

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک

پایان نامه کارشناسی ارشد مهندسی طراحی کاربردی

حل کامل کره‌های جدار ضخیم FGM با تغییرات نمایی خواص مکانیکی

تحت بارگذاری فشاری و حرارتی بر اساس

نظریه الاستیسیته‌ی مستوی

نگارنده : رامین شامکوییان

استاد راهنما :

دکتر مهدی قنّاد

بهمن ۱۳۹۷

شماره: ۲۴۸/۹۷/۱۳
تاریخ: ۲۷/۱۱/۹۷

باسمه تعالی



مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد آقای رامین شامکویان با شماره دانشجویی ۹۴۰۹۹۶۴ رشته مهندسی مکانیک گرایش طراحی کاربردی تحت عنوان حل کامل کره‌های جدار ضخیم FGM با تغییرات نمایی خواص مکانیکی تحت بارگذاری فشاری و حرارتی بر اساس نظریه الاستیسیته مستوی که در تاریخ ۹۷/۱۱/۱۰ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می‌گردد:

قبول (با درجه: نصابی مردود
نوع تحقیق: نظری عملی

عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنمای اول	دکتر مهدی قنات	دانشیار	
۲- استاد راهنمای دوم	-----	-----	-----
۳- استاد مشاور	-----	-----	-----
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر حبیب احمدی	استادیار	
۵- استاد ممتحن اول	دکتر محمدباقر نظری	استادیار	
۶- استاد ممتحن دوم	دکتر محمد جعفری	دانشیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر محمد محسن شاه مردان

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

تصوه: در صورتی که کسی مردود شود حداکثر یکبار دیگر (در مدت مجاز تحصیل) می‌تواند از پایان نامه خود دفاع نماید (دفاع مجدد نباید زودتر از ۴ ماه برگزار شود).

تقدیم اثر

رفتی از چشم و دل محو تماشاست هموز
عکس روی تو در این آینه پیداست هموز
در دلم عشق تو چون شمع به خلونگه راز
در سرم شور تو چون باده به میناست هموز

این پیام نامه را که حاصل ماه ها تلاش ایجاب بوده تقدیم می کنم به روح پاک برادرم که بانفس میجایی خود، احساس مرا احیا می کند. و تقدیم به مهربان فرشتگانی که نخطات ناب باور بودن، لذت و غرور دانستن، جسارت خواستن، عظمت رسیدن و تمام تجربه های یکتا و زیبای زندگیم، مدیون حضور سبز آنهاست، تقدیم به خانواده عزیزم.

تشکر و قدردانی

شکرشایان شمار ایزدمنان که توفیق را رفیق را هم ساخت تا این پایان نامه را به پایان رسانم

خدای را بسی شاکرم که از روی کرم پدر و مادری فداکار نصیحت ساخته تا در سایه درخت پر بار وجودشان بیسایم و از ریشه‌ی آنها شاخ و برگ گیرم و از سایه وجودشان در راه کسب علم و دانش تلاش نمایم. بودنشان تاج افتخاری است بر سرم و نشان دلیلی است بر بودنم.

از استاد فاضل و اندیشمند جناب آقای دکتر مهدی قناده در مراحل مختلف این پایان نامه همواره با سه صدر و گشاده رویی در کنار من بودند و در طول مدت تحصیل از راهنمایی‌های اخلاقی و علمی ایشان بهره جستم، بشکر و قدردانی می‌نمایم. از تمام استادان فرزانه و فرهیخته‌ای که در راه کسب علم و معرفت مرا یاری نمودند، از آمان که در راه کسب دانش شاکردی محضرشان از بزرگترین افتخاراتم می‌باشد، کمال شکر را دارم.

بچنین از تمام کسانی که نفس خیرشان و دعای روح پرورشان بدرقه‌ی راهم بود، سپاسگزارم.

تعمدنامه

اینجانب رامین شامکوییان دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی مکانیک_گرایش طراحی کاربردی دانشکده‌ی مهندسی مکانیک و مکاترونیک دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان‌نامه‌ی حلّ کامل کره‌های جدار ضخیم FGM با تغییرات نمایی خواصّ مکانیکی تحت بارگذاری فشاری و حرارتی بر اساس نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی تحت راهنمایی دکتر مهدی قنّاد متعهد می‌شوم.

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان‌نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .

استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان‌نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

هدف از مطالعه‌ی حاضر، تحلیل و مدل‌سازی جابه‌جایی و تنش‌های ایجاد شده در کره‌های جدار ضخیم با ضخامت ثابت در حالت تقارن محوری تحت بارگذاری‌های مکانیکی و حرارتی می‌باشد. در ابتدا معادلات حاکم بر کره‌های جدار ضخیم برای ماده‌ی FG با تغییرات نمایی خواص در راستای ضخامت تحت بارگذاری فشاری شامل فشار داخلی و خارجی استخراج و معادله‌ی نهایی حاکم با اعمال تغییر متغیر به یک معادله‌ی هاپیرجئومتریک تبدیل می‌شود که جواب حل آن برای ضرایب ناهمگنی مثبت و منفی ماده متفاوت است. با انجام مطالعه‌ی موردی، نتایج و نمودارهای مربوط به توزیع تنش و جابه‌جایی آورده شده است. به منظور بررسی صحت نتایج حاصل از حل تحلیلی، مدل‌سازی عددی کره به کمک نرم‌افزار المان محدود آباکوس با اعمال فشار داخلی و خارجی به ربع دایره‌ی دارای شرایط تقارن محوری که شامل ۲۰ لایه با مدول الاستیسیته‌ی متفاوت و نسبت پواسون ثابت در ضخامت کره می‌باشد، صورت می‌پذیرد و نتایج دو روش حل با یکدیگر مقایسه شده است. همچنین به منظور تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های کروی تحت بارگذاری فشاری یکنواخت و بار حرارتی پایا، حل معادله‌ی ناهمگن حاکم به کمک روش لاگرانژ انجام پذیرفته و تابع دما با بسط قانون انتقال حرارت فوریه در دستگاه مختصات کروی و اعمال شرایط مرزی دمایی و در نظر گرفتن تغییرات ضریب انبساط حرارتی به صورت تابع نمایی در راستای ضخامت به دست می‌آید، همچنین در این حل از تغییرات ضریب انتقال حرارت به دلیل تأثیر اندک در نتایج و تسهیل در حل معادلات صرف نظر شده است. مقایسه‌ی نتایج حاصل با حل عددی نشان داده است که تئوری الاستیسیته‌ی مستوی در تحلیل کره‌ها با شرایط مذکور از دقت بسیار خوبی برخوردار است. نهایتاً نتیجه‌گیری و جمع‌بندی نهایی انجام گرفته که از اهم نتایج حاصل شده می‌توان به مقادیر کمتر تنش مؤثر و جابه‌جایی شعاعی در مواد با ضرایب ناهمگنی مثبت در کره‌ی تحت فشار اشاره کرد. برای کره‌ی تحت بارگذاری فشاری یکنواخت و بار حرارتی پایا، علاوه بر برقراری قانون جمع آثار به صورت مجموعی از نتایج کره‌ی تحت فشار یکنواخت و کره‌ی تحت بار حرارتی پایا، می‌توان به

مقادیر کمتر تنش محیطی و جابه‌جایی شعاعی در مواد با ضرایب ناهمگنی مثبت در کره‌ی تحت فشار داخلی اشاره کرد. در حالی که در کره‌ی تحت فشار خارجی، مواد با مقادیر منفی ضریب ناهمگنی از تنش محیطی کمتری برخوردارند. در انتها با توجه به پیشینه‌ی پژوهش و ضرورت تحقیق، پیشنهادهایی نیز ارائه شده است.

واژگان کلیدی: کره‌های جدار ضخیم، تئوری الاستیسیته‌ی مستوی، حلّ تحلیلی، تغییرات نمایی خواص، مواد متغیر تابعی.

فهرست مطالب

۱	فصل ۱: مروری بر روش‌های تحلیل پوسته‌ها
۲	۱-۱ مقدمه
۲	۲-۱ دسته‌بندی پوسته‌ها
۴	۳-۱ تئوری پوسته‌های نازک
۶	۱-۳-۱ تئوری غشایی
۶	۲-۳-۱ تئوری خمشی
۷	۴-۱ تئوری پوسته‌های ضخیم
۸	۱-۴-۱ تئوری الاستیسیته‌ی خطی
۹	۲-۴-۱ تئوری تغییر شکل برشی
۱۰	۵-۱ کاربرد پوسته‌های کروی
۱۳	۶-۱ مواد با تغییرات تابعی خواص
۱۴	۱-۶-۱ ویژگی‌های مواد FG
۱۶	۲-۶-۱ تاریخچه‌ی مواد FG
۱۷	۳-۶-۱ مدل‌سازی ریاضی مواد FG
۱۹	۷-۱ پیشینه‌ی پژوهش
۲۷	۸-۱ جمع‌بندی
۲۹	فصل ۲: تحلیل الاستیک پوسته‌های کروی FGM
۳۰	۱-۲ مقدمه
۳۰	۲-۲ روابط اساسی
۳۲	۱-۲-۲ معادلات تعادل تنش
۳۳	۲-۲-۲ روابط سینماتیک (روابط کرنش-جاب‌جایی)
۳۴	۳-۲-۲ روابط ساختاری (روابط تنش-کرنش)
۳۵	۴-۲-۲ مسائل متقارن محوری و تئوری الاستیسیته‌ی مستوی

۳۷	۶-۲-۲ تنش مؤثر
۳۷	۳-۲ تحلیل کره‌های ناهمگن تحت فشار
۳۹	۱-۳-۲ حل الاستیک کره‌ی ناهمگن تحت فشار
۴۴	۱-۱-۳-۲ مقادیر مثبت ضریب ناهمگنی
۴۶	۲-۱-۳-۲ مقادیر منفی ضریب ناهمگنی
۴۸	۲-۳-۲ حل عددی کره‌ی ناهمگن تحت فشار
۴۸	۴-۲ حل الاستیک کره‌ی همگن تحت فشار
۵۱	۵-۲ مطالعه‌ی موردی و مقایسه‌ی نتایج
۵۱	۱-۵-۲ فشار داخلی
۵۵	۲-۵-۲ فشار خارجی
۵۹	۳-۵-۲ فشار داخلی و خارجی
۶۳	۶-۲ جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

فصل ۳: تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های کروی FGM

۶۵	۱-۳ مقدمه
۶۶	۲-۳ روابط اساسی
۶۶	۱-۲-۳ تحلیل حرارتی کره
۶۸	۲-۲-۳ توزیع دما در کره
۷۰	۳-۳ تحلیل کره‌های ناهمگن تحت فشار و بار حرارتی پایا
۷۱	۱-۳-۳ حل ترموالاستیک کره‌ی ناهمگن تحت فشار
۷۹	۱-۱-۳-۳ مقادیر مثبت ضریب ناهمگنی
۸۱	۲-۱-۳-۳ مقادیر منفی ضریب ناهمگنی
۸۴	۲-۳-۳ حل عددی کره‌ی ناهمگن تحت فشار و بار حرارتی پایا
۸۵	۴-۳ حل ترموالاستیک کره‌ی همگن تحت فشار
۸۷	۵-۳ مطالعه‌ی موردی و مقایسه‌ی نتایج
۸۸	۱-۵-۳ بار حرارتی پایا

۹۱	۲-۵-۳ فشار داخلی و بار حرارتی پایا
۹۵	۳-۵-۳ فشار خارجی و بار حرارتی پایا
۹۹	۴-۵-۳ فشار داخلی و خارجی و بار حرارتی پایا
۱۰۳	۶-۳ جمع‌بندی و نتیجه‌گیری
۱۰۵	فصل ۴: جمع‌بندی و نتیجه‌گیری
۱۰۶	۱-۴ مقدمه
۱۰۶	۲-۴ جمع‌بندی و نتیجه‌گیری
۱۰۹	۳-۴ پیشنهادها
۱۱۱	مراجع

فهرست شکل‌ها

- شکل ۱-۱ کاربرد پوسته‌ی کروی در صنایع نفت، گاز و پتروشیمی ۱۱
- شکل ۲-۱ گوی کروی جذب کننده‌ی انرژی خورشید ۱۲
- شکل ۳-۱ بالون مخابراتی مورد استفاده در خطوط ارتباط فضایی ۱۲
- شکل ۴-۱ مقایسه‌ی تغییرات خواص در مواد مختلف ۱۵
- شکل ۱-۲ تنش‌های یک المان در مختصات کروی ۳۱
- شکل ۲-۲ نمایش هندسی کره‌ی جدار ضخیم FGM تحت فشار یکنواخت داخلی و خارجی ۳۸
- شکل ۳-۲ توزیع بی‌بعد مدول الاستیسیته در راستای شعاع بی‌بعد ۳۹
- شکل ۴-۲ توزیع تنش شعاعی در کره‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی ۵۳
- شکل ۵-۲ توزیع تنش محیطی در کره‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی ۵۴
- شکل ۶-۲ توزیع جابه‌جایی شعاعی در کره‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی ۵۴
- شکل ۷-۲ توزیع تنش مؤثر در کره‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی ۵۵
- شکل ۸-۲ توزیع تنش شعاعی در کره‌ی ناهمگن تحت فشار خارجی ۵۷
- شکل ۹-۲ توزیع تنش محیطی در کره‌ی ناهمگن تحت فشار خارجی ۵۷
- شکل ۱۰-۲ توزیع جابه‌جایی شعاعی در کره‌ی ناهمگن تحت فشار خارجی ۵۸
- شکل ۱۱-۲ توزیع تنش مؤثر در کره‌ی ناهمگن تحت فشار خارجی ۵۸
- شکل ۱۲-۲ توزیع تنش شعاعی در کره‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی ۶۰
- شکل ۱۳-۲ توزیع تنش محیطی در کره‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی ۶۱
- شکل ۱۴-۲ توزیع جابه‌جایی شعاعی در کره‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی ۶۱
- شکل ۱۵-۲ توزیع تنش مؤثر در کره‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی ۶۲
- شکل ۱-۳ نمایش هندسی کره‌ی جدار ضخیم FGM تحت بارگذاری‌های مکانیکی و بار حرارتی پایا ۷۰
- شکل ۲-۳ توزیع بی‌بعد ضریب انبساط حرارتی در راستای شعاع بی‌بعد ۷۱
- شکل ۳-۳ توزیع تنش شعاعی در کره‌ی ناهمگن تحت بار حرارتی پایا ۸۹
- شکل ۴-۳ توزیع تنش محیطی در کره‌ی ناهمگن تحت بار حرارتی پایا ۹۰

- شکل ۳-۵ توزیع جابه‌جایی شعاعی در کره‌ی ناهمگن تحت بار حرارتی پایا ۹۰
- شکل ۳-۶ توزیع تنش مؤثر در کره‌ی ناهمگن تحت بار حرارتی پایا ۹۱
- شکل ۳-۷ توزیع تنش شعاعی بی‌بعد شده تحت فشار داخلی و بار حرارتی پایا ۹۳
- شکل ۳-۸ توزیع تنش محیطی بی‌بعد شده تحت فشار داخلی و بار حرارتی پایا ۹۳
- شکل ۳-۹ توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد شده تحت فشار داخلی و بار حرارتی پایا ۹۴
- شکل ۳-۱۰ توزیع تنش مؤثر بی‌بعد شده تحت فشار داخلی و بار حرارتی پایا ۹۴
- شکل ۳-۱۱ توزیع تنش شعاعی بی‌بعد شده تحت فشار خارجی و بار حرارتی پایا ۹۷
- شکل ۳-۱۲ توزیع تنش محیطی بی‌بعد شده تحت فشار خارجی و بار حرارتی پایا ۹۷
- شکل ۳-۱۳ توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد شده تحت فشار خارجی و بار حرارتی پایا ۹۸
- شکل ۳-۱۴ توزیع تنش مؤثر بی‌بعد شده تحت فشار خارجی و بار حرارتی پایا ۹۸
- شکل ۳-۱۵ توزیع تنش شعاعی بی‌بعد شده تحت فشار داخلی و خارجی و بار حرارتی پایا ۱۰۱
- شکل ۳-۱۶ توزیع تنش محیطی بی‌بعد شده تحت فشار داخلی و خارجی و بار حرارتی پایا ۱۰۱
- شکل ۳-۱۷ توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد شده تحت فشار داخلی و خارجی و بار حرارتی پایا ۱۰۲
- شکل ۳-۱۸ توزیع تنش مؤثر بی‌بعد شده تحت فشار داخلی و خارجی و بار حرارتی پایا ۱۰۲

فهرست جداول

- ۶۲ جدول ۱-۲ مقایسه مقادیر تنش مؤثر حاصل از PET و FEM در لایه‌ی میانی
- ۱۰۳ جدول ۱-۳ مقایسه مقادیر تنش مؤثر حاصل از PET و FEM در لایه‌ی میانی

فهرست علائم و اختصارات

u_R, u_θ, u_ϕ	جابه‌جایی شعاعی، محیطی و نصف‌النهاری
R, θ, ϕ	محورهای مختصات در سیستم کروی
$\varepsilon_R, \varepsilon_\theta, \varepsilon_\phi$	کرنش‌های شعاعی، محیطی و نصف‌النهاری
$\sigma_R, \sigma_\theta, \sigma_\phi$	تنش‌های شعاعی، محیطی و نصف‌النهاری
μ, λ	ضرایب لامه
ν	نسبت پواسان
$\theta(r)$	توزیع اختلاف دما در راستای شعاعی
θ_i, θ_o	اختلاف دمای داخلی و دمای خارجی با دمای مرجع
E	مدول الاستیسیته
k	نسبت شعاع خارجی به داخلی
r	نسبت شعاع کره به شعاع داخلی
R_i	شعاع داخلی کره
R_o	شعاع خارجی کره
n_i	ضریب ناهمگنی
P_i, P_o	فشار داخلی و فشار خارجی
α	ضریب انبساط حرارتی
K_t	ضریب انتقال حرارت
ρ	چگالی
$\sigma_R^H, \sigma_\theta^H$	تنش‌های شعاعی و محیطی در کره‌ی همگن
T_o	دمای خارجی
T_i	دمای داخلی
T^*	دمای مرجع
$\Delta T(r)$	توزیع دما در راستای شعاعی

فصل ۱

مروری بر روش‌های تحلیل پوسته‌ها

۱-۱ مقدمه

پوسته‌ها^۱ یا سازه‌های پوسته‌ای، از فراوان‌ترین و متنوع‌ترین انواع سازه‌ها هستند که در دنیای فیزیکی اطراف ما پیدا می‌شوند. پوسته‌ها در اشکال طبیعی مانند جمجمه‌ی سر انسان‌ها و حیوانات و نیز اجزای محافظ اندام جانوری مانند لاک و صدف مشاهده می‌شوند؛ در اشکال مصنوعی در صنایع مختلف ساختمانی، نیروگاهی، خودروسازی، نظامی و هوافضا همانند: سقف‌ها، لوله‌ها، بدنه‌ی خودروها و هواپیماها، پرتابه‌ها و پرتاب‌کننده‌ها، موشک‌ها و سفینه‌ها تولید می‌شوند.

پوسته‌ها به‌طورکلی، سازه‌های خمیده هستند که از جهت کیفیت رفتاری و مقاومت در برابر نیروها و لنگرهای وارد شده، در بالاترین مرتبه‌ی تکاملی سازه‌ها قرار می‌گیرند. به‌تناسب مطلوبیت رفتاری، پیچیدگی تحلیل آنها نیز حائز اهمیت می‌باشد. روش‌های تحلیلی تقریبی موجود برای تحلیل پوسته‌ها بر اساس فرضیاتی است که تئوری پوسته‌ها را تشکیل می‌دهند. از میان انواع پوسته‌ها، پوسته‌های استوانه‌ای و کره‌ای به‌دلیل فراوانی کاربرد، از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند. مطالعه‌ی رفتار این گونه پوسته‌ها از گذشته‌ی نه‌چندان دور تا به امروز مورد توجه دانشمندان بوده و همچنان ادامه دارد. دانش-پژوهان پیگیر اعمال تغییرات بر روی هندسه و ماده‌ی پوسته‌ها بوده‌اند که بتوانند مقاومت آنها را در برابر انواع تنش‌های مکانیکی و حرارتی افزایش و در صورت امکان، وزن آنها را کاهش دهند.

۱-۲ دسته‌بندی پوسته‌ها

در این بخش، پوسته‌ها از دیدگاه هندسی، مادی و رفتاری دسته‌بندی می‌شوند.

الف- از دیدگاه هندسی:

پوسته‌ی حاصل از انتقال^۲: از انتقال یک منحنی یا سطح مادی در امتداد خط راست خارج از

¹ Shells

² Shell of Translation

صفحه‌ی قوس، حاصل می‌شود.

پوسته‌ی حاصل از دوران^۱: از دوران یک منحنی یا سطح مادّی حول محور واقع در صفحه‌ی قوس، حاصل می‌شود.

پوسته‌ی جدار نازک^۲: پوسته‌ای که نسبت ضخامت به شعاع انحنای سطح میانی^۳ آن کوچک‌تر از $1/20$ باشد.

پوسته‌ی جدار ضخیم^۴: پوسته‌ای که نسبت ضخامت به شعاع انحنای سطح میانی آن بزرگ‌تر از $1/20$ باشد.

ب- از دیدگاه مادّی:

پوسته‌ی همگن^۵: خواصّ مکانیکی مادّه‌ی پوسته در نقاط مختلف جسم یکسان است و تابع موقعیت نقاط نمی‌باشد.

پوسته‌ی ناهمگن^۶: خواصّ مکانیکی مادّه‌ی پوسته در نقاط مختلف جسم یکسان نیست و تابع موقعیت نقاط می‌باشد.

پوسته‌ی همسانگرد^۷: خواصّ مکانیکی (E, ν) مادّه‌ی پوسته در جهات مربوط به هر نقطه، یکسان است.

پوسته‌ی ناهمسانگرد^۸: خواصّ مکانیکی (E, ν) مادّه‌ی پوسته در جهات مربوط به هر نقطه، یکسان نیست.

¹ Shell of Rotation

² Thin Shell

³ Midsurface

⁴ Thick Shell

⁵ Homogeneous Shell

⁶ Inhomogeneous(Heterogeneous) Shell

⁷ Isotropic Shell

⁸ Anisotropic Shell

ج- از دیدگاه رفتاری:

- پوسته با تغییر شکل‌های کوچک^۱: جابه‌جایی هر نقطه از پوسته بین شرایط بارداری و بی‌باری، کوچک است (رفتار خطی از نظر هندسی).
- پوسته با تغییر شکل‌های بزرگ^۲: جابه‌جایی هر نقطه از پوسته بین شرایط بارداری و بی‌باری، کوچک نیست (رفتار غیرخطی از نظر هندسی).
- پوسته با رفتار کشسان^۳: تغییر شکل‌ها بازگشت پذیرند و روابط تنش- کرنش از قانون عمومی هوک پیروی می‌کنند (رفتار خطی از نظر مادی).
- پوسته با رفتار مومسان^۴: تغییر شکل‌ها بازگشت ناپذیرند و روابط تنش- کرنش از قانون عمومی هوک پیروی نمی‌کنند (رفتار غیر خطی از نظر مادی).

۱-۳ تئوری پوسته‌های نازک

در پوسته‌های نازک، نسبت ضخامت پوسته h به شعاع سطح میانی R کوچک‌تر از $1/20$ می‌باشد. تئوری این دسته از پوسته‌ها بر مبنای تئوری الاستیسیته‌ی خطی (دو بعدی) بنا شده است. به‌طور کلی به دلیل کوچک بودن یک بعد نسبت به ابعاد دیگر، تئوری الاستیسیته‌ی سه بعدی استفاده نمی‌شود؛ بلکه با ساده‌سازی روابط الاستیسیته، روش‌های تحلیلی-تقریبی برای تحلیل پوسته‌های نازک به دست می‌آیند. دقت نتایج تئوری‌های ارائه شده بستگی به درجه‌ی ساده‌سازی روابط الاستیسیته دارد. اولین فرضیات را کیرشهف^۵ (۱۸۵۰) درباره‌ی ورق‌ها ارائه کرد که پس از آن در بسط تئوری پوسته‌ها به کار گرفته شد. ارون^۶ (۱۸۷۴) تئوری پوسته‌ها را مبتنی بر فرضیات کیرشهف معرفی کرد، اما کار وی کامل

¹ Small Deflection

² Large Deflection

³ Elastic Behavior

⁴ Plastic Behavior

⁵ Kirchhoff

⁶ Aron

نمود. لوو^۱ (۱۸۸۸) معادلات عمومی پوسته‌های نازک را ارائه کرد که اکنون به عنوان تئوری کلاسیک پوسته‌های نازک یا تئوری لوو-کیرشهف مشهور است. رایسنر^۲ (۱۹۱۲) با استفاده از فرضیات لوو تحلیل پوسته‌های حاصل از دوران متقارن محوری^۳ را ارائه نمود. فلوگه^۴ (۱۹۳۲) اولین کسی است که تئوری پوسته‌ها با تقریب مرتبه‌ی دو را با لحاظ کردن خیزهای کوچک ارائه کرد. معادلات وی به عنوان معادلات استاندارد پوسته‌های نازک شناخته می‌شود و فقط در حالت‌های خاص قابل حل می‌باشد. با ساده‌سازی آنها تئوری پوسته‌ها با تقریب مرتبه‌ی یک و صفر به دست می‌آیند. نظریات فلوگه توسط بیرنه^۵ (۱۹۴۴) تکمیل شد. نقدی^۶ (۱۹۵۷) تئوری غیرخطی پوسته‌های نازک را فرمول‌بندی کرد که به کارگیری آنها مشکل می‌باشد. سندرز^۷ (۱۹۵۹) فرمول‌بندی پوسته‌ها را با استفاده از اصل کار مجازی ارائه کرد و نووژیلِف^۸ (۱۹۶۴) امکان ارائه‌ی نظریه‌ی پوسته‌ها را به شکل مختلط نشان داد و به این ترتیب معادلات به صورت فشرده‌تری نوشته شدند.

تئوری عمومی پوسته‌های نازک را می‌توان به این گونه تقسیم‌بندی کرد:

۱- تئوری با تقریب مرتبه‌ی صفر (تئوری غشایی)^۹

۲- تئوری با تقریب مرتبه‌ی یک (تئوری خمشی)^{۱۰}

۳- تئوری با تقریب مرتبه‌ی دو (تئوری فلوگه)^[۱]

¹ Love

² Reissner

³ Axisymmetric Shell of Revolution

⁴ Flugge

⁵ Byrne

⁶ Naghdi

⁷ Sanders

⁸ Novozhilov

⁹ Membrane Theory

¹⁰ Bending Theory

۱-۳-۱ تئوری غشائی

غشا^۱ از دیدگاه مکانیکی، یک تار^۲ دو بعدی است که فقط می‌تواند نیروهای محوری (نیروهای غشایی) را تحمل کند. پوسته‌هایی که سختی خمشی^۳ آنها خیلی کم است و از نظر فیزیکی نمی‌توانند لنگرهای خمشی را تحمل کنند، با این تئوری تحلیل می‌شوند. میدان نیروهای داخلی در اغلب پوسته‌های نازک، عمدتاً از نیروهای غشایی تشکیل می‌شود و از این جهت نیروهای غشایی برای تأمین تعادل ایستایی پوسته کافی هستند و به عبارتی دیگر پوسته از نظر ایستایی معین است. در تئوری غشایی، جابه‌جایی پوسته با جابه‌جایی سطح میانی توصیف و مسائل در حالت تنش صفحه‌ای^۴ و کرنش صفحه‌ای^۵ با چشم‌پوشی از تنش عمودی و کرنش عمودی در راستای شعاعی، تحلیل می‌شوند [۲].

۱-۳-۲ تئوری خمشی

ورق^۶ از دیدگاه مکانیکی، یک تیر^۷ دو بعدی است که علاوه بر نیروهای محوری، نیروهای برشی و لنگرهای خمشی را نیز می‌تواند تحمل کند. پوسته‌هایی که سختی خمشی آنها قابل توجه باشند و از نظر فیزیکی بتوانند لنگرهای خمشی را تحمل کنند، با این تئوری تحلیل می‌شوند. فرضیه‌ی مقدماتی تیرها توسط ناویر^۸ ارائه و سپس توسط کیرشهف در مورد ورق‌ها تعمیم داده شد و لوو با همین فرضیات، تئوری خمشی را صورت‌بندی نمود.

در حالت کلی، معادلات تعادل به‌تنهایی برای به‌دست آوردن نیروهای خمشی کافی نیستند و به‌عبارتی دیگر، پوسته از نظر ایستایی نامعین است. در تئوری خمشی نیز، جابه‌جایی پوسته با جابه‌جایی

¹ Membrane

² String

³ Bending Stiffness

⁴ Plane Stress

⁵ Plane Strain

⁶ Plate

⁷ Beam

⁸ Navier

سطح میانی توصیف می‌شود. فرضیات تئوری غشایی و تئوری خمشی (تئوری کلاسیک) را فرضیات لوو-کیرشهف می‌نامند که عبارتند از [۲]:

۱- نسبت ضخامت پوسته به شعاع انحنای سطح میانی در مقایسه با واحد، کوچک است (پوسته ی نازک)؛

۲- خیزها در مقایسه با ضخامت پوسته، کوچک هستند (خیز کوچک)؛

۳- مؤلفه‌ی تنش عمود بر سطح میانی نسبت به سایر مؤلفه‌های تنش، قابل چشم پوشی است (تنش صفحه‌ای)؛

۴- مقاطع مستوی عمود بر سطح میانی پوسته، پس از بارگذاری و تغییر شکل، همچنان مستوی و عمود باقی می‌مانند. با این فرض، کرنش‌های برشی و مؤلفه‌ی کرنش عمود بر سطح میانی، صفر در نظر گرفته می‌شوند (کرنش صفحه‌ای).

۴-۱ تئوری پوسته‌های ضخیم

اولین بار لامه^۱ (۱۸۵۲) با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی دو بعدی^۲، حل دقیق استوانه‌های ضخیم متقارن محوری با جدار ثابت تحت فشار یکنواخت داخلی از ماده‌ی همگن و همسانگرد را ارائه کرد [۳]، که تاکنون نیز در حل مسائل مختلف مهندسی کاربرد فراوانی داشته است. گالرکین^۳ (۱۹۳۰) روابط پوسته‌های ضخیم را با استفاده از معادلات اساسی الاستیسیته به دست آورد. ولاسف^۴ (۱۹۴۹) با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی خطی، معادلات قابل حلی برای پوسته‌های ضخیم ارائه کرد. نقدی (۱۹۵۶) با لحاظ اثر برش عرضی و اینرسی دورانی، تئوری تغییر شکل برشی^۵ را برای پوسته‌های ضخیم پایه‌گذاری

¹ Lamé

² Plane Elasticity Theory (PET)

³ Galerkin

⁴ Vlassov

⁵ Shear Deformation Theory

نمود [۴]. میرسکی و هرمان^۱ (۱۹۵۸) با به‌کارگیری تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول^۲، تحلیل ارتعاشی پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم را ارائه کردند [۵]. گرینسپن^۳ (۱۹۶۰) مقادیر ویژه‌ی استوانه‌ی ضخیم را با تئوری‌های مختلف پوسته‌های نازک و ضخیم مقایسه نمود [۶].

تئوری عمومی پوسته‌های ضخیم را می‌توان به این‌گونه تقسیم‌بندی کرد:

۱- تئوری الاستیسیته‌ی خطی

۲- تئوری تغییر شکل برشی

۱-۴-۱ تئوری الاستیسیته‌ی خطی

به طور کلی در تئوری الاستیسیته‌ی سه بعدی، ۱۵ معادله وجود دارد که می‌توان ۱۵ مجهول را به‌دست آورد؛ معادلات عبارتند از: سه معادله‌ی تعادل (تنش)، شش معادله‌ی سینماتیک (کرنش-جاب-جایی) و شش معادله‌ی رفتاری (تنش-کرنش) و مجهولات عبارتند از: شش مؤلفه‌ی تنش (تانسور متقارن تنش)، شش مؤلفه‌ی کرنش (تانسور متقارن کرنش) و سه مؤلفه‌ی جابه‌جایی (بردار جابه‌جایی). تئوری الاستیسیته‌ی سه بعدی هر چند مشخصات رفتاری پوسته‌ها را به‌طور کامل توصیف می‌کند و منجر به حل دقیق می‌شود ولی حل معادلات آن بسیار پیچیده می‌باشد و عملاً به‌کارگیری آنها امکان‌ناپذیر است. با فرضیات ساده‌شونده‌ای می‌توان معادلات بالا را کاهش داد و تئوری الاستیسیته‌ی دو بعدی (مستوی) را برای تحلیل پوسته به کار برد. در تئوری الاستیسیته‌ی مستوی، فرض می‌شود که مقاطع مستوی عمود بر سطح میانی، پس از اعمال فشار و تغییر شکل، همچنان مستوی و عمود بر سطح میانی باقی می‌مانند. در حقیقت کرنش برشی و تنش برشی صفر در نظر گرفته می‌شود اما برخلاف تئوری کلاسیک پوسته‌های نازک، جابه‌جایی هر نقطه از پوسته برابر جابه‌جایی سطح میانی در نظر گرفته نمی‌شود. این تئوری را لامه برای استوانه‌ی جدار ثابت متقارن محوری از ماده‌ی همگن و همسانگرد به کار برد و توزیع تنش را در

¹ Mirsky-Hermann

² First Shear Deformation Theory (FSDT)

³ Greenspon

استوانه‌ها به دست آورد. تئوری لامه به تئوری کلاسیک استوانه‌های ضخیم مشهور است [۸ و ۷].

۱-۴-۲ تئوری تغییر شکل برشی

با استفاده از بسط تیلور و تعریف جابه‌جایی هر نقطه به صورت مجموع جابه‌جایی سطح میانی و جابه‌جایی آن نقطه نسبت به سطح میانی می‌توان جابه‌جایی تئوری لامه را به صورت یک چندجمله‌ای نوشت. اگر فقط جمله‌ی اول چندجمله‌ای در نظر گرفته شود تحلیل پوسته‌های جدار ضخیم به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی صفر نامیده می‌شود که مشابه تئوری خمشی در پوسته‌های نازک است. اگر دو جمله‌ی اول چندجمله‌ای در نظر گرفته شود تحلیل پوسته‌های جدار ضخیم به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول نامیده می‌شود که مشابه تئوری فلوگه در پوسته‌های نازک است [۶]. به همین ترتیب می‌توان تئوری‌های تغییر شکل مرتبه‌ی بالاتر را استخراج و فرمول‌بندی نمود. در این تئوری علاوه بر اثر نیروهای محوری، اثرات برش، خمش، پیچش و نیز اثرات اینرسی دورانی و میدان حرارتی را می‌توان در نظر گرفت. تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول به تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول میرسکی-هرمان نیز شهرت دارد که تعمیم تئوری تیموشنکو^۱ در تیرها و همچنین تئوری میندلین^۲ در ورق‌ها می‌باشد [۹].

در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، مقاطع مستوی و عمود بر سطح میانی، پس از تغییر شکل، مستوی باقی می‌مانند ولیکن الزاماً عمود نیستند، یعنی کرنش برشی و تنش برشی صفر در نظر گرفته نمی‌شوند. این بدان معنی است که تنش و کرنش برشی در سطوح موازی صفحه میانی صفر در نظر گرفته می‌شوند. هرچند به کارگیری تئوری الاستیسیته‌ی سه بعدی، منجر به حل دقیق مسائل می‌شود، ولیکن به دلیل اینکه تاکنون هیچ راه حل کاملی برای پوسته‌های جدار ضخیم (به غیر از موارد

¹ Timoshenko

² Mindlin

خاص) با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی سه بعدی ارائه نشده است، تئوری تغییر شکل برشی برای تحلیل سازه‌های پوسته‌ای مختلف با انواع جداره، انواع مواد، انواع بارگذاری و شرایط مرزی، حتی نامتقارن محوری^۱، روش مناسبی می‌باشد.

۱-۵ کاربرد پوسته‌های کروی

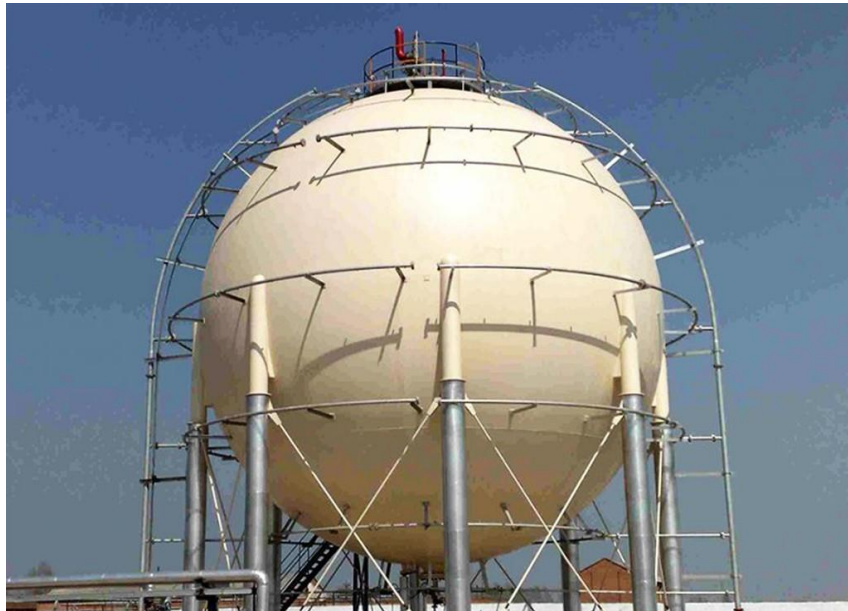
پوسته‌های کروی سازه‌های خمیده‌ای هستند که در برابر نیرو و لنگرهای وارد شده مطلوبیت ویژه‌ای دارند. در حال حاضر پوسته‌های ساخته شده از کامپوزیت‌ها کاربرد گسترده‌ای در صنایع هوافضا دارند. اما این پوسته‌های کامپوزیتی به دلیل تغییر ناگهانی ساختار ماده و در نتیجه تغییر ناگهانی در رفتار مواد، سبب تمرکز تنش و گسستگی در مرز لایه‌ها می‌شود ولی پوسته‌های ساخته شده از مواد ناهمگن FG به دلیل تغییر تدریجی خواص مکانیکی، حرارتی و مغناطیسی کاربرد مطلوب‌تری نسبت به کامپوزیت‌ها دارند. از میان انواع پوسته‌ها، پوسته‌های کروی و استوانه‌ای به دلیل کاربردهای فراوانی که در زمینه‌های مختلف مهندسی و صنعت از قبیل صنایع دریایی، صنایع نظامی، صنایع پتروشیمی، صنایع هوافضا، سیلوها و راکتورهای تحت فشار دارند، از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند.

