر با روش عددی مستقیم مطابق شکل (10-6) خواهد بود. در زمان های زود هر دو روش انطباق تقریباً خوبی دارند که با گذشت زمان از درجه این انطباق کاسته و خطا بیشتر می

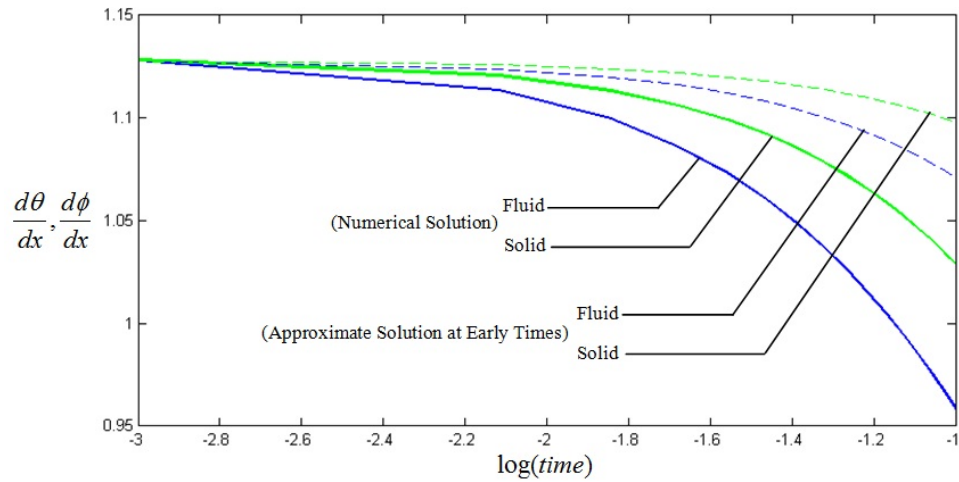
شود. بدلیل کاسته شدن از اعتبار روش اغتشاشات و واگرایی گراف ها، انطباق نتایج تا زمان $t = 0.1$ ادامه داده شده است. بزرگنمایی شکل (10-6) برای نمایش موقعیت گراف های حاصل از هر دو روش تا زمان $t = 0.1$ در شکل (11-6) ارائه شده است.

با توجه به شکل (12-6) در زمان های خیلی دیر هر دو روش با خطای بسیار کمی همدیگر را دنبال می کنند. انطباق روش های عددی و تقریبی در زمان های دیر، به دلیل یکسان شدن شرایط فازهای جامد و سیال است. کلیه گراف های موجود در این فصل، نتایج گرادیان های حرارتی فازهای جامد و سیال را در زمان لگاریتمی نشان می دهند. هدف از بکارگیری زمان لگاریتمی به منظور بالا بردن وضوح و نشان دادن اختلاف میان فازهای جامد و سیال بوده و دلیل دیگری ندارد.

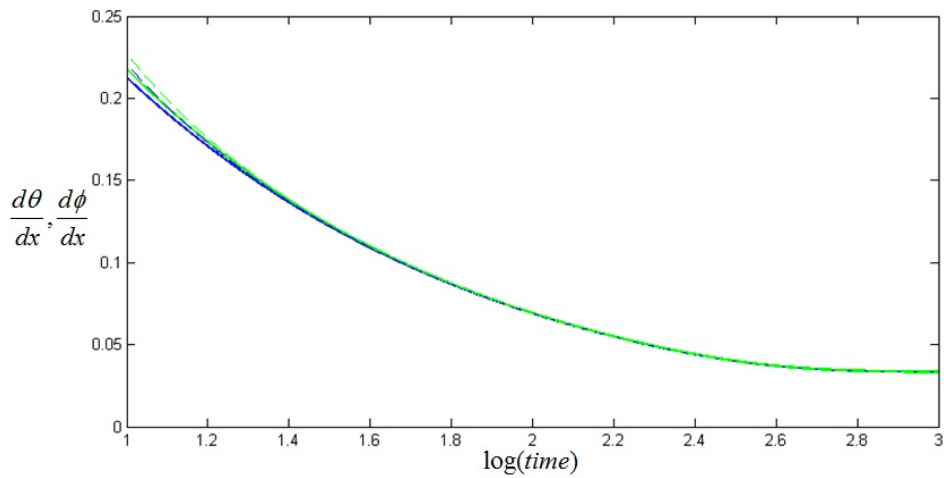
شکل های (14-6) و (15-6) گرادیان های حرارتی فازهای جامد و سیال را در زمان t نشان می دهند. بدلیل بازه زمانی گسترده، در این شکل ها اختلاف میان گرادیان های حرارتی قابل تشخیص نیست، اما یکسان شدن شرایط فازهای جامد و سیال و میل کردن تدریجی آن ها به یک مقدار ثابت بوضوح قابل مشاهده است. فازهای جامد و سیال پس از اعمال شرایط تحمیلی و تغییر ناگهانی دما در مرز، با توجه به ضریب پخش حرارتی مربوطه خود را به سرعت با تغییر شرایط وفق می دهند.



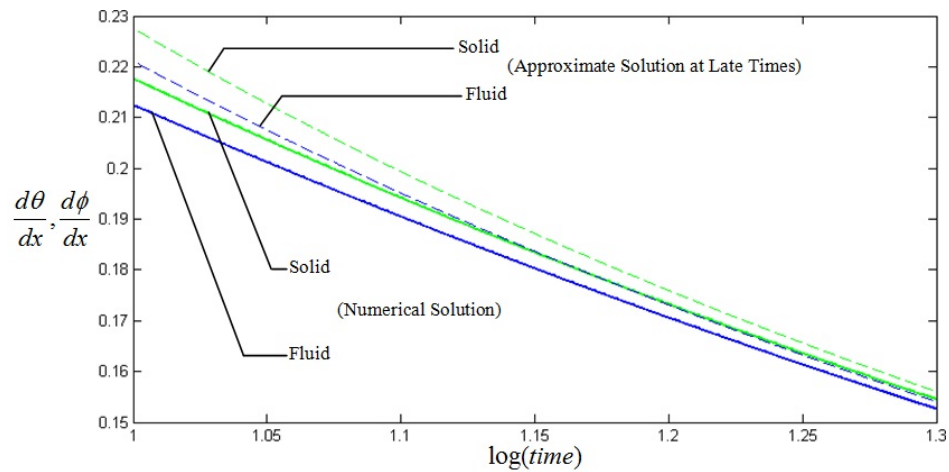
شکل (10-6): خطای میان روش های عددی و تقریبی برای حالت $\alpha = 2$ و $\gamma = 1$



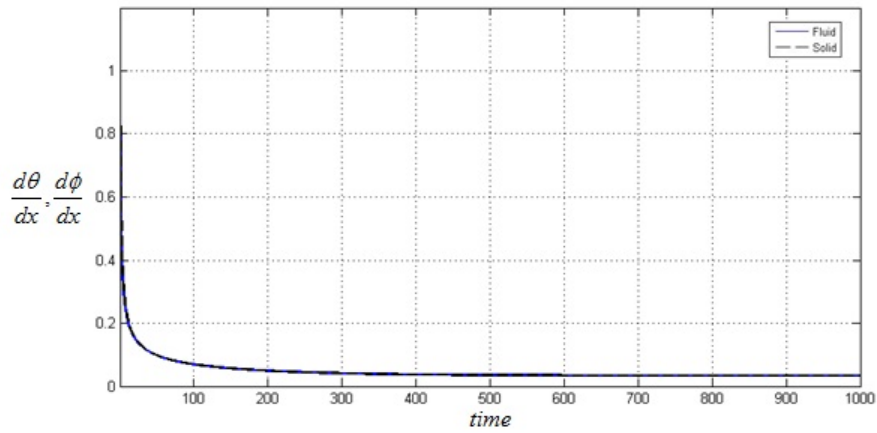
شکل (11-6): بزرگنمایی شکل (10-6) در زمان های زود



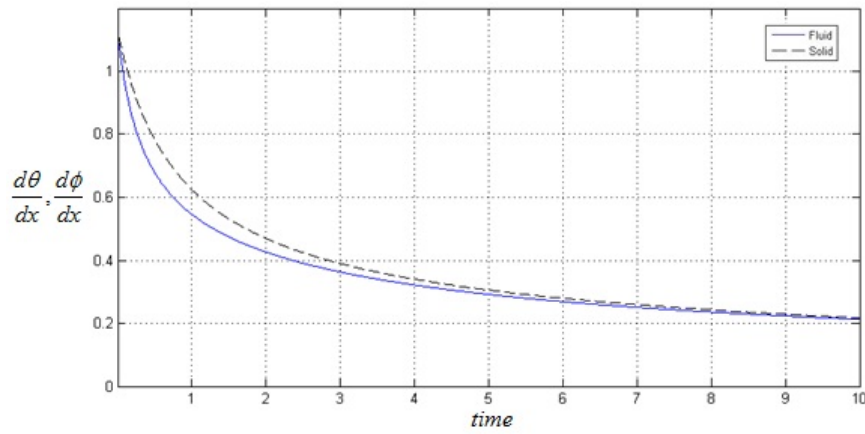
شکل (12-6): بزرگنمایی شکل (10-6) در زمان های دیر



شکل (13-6): بزرگنمایی شکل (12-6)



شکل (14-6): گراف های گرادیان حرارتی برای $\alpha = 2$ و $\gamma = 1$ در زمان های t



شکل (15-6): بزرگنمایی شکل (14-6)

	نقاط در دامنه رسم شده	حل تقریبی			حل عددی			RMS
		ابتدا	میانی	انتهای	ابتدا	میانی	انتهای	
زود	جامد	1.1281	1.1138	1.0975	1.1281	1.0785	1.0282	0.0591
	سیال	1.1281	1.1004	1.0707	1.1281	1.0370	0.9574	
دیر	جامد	0.2276	0.0351	0.0334	0.2176	0.0351	0.0334	0.00063
	سیال	0.2211	0.0351	0.0334	0.2125	0.0351	0.0334	

جدول (1-6): مقایسه خطای حاصل از حل عددی و تقریبی

* فصل هفتم – بررسی تغییرات نتایج فصل ششم در

حضور ترم تولید گرما

1-7 مقدمه

یکی از عوامل ایجاد اثر عدم تعادل حرارتی محلی، زمانی است که تولید حرارت مهمی در هر یک از فازهای جامد یا سیال رخ دهد. در این حالت حجم محلی از فازهای جامد و سیال از تعادل حرارتی دور خواهند ماند. اثر این عامل در کنار تغییر ناگهانی دما در مرز یک محیط متخلخل، در این فصل بررسی می شود. کاتالیزورهای صنایع مختلف که از آن ها برای تصفیه مذاب فلزات استفاده می شود یا کاربرد محیط های متخلخل در صنایع هسته ای از جمله مواردی هستند که در آن ها تغییر ناگهانی دما در حضور ترم تولید گرما، شرایط عدم تعادل حرارتی محلی را فراهم می کند. در ابتدا به اجمال بی بعد سازی معادلات حاکم مرور خواهد شد و در ادامه نتایج حل عددی در قالب گراف های گرادیان حرارتی فازهای جامد و سیال آمده است. همچنین به موازات آن توضیحی کامل درباره رفتار گرادیان های حرارتی ارائه خواهد شد.

