



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مکانیک  
گروه حرارت و سیالات

حل تحلیلی دوبعدی انتقال حرارت در استوانه کامپوزیتی

امین امیری دلوائی

استاد راهنما :  
دکتر محمد حسن کیهانی

استاد مشاور:  
دکتر محمود نوروزی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

شهریور ۱۳۸۹

## دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده : مکانیک

گروه : حرارت و سیالات

پایان نامه کارشناسی ارشد آقای امین امیری دلوئی  
تحت عنوان: حل تحلیلی دوبعدی انتقال حرارت در استوانه کامپوزیتی

در تاریخ ..... توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد مورد ارزیابی و با درجه ..... مورد پذیرش قرار گرفت.

اساتید راهنما	امضاء	اساتید مشاور	امضاء
دکتر محمد حسن کیهانی		دکتر محمود نوروزی	

اساتید داور	امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء
نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :	
نام و نام خانوادگی :			
نام و نام خانوادگی :			
نام و نام خانوادگی :			

تقدیم بہ پدر و مادر عزیزم

کہ ہموارہ مشوق من در ادامہ راہ بودہ اند

## تقدیر و تشکر

در اینجا بر خود لازم می دانم از کمک ها و راهنمایی های بی دریغ جناب آقایان دکتر محمد حسن کیهانی و دکتر محمود نوروزی که با صبر، حوصله و اخلاق بی نظیر خود مرا در انجام این پروژه یاری کرده اند و جناب استاد اسدا... زحمتکش که دلسوزانه راهنمای من در امر تحصیل بوده اند، صمیمانه قدردانی نمایم. همچنین از تمامی اساتید بخش مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود که همواره مرا مرهون زحمات خود قرار داده اند، کمال تشکر را دارم.

اینجانب امین امیری دلوئی تایید می نمایم که نتایج مندرج در این پایان نامه حاصل تحقیقات و محاسبات اینجانب می باشد و در موارد استفاده از نتایج تحقیقات دیگران منبع آن را ذکر نموده ام.

کلیه حقوق مادی مترتب از نتایج مطالعات ، آزمایشات و نو آوری ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد .

شهریور ماه ۱۳۸۹

## چکیده

در مطالعه حاضر یک حل تحلیلی دقیق برای انتقال حرارت پایدار و ناپایدار دو بعدی در لمینیت های استوانه ای کامپوزیتی ارائه گردیده است. لمینیت مورد نظر استوانه ای شکل بوده و رشته ها به دور استوانه پیچیده شده اند، همچنین راستای رشته ها در هر لایه می تواند با لایه های دیگر متفاوت باشد. در این تحقیق بر روی انتقال حرارت متقارن محوری با در نظر گرفتن هدایت در جهت طولی و شعاعی تمرکز کرده ایم. شرایط مرزی حرارتی اعمال شده به صورت کلی و شامل اثرات هدایت، جابجایی و تشعشع در مرزهاست. یافتن کلی ترین حل ممکن بر مبنای شرایط مرزی پیچیده یکی از مهمترین نوآوری های مطالعه حاضر است. به منظور حل مساله در حالت پایدار، ابتدا با استفاده از تئوری اشتراک-لیوویل تبدیل فوریه مناسب بدست آمده است سپس با استفاده از این تبدیل، معادله دیفرانسیل جزئی هدایت در استوانه به یک معادله معمولی تبدیل شده است. به دلیل تغییر زاویه الیاف در هر لایه، یک دستگاه معادلات برای ضرایب تبدیل فوریه بر اساس شرایط مرزی داخل و خارج استوانه و همچنین پیوستگی شار و دما در مرز بین لایه ها بدست آمده است، که این دستگاه معادلات با استفاده از الگوریتم توماس حل گردیده است و نهایتاً با اعمال تبدیل فوریه معکوس توزیع دمای نهایی بدست آمده است. در حالت ناپایا حل کمی پیچیده تر است زیرا ابتدا بایستی با استفاده از تبدیل لاپلاس مساله را از حوزه زمان به مکان منتقل نمود و سپس مشابه حالت پایدار به ساخت تبدیل فوریه مناسب و حل مساله پرداخت؛ جواب بدست آمده در حوزه مکان با استفاده از تبدیل لاپلاس معکوس به حوزه زمان منتقل می شود که با توجه به پیچیدگی انتگرال حاصل از روشی موسوم به روش توابع مرومرفیک برای محاسبه لاپلاس معکوس استفاده شده است. در پایان با ارائه مثال های کاربردی مثل مخزن انبارش، پین فین و لوله خنک کن راکتور هسته ای با شار حرارتی متغییر سینوسی در جهت طولی، به بررسی اثر تغییر زاویه الیاف روی توزیع درجه حرارت در لایه های کامپوزیتی پرداخته شده و نشان داده شده است که توزیع درجه حرارت برای هر لایه کامپوزیتی با زاویه الیاف دلخواه بین توزیع درجه حرارت برای زوایای  $\theta = 0^\circ$  و  $\theta = 90^\circ$  قرار دارد.

## لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

1. On heat conduction problem in multi-layer composite pin fins, 3<sup>rd</sup> international conference " Advanced Composite Materials Engineering (COMAT 2010) "
2. Numerical modeling of 3D unsteady conductive heat transfer in composite tanks, 3<sup>rd</sup> international conference " Advanced Composite Materials Engineering (COMAT 2010) "
3. An exact solution of axi-symmetric conductive heat transfer in cylindrical composite laminate under the general boundary conditions", International conference on fluid mechanics (ICFM 2010)"

۴- بررسی تحلیلی انتقال حرارت هدایتی در لمینیت های کامپوزیتی استوانه ای گرافیت اپوکسی،

مجله علمی و پژوهشی هوا و فضا، دانشگاه امام حسین (ع) (تحت بررسی)



## فهرست مطالب

صفحه	عنوان
	<b>فصل اول: مقدمه</b>
۲	۱-۱- مقدمه
۲	۲-۱- مروری بر تاریخچه و کاربردهای مواد مرکب
۱۷	۳-۱- مروری بر تحقیقات گذشته
۲۱	۴-۱- معرفی تحقیق اخیر
	<b>فصل دوم: خصوصیات مواد مرکب</b>
۲۴	۱-۲- مقدمه
۲۴	۲-۲- خواص عمومی مواد مرکب
۲۵	۳-۲- قسمت های تشکیل دهنده مواد مرکب
۲۶	۱-۳-۲- خصوصیات الیاف
۲۶	۲-۳-۲- خصوصیات تارها
۲۷	۳-۳-۲- خصوصیات ماتریس
۲۸	۴-۲- طبقه بندی مواد مرکب
۲۸	۱-۴-۲- مواد مرکب با الیاف تصادفی
۲۹	۲-۴-۲- مواد مرکب لایه ای
۳۰	۳-۴-۲- مواد مرکب ذره ای
۳۱	۵-۲- اصطلاحات مواد مرکب لایه ای
۳۲	۶-۲- شکل و چگونگی بافتن الیاف
۳۴	۷-۲- انواع مواد مورد استفاده در الیاف
۳۶	۸-۲- الیاف تجارتي
۳۷	۱-۸-۲- الیاف شیشه
۴۰	۲-۸-۲- الیاف کربن و گرافیت
۴۳	۳-۸-۲- الیاف بر
۴۳	۴-۸-۲- الیاف آرامید
۴۴	۵-۸-۲- مقایسه الیاف تجارتي
۴۴	۹-۲- انواع مواد مورد استفاده در رزین
۴۶	۱-۹-۲- ترموست ها
۴۷	۲-۹-۲- ترمو پلاستیک ها

۴۸	۱۰-۲- انواع مواد مورد استفاده در پرکننده ها
۴۹	۱۱-۲- فرایندهای تولید مواد مرکب
	<b>فصل سوم: فیزیک انتقال حرارت در مواد مرکب</b>
۵۶	۱-۳- مقدمه
۵۶	۲-۳- اصول انتقال حرارت در مواد مرکب
۶۱	۳-۳- مدل سازی، معادلات حاکم و شرایط مرزی
	<b>فصل چهارم: بررسی انتقال حرارت دائم در مواد مرکب</b>
۷۰	۱-۴- مقدمه
۷۰	۲-۴- حل تحلیلی برای شرایط مرزی کلی
۷۷	۳-۴- مثال ها
۷۹	۱-۳-۴- مخزن
۹۷	۲-۳-۴: پین فین
۱۰۲	۳-۳-۴: لوله خنک کن راکتور هسته ای
	<b>فصل پنجم: بررسی انتقال حرارت غیر دائم در مواد مرکب</b>
۱۱۱	۱-۵- مقدمه
۱۱۱	۲-۵- حل تحلیلی برای شرایط مرزی کلی
۱۱۸	۳-۵- مثال
۱۳۸	<b>نتیجه گیری</b>
۱۴۰	<b>پیشنهادات جهت ادامه تحقیق</b>
۱۴۱	<b>پیوست الف: الگوریتم توماس بکار گرفته شده برای یک ماتریس پنج قطری</b>
۱۴۷	<b>پیوست ب: توابع مرمرفیک</b>
۱۴۸	<b>مراجع</b>

## فهرست علائم

شار حرارتی ( $W / m^2$ )	$q_i$
هدایت حرارتی در جهات فرعی ( $W / m K$ )	$k_{ij}$
دمای لمینیت ( $K$ )	$T$
مختصه طولی ( $m$ )	$x_i$
زاویه قرار گیری الیاف	$\theta$
درصد حجمی الیاف	$v_f$
درصد حجمی ماده زمینه	$v_m$
ضریب حرارتی الیاف ( $W / m K$ )	$k_f$
ضریب هدایت ماده زمینه ( $W / m K$ )	$k_m$
حجم ( $m^3$ )	$V$
سطح ( $m^2$ )	$A$
مختصه شعاعی ( $m$ )	$r$
مختصه محوری ( $m$ )	$z$
مختصه زاویه مماسی	$\varphi$
چگالی ( $Kg / m^3$ )	$\rho$
ظرفیت گرمایی ( $J / Kg K$ )	$C$
هدایت حرارتی در جهات اصلی ( $W / m K$ )	$\bar{k}$
زمان ( $s$ )	$t$
چشمه انرژی ( $W / m^3$ )	$g$
مختصات منحنی الخط متعامد	$u_i$
فاکتورهای تبدیل محور مختصات	$a_i$
مقدار $\cos \theta$	$m_l$
مقدار $\sin \theta$	$n_l$
عملگر لاپلاس	$L$
تبدیل فوریه تابع $f$	$F(f)$
تابع بسط اصلاح شده نوع اول از مرتبه $v$	$I_v$
تابع بسط اصلاح شده نوع دوم از مرتبه $v$	$k_v$

## فهرست جداول

صفحه	عنوان
۸	جدول (۱-۱) سازه های رشته پیچی شده برای کاربردهای فضایی ، آبی و نظامی
۹	جدول (۲-۱) سازه های رشته پیچی شده برای کاربردهای تجاری و صنعتی
۱۴	جدول (۳-۱) مشخصات الیاف رایج در کاربردهای صنعتی
۱۵	جدول (۴-۱) نمونه هایی از خواص الیاف، ماتریس ها و مواد صنعتی
۱۵	جدول (۵-۱) نمونه هایی از خواص انتقال حرارت هدایتی کامپوزیت های مختلف
۱۶	جدول (۶-۱) نمونه هایی از خواص مکانیکی کامپوزیت های مختلف
۲۶	جدول (۱-۲) خصوصیات الیاف
۲۷	جدول (۲-۲) خصوصیات تارها
۴۰	جدول (۳-۲) درصد وزنی اجزای تشکیل دهنده انواع شیشه
۴۱	جدول (۴-۲) خواص مکانیکی انواع شیشه
۶۳	جدول (۱-۳) پدیده های فیزیکی که کمیت هایشان از خواص مواد خالص سازنده آن ها قابل محاسبه اند
۷۸	جدول (۱-۴) خواص الیاف و ماده زمینه برای ماده مرکب در نظر گرفته شده
۷۸	جدول (۲-۴) خواص ماده مرکب کولار/اپوکسی
۸۰	جدول (۳-۴) هندسه و شرایط مرزی مخزن
۹۸	جدول (۴-۴) هندسه و شرایط مرزی پره
۱۰۳	جدول (۵-۴) هندسه و شرایط مرزی لوله خنک کن راکتور

## فهرست اشکال

صفحه		عنوان
۵	انواع مقاطع، پروفیل ها و لوله های ساخته شده از مواد مرکب	شکل (۱-۱)
۵	تکنولوژی تولید نواربافی در تولید مواد مرکب	شکل (۲-۱)
۶	تکنولوژی تولید رشته پیچی در تولید بدنه یک راکت	شکل (۳-۱)
۱۲	استفاده از کامپوزیت های مدرن در بمب افکن B2	شکل (۴-۱)
۱۳	کوره کیورینگ قطعات کامپوزیتی بزرگ	شکل (۵-۱)
۱۳	کامپوزیت کربن / اپوکسی	شکل (۶-۱)
۱۴	کامپوزیت سیلیکون کاربید / تیتانیوم	شکل (۷-۱)
۳۲	لایه های مواد مرکب	شکل (۱-۲)
۳۶	مقاومت کششی ویژه و مدول کششی ویژه برای چند نوع از الیاف	شکل (۲-۲)
۵۰	طرح شماتیک لایه گذاری دستی	شکل (۳-۲)
۵۱	طرح شماتیک لایه گذاری پاششی	شکل (۴-۲)
۵۲	طرح شماتیک قالب گیری حرارتی	شکل (۵-۲)
۵۳	طرح شماتیک روش رشته پیچی	شکل (۶-۲)
۵۴	طرح شماتیک روش کشش رانی	شکل (۷-۲)
۵۸	دستگاه های مختصات اصلی و فرعی	شکل (۱-۳)
۶۲	جهت الیاف در یک لایه استوانه ای	شکل (۲-۳)
۶۵	شارهای حرارت در یک المان استوانه ای	شکل (۳-۳)
۶۸	چیدمان لایه ها در لمینیت استوانه ای	شکل (۴-۳)
۸۰	هندسه ومختصات بکار رفته برای مخزن	شکل (۱-۴)
۸۱	حداکثر تغییرات دما بر حسب جملات سری در یک لمینیت تک لایه	شکل (۲-۴)
۸۱	توزیع دما در لمینیت یک لایه در حالت $\theta = 0^\circ$ و $Q = 400(w/m^2)$	شکل (۱-۳-۴)
۸۲	توزیع دما در لمینیت یک لایه در حالت $\theta = 90^\circ$ و $Q = 400(w/m^2)$	شکل (۲-۳-۴)
۸۲	توزیع دما در لمینیت یک لایه در حالت $\theta = 0^\circ$ و $Q = 800(w/m^2)$	شکل (۳-۳-۴)
۸۳	توزیع دما در لمینیت یک لایه در حالت $\theta = 90^\circ$ و $Q = 800(w/m^2)$	شکل (۴-۳-۴)
۸۳	توزیع دما در لمینیت یک لایه در حالت $\theta = 0^\circ$ و $Q = 1200(w/m^2)$	شکل (۵-۳-۴)
۸۴	توزیع دما در لمینیت یک لایه در حالت $\theta = 90^\circ$ و $Q = 1200(w/m^2)$	شکل (۶-۳-۴)
۸۴	توزیع دما در لمینیت یک لایه در حالت $\theta = 0^\circ$ و $Q = 1600(w/m^2)$	شکل (۷-۳-۴)
۸۵	توزیع دما در لمینیت یک لایه در حالت $\theta = 90^\circ$ و $Q = 1600(w/m^2)$	شکل (۸-۳-۴)
۸۶	کانتورهای توزیع دما در یک لمینیت تک لایه برای زوایای الیاف و شارهای حرارتی مختلف	شکل (۴-۴)
۸۷	کانتورهای توزیع دما در یک لمینیت تک لایه برای زوایای الیاف و شارهای حرارتی مختلف	شکل (۵-۴)
۸۸	تغییرات ضریب $\mu$ بر حسب زاویه الیاف	شکل (۶-۴)
۸۹	ماکزیمم توزیع دمای نسبی بر حسب زاویه الیاف تحت شارهای حرارتی مختلف	شکل (۷-۴)
۹۰	میانگین توزیع دمای نسبی بر حسب زاویه الیاف تحت شارهای حرارتی مختلف	شکل (۸-۴)

۹۱	توزیع دما در لمینیت شبه ایزوتروپ و $Q = 400(w/m^2)$	شکل (۱-۹-۴)
۹۱	توزیع دما در لمینیت شبه ایزوتروپ و $Q = 800(w/m^2)$	شکل (۲-۹-۴)
۹۲	توزیع دما در لمینیت شبه ایزوتروپ و $Q = 1200(w/m^2)$	شکل (۳-۹-۴)
۹۲	توزیع دما در لمینیت شبه ایزوتروپ و $Q = 1600(w/m^2)$	شکل (۴-۹-۴)
۹۳	کانتورهای توزیع دما در یک لمینیت شبه ایزوتروپیک برای زوایای الیاف و شارهای حرارتی	شکل (۱۰-۴)
۹۴	توزیع جمله $a_n$ سری فوریه بر حسب $n/2$ در لمینیت استوانه ای شبه ایزوتروپ	شکل (۱-۱۱-۴)
۹۵	توزیع جمله $b_n$ سری فوریه بر حسب $n/2$ در لمینیت استوانه ای شبه ایزوتروپ	شکل (۲-۱۱-۴)
۹۵	توزیع جمله $I_0 \left( \frac{\lambda_n r_i}{\mu_i} \right)$ بر حسب $n/2$ در لمینیت استوانه ای شبه ایزوتروپ	شکل (۳-۱۱-۴)
۹۶	توزیع جمله $K_0 \left( \frac{\lambda_n r_i}{\mu_i} \right)$ بر حسب $n/2$ در لمینیت استوانه ای شبه ایزوتروپ	شکل (۴-۱۱-۴)
۹۷	هندسه ومختصات بکار رفته برای پره	شکل (۱۲-۴)
۹۹	دمای بی بعد میانگین بر حسب زاویه الیاف تحت ضرایب جابجایی مختلف	شکل (۱۳-۴)
۱۰۰	نرخ سرد شدن بر حسب تغییرات ضریب جابجایی برای آرایش الیاف مختلف	شکل (۱-۱۴-۴)
۱۰۰	نرخ سرد شدن بر حسب تغییرات نسبت هدایت برای آرایش الیاف مختلف	شکل (۲-۱۴-۴)
۱۰۱	نرخ سرد شدن بر حسب تغییرات قطر پین برای آرایش الیاف مختلف	شکل (۱-۱۵-۴)
۱۰۱	نرخ سرد شدن بر حسب تغییرات ارتفاع پین برای آرایش الیاف مختلف	شکل (۲-۱۵-۴)
۱۰۲	هندسه ومختصات بکار رفته برای لوله خنک کن راکتور هسته ای	شکل (۱۶-۴)
۱۰۴	کانتورهای توزیع دما پایدار در جهت شعاعی برای لمینیت ایزوتروپیک در مقاطع طولی	شکل (۱-۱۷-۴)
۱۰۵	کانتورهای توزیع دما پایدار در جهت شعاعی برای لمینیت اورتوتروپیک در مقاطع طولی	شکل (۲-۱۷-۴)
۱۰۶	کانتورهای توزیع دما پایدار در جهت شعاعی برای لمینیت کراس پلای در مقاطع طولی	شکل (۳-۱۷-۴)
۱۰۷	کانتورهای توزیع دما پایدار در جهت شعاعی برای لمینیت شبه ایزوتروپیک در مقاطع طولی	شکل (۴-۱۷-۴)
۱۰۸	نمودارهای توزیع دما پایدار در جهت طولی برای لمینیت ایزوتروپیک در مقاطع شعاعی	شکل (۱-۱۸-۴)
۱۰۸	نمودارهای توزیع دما پایدار در جهت طولی برای لمینیت اورتوتروپیک در مقاطع شعاعی	شکل (۱-۱۸-۴)
۱۰۹	نمودارهای توزیع دما پایدار در جهت طولی برای لمینیت کراس پلای در مقاطع شعاعی	شکل (۱-۱۸-۴)
۱۰۹	نمودارهای توزیع دما پایدار در جهت طولی برای لمینیت شبه ایزوتروپیک در مقاطع شعاعی	شکل (۱-۱۸-۴)
۱۱۹	کانتورهای توزیع دما در لمینیت ایزوتروپیک برای مقطع $z = L/3$	شکل (۱-۵)
۱۲۰	کانتورهای توزیع دما در لمینیت اورتوتروپیک برای مقطع $z = L/3$	شکل (۲-۵)
۱۲۱	کانتورهای توزیع دما در لمینیت کراس پلای برای مقطع $z = L/3$	شکل (۳-۵)
۱۲۲	کانتورهای توزیع دما در لمینیت شبه ایزوتروپیک برای مقطع $z = L/3$	شکل (۴-۵)
۱۲۳	کانتورهای توزیع دما در لمینیت ایزوتروپیک برای مقطع $z = L/2$	شکل (۵-۵)
۱۲۴	کانتورهای توزیع دما در لمینیت اورتوتروپیک برای مقطع $z = L/2$	شکل (۶-۵)
۱۲۵	کانتورهای توزیع دما در لمینیت کراس پلای برای مقطع $z = L/2$	شکل (۷-۵)
۱۲۶	کانتورهای توزیع دما در لمینیت شبه ایزوتروپیک برای مقطع $z = L/2$	شکل (۸-۵)
۱۲۷	کانتورهای توزیع دما در لمینیت ایزوتروپیک برای مقطع $z = 2L/3$	شکل (۹-۵)
۱۲۸	کانتورهای توزیع دما در لمینیت اورتوتروپیک برای مقطع $z = 2L/3$	شکل (۱۰-۵)
۱۲۹	کانتورهای توزیع دما در لمینیت کراس پلای برای مقطع $z = 2L/3$	شکل (۱۱-۵)
۱۳۰	کانتورهای توزیع دما در لمینیت شبه ایزوتروپیک برای مقطع $z = 2L/3$	شکل (۱۲-۵)

۱۳۱	نمودارهای توزیع دما در لمینیت ایزوتروپیک در مقطع $r = R/3$	شکل (۵-۱۳)
۱۳۱	نمودارهای توزیع دما در لمینیت ارتوتروپیک در مقطع $r = R/3$	شکل (۵-۱۴)
۱۳۲	نمودارهای توزیع دما در لمینیت کراس پلای در مقطع $r = R/3$	شکل (۵-۱۵)
۱۳۲	نمودارهای توزیع دما در لمینیت شبه ایزوتروپیک در مقطع $r = R/3$	شکل (۵-۱۶)
۱۳۳	نمودارهای توزیع دما در لمینیت شبه ایزوتروپیک در مقطع $r = R/2$	شکل (۵-۱۷)
۱۳۳	نمودارهای توزیع دما در لمینیت ارتوتروپیک در مقطع $r = R/2$	شکل (۵-۱۸)
۱۳۴	نمودارهای توزیع دما در لمینیت کراس پلای در مقطع $r = R/2$	شکل (۵-۱۹)
۱۳۴	نمودارهای توزیع دما در لمینیت شبه ایزوتروپیک در مقطع $r = R/2$	شکل (۵-۲۰)
۱۳۵	نمودارهای توزیع دما در لمینیت ایزوتروپیک در مقطع $r = 2R/3$	شکل (۵-۲۱)
۱۳۵	نمودارهای توزیع دما در لمینیت ارتوتروپیک در مقطع $r = 2R/3$	شکل (۵-۲۲)
۱۳۶	نمودارهای توزیع دما در لمینیت کراس پلای در مقطع $r = 2R/3$	شکل (۵-۲۳)
۱۳۶	نمودارهای توزیع دما در لمینیت شبه ایزوتروپیک در مقطع $r = 2R/3$	شکل (۵-۲۴)
۱۴۷	محل قرارگیری قطب ها	شکل (ب-۱)

# فصل اول

## مقدمه



## ۱-۱- مقدمه

در این فصل ضمن بررسی تاریخچه مواد مرکب، جنبه های کاربردی و به ویژه انتقال حرارت هدایتی در این مواد مورد بررسی قرار می گیرد. در ادامه، مرور مفصلی بر تحقیقات پیشین انجام گرفته و ضرورت انجام تحقیق صورت گرفته تشریح می شود. در نهایت ساختار کلی تحقیق اخیر و اهداف مورد نظر آن بیان می گردد.

## ۱-۲- مروری بر تاریخچه و کاربردهای مواد مرکب

بطور کلی دسته بزرگی از مواد جامد موجود در طبیعت از جمله مواد اورتوتروپیک به شمار می آیند. در این مواد خواص مکانیکی وابسته به جهت است. هر چند که رفتار اورتوتروپیک در بسیاری از فلزات و جامدات پلیمری قابل صرفنظر است اما این رفتار در بسیاری از مواد خام و بویژه کانی ها رفتاری غالب به شمار می آید. چوب معروف ترین ماده خام غیرایزوتروپیک محسوب می شود. در چوب درخت خواص مکانیکی در جهت آوندها بسیار قویتر از سایر جهات متعامد بر آن است. به دلیل همین ویژگی و شکل پذیری آسان این ماده، از دوران باستان استفاده از چوب در ساخت دکل های کشتی و ستون های ساختمان ها رایج بوده است. استفاده از برخی مواد جامد جهت بهبود رفتار مکانیکی مواد خام از دیرباز مورد توجه بشر بوده است. به عنوان نمونه می توان به استفاده از کاه گل در معماری سنتی رایج در بسیاری از نقاط جهان اشاره نمود. همچنین استفاده از پیچش محیطی به منظور افزایش مقاومت گسیختگی برخی سازه ها در گذشته نیز متداول بوده است. برای جلوگیری از گسیختگی بشکه های استوانه ای و یا لوله های چوبی بدور آنها سیم می پیچیدند و یا جهت چسباندن دو قطعه نیم استوانه از این عمل استفاده می شد.

در اواخر قرن نوزدهم، کشف نفت در ایالت پنسیلوانیا سبب بروز تغییران عمده در زندگی بشر شد. یکی از این تغییرات ساخت مواد پلیمری بود که به سرعت جای خود را در صنعت نساجی باز نمود. مواد پلیمری، مواد نسبتاً ارزان قیمت و سبکی محسوب می شدند که رفتار خوردگی آنها در برابر فلزات و حتی استیل- های ضد زنگ بسیار بهتر بود. پروسه تولید این مواد ارزان و ساده بوده و به دلیل شکل پذیری بالا به سرعت جای خود را در صنایع مختلف باز نمودند. مشکلات عمده ای که استفاده از مواد پلیمری ترموپلاستیک را محدود می ساخت عبارتند از [Gibson, 2008]:

- مقاومت مکانیکی بسیار ضعیف در مقایسه با فولادها: برای مثال تنش تسلیم پلی اتیلن حدود ۴۰ تا ۵۰ مرتبه از St37 کمتر است.
- نقطه ذوب پایین
- قابلیت اشتعال
- عدم مقاومت در برابر اشعه ماورابنفش و نورخورشید

از اواسط قرن بیستم، تکنیک های مختلفی جهت بهبود رفتار این مواد به کار گرفته شد که به پیدایش دانش مواد مرکب منجر گردید. در این تکنیک ها با اضافه کردن فیبر به پلیمرهای مختلف رفتار مکانیکی آن ها به طور چشمگیری بهبود یافت. معروف ترین مواد مرکب قطعات فایبرگلاس هستند که معمولاً از ترکیب الیاف شیشه، پلی اتیلن و رزین تشکیل می شوند. به دلیل سبکی، رفتار خوردگی بسیار مناسب و استحکام کافی، استفاده از آن ها در ساخت بسیاری از تجهیزات آبی سبک نظیر قایق ها و شناورهای کوچک بسرعت متداول گردید [Gibson, 2008]. از آن زمان تاکنون استفاده از این مواد در بسیاری از صنایع مختلف رایج بوده است. به عنوان مثال از دهه ۸۰ میلادی استفاده از این مواد در ساخت مقاطع مختلف ساختمانی رایج شده است. با بکارگیری تکنولوژی نه چندان پیچیده، تولید تقریباً تمامی مقاطع ساختمانی از مواد کامپوزیتی (ترکیب الیاف و پلیمرها) امکان پذیر شده است. برای ساخت این مقاطع می توان آن ها را با استفاده از قالب های تزریق پیوسته ویژه ای تولید نمود. در این روش، الیاف به داخل حمام رزین و پلیمر مذاب فشرده می شوند و

پس از عبور از قالب، قطعه کامپوزیتی شکل نهایی خود را پیدا می کند. این روش تولید اصطلاحاً پولتروژن<sup>۱</sup> نامیده می شود و سرعت تولید این مقاطع در هر دستگاه حدود یک فوت بر دقیقه است [Herakovich, 1998]. در شکل (۱-۱) نمونه هایی از این مقاطع، لوله ها و پروفیل های کامپوزیتی نشان داده شده است. مطابق شکل، امکان تولید انواع نبشی، ناودانی، تیر I، لوله و قوطی از مواد مرکب وجود دارد. همچنین از این روش برای ساختن سایر قطعات مشبک کامپوزیتی<sup>۲</sup> توری ها و و نیز جداره های نازک استفاده می شود.

هرچند اصولاً این مقاطع دارای قیمت نسبتاً ارزان و وزن کمی هستند اما به دلیل فرایند دشوار جوشکاری مواد کامپوزیتی و نیز مقاومت مکانیکی نسبتاً کمتر از مقاطع فولادی هنوز راه درازی برای به کارگیری گسترده از این مواد و به چالش کشیدن مقاطع فولادی در سازه ها وجود دارد. روش دیگری که با استفاده از آن می توان اقدام به ساخت قطعات کامپوزیتی نمود روش نواربافی<sup>۳</sup> است. این روش، یک روش نسبتاً ارزان برای تولید قطعات دارای اشکال پیچیده است. از این روش برای تولید انواع تسمه، لوله، مقاطع I و T و مقاطع استوانه ای شکل دارای لمینای مارپیچی<sup>۴</sup> استفاده می شود.

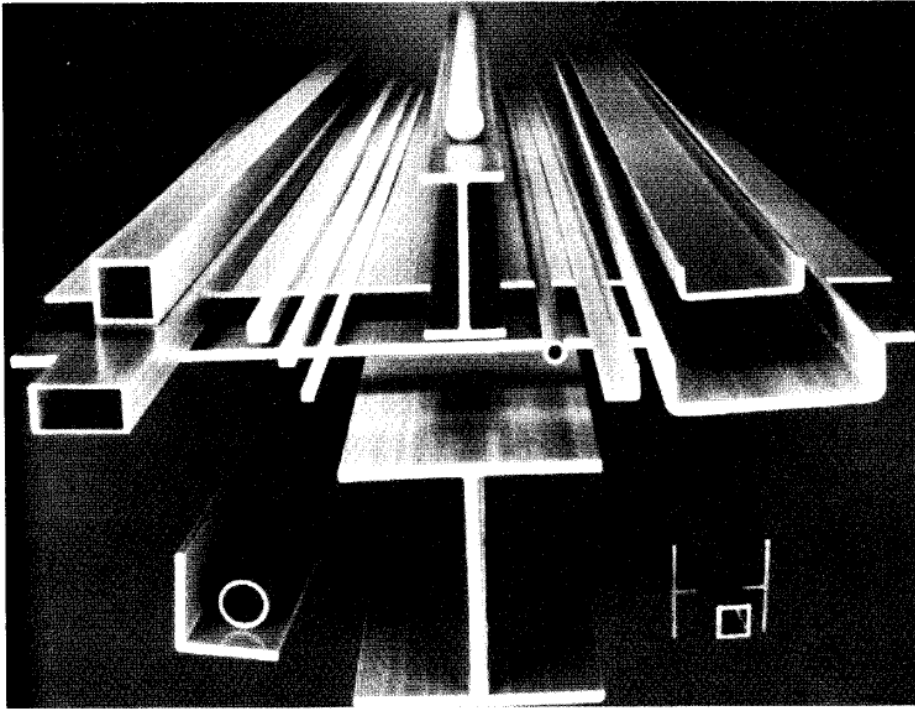
---

1. Pultrusion

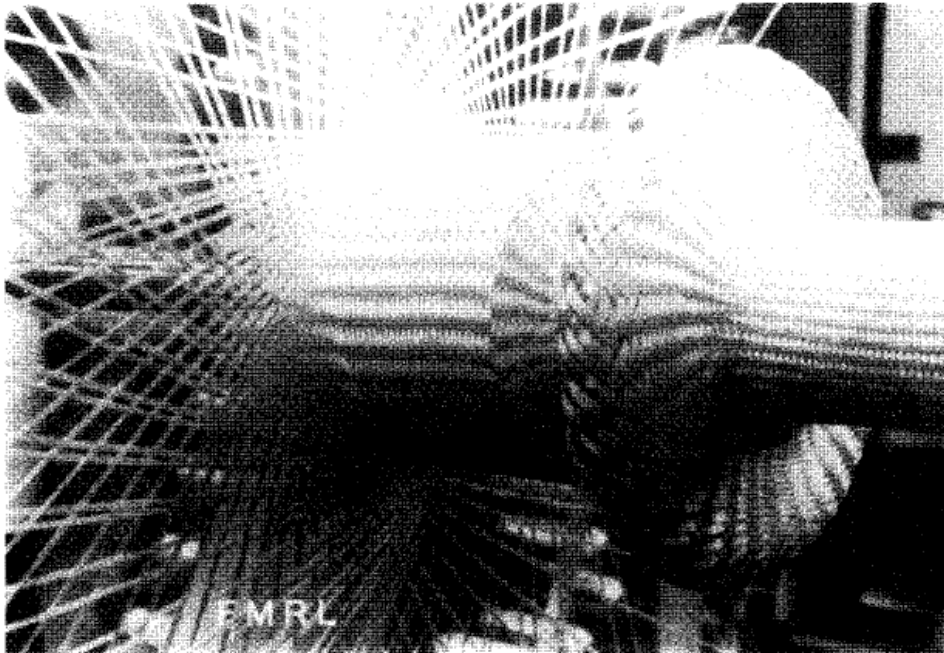
2. Grating

3. Braiding

4. Spiral

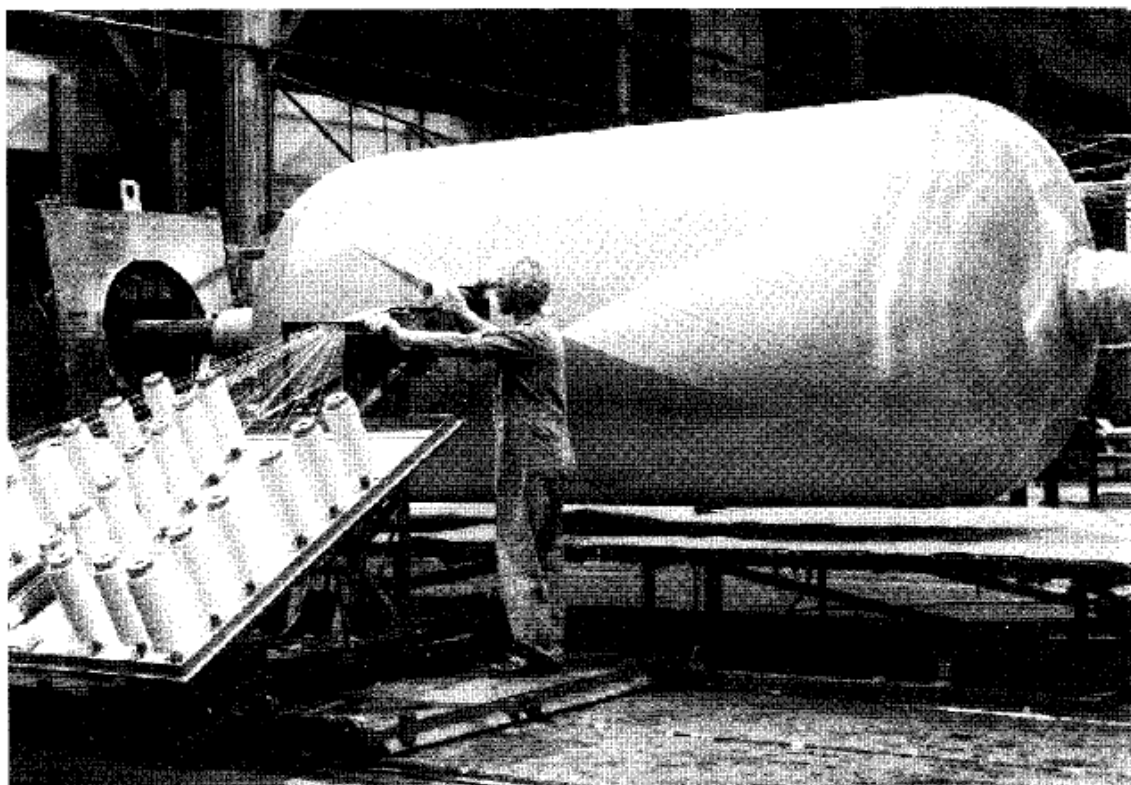


شکل (۱-۱): انواع مقاطع، پروفیل ها و لوله های ساخته شده از مواد مرکب [Herakovich, 1998]



شکل (۲-۱): تکنولوژی تولید نواربافی در تولید مواد مرکب [Herakovich, 1998]

روش متداول دیگر در تولید مکانیزه مخازن و لوله های کامپوزیتی، روش رشته پیچی<sup>۱</sup> است. شایان ذکر است که در این تحقیق نیز انتقال حرارت در پوسته های کامپوزیتی استوانه ای شکلی که با استفاده از این روش تولید می شوند، بررسی شده است. در این روش، عمل پیچش الیاف برای شکل دهی به یک جداره استوانه ای (معمولاً بدون نیاز به قالب های کامل) صورت می گیرد و هم زمان عمل تزریق پلیمر و رزین در میان الیاف تحت دمای کنترل شده صورت می گیرد و بطور مکانیزه کیفیت لمینیت تولید شده کنترل می شود. انجام این کار از طریق استفاده از خواص مقاومتی قابل توجه الیاف و یا پیچش پیوسته به کمک یک ماده رزینی آلی یا معدنی امکانپذیر است.



شکل (۱-۳): تکنولوژی تولید رشته پیچی در تولید بدنه یک راکت [Herakovich, 1998]

<sup>۱</sup>. Filament Winding

با استفاده از این تکنیک، سطح بسیار صاف (در مقایسه با روش های غیر مکانیزه) و لمینیت های دارای خواص همگن به دست می آیند. همچنین در پوسته های نازک معمولاً از تقویت کننده هایی در جداره داخلی و یا خارجی استوانه (به شکل یک سازه) استفاده می شود. تقویت کننده ها به هر شکلی که باشند در یک شبکه رزینی قرار می گیرند و برای این منظور بلافاصله قبل از عمل پیچش با رزین مرطوب می گردند<sup>۱</sup> و یا از قبل با رزین آغشته می شوند<sup>۲</sup>. قرار گرفتن تقویت کننده ها در یک شبکه رزینی موجب می گردد تا این مواد در جای ثابتی قرار گیرند و از آسیب های مکانیکی در امان باشند. شبکه رزینی از اثرات تخریبی محیطی، تقویت کننده ها را محافظت می کند.

تقویت کننده آغشته به رزین بطور مداوم دور فرم<sup>۳</sup> و یا قالب<sup>۴</sup> پیچیده می شوند که شکل آن در ساختمان داخلی قطعه ای است که می خواهند ساخته شود. پس از پخت، قالب می تواند خارج گشته و یا به عنوان یک جزء مکمل ساختمان اصلی باقی بماند.

هرچند این روش ساخت امکان تولید اجزا سبک و قوی را می دهد ولی ثابت شده که این تکنیک خصوصاً برای ساخت قطعاتی در زمینه های هوانوردی، دریایی و کاربردهای فضایی شرح داده شده در جدول (۱-۱) و قطعات تجاری و صنعتی جدول (۱-۲) مناسب تر است. هم تقویت کننده و هم رزین را می توان به گونه های مختلفی انتخاب و طراحی نمود به نحوی که هر خاصیت مورد نیاز را فراهم آورد. پلاستیک های تقویت شده در واقع سیستم های کامپوزیتی هستند که در آن ها شبکه رزینی آن الیاف تقویت کننده را دربر گرفته است. آزادی عمل زیادی در انتخاب رزین ها و نیز نسبت رزین به تقویت کننده وجود دارد که نهایتاً موجب تولید محصولاتی با خواص کاملاً متفاوت می گردد. برخی از خواص فیزیکی مفید به این شرح است: نسبت بالای مقاومت به وزن، مقاومت در برابر عوامل شیمیایی و مناسب بودن برای ساخت در روش های مختلف.

---

<sup>۱</sup>. Wet Process

<sup>۲</sup>. Pre impregnated Process

<sup>۳</sup>. Form

<sup>۴</sup>. Mandrel

جدول (۱-۱): سازه های رشته پیچی شده برای کاربردهای فضایی ، آبی و نظامی [Touloukian, 1972]

عایق موتورهای راکت	بدنه موتورهای راکت
مخروطی دماغه جهت ادوات فضایی	لایر موتورهای سوخت جامد
لایر نازل راکتها	مخروطی دماغه راکتها
وسیله ایجاد و تنظیم تراست موتورهای سوخت مایع	موتور JATO (وسایلی که به کمک موتور جت پرتاب می شوند)
ادوات پرتاب اژدر	سیلندرهای خلأ
لوله های پرتاب کننده اشعه	ادوات پرتاب راکت
سازه های شاتل های فضایی	میله های پایه فرود موشک ها
محفظه احتراق	دماغه پوشش رادار
تیغه پروانه هلیکوپتر	مخازن درون بال هواپیما
محفظه حمل کننده مواد در موشک ها	ترمیستورها
بدنه توربین های APV	پوشش دریچه تهویه قایق ها
مخازن مواد شیمیایی	قیف خروج گازها در موتور موشک ها
راکتهای بمباران تاکتیکی	لوله های موشک های صوتی
کاسکت محافظ سر	دیرک چادر
قیف های محافظ ادوات توپخانه	محفظه حمل گلوله های توپخانه
مخازن زیردریایی ها	لوله های مایعات در زیردریایی ها
بدنه زیردریایی ها	لوله های تهویه زیردریایی ها
مخازن سرمازا	راه نما های دریایی
قسمت های کنبدی شکل سونارها	مدارات یکپارچه الکترونیکی
جعبه فیوز	پوسته موتور

جدول (۱-۲): سازه های رشته پیچی شده برای کاربردهای تجاری و صنعتی [Touloukian, 1972]

مخازن ذخیره، اسید، مواد قلیایی، آب، روغن، نمک ها و ...	مخازن راه آهن
پروانه ها	چرخ دنده کلید های ولتاژ بالا
داربست های ساختمانی	ظروف تحت فشار
گوپچه های دریایی و راهنما	محفظه موتور ، باطری و غیره
مخازن هواپیما و سازه های هوایی	سوپاپ ها
قلاب های ماهیگیری	محفظه زیر هواپیما
دکل قایق	قایق های دماغه گرد و سرپوشیده
وسایل بازی گلف	قطبین لامپ ها
بدنه اتومبیل ها	نرده پیست های مسابقه
سیلندر ترمزهایی که با هوا کار می کنند	گاردان اتومبیل ها
فیلترهای اسید	لوله های انتقال حرارت
پل های موقت	لوله تفنگ بدون درز
لوازم و تجهیزات کامپیوترها	لوازم و تجهیزات موتورها
تجهیزات دستگاه های تهویه	طشت و وان حمام
گلدانی فیوز	فنرهای کامیون و اتومبیل
لوله های آبیاری و آبرسانی و اتصالات آن ها	ظروف آبکاری
نردبان ها	لوله های چاه های نفت
پایه های نصب شونده روی کامیون ها	قرقره های منسوجات
بدنه و عایق درون خازن ها	شمع ( پایه ) اتوبان ها
هدایتگر امواج الکتریکی	هسته سیم پیچ ها
بشقاب آنتن ها	روتور موتورهای الکتریکی



مواد مورد استفاده در ساخت بوستر موشک و وسایل نظامی، محدوده وسیعی از "مواد مخصوص با دانسیته بالا به منظور جذب حرارت" تا "مواد مقاوم سبک به منظور تحمل تنش های ساختمانی" را در بر می گیرد اما برای هر کاربردی نیاز به حداقل وزن یک فاکتور مهم است، به عنوان مثال برای یک محصول تجاری مانند تانک های لوکوموتیو بسیاری از مواد موجود است اما این محصول در نهایت می تواند یک خاصیت برجسته داشته باشند پس می توان نتیجه گیری نمود که کامپوزیت ترکیبی صحیح از دو یا چند ماده اصلی است که در این ترکیب هر جزء بهترین خاصیتش را به کامپوزیت نهایی می بخشد. در حوالی سال های ۱۹۴۰ کار اساسی بر روی مواد پلاستیکی تقویت شده با الیاف شیشه انجام شد و هدف آن کسب اطلاعات جهت طراحی مخازن تحت فشار مورد مصرف در راکت بود که نتیجه آن موتورهای رشته پیچی و تولید موشک هایی نظیر اطلس و پولاریس بود.

از سال ۱۹۴۷ کمپانی های قدرتمند بسیاری در زمینه به کارگیری روش رشته پیچی به منظور تولید ظروف تحت فشار مقاوم و سبک تحقیقات وسیعی را انجام داده اند. مخازن تحت فشار با مغزی های جدار نازک فلزی که توسط کولار پیچیده شده است، نقش مهمی را در صنایع هوایی و فضایی عهده دار می باشد، هلیوم، اکسیژن، هیدروژن و نیتروژن در مغزی هایی که از جنس تیتانیوم، فولاد ضد زنگ و آلومینیوم هستند نگهداری می شوند. این مخازن عمدتاً کروی هستند و از قطر ۰/۳ الی ۱/۰۱ متر در بیست و سه نوع مختلف در شاتل های فضایی کاربرد دارند.

کپسول های تحت فشار آتش نشانان و یا کوهنوردان از الیاف کولار یا شیشه به همراه رزین اپوکسی تولید می شوند. این کپسول ها دارای یک مخزن جدار نازک فلزی هستند که به خوبی فشار را تحمل کرده و بدون اینکه دچار نشتی و یا شکست ناشی از خستگی شوند. از مزایای دیگر این کپسول ها علاوه بر سبکی عدم تکه تکه شده و پرتاب ترکش هنگام انفجار بر اثر سوراخ شدنشان می باشد. ساخت مخازن ذخیره، لوله های زیر زمینی انتقال بنزین از مواد مرکب توسط روش رشته پیچی از اهداف اکولوژی می باشد، زیرا در مخازن و لوله های فلزی خوردگی باعث نشت بنزین به داخل زمین می شود. یکی از کاربردهای اخیراً از مخازن کامپوزیت در برخی از کشورها استفاده از آن به

عنوان مخازن ذخیره گاز طبیعی فشرده<sup>۱</sup> برای استفاده در خودروها می باشد . به دلیل سبکی و استحکام مناسب ، سهولت ساخت ، مقرون به صرفه بودن و مشکلات ناشی از استفاده مخازن فلزی سبب گسترش این نوع از مخازن گردیده است .

یکی دیگر از جنبه های به کارگیری مواد مرکب در صنعت هوانوردی و حمل نقل است. نسبت بالای مقاومت مکانیکی به وزن این مواد منجر به بکارگیری گسترده آن ها در هواپیماها، بدنه موشک ها، راکت ها، هلیکوپتر ها و حتی تجهیزات فضانوردی نظیر شاتل ها شده است. به عنوان نمونه، در شکل (۴-۱) نمونه ای از بکارگیری فوق العاده زیاد و متنوع مواد مرکب در بمب افکن فوق مدرن B2 نشان داده است. در شاتل ها به دلیل استفاده از سوخت جامد و در نتیجه وجود ذرات ساینده گداخته در گازهای خروجی از موتور جت، به کارگیری از مواد کامپوزیتی پایه کربن در شیپوره های اگزاست بی رقیب در برابر فلزات رایج در صنعت است.

همچنین به کارگیری مواد مرکب در صنعت حمل و نقل ریلی و جاده ای منجر به سبک سازی (تا حدود ۱۰٪) و کاهش مصرف سوخت (بهینه سازی مصرف سوخت) می شود و با بکارگیری آن ها در بدنه میزان ارتعاشات و شوک وارد بر وسیله نقلیه کاهش می یابد. سایر موارد استفاده از مواد کامپوزیتی مربوط به تولید تجهیزات ورزشی، پزشکی، الکترونیک و نظامی (نظیر انواع سلاح های نفری بسیار سبک) است. همچنین از روش های غیر مکانیزه نیز در تولید لمینیت های کامپوزیتی استفاده می شود.

در این روش ها لمینیت کامپوزتی با استفاده از قالب های عمدتاً چوبی و گچی ساخته می شوند و اختلاط الیاف (رشته های تصادفی و یا بافته) و رزین مستقیماً توسط نفر انجام می شود. پس از تولید قطعات کامپوزیتی (چه به روش مکانیزه و چه به روش غیر مکانیزه) استفاده از فرآیند کیورینگ<sup>۱</sup>

---

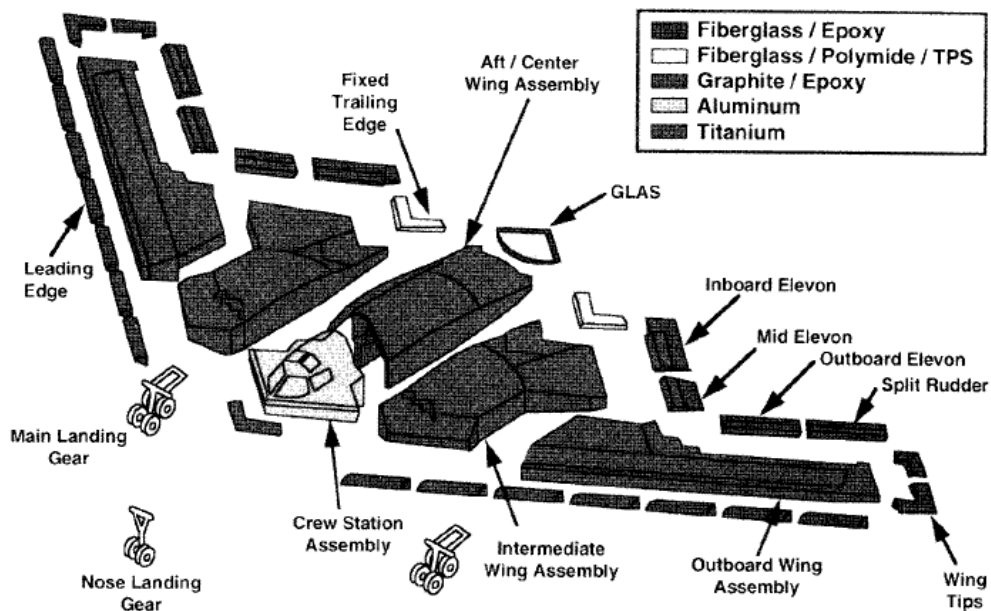
<sup>۱</sup>. Compressed Natural Gas ( CNG )

<sup>۱</sup>. Curing

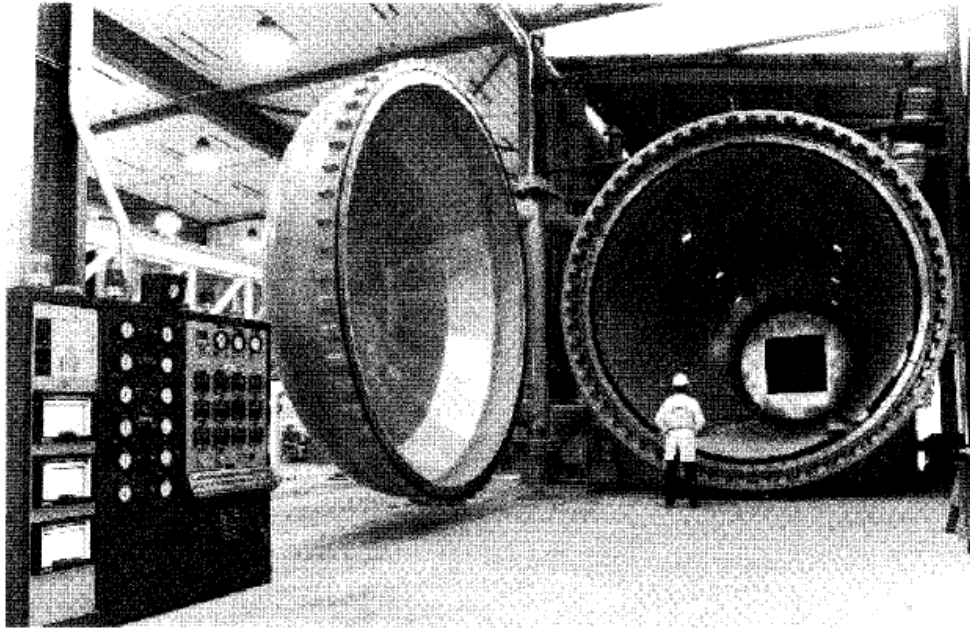
جهت تثبیت و عمل آوری لمینیت ها مورد نیاز است. در شکل (۵-۱) نمونه ای از کوره های کیورنگ نشان داده شده است.