به عنوان چند نمونه طبیعی می‌توان به هندسه‌ی کروی جمجمه‌ی انسان، سیارات و حتی پوسته‌ی سخت لاکپشت‌ها و ... اشاره کرد. در کاربردهای صنعتی، مخازن کروی از جمله تجهیزات ذخیره‌سازی سیالات بوده که در صنایع مختلف کاربرد فراوانی پیدا کرده است. شکل هندسی مناسب پوسته‌های کروی در تحمل فشارهای بالا از یک سو و نحوه ساخت آنها از سوی دیگر کاربری این تجهیزات را تحت‌الشعاع قرار می‌دهد.

در صنایع گاز و پتروشیمی ذخیره‌سازی گاز در دمای محیط تنها به روش متراکم‌سازی و مایع نمودن در فشار بالا امکان‌پذیر است و مخازن کروی به دلیل هندسه‌ی مناسب قادر به تحمل این فشارها

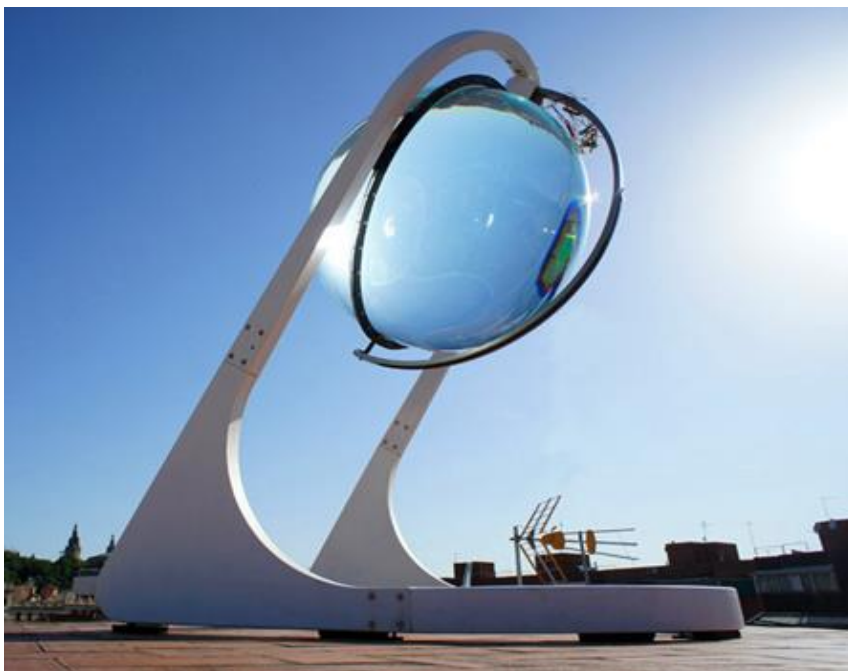
^۱ Nonaxisymmetric

می‌باشند. همچنین در برخی موارد مانند مخازن گاز از ترکیب پوسته‌های کرومی و استوانه‌ای استفاده می‌گردد.



شکل ۱-۱ کاربرد پوسته‌ی کرومی در صنایع نفت، گاز و پتروشیمی

در صنایع ساختمانی نیز از شکل هندسی کره در توزیع مناسب نیروهای حجمی حاصل از وزن سازه در گنبدها، طاق‌ها و ... بسیار استفاده می‌شود. چرخش و دوران کره‌ی زمین و سایر سیارات عامل اصلی استفاده از کره‌های چرخان در صنایع مختلف بوده که توسط بسیاری از دانشمندان و مهندسين مورد تحقیق و بررسی قرار گرفته است. به‌تازگی طراحان و مهندسين فعال در زمینه‌ی انرژی‌های تجدیدپذیر، به‌جای استفاده از صفحات تخت انرژی خورشیدی جهت تولید برق از گوی‌های شیشه‌ای مطابق شکل (۱-۲) بهره می‌برند، چرا که به‌دلیل کرومی بودن هندسه و بازتاب پرتوهای نور خورشید از کمترین نورهای منعکس شده برای تولید برق می‌توان استفاده کرد، از سوی دیگر به‌دلیل کرومی بودن و سهولت در چرخش جهت جذب حداکثر انرژی بسیار حائز اهمیت می‌باشند.



شکل ۱-۲ گوی کروی جذب کننده انرژی خورشید

در صنایع هوافضا نیز از مخازن کروی جهت تأمین و ذخیره‌ی سوخت فضایی‌ها بهره می‌برند. همچنین استفاده از آنتن‌های مخابراتی کروی شکل برای ایجاد خطوط ارتباطی مطلوب از دیگر کاربردهای پوسته‌های کروی در صنایع هوافضا می‌باشد.



شکل ۱-۳ بالون مخابراتی مورد استفاده در خطوط ارتباط فضایی

۱-۶ مواد با تغییرات تابعی خواص^۱

ماده‌ی همگن ماده‌ای است که خواص آن در تمام نقاط یکسان است و ماده‌ی همسانگرد ماده‌ای است که خواص هر نقطه‌ی مادی آن در تمام جهت‌ها یکسان است. بیشتر موادی که در صنایع از آنها استفاده می‌کنیم موادی همگن و همسانگرد می‌باشند. با پیشرفت سریع صنایع هوافضا، نظامی، پتروشیمی و ... نیاز به موادی با مقاومت مکانیکی و حرارتی بالا به وجود آمده است. مواد همگن و همسانگرد به دلیل یکنواختی خواص محدودیت‌هایی ایجاد می‌کنند، به عنوان مثال در صنایعی که سازه در مجاورت دماهای بسیار بالا قرار دارد، استفاده از موادی همگن و همسانگرد که خواسته‌های طراح را برآورده کند مشکل است. در حرارت زیاد فلزات و آلیاژهای فلزی به شدت در معرض اکسیداسیون^۲، خوردگی^۳، خزش^۴ و ... قرار می‌گیرند. این در حالی است که استفاده‌ی تنها از مواد با خواص ترمودینامیکی مطلوب همچون سرامیک‌ها، بسیاری از خواص مورد نظر در طراحی مانند چقرمگی و استحکام بالا را برآورده نمی‌کنند. از این‌رو دانشمندان همواره در تلاش بوده‌اند که از مواد جدید با خواص برتر استفاده کنند. ایده‌ی مواد مرکب (کامپوزیت‌ها)^۵ در پایان دهه‌ی ۱۹۴۰ و آغاز دهه‌ی ۱۹۵۰ در صنایع دریایی عملی شد. مواد مرکب از ترکیب دو یا چند ماده‌ی ناهم‌ساز به وجود می‌آیند که خواص فیزیکی متفاوت و گاهی ناسازگار دارند. این عدم سنخیت رفتار مواد، باعث تمرکز تنش و ایجاد گسستگی در مرز لایه‌ها در اثر بارگذاری هم‌زمان مکانیکی و حرارتی می‌شود. کامپوزیت‌ها از دیدگاه متالورژی (میکروسکوپی)^۶، ناهمگن و ناهمسانگرد هستند، ولیکن از دیدگاه مکانیکی (ماکروسکوپی)، همگن و ناهمسانگرد تلقی می‌شوند.

¹ Functionally Graded Materials (FGM)

² Oxidation

³ Corrosion

⁴ Creep

⁵ Composite Material (Composites)

⁶ Metallurgy

لخنیتسکی^۱ (۱۹۵۰) تئوری الاستیسیته‌ی مواد ناهمسانگرد را فرمول‌بندی کرد [۱۰]. پس از وی وینسون^۲ (۱۹۷۴) تئوری کلاسیک و تئوری تغییر شکل برشی را در تحلیل استاتیکی پوسته‌های کامپوزیتی به کار برد و بین نتایج دو روش مقایسه‌ای انجام داد. اشکال عمده‌ی مواد مرکب، تغییر ناگهانی مواد و خواص آنهاست که در نتیجه موجب تغییر ناگهانی رفتار مواد به‌ویژه در مرز لایه‌ها می‌شود، لذا ایده‌ی تغییر تدریجی خواص مواد پی‌ریزی شد. مواد با تغییرات تابعی خواص یا مواد هدفمند در ساختار ارگانیک‌های زنده مانند استخوان وجود داشته است. به عنوان مثال استخوان در لایه‌ی بیرونی که نیاز به مقاومت مناسبی در برابر عوامل خارجی از قبیل ضربه دارد، از استحکام بیشتری برخوردار است و به تدریج از سختی آن کم می‌شود تا لایه‌ی درونی که کاملاً نرم می‌باشد تا شرایط مناسب برای جذب مواد غذایی را داشته باشد. از این رو تغییرات خواص به صورت کاملاً پیوسته و تدریجی ایجاد می‌شود. مواد FG، ناهمگن هستند ولیکن آنها را همسانگرد در نظر می‌گیرند.

۱-۶-۱ ویژگی‌های مواد FG

مواد ناهمگن FG در مقایسه با مواد همگن (ایزوتروپ‌ها) و مواد ناهمسانگرد (کامپوزیت‌ها) دارای ویژگی‌های به شرح زیر می‌باشند [۱۱]:

۱- مقاومت زیاد در برابر گرادیان دمایی بالا. درحقیقت این گونه مواد با کاهش تنش‌های حرارتی، آثار منفی آنها را به نحو قابل توجهی کاهش می‌دهند. به کمک مواد FG می‌توان در ناحیه‌هایی که تنش‌های حرارتی به حالت بحرانی می‌رسند، آنها را کنترل کرد.

۲- مقاومت زیاد در برابر بارهای مکانیکی بالا. به کمک مواد FG می‌توان استحکام مواد را افزایش داد تا از ورود اجسام به ناحیه‌ی مومسان و حتی شکست^۳ تا حدود زیادی جلوگیری شود.

۳- یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های مواد FG، کاهش تمرکز تنش در اجسام جامد است. در بسیاری از اجسام به دلیل وجود شکل‌های خاص هندسی، تمرکز تنش در نقاطی از جسم ایجاد می‌شود،

¹ Lekhnitskii

² Vinson

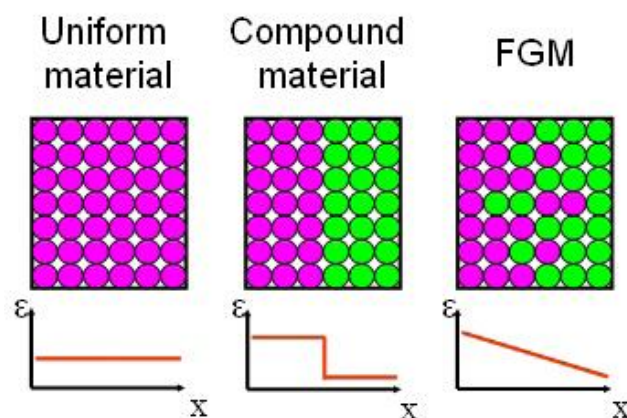
³ Fracture

مانند لبه‌های جسم و نزدیکی سوراخ‌ها و گشودگی‌ها. به کمک مواد FG می‌توان آثار تمرکز تنش را به صورت چشم‌گیری کاهش داد.

۴- بهترین ترکیب برای تغییر خواص ماده که مانع ایجاد یا رشد ترک شود، مواد هدفمند FG است.

۵- اگر پوشش ترد^۱ بر روی مواد نرم به صورت لایه‌های جدا انجام شود، احتمال جدا شدن لایه‌ی ترد بسیار زیاد است. به کمک مواد FG، این کار با تغییرات پیوسته و تدریجی انجام می‌پذیرد.

۶- تغییرات تدریجی خواص در ساختار مواد FG، موجب استحکام بین لایه‌های مختلف آن می‌شود. در صورتی که در مواد مرکب کامپوزیتی، تداخل بین ساختارهای زمینه و الیاف، نوعی ناهماهنگی در خواص مکانیکی ایجاد می‌کند. به عنوان مثال هنگامی که مواد کامپوزیت در معرض بارهای حرارتی بالا قرار می‌گیرند، ترک، ابتدا در مرز زمینه و الیاف ایجاد و سپس در لایه‌ها و مقاطع ضعیف داخل زمینه و الیاف منتشر می‌شود. در مواد FG، به دلیل پیوستگی موجود در خواص مکانیکی، حرارتی و مغناطیسی، تنش‌ها و گرادیان آنها حالت پیوسته‌ای پیدا می‌کنند که باعث استحکام ماده می‌شوند. شکل (۱-۵) مقایسه‌ی بین تغییرات خواص در مواد همسانگرد، کامپوزیت و FG را نشان می‌دهد.



شکل ۱-۴ مقایسه‌ی تغییرات خواص در مواد مختلف [۱۱]

¹ Brittle Coating

۱-۶-۲ تاریخچهی مواد FG

مفهوم اولیهی FGM توسط نینو^۱ و همکارانش در ۱۹۸۴ در سازمان هوا و فضای ژاپن مطرح و از ۱۹۸۶ مطالعات امکان‌سنجی تولید FGM در این کشور شروع شد [۱۲ و ۱۳]. مرحلهی اول پروژه‌ی ملی (فناوری گسترش FGM) طی سال‌های ۸۹-۱۹۸۷ در ژاپن انجام شد. در زمینه‌ی تحقیق در مورد این پروژه، سه گروه ساخت مواد، پردازش و ارزیابی مواد همکاری داشتند. نظریه‌ی پیشنهادی، تولید یک ماده‌ی جدید بود که با استفاده از سرامیک‌ها با مقاومت حرارتی بالا و تحمل گرادیان حرارتی مناسب و فلزات با مقاومت مکانیکی بالا و ضریب هدایت حرارتی مناسب، به گونه‌ای که تغییرات تدریجی ماده از سرامیک به فلز انجام پذیرد تا شرایط دمایی لایه‌ی بیرونی دماغه‌ی شاتل فضایی و نیز شرایط مکانیکی و جوش‌کاری لایه‌ی درونی شاتل ارضا شود.

پس از دستیابی به هدف پروژه که ساخت و آماده‌سازی قطعاتی به قطر ۳۰ میلی‌متر و ضخامت ۱ تا ۱۰ میلی‌متر که قادر به تحمل دماهایی در حدود ۲۰۰۰ درجه‌ی کلوین و اختلاف دمایی در حدود ۱۰۰۰ درجه‌ی کلوین بودند، دانشمندان ژاپنی، نتایج پژوهش‌های خود را در اولین سمپوزیوم جهانی در ۱۹۹۰ در اختیار همگان قرار دادند. مرحله‌ی دوم پروژه‌ی ملی ژاپن در ۹۱-۱۹۹۰ انجام شد که منجر به ساخت ورق مربعی به ابعاد ۳۰۰ میلی‌متر برای استفاده در قسمت پایینی دماغه‌ی سفینه‌ی فضایی و یک نیم‌کره به قطر ۵۰ میلی‌متر برای استفاده در نوک مخروطی دماغه‌ی سفینه شد [۱۴]. دومین سمپوزیوم جهانی FGM، در ۱۹۹۲ برگزار و پس از آن، مطالعات بر روی مواد FG و به‌ویژه تحلیل سازه‌های FGM فراگیر شد.

^۱ Ninno

۱-۶-۳ مدل سازی ریاضی مواد FG

با توجه به اینکه مواد FG اساساً ناهمگن می‌باشند و خواص مکانیکی، حرارتی و مغناطیسی آنها به صورت پیوسته و تدریجی تغییر می‌کند، می‌توان تغییر خواص را با یک تابع پیوسته ریاضی، مدل کرد و از آن در روش‌های تحلیلی و عددی بهره گرفت. روش مرسوم در مدل سازی خواص مکانیکی و حرارتی مواد FG، استفاده از یک تابع توانی یا تابع نمایی برای بیان توزیع پیوسته خواص در ماده می‌باشد. معمولاً در عبارات مربوط به توزیع خواص، تغییرات مدول کشسانی^۱، ضریب هدایت حرارتی، ضریب انبساط حرارتی و چگالی را در نظر می‌گیرند و تغییرات نسبت پواسون^۲، را لحاظ نمی‌کنند. دلیل آن، مقدار نسبت پواسون است که بسیار نزدیک به هم می‌باشد، به گونه‌ای که می‌توان از تغییرات ناچیز آن در جسم چشم‌پوشی کرد، یعنی ماده را ناهمگن همسانگرد (FG ایزوتروپ) در نظر گرفت.

أباتا و نودا^۳ (۱۹۹۴) تابع توانی [۱۵]، هورگان و چان^۴ (۱۹۹۹) تابع توانی [۱۶]، یانگ^۵ (۲۰۰۰) تابع توانی [۱۷]، توتونچو^۶ (۲۰۰۱) تابع توانی [۱۸]، تارن^۷ (۲۰۰۱) تابع توانی [۱۹]، جباری و همکاران (۲۰۰۳) تابع توانی [۲۰]، اراسلان و آکیز^۸ (۲۰۰۶) تابع نمایی [۲۱] و هونگ‌جون و ژیفای^۹ (۲۰۰۶) تابع نمایی [۲۲] را در روش‌های تحلیلی به کار بردند.

تابع توانی در اکثر مراجع به صورت رابطه‌ی (۱-۱) در نظر گرفته می‌شود:

$$P(z) = P_a \left(\frac{z}{a} \right)^n \quad (1-1)$$

P_a خاصیت ماده (مکانیکی، حرارتی و ...) در یک لایه‌ی مشخص و n ثابت ناهمگنی است.

¹ Elasticity Modulus

² Poisson's Ratio

³ Obata & Noda

⁴ Horgan & Chan

⁵ Yang

⁶ Tutuncu

⁷ Tarn

⁸ Eraslan & Akis

⁹ Hongjun & Zhifei

رایج‌ترین ماده‌ی FG، تلفیق فلز-سرامیک^۱ است که با افزودن برخی عناصر آلیاژی دیگر خواص^۲ دلخواه تأمین می‌شود. پراوین و ردی^۳ (۱۹۹۸)، رابطه‌ی ویژه‌ای برای یک ورق FGM با ضخامت ثابت h ارائه کردند. ایشان تغییر خواص را در ورق به صورت زیر بیان نمودند [۲۳]:

$$P(z) = (P_c - P_m)V^n + P_m \quad (2-1)$$

P_m خواص فلز، P_c خواص سرامیک و V نسبت حجمی در جسم می‌باشد.

$$V = \left(\frac{z}{h}\right) + \frac{1}{2}, \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (3-1)$$

اگر $n = 0$ باشد، ورق همگن سرامیک به دست می‌آید؛ اگر $z = -h/2$ باشد، خاصیت فلزی و اگر $z = h/2$ باشد، خاصیت سرامیک به دست می‌آید. این ماده در اجسامی که لبه‌ی بالایی آن در معرض گرادیان دمایی بالا و لبه‌ی پایینی آن تحت بارهای مکانیکی قرار دارند، بسیار مفید است. رابطه‌ی بالا را می‌توان به صورت کلی‌تر برای دو خاصیت به شکل زیر بیان نمود:

$$P(z) = (P_1 - P_2)V^n + P_2 \quad (4-1)$$

P_1 و P_2 خواص در دو لایه‌ی مختلف می‌باشند.

توتونچو (۲۰۰۹) سه مدل تابع توانی ساده، تابع توانی مشابه تابع پراوین و ردی و نیز تابع نمایی به صورت تلفیق فلز-سرامیک ارائه کرد [۲۴]. شاو^۳ (۲۰۰۸) برای خواص ماده‌ی ناهمگن تابع نمایی به صورت رابطه‌ی (۵-۱) ارائه کرد [۲۵]:

$$\begin{cases} A(R) = A_0 e^{m_i(R-R_1)} \\ R_1 = \frac{r_1}{r_m}, R_2 = \frac{r_2}{r_m} \end{cases} \quad (5-1)$$

که در این رابطه m_i ثابت ناهمگنی ماده، r_1 و r_2 به ترتیب شعاع داخلی و خارجی استوانه و

¹ Metal-Ceramic

² Praveen & Reddy

³ Shao

r_m میانگین شعاع داخلی و خارجی و A_0 خواص لایه‌ی خارجی استوانه می‌باشد.

توتونچو (۲۰۰۷) [۲۶] و همچنین کلس و کانکر^۱ (۲۰۱۱) [۲۷] تغییر خواص در جداری کره

را به صورت تابع نمایی طبق رابطه‌ی زیر بیان نمودند:

$$A(r) = A_0 e^{\beta r} \quad (۶-۱)$$

که در آن r شعاع کره، β ثابت ناهمگنی ماده و A_0 نیز خواص لایه‌ی خارجی کره می‌باشد.

۷-۱ پیشینه‌ی پژوهش

تاکنون پژوهش‌های بسیاری بر روی پوسته‌های جدار ضخیم استوانه‌ای و کره‌ی به دلیل اهمیت آنها صورت گرفته است. آنچه که در ادامه‌ی مطلب ذکر می‌گردد بخشی از پژوهش‌های موجود می‌باشد که با توجه به ارتباط و نزدیکی آنها به پژوهش حاضر ارائه می‌گردد.

اولین بار لامه در سال ۱۸۵۲ با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته مستوی، حل دقیق استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری با جدار ثابت از ماده‌ی همگن و همسانگرد تحت فشار یکنواخت را ارائه کرد [۳]. هویکینسون^۲ در سال ۱۸۷۹ تنش‌های حرارتی در یک کره‌ی همسانگرد را به دست آورد [۲۸]. گالرکین در سال ۱۹۳۰ روابط پوسته‌های ضخیم را با استفاده از معادلات اساسی الاستیسیته به دست آورد. ولاسف در ۱۹۴۹ با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی خطی، معادلات قابل حلی برای پوسته‌های ضخیم ارائه کرد. نقدی در ۱۹۵۶ با لحاظ اثر برش عرضی و اینرسی دورانی، تئوری تغییر شکل برشی را برای پوسته‌های ضخیم پایه‌گذاری نمود [۴]. چون^۳ و همکارانش در سال ۱۹۷۴ با استفاده از تئوری اصلاح شده‌ی پوسته‌ها، رفتار ترموالاستیک در حالت گذرا را برای کره‌های توخالی همگن و همسانگرد

¹ Keles & Conker

² Hopkinson

³ Cheung

بررسی نمودند [۲۹]. در همین سال راجو^۱ با استفاده از تئوری اصلاح شده‌ی پوسته‌ها، رفتار ترموالاستیک کره‌های جدار نازک توخالی را بررسی نمود [۳۰]. لیختنسکی در ۱۹۸۰ تئوری الاستیسیته اجسام مرکب را پایه‌گذاری نمود. در پوسته‌های ساخته شده از اجسام مرکب، به دلیل تغییر ناگهانی در ساختار ماده، تغییرات ناگهانی در رفتار مواد ایجاد می‌شود. لذا تمرکز تنش و گسیختگی در مرز لایه‌ها ایجاد خواهد شد [۱۰]. یک حلّ تحلیلی برای پوسته‌ی کروی تحت انتقال حرارت گذرا به وسیله‌ی منبع حرارتی چرخان توسط تاکیوتی^۲ در سال ۱۹۸۲ انجام شد [۳۱].

هدف محققین بررسی و مطالعه‌ی اثر ترکیب دو جنس مختلف در مواد FG بر روی تنش‌ها و طراحی بهینه‌ی مخازن استوانه‌ای و کروی می‌باشد. اوباتا و نودا^۳ در سال ۱۹۹۴ به مطالعه‌ی تنش‌های حرارتی در استوانه و کره‌ی توخالی ساخته شده از مواد FG در شرایط انتقال حرارت پایدار پرداختند [۳۲]. توتونچو در سال ۲۰۰۱ حلّ دقیق مخازن استوانه‌ای و کروی جدار ثابت FGM با توزیع توانی مدول الاستیسیته تحت فشار یکنواخت داخلی را ارائه کرد. در این تحلیل تنش‌های شعاعی و محیطی در استوانه و کره‌ی تحت فشار داخلی، با توزیع توانی مدول الاستیسیته به‌ازای توان‌های مثبت و منفی بررسی شده است [۳۳]. تحلیل تنش‌های حرارتی تحت تأثیر انتقال حرارت غیر یکنواخت در استوانه‌ی توخالی FGM توسط کیم^۴ در سال ۲۰۰۲ ارائه شد [۳۴]. یو^۵ و همکارانش در سال ۲۰۰۴، به تحلیل مخازن کروی FG تحت فشار داخلی پرداختند. در این تحقیق، با در نظر گرفتن لایه‌های همگن در جدار داخلی و خارجی کره، و لایه‌های ناهمگن FG در میانه، روابط مربوط به توزیع تنش ارائه شده است [۳۵]. حلّ تحلیلی و عددی کره‌ی ساخته شده از مواد ناهمگن با تابع توانی خواص و تحت بارگذاری حرارتی یک بعدی پایا و مکانیکی توسط اسلامی و همکارانش در سال ۲۰۰۵ انجام گرفت [۳۶].

¹ Raju

² Takeuti

³ Obata & Noda

⁴ Kim

⁵ You

قناد و همکاران در ۲۰۰۵ با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته مستوی، حل کلی استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری ساخته شده از مواد ناهمگن را ارائه نموده و روابط مربوط به توزیع تنش‌ها و جابه‌جایی شعاعی را استخراج نمودند [۳۷]. همچنین آنها همین پژوهش را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی انجام دادند [۳۸]. دای^۱ در سال ۲۰۰۵ با به‌کارگیری روش‌های تبدیل هنکل^۲، تبدیلات لاپلاس و تبدیلات معکوس، حل تحلیلی استوانه و کره‌ی ناهمگن پیزوالکتریک که تحت فشار ناگهانی، تحریک الکتریکی و شوک حرارتی به صورت همزمان و وابسته به زمان بود ارائه نمود [۳۹].

وانگ^۳ و همکارانش در سال ۲۰۰۶ به تحلیل اثر بارگذاری الکترومغناطیسی در پوسته‌های کروی پرداختند [۴۰]. توتونچو در سال ۲۰۰۷، با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته مستوی و به کارگیری سری فروبنیوس^۴، استوانه‌ی جدار ضخیم ناهمگن را که تحت فشار داخلی قرار داشت و مدول الاستیسیته‌ی آن به صورت نمایی تغییر می‌کرد را در حالت کرنش صفحه‌ای حل کرد. در این پژوهش اثر تغییر ثابت ناهمگنی بر روی توزیع تنش شعاعی، تنش محیطی و جابه‌جایی شعاعی مورد مطالعه قرار گرفت [۴۱].

چن و لین^۵ در سال ۲۰۰۸، به بررسی و تحلیل الاستیک استوانه و کره‌ی جدار ضخیم FGM تحت فشار پرداختند و یک حل عددی نیز برای آنها ارائه دادند. در مطالعه‌ی ایشان، ناهمگنی خواص ماده به صورت نمایی در راستای شعاع تغییر می‌کرد [۴۲].

توتونچو در سال ۲۰۰۹ توزیع میدان جابه‌جایی و مقادیر تنش مربوط به استوانه، کره و دیسک توخالی FGM با تغییرات توانی و نمایی خواص ماده در راستای شعاع و تحت فشار داخلی را با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی و روش تابع متمم^۶ محاسبه نمود [۴۳]. در همین سال، زمانی نژاد و قناد

¹ Dai

² Hankel

³ Wang

⁴ Frobenius

⁵ Chen & Lin

⁶ Complementary Method

با ارائه‌ی دستگاه معادلات سه‌بعدی بر اساس تحلیل تانسوری، رفتار پوسته‌های جدار ضخیم FGM حاصل از دوران با انحنای دلخواه و ضخامت متغیّر در راستای نصف‌النهاری را بررسی کردند [۴۴].

تحلیل عددی ترموالاستیک کره‌های FGM با استفاده از تئوری گرین-لیندسی^۱ و توسط قوش^۲ و همکارانش در سال ۲۰۰۹ ارائه شد. در این پژوهش سطوح داخلی و خارجی کره بدون فشار فرض شده و دما در جدار داخلی متغیر با زمان به صورت یک شوک حرارتی در نظر گرفته شده است، در حالی که دما در جدار خارجی ثابت فرض شده است [۴۵]. در همین سال، کار و کانوریا^۳ حلّ عمومی ترموالاستیک کره‌ی جدار ضخیم ناهمگن را تحت شوک حرارتی، با استفاده از اثر سه فاز تأخیری ارائه نمودند. در این پژوهش، اثر متقابل بارگذاری حرارتی و مکانیکی در مرحله‌ی اعمال اثر دما بر روی مرزهای سازه مورد مطالعه قرار گرفت [۴۶]. تحلیل الاستوپلاستیک مخازن کروی FG تحت فشار در سال ۲۰۰۹ توسط آکیس^۴ انجام شد. در این تحقیق با فرض تغییر شکل‌های کوچک و با استفاده از معیار تسلیم ترسکا^۵ و با در نظر گرفتن حالت الاستیک پلاستیک کامل برای ماده، تنش‌های پلاستیک و فشار تسلیم به‌دست آمده است [۴۷]. در سال ۲۰۰۹، لی^۶ و همکاران به محاسبه‌ی عددی روابط تنش و جابه‌جایی کره‌ی جدار ضخیم FGM با در نظر گرفتن تابع تغییرات دلخواه مدول الاستیسیته و نسبت پواسان در راستای شعاع پرداختند [۴۸].

بُریسف^۷ در سال ۲۰۱۰ حلّ کره‌های جدار ضخیم FG تحت بارگذاری خارجی را با استفاده از روش چند لایه‌ای ارائه کرده است. در این کار فشار داخلی یکنواخت فرض شده است [۴۹]. قربان‌پور و همکاران در همین سال، به حلّ تحلیلی کره‌ی جدار ضخیم FGM تحت بارگذاری یکنواخت فشاری، حرارتی و مغناطیسی پرداخت. خواصّ ماده در راستای شعاع و تابع نمایی در نظر گرفته شده است، برای

¹ Green-Lindsay

² Ghosh

³ Kar & Kanoria

⁴ Akis

⁵ Tresca

⁶ Li

⁷ Borisov

حلّ معادلات حاکم و محاسبه‌ی روابط میدان تنش و جابه‌جایی از توابع هایپرژئومتریک^۱ استفاده شده است [۵۰]. در ۲۰۱۰ دای و همکاران حلّ تحلیلی سازه‌های توخالی از جنس مواد پیزوالکتریک را به دست آوردند. در این پژوهش استوانه و کره‌ی توخالی که تحت بارهای الکتریکی و مکانیکی قرار داشتند و خواصّ آنها به صورت توانی تغییر می‌کرد مورد بررسی قرار گرفت [۵۱].

صادقیان و اختراعی در سال ۲۰۱۱ چگونگی تسلیم کره‌ی FGM را تحت بارگذاری‌های مکانیکی و حرارتی به دست آوردند. آنها با در نظر گرفتن حالت الاستیک پلاستیک کامل برای ماده به بررسی اثر فشار و حرارت بر گسترش ناحیه پلاستیک پرداختند [۵۲]. در همین سال، کلس و کانکر حلّ گذرای هدایت حرارتی به صورت هذلولوی برای کره و استوانه‌ی توخالی ناهمگن تشکیل شده از مواد FG با تغییرات نمایی خواص را ارائه نمودند [۲۷].

تحلیل تئوری و عددی کره‌های جدار ضخیم ناهمگن ساخته شده از مواد ناهمگن تحت بارگذاری - های حرارتی و مکانیکی در سال ۲۰۱۲ توسط بیات و همکارانش انجام گرفت. در این مطالعه، تغییرات خواصّ مکانیکی به صورت تابع توانی در نظر گرفته شده و روابط حاکم بر تنش‌ها و جابه‌جایی با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی به صورت کلی استخراج شده و نتایج حاصل از حلّ تحلیلی با داده‌های به دست آمده از حلّ عددی توسط نرم‌افزار المان محدود مقایسه شده است [۵۳]. همچنین بیات و قنّاد در سال ۲۰۱۲ حلّ عددی و تحلیلی کره‌های جدار ضخیم همگن چرخان با در نظر گرفتن بارگذاری‌های مکانیکی و حرارتی را مورد مطالعه قرار دادند. در این پژوهش کره‌ی مورد نظر با سرعت زاویه‌ای ثابت در حال چرخش بوده و تحت فشار یکنواخت داخلی و خارجی قرار داشت. برای حلّ تحلیلی این مسأله از روش تابع پتانسیل استفاده شده است [۵۴]. اندکی بعد، قنّاد و زمانی‌نژاد با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی و تعریف روابط ساختاری، حلّ کامل کره‌های جدار ضخیم که تحت فشار داخلی و خارجی قرار داشتند را برای ریشه‌های حقیقی، دوگانه و مختلط از معادله‌ی حاکم به دست آوردند.

^۱ Hypergeometric

ایشان ناهمگنی خواص^۱ برای مدول الاستیسیته را به صورت توانی در نظر گرفتند و فرض کردند نسبت پواسان ثابت باشد [۵۵]. زمانی نژاد و همکاران در سال ۲۰۱۲، حلّ تحلیلی کره‌ی جدار ضخیم FGM تحت فشار یکنواخت را ارائه کردند. ایشان تغییرات مدول الاستیسیته را به صورت شبه نمایی در نظر گرفتند و فرض کردند نسبت پواسان ثابت باشد. همچنین آنها با شبیه‌سازی توسط نرم‌افزار المان محدود به حلّ عددی و مقایسه‌ی نتایج آن با نتایج حلّ تحلیلی پرداختند [۵۶].

دای و همکاران در ۲۰۱۲ با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی، حلّ تحلیلی و عددی کره‌ی جدار ضخیم ناهمگن ساخته شده از مواد پیزوالکتریک را با در نظر گرفتن خزش ارائه دادند. در این تحقیق که با هدف مطالعه‌ی رفتار وابسته به زمان خزش و یافتن طرحی بهینه برای مواد پیزوالکتریک انجام گرفت، پوسته‌ی کروی تحت بارگذاری‌های مکانیکی، حرارتی، الکتریکی و مغناطیسی قرار داشته و کلیه‌ی خواص^۲ آن به صورت توانی در راستای شعاع تغییر می‌کرد [۵۷]. در همین سال، کرمی و همکاران به کمک نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی یک حلّ تحلیلی برای کره‌ی جدار ضخیم FGM تحت فشار یکنواخت با تغییرات مدول الاستیسیته به صورت تابعی سهموی^۱ ارائه دادند [۵۸].

داورپناه در سال ۲۰۱۳، به تحلیل ترموالاستوپلاستیک کره‌های جدار ضخیم FGM با تغییرات توانی خواص^۲ مکانیکی به کمک تئوری الاستیسیته‌ی مستوی پرداخت. در این تحقیق که با هدف بررسی تسلیم کره با توجه به رفتار الاستوپلاستیک و یافتن تنش و جابه‌جایی انجام گرفته، حلّ تحلیلی بر اساس معیار ترسکا صورت گرفته و از معیار تسلیم فون میزس^۲ برای حلّ عددی توسط نرم‌افزار المان محدود استفاده شده است [۵۹].

در سال ۲۰۱۴، بابایی به حلّ کامل ترموالاستیک استوانه‌ی جدار ضخیم چرخان FGM با تغییرات نمایی خواص^۲ ناهمگنی بر مبنای تئوری الاستیسیته‌ی مستوی پرداختند. شرایط بارگذاری به صورت

¹ Parabolic

² Von Mises

فشار یکنواخت و بار حرارتی پایا در جدار داخلی و خارجی بوده و اثر چرخش به عنوان نیروی حجمی در معادلات ظاهر شده است. همچنین ایشان با مدل‌سازی به روش اجزای محدود، به حل عددی کره پرداختند و نتایج حاصل از آن را با نتایج حل تحلیلی مقایسه کردند [۶۰]. زمانی نژاد و همکاران در همان سال، با حل نیمه تحلیلی به شیوه‌ی تکرارشونده، به محاسبه روابط تنش و جابه‌جایی کره‌ی FGM تحت فشار داخلی یکنواخت با تغییرات نمایی خواص ماده در راستای ضخامت پرداختند. همچنین نتایج حاصل از این پژوهش با نتایج حاصل از حل عددی توسط نرم‌افزار المان محدود مقایسه گردید [۶۱]. بیات و اختراعی در سال ۲۰۱۵، یک تحلیل ترموالاستیک برای کره‌ی چرخان جدار ضخیم FGM ارائه کردند. آنها تغییرات خواص را به صورت توانی و اثر چرخش را به صورت یک نیروی حجمی در نظر گرفتند و با بیان شرایط مرزی نامتقارن حرارتی و مکانیکی و به کمک سری‌های لژاندر^۱، معادلات حاکم را حل کردند و با مدل‌سازی نرم‌افزاری و حل عددی، نتایج حل تحلیلی و عددی را مقایسه کردند [۶۲]. در همین سال، سواری تحلیل ترموالاستیک کره‌های چرخان جدار ضخیم FGM پیزوالکتریک به کمک نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی با توزیع توانی خواص را ارائه کرد. در این پژوهش، توزیع دما به صورت تابعی از شعاع در نظر گرفته شده و نتایج برای بارگذاری حرارتی، الکتریکی، مکانیکی و الکتروترمو مکانیکی محاسبه و با نتایج حل عددی به روش اجزای محدود مقایسه شده است [۶۳].