2-7 مدل سازی

محیط متخلخل مورد نظر در این فصل هم، یک محیط یک بعدی همانند شکل (1-6) بوده که فاصله $x \geq 0$ را اشغال می کند. این محیط ابتدا در دمای T_0 قرار داشته و بطور ناگهانی در مرز $x = 0$ دما از T_0 به T_1 تغییر می کند. در کنار این تغییر ناگهانی، تولید گرمای q''' نیز در فاز جامد بطور دائم و یکنواخت ایجاد می شود. همچنین محیط یک بعدی مفروض، افقی بوده و هیچ گونه جریان القایی در آن بوجود نمی آید.

همانند فصل قبل از معادلات ارائه شده توسط نیلد و بژان [14] در شرایط عدم تعادل حرارتی محلی و در حضور ترم تولید گرما استفاده خواهد شد. معادلات ارائه شده توسط آن ها به صورت زیر بودند:

$$\varepsilon(\rho c)_f \frac{\partial T_f}{\partial t} + (\rho c)_f V \nabla T_f = \varepsilon \nabla (k_f \nabla T_f) + h(T_s - T_f) \quad (1-7)$$

$$(1 - \varepsilon)(\rho c)_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = (1 - \varepsilon) \nabla (k_s \nabla T_s) + h(T_f - T_s) + (1 - \varepsilon)q''' \quad (2-7)$$

در این معادلات، اندیس f مربوط به فاز سیال و اندیس s مربوط به فاز جامد است. ρ چگالی، c ظرفیت حرارتی ویژه، v سرعت سیال، T دما و ε تخلخل محیط است. q''' تولید گرمای یکنواخت بر واحد حجم جامد است. در این معادلات ترم $h(T_s - T_f)$ ، انتقال حرارت بین دو فاز را نشان می دهد که بر اثر اختلاف دمای فاز جامد و سیال بوجود می آید. شرایط اولیه و مرزی معادلات حاکم نیز همانند فصل قبل می باشد.

با توجه به $(T_f, T_s) = T_{ref} + \frac{q''' \cdot L^2}{(\rho c)_f \alpha_f} (\theta, \phi)$ [58]، می توان برای بی بعد سازی معادلات (1-7) و (2-7)، از روابط زیر استفاده کرد:

$$\theta_{fluid} = \frac{T_f - T_{ref}}{q''' \cdot L^2 / k_f} \quad (3-7)$$

$$\phi_{solid} = \frac{T_s - T_{ref}}{q''' \cdot L^2 / k_f} \quad (4-7)$$

با استفاده از روابط (4-6)، (5-6)، (3-7)، (4-7) و جایگذاری در معادلات انرژی (1-7) و (2-7) معادلات انرژی به فرم زیر تبدیل خواهند شد:

$$\frac{\alpha_f}{L^2} \left(\frac{q''' \cdot L^2}{k_f} \right) \theta_t = \frac{k_f}{(\rho c)_f} \left(\frac{q''' \cdot L^2}{k_f \cdot L^2} \right) \theta_{xx} + \frac{h}{(\rho c)_f \cdot \varepsilon} \left(\frac{q''' \cdot L^2}{k_f} \right) (\phi - \theta) \quad (5-7)$$

$$\Rightarrow \theta_t = \theta_{xx} + H(\phi - \theta)$$

$$\frac{\alpha_f \alpha_s}{\alpha_s L^2} \left(\frac{q''' \cdot L^2}{k_f} \right) \phi_t = \frac{k_s}{(\rho c)_s} \left(\frac{q''' \cdot L^2}{k_f \cdot L^2} \right) \phi_{xx} + \frac{h}{(\rho c)_s \cdot (1 - \varepsilon)} \left(\frac{q''' \cdot L^2}{k_f} \right) (\theta - \phi) + \frac{q'''}{(\rho c)_f} \quad (6-7)$$

$$\Rightarrow \alpha \phi_t = \phi_{xx} + \gamma H(\theta - \phi) + 1$$

که در روابط (5-7) و (6-7) پارامترهای بی بعد همان روابط (10-6)، (11-6) و (12-6) از فصل ششم هستند. در معادله (6-7) پارامتر H با استفاده از مقیاس طبیعی طول (3-6)، برابر واحد خواهد بود.

به منظور حل معادلات (5-7) و (6-7) با شرایط اولیه و مرزی (6-13) و (6-14)، همانند فصل قبل از روش تفاضل محدود فشرده برای محاسبه مشتقات مرتبه دوم θ_{xx} و ϕ_{xx} و از روش رانج کوتای مرتبه چهار برای پیشروی در زمان t استفاده شده است. هنگام استفاده از روش های عددی برای حل چنین معادلاتی، می بایست تعداد بازه ها در زمان چندین برابر تعداد بازه ها در مکان باشد. در ذیل نتایج حاصل از بکارگیری روش های فوق در حل معادلات انرژی بتفصیل آمده است.

3-7 نتایج حل عددی

در این قسمت نتایج حاصل از حل عددی معادلات انرژی (5-7) و (6-7) در محیط های متخلخل با شرایط اولیه و مرزی (6-13) و (6-14) آمده است. کلیه این نتایج رفتار گرادیان های حرارتی فازهای جامد و سیال را نسبت به زمان در اثر تغییر ناگهانی دما در مرز محیط متخلخل و در حضور ترم تولید گرما نشان می دهند. هدف از بررسی گرادیان های حرارتی فازهای جامد و سیال، نشان دادن مدت زمانی است که شرایط عدم تعادل حرارتی به شرایط تعادل حرارتی تبدیل می شود. کلیه این نتایج گرادیان های حرارتی فازهای جامد و سیال را در نقطه اول نشان می دهند که به ترتیب $q_s = -\phi'(x=0)$ و $q_f = -\theta'(x=0)$ هستند.

شکل های (1-7) و (2-7) گرادیان حرارتی فازهای جامد و سیال را نشان می دهند. گراف های موجود در هر شکل برای حالات خاص $\alpha = 2, \gamma = 1$ و $\alpha = 0.2, \gamma = 1$ رسم شده اند. به دلیل یکسان بودن شرایط اولیه هر دو فاز، گراف ها از یک نقطه شروع شده اند. همچنین در حضور ترم تولید گرما، تمامی گراف ها در گرادیان های حرارتی منفی به پایداری رسیده اند. در تمام طول مدت پروسه انتقال حرارت، شرط اولیه فازهای جامد و سیال در گره اول ثابت است و در نتیجه با وجود ترم تولید گرما، گره دوم می تواند به دمایی بالاتر از گره اول برسد و سرانجام در زمان های دیر، گرادیان های حرارتی فازهای جامد و سیال در یک مقدار منفی نسبت به هم پایدار می شوند. اختلاف میان گرادیان های حرارتی هر دو فاز به دلیل تفاوت مقدار ضریب پخش حرارتی فازهای جامد α_s و سیال

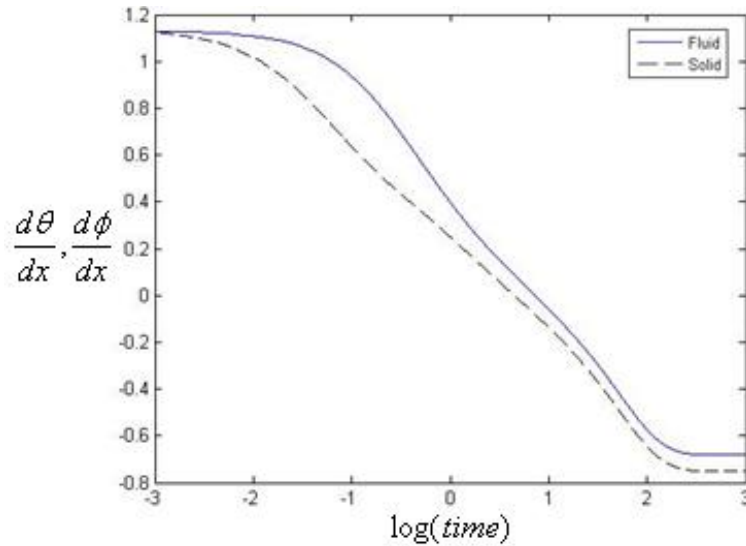
α_f است. در شکل (1-7) با گذشت زمان این اختلاف تا حدی بیشتر می شود. همچنین وجود ترم تولید گرما در فاز جامد، رشد این اختلاف را تسریع کرده و مقدار آن را افزایش می دهد. همانطور که گفته شد، α نسبت ضریب پخش حرارتی فاز سیال به فاز جامد است و هنگامی که $\alpha < 1$ باشد:

$$\frac{\alpha_f}{\alpha_s} < 1 \rightarrow \alpha_f < \alpha_s \rightarrow \frac{k_f}{(\rho c)_f} < \frac{k_s}{(\rho c)_s} \rightarrow (\rho c)_s < (\rho c)_f \quad (7-7)$$

