بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک

پایان‌نامه کارشناسی ارشد مهندسی طراحی کاربردی

تحلیل کمانش حرارتی پوسته‌های مخروطی جداره متغیر هدفمند به کمک روش اجزا محدود نیمه‌تحلیلی

نگارنده: مهزیار عالی‌پور

استاد راهنما:

دکتر علیرضا شاطرزاده

شهریور ۱۳۹۷

تقدیر و تشکر

شکر شایان نثار ایزد منّان که توفیق را رفیق راهم ساخت تا این پایان‌نامه را به فرجام برسانم. بر خود می‌دانم تا از عزیزان و بزرگوارانی که با کراماتی چون خورشید، سرزمین دل را روشنی بخشیدند و گلشن سرای علم و دانش را با راهنمایی‌های خویش بارور ساختند، تقدیر و تشکر نمایم.

از استاد فرهیخته و اندیشمندم، جناب آقای دکتر علیرضا شاطرزاده به‌پاس محبت و لطف وافر، راهنمایی‌های راه‌گشا و انگیزه و امیدی که به بنده می‌دادند، نهایت تشکر و قدردانی را دارم.

تقدیم:

به‌پاس تعبیر عظیم و انسانی‌شان از کلمه ایثار و ازخودگذشتگی

به‌پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است.

به‌پاس قلب‌های بزرگشان که فریادرس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می‌گراید.

و به‌پاس محبت‌های بی‌دریغشان که هرگز فروکش نمی‌کند.

این مجموعه را به پدر و مادر عزیزم تقدیم می‌کنم.

تعهدنامه

اینجانب **مهزیار عالی‌پور** دانشجوی دوره‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی **مهندسی مکانیک**، از دانشکده‌ی **مکانیک** دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان‌نامه‌ی **تحلیل کمانش حرارتی پوسته‌های مخروطی جداره متغیر هدفمند به کمک روش اجزا محدود نیمه‌تحلیلی** تحت راهنمایی **دکتر علیرضا شاطرزاده** متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آمدن نتایج اصلی پایان‌نامه تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه‌ی مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آن‌ها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه‌ی مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه‌ی اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است

.

تاریخ

امضای دانشجو مهزیار عالی پور

مالکیت نتایج و حق نشر

- **کلیه‌ی حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم-افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.**
- **استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان‌نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.**

چکیده

در این پایان‌نامه به بررسی کمانش حرارتی پوسته مخروطی با جدار متغیّر پرداخته‌شده است. پوسته مخروطی مورد بررسی از جنس مواد متغیّر تابعی است. خواص مکانیکی و حرارتی پوسته شامل مدول الاستیسیته، ضریب پواسون و ضریب انبساط حرارتی در راستای ضخامت و محور پوسته به‌صورت پیوسته تغییر می‌کنند. جهت استخراج روابط کرنش- جابجایی از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم استفاده‌شده است و در ادامه با اعمال اصل کمینه انرژی پتانسیل و به کمک روش اجزای محدود نیمه‌تحلیلی دمای بحرانی کمانش محاسبه‌شده است. ازآنجاکه هندسه پوسته مورد بررسی تقارن محوری دارد، پوسته مخروطی با استفاده از روش اجزای محدود نیمه‌تحلیلی و به کمک المان‌های ایزوپارامتریک سه گره‌ای خطی مرتبه دو با پنج درجه آزادی در هر گره مدل شده است. بارگذاری از نوع حرارتی بوده و به‌صورت افزایش دمای یکنواخت در راستای ضخامت پوسته و متقارن محوری فرض شده است. شرایط مرزی در این پژوهش از نوع گیردار و ساده در نظر گرفته‌شده است. تأثیر پارامترهای مختلف ازجمله نحوه توزیع خواص مادّه متغیّر تابعی، زاویه نیم رأس مخروط، تغییرات ضخامت جدار و شرایط مرزی مختلف بر رفتار کمانشی پوسته مخروطی جدار متغیّر مورد مطالعه قرارگرفته است.

کلید واژگان:

پوسته مخروطی جدار متغیّر، مواد متغیّر تابعی، کمانش حرارتی، روش اجزای محدود نیمه‌تحلیلی، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم

فهرست مطالب

فهرست جدول‌ها

فهرست شکل‌ها

فهرست علائم

علائم لاتین

A_i	ضرایب لامه
$[B_L]$	ماتریس کرنش- جابجایی خطی
$[B_{NL}]$	ماتریس کرنش- جابجایی غیرخطی
$ceramic$	فاز سرامیکی مواد متغیّر تابعی
cr	حد بحرانی
$[D]$	ماتریس الاستیسیته
$\{d\}$	بردار جابجایی‌های گره‌ای
E	مدول یانگ
(e)	المان
$\{F\}$	بردار نیروی کل
h_0	ضخامت اولیه پوسته
g_i	ضریب مقیاس هندسی
h	ضخامت پوسته
$[K]$	ماتریس سفتی
Q_i	مشتق دوم توابع شکل نسبت به x
r	شعاع انحنای سطح میانی
R_1	شعاع کوچک
R_2	شعاع بزرگ
T_0	دمای اولیه پوسته
ΔT	مقدار افزایش دمای محیطی
u	جابجایی شعاعی
u_i	جابجایی طولی هر گره
U_L	انرژی کرنشی خطی پوسته
U_{NL}	انرژی کرنشی غیرخطی پوسته
v	جابجایی محیطی
V	حجم
w	جابجایی در جهت عمود بر پوسته
W	کار نیروهای خارجی

$[K_G]$ ماتریس سفتی هندسی

L طول پوسته مخروطی

$metal$ فاز فلزی مواد متغیّر تابعی

n توان توزیع خواص مادّه‌ی متغیّر تابعی

$[N]$ ماتریس توابع شکل

N_i تابع شکل هر گره

W_b کار نیروهای خارجی حجمی

W_i وزن نقاط گاوسی

W_p کار نیروهای خارجی متمرکز

W_s کار نیروهای خارجی سطحی

x مختصات در راستای طولی

z مختصات در راستای ضخامت

علائم یونانی

$\{\alpha\}$	بردار ضریب انبساط حرارتی	θ	مختصات در راستای محیطی
β	پارامتر تغییر ضخامت	ϑ	ضریب پواسون
γ_{ij}	مؤلفه‌ی کرنش برشی	Π	انرژی پتانسیل کل
δ	تغییرات مرتبه‌ی اول	$\{\sigma\}$	بردار تنش
δ^2	تغییرات مرتبه‌ی دوم	$\{\sigma_e\}^0$	بردار تنش پیش کمانش المان
$\{\varepsilon\}$	بردار کرنش کل	σ_{ij}	مؤلفه‌ی تنش عمودی
ε_{ij}	مؤلفه‌ی کرنش عمودی	τ_{ij}	مؤلفه‌ی تنش برشی

فصل اول

پیش‌گفتار و شرایط حاکم بر مسأله

۱-۱- مقدمه

در سال‌های اخیر با پیشرفت روزافزون صنایع مختلف مانند هوافضا، ساخت راکتورها، مخازن و توربین‌ها و همچنین استفاده گسترده از پوسته‌ها در شکل‌های مختلف در این صنایع و با توجه به‌قرار گرفتن آن‌ها در معرض بارهای مکانیکی و حرارتی، نیاز به مطالعه و شبیه‌سازی رفتار پوسته‌ها در برابر بارگذاری‌های مختلف به‌شدت احساس می‌شود.

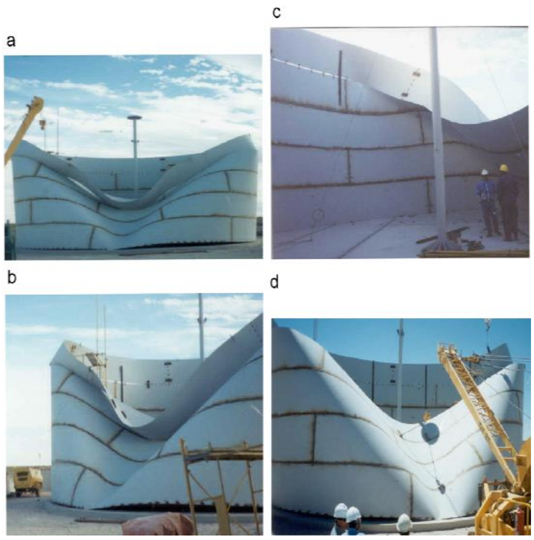
از ویژگی پوسته‌ها می‌توان به چند مورد زیر اشاره کرد:

۱. رفتار قابل‌قبول در برابر اعمال بارگذاری
۲. استحکام بالا نسبت به وزن سازه
۳. وجود فضای کافی در درون سازه‌های پوسته‌ای با توجه به ابعاد آن‌ها

درواقع هدف اصـلی طراحی سـازه‌های پوسـته‌ای کم کردن ضـخامت تا حد ممکن به‌منظور اسـتفاده بهینه از مواد و همچنین سبک سازی سازه ا ست. پو سته‌ها تحت انواع بارگذاری حرارتی، صفحه‌ای وبر شی قرار می‌گیرند. به علت کم بودن ضخامت پو سته در مقای‌سه با سایر ابعاد آن کمانش[1] یکی از مهم‌ترین عوامل تخریب آن‌ها می‌باشد. به همین دلیل تحلیل رفتار کمانشی این سازه‌ها مسئله‌ای است که تاکنون موردتوجه بســیاری از محققان بوده اســت. این پدیده زمانی اتفاق می‌افتد که بار اعمالی بر پوسته در حال افزایش باشد و قسمتی از سازه دچار ناپایداری شود و جابجایی‌های آن قسمت از سازه شــروع به افزایش ناگهانی کند. در شــکل‌های (۱-۱) و (۱-۲) می‌توان به ترتیب اثر کمانش حرارتی (ناشی از آتش‌سوزی) و کمانش مکانیکی (ناشی از نیروی باد) را بر مخزن استوانه‌ای مشاهده کرد.

[1] Buckling

شکل (۱-۱) کمانش حرارتی مخزن استوانه‌ای ناشی از آتش‌سوزی [۱]



شکل (۱-۲) کمانش مکانیکی مخزن استوانه‌ای ناشی از اثر باد [۲]

در این پژوهش جنس پوسته مخروطی شکل از نوع مواد متغیّر تابعی[1] انتخاب‌شده است. در این مواد خواص مکانیکی و حرارتی به‌صورت ملایم و پیوسته از یک سطح به سطح دیگر تغییر می‌کنند. این ویژگی به‌وسیله تغییر یکنواخت در نسبت حجمی مواد تشکیل‌دهنده آن‌ها به دست می‌آید. ازجمله کاربردهای این مواد می‌توان به استفاده در راکتورهای هسته‌ای، صنایع شیمیایی و مهندسی پزشکی اشاره کرد.

[1] Functionally Graded Materials(FGM)

همچنین این مواد در ساخت انواع صفحات و پوسته‌های مورداستفاده در مخازن و توربین‌ها استفاده می‌شوند، زیرا توانایی بالایی در برابر کمانش حرارتی دارند.

استفاده از روش‌های تحلیلی برای حل دقیق معادلات پوسته‌ها باوجود توانایی در محاسبه پاسخ دقیق آن‌ها، با پیچیدگی‌هایی در مدل‌سازی پوسته همراه است. بنابراین نمی‌توان شرایط بارگذاری و مرزی متنوعی را بر هندسه مسأله اعمال کرد. به همین دلیل استفاده از روش‌های عددی با خطای قابل‌قبول در پاسخ نهایی برای تحلیل سازه‌هایی که دارای شرایط بارگذاری و مرزی متفاوتی هستند مناسب‌تر است. روش حل استفاده‌شده در این پژوهش، حل عددی به کمک یک روش اجزای محدود نیمه‌تحلیلی[۱] بر پایه تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم[۲] است.

۱-۲- تعریف پوسته‌ها

به‌طورکلی پوسته به سازه‌ای گفته می‌شود که توسط دو سطح انحنادار محدودشده است. مکان هندسی نقاطی که در یک‌فاصله مساوی از دو سطح انحنادار قراردادند، سطح میانی نامیده می‌شود و فاصله عمودی بین دو سطح انحنا ضخامت پوسته نام دارد. هندسه پوسته با مشخص شدن شکل سطح میانی و ضخامت پوسته در هر نقطه تعیین می‌گردد [۳].

پوسته‌ها را می‌توان بر اساس انحناهای متفاوت به‌صورت زیر دسته‌بندی کرد:

۱. پوسته‌های مخروطی[۳]
۲. پوسته‌های استوانه‌ای[۴]
۳. پوسته‌های کروی[۵]

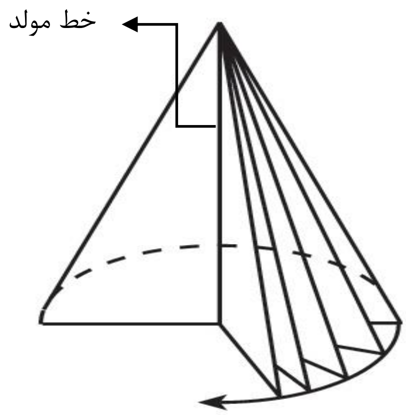
[1] Semi-analytical finite element method
[2] Third -order shear deformation theory(TSDT)
[3] Conical shells
[4] Cylindrical shells
[5] Spherical shells

۴. پوسته‌های سهموی[1]

۵. پوسته‌های بیضوی[2]

۶. پوسته‌های هذلولی[3]

همچنین پوسته‌ها را می‌توان بر اساس ایجاد سطح هندسی آن‌ها به پوسته‌های با سطوح انتقالی، سطوح دورانی و سطوح خطی مختلط تقسیم‌بندی نمود که پوسته‌های مخروطی از نوع پوسته‌های دورانی هستند. در این سطوح یک خط راست به‌عنوان محور دوران (تقارن) وجود دارد. با دوران خط مولد پیرامون محور دوران پوسته مخروطی شکل به وجود می‌آید. در شکل (۱-۳) می‌توان نحوه‌ی تشکیل پوسته مخروطی را مشاهده کرد.



شکل (۱-۳) نحوه‌ی تشکیل پوسته مخروطی

پوسته‌ها را می‌توان در یک دسته‌بندی کلی‌تر به دو نوع جدار نازک و جدار ضخیم تقسیم‌بندی نمود. پوسته‌ای را نازک می‌نامند که ضخامت آن در مقایسه با ابعاد کلی پوسته کوچک باشد [۳]. این تعریف را می‌توان به‌صورت ریاضی و با ایجاد رابطه بین ضخامت پوسته (h) و شعاع انحنای سطح میانی (r) به‌صورت زیر بیان کرد.

[1] Paraboloidal shells
[2] Ellipsoid shells
[3] Hyperbolic paraboloidal shells

$$\left(\frac{h}{r}\right) \leq \frac{1}{20} \tag{۱-۱}$$

۱-۳- کاربرد پوسته‌های مخروطی در صنعت

پوسته‌ها سازه‌های پرکاربردی هستند که در زمینه‌های مختلف مهندسی مانند مکانیک، عمران و هوافضا کاربردهای فراوانی دارند. یکی از مهم‌ترین انواع پوسته‌ها، پوسته‌های مخروطی شکل است که در ساخت مخازن نگهداری سیالات، سازه‌های هوا و فضا، کشتی‌ها و زیردریایی‌ها استفاده می‌شود. در شکل (۱-۴) می‌توان چند نمونه از کاربرد آن‌ها را مشاهده کرد.

الف- دماغه مخروطی[1] هواپیمای ایرباس ۳۲۰

ب- موتور جت و نازل خروجی هواپیمای بوئینگ ۷۳۷

ج- اگزوز موتورسیکلت

د- مخزن مخروطی از جنس فولاد ضدزنگ

شکل (۱-۴) کاربردهای صنعتی پوسته‌های مخروطی

---
[1] Nose cone

۱-۴- روش‌های تحلیل مسائل مهندسی

برای حل مسائل مهندسی از سه روش تحلیلی، آزمایشگاهی و عددی استفاده می‌شود. روش‌های تحلیلی روش‌های هستند که منجر به یافتن حل دقیق به‌صورت پیوسته در دامنه حل می‌گردند. این روش‌ها با محدودیت‌هایی نیز همراه هستند. همچنین یافتن روش تحلیلی مناسب برای تمام مسائل امکان‌پذیر نیست. روش‌های تجربی و آزمایشگاهی نیز بخش مهمی از تحلیل‌های مهندسی را تشکیل داده‌اند، اما به علت هزینه بالای ساخت و مشکل بودن برخی شبیه‌سازی‌های آزمایشگاهی همواره استفاده از آن‌ها امکان‌پذیر نیست. بنابراین روش‌های عددی بخش مهمی از تحلیل‌های مهندسی را تشکیل داده‌اند. روش اجزای محدود[۱] یک روش عددی برای رسیدن به حل تقریبی در بسیاری از مسائل فیزیکی و مهندسی است که در آن رفتار حاکم بر مسأله توسط یک یا چند معادله دیفرانسیل بیان می‌شود. در این روش از توابع پیوسته چندتکه‌ای[۲] برای تقریب کمیت مجهول موردنظر استفاده می‌شود. هدف اصلی در این روش، یافتن حل یک مسأله پیچیده از طریق جایگزینی آن با یک مدل ساده‌تر است. در این روش ناحیه حل به‌صورت مجموعه‌ای از زیر ناحیه‌های کوچک متصل‌به‌هم به نام المان[۳] در نظر گرفته می‌شود. در ادامه برای هر المان یک حل تقریبی مناسب فرض می‌شود و پس از مونتاژ کردن[۴] المان‌ها برای کل سازه شرایط تعادل کلی سیستم استخراج می‌شود. با ارضای این شرایط جواب تقریبی برای کمیت موردنظر به دست می‌آید. روش اجزای محدود دارای معایب و محدودیت‌هایی نیز است. برای مثال معمولاً در این روش کمیت‌ها و داده‌های ورودی حجیم هستند بنابراین احتمال بروز خطا درروند حل افزایش می‌یابد. همچنین معمولاً در این روش ماتریس‌ها دارای درایه‌های زیادی هستند که می‌تواند هزینه و زمان حل مسأله را افزایش دهد. در این پژوهش برای جلوگیری از بروز این محدودیت‌ها از یک روش اجزای محدود نیمه‌تحلیلی استفاده‌شده است که در فصل دوم به‌طور کامل توضیح داده می‌شود.

---
[1] Finite element method
[2] Piecewise
[3] Element
[4] Assemble

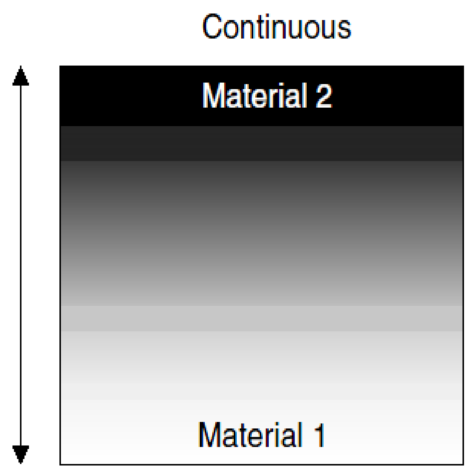
۱-۵- پیشینه و کاربرد مواد متغیّر تابعی

در سال‌های پیشین در صنایع هوافضا از مواد سرامیکی خالص جهت پوشش و روکش قطعات در محیط‌هایی با درجه حرارت بالا استفاده می‌شد. این مواد عایق‌های بسیار خوبی بودند اما مقاومت زیادی در برابر تنش‌های پسماند نداشتند. تنش‌های پسماند در این مواد ایجاد مشکلات زیادی ازجمله ایجاد حفره و ترک می‌نمودند. بعدها برای رفع این مشکل از مواد کامپوزیت لایه‌ای استفاده شد. اما این مواد نیز در اثر تنش‌های حرارتی دچار پدیده‌ای به نام لایه‌لایه شدن[1] می‌شدند. با توجه به مشکلات ذکرشده نیاز به مادّه‌ای که هم مقاومت حرارتی و مکانیکی بالایی داشته باشد و هم مشکل لایه‌لایه شدن نداشته باشد ضرورت پیدا کرد. در این زمینه مطالعات و آزمایش‌های بسیاری انجام‌شده است. سرانجام در سال ۱۹۸۴ نام FGM توسط گروهی از دانشمندان در دانشگاه سندائی[2] ژاپن مطرح گردید. از این مواد در ساخت صفحات و پوسته‌های راکتورها، توربین‌ها و صنایع هوافضا استفاده می‌شود. مواد متغیّر تابعی مواد مرکب با ریزساختار ناهمگنی می‌باشند که خواص مکانیکی آن‌ها به‌صورت پیوسته از یک سطح به سطح دیگر تغییر می‌کند. این خاصیت به‌واسطه تغییر در ترکیبات شیمیایی، توزیع، جهت‌گیری و به‌ویژه تغییر یکنواخت در نسبت حجمی طبق یک مدل مشخص ریاضی به دست می‌آید. همچنین می‌توان تغییر خواص را در هر راستایی از سازه (پوسته) در نظر گرفت. مواد متغیّر تابعی معمولاً از دو فاز فلز و سرامیک تشکیل‌شده و با روش‌های ساخت گوناگونی مانند متالورژی پودر و ریخته‌گری گریز از مرکز و ... تولید می‌شوند. در فاز سرامیکی می‌توان به موادی مانند زیرکونیا[3]، کاربید زیرکونیم[4]، نیترید سیلیکون[5]، کاربید سیلیکون[6] وآلومینا[7] و در فاز فلزی به موادی مانند آلومینیم، مس و نیکل اشاره کرد.

---

[1] Delamination
[2] Sendai
[3] ZrO_2
[4] ZrC
[5] Si_3N_4
[6] SiC
[7] Al_2O_3

در مواد متغیّر تابعی تغییر فاز از فلز به سرامیک از یک سطح به سطح دیگر به‌صورت کاملاً پیوسته است. با توجه به جهتی که مادّه متغیّر تابعی در آن استفاده‌شده خواص مکانیکی و حرارتی از خصوصیات فاز اول به‌صورت پیوسته تغییر کرده و با پیشروی در آن جهت از کسر حجمی فاز اول کاسته شده و کسر حجمی فاز دوم زیاد می‌شود. به صورتی که در یک‌طرف، پوسته کاملاً سرامیکی و در طرف دیگر کاملاً فلزی است. در شکل (۱-۵) می‌توان نمای ساختاری از یک مادّه متغیّر تابعی را مشاهده کرد.



شکل (۱-۵) نمای ساختاری مواد متغیّر تابعی

مادّه ساختاری سرامیک به علت ضریب انتقال حرارت کم و مقاومت حرارتی بالا، می‌تواند درجه حرارت بسیار بالا را تحمل کند و مادّه ساختاری فلز در مقابل بارهای مکانیکی می‌تواند انعطاف‌پذیری مؤثری را فراهم کند. مزیت استفاده از این مواد این است که قادر به تحمل درجه حرارت بسیار بالا و اختلاف دمای بالا بوده و مقاوم در مقابل خوردگی و سایش می‌باشند و همچنین در مقابل شکست مقاومت بالایی دارند. یکی از ویژگی‌های برجسته این مواد امکان بهینه کردن تغییرات تنش در آن‌ها با تغییر مناسب پروفیل تغییرات مواد ساختاری است. از دیگر مزایای آن می‌توان به عدم گسستگی در محل اتصال لایه‌ها به دلیل ترکیب پیوسته سرامیک و فلز اشاره کرد.

۱-۶- تاریخچه‌ی تحقیقات پیشین

ازآنجاکه بحث کمانش پوسته‌ها در اثر بارگذاری‌های متنوع و به‌خصوص سازه‌های در معرض بارگذاری حرارتی یکی از نگرانی‌های عمده محققان است، در این خصوص تحقیقات زیادی بر روی پوسته‌های مختلف انجام‌شده که در ادامه برای پوسته‌های مخروطی، استوانه‌ای و کروی آورده شده است.

بی هنگل و همکاران [۴] کمانش حرارتی و ارتعاشات آزاد پوسته‌های مخروطی ساخته‌شده از مواد متغیّر تابعی، تحت اثر دماهای بالا و با شرایط مرزی دوسرگیردار را بررسی کردند. آن‌ها برای استخراج معادلات از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول[۱] و برای حل آن‌ها از یک روش اجزای محدود نیمه‌تحلیلی استفاده کردند.

