

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک
گروه طراحی کاربردی

حلّ تحلیلی و عددی استوانه‌های جازنی شده با دو لایه‌ی
همگن و ناهمگن FGM تحت بارگذاری فشاری و چرخشی

نگارنده : احسان ضامنی

استاد راهنما :

دکتر مهدی قنّاد کهن‌تویی

پایان‌نامه جهت اخذ درجه‌ی کارشناسی ارشد

آبان ۹۷

تقدیم به...

مرحوم پدر عزیزم و مادر مهربانم

به پاس آنچه از وصف ایشان است در کلام من ننگبند

به پاس آنکه هزار بار ترک برداشتن و یک بار دم از سنگت نزدن

من از شما من شدم با هستی ام از هستی شماست

بیای خوبم روحت شاد و مادر مهربانم سایه ات روی سر...

پاسکزاری

امام صادق (ع) می فرمایند:

«کمترین پاسکزاری این است که انسان نعمت را از خدا بداند و جز او علتی برای آن نداند و نیز به آنچه خداوند

عطایش کرده، خرسند باشد و با نعمت او مرتکب گناه وی نشود و نعمت خدا را وسیله مخالفت با امر و نهی او قرار ندهد».

سپاس من از آن خدایی است که در تمامی مراحل زندگی ام لطف حضورش را از من دریغ نکرد.

استاد گران بایه ام، جناب دکتر مهدی قناده کهنوتی، نمی توانم معنایی بالاتر از تقدیر و تشکر بر زبانم جاری سازم و صمیمانه

از تمامی زحمات و الطافی که در حق بنده روا داشتید، پاسکزارم.

تعهدنامه

اینجانب احسان ضامنی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی طراحی کاربردی دانشکده مکانیک و مکاترونیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده رساله با عنوان **حلّ تحلیلی و عددی استوانه‌های جازنی‌شده با دو لایه‌ی همگن و ناهمگن FGM تحت بارگذاری فشاری و چرخشی** تحت راهنمایی دکتر مهدی قنّاد کهتوئی متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و **Shahrood University of Technology** به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده

پوسته‌ها یکی از پرکاربردترین سازه‌های مهندسی به‌شمار می‌روند. تحلیل و بررسی رفتار این سازه‌ها تحت بارگذاری‌های مختلف، یکی از مسائل مهم مهندسی می‌باشد که علاقه‌مندان و محققان زیادی را به سمت خود کشیده است. سازه‌های مختلف مهندسی از جمله کشتی، هواپیما، زیردریایی و موشک، عمدتاً به دلیل کاربردهایشان تحت بارگذاری مکانیکی قرار می‌گیرند. بنابراین طراحی درست پوسته‌ها، مستلزم دانستن اطلاعات دقیق در مورد تغییر شکل و توزیع تنش در نقاط مختلف ورق به‌ویژه در اطراف گشودگی است. در تحقیق حاضر، به کمک تئوری الاستیسیته مستوی، حلّ تحلیلی و عددی استوانه‌های جازنی‌شده دو لایه‌ی همگن و ناهمگن FGM تحت بارگذاری فشاری و چرخشی در حالت تنش صفحه‌ای ارائه می‌شود. بارگذاری به‌صورت ترکیبی از بار چرخشی و فشاری است؛ خواص ماده به‌صورت غیر خطی نسبت به شعاع تغییر می‌کند و نسبت پواسون ثابت فرض می‌شود. برای به‌دست آوردن جابه‌جایی شعاعی، از معادله کوشی-اویلر و هم‌چنین روش تغییر پارامترها برای حلّ معادله تعادل استفاده شده است. با جایگزینی تابع جابه‌جایی در معادله‌های ساختاری، تنش‌های شعاعی، محیطی به‌دست می‌آیند. مقادیر در این تحقیق دل‌خواه انتخاب می‌شوند تا تأثیر ناهمگنی را در توزیع جابه‌جایی و تنش‌ها نشان دهند. از روش اجزای محدود برای راستی‌سنجی نتایج حلّ تحلیلی، در تمام حالات بارگذاری برای پوسته ناهمگن استفاده شده است.

کلیدواژگان: استوانه‌های جازنی‌شده، استوانه FG، تئوری الاستیسیته‌ی مستوی، حلّ تحلیلی،

حلّ اجزای محدود.

فهرست مطالب

صفحه	عنوان
	فصل ۱: مروری بر روش‌های تحلیل پوسته‌ها
۲	۱-۱ مقدمه
۲	۲-۱ دسته‌بندی پوسته‌ها
۴	۳-۱ تئوری پوسته‌های نازک
۶	۱-۳-۱ تئوری غشایی
۶	۲-۳-۱ تئوری خمشی
۷	۴-۱ تئوری پوسته‌های ضخیم
۸	۱-۴-۱ تئوری الاستیسیته‌ی خطی
۹	۵-۱ مقدمه‌ای بر مواد ناهمگن
۹	۱-۵-۱ تاریخچه‌ی مواد ناهمگن
۱۲	۲-۵-۱ مدل‌سازی ریاضی مواد ناهمگن
۱۳	۶-۱ پیشینه‌ی تحقیق
۱۷	۱-۶-۱ جازنی فشاری
۱۸	۲-۶-۱ استوانه‌ی جازنی‌شده
۲۰	۷-۱ جمع‌بندی

فصل ۲: حلّ تحلیلی استوانه‌های جازنی‌شده با دو لایه‌ی همگن تحت بارگذاری

فشار

- ۲۴ ۱-۲ مقدمه
- ۲۴ ۲-۲ روابط اساسی
- ۲۵ ۱-۲-۲ معادلات تعادل تنش
- ۲۵ ۲-۲-۲ روابط سینماتیک (روابط کرنش-جابجایی)
- ۲۶ ۳-۲-۲ روابط ساختاری (روابط تنش-کرنش)
- ۲۷ ۴-۲-۲ مسائل متقارن محوری
- ۲۸ ۵-۲-۲ تئوری الاستیسیته‌ی مستوی (PET)
- ۲۹ ۶-۲-۲ استوانه با دو سر باز (تنش صفحه‌ای)
- ۲۹ ۷-۲-۲ استوانه با دو سر بسته (کرنش صفحه‌ای)
- ۳۰ ۸-۲-۲ تنش مؤثر
- ۳۰ ۳-۲ تحلیل استوانه‌های همگن تحت فشار
- ۳۱ ۱-۳-۲ حل الاستیک استوانه‌های دو لایه‌ی همگن تحت فشار داخلی
- ۳۳ ۲-۳-۲ حلّ عددی استوانه‌های دو لایه‌ی همگن تحت فشار داخلی
- ۳۴ ۴-۲ مطالعه‌ی موردی و مقایسه‌ی نتایج
- ۳۵ ۵-۲ بارگذاری ناشی از فشار جازنی برای لایه‌های فولاد-فولاد
- ۳۷ ۱-۵-۲ بارگذاری ناشی از فشار جازنی برای لایه‌های آلومینیم-آلومینیم
- ۳۸ ۲-۵-۲ بارگذاری ناشی از فشار جازنی برای لایه‌های فولاد-آلومینیم

- ۴۰ ۳-۵-۲ بارگذاری ناشی از فشار جازنی برای لایه‌های آلومینیم- فولاد
- ۴۲ ۴-۵-۲ استوانه‌های جازنی شده‌ی دو لایه‌ی همگن (فولاد- فولاد) تحت بارگذاری فشار داخلی
- ۴۴ ۵-۵-۲ استوانه‌های جازنی شده‌ی دو لایه‌ی همگن (آلومینیم- آلومینیم) تحت بارگذاری فشار داخلی
- ۴۶ ۶-۵-۲ استوانه‌های جازنی شده‌ی دو لایه‌ی همگن (فولاد- آلومینیم) تحت بارگذاری فشار داخلی
- ۴۷ ۷-۵-۲ استوانه‌های جازنی شده‌ی دو لایه‌ی همگن (آلومینیم- فولاد) تحت بارگذاری فشار داخلی
- ۴۹ ۶-۲ تعیین شعاع و فشار بهینه‌ی فرایند جازنی برای استوانه‌های دو لایه‌ی هم جنس
- ۵۱ ۷-۲ جمع‌بندی و نتیجه‌گیری
- ۵۱ ۱-۷-۲ جازنی فشاری
- ۵۱ ۲-۷-۲ تحت بارگذاری فشار جازنی و فشار داخلی

فصل ۳: حلّ تحلیلی استوانه‌های جازنی شده با دو لایه‌ی همگن و ناهمگن FGM

تحت بارگذاری فشاری

- ۵۴ ۱-۳ مقدمه
- ۵۴ ۲-۳ روابط اساسی
- ۵۴ ۱-۲-۳ تحلیل استوانه‌های جازنی شده با دو لایه‌ی همگن و ناهمگن تحت فشار داخلی
- ۵۵ ۲-۲-۳ حلّ الاستیک استوانه‌های جازنی شده با دو لایه‌ی همگن و ناهمگن
- ۵۸ ۳-۳ حلّ عددی استوانه‌های جازنی شده با دو لایه‌ی همگن و ناهمگن تحت فشار داخلی
- ۵۹ ۴-۳ مطالعه‌ی موردی و مقایسه‌ی نتایج
- ۵۹ ۱-۴-۳ جازنی فشاری همگن (فولاد)- ناهمگن

- ۶۲ ۲-۴-۳ جازنی فشاری همگن (آلومینیوم)-ناهمگن
- ۶۴ ۳-۴-۳ جازنی فشاری ناهمگن-همگن (فولاد)
- ۶۷ ۴-۴-۳ جازنی فشاری ناهمگن-همگن (آلومینیوم)
- ۶۸ ۵-۴-۳ استوانه‌های جازنی شده‌ی دو لایه‌ی همگن (فولاد)-ناهمگن تحت بارگذاری فشار داخلی
- ۷۱ ۶-۴-۳ استوانه‌های جازنی شده‌ی دو لایه‌ی همگن (آلومینیوم)-ناهمگن تحت بارگذاری فشار داخلی
- ۷۴ ۷-۴-۳ استوانه‌های جازنی شده‌ی دو لایه‌ی ناهمگن-همگن (فولاد) تحت بارگذاری فشار داخلی
- ۷۶ ۸-۴-۳ استوانه‌های جازنی شده‌ی دو لایه‌ی ناهمگن-همگن (آلومینیوم) تحت بارگذاری فشار داخلی
- ۷۷ ۵-۳ جمع‌بندی و نتیجه‌گیری
- ۷۷ ۱-۵-۳ استوانه‌ی دو لایه‌ی همگن-ناهمگن
- ۷۸ ۲-۵-۳ استوانه‌ی دو لایه‌ی ناهمگن-همگن

فصل ۴: حلّ تحلیلی استوانه‌های جازنی شده با دو لایه‌ی همگن و ناهمگن FGM

تحت بارگذاری فشاری و چرخشی

- ۸۰ ۱-۴ مقدمه
- ۸۰ ۲-۴ تحلیل استوانه‌های ناهمگن چرخان تحت فشار
- ۸۲ ۱-۲-۴ حلّ الاستیک استوانه‌های جازنی شده دو لایه‌ی همگن و ناهمگن چرخان تحت فشار
- ۳-۴ حلّ عددی استوانه‌های جازنی شده با دو لایه‌ی همگن و ناهمگن تحت بارگذاری فشار داخلی
- ۸۷ و چرخش
- ۸۷ ۴-۴ مطالعه‌ی موردی و مقایسه‌ی نتایج

۸۸ ۱-۴-۴ استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی همگن و ناهمگن فولاد تحت فشار و چرخش

۲-۴-۴ استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی همگن (آلومینیوم)-ناهمگن تحت بارگذاری فشاری و

۹۲ چرخشی

۹۵ ۵-۴ جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

فصل ۵: جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

۹۸ ۱-۵ مقدمه

۹۸ ۲-۵ جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

۱۰۱ ۳-۵ پیشنهادهای

۱۰۳ مراجع

فهرست جداول

۹۵

جدول ۱-۴ سرعت جدایش استوانه‌ها

فهرست شکل‌ها و نمودارها

- شکل ۱-۱ نمای مقطع استخوان ۱۰
- شکل ۲-۱ تغییرات خواص در مواد مختلف ۱۲
- شکل ۱-۲ مقطع استوانه‌ی جدارضخیم دو لایه‌ی همگن تحت فشار داخلی ۳۱
- شکل ۲-۲ توزیع جابه‌جایی شعاعی برای استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی همگن فولاد-فولاد ۳۵
- شکل ۳-۲ توزیع تنش شعاعی برای استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی همگن فولاد-فولاد ۳۵
- شکل ۴-۲ توزیع تنش محیطی برای استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی همگن فولاد-فولاد ۳۶
- شکل ۵-۲ جابه‌جایی شعاعی برای استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی همگن آلومینیم-آلومینیم ۳۷
- شکل ۶-۲ تنش شعاعی برای استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی همگن آلومینیم-آلومینیم ۳۸
- شکل ۷-۲ تنش محیطی برای استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی همگن آلومینیم-آلومینیم ۳۸
- شکل ۸-۲ جابه‌جایی شعاعی برای استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی همگن فولاد-آلومینیم ۳۹
- شکل ۹-۲ تنش شعاعی برای استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی همگن فولاد-آلومینیم ۳۹
- شکل ۱۰-۲ تنش محیطی برای استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی همگن فولاد-آلومینیم ۴۰
- شکل ۱۱-۲ جابه‌جایی شعاعی برای استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی همگن آلومینیم-فولاد ۴۰
- شکل ۱۲-۲ تنش شعاعی برای استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی همگن آلومینیم-فولاد ۴۱
- شکل ۱۳-۲ تنش محیطی برای استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی همگن آلومینیم-فولاد ۴۱
- شکل ۱۴-۲ جابه‌جایی شعاعی استوانه‌ی تک لایه‌ی فولاد و دو لایه‌ی همگن فولاد-فولاد تحت بارگذاری فشار داخلی ۴۳

- شکل ۱۵-۲ تنش شعاعی برای استوانه‌ی تک لایه و دو لایه‌ی همگن فولاد-فولاد تحت بارگذاری فشار داخلی ۴۳
- شکل ۱۶-۲ تنش محیطی برای استوانه‌ی تک لایه و دو لایه‌ی همگن فولاد-فولاد تحت بارگذاری فشار داخلی ۴۴
- شکل ۱۷-۲ جابه‌جایی شعاعی استوانه تک لایه و دو لایه‌ی همگن آلومینیم-آلومینیم تحت بارگذاری فشار داخلی ۴۴
- شکل ۱۸-۲ تنش شعاعی برای استوانه‌ی تک لایه و دو لایه‌ی همگن آلومینیم-آلومینیم تحت بارگذاری فشار داخلی ۴۵
- شکل ۱۹-۲ تنش محیطی برای استوانه‌ی تک لایه و دو لایه‌ی همگن آلومینیم-آلومینیم تحت بارگذاری فشار داخلی ۴۵
- شکل ۲۰-۲ جابه‌جایی شعاعی استوانه‌های تک لایه و دو لایه‌ی همگن فولاد-آلومینیم تحت بارگذاری فشار داخلی ۴۶
- شکل ۲۱-۲ تنش شعاعی برای استوانه‌ی تک لایه و دو لایه‌ی همگن فولاد-آلومینیم تحت بارگذاری فشار داخلی ۴۶
- شکل ۲۲-۲ تنش محیطی برای استوانه‌ی تک لایه و دو لایه‌ی همگن فولاد-آلومینیم تحت بارگذاری فشار داخلی ۴۷
- شکل ۲۳-۲ جابه‌جایی شعاعی استوانه‌های تک لایه و دو لایه‌ی همگن آلومینیم-فولاد تحت بارگذاری فشار داخلی ۴۷
- شکل ۲۴-۲ تنش شعاعی برای استوانه‌ی تک لایه و دو لایه‌ی همگن آلومینیم-فولاد تحت بارگذاری فشار داخلی ۴۸

- شکل ۲-۲۵ تنش محیطی برای استوانه‌ی تک لایه و دو لایه‌ی همگن آلومینیم-فولاد تحت بارگذاری فشار داخلی
- ۴۸
- شکل ۳-۱ مقطع استوانه‌ی جدار ضخیم دو لایه‌ی همگن-ناهمگن FGM تحت فشار داخلی
- ۵۵
- شکل ۳-۲ توزیع جابه‌جایی شعاعی استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی همگن (فولاد)-ناهمگن
- ۶۱
- شکل ۳-۳ توزیع تنش شعاعی در استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی همگن (فولاد)-ناهمگن
- ۶۱
- شکل ۳-۴ توزیع تنش محیطی در استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی همگن (فولاد)-ناهمگن
- ۶۲
- شکل ۳-۵ توزیع جابه‌جایی شعاعی استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی همگن آلومینیم-ناهمگن
- ۶۳
- شکل ۳-۶ توزیع تنش شعاعی در استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی همگن (آلومینیم)-ناهمگن
- ۶۳
- شکل ۳-۷ توزیع تنش محیطی در استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی همگن (آلومینیم)-ناهمگن
- ۶۴
- شکل ۳-۸ توزیع جابه‌جایی شعاعی استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی ناهمگن-همگن (فولاد)
- ۶۵
- شکل ۳-۹ توزیع تنش شعاعی در استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی ناهمگن-همگن (فولاد)
- ۶۶
- شکل ۳-۱۰ توزیع تنش محیطی در استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی ناهمگن-همگن (فولاد)
- ۶۶
- شکل ۳-۱۱ توزیع جابه‌جایی شعاعی استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی ناهمگن-همگن (آلومینیم)
- ۶۷
- شکل ۳-۱۲ توزیع تنش شعاعی در استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی ناهمگن-همگن (آلومینیم)
- ۶۸
- شکل ۳-۱۳ توزیع تنش محیطی در استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی ناهمگن-همگن

شکل ۳-۱۴ توزیع جابه‌جایی شعاعی استوانه‌های جازنی‌شده دو لایه همگن (فولاد)-ناهمگن

تحت فشار داخلی ۷۰

شکل ۳-۱۵ توزیع تنش شعاعی در استوانه‌های جازنی‌شده دو لایه‌ی همگن (فولاد)-ناهمگن

تحت فشار داخلی ۷۰

شکل ۳-۱۶ توزیع تنش محیطی در استوانه‌های جازنی‌شده دو لایه همگن (فولاد)-ناهمگن

تحت فشار داخلی ۷۱

شکل ۳-۱۷ توزیع جابه‌جایی شعاعی استوانه‌های جازنی‌شده دو لایه همگن (آلومینیم)-ناهمگن

تحت فشار داخلی ۷۳

شکل ۳-۱۸ توزیع تنش شعاعی در استوانه‌های جازنی‌شده دو لایه‌ی همگن (آلومینیم)-

ناهمگن تحت فشار داخلی ۷۳

شکل ۳-۱۹ توزیع تنش محیطی در استوانه‌های جازنی‌شده دو لایه همگن (آلومینیم)-

ناهمگن تحت فشار داخلی ۷۴

شکل ۳-۲۰ توزیع جابه‌جایی شعاعی استوانه‌های جازنی‌شده دو لایه ناهمگن-همگن (فولاد)

تحت فشار داخلی ۷۴

شکل ۳-۲۱ توزیع تنش شعاعی در استوانه‌های جازنی‌شده دو لایه‌ی ناهمگن-همگن (فولاد)

تحت فشار داخلی ۷۵

شکل ۳-۲۲ توزیع تنش محیطی در استوانه‌های جازنی‌شده دو لایه ناهمگن-همگن (فولاد)

تحت فشار داخلی ۷۵

شکل ۳-۲۳ توزیع جابه‌جایی شعاعی استوانه‌های جازنی‌شده دو لایه ناهمگن-همگن (آلومینیم)

- تحت فشار داخلی ۷۶
- شکل ۳-۲۴ توزیع تنش شعاعی در استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی ناهمگن-همگن
- ۷۶ (آلومینیوم) تحت فشار داخلی
- شکل ۳-۲۵ توزیع تنش محیطی در استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی ناهمگن-همگن
- ۷۷ (آلومینیوم) تحت فشار داخلی
- شکل ۴-۱ مقطع استوانه‌ی دو لایه‌ی همگن-ناهمگن FGM تحت فشار داخلی و چرخش ۸۱
- شکل ۴-۲ توزیع جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی همگن (فولاد)-
- ۸۹ ناهمگن تحت فشار و چرخش
- شکل ۴-۳ توزیع تنش شعاعی در استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی همگن (فولاد)-ناهمگن
- ۹۰ تحت فشار و چرخش
- شکل ۴-۴ توزیع تنش محیطی در استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی همگن (فولاد)-ناهمگن
- ۹۱ تحت فشار و چرخش
- شکل ۴-۵ توزیع تنش فن‌میزس در استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی همگن (فولاد)-ناهمگن
- ۹۲ تحت فشار و چرخش
- شکل ۴-۶ توزیع جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی همگن (آلومینیوم)-
- ۹۳ ناهمگن تحت فشار و چرخش
- شکل ۴-۷ توزیع تنش شعاعی در استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی همگن (آلومینیوم)-
- ۹۳ ناهمگن تحت فشار و چرخش
- شکل ۴-۸ توزیع تنش محیطی در استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی همگن (آلومینیوم)-
- ۹۴ ناهمگن تحت فشار و چرخش

شکل ۴-۹ توزیع تنش فن میزس در استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی همگن (آلومینیوم)-

۹۴

ناهمگن تحت فشار و چرخش

فهرست علائم و اختصارات

u_r	جابه جایی شعاعی
u_θ	جابه جایی محیطی
r, θ, x	محورهای مختصات در دستگاه استوانه‌ای
$\epsilon_r, \epsilon_\theta, \epsilon_x$	کرنش‌های شعاعی، طولی و محیطی
λ, μ	ضرایب لامه
ν	نسبت پواسون
E	مدول الاستیسیته
r_i, a	شعاع داخلی
r_o, b	شعاع خارجی
r_m, c	شعاع فصل مشترک
n_i	ضریب ناهمگنی
p_c	فشار جازنی
p_i	فشار داخلی
ρ	چگالی
ω	سرعت دورانی
$\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_x$	تنش‌های شعاعی، محیطی و طولی
G	مدول برشی

فصل ۱: مروری بر روش‌های تحلیل پوسته‌ها

۱-۱ مقدمه

پوسته‌ها^۱ یا سازه‌های پوسته‌ای، از فراوان‌ترین و متنوع‌ترین انواع سازه‌ها هستند که در دنیای فیزیکی اطراف ما پیدا می‌شوند. پوسته‌ها در اشکال طبیعی مانند جمجمه‌ی سر انسان‌ها و حیوانات و نیز اجزای محافظ اندام جانوری مانند لاک و صدف مشاهده می‌شوند؛ در اشکال مصنوعی در صنایع مختلف: ساختمانی، نیروگاهی، خودروسازی، نظامی، هوا و فضا همانند: سقف‌ها، لوله‌ها، بدنه‌ی خودروها و هواپیماها، پرتابه‌ها و پرتاب‌کننده‌ها، موشک‌ها و سفینه‌ها تولید می‌شوند.

پوسته‌ها به‌طور کلی، سازه‌های خمیده هستند که از جهت کیفیت رفتاری و مقاومت در برابر نیروها و لنگرهای وارد شده، در بالاترین مرتبه‌ی تکاملی سازه‌ها قرار می‌گیرند. به تناسب مطلوبیت رفتاری، پیچیدگی تحلیل آن‌ها نیز حائز اهمیت می‌باشد. روش‌های تحلیلی تقریبی موجود برای تحلیل پوسته‌ها براساس فرضیاتی است که تئوری پوسته‌ها را تشکیل می‌دهند. از میان انواع پوسته‌ها، پوسته‌های استوانه‌ای به دلیل فراوانی کاربرد، از اهمیت ویژه‌تری برخوردارند. مطالعه‌ی رفتار این‌گونه پوسته‌ها از گذشته‌ی نه چندان دور تا به امروز مورد توجه محققان بوده و همچنان ادامه دارد. دانش-پژوهان پیگیر اعمال تغییرات بر روی هندسه و ماده‌ی پوسته‌ها بوده‌اند که بتوانند مقاومت آن‌ها را در برابر تنش‌های مکانیکی افزایش و در صورت امکان، وزن آن‌ها را کاهش دهند.

۱-۲ دسته‌بندی پوسته‌ها

در این بخش، پوسته‌ها از دیدگاه هندسی، مادی و رفتاری دسته‌بندی می‌شوند.

الف- از دیدگاه هندسی:

۱. پوسته‌ی حاصل از انتقال^۲: از انتقال یک منحنی یا سطح مادی در امتداد خط راست خارج از

¹ Shells

² Shell of Translation

صفحه‌ی قوس، حاصل می‌شود.

۲. پوسته‌ی حاصل از دوران^۱: از دوران یک منحنی یا سطح مادی حول محور واقع در صفحه‌ی قوس، حاصل می‌شود.

۳. پوسته‌ی جدار نازک^۲: پوسته‌ای که نسبت ضخامت به شعاع انحنای سطح میانی^۳ آن کوچکتر از $\frac{1}{20}$ باشد.

۴. پوسته‌ی جدار ضخیم^۴: پوسته‌ای که نسبت ضخامت به شعاع انحنای سطح میانی آن بزرگتر از $\frac{1}{20}$ باشد.

ب- از دیدگاه مادی:

۱. پوسته‌ی همگن^۵: خواص مکانیکی ماده‌ی پوسته در نقاط مختلف جسم یکسان است و تابع موقعیت نقاط نمی‌باشد.

۲. پوسته‌ی ناهمگن^۶: خواص مکانیکی ماده‌ی پوسته در نقاط مختلف جسم یکسان نیست و تابع موقعیت نقاط می‌باشد.

۳. پوسته‌ی همسانگرد^۷: خواص مکانیکی (E, ν) ماده‌ی پوسته در جهات مربوط به هر نقطه، یکسان است.

¹ Shell of Revolution

² Thin Shell

³ Midsurface

⁴ Thick Shell

⁵ Homogeneous Shell

⁶ Inhomogeneous (Heterogeneous) Shell

⁷ Isotropic Shell

۴. پوسته‌ی ناهمسانگرد^۱: خواص مکانیکی (E, ν) ماده‌ی پوسته در جهات مربوط به هر نقطه، یکسان نیست.

ج- از دیدگاه رفتاری:

۱. پوسته با تغییر شکل‌های کوچک^۲: جابه‌جایی هر نقطه از پوسته تحت بار، کوچک است (رفتار خطی از نظر هندسی).
۲. پوسته با تغییر شکل‌های بزرگ^۳: جابه‌جایی هر نقطه از پوسته تحت بار، کوچک نیست (رفتار غیرخطی از نظر هندسی).
۳. پوسته با رفتار کشسان^۴: تغییر شکل‌ها بازگشت‌پذیرند و روابط تنش-کرنش از قانون عمومی هوک پیروی می‌کنند (رفتار خطی از نظر مادی).
۴. پوسته با رفتار مومسان^۵: تغییر شکل‌ها بازگشت‌ناپذیرند و روابط تنش-کرنش از قانون عمومی هوک پیروی نمی‌کنند (رفتار غیر خطی از نظر مادی).

۱-۳ تئوری پوسته‌های نازک

در پوسته‌های نازک، نسبت ضخامت پوسته h به شعاع سطح میانی R کوچکتر از $\frac{1}{4}$ می‌باشد. تئوری این دسته از پوسته‌ها بر مبنای تئوری الاستیسیته‌ی خطی بنا شده است. به‌طور کلی به دلیل کوچک بودن یک بعد نسبت به ابعاد دیگر، تئوری الاستیسیته‌ی سه بعدی استفاده نمی‌شود؛ بلکه با ساده‌سازی روابط الاستیسیته، روش‌های تحلیلی-تقریبی برای تحلیل پوسته‌های نازک به دست می‌آوردند. دقت نتایج

¹ Anisotropic Shell

² Small Deflection

³ Large Deflection

⁴ Elastic Behavior

⁵ Plastic Behavior

تئوری‌های ارائه شده بستگی به درجه‌ی ساده‌سازی روابط الاستیسیته دارد. اولین فرضیات را کیرشهف^۱ (۱۸۵۰) درباره‌ی ورق‌ها ارائه کرد که پس از آن در بسط تئوری پوسته‌ها به کار گرفته شد. ارون^۲ (۱۸۷۴) تئوری پوسته‌ها را مبتنی بر فرضیات کیرشهف معرفی کرد، اما کار وی کامل نبود. لوو^۳ (۱۸۸۸) معادلات عمومی پوسته‌های نازک را ارائه کرد که اکنون به عنوان تئوری کلاسیک پوسته‌های نازک یا تئوری لوو-کیرشهف مشهور است. رایسنر^۴ (۱۹۱۲) با استفاده از فرضیات لوو تحلیل پوسته‌های حاصل از دوران متقارن محوری^۵ را ارائه نمود. فلوگه^۶ (۱۹۳۲) اولین کسی است که تئوری پوسته‌ها با تقریب مرتبه‌ی دو را با لحاظ کردن خیزهای کوچک ارائه کرد. معادلات وی به عنوان معادلات استاندارد پوسته‌های نازک شناخته می‌شود و فقط در حالت‌های خاص قابل حل می‌باشد. با ساده‌سازی آن‌ها تئوری پوسته‌ها با تقریب مرتبه‌ی یک و صفر به دست می‌آیند. نظریات فلوگه توسط بیرنه^۷ (۱۹۴۴) تکمیل شد. نقدی (۱۹۵۷) تئوری غیرخطی پوسته‌های نازک را فرمول‌بندی کرد که به کارگیری آن‌ها مشکل می‌باشد. سنדרز^۸ (۱۹۵۹) فرمول‌بندی پوسته‌ها را با استفاده از اصل کار مجازی ارائه کرد و نووژیلوف^۹ (۱۹۶۴) امکان ارائه‌ی نظریه‌ی پوسته‌ها را به شکل مختلط نشان داد و به این ترتیب معادلات به صورت فشرده‌تری نوشته شدند.

تئوری عمومی پوسته‌های نازک را می‌توان به این گونه تقسیم‌بندی کرد:

¹ Kirchhoff

² Aron

³ Love

⁴ Reissner

⁵ Axisymmetric Shell of Revolution

⁶ Flugge

⁷ Byrne

⁸ Sanders

⁹ Novozhilov

۱. تئوری با تقریب مرتبه‌ی صفر (تئوری غشایی)^۱

۲. تئوری با تقریب مرتبه‌ی یک (تئوری خمشی)^۲

۳. تئوری با تقریب مرتبه‌ی دو (تئوری فلوگه)^۳ [۱]

۱-۳-۱ تئوری غشایی

غشا از دیدگاه مکانیکی، یک تار^۴ دو بعدی است که فقط می‌تواند نیروهای محوری (نیروهای غشایی) را تحمل کند. پوسته‌هایی که سختی خمشی^۴ آنها خیلی کم است و از نظر فیزیکی نمی‌توانند لنگرهای خمشی را تحمل کنند، با این تئوری تحلیل می‌شوند. میدان نیروهای داخلی در اغلب پوسته‌های نازک، عمدتاً از نیروهای غشایی تشکیل می‌شود و از این جهت نیروهای غشایی برای تأمین تعادل ایستایی پوسته کافی هستند و به عبارتی دیگر پوسته از نظر ایستایی معین است. در تئوری غشایی، جابه‌جایی پوسته با جابه‌جایی سطح میانی توصیف و مسائل در حالت تنش صفحه‌ای^۵ و کرنش صفحه‌ای^۶ با چشم-پوشی از تنش عمودی و کرنش عمودی در راستای شعاعی، تحلیل می‌شوند [۲].

۱-۳-۲ تئوری خمشی

ورق^۷ از دیدگاه مکانیکی، یک تیر^۸ دو بعدی است که علاوه بر نیروهای محوری، نیروهای برشی و لنگرهای خمشی را نیز می‌تواند تحمل کند. پوسته‌هایی که سختی خمشی آنها قابل توجه باشند و از

¹ Membrane Theory

² Bending Theory

³ String

⁴ Bending Stiffness

⁵ Plane Stress

⁶ Plane Strain

⁷ Plate

⁸ Beam

نظر فیزیکی بتوانند لنگرهای خمشی را تحمل کنند، با این تئوری تحلیل می‌شوند. فرضیه‌ی مقدماتی تیرها توسط ناویر^۱ ارائه و سپس توسط کیرشهف در مورد ورق‌ها تعمیم داده شد و لوو باهمین فرضیات، تئوری خمشی را صورت‌بندی نمود.

در حالت کلی، معادلات تعادل به تنهایی برای به‌دست آوردن نیروهای خمشی کافی نیستند و به عبارتی دیگر، پوسته از نظر ایستایی نامعین است. در تئوری خمشی نیز، جابه‌جایی پوسته با جابه‌جایی سطح میانی توصیف می‌شود. فرضیات تئوری غشایی و تئوری خمشی (تئوری کلاسیک) را فرضیات لوو-کیرشهف می‌نامند که عبارتند از [۲]:

۱. نسبت ضخامت پوسته به شعاع انحنای سطح میانی در مقایسه با واحد، کوچک است (پوسته-ی نازک)؛

۲. خیزها در مقایسه با ضخامت پوسته، کوچک هستند (خیز کوچک)؛

۳. مؤلفه‌ی تنش عمود بر سطح میانی نسبت به سایر مؤلفه‌های تنش، قابل چشم‌پوشی است؛

۴. مقاطع مستوی عمود بر سطح میانی پوسته، پس از بارگذاری و تغییر شکل، همچنان مستوی

و عمود باقی می‌مانند. با این فرض، کرنش‌های برشی و مؤلفه‌ی کرنش عمود بر سطح میانی، صفر در نظر گرفته می‌شوند.

۴-۱ تئوری پوسته‌های ضخیم

اولین بار لامه^۲ (۱۸۵۲) با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی دو بعدی (PET)^۳، حلّ دقیق استوانه‌های ضخیم متقارن محوری با جدار ثابت تحت فشار یکنواخت داخلی از ماده‌ی همگن و همسانگرد را ارائه کرد [۳]، که تاکنون نیز در حلّ مسائل مختلف مهندسی کاربرد فراوانی داشته است. گالرکین^۴ (۱۹۳۰)

¹ Navier

² Lamé

³ Plane Elasticity Theory

⁴ Galerkin

روابط پوسته‌های ضخیم را با استفاده از معادلات اساسی الاستیسیته به دست آورد. و لاسف^۱ (۱۹۴۹) با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی خطی، معادلات قابل حلی برای پوسته‌های ضخیم ارائه کرد. گرینسپن^۲ (۱۹۶۰) مقادیر ویژه‌ی استوانه‌ی ضخیم را با تئوری‌های مختلف پوسته‌های نازک و ضخیم مقایسه نمود [۴].

۱-۴-۱ تئوری الاستیسیته‌ی خطی

به‌طور کلی در تئوری الاستیسیته‌ی سه بعدی، ۱۵ معادله وجود دارد که می‌توان ۱۵ مجهول را به دست آورد؛ معادلات عبارتند از: سه معادله‌ی تعادل (تنش)، شش معادله‌ی سینماتیک (کرنش-جابه‌جایی) و شش معادله‌ی رفتاری (تنش-کرنش) و مجهولات عبارتند از: شش مؤلفه‌ی تنش (تانسور متقارن تنش)، شش مؤلفه‌ی کرنش (تانسور متقارن کرنش) و سه مؤلفه‌ی جابه‌جایی (بردار جابه‌جایی). تئوری الاستیسیته‌ی سه بعدی هرچند مشخصات رفتاری پوسته‌ها را به‌طور کامل توصیف می‌کند و منجر به حل دقیق می‌شود ولی حل معادلات آن بسیار پیچیده می‌باشد و عملاً به‌کارگیری آن‌ها امکان‌ناپذیر است. با فرضیات ساده‌شونده‌ای می‌توان معادلات بالا را کاهش داد و تئوری الاستیسیته‌ی دو بعدی (مستوی) را برای تحلیل استوانه‌ها به کار برد. در تئوری الاستیسیته‌ی مستوی، فرض می‌شود که مقاطع مستوی عمود بر محور مرکزی استوانه، پس از اعمال فشار و تغییر شکل، همچنان مستوی و عمود بر محور استوانه باقی می‌مانند. در حقیقت کرنش برشی و تنش برشی صفر در نظر گرفته می‌شود اما برخلاف تئوری کلاسیک پوسته‌های نازک، جابه‌جایی هر نقطه از پوسته برابر جابه‌جایی سطح میانی در نظر گرفته نمی‌شود. این تئوری را لامه برای استوانه‌ی جدار ثابت متقارن محوری از ماده‌ی همگن و همسانگرد به کار برد و توزیع تنش را در استوانه‌ها به دست آورد. تئوری لامه به تئوری کلاسیک استوانه‌های ضخیم مشهور است [۵].