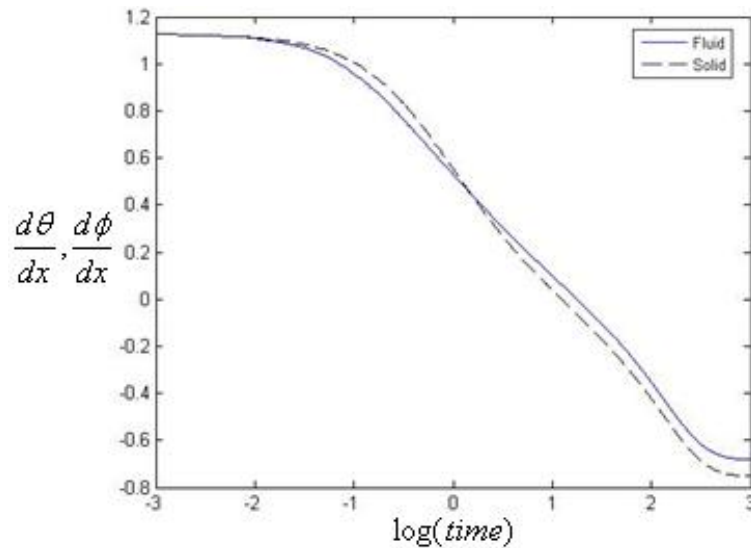
نامساوی (7-7) بیان می کند که گرمای ویژه فاز جامد کمتر از فاز سیال است. در مباحث فیزیکی، این بدین مفهوم است که فاز جامد زود گرم و زود سرد می شود. بنابراین هنگامی که $\alpha < 1$ است، گراف فاز جامد همواره پایین تر از گراف فاز سیال قرار می گیرد. در این حالت وجود ترم تولید گرما در فاز جامد، سرعت کاهش گرادیان حرارتی فاز جامد را نسبت به سیال بیشتر کرده و فاز جامد نسبت به قبل بسیار زودتر گرم شده و بدین دلیل گراف ها هیچ گاه با هم تلاقی نخواهند داشت.

شکل (2-7)، گرادیان حرارتی فازهای جامد و سیال را در حالت $\alpha > 1$ نشان می دهد. با توجه به نامساوی (7-7)، هنگامی که $\alpha > 1$ باشد، ظرفیت حرارتی ویژه فاز جامد بیشتر بوده و در نتیجه فاز جامد دیر گرم می شود. بدین دلیل گراف فاز جامد بالاتر از گراف فاز سیال قرار می گیرد. اما باز هم به دلیل وجود ترم تولید گرما در فاز جامد، میزان دیر گرم شدن فاز جامد کاهش پیدا می کند. در نتیجه اختلاف میان گرادیان های حرارتی هر دو فاز به دلیل تاثیرات دمایی فازها بر هم و وجود یک ترم تولید گرما در فاز جامد، نسبت به شکل (1-7) کمتر می باشد. در نهایت به دلیل تاثیر مداوم ترم تولید گرما این کاهش اختلاف از بین رفته و در نهایت شاهد انطباق گرادیان های حرارتی فازهای جامد و سیال هستیم. تاثیر ترم تولید گرما بدین جا محدود نشده و با گرم تر شدن گره دوم جامد نسبت به سیال، گرادیان حرارتی فاز جامد پایین تر از فاز سیال قرار خواهد گرفت. در زمان های خیلی دیر، شیب کلیه گراف ها به صفر کاهش یافته و گرادیان های حرارتی هر دو فاز با یک مقدار ثابت به سمت بینهایت حرکت می کنند. یکسان بودن شیب گراف ها حاکی از مهار شدن تاثیرات ترم تولید

گرما در هر دو فاز است. هنگامی که شیب گراف ها صفر شد، هنوز هم انتقال حرارت بین گره های جامد و سیال صورت می پذیرد، اما باید توجه داشت که مقدار این انتقال حرارت به دلیل خنثی شدن اثر ترم تولید گرما، تا بینهایت همواره ثابت خواهد بود.



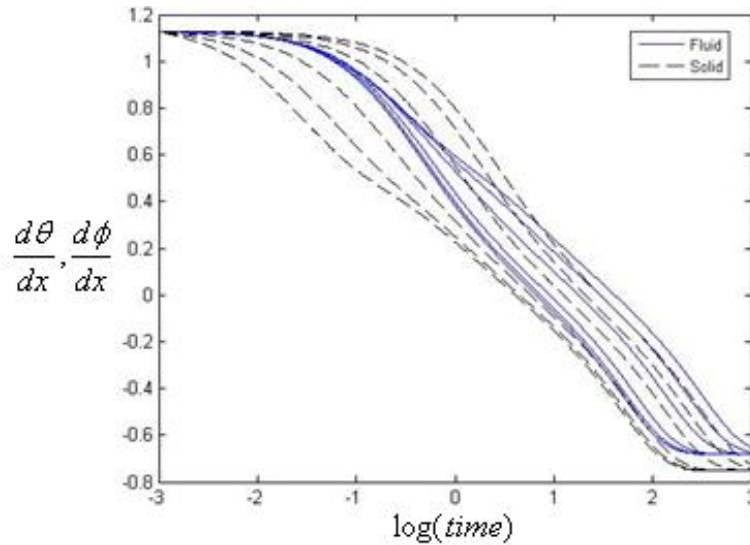
شکل (1-7): گراف های گرادیان حرارتی برای $\alpha = 0.2$ و $\gamma = 1$



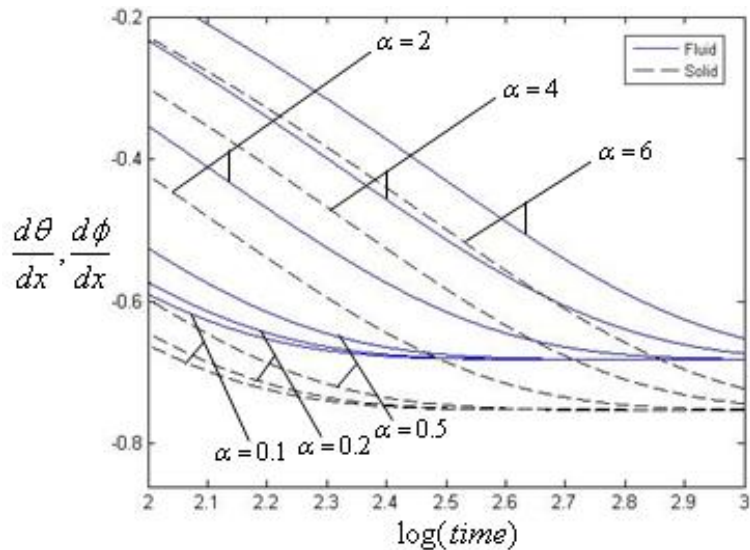
شکل (2-7): گراف های گرادیان حرارتی برای $\alpha = 2$ و $\gamma = 1$

شکل های (3-7) و (4-7) گرادیان حرارتی فازهای جامد و سیال را به ازای نسبت های مختلف ضریب α نشان می دهند. همانطور که قبلاً بیان شد، ظرفیت گرمایی ویژه فاز جامد برای $\alpha > 1$ و

$\alpha < 1$ ، به ترتیب بزرگتر و کوچکتر از ظرفیت گرمایی ویژه فاز سیال است. نکته قابل توجه در شکل (3-7) این است که هر چه مقدار α افزایش یابد، مدت زمان خنثی شدن اثر تولید گرما نیز افزایش می یابد. تمامی گراف های فاز سیال در نهایت با شیب صفر به یک مقدار ثابت منفی میل می کنند و تفاوت میان مقادیر مختلف α ، تاثیری بر این مقدار ندارد. در مورد فاز جامد هم وضعیت مشابه است.

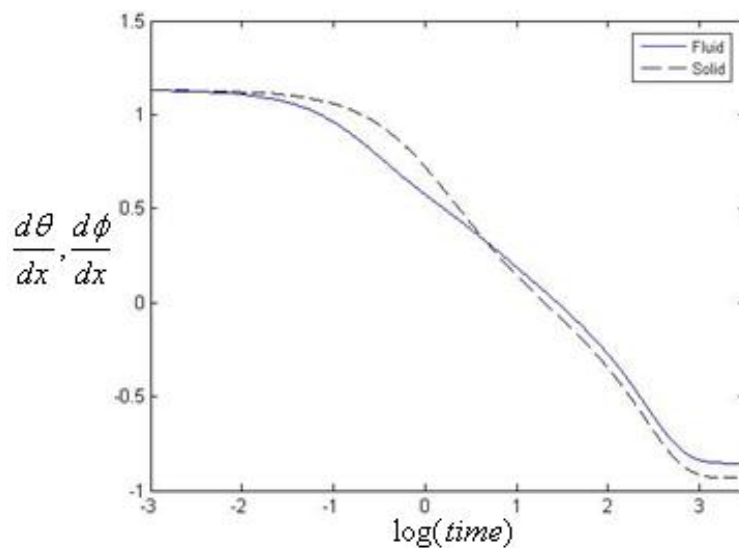


شکل (3-7): گراف های گرادیان حرارتی برای $\gamma = 1$ و α متفاوت

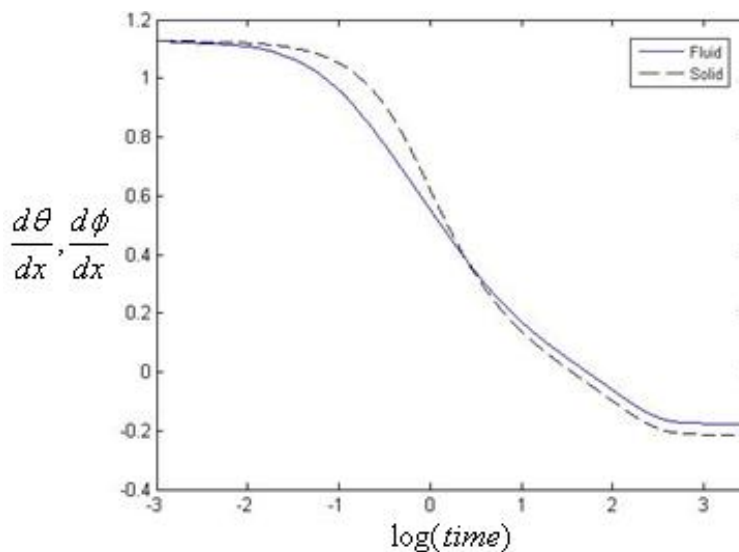


شکل (4-7): بزرگنمایی شکل (3-7)

با توجه به شکل های قبل، تفاوت در مقدار ضریب α ، تاثیری بر رفتار عمومی گراف ها ندارد. اما در شکل های (5-7) و (6-7)، تغییر ضریب γ ، مقدار نهایی و اختلاف نهایی گرادیان حرارتی هر دو فاز را تغییر می دهد.