علاوه بر کامپوزیت های دارای ماتریس پلیمری و الیاف شیشه، امکان ساخت مواد کامپوزیتی از ماتریس های فلزی، سرامیکی و دارای الیاف فلزی و کربن نیز وجود دارد. در شکل های (۶-۱) و (۷-۱) نمونه هایی از کامپوزیت های ساخته شده از الیاف کربن در اپوکسی و الیاف سیلیکون کاربرد در تیتانیوم نشان داده شده است.

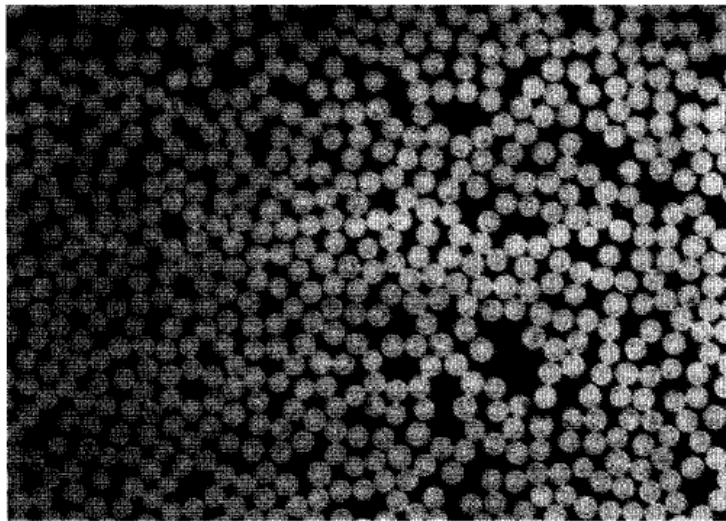
در جدول (۳-۱) مشخصات نمونه هایی از الیاف متداول در ساخت مواد مرکب و در جدول (۴-۱) نیز نمونه هایی از خواص الیاف، ماتریس ها و فلزات صنعتی متداول آمده است. در جدول (۵-۱) مشخصات انتقال حرارت هدایتی و در جدول (۶-۱) مشخصات مکانیکی تعدادی از لمینیت های کامپوزیت گزارش شده است.



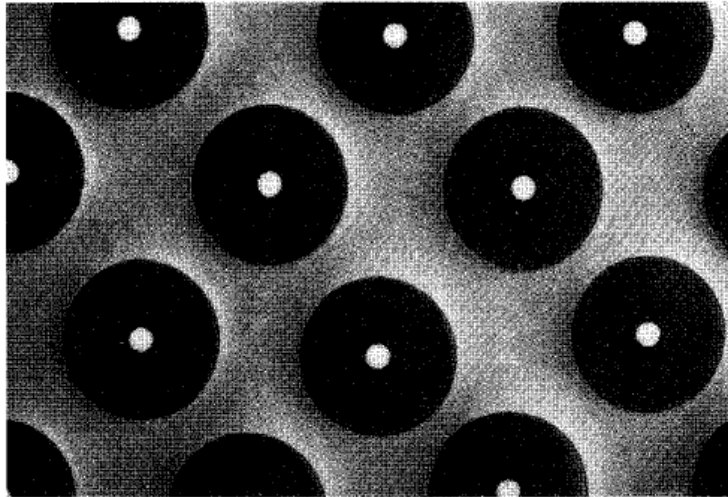
شکل (۴-۱) - استفاده از کامپوزیت های مدرن در بمب افکن B2 [Herakovich, 1998]



شکل (۵-۱): کوره کیورینگ قطعات کامپوزیتی بزرگ [Herakovich, 1998]



شکل (۶-۱): کامپوزیت کربن / اپوکسی [Herakovich, 1998]



شکل (۷-۱): کامپوزیت سیلیکون کاربید / تیتانیوم [Herakovich, 1998]

جدول (۳-۱): مشخصات الیاف رایج در کاربردهای صنعتی [Herakovich, 1998]

Fiber Type		Origin	Fabrication Method	Filament Size, $\mu\text{m}$ ( $\mu\text{in}$ )	Filaments/Tow
Glass	S-2 glass	Molten glass	Fiber-drawing	6-14 (230-550)	2000
Organic	Kevlar 49	Liquid crystal	Spinning	12 (472)	1000
Carbon	AS4	PAN	Heat and stress	8 (315)	12,000
	P-100S	Pitch	Heat	10 (393)	2000
	IM8	PAN	Heat and stress	5 (197)	12,000
Ceramic	Boron	Tungsten core	CVD	142 (5600)	1
	Nicalon (SiC)	Polymer precursor	Pyrolysis	15 (600)	500
	SCS-6 (SiC)	Carbon core	CVD	127 (5000)	1
	Alumina	Slurry mix	Spin and heat	20 (800)	1

جدول (۴-۱): نمونه هایی از خواص الیاف، ماتریس ها و مواد صنعتی [Herakovich, 1998]

Material	Density $\rho$ , g/cm <sup>3</sup> (lb/in <sup>3</sup> )	Modulus $E_L$ , GPa (Msi)	Poisson's Ratio $\nu_L$	Strength $\sigma'_L$ , MPa (ksi)	Specific Stiffness $(E/\rho)$ / $(E/\rho)_{Al}$	Specific Strength $(\sigma'_L/\rho)$ / $(\sigma'_L/\rho)_{Al}$	Thermal Expansion Coefficient $\alpha_L$ , $\mu/^\circ\text{C}$ ( $\mu/^\circ\text{F}$ )
<b>METALS</b>							
Steel	7.8 (0.284)	200 (29)	0.32	1724 (250)	1.0	1.2	12.8 (7.1)
Aluminum	2.7 (0.097)	69 (10)	0.33	483 (70)	1.0	1.0	23.4 (13.0)
Titanium	4.5 (0.163)	91 (13.2)	0.36	758 (110)	0.95	1.2	8.8 (4.9)
<b>FIBERS (Axial Properties)</b>							
AS4	1.80 (0.065)	235 (34)	0.20	3599 (522)	5.1	11.1	-0.8 (-0.44)
T300	1.76 (0.064)	231 (33)	0.20	3654 (530)	5.1	11.5	-0.5 (-0.3)
P100S	2.15 (0.078)	724 (105)	0.20	2199 (319)	13.2	5.5	-1.4 (-0.78)
IM8	1.8 (0.065)	310 (45)	0.20	5171 (750)	6.7	16.1	—
Boron	2.6 (0.094)	385 (55.8)	0.21	3799 (551)	5.8	8.3	8.3 (4.6)
Kevlar 49	1.44 (0.052)	124 (18)	0.34	3620 (525)	3.6	13.9	-2.0 (-1.1)
SCS-6	3.3 (0.119)	400 (58.0)	0.25	3496 (507)	5.1	6.1	5.0 (2.77)
Nicalon	2.55 (0.092)	180 (28)	0.25	2000 (290)	2.8	4.4	4.0 (2.2)
Alumina	3.95 (0.143)	379 (55)	0.25	1585 (230)	3.7	1.9	7.5 (4.2)
S-2 Glass	2.46 (0.090)	86.8 (12.6)	0.23	4585 (665)	1.4	10.4	1.6 (0.9)
E-Glass	2.58 (0.093)	69 (10.0)	0.22	3450 (550)	1.05	7.5	5.4 (3.0)
Sapphire	3.97 (0.143)	435 (63)	0.28	3600 (522)	4.3	5.1	8.8 (4.9)
<b>MATRIX MATERIALS</b>							
Epoxy	1.38 (0.050)	4.6 (0.67)	0.36	58.6 (8.5)	0.08	0.4	63 (35)
Polyimide	1.46 (0.053)	3.5 (0.5)	0.35	103 (15)	0.03	0.4	36 (20)
Copper	8.9 (0.32)	117 (17)	0.33	400 (58)	0.5	0.3	17 (9.4)
Silicon carbide	3.2 (0.116)	400 (58)	0.25	310 (45)	4.9	0.5	4.8 (2.67)

جدول (۵-۱): نمونه هایی از خواص انتقال حرارت هدایتی کامپوزیت های مختلف [Touloukian, 1972]

Filler	Matrix	Parallel to fibers (W/m K)	Normal to fibers (W/m K)	Density (g/cc)	Wt. (%) filler
Continuous carbon fiber	Polymer	330	3-10	1.8	NA
Discontinuous carbon fiber	Polymer	10-100	3-10	1.7	NA
Graphite	Epoxy	370	6.5	1.94	NA
Single walled nanotubes	Epoxy	0.5	NA	NA	1
Thermal graph DKD X	Lexan HF110-11N	8	0.6	1.38	30
Thermal graph DKD X	Lexan HF110-11N	11.4	0.74	1.46	40
Thermocarb CF300	Zytel 101 NC010	1.1	0.4	1.17	5
Short carbon fiber	PPS	15	4	1.7	80

جدول (۶-۱): نمونه هایی از خواص مکانیکی کامپوزیت های مختلف [Herakovich, 1998]

Material	AS4/ 3501-6	T300/ 5208	Kevlar/ epoxy	Boron/ Al	SCS-6/ Ti-15-3	S-2 glass/ epoxy
Density, g/cm <sup>3</sup> (lb/in <sup>3</sup> )	1.52 (0.055)	1.54 (0.056)	1.38 (0.05)	2.65 (0.096)	3.86 (0.14)	2.00 (0.072)
Axial modulus $E_1$ , GPa (Msi)	148 (21.5)	132 (19.2)	76.8 (11.0)	227 (32.9)	221 (32)	43.5 (6.31)
Transverse modulus $E_2$ , GPa (Msi)	10.50 (1.46)	10.8 (1.56)	5.5 (0.8)	139 (20.2)	145 (21)	11.5 (1.67)
Poisson's ratio $\nu_{12}$	0.30	0.24	0.34	0.24	0.27	0.27
Poisson's ratio $\nu_{23}$	0.59	0.59	0.37	0.36	0.40	0.40
Shear modulus $G_{12}$ , GPa (Msi)	5.61 (0.81)	5.65 (0.82)	2.07 (0.3)	57.6 (8.35)	53.2 (7.78)	3.45 (0.50)
Shear modulus $G_{23}$ , GPa (Msi)	3.17 (0.46)	3.38 (0.49)	1.4 (0.20)	49.1 (7.12)	51.7 (7.50)	4.12 (0.60)
Modulus ratio $E_1/E_2$	12.6	12.3	14.8	1.6	1.5	4.6
Axial tensile strength $X_T$ , MPa (ksi)	2137 (310)	1513 (219.5)	1380 (200)	1290 (187)	1517 (220)	1724 (250)
Transverse tensile strength $Y_T$ , MPa (ksi)	53.4 (7.75)	43.4 (6.3)	27.6 (4.0)	117 (17)	317 (46)	41.4 (6.0)
Strength ratio $X_T/Y_T$	27	35	50	11	4.8	42
Axial CTE $\alpha_1$ , $\mu/^\circ\text{C}$ ( $\mu/^\circ\text{F}$ )	-0.8 (-0.44)	-0.77 (-0.43)	-4 (-2.2)	5.94 (3.3)	6.15 (3.4)	6.84 (3.8)
Transverse CTE $\alpha_2$ , $\mu/^\circ\text{C}$ ( $\mu/^\circ\text{F}$ )	29 (16)	25 (13.6)	57 (32)	16.6 (9.2)	7.90 (4.4)	29 (16)
Fiber volume fraction $V_f$	0.62	0.62	0.55	0.46	0.39	0.60
Ply thickness, mm (in)	0.127 (0.005)	0.127 (0.005)	0.127 (0.005)	0.178 (0.007)	0.229 (0.009)	

### ۱-۳- مروری بر تحقیقات گذشته

تحقیقات انجام شده روی این مواد اکثراً تغییر خواص آن‌ها تحت بارگذاری‌های مکانیکی و دمایی را بررسی نموده‌اند [Chao et al., 2007 & Pradeep and Ganesan, 2008] و کمتر به انتقال حرارت در این مواد پرداخته شده است. تاکنون فعالیت‌هایی در زمینه تحلیل انتقال حرارت در مواد غیر ایزوتروپ انجام شده است. تحلیل‌های اولیه عمدتاً بر انتقال حرارت یک بعدی در کریستال‌های غیر ایزوتروپ متمرکز بوده‌اند [Wooster, 1957 & Nye, 1957]. شایان ذکر است که انتقال حرارت در استوانه‌های همگن و ایزوتروپ در تعدادی از تحقیقات مورد بررسی قرار گرفته است [Ozisik, 1963 & Chang, 1977]. بتدریج با توسعه دانش مواد مرکب، انتقال حرارت در این مواد نیز مورد توجه قرار گرفت. مقاله مولهلند [Mulholland, 1974] در مورد پدیده‌های پخش غیر دائم در یک استوانه اورتوتروپ یکی از اولین فعالیت‌ها در این زمینه است. نور و بورتان [Noor and Burton, 1990] انتقال حرارت پایدار هدایتی را در ورق‌ها و پوسته‌های کامپوزیتی مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها با استفاده از روش‌های عددی پاسخ میدان دما را بدست آوردند و اثر آن‌ها بر جدایش لایه‌ها مورد بررسی قرار دادند. اینگار [Iyengar, 1995] انتقال حرارت غیردائمی هدایتی را در یک ورق کامپوزیتی مورد بررسی قرار داده و از فرمولاسیون المان محدود برای تحلیل این مساله استفاده نموده است. این تحلیل بر روی لمینیت گرافیت / اپوکسی با آرایش الیاف  $[90^\circ, \pm 45^\circ, 0^\circ]$  و در شرایط مرزی مختلف انجام شده است.

چینما، ونچنگ و حسین [Ching Ma and Wen Chang, 2004 & Hsien and, Ching Ma, 2002]، حل تحلیلی انتقال حرارت هدایتی در محیط‌های چند لایه غیر ایزوتروپیک را در دو حالت، بدون در نظر گرفتن منبع گرمایی و همراه با گرمایش داخلی به طور جداگانه مورد بررسی قرار داده‌اند، آن‌ها



با استفاده از یک تبدیل مختصات خطی مساله انیزوتروپ را به شکل ساده ایزوتروپ تبدیل نموده و مساله را حل کرده اند.

آرگریس و همکاران [Argyris et al., 1995] بررسی تحلیلی را بر روی انتقال حرارت در لمینیت های تخت مثلثی انجام دادند. آن ها در فرمولاسیون خود اثر هر سه مکانیزم انتقال حرارت هدایتی، همرفتی و تشعشی را بر لمینیت در نظر گرفتند. فرمولاسیون آن ها بر مبنای انتقال حرارت مرتبه اول لمینیت کامپوزیتی بوده و تغییرات خطی را برای انتقال حرارت در جهت ضخامت لایه ها در نظر گرفتند و در نهایت نشان دادند که استفاده از این فرمولاسیون از نظر هزینه محاسباتی بسیار موثرتر از محاسبات عددی است.

سونائو و همکاران [Sunao et al., 1999] حل عددی را برای انتقال حرارت پایدار هدایتی در ورق های کامپوزیتی ارائه نمودند. آن ها اثرات انتقال حرارت بر روی لایه داخلی را که ناشی از القا خاصیت ترموپلاستیک ماده است، مورد بررسی قرار دادند. تارن و وانگ [Tarn, 2001, 2002 & Tarn and Wang, 2003, 2004] نیز انتقال حرارت هدایتی در مواد FGM را مورد بررسی قرار دادند.

گولوچان و آرتمنکو [Golovchan and Artemenko, 2004] اقدام به تحلیل انتقال حرارت در لمینیت های دارای الیاف با مسیر نوسانی نمودند. شی-کیانگ و جیا-چن [Shi-qiang D and Jia-chan, 2005] از روش دو-فضایی برای بررسی انتقال حرارت در استوانه های کامپوزیتی استفاده نمودند. آن ها نشان دادند که انتقال حرارت میکروسکوپی در حالات خاصی از توزیع الیاف می تواند یکنواخت شود.

گائو [Guo, 2004] بطور عددی انتقال حرارت هدایتی در لمینیت های ضخیم را مورد بررسی قرار داده و با استفاده از روش المان محدود انتقال حرارت غیردائمی را در حالتی که تولید انرژی در داخل لمینیت وجود داشت تحلیل نموده است. گیرینگارد و لی [Greengard and Lee, 2006] چنین مساله ای را با استفاده از روش معادلات روباست بررسی نمودند.

لو و همکاران [Lu et al. 2006] انتقال حرارت در جداره های مرکب استوانه ای شکل را مورد مطالعه قرار دادند. آن ها در تحلیل خود از روش جداسازی متغیرها استفاده نمودند و نشان دادند که حل آن ها دارای تطابق مناسبی با محاسبات عددی است. چترجی و همکاران [Chatterjee et al., 2008] با استفاده از فرمولاسیون مرز محدود اقدام به محاسبه انتقال حرارت پایدار در کامپوزیت های سه بعدی نمودند. آن ها با استفاده از توابع شکل خطی و درجه چهار، توزیع دما و شار حرارتی را در این لمینیت ها بدست آوردند.

یوونت و همکاران [Yvonnet et al., 2009] نیز فرمولاسیون مناسبی را بر مبنای روش المان محدود برای حل عددی انتقال حرارت موثر در کامپوزیت ها ارائه نمودند. سادوفسکی و همکاران [Sadowski et al., 2008] اثر سرمایش سریع بر استوانه های FGM را مورد بررسی قرار دادند. چیو و همکاران [Chiu et al., 2006 & 2007] نیز با استفاده از تشابه مقاومت های الکتریکی و نیز روش تخمین پارامترها اقدام به تعیین ضرایب موثر انتقال حرارت هدایتی در لمینیت های مارپیچی نمودند. آن ها همچنین با استفاده از روش ADI و الگوریتم لونبرگ-مارکوارت<sup>1</sup> مساله انتقال حرارت مستقیم و معکوس را در این لمینیت ها حل نمودند.

کالکارمی و بردی [Kulkarani and Brady, 1997] یک مدل برای هدایت گرمایی در کامپوزیت های کربن-کربن لایه ای ارائه داده اند، مدل ارائه شده بر مبنای درصد حجمی ماتریس و الیاف استوار است و با استفاده از آن ضریب انتقال حرارت در جهت الیاف و جهت عمود بر آن تخمین زده شده است.

---

<sup>1</sup> . Levenberg-Marquardt

جانسون و لسنیک [Johansson and Lesnic,2009] کاربرد روش های پایه ای (MFS) در انتقال حرارت هدایتی مواد چند لایه را نشان داده اند و این روش را برای تخمین عددی شار حرارتی در مواد لایه ای گسترش داده اند. کاراگرقیس و لسنیک [Karageorghis and Lesnic,2008] یک حل برای هدایت حرارتی در مواد کامپوزیتی (لایه ای) با ضریب هدایت وابسته به دما و شرایط مرزی شامل جابجایی و تشعشع با استفاده از روش حل پایه ای ارائه داده اند.

حاجی شیخ و همکاران [Haji-Sheikh et al.,2003] یک فرمولاسیون ریاضی برای میدان دما در حالت پایدار در اجسام چند لایه و چند بعدی بدست آورده اند و در ادامه اثبات شده است که مقادیر ویژه برای حالتی که لایه ها همگن باشد حقیقی است در حالی که برای حالت اورتوتروپ این مقادیر می توانند موهومی باشند. سینگ و همکاران [Singh et al., 2008] حل تحلیلی انتقال حرارت هدایتی در مختصات قطبی چند لایه در جهت شعاعی را مورد بررسی قرار داده اند.

بهادر و بارکهن [Bahadur and Bar-Cohen,2007] یک حل تحلیلی برای توزیع دما و نرخ انتقال حرارت در پین فین های استوانه ای با ضرائب هدایت گرمایی اورتوتروپ ارائه داده اند و سپس نتایج را با حل عددی به روش اجزا محدود مقایسه نموده اند، از حل ارائه شده می توان برای بررسی انتقال حرارت در استوانه های اورتوتروپیک توپر با شرایط خاص ارائه شده، استفاده نمود.

اونیجکوه [Onyejekwe,2002] یک حل دقیق برای انتقال حرارت در محیط های کامپوزیتی با استفاده از تئوری انتگرال مرزی ارائه داده اند. همچنین با پیشرفت علم نانو، بررسی هایی در زمینه انتقال هدایتی در نانو کامپوزیت ها انجام شده است [Zhang et al.,2004 & Roberts et al.,2008]. یکی از کاربرد های مواد کامپوزیت استفاده در ساخت ابر رسانا ها می باشد، از جمله کارهای انجام شده در زمینه انتقال حرارت در ابر رسانا های کامپوزیتی مقاله چو و همکاران [Cha et al.,1995] است که در آن توزیع درجه حرارت معکوس و نرخ تولید حرارت سوپر کانداکتور های کامپوزیتی که در معرض توزیع دمایی ثابت قرار گرفته اند، بررسی شده است.

بررسی انتقال حرارت در فرآیند تولید مواد مرکب نیز از اهمیت فراوانی برخوردار است. برای نمونه می توان به پژوهش حسن [Hassan, 2005] و همکارانش در زمینه تحلیل اثر انتقال حرارت در حین ترکیب الیاف و ماده زمینه اشاره نمود. در این پژوهش شرح مناسبی از تئوری انتقال حرارت در لمینیت های کامپوزیتی ارائه شده است. نیونهام و آبرات [Newnham and Abrate, 1993] نیز در مقاله خود به تحلیل انتقال حرارت کاربردی (کاربرد در فرآیند تولید) به روش المان محدود در مواد غیر ایزوتروپ پرداخته است. در زمینه ارائه تحلیل های دقیق (غیر عددی) حرارتی برای مواد مرکب نیز تلاش هایی صورت گرفته است. به عنوان نمونه سان [Sun and Wichman, 2004] در مقاله خود حل تحلیلی از انتقال حرارت یک بعدی غیر دائم در یک بلوک کامپوزیتی ارائه کرده است. اوسلوکا [Oseloka, 2002] نیز با استفاده از توابع گرین و فرمولبندی انتگرالی معادله انتقال حرارت، پاسخی برای انتقال حرارت در واسط های کامپوزیتی بدست آورده است.

کیهانی و دیگران [Kayhani et al., 2009] حل تحلیلی هدایت در لمینیت های کامپوزیتی استوانه ای در جهت های شعاعی و زاویه ای  $(r, \varphi)$  را مورد بررسی قرار داده اند. این حل تنها برای لوله های کامپوزیتی و مخازنی با نسبت طول به شعاع زیاد معتبر است.

#### ۴-۱- معرفی کارهای انجام شده

در تحقیق اخیر با استفاده از حل تحلیلی، انتقال حرارت دائم و غیردائم در استوانه های کامپوزیتی تحت شرایط مرزی کلی مورد بررسی قرار گرفته است. حل ارائه شده، برای بررسی انتقال حرارت در مخازن (به ویژه مخازن تحت فشار)، لوله های کامپوزیتی، پین فین ها بسیار مفید است. در اینجا، انتقال حرارت در دستگاه مختصات استوانه ای برای مواد کامپوزیتی در شرایطی که الیاف در هر لمینا به دور استوانه پیچیده شده اند، بررسی شده است. چنین شرایطی عملاً برای پوسته های کامپوزیتی

استوانه ای شکلی که به روش رشته پیچی<sup>۱</sup> تولید شده اند، وجود دارد. در فصل دوم خصوصیات و روش های ساخت مواد مرکب مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین ضمن بیان روابط انتقال حرارت در مواد مرکب، قوانین حاکم بر ضرایب هدایتی این مواد در فصل سوم این تحقیق بررسی شده است. بایستی توجه داشت که تانسور ضرایب هدایت در هر لایه می تواند متفاوت از سایر لایه ها باشد به همین دلیل حل معادله انتقال حرارت در هر لایه بصورت جداگانه انجام شده و شرط مرزی پیوستگی دما و شار حرارتی بین لایه ها اعمال شده است. در فصل چهارم این تحقیق حل تحلیلی بر روی انتقال حرارت در پوسته های کامپوزیتی در حالت پایا و شرایط مرزی کلی ارائه شده است و بر مبنای این معادلات پاسخ های دقیقی برای این حالت بدست آمده است. در فصل پنجم نیز انتقال حرارت غیر دائم در شرایط مرزی کلی بررسی گردیده است.

---

<sup>1</sup> . Filament Winding

# فصل دوم

## خصوصیات مواد مرکب

## ۲-۱- مقدمه

کلمه مرکب در مواد به معنی ترکیب دو یا چند ماده در مقیاس میکروسکوپی می باشد. بعضی از مواد در مقیاس میکروسکوپی نیز با هم ترکیب می شوند مانند آلیاژها؛ اما نتیجه این ترکیب در مقیاس میکروسکوپی معمولاً یک ماده همگن می باشد.

## ۲-۲- خواص عمومی مواد مرکب

استفاده از مواد مرکبی که از الیاف و رزین تشکیل شده اند به سرعت در صنعت رو به افزایش است. در این گونه مواد، رزین از مواد پلیمری تشکیل شده و الیاف نیز به عنوان تقویت کننده استفاده می شود. در برخی مواد از پرکننده ها نیز استفاده می شود. خواص مواد مرکب به عوامل زیادی از قبیل خواص اجزای اصلی تشکیل دهنده ماده مرکب، نحوه و فرم تقویت به وسیله الیاف، درصد حجمی، طول، نحوه توزیع و جهت الیاف و استحکام چسب و پرکننده ها بستگی دارد. بسیاری از این عوامل به نحوه ساخت، مربوط می شوند. بنابراین با در نظر گرفتن نحوه ساخت اجزای سازه، باید به طراحی و محاسبه کمیت های فوق پرداخت.

از آنجا که طیف گسترده ای از مواد مرکب وجود دارند، نمی توان راجع به خواص مواد مرکب به صورت کلی بحث کرد. ولی می توان گفت که تمام مواد مرکب، غیر همگن هستند و بیشتر آن ها دارای خواص غیر متقارن می باشند و معمولاً برای محاسبه خواص، آن ها را با آلیاژها شبیه سازی می کنند.

غیر همگن بودن مواد مرکب باعث می شود که خواص در تمام نقاط ماده، یکسان نباشند. اگر دو نقطه درون ماده مرکب در نظر گرفته شود، بسته به این که این دو نقطه روی الیاف، رزین یا ناحیه بین آن ها باشند، خواص در آن دو نقطه می تواند بسیار متفاوت باشد. البته از دید میکروسکوپی، تمام مواد غیر همگن هستند. اما در مواد مرکب، تغییر خواص از یک نقطه به نقطه دیگر شدت بیشتری دارد.

علت این است که رزین و الیاف تشکیل دهنده مواد مرکب دارای هندسه و خواص مکانیکی متفاوتی می باشند.

خواص رزین نیز به تنهایی به شدت، دما، فشار و روش ساخت وابسته است. هرگاه دو ناحیه از یک ماده با هم جریان پیدا کنند، ناحیه اتصالی<sup>۱</sup> بین آن دو ناحیه ایجاد می شود که هیچ خط جریان ماده ای آن را قطع نمی کند. این ناحیه که می توان آن را با مرزهای دانه در فلزات مشابه در نظر گرفت، از لحاظ خواص و استحکام متفاوت با نواحی مجاور بوده، به گونه ای که در بسیاری حالات شکست و یا خوردگی از این ناحیه آغاز می گردد.

یکی دیگر از ویژگی های مواد مرکب، غیر متقارن بودن آن ها است که بیانگر تغییر در خواص مکانیکی ماده، در جهات متفاوت می باشد. در یک ماده مرکب تک لایه که از رزین و الیاف پیوسته در یک جهت تشکیل شده است، استحکام و دیگر خواص مکانیکی در جهت الیاف، متفاوت با استحکام و خواص مکانیکی در جهت عمود بر الیاف می باشد. بنابراین در یک ماده مرکب لایه ای که از قرارگیری صفحات تک لایه متشکل از رزین و الیاف روی یکدیگر به وجود آمده است، خواص مکانیکی مواد در هر سه جهت عمود بر هم، به علت عدم وجود تقارن با هم متفاوت خواهد بود.

## ۲-۳- قسمت های تشکیل دهنده مواد مرکب

مواد مرکب از سه قسمت اصلی الیاف، چسب و ماده ای کم وزن بنام « پر کننده » تشکیل می شوند. در این مواد الیاف جهت تحمل بار و چسب برای چسباندن الیاف و عملکرد یکنواخت آن ها بکار برده می شوند.

---

<sup>۱</sup>. knit line



## ۲-۳-۱- خصوصیات الیاف<sup>۱</sup>

با استفاده از روش های مختلف، می توان الیافی از مواد را که نسبت طول به قطر آن ها بالا می باشد، بدست آورد. مقاومت و سختی برخی الیاف در جدول (۱-۲) ارائه شده است:

جدول (۱-۲): خصوصیات الیاف

الیاف	$\rho$ دانسیته $lb/in^3$ ( $kN/m^3$ )	$S$ مقاومت کششی $10^3 lb/in^2$ ( $GN/m^2$ )	$S/\rho$ $10^5 in.$ ( $km$ )	$E$ سختی کششی $10^6 lb/in^2$ ( $GN/m^2$ )	$E/\rho$ $10^7 in.$ ( $Mm$ )
Aluminum	.097 (26.3)	90 (.62)	9 (24)	10.6 (73)	11 (2.8)
Titanium	.170 (46.1)	280 (1.9)	16 (41)	16.7 (115)	10 (2.5)
Steel	.282 (76.6)	600 (4.1)	21 (54)	30 (207)	11 (2.7)
E-glass	.092 (25.0)	500 (3.4)	54 (136)	10.5 (72)	11 (2.9)
S-glass	.090 (24.4)	700 (4.8)	78 (197)	12.5 (86)	14 (3.5)
Carbon	.051 (13.8)	250 (1.7)	49 (123)	27 (190)	53 (14)
Beryllium	.067 (18.2)	250 (1.7)	37 (93)	44 (300)	66 (16)
Boron	.093 (25.2)	500 (3.4)	54 (137)	60 (400)	65 (16)
Graphite	.051 (13.8)	250 (1.7)	49 (123)	37 (250)	72 (18)

معمولا نسبت های مقاومت به دانسیته ( $S/\rho$ ) و سختی به دانسیته ( $E/\rho$ ) در طراحی سازه هایی که مساله مقاومت، سختی و وزن در آن ها مهم باشد، مورد استفاده قرار می گیرند.

## ۲-۳-۲- خصوصیات تارها<sup>۲</sup>

مقطع تارها نیز مانند الیاف دارای ابعاد کریستالی می باشند، با این تفاوت که معمولا کوتاه تر و نسبت طول به قطر آن ها حدود صد می باشد. تارها معمولا از عملیات کریستالی مواد بدست می آیند.

<sup>1</sup> . Fibers

<sup>2</sup> . Whiskers

از قبیل آهن دارای ساختار کریستالی با مقاومت تئوری  $2.900.000 \text{ Psi}$  می باشد؛ آهن خالص مقاومتی از  $75.000 \text{ Psi}$  تا  $100.000 \text{ Psi}$  را شامل می گردد. این تفاوت از خرابی در ساختار کریستالی ناشی می شود، بنابراین تارهای آهنین به مراتب مقاومتی بالاتر از فولاد حجیم دارند. بعضی از این خصوصیات در جدول (۲-۲) نشان داده شده است.

جدول (۲-۲): خصوصیات تارها

تار	$\rho$ دانسیته $lb/in^3$ ( $kN/m^3$ )	$S_T$ مقاومت تئوری $10^6 lb/in^2$ ( $GN/m^2$ )	$S_E$ مقاومت تجربی $10^6 lb/in^2$ ( $GN/m^2$ )	$S_E/\rho$ $10^5 in.$ ( $km$ )	$E$ سختی کششی $10^6 lb/in^2$ ( $GN/m^2$ )	$E/\rho$ $10^7 in.$ ( $Mm$ )
Copper	.322 (87.4)	1.8 (12)	.43 (3.0)	13 (34)	18 (124)	5.6 (1.4)
Nickel	.324 (87.9)	3.1 (21)	.56 (3.9)	17 (44)	31 (215)	9.6 (2.4)
Iron	.283 (76.8)	2.9 (20)	1.9 (13)	67 (170)	29 (200)	10.2 (2.6)
$B_4C$	.091 (24.7)	6.5 (45)	.97 (6.7)	106 (270)	65 (450)	71 (18)
SiC	.115 (31.2)	12 (83)	1.6 (11)	139 (350)	122 (840)	106 (27)
$Al_2O_3$	.143 (38.8)	6 (41)	2.8 (19)	196 (490)	60 (410)	42 (11)
C	.060 (16.3)	14.2 (98)	3 (21)	500 (1300)	142 (980)	237 (60)

### ۲-۳-۳- خصوصیات ماتریس<sup>۱</sup>

برای چسباندن و عملکرد یکنواخت الیاف یا تارها، از یک ماده چسبنده بنام «ماتریس» استفاده می شود. این ماده معمولا دارای سختی و مقاومت کمتری نسبت به الیاف می باشد و لیکن اختلاط الیاف

<sup>1</sup> . Matrices

و یا تارها با این ماده منجر به تشکیل یک محصول جدیدی می گردد که علاوه بر دانسیته کم، از مقاومت بالایی نیز برخوردار است.

مواد اپوکسی مثل نارمکو<sup>۱</sup> دارای دانسیته  $40/044 \text{ lb/in}^3$ ، مقاومت فشاری  $23.000 \text{ lb/in}^2$ ، مقاومت کششی  $44.200 \text{ lb/in}^2$ ، مدول الاستیسیته فشاری  $560.000 \text{ lb/in}^2$  و مدول الاستیسیته کششی  $490.000 \text{ lb/in}^2$  می باشد.

## ۲-۴- طبقه بندی مواد مرکب

مواد مرکب را می توان به سه دسته اصلی تقسیم کرد که عبارتند از : مواد مرکب با الیاف تصادفی، مواد مرکب لایه لایه و مواد مرکب ذره ای.

## ۲-۴-۱- مواد مرکب با الیاف تصادفی

مواد به شکل الیاف دارای مقاومت و سختی بالاتری نسبت به دیگر اشکال هستند که این به علت کاهش نقائص کریستالی و جهت یافتگی کریستال ها در جهت طول آن ها است.

برای مثال صفحه ای از جنس شیشه ، دارای مقاومت چند هزار پوند بر اینچ مربع می باشد، الیاف شیشه مقاومتری بین  $700.000 \text{ Psi}$  تا  $400.000 \text{ Psi}$  داشته و الیاف ساخته شده در شرایط آزمایشگاهی مقاومتری نزدیک به یک میلیون  $\text{Psi}$  دارند.

ساده ترین حالت استفاده از الیاف، ترکیبی تصادفی آن ها با یک ماده چسبنده می باشد. در این حالت تعیین خصوصیات دقیق ممکن نمی باشد، اما با استفاده از آزمایش های لازم می توان به صورت آماری نتایج را مورد بررسی قرار داده و از این مواد در زمینه های مختلف استفاده نمود.

---

<sup>1</sup> . Narmco 2387

## ۲-۴-۲- مواد مرکب لایه ای

این مواد شامل حداقل دو ماده مختلف بوده که به یکدیگر می چسبند. لایه ها به گونه ای روی یکدیگر قرار دارند که مقاومت لازم در جهات مورد نظر حاصل می شود. برخی از این مواد به شرح زیر می باشند.

### • مواد ساخته شده از دو لایه فلز<sup>۱</sup>

این مواد از دو فلز با ضرایب انبساط حرارتی مختلف ساخته می شوند. با تغییرات درجه حرارت و اختلاف در تغییر شکل حرارتی آن ها، این مواد دچار انحناء می گردند. از این خاصیت می توان در وسائل اندازه گیری درجه حرارت استفاده کرد.

### • فلزات روکش دار<sup>۲</sup>

برای تغییر دادن خواص بعضی از فلزات، روی آن ها را روکش می کنند. برای مثال آلیاژهای آلومینیوم با مقاومت بالا، در مقابل خوردگی مقاوم نمی باشند، آلومینیوم خالص و یا بعضی دیگر از آلیاژهای آلومینیوم در مقابل خوردگی مقاوم بوده و در نتیجه، آلومینیوم مقاومت بالا را جهت جلوگیری از خوردگی، با آلومینیوم خالص روکش می کنند.

### • لایه های شیشه - پلاستیک

شیشه کاملاً شکننده بوده و به خرده های ریز، نوک تیز و برنده تبدیل می شود. از طرف دیگر نوعی پلاستیک موسوم به « پلی وینیل<sup>۳</sup> » بسیار نرم و انعطاف پذیر می باشد. مخلوط کردن این دو ماده با

---

<sup>۱</sup>. Bimetals

<sup>۲</sup>. Clad Metals

<sup>۳</sup>. Poly Vinyl

یکدیگر باعث می شود که شیشه سختی لازم برای پلاستیک، و همچنین پلاستیک انعطاف پذیری لازم را برای شیشه تامین کند.

- لایه های مرکب از الیاف و چسب<sup>۱</sup>

در این نوع مواد مرکب، جهت الیاف را در لایه های مختلف می توان تغییر داد و در نتیجه از مواد، استفاده کامل می شود و در حقیقت با کمترین زمان می توان بیشترین مقاومت را بدست آورد. کاربرد این مواد در صنعت روندی صعودی داشته و نمونه هایی از آن را می توان در هواپیماها، موشک ها، قایق ها، لوازم ورزشی و دیگر موارد مشاهده نمود. در بعد طراحی سازه، تئوری این مواد قابل بحث بوده و می توان از جنبه های مختلف سازه ای، این مواد را بررسی کرد.

## ۲-۴-۳- مواد مرکب ذره ای

مواد در این حالت عبارتند از یک ماتریس و ماده ای دیگر که به شکل ذرات کوچک در آن توزیع شده اند. این مخلوط می تواند به صورت غیر فلز در غیر فلز، فلز در غیر فلز، غیر فلز در فلز و فلز در فلز باشد.

اغلب مواد مهندسی، همگن و ایزوتوپ می باشند. یک جسم همگن دارای خواص یکنواخت در تمام نقاط جسم می باشد. و دیگر خواص ماده تابعی از موقعیت نقاط آن نمی باشند. همچنین جسم ایزوتوپ در هر نقطه ای دارای خصوصیات یکسان در تمام جهات می باشد. اگر جسمی با خواص ایزوتوپ را که به درجه حرارت حساس است، در یک گرادیان حرارتی قرار دهیم، دیگر هموزن نبوده اما خواص ایزوتوپیک خود را دارا می باشد.

مواد مرکب در حالت کلی غیر همگن و غیر ایزوتوپ هستند. جسم ارتوتروپ دارای خواص مواد مختلف در سه جهت عمود بر هم در یک نقطه از جسم می باشد و یا به بیان دیگر جسم ارتوتروپ در

---

<sup>۱</sup>. Laminated fibrous composites

هر نقطه از جسم دارای سه صفحه تقارن عمود بر هم می باشد. همچنین جسم غیر ایزوتوپ دارای خواص مختلف در جهات متفاوت بوده و هیچ صفحه در آن وجود ندارد.

## ۲-۵- اصطلاحات مواد مرکب لایه ای

### • تک لایه<sup>۱</sup>

« تک لایه »، صفحه ای تخت و یا پوسته ای انحناء دار بوده که الیاف آن در یک جهت قرار داشته و می توان در جهت دیگر آن ها تقویت نمود. الیاف را معمولاً به علت داشتن سختی و مقاومت مناسب، در جهت اعمال بار قرار می دهند و ماتریس یا نگهدارنده الیاف، باعث توزیع مناسب نیرو می شود. در صورت گسیختگی یکی از الیاف، نیرو از تار بریده شده و توسط ماتریس به الیاف مجاور انتقال می یابد.

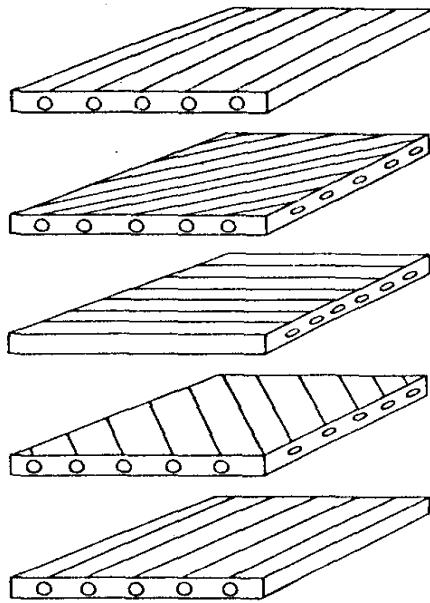
### • چندلایه<sup>۲</sup>

نیروهای اعمالی به یک صفحه می تواند در جهات مختلف وارد شود و در نتیجه لایه ها را با زوایایی مختلف جهت دستیابی به سختی مناسب در کنار یکدیگر قرار می دهند (شکل ۲-۱). برای مثال اگر به صفحه ای علاوه بر تنش های نرمال در جهت  $x$  و  $y$  تنش برشی نیز اعمال گردد، نسبت به مقادیر تنش ها، علاوه بر استفاده از لایه های صفر و ۹۰ درجه، باید از لایه های ۴۵ نیز استفاده نمود.

---

<sup>1</sup> Lamina

<sup>2</sup> Laminate



شکل (۱-۲): لایه های مواد مرکب

• صفحات مختلط (هیبرید)<sup>۱</sup>

در این نوع صفحات، علاوه بر داشتن لایه ها با جهات مختلف، جنس لایه ها نیز متفاوت می باشند . نسبت به عملکرد سازه های مختلف در مقابل نیروهای مکانیکی و عوامل محیطی ، باید از مواد مناسب استفاده شود. برای مثال در هواپیماهای جنگنده ، به علت نیاز به مقاومت بالا و وزن کم « گرافیت / اپوکسی» کاربرد وسیعی دارند. این ماده مرکب در مقابل عوامل محیطی و اتصال با فلزات، ایجاد خوردگی گالوانیک می کند و در سطوح تماس از لایه هایی با الیاف شیشه / اپوکسی که در مقابل خوردگی مقاوم باشند، استفاده می شود.

۲-۶- شکل و چگونگی بافتن الیاف

<sup>1</sup>. Hybrid

در این قسمت به معرفی برخی از اصطلاحات بکار رفته در رابطه با الیاف می پردازیم. الیاف تک را معمولاً رشته<sup>۱</sup> و یک مجموعه از این الیاف را که معمولاً شامل ۳۰۰۰ تا ۴۰۰۰ رشته می باشد، ریسمان<sup>۲</sup> می نامند. تعداد پنجاه تا شصت ریسمان نیز دسته<sup>۳</sup> نامیده می شود. اگر ریسمان از پیچیدن رشته ها دور یکدیگر بوجود آید، ریسمان تابیده<sup>۴</sup> حاصل می شود.

برای عرضه صنعتی، دسته ها و ریسمان تابیده را بافته و اصطلاحاً آن ها را به ترتیب دسته بافته<sup>۵</sup> و پارچه<sup>۶</sup> می نامند. دسته بافته شده دارای مقاومت بالایی می باشد، دسته تنها به علت جذب چسب زیاد از مقاومت کمتری برخوردار است. نوع پارچه ای نیز اجازه می دهد که رطوبت توسط اعمال فشار از رزین خارج شده و یک لایه با مقاومت بالا ایجاد شود. در پارچه ها، نسبت پود<sup>۷</sup> بکار رفته به تارهای طولی<sup>۸</sup> متغیر بوده و نسبت به کاربردهای مختلف مورد استفاده قرار می گیرد. در پارچه های هیبرید می توان از تار و پودهای مختلفی استفاده کرد، برای مثال در نمونه ای از پارچه هیبرید، تارها از گرافیت و پود آن از شیشه ساخته می شود.

الیاف به شکل کوتاه و بریده شده که در جهات مختلف نسبت به هم قرار گرفته اند نیز مورد استفاده واقع می شوند. این نوع معمولاً از ریختن خرده های الیاف شیشه با طول تقریبی بیست و پنج تا پنجاه میلیمتر بصورت تصادفی روی یک سطح بدست می آید.

---

1. Filament

2. Strand or ends

3. Roving or tow

4. Yarn

5. Woven roving

6. Cloth

7. Weft

8. Warp



نوارها و یا تسمه ها<sup>۱</sup>، نوع دیگر الیاف می باشند. بسیاری از ماشین های صنعتی از این نوارها در ساخت مواد مرکب مخصوصا موادی که در صنایع هوا و فضا کاربرد دارند، استفاده می کنند. الیاف بر<sup>۲</sup> را به علت داشتن سختی زیاد، نمی توان به راحتی بافت و از اینرو آن ها را به صورت نوار در می آورند. در حالت کلی استفاده از لایه هایی با الیاف یک طرفه<sup>۳</sup>، هزینه بالایی دارد اما سازه های ساخته شده از این مواد، دارای مقاومت بالا و وزن کم می باشند. از طرف دیگر، استفاده از لایه هایی که از بافتن دسته ها بدست می آیند ساده تر بوده و ارزان تر از حالت لایه های با الیاف یک طرفه نیز می باشد ولیکن سازه ساخته شده دارای وزن بیشتری نسبت به حالت قبل می باشد.

## ۷-۲- انواع مواد مورد استفاده در الیاف

انواع گوناگونی از الیاف مصنوعی، برای تقویت نمودن رزین در مواد مرکب مورد استفاده قرار می گیرند. این الیاف عمدتا از جنس شیشه، گرافیت یا کربن، مواد آلی شیمیایی، بر و سرامیک هستند. البته انواع شیشه، گرافیت و مواد آلی شیمیایی کاربرد بیشتری دارند.

علاوه بر انواع الیاف مصنوعی، گاهی از الیاف طبیعی نیز به عنوان تقویت کننده در مواد مرکب استفاده می شود. از مهم ترین تقویت کننده های طبیعی می توان از پنبه نسوز نام برد. اخیرا تحقیقات نشان داده است که استفاده از این مواد، برای سلامتی موجودات زنده مضر بوده و لذا بسیاری از تولید کنندگان مواد مرکب مجبور شده اند که از تقویت کننده هایی غیر از پنبه نسوز استفاده نمایند. با این وجود در بسیاری از منابع، هنوز خواص آن ها مورد بحث و بررسی قرار می گیرد.

هر چند خواص الیاف مختلف، با هم متفاوت است ولی می توان برای تمام الیاف مصنوعی خواص متشابهی در نظر گرفت. از جمله خواص متشابه، این است که همه آن ها ترجیحا دارای قطر متوسط

---

<sup>1</sup>-Tapes

<sup>2</sup>-Boron

<sup>3</sup>- Uni-directional (UD)

یا بسیار کم می باشند که معمولاً مقدار قطر متوسط آن ها بین ۲ تا ۱۳ میکرون متغیر است. با این که روند و فرایند تولید الیاف معمولاً روند پیوسته ای می باشد که در طی آن رشته های بلند ایجاد می شوند، ولی در مواردی ، بعد از تولید ممکن است الیاف را به اندازه های کوتاهی بریده و یا آن ها را ماشین کاری کرده باشند. این عملیات می تواند اثر قابل توجهی در خواص مکانیکی الیاف داشته باشد.

اندازه گیری خواص مکانیکی الیاف، کار بسیار مشکلی است. زیرا الیاف بسیار ریز و شکننده هستند. در عمل معمولاً تنها صلابت و استحکام کششی الیاف اندازه گیری می شوند. نیروی شکست نیز معمولاً به وسیله صلابت و استحکام بدست آمده محاسبه می شود. البته تعریف یک سطح مقطع ثابت برای الیاف کار ساده ای نیست، زیرا سطح مقطع در طول الیاف متغیر می باشد. میزان استحکام کششی و همچنین رفتار کششی الیاف از موضوعات مهم و حایز اهمیت در رفتار ماده مرکب است. الیاف معمولاً تا حد شکست دارای منحنی تنش - کرنش خطی هستند ولی در برخی موارد منحنی تنش، کرنش خطی نبوده و با افزایش تنش، استحکام و صلابت الیاف کمی افزایش و یا کاهش می یابد که به عنوان مثال می توان از آرامید نام برد که در آن صلابت با افزایش تنش کمی بیشتر می شود. در برخی از موارد الیاف را به صورت بافته شده و یا پارچه تولید می نمایند. الیاف می توانند تک جهته<sup>۱</sup> و یا چند جهته<sup>۲</sup> باشند. در ادامه ، ویژگی ها و برخی خواص مکانیکی چند نوع از الیاف پر کاربرد در صنایع مختلف، بیان می شود.

---

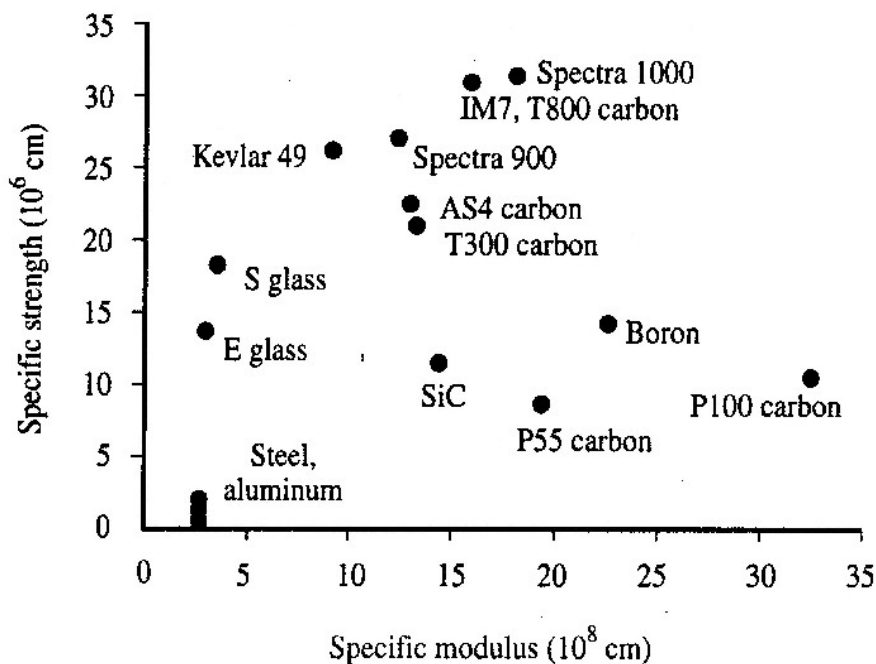
<sup>1</sup> Two-directional

<sup>2</sup> Multi-directional

## ۲-۸- الیاف تجارتي

با توجه به ملاحظات مختلف ممکن است در طراحی سازه از الیاف مختلفی استفاده شود. در تحقیقات سازه، اهمیت پارامترهای مقاومت، مدول الاستیسیته و وزن مورد توجه بوده و این موارد باعث رشد سریع مواد مرکب می گردند. همچنین الیاف مختلف نسبت به مقاومت کششی ویژه و مدول کششی ویژه طبقه بندی و در طراحی مورد استفاده قرار می گیرند. شکل (۲-۲) این دو مشخصه را برای الیاف مختلف نشان می دهد و نسبت به عملکرد سازه، طراح می تواند با استفاده از این شکل، از الیاف مناسب بهره برداری نماید.

