بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده مهندسی مکانیک

رشته مکانیک، گرایش طراحی کاربردی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

تحلیل رفتار ارتعاشی و پایداری دینامیکی ناشی از گالوپینگ یک کابل آویخته با اعمال سفتی شرط مرزی

نگارنده: محمدرضا شکاری

استاد راهنما

دکتر امیر جلالی

شهریور ۹۷

شماره: ۳/۲۹۷/۱۲۸م
تاریخ: ۹۷/۷/۲

باسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شاهرود

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم / آقای **محمدرضا شکاری** با شماره دانشجویی **۹۴۳۶۰۷۴** رشته **مهندسی مکانیک** گرایش **طراحی کاربردی** تحت عنوان **تحلیل رفتار ارتعاشی و پایداری دینامیکی ناشی از گالوپینگ یک کابل آویخته با اعمال سفتی شرط مرزی** که در تاریخ **۹۷/۶/۲۰** با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می‌گردد:

قبول (با درجه: عالی، خوب ☑) مردود ☐

نوع تحقیق: نظری ☑ عملی ☐

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ استادراهنمای اول	دکتر امیر جلالی	استادیار	
۲- استادراهنمای دوم	ــــــ	ــــــ	ــــــ
۳- استاد مشاور	ــــــ	ــــــ	ــــــ
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر سیدمهدی حسینی فراش	استادیار	
۵- استاد ممتحن اول	دکتر اردشیر کرمی محمدی	دانشیار	
۶ـ استاد ممتحن دوم	دکتر مهدی بامداد	استادیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: محمد محسن شاه مردان

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

شاه مردان

تبصره: در صورتی که کسی مردود شود حداکثر یکبار دیگر (در مدت مجاز تحصیل) می تواند از پایان نامه خود دفاع نماید (دفاع مجدد نباید زودتر از ۴ ماه برگزار شود).

تقدیم به پدر و مادر مهربانم و برادران عزیزم

تشکر فراوان از زحمات دکتر امیر جلالی که در این پایان‌نامه مرا بسیار کمک کردند.

محمدرضا شکاری
شهریور ۹۷

تعهد نامه

اینجانب **محمدرضا شکاری** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **مکانیک** **مهندسی مکانیک** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **تحلیل رفتار ارتعاشی و پایداری دینامیکی ناشی از گالوپینگ یک کابل آویخته با اعمال سفتی شرط مرزی** ، تحت راهنمایی **امیر جلالی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام " دانشگاه صنعتی شاهرود " یا " Shahrood University of Technology " به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

محمدرضا شکاری
شهریور ۹۷

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

گالوپینگ کابل‌ها یک نوع ارتعاشات خود تحریک با دامنه‌ی بالا و فرکانس پایین می‌باشد. در این پژوهش طبق تئوری تیر خمیده یک مدل غیرخطی گالوپینگ همراه با در نظر گرفتن چهار درجه آزادی (جابه‌جایی عمودی، عمود بر صفحه، مماسی و دوران پیچش) و سختی‌های پیچشی و خمشی برای توصیف حرکت کابل افقی یخزده که دارای خروج از مرکزی سطح مقطع می‌باشد، در دو حالت دو سر ثابت و در نظر گرفتن سفتی تکیه‌گاه انتهایی در دو جهت عمودی و عمود بر صفحه ارائه‌شده است. مدل‌سازی آیرودینامیکی نیز با فرض شبه پایا بودن انجام‌شده است. معادلات حرکت شامل چهار معادله می‌باشد که با استفاده از یک مدل کاهش‌یافته‌ی گالوپینگ تعداد معادلات به دو رسیده است. این دو معادله که دارای عبارات غیرخطی مرتبه‌ی دو و سه در سرعت و جابه‌جایی می‌باشند، با استفاده از روش گلرکین گسسته سازی شده است. با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه برای کابل دو سر ثابت در دو حالت تشدید داخلی ۱:۱ و ۲:۱ و برای حالت الاستیک پایه‌ی انتهایی در پنج حالت تشدید داخلی ۱:۱، ۲:۱، ۳:۱، ۱:۲ و بدون تشدید داخلی معادلات مدولاسیون فاز کاهش‌یافته به‌دست‌آمده است. معادلات مدولاسیون ـ فاز کاهش‌یافته حل‌شده است و نتایج برای حالات مختلفِ میزان سختی تکیه‌گاهی در دو جهت عمودی و عمود بر صفحه ارائه‌شده است. در انتها نیز برای اطمینان از صحت نتایج، دو معادله‌ی مدل کاهش‌یافته شبیه‌سازی عددی شده است و با انتگرال در بازه‌ی زمانی نتایج تصدیق شده است. سرعت باد، میزان سختی تکیه‌گاه در دو جهت عمودی و عمود بر صفحه و زمان به‌عنوان پارامترهای متغیر در نتایج آمده است.

کلمات کلیدی: گالوپینگ، کابل، تیر خمیده، سختی تکیه‌گاه ، روش مقیاس‌های چندگانه، غیرخطی، تشدید داخلی

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

فهرست جداول

فصل ۱

آشنایی با انواع نوسانات کابل و تاریخچه

۱.۱ مقدمه

۱.۱.۱ تعریف

کابل‌ها سازه‌های سبک و انعطاف‌پذیری هستند که به‌طور گسترده در مهندسی کاربرد دارند. کاربرد کابل‌ها را در خطوط انتقال نیرو، پل‌های کابلی، سازه‌های دریایی و... می‌توان مشاهده کرد. ازآنجاکه کابل‌ها دارای میرایی کمی می‌باشند، به‌شدت در معرض ارتعاشات تحریک‌شده به‌وسیله‌ی جریان باد هستند. در این فصل به بررسی مکانیزم های مختلف تحریک ارتعاشات کابل‌ها ناشی از جریان باد و مروری بر مطالعات و کارهای پیشین پرداخته می‌شود.

۲.۱.۱ مکانیزم های تحریک کابل‌ها توسط باد

مکانیزم ارتعاشات کابل‌ها با تحریک جریان باد می‌تواند به انواع مختلفی تقسیم‌بندی شود. این مکانیزم ها را می‌توان با توجه به سرعت بحرانی باد، دامنه‌ی ارتعاشات، جهت‌گیری کابل در مقابل باد و شرایط بارش تقسیم‌بندی کرد. در حالت کلی این پدیده‌ها را می‌توان به این

شکل دسته‌بندی کرد. • ارتعاشات در شرایط باد و باران هم‌زمان که به ارتعاشات تحریک‌شده با باد_باران [1] معروف است • ارتعاشات با دامنه‌ی بالا اما محدود در سرعت‌های بالای باد که به نام ارتعاشات تحریک‌شده با گردابه های سرعت‌بالا شناخته می‌شود • گالوپینگ خشک • گالوپینگ در شرایط یخزدگی مقطع

ارتعاشات تحریک‌شده با باد_ باران

این نوع ارتعاشات علی‌رغم پیچیدگی‌هایش توسط پژوهش گران زیادی موردبررسی قرارگرفته است. اولین مطالعه بر روی ارتعاشات تحریک‌شده با باد_باران توسط هیکمی [۱] انجام شد که درباره ارتعاشاتی است که در پل میکو_نیشی در ژاپن مشاهده شده بود. تحقیقات بیش‌تر توسط مین و جونز [۲، ۳] ، ماتسوموتو و همکاران [۴] نشان دادند که این نوع ارتعاشات به شرایط زیر بستگی دارد. • کابل‌های نگه‌دار زاویه‌ی آویزی بین ۲۰ تا ۴۵ درجه داشته باشند • قطر کابل بین ۱۴ تا ۲۰ سانتی‌متر باشد • دامنه‌ی ارتعاشات تا چندین متر بالا رود • زاویه‌ی باد نسبت به صفحه‌ی کابل بین ۲۰ تا ۶۰ درجه باشد • سرعت باد بین ۸ تا ۱۲ متر بر ثانیه و عدد رینولدز بین ۶۰ هزار تا ۲۰۰ هزار باشد. این نوع ارتعاشات به‌شدت به تشکیل جریان آب بر روی سطح بالایی کابل وابسته است [۶] .

تحریک با گردابه ی سرعت‌بالا

در شرایط نبود بارش ارتعاشاتی نیز در کابل در تونل باد مشاهده شده است. مشاهده‌ی این پدیده‌ی ناخواسته، در طول یک طوفان با سرعت ۴۰ متر بر ثانیه توسط ماتسوموتو [۵] مستند شده است. ازآنجایی‌که در مقایسه با ارتعاشات متداول کارمن، این ارتعاشات در سرعت بالاتری اتفاق می‌افتد، به آن ارتعاشات تحریک‌شده با گردابه ی سرعت‌بالا گفته می‌شود. اعتقاد بر این است که این نوع ارتعاشات با وجود جریان محوری در ناحیه‌ی وجود کابل در ارتباط است [۵، ۷]. وقتی‌که جریان باد نسبت به کابل مورب می‌وزد، یک مؤلفه‌ی محوری نیز دارا می‌باشد که در طول کابل است و در تعامل با گردابه های کارمن هست.

ارتعاشات گالوپینگ خشک

ارتعاشات گالوپینگ خشک یکی از انواع ناپایداری کابل‌هاست که معمولاً در خطوط انتقال نیرو مشاهده می‌شود. به این نوع ارتعاشات در مطالعات زیادی مانند سایتو و همکاران [۸]، میاتا و همکاران [۹]، چنگ و همکاران [۱۰] و نیکیتاس و همکاران [۱۱] پرداخته شده است. این نوع ارتعاشات بدون وجود بارش اتفاق می‌افتد. زمانی که میرایی آیرودینامیکی منفی به‌اندازه‌ای بزرگ باشد که به میرایی سازه‌ای مثبت غلبه کند، به‌طوری‌که میرایی مؤثر سازه منفی شود،

[1] Rain-Wind Induced Vibration

شکل ۱.۱: کابل‌های انتقال پوشیده‌شده از یخ

شکل ۲.۱: خسارت وارد بر خط انتقال یخ‌زده

دامنه‌ی ارتعاشات سازه به‌طور چشم‌گیری افزایش پیدا می‌کند که منجر به حرکت از نوع واگرا می‌شود.

گالوپینگ با پوشش یخ

گالوپینگ با پوشش یخ همانند گالوپینگ خشک است، با این تفاوت که پوشش یخ بر روی کابل، سطح مقطع دایروی آن را تغییر می‌دهد و باعث می‌شود که پروفایل سطح مقطع ازنظر آیرودینامیکی ناپایدار شود. شکل (۱.۱) و (۲.۱) کابل‌های پوشیده شده از یخ را در هادی‌های خطوط انتقال نشان می‌دهد. در کار پیش رو ما با این نوع ارتعاشات کابل سروکار داریم. در این پدیده هادی‌ها با فرکانس پایین و دامنه‌ی بالا نوسان می‌کنند و شکل یخ نشسته شده بر روی هادی اثرات کلی در این نوع ارتعاش دارد. شرایط فیزیکی خط انتقال ازجمله طول اسپن ها [۲] ، نوع برج‌ها (کششی یا آویزی) و کشش سیم هادی و... اثرات قابل‌توجهی در این نوع ارتعاش دارند. به‌طور خلاصه عوامل اصلی مؤثر در پدیده‌ی گالوپینگ عبارت‌اند از: میزان یخ‌زدگی سیم‌ها، میزان باد منطقه، طول اسپن ها و نوع برج‌ها.

[۲] span

۳.۱.۱ اثرات گالوپینگ

- تخلیه‌ی الکتریکی:
تخلیه‌ی الکتریکی هادی‌ها یکی از متداول‌ترین مشکلاتی است که توسط گالوپینگ به وجود می‌آید. وقتی‌که تخلیه‌های پی‌درپی اتفاق می‌افتد، سیستم اتوماتیک حفاظتی، مدار را باز می‌کند تا علت قطعی شناخته و برطرف شود. اگر خط جایگزینی برای انتقال انرژی وجود نداشته باشد، جریان به مصرف‌کننده نمی‌رسد.

- بارهای دینامیکی:
در کنار تخلیه‌ی الکتریکی هادی‌ها، گالوپینگ بارهای دینامیکی را در هادی القا می‌کند که از طریق سخت‌افزارهای معلق به برج‌ها می‌رسد. این بارهای دینامیکی در طول هر پدیده‌ی گالوپینگ به‌طور پی‌درپی به سازه‌های نگه‌دارنده‌ی کابل‌ها می‌رسد. متداول‌ترین اثر این بارهای دینامیکی شل شدن پیچ‌های برج و ایجاد خستگی در دیگر سازه‌ها هست.

- خستگی هادی‌ها:
رشته‌های کابل‌ها در اثر پدیده‌ی گالوپینگ به‌مرورزمان دچار خستگی می‌شوند. اثر خستگی بر روی هادی در شکل (۳.۱(آ)) و (۳.۱(ب)) مشاهده می‌شود.

۴.۱.۱ روش‌های جلوگیری از گالوپینگ

در این قسمت نتایج مختلف پژوهش انجام‌شده بر روی روش‌های مهار گالوپینگ که توسط لیلین [۱۲] انجام‌شده است، مرور می‌شود.

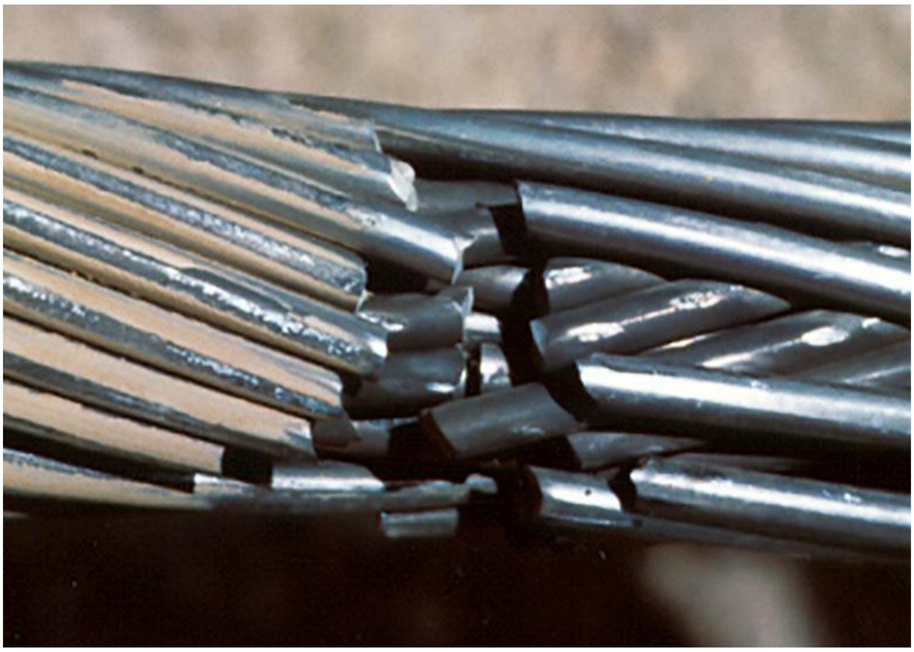
- پیچیدگی گالوپینگ به‌گونه‌ای است که فن‌های کنترلی نمی‌تواند به‌اندازه‌ی کافی در آزمایشگاه تست شود و باید در واقعیت و بر روی کابل‌های واقعی موردبررسی قرار گیرد. مشاهده‌ی این نتایج در مکان واقعی ممکن است سال‌ها طول بکشد و درنهایت بی‌نتیجه بماند.

- ابزارهای تحلیلی و آزمایش‌های میدانی بر روی کابل‌های واقعی با یخ مصنوعی بر روی آن در ارزیابی گالوپینگ و طراحی روش‌های مقتضی مفید است.

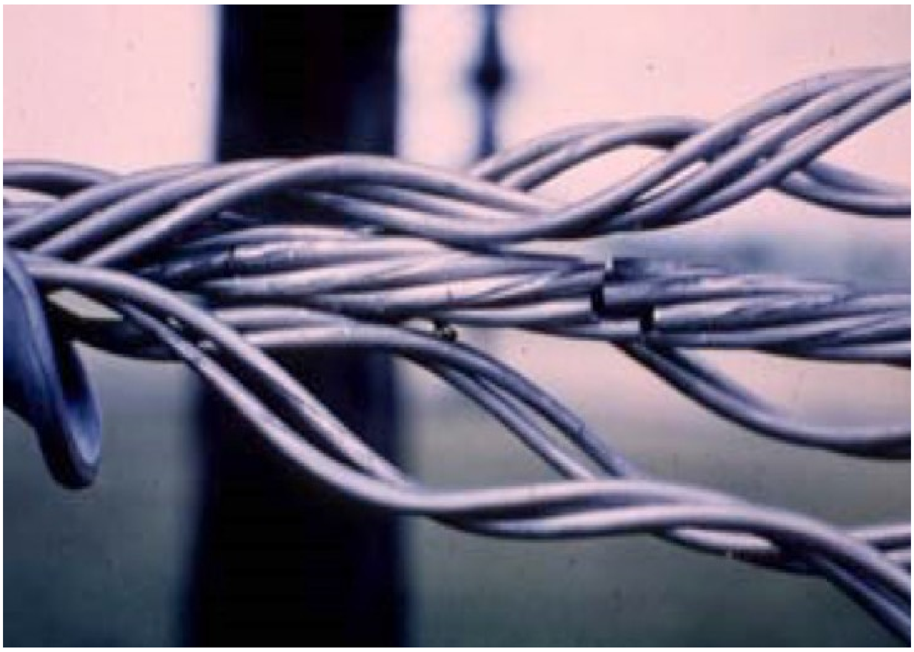
- هیچ روشی را نمی‌توان ضمانت کرد که به‌طور حتم در تمامی شرایط از گالوپینگ جلوگیری کند.

- جداکننده‌های بین فازی این اطمینان را می‌دهد که در صورت وقوع گالوپینگ مشکلی به وجود نمی‌آید.

- میراکننده‌های مکانیکی هنوز هم به‌منظور متوقف کردن حرکت عمودی، مورداستفاده قرار می‌گیرند، اما گستره‌ی بسیار محدودی را تحت پوشش قرار می‌دهند.



a (آ)



b (ب)

شکل ۳.۱: هادی‌های آسیب‌دیده در اثر گالوپینگ

- روش‌های جلوگیری از یخزدگی و یخزدایی به‌عنوان روش‌های ضد گالوپینگ به‌طور گسترده استفاده نمی‌شوند.
- فن‌هایی که با ارائه‌ی هادی‌هایی با سطح مقطع متغیر از یکنواختی پوشش یخ جلوگیری می‌کنند و یا با القای یک حرکت دورانی به هادی از یکنواختی آیرودینامیکی جلوگیری می‌کنند، به‌طور گسترده استفاده نمی‌شوند.

بنابراین انواع روش‌ها برای کاهش اثرات گالوپینگ به‌طور خلاصه عبارت‌اند از:

- افزایش فواصل هوایی
- جداکننده میان فازها
- دمپرهای آیرودینامیکی کششی
- دمپرهای حرکت عمودی
- وسایل کنترل حرکت پیچشی

۲.۱ مروری بر کارهای پیشین

گالوپینگ یک پدیده‌ی ناپایداری الاستیک است که با ارتعاشات با فرکانس پایین و دامنه‌ی بالای اجسام بلاف[۳] لاغر با وزن کم و یا میرایی کم شناخته می‌شود. گالوپینگ با ارتعاشات آیرودینامیکی خودتحریک همراه است. وقتی‌که یک جسم در محیط سیال قرار می‌گیرد، نیروهای آیرودینامیکی وارد بر آن متغیر است و با حرکت جسم تغییر می‌کند. این امر می‌تواند باعث آغاز ارتعاشات خود تحریک شود و باعث شود تا دامنه‌ی ارتعاشات به‌صورت نمایی افزایش پیدا کند. وابستگی پاسخ گالوپینگ به حرکت جسم خود یکی از پیچیدگی‌های تقابل سیال‌ـسازه در حوزه‌ی غیرخطی هست. گالوپینگ بیش‌تر در سازه‌های لاغری که نسبت دهانه به سطح مقطع بالایی دارند اتفاق می‌افتد و چندین دهه است که بر روی آن مطالعه می‌شود. به‌عنوان‌مثال نواک [۱۳] بر روی این موضوع تحقیق کرده‌است. گالوپینگ در کابل‌های یخزده‌ی خطوط انتقال [۱۴، ۱۵]، کابل‌های نگه‌دار مایل در پل‌های کابل نگه‌دار [۸، ۱۰، ۱۶] و سازه‌های منشوری بلند که سطح مقطع مثلثی [۱۷]، مربعی [۱۸] و بیضی‌شکل [۱۹] دارند، موردمطالعه قرارگرفته است.

لانگو و همکارش [۲۰] مدل چهاربعدی کابل مایل را همراه با تحریک پایه ارائه کرده‌اند و در کارشان سرعت باد، دامنه‌ی حرکت پایه (تکیه‌گاه) و فرکانس داخلی و خارجی را به‌عنوان پارامترهای متغیر در نظر گرفته‌اند. مدل مقطع الاستیک نیز پیشنهادشده است تا برخی مسائل دینامیک کابل‌های نگه‌دارنده‌ی پل را به‌وسیله‌ی سیستم چند بدنه‌ی صفحه‌ای معادل تحلیل

[۳] bluff

کنند [۲۱]. پیش‌ازاین مدل الاستیک غیرخطی مرتبه‌ی دو توسط لانگو و همکارانش [۲۲] ارائه‌شده بود.

گو [۲۳] و لی [۲۴] در مورد انرژی کابل متحرک با طول‌های مختلف تحقیق کرده‌اند. گو در مورد حل و رفتار تقریبی انرژی در کابل بحث کرده است و لی انرژی انتقالی در اثر برگشت موج از حرکت مرزی را محاسبه کرده است. چن و همکارش [۲۵] ارتعاشات عرضی یک رشته‌ی متحرک محوری با سرعت ثابت و یک دمپر ویسکوز در انتهای کابل را بررسی کرده‌اند. آن‌ها از تابع لاگرانژین [۴] و روش المان محدود برای مدل‌سازی و از روش نیومارک بتا [۵] برای حل مسائل غیرخطی به‌صورت عددی استفاده کرده‌اند. انرژی ازدست‌رفته از طریق دمپر انتهایی به سرعت حرکت کابل مربوط است.

بندتینی و رگا [۲۶] دینامیک غیرخطی یک کابل الاستیک را تحت تحریک صفحه‌ای با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه‌ی [۶] مرتبه بالا مطالعه کرده‌اند. رگا و همکارانش [۲۷] از روش مقیاس‌های چندگانه برای به دست آوردن پاسخ غیرخطی یک کابل آویزان تحت تحریک سابهارمونیک [۷] استفاده کرده‌اند. روش‌هایی نظیر بالانس هارمونیک [۸] و هوموتوپی [۹] نیز برای حل معادلات غیرخطی کابل و تیر استفاده‌شده است. تاکاهاشی و همکارانش [۲۸] در مورد پاسخ نامتقارن صفحه‌ای کابل‌ها تحت بار متغیر از طریق روش بالانس هارمونیک تحقیق کرده‌اند. ژائو و همکارانش [۲۹] نیز از دو روش برای به دست آوردن پاسخ رزونانس اولیه‌ی کابل آویزان در معرض تحریک خارجی استفاده کرده‌اند. آن‌ها در تحقیقشان چهار نسبت دهانه به شکم متفاوت را انتخاب کرده‌اند و دو مُد اول را در نظر گرفته‌اند. آن‌ها بعد از به دست آوردن معادلات با استفاده از قانون همیلتون و جداسازی معادلات با روش گلرکین [۱۰]، از دو روش مقیاس‌های چندگانه و آنالیز هوموتوپی برای تعیین پاسخ تقریبی استفاده کرده‌اند.

در کنار نیروهای خارجی که به کابل اعمال می‌شوند، حرکت تکیه‌گاه کابل باعث تحریک جنبشی می‌شود که تحریک تکیه‌گاهی نام‌گذاری می‌شود و در ساختارهای مهندسی بسیار مهم است. برای مثال می‌توان به این موارد اشاره کرد: حرکت برجک‌های برق برای کابل‌های انتقال، حرکت برجک‌های پل برای کابل‌های آویزان، حرکت عرشه‌ی پل برای کابل‌های مایل و حرکت شناور برای کابل‌های لنگر. پِرکینز [۳۰] حرکت کابل آویزان را تحت حرکت طولی تکیه‌گاه فرمول‌بندی کرد. بِندِتینی و همکارانش [۳۱] یک مدل گسسته‌ی کابل را تحت حرکت‌های عمودی و خارج از صفحه‌ی تکیه‌گاه مدل کردند. ارتعاشات کابل‌های نگه‌دارنده و مایل پل‌ها که به علت حرکت برجک‌ها و یا عرشه‌ی پل ایجاد می‌شود، توسط بسیاری از پژوهش گران

[۴] Lagrangian function
[۵] Newmark Beta
[۶] Multiple Scale Method
[۷] Subharmunic
[۸] Harmonic Balance
[۹] Homotopy
[۱۰] Galerkin Method

تحقیق‌شده است [۳۲] در تمامی این حرکت‌های تکیه‌گاهی، عکس‌العمل کابل نادیده گرفته می‌شود. درواقع سختی، پتانسیل و انرژی تکیه‌گاه نامحدود فرض می‌شود. به این نوع تکیه‌گاه، تکیه‌گاه ایده‌آل گفته می‌شود؛ اما ممکن است تکیه‌گاه دارای پتانسیل و سختی محدود باشد که به این نوع تکیه‌گاه، غیر ایده‌آل گفته می‌شود و باید اثر متقابل دینامیک کابل و تکیه‌گاه در این حالات محاسبه و مدل شود. گوئو و همکارانش [۳۳] با استفاده از روش مالتی پل اسکیل و تقریب‌های نامتقارن و با کمک روش‌های عددی یک مدل از تکیه‌گاه غیرایده‌آل را ارائه نموده‌اند. آن‌ها بر اساس یک مدل کاهش‌یافته، پاسخ غیرخطی کابل را به تحریک غیر ایده‌آل مرزی به دست آورده‌اند و با پیدا کردن تغییرات ناشی از نسبت جرم تکیه‌گاه به کابل، دمپینگ مرزی و تنظیم داخلی، تحقیقات کاملی روی تأثیرات دینامیکی اتصالات انجام داده‌اند. در طول دهه‌های گذشته، رویکردهای مختلفی به‌منظور مهار کردن پدیده‌ی گالوپینگ موردبررسی قرارگرفته است. یک مرور جامع بر روی این پدیده اخیراً توسط پیکارد و همکارانش [۳۴] انجام‌شده است و مشخص‌شده است که بیش‌ترین مدل‌های موجود برای گالوپینگ، برای تخمین نیروهای آیرودینامیکی بر اساس تئوری شبه پایا می‌باشند. ایشان فرض می‌کنند که نیروهای آیرودینامیکی که بر روی یک جسم در حال حرکت عمل می‌کند را می‌توان با نیرویی جایگزین کرد که بر روی جسم بدون حرکت اما با سرعتی برابر با سرعت نسبی بین جریان و جسم عمل می‌کند؛ به این شرط که فرکانس ارتعاشات به‌طور قابل‌توجهی کم‌تر از فرکانس دنباله‌ی گردابه باشد [۳۵]. برخی محدودیت‌های استفاده از این تئوری توسط همون و سانتی موردبررسی قرارگرفته است [۳۶].

سینک انرژی غیرخطی (NES) [۱۱] یک نوسان گر غیرخطی است که به‌عنوان یک وسیله‌ی کنترلی منفعل [۱۲] استفاده می‌شود. ویژگی اصلی آن به سبب سختی غیرخطی، ظرفیت ایجاد رزونانس در طیف وسیعی از فرکانس‌هاست. جرم این دستگاه در مقایسه با سیستم اصلی که کنترل می‌شود، کوچک است و طبیعت غیرخطی آن باعث جذب برگشت‌ناپذیر انرژی از یک دهنده به گیرنده می‌شود. به این پدیده انتقال انرژی هدف‌دار (TET) [۱۳] می‌گویند که به‌صورت تحلیلی، عددی و آزمایشگاهی بررسی‌شده است [۳۷]. کاهش ارتعاشات، انتقال از دینامیک تند به کند و بالعکس را افزایش می‌دهد [۳۸]. در [۳۹] یک NES به یک سیستم دو درجه آزادی تحت تحریک هماهنگ و در شرایط رزونانس داخلی اعمال‌شده است. در [۴۰] از یک NES برای کنترل ارتعاشات تکان‌دهنده‌ی یک پل دهانه بلند استفاده‌شده است. بحث در مورد انتقال انرژی بین نوسان گرهای خطی و غیرخطی مانند NES در [۴۱، ۴۲] وجود دارد و گسترش استفاده از NES برای کنترل ساختارهای غیرایده‌آل اصلی در [۴۳، ۴۴] ارائه‌شده است. NES به ساختارهای خطی پیوسته نظیر تیرها و صفحه‌ها اضافه‌شده است [۴۵] زولی و لانگو [۴۶] یک کابل الاستیک غیرخطی را با NES کنترل کرده‌اند. کابل در شرایط غیر

[۱۱] Nonlinear Energy Sink
[۱۲] passive
[۱۳] Target Energy Transfers

روزنانسی قرار دارد و در یک انتهای آن یک جرم و یک فنر خطی اعمال شده است و یک نیروی گسترده به‌صورت تابعی از زمان به آن اعمال شده است. لانگو و زولی [۴۷] از NES برای کنترل ارتعاشات صفحه‌ای یک کابل مایل که یک تکیه‌گاه آن دارای فنر خطی و جرم متمرکز است، استفاده کرده‌اند. البته فنری که در انتهای کابل قرار می‌گیرد در دو راستای طولی و عرضی سختی ایجاد کرده است و بار گسترده نیز به کابل اعمال شده است.

چون پاسخ ناپایدار ارتعاشات گالوپینگ کابل یک مسیر بیضی‌شکل را طی می‌کند، [۴۸] پاسخ بیش‌تر از یک درجه‌ی آزادی دارد. مک دونالد و لاروس مدلل یک درجه آزادی خود را [۴۹] به یک مدل دو درجه آزادی بسط دادند [۵۰]. یو و همکاران [۵۱] تأثیر دوران بر گالوپینگ را بررسی کردند و به این نتیجه رسیدند که دوران در شروع گالوپینگ نقش مهمی ایفا می‌کند. سپس ایشان [۵۲، ۵۳] یک مدل گالوپینگ سه درجه آزادی ارائه کردند که در آن حرکت عمودی، افقی و دوران را به همراه تأثیر خروج از مرکزی ناشی از وجود یخ در نظر گرفتند. لانگو و پیکاردو [۵۴] به‌منظور تصحیح مدل کلاسیک کابل، برای به‌حساب آوردن پیچش، یک مدل نسبتاً ساده را ارائه کردند. یو و همکاران [۵۲، ۵۳]، مک کانل و چنگ [۵۵] و وایت و همکاران [۵۶] در کارهایشان از مدل کابل–تیر استفاده کردند. مزیت این مدل نسبت به مدل‌های قبلی در نظر گرفتن پیچش است؛ اما در این پژوهش‌ها خمش موردبررسی قرار نگرفته است و از انحنای اولیه‌ی کابل در تعریف کرنش پیچشی صرف‌نظر شده است.

لانگو و همکاران [۵۷] یک مدل خطی از کابل–تیر ارائه کردند که در آن علاوه بر در نظر گرفتن انحنای کابل، سختی‌های خمشی و پیچشی نیز در نظر گرفته شده است. سپس ایشان به بررسی تأثیر زاویه‌ی پیچش بر روی شروع گالوپینگ پرداختند [۵۸] و به این نتیجه رسیدند که در نظر گرفتن پیچش، شرایط پایداری را تحت تأثیر قرار می‌دهد. پس ار آن یان وهمکاران [۵۹] تأثیر خروج از مرکزی را بر روی گالوپینگ کابل خطوط انتقال دو سر ثابت، مورد بررسی قراردادند و از مدل کابل–تیر برای بررسی تشدید ۱:۱ و ۲:۱ استفاده کردند.

فصل ۲

مدل‌سازی

۱.۲ مقدمه

در این فصل هدف مدل‌سازی یک کابل است که دارای سختی‌های پیچشی و خمشی هست.
در این مورد، کابل را به‌عنوان یک کانتینیوم کوشی [1] [۶۱] یک‌بعدی که در فضای سه‌بعدی قرارگرفته است، مدل می‌کنند. این مدل در شرایطی صدق می‌کند که کابل به‌شدت لاغر باشد و یا نسبت طول به قطر آن به سمت بی‌نهایت میل کند. همچنین این مدل مستلزم آن است که شعاع انحنای کابل در پیکربندی جاری برای پیچش و خمش، نسبت به قطر کابل، به‌اندازه‌ی کافی بزرگ باشد. درصورتی‌که این شرایط برقرار نباشد، باید از مدل مجهزتری که دارای سختی پیچشی و خمشی است، استفاده کرد. این مدل را ''کابل سخت'' [2] و یا ''کابل‌ـ تیر'' می‌نامند که بر رفتار دوگانه‌ی کابل تأثیر دارد. معادلات مربوط به کابل‌ـ تیر توسط لانگو و همکاران [۶۱] به‌دست‌آمده است.
در فصل پیش رو ابتدا پیکربندی‌های مختلف بر روی سیستم شرح داده می‌شود، سپس روابط کرنش‌ـ جابه‌جایی ارائه می‌شود. با قرار دادن این روابط در قانون همیلتون و بسط آن معادلات حرکت برای کابل افقی با پایه‌های ثابت و الاستیک به دست می‌آید.

---

[1] Cauchy continuum
[2] Stiff cable

۲.۲ مدل غیرخطی کابل بر پایه‌ی تئوری تیر خمیده

برای توصیف بهتر حرکت تیر خمیده، دستگاه مختصات به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود: جهت‌های ۱، ۲ و ۳ به ترتیب جهت‌های عمودی، عمود بر صفحه‌ی کابل و مماسی را نشان می‌دهند (شکل (۱.۲(آ)،۱.۲(ب))). همچنین جهت مثبت زاویه‌ی پیچش پادساعت‌گرد فرض شده است. علاوه بر این، یخزدگی روی کابل یکنواخت فرض شده است و باد با سرعت $\mathbf{U} = U\mathbf{Y}$ به‌صورت افقی می‌وزد. در اینجا ۴ پیکربندی مختلف وجود دارد:

۱. پیکربندی ابتدایی Γ_0^1 :
خروج از مرکزی در نظر گرفته نشده است.

۲. پیکربندی ابتدایی Γ_0^2 :
خروج از مرکزی در نظر گرفته شده است.
این دو پیکربندی تحت تأثیر جاذبه قرارگرفته‌اند. پیکربندی Γ_0^1 در امتداد عمودی صفحه‌ی $\mathbf{Z} - \mathbf{X}$ است. در این پیکربندی روابط مختصات به‌صورت $\mathbf{a}_{10}^1 = \mathbf{X}$ و $\mathbf{a}_{20}^1 = \mathbf{Y}$ هستند.
در پیکربندی Γ_0^2 ،برای در نظر گرفتن خروج از مرکزی یخ، S_1 و S_2 به‌عنوان ممان های اول سطح معرفی‌شده است. به خاطر همین خروج از مرکزی کابل، پیکربندی Γ_0^2 نسبت به پیکربندی Γ_0^1 به‌اندازه‌ی زاویه‌ی ϕ_0 چرخش اولیه دارد.

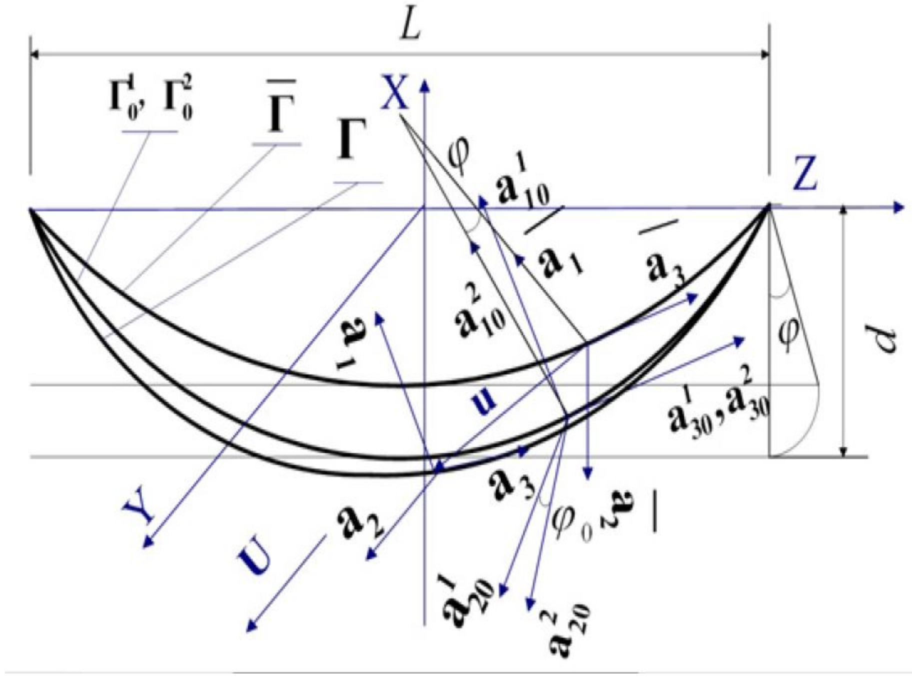
۳. پیکربندی مرجع $\bar{\Gamma}$:
در این پیکربندی، سیستم در زمان $t = 0$ فرض شده است،. فقط بخش استاتیکی نیروهای آیرودینامیکی به کابل وارد می‌شود. با توجه به همین نیروهای استاتیکی، کابل یخزده به‌اندازه‌ی زاویه‌ی ϕ نسبت به پیکربندی Γ_0^2 می‌چرخد.

۴. پیکربندی واقعی Γ :
در این پیکربندی سیستم در زمان $0 \leq t$ فرض شده است که هم بخش استاتیکی و هم بخش دینامیکی نیروهای آیرودینامیکی به کابل وارد می‌شود. به خاطر بخش دینامیکی این نیروها، انتقال دینامیکی و چرخش به ترتیب u و θ فرض شده است. درواقع انتقال از پیکربندی مرجع به پیکربندی واقعی با استفاده از بردار جابه‌جایی u و دوران θ بیان می‌شود.