شکل (5-7): گراف های گرادیان حرارتی برای $\alpha = 4$ و $\gamma = 0.6$

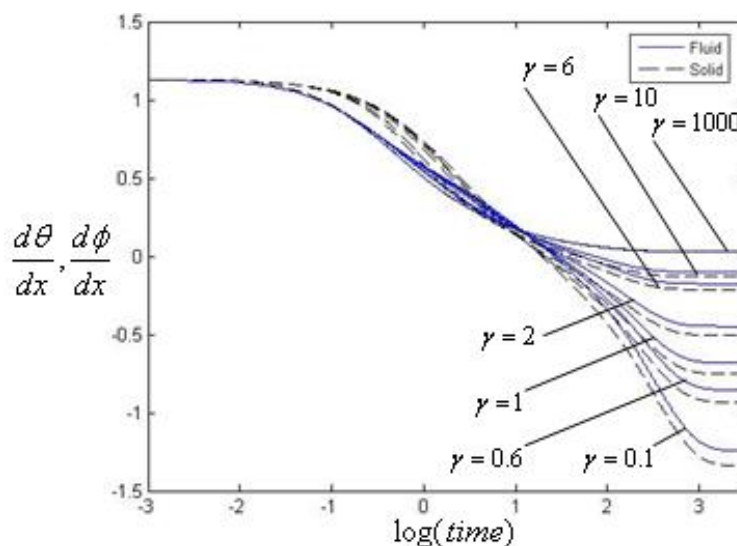


شکل (6-7): گراف های گرادیان حرارتی برای $\alpha = 4$ و $\gamma = 6$

همانطور که قبلاً بدان اشاره شد، در رابطه (6-12) ضریب γ نشان دهنده نسبت رسانایی فازها در مقیاس تخلخل است. با کاهش ضریب γ ، مقدار $k_s(1-\varepsilon)$ از εk_f بیشتر خواهد شد یا در واقع در

جمله $(1-\varepsilon)$ مقدار تخلخل ε کاهش خواهد یافت. با کاهش تخلخل، مقدار حجم فضاهای خالی در محیط متخلخل کاهش یافته یا در بیان دیگر سهم فضای فاز جامد افزایش می یابد. با توجه به اینکه تولید گرما در فاز جامد اتفاق می افتد، تاثیر آن به مراتب نسبت به قبل افزایش می یابد. بالعکس با کاهش سهم فضای فاز سیال میزان اثر گذاری این فاز در طول پروسه انتقال حرارت کاهش می یابد.

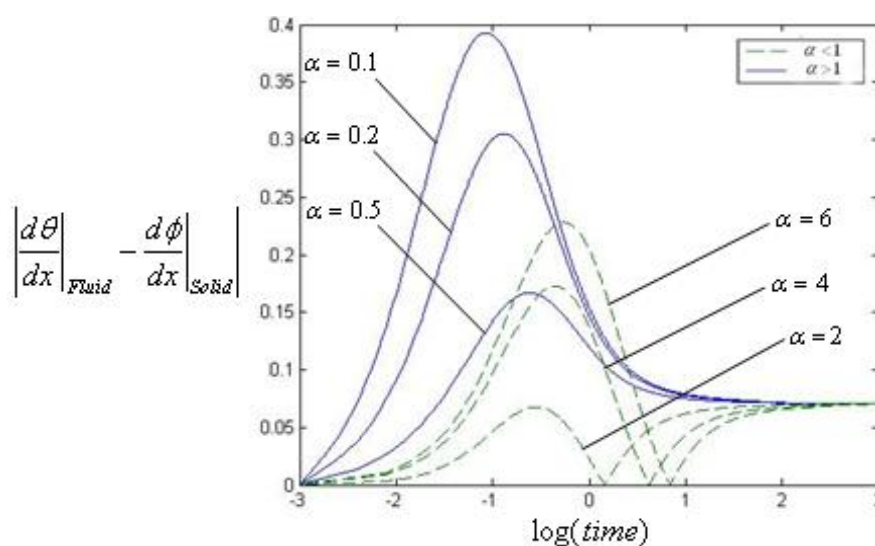
شکل (7-7) گرادیان حرارتی فازهای جامد و سیال را به ازای نسبت های مختلف ضریب γ و ضریب $\alpha = 4$ نشان می دهد. با توجه به این شکل، هر چه مقدار γ افزایش یابد، مدت زمان از بین رفتن اثر ترم تولید گرما کاهش می یابد. همچنین با افزایش ضریب γ مقدار تاثیر گذاری فاز جامد نسبت به سیال کاهش می یابد. مثلاً برای ضریب $\gamma = 1000$ این کاهش بقدری است که عملاً اثر گذاری ترم تولید گرما در فاز جامد را از بین برده است.



شکل (7-7): گراف های گرادیان حرارتی برای $\alpha = 4$ و γ متفاوت

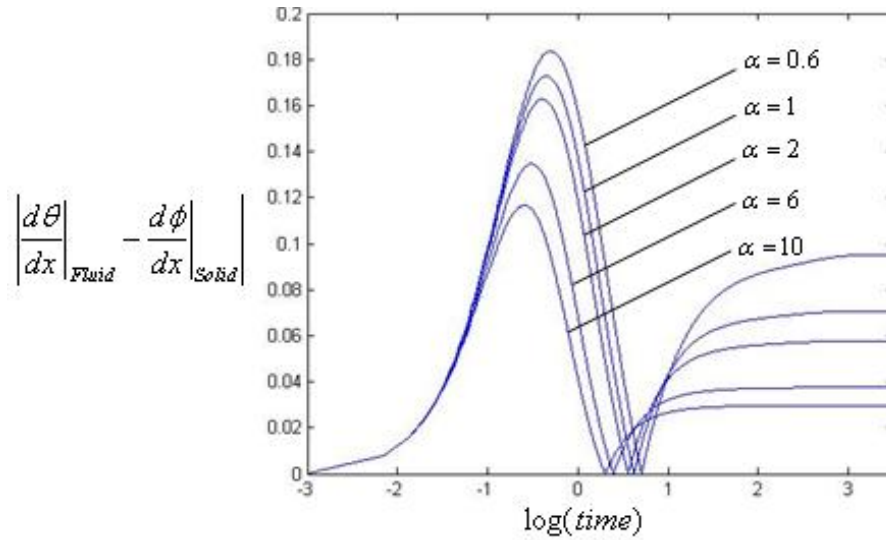
شکل (8-7) روند اختلاف بین گرادیان حرارتی فازهای جامد و سیال را به ازای نسبت های مختلف ضریب α و ضریب $\gamma = 1$ نشان می دهد. با توجه به این شکل، به ازای $\alpha > 1$ ، هر چه مقدار ضریب α افزایش یابد، اختلاف میان فازهای جامد و سیال افزایش پیدا می کند و بالعکس به ازای $\alpha < 1$ ، هر چه مقدار ضریب α افزایش یابد، اختلاف میان فازهای جامد و سیال کاهش پیدا می کند یا به بیان دیگر با دور شدن از مرز $\alpha = 1$ ، اختلاف میان گرادیان های حرارتی فازهای جامد و سیال

بیشتر می شود. نکته دیگر اینکه با کاهش ضریب α ، صرفنظر از اینکه ضریب α بزرگتر یا کوچکتر از یک باشد، نقطه حداکثر اختلاف گرادیان حرارتی به زمان های زود میل می کند. استدلال چنین نکته ای با توجه به توضیحات قبل بسیار آسان می باشد. با کوچک شدن ضریب α و میل کردن آن به سمت صفر $\alpha \rightarrow 0$ ، گرمای ویژه سیال به سمت بینهایت $c_f \rightarrow \infty$ و گرمای ویژه جامد به سمت صفر $c_s \rightarrow 0$ میل می کند. در نتیجه از همان لحظه اول اختلاف میان فاز شروع شده و در همان لحظات ابتدایی به حدکثر خود می رسد.



شکل (8-7): مقادیر اختلاف گرادیان حرارتی برای $\gamma = 1$ و متفاوت α

شکل (9-7) روند اختلاف بین گرادیان حرارتی فازهای جامد و سیال را به ازای نسبت های مختلف ضریب γ و ضریب $\alpha = 4$ نشان می دهد. از گراف های حاصله نتیجه می شود که هر چه مقدار ضریب γ افزایش یابد، مقدار این اختلاف کمتر شده و گرادیان های حرارتی فازهای جامد و سیال انطباق بیشتری دارند. همچنین با افزایش γ ، اولاً زمان از بین رفتن اثر ترم تولید گرما در فاز جامد کاهش یافته که تأییدی بر گراف شکل (7-7) است، ثانیاً نقطه تلاقی فازهای جامد و سیال به زمان های زود میل می کند.



شکل (9-7): مقادیر اختلاف گرادیان حرارتی برای $\alpha = 4$ و γ متفاوت

4-7 اعتبار سنجی نتایج حل عددی

همانند فصل قبل برای اعتبار سنجی نتایج حل عددی در زمان های زود و دیر از روش تقریبی تحلیلی اغتشاشات و روش عددی پرتابی استفاده شده است. معادلات انرژی بی بعد شده (5-7) و (6-7) با استفاده از سری های توانی (16-6)، (17-6)، (28-6) و (29-6) تعمیم داده می شوند. معادلات حاصل شده با استفاده از روش عددی پرتابی حل شده اند. در نهایت با حل عددی این معادلات، استخراج نتایج و رسم آن در زمان های مناسب، نتایج حاصل از حل عددی قسمت (3-7) معتبر سازی خواهند شد.