وو و همکارانش [۵] با استفاده از معادلات دانل به مطالعه تأثیر زاویه الیاف و نسبت شعاع به ضخامت بر کمانش حرارتی و ارتعاشات آزاد پوسته‌های مخروطی ناقص پرداختند و به این نتیجه رسیدند که کمانش حرارتی و ارتعاشات آزاد این پوسته‌ها، وابستگی بسیاری به کمیت‌های هندسی دارند. صوفیه [۶] با استفاده از تئوری پوسته دانل[۲] به حل ارتعاشات و کمانش پوسته‌های مخروطی ساخته‌شده از مواد متغیّر تابعی با استفاده از روش گالرکین[۳] پرداخت. اژدری و همکاران [۷] به بررسی کمانش پوسته‌های مخروطی کامپوزیتی چندلایه با استفاده از روش تحلیلی و اجزای محدود پرداختند. آن‌ها بر اساس تئوری دانل و روش گالرکین و ریتز[۴] بار کمانش فشاری و محوری پوسته‌های مخروطی را به دست آوردند. شادمهری و همکاران [۸] کمانش پوسته‌های مخروطی کامپوزیتی تحت‌فشار محوری را با استفاده از یک روش نیمه‌تحلیلی و بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول بررسی کردند. آن‌ها

[1] First-order shear deformation theory(FSDT)
[2] Donnell shell theory
[3] Galerkin method
[4] Ritz method

به این نتیجه رسیدند که برای پوسته‌های مخروطی شکل نازک و با طول کوتاه با افزایش زاویه نیم رأس[1] مخروط بار بحرانی کمانش کاهش می‌یابد.

حسینی و طالبی توتی [۹] کمانش پوسته‌های مخروطی کامپوزیتی را بررسی کردند. آن‌ها برای استخراج معادلات تعادل سیستم از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول استفاده کردند و در ادامه با روش گالرکین و تفاضل مربعات دیفرانسیلی[2] به حل آن‌ها پرداختند. همچنین اثر زاویه نیم رأس مخروط، زاویه الیاف و شرایط مرزی مختلف را بر پاسخ کمانش بررسی کردند. آن‌ها [۱۰] همچنین در پژوهش دیگری کمانش پوسته‌های مخروطی کامپوزیتی جدار نازک تقویت‌شده با نانولوله‌های متغیّر تابعی را با استفاده از روش مشابه تحلیل نمودند و اثر پارامترهای هندسی و شرایط مرزی متنوع را بر پاسخ کمانش تحلیل کردند. اکبری و همکاران [۱۱] کمانش حرارتی پوسته‌های مخروطی ساخته‌شده از مواد متغیّر تابعی را مطالعه نمودند. آن‌ها برای استخراج معادلات تعادل سیستم از تئوری کلاسیک پوسته‌ها[3] و از روش عددی تفاضل مربعات دیفرانسیلی برای حل معادلات پایداری و حرارتی پوسته‌ها استفاده کردند. همچنین تأثیر زاویه نیم رأس مخروط، شرایط مرزی و پارامترهای مواد متغیّر تابعی را بر پاسخ کمانش بررسی کردند. جم و کیانی [۱۲] کمانش پوسته‌های مخروطی ساخته‌شده از نانو کامپوزیت‌های متغیّر تابعی، تحت‌فشار عرضی را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و با روش حل عددی تفاضل مربعات دیفرانسیلی مورد بررسی قراردادند. ترابی و همکاران [۱۳] کمانش حرارتی پوسته‌های مخروطی ساخته‌شده از کامپوزیت‌های تقویت‌شده با توزیع هدفمند نانولوله‌های کربنی[4] را مطالعه نمودند. آن‌ها برای استخراج روابط از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و روابط کرنش- تغییر مکان غیرخطی دانل و اصل همیلتون استفاده کردند و به این نتیجه رسیدند که مقدار کسر حجمی و نوع توزیع نانولوله‌های کربنی در راستای ضخامت، تأثیر قابل‌توجهی بر پایداری حرارتی پوسته‌های مخروطی ساخته‌شده از

[1] Semi-vertex angle
[2] Generalized differential quadrature method(GDQM)
[3] Classic shell theory
[4] Carbon nanotube

مواد نانو کامپوزیت دارد. ناج و همکاران [۱۴] راه‌حلی برای ناپایداری پوسته‌های مخروطی ناقص ساخته‌شده از مواد متغیّر تابعی تحت بارگذاری هم‌زمان مکانیکی و حرارتی ارائه نمودند.

آن‌ها معادلات حاکم را بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و روابط غیرخطی سندرز[۱] نوشتند. چانگ و لو [۱۵] پس کمانش پوسته‌های مخروطی ناقص تحت توزیع دمای یکنواخت و با شرایط مرزی ساده را بررسی کردند. آن‌ها به این نتیجه رسیدند که نسبت شعاع به ضخامت تأثیر زیادی در حداقل دمای کمانش دارد. تانی [۱۶] کمانش حرارتی پوسته‌های مخروطی ناقص تحت بارگذاری حرارتی یکنواخت را با روش تحلیلی و با استفاده از معادلات دانل مطالعه کرد. او به این نتیجه رسید که اثر تغییر شکل اولیه‌ی متقارن در کمانش حرارتی پوسته‌ها کاملاً قابل‌توجه است.

محمد زاده و همکاران [۱۷] کمانش پوسته‌های استوانه‌ای ساخته‌شده از مواد متغیّر تابعی دوبعدی (تغییرات در دو جهت شعاعی و محوری)، تحت بارهای ترکیبی محوری و فشار خارجی را بر اساس تئوری کلاسیک پوسته‌ها بررسی کردند. آن‌ها با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی، بار بحرانی کمانش پوسته‌های استوانه‌ای متغیّر تابعی دوبعدی را به دست آورده و نتایج را با بار بحرانی کمانش پوسته‌های استوانه‌ای یک‌بعدی مقایسه کردند. درنهایت به این نتیجه رسیدند که بار بحرانی کمانش در حالت دوبعدی از بار بحرانی کمانش در حالت یک‌بعدی بیشتر است و این مسأله اثر قابل‌توجهی بر بار بحرانی کمانش دارد. گلدفلد و آربوکس [۱۸] کمانش پوسته‌های مخروطی کامپوزیتی تقویت‌شده را بررسی کردند و دریافتند که با افزایش زاویه نیم رأس مخروط بار بحرانی کمانش کاهش می‌یابد. شرعیات و اصغری [۱۹] کمانش حرارتی غیرخطی و پس کمانش پوسته‌های استوانه‌ای تابعی ناقص وابسته به دما و با ضخامت متغیّر را بررسی کردند. آن‌ها از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم و روش اجزای محدود برای حل مسأله استفاده کردند. همچنین آن‌ها اثر متغیّر بودن ضخامت بر روی دمای بحرانی کمانش را بررسی کردند. شاطرزاده و همکاران [۲۰] پس کمانش حرارتی پوسته‌های حاصل از دوارن[۲] را بر اساس

[1] Sanders
[2] Shells of revolution

تئوری تغییر شکل برسی مرتبه اول و با روش عددی اجزای محدود نیمه‌تحلیلی بررسی کردند. درویزه و همکاران [۲۱] کمانش پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی تحت بارگذاری‌های مختلف را بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و با استفاده از روش اجزای محدود نیمه‌تحلیلی بررسی کردند.

پاتل و همکاران [۲۲-۲۶] در مجموعه کارهای خود به کمک روش نیمه‌تحلیلی کمانش و پس کمانش پوسته‌های استوانه‌ای و مخروطی کامپوزیتی ناقص تحت بارگذاری‌های پیچشی، فشار جانبی و فشار محوری را مطالعه کردند. آن‌ها از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول همراه با فرض روابط کرنش-جابجایی خطی استفاده کردند. معادلات تعادل حاکم با استفاده از اصل مینیمم کردن انرژی پتانسیل به‌دست‌آمده و توسط روش ریتز نیز حل‌شده‌اند. همچنین آن‌ها تأثیر زاویه نیم رأس مخروط، تعداد لایه‌ها، شرایط مرزی، نسبت طول به شعاع و نسبت شعاع به ضخامت را بر کمانش بررسی کردند. علیجانی و همکاران [۲۷] کمانش حرارتی غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای ناقص را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و با روش اجزای محدود نیمه‌تحلیلی بررسی کردند. آن‌ها همچنین تأثیر شرایط هندسی مختلف، پارامترهای مواد متغیّر تابعی و کامپوزیت را بر پاسخ بررسی کردند. هانگ و تنگ [۲۸-۳۰] یک روش اجزای محدود نیمه‌تحلیلی برای تحلیل غیرخطی پوسته‌های دوار ارائه دادند. همچنین با استفاده از این روش تأثیر وجود نقص در کمانش و پس کمانش پوسته‌های نازک را بررسی کردند. شاه سیاه و اسلامی [۳۱-۳۲] کمانش حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای ساخته‌شده از مواد متغیّر تابعی را بررسی کردند. آن‌ها از معادلات بهبودیافته دانل برای تحلیل ناپایداری حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای بهره گرفتند. شنگ و وانگ [۳۳] کمانش حرارتی و ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای ساخته‌شده از مواد متغیّر تابعی قرارگرفته در مادّه‌ای کشسان و تحت بارهای مکانیکی و حرارتی با در نظر گرفتن اینرسی چرخشی و کرنش‌های برشی عرضی در طول ضخامت پوسته را بررسی کردند. درویزه و همکاران [۳۴] به مطالعه نیمه‌تحلیلی پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی ضخیم تحت بارگذاری حرارتی با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی پرداختند و برای محاسبه ماتریس سفتی هندسی از تئوری ساده‌شده و ساده نشده سندرز استفاده کردند. آن‌ها مشاهده کردند با افزایش زاویه الیاف دمای بحرانی کمانش

افزایش می‌یابد. همچنین به این نتیجه رسیدند که دمای بحرانی کمانش در تئوری ساده‌شده سندرز کمتر از تئوری ساده نشده سندرز است. شن [۳۵-۳۶] رفتار کمانشی و پس کمانشی حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی و همچنین پوسته‌های استوانه‌ای تقویت‌شده با نانولوله‌های ساخته‌شده از مواد متغیّر تابعی را مورد مطالعه قرارداد.

کادولی و گنسن [۳۷] کمانش و ارتعاشات خطی پوسته‌های استوانه‌ای ساخته‌شده از مواد متغیّر تابعی و تحت بارگذاری حرارتی را مطالعه نمودند. رادهامون و انکاتارامانا [۳۸] کمانش حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای تقویت‌شده با فایبرگلاس با استفاده از تئوری غیرخطی سندرز تحت بارگذاری حرارتی را بررسی کردند. ژو و همکاران [۳۹] به مطالعه کمانش حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای بر اساس معادلات دانل و اصل همیلتون پرداختند. آن‌ها بار کمانش را با استفاده از حل یک مسأله مقدار ویژه محاسبه کردند و به این نتیجه رسیدند که با افزایش طول پوسته دمای بحرانی کمانش کاهش و با افزایش ضخامت پوسته دمای بحرانی کمانش افزایش می‌یابد. در سری تحقیقات شین من [۴۰-۴۲] رفتار کمانش غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای با استفاده از تئوری‌های مختلف مورد بررسی قرارگرفته است. گنسن و سیواداس [۴۳] ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای ایزوتروپیک همگن با جدار متغیّر را با استفاده از تئوری پوسته لاو و یک روش اجزای محدود نیمه‌تحلیلی بررسی کردند. آن‌ها از توابع خطی و درجه دوم برای مدل کردن تغییرات ضخامت پوسته در راستای محوری استفاده کردند. نارایانا [۴۴] به مطالعه کمانش خطی و غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی تحت بارگذاری مکانیکی با استفاده از روش اجزای محدود پرداخت. همچنین تأثیر ضخامت و شعاع را بر رفتار کمانشی پوسته‌ها مورد بررسی قرارداد. شرعیات [۴۵] کمانش پوسته‌های استوانه‌ای ناقص ساخته‌شده از مواد متغیّر تابعی تحت بارگذاری هم‌زمان فشار محوری و فشار خارجی را بررسی کرد. او برای نوشتن معادلات کرنش- جابجایی از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم و برای حل آن‌ها از روش اجزای محدود استفاده کرد. همچنین در کار او خواص مادّه متغیّر تابعی وابسته به دما فرض شده است. او تأثیر وابستگی خواص به دما، توان نسبت حجمی و ترکیب بار اعمالی را بر کمانش بررسی کرد. نگویان و همکاران [۴۶] کمانش پوسته‌های

استوانه‌ای باضخامت متغیّر تحت بارگذاری فشاری را با استفاده از روش گالرکین مورد بررسی قراردادند. آن‌ها نتیجه گرفتند که تغییر ضخامت بر ظرفیت تحمل بار کمانش مؤثر است. سپیانی و همکاران [۴۷] ارتعاشات و کمانش پوسته‌های استوانه‌ای ساخته‌شده از مواد متغیّر تابعی تحت بارگذاری استاتیکی و دینامیکی را با استفاده از تئوری کلاسیک و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول مطالعه کردند.

آن‌ها به این نتیجه رسیدند که کمیت‌های هندسی و نحوه ترکیب مواد متغیّر، اثر قابل‌توجهی بر بار کمانش دارد به‌طوری‌که حداقل بار بحرانی کمانش برای پوسته‌های کاملاً فلزی رخ می‌دهد و نیروی برشی اثر قابل‌توجهی بر ارتعاشات آزاد پوسته‌ها دارد. هونگ و هن [۴۸] کمانش پوسته‌های استوانه‌ای ساخته‌شده از مواد متغیّر تابعی، تحت‌فشار محوری را با استفاده از تئوری پوسته دانل و روابط کرنش-جابجایی غیرخطی بررسی نمودند. لیو و همکارانش [۴۹] پس کمانش پنل‌های استوانه‌ای ساخته‌شده از نانو کامپوزیت‌های متغیّر را تحت بارگذاری فشاری محوری بررسی نمودند. آن‌ها برای دستیابی به مسیر پس کمانش از روش طول قوس[1] در کنار روش نیوتون رافسون اصلاح‌شده[2] استفاده کردند. ربانی بیدگلی و همکاران [۵۰] ارتعاشات و کمانش غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای متغیّر تابعی که بر روی بستر الاستیک قرار دارند و حاوی سیال ویسکوز می‌باشند را بررسی کردند. آن‌ها برای نوشتن روابط حاکم از تئوری پوسته میندلین[3] و برای حل آن از روش تفاضل مربعات استفاده کردند. یزدانی و رحیمی [۵۱] به بررسی تجربی مقاومت کمانشی پوسته‌های استوانه‌ای تحت بارگذاری محوری در شرایط تقویت‌شده و تقویت نشده پرداختند و به این نتیجه رسیدند که اثر تقویت‌کننده‌های[4] مارپیچ از تقویت‌کننده‌های محیطی در مقاوم کردن پوسته در برابر کمانش بیشتر است. شاطرزاده و فروتن [۵۲] پس کمانش پوسته‌های استوانه‌ای با تقویت‌کننده‌های مایل بر بستر الاستیک را بررسی کردند. در کار آن‌ها جنس پوسته و تقویت‌کننده از مواد متغیّر تابعی انتخاب‌شده است. آن‌ها برای استخراج معادلات

---

[1] Arc length
[2] Modified newton-raphson
[3] Mindlin’s shell theory
[4] Stiffeners

از تئوری کلاسیک پوسته‌ها و روابط غیرخطی فون‌کارمن[1] استفاده کردند. میرزاوند و اسلامی [۵۳] کمانش حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای ساخته‌شده از مواد متغیّر تابعی که دارای محرک‌های پیزوالکتریک سطحی می‌باشند را تحت بارگذاری هم‌زمان حرارتی و ولتاژ ثابت با شرایط مرزی ساده تحلیل نمودند. آن‌ها برای نوشتن معادلات از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا و روابط غیرخطی سندرز استفاده کردند و همچنین تأثیر ولتاژ، شرایط هندسی پوسته و توان نسبت حجمی مواد متغیّر تابعی را بر دمای کمانش مطالعه نمودند. درویزه و همکاران [۵۴] کمانش حرارتی پوسته‌های کروی شکل کامپوزیتی سوراخ‌دار را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و با روش اجزای محدود نیمه‌تحلیلی بررسی کردند. همچنین اثر زاویه الیاف را بر رفتار کمانشی مطالعه نمودند. هونگ [۵۵] به بررسی کمانش نامتقارن پوسته‌های کروی جدار نازک کم‌عمق دوسرگیردار، تحت‌فشار خارجی پرداخت. او همچنین تأثیر پارامترهای هندسی مختلف را بر بار کمانشی پوسته محاسبه کرد. تیلمن [۵۶] رفتار کمانشی کلاهک‌های کروی کم‌عمق تحت‌فشار یکنواخت را به‌صورت تحلیلی و آزمایشگاهی بررسی کرد. گنسن و کادولی [۵۷] کمانش حرارتی و ارتعاشات آزاد پوسته‌های نیم کروی ایزوتروپیک تحت تغییرات دمایی محوری متقارن را با روش اجزای محدود نیمه‌تحلیلی بررسی نمودند.

۱-۷- معرفی پایان‌نامه حاضر

با توجه به‌مرور تحقیقات پیشین می‌توان نتیجه گرفت که پژوهش ویژه‌ای درزمینه‌ی کمانش حرارتی پوسته‌های مخروطی شکل جدار متغیّر با استفاده از روش اجزای محدود نیمه‌تحلیلی انجام نگرفته است. در این پژوهش تحلیل کمانش حرارتی پوسته‌های مخروطی جدار متغیّر ساخته‌شده از مواد متغیّر تابعی تحت بارگذاری حرارتی انجام‌شده است. روابط کرنش- جابجایی خطی با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم و روابط کرنش- جابجایی غیرخطی با استفاده از تئوری ساده‌شده‌ی سندرز نوشته‌شده

[1] Von karman

است. معادله تعادل مسأله با استفاده از شرایط پایداری ترفز[1] استخراج‌شده و با یک روش اجزای محدود نیمه‌تحلیلی حل‌شده است. برای به دست آوردن نتایج کمانش اثر تغییر ضخامت، پارامترهای هندسی پوسته، شرایط مرزی و همچنین پارامترهای مواد متغیّر تابعی بر بار کمانش بررسی‌شده تا رفتار کمانش پوسته در حالت‌های مختلف مشخص شود. در کار حاضر برای اولین بار از روش اجزای محدود نیمه‌تحلیلی برای تحلیل کمانش حرارتی پوسته مخروطی جدار متغیّر استفاده‌شده است.

۱-۸- فرضیات مسأله

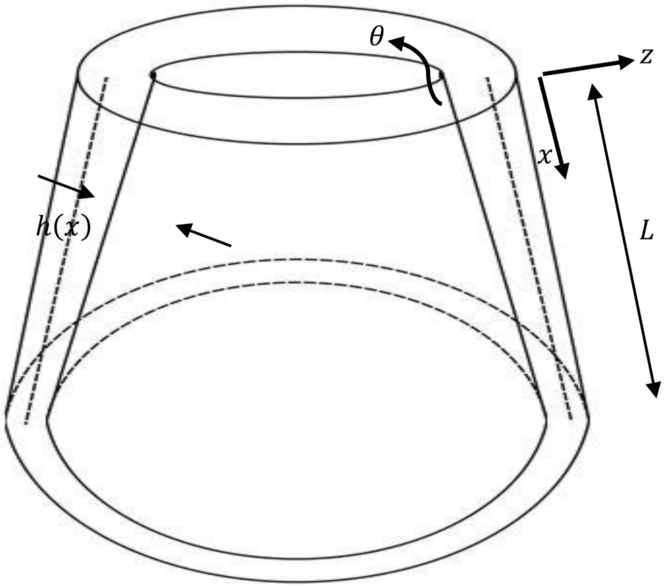
در تحلیل کمانش حرارتی پوسته‌های مخروطی جدار متغیّر موارد زیر فرض شده است.

- جدار پوسته مخروطی با استفاده از یک تابع مشخص برای مدل کردن تغییرات ضخامت، متغیّر فرض شده است.
- خواص مکانیکی و حرارتی پوسته در جهت ضخامت با استفاده از مدل ردی و در جهت محور پوسته به کمک قانون نمایی به‌صورت پیوسته تغییر می‌کنند.
- بارگذاری اعمال‌شده از نوع حرارتی بوده و به‌صورت افزایش دمای یکنواخت و متقارن محوری در طول ضخامت پوسته است.
- برای استخراج روابط کرنش- جابجایی از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم استفاده‌شده است.
- برای مدل کردن پوسته مخروطی از المان‌های سه گره‌ای خطی مرتبه دو با پنج درجه آزادی در هر گره استفاده‌شده است.
- در تحلیل مسأله فرض تنش صفحه‌ای اعمال‌شده است.
- مسأله تابع زمان نمی‌باشد.

[1] Trefftz

۱-۹- روابط جدار متغیّر

در پژوهش پیش‌رو جدار پوسته مخروطی در امتداد محور آن متغیّر در نظر گرفته‌شده است. می‌توان با استفاده از توابع ریاضی مختلفی مانند توابع خطی، توابع درجه دوم، توابع نمایی و مثلثاتی متغیّر بودن ضخامت را مدل‌سازی کرد. شکل (۱-۶) نمای کلی پوسته مخروطی متغیّر تابعی با جدار متغیّر را نشان می‌دهد.



شکل (۱-۶) نمای کلی پوسته مخروطی متغیّر تابعی با جدار متغیّر

در شکل (۱-۶) L طول لایه میانی پوسته است. در کار حاضر توابع انتخاب‌شده از نوع خطی[1][۴۳]، درجه دوم[2][۴۳] و نمایی[3][۱۹] می‌باشند که روابط آن‌ها به‌صورت زیر قابل‌بیان است.

تابع‌نمایی:

$$h(x) = h_0 e^{\frac{\beta x}{L}} \tag{۱-۲}$$

[1] Linear
[2] Quadratic
[3] Exponentially

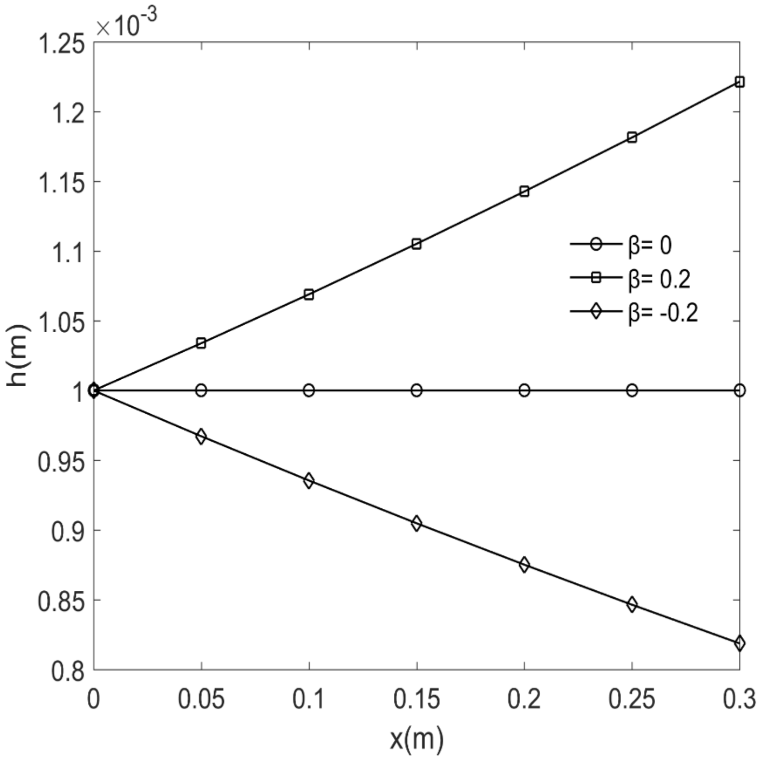
تابع خطی:

$$h(x) = h_0\left(1 + \frac{\beta x}{L}\right) \tag{۳-۱}$$

تابع درجه دوم:

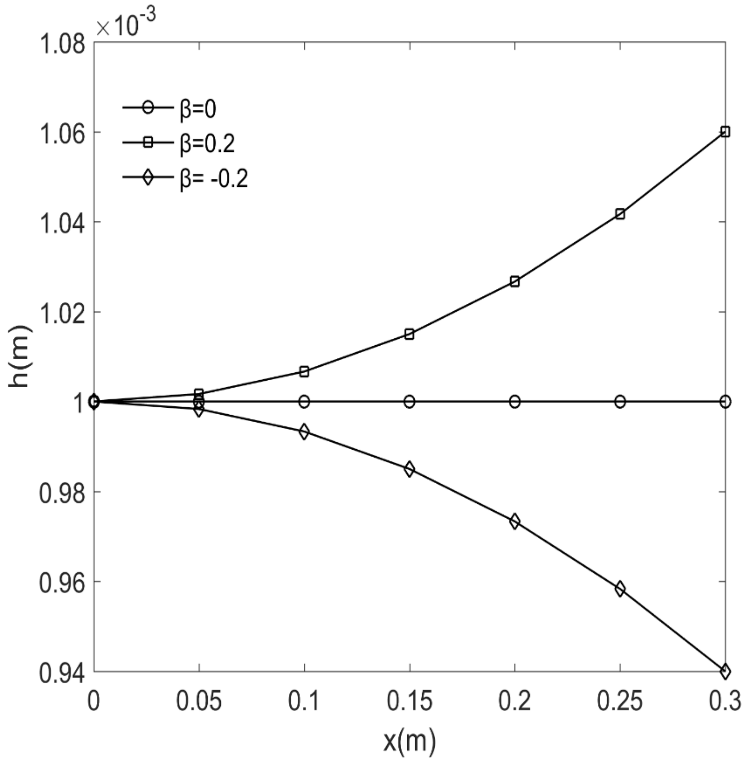
$$h(x) = h_0\left(1 + \frac{\beta x^2}{L^2}\right) \tag{۴-۱}$$

در روابط (۱-۲)، (۱-۳) و (۱-۴) β ضریب تغییرات ضخامت[1] است که می‌تواند مقادیر مثبت در حالت افزایش ضخامت در جهت محوری پوسته و همچنین مقادیر منفی برای حالت کاهش ضخامت در جهت محوری پوسته داشته باشد. h_0 نیز ضخامت اولیه پوسته است. نمودار تغییر ضخامت در راستای x برای توابع انتخاب‌شده در شکل‌های (۱-۷)، (۱-۸) و (۱-۹) آمده است.