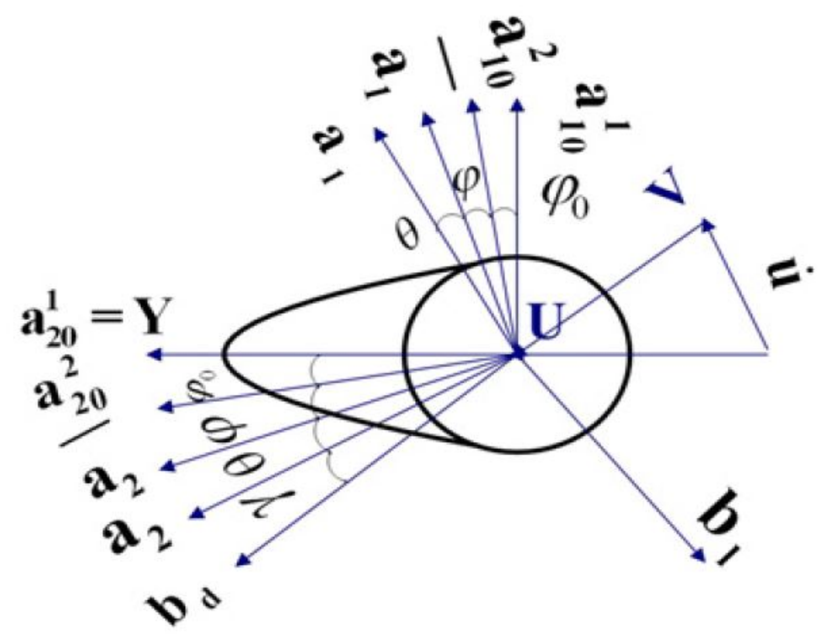
با توجه به مطالعات پیشین صورت گرفته و استفاده از مرجع [۵۹] روابط کرنش – جابه‌جایی به‌صورت زیر به‌دست‌آمده است:

$$\varepsilon = u_3' - \kappa u_1 + \frac{1}{2}[(u_1' + \kappa u_3)^2 + {u_2'}^2] + \frac{1}{2}(u_3' - \kappa u_1)^2 \qquad (۱.۲)$$

$$k_1 = -u_2'' + \kappa\theta + \theta(u_1'' + 2\kappa u_3' - \kappa^2 u_1) + u_2'(u_3'' - 2\kappa u_1' - \kappa^2 u_3) \qquad (۲.۲)$$



(آ) الف



(ب) ب

شکل ۱.۲: پیکربندی‌های مختلف کابل و جهت‌گیری مقطع کابل در برابر جریان باد

$$k_2 = u_1'' + \kappa u_3' + \theta u_1'' - \frac{1}{2}\kappa(\theta^2 + u_2'^2) - [(\kappa u_3 + u_1')(u_3' - \kappa u_1)]' \tag{۳.۲}$$

$$k_3 = \theta' + \kappa u_2' + \kappa^2 u_1 u_2' + u_2' u_1'' + \kappa' u_1 u_2' \tag{۴.۲}$$

در روابط بالا "$'$" نشان‌دهنده‌ی مشتق نسبت به s یا مسیر کابل است؛ ε ، k_1 ، k_2 و k_3 به ترتیب کرنش محوری افزایشی و نسبت‌های انحنای تار خنثی است؛ u_1 ، u_2 ، u_3 و θ به ترتیب جابه‌جایی‌های عمودی، عمود بر صفحه، مماسی و دورانی در زمان t هستند. κ انحنا را نسبت به محور $\mathbf{a}_2$ در زمان $t = 0$ مشخص می‌کند. طبق مرجع [۶۰]، انحنای κ و جابه‌جایی مماسی u_3 در سیستم خطوط انتقال خیلی کوچک هستند. بنابراین ترم‌های با مرتبه‌ی بالا از κ و u_3 از معادلات خطی تبدیل به معادلات غیرخطی می‌شوند. علاوه بر این ترم‌هایی از κ و u_3 که در روابط (۱.۲) تا (۴.۲) دارای مرتبه‌ی ۳ یا بالاتر هستند، صفر در نظر گرفته می‌شود. با اعمال این تغییرات و همچنین با فرض $u_1 = v$ ، $u_2 = w$ و $u_3 = u$ دوباره روابط کرنش- جابه‌جایی را با جدا کردن قسمت‌های خطی از غیرخطی نوشته‌شده است. آنالیز مرتبه‌ای (۹.۲) نیز در آن اعمال‌شده است.

$$\varepsilon^L = u' - \kappa v, \varepsilon^N = \frac{1}{2}(v'^2 + w'^2) \tag{۵.۲}$$

$$k_1^L = -w'', k_1^N = \kappa\theta + \theta v'' + w'(u'' - 2\kappa v') \tag{۶.۲}$$

$$k_2^L = v'', k_2^N = \theta w'' - v'(u'' - 2\kappa v') \tag{۷.۲}$$

$$k_3^L = \theta', k_3^N = \kappa w' + \kappa\theta v' + w' v'' \tag{۸.۲}$$

$$(\frac{d}{l})^2 << 1 \quad , \quad \frac{EI_{1,2}}{EAl^2} = O(\frac{r^2}{l^2}) << 1 \quad , \quad O(EI_1) = O(EI_2) = O(GJ) \quad , \quad \frac{T}{EA} << 1 \quad \frac{EI_{1,2}}{Tl^2} << 1 \tag{۹.۲}$$

طبق قانون همیلتون و مرجع [۶۲] ، با صرف‌نظر کردن از مقاومت برشی تیر خمیده، می‌توان معادلات حرکت را از رابطه‌ی زیر استخراج نمود:

$$\int_0^t \delta(T_k - V_s)dt + \int_0^t \delta W_{nc} = 0 \tag{۱۰.۲}$$

که در آن T_k و V_s انرژی جنبشی و کرنشی (پتانسیل) کل هست و W_{nc} نشان‌دهنده‌ی کار نیروهای ناپایستار است. بنابراین طبق [۵۹] داریم:

$$T_k = \int_0^l \frac{1}{2}\rho A[\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2] + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \dot{v}S_1\dot{\theta} + \dot{w}S_2\dot{\theta}\, ds \tag{۱۱.۲}$$

(۱۲.۲)
$$V_s = \int_0^l \{\frac{1}{2}(EA\varepsilon^2 + EI_1 k_1^2 + EI_2 k_2^2 + GJk_3^2) + T\varepsilon^N + M_1 k_1^N + M_2 k_2^N + M_3 k_3^N\}\, ds$$

$$\delta W_{nc} = \int_0^t \int_0^l (b_1 - c_1)\dot{v})\delta v + (b_2 - c_2\dot{w})\delta w - c_3\dot{u}\delta u + (b_3 - c_4\dot{\theta})\delta\theta \, dsdt \qquad (۱۳.۲)$$

با قرار دادن روابط (۱۱.۲) تا (۱۳.۲) در رابطه‌ی (۱۰.۲) ، رابطه‌ی (۱۴.۲) به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}\int_0^t \int_0^l &\{[-(EA\epsilon\delta\epsilon + EI_1 k_1\delta k_1 + EI_2 k_2 \delta k_2 + GJk_3\delta k_3) - (T\delta\epsilon^N + M_1\delta k_1^N \\ &+ M_2\delta k_2^N + M_3\delta k_3^N) + \rho A(\ddot{v}\delta v + \ddot{w}\delta w + \ddot{u}\delta u) + \rho(J\ddot{\theta}\delta\theta + \ddot{v}S_1\delta\theta \\ &+ \ddot{\theta}S_1\delta v + \ddot{w}S_2\delta\theta + \ddot{\theta}S_2\delta w)] - [(b_1 - c_1\dot{v})\delta v + (b_2 - c_2\dot{w})\delta w - c_3\dot{u}\delta u \\ &+ (b_3 - c_4\dot{\theta})\delta\theta]\}\, dsdt\end{aligned} \qquad (۱۴.۲)$$

که در آن l طول کابل، A مساحت سطح مقطع کابل؛ EA ، GJ ، EI_1 و EI_2 به ترتیب سختی محوری، سختی پیچشی و سختی‌های خمشی؛ c_1 ، c_2 ، c_3 و c_4 ضرایب میرایی ساختاری؛ b_1 ، b_2 و b_3 دانسیته ی نیروها و کوپل خارجی و بالانویس N نشان‌دهنده‌ی قسمت غیرخطی می‌باشد. همچنین $S_1 = e_y A$ و $S_2 = e_x A$ به ترتیب ممان اول سطح حول محورهای $\mathbf{a}_1$ و $\mathbf{a}_2$ ؛ $T = \frac{\rho Agl^2}{8d}$ نیروی کشش کابل، $M_1 = 0$ و $M_2 = EI_2\kappa$ ممان های خمشی و $M_3 = (s - \frac{l}{2})\rho Ag[e_y cos(\phi) + e_x sin(\phi)]$ ممان پیچشی را در زمان $t = 0$ بیان می کند [۵۹] .
L فاصله‌ی افقی بین دو سر کابل را مشخص می‌کند و d شکم کابل در وسط هست.
e_x و e_y خروج از مرکزی سطح مقطع نسبت به محورهای $\mathbf{a}_1$ و $\mathbf{a}_2$ می باشند و با استفاده از روابط پیوست مرجع [۵۹] به دست آمده اند و تابع ϕ_0 می باشند.
با جای گذاری معادلات (۵.۲) تا (۸.۲) در معادله‌ی (۱۴.۲) معادلات حرکت و شرایط مرزی را برای کابل افقی دو سر ثابت می‌توان به‌صورت زیر به دست آورد:
جهت عمودی

$$\begin{aligned}&EA\{\kappa(u' - \kappa v - \frac{1}{2}v'^2 + \frac{1}{2}w'^2) + [(u' - \kappa v + \frac{1}{2}v'^2 + \frac{1}{2}w'^2)v']'\} + Tv'' - \rho A\ddot{v} \\ &- \rho S_1\ddot{\theta} + (b_1 - c_1\dot{v}) = 0\end{aligned} \qquad (۱۵.۲)$$

جهت عمود بر صفحه

$$EA[(u' - \kappa v + \frac{1}{2}v'^2 + \frac{1}{2}w'^2)w']' + Tw'' - \rho A\ddot{w} - \rho S_2\ddot{\theta} + (b_2 - c_2\dot{w}) = 0 \qquad (۱۶.۲)$$

جهت مماسی

$$EA(u' - \kappa v + \frac{1}{2}v'^2 + \frac{1}{2}w'^2) - \rho A\ddot{u} - c_3\dot{u} = 0 \qquad (۱۷.۲)$$

جهت پیچشی

$$GJ\theta^{''}+(GJ+EI_1)\kappa w^{''}-EI_1\kappa^2\theta-M_1(v^{''}+\kappa)-M_2w^{''}-M_3\kappa v^{'}-\rho J\ddot{\theta}-\rho S_1\ddot{v}$$
$$-\rho S_2\ddot{w}+b_3-c_4\dot{\theta}=0$$
(۱۸.۲)

$$u(0)=0 \quad , \quad u(l)=0 \tag{۱۹.۲}$$

$$v(0)=0 \quad , \quad v(l)=0 \tag{۲۰.۲}$$

$$w(0)=0 \quad , \quad w(l)=0 \tag{۲۱.۲}$$

$$\theta(0)=0 \quad , \quad \theta(l)=0 \tag{۲۲.۲}$$

شکل ساده‌تر معادلات (۱۵.۲) تا (۱۸.۲) را بازنویسی می‌کنیم.

$$EA(\varepsilon v^{'})^{'}+EA\kappa\varepsilon+Tv^{''}-\rho A\ddot{v}-c_1\dot{v}-\rho S_1\dot{\theta}+b_1=0 \tag{۲۳.۲}$$

$$EA(\varepsilon w^{'})^{'}+Tw^{'}-\rho A\ddot{w}-c_2\dot{w}-\rho S_2\ddot{\theta}+b_2=0 \tag{۲۴.۲}$$

$$EA\varepsilon^{'}-\rho A\ddot{u}-c_3\dot{u}=0 \tag{۲۵.۲}$$

$$GJk_3^{'}-EI_1\kappa k_1-\rho J\ddot{\theta}-c_4\dot{\theta}+b_3-M_1(w^{'}+\kappa)-M_2w^{''}-M_3\kappa v^{'}-\rho S_1\ddot{v}-\rho S_2\ddot{w}=0 \tag{۲۶.۲}$$

ازآنجاکه مربع نسبت فرکانس عرضی به فرکانس طولی و فرکانس عرضی به فرکانس پیچشی کوچک می‌باشد [۵۸] ، پیچش و کشش را می‌توان شبه پایا در نظر گرفت. درنتیجه عبارت‌های اینرسی در جهت پیچشی و طولی برابر صفر می‌باشند که ما جهت طولی را از همان ابتدا صفر در نظر گرفتیم. برای ساده‌سازی $b_3=0$ نیز فرض می‌شود. درنتیجه داریم:

$$EA\varepsilon^{'}=0 \tag{۲۷.۲}$$

$$EA=constant\rightarrow\varepsilon^{'}(s,t)=0\rightarrow\varepsilon(s,t)=\varepsilon_0(t) \tag{۲۸.۲}$$

ازآنجاکه مشتق نسبت به مکانِ ε صفر شده است، می‌توان نتیجه گرفت که کرنش واحد در طول کابل ثابت است و فقط با زمان تغییر می‌کند. لذا داریم:

$$\varepsilon=u^{'}-\kappa v+\frac{1}{2}(v^{'2}+w^{'2}) \tag{۲۹.۲}$$

$$\rightarrow u' - \kappa v + \frac{1}{2}(v'^2 + w'^2) = \varepsilon_0(t) \tag{۳۰.۲}$$

$$\rightarrow u = u_A(t) + \varepsilon_0(t)(s - s_A) + \kappa \int_{s_A}^{s} v ds - \frac{1}{2}\int_{s_A}^{s} (v'^2 + w'^2)\, ds \tag{۳۱.۲}$$

برای به دست آوردن $\varepsilon_0(t)$ نیز باید از شرایط مرزی استفاده کرد.

$$\varepsilon = u' - \kappa v + \frac{1}{2}(v'^2 + w'^2) = \varepsilon_0(t) \tag{۳۲.۲}$$

$$u' = \varepsilon_0(t) + \kappa v - \frac{1}{2}(v'^2 + w'^2) \tag{۳۳.۲}$$

$$\int_0^s u' ds = \int_0^s \varepsilon_0(t) ds + \int_0^s \kappa v ds - \int_0^s \frac{1}{2}(v'^2 + w'^2)\, ds \tag{۳۴.۲}$$

$$u(s) = \varepsilon_0(t) s + \int_0^s \kappa v ds - \int_0^s \frac{1}{2}(v'^2 + w'^2)\, ds \tag{۳۵.۲}$$

$$u(l) = 0 \tag{۳۶.۲}$$

با قرار دادن رابطه‌ی (۳۶.۲) در (۳۵.۲) داریم:

$$\varepsilon_0(t) = \frac{1}{l}\int_0^l [\kappa v - \frac{1}{2}(v'^2 + w'^2)]\, ds \tag{۳۷.۲}$$

$$\begin{aligned}\rightarrow u = -\frac{s}{l}\int_0^l [\kappa v - \frac{1}{2}(v'^2 + w'^2)] ds + \kappa \int_0^s v(\zeta, t) d\zeta - \frac{1}{2}\int_0^s (v'(\zeta, t)^2 \\ + w'(\zeta, t)^2)\, d\zeta\end{aligned} \tag{۳۸.۲}$$

همان‌طور که گفته شد پیچش را نیز می‌توان شبه پایا فرض کرد؛ اما ازآنجایی‌که پیچش به‌راحتی ساده نمی‌شود، راحت‌تر است که از آن به‌عنوان معادله‌ی کمکی برای معادلات باقی‌مانده استفاده کنیم. همچنین عبارات $\rho J\ddot{\theta}$ ، $\rho A\ddot{u}$ ، $c_4\dot{\theta}$ و $c_3\dot{u}$ می‌تواند برابر صفر فرض شود. همچنین در رابطه‌ی (۲۶.۲) می‌توان به‌جای $\ddot{v}$ و $\ddot{w}$ از عبارات $\omega_1^2 v$ و $\omega_2^2 w$ به ترتیب استفاده کرد. S_1 و S_2 نیز در برابر A خیلی کوچک هستند. درنتیجه می‌توان از عبارات $\rho S_1\ddot{\theta}$ و $\rho S_2\ddot{\theta}$ در روابط (۲۳.۲) و (۲۴.۲) نیز صرف‌نظر کرد [۵۹] . با توجه به این فرض‌های ساده‌سازی و قرار دادن رابطه‌ی (۳۸.۲) در روابط (۲۳.۲) و (۲۴.۲) ، معادلات حرکت باقی‌مانده را دوباره بازنویسی می‌کنیم؛ که در آن معادله‌ی پیچش، معادله‌ی کمکی است.

$$\begin{aligned}GJ\theta'' + (GJ + EI_1)\kappa w' - EI_1\kappa^2\theta - M_1(v'' + \kappa) - M_2 w'' - M_3\kappa v' \\ - \rho S_1\omega_1^2 v - \rho S_2\omega_2^2 w = 0\end{aligned} \tag{۳۹.۲}$$

$$
\begin{aligned}
&-EA\{\frac{\kappa}{l}\int_0^l(\kappa v-\frac{1}{2}v'^2-\frac{1}{2}w'^2)ds+[\frac{v'}{l}\int_0^l(\kappa v-\frac{1}{2}v'^2-\frac{1}{2}w'^2)ds]'\}+Tv''\\
&-\rho A\ddot{v}-c_1\dot{v}+b_1=0
\end{aligned}
\quad (۴۰.۲)
$$

$$
-EA[\frac{w'}{l}\int_0^l(\kappa v-\frac{1}{2}v'^2-\frac{1}{2}w'^2)ds]'+Tw''-\rho A\ddot{w}-c_2\dot{w}+b_2=0 \quad (۴۱.۲)
$$

۳.۲ مدل غیرخطی برای کابل افقی با تکیه‌گاه انتهایی الاستیک

تا به اینجا مدل‌سازی برای کابل افقی دو سر ثابت انجام‌شده است. حال می‌توان در انتهای کابل، دو فنر در جهت‌های **X** و **Y** همان‌طور که در شکل (۲.۲) می‌بینید، اضافه کرد. در واقع نقطه ی B با توجه به سختی های K_1 و K_2 بر روی صفحه ی XY می تواند حرکت کند. ازآنجاکه المان فنر به سیستم اضافه‌شده می‌توان به دو روش عمل کرد.

- می‌توان انرژی پتانسیل فنرها را به‌صورت تابعی از دلتای دیراک [۳] وارد انرژی پتانسیل سیستم کرد و معادلات را بازنویسی کرد. تمامی شرایط مرزی در این حالت مانند حالت یک سرآزاد کابل است. شرایط مرزی سیستم خطی در این حالت به صورت زیر می‌باشد:

$$
\begin{aligned}
v(0)&=0 \quad , \quad Tv'(l)=0\\
w(0)&=0 \quad , \quad Tw'(l)=0\\
\theta(0)&=0 \quad , \quad \theta(l)=0\\
u(0)&=0 \quad , \quad u(l)=0
\end{aligned}
$$

- می‌توان معادلات سیستم را مانند حالت دو سر ثابت در نظر گرفت و از تعادل نیرویی فنر و کابل در انتهای کابل، شرایط مرزی را تعیین نمود. (فنرها خطی فرض شده‌اند)

در این پژوهش از روش دوم استفاده‌شده است؛ بنابراین معادلات سیستم هیچ تغییری نمی‌کند؛ اما شرایط مرزی سیستم با توجه به مراجع [۴۶، ۴۷] ، به‌صورت زیر تغییر می‌کند:

$$
u(0)=0 \quad , \quad u(l)=0 \quad (۴۲.۲)
$$

$$
\begin{aligned}
v(0)=0 \quad , \quad &Tv'(l)+K_1v(l)-EA[\kappa\int_0^l(\kappa v-\frac{1}{2}v'^2-\frac{1}{2}w'^2)ds\\
&+v''\int_0^l(\kappa v-\frac{1}{2}v'^2-\frac{1}{2}w'^2)ds]=0
\end{aligned}
\quad (۴۳.۲)
$$

[۳] Dirac delta

$$w(0)=0 \quad , \quad Tw^{'}(l)+K_2w(l)-EAw''\int_0^l(\kappa v-\frac{1}{2}v'^2-\frac{1}{2}w'^2)ds=0 \qquad (۴۴.۲)$$

$$\theta(0)=0 \quad , \quad \theta(l)=0 \qquad (۴۵.۲)$$

که در این روابط K_1 سختی فنر پایه‌ی انتهایی کابل در جهت عمودی و K_2 سختی فنر پایه‌ی انتهایی کابل در جهت عمود بر صفحه است. معادلات سیستم در این حالت مانند حالت دوسر ثابت است.

روابط (۴۳.۲) و (۴۴.۲) در نقطه ی انتهایی کابل دو معادله‌ی به‌اصطلاح کوپله [۴] هستند که با بررسی‌های صورت گرفته درصد تأثیر ترم‌های غیرخطی در آن‌ها بسیار کم بوده و می‌توان آن‌ها را به دو معادله‌ی خطی مستقل تبدیل کرد.(این کار به‌صورت کامل در فصل ۴ انجام‌گرفته است) بنابراین با دو معادله‌ی دیفرانسیل مستقل روبه‌رو هستیم. با تغییر دو سختی K_1 و K_2 پاسخ‌ها متغیر می‌شود و مانند حالت دوسر ثابت کابل ، ثابت نیست. درواقع تغییر این دو مقدار به‌واسطه‌ی روابط (۴۳.۲) و (۴۴.۲) باعث تغییر فرکانس‌های سیستم در دو جهت v و w می‌شود و حل پرتوربیشن ما را تحت تأثیر قرار می‌دهد.

اگر $K_1 \to 0$ ، آنگاه سیستم به کابل یک سر ثابت و یک سر آزاد در جهت **X** (عمودی) تبدیل می‌شود.

اگر $K_2 \to 0$ ،آنگاه سیستم به کابل یک سر ثابت و یک سر آزاد در جهت **Y** (عمود بر صفحه) تبدیل می‌شود.

اگر $K_1 \to \infty$ ، آنگاه سیستم به کابل دو سر ثابت در جهت **X** (عمودی) تبدیل می‌شود.

اگر $K_2 \to \infty$ ،آنگاه سیستم به کابل دو سر ثابت در جهت **Y** (عمود بر صفحه) تبدیل می‌شود.

لازم به ذکر است، حالت‌های مختلفی که ممکن است بین سختی‌های K_1 و K_2 و موقعیت این دو نسبت به یکدیگر صورت بگیرد، فرکانس‌های سیستم در دو جهت (ω_1,ω_2) و موقعیت آن‌ها نسبت به یکدیگر را تغییر می‌دهد و از این طریق حل ما تحت تأثیر قرار می‌گیرد.

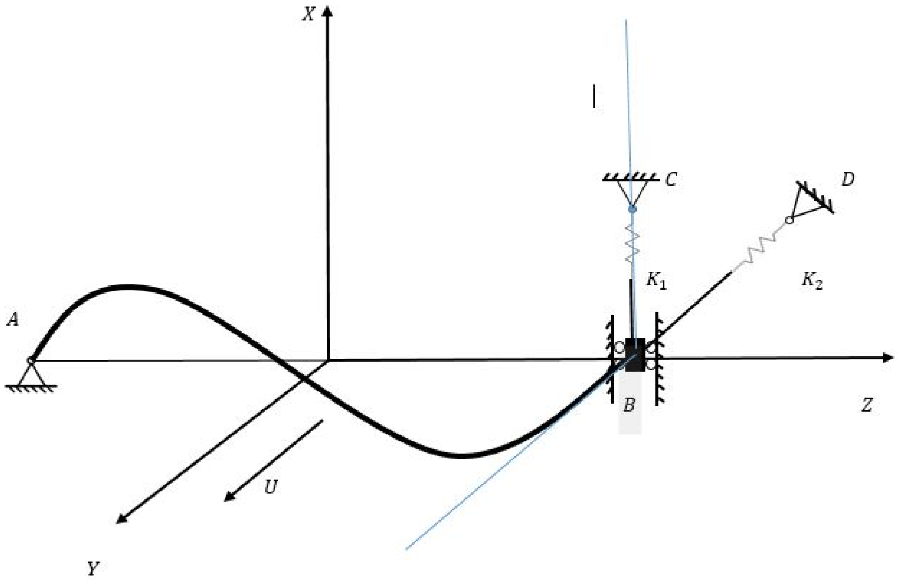
با بررسی‌های صورت گرفته در حالت دو سر ثابت کابل با دو شکم متفاوت کابل دو رزونانس ۱:۱ و ۲:۱ اتفاق می‌افتد؛ اما در این حالت به دلیل همین تغییر فرکانس‌ها حالت‌های رزونانسی ۱:۲، ۳:۱ و حالت بدون رزونانس داخلی نیز در سیستم اتفاق می‌افتد که تمامی این حالات بررسی و حل شده‌است.

۴.۲ مدل‌سازی آیرودینامیکی

با استفاده از یک مدل آیرودینامیکی ساده نیروهای آیرودینامیکی b_1 و b_2 را با استفاده از فرضیه‌های زیر می‌توان به دست آورد:

• تئوری شبه پایا در نظر گرفته‌شده است [۵۸] • از انحنای کابل صرف‌نظر شده است • یخ

[۴] couple



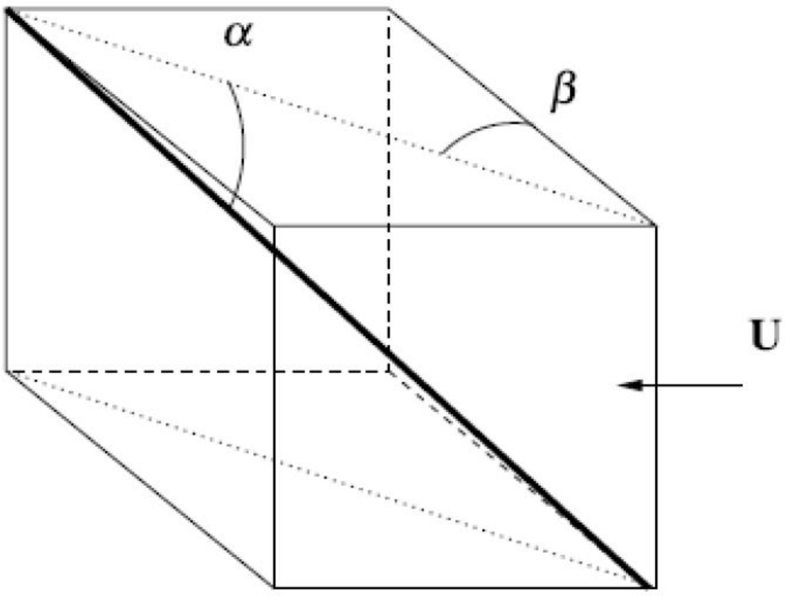
شکل ۲.۲: شماتیک کابل در شرایط الاستیک پایه‌ی انتهایی در دو جهت عمودی و عمود بر صفحه

به‌طور یکنواخت طول کابل را پوشانده است ● از کوپل های آیرودینامیکی صرف‌نظر شده است ($b_3 = 0$) ● بارها با در نظر گرفتن دوران پیچشی به‌دست‌آمده‌اند و از دوران خمشی صرف‌نظر شده است ● مانند آنچه در شکل (۳.۲) نشان داده‌شده است، باد با سرعت $\mathbf{U}$ به صفحه‌ی کابل می‌وزد. با تصویر کردن سرعت باد بر روی سطح مقطع کابل با استفاده از رابطه‌ی (۴۶.۲) مؤلفه‌ی U که بر روی مقطع کابل اثر می‌گذارد، به دست می‌آید که در آن β زاویه‌ی انحراف کابل نسبت به باد و α زاویه‌ی آویز کابل هست که در اینجا صفر است. زاویه‌ی حمله‌ی γ به‌صورت زاویه‌ی بین سرعت باد وزیده شده مقطع و یک محور مرجع تعریف می‌شود که در این پژوهش محور $\bar{\mathbf{a}}_2$ به‌عنوان محور مرجع در نظر گرفته‌شده است. زاویه‌ی حمله‌ی γ را می‌توان با استفاده از رابطه‌ی (۴۷.۲) به دست آورد که در آن $\mathbf{U} = \|\mathbf{U}\|$ هست [۵۸].

$$U = \mathbf{U}\sqrt{\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)\sin^2(\beta)} \tag{۴۶.۲}$$

$$\gamma = -arcsin(\frac{\overrightarrow{\mathbf{U}}}{\mathbf{U}}.\bar{\mathbf{a}}_2 = -arcsin(\frac{\sin(\alpha)\sin(\beta)}{\sqrt{\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)\sin^2(\beta)}}) \tag{۴۷.۲}$$

در واقع α و β، γ را تعیین می کند که در این جا هر دو صفر می باشد و همچنین ضرایب آیرودینامیکی همان طور که در ادامه به آن پرداخته شده تابع γ می باشد و به صورت داده های تجربی به دست آمده است. بنابراین زاویه ی حمله نقش مؤثری را ایفا می کند. البته



شکل ۳.۲: جهت‌گیری کابل در برابر باد

چون γ در پیکربندی مرجع $-\phi$ می باشد و ϕ همان طور که در ادامه خواهید دید رابطه ای ضمنی با سرعت باد دارد، بنابراین γ نیز با سرعت باد رابطه ای ضمنی دارد و نمی توان آن را فقط تابع مشخصات هندسی سیستم در نظر گرفت. در واقع روابط تجربی که برای به دست آوردن ضرایب آیرودینامیکی استفاده میشود (روابط (۱۸.۴) و (۱۹.۴)) برای γ در بازه ی $[-0.215, 0.395]$ صادق است [۵۹] و نمی توان γ را به صورت متغیر و خارج از این بازه در نظر گرفت. نیروهای آیرودینامیکی b_1 و b_2 با استفاده از رابطه‌ی (۴۸.۲) به دست می‌آید [۵۸].

$$\mathbf{b}_i = \frac{1}{2}\rho_{air} V r (C_d[\gamma]\mathbf{V} + C_d[\gamma]\mathbf{a}_3 \times \mathbf{V}) \qquad (۴۸.۲)$$

که در آن $\mathbf{V}$ سرعت نسبی باد نسبت به مقطع، ρ_{air} چگالی هوا، r شعاع مشخصه‌ی کابل و $V = \|\mathbf{V}\|$ اندازه‌ی سرعت نسبی است که در رابطه‌ی (۴۹.۲) داده‌شده است [۵۹]. .

$$V = U(1 - \frac{\dot{v}}{U}\sin(\phi) - \frac{\dot{w}}{U}\cos(\phi)) \qquad (۴۹.۲)$$

همچنین $C_l[\gamma]$ و $C_d[\gamma]$ ضرایب آیرودینامیکی لیفت و درگ هستند که به شکل مقطع و زاویه‌ی حمله بستگی دارند و با روابط (۵۰.۲) و (۵۱.۲) تعریف می‌شوند [۵۹]

$$C_l[\gamma] = aa_{1,0} + aa_{1,1}\chi + \frac{1}{2}aa_{1,2}\chi^2 + \frac{1}{6}aa_{1,3}\chi^3 \qquad (۵۰.۲)$$

$$C_d[\gamma] = aa_{2,0} + aa_{2,1}\chi + \frac{1}{2}aa_{2,2}\chi^2 + \frac{1}{6}aa_{2,3}\chi^3 \qquad (۵۱.۲)$$

که در آن χ به‌صورت رابطه‌ی (۵۲.۲) تعریف می‌شود و ضرایب $aa_{i,j}$ ضرایب آیرودینامیکی در پیکربندی مرجع می‌باشند که با استفاده از نتایج تجربی به دست می‌آیند و به‌صورت رابطه‌ی ۵۳.۲ تعریف می‌شوند.

$$\chi = -\theta + \frac{\dot{v}}{U}\cos(\phi) - \frac{\dot{w}}{U}sin(\phi) \tag{۵۲.۲}$$

$$\begin{array}{llll} aa_{1,0} = \overline{C_l[\gamma]} \quad , & aa_{1,1} = \overline{(C_l[\gamma])'} \quad , & aa_{1,2} = \overline{(C_l[\gamma])''} \quad , & aa_{1,3} = \overline{(C_l[\gamma])'''} \\ aa_{2,0} = \overline{C_d[\gamma]} \quad , & aa_{2,1} = \overline{(C_d[\gamma])'} \quad , & aa_{2,2} = \overline{(C_d[\gamma])''} \quad , & aa_{2,3} = \overline{(C_d[\gamma])'''} \end{array} \tag{۵۳.۲}$$

همچنین داریم:

$$\mathbf{V} = \mathbf{U} - \dot{\mathbf{V}}_p \tag{۵۴.۲}$$

که در آن $\mathbf{U}$ سرعت باد بر روی سطح مقطع، $\mathbf{V}_p$ سرعت مقطع کابل و $\mathbf{V}$ سرعت نسبی باد نسبت به سطح مقطع می باشد.
با جای گذاری رابطه‌ی (۵۴.۲) در رابطه‌ی (۴۸.۲) می‌توان ضرایب b_1 و b_2 را به‌صورت کامل به دست آورد که داریم:

$$b_1 = b_1(\phi, U, \dot{v}, \dot{w}, \dot{\theta}) \tag{۵۵.۲}$$

$$b_2 = b_2(\phi, U, \dot{v}, \dot{w}, \dot{\theta}) \tag{۵۶.۲}$$

دو جمله از نیروهای آیرودینامیکی b_2 فقط تابع ϕ و U است و تابع متغیرهای سیستم نیست. این دو جمله‌ی b_2 را با $\overline{b_2}$ نشان می‌دهیم و داریم:

$$\bar{b}_2 = \bar{b}_2(\phi, U) \tag{۵۷.۲}$$

برای این‌که کابل صفحه‌ای باقی بماند، تعادل نیازمند این است که برآیند نیروها $(\bar{b} = \overline{b_i} - mg\mathbf{a}_y)$ ، در این صفحه قرار گیرد. یعنی؛ برآیند هیچ مؤلفه‌ای در جهت عمود بر این صفحه یعنی $\bar{\mathbf{a}}_2$ نداشته باشد [۵۸] . درنتیجه داریم:

$$\bar{b}.\bar{\mathbf{a}}_2 = (\bar{b}_i - mg\mathbf{a}_y).\bar{\mathbf{a}}_2 = 0 \tag{۵۸.۲}$$

ازآنجاکه داریم:

$$\bar{b}_i.\bar{\mathbf{a}}_2 = \bar{b}_2 \tag{۵۹.۲}$$

$$\bar{\mathbf{a}}_y.\bar{\mathbf{a}}_2 = -sin(\phi) \tag{۶۰.۲}$$

بنابراین:

$$\bar{b}_2(\phi, U) + mgsin(\phi) = 0 \qquad (۶۱.۲)$$

رابطه‌ی (۶۱.۲) یک رابطه‌ی ضمنی بین ϕ و U هست؛ که از آن باید در ادامه استفاده کرد و زاویه‌ی دوران کابل را در اثر وزش باد به دست آورد. این رابطه یک رابطه‌ی کلیدی برای حل می‌باشد.

فصل ۳

حل معادلات

۱.۳ مقدمه

در این فصل معادلات با استفاده از روش گلرکین با تعریف توابع ویژه و مقادیر ویژه و قرار دادن آن‌ها در معادلات، گسسته می‌شوند. معادلات به‌دست‌آمده دارای غیرخطی های مرتبه‌ی دو و سه هم در جابه‌جایی و هم در سرعت می‌باشند. این معادلات در بخش (۳.۳) با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه در اغتشاشات مهار می‌شوند.