در سال ۲۰۱۶، چلبی^۲ و همکاران با استفاده از روش نیمه تحلیلی و به کمک توابع متمم توانستند روابط تنش و جابه‌جایی را برای کره‌ی جدار ضخیم FGM تحت اعمال فشار و حرارت یکنواخت در جدار داخلی و خارجی به دست آورند. در این تحقیق، تغییرات خواص ماده به صورت نمایی می‌باشد [۶۴]. خاتمی و همکاران در ۲۰۱۶، به تحلیل رفتار وابسته به زمان در مخازن کروی جدار ضخیم FGM تحت بارگذاری مکانیکی و شار حرارتی در راستای شعاع پرداختند. با فرض تغییرات توانی خواص در راستای شعاع و ثابت بودن نسبت پواسان و با استفاده از روابط الاستیسیته و به کارگیری روابط پراندتل-روس^۳ و

¹ Legendre Series

² Celebi

³ Prandtl-Reuss

رابطه‌ی ساختاری نورتون^۱، توانستند میدان تنش، میدان کرنش و بردار جابه‌جایی را در لحظه‌ی بارگذاری و همچنین نرخ تغییرات آنها را در طی زمان محاسبه کنند [۶۵].

در سال ۲۰۱۷، وزیری تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های جدار ضخیم FGM در حالت گذرای حرارتی به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول را ارائه داد. در پژوهش ایشان، تغییرات خواص، توانی و در راستای شعاع فرض شده و معادلات حاکم با استفاده از روش انرژی استخراج شده‌اند. همچنین آنها با مدل‌سازی به روش اجزای محدود، صحت نتایج تحلیلی را دریافتند [۶۶].

در همین سال، پوار^۲ و همکاران، به تحلیل رفتار کره‌ی FGM جدار ضخیم متشکل از دو فاز سرامیک و فلز و تحت تأثیر منبع حرارتی غیر یکنواخت در داخل کره پرداختند. آنها تغییرات خواص را نمایی و در راستای شعاع در نظر گرفتند و برای محاسبه میدان تنش و کرنش از روش اختلاف محدود استفاده کردند [۶۷]. در سال ۲۰۱۷، قناد و پرهیزکار به حل استوانه‌ی جدار ضخیم FGM تحت فشار و بار حرارتی پایا در جدار داخلی پرداختند. در این پژوهش، روابط به کمک روش انرژی و بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول استخراج شده و خواص در راستای شعاع به صورت توانی تغییر می‌کنند [۶۸]. گانسی^۳ نیز در همین سال، به تحلیل ترموالاستیک کره‌ی جدار ضخیم تحت اعمال فشار و بار حرارتی پایا پرداخت. وی تغییرات خواص را به صورت دلخواه به این ترتیب که برای مدول الاستیسیته تابعی از شعاع و برای ضریب انبساط حرارتی تابعی از شعاع و دما باشد، در نظر گرفت. ایشان اثر جمع آثار را برای دو حالت بررسی و نتایج را با شبیه‌سازی المان محدود مقایسه کرد [۶۹]. جباری و همکاران نیز در همین سال، به تحلیل کره‌ی جدار ضخیم ساخته شده از مواد متغیر تابعی که در جدار داخلی و خارجی پیزوالکتریک می‌باشد پرداختند. کره تحت بارگذاری مکانیکی و هدایت حرارتی دو بعدی بوده

¹ Norton

² Pawar

³ Gonczi

و تغییرات خواص به صورت توانی و در راستای شعاع در نظر گرفته شده است. آنها برای حلّ معادلات ناویر از چندجمله‌ای‌های لژاندر و معادلات دیفرانسیل اویلر^۱ بهره بردند [۷۰].

۸-۱ جمع‌بندی

برای تحلیل کره‌های ضخیم همگن و ناهمگن با جدار ثابت و فشار یکنواخت، به‌گونه‌ای که مسأله از حالت الاستیسیته‌ی دو بعدی خارج نشود، می‌توان از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی که از دقت بالایی برخوردار می‌باشد استفاده کرد. به‌دلیل اهمیت تحلیل پوسته‌ها و همچنین ماده‌ی تشکیل‌دهنده‌ی آنها و با توجه اینکه تاکنون حلّ تحلیلی برای کره‌های جدار کلفت FGM با تغییرات نمایی خواصّ تحت بارگذاری‌های فشاری و حرارتی به‌طور همزمان ارائه نشده است؛ در این پژوهش به کمک تئوری الاستیسیته‌ی مستوی با ارائه‌ی حلّ تحلیلی برای پوسته‌های کروی جدار ضخیم با تغییرات نمایی خواصّ در راستای شعاع، مقایسه‌ای بین نتایج حاصل از حلّ تحلیلی با نتایج حلّ عددی به منظور بررسی صحتّ نتایج صورت پذیرفته است.

ابتدا در فصل اوّل این پژوهش، ضمن مرور تئوری پوسته‌های نازک و کلفت، مطالعات انجام شده در خصوص پوسته‌های کروی ارائه شده است. همچنین مواد با تغییرات تابعی خواص تعریف و ضمن بیان تاریخچه و ویژگی‌های آنها، شیوه‌های مدل‌سازی ریاضی آنها مورد بررسی قرار گرفته و پیشینه‌ی پژوهشی مواد FG ارائه شده است. فصل دوّم شامل مروری بر روابط اساسی حاکم بر پوسته‌های جدار ضخیم و سپس استخراج معادلات حاکم با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی برای ماده‌ی FG با تغییرات نمایی خواص و همچنین ماده‌ی همگن تحت بارگذاری فشاری شامل فشار داخلی و خارجی می‌باشد. در نهایت با انجام مطالعه‌ی موردی، نتایج و نمودارهای مربوط به توزیع تنش و جابه‌جایی آورده

¹ Euler

شده است. به منظور بررسی صحت نتایج حاصل از حلّ تحلیلی، مدل‌سازی عددی کره‌ی مورد نظر نیز ارائه شده و نتایج دو روش حل با یکدیگر مقایسه شده است. در فصل سوم نیز به منظور تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های کره‌ی، پس از استخراج معادلات دیفرانسیل حاکم بر کره‌های جدار ضخیم متقارن محوری تشکیل شده از مواد ناهمگن و همگن بر مبنای تئوری الاستیسیته‌ی مستوی، حلّ عمومی پوسته‌های کره‌ی تحت بارگذاری فشاری و حرارتی ارائه و به صورت مطالعه‌ی موردی تحت فشار داخلی و دمای یکنواخت در سطوح داخلی و خارجی برای شرایط مرزی مختلف حل شده است. سپس با ارائه‌ی حلّ عددی برای کره‌ی مورد نظر، نتایج حاصل از حلّ تحلیلی با نتایج حاصل از حلّ عددی مقایسه شده است. نتیجه‌گیری، جمع‌بندی نهایی و ارائه‌ی پیشنهادها در فصل چهارم انجام شده است.

فصل ۲

تحلیل الاستیک پوسته‌های کروی FGM

۲-۱ مقدمه

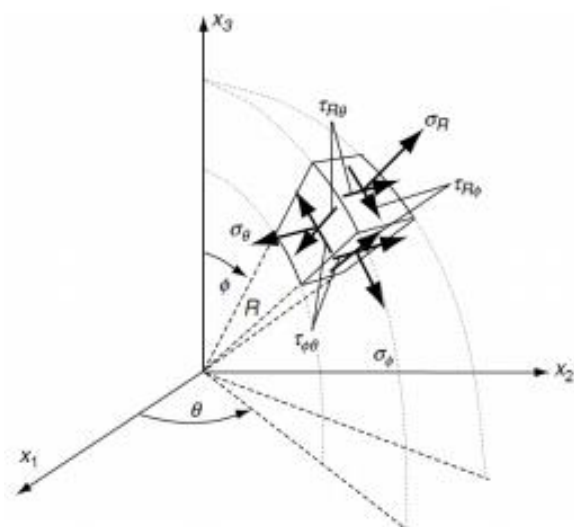
از میان انواع پوسته های مورد استفاده در صنعت، پوسته های جدار کلفت از اهمیت ویژه ای برخوردار هستند و همواره محققان و دانش پژوهان به دنبال اعمال تغییرات بر روی ضخامت و ماده ای این دسته از پوسته ها بوده اند تا بتوانند مقاومت آنها را در برابر انواع بارگذاری ها افزایش داده و در صورت امکان از وزن آنها بکاهند. از جمله کاربردهای آنها می توان به مخازن تحت فشار نفت، گاز و پتروشیمی و بسیاری تجهیزات صنعتی و فضایی اشاره کرد.

در این فصل ابتدا معادلات و فرضیات اساسی حاکم بر پوسته های جدار ضخیم کروی، شرایط تقارن محوری و تئوری الاستیسیته مستوی بیان شده و به کمک آنها، معادلات حاکم بر کره های جدار ضخیم همگن و FGM در بارگذاری های متفاوت به دست آمده است. سپس به کمک روابط اساسی ذکر شده و در نظر گرفتن شرایط متقارن محوری و با استفاده از تئوری الاستیسیته مستوی، معادله کلی حاکم بر کره های جدار ضخیم ناهمگن FGM تحت فشارهای داخلی و خارجی استخراج شده و به حل تحلیلی آن برای مقادیر متفاوت ثابت ناهمگنی پرداخته می شود، در ادامه حل الاستیک کره های همگن تحت فشار بررسی شده و در نهایت، نتایج حاصل از حل تحلیلی با حل عددی صورت گرفته توسط نرم افزار المان محدود آباکوس^۱ مقایسه و نتایج در قالب نمودارها و جداول ارائه شده است.

۲-۲ روابط اساسی

تنش های موجود در یک المان دلخواه از یک جسم در مختصات کروی به صورت زیر نمایش داده می شود.

¹ Abaqus



شکل ۱-۲ تنش‌های یک المان در مختصات کروی

در مسائل تحلیل تنش در مجموع با ۲۱ مجهول مواجه هستیم. مجهولات شامل مؤلفه‌های تانسور تنش، کرنش و بردار جابه‌جایی می‌باشند، با فرض عدم وجود ممان‌های حجمی و در نظر گرفتن تغییر شکل‌های کوچک، تانسورهای تنش و کرنش متقارن شده و مجهولات به ۱۵ عدد کاهش می‌یابند.

این مجهولات در دستگاه مختصات کروی عبارتند از:

$$\begin{bmatrix} \vec{\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_R & \tau_{R\theta} & \tau_{R\phi} \\ \tau_{R\theta} & \sigma_\theta & \tau_{\theta\phi} \\ \tau_{R\phi} & \tau_{\theta\phi} & \sigma_\phi \end{bmatrix} \quad (1-2)$$

$$\begin{bmatrix} \vec{\varepsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_R & \gamma_{R\theta}/2 & \gamma_{R\phi}/2 \\ \gamma_{R\theta}/2 & \varepsilon_\theta & \gamma_{\theta\phi}/2 \\ \gamma_{R\phi}/2 & \gamma_{\theta\phi}/2 & \varepsilon_\phi \end{bmatrix} \quad (2-2)$$

$$\begin{bmatrix} \vec{u} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} u_R \\ u_\theta \\ u_\phi \end{pmatrix} \quad (3-2)$$

برای حلّ این ۱۵ مجهول، پانزده معادله را در سه گروه معادلات تعادل، روابط سینماتیک و روابط ساختاری در اختیار داریم.

در ادامه با توجه به آن که تغییرات خواصّ مکانیکی برای مواد FG به صورت نمایی و تنها در راستای شعاعی در نظر گرفته شده است، به بیان معادلات حاکم در دستگاه مختصات کروی می پردازیم. معادله‌ی (۴-۲) توزیع نمایی هر خاصیت را در طی ضخامت کره نشان می دهد.

$$\Pr(R) = \Pr_i e^{n(r-1)} \quad (۴-۲)$$

که در آن \Pr نماینده خاصیت مورد نظر، R_i شعاع داخلی کره و $r = \frac{R}{R_i}$ پارامتر بی بعد شده شعاع می باشد. بدیهی است که اگر ضریب ناهمگنی برابر صفر در نظر گرفته شود؛ خاصیت در طی ضخامت کره ثابت باقی می ماند، یعنی ماده همگن است. نکته حائز اهمیت دیگر آن است که تغییرات نسبت پواسان در مواد FG و در طی ضخامت کره، بسیار ناچیز می باشد، لذا روابط با فرض ثابت ماندن این نسبت ارائه می شوند.

۱-۲-۲ معادلات تعادل تنش

معادله‌ی حرکت در حالت کلی به صورت زیر است:

$$\operatorname{div} \vec{\sigma} + \rho \vec{b} = \rho \vec{a} \quad (۵-۲)$$

که در آن ρ چگالی، \vec{b} بردار نیروهای حجمی و \vec{a} بردار شتاب است، بردار شتاب صفر بوده و به معادله‌ی تعادل تنش می رسیم.

$$\operatorname{div} \vec{\sigma} + \rho \vec{b} = \vec{0} \quad (۶-۲)$$

با بسط رابطه‌ی فوق در دستگاه مختصات کروی (R, θ, ϕ) ، سه معادله حاصل می‌شود.

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_R}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \tau_{R\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \tau_{R\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{R} (2\sigma_R - \sigma_\theta - \sigma_\phi + \tau_{R\theta} \cot \theta) + \rho b_R = 0 \\ \frac{\partial \tau_{R\theta}}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{R} [(\sigma_\theta - \sigma_\phi) \cot \theta + 3\tau_{R\theta}] + \rho b_\theta = 0 \\ \frac{\partial \tau_{R\phi}}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \sigma_\phi}{\partial \phi} + \frac{1}{R} (2\tau_{\theta\phi} \cot \theta + 3\tau_{R\phi}) + \rho b_\phi = 0 \end{cases} \quad (7-2)$$

۲-۲-۲ روابط سینماتیک (روابط کرنش-جاب‌جایی)

در حالت کلی، معادله‌ی سینماتیک به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} [(\vec{\nabla} \vec{u}) + (\vec{\nabla} \vec{u})^T] \quad (8-2)$$

که با ساده‌سازی در دستگاه مختصات کروی، به شش معادله‌ی زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} \varepsilon_R = \frac{\partial u_R}{\partial R} \\ \varepsilon_\theta = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_R \right) \\ \varepsilon_\phi = \frac{1}{R \sin \theta} \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + u_R \sin \theta + u_\theta \cos \theta \right) \\ \gamma_{R\theta} = \frac{1}{R} \frac{\partial u_R}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial R} - \frac{u_\theta}{R} \\ \gamma_{\theta\phi} = \frac{1}{R} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} + \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} - u_\phi \cot \theta \right) \right] \\ \gamma_{R\phi} = \left(\frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial u_R}{\partial \phi} + \frac{\partial u_\phi}{\partial R} - \frac{u_\phi}{R} \right) \end{cases} \quad (9-2)$$

۳-۲-۲ روابط ساختاری (روابط تنش-کرنش)

شش معادله‌ی حلّ باقیمانده، روابط بین مؤلفه‌های تنش-کرنش است که برای موادّ الاستیک

خطی و همسانگرد، در حالت کلی به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\sigma = 2\mu\varepsilon + \lambda Itr(\varepsilon) \quad (10-2)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2\mu} \left[\sigma - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} Itr(\sigma) \right] \quad (11-2)$$

که در آنها μ و λ ثابت‌های لامه بوده و خود تابعی از خواصّ مکانیکی ماده می‌باشند.

$$\begin{cases} \mu = \frac{E(R)}{2(1+\nu)} \\ \lambda = \frac{\nu E(R)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \end{cases} \quad (12-2)$$

$$E(R) = E_i e^{n_1(r-1)} \quad (13-2)$$

با بیان معادلات ساختاری در قالب مؤلفه‌های مختصات کروی خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \sigma_R = 2\mu\varepsilon_R + \lambda(\varepsilon_R + \varepsilon_\theta + \varepsilon_\phi) \\ \sigma_\theta = 2\mu\varepsilon_\theta + \lambda(\varepsilon_R + \varepsilon_\theta + \varepsilon_\phi) \\ \sigma_\phi = 2\mu\varepsilon_\phi + \lambda(\varepsilon_R + \varepsilon_\theta + \varepsilon_\phi) \\ \tau_{R\theta} = \mu\gamma_{R\theta} \\ \tau_{\theta\phi} = \mu\gamma_{\theta\phi} \\ \tau_{R\phi} = \mu\gamma_{R\phi} \end{cases} \quad (14-2)$$

و یا

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_R = \frac{1}{2\mu} \left[\sigma_R - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} (\sigma_R + \sigma_\theta + \sigma_\phi) \right] \\ \varepsilon_\theta = \frac{1}{2\mu} \left[\sigma_\theta - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} (\sigma_R + \sigma_\theta + \sigma_\phi) \right] \\ \varepsilon_\phi = \frac{1}{2\mu} \left[\sigma_\phi - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} (\sigma_R + \sigma_\theta + \sigma_\phi) \right] \\ \gamma_{R\theta} = \frac{\tau_{R\theta}}{\mu} \\ \gamma_{\theta\phi} = \frac{\tau_{\theta\phi}}{\mu} \\ \gamma_{R\phi} = \frac{\tau_{R\phi}}{\mu} \end{array} \right. \quad (15-2)$$

۲-۲-۴ مسائل متقارن محوری و تئوری الاستیسیتهی مستوی

در مسائلی که هندسه، بارگذاری‌ها، شرایط مرزی و خواص ماده در تمامی زوایا نسبت به یک محور تغییری نداشته باشند؛ شرایط تقارن محوری برقرار بوده که این امر به ساده‌تر شدن روند حل مسأله کمک می‌کند. در این تحقیق، هندسهی مورد نظر کره‌ی جدار ثابت است لذا دو محور تقارن داریم و شرایط مرزی متقارن بوده و بارگذاری‌ها و تمامی خواص تنها در راستای شعاعی و متقارن می‌باشند. در نتیجه مقدار تنش محیطی و نصف‌النهاری به همراه کرنش‌هایشان باهم برابر خواهد بود. از سوی دیگر تئوری کلاسیک بیان می‌کند که صفحات مستوی عمود بر محور مرکزی کره بعد از بارگذاری و تغییر شکل همچنان مستوی و عمود بر محور باقی می‌مانند، لذا تغییر شکل‌ها نیز متقارن بوده و در راستای محیطی هیچ تغییری نداریم. به عبارت دیگر جابه‌جایی شعاعی تنها به شعاع وابسته است. بنابراین این تئوری و با توجه به تقارن محوری دو جانبه در کره، مقادیر تمام تنش‌های برشی و کرنش‌های برشی صفر می‌باشند و تنش‌ها همان تنش‌های اصلی به شمار می‌روند.

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\quad)}{\partial\theta} = \frac{\partial(\quad)}{\partial\phi} = 0, & u_\theta = u_\phi = 0 \\ \varepsilon_\theta = \varepsilon_\phi, & \sigma_\theta = \sigma_\phi \end{cases} \quad (16-2)$$

$$\begin{cases} \gamma_{R\theta} = \gamma_{\theta\phi} = \gamma_{R\phi} = 0 \\ \tau_{R\theta} = \tau_{\theta\phi} = \tau_{R\phi} = 0 \end{cases} \quad (17-2)$$

در این صورت تعداد مجهولات به ۵ عدد کاهش یافته و معادلات تعادل تنش، روابط سینماتیک و

روابط ساختاری به ترتیب به صورت زیر بازنویسی می‌شوند؛

$$\frac{d\sigma_R}{dR} + \frac{2}{R}(\sigma_R - \sigma_\theta) + \rho b_R = 0 \quad (18-2)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_R = \frac{du_R}{dR} \\ \varepsilon_\theta = \varepsilon_\phi = \frac{u_R}{R} \end{cases} \quad (19-2)$$

$$\begin{cases} \sigma_R = 2\mu\varepsilon_R + \lambda(\varepsilon_R + 2\varepsilon_\theta) \\ \sigma_\theta = \sigma_\phi = 2\mu\varepsilon_\theta + \lambda(\varepsilon_R + 2\varepsilon_\theta) \end{cases} \quad (20-2)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_R = \frac{1}{2\mu} \left[\sigma_R - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} (\sigma_R + 2\sigma_\theta) \right] \\ \varepsilon_\theta = \varepsilon_\phi = \frac{1}{2\mu} \left[\sigma_\theta - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} (\sigma_R + 2\sigma_\theta) \right] \end{cases} \quad (21-2)$$

روابط تنش-کرنش را می‌توان بدین صورت نیز نمایش داد:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_R \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} = E(R) \begin{bmatrix} A & 2B \\ B & A+B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_R \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} \quad (22-2)$$

ثابت‌های A و B به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A = \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad , \quad B = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (23-2)$$

۲-۲-۶ تنش مؤثر

در تحقیق پیش رو به منظور تحلیل و مقایسه‌ی نتایج، تنش مؤثر بر مبنای تئوری تسلیم فون-میزس^۱ به دست آمده است. طبق این تئوری، نارسایی در اثر تسلیم وقتی در یک جسم اتفاق می‌افتد که در نقطه‌ای از جسم چگالی انرژی تغییر شکل در حالت تنش کلی برابر چگالی انرژی تغییر شکل در آزمایش کشش ساده گردد. این معیار هماهنگی خوبی با نتایج آزمایش برای اجسام نرم داشته و به همین علت در طراحی‌ها کاربرد زیادی دارد.

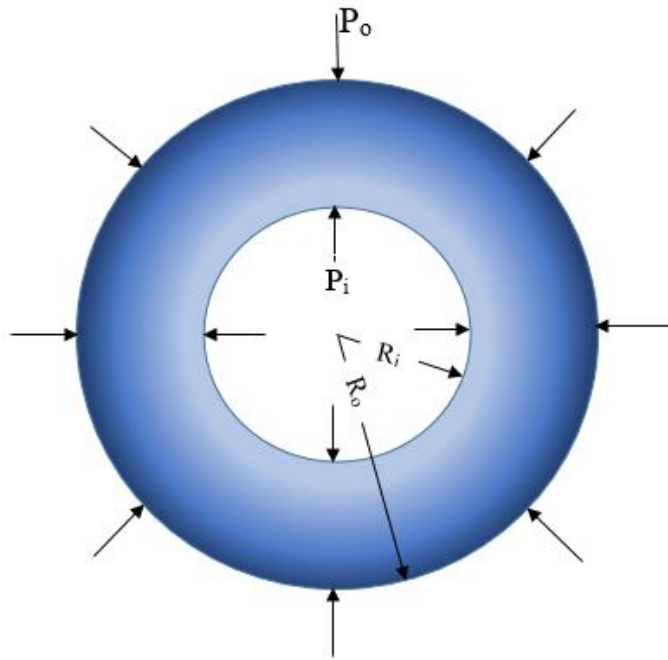
این معیار بر حسب تنش‌های اصلی به صورت زیر می‌باشد:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_{eff}^2 \quad (24-2)$$

۲-۳ تحلیل کره‌های ناهمگن تحت فشار

هندسه‌ی مورد بررسی در این بخش، کره‌ی جدار ضخیم همسانگرد FGM به شعاع داخلی R_i و شعاع خارجی R_o می‌باشد. مطابق شکل (۲-۲) بارگذاری تنها از نوع فشاری بوده و فشارهای وارد بر سطوح داخلی و خارجی کره به ترتیب با P_i و P_o مشخص می‌شوند.

¹ Von Mises



شکل ۲-۲ نمایش هندسی کره‌ی جدار ضخیم FGM تحت فشار یکنواخت داخلی و خارجی

مدول الاستیسیته و نسبت پواسان توابعی از شعاع کره می‌باشند که در اکثر تحلیل‌ها و همچنین در این تحقیق، به علت تغییرات جزئی نسبت پواسان ثابت در نظر گرفته می‌شود. تغییرات مدول الاستیسیته نسبت به شعاع کره نمایی بوده و با رابطه‌ی (۲-۲۵) تعریف می‌شود.

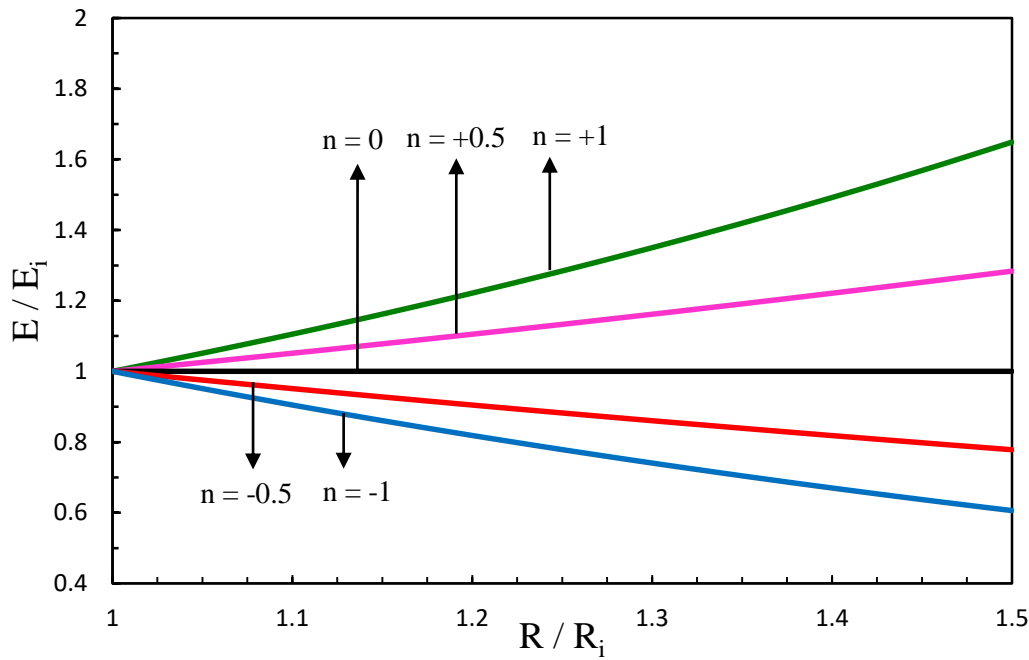
$$E(R) = E_i e^{n_1(r-1)} \quad (2-25)$$

در این رابطه $r = \frac{R}{R_i}$ مختصات شعاع بی‌بعد است. E_i مدول الاستیسیته در سطح داخلی و

n_1 ضریب ناهمگنی ماده می‌باشد.

شکل (۲-۳) توزیع مدول الاستیسیته‌ی بی‌بعد شده را نسبت به مختصات شعاعی بی‌بعد در کره‌ی

ناهمگن و همسانگرد به‌ازای مقادیر مختلف ثابت ناهمگنی نشان می‌دهد.



شکل ۲-۳ توزیع بی‌بعد مدول الاستیسیته در راستای شعاع بی‌بعد

۲-۳-۱ حل الاستیک کره‌ی ناهمگن تحت فشار

در حالتی که نیروهای حجمی در مسأله وجود نداشته باشند؛ معادله‌ی تعادل (۲-۱۸) به صورت

زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{d\sigma_R}{dR} + \frac{2}{R}(\sigma_R - \sigma_\theta) = 0 \quad (2-26)$$

با بی‌بعدسازی شعاع به صورت $r = \frac{R}{R_i}$ ، معادله‌ی تعادل بالا، روابط تنش‌های شعاعی و محیطی (۲-۲)

(۲۲)، روابط (۲-۱۹) و تابع مدول الاستیسیته (۲-۲۵) به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\frac{d\sigma_R}{dr} + \frac{2}{r}(\sigma_R - \sigma_\theta) = 0 \quad (2-27)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_R \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} = E(r) \begin{bmatrix} A & 2B \\ B & A+B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_R \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} \quad (2-28)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_R = \frac{du_r}{dr} \\ \varepsilon_\theta = \varepsilon_\phi = \frac{u_r}{r} \end{cases} \quad (29-2)$$

$$E(r) = E_i e^{n_1(r-1)} \quad (30-2)$$

با جایگذاری تنش‌های شعاعی و محیطی از (۲۸-۲) در معادله‌ی تعادل (۲۷-۲) و استفاده از (۲-۲) و (۲۹) و (۳۰-۲)، معادله‌ی حاکم بر کره به دست می‌آید.

$$r^2 \frac{d^2 u_r}{dr^2} + (r^2 n_1 + 2r) \frac{du_r}{dr} + (2n_1 v^* r - 2) u_r = 0 \quad (31-2)$$

که در آن $v^* = \frac{B}{A}$ می‌باشد.

با استفاده از روش تغییر متغیر و جایگذاری عبارت $u_r(r) = \frac{w}{r^2}$ در (۳۱-۲)، معادله‌ی حاکم به

معادله‌ی هایپرژئومتریک زیر تبدیل می‌گردد:

$$r \frac{d^2 w}{dr^2} + (n_1 r - 2) \frac{dw}{dr} + (v^* - 1) 2n_1 w = 0 \quad (32-2)$$

حلّ معادله‌ی هایپرژئومتریک (۳۲-۲) وابسته به علامت n_1 می‌باشد.

نکته‌ی قابل توجه آن است که روش پیش رو جهت حلّ معادله‌ی حاکم، برای مقادیر مخالف صفر از ضریب n_1 قابل ارائه بوده و در صورت صفر شدن این ضریب، همان‌گونه که پیش‌تر نیز به آن اشاره شد، جنس کره به یک ماده‌ی همگن تبدیل شده و باید از حلّ کلاسیک که در بخش (۲-۴) به آن اشاره خواهد شد، به تحلیل کره پرداخت.

پاسخ معادله‌ی (۳۲-۲) به ازای مقادیر مثبت ضریب ناهمگنی عبارت است از [۶۹ و ۷۰]:

$$w = e^{-n_1 r} J(-2\nu^*, -2; m_1) \quad , \quad n_1 \neq 0 \quad (۳۳-۲)$$

و برای مقادیر منفی ضریب ناهمگنی داریم:

$$w = J(2\nu^* - 2, -2; -m_1) \quad , \quad n_1 \neq 0 \quad (۳۴-۲)$$

که در آنها

$$J(a, b; z) = z^{1-b} [C_1 \Phi(a-b+1, 2-b; z) + C_2 \Psi(a-b+1, 2-b; z)] \quad (۳۵-۲)$$

$$\Phi(a, b; z) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)} \int_0^1 e^{zt} t^{a-1} (1-t)^{b-a-1} dt \quad (۳۶-۲)$$

$$\Psi(a, b; z) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-zt} t^{a-1} (1+t)^{b-a-1} dt \quad (۳۷-۲)$$

تابع گاما^۱ که در روابط بالا از آن استفاده شد؛ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \quad (۳۸-۲)$$

با جایگزینی (۳۵-۲) در (۳۳-۲) و (۳۴-۲) و همچنین استفاده از $u_r(r) = \frac{w}{r^2}$ ، پاسخ معادله‌ی

(۳۱-۲) عبارت است از:

$$u_r(r) = C_1 M(r) + C_2 N(r) \quad (۳۹-۲)$$

به منظور کوتاه‌تر شدن عبارات، توابع $M(r)$ و $N(r)$ که در برگیرنده‌ی روابط به ازای مقادیر

مثبت و منفی ضریب ناهمگنی می‌باشند را، به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

^۱ Gamma function

$$M(r) = \begin{cases} \frac{n_1^3 r}{e^{n_1 r}} \Phi(3-2\nu^*, 4; n_1 r) & n_1 > 0 \\ -n_1^3 r \Phi(2\nu^* + 1, 4; -n_1 r) & n_1 < 0 \end{cases} \quad (40-2)$$

$$N(r) = \begin{cases} \frac{n_1^3 r}{e^{n_1 r}} \Psi(3-2\nu^*, 4; n_1 r) & n_1 > 0 \\ -n_1^3 r \Psi(2\nu^* + 1, 4; -n_1 r) & n_1 < 0 \end{cases} \quad (41-2)$$

ثابت‌های C_1 و C_2 با استفاده از شرایط مرزی تعیین می‌شوند، از آنجا که شرایط مرزی را برای تنش شعاعی در اختیار داریم؛ لذا با جایگذاری (۳۹-۲) در (۲۹-۲) و همچنین استفاده از رابطه‌ی (۲۸-۲)، تنش شعاعی را بر حسب ثابت‌های C_1 و C_2 به دست می‌آوریم:

$$\sigma_R(r) = E_i e^{n_1(r-1)} \left[C_1 \left(AC(r) + 2B \frac{M(r)}{r} \right) + C_2 \left(AD(r) + 2B \frac{N(r)}{r} \right) \right] \quad (42-2)$$

که توابع $C(r) = \frac{dM(r)}{dr}$ و $D(r) = \frac{dN(r)}{dr}$ عبارتند از:

$$C(r) = \begin{cases} \frac{n_1^3 - n_1^4 r}{e^{n_1 r}} \Phi(3-2\nu^*, 4; n_1 r) + \frac{n_1^4 r (3-2\nu^*)}{4e^{n_1 r}} \Phi(4-2\nu^*, 5; n_1 r) & n_1 > 0 \\ -n_1^3 \Phi(2\nu^* + 1, 4; -n_1 r) + \frac{n_1^4 r (2\nu^* + 1)}{4} \Phi(2+2\nu^*, 5; -n_1 r) & n_1 < 0 \end{cases} \quad (43-2)$$

$$D(r) = \begin{cases} \frac{n_1^3 - n_1^4 r}{e^{n_1 r}} \Psi(3-2\nu^*, 4; n_1 r) - \frac{n_1^4 r (3-2\nu^*)}{e^{n_1 r}} \Psi(4-2\nu^*, 5; n_1 r) & n_1 > 0 \\ -n_1^3 \Psi(2\nu^* + 1, 4; -n_1 r) - n_1^4 r (2\nu^* + 1) \Psi(2+2\nu^*, 5; -n_1 r) & n_1 < 0 \end{cases} \quad (44-2)$$

شرایط مرزی برای تنش شعاعی عبارت است از:

$$\begin{cases} \sigma_R(r)|_{r=1} = -P_i \\ \sigma_R(r)|_{r=k} = -P_o \end{cases} \quad (45-2)$$

که $k = \frac{R_o}{R_i}$ می‌باشد، با داشتن شرایط مرزی و استفاده از معادله‌ی (۲-۴۲)، ثابت‌های C_1 و C_2

محاسبه می‌شوند.

$$\left\{ \begin{aligned} C_1 &= \frac{P_i e^{n_1(k-1)} (AD(k) + 2B \frac{N(k)}{k}) - P_o (AD(1) + 2BN(1))}{E_i e^{n_1(k-1)} \left\{ (AD(1) + 2BN(1))(AC(k) + 2B \frac{M(k)}{k}) - \right.} \\ &\quad \left. - (AC(1) + 2BM(1))(AD(k) + 2B \frac{N(k)}{k}) \right\}} \\ C_2 &= \frac{-P_i e^{n_1(k-1)} (AC(k) + 2B \frac{M(k)}{k}) + P_o (AC(1) + 2BM(1))}{E_i e^{n_1(k-1)} \left\{ (AD(1) + 2BN(1))(AC(k) + 2B \frac{M(k)}{k}) - \right.} \\ &\quad \left. - (AC(1) + 2BM(1))(AD(k) + 2B \frac{N(k)}{k}) \right\}} \end{aligned} \right. \quad (۴۶-۲)$$

با جایگذاری مقادیر فوق در (۲-۳۹) و استفاده از (۲-۲۹) و (۲-۲۸)؛ تنش‌های شعاعی، محیطی

و جابجایی شعاعی به دست می‌آیند.

$$\sigma_R(r) = \frac{e^{n_1(r-k)}}{F} \left[G(AC(r) + 2B \frac{M(r)}{r}) + H(AD(r) + 2B \frac{N(r)}{r}) \right] \quad (۴۷-۲)$$

$$\sigma_\theta(r) = \frac{e^{n_1(r-k)}}{F} \left[G(BC(r) + (A+B) \frac{M(r)}{r}) + H(BD(r) + (A+B) \frac{N(r)}{r}) \right] \quad (۴۸-۲)$$

$$u_R(r) = \frac{1}{FE_i e^{n_1(k-1)}} (GM(r) + HN(r)) \quad (۴۹-۲)$$

$$F = \left\{ (AD(1) + 2BN(1))(AC(k) + 2B \frac{M(k)}{k}) - \right. \\ \left. - (AC(1) + 2BM(1))(AD(k) + 2B \frac{N(k)}{k}) \right\} \quad (۵۰-۲)$$

$$G = P_i e^{n_1(k-1)} \left(AD(k) + 2B \frac{N(k)}{k} \right) - P_o (AD(1) + 2BN(1)) \quad (51-2)$$

$$H = -P_i e^{n_1(k-1)} \left(AC(k) + 2B \frac{M(k)}{k} \right) + P_o (AC(1) + 2BM(1)) \quad (52-2)$$

مقدار تنش مؤثر براساس معیار تسلیم فون میزس عبارت است از:

$$\sigma_{eff}(r) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sigma_R - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_\phi)^2 + (\sigma_\phi - \sigma_R)^2 \right]^{0.5} \quad (53-2)$$

با توجه به $\sigma_\theta = \sigma_\phi$ رابطه‌ی مقدار تنش مؤثر به این صورت خلاصه می‌گردد:

$$\sigma_{eff}(r) = |\sigma_R - \sigma_\theta| \quad (54-2)$$

حال با توجه به مقادیر ضریب ناهمگنی n_1 معادلات (۲-۴۷ تا ۴۹) به صورت زیر بازنویسی

می‌شوند:

۲-۳-۱-۱-۱-۱ مقادیر مثبت ضریب ناهمگنی

$$\begin{aligned} \sigma_R(r) = \frac{e^{n_1(r-k)}}{J} \left\{ K \left[\frac{n_1^3(1+\nu) + n_1^4 r(\nu-1)}{(1+\nu)(1-2\nu)e^{n_1 r}} \Phi\left(\frac{3-5\nu}{1-\nu}, 4, n_1 r\right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{n_1^4 r(3-5\nu)}{4(1+\nu)(1-2\nu)e^{n_1 r}} \Phi\left(\frac{4-6\nu}{1-\nu}, 5, n_1 r\right) \right] + \right. \\ \left. + L \left[\frac{n_1^3(1+\nu) + n_1^4 r(\nu-1)}{(1+\nu)(1-2\nu)e^{n_1 r}} \Psi\left(\frac{3-5\nu}{1-\nu}, 4, n_1 r\right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{n_1^4 r(3-5\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)e^{n_1 r}} \Psi\left(\frac{4-6\nu}{1-\nu}, 5, n_1 r\right) \right] \right\} \quad (55-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta}(r) = \frac{e^{n_1(r-k)}}{J} & \left\{ K \left[\frac{n_1^3(1+\nu) - n_1^4 r \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)e^{n_1 r}} \Phi\left(\frac{3-5\nu}{1-\nu}, 4, n_1 r\right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{n_1^4 r \nu (3-5\nu)}{4(1-\nu^2)(1-2\nu)e^{n_1 r}} \Phi\left(\frac{4-6\nu}{1-\nu}, 5, n_1 r\right) \right] + \right. \\
& \left. + L \left[\frac{n_1^3(1+\nu) - n_1^4 r \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)e^{n_1 r}} \Psi\left(\frac{3-5\nu}{1-\nu}, 4, n_1 r\right) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{n_1^4 r \nu (3-5\nu)}{(1-\nu^2)(1-2\nu)e^{n_1 r}} \Psi\left(\frac{4-6\nu}{1-\nu}, 5, n_1 r\right) \right] \right\} \quad (56-2)
\end{aligned}$$

$$u_R(r) = \frac{1}{JE_i e^{n_1(k-1)}} \left\{ K \left[\frac{n_1^3 r}{e^{n_1 r}} \Phi\left(\frac{3-5\nu}{1-\nu}, 4, n_1 r\right) \right] + L \left[\frac{n_1^3 r}{e^{n_1 r}} \Psi\left(\frac{3-5\nu}{1-\nu}, 4, n_1 r\right) \right] \right\} \quad (57-2)$$