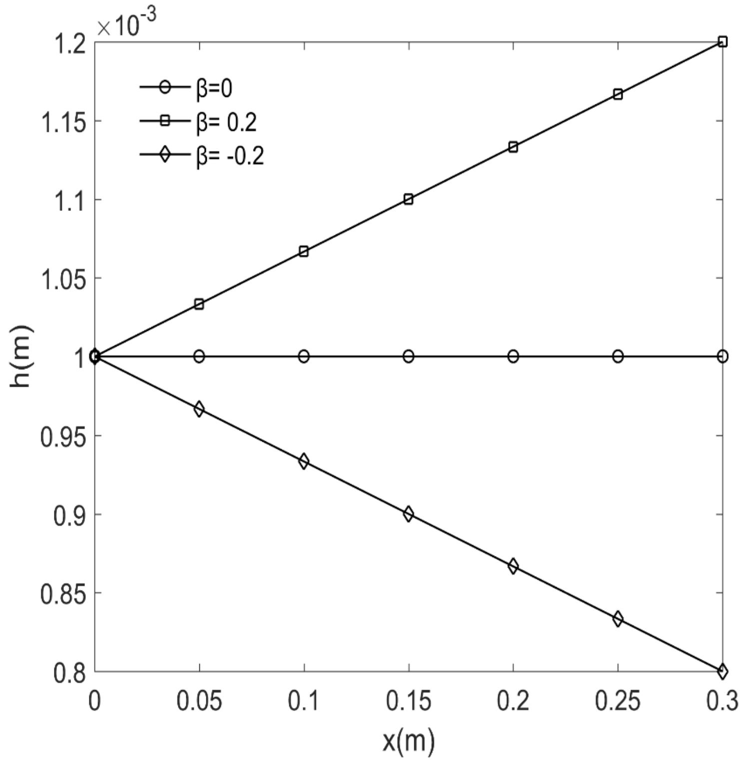


شکل (۱-۷) نمودار تغییر ضخامت برحسب تابع‌نمایی

[1] Exponent of the thickness variations



شکل (۱-۹) نمودار تغییر ضخامت برحسب تابع درجه دوم



شکل (۱-۸) نمودار تغییر ضخامت برحسب تابع خطی

۱-۱۰- نحوه‌ی بارگذاری

بارگذاری حرارتی به‌صورت افزایش دمای یکنواخت است و متقارن محوری فرض شده است.

۱-۱۱- شرایط مرزی

یکی از مهم‌ترین مواردی که درروش اجزای محدود و تحلیل‌های مبتنی بر این روش باید در نظر گرفت شناخت و اعمال صحیح شرایط مرزی است. به‌طورکلی درروش اجزای محدود شرایط مرزی به دودسته ضروری[1] و طبیعی[2] تقسیم‌بندی می‌شوند. اگر یک شرط مرزی مستقیماً یک یا چند درجه آزادی را محدود کند، در مجموعه شرط مرزی ضروری قرار می‌گیرد.

به‌بیان‌دیگر اگر این محدودیت‌ها، درجات آزادی گره‌ای مانند جابجایی و دوران را تحت تأثیر قرار دهند، شرط مرزی از نوع ضروری است و در غیر این صورت در گروه شرایط مرزی طبیعی محسوب می‌شود. در کار حاضر دو شرط مرزی گیردار[3] و ساده[4] انتخاب‌شده که هردو به‌صورت شرط مرزی ضروری در تحلیل‌ها اعمال‌شده است. همچنین اعمال شرط مرزی به‌صورت متقارن و در دوسر پوسته یکسان می‌باشد.

[1] Essential boundary condition
[2] Natural boundary condition
[3] Clamped
[4] Simply supported

۱-۱۲- مدل ریاضی مواد متغیّر تابعی

همان‌طور که گفته شد خواص مکانیکی در مواد متغیّر تابعی به‌صورت پیوسته در یک‌جهت مشخص تغییر می‌کنند. این تغییر ملایم را می‌توان با استفاده از یک تابع ریاضی خطی، غیرخطی و یا نمایی مدل کرد. مدل‌های ریاضی مختلفی مانند ردی[1]، اردوگان[2] و تانیگاوا[3] برای توزیع مکانی خواص مکانیکی و فیزیکی مواد متغیّر تابعی ارائه‌شده است. در کار حاضر خواص مادّه متغیّر تابعی در راستای ضخامت و همچنین در جهت محوری پوسته مخروطی تغییر می‌کند. از مدل ریاضی ردی یا همان مدل توانی برای اعمال تغییرات پیوسته خواص در راستای ضخامت و همچنین از قانون نمایی برای تغییرات در جهت محوری استفاده‌شده است.

می‌توان رابطه کسر حجمی هر فاز از مواد متغیّر تابعی را به‌صورت زیر نوشت.

$$V_{metal} = \frac{v_{metal}}{v_{metal} + v_{ceramic}}$$

(۱-۵)

$$V_{ceramic} = \frac{v_{ceramic}}{v_{metal} + v_{ceramic}}$$

در رابطه بالا $V_{ceramic}$ و V_{metal} به ترتیب حجم فاز سرامیکی و فلزی هستند که رابطه زیر بین آن‌ها برقرار است.

$$V_{metal} + V_{ceramic} = 1 \qquad (۱-۶)$$

روش‌های متفاوتی برای مدل کردن خواص مواد متغیّر تابعی وجود دارد که یک روش کلی برای بیان خواص آن‌ها قانون مخلوط‌ها[4] است. با توجه به این قانون هر خاصیت مؤثری از مادّه به‌صورت مجموع

[1] Reddy
[2] Erdogan
[3] Tanigawa
[4] Rule of mixtures

خاصیت‌های هر یک از مواد تشکیل‌دهنده آن ضرب‌در کسر حجمی آن‌ها بیان می‌شود اکنون با توجه به قانون کسر حجمی می‌توان خواص مواد متغیّر تابعی را به‌صورت زیر نوشت:

$$P = P_{metal}V_{metal} + P_{ceramic}V_{ceramic} \qquad (۷-۱)$$

در رابطه (۱-۷) $P_{ceramic}$ و P_{metal} به ترتیب می‌تواند هر خاصیت مکانیکی و حرارتی از قبیل مدول الاستیسیته (E)، ضریب پواسون (ν) و ضریب انبساط حرارتی (α) فاز سرامیکی و فلزی باشد که از رابطه تولوکیان[1] [۵۸] به شکل زیر قابل‌محاسبه است.

$$P_{metal\ or\ ceramic} = P_0(1 + P_1T + P_2T^2 + P_3T^3) \qquad (۸-۱)$$

$$T = T_0 + \Delta T \qquad (۹-۱)$$

در رابطه (۱-۸) T دما و P_0، P_1، P_2 و P_3 ضرایب وابسته به دما خواص مواد فلزی و سرامیکی می‌باشند. در رابطه (۱-۹) ΔT نیز مقدار افزایش دمای محیطی است که پوسته در آن قرا دارد و T_0 دمای اولیه پوسته می‌باشد. ردی نسبت حجمی فازهای سرامیکی و فلزی را با تابع توانی مدل کرد. به صورتی که کسر حجمی یکی از فازهای فلزی و سرامیکی به‌صورت تابع توانی در راستای ضخامت به‌صورت رابطه زیر بیان می‌شود.

$$V_{metal}(z) = \left(\frac{2z + h}{2h}\right)^n \qquad (۱۰-۱)$$

در رابطه (۱-۱۰) h بیانگر ضخامت پوسته و z مختصات در راستای ضخامت است. همچنین n توان نسبت حجمی[2] و بیانگر شدت تغییرات خواص مواد در راستای ضخامت می‌باشد. با جایگذاری رابطه (۱-۱۰) در رابطه (۱-۶) کسر حجمی فاز سرامیکی را می‌توان به‌صورت زیر به دست آورد.

$$V_{ceramic}(z) = 1 - \left(\frac{2z + h}{2h}\right)^n \qquad (۱۱-۱)$$

---

[1] Touloukian formula

[2] Power-law index

درنهایت با جایگذاری تابع توانی در رابطه (۱-۷) می‌توان خواص مکانیکی یا حرارتی مواد متغیّر تابعی را در راستای ضخامت پوسته مخروطی به دست آورد.

$$P = (P_{metal} - P_{ceramic})\left(\frac{2z+h}{2h}\right)^n + P_{ceramic} \tag{۱-۱۲}$$

همان‌طور که قبلاً گفته شد خواص مواد متغیّر تابعی در راستای محوری پوسته نیز تغییر می‌کنند. درنتیجه با اعمال قانون نمایی به رابطه (۱-۱۲) رابطه کلی تغییرات خواص در راستای ضخامت و محور پوسته به‌صورت زیر قابل‌بیان است.

$$P = \left\{(P_{metal} - P_{ceramic})\left(\frac{2z+h}{2h}\right)^n + P_{ceramic}\right\} e^{\frac{\mu x}{L}} \tag{۱-۱۳}$$

که در رابطه بالا μ ضریب قانون نمایی[1] است. در رابطه (۱-۱۳) اگر در حالت ($\mu = 0$)، حد پایین توان نسبت حجمی جایگزین شود خواص فاز فلزی به دست می‌آید و در حد بالای توان نسبت حجمی خواص فاز سرامیکی قابل‌محاسبه است. بنابراین با استفاده از تابع توانی در نظر گرفته‌شده (مدل ردی) در راستای ضخامت و با استفاده از قانون نمایی در راستای محوری می‌توان خواص موردنظر را به دست آورد.

۱-۱۳- معرفی فصل‌های پایان‌نامه

پایان‌نامه پیش‌رو در چهارفصل تدوین‌شده است. فصل اول شامل مقدمه، کاربردهای پوسته‌های مخروطی در صنعت، روش‌های تحلیل مسائل مهندسی، تاریخچه مطالعات پیشین، معرفی پایان‌نامه حاضر، فرضیات مسأله، توصیف هندسه پوسته مخروطی جدار متغیّر، روابط جدار متغیّر، معرفی مواد متغیّر تابعی، شرایط مرزی و بارگذاری می‌پردازد. در فصل دوم معادلات حاکم بر مسأله با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم نوشته و با توجه به روش اجزای محدود نیمه‌تحلیلی بازنویسی شده تا معادله تعادل کمانش حرارتی مشخص شود.

[1] Exponential-law exponent

فصل سوم شامل صحه‌گذاری و ارائه نتایج کمانش حرارتی و نتیجه‌گیری از تحلیل‌های انجام‌شده می‌باشد. در فصل چهارم به خلاصه نتیجه‌گیری‌های مربوط به تحلیل‌های این پژوهش پرداخته‌شده و همچنین پیشنهادهایی برای گستردگی بیشتر نتایج ارائه‌شده است.

فصل دوم

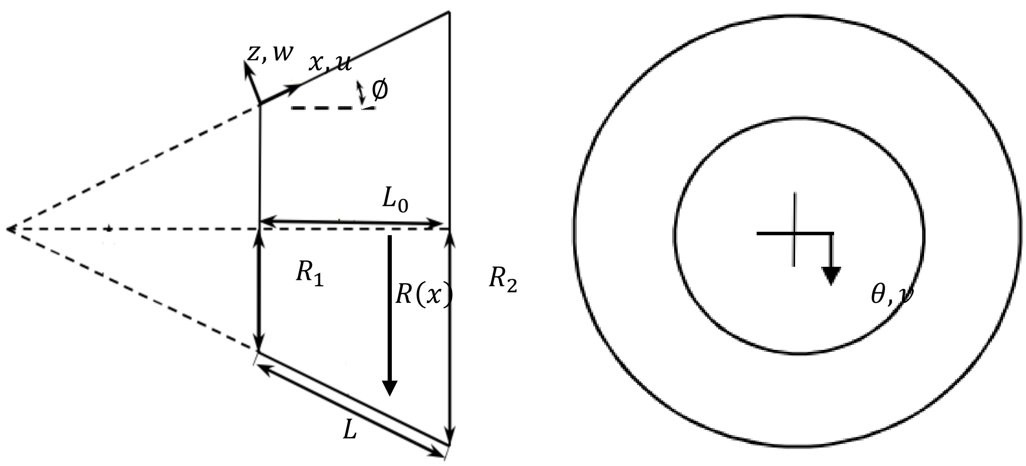
تحلیل کمانش با روش اجزای محدود نیمه تحلیلی

۲-۱- مقدمه

در بخش اول این فصل دستگاه مختصات اعمال‌شده بر هندسه پوسته مخروطی جدار متغیّر و معادله حاکم بر مسأله که بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم نوشته‌شده بیان می‌شود. در ادامه در بخش دوم با اعمال روش اجزای محدود نیمه‌تحلیلی روابط بازنویسی می‌شود. در بخش آخر این فصل نیز با استفاده از اصل کمینه انرژی پتانسیل معادله کمانش نوشته‌شده است و دمای بحرانی کمانش محاسبه می‌شود.

۲-۲- هندسه مسأله

برای تحلیل هندسه پوسته مخروطی از دستگاه مختصات (x,θ,z) استفاده‌شده است. x بیانگر مختصات در راستای طولی، θ بیانگر مختصات در راستای محیطی و z مختصات را در راستای ضخامت نشان می‌دهد. شکل (۲-۱) پوسته مخروطی با طول L، زاویه نیم رأس $\emptyset$، شعاع کوچک R_1 و شعاع بزرگ R_2 را نشان می‌دهد. جابجایی پوسته در سه جهت طولی x، محیطی θ و عمود بر پوسته z به ترتیب با u، v و w مشخص می‌شود.



شکل (۲-۱) سیستم مختصات پوسته مخروطی شکل

با توجه به شکل (۲-۱) شعاع پوسته مخروطی در هر نقطه بر روی پوسته به‌صورت زیر بیان می‌گردد.

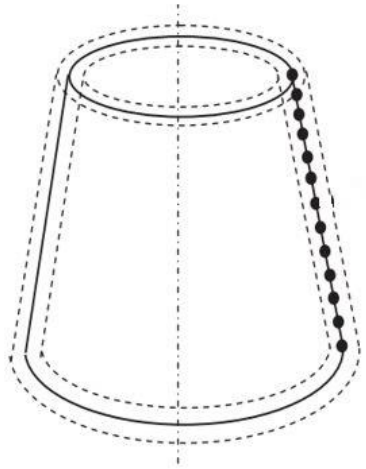
$$R(x) = R_1 + x\sin(\emptyset) \qquad (۲-۱)$$

۲-۳- روش اجزای محدود نیمه‌تحلیلی

از روش اجزای محدود نیمه‌تحلیلی می‌توان در تحلیل مسائلی که دارای تقارن هستند استفاده کرد. در این روش برخلاف روش اجزای محدود ماتریس‌ها معمولاً دارای درایه‌های کمتری هستند، درنتیجه زمان حل معادلات کاهش پیدا می‌کند. همچنین با کاهش ابعاد مسأله تعداد ورودی‌های مورد نیاز نیز کمتر است. درروش اجزای محدود نیمه‌تحلیلی مهم‌ترین بخش کار انتخاب یک تابع درون یاب مناسب برای مدل کردن جابجایی‌های گره‌ای هر المان می‌باشد، زیرا در صورت انتخاب تابع اشتباه احتمال به دست آمدن حل‌های نادرست و یا همگرا نشدن آن‌ها زیاد است. اولین گام در حل اجزای محدود یک مسأله، گسسته سازی جسم به‌وسیله تعداد المان‌های مناسب است. می‌توان ناحیه مورد نظر را به‌وسیله المان‌های یک‌بعدی، دوبعدی و سه‌بعدی شبکه‌بندی[1] کرد.

در این پایان‌نامه پوسته مخروطی شکل در جهت x به‌وسیله یک المان سه گره‌ای ایزو پارامتریک[2] خطی مرتبه دوم همانند شکل (۲-۲) مدل شده است.

[1] Mesh generation
[2] Isoparametric element



شکل (۲-۲) المان بندی پوسته مخروطی به‌وسیله المان سه گره‌ای ایزو پارامتریک [۴]

تابع شکل در جهت محوری پوسته (مختصه‌ی x) به‌صورت چندجمله‌ای می‌باشد و در جهت دورانی پوسته (مختصه‌ی θ) به‌صورت سری مثلثاتی[1] در نظر گرفته می‌شود، به این معنی که میدان جابجایی به جهت دورانی وابسته است. بنابراین میدان جابجایی در جهت θ با سری فوریه به شکل زیر بیان می‌شود.

$$u_0(x,\theta)=\sum_{m=1}^{\infty}u_{0m}(x)\cos(m\theta)$$
$$v_0(x,\theta)=\sum_{m=1}^{\infty}v_{0m}(x)\sin(m\theta)$$
$$w_0(x,\theta)=\sum_{m=1}^{\infty}w_{0m}(x)\cos(m\theta) \qquad (۲-۲)$$
$$\psi_x(x,\theta)=\sum_{m=1}^{\infty}\psi_{x0m}(x)\cos(m\theta)$$
$$\psi_\theta(x,\theta)=\sum_{m=1}^{\infty}\psi_{\theta 0m}(x)\sin(m\theta)$$

[1] Trigonometric series

که در رابطه (۲-۲) m شماره m اُمین مد محیطی[1] می‌باشد. همچنین می‌توان رابطه (۲-۲) را به شکل ماتریسی زیر تبدیل کرد.

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \psi_x \\ \psi_\theta \end{Bmatrix} = \sum_{m=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \cos(m\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(m\theta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(m\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(m\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(m\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{0m} \\ v_{0m} \\ w_{0m} \\ \psi_{xm} \\ \psi_{\theta m} \end{Bmatrix} \qquad (۳-۲)$$

هر گره از المان سه گره‌ای ایزوپارامتریک دارای پنج درجه آزادی شامل u_0،v_0،w_0،ψ_θ و ψ_x است. بنابراین با توجه به تعداد گره‌ها، هر المان دارای پانزده درجه آزادی می‌باشد. بردار جابجایی هر المان برای هر گره به‌صورت زیر نوشته‌شده است.

$$\{d_e\}^T = \{u_{0i} \;\; v_{oi} \;\; w_{0i} \;\; \psi_{xi} \;\; \psi_{\theta i}\} \qquad i = 1,2,3 \qquad (۴-۲)$$

در رابطه بالا i شماره گره هر المان است.

۲-۴ تابع شکل المان

توابع شکل، توابع درون‌یابی هستند که مقدار متغیّر میدان را در هر نقطه از المان برحسب مقادیر گره‌ای آن میانیابی می‌کنند. روش‌های متعددی برای تعیین معادلات توابع شکل وجود دارد که می‌توان به روش چندجمله‌ای‌های لاگرانژ و توابع هرمیتی اشاره نمود. تابع شکل باید به‌گونه‌ای انتخاب شود که با استفاده از تعداد المان‌های مناسب حل اجزای محدود مسأله به حل تحلیلی آن نزدیک شود.

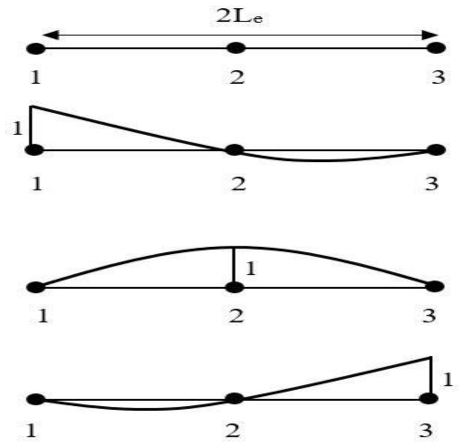
با توجه به انتخاب المان مرتبه دوم رابطه تابع جابجایی برای هر گره به‌صورت زیر است.

$$d_i = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 \qquad i = 1,2,3 \qquad (۵-۲)$$

[1] Circumferential mode

همچنین می‌توان رابطه (۲-۵) را به شکل ماتریسی زیر نوشت.

$$d_i = [1 \;\; x \;\; x^2]\{a_1 \;\; a_2 \;\; a_3\}^T \quad i = 1,2,3 \tag{۲-۶}$$



شکل (۲-۳) جابجایی‌های المان سه گره‌ای ایزوپارامتریک مرتبه دوم

شکل (۲-۳) یک المان با طول $2L_e$ را نشان می‌دهد. تابع شکل مربوط به هر گره مقداری برابر با یک در همان گره دارد و در تمام گره‌های دیگر صفر است. این ویژگی به خاصیت دلتای کرانیکر[1] معروف است. با توجه به این نکته می‌توان روابط (۲-۵) و (۲-۶) را برای مختصات سه گره به‌صورت زیر بیان کرد [۵۹].

$$
\begin{aligned}
&at\;\; x = -L_e && [d_1 \;\; d_2 \;\; d_3] = [d_1 \;\; 0 \;\; 0] \\
& && d_1 = a_1 + a_2 L_e + a_3 {L_e}^2 \\
&at\;\; x = 0 && [d_1 \;\; d_2 \;\; d_3] = [\,0 \;\; d_2 \;\; 0] \\
& && d_2 = a_1 \\
&at\;\; x = +L_e && [d_1 \;\; d_2 \;\; d_3] = [\,0 \;\; 0 \;\; d_2] \\
& && d_3 = a_1 - a_2 L_e + a_3 {L_e}^2
\end{aligned}
\tag{۲-۷}
$$

[1] Kronecker delta

اکنون می‌توان رابطه (۲-۷) را به شکل ماتریسی زیر تبدیل کرد.

$$\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -L_e & {L_e}^2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & L_e & {L_e}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \qquad (۲\text{-}۸)$$

با معکوس کردن رابطه (۲-۸) می‌توان مقادیر ضرایب a_1، a_2 و a_3 را به شکل زیر به دست آورد.