تولید انبوه مواد از نظر اقتصادی اهمیت زیادی دارد و با اینکه مدت نسبتاً کوتاهی از عمر مواد مرکب می گذرد اما با توجه به اهمیت موضوع، تغییر در انواع روش های ساخت به گونه ای صورت گرفته است که هزینه برخی از این مواد کاهش چشمگیری داشته است. در زیر به بررسی چند نوع از الیاف تجاری و چگونگی ساخت و تهیه آن ها پرداخته شده است.



شکل (۲-۲): مقاومت کششی ویژه و مدول کششی ویژه برای چند نوع از الیاف

## ۲-۸-۱- الیاف شیشه<sup>۱</sup>

ارزان ترین و پرکاربردترین الیاف از جنس شیشه هستند. اولین استفاده از الیاف شیشه به زمان جنگ جهانی دوم بازمی‌گردد. لیکن با گذشت زمان، از اهمیت این الیاف به هیچ وجه کاسته نشده است. به گونه‌ای که امروزه حدود ۹۰٪ از مواد مرکب با رزین‌های ترموستی (مانند پولیستر و اپوکسی) از الیاف شیشه استفاده می‌کنند. الیاف شیشه به فرم‌های مختلف از جمله رشته‌های پیوسته دراز، بریده شده کوتاه، بافته شده و پارچه موجود می‌باشند. مهمترین عناصر بیشتر شیشه‌ها سیلیکا<sup>۲</sup> است. مولکول دی‌اکسید سیلیکون دارای ساختار هرمی چهار وجهی است، به طوری که یک یون سیلیکون در وسط واقع شده و چهار یون اکسیژن در چهارم راس هرم قرار گرفته‌اند که اساس خواص ویژه شیشه نیز همین ساختار سه بعدی هرمی است. با اضافه نمودن اکسیدهای فلزی که می‌توانند موجب تغییر ساختار هرمی شیشه شوند، می‌توان ساختار بی‌شکل مولکول شیشه را تغییر داده و موادی با کارایی بهتر ایجاد نمود.

شیشه دارای نسبت استحکام به وزن بالایی است ولی استحکام آن نسبت به الیاف دیگر از قبیل گرافیت و آرامید کمتر است. مقاومت خزشی<sup>۳</sup> شیشه در دمای اتاق نسبت مواد پلاستیکی بهتر و از مواد فلزی مانند آلومینیوم و فولاد کمتر است. اضافه کردن الیاف شیشه به پلاستیک‌ها به شدت باعث افزایش مقاومت خزشی آن‌ها می‌شود. الیاف شیشه دارای مقاومت شیمیایی بسیار خوبی است. این الیاف قابل احتراق نبوده و رطوبت نیز جذب نمی‌کنند ولی مقاومت کششی آن‌ها اساساً در هوای مرطوب کاهش می‌یابد.

مقدار ضریب انبساط حرارتی الیاف شیشه از پلاستیک‌ها و بسیاری از آلیاژهای آهن و آلومینیوم کمتر است. همین امر باعث می‌شود که ترکیب الیاف شیشه با پلاستیک‌ها کاربردهای زیادی داشته باشد.

---

<sup>1</sup>. Glass

<sup>2</sup>.  $SiO_2$

<sup>3</sup>. Creep

کاهش ضریب انبساط حرارتی از عوامل پایدار بودن اندازه های هندسی سازه می باشد ولی عوامل دیگر مانند مقاومت خزشی نیز در ناپایداری اندازه سازه موثر است.

استحکام، سختی و مقاومت خزشی شیشه با افزایش دما کاهش می یابد. ولی محدوده دمایی مفید به قدر کافی وسیع بوده و اغلب موارد شامل کاربردهای عملی می شود. به هر حال باید توجه نمود که شیشه در دمای بالای ۵۰۰ فارنهایت حدود ۵۰٪ استحکام خود را از دست می دهد و در دما های بالای ۱۰۰۰ فارنهایت حدود ۷۵٪ استحکام خود را از دست می دهد.

درصد های مختلف، از ترکیبات اجزای تشکیل دهنده شیشه انواع مختلفی از شیشه را به وجود آورده است که فقط تعداد معدودی از آن ها متداول می باشد. چهار نوع شیشه اصلی که بیشترین کاربرد را در صنایع دارند عبارتند از :

#### **: A-glass**

این نوع شیشه ها بیشترین کاربرد را در درب ها و پنجره ها دارند، ولیکن به علت مقاومت شیمیایی بسیار خوب در مواد مرکب نیز مورد استفاده قرار می گیرند. مواد مرکبی که الیاف آن ها از این نوع باشد دارای مقاومت شیمیایی بسیار خوبی خواهند بود.

#### **: E-glass**

اولین شیشه ای که به طور خاص برای تولید الیاف ساخته شد، شیشه بروسیلیکات آلومینا بوده که قبلا در سیستم های الکتریکی کاربرد داشته است. این شیشه که به اختصار به نام شیشه نوع E شناخته می شود؛ منجر به تولید اولین پارچه تقویت کننده استاندارد شده که امروزه نماسازی و مصارف خانگی نسبت به استفاده سازه ای کاربرد بیشتری دارد. این نوع شیشه ها به علت دارا بودن مقاومت الکتریکی بسیار خوب، در مواردی که نیاز به عایق الکتریکی است نیز مورد استفاده قرار می گیرند.

#### **: S-glass**

ویژگی اصلی این نوع شیشه استحکام بالای آن است، به طوری که استحکام کشش آن حدود ۳۳٪ و مدول ارتجاعی آن ۲۰٪ بالاتر از شیشه نوع E است. این نوع شیشه ها دارای نسبت استحکام به وزن

بسیار بالا بوده و همچنین دارای رفتار خوبی در درجه حرارت های بالا است. این نوع شیشه دارای حد خستگی نسبتا بالا است. از این نظر، بیشترین کاربرد شیشه S در صنایع هوایی و فضایی است که در آن نسبت استحکام کشش و خستگی به وزن بالا به همراه پایداری در درجه حرارت های بالا مورد نیاز می باشد. امروزه در برخی قطعات باربر هواپیماها و حتی در پوسته موتور راکت ها از این نوع شیشه استفاده می شود. مهم ترین عامل محدود کننده استفاده از این نوع شیشه در موارد عمومی، قیمت بالای آن نسبت به انواع دیگر شیشه ها است.

### **D-glass**

این نوع شیشه دارای خواص خوب دی الکتریک بوده و لذا در قطعات الکترونیکی بیشترین استفاده را دارند. اگر چه خواص مکانیکی این نوع شیشه قدری از انواع E و S پایین تر است ولی به علت دارا بودن خواص دی الکتریک خوب در ریدوم<sup>۱</sup> هواپیماها مورد استفاده قرار می گیرند. در صد وزنی واجزای تشکیل دهنده شیشه ها در جدول (۲-۳) داده شده اند. همچنین برخی خواص مکانیکی این شیشه ها نیز در جدول (۲-۴) داده شده است.

---

<sup>۱</sup> - قسمت نوک هواپیما که رادار هواپیما درون آن نصب شده است.

جدول (۲-۳): درصد وزنی اجزای تشکیل دهنده انواع شیشه

نوع شیشه	درصد وزنی ترکیبات							
	Silica	Alumina	Calcium oxide	Magnesia	Boron oxide	Soda	Calcium fluoride	Total minor oxides
E-Glass	54	14	20.5	0.5	8	1	1	1
A-Glass	72	1	8	4	---	14	---	1
D-Glass	61	11	22	3	---	0.6	---	2.4
S-Glass	64	25	---	10	---	0.3	---	0.7

## ۲-۸-۲- الیاف کربن و گرافیت<sup>۱</sup>

الیاف کربن یا گرافیت، الیاف بسیار نازکی هستند که قطر آن‌ها بین ۱۰-۶ میکرو متر بوده و در شکل‌های متنوع مانند نخ پوسته، الیاف مویی بلند و یا بریده شده، طناب و پارچه‌ی بافته شده و غیره عرضه می‌شوند. این الیاف از مهمترین تقویت کننده‌های مورد استفاده در مواد مرکب پیشرفته بوده و با تولید آن‌ها تحولی در فن آوری مواد مرکب ایجاد شده است و در آینده به علت قابلیت‌ها و ویژگی‌های آن‌ها از پتانسیل رشد و گسترش خوبی نیز برخوردار است. این الیاف از نظر شیمیایی شامل ۹۹/۹٪ کربن خالص می‌باشند. مواد مرکب پیشرفته که از این الیاف استفاده می‌کنند، می‌توانند تا حدود ۶۰٪ حجمی الیاف کربن داشته باشند.

<sup>۱</sup>. Carbon and Graphite

جدول (۲-۴): خواص مکانیکی انواع شیشه

نوع شیشه	وزن مخصوص	مقاومت کششی (Mpa)	سختی کششی (Gpa)	ضریب انقباض حرارتی ( $K / 10^{-6}$ )	ثابت دی الکترونیک a	دمای ذوب $^{\circ}C$
E-Glass	2.58	3450	72.5	5.0	6.3	1065
A-Glass	2.50	3040	69.0	8.6	6.9	996
ECR-Glass	2.62	3625	72.5	5.0	6.5	1204
S-Glass	2.48	4590	86.6	5.6	5.1	1454

اگر مواد مرکب ساخته شده با این الیاف را با مواد مرکب الیاف شیشه مقایسه شود، می توان گفت که آن ها از نظر صلابت و سبکی به مراتب بهتر از مواد مرکب الیاف شیشه بوده، در حالی که استحکام آن ها با هم مشابه است. با تولید الیاف کربن و استفاده آن ها در تقویت پلیمر (رزین ها)، عملا مواد مرکب توانستند برای اولین بار با فلزات جهت کاربردهای مشابه رقابت نمایند.

الیاف کربن نسبت به شیشه دارای صلابت بیشتر، جرم حجمی کمتر، مقاومت خزشی و خستگی بهتر و ضریب انقباض حرارتی به مراتب کمتر می باشند. همان طوری که در جدول (۲-۲) مشاهده می شود، الیاف شیشه دارای استحکام کششی بسیار بالا ( بیش از  $3000\text{ Mpa}$  ) هستند در حالی که مدول یانگ آن ها که نشانگر صلابت کششی است نسبتا پایین (کمتر از  $100\text{ Gpa}$ ) است. الیاف کربن نیز از نظر استحکام کششی در همین محدوده بوده (بین  $2000\text{ Mpa}$  تا  $4000\text{ Mpa}$  و انواع آزمایشگاهی آن دارای استحکام حدود  $5000\text{ Mpa}$  نیز می باشند) ولیکن مدول یانگ آن ها بین  $200\text{ Gpa}$  تا  $700\text{ Gpa}$  است.

گرافیت از لایه های فشرده اتم های کربن تشکیل شده است. بدیهی است که در یک ماده، استحکام پیوند های بین اتم هابه طور مستقیم خصوصیات کشسانی شبکه را کنترل می نماید. بنابراین اتصالات



بسیار قوی شیمیایی بین اتم های کربن (موسوم به سیگما) که در لایه های گرافیت وجود دارند منشا خواص مکانیکی بسیار عالی الیاف کربن می شود. پیوند بین اتم های کربن درون لایه ای از نوع قطبی بوده و لذا موجب استحکام بالا در جهت لایه های کربن می گردد. این در صورتی است که اتصال لایه های مجاور با هم بسیار پایین بوده و به همین علت استحکام در جهت عمود بر این لایه ها نسبتا کم می باشد. هدایت حرارتی و الکتریکی خوب گرافیت نیز در جهتی به موازات لایه ها، به علت راحتی تحرک الکترون ها در بین این لایه ها می باشد .

یکی از معایب الیاف کربن نسبت به الیاف شیشه، پایین بودن نسبت کرنش به شکست و کم بودن انرژی شکست آن ها است که باعث می شود مقاومت ضربه ی مواد مرکبی که با گرافیت ساخته می شوند، عموما از مقاومت ضربه ی مواد مرکبی که با الیاف شیشه ساخته می شوند کمتر باشد. ولی باید توجه داشت که ضربه در مواد مرکب، بحث پیچیده ای است و نمی توان به طور مطلق راجع به مقاومت ضربه گروه خاصی از مواد مرکب بحث کرد.

الیاف کربن حدود بیست سال است که مورد استفاده قرار گرفته است. با استفاه از روش ها و مواد مختلف می توان به شکل های گوناگونی از الیاف کربن دست پیدا کرد. الیاف کربن ارزان را می توان « از تجزیه حرارتی<sup>۱</sup>» بسیاری مواد آلی تحت شرایط خاص بدست آورد. این الیاف دارای مقاومت و سختی کم می باشند و جهت مصارف عمومی به کار می روند. بعضی از کارخانه ها از پلی آکریلونیتریل (PAN) استفاده کرده و تحت شرایط خاصی گرافیت را تولید می نمایند. در این روش در مرحله اول روی ۱۰۰۰۰ رسته عمل اکسیداسیون انجام می گیرد. این الیاف معمولا هشت میکرون قطر داشته و با کنترل های مختلف می توان الیاف مختلف با خصوصیات مختلف بدست آورد. با استفاده از پلی آکریلونیتریل چهار نوع الیاف حاصل می شود که سه نوع معروف آن عبارتند از HS، HM و A. الیاف نوع اول یا HS دارای مقاومت بالا و الیاف نوع دوم یا HM دارای مدول الاستیسیته بالا می باشند. بعضی از نمونه های اقتصادی را می توان با کم کردن درجه حرارت در عملیات حرارتی

---

<sup>۱</sup>. Pyrolysis

بدست آورد و در نتیجه این الیاف می توانند کاربرد خوبی در مواد مرکب داشته باشند. البته باید در نظر داشت که مقاومت و مدول این نوع الیاف پایین می باشد.

## ۲-۸-۳- الیاف بر<sup>۱</sup>

این الیاف با استفاده از روش تبخیر بدست می آیند. یک سیم نازک تنگستن توسط جریان الکتریکی گرم شده و بواسطه وجود بر و هیدروژن در هوا و با کنترل دقیق درجه حرارت ، بر روی سیم تنگستن می نشیند. به علت نیاز به مقاومت بالا در درجه حرارت های زیاد، از تنگستن خالص استفاده می شود. قطر تنگستن معمولاً ۱۲۵ میکرون می باشد. سختی خمشی الیاف با توان چهارم شعاع آن ها رابطه دارد و از این رو برای همگون بودن باید از دقت بالایی استفاده شود. مشخصه های فشاری مواد مرکب در جهت الیاف معمولاً بستگی به کمانش الیاف، مقاومت ماتریس (رزین) و مدول برشی دارد. انهدام مواد مرکب کربنی و یا شیشه ای در فشار، بعد از مقاومت ماتریس و رسیدن به مقاومت برشی، به کمانش الیاف بستگی دارد و الیاف بر به علت داشتن قطر بالا، دارای مقاومت کمانشی خوبی بوده و در نتیجه مواد مرکب آرمه شده توسط بر دارای مقاومت فشاری عالی نیز می باشند.

## ۲-۸-۴- الیاف آرامید<sup>۲</sup>

تاریخ استفاده از این نوع الیاف به بیست سال پیش بر می گردد و از جدیدترین الیاف صنعتی و تجاری است که مورد استفاده قرار می گیرد. «کولار<sup>۳</sup>» تنها محصول تجاری این الیاف می باشد و انواع مختلف آن عبارت است از : نوع اول به نام « کولار ساده» که برای مسلح کردن لاستیک ها بکار می رود و نوع دوم « کولار بیست ونه » که در کالاهای لاستیکی مثل طناب کشتی و تسمه ها کاربرد داشته و نوع سوم «کولار چهل ونه» که در مواد مرکب مهندسی به کار گرفته می شود.

---

<sup>1</sup> Boron

<sup>2</sup> Aramid

<sup>3</sup> Kevlar

## ۲-۸-۵- مقایسه الیاف تجارتي

در زیر خصوصیات اصلی الیاف تجارتي فوق ذکر شده است و طراح با استفاد از این موارد می تواند دید کلی در بهره گیری از این الیاف را بدست آورده و در تصمیم گیری های اولیه آن را به کار گیرد.

- شیشه: قیمت تجارتي این نوع الیاف ارزان می باشد، برش و کار کردن با این نوع الیاف ساده می باشد، در مقابل خوردگی مقاوم است.
- کربن و گرافیت: قیمت تجارتي این نوع الیاف بسیار بالا می باشد، از مقاومت خوبی برخوردار است، در مکان مساعد ایجاد پیل قطبی کرده و در نتیجه دچار خوردگی گالوانیک می شود، هادی مناسبی برای الکتریسیته و گرما می باشد، ضریب انبساط حرارتي این الیاف بسیار پایین می باشد.
- بُر: دارای مقاومت بالا می باشد، در برابر کمانش، مقاومت خوبی از خود نشان می دهد.
- آرامید: برش این الیاف بسیار مشکل است، از کربن ارزان تر می باشد، خصوصیات کششی آن مناسب بوده اما خصوصیات فشاری ضعیفی دارد.

## ۲-۹- انواع مواد مورد استفاده در رزین

رزین یکی دیگر از قسمت های اصلی تشکیل دهنده ی یک ماده ی مکب است. رزین ها دارای دو وظیفه اصلی هستند که عبارتند از:

- نگه داشتن الیاف تقویت کننده در موقعیت های درست و همچنین انتقال نیرو یا نیروهای خارجی وارده به الیاف
- محافظت الیاف در برابر عوامل محیطی و شیمیایی و خوردگی های سایشی.

رزین های بسیار متنوعی تا کنون تولید گردیده است که هر کدام دارای ویژگی هایی بوده و بسته به نوع کاربرد قطعه ی ساخته شده از ماده ی مرکب، می توانند مورد استفاده قرار بگیرند. یکی از عوامل مهم انتخاب یک رزین مناسب، براساس میزان تحمل کرنش و تغییر شکل آن در هنگام اعمال بار است. به گونه ای که اگر مثلاً الیاف، قادر به تحمل ۰.۴٪ کرنش باشند، باید رزین مورد استفاده بتواند حداقل ۰.۵٪ کرنش را تا نقطه ی شکست تحمل نماید. دلیل این امر این است که رزین باید بتواند با تغییر شکل مناسب، انتقال نیروهای کششی الیاف را به خوبی انجام داده و نیرو های مختلف برشی و غیره را به صورت نیرو های کششی به الیاف منتقل نماید. همچنین رزین باید بتواند با تغییر شکل های مناسب، الیاف را در هنگام تولید در بر گرفته و مانع از خروج آن ها از موقعیت صحیح گردد.

قابلیت تغییر شکل مناسب همچنین به جاری شدن ماده و توزیع تنش مجدد در هنگام وجود ترک و یا شکست برخی الیاف کمک نموده و موجب کم شدن تمرکز تنش و در نتیجه ارتقای عمر و ظرفیت باربری ماده ی مرکب می گردد. یکی دیگر از مواردی که باید در انتخاب رزین مورد توجه قرار گیرد این است که رزین باید دارای سیالیت مناسبی بوده، تا بتواند در هنگام تولید ناحیه، چسبندگی مناسبی در اطراف کلیه الیاف به وجود آورد.

یک ماده ی مرکب در حقیقت دارای سه فاز الیاف، رزین یا ماتریس و ناحیه ی چسبندگی رزین به الیاف است. این ناحیه ی چسبندگی نقش بسیار مهمی در ظرفیت باربری ماده ی مرکب دارد، به طوری که علت بیشتر بودن استحکام یک ماده ی مرکب از استحکام الیاف یا رزین به صورت منفرد به وجود این ناحیه نسبت داده می شود که می تواند موجب شراکت رزین و الیاف در تحمل بارهای وارده گردد.

رزین ها باید علاوه بر دارا بودن قابلیت تغییر شکل مناسب، دارای استحکام برشی خوبی نیز باشند تا بتوانند در هنگام اعمال نیرو، چسبندگی خود را به سطح الیاف حفظ نمایند. در غیر این صورت، در اثر اعمال نیرو، الیاف به صورت دسته از ماده ی مرکب خارج شده و به این ترتیب شکست اتفاق می افتد. در این قسمت ضمن معرفی برخی رزین های متداول، خواص مکانیکی و فیزیکی مشترک بین آن ها

به طور مختصر مورد بحث قرار می گیرد. رزین ها عموماً به دو دسته ی کلی ترموست ها<sup>۱</sup> و ترموپلاستیک ها<sup>۲</sup> تقسیم می شوند .

## ۲-۹-۱- ترموست ها

رزین های ترموست، موادی هستند که به وسیله ی یک سری واکنش های شیمیایی بازگشت ناپذیر تحت عنوان کراس لینک<sup>۳</sup> سخت شده اند. ترموست ها ممکن است که در یک دمای بالا نرم شوند ولی در این دماها معمولاً شکل اولیه خود را پیدا نمی کنند.

برخی از ترموست ها برای سخت شدن حتماً به افزایش دما نیاز دارند ولی بسیاری از ترموست ها به وسیله کاتالیزور و بدون حضور دما نیز سخت می شوند. ترموست ها معمولاً شکننده هستند و به ندرت به تنهایی و بدون تقویت مورد استفاده قرار می گیرند. پلاستیک های ترموست شده دارای مقاوت خزشی نسبتاً خوبی هستند ولی استحکام و سختی آن ها با افزایش دما کاهش می یابد. مقاوت شیمیایی این گونه مواد نیز نسبتاً بالاست. همین خاصیت آن ها باعث گردیده است که در عمل در جاهایی که مقاوت خوردگی<sup>۴</sup> مهم باشد، کاربرد فراوانی داشته باشند.

پلیمرهای اصلی ترموست که به طور وسیعی برای تولید مواد مرکب استفاده می شوند عبارتند از:

• اپوکسی ها<sup>۱</sup>

• وینیل استرها<sup>۲</sup>

• پلی استرها<sup>۳</sup>

---

<sup>1</sup>. Thermosets

<sup>2</sup>. Thermoplastics

<sup>3</sup>. Cross-Link

<sup>4</sup>. Corrosion

<sup>1</sup>. Epoxies

<sup>2</sup>. Vinyl esters

رزین های اپوکسی دارای خاصیت های مکانیکی بهتری نسبت به سایر رزین ها هستند ولی قیمت آن ها بیشتر بوده و همچنین نسبتا به زمان زیادی برای سخت شدن نیاز دارند. این رزین ها به همراه الیاف کربن در اثر اعمال درجه حرارت و فشار در طی یک سیکل پخت، می تواند منجر به تولید مواد مرکب با خصوصیات مکانیکی و استحکام بسیار عالی شده که در صنایع هوا فضا بسیار مورد بهره برداری قرار می گیرند. پلی استر ها نسبت به رزین ها ارزان تر بوده و در مواردی که پایین آوردن هزینه تولید بسیار مهم باشد مورد استفاده قرار می گیرند. مواد مرکبی که در آن ها از پلی استر استفاده شده است معمولا رفتار کشسانی شبیه به مواد مرکب با رزین اپوکسی از خود نشان می دهند ولی دارای استحکام کمتری هستند. امروزه، استفاده از رزین های پلی استر با الیاف شیشه در تولید قطعات غیر صنعتی و یا قطعات غیر حساس ماشین آلات و دستگاه های صنعتی بسیار متداول گردیده است. مواد وینیل استر نیز خواص کشسانی مانند اپوکسی و پلی استر دارند و مقاوت و استحکام آن ها بین مواد پلی استرو اپوکسی قرار می گیرد.

## ۲-۹-۲- ترمو پلاستیک ها

رزین های ترمو پلاستیک در دماهای محیط به صورت جامد هستند ولی می توانند به وسیله حرارت دادن نرم شده و سپس با خنک شدن مجددا سخت شوند . ترموپلاستیک ها نسبت به ترموست ها از دوام بیشتری برخوردار هستند و بدون نیاز به تقویت کننده در بسیاری از موارد مورد استفاده قرار می گیرند. با این وجود سختی و استحکام کششی آن ها شبیه تر موسست ها است. ترمو پلاستیک ها به راحتی با روش های اقتصادی از قبیل تزریق<sup>۱</sup>، ذوب، اکستروژن<sup>۲</sup> قابلیت تغییر شکل یافتن را دارند.

---

<sup>1</sup> Polyesters

<sup>1</sup> Injection

<sup>2</sup> Extrusion

ترمو پلاستیک ها در دمای بالا، نسبت به ترموست ها دارای مقاومت خزشی کمتری هستند. همین عامل باعث شده است که در مواردی که درجه حرارت کاری نسبتا بالا است، کمتر از رزین های ترمو پلاستیک استفاده شود. برخی از ترمو پلاستیک ها بر خلاف ترموست ها با حلال ها واکنش بهتری انجام می دهند.

مواد مرکبی که با ترمو پلاستیک ها ساخته می شوند دارای استحکام و سختی مشابه و در برخی موارد بهتر از مواد مرکبی هستند که با اپوکسی ساخته می شوند. همچنین مقاومت آن ها نیز به مراتب از مواد مرکب با اپوکسی بیشتر است. به عنوان نمونه رزین ترمو پلاستیک پلی-اتر-اتر-کتون<sup>۱</sup> به همراه الیاف کربن می تواند منجر به تولید قطعاتی شود که علاوه بر دارا بودن استحکام کششی بسیار خوب، در مقابل ضربه نیز مقاومت خوبی داشته باشند که امروزه از این ماده در ساخت قطعات هواپیما استفاده می شود.

## ۲-۱۰- انواع مواد مورد استفاده در پرکننده ها

پرکننده ها<sup>۲</sup>، ذرات مصنوعی و طبیعی کوچکی هستند که با پلاستیک ها مخلوط شده و باعث می شوند تا خواص مکانیکی آن ها بهبود یابد. همچنین استفاده از پرکننده ها سبب می شود تا در مصرف ماده ی مورد استفاده برای رزین صرفه جویی شده و در نتیجه هزینه ساخت ماده ی مرکب کاهش یابد. انواع شکل های موجود برای پرکننده ها عبارتند از: کروی، صفحه ای شکل، ریشه دار<sup>۱</sup> و نا منظم. اغلب، حد اکثر اندازه پرکننده ها حدود یک میلی متر است. دلایل اصلی استفاده از پرکننده ها و هم چنین ویژگی هایی که آن ها به مواد مرکب می افزایند، به طور خلاصه عبارت است از:

- از لحاظ اقتصادی: کاهش هزینه، استفاده ی کمتر از رزین و در نتیجه وزن کمتر

<sup>۱</sup> Poly Ether-Ether-Keton, PEEK

<sup>۲</sup> Fillers

<sup>۳</sup> Fibrous

- از لحاظ تولید: حرارت زایی کمتر (ترموست ها)، کاهش حباب ها و شکاف ها (به خاطر

کم بودن ضریب انبساط حرارتی)، کاهش پیچیدگی و تاب<sup>۱</sup>

- از لحاظ وضعیت و کیفیت ظاهری: کدری<sup>۲</sup>، کاهش انقباض<sup>۳</sup>، کیفیت سطح

- از لحاظ بهبود در خواص فیزیکی: ضریب انبساط حرارتی کمتر، افزایش مقاومت

الکتریکی، کاهش رسانایی الکتریکی، حفظ الکترومغناطیس بهتر، کاهش یا افزایش

ضریب اصطکاک

## ۲-۱۱- فرایندهای تولید مواد مرکب

بطور کلی مواد اولیه تولید کامپوزیت ها شامل رزین ها، الیاف و مغزی ها می باشد که هر کدام دارای

خواص ویژه ای از قبیل استحکام، سفتی، چگرمگی، مقاومت حرارتی، قیمت، سرعت تولید و ... هستند.

خواص ویژه یک قطعه کامپوزیتی نه تنها تابعی از خواص ویژه مواد اولیه است، بلکه به شیوه طراحی،

نحوه به کار گیری، قرار گرفتن در درون سازه و فرآیند تولید نیز وابسته است. تعدادی از روش های

متداول تولید قطعات کامپوزیتی عبارتند از:

---

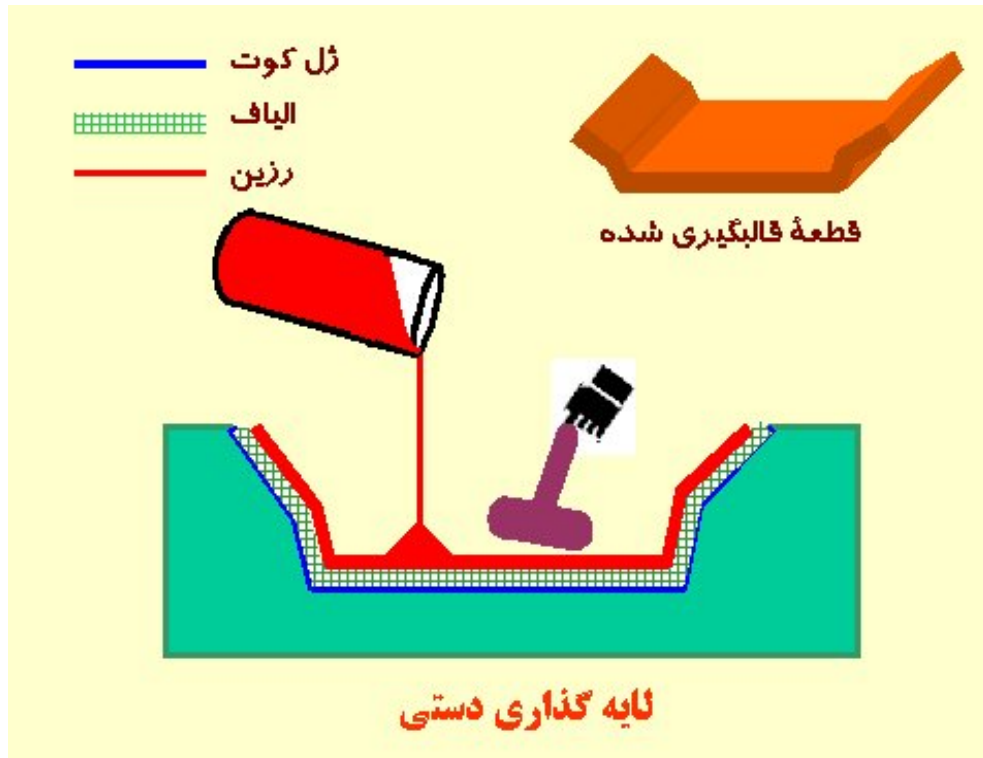
<sup>1</sup> Warping

<sup>2</sup> Opacity

<sup>3</sup> Shrinkage



• لایه گذاری خیس یا دستی<sup>۱</sup>



شکل (۲-۳): طرح شماتیک لایه گذاری دستی

مزایا: استفاده در سالیان متمادی، سادگی روش، ابزار آلات ارزان قیمت، پخت در دما و فشار

محیط، کاربرد وسیع

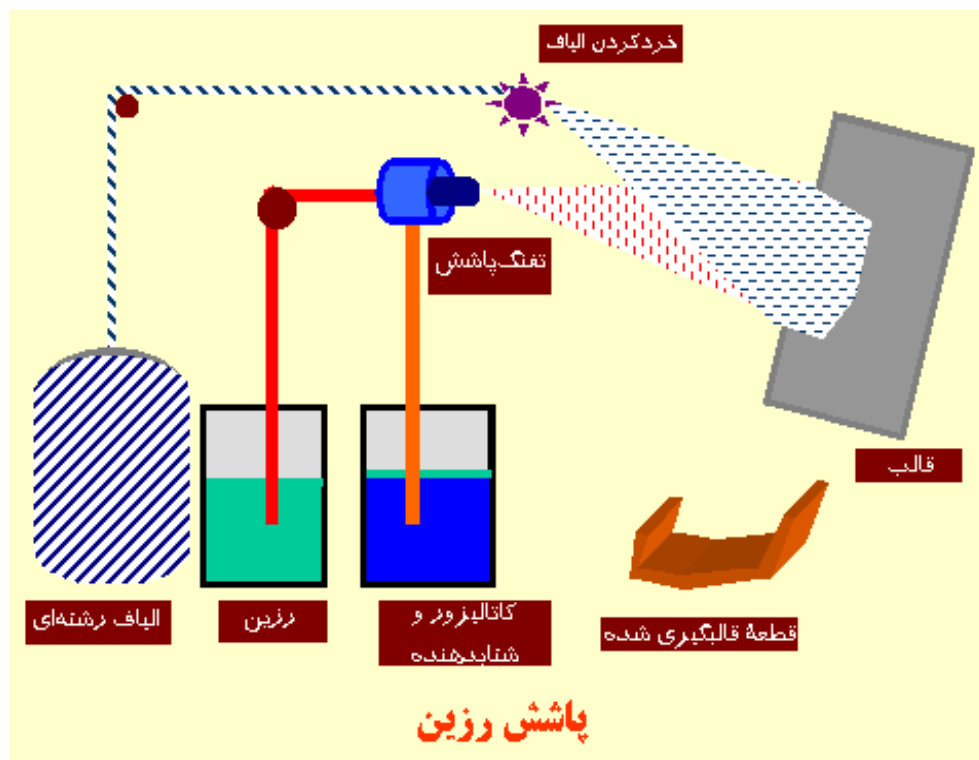
معایب: نیاز به تبهه کارگر، تماس مستقیم با رزین

کاربردها: ساخت کشتی، گنبد ها، کانالهای آب، استخر، تانکر، میز و صندلی، قطعات خودرو،

اطاقک و خانه های پیش ساخته، کیوسک ها، قطعات ساختمان...

<sup>1</sup> Hand Lay-up

• لایه گذاری پاششی<sup>۱</sup>



شکل (۲-۴): طرح شماتیک لایه گذاری پاششی

مزایا: اختلاط کامل و با اندازه مناسب ذرات، صرفه جویی در هزینه ها و مواد، پاشش اجزا

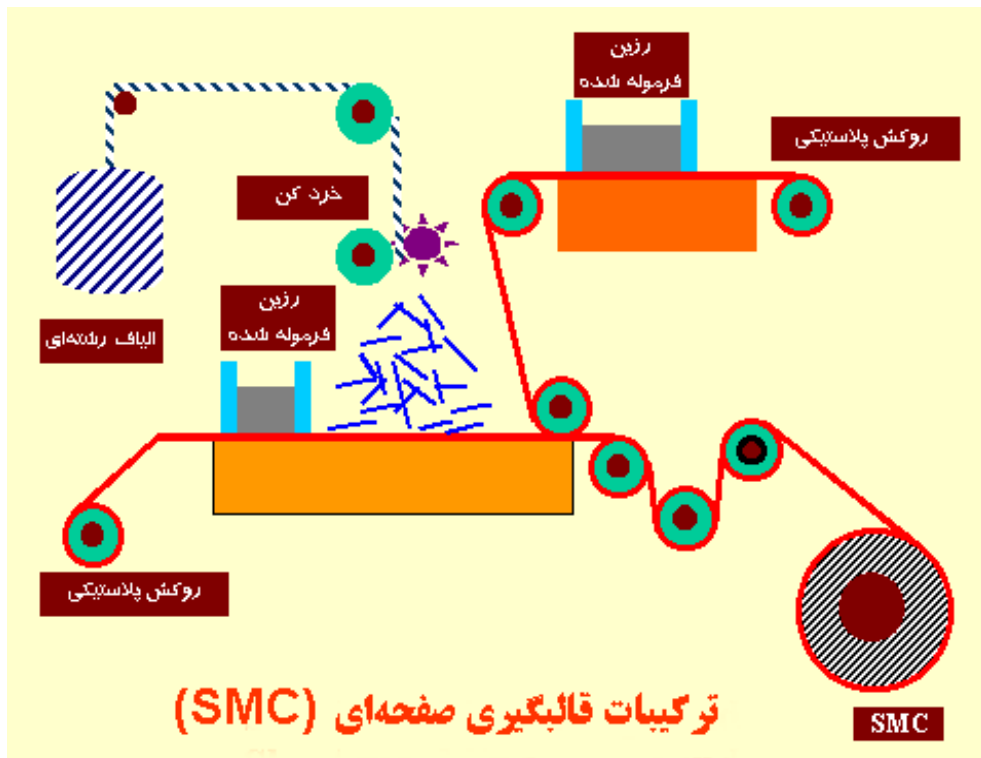
بصورت یکنواخت و با ضخامت ثابت، کیفیت بالای قطعات

کاربردها: صفحاتی که نیروی کمی تحمل می کنند، مثل: بدنه کاروان ها، بادگیرهای

کامیون ها، وان های حمام، سینی های زیر دوشی، قایق های کوچک و ...

<sup>1</sup> Spray-up

• قالب گیری حرارتی (SMC)<sup>۱</sup>



شکل (۲-۵): طرح شماتیک قالب گیری حرارتی

مزایا: نسبت الیاف بیشتر در چند لایه، میزان حباب کمتر در سازه، عدم انتشار گازهای

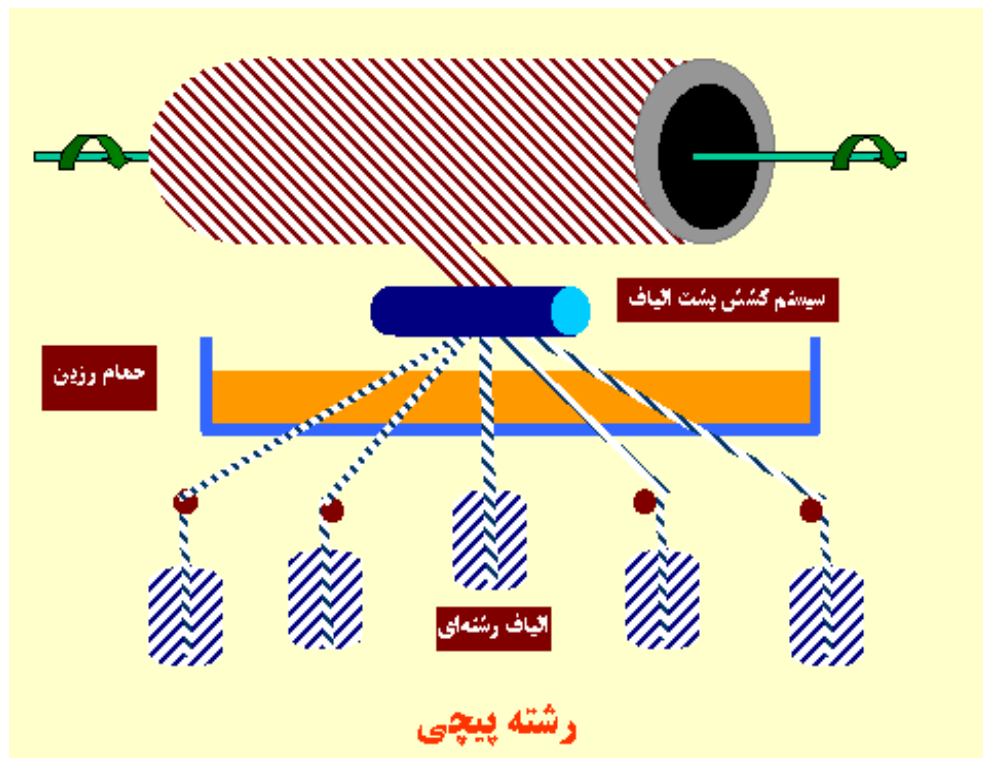
سمی و مواد فرار در محیط

کاربردها: حمل و نقل (قطعات خودرو مانند کاسه چراغ)، الکتریک (کلید فیوز)، ساختمان

(کاشی ها)، سایر (قایق های بزرگ تفریحی و مسافرتی، قطعات ماشین های مسابقه ای)

<sup>1</sup> Sheet Molding Compound

• رشته پیچی ۱



شکل (۲-۶): طرح شماتیک روش رشته پیچی

مزایا: سرعت اجرای بالا، صرفه اقتصادی، تنظیم دقیق نسبت رزین به الیاف، استفاده از الیاف

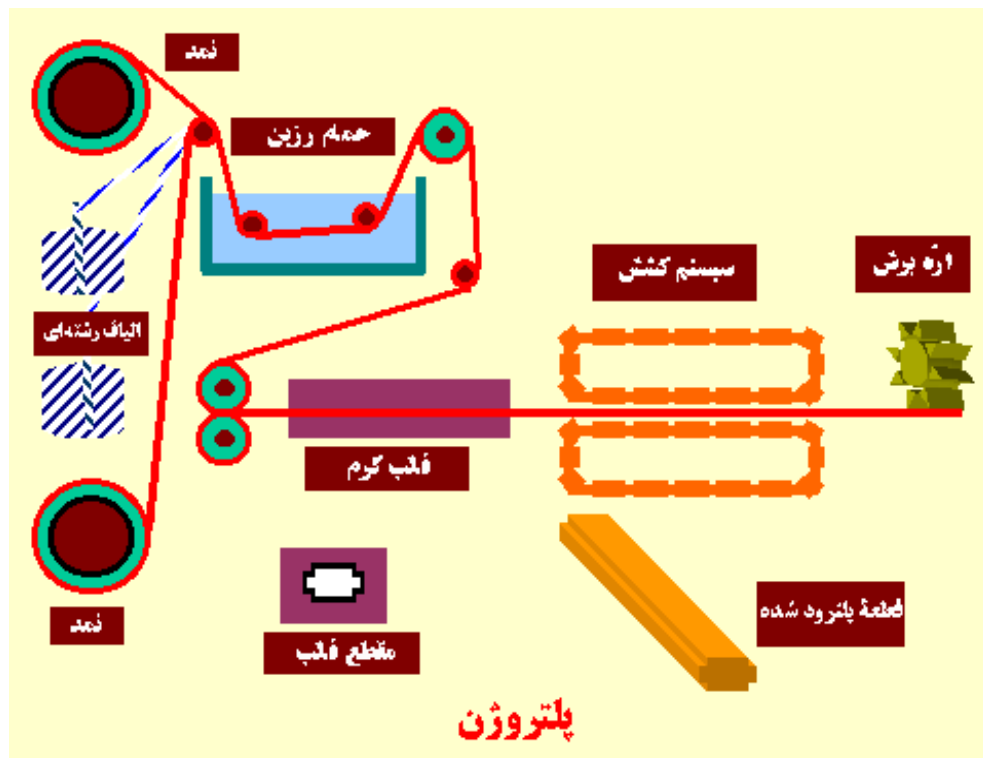
در ساده ترین شکل آن، استحکام بالای کامپوزیت تولیدی در برابر نیروهای وارده

کاربردها: خطوط لوله آبرسانی، خطوط لوله و مخازن نگهداری مواد شیمیایی، کپسول های

گاز CNG، کپسول های تنفسی آتش نشانی، کپسول های اطفاء حریق

<sup>1</sup> Filament Winding

• کشش رانی ۱



شکل (۲-۷): طرح شماتیک روش کشش رانی

مزایا: سرعت بالا، صرفه اقتصادی، تنظیم دقیق نسبت رزین به الیاف، استفاده از الیاف در شکل رشته ای آن، خواص ساختی بسیار خوب سازه، عدم انتشار گازهای سمی و مواد فرار در محیط

کاربردها: تیرک ها و تیرهای حمل سقف ساختمان، پل ها، نردبان ها و چارچوب، عایق ها در صنایع الکترونیک

<sup>1</sup> Pultrusion

فصل سوم  
فیزیک انتقال حرارت در مواد  
مرکب

### ۳-۱- مقدمه

در این فصل، اصول انتقال حرارت هدایتی در مواد اورتوتروپ مورد مطالعه قرار می گیرد. در ادامه انتقال حرارت در مواد مرکب مورد بررسی قرار گرفته و ضمن مشخص نمودن لمینیت کامپوزیتی در تحقیق اخیر، رابطه انتقال حرارت هدایتی برای مواد مرکب دارای لمینیت های پوسته ای در دستگاه مختصات استوانه ای بیان می شود.

### ۳-۲- اصول انتقال حرارت در مواد مرکب

به طور کلی رابطه فوریه در انتقال حرارت هدایتی در مواد اورتوتروپ بصورت زیر است [Ozisik, 1993]:

$$\begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (1-3)$$

در رابطه (۱-۳)، شار حرارت،  $k_{ij}$  ضرایب انتقال حرارت هدایتی و  $T$  دما است. مطابق قاعده رفت و برگشتی<sup>۱</sup> در ترمودینامیک بایستی تانسور ضرایب هدایت متقارن باشد [Ozisik, 1993]. یعنی برای تمامی مواد موجود در طبیعت بایستی:

$$k_{ij} = k_{ji} \quad (2-3)$$

همچنین بر اساس قانون دوم ترمودینامیک، مقادیر روی قطر اصلی تانسور ضرایب هدایت مثبت هستند و بین درایه ها بایستی رابطه زیر برقرار باشد [Powers, 2004]:

<sup>1</sup> Reciprocity

$$k_{ii}k_{jj} > k_{ij}^2 \quad \text{for } i \neq j \quad (3-3)$$

مطابق رابطه کلازیوس-دوهم<sup>۱</sup> در ترمودینامیک، روابط زیر بین مولفه های تانسور ضرایب هدایتی مواد مرکب برقرار است [Powers, 2004]:

$$k_{(ii)} \geq 0 \quad (1-4-3)$$

$$\frac{1}{2}(k_{(ii)}k_{(jj)} - k_{(ij)}k_{(ji)}) \geq 0 \quad (2-4-3)$$

$$\varepsilon_{ijk} k_{(1j)}k_{(2j)}k_{(3j)} \geq 0 \quad (3-4-3)$$

همچنین در روابط فوق مقدار  $k_{(ij)}$  از رابطه زیر بدست می آید [Powers, 2004]:

$$k_{(ij)} \equiv k_{(ji)} = \frac{k_{ij} + k_{ji}}{2} \quad (5-3)$$

بطور کلی در مواد مرکب دو دستگاه مختصات اصلی<sup>۲</sup>  $(x_1x_2x_3)$  و فرعی<sup>۳</sup>  $(xyz)$  تعریف می شوند [Halpin, 1992]. مطابق شکل (۱-۳)، جهت دستگاه مختصات اصلی وابسته به سمت قرار گیری الیاف است به نحوی که محور  $x_1$  در راستای الیاف، محور  $x_2$  در صفحه لایه کامپوزیتی<sup>۴</sup> و محور  $x_3$  عمود بر لایه قرار دارد.

در ساخت مواد مرکب با چیدن لایه های مختلف بر روی یکدیگر، لمینیت<sup>۱</sup> کامپوزیتی ایجاد می شود. از آنجا که معمولاً راستای الیاف در لایه ها با هم متفاوت است، لذا نیاز به تعریف یک

---

<sup>1</sup> Clausius-Duhem

<sup>2</sup> On axis

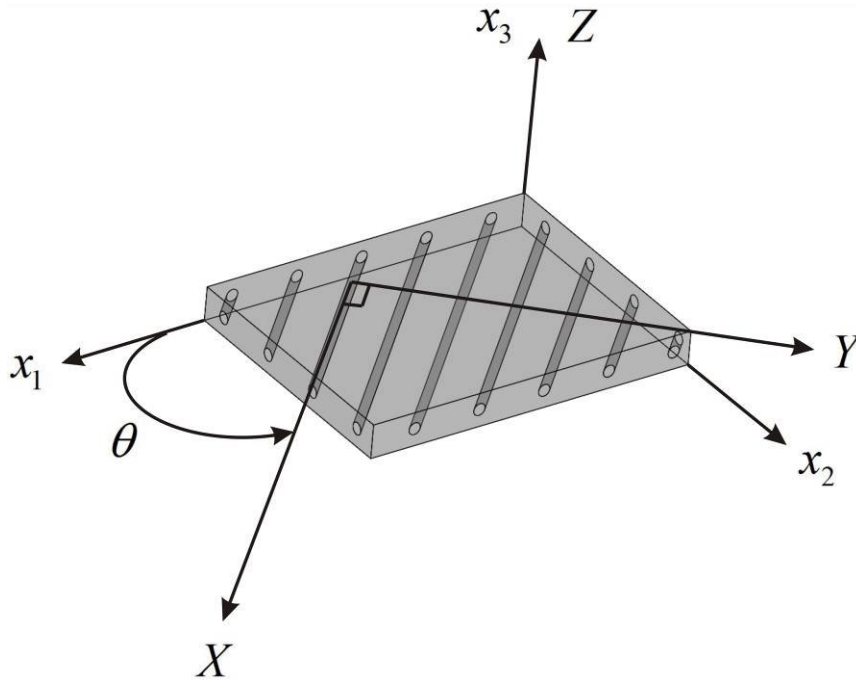
<sup>3</sup> Off axis

<sup>4</sup> Lamina

<sup>5</sup> Laminate



دستگاه مختصات مرجع (دستگاه فرعی) است که بتوان در جهات ثابت کمیت‌های فیزیکی را بررسی نمود. بنابراین در هر لایه بین دستگاه مختصات اصلی و فرعی به اندازه زاویه  $\theta$  انحراف وجود دارد و محور  $x_3$  دستگاه مختصات اصلی با محور  $z$  دستگاه مختصات فرعی هم جهت است.



شکل (۳-۱): دستگاه‌های مختصات اصلی و فرعی

رابطه فوریه برای یک ماده مرکب در دستگاه مختصات اصلی بصورت زیر است [Ozisik, 1993]:

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix}_{on} = - \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{22} \end{bmatrix}_{on} \begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x_1} \\ \frac{\partial T}{\partial x_2} \\ \frac{\partial T}{\partial x_3} \end{Bmatrix} \quad (۳-۶)$$

مطابق رابطه (۳-۶) در هر لایه، خواص در جهت الیاف  $x_1$  با جهات عمود بر الیاف  $x_2$  و  $x_3$  متفاوت است ولی انتقال حرارت در صفحه عمود بر الیاف در کلیه جهات یکسان است.

از آنجا که با دوران به اندازه  $\theta$  می‌توان از محور فرعی به محور اصلی رسید، بنابراین رابطه (۳-۶) بر حسب محور فرعی بصورت زیر قابل بازنویسی است:

$$[T(-\theta)]\{q\}_{off} = -[k]_{on}[T(-\theta)]\nabla T_{off} \quad (7-3)$$

در رابطه فوق،  $[T(\theta)]$  ماتریس دوران یک بردار بوده و از رابطه زیر بدست می آید:

$$[T(\theta)] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8-3)$$

از رابطه (7-3)، بردار شار در جهات فرعی به شکل زیر خواهد بود:

$$\{q\}_{off} = -[T(-\theta)]^{-1}[k]_{on}[T(-\theta)]\nabla T_{off} \quad (9-3)$$

از آنجا که ماتریس دوران یک ماتریس متعامد است، بنابراین:

$$[T(\theta)]^{-1} = [T(-\theta)] \quad (10-3)$$

با اعمال رابطه (10-3) در رابطه (9-3)، رابطه بردار شار حرارتی در جهات فرعی به شکل زیر خواهد بود:

$$\{q\}_{off} = -[T(\theta)][k]_{on}[T(-\theta)]\nabla T_{off} \quad (11-3)$$

مطابق قانون فوریه، انتقال حرارت در جهات فرعی به شکل زیر است:

$$\{q\}_{off} = -[k]_{off}\nabla T_{off} \quad (12-3)$$

بنابراین با مقایسه روابط (11-3) و (12-3)، تانسور ضرایب انتقال حرارت در جهات فرعی بر حسب جهات اصلی بصورت زیر خواهد بود:

$$[k]_{off} = [T(\theta)][k]_{on}[T(-\theta)] \quad (13-3)$$

چنانچه تانسور ضرایب انتقال حرارت در جهات اصلی با  $[k]$  و در جهات فرعی با  $[\bar{k}]$  نشان داده شود و همچنین  $\cos\theta$  با  $m_l$  و  $\sin\theta$  با  $n_l$  نامگذاری گردد، در اینصورت از روابط (۳-۶)، (۳-۸) و (۳-۳) (۱۳) درایه های تانسور ضرایب انتقال حرارت در جهات فرعی بدست می آیند:

$$\begin{aligned}\bar{k}_{11} &= m_l^2 k_{11} + n_l^2 k_{22} \\ \bar{k}_{22} &= n_l^2 k_{11} + m_l^2 k_{22} \\ \bar{k}_{33} &= k_{22} \\ \bar{k}_{12} = \bar{k}_{21} &= m_l n_l (k_{11} - k_{22}) \\ \bar{k}_{13} = \bar{k}_{31} &= 0 \\ \bar{k}_{23} = \bar{k}_{32} &= 0\end{aligned}\tag{۱۴-۳}$$

حال این سؤال اساسی مطرح می شود که چگونه می توان ضرایب هدایت را در دستگاه مختصات اصلی  $(k_{11}, k_{22})$  تعیین نمود تا بر اساس آنها و نیز رابطه (۳-۱۴) بتوان ضرایب انتقال حرارت را در دستگاه مختصات فرعی (مرجع) بدست آورد. بطور کلی دو روش برای تعیین ضرایب هدایت در دستگاه مختصات اصلی پیشنهاد می شود:

۱. انجام آزمایش تعیین ضریب هدایت حرارتی بر روی یک لمینا در جهت الیاف و جهت عمود بر

#### الیاف

۲. استفاده از فرمولاسیون خاصی بر اساس ضرایب هدایتی الیاف<sup>۱</sup>، ماده زمینه<sup>۲</sup> و نیز درصد

#### حجمی الیاف

روش دوم، روش مناسبی با خطای کمتر از ۲٪ است که در نبود امکانات آزمایشگاهی روش بسیار راه گشایی است (خصوصاً برای محاسبات مهندسی). در این روش ضرایب انتقال حرارت (و یا سایر پارامترهای فیزیکی جهت دار ماده) بر اساس روابط زیر قابل محاسبه هستند [Halpin, 1992]:

$$k_{11} = v_f k_f + v_m k_m\tag{۱-۱۵-۳}$$

<sup>۱</sup>. Fiber

<sup>۲</sup>. Matrix

$$k_{22} = k_m \frac{1 + \zeta \eta v_f}{1 - \eta v_f} \quad (2-15-3)$$

در روابط (۱۵-۳)، ضریب هدایت حرارتی الیاف،  $k_m$  ضریب هدایت حرارتی ماده زمینه،  $v_f$  درصد حجمی الیاف و  $v_m$  درصد حجمی ماده زمینه است. کمیت های  $\zeta$  و  $\eta$  نیز از روابط زیر قابل محاسبه هستند:

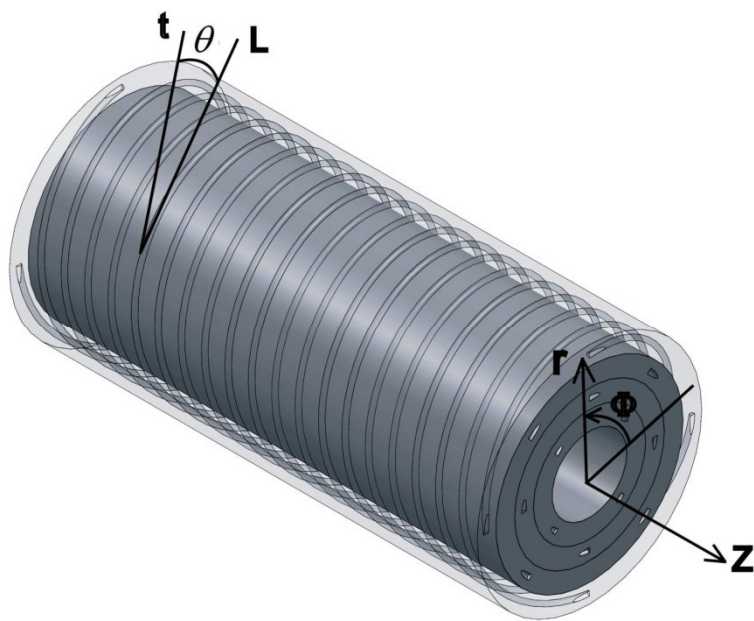
$$\eta = \frac{k_f / k_m - 1}{k_f / k_m + \zeta} \quad (1-16-3)$$

$$\zeta = 1 / (4 - 3v_m) \quad (2-16-3)$$

بطور کلی روابط (۱۵-۳) و (۱۶-۳) برای اندازه گیری سایر کمیت های فیزیکی مواد مرکب نیز قابل تعمیم می باشند [Halpin, 1992]. در جدول (۱-۳) فهرستی از برخی کمیت های فیزیکی که در مواد مرکب خواصشان از طریق اعمال روابط (۱۵-۳) و (۱۶-۳) قابل محاسبه می باشند، آمده است.

### ۳-۳- مدل سازی، معادلات حاکم و شرایط مرزی

در این تحقیق انتقال حرارت پایدار هدایتی در یک استوانه کامپوزیتی مطالعه شده است. در اینجا فرض شده که الیاف در هر لایه به دور استوانه در جهت های مشخصی پیچیده شده اند. در شکل (۲-۳) یک لمینا در وضعیت بیان شده، نشان داده شده است. مطابق شکل،  $r$ ،  $\varphi$  و  $z$  مولفه های دستگاه مختصات فرعی (مرجع) هستند. اگر  $L$  خط مماس بر استوانه در جهت الیاف و  $t$  نیز خط مماس بر استوانه در جهت  $\varphi$  باشد، در اینصورت زاویه الیاف ( $\theta$ )، زاویه بین دو خط  $L$  و  $t$  است.



شکل (۲-۳): جهت الیاف در یک لایه استوانه ای

جدول (۳-۱): پدیده های فیزیکی که کمیتهایشان در مواد مرکب از خواص مواد سازنده آنها قابل محاسبه است [Fung, 1965]

رابطه انتقال یا القا	شار	میدان	پدیده انتقال یا القا	ثابت انتقال یا القا	موضوع فیزیکی
$q = C.V$	شار میدان الکتریکی	پتانسیل الکتریکی	القای الکتریکی	ثابت دی الکتریک	الکتروستاتیک
$\varphi = L.I$	شدت میدان مغناطیسی	پتانسیل مغناطیسی	القای مغناطیسی	نفوذ پذیری مغناطیسی	مغناطیس
$I = V / R$	شدت میدان الکتریکی	پتانسیل الکتریکی	شدت جریان	ضریب هدایت الکتریکی	هدایت الکتریکی
$q = -k.\nabla T$	گرادیان دما	دما	شار حرارتی	ضریب هدایت حرارتی	هدایت حرارتی
$J = -D.\nabla c$	گرادیان غلظت	غلظت	شار جرمی	ضریب نفوذ جرم	انتقال جرم

جهت تعیین معادله انتقال حرارت، بایستی المانی استوانه ای مشابه شکل (۳-۳) در نظر گرفت. مشابه رابطه (۱-۳)، در دستگاه مختصات استوانه ای (دستگاه فرعی) رابطه فوریه در یک ماده اورتوتروپ بصورت زیر خواهد بود:

$$\begin{Bmatrix} q_r \\ q_\phi \\ q_z \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \bar{k}_{11} & \bar{k}_{12} & \bar{k}_{13} \\ \bar{k}_{21} & \bar{k}_{22} & \bar{k}_{23} \\ \bar{k}_{31} & \bar{k}_{32} & \bar{k}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (۱۷-۳)$$

با توجه به شکل (۳-۳) در صورتی که موازنه انرژی برای المان استوانه ای برقرار شود، رابطه حاصله بصورت زیر خواهد بود [Arpachi, 1966]:

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} dV = - \frac{\partial q_r dA_r}{\partial r} dr - \frac{\partial q_\phi dA_\phi}{\partial \phi} d\phi - \frac{\partial q_z dA_z}{\partial z} dz \quad (۱۸-۳)$$

در رابطه (۱۸-۳)، چگالی،  $\rho$  ظرفیت گرمایی ویژه،  $t$  زمان و  $V$  حجم است. همچنین مقادیر اندازه سطوح و حجم المان نیز عبارتند از:

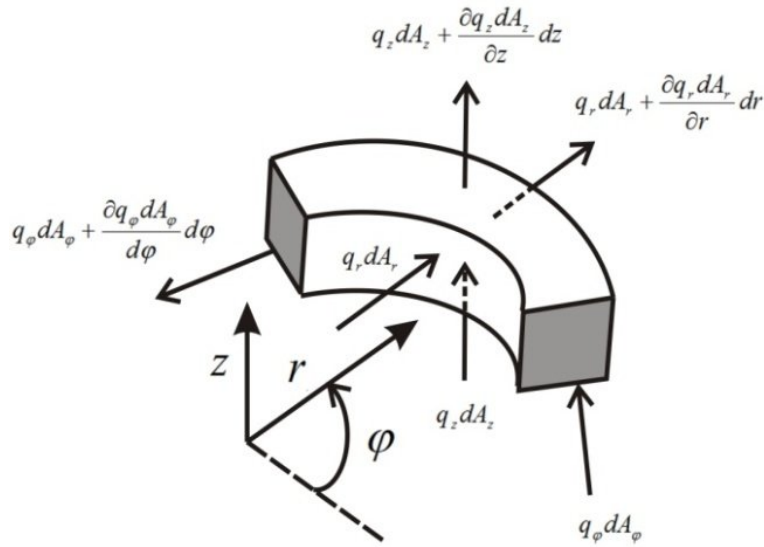
$$dA_r = r d\phi dz \quad (۱-۱۹-۳)$$

$$dA_\phi = dr dz \quad (۲-۱۹-۳)$$

$$dA_z = r d\phi dr \quad (۳-۱۹-۳)$$

$$dV = r d\phi dr dz \quad (۴-۱۹-۳)$$

با اعمال روابط (۱۹-۳) و (۱۷-۳) در رابطه (۱۸-۳)، رابطه زیر برای انتقال حرارت در یک ماده اورتوتروپ بدست می آید [Ozisik, 1993]:



شکل (۳-۳): شارهای حرارت در یک المان استوانه ای

$$\begin{aligned} & \bar{k}_{11} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \bar{k}_{22} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \bar{k}_{33} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + (\bar{k}_{12} + \bar{k}_{21}) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi \partial r} + \\ & (\bar{k}_{13} + \bar{k}_{31}) \frac{\partial^2 T}{\partial r \partial z} + \frac{k_{13}}{r} \frac{\partial T}{\partial z} + (\bar{k}_{23} + \bar{k}_{32}) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi \partial z} + g = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \end{aligned} \quad (۲۰-۳)$$

در رابطه فوق  $g$  یک تابع سه بعدی بوده و مبین جمله انرژی در رابطه انتقال حرارت است. نکته جالب توجه در مورد معادله (۲۰-۳) آن است که با توجه به قانون دوم ترمودینامیک بایستی ضرایب معادله (ضرایب هدایت ماده) به گونه ای باشند که معادله فوق برای هر وضعیت دو بعدی بیضوی باقی بماند و در حالت دو بعدی صورت کانونیکی معادله فوق بسیار شبیه معادله لاپلاس (صورت استاندارد معادله هدایت در مواد ایزوتروپ) بوده و بیضوی است [Ozisik, 1993].

شایان ذکر است که رابطه (۲۰-۳)، برای بررسی انتقال حرارت در پوسته های استوانه ای شکل اورتوتروپ مناسب است. برای صفحات اورتوتروپ، رابطه انتقال حرارت در دستگاه مختصات کارتزین به شکل زیر است:



$$\begin{aligned} & \bar{k}_{11} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \bar{k}_{22} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \bar{k}_{33} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + (\bar{k}_{12} + \bar{k}_{21}) \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + \\ & (\bar{k}_{13} + \bar{k}_{31}) \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial z} + (\bar{k}_{23} + \bar{k}_{32}) \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial z} + g = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \end{aligned} \quad (21-3)$$

همچنین در دستگاه مختصات کروی این رابطه به شکل زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} & \bar{k}_{11} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \bar{k}_{22} \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \bar{k}_{33} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \\ & + \frac{(\bar{k}_{12} + \bar{k}_{21})}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi \partial r} + \bar{k}_{12} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi} + \frac{(\bar{k}_{13} + \bar{k}_{31})}{r} \frac{\partial^2 T}{\partial r \partial \theta} + \frac{k_{13}}{r^2} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \\ & (\bar{k}_{23} + \bar{k}_{32}) \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi \partial \theta} + \bar{k}_{31} \frac{\cos \theta}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial r} + g = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \end{aligned} \quad (22-3)$$

در روابط (۲۰-۳)، (۲۱-۳) و (۲۲-۳) معادله انتقال حرارت مواد اورتوتوپ در دستگاه های مختصات مختلف بیان شده است. در ادامه بر اساس رابطه (۲۰-۳)، معادله انتقال حرارت برای پوسته های استوانه ای شکل مواد مرکب به دست می آید. شایان ذکر است که روش به کار گرفته شده در اینجا قابل تعمیم به سایر دستگاه های مختصات بوده و برای مثال می توان همین روش را عیناً برای انتقال حرارت در لمینیت های تخت (ورق های کامپوزیتی) نیز به کار گرفت.

با استفاده از رابطه (۲۰-۳) می توان معادله انتقال حرارت برای یک لمینیت کامپوزیتی استوانه ای را بدست آورد. با توجه به شکل (۲-۳) می توان دریافت که زاویه الیاف نسبت به محور  $\varphi$  تعریف شده و از آنجا که  $\varphi$  مولفه دوم دستگاه مختصات  $r, \varphi, z$  است، بنابراین نیاز به بازآرایی ضرایب انتقال حرارت معادله (۱۴-۳) در این دستگاه مختصات است (زیرا در رابطه (۱۴-۳) زاویه الیاف نسبت به مولفه اول دستگاه مختصات تعریف شده است). بنابراین برای لمینیت استوانه ای مذکور صورت بازآرایی شده رابطه (۱۴-۳) بصورت زیر است:

$$\begin{aligned}
\bar{k}_{11} &= k_{22} \\
\bar{k}_{22} &= m_l^2 k_{11} + n_l^2 k_{22} \\
\bar{k}_{33} &= n_l^2 k_{11} + m_l^2 k_{22} \\
\bar{k}_{12} &= \bar{k}_{21} = 0 \\
\bar{k}_{13} &= \bar{k}_{31} = 0 \\
\bar{k}_{23} &= \bar{k}_{32} = m_l n_l (k_{11} - k_{22})
\end{aligned}
\tag{۲۳-۳}$$

با اعمال رابطه (۲۳-۳) در معادله (۲۰-۳) و با صرفنظر از جمله چشمه انرژی، معادله ای برای انتقال حرارت در این لمینیت بدست می آید:

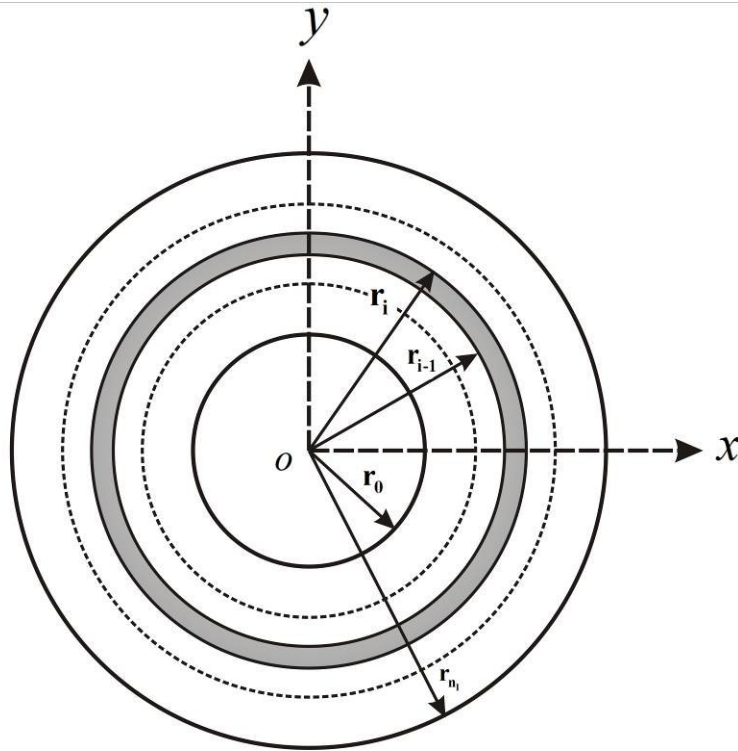
$$\begin{aligned}
k_{22} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + (m_l^2 k_{11} + n_l^2 k_{22}) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \\
(n_l^2 k_{11} + m_l^2 k_{22}) \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + 2m_l n_l (k_{11} - k_{22}) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi \partial z} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}
\end{aligned}
\tag{۲۴-۳}$$

در این تحقیق از معادله فوق برای بررسی انتقال حرارت در لمینیت های کامپوزیتی استوانه ای شکل استفاده شده است.

از آنجا که لمینیت استوانه ای از لایه های متعددی تشکیل شده و جهت الیاف در هر لایه با لایه مجاور ممکن است که متفاوت باشد، لذا معادله (۲۴-۳) در هر لایه متفاوت خواهد بود و بین لایه ها بایستی که شرط مرزی همزمان پیوستگی دما و پیوستگی شار دما وجود داشته باشد [Arpaci, 1966]. در شکل (۴-۳) لایه ها در لمینیت استوانه ای نشان داده شده است. بنابراین اگر  $r = r_i$  مرز بین دو لایه شماره  $i$  و  $i+1$  باشد، بنابراین در این شعاع:

$$T^{(i)} = T^{(i+1)} \tag{۱-۲۵-۳}$$

$$-k_{22} \frac{\partial T^{(i)}}{\partial r} = -k_{22} \frac{\partial T^{(i+1)}}{\partial r} \tag{۲-۲۵-۳}$$



شکل (۳-۴): چیدمان لایه ها در لمینیت استوانه ای

در پایان یادآور می شود که معادلات انتقال حرارت در مواد مرکب قابل تعمیم به هر دستگاه مختصات منحنی الخطی می باشند. بطور کلی معادله انتقال حرارت هدایتی در مختصات منحنی الخط متعامد  $(u_1, u_2, u_3)$  برای جامدات غیر ایزوتروپیک به صورت زیر است [Carslaw, 1973]:

$$\frac{1}{a_1 a_2 a_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} (a_2 a_3 q_1) + \frac{\partial}{\partial u_2} (a_1 a_3 q_2) + \frac{\partial}{\partial u_3} (a_1 a_2 q_3) \right] + g = \rho C_P \frac{\partial T}{\partial t} \quad (۳-۲۶)$$

که در آن  $a_1$  ،  $a_2$  و  $a_3$  فاکتور تبدیل هستند و تولید انرژی در داخل جسم با پارامتر  $g$  نشان داده شده است .

فصل چهارم  
بررسی انتقال حرارت دائم در مواد  
مرکب

#### ۴-۱- مقدمه

در این فصل با استفاده از تئوری اشترم لیوویل<sup>۱</sup> یک حل تحلیلی دقیق برای انتقال حرارت هدایتی دو بعدی پایدار در جهات  $(r, z)$  برای لمینیت های کامپوزیتی تحت شرایط مرزی کلی ارائه شده است و در ادامه با استفاده از سه مثال مختلف شامل مخزن با شرایط مرزی جابجایی در جهت های مختلف و شار حرارتی داخلی، پین فین با شرایط نوک عایق و لوله خنک کن راکتور هسته ای با شار حرارتی متغییر در جهت  $z$ ، کاربرد و نتایج کار انجام شده نشان داده شده است.

#### ۴-۲- حل تحلیلی برای شرایط مرزی کلی

از آنجا که در تحقیق حاضر انتقال حرارت هدایت پایدار در جهت  $r$  و  $z$  بررسی می شود، معادله (۳-۲۴) به شکل ساده تر زیر تبدیل خواهد شد:

$$k_{22} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + (n_l^2 k_{11} + m_l^2 k_{22}) \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (۱-۴)$$

معادله (۱-۴) را می توان به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{\mu^2} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0. \quad (۲-۴)$$

شرایط مرزی کلی مساله نیز به صورت زیر خواهد بود:

$$a_1 T(r, 0) + b_1 \frac{\partial T(r, 0)}{\partial z} = f_1(r). \quad (۱-۳-۴)$$

$$a_2 T(r, L) + b_2 \frac{\partial T(r, L)}{\partial z} = f_2(r). \quad (۲-۳-۴)$$

$$c_1 T(r_m, z) + d_1 \frac{\partial T(r_m, z)}{\partial r} = g_1(z). \quad (۳-۳-۴)$$

<sup>۱</sup> . Sturm-Liouville

$$c_2 T(r_{n_1}, z) + d_2 \frac{\partial T(r_{n_1}, z)}{\partial r} = g_2(z). \quad (4-3-4)$$

که مقدار  $\mu$  از رابطه زیر بدست می آید:

$$\mu = \sqrt{\frac{k_{22}}{n_l^2 k_{11} + m_l^2 k_{22}}}. \quad (4-4)$$

حال با استفاده از تئوری اشترم لیوویل یک حل تحلیلی برای معادله (۲-۴) ارائه شده است، با توجه به شرایط مرزی کلی مساله، ابتدا لازم است با استفاده از قضیه اشترم-لیوویل تبدیل فوریه مناسب ساخته شود. [Myint and Debnath, 2007]

$$F(f) = \frac{\int_a^b s(z) f(z) \varphi_n(z) dz}{\int_a^b s(z) \varphi_n^2(z) dz} \quad (5-4)$$

که  $s(z)$  تابع وزن و  $\varphi_n(z)$  تابع ویژه است که از شرایط مرزی همگن در جهت Z بدست می آید. همچنین تابع معکوس از رابطه زیر بدست می آید

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F(f) \varphi_n(z) \quad (6-4)$$

با اعمال روش جدایی متغیرها برای حل معادله (۲-۴) و با در نظر گرفتن شرایط مرزی همگن، روابط زیر برای جهت Z بدست خواهد آمد

$$\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} + \lambda^2 Z(z) = 0. \quad (7-4)$$

$$a_1 Z(0) + b_1 \frac{\partial Z(0)}{\partial z} = 0. \quad (1-8-4)$$

$$a_2 Z(L) + b_2 \frac{\partial Z(L)}{\partial z} = 0. \quad (2-8-4)$$

با حل معادله (۷-۴) و با توجه به شرایط مرزی (۸-۴)، توابع ویژه برای این مساله بدست خواهد آمد:

$$\phi_n = (a_1 \sin(\lambda_n z) - b_1 \lambda_n \cos(\lambda_n z)). \quad (9-4)$$

که  $\lambda_n$  با توجه به رابطه زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned} (a_1 b_2 - a_2 b_1) \lambda_n \cos(\lambda_n L) + \\ (a_2 a_1 + b_1 b_2 \lambda_n^2) \sin(\lambda_n L) = 0 \end{aligned} \quad (10-4)$$

با توجه به تئوری اشترم-لیوویل تابع وزن در مساله حاضر یک عدد ثابت است. با جایگزین کردن این روابط در رابطه اشترم-لیوویل (4-5)، تبدیل فوریه مناسب  $(F(f))$  به صورت زیر است:

$$F(f) = \frac{4\lambda_n}{A_n^2} \int_0^L \left[ f(z) \begin{pmatrix} a_1 \sin(\lambda_n z) \\ -b_1 \lambda_n \cos(\lambda_n z) \end{pmatrix} \right] dz. \quad (11-4)$$

که  $A_n$  برابر است با

$$A_n = \sqrt{\begin{aligned} &(-a_1^2 + (b_1 \lambda_n)^2) \sin(2\lambda_n L) + 2a_1 b_1 \lambda_n \cos(2\lambda_n L) \\ &+ 2\lambda_n (a_1^2 + (b_1 \lambda_n)^2) L - 2a_1 b_1 \lambda_n \end{aligned}} \quad (12-4)$$

در ادامه با استفاده از تعریف تبدیل فوریه، مشتق دوم نسبت به  $z$  بدست می آید.

$$F(f'') = \left\{ \begin{aligned} &\left( \frac{2\lambda_n}{A_n} \right)^2 \left[ \frac{-a_1}{(a_2 \cos(\lambda_n L) - b_2 \lambda_n \sin(\lambda_n L))} f_2(r) \right] \\ &+ f_1(r) \\ &- \lambda_n^2 F(f) \end{aligned} \right\} \quad (13-4)$$

حال اگر این تبدیل فوریه را بر روی معادله (4-2) و شرایط مرزی در جهت  $r$  اعمال نمائیم، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - \left( \frac{\lambda_n}{\mu} \right)^2 U = \left( \frac{2\lambda_n}{A_n^2 \mu} \right)^2 \times \quad (14-4)$$

$$\left[ \frac{a_1}{(a_2 \cos(\lambda_n L) - b_2 \lambda_n \sin(\lambda_n z))} f_2(r) - f_1(r) \right]$$

$$c_1 U(r_0, n) + d_1 \frac{\partial U(r_0, n)}{\partial r} = G_1(n). \quad (15-4)$$

$$c_2 U(r_n, n) + d_2 \frac{\partial U(r_n, n)}{\partial r} = G_2(n). \quad (2-15-4)$$

که در آن

$$U(r, n) = F(T(r, z)). \quad (16-4)$$

$$G_1(n) = F(g_1(z)). \quad (2-16-4)$$

$$G_2(n) = F(g_2(z)). \quad (3-16-4)$$

اگر طرف راست معادله را مساوی  $h(r, n)$  در نظر بگیریم، جواب کلی معادله در هر لایه از لمینیت کامپوزیتی به صورت زیر است:

$$U^{(i)}(r, n) = a_n^{(i)} I_0 \left( \frac{\lambda_n r}{\mu_i} \right) + b_n^{(i)} K_0 \left( \frac{\lambda_n r}{\mu_i} \right) + w^{(i)}(r, n). \quad (17-4)$$

که  $w(r, n)$  پاسخ غیر همگن معادله (4-14) می باشد و در حالت کلی برابر است با:

$$\begin{aligned} w^{(i)}(r, n) &= I_0 \left( \frac{\lambda_n r}{\mu_i} \right) \times \int_{r_{in}}^{r_{out}} \left[ r \times K_0 \left( \frac{\lambda_n r}{\mu_i} \right) \times h(r, n) \right] dr \\ &+ K_0 \left( \frac{\lambda_n r}{\mu_i} \right) \times \int_{r_{in}}^{r_{out}} \left[ r \times I_0 \left( \frac{\lambda_n r}{\mu_i} \right) \times h(r, n) \right] dr. \end{aligned} \quad (18-4)$$

در روابط بالا  $I_0$  و  $K_0$  به ترتیب توابع بسل اصلاح شده نوع اول و دوم از مرتبه صفر هستند. در نهایت با اعمال شرایط مرزی داخلی و خارجی در جهت  $r$  و پیوستگی دما و شار حرارت در مرز بین لایه ها ضرایب  $a_n$  و  $b_n$  بدست می آیند، با توجه به معادله (4-15-1) داریم:

$$\begin{aligned} a_n^{(1)} \left[ c_1 I_0 \left( \frac{\lambda_n r_0}{\mu_1} \right) + d_1 \frac{\lambda_n}{\mu_1} I_1 \left( \frac{\lambda_n r_0}{\mu_1} \right) \right] + \\ b_n^{(1)} \left[ c_1 K_0 \left( \frac{\lambda_n r_0}{\mu_1} \right) - d_1 \frac{\lambda_n}{\mu_1} K_1 \left( \frac{\lambda_n r_0}{\mu_1} \right) \right] = G_1(n) - w^{(1)}(r_0, n). \end{aligned} \quad (1-19-4)$$

به طور مشابه برای شرایط مرزی معادله (4-15-1) داریم:

$$\begin{aligned} a_n^{(n_i)} \left[ c_2 I_0 \left( \frac{\lambda_n r_{n_i}}{\mu_{n_i}} \right) + d_2 \frac{\lambda_n}{\mu_{n_i}} I_1 \left( \frac{\lambda_n r_{n_i}}{\mu_{n_i}} \right) \right] + \\ b_n^{(n_i)} \left[ c_2 K_0 \left( \frac{\lambda_n r_{n_i}}{\mu_{n_i}} \right) - d_2 \frac{\lambda_n}{\mu_{n_i}} K_1 \left( \frac{\lambda_n r_{n_i}}{\mu_{n_i}} \right) \right] = G_1(n) - w^{(n_i)}(r_{n_i}, n). \end{aligned} \quad (2-19-4)$$



حال شرایط مرزی مربوط به روابط (1-25-3) و (2-25-3) را در فصل مشترک بین دو لایه مجاور اعمال می نماییم، با توجه به رابطه (1-25-3) برای پیوستگی دما داریم:

$$U^{(i)}(r_i, n) = U^{(i+1)}(r_i, n) \Rightarrow$$

$$a_n^{(i)} I_0 \left( \frac{\lambda_n}{\mu_i} r_i \right) + b_n^{(i)} K_0 \left( \frac{\lambda_n}{\mu_i} r_i \right) - a_n^{(i+1)} I_0 \left( \frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} r_i \right) + b_n^{(i+1)} K_0 \left( \frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} r_i \right) = w^{(i+1)}(r_i, n) - w^{(i)}(r_i, n). \quad (3-19-4)$$

و با توجه به رابطه (2-25-3) برای پیوستگی شار حرارتی داریم:

$$\frac{\partial U^{(i)}(r_i, n)}{\partial r} = \frac{\partial U^{(i+1)}(r_i, n)}{\partial r} \Rightarrow$$

$$a_n^{(i)} \frac{\lambda_n}{\mu_i} I_1 \left( \frac{\lambda_n}{\mu_i} r_i \right) + b_n^{(i)} \frac{\lambda_n}{\mu_i} K_1 \left( \frac{\lambda_n}{\mu_i} r_i \right) - a_n^{(i+1)} \frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} I_1 \left( \frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} r_i \right) + b_n^{(i+1)} \frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} K_1 \left( \frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} r_i \right) = \frac{\partial w^{(i+1)}(r_i, n)}{\partial r} - \frac{\partial w^{(i)}(r_i, n)}{\partial r}. \quad (4-19-4)$$

$I_1$  و  $K_1$  به ترتیب توابع بسل اصلاح شده نوع اول و دوم از مرتبه یک هستند. حال برای تعیین ضرایب  $a_n^{(i)}$  و  $b_n^{(i)}$  بایستی در هر  $n$  و برای تمامی لایه ها، دستگاه مختصات شامل روابط (3-19-4)، (4-19-4)، (2-19-4)، (3-19-4) و (4-19-4) حل شوند، دستگاه معادلات حاصل یک دستگاه پنج قطری است، در مقاله حاضر با استفاده از الگوریتم توماس ماتریس ضرایب پنج قطری مذکور به یک ماتریس دو قطری با درایه های مساوی یک برای قطر اصلی تبدیل شده است. طریقه کلی استفاده از الگوریتم توماس برای یک ماتریس پنج قطری دلخواه در پیوست ۱ نشان داده شده است. در ادامه با استفاده از روابط بین سطر ها در دستگاه معادلات بدست آمده، روابط بازگشتی زیر برای محاسبه  $a_n$  و  $b_n$  به ازای مقادیر مختلف  $n$  بدست آمده است.

$$a_n^{(1)} = M_n^{(1)}. \quad (1-20-4)$$

$$1 < i < n_l - 1 \quad \begin{cases} b_n^{(i)} = N_n^{(i)} - \alpha_n^{(i)} . a_n^{(i)} \\ a_n^{(i+1)} = M_n^{(i+1)} - \beta_n^{(i+1)} . b_n^{(i)} \end{cases} \quad (۲-۲۰-۴)$$

$$b_n^{(n_l)} = N_n^{n_l} - \alpha_n^{(n_l)} . a_n^{(n_l)} \quad (۳-۲۰-۴)$$

که ضرایب  $M_n$  و  $N_n$ ،  $\beta_n$ ،  $\alpha_n$  برای هر لایه از روابط زیر بدست می آید:

$$\alpha_n^{(n_l)} = \frac{c_2 I_0 \left( \frac{\lambda_n}{\mu_{n_l}} r_{n_l} \right) + d_2 \frac{\lambda_n}{\mu_{n_l}} I_1 \left( \frac{\lambda_n}{\mu_{n_l}} r_{n_l} \right)}{c_2 K_0 \left( \frac{\lambda_n}{\mu_{n_l}} r_{n_l} \right) - d_2 \frac{\lambda_n}{\mu_{n_l}} K_1 \left( \frac{\lambda_n}{\mu_{n_l}} r_{n_l} \right)} \quad (۱-۲۱-۴)$$

$$N_n^{(n_l)} = \frac{G_2(n) - w^{(n_l)}(r_{n_l}, n)}{c_2 K_0 \left( \frac{\lambda_n}{\mu_{n_l}} r_{n_l} \right) - d_2 \frac{\lambda_n}{\mu_{n_l}} K_1 \left( \frac{\lambda_n}{\mu_{n_l}} r_{n_l} \right)} \quad (۲-۲۲-۴)$$

$$\begin{cases} \beta_n^{(i+1)} = \frac{\pi_i}{\chi_i - \alpha_n^{(i+1)}} \\ M_n^{(i+1)} = \frac{E_i - N_n^{(i+1)}}{\chi_i - \alpha_n^{(i+1)}} \\ \alpha_n^{(i)} = \frac{\gamma_i}{\psi_i - \beta_n^{(i+1)}} \\ N_n^{(i)} = \frac{F_i - M_n^{(i+1)}}{\psi_i - \beta_n^{(i+1)}} \end{cases} \quad 1 < i < n_l - 1 \quad (۳-۲۲-۴)$$

$$M_n^{(1)} = \frac{G_1(n) - w^{(1)}(r_0, n) - N_n^{(1)} \left( c_1 k_0 \left( \frac{\lambda_n}{\mu_1} r_0 \right) - d_1 \frac{\lambda_n}{\mu_1} K_1 \left( \frac{\lambda_n}{\mu_1} r_0 \right) \right)}{\left( c_1 I_0 \left( \frac{\lambda_n}{\mu_1} r_0 \right) + d_1 \frac{\lambda_n}{\mu_1} I_1 \left( \frac{\lambda_n}{\mu_1} r_0 \right) \right) - \alpha_n^{(1)} \left( c_1 k_0 \left( \frac{\lambda_n}{\mu_1} r_0 \right) - d_1 \frac{\lambda_n}{\mu_1} K_1 \left( \frac{\lambda_n}{\mu_1} r_0 \right) \right)} \quad (۴-۲۲-۴)$$

برای اجتناب از پیچیدگی و طولانی شدن عبارات فوق، ضرایب ثابت  $\pi_i$ ،  $\chi_i$ ،  $\gamma_i$ ،  $\psi_i$ ،  $E_i$  و  $F_i$  به صورت

جداگانه ارائه شده است:

$$\pi_i = \frac{-I_0\left(\frac{\lambda_n}{\mu_i} r_i\right) K_1\left(\frac{\lambda_n}{\mu_i} r_i\right) - I_1\left(\frac{\lambda_n}{\mu_i} r_i\right) K_0\left(\frac{\lambda_n}{\mu_i} r_i\right)}{\frac{\mu_i}{\mu_{i+1}} I_0\left(\frac{\lambda_n}{\mu_i} r_i\right) K_1\left(\frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} r_i\right) + I_1\left(\frac{\lambda_n}{\mu_i} r_i\right) K_0\left(\frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} r_i\right)} \quad (1-23-4)$$

$$\chi_i = \frac{-\frac{\mu_i}{\mu_{i+1}} I_0\left(\frac{\lambda_n}{\mu_i} r_i\right) I_1\left(\frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} r_i\right) + I_0\left(\frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} r_i\right) I_1\left(\frac{\lambda_n}{\mu_i} r_i\right)}{\frac{\mu_i}{\mu_{i+1}} I_0\left(\frac{\lambda_n}{\mu_i} r_i\right) K_1\left(\frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} r_i\right) + I_1\left(\frac{\lambda_n}{\mu_i} r_i\right) K_0\left(\frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} r_i\right)} \quad (2-23-4)$$

$$\gamma_i = \frac{I_0\left(\frac{\lambda_n}{\mu_i} r_i\right)}{\chi_i \times K_0\left(\frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} r_i\right) - I_0\left(\frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} r_i\right)} \quad (3-23-4)$$

$$\psi_i = \frac{\pi_i \times K_0\left(\frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} r_i\right) + K_0\left(\frac{\lambda_n}{\mu_i} r_i\right)}{\chi_i \times K_0\left(\frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} r_i\right) - I_0\left(\frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} r_i\right)} \quad (4-23-4)$$

$$E_i = \pi_i \left[ \left( \frac{\partial w^{(i+1)}(r_i, n)}{\partial r} - \frac{\partial w^{(i)}(r_i, n)}{\partial r} \right) - \frac{\lambda_n}{\mu_i} (w^{(i+1)}(r_i, n) - w^{(i)}(r_i, n)) I_1\left(\frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} r_i\right) \right] \quad (5-23-4)$$

$$F_i = \frac{E_i \times K_0\left(\frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} r_i\right) - w^{(i+1)}(r_i, n) - w^{(i)}(r_i, n)}{\chi_i \times K_0\left(\frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} r_i\right) - I_0\left(\frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} r_i\right)} \quad (6-23-4)$$

لازم به توضیح است که برای استوانه توپر، تغییرات زیر برای لایه اول باید اعمال شود. این روابط بر مبنای شرایط تقارن ( $\frac{\partial T}{\partial r} = 0$ ) در مرکز سیلندر بدست می آید. برای این منظور بایستی رابطه

(4-22-4) به صورت زیر تغییر کند:

$$M_n^{(1)} = \frac{N_n^{(1)}}{\alpha_n^{(1)}} \quad (24-4)$$

با توجه به این تغییر ضریب  $b_n^{(1)}$  صفر می شود. بنابراین باید معادله (۴-۲۰) را به صورت زیر تغییر دهیم:

$$\begin{cases} a_n^{(1)} = M_n^{(1)} \\ b_n^{(1)} = 0 \end{cases} \quad (۴-۲۵-۱)$$

$$\begin{cases} b_n^{(i)} = N_n^{(i)} - \alpha_n^{(i)} \cdot a_n^{(i)} \\ a_n^{(i)} = M_n^{(i)} - \beta_n^{(i)} \cdot b_n^{(i)} \end{cases} \quad 2 < i < n_l - 1 \quad (۴-۲۵-۲)$$

$$b_n^{(n_l)} = N_n^{(n_l)} - \alpha_n^{(n_l)} \cdot a_n^{(n_l)} \quad (۴-۲۵-۳)$$

نهایتا با مشخص شدن ضرایب  $a_n$  و  $b_n$  برای هر لایه می توانیم توزیع درجه حرارت در هر لایه را با استفاده از تبدیل معکوس مشخص نمائیم.

$$T^{(i)}(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} (U^{(i)}(r, n) \times \phi_n(z)) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n^{(i)} I_0 \left( \frac{\lambda_n}{\mu_i} r \right) + b_n^{(i)} K_0 \left( \frac{\lambda_n}{\mu_i} r \right) + w^{(i)}(r, n) \right) \times (a_1 \sin(\lambda_n z) - b_1 \lambda_n \cos(\lambda_n z)). \quad (۴-۲۶)$$

#### ۴-۳- مثال ها

در این قسمت سعی شده است با یک مثال مشخص که تقریبا در بر گیرنده همه ضرایب بدست آمده در بخش قبل می باشد، حل تحلیلی انتقال حرارت دوبعدی پایدار در یک استوانه کامپوزیتی بررسی شود، در این راستا اثر تغییر زاویه الیاف بر توزیع درجه حرارت در یک لمینیت یک لایه و همچنین در چیدمان های مختلف برای لمینیت های چند لایه بررسی گردیده است.

برای هر چه بهتر نشان دادن اثر تغییر خواص در جهت الیاف و جهت عمود بر آن از گرافیت-اپوکسی به عنوان ماده کامپوزیتی استفاده شده است، ضریب انتقال حرارت گرافیت-اپوکسی در جهت الیاف ۱۲.۷۶ برابر بزرگتر از مقدار آن در جهت عمود بر الیاف است که این امر به دلیل هدایت گرمایی بالای گرافیت در مقایسه با اپوکسی به عنوان یک عایق است. بعضی خواص فیزیکی و گرمایی الیاف و ماتریس در جدول (۴-۱) نشان داده شده است.

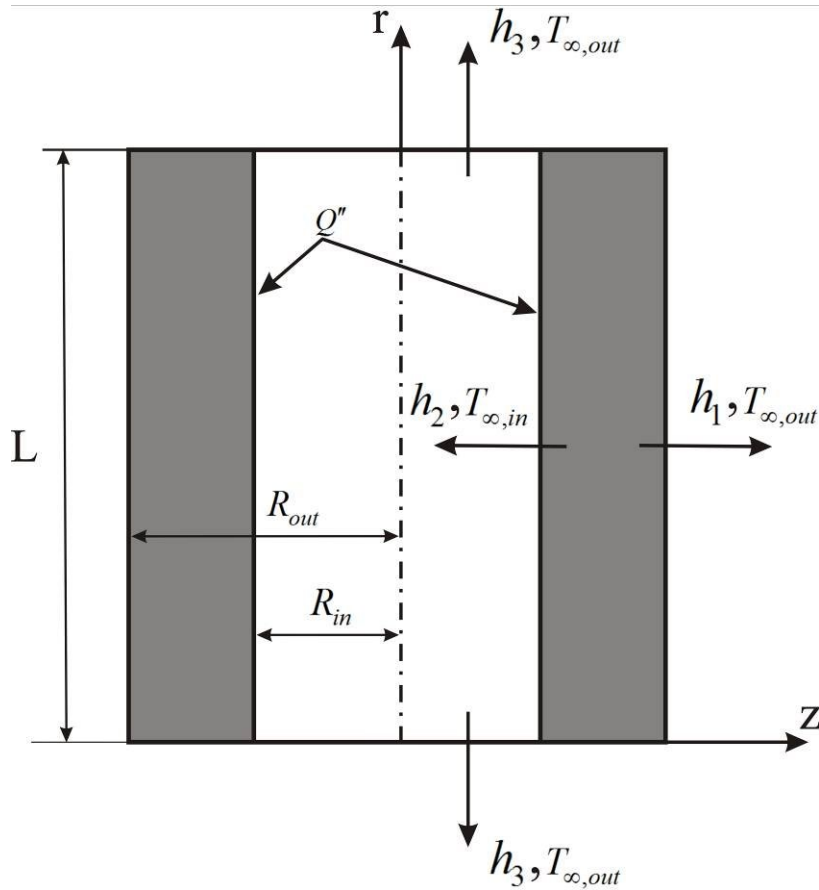
جدول (۱-۴): خواص الیاف و ماده زمینه برای ماده مرکب در نظر گرفته شده [Touloukian, 1972]

اپوکسی	جنس ماده زمینه
گرافیت	جنس الیاف
۰/۱۹	ضریب هدایت ماده زمینه ( $w/m.k$ )
۱۴/۷۴	ضریب هدایت الیاف ( $w/m.k$ )
۱۶۱۳	ظرفیت گرمایی ماده زمینه ( $J/Kg.K$ )
۷۰۹	ظرفیت گرمایی الیاف ( $J/Kg.K$ )

همچنین خواص کامپوزیت ساخته شده از این مواد در جدول (۲-۴) بیان گردیده است.

جدول (۲-۴): خواص ماده مرکب کولار/اپوکسی [Touloukian, 1972]

۱۱/۱	$k$ در جهت موازی الیاف ( $w/m.k$ )
۰/۸۷	$k$ در جهت عمود بر الیاف ( $w/m.k$ )
۷۵	درصد حجمی الیاف
۹۳۵	ظرفیت گرمایی ( $J/Kg.K$ )
۱۴۰۰	چگالی ( $Kg/m^3$ )



شکل (۱-۴): هندسه و مختصات بکار رفته برای مخزن

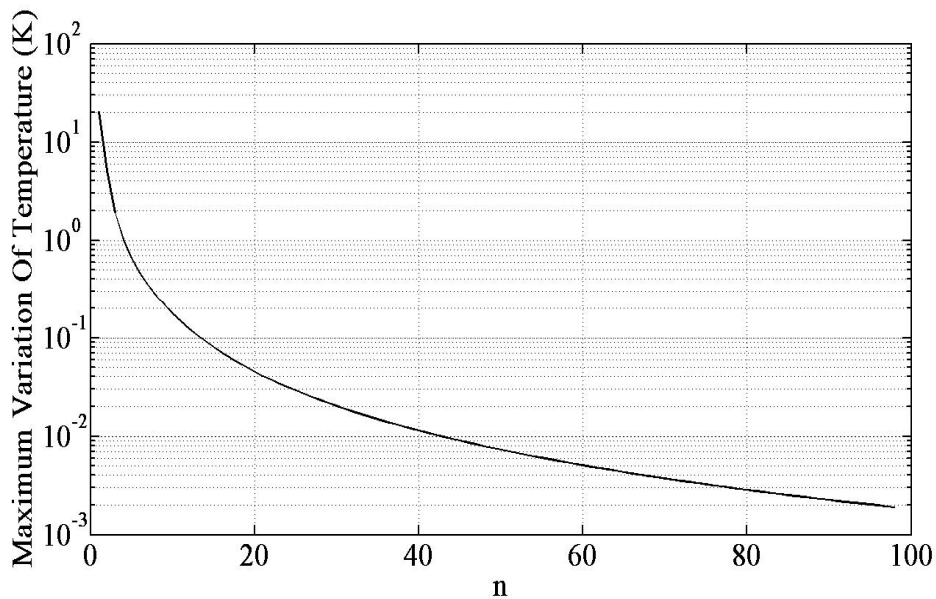
در این قسمت مساله انتقال حرارت در یک مخزن با هندسه و شرایط مرزی نشان داده شده در جدول (۳-۴) مورد مطالعه قرار گرفته است. شکل (۱-۴) هندسه مخزن را نشان می دهد. برای بررسی اثر تغییر زاویه بر توزیع درجه حرارت در این مواد از یک لمینیت کامپوزیتی یک لایه (یا لمینیت چند

لایه با زاویه الیاف مساوی) با مشخصات و شرایط مرزی نشان داده شده در جدول (۳-۴) استفاده شده است.

جدول (۳-۴): هندسه و شرایط مرزی مخزن

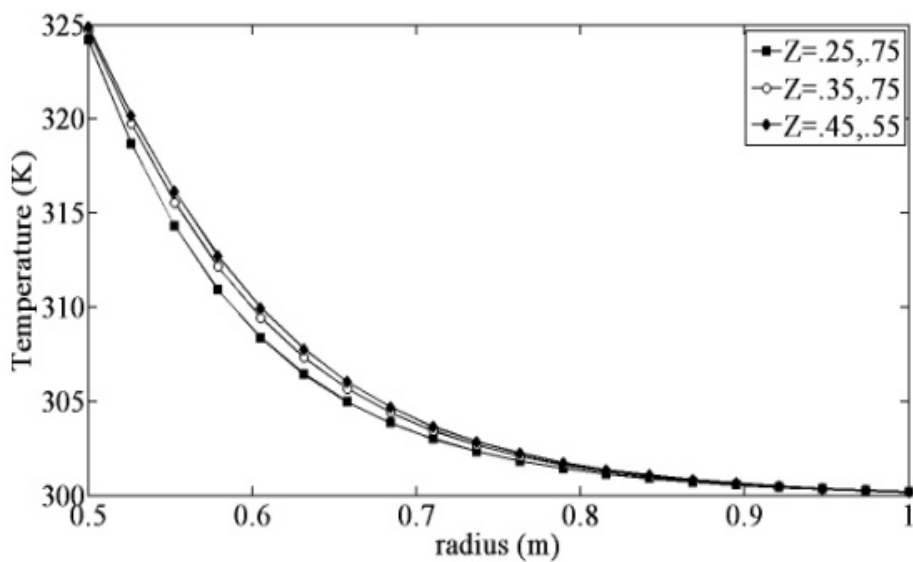
۰/۵	قطر داخلی ( $m$ )
۱	قطر خارجی ( $m$ )
۱	طول استوانه ( $m$ )
۸۰۰	شار گرمایی داخلی ( $w/m^2$ )
۱۵۰	ضریب جابجایی طولی ( $w/m^2$ )
۱۰۰	ضریب جابجایی جانبی ( $w/m^2$ )
۵۰	ضریب جابجایی داخلی ( $w/m^2$ )
۳۰۰	دمای محیط ( $k$ )
۳۲۰	دمای محیط داخلی ( $k$ )

در شکل (۲-۴) ماکزیمم تغییرات دما به ازاء تعداد جملات سری معرفی شده با رابطه (۲۶-۴) نشان داده شده است، این نمودار برای یک لمینیت با زاویه الیاف ۹۰ درجه رسم شده است. با توجه به شکل (۲-۴) این سری به ازاء ۲۰۰ جمله اول سریعاً همگرا می شود و تغییرات به کمتر از ۰.۰۱ می رسد که تقریب خوبی برای محاسبات مهندسی بشمار می رود در مقاله حاضر نتایج به ازاء ۲۰۰ جمله اول سری نشان داده شده است.



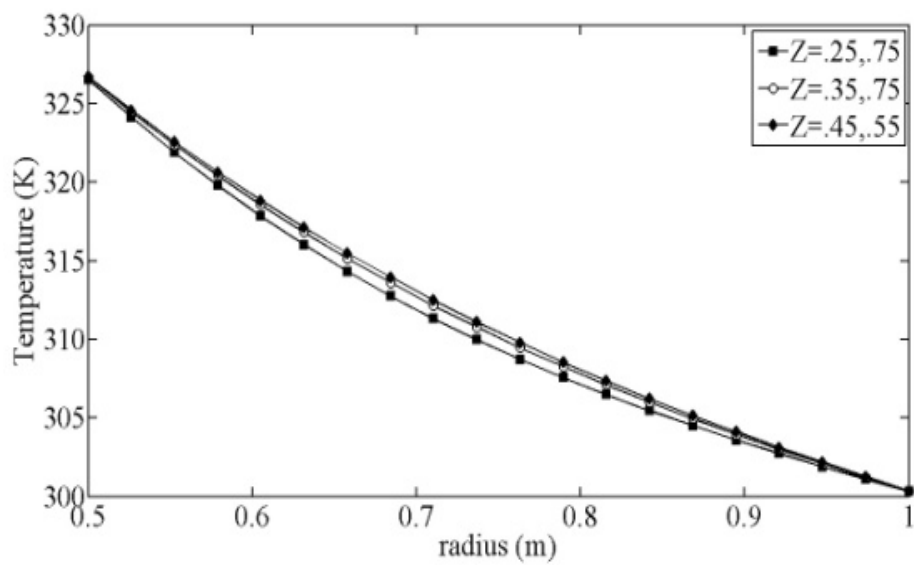
شکل (۲-۴): حداکثر تغییرات دما بر حسب جملات سری در یک لمینیت تک لایه ( $\theta = 90^\circ$ )

شکل (۳-۴) تغییرات توزیع درجه حرارت را به ازاء مقادیر مختلف  $Q$ ، در یک لمینیت یک لایه و با زاوایای الیاف صفر و  $90^\circ$  درجه نشان می دهد.

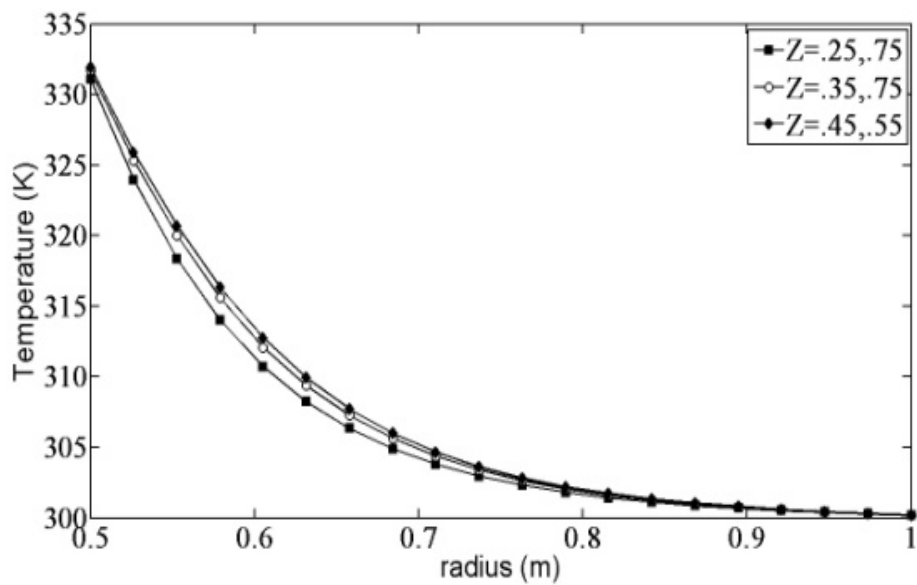


شکل (۱-۳-۴): توزیع دما در لمینیت یک لایه در حالت  $\theta = 0^\circ$  و  $Q = 400 (w/m^2)$

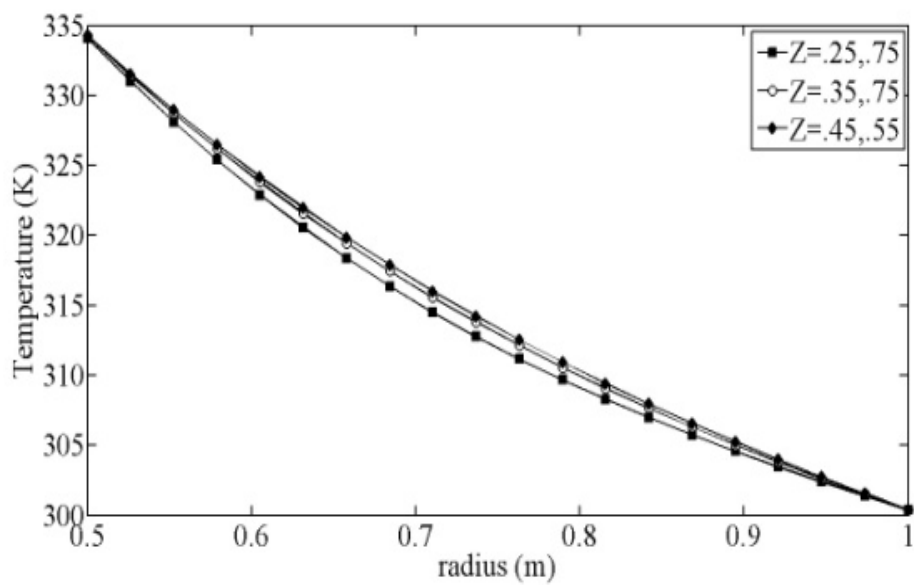




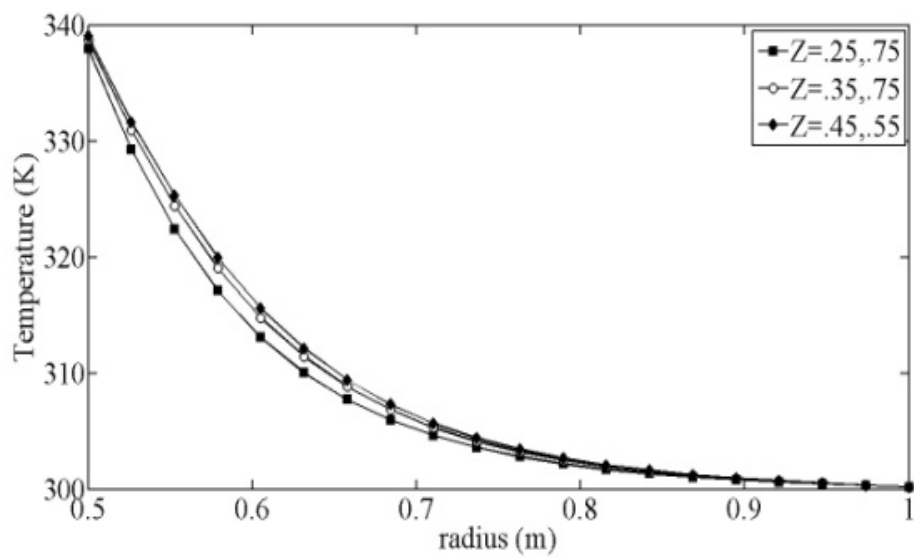
شکل (۲-۳-۴): توزیع دما در لمینیت یک لایه در حالت  $\theta = 90^\circ$  و  $Q = 400 (w/m^2)$



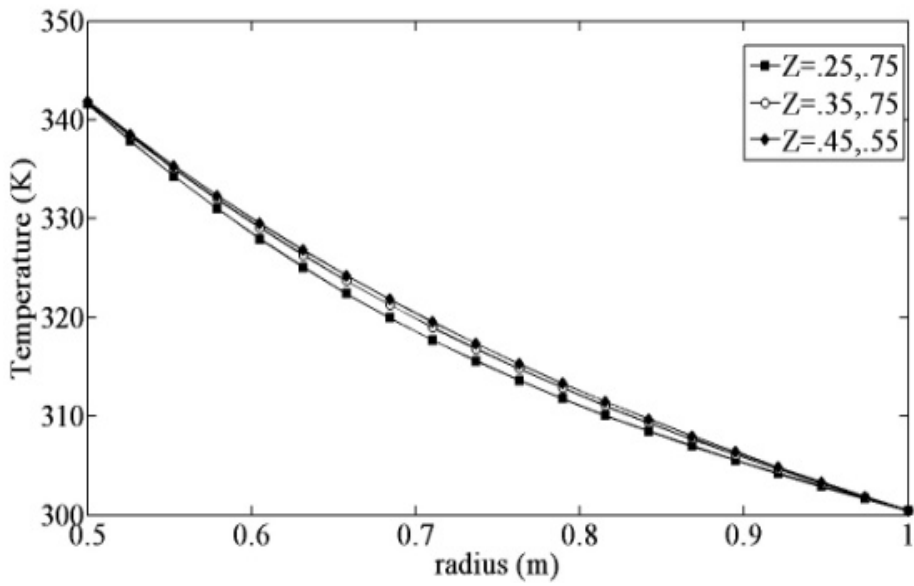
شکل (۳-۳-۴): توزیع دما در لمینیت یک لایه در حالت  $\theta = 0^\circ$  و  $Q = 800 (w/m^2)$



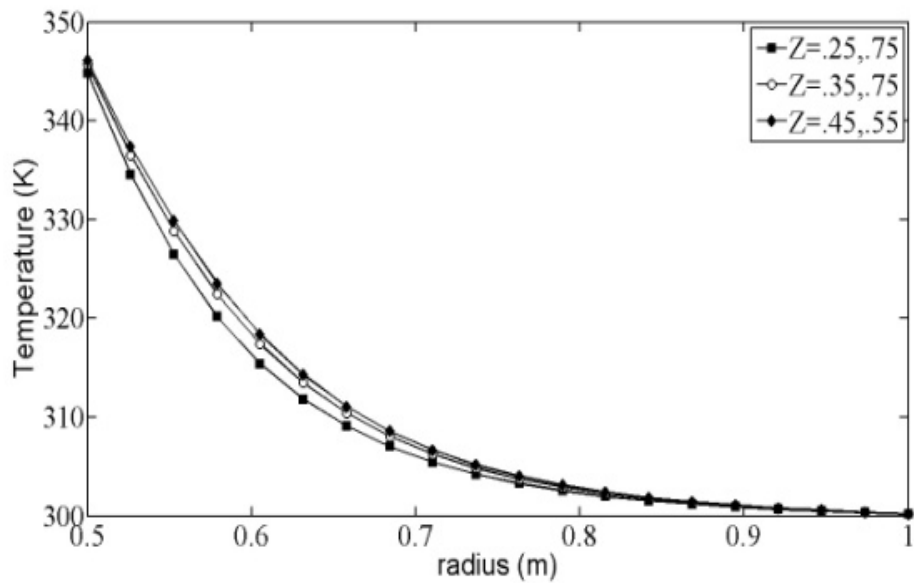
شکل (۴-۳-۴): توزیع دما در لمینیت یک لایه در حالت  $\theta = 90^\circ$  و  $Q = 800 (w/m^2)$



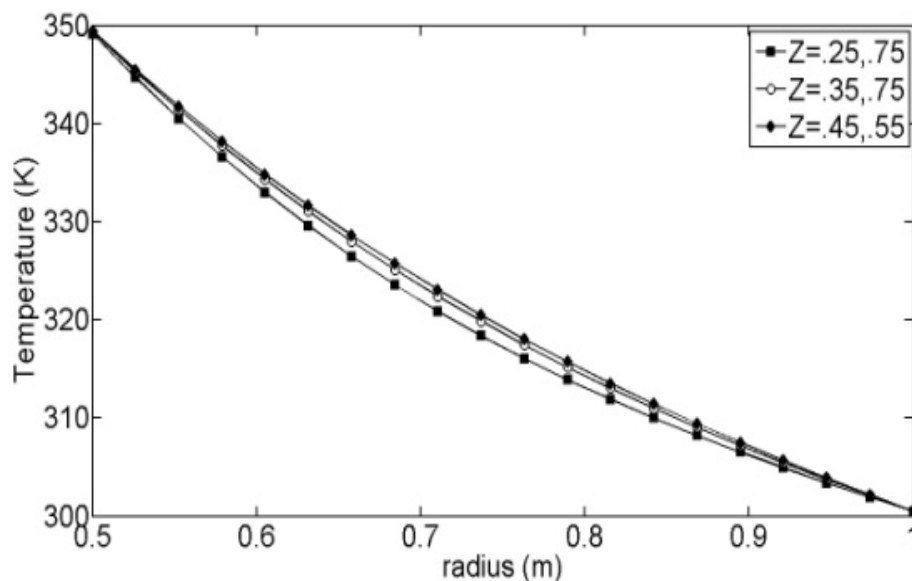
شکل (۵-۳-۴): توزیع دما در لمینیت یک لایه در حالت  $\theta = 0^\circ$  و  $Q = 1200 (w/m^2)$



شکل (۴-۳-۶): توزیع دما در لمینیت یک لایه در حالت  $\theta = 90^\circ$  و  $Q = 1200 (w/m^2)$



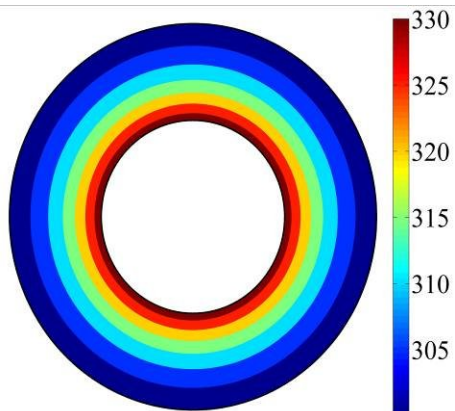
شکل (۴-۳-۷): توزیع دما در لمینیت یک لایه در حالت  $\theta = 0^\circ$  و  $Q = 1600 (w/m^2)$



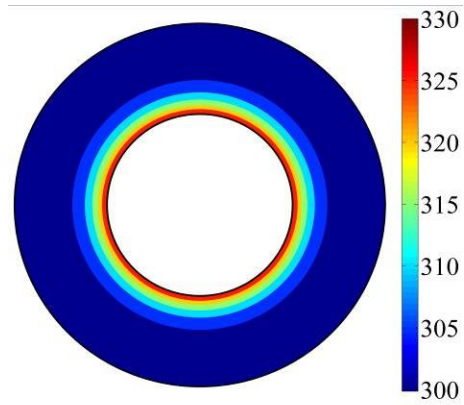
شکل (۴-۳-۸): توزیع دما در لمینیت یک لایه در حالت  $\theta = 90^\circ$  و  $Q = 1600 (w/m^2)$

همچنین شکل های (۴-۴) و (۵-۴) کانتورهای بدست آمده برای توزیع حرارت در دو مقطع مختلف  $z$ ، برای یک لمینیت تک لایه با زاویه الیاف صفر و  $90^\circ$  درجه را نمایش می دهد این کانتورها نیز به ازاء مقادیر مختلف شار حرارت رسم شده اند. با توجه به متقارن بودن شرایط مرزی در جهت  $z$ ، توزیع دما در این راستا متقارن خواهد بود. هنگامی که زاویه الیاف صفر درجه است، راستای الیاف در جهت  $\phi$  قرار می گیرد و در نتیجه توزیع دما مشابه یک استوانه ایزوتروپ با ضریب هدایت  $k_{zz}$  است و یا به عبارتی دیگر  $k_{rr} = k_{zz} = k_{\theta\theta}$ . همانگونه که از این شکل ها بر می آید، با توجه به شرایط مرزی در نظر گرفته شده، ماکزیمم دما در سطح داخلی استوانه رخ می دهد و همچنین هنگامی که زاویه الیاف  $90^\circ$  درجه است، توزیع دما بالاتر از حالتی است که زاویه الیاف صفر است. با توجه به شکل های (۴-۴) و (۵-۴) به وضوح مشاهده می شود که برای زاویه الیاف  $90^\circ$  درجه توزیع دما بسیار یکنواخت تر از حالت صفر درجه است.

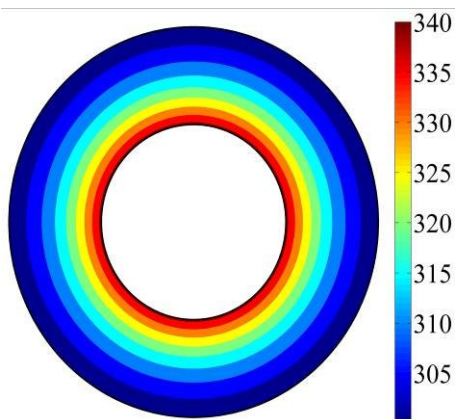
$$Q'' = 800, \theta = 90^\circ$$



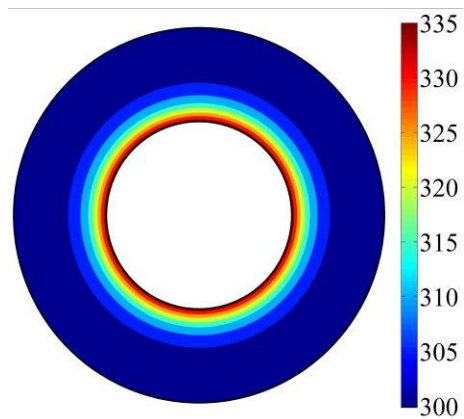
$$Q'' = 800, \theta = 0^\circ$$



$$Q'' = 1200, \theta = 90^\circ$$



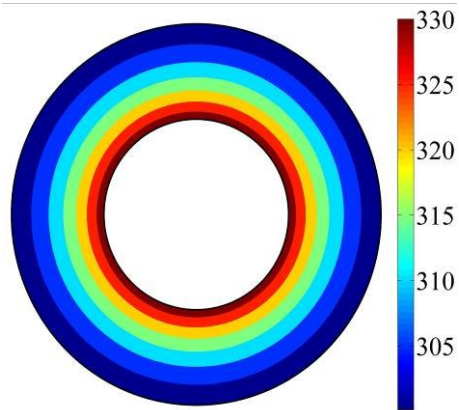
$$Q'' = 1200, \theta = 0^\circ$$



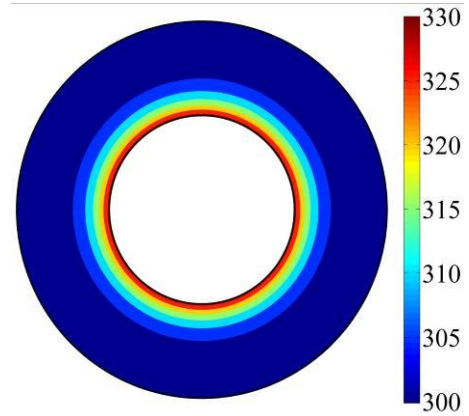
شکل (۴-۴): کانتورهای توزیع دما در یک لمینیت تک لایه برای زوایای الیاف و شارهای حرارتی مختلف در

$$z = 0.3 \text{ (m)}$$

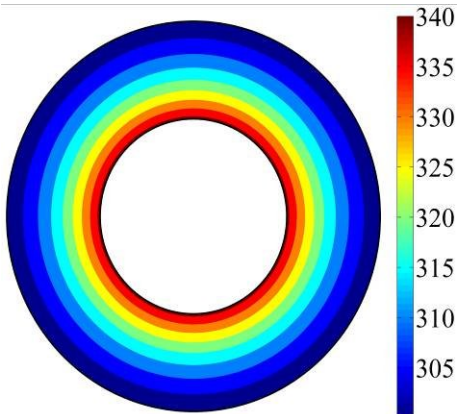
$$Q'' = 800, \theta = 90^\circ$$



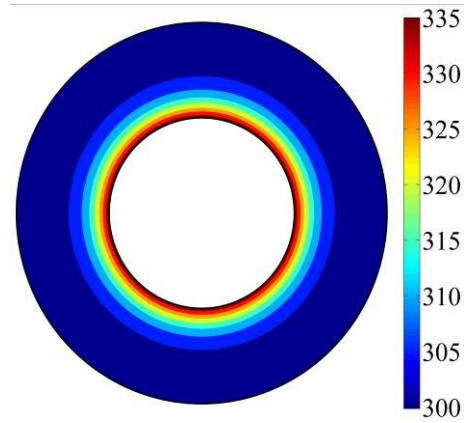
$$Q'' = 800, \theta = 0^\circ$$



$$Q'' = 1200, \theta = 90^\circ$$



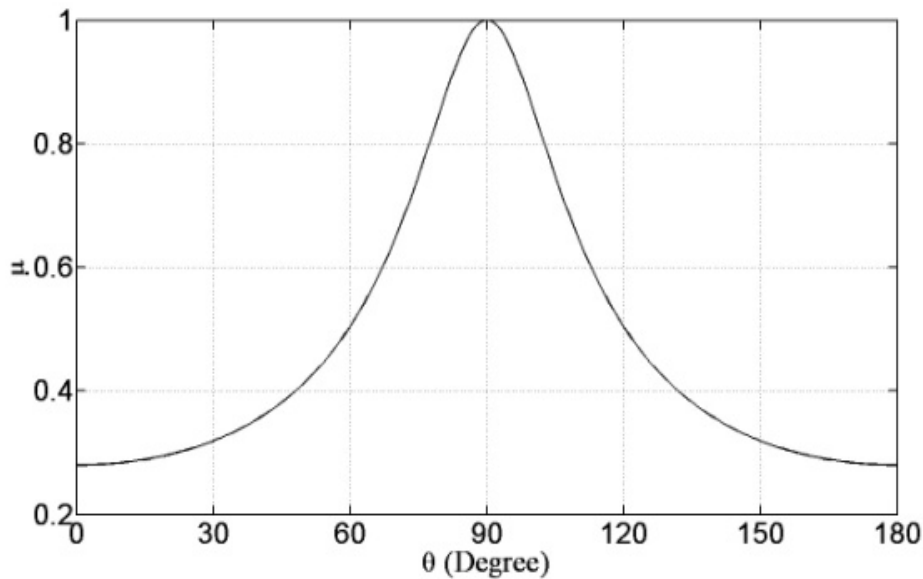
$$Q'' = 1200, \theta = 0^\circ$$



شکل (۴-۵): کانتورهای توزیع دما در یک لمینیت تک لایه برای زوایای الیاف و شارهای حرارتی مختلف در

$$z = 0.4 \text{ (m)}$$

در شکل (6-4) تغییرات ضریب  $\mu$  نسبت به زاویه الیاف نشان داده شده است. ضریب  $\mu$  با رابطه (4-4) تعریف شده است. با توجه به شکل (6-4) این مقادیر نسبت به زاویه ۹۰ متقارن بوده و در این زاویه ماکزیمم هستند.



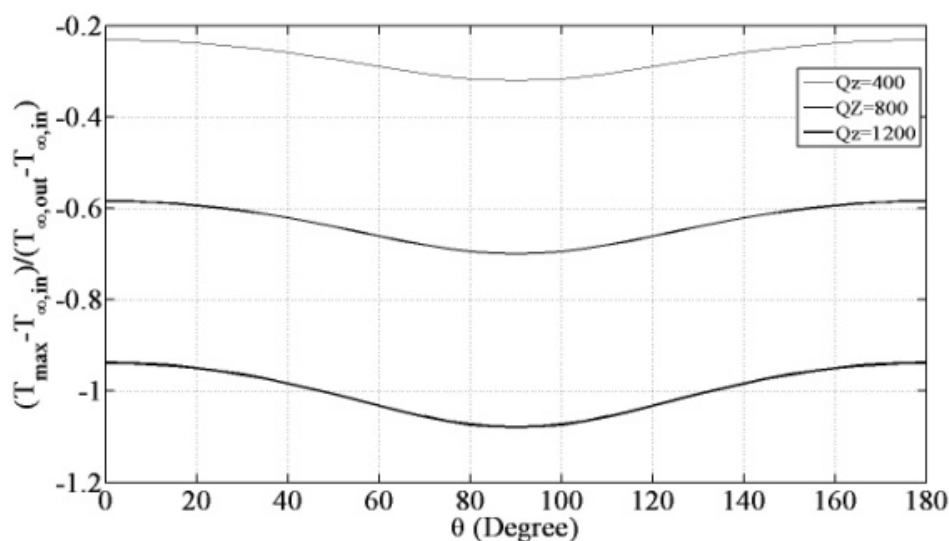
شکل (۶-۴): تغییرات ضریب  $\mu$  بر حسب زاویه الیاف ( $\theta$ )

در این تحقیق برای بررسی اثر تغییر زاویه بر روی دمای لمینیت، پارامتر دمای بی بعد به صورت زیر تعریف شده است

$$T^* = \frac{T - T_{\infty, in}}{T_{\infty, out} - T_{\infty, in}} \quad (۲۷-۴)$$

که  $T_{\infty, out}$  و  $T_{\infty, in}$  به ترتیب دمای محیط در داخل و خارج استوانه هستند. شکل (۷-۴) تغییرات ماکزیمم دمای بی بعد نسبت به زاویه الیاف را نشان می دهد. از آنجا که دمای محیط داخلی استوانه بزرگتر از دمای محیط اطراف در نظر گرفته شده است ( $T_{\infty, out} - T_{\infty, in} < 0$ )، دمای بی بعد منفی است. افزایش زاویه الیاف از صفر تا ۹۰ درجه باعث می شود که ضریب انتقال حرارت در جهت  $r$  کاهش یابد و از طرفی دیگر همانگونه از شکل (۶-۴) بر می آید هنگامی که زاویه الیاف به ۹۰ درجه

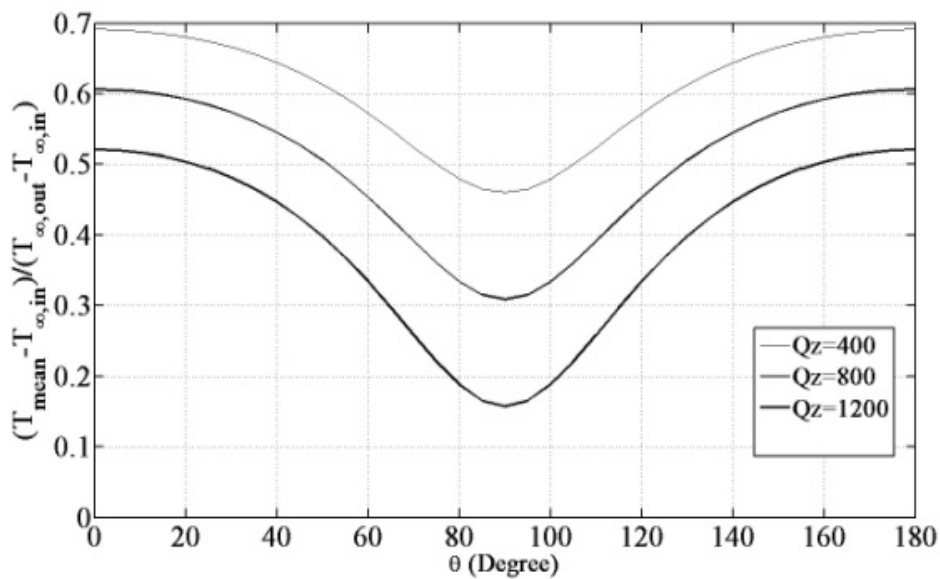
نزدیک می شود مقدار  $\mu$  افزایش می یابد که این امر موجب کاهش گرادیان دما در جهت  $z$  می شود ( معادله ۴-۲)). بنابراین همانگونه که در شکل مشاهده می شود با افزایش زاویه الیاف از صفر تا ۹۰ درجه مقدار ماکزیمم دمای بی بعد افزایش خواهد یافت، به طوری که برای شارهای حرارتی ۴۰۰ ، ۸۰۰ و ۱۲۰۰ به ترتیب افزایش دمای ۱.۷۸۹۱ ، ۲.۳۰۰۲ و ۲.۸۱۱۴ را در لایه ها مشاهده می نماییم.



شکل (۴-۷): ماکزیمم توزیع دمای نسبی بر حسب زاویه الیاف ( $\theta$ ) تحت شارهای حرارتی مختلف

شکل (۴-۸) مقادیر تغییرات دمای نسبی میانگین نسبت به زاویه الیاف را برای شارهای حرارتی ۴۰۰ ، ۸۰۰ و ۱۲۰۰ نشان می دهد. همانطور که از شکل پیداست، در زاویه الیاف ۹۰ مینیمم مقدار دمای نسبی میانگین را داریم و همانند حالت قبل با افزایش زاویه الیاف از صفر تا ۹۰ درجه، مقدار دمای نسبی میانگین افزایش می یابد.

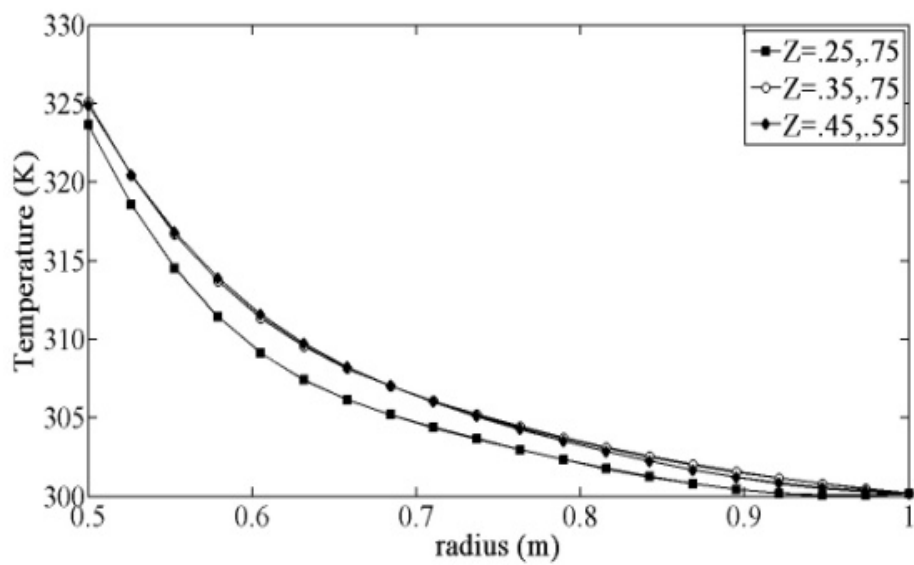




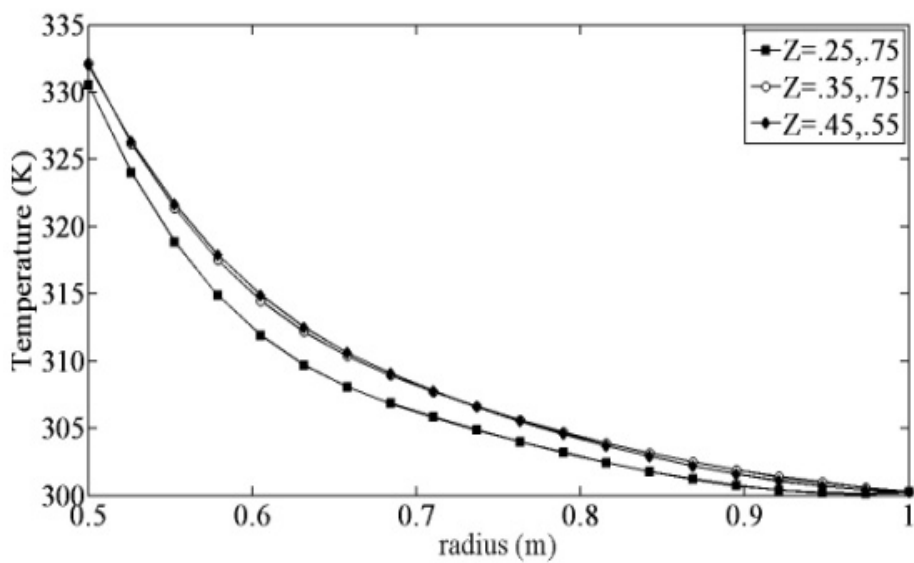
شکل (۴-۸): میانگین توزیع دمای نسبی بر حسب زاویه الیاف تحت شارهای حرارتی مختلف

برای سایر حالت های جهت گیری الیاف در یک لمینیت کامپوزیتی توزیع دما بین حالت هایی است که زاویه بین صفر و ۹۰ درجه است.

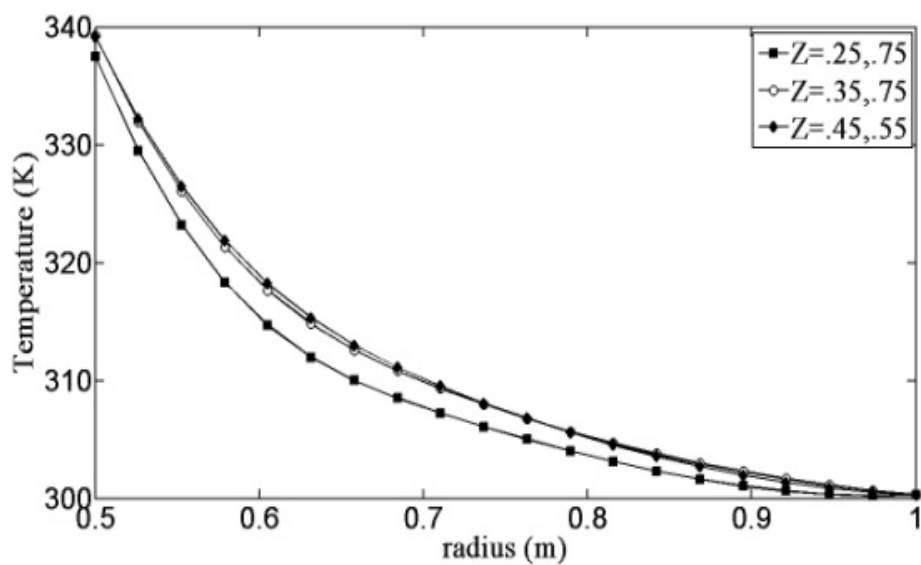
شکل (۴-۹) توزیع درجه حرارت در یک لمینیت کامپوزیتی پنج لایه با آرایش الیاف شبه ایزوتروپ را تحت شارهای حرارتی متفاوت نشان می دهد. قطر داخلی مساوی ۰.۵m و ضخامت لایه ها ۰.۱m در نظر گرفته شده است. شرایط مرزی حرارتی و جنس کامپوزیت مشابه حالت لمینیت تک لایه است. در لمینیت های شبه ایزوتروپ آرایش الیاف به صورت  $[0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ]$  است. با مقایسه بین شکل های (۴-۳) و (۴-۹) مشخص می شود که توزیع دما در این حالت بین حالتی است که زوایای الیاف برای تمام لایه ها صفر و ۹۰ درجه باشد.



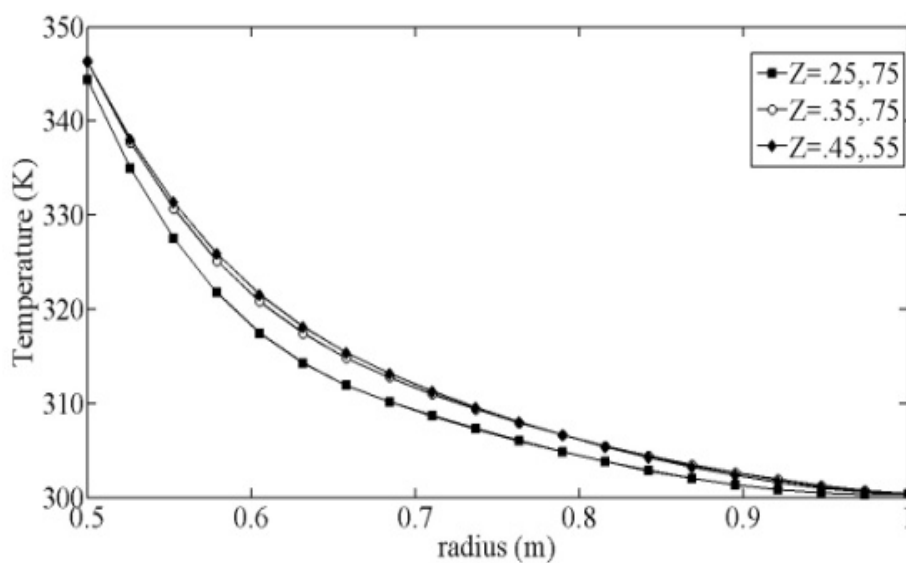
شکل (۴-۹-۱): توزیع دما در لمینیت شبه ایزوتروپ و  $Q = 400 (w/m^2)$



شکل (۴-۹-۲): توزیع دما در لمینیت شبه ایزوتروپ و  $Q = 800 (w/m^2)$



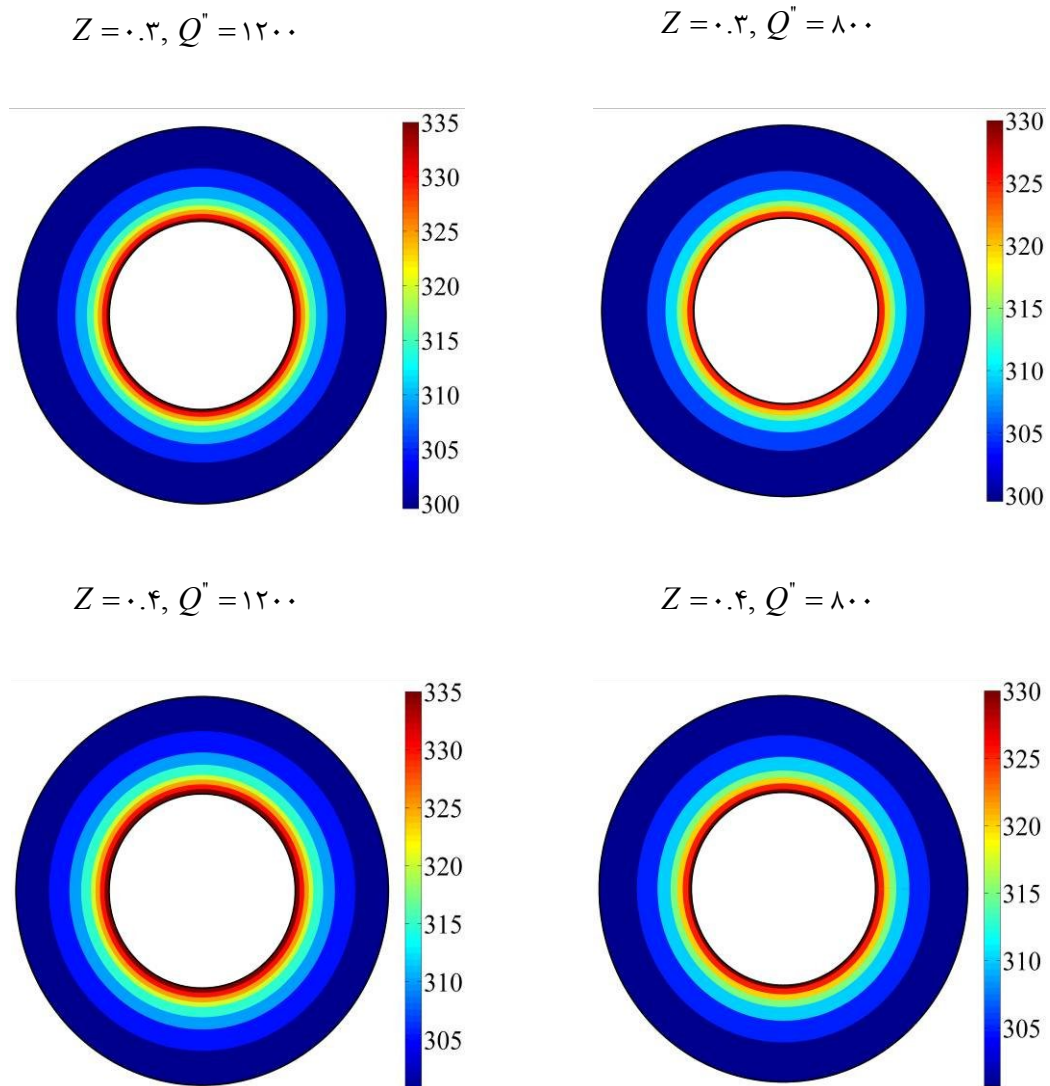
شکل (۳-۹-۴): توزیع دما در لمینیت شبه ایزوتروپ و  $Q = 1200 (w/m^2)$



شکل (۴-۹-۴): توزیع دما در لمینیت شبه ایزوتروپ و  $Q = 1600 (w/m^2)$

همچنین شکل (۴-۱۰) کانتورهای بدست آمده برای توزیع حرارت در دو مقطع مختلف  $z$ ، در یک لمینیت شبه ایزوتروپیک را نمایش می دهد این کانتورها نیز به ازاء مقادیر مختلف شار حرارت رسم

شده اند و همانطور که از مقایسه این شکل با شکل های (۴-۴) و (۵-۴) بر می آید در این حالت توزیع توزیع دما بین حالتی است که زوایای الیاف برای تمام لایه ها صفر و ۹۰ درجه باشد.



شکل (۴-۱۰): کانتورهای توزیع دما در یک لمینیت شبه ایزوتروپیک برای زوایای الیاف و شارهای حرارتی مختلف

شکل (۴-۱۱) و (۴-۱۱-۲) مقادیر ضرایب سری توزیع درجه حرارت (معادله ۶-۲۴) را بر حسب تعداد جملات سری نشان می دهد که از روابط (۴-۲۰) استخراج شده اند. از آنجایی که به ازاء  $n$  های فرد ضرائب  $a_n$  و  $b_n$  صفر هستند، لذا نمودارها برای  $n/2$  نشان داده شده اند. با توجه به نمودار

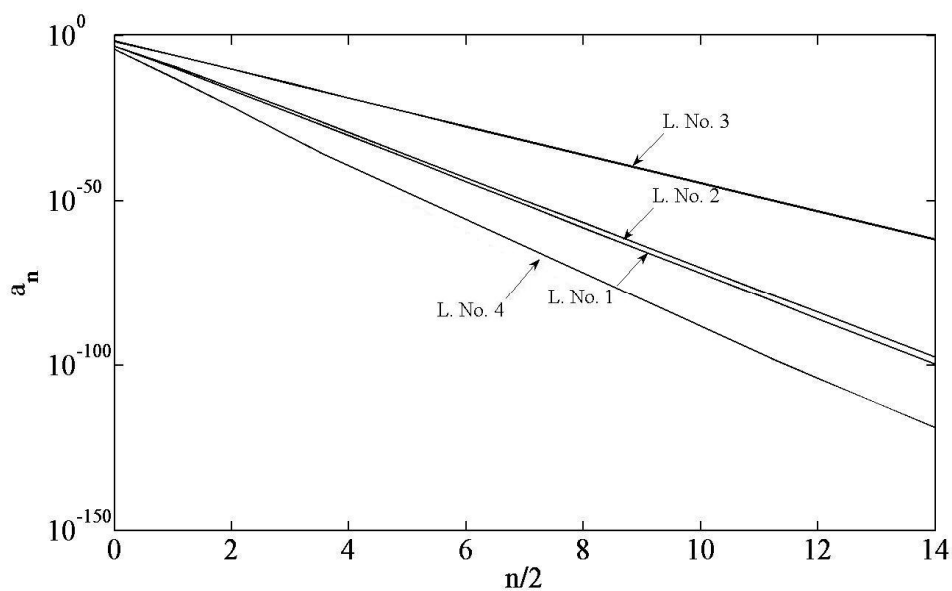
(۴-۱۱-۱) مقادیر  $a_n$  بسیار کوچک هستند و با شیب تند نسبت به افزایش تعداد جملات کاهش می

یابند زیرا با توجه به معادله (۶-۲۴)،  $a_n$  ضریب عبارت  $I_0 \left( \frac{\lambda_n r_i}{\mu_i} \right)$  است که مقادیر آن با افزایش تعداد

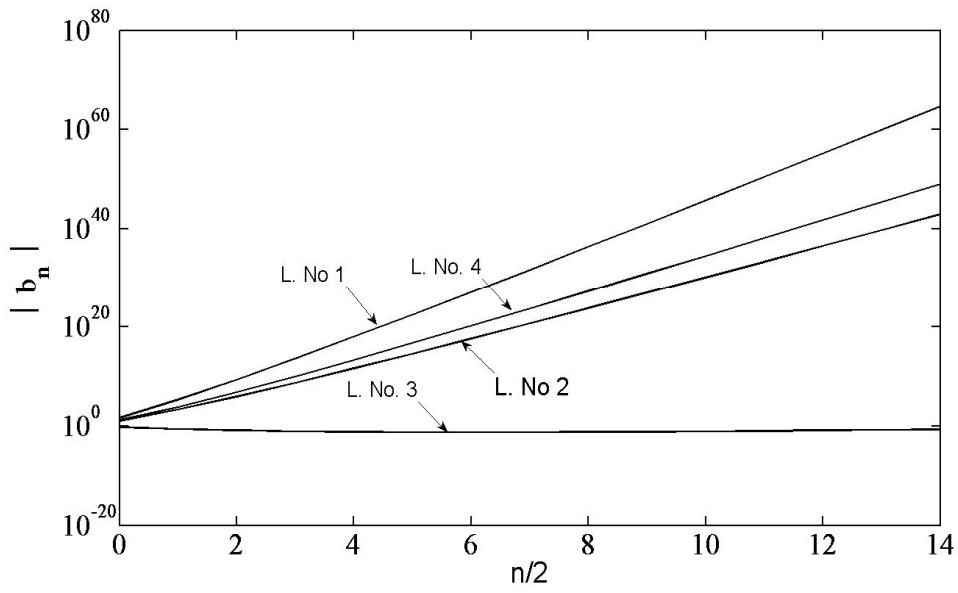
جملات به شدت افزایش می یابد، شکل (۴-۱۱-۳)، بنابراین برای حفظ همگرایی سری مقادیر  $a_n$

بایستی بسیار کوچک باشد و برعکس با توجه به کوچک شدن شدید تابع  $k_0 \left( \frac{\lambda_n r_i}{\mu_i} \right)$  با افزایش

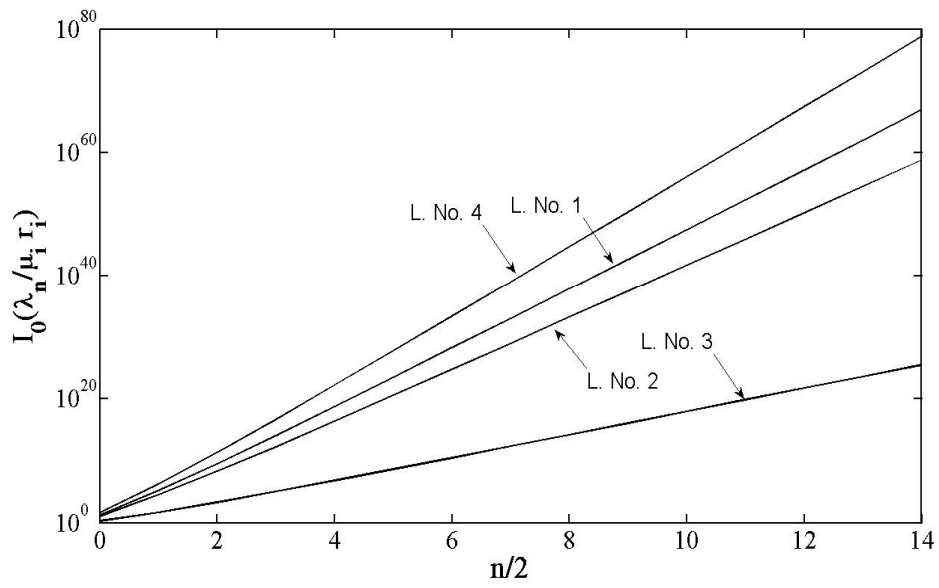
مقادیر  $n$ ، شکل (۴-۱۱-۲)،  $b_n$  سریعاً افزایش می یابد، شکل (۴-۱۱-۴).



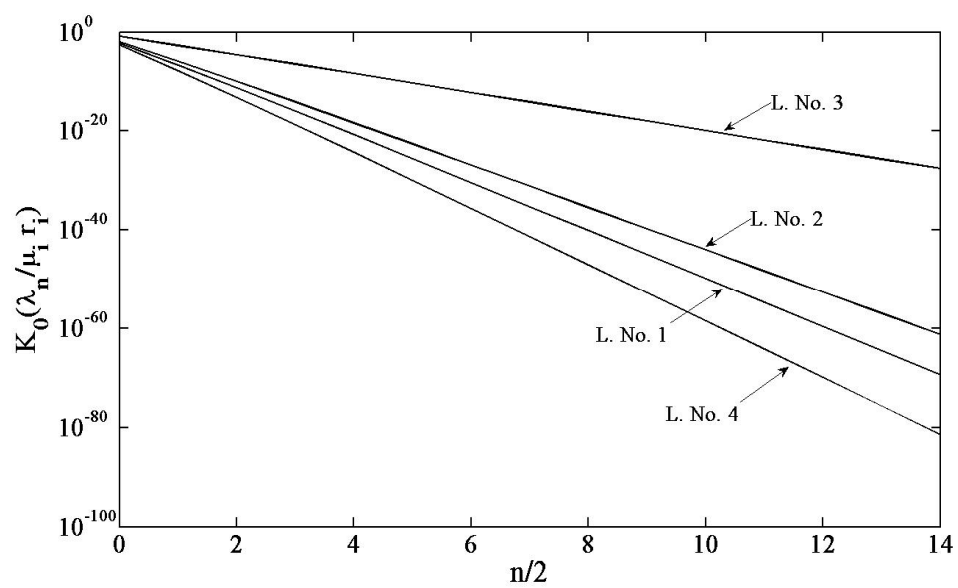
شکل (۴-۱۱-۱): توزیع جمله  $a_n$  سری فوریه بر حسب  $n/2$  در لمینیت استوانه ای شبه ایزوتروپ



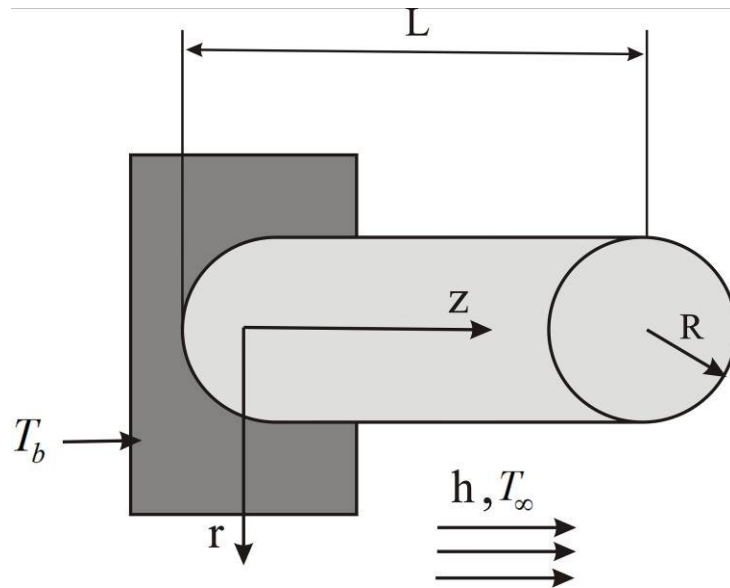
شکل (۴-۱۱-۲): توزیع جمله  $b_n$  سری فوریه بر حسب  $n/2$  در لمینیت استوانه ای شبه ایزوتروپ



شکل (۴-۱۱-۳): توزیع جمله  $I_0\left(\frac{\lambda_n}{\mu_i}, r_i\right)$  بر حسب  $n/2$  در لمینیت استوانه ای شبه ایزوتروپ



شکل (۴-۱۱-۴): توزیع جمله  $K_0\left(\frac{\lambda_n}{\mu_i}\right)$  بر حسب  $n/2$  در لمینیت استوانه ای شبه ایزوتروپ



شکل (۴-۱۲): هندسه و مشخصات بکار رفته برای پره

در این مثال، انتقال حرارت در یک پین فین پنج لایه (استوانه توپر) برای آرایش های الیاف مختلف بررسی گردیده است. شکل (۴-۱۲) هندسه این پین فین را نشان می دهد. مشخصات فیزیکی و محیطی در جدول (۴-۴) نشان داده شده است. ما همچنین از گرافیت-اپوکسی با مشخصات داده شده در جدول (۴-۱) به عنوان ماده کامپوزیت استفاده کرده ایم و نوک پره عایق در نظر گرفته شده است.



۱	قطر خارجی (cm)
۱۰	طول پره (cm)
۰.۱	ضخامت لایه ها (cm)
۳۲۰	دمای محیط (k)
۳۷۰	دمای پایه (k)
۱۰۰	ضریب جابجایی ( $w/m^2k$ )

### توزیع دما

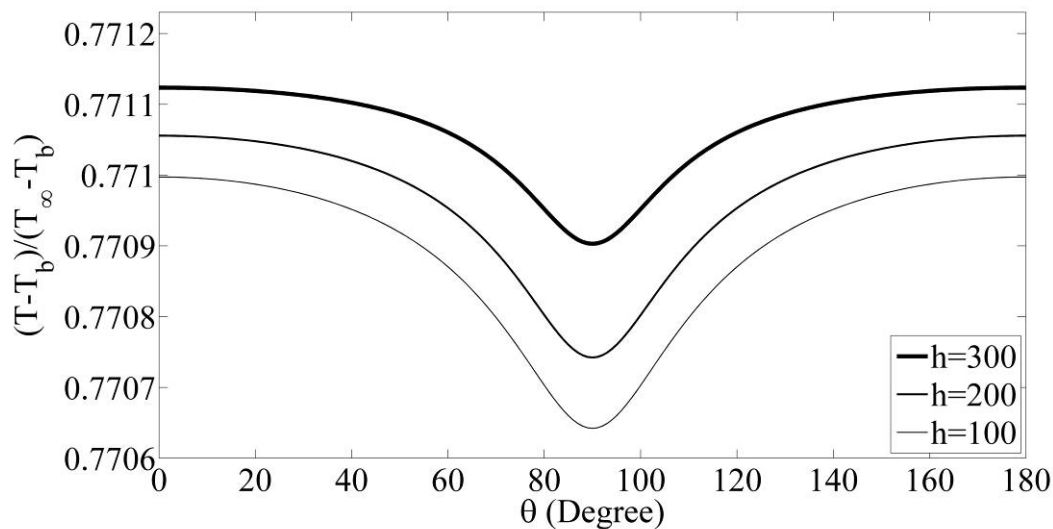
به منظور بررسی اثر تغییرات زاویه الیاف روی توزیع درجه حرارت، یک لمینیت یک لایه به کار گرفته شده است. دمای بی بعد به صورت زیر تعریف شده است

$$T^* = \frac{T - T_b}{T_\infty - T_b} \quad (۲۸-۴)$$

که در آن  $T_b$  دمای پایه و  $T_\infty$  دمای محیط است. شکل (۴-۱۳) تغییرات دمای میانگین بی بعد بر حسب زاویه الیاف برای مقادیر مختلف ضریب جابجایی  $h$  در یک لمینا را نشان می دهد. هنگامی که زاویه الیاف به ۹۰ درجه نزدیک می شود، مقدار  $\mu$  افزایش می یابد و مطابق معادله (۴-۲)، افزایش  $\mu$  باعث کاهش اثر گرادیان دما در جهت  $z$  می شود. در نتیجه همانگونه که در شکل (۴-۱۳) نشان داده شده است، با افزایش زاویه الیاف از صفر تا ۹۰ درجه دمای میانگین بی بعد کاهش خواهد یافت. هنگامی که زاویه الیاف ۹۰ درجه است، الیاف در جهت  $z$  قرار می گیرند و انتقال حرارت شبیه انتقال حرارت در یک استوانه ایزوتروپیک با ضریب انتقال حرارت  $k_{22}$  خواهد بود بنابراین ما می توانیم این حالت را به عنوان نتایج حل ایزوتروپیک در نظر بگیریم. دو حالت معمول آرایش الیاف کراس پلای<sup>۱</sup>

<sup>۱</sup> . Cross-ply

$[0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ]$  و شبه ایزوتروپیک<sup>۱</sup> برای این مثال مورد بررسی قرار گرفته است. همانگونه که در این اشکال خواهید دید، هنگامی که زاویه الیاف در تمامی لایه ها مساوی صفر و ۹۰ درجه است، به ترتیب بیشترین و کمترین نرخ انتقال حرارت را داریم. برای سایر آرایش الیاف (برای مثال شبه ایزوتروپیک و کراس پلائی) نرخ انتقال حرارت بین دو حالت قبلی قرار دارد.



شکل (۴-۱۳): دمای بی بعد میانگین بر حسب زاویه الیاف تحت ضرایب جابجایی مختلف

### ضریب جابجایی گرمایی

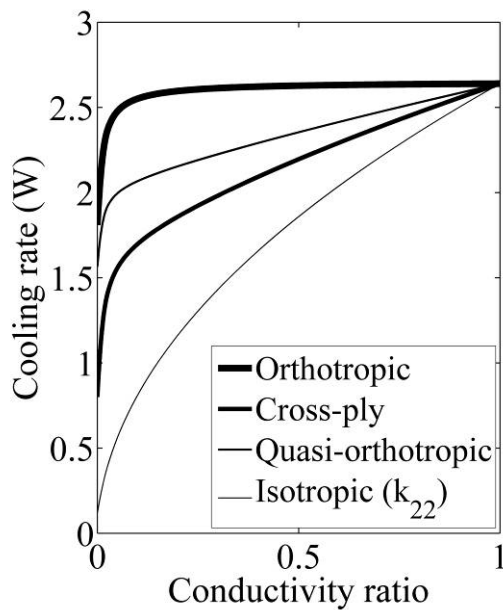
در شکل (۴-۱۴-۱) اثر تغییرات ضریب جابجایی  $h$  روی نرخ انتقال حرارت بین فین بررسی شده است. همانگونه که می بینید نرخ انتقال حرارت با افزایش ضریب جابجایی افزایش می یابد. در حالت کلی می توان گفت که تغییرات انتقال حرارت بین فین بر حسب ضریب جابجایی به آرایش الیاف در

<sup>۱</sup>. Quasi-isotropic

لایه بیرونی بستگی دارد، همانگونه که در شکل (۴-۱۴-۱) مشاهده می کنید، الگوی تغییرات نرخ انتقال برای دو آرایش  $[0^\circ, 0^\circ, 0^\circ, 0^\circ, 0^\circ]$  و  $[0^\circ, 90^\circ, 0^\circ, 90^\circ, 0^\circ]$  مشابه است.

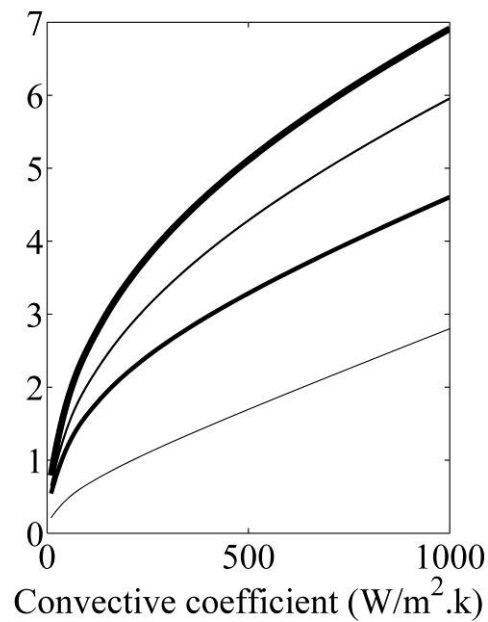
### نسبت هدایت

در شکل (۴-۱۴-۲) اثر تغییرات نسبت گرمایی ( $K^* = K_{11}/K_{rr}$ ) روی نرخ انتقال حرارت بین فین بررسی شده است. ماده و هندسه بکار گرفته شده همانند قسمت قبلی است. این شکل برای چهار حالت مختلف آرایش الیاف رسم گردیده است. همانگونه که از شکل (۴-۱۴-۲) بر می آید، افزایش  $K^*$  باعث افزایش نرخ انتقال حرارت می شود و این افزایش هنگامی که به آرایش  $[0^\circ, 0^\circ, 0^\circ, 0^\circ, 0^\circ]$  نزدیک می شویم، شدید تر است.



(۴-۱۴-۲): نرخ سرد شدن بر حسب تغییرات نسبت

هدایت برای آرایش الیاف مختلف



(۴-۱۴-۱): نرخ سرد شدن بر حسب تغییرات ضریب

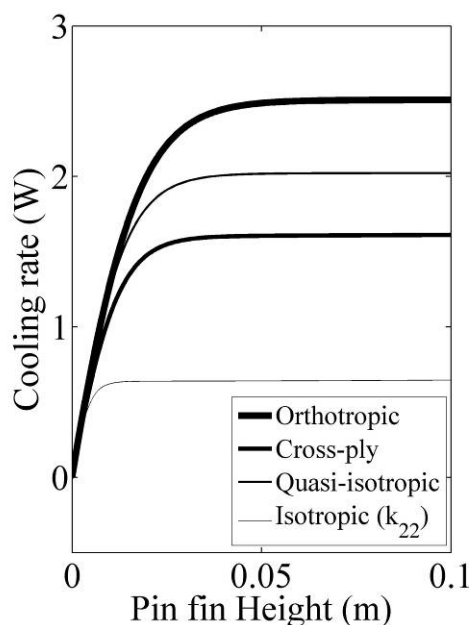
جابجایی برای آرایش الیاف مختلف

## قطر پره

اثر تغییرات قطر پره بر نرخ انتقال حرارت برای آرایش های مختلف الیاف در لمینیت ها در شکل (۴-۱۵) نشان داده شده است. همانگونه که مشاهده می کنید در حالت اورتوتروپیک بیشترین تغییرات نرخ انتقال حرارت را مشاهده می نماییم.

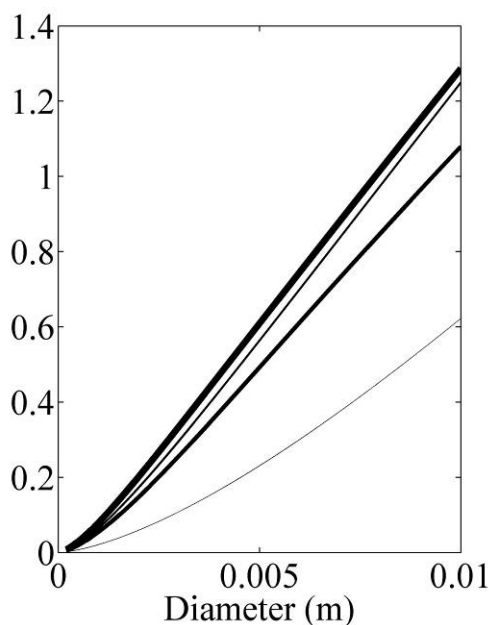
## ارتفاع پره

اثر تغییرات ارتفاع پره بر نرخ انتقال حرارت برای آرایش های مختلف الیاف در لمینیت ها در شکل (۴-۱۵-۲) نشان داده شده است. این شکل نشان می دهد هنگامی که زاویه الیاف در همه لمینا ها مساوی صفر درجه است تغییرات ارتفاع بیشترین تاثیر را دارد. علاوه بر این برای حالت ایزوتروپیک [۰°, ۹۰°, ۰°, ۹۰°, ۰°] هنگامی که ارتفاع پره بیشتر از ۰.۴ متر است و برای این هندسه و شرایط مرزی قابل صرف نظر است.



(۴-۱۵-۲): نرخ سرد شدن بر حسب تغییرات ارتفاع پین

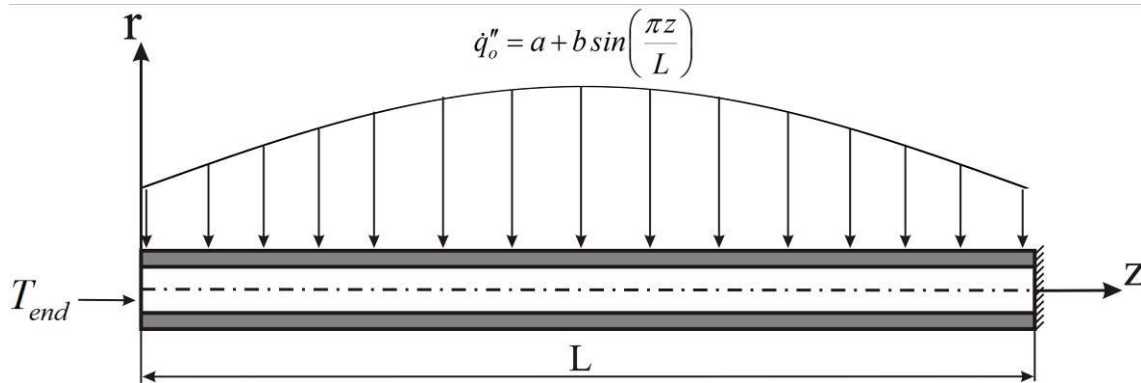
برای آرایش الیاف مختلف



(۴-۱۵-۱): نرخ سرد شدن بر حسب تغییرات قطر پین

برای آرایش الیاف مختلف

### ۳-۳-۴: لوله خنک کن راکتور هسته ای



شکل (۴-۱۶): هندسه ومختصات بکار رفته برای لوله خنک کن راکتور هسته ای

شار حرارتی در طول یک لوله خنک کن یک راکتور هسته ای را می توان با رابطه زیر تقریب گرفت. [Kays and Marrow]

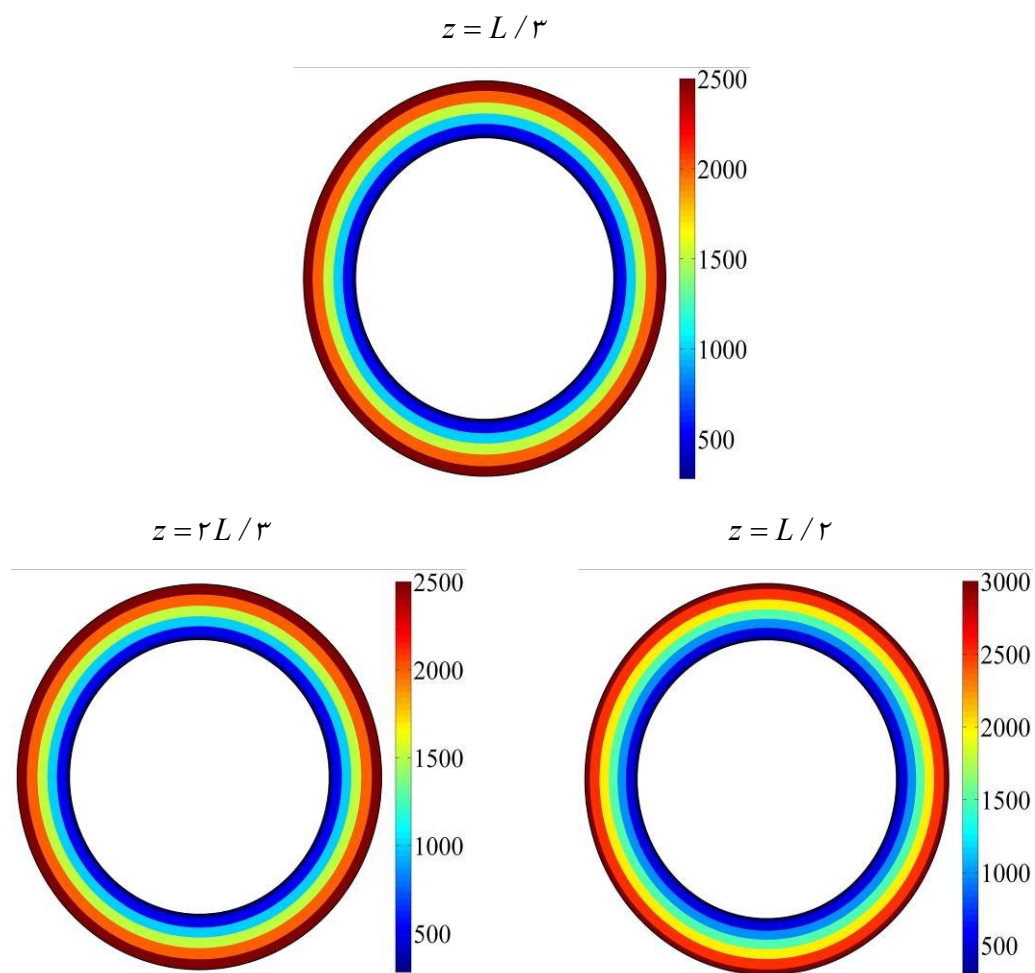
$$\dot{q}''_o = a + b \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) \quad (۴-۲۹)$$

که در آن  $L$  طول لوله و  $x$  فاصله در امتداد لوله است. در اینجا ما فرض کرده ایم که از یک لوله کامپوزیتی چهار لایه از جنس گرافیت اپوکسی برای این منظور استفاده شده است. راکتور نیز با هوا خنک می گردد، مشخصات لوله به کار رفته در جدول (۴-۵) نشان داده شده است. شکل (۴-۱۶) هندسه و شرایط مرزی لوله را نشان می دهد. شار حرارتی وارده مطابق رابطه بالا که در آن  $a = 900 \text{ W/m}^2$  و  $b = 2500 \text{ W/m}^2$  است تغییر خواهد کرد. دمای ابتدا لوله ثابت در نظر گرفته شده است و انتهای آن عایق است. در داخل لوله نیز شرط مرزی جابجایی برقرار است.

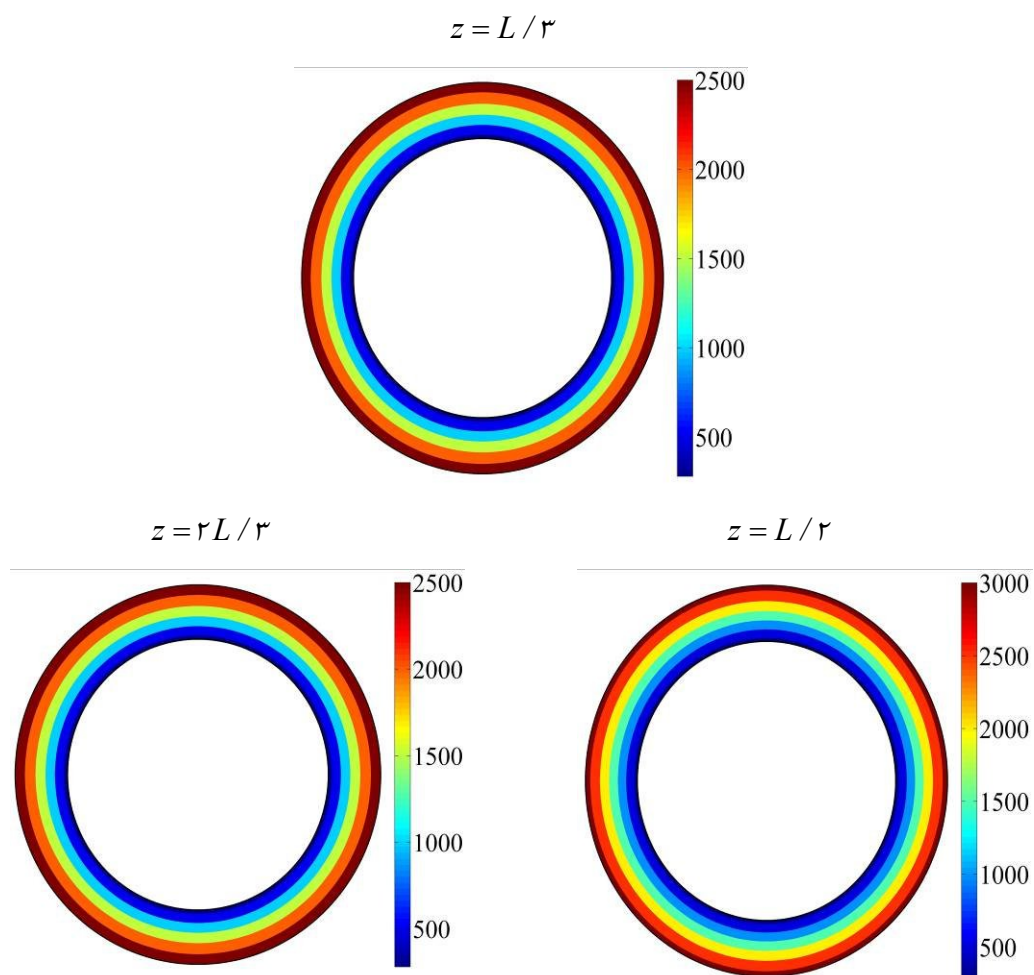
جدول (۴-۵): هندسه و شرایط مرزی لوله خنک کن راکتور

۳	قطر خارجی (cm)
۱.۲۲	طول لوله (m)
۰.۳	ضخامت لایه ها (cm)
۲۵۰	دمای محیط (°C)
۲۸۰	دمای میانگین داخلی (°C)
۱۰۰	دمای انتهایی لوله (°C)
۵۰	ضریب جابجایی ( $w/m^2k$ )

در شکل (۴-۱۷) کانتورهای توزیع دما پایدار در جهت شعاعی در مقاطع طولی مختلف نشان داده شده است.

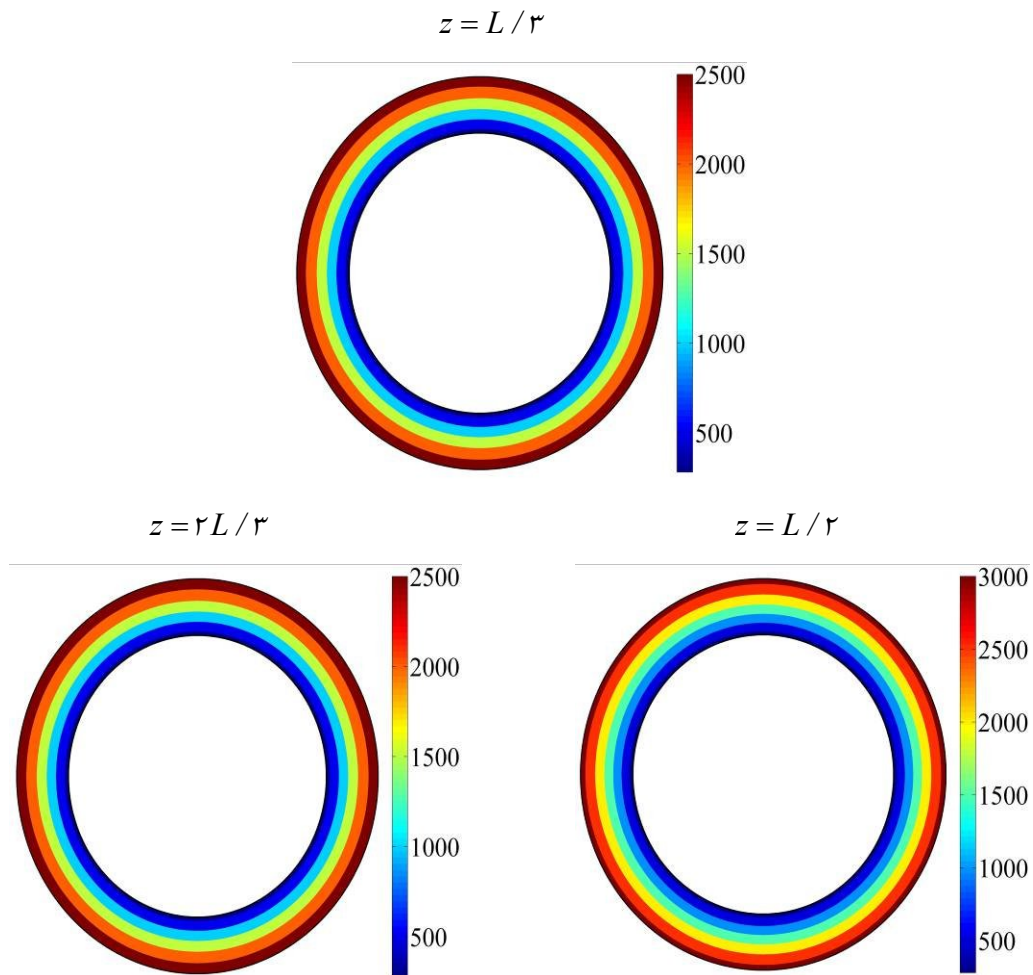


شکل (۴-۱۷-۱): کانتورهای توزیع دما پایدار در جهت شعاعی برای لمینیت ایزوتروپیک در مقاطع طولی مختلف

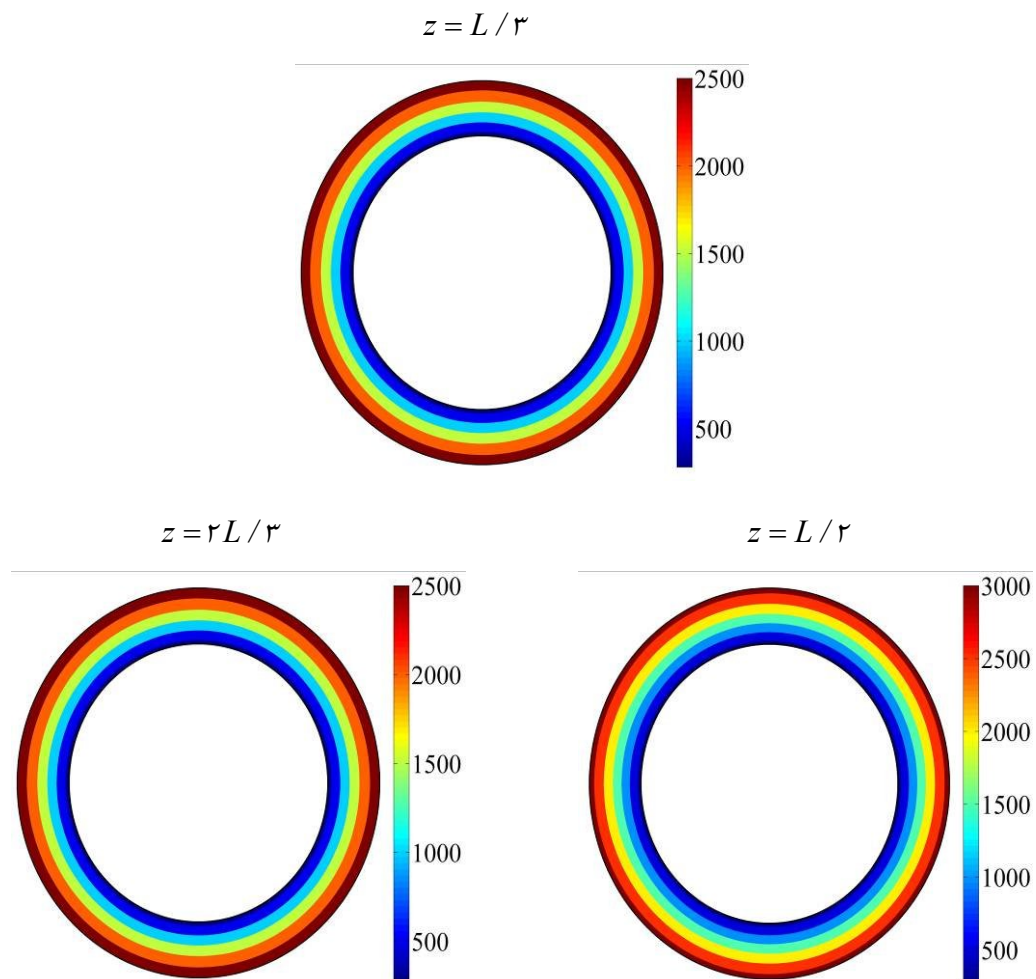


شکل (۴-۱۷-۲): کانتورهای توزیع دما پایدار در جهت شعاعی برای لمینیت اورتوتروپیک در مقاطع طولی مختلف





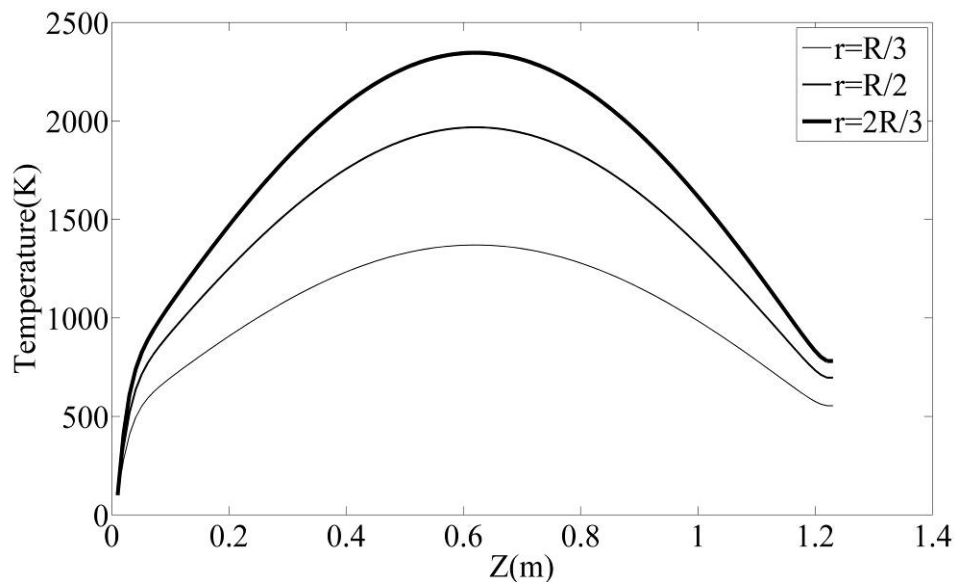
شکل (۴-۱۷-۳): کانتورهای توزیع دما پایدار در جهت شعاعی برای لمینیت کراس پلای در مقاطع طولی مختلف



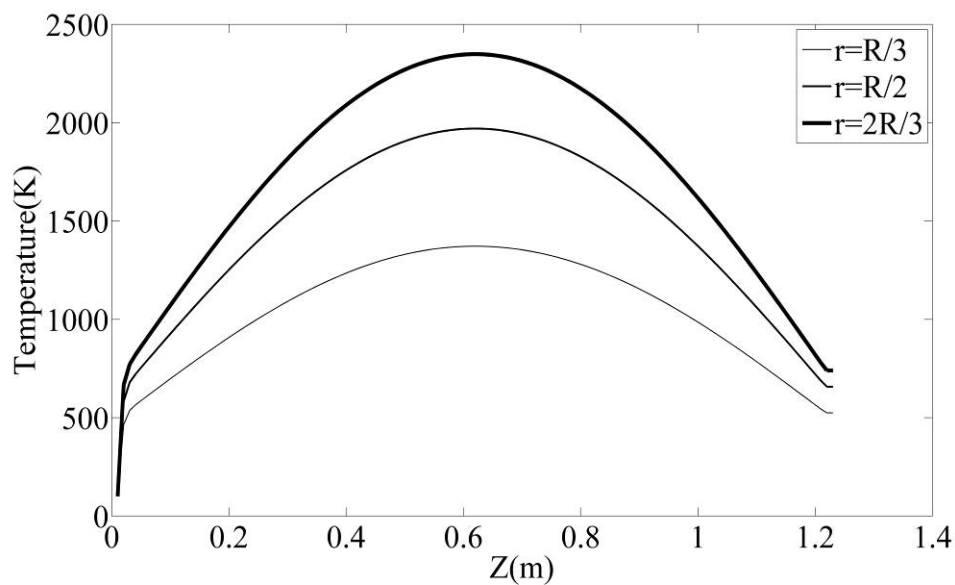
شکل (۴-۱۷-۴): کانتورهای توزیع دما پایدار در جهت شعاعی برای لمینیت شبه ایزوتروپیک در مقاطع طولی

مختلف

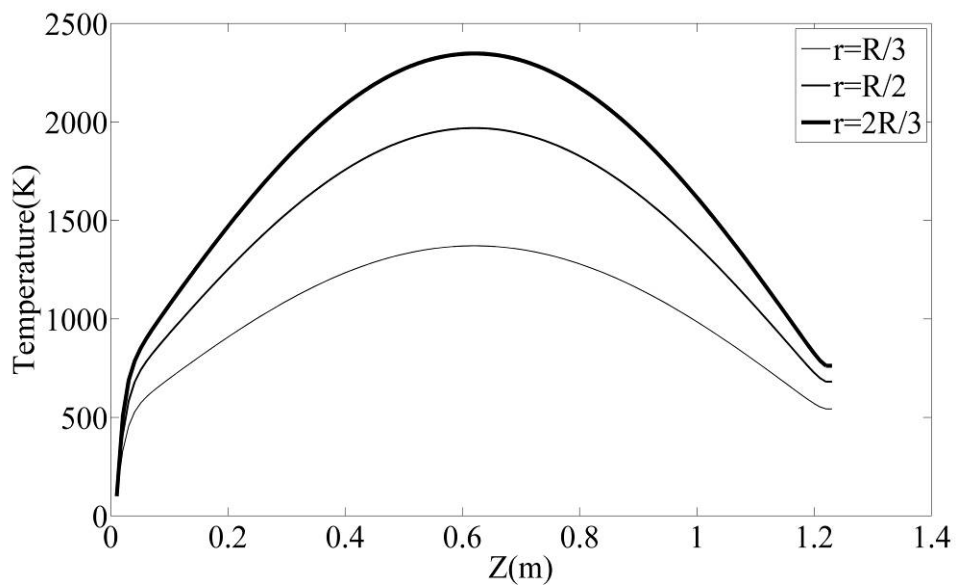
در شکل (۴-۱۸) کانتورهای توزیع دما پایدار در جهت طولی و در مقاطع شعاعی مختلف نشان داده شده است.



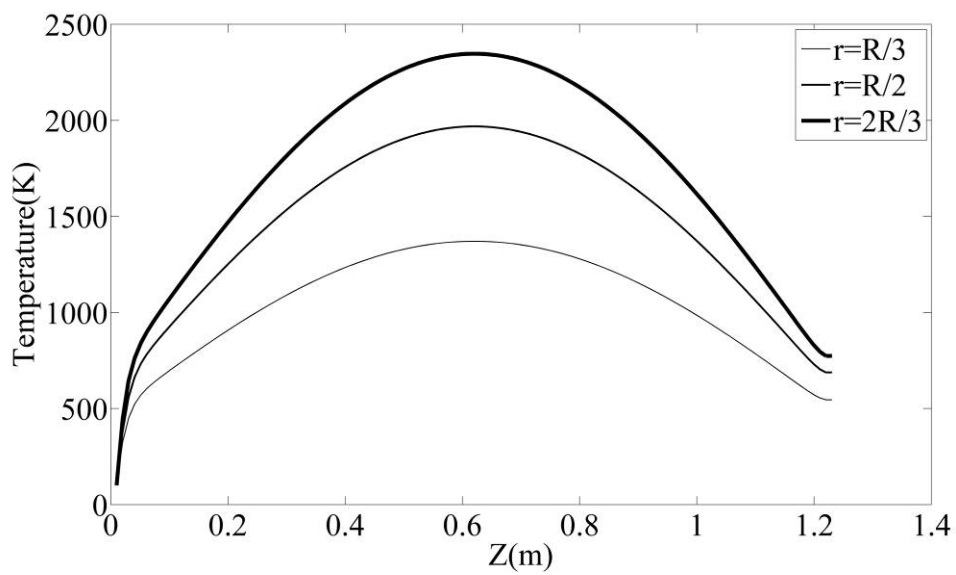
شکل (۴-۱۸-۱): نمودارهای توزیع دما پایدار در جهت طولی برای لمینیت ایزوتروپیک در مقاطع شعاعی مختلف



شکل (۴-۱۸-۲): نمودارهای توزیع دما پایدار در جهت طولی برای لمینیت اورتوتروپیک در مقاطع شعاعی مختلف



شکل (۴-۱۸-۳): نمودارهای توزیع دما پایدار در جهت طولی برای لمینیت کراس پلای در مقاطع شعاعی مختلف



شکل (۴-۱۸-۴): نمودارهای توزیع دما پایدار در جهت طولی برای لمینیت شبه ایزوتروپیک در مقاطع شعاعی

مختلف

فصل پنجم  
بررسی انتقال حرارت غیر دائم در  
مواد مرکب

## ۵-۱- مقدمه

در این فصل با استفاده از تبدیل لاپلاس پاسخی برای انتقال حرارت دو بعدی در جهات  $(r, z)$  در لمینیت استوانه ای در شرایط غیردائمی ارائه شده است. این حل دقیق برای شرایط مرزی کلی ارائه شده است. در ادامه با استفاده از یک مثال کاربرد و نتایج کار انجام شده نشان داده شده است.

## ۵-۲- حل تحلیلی برای شرایط مرزی کلی

برای این منظور با استفاده از تغییر متغیر  $\theta(r, \phi, t) = T(r, \phi, t) - T_i$  معادله انتقال حرارت (رابطه ۳-۲۴) به شکل زیر در آمده است.

$$\alpha_r \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \alpha_r \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \alpha_z \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (۱-۵)$$

که در آن مقادیر  $\alpha_r$  و  $\alpha_z$  عبارتند از

$$\alpha_r = \frac{k_{22}}{\rho c_p} \quad (۲-۵)$$

$$\alpha_{z,i} = \frac{n_i^2 k_{11} + m_i^2 k_{22}}{\rho c_p} \quad (۳-۵)$$

همچنین بر اساس این تغییر متغیر شرط اولیه و شرایط مرزی کلی مساله به صورت زیر در می آید

$$\theta^{(i)}(r, z, 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n_i \quad (۱-۴-۵)$$

$$a_1 \theta(r, 0, t) + b_1 \frac{\partial \theta(r, 0, t)}{\partial z} = f_1(r, t) \quad (۲-۴-۵)$$

$$a_2 \theta(r, L, t) + b_2 \frac{\partial \theta(r, L, t)}{\partial z} = f_2(r, t) \quad (۳-۴-۵)$$

$$c_1 \theta(r_m, z, t) + d_1 \frac{\partial \theta(r_m, z, t)}{\partial r} = g_1(z, t) \quad (۴-۴-۵)$$

$$c_2 \theta(r_{out}, z, t) + d_2 \frac{\partial \theta(r_{out}, z, t)}{\partial r} = g_2(z, t). \quad (5-4-5)$$

در این تحقیق از تبدیل لاپلاس برای انتقال معادله انتقال حرارت از حوزه زمان ( $t$ ) به حوزه فرکانس ( $s$ ) استفاده شده است

$$L\{\theta(r, z, t)\} = \bar{\theta}(r, z, s) \quad (5-5)$$

بنابراین با اعمال تبدیل لاپلاس به معادله (5-1) و همچنین اعمال شرط اولیه در آن معادله انرژی در حوزه فرکانس بدست می آید

$$\alpha_r \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial r^2} + \alpha_r \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial r} + \alpha_{z,i} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial z^2} - s \bar{\theta} = 0. \quad (6-5)$$

شرایط مرزی به صورت زیر تغییر خواهد نمود:

$$a_1 \bar{\theta}(r, 0, s) + b_1 \frac{\partial \bar{\theta}(r, 0, s)}{\partial z} = \bar{f}_1(r, s). \quad (1-7-5)$$

$$a_2 \bar{\theta}(r, L, s) + b_2 \frac{\partial \bar{\theta}(r, L, s)}{\partial z} = \bar{f}_2(r, s). \quad (2-7-5)$$

$$c_1 \bar{\theta}(r_{in}, z, s) + d_1 \frac{\partial \bar{\theta}(r_{in}, z, s)}{\partial r} = \bar{g}_1(z, s). \quad (3-7-5)$$

$$c_2 \bar{\theta}(r_{out}, z, s) + d_2 \frac{\partial \bar{\theta}(r_{out}, z, s)}{\partial r} = \bar{g}_2(z, s). \quad (4-7-5)$$

که در آن

$$\bar{f}_1(r, z, s) = L\{f_1(r, z, t)\} \quad (1-8-5)$$

$$\bar{f}_2(r, z, s) = L\{f_2(r, z, t)\} \quad (2-8-5)$$

$$\bar{g}_1(r, z, s) = L\{g_1(r, z, t)\} \quad (3-8-5)$$

$$\bar{g}_2(r, z, s) = L\{g_2(r, z, t)\} \quad (4-8-5)$$

رابطه (5-6) یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه ۲ است که در این تحقیق جهت حل آن از تئوری اشترم لیوویل استفاده شده است. بنابراین مشابه حل حالت پایدار و با توجه به شرایط مرزی کلی مساله، ابتدا لازم است با استفاده از قضیه اشترم-لیوویل تبدیل فوریه مناسب ساخته شود (رابطه (4-5)). این بار نیز با کاربرد روش جداسازی متغیرها برای حل معادله (4-2) و با در نظر گرفتن شرایط مرزی همگن، روابط زیر برای جهت  $z$  بدست خواهد آمد و توزیع دما در دو بعد  $r$  و  $z$  بر اساس دو تابع  $F(r)$  و  $Z(z)$  قابل جداسازی است:

$$\bar{\theta}(r, z, s) = F(r)Z(z) \quad (9-5)$$

با اعمال رابطه (9-5) در رابطه (5-6)، معادله انتقال حرارت به شکل زیر جداسازی می شود:

$$\alpha_i^* \frac{R''}{R} + \alpha_i^* \frac{R'}{R} - S = -\frac{\ddot{Z}}{Z} = \lambda^2 \quad (10-5)$$

که در آن

$$\alpha_i^* = \frac{\alpha_r}{\alpha_{z,i}} \quad (11-5)$$

و  $\lambda$  یک عدد ثابت است. با در نظر گرفتن شرایط مرزی همگن، روابط زیر برای جهت  $z$  بدست خواهد آمد



$$\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} + \lambda^2 Z(z) = 0. \quad (12-5)$$

$$a_1 Z(0) + b_1 \frac{\partial Z(0)}{\partial z} = 0. \quad (1-13-5)$$

$$a_2 Z(L) + b_2 \frac{\partial Z(L)}{\partial z} = 0. \quad (2-13-5)$$

با حل معادله (12-5) و با توجه به شرایط مرزی (5-13)، توابع ویژه برای این مساله بدست خواهد آمد

$$\phi_n = (a_1 \sin(\lambda_n z) - b_1 \lambda_n \cos(\lambda_n z)). \quad (14-5)$$

که  $\lambda_n$  با توجه به رابطه زیر بدست می آید

$$\begin{aligned} (a_1 b_2 - a_2 b_1) \lambda_n \cos(\lambda_n L) + \\ (a_2 a_1 + b_1 b_2 \lambda_n^2) \sin(\lambda_n L) = 0 \end{aligned} \quad (15-5)$$

با جایگزین کردن این روابط در رابطه اشتروم-لیوویل رابطه (4-5)، تبدیل فوریه مناسب  $(F(f))$  به صورت زیر است

$$F(f) = \frac{4\lambda_n}{A_n^2} \int_0^L \left[ f(z) \begin{pmatrix} a_1 \sin(\lambda_n z) \\ -b_1 \lambda_n \cos(\lambda_n z) \end{pmatrix} \right] dz. \quad (16-5)$$

که  $A_n$  برابر است با

$$A_n = \sqrt{\begin{aligned} &(-a_1^2 + (b_1 \lambda_n)^2) \sin(2\lambda_n L) + 2a_1 b_1 \lambda_n \cos(2\lambda_n L) \\ &+ 2\lambda_n (a_1^2 + (b_1 \lambda_n)^2) L - 2a_1 b_1 \lambda_n \end{aligned}} \quad (17-5)$$

در ادامه با استفاده از تعریف تبدیل فوریه، مشتق دوم نسبت به  $z$  بدست می آید.

$$F(f') = \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{2\lambda_n}{A_n} \right)^2 \left[ \frac{-a_1}{(a_2 \cos(\lambda_n L) - b_2 \lambda_n \sin(\lambda_n L))} f_2(r) \right] \\ + f_1(r) \\ - \lambda_n^2 F(f) \end{array} \right\} \quad (18-5)$$

حال اگر این تبدیل فوریه را بر روی معادله (5-6) اعمال نمائیم، خواهیم داشت:

$$\alpha_i^* \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial r^2} + \alpha_i^* \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - S/\alpha_{z,i} \bar{\theta} = 0. \Rightarrow$$

$$\alpha_i^* \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \alpha_i^* \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - \left( \lambda_n^2 + S/\alpha_{z,i} \right) U = \left( \frac{2\lambda_n}{A_n} \right)^2 \times$$

$$\left[ \frac{a_1}{(a_2 \cos(\lambda_n L) - b_2 \lambda_n \sin(\lambda_n z))} \bar{f}_2(r, s) - \bar{f}_1(r, s) \right] \quad (19-5)$$

و برای شرایط مرزی در جهت  $r$

$$c_1 U(r_0, n, s) + d_1 \frac{\partial U(r_0, n, s)}{\partial r} = G_1(n, s). \quad (1-20-5)$$

$$c_2 U(r_n, n, s) + d_2 \frac{\partial U(r_n, n, s)}{\partial r} = G_2(n, s). \quad (2-20-5)$$

باید توجه داشت که در روابط بالا

$$U(r, n, s) = F(\bar{\theta}(r, z, s)). \quad (1-21-5)$$

$$G_1(n, s) = F(g_1(z, s)). \quad (2-21-5)$$

$$G_2(n, s) = F(g_2(z, s)). \quad (3-21-5)$$

حال اگر تعریف کنیم

$$\omega_{n,s,i} = \sqrt{\lambda_n^2 + S/\alpha_{z,i}} \quad (1-22-5)$$

$$h(r, n, s) = \left( \frac{2\lambda_n}{A_n} \right)^2 \times \left( \frac{a_1}{(a_2 \cos(\lambda_n L) - b_2 \lambda_n \sin(\lambda_n z))} \bar{f}_2(r, s) - \bar{f}_1(r, s) \right) \quad (2-22-5)$$

آنگاه جواب کلی معادله در هر لایه از لمینیت کامپوزیتی به صورت زیر است:

$$U^{(i)}(r, n, s) = a_n^{(i)} I_0(\omega_{n,s,i} r) + b_n^{(i)} K_0(\omega_{n,s,i} r) + w^{(i)}(r, n, s). \quad (23-5)$$

در این رابطه  $w(r, n)$  جواب ناهمگن مساله بوده و به صورت زیر تعریف می شود:

$$w^{(i)}(r, n) = I_0(\omega_{n,s,i} r) \times \int_{r_n}^{r_{out}} [r \times K_0(\omega_{n,s,i} r) \times h(r, n)] dr \\ + K_0(\omega_{n,s,i} r) \times \int_{r_n}^{r_{out}} [r \times I_0(\omega_{n,s,i} r) \times h(r, n)] dr. \quad (24-5)$$

حال برای شرایط مرزی در جهت  $r$  خواهیم داشت:

$$a_{n,s}^{(1)} [c_1 I_0(\omega_{n,s,1} r_0) + d_1 \omega_{n,s,1} I_1(\omega_{n,s,1} r_0)] + \\ b_{n,s}^{(1)} [c_1 K_0(\omega_{n,s,1} r_0) - d_1 \omega_{n,s,1} K_1(\omega_{n,s,1} r_0)] = G_1(n, s) - w^{(1)}(r_0, n, s). \quad (1-25-5)$$

$$a_{n,s}^{(n_i)} [c_2 I_0(\omega_{n,s,n_i} r_{n_i}) + d_2 \omega_{n,s,n_i} I_1(\omega_{n,s,n_i} r_{n_i})] + \\ b_{n,s}^{(n_i)} [c_2 K_0(\omega_{n,s,n_i} r_{n_i}) - d_2 p_{n,s,n_i} K_1(\omega_{n,s,n_i} r_{n_i})] = G_1(n, s) - w^{(n_i)}(r_{n_i}, n, s). \quad (2-25-5)$$

همچنین پیوستگی دما و شار حرارت در مرز بین لایه ها به صورت زیر خواهد بود، با توجه به

پیوستگی دما داریم:

$$U^{(i)}(r_i, n) = U^{(i+1)}(r_i, n) \Rightarrow \quad (3-26-5)$$

$$a_n^{(i)} I_0(\omega_{n,s,i} r_i) + b_n^{(i)} K_0(\omega_{n,s,i} r_i) - a_n^{(i+1)} I_0(\omega_{n,s,i+1} r_i) \\ + b_n^{(i+1)} K_0(\omega_{n,s,i+1} r_i) = w^{(i+1)}(r_i, n) - w^{(i)}(r_i, n).$$

و با توجه به پیوستگی شار حرارتی داریم:

$$\frac{\partial U^{(i)}(r_i, n)}{\partial r} = \frac{\partial U^{(i+1)}(r_i, n)}{\partial r} \Rightarrow \quad (4-26-5)$$

$$a_n^{(i)} \omega_{n,s,i} I_1(\omega_{n,s,i} r_i) + b_n^{(i)} p_{n,s,i} K_1(\omega_{n,s,i} r_i) - a_n^{(i+1)} \omega_{n,s,i+1} I_1(\omega_{n,s,i+1} r_i) \\ + b_n^{(i+1)} \omega_{n,s,i+1} K_1(\omega_{n,s,i+1} r_i) = \frac{\partial w^{(i+1)}(r_i, n)}{\partial r} - \frac{\partial w^{(i)}(r_i, n)}{\partial r}.$$

$I_1$  و  $K_1$  به ترتیب توابع بسل اصلاح شده نوع اول و دوم از مرتبه یک هستند. حال برای تعیین ضرایب  $a_n^{(i)}$  و  $b_n^{(i)}$  بایستی در هر  $n$  و برای تمامی لایه ها، دستگاه مختصات شامل روابط (۵-۲۶-۱)، (۵-۲۶-۲)، (۵-۲۶-۳) و (۵-۲۶-۴) حل شوند، دستگاه معادلات حاصل یک دستگاه پنج قطری است که با حل این دستگاه مختصات ضرایب  $a_n^{(i)}$  و  $b_n^{(i)}$  بدست می آید. در ادامه با اعمال تبدیل فوریه معکوس، پاسخ زیر برای توزیع دمای لمینیت در حوزه فرکانس بدست می آید:

$$\bar{\theta}(r, z, s) = \sum_{n=1}^{\infty} (U^{(i)}(r, n, s) \times \phi_n(z)) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n,s}^{(i)} I_0(p_{n,s} r) + b_{n,s}^{(i)} K_0(p_{n,s} r) + w^{(i)}(r, n, s)) \times (a_1 \sin(\lambda_n z) - b_1 \lambda_n \cos(\lambda_n z)). \quad (27-5)$$

بایستی توجه داشت که در رابطه (۵-۲۶)، مرتبه توابع بسل در هر لایه وابسته به جهت الیاف در آن لایه است و ضرایب  $a_n^{(i)}$ ،  $b_n^{(i)}$ ،  $c_n^{(i)}$  و  $d_n^{(i)}$  همگی تابعی از  $s$  هستند. دمای لمینیت را در حوزه مکان و زمان می توان با اعمال تبدیل لاپلاس معکوس به  $\bar{\theta}$  بدست آورد:

$$\theta^{(i)}(r, z, t) = L^{-1} \{ \bar{\theta}^{(i)}(r, z, s) \} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{st} \bar{\theta}^{(i)}(r, z, s) ds \quad (28-5)$$

در رابطه (۵-۲۸)،  $C$  عدد ثابت مختلطی است که بخش حقیقی کلیه قطب های تابع  $\bar{\theta}$  از بخش حقیقی عدد  $C$  بزرگتر هستند. با توجه به پیچیدگی بسیار زیاد انتگرال مختلط فوق، به نظر می رسد که بدست آوردن رابطه مشخصی از محاسبه این انتگرال کار بسیار دشوار و یا غیرممکنی است. در

اینجا از روشی موسوم به روش تابع مرمرفیک<sup>۱</sup> [Bronshtein et al.] جهت محاسبه انتگرال فوق استفاده شده است. مطابق این روش، یک تابع بصورت زیر بر روی  $\bar{\theta}$  برازش می شود:

$$\bar{\theta}^{(i)}(r, z, s) = \sum_{i=1}^n \frac{\kappa_i}{s + \mathcal{G}_i} \quad (29-5)$$

در رابطه فوق، مقادیر  $\mathcal{G}_i$  معرف قطب های تابع  $\bar{\theta}$  است. به این ترتیب انتگرال (3-41) از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$\theta^{(i)}(r, z, t) = \sum_{i=1}^n \kappa_i \exp(-\mathcal{G}_i t) \quad (30-5)$$

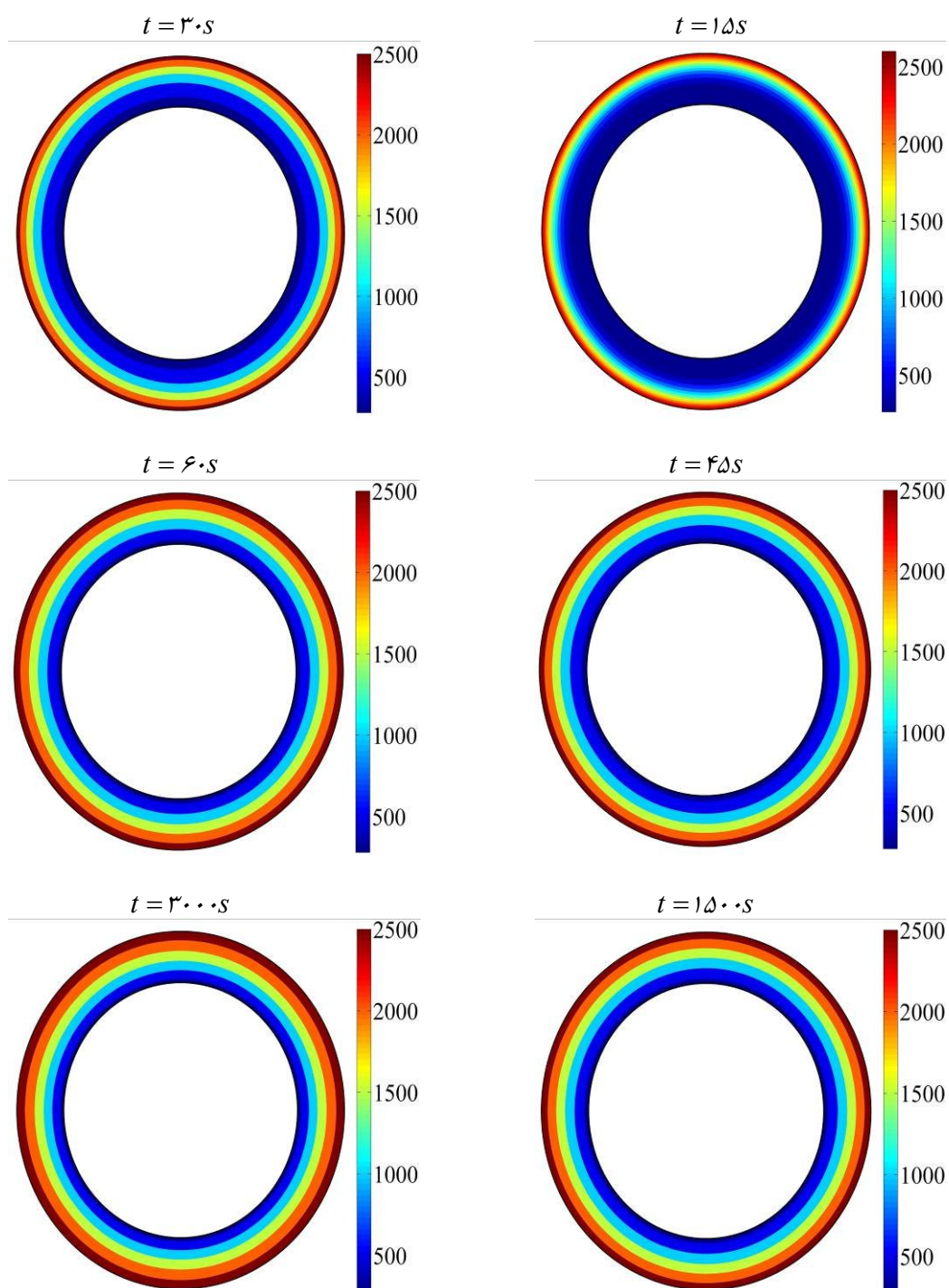
### ۵-۳- مثال

در این قسمت مساله انتقال حرارت در لوله خنک کن راکتور هسته ای که در فصل چهارم حل پایدار آن ارائه گردید در حالت ناپایا حل شده است. هندسه و شرایط مرزی همانند حالت پایدار است، همچنین دمای اولیه ۱۰۰ درجه سانتیگراد در نظر گرفته شده است.

شکل (5-1) کانتورهای توزیع دما را برای لمینیت ایزوتروپیک در جهت شعاعی برای مقطع طولی  $z = L/3$  در زمان های مختلف نشان می دهد.

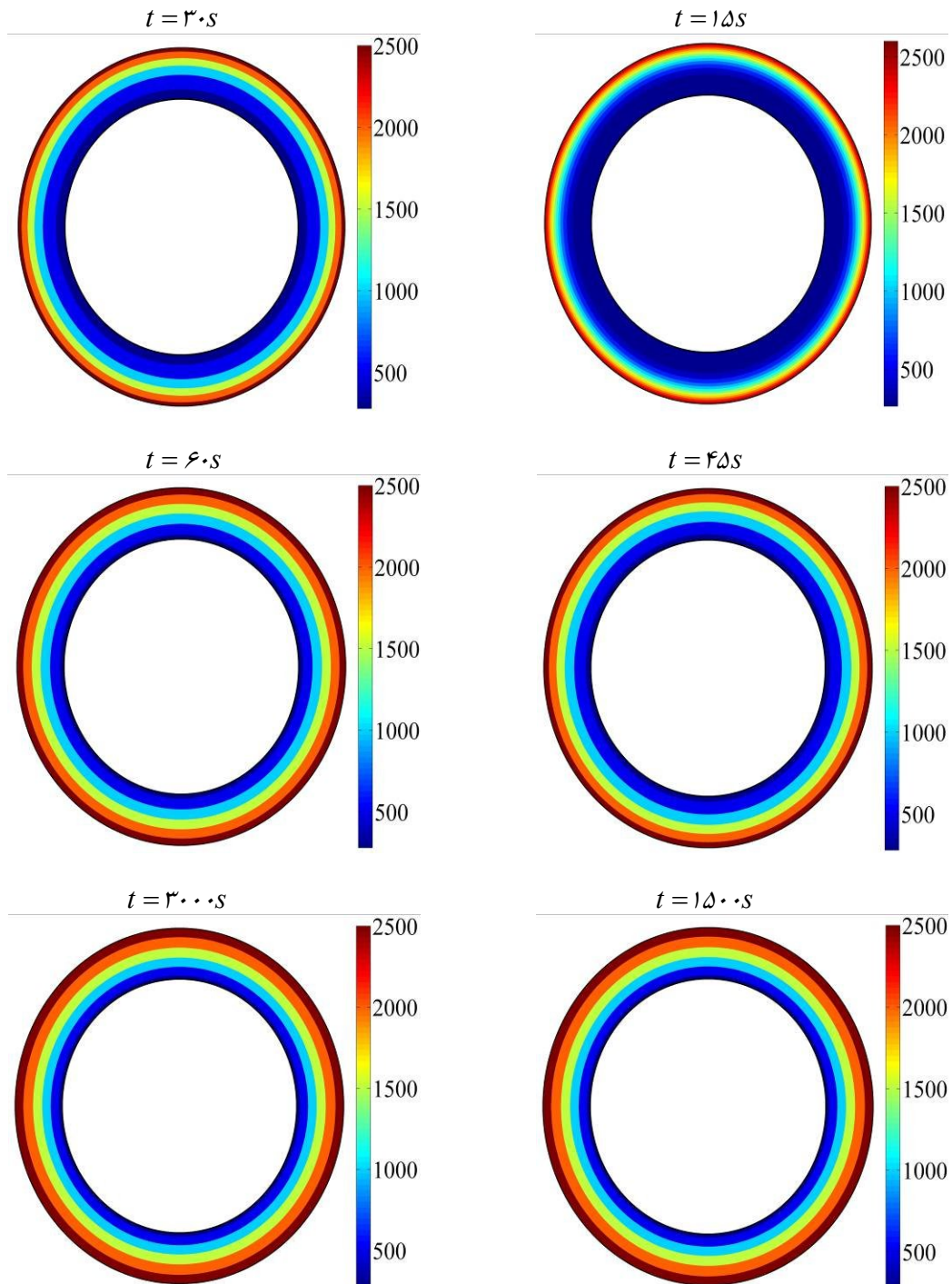
---

<sup>1</sup> -Meromorphic Function



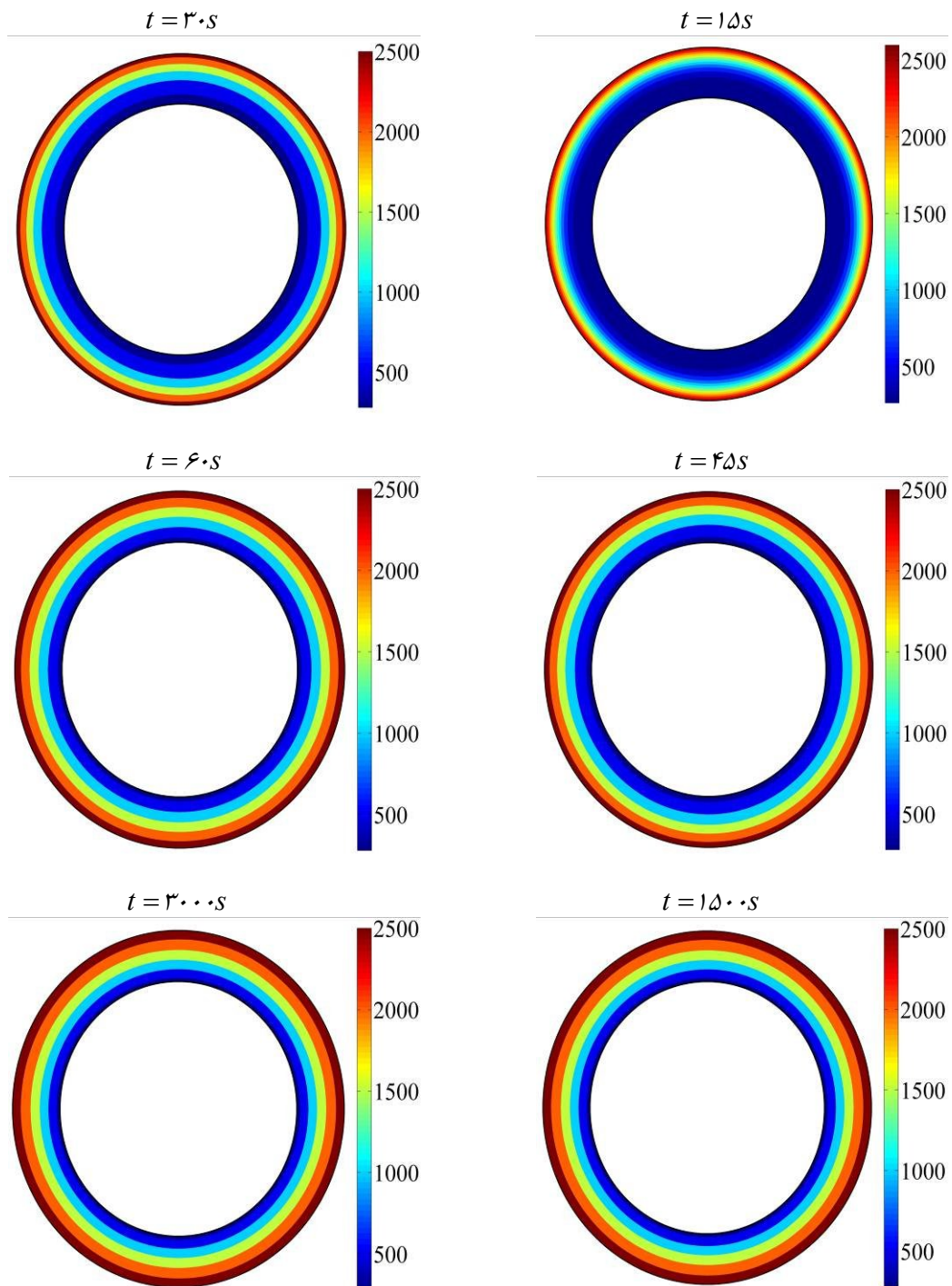
شکل (۵-۱): کانتورهای توزیع دما در لمینیت ایزوتروپیک برای مقطع  $z = L/3$

شکل (۲-۵) کانتورهای توزیع دما را برای لمینیت اورتروپیک در جهت شعاعی برای مقطع طولی در  $z = L/3$  در زمان های مختلف نشان می دهد.



شکل (۲-۵): کانتورهای توزیع دما در لمینیت اورتروپیک برای مقطع  $z = L/3$

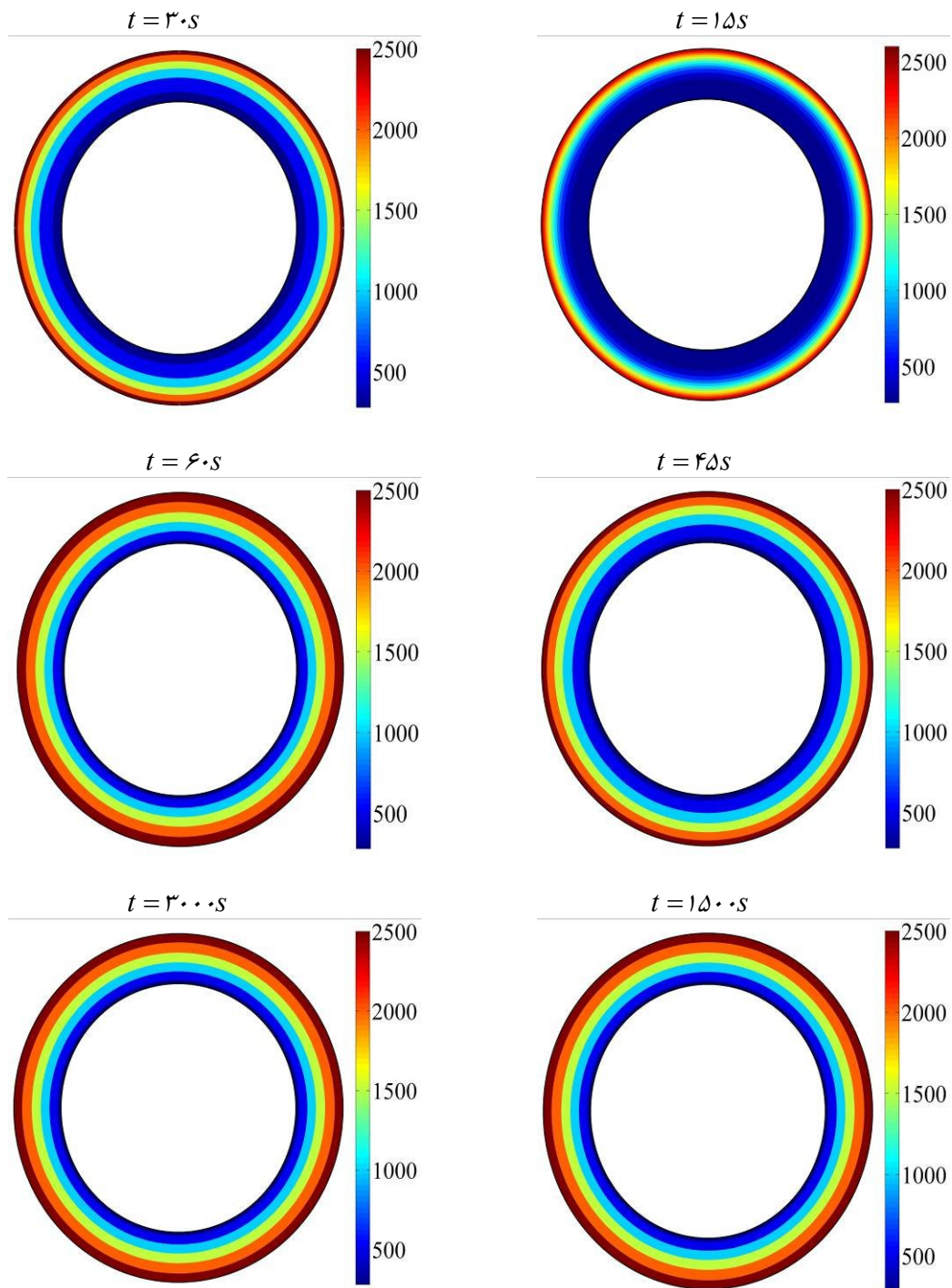
شکل (۳-۵) کانتورهای توزیع دما را برای لمینیت کراس پلای در جهت شعاعی برای مقطع طولی  $z = L/3$  در زمان های مختلف نشان می دهد.



شکل (۳-۵): کانتورهای توزیع دما در لمینیت کراس پلای برای مقطع  $z = L/3$

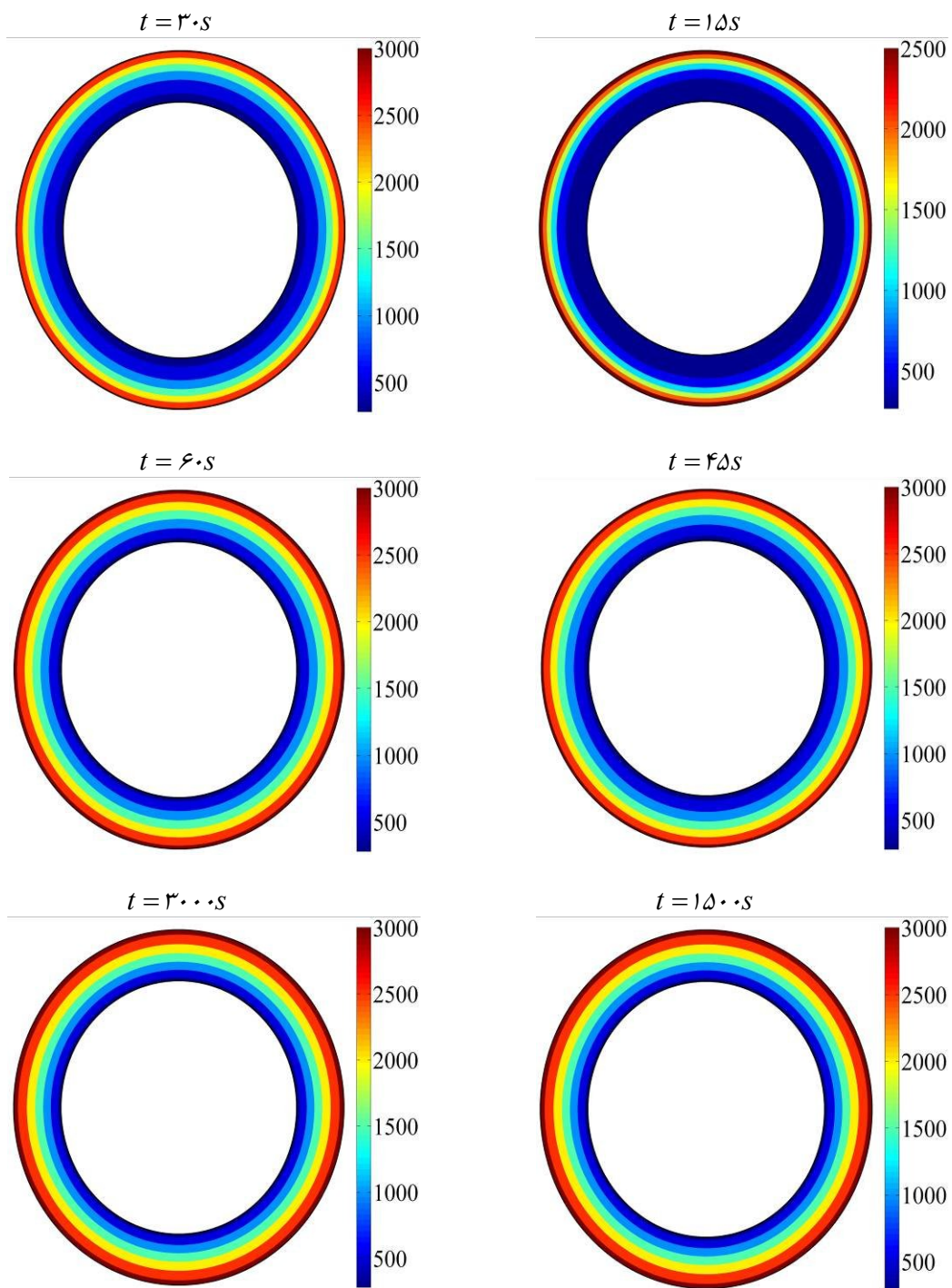


شکل (۴-۵) کانتورهای توزیع دما را برای لمینیت شبه ایزوتروپیک در جهت شعاعی برای مقطع طولی  $z = L/3$  در زمان های مختلف نشان می دهد.



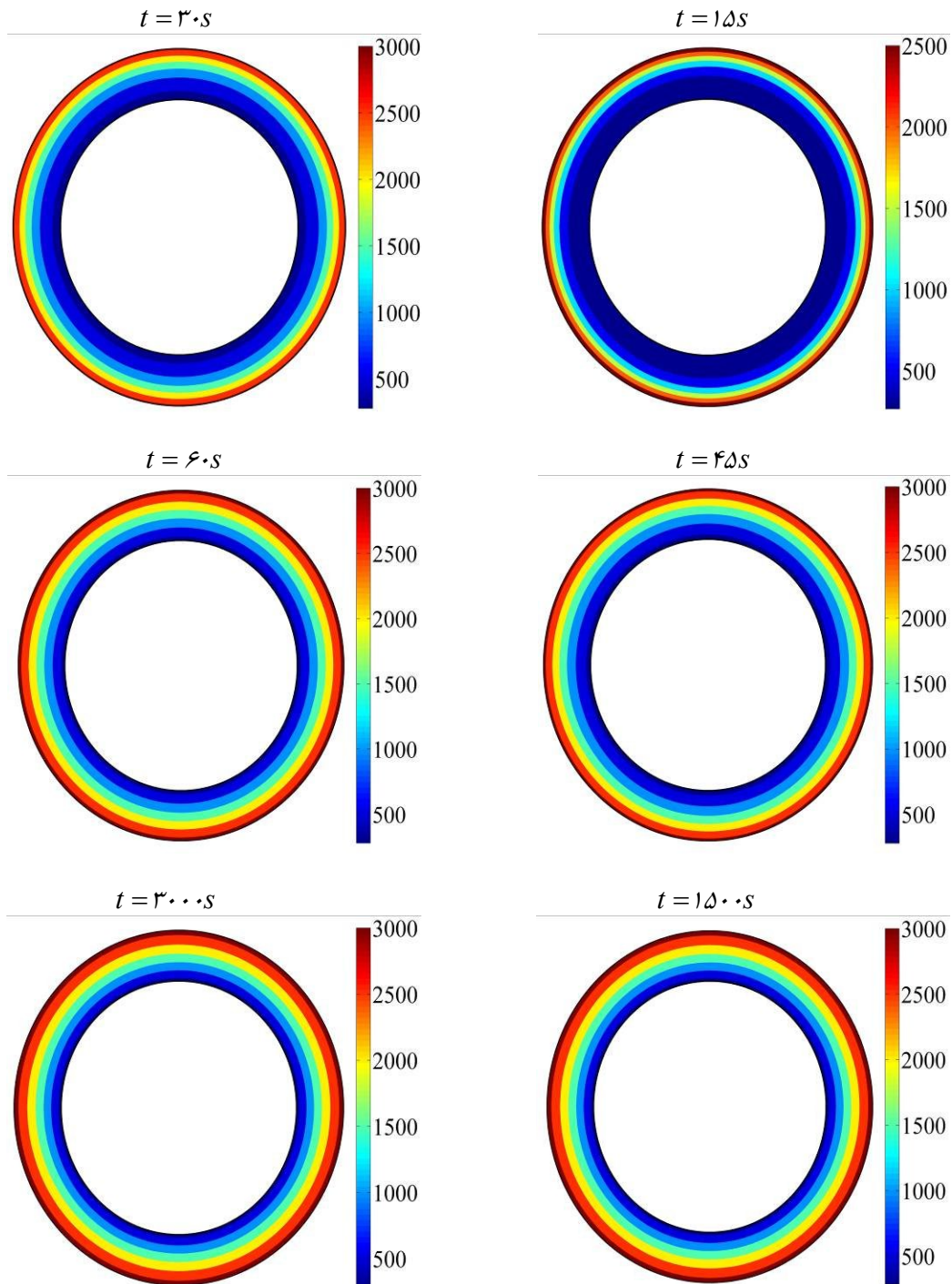
شکل (۴-۵): کانتورهای توزیع دما در لمینیت شبه ایزوتروپیک برای مقطع  $z = L/3$

شکل (۵-۵) کانتورهای توزیع دما را برای لمینیت ایزوتروپیک در جهت شعاعی برای مقطع طولی  $z = L/2$  در زمان های مختلف نشان می دهد.



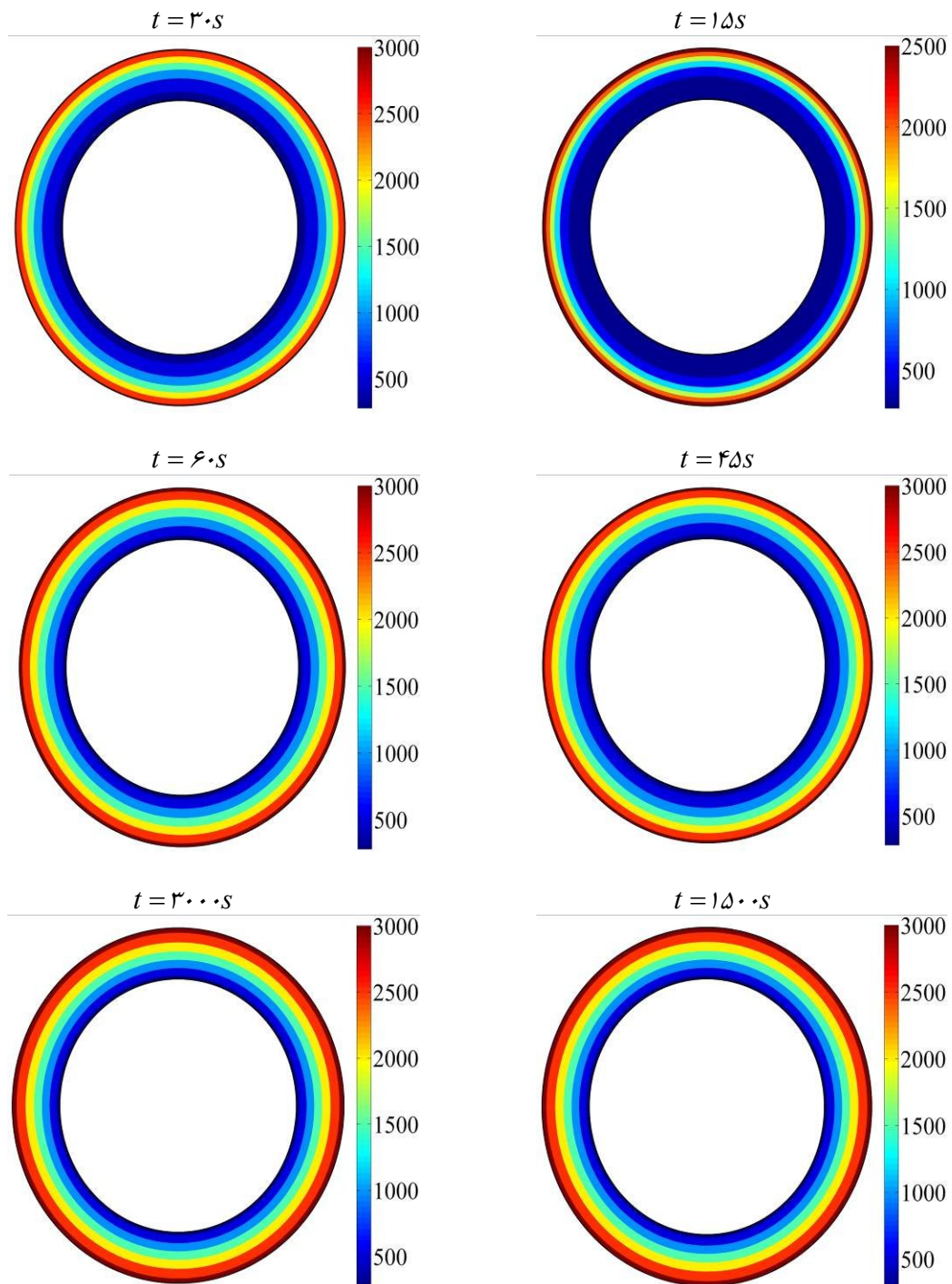
شکل (۵-۵): کانتورهای توزیع دما در لمینیت ایزوتروپیک برای مقطع  $z = L/2$

شکل (۵-۶) کانتورهای توزیع دما را برای لمینیت اورتروپیک در جهت شعاعی برای مقطع طولی  $z = L/2$  در زمان های مختلف نشان می دهد.



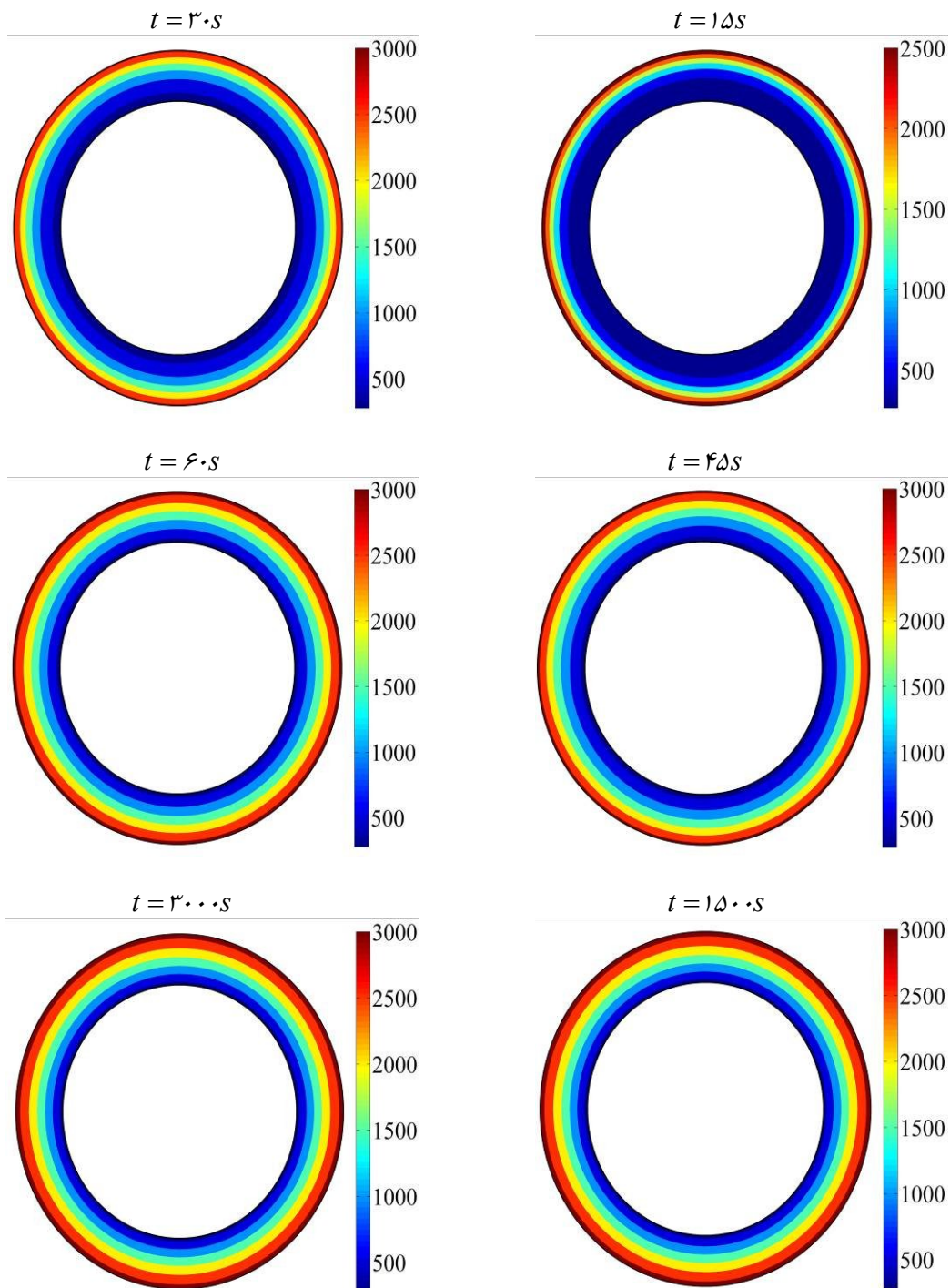
شکل (۵-۶): کانتورهای توزیع دما در لمینیت اورتروپیک برای مقطع  $z = L/2$

شکل (۷-۵) کانتورهای توزیع دما را برای لمینیت کراس پلای در جهت شعاعی برای مقطع طولی  $z = L/2$  در زمان های مختلف نشان می دهد.



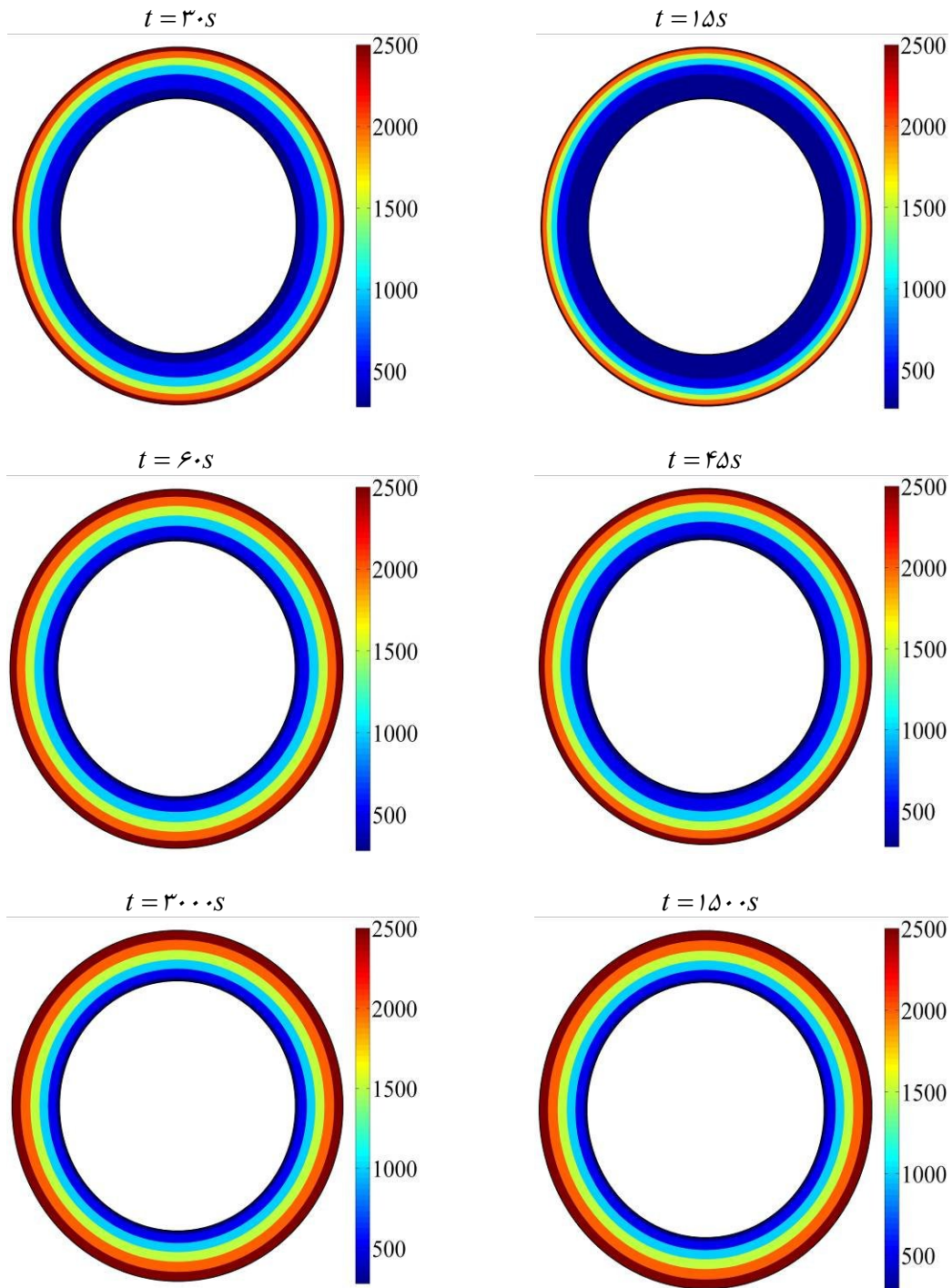
شکل (۷-۵): کانتورهای توزیع دما در لمینیت کراس پلای برای مقطع  $z = L/2$

شکل (۸-۵) کانتورهای توزیع دما را برای لمینیت شبه ایزوتروپیک در جهت شعاعی برای مقطع طولی  $z = L/2$  در زمان های مختلف نشان می دهد.



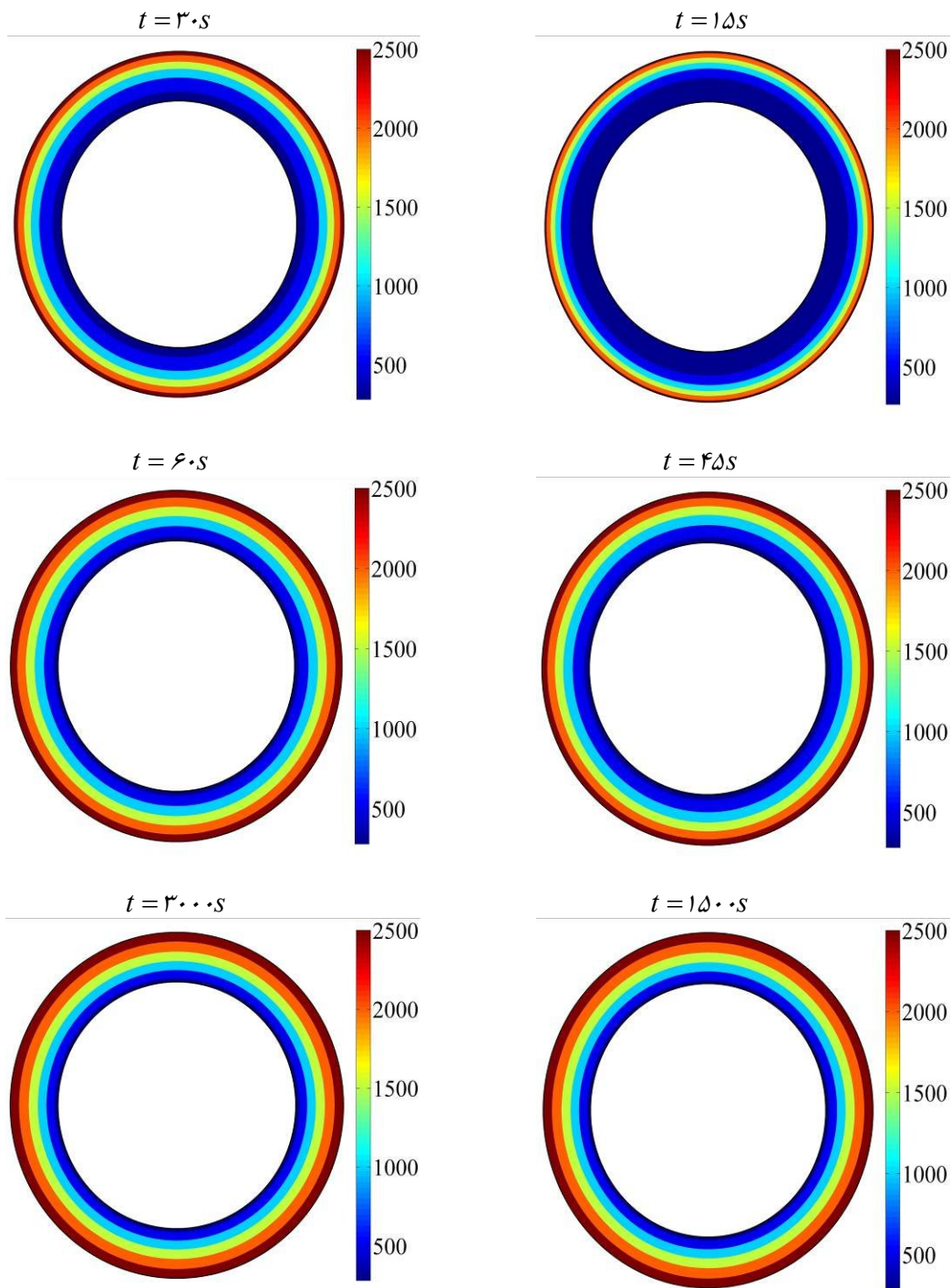
شکل (۸-۵): کانتورهای توزیع دما در لمینیت شبه ایزوتروپیک برای مقطع  $z = L/2$

شکل (۹-۵) کانتورهای توزیع دما را برای لمینیت ایزوتروپیک در جهت شعاعی برای مقطع طولی  $z = 2L/3$  در زمان های مختلف نشان می دهد.



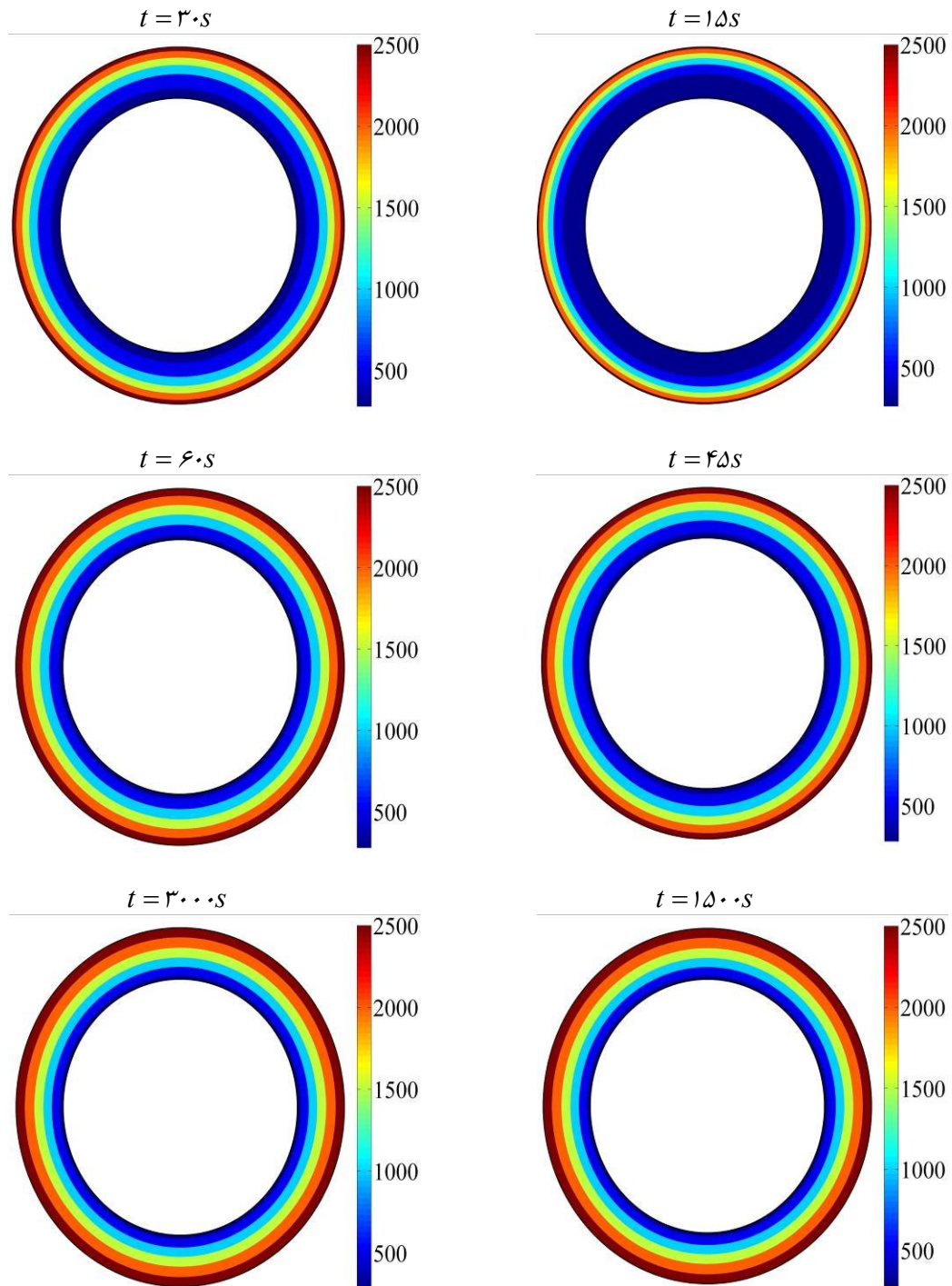
شکل (۹-۵): کانتورهای توزیع دما در لمینیت ایزوتروپیک برای مقطع  $z = 2L/3$

شکل (۵-۱۰) کانتورهای توزیع دما را برای لمینیت ارتوتروپیک در جهت شعاعی برای مقطع طولی  $z = 2L/3$  در زمان های مختلف نشان می دهد.



شکل (۵-۱۰): کانتورهای توزیع دما در لمینیت ارتوتروپیک برای مقطع  $z = 2L/3$

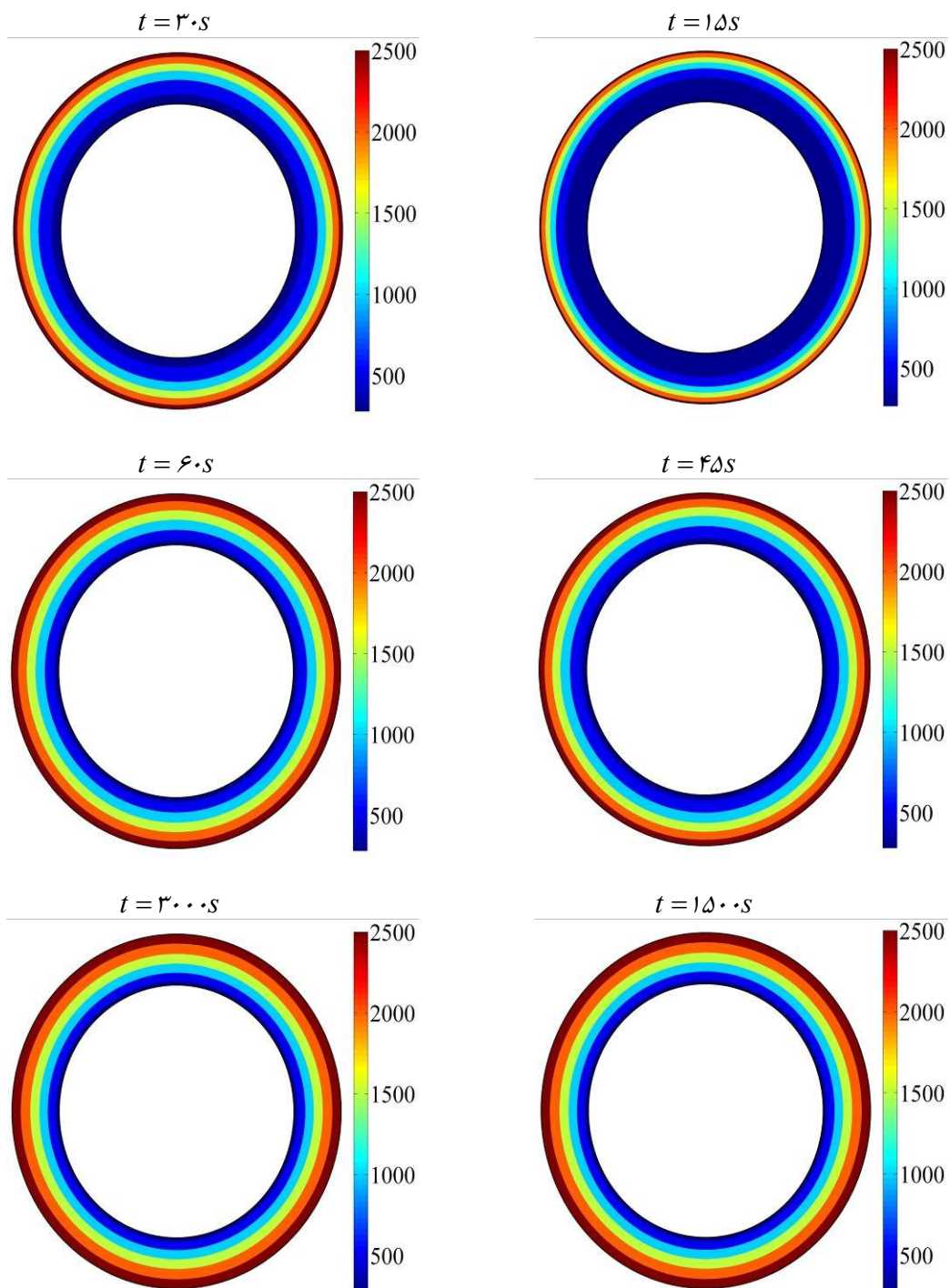
شکل (۱۱-۵) کانتورهای توزیع دما را برای لمینیت کراس پلای در جهت شعاعی برای مقطع طولی  $z = 2L/3$  در زمان های مختلف نشان می دهد.



شکل (۱۱-۵): کانتورهای توزیع دما در لمینیت کراس پلای برای مقطع  $z = 2L/3$

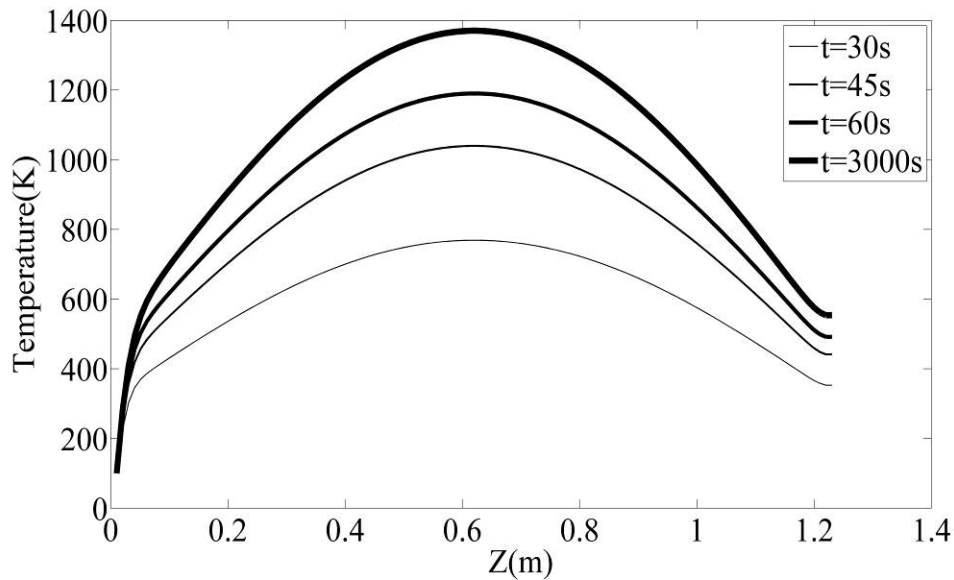


شکل (۵-۱۲) کانتورهای توزیع دما را برای لمینیت شبه ایزوتروپیک در جهت شعاعی برای مقطع طولی  $z = 2L/3$  در زمان های مختلف نشان می دهد.



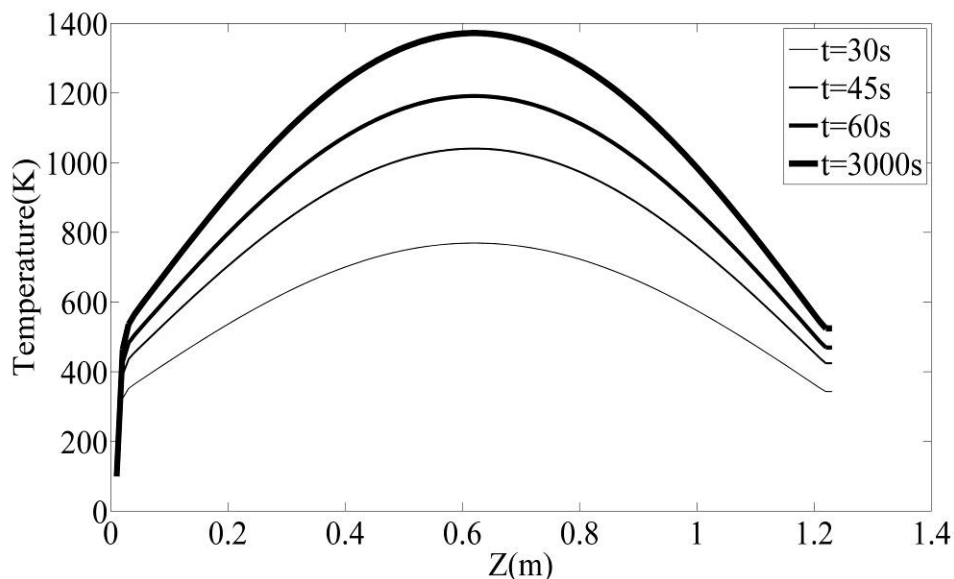
شکل (۵-۱۲): کانتورهای توزیع دما در لمینیت شبه ایزوتروپیک برای مقطع  $z = 2L/3$

شکل (۵-۱۳) کانتورهای توزیع دما را برای لمینیت ایزوتروپیک در جهت طولی برای مقطع شعاعی  $r = R/3$  در زمان های مختلف نشان می دهد.



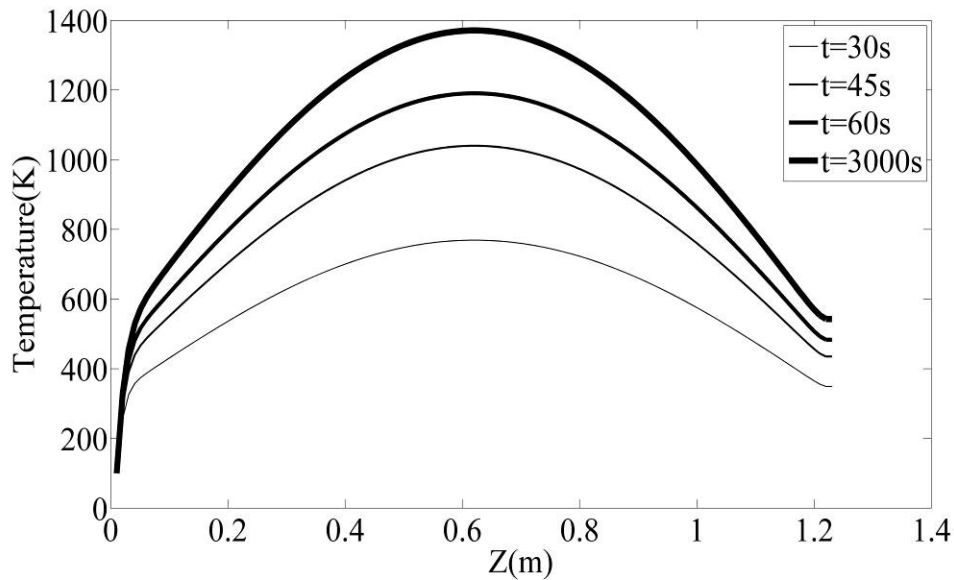
شکل (۵-۱۳): نمودارهای توزیع دما در لمینیت ایزوتروپیک در مقطع  $r = R/3$

شکل (۵-۱۴) کانتورهای توزیع دما را برای لمینیت ارتوتروپیک در جهت طولی برای مقطع شعاعی  $r = R/3$  در زمان های مختلف نشان می دهد.



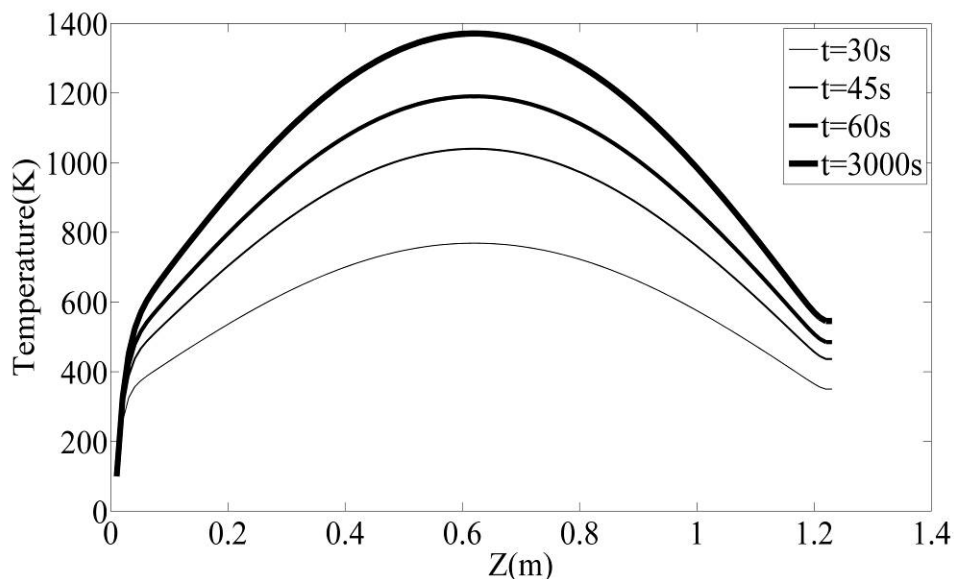
شکل (۵-۱۴): نمودارهای توزیع دما در لمینیت ارتوتروپیک در مقطع  $r = R/3$

شکل (۵-۱۵) کانتورهای توزیع دما را برای لمینیت کراس پلای در جهت طولی برای مقطع شعاعی  $r = R/3$  در زمان های مختلف نشان می دهد.



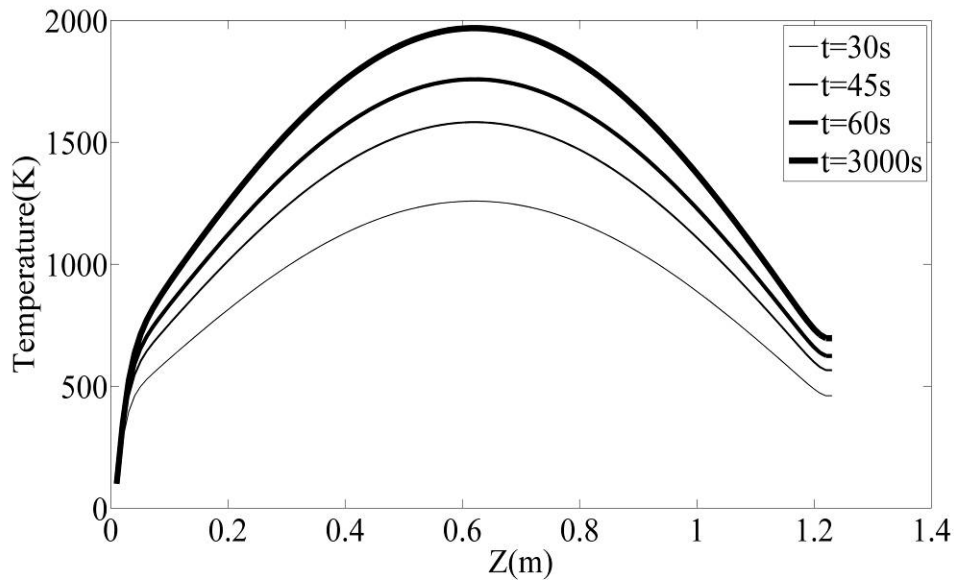
شکل (۵-۱۵): نمودارهای توزیع دما در لمینیت کراس پلای در مقطع  $r = R/3$

شکل (۵-۱۶) کانتورهای توزیع دما را برای لمینیت شبه ایزوتروپیک در جهت طولی برای مقطع شعاعی  $r = R/3$  در زمان های مختلف نشان می دهد.



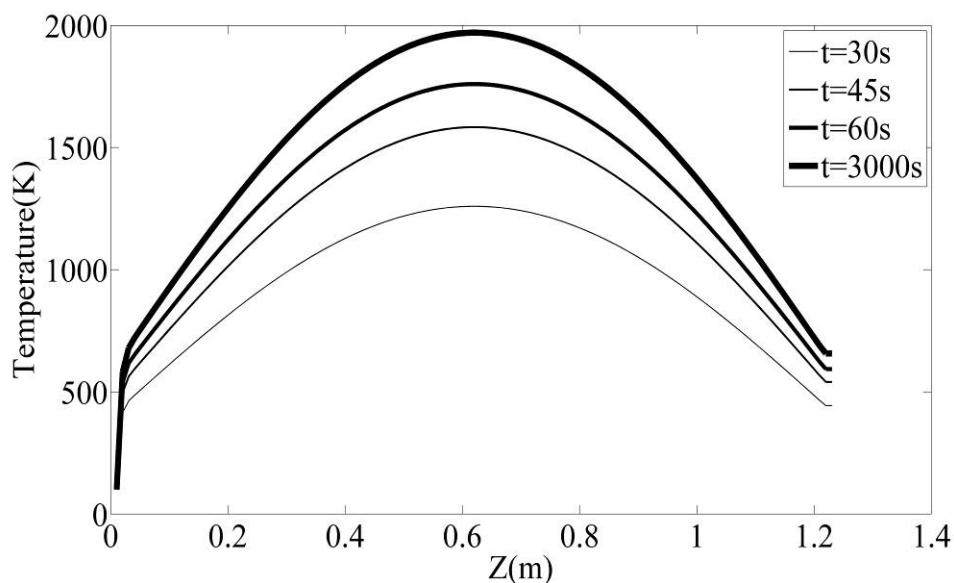
شکل (۵-۱۶): نمودارهای توزیع دما در لمینیت شبه ایزوتروپیک در مقطع  $r = R/3$

شکل (۱۷-۵) کانتورهای توزیع دما را برای لمینیت ایزوتروپیک در جهت طولی برای مقطع شعاعی در  $r = R/2$  در زمان های مختلف نشان می دهد.



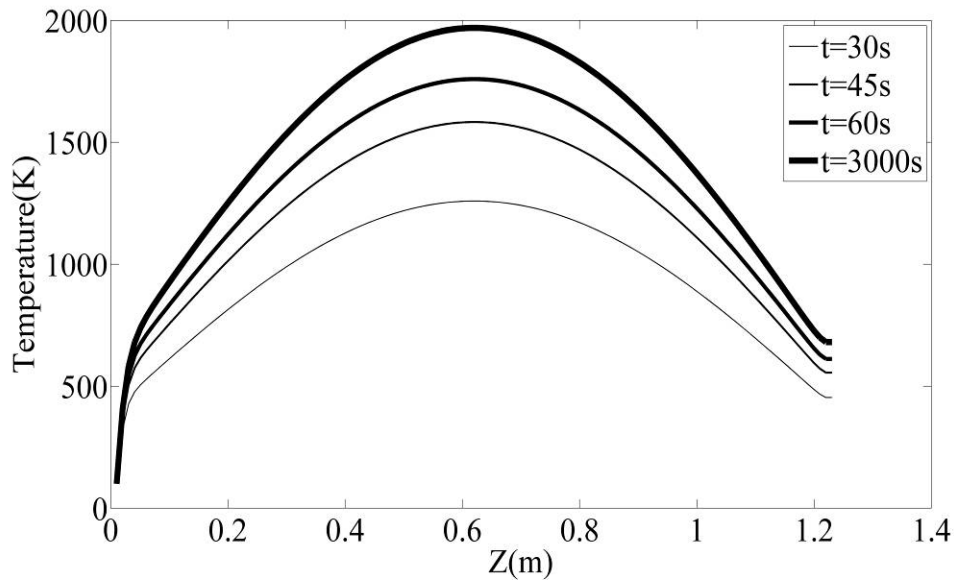
شکل (۱۷-۵): نمودارهای توزیع دما در لمینیت ایزوتروپیک در مقطع  $r = R/2$

شکل (۱۸-۵) کانتورهای توزیع دما را برای لمینیت ارتوتروپیک در جهت طولی برای مقطع شعاعی در  $r = R/2$  در زمان های مختلف نشان می دهد.



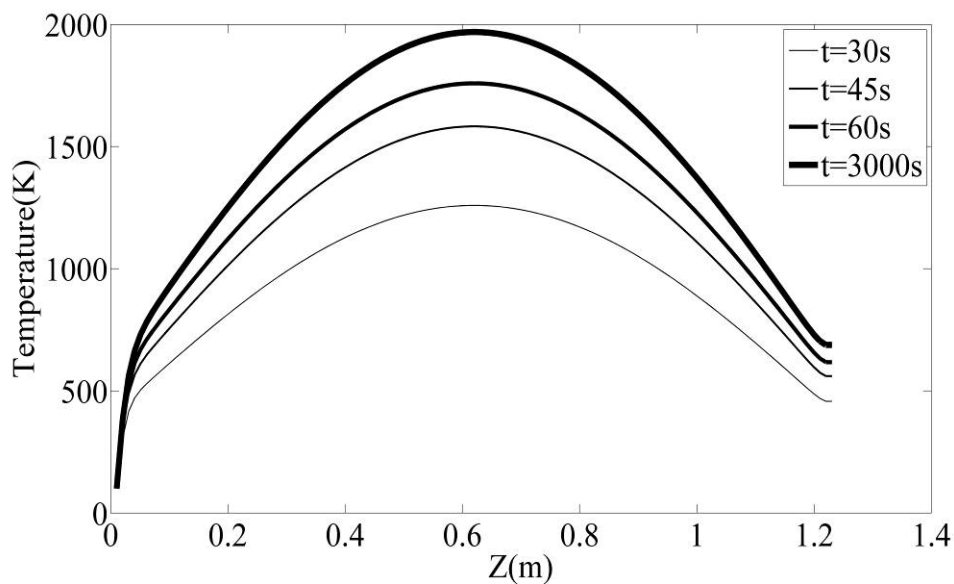
شکل (۱۸-۵): نمودارهای توزیع دما در لمینیت ارتوتروپیک در مقطع  $r = R/2$

شکل (۱۹-۵) کانتورهای توزیع دما را برای لمینیت کراس پلای در جهت طولی برای مقطع شعاعی  $r = R/2$  در زمان های مختلف نشان می دهد.



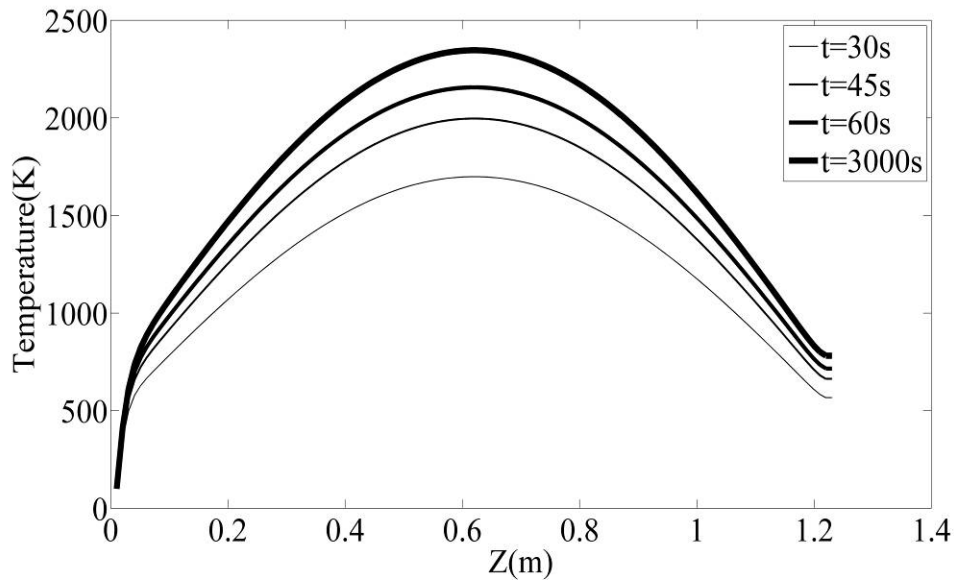
شکل (۱۹-۵): نمودارهای توزیع دما در لمینیت کراس پلای در مقطع  $r = R/2$

شکل (۲۰-۵) کانتورهای توزیع دما را برای لمینیت شبه ایزوتروپیک در جهت طولی برای مقطع شعاعی  $r = R/2$  در زمان های مختلف نشان می دهد.



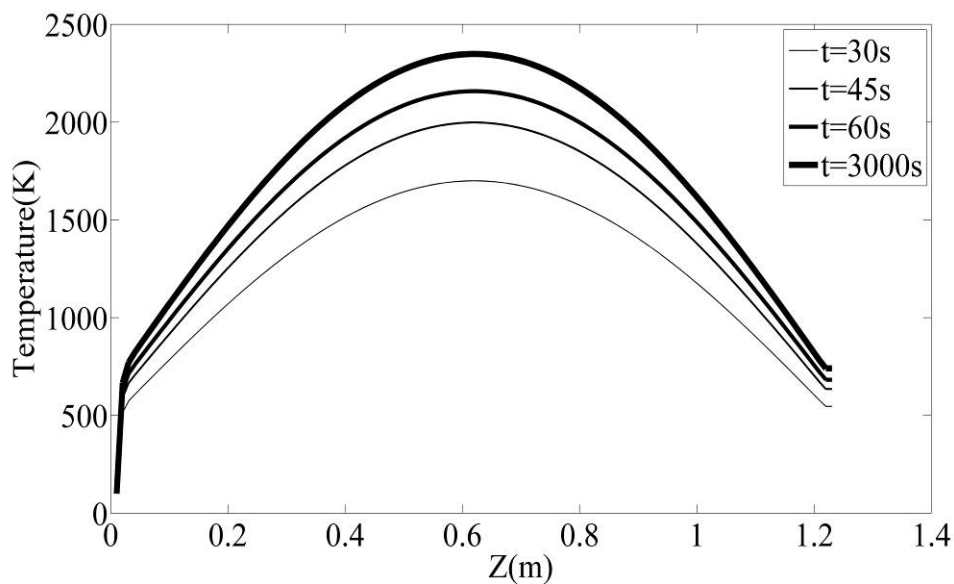
شکل (۲۰-۵): نمودارهای توزیع دما در لمینیت شبه ایزوتروپیک در مقطع  $r = R/2$

شکل (۲۱-۵) کانتورهای توزیع دما را برای لمینیت ایزوتروپیک در جهت طولی برای مقطع شعاعی  $r = 2R/3$  در زمان های مختلف نشان می دهد.



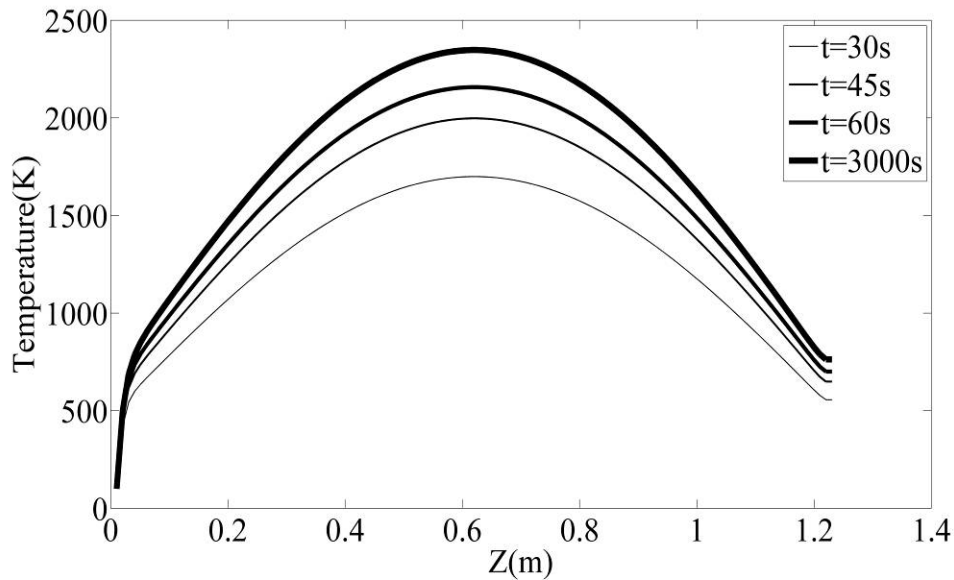
شکل (۲۱-۵): نمودارهای توزیع دما در لمینیت ایزوتروپیک در مقطع  $r = 2R/3$

شکل (۲۲-۵) کانتورهای توزیع دما را برای لمینیت ارتوتروپیک در جهت طولی برای مقطع شعاعی  $r = 2R/3$  در زمان های مختلف نشان می دهد.



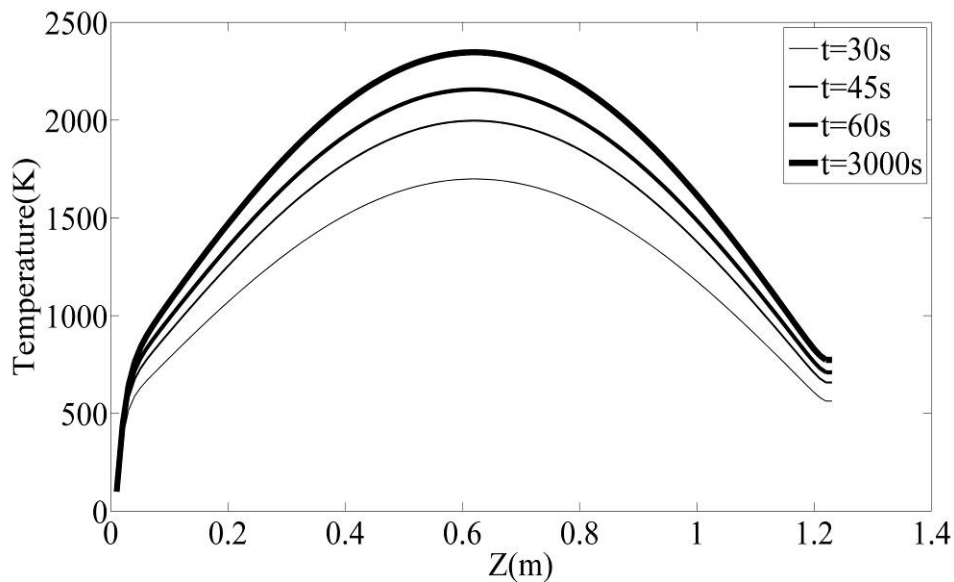
شکل (۲۲-۵): نمودارهای توزیع دما در لمینیت ارتوتروپیک در مقطع  $r = 2R/3$

شکل (۵-۲۳) کانتورهای توزیع دما را برای لمینیت کراس پلای در جهت طولی برای مقطع شعاعی  $r = 2R/3$  در زمان های مختلف نشان می دهد.



شکل (۵-۲۳): نمودارهای توزیع دما در لمینیت کراس پلای در مقطع  $r = 2R/3$

شکل (۵-۲۴) کانتورهای توزیع دما را برای لمینیت شبه ایزوتروپیک در جهت طولی برای مقطع شعاعی  $r = 2R/3$  در زمان های مختلف نشان می دهد.



شکل (۵-۲۴): نمودارهای توزیع دما در لمینیت شبه ایزوتروپیک در مقطع  $r = 2R/3$

همانگونه که از مقایسه این شکل ها با شکل های فصل قبل بر می آید، نمودارها در زمان  $t = 3000s$  بر نتایج حالت پایدار منطبق می شود.



## نتیجه گیری

نتایج حاصل از تحقیق حاضر مستقیماً در لوله ها و مخازن کامپوزیتی استوانه ای قابل بکارگیری است. از جمله نتایج قابل توجه این تحقیق تاثیر قابل توجه زاویه قرارگیری الیاف و نحوه چیدمان لایه ها در توزیع دما در لمینیت است. بنابراین در هر کاربرد مهندسی با توجه به اهداف طراحی می توان با انتخاب ماده کامپوزیتی و جهت الیاف، توزیع مناسب دما را بدست آورد. برای مثال در صورتیکه هدف کاهش تنش حرارتی در لمینیت باشد می توان با انتخاب مناسب جهات الیاف، توزیع دما را در لمینیت یکنواخت تر و گرادیان دما را در آن کاهش داد.

در این تحقیق انتقال حرارت در لمینیت کامپوزیتی از جنس گرافیت/اپوکسی مورد بررسی قرار گرفت. در این لمینیت چنانچه در تمامی لایه ها زاویه الیاف صفر باشند پخش حرارتی بیشتر در جهت مماسی صورت می گیرد. در زاویه الیاف ۹۰ درجه نیز پخش حرارت در جهت محوری بهتر از سایر آرایش ها است. بنابراین در سایر آرایش های الیاف در لایه های لمینیت ها، توزیع دما حالتی ما بین حالت زاویه الیاف در لمینیت تک لایه ای صفر و ۹۰ درجه است. این موضوع ناشی از بزرگتر بودن ضریب هدایت در جهت الیاف نسبت به جهت عمود بر الیاف در کامپوزیت گرافیت / اپوکسی است. چنین نتیجه ای به سایر کامپوزیتهایی که در آنها  $k_{11} > k_{22}$  است، نیز قابل تعمیم است. همچنین در کامپوزیت هایی که در آنها  $k_{11} < k_{22}$  است، این موضوع به شکل برعکس است.

در این تحقیق تعدادی از نتایج تحلیلی برای حالت های خاص انتقال حرارت شامل مخزن جدار ضخیم، پین فین و لوله خنک کن راکتور هسته ای ارائه گردید که استفاده از آن ها برای ارزیابی صحت نتایج عددی و نیز آزمایشگاهی بسیار مفید است. بنابراین در حالت کلی بایستی گفت:

- به دلیل اعمال شرایط مرزی کلی، حل تحلیلی حاضر می تواند برای محدوده وسیعی از شرایط گرمایی در لوله ها، مخازن و پره ها بکار رود.
- هنگامی که زاویه الیاف ۹۰ درجه است، توزیع دما یکنواخت تر از سایر حالت ها است، اما هنگامی که زاویه الیاف صفر درجه است ماکزیمم و مینیمم دما در لایه ها کمتر است.

- برای سایر چیدمان های الیاف، توزیع دما بین حالتی قرار می گیرد که زاویه الیاف صفر و ۹۰ است.

## پیشنهادات جهت ادامه تحقیق

- بررسی انتقال حرارت در لمینیت های FGM
- استفاده از نتایج حاصل از این تحقیق بر شکست حرارتی لمینیت (جدایش لایه ها)
- بررسی انتقال حرارت در سایر مخازن کامپوزیتی نظیر مخازن کروی (مانند مخازن ذخیره گاز)
- ادامه تحقیق حاضر در جهت محاسبه انتقال حرارت در جداره موشک ها و راکت ها
- مطالعه انتقال حرارت در نانوکامپوزیت های استوانه ای که با روش لیتوگرافی تولید می شوند.

## الف- الگوریتم توماس بکار گرفته شده برای یک ماتریس پنج قطری

قبل از هر چیز تعاریف زیر به منظور اجتناب از پیچیدگی حل انجام شده است:

$$\begin{aligned}
 A1_0 &= I_0 \left( \frac{\lambda_n}{\mu_1} r_0 \right) & B1_0 &= K_0 \left( \frac{\lambda_n}{\mu_1} r_0 \right) \\
 A1_i &= I_0 \left( \frac{\lambda_n}{\mu_i} r_i \right) & C1_i &= \frac{\lambda_n}{\mu_i} I_1 \left( \frac{\lambda_n}{\mu_i} r_i \right) \\
 B1_i &= K_0 \left( \frac{\lambda_n}{\mu_i} r_i \right) & D1_i &= -\frac{\lambda_n}{\mu_i} K_1 \left( \frac{\lambda_n}{\mu_i} r_i \right) \\
 A2_i &= -I_0 \left( \frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} r_i \right) & C2_i &= -\frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} I_1 \left( \frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} r_i \right) \\
 B2_i &= -K_0 \left( \frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} r_i \right) & D2_i &= \frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} K_1 \left( \frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} r_i \right) \\
 A1_{n_i} &= I_0 \left( \frac{\lambda_n}{\mu_{n_i}} r_{n_i} \right) & B1_{n_i} &= K_0 \left( \frac{\lambda_n}{\mu_{n_i}} r_{n_i} \right)
 \end{aligned} \tag{الف-۱}$$

$$F1_i = W^{(i+1)}(r_i, n) - W^{(i)}(r_i, n).$$

$$E1_{i+1} = \left( \frac{\partial W^{(i+1)}(r_i, n)}{\partial r} - \frac{\partial W^{(i)}(r_i, n)}{\partial r} \right). \tag{الف-۲}$$

دستگاه معادلات بدست آمده در حالت ماتریسی به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{bmatrix}
 A1_0 & B1_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 A1_1 & B1_1 & A2_1 & B2_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 C1_1 & D1_1 & C2_1 & D2_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & A1_2 & B1_2 & A2_2 & B2_2 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & C1_2 & D1_2 & C2_2 & D2_2 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & A1_{n_i-2} & B1_{n_i-2} & A2_{n_i-2} & B2_{n_i-2} & 0 & 0 & b_n^{(n_i-2)} & F1_{n_i-2} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & C1_{n_i-2} & D1_{n_i-2} & C2_{n_i-2} & D2_{n_i-2} & 0 & 0 & a_n^{(n_i-1)} & E1_{n_i-1} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & A1_{n_i-1} & B1_{n_i-1} & A2_{n_i-1} & B2_{n_i-1} & b_n^{(n_i-1)} & F1_{n_i-1} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & C1_{n_i-1} & D1_{n_i-1} & C2_{n_i-1} & D2_{n_i-1} & a_n^{(n_i)} & E1_{n_i} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & A1_{n_i} & B1_{n_i} & b_n^{(n_i)} & F1_{n_i}
 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
 a_n^{(1)} \\
 b_n^{(1)} \\
 a_n^{(2)} \\
 b_n^{(2)} \\
 a_n^{(3)} \\
 \dots \\
 \dots \\
 b_n^{(n_i-2)} \\
 a_n^{(n_i-1)} \\
 b_n^{(n_i-1)} \\
 a_n^{(n_i)} \\
 b_n^{(n_i)}
 \end{bmatrix} \begin{bmatrix}
 E1_1 \\
 F1_1 \\
 E1_2 \\
 F1_2 \\
 E1_3 \\
 \dots \\
 \dots \\
 F1_{n_i-2} \\
 E1_{n_i-1} \\
 F1_{n_i-1} \\
 E1_{n_i} \\
 F1_{n_i}
 \end{bmatrix} \tag{الف-۲}$$

با توجه به ردیف دوم داریم:

$$a_n^{(1)} + B1'_1 b_n^{(1)} + A2'_1 a_n^{(2)} + B2'_1 b_n^{(2)} - F1'_1 = 0 \tag{الف-۳}$$

که در آن

$$B1'_1 = \frac{B1_1}{A1_1} \quad (\text{الف-۴-۱})$$

$$A2'_1 = \frac{A2_1}{A1_1} \quad (\text{الف-۴-۲})$$

$$B2'_1 = \frac{B2_1}{A1_1} \quad (\text{الف-۴-۳})$$

$$F1'_1 = \frac{F1_1}{A1_1} \quad (\text{الف-۴-۴})$$

و برای  $1 \leq i \leq n_i - 1$ :

$$b_n^{(i)} + C2'_i \cdot a_n^{(i+1)} + D2'_i \cdot b_n^{(i+1)} = 0. \quad (\text{الف-۵})$$

که در آن:

$$B1'_i = \frac{B1_i}{A1_i} \quad (\text{الف-۶-۱})$$

$$A2'_i = \frac{A2_i}{A1_i} \quad (\text{الف-۶-۲})$$

$$B2'_i = \frac{B2_i}{A1_i} \quad (\text{الف-۶-۳})$$

$$C2'_i = \frac{A1_i \cdot C2_i - C1_i \cdot A2'_i}{A1_i \cdot D1_i - C1_i \cdot B1_i} \quad (\text{الف-۶-۴})$$

$$D2'_i = \frac{A1_i \cdot D2_i - C1_i \cdot B2_i}{A1_i \cdot D1_i - C1_i \cdot B1_i} \quad (\text{الف-۶-۵})$$

و برای ردیف آخر

$$a_n^{(n_i)} + B1'_{n_i} \cdot b_n^{(n_i)} = F1'_{n_i}. \quad (\text{الف-۷})$$

که در آن

$$B1'_{n_i} = \frac{B1_{n_i}}{A1_{n_i}}. \quad (\text{الف-۸-۱})$$

$$F1'_{n_i} = \frac{F1_{n_i}}{A1_{n_i}}. \quad (\text{الف-۸-۲})$$

بنابراین دستگاه معادلات به صورت زیر در می آید:

$$\begin{bmatrix} A1_0 & B1_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_n^{(1)} \\ 1 & B1'_1 & A2'_1 & B2'_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_n^{(1)} \\ 0 & 1 & C2'_1 & D2'_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_n^{(2)} \\ 0 & 0 & 1 & B1'_2 & A2'_2 & B2'_2 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_n^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & C2'_2 & D2'_2 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_n^{(3)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & B1'_{n_i-2} & A2'_{n_i-2} & B2'_{n_i-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & b_n^{(n_i-2)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & C2'_{n_i-2} & D2'_{n_i-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_n^{(n_i-1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & B1'_{n_i-1} & A2'_{n_i-1} & B2'_{n_i-1} & 0 & 0 & b_n^{(n_i-1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & C2'_{n_i-1} & D2'_{n_i-1} & 0 & 0 & a_n^{(n_i)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & B1'_{n_i} & 0 & 0 & b_n^{(n_i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E1_1 \\ F1'_1 \\ E1'_2 \\ F1'_2 \\ E1'_3 \\ \dots \\ \dots \\ F1'_{n_i-2} \\ E1'_{n_i-1} \\ F1'_{n_i-1} \\ E1'_n \\ F1'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix} \quad (\text{الف-۹})$$

حال برای  $1 \leq i \leq n_i - 1$  در این دستگاه معادلات داریم:

$$\pi_i \cdot b_n^{(i-1)} + \chi_i \cdot a_n^{(i)} + b_n^{(i)} = E_i. \quad (\text{الف-۱۰-۱})$$

$$\gamma_{i-1} \cdot a_n^{(i-1)} + \psi_{i-1} \cdot b_n^{(i-1)} + a_n^{(i)} = F_{i-1}. \quad (\text{الف-۱۰-۲})$$

که در آن

$$\pi_i = \frac{-I_0 \left( \frac{\lambda_n}{\mu_i} r_i \right) K_1 \left( \frac{\lambda_n}{\mu_i} r_i \right) - I_1 \left( \frac{\lambda_n}{\mu_i} r_i \right) K_0 \left( \frac{\lambda_n}{\mu_i} r_i \right)}{\frac{\mu_i}{\mu_{i+1}} I_0 \left( \frac{\lambda_n}{\mu_i} r_i \right) K_1 \left( \frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} r_i \right) + I_1 \left( \frac{\lambda_n}{\mu_i} r_i \right) K_0 \left( \frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} r_i \right)} \quad (\text{الف-۱۱-۱})$$

$$\chi_i = \frac{-\frac{\mu_i}{\mu_{i+1}} I_0 \left( \frac{\lambda_n}{\mu_i} r_i \right) I_1 \left( \frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} r_i \right) + I_0 \left( \frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} r_i \right) I_1 \left( \frac{\lambda_n}{\mu_i} r_i \right)}{\frac{\mu_i}{\mu_{i+1}} I_0 \left( \frac{\lambda_n}{\mu_i} r_i \right) K_1 \left( \frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} r_i \right) + I_1 \left( \frac{\lambda_n}{\mu_i} r_i \right) K_0 \left( \frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} r_i \right)} \quad (\text{الف-۱۱-۲})$$

$$\gamma_i = \frac{I_0 \left( \frac{\lambda_n}{\mu_i} r_i \right)}{\chi_i \times K_0 \left( \frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} r_i \right) - I_0 \left( \frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} r_i \right)} \quad (\text{الف-۱۱-۳})$$

$$\psi_i = \frac{\pi_i \times K_0 \left( \frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} r_i \right) + K_0 \left( \frac{\lambda_n}{\mu_i} r_i \right)}{\chi_i \times K_0 \left( \frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} r_i \right) - I_0 \left( \frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} r_i \right)} \quad (\text{الف-۱۱-۴})$$

$$E_i = \pi_i \left[ \left( \frac{\partial w^{(i+1)}(r_i, n)}{\partial r} - \frac{\partial w^{(i)}(r_i, n)}{\partial r} \right) - \frac{\lambda_n}{\mu_i} (w^{(i+1)}(r_i, n) - w^{(i)}(r_i, n)) I_1 \left( \frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} r_i \right) \right] \quad (\text{الف-۱۱-۵})$$

$$F_i = \frac{E_i \times K_0 \left( \frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} r_i \right) - w^{(i+1)}(r_i, n) - w^{(i)}(r_i, n)}{\chi_i \times K_0 \left( \frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} r_i \right) - I_0 \left( \frac{\lambda_n}{\mu_{i+1}} r_i \right)} \quad (\text{الف-۱۱-۶})$$

و برای ردیف اول داریم:

$$\gamma_0 = \frac{A1_0}{B1_0}. \quad (\text{الف-۱۲-۱})$$

$$E_0 = \frac{E1}{B1_0}. \quad (\text{الف-۱۲-۲})$$

در این حالت دستگاه معادلات به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{bmatrix} \gamma_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_1 & \psi_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pi_2 & \chi_2 & 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_2 & \psi_2 & 1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi_3 & \chi_3 & 1 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & \gamma_{n_i-2} & \psi_{n_i-2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & \pi_{n_i-1} & \chi_{n_i-1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & \gamma_{n_i-1} & \psi_{n_i-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & \pi_{n_i} & \chi_{n_i} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & B1'_{n_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n^{(1)} \\ b_n^{(1)} \\ a_n^{(2)} \\ b_n^{(2)} \\ a_n^{(3)} \\ . \\ . \\ . \\ b_n^{(n_i-2)} \\ a_n^{(n_i-1)} \\ b_n^{(n_i-1)} \\ a_n^{(n_i)} \\ b_n^{(n_i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ F_1 \\ E_2 \\ F_2 \\ E_3 \\ . \\ . \\ . \\ F_{n_i-2} \\ E_{n_i-1} \\ F_{n_i-1} \\ E_{n_i} \\ F_{n_i} \end{bmatrix} \quad (\text{الف-۱۳})$$

برای ردیف آخر داریم:

$$\beta_n^{(n_i)} . a_n^{(n_i)} + b_n^{(n_i)} = N_n^{(n_i)}. \quad (\text{الف-۱۴})$$

که در آن

$$\beta_n^{(n_i)} = \frac{1}{B1'_{n_i}}. \quad (\text{الف-۱۵-۱})$$

$$N_n^{(n_i)} = \frac{F_{n_i}}{B1'_{n_i}}. \quad (\text{الف-۱۵-۲})$$

برای  $1 \leq i \leq n_i - 1$ :

$$\beta_n^{(i+1)} b_n^{(i)} + a_n^{(i)} = M_n^{(i+1)}. \quad (\text{الف-۱۶-۱})$$

$$\alpha_n^{(i)} a_n^{(i)} + b_n^{(i)} = N_n^{(i)}. \quad (\text{الف-۱۶-۲})$$

که

$$\beta_n^{(i+1)} = \frac{\pi_i}{\chi_i - \alpha_n^{(i+1)}} \quad (\text{الف-۱۷-۱})$$

$$M_n^{(i+1)} = \frac{E_i - N_n^{(i+1)}}{\chi_i - \alpha_n^{(i+1)}} \quad (\text{الف-۱۷-۲})$$

$$\alpha_n^{(i)} = \frac{\gamma_i}{\psi_i - \beta_n^{(i+1)}} \quad (\text{الف-۱۷-۳})$$

$$N_n^{(i)} = \frac{F_i - M_n^{(i+1)}}{\psi_i - \beta_n^{(i+1)}} \quad (\text{الف-۱۷-۴})$$

برای ردیف های اول و دوم داریم:

$$b_n^{(1)} = N_n^{(1)} - \alpha_n^{(1)} a_n^{(1)}. \quad (\text{الف-۱۸-۱})$$

$$\gamma_0 a_n^{(1)} + b_n^{(1)} = E_n. \quad (\text{الف-۱۸-۲})$$

$$a_n^{(1)} = M_n^{(1)}. \quad (\text{الف-۱۸-۳})$$

$$M_n^{(1)} = \frac{E_n - N_n^{(1)}}{\gamma_0 - \alpha_n^{(1)}} \quad (\text{الف-۱۸-۴})$$

و نهایتاً دستگاه معادلات به صورت زیر خواهد بود:



$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\alpha_n^{(1)} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \beta_n^{(2)} & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \alpha_n^{(2)} & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \beta_n^{(3)} & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \alpha_n^{(n_j-2)} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \beta_n^{(n_j-1)} & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \alpha_n^{(n_j-1)} & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & \beta_n^{(n_j)} & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_n^{(n_j)} & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
a_n^{(1)} \\
b_n^{(1)} \\
a_n^{(2)} \\
b_n^{(2)} \\
a_n^{(3)} \\
\vdots \\
\vdots \\
\vdots \\
b_n^{(n_j-2)} \\
a_n^{(n_j-1)} \\
b_n^{(n_j-1)} \\
a_n^{(n_j)} \\
b_n^{(n_j)}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
E_1 \\
F_1 \\
E_2 \\
F_2 \\
E_3 \\
\vdots \\
\vdots \\
\vdots \\
F_{n_j-2} \\
E_{n_j-1} \\
F_{n_j-1} \\
E_{n_j} \\
F_{n_j}
\end{bmatrix}$$

(الف-١٩)

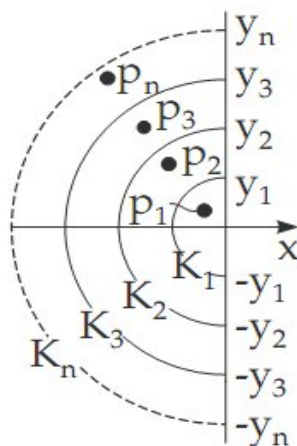
## ب- توابع مرومرفیک

اگر  $F(p)$  یک تابع مرومرفیک باشد (یعنی به صورت خارج قسمت دو تابع صحیح از دو تابع دارای بسط های سری توانی همگرا دلخواه که ریشه مشترک ندارند و همچنین بتوان آن ها را به صورت حاصل جمع یک تابع صحیح و توابع جزئی نوشت) آنگاه می توان تساوی زیر را نتیجه گرفت:

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{c-jy_n}^{c+jy_n} e^{ts} F(s) ds = \sum_{v=1}^n b_v e^{p_v t} - \frac{1}{2\pi j} \int_{(k_n)} e^{ts} F(s) ds. \quad (1-ب)$$

در اینجا  $p_v$  ( $v=1,2,\dots,n$ ) قطب های مرتبه اول تابع  $F(p)$  هستند،  $b_v$  مانده های مربوطه،  $y_n$  مقادیر معین و  $k_n$  منحنی های معین هستند، به عنوان مثال نصف دایره ها در جهت نشان داده شده در شکل (ب-۱). بنابراین حل  $f(t)$  به صورت رابطه (ب-۲) زیر بدست می آید:

$$f(t) = \sum_{v=1}^n b_v e^{p_v t}, \quad \text{if} \quad \frac{1}{2\pi j} \int_{(k_n)} e^{ts} F(s) ds \rightarrow 0 \quad (2-ب)$$



شکل (۵-۱): محل قرارگیری قطب ها

- Argyris J., Tenek L. and Oberg F. (1995), "A multilayer composite triangular element for steady-state conduction/convection/radiation heat transfer in complex shells", **Comput. Methods Appl. Mech. Eng.**, **120**, pp 271–301
- Arpaci V.S., (1966), "**Conduction Heat Transfer**", Addison-Wesley Publishing Company, USA
- Chao C.K., Che F.M. and Shen M.H. (2007), "An exact solution for thermal stresses in a three-phase composite cylinder under uniform heat flow", **Int. J. Solids and Structures**, **44**, pp 926-940
- Bahadur R. and Bar-Cohen. A. (2007), "Orthotropic thermal conductivity effect on cylindrical pin fin heat transfer". **Int. J. Heat and Mass Transfer** **50**, pp 1155-116
- Bronstein et I.N., Semendyayev K.A., Musiol G. and Muehlig H. (1998), "**Hand book of mathematic**", Springer, pp 124
- Carslaw H.S., Jaeger J.C. (1971), "**Conduction of heat in solids**" Oxford University Press, London, pp 158
- Cha Y.S., Minkowycz W.J. and Seol S.Y. (1995), "Transverse temperature distribution and heat generation rate in composite superconductors subjected to constant thermal disturbance", **Int. Comm. Heat Mass Transfer**, **22**, 4, pp 461-474
- Chang Y.P. and Tsou C.H. (1977), "Heat conduction in an anisotropic medium homogeneous in cylindrical coordinates, steady-state", **J. Heat Transfer** **99C**, pp 132–134
- Chang Y.P. and Tsou C.H. (1977), "Heat conduction in an anisotropic medium homogeneous in cylindrical coordinates, unsteady state", **J. Heat Transfer.**, **99C**, pp 41–47
- Chatterjee J., Henry D.P., Ma F. and Banerjee P.K. (2008), "An efficient BEM formulation for 3-dimensional steady-state heat conduction analysis of composites", **Int. J. Heat Mass Transfer**, **51**, pp 1439–1452
- ChingMa C.h. and WenChang S.h. (2004), "Analytical exact solutions of heat conduction problems for anisotropic multilayered media", **Int. J. Heat and Mass Transfer**, **47**, pp 1643-1655
- Chiu C.H., Cheng C.C., Hwan C.L. and Tsai K.H. (2006), "Cylindrical orthotropic thermal conductivity of spiral woven composites. Part II: a mathematical model for their effective transverse thermal conductivity", **Polym. Polym. Compos.**, **14**,4, pp

- Chiu C.H., Hwan C.L., Cheng C.C., Tsai K.H. (2007), “Cylindrical orthotropic thermal conductivity of spiral woven composites. Part III: an estimation of their thermal properties”, **Polym. Polym. Compos.**, **15, 3**, pp 167–182
- Fung Y.C. (1965), “**Foundation of solid mechanics**”, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, pp 148
- Gibson, R.F. (2008), “**Principle of Composite Materials Mechanics**”, Second Edition Marcel Dekker Inc., pp 189
- Golovchan V.T. and Artemenko A.G. (2004), “heat conduction of orthogonally reinforced composite material”, **J. Eng. Phys. Thermo Phys.**, **51,2**, pp 944–949
- Greengard L. and Lee J.Y. (2006), “Electrostatics and heat conduction in high contrast composite materials”, **J. Comput. Phys.**, **21,1**, pp 64–76
- Guo Z.S. (2004), “Temperature distribution of thick thermo set composites”, **J. Model Simul. Mater Sci. Eng.**, **12**, pp 443–452
- Halpin J.C. (1992), “**Primer on Composite Materials Analysis**”, CRC Press, pp 134
- Hassan N., Thompson J.E., Batra R.C., Hulcher A.B., Song X and Loos A.C. (2005), “A Heat Transfer Analysis of the Fiber Placement Composite Manufacturing Process”, **Journal of Reinforced Plastics and Composites**, **24,8** pp 869-888
- Herakovich C.T. (1998), “**Mechanics of fibrous composites**”, Wiley, New York
- Haji-Sheikh A., Beck J.V. and Agonater D. (2003), “Steady-state heat conduction in multi-layer bodies”, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, **46**, pp 2363-2379
- Hsien M.H. and Ma Ch.Ch. (2002), “Analytical investigations for heat conduction problems in anisotropic thin-layer media with embedded heat sources”, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, **45**, pp 4117-4132
- Iyengar V. (1995), “Transient thermal conduction in rectangular fiber reinforced composite laminates”, **Adv. Compos. Mater**, **4,4**, pp 327–342
- Johansson B.T. and Lesnic D. (2009), “A method of fundamental solutions for transient heat conduction in layered materials”, **Engineering Analysis with Boundary Elements**, **33**, pp 1362-1367
- Karageorghis A. and Lesnic D. (2008), “Steady-state nonlinear heat conduction in composite materials”, **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, **197**, pp 3122-3137

- Kayhani M.H., Shariati M., Nourozi M., Karimi Demneh M. (2009), “Exact solution of conductive heat transfer in cylindrical composite laminate”, **Int. J. Heat and Mass Transfer** , in press
- Kulkarani M.R. and Brady R.P. (1997), “A MODEL OF GLOBAL THERMAL CONDUCTIVITY IN LAMINATED CARBONCARBON COMPOSITES”, **Composites science and Technology**, **57**, pp 277-285
- Lu X., Tervola P. and Viljanen M. (2006), “Transient Analytical Solution to Heat Conduction in Composite Circular Cylinder”, **Int. J. Heat Mass Transf.**, **49**, pp 341–348
- Lu X., Tervola P. and Viljanen M. (2006), “Transient Analytical Solution to Heat Conduction in Multi-Dimensional Composite Cylinder Slab”, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, **49**, pp 1107-1114
- Mulholland G.P. (1974), “Diffusion through laminated orthotropic cylinders”, **Tokyo In Proceeding of the 5th international heat transfer conference**, pp 250–254
- Myint-U T., Debnath L. (2007), “**Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers**”. Birkhauser Boston
- Newnham P., Abrate S. (1993), “Finite Element Analysis of Heat Transfer in Anisotropic Solids: Application to Manufacturing Problems”, **Journal of Reinforced Composites and Plastics**, **12,1**, pp 854-864
- Noor A.K., Burton W.S. (1990), Center for computational structures technology, University of Virginia, NASA Langley Research Center, and Hampton, VA 23665
- Nye J.F. (1957), “**Physical properties of crystals**”, Clarendon Press, London, pp 309
- Onyejekwe O.O. (2002), “Heat Conduction in composite media: a boundary integral approach”, **Computer & Chemical Engineering**, **26**, pp 1621-1632
- Oseloka O. (2002), “Heat Conduction in Composite Media: A Boundary Integral Approach”, **Journal of Computers & Chemical Engineering**, **26,1**, pp 1621-1632
- Ozisik M.N. (1993), “**Heat conduction**”, Wiley, New York, pp 203
- Ozisik M.N. and Shouman S.M. (1980), “Transient heat conduction in an anisotropic medium in cylindrical coordinates”, **J. Franklin Inst.**, **309**, pp 457–472

- Powers J.M. (2004), “On the necessity of positive semi-definite conductivity and Onsager reciprocity in modeling heat conduction in anisotropic media”, **J. Heat Transf. Trans. Asme.**, **126,5**, pp **670–675**
- Roberts N.A., Walker D.G. and Li D.Y. (2008), “Molecular dynamics simulation of thermal conductivity of nanocrystalline composite films”, **Int. J. Heat and Mass Transfer**, pp **170-175**
- Pradeep V. and Ganesan N. (2008), “Thermal buckling and vibration behavior of multi-layer rectangular viscoelastic sandwich plates”, **Journal of Sound and Vibration**, **310**, pp **169-183**
- Sadowski T., Ataya S. and Nakonieczny K. (2008), “Thermal analysis of layered FGM cylindrical plates subjected to sudden cooling process at one side–Comparison of two applied methods, for problem solution”, **Computational Materials Science**, **in press**
- Shi-qiang D. and Jia-chan L. (2005), “Homogenized equations for steady heat conduction in composite materials with dilutely distributed impurities”, **J. Appl. Math. Mech.**, **4,2**, pp **167–173**
- Singh S., Jain P.K. and Rizwan-uddin (2008), “Analytical solution to transient heat conduction in polar coordinates with multiple layers in radial direction”, **Int. J. Thermal Sciences**, **47**, pp **261–273**
- Sun Y., Wichman I.S. (2004), “On Transient Heat Conduction in a One-Dimensional Composite Slab”, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, **47,1**, pp **1555-1559**
- Sunao S., Takashi I. (1999), “Numerical analysis of heat conduction effect corresponding to infrared stress measurements in multilamina CFRP plates”, **Adv. Compos. Mater**, **8,3**, pp **269–279**
- Tarn J.Q. (2001), “Exact solutions for functionally graded anisotropic cylinders subjected to thermal and mechanical loads”, **Int. J. Solids Struct.**, **38**, pp **8189–8206**
- Tarn J.Q. (2002), “state space formalism for anisotropic elasticity. Part II: cylindrical anisotropy”, **Int. J. Solids Struct.**, **39**, pp **5157–5172**
- Tarn J.Q. and Wang Y.M. (2003), “Heat conduction in a cylindrically anisotropic tube of a functionally graded material”, **Chin J. Mech.**, **19**, pp **365–372**
- Tarn J.Q. and Wang Y.M. (2004), “End effects of heat conduction in circular cylinders of functionally graded materials and laminated composites”, **Inter. J. Heat Mass**

**Transfer** ,47, pp 5741–5747

Touloukian Y.S. and Ho C.Y. (1972), “**Thermo physical Properties of Matter**”, Plenum Press, Vol.2, Thermal Conductivity of Nonmetallic Solids, New York, pp 740

Wooster W.A. (1957), “**A textbook in crystal physics**”. Cambridge University Press, London, pp 455

Yvonnet J., He Q.C. and Toulemonde C. (2009), “Numerical modeling of the effective conductivities of composites with arbitrarily shaped inclusions and highly conducting interface”, **Composites Science and Technology (in press)**

Zhang J., Tanaka M. and Matsumoto T. (2004), “A simplified approach for heat conduction analysis of CNT-based nano-composites”, **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, 193, pp 5597-5609

## **Abstract**

In this thesis, an exact solution for conductive heat transfer in cylindrical composite laminates is presented. This analytical solution can be used to analyze the conductive heat transfer, thermal stresses and strains in composite pipes and vessels. The fibers are wound around the cylinder and the direction of fibers in each lamina can be differed from another layers. we focus on axisymmetric heat transfer in cylindrical composite laminates by considering the heat conduction in longitudinal and radial dimensions( $r, z$ ). This analytical solution is also obtained for general linear thermal boundary conditions which covers combined effect of the heat conduction, convection and radiation at boundaries. Finding the most generalized analytical solution based on the complicated boundary conditions is one of the main innovation of current work. For solving the steady state problem, an appropriate Fourier transformation has been derived using the Sturm-Liouville theorem. We used this Fourier transformation to change the partial differential equation of heat transfer in cylindrical composite laminates to an ordinary equation. Due to the difference of the fibers direction in each layer, a set of equations of Fourier series coefficients is obtained based on the boundary conditions at inner and outer of the cylindrical laminate and temperature and heat flux continuity at boundaries located between the layers. The solution of these equations is obtained using the recessive Thomas algorithm. In other to solve the problem in unsteady state, we applied the Laplace operator on energy equation and then use the Sturm-Liouville theorem to achieve the solution of obtained equation. Regarding to complicated achieved integral, We use a method named Meromorphic Function to obtain the inverse Laplace transformation.