1-4-7 تقریب اغتشاشات برای زمان های زود

با استفاده از سری های توانی (16-6) و (17-6) و در نهایت مشتقات (20-6) و (21-6) و جایگذاری آن ها در معادلات انرژی (5-7) و (6-7)، فرم نهایی معادلات به شکل زیر حاصل می شود:

$$\theta_1 = (\theta_0'' - \theta_0 + \phi_0) + t(\theta_1'' + \phi_1 - \theta_1) \rightarrow \begin{cases} \theta_0'' - \theta_0 + \phi_0 = \theta_1 \\ \theta_1'' + \phi_1 - \theta_1 = 0 \end{cases} \quad (8-7)$$

$$\alpha\phi_1 = (\phi_0'' + \gamma(\theta_0 - \phi_0)) + t(\phi_1'' + \gamma(\theta_1 - \phi_1)) + 1 \rightarrow \begin{cases} \phi_0'' + \gamma(\theta_0 - \phi_0) + 1 = \alpha\phi_1 \\ \phi_1'' + \gamma(\theta_1 - \phi_1) = 0 \end{cases} \quad (9-7)$$

پس بطور خلاصه برای اعتبار سنجی و بدست آوردن مقدار اولین نقطه از گراف گرادیان های حرارتی فازهای جامد و سیال کافیسیت معادلات زیر با شرایط مرزی مشخص دوباره حل عددی شوند:

$$\begin{cases} \theta_1'' + \phi_1 - \theta_1 = 0 & \theta_1(0) = 0 \text{ و } \theta_1(\infty) = 0 \\ \phi_1'' + \gamma(\theta_1 - \phi_1) = 0 & \phi_1(0) = 0 \text{ و } \phi_1(\infty) = 0 \end{cases} \quad (10-7)$$

$$\begin{cases} \theta_0'' - \theta_0 + \phi_0 = \theta_1 & \theta_0(0) = 1 \text{ و } \theta_0(\infty) = 0 \\ \phi_0'' + \gamma(\theta_0 - \phi_0) + 1 = \alpha\phi_1 & \phi_0(0) = 1 \text{ و } \phi_0(\infty) = 0 \end{cases} \quad (11-7)$$

ابتدا با استفاده از روش پرتابی که در فصل پنجم بدان اشاره شد، معادلات (10-7) و (11-7) حل عددی می گردند. با حل این معادلات مقدار گرادیان حرارتی فازهای جامد و سیال در مرز محیط متخلخل و در زمان های زود بدست می آید. توضیحات و گراف های مربوطه در قسمت (3-4-7) بتفصیل آمده است.

2-4-7 تقریب اغتششات برای زمان های دیر

با استفاده از سری های توانی (28-6) و (29-6) و در نهایت مشتقات (32-6) و (33-6) و جایگذاری آن ها در معادلات انرژی (5-7) و (6-7)، فرم نهایی معادلات به شکل زیر حاصل می شود:

$$-\theta_1 = t^2(\theta_0'' + \phi_0 - \theta_0) + t(\theta_1'' + \phi_1 - \theta_1) \rightarrow \theta_0'' - \theta_0 + \phi_0 = 0 \quad (12-7)$$

$$-\alpha\phi_1 = t^2(\phi_0'' + \gamma(\theta_0 - \phi_0)) + t(\phi_1'' + \gamma(\theta_1 - \phi_1)) + t^2 \rightarrow \phi_0'' + \gamma(\theta_0 - \phi_0) + 1 = 0 \quad (13-7)$$

شرایط مرزی همانند قبل هستند. پس بطور خلاصه در روش تحلیلی برای بدست آوردن مقدار آخرین نقطه در فاز سیال و جامد کافیسیت معادلات زیر با شرایط مرزی مفروض، با استفاده از روش پرتابی حل عددی شوند:

$$\begin{cases} \theta_0'' - \theta_0 + \phi_0 = 0 & \theta_0(0) = 1 \text{ و } \theta_0(\infty) = 0 \\ \phi_0'' + \gamma(\theta_0 - \phi_0) + 1 = 0 & \phi_0(0) = 1 \text{ و } \phi_0(\infty) = 0 \end{cases} \quad (14-7)$$

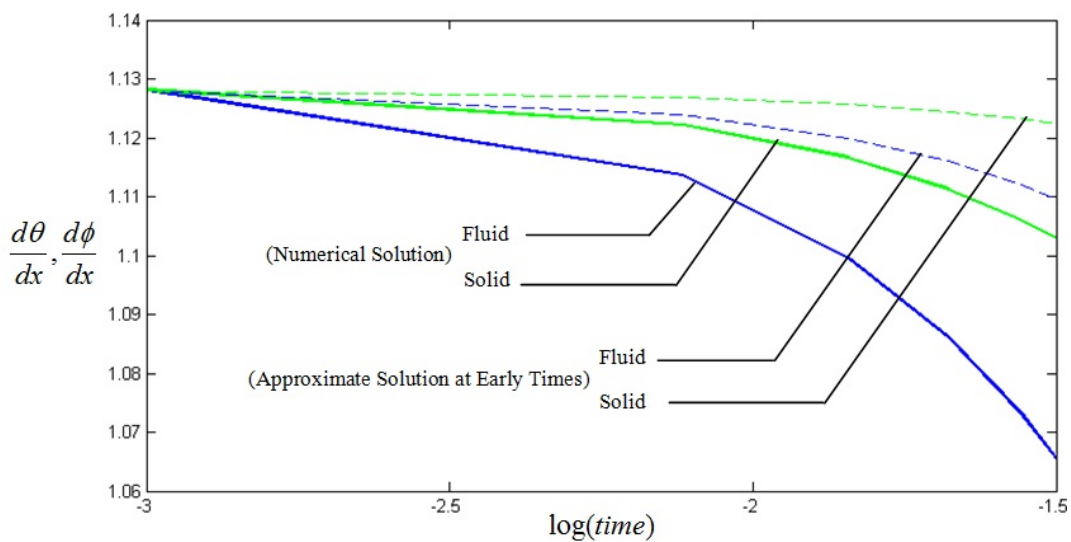
نتایج حل عددی معادلات (14-7) به ما نشان خواهد داد که مقدار گرادیان ها حرارتی فازهای جامد و سیال در زمان های دیر با خطای بسیار کم بر هم منطبق خواهد شد و برای تمامی حالت ها یک مقدار ثابت خواهد داشت. توضیحات و گراف های مربوطه در قسمت بعد بتفصیل ارائه شده است.

3-4-7 نتایج تقریب اغتشاشات

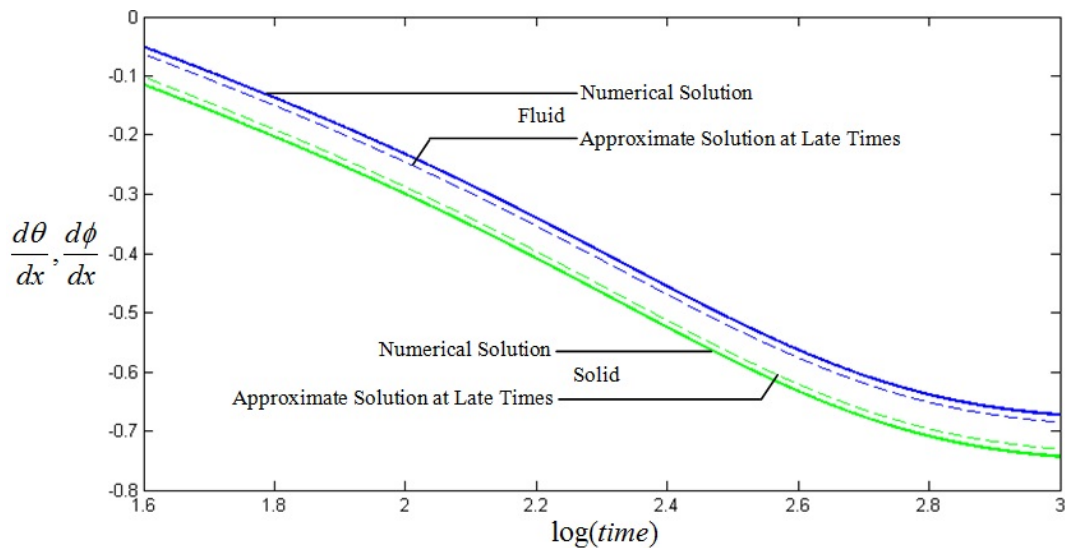
در این قسمت نتایج تقریب اغتشاشات برای زمان های زود و دیر ارائه شده است. استفاده از سری های توانی (16-6)، (17-6)، (28-6) و (29-6) برای تعمیم معادلات، موجب انحراف جواب ها از حالت حل دقیق می شود که در مثال های بخش (1-6-5) بوضوح قابل مشاهده است. بنابراین حل تقریبی اغتشاشات با حل عددی مستقیم در زمان های خیلی زود و خیلی دیر تقریباً منطبق شده و هر چه در طول زمان پیش می رویم انحراف حل تقریبی با عددی بیشتر می شود. با حل عددی معادلات (10-7)، (11-7) و (14-7) می توان نتایج حاصل از حل عددی مستقیم معادلات (5-7) و (6-7) را در حالت خاص $\alpha = 4$ و $\gamma = 1$ معتبر سازی کرد.

با توجه به شکل (10-7) در زمان های زود هر دو روش انطباق نسبتاً خوبی دارند که با گذشت زمان از درجه این انطباق کاسته و خطا بیشتر می شود. بدلیل کاسته شدن از اعتبار روش اغتشاشات و واگرایی گراف ها، انطباق نتایج تا زمان $t = 0.03$ ادامه داده شده است. با توجه به شکل (11-7) در زمان های خیلی دیر هر دو روش با خطای بسیار کمی همدیگر را دنبال می کنند. انطباق روش های عددی و تقریبی در زمان های دیر، به دلیل یکسان شدن شرایط فازهای جامد و سیال در مدت زمان طولانی است. کلیه گراف های موجود در این فصل، نتایج گرادیان های حرارتی فازهای جامد و سیال را در زمان لگاریتمی نشان می دهند. هدف از بکارگیری زمان لگاریتمی به منظور بالا بردن وضوح و نشان دادن اختلاف میان فازهای جامد و سیال بوده و دلیل دیگری ندارد.