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -L_e & {L_e}^2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & L_e & {L_e}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} \qquad (۲\text{-}۹)$$

با جایگذاری رابطه (۲-۹) در رابطه (۲-۶) d_i به‌صورت زیر قابل‌محاسبه است.

$$d_i = [1 \quad x \quad x^2] \begin{bmatrix} 1 & -L_e & {L_e}^2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & L_e & {L_e}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} \qquad (۲\text{-}۱۰)$$

درنهایت رابطه بالا را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد.

$$d_i = [N_i] \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} \qquad (۲\text{-}۱۱)$$

در رابطه بالا N_i ماتریس توابع شکل برای المان سه گره‌ای خطی مرتبه دو می‌باشد. مقادیر N_1، N_2 و N_3 برای هر گره به‌صورت زیر است.

$$[N_1 \quad N_2 \quad N_3] = \begin{bmatrix} \frac{x^2 - xL_e}{2{L_e}^2} & \frac{{L_e}^2 - x^2}{{L_e}^2} & \frac{x^2 - xL_e}{2{L_e}^2} \end{bmatrix} \qquad (۲\text{-}۱۲)$$

۲-۵- میدان جابجایی پوسته مخروطی

با توجه به انتخاب دستگاه مختصات (x,θ,z) تغییر مکان هر نقطه دلخواه از پوسته در راستای x، θ و z را می‌توان بر اساس میدان جابجایی تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم به‌صورت زیر بیان کرد [۱۹].

$$
\begin{aligned}
u(x,\theta,z) &= u_0(x,\theta) + z\psi_x - \frac{4z^3}{3h^2(x)}\left(\psi_x + w_{0,x}\right) \\
v(x,\theta,z) &= v_0(x,\theta) + z\psi_\theta - \frac{4z^3}{3h^2(x)}\left(\psi_\theta + w_{0,\theta}\right) \\
w(x,\theta,z) &= w_0(x,\theta)
\end{aligned}
\tag{۲-۱۳}
$$

که در رابطه (۲-۱۳) u_0، v_0 و w_0 به ترتیب جابجایی‌های سطح میانی در جهت x، θ و z هستند. ψ_x و ψ_θ نیز دوران‌های عمود بر سطح میانی در صفحات x-z و θ-z می‌باشند.

۲-۶- رابطه‌ی کرنش- جابجایی

مؤلفه‌های کرنش نرمال و کرنش برشی خطی در یک سیستم مختصات منحنی الخط متعامد طبق تئوری الاستیسیته با مؤلفه‌های بردار جابجایی رابطه دارند. این رابطه برای پوسته‌ها به شکل زیر می‌باشد [۶۰].

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_i &= \frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left(\frac{u_i}{\sqrt{g_i}}\right) + \frac{1}{2g_i}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial g_i}{\partial\alpha_k}\frac{u_k}{\sqrt{g_k}} \qquad i = 1,2,3 \\
\gamma_{ij} &= \frac{1}{\sqrt{g_i g_j}}\left[g_i\frac{\partial}{\partial\alpha_j}\left(\frac{u_i}{\sqrt{g_i}}\right) + g_j\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left(\frac{u_j}{\sqrt{g_i}}\right)\right] \qquad i = 1,2,3 \quad i \neq j
\end{aligned}
\tag{۲-۱۴}
$$

در رابطه (۲-۱۴) α_i، u_i و g_i به ترتیب بیانگر مؤلفه‌های دستگاه منحنی‌الخط[۱]، مؤلفه‌های بردار جابجایی و فاکتور مقیاس هندسی[۲] می‌باشد. این مقادیر را می‌توان برای پوسته‌ها به‌صورت زیر معادل‌سازی کرد [۶۰].

[1] Curvilinear co-ordinates
[2] Geometrical scale factor

$$\alpha_1 = x \quad , \quad \alpha_2 = \theta \quad , \quad \alpha_3 = z \qquad (۱۵\text{-}۲)$$
$$u_1 = u \quad , \quad u_2 = v \quad , \quad u_3 = w$$

$$g_1 = {A_1}^2\left(1+\frac{z}{R_1}\right)^2, \;\; g_2 = {A_2}^2\left(1+\frac{z}{R_1}\right)^2, \;\; g_3 = 1$$

با توجه به شکل (۲-۱) که هندسه پوسته مخروطی را نشان می‌دهد، می‌توان مقادیر A_1، A_2، R_1 و R_2 را به‌صورت زیر محاسبه کرد.

$$A_1 = 1$$

$$A_2 = r$$

(۱۶-۲)

$$R_1 = \infty$$

$$R_2 = \frac{r}{cos(\emptyset)}$$

در رابطه (۲-۱۵) A_i، R_i و z به ترتیب ضرایب لامه[1]، شعاع انحنا[2] و مختصه ضخامت[3] می‌باشند. با توجه به روابط ساده‌سازی گاوس-کودازی[4] می‌توان نوشت.

$$\frac{\partial\left[A_1\left(1+\frac{z}{R_1}\right)\right]}{\partial\theta} = \left(1+\frac{z}{R_2}\right)\frac{\partial A_1}{\partial\theta}$$

(۱۷-۲)

$$\frac{\partial\left[A_2\left(1+\frac{z}{R_2}\right)\right]}{\partial x} = \left(1+\frac{z}{R_1}\right)\frac{\partial A_2}{\partial x}$$

[1] Lame’s parameters
[2] Curvature radius
[3] Thickness co-ordinate
[4] Gauss-codazzi condition

با جایگذاری معادلات (۲-۱۵) در معادلات (۲-۱۴) و با توجه به روابط (۲-۱۷) می‌توان معادلات کرنش-جابجایی پوسته را به شکل زیر نوشت.

$$\varepsilon_x = \frac{1}{A_1\left(1+\frac{z}{R_1}\right)}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{v}{A_2}+\frac{A_1 w}{R_1}\right)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{A_2\left(1+\frac{z}{R_2}\right)}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta}+\frac{u}{A_1}+\frac{A_2 w}{R_2}\right)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \qquad (۲-۱۸)$$

$$\gamma_{xz} = A_1\left(1+\frac{z}{R_1}\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u}{A_1\left(1+\frac{z}{R_1}\right)}\right)+\frac{1}{A_1\left(1+\frac{z}{R_1}\right)}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\gamma_{z\theta} = A_2\left(1+\frac{z}{R_2}\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v}{A_2\left(1+\frac{z}{R_2}\right)}\right)+\frac{1}{A_2\left(1+\frac{z}{R_2}\right)}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)$$

$$\gamma_{x\theta} = \frac{A_1\left(1+\frac{z}{R_1}\right)}{A_2\left(1+\frac{z}{R_2}\right)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{u}{A_1\left(1+\frac{z}{R_1}\right)}\right) + \frac{A_2\left(1+\frac{z}{R_2}\right)}{A_1\left(1+\frac{z}{R_1}\right)}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v}{A_2\left(1+\frac{z}{R_2}\right)}\right)$$

با جایگذاری معادلات (۲-۱۳) در روابط (۲-۱۸) و همچنین با استفاده از تقریب $\left(1+\frac{z}{R}\right)\cong 1$ برای پوسته‌های جدار نازک می‌توانیم معادلات زیر را بنویسیم.

$$\begin{aligned}\varepsilon_x = {} & \frac{1}{A1}\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{v_0}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \theta}+\frac{w_0}{R_1}+\frac{1}{A1}\frac{z\partial \psi_x}{\partial \mathrm{x}}+\frac{z\psi_\theta}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \theta} \\ & -\frac{4z^3}{3h^2(x)A_1}\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial s}-\frac{2\beta}{L}\psi_x\right)-\frac{4z^3}{3h^2(x)A_1}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}-\frac{2\beta}{L}\frac{\partial w_0}{\partial x}\right) \\ & -\frac{4z^3}{3h^2(x)A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \theta}\left(\psi_\theta+\frac{1}{R}\frac{\partial w_0}{\partial \theta}\right)\end{aligned} \qquad (۱۹-۲)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_\theta = {} & \frac{1}{A2}\frac{\partial v}{\partial \theta}+\frac{u_0}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial x}+\frac{w_0}{R_2}+\frac{1}{A2}\frac{z\partial \psi_\theta}{\partial \theta}+\frac{z\psi_x}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial x} \\ & -\frac{4z^3}{3h^2(x)A_2}\left(\frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta}+\frac{1}{R}\frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2}\right) \\ & -\frac{4z^3}{3h^2A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial x}\left(\psi_x+\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)\end{aligned}$$

$$\varepsilon_z = 0$$

$$\gamma_{xz} = \psi_x+\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{1}{A_1}-\frac{4z^2}{h^2(x)}\left(\psi_x+\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)$$

$$\begin{aligned}\gamma_{z\theta} = {} & \psi_\theta-\frac{4z^2}{3h^2(x)}\left(\psi_\theta+\frac{1}{R}\frac{\partial w_0}{\partial \theta}\right) \\ & -\frac{1}{R2}\left(v_0+\psi_\theta z-\frac{4z^3}{3h^2(x)}\left(\psi_\theta+\frac{1}{R}\frac{\partial w_0}{\partial \theta}\right)\right)+\frac{1}{A2}\frac{\partial w_0}{\partial \theta}\end{aligned}$$

$$\gamma_{x\theta}=\frac{1}{A_2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial\theta}+z\frac{\partial\psi_x}{\partial\theta}-\frac{4z^3}{3h^2(x)}\left(\frac{\partial\psi_x}{\partial\theta}+\frac{\partial w_0}{\partial x\partial\theta}\right)\right)$$
$$-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\theta}\left(u_0+z\psi_x-\frac{4z^3}{3h^2(x)}\left(\psi_x+\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)\right)$$
$$+\frac{1}{A_1}\left(\frac{\partial v_0}{\partial x}+z\frac{\partial\psi_\theta}{\partial x}-\frac{4z^3}{3h^2(x)}\left(\frac{\partial\psi_\theta}{\partial x}+\frac{1}{R}\frac{\partial w_0}{\partial x\partial\theta}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{8\beta z^3}{3Lh^2}\left(\psi_\theta+\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)\right)$$
$$-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial x}\left(v_0+z\psi_\theta-\frac{4z^3}{3h^2(x)}\left(\psi_\theta+\frac{\partial w_0}{\partial\theta}\right)\right)$$

می‌توان معادلات کرنش- جابجایی (۲-۱۹) را به شکل کلی زیر بازنویسی کرد.

$$\varepsilon_x=\varepsilon_x^{(0)}+z\varepsilon_x^{(1)}+z^3\varepsilon_x^{(3)}$$

$$\varepsilon_\theta=\varepsilon_\theta^{(0)}+z\varepsilon_\theta^{(1)}+z^3\varepsilon_\theta^{(3)}$$

$$\gamma_{x\theta}=\gamma_{x\theta}^{(0)}+z\gamma_{x\theta}^{(1)}+z^3\gamma_{x\theta}^{(3)}$$ (۲-۲۰)

$$\gamma_{xz}=\gamma_{xz}^{(0)}+z^2\gamma_{xz}^{(2)}$$

$$\gamma_{\theta z}=\gamma_{\theta z}^{(0)}+z^2\gamma_{\theta z}^{(2)}$$

در روابط بالا $\varepsilon_x^{(0)}$، $\varepsilon_\theta^{(0)}$ و $\gamma_{x\theta}^{(0)}$ به ترتیب کرنش‌های نرمال وبرشی سطح میانی، γ_{xz} و $\gamma_{\theta z}$ کرنش‌های برشی عرضی و $\varepsilon_x^{(1,3)}$، $\varepsilon_\theta^{(1,3)}$ و $\gamma_{x\theta}^{(1,3)}$ تغییر در انحناها می باشند.

با استفاده از شرایط هندسی (۲-۱۶) می‌توان روابط (۲-۱۹) را به شکل زیر ساده‌سازی کرد.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{z\partial \psi_x}{\partial \mathrm{x}} - \frac{4z^3}{3h^2(x)}\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} - \frac{2\beta}{L}\psi_x\right) - \frac{4z^3}{3h^2(x)}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - \frac{2\beta}{L}\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)$$

(۲-۲۱)

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{R}\frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{u_0}{R}\sin(\emptyset) + \frac{w_0}{R}\cos(\emptyset) + \frac{z}{R}\frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + \frac{z\psi_x}{R}\sin(\emptyset) - \frac{4z^3}{3h^2(x)R}\left(\frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{R}\frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2}\right) - \frac{4z^3}{3h^2 R}\sin(\emptyset)\left(\psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}\right)$$

$$\gamma_{xz} = \psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} - \frac{4z^2}{h^2(x)}\left(\psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}\right)$$

$$\gamma_{z\theta} = \psi_\theta - \frac{4z^2}{3h^2(x)}\left(\psi_\theta + \frac{1}{R}\frac{\partial w_0}{\partial \theta}\right) - \left(\frac{\cos\emptyset}{R}v_0 + \frac{\mathrm{z}\cos\emptyset}{R}\psi_\theta - \frac{4z^3\cos\emptyset}{3h^2(x)R}\left(\psi_\theta + \frac{1}{R}\frac{\partial w_0}{\partial \theta}\right)\right) + \frac{1}{R}\frac{\partial w_0}{\partial \theta}$$

$$\gamma_{x\theta} = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial u_0}{\partial \theta} + z\frac{\partial \psi_x}{\partial \theta} - \frac{4z^3}{3h^2(x)}\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial \theta} + \frac{\partial w_0}{\partial x \partial \theta}\right)\right) + \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} + z\frac{\partial \psi_\theta}{\partial x} - \frac{4z^3}{3h^2(x)}\left(\frac{\partial \psi_\theta}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial w_0}{\partial x \partial \theta}\right) + \frac{8\beta z^3}{3Lh^2}\left(\psi_\theta + \frac{\partial w}{\partial \theta}\right)\right) - \frac{\sin(\emptyset)}{R}\left(v_0 + z\psi_\theta - \frac{4z^3}{3h^2(x)}\left(\psi_\theta + \frac{\partial w_0}{\partial \theta}\right)\right)$$

درنتیجه با توجه به روابط (۲-۲۱) شکل کلی معادلات کرنش- جابجایی برای پوسته‌های مخروطی شکل، بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم به‌صورت زیر قابل‌بیان است.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + \mathrm{u}\sin(\emptyset) + \mathrm{w}\cos(\emptyset)\right)$$

$$\gamma_{\theta z} = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - \mathrm{v}\cos(\emptyset)\right) + \frac{\partial v}{\partial z} \qquad (۲-۲۲)$$

$$\gamma_{x\theta} = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - \mathrm{v}\sin(\emptyset)\right) + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

کرنش‌های غیرخطی برای پوسته‌های مخروطی نیز بر مبنای تئوری غیرخطی الاستیسیته به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$\varepsilon_x^{NL} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right) = \frac{1}{2}(e_{11}^2 + e_{21}^2 + e_{31}^2)$$

$$\varepsilon_\theta^{NL} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R\left(1+\frac{z}{R}\right)}\right)^2\left(\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v\right)^2\right) = \frac{1}{2}(e_{22}^2 + e_{12}^2 + e_{32}^2) \qquad (۲-۲۳)$$

$$\gamma_{x\theta}^{NL}=\left(\frac{1}{R\left(1+\frac{z}{R}\right)}\right)\left(\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial\theta}+w\right)+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial\theta}-v\right)\right)$$
$$=(e_{11}e_{12}+e_{22}e_{21}+e_{31}e_{32})$$

با جایگذاری رابطه (۲-۱۳) در رابطه (۲-۲۳) و با استفاده از تقریب $\left(1+\frac{z}{R}\right)\cong 1$ برای پوسته‌های مخروطی نازک روابط زیر به دست می‌آید.

$$e_{11}=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial\psi_x}{\partial \mathrm{x}}\mathrm{z}-\frac{4z^3}{3h^2(x)}\left(\frac{\partial\psi_x}{\partial x}-\frac{2\beta}{L}\psi_x\right)$$
$$-\frac{4z^3}{3h^2(x)}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}-\frac{2\beta}{L}\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)$$

$$e_{21}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v_0}{\partial x}+z\frac{\partial\psi_\theta}{\partial x}-\frac{4z^3}{3h^2(x)}\left(\frac{\partial\psi_\theta}{\partial x}+\frac{1}{R}\frac{\partial w_0}{\partial x\partial\theta}\right)+\frac{8\beta z^3}{3Lh^2}\left(\psi_\theta+\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)$$

$$e_{31}=\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w_0}{\partial x}$$

$$e_{22}=\left(\frac{1}{R}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial\theta}+w\right) \qquad (۲-۲۴)$$
$$=\left(\frac{1}{R}\right)\left(\frac{\partial v_0}{\partial\theta}+w_0+z\frac{\partial\psi_\theta}{\partial\theta}-\frac{4z^3}{3h^2(x)}\left(\frac{\partial\psi_\theta}{\partial\theta}+\frac{1}{R}\frac{\partial^2 w_0}{\partial\theta^2}\right)\right)$$

$$e_{12}=\left(\frac{1}{R}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)=\left(\frac{1}{R}\right)\left(\frac{\partial u_0}{\partial\theta}+z\frac{\partial\psi_s}{\partial\theta}-\frac{4z^3}{3h^2(x)}\left(\frac{\partial\psi_s}{\partial\theta}+\frac{\partial w_0}{\partial\theta\partial x}\right)\right)$$

$$e_{32}=\left(\frac{1}{R}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial\theta}-v\right)=\left(\frac{1}{R}\right)\left(\frac{\partial w_0}{\partial\theta}-v_0-z\psi_\theta+\frac{4z^3}{3h^2(x)}\left(\psi_\theta+\frac{1}{R}\frac{\partial w_0}{\partial\theta}\right)\right)$$

می‌توان e_{31} و e_{32} را برحسب توان‌های z به‌صورت زیر در نظر گرفت.

$$e_{31} = \beta_1 z^0 + z^1 \gamma_1 + z^3 \alpha_1$$
$$e_{32} = \beta_2 z^0 + z^1 \gamma_2 + z^3 \alpha_2 \qquad (۲-۲۵)$$

در ادامه طبق تئوری ساده‌شده سندرز [۶۱] با صرف‌نظر کردن از کرنش‌های برشی عرضی، می‌توان کرنش‌های غیرخطی را به‌صورت زیر نوشت.

$$\varepsilon_x^{NL} = \frac{1}{2} e_{31}^2$$
$$\varepsilon_\theta^{NL} = \frac{1}{2} e_{32}^2 \qquad (۲-۲۶)$$
$$\gamma_{x\theta}^{NL} = e_{31} e_{32}$$

اکنون با جایگذاری رابطه (۲-۲۵) در رابطه (۲-۲۶) و مقایسه با رابطه (۲-۲۳) ضرایب z^0، z^1 و z^3 به‌صورت زیر قابل‌بیان هستند.

$$\beta_1 = \frac{\partial w_0}{\partial x}, \gamma_1 = 0 \,, \alpha_1 = 0$$
$$\beta_2 = \frac{1}{R}\frac{\partial w_x}{\partial x} - \frac{v_0}{R}\cos(\emptyset) \,, \gamma_2 = -\frac{\psi_\theta}{R}\cos(\emptyset) \,, \alpha_2 = \frac{4\cos(\emptyset)}{3Rh^2}\left(\psi_\theta + \frac{1}{R}\frac{\partial w_0}{\partial \theta}\right) \qquad (۲-۲۷)$$

۲-۷- رابطه‌ی تنش- کرنش

با توجه به قانون هوک و با فرض رفتار الاستیک پوسته رابطه تنش- کرنش برای پوسته‌های مخروطی تحت بارگذاری حرارتی به‌صورت زیر است.

$$\{\sigma\} = [D]\,(\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_T\}) \qquad (۲-۲۸)$$

در رابطه (۲-۲۸) $\{\sigma\}$ و $\{\varepsilon\}$ به ترتیب بردار تنش و کرنش کل پوسته مخروطی هستند که مؤلفه‌های آن‌ها به‌صورت زیر می‌باشند.

$$\{\sigma\}^T = \{\sigma_x \;\; \sigma_\theta \;\; \tau_{xz} \;\; \tau_{\theta z} \;\; \tau_{x\theta}\} \tag{۲-۲۹}$$
$$\{\varepsilon\}^T = \{\, \varepsilon_x \;\; \varepsilon_\theta \;\; \gamma_{xz} \;\; \gamma_{\theta z} \;\; \gamma_{x\theta}\}$$

$\{\varepsilon_T\}$ نیز بردار کرنش حرارتی است و به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\{\varepsilon_T\}^T = \Delta T\,\{\alpha \;\; \alpha \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0\,\} \tag{۲-۳۰}$$

در رابطه (۲-۳۰) α ضریب انبساط حرارتی مادّه متغیّر تابعی است که در رابطه (۱-۱۳) محاسبه‌شده است. ΔT مقدار افزایش دما در جهت ضخامت پوسته مخروطی می‌باشد که می‌توان آن را به‌وسیله یک سری فوریه به‌صورت زیر بیان کرد.

$$\Delta T = \sum_{m=0}^{\infty} \Delta T_m \cos(m\theta) \tag{۲-۳۱}$$

در رابطه بالا ΔT_m مقدار افزایش دما به ازای m اُمین مد محیطی می‌باشد. در رابطه (۲-۲۸) نیز ماتریس $[D]$ ماتریس الاستیسیته است که شامل خواص مکانیکی مادّه متغیّر تابعی می‌باشد و به موقعیت در راستای ضخامت پوسته وابسته است. رابطه این ماتریس به شکل زیر برای پوسته قابل بیان است.

$$D(x,z,T) = \frac{E(x,z,T)}{1-v^2(z)}\begin{pmatrix} 1 & \vartheta(z) & 0 & 0 & 0 \\ \vartheta(z) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\vartheta(z)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1-\vartheta(z)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1-\vartheta(z)}{2} \end{pmatrix} \tag{۲-۳۲}$$

۲-۸- انرژی پتانسیل

رابطه انرژی پتانسیل کل برای پوسته‌های مخروطی شکل به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\Pi = U - W \tag{۲-۳۳}$$

در رابطه (۲-۳۳) U انرژی کرنشی کل است که شامل انرژی کرنشی خطی و غیرخطی می‌باشد. بنابراین می‌توان رابطه انرژی کرنشی کل را به‌صورت زیر نوشت.

$$U = U_L + U_{NL} \tag{۲-۳۴}$$

قبل از پدیده کمانش رابطه کرنش- جابجایی به‌صورت خطی است. درنتیجه انرژی کرنشی خطی به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$U_L = \frac{1}{2}\int_V \left((\{\varepsilon_L\}^T - \{\varepsilon_T\}^T)\{\sigma\}\right) dV \tag{۲-۳۵}$$

در رابطه (۲-۳۵) $\{\varepsilon_L\}^T$ بردار کرنش خطی است که می‌توان رابطه آن با بردار جابجایی را به شکل زیر نوشت.

$$\{\varepsilon_L\} = [B_L]\{d_e\} \tag{۲-۳۶}$$

در رابطه (۲-۳۶) $[B_L]$ ماتریس کرنش- جابجایی می‌باشد که از توابع شکل و مشتقات آن‌ها تشکیل‌شده و در پیوست پایان‌نامه آمده است. $\{d_e\}$ نیز بردار تغییر مکان گره‌ای هر المان می‌باشد. با جایگذاری روابط (۲-۳۰) و (۲-۳۶) در رابطه (۲-۳۵) می‌توان انرژی کرنشی خطی پوسته را به‌صورت زیر محاسبه کرد.

$$U_L = \frac{1}{2}\int_V (\{d_e\}^T[B_L]^T - \{\alpha\}^T\Delta T)[D]([B_L]\{d_e\} - \{\alpha\}\Delta T)\, dV$$

$$\begin{aligned} U_L = \frac{1}{2}\{d_e\}^T \int_V ([B_L]^T[D][B_L])\, dV\, \{d_e\} - \{d_e\}^T \int_V ([B_L]^T[D]\{\alpha\}\Delta T)\, dV \\ + \frac{1}{2}\int_V (\{\alpha\}^T[D]\{\alpha\}(\Delta T)^2)\, dV \end{aligned} \tag{۲-۳۷}$$

در رابطه (۲-۳۳) W شامل کار نیروهای خارجی و برابر است با:

$$W = W_b + W_s + W_p \tag{۲-۳۸}$$

W_b، W_s و W_p به ترتیب کار نیروهای خارجی حجمی، سطحی و متمرکز اعمال‌شده بر پوسته مخروطی می‌باشد. با توجه به اینکه در کار حاضر از وزن پوسته صرف‌نظر شده است و همچنین هیچ‌گونه نیروی سطحی و حجمی وجود ندارد، بنابراین در این پژوهش کار نیروهای خارجی صفر می‌باشد. لازم به ذکر ا ست که اثر بارگذاری حرارتی همان‌گونه که در رابطه (۲-۳۵) قابل‌م شاهده ا ست، در انرژی کرن شی خطی پوسته لحاظ شده است.