¹ Vlassov

² Greenspon

۱-۵ مقدمه‌ای بر مواد ناهمگن

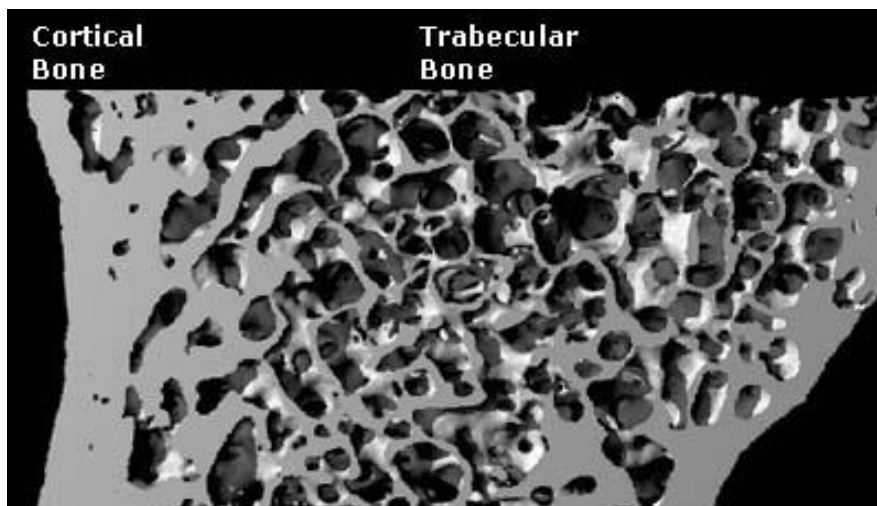
۱-۵-۱ تاریخچه‌ی مواد ناهمگن

مواد همگن و همسانگرد به دلیل یکنواختی خواص از قبیل: مقاومت مکانیکی، مقاومت حرارتی، مقاومت در برابر خوردگی و سایش، مقاومت در برابر خزش و خستگی و ... محدودیت‌هایی در صنایع نظامی، هوافضا، نفت و گاز، خودروسازی و ... ایجاد می‌کنند. بنابراین محققان همواره در تلاش بوده‌اند؛ که از موادی جدید با خواص برتر استفاده کنند. ایده‌ی مواد مرکب (کامپوزیت‌ها) در پایان دهه‌ی ۱۹۴۰ و آغاز دهه‌ی ۱۹۵۰ در صنایع دریایی عملی شد. مواد مرکب از ترکیب دو یا چند ماده‌ی ناهم‌ساز در دیدگاه ماکروسکوپی به وجود می‌آیند، که خواص فیزیکی متفاوت و گاهی ناسازگار دارند. این عدم سنخیت رفتار مواد، باعث تمرکز تنش و ایجاد گسستگی در مرز لایه‌ها در اثر بارگذاری می‌شود. کامپوزیت‌ها از دیدگاه متالورژی (میکروسکوپی)، ناهمگن و ناهمسانگرد هستند، اما از دیدگاه مکانیکی (ماکروسکوپی)، همگن و ناهمسانگرد محسوب می‌شوند.

اشکال عمده‌ی مواد مرکب، تغییر ناگهانی مواد و خواص آن‌هاست، که در نتیجه موجب تغییر ناگهانی رفتار مواد به‌ویژه در مرز لایه‌ها می‌شود، لذا ایده‌ی تغییر تدریجی خواص مواد پی‌ریزی شد. مواد با تغییرات تابعی خواص^۱ در ساختار ارگانیسیم‌های زنده مانند استخوان وجود داشته است. به‌عنوان مثال، استخوان در لایه‌ی بیرونی که نیاز به مقاومت مناسبی در برابر عوامل خارجی از قبیل ضربه دارد؛ از استحکام بیشتری برخوردار است و به تدریج از سختی آن کم می‌شود تا لایه‌ی درونی که کاملاً نرم می‌باشد؛ تا شرایط مناسب برای جذب مواد غذایی را داشته باشد. از این‌رو تغییرات خواص به‌صورت کاملاً پیوسته و تدریجی ایجاد می‌شود. این‌گونه مواد که خصوصیات آن تحت یک تابع ریاضی به‌صورت تدریجی تغییر می‌کند، مواد FG یا مواد ناهمگن، نامیده می‌شوند [۶].

¹ Functionally graded material

مفهوم اولیه‌ی مواد ناهمگن توسط نینو^۱ و همکارانش در سال ۱۹۸۴ در سازمان هوافضای ژاپن مطرح گردید و از سال ۱۹۸۶ مطالعات امکان‌سنجی تولید آن، در این کشور شروع شد. مرحله‌ی اول پروژه‌ی ملی (فناوری گسترش مواد متغیر تابعی) طی سال‌های ۱۹۸۷-۱۹۸۹ در ژاپن انجام شد [۷].



شکل ۱-۱ نمای مقطع استخوان

در این پروژه، سه گروه: ساخت، پردازش و ارزیابی مواد همکاری داشتند. نظریه‌ی پیشنهادی، تولید یک ماده‌ی جدید بود که با استفاده از سرامیک‌ها با مقاومت حرارتی بالا و تحمل گرادیان حرارتی مناسب و فلزات با مقاومت مکانیکی بالا و ضریب هدایت حرارتی مناسب، به گونه‌ای که تغییرات تدریجی ماده از سرامیک به فلز انجام پذیرد تا شرایط دمایی لایه‌ی بیرونی دماغه‌ی شاتل فضایی و نیز شرایط مکانیکی و جوشکاری لایه‌ی درونی شاتل ارضاء شود. پس از دستیابی به هدف پروژه که ساخت و آماده‌سازی قطعاتی به قطر ۳۰ mm و ضخامت ۱ mm تا ۱۰ mm که قادر به تحمل دماهایی در حدود ۲۰۰۰°K و اختلاف دمایی در حدود ۱۰۰۰°K بودند، محققان ژاپنی، نتایج پژوهش‌های خود را در اولین سمپوزیوم جهانی در سال ۱۹۹۰ در اختیار همگان قرار دادند.

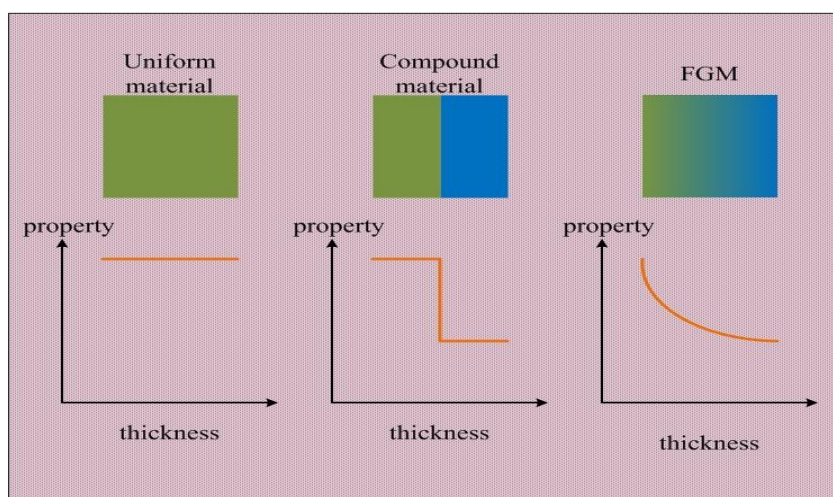
مرحله‌ی دوم پروژه‌ی ملی ژاپن در سال ۱۹۹۰-۱۹۹۱ انجام شد، که منجر به ساخت ورق مربعی به ابعاد ۳۰۰ mm برای استفاده در قسمت پایینی دماغه‌ی سفینه‌ی فضایی و یک نیم‌کره به قطر ۵۰

¹ Niino

mm برای استفاده در نوک مخروطی دماغه‌ی سفینه شد. دومین سمپوزیوم جهانی مواد متغیر تابعی در سال ۱۹۹۲ برگزار و پس از آن، مطالعات بر روی مواد FG و به‌ویژه تحلیل سازه‌هایی از این جنس، فراگیر شد.

مواد ناهمگن در مقایسه با مواد همگن دارای ویژگی‌هایی به شرح زیر می‌باشند:

۱. مقاومت زیاد در برابر گرادیان دمایی بالا.
۲. مقاومت زیاد در برابر بارهای مکانیکی بالا.
۳. یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های مواد ناهمگن، کاهش تمرکز تنش در اجسام جامد است. در بسیاری از اجسام به دلیل وجود شکل‌های خاص هندسی، تمرکز تنش در نقاطی از جسم ایجاد می‌شود، که به کمک مواد ناهمگن می‌توان آثار نامطلوب تمرکز تنش را به‌صورت چشم‌گیری کاهش داد.
۴. بهترین ترکیب برای تغییر خواص ماده که مانع ایجاد یا رشد ترک شود، مواد ناهمگن است.
۵. اگر پوشش ترد بر روی مواد نرم به‌صورت لایه‌های جدا انجام شود، احتمال جدا شدن لایه‌ی ترد بسیار زیاد است. به کمک مواد ناهمگن، این کار با تغییرات پیوسته و تدریجی انجام می‌پذیرد.
۶. تغییرات تدریجی خواص در ساختار مواد ناهمگن، موجب استحکام بین لایه‌های مختلف آن می‌شود. اما در مواد مرکب کامپوزیتی، تداخل بین ساختارهای زمینه و الیاف، نوعی ناهماهنگی در خواص مکانیکی ایجاد می‌کند. به‌عنوان مثال هنگامی که مواد کامپوزیت در معرض بارهای حرارتی بالا قرار می‌گیرند، ترک، ابتدا در مرز زمینه و الیاف ایجاد و سپس در لایه‌ها و مقاطع ضعیف داخل زمینه و الیاف منتشر می‌شود. در مواد ناهمگن، به‌دلیل پیوستگی در خواص مکانیکی، حرارتی و مغناطیسی، تنش‌ها و گرادیان آن‌ها حالت پیوسته‌ای پیدا می‌کنند؛ که باعث استحکام ماده می‌شوند. شکل ۱-۲ مقایسه‌ی بین تغییرات خواص در مواد ایزوتروپ، کامپوزیت و ناهمگن را نشان می‌دهد [۷].



شکل ۲-۱ تغییرات خواص در مواد مختلف

۲-۵-۱ مدل سازی ریاضی مواد ناهمگن

مطابق توضیحات داده شده، خواص مکانیکی در مواد ناهمگن به صورت تدریجی و پیوسته تغییر می کند.

این توابع به صورت عمده از این قرارند [۷].

الف) توزیع توانی

$$X(r) = X_i \left(\frac{r}{r_i} \right)^n = X_i \bar{r}^n \quad (1-1)$$

ب) توزیع نمایی

$$X(r) = X_i e^{n \left(\frac{r}{r_i} - 1 \right)} = X_i e^{n(\bar{r} - 1)} \quad (2-1)$$

ج) توزیع کسر حجمی^۱

$$X(r) = (X_o - X_i) \left(\frac{r - r_i}{r_o - r_i} \right)^n + X_i = (X_o - X_i) \left(\frac{\bar{r} - 1}{k - 1} \right)^n + X_i \quad (3-1)$$

¹ Volume Fraction

در روابط فوق T_0 ، T_1 به ترتیب شعاع داخلی و خارجی استوانه و X_0 ، X_1 خاصیت ماده به ترتیب در لایه‌ی داخلی و خارجی جسم می‌باشد، که می‌توانند خاصیت مکانیکی، حرارتی و الکتریکی از قبیل: نسبت پواسون، مدول الاستیسیته، چگالی^۱، ضریب هدایت حرارتی^۲، ضریب انبساط خطی حرارتی^۳ باشند. n در روابط فوق ثابت ناهمگنی خاصیت است؛ جز رابطه‌ی (۱-۱) که ثابت ناهمگنی فقط می‌تواند مقادیر حقیقی مثبت را اختیار کند؛ در روابط (۲-۱) و (۳-۱) مقادیر حقیقی منفی را نیز می‌تواند اختیار کند. $n = 0$ در کلیه‌ی توابع، نشان‌دهنده‌ی مواد همگن است، هم‌چنین \bar{T} نسبت شعاع به شعاع داخلی و k نسبت شعاع خارجی به داخلی می‌باشد.

۱-۶ پیشینه‌ی تحقیق

تحلیل پوسته‌های استوانه‌ای همگن و همسانگرد به روش‌های مختلف، همان‌گونه که در بخش ۱-۵ بیان شد، دارای قدمتی نسبتاً طولانی است. تحلیل استوانه‌های ناهمسانگرد به حدود نیم قرن پیش برمی‌گردد، ولی تحلیل استوانه‌های ناهمگن مربوط به دهه‌ی اخیر است. در این بخش، مطالعات انجام‌شده بر روی استوانه‌های همگن و ناهمگن در رابطه با موضوع پروژه گزارش می‌شود.

استوانه‌های همگن: برای اولین بار لامه در ۱۸۵۲ با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی،

حلّ دقیق استوانه‌های ضخیم متقارن محوری جدار ثابت همگن و همسانگرد تحت فشار یکنواخت داخلی در حالت کرنش صفحه‌ای را ارائه کرد [۳، ۵]. گالرکین در ۱۹۳۰ روابط حاکم بر پوسته‌های جدار ضخیم را با استفاده از معادلات اساسی الاستیسیته به‌دست آورد. ولاسف^۴ در ۱۹۴۹ با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی خطی، معادلات قابل حلّ برای پوسته‌های ضخیم ارائه کرد. میرسکی و هرمان در ۱۹۸۵

¹ Density

² Heat Conduction Coefficient

³ Thermal Linear Expansion Coefficient

⁴ Vlassov

با به‌کارگیری تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، تحلیل پوسته‌های استوانه‌ای ضخیم را ارائه کردند [۸]. در ۱۹۶۰ مقادیر ویژه‌ی استوانه‌ی ضخیم را گرینس‌پن با تئوری‌های مختلف پوسته‌های نازک و ضخیم، محاسبه و با یکدیگر مقایسه نمود [۴]. زیو و پرل^۱ در ۱۹۷۳ با به‌کارگیری تئوری میرسکی-هرمان و روش عددی تفاضل محدود، پاسخ ارتعاشی استوانه‌های نیمه‌بلند را به‌دست آوردند [۹].

استوانه‌های ناهمگن: پس از اولین سمپوزیوم جهانی FGM در ۱۹۹۰، فوکویی و یاماناکا^۲ در ۱۹۹۲ روابط الاستیک حاکم بر لوله‌های جدارضخیم FGM تحت فشار داخلی را در حالت کرنش صفحه‌ای به کمک معادلات لامه استخراج و آن‌ها را به روش عددی رانگ-کوتا حل کردند [۱۰]. در سال ۱۹۹۰ تنش‌های حرارتی گذرا در استوانه‌های ارتوتروپیک همگن - که یک سطح آن، تحت دمای ثابت و در سطح دیگر آن انتقال حرارت جابه‌جایی می‌باشد - توسط کاردوماتس مطالعه گردید [۱۱]. آشیدا^۳ و همکاران در سال ۱۹۹۳ تکنیک حلّ عمومی ترموالاستیسیته گذرا برای جامدهای همسان‌گرد عرضی را در مختصات استوانه‌ای ارائه کردند [۱۲]. اوباتا و نودا در ۱۹۹۴ تنش‌های حرارتی پایدار را در استوانه و کره‌ی توخالی FGM استخراج و ماده‌ی بهینه را به‌دست آوردند [۱۳]. لوی و ردی^۴ در ۱۹۹۹ ارتعاشات پوسته‌های نازک استوانه‌ای FGM را با استفاده از تئوری لوی-کیرشهف استخراج و آن‌ها را به کمک روش ریلی-ریتز حل کردند [۱۴]. هورگان و چان^۵ در ۱۹۹۹ معادلات حاکم بر یک استوانه‌ی توخالی FGM را در حالت کرنش صفحه‌ای به کمک معادلات لامه استخراج و توزیع تنش را به‌دست آوردند [۱۵]. ایشان در ۱۹۹۹ با همین روش، تنش‌ها را در یک دیسک دوآر FGM بررسی کردند [۱۶]. اوباتا و همکاران تنش‌های حرارتی برای استوانه‌ی جدارضخیم FG تحت توزیع دمای گذرای دوبعدی را تحلیل کردند

¹ Ziv & Perl

² Fukui & Yamanaka

³ Ashida

⁴ Loy & Reddy

⁵ Horgan & Chan

[۱۷]. زیمرمن^۱ و همکاران ویژگی‌های ماده‌ی ناهمگن را تابع خطی نسبت به شعاع در نظر گرفتند و حل تحلیلی استوانه‌های FG را به صورت یک بعدی ارائه دادند [۱۸]. توتونچو در ۲۰۰۱ حل دقیق مخازن استوانه‌ای و کروی جدار ثابت FGM با توزیع توانی مدول الاستیسیته تحت فشار یکنواخت داخلی را ارائه کردند. ایشان معادلات استوانه را در حالت کرنش صفحه‌ای به کمک تئوری لامه استخراج و توزیع تنش را به‌ازای ریشه‌های مثبت معادله مشخصه به‌دست آورد. در مقاله‌ی ایشان، رابطه و نمودار تنش محیطی و نمودار تنش شعاعی اشتباه است که در برخی از پژوهش‌های پسین نیز استفاده شده است [۱۹]. جباری و همکاران در ۲۰۰۲ تنش‌های مکانیکی و حرارتی در یک استوانه‌ی توخالی FGM تحت بارهای متقارن [۲۰] و در ۲۰۰۳ تحت بارهای نامتقارن حرارتی [۲۱] را به‌دست آوردند. ول و باترا در سال ۲۰۰۳ تنش‌های حرارتی گذرای سه‌بعدی در ورق مستطیلی FG- که خصوصیات ماده در جهت ضخامت، با سری تیلور بیان می‌شود- را تحلیل کردند [۲۲]. لیو و همکاران تحلیل رفتار ترمومکانیکی استوانه‌ی جدارضخیم FG را با فرض این‌که استوانه شامل تعداد زیادی استوانه همگن می‌باشد، ارائه کردند [۲۳]. حل عمومی تنش‌های مکانیکی و در حالت یک بعدی برای کره‌ی جدارضخیم FG توسط اسلامی و همکاران ارائه شد [۲۴]. ژیانگ و شای^۲ در ۲۰۰۶ حل دقیق استوانه‌ی توخالی FGM با تغییرات نمایی مدول یانگ در راستای شعاعی با لایه‌های همگن را ارائه کردند [۲۵]. ژیفای و همکاران در ۲۰۰۷ با در نظر گرفتن تغییرات مدول الاستیسیته به صورت توانی و خطی، استوانه‌ی FGM را با روش چند لایه‌ای کردن، تحلیل و با حل توتونچو [۱۹] مقایسه و در نتیجه به اشتباه مقاله‌ی نامبرده پی‌بردند [۲۶]. توتونچو^۳ در ۲۰۰۷ تحلیل استوانه‌ی FGM را در حالت کرنش صفحه‌ای با توزیع نمایی مدول یانگ، ارائه کرد [۲۷]. شاو^۴ در ۲۰۰۸ تحلیل ترمومکانیکی استوانه‌های توخالی تشکیل شده از مواد FG

¹ Zimmerman

² Hongjun & Zhifei

³ Tutuncu

⁴ Shao

با تغییرات نمایی خواص تحت بارهای مکانیکی و افزایش خطی دمای مرزی را با انتقال معادلات دیفرانسیل حاکم به حوزه‌ی لاپلاس و استفاده از روش حل به کمک سری‌ها انجام داد [۲۸]. توتونچو در ۲۰۰۹ نیز توزیع میدان جابه‌جایی و مقادیر تنش مربوط به دیسک، استوانه و کره‌ی توخالی FGM با تغییرات نمایی و توانی خواص ماده در راستای شعاع تحت فشار داخلی را توسط تئوری الاستیسیته‌ی مستوی و روش تابع متمم^۱ تعیین نمود [۲۹]. در سال ۲۰۰۹ زمانی‌نژاد و رحیمی حل یک‌بعدی تنش-های حرارتی در استوانه‌ی مدور جدارضخیم FG تحت فشار را ارائه کردند [۳۰]. زمانی‌نژاد و قنّاد در ۲۰۰۹ با ارائه‌ی دستگاه معادلات سه‌بعدی براساس تحلیل تانسوری، رفتار پوسته‌های جدارضخیم FGM حاصل از دوران با انحنای دلخواه و ضخامت متغیر در راستای نصف‌النهاری را بررسی کردند [۳۱]. قنّاد و همکاران در ۲۰۱۰ حل عمومی استوانه‌های جدار ضخیم FGM را بر مبنای تئوری الاستیسیته‌ی مستوی به ازای ریشه‌های حقیقی، مضاعف و مختلط در شرایط تنش صفحه‌ای، کرنش صفحه‌ای و استوانه‌ی بسته ارائه کردند [۳۲]. ایشان در ۲۰۱۱ حل عمومی استوانه‌های جدار ضخیم FGM را بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی، ارائه و نتایج آن را با حل تئوری الاستیسیته‌ی مستوی مقایسه نمودند [۳۳]. پنگ و لی^۲ در سال ۲۰۱۰ مسأله‌ی تنش‌های حرارتی در دیسک‌های مدور چرخان FG را تحلیل کردند [۳۴]. قربانپور و همکاران در ۲۰۱۱ اثر ناهمگنی را بر روی رفتار الکتریکی، حرارتی و مکانیکی یک استوانه‌ی چرخان جدارضخیم FGPM^۳ با تغییرات توانی خواص تحت فشار داخلی و خارجی بررسی و معادلات حاصل را برای این استوانه حل کردند [۳۵]. زمانی‌نژاد و افشین در سال ۲۰۱۳ حل عمومی پاسخ گذرای ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای جدارضخیم تحت شرایط مرزی عمومی را به دست آوردند [۳۶].

¹ Complementary Function

² Peng & Li

³ Functionally Graded Porous Materials

۱-۶-۱ جازنی فشاری

مخازن تحت فشار کاربردهای مختلفی در نیروگاه‌های هسته‌ای، صنایع غذایی، صنایع نظامی، نفت، حمل سوخت و گازهای فشرده^۱ دارند و این نیاز روز افزون صنایع باعث تمرکز مهندسی بر روی این بخش از طراحی مهندسی شده است. از طرفی لزوم کاهش قیمت‌ها و استفاده‌ی بهینه از مواد محققان را بر آن داشت که خود را محدود به روش‌های مرسوم الاستیک نکرده و رهیافت الاستیک-پلاستیک که استفاده‌ی مؤثرتر از مواد موجود را امکان پذیر می‌سازد مورد توجه قرار دهند. عملیات جازنی^۲ یکی از روش‌های قدیمی برای تقویت مخازن تحت فشار بوده که بیشتر در توپ‌های جنگی و ادوات نظامی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

استوانه‌های جازنی‌شده کاربردهای گسترده‌ای در دستگاه‌های پرس هیدرولیک و فورجینگ، نیروگاه برق، نیروگاه شیمیایی و هسته‌ای، ذخیره‌سازی گاز و... دارند. برای افزایش ظرفیت مخازن جدارضخیم، دو یا چند استوانه با تفاوت مختلف قطری با یکدیگر منقبض شده‌اند تا به شکل استوانه‌ی جازنی‌شده در بیایند. فرایند ساخت و مونتاژ استوانه‌های جازنی‌شده در کاربردهای جهان واقعی منجر به تولید مقداری تنش‌های پسماند می‌شود. مقدار این تنش‌های پسماند ممکن است قابل توجه شود که در آن صورت نمی‌تواند نادیده گرفته شود. این تنش‌های پسماند می‌توانند با تنش‌های محیطی گسترش-یافته به دلیل فشار داخلی جمع شوند و مقدار بیشینه تنش محیطی، در سیلندر به دست آید. توسط مجذوبی و همکاران [۳۷] در ۲۰۰۶ بهینه‌سازی دو فلزی استوانه‌ی جازنی‌شده را پیشنهاد دادند و وزن استوانه‌ی جازنی‌شده برای یک فشار خاص به حداقل رسیده بود. متغیرها، شعاع‌ها و تیرانس‌های انقباضی بودند. آن‌ها از تکنیک sqp^۳ برای بهینه‌سازی و از نرم‌افزار المان محدود Ansys برای شبیه‌سازی استفاده کردند و نتیجه گرفتند که می‌توانند فشار بالای مخازن را تا حدی با فشار پایین، مواد سبک‌تر و ارزان‌تر

¹ Compact natural gas

² Shrink fit

³ Sequential Quadratic Programming

جایگزین کنند تا وزن و هزینه‌های مخازن را کاهش دهند. برنامه‌نویسی درجه دوم متوالی (sqp) یک روش تکراری برای بهینه‌سازی غیرخطی است. روش‌های sqp یک دنباله از بهینه‌سازی زیر مسأله حل می‌کند، که یک مدل درجه دو موضوع هدف برای خطی‌سازی محدودیت‌ها بهینه کند. توسط پاتیل در ۲۰۰۵ استوانه‌های دو لایه جازنی‌شده ارائه شده و در فصل مشترک، قطر بیرونی و تلرانس انقباضی بهینه شده بود تا حجم استوانه‌ی جازنی‌شده‌ی دو لایه به حداقل برسد [۳۸].

۱-۶-۲ استوانه‌ی جازنی‌شده

در مورد فرایند جازنی، سینگ^۱ در ۱۹۹۴ بر پایه‌ی حل الاستیک و به کمک تئوری نیروها، توزیع تنش‌های طولی و مماسی را برای یک مخزن نازک و به ازای پارامترهای مختلف استوانه تعیین نمود. گامر و لانس^۲ نیز در ۱۹۸۳ تنش و تغییرشکل را برای یک دیسک نازک جازنی‌شده به‌دست آوردند. آن‌ها فشار در مرز بین دو استوانه را در حالت تنش صفحه‌ای به‌صورت تابعی از میزان تداخل شعاع‌ها مشخص نمودند. آن‌ها مقدار تداخل شعاعی را به اندازه‌ی کافی بزرگ در نظر گرفته تا استوانه‌ها وارد ناحیه‌ی پلاستیک شوند [۳۹]. توسط اوزل^۳ و همکاران در ۲۰۰۵ توزیع تنش و تغییرشکل‌ها در یک اتصال شفت و توپی^۴ و با در نظر گرفتن شکل‌های مختلف شفت و توپی در روش جازدن محوری، به کمک حل المان محدود و به‌صورت استاتیکی مورد بررسی قرار گرفت. آن‌ها نشان دادند که روابط لامه در تعیین توزیع تنش خصوصاً در نقاط ابتدایی و انتهایی اتصال قابل قبول نیست، چرا که بسته به شرایط هندسی ممکن است تنش در این نقاط، وارد ناحیه‌ی پلاستیک نیز بشود. هم‌چنین نشان دادند که مقادیر تنش در اولین لحظه‌ی تماس هر نقطه، تغییرات چشمگیری داشته و ممکن است تا حد پلاستیک ماده نیز برود. در مخازن یا لوله‌های چندجداره، تنش‌های پسماند ناشی از جازدن استوانه‌ها داخل

¹ Singh

² Gamer & Lance

³ Ozel

⁴ Hub

یکدیگر، باعث افزایش ظرفیت مخازن می‌شوند [۴۰]. کلالی [۴۱] تأثیر این فرایند را بروی یک مخزن دولایه بررسی کرده و شعاع بهینه را برحسب معیار تنش معادل ترسکا به دست آورد. او این بررسی را برای مخازن با تعداد لایه‌ی بیشتر نیز تعمیم داده و روابط حاکم را تعیین نمود. تا کنون تحقیقاتی در مورد برخی از پارامترهای کاربردی در روش‌های مختلف فرایند جازنی انجام شده است. به‌عنوان مثال کیم^۱ و همکارانش [۴۲] در سال ۲۰۰۷ با روش اجزای محدود، روش بهینه برای جازدن گرمایی در اتصالات مربوط به اجزای انتقال قدرت خودرو تعیین نمودند. مجذوبی و قمی در ۲۰۰۶ بهینه‌سازی وزن یک مخزن دولایه تحت فشار کاری خاص را براساس شعاع مرز و مقدار تداخل شعاعی انجام داده و با روش‌های المان محدود و آزمایشگاهی مقایسه نمودند [۳۷]. آن‌ها نشان دادند که فرایند جازنی می‌تواند وزن مخازن فولادی را تا ۶۰ درصد وزن مخزن تک لایه‌ی متناظر آن کاهش دهد. هم‌چنین نشان دادند که با افزایش فشار کاری، میزان تداخل شعاعی در حل بهینه، افزایش یافته و شعاع مرز به شعاع داخلی نزدیکتر می‌شود. یکی از مهم‌ترین قیده‌های در نظر گرفته شده در بهینه‌سازی آن‌ها این مطلب بوده که تنش‌های معادل در شعاع‌های داخلی دو استوانه، کوچکتر مساوی تنش تسلیم ماده باشد. این مطلب در مقاله‌ی دیگر مجذوبی و همکاران در ۲۰۰۴ به روش آزمایشگاهی بررسی شده است [۴۳]. طبق نتایج آن تحقیق، فشار در مرز دو سیلندر بایستی در حدی باشد که شعاع‌های داخلی هر دو مخزن را به حد پلاستیک خود برساند. آن‌ها به روش آزمایشگاهی، شعاع مرز بهینه را برای تحمل بیشتر فشار ترکیدن مخزن دولایه با بررسی ۳۰ نمونه، تعیین نموده و با حل المان محدود تأیید نمودند. بنگری و مک^۲ در ۱۹۹۴ به بررسی فرایند جازنی از دیدگاه الاستیک-پلاستیک پرداخته‌اند [۴۴]. شبیه‌سازی فرایند جازدن دو استوانه، یک استوانه و یک شفت و عبور ماندل^۳، در نرم‌افزارهای المان محدود نیز مورد توجه بسیاری از محققان در سال‌های اخیر بوده است [۴۵-۴۷].

¹ Kim

² Belgtri & mack

³ Mandrel

۷-۱ جمع‌بندی

برای تحلیل استوانه‌های ضخیم همگن و ناهمگن با جدار ثابت و فشار یکنواخت به‌گونه‌ای که مسأله از حالت الاستیسیته‌ی دو بعدی خارج نشود، می‌توان از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی استفاده کرد. به دلیل اهمیت تحلیل پوسته‌ها و همچنین ماده‌ی تشکیل‌دهنده‌ی آن‌ها و با توجه اینکه تاکنون حلّ تحلیلی برای استوانه‌های جازنی‌شده دو لایه‌ی همگن و ناهمگن FGM تحت بار گذاری فشاری و چرخشی در حالت تنش صفحه‌ای به‌طور هم‌زمان ارائه نشده است، در این پژوهش با ارائه‌ی حلّ تحلیلی برای پوسته‌های استوانه‌ای دو لایه‌ی جدارضخیم، مقایسه‌ای بین نتایج حاصل از حلّ تحلیلی با نتایج حلّ عددی به منظور بررسی صحت نتایج صورت پذیرفته است.

ابتدا در فصل اول این پژوهش، ضمن مرور تئوری پوسته‌های نازک و ضخیم، مطالعات انجام‌شده در خصوص پوسته‌های استوانه‌ای و جازنی استوانه‌های دو لایه ارائه شده است. همچنین مواد با تغییرات تابعی خواص (FGM) ضمن تعریف تاریخچه و ویژگی‌های آن‌ها بیان می‌شوند. فصل دوم شامل استخراج معادلات حاکم بر استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه با استفاده از تئوری الاستیسیته مستوی برای ماده‌ی همگن تحت بارگذاری فشاری می‌باشد. سپس روش حلّ معادلات نهایی بیان و با انجام مطالعه‌ی موردی، نتایج و نمودارهای مربوط به توزیع تنش و جابه‌جایی برای حالت تنش صفحه‌ای آورده شده است. به‌منظور بررسی صحت نتایج حاصل از حلّ تحلیلی، مدل‌سازی عددی استوانه‌ی مورد نظر نیز ارائه شده و نتایج دو روش حل با یکدیگر مقایسه شده است. فصل سوم شامل استخراج معادلات حاکم بر استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه با استفاده از تئوری الاستیسیته مستوی برای ماده‌ی FGM با تغییرات توانی خواص تحت بارگذاری فشاری می‌باشد. سپس روش حلّ معادلات نهایی بیان و با انجام مطالعه‌ی موردی، نتایج و نمودارهای مربوط به توزیع تنش و جابه‌جایی برای حالت تنش صفحه‌ای آورده شده است. به‌منظور بررسی صحت نتایج حاصل از حلّ تحلیلی، مدل‌سازی عددی استوانه‌ی مورد نظر نیز ارائه شده و نتایج دو روش حل با یکدیگر مقایسه شده است. در فصل چهارم برای تحلیل الاستیک پوسته‌های استوانه‌ای جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی چرخان، با استخراج معادلات دیفرانسیل حاکم بر

استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی متقارن محوری تشکیل‌شده از مواد همگن و ناهمگن بر مبنای تئوری الاستیسیته‌ی مستوی، ضمن ارائه‌ی حلّ عمومی پوسته‌های استوانه‌ای جازنی‌شده تحت بارگذاری دورانی و فشاری، توزیع تنش و جابه‌جایی به صورت مطالعه‌ی موردی برای استوانه‌های جازنی‌شده‌ی چرخان تحت فشار یکنواخت داخلی ارائه شده است. سپس نتایج حاصل از حلّ تحلیلی به کمک تئوری الاستیسیته‌ی مستوی با نتایج حاصل از حلّ عددی مقایسه شده است. نتیجه‌گیری، جمع‌بندی نهایی و ارائه‌ی پیشنهادها در فصل پنجم انجام شده است.

فصل ۲: حلّ تحلیلی استوانه‌های جازنی شده با دو

لایه‌ی همگن تحت بارگذاری فشاری

۲-۱ مقدمه

از میان انواع پوسته‌های مورد استفاده در صنعت، پوسته‌های جدار ضخیم از اهمیت ویژه‌ای برخوردار هستند. از جمله کاربردهای آن‌ها می‌توان به تولید مخازن تحت فشار، لوله‌های پرتاب‌کننده‌ی توپ و بسیاری از تجهیزات نظامی و فضایی دیگر اشاره کرد. لذا محققان همواره به دنبال ایجاد تغییرات در این سازه‌ها بوده‌اند تا بتوانند مقاومت آن‌ها را در برابر انواع بارگذاری‌ها افزایش داده و تا حد امکان از وزن آن‌ها بکاهند. یکی از اهدافی که در استوانه‌ها دنبال می‌شود این است که فشار داخلی بیشتری را تحمل کنند و برای این مهم می‌توان ضخامت جداره را زیاد و یا بدون افزایش ضخامت، جنس مورد نظر را مرغوب‌تر کرد که استفاده از هر دوی این روش‌ها سبب افزایش هزینه‌ها می‌گردد. به همین خاطر راه حل سومی ارائه شده است. این راه حل بیان می‌کند که: «با توجه به این که تنش در جدار داخلی خیلی بیشتر از تنش در جدار خارجی است؛ بهتر است لایه داخلی را از یک جنس مرغوب‌تر نسبت به لایه خارجی بسازیم و چون این روش نه ضخامت را زیاد می‌کند و نه کل استوانه را از جنس مرغوب می‌سازد مورد قبول واقع شد، که در نتیجه بحث استوانه‌های جازنی‌شده پیش‌آمد».

۲-۲ روابط اساسی

به‌علت متقارن بودن تانسورهای تنش و کرنش، در محاسبات ۱۵ مجهول وجود دارند. این مجهولات در دستگاه مختصات استوانه‌ای عبارتند از:

$$[\tilde{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} & \tau_{rx} \\ \tau_{r\theta} & \sigma_\theta & \tau_{\theta x} \\ \tau_{rx} & \tau_{\theta x} & \sigma_x \end{bmatrix} \quad (۱-۲)$$

$$[\tilde{\epsilon}] = \begin{bmatrix} \epsilon_r & \gamma_{r\theta}/2 & \gamma_{rx}/2 \\ \gamma_{r\theta} & \epsilon_\theta & \gamma_{\theta x}/2 \\ \gamma_{rx}/2 & \gamma_{\theta x}/2 & \epsilon_x \end{bmatrix} \quad (۲-۲)$$

$$(\vec{u}) = \begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_x \end{pmatrix} \quad (3-2)$$

برای حلّ این ۱۵ مجهول، پانزده معادله را در سه گروه معادلات تعادل، روابط سینماتیک و روابط ساختاری وجود دارد. در ادامه با توجّه به آن که خواص مکانیکی مواد ثابت در نظر گرفته شده؛ به بیان معادلات حاکم در دستگاه مختصات استوانه‌ای پرداخته می‌شود.

۲-۲-۱ معادلات تعادل تنش

معادله‌ی حرکت در حالت کلی به صورت زیر است:

$$\text{div } \vec{\sigma} + \rho \vec{b} = \rho \vec{a} \quad (4-2)$$

که در آن چگالی، ρ بردار نیروی حجمی و \vec{a} بردار شتاب است. در حالت سکون یا حرکت با سرعت ثابت، بردار شتاب صفر بوده و معادله‌ی تعادل تنش مطابق زیر خواهد شد.

$$\text{div } \vec{\sigma} + \rho \vec{b} = \vec{0} \quad (5-2)$$

با بسط رابطه‌ی فوق در دستگاه مختصات استوانه‌ای (r, θ, x) ، سه معادله حاصل می‌شود.