که در آنها

$$\begin{aligned}
J = & \left[\frac{n_1^3(1+\nu) + n_1^4 k (\nu-1)}{(1-\nu-2\nu^2)e^{n_1 k}} \Phi\left(\frac{3-5\nu}{1-\nu}, 4, n_1 k\right) + \frac{n_1^4 k (3-5\nu)}{4(1-\nu-2\nu^2)e^{n_1 k}} \Phi\left(\frac{4-6\nu}{1-\nu}, 5, n_1 k\right) \right] \\
& \left[\frac{n_1^3(1+\nu) + n_1^4 (\nu-1)}{(1-\nu-2\nu^2)e^{n_1}} \Psi\left(\frac{3-5\nu}{1-\nu}, 4, n_1\right) - \frac{n_1^4 (3-5\nu)}{(1-\nu-2\nu^2)e^{n_1}} \Psi\left(\frac{4-6\nu}{1-\nu}, 5, n_1\right) \right] - \\
& \left[\frac{n_1^3(1+\nu) + n_1^4 k (\nu-1)}{(1-\nu-2\nu^2)e^{n_1 k}} \Psi\left(\frac{3-5\nu}{1-\nu}, 4, n_1 k\right) - \frac{n_1^4 k (3-5\nu)}{(1-\nu-2\nu^2)e^{n_1 k}} \Psi\left(\frac{4-6\nu}{1-\nu}, 5, n_1 k\right) \right] \\
& \left[\frac{n_1^3(1+\nu) + n_1^4 (\nu-1)}{(1-\nu-2\nu^2)e^{n_1}} \Phi\left(\frac{3-5\nu}{1-\nu}, 4, n_1\right) + \frac{n_1^4 (3-5\nu)}{4(1-\nu-2\nu^2)e^{n_1}} \Phi\left(\frac{4-6\nu}{1-\nu}, 5, n_1\right) \right] \quad (58-2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K = & \left\{ P_i e^{n_1(k-1)} \left[\frac{n_1^3(1+\nu) + n_1^4(\nu-1)}{(1+\nu)(1-2\nu)e^{n_1k}} \Psi\left(\frac{3-5\nu}{1-\nu}, 4, n_1k\right) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{n_1^4k(3-5\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)e^{n_1k}} \Psi\left(\frac{4-6\nu}{1-\nu}, 5, n_1k\right) \right] - \right. \\
& \left. - P_o \left[\frac{n_1^3(1+\nu) + n_1^4(\nu-1)}{(1+\nu)(1-2\nu)e^{n_1}} \Psi\left(\frac{3-5\nu}{1-\nu}, 4, n_1\right) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{n_1^4(3-5\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)e^{n_1}} \Psi\left(\frac{4-6\nu}{1-\nu}, 5, n_1\right) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{59-2}$$

$$\begin{aligned}
L = & \left\{ P_o \left[\frac{n_1^3(1+\nu) + n_1^4(\nu-1)}{(1+\nu)(1-2\nu)e^{n_1}} \Phi\left(\frac{3-5\nu}{1-\nu}, 4, n_1\right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{n_1^4(3-5\nu)}{4(1+\nu)(1-2\nu)e^{n_1}} \Phi\left(\frac{4-6\nu}{1-\nu}, 5, n_1\right) \right] - \right. \\
& \left. - P_i e^{n_1(k-1)} \left[\frac{n_1^3(1+\nu) + n_1^4k(\nu-1)}{(1+\nu)(1-2\nu)e^{n_1k}} \Phi\left(\frac{3-5\nu}{1-\nu}, 4, n_1k\right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{n_1^4k(3-5\nu)}{4(1+\nu)(1-2\nu)e^{n_1k}} \Phi\left(\frac{4-6\nu}{1-\nu}, 5, n_1k\right) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{60-2}$$

۲-۱-۳-۲ مقادیر منفی ضریب ناهمگنی

$$\begin{aligned}
\sigma_R(r) = & \frac{e^{n_1(r-k)}}{U} \left\{ V \left[\frac{-n_1^3}{1-2\nu} \Phi\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}, 4, -n_1r\right) + \frac{n_1^4r}{4(1-2\nu)} \Phi\left(\frac{2}{1-\nu}, 5, -n_1r\right) \right] + \right. \\
& \left. + W \left[\frac{-n_1^3}{1-2\nu} \Psi\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}, 4, -n_1r\right) - \frac{n_1^4r}{(1-2\nu)} \Psi\left(\frac{2}{1-\nu}, 5, -n_1r\right) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{61-2}$$

$$\sigma_{\theta}(r) = \frac{e^{n_1(r-k)}}{U} \left\{ V \left[\frac{-n_1^3}{1-2\nu} \Phi\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}, 4, -n_1 r\right) + \frac{\nu n_1^4 r}{4(1-2\nu)} \Phi\left(\frac{2}{1-\nu}, 5, -n_1 r\right) \right] + \right. \\ \left. + W \left[\frac{-n_1^3}{1-2\nu} \Psi\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}, 4, -n_1 r\right) - \frac{\nu n_1^4 r}{(1-2\nu)} \Psi\left(\frac{2}{1-\nu}, 5, -n_1 r\right) \right] \right\} \quad (62-2)$$

$$u_R(r) = \frac{1}{UE_i e^{n_1(k-1)}} \left\{ V \left[(-r_1^3) \Phi\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}, 4, -n_1 r\right) \right] + W \left[(-r_1^3) \Psi\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}, 4, -n_1 r\right) \right] \right\} \quad (63-2)$$

که در آنها

$$U = \left\{ \left[\frac{(-n_1^3)}{1-2\nu} \Phi\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}, 4, -n_1 k\right) + \frac{n_1^4 k}{4(1-2\nu)} \Phi\left(\frac{2}{1-\nu}, 5, -n_1 k\right) \right] \right. \\ \left[\frac{(-n_1^3)}{1-2\nu} \Psi\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}, 4, -n_1\right) - \frac{n_1^4}{(1-2\nu)} \Psi\left(\frac{2}{1-\nu}, 5, -n_1\right) \right] - \\ \left. - \left[\frac{(-n_1^3)}{1-2\nu} \Psi\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}, 4, -n_1 k\right) - \frac{n_1^4 k}{(1-2\nu)} \Psi\left(\frac{2}{1-\nu}, 5, -n_1 k\right) \right] \right. \\ \left. \left[\frac{(-n_1^3)}{1-2\nu} \Phi\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}, 4, -n_1\right) + \frac{n_1^4}{4(1-2\nu)} \Phi\left(\frac{2}{1-\nu}, 5, -n_1\right) \right] \right\} \quad (64-2)$$

$$V = \left\{ P_i e^{n_1(k-1)} \left[\frac{(-n_1^3)}{1-2\nu} \Psi\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}, 4, -n_1 k\right) - \frac{n_1^4 k}{(1-2\nu)} \Psi\left(\frac{2}{1-\nu}, 5, -n_1 k\right) \right] - \right. \\ \left. - P_o \left[\frac{(-n_1^3)}{1-2\nu} \Psi\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}, 4, -n_1\right) - \frac{n_1^4}{(1-2\nu)} \Psi\left(\frac{2}{1-\nu}, 5, -n_1\right) \right] \right\} \quad (65-2)$$

$$W = \left\{ P_o \left[\frac{(-n_1^3)}{1-2\nu} \Phi\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}, 4, -n_1\right) + \frac{n_1^4}{4(1-2\nu)} \Phi\left(\frac{2}{1-\nu}, 5, -n_1\right) \right] - \right. \\ \left. - P_i e^{n_1(k-1)} \left[\frac{(-n_1^3)}{1-2\nu} \Phi\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}, 4, -n_1 k\right) + \frac{n_1^4 k}{4(1-2\nu)} \Phi\left(\frac{2}{1-\nu}, 5, -n_1 k\right) \right] \right\} \quad (66-2)$$

۲-۳-۲ حل عددی کره‌ی ناهمگن تحت فشار

در این پایان‌نامه، حل عددی با استفاده از روش اجزای محدود و به کمک مدل‌سازی نرم‌افزار Abaqus ۲۰۱۶ صورت گرفته است. در این بخش به توضیح در رابطه با نحوه‌ی مدل‌سازی کره‌ی FGM پرداخته شده است.

به منظور المان‌بندی کره، از المان‌های متقارن محوری هشت گره‌ای^۱ CAX8R استفاده شده است [۷۱]. کره به شعاع داخلی ۴۰ میلی‌متر و شعاع ۶۰ میلی‌متر با رسم مقطعی به صورت ربع دایره از آن در حالت تقارن محوری، مدل‌سازی شده است.

برای ایجاد خواص ناهمگنی که به صورت شعاعی در پوسته کره‌ی در نظر گرفته شده است؛ با تقسیم جداره‌ی کره به تعداد ۲۰ لایه‌ی مساوی و نسبت دادن خواص مدول الاستیسیته در هر لایه بسته به فاصله‌ی مرکز از لایه‌ی داخلی به صورت تابع نمایی طبق رابطه‌ی (۲-۳۰)، در نهایت پوسته‌ی کره‌ی مورد نظر از ۲۰ کره‌ی همگن و همسانگرد و به هم چسبیده تشکیل می‌شود. این لایه‌ها در محل اتصال به هم پیوسته‌اند و خواص در محل اتصال لایه‌ها، حد میانگین چپ و راست مرز دو لایه در نظر گرفته می‌شوند. فشارهای داخلی و خارجی نیز به گره‌های موجود در سطوح داخلی و خارجی مقطع ترسیم شده اعمال می‌شوند.

۲-۴ حل الاستیک کره‌ی همگن تحت فشار

در کره‌ی جدار ضخیم همگن و همسانگرد، مدول یانگ و نسبت پواسان هر دو ثابت هستند.

$$E = \text{const.} \quad (۲-۶۷)$$

^۱ Node

از آنجا که هیچ نیروی حجمی به کره وارد نمی‌شود، در این بخش نیز می‌توان از معادله‌ی تعادل تنش (۲-۲۷) استفاده کرد. با استفاده از این معادله‌ی تعادل و معادلات (۲-۲۸)، (۲-۲۹) و (۲-۶۷)، معادله ناویر حاکم بر حسب جابه‌جایی شعاعی عبارت است از:

$$r^2 \frac{d^2 u_r}{dr^2} + 2r \frac{du_r}{dr} - 2u_r = 0 \quad (۲-۶۸)$$

حلّ معادله‌ی (۲-۶۸) به صورت زیر می‌باشد:

$$u_r(r) = C_1 r^{m_1} + C_2 r^{m_2} \quad (۲-۶۹)$$

معادله‌ی مشخصه مربوط به معادله‌ی (۲-۶۸) عبارت است از:

$$m^2 + m - 2 = 0 \quad (۲-۷۰)$$

با حلّ معادله‌ی مشخصه، به دو ریشه‌ی حقیقی خواهیم رسید.

$$\begin{cases} m_1 = 1 \\ m_2 = -2 \end{cases} \quad (۲-۷۱)$$

با جایگذاری دو ریشه در معادله‌ی (۲-۶۹) داریم:

$$u_r(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r^2} \quad (۲-۷۲)$$

به منظور محاسبه‌ی ثابت‌های C_1 و C_2 ، از شرایط مرزی استفاده می‌شود، از آنجا که این شرایط را برای تنش شعاعی در اختیار داریم؛ با استفاده از روابط (۲-۲۸)، (۲-۲۹) و (۲-۷۲)، تنش شعاعی را به صورت زیر و بر حسب ثابت‌های C_1 و C_2 می‌نویسیم.

$$\sigma_R = E \left[(A + 2B)C_1 - 2(A - B) \frac{C_2}{r^3} \right] \quad (۲-۷۳)$$

شرایط مرزی برای کره‌ای که تحت فشارهای داخلی و خارجی می‌باشد، در رابطه‌ی (۲-۴۵)

معرفی شده است. با اعمال این شرایط در (۲-۷۳)، ثابت‌های C_1 و C_2 محاسبه می‌شوند.

$$\begin{cases} C_1 = \frac{P_i - k^3 P_o}{E(k^3 - 1)(A + 2B)} \\ C_2 = \frac{k^3(P_i - P_o)}{2E(k^3 - 1)(A - B)} \end{cases} \quad (۲-۷۴)$$

با جایگذاری C_1 و C_2 در (۲-۷۲) و همچنین استفاده از (۲-۲۸) و (۲-۲۹) داریم:

$$\sigma_R^H(r) = \frac{1}{k^3 - 1} \left[(P_i - k^3 P_o) + (P_o - P_i) \left(\frac{k}{r}\right)^3 \right] \quad (۲-۷۵)$$

$$\sigma_\theta^H(r) = \frac{1}{k^3 - 1} \left[(P_i - k^3 P_o) + (P_i - P_o) \frac{k^3}{2r^3} \right] \quad (۲-۷۶)$$

$$u_R^H(r) = \frac{r}{E(k^3 - 1)} \left[\frac{(P_i - k^3 P_o)}{A + 2B} + \frac{(P_i - P_o)}{2(A - B)} \left(\frac{k}{r}\right)^3 \right] \quad (۲-۷۷)$$

می‌توان مشاهده کرد که σ_θ و σ_R مستقل از A ، B و E هستند، یعنی در کره‌های جدار ضخیم

همگن و همسانگرد با هندسه‌ی مشابه و تحت فشار یکسان، تنش‌های شعاعی و محیطی مستقل از

خواص مکانیکی مانند مدول الاستیسیته و نسبت پواسان عمل می‌کنند.

با جایگذاری مقادیر A و B در (۲-۷۷) داریم:

$$u_R^H(r) = \frac{r}{E(k^3 - 1)} \left[(P_i - k^3 P_o)(1 - 2\nu) + (P_i - P_o)(1 + \nu) \frac{k^3}{2r^3} \right] \quad (۲-۷۸)$$

تنش مؤثر نیز بر اساس تئوری تسلیم فون میزس با استفاده از رابطه‌ی (۲-۵۴) محاسبه می‌شود.

۲-۵ مطالعه‌ی موردی و مقایسه‌ی نتایج

به منظور مطالعه‌ی موردی و مقایسه‌ی نتایج حاصل از حلّ تحلیلی با مقادیر به دست آمده از حلّ عددی به کمک مدل‌سازی نرم‌افزاری؛ کره‌ی جدار ضخیم ناهمگن و همسانگردی را به شعاع داخلی ۴۰ میلی‌متر و شعاع خارجی ۶۰ میلی‌متر در نظر می‌گیریم.

مدول یانگ در سطح داخلی کره $E_i = 200 \text{ GPa}$ بوده و فرض می‌شود که نسبت پواسان (ν)، مقدار ثابت 0.3 را در طی ضخامت داراست. نتایج را برای سه حالت بارگذاری تنها فشار داخلی، تنها فشار خارجی و اعمال هم‌زمان فشار داخلی و خارجی بررسی می‌کنیم. مقادیر این فشارها برابر 80 MPa در نظر گرفته شده است ($P = P_i = P_o = 80 \text{ MPa}$).

خطوط ممتد نشانگر حلّ تحلیلی و دایره‌های کوچک نماینده‌ی حلّ عددی صورت گرفته می‌باشند.

۲-۵-۱ فشار داخلی

شکل (۲-۴) توزیع تنش شعاعی بی‌بعد شده را در طی ضخامت کره نمایش می‌دهد، مقدار تنش شعاعی در لایه‌های داخلی و خارجی برای تمامی مقادیر ضریب ناهمگنی با هم برابر بوده و در هر دو لایه نسبت σ_R / σ_R^H برابر یک است.

در طول دیواره و به‌ازای مقادیر منفی ضریب ناهمگنی، مقدار تنش شعاعی نسبت به ماده‌ی همگن کاهش یافته و به‌ازای n های مثبت، افزایش می‌یابد. لذا افزایش یا کاهش مقادیر تنش شعاعی به مقدار $|n|$ بستگی دارد و به‌ازای اعمال فشار داخلی، این مقادیر منفی هستند.

شکل (۲-۵) توزیع تنش محیطی بی‌بعد شده را نسبت به شعاع بی‌بعد شده نمایش می‌دهد. مقدار این تنش در هیچ کدام از لایه‌های داخلی و خارجی و به‌ازای مقادیر مختلف از ضریب ناهمگنی، یکسان

نبوده و در هیچ کدام از سطوح، نسبت $\sigma_{\theta} / \sigma_{\theta}^H$ برابر یک نیست. مقدار تنش محیطی به‌ازای n های منفی و در نیمه‌ی داخلی کره، بیشتر از ماده‌ی همگن، و در نیمه‌ی خارجی کمتر از آن می‌باشد. در حالی که به‌ازای مقادیر مثبت از ضریب ناهمگنی، عکس این قضیه برقرار است.

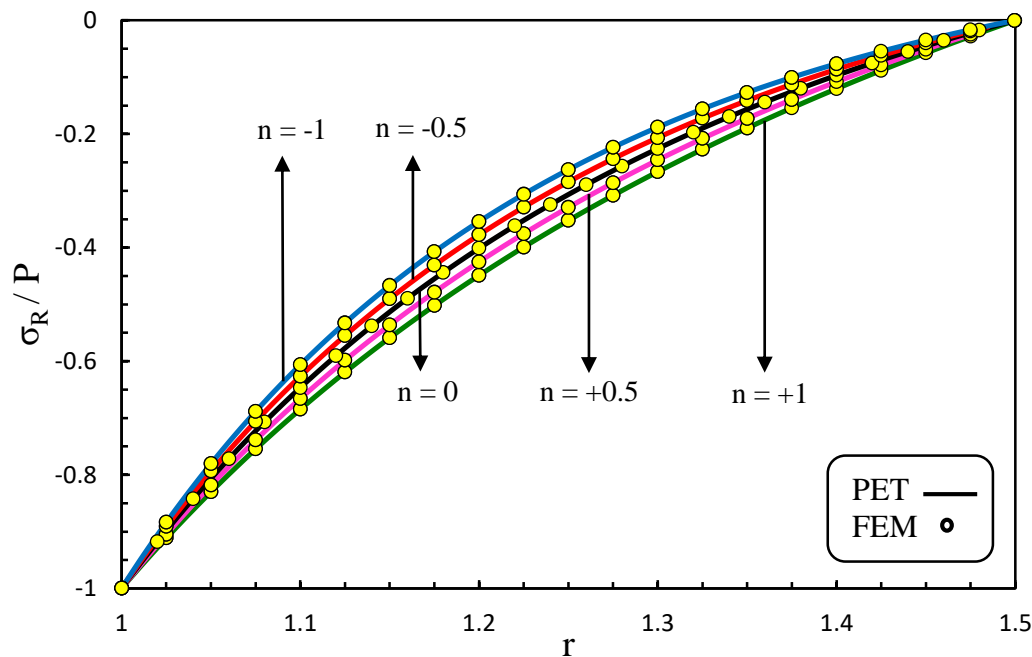
برای مقادیر منفی ضریب ناهمگنی و همچنین $n = 0.5$ ، با افزایش شعاع، تنش محیطی کاهش می‌یابد. منحنی مربوط به $n = 1$ نشان می‌دهد که توزیع تنش محیطی نسبت به شعاع کره کمترین تغییرات تنش را داشته و مقدار آن در طی ضخامت تقریباً ثابت می‌ماند که این خود مزیتی برای کنترل تنش در طراحی‌ها می‌باشد. مشاهده می‌شود که در نیمه‌ی داخلی کره، منحنی‌ها به‌هم نزدیک شده و رفتار مشابهی دارند.

شکل (۲-۶) توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد شده را نسبت به شعاع بی‌بعد شده نمایش می‌دهد. در هیچ یک از نقاط، نسبت u_r / u_r^H برابر یک نیست. به‌ازای مقادیر منفی از ضریب ناهمگنی، مقدار جابه‌جایی شعاعی بزرگتر از کره‌ی همگن و برای n های مثبت، کوچکتر از آن می‌باشد. این نسبت‌ها در تمام ضخامت دیواره، تقریباً دارای مقدار ثابتی می‌باشند و منحنی‌ها به‌ازای مقادیر مختلف ضریب ناهمگنی، رفتار مشابهی را در مقایسه با کره‌ی همگن از خود نشان می‌دهند.

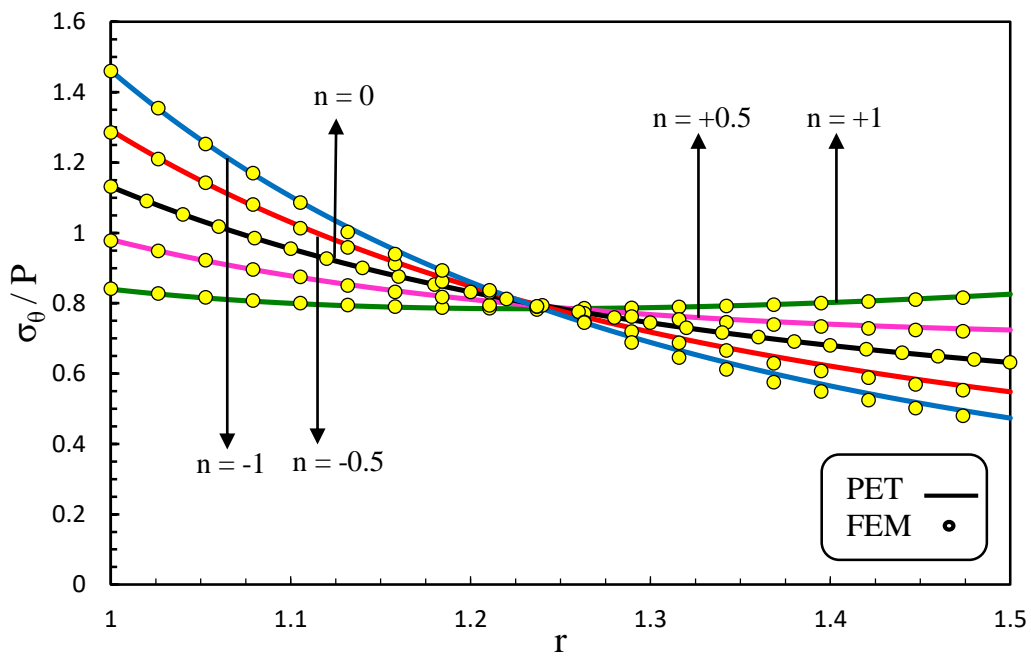
به‌دلیل آن‌که به‌ازای $n = 1$ کمترین جابه‌جایی در کره ایجاد می‌شود، در صورتی که جابه‌جایی شعاعی عامل تعیین‌کننده در طراحی کره‌ی تحت فشار باشد، انتخاب ماده‌ی FG با این ضریب ناهمگنی پیشنهاد می‌شود.

شکل (۲-۷) توزیع تنش مؤثر بی‌بعد شده را طبق معادله‌ی (۲-۵۴) نشان می‌دهد. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، در هیچ یک از لایه‌های داخلی و خارجی کره، نسبت $\sigma_{eff} / \sigma_{eff}^H$ برابر یک نبوده و به‌ازای هیچ یک از مقادیر ضرایب ناهمگنی، تنش‌های مؤثر یکسانی ایجاد نمی‌شود.

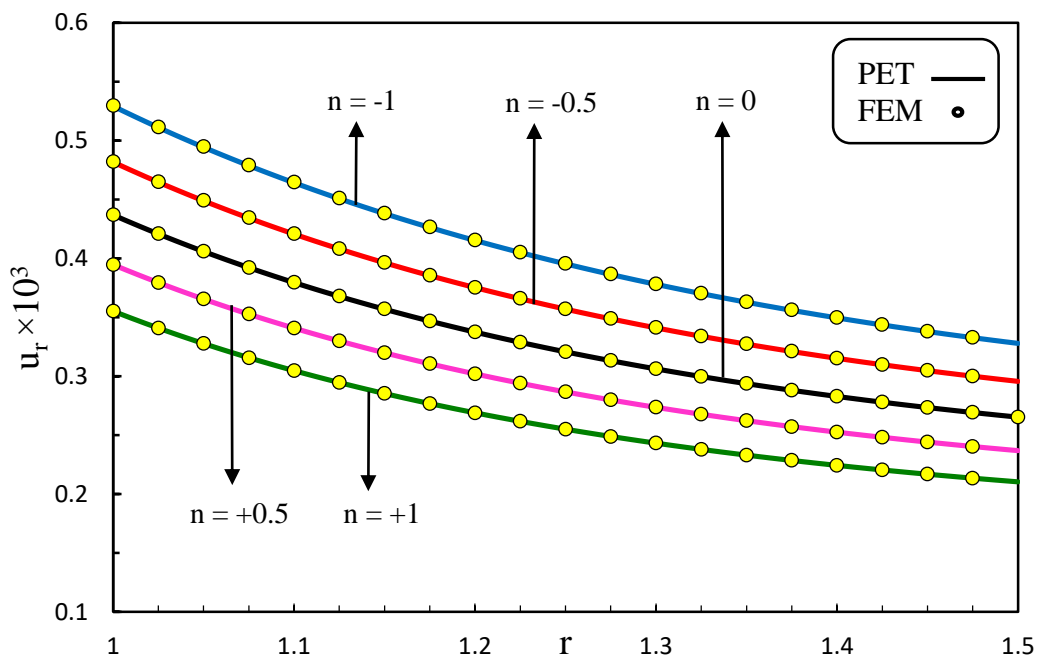
به‌ازای شعاع‌های کمتر از شعاع لایه‌ی میانی، با افزایش مقدار ضریب ناهمگنی، شاهد کاهش مقادیر تنش مؤثر و برای نیمه‌ی خارجی کره، با افزایش مقدار ضریب ناهمگنی، شاهد افزایش مقادیر این تنش هستیم. با توجه به شکل افزایش ضریب ناهمگنی سبب ایجاد نمودار هموارتر می‌شود، از آنجا که تنش مؤثر ایجاد شده در کره به‌ازای $n = 1$ علاوه بر داشتن کمترین مقدار، کمترین تغییرات را نیز در طی ضخامت دارد؛ در صورتی‌که تنش ایجاد شده در کره عامل تعیین‌کننده در طراحی آن باشد انتخاب ماده‌ی FG با ضریب ناهمگنی $n = 1$ پیشنهاد می‌شود.



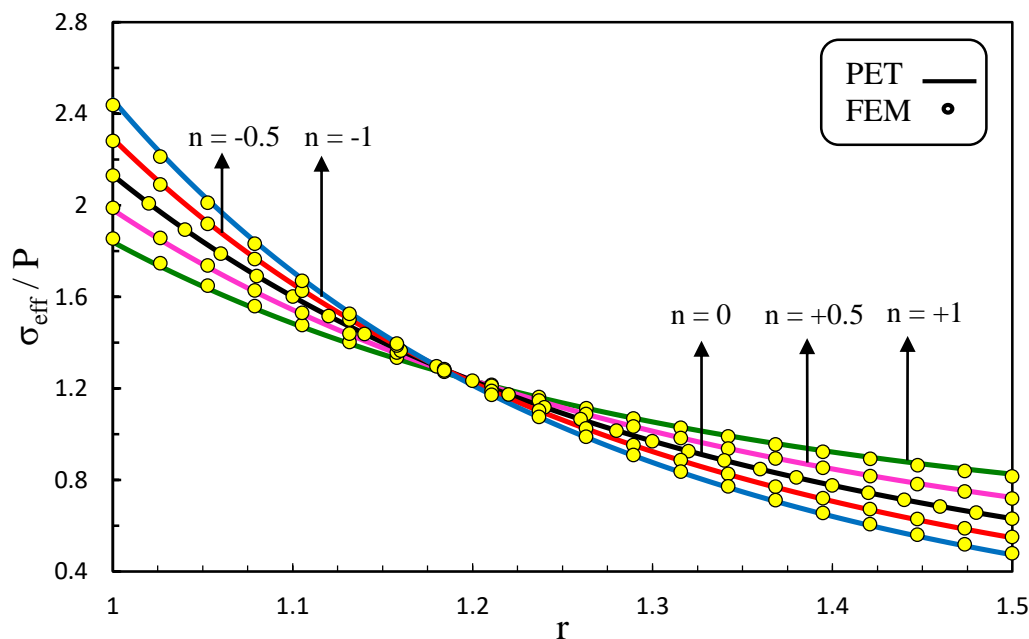
شکل ۲-۴ توزیع تنش شعاعی در کره‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی



شکل ۵-۲ توزیع تنش محیطی در کره‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی



شکل ۶-۲ توزیع جابه‌جایی شعاعی در کره‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی



شکل ۷-۲ توزیع تنش مؤثر در کره‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی

۲-۵-۲ فشار خارجی

نمودار توزیع تنش شعاعی بی‌بعد شده نسبت به ضخامت کره در شکل (۸-۲) آورده شده است. مقدار تنش در لایه‌های داخلی و خارجی کره، برای مقادیر مختلف ضریب ناهمگنی یکسان بوده و نسبت σ_R / σ_R^H برابر یک است. تنش شعاعی در طول دیواره‌ی کره و به‌ازای مقادیر منفی ضریب ناهمگنی، نسبت به کره‌ی همگن افزایش و به‌ازای مقادیر مثبت این ضریب کاهش می‌یابد. میزان کاهش یا افزایش تنش وابسته به $|n|$ است.

شکل (۹-۲) نمودار توزیع تنش محیطی بی‌بعد شده را در طی ضخامت کره نشان می‌دهد. مقدار این تنش در هیچ کدام از لایه‌های داخلی و خارجی و برای هیچ یک از مقادیر ضریب ناهمگنی یکسان نبوده و نسبت $\sigma_\theta / \sigma_\theta^H$ برابر یک نیست. به‌ازای مقادیر منفی ضریب ناهمگنی، تنش محیطی در

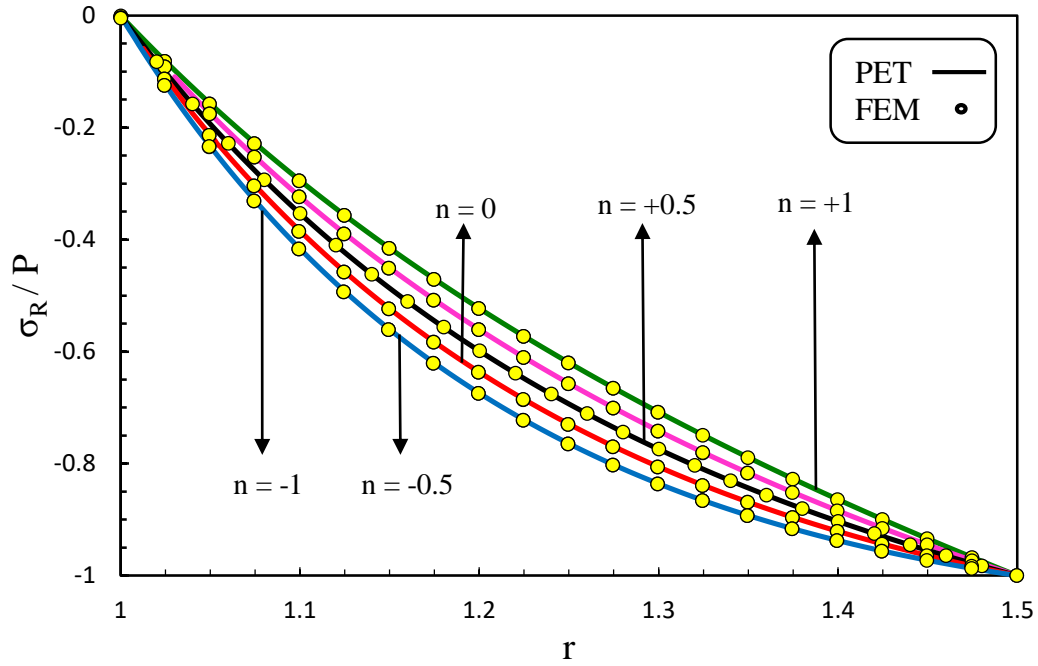
نیمه‌ی داخلی کره، بزرگ‌تر از تنش ایجاد شده در ماده‌ی همگن و در نیمه‌ی خارجی کره، کوچک‌تر از آن می‌باشد، عکس این قضیه برای مقادیر مثبت ضریب ناهمگنی اتفاق می‌افتد.

تنش محیطی به‌ازای $n = 0.5$ ، تقریباً مقدار ثابتی را در طی ضخامت کره داراست که ویژگی خوبی در طراحی کره‌ها به حساب می‌آید. هم‌چنین ملاحظه می‌شود که منحنی‌ها در لایه‌ی داخلی کره به یک مقدار واحد میل کرده و رفتار مشابهی از خود نشان می‌دهند.

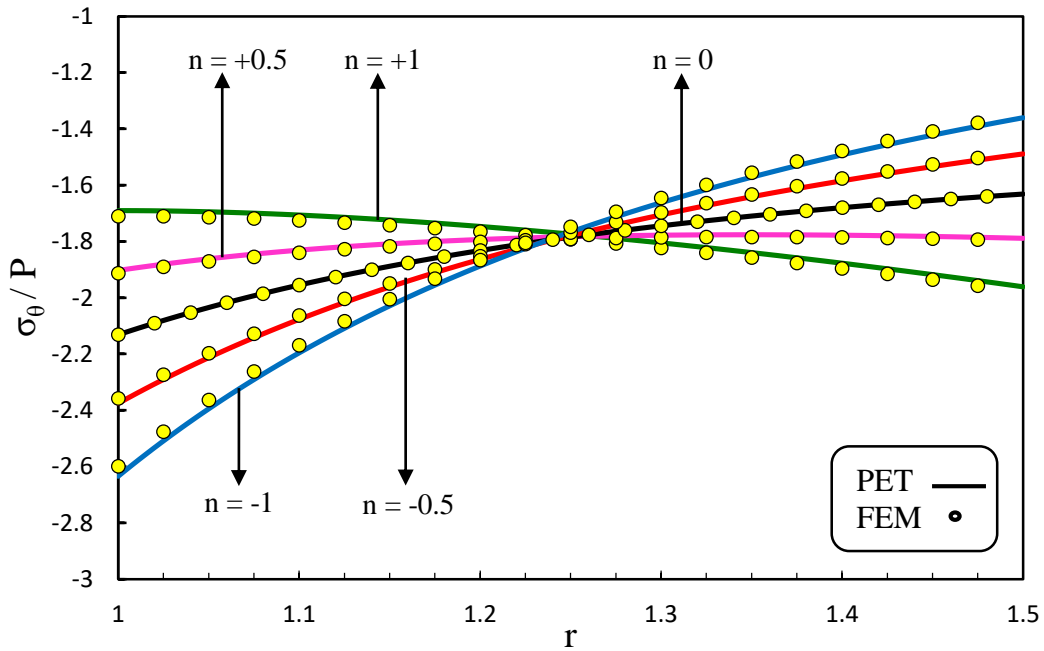
شکل (۲-۱۰) توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد شده را در طول دیواره‌ی کره نمایش می‌دهد. در هیچ یک از نقاط، نسبت u_r / u_r^H برابر یک نیست. جابه‌جایی ایجاد شده در کره منفی بوده و با افزایش n ، مقدار آن کاهش می‌یابد، به گونه‌ای که مقادیر جابه‌جایی برای ضرایب ناهمگنی منفی بزرگ‌تر از ماده‌ی همگن و برای ضرایب ناهمگنی مثبت کوچک‌تر از آن می‌باشد. این نسبت‌ها در تمام ضخامت دیواره، تقریباً دارای مقدار ثابتی می‌باشند و منحنی‌ها به ازای مقادیر مختلف ضریب ناهمگنی، رفتار مشابهی را در مقایسه با کره‌ی همگن از خود نشان می‌دهند.

شکل (۲-۱۱) نمودار توزیع تنش مؤثر بی‌بعد شده را در دیواره‌ی کره نشان می‌دهد. در نیمه‌ی داخلی کره و به‌ازای شعاع‌های کوچک‌تر از لایه‌ی میانی، با افزایش مقدار ضریب ناهمگنی، شاهد کاهش مقادیر تنش مؤثر بوده و در نیمه‌ی دیگر کره، شاهد افزایش این مقدار هستیم.