۲.۳ گسسته‌سازی

به‌منظور گسسته کردن معادلات حرکت به‌دست‌آمده در قسمت‌های قبل از روش گلرکین استفاده می‌شود. با در نظر گرفتن توابع $v = f_1[s]q_1[t]$ ، $w = f_2[s]q_2[t]$ و $\theta = f_3[s]q_3[t]$ که در آن $f_1[s]$ ، $f_2[s]$ و $f_3[s]$ به ترتیب شکل مُد اول در جهت عمودی، عمود بر صفحه‌ی کابل و پیچش می‌باشد. $q_1[t]$ ، $q_2[t]$ و $q_3[t]$ دامنه‌ی آن‌ها برحسب زمان هست. با جای‌گذاری این عبارات در رابطه‌ی (۳۹.۲) به رابطه‌ی (۱.۳) می‌رسیم.

$$q_3 = \beta_1 q_1 + \beta_2 q_2 \tag{۱.۳}$$

که ضرایب β_1 و β_2 در پیوست آمده است. سپس با جای‌گذاری این عبارات و رابطه‌ی (۱.۳) در روابط (۴۰.۲) و (۴۱.۲) شکل گسسته‌ی معادلات حرکت به‌صورت زیر به دست می‌آید.

$$
\begin{aligned}
&q_1^{''} + \omega_1^2 q_1 - (m_5 q_1^2 + m_{15} q_1^3 + m_4 q_2 + m_6 q_1 q_2 + m_{16} q_1^2 q_2 + m_7 q_2^2 + m_{17} q_1 q_2^2 + m_{18} q_2^3 \\
&+ m_1 q_1^{'} + m_8 q_1 q_1^{'} + m_{19} q_1^2 q_1^{'} + m_9 q_2 q_1^{'} + m_{20} q_1 q_2 q_1^{'} + m_{21} q_2^2 q_1^{'} + m_{10} q_1^{'2} + m_{22} q_1 q_1^{'2} \\
&+ m_{23} q_2 q_1^{'2} + m_{24} q_1^{'3} + m_2 q_2^{'} + m_{11} q_1 q_2^{'} + m_{25} q_1^2 q_2^{'} + m_{12} q_2 q_2^{'} + m_{26} q_1 q_2 q_2^{'} + m_{27} q_2^2 q_2^{'} \\
&+ m_{13} q_1^{'} q_2^{'} + m_{28} q_1 q_1^{'} q_2^{'} + m_{29} q_2 q_1^{'} q_2^{'} + m_{30} q_1^{'2} q_2^{'} + m_{14} q_2^{'2} + m_{31} q_1 q_2^{'2} + m_{32} q_2 q_2^{'2} \\
&+ m_{33} q_1^{'} q_2^{'2} + m_{34} q_2^{'3}) = 0
\end{aligned}
\tag{۲.۳}
$$

$$
\begin{aligned}
&q_2^{''} + \omega_2^2 - (n_3 q_1 + n_5 q_1^2 + n_{15} q_1^3 + n_6 q_1 q_2 + n_{16} q_1^2 q_2 + n_7 q_2^2 + n_{17} q_1 q_2^2 + n_{18} q_2^3 \\
&+ n_1 q_1^{'} + n_8 q_1 q_1^{'} + n_{19} q_1^2 q_1^{'} + n_9 q_2 q_1^{'} + n_{20} q_1 q_2 q_1^{'} + n_{21} q_2^2 q_1^{'} + n_{10} q_1^{'2} + n_{22} q_1 q_1^{'2} \\
&+ n_{24} q_1^{'3} + n_2 q_2^{'} + n_{11} q_1 q_2^{'} + n_{25} q_1^2 q_2^{'} + n_{12} q_2 q_2^{'} + n_{26} q_1 q_2 q_2^{'} + n_{27} q_2^2 q_2^{'} + n_{13} q_2^{'} q_1^{'} \\
&+ n_{28} q_1 q_1^{'} q_2^{'} + n_{29} q_2 q_1^{'} q_2^{'} + n_{30} q_1^{'2} q_2^{'} + n_{14} q_2^{'2} + n_{31} q_1 q_2^{'2} + n_{32} q_2 q_2^{'2} \\
&+ n_{33} q_1^{'} q_2^{'2} + n_{34} q_2^{'3}) = 0
\end{aligned}
\tag{۳.۳}
$$

که در آن پرایم مشتق نسبت به زمان؛ ω_1 و ω_2 فرکانس اول جهت عمودی و جهت عمود بر صفحه است. ضرایب m_i و n_i نیز در پیوست آمده است.

۳.۳ حل پرتوربیشن

روش مقیاس‌های چندگانه در اغتشاشات، به‌منظور توصیف دینامیک آرام سیستم به کار می‌رود. ازآنجاکه در معادلات حرکت ترم‌های غیرخطی مرتبه‌ی دو و سه وجود دارند، معادلات پرتوربیشن تا مرتبه‌ی ۳ موردنیاز است. در این بخش معادلات حرکت برای حالت دو سر ثابت و پایه‌ی انتهاییِ الاستیک با استفاده از این روش حل‌شده است.

۱. کابل دو سر ثابت:
این‌که کابل در حالت دو سر ثابت در کدام حالت تشدید داخلی قرار بگیرد تابع مشخصات فیزیکی و هندسی سیستم است و در اینجا با توجه به دو مقدار شکم کابل دو حالت وجود دارد.

- تشدید داخلی ۱:۱
  فرکانس طبیعی جهت عمودی و عمود بر صفحه تقریباً با هم برابرند و داریم $\omega_2 = \omega_1 + \varepsilon\sigma_1$.

- تشدید داخلی ۲:۱
فرکانس طبیعی جهت عمودی تقریباً دو برابر جهت عمود بر صفحه است و داریم
$\omega_2 = \frac{1}{2}\omega_1 + \varepsilon\sigma_2$.

۲. کابل با پایه‌ی انتهایی الاستیک:
این‌که کابل در این حالت در کدام حالت تشدید داخلی قرار بگیرد تابع مشخصات فیزیکی و هندسی سیستم و همچنین سختی‌های K_1 و K_2 می‌باشد. در این حالت علاوه بر حالت تشدید ۱:۱ و ۲:۱ حالات تشدید زیر نیز با توجه به مقادیر K_1 و K_2 نسبت به یکدیگر ممکن است اتفاق بیفتد که تمامی این حالات در ادامه بررسی‌شده است.

- تشدید داخلی ۳:۱
فرکانس طبیعی جهت عمودی تقریباً سه برابر جهت عمود بر صفحه است و داریم
$\omega_2 = \frac{1}{3}\omega_1 + \varepsilon\sigma_3$.

- تشدید داخلی ۱:۲
فرکانس طبیعی جهت عمودی تقریباً نصف جهت عمود بر صفحه است و داریم
$\omega_2 = 2\omega_1 + \varepsilon\sigma_4$.

- حالت بدون تشدید داخلی
فرکانس طبیعی جهت عمودی و عمود بر صفحه رابطه‌ی صحیحی با هم ندارند و وضعیت آن‌ها نسبت به یکدیگر را نمی‌توان به فرم‌های قبل بیان کرد.

در این روابط ε پارامتر بی‌بعد پرتوربیشن است و σ_i نیز پارامتر تنظیم داخلی است. متغیرهای زمانی جدید به‌صورت (۴.۳) تعریف‌شده است که در آن T_0 مقیاس زمانی سریع و T_1 و T_2 مقیاس‌های زمانی آرام می‌باشند.

$$T_n = \varepsilon^n t \quad , \quad n = 0, 1, 2 \tag{۴.۳}$$

فرض می‌شود که ضرایب m_1، m_2، m_4، n_1، n_2 و n_3 از مرتبه‌ی ε باشند یعنی:

$$m_i = \varepsilon m m_i \quad , \quad i = 1, 2, 4 \tag{۵.۳}$$

$$n_i = \varepsilon n n_i \quad , \quad i = 1, 2, 3 \tag{۶.۳}$$

بر اساس روش مقیاس‌های چندگانه، متغیرهای q_1 و q_2 بر اساس توان‌های ε به‌صورت (۷.۳) بسط داده‌شده است.

$$q_i(t, \varepsilon) = \sum_{j=1}^{3} \varepsilon^j q_{i,j-1}(T_0, T_1, T_2) \quad , \quad i = 1, 2 \tag{۷.۳}$$

مشتق زمانی اول و دوم نیز به‌صورت روابط (۸.۳) و (۹.۳) تعریف‌شده است که در آن $D_i = \frac{\partial}{\partial T_i}$ است.

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \tag{۸.۳}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2 D_0 D_2) + \dots \tag{۹.۳}$$

با جای‌گذاری روابط (۴.۳) تا (۷.۳) در روابط (۲.۳) و (۳.۳) و فاکتور گرفتن از توان‌های مختلف ε ، معادلات در مراتب مختلف ε به‌صورت زیر به‌دست‌آمده است.
مرتبه‌ی ε:

$${D_0}^2 q_{1,0} + q_{1,0}{\omega_1}^2 = 0 \tag{۱۰.۳}$$

$${D_0}^2 q_{2,0} + q_{2,0}{\omega_2}^2 = 0 \tag{۱۱.۳}$$

مرتبه‌ی ε^2:

$$\begin{aligned} {D_0}^2 q_{1,1} + q_{1,1}{\omega_1}^2 &= -{D_0}^2 m_{10} {q_{1,0}}^2 + {D_0}^2 m_{13} q_{1,0} q_{2,0} + {D_0}^2 m_{14} {q_{2,0}}^2 \\ &+ D_0\, m_8 {q_{1,0}}^2 + D_0\, m_9 q_{1,0} q_{2,0} + D_0\, m_{11} q_{1,0} q_{2,0} + D_0\, m_{12} {q_{2,0}}^2 - 2\, D_0\, D_1\, q_{1,0} \\ &+ D_0\, mm_1 q_{1,0} + D_0\, mm_2 q_{2,0} + m_5 {q_{1,0}}^2 + m_6 q_{1,0} q_{2,0} + m_7 {q_{2,0}}^2 + mm_4 q_{2,0} \end{aligned} \tag{۱۲.۳}$$

$$\begin{aligned} {D_0}^2 q_{2,1} + {\omega_2}^2 q_{2,1} &= {D_0}^2 n_{10} {q_{1,0}}^2 + {D_0}^2 n_{13} q_{1,0} q_{2,0} + {D_0}^2 n_{14} {q_{2,0}}^2 + D_0\, n_8 {q_{1,0}}^2 \\ &+ D_0\, n_9 q_{1,0} q_{2,0} + D_0\, n_{11} q_{1,0} q_{2,0} + D_0\, n_{12} {q_{2,0}}^2 - 2\, D_0\, D_1\, q_{2,0} + D_0\, nn_1 q_{1,0} \\ &+ D_0\, nn_2 q_{2,0} + n_5 {q_{1,0}}^2 + n_6 q_{1,0} q_{2,0} + n_7 {q_{2,0}}^2 + nn_3 q_{1,0} \end{aligned} \tag{۱۳.۳}$$

مرتبه‌ی ε^3:

$$
\begin{aligned}
&D_0{}^2 q_{1,2} + q_{1,2}\omega_1{}^2 = D_0{}^3 m_{30} q_{1,0}{}^2 q_{2,0} + D_0{}^3 m_{33} q_{1,0} q_{2,0}{}^2 + D_0{}^2 m_{23} q_{1,0}{}^2 q_{2,0} \\
&+ D_0{}^2 m_{28} q_{1,0}{}^2 q_{2,0} + D_0{}^2 m_{29} q_{1,0} q_{2,0}{}^2 + D_0{}^2 m_{31} q_{1,0} q_{2,0}{}^2 + 2\, D_0{}^2 m_{10} q_{1,0} q_{1,1} \\
&+ D_0{}^2 m_{13} q_{1,0} q_{2,1} + D_0{}^2 m_{13} q_{1,1} q_{2,0} + 2\, D_0{}^2 m_{14} q_{2,0} q_{2,1} + 2\, D_0\, D_1\, m_{10} q_{1,0}{}^2 \\
&+ 2\, D_0\, D_1\, m_{14} q_{2,0}{}^2 + D_0\, m_{20} q_{1,0}{}^2 q_{2,0} + D_0\, m_{21} q_{1,0} q_{2,0}{}^2 + D_0\, m_{25} q_{1,0}{}^2 q_{2,0} \\
&+ D_0\, m_{26} q_{1,0} q_{2,0}{}^2 + 2\, D_0\, m_8 q_{1,0} q_{1,1} + D_0\, m_9 q_{1,0} q_{2,1} + D_0\, m_9 q_{1,1} q_{2,0} \\
&+ D_0\, m_{11} q_{1,0} q_{2,1} + D_0\, m_{11} q_{1,1} q_{2,0} + 2\, D_0\, m_{12} q_{2,0} q_{2,1} + D_1\, m_9 q_{1,0} q_{2,0} \\
&+ D_1\, m_{11} q_{1,0} q_{2,0} + m_{17} q_{1,0} q_{2,0}{}^2 + 2\, m_5 q_{1,0} q_{1,1} + m_6 q_{1,0} q_{2,1} \\
&+ D_0{}^3 m_{24} q_{1,0}{}^3 + D_0{}^3 m_{34} q_{2,0}{}^3 + D_0{}^2 m_{22} q_{1,0}{}^3 + D_0{}^2 m_{32} q_{2,0}{}^3 + D_0\, m_{19} q_{1,0}{}^3 \\
&+ D_0\, m_{27} q_{2,0}{}^3 - 2\, D_0\, D_1\, q_{1,1} - 2\, D_0\, D_2\, q_{1,0} + D_0\, mm_1 q_{1,1} + D_0\, mm_2 q_{2,1} \\
&+ D_1\, m_8 q_{1,0}{}^2 + D_1\, m_{12} q_{2,0}{}^2 + D_1\, mm_1 q_{1,0} + D_1\, mm_2 q_{2,0} + 2\, q_{2,1} q_{2,0} m_7 \\
&+ 2\, D_0\, D_1\, m_{13} q_{1,0} q_{2,0} + q_{2,1} mm_4 + q_{2,0}{}^3 m_{18} + m_{15} q_{1,0}{}^3 - D_1{}^2 q_{1,0} + \\
&m_{16} q_{1,0}{}^2 q_{2,0} + m_6 q_{1,1} q_{2,0}
\end{aligned}
\tag{۱۴.۳}
$$

$$
\begin{aligned}
&D_0{}^2 q_{2,2} + \omega_2{}^2 q_{2,2} = D_0{}^3 n_{30} q_{1,0}{}^2 q_{2,0} + D_0{}^3 n_{33} q_{1,0} q_{2,0}{}^2 + D_0{}^2 n_{23} q_{1,0}{}^2 q_{2,0} \\
&+ D_0{}^2 n_{28} q_{1,0}{}^2 q_{2,0} + D_0{}^2 n_{29} q_{1,0} q_{2,0}{}^2 + D_0{}^2 n_{31} q_{1,0} q_{2,0}{}^2 + 2\, D_0{}^2 n_{10} q_{1,0} q_{1,1} \\
&+ D_0{}^2 n_{13} q_{1,0} q_{2,1} + D_0{}^2 n_{13} q_{1,1} q_{2,0} + 2\, D_0{}^2 n_{14} q_{2,0} q_{2,1} + D_0\, n_{20} q_{1,0}{}^2 q_{2,0} \\
&+ D_0\, n_{21} q_{1,0} q_{2,0}{}^2 + D_0\, n_{25} q_{1,0}{}^2 q_{2,0} + D_0\, n_{26} q_{1,0} q_{2,0}{}^2 + 2\, D_0\, n_8 q_{1,0} q_{1,1} \\
&+ D_0\, n_9 q_{1,0} q_{2,1} + D_0\, n_9 q_{1,1} q_{2,0} + D_0\, n_{11} q_{1,0} q_{2,1} + D_0\, n_{11} q_{1,1} q_{2,0} \\
&+ 2\, D_0\, n_{12} q_{21} q_{2,0} + 2\, D_0\, n_{13} q_{1,0} q_{2,0} + D_1\, n_{11} q_{1,0} q_{2,0} + n_6 q_{1,1} q_{2,0} + 2\, n_7 q_{2,0} q_{2,1} \\
&+ D_0{}^3 n_{24} q_{1,0}{}^3 + D_0{}^3 n_{34} q_{2,0}{}^3 + D_0{}^2 n_{22} q_{1,0}{}^3 + D_0{}^2 n_{32} q_{2,0}{}^3 + D_0\, n_{19} q_{1,0}{}^3 \\
&+ D_0\, n_{27} q_{2,0}{}^3 + 2\, D_0\, n_{10} q_{1,0}{}^2 + 2\, D_0\, n_{14} q_{2.0}{}^2 - 2\, D_0\, D_1\, q_{2,1} - 2\, D_0\, D_2\, q_{2,0} \\
&+ D_0\, nn_1 q_{1,1} + D_0\, nn_2 q_{2,1} + D_1\, n_8 q_{1,0}{}^2 + D_1\, n_{12} q_{2,0}{}^2 + D_1\, n_9 q_{2,0} \\
&+ D_1\, nn_1 q_{1,0} + D_1\, nn_2 q_{2,0} + n_{16} q_{1,0}{}^2 q_{2,0} + 2\, n_5 q_{1,0} q_{1,1} + n_6 q_{1,0} q_{2,1} \\
&+ n_{17} q_{1,0} q_{2,0}{}^2 + nn_3 q_{1,1} + n_{15} q_{1,0}{}^3 + q_{2,0}{}^3 n_{18} - D_1{}^2 q_{2,0}
\end{aligned}
\tag{۱۵.۳}
$$

معادلات (۱۰.۳) و (۱۱.۳) به‌صورت زیر حل شده‌است.

$$
q_{j,0} = e^{i\omega_j T_0} A_j(T_1, T_2) + c.c \quad , \quad j = 1, 2 \tag{۱۶.۳}
$$

که در آن $i = \sqrt{-1}$ است؛ A_1 و A_2 دامنه‌های مرکب جهت عمودی و عمود بر صفحه و وابسته به مقیاس‌های زمانی آرام هستند و $c.c$ بیان گر جملات مزدوج مختلط می‌باشند.

۱.۳.۳ تشدید داخلی ۱:۱

در این حالت داریم:

$$\omega_2 = \omega_1 + \varepsilon\sigma_1 \qquad (۱۷.۳)$$

طبق مرجع [۵۹] با جای‌گذاری روابط (۱۶.۳) و (۱۷.۳) در روابط (۱۲.۳) و (۱۳.۳) و برابر صفر قرار دادن جملات سکولار [۱] D_1A_1 و D_1A_2 به دست می‌آید. همچنین با حل خصوصی معادلات (۱۲.۳) و (۱۳.۳) ، $q_{1,1}$ و $q_{2,1}$ نیز به دست می‌آیند. حال با جای‌گذاری $q_{1,1}$، $q_{2,1}$ ، رابطه‌ی (۱۶.۳) و رابطه‌ی (۱۷.۳) در روابط (۱۴.۳) و (۱۵.۳) و برابر صفر قرار دادن جملات سکولار، D_2A_1 و D_2A_2 به دست می آید.
مشتق زمانی A_1 و A_2 با استفاده از روابط زیر به‌دست‌آمده است.

$$\dot{A}_1 = \varepsilon D_1A_1 + \varepsilon^2 D_2A_1 \qquad (۱۸.۳)$$

$$\dot{A}_2 = \varepsilon D_1A_2 + \varepsilon^2 D_2A_2 \qquad (۱۹.۳)$$

با جای‌گذاری D_1A_1،D_1A_2،D_2A_1وD_2A_2 در روابط (۱۸.۳) و (۱۹.۳) روابط زیر به دست آمده است.

$$\begin{aligned}\dot{A}_1 =& A_1\,(ipp_{1,2}+pp_{1,1}) + A_2\,(ipp_{2,2}+pp_{2,1})\,\mathrm{e}^{i\varepsilon\sigma_1 t} + {A_1}^2\overline{A_1}\,(ipp_{3,2}+pp_{3,1})\\ &+ A_1\,A_2\,\overline{A_1}\,(ipp_{4,2}+pp_{4,1})\,\mathrm{e}^{i\varepsilon\sigma_1 t} + {A_2}^2\overline{A_1}\,(ipp_{5,2}+pp_{5,1})\,\mathrm{e}^{2\,i\varepsilon\sigma_1 t}\\ &+ {A_1}^2\overline{A_2}\,(pp_{6,1}+ipp_{6,2})\,\mathrm{e}^{-i\varepsilon\sigma_1 t} + A_1\,A_2\,\overline{A_2}\,(ipp_{7,2}+pp_{7,1})\\ &+ {A_2}^2\overline{A_2}\,(ipp_{8,2}+pp_{8,1})\,\mathrm{e}^{i\varepsilon\sigma_1 t}\end{aligned} \qquad (۲۰.۳)$$

$$\begin{aligned}\dot{A}_2 =& A_1\,(iqq_{1,2}+qq_{1,1})\,\mathrm{e}^{-i\varepsilon\sigma_1 t} + A_2\,(iqq_{2,2}+qq_{2,1})\\ &+ {A_1}^2\overline{A_1}\,(iqq_{3,2}+qq_{3,1})\,\mathrm{e}^{-i\varepsilon\sigma_1 t} + A_1\,A_2\,\overline{A_1}\,(iqq_{4,2}+qq_{4,1})\\ &+ {A_2}^2\overline{A_1}\,(iqq_{5,2}+qq_{5,1})\,\mathrm{e}^{i\varepsilon\sigma_1 t} + {A_1}^2\overline{A_2}\,(iqq_{6,2}+qq_{6,1})\,\mathrm{e}^{-2\,i\varepsilon\sigma_1 t}\\ &+ A_1\,A_2\,\overline{A_2}\,(iqq_{7,2}+qq_{7,1})\,\mathrm{e}^{-i\varepsilon\sigma_1 t} + {A_2}^2\overline{A_2}\,(iqq_{8,2}+qq_{8,1})\end{aligned} \qquad (۲۱.۳)$$

ضرایب $pp_{i,j}$ و $qq_{i,j}$ در پیوست آمده است.
با استفاده از شکل قطبی برای دامنه‌ی مرکب A_1وA_2 به‌صورت (۲۲.۳) که در آن a_jوβ_j دامنه و فاز متغیر با زمان t هستند و جای‌گذاری آن در معادلات (۲۰.۳) و (۲۱.۳) و همچنین با فرض (۲۳.۳) ، معادلات (۲۴.۳) تا (۲۶.۳) به‌دست‌آمده است که به آن‌ها معادلات مدولاسیون‌ـ فاز کاهش‌یافته [۲] می‌گویند.

$$A_j = \frac{1}{2}a_j e^{i\beta_j} \quad , \quad j = 1, 2 \qquad (۲۲.۳)$$

[۱] Secular terms

[۲] Reduced Amplitude Modulation Equations

$$\psi_1(t) = \alpha_2(t) - \alpha_1(t) + \varepsilon\sigma_1 t \tag{۲۳.۳}$$

$$\begin{aligned}\dot{a_1} =& 1/4\, {a_1}^3 pp_{3,1} + [1/4\, pp_{6,1} \cos(\psi_1) + 1/4\, pp_{6,2} \sin(\psi_1) + 1/4\, pp_{4,1} \cos(\psi_1) \\ &- 1/4\, pp_{4,2} \sin(\psi_1)] a_2 {a_1}^2 + a_1 pp_{1,1} + [1/4\, pp_{5,1} \cos(2\,\psi_1) \\ &- 1/4\, pp_{5,2} \sin(2\,\psi_1) + 1/4\, pp_{7,1}] {a_2}^2 a_1 + [1/4\, pp_{8,1} \cos(\psi_1) \\ &- 1/4\, pp_{8,2} \sin(\psi_1)] {a_2}^3 + [pp_{2,1} \cos(\psi_1) - pp_{2,2} \sin(\psi_1)] a_2\end{aligned} \tag{۲۴.۳}$$

$$\begin{aligned}\dot{a_2} =& [1/4\, qq_{3,1} \cos(\psi_1) + 1/4\, qq_{3,2} \sin(\psi_1)] {a_1}^3 + [1/4\, qq_{6,1} \cos(2\,\psi_1) \\ &+ 1/4\, qq_{6,2} \sin(2\,\psi_1) + 1/4\, qq_{4,1}] a_2 {a_1}^2 + [1/4\, qq_{7,1} \cos(\psi_1) \\ &+ 1/4\, qq_{7,2} \sin(\psi_1) + 1/4\, qq_{5,1} \cos(\psi_1) - 1/4\, qq_{5,2} \sin(\psi_1)] a_1 {a_2}^2 \\ &+ [qq_{1,1} \cos(\psi_1) + qq_{1,2} \sin(\psi_1)] a_1 + 1/4\, {a_2}^3 qq_{8,1} + a_2 qq_{2,1}\end{aligned} \tag{۲۵.۳}$$

$$\begin{aligned}a_1 a_2 \dot{\psi_1} =& [1/4\, qq_{3,2} \cos(\psi_1) - 1/4\, qq_{3,1} \sin(\psi_1)] {a_1}^4 + [1/4\, qq_{6,2} \cos(2\,\psi_1) \\ &- 1/4\, qq_{6,1} \sin(2\,\psi_1) + 1/4\, qq_{4,2} - 1/4\, pp_{3,2}] a_2 {a_1}^3 + [1/4(-pp_{6,2} \\ &+ qq_{5,2} + qq_{7,2} - pp_{4,2}) \cos(\psi_1) + 1/4\, \left(pp_{6,1} + qq_{5,1} - qq_{7,1} - pp_{4,1}\right) \sin(\psi_1)] {a_1}^2 {a_2}^2 \\ &+ [qq_{1,2} \cos(\psi_1) - qq_{1,1} \sin(\psi_1)] {a_1}^2 + [-1/4\, pp_{5,2} \cos(2\,\psi_1) - 1/4\, pp_{5,1} \sin(2\,\psi_1) \\ &- 1/4\, pp_{7,2} + 1/4\, qq_{8,2}] a_1 {a_2}^3 + [\sigma_1\,\varepsilon - pp_{1,2} + qq_{2,2}] a_1 a_2 + [-1/4\, pp_{8,2} \cos(\psi_1) \\ &- 1/4\, pp_{8,1} \sin(\psi_1)] {a_2}^4 + [-pp_{2,2} \cos(\psi_1) - pp_{2,1} \sin(\psi_1)] {a_2}^2\end{aligned} \tag{۲۶.۳}$$

روند حل تمامی حالات تشدید مانند یکدیگر است؛ اما روابط آن با یکدیگر متفاوت است. لذا از بیان دوباره‌ی روش حل به دلیل طولانی شدن صرف‌نظر شده است و روابط به‌صورت خلاصه ارائه‌شده است. همین روند تشدید داخلی ۱:۱ برای همه‌ی حالات تشدید انجام‌شده است. روابط (۱۶.۳) ،(۱۸.۳)، (۱۹.۳) و (۲۲.۳) برای تمامی حالات صادق است.

۲.۳.۳ تشدید داخلی ۲:۱

در این حالت داریم:

$$\omega_2 = \frac{1}{2}\omega_1 + \varepsilon\sigma_2 \tag{۲۷.۳}$$

$$\begin{aligned}\dot{A_1} =& A_1\,\left(i pp_{9,2} + pp_{9,1}\right) + {A_1}^2 \overline{A_1}\,\left(i pp_{11,2} + pp_{11,1}\right) \\ &+ {A_2}^2\,\left(i pp_{10,2} + pp_{10,1}\right) e^{2\,i\varepsilon\,\sigma_2\,t} + A_1\,A_2\,\overline{A_2}\,\left(i pp_{12,2} + pp_{12,1}\right)\end{aligned} \tag{۲۸.۳}$$

$$\dot{A_2} = A_2\,\left(iqq_{9,2} + qq_{9,1}\right) + A_1\,A_2\,\overline{A_1}\,\left(iqq_{11,2} + qq_{11,1}\right) + A_1\,\overline{A_2}\,\left(iqq_{10,2} + qq_{10,1}\right)\mathrm{e}^{-2\,i\varepsilon\,\sigma_2\,t} + {A_2}^2\overline{A_2}\,\left(iqq_{12,2} + qq_{12,1}\right) \tag{۲۹.۳}$$

فرض (۲۳.۳) در این حالت به‌صورت زیر تغییر کرده است.

$$\psi_2(t) = 2[\alpha_2(t) + \varepsilon\sigma_2 t] - \alpha_1(t) \tag{۳۰.۳}$$

لذا معادلات مدولاسیون‌ـ فاز کاهش‌یافته به‌صورت زیر است:

$$\dot{a_1} = 1/4\,{a_1}^3 pp_{11,1} + a_1 pp_{9,1} + 1/4\,a_1{a_2}^2 pp_{12,1} + [1/2\,pp_{10,1}\cos{(\psi_2)} - 1/2\,pp_{10,2}\sin{(\psi_2)}]{a_2}^2 \tag{۳۱.۳}$$

$$\dot{a_2} = 1/4\,qq_{11,1}a_2{a_1}^2 + \left(1/2\,qq_{10,1}\cos{(\psi_2)} + 1/2\,qq_{10,2}\sin{(\psi_2)}\right)a_2 a_1 + 1/4\,qq_{12,1}{a_2}^3 + qq_{9,1}a_2 \tag{۳۲.۳}$$

$$a_1 a_2\dot{\psi_2} = [qq_{10,2}\cos{(\psi_2)} - qq_{10,1}\sin{(\psi_2)}]a_2{a_1}^2 + [1/2\,qq_{11,2} - 1/4\,pp_{11,2}]a_2{a_1}^3 + [1/2\,qq_{12,2} - 1/4\,pp_{12,2}]a_1{a_2}^3 + [2\,\sigma_2\,\varepsilon - pp_{9,2} + 2\,qq_{9,2}]a_2 a_1 + [-1/2\,pp_{10,2}\cos{(\psi_2)} - 1/2\,pp_{10,1}\sin{(\psi_2)}]{a_2}^3 \tag{۳۳.۳}$$

ضرایب $pp_{i,j}$ و $qq_{i,j}$ در پیوست آمده است.

۳.۳.۳ تشدید داخلی ۱:۲

در این حالت داریم:

$$\omega_2 = 2\omega_1 + \varepsilon\sigma_3 \tag{۳۴.۳}$$

$$\dot{A_1} = pp_{40,1} + ipp_{40,2} + {A_1}^2\overline{A_1}\,\left(ipp_{50,2} + pp_{50,1}\right) + A_1\,A_2\,\overline{A_2}\,\left(ipp_{30,2} + pp_{30,1}\right) + \overline{A_1}A_2\,\mathrm{e}^{i\varepsilon\,\sigma_3\,t}\,\left(ipp_{20,2} + pp_{20,1}\right) \tag{۳۵.۳}$$

$$\dot{A_2} = A_2\,\left(iqq_{40,2} + qq_{40,1}\right) + {A_2}^2\overline{A_2}\,\left(iqq_{50,2} + qq_{50,1}\right) + A_2\,A_1\,\overline{A_1}\,\left(iqq_{30,2} + qq_{30,1}\right) + {A_1}^2\mathrm{e}^{-i\varepsilon\,\sigma_3\,t}\,\left(iqq_{20,2} + qq_{20,1}\right) \tag{۳۶.۳}$$

فرض (۲۳.۳) در این حالت به‌صورت زیر تغییر کرده است.

$$\psi_3(t) = \alpha_2(t) + \varepsilon\sigma_3 t - 2\alpha_1(t) \tag{۳۷.۳}$$

لذا معادلات مدولاسیون ـ فاز کاهش‌یافته به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned}\dot{a_1} =& 1/4\, pp_{50,1}{a_1}^3 + pp_{40,1}a_1 + [1/2\, pp_{20,1}\cos(\psi_3) - 1/2\, pp_{20,2}\sin(\psi_3)]a_2a_1\\ &+ 1/4\, pp_{30,1}{a_2}^2a_1\end{aligned} \tag{۳۸.۳}$$

$$\begin{aligned}\dot{a_2} =& [1/2\, qq_{20,1}\cos(\psi_3) + 1/2\, qq_{20,2}\sin(\psi_3)]{a_1}^2 + 1/4\, a_2{a_1}^2qq_{30,1} + 1/4\, {a_2}^3qq_{50,1}\\ &+ a_2\, qq_{40,1}\end{aligned} \tag{۳۹.۳}$$

$$\begin{aligned}a_1a_2\dot{\psi_3} =& [1/2\, qq_{20,2}\cos(\psi_3) - 1/2\, qq_{20,1}\sin(\psi_3)]{a_1}^3 + [-\cos(\psi_3)\, pp_{20,2}\\ &- \sin(\psi_3)\, pp_{20,1}]{a_2}^2a_1 + [1/4\, qq_{50,2} - 1/2\, pp_{30,2}]{a_2}^3a_1\\ &+ [-1/2\, pp_{50,2} + 1/4\, qq_{30,2}]{a_1}^3a_2 + [\sigma_3\,\varepsilon - 2\, pp_{40,2} + qq_{40,2}]a_2a_1\end{aligned} \tag{۴۰.۳}$$

ضرایب $pp_{i,j}$ و $qq_{i,j}$ در پیوست آمده است.

۴.۳.۳ تشدید داخلی ۳:۱

در این حالت داریم:

$$\omega_2 = \frac{1}{3}\omega_1 + \varepsilon\sigma_4 \tag{۴۱.۳}$$

$$\begin{aligned}\dot{A_1} =& A_1\left(ipp_{100,2} + pp_{100,1}\right) + {A_2}^3 e^{3\, i\varepsilon\, \sigma_4\, t}\left(ipp_{200,2} + pp_{200,1}\right)\\ &+ {A_1}^2\overline{A_1}\left(ipp_{300,2} + pp_{300,1}\right) + A_1\, A_2\, \overline{A_2}\left(ipp_{400,2} + pp_{400,1}\right)\end{aligned} \tag{۴۲.۳}$$

$$\begin{aligned}\dot{A_2} =& A_2\left(iqq_{100,2} + qq_{100,1}\right) + {A_2}^2 A_1\, e^{-3\, i\varepsilon\, \sigma_4\, t}\left(iqq_{200,2} + qq_{200,1}\right)\\ &+ {A_2}^2\overline{A_2}\left(iqq_{300,2} + qq_{300,1}\right) + A_1\, A_2\, \overline{A_1}\left(iqq_{400,2} + qq_{400,1}\right)\end{aligned} \tag{۴۳.۳}$$

فرض (۲۳.۳) در این حالت به‌صورت زیر تغییر کرده است.

$$\psi_4(t) = 3[\alpha_2(t) + \varepsilon\sigma_4 t] - \alpha_1(t) \tag{۴۴.۳}$$

$$\psi_5(t) = 3\varepsilon\sigma_5 t - \alpha_1(t) - \alpha_2(t) \tag{۴۵.۳}$$

لذا معادلات مدولاسیون- فاز کاهش‌یافته به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned}\dot{a_1} =& 1/4\, {a_1}^3 pp_{300,1} + a_1 pp_{100,1} + 1/4\, a_1 {a_2}^2 pp_{400,1} + [1/4\, pp_{200,1} \cos(\psi_4) \\ &- 1/4\, pp_{200,2} \sin(\psi_4)] {a_2}^3\end{aligned} \tag{۴۶.۳}$$

$$\begin{aligned}\dot{a_2} =& 1/4\, qq_{400,1} a_2 {a_1}^2 + [1/4\, qq_{200,1} \cos(\psi_5) + 1/4\, qq_{200,2} \sin(\psi_5)] {a_2}^2 a_1 \\ &+ 1/4\, qq_{300,1} {a_2}^3 + qq_{100,1} a_2\end{aligned} \tag{۴۷.۳}$$

$$\begin{aligned}a_1 a_2 \dot{\psi_4} =& [-1/4\, pp_{200,2} \cos(\psi_4) - 1/4\, pp_{200,1} \sin(\psi_4)] {a_2}^4 + [3/4\, qq_{200,2} \cos(\psi_5) \\ &- 3/4\, qq_{200,1} \sin(\psi_5)] {a_2}^2 {a_1}^2 + [3/4\, qq_{400,2} - 1/4\, pp_{300,2}] a_2 {a_1}^3 \\ &+ [3/4\, qq_{300,2} - 1/4\, pp_{400,2}] a_1 {a_2}^3 + [3\, \sigma_4\, \varepsilon - pp_{100,2} + 3\, qq_{100,2}] a_2 a_1\end{aligned} \tag{۴۸.۳}$$

$$\begin{aligned}a_1 a_2 \dot{\psi_5} =& [-1/4\, pp_{200,2} \cos(\psi_4) - 1/4\, pp_{200,1} \sin(\psi_4)] {a_2}^4 \\ &+ [-1/4\, qq_{200,2} \cos(\psi_5) + 1/4\, qq_{200,1} \sin(\psi_5)] {a_2}^2 {a_1}^2 \\ &+ [-1/4\, pp_{300,2} - 1/4\, qq_{400,2}] a_2 {a_1}^3 + [-1/4\, pp_{400,2} \\ &- 1/4\, qq_{300,2}] a_1 {a_2}^3 + [3\, \sigma_5\, \varepsilon - pp_{100,2} - qq_{100,2}] a_2 a_1\end{aligned} \tag{۴۹.۳}$$

ضرایب $pp_{i,j}$ و $qq_{i,j}$ در پیوست آمده است.

۵.۳.۳ بدون تشدید داخلی

در این حالت پارامتر تنظیم داخلی σ_i دخیل نیست و روابط اولیه به‌صورت زیر است.

$$\begin{aligned}\dot{A_1} =& A_1\, \left(i pp_{60,2} + pp_{60,1}\right) + {A_1}^2 \overline{A_1}\, (i pp_{80,2} + pp_{80,1}) \\ &+ A_1\, A_2\, \overline{A_2}\, (i pp_{70,2} + pp_{70,1})\end{aligned} \tag{۵۰.۳}$$

$$\begin{aligned}\dot{A_2} =& A_2\, \left(i qq_{60,2} + qq_{60,1}\right) + {A_2}^2 \overline{A_2}\, (i qq_{80,2} + qq_{80,1}) \\ &+ A_1\, A_2\, \overline{A_1}\, (i qq_{70,2} + qq_{70,1})\end{aligned} \tag{۵۱.۳}$$

فرض (۲۳.۳) در این حالت به‌صورت زیر تغییر کرده است.

$$\psi_6(t) = \alpha_2(t) - \alpha_1(t) \tag{۵۲.۳}$$

لذا معادلات مدولاسیون- فاز کاهش‌یافته به‌صورت زیر است:

$$\dot{a_1} = 1/4\, pp_{80,1} {a_1}^3 + pp_{60,1} a_1 + 1/4\, pp_{70,1} {a_2}^2 a_1 \tag{۵۳.۳}$$

$$\dot{a_2} = 1/4\, a_2\, qq_{70,1} {a_1}^2 + 1/4\, qq_{80,1} {a_2}^3 + qq_{60,1} a_2 \quad (۵۴.۳)$$

$$\begin{aligned} a_1 a_2 \dot{\psi}_6 =& [-pp_{60,2} + qq_{60,2}] a_1 a_2 + [-1/4\, pp_{80,2} + 1/4\, qq_{70,2}] {a_1}^3 a_2 \\ &+ [1/4\, qq_{80,2} - 1/4\, pp_{70,2}] a_1 {a_2}^3 \end{aligned} \quad (۵۵.۳)$$

ضرایب $pp_{i,j}$ و $qq_{i,j}$ در پیوست آمده است.

فصل ۴

پارامترهای عددی و نتایج

۱.۴ پارامترها و مشخصات کابل

به‌منظور به دست آوردن نتایج عددی مطالعات انجام‌شده، کابل ۵۰/ ۴XLGG-۴۰۰ با سطح مقطع U شکل مانند شکل (۱.۴) موردبررسی قرارگرفته است [۵۹]. مقادیر پارامترهای این مدل در جدول ۲.۴ [۵۹] آمده است.