طبق اصل کار مجازی و با گرفتن مشتق اول از انرژی پتانسیل نسبت به بردار جابجایی و برابر صفر قرار دادن آن می‌توان رابطه (۲-۳۳) را به شکل زیر نوشت.

$$\delta\Pi = 0 \tag{۲-۳۹}$$

$$\delta U = 0 \tag{۲-۴۰}$$

اکنون با توجه به روابط (۲-۳۷) و (۲-۴۰)، تغییرات اول انرژی کرنشی خطی به‌صورت زیر قابل‌محاسبه است.

$$\delta U_L = \delta\{d_e\}^T \int_V ([B_L]^T[D][B_L])\, dV\, \{d_e\} - \delta\{d_e\}^T \int_V ([B_L]^T[D]\{\alpha\}\Delta T)\, dV \tag{۲-۴۱}$$

با قرار دادن رابطه (۲-۴۱) در رابطه (۲-۴۰) می‌توان روابط زیر را به دست آورد.

$$[K] = \int_V ([B_L]^T[D][B_L])\, dV \tag{۲-۴۲}$$

$$\{F_T\} = \int_V ([B_L]^T[D]\{\alpha\}\Delta T)\, dV \tag{۲-۴۳}$$

که $[K]$ و $[F_T]$ به ترتیب ماتریس سفتی هر المان برای m اُمین مد محیطی و بردار بار حرارتی المان می‌باشند.

در ادامه بعد از مونتاژ کردن و اعمال شرایط مرزی و محاسبه ماتریس سفتی و بردار بار المان حرارتی برای کل پوسته مخروطی می‌توان طبق رابطه تعادل استاتیکی بردار کاهش‌یافته جابجایی‌های گره‌ای پوسته را به‌وسیله رابطه زیر به دست آورد.

$$\{F_T\} = [K]\{d\} \tag{۲-۴۴}$$

پس از به دست آوردن جابجایی‌های کل پوسته می‌توان بردار تنش‌های هر المان را که به آن تنش‌های پیش کمانش گفته می‌شود به‌صورت زیر به دست آورد.

$$\{\sigma_e\}^0 = [D]([B_L]\{d_e\} - \{\alpha\}\Delta T) \tag{۲-۴۵}$$

در ادامه روند حل مسأله برای یافتن معادله عمومی کمانش ابتدا به دلیل اینکه بعد از وقوع پدیده کمانش رابطه کرنش- جابجایی غیرخطی است، می‌بایست انرژی کرنشی غیرخطی نیز به‌صورت زیر محاسبه شود.

$$U_{NL} = \frac{1}{2}\int_V (\{\varepsilon_{NL}\}^T\{\sigma\}^0)\, dV$$

(۲-۴۶)

$$U_{NL} = \frac{1}{2}\int_V \left\{(\varepsilon_x)^{NL}\sigma_x^0 + (\varepsilon_\theta)^{NL}\sigma_\theta^0 + (\varepsilon_{x\theta})^{NL}\tau_{x\theta}^0\right\}$$

در رابطه (۲-۴۶) $\{\sigma\}^0$ تنش‌های پیش کمانش هستند که در رابطه (۲-۴۵) به دست آمدند. $\{\varepsilon_{NL}\}$ نیز بردار کرنش‌های غیرخطی برای پوسته‌های مخروطی است که در رابطه (۲-۲۶) محاسبه‌شده است.

با استفاده از رابطه (۲-۲۶) و رابطه (۲-۲۷) می‌توان بردار کرنش‌های غیرخطی و همچنین رابطه آن با جابجایی‌های گره‌ای هر المان را به‌صورت زیر نوشت.

$$\{\varepsilon_{NL}\}^T = \{\beta_1 \ \ \beta_2 \ \ \gamma_1 \ \ \gamma_2 \ \ \alpha_1 \ \ \alpha_2\} \tag{۲-۴۷}$$

$$\{\varepsilon_{NL}\} = [B_{NL}]\{d_e\} \tag{۲-۴۸}$$

در رابطه بالا $[B_{NL}]$ ماتریس کرنش جابجایی غیرخطی است که از توابع شکل و مشتقات آن تشکیل‌شده است. این ماتریس در پیوست پایان‌نامه آمده است. $\{d_e\}$ همانند قبل بردار تغییر مکان گره‌ای هر المان می باشد.

در ادامه ماتریس تنش‌های پیش کمانش در رابطه (۲-۴۵) را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد.

$$[\sigma]^0 = [Z]^T[\sigma][Z] \tag{۲-۴۹}$$

که ماتریس‌های $[Z]$ و $[\sigma]$ در پیوست آورده شده است. اکنون با استفاده از رابطه (۲-۴۹) و (۲-۴۷) می‌توان رابطه (۲-۴۶) را به‌صورت زیر نیز نوشت.

$$U_{NL} = \frac{1}{2}\int_V (\{\varepsilon_{NL}\}^T[Z]^T[\sigma][Z]\{\varepsilon_{NL}\})\, dV \tag{۲-۵۰}$$

با کمک رابطه (۲-۴۸) می‌توان انرژی کرنشی غیرخطی را برحسب جابجایی‌های هر گره برای هر المان نوشت.

$$U_{NL} = \frac{1}{2}\int_V (\{d_e\}^T[B_{NL}]^T[Z]^T[\sigma][Z][B_{NL}]\{d_e\})\, dV \tag{۲-۵۱}$$

در ادامه بحث، می‌بایست برای یافتن معادله‌ی تعادل مسأله کمانش، تغییرات مرتبه دوم انرژی پتانسیل کل پوسته را (با در نظر گرفتن بخش خطی و غیرخطی رابطه کرنش- جابجایی) بر اساس شرایط پایداری ترفز برابر صفر قرارداد.

$$\delta^2\Pi = 0 \tag{۲-۵۲}$$

$$\delta^2 U = \delta^2 U_L + \delta^2 U_{NL} = 0 \tag{۲-۵۳}$$

در رابطه (۲-۵۳) تغییرات دوم بخش خطی و غیرخطی انرژی کرنشی به‌صورت زیر بیان می‌شود.

$$\delta^2 U_L = \delta\{d_e\}^T \int_V ([B_L]^T[D][B_L])\, dV\, \delta\{d_e\}$$ (۲-۵۴)

$$\delta^2 U_{NL} = \delta\{d_e\}^T \int_V T_{cr}([B_{NL}]^T[Z]^T[\sigma]^*[Z][B_{NL}])\, dV \delta\{d_e\}$$ (۲-۵۵)

در رابطه بالا T_{cr} دمای کمانش بحرانی است. ماتریس $[\sigma]^*$ نیز ماتریس تنش‌های پیش کمانش به ازای افزایش دمای واحد می‌باشد. با جایگذاری روابط (۲-۵۴) و (۲-۵۵) در (۲-۵۳) رابطه زیر به دست خواهد آمد.

$$[K_G]_T = \int_V ([B_{NL}]^T[Z]^T[\sigma]^*[Z][B_{NL}])\, dV$$ (۲-۵۶)

در رابطه (۲-۵۶) $[K_G]_T$ ماتریس سفتی هندسی برای هر المان در اثر افزایش دمای واحد است. با مونتاژ کردن ماتریس سفتی هندسی برای کل پوسته، درنهایت می‌توان معادل تعادل کمانش پوسته مخروطی جدار متغیّر ساخته‌شده از مواد متغیّر تابعی را به‌صورت زیر نوشت.

$$([K] + T_{cr}[K_G]_T)\delta\{d\} = 0$$ (۲-۵۷)

در رابطه (۲-۵۷) برای یافتن جواب‌های غیر صفر می‌بایست:

$$([K] + T_{cr}[K_G]_T) = 0$$ (۲-۵۸)

با حل مسأله مقدار ویژه بالا می‌توان برای یک بارگذاری حرارتی مقدار دمای بحرانی کمانش (T_{cr}) را محاسبه کرد.

۲-۹- انتگرال‌گیری عددی با روش گاوس

در این پژوهش روند حل با استفاده از کد نویسی در نرم‌افزارهای متلب و میپل انجام‌شده است. برای انتگرال‌گیری در راستای محیطی (θ) از نرم‌افزار میپل و برای انتگرال‌گیری در راستای x و z از نرم‌افزار متلب و روش عددی گاوس استفاده‌شده است. استفاده از روش حل عددی برای انتگرال‌گیری به‌جای روش تحلیلی باعث کاهش زمان حل مسأله شده است.

برای انتگرال‌گیری با استفاده از روش عددی گاوس در هر جهت ۴ نقطه درنظرگرفته شده است. مختصات نقاط گاوسی(x_i) و وزن آن‌ها (w_i) در جدول (۲-۱) آمده است.

جدول (۲-۱) مختصات و وزن نقاط گاوسی

تعداد نقاط گاوسی	مختصات نقاط گاوسی(x_i)	وزن نقاط گاوسی(w_i)
4	$x_1, x_4 = \pm 0.8611363116$	0.3478548451
	$x_2, x_3 = \pm 0.3399810436$	0.6521451549

بعد از انتگرال‌گیری در جهت θ، انتگرال‌های سه‌گانه بر روی حجم در روابط ماتریس سفتی، بردار بار حرارتی و ماتریس سفتی هندسی به انتگرال دوگانه بر روی سطح المان تبدیل خواهند شد. حال می‌توان با توجه به انتگرال‌گیری عددی گاوس روابط (۲-۴۲)، (۲-۴۳) و (۲-۵۶) را به‌صورت زیر بازنویسی کرد.

$$[K] \cong \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} w_i w_j \left[B_L(x_i, z_j)\right]^T [D]\left[B_L(x_i, z_j)\right] \tag{۲-۵۹}$$

$$\{F_T\} \cong \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} w_i w_j \left[B_L(x_i, z_j)\right][D]\left\{\alpha(x_i, z_j)\right\}\Delta T \tag{۲-۶۰}$$

$$[K_G]_T \cong \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} w_i w_j \left[B_{NL}(x_i, z_j)\right]\left[Z(z_j)\right][\sigma]\left[Z(z_j)\right]\left[B_{NL}(x_i, z_j)\right] \tag{۲-۶۱}$$

۲-۱۰- الگوریتم حل مسأله

الگوریتم حل مسأله کمانش حرارتی پوسته مخروطی متغیّر تابعی با جدار متغیّر با استفاده از روش اجزای محدود نیمه‌تحلیلی را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

۱. انتخاب المان مناسب با در نظر گرفتن هندسه پوسته مخروطی جدار متغیّر
۲. به دست آوردن ماتریس سفتی با حل انتگرال رابطه (۲-۵۹) و مونتاژ آن برای کل پوسته
۳. محاسبه بردار بار حرارتی با حل انتگرال رابطه (۲-۶۰) و محاسبه آن برای کل المان
۴. اعمال شرایط مرزی و محاسبه ماتریس سفتی هندسی و بردار نیروی حرارتی کاهش‌یافته

۵. محاسبه بردار جابجایی گره‌ای به‌وسیله حل معادله تعادل استاتیکی (۲-۴۴) و با توجه به ماتریس سفتی و بردار بار حرارتی کاهش‌یافته که در مرحله چهارم به دست آمد.

۶. یافتن بردار تنش‌های پیش کمانش با استفاده از رابطه (۲-۴۵) و بردار جابجایی گره‌ای محاسبه‌شده در مرحله قبل

۷. محاسبه ماتریس سفتی هندسی با حل انتگرال رابطه (۲-۶۱) و مونتاژ آن برای کل پوسته

۸. اعمال شرایط مرزی حاکم بر مسأله برای محاسبه ماتریس سفتی هندسی کاهش‌یافته

۹. حل معادله تعادل و به دست آوردن دمای بحرانی در mاُمین مد کمانش و همچنین ترسیم نمودار دمای بحرانی برحسب مد کمانش

فصل سوم

نتایج تحلیل کمانش

۳-۱- مقدمه

پس از تکمیل فرمول‌بندی مسأله و نوشتن معادله کمانش، همچنین نوشتن کدهای مربوطه در نرم‌افزارهای ذکرشده در فصل دوم، در این فصل نتایج کمانش حرارتی پوسته مخروطی متغیّر تابعی با جدار متغیّر ارائه‌شده است. نتایج شامل بررسی اثر تغییر ضخامت، ابعاد پوسته، زاویه نیم رأس مخروط، شرایط مرزی و همچنین جنس مادّه متغیّر تابعی می‌باشد.

۳-۱-۱- مشخصات مکانیکی و حرارتی مواد متغیّر تابعی

در کار حاضر در فاز فلزی مادّه متغیّر تابعی از فولاد ضدزنگ و آلیاژ تیتانیوم و در فاز سرامیکی از آلومینا، زیرکونیا و سیلیکون نیترید[۱] استفاده‌شده است. در جدول (۳-۱) نحوه چینش لایه فلزی و سرامیکی در راستای ضخامت پوسته مخروطی نوشته‌شده است. ضرایب وابسته به دما خواص مکانیکی و حرارتی مواد متغیّر تابعی که در رابطه (۱-۸) به آن‌ها اشاره‌شده است، در جدول‌های (۳-۲)، (۳-۳) و (۳-۴) برای مواد ذکرشده آورده شده است [۵۸].

جدول (۳-۱) خصوصیات مواد متغیّر تابعی مورد استفاده در تحلیل حاضر

پوسته مخروطی متغیّر تابعی	فاز فلزی	فاز سرامیکی	لایه بیرونی	لایه داخلی
مادّه ۱	فولاد ضدزنگ	آلومینا	فلزی	سرامیکی
مادّه ۲	آلیاژ تیتانیوم	زیرکونیا	فلزی	سرامیکی
مادّه ۳	فولاد ضد زنگ	سیلیکون نیترید	سرامیکی	فلزی

[1] Si_3N_4

جدول (۳-۲) ضرایب وابسته به دما برای مدول یانگ $\left[\frac{N}{m^2}\right]$

جنس	P_0	P_1	P_2	P_3
فولاد ضدزنگ	201.04×10^{9}	3.079×10^{-4}	-6.534×10^{-7}	0
آلیاژ تیتانیوم	122.56×10^{9}	-4.586×10^{-4}	0	0
آلومینا	349.55×10^{9}	-3.853×10^{-4}	4.027×10^{-7}	-1.673×10^{10}
زیرکونیا	244.27×10^{9}	-1.371×10^{-3}	1.214×10^{-6}	3.681×10^{-10}
سیلیکون نیترید	348.43×10^{9}	-3.07×10^{-4}	2.16×10^{-7}	-8.946×10^{-11}

جدول (۳-۳) ضرایب وابسته به دما برای ضریب انبساط حرارتی [1/ºC]

جنس	P_0	P_1	P_2	P_3
فولاد ضدزنگ	12.33×10^{-6}	8.086×10^{-4}	0	0
آلیاژ تیتانیوم	7.5788×10^{-7}	-6.638×10^{-4}	-3.147×10^{-6}	0
آلومینا	6.8269×10^{-6}	1.838×10^{-4}	0	0
زیرکونیا	12.766×10^{-6}	-1.491×10^{-3}	1.006×10^{-5}	-6.778×10^{-11}
سیلیکون نیترید	5.87×10^{-6}	9.09×10^{-4}	0	0

جدول (۳-۴) ضرایب وابسته به دما برای ضریب پواسون

جنس	P_0	P_1	P_2	P_3
فولاد ضدزنگ	0.3263	-2.002×10^{4}	3.797×10^{-7}	0
آلیاژ تیتانیوم	0.2884	1.121×10^{-4}	0	0
آلومینا	0.26	0	0	0
زیرکونیا	0.2882	1.133×10^{-4}	0	0
سیلیکون نیترید	0.24	0	0	0

۳-۱-۲- شرایط مرزی

در شرایط مرزی دوسرگیردار تمام درجات آزادی واقع در دوسر پوسته مخروطی صفر هستند. در حالت دوسر ساده فقط درجات آزادی ψ_x و ψ_θ مقید نیستند و بقیه درجات آزادی صفر می‌باشند. شرایط مرزی به‌صورت زیر توسط جابجایی‌های گره‌هایی که در دوسر پوسته مخروطی قرار دارند اعمال‌شده است.

شرط مرزی دوسرگیردار:

$$x = 0, L \qquad u_0 = v_0 = w_0 = \psi_x = \psi_\theta = 0 \tag{۳-۱}$$

شرط مرزی دوسر ساده:

$$x = 0, L \qquad u_0 = v_0 = w_0 = 0 \tag{۳-۲}$$

در ادامه برای بیان شرط مرزی دوسرگیردار از C-C و برای شرط مرزی دوسر ساده از S-S استفاده‌شده است.

۳-۲- صحه‌گذاری نتایج کمانش حرارتی

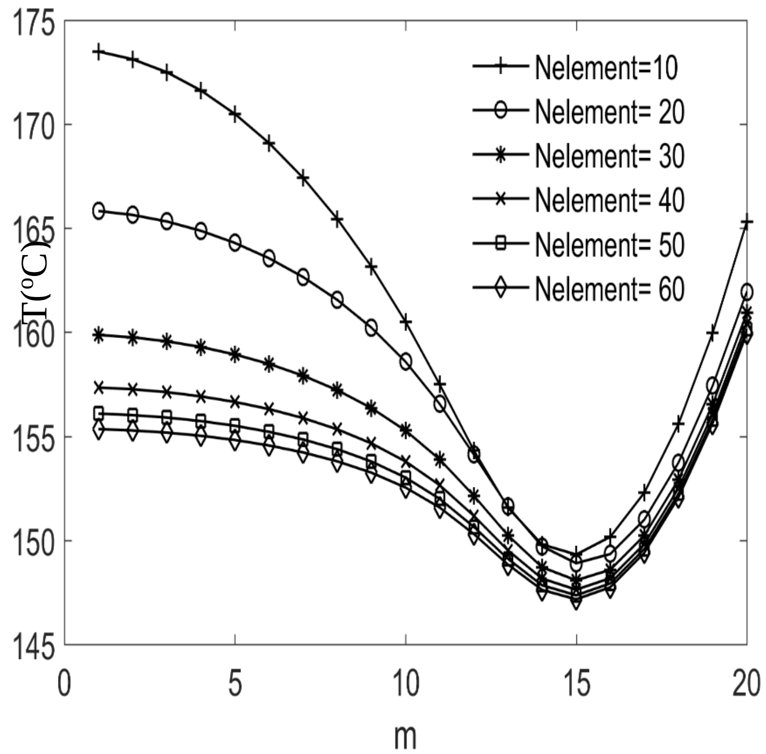
با محاسبه ماتریس سفتی و ماتریس سفتی هندسی برای کل پوسته مخروطی و در ادامه با کمک حل معادله (۲-۵۸) می‌توان دمای بحرانی کمانش پوسته را به دست آورد. در قدم اول برای بررسی درستی نتایج به‌دست‌آمده از کد نویسی با استفاده از نرم‌افزار متلب، ابتدا همگرایی نتایج کمانش حرارتی بررسی‌شده است. مادّه متغیّر تابعی انتخاب‌شده از جنس فولاد ضدزنگ و آلومینا است. سایر شرایط هندسی پوسته مخروطی در جدول (۳-۵) آمده است.

جدول (۳-۵) پارامترهای ورودی به‌کاربرده شده برای بررسی همگرایی

$\frac{R_1}{h_0}$	$\frac{L}{h_0}$	$h_0(m)$	n	$\emptyset$	β	μ	Boundary Condition
300	1	0.005	1	15º	0.20	0.50	C-C

شکل (۳-۱) همگرایی نمودار دمای بحرانی کمانش پوسته مخروطی متغیّر تابعی با جدار متغیّر برحسب مد محیطی را برای تعداد المان‌های مختلف نشان می‌دهد. با توجه به شکل مشاهده می‌شود که کد نوشته‌شده در نرم‌افزار متلب از همگرایی خوبی برخوردار است. بنابراین با توجه به وجود همگرایی می‌توان نتیجه گرفت که تابع درون یاب انتخاب‌شده برای مدل کردن جابجایی‌های گره‌ای مناسب بوده است.

در ادامه کار برای بالا بردن دقت در نتایج تحلیل کمانش حرارتی از تعداد ۵۰ المان استفاده‌شده است. یکی از مزایای روش اجزای محدود نیمه‌تحلیلی همگرا شدن پاسخ‌ها در تعداد المان پایین است.



شکل (۳-۱) بررسی همگرایی دمای بحرانی کمانش حرارتی پوسته مخروطی FGM با جدار متغیّر

پس از بررسی همگرایی مسأله نتایج برای کمانش حرارتی پوسته مخروطی متغیّر تابعی با جدار ثابت طبق مرجع [۱۱] صحه‌گذاری شده است. همچنین نتایج برای پوسته استوانه‌ای متغیّر تابعی با جدار ثابت نیز با کمک مرجع [۳۵] صحه‌گذاری شده و با مرجع [۱۹] مقایسه شده است.

در مرجع [۱۱] از روش $GDQM$ بر پایه تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول استفاده‌شده است. دما در سطح فلزی پوسته مخروطی ۲۷ درجه سانتی‌گراد فرض شده است. همچنین جنس پوسته مخروطی از نوع مادّه ۱ در نظر گرفته‌شده است. مقادیر هندسی استفاده‌شده در جدول (۳-۶) آمده است.

جدول (۳-۶) پارامترهای ورودی برای صحه‌گذاری نتایج کمانش حرارتی پوسته مخروطی متغیّر تابعی با جدار ثابت [۱۱]

$\frac{R_1}{h_0}$	$\frac{L}{h_0}$	$h_0(m)$	$\emptyset$	Boundary Condition
252.5573	304.7896	0.005	15^o	C-C

جدول (۳-۷) مقادیر دمای بحرانی کمانش حرارتی در کار حاضر و مرجع [۱۱] را نشان می‌دهد. اختلاف پیش‌آمده در نتایج به دلیل تفاوت در تئوری‌های مرتبه اول و مرتبه سوم و همچنین روش‌های عددی استفاده‌شده دررروند تحلیل می‌باشد.

جدول (۳-۷) صحه‌گذاری نتایج کمانش حرارتی پوسته مخروطی متغیّر تابعی با جدار ثابت

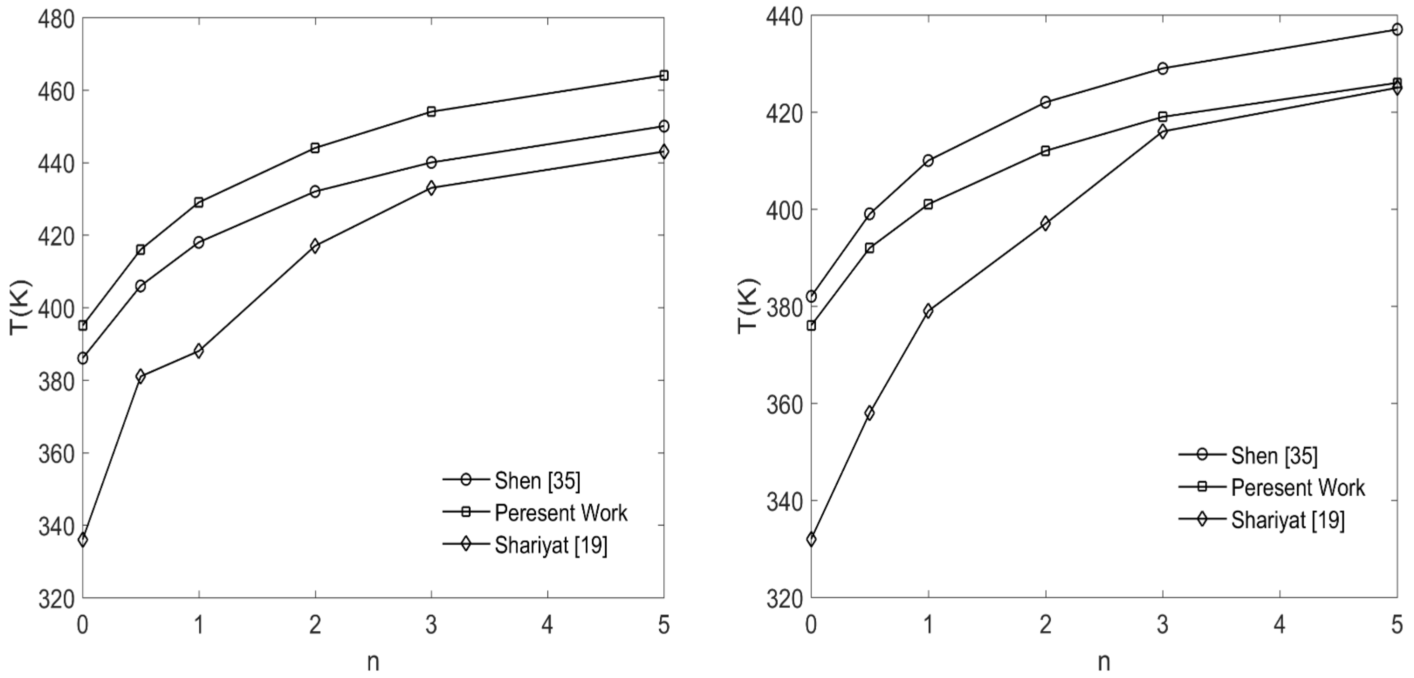
n	T(°C)		اختلاف نتایج (درصد)
	کار حاضر	مرجع [۱۱]	
0	150.44	150.23	0.13 %
0.5	181.04	180.06	0.54 %
1	200.79	198.11	1.30 %
5	246.39	248.36	0.79 %
10	261.41	265.41	1.50%
15	268.32	272.89	1.67%
100	285.5	288.85	1.15 %
1000	287.3	290.94	1.25 %

در مرجع [۱۹] از روش اجزای محدود بر پایه تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم استفاده‌شده است و در مرجع [۳۵] نتایج با کمک روش تحلیلی و بر پایه تئوری کلاسیک پوسته‌ها استخراج‌شده است. در مراجع ذکرشده جنس پوسته استوانه‌ای از نوع مادّه ۳ است و دمای محیط ۳۰۰ کلوین فرض شده است. مقادیر هندسی استفاده‌شده در جدول (۳-۸) آمده است.