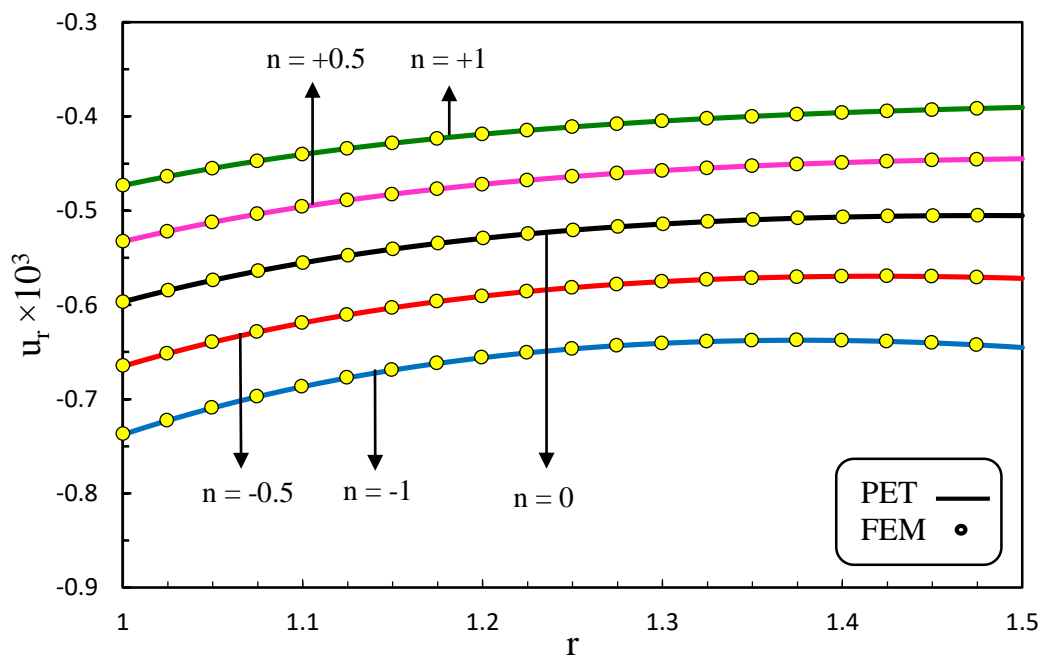
در این نمودار نیز به‌ازای هیچ یک از مقادیر n و در هیچ کدام از لایه‌های داخلی و خارجی، مقادیر تنش مؤثر یکسان نبوده و نسبت $\sigma_{eff} / \sigma_{eff}^H$ برابر یک نیست. با در نظر گرفتن تمام ضخامت کره به‌ازای n های مثبت، مقادیر کوچک‌تر و تغییرات کمتری از تنش مؤثر را نسبت به n های منفی شاهد هستیم. لذا در کره‌ای که تنها تحت فشار خارجی باشد، با انتخاب مقادیر مثبت برای ضریب ناهمگنی، کره در ناحیه ایمن‌تری از نظر تنش‌های ایجاد شده نسبت به نقطه‌ی تسلیم ماده قرار می‌گیرد.



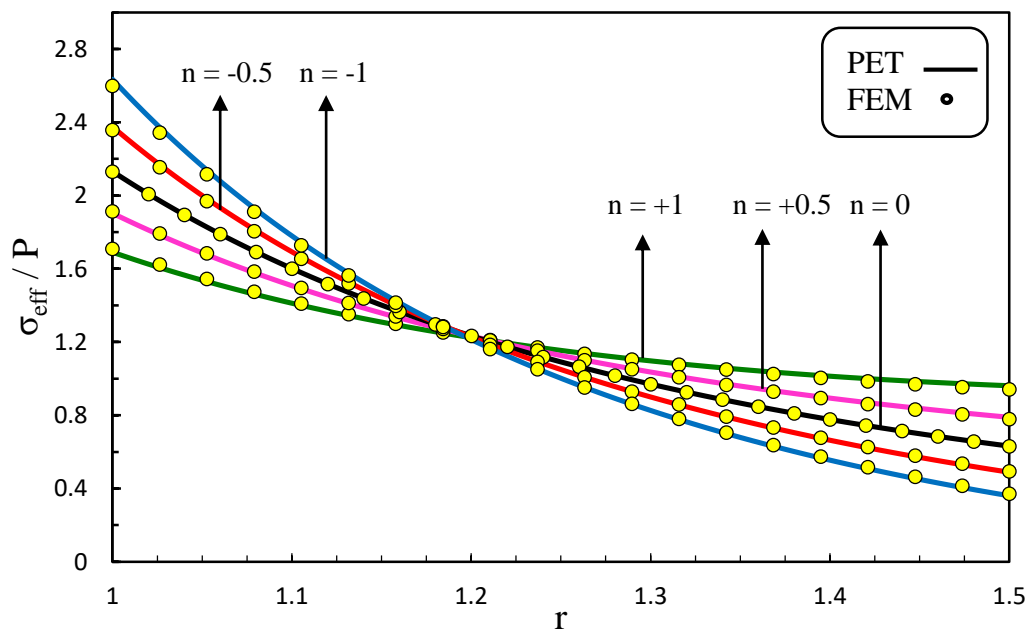
شکل ۸-۲ توزیع تنش شعاعی در کره‌ی ناهمگن تحت فشار خارجی



شکل ۹-۲ توزیع تنش محیطی در کره‌ی ناهمگن تحت فشار خارجی



شکل ۱۰-۲ توزیع جابه‌جایی شعاعی در کره‌ی ناهمگن تحت فشار خارجی



شکل ۱۱-۲ توزیع تنش مؤثر در کره‌ی ناهمگن تحت فشار خارجی

۲-۵-۳ فشار داخلی و خارجی

شکل (۲-۱۲) نمودار توزیع تنش شعاعی بی‌بعد شده را نسبت به ضخامت کره نشان می‌دهد. مقدار تنش شعاعی در لایه‌های داخلی و خارجی کره، برای مقادیر مختلف ضریب ناهمگنی یکسان بوده و شرایط مرزی در این لایه‌ها ارضا می‌شود و نسبت σ_R / σ_R^H برابر یک است.

برای حالت همگن تنش شعاعی در راستای ضخامت کره ثابت می‌باشد. تنش شعاعی برای ضرایب ناهمگنی منفی در لایه‌های میانی نسبت به حالت همگن افزایش داشته و برای ضرایب ناهمگنی مثبت در لایه‌های میانی نسبت به حالت همگن کاهش داشته است.

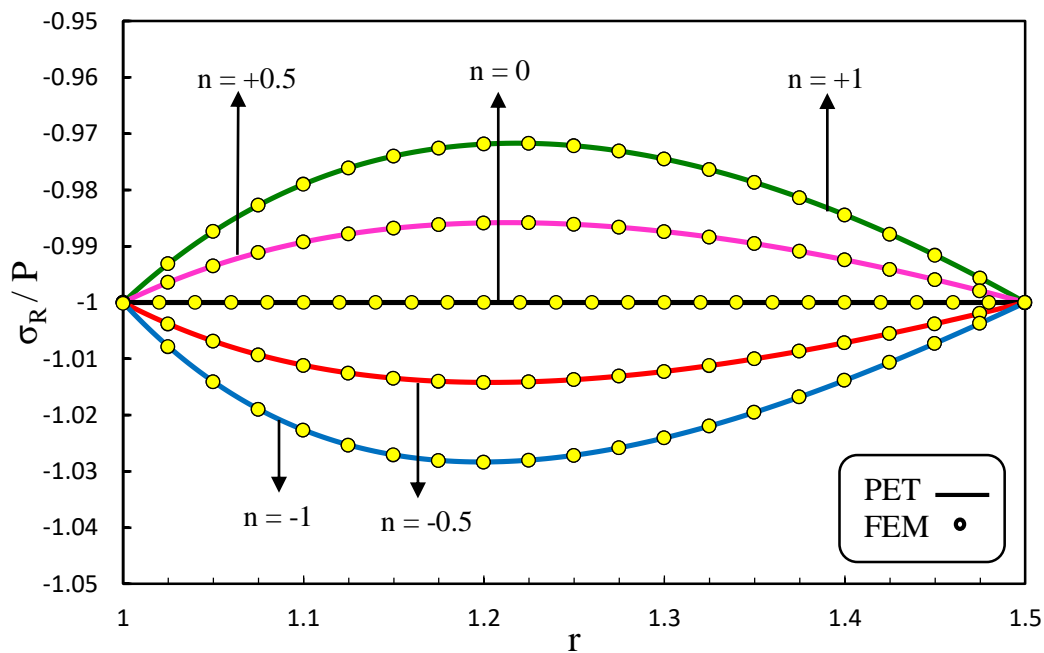
شکل (۲-۱۳) نمودار توزیع تنش محیطی بی‌بعد شده را نسبت به ضخامت کره نشان می‌دهد. مقدار تنش محیطی در هیچ کدام از لایه‌های داخلی و خارجی کره و برای هیچ یک از مقادیر مختلف ضریب ناهمگنی یکسان نبوده و نسبت $\sigma_\theta / \sigma_\theta^H$ برابر یک نمی‌باشد.

به‌ازای مقادیر منفی ضریب ناهمگنی، تنش محیطی در نیمه‌ی داخلی کره، بزرگتر از تنش ایجاد شده در ماده‌ی همگن و در نیمه‌ی خارجی کره، کوچکتر از آن می‌باشد، عکس این قضیه نیز برای مقادیر مثبت ضریب ناهمگنی اتفاق می‌افتد. در واقع مقادیر تنش محیطی برای ضرایب ناهمگنی منفی در راستای ضخامت کاهش و برای ضرایب ناهمگنی مثبت افزایش می‌یابد، به‌گونه‌ای که حالت همگن دارای تنش محیطی ثابت در راستای ضخامت و برابر تنش شعاعی می‌باشد.

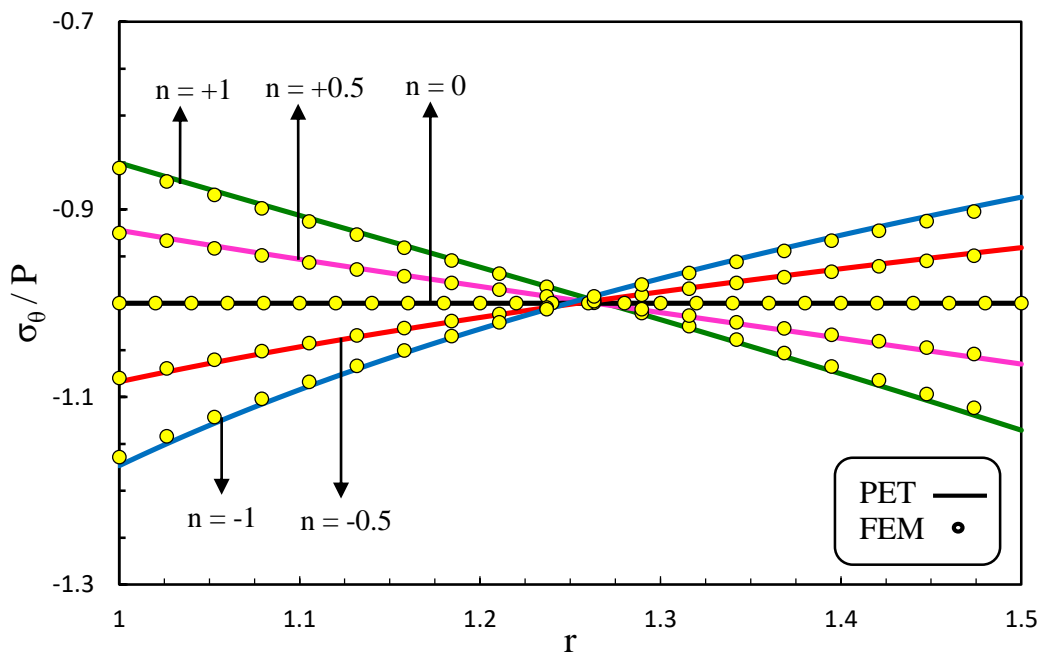
شکل (۲-۱۴) توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد شده را در طول دیواره‌ی کره نمایش می‌دهد. در هیچ یک از نقاط، نسبت u_r / u_r^H برابر یک نیست. جابه‌جایی ایجاد شده در کره منفی و در راستای ضخامت افزایش می‌باشد، و با افزایش n ، مقدار آن کاهش می‌یابد، به‌گونه‌ای که مقادیر جابه‌جایی برای ضرایب ناهمگنی منفی بزرگتر از ماده‌ی همگن و برای ضرایب ناهمگنی مثبت کوچکتر از آن می‌باشد. مانند قبل این نسبت‌ها در تمام ضخامت دیواره، تقریباً دارای مقدار ثابتی می‌باشند و منحنی‌ها

به‌ازای مقادیر مختلف ضریب ناهمگنی، رفتار مشابهی را در مقایسه با کره‌ی همگن از خود نشان می‌دهند.

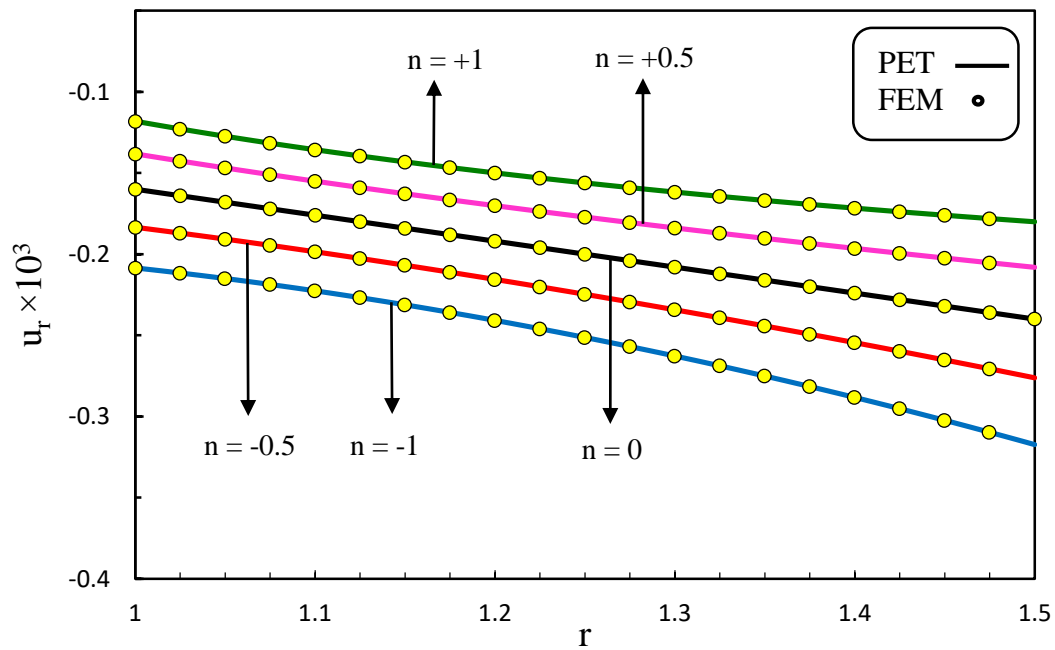
شکل (۲-۱۵) نمودار توزیع تنش مؤثر بی‌بعد شده را در دیواره‌ی کره نشان می‌دهد. مقدار تنش مؤثر برای ضرایب ناهمگنی مثبت و منفی در لایه‌های داخلی کاهش و در لایه‌های خارجی افزایش می‌یابد. با توجه به شکل با کاهش اندازه $|n|$ علاوه بر کاهش مقدار تنش مؤثر، از تغییرات این تنش در راستای ضخامت نیز کاسته می‌شود، به‌گونه‌ای که تنش مؤثر برای حالت همگن در تمام ضخامت کره مقدار ثابت صفر است.



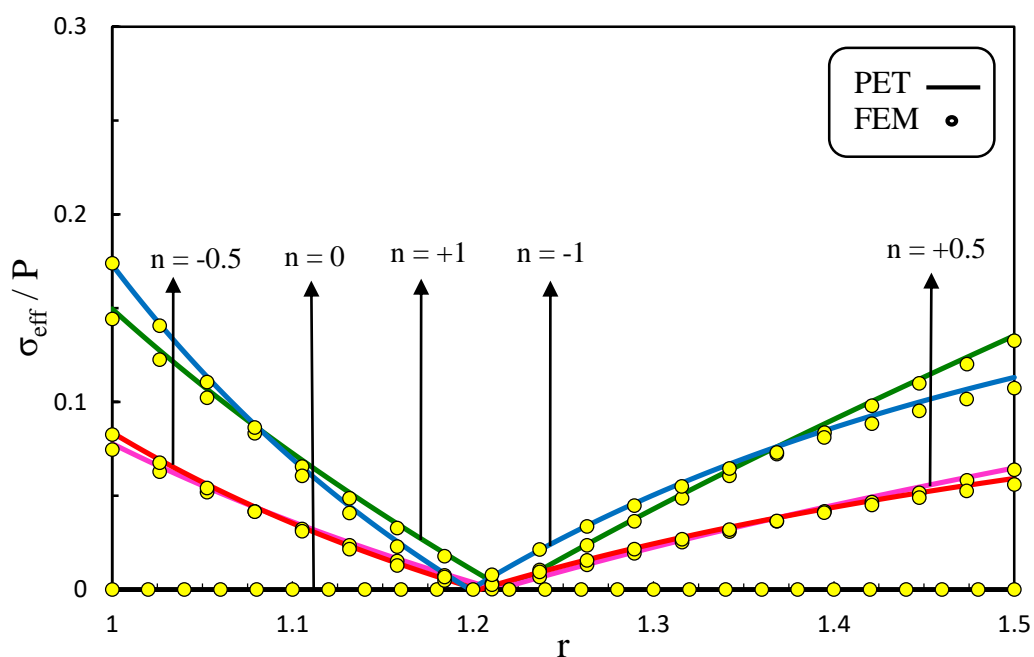
شکل ۲-۱۲ توزیع تنش شعاعی در کره‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی



شکل ۲-۱۳ توزیع تنش محیطی در کره‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی



شکل ۲-۱۴ توزیع جابه‌جایی شعاعی در کره‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی



شکل ۱۵-۲ توزیع تنش مؤثر در کره‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی

جدول (۱-۲) مقادیر تنش مؤثر حاصل از تحلیل کره به دو روش PET و FEM را برای حالت‌های

فشار داخلی، فشار خارجی و فشار هم‌زمان داخلی و خارجی، در لایه‌ی میانی کره نمایش می‌دهد.

جدول ۱-۲ مقایسه مقادیر تنش مؤثر حاصل از PET و FEM در لایه‌ی میانی

Pressure (MPa)		σ_{eff} (MPa)				
		$n = -1$	$n = -0.5$	$n = 0$	$n = 0.5$	$n = 1$
$P_i = 80$	PET	82/38	85	87/0.3	89/3	90/95
	FEM	82/4	84/99	87/0.3	89/4	90/96
$P_o = 80$	PET	80/17	83/99	87/0.5	90/1	92/33
	FEM	80/19	84	87/0.5	90/2	92/35
$P_i = P_o = 80$	PET	2/22	1/0.1	0	0/8	1/38
	FEM	2/21	1/0.1	0	0/8	1/37

۲-۶ جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

با بررسی توزیع جابه‌جایی و تنش‌های حاصل از تحلیل کره‌ی ناهمگن به کمک تئوری الاستیسیته‌ی مستوی و مقایسه‌ی آنها با حلّ عددی صورت گرفته توسط نرم‌افزار آباکوس، انطباق خوبی در نتایج مشاهده شد. تأثیر ضریب ناهمگنی در خواصّ ماده‌ی FG بر رفتارهای مکانیکی، با انتخاب مقادیر مختلف برای n ، در گراف‌ها قابل مشاهده می‌باشد.

مطابق انتظار در کره‌ی جدار ضخیم با ضخامت ثابت، فشار داخلی یکنواخت سبب ایجاد جابه‌جایی شعاعی مثبت و فشار خارجی یکنواخت نیز باعث ایجاد جابه‌جایی منفی در کره می‌شود. برای کره تحت هر سه حالت بارگذاری، مواد ناهمگن با مقادیر ثابت ناهمگنی مثبت سبب کاهش جابه‌جایی در کره نسبت به ماده همگن می‌شود، در حالی که مقادیر ثابت ناهمگنی منفی باعث افزایش جابه‌جایی شعاعی نسبت به ماده‌ی همگن می‌شود. در واقع همواره مقادیر جابه‌جایی شعاعی برای ثابت ناهمگنی منفی بزرگتر از مقادیر جابه‌جایی برای ماده‌ی همگن و ثابت ناهمگنی مثبت می‌باشد.

با افزایش مقدار ضریب ناهمگنی و برای هر یک از دو نوع بارگذاری فشار داخلی و فشار خارجی، مقادیر تنش محیطی و تنش مؤثر، در نیمه‌ی داخلی کره کاهش و در نیمه‌ی خارجی آن افزایش می‌یابند.

در کره‌ی تحت فشار داخلی با افزایش ضریب ناهمگنی، مقدار تنش شعاعی افزایش می‌یابد، در حالی که در کره‌ی تحت فشار خارجی مقدار تنش شعاعی با افزایش ضریب ناهمگنی کاهش می‌یابد.

ماده با ضریب ناهمگنی $n = 1$ می‌تواند بهترین انتخاب برای تولید کره‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی یا خارجی باشد، چرا که علاوه بر داشتن کمترین مقادیر در تنش مؤثر و جابه‌جایی شعاعی، دارای توزیع با گرادین تغییر مقادیر اندک در جدار کره می‌باشد. این اطلاعات می‌تواند در طراحی کره‌های جدار ضخیم FGM تحت فشار مورد استفاده قرار گیرد.

فصل ۳

تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های کروی

FGM

۳-۱ مقدمه

طراحی مواد FG در ابتدا به منظور کاربردهای حرارتی آنها در شرایط ویژه بود و مقاومت منحصر- به فرد پوسته‌های جدار ضخیم FGM در برابر بارگذاری‌های حرارتی، محققان را بر آن داشت تا به بررسی و تحلیل عملکرد آنها در مسائلی که به مقاومت مکانیکی و حرارتی بالا نیاز دارند، پردازند.

در این فصل برای تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های کروی، پس از بیان روابط اساسی با استخراج معادلات دیفرانسیل حاکم بر کره‌های جدار ضخیم متقارن محوری تشکیل شده از مواد ناهمگن بر مبنای تئوری الاستیسیته‌ی مستوی، حلّ عمومی کره‌های جدار ضخیم FGM تحت فشارهای یکنواخت داخلی و خارجی و بار حرارتی پایا ارائه شده است. سپس حلّ ترموالاستیک کره‌های جدار ضخیم همگن با بارگذاری مشابه بررسی شده و در ادامه با ارائه‌ی حلّ عددی توسط نرم‌افزار المان محدود آباکوس برای کره‌ی تحت فشارهای یکنواخت داخلی و خارجی و بار حرارتی پایا، نتایج حاصل از حلّ تحلیلی به کمک تئوری الاستیسیته‌ی مستوی با نتایج حاصل از حلّ عددی مقایسه شده‌اند. در نهایت، بهینه‌ترین طراحی برای کره‌های ناهمگن با بارگذاری مذکور ارائه می‌شود.

۳-۲ روابط اساسی

۳-۲-۱ تحلیل حرارتی کره

هنگامیکه بین دو سطح داخلی و خارجی کره اختلاف دما وجود داشته باشد؛ توزیع دمای مشخصی در ضخامت شکل می‌گیرد. لذا علاوه بر کرنش الاستیک، بخشی از کرنش ایجاد شده در هر نقطه از جسم، مربوط به کرنش حرارتی ناشی از اختلاف دمای اولیه و ثانویه‌ی آن نقطه می‌باشد.

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^T \quad (1-3)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} [(\vec{\nabla} u) + (\vec{\nabla} u)^T] \quad (2-3)$$

$$\varepsilon^T = \alpha(R)\theta(R)I, \quad \theta(R) = \Delta T = T(R) - T^* \quad (3-3)$$

$$\alpha(R) = \alpha_i e^{n_2(r-1)} \quad (4-3)$$

که در آن $T(R)$ توزیع دما، T^* دمای اولیه، $\alpha(R)$ ضریب انبساط حرارتی و I ماتریس همانی می باشد.

لذا روابط ساختاری را می توان بدین صورت بازنویسی کرد:

$$\begin{cases} \sigma_R = 2\mu\varepsilon_R + \lambda(\varepsilon_R + 2\varepsilon_\theta) - (3\lambda + 2\mu)\alpha(r)\theta(r) \\ \sigma_\theta = \sigma_\phi = 2\mu\varepsilon_\theta + \lambda(\varepsilon_R + 2\varepsilon_\theta) - (3\lambda + 2\mu)\alpha(r)\theta(r) \end{cases} \quad (5-3)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_R = \frac{1}{2\mu} \left[\sigma_R - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} (\sigma_R + 2\sigma_\theta) \right] + \alpha(r)\theta(r) \\ \varepsilon_\theta = \varepsilon_\phi = \frac{1}{2\mu} \left[\sigma_\theta - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} (\sigma_R + 2\sigma_\theta) \right] + \alpha(r)\theta(r) \end{cases} \quad (6-3)$$

در اینجا نیز می توان روابط تنش- کرنش را به صورت ماتریسی نمایش داد.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_R \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} = E(R) \begin{bmatrix} A & 2B \\ B & A+B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_R \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} - E(R) \begin{bmatrix} C \\ C \end{bmatrix} \alpha(R)\theta(R) \quad (7-3)$$

که ثابت C به صورت زیر است:

$$C = \frac{1}{1-2\nu} \quad (8-3)$$

۳-۲-۲ توزیع دما در کره

قانون انتقال حرارت فوریه^۱ به شکل کلی زیر نوشته می‌شود:

$$\nabla^2(K_t(R)T) + \frac{dq}{dt} = \rho C_p \frac{dT}{dt} \quad (۹-۳)$$

$$K_t(R) = K_i e^{n_3(r-1)} \quad (۱۰-۳)$$

که در آن $K_t(R)$ ضریب هدایت حرارتی، $\frac{dq}{dt}$ نرخ تولید گرما، C_p گرمای ویژه و ρ چگالی ماده است.

معادله‌ی هدایت حرارتی را می‌توان در مختصات کروی به صورت زیر نمایش داد:

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = \left\{ \frac{1}{R^2 \cos \phi} \left[\frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \cos \phi \frac{\partial(K_t(R)T(R))}{\partial R} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{R}{R \cos \phi} \frac{\partial(K_t(R)T(R))}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{R \cos \phi}{R} \frac{\partial(K_t(R)T(R))}{\partial \phi} \right) \right] + \frac{dq}{dt} \right\} \quad (۱۱-۳)$$

با در نظر گرفتن مسأله در حالت پایا، بدون منبع حرارتی و توزیع دما تنها در راستای شعاع،

رابطه‌ی (۱۱-۳) به صورت زیر نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{d(K_t(R)T(R))}{dR} \right) = 0 \quad (۱۲-۳)$$

با فرض ثابت ماندن ضریب انتقال حرارت در طی ضخامت کره ($n_3 = 0$)، رابطه‌ی (۱۲-۳) را

می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{dT}{dR} \right) = 0 \quad (۱۳-۳)$$

^۱ Fourier's law of heat transfer

با دو بار انتگرال گیری از رابطه‌ی فوق و نوشتن معادله بر حسب پارامتر بی بعد r داریم:

$$T(r) = C_2 - \frac{C_1}{r} \quad (14-3)$$

شرایط مرزی حرارتی در کره عبارتند از:

$$\begin{cases} T(r)|_{r=1} = T_i \\ T(r)|_{r=k} = T_o \end{cases} \quad (15-3)$$

$$k = \frac{R_o}{R_i} \quad (16-3)$$

T_o و T_i به ترتیب دمای سطوح داخلی و خارجی کره و R_o شعاع سطح خارجی آن می باشد.

به منظور یافتن ثابت‌های C_1 و C_2 در معادله‌ی (۱۴-۳)، شرایط مرزی حرارتی را اعمال می کنیم.

$$\begin{cases} C_1 = \frac{k(T_o - T_i)}{k - 1} \\ C_2 = \frac{kT_o - T_i}{k - 1} \end{cases} \quad (17-3)$$

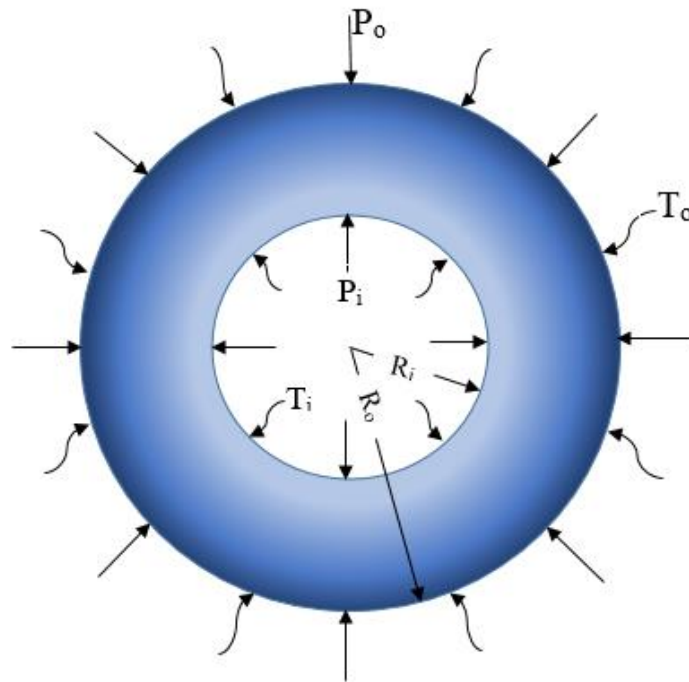
لذا توزیع دما در کره عبارت است از:

$$T(r) = \frac{kT_o(r-1) - T_i(r-k)}{r(k-1)} \quad (18-3)$$

۳-۳ تحلیل کره‌های ناهمگن تحت فشار و بار حرارتی پایا

یک پوسته‌ی کره‌ی جدار ضخیم تحت فشار داخلی P_i و خارجی P_o و بار حرارتی پایا در شعاع

داخلی R_i و خارجی R_o را مطابق شکل (۱-۳) در نظر می‌گیریم.



شکل ۱-۳ نمایش هندسی کره‌ی جدار ضخیم FGM تحت بارگذاری مکانیکی و بار حرارتی پایا

از آنجا که تغییرات نسبت پواسان در طی ضخامت بسیار جزئی است، مقدار آن را ثابت در نظر

می‌گیریم. تغییرات ضریب انبساط حرارتی نسبت به شعاع کره‌ی پایا بوده و با رابطه‌ی (۱۹-۳) تعریف

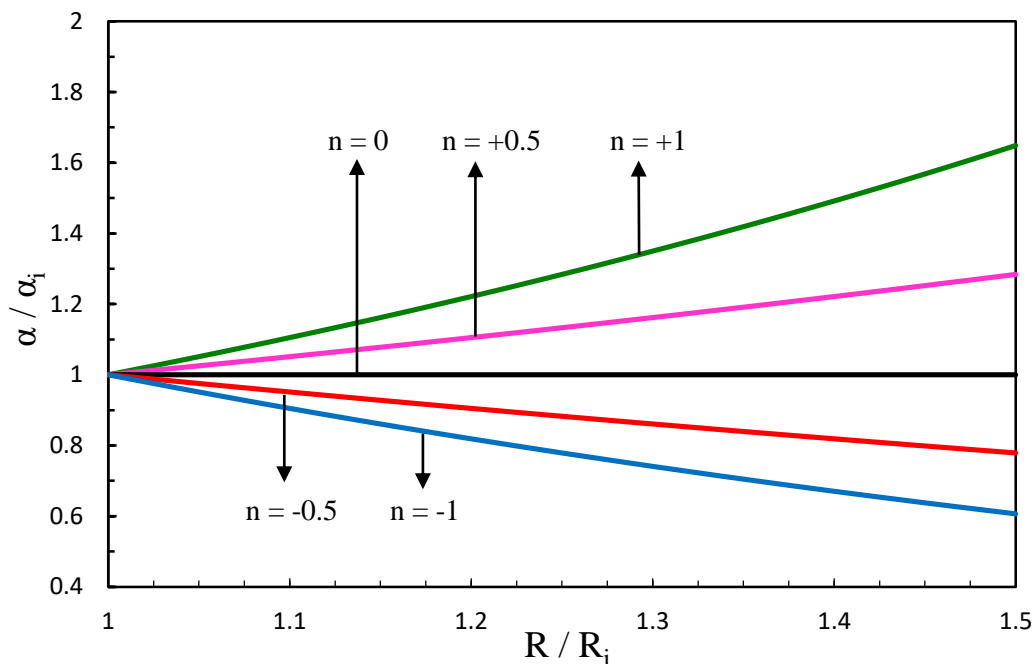
می‌شود. طبق رابطه‌ی (۲۵-۲) مدول الاستیسیته نیز دارای توزیع نمایی در دیواره‌ی کره می‌باشد.

$$\alpha(R) = \alpha_i e^{n_2(r-1)} \quad (19-3)$$

در این رابطه $r = \frac{R}{R_i}$ مختصات شعاع بی‌بعد است. α_i ضریب انبساط حرارتی در سطح داخلی

کره و n_2 ضریب ناهمگنی ماده می‌باشد. شکل (۲-۳) توزیع ضریب انبساط حرارتی در دیواره‌ی کره را

نسبت به مختصات شعاع بی‌بعد و به ازای مقادیر ثابت ناهمگنی مختلف نشان می‌دهد.



شکل ۳-۲ توزیع بی‌بعد ضریب انبساط حرارتی در راستای شعاع بی‌بعد

۳-۳-۱ حل ترموالاستیک کره‌ی ناهمگن تحت فشار

در حالتی که سطوح داخلی و خارجی کره تحت بار حرارتی پایا قرار می‌گیرند؛ توزیع دمای شکل گرفته در دیواره‌ی کره باعث ایجاد کرنش‌های حرارتی در کنار کرنش‌های الاستیک ناشی از سایر بارگذاری‌های مکانیکی می‌شود. با توجه به اینکه انتقال حرارت تنها در راستای شعاع فرض می‌شود؛ همچنان شرایط تقارن محوری برقرار بوده و می‌توان از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی جهت تحلیل کره‌های ناهمگن تحت فشار و بار حرارتی یکنواخت داخلی و خارجی استفاده کرد.

هیچ نیروی حجمی به مجموعه وارد نمی‌شود، لذا معادله‌ی تعادل تنش (۲-۲۶) همچنان معتبر است. با بی‌بعد سازی (۳-۷) و جایگذاری آن در (۲-۲۷) و همچنین استفاده از رابطه‌ی (۲-۲۹)، معادله‌ی حاکم به صورت (۳-۲۱) به‌دست می‌آید:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_R \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} = E(r) \begin{bmatrix} A & 2B \\ B & A+B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_R \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} - E(r) \begin{bmatrix} C \\ C \end{bmatrix} \alpha(r)\theta(r) \quad (۳-۲۰)$$

$$r^2 \frac{d^2 u_r}{dr^2} + (r^2 n_1 + 2r) \frac{du_r}{dr} + (2n_1 v^* r - 2) u_r = f(r) \quad (21-3)$$

که در آن

$$f(r) = \frac{C}{A} r^2 \alpha(r) \left[(n_1 + n_2) \theta(r) + \frac{d\theta}{dr} \right] \quad (22-3)$$

$$\theta(r) = \frac{k \theta_o (r-1) - \theta_i (r-k)}{r(k-1)} \quad (23-3)$$

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{k(\theta_o - \theta_i)}{r^2(k-1)} \quad (24-3)$$

که در آن θ_o و θ_i به ترتیب اختلاف دمای سطوح داخلی و خارجی نسبت به دمای مرجع T^* می‌باشد. با جایگذاری (۱۹-۳)، (۲۳-۳) و (۲۴-۳) در رابطه (۲۲-۳)، ترم ناهمگنی معادله‌ی حاکم بر کره به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$f(r) = \frac{C}{A} r^2 \alpha_i e^{n_2(r-1)} \left[(n_1 + n_2) \left(\frac{k \theta_o (r-1) - \theta_i (r-k)}{r(k-1)} \right) + \frac{k(\theta_o - \theta_i)}{r^2(k-1)} \right] \quad (25-3)$$

به منظور حل معادله‌ی ناهمگن (۲۱-۳)، از روش لاگرانژ استفاده می‌کنیم که طبق آن، جواب معادله‌ی ناهمگن به صورت مجموعی از حل عمومی معادله‌ی همگن متناظر و یک حل خصوصی از معادله‌ی ناهمگن بیان می‌شود.

$$u_r(r) = u_r^H(r) + u_r^P(r) \quad (26-3)$$

همان‌گونه که در فصل قبل مشاهده شد؛ معادله‌ی همگن متناظر، یک معادله‌ی هایپرژئومتریک بوده و حل آن کاملاً وابسته به علامت ضریب ناهمگنی n_1 می‌باشد. لذا در این بخش نیز، با توجه به علامت n_1 ، پاسخ‌های معادله به دو گروه برای مقادیر مثبت و منفی ضریب ناهمگنی تقسیم می‌شوند.

با توجه به رابطه‌ی (۲-۳۹)، حل عمومی معادله‌ی همگن متناظر با معادله‌ی حاکم عبارت است از:

$$u_r^H(r) = C_1 M(r) + C_2 N(r) \quad (27-3)$$

که در آن $M(r)$ و $N(r)$ از روابط (۲-۴۰) و (۲-۴۱) محاسبه می‌شوند.