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial x} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) + \rho b_r = 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta x}}{\partial x} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} + \rho b_\theta = 0 \\ \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta x}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \tau_{rx} + \rho b_x = 0 \end{cases} \quad (6-2)$$

۲-۲-۲ روابط سینماتیک (روابط کرنش-جابجایی)

در حالت کلی، معادله‌ی سینماتیک به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{1}{2} [(\vec{\nabla} \vec{u}) + (\vec{\nabla} \vec{u})^T] \quad (7-2)$$

که با جای گذاری در دستگاه مختصات استوانه‌ای، شش معادله‌ی زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \\ \varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \end{cases}, \begin{cases} \gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \\ \gamma_{\theta x} = \frac{\partial u_\theta}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_x}{\partial \theta} \\ \gamma_{rx} = \frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial x} \end{cases} \quad (۸-۲)$$

۲-۲-۳ روابط ساختاری (روابط تنش- کرنش)

شش معادله‌ی حل باقیمانده، روابط بین مؤلفه‌های تنش و کرنش است که برای مواد الاستیک خطی و همسانگرد، در حالت کلی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\tilde{\sigma} = 2\mu\tilde{\varepsilon} + \lambda\tilde{I}\text{tr}(\tilde{\varepsilon}) \quad (۹-۲)$$

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{2\mu} \left[\tilde{\sigma} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \tilde{I} \text{tr}(\tilde{\sigma}) \right] \quad (۱۰-۲)$$

که در آن‌ها μ و λ ثابت‌های لامه بوده و خود تابعی از خواص مکانیکی ماده می‌باشند.

$$\begin{cases} \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \\ \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \end{cases} \quad (۱۱-۲)$$

با بیان معادلات ساختاری در قالب مؤلفه‌های مختصات استوانه‌ای روابط زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} \sigma_r = 2\mu\varepsilon_r + \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_x) \\ \sigma_\theta = 2\mu\varepsilon_\theta + \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_x) \\ \sigma_x = 2\mu\varepsilon_x + \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_x) \\ \tau_{r\theta} = \mu\gamma_{r\theta} \\ \tau_{\theta x} = \mu\gamma_{\theta x} \\ \tau_{rx} = \mu\gamma_{rx} \end{cases} \quad (۱۲-۲)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{1}{2\mu} \left[\sigma_r - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} (\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_x) \right] \\ \varepsilon_\theta = \frac{1}{2\mu} \left[\sigma_\theta - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} (\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_x) \right] \\ \varepsilon_x = \frac{1}{2\mu} \left[\sigma_x - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} (\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_x) \right] \end{cases}, \begin{cases} \gamma_{r\theta} = \frac{\tau_{r\theta}}{\mu} \\ \gamma_{\theta x} = \frac{\tau_{\theta x}}{\mu} \\ \gamma_{rx} = \frac{\tau_{rx}}{\mu} \end{cases} \quad (۱۳-۲)$$

۴-۲-۲ مسائل متقارن محوری^۱

در مسائلی که هندسه، بارگذاری‌ها، شرایط مرزی و خواص ماده در تمامی زوایا نسبت به یک محور تغییری نداشته باشند؛ شرایط تقارن محوری برقرار بوده که این امر به ساده‌تر شدن حلّ مسأله کمک می‌کند.

در این تحقیق، هندسه‌ی مورد نظر، استوانه‌های جدار ثابت هستند. شرایط مرزی متقارن بوده و بارگذاری تنها در راستای شعاعی و به صورت متقارن اعمال می‌شود. علاوه بر آن، تمامی خواص، در راستای محیطی استوانه ثابتند. لذا شرط تقارن محوری برقرار است. بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{\partial(\quad)}{\partial\theta} = 0, \quad u_\theta = 0 \text{ or const.} \quad (14-2)$$

با اعمال این تغییرات در رابطه‌ی (۸-۲) و استفاده از (۱۲-۲) داریم:

$$\begin{cases} \gamma_{r\theta} = \gamma_{\theta x} = 0 \\ \tau_{r\theta} = \tau_{\theta x} = 0 \end{cases} \quad (15-2)$$

در این صورت تعداد مجهولات به ۱۰ عدد کاهش یافته و معادلات تعادل تنش، روابط سینماتیک

و روابط ساختاری به ترتیب به صورت زیر بازنویسی می‌شوند:

$$\begin{cases} \frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial\tau_{rx}}{\partial x} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) + \rho b_r = 0 \\ \frac{\partial\tau_{rx}}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{1}{r}\tau_{rx} + \rho b_x = 0 \end{cases} \quad (16-2)$$

$$\begin{cases} \epsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \epsilon_\theta = \frac{u_r}{r} \\ \epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \gamma_{rx} = \frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r} \end{cases} \quad (17-2)$$

¹ Axisymmetric

$$\begin{cases} \sigma_r = 2\mu\varepsilon_r + \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_x) \\ \sigma_\theta = 2\mu\varepsilon_\theta + \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_x) \\ \sigma_x = 2\mu\varepsilon_x + \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_x) \\ \tau_{rx} = \mu\gamma_{rx} \end{cases} \quad (18-2)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{1}{2\mu} \left[\sigma_r - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} (\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_x) \right] \\ \varepsilon_\theta = \frac{1}{2\mu} \left[\sigma_\theta - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} (\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_x) \right] \\ \varepsilon_x = \frac{1}{2\mu} \left[\sigma_x - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} (\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_x) \right] \\ \gamma_{rx} = \frac{\tau_{rx}}{\mu} \end{cases} \quad (19-2)$$

تا اینجا تعداد مجهولات به ده عدد کاهش پیدا کرده است. اما همچنان معادلات حل نخواهد شد و مجهولات به دست نمی‌آیند. لذا از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی استفاده می‌شود.

۲-۲-۵ تئوری الاستیسیته‌ی مستوی (PET)

در این تئوری فرض می‌شود که مقاطع مستوی عمود بر محور مرکزی استوانه، پس از بارگذاری و تغییر شکل همچنان مستوی و عمود بر محور مرکزی باقی می‌مانند. تغییر شکل‌های ایجاد شده نسبت به محور متقارن بوده و مقدارشان در امتداد طول استوانه تغییر نمی‌کند، علاوه بر آن جابه‌جایی شعاعی تنها تابع شعاع استوانه است. لذا کرنش برشی γ_{rx} و تنش برشی τ_{rx} صفر در نظر گرفته می‌شود. در نتیجه محورهای دستگاه استوانه‌ای، همان محورهای اصلی و تنش‌های عمودی، همان تنش‌های اصلی هستند. از دیگر نتایج این تئوری، ثابت ماندن تنش و کرنش طولی در راستای طول استوانه می‌باشد.

$$\begin{cases} \gamma_{rx} = 0, \tau_{rx} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0, \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (20-2)$$

لذا با در نظر گرفتن شرایط تقارن محوری و استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی؛ معادلات (۲-۲۰)

(۱۶) تا (۱۹-۲) به ترتیب به صورت روابط (۲-۲۱) تا (۲-۲۴) بازنویسی می‌شوند.

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) + \rho b_r = 0 \quad (21-2)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{du_r}{dr} \\ \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} \\ \varepsilon_x = \frac{du_x}{dx} \end{cases} \quad (22-2)$$

$$\begin{cases} \sigma_r = 2\mu\varepsilon_r + \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_x) \\ \sigma_\theta = 2\mu\varepsilon_\theta + \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_x) \\ \sigma_x = 2\mu\varepsilon_x + \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_x) \end{cases} \quad (23-2)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{1}{2\mu} \left[\sigma_r - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} (\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_x) \right] \\ \varepsilon_\theta = \frac{1}{2\mu} \left[\sigma_\theta - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} (\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_x) \right] \\ \varepsilon_x = \frac{1}{2\mu} \left[\sigma_x - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} (\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_x) \right] \end{cases} \quad (24-2)$$

روابط تنش-کرنش را می‌توان بدین صورت نیز نمایش داد:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} = E(r) \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} \quad (25-2)$$

$$\sigma_x = \beta(\sigma_r + \sigma_\theta) \quad (26-2)$$

ثابت‌ها A ، B و β با توجه به شرایط انتهای استوانه تعیین می‌شوند.

۲-۲-۶ استوانه با دو سر باز (تنش صفحه‌ای)

$$\begin{cases} A = \frac{1}{1-v^2} \\ B = \frac{v}{1-v^2} \\ \beta = 0 \end{cases} \quad (27-2)$$

۲-۲-۷ استوانه با دو سر بسته (کرنش صفحه‌ای)

$$\begin{cases} A = \frac{1-v}{(1+v)(1-2v)} \\ B = \frac{v}{(1+v)(1-2v)} \\ \beta = v \end{cases} \quad (28-2)$$

۲-۲-۸ تنش مؤثر

در تحقیق پیش رو به منظور تحلیل و مقایسه‌ی نتایج، تنش مؤثر بر مبنای تئوری تسلیم فن میزس^۱ به دست آمده است. طبق این تئوری، نارسایی در اثر تسلیم وقتی در یک جسم اتفاق می‌افتد که، در نقطه‌ای از جسم، دانسیته انرژی تغییر شکل در حالت تنش کلی برابر دانسیته‌ی انرژی تغییر شکل در آزمایش کشش ساده گردد. این معیار هماهنگی خوبی با نتایج آزمایش برای اجسام نرم داشته و به همین علت در طراحی کاربرد زیادی دارد.

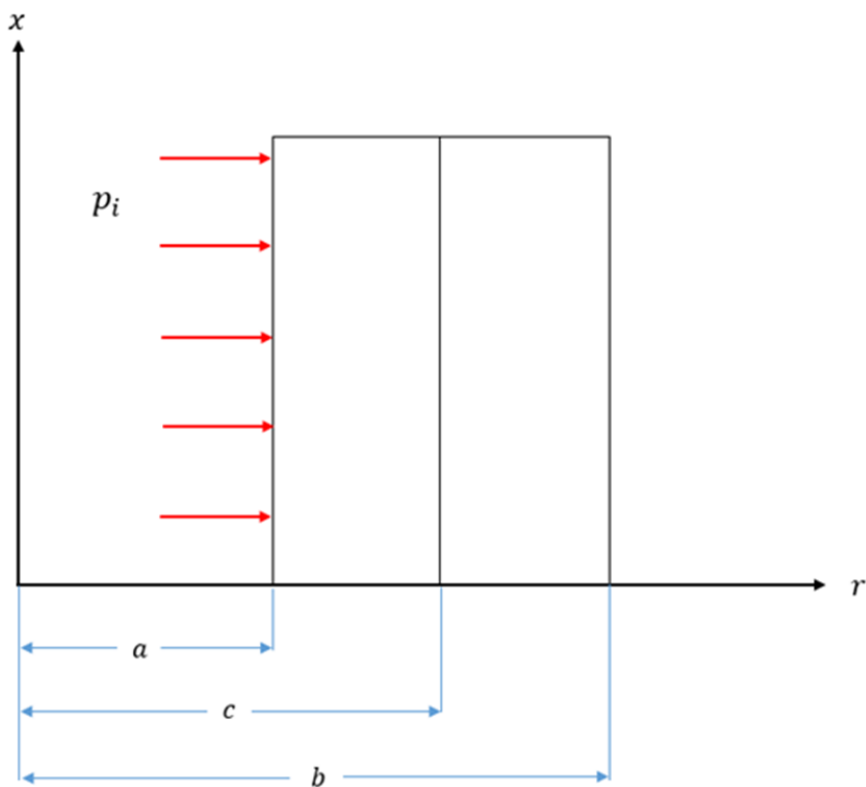
این معیار بر حسب تنش‌های اصلی به صورت زیر می‌باشد:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_M^2 \quad (2-29)$$

۲-۳ تحلیل استوانه‌های همگن تحت فشار

هندسه‌ی مورد بررسی در این بخش، استوانه‌ی جدار ضخیم دو لایه‌ی همسانگرد و همگن به شعاع داخلی r_i و شعاع خارجی r_o و شعاع مشترک r_m می‌باشد. بارگذاری تنها از نوع فشاری بوده و فشارهای وارد بر سطح داخلی با p_i مشخص می‌شود (شکل ۲-۱).

1. Von Mises



شکل ۱-۲ مقطع استوانه‌ای جدار ضخیم دو لایه‌ی همگن تحت فشار داخلی

۱-۳-۲ حل الاستیک استوانه‌های دو لایه‌ی همگن تحت فشار داخلی

در حالتی که نیروهای حجمی در مسأله وجود نداشته باشند؛ معادله‌ی تعادل (۲۱-۲) به صورت زیر برای هر لایه نوشته می‌شود:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) = 0 \quad (30-2)$$

با جای‌گذاری تنش‌های شعاعی و محیطی از رابطه‌ی (۲۵-۲) در معادله‌ی تعادل (۳۰-۲) و

هم‌چنین استفاده از (۲۲-۲)، معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر استوانه بر حسب جابه‌جایی به دست می‌آید.

$$r^2 \frac{d^2u}{dr^2} + r \frac{du}{dr} - u = 0 \quad (31-2)$$

$$u_r(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r} \quad (32-2)$$

بنابراین جابه‌جایی شعاعی برای استوانه‌ی داخلی و خارجی به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} u_{ri}(r) = c_{1i}r + \frac{c_{2i}}{r} \\ u_{ro}(r) = c_{1h}r + \frac{c_{2h}}{r} \end{cases} \quad (33-2)$$

با توجه به روابط (۲۵-۲)، (۲۲-۲) و (۳۳-۲) توزیع تنش‌های شعاعی و محیطی برای لایه‌ی

داخلی و خارجی به ترتیب به صورت روابط (۳۴-۲) و (۳۵-۲) در می‌آید.

$$\begin{cases} \sigma_r = E_i \left(A \left(c_{1i} - \frac{c_{2i}}{r^2} \right) + B \left(c_{1i} + \frac{c_{2i}}{r^2} \right) \right) \\ \sigma_\theta = E_i \left(B \left(c_{1i} - \frac{c_{2i}}{r^2} \right) + A \left(c_{1i} + \frac{c_{2i}}{r^2} \right) \right) \end{cases} \quad (34-2)$$

$$\begin{cases} \sigma_r = E_o \left(A \left(c_{1h} - \frac{c_{2h}}{r^2} \right) + B \left(c_{1h} + \frac{c_{2h}}{r^2} \right) \right) \\ \sigma_\theta = E_o \left(B \left(c_{1h} - \frac{c_{2h}}{r^2} \right) + A \left(c_{1h} + \frac{c_{2h}}{r^2} \right) \right) \end{cases} \quad (35-2)$$

به منظور محاسبه‌ی ثابت‌های c_{1i} ، c_{2i} ، c_{1h} و c_{2h} از شرایط مرزی استفاده می‌شود. از آنجا که

این شرایط را برای تنش شعاعی و جابه‌جایی در اختیار داریم؛

$$r = a \rightarrow (\sigma_r(r))_i = -p_i \quad (36-2)$$

$$r = c \rightarrow (\sigma_r(r))_i = (\sigma_r)_o \quad (37-2)$$

$$r = c \rightarrow u(r)_o - u(r)_i = \delta \quad (38-2)$$

$$r = b \rightarrow (\sigma_r(r))_o = 0 \quad (39-2)$$

با جای‌گذاری (۳۳-۲)، (۳۴-۲) و (۳۵-۲) در شرایط مرزی (۳۶-۲) تا (۳۹-۲) داریم:

$$E_i \left(A \left(c_{1i} - \frac{c_{2i}}{a^2} \right) + B \left(c_{1i} + \frac{c_{2i}}{a^2} \right) \right) = -p_i \quad (40-2)$$

$$E_i \left(A \left(c_{1i} - \frac{c_{2i}}{c^2} \right) + B \left(c_{1i} + \frac{c_{2i}}{c^2} \right) \right) \quad (41-2)$$

$$= E_o(A(c_{1h} - \frac{c_{2h}}{c^2}) + B(c_{1h} + \frac{c_{2h}}{c^2}))$$

$$c_{1h}c + \frac{c_{2h}}{c} - c_{1i}c - \frac{c_{2i}}{c} = \delta \quad (42-2)$$

$$E_o(A(c_{1h} - \frac{c_{2h}}{b^2}) + B(c_{1h} + \frac{c_{2h}}{b^2})) = 0 \quad (43-2)$$

اکنون برای به دست آوردن ثابت‌های مجهول، روابط (۲-۴۰) تا (۲-۴۳) را به صورت ماتریسی زیر

داریم:

$$\begin{bmatrix} (A+B)E_i & \frac{(B-A)E_i}{a^2} & 0 & 0 \\ (A+B)E_i & \frac{(B-A)E_i}{c^2} & -E_o(A+B) & -\frac{E_o}{c^2}(B-A) \\ -c & -\frac{1}{c} & c & \frac{1}{c} \\ 0 & 0 & E_o(A+B) & \frac{E_o}{b^2}(B-A) \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} c_{1i} \\ c_{2i} \\ c_{1h} \\ c_{2h} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P_i \\ 0 \\ \delta \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (44-2)$$

از رابطه‌ی (۲-۴۴) ثابت‌های مجهول به دست می‌آید.

۲-۳-۲ حل عددی استوانه‌های دو لایه‌ی همگن تحت فشار داخلی

در این پایان نامه، حل عددی با استفاده از روش اجزای محدود و به کمک مدل‌سازی نرم‌افزار Abaqus 6.14.1 صورت گرفته است. به منظور المان‌بندی استوانه‌ها، از المان‌های متقارن محوری هشت‌گره‌ای^۱ CAX8R استفاده شده است. این المان در تحلیل پوسته‌ها و در شرایط تنش و کرنش صفحه‌ای به منظور افزایش دقت و هم‌چنین بالا بردن سرعت تحلیل، به صورت داخلی به المان C3D20R تبدیل می‌شود. به هر گره دستگاه مختصاتی با دو راستای شعاعی و طولی اختصاص می‌یابد که درجات آزادی آن را مشخص می‌کنند.

^۱ Node

استوانه‌های دو لایه‌ی جازنی‌شده‌ی همگن به شعاع داخلی $r_i = 150 \text{ mm}$ ، شعاع میانی (فصل مشترک) $r_m = 200 \text{ mm}$ ، شعاع خارجی $r_o = 250 \text{ mm}$ ، طول $L = 800 \text{ mm}$ و تداخل $\delta = 0.1 \text{ mm}$ با رسم مقطع مستطیلی از آن‌ها در حالت تقارن محوری، مدل‌سازی شده‌اند.

مدول‌های یانگ در سطح داخلی لایه‌ی داخلی (E_i) دارای مقدار 200 GPa برای فولاد و یا مقدار 70 GPa برای آلومینیوم بوده و فرض می‌شود که نسبت پواسون (ν) مقدار ثابت 0.3 را داراست. نتایج را برای دو حالت بارگذاری تنها فشار جازنی و اعمال هم‌زمان فشار جازنی و فشار داخلی $p_i = 140 \text{ MPa}$ بررسی می‌کنیم. خواص مکانیکی ثابت در نظر گرفته شده است. برای اعمال شرایط مرزی موجود در دو انتهای استوانه‌ها، بسته به شرایط انتهایی درجات آزادی مربوط به گره‌های موجود در دو انتهای استوانه مقید می‌شود. در شرایط تنش صفحه‌ای، نیاز به اعمال هیچ قیدی به دو سر استوانه نمی‌باشد. فشارهای داخلی نیز به سطح داخلی مقطع ترسیم شده اعمال می‌شوند.

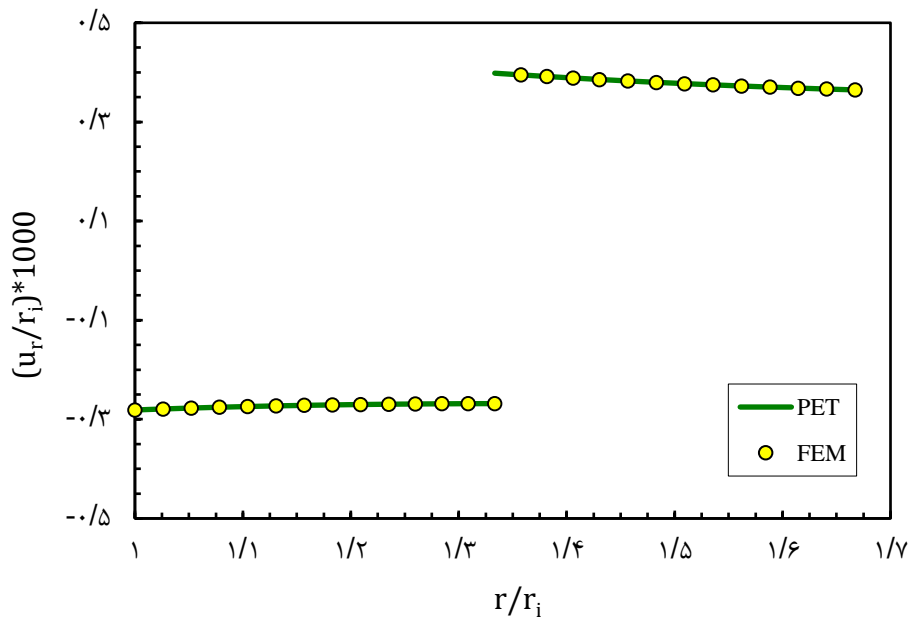
۲-۴ مطالعه‌ی موردی و مقایسه‌ی نتایج

به منظور مطالعه‌ی موردی و مقایسه‌ی نتایج حاصل از حلّ تحلیلی با مقادیر به‌دست‌آمده از حلّ عددی به کمک مدل‌سازی نرم‌افزاری؛ استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه همگن و همسانگرد را به شعاع داخلی $r_i = 150 \text{ mm}$ ، شعاع میانی (فصل مشترک) $r_m = 200 \text{ mm}$ ، شعاع خارجی $r_o = 250 \text{ mm}$ ، طول $L = 800 \text{ mm}$ و تداخل $\delta = 0.1 \text{ mm}$ در نظر می‌گیریم.

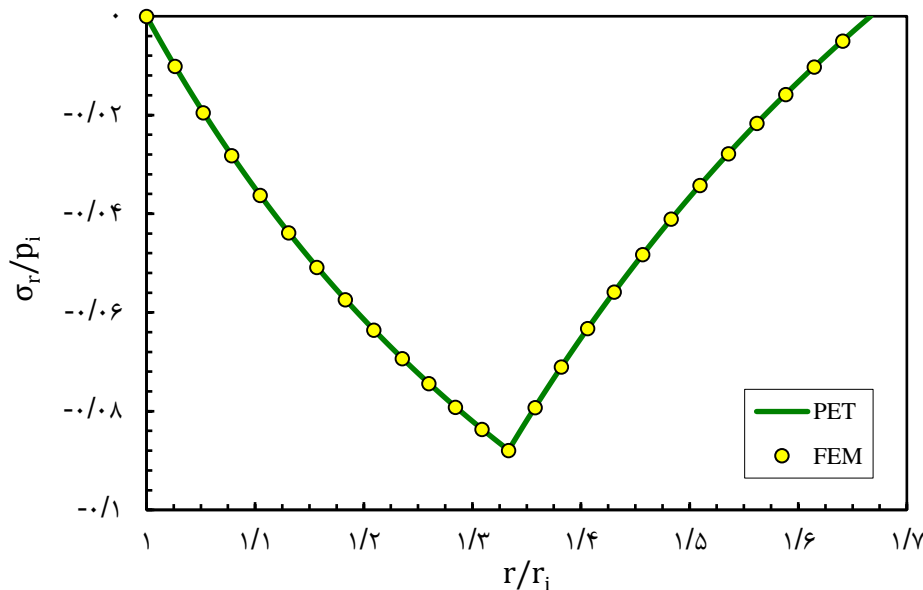
مدول‌های یانگ در استوانه‌های داخلی (E_i) و خارجی (E_o) دارای مقدار 200 GPa برای فولاد و یا مقدار 70 GPa برای آلومینیوم بوده فرض می‌شود که نسبت پواسون (ν) مقدار ثابت 0.3 را داراست. نتایج را برای دو حالت بارگذاری تنها فشار جازنی و اعمال هم‌زمان فشار جازنی و فشار داخلی $p_i = 140 \text{ MPa}$ بررسی می‌کنیم.

۵-۲ بارگذاری ناشی از فشار جازنی برای لایه‌های فولاد-فولاد

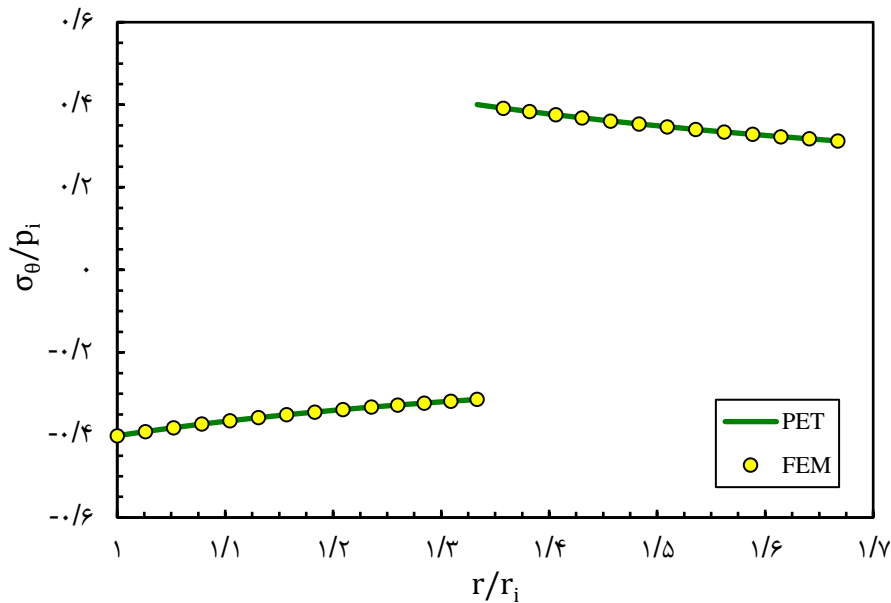
شکل ۲-۲ توزیع جابه‌جایی شعاعی را برحسب نسبت شعاع نمایش می‌دهد. جابه‌جایی در لایه‌ی داخلی دارای مقداری منفی و تقریباً ثابتی است، یعنی لایه‌ی داخلی در اثر فشار جازنی فشرده شده است. جابه‌جایی در لایه‌ی خارجی دارای مقداری مثبت و تقریباً ثابتی است، یعنی لایه‌ی خارجی در اثر فشار جازنی کشیده شده است. مقدار کشیدگی لایه‌ی خارجی نسبت به فشرده‌گی لایه‌ی داخلی بیشتر می‌باشد.



شکل ۲-۲ توزیع جابه‌جایی شعاعی برای استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی همگن فولاد-فولاد



شکل ۳-۲ توزیع تنش شعاعی برای استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی همگن فولاد-فولاد



شکل ۲-۴ توزیع تنش محیطی برای استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی همگن فولاد-فولاد

شکل ۲-۳ توزیع تنش شعاعی را در طی ضخامت استوانه‌ی دو لایه نشان می‌دهد. مقادیر تنش شعاعی در طول ضخامت منفی و در شعاع داخلی و خارجی استوانه‌ی دو لایه دارای مقادیر مساوی صفر می‌باشند. همچنین توزیع تنش شعاعی در جداره پیوسته است. مقدار ماکزیم تنش شعاعی که در فصل مشترک دو لایه اتفاق می‌افتد برابر فشار تماسی^۱ می‌باشد.

شکل ۲-۴ توزیع تنش محیطی را نسبت به شعاع استوانه‌ی دو لایه نشان می‌دهد. اولاً توزیع تنش محیطی در فصل مشترک شکستگی دارد. ثانیاً مقادیر تنش در لایه‌ی داخلی منفی و در لایه‌ی خارجی مثبت است. مقادیر ماکزیم و مینیمم تنش‌های محیطی در لایه‌ی داخلی و خارجی تقریباً با هم برابرند؛ به طوری که تنش محیطی در لایه‌ی داخلی از مقدار بیشینه خود در شعاع داخلی به مقدار مینیمم خود در شعاع خارجی می‌رسد، همین روند نیز برای لایه‌ی خارجی وجود دارد.

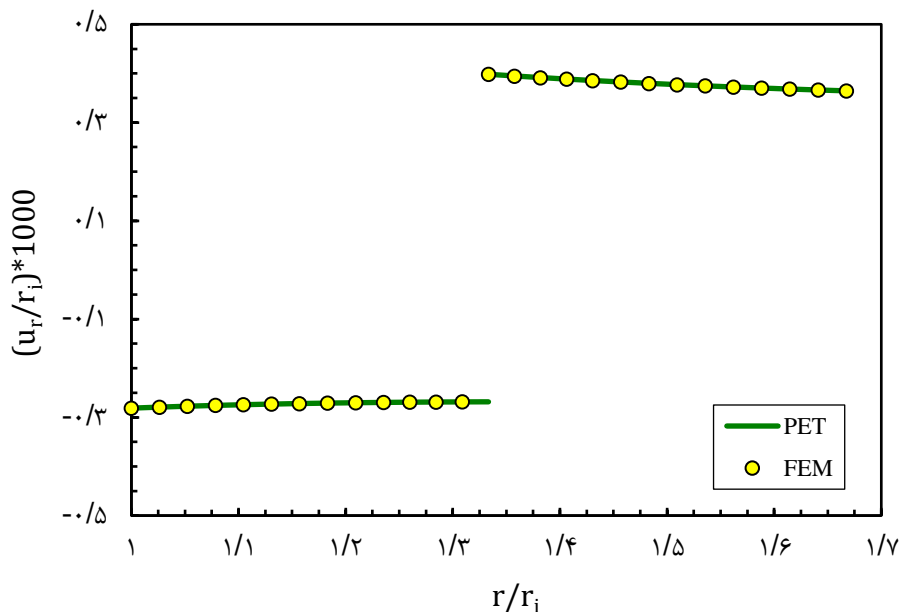
1. Contact Pressure

۲-۵-۱ بارگذاری ناشی از فشار جازنی برای لایه‌های آلومینیم-آلومینیم

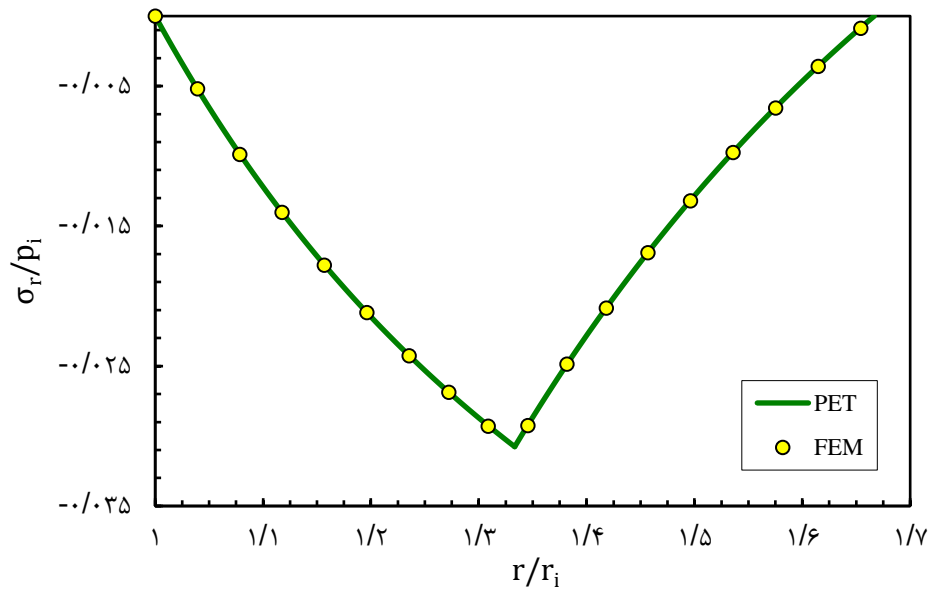
شکل ۲-۵ توزیع جابه‌جایی شعاعی در طول جداره‌ی استوانه‌ی جازنی‌شده را نمایش می‌دهد. روند تغییرات و حتی مقادیر مانند شکل ۲-۲ می‌باشد و این یعنی مقادیر جابه‌جایی وقتی جنس هر دو لایه‌ی داخلی و خارجی استوانه‌ی جازنی‌شده یکی باشند و به جنس وابسته نیست.

شکل ۲-۶ توزیع تنش شعاعی را نسبت به شعاع نشان می‌دهد. در این شکل نیز روند تغییرات مانند شکل ۲-۳ می‌باشد با این تفاوت که مقادیر تنش، فقط در شعاع داخلی و خارجی استوانه‌ی جازنی‌شده برابری ولی در نقاط دیگر اختلاف دارند طوری که این اختلاف در فصل مشترک حدود ۸ مگاپاسکال می‌باشد؛ یعنی تنش شعاعی در فصل مشترک به اندازه‌ی ۸ مگاپاسکال کاهش پیدا کرده و این باعث می‌شود در جاهای کاربردی مانند شفت و چرخنده گشتاور کمتری انتقال یابد.

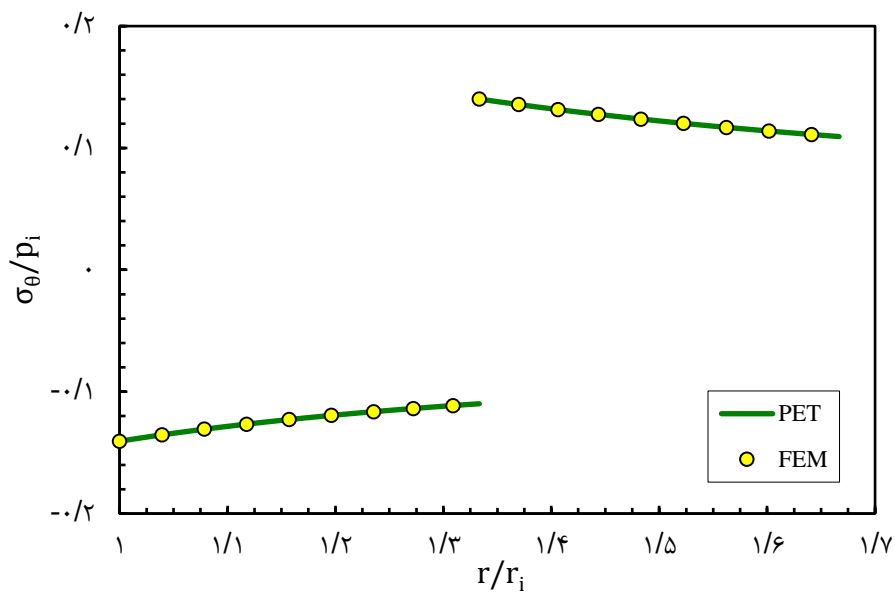
شکل ۲-۷ توزیع تنش محیطی را در طی ضخامت استوانه‌ی دو لایه نمایش می‌دهد. در اینجا نیز توزیع تنش محیطی رفتاری شبیه شکل ۲-۴ دارد در عین حال تمامی مقادیر به اندازه‌ی ۴۰ مگاپاسکال کاهش یافته است، پس مقادیر تنش محیطی به جنس وابسته‌اند.



شکل ۲-۵ جابه‌جایی شعاعی برای استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی همگن آلومینیم-آلومینیم



شکل ۶-۲ تنش شعاعی برای استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی همگن آلومینیم-آلومینیم



شکل ۷-۲ تنش محیطی برای استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی همگن آلومینیم-آلومینیم

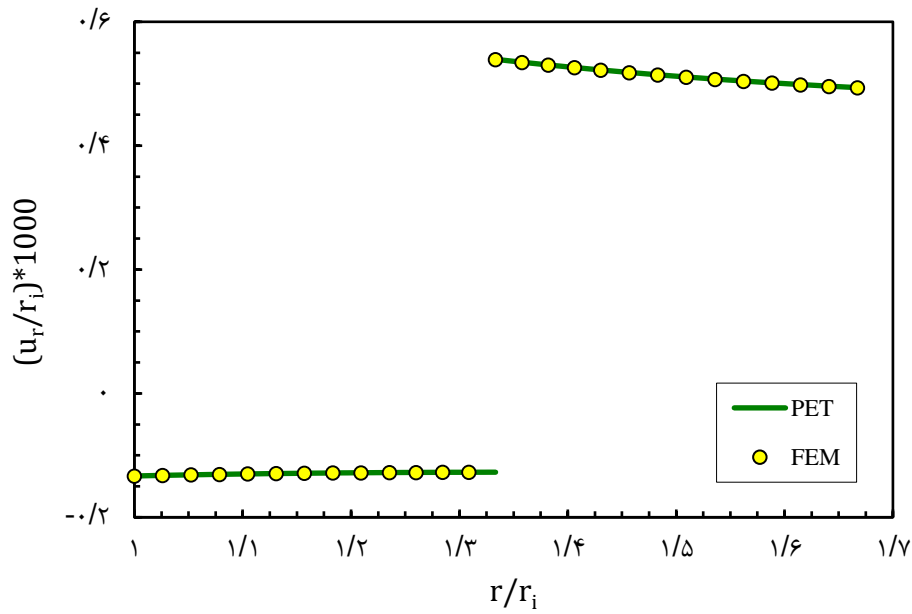
۲-۵-۲ بارگذاری ناشی از فشار جازنی برای لایه‌های فولاد-آلومینیم

شکل ۸-۲ توزیع جابه‌جایی شعاعی در طول جداره‌ی استوانه‌ی مرکب را نمایش می‌دهد. روند تغییرات مانند شکل ۵-۲ می‌باشد با این تفاوت که لایه‌ی داخلی کمتر و لایه‌ی خارجی بیشتر نسبت به حالت هم‌جنس جابه‌جا شده‌اند.

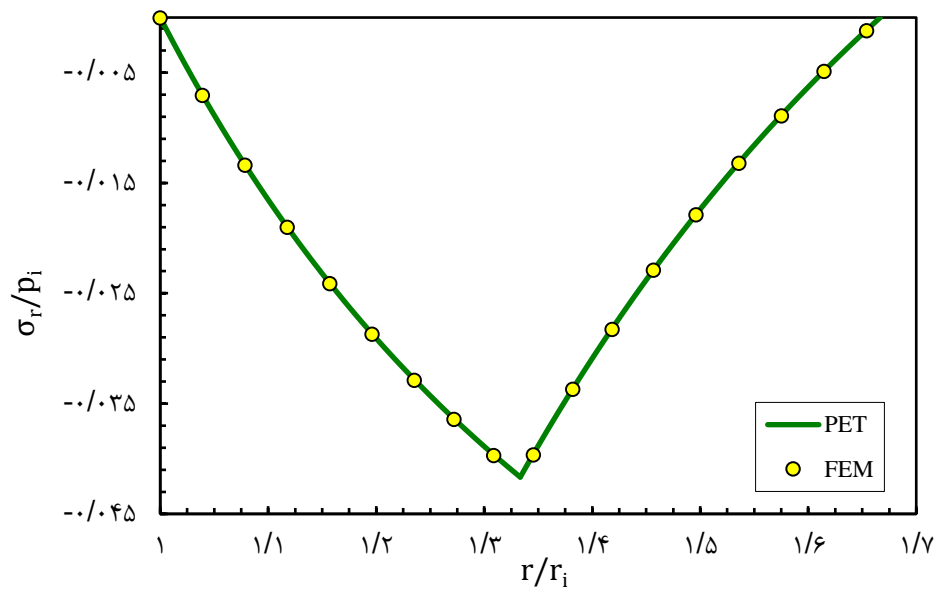
روند تغییرات توزیع تنش شعاعی مانند حالت استوانه‌ی دو لایه‌ی هم‌جنس می‌باشد ولی ماکزیمم

مقدار تنش شعاعی بین دو حالت دو لایه‌ی هم‌جنس آلومینیوم و فولاد قرار دارد.