با استفاده از مرجع [۵۲] فرکانس‌های طبیعی به‌صورت روابط (۱.۴) برای هر شکل مُد تعریف می‌شود که در آن زیرنویس s نشان‌دهنده‌ی مُد متقارن، a مد پادمتقارن، i مد درون صفحه و o مد خارج از صفحه است. γ_m ، λ و L_e در روابط (۲.۴) تا (۴.۴) آمده است.

$$\omega_{so} = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho\,A}} \quad , \quad \omega_{ao} = 2\,\frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho A}} \quad , \quad \omega_{ai} = 2\,\frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho A}} \quad , \quad \omega_{si} = \frac{\gamma_m}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho A}} \tag{۱.۴}$$

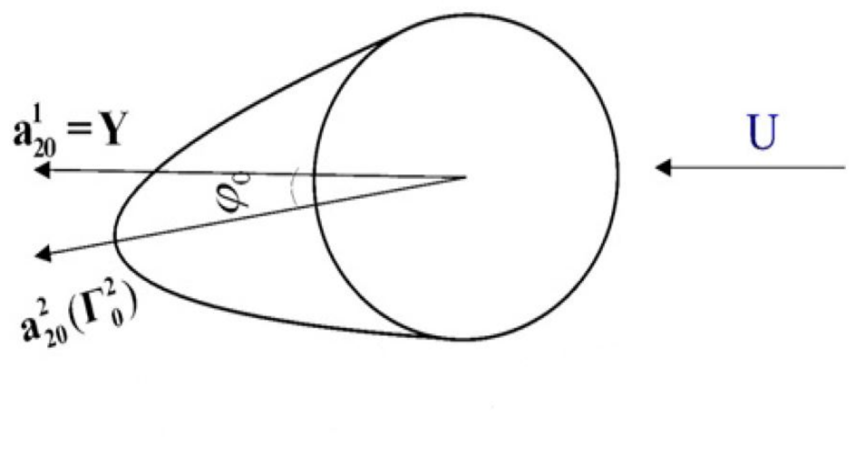
$$\tan\left(\frac{\gamma_m}{2}\right) = \frac{\gamma_m}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{{\gamma_m}^3}{\lambda^2} \tag{۲.۴}$$

$$\lambda^2 = 64\,\frac{d^2 EA}{l\,TL_e} \tag{۳.۴}$$

$$L_e = l\left(1 + 8\,\frac{d^2}{l^2}\right) \tag{۴.۴}$$

جدول ۱.۴: مشخصات کابل

پارامتر	مقدار	واحد	نماد
سختی محوری	۳۱۶۰۰۰۰۰	N	EA
سختی پیچشی	۳۹۳	Nm^2	GJ
سختی خمشی	۱۹۶۵	Nm^2	EI
ضریب میرایی سازه‌ای	۰.۰۰۴۵	بی‌بعد	ζ
جرم واحد طول	۱.۸۲	$\frac{kg}{m}$	ρA
زاویه‌ی آویز کابل	۰	deg	α
کشش اولیه‌ی کابل در شکل ۱.۳	۱۰۷.۲۹	KN	T
کشش اولیه‌ی کابل در شکل ۵.۶	۲۴.۹۰	KN	T
زاویه‌ی انحراف باد	۰	deg	β
ضریب پرتوربیشن	۰.۱	بی‌بعد	ε
خروج از مرکزی اولیه	۰.۰۰۳۲۶	m	${e_0}^y$
طول کابل	۲۵۰	m	l
شعاع کابل	۱۳.۸۰	mm	r



شکل ۱.۴: جهت‌گیری اولیه‌ی کابل U شکل در برابر جریان باد

ازآنجاکه $\lambda^2 << 4\pi^2$ ،درنتیجه کابل به اولین نقطه‌ی تقاطع خود نزدیک است. درنتیجه از توابع ویژه‌ی زیر برای گسسته سازی می‌توان استفاده کرد [۵۲] .

$$v(s,t) = \sum_m f_{1m}(s) q_{1m}(t)$$

$$w(s,t) = \sum_m f_{2m}(s) q_{2m}(t)$$

$$\theta(s,t) = \sum_m f_{3m}(s) q_{3m}(t)$$

برای $m = 1, 3, 5, ...$ رابطه‌ی (۵.۴) برقرار است و K_0 از نرمالایز کردن f_{1m} به دست می‌آید.

$$f_{1m} = K_0 \left(1 - \tan\left(\frac{\gamma_m}{2}\right) \sin\left(\frac{\gamma_m\, s}{l}\right) - \cos\left(\frac{\gamma_m\, s}{l}\right)\right) \tag{۵.۴}$$

برای $m = 2, 4, 6, ...$ داریم:

$$f_{1m} = \sin\left(\frac{m\pi s}{l}\right) \tag{۶.۴}$$

همچنین برای تمامی مقادیر m ، f_{2m} و f_{3m} به‌صورت زیر است.

$$f_{2m} = f_{3m} = \sin\left(\frac{m\pi s}{l}\right) \tag{۷.۴}$$

اولین شکل مد برای محاسبات لحاظ می‌شود. تمام روابط (۱.۴) تا (۷.۴) برای حالت دو سر ثابت کابل صدق می‌کند. برای این‌که بتوان تأثیر سختی پایه‌ی انتهایی کابل را بر روی سیستم بررسی کرد، باید از طریق معادلات و شرایط مرزی خطی شده‌ی سیستم، توابع شکل مُد را برحسب فرکانس به دست آورد. برای این کار با توجه به [۶۴] به شیوه‌ی زیر عمل می‌کنیم:

$$c = \sqrt{\frac{T}{\rho A}} \tag{۸.۴}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} v\left(s,t\right) - c^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} v\left(s,t\right) = 0 \tag{۹.۴}$$

$$T v^{'}(l) + K_1 v(l) = 0 \tag{۱۰.۴}$$

$$v\left(s,t\right) = f_1\left(s\right) e^{i\omega_1 t} \tag{۱۱.۴}$$

با قرار دادن رابطه‌ی (۱۱.۴) در رابطه‌ی (۹.۴) رابطه‌ی (۱۲.۴) به دست می‌آید.

$${\omega_1}^2 f_1(s) + c^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} f_1\left(s\right) = 0 \tag{۱۲.۴}$$

لذا:

$$f_1\left(s\right) = C_1 \,\sin\left(\frac{\omega_1\, s}{c}\right) + C_2\, \cos\left(\frac{\omega_1\, s}{c}\right) \tag{۱۳.۴}$$

حال با اعمال شرط مرزیِ جابه‌جایی ابتدای کابل داریم:

$$f_1(0) = 0 \to C_2 = 0 \qquad (۱۴.۴)$$

با توجه به رابطه‌ی (۱۴.۴) شکل مُد به‌صورت تابعی از فرکانس به دست می‌آید:

$$f_1\left(s\right) = \sin\left(\frac{\omega_1\, s}{c}\right) \qquad (۱۵.۴)$$

رابطه‌ی (۱۵.۴) یک رابطه‌ی کلیدی است. با اعمال شرط مرزی انتهای کابل یعنی سختی پایه (رابطه‌ی (۱۰.۴))، داریم:

$$\frac{T\omega_1}{c}\cos\left(\frac{\omega_1\, l}{c}\right) + K_1\,\sin\left(\frac{\omega_1\, l}{c}\right) = 0 \qquad (۱۶.۴)$$

رابطه‌ی (۱۶.۴) مهم‌ترین رابطه‌ی این بخش است که یک رابطه‌ی فرکانسی است و فرکانس را با توجه به سختی فنر پایه مشخص می‌کند. برای جهت عمود بر صفحه‌ی کابل نیز می‌توان به همین شیوه عمل کرد و داریم:

$$\frac{T\omega_2}{c}\cos\left(\frac{\omega_2\, l}{c}\right) + K_2\,\sin\left(\frac{\omega_2\, l}{c}\right) = 0 \qquad (۱۷.۴)$$

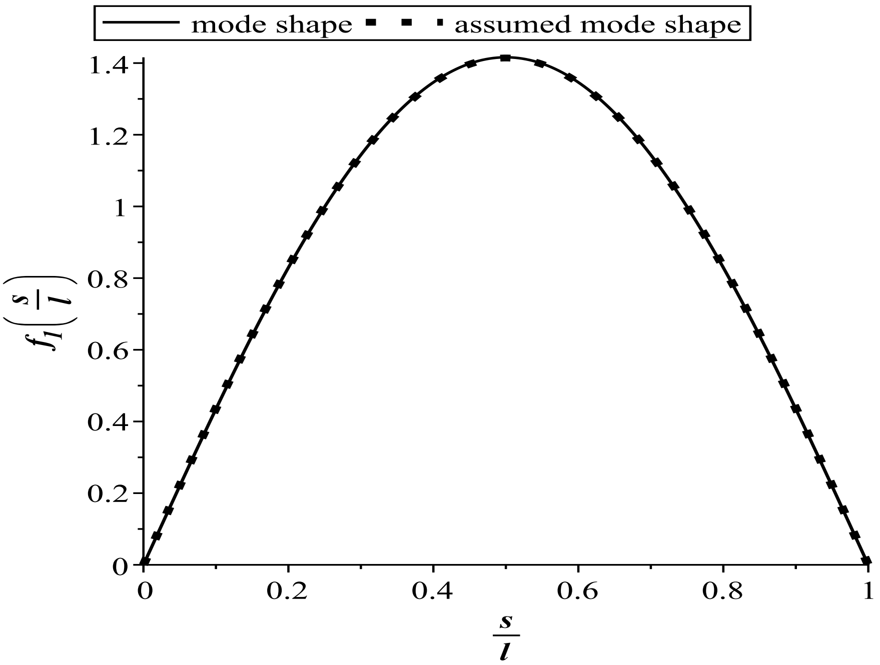
حال با داشتن سختی‌های K_1 و K_2 در دو جهت عمودی و عمود بر صفحه می‌توان فرکانس‌ها را در دو جهت مشخص نمود و موقعیت آن‌ها را نسبت به هم مشخص کرد که حل پرتوربیشن ما تحت تأثیر همین دو مقدار و موقعیت آن‌ها نسبت به هم می‌باشد. نتایج در این فصل در دو حالت شکم کابل بررسی‌شده است. شکم کابل ۱.۳ متر و ۵.۶ متر می‌باشد. توابع ویژه‌ی مربوط به شکل مُدهای کابل در این دو حالت و با توجه به شرایط مرزی دو سر ثابت و پایه‌ی الاستیک در شکل‌های (۲.۴) تا (۵.۴) آورده شده است.

سایر توابع ویژه‌ی شکل مُد در حالت پایه انتهایی الاستیک در جهت عمود بر صفحه و حالت‌های دیگر از شکم کابل، مانند شکل (۵.۴) می‌باشد، فقط مقادیر K_i متفاوت است. با توجه به مشخصات آیرودینامیکی، ضرایب آیرودینامیکی این نوع مقطع به‌صورت تجربی به‌دست‌آمده است [۵۹] . در این پژوهش با توجه به شکل (۱.۴) ، $\gamma = -\phi$ در پیکربندی مرجع در نظر گرفته‌شده است. چندجمله‌ای برازش شده با این داده‌های تجربی در رابطه‌ی (۱۸.۴) و (۱۹.۴) آمده است و تغییرات آن با زاویه‌ی حمله در شکل (۶.۴) رسم شده است.

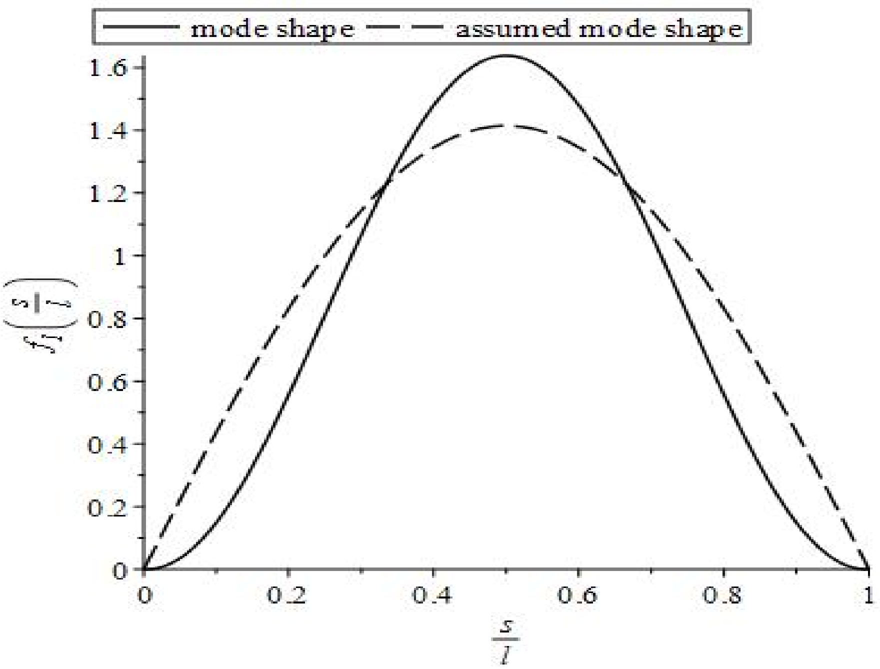
$$\overline{C_d\left(\gamma\right)} = 4.5712\,\gamma^3 + 1.3518\,\gamma^2 - 1.7591\,\gamma + 0.9874 \qquad (۱۸.۴)$$

$$\overline{C_l\left(\gamma\right)} = 8.483\,\gamma^3 + 3.3187\,\gamma^2 - 1.7491\,\gamma + 0.3046 \qquad (۱۹.۴)$$

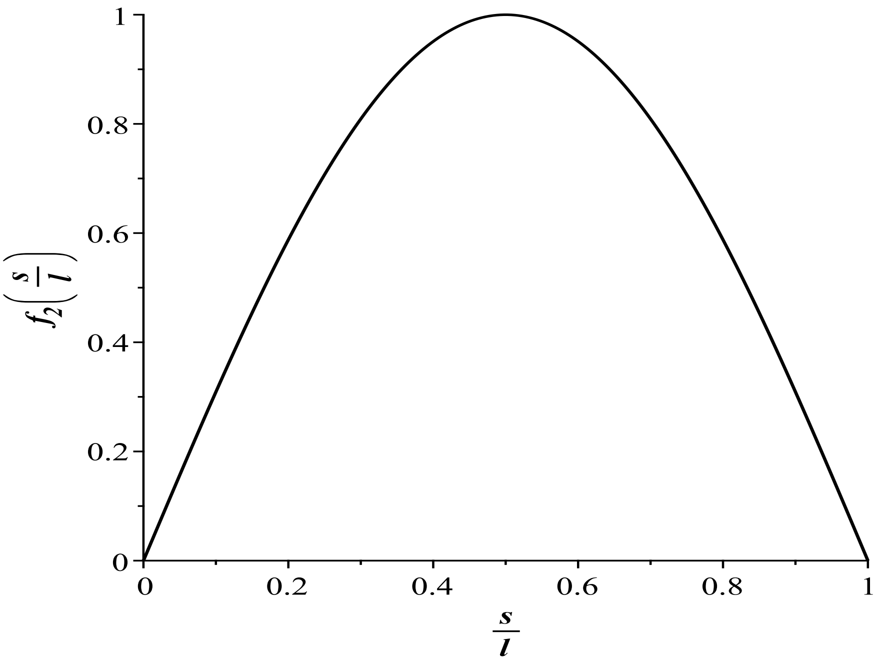
زاویه‌ی حمله خود تابعی از زاویه‌ی دوران است. شکل (۷.۴) تغییرات زاویه‌ی دوران را با سرعت باد نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود زاویه‌ی حمله در ابتدا با شیب ملایم‌تری تغییر می‌کند؛ اما با بالا رفتن سرعت باد، تغییرات آن شدیدتر می‌شود.



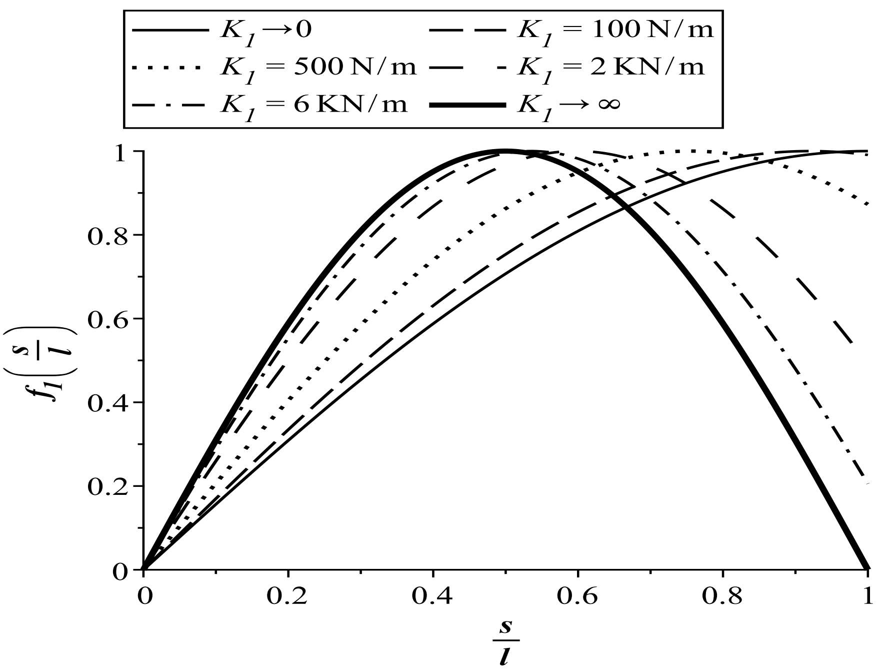
شکل ۲.۴: تابع ویژه‌ی مُد عمودی و عمود بر صفحه در حالت دو سر ثابت $(d = 1.3m)$



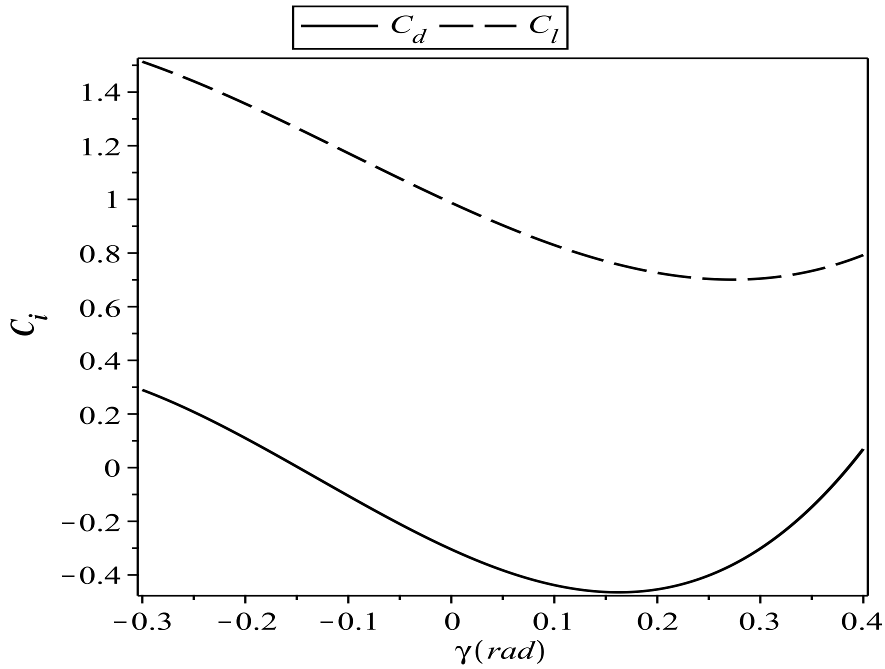
شکل ۳.۴: تابع ویژه‌ی مُد عمودی در حالت دو سر ثابت $(d = 5.6m)$



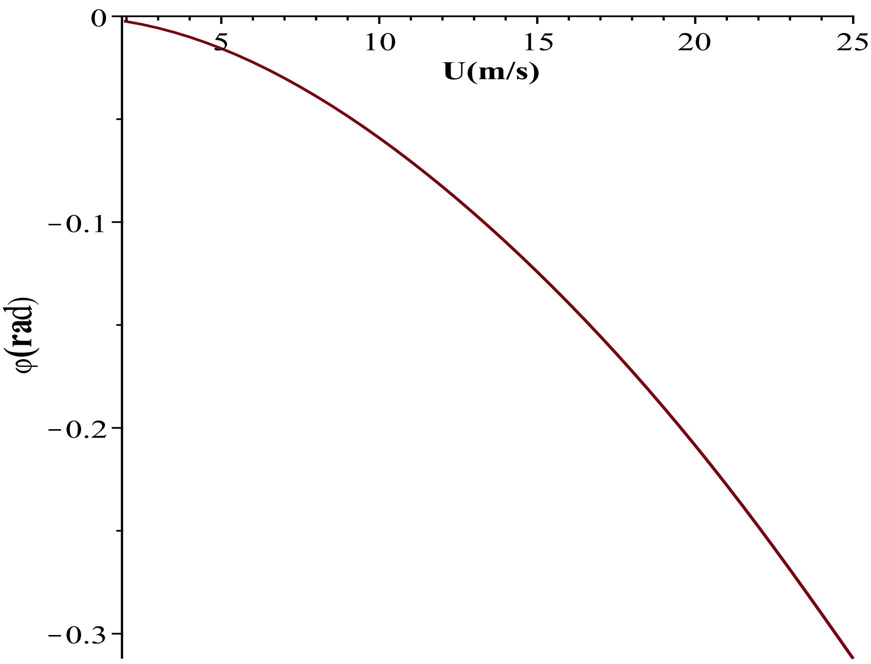
شکل ۴.۴: تابع ویژه‌ی مُد عمود بر صفحه در حالت دو سر ثابت $(d = 5.6m)$



شکل ۵.۴: توابع ویژه‌ی مُد عمودی در حالت پایه‌ی انتهاییِ الاستیک در جهت عمودی $(d = 1.3m)$



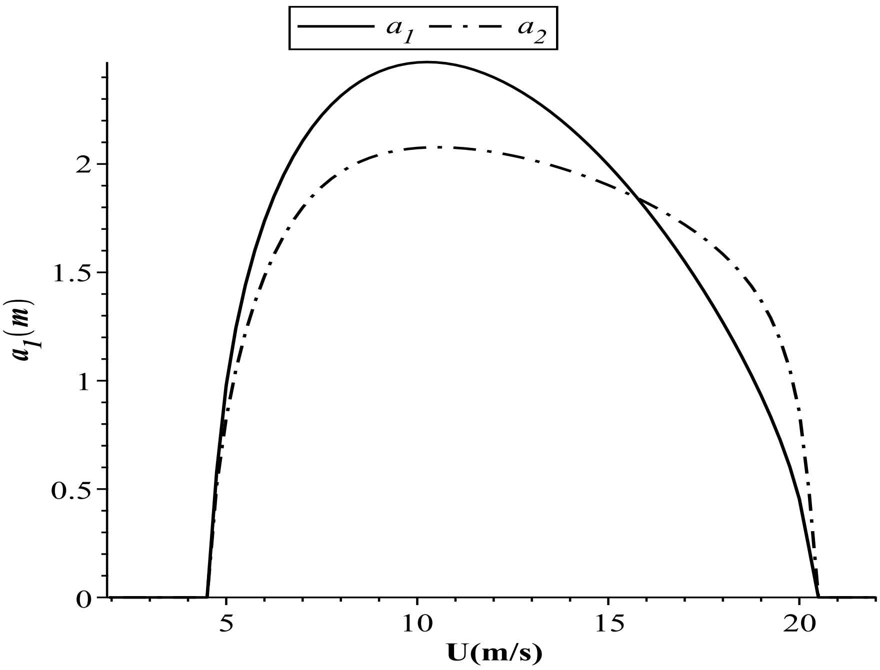
شکل ۶.۴: ضرایب آیرودینامیکی لیفت و درگ



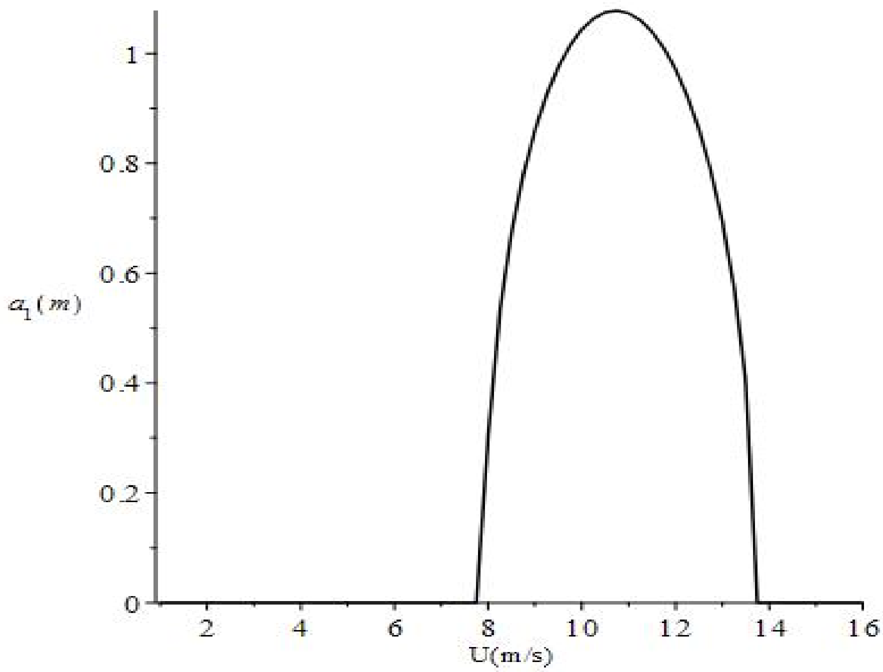
شکل ۷.۴: تغییر زاویه‌ی دوران با سرعت باد

۲.۴ حل پایداری

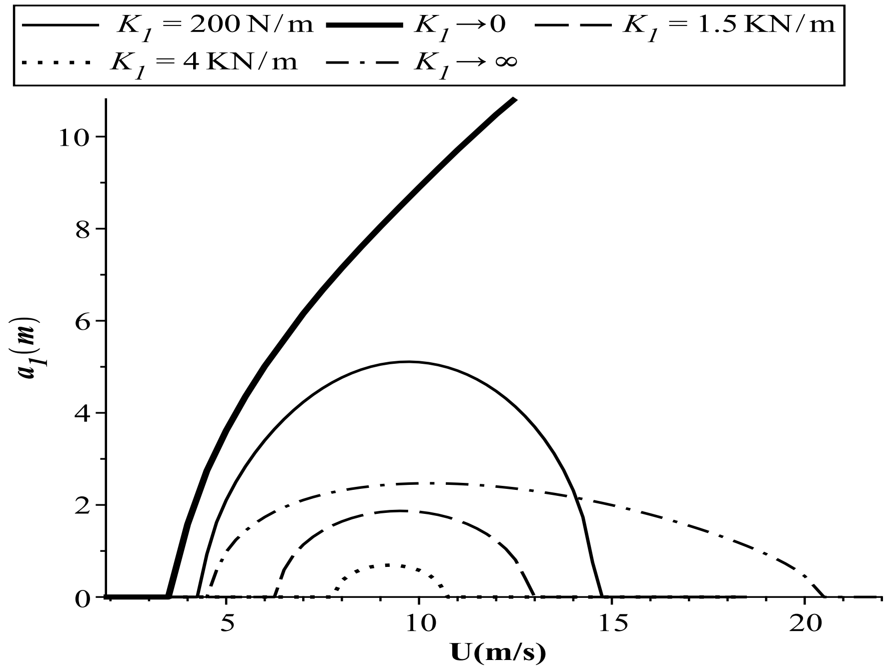
به‌منظور بررسی پایداری سیستم کابل دو سر ثابت با شکم ۱.۳ متر که رزونانس ۱:۱ اتفاق می‌افتد، با قرار دادن $\dot{a_1} = \dot{a_2} = \dot{\psi_1} = 0$ در معادلات مدولاسیون‌ـ فاز کاهش‌یافته‌ی (۲۴.۳) تا (۲۶.۳) می‌توان نقاط تعادل (دامنه‌ی پایداری) سیستم را به دست آورد.
شکل (۸.۴) تغییرات دامنه‌ی a_1 و a_2 را با سرعت باد نشان می‌دهد که خروج از مرکزی سطح مقطع نیز لحاظ شده است. همان‌طور که قابل‌مشاهده است دامنه‌ی a_1 و a_2 ابتدا با افزایش سرعت باد افزایش و سپس کاهش می‌یابد. محدوده‌ی پایداری سیستم نیز کاملاً در شکل واضح است. درواقع پاسخ پایدار در این شاخه قرارگرفته است:
شاخه‌ی (۲) $a_2(U) \quad , \quad a_1(U)$
البته این پاسخ منوط به سرعت باد است و بازه‌ی به خصوصی از سرعت باد را شامل می‌شود. همان‌طور که قابل‌مشاهده است این پاسخ در بازه‌ی $4.5m/s \leq U \leq 20.5m/s$ وجود دارد. در حالتی که U در این بازه نباشد پاسخ در شاخه‌ی دیگری قرار می‌گیرد:
شاخه‌ی (۱) $a_1 = a_2 = 0$
به‌منظور بررسی پایداری سیستم کابل دو سر ثابت با شکم ۵.۶ متر که رزونانس ۲:۱ اتفاق می‌افتد، نیز به شیوه‌ی قبلی عمل می‌کنیم و با قرار دادن $\dot{a_1} = \dot{a_2} = \dot{\psi_2} = 0$ در معادلات مدولاسیون‌ـ فاز کاهش‌یافته‌ی (۳۱.۳) تا (۳۳.۳) می‌توان دامنه‌ی پایدار سیستم را به دست آورد. این بار پاسخ که در شکل (۹.۴) دیده می‌شود در شاخه‌ی دیگری قرار می‌گیرد که به این شکل است:
شاخه‌ی (۳) $a_2 = 0 \quad , \quad a_1(U)$
دامنه‌ی a_1 ابتدا با افزایش سرعت باد افزایش و سپس کاهش می‌یابد. این پاسخ نیز منوط به سرعت باد است. این پاسخ در بازه‌ی $7.8m/s \leq U \leq 13.8m/s$ وجود دارد. درصورتی‌که U در این بازه نباشد، پاسخ در شاخه‌ی (۱) قرار می‌گیرد. همان‌طور که مشاهده می‌شود در حالت تشدید ۱:۱ حداکثر دامنه در حدود ۲.۵ متر است و در حالت تشدید ۲:۱ در حدود ۱.۵ متر است.
حال تأثیر سختی پایه‌ی انتهایی را بر روی پاسخ‌ها بررسی می‌کنیم. برای این کار دو حالت مختلف شکم ۱.۳ متر و ۵.۶ متر را در نظر گرفته و این بار پایداری را همانند حالات قبلی و با قرار دادن $(i = 3,4,5,6) \quad \dot{a_1} = \dot{a_2} = \dot{\psi_i} = 0$ در معادلات مدولاسیون‌ـ فاز کاهش‌یافته‌ی (۳۸.۳) تا (۴۰.۳) ، (۴۶.۳) تا (۴۹.۳) و (۵۳.۳) تا (۵۵.۳)، می‌توان بررسی کرد و دامنه‌ی پایدار سیستم را به دست آورد. لازم به ذکر است که فقط در حالت رزونانس ۱:۱ و ۱:۲ پاسخ در شاخه‌ی ۱ و ۲ قرار می‌گیرد. در بقیه‌ی حالت‌های رزونانسی و غیر رزونانسی پاسخ در شاخه‌ی ۱ و ۳ قرار می‌گیرد.
شکل ۱۰.۴ تأثیر سختی راستای عمودی پایه‌ی انتهایی کابل را بر روی پاسخ پایدار سیستم، در حالتی که شکم آن ۱.۳ متر است، نشان می‌دهد. همان‌طور که در شکل (۱۰.۴) قابل‌مشاهده



شکل ۸.۴: تغییرات دامنه با سرعت باد در حالت تشدید ۱:۱ $(d = 1.3m)$



شکل ۹.۴: تغییرات دامنه‌ی a_1 با سرعت باد در حالت تشدید ۲:۱ $(d = 5.6m)$

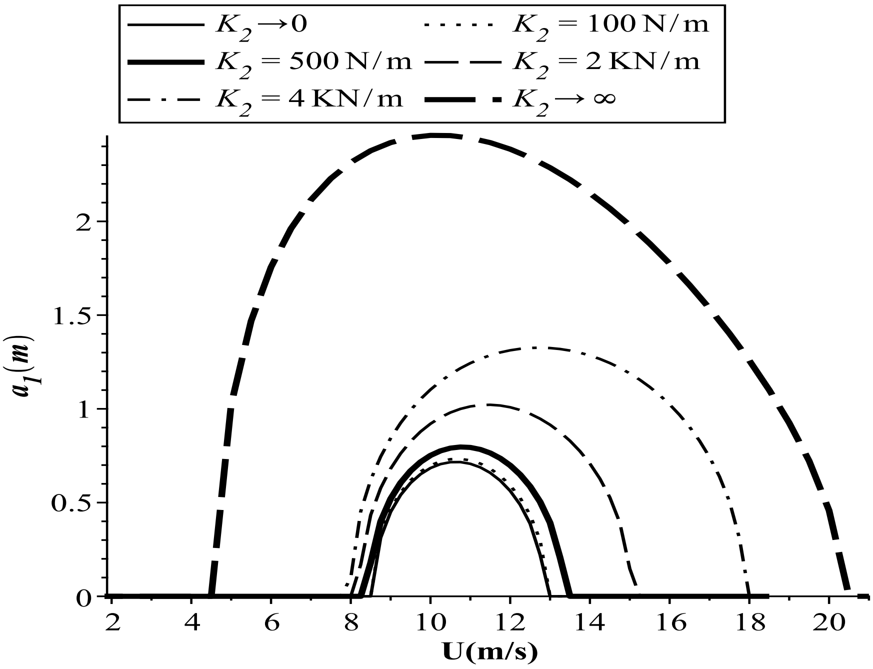


شکل ۱۰.۴: تغییرات دامنه‌ی a_1 با سرعت باد به ازای K_1 های مختلف $(d = 1.3m)$

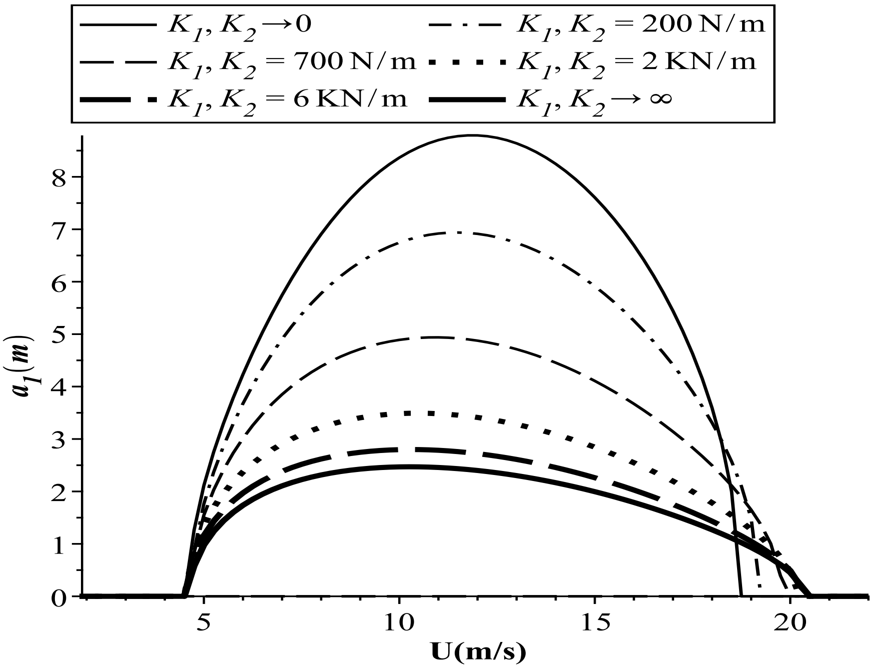
است، با افزایش سختی K_1 دامنه‌ی a_1 کاهش می‌یابد که ازلحاظ فیزیکی نیز کاملاً قابل توجیه است. زمانی که $K_1 \to \infty$ (کابل به حالت دو سر ثابت تبدیل می‌شود)، رزونانس ۱:۱ اتفاق می‌افتد و دامنه به‌صورت ناگهانی و برخلاف روند معمول افزایش می‌یابد. K_1 بازه‌ی پایداری سیستم را نیز تحت تأثیر قرار می‌دهد. با افزایش K_1 بازه‌ی پایداری نیز کاهش می‌یابد. در ضمن نمودارهایی که به‌صورت غیر بسته رسم شده‌اند، به این خاطر است که وارد ناحیه‌ی ناپایدار شده‌اند و ناحیه‌ی پایدار آن‌ها رسم شده است.

شکل (۱۱.۴) تأثیر سختی راستای عمود بر صفحه‌ی پایه‌ی انتهایی کابل را بر روی پاسخ پایدار سیستم، در حالتی که شکم کابل ۱.۳ متر است، نشان می‌دهد. همان‌طور که در شکل (۱۱.۴) قابل‌مشاهده است، تغییرات K_2 ،دامنه و بازه‌ی پایداری سیستم را تغییر می‌دهد. با افزایش K_2 این دو افزایش می‌یابد. $K_2 \to 0$ یعنی که انتهای کابل در جهت عمود بر صفحه آزاد است و $K_2 \to \infty$ یعنی انتهای کابل در جهت عمود بر صفحه ثابت است. زمانی که $K_2 \to \infty$ ،تغییرات به‌یک‌باره زیاد شده و این به خاطر این است که در این حالت کابل دچار تشدید ۱:۱ می‌شود.