جدول (۳-۸) پارامترهای ورودی برای صحه‌گذاری نتایج کمانش حرارتی پوسته استوانه‌ای متغیّر تابعی با جدار ثابت

$\frac{R_1}{h_0}$	$\frac{L^2}{R_1 h_0}$	$h_0(m)$	Ø	Boundary Condition
400	300	0.005	0°	C-C

شکل (۳-۲) نتایج کمانش حرارتی پوسته استوانه‌ای متغیر تابعی با جدار ثابت را در مقایسه با مراجع [۳۵] و [۱۹] برای حالت‌های خواص وابسته به دما و مستقل از دما نشان می‌دهد. اختلاف پیش‌آمده در نتایج به دلیل تفاوت در تئوری‌های مرتبه سوم و کلاسیک و همچنین روش‌های عددی و تحلیلی استفاده‌شده درروند حل می‌باشد. همان‌طور که در شکل مشخص است میزان خطا در کار حاضر به‌مراتب از نتایج مرجع [۱۹] کمتر است.



الف- دمای بحرانی کمانش در حالت خواص وابسته به دما   **ب**- دمای بحرانی کمانش در حالت خواص مستقل از دما

شکل (۳-۲) صحه‌گذاری نتایج کمانش حرارتی پوسته استوانه‌ای FGM با جدار ثابت

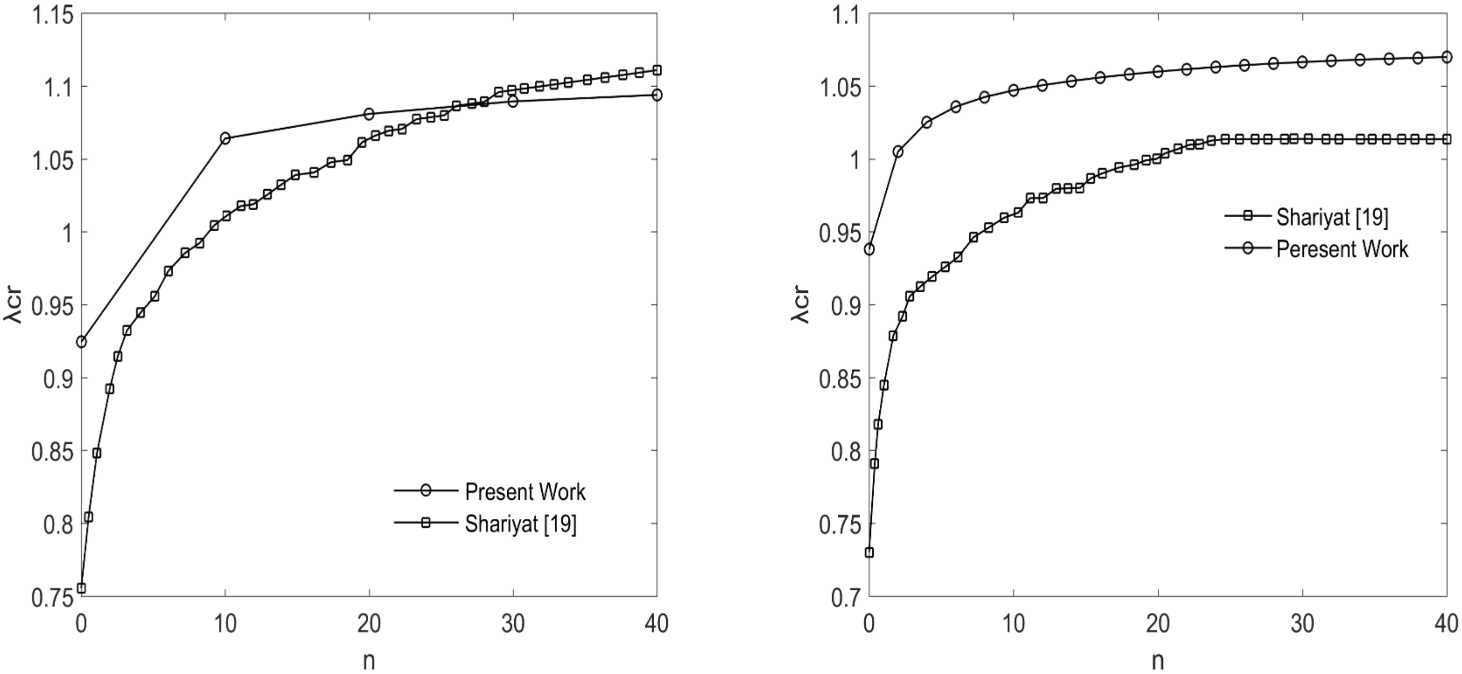
در ادامه برای صحه‌گذاری نتایج کمانش حرارتی پوسته مخروطی جدار متغیّر می‌توان پارامتری را به‌عنوان ضریب بار کمانش حرارتی [۱۹] به‌صورت زیر تعریف کرد.

$$\lambda_{cr} = \frac{\Delta T_{cr}}{\Delta T_{Baseline}} \tag{۳-۳}$$

که در رابطه بالا $\Delta T_{Baseline}$ مقدار افزایش دمای بحرانی به ازای n، β و یا μ صفر است.

شکل (۳-۳) نتایج کمانش حرارتی پوسته استوانه‌ای متغیّر تابعی با جدار متغیّر را در مقایسه با مرجع [۱۹] برای حالت‌های خواص وابسته به دما و مستقل از دما نشان می‌دهد.

در این مقایسه $\beta = -0.2$ و $\mu = 0$ در نظر گرفته‌شده است. تابع تغییر ضخامت از نوع نمایی و شرایط مرزی دوسر ساده است. اختلاف پیش‌آمده در نتایج به دلیل روش‌های عددی متفاوت استفاده‌شده درروند حل مسأله می‌باشد. همچنین با توجه شکل (۳-۲) می‌توان نتیجه گرفت که وجود این اختلاف دور از انتظار نمی‌باشد.



الف- بار بحرانی کمانش در حالت خواص وابسته به دما

ب- بار بحرانی کمانش در حالت خواص مستقل از دما

شکل (۳-۳) صحه‌گذاری نتایج کمانش حرارتی پوسته استوانه‌ای FGM با جدار متغیّر

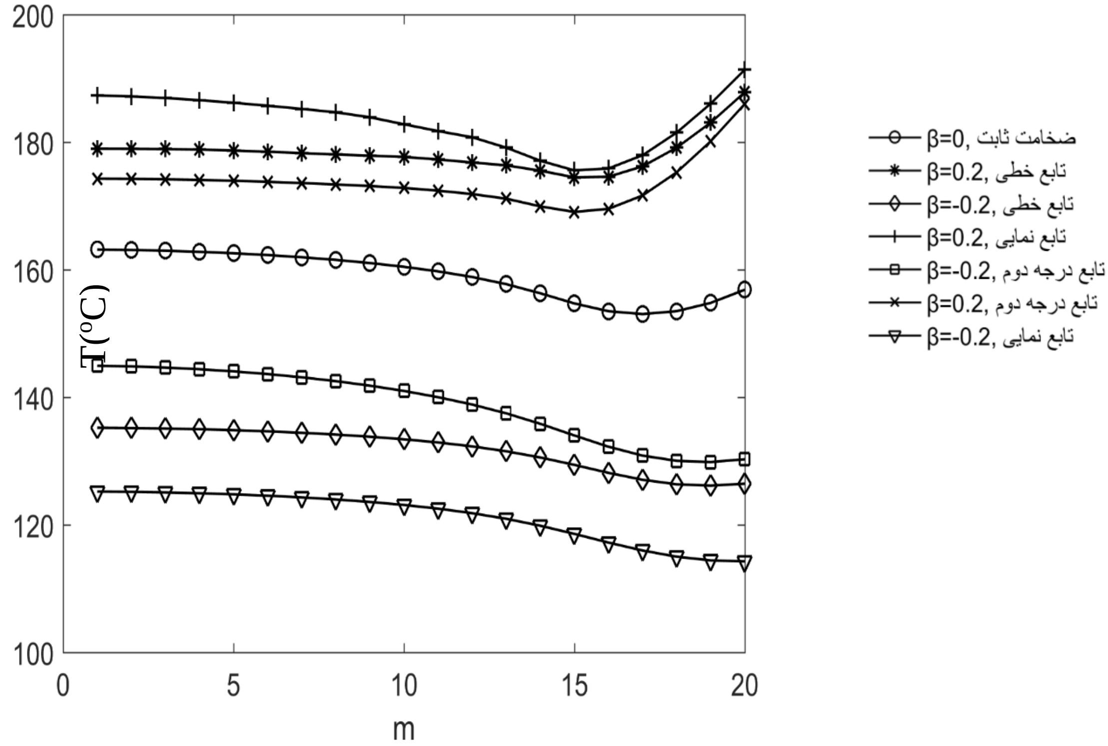
۳-۳- نتایج کمانش حرارتی پوسته‌های مخروطی متغیّر تابعی با جدار متغیّر

پس از صحه‌گذاری نتایج کمانش حرارتی برای پوسته مخروطی متغیّر تابعی با جدار ثابت، اکنون در این بخش تأثیر پارامترهای مختلف بر دمای بحرانی کمانش پوسته مخروطی متغیّر تابعی با جدار متغیّر بررسی می‌شود. جنس مادّه متغیّر تابعی استفاده‌شده در هر بخش ذکرشده است. شرایط هندسی استفاده‌شده در جدول (۳-۸) آمده است و در صورت استفاده از پارامترهای متفاوت، در بخش مربوطه ذکرشده است.

جدول (۳-۹) پارامترهای ورودی به‌کاربرده شده در تحلیل کمانش حرارتی پوسته مخروطی متغیّر تابعی با جدار متغیّر

$\frac{R_1}{h_0}$	$\frac{L}{R_1}$	$h_0(m)$	n	$\emptyset$	β	μ	Boundry Condition
300	1	0.005	1	30^{o}	0.20	-0.50	C-C

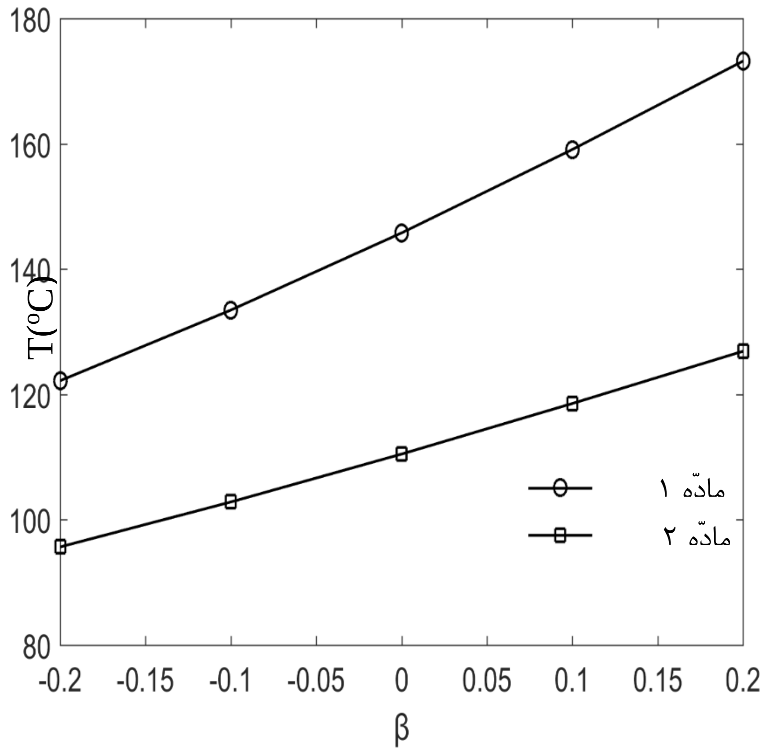
شکل (۳-۴) تأثیر توابع جدار متغیّر انتخاب‌شده در بخش (۱-۹) را برای حالت‌های $\beta = \pm 0.20$ (افزایش و کاهش ضخامت در راستای محوری پوسته) برحسب مد محیطی نشان می‌دهد. همان‌طور که از شکل (۳-۴) مشخص است، هر سه تابع در حالت β مثبت به دلیل افزایش ضخامت در جهت محوری پوسته باعث افزایش دمای کمانش می‌شوند که تابع‌نمایی بیشترین افزایش دمای کمانش را در بین سه تابع انتخاب‌شده دارد. همچنین مشاهده می‌شود که با قرار دادن β منفی به دلیل کاهش ضخامت در راستای محوری پوسته دمای کمانش کاهش‌یافته است و تابع‌نمایی کمترین کاهش دمای کمانش را در بین توابع انتخاب‌شده دارد.



شکل (۳-۴) تأثیر β بر کمانش حرارتی پوسته مخروطی FGM جدار متغیّر

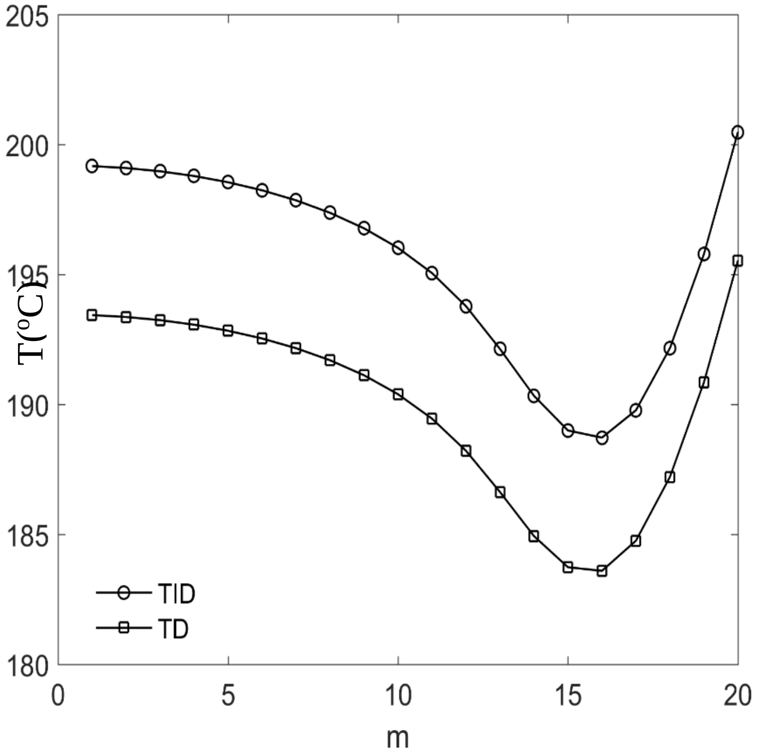
با توجه به شکل برای ادامه کار از تابع‌نمایی به‌عنوان مدل تغییر ضخامت در راستای محوری پوسته استفاده‌شده است.

شکل (۳-۵) تأثیر جنس پوسته مخروطی جدار متغیّر بر دمای بحرانی کمانش را در حالت خواص وابسته به دما و برحسب β نشان می‌دهد. با توجه به جدول (۳-۳) و رابطه (۱-۱۳) می‌توان مقدار ضریب انبساط حرارتی مادّه ۱ و ۲ را محاسبه کرد. مشاهده می‌شود که مادّه ۲ ضریب انبساط حرارتی بالاتری دارد، همچنین با توجه به شکل می‌توان نتیجه گرفت که این مادّه مقاومت کمتری در مقابل کمانش حرارتی از خود نشان می‌دهد. همان‌طور که در شکل مشخص است با انتخاب β مثبت می‌توان کاهش دمای کمانش را در مادّه ۲ جبران کرد. همچنین برای مادّه ۱ نیز افزایش ضخامت پوسته در راستای محوری باعث بهبود دمای بحرانی کمانش می‌شود. در ادامه کار از مادّه ۱ برای تحلیل نتایج کمانش حرارتی استفاده‌شده است.



شکل (۳-۵) تأثیر جنس مادّه بر کمانش حرارتی پوسته مخروطی FGM با جدار متغیّر

شکل (۳-۶) تأثیر وابستگی خواص مادّه متغیّر تابعی به دما را برحسب مد محیطی نشان می‌دهد. همان‌طور که در شکل مشخص است در حالتی که خواص مستقل از دما هستند دمای بحرانی کمانش پوسته مخروطی بالاتر از زمانی است که خواص وابسته به دما هستند.

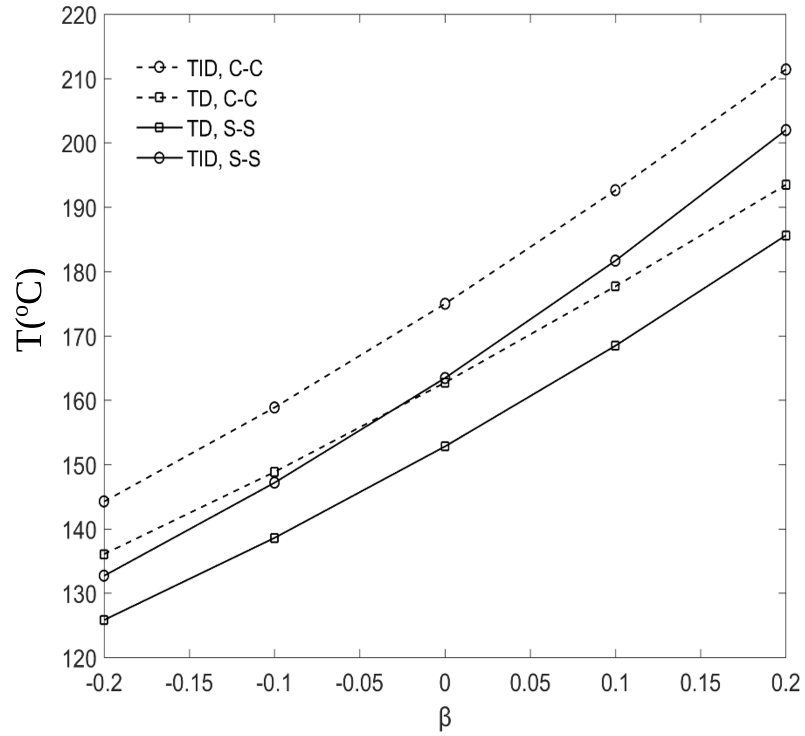


شکل (۳-۶) تأثیر وابستگی خواص مادّه متغیّر تابعی به دما بر کمانش حرارتی پوسته مخروطی FGM با جدار متغیّر

شکل (۳-۷) تأثیر شرایط مرزی دوسرگیردار و ساده بر کمانش حرارتی پوسته مخروطی متغیّر تابعی با جدار متغیّر در حالت خواص وابسته به دما و خواص مستقل از دما را برحسب مقادیر مختلف β نشان می‌دهد.

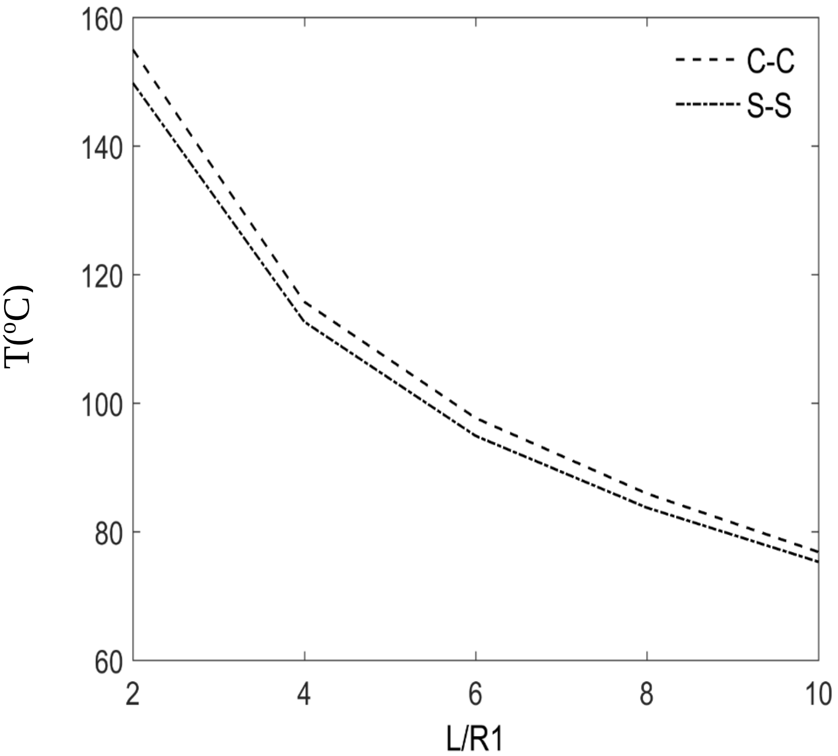
با توجه به شکل می‌توان نتیجه گرفت که اعمال شرایط مرزی دوسر ساده به دلیل اینکه این نوع تکیه‌گاه انعطاف‌پذیری بیشتری دارد و پایداری سازه را کاهش می‌دهد، باعث کاهش دمای بحرانی کمانش خواهد شد.

همان‌طور که در شکل مشخص است در حالت شرایط مرزی دو سر ساده با افزایش ضخامت در راستای محوری پوسته می‌توان تا حدی دمای کمانش را بهبود داد. در حالت دوسرگیردار نیز این قضیه صادق است، همچنین با افزایش ضخامت تأثیر شرایط مرزی بر دمای کمانش کمتر می‌شود. انتخاب مقادیر منفی β نیز باعث کاهش دمای کمانش در هر دو حالت خواهد شد.



شکل (۳-۷) تأثیر شرایط مرزی بر کمانش حرارتی پوسته مخروطی FGM با جدار متغیّر

شکل (۳-۸) تأثیر نسبت طول به شعاع به ازای شرایط مرزی مختلف را بر دمای بحرانی کمانش پوسته مخروطی متغیّر تابعی با جدار متغیّر نشان می‌دهد. همان‌طور که در شکل مشخص است با افزایش نسبت طول به شعاع پوسته وابستگی دمای بحرانی کمانش به شرایط مرزی کاهش می‌یابد.