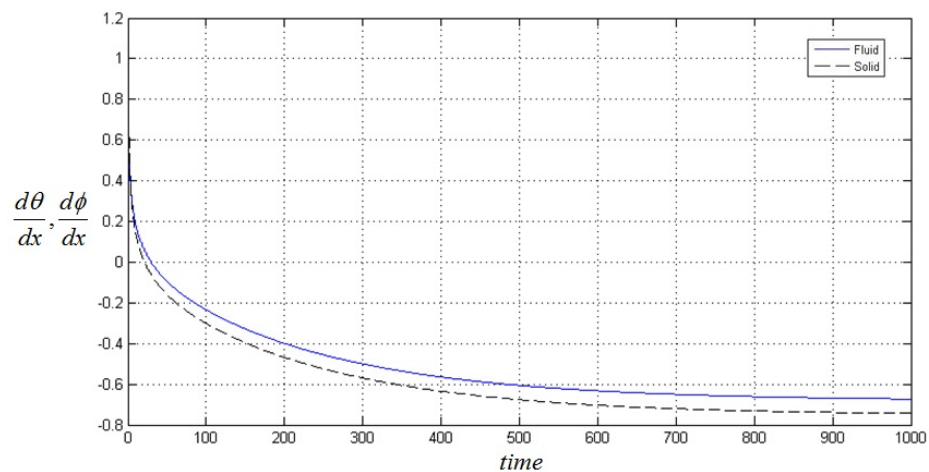
شکل های (7-12) و (7-13) گرادیان های حرارتی فازهای جامد و سیال را در زمان های t نشان می دهند. بدلیل بازه زمانی گسترده، در این شکل ها اختلاف میان گرادیان های حرارتی قابل تشخیص نیست، اما یکسان شدن شرایط فازهای جامد و سیال و میل کردن تدریجی آن ها به یک مقدار ثابت بوضوح قابل مشاهده است. فازهای جامد و سیال پس از اعمال شرایط تحمیلی و تغییر ناگهانی دمای مرز $x=0$ در حضور ترم تولید گرما، با توجه به ضریب پخش حرارتی مربوطه خود را به سرعت با تغییر شرایط وفق می دهند.



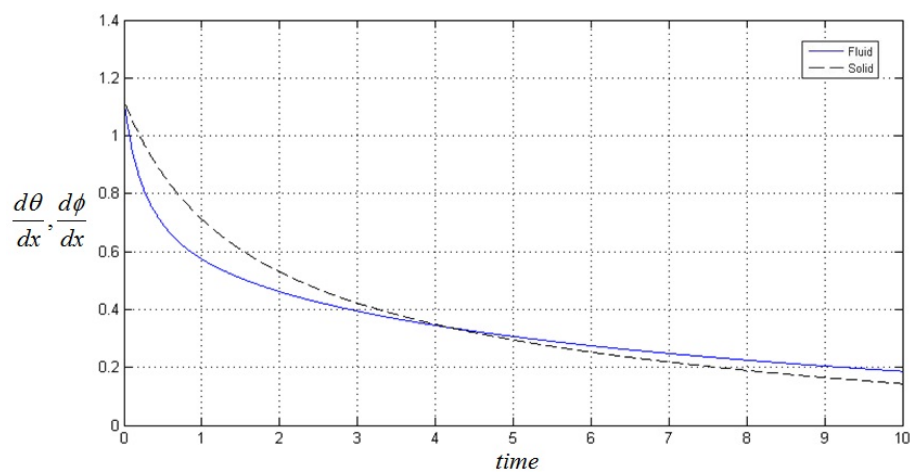
شکل (7-10): خطای میان روش های عددی و تقریبی برای حالت $\alpha=4$ و $\gamma=1$ در زمان های زود



شکل (7-11): خطای میان روش های عددی و تقریبی برای حالت $\alpha=4$ و $\gamma=1$ در زمان های دیر



شکل (12-7): گراف های گرادیان حرارتی برای $\alpha = 4$ و $\gamma = 1$ در زمان های t



شکل (13-7): بزرگنمایی شکل (12-7)

	نقاط در دامنه رسم شده	حل تقریبی			حل عددی			RMS
		ابتدا	میانی	انتهای	ابتدا	میانی	انتهای	
زود	جامد	1.1281	1.1256	1.1220	1.1281	1.1166	1.1011	0.0227
	سیال	1.1281	1.1200	1.1082	1.1281	1.0996	1.0608	
دیر	جامد	-0.0972	-0.6562	-0.7304	-0.1109	-0.6691	-0.6728	0.0127
	سیال	-0.0590	-0.6115	-0.6852	-0.0472	-0.5990	-0.7434	

جدول (1-7): مقایسه خطای حاصل از حل عددی و تقریبی

* پیوست - کد های عددی

```

clc
clear all
format short
J=5;
n=10;
DeltaX=(1-0)/(J-1);
DeltaTime=(1-0)/(n-1);
%-----
[Mat1,Mat2]=Mat(J,DeltaX);
%-----
x=zeros(J);
for i=1:J
    x(i,i)=(i-1)*DeltaX;
end
N=x*Mat1+eye(J);
for i=1:J
    y(i,1)=(i-1)*DeltaX;
end
x=y;
%-----
for i=1:n
    time=(i-1)*DeltaTime;
    k1=DeltaTime*N*y;
    k2=DeltaTime*N*(y+0.5*k1);
    k3=DeltaTime*N*(y+0.5*k2);
    k4=DeltaTime*N*(y+k3);
    y=y+1/6*(k1+2*(k2+k3)+k4);
    y(1,1)=0;
    y2(:,i)=y;
    yExact(:,i)=x*exp(2*time);
end
%-----
sum=0;
for i=1:J
    for j=1:n
        diff=(y2(i,j)-yExact(i,j))^2;
        sum=diff+sum;
    end
end
RMS=sqrt(sum/(n*J))

```

```

clc
clear all
format short
J=50;

```

```

n=10000;
DeltaX=(1-0)/(J-1);
DeltaTime=(1-0)/(n-1);
%-----
[Mat1,Mat2]=Mat(J,DeltaX);
%-----
x=zeros(J);
for i=1:J
    x(i,i)=(i-1)*DeltaX;
end
N=(x^2)*Mat2-x*Mat1+2*eye(J);
for i=1:J
    xx(i,1)=(i-1)*DeltaX;
    y(i,1)=(i-1)*DeltaX^2;
end
%-----
for i=1:n
    time=(i-1)*DeltaTime;
    k1=DeltaTime*N*y;
    k2=DeltaTime*N*(y+0.5*k1);
    k3=DeltaTime*N*(y+0.5*k2);
    k4=DeltaTime*N*(y+k3);
    y=y+1/6*(k1+2*(k2+k3)+k4);
    y(1,1)=0;
    y(J,1)=exp(2*time);
    y2(:,i)=y;
    yExact(:,i)=xx*exp(2*time);
end
%-----
sum=0;
for i=1:J
    for j=1:n
        diff=(y2(i,j)-yExact(i,j))^2;
        sum=diff+sum;
    end
end
RMS=sqrt(sum/(n*J))

```

کد مثال بخش ۵-۵

```

clc
clear all
[x,y]=ode45(@dydxn,[1 0],[fzero(@res,1) 0]);
plot(x,y(:,1))

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function dy=dydxn(x,y)
dy=[y(2);0.2*cos(y(1))];

```

```

////////////////////////////////////
function r=res(y)
[x,y]=ode45(@dydxn,[0 1],[y 0]);
r=y(length(x),1);

////////////////////////////////////
clc
clear all
y=zeros(1,42);
for i=1:1000
    for j=2:41
        y(1)=0;
        y(j)=0.5*y(j-1)+0.5*y(j+1)-0.1*((1/40)^2)*cos(y(j));
        y(42)=y(40);
    end
end
end

```

کد مسئله بخش ۴-۳

```

clc
clear all
format short
tic
alpha=input('Please Insert Value of alpha = ');
gamma=input('Please Insert Value of gama = ');
timefirst=0.001;
timefinal=1000;
J=201;
N=300000;
DeltaX=(20-0)/(J-1);
deltatime1=(timefinal-timefirst)/(n-1);
%-----
[Mat1,Mat2]=Mat(J,DeltaX);
%-----
yfirst=zeros(J,1);
ufirst=zeros(J,1);
yfirst(1,1)=1;
ufirst(1,1)=1;
%-----
[QF,QS,timeVector]=teta(yfirst,ufirst,Mat1,Mat2,timefirst,timefinal,
deltatime1,alpha,gamma,J,n);
%-----
plot(log10(timeVector),QF,log10(timeVector),QS)
grid on
t=toc;t/60

////////////////////////////////////
function [Mat1,Mat2]=Mat(J,DeltaX)
ALPHA=1/4;
ALPHAprime=(16*ALPHA+32)/(40*ALPHA-1);

```



```

A1=zeros(J,J);
B1=zeros(J,J);
A2=zeros(J,J);
B2=zeros(J,J);
%-----
A1(1,1)=1;
A1(1,2)=2;
A1(2,1)=1;
A1(2,2)=4;
A1(2,3)=1;
A1(3,2)=1;
A1(3,3)=1/ALPHAPrime;
A1(3,4)=1;
A1(J-2,J-3)=1;
A1(J-2,J-2)=1/ALPHAPrime;
A1(J-2,J-1)=1;
A1(J-1,J-2)=1;
A1(J-1,J-1)=4;
A1(J-1,J)=1;
A1(J,J-1)=2;
A1(J,J)=1;
for j=4:J-3
    A1(j,j-1)=1;
    A1(j,j)=1/ALPHA;
    A1(j,j+1)=1;
end
%-----
B1(1,1)=-5/(2*DeltaX);
B1(1,2)=4/(2*DeltaX);
B1(1,3)=1/(2*DeltaX);
B1(2,1)=-3/(DeltaX);
B1(2,3)=3/(DeltaX);
B1(3,1)=-(4-1/ALPHAPrime)/(12*DeltaX);
B1(3,2)=-(1+2/ALPHAPrime)/(3*DeltaX);
B1(3,4)=(1+2/ALPHAPrime)/(3*DeltaX);
B1(3,5)=(4-1/ALPHAPrime)/(12*DeltaX);
B1(J-1,J-2)=-3/(DeltaX);
B1(J-1,J)=3/(DeltaX);
B1(J,J-2)=-1/(2*DeltaX);
B1(J,J-1)=-4/(2*DeltaX);
B1(J,J)=5/(2*DeltaX);
B1(J-2,J-4)=-(4-1/ALPHAPrime)/(12*DeltaX);
B1(J-2,J-3)=-(1+2/ALPHAPrime)/(3*DeltaX);
B1(J-2,J-1)=(1+2/ALPHAPrime)/(3*DeltaX);
B1(J-2,J)=(4-1/ALPHAPrime)/(12*DeltaX);
for j=4:J-3
    B1(j,j-2)=-(4-1/ALPHA)/(12*DeltaX);
    B1(j,j-1)=-(1+2/ALPHA)/(3*DeltaX);
    B1(j,j+1)=(1+2/ALPHA)/(3*DeltaX);
    B1(j,j+2)=(4-1/ALPHA)/(12*DeltaX);