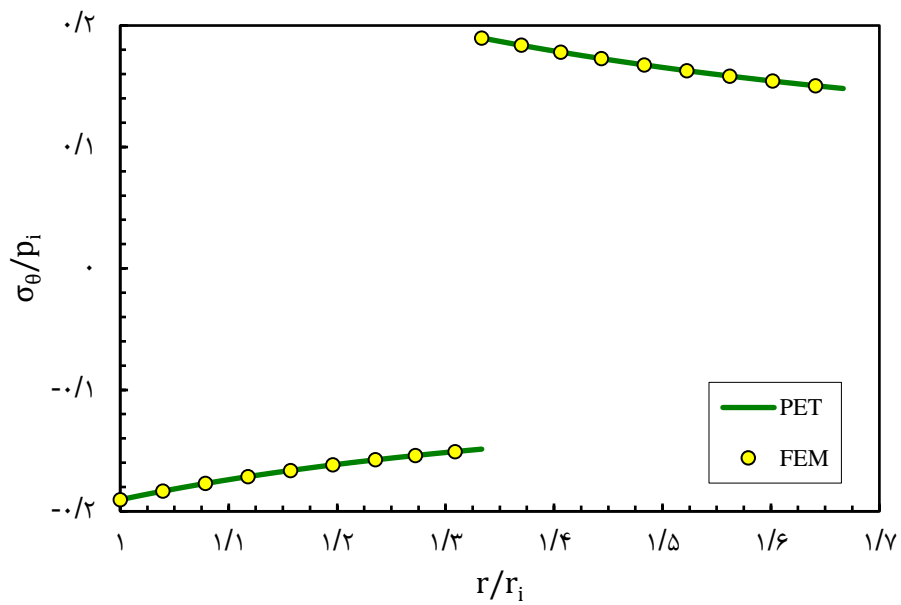
توزیع تنش محیطی نیز شبیه شکل ۷-۲ می‌باشد ولی مقادیر در هر دو لایه افزایش پیدا کرده‌اند.



شکل ۸-۲ جابه‌جایی شعاعی برای استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی هم‌گن فولاد-آلومینیوم

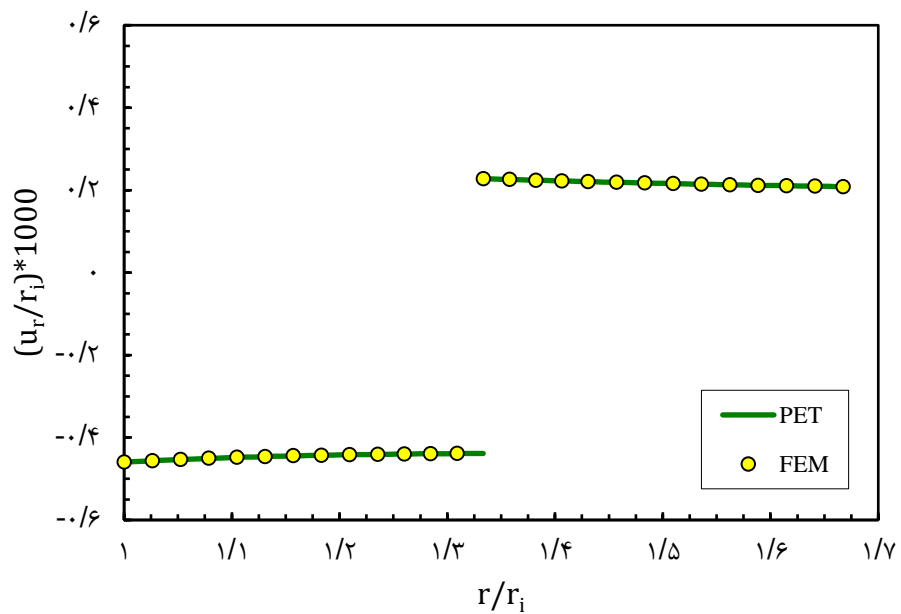


شکل ۹-۲ تنش شعاعی برای استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی هم‌گن فولاد-آلومینیوم

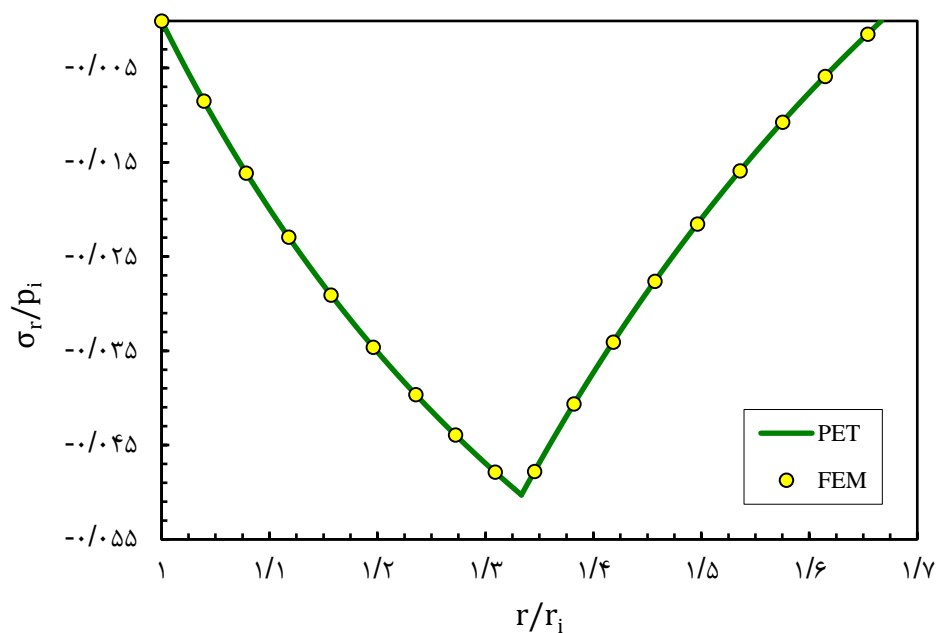


شکل ۲-۱۰ تنش محیطی برای استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی همگن فولاد-آلومینیم

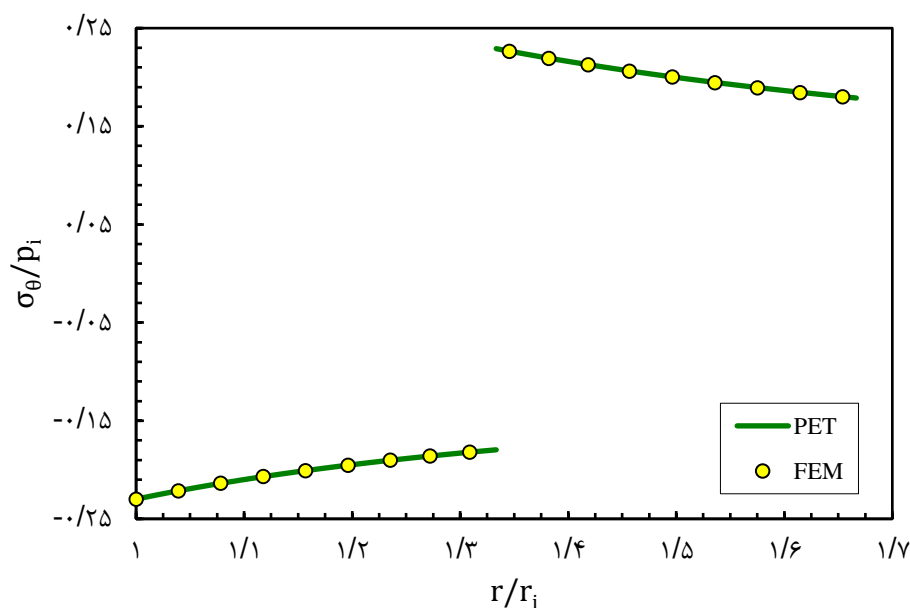
۲-۵-۳ بارگذاری ناشی از فشار جازنی برای لایه‌های آلومینیم-فولاد



شکل ۲-۱۱ جابه‌جایی شعاعی برای استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی همگن آلومینیم-فولاد



شکل ۲-۱۲ تنش شعاعی برای استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی همگن آلومینیم-فولاد



شکل ۲-۱۳ تنش محیطی برای استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی همگن آلومینیم-فولاد

وقتی که جنس لایه‌ی داخلی نرم‌تر نسبت به لایه‌ی خارجی باشد، کشیدگی لایه‌ی خارجی کاهش و فشردگی لایه‌ی داخلی افزایش می‌یابد. وقتی که جنس لایه‌ی خارجی نرم‌تر نسبت داخلی باشد، کشیدگی لایه‌ی خارجی افزایش و فشردگی لایه‌ی داخلی کاهش می‌یابد. تنش شعاعی برای استوانه‌های دو لایه با دو جنس متفاوت تقریباً مشابه یکدیگرند.

بیشینه تنش محیطی برای استوانه‌های دو لایه با دو جنس مختلف، وقتی لایه‌ی داخلی مدول یانگ بالاتری داشته باشد، کمتر می‌شود. پس جاهایی که جابه‌جایی برای طراحی مهم نباشد و تنش قابل توجه هست، از استوانه با لایه‌ی داخلی مرغوب‌تر استفاده می‌کنیم و جاهایی که جابه‌جایی مهم و تنش مهم نیست از استوانه دو لایه با لایه‌ی خارجی مرغوب استفاده می‌کنیم.

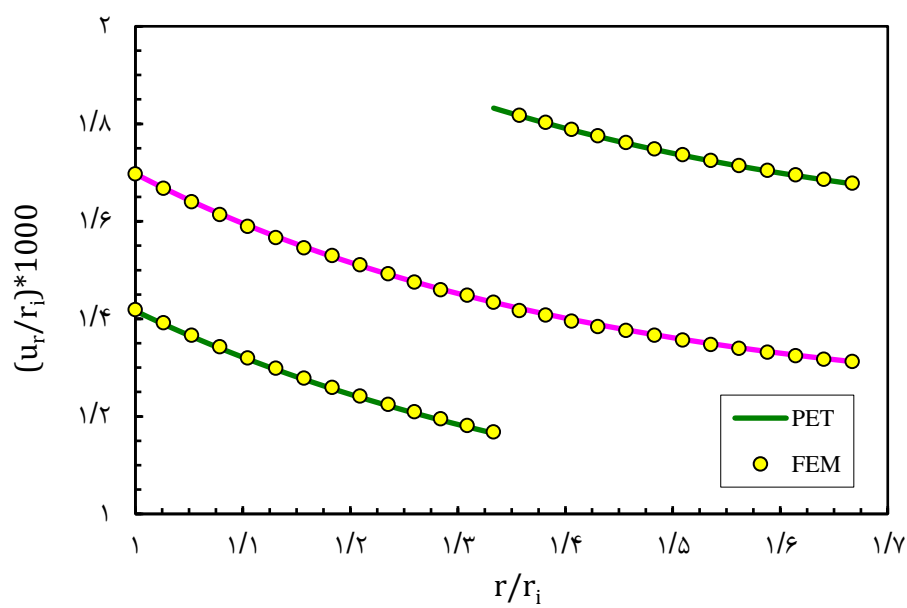
۲-۵-۴ استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی همگن (فولاد-فولاد) تحت بارگذاری فشار

داخلی

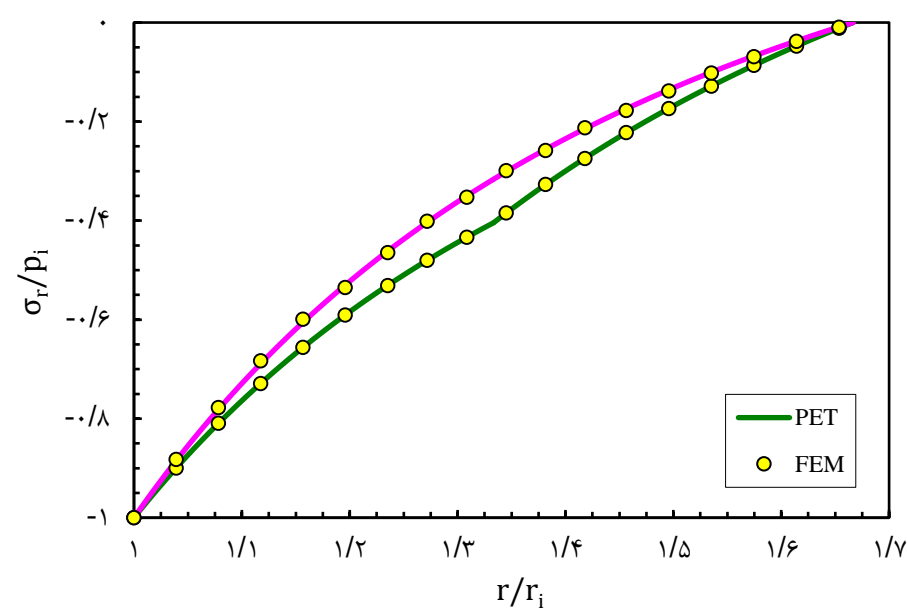
شکل ۲-۱۴ توزیع جابه‌جایی‌ها را نسبت به شعاع نمایش می‌دهد. جابه‌جایی‌ها مثبتند و برای استوانه‌ی دو لایه به دلیل وجود فشار جازنی ناپیوسته و برای استوانه‌ی تک لایه پیوسته می‌باشد. جابه‌جایی لایه‌ی داخلی استوانه‌ی دو لایه نسبت به جابه‌جایی استوانه‌ی یک لایه کاهش و جابه‌جایی لایه‌ی خارجی استوانه‌ی دو لایه نسبت به جابه‌جایی استوانه‌ی تک لایه افزایش یافته است.

در شکل ۲-۱۵ توزیع تنش شعاعی مشاهده می‌شود. تنش‌های شعاعی در شعاع داخلی و خارجی استوانه‌ی یک لایه و دو لایه یکی می‌باشند، ولی در بقیه‌ی نقاط تنش شعاعی باهم تفاوت دارند، به طوری که این اختلاف در فصل مشترک استوانه‌ی دو لایه به بیشترین مقدار می‌رسد. این اختلاف طوری است که مقدار تنش شعاعی در فصل مشترک استوانه‌ی دو لایه بیشتر از استوانه‌ی تک لایه می‌باشد.

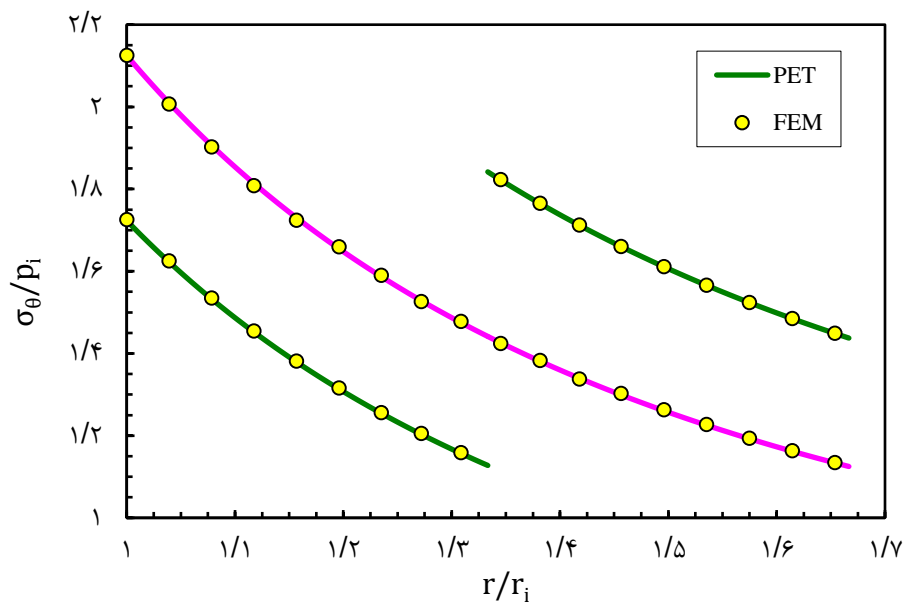
شکل ۲-۱۶ توزیع تنش‌های محیطی را نمایش می‌دهد. در این شکل نیز توزیع تنش محیطی استوانه‌ی دو لایه به خاطر فشار جازنی ناپیوسته می‌باشد. تنش‌های محیطی در لایه‌ی داخلی استوانه‌ی دو لایه نسبت به استوانه‌ی تک لایه کاهش و در لایه‌ی خارجی استوانه‌ی دو لایه نسبت به استوانه‌ی تک لایه افزایش یافته به طوری که بیشینه تنش محیطی این لایه از بیشینه تنش محیطی استوانه‌ی تک لایه در شعاع داخلی آن، کمتر می‌باشد؛ که از همین ویژگی برای متعادل کردن تنش‌های محیطی استفاده می‌شود.



شکل ۱۴-۲ جابه‌جایی شعاعی استوانه‌ای تک لایه‌ی فولاد و دو لایه‌ی همگن فولاد-فولاد تحت بارگذاری فشار داخلی



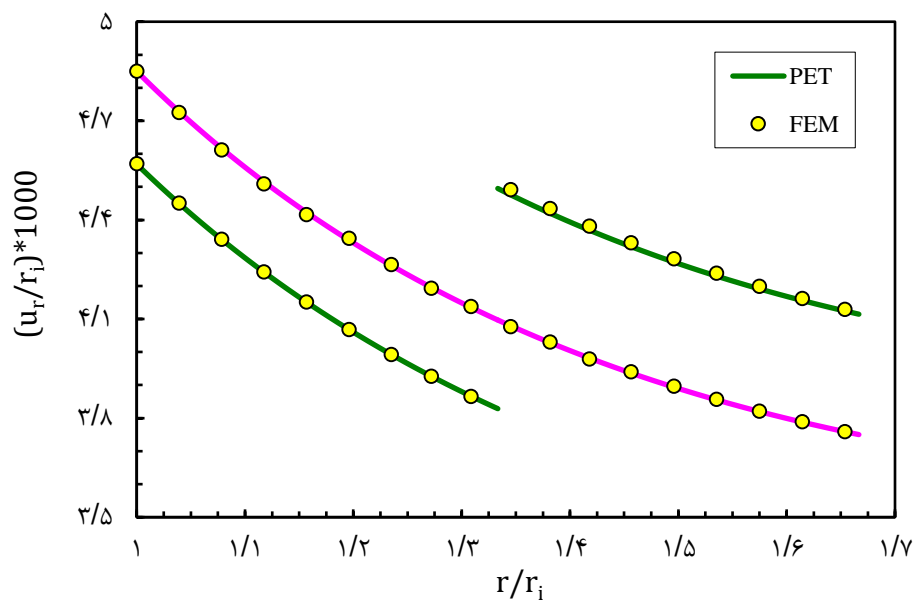
شکل ۱۵-۲ تنش شعاعی برای استوانه‌ای تک لایه و دو لایه‌ی همگن فولاد-فولاد تحت بارگذاری فشار داخلی



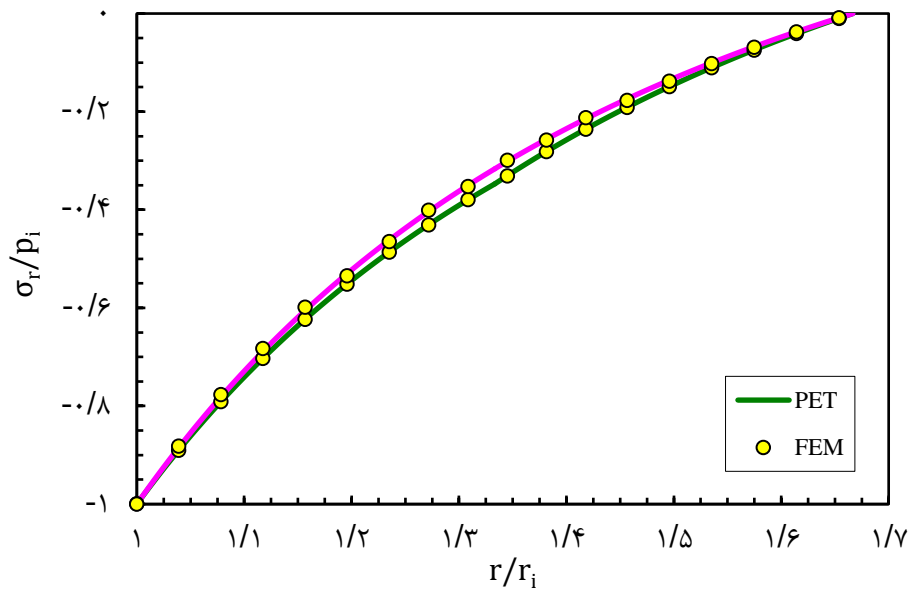
شکل ۲-۱۶ تنش محیطی برای استوانه‌ی تک لایه و دو لایه‌ی همگن فولاد-فولاد تحت بارگذاری فشار داخلی

۲-۵-۵ استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی همگن (آلومینیم-آلومینیم) تحت بارگذاری

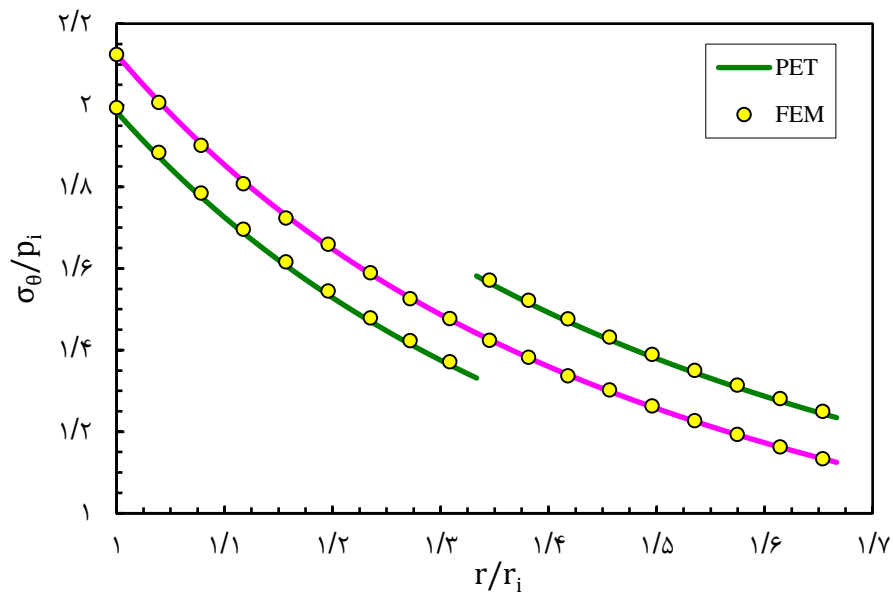
فشار داخلی



شکل ۲-۱۷ جابه‌جایی شعاعی استوانه تک لایه و دو لایه‌ی همگن آلومینیم-آلومینیم تحت بارگذاری فشار داخلی



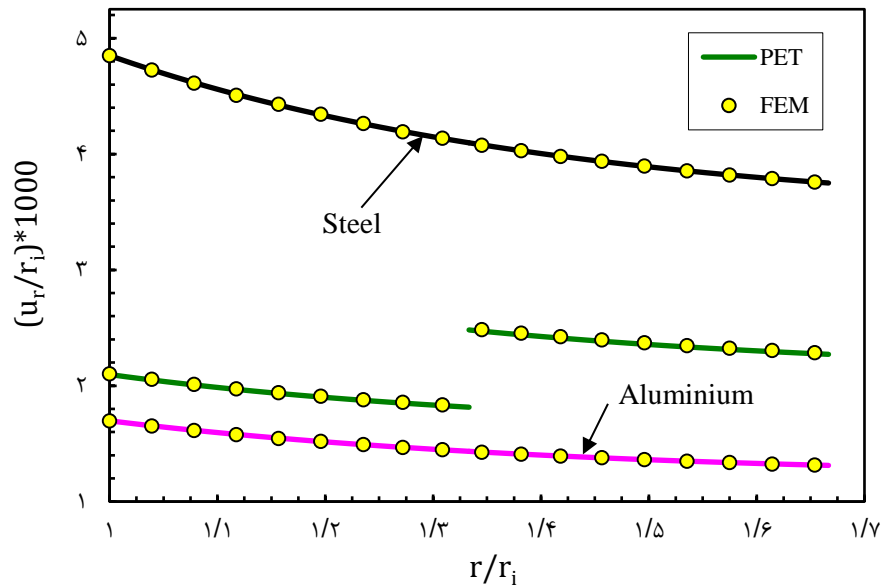
شکل ۱۸-۲ تنش شعاعی برای استوانه‌ی تک لایه و دو لایه‌ی همگن آلومینیم-آلومینیم تحت بارگذاری فشار داخلی



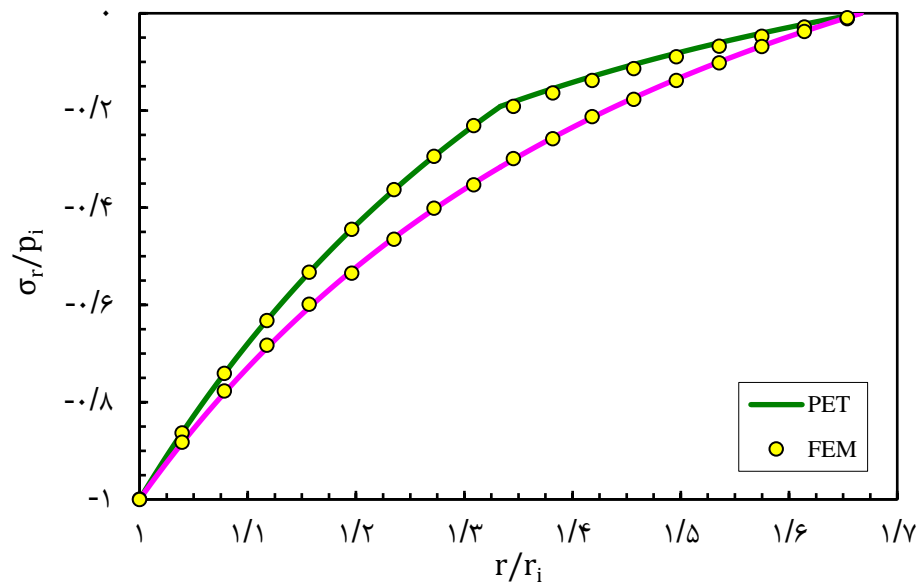
شکل ۱۹-۲ تنش محیطی برای استوانه‌ی تک لایه و دو لایه‌ی همگن آلومینیم-آلومینیم تحت بارگذاری فشار داخلی

۲-۵-۶ استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی همگن (فولاد- آلومینیم) تحت بارگذاری

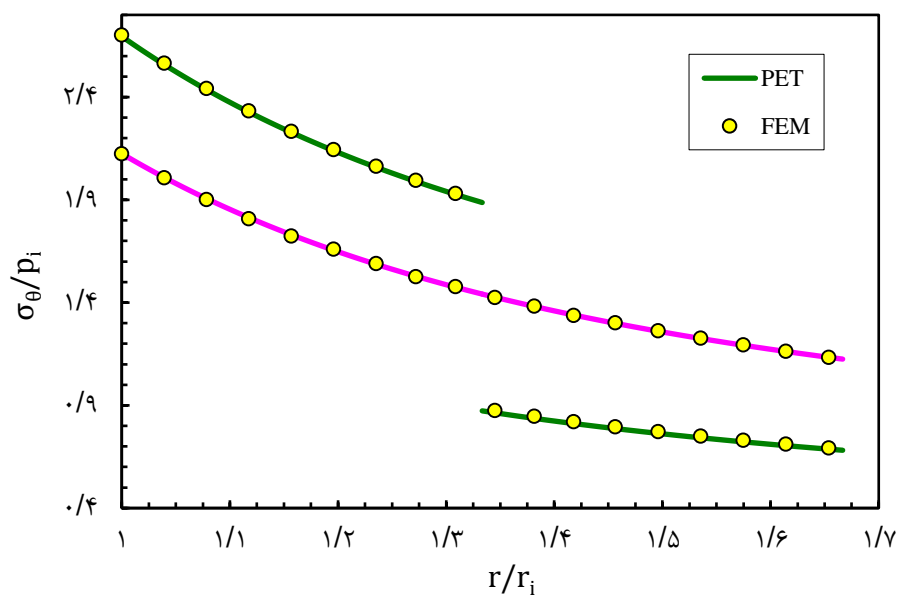
فشار داخلی



شکل ۲۰-۲ جابه‌جایی شعاعی استوانه‌های تک لایه و دو لایه‌ی همگن فولاد-آلومینیم تحت بارگذاری فشار داخلی



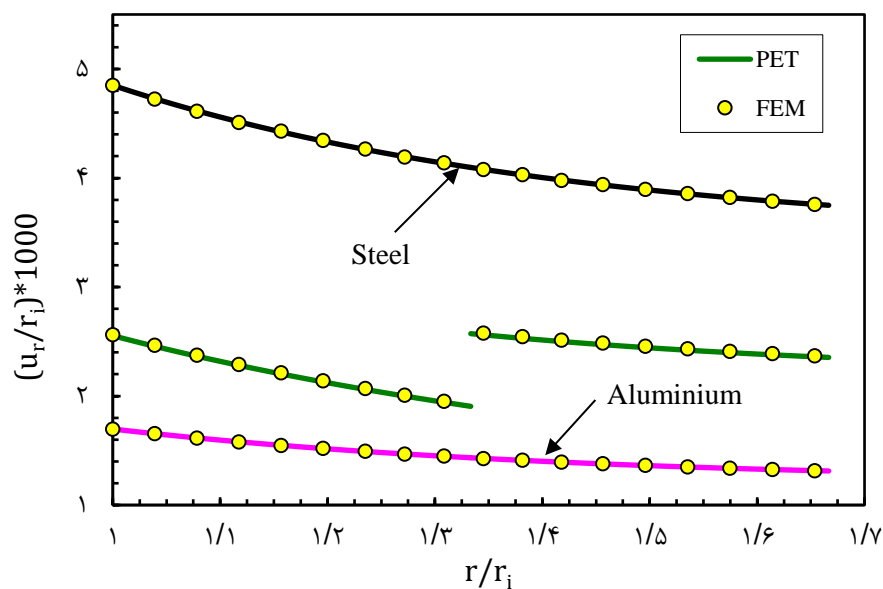
شکل ۲۱-۲ تنش شعاعی برای استوانه‌ی تک لایه و دو لایه‌ی همگن فولاد-آلومینیم تحت بارگذاری فشار داخلی



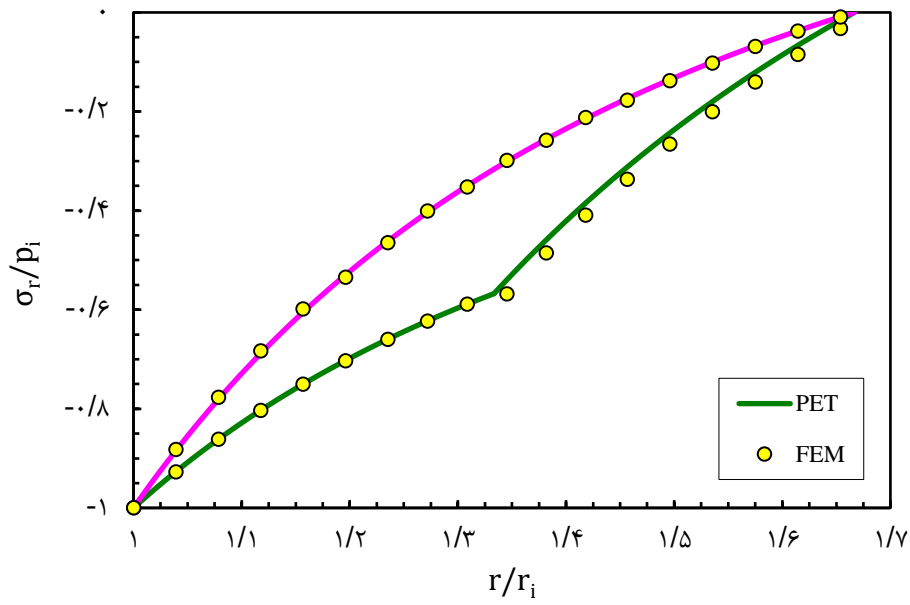
شکل ۲۲-۲ تنش محیطی برای استوانه‌ی تک لایه و دو لایه‌ی همگن فولاد-آلومینیم تحت بارگذاری فشار داخلی

۷-۵-۲ استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی همگن (آلومینیم-فولاد) تحت بارگذاری فشار

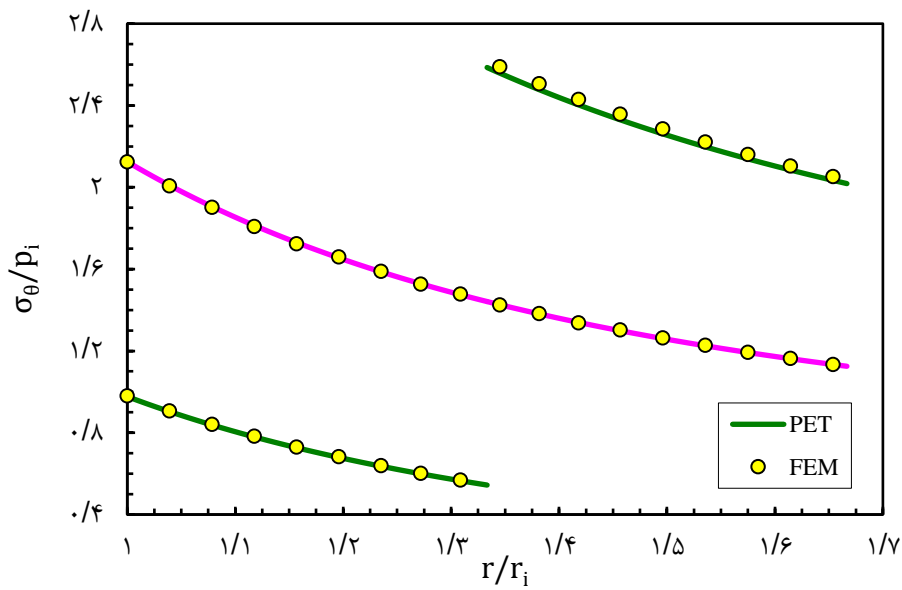
داخلی



شکل ۲۳-۲ جابه‌جایی شعاعی استوانه‌های تک لایه و دو لایه‌ی همگن آلومینیم-فولاد تحت بارگذاری فشار داخلی



شکل ۲-۲۴ تنش شعاعی برای استوانه‌ی تک لایه و دو لایه‌ی همگن آلومینیم-فولاد تحت بارگذاری فشار داخلی



شکل ۲-۲۵ تنش محیطی برای استوانه‌ی تک لایه و دو لایه‌ی همگن آلومینیم-فولاد تحت بارگذاری فشار داخلی

۶-۲ تعیین شعاع و فشار بهینه‌ی فرایند جازنی برای استوانه‌های دو لایه‌ی هم

جنس

همان‌طور که شکل ۱-۲ نشان می‌دهد یک استوانه‌ی جازنی‌شده‌ی دو لایه با شعاع تماس c و فشار جازنی p_c و فشار داخلی p_i می‌باشد. برای این استوانه‌ی دو لایه تنش‌های شعاعی و محیطی برای استوانه‌ی داخلی و خارجی به ترتیب عبارتند از:

$$\sigma_r = p_i \frac{a^2(r^2 - b^2)}{r^2(b^2 - a^2)} - p_c \frac{c^2(r^2 - a^2)}{r^2(c^2 - a^2)} \quad (۴۵-۲)$$

$$\sigma_\theta = p_i \frac{a^2(r^2 + b^2)}{r^2(b^2 - a^2)} - p_c \frac{c^2(r^2 + a^2)}{r^2(c^2 - a^2)}$$

$$\sigma_r = p_i \frac{a^2(r^2 - b^2)}{r^2(b^2 - a^2)} + p_c \frac{c^2(r^2 - b^2)}{r^2(b^2 - c^2)} \quad (۴۶-۲)$$

$$\sigma_\theta = p_i \frac{a^2(r^2 + b^2)}{r^2(b^2 - a^2)} + p_c \frac{c^2(r^2 + b^2)}{r^2(b^2 - c^2)}$$

با استفاده از معیار ترسکا، تنش برشی در هر لایه عبارت است از:

$$\tau_i = \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{2} = \frac{1}{r^2} \left(p_i \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} - p_c \frac{a^2 c^2}{c^2 - a^2} \right) \quad (۴۷-۲)$$

$$\tau_o = \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{2} = \frac{1}{r^2} \left(p_i \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} + p_c \frac{b^2 c^2}{b^2 - c^2} \right) \quad (۴۸-۲)$$

این فرمول به این اشاره دارد که بیشینه تنش برشی در شعاع داخلی هر لایه رخ می‌دهد و داریم:

$$\tau_{\max i} = \frac{1}{2} \left(p_i \frac{2a^2 b^2}{a^2(b^2 - a^2)} - p_c \frac{2c^2}{c^2 - a^2} \right) \quad (۴۹-۲)$$

$$\tau_{\max o} = \frac{1}{2} \left(p_i \frac{2a^2 b^2}{c^2(b^2 - a^2)} + p_c \frac{2b^2}{b^2 - c^2} \right) \quad (۵۰-۲)$$

با فرض اینکه ماده برای دو لایه یکسان است و حداکثر تنش برشی مجاز توسط τ_{all} مشخص

می‌شود. برای به‌دست‌آوردن یک راه حل بهینه، هر دو لایه باید هم‌زمان به حد تسلیم برسند، یعنی:

$$\tau_{\max i} = \tau_{\max o} = \tau_{all} \quad (۵۱-۲)$$

اکنون با جای گذاری رابطه های (۴۹-۲) و (۵۰-۲) در رابطه ی (۵۱-۲)، p_c بر حسب پارمترهای

c, b, a, p_i عبارتند از:

$$p_c = p_i \left(\frac{1 - \frac{a^2}{c^2}}{1 - \frac{a^2}{b^2}} - \frac{1 - \frac{a^2}{c^2}}{1 - \frac{a^2}{c^2} + 1 - \frac{c^2}{b^2}} \right) \quad (۵۲-۲)$$

براساس روابط (۵۲-۲) و (۴۹-۲) بیشینه تنش برشی در هر لایه به صورت زیر به دست می آید:

$$\tau_{\max} = \left(\frac{p_i}{2 - \frac{a^2 b^2 + c^4}{b^2 c^2}} \right) \quad (۵۳-۲)$$

با مشتق گیری از رابطه ی (۵۳-۲) نسبت به شعاع تماسی c ، مقدار بهینه ی شعاع تماسی به صورت

زیر به دست می آید:

$$\frac{\partial \tau_{\max}}{\partial c} = 0 \quad \rightarrow \quad c = \sqrt{ab} \quad (۵۴-۲)$$

با جای گذاری رابطه ی (۵۴-۲) در رابطه ی (۵۳-۲) تنش برشی بیشینه بهینه حاصل می شود:

$$\tau_{\max} = \frac{p_i}{2 \left(1 - \frac{a}{b} \right)} \quad (۵۵-۲)$$

هم چنین فشار جازنی بهینه برابر است با:

$$p_c = p_i \frac{b - a}{2(b + a)} \quad (۵۶-۲)$$

با جای گذاری رابطه ی (۵۶-۲) و (۵۴-۲) در رابطه ی (۴۷-۲) و (۴۸-۲) توزیع تنش برشی در

طول ضخامت دیواره ی هر لایه به دست می آید:

$$\tau_i = \left(\frac{a}{r} \right)^2 \frac{p_i}{2 \left(1 - \frac{a}{b} \right)} = \left(\frac{a}{r} \right)^2 \tau_{\max} \quad (۵۷-۲)$$

$$\tau_o = \left(\frac{c}{r} \right)^2 \frac{p_i}{2 \left(1 - \frac{a}{b} \right)} = \left(\frac{c}{r} \right)^2 \tau_{\max} \quad (۵۸-۲)$$

این رابطه نشان می دهد که بیشینه تنش برشی در شعاع داخلی هر لایه اتفاق می افتد.