شکل (۳-۸) تأثیر شرایط مرزی و نسبت طول به شعاع بر کمانش حرارتی پوسته مخروطی FGM با جدار متغیّر

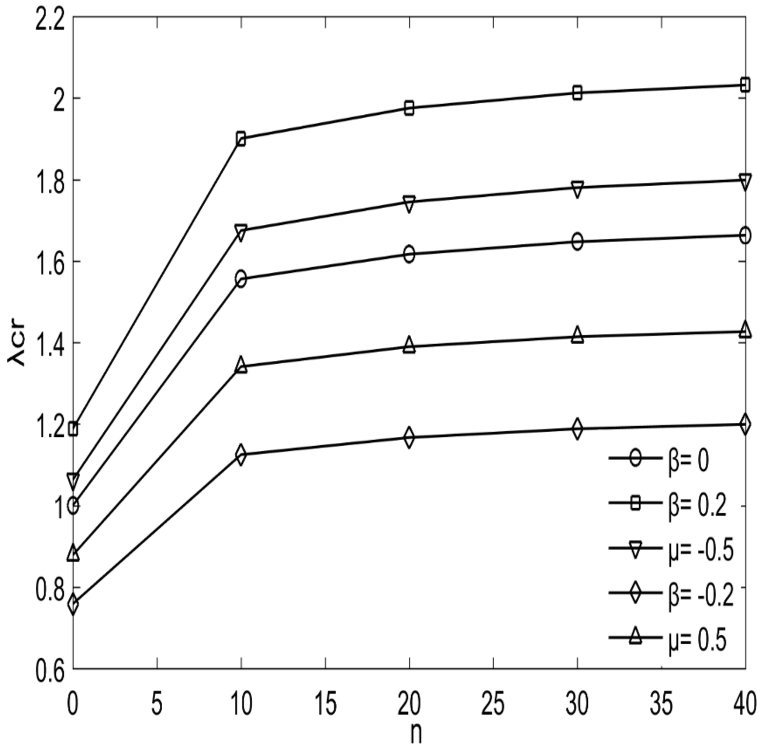
در ادامه برای تحلیل هم‌زمان تأثیر توان نسبت حجمی (n)، پارامتر تغییر ضخامت (β) و ضریب قانون نمایی (μ) بر دمای بحرانی کمانش می‌توان پارامتری به‌عنوان ضریب بار کمانش حرارتی [۱۶] به‌صورت زیر تعریف کرد.

$$\lambda_{cr} = \frac{\Delta T_{cr}}{\Delta T_{Baseline}} \tag{۳-۳}$$

که در رابطه بالا $\Delta T_{Baseline}$ مقدار افزایش دمای بحرانی به ازای n، β و یا μ صفر است.

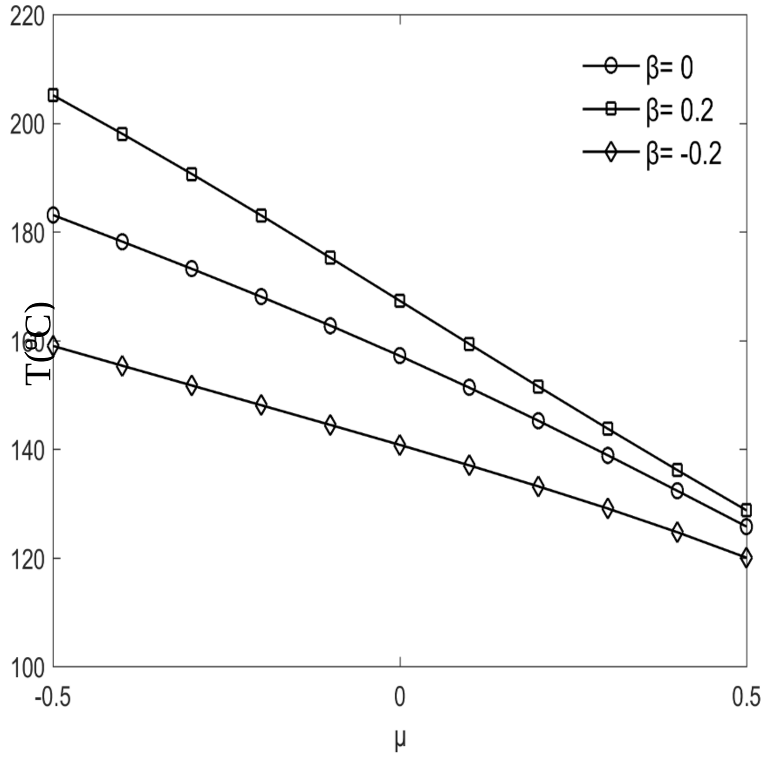
شکل (۳-۹) تأثیر افزایش n بر ضریب بار حرارتی کمانش به ازای β و μ مختلف را نشان می‌دهد. در حالت μ مثبت به دلیل افزایش قابل‌توجه ضریب انبساط حرارتی دمای کمانش کاهش‌یافته است. در حالت μ منفی به دلیل کاهش ضریب انبساط حرارتی دمای کمانش زیاد شده است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که تأثیر تغییرات ضریب انبساط حرارتی در راستای محوری به‌طور قابل‌ملاحظه‌ای بالاتر است.

در حالت کاهش ضخامت پوسته در جهت محوری ($\beta < 0$) به دلیل افزایش انعطاف‌پذیری پوسته مخروطی دمای کمانش کاهش پیدا می‌کند. همان‌طور که در شکل قابل‌مشاهده است افزایش n می‌تواند تا حدی این کاهش را جبران کند. با مقایسه تأثیر β و μ بر دمای کمانش نیز می‌توان نتیجه گرفت تأثیر پارامتر تغییر ضخامت (β) بیشتر از ضریب قانون نمایی (μ) است.



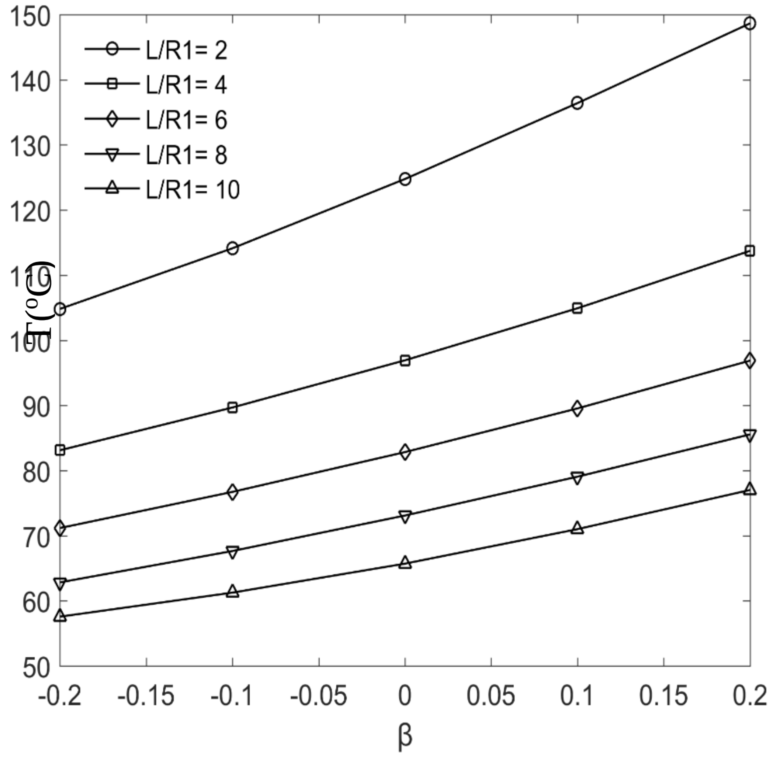
شکل (۳-۹) تأثیر پارامترهای مربوط به جنس و ضخامت بر کمانش حرارتی پوسته مخروطی FGM با جدار متغیّر

شکل (۳-۱۰) تأثیر μ بر دمای بحرانی کمانش پوسته مخروطی متغیّر تابعی با جدار متغیّر برحسب β متفاوت را نشان می‌دهد. همان‌طور که در شکل مشخص است می‌توان با در نظر گرفتن یک مقدار مناسب منفی برای μ تا حدی کاهش دمای کمانش را که ناشی از کاهش ضخامت ($\beta < 0$) در جهت محوری مخروط است را جبران کرد. همچنین می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش μ به دلیل افزایش ضریب انبساط حرارتی از اثر جدار متغیّر بر دمای بحرانی کمانش کاسته می‌شود. بنابراین برای هردو حالت β مثبت و منفی بهتر است از مقادیر منفی μ استفاده کرد.



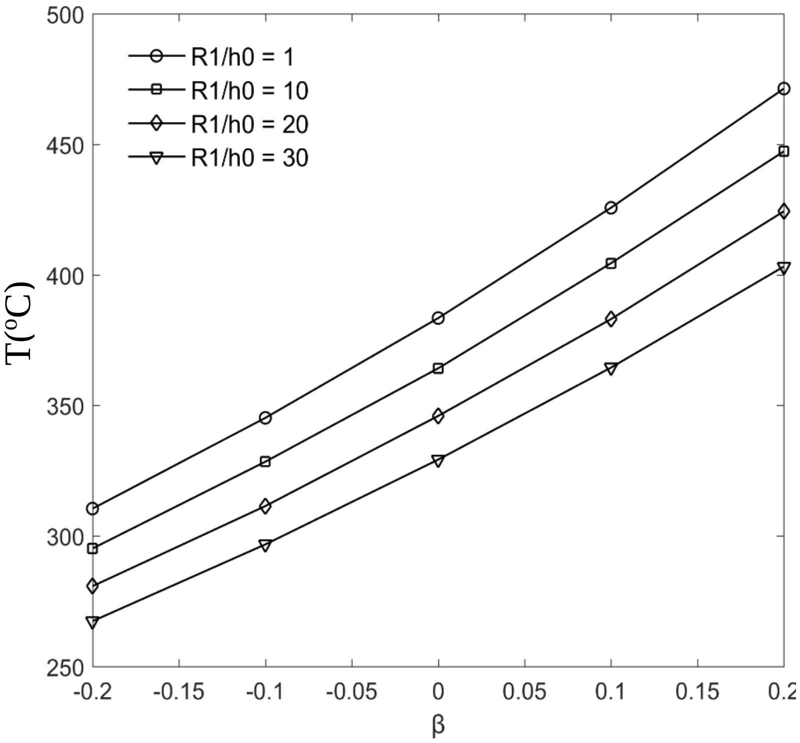
شکل (۳-۱۰) تأثیر μ به ازای β متفاوت بر کمانش حرارتی پوسته مخروطی FGM با جدار متغیّر

شکل (۳-۱۱) تأثیر پارامتر تغییر ضخامت و طول‌های مختلف را بر دمای بحرانی کمانش پوسته مخروطی متغیّر تابعی با جدار متغیّر نشان می‌دهد. در نتایج قبل مشخص شد که با افزایش طول به دلیل انعطاف‌پذیری بیشتر پوسته مخروطی دمای کمانش کاهش پیدا می‌کند. اکنون همان‌طور که در شکل مشخص است، برای پوسته مخروطی با طول‌های بالا می‌توان با افزایش ضخامت پوسته در جهت محوری ($\beta > 0$) از میزان کاهش دمای کمانش جلوگیری کرد. همچنین مشخص است که در طول‌های کم استفاده از مقادیر منفی β دمای بحرانی کمانش را کاهش می‌دهد.



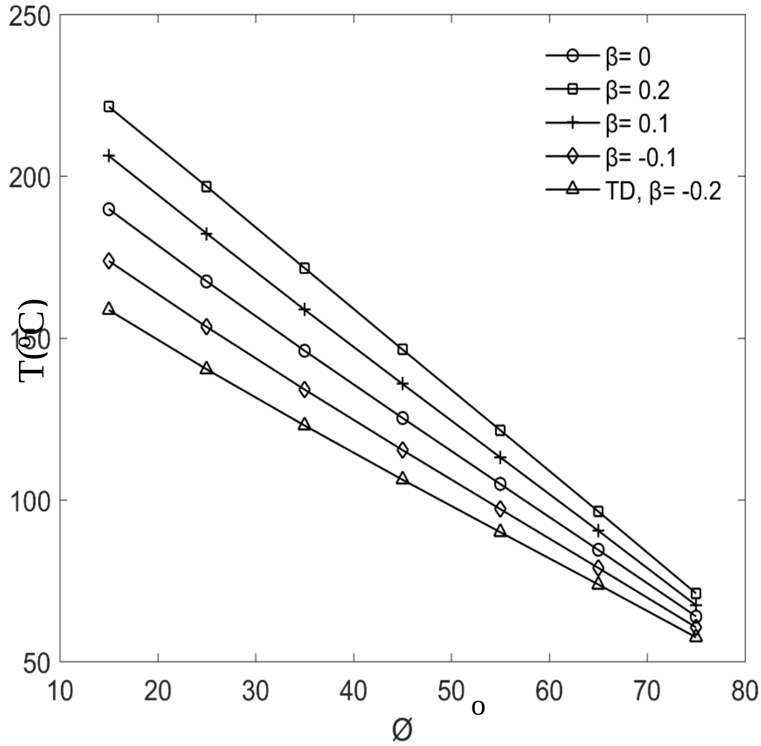
شکل (۳-۱۱) تأثیر β و نسبت طول به شعاع بر کمانش حرارتی پوسته مخروطی FGM با جدار متغیّر

شکل (۳-۱۲) تأثیر پارامتر تغییر ضخامت را برحسب شعاع‌های اولیه مختلف نشان می‌دهد. با توجه به شکل مشاهده می‌شود با کاهش شعاع اولیه پوسته به دلیل اینکه سفتی پوسته مخروطی بیشتر می‌شود دمای کمانش نیز افزایش پیدا می‌کند. در شعاع‌های اولیه بالا می‌توان با افزایش ضخامت ($\beta > 0$) در راستای محوری پوسته از کاهش دمای کمانش تا حدی جلوگیری کرد.



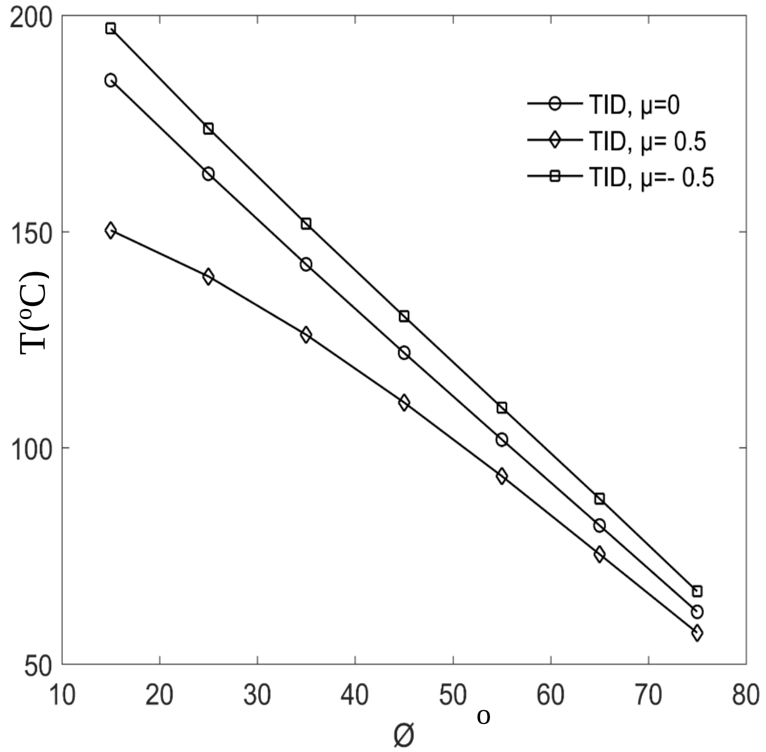
شکل (۳-۱۲) تأثیر β و نسبت شعاع به ضخامت اولیه بر کمانش حرارتی پوسته مخروطی FGM با جدار متغیّر

شکل (۳-۱۳) تأثیر افزایش زاویه نیم رأس مخروط بر دمای بحرانی کمانش پوسته مخروطی متغیّر تابعی با جدار متغیّر به ازای β مختلف را نشان می‌دهد. با توجه به شکل می‌توان به این نتیجه رسید که با افزایش زاویه نیم رأس مخروط دمای کمانش کاهش پیدا می‌کند که می‌توان با انتخاب β مثبت تا حدی این کاهش را جبران کرد. همچنین با افزایش زاویه نیم رأس مخروط وابستگی دمای بحرانی کمانش به β کمتر می‌شود.



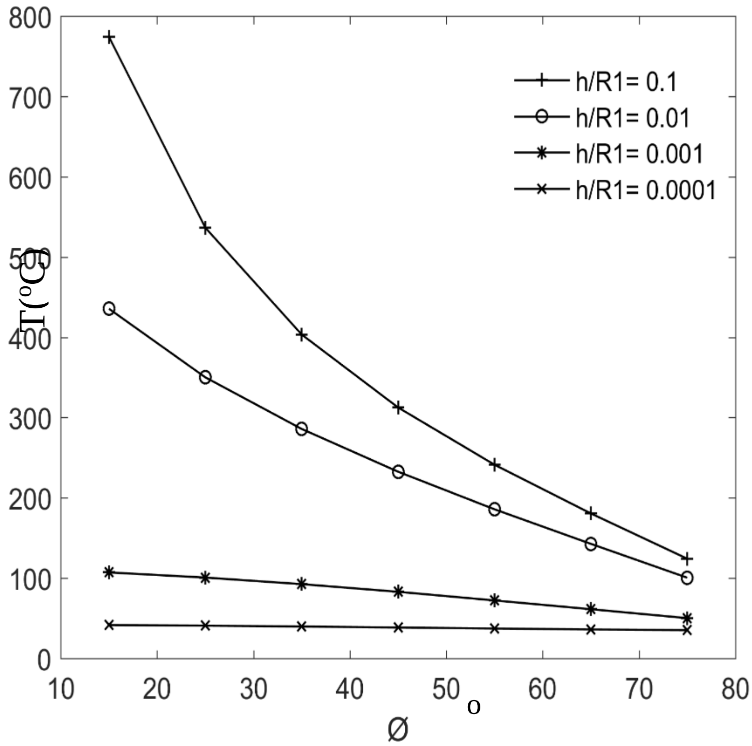
شکل (۳-۱۳) تأثیر زاویه نیم رأس و β بر کمانش حرارتی پوسته مخروطی FGM با جدار متغیّر

شکل (۳-۱۴) تأثیر افزایش زاویه نیم رأس مخروط و ضریب قانون نمایی مختلف بر دمای بحرانی کمانش پوسته مخروطی متغیّر تابعی با جدار متغیّر را نشان می‌دهد. همان‌طور که در شکل مشخص است با افزایش زاویه نیم رأس اثر ضریب انبساط حرارتی (μ مثبت و منفی) در راستای محوری پوسته بر دمای کمانش کاهش پیدا می‌کند. همچنین می‌توان در صورت انتخاب یک مقدار مثبت μ (افزایش ضریب انبساط حرارتی) با کاهش زاویه نیم رأس مخروط کاهش دمای کمانش را جبران کرد.



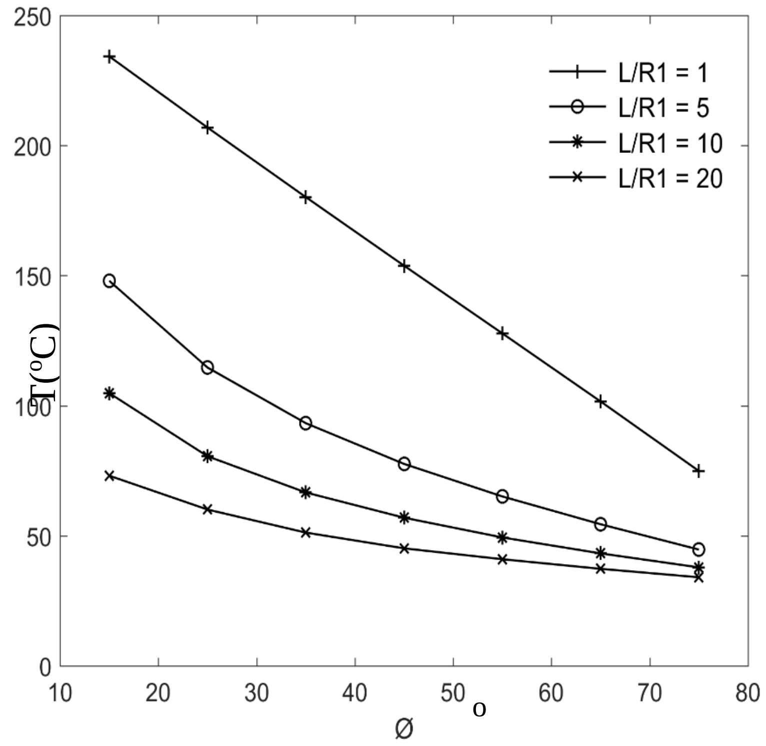
شکل (۳-۱۴) تأثیر زاویه نیم رأس و μ بر کمانش حرارتی پوسته مخروطی FGM با جدار متغیّر

شکل (۳-۱۵) تأثیر افزایش زاویه نیم رأس مخروط و ضخامت‌های متفاوت بر دمای بحرانی کمانش پوسته مخروطی متغیّر تابعی با جدار متغیّر را نشان می‌دهد. همان‌طور که در نتایج قبلی مشخص شد با افزایش شعاع اولیه مخروط به دلیل کاهش پایداری سازه دمای کمانش بحرانی کاهش پیدا می‌کند. همچنین با افزایش زاویه نیم رأس مخروط دمای بحرانی کمانش برای ضخامت‌های متفاوت به هم نزدیک‌تر است، به‌عبارت‌دیگر اثر افزایش زاویه نیم رأس در شعاع‌های بزرگ‌تر کمتر می‌شود.



شکل (۳-۱۵) تأثیر زاویه نیم رأس و شعاع بر کمانش حرارتی پوسته مخروطی FGM با جدار متغیّر

شکل (۳-۱۶) تأثیر افزایش زاویه نیم رأس مخروط و طول‌های مختلف بر دمای بحرانی کمانش پوسته مخروطی متغیّر تابعی با جدار متغیّر را نشان می‌دهد. همان‌طور که در نتایج قبلی مشخص شد با افزایش طول پوسته مخروطی دمای کمانش کاهش پیدا می‌کند. همچنین با افزایش زاویه نیم رأس مخروط دمای کمانش برای طول‌های متفاوت به هم نزدیک‌تر است و در پوسته‌های مخروطی با طول‌های بالا، اثر افزایش زاویه نیم رأس بر دمای کمانش کمتر می‌شود.



شکل (۳-۱۶) تأثیر زاویه نیم رأس و طول بر کمانش حراتی پوسته مخروطی FGM با جدار متغیّر

با توجه به شکل‌های بالا می‌توان به این نتیجه رسید که با افزایش زاویه نیم رأس مخروط مقاومت حرارتی پوسته جدار متغیّر کاهش می‌یابد.

فصل چهارم

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

۴-۱- مقدمه

این فصل شامل دو بخش می‌باشد. در قسمت اول به بررسی خلاصه نتایج تأثیر پارامترهای گوناگون مانند جدار متغیّر، شرایط مرزی، شرایط هندسی و جنس پوسته پرداخته‌شده است. در قسمت دوم پیشنهادهایی برای گستردگی بیشتر نتایج در راستای کار حاضر ارائه‌شده است.

در پژوهش پیش‌رو، یک روش اجزای محدود نیمه‌تحلیلی برای بررسی کمانش حرارتی پوسته مخروطی جدار متغیّر ساخته‌شده از مواد متغیّر تابعی تحت بارگذاری حرارتی معرفی‌شده است. معادلات حاکم بر مسأله بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم و روابط کرنش جابجایی غیرخطی بر اساس تئوری ساده‌شده سندرز نوشته‌شده است.

۴-۲- خلاصه نتایج

خلاصه نتایج به‌دست‌آمده از انجام این پژوهش در این بخش ارائه‌شده است.

- به‌طورکلی انتخاب β مثبت (افزایش ضخامت در راستای محوری) و β منفی (کاهش ضخامت در راستای محوری) به ترتیب باعث افزایش دمای کمانش و کاهش آن می‌شود. از مزیت‌های استفاده از پوسته جدار متغیّر با کمک مدل کردن آن با توابع ریاضی مشخص می‌توان به کاهش مواد موردنیاز برای ساخت پوسته، سبک‌سازی پوسته و همچنین فضای اشغال‌شده کمتر اشاره کرد.
- با افزایش زاویه نیم رأس مخروط مقاومت پوسته در برابر کمانش حرارتی کاهش می‌یابد که با انتخاب یک مقدار مثبت β (افزایش ضخامت در راستای محوری پوسته) می‌توان تا حدی از کاهش دمای کمانش در زاویه‌های نیم رأس متفاوت جلوگیری کرد.
- شرایط مرزی تأثیر قابل‌توجهی بر رفتار کمانشی پوسته مخروطی جدار متغیّر تحت بارگذاری حرارتی دارد، به‌طوری‌که در نظر گرفتن تکیه‌گاه‌های انعطاف‌پذیرتر پایداری سازه را کاهش داده

و دمای کمانش را کم می‌کند. افزایش ضخامت پوسته در راستای محوری تا حدی دمای کمانش را بهبود می‌بخشد. از طرفی با افزایش نسبت طول به شعاع سازه وابستگی دمای بحرانی کمانش به شرایط مرزی کاهش می‌یابد.