دو حلّ خصوصی مربوط به معادله‌ی همگن عبارتند از:

$$u_1(r) = M(r) \quad , \quad u_2(r) = N(r) \quad (28-3)$$

حلّ خصوصی معادله‌ی ناهمگن به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$u_r^P(r) = u_1(r)v_1(r) + u_2(r)v_2(r) \quad (29-3)$$

که توابع $v_1(r)$ و $v_2(r)$ از رابطه‌ی زیر به دست می‌آیند.

$$v_1(r) = \int \frac{-u_2(r)f(r)}{W(u_1, u_2)} dr \quad , \quad v_2(r) = \int \frac{u_1(r)f(r)}{W(u_1, u_2)} dr \quad (30-3)$$

رونسکین^۱ دو تابع $u_1(r)$ و $u_2(r)$ که در رابطه‌ی فوق با $W(u_1, u_2)$ نمایش داده شده؛ به صورت

زیر محاسبه می‌شود:

$$W(u_1, u_2) = \begin{vmatrix} u_1(r) & u_2(r) \\ \frac{du_1(r)}{dr} & \frac{du_2(r)}{dr} \end{vmatrix} = \frac{du_2(r)}{dr} u_1(r) - \frac{du_1(r)}{dr} u_2(r) \quad (31-3)$$

با جایگذاری (۲۸-۳) در (۳۱-۳) و استفاده از روابط (۲-۴۰) و (۲-۴۱) داریم:

$$W(u_1, u_2) = \begin{cases} \frac{-\Gamma(4)n_1^3}{\Gamma(3-2\nu^*)r^2 e^{n_1 r}} & n_1 > 0 \\ \frac{\Gamma(4)n_1^3}{\Gamma(2\nu^*+1)r^2 e^{n_1 r}} & n_1 < 0 \end{cases} \quad (32-3)$$

رابطه‌ی (۳۰-۳) را با توجه به (۳-۲۵) و (۳-۳۲) می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

¹ Wronskian

$$v_1(r) = \begin{cases} \frac{\Gamma(3-2\nu^*)C\alpha_i}{\Gamma(4)A} \int \Psi(3-2\nu^*, 4; n_1 r) r^5 e^{n_2(r-1)} [(n_1+n_2) \\ \left(\frac{k\theta_o(r-1)-\theta_i(r-k)}{r(k-1)} + \frac{k(\theta_o-\theta_i)}{r^2(k-1)} \right)] dr & n_1 > 0 \\ \frac{\Gamma(2\nu^*+1)C\alpha_i}{\Gamma(4)A} \int \Psi(2\nu^*+1, 4; -n_1 r) r^5 e^{n_1 r + n_2(r-1)} [(n_1+n_2) \\ \left(\frac{k\theta_o(r-1)-\theta_i(r-k)}{r(k-1)} + \frac{k(\theta_o-\theta_i)}{r^2(k-1)} \right)] dr & n_1 < 0 \end{cases} \quad (33-3)$$

$$v_2(r) = \begin{cases} \frac{-\Gamma(3-2\nu^*)C\alpha_i}{\Gamma(4)A} \int \Phi(3-2\nu^*, 4; n_1 r) r^5 e^{n_2(r-1)} [(n_1+n_2) \\ \left(\frac{k\theta_o(r-1)-\theta_i(r-k)}{r(k-1)} + \frac{k(\theta_o-\theta_i)}{r^2(k-1)} \right)] dr & n_1 > 0 \\ \frac{-\Gamma(2\nu^*+1)C\alpha_i}{\Gamma(4)A} \int \Phi(2\nu^*+1, 4; -n_1 r) r^5 e^{n_1 r + n_2(r-1)} [(n_1+n_2) \\ \left(\frac{k\theta_o(r-1)-\theta_i(r-k)}{r(k-1)} + \frac{k(\theta_o-\theta_i)}{r^2(k-1)} \right)] dr & n_1 < 0 \end{cases} \quad (34-3)$$

از آنجا که توابع Ψ و Φ را نمی‌توان با استفاده از روابط (۳۶-۲) و (۳۷-۲)، به صورت صریح بر حسب Γ به دست آورد؛ لذا می‌بایست برای محاسبه‌ی روابط (۳۳-۳) و (۳۴-۳) و در نتیجه به دست آوردن حل تحلیلی برای معادله‌ی حاکم، از تعریف دیگری به صورت روابط (۳۵-۴) و (۳۶-۴) برای توابع Ψ و Φ بهره برد.

$$\left\{ \begin{aligned} \Phi(a, b; z) &= \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)} \int_0^1 e^{zt} t^{a-1} (1-t)^{b-a-1} dt = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(b)_k} \frac{z^k}{k!} = \Phi^*(a, b; z) \\ (a)_k &= a(a+1)\dots(a+k-1), \quad (a)_0 = 1 \end{aligned} \right. \quad (35-3)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \Psi(a, b+1; z) &= \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-zt} t^{a-1} (1+t)^{b-a-1} dt = \\ &= \frac{(-1)^{b-1}}{b! \Gamma(a-b)} \{ \Phi(a, b+1; z) \ln(z) + \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(b+1)_k} \frac{z^k}{k!} [\psi(a+k) - \psi(1+k) - \psi(1+b+k)] \} + \\ &+ \frac{(b-1)!}{\Gamma(a)} \sum_{k=0}^{b-1} \frac{(a-b)_k}{(1-b)_k} \frac{z^{k-b}}{k!} = \Psi^*(a, b; z) \end{aligned} \right. \quad (36-3)$$

$$\psi(z) = -\gamma + \int_0^1 \frac{(1-t)^{z-1}}{1-t} dt$$

که در آن γ ثابت اویلر بوده و مقدار آن برابر $\dots/5772 \dots$ می باشد.

همچنین با استفاده از بسط تیلور¹ تابع نمایی به جای خود این تابع داریم:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (37-3)$$

حال با استفاده از روابط (35-3)، (36-3) و (37-3) می توان $v_1(r)$ و $v_2(r)$ را محاسبه کرد.

با جایگذاری (29-3) و (27-3) در (26-3)، پاسخ معادله ی حاکم به دست می آید.

$$u_r(r) = (v_1(r) + C_1)M(r) + (v_2(r) + C_2)N(r) \quad (38-3)$$

نکته ی قابل توجه آن است که پاسخ به دست آمده برای معادله ی حاکم، تنها به ازای مقادیر مخالف

صفر از ضریب n_1 برقرار می باشد. لذا در صورت صفر بودن این ضریب، جنس کره به یک ماده ی همگن

تبدیل می شود و باید از حلّ کلاسیک کره که در ادامه همین فصل به آن می پردازیم استفاده شود.

¹ Taylor expansion

با جایگذاری (۳۸-۳) در (۲۹-۲) و استفاده از (۷-۳)، تنش شعاعی در کره عبارت است از:

$$\sigma_R(r) = E(r) \left\{ \left[(v_1(r) + C_1) \left(AC(r) + 2B \frac{M(r)}{r} \right) + (v_2(r) + C_2) \left(AD(r) + 2B \frac{N(r)}{r} \right) \right] - C \alpha(r) \theta(r) \right\} \quad (۳۹-۳)$$

توابع $C(r)$ و $D(r)$ از روابط (۴۳-۲) و (۴۴-۲) محاسبه می‌شوند.

حال با داشتن رابطه‌ی تنش شعاعی و اعمال شرایط مرزی (۴۵-۲) در آن می‌توان ثابت‌های C_1 و

C_2 را محاسبه کرد.

$$\left. \begin{aligned}
& \left\{ P_i e^{n_1(k-1)} \left(AD(k) + 2B \frac{N(k)}{k} \right) - P_o (AD(1) + 2BN(1)) - \right. \\
& - E_i e^{n_1(k-1)} \left[v_1(k) (AD(1) + 2BN(1)) \left(AC(k) + 2B \frac{M(k)}{k} \right) + \right. \\
& + C \alpha_i \theta_i \left(AD(k) + 2B \frac{N(k)}{k} \right) - C \alpha_i \theta_o e^{n_2(k-1)} (AD(1) + 2BN(1)) + \\
& + (AD(1) + 2BN(1)) \left(AD(k) + 2B \frac{N(k)}{k} \right) (v_2(k) - v_2(r)) - \\
& \left. \left. - v_1(1) (AC(1) + 2BM(1)) \left(AD(k) + 2B \frac{N(k)}{k} \right) \right] \right\} \\
C_1 = & \frac{\left\{ E_i e^{n_1(k-1)} \left[(AD(1) + 2BN(1)) \left(AC(k) + 2B \frac{M(k)}{k} \right) - \right. \right. \\
& \left. \left. - (AC(1) + 2BM(1)) \left(AD(k) + 2B \frac{N(k)}{k} \right) \right] \right\}}{\left\{ P_o (AC(1) + 2BM(1)) - P_i e^{n_1(k-1)} \left(AC(k) + 2B \frac{M(k)}{k} \right) - \right. \\
& - E_i e^{n_1(k-1)} \left[v_2(1) (AD(1) + 2BN(1)) \left(AC(k) + 2B \frac{M(k)}{k} \right) + \right. \\
& + C \alpha_i \theta_o e^{n_2(k-1)} (AC(1) + 2BM(1)) - C \alpha_i \theta_i \left(AC(k) + 2B \frac{M(k)}{k} \right) + \\
& + (AC(1) + 2BM(1)) \left(AC(k) + 2B \frac{M(k)}{k} \right) (v_1(1) - v_1(k)) - \\
& \left. \left. - v_2(k) (AC(1) + 2BM(1)) \left(AD(k) + 2B \frac{N(k)}{k} \right) \right] \right\} \\
C_2 = & \frac{\left\{ E_i e^{n_1(k-1)} \left[(AD(1) + 2BN(1)) \left(AC(k) + 2B \frac{M(k)}{k} \right) - \right. \right. \\
& \left. \left. - (AC(1) + 2BM(1)) \left(AD(k) + 2B \frac{N(k)}{k} \right) \right] \right\}}{\left. \right\}
\end{aligned} \right\} \quad (40-3)$$

با جایگذاری مقادیر این ثابت‌ها در (۳-۳۸) و استفاده از (۲-۲۹) و (۳-۷)، تنش‌های شعاعی و

محیطی و جابه‌جایی شعاعی به دست می‌آیند.

$$\sigma_R(r) = \frac{e^{n_1(r-k)}}{F} \left[(F^* v_1(r) + G)(AC(r) + 2B \frac{M(r)}{r}) + (F^* v_2(r) + H)(AD(r) + 2B \frac{N(r)}{r}) - F^* C \alpha(r) \theta(r) \right] \quad (41-3)$$

$$\sigma_\theta(r) = \frac{e^{n_1(r-k)}}{F} \left[(F^* v_1(r) + G)(BC(r) + (A+B) \frac{M(r)}{r}) + (F^* v_2(r) + H)(BD(r) + (A+B) \frac{N(r)}{r}) - F^* C \alpha(r) \theta(r) \right] \quad (42-3)$$

$$u_R(r) = \frac{1}{F^*} \left[(F^* v_1(r) + G)M(r) + (F^* v_2(r) + H)N(r) \right] \quad (43-3)$$

که در آنها

$$F = \left\{ \left[(AD(1) + 2BN(1))(AC(k) + 2B \frac{M(k)}{k}) - (AC(1) + 2BM(1))(AD(k) + 2B \frac{N(k)}{k}) \right] \right\} \quad (44-3)$$

$$G = \left\{ P_i e^{n_1(k-1)} (AD(k) + 2B \frac{N(k)}{k}) - P_o (AD(1) + 2BN(1)) - E_i e^{n_1(k-1)} \left[(AD(1) + 2BN(1))(AD(k) + 2B \frac{N(k)}{k})(v_2(k) - v_2(r)) + C \alpha_i \theta_i (AD(k) + 2B \frac{N(k)}{k}) - C \alpha_i \theta_o e^{n_2(k-1)} (AD(1) + 2BN(1)) + v_1(k) (AD(1) + 2BN(1))(AC(k) + 2B \frac{M(k)}{k}) - v_1(1) (AC(1) + 2BM(1))(AD(k) + 2B \frac{N(k)}{k}) \right] \right\} \quad (45-3)$$

$$\begin{aligned}
H = & \left\{ P_o (AC(1) + 2BM(1)) - P_i e^{n_1(k-1)} (AC(k) + 2B \frac{M(k)}{k}) - \right. \\
& - E_i e^{n_1(k-1)} \left[(AC(1) + 2BM(1))(AC(k) + 2B \frac{M(k)}{k})(v_1(1) - v_1(k)) + \right. \\
& + C \alpha_i \theta_o e^{n_2(k-1)} (AC(1) + 2BM(1)) - C \alpha_i \theta_i (AC(k) + 2B \frac{M(k)}{k}) + \\
& + v_2(1)(AD(1) + 2BN(1))(AC(k) + 2B \frac{M(k)}{k}) - \\
& \left. \left. - v_2(k)(AC(1) + 2BM(1))(AD(k) + 2B \frac{N(k)}{k}) \right] \right\} \quad (46-3)
\end{aligned}$$

$$F^* = E_i F e^{n_1(k-1)} \quad (47-3)$$

تنش مؤثر بر اساس تئوری تسلیم فن میزس، با استفاده از رابطه‌ی (۲-۵۴) محاسبه می‌شود.

معادلات (۳-۴۱ تا ۴۳) را برای مقادیر مثبت و منفی ضریب ناهمگنی n_1 بازنویسی می‌کنیم.

۳-۱-۳-۱-۱-۱-۱ مقادیر مثبت ضریب ناهمگنی

$$\begin{aligned}
\sigma_R(r) = & \frac{e^{n_1(r-k)}}{J} \left\{ \left[\frac{(n_1^3(1+v) + n_1^4 r(v-1))}{(1+v)(1-2v)e^{n_1 r}} \Phi\left(\frac{3-5v}{1-v}, 4; n_1 r\right) + \right. \right. \\
& + \left. \frac{n_1^4 r(3-5v)}{4(1+v)(1-2v)e^{n_1 r}} \Phi\left(\frac{4-6v}{1-v}, 5; n_1 r\right) \right] (J^* MA\left(\frac{3-5v}{1-v}, 3; n_1 r\right) + K) + \\
& + \left[\frac{(n_1^3(1+v) + n_1^4 r(v-1))}{(1+v)(1-2v)e^{n_1 r}} \Psi\left(\frac{3-5v}{1-v}, 4; n_1 r\right) - \right. \\
& - \left. \frac{n_1^4 r(3-5v)}{(1+v)(1-2v)e^{n_1 r}} \Psi\left(\frac{4-6v}{1-v}, 5; n_1 r\right) \right] (L - J^* MB\left(\frac{3-5v}{1-v}, 4; n_1 r\right) - \\
& \left. - \frac{E_i \alpha_i J}{(1-2v)} e^{n_1(k-1)} e^{n_2(r-1)} \left[\frac{k \theta_o(r-1) - \theta_i(r-k)}{r(k-1)} \right] \right\} \quad (48-3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta}(r) = & \frac{e^{n_1(r-k)}}{J} \left\{ \left[\frac{(n_1^3(1+\nu) - \nu n_1^4 r)}{(1+\nu)(1-2\nu)e^{n_1 r}} \Phi\left(\frac{3-5\nu}{1-\nu}, 4; n_1 r\right) + \right. \right. \\
& + \left. \frac{\nu n_1^4 r(3-5\nu)}{4(1-\nu^2)(1-2\nu)e^{n_1 r}} \Phi\left(\frac{4-6\nu}{1-\nu}, 5; n_1 r\right) \right] (J^* MA\left(\frac{3-5\nu}{1-\nu}, 3; n_1 r\right) + K) + \\
& + \left[\frac{(n_1^3(1+\nu) - \nu n_1^4 r)}{(1+\nu)(1-2\nu)e^{n_1 r}} \Psi\left(\frac{3-5\nu}{1-\nu}, 4; n_1 r\right) - \right. \\
& - \left. \frac{\nu n_1^4 r(3-5\nu)}{(1-\nu^2)(1-2\nu)e^{n_1 r}} \Psi\left(\frac{4-6\nu}{1-\nu}, 5; n_1 r\right) \right] (L - J^* MB\left(\frac{3-5\nu}{1-\nu}, 4; n_1 r\right) - \\
& - \left. \frac{E_i \alpha_i J}{(1-2\nu)} e^{n_1(k-1)} e^{n_2(r-1)} \left[\frac{k \theta_o(r-1) - \theta_i(r-k)}{r(k-1)} \right] \right\} \tag{49-3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_R(r) = & \frac{1}{J E_i e^{n_1(k-1)}} \left\{ (J^* MA\left(\frac{3-5\nu}{1-\nu}, 3; n_1 r\right) + K) \left(\frac{n_1^3 r}{e^{n_1 r}} \Phi\left(\frac{3-5\nu}{1-\nu}, 4; n_1 r\right) \right) + \right. \\
& \left. + (L - J^* MB\left(\frac{3-5\nu}{1-\nu}, 4; n_1 r\right)) \left(\frac{n_1^3 r}{e^{n_1 r}} \Psi\left(\frac{3-5\nu}{1-\nu}, 4; n_1 r\right) \right) \right\} \tag{50-3}
\end{aligned}$$

که در آنها

$$J = AM_1 AM_4 - AM_2 AM_3 \tag{51-3}$$

$$\begin{aligned}
K = & \left\{ P_i e^{n_1(k-1)} AM_3 - P_o AM_1 - E_i e^{n_1(k-1)} [AM_1 AM_3 (\nu_2(k) - \nu_2(r)) + \right. \\
& \left. + C \alpha_i \theta_i AM_3 - C \alpha_i \theta_o e^{n_2(k-1)} AM_1 + \nu_1(k) AM_1 AM_4 - \nu_1(1) AM_2 AM_3] \right\} \tag{52-3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L = & \left\{ P_o AM_2 - P_i e^{n_1(k-1)} AM_4 - E_i e^{n_1(k-1)} [AM_2 AM_4 (\nu_1(1) - \nu_1(k)) + \right. \\
& \left. + C \alpha_i \theta_o e^{n_2(k-1)} AM_2 - C \alpha_i \theta_i AM_4 + \nu_2(1) AM_1 AM_4 - \nu_2(k) AM_2 AM_3] \right\} \tag{53-3}
\end{aligned}$$

$$J^* = \frac{E_i (1+\nu) \Gamma\left(\frac{3-5\nu}{1-\nu}\right) e^{n_1(k-1)}}{\Gamma(4)(1-\nu)} J \tag{54-3}$$

$$\left\{ \begin{aligned}
AM_1 &= \frac{(n_1^3(1+\nu) + n_1^4(\nu-1))}{(1+\nu)(1-2\nu)e^{n_1}} \Psi\left(\frac{3-5\nu}{1-\nu}, 4; n_1\right) - \frac{n_1^4(3-5\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)e^{n_1}} \Psi\left(\frac{4-6\nu}{1-\nu}, 5; n_1\right) \\
AM_2 &= \frac{(n_1^3(1+\nu) + n_1^4(\nu-1))}{(1+\nu)(1-2\nu)e^{n_1}} \Phi\left(\frac{3-5\nu}{1-\nu}, 4; n_1\right) + \frac{n_1^4(3-5\nu)}{4(1+\nu)(1-2\nu)e^{n_1}} \Phi\left(\frac{4-6\nu}{1-\nu}, 5; n_1\right) \\
AM_3 &= \frac{(n_1^3(1+\nu) + n_1^4k(\nu-1))}{(1+\nu)(1-2\nu)e^{n_1k}} \Psi\left(\frac{3-5\nu}{1-\nu}, 4; n_1k\right) - \frac{kn_1^4(3-5\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)e^{n_1k}} \Psi\left(\frac{4-6\nu}{1-\nu}, 5; n_1k\right) \\
AM_4 &= \frac{(n_1^3(1+\nu) + n_1^4k(\nu-1))}{(1+\nu)(1-2\nu)e^{n_1k}} \Phi\left(\frac{3-5\nu}{1-\nu}, 4; n_1k\right) + \frac{kn_1^4(3-5\nu)}{4(1+\nu)(1-2\nu)e^{n_1k}} \Phi\left(\frac{4-6\nu}{1-\nu}, 5; n_1k\right)
\end{aligned} \right. \quad (55-3)$$

$$MA(a, b; c) = \int \Psi^*(a, b; c) r^5 \alpha_i e^{n_2(r-1)} \left[(n_1 + n_2) \left(\frac{k\theta_o(r-1) - \theta_i(r-k)}{r(k-1)} \right) + \frac{k(\theta_o - \theta_i)}{r^2(k-1)} \right] dr \quad (56-3)$$

$$MB(a, b; c) = \int \Phi^*(a, b; c) r^5 \alpha_i e^{n_2(r-1)} \left[(n_1 + n_2) \left(\frac{k\theta_o(r-1) - \theta_i(r-k)}{r(k-1)} \right) + \frac{k(\theta_o - \theta_i)}{r^2(k-1)} \right] dr \quad (57-3)$$

۳-۱-۲ مقادیر منفی ضریب ناهمگنی

$$\begin{aligned}
\sigma_R(r) &= \frac{e^{n_1(r-k)}}{U} \left\{ \left[\frac{-n_1^3}{1-2\nu} \Phi\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}, 4; -n_1r\right) + \frac{n_1^4r}{4(1-2\nu)} \Phi\left(\frac{2}{1-\nu}, 5; -n_1r\right) \right] \right. \\
&\quad (U^*MC\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}, 3; -n_1r\right) + V) + \\
&\quad \left. + \left[\frac{-n_1^3}{1-2\nu} \Psi\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}, 4; -n_1r\right) - \frac{n_1^4r}{1-2\nu} \Psi\left(\frac{2}{1-\nu}, 5; -n_1r\right) \right] \right. \\
&\quad (W - U^*MD\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}, 4; -n_1r\right) - \\
&\quad \left. \left. - \frac{E_i \alpha_i U}{1-2\nu} e^{n_1(k-1)} e^{n_2(r-1)} \left[\frac{k\theta_o(r-1) - \theta_i(r-k)}{r(k-1)} \right] \right\} \quad (58-3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta}(r) = \frac{e^{n_1(r-k)}}{U} & \left\{ \left[\frac{-n_1^3}{1-2\nu} \Phi\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}, 4; -n_1 r\right) + \frac{\nu n_1^4 r}{4(1-\nu)(1-2\nu)} \Phi\left(\frac{2}{1-\nu}, 5; -n_1 r\right) \right] \right. \\ & (U^* MC\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}, 3; -n_1 r\right) + V) + \\ & + \left[\frac{-n_1^3}{1-2\nu} \Psi\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}, 4; -n_1 r\right) - \frac{\nu n_1^4 r}{(1-\nu)(1-2\nu)} \Psi\left(\frac{2}{1-\nu}, 5; -n_1 r\right) \right] \\ & (W - U^* MD\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}, 4; -n_1 r\right) - \\ & \left. - \frac{E_i \alpha_i U}{1-2\nu} e^{n_1(k-1)} e^{n_2(r-1)} \left[\frac{k \theta_o(r-1) - \theta_i(r-k)}{r(k-1)} \right] \right\} \end{aligned} \quad (59-3)$$

$$\begin{aligned} u_R(r) = \frac{-1}{UE_i e^{n_1(k-1)}} & \left\{ (U^* MC\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}, 3; -n_1 r\right) + V)(n_1^3 r \Phi\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}, 4; -n_1 r\right)) + \right. \\ & \left. + (W - U^* MD\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}, 4; -n_1 r\right))(n_1^3 r \Psi\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}, 4; -n_1 r\right)) \right\} \end{aligned} \quad (60-3)$$

که در آنها

$$U = CM_1 CM_4 - CM_2 CM_3 \quad (61-3)$$

$$\begin{aligned} V = \{ & P_i e^{n_1(k-1)} CM_3 - P_o CM_1 - E_i e^{n_1(k-1)} [CM_1 CM_3 (\nu_2(k) - \nu_2(r)) + \\ & + C \alpha_i \theta_i CM_3 - C \alpha_i \theta_o e^{n_2(k-1)} CM_1 + \nu_1(k) CM_1 CM_4 - \nu_1(1) CM_2 CM_3] \} \end{aligned} \quad (62-3)$$

$$\begin{aligned} W = \{ & P_o CM_2 - P_i e^{n_1(k-1)} CM_4 - E_i e^{n_1(k-1)} [CM_2 CM_4 (\nu_1(1) - \nu_1(k)) + \\ & + C \alpha_i \theta_o e^{n_2(k-1)} CM_2 - C \alpha_i \theta_i CM_4 + \nu_2(1) CM_1 CM_4 - \nu_2(k) CM_2 CM_3] \} \end{aligned} \quad (63-3)$$

$$U^* = \frac{E_i(1+\nu)\Gamma\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\right)e^{n_1(k-1)}}{\Gamma(4)(1-\nu)}U \quad (64-3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} CM_1 = \frac{-n_1^3}{1-2\nu} \Psi\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}, 4; -n_1\right) - \frac{n_1^4}{1-2\nu} \Psi\left(\frac{2}{1-\nu}, 5; -n_1\right) \\ CM_2 = \frac{-n_1^3}{1-2\nu} \Phi\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}, 4; -n_1\right) + \frac{n_1^4}{4(1-2\nu)} \Phi\left(\frac{2}{1-\nu}, 5; -n_1\right) \\ CM_3 = \frac{-n_1^3}{1-2\nu} \Psi\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}, 4; -n_1k\right) - \frac{n_1^4k}{1-2\nu} \Psi\left(\frac{2}{1-\nu}, 5; -n_1k\right) \\ CM_4 = \frac{-n_1^3}{1-2\nu} \Phi\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}, 4; -n_1k\right) - \frac{n_1^4k}{4(1-2\nu)} \Phi\left(\frac{2}{1-\nu}, 5; -n_1k\right) \end{array} \right. \quad (65-3)$$

$$MC(a,b;c) = \int \Psi^*(a,b;c)r^5\alpha_i e^{n_2(r-1)}e^{n_1r} \left[(n_1+n_2)\left(\frac{k\theta_o(r-1)-\theta_i(r-k)}{r(k-1)}\right) + \frac{k(\theta_o-\theta_i)}{r^2(k-1)} \right] dr \quad (66-3)$$

$$MD(a,b;c) = \int \Phi^*(a,b;c)r^5\alpha_i e^{n_2(r-1)}e^{n_1r} \left[(n_1+n_2)\left(\frac{k\theta_o(r-1)-\theta_i(r-k)}{r(k-1)}\right) + \frac{k(\theta_o-\theta_i)}{r^2(k-1)} \right] dr \quad (67-3)$$

۳-۲-۳ حلّ عددی کره‌ی ناهمگن تحت فشار و بار حرارتی پایا

در این بخش نحوه‌ی مدل‌سازی کره‌ی FGM تحت بارگذاری‌های حرارتی و مکانیکی توضیح داده شده است.

به منظور المان‌بندی کره و برای تحلیل توزیع حرارت در جداره‌ی کره، از المان‌های چهار ضلعی و متقارن محوری هشت گره‌ای CAX8RT استفاده شده است.

کره به شعاع داخلی ۴۰ میلی‌متر، شعاع خارجی ۶۰ میلی‌متر با رسم مقطعی به صورت ربع دایره از آن در حالت تقارن محوری، مدل‌سازی شده است.

برای ایجاد خواص ناهمگنی که به صورت شعاعی در پوسته‌ی کره در نظر گرفته شده است؛ با تقسیم جدار استوانه به تعداد ۲۰ لایه‌ی مساوی و نسبت دادن خواص مدول الاستیسیته و ضریب انبساط حرارتی در هر لایه بسته به فاصله‌ی مرکز از لایه‌ی داخلی به صورت تابع نمایی طبق روابط (۲-۳۰) و (۳-۱۹)؛ در نهایت پوسته‌ی کروی مورد نظر از ۲۰ کره‌ی همگن و همسانگرد به هم چسبیده تشکیل می‌شود. این لایه‌ها در محلّ اتصال به هم پیوسته‌اند و خواص در محلّ اتصال لایه‌ها، حدّ میانگین چپ و راست مرز دو لایه در نظر گرفته می‌شوند. فشارهای داخلی و خارجی نیز به گره‌های موجود در سطوح داخلی و خارجی مقطع ترسیم شده اعمال می‌شوند. همچنین برای اعمال شرایط دمایی، با در نظر گرفتن کل گره‌های موجود در سطوح داخلی و خارجی کره، مقدار اختلاف دمای مربوط به هر یک از این سطح را با دمای محیط به عنوان بارگذاری حرارتی اعمال می‌کنیم.

۴-۳ حل ترموالاستیک کره‌ی همگن تحت فشار

با استفاده از روابط (۲۹-۲)، (۶۷-۲) و (۷-۳)؛ معادله‌ی حاکم بر کره‌ی همگن به دست می‌آید.

$$r^2 \frac{d^2 u_R}{dr^2} + 2r \frac{du_R}{dr} - 2u_R = \frac{C \alpha r^2}{A} \frac{d\theta}{dr} \quad (۶۸-۳)$$

حل معادله‌ی ناهمگن فوق را می‌توان به روش لاگرانژ و با حاصل جمع جواب خصوصی معادله‌ی ناهمگن و جواب عمومی معادله‌ی همگن متناظر به دست آورد. اما در روشی دیگر، معادله‌ی فوق را به صورت مشتقات پی‌درپی نوشته و با انتگرال‌گیری از آن، به حل معادله‌ی حاکم می‌پردازیم.

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 u_R) \right] = \frac{C \alpha}{A} \frac{d\theta}{dr} \quad (۶۹-۳)$$

با دو بار انتگرال‌گیری از رابطه‌ی فوق، داریم:

$$u_R(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r^2} + \frac{C \alpha I(r)}{A r^2} \quad (۷۰-۳)$$

که در آن

$$I(r) = \int_1^r r^2 \theta(r) dr \quad (۷۱-۳)$$

$\theta(r)$ از رابطه‌ی (۲۳-۳) محاسبه می‌شود. تنش شعاعی با استفاده از روابط (۲۹-۲)، (۷-۳) و (۳-۳)

(۷۰) و برحسب ثابت‌های C_1 و C_2 به صورت زیر می‌باشد.

$$\sigma_R(r) = E \left[(A + 2B)C_1 + (B - A) \frac{2C_2}{r^3} + (\nu^* - 1) \frac{2C \alpha I}{r^3} \right] \quad (۷۲-۳)$$

با اعمال شرایط مرزی (۴۵-۲) در معادله‌ی فوق، ثابت‌های C_1 و C_2 محاسبه می‌شوند.

$$\begin{cases} C_1 = \frac{P_i - P_o k^3}{E(k^3 - 1)(A + 2B)} - \frac{2(B - A)C\alpha I^*}{A(k^3 - 1)(A + 2B)} \\ C_2 = \frac{(P_o - P_i)k^3}{2E(k^3 - 1)(B - A)} + \frac{C\alpha I^*}{A(k^3 - 1)} \end{cases} \quad (73-3)$$

که در آن

$$I^* = \int_1^k r^2 \theta(r) dr \quad (74-3)$$

با جایگزینی C_1 و C_2 در (70-3) و استفاده از (29-2)، (7-3)، تنش‌های شعاعی، محیطی و

جاب‌جایی شعاعی به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned} \sigma_R^H(r) = E \left\{ \frac{2C\alpha I^*(A - B)}{A(k^3 - 1)} \left(1 - \frac{1}{r^3}\right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{E(k^3 - 1)} \left[P_i - P_o k^3 - \frac{k^3}{r^3} (P_i - P_o) \right] + \frac{2}{r^3} (\nu^* - 1) C\alpha I(r) \right\} \end{aligned} \quad (75-3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta^H(r) = E \left\{ \frac{C\alpha I^*(A - B)}{A(k^3 - 1)} \left(2 + \frac{1}{r^3}\right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{E(k^3 - 1)} \left[P_i - P_o k^3 + \frac{k^3}{2r^3} (P_i - P_o) \right] + C\alpha (\nu^* - 1) \left(\theta(r) - \frac{I(r)}{r^3} \right) \right\} \end{aligned} \quad (76-3)$$

$$\begin{aligned} u_R^H(r) = \frac{C\alpha I^*}{A(k^3 - 1)} \left[\frac{1}{r^2} + \frac{2r(A - B)}{A + 2B} \right] + \\ + \frac{1}{E(k^3 - 1)} \left[\frac{(P_i - P_o k^3)r}{A + 2B} + \frac{k^3(P_i - P_o)}{2r^2(A - B)} \right] + \frac{C\alpha I(r)}{Ar^2} \end{aligned} \quad (77-3)$$

روابط فوق با جایگزینی روابط (23-2) و (8-3) به صورت زیر بازنویسی می‌شوند.

$$\begin{aligned} \sigma_R^H(r) = E \left\{ \frac{2\alpha I^*}{(1 - \nu)(k^3 - 1)} \left(1 - \frac{1}{r^3}\right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{E(k^3 - 1)} \left[P_i - P_o k^3 - \frac{k^3}{r^3} (P_i - P_o) \right] - \frac{2\alpha I(r)}{(1 - \nu)r^3} \right\} \end{aligned} \quad (78-3)$$

$$\sigma_{\theta}^H(r) = E \left\{ \frac{\alpha I^*}{(1-\nu)(k^3-1)} \left(2 + \frac{1}{r^3} \right) + \frac{1}{E(k^3-1)} \left[P_i - P_o k^3 + \frac{k^3}{r^3} (P_i - P_o) \right] + \alpha \left(\frac{I(r)}{r^3} - \theta(r) \right) \right\} \quad (79-3)$$

$$u_R^H(r) = \frac{\alpha I^*}{(1-\nu)(k^3-1)} \left[2r(1-2\nu) + \frac{1+\nu}{r^2} \right] + \frac{1}{E(k^3-1)} \left[(1-2\nu)(P_i - P_o k^3)r + \frac{k^3}{2r^2} (1+\nu)(P_i - P_o) \right] + \frac{I(r)\alpha(1+\nu)}{r^2(1-\nu)} \quad (80-3)$$

در اینجا نیز برای محاسبه‌ی تنش مؤثر فون میزس از رابطه‌ی (۵۴-۲) استفاده می‌شود.

۳-۵ مطالعه‌ی موردی و مقایسه‌ی نتایج

به منظور مطالعه‌ی موردی و مقایسه‌ی نتایج حاصل از حلّ تحلیلی با مقادیر به دست آمده از حلّ عددی به کمک مدل‌سازی نرم‌افزاری، کره‌ی جدار ضخیم ناهمگن و همسانگردی به شعاع داخلی ۴۰ میلی‌متر و شعاع خارجی ۶۰ میلی‌متر را در نظر می‌گیریم. مدول یانگ و ضریب انبساط حرارتی در سطح داخلی به ترتیب دارای مقادیر $E_i = 200 \text{ GPa}$ و $\alpha_i = 1/2 \frac{\mu}{C}$ می‌باشند. همچنین فرض می‌شود که نسبت پواسان دارای مقدار ثابت $\nu = 0.3$ در طی ضخامت است. دمای سطوح داخلی و خارجی کره به ترتیب $T_i = 25 \text{ } ^\circ\text{C}$ و $T_o = 125 \text{ } ^\circ\text{C}$ بوده و فشار $P = P_i = P_o = 80 \text{ MPa}$ به سطوح داخلی و خارجی وارد می‌شود. نتایج را برای چهار حالت بارگذاری عدم اعمال فشار داخلی و خارجی، تنها فشار داخلی، تنها فشار خارجی و اعمال هم‌زمان فشار داخلی و خارجی که تحت بار حرارتی پایا می‌باشند ارائه می‌شود.

ثابت‌های ناهمگنی n_1 و n_2 برابر یکدیگر فرض شده و خطوط ممتد نشانگر حلّ تحلیلی و دایره-

های کوچک نماینده‌ی حلّ عددی صورت گرفته می‌باشند.

۳-۵-۱ بار حرارتی پایا

شکل (۳-۳) توزیع تنش شعاعی بی‌بعد شده در راستای ضخامت کره را نشان می‌دهد. مقدار تنش شعاعی در لایه‌های داخلی و خارجی کره، برای مقادیر مختلف ضریب ناهمگنی یکسان بوده و شرایط مرزی در این نقاط ارضا می‌شود و σ_R / σ_R^H برابر یک است. همانطور که مشاهده می‌شود تنش شعاعی برای تمام مقادیر ضریب ناهمگنی مثبت و کششی بوده، همچنین با افزایش ضریب ناهمگنی مقدار تنش شعاعی نیز افزایش می‌یابد.

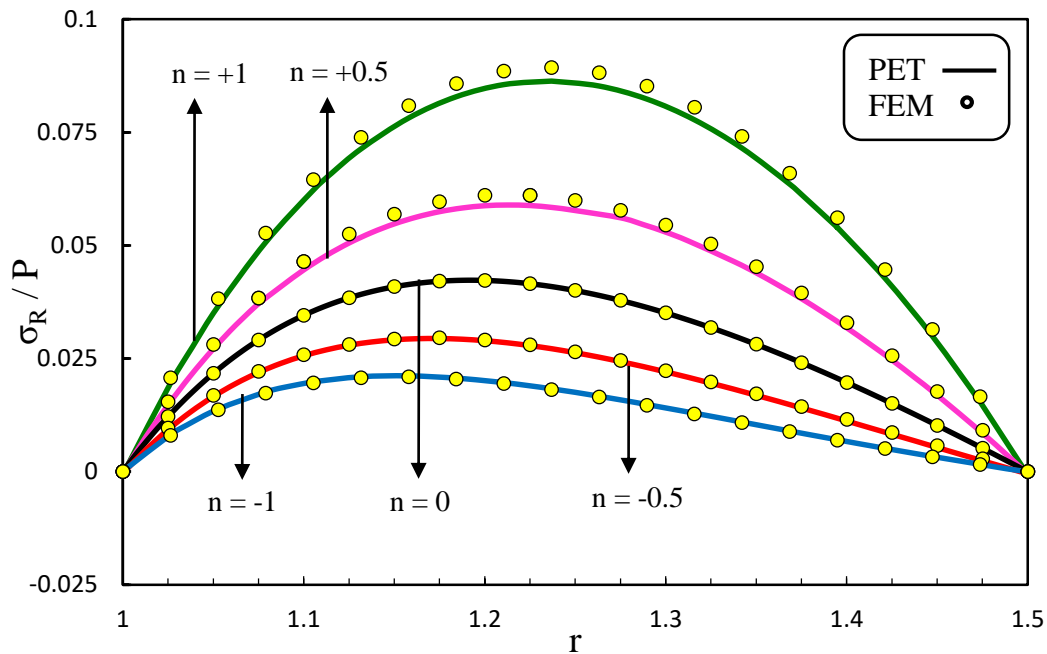
شکل (۴-۳) توزیع تنش محیطی بی‌بعد شده را نسبت به ضخامت کره نشان می‌دهد. مقدار تنش محیطی در هیچ کدام از لایه‌های داخلی و خارجی و برای هیچ یک از مقادیر مختلف ضریب ناهمگنی یکسان نبوده و نسبت $\sigma_\theta / \sigma_\theta^H$ برابر یک نمی‌باشد.

در $\nu < 1/3$ ، مقادیر تنش محیطی برای تمام ضرایب ناهمگنی در حال کاهش است و منحنی‌ها به هم نزدیک می‌شوند و رفتار مشابهی را از خود نشان می‌دهند، این در حالی است که در $\nu > 1/3$ ، مقدار تنش برای ضرایب مثبت ناهمگنی و ماده‌ی همگن در حال افزایش و برای ضرایب ناهمگنی منفی تقریباً ثابت است. در تمام ضخامت کره مقدار تنش محیطی با افزایش ضریب ناهمگنی افزایش می‌یابد.