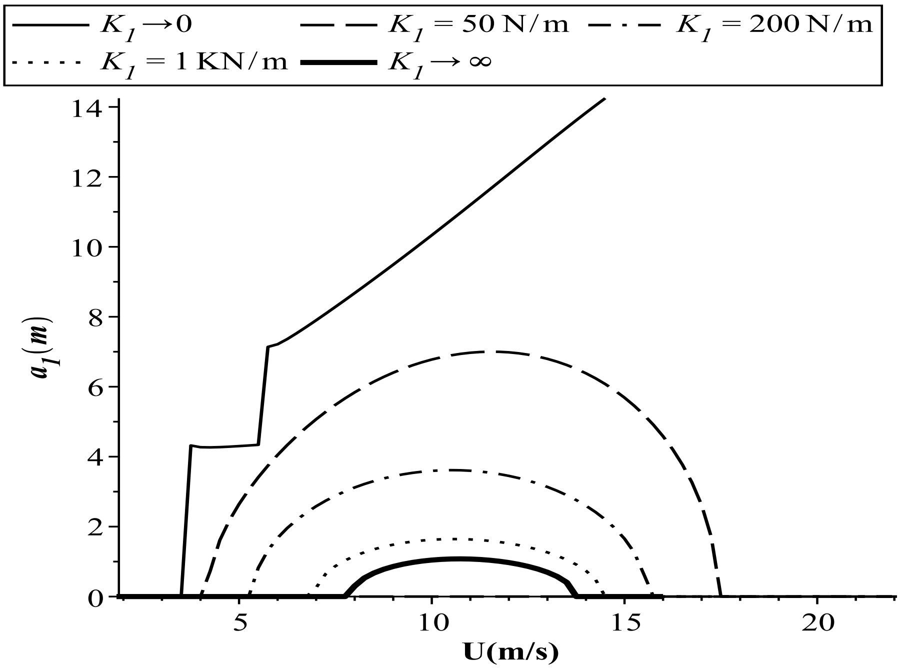
شکل (۱۲.۴) تأثیر سختی دو راستای عمودی و عمود بر صفحه‌ی پایه‌ی انتهایی کابل را بر روی پاسخ پایدار سیستم، در حالتی که شکم کابل ۱.۳ متر است، نشان می‌دهد. $(K_1 = K_2)$ تمامی نمودارهای شکل (۱۲.۴) حالت رزونانسی ۱:۱ را نشان می‌دهد. چون به ازای تمامی این حالت‌ها فرکانس عمودی و عمود بر صفحه برابر است. همان‌طور که قابل‌مشاهده است، با افزایش سختی، دامنه کاهش می‌یابد و محدوده‌ی پایداری از انتهای آن به‌صورت خیلی جزئی افزایش می‌یابد.



شکل ۱۱.۴: تغییرات دامنه‌ی a_1 با سرعت باد به ازای K_2 های مختلف $(d = 1.3m)$



شکل ۱۲.۴: تغییرات دامنه‌ی a_1 با سرعت باد به ازای K_i های مختلف $(d = 1.3m, K_1 = K_2)$

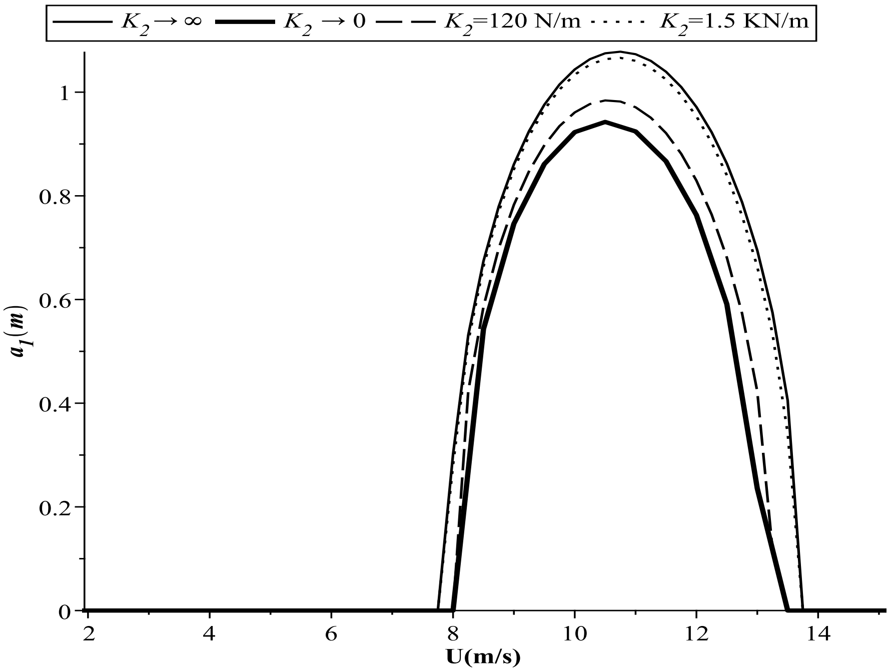


شکل ۱۳.۴: تغییرات دامنه‌ی a_1 با سرعت باد به ازای K_1 های مختلف $(d = 5.6m)$

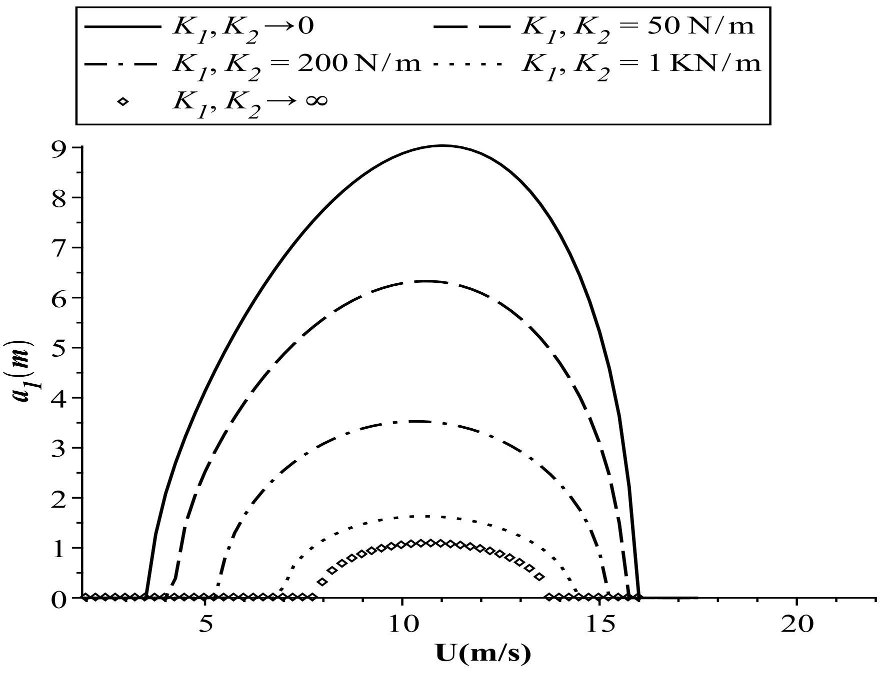
شکل (۱۳.۴) تأثیر سختی راستای عمودی پایه‌ی انتهایی کابل را بر روی پاسخ پایدار سیستم، در حالتی که شکم کابل ۵.۶ متر است، نشان می‌دهد. شکل (۱۳.۴) را می‌توان با شکل (۱۰.۴) مقایسه کرد. همانند شکل (۱۰.۴) با افزایش سختی K_1 دامنه و بازه‌ی پایداری کاهش می‌یابد؛ ما چون خبری از رزونانس ۱:۱ در این حالت نیست، هنگامی‌که $K_1 \to \infty$، دامنه افزایش نمی‌یابد و به روند کاهشی خود ادامه می‌دهد. درواقع وقتی‌که $K_1 \to \infty$، رزونانس ۲:۱ اتفاق می‌افتد که می‌بینیم تأثیر آن مانند رزونانس ۱:۱ بحرانی نیست. از مقایسه‌ی این دو شکل نیز به این نتیجه می‌رسیم که هر چه شکم کابل کم‌تر و درواقع نیروی کشش کابل بیش‌تر باشد، در سختی‌های بالا تغییر سختی K_1 به یک اندازه، تأثیر بیشتری بر دامنه و حتی بازه‌ی پایداری می‌گذارد. در مقادیر پایین سختی برعکس است.

شکل (۱۴.۴) تأثیر سختی راستای عمود بر صفحه‌ی پایه‌ی انتهایی کابل را بر روی پاسخ پایدار سیستم، در حالتی که شکم کابل ۵.۶ متر است، نشان می‌دهد. در شکل (۱۴.۴) با افزایش سختی K_2، دامنه افزایش می‌یابد ولی بازه‌ی پایداری تقریباً ثابت می‌ماند. اگر شکل (۱۱.۴) را با شکل (۱۴.۴) مقایسه کنیم، می‌بینیم که با افزایش شکم کابل، تأثیر تغییر سختی K_2، بر روی دامنه و بازه‌ی پایداری کم‌تر است. همچنین در شکل (۱۴.۴) چون خبری از رزونانس ۱:۱ نیست، افزایش ناگهانی دامنه در آن برخلاف شکل (۱۱.۴) مشاهده نمی‌شود.

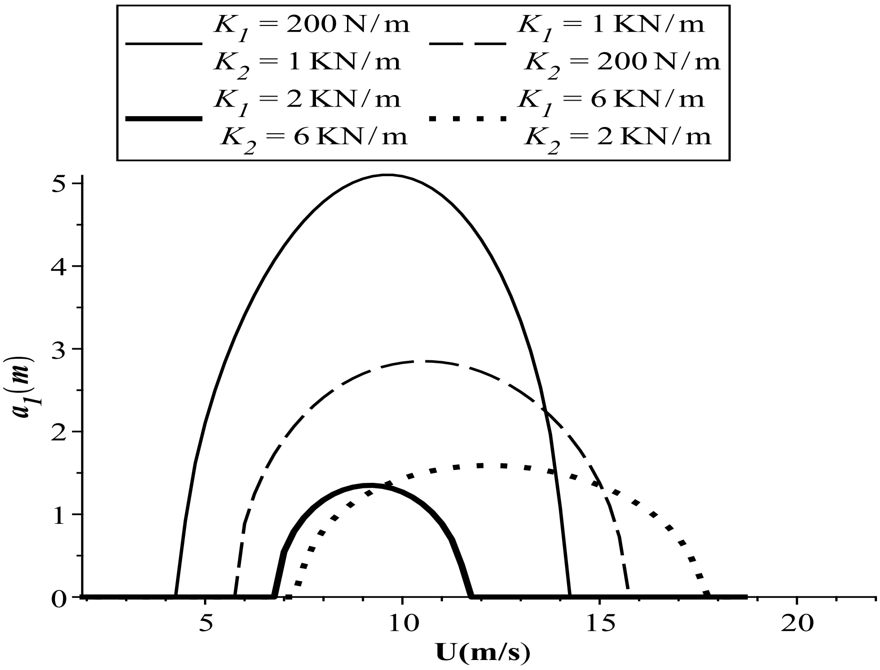
شکل (۱۵.۴) تأثیر سختی راستای عمودی و عمود بر صفحه‌ی پایه‌ی انتهایی کابل را بر روی پاسخ پایدار سیستم، در حالتی که شکم کابل ۵.۶ متر است، نشان می‌دهد. $(K_1 = K_2)$ تمامی نمودارهای شکل (۱۵.۴) حالت رزونانسی ۲:۱ را شامل می‌شود. همان‌طور که مشاهده



شکل ۱۴.۴: تغییرات دامنه‌ی a_1 با سرعت باد به ازای K_2 های مختلف $(d = 5.6m)$

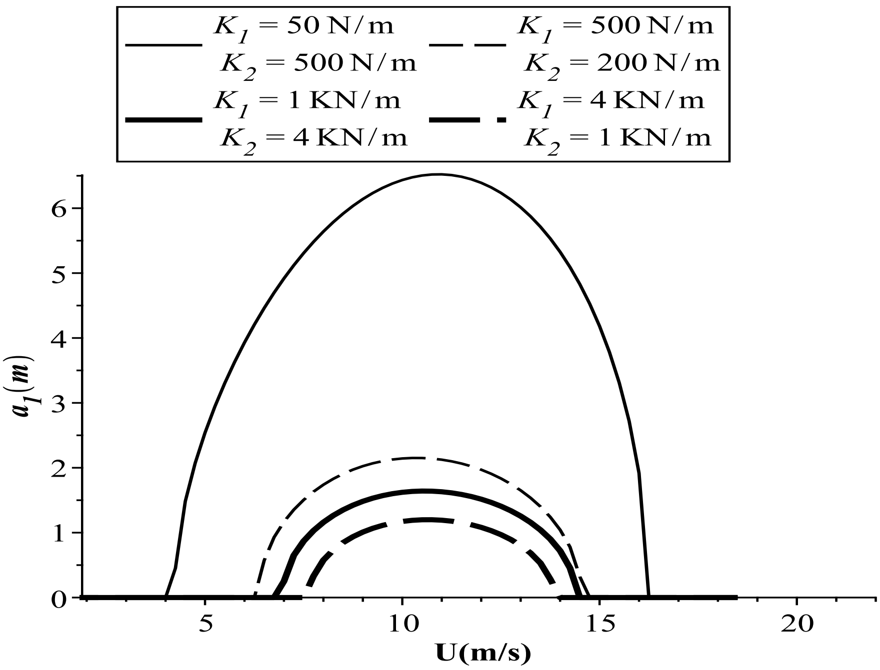


شکل ۱۵.۴: تغییرات دامنه‌ی a_1 با سرعت باد به ازای K_i های مختلف $(d = 5.6m, K_1 = K_2)$

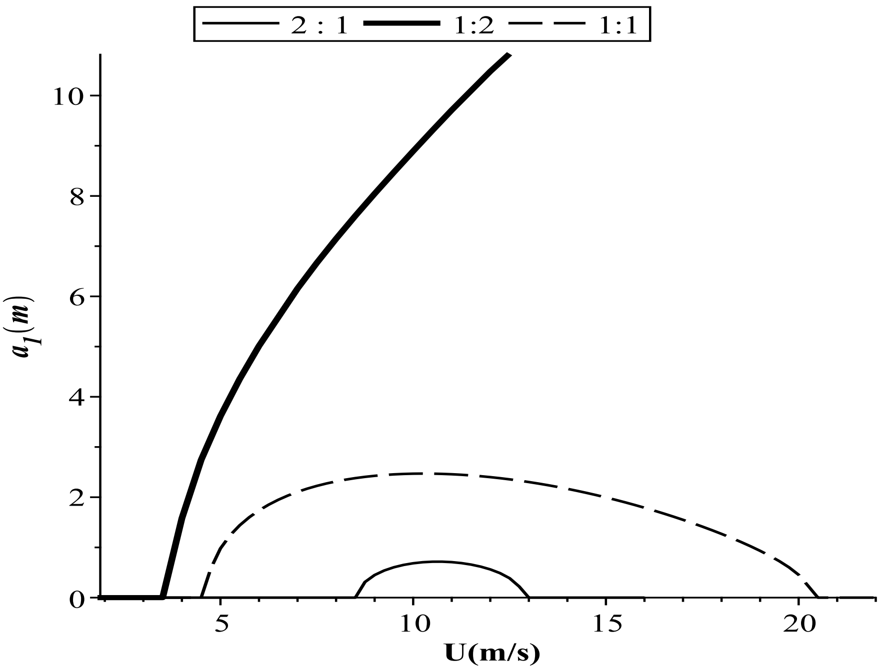


شکل ۱۶.۴: تغییرات دامنه‌ی a_1 با سرعت باد به ازای K_i های مختلف $(d = 1.3m, K_1 \neq K_2)$

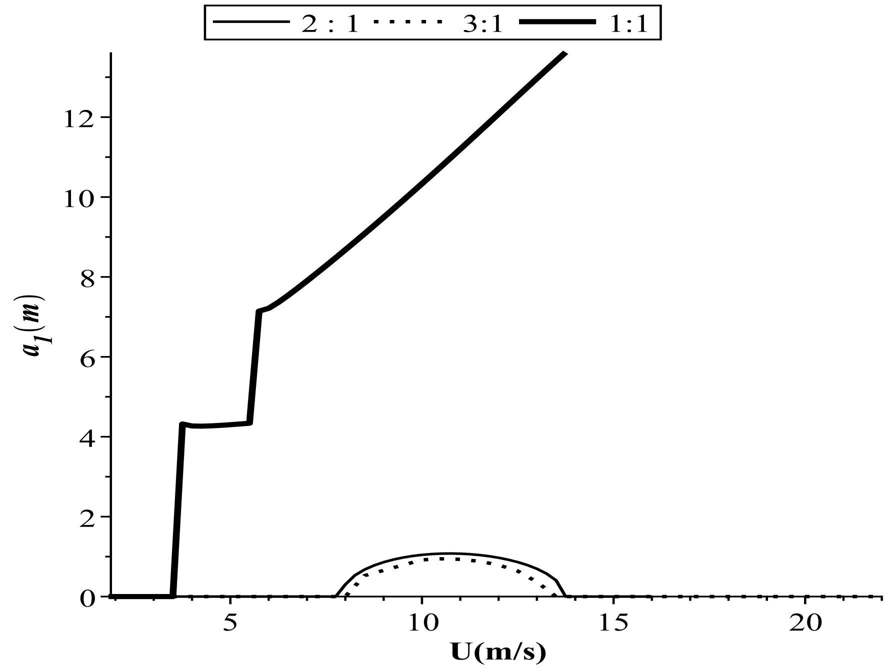
می‌شود، با افزایش سختی فنر پایه، دامنه و بازه‌ی پایداری کاهش می‌یابد. اگر شکل (۱۵.۴) با شکل (۱۲.۴) مقایسه شود، به این نتیجه می‌رسیم که تغییرات K_i در حالتی که $K_1 = K_2$ ،هنگامی‌که شکم کابل بزرگ‌تر است، تأثیر بیش‌تری بر روی دامنه و بازه‌ی پایداری می‌گذارد.
شکل (۱۶.۴) تأثیر سختی راستای عمودی و عمود بر صفحه‌ی پایه‌ی انتهای کابل را در حالتی که شکم کابل ۱.۳ متر است، نشان می‌دهد. $(K_1 \neq K_2)$
شکل (۱۷.۴) تأثیر سختی راستای عمودی و عمود بر صفحه‌ی پایه‌ی انتهای کابل را در حالتی که شکم کابل ۵.۶ متر است، نشان می‌دهد. $(K_1 \neq K_2)$
با توجه به شکل‌های (۱۶.۴) و (۱۷.۴) به این نتیجه می‌رسیم که با افزایش سختی تکیه‌گاه در راستای عمودی و کاهش سختی در جهت عمود بر صفحه، دامنه کاهش می‌یابد و معمولاً طول بازه‌ی پایداری با کاهش دامنه، کاهش می‌یابد.
شکل (۱۸.۴) حالت‌های مختلف رزونانسی را در حالتی که شکم کابل ۱.۳ متر است، نشان می‌دهد. شکل (۱۹.۴) حالت‌های مختلف رزونانسی را در حالتی که شکم کابل ۵.۶ متر است، نشان می‌دهد.
همان‌طور که در شکل (۱۸.۴) و (۱۹.۴) قابل‌مشاهده است، ماکزیمم دامنه‌ی پایدار از بین حالت‌های مختلف رزونانسی در حالتی که شکم کابل ۱.۳ متر است، در حالت رزونانس ۱:۲ اتفاق می‌افتد و مینیمم دامنه در حالت رزونانس ۲:۱ اتفاق می‌افتد. ماکزیمم دامنه‌ی پایدار از بین حالت‌های مختلف رزونانسی در حالتی که شکم کابل ۵.۶ متر است، در حالت رزونانس



شکل ۱۷.۴: تغییرات دامنه‌ی a_1 با سرعت باد به ازای K_i های مختلف $(d = 5.6m, K_1 \neq K_2)$



شکل ۱۸.۴: حالت‌های مختلف رزونانسی در حالت $(d = 1.3m)$



شکل ۱۹.۴: حالت‌های مختلف رزونانسی در حالت $(d = 5.6m)$

۱:۱ اتفاق می‌افتد و مینیمم دامنه در حالت رزونانس ۳:۱ اتفاق می‌افتد.

۳.۴ شبیه‌سازی عددی و اعتبارسنجی نتایج

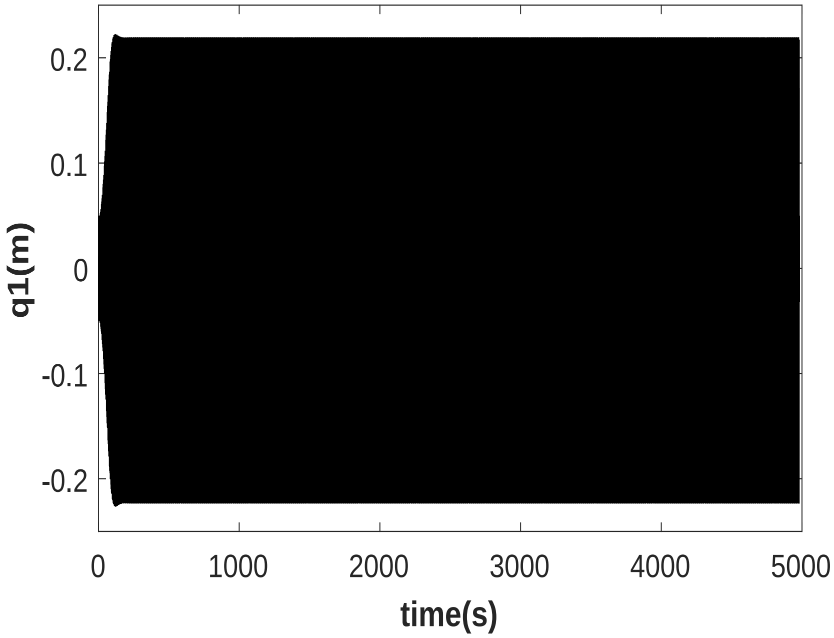
به‌منظور بررسی نتایج به‌دست‌آمده و اطلاع از صحت آن، معادلات (۲.۳) و (۳.۳) شبیه‌سازی عددی شده‌اند و با روش رانج کوتا [۱] به‌صورت عددی حل‌شده‌اند. مقادیر اولیه [۲] نیز به این صورت واردشده است:

$$q_1(0) = q_2(0) = 0.05 \quad , \quad q_1'(0) = q_2'(0) = 0.01$$

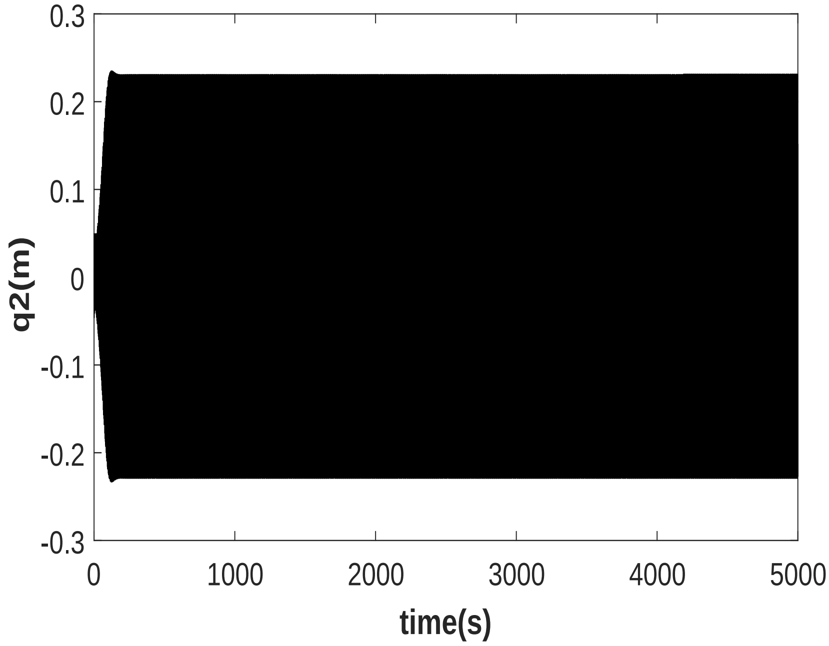
حال می‌شود صحت هرکدام از نمودارهای شکل‌های قبلی را در سرعتی خاص بررسی کرد. به‌عنوان‌مثال در شکل (۸.۴) سرعت باد را ۸ متر بر ثانیه در نظر گرفته و شبیه‌سازی عددی انجام‌شده است. نتیجه شبیه‌سازی در شکل (۲۰.۴) آمده است. از مقایسه‌ی شکل (۸.۴) با شکل (۲۰.۴) ،درستی پاسخ در سرعت موردنظر اثبات می‌شود، با این تفاوت که نتایج شبیه‌سازی عددی یک‌دهم نتایج پرتوربیشن است و این به خاطر این است که $\varepsilon = 0.1$ فرض شده است.

حال برای بررسی بیش‌تر یک نقطه (یک سرعت) از شکل (۹.۴) شبیه‌سازی‌شده است. سرعت

[۱] Runge Kutta
[۲] Initial Value

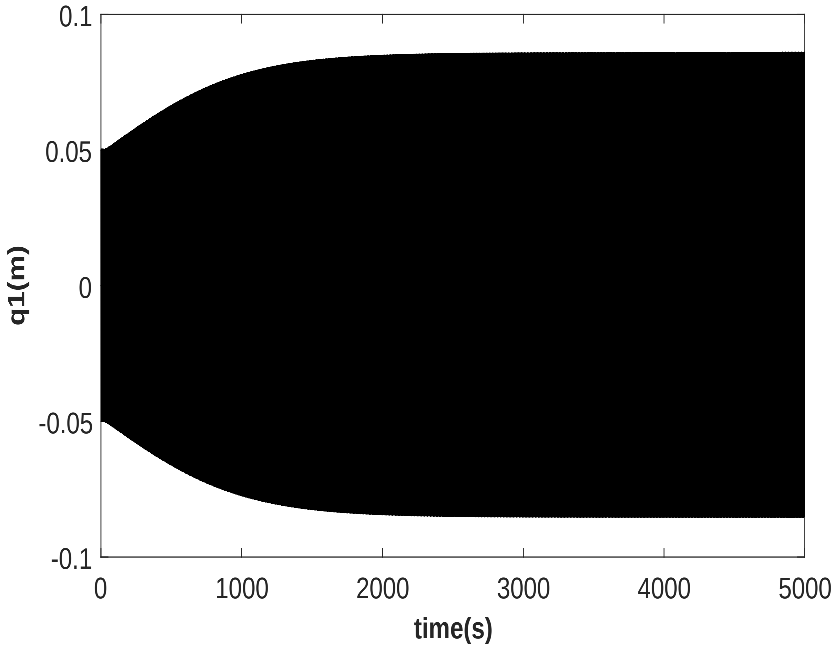


(آ) الف



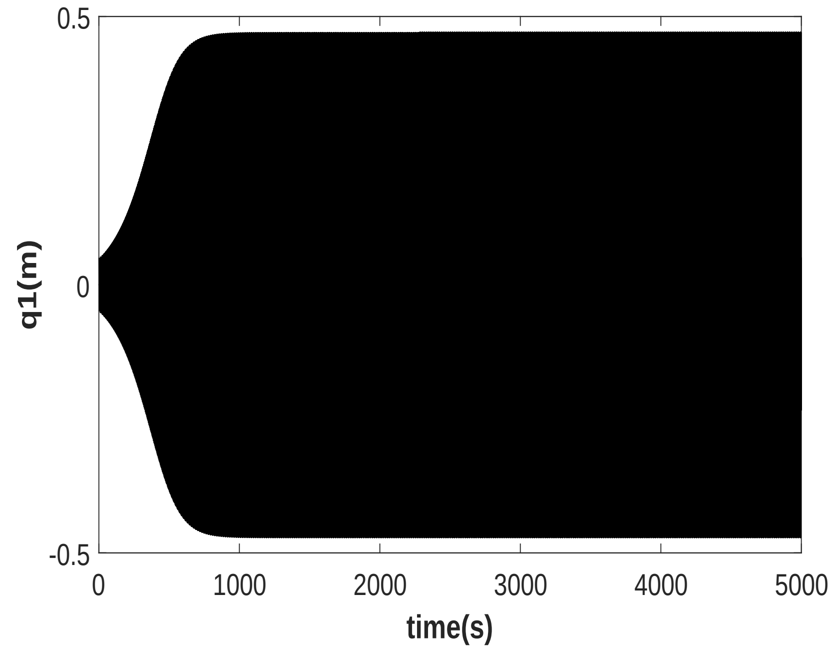
(ب) ب

شکل ۲۰.۴: دامنه‌ی q_1 و q_2 برحسب زمان در حالت دو سر ثابت $(U = 8m/s, d = 1.3m)$

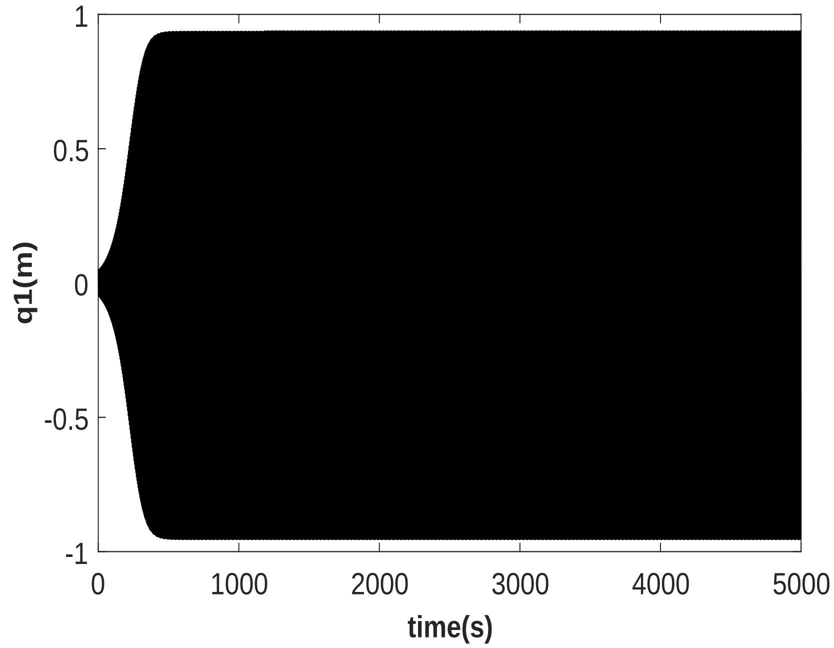


شکل ۲۱.۴: دامنه‌ی q_1 برحسب زمان در حالت دو سر ثابت $(U = 9m/s, d = 5.6m)$

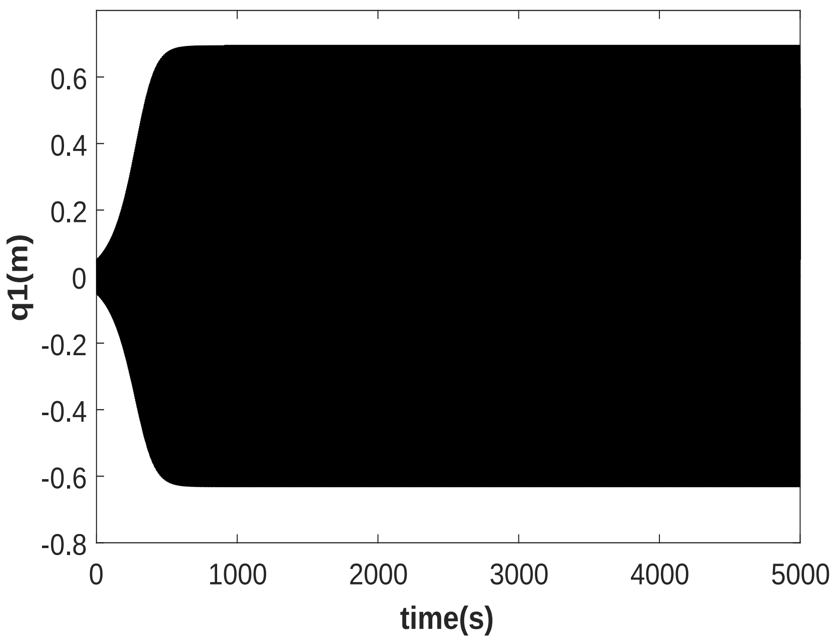
۹ متر بر ثانیه فرض می‌شود. شکل (۲۱.۴) نتیجه‌ی این شبیه‌سازی را نشان می‌دهد. با مقایسه‌ی شکل (۲۱.۴) با شکل (۹.۴) می‌توان به صحت نتایج به‌دست‌آمده پی برد.
تا به اینجا حالت دو سر ثابت کابل بررسی‌شده است. برای اطمینان از تمامی نتایج شرایط سختی پایه انتهایی کابل باید بررسی شود. یک نقطه از شکل (۱۶.۴) بررسی‌شده است. سرعت باد ۸ متر بر ثانیه، $K_1 = 200\,N/m$ ، $K_2 = 1\,KN/m$ و شکم کابل ۱.۳ متر فرض شده است. نتیجه‌ی این شبیه‌سازی در شکل (۲۲.۴) آمده است. در شکل (۱۸.۴) یک نقطه از رزونانس ۱:۲ بررسی‌شده است. سرعت باد ۱۰ متر بر ثانیه و شکم کابل ۱.۳ متر فرض شده است. نتیجه‌ی این شبیه‌سازی در شکل (۲۳.۴) آمده است. در شکل (۱۷.۴) حالتی را بررسی کردیم که سرعت باد ۱۰ متر بر ثانیه، $K_1 = 50\,N/m$ ، $K_2 = 500\,N/m$ و شکم کابل ۵.۶ متر است. نتیجه‌ی این شبیه‌سازی در شکل (۲۴.۴) آمده است. در شکل (۱۳.۴) حالتی بررسی‌شده است که سرعت باد ۵ متر بر ثانیه، $K_1 = 50\,N/m$ و شکم کابل ۵.۶ متر است. نتیجه‌ی این شبیه‌سازی در شکل (۲۵.۴) آمده است. از مقایسه‌ی شکل‌های (۲۲.۴) تا (۲۵.۴) با نتایج مربوطه‌ی ذکرشده به این نتیجه می‌رسیم که شبیه‌سازی عددی در حالت تکیه‌گاه الاستیک نیز درست است و می‌تواند ما را به جواب درست برساند.
برای بررسی نتایج حل عددی در خارج از بازه‌ای که a_1 دامنه‌ی پایدار غیر صفر دارد و آن را در شکل‌های قبل برای حالت‌های مختلف به‌دست آوردیم، به عنوان مثال در شکل (۱۶.۴) سرعت باد ۱۵ متر بر ثانیه در نظر گرفته شده $(K_1 = 2KN/m, K_2 = 6KN/m)$ و نتایج شبیه‌سازی عددی در شکل‌های (۲۶.۴) و (۲۷.۴) آورده شده‌است. همان‌طور که در شکل‌های (۲۶.۴) و



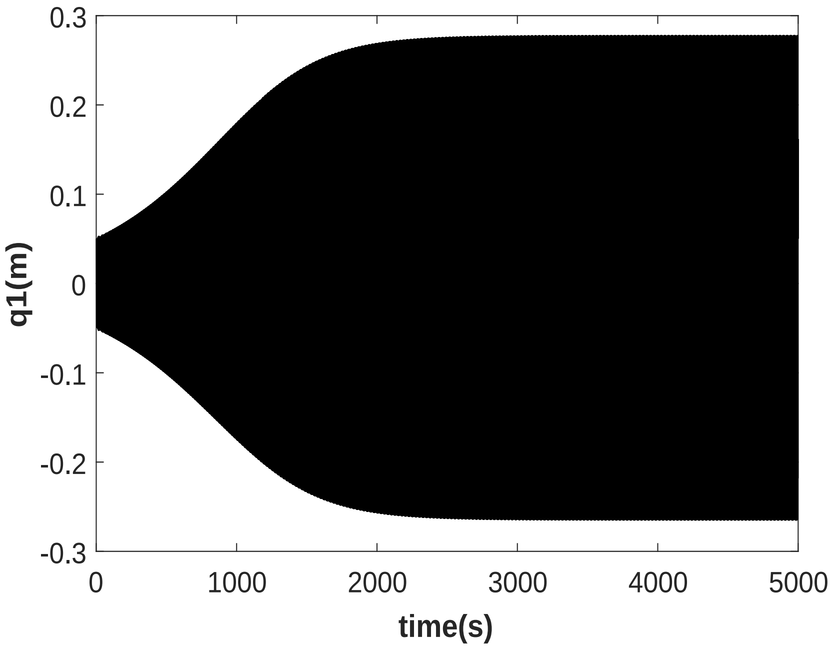
شکل ۲۲.۴: دامنه‌ی q_1 برحسب زمان در حالت $K_1 = 200N/m$ و $K_2 = 1KN/m$ $(U = 8m/s, d = 1.3m)$



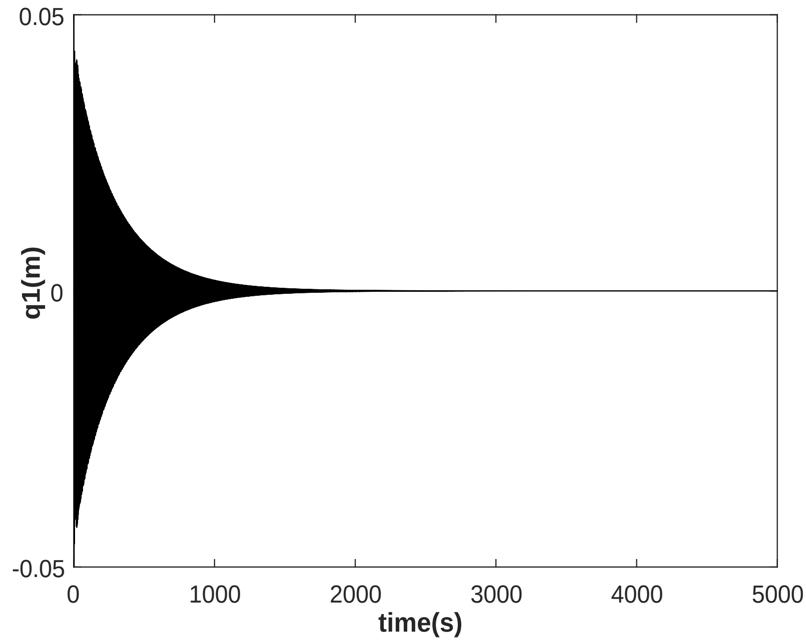
شکل ۲۳.۴: دامنه‌ی q_1 برحسب زمان در حالت رزونانس ۱:۲ $(U = 10m/s, d = 1.3m)$