۷-۲ جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

۱-۷-۲ جازنی فشاری

وقتی دو لایه هم‌جنس باشند جابه‌جایی‌ها برای آلومینیوم و فولاد دقیقا یکی است، بنابراین جابه‌جایی در حالت تنها جازنی فشاری به جنس وابسته نیست. وقتی جنس دو لایه متفاوت است، جابه‌جایی‌ها متفاوت است.

در بارگذاری فقط تحت فشار جازنی، جابه‌جایی‌ها و تنش‌های محیطی در فصل مشترک ناپیوسته می‌باشند، جابه‌جایی‌ها و تنش‌های محیطی در لایه‌ی داخلی منفی و در لایه‌ی خارجی مثبتند. فشار جازنی وقتی جنس دو لایه نرم‌تر باشند کمتر از حالتی است که جنس دو لایه سفت‌تر باشند.

۲-۷-۲ تحت بارگذاری فشار جازنی و فشار داخلی

در حالتی که دو لایه هم‌جنس باشند، فرایند جازنی باعث بهبود تنش‌های محیطی می‌شوند ولی وقتی دو لایه هم‌جنس نیستند، تنش‌ها افزایش پیدا می‌کنند. تنش‌های شعاعی در فصل مشترک نسبت به استوانه‌ی تک لایه در همه‌ی ترکیب‌ها به جز ترکیب فولاد-آلومینیوم افزایش می‌یابد.

مقادیر جابه‌جایی‌ها وقتی دو لایه آلومینیوم و فولاد هستند از مقادیر جابه‌جایی‌ها وقتی استوانه‌ی تک لایه آلومینیوم‌اند کمتر و از مقادیر جابه‌جایی‌ها وقتی استوانه‌ی تک لایه فولادند بیشترند.

فصل ۳: حلّ تحلیلی استوانه‌های جازنی شده با

دو لایه‌ی همگن و ناهمگن FGM تحت

بارگذاری فشاری

۳-۱ مقدمه

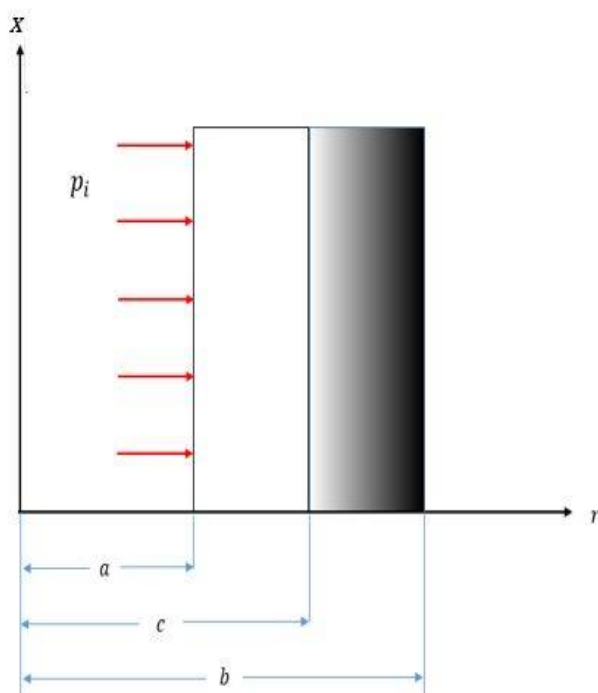
طراحی مواد FG در ابتدا به منظور کاربردهای مکانیکی آن‌ها در شرایط ویژه بود و مقاومت منحصر به فرد استوانه‌های جدارضخیم (FGM) در برابر بارهای مکانیکی، محققان را بر آن داشت تا به بررسی و تحلیل عملکرد آن‌ها در مسائلی که به مقاومت مکانیکی بالا نیاز دارد، بپردازند.

در این فصل برای تحلیل الاستیک پوسته‌های استوانه‌ای جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی همگن و ناهمگن، پس از بیان روابط اساسی با استخراج معادلات دیفرانسیل حاکم برای هر یک از استوانه‌های جدارضخیم متقارن محوری تشکیل‌شده از مواد ناهمگن بر مبنای تئوری الاستیسیته‌ی مستوی، حلّ عمومی استوانه‌های جدارضخیم FGM تحت فشار یکنواخت داخلی در شرایط تنش صفحه‌ای ارائه شده است. سپس حل الاستیک استوانه‌ی دو لایه‌ی همگن و ناهمگن با بارگذاری مشابه فصل قبل بررسی شده و در ادامه با ارائه‌ی حلّ عددی توسط نرم‌افزار المان محدود آباکوس برای استوانه‌ی دو لایه‌ی تحت فشار داخلی یکنواخت، نتایج حاصل از حلّ تحلیلی به کمک تئوری الاستیسیته‌ی مستوی با نتایج حاصل از حل عددی مقایسه شده‌اند.

۳-۲ روابط اساسی

۳-۲-۱ تحلیل استوانه‌های جازنی‌شده با دو لایه‌ی همگن و ناهمگن تحت فشار داخلی

هندسه‌ی مورد بررسی در این بخش، استوانه‌های جازنی‌شده دو لایه با لایه‌ی داخلی همسانگرد و همگن و لایه‌ی خارجی همسانگرد و ناهمگن، به شعاع داخلی r_i و شعاع خارجی r_o و شعاع مشترک r_m می‌باشد. بارگذاری تنها از نوع فشاری بوده و فشار وارد بر سطح داخلی با p_i مشخص می‌شود (شکل ۳-۱).



شکل ۱-۳ مقطع استوانه‌ای جدار ضخیم دو لایه‌ی همگن-ناهمگن FGM تحت فشار داخلی

نسبت پواسون در طول دیواره هر دو لایه ثابت فرض شده است. مدول الاستیسیته در لایه‌ی داخلی ثابت و در لایه‌ی خارجی دارای تغییرات توانی نسبت به شعاع بوده و با رابطه‌ی (۱-۳) تعریف می‌شود. این رابطه توزیع مدول الاستیسیته را نسبت به مختصات شعاعی بی‌بعد به ازای مقادیر ثابت ناهمگنی مختلف نشان می‌دهد.

$$E(r) = E_i \left(\frac{r}{r_i}\right)^n \quad (1-3)$$

در این رابطه $R = \left(\frac{r}{r_i}\right)$ مختصات شعاع بی‌بعد است. E_i مدول الاستیسیته در سطح داخلی لایه خارجی استوانه‌ای جازنی شده و n ضریب ناهمگنی ماده می‌باشد.

۲-۲-۳ حل الاستیک استوانه‌های جازنی شده با دو لایه‌ی همگن و ناهمگن

هنگامی که استوانه‌ها ثابت باشند و هیچ حرکتی نداشته باشند از معادله‌ی تعادل می‌توان استفاده کرد. معادله‌ی تعادل را دوباره اینجا نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) + \rho b_r = 0 \quad (2-3)$$

در حالی که نیروهای حجمی در مسأله وجود نداشته باشند؛ معادله‌ی تعادل (۲-۲۱) به صورت

زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) = 0 \quad (۳-۳)$$

با جای‌گذاری (۲-۲۲) و (۲-۲۵) در (۳-۲) و همچنین استفاده از رابطه‌ی (۳-۱)، معادله‌ی

حاکم برای استوانه‌ها به صورت زیر به دست می‌آید:

$$r^2 \frac{d^2 u}{dr^2} + (n+1)r \frac{du}{dr} + (n(v^*) - u) = 0 \quad (۴-۳)$$

$$v^* = \frac{B}{A}$$

ثابت‌های A و B وابسته به شرایط انتهایی استوانه‌ها که هنوز جازنی نشده‌اند می‌باشند که البته

منظور حالت تنش صفحه‌ای می‌باشد چون فقط در حالت تنش صفحه‌ای دو تا استوانه داخل هم جازده

می‌شوند، و بعد جازنی می‌توان سه حالت تنش صفحه‌ای، کرنش صفحه‌ای و حالت بسته را داشت.

حل معادله‌ی (۴-۳) به صورت زیر می‌باشد:

$$u_r(r) = C_1 r^{m_1} + C_2 r^{m_2} \quad (۵-۳)$$

معادله مشخصه‌ی مربوط به معادله‌ی (۵-۳) عبارت است از:

$$m^2 + nm - (1 - nv^*) = 0 \quad (۶-۳)$$

$$\Delta = n^2 + 4(1)(1 - nv^*) \quad (۷-۳)$$

با حل معادله مشخصه، به دو ریشه‌ی حقیقی زیر خواهیم رسید.

$$m_{1,2} = \frac{-n \pm \sqrt{\Delta}}{2} \quad (۸-۳)$$

برای استوانه‌ی داخلی که همگن می‌باشد داریم:

$$n = 0 \rightarrow \sqrt{\Delta} = \pm 1$$

$$\begin{cases} m_1 = +1 \\ m_2 = -1 \end{cases}$$

برای استوانه‌ی بیرونی که ناهمگن می‌باشد ریشه‌های معادله مشخصه همان رابطه‌ی (۸-۳) می‌-

باشد. با جای‌گذاری ریشه‌های معادله مشخصه m_1 و m_2 در معادله‌ی (۳-۵) برای استوانه‌ی داخلی و

خارجی داریم:

$$\begin{cases} u_i = c_{1i}r + \frac{c_{2i}}{r} \\ u_o = c_{1h}r^{m_1} + c_{2h}r^{m_2} \end{cases} \quad (9-3)$$

با توجه به روابط (۲-۲۵)، (۲-۲۲) و (۳-۹) توزیع تنش‌های شعاعی و محیطی برای لایه‌ی داخلی

و خارجی به ترتیب به صورت روابط (۳-۱۰) و (۳-۱۱) در می‌آید.

$$\begin{cases} \sigma_r = E_s \left(A \left(c_{1i} - \frac{c_{2i}}{r^2} \right) + B \left(c_{1i} + \frac{c_{2i}}{r^2} \right) \right) \\ \sigma_\theta = E_s \left(B \left(c_{1i} - \frac{c_{2i}}{r^2} \right) + A \left(c_{1i} + \frac{c_{2i}}{r^2} \right) \right) \end{cases} \quad (10-3)$$

$$\begin{cases} \sigma_r = E_s \left(\frac{r}{c} \right)^n \left(A (m_1 c_{1h} r^{m_1-1} + m_2 c_{2h} r^{m_2-1}) + B (c_{1h} r^{m_1-1} + c_{2h} r^{m_2-1}) \right) \\ \sigma_\theta = E_s \left(\frac{r}{c} \right)^n \left(B (m_1 c_{1h} r^{m_1-1} + m_2 c_{2h} r^{m_2-1}) + A (c_{1h} r^{m_1-1} + c_{2h} r^{m_2-1}) \right) \end{cases} \quad (11-3)$$

به منظور محاسبه‌ی ثابت‌های c_{1i} ، c_{2i} ، c_{1h} و c_{2h} از شرایط مرزی استفاده می‌شود. از آنجا که

این شرایط را برای تنش شعاعی و جابه‌جایی در اختیار داریم؛

$$r = a \rightarrow (\sigma_r(r))_i = -p_i \quad (12-3)$$

$$r = c \rightarrow (\sigma_r(r))_i = (\sigma_r)_o \quad (13-3)$$

$$r = c \rightarrow u(r)_o - u(r)_i = \delta \quad (14-3)$$

$$r = b \rightarrow (\sigma_r(r))_o = 0 \quad (15-3)$$

با توجه به روابط (۳-۹)، (۳-۱۰) و (۳-۱۱) با جای‌گذاری در شرایط مرزی (۳-۱۲) تا (۳-۱۵)

داریم:

$$E_i \left(A \left(c_{1i} - \frac{c_{2i}}{a^2} \right) + B \left(c_{1i} + \frac{c_{2i}}{a^2} \right) \right) = -p_i \quad (16-3)$$

$$E_i \left(A \left(c_{1i} - \frac{c_{2i}}{c^2} \right) + B \left(c_{1i} + \frac{c_{2i}}{c^2} \right) \right) \\ = E_i \left(\left(\frac{c}{c} \right)^n (A(m_1 c_{1h} + m_2 c_{2h} c^{m_2-1}) + B(c_{1h} c^{m_1-1} + c_{2h} c^{m_2-1})) \right) \quad (17-3)$$

$$c_{1h} c^{m_1} + c_{2h} c^{m_2} - c_{1i} c - \frac{c_{2i}}{c} = \delta \quad (18-3)$$

$$E_i \left(\left(\frac{b}{c} \right)^n (A(m_1 c_{1h} b^{m_1-1} + m_2 c_{2h} b^{m_2-1}) + B(c_{1h} b^{m_1-1} + c_{2h} b^{m_2-1})) \right) \quad (19-3)$$

اکنون برای به دست آوردن ثابت‌های مجهول روابط (۱۶-۳) تا (۱۹-۳) را به صورت ماتریسی زیر

داریم:

$$\begin{bmatrix} (A+B)E_i & \frac{(B-A)E_i}{a^2} & 0 & 0 \\ (A+B)E_i & \frac{(B-A)E_i}{c^2} & -E_i c^{m_1-1}(Am_1+B) & -E_i c^{m_2-1}(Am_2+B) \\ -c & -\frac{1}{c} & c^{m_1} & c^{m_2} \\ 0 & 0 & E_i \left(\frac{b}{c} \right)^n b^{m_1-1} (Am_1+B) & E_i \left(\frac{b}{c} \right)^n b^{m_1-1} (Am_2+B) \end{bmatrix} \quad (20-3)$$

$$* \begin{Bmatrix} c_{1i} \\ c_{2i} \\ c_{1h} \\ c_{2h} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P_i \\ 0 \\ \delta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

از رابطه‌ی (۲۰-۳) با ماتریس معکوس گرفتن در نرم افزار میپل ثابت‌های مجهول به دست می‌آید.

۳-۳ حل عددی استوانه‌های جازنی شده با دو لایه‌ی همگن و ناهمگن تحت فشار

داخلی

نحوه‌ی مدل‌سازی همانند فصل قبل می‌باشد. برای ایجاد خواص ناهمگنی در لایه‌ی بیرونی که به صورت شعاعی در پوسته‌ی استوانه‌ای در نظر گرفته شده است؛ با تقسیم جداره استوانه به تعداد ۲۰ لایه‌ی مساوی و نسبت دادن خواص مدول الاستیسیته در هر لایه با توجه به فاصله‌ی مرکز از لایه‌ی داخلی به صورت تابع توانی طبق رابطه‌ی (۱-۳)، نهایتاً لایه‌ی خارجی از ۲۰ استوانه‌ی همگن و همسانگرد به

هم چسبیده تشکیل می‌شود. این لایه‌ها در محل اتصال به هم پیوسته‌اند و خواص در محل اتصال لایه‌ها، حد میانگین چپ و راست مرز دو لایه در نظر گرفته می‌شوند.

۳-۴ مطالعه‌ی موردی و مقایسه‌ی نتایج

به منظور مطالعه‌ی موردی و مقایسه‌ی نتایج حاصل از حلّ تحلیلی با مقادیر به‌دست‌آمده از حلّ عددی به کمک مدل‌سازی نرم‌افزاری؛ استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی همگن و ناهمگن را به شعاع داخلی $r_i = 150 \text{ mm}$ ، شعاع میانی (فصل مشترک) $r_m = 200 \text{ mm}$ ، شعاع خارجی $r_o = 250 \text{ mm}$ ، طول $L = 800 \text{ mm}$ و تداخل $\delta = 0.1 \text{ mm}$ در نظر می‌گیریم.

مدول‌های یانگ در سطح داخلی لایه‌ی داخلی (E_i) دارای مقدار 200 GPa برای فولاد و یا مقدار 70 GPa برای آلومینیوم بوده و فرض می‌شود که نسبت پواسون (ν) مقدار ثابت 0.3 را داراست. نتایج را برای دو حالت بارگذاری تنها فشار جازنی و اعمال هم‌زمان فشار جازنی و فشار داخلی $p_i = 140 \text{ MPa}$ بررسی می‌کنیم.

خطوط ممتد نشانگر حلّ تحلیلی و دایره‌های کوچک نماینده‌ی حلّ عددی صورت گرفته می‌باشند.

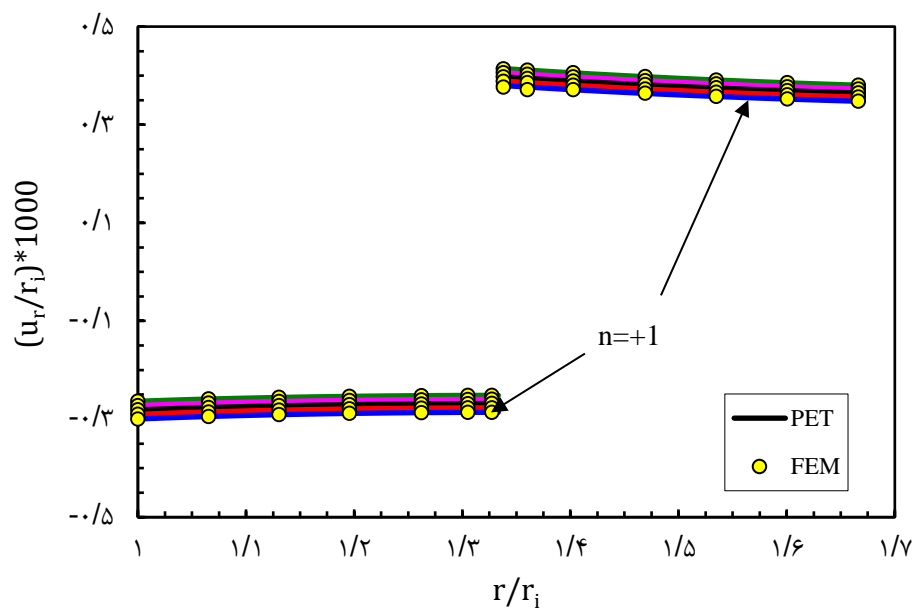
۳-۴-۱ جازنی فشاری همگن (فولاد)-ناهمگن

شکل ۳-۲ توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد شده را در طول دیواره‌ی استوانه نشان می‌دهد. در هیچ مکانی از استوانه و به ازای هیچ یک از مقادیر ضریب ناهمگنی، جابه‌جایی شعاع یکسانی را شاهد نبوده و هم‌چنین نسبت $\frac{u_r}{r_i}$ در هیچ مکانی برابر هم نیستند. جابه‌جایی لایه‌ی داخلی منفی و جابه‌جایی لایه‌ی خارجی مثبت می‌باشد. مقادیر جابه‌جایی‌ها به ازای ثابت‌های ناهمگنی مختلف، تفاوت چندانی با هم ندارند ولی در لایه‌ی داخلی با افزایش n ، مقدار جابه‌جایی افزایش و در لایه‌ی خارجی برعکس می‌باشد. شکل ۳-۳ توزیع تنش شعاعی بی‌بعد شده را در طی ضخامت استوانه‌ی دو لایه نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود تنش دارای مقادیر منفی در طول دیواره می‌باشد. به ازای مقادیر مختلف

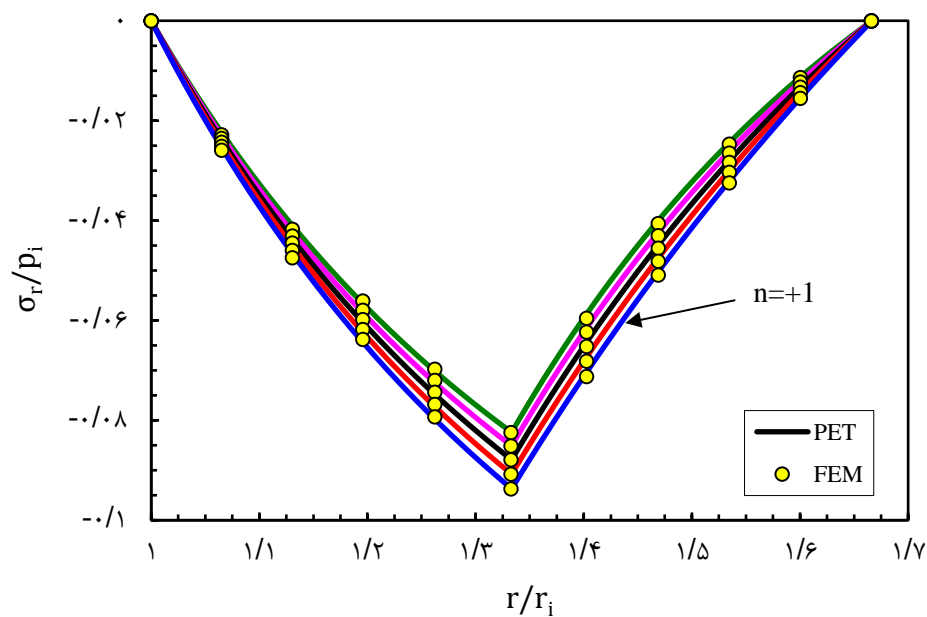
ثابت ناهمگنی، تنش‌ها در سطوح داخلی و خارجی استوانه‌ی جازنی‌شده یکسان بوده و هم‌چنین نسبت $\frac{\sigma_r}{p_i}$ برابر صفر می‌باشد. با کاهش n ، مقدار تنش شعاعی نیز کاهش می‌یابد. این مقدار به ازای $n < 0$ کوچکتر از تنش ایجاد شده در استوانه‌ی همگن و به ازای $n > 0$ بزرگتر از آن می‌باشد. تنش شعاعی در فصل مشترک به ازای $n = +1$ دارای بیشترین مقدار می‌باشد و این باعث می‌شود در جاهای کاربردی مانند شفت و چرخنده گشتاور بیشتری انتقال یابد.

شکل ۳-۴ توزیع تنش محیطی بی‌بعد شده را نشان می‌دهد. مقدار این تنش در سطوح داخلی و خارجی استوانه‌ی جازنی‌شده، به ازای هیچ یک از ضرایب ناهمگنی یکسان نمی‌باشد. نسبت $\frac{\sigma_\theta}{p_i}$ در $\frac{1}{3}$ داخلی لایه‌ی خارجی یکسان هستند. در لایه‌ی داخلی تنش‌ها منفی می‌باشند و با افزایش n مقادیر تنش افزایش می‌یابد. در لایه‌ی خارجی تنش‌ها مثبت و با افزایش n ، تقریباً در $\frac{1}{3}$ داخلی لایه‌ی خارجی استوانه‌ی جازنی‌شده، تنش محیطی کاهش و در $\frac{2}{3}$ دیگر این لایه افزایش می‌یابد. لذا در لایه‌ی خارجی در شعاع‌های کمتر از حدود $1/4$ ، تنش به ازای $n < 0$ دارای مقادیر بزرگتر و به ازای $n > 0$ دارای مقادیر کوچکتری نسبت به حالت همگن می‌باشد. تنها در همین شعاع است که نسبت $\frac{\sigma_\theta}{p_i}$ برابر یک می‌باشد.

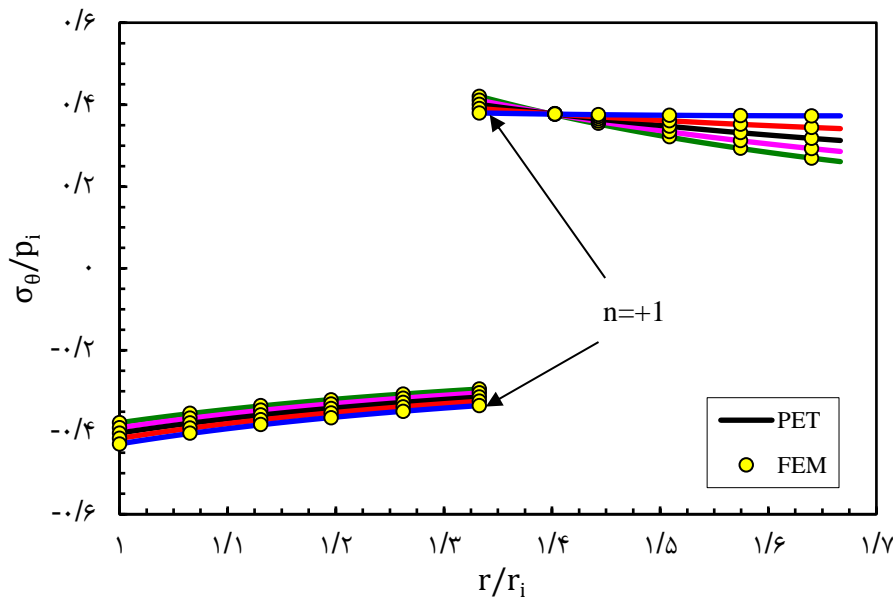
در $\frac{1}{3}$ داخلی لایه‌ی خارجی، منحنی‌ها به یکدیگر نزدیک شده و دارای رفتار مشابهی می‌باشند. هم‌چنین منحنی مربوط به $n = +1$ ، تغییرات اندکی را در طی ضخامت داشته که می‌تواند نکته‌ی مهمی در طراحی این استوانه‌ها به حساب آید.



شکل ۲-۳ توزیع جابه‌جایی شعاعی استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی همگن (فولاد)-ناهمگن



شکل ۳-۳ توزیع تنش شعاعی در استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی همگن (فولاد)-ناهمگن



شکل ۳-۴ توزیع تنش محیطی در استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی همگن (فولاد)-ناهمگن

۳-۴-۲ جازنی فشاری همگن (آلومینیم)-ناهمگن

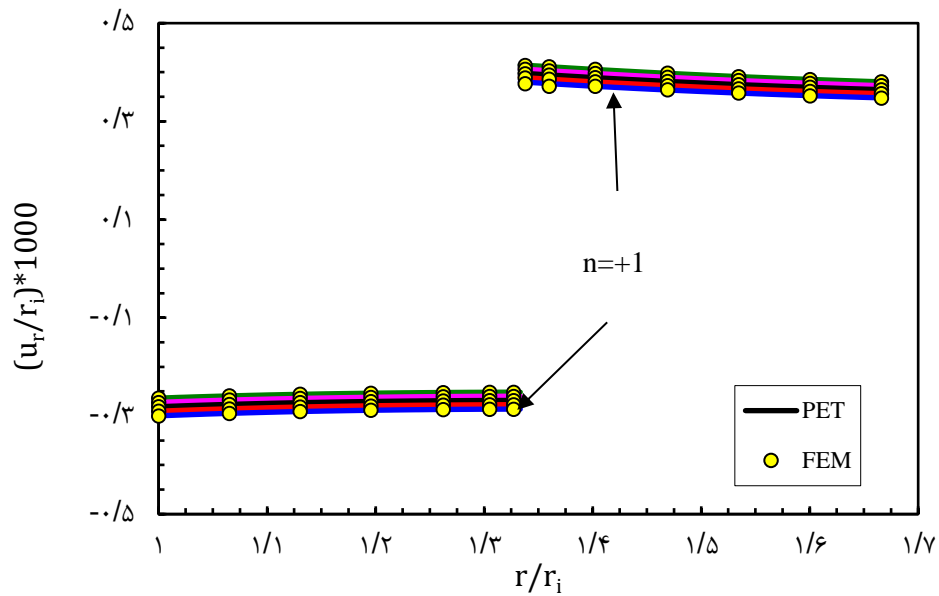
شکل ۳-۵ توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد شده را در طول دیواره‌ی استوانه‌ی جازنی‌شده نشان می‌دهد. این شکل دقیقاً مانند شکل ۳-۲ می‌باشد، زیرا برای این دو حالت شرایط مرزی یکسان است و فشار جازنی با جنس رابطه‌ی مستقیم است و جابه‌جایی نیز با فشار جازنی رابطه مستقیم ولی با جنس رابطه‌ی معکوس دارد پس اثر جنس خنثی می‌شود.

شکل ۳-۶ توزیع شعاعی بی‌بعد شده را در طی ضخامت استوانه دو لایه نمایش می‌دهد. تنش‌ها دارای مقادیر منفی در طول دیواره می‌باشند. به ازای مقادیر مختلف ثابت ناهمگنی، تنش‌ها در سطوح داخلی و خارجی استوانه‌ی جازنی‌شده یکسان بوده و همچنین نسبت $\frac{\sigma_r}{p_i}$ برابر صفر می‌باشد.

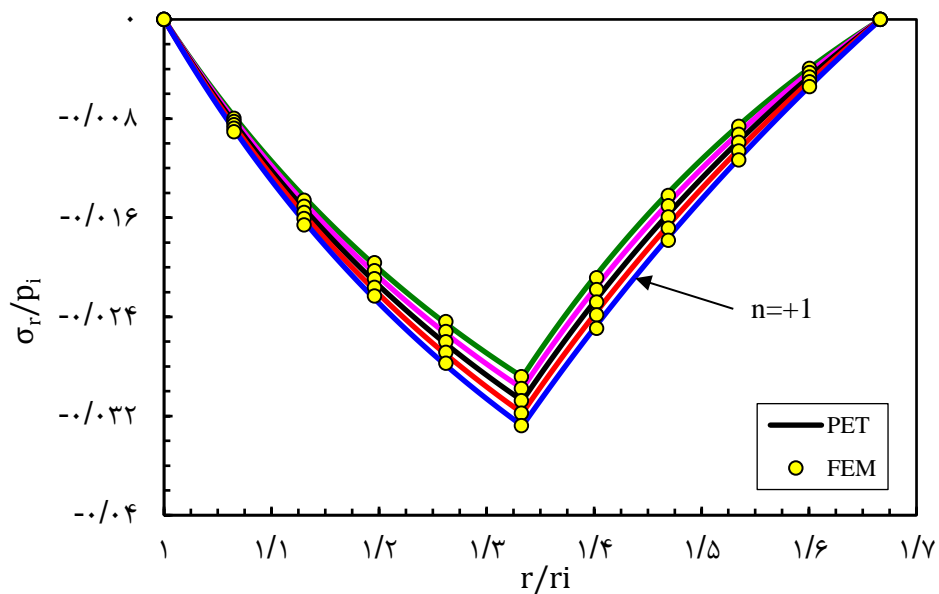
همانند شکل ۳-۳ با کاهش n ، مقادیر تنش شعاعی کاهش می‌یابد. این مقدار به ازای $n < 0$ ، کوچکتر از تنش ایجاد شده در استوانه‌ی همگن و به ازای $n > 0$ ، بزرگتر از آن می‌باشد. تنش شعاعی در فصل مشترک به ازای $n = +1$ دارای بیشترین مقدار می‌باشد و این باعث می‌شود در جاهای کاربردی مانند شفت و چرخنده گشتاور بیشتری انتقال یابد. این نمودار رفتاری مشابه شکل ۳-۳ دارد با این تفاوت که مقادیر تنش کاهش پیدا کرده‌اند.

شکل ۳-۷ توزیع بی بعد تنش محیطی را در راستای ضخامت استوانه‌ای جازنی شده نشان می‌دهد.

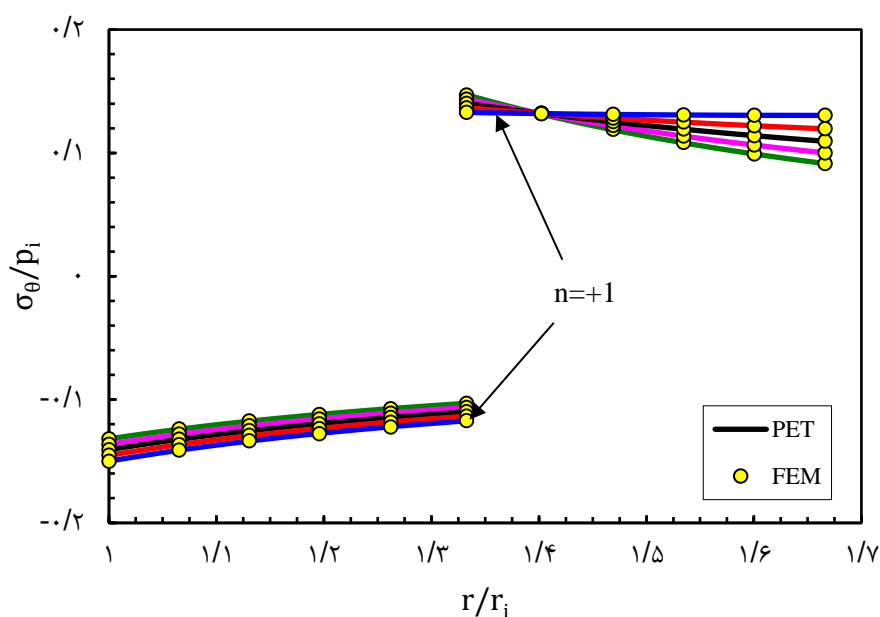
این شکل نیز رفتاری مشابه شکل ۳-۴ دارد، فقط مقادیر تنش کاهش پیدا کرده است.



شکل ۳-۵ توزیع جابه‌جایی شعاعی استوانه‌های جازنی شده‌ی دو لایه‌ی همگن (آلومینیم)-ناهمگن



شکل ۳-۶ توزیع تنش شعاعی در استوانه‌های جازنی شده‌ی دو لایه‌ی همگن (آلومینیم)-ناهمگن



شکل ۳-۷ توزیع تنش محیطی در استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی همگن (آلومینیم)-ناهمگن

۳-۴-۳ جازنی فشاری ناهمگن-همگن (فولاد)

شکل ۳-۸ توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد را در طول جداره‌ی استوانه دو لایه نشان می‌دهد. این نمودار نیز رفتاری بسیار نزدیک مانند شکل ۳-۲ دارد.

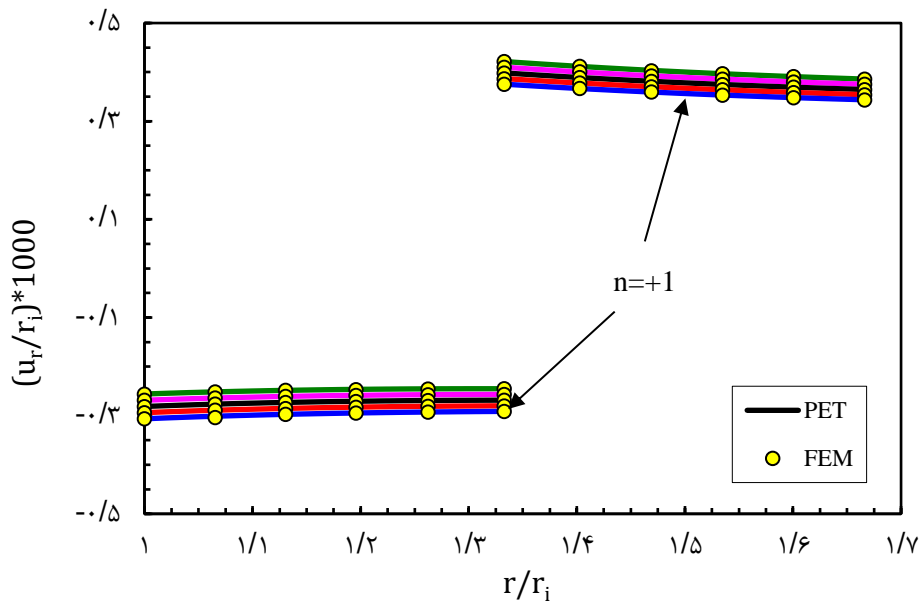
شکل ۳-۹ توزیع تنش شعاعی بی‌بعد شده را در طی ضخامت استوانه‌ی دو لایه نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود تنش دارای مقادیر منفی در طول دیواره می‌باشد. به ازای مقادیر مختلف ثابت ناهمگنی، تنش‌ها در سطوح داخلی و خارجی استوانه‌ی جازنی‌شده یکسان بوده و هم‌چنین نسبت $\frac{\sigma_r}{p_i}$ برابر صفر می‌باشد. با کاهش n ، مقدار تنش شعاعی نیز افزایش می‌یابد. این مقدار به ازای $n < 0$ ، بزرگتر از تنش ایجاد شده در استوانه‌ی همگن و به ازای $n > 0$ ، کوچکتر از آن می‌باشد. تنش شعاعی در فصل مشترک به ازای $n = -1$ دارای بیشترین مقدار می‌باشد و این باعث می‌شود در جاهای کاربردی مانند شفت و چرخ‌دنده گشتاور بیشتری انتقال یابد.