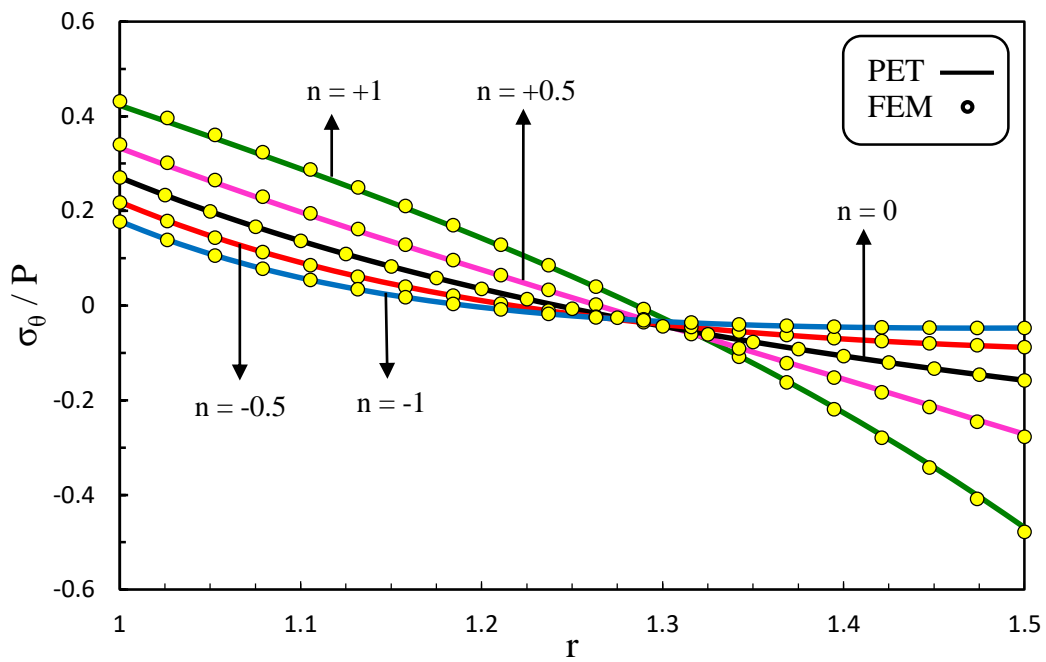
شکل (۵-۳) توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد شده را نسبت به شعاع بی‌بعد شده نشان می‌دهد. در هیچ یک از نقاط نسبت u_r / u_r^H برابر یک نمی‌باشد. به‌ازای مقادیر منفی از ضریب ناهمگنی، مقدار جابه‌جایی کوچکتر از کره‌ی همگن و به‌ازای مقادیر مثبت از ضریب ناهمگنی بزرگتر از آن می‌باشد. این نسبت‌ها در تمام ضخامت دیواره، تقریباً دارای مقدار ثابتی می‌باشند و منحنی‌ها به‌ازای مقادیر مختلف از ضریب ناهمگنی رفتار مشابهی را نسبت به کره‌ی همگن از خود نشان می‌دهند.

شکل (۶-۳) توزیع تنش مؤثر بی‌بعد شده را نسبت به ضخامت کره نشان می‌دهد. مقدار تنش مؤثر در لایه‌های داخلی کره کاهش و در لایه‌های خارجی آن افزایش می‌یابد.

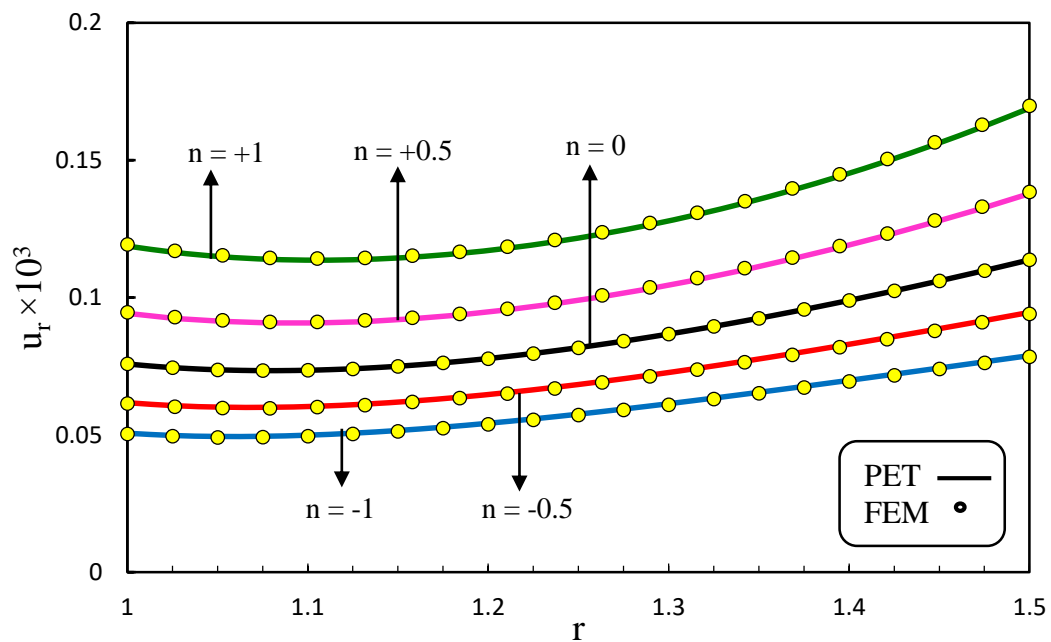
با توجه به شکل در تمام نقاط ضخامت کره به غیر از لایه‌های میانی با کاهش ضریب ناهمگنی، تنش مؤثر نیز کاهش می‌یابد به گونه‌ای که مقادیر ضریب ناهمگنی منفی علاوه بر اینکه کوچکترین مقادیر تنش مؤثر را دارند، دارای کمترین دامنه‌ی تغییر نیز می‌باشند. لذا در طراحی‌ها از اهمیت بالایی برخوردارند.



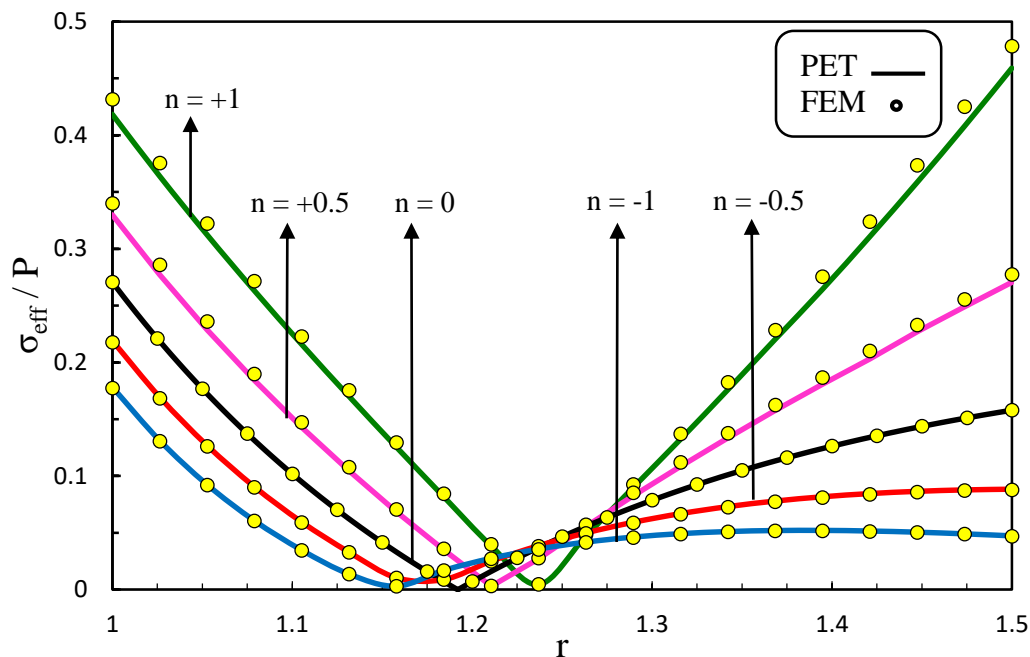
شکل ۳-۳ توزیع تنش شعاعی در کره‌ی ناهمگن تحت بار حرارتی پایا



شکل ۳-۴ توزیع تنش محیطی در کره‌ی ناهمگن تحت بار حرارتی پایا



شکل ۳-۵ توزیع جابه‌جایی شعاعی در کره‌ی ناهمگن تحت بار حرارتی پایا



شکل ۳-۶ توزیع تنش مؤثر در کره‌ی ناهمگن تحت بار حرارتی پایا

۳-۵-۲ فشار داخلی و بار حرارتی پایا

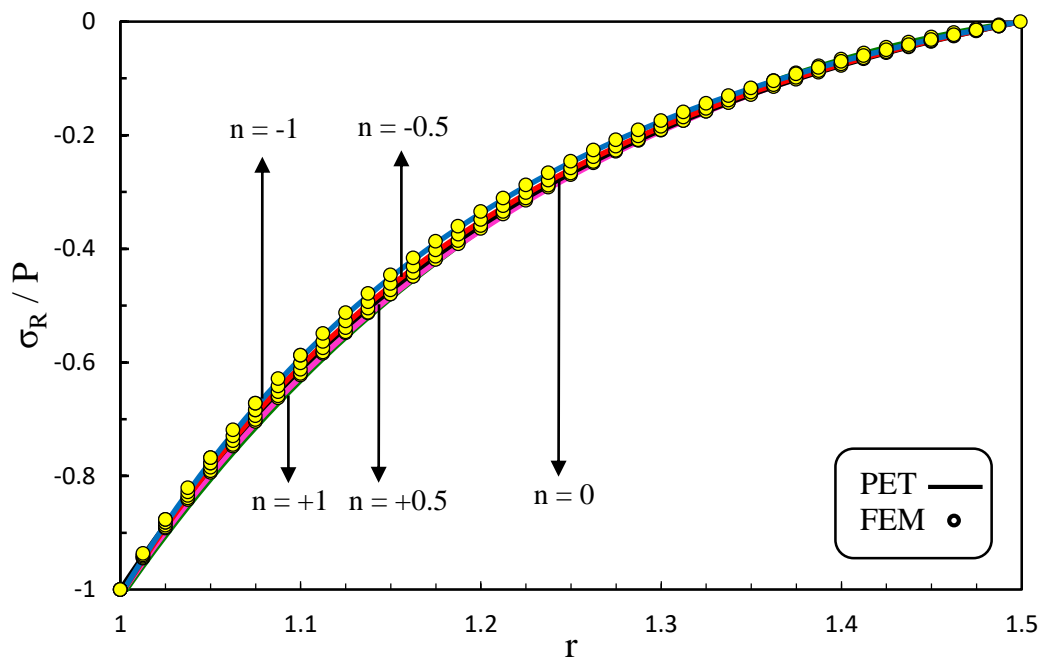
شکل (۳-۷) توزیع تنش شعاعی بی‌بعد شده را نسبت به شعاع بی‌بعد شده نمایش می‌دهد. مقدار تنش شعاعی در لایه‌های داخلی و خارجی برای تمامی مقادیر ضریب ناهمگنی باهم برابر بوده و در هر دو لایه نسبت σ_R / σ_R^H برابر یک است. همان‌طور که مشاهده می‌شود منحنی‌های تمامی ضرایب ناهمگنی بسیار به یکدیگر نزدیک می‌باشند و دارای مقادیر تنش شعاعی منفی می‌باشند. مشابه شکل تنش شعاعی فصل گذشته، به‌ازای مقادیر منفی از ضریب ناهمگنی در طول دیواره، مقدار تنش شعاعی نسبت به ماده‌ی همگن کاهش یافته و به‌ازای ضرایب ناهمگنی مثبت افزایش می‌یابد.

شکل (۳-۸) توزیع تنش محیطی بی‌بعد شده را نسبت به شعاع بی‌بعد شده نمایش می‌دهد. مقدار تنش محیطی در هیچ کدام از لایه‌های داخلی و خارجی و برای هیچ یک از مقادیر ضریب ناهمگنی نسبت σ_R / σ_R^H برابر یک نمی‌باشد.

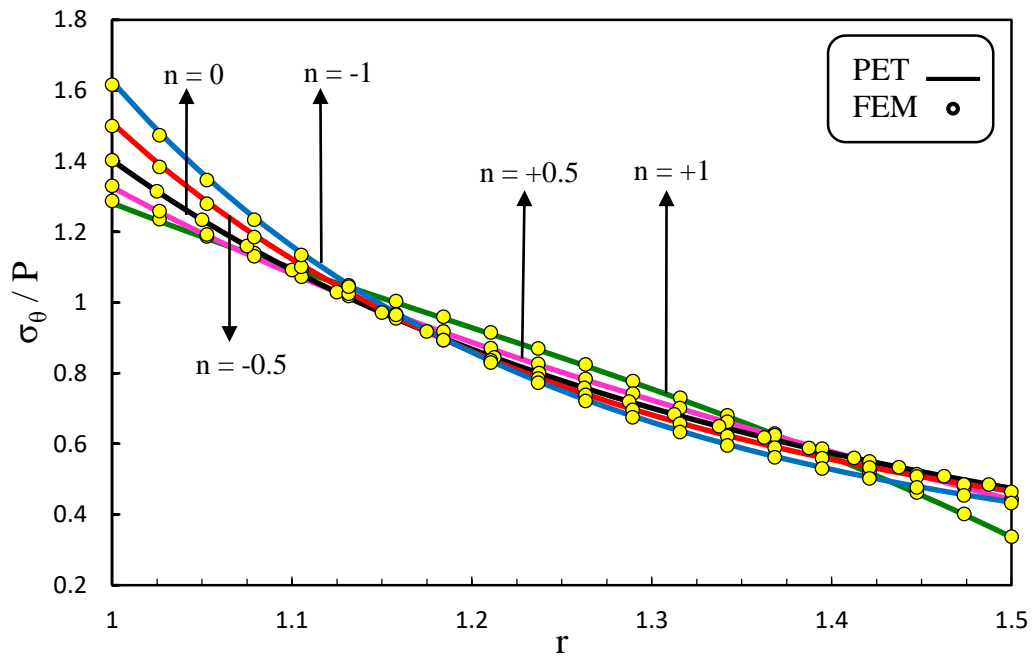
در لایه‌های داخلی کره با افزایش ضریب ناهمگنی مقدار تنش محیطی کاهش و در لایه‌های میانی افزایش می‌یابد. منحنی‌ها در طول دیواره روند کاهشی داشته و در حدود $r = 1/125$ و $r = 1/4$ به کره‌ی همگن همگرا می‌باشند.

شکل (۹-۳) توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد شده را در راستای شعاع بی‌بعد شده نمایش می‌دهد. در هیچ یک از نقاط نسبت u_r / u_r^H برابر یک نمی‌باشد. به‌ازای مقادیر منفی از ضریب ناهمگنی، مقدار جابه‌جایی بزرگتر از کره‌ی همگن و به‌ازای مقادیر مثبت از ضریب ناهمگنی کوچکتر از آن می‌باشد. این نسبت‌ها در تمام ضخامت دیواره، تقریباً دارای مقدار ثابتی می‌باشند و منحنی‌ها در طول ضخامت کره به‌ازای مقادیر مختلف از ضریب ناهمگنی، مقادیر جابه‌جایی مثبت با روند کاهشی داشته و رفتار مشابهی را نسبت به کره‌ی همگن از خود نشان می‌دهند.

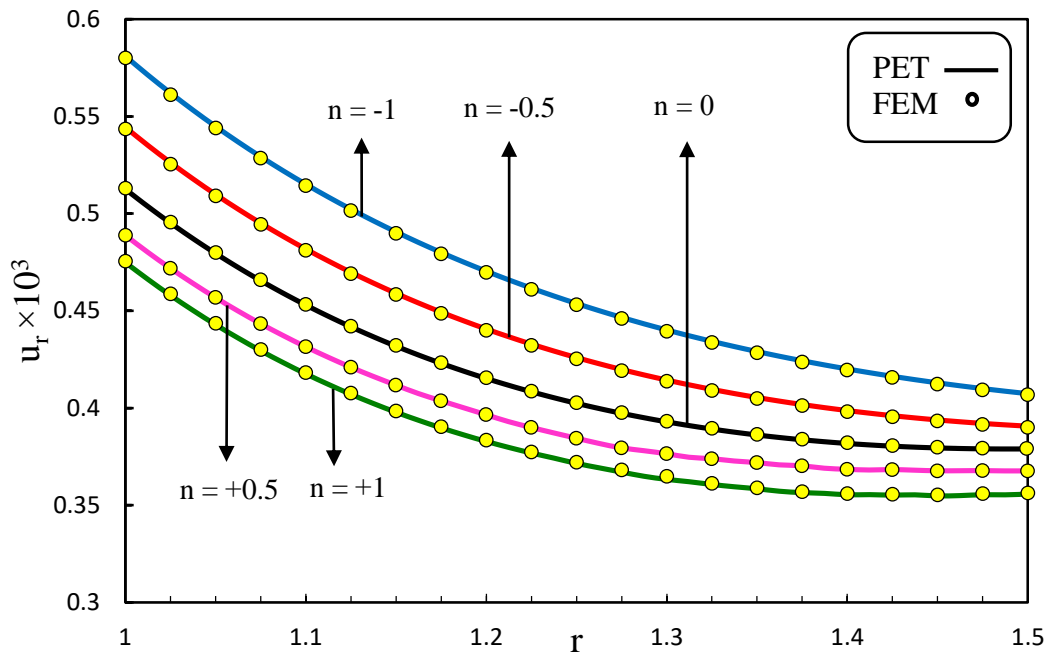
شکل (۱۰-۳) توزیع تنش مؤثر بی‌بعد شده را نسبت به شعاع بی‌بعد شده نشان می‌دهد. رفتار این شکل کاملاً مشابه شکل (۸-۳) می‌باشد، تنها دامنه‌ی تغییرات تنش مؤثر بزرگتر گردیده ولی منحنی‌های ضرایب ناهمگنی نسبت به شکل (۸-۳) به‌هم نزدیکتر شده‌اند.



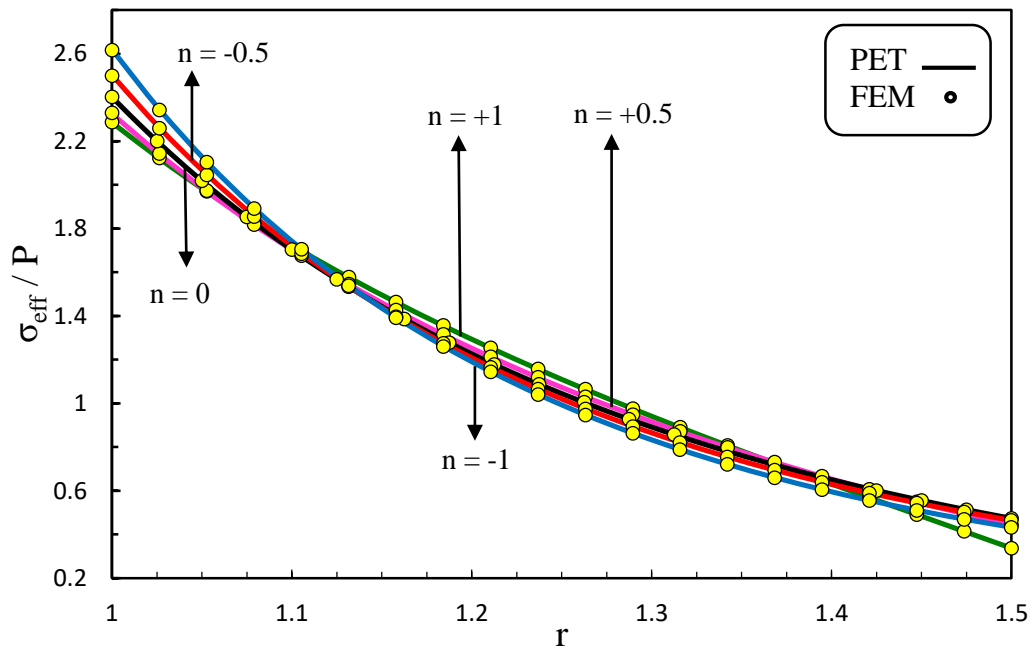
شکل ۳-۷ توزیع تنش شعاعی بی‌بعد شده تحت فشار داخلی و بار حرارتی پایا



شکل ۳-۸ توزیع تنش محیطی بی‌بعد شده تحت فشار داخلی و بار حرارتی پایا



شکل ۹-۳ توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد شده تحت فشار داخلی و بار حرارتی پایا



شکل ۱۰-۳ توزیع تنش مؤثر بی‌بعد شده تحت فشار داخلی و بار حرارتی پایا

۳-۵-۳ فشار خارجی و بار حرارتی پایا

شکل (۳-۱۱) توزیع تنش شعاعی بی‌بعد شده را نسبت به شعاع بی‌بعد شده نمایش می‌دهد. مقدار تنش شعاعی در لایه‌های داخلی و خارجی برای تمامی مقادیر ضریب ناهمگنی باهم برابر بوده و در هر دو لایه نسبت σ_R / σ_R^H برابر یک است و شرایط مرزی مسأله کاملاً ارضا می‌شوند. مشابه شکل تنش شعاعی فصل گذشته، تنش شعاعی در طول دیواره‌ی کره و به‌ازای مقادیر منفی ضریب ناهمگنی، نسبت به ماده‌ی همگن افزایش و به‌ازای مقادیر مثبت این ضریب کاهش می‌یابد، در واقع در تمام ضخامت کره با افزایش ضریب ناهمگنی مقدار تنش شعاعی کاهش می‌یابد. تمام منحنی‌ها به‌دلیل تنش فشاری ایجاد شده، مطابق انتظار دارای تنش شعاعی منفی با افزایش مقدار در راستای ضخامت می‌باشند.

شکل (۳-۱۲) نمودار توزیع تنش محیطی بی‌بعد شده را در طی ضخامت کره نشان می‌دهد. مقدار این تنش در هیچ کدام از لایه‌های داخلی و خارجی و برای هیچ یک از مقادیر ضریب ناهمگنی یکسان نبوده و نسبت $\sigma_\theta / \sigma_\theta^H$ برابر یک نیست.

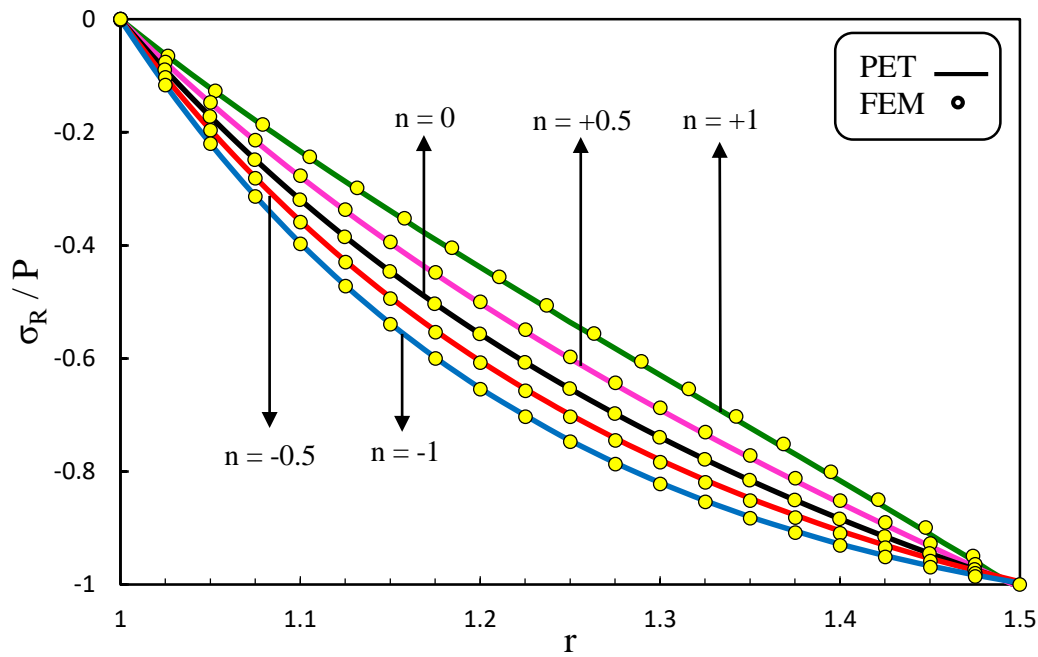
به‌ازای مقادیر منفی ضریب ناهمگنی، تنش محیطی در نیمه‌ی داخلی کره، بزرگتر از تنش ایجاد شده در ماده‌ی همگن و در نیمه‌ی خارجی کره، کوچکتر از آن می‌باشد، عکس این قضیه برای مقادیر مثبت ضریب ناهمگنی اتفاق می‌افتد، در واقع با افزایش ضریب ناهمگنی تنش محیطی در نیمه‌ی داخلی کاهش و در نیمه‌ی خارجی ضخامت کره افزایش می‌یابد. هم‌چنین ملاحظه می‌شود که منحنی‌ها در لایه‌ی داخلی کره به یک مقدار واحد میل کرده و رفتار مشابهی از خود نشان می‌دهند، این درحالی است که در نیمه خارجی عکس این اتفاق روی می‌دهد.

شکل (۳-۱۳) توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد شده را در طول دیواره‌ی کره نمایش می‌دهد. در هیچ یک از نقاط، نسبت u_r / u_r^H برابر یک نیست. جابه‌جایی ایجاد شده در کره منفی بوده و با افزایش n ، مقدار آن کاهش می‌یابد، به‌گونه‌ای که مقادیر جابه‌جایی برای ضرایب ناهمگنی منفی بزرگتر از

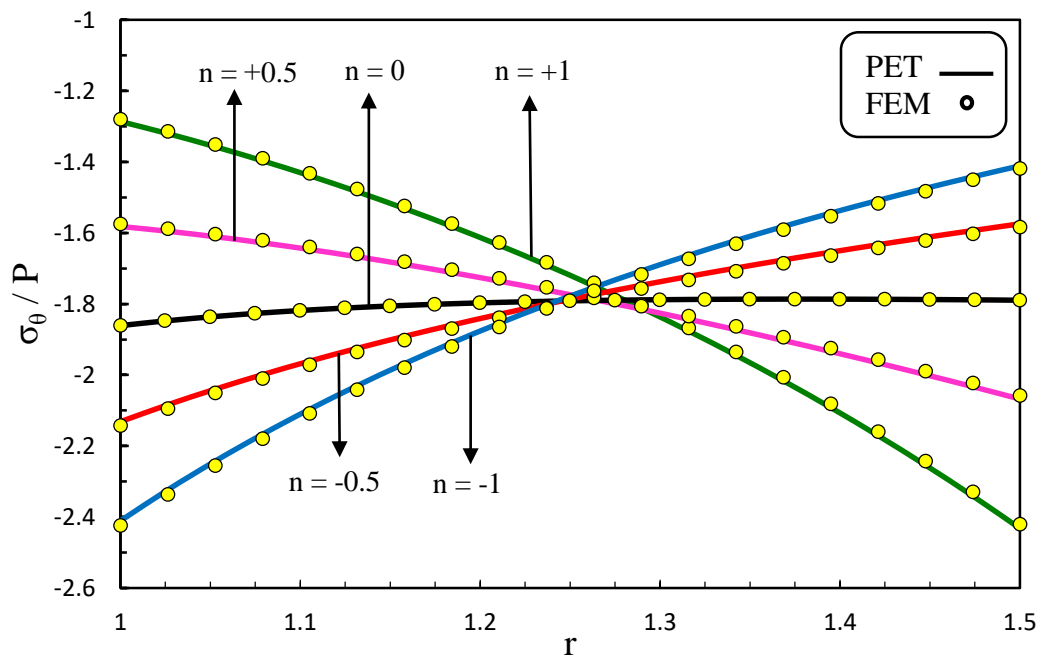
ماده‌ی همگن و برای ضرایب ناهمگنی مثبت کوچکتر از آن می‌باشد. این نسبت‌ها در تمام ضخامت دیواره، تقریباً دارای مقدار ثابتی می‌باشند و منحنی‌ها به‌ازای مقادیر مختلف ضریب ناهمگنی، رفتار مشابهی را در مقایسه با کره‌ی همگن از خود نشان می‌دهند. با مقایسه این شکل با شکل (۲-۱۰) فصل گذشته، می‌توان به تشابه آنها و تأثیر بار حرارتی پایا در کاهش مقدار جابه‌جایی‌ها رسید.

شکل (۳-۱۴) نمودار توزیع تنش مؤثر بی‌بعد شده را در دیواره‌ی کره نشان می‌دهد. در نیمه‌ی داخلی کره و به‌ازای شعاع‌های کوچکتر از لایه‌ی میانی، با افزایش مقدار ضریب ناهمگنی، شاهد کاهش مقادیر تنش مؤثر بوده و در نیمه‌ی دیگر کره، شاهد افزایش این مقدار هستیم. در این نمودار نیز به‌ازای هیچ یک از مقادیر n و در هیچ کدام از لایه‌های داخلی و خارجی، مقادیر تنش مؤثر یکسان نبوده و نسبت $\sigma_{eff} / \sigma_{eff}^H$ در هیچ یک از این سطوح برابر یک نیست.

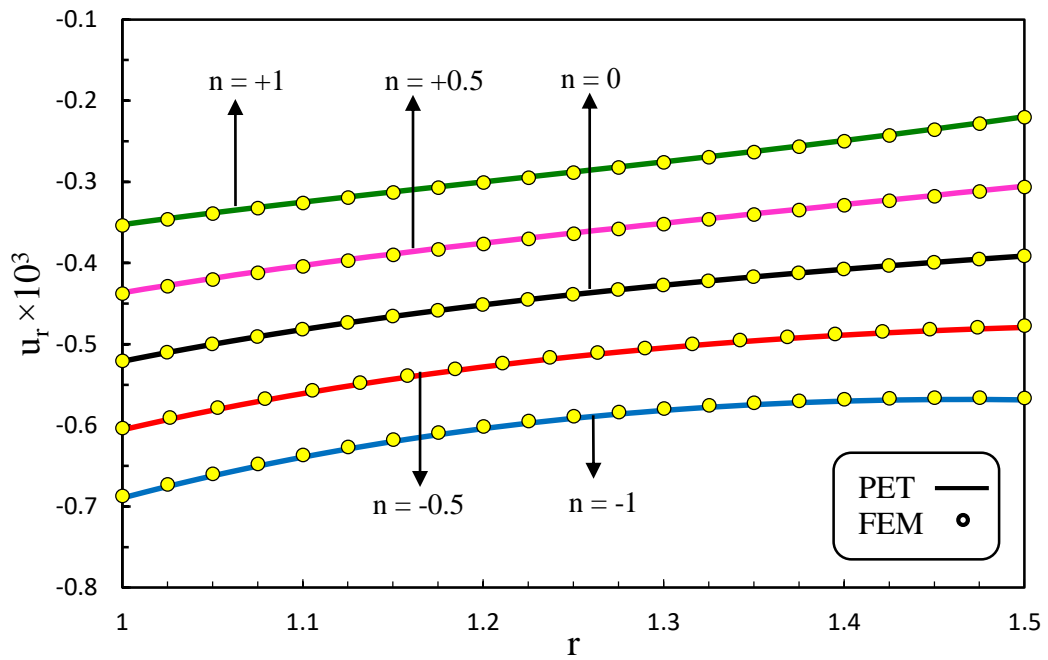
در نیمه‌ی داخلی کره، منحنی‌ها رفتار مشابهی داشته و به یک مقدار واحد نزدیک می‌شوند، بنابراین تنها در شعاع حدود ۱/۲، نسبت $\sigma_{eff} / \sigma_{eff}^H$ برابر یک می‌شود. با در نظر گرفتن تمام ضخامت کره به‌ازای n های مثبت، مقادیر کوچکتر و تغییرات کمتری از تنش مؤثر را نسبت به n های منفی شاهد هستیم. لذا در کره‌ای که تنها تحت فشار خارجی باشد، با انتخاب مقادیر مثبت برای ضریب ناهمگنی، کره در ناحیه ایمن تری از نظر تنش‌های ایجاد شده نسبت به نقطه‌ی تسلیم ماده قرار می‌گیرد.



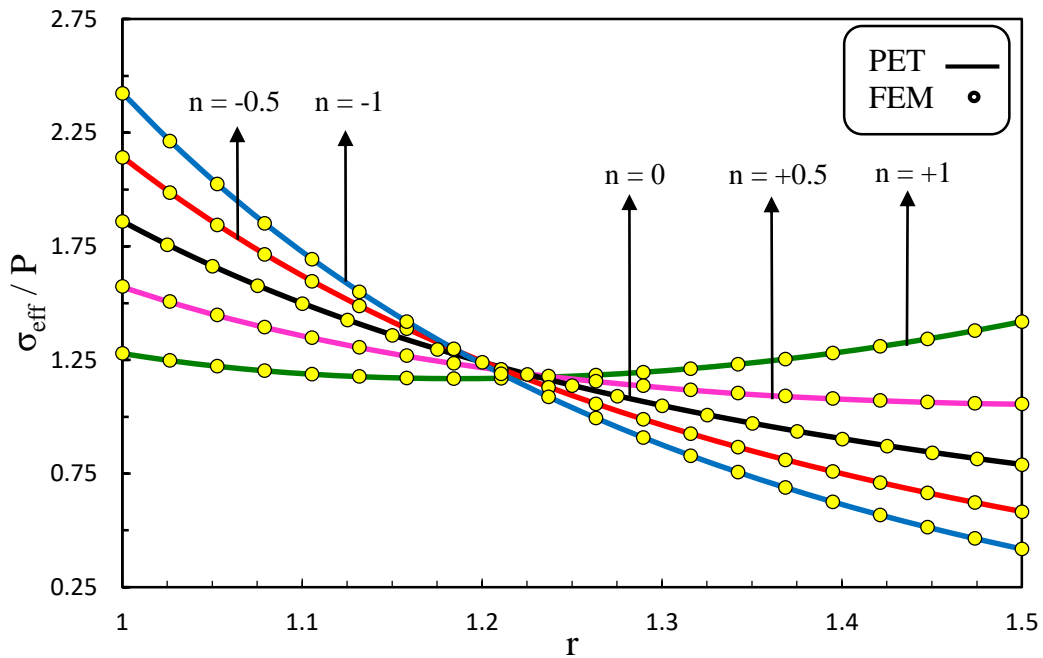
شکل ۱۱-۳ توزیع تنش شعاعی بی‌بعد شده تحت فشار خارجی و بار حرارتی پایا



شکل ۱۲-۳ توزیع تنش محیطی بی‌بعد شده تحت فشار خارجی و بار حرارتی پایا



شکل ۳-۱۳ توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد شده تحت فشار خارجی و بار حرارتی پایا



شکل ۳-۱۴ توزیع تنش مؤثر بی‌بعد شده تحت فشار خارجی و بار حرارتی پایا

۳-۵-۴ فشار داخلی و خارجی و بار حرارتی پایا

شکل (۳-۱۵) نمودار توزیع تنش شعاعی بی‌بعد شده را نسبت به ضخامت کره نشان می‌دهد. مقدار تنش شعاعی در لایه‌های داخلی و خارجی کره، برای مقادیر مختلف ضریب ناهمگنی یکسان بوده و نسبت σ_R / σ_R^H برابر یک است و شرایط مرزی در این لایه‌ها ارضا می‌شود.

تنش شعاعی برای ضرایب ناهمگنی منفی در لایه‌های میانی نسبت به حالت همگن افزایش داشته و برای ضرایب ناهمگنی مثبت در لایه‌های میانی نسبت به حالت همگن کاهش داشته است. در واقع با افزایش ضریب ناهمگنی از مقدار تنش شعاعی کاسته می‌شود.

شکل (۳-۱۶) نمودار توزیع تنش محیطی بی‌بعد شده را در طی ضخامت کره نشان می‌دهد. مقدار این تنش در هیچ کدام از لایه‌های داخلی و خارجی و برای هیچ یک از مقادیر ضریب ناهمگنی یکسان نبوده و نسبت $\sigma_\theta / \sigma_\theta^H$ برابر یک نیست.

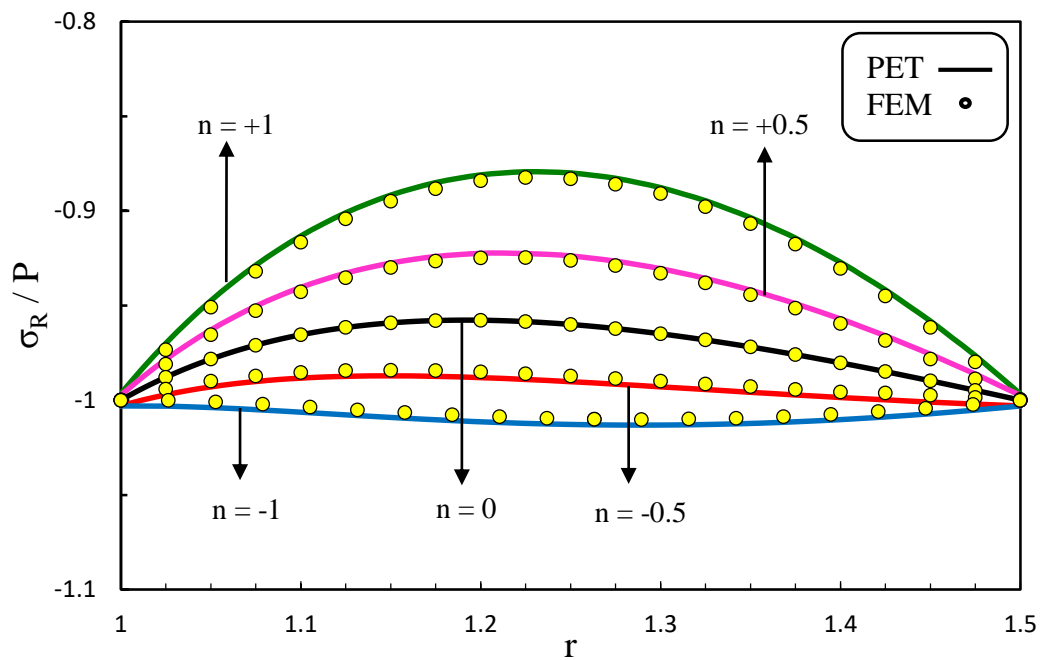
به‌ازای مقادیر منفی ضریب ناهمگنی، تنش محیطی در نیمه‌ی داخلی کره، بزرگتر از تنش ایجاد شده در ماده‌ی همگن و در نیمه‌ی خارجی کره، کوچکتر از آن می‌باشد، عکس این قضیه برای مقادیر مثبت ضریب ناهمگنی اتفاق می‌افتد. در واقع با افزایش ضریب ناهمگنی، مقادیر تنش محیطی در نیمه‌ی داخلی کره کاهش و در نیمه‌ی خارجی آن افزایش می‌یابد. همچنین ملاحظه می‌شود که منحنی‌ها در لایه‌ی داخلی کره به یک مقدار واحد میل کرده و رفتار مشابهی از خود نشان می‌دهند، این در حالی است که در نیمه خارجی عکس این اتفاق روی می‌دهد. لذا تنها در شعاع حدود $1/3$ نسبت $\sigma_\theta / \sigma_\theta^H$ برابر یک را برای منحنی‌ها مشاهده می‌کنیم.