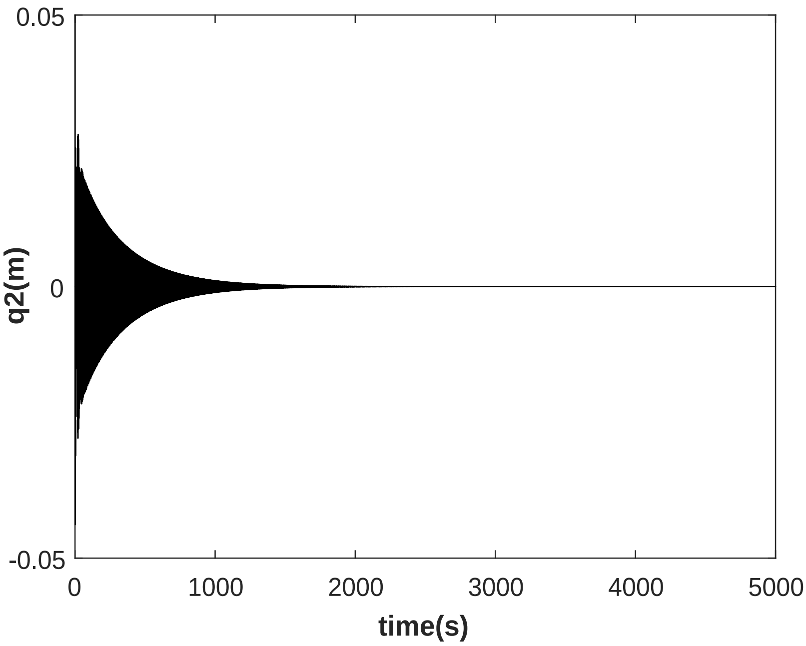
شکل ۲۴.۴: دامنه‌ی q_1 برحسب زمان در حالت $K_1 = 50N/m$ و $K_2 = 500N/m$ $(U = 10m/s, d = 5.6m)$



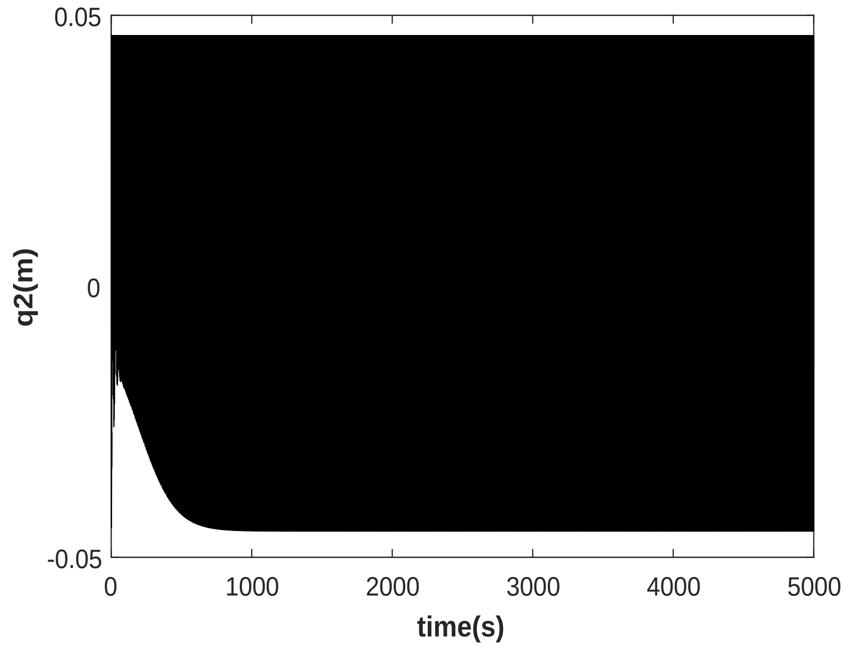
شکل ۲۵.۴: دامنه‌ی q_1 برحسب زمان در حالت $K_1 = 50N/m$ و $K_2 \to \infty$ $(U = 5m/s, d = 5.6m)$



شکل ۲۶.۴: دامنه‌ی q_1 برحسب زمان در حالت $K_1 = 2KN/m$ و $K_2 = 6KN/m$ $(U = 15m/s, d = 1.3m)$



شکل ۲۷.۴: دامنه‌ی q_2 برحسب زمان در حالت $K_1 = 2KN/m$ و $K_2 = 6KN/m$ $(U = 15m/s, d = 1.3m)$



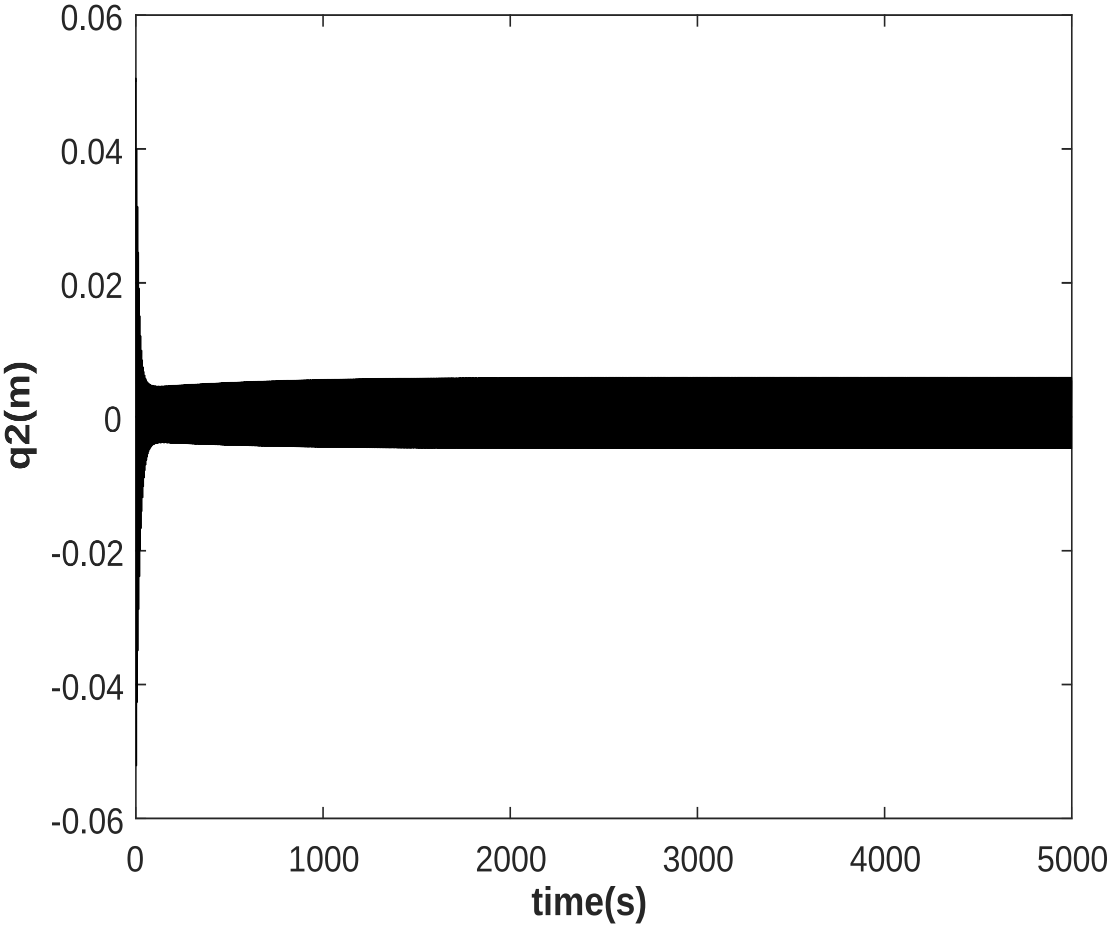
شکل ۲۸.۴: دامنه‌ی q_2 برحسب زمان در حالت $K_1 = 2KN/m$ و $K_2 = 6KN/m$ $(U = 10m/s, d = 1.3m)$

(۲۷.۴) قابل مشاهده است، اگر سرعت باد در محدوده‌ی ایجاد دامنه‌ی پایدار غیر صفر نباشد، دامنه‌ی پایدار سیستم صفر است. یعنی با گذشت زمان حدود ۱۰۰۰ ثانیه $a_1 = a_2 = 0$ می‌شود که همان پاسخ شاخه‌ی (۳) است.

برای بررسی دامنه‌ی a_2 در حالاتی که صفر در نظر گرفته‌شده تا بتوانیم معادلات مدولاسیون–فاز کاهش یافته را حل کنیم، در شکل (۱۶.۴) سرعت باد ۱۰ متر بر ثانیه در نظر گرفته شده $(K_1 = 2KN/m, K_2 = 6KN/m)$ و نتایج شبیه سازی عددی در شکل (۲۸.۴) آورده شده‌است. همان‌طور که در شکل (۲۸.۴) قابل ملاحظه است دامنه‌ی پایدار a_2 در واقع صفر نیست ولی مقدار آن در مقایسه با a_1 قابل چشم‌پوشی است. لازم به ذکر است که مقدار دامنه‌ی a_2 در سایر حالت‌ها همین مقدار و یا کم‌تر می‌باشد (به‌جز حالت تشدید ۱:۱ و ۱:۲). در واقع اگر دامنه‌ی a_2 را صفر در نظر بگیریم (به‌جز حالت تشدید ۱:۱ و ۱:۲)، دامنه‌ی پایدار a_1 تغییر چندانی نمی‌کند. در واقع ما به‌دنبال دامنه‌ی پایدار a_1 هستیم. چون مقدار آن در مقایسه با a_2 (به‌جز حالت تشدید ۱:۱) همواره بیش‌تر است.

شکل (۲۹.۴) نمونه‌ی دیگری از شبیه‌سازی عددی دامنه‌ی a_2 است، که در واقع شکل (۱۱.۴) در حالتی که $K_2 \to 0$ و سرعت باد ۱۰ متر بر ثانیه است، شبیه‌سازی عددی شده‌است. باز هم مشاهده می‌شود که دامنه‌ی a_2 صفر نیست و مقداری پایدار دارد. اما مقدار آن در مقایسه با a_1 کوچک است.

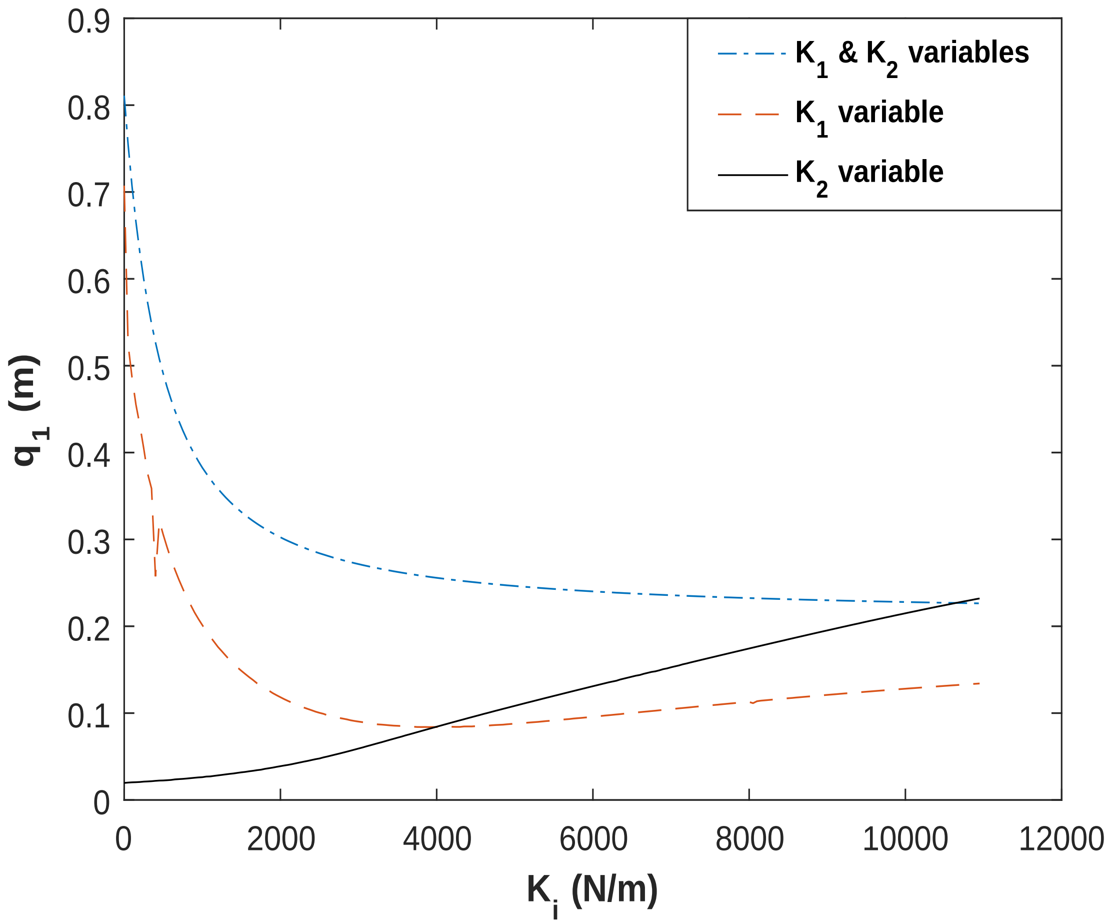
در شکل‌های (۳۰.۴) و (۳۱.۴) تغییرات دامنه‌ی q_1 برحسب K_i رسم شده است. این نمودارها



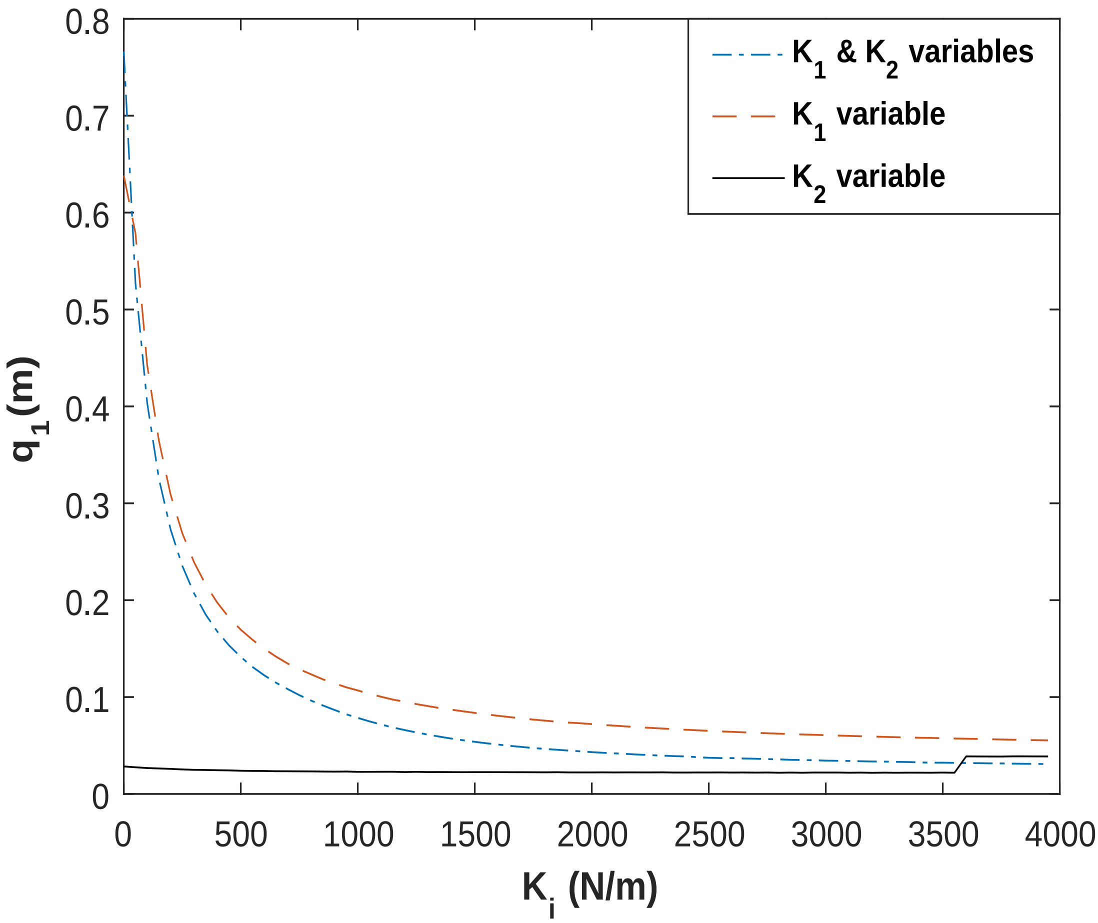
شکل ۲۹.۴: دامنه‌ی q_2 برحسب زمان در حالت $K_1 \rightarrow \infty$ و $K_2 \rightarrow 0$ $(U = 10m/s, d = 1.3m)$

نیز با روش عددی به‌دست‌آمده است.

همان‌طور که در شکل‌های (۳۰.۴) و (۳۱.۴) قابل‌مشاهده است، تأثیر تغییرات سختی فنر پایه‌ی انتهایی کابل، بر روی دامنه، در جهت عمودی بیش‌تر از جهت عمود بر صفحه است. هم‌چنین تمام خطوط این دو نمودار در نهایت به یک دامنه هم‌گرا می‌شود. همان‌طور که مشاهده می‌شود تأثیر سختی پایه بر روی دامنه در حالتی که شکم کابل کم‌تر است، خود را بیش‌تر نشان می‌دهد و خطوط در سختی بالاتری هم‌گرا می‌شود.



شکل ۳۰.۴: دامنه‌ی q_1 برحسب K_i $(U = 8.2m/s, d = 1.3m)$



شکل ۳۱.۴: دامنه‌ی q_1 برحسب K_i $(U = 8.2m/s, d = 5.6m)$

فصل ۵

نتیجه‌گیری

۱.۵ نتیجه‌گیری

نتایج ارائه‌شده در فصل چهارم نشان می‌دهد که در نظر گرفتن سختی پایه‌ی انتهایی کابل در دو جهت عمودی و عمود بر صفحه، هم بر روی دامنه و هم بر روی بازه‌ی پایداری سیستم تأثیر می‌گذارد. همچنین این امر باعث این می‌شود که حالت‌های مختلف روزنانسی و حالت بدون رزونانس در سیستم مشاهده شود. تأثیر سختی فنر پایه به این صورت است که در سختی‌های پایین، تغییر سختی بر روی فرکانس و پاسخ سیستم تأثیر نسبتاً زیادی دارد؛ اما هر چه سختی فنر پایه بیش‌تر می‌شود، تأثیر تغییر آن بر روی فرکانس و پاسخ سیستم کم‌تر است.
از بین تمامی حالات رزونانس و بدون رزونانس مطالعه شده فقط دو حالت است که در آن دامنه‌ی عمود بر صفحه قابل‌چشم‌پوشی نیست و آن‌هم رزونانس ۱:۱ و ۱:۲ است؛ که باز در حالت تشدید داخلی ۱:۲ دامنه‌ی جهت عمود بر صفحه خیلی نسبت به دامنه‌ی عمودی کم‌تر است. در بقیه‌ی حالات می توان گفت فقط دامنه‌ی عمودی وجود دارد.
از دو جهت بررسی‌شده برای راستای قرار گرفتن فنر پایه، هر چه در جهت عمودی سختی فنر بیش‌تر باشد، دامنه‌ی پایدار کم‌تر است و هر چه در جهت عمود بر صفحه سختی فنر بیش‌تر باشد، دامنه‌ی پایدار بیش‌تر است(شکم کابل ثابت). در واقع منظور از دامنه ی پایدار، دامنه ی پایدار عمودی یا همان a_1 است.
تغییر سختی فنر پایه تغییراتی بر روی دامنه و بازه‌ی پایداری ایجاد می‌کند، اما حالت روزنانسی

۱:۱ این تغییرات را شدیدتر و گاهی برعکس می‌کند؛ طوری که دور از انتظار به نظر می‌رسد. معمولاً با افزایش دامنه در حالت‌های مختلف بازه‌ی پایداری نیز افزایش می‌یابد. بحرانی‌ترین دامنه‌ها متعلق به حالت‌های روزنانس ۱:۲ و ۱:۱ است. شکم کابل نیز بر روی پاسخ سیستم تأثیر دارد که در حالات مختلف متفاوت است و در فصل چهارم بررسی شد. نتایج شبیه‌سازی عددی نیز نتایج حل پرتوربیشن را با یک ضریب ε تصدیق می‌کند.

۲.۵ پیشنهادها

پیشنهاد می‌شود تحقیق حاضر در آینده در زمینه‌های زیر انجام شود.

- اثرات جریان آشفته بر روی کابل بررسی شود که باید مدل‌سازی آیرودینامیکی تغییر کند.
- تأثیر سختی پایه‌ی انتهایی کابل در جهت مماسی بررسی شود.
- تأثیر جرم متمرکز در انتهای کابل به همراه سختی پایه‌ی انتهایی در سه جهت عمودی، مماسی و عمود بر صفحه بررسی شود.
- تأثیر NES عمودی و پیچشی به‌صورت هم‌زمان بر روی کابل بررسی شود.

پیوست آ

ضرایب

آ.۱ ضرایب آیرودینامیکی

$$\beta_1 = -\frac{\int_0^l \,[\rho A e_y \omega_1^2 f_1 - \kappa M_3 f_1'] \,ds}{\int_0^l \,[-\kappa^2 E I_1 f_3 + GJ f_3''] \,ds}$$

$$\beta_2 = -\frac{\int_0^l \,[(EI_1 + GJ)\kappa f_2'' - M_2 f_2'' - \rho A e_x \omega_2^2 f_2] \,ds}{\int_0^l \,[-\kappa^2 E I_1 f_3 + GJ f_3''] \,ds}$$

$$m_{31} = \frac{\tau_1}{U}\int_0^l \,[f_1[-\frac{1}{2}\,aa_{2,3}\,(\sin(\phi))^3 + \frac{1}{2}\,\cos(\phi)\,(-2\,aa_{2,2} + aa_{1,3})\,(\sin(\phi))^2$$
$$+ aa_{1,2}\left((\cos(\phi))^2 + 1\right)\sin(\phi) + \cos(\phi)\,aa_{1,1}]k{f_2}^2 f_3 \beta_1] \,ds$$

$$m_{13}=\frac{\tau_1}{U}\int_0^l\ [k{f_1}^2[-\left(\cos\left(\phi\right)\right)^3 aa_{1,1}-\sin\left(\phi\right)\left(aa_{1,2}-aa_{2,1}\right)\left(\cos\left(\phi\right)\right)^2$$
$$+\Big(\left(aa_{2,2}+aa_{1,1}\right)\left(\sin\left(\phi\right)\right)^2-aa_{1,1}-aa_{2,0}\Big)\cos\left(\phi\right)$$
$$-\sin\left(\phi\right)\Big(\left(\sin\left(\phi\right)\right)^2 aa_{2,1}-aa_{1,0}+aa_{2,1}\Big)]f_2]\ ds$$

$$m_{32}=-\frac{\tau_1}{2U}\int_0^l\ [{f_2}^2[aa_{2,3}\left(\sin\left(\phi\right)\right)^3-\cos\left(\phi\right)\left(aa_{1,3}-2\,aa_{2,2}\right)\left(\sin\left(\phi\right)\right)^2$$
$$+\Big(-2\,\left(\cos\left(\phi\right)\right)^2 aa_{1,2}-2\,aa_{1,2}\Big)\sin\left(\phi\right)-2\,\cos\left(\phi\right)aa_{1,1}]kf_1\beta_2 f_3]\ ds$$

$$m_{25}=\tau_1\int_0^l\ [\frac{1}{2}\,k[-aa_{2,3}\left(\sin\left(\phi\right)\right)^2+\left(aa_{1,3}-aa_{2,2}\right)\cos\left(\phi\right)\sin\left(\phi\right)+\left(\cos\left(\phi\right)\right)^2 aa_{1,2}$$
$$+aa_{1,2}]f_1\left(x\right){\beta_1}^2{f_3}^2 f_2]\ ds$$

$$m_{27}=\tau_1\int_0^l\ [\frac{1}{2}\,f_2 k[\left(\cos\left(\phi\right)\right)^2 aa_{1,2}+\sin\left(\phi\right)\left(aa_{1,3}-aa_{2,2}\right)\cos\left(\phi\right)-aa_{2,3}\left(\sin\left(\phi\right)\right)^2$$
$$+aa_{1,2}]{\beta_2}^2 f_1{f_3}^2]\ ds$$

$$m_{11}=\tau_1\int_0^l\ [-f_2\beta_1 kf_3[\left(\cos\left(\phi\right)\right)^2 aa_{1,1}+\sin\left(\phi\right)\left(aa_{1,2}-aa_{2,1}\right)\cos\left(\phi\right)-\left(\sin\left(\phi\right)\right)^2 aa_{2,2}$$
$$+aa_{1,1}]f_1]\ ds$$

$$m_{12}=\tau_1\int_0^l\ [-[\left(\cos\left(\phi\right)\right)^2 aa_{1,1}+\sin\left(\phi\right)\left(aa_{1,2}-aa_{2,1}\right)\cos\left(\phi\right)-\left(\sin\left(\phi\right)\right)^2 aa_{2,2}$$
$$+aa_{1,1}]\beta_2 kf_2 f_3 f_1]\ ds$$

$$m_8=\tau_1\int_0^l\ [k[\left(\sin\left(\phi\right)\right)^2 aa_{2,1}-\sin\left(\phi\right)\left(aa_{1,1}+aa_{2,2}\right)\cos\left(\phi\right)+\left(\cos\left(\phi\right)\right)^2 aa_{1,2}$$
$$+aa_{2,1}]{f_1}^2\beta_1 f_3]\ ds$$

$$m_9=\tau_1\int_0^l\ [{f_1}^2\beta_2 f_3\left(x\right)k[\left(\sin\left(\phi\right)\right)^2 aa_{2,1}-\sin\left(\phi\right)\left(aa_{1,1}+aa_{2,2}\right)\cos\left(\phi\right)$$
$$+\left(\cos\left(\phi\right)\right)^2 aa_{1,2}+aa_{2,1}]]\ ds$$

$$m_{19} = \tau_1 \int_0^l [-\frac{1}{2}[(\sin(\phi))^2 aa_{2,2} - \sin(\phi)(aa_{1,2} + aa_{2,3})\cos(\phi) + aa_{1,3}(\cos(\phi))^2 + aa_{2,2}]{f_1}^2{f_3}^2{\beta_1}^2 k]\ ds$$

$$m_{21} = \tau_1 \int_0^l [-\frac{1}{2}{f_3}^2 k[(\sin(\phi))^2 aa_{2,2} - \sin(\phi)(aa_{1,2} + aa_{2,3})\cos(\phi) + aa_{1,3}(\cos(\phi))^2 + aa_{2,2}]{f_1}^2{\beta_2}^2]\ ds$$

$$m_{22} = -\frac{\tau_1}{2U} \int_0^l [\beta_1 k[-aa_{1,3}(\cos(\phi))^3 + \sin(\phi)(aa_{2,3} + 2\,aa_{1,2})(\cos(\phi))^2 + \left(-2\,(\sin(\phi))^2 aa_{2,2} - 2\,aa_{2,2}\right)\cos(\phi) + 2\,\sin(\phi)\,aa_{2,1}]{f_1}^3 f_3]\ ds$$

$$m_{30} = -\frac{\tau_1}{2U^2} \int_0^l [[-(\cos(\phi))^4 aa_{1,2} - \sin(\phi)(aa_{1,3} - aa_{2,2})(\cos(\phi))^3 + \left((aa_{2,3} + 2\,aa_{1,2})(\sin(\phi))^2 - aa_{1,2} - 2\,aa_{2,1}\right)(\cos(\phi))^2 - 2\,\sin(\phi)\left((\sin(\phi))^2 aa_{2,2} - aa_{1,1} + aa_{2,2}\right)\cos(\phi) + 2\,(\sin(\phi))^2 aa_{2,1}]k{f_1}^3 f_2]\ ds$$

$$m_{23} = -\frac{\tau_1}{2U} \int_0^l [{f_1}^3 k[-aa_{1,3}(\cos(\phi))^3 + \sin(\phi)(aa_{2,3} + 2\,aa_{1,2})(\cos(\phi))^2 + \left(-2\,(\sin(\phi))^2 aa_{2,2} - 2\,aa_{2,2}\right)\cos(\phi) + 2\,\sin(\phi)\,aa_{2,1}]f_3\beta_2]\ ds$$

$$m_{33} = \frac{\tau_1}{2U^2} \int_0^l [k{f_2}^2{f_1}^2[-(\sin(\phi))^4 aa_{2,2} + \cos(\phi)(aa_{2,3} + aa_{1,2})(\sin(\phi))^3 + \left((-aa_{1,3} + 2\,aa_{2,2})(\cos(\phi))^2 + 2\,aa_{1,1} - aa_{2,2}\right)(\sin(\phi))^2 - 2\,\cos(\phi)\left((\cos(\phi))^2 aa_{1,2} + aa_{1,2} + aa_{2,1}\right)\sin(\phi) - 2\,(\cos(\phi))^2 aa_{1,1}]]\ ds$$

$$m_6 = \tau_1 \int_0^l [-f_1 U {f_3}^2 k \beta_1 \beta_2[\cos(\phi)\,aa_{1,2} - \sin(\phi)\,aa_{2,2}]]\ ds$$

$$m_{16} = \tau_1 \int_0^l [\frac{1}{2} f_1 k {f_3}^3 {\beta_1}^2 \beta_2 U[aa_{1,3}\cos(\phi) - aa_{2,3}\sin(\phi)]]\ ds$$

$$m_5 = -\frac{\tau_1}{2l} \int_0^l [[-EA\,\kappa\,(\int_0^l {f_1{}'}^2\,ds) + 2\,EA\,f_1{}''\kappa\,(\int_0^l f_1\,ds) + U{f_3}^2 kl{\beta_1}^2\,(\cos(\phi)\,aa_{1,2} - \sin(\phi)\,aa_{2,2})]f_1]\ ds$$

$$m_{15} = \frac{\tau_1}{6l} \int_0^l [[3\,EAf_1{}''\int_0^l {f_1{}'}^2\,ds + U{f_3}^3 kl{\beta_1}^3\,(\cos(\phi)\,aa_{1,3} - \sin(\phi)\,aa_{2,3})]f_1]\ ds$$

$$m_{20} = \tau_1 \int_0^l [-[(\sin(\phi))^2\,aa_{2,2} - \sin(\phi)\,(aa_{1,2} + aa_{2,3})\cos(\phi) + (\cos(\phi))^2\,aa_{1,3} + aa_{2,2}]\beta_2 {f_3}^2 B_1 {f_1}^2 k]\ ds$$

$$m_{26} = \tau_1 \int_0^l [f_2\beta_2\beta_1 {f_3}^2[(\cos(\phi))^2\,aa_{1,2} + \sin(\phi)\,(aa_{1,3} - aa_{2,2})\cos(\phi) - (\sin(\phi))^2\,aa_{2,3} + aa_{1,2}]kf_1]\ ds$$

$$m_{28} = \frac{\tau_1}{U} \int_0^l [{f_1}^2 f_2[-(\cos(\phi))^3\,aa_{1,2} + \sin(\phi)\,(aa_{2,2} - aa_{1,3})\,(\cos(\phi))^2 + \left((aa_{2,3} + aa_{1,2})\,(\sin(\phi))^2 - aa_{1,2} - aa_{2,1}\right)\cos(\phi) - \sin(\phi)\left(aa_{2,2}\,(\sin(\phi))^2 + aa_{2,2} - aa_{1,1}\right)]\beta_1 kf_3]\ ds$$

$$m_1 = \tau_1 \int_0^l [-{f_1}^2[(\cos(\phi))^2\,aa_{1,1}k - k\sin(\phi)\,(aa_{1,0} + aa_{2,1})\cos(\phi) + (\sin(\phi))^2\,aa_{2,0}k + 2\,\rho A\ (\zeta)\ \omega_1 + kaa_{2,0}]]\ ds$$

$$m_2 = k\tau_1 \int_0^l [f_1 f_2[(aa_{1,1} - aa_{2,0})\cos(\phi)\sin(\phi) + (aa_{1,0} + aa_{2,1})\,(\cos(\phi))^2 + aa_{1,0} - aa_{2,1}]]\ ds$$

$$m_7 = \frac{\tau_1}{2l} \int_0^l [f_1[UklB_2{}^2\,(aa_{2,2}\sin(\phi) - aa_{1,2}\cos(\phi))\,{f_3}^2 + EA\,\kappa\,(\int_0^l {f_2'}^2\,ds)]]\ ds$$

$$m_4 = \tau_1 \int_0^l [f_1 Uk\beta_2 f_3[\cos(\phi)\,aa_{1,1} - \sin(\phi)\,aa_{2,1}]]\ ds$$

$$m_{18} = \tau_1 \int_0^l \; [f_1 k {f_3}^3 {\beta_2}^3 U[aa_{1,3}\cos(\phi) - aa_{2,3}\sin(\phi)]] \; ds$$

$$m_{14} = -\frac{\tau_1}{U} \int_0^l \; [f_1[-\frac{1}{2}\, aa_{2,2}(\sin(\phi))^3 + \frac{1}{2}\, \cos(\phi)(aa_{1,2} - 2\, aa_{2,1})(\sin(\phi))^2 \\ + aa_{1,1}\left((\cos(\phi))^2 + 1\right)\sin(\phi) + \cos(\phi)\, aa_{1,0}]{f_2}^2 k] \; ds$$

$$m_{34} = \frac{\tau_1}{2U^2} \int_0^l \; [[-\frac{1}{3}\, aa_{2,3}(\sin(\phi))^3 + \frac{1}{3}\, \cos(\phi)(aa_{1,3} - 3\, aa_{2,2})(\sin(\phi))^2 \\ + aa_{1,2}\left((\cos(\phi))^2 + 1\right)\sin(\phi) + 2\, \cos(\phi)\, aa_{1,1}]f_1 {f_2}^3 \sin(\phi)\, k] \; ds$$

$$m_{10} = -\frac{\tau_1}{2U} \int_0^l \; [k[aa_{1,2}(\cos(\phi))^3 - 2\, \left(aa_{1,1} + \frac{1}{2}\, aa_{2,2}\right)\sin(\phi)(\cos(\phi))^2 \\ + \left(2\, (\sin(\phi))^2\, aa_{2,1} + 2\, aa_{2,1}\right)\cos(\phi) - 2\, \sin(\phi)\, aa_{2,0}]{f_1}^3] \; ds$$

$$m_{24} = -\frac{\tau_1}{6U^2} \int_0^l \; [[aa_{1,3}(\cos(\phi))^3 - 3\, \sin(\phi)\left(aa_{1,2} + \frac{1}{3}\, aa_{2,3}\right)(\cos(\phi))^2 \\ + \left(3\, aa_{2,2}(\sin(\phi))^2 + 3\, aa_{2,2}\right)\cos(\phi) - 6\, aa_{2,1}\sin(\phi)]{f_1}^4 \cos(\phi)\, k] \; ds$$

$$n_{33} = \frac{\tau_2}{2U^2} \int_0^l \; [k f_1 {f_2}^3[-(\sin(\phi))^4\, aa_{1,2} + \cos(\phi)(aa_{1,3} - aa_{2,2})(\sin(\phi))^3 \\ + \left((aa_{2,3} + 2\, aa_{1,2})(\cos(\phi))^2 - aa_{1,2} - 2\, aa_{2,1}\right)(\sin(\phi))^2 \\ + 2\, \cos(\phi)\left((\cos(\phi))^2\, aa_{2,2} - aa_{1,1} + aa_{2,2}\right)\sin(\phi) + 2\, (\cos(\phi))^2\, aa_{2,1}]] \; ds$$

$$n_{25} = \tau_2 \int_0^l \; [-\frac{1}{2}\, {f_2}^2[(\cos(\phi))^2\, aa_{2,2} + \sin(\phi)(aa_{1,2} + aa_{2,3})\cos(\phi) \\ + aa_{1,3}(\sin(\phi))^2 + aa_{2,2}]k {f_3}^2 {\beta_1}^2] \; ds$$

$$n_{23} = -\frac{\tau_2}{2U} \int_0^l \; [[aa_{2,3}(\cos(\phi))^3 + \sin(\phi)(aa_{1,3} - 2\, aa_{2,2})(\cos(\phi))^2 \\ + \left(-2\, (\sin(\phi))^2\, aa_{1,2} - 2\, aa_{1,2}\right)\cos(\phi) + 2\, \sin(\phi)\, aa_{1,1}]\beta_2 f_3 k {f_1}^2 f_2] \; ds$$

$$n_{12} = \tau_2 \int_0^l \; [{f_2}^2\beta_2[(\cos(\phi))^2\, aa_{2,1} + \sin(\phi)\,(aa_{1,1} + aa_{2,2})\cos(\phi) + (\sin(\phi))^2\, aa_{1,2} + aa_{2,1}]kf_3] \; ds$$

$$n_{32} = \frac{\tau_2}{U} \int_0^l \; [k[aa_{1,3}\,(\sin(\phi))^3 + \cos(\phi)\,(aa_{2,3} + 2\, aa_{1,2})\,(\sin(\phi))^2 + \left(2\,(\cos(\phi))^2\, aa_{2,2} + 2\, aa_{2,2}\right)\sin(\phi) + 2\,\cos(\phi)\, aa_{2,1}]f_3{f_2}^3\beta_2] \; ds$$

$$n_{31} = -\frac{\tau_2}{2U} \int_0^l \; [[aa_{1,3}\,(\sin(\phi))^3 + \cos(\phi)\,(aa_{2,3} + 2\, aa_{1,2})\,(\sin(\phi))^2 + \left(2\, aa_{2,2}\,(\cos(\phi))^2 + 2\, aa_{2,2}\right)\sin(\phi) + 2\,\cos(\phi)\, aa_{2,1}]f_3k{f_2}^3\beta_1] \; ds$$