شکل ۳-۱۰ توزیع تنش محیطی بی‌بعد شده را نشان می‌دهد. مقدار این تنش در سطوح داخلی و خارجی استوانه‌ی جازنی‌شده، به ازای هیچ یک از ضرایب ناهمگنی یکسان نمی‌باشد. هم‌چنین نسبت

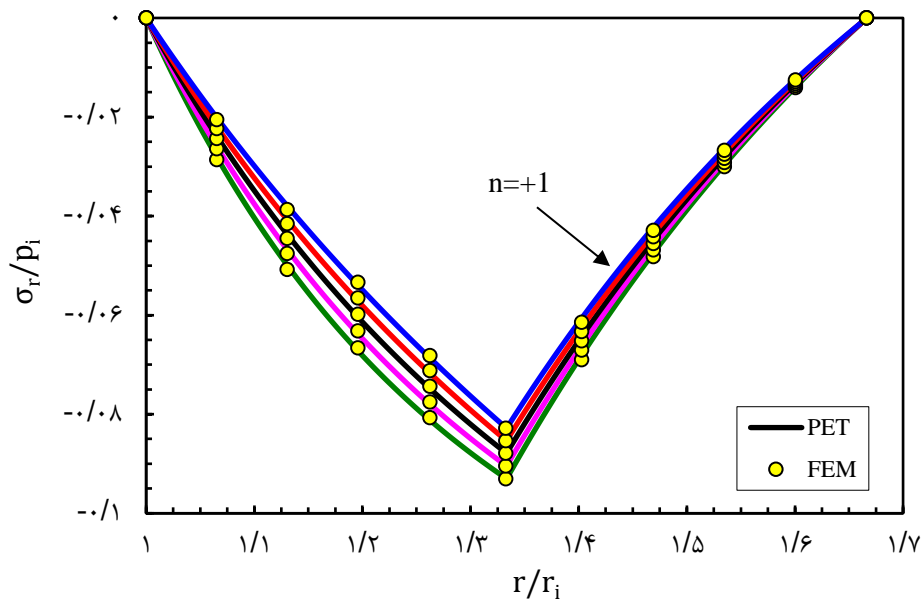
$\frac{\sigma_{\theta}}{p_i}$ در هیچ یک از این دو سطح برابر صفر نیست. در لایه‌ی داخلی تنش‌ها منفی می‌باشند و با افزایش n ، تقریباً در $\frac{2}{3}$ داخلی لایه‌ی داخلی استوانه‌ی جازنی‌شده، تنش محیطی کاهش و در $\frac{1}{3}$ دیگر این لایه افزایش می‌یابد. لذا در لایه‌ی داخلی در شعاع‌های کمتر از حدود $1/25$ ، تنش به ازای $n < 0$ دارای مقادیر بزرگتر و به ازای $n > 0$ دارای مقادیر کوچکتری نسبت به حالت همگن می‌باشد. تنها در همین شعاع است که نسبت $\frac{\sigma_{\theta}}{p_i}$ برای تمامی ثابت ناهمگنی یکسان می‌باشد.

در $\frac{2}{3}$ داخلی لایه‌ی داخلی، منحنی‌ها به یکدیگر نزدیک شده و دارای رفتار مشابهی می‌باشند. هم‌چنین منحنی مربوط به $n = +1$ ، تغییرات اندکی را در طی ضخامت داشته که می‌تواند نکته‌ی مهمی در طراحی این استوانه‌ها به حساب آید.

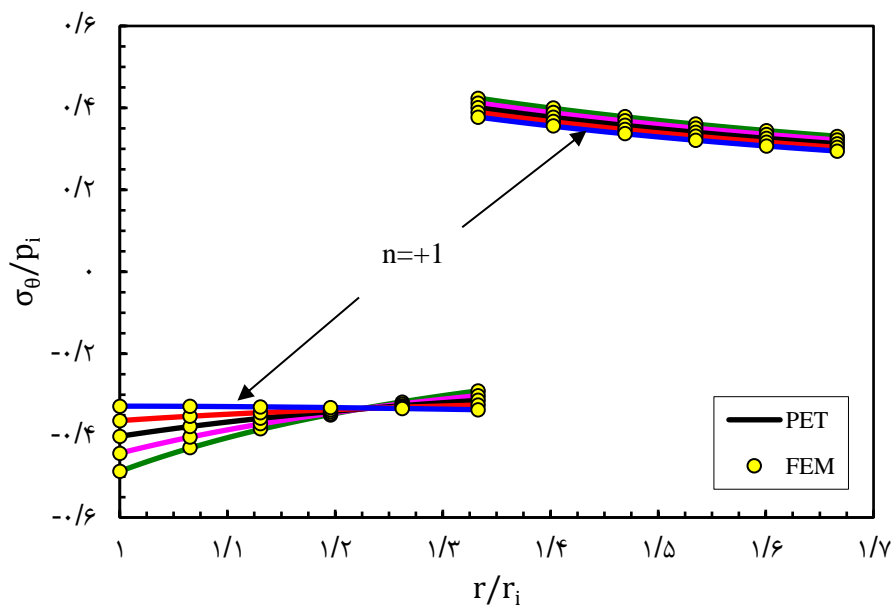
در لایه‌ی خارجی تنش‌ها مثبتند و با افزایش n ، تنش‌ها کاهش می‌یابند.



شکل ۳-۸ توزیع جابه‌جایی شعاعی استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی ناهمگن-همگن (فولاد)



شکل ۹-۳ توزیع تنش شعاعی در استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی ناهمگن-همگن (فولاد)



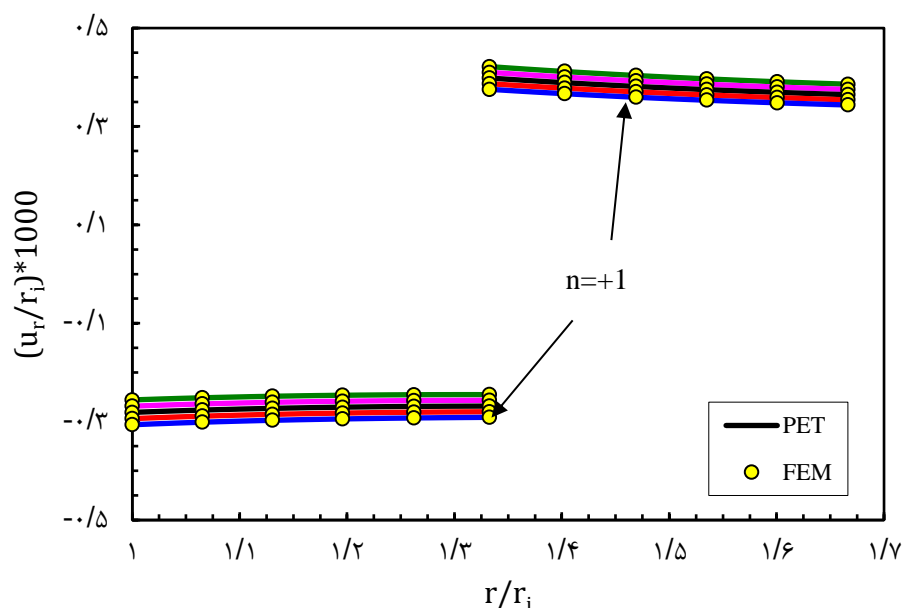
شکل ۱۰-۳ توزیع تنش محیطی در استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی ناهمگن-همگن (فولاد)

۴-۴-۳ جازنی فشاری ناهمگن-همگن (آلومینیم)

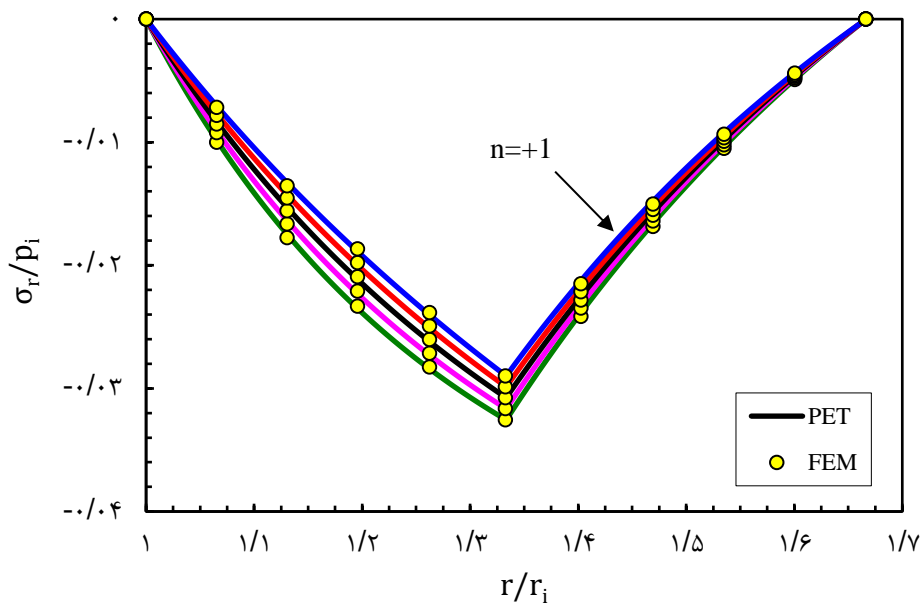
شکل ۳-۱۱ توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد را نسبت به جداره‌ی استوانه‌ی جازنی‌شده نشان می‌دهد. این شکل دقیقاً مانند شکل ۳-۸ می‌باشد، زیرا ثابت‌ها دقیقاً یکسان و جابه‌جایی نیز به دلیل وجود فقط اثر جازنی به جنس وابسته نیست.

در شکل ۳-۱۲ توزیع تنش شعاعی بی‌بعد نسبت به ضخامت استوانه‌های جازنی‌شده با دو لایه‌ی ناهمگن و همگن مشاهده می‌شود. این شکل نیز روندی مانند شکل ۳-۹ دارد ولی مقادیر تنش کمتر می‌باشند.

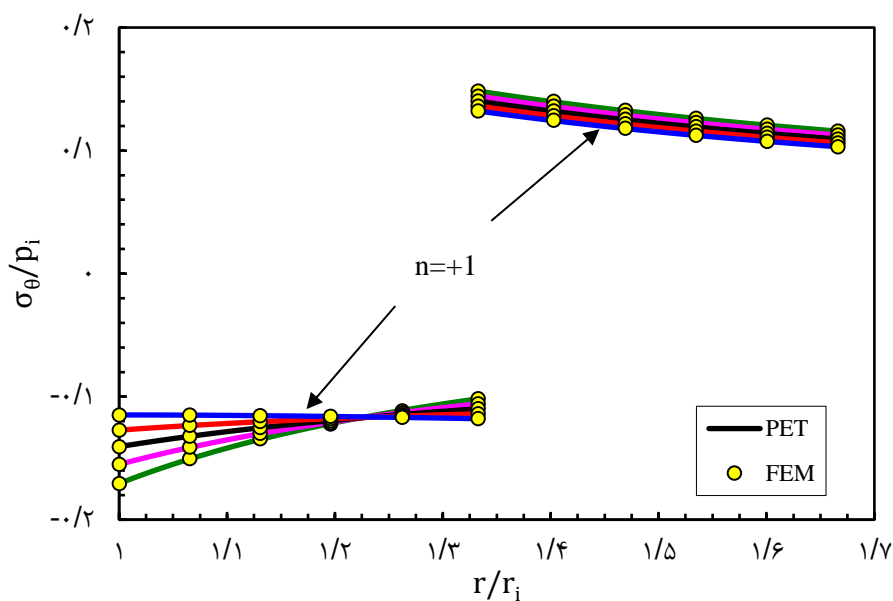
شکل ۳-۱۳ توزیع تنش محیطی بی‌بعد را در راستای دیواره‌ی استوانه‌ی جازنی‌شده نمایش می‌دهد. این شکل رفتاری شبیه شکل ۳-۱۰ دارد با این تفاوت که مقادیر تنش محیطی کاهش پیدا کرده‌اند.



شکل ۳-۱۱ توزیع جابه‌جایی شعاعی استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی ناهمگن-همگن (آلومینیم)



شکل ۳-۱۲ توزیع تنش شعاعی در استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی ناهمگن-همگن (آلومینیم)



شکل ۳-۱۳ توزیع تنش محیطی در استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی ناهمگن-همگن (آلومینیم)

۳-۴-۵ استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی همگن (فولاد)-ناهمگن تحت بارگذاری فشار

داخلی

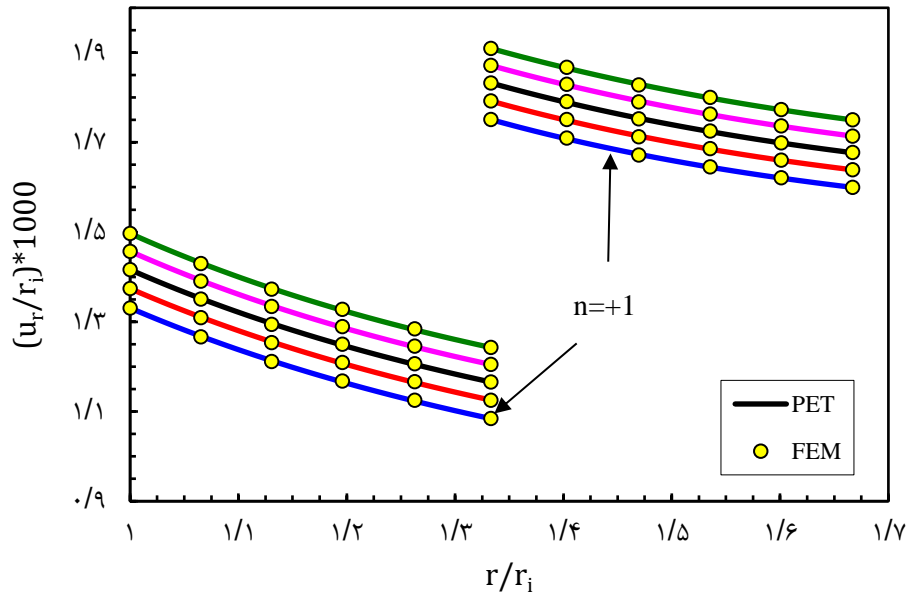
شکل ۳-۱۴ توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد شده را در طول دیواره‌ی استوانه نشان می‌دهد. در هیچ مکانی از استوانه و به ازای هیچ یک از مقادیر ضریب ناهمگنی، جابه‌جایی شعاعی یکسانی را شاهد نبوده

و همچنین نسبت $\frac{u_r}{r_i}$ در هیچ مکانی برابر هم نیستند. جابه‌جایی لایه‌ی داخلی و لایه‌ی خارجی مثبت می‌باشد. مقادیر جابه‌جایی‌ها به ازای ثابت‌های ناهمگنی مختلف، در لایه‌ی داخلی و خارجی با افزایش n ، کاهش می‌یابد. میزان جابه‌جایی لایه‌ی خارجی نسبت به لایه‌ی داخلی بیشتر می‌باشد.

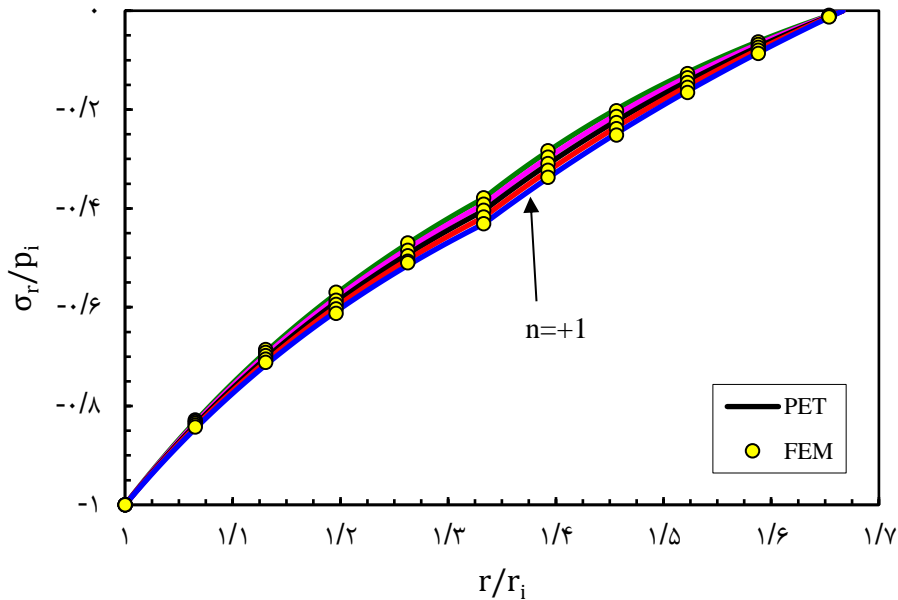
شکل ۳-۱۵ توزیع تنش شعاعی بی‌بعد شده را در طی ضخامت استوانه‌ی دو لایه نشان می‌دهد. از آنجا که فشار داخلی در جهت مثبت محور مختصات به استوانه‌ی جازنی‌شده اعمال شده است؛ لذا تنش شعاعی دارای مقادیر منفی در طول دیواره می‌باشد. به ازای مقادیر مختلف ثابت ناهمگنی، تنش‌ها در سطوح داخلی و خارجی استوانه‌ی جازنی‌شده یکسان بوده و همچنین نسبت $\frac{\sigma_r}{p_i}$ در سطح داخلی استوانه‌ی جازنی‌شده برابر یک و در سطح خارجی برابر صفر می‌باشد. با کاهش n ، مقدار تنش شعاعی نیز کاهش می‌یابد. این مقدار به ازای $n < 0$ ، کوچکتر از تنش ایجاد شده در استوانه‌ی همگن و به ازای $n > 0$ ، بزرگتر از آن می‌باشد. بیشینه تنش شعاعی در سطح داخلی استوانه‌ی دو لایه به ازای تمامی مقادیر ثابت‌های ناهمگنی اتفاق افتاده است، کمترین تنش شعاعی در سطح خارجی استوانه‌ی جازنی‌شده به وجود آمده است.

شکل ۳-۱۶ توزیع تنش محیطی بی‌بعد شده را نشان می‌دهد. مقدار این تنش در سطوح داخلی و خارجی استوانه‌ی جازنی‌شده، به ازای هیچ یک از ضرایب ناهمگنی یکسان نمی‌باشد. همچنین نسبت $\frac{\sigma_\theta}{p_i}$ در هیچ یک از این دو سطح برابر هم نیست. در هر دو لایه‌ی داخلی و خارجی تنش‌ها مثبت می‌باشند. با افزایش n ، مقادیر تنش محیطی در لایه‌ی داخلی کاهش می‌یابد، در لایه‌ی خارجی تقریباً در $\frac{1}{3}$ داخلی لایه‌ی خارجی استوانه‌ی جازنی‌شده، تنش محیطی کاهش و در $\frac{2}{3}$ دیگر این لایه افزایش می‌یابد. لذا در لایه‌ی خارجی در شعاع‌های کمتر از حدود $1/4$ ، تنش به ازای $n < 0$ دارای مقادیر بزرگتر و به ازای $n > 0$ دارای مقادیر کوچکتری نسبت به حالت همگن می‌باشد. تنها در همین شعاع است که نسبت $\frac{\sigma_\theta}{p_i}$ برابر هم می‌باشد.

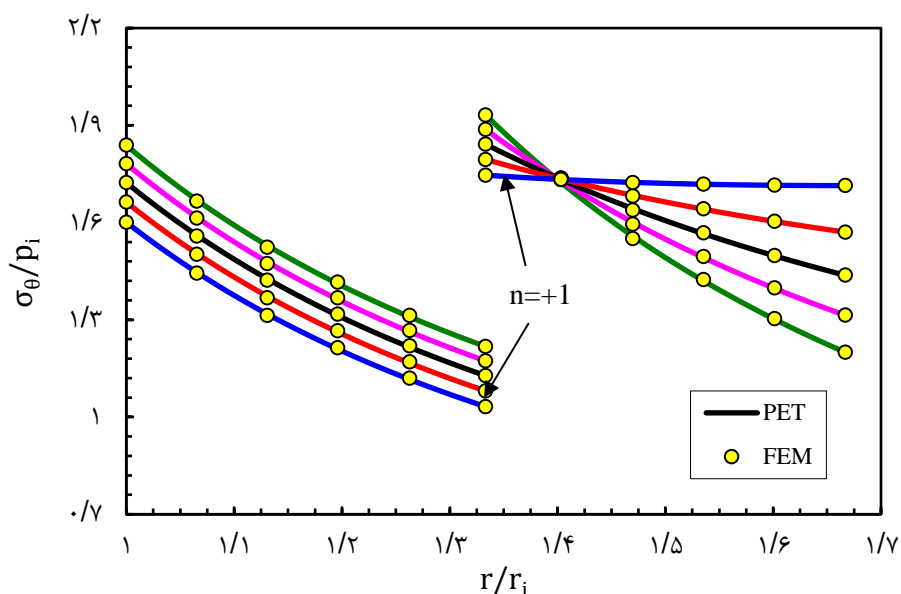
در $\frac{1}{3}$ داخلی لایه‌ی خارجی، منحنی‌ها به یکدیگر نزدیک شده و دارای رفتار مشابهی می‌باشند. هم‌چنین منحنی مربوط به $n = +1$ ، تغییرات اندکی را در طی ضخامت داشته که می‌تواند نکته‌ی مهمی در طراحی این استوانه‌ها به حساب آید.



شکل ۳-۱۴ توزیع جابه‌جایی شعاعی استوانه‌های جازنی‌شده دو لایه همگن (فولاد)-ناهمگن تحت فشار داخلی



شکل ۳-۱۵ توزیع تنش شعاعی در استوانه‌های جازنی‌شده دو لایه‌ی همگن (فولاد)-ناهمگن تحت فشار داخلی



شکل ۳-۱۶ توزیع تنش محیطی در استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه همگن (فولاد)-ناهمگن تحت فشار داخلی

۳-۴-۶ استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی همگن (آلومینیم)-ناهمگن تحت بارگذاری

فشار داخلی

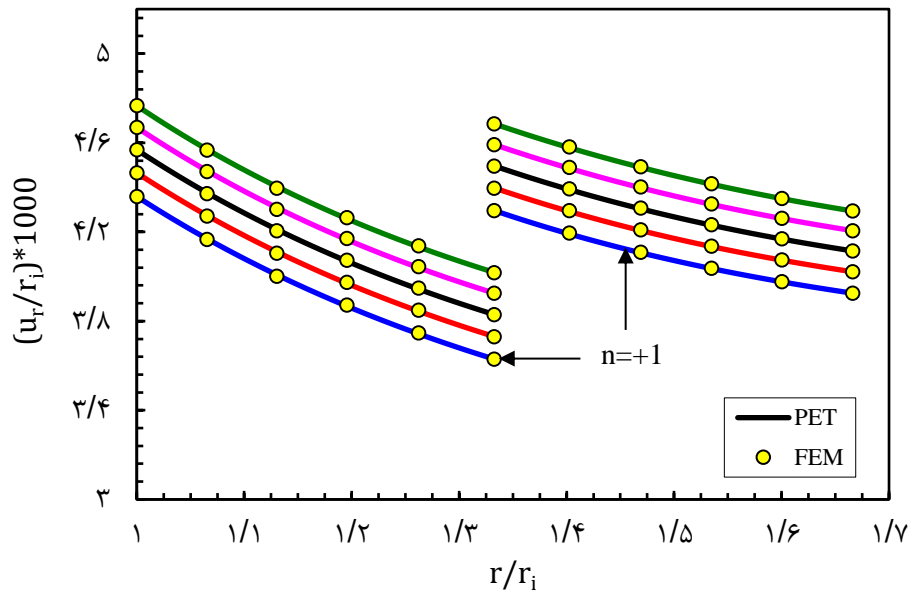
شکل ۳-۱۷ توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد شده را در طول دیواره‌ی استوانه نشان می‌دهد. در هیچ مکانی از استوانه و به ازای هیچ یک از مقادیر ضریب ناهمگنی، جابه‌جایی شعاعی یکسانی را شاهد نبوده و هم‌چنین نسبت $\frac{u_r}{r_i}$ در هیچ مکانی برابر هم نیست. جابه‌جایی لایه‌ی داخلی و لایه‌ی خارجی مثبت می‌باشد. مقادیر جابه‌جایی‌ها به ازای ثابت‌های ناهمگنی مختلف، در لایه‌ی داخلی و خارجی با افزایش n ، کاهش می‌یابد. میزان جابه‌جایی لایه‌ی خارجی نسبت به لایه‌ی داخلی بیشتر می‌باشد. مقادیر جابه‌جایی‌ها در این شکل نسبت به حالتی که لایه‌ی داخلی فولاد و لایه‌ی خارجی ناهمگن است (شکل ۳-۱۴)، بیشتر می‌باشد.

شکل ۳-۱۸ توزیع تنش شعاعی بی‌بعد شده را در طی ضخامت استوانه‌ی دو لایه نشان می‌دهد. از آنجا که فشار داخلی در جهت مثبت محور مختصات به استوانه‌ی جازنی‌شده اعمال شده است؛ لذا تنش شعاعی دارای مقادیر منفی در طول دیواره می‌باشد. به ازای مقادیر مختلف ثابت ناهمگنی، تنش‌ها در سطوح داخلی و خارجی استوانه‌ی جازنی‌شده یکسان بوده و هم‌چنین نسبت $\frac{\sigma_r}{p_i}$ در سطوح داخلی

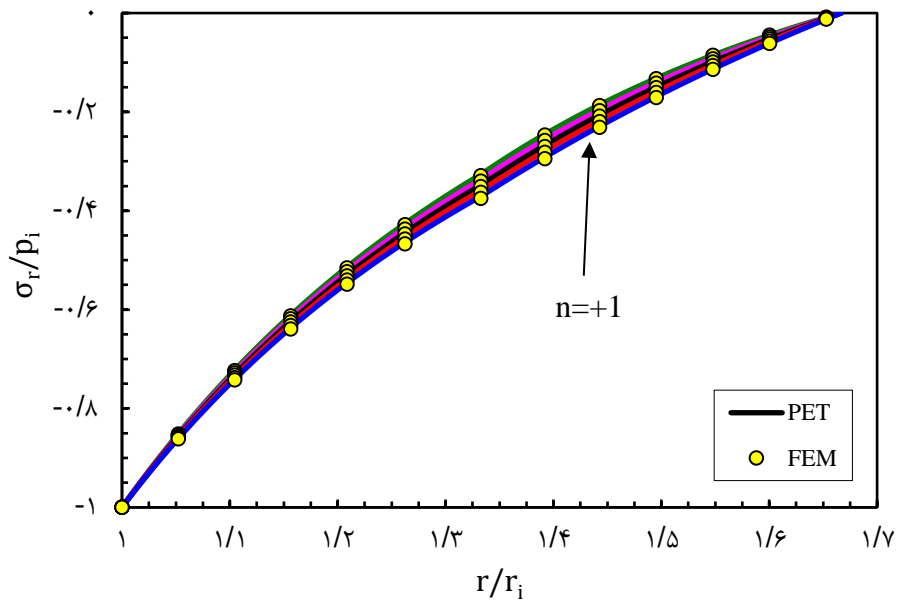
و خارجی به ترتیب برابر یک و صفر می‌باشد. با کاهش n ، مقدار تنش شعاعی نیز کاهش می‌یابد. این مقدار به ازای $n < 0$ ، کوچکتر از تنش ایجاد شده در استوانه‌ی همگن و به ازای $n > 0$ ، بزرگتر از آن می‌باشد. بیشینه تنش شعاعی در سطح داخلی استوانه‌ی دو لایه به ازای تمامی مقادیر ثابت‌های ناهمگنی اتفاق افتاده است، کمترین تنش شعاعی در سطح خارجی استوانه‌ی جازنی شده به وجود آمده است.

شکل ۳-۱۹ توزیع تنش محیطی بی‌بعد شده را نشان می‌دهد. مقدار این تنش در سطوح داخلی و خارجی استوانه‌ی جازنی شده، به ازای هیچ یک از ضرایب ناهمگنی یکسان نمی‌باشد. هم‌چنین نسبت $\frac{\sigma_{\theta}}{p_i}$ در هیچ یک از این دو سطح برابر هم نیست. در هر دو لایه‌ی داخلی و خارجی تنش‌ها مثبت می‌باشند. با افزایش n ، مقادیر تنش محیطی در لایه‌ی داخلی کاهش می‌یابد، در لایه‌ی خارجی تقریباً در $\frac{1}{3}$ داخلی لایه‌ی خارجی استوانه‌ی جازنی شده، تنش محیطی کاهش و در $\frac{2}{3}$ دیگر این لایه افزایش می‌یابد. لذا در لایه‌ی خارجی در شعاع‌های کمتر از حدود $1/4$ ، تنش به ازای $n < 0$ دارای مقادیر بزرگتر و به ازای $n > 0$ دارای مقادیر کوچکتری نسبت به حالت همگن می‌باشد. تنها در همین شعاع است که نسبت $\frac{\sigma_{\theta}}{p_i}$ برابر یکدیگر می‌باشد.

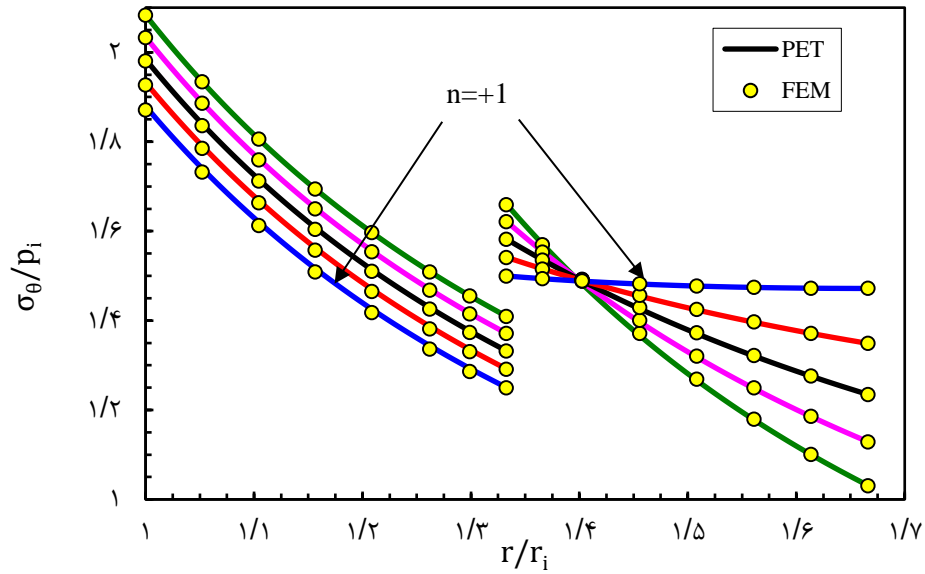
در $\frac{1}{3}$ داخلی لایه‌ی خارجی، منحنی‌ها به یکدیگر نزدیک شده و دارای رفتار مشابهی می‌باشند. هم‌چنین منحنی مربوط به $n = +1$ ، تغییرات اندکی را در طی ضخامت داشته که می‌تواند نکته‌ی مهمی در طراحی این استوانه‌ها به حساب آید.