- مادّه‌ای که ضریب انبساط حرارتی بیشتری دارد مقاومتش در برابر کمانش حرارتی کمتر است.
- استفاده از μ مثبت به دلیل افزایش ضریب انبساط حرارتی باعث کاهش و به‌کارگیری μ منفی به دلیل کاهش ضریب انبساط حرارتی باعث افزایش دمای کمانش می‌شود. بنابراین تغییرات ضریب انبساط حرارتی در راستای محوری پوسته بسیار تأثیرگذار است.
- افزایش نسبت توان حجمی باعث افزایش دمای کمانش حرارتی می‌شود.
- به‌طورکلی با افزایش طول پوسته، مقاومت پوسته در برابر کمانش حرارتی کاهش پیدا می‌کند که با افزایش ضخامت در راستای محور پوسته می‌توان تا حدی از کاهش آن جلوگیری کرد.
- با افزایش شعاع اولیه پوسته به‌طورکلی، دمای کمانش حرارتی کاهش پیدا می‌کند. با انتخاب β مثبت می‌توان دمای کمانش را بهبود داد.

۴-۳- پیشنهادها

با توجه به کاربرد روزافزون پوسته‌ها در صنایع گوناگون، نیاز به انجام مطالعات و تحقیقات گسترده‌تر احساس می‌شود. بنابراین موارد زیر برای گسترش کار پیشنهاد می‌شود.

- بررسی کمانش مکانیکی و ترمومکانیکی پوسته‌های مخروطی جدار متغیّر
- تحلیل کمانش حرارتی و ترمومکانیکی پوسته‌های استوانه‌ای و کروی جدار متغیّر
- تحلیل کمانش ترمومکانیکی پوسته‌های مخروطی جدار متغیّر سوراخ‌دار

- تحلیل پس کمانش ترمومکانیکی پوسته‌های مخروطی جدار متغیّر دارای تقویت‌کننده
- استفاده از روش‌های حل تحلیلی به‌جای استفاده از روش‌های حل عددی

پیوست‌ها:

پیوست الف:

ماتریس کرنش- جابجایی خطی پوسته مخروطی جدار متغیّر:

$$B_L^{(i)}=\begin{bmatrix} B_L^{(i)}(1,1) & B_L^{(i)}(1,2) & B_L^{(i)}(1,3) & B_L^{(i)}(1,4) & B_L^{(i)}(1,5) \\ B_L^{(i)}(2,1) & B_L^{(i)}(2,2) & B_L^{(i)}(2,3) & B_L^{(i)}(2,4) & B_L^{(i)}(2,5) \\ B_L^{(i)}(3,1) & B_L^{(i)}(3,2) & B_L^{(i)}(3,3) & B_L^{(i)}(3,4) & B_L^{(i)}(3,5) \\ B_L^{(i)}(4,1) & B_L^{(i)}(4,2) & B_L^{(i)}(4,3) & B_L^{(i)}(4,4) & B_L^{(i)}(4,5) \\ B_L^{(i)}(5,1) & B_L^{(i)}(5,2) & B_L^{(i)}(5,3) & B_L^{(i)}(5,4) & B_L^{(i)}(5,5) \end{bmatrix}$$

$$B_L^{(i)}(1,1)=P_ic$$

$$B_L^{(i)}(1,2)=0$$

$$B_L^{(i)}(1,3)=-\frac{4z^3}{3h^2(x)}\left(Q_i\mathrm{c}-\frac{2\beta}{L}P_ic\right)$$

$$B_L^{(i)}(1,4)=-\frac{4z^3}{3h^2(x)}\left(P_ic-\frac{2\beta}{L}N_ic\right)$$

$$B_L^{(i)}(1,5)=0$$

$$B_L^{(i)}(2,1)=\frac{N_\mathrm{i}}{R}\sin(\emptyset)$$

$$B_L^{(i)}(2,2)=\frac{\mathrm{m}}{R}N_ic$$

$$B_L^{(i)}(2,3)=\frac{N_\mathrm{i}}{R}\cos(\emptyset)-\frac{4z^3m^2N_ic}{3h^2(x)R^2}-\frac{4z^3P_ic}{3h^2R}\sin(\emptyset)$$

$$B_L^{(i)}(2,4)=\frac{zN_i}{R}\sin(\emptyset)-\frac{4z^3N_i}{3h^2R}\sin(\emptyset)$$

$$B_L^{(i)}(2,5)=\frac{zmN_ic}{R}-\frac{4z^3mN_ic}{3h^2(x)R}$$

$$B_L^{(i)}(3,1)=0$$

$$B_L^{(i)}(3,2)=0$$

$$B_L^{(i)}(3,3) = P_i c - \frac{4z^2 P_i c}{h^2(x)}$$

$$B_L^{(i)}(3,4) = N_i \mathrm{c} - \frac{4z^2 N_i c}{h^2(x)}$$

$$B_L^{(i)}(3,5) = 0$$

$$B_L^{(i)}(4,1) = 0$$

$$B_L^{(i)}(4,2) = \frac{N_i \cos \emptyset \mathrm{c}}{R}$$

$$B_L^{(i)}(4,3) = \frac{4z^2 msN_i}{3h^2(x)R} + \frac{4z^3 msN_i \cos \emptyset}{3h^2(x)R^2} - \frac{msN_i 1}{R}$$

$$B_L^{(i)}(4,4) = 0$$

$$B_L^{(i)}(4,5) = N_i \mathrm{s} - \frac{4z^2 N_i \mathrm{s}}{3h^2(x)} - \frac{\mathrm{z}N_i \mathrm{scos}\, \emptyset}{R} + \frac{4z^3 N_i \mathrm{s} \cos \emptyset}{3h^2(x)R}$$

$$B_L^{(i)}(5,1) = -\frac{mN_\mathrm{i} c}{R\partial\theta}$$

$$B_L^{(i)}(5,2) = P_\mathrm{i} s - \frac{N_i \sin(\emptyset)}{R}$$

$$B_L^{(i)}(5,3) = \frac{4z^3 P_i ms}{3Rh^2(x)} + \frac{4z^3 P_i ms}{3\mathrm{R}h^2(x)} - \frac{8\beta z^3 N_i s}{3Lh^2} - \frac{4z^3 N_i s \sin(\emptyset)}{3\mathrm{R}h^2(x)}$$

$$B_L^{(i)}(5,4) = -\frac{\mathrm{z}mN_i s}{R} + \frac{4z^3 mN_i s}{3Rh^2(x)}$$

$$B_L^{(i)}(5,5) = zP_i \mathrm{s} - \frac{4z^3 P_i \mathrm{s}}{3h^2(x)} + \frac{8\beta z^3 N_i}{3Lh^2} - \frac{\sin(\emptyset) zN_i s}{R} + \frac{4z^3\, N_i \sin(\emptyset)\, s}{3\mathrm{R}h^2(x)}$$

$$B_L = [\, B_L^1 \quad B_L^2 \quad B_L^3]$$

در روابط فوق $i = 1,2,3$ و شماره هر گره المان می‌باشد. همچنین $c = \cos m\theta$، $s = \sin m\theta$، m شماره مد محیطی، P_i مشتق اول وQ_i مشتق دوم توابع شکل هر المان نسبت به x هستند.

پیوست ب:

ماتریس کرنش- جابجایی غیرخطی برای پوسته مخروطی جدار متغیّر بر اساس تئوری ساده‌شده‌ی سندرز:

$$B_{NL}^{i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & P_i c & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{-N_i \, \mathrm{s} \cos \emptyset}{R} & \dfrac{-N_i ms}{R} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{-N_i \, \mathrm{s} \cos \emptyset}{R} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{-4mN_i \, \mathrm{s} \cos \emptyset}{3h^2R^2} & 0 & \dfrac{4N_i \, \mathrm{s} \cos \emptyset}{3h^2R} \end{bmatrix}$$

$$B_{NL} = [B_{NL}^{1} \quad B_{NL}^{2} \quad B_{NL}^{3}]$$

در روابط فوق $i = 1,2,3$ و شماره هر گره المان می‌باشد. $c = \cos m\theta$، $s = \sin m\theta$، m شماره مد محیطی و P_i مشتق اول توابع شکل هر المان نسبت به x هستند.

پیوست ج:

ماتریس$[S]$ برای پوسته مخروطی جدار متغیّر برحسب تئوری ساده‌شده‌ی سندرز:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{x\theta} \\ \tau_{x\theta} & \sigma_\theta \end{bmatrix}$$

ماتریس$[Z]$ برای پوسته مخروطی جدار متغیّر برحسب تئوری ساده‌شده‌ی سندرز:

$$z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & z & 0 & z^3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & z & 0 & z^3 \end{bmatrix}$$

منابع

[1] Batista-Abreu, J. C., & Godoy, L. A. (**2011**) "Thermal buckling behavior of open cylindrical oil storage tanks under fire" **Journal of Performance of Constructed Facilities**, **27**, **1**, pp **89-97**.

[2] Jaca, R. C., & Godoy, L. A. (**2010**) "Wind buckling of metal tanks during their construction" **Thin-Walled Structures**, **48**, **6**, pp **453-459**.

[3] Gibson, J. E. (**1980**) "Thin shells: computing and theory" **Elsevier**, **Vol.1**, **1st ed, Pergamon Press**, **UK**, pp **3**.

[4] Bhangale, R. K., Ganesan, N., & Padmanabhan, C. (**2006**) "Linear thermoelastic buckling and free vibration behavior of functionally graded truncated conical shells" **Journal of Sound and Vibration**, **292**, **1-2**, pp **341-371**.

[5] Woo, J. H., Rho, J. H., & Lee, I. (**2007**) "Thermal buckling characteristics of composite conical shell structures" **International Journal of Aeronautical and Space Sciences**, **8**, **2**, pp **82-88**.

[6] Sofiyev, A. H., (**2015**) "On the vibration and stability of shear deformable FGM truncated conical shells subjected to an axial load" **Composites Part B: Engineering**, **80**, pp **53-62**.

[7] Ajdari, M. B., Jalili, S., Jafari, M., Zamani, J., & Shariyat, M. (**2012**) "The analytical solution of the buckling of composite truncated conical shells under combined external pressure and axial compression" **Journal of Mechanical Science and Technology**, **26**, **9**, pp **2783-2791**.

[8] Shadmehri, F., Hoa, S. V., & Hojjati, M. (**2012**) "Buckling of conical composite shells" **Composite Structures**, **94**, **2**, pp **787-792**.

[9] Hoseini, M., & Talebitooti, M. (**2016**) "Buckling analysis of moderately thick composite conical shells using Galerkin and DQ methods" **Modares Mechanical Engineering**, **15**, **12**, pp **367-375**. (In Persian)

[10] Hosseini, M., & Talebitooti, M. (**2018**) "Buckling analysis of moderately thick FG carbon nanotube reinforced composite conical shells under axial compression by DQM" **Mechanics of Advanced Materials and Structures**, **25**, **8**, pp **647-656**.

[11] Akbari, M., Kiani, Y., & Eslami, M. R. (**2014**) "Thermal buckling of temperature-dependent FGM conical shells with arbitrary edge supports" **Acta Mechanica**, **226**, **3**, pp **897-915**.

[12] Jam, J. E., & Kiani, Y. (**2015**) "Buckling of pressurized functionally graded carbon nanotube reinforced conical shells" **Composite Structures**, **125**, pp **586-595**.

[13] Torabi, J., Bazdid-Vahdati, M., & Ansari, R. (**2015**)" Thermal buckling of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite conical shells. **Modares Mechanical Engineering**" **15**, **10**, pp **137-146**. (In Persian)

[14] Naj, R., Boroujerdy, M. S., & Eslami, M. R. (**2008**) "Thermal and mechanical instability of functionally graded truncated conical shells" **Thin-Walled Structures**, **46**, **1**, pp **65-78**.

[15] Chang, L. K., & Lu, S. Y. (**1968**) "Nonlinear thermal elastic buckling of conical shells" **Nuclear Engineering and Design**, **7**, **2**, pp **159-169**.

[16] Tani, J. (**1978**) "Influence of axisymmetric initial deflections on the thermal buckling of truncated conical shells" **Nuclear Engineering and Design**, **48**, **2-3**, pp **393-403**.
[17] Mohammadzadeh, R., Najafizadeh, M. M., & Nejati, M. (**2013**) "Buckling of 2D-FG cylindrical shells under combined external pressure and axial compression" **Advances in Applied Mathematics and Mechanics**, **5**, **3**, pp **391-406**.
[18] Goldfeld, Y., & Arbocz, J. (**2004**) "Buckling of laminated conical shells given the variations of the stiffness coefficients" **AIAA journal**, **42**, **3**, pp **642-649**.
[19] Shariyat, M., & Asgari, D. (**2013**) "Nonlinear thermal buckling and postbuckling analyses of imperfect variable thickness temperature-dependent bidirectional functionally graded cylindrical shells" **International Journal of Pressure Vessels and Piping**, **111**, pp **310-320**.
[20] Shaterzadeh, A. R., Darvizeh, M., Darvizeh, A., & Ansari, R. (**2011**) "Thermal post-buckling of shells of revolution" **Journal of Thermal Stresses**, **34**, **10**, pp **1035-1053**.
[21] Darvizeh, M., Darvizeh, A., Alijani, A.,& Ansari, R. (**2013**) "Buckling analysis of composite cylindrical shells under mechanical and thermal load using a semi-analytical finite element method" **Modares Mechanical Engineering**, **2, 1**, **pp 33-44**. (In Persian)
[22] Patel, B. P., Nath, Y., & Shukla, K. K. (**2005**) "Thermal postbuckling analysis pf laminated cross-play truncated circular conical shell" **Composite Structures**, **71**, **2**, **pp 101-114**
[23] Patel, B. P., Nath, Y., & Shukla, K. K. (**2006**) "Nonlinear thermo-elastic buckling characteristics of cross-ply laminated joined conical–cylindrical shells" **International Journal of Solids and Structures**, **43**, **16**, pp **4810-4829**.
[24] Patel, B. P., Singh, S., & Nath, Y. (**2008**) "Postbuckling characteristics of angle-ply laminated truncated circular conical shells" **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, **13**, **7**, pp **1411-1430**.
[25] Singh, S., Patel, B. P., & Nath, Y. (**2009**) "Postbuckling of angle-ply laminated cylindrical shells with meridional curvature" **Thin-Walled Structures**, **47, 3**, **pp 359-364**.
[26] Patel, B. P., Singh, S., & Nath, Y. (**2006**) "Stability and nonlinear dynamic behaviour of cross-ply laminated heated cylindrical shells" **Latin American Journal of Solids & Structures**, **3, 3,** pp **300**.
[27] Alijani, A., Darvizeh, M., Darvizeh, A., & Ansari, R. (**2015**) "On nonlinear thermal buckling analysis of cylindrical shells" **Thin-Walled Structures**, **95**, **170-182**.
[28] Hong T. & Teng J. G. (**2002**) "Non-linear analysis of Shells of Revolution under Arbitrary Loads" **Computer and Structures**, **80**, pp **1547-1568**.
[29] Teng J. G. & Hong T. (**2006**) "Postbuckling analysis of elastic shells of revolution considering mode switching and interaction" **International Journal of Solids and Structures**, **43**, **pp 551-568**.

[30] Hong T. & Teng J. G. (**2008**) “Imperfection sensitivity and postbuckling analysis of elastic shells of revolution” **Thin Walled Structures**, **46**, pp **1338-1350**.

[31] Shahsiah R. & Eslami M. R. (**2003**) “Thermal buckling of functionally graded cylindrical shell” **Journal of Thermal Stresses**, **26**, **3**, **pp 277-294**.

[32] Shahsiah R. & Eslami M. R. (**2003**) “Functionally graded cylindrical shell thermal instability based on improved Donnell equations” **Journal of AIAA**, **41**, **9**, pp **1819-1826**.

[33] Sheng G. G. & Wang X. (**2008**) “Thermal vibration, buckling and dynamic stability of functionally graded cylindrical shells embedded in an elastic medium” **Journal of Reinforced Plastics and Composites**, **27**, **2**, pp **117-134**.

[34] Darvizeh M., Darvizeh A., Shaterzadeh A. R. & Ansari R. (**2007**) “Thermal buckling analysis of moderately thick composite cylindrical shells under axisymmetric thermal load” **Mech. & Aerospace Eng**. Journal, **3**, **2**, pp **99-107**. (In Persian)

[35] Shen, H. S. (**2004**) “Thermal postbuckling behavior of functionally graded cylindrical shells with temperature-dependent properties” **International Journal of Solids and Structures**, **41, 7**, pp **1961-1974**.

[36] Shen, H. S. (**2012**) “Thermal buckling and postbuckling behavior of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite cylindrical shells” **Composites Part B:Engineering**, **43, 3**, pp **1030-1038**.

[37] Kadoli, R., & Ganesan, N. (**2006**) “Buckling and free vibration analysis of functionally graded cylindrical shells subjected to a temperature-specified boundary condition” **Journal of Sound and Vibration**, **289, 3**, **450-480**.

[38] Radhamoman, S. K., & Enkataramana, J. (**1975**) “Thermal buckling of orthotropic cylindrical shells” **AIAA Journal**, **13, 3**, pp **397-399**.

[39] Xu, X., Chu, H., & LIM, C. W. (**2010**) “A symplectic Hamiltonian approach for thermal buckling of cylindrical shells” **International Journal of Structural Stability and Dynamics**, **10, 2**, pp **273-286**.

[40] Sheinman, I., & Jabareen, M. (**2005**) “Postbuckling of laminated cylindrical shells in different formulations” **AIAA journal**, **43, 5**, **1117-1123**.

[41] Sheinman, I., Shaw, D., & Simitses, G. J. (**1983**) “Nonlinear analysis of axially-loaded laminated cylindrical shells” **Computers & Structures**, **16, 1-4**, pp **131-137**.

[42] Sheinman, I., & Goldfeld, Y. (**2003**) “Imperfection sensitivity of laminated cylindrical shells according to different shell theories” **Journal of Engineering Mechanics**, **129, 9**, pp **1048-1053**.

[43] Ganesan, N., & Sivadas, K. R. (**1990**) “Free vibration of cantilever circular cylindrical shells with variable thickness” **Computers & structures**, **34**, **4**, pp **669-677**.

[44] Narayana, Y. V. (**2013**) “Buckling analysis of laminated composite cylindrical shells subjected to axial compressive loads using finite element method” **International Journal of Engineering**, **2**, **1**, pp **20**.

[45] Shariyat, M. (**2008**) “Dynamic thermal buckling of suddenly heated temperature-dependent FGM cylindrical shells, under combined axial compression and

external pressure" **International Journal of Solids and Structures**, **45**, **9**, pp **2598-2612**.
[46] Nguyen, H. L. T., Elishakoff, I., & Nguyen, V. T. (**2009**) "Buckling under the external pressure of cylindrical shells with variable thickness" **International Journal of Solids and Structures**, **46, 24**, pp **4163-4168**.
[47] Sepiani, H. A., Rastgoo, A., Ebrahimi, F., & Arani, A. G. (**2010**) "Vibration and buckling analysis of two-layered functionally graded cylindrical shell, considering the effects of transverse shear and rotary inertia" **Materials & Design**, **31**, **3**, pp **1063-1069**.
[48] Huang H. & Han Q. (**2008**) "Buckling of imperfect functionally graded cylindrical shells under axial compression" **European Journal of Mechanics A/Solids**, **27**, **6**, pp **1026-1036**.
[49] Liew, K. M., Lei, Z. X., Yu, J. L., & Zhang, L. W. (**2014**) "Postbuckling of carbon nanotube-reinforced functionally graded cylindrical panels under axial compression using a meshless approach" **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, **268**, pp **1-17**.
[50] Rabani Bidgoli, M., Saeed Karimi, M., & Ghorbanpour Arani, A. (**2016**) "Nonlinear vibration and instability analysis of functionally graded CNT-reinforced cylindrical shells conveying viscous fluid resting on orthotropic Pasternak medium" **Mechanics of Advanced Materials and Structures**, **23**, **7**, pp **819-831**.
[51] Yazdani M. & Rahimi G. H. (**2010**) "The effects of helical ribs number and grid types on the buckling of thin-walled GFRP-stiffened shells under axial loading" **Journal of Reinforced Plastics and composites**, **29**, **17**, pp **2568-2575**.
[52] Shaterzadeh A. & Foroutan K. (**2016**) "Post-buckling of cylindrical shels with spiral stiffners under elastic foundation" **Journal of Stractural Engineering and Mechanics**, **60**, **4**, pp **615-631**.
[53] Mirzavand, B., & Eslami, M. R. (**2007**) "Thermal buckling of simply supported piezoelectric FGM cylindrical shells" **Journal of Thermal Stresses**, **30**, **11** , pp **1117-1135**.
[54] Darvizeh, M., Darvizeh, A., Shaterzadeh, A. R., & Ansari, R. (**2010**) "Thermal buckling of spherical shells with cut-out" **Journal of Thermal Stresses**, **33**, **5**, pp **441-458**.
[55] Huang N. C. (**1964**) "Unsymmetrical buckling of thin shallow spherical shells" **Journal of Applied Mechanics**, **31**, **3**, pp **447-457**.
[56] Tillman S. C. (**1970**) "On the buckling behavior of shallow spherical caps under a uniform pressure load" **International Journal of Solids Structures**, **6**, pp **37-52**
[57] Ganesan N, Kadoli R (**2004**) "Studies on linear thermoelastic buckling and free vibration analysis of geometrically perfect hemispherical shells with cut-out" **Journal of Sound & Vibration**, **27**, **7**, pp **855–879**.
[58] Reddy, J. N., & Chin, C. D. (**1998**) "Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates" **Journal of Thermal Stresses**, **21**, **6**, pp **593-626**.

[۵۹] شاطرزاده ع.ر، (**۱۳۸۴**)، پایان‌نامه‌ی ارشد:" تحلیل استاتیکی و دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای شکل مرکب حاوی سیال داغ یا سرد"، دانشکده‌ی فنی مهندسی، گروه مکانیک، دانشگاه گیلان.

[60] Toorani, M. H., & Lakis, A. A. (**2000**) “General equations of anisotropic plates and shells including transverse shear deformations, rotary inertia and initial curvature effects” **Journal of Sound and Vibration**, **237**, **4**, pp **561-615**.

[61] Teng, J. G., & Hong, T. (**1998**) “Nonlinear thin shell theories for numerical buckling predictions” **Thin-Walled Structures**, **31**, **1-3**, pp **89-115**.

Abstract

In this dissertation, thermal buckling of variable thickness conical shells is studied. The considered conical shell is made of functionally graded materials, and mechanical properties of the shell vary continuously along thickness and the axis of the shell. Third-order shear deformation theory is used to derive the displacement strain correlations and then, buckling temperature is calculated using the minimum potential energy principle and semi-analytic finite element method. Since the considered shell is axisymmetric, the conical shell is modeled using a semi-analytic finite element method with second order 5-degree of freedom 3-node isoparametric elements. Thermal loading is applied axisymmetrically and with a uniform temperature increase along the shell thickness. Clamped and simple boundary conditions are assumed. The influence of different parameters such as property distribution of functionally graded material, Semi-vertex angle, wall thickness variations and various boundary conditions on strain behavior of variable thickness conical shells is studied.

Key Words

Variable Thickness Conical Shells, Functionally Graded Materials, Thermal Buckling Analysis, Semi Analytical Finite Elements Method, Third-order Shear Deformation Theory

Shahrood University of Technology

Faculty of Mechanical And Mechatronics Engineering

M.Sc. Thesis in Applied Mechanics Engineering

Thermal Buckling Analysis of Functionally Graded Variable Thickness Conical Shells Using a Semi Analytical Finite Elements Method

By: Mahziar AAlipoor

Supervisor:
Dr. Alireza Shaterzadeh

August 2018