```

```

end
%-----
A2(1,1)=1;
A2(1,2)=11;
A2(2,1)=1;
A2(2,2)=10;
A2(2,3)=1;
A2(J-1,J-2)=1;
A2(J-1,J-1)=10;
A2(J-1,J)=1;
A2(J,J-1)=11;
A2(J,J)=1;
for j=3:J-2
    ALPHA=.25;
    A2(j,j-1)=1;
    A2(j,j)=1/ALPHA;
    A2(j,j+1)=1;
end
%-----
B2(1,1)=13/(DeltaX)^2;
B2(1,2)=-27/(DeltaX)^2;
B2(1,3)=15/(DeltaX)^2;
B2(1,4)=-1/(DeltaX)^2;
B2(2,1)=12/(DeltaX^2);
B2(2,2)=-24/(DeltaX^2);
B2(2,3)=12/(DeltaX^2);
B2(J-1,J-2)=12/(DeltaX^2);
B2(J-1,J-1)=-24/(DeltaX^2);
B2(J-1,J)=12/(DeltaX^2);
B2(J,J-3)=-1/(DeltaX)^2;
B2(J,J-2)=15/(DeltaX)^2;
B2(J,J-1)=-27/(DeltaX)^2;
B2(J,J)=13/(DeltaX)^2;
for j=3:J-2
    ALPHA=.25;
    B2(j,j-2)=(-1/ALPHA+10)/(12*DeltaX^2);
    B2(j,j-1)=4*(1/ALPHA-1)/(3*DeltaX^2);
    B2(j,j+1)=4*(1/ALPHA-1)/(3*DeltaX^2);
    B2(j,j+2)=(-1/ALPHA+10)/(12*DeltaX^2);
    B2(j,j)=-2*(4*(1/ALPHA-1)/(3*DeltaX^2))+(-
    1/ALPHA+10)/(12*DeltaX^2);
end
%-----
Mat2=inv(A2)*B2;
Mat1=inv(A1)*B1;
end

////////////////////////////////////
function
[QF,QS,timeVector]=teta(yfirst,ufirst,Mat1,Mat2,timefirst,timefinal,

```

```

                                deltatime1,alpha,gamma,J,n)
QF(1,1)=-Mat1(1,1:J)*yfirst;
y=yfirst;
QS(1,1)=-Mat1(1,1:J)*ufirst;
u=ufirst;
for i=2:n
    timeVector(i,1)=timefirst+(i-1)*deltatime1;
    k1=deltatime1*(Mat2*y+(u-y));
    k2=deltatime1*(Mat2*(y+.5*k1)+(u-y-.5*k1));
    k3=deltatime1*(Mat2*(y+.5*k2)+(u-y-.5*k2));
    k4=deltatime1*(Mat2*(y+k3)+(u-y-k3));
    H1=deltatime1*(1/alpha)*(Mat2*u+gamma*(y-u));
    H2=deltatime1*(1/alpha)*(Mat2*(u+.5*H1)+gamma*(y-u-.5*H1));
    H3=deltatime1*(1/alpha)*(Mat2*(u+.5*H2)+gamma*(y-u-.5*H2));
    H4=deltatime1*(1/alpha)*(Mat2*(u+H3)+gamma*(y-u-H3));
    y=y+1/6*(k1+2*(k2+k3)+k4);
    u=u+1/6*(H1+2*(H2+H3)+H4);
    y(1,1)=1;y(J,1)=0;
    u(1,1)=1;u(J,1)=0;
    QF(i,1)=-Mat1(1,1:J)*y;
    QS(i,1)=-Mat1(1,1:J)*u;
    i
end
timeVector(1,1)=timefirst;
timeVector(n,1)=timefinal;
end

```

کد مسئله بخش ۶-۶

```

clc
clear all
format short
x2=30;
J=201;
solinit=bvpinit(linspace(0,x2,J),[1 1 1 1 1 1 1 1]);
sol=bvp4c(@C1,@C2,solinit);
x=linspace(0,x2,J);
y=deval(sol,x);
x=x';
y=y';
EarlyTime=10^-3;
for i=1:5
    tetaP(i,1)=y(i,2)+EarlyTime*y(i,6);
    phiP(i,1)=y(i,4)+EarlyTime*y(i,8);
end
QF=-tetaP
QS=-phiP

////////////////////////////////////

```

```

function dy=C1(x,y)
alpha=2;
gama=1;
dy(1)=y(2);
dy(2)=y(5)+y(1)-y(3);
dy(3)=y(4);
dy(4)=alpha*y(7)-gama*(y(1)-y(3));
dy(5)=y(6);
dy(6)=y(5)-y(7);
dy(7)=y(8);
dy(8)=-gama*(y(5)-y(7));

////////////////////////////////////
function res=C2(ya,yb)
res=[ya(1)-1
      yb(1)
      ya(3)-1
      yb(3)
      ya(5)
      yb(5)
      ya(7)
      yb(7)];

```

کد مسئله بخش ۶-۷

```

clc
clear all
format short
x2=30;
J=201;
solinit=bvpinit(linspace(0,x2,J),[1 1 1 1]);
sol=bvp4c(@D1,@D2,solinit);
x=linspace(0,x2,J);
y=deval(sol,x);
x=x';
y=y';
QF=-y(1,2)
QS=-y(1,4)

////////////////////////////////////
function dy=D1(x,y)
gama=1;
dy(1)=y(2);
dy(2)=y(1)-y(3);
dy(3)=y(4);
dy(4)=-gama*(y(1)-y(3));

////////////////////////////////////
function res=D2(ya,yb)

```

```
res=[ya(1)-1  
yb(1)  
ya(3)-1  
yb(3)];
```

*مراجع

-
- [1] Scheiddeger, A. E. (1957). “**The Physics of Flow through Porous Media**”, Macmillan, New York.
- [2] Bear, J. (1972). “**Dynamics of Fluids in Porous Media**”, American Elsevier, New York.
- [3] Bejan, A. (1987). “**Convective Heat Transfer in Porous Media, in Handbook of Single-Phase Convective Heat Transfer**”, S. Kakac, R. K. Shah, and W. Aung, eds., Wiley, New York.
- [4] Kaviany, M. (1995). “**Principles of Heat Transfer in Porous Media**”, 2nd ed., Springer-Verlag, New York. ISBN-10: 0387945504. ISBN-13: 9780387945507.
- [5] Ingham, D. B. and Pop, I. (1998). “**Transport Phenomena in Porous Media**”, vol. 1. Pergamon Press, Oxford.
- [6] Ingham, D. B. and Pop, I. (2002). “**Transport Phenomena, in Porous Media**” vol. 2. Pergamon Press, Amsterdam.
- [7] Vafai, K., (2000). “**Handbook of Porous Media**”, Marcel Dekker, New York.
- [8] Pop, I. and Ingham, D. B., (2001). “**Convective Heat Transfer : Mathematical and Computational Modelling of Viscous Fluids and Porous Media**”, Pergamon Press, Oxford.
- [9] Bejan, A., Dincer, I., Lorent, S., Miguel, A. F. and Reis, A. H., (2004). “**Porous and Complex Flow Structures**”, in Modern Technologies, Springer, New York.
- [10] Bejan, A. and Lage, J. L., (1991). “Heat Transfer from a Surface Covered with Hair”, in **Convective Heat and Mass Transfer in Porous Media**, S. Kakac, B. Kilkis, F. A. Kulacki, and F. Arinc, eds., Kluwer Academic, Dordrecht, The Netherlands, pp. **823–845**.
- [11] Nield, D. A. and Bejan, A., (1999). “**Convection in Porous Media**”, 2nd ed., Springer-Verlag, New York.
- [12] Bejan, A., (1995). “**Convection Heat Transfer**”, 2nd ed., Wiley, New York.
- [13] JAKOB, M., (1949). “**Heat Transfer**”. New York: Wiley, pp.84
- [14] Nield, D. A. and Bejan. A., (2006). “**Convection in Porous Media**”. 3rd Edn., Springer, USA., pp. **27-28**. ISBN: 0-387-29096-6;
- [15] Whitaker, S., (1999). “**The method of Volume Averaging**”. Vol. 13 of Theory and applications of Transport in Porous Media (Bear, J., series ed), Kluwer, Dordrecht.
- [16] Quintard, M., Kaviany, M. and Whitaker, S., (1997). “Two-medium treatment of heat transfer in porous media : numerical results for effective properties”, **Adv. Water Resources**, vol. **20**, pp. **77–94**.
- [17] Quintard, M. and Whitaker, S., (2000). “**Theoretical analysis of transport in porous media**”. In: **Hand-book of porous media** (Vafai K, ed), Marcel Dekker, New York, pp. **1–51**.
- [18] Quintard, M., (1998), “Modelling local non-equilibrium heat transfer in porous media”, **Proc. 11th Int. Heat Transfer Conf.**, Kyong-ju, Korea, August 1998, 1, pp **279–285.**,

- [19] Wakao, N. and Kaguei, S., (1982). "Heat and mass transfer in packed beds", **Gordon and Breach, New York**, pp. 243-295.
- [20] Hwang, G. J., Wu, C. C. and Chao, C. H., (1995). "Investigation of non-Darcian forced convection in an asymmetrically heated sintered porous channel", **Trans. ASME J. Heat Transfer**, vol. 117, pp. 725-732.
- [21] Dixon, A. G. and Cresswell, D. L., (1972). "Theoretical prediction of effective heat transfer parameters in packed beds", **A. I. Chem. E. J.**, vol. 25, pp. 663-676.
- [22] Kuwahara, F., Shirota, M. and Nakayama, A., (2001). "A numerical study of interfacial convective heat transfer coefficient in two-energy model for convection in porous media", **Int. J. Heat Mass Transfer**, vol. 44, pp. 1153-1159.
- [23] Whitaker S. (1983). "**Fundamental Principles of Heat Transfer**" Krieger Publishing Company, Malabar.
- [24] Darcy, H. P. G. (1856). "**Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon**". Victor Dalmont, Paris.
- [25] Lage, J. L. (1998). "**The fundamental theory of flow through permeable media: from Darcy to turbulence**". Transport Phenomena in Porous Media (eds. D.B. Ingham and I. Pop), Elsevier, Oxford, pp. 1-30.
- [26] Dullien F. A. L. (1992). "**Porous Media: Fluid Transport and Pore Structure**", Academic, New York, 2nd Edition, pp. 247.
- [27] Liu S., Afacan A. and Masliyah J. (1994). "Steady incompressible laminar flow in porous media", **J. of Chem. Engng. Sci.** 49, pp. 3565-3586.
- [28] Davis A. M. J. and James D. F. (1996). "Slow flow through a model porous medium", **Int. J. of Multiphase Flow**, 22, pp. 969-989.
- [29] Rahli O., Tadrast L., Miscevic M. and Santini R. (1997). "Fluid flow through randomly packed monodisperse fibers : the Kozeny-Carman parameter analysis", **J. of Fluids Engng.**, 119, pp. 188-192.
- [30] Mauran S., Riguard L. and Coudevylle O. (2001). "Application of the Carman-Kozeny correlation to a high porosity and anisotropic consolidated medium: The compressed expanded natural graphite", **J. of Transport Porous Media**, 43, pp. 355-376.
- [31] Whitaker S. (1986). "Flow in porous media: A theoretical derivation of Darcy's law", **J. of Transport in Porous Media**, 1, pp. 3-25.
- [32] Ene H. I. and Polisevski, D., (1987). "**Thermal Flow in Porous Media**", Reidel, Dordrecht.
- [33] Mei C. C., Auriault J. L. and Ng, C. O., (1996). "Some applications of the homogenization theory", **J. of Adv. Appl. Mech.**, 24, pp. 265-273.
- [34] Ene H. I., (2004). "**Modeling the flow through porous media In Emerging Technologies and Techniques in Porous Media**", Kluwer Academic, Dordrecht, pp. 25-41.

- [35] Beck J. L. (1972), "Convection in a box of porous material saturated with fluid", **J. of Phys. Fluids**, **15**, pp. **1377–1383**.
- [36] Joseph D. D., Nield D. A. and Papanicolaou G. (1982), "Nonlinear equation governing flow in a saturated porous medium", **Water Resources Res.** **18**, pp. **1049–1052** and **19**, pp. **591**.
- [37] Dupuit, A. J. E. J. (1863), "**E'tudes The'oriques et Pratiques sur le Mouvement des eaux dans les Canaux D'ecouverts et a Travers les Terrains Perm'eables**", Victor Dalmont, Paris.
- [38] Forchheimer, P. (1901), "**Wasserbewegung durch Boden. Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure**" **45**, pp. **1736–1741** and pp. **1781–1788**.
- [39] Ward, J. C. (1964), "Turbulent flow in porous media" **ASCE J. Hydraul.** **90**, pp. **1–12**.
- [40] Singh, R. P. and A. G. Medina, (1988). "**Food Properties and Computer-Aided Engineering of Food Processing System**". Kluwer Publisher, Boston, London. ISBN: 0792302427;
- [41] Fung, Y. C. and H. T. Tang, (1975). "Longitudinal dispersion of tracer particles in the blood flowing in a pulmonary alveolar sheet". **Trans ASME. J. Applied Mech.**, **42**: pp. **536-540**. DOI:10.1115/1.3423637
- [42] Mujeebu, M.A., M.Z. Abdullah, M.Z. Abu-Bakar, A.A. Mohamad and M.K. Abdullah, (2009). "Applications of porous media combustion technology-A review". **Applied Energy.**, **86**: pp. **1365–1375**. DOI: 10.1016/j.apenergy.2009.01.017;
- [43] Whitaker, S., (1986). "Heat Transfer in Catalytic Packed Bed Reactors". Handbook of Heat and Mass Transfer. **Gulf Publishing Co, Houston, USA.**, pp: **361-417**. DOI: 10.1002/cite.330590824
- [44] Lloyd, G., K.J. Kim, A. Razani and K.T. Feldman, (1998). "Thermal Conductivity Measurements of Metal Hydride Compacts Developed for High Power Reactors". **J. Thermo-physics and Heat Transfer**, **12**: pp. **132–137**. DOI: 10.2514/2.6332
- [45] P.C. Huang, and K. Vafai., (1993). "Flow and heat transfer control over an external surface using a porous block array arrangement". **Int. J. Heat Mass Transfer**, **36** pp. **4019-4032**.
- [46] N. Targui, and H. Kahalerras., (2008), "Analysis of fluid flow and heat transfer in a double pipe heat exchanger with porous structures", **Energ. Convers. Manage.** **49** pp. **3217-3229**
- [47] Bouhadeif K., Chikh S., Boumedien A. and Lauriat G., (1999). "Effect of porous substrate addition on heat exchanger efficiency". **Trans J. Mech. E**, **99**: pp. **13–8**.
- [48] Alkam, M. K. and Al-Nimr, M. A., (1999). "Improving the performance of double-pipe heat exchangers by using porous substrates". **Int. J. Heat Mass Transfer**, **42**: pp. **3609–3618**.
- [49] Trimis D. and Durst, F., (1996). "Combustion ion a porous medium – advances and applications", **Combust. Sci. Technol**, **121**: pp. **153–68**.

- [50] Oliveria, A. A. M. and Kaviani, M., (2001). "Nonequilibrium in the transport of heat and reactants during combustion in porous media", **Prog. Energy Combust Sci.** **27**: pp. **523–545**.
- [51] Cheng, P. and C. T. Hsu, In: D. B. Ingham and I. Pop (Eds), (1998). "**Transport Phenomena in Porous Media**" vol. **I** Pergamon Title., pp: **57–76**. ISBN: 0080428436;
- [52] Anzeliuss, A., (1926). "Über Erwärmung vermittels durchstromender Medien". **Zeit. Schrift für angewandte Mathematik und Mechanik**, **6**: pp. **291–294**.
- [53] Schumann, T. E. F., (1929), "Heat transfer : A liquid flowing through a porous prism", **J. Franklin Instit.**, **208**: pp. **405-416**. DOI: 10.1016/S0016-0032(29)91186-8;
- [54] Combarous, M., (1972) "Description du transfert de chaleur par convection naturelle dans une couche poreuse horizontale a laide dun coefficient de transfert solide–fluide", **C.R. Acad. Sci. Paris A.**, **275**: pp. **1375–1378**.
- [55] Hsu, C. T., (1999). "A closure model for transient heat conduction in porous media", **ASME J. Heat Transfer** **121**, pp. **733–739**.
- [56] Quintard, M. and Whitaker, S., (1993) "One and two equation models for transient diffusion processes in two phase system", **Adv. Heat Transfer** **23**: pp. **369-464**;
- [57] Nakayama, A., F. Kawakawa, M. Sugiyama and G. Xu, (2001). "A two energy equation model for conduction and convection in porous media", **Int. J. Heat Mass Transfer**, **44**: pp. **4375-4379**. DOI: 10.1016/S0017-9310(01)00069-2;
- [58] Rees, D. A. S., (2010). "Microscopic modeling of the two-temperature model for conduction in heterogeneous media", **J. Porous Media**, **13**: pp. **125-143**. DOI: 10.1615/JPorMedia.v13.i2.40
- [59] Nazari, M. and F. Kowsary, (2009). "Analytical solution of non-equilibrium heat conduction in porous medium incorporating a variable porosity model with heat generation", **J. Heat Transfer**. Vol. **131**, Issue **1**, **014503**. DOI: 10.1115/1.2977544;
- [60] Nouri-Borujerdi, A., A. R. Noghreabadi and D. A. S. Rees, (2007). "The effect of local thermal non-equilibrium on conduction in porous channel with a uniform heat generation", **Int J. Tranp. Porous Med.**, **69**: pp. **281-288**. DOI: DOI 10.1007/s11242-006-9064-5;
- [61] Nouri-Borujerdi, A., A. R. Noghreabadi and D. A. S. Rees, (2007). "The effect of local thermal non-equilibrium on impulsive conduction in porous media". **Int J. Heat and Mass Transfer**, **50**: pp. **3244-3249**. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2006.12.016;
- [62] Carslaw H.S. and Jaeger J.C., (1986) "**Conduction of Heat in Solids**", Oxford University Press.
- [63] Kayhani, M. H., M. J. Maghrebi, M. Sadi and M. Nazari, (2009). "The effect of local thermal non-equilibrium on a 2D symmetric porous". In: Proceedings of the 4th **International Conference on Applications of Porous Media**, (ICAPM2009), University of CALGARY Turkey, August 10 - 12, 2009. pp: **85-90**. <http://icapm2009.yeditepe.edu.tr/>
- [64] S. A. Orszag and M. Israeli., (1974). "Numerical simulation of viscous incompressible flows". **Annu. Rev. Fluid Mech.**, **6**: pp. **281**.

- [65] R. S. Hirsh. (1975). "Higher order accurate difference solutions of fluid mechanics problems by a compact differencing technique", **J. Comput. Phys.**, **19**: pp. **90-109**.
- [66] S. K. Lele., (1992). "Compact finite difference schemes with spectral-like resolution", **J. Comput. Phys.**, **103**: pp. **16-42**.
- [67] S. Nagarajan, S. K. Lele, and J. H. Ferziger, (2003). "A robust high-order compact method for large eddy simulation", **J. Comput. Phys.**, **191**: pp. **392-419**.
- [68] M. Piller and E. Stalio., (2004). "Finite-volume compact schemes on staggered grids", **J. Comput. Phys.**, **197**: pp. **299-340**.
- [69] Nayfeh A.H., (1993). "Introduction to Perturbation Techniques". **A Wiley Inter-sci. Publication. United State of America**. pp:**1-2**