$$n_{30} = -\frac{\tau_2}{2U^2} \int_0^l \; [k{f_1}^2[(\cos(\phi))^4\, aa_{2,2} + \sin(\phi)\,(aa_{2,3} + aa_{1,2})\,(\cos(\phi))^3 + \left((aa_{1,3} - 2\, aa_{2,2})\,(\sin(\phi))^2 - 2\, aa_{1,1} + aa_{2,2}\right)(\cos(\phi))^2 - 2\,\sin(\phi)\left((\sin(\phi))^2\, aa_{1,2} + aa_{1,2} + aa_{2,1}\right)\cos(\phi) + 2\,(\sin(\phi))^2\, aa_{1,1}]{f_2}^2] \; ds$$

$$n_{13} = -\frac{\tau_2}{U} \int_0^l \; [k[(\cos(\phi))^3\, aa_{2,1} + \sin(\phi)\,(aa_{2,2} + aa_{1,1})\,(\cos(\phi))^2 + \left((aa_{1,2} - aa_{2,1})\,(\sin(\phi))^2 - aa_{1,0} + aa_{2,1}\right)\cos(\phi) - \sin(\phi)\left((\sin(\phi))^2\, aa_{1,1} + aa_{1,1} + aa_{2,0}\right)]f_1{f_2}^2] \; ds$$

$$n_{17} = \tau_2 \int_0^l \; [-\frac{1}{2}\, f_2k{f_3}^2\beta_1{\beta_2}^2U[aa_{1,3}\sin(\phi) + aa_{2,3}\cos(\phi)]] \; ds$$

$$n_8 = \tau_2 \int_0^l \; [-\beta_1f_1[(\cos(\phi))^2\, aa_{2,2} + \sin(\phi)\,(aa_{1,2} - aa_{2,1})\cos(\phi) - (\sin(\phi))^2\, aa_{1,1} - aa_{1,1}]f_3kf_2] \; ds$$

$$n_9 = \tau_2 \int_0^l \; [-f_1\beta_2 k f_2 f_3[(\cos(\phi))^2 \; aa_{2,2} + \sin(\phi)\,(aa_{1,2} - aa_{2,1})\cos(\phi) - (\sin(\phi))^2 \; aa_{1,1} - aa_{1,1}]] \; ds$$

$$n_{19} = \tau_2 \int_0^l \; [\frac{1}{2}\, k[aa_{2,3}\,(\cos(\phi))^2 + \sin(\phi)\,(aa_{1,3} - aa_{2,2})\cos(\phi) - (\sin(\phi))^2 \; aa_{1,2} - aa_{1,2}]f_2{\beta_1}^2 f_1 {f_3}^2] \; ds$$

$$n_{21} = \tau_2 \int_0^l \; [\frac{1}{2}\, f_1 f_2 {\beta_2}^2[aa_{2,3}\,(\cos(\phi))^2 + \sin(\phi)\,(aa_{1,3} - aa_{2,2})\cos(\phi) - (\sin(\phi))^2 \; aa_{1,2} - aa_{1,2}]k {f_3}^2] \; ds$$

$$n_{11} = \tau_2 \int_0^l \; [[(\cos(\phi))^2 \; aa_{2,1} + \sin(\phi)\,(aa_{1,1} + aa_{2,2})\cos(\phi) + (\sin(\phi))^2 \; aa_{1,2} + aa_{2,1}]{f_2}^2\beta_1 f_3] \; ds$$

$$n_{34} = -\frac{\tau_2}{2U^2} \int_0^l \; [{f_2}^4 \sin(\phi)\, k[\frac{1}{3}\; aa_{1,3}\,(\sin(\phi))^3 + \cos(\phi)\left(aa_{1,2} + \frac{1}{3}\; aa_{2,3}\right)(\sin(\phi))^2 + aa_{2,2}\left((\cos(\phi))^2 + 1\right)\sin(\phi) + 2\;\cos(\phi)\; aa_{2,1}]] \; ds$$

$$n_5 = \tau_2 \int_0^l \; [\frac{1}{2}\; f_2 k {f_3}^2 {\beta_1}^2 U[aa_{2,2}\cos(\phi) + aa_{1,2}\sin(\phi)]] \; ds$$

$$n_{24} = \frac{\tau_2}{6U^2} \int_0^l \; [[aa_{2,3}\,(\cos(\phi))^3 + \sin(\phi)\,(aa_{1,3} - 3\; aa_{2,2})\,(\cos(\phi))^2 + \left(-3\;(\sin(\phi))^2 \; aa_{1,2} - 3\; aa_{1,2}\right)\cos(\phi) + 6\;\sin(\phi)\; aa_{1,1}]f_2 k \cos(\phi)\; {f_1}^3] \; ds$$

$$n_{10} = \frac{\tau_2}{2U} \int_0^l \; [f_2 k[aa_{2,2}\,(\cos(\phi))^3 + \sin(\phi)\,(aa_{1,2} - 2\; aa_{2,1})\,(\cos(\phi))^2 + \left(-2\;(\sin(\phi))^2 \; aa_{1,1} - 2\; aa_{1,1}\right)\cos(\phi) + 2\;\sin(\phi)\; aa_{1,0}]{f_1}^2] \; ds$$

$$n_{14}=\frac{\tau_2}{U}\int_0^l\ [{f_2}^3[\frac{1}{2}\ aa_{1,2}\left(\sin\left(\phi\right)\right)^3+\cos\left(\phi\right)\left(\frac{1}{2}\ aa_{2,2}+aa_{1,1}\right)\left(\sin\left(\phi\right)\right)^2$$

$$+\ aa_{2,1}\left(\left(\cos\left(\phi\right)\right)^2+1\right)\sin\left(\phi\right)+\cos\left(\phi\right)\ aa_{2,0}]k]\ ds$$

$$n_{15}=\tau_2\int_0^l\ [-\frac{1}{6}\ f_2k{f_3}^3{\beta_1}^3U[aa_{2,3}\cos\left(\phi\right)+aa_{1,3}\sin\left(\phi\right)]]\ ds$$

$$n_3=\tau_2\int_0^l\ [-f_2Uk\beta_1f_3[\cos\left(\phi\right)\ aa_{2,1}+\sin\left(\phi\right)\ aa_{1,1}]]\ ds$$

$$n_{16}=\frac{\tau_2}{-2l}\int_0^l\ [[-EAf_2''\,(\int_0^l\ {f_1'}^2\ ds)+U{f_3}^3kl{\beta_1}^2\beta_2\left(aa_{2,3}\cos\left(\phi\right)+\sin\left(\phi\right)\ aa_{1,3}\right)]f_2]\ ds$$

$$n_6=\frac{\tau_2}{l}\int_0^l\ [f_2[-EA\kappa f_2''\,(\int_0^l\ f_1\ ds)+U{f_3}^2kl\beta_1\beta_2\left(aa_{2,2}\cos\left(\phi\right)+\sin\left(\phi\right)\ aa_{1,2}\right)]]\ ds$$

$$n_7=\tau_2\int_0^l\ [\frac{1}{2}\ f_2k{f_3}^2{\beta_2}^2U[aa_{2,2}\cos\left(\phi\right)+aa_{1,2}\sin\left(\phi\right)]]\ ds$$

$$n_{20}=\tau_2\int_0^l\ [f_1k{f_3}^2[\left(\cos\left(\phi\right)\right)^2\ aa_{2,3}+\sin\left(\phi\right)\left(aa_{1,3}-aa_{2,2}\right)\cos\left(\phi\right)$$

$$-\left(\sin\left(\phi\right)\right)^2\ aa_{1,2}-aa_{1,2}]\beta_1\beta_2f_2]\ ds$$

$$n_2=\tau_2\int_0^l\ [-[\left(\cos\left(\phi\right)\right)^2\ aa_{2,0}k+k\sin\left(\phi\right)\left(aa_{1,0}+aa_{2,1}\right)\cos\left(\phi\right)$$

$$+\left(\sin\left(\phi\right)\right)^2\ aa_{1,1}k+2\,\rho A\ \left(\zeta\right)\ \omega_2+kaa_{2,0}]{f_2}^2]\ ds$$

$$n_{29}=\frac{\tau_2}{U}\int_0^l\ [f_1[\left(\cos\left(\phi\right)\right)^3\ aa_{2,2}+\sin\left(\phi\right)\left(aa_{2,3}+aa_{1,2}\right)\left(\cos\left(\phi\right)\right)^2$$

$$+\left(\left(-aa_{2,2}+aa_{1,3}\right)\left(\sin\left(\phi\right)\right)^2+aa_{2,2}-aa_{1,1}\right)\cos\left(\phi\right)$$

$$-\sin\left(\phi\right)\left(\left(\sin\left(\phi\right)\right)^2\ aa_{1,2}+aa_{1,2}+aa_{2,1}\right)]{f_2}^2k\beta_2f_3]\ ds$$

$$n_1 = \tau_2 \int_0^l \; [f_2 f_1 [(\cos(\phi))^2 \, aa_{2,1} + \sin(\phi)\,(aa_{1,1} - aa_{2,0}) \cos(\phi) - (\sin(\phi))^2 \, aa_{1,0} - aa_{1,0}] k] \; ds$$

$$n_{26} = \tau_2 \int_0^l \; [-[(\cos(\phi))^2 \, aa_{2,2} + \sin(\phi)\,(aa_{1,2} + aa_{2,3}) \cos(\phi) + (\sin(\phi))^2 \, aa_{1,3} \\ + aa_{2,2}] {f_3}^2 \beta_2 k {f_2}^2 \beta_1] \; ds$$

$$n_{18} = \frac{\tau_2}{-6l} \int_0^l \; [[-3\, EA {f_2}'' \, (\int_0^l \; {f_2'}^2 \, ds) + U {f_3}^3 k l {\beta_2}^3 \,(\cos(\phi)\, aa_{2,3} + \sin(\phi)\, aa_{1,3})] f_2] \; ds$$

$$n_{28} = \tau_2 \int_0^l \; [[(\cos(\phi))^3 \, aa_{2,2} + \sin(\phi)\,(aa_{2,3} + aa_{1,2})\,(\cos(\phi))^2 \\ + \left((-aa_{2,2} + aa_{1,3})\,(\sin(\phi))^2 + aa_{2,2} - aa_{1,1}\right) \cos(\phi) \\ - \sin(\phi) \left((\sin(\phi))^2 \, aa_{1,2} + aa_{1,2} + aa_{2,1}\right)] f_3 f_1 {f_2}^2 \beta_1 k] \; ds$$

$$\tau_1 = [\int_0^l \; \rho A f_1(s)^2 \, ds]^{-1}$$

$$\tau_2 = [\int_0^l \; \rho A f_2(s)^2 \, ds]^{-1}$$

$$k = \frac{r U \rho_{air}}{2}$$

۲.آ ضرایب $pp_{i,j}$ و $qq_{i,j}$

$$pp_{1,2} = -\frac{1}{8}\ \frac{\left(2\,mm_2\,nn_1\,\omega_1^{2}+\omega_2\left(mm_1^2-mm_2\,nn_1\right)\omega_1+mm_4\,nn_3\right)\varepsilon^2}{\omega_1^{2}\,\omega_2}$$

$$pp_{1,1} = \frac{1}{8}\ \frac{\left(\left(-2\,mm_2\,nn_3+mm_4\,nn_1\right)\omega_1+mm_2\,nn_3\,\omega_2\right)\varepsilon^2+4\,mm_1\,\omega_1^{2}\,\omega_2\,\varepsilon}{\omega_1^{2}\,\omega_2}$$

$$pp_{2,2} = -\frac{1}{8}\ \frac{\varepsilon\left(mm_2\left(2\,nn_2\,\omega_1+\omega_2\left(mm_1-nn_2\right)\right)\varepsilon+4\,mm_4\,\omega_1\right)}{\omega_1^{2}}$$

$$pp_{2,1} = -\frac{1}{8}\ \frac{\left(mm_4\left(mm_1-nn_2\right)\varepsilon-4\,mm_2\,\omega_2\,\omega_1\right)\varepsilon}{\omega_1^{2}}$$

$$\begin{aligned}pp_{3,2} = &-\frac{1}{24\,\omega_1^{5}\,\omega_2^{2}-6\,\omega_1^{3}\,\omega_2^{4}}\ \Big(40\,\varepsilon^2\Big(\Big(\Big(\Big(\frac{3}{20}\,n_{10}\,m_{13}+\frac{2}{5}\,m_{10}^2+\frac{3}{10}\,m_{22}\Big)\omega_2^{2}+\frac{3}{5}\,n_{10}\,m_6\Big)\omega_1^{6}+\Big(\Big(-\frac{1}{10}\,m_{10}^2-\frac{3}{40}\,m_{22}\Big)\omega_2^{4}+\Big(m_5\,m_{10}\\
&-\frac{3}{40}\,n_{10}\,m_6-\frac{3}{20}\,n_5\,m_{13}+\frac{9}{10}\,m_{15}+\frac{1}{10}\,m_8^2+\Big(-\frac{3}{40}\,m_9+\frac{3}{20}\,m_{11}\Big)n_8\Big)\omega_2^{2}+\frac{3}{5}\,n_5\,m_6\Big)\omega_1^{4}+\omega_2^{2}\Big(\Big(-\frac{1}{4}\,m_5\,m_{10}-\frac{1}{40}\,m_8^2-\frac{9}{40}\,m_{15}\Big)\omega_2^{2}+\\
&m_5^2-\frac{9}{40}\,n_5\,m_6\Big)\omega_1^{2}-\frac{1}{4}\,m_5^2\,\omega_2^{4}\Big)\Big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}pp_{3,1} = &\frac{1}{8\,\omega_1^{4}\,\omega_2^{2}-2\,\omega_1^{2}\,\omega_2^{4}}\ \Big(4\,\varepsilon^2\Big(\Big(3\,\omega_2^{2}\,m_{24}+2\,m_9\,n_{10}\Big)\omega_1^{6}+\Big(-\frac{3}{4}\,m_{24}\,\omega_2^{4}+\Big(-\frac{3}{4}\,n_{10}\,m_9+\frac{1}{2}\,n_{10}\,m_{11}+m_8\,m_{10}-\frac{1}{2}\,n_8\,m_{13}+m_{19}\Big)\omega_2^{2}\\
&+2\,m_9\,n_5\Big)\omega_1^{4}+\Big(\Big(-\frac{1}{4}\,m_8\,m_{10}-\frac{1}{4}\,m_{19}\Big)\omega_2^{2}+m_5\,m_8-\frac{1}{4}\,m_6\,n_8-\frac{1}{4}\,m_9\,n_5-\frac{1}{2}\,n_5\,m_{11}\Big)\omega_2^{2}\,\omega_1^{2}-\frac{1}{4}\,m_5\,m_8\,\omega_2^{4}\Big)\Big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}pp_{4,2} = &-\frac{1}{4\,\omega_1^{7}\,\omega_2^{2}-17\,\omega_1^{5}\,\omega_2^{4}+4\,\omega_1^{3}\,\omega_2^{6}}\ \Big(4\,\varepsilon^2\Big(\Big((m10\,m13+m23)\,\omega_2^{2}+2\,n10\,m7\Big)\omega_1^{8}+\Big(\Big(\Big(-n13-\frac{9}{2}\,m10\Big)m13-\frac{17}{4}\,m23\Big)\omega_2^{4}+\Big((-n6\\
&+m5)\,m13+\frac{1}{2}\,m10\,m6+n9\,m11-\frac{17}{2}\,n10\,m7+\Big(\frac{1}{2}\,m8-n9\Big)m9+m16\Big)\omega_2^{2}+2\,n5\,m7\Big)\omega_1^{6}-4\Big(\Big(\Big(-\frac{1}{16}\,n13-\frac{1}{2}\,m10\Big)m13-\frac{1}{4}\,m23\Big)\omega_2^{4}\\
&+\Big(\Big(m5-\frac{9}{16}\,n6\Big)m13+\Big(\frac{1}{2}\,n13+\frac{9}{16}\,m10\Big)m6+\Big(\frac{1}{4}\,n11+\frac{1}{16}\,m8+\frac{9}{16}\,n9\Big)m11-\frac{1}{2}\,n10\,m7+\Big(-\frac{1}{2}\,n11+\frac{1}{2}\,m8-\frac{1}{16}\,n9\Big)m9\\
&+\frac{17}{16}\,m16\Big)\omega_2^{2}+\Big(-\frac{3}{8}\,m5+\frac{1}{4}\,n6\Big)m6+\frac{17}{8}\,n5\,m7\Big)\omega_2^{2}\,\omega_1^{4}-\frac{25}{4}\,\omega_2^{4}\Big(\Big(\frac{2}{25}\,m13\,n6+\Big(-\frac{2}{25}\,n13-\frac{4}{25}\,m10\Big)m6+\Big(-\frac{1}{25}\,n11-\frac{4}{25}\,m8\\
&-\frac{2}{25}\,n9\Big)m11+\frac{2}{25}\,n11\,m9-\frac{4}{25}\,m16\Big)\omega_2^{2}+\Big(m5-\frac{1}{25}\,n6\Big)m6-\frac{8}{25}\,n5\,m7\Big)\omega_1^{2}+m5\,\omega_2^{6}\,m6\Big)\Big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}pp_{4,1} = &-\frac{1}{4\,\omega_1^{7}\,\omega_2-17\,\omega_1^{5}\,\omega_2^{3}+4\,\omega_1^{3}\,\omega_2^{5}}\ \Big(4\Big(\Big(-\omega_2^{2}\,m_{30}+m_9\,m_{10}-m_{12}\,n_{10}\Big)\omega_1^{8}+\Big(\frac{17}{4}\,m_{30}\,\omega_2^{4}+\Big(\Big(-n_{13}-\frac{1}{2}\,m_{10}\Big)m_{11}+\Big(n_{13}-\frac{9}{2}\,m_{10}\Big)m_9+\Big(\\
&-n_9+n_{11}-\frac{1}{2}\,m_8\Big)m_{13}-m_{25}+\frac{17}{4}\,m_{12}\,n_{10}\Big)\omega_2^{2}+m_9\,m_5-n_5\,m_{12}\Big)\omega_1^{6}-4\,\omega_2^{2}\Big(\frac{1}{4}\,m_{30}\,\omega_2^{4}+\Big(\Big(-\frac{9}{16}\,n_{13}-\frac{9}{16}\,m_{10}\Big)m_{11}+\Big(\frac{1}{16}\,n_{13}\\
&-\frac{1}{2}\,m_{10}\Big)m_9+\Big(\frac{9}{16}\,n_{11}-\frac{1}{2}\,m_8-\frac{1}{16}\,n_9\Big)m_{13}+\frac{1}{4}\,m_{12}\,n_{10}-\frac{17}{16}\,m_{25}\Big)\omega_2^{2}+\Big(\frac{3}{8}\,m_5+\frac{1}{4}\,n_6\Big)m_{11}+\Big(m_5-\frac{1}{2}\,n_6\Big)m_9-\frac{17}{16}\,n_5\,m_{12}\\
&-\frac{1}{4}\,m_6\Big(n_{11}-\frac{1}{4}\,m_8-2\,n_9\Big)\Big)\omega_1^{4}+\frac{25}{4}\Big(\Big(\Big(-\frac{2}{25}\,n_{13}-\frac{4}{25}\,m_{10}\Big)m_{11}+\frac{2}{25}\,n_{11}\,m_{13}-\frac{4}{25}\,m_{25}\Big)\omega_2^{2}+\Big(m_5+\frac{1}{25}\,n_6\Big)m_{11}-\frac{2}{25}\,m_9\,n_6\\
&-\frac{4}{25}\,n_5\,m_{12}-\frac{1}{25}\,m_6\left(n_{11}-4\,m_8-2\,n_9\right)\Big)\omega_2^{4}\,\omega_1^{2}-m_{11}\,m_5\,\omega_2^{6}\Big)\varepsilon^2\Big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}pp_{5,2} = &\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\,\omega_2+\omega_1\right)\left(2\,\omega_2+\omega_1\right)\left(-2\,\omega_2+\omega_1\right)\omega_2^{2}\,\omega_1^{2}}\ \Big(\Big(\omega_1\,(m14\,n13+m31)\,\omega_2^{7}+\Big(\Big(-m13^2-\frac{2}{3}\,m13\,n14+\Big(-m10-\frac{5}{2}\,n13\Big)m14-2\,m31\\
&-m29\Big)\omega_1^{2}+m12\,n11+m14\,n6\Big)\omega_2^{6}-\frac{1}{2}\Big(\Big(-2\,m13^2-\frac{8}{3}\,m13\,n14+(-n13-4\,m10)\,m14-4\,m29+\frac{1}{2}\,m31\Big)\omega_1^{2}+2\,m13\,m6+\frac{2}{3}\,m6\,n14\\
&+(m5+5\,n6)\,m14+2\,m11\,m9+(4\,n11+m8+2\,n9)\,m12+2\,m11^2+\frac{4}{3}\,m11\,n12+2\,m7\,n13+2\,m17\Big)\omega_1\,\omega_2^{5}+\Big(\Big(\frac{1}{6}\,m13\,n14+n13\,m14\\
&+\frac{1}{4}\,m13^2+\frac{1}{2}\,m31+\frac{1}{4}\,m29\Big)\omega_1^{4}+\Big(\Big(2\,m6+\frac{2}{3}\,n7\Big)m13+\frac{2}{3}\,m6\,n14+\Big(m5+\frac{1}{2}\,n6\Big)m14+m9^2+\Big(\frac{1}{3}\,n12+2\,m11\Big)m9+\Big(-\frac{1}{4}\,n11+2\,n9\\
&+\frac{5}{4}\,m8\Big)m12+\frac{4}{3}\,m11\,n12+\Big(\frac{3}{2}\,n13+m10\Big)m7+2\,m17\Big)\omega_1^{2}-m7\,n6\Big)\omega_2^{4}+\frac{1}{2}\Big(\Big(-\frac{1}{2}\,m13^2-\frac{2}{3}\,m13\,n14-m29\Big)\omega_1^{4}+\Big(\Big(\frac{1}{2}\,m6\\
&-\frac{8}{3}\,n7\Big)m13+\frac{1}{6}\,m6\,n14+2\,m14\,n6-2\,m9^2+\Big(\frac{1}{2}\,m11-\frac{4}{3}\,n12\Big)m9+\Big(n11-m8+\frac{1}{2}\,n9\Big)m12+\frac{1}{2}\,m11^2+\frac{1}{3}\,m11\,n12+(2\,n13\\
&-4\,m10)\,m7+\frac{1}{2}\,m17\Big)\omega_1^{2}+2\,m6^2+\frac{2}{3}\,n7\,m6+m7\,(m5+3\,n6)\Big)\omega_1\,\omega_2^{3}-\Big(\Big(\Big(\Big(\frac{1}{2}\,m6+\frac{1}{6}\,n7\Big)m13+\frac{1}{6}\,m6\,n14+\frac{1}{4}\,m9^2+\Big(\frac{1}{2}\,m11\\
&+\frac{1}{12}\,n12\Big)m9+\frac{1}{3}\,m11\,n12+\frac{1}{2}\,n9\,m12+\frac{1}{2}\,m17\Big)\omega_1^{2}+\frac{2}{3}\,n7\,m6+m7\,(-n6+m5)\Big)\omega_1^{2}\,\omega_2^{2}+\frac{1}{3}\Big(\Big(m13\,n7+\frac{1}{2}\Big(n12+\frac{3}{2}\,m9\Big)m9\Big)\omega_1^{2}\\
&-\frac{3}{4}\,m6\Big(m6+\frac{1}{3}\,n7\Big)\Big)\omega_1^{3}\,\omega_2+\frac{1}{6}\,n7\,m6\,\omega_1^{4}\Big)\varepsilon^2\Big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}pp_{5,1} = &\frac{1}{\omega_1^{2}\left(-\omega_2+2\,\omega_1\right)\omega_2^{2}\left(\omega_1^{2}-4\,\omega_2^{2}\right)}\ \Big(2\,\varepsilon^2\Big(\Big(\omega_1^{2}\,m_{33}-m_{14}\,n_{11}\Big)\omega_2^{7}+\omega_1\Big(-2\,m_{33}\,\omega_1^{2}+\Big(m_{13}+\frac{2}{3}\,n_{14}\Big)m_{11}+m_{12}\,n_{13}+\Big(\frac{1}{2}\,m_8+\frac{5}{2}\,n_{11}\\
&+n_9\Big)m_{14}+m_{26}\Big)\omega_2^{6}+\Big(-\frac{1}{4}\,m_{33}\,\omega_1^{4}+\Big(\Big(-2\,m_{13}-\frac{1}{3}\,n_{14}\Big)m_9+\Big(-2\,m_{13}-\frac{4}{3}\,n_{14}\Big)m_{11}+\left(-m_{10}-2\,n_{13}\right)m_{12}-\frac{2}{3}\,n_{12}\,m_{13}+\Big(-\frac{5}{4}\,m_8-\frac{1}{2}\,n_{11}\\
&-\frac{5}{2}\,n_9\Big)m_{14}-m_{21}-2\,m_{26}\Big)\omega_1^{2}+m_{12}\,n_6+n_{11}\,m_7\Big)\omega_2^{5}-\frac{1}{2}\Big(-m_{33}\,\omega_1^{4}+\Big(\Big(-4\,m_{13}-\frac{4}{3}\,n_{14}\Big)m_9+\Big(\frac{1}{2}\,m_{13}+\frac{1}{3}\,n_{14}\Big)m_{11}+\Big(-4\,m_{10}\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}\, n_{13}\Big)\, m_{12}-\frac{8}{3}\, n_{12}\, m_{13}+(-m_8+2\, n_{11}-n_9)\, m_{14}-4\, m_{21}+\frac{1}{2}\, m_{26}\Big)\, \omega_1^{\,2}+2\, m_6\, m_9+\Big(4\, m_6+\frac{4}{3}\, n_7\Big)\, m_{11}+(m_5+4\, n_6)\, m_{12}+\frac{2}{3}\, n_{12}\, m_6$$

$$+3\,\Big(n_{11}+\frac{1}{3}\, m_8+\frac{2}{3}\, n_9\Big)\, m_7\Big)\, \omega_1\, \omega_2^{\,4}+\Big(\Big(\Big(\Big(\frac{1}{2}\, m_{13}+\frac{1}{12}\, n_{14}\Big)\, m_9+\Big(\frac{1}{2}\, m_{13}+\frac{1}{3}\, n_{14}\Big)\, m_{11}+\frac{1}{4}\, m_{21}+\frac{1}{2}\, m_{26}+\frac{1}{6}\, n_{12}\, m_{13}+n_9\, m_{14}$$

$$+\frac{1}{2}\, m_{12}\, n_{13}\Big)\, \omega_1^{\,2}+\Big(2\, m_6+\frac{1}{3}\, n_7\Big)\, m_9+\frac{4}{3}\, n_7\, m_{11}+\Big(m_5-\frac{1}{4}\, n_6\Big)\, m_{12}+\frac{2}{3}\, n_{12}\, m_6-\Big(-\frac{5}{4}\, m_8+n_{11}-\frac{3}{2}\, n_9\Big)\, m_7\Big)\, \omega_1^{\,2}\, \omega_2^{\,3}+\frac{1}{2}\,\Big(\Big(\Big(-m_{13}$$

$$-\frac{1}{3}\, n_{14}\Big)\, m_9-\frac{2}{3}\, n_{12}\, m_{13}-m_{21}\Big)\, \omega_1^{\,2}+\Big(\frac{1}{2}\, m_6-\frac{4}{3}\, n_7\Big)\, m_9+\Big(m_6+\frac{1}{3}\, n_7\Big)\, m_{11}+m_{12}\, n_6+\frac{1}{6}\, n_{12}\, m_6-m_7\,(m_8-2\, n_9)\Big)\, \omega_1^{\,3}\, \omega_2^{\,2}-\frac{1}{3}\,\Big(\Big(\frac{3}{2}\, m_6$$

$$+\frac{1}{4}\, n_7\Big)\, m_9+n_7\, m_{11}+\frac{1}{2}\, n_{12}\, m_6\Big)\, \omega_1^{\,4}\, \omega_2+\frac{1}{6}\, m_9\, n_7\, \omega_1^{\,5}\Big)\Big)$$

$$pp_{6,2}=-\frac{1}{2}\,\frac{1}{(-2\,\omega_2+\omega_1)\,\omega_2\,\Big(\frac{1}{2}\,\omega_2+\omega_1\Big)\,\omega_1^{\,3}\,\Big(-\frac{1}{2}\,\omega_2+\omega_1\Big)}\,\Big(\varepsilon^2\,\Big(-\omega_2\,(m_{10}\, m_{13}+m_{23})\,\omega_1^{\,7}+\Big(\Big(\Big(\frac{19}{6}\, m_{10}+n_{13}\Big)\, m_{13}+m_{14}\, n_{10}+2\, m_{23}+m_{28}\Big)\,\omega_2^{\,2}$$

$$-m_{10}\, m_6-m_8\, m_9\Big)\,\omega_1^{\,6}+\omega_2\,\Big(\Big(\Big(-\frac{11}{6}\, m_{10}-n_{13}\Big)\, m_{13}-2\, m_{14}\, n_{10}-2\, m_{28}+\frac{1}{4}\, m_{23}\Big)\,\omega_2^{\,2}+(m_5+n_6)\, m_{13}+\frac{17}{6}\, m_{10}\, m_6+(m_8+n_9)\, m_{11}+\frac{1}{2}\, m_{12}\, n_8$$

$$+\frac{1}{2}\, n_{10}\, m_7+\frac{8}{3}\, m_8\, m_9+m_9\, n_9+m_{16}\Big)\,\omega_1^{\,5}+\Big(\Big(\Big(\Big(-\frac{7}{6}\, m_{10}-\frac{1}{4}\, n_{13}\Big)\, m_{13}-\frac{1}{2}\, m_{23}-\frac{1}{4}\, m_{28}\Big)\,\omega_2^{\,4}+\Big(\Big(-\frac{13}{6}\, m_5-n_6\Big)\, m_{13}+\Big(-n_{13}-\frac{7}{6}\, m_{10}\Big)\, m_6$$

$$+\Big(-\frac{7}{3}\, m_8-n_{11}-n_9\Big)\, m_{11}-\frac{5}{4}\, m_{12}\, n_8-m_{14}\, n_5-n_{10}\, m_7-\frac{13}{12}\, m_8\, m_9-n_{11}\, m_9-2\, m_{16}\Big)\,\omega_2^{\,2}+m_5\, m_6\Big)\,\omega_1^{\,4}+\frac{1}{3}\,\Big(\Big(\Big(\Big(m_{10}+\frac{3}{4}\, n_{13}\Big)\, m_{13}$$

$$+\frac{3}{2}\, m_{28}\Big)\,\omega_2^{\,4}+\Big(\Big(m_5-\frac{3}{4}\, n_6\Big)\, m_{13}-\frac{13}{4}\, m_{10}\, m_6+\Big(3\, n_{11}+\frac{5}{4}\, m_8-\frac{3}{4}\, n_9\Big)\, m_{11}+\frac{3}{2}\, m_{12}\, n_8+6\, m_{14}\, n_5-2\, m_8\, m_9-\frac{3}{4}\, m_9\, n_9-\frac{3}{4}\, m_{16}\Big)\,\omega_2^{\,2}+\Big($$

$$-\frac{11}{2}\, m_5-3\, n_6\Big)\, m_6-\frac{3}{2}\, n_5\, m_7\Big)\,\omega_2\,\omega_1^{\,3}+\frac{1}{6}\,\Big(\Big(\Big(\Big(m_5+\frac{3}{2}\, n_6\Big)\, m_{13}+\Big(\frac{3}{2}\, n_{13}+m_{10}\Big)\, m_6+\Big(\frac{3}{2}\, n_{11}+\frac{7}{2}\, m_8+\frac{3}{2}\, n_9\Big)\, m_{11}+\frac{3}{2}\, n_{11}\, m_9+2\, m_8\, m_9$$

$$+3\, m_{16}\Big)\,\omega_2^{\,2}-2\, m_5\, m_6+6\, n_5\, m_7\Big)\,\omega_2^{\,2}\,\omega_1^{\,2}-\frac{1}{3}\,\Big(\Big(m_{13}\, m_5+\frac{3}{4}\,\Big(n_{11}+\frac{2}{3}\, m_8\Big)\, m_{11}\Big)\,\omega_2^{\,2}-\frac{1}{4}\, m_6\,(m_5+3\, n_6)\Big)\,\omega_2^{\,3}\,\omega_1-\frac{1}{6}\, m_5\, m_6\,\omega_2^{\,4}\Big)\Big)$$

$$pp_{6,1}=-\frac{1}{\omega_2\,(-2\,\omega_2+\omega_1)\,\omega_1^{\,3}\,(4\,\omega_1^{\,2}-\omega_2^{\,2})}\,\Big(2\,\varepsilon^2\,\Big((-\omega_2^{\,2}\, m_{30}+m_9\, m_{10})\,\omega_1^{\,7}-\Big(-2\, m_{30}\,\omega_2^{\,2}+m_{10}\, m_{11}+\frac{19}{6}\, m_{10}\, m_9+(m_8+n_9)\, m_{13}+\frac{1}{2}\, m_{12}\, n_{10}$$

$$+m_{20}\Big)\,\omega_2\,\omega_1^{\,6}+\Big(\frac{1}{4}\, m_{30}\,\omega_2^{\,4}+\Big(\Big(\frac{17}{6}\, m_{10}+n_{13}\Big)\, m_{11}+\Big(n_{13}+\frac{11}{6}\, m_{10}\Big)\, m_9+\Big(\frac{8}{3}\, m_8+n_{11}+n_9\Big)\, m_{13}+\frac{5}{4}\, m_{12}\, n_{10}+n_8\, m_{14}+2\, m_{20}+m_{25}\Big)\,\omega_2^{\,2}$$

$$-m_9\, m_5-m_6\, m_8\Big)\,\omega_1^{\,5}+\omega_2\,\Big(-\frac{1}{2}\, m_{30}\,\omega_2^{\,4}+\Big(\Big(-n_{13}-\frac{7}{6}\, m_{10}\Big)\, m_{11}+\frac{7}{6}\, m_{10}\, m_9+\Big(-\frac{13}{12}\, m_8-n_{11}+\frac{1}{4}\, n_9\Big)\, m_{13}+\frac{1}{4}\, m_{20}-\frac{1}{2}\, m_{12}\, n_{10}-2\, n_8\, m_{14}$$

$$-2\, m_{25}\Big)\,\omega_2^{\,2}+(m_5+n_6)\, m_{11}+\Big(n_6+\frac{13}{6}\, m_5\Big)\, m_9+n_9\, m_6+\frac{1}{2}\, n_8\, m_7+\frac{1}{2}\, n_5\, m_{12}+\frac{7}{3}\, m_6\, m_8\Big)\,\omega_1^{\,4}-\frac{11}{6}\,\omega_2^{\,2}\,\Big(\Big(\Big(\frac{13}{22}\, m_{10}+\frac{3}{22}\, n_{13}\Big)\, m_{11}$$

$$+\Big(\frac{2}{11}\, m_{10}+\frac{3}{22}\, n_{13}\Big)\, m_9+\Big(\frac{3}{22}\, n_{11}+\frac{4}{11}\, m_8+\frac{3}{22}\, n_9\Big)\, m_{13}+\frac{3}{11}\, m_{20}+\frac{3}{22}\, m_{25}\Big)\,\omega_2^{\,2}+\Big(m_5+\frac{6}{11}\, n_6\Big)\, m_{11}+\frac{2}{11}\, m_9\, m_5+\frac{15}{22}\, n_5\, m_{12}$$

$$+\frac{6}{11}\, n_{11}\, m_6+\frac{5}{22}\, m_6\, m_8+\frac{6}{11}\, n_8\, m_7\Big)\,\omega_1^{\,3}-\frac{1}{3}\,\omega_2^{\,3}\,\Big(\Big(\Big(-\frac{1}{2}\, m_{10}-\frac{3}{4}\, n_{13}\Big)\, m_{11}+\Big(-\frac{3}{4}\, n_{11}-m_8\Big)\, m_{13}-\frac{3}{2}\, m_{25}\Big)\,\omega_2^{\,2}+\Big(m_5+\frac{3}{4}\, n_6\Big)\, m_{11}$$

$$+\Big(\frac{1}{2}\, m_5+\frac{3}{4}\, n_6\Big)\, m_9-\frac{3}{2}\, n_5\, m_{12}+\frac{7}{4}\, m_6\, m_8+\frac{3}{4}\, n_9\, m_6\Big)\,\omega_1^{\,2}+\frac{1}{12}\,\omega_2^{\,4}\,\Big((m_5+3\, n_6)\, m_{11}+4\, m_9\, m_5+3\, m_6\,\Big(n_{11}+\frac{2}{3}\, m_8\Big)\Big)\,\omega_1-\frac{1}{6}\, m_{11}\, m_5\,\omega_2^{\,5}\Big)$$

$$\Big)$$

$$pp_{7,2}=-\frac{1}{4\,\omega_1^{\,7}\,\omega_2^{\,2}-17\,\omega_1^{\,5}\,\omega_2^{\,4}+4\,\omega_1^{\,3}\,\omega_2^{\,6}}\,\Big(8\,\varepsilon^2\,\Big(\Big(\Big(\frac{1}{2}\, m_{31}+\frac{1}{2}\, n_{13}\, m_{14}\Big)\,\omega_1^{\,2}+m_{14}\, m_5\Big)\,\omega_2^{\,8}+\Big(\Big(-\frac{17}{8}\, m_{31}-\frac{9}{4}\, n_{13}\, m_{14}-\frac{1}{2}\, m_{13}^2\Big)\,\omega_1^{\,4}+\Big(\Big(\frac{1}{2}\, n_{14}$$

$$-\frac{1}{2}\, m_{13}\Big)\, m_6+\Big(-\frac{1}{4}\, n_6-\frac{17}{4}\, m_5\Big)\, m_{14}+\frac{1}{2}\, m_{17}-\frac{1}{2}\, m_{11}^2+\frac{1}{2}\, m_{11}\, m_9+\frac{1}{4}\, m_{12}\, n_{11}+\frac{1}{2}\, m_7\, n_{13}\Big)\,\omega_1^{\,2}+m_5\, m_7\Big)\,\omega_2^{\,6}+\Big(\Big(\frac{1}{2}\, m_{31}+n_{13}\, m_{14}+\frac{1}{8}$$