شکل ۳-۱۷ توزیع جابه‌جایی شعاعی استوانه‌های جازنی‌شده دو لایه همگن (آلومینیم)-ناهمگن تحت فشار داخلی

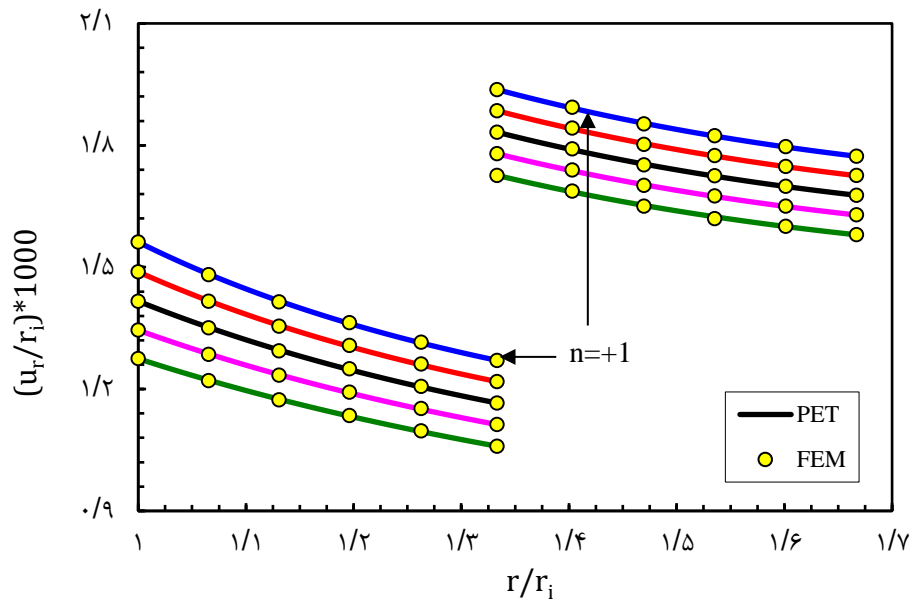


شکل ۳-۱۸ توزیع تنش شعاعی در استوانه‌های جازنی‌شده دو لایه‌ی همگن (آلومینیم)-ناهمگن تحت فشار داخلی

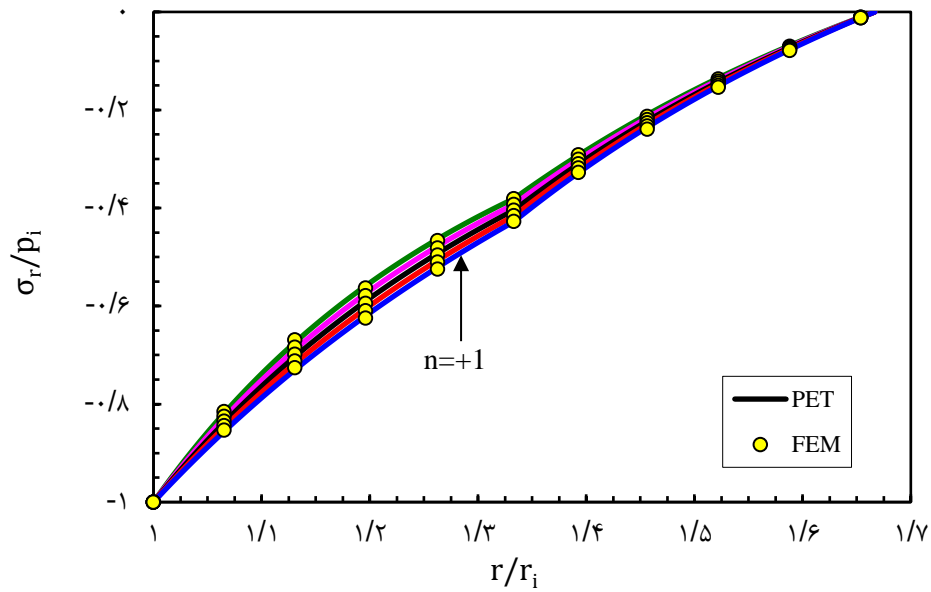


شکل ۱۹-۳ توزیع تنش محیطی در استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه همگن (آلومینیوم)-ناهمگن تحت فشار داخلی

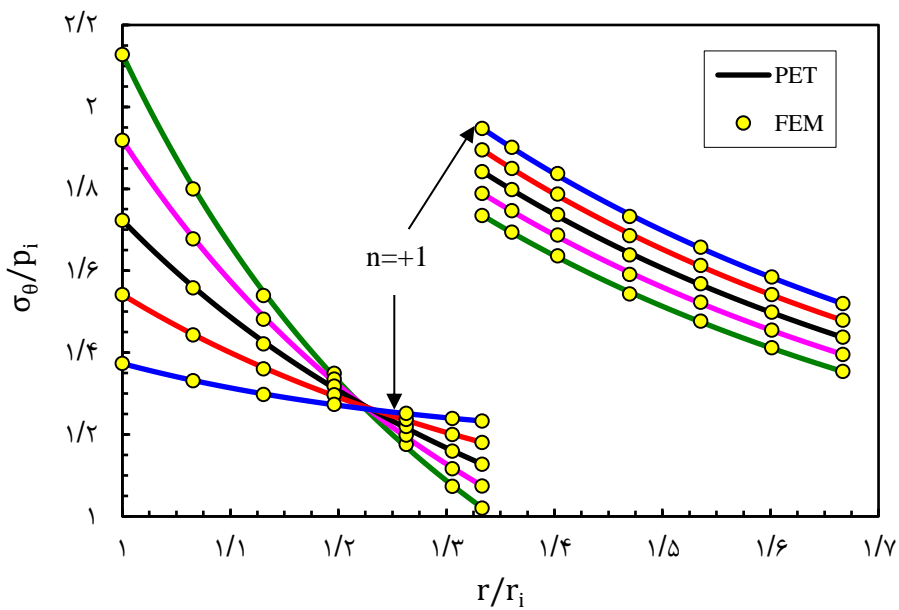
۳-۴-۷ استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی ناهمگن-همگن (فولاد) تحت بارگذاری فشار داخلی



شکل ۲۰-۳ توزیع جابه‌جایی شعاعی استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه ناهمگن-همگن (فولاد) تحت فشار داخلی



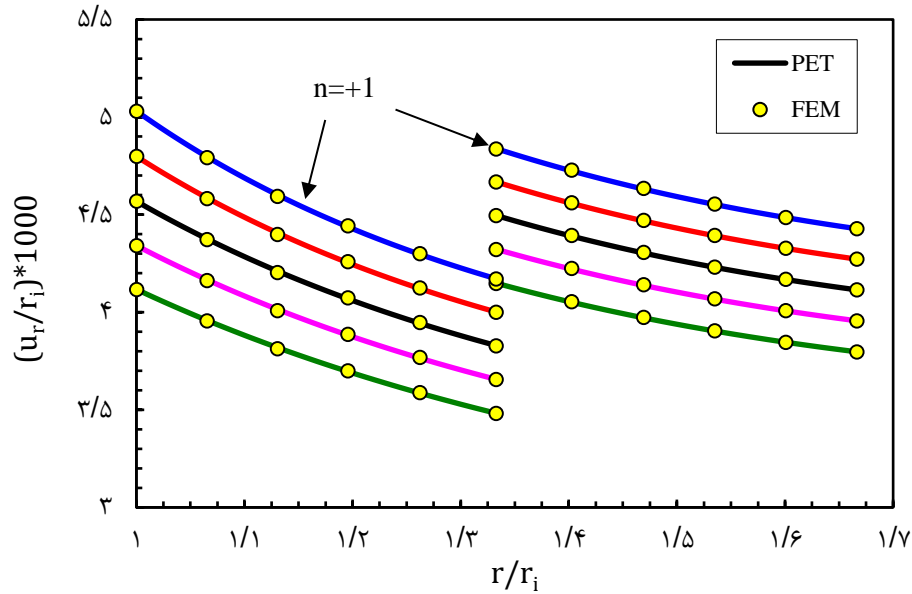
شکل ۳-۲۱ توزیع تنش شعاعی در استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی ناهمگن-همگن (فولاد) تحت فشار داخلی



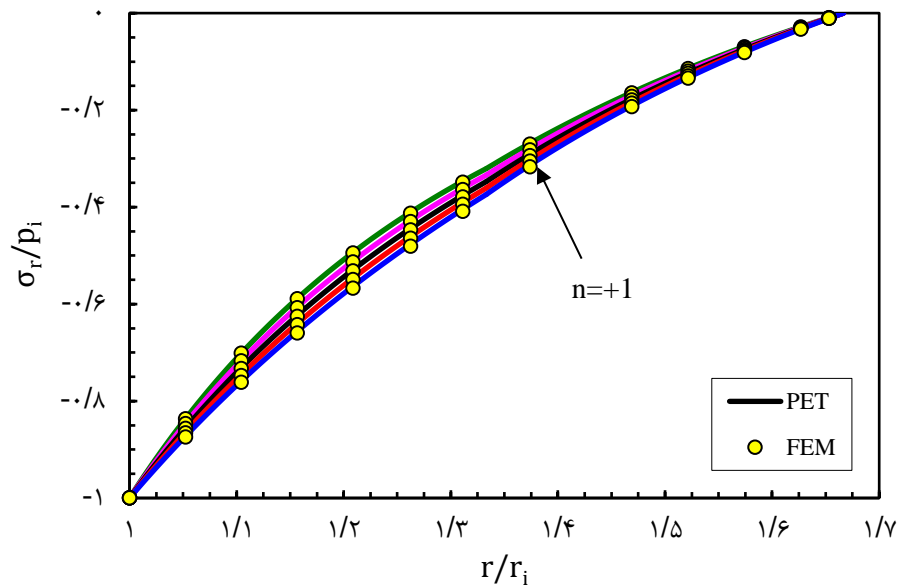
شکل ۳-۲۲ توزیع تنش محیطی در استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه ناهمگن-همگن (فولاد) تحت فشار داخلی

۳-۴-۸ استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی ناهمگن-همگن (آلومینیم) تحت بارگذاری

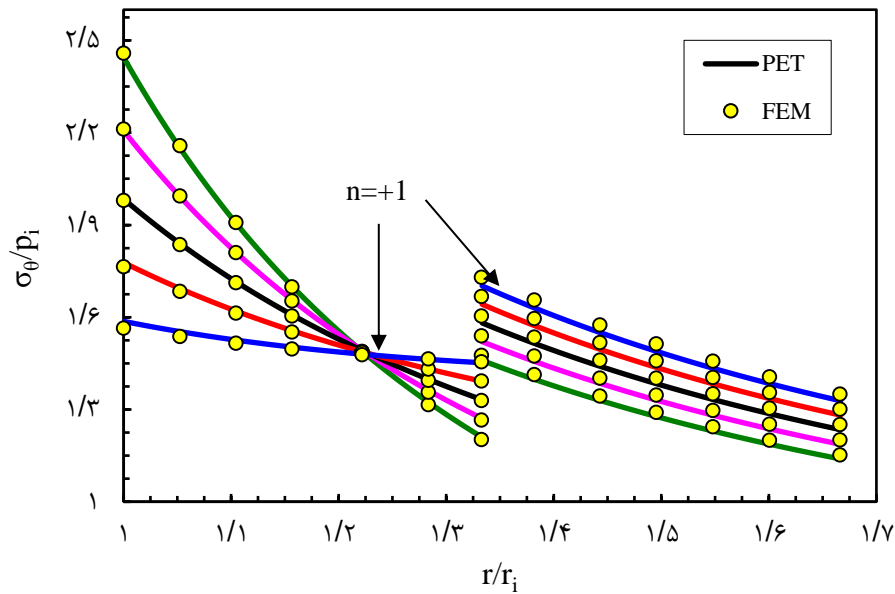
فشار داخلی



شکل ۳-۲۳ توزیع جابه‌جایی شعاعی استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی ناهمگن-همگن (آلومینیم) تحت فشار داخلی



شکل ۳-۲۴ توزیع تنش شعاعی در استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی ناهمگن-همگن (آلومینیم) تحت فشار داخلی



شکل ۳-۲۵ توزیع تنش محیطی در استوانه‌های جازنی شده‌ی دو لایه ناهمگن-همگن (آلومینیم) تحت فشار داخلی

۵-۳ جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

وقتی استوانه‌ی دو لایه تحت بارگذاری جازنی هست، جابه‌جایی در استوانه‌ی داخلی منفی و در استوانه‌ی بیرونی مثبت می‌باشد. ولی زمانی که همین استوانه تحت بارگذاری فشار داخلی قرار می‌گیرد بر اثر فشار جازنی غلبه کرده و جابه‌جایی در سرتاسر شعاع استوانه‌ی دو لایه مثبت می‌شود.

۳-۵-۱ استوانه‌ی دو لایه‌ی همگن-ناهمگن

مقدار فشار جازنی با افزایش n افزایش می‌یابد. تنش‌های محیطی در حدود شعاع $\frac{1}{3}$ استوانه‌ی ناهمگن بیرونی با هم برابر می‌شوند و قبل این نقطه‌ی همگرایی در استوانه‌ی بیرونی با افزایش n تنش‌های محیطی کاهش ولی بعد از نقطه‌ی همگرایی با افزایش n افزایش می‌یابند.

۳-۵-۲ استوانه‌ی دو لایه‌ی ناهمگن-همگن

مقدار فشار جازنی با افزایش n کاهش می‌یابد. تنش‌های محیطی در حدود شعاع $\frac{r_2}{3}$ استوانه‌ی ناهمگن داخلی با هم برابر می‌شوند و قبل این نقطه‌ی همگرایی در استوانه‌ی داخلی با افزایش n تنش‌های محیطی کاهش ولی بعد از نقطه‌ی همگرایی با افزایش n افزایش می‌یابند.

فصل ۴: حلّ تحلیلی استوانه‌های جازنی شده با دو

لایه‌ی همگن و ناهمگن FGM تحت بارگذاری

فشاری و چرخشی

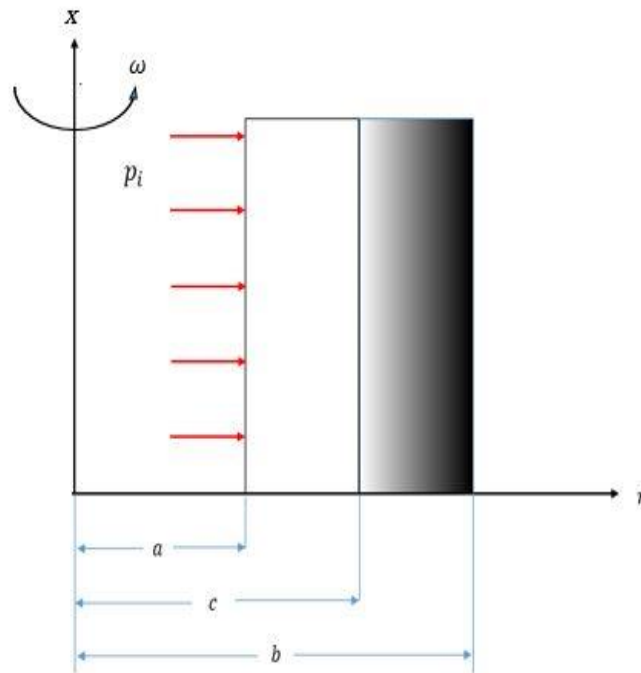
۴-۱ مقدمه

استوانه‌های چرخان دارای کاربرد وسیعی در صنعت می‌باشند. لذا بررسی و تحلیل تنش در آن‌ها در شرایط مختلف کاری از اهمیت بالایی برخوردار است. هم‌چنین اکثر سازه‌هایی که از مواد FG در آن‌ها استفاده می‌شود و نیاز به مقاومت بالا در شرایط کاری دارند؛ از قبیل سازه‌های فضایی، موشک‌ها، سازه‌های دوآر راکتور اتمی و ... به غیر از نیروهای مکانیکی، دارای دوران نیز می‌باشند. از اینرو تحلیل و بررسی این نوع بارگذاری حائز اهمیت می‌باشد.

در این فصل با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی، معادله‌ی کلی حاکم بر استوانه‌های جدار ضخیم جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی همگن-ناهمگن چرخان تحت فشار داخلی استخراج شده و سپس به حلّ تحلیلی آن در شرایط تنش صفحه‌ای و برای مقادیر متفاوت ثابت ناهمگنی پرداخته می‌شود. در ادامه حلّ الاستیک استوانه‌های چرخان دو لایه‌ی همگن-ناهمگن تحت فشار بررسی شده و سپس، نتایج حاصل از حلّ تحلیلی با حلّ عددی صورت گرفته توسط نرم‌افزار المان محدود آباکوس مقایسه و نتایج در قالب نمودارها و جداول ارائه شده است.

۴-۲ تحلیل استوانه‌های ناهمگن چرخان تحت فشار

در این فصل نیز روابط برای دو استوانه‌ی جدار ضخیم که در داخل هم جازده شده‌اند و از جنس مواد متغیر تابعی با شعاع داخلی r_i (a) و شعاع خارجی r_o (b) و شعاع مشترک r_m (c) می‌باشند، ارائه می‌شود. علاوه بر فشار داخلی p_i که به سطوح داخلی وارد می‌شود؛ استوانه دارای چرخش با سرعت زاویه‌ای ثابت ω نیز می‌باشد.



شکل ۱-۴ مقطع استوانه‌ای دو لایه‌ی همگن-ناهمگن FGM تحت فشار داخلی و چرخش

نسبت پواسون در طول دیواره هر دو لایه ثابت فرض شده است. مدول الاستیسیته و چگالی هر دو در لایه‌ی داخلی ثابت و در لایه‌ی خارجی دارای تغییرات توانی نسبت به شعاع بوده و با رابطه‌ی (۴-۲) و (۴-۲) تعریف می‌شود.

$$\rho(r) = \rho_i \left(\frac{r}{r_m}\right)^{n_1} \quad (1-4)$$

$$E(r) = E_i \left(\frac{r}{r_m}\right)^{n_2} \quad (2-4)$$

در این رابطه $R = \left(\frac{r}{r_m}\right)$ مختصات شعاع بی‌بعد است. ρ_i مدول الاستیسیته در سطح داخلی لایه خارجی استوانه‌ی جازنی‌شده و n_1 و n_2 ضریب ناهمگنی ماده می‌باشد. رابطه‌ی (۴-۱) توزیع چگالی بی‌بعد شده را نسبت به مختصات شعاعی بی‌بعد در استوانه‌ی جازنی‌شده‌ی دو لایه به ازای مقادیر ثابت ناهمگنی مختلف نشان می‌دهد (البته در اینجا n_1 و n_2 برابر n در نظر گرفته می‌شوند).

۴-۲-۱ حل الاستیک استوانه‌های جازنی شده دو لایه‌ی همگن و ناهمگن چرخان تحت

فشار

هنگامی که استوانه‌های جازنی شده با سرعت ثابت در حال چرخش باشند؛ شتاب مجموعه برابر صفر بوده و لذا می‌توان از معادله تعادل (۲-۲۱) برای تحلیل آن استفاده کرد. نیروی ایجاد شده در اثر شتاب گریز از مرکز به صورت یک نیروی حجمی و در راستای شعاع به تمام نقاط استوانه‌ها وارد می‌شود. لذا این بارگذاری را نیز می‌توان نسبت به محور، متقارن در نظر گرفت. در نتیجه همچنان شرایط تقارن محوری برقرار است و می‌توان از روابط ذکر شده در این حوزه استفاده کرد.

نیروی حجمی اعمال شده به استوانه‌ها در اثر چرخش با سرعت زاویه‌ای ثابت ω ، برابر است با:

$$b_r = \rho(r)r\omega^2$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود؛ این نیرو تنها تابعی از شعاع استوانه بوده و مستقل از دو مختصه‌ی

x و θ می‌باشد. معادله‌ی تعادل تنش به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) + \rho(r)r\omega^2 = 0 \quad (۳-۴)$$

با جای‌گذاری (۲-۲۲) و (۲-۲۵) در (۳-۴) و هم‌چنین استفاده از روابط (۴-۱) و (۴-۲)، معادله‌ی

حاکم به صورت زیر به دست می‌آید:

$$r^2 \frac{d^2u}{dr^2} + (n+1)r \frac{du}{dr} + (n(v^*) - 1)u = f(r) \quad (۴-۴)$$

که در آن

$$f(r) = -\frac{\rho_i}{E_i} \frac{r^3 \omega^2}{A} \quad (۵-۴)$$

ثابت‌های A و B وابسته به شرایط انتهایی استوانه می‌باشند که مقادیر آن‌ها در فصل دوم آمده

است. یکی از روش‌های حل برای معادله‌ی ناهمگن (۴-۴)، روش لاگرانژ می‌باشد که طبق آن، جواب

معادله‌ی ناهمگن به صورت مجموعی از حل عمومی معادله‌ی همگن متناظر و یک حل خصوصی از

معادله‌ی ناهمگن بیان می‌شود.

با تغییر متغیر $r = e^t$ داریم:

$$r \frac{du}{dr} = \frac{du}{dt} \quad (۶-۴)$$

$$r^2 \frac{d^2u}{dr^2} = \frac{d^2u}{dt^2} - \frac{du}{dt} \quad (۷-۴)$$

با جای گذاری (۴-۴)، (۵-۴)، (۶-۴) و (۷-۴) در (۴-۴) به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \frac{du}{dt} + (n+1) \frac{du}{dt} - (1 - nv^*)u = -\frac{\rho_i e^{3t} \omega^2}{E_i A} \quad (۸-۴)$$

با ساده‌سازی داریم:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + n \frac{du}{dt} - (1 - nv^*)u = -\frac{\rho_i e^{3t} \omega^2}{E_i A} \quad (۹-۴)$$

معادله مشخصه عبارتند از:

$$m^2 + mn - (1 - n(v^*)) = 0 \quad (۱۰-۴)$$

$$\Delta = n^2 + 4(1)(1 - n(v^*)) \quad (۱۱-۴)$$

$$\sqrt{\Delta} = M \rightarrow m_{1,2} = \frac{-n \pm M}{2} \quad (۱۲-۴)$$

جواب عمومی:

$$u_t^h(t) = c_1 e^{m_1 t} + c_2 e^{m_2 t} \quad (۱۳-۴)$$

جواب خصوصی:

$$u_t^p(t) = v_1 u_1 + v_2 u_2 \quad (۱۴-۴)$$

رونسکین:

$$w = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix} \quad (۱۵-۴)$$

$$v_1' = \frac{-u_2 f(t)}{w} \quad (۱۶-۴)$$

$$v_2' = \frac{u_1 f(t)}{w} \quad (۱۷-۴)$$

$$u_1 = e^{m_1 t} \quad (۱۸-۴)$$

$$u_2 = e^{m_2 t} \quad (۱۹-۴)$$

با توجه به رابطه‌ی (۱۵-۴) رونسکین عبارت است از:

$$w = \begin{vmatrix} e^{m_1 t} & e^{m_2 t} \\ m_1 e^{m_1 t} & m_2 e^{m_2 t} \end{vmatrix} = (m_2 - m_1)e^{(m_1+m_2)t} \quad (۲۰-۴)$$

در نتیجه روابط (۱۶-۴) و (۱۷-۴) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$v_1' = \frac{\rho_i \omega^2}{AE_i(m_2 - m_1)} e^{(3-m_1)t} \quad (۲۱-۴)$$

$$v_2' = -\frac{\rho_i \omega^2}{AE_i(m_2 - m_1)} e^{(3-m_2)t} \quad (۲۲-۴)$$

با انتگرال‌گیری از روابط (۲۱-۴) و (۲۲-۴) داریم:

$$v_1 = \frac{\rho_i \omega^2}{AE_i(m_2 - m_1)} * \frac{e^{(3-m_1)t}}{(3 - m_1)} \quad (۲۳-۴)$$

$$v_2 = -\frac{\rho_i \omega^2}{AE_i(m_2 - m_1)} * \frac{e^{(3-m_2)t}}{(3 - m_2)} \quad (۲۴-۴)$$

در نتیجه با توجه به رابطه‌ی (۱۴-۴) جواب خصوصی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} u_t^p(t) &= \frac{\rho_i \omega^2}{AE_i(m_2 - m_1)} * \frac{e^{3t}}{(3 - m_1)} - \frac{\rho_i \omega^2}{AE_i(m_2 - m_1)} * \frac{e^{3t}}{(3 - m_2)} \\ &= \frac{\rho_i \omega^2 e^{3t}}{AE_i(m_2 - m_1)} \left(\frac{1}{3 - m_1} - \frac{1}{3 - m_2} \right) \end{aligned} \quad (۲۵-۴)$$

با تغییر متغیر دوباره‌ی $r = e^t$ داریم:

$$u_r^p(r) = \frac{\rho_i \omega^2 r^3}{AE_i(m_2 - m_1)} \left(\frac{1}{3 - m_1} - \frac{1}{3 - m_2} \right) \quad (۲۶-۴)$$

جواب کلی معادله به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} u_r(r) &= u_r^h(r) + u_r^p(r) \\ &= C_1 r^{m_1} + C_2 r^{m_2} + \frac{\rho_i \omega^2 r^3}{AE_i(m_2 - m_1)} \left(\frac{1}{3 - m_1} - \frac{1}{3 - m_2} \right) \end{aligned} \quad (۲۷-۴)$$

با فرض اینکه استوانه‌ی داخلی همگن باشد:

$$n = 0 \rightarrow m_{1,2} = \pm 1 \quad (۲۸-۴)$$

$$u_i(r) = C_{1i} r + \frac{C_{2i}}{r} - \frac{\rho_i \omega^2 r^3}{8AE_i} \quad (۲۹-۴)$$

با فرض اینکه استوانه‌ی خارجی ناهمگن باشد داریم:

$$u_h(r) = C_{1h}r^{m_1} + C_{2h}r^{m_2} + \frac{\rho_i \omega^2 r^3}{AE_i(m_2 - m_1)} \left(\frac{1}{3 - m_1} - \frac{1}{3 - m_2} \right) \quad (30-4)$$

با توجه به روابط (۲۲-۲)، (۲۵-۲) و (۳۰-۴) توزیع تنش‌های شعاعی و محیطی برای لایه‌ی

داخلی با رابطه‌ی (۳۲-۴) و برای لایه‌ی خارجی با روابط (۳۵-۴) و (۳۶-۴) بیان می‌شود.

$$\begin{cases} \sigma_r = E_i \left(A \left(C_{1i} - \frac{C_{2i}}{r^2} - \frac{3\rho_i \omega^2 r^2}{8AE_i} \right) + B \left(C_{1i} + \frac{C_{2i}}{r^2} - \frac{\rho_i \omega^2 r^2}{8AE_i} \right) \right) \\ \sigma_\theta = E_i \left(B \left(C_{1i} - \frac{C_{2i}}{r^2} - \frac{3\rho_i \omega^2 r^2}{8AE_i} \right) + A \left(C_{1i} + \frac{C_{2i}}{r^2} - \frac{\rho_i \omega^2 r^2}{8AE_i} \right) \right) \end{cases} \quad (31-4)$$

با ساده‌سازی به صورت روابط زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} \sigma_r = E_i \left((A + B)C_{1i} + (B - A) \frac{C_{2i}}{r^2} - \frac{\rho_i \omega^2 r^2}{8AE_i} (3A + B) \right) \\ \sigma_\theta = E_i \left((A + B)C_{1i} + (A - B) \frac{C_{2i}}{r^2} - \frac{\rho_i \omega^2 r^2}{8AE_i} (3B + A) \right) \end{cases} \quad (32-4)$$

تنش‌های شعاعی و محیطی برای استوانه‌ی ناهمگن بیرونی:

$$\begin{aligned} \sigma_r = E_i \left(\frac{r}{r_m} \right)^n & \left(A(m_1 C_{1h} r^{m_1-1} + m_2 C_{2h} r^{m_2-1} \right. \\ & + \frac{3\rho_i \omega^2 r^2}{AE_i(m_2 - m_1)} \left(\frac{1}{3 - m_1} - \frac{1}{3 - m_2} \right) + B(C_{1h} r^{m_1-1} \\ & \left. + C_{2h} r^{m_2-1} + \frac{\rho_i \omega^2 r^2}{AE_i(m_2 - m_1)} \left(\frac{1}{3 - m_1} - \frac{1}{3 - m_2} \right) \right) \end{aligned} \quad (33-4)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta = E_i \left(\frac{r}{r_m} \right)^n & \left(B(m_1 C_{1h} r^{m_1-1} + m_2 C_{2h} r^{m_2-1} + \frac{3\rho_i \omega^2 r^2}{AE_i(m_2 - m_1)} \left(\frac{1}{3 - m_1} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{3 - m_2} \right) \right) + A(C_{1h} r^{m_1-1} + C_{2h} r^{m_2-1} \\ & \left. + \frac{\rho_i \omega^2 r^2}{AE_i(m_2 - m_1)} \left(\frac{1}{3 - m_1} - \frac{1}{3 - m_2} \right) \right) \end{aligned} \quad (34-4)$$

با ساده‌سازی روابط تنش‌های شعاعی و محیطی برای استوانه‌ی ناهمگن بیرونی داریم:

$$\begin{aligned} \sigma_r = E_i \left(\frac{r}{r_m} \right)^n & \left((Am_1 + B)C_{1h} r^{m_1-1} + (Am_2 + B)C_{2h} r^{m_2-1} \right. \\ & \left. + \frac{\rho_i \omega^2 r^2}{AE_i(m_2 - m_1)} \left(\frac{1}{3 - m_1} - \frac{1}{3 - m_2} \right) (3A + B) \right) \end{aligned} \quad (35-4)$$

$$\sigma_{\theta} = E_i \left(\frac{r}{r_m} \right)^n ((Bm_1 + A)C_{1h}r^{m_1-1} + (Bm_2 + A)C_{2h}r^{m_2-1} + \frac{\rho_i \omega^2 r^2}{AE_i(m_2 - m_1)} \left(\frac{1}{3 - m_1} - \frac{1}{3 - m_2} \right) (3B + A)) \quad (36-4)$$

به منظور محاسبه‌ی ثابت‌های C_{2h} و C_{1h} ، C_{2i} ، C_{1i} از شرایط مرزی استفاده می‌شود. از آنجا که این شرایط را برای تنش شعاعی و جابه‌جایی در اختیار داریم؛ با توجه به روابط (۳۲-۴)، (۳۵-۴) و (۴-۴) (۳۶) با جای‌گذاری در شرایط مرزی (۳۶-۲) تا (۳۹-۲) داریم:

$$E_i((A + B)c_{1i} + (B - A) \frac{c_{2i}}{a^2} - \frac{\rho_i \omega^2 a^2}{8AE_i} (3A + B)) = -p_i \quad (37-4)$$

$$E_i((A + B)c_{1i} + (B - A) \frac{c_{2i}}{c^2} - \frac{\rho_i \omega^2 c^2}{8AE_i} (3A + B)) = E_i \left(\frac{c}{r_m} \right)^n ((Am_1 + B)C_{1h}c^{m_1-1} + (Am_2 + B)C_{2h}c^{m_2-1} + \frac{\rho_i \omega^2 c^2}{AE_i(m_2 - m_1)} \left(\frac{1}{3 - m_1} - \frac{1}{3 - m_2} \right) (3A + B)) \quad (38-4)$$

$$C_{1h}c^{m_1} + C_{2h}c^{m_2} + \frac{\rho_i \omega^2 c^3}{AE_i(m_2 - m_1)} \left(\frac{1}{3 - m_1} - \frac{1}{3 - m_2} \right) - C_{1i}c - \frac{C_{2i}}{c} + \frac{\rho_i \omega^2 c^3}{8AE_i} = d \quad (39-4)$$

$$E_i \left(\frac{b}{c} \right)^n ((Am_1 + B)C_{1h}b^{m_1-1} + (Am_2 + B)C_{2h}b^{m_2-1} + \frac{\rho_i \omega^2 b^2}{AE_i(m_2 - m_1)} \left(\frac{1}{3 - m_1} - \frac{1}{3 - m_2} \right) (3A + B)) = 0 \quad (40-4)$$

اکنون برای به‌دست‌آوردن ثابت‌های مجهول روابط (۳۷-۴) تا (۴۰-۴) را به‌صورت ماتریس زیر

داریم:

$$\begin{bmatrix} (A+B) & \frac{(B-A)}{a^2} & 0 & 0 \\ (A+B) & \frac{E_i}{c^2}(B-A) & -(Am_1+B)\left(\frac{c}{a}\right)^{m_1-1} & -(Am_2+B)\left(\frac{c}{a}\right)^{m_2-1} \\ -\frac{c}{a} & -\frac{a}{c} & \left(\frac{c}{a}\right)^{m_1} & \left(\frac{c}{a}\right)^{m_2} \\ 0 & 0 & (Am_1+B)\left(\frac{b}{a}\right)^{m_1-1} & (Am_2+B)\left(\frac{b}{a}\right)^{m_2-1} \end{bmatrix}$$

(۴۱-۴)

$$* \begin{Bmatrix} c_{1i} \\ c_{2i} \\ c_{1h} \\ c_{2h} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{p_i}{E_i} + \frac{\rho_i \omega^2 a^2}{8AE_i} (3A+B) \\ \frac{\rho_i \omega^2 c^2}{AE_i} (3A+B) \left(\frac{1}{8} + \left(\frac{1}{m_2 - m_1} \left(\frac{1}{3 - m_1} - \frac{1}{3 - m_2} \right) \right) \right) \\ d - \frac{\rho_i \omega^2 c^3}{AE_i} \left(\frac{1}{8} + \left(\frac{1}{m_2 - m_1} \left(\frac{1}{3 - m_1} - \frac{1}{3 - m_2} \right) \right) \right) \\ -\frac{\rho_i \omega^2 b^2}{AE_i (m_2 - m_1)} (3A+B) \left(\frac{1}{3 - m_1} - \frac{1}{3 - m_2} \right) \end{Bmatrix}$$

از رابطه‌ی (۴۱-۴) با ماتریس معکوس گرفتن در نرم‌افزار میپل ثابت‌های مجهول به دست می‌آید.

۳-۴ حلّ عددی استوانه‌های جازنی‌شده با دو لایه‌ی همگن و ناهمگن تحت بارگذاری فشار داخلی و چرخش

نحوه‌ی مدل‌سازی استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی همگن و ناهمگن در حال چرخش، همانند فصل قبل می‌باشد. به منظور اعمال تغییرات چگالی و مدول یانگ در هر لایه، از رابطه‌های (۱-۴) و (۲-۴) استفاده می‌شود.

نیروی حجمی ایجاد شده در مجموعه بواسطه‌ی چرخش استوانه، با تعریف تابع b_r به تمامی

گره‌های موجود اعمال می‌شود.

۴-۴ مطالعه‌ی موردی و مقایسه‌ی نتایج

به منظور مطالعه‌ی موردی و مقایسه‌ی نتایج حاصل از حلّ تحلیلی با مقادیر به دست آمده از حلّ عددی به کمک مدل‌سازی نرم‌افزاری؛ استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه همگن و ناهمگن را به شعاع داخلی

$r_i = 150 \text{ mm}$ شعاع میانی (فصل مشترک) $r_m = 200 \text{ mm}$ شعاع خارجی $r_o = 250 \text{ mm}$ طول $L = 800 \text{ mm}$ و تداخل $\delta = 0.1 \text{ mm}$ در نظر می‌گیریم.

مدول‌های یانگ در سطح داخلی لایه‌ی داخلی (E_i) دارای مقدار 200 GPa برای فولاد و یا مقدار 70 GPa برای آلومینیوم بوده و فرض می‌شود که نسبت پواسون (ν) مقدار ثابت 0.3 را داراست. نتایج را برای دو حالت بارگذاری تنها فشار جازنی و اعمال هم‌زمان فشار جازنی و فشار داخلی $p_i = 140 \text{ MPa}$ بررسی می‌کنیم.

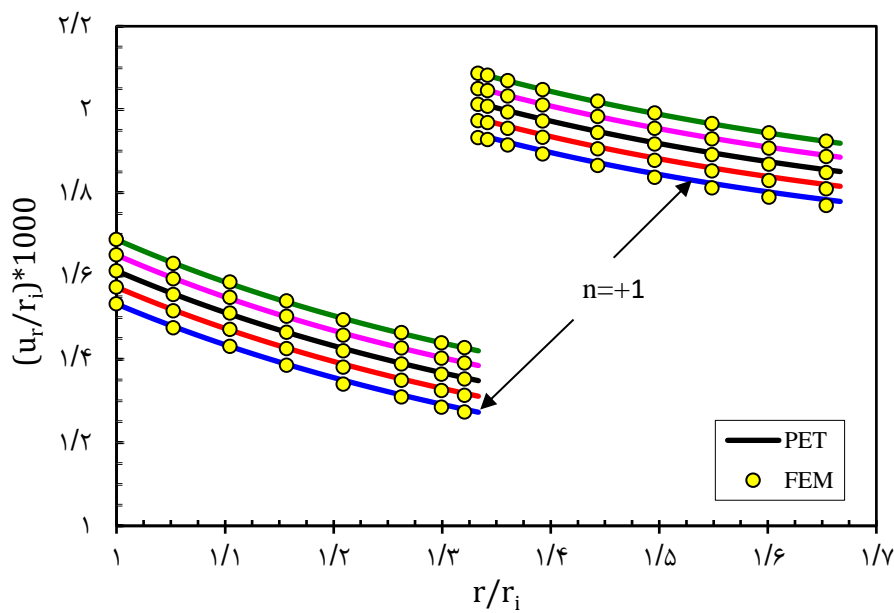
مدول‌های یانگ در لایه‌ی داخلی و در سطح داخلی لایه‌ی خارجی (E_i) دارای مقدار 200 GPa برای فولاد و یا مقدار 70 GPa برای آلومینیوم بوده و چگالی نیز دارای مقادیر $7860 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ برای فولاد و $2710 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ برای آلومینیوم می‌باشد. فرض می‌شود که نسبت پواسون (ν) مقدار ثابت 0.3 را در طی ضخامت داراست. استوانه‌ی جازنی‌شده، تحت فشار داخلی ($p_i = 140 \text{ MPa}$) بوده و با سرعت زاویه‌ای ثابت $\omega = 300 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ در حال چرخش حول محور مرکزی می‌باشد.

ثابت‌های ناهمگنی n_1 و n_2 برابر یکدیگر فرض شده و نتایج برای حالت تنش صفحه‌ای ارائه می‌شوند. خطوط ممتد نشانگر حلّ تحلیلی و دایره‌های کوچک نماینده‌ی حلّ عددی صورت گرفته می‌باشند.

۴-۴-۱ استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی همگن (فولاد) و ناهمگن فولاد تحت فشار و

چرخش

شکل ۴-۲ توزیع جابه‌جایی بی‌بعد شده را در طول دیواره‌ی استوانه نشان می‌دهد. در هیچ مکانی از استوانه و به ازای هیچ یک از مقادیر ضریب ناهمگنی، جابه‌جایی شعاعی یکسانی را شاهد نبوده و هم‌چنین نسبت $\frac{u_r}{r_i}$ در هیچ مکانی برابر یکدیگر نیست. جابه‌جایی ایجاد شده در استوانه مثبت بوده و با افزایش n ، مقدار آن کاهش می‌یابد. به‌گونه‌ای که جابه‌جایی‌ها به ازای $n < 0$ دارای مقادیر بزرگ‌تر و به ازای $n > 0$ دارای مقادیر کوچک‌تری نسبت به ماده‌ی همگن می‌باشد.

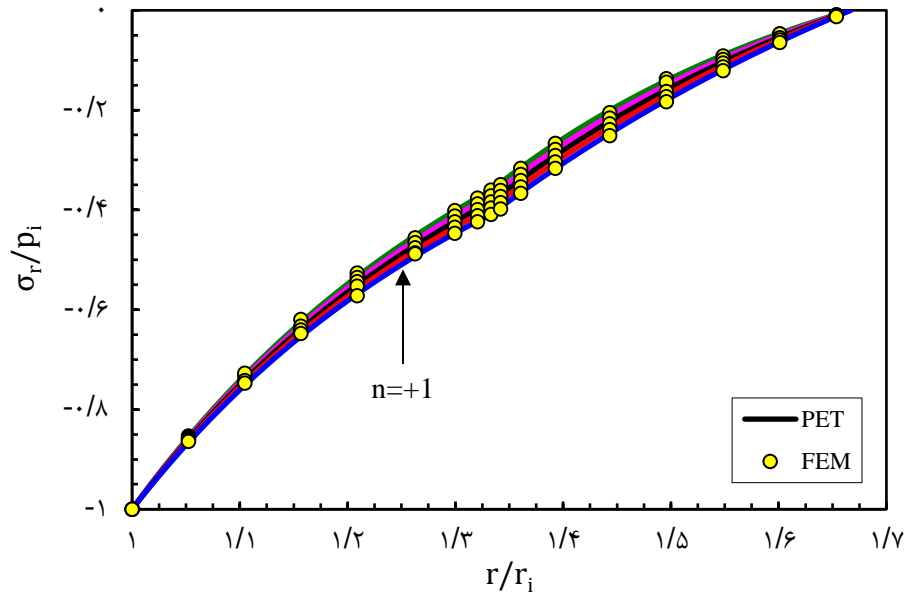


شکل ۴-۲ توزیع جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی همگن (فولاد)-ناهمگن تحت فشار و چرخش

به دلیل آن که به ازای $n = +1$ کمترین جابه‌جایی در استوانه ایجاد می‌شود؛ در صورتی که جابه‌جایی شعاعی عامل تعیین کننده در طراحی استوانه‌ی تحت فشار باشد (مانند لوله‌ی پرتابه‌ها در صنایع نظامی) و همچنین در صورت داشتن محدودیت در تولید ماده FG با ضریب ناهمگنی متفاوت برای خواص مکانیکی، انتخاب ماده با این ضریب ناهمگنی پیشنهاد می‌شود. تغییرات جابه‌جایی در طول دیواره تقریباً اندک بوده و از این جهت استوانه‌ی ناهمگن رفتار مشابهی را نسبت به استوانه‌ی همگن از خود نشان می‌دهد.