شکل (۳-۱۷) توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد شده را در طول دیواره‌ی کره نمایش می‌دهد. در هیچ یک از نقاط، نسبت u_r / u_r^H برابر یک نیست. جابه‌جایی ایجاد شده در کره منفی و با افزایش n

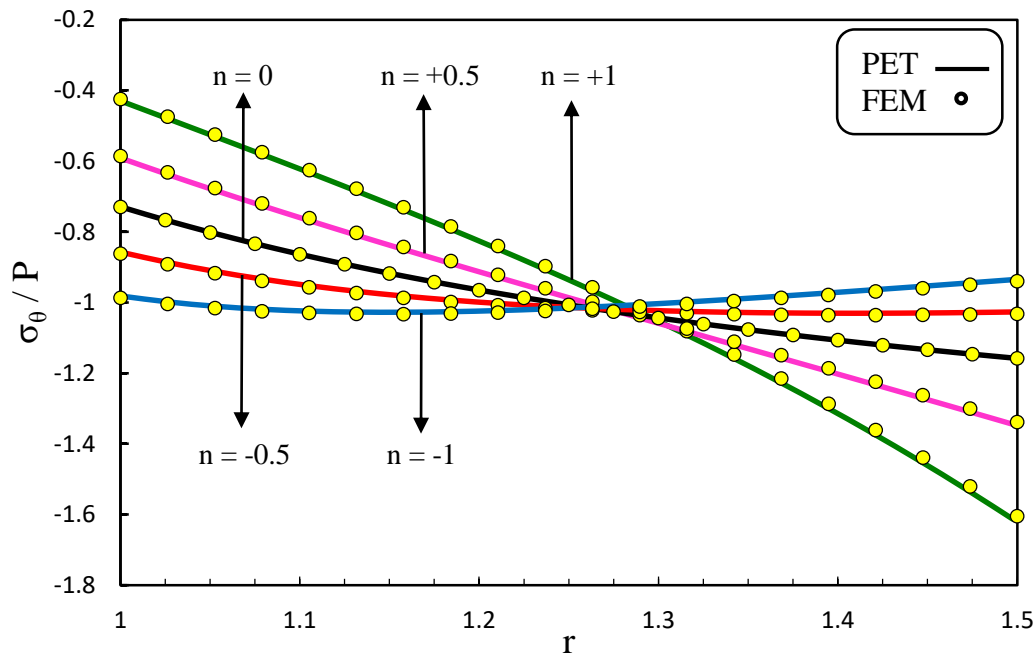
مقدار آن کاهش می‌یابد، به گونه‌ای که مقادیر جابه‌جایی برای ضرایب ناهمگنی منفی بزرگتر از ماده‌ی همگن و برای ضرایب ناهمگنی مثبت کوچکتر از آن می‌باشد. مانند قبل این نسبت‌ها در تمام ضخامت دیواره، تقریباً دارای مقدار ثابتی می‌باشند و منحنی‌ها به‌ازای مقادیر مختلف ضریب ناهمگنی، رفتار مشابهی را در مقایسه با کره‌ی همگن از خود نشان می‌دهند. در منحنی $n = 1$ جابه‌جایی دارای مقدار تقریباً ثابت و نزدیک به صفر است. از این‌رو در صورتی که جابه‌جایی ایجاد شده در کره عامل تعیین کننده در طراحی آن باشد، انتخاب ماده‌ی ناهمگن با ضریب ناهمگنی $n = 1$ پیشنهاد می‌شود.

شکل (۳-۱۸) توزیع تنش مؤثر بی‌بعد شده را نسبت به ضخامت کره نشان می‌دهد.

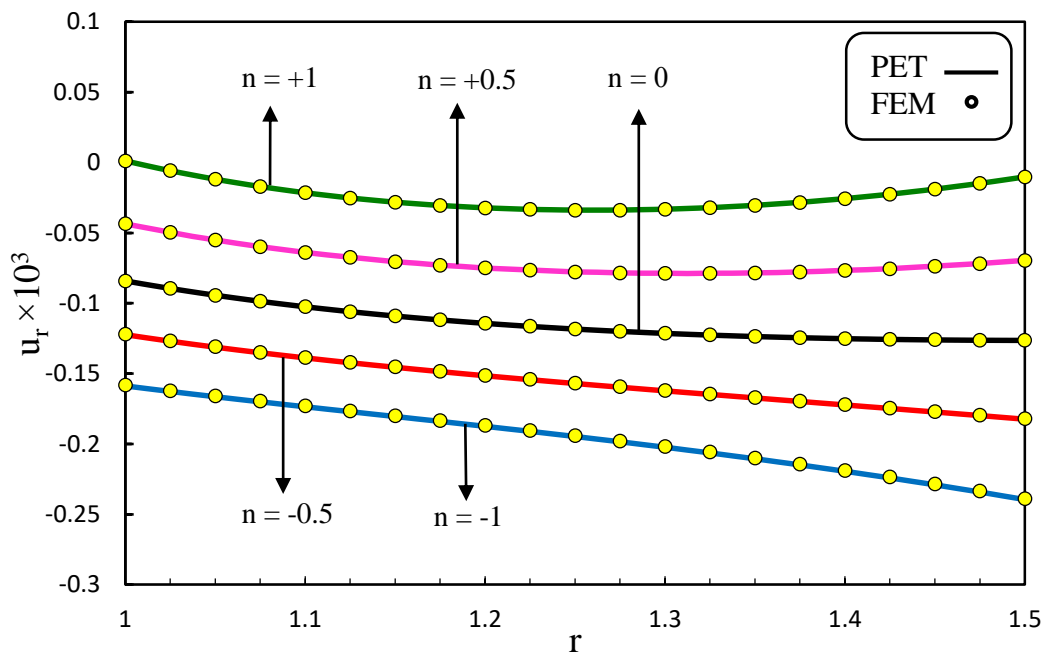
رفتار منحنی‌ها در این شکل مشابه شکل (۳-۶) می‌باشد، با این تفاوت که منحنی‌های ضرایب منفی ناهمگنی دارای مقادیر تنش مؤثر کوچکتر با تغییرات بسیار اندک می‌باشند که این موضوع اهمیت استفاده از آن ضرایب را در طراحی‌ها نشان می‌دهد. از سوی دیگر منحنی‌های ضرایب مثبت ناهمگنی با مقادیر تنش مؤثر بزرگتر از ماده‌ی همگن و دامنه‌ی تغییرات بیشتر نشان می‌دهد در این شرایط بارگذاری، انتخاب مطلوبی برای ماده‌ی FG به شمار نمی‌رود.



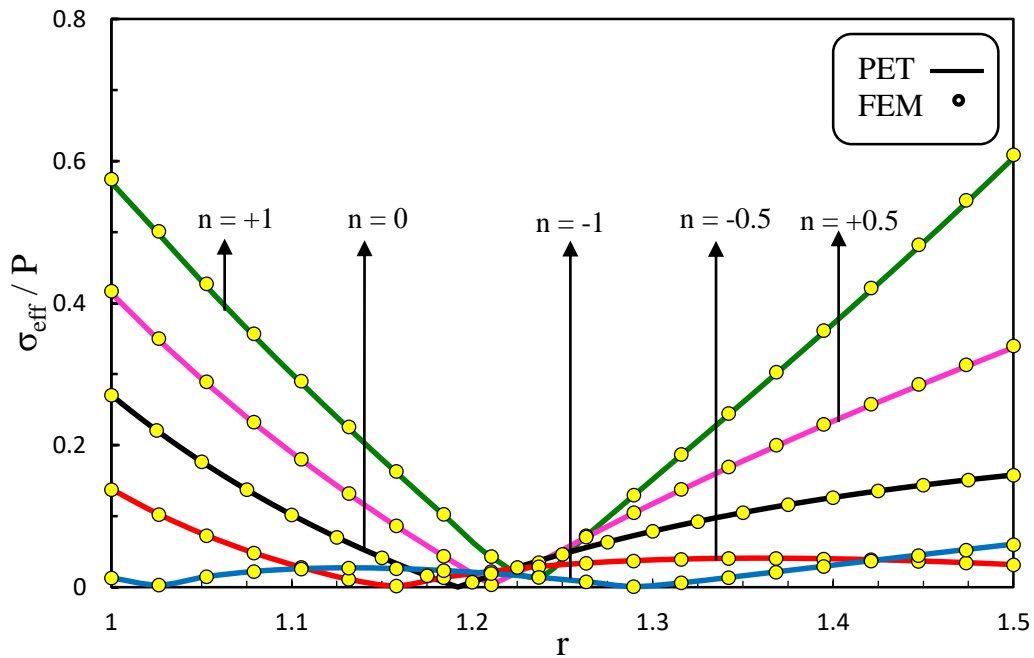
شکل ۳-۱۵ توزیع تنش شعاعی بی‌بعد شده تحت فشار داخلی و خارجی و بار حرارتی پایا



شکل ۳-۱۶ توزیع تنش محیطی بی‌بعد شده تحت فشار داخلی و خارجی و بار حرارتی پایا



شکل ۳-۱۷ توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد شده تحت فشار داخلی و خارجی و بار حرارتی پایا



شکل ۳-۱۸ توزیع تنش مؤثر بی‌بعد شده تحت فشار داخلی و خارجی و بار حرارتی پایا

جدول (۱-۳) مقادیر تنش مؤثر حاصل از تحلیل ترموالاستیک کره به دو روش PET و FEM را برای حالت‌های فشار داخلی، فشار خارجی و فشار هم‌زمان داخلی و خارجی، در لایه‌ی میانی کره نمایش می‌دهد.

جدول ۱-۳ مقایسه مقادیر تنش مؤثر حاصل از PET و FEM در لایه‌ی میانی

Pressure (MPa)		σ_{eff} (MPa)				
		$n = -1$	$n = -0.5$	$n = 0$	$n = 0.5$	$n = 1$
$P_i = 80$	PET	79/2	80/8	83/6	86/0.8	84/4
	FEM	79/3	80/9	83/9	86/16	84/56
$P_o = 80$	PET	84/24	87/28	90/88	93/2	94/72
	FEM	84/32	87/34	90/95	93/11	94/56
$P_i = P_o = 80$	PET	0/0.8	2/4	3/76	4/16	3/36
	FEM	0/0.8	2/48	3/72	4/24	3/44

۳-۶ جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

مانند فصل گذشته نتایج حاصل از حلّ تحلیلی و عددی، دارای تطابق بسیار خوبی می‌باشند. بررسی نتایج نشان می‌دهد که مقدار جابه‌جایی شعاعی در کره‌ی تحت فشار با افزایش ضریب ناهمگنی کاهش می‌یابد. در حالی که در جابه‌جایی حاصل از بار حرارتی پایا عکس این قضیه اتفاق می‌افتد. اعمال بار حرارتی پایا با شرایط ذکر شده در قبل، در کره‌ی تحت فشار داخلی باعث افزایش مقادیر جابه‌جایی نسبت به فصل گذشته و در کره‌های تحت فشار خارجی و فشار داخلی و خارجی سبب کاهش مقادیر آن می‌شود، چرا که بار حرارتی پایا جابه‌جایی مثبت تولید می‌کند و با توجه به برقراری قانون جمع آثار، باعث کاهش مقادیر جابه‌جایی منفی و افزایش مقدار جابه‌جایی مثبت می‌گردد.

مواد با ضرایب ناهمگنی مثبت می‌توانند بهترین انتخاب برای کره‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی و بار حرارتی پایا باشند و برای حالت اعمال فشار خارجی، مواد با ضرایب ناهمگنی منفی انتخاب مناسبی می‌باشند، چرا که علاوه بر ایجاد تنش مؤثر کوچکتر دامنه‌ی تغییرات کمتری در ضخامت کره دارند.

تنش شعاعی حاصل از بار حرارتی پایا دارای مقادیر مثبت بسیار اندکی است لذا جمع آثار آن با نتایج فصل گذشته تغییرات چندانی در نتایج مربوط به تنش شعاعی در حالات بارگذاری مختلف پدید نمی‌آورد.

منحنی‌های تنش محیطی کره‌ی ناهمگن در حالات بارگذاری فشار خارجی و اعمال فشار داخلی و خارجی تحت بار حرارتی پایا دارای رفتاری مشابه فصل گذشته می‌باشند، به‌گونه‌ای که در نیمه‌ی داخلی کره با افزایش ضریب ناهمگنی مقدار تنش محیطی کاهش و در نیمه‌ی خارجی آن افزایش می‌یابد.

فصل ۴

جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

۴-۱ مقدمه

مخازن کرووی به دلیل تقارن در هندسه، از قابلیت توزیع مناسب تنش‌های ایجاد شده در اثر انواع بارگذاری‌های متقارن محوری، از قبیل انواع فشارهای داخلی و خارجی، نیروها و لنگرها، گرادیان دمایی و بارگذاری‌های متنوع دیگر برخوردار هستند. دست‌یابی به روش‌های مختلف تحلیل این گروه از پوسته‌ها با تغییرات هندسه، ماده و بارگذاری مورد علاقه‌ی پژوهشگران و نیاز صنعتگران می‌باشد. در همین راستا در این رساله سعی شده است تا با ارائه‌ی روش حل تحلیلی بر مبنای تئوری الاستیسیته‌ی مستوی برای کره‌ی جدار ضخیم با ضخامت ثابت در حالت تقارن محوری تحت بارگذاری فشاری شامل فشار داخلی و خارجی و بارگذاری حرارتی به صورت بار حرارتی پایا در جداره‌ی کره ناشی از گرادیان دما، اثر هر یک از این بارگذاری‌ها بر روی مقادیر تنش و جابه‌جایی پوسته‌ی کرووی بررسی شود. در این فصل ضمن نگاهی گذرا به فصل‌های قبل، نتیجه‌گیری جامعی از مباحث مربوط به هر فصل صورت پذیرفته است و نهایتاً پیشنهادهایی برای ادامه و تکمیل کار ارائه شده است.

۴-۲ جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

به طور کلی تحلیل کره‌های جدار ضخیم (با جدار ثابت یا متغیر) در حالت متقارن محوری تحت انواع بارگذاری‌ها با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی منجر به ایجاد معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم بر حسب جابه‌جایی شعاعی کره می‌شود. این معادله را با استفاده از روش تغییر متغیر می‌توان به یک معادله‌ی هایپرژئومتریک اصلاح شده تبدیل کرد. در این صورت معادله دارای حل دقیق بوده و در حالت بارگذاری فشاری قابل حل می‌باشد.

یکی از روش‌های حل معادلات دیفرانسیل ناهمگن، استفاده از روش لاگرانژ می‌باشد. این روش بر مبنای به‌دست آوردن یک حل خصوصی برای معادله‌ی ناهمگن و جمع نتیجه‌ی حاصل با حل عمومی معادله‌ی همگن متناظر عمل می‌کند. از آنجا که توابع معرفی شده برای حل دقیق معادله در بخش اول

خود به صورت انتگرال‌های معین می‌باشند، لذا نمی‌توان از این شکل توابع در روش لاگرانژ و در به‌دست آوردن حلّ خصوصی استفاده کرد. پیشنهادی که برای حلّ معادله در این وضعیت ارائه شد، استفاده از بسط فوریه‌ی توابع به‌جای خود آنها بود. در این صورت به سادگی می‌توان حل به روش لاگرانژ را پیش برده و به جواب معادله‌ی حاکم رسید.

استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی در حلّ مسائل متقارن محوری که در آنها تنش و یا کرنش برشی ایجاد نشود بسیار مناسب بوده و نتایج حاصل از آن بسیار دقیق می‌باشد. در صنعت مسائلی از این دست به وفور یافت می‌شوند.

حالت اوّل: تحلیل الاستیک پوسته‌های کروی FGM

همانطور که در فصل دوّم اشاره شد، در کره‌ی ناهمگن تحت فشار تنش‌ها و جابه‌جایی وابسته به خواصّ مکانیکی می‌باشند، به‌گونه‌ای که جابه‌جایی شعاعی به ثابت ناهمگنی، نسبت پواسان و مدول الاستیسیته وابسته است در حالی که تنش‌ها مستقل از مدول الاستیسیته عمل می‌کنند. با بررسی توزیع جابه‌جایی و تنش‌های حاصل از تحلیل کره‌ی ناهمگن به کمک تئوری الاستیسیته‌ی مستوی و مقایسه‌ی آنها با حلّ عددی صورت گرفته توسط نرم‌افزار آباکوس، انطباق خوبی در نتایج مشاهده می‌شود. می‌توان نتیجه گرفت در کره‌ی جدار ضخیم با ضخامت ثابت، فشار داخلی یکنواخت سبب ایجاد جابه‌جایی شعاعی مثبت و فشار خارجی یکنواخت نیز باعث ایجاد جابه‌جایی شعاعی منفی در کره می‌شود. برای کره تحت هر سه حالت بارگذاری، مواد ناهمگن با مقادیر ثابت ناهمگنی مثبت سبب کاهش جابه‌جایی در کره نسبت به ماده‌ی همگن می‌شود در حالی که مقادیر ثابت ناهمگنی منفی باعث افزایش جابه‌جایی نسبت به ماده‌ی همگن می‌شود. با افزایش مقدار ضریب ناهمگنی و برای هر یک از دو نوع بارگذاری فشار داخلی و خارجی، مقادیر تنش محیطی و تنش مؤثر، در نیمه‌ی داخلی کره کاهش و در نیمه‌ی خارجی آن افزایش می‌یابند. با افزایش ضریب ناهمگنی، کاهش در مقدار تنش شعاعی در کره با فشار

خارجی قابل مشاهده است. در بارگذاری داخلی کره، مقدار تنش شعاعی با افزایش ضریب ناهمگنی افزایش می‌یابد. ماده با ضریب ناهمگنی $n = 1$ می‌تواند بهترین انتخاب برای تولید کره‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی یا خارجی باشد، چرا که علاوه بر داشتن کمترین مقادیر تنش مؤثر و جابه‌جایی شعاعی، دارای توزیع با گرادینان تغییر مقادیر بسیار اندک در دیواره‌ی کره می‌باشد. لذا با انتخاب هوشمندانه مواد می‌توان اثرات بارگذاری را به مقدار قابل توجهی کاهش داد.

حالت دوم: تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های کروی FGM

با توجه به آنچه در فصل سوم بیان شد، اعمال بار حرارتی پایا به سطوح داخلی و خارجی کره و در نتیجه تشکیل پروفیل دمایی در آن، تأثیر بسزایی بر مقادیر تنش و جابه‌جایی دارد. لازم به ذکر است همچون بخش قبل تنش‌ها و جابه‌جایی شعاعی کاملاً وابسته به خواص مکانیکی می‌باشند. در کره‌ی تحت بار حرارتی پایا از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی مقادیر جابه‌جایی شعاعی افزایش می‌یابد، در حالی که در کره‌ی تحت فشار داخلی، جابه‌جایی و تنش‌ها از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی کاهش پیدا می‌کنند. نتایج حاصل از حلّ تحلیل عددی، دارای تطابق خوبی می‌باشند. می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش مقدار ضریب ناهمگنی، مقادیر تنش محیطی و تنش مؤثر در حالت فشار خارجی در نیمه‌ی داخلی کره کاهش و در نیمه‌ی دیگر افزایش می‌یابند. علاوه بر آن، با افزایش ضریب ناهمگنی در این حالت، مقادیر تنش شعاعی و جابه‌جایی شعاعی کاهش می‌یابند.

همچنین به دلیل تحلیل در ناحیه‌ی الاستیک، می‌توان از خاصیت جمع آثار به‌جای تحلیل کره‌ی تحت بارگذاری همزمان فشاری و حرارتی استفاده کرد، به عنوان مثال جابجایی نهایی برابر مجموع جابه‌جایی ناشی از اعمال فشار یکنواخت و جابه‌جایی ناشی از بار حرارتی پایا می‌باشد، این خاصیت برای محاسبه‌ی تنش‌ها نیز صادق است.

۳-۴ پیشنهادها

با توجه به پژوهش‌هایی که در گذشته در رابطه با موضوع این رساله انجام شده و شیوه‌ی حلی که در این پژوهش ارائه شد، می‌توان دریافت که قابلیت بسیار فراوانی در تحلیل مسائل مشابه که تا پیش از این به شیوه‌ی غیر تحلیلی و با ساده‌سازی حل می‌گردید، وجود دارد. به‌منظور تکمیل این بررسی‌ها و با توجه به کاربرد وسیع و متنوع پوسته‌های کروی پیشنهادات زیر ارائه می‌گردد:

۱- تحلیل مسأله با در نظر گرفتن خاصیت پیزوالکتریک برای ماده‌ی ناهمگن

۲- تحلیل مسأله در معرض بارگذاری‌های دینامیکی و نیروهای حجمی با حفظ شرایط تقارن

محوری

۳- حلّ تحلیلی کره‌ی ناهمگن تحت انتقال حرارت گذرا با تغییرات توانی خواص

۴- حلّ تحلیلی کره‌ی ناهمگن تحت انتقال حرارت گذرا با تغییرات نمایی خواص

۵- حلّ تحلیلی کره‌ی ناهمگن تحت فشار غیر یکنواخت و متغیّر با زمان

۶- حلّ تحلیلی استوانه‌ی ناهمگن تحت انتقال حرارت ناپایا با تغییرات نمایی خواص

- [1] Flugge W.(1973) “**Stresses in Shells**” 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin.
- [۲] یوگورال ای. سی.(۱۳۷۵)، "تنش در ورق‌ها و پوسته‌ها"، ترجمه‌ی غلامحسین رحیمی، چ اول، انتشارات دانشگاه تربیت مدرس، دانشگاه تهران
- [3] Timoshenko S.P. & Goodier J.N.(1983) “**Theory of Elasticity**” 3rd ed., McGraw-Hill, New York.
- [4] Naghdi P.M. & Cooper R.M. (1956) “Propagation of elastic waves in cylindrical shells including the effects of transverse shear and rotary inertia” **J. Acoust. Sci. Am.**, **28**, **1**, pp **56-63**.
- [5] Mirsky I. & Hermann G.(1958) “Axially motions of thick cylindrical shells” **J. Appl. Mech.**, **25**, pp **97-102**.
- [6] Greenspon J.E.(1960) “Vibration of a thick-walled cylindrical shell, comparison of the exact theory with approximate theories” **J. Acoust. Sci. Am.**, **32**, **5**, pp **571-578**.
- [7] Timoshenko S.P.(1976) “**Strength of Materials: Part II (Advanced Theo. and Prob.)**” 3rd ed., Van Nostrand Reinhold Co., New York.
- [8] Boresi P., Chong K. & Lee J.D.(2010) “**Elasticity in Engineering Mechanics**” 3rd ed., John Wiley.
- [9] Mindlin R.D.(1951) “Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates” **J. Appl. Mech.**, **18**, pp **31-38**.
- [10] Lekhnitskii S.G.(1981) “**Theory of Elasticity of An Anisotropic Body**” Mir Pub., Moscow.
- [11] Suresh S. & Mortensen A.(1998) “**Fundamentals of Functionally Graded Materials**” Cambridge Pub., London.
- [12] Koizumi M. & Niino M.(1995) “**Overview of FGM research in Japan, MRS Bulletin**” **20**, pp **19-21**.
- [13] Koizumi M.(1997) “**FGM activities in Japan, Composites: Part B(Engineering)**” **28B**, pp **1-4**.

- [14] Koizumi M.(1993) “The concept of FGM, **Ceramic Transactions Functionally Graded Material**” **34**, pp **3-10**.
- [15] Obata Y. & Noda N.(1994) “Steady thermal stresses in a hollow circular cylinder and a hollow sphere of a functionally gradient material” **J. Therm. Stress.**, **17**, pp **471-487**.
- [16] Horgan C.O. & Chan A.M.(1999) “The pressurized hollow cylinder or disk problem for functionally graded isotropic linearly elastic materials” **J. Elasticity**, **55**, pp **43-59**.
- [17] Yang Y.Y.(2000) “Time-dependet stress analysis in functionally graded materials” **Int. J. Solids and Struc.**, **37**, pp **7593-7608**.
- [18] Tutuncu N. & Ozturk M.(2001) “Exact solution for stresses in functionally graded pressure vessels” **J. Composites: Part B(Engineering)**, **32B**, pp **683-686**.
- [19] Tarn J.Q.(2001) “Exact solutions for functionally graded anisotropic cylinders subjected to thermal and mechanical loads” **Int. J. Solids and Struc.**, **38**, pp **9189-8206**.
- [20] Jabbari M., Sohrabpour S. & Eslami M.R.(2002) “Mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to radially symmetric loads” **Int. J. Press. Vessels and Pip.**, **79**, pp **493-497**.
- [21] Eraslan A.N. & Akis T.(2006) “On the plain strain and plane stress solution of functionally graded solid shaft and solid disk problems” **J. Acta Mech.**, **181**, pp **43-63**.
- [22] Hongjun X., Zhifei S. & Taotao Z.(2007) “Elastic analysis of heterogeneous elastic hollow cylinders” **J. Compos. Struc.**, **79**, pp **140-147**.
- [23] Praveen G.N. & Reddy J.N.(1998) “Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded Ceramic-Metal plates ” **Int. J. Solids and Struc.** **35**, pp **4457-4476**.
- [24] Tutuncu N. & Temel B.(2009) “A novel approach to stress analysis of pressurized FGM cylinders, disks and spheres” **J. Compos. Struc.**, **91**, pp **385-390**.
- [25] Shao Z.S. & Ma G.W.(2008) “Thermo-mechanical stresses in functionally graded circular hollow cylinder with linearly increasing boundary temperature” **J. Compos. Struc.**, **83**, pp **259-265**.

- [26] Tutuncu N.(2007) “Stresses in thick-walled FGM cylinders with exponentially-varying properties” **J. Eng. Struc.**, **29**, pp **2032-2035**.
- [27] Keles & Conker C.(2011) “Transient hyperbolic heat condition in thick-walled FGM cylinders and spheres with exponentially-varying properties” **Eur. J. Mech. A/Solids**, **30**, pp **449-455**.
- [28] Hopkinson J.(1879) “Thermal stresses in a sphere, whose temperature is a function of r only” **Mess. Math.**, **8**, pp **168-175**.
- [29] Cheung J.B., Chen T.S. & Thirumalai K.(1974) “Transient thermal stresses in a sphere by local heating” **J. Appl. Mech.**, **41**, **4**, pp **930-934**.
- [30] Raju P.P.(1975) “On shallow shells transversely isotropic materials” **J. Press. Vessel Tech.**, **97**, **3**, pp **185-191**.
- [31] Takeuti Y. & Tanigawa Y.(1982) “Transient thermal stresses in hollow sphere due to rotating heat source” **J. Therm. Stress.**, **5**, **3-4**, pp **283-298**.
- [32] Obata Y. & Noda N.(1994) “Steady thermal stresses in a hollow circular cylinder and a hollow sphere of a functionally gradient material” **J. Therm. Stress.**, **17**, pp **471-487**.
- [33] Tutuncu N. & Ozturk M.(2001) “Exact solution for stresses in functionally graded pressure vessels” **J. Composites: Part B(Engineering)**, **32B**, pp **683-686**.
- [34] Kim K.S. & Noda N.(2002) “Green’s function approach to unsteady thermal stresses in an infinite hollow cylinder of functionally graded material” **Acta Mech.**,**156**, **3-4**, pp **145-161**.
- [35] You L.H., Zhang J.J. & You X.Y.(2005) “Elastic analysis of internally pressurized thick-walled spherical pressure vessels of functionally graded material” **Int. J. Press. Vessels and Pip.**, **82**, **5**, pp **347-354**.
- [36] Eslami M.R., Babaei M.H. & Poultangari R.(2005) “Thermal and mechanical stresses in functionally graded thick sphere” **Int. J. Press. Vessels and Pip.**, **82**, pp **522-527**.

[۳۷] قنّاد م.، رحیمی غ. و اسماعیل زاده خادم س.، پاییز ۱۳۸۹ "حل کلی استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری ساخته شده از مواد ناهمگن FG با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی"، *مجله‌ی فنی و مهندسی مدرس-مهندسی مکانیک*، جلد ۱۰، شماره ۳، ص ۳۱-۴۱.

[۳۸] قنّاد م.، رحیمی غ. و اسماعیل زاده خادم س.، زمستان ۱۳۸۹ "حل کلی استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری ساخته شده از مواد ناهمگن FG با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی"، *مجله‌ی فنی و مهندسی مدرس-مهندسی مکانیک*، جلد ۱۰، شماره ۴، ص ۱۳-۲۵.

[39] Dai H.L. & Wang X.(2005) "Thermo-electro-elastic transient responses in piezoelectric hollow structures" **Int. J. of Solids and Struc.**, **42**, 3-4, pp 1151-1171.

[40] Wang. H.M. & Ding. H.J.(2006) "Transient responses of a magneto-electro-elastic hollow sphere for fully coupled spherically symmetric problem" **Eur. J. Mech. A/Solids**, **25**, 6, pp 965-980.

[41] Tutuncu N.(2007) "Stresses in thick-walled FGM cylinders with exponentially varying properties" **J. Eng. Struc.**, **29**, pp 2032-2035.

[42] Chen Y.Z. & Lin X.Y.(2008) "Elastic analysis for thick cylinders and spherical pressure vessels made of functionally graded materials" **Comput. Mater. Sci.**, **44**, 2, pp 581-587.

[43] Tutuncu N. & Temel B.(2009) "A novel approach to stress analysis of pressurized FGM cylinders, disks and spheres" **J. Compos. Struc.**, **91**, pp 385-390.

[44] Zamani Nejad M., Rahimi G.H. & Ghannad M.(2009) "Set of field equations for thick shell of revolution made of functionally graded materials in curvilinear coordinate system" **Mechanika**, **3**, 77, pp 18-26.

[45] Ghosh M.K. & Kanoria M.(2009) "Analysis of thermoelastic responses in a functionally graded spherically isotropic hollow sphere based on Green-Lindsay theory" **Acta Mech.**, **207**, 51, pp 51-67.

[46] Kar A. & Kanoria M.(2009) "Generalized thermoelastic functionally graded orthotropic hollow sphere under thermal shock with three-phase-lag effect" **Eur. J. Mech. A/Solids**, **28**, 4, pp 757-767.

- [47] Akis T.(2009) “Elastoplastic analysis of functionally graded spherical pressure vessels” **Comput. Mater. Sci.**, **46**, **2**, pp 545-554.
- [48] Li X.F., Peng X.L. & Kang Y.A.(2009) “Pressurized hollow spherical vessels with arbitrary radial nonhomogeneity” **AIAA J.**, **47**, **9**, pp 2262-2266.
- [49] Borisov A.V.(2010) “Elastic analysis of multilayered thick-walled spheres under external load” **Mechanika**, **4**, **84**, pp 28-32.
- [50] Ghorbanpour Arani A., Salari M., Khademizadeh H. & Arefmanesh A.(2010) “Magnetoelastostatic stress and perturbation of magnetic field vector in a functionally graded hollow sphere” **Arch. Appl. Mech.**, **80**, **2**, pp 189-200.
- [51] Dai H.L., Xiao X. & Fu Y.M.(2010) “analytical solution of stresses in functionally graded piezoelectric hollow structure” **Solid State Commun.**, **150**, **15-16**, pp 763-767.
- [52] Sadeghian M.H. & Ekhteraei H.(2011) “Axisymmetric yielding of functionally graded spherical vessel under thermo-mechanical loading” **Comput. Mater. Sci.**, **50**, **3**, pp 975-981.
- [53] Bayat Y., Ghannad M. & Torabi H.(2012) “Analytical and numerical analysis for the FGM thick sphere under combined pressure and temperature loading” **Arch. Appl. Mech.**, **82**, **2**, pp 229-242.
- [54] Bayat Y. & Ghannad M.(2012) “General solution of rotating thick-walled spheres under thermal and pressure loading” **11th Iranian Aerosp. Soc. Conf., Shahid Sattari Aeronaut. Uni. Sci. and Tech., Tehran, Iran.**
- [55] Ghannad M. & Zamani Nejad M.(2012) “Complete closed-form solution for pressurized heterogeneous thick spherical shells” **Mechanika**, **18**, **5**, pp 508-516.
- [56] Zamani Nejad M., Abedi M., Lotfian M.H. & Ghannad M.(2012) “An exact solution for stresses and displacements of pressurized FGM thick-walled spherical shells with exponential-varying properties” **J. Mech. Sci. and Tech.**, **26**, **12**, pp 4081-4087.
- [57] Dai H.L., Jiang H.J. & Yang L.(2012) “Time-dependent behaviors of a FGPM hollow sphere under the coupling multi-fields” **Solid State Sci.**, **14**, **5**, pp 587-597.

[58] Karami K., Abedi M., Zamani Nejad M. & Lotfian M.H.(2012) "Elastic analysis of heterogeneous thick-walled spherical pressure vessels with parabolic varying properties" **Front. Mech. Eng.**, 7, 4, pp 433-438.

[۵۹] داورپناه م.، (۱۳۹۲)، پایان نامه ارشد: "تحلیل ترموالاستوپلاستیک کره‌های جدار ضخیم FGM با تغییرات توانی خواص مکانیکی به کمک تئوری کلاسیک"، دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود.

[۶۰] بابایی م.، (۱۳۹۳)، پایان نامه ارشد: "حل کامل ترموالاستیک استوانه‌ی جدار ضخیم چرخان FGM با تغییرات نمایی خواص ناهمگنی بر مبنای تئوری الاستیسیته‌ی مستوی"، دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود.

[61] Zamani Nejad M., Rastgoo A. & Hadi A.(2014) "Effect of exponentially-varying properties on displacements and stresses in pressurized functionally graded thick spherical shells with using iterative technique" **J. Solid Mech.**, 6, 4, pp 366-377.

[62] Bayat Y. & Ekhteraei H.(2015) "General thermo-elastic solution of radially heterogeneous, spherically isotropic rotating sphere" **J. Mech. Sci. and Tech.**, 29, 6, pp 2427-2438.

[۶۳] سواری ف.، (۱۳۹۳)، پایان نامه ارشد: "تحلیل ترموالاستیک کره‌های چرخان جدار ضخیم FGM پیزوالکتریک به کمک نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی با توزیع توانی خواص"، دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود.

[64] Celebi K., Yarimpabuc D. & Keles I.(2016) "A unified method for stresses in FGM sphere with exponentially-varying properties" **Struc. Eng. and Mech.**, 57, 5, pp 823-835.

[۶۵] خاتمی قزوینی م.ر.، لقمان ع. و اصغری ع.ا.، تابستان ۱۳۹۵ "تحلیل رفتار وابسته به زمان در مخازن کروی جدار ضخیم از جنس مواد FGM تحت بارگذاری مکانیکی و توزیع درجه حرارت شعاعی"، فصل‌نامه‌ی علمی-پژوهشی مکانیک هوافضا، جلد ۱۲، شماره ۲، ص ۱-۱۳.

[۶۶] وزیری س.ا.ر.، (۱۳۹۵)، پایان‌نامه ارشد: "تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های جدار ضخیم FGM در حالت گذرای حرارتی به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول"، دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود.

[67] Pawar S.P., Deshmukh K.C. & Verma J.(2017) "Thermal behavior of functionally graded solid sphere with nonuniform heat generation" **J. Therm. Stress.**, **40**, **1**, pp **86-95**.

[68] Ghannad M. & Parhizkar M.(2017) "2D thermo elastic behavior of a FG cylinder under thermomechanical loads using a first order temperature theory" **Int. J. Press. Vessels and Pip.**, **149**, pp **75-92**.

[69] Gonczi D.(2017) "Thermoelastic analysis of thick-walled functionally graded spherical pressure vessels with temperature-dependent material properties" **J. Comput. and Appl. Mech.**, **12**, **2**, pp **109-125**.

[70] Jabbari M., Mousavi S. M. & Kiani M. A.(2017) "Functionally graded hollow sphere with piezoelectric internal and external layers under asymmetric transient thermomechanical loads" **J. Press. Vessel Tech.**, **139**, **5**.

[71] Polyanin A.D. & Zaitsev V.F.(2003) "**Exact solutions for ordinary differential equations**", 2nd ed., CRC Press, Boca Raton.

[72] Abramowitz M. & Stegun I.A.(1972) "**Handbook of Mechanical Functions**" 10th ed., United states department of commerce, Washington D.C.

[73] Abaqus 2016 Documentation.

Abstract:

The aim of this study is to investigate and modeling the associated stress and displacement in thick walled heterogeneous sphere under mechanical and thermal loading. The governing equation of thick sphere have been extracted for exponentially varying properties of material under internal and external pressure, The solution of the final equation has been indicated and by case study, results and graphs of the stress and displacement distribution have been indicated. For investigation the accuracy of results conducted from analytical solution, the numerical modeling of sphere has been done and the results of two methods compare. Also thermo-elastic analysis of the spherical shells under pressure and uniform heat flux has been conducted and comparing the results with that of numerical show that plane elasticity theory is a very efficient method on thermo elastic analysis. Finally conclusion, discusion and seggestion have been indicated.

key words: Thick spheres, Plane elasticity theory, Analytical solution, Exponentially varying propertise, Functionally graded material.



Shahrood University of
Technology

Faculty of **Mechanical and Mechatronics Engineering**

M.Sc. Thesis in **Applied Mechanics Engineering**

**Complete solution of FGM
pressurized thick spheres under
thermal load with exponential
varying properties based on PET**

By: **Ramin Shamkouiyan**

Supervisor:
Dr. Mehdi Ghannad

january 2019