$$m_{13}^2\Big)\,\omega_1^{\,4}+\Big(\Big(-\frac{17}{8}\, n_{14}+\frac{1}{8}\, m_{13}\Big)\, m_6+(m_5+n_6)\, m_{14}-2\, m_7\, n_{13}+\frac{1}{8}\, m_{11}^2-\frac{1}{8}\, m_{11}\, m_9+\Big(-\frac{1}{8}\, n_9-n_{11}\Big)\, m_{12}-\frac{17}{8}\, m_{17}-\frac{1}{2}\, m_9^2\Big)\,\omega_1^{\,2}-\frac{1}{2}\, m_6^2$$

$$+\frac{1}{2}\, n_7\, m_6-\frac{17}{4}\,\Big(m_5-\frac{1}{17}\, n_6\Big)\, m_7\Big)\,\omega_1^{\,2}\,\omega_2^{\,4}+\Big(\Big(\frac{1}{2}\, m_{17}+\frac{1}{2}\, n_9\, m_{12}+\frac{1}{8}\, m_9^2+\frac{1}{2}\, m_6\, n_{14}\Big)\,\omega_1^{\,2}+\frac{1}{8}\, m_6^2-\frac{17}{8}\, n_7\, m_6+m_7\,(-n_6+m_5)\Big)\,\omega_1^{\,4}\,\omega_2^{\,2}$$

$$+\frac{1}{2}\,\omega_1^{\,6}\, n_7\, m_6\Big)\Big)$$

$$pp_{7,1}=\frac{1}{\omega_1^{\,4}\,\omega_2^{\,2}-4\,\omega_1^{\,2}\,\omega_2^{\,4}}\,\Big(4\,\Big((-m_{33}\,\omega_1^{\,2}+m_{14}\,(n_{11}-m_8))\,\omega_2^{\,6}+\Big(\frac{1}{4}\, m_{33}\,\omega_1^{\,4}+\Big(\Big(-\frac{1}{2}\, n_{11}+\frac{1}{4}\, m_8+\frac{1}{2}\, n_9\Big)\, m_{14}-\frac{1}{2}\, m_{12}\, n_{13}-n_{14}\, m_9-m_{21}\Big)\,\omega_1^{\,2}$$

$$+m_7\,(n_{11}-m_8)\Big)\,\omega_2^{\,4}+\frac{1}{4}\,((m_9\, n_{14}+m_{21})\,\omega_1^{\,2}+m_7\,(m_8-2\, n_9)-4\, n_7\, m_9-m_{12}\, n_6)\,\omega_1^{\,2}\,\omega_2^{\,2}+\frac{1}{4}\, n_7\, m_9\,\omega_1^{\,4}\Big)\,\varepsilon^2\Big)$$

$$pp_{8,2}=-\frac{1}{6\,\omega_1^{\,5}\,\omega_2^{\,2}-24\,\omega_1^{\,3}\,\omega_2^{\,4}}\,\Big(3\,\varepsilon^2\,\Big(\Big(\Big(\Big(\Big(-\frac{16}{3}\, n_{14}-2\, m_{13}\Big)\, m_{14}-4\, m_{32}\Big)\,\omega_1^{\,2}-8\, m_6\, m_{14}\Big)\,\omega_2^{\,6}+\Big(\Big(\frac{4}{3}\, n_{14}\, m_{14}+m_{32}\Big)\,\omega_1^{\,4}+\Big(\Big(m_6+\frac{16}{3}\, n_7\Big)\, m_{14}+\Big($$

$$-\frac{56}{3}\, n_{14}+2\, m_{13}\Big)\, m_7+\Big(-\frac{4}{3}\, n_{12}-2\, m_9+m_{11}\Big)\, m_{12}-12\, m_{18}\Big)\,\omega_1^{\,2}-8\, m_7\, m_6\Big)\,\omega_2^{\,4}+3\,\omega_1^{\,2}\,\Big(\Big(\frac{1}{9}\, n_{12}\, m_{12}+\frac{14}{9}\, n_{14}\, m_7-\frac{4}{9}\, n_7\, m_{14}+m_{18}\Big)\,\omega_1^{\,2}$$

$$+m_7\,\Big(m_6-\frac{40}{9}\, n_7\Big)\Big)\,\omega_2^{\,2}+\frac{10}{3}\, m_7\, n_7\,\omega_1^{\,4}\Big)\Big)$$

$$pp_{8,1}=\frac{1}{6\,\omega_1^{\,5}\,\omega_2-24\,\omega_1^{\,3}\,\omega_2^{\,3}}\,\Big(3\,\varepsilon^2\,\Big(\Big(3\, m_{34}\,\omega_2^{\,4}+\Big(-\frac{4}{3}\, m_{14}\, n_{12}+\frac{7}{3}\, m_{12}\, n_{14}+m_{27}\Big)\,\omega_2^{\,2}-\frac{2}{3}\, n_{12}\, m_7+\frac{5}{3}\, n_7\, m_{12}\Big)\,\omega_1^{\,4}+\omega_2^{\,2}\,\Big(-12\, m_{34}\,\omega_2^{\,4}+\Big(\Big($$

$$-\frac{28}{3}\, n_{14}+2\, m_{13}\Big)\, m_{12}+\Big(\frac{16}{3}\, n_{12}-2\, m_9+3\, m_{11}\Big)\, m_{14}-4\, m_{27}\Big)\,\omega_2^{\,2}+\Big(m_6-\frac{20}{3}\, n_7\Big)\, m_{12}+\frac{8}{3}\, m_7\,\Big(n_{12}+\frac{3}{4}\, m_9+\frac{3}{8}\, m_{11}\Big)\Big)\,\omega_1^{\,2}$$

$$-8\,\omega_2^{\,4}\,m_{11}\,(\omega_2^{\,2}\,m_{14}+m_7)\Big)\Big)$$

$$qq_{1,2}=\frac{1}{8}\ \frac{\varepsilon\,(nn_1\,(-2\,mm_1\,\omega_2+\omega_1\,(mm_1-nn_2))\,\varepsilon-4\,nn_3\,\omega_2)}{\omega_2^{\,2}}$$

$$qq_{1,1}=\frac{1}{8}\ \frac{\varepsilon\,(nn_3\,(mm_1-nn_2)\,\varepsilon+4\,nn_1\,\omega_1\,\omega_2)}{\omega_2^{\,2}}$$

$$qq_{2,2}=\frac{1}{8}\ \frac{\varepsilon^2\,(-2\,mm_2\,nn_1\,\omega_2^{\,2}+\omega_1\,(mm_2\,nn_1-nn_2^2)\,\omega_2-mm_4\,nn_3)}{\omega_2^{\,2}\,\omega_1}$$

$$qq_{2,1}=\frac{1}{8}\ \frac{(((mm_2\,nn_3-2\,mm_4\,nn_1)\,\omega_2+mm_4\,nn_1\,\omega_1)\,\varepsilon+4\,nn_2\,\omega_1\,\omega_2^{\,2})\,\varepsilon}{\omega_2^{\,2}\,\omega_1}$$

$$qq_{3,2}=\frac{1}{24\,\omega_1^{\,4}\,\omega_2^{\,3}-6\,\omega_1^{\,2}\,\omega_2^{\,5}}\Big(16\,\varepsilon^2\Big(\Big(\Big(\Big(\Big(-\frac{3}{8}\ n13-m10\Big)\,n10-\frac{3}{4}\ n22\Big)\,\omega_2^{\,2}-\frac{3}{2}\ n6\,n10\Big)\,\omega_1^{\,6}+\Big(\Big(\frac{1}{4}\ n10\,m10+\frac{3}{16}\ n22\Big)\,\omega_2^{\,4}+\Big(\Big(m5$$

$$+\frac{3}{16}\ n6\Big)\,n10+\Big(\frac{3}{8}\ n13-\frac{7}{2}\ m10\Big)\,n5+\Big(-\frac{1}{4}\ m8+\frac{3}{16}\ n9-\frac{3}{8}\ n11\Big)\,n8-\frac{9}{4}\ n15\Big)\,\omega_2^{\,2}-\frac{3}{2}\ n6\,n5\Big)\,\omega_1^{\,4}-\frac{1}{4}\ \omega_2^{\,2}\Big(\Big(n10\,m5-\frac{1}{4}\ n8\,m8$$

$$-\frac{7}{2}\ n5\,m10-\frac{9}{4}\ n15\Big)\,\omega_2^{\,2}+10\Big(m5-\frac{9}{40}\ n6\Big)\,n5\Big)\,\omega_1^{\,2}+\frac{5}{8}\ m5\,n5\,\omega_2^{\,4}\Big)\Big)$$

$$qq_{3,1}=\frac{1}{24\,\omega_1^{\,3}\,\omega_2^{\,3}-6\,\omega_1\,\omega_2^{\,5}}\Big(20\,\varepsilon^2\Big(\Big(\frac{9}{5}\ n24\,\omega_2^{\,2}+\frac{6}{5}\ n9\,n10\Big)\,\omega_1^{\,6}+\Big(-\frac{9}{20}\ n24\,\omega_2^{\,4}+\Big(\Big(-\frac{3}{10}\ n13+\frac{7}{5}\ m10\Big)\,n8+\Big(-\frac{4}{5}\ m8-\frac{9}{20}\ n9$$

$$+\frac{3}{10}\ n11\Big)\,n10+\frac{3}{5}\ n19\Big)\,\omega_2^{\,2}+\frac{6}{5}\ n9\,n5\Big)\,\omega_1^{\,4}+\Big(\Big(\frac{1}{5}\ n10\,m8-\frac{7}{20}\ n8\,m10-\frac{3}{20}\ n19\Big)\,\omega_2^{\,2}+\Big(m5-\frac{3}{20}\ n6\Big)\,n8-\frac{2}{5}\ n5\Big(m8+\frac{3}{8}\ n9$$

$$+\frac{3}{4}\ n11\Big)\Big)\,\omega_2^{\,2}\,\omega_1^{\,2}-\frac{1}{4}\ \Big(n8\,m5-\frac{2}{5}\ n5\,m8\Big)\,\omega_2^{\,4}\Big)\Big)$$

$$qq_{4,2}=-\frac{1}{4\,\omega_1^{\,6}\,\omega_2^{\,3}-17\,\omega_1^{\,4}\,\omega_2^{\,5}+4\,\omega_1^{\,2}\,\omega_2^{\,7}}\Big(4\,\varepsilon^2\Big(((m_{13}\,n_{10}+n_{23})\,\omega_2^{\,2}+2\,n_{10}\,n_7)\,\omega_1^{\,8}+\Big(\Big(-n_{13}^2-\frac{17}{4}\ n_{23}-\frac{9}{2}\ m_{13}\,n_{10}\Big)\,\omega_2^{\,4}+\Big((m_{10}-n_{13})\,n_6+\Big($$

$$-\frac{17}{2}\ n_7-\frac{1}{2}\ m_6\Big)\,n_{10}-n_9^2+n_{16}+n_9\,n_{11}+n_5\,m_{13}+\frac{1}{2}\ m_9\,n_8\Big)\,\omega_2^{\,2}+2\,n_5\,n_7\Big)\,\omega_1^{\,6}+\omega_2^{\,2}\Big(\Big(n_{23}+\frac{1}{4}\ n_{13}^2+2\,m_{13}\,n_{10}\Big)\,\omega_2^{\,4}+\Big(\Big(-\frac{17}{4}\ m_{10}$$

$$+\frac{1}{4}\ n_{13}\Big)\,n_6+(2\,n_7+2\,m_6)\,n_{10}-4\,n_5\,m_{13}-n_{11}^2-\frac{1}{4}\ n_9\,n_{11}+\Big(-2\,m_9-\frac{1}{4}\ m_{11}\Big)\,n_8-\frac{17}{4}\ n_{16}+\frac{1}{4}\ n_9^2\Big)\,\omega_2^{\,2}-n_6^2+m_5\,n_6+\frac{1}{2}\ n_5\,(m_6-17\,n_7)\Big)$$

$$\omega_1^{\,4}-\frac{17}{4}\ \omega_2^{\,4}\Big(\Big(-\frac{4}{17}\ n_8\,m_{11}-\frac{1}{17}\ n_{11}^2-\frac{4}{17}\ n_6\,m_{10}-\frac{4}{17}\ n_{16}\Big)\,\omega_2^{\,2}-\frac{1}{17}\ n_6^2+m_5\,n_6+\frac{8}{17}\ n_5\,(m_6-n_7)\Big)\,\omega_1^{\,2}+\omega_2^{\,6}\,n_6\,m_5\Big)\Big)$$

$$qq_{4,1}=\frac{1}{4\,\omega_1^{\,4}\,\omega_2^{\,2}-\omega_1^{\,2}\,\omega_2^{\,4}}\Big(4\Big((n_{30}\,\omega_2^{\,2}+n_{10}\,(n_{12}-m_9))\,\omega_1^{\,6}+\Big(-\frac{1}{4}\ n_{30}\,\omega_2^{\,4}+\Big(\Big(-\frac{1}{4}\ n_{12}+\frac{1}{2}\ m_9-\frac{1}{2}\ m_{11}\Big)\,n_{10}+n_{11}\,m_{10}+\frac{1}{2}\ n_8\,m_{13}+n_{25}\Big)\,\omega_2^{\,2}$$

$$+n_5\,(n_{12}-m_9)\Big)\,\omega_1^{\,4}+\Big(\Big(-\frac{1}{4}\ n_{11}\,m_{10}-\frac{1}{4}\ n_{25}\Big)\,\omega_2^{\,2}+n_{11}\,m_5-\frac{1}{4}\ n_5\,n_{12}+\frac{1}{4}\ m_6\,n_8+\frac{1}{2}\ n_5\,m_{11}\Big)\,\omega_2^{\,2}\,\omega_1^{\,2}-\frac{1}{4}\ n_{11}\,m_5\,\omega_2^{\,4}\Big)\,\varepsilon^2\Big)$$

$$qq_{5,2}=-\frac{1}{4}\ \frac{1}{\Big((2\,\omega_2+\omega_1)\,(-2\,\omega_2+\omega_1)\,\omega_2^{\,3}\Big(-\frac{1}{2}\ \omega_2+\omega_1\Big)\,\omega_1\Big)}\Big(\varepsilon^2\Big(-4\,\omega_1\,(n_{13}\,n_{14}+n_{31})\,\omega_2^{\,7}+\Big(\Big(\Big(\Big(4\,m_{13}+\frac{38}{3}\ n_{14}\Big)\,n_{13}+4\,m_{14}\,n_{10}+4\,n_{29}$$

$$+8\,n_{31}\Big)\,\omega_1^{\,2}-4\,n_{11}\,n_{12}-4\,n_{14}\,n_6\Big)\,\omega_2^{\,6}+4\Big(\Big(\Big(-m_{13}-\frac{11}{6}\ n_{14}\Big)\,n_{13}-2\,m_{14}\,n_{10}-2\,n_{29}+\frac{1}{4}\ n_{31}\Big)\,\omega_1^{\,2}+(m_6+n_7)\,n_{13}+\frac{17}{6}\ n_{14}\,n_6+(n_{12}$$

$$+m_{11})\,n_9+\frac{1}{2}\ m_{12}\,n_8+\frac{1}{2}\ m_{14}\,n_5+\frac{8}{3}\ n_{11}\,n_{12}+m_{11}\,n_{11}+n_{17}\Big)\,\omega_1\,\omega_2^{\,5}+\Big(\Big(\Big(\Big(-m_{13}-\frac{14}{3}\ n_{14}\Big)\,n_{13}-n_{29}-2\,n_{31}\Big)\,\omega_1^{\,4}+\Big(\Big(-\frac{26}{3}\ n_7-4\,m_6\Big)\,n_{13}$$

$$+\Big(-\frac{14}{3}\ n_{14}-4\,m_{13}\Big)\,n_6+\Big(-4\,m_{11}-4\,m_9-\frac{28}{3}\ n_{12}\Big)\,n_9-8\,n_{17}-5\,m_{12}\,n_8-4\,m_{14}\,n_5-4\,n_{10}\,m_7-4\,n_{11}\,m_9-\frac{13}{3}\ n_{11}\,n_{12}\Big)\,\omega_1^{\,2}+4\,n_6\,n_7\Big)\,\omega_2^{\,4}$$

$$-\omega_1\Big(\Big(\Big(\Big(-m_{13}-\frac{4}{3}\ n_{14}\Big)\,n_{13}-2\,n_{29}\Big)\,\omega_1^{\,4}+\Big(\Big(m_6-\frac{4}{3}\ n_7\Big)\,n_{13}+\frac{13}{3}\ n_{14}\,n_6+\Big(-\frac{5}{3}\ n_{12}-4\,m_9+m_{11}\Big)\,n_9-2\,m_{12}\,n_8-8\,n_{10}\,m_7+\frac{8}{3}\ n_{11}\,n_{12}$$

$$+m_{11}\,n_{11}+n_{17}\Big)\,\omega_1^{\,2}+\Big(4\,m_6+\frac{22}{3}\ n_7\Big)\,n_6+2\,n_5\,m_7\Big)\,\omega_2^{\,3}+\Big(\Big(\Big(\Big(m_6+\frac{2}{3}\ n_7\Big)\,n_{13}+\Big(m_{13}+\frac{2}{3}\ n_{14}\Big)\,n_6+\Big(m_{11}+m_9+\frac{7}{3}\ n_{12}\Big)\,n_9+2\,n_{17}+n_{11}\,m_9$$

$$+\frac{4}{3}\ n_{11}\,n_{12}\Big)\,\omega_1^{\,2}+4\,n_5\,m_7-\frac{4}{3}\ n_6\,n_7\Big)\,\omega_1^{\,2}\,\omega_2^{\,2}+\omega_1^{\,3}\Big(\Big(-\frac{4}{3}\ n_{13}\,n_7-\frac{2}{3}\ \Big(n_{12}+\frac{3}{2}\ m_9\Big)\,n_9\Big)\,\omega_1^{\,2}+n_6\Big(m_6+\frac{1}{3}\ n_7\Big)\Big)\,\omega_2-\frac{2}{3}\ n_6\,n_7\,\omega_1^{\,4}\Big)\Big)$$

$$qq_{5,1}=\frac{1}{4}\ \frac{1}{(2\,\omega_2+\omega_1)\,(-2\,\omega_2+\omega_1)\,\omega_2^{\,3}\Big(-\frac{1}{2}\ \omega_2+\omega_1\Big)\,\omega_1}\Big(\varepsilon^2\Big((4\,\omega_1^{\,2}\,n_{33}-4\,n_{11}\,n_{14})\,\omega_2^{\,7}+2\Big(-4\,n_{33}\,\omega_1^{\,2}+2\,n_{14}\,n_9+\frac{19}{3}\ n_{11}\,n_{14}+(2\,n_{12}$$

$$+2\,m_{11})\,n_{13}+n_8\,m_{14}+2\,n_{26}\Big)\,\omega_1\,\omega_2^{\,6}+\Big(-n_{33}\,\omega_1^{\,4}+\Big(\Big(-\frac{34}{3}\ n_{14}-4\,m_{13}\Big)\,n_9+\Big(-4\,m_{13}-\frac{22}{3}\ n_{14}\Big)\,n_{11}+\Big(-4\,m_{11}-4\,m_9-\frac{32}{3}\ n_{12}\Big)\,n_{13}$$

$$-4\,m_{12}\,n_{10}-5\,n_8\,m_{14}-4\,n_{21}-8\,n_{26}\Big)\,\omega_1^{\,2}+4\,n_{11}\,n_7+4\,n_{12}\,n_6\Big)\,\omega_2^{\,5}-4\Big(-\frac{1}{2}\ n_{33}\,\omega_1^{\,4}+\Big(\Big(-\frac{7}{6}\ n_{14}-m_{13}\Big)\,n_9+\frac{7}{6}\ n_{11}\,n_{14}+\Big(\frac{1}{4}\ m_{11}-m_9$$

$$-\frac{13}{12}\ n_{12}\Big)\,n_{13}-2\,n_{21}+\frac{1}{4}\ n_{26}-2\,m_{12}\,n_{10}-\frac{1}{2}\ n_8\,m_{14}\Big)\,\omega_1^{\,2}+(m_6+n_7)\,n_9+\Big(m_6+\frac{13}{6}\ n_7\Big)\,n_{11}+m_{11}\,n_6+\frac{1}{2}\ n_5\,m_{12}+\frac{1}{2}\ n_8\,m_7+\frac{7}{3}\ n_{12}\,n_6\Big)$$

$$\omega_1\,\omega_2^{\,4}+4\Big(\Big(\Big(\Big(\frac{1}{4}\ m_{13}+\frac{13}{12}\ n_{14}\Big)\,n_9+\Big(\frac{1}{4}\ m_{13}+\frac{1}{3}\ n_{14}\Big)\,n_{11}+\Big(\frac{2}{3}\ n_{12}+\frac{1}{4}\ m_9+\frac{1}{4}\ m_{11}\Big)\,n_{13}+\frac{1}{4}\ n_{21}+\frac{1}{2}\ n_{26}\Big)\,\omega_1^{\,2}+\Big(m_6+\frac{11}{6}\ n_7\Big)\,n_9$$

$$+n_5\,m_{12}+\frac{1}{3}\ n_{11}\,n_7+\frac{5}{12}\ n_{12}\,n_6+\frac{5}{4}\ n_8\,m_7+m_9\,n_6\Big)\,\omega_1^{\,2}\,\omega_2^{\,3}+\Big(\Big(\Big(\Big(-\frac{2}{3}\ n_{14}-m_{13}\Big)\,n_9+\Big(-m_9-\frac{4}{3}\ n_{12}\Big)\,n_{13}-2\,n_{21}\Big)\,\omega_1^{\,2}+\Big(m_6+\frac{4}{3}\ n_7\Big)\,n_9$$

$$+ \left(m_6 + \frac{2}{3}\ n_7\right) n_{11} + m_{11}\, n_6 - 2\, n_8\, m_7 + \frac{7}{3}\ n_{12}\, n_6\Big)\ \omega_1^{\ 3}\ \omega_2^{\ 2} - \Big(\left(m_6 + \frac{1}{3}\ n_7\right) n_9 + \frac{4}{3}\ n_{11}\, n_7 + \frac{2}{3}\ n_6 \left(n_{12} + \frac{3}{2}\ m_9\right)\Big)\ \omega_1^{\ 4}\ \omega_2 + \frac{2}{3}\ n_7\, n_9\, \omega_1^{\ 5}\Big)\Big)$$

$$qq_{6,\,2} = \frac{1}{24\ \omega_1^{\ 5}\ \omega_2^{\ 2} - 48\ \omega_1^{\ 4}\ \omega_2^{\ 3} - 6\ \omega_1^{\ 3}\ \omega_2^{\ 4} + 12\ \omega_1^{\ 2}\ \omega_2^{\ 5}} \Big(8 \Big(\frac{3}{2}\ \omega_2\ (m_{13}\, n_{10} + n_{23})\ \omega_1^{\ 7} + \Big(\Big(-\frac{3}{2}\ n_{13}^2 - m_{10}\, n_{13} + \left(-\frac{15}{4}\ m_{13} - \frac{3}{2}\ n_{14}\right) n_{10} - \frac{3}{2}\ n_{28}$$

$$- 3\, n_{23}\Big)\ \omega_2^{\ 2} + \frac{3}{2}\ m_9\, n_8 + \frac{3}{2}\ n_{10}\, m_6\Big)\ \omega_1^{\ 6} + 2\ \omega_2 \Big(\Big(\frac{3}{4}\ n_{13}^2 + m_{10}\, n_{13} + \left(\frac{3}{8}\ m_{13} + \frac{3}{2}\ n_{14}\right) n_{10} - \frac{3}{16}\ n_{23} + \frac{3}{2}\ n_{28}\Big)\ \omega_2^{\ 2} - \frac{3}{4}\ n_{13}\, n_6 - \frac{1}{4}\ n_6\, m_{10}$$

$$+ \left(-\frac{15}{8}\ m_6 - \frac{3}{8}\ n_7\right) n_{10} - \frac{3}{4}\ n_9\, n_{11} + \left(-\frac{3}{4}\ m_{11} - \frac{3}{8}\ n_{12} - \frac{3}{2}\ m_9\right) n_8 - \frac{3}{4}\ n_5\, m_{13} - \frac{1}{2}\ m_8\, n_9 - \frac{3}{4}\ n_9^2 - \frac{3}{4}\ n_{16}\Big)\ \omega_1^{\ 5} + \Big(\Big(\frac{3}{4}\ n_{23} + \frac{3}{8}\ n_{28}$$

$$+ \frac{1}{4}\ m_{10}\, n_{13} + \frac{3}{2}\ n_{10}\, m_{13} + \frac{3}{8}\ n_{13}^2\Big)\ \omega_2^{\ 4} + \Big((m_5 + 3\, n_6)\ n_{13} + n_6\, m_{10} + \left(\frac{3}{2}\ n_7 + \frac{3}{4}\ m_6\right) n_{10} + \frac{3}{2}\ n_{11}^2 + \left(3\, n_9 + \frac{1}{2}\ m_8\right) n_{11} + \Big(3\, m_{11} - \frac{3}{8}\ m_9$$

$$+ \frac{15}{8}\ n_{12}\Big)\ n_8 + \left(\frac{9}{4}\ m_{13} + \frac{3}{2}\ n_{14}\right) n_5 + 2\, m_8\, n_9 + 3\, n_{16}\Big)\ \omega_2^{\ 2} - \frac{3}{2}\ n_5\, m_6\Big)\ \omega_1^{\ 4} - 2 \Big(\Big(\frac{1}{4}\ m_{10}\, n_{13} + \frac{3}{16}\ n_{13}^2 + \frac{3}{8}\ n_{28}\Big)\ \omega_2^{\ 4} + \Big(\left(m_5 - \frac{3}{16}\ n_6\right) n_{13}$$

$$- \frac{1}{16}\ n_6\, m_{10} - \frac{3}{4}\ n_{10}\, m_6 + \frac{3}{4}\ n_{11}^2 + \left(\frac{1}{2}\ m_8 - \frac{3}{16}\ n_9\right) n_{11} + \left(-\frac{3}{16}\ m_{11} + \frac{3}{8}\ n_{12} - \frac{3}{8}\ m_9\right) n_8 + \left(-\frac{3}{4}\ m_{13} + \frac{3}{2}\ n_{14}\right) n_5 - \frac{1}{8}\ m_8\, n_9 - \frac{3}{16}\ n_9^2$$

$$- \frac{3}{16}\ n_{16}\Big)\ \omega_2^{\ 2} - \frac{3}{4}\ n_6^2 - \frac{1}{4}\ m_5\, n_6 - \frac{9}{8}\ n_5 \left(m_6 + \frac{1}{3}\ n_7\right)\Big)\ \omega_2\ \omega_1^{\ 3} - \frac{1}{4}\ \Big(\Big((m_5 + 3\, n_6)\ n_{13} + n_6\, m_{10} + \frac{3}{2}\ n_{11}^2 + \left(3\, n_9 + \frac{1}{2}\ m_8\right) n_{11} + 3\, n_8\, m_{11}$$

$$+ 2\, m_8\, n_9 + 3\, n_{16}\Big)\ \omega_2^{\ 2} + 4\, m_5\, n_6 - 6\, n_5\ (m_6 - n_7)\Big)\ \omega_2^{\ 2}\ \omega_1^{\ 2} + \frac{1}{2}\ \omega_2^{\ 3} \Big(\Big(m_5\, n_{13} + \frac{3}{4}\ n_{11} \left(n_{11} + \frac{2}{3}\ m_8\right)\Big)\ \omega_2^{\ 2} - \frac{1}{4}\ n_6\ (m_5 + 3\, n_6)\Big)\ \omega_1$$

$$+ \frac{1}{4}\ m_5\, n_6\, \omega_2^{\ 4}\Big)\ \varepsilon^2\Big)$$

$$qq_{6,\,1} = \frac{1}{24\ \omega_1^{\ 5}\ \omega_2^{\ 2} - 48\ \omega_1^{\ 4}\ \omega_2^{\ 3} - 6\ \omega_1^{\ 3}\ \omega_2^{\ 4} + 12\ \omega_1^{\ 2}\ \omega_2^{\ 5}} \Big(4 \Big((3\ \omega_2^{\ 2}\, n_{30} - 3\, m_9\, n_{10})\ \omega_1^{\ 7} + 2\ \omega_2 \Big(-3\, n_{30}\, \omega_2^{\ 2} + \left(\frac{3}{2}\ n_{13} + m_{10}\right) n_9 + \frac{3}{2}\ n_8\, m_{13} + \Big(\frac{3}{2}\ m_{11}$$

$$+ \frac{3}{4}\ n_{12} + \frac{15}{4}\ m_9\Big)\ n_{10} + \frac{3}{2}\ n_{20}\Big)\ \omega_1^{\ 6} + \Big(-\frac{3}{4}\ n_{30}\, \omega_2^{\ 4} + \Big((-m_{10} - 6\, n_{13})\ n_{11} + (-6\, n_{13} - 4\, m_{10})\ n_9 - 2\, n_{13}\, m_8 + (-6\, m_{13} - 3\, n_{14})\ n_8 + \Big(-\frac{3}{2}\ m_9$$

$$- \frac{15}{2}\ m_{11} - \frac{15}{4}\ n_{12}\Big)\ n_{10} - 3\, n_{25} - 6\, n_{20}\Big)\ \omega_2^{\ 2} + 3\, m_6\, n_8 + 3\, m_9\, n_5\Big)\ \omega_1^{\ 5} - 2\ \omega_2 \Big(-\frac{3}{4}\ n_{30}\, \omega_2^{\ 4} + \Big((-3\, n_{13} - m_{10})\ n_{11} + \left(\frac{1}{4}\ m_{10} + \frac{3}{8}\ n_{13}\right) n_9$$

$$- 2\, n_{13}\, m_8 + \left(\frac{3}{8}\ m_{13} - 3\, n_{14}\right) n_8 + \left(\frac{3}{2}\ m_9 - \frac{3}{4}\ m_{11} - \frac{3}{4}\ n_{12}\right) n_{10} + \frac{3}{8}\ n_{20} - 3\, n_{25}\Big)\ \omega_2^{\ 2} + \frac{3}{2}\ n_6\, n_{11} + (m_5 + 3\, n_6)\ n_9 + \left(3\, m_6 + \frac{3}{4}\ n_7\right) n_8$$

$$+ \frac{1}{2}\ m_8\, n_6 + \frac{3}{2}\ \left(m_{11} + \frac{3}{2}\ m_9 + \frac{1}{2}\ n_{12}\right) n_5\Big)\ \omega_1^{\ 4} + \omega_2^{\ 2} \Big(\Big(\Big(\left(\frac{3}{2}\ n_{13} + \frac{1}{4}\ m_{10}\right) n_{11} + \left(\frac{3}{2}\ n_{13} + m_{10}\right) n_9 + 3\, n_{10}\, m_{11} + \frac{3}{2}\ n_8\, m_{13} + \frac{3}{2}\ n_{20} + \frac{3}{4}\ n_{25}$$

$$+ \frac{1}{2}\ n_{13}\, m_8\Big)\ \omega_2^{\ 2} + (m_5 + 6\, n_6)\ n_{11} + 4\, m_5\, n_9 + \left(-\frac{3}{4}\ m_6 + 3\, n_7\right) n_8 + 2\, m_8\, n_6 + \frac{9}{2}\ \left(m_{11} - \frac{2}{3}\ m_9 + \frac{5}{6}\ n_{12}\right) n_5\Big)\ \omega_1^{\ 3} - 2\ \omega_2^{\ 3} \Big(\Big(\Big(\frac{1}{4}\ m_{10}$$

$$+ \frac{3}{4}\ n_{13}\Big)\ n_{11} + \frac{1}{2}\ n_{13}\, m_8 + \frac{3}{4}\ n_{25}\Big)\ \omega_2^{\ 2} + \left(m_5 - \frac{3}{8}\ n_6\right) n_{11} + \left(-\frac{3}{4}\ n_6 - \frac{1}{4}\ m_5\right) n_9 - \frac{3}{4}\ m_6\, n_8 - \frac{1}{8}\ m_8\, n_6 - \frac{3}{2}\ \left(m_{11} - \frac{1}{2}\ n_{12}\right) n_5\Big)\ \omega_1^{\ 2}$$

$$- \frac{1}{4}\ ((m_5 + 6\, n_6)\ n_{11} + 4\, m_5\, n_9 + 2\, m_8\, n_6)\ \omega_2^{\ 4}\ \omega_1 + \frac{1}{2}\ m_5\, n_{11}\, \omega_2^{\ 5}\Big)\ \varepsilon^2\Big)$$

$$qq_{7,\,2} = \frac{1}{4\ \omega_1^{\ 6}\ \omega_2^{\ 3} - 17\ \omega_1^{\ 4}\ \omega_2^{\ 5} + 4\ \omega_1^{\ 2}\ \omega_2^{\ 7}} \Big(2\ \varepsilon^2 \Big(((-2\, n_{13}\, n_{14} - 2\, n_{31})\ \omega_1^{\ 2} - 4\, m_{14}\, n_5)\ \omega_2^{\ 8} + \Big(\Big((9\, n_{14} + 2\, m_{13})\ n_{13} + \frac{17}{2}\ n_{31}\Big)\ \omega_1^{\ 4} + ((2\, m_6$$

$$- 2\, n_7)\ n_{13} - n_{14}\, n_6 - 2\, n_9\, m_{11} + (-n_{12} + 2\, m_{11})\ n_{11} + 17\, m_{14}\, n_5 - 2\, n_{17})\ \omega_1^{\ 2} - 4\, n_5\, m_7\Big)\ \omega_2^{\ 6} - \frac{9}{2}\ \Big(\Big(\Big(\frac{8}{9}\ n_{14} + \frac{1}{9}\ m_{13}\Big)\ n_{13} + \frac{4}{9}\ n_{31}\Big)\ \omega_1^{\ 4} + \Big(\Big(m_6$$

$$- \frac{16}{9}\ n_7\Big)\ n_{13} + \left(-n_{14} - \frac{8}{9}\ m_{13}\right) n_6 + \left(-\frac{1}{9}\ n_{12} - \frac{4}{9}\ m_9 - m_{11}\right) n_9 + \left(-\frac{8}{9}\ n_{12} + \frac{8}{9}\ m_9 + \frac{1}{9}\ m_{11}\right) n_{11} + \frac{8}{9}\ m_{14}\, n_5 - \frac{17}{9}\ n_{17}\Big)\ \omega_1^{\ 2} + \Big(-\frac{4}{9}\ m_6$$

$$+ \frac{2}{3}\ n_7\Big)\ n_6 - \frac{34}{9}\ n_5\, m_7\Big)\ \omega_1^{\ 2}\ \omega_2^{\ 4} + \Big(\Big(n_{13}\, m_6 + (-m_{13} - 2\, n_{14})\ n_6 + \left(-m_{11} - 2\, n_{12} - \frac{1}{2}\ m_9\right) n_9 + n_{11}\, m_9 - 2\, n_{17}\Big)\ \omega_1^{\ 2} + \left(\frac{25}{2}\ n_7 - \frac{1}{2}\ m_6\right) n_6$$

$$- 4\, n_5\, m_7\Big)\ \omega_1^{\ 4}\ \omega_2^{\ 2} - 2\, n_6\, n_7\, \omega_1^{\ 6}\Big)\Big)$$

$$qq_{7,\,1} = \frac{1}{4\ \omega_1^{\ 5}\ \omega_2^{\ 3} - 17\ \omega_1^{\ 3}\ \omega_2^{\ 5} + 4\ \omega_1\ \omega_2^{\ 7}} \Big(2\ \varepsilon^2 \Big((2\ \omega_1^{\ 2}\, n_{33} + 2\, m_{14}\, n_8 - 2\, n_{11}\, n_{14})\ \omega_2^{\ 8} + \Big(-\frac{17}{2}\ n_{33}\, \omega_1^{\ 4} + \Big((n_{14} + 2\, m_{13})\ n_9 + (9\, n_{14} - 2\, m_{13})\ n_{11} + ($$

$$-2\, m_9 + n_{12} + 2\, m_{11})\ n_{13} + 2\, n_{21} - \frac{17}{2}\ n_8\, m_{14}\Big)\ \omega_1^{\ 2} - 2\, n_{11}\, n_7 + 2\, n_8\, m_7\Big)\ \omega_2^{\ 6} - 4 \Big(-\frac{1}{2}\ n_{33}\, \omega_1^{\ 4} + \Big(\left(\frac{9}{8}\ n_{14} + \frac{9}{8}\ m_{13}\right) n_9 + \left(n_{14} - \frac{1}{8}\ m_{13}\right) n_{11}$$

$$+ \left(n_{12} - \frac{9}{8}\ m_9 + \frac{1}{8}\ m_{11}\right) n_{13} - \frac{1}{2}\ n_8\, m_{14} + \frac{17}{8}\ n_{21}\Big)\ \omega_1^{\ 2} + \left(-\frac{1}{2}\ m_6 - \frac{3}{4}\ n_7\right) n_9 + (m_6 - 2\, n_7)\ n_{11} + \left(-\frac{1}{8}\ n_{12} + \frac{1}{2}\ m_9 - m_{11}\right) n_6 + \frac{17}{8}\ n_8\, m_7\Big)$$

$$\omega_1^{\ 2}\ \omega_2^{\ 4} + \omega_1^{\ 4} \Big(((2\, n_{14} + m_{13})\ n_9 - m_9\, n_{13} + 2\, n_{21})\ \omega_1^{\ 2} + \left(-\frac{25}{2}\ n_7 - \frac{1}{2}\ m_6\right) n_9 + n_{11}\, m_6 + \left(-m_{11} - 2\, n_{12} + \frac{1}{2}\ m_9\right) n_6 + 2\, n_8\, m_7\Big)\ \omega_2^{\ 2}$$

$$+ 2\, n_7\, \omega_1^{\ 6}\, n_9\Big)\Big)$$

$$qq_{8,\,2} = -\frac{1}{6\ \omega_1^{\ 4}\ \omega_2^{\ 3} - 24\ \omega_1^{\ 2}\ \omega_2^{\ 5}} \Big(6\ \varepsilon^2 \Big(\Big(\Big(-\frac{8}{3}\ n_{14}^2 - n_{13}\, m_{14} - 2\, n_{32}\Big)\ \omega_1