شکل ۴-۳ توزیع تنش شعاعی بی‌بعد شده را در طی ضخامت استوانه نشان می‌دهد. از آنجا که هم فشار و هم نیروی حجمی، هر دو در جهت مثبت محور مختصات به استوانه اعمال شده‌اند؛ لذا تنش شعاعی دارای مقادیر منفی در طول دیواره می‌باشد. به ازای مقادیر مختلف ثابت ناهمگنی، تنش‌ها در سطوح داخلی و خارجی استوانه‌ی جازنی‌شده یکسان بوده و همچنین نسبت $\frac{\sigma_r}{p_i}$ در سطوح داخلی و خارجی به ترتیب برابر یک و صفر می‌باشد. با کاهش n ، مقدار تنش شعاعی نیز به مقدار اندکی کاهش

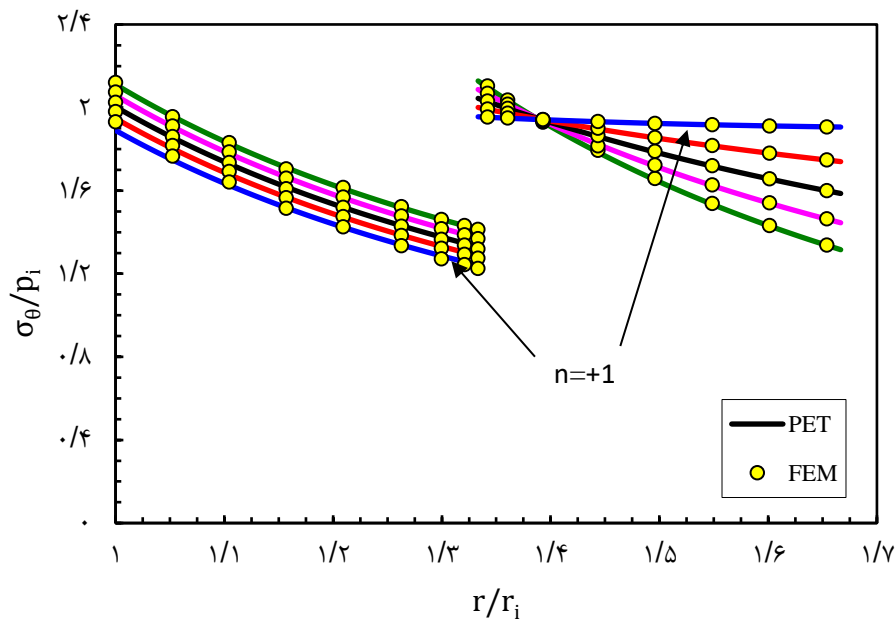
می‌یابد. این مقدار به ازای $n < 0$ ، کوچک‌تر از تنش ایجاد شده در استوانه‌ی همگن و به ازای $n > 0$ ، بزرگتر از آن می‌باشد.



شکل ۴-۳ توزیع تنش شعاعی در استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی همگن (فولاد)-ناهمگن تحت فشار و چرخش

شکل ۴-۴ توزیع تنش محیطی بی‌بعد شده را نشان می‌دهد. مقدار این تنش در سطوح داخلی و خارجی استوانه‌ی جازنی‌شده، به ازای هیچ یک از ضرایب ناهمگنی یکسان نمی‌باشد. هم‌چنین نسبت $\frac{\sigma_{\theta}}{p_i}$ در هیچ یک از دو سطح برابر هم نیستند.

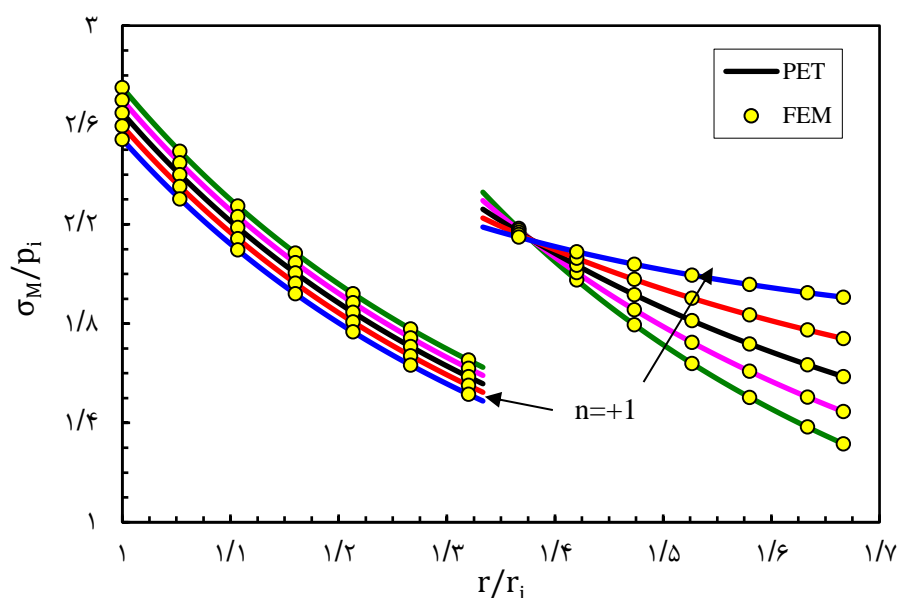
در هر دو لایه‌ی داخلی و خارجی تنش‌ها مثبت می‌باشند. با افزایش n ، مقادیر تنش محیطی در لایه‌ی داخلی کاهش می‌یابد، در لایه‌ی خارجی تقریباً در $\frac{1}{p}$ داخلی لایه‌ی خارجی استوانه‌ی جازنی‌شده، تنش محیطی کاهش و در $\frac{2}{p}$ دیگر این لایه افزایش می‌یابد. لذا در لایه‌ی خارجی در شعاع‌های کمتر از حدود $1/4$ ، تنش به ازای $n < 0$ دارای مقادیر بزرگتر و به ازای $n > 0$ دارای مقادیر کوچکتری نسبت به حالت همگن می‌باشد. تنها در همین شعاع است که نسبت $\frac{\sigma_{\theta}}{p_i}$ برابر یکدیگر می‌باشد.



شکل ۴-۴ توزیع تنش محیطی در استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی همگن (فولاد)-ناهمگن تحت فشار و چرخش

در $\frac{1}{3}$ داخلی لایه‌ی خارجی، منحنی‌ها به یکدیگر نزدیک شده و دارای رفتار مشابهی می‌باشند. هم‌چنین منحنی مربوط به $n = +1$ ، تغییرات اندکی را در طی ضخامت داشته که می‌تواند نکته‌ی مهمی در طراحی این استوانه‌ها به حساب آید.

شکل ۴-۵ توزیع تنش فن‌میزس بی‌بعد شده را براساس معادله‌ی (۲-۲۹)، در طی ضخامت نشان می‌دهد. با اعمال فشار داخلی به استوانه هم‌چنین چرخش آن با سرعت ثابت، تنش‌های فن‌میزس ایجاد شده در استوانه، دارای مقادیر مثبتی خواهد بود. این تنش‌ها به ازای هیچ یک از مقادیر ضریب ناهمگنی، در سطوح داخلی و خارجی استوانه‌ی جازنی‌شده، مقادیر یکسانی نداشته و نسبت $\frac{\sigma_M}{p_i}$ در هیچ کدام از این سطوح برابرهم نیست.



شکل ۴-۵ توزیع تنش فن میزس در استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی همگن (فولاد)-ناهمگن تحت فشار و چرخش

مقدار تنش فن میزس، به ازای مقادیر منفی از ضریب ناهمگنی و در شعاع‌های کمتر از حدود $1/4$ بزرگتر از ماده‌ی همگن بوده در حالی که در شعاع‌های بزرگتر از حدود $1/4$ ، دارای مقادیر کوچک‌تری از آن می‌باشد. عکس این قضیه برای n های مثبت رخ می‌دهد. در لایه‌ی خارجی استوانه‌ی جازنی‌شده، در شعاع‌های کمتر از حدود $1/4$ ، منحنی‌ها رفتار مشابهی داشته و به یک مقدار واحد نزدیک می‌شوند. بنابراین تنها در شعاع حدود $1/4$ ، نسبت $\frac{\sigma_M}{p_i}$ برابر هم می‌شود.

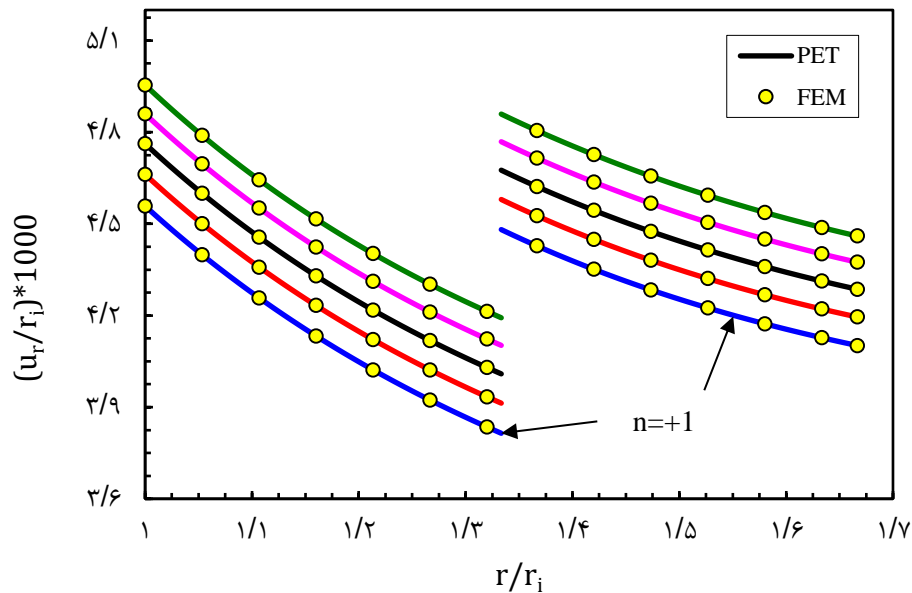
به ازای $n = +1$ ، تنش مؤثر دارای تغییرات اندکی در طی ضخامت می‌باشد. لذا انتخاب این عدد برای ضریب ناهمگنی، در طراحی استوانه‌های چرخان تحت فشار داخلی توصیه می‌شود.

۴-۴-۲ استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی همگن (آلومینیوم)-ناهمگن تحت بارگذاری

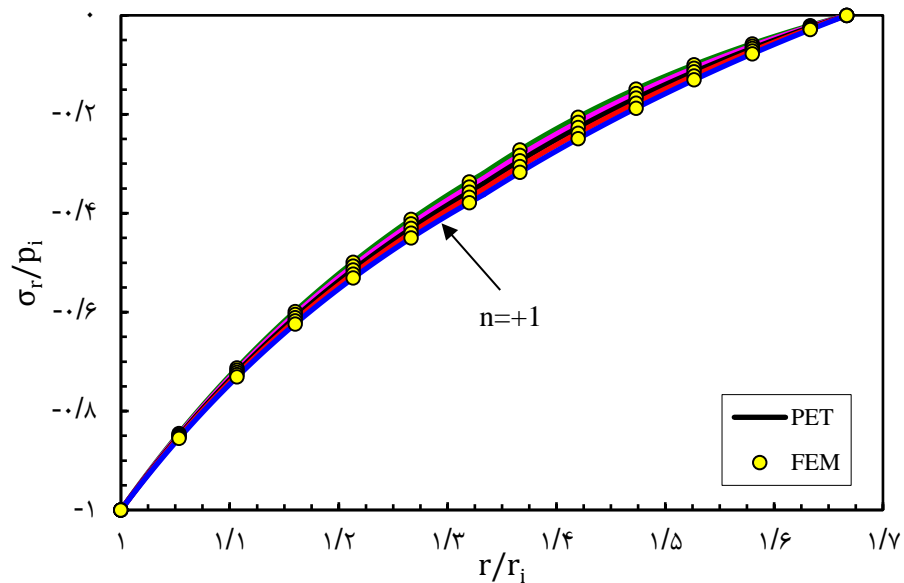
فشاری و چرخشی

شکل ۴-۶ توزیع جابه‌جایی بی‌بعد را در طول دیواره‌ی استوانه نشان می‌دهد. همان‌طور که دیده می‌شود روند تغییرات مانند حالتی است که استوانه‌ی داخلی از جنس فولاد باشد (شکل ۴-۲) ولی میزان جابه‌جایی‌ها بیشتر است.

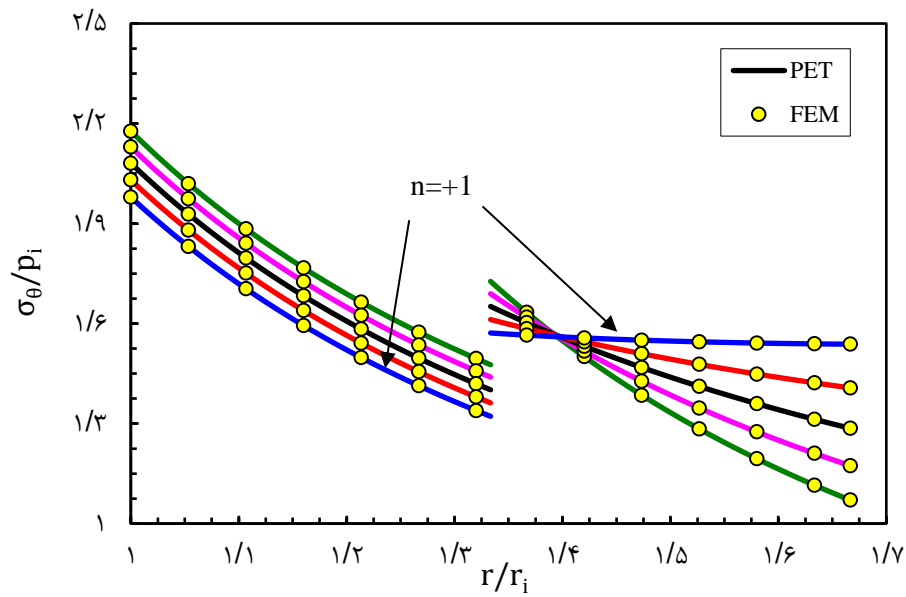
شکل ۴-۷ توزیع بی‌بعد تنش شعاعی را در طی ضخامت استوانه نمایش می‌دهد. در شعاع‌های میانی به ازای $n = +1$ دارای بیشترین مقدار تنش هست. مقدار تنش‌ها نسبت به حالتی که استوانه‌ی داخلی فولاد باشد مقداری کاهش داشته است.



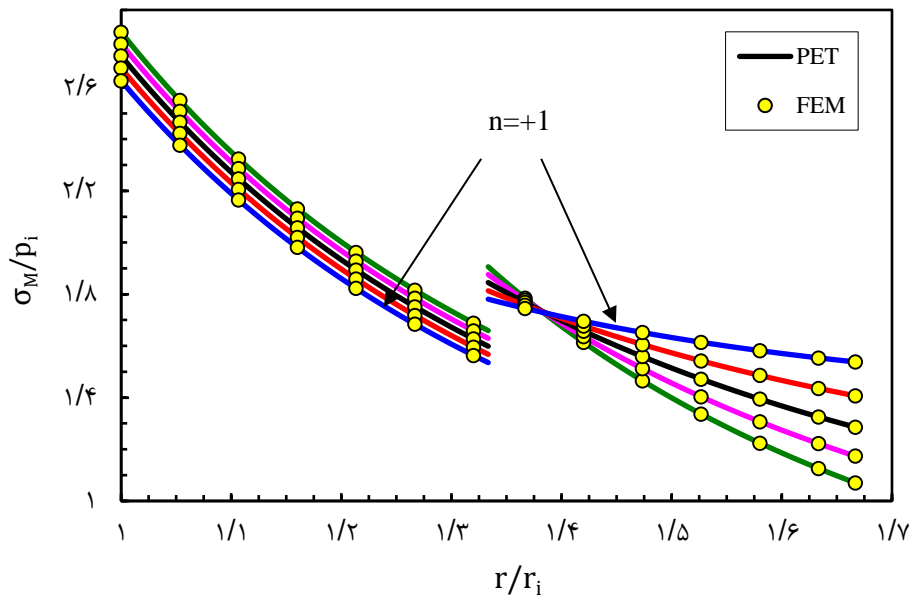
شکل ۴-۶ توزیع جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی همگن (آلومینیوم)-ناهمگن تحت فشار و چرخش



شکل ۴-۷ توزیع تنش شعاعی در استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی همگن (آلومینیوم)-ناهمگن تحت فشار و چرخش



شکل ۴-۸ توزیع تنش محیطی در استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی همگن (آلومینیوم)-ناهمگن تحت فشار و چرخش



شکل ۴-۹ توزیع تنش فن‌میزس در استوانه‌های جازنی‌شده‌ی دو لایه‌ی همگن (آلومینیوم)-ناهمگن تحت فشار و چرخش

شکل ۴-۸ توزیع بی‌بعد تنش محیطی را در طول دیواره‌ی استوانه نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود روند تغییرات مانند حالتی است که استوانه‌ی داخلی از جنس فولاد باشد ولی با این

تفاوت که به ازای n های متناظر در استوانه‌ی داخلی تنش‌های محیطی افزایش ولی در استوانه‌ی بیرونی کاهش می‌یابد.

شکل ۴-۹ توزیع بی‌بعد تنش فن‌میزس را نسبت به شعاع نمایش می‌دهد. همان‌طور که دیده می‌شود روند تغییرات مانند شکل ۴-۵ می‌باشد با این تفاوت که به ازای n های متناظر در استوانه‌ی داخلی تنش‌های فن‌میزس افزایش ولی در استوانه‌ی بیرونی کاهش می‌یابد.

۴-۵ جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

با توجه به تأثیر بسیار کم بارگذاری دورانی برای سرعت‌های نه چندان زیاد، مشاهده می‌شود که رفتار استوانه تحت بارگذاری دورانی و فشاری بسیار مشابه رفتار استوانه تحت بارگذاری فشاری می‌باشد. اما چرخش با سرعت ثابت $300 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ، تغییرات نسبتاً کمی را در مقادیر تنش‌ها و جابه‌جایی نسبت به استوانه‌ی همگن ایجاد می‌کند. این سرعت باعث تغییر مقدار تنش فن‌میزس در شعاع داخلی استوانه‌ی داخلی برای وقتی که استوانه‌ی داخلی فولاد و آلومینیوم باشد (برای حالت $n = +1$) به ترتیب برابر $37/8 \text{ MPa}$ و $13/16 \text{ MPa}$ است. اختلاف جابه‌جایی برای فولاد و آلومینیوم به ترتیب حدود $30/3 \mu\text{m}$ و $29/85 \mu\text{m}$ می‌باشد. البته باید این نکته را در نظر بگیریم که سرعت زاویه‌ای تا جایی که باعث جدایش (صفر شدن فشار جازنی) نشود می‌تواند افزایش یابد. در جدول زیر سرعت جدایش به ازای n های مختلف برای فولاد و آلومینیوم آورده شده است.

جدول ۴-۱ سرعت جدایش استوانه‌ها

Power indices	Angular velocity ($\frac{\text{rad}}{\text{s}}$)				
	$n = -1$	$n = -0.5$	$n = 0$	$n = +0.5$	$n = +1$
Steel	۶۲۸	۶۲۵	۶۲۱	۶۱۶	۶۱۳
Aluminium	۶۳۴	۶۳۰	۶۲۵	۶۲۱	۶۱۷

فصل ۵: جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

۵-۱ مقدمه

استوانه‌های جدارضخیم متقارن محوری، به دلیل مقاومت بالا در برابر انواع فشارهای داخلی و خارجی، نیروها و لنگرها، گرادیان دمایی و بارگذاری‌های متنوع دیگر کاربرد فراوانی در صنعت پیدا کرده‌اند. دستیابی به روش‌های مختلف تحلیل این گروه از پوسته‌ها با تغییرات هندسه، ماده و بارگذاری مورد علاقه‌ی پژوهشگران و نیاز صنعتگران می‌باشد. در همین راستا در این پایان‌نامه سعی شده است تا با ارائه‌ی روش حلّ تحلیلی برای استوانه‌های جدارضخیم با ضخامت ثابت در حالت تقارن محوری تحت بارگذاری فشاری و بارگذاری دورانی با سرعت ثابت، اثر هر یک از این بارگذاری‌ها بر روی مقادیر تنش و جابه‌جایی پوسته‌ی استوانه‌ای بررسی شود. در این فصل ضمن جمع‌بندی کارهای صورت گرفته در این پایان‌نامه، نتیجه‌گیری جامعی صورت پذیرفته است و نهایتاً پیشنهادهایی برای ادامه و تکمیل کار نیز ارائه شده است.

یکی از اهدافی که در استوانه‌ها دنبال می‌شود این است که استوانه فشار داخلی بیشتری را تحمل کند و برای این هدف می‌توان ضخامت جداره را زیاد کرد و یا بدون افزایش ضخامت، جنس مورد نظر را مرغوب‌تر انتخاب کرد که استفاده از هر دوی این روش افزایش هزینه را در بر دارد. به همین خاطر راه حل سومی ارائه می‌شود که این راه حل بیان می‌کند که:

با توجه به این که فشار در جدار داخلی خیلی بیشتر از فشاری که جدار خارجی تحمل می‌کند بهتر است لایه داخلی را از یک جنس مرغوب‌تر نسبت به لایه‌ی خارجی بسازیم و چون این روش نه ضخامت را زیاد می‌کند و نه کل استوانه را از جنس مرغوب می‌سازد مورد قبول واقع شد، که در نتیجه بحث استوانه‌های جازنی‌شده (دو لایه) به وجود می‌آید.

۵-۲ جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

نتایج مربوط به انواع بارگذاری به‌طور مجزاً بیان شده است.

❖ حالت اول: تحلیل پوسته‌های استوانه‌ای دو لایه‌ی همگن تحت فشار داخلی

همان‌طور که با توجه به شکل‌ها مشاهده شد تنش‌های شعاعی حاصل از جازنی یعنی σ_r همیشه پیوستگی دارد و همواره کوچکتر از صفر می‌باشد. تنش محیطی شکستگی دارد، برای فشار خارجی (استوانه‌ی داخلی) همواره منفی و برای فشار داخلی (استوانه‌ی خارجی) همواره مثبت می‌باشد. وقتی که جنس استوانه‌ی دو لایه یکی باشد و تحت بارگذاری فشار جازنی قرار گیرد جابه‌جایی یکسان است. همان‌طور که قبلاً نیز اشاره شد، در استوانه‌ی جدار ضخیم دو لایه با ضخامت ثابت، فشار داخلی یکنواخت سبب ایجاد جابه‌جایی شعاعی مثبت در استوانه می‌شود. وقت که جنس دو لایه نرم‌تر باشد فشار جازنی کمتری به وجود می‌آید و در جایی مانند توپی و شفت گشتاوری کمتری انتقال می‌دهد. در مجموع مطابقت قابل قبولی بین حل تحلیلی و حل عددی در استوانه‌ی دو لایه‌ی تحت فشار وجود دارد.

❖ حالت دوم: تحلیل پوسته‌های استوانه‌ای دو لایه‌ی همگن-ناهمگن FGM تحت فشار

داخلی

جابه‌جایی‌ها در بارگذاری فشار جازنی در لایه‌ی داخلی منفی و در لایه‌ی خارجی مثبت است و همچنین مقدار جابه‌جایی به ازای $n = +1$ در لایه‌ی داخلی بیشتر از حالت همگن ولی در لایه‌ی خارجی برعکس می‌باشد. فشار جازنی با افزایش n در حالتی که استوانه‌ی داخلی همگن و استوانه‌ی بیرونی ناهمگن باشد افزایش، و در حالتی که استوانه‌ی داخلی ناهمگن و بیرونی همگن باشد، کاهش می‌یابد. جابه‌جایی‌ها در بارگذاری فشار داخلی در هر دو لایه مثبت می‌باشد.

ماده با ضریب ناهمگنی $n = +1$ می‌تواند بهترین انتخاب برای تولید استوانه تحت فشار داخلی باشد چرا که علاوه بر داشتن کمترین مقادیر در تنش مؤثر و جابه‌جایی شعاعی، دارای توزیع با گرادینان تغییر مقادیر بسیار اندک در دیواره‌ی استوانه می‌باشد.

❖ حالت سوم: تحلیل پوسته‌های استوانه‌ای دو لایه‌ی همگن-ناهمگن FGM تحت فشار

داخلی و چرخش

برای استوانه‌های دو لایه تحت چرخش تا هر سرعتی نمی‌توان سرعت را افزایش داد چرا که باعث غلبه بر تداخل اولیه‌ی استوانه‌ها شده، یعنی با افزایش سرعت زاویه‌ای فشار جازنی کاهش می‌یابد تا جایی که باعث جدایش شده و بنابراین فشار جازنی و تداخل صفر حاصل می‌گردد.

با توجه با تأثیر بسیار کم بارگذاری دورانی برای سرعت‌های نه چندان زیاد، مشاهده می‌شود که رفتار استوانه تحت بارگذاری دورانی مشابه رفتار استوانه تحت بارگذاری فشاری می‌باشد. به عبارت دیگر نتیجه‌گیری‌های مربوط به بارگذاری فشاری برای بررسی رفتار استوانه‌ی چرخان تحت فشار نیز صادق است. همان‌طور که در طول فصل چهارم نیز اشاره شد، در استوانه‌ی جدار ضخیم با ضخامت ثابت، چرخش سبب ایجاد جابه‌جایی شعاعی بسیار اندکی می‌شود. هم‌چنین حداکثر مقدار تنش محیطی ایجاد شده توسط دوران با سرعت ثابت 300 rad/s کمتر از $40/6 \text{ MPa}$ می‌باشد که این میزان در سطح داخلی بیشتر از سطوح دیگر می‌باشد (به ازای $n=+1$). می‌توان برای استوانه‌ی چرخان تحت فشار داخلی با در نظر گرفتن هر یک از بارگذاری‌های دورانی و فشاری به‌طور جداگانه، نتایج حاصل را با استفاده از اصل برهم‌نهی با یکدیگر جمع نمود. در مجموع مطابقت قابل قبولی بین حلّ تحلیلی و حلّ عددی در استوانه تحت بارگذاری‌های دورانی و فشاری وجود دارد.

۳-۵ پیشنهادها

با توجه به کارهایی که در گذشته در رابطه با موضوع این پایان نامه انجام شده و آنچه در این پژوهش ارائه شد، جهت تکمیل این بررسی‌ها با توجه به کاربرد وسیع و متنوع پوسته‌های استوانه‌ای پیشنهادات زیر ارائه می‌گردد:

۱. حلّ تحلیلی و عددی استوانه‌های دو لایه‌ی چرخان همگن و ناهمگن FG تحت فشار و بار حرارتی گذرا با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی
۲. بهینه‌سازی پوسته‌های استوانه‌ای دو لایه‌ی همگن و ناهمگن FG چرخان تحت بارگذاری فشار داخلی با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی
۳. تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای دو لایه‌ی همگن و ناهمگن FG تحت فشار متغیّر در طول استوانه با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی
۴. تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای دو لایه‌ی همگن و ناهمگن FG با تغییرات نمایی خواص تحت بار حرارتی گذرا با استفاده از تئوری الاستیسیته مستوی

مراجع

- [1] Flugge W.; Stresses in shells, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin, 1960.
- [۲] یوگورال ای. سی؛ تنش در ورق‌ها و پوسته‌ها، ترجمه‌ی غ. رحیمی، انتشارات دانشگاه تربیت مدرس، دانشگاه تهران، ۱۳۷۵.
- [3] Timoshenko S.P., Goodier J.N.; Theory of elasticity, 3rd ed., MacGraw-Hill Book Company, New York, 1982.
- [4] Greenspon J.E.; Vibration of a thick-walled cylindrical shell comparison of the exact theory with approximate theories, J. Acoust. Soc. Am., Vol. 32, No. 5, pp. 571-578, 1960.
- [5] Timoshenko S.P.; Strength of materials: Part II (Advanced theory and problems), 3rd ed., Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1976.
- [6] Koizumu M.; The concept of FGM, ceramic transactions, J. Funct. Grad. Mater, Vol. 34, No. pp. 3-10, 1993.
- [7] Koizumi M., Niino M.; Overview of FGM research in Japan, Mrs Bulletin, Vol. 20, No. 1, pp. 19-21, 1995.
- [8] Mirsky I., Hermann G.; Axially symmetric motions of thick cylindrical shells, ASME J. Appl. Mech., Vol. 25, No. pp. 97-102, 1958.
- [9] Ziv M., Perl M.; *Impulsive deformation of mirsky-herrmann's thick cylindrical shells by a numerical method*, J. Appl. Mech., Vol. 40, No. 4, pp. 1009-1016, 1973.
- [10] Fukui Y., Yamanaka N.; Elastic analysis for thick-walled tubes of functionally graded material subjected to internal pressure, JSME Int. J. Ser. 1, Solid Mech., Strength Mater, Vol. 35, No. 4, pp. 379-385, 1992.
- [11] Kardomateas G.A.; The initial phase of transient thermal stresses due to general boundary thermal loads in orthotropic hollow cylinders, J. Appl. Mech., Vol. 57,

No. 3, pp. 719-724, 1990.

- [12] Ashida F., Noda N., Okumura I.A.; General solution technique for transient thermoelasticity of transversely isotropic solids in cylindrical coordinates, *Acta Mech.*, Vol. 101, No. 1-4, pp. 215-230, 1993.
- [13] Obata Y., Noda N.; Steady thermal stresses in a hollow circular cylinder and a hollow sphere of a functionally gradient material, *J. Therm. stresses*, Vol. 17, No. 3, pp. 471-487, 1994.
- [14] Loy C.T., Lam K.Y., Reddy J.N.; Vibration of functionally graded cylindrical shells, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 41, No. 3, pp. 309-324, 1999.
- [15] Horgan C.O., Chan A.M.; The pressurized hollow cylinder or disk problem for functionally graded isotropic linearly elastic materials, *J. Elast.*, Vol. 55, No. 1, pp. 43-59, 1999.
- [16] Horgan C.O., Chan A.M.; The stress response of functionally graded isotropic linearly elastic rotating disks, *J. Elast.*, Vol. 55, No. 3, pp. 219-230, 1999.
- [17] Obata Y., Kanayama K., Ohji T.; Two-dimensional unsteady thermal stresses in a partially heated circular cylinder made of functionally gradient materials, *International Congress on Thermal Stresses*, 1999.
- [18] Zimmerman R.W., Lutz M.P.; Thermal stresses and thermal expansion in a uniformly heated functionally graded cylinder, *J. Therm. Stresses*, Vol. 22, No. 2, pp. 177-188, 1999.
- [19] Tutuncu N., Ozturk M.; Exact solutions for stresses in functionally graded pressure vessels, *Compos. B Eng.*, Vol. 32, No. 8, pp. 683-686, 2001.
- [20] Jabbari M., Sohrabpour S., Eslami M.R.; Mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to radially symmetric loads, *Int. J. Pressure Vessels and Piping*, Vol. 79, No. 7, pp. 493-497, 2002.
- [21] Jabbari M., Sohrabpour S., Eslami M.R.; General solution for mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to nonaxisymmetric steady-state loads, *J. Appl. Mech.*, Vol. 70, No. 1, pp. 111-118, 2003.

- [22] Vel S.S., Batra R.C.; Three-dimensional analysis of transient thermal stresses in functionally graded plates, *Int. J. Solid Struct.*, Vol. 40, No. 25, pp. 7181-7196, 2003.
- [23] Liew K.M., Kitipornchai S., Zhang X.Z., Lim C.W.; Analysis of the thermal stress behaviour of functionally graded hollow circular cylinders, *Int. J. Solid Struct.*, Vol. 40, No. 10, pp. 2355-2380, 2003.
- [24] Eslami M.R., Babaei M.H., Poultangari R.; Thermal and mechanical stresses in a functionally graded thick sphere, *Int. J. Pressure Vessels piping*, Vol. 82, No. 7, pp. 522-527, 2005
- [25] Xiang H., Shi Z., Zhang T.; Elastic analyses of heterogeneous hollow cylinders, *Mechanics Research Communications*, Vol. 33, No. 5, pp. 681-691, 2006.
- [26] Shi Z., Zhang T., Xiang H.; Exact solutions of heterogeneous elastic hollow cylinders, *Compos. struct.*, Vol. 79, No. 1, pp. 140-147, 2007.
- [27] Tutuncu N.; Stresses in thick-walled FGM cylinders with exponentially-varying properties, *Eng. Struct.*, Vol. 29, No. 9, pp. 2032-2035, 2007.
- [28] Shao Z.S., Ma G.W.; Thermo-mechanical stresses in functionally graded circular hollow cylinder with linearly increasing boundary temperature, *Compos. Struct.*, Vol. 83, No. 3, pp. 259-265, 2008.
- [29] Tutuncu N., Temel B.; A novel approach to stress analysis of pressurized FGM cylinders, disks and spheres, *Compos. Struct.*, Vol. 91, No. 3, pp. 385-390, 2009.
- [30] Zamani Nejad M., Rahimi G.H., Ghannad M.; Set of field equations for thick shell of revolution made of functionally graded materials in curvilinear coordinate system, *J. Mechanika*, Vol. 77, No. 3, pp. 18-26, 2009.
- [31] Ghannad M., Zamani Nejad M.; Elastic analysis of pressurized thick hollow cylindrical shells with clamped-clamped ends, *J. Mechanika*, Vol. 85, No. 5, pp. 11-18, 2010.

[۳۲] قنّاد م.، رحیمی غ.، اسماعیل زاده خادم س.؛ حلّ کلی استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری ساخته‌شده از مواد ناهمگن FG با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی مجله‌ی فنی و

مهندسی مدرس، مهندسی مکانیک، دوره ۱۰، شماره ۳، صص ۳۱-۴۱، ۱۳۸۹.

[۳۳] قناد م.، رحیمی غ.، اسماعیل زاده خادم س.؛ حلّ کلی استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری ساخته‌شده از مواد ناهمگن FG با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی، مجله‌ی فنی و مهندسی مدرس، مهندسی مکانیک، دوره ۱۰، شماره ۴، صص ۱۳-۲۵، ۱۳۸۹.

[34] Peng X.L., Li X.F.; Thermal stress in rotating functionally graded hollow circular disks, *Compos. Struct.*, Vol. 92, No. 8, pp. 1896-1904, 2010.

[35] Ghorbanpour Arani A., Kolahchi R., Mosallaie Barzoki A.A.; Effect of material in-homogeneity on electro-thermo-mechanical behaviors of functionally graded piezoelectric rotating shaft, *J. Appl. Mathematical Modelling*, Vol. 35, No. 6, pp. 2771-2789, 2011.

[36] Zamani Nejad M., Afshin A.; Thermoelastic transient response of rotating thick cylindrical shells under general boundary conditions, *Int. Research J. Appl. Basic Sci.*, Vol. 4, No. 9, pp. 2796-809, 2013.

[37] Majzoobi G.H., Ghomi A.; Optimisation of compound pressure cylinders, *J. achievements in Materials Manufacturing Engineering*, Vol. 15, No. 1-2, pp. 135-145, 2006.

[38] Patil Sunil A.; Optimum Design of compound cylinder used for storing pressurized fluid, *ASME Int. Mech. Eng. Congress and Exposition (Proceeding of IMECE05)*, Florida USA, 5 Nov 2005.

[39] Gamer U., Lance R.H.; Residual stress in shrink fits, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 25, No. 7, pp. 465-470, 1983.

[40] Özel A., Temiz Ş., Aydın M.D., Şen S., design; Stress analysis of shrink-fitted joints for various fit forms via finite element method, *Materials & Design*, Vol. 26, No. 4, pp. 281-289, 2005.

[۴۱] کلالی ا.ت.؛ بررسی فرایندهای اتوفرتاژ و شرینک فیت در بالابردن ظرفیت مکانیکی سیلندرهای تحت فشار، کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی، مشهد، ۱۳۸۸.

- [42] Kim H.Y., Kim C., Bae W.B., Han S.M.; Development of optimization technique of warm shrink fitting process for automotive transmission parts (3D FE analysis), *J. Mater. processing technology*, Vol. 187, No. pp. 458-462, 2007.
- [43] Majzoobi G.H., Farrahi G.H., Pipelzadeh M.K., Akbari K.; Experimental and finite element prediction of bursting pressure in compound cylinders, *Int. J. Pressure Vessels and Piping*, Vol. 81, No. 12, pp. 889-896, 2004.
- [44] Mack W., Bengeri M.; Thermal assembly of an elastic-plastic shrink fit with solid inclusion, *Int. J. Mech. sci.*, Vol. 36, No. 8, pp. 699-705, 1994.
- [45] Truman C.E., Booker J.D.; Analysis of a shrink-fit failure on a gear hub/shaft assembly, *Eng. Failure Anal.*, Vol. 14, No. 4, pp. 557-572, 2007.
- [46] Bihanta R., Movahhedy M.R., Mashreghi A.R.; A numerical study of swage autofrettage of thick-walled tubes, *Materials & Design*, Vol. 28, No. 3, pp. 804-815, 2007.
- [47] Sun M.Y., Lu S.P., Li D.Z., Li Y.Y., Lang X.G., Wang S.Q.; Three-dimensional finite element method simulation and optimization of shrink fitting process for a large marine crankshaft, *Materials & Design*, Vol. 31, No. 9, pp. 4155-4164, 2010.

Abstract

Plates and shells are most applicable structures in engineering. Analysis and investing this structures under different loading is one of most important engineering problems that many scientists are interested in. Different engineering structures such as ships, airplanes, submarines and rockets are always subtended to mechanical loading in order to their application; Therefor it is necessary to know accurate information about deformation and stress distribution in different points of shell. In this paper, analytical and numerical solution of shrink fitted cylinders with two homogeneous and FGM layers under pressure and rotation is presented under plane stress assumptions, using plane elasticity theory. The loading is in the form of rotational and mechanical at the same time. The material properties are assumed to vary non-linearly in the radial direction, and the Poisson ratio is assumed constant. To obtain displacement through the radial direction, Cauchy-Euler equation and method of variation of parameters is used to solve equilibrium equation. By substituting displacement function in constitutive equation radial and circumferential stresses are obtained. The values used in this study are arbitrarily chosen to demonstrate the effect of time and inhomogeneity on the distribution of temperature, displacements and stresses. to check the results accuracy of analytical solution, a finite element solution has been used in all cases of loadings for inhomogeneous shell.

Keywords: Shrink fitted cylinders, FG Cylinders, Plane elasticity theory, Analytical solution, FEM.



Shahrood University of Technology

Faculty of Mechanical Engineering

**Analytical and numerical solution of shrink fitted
cylinders with two homogeneous and FGM layers
under pressure and rotation**

Ehsan Zameni

Supervisor:

Dr. Mehdi Ghannad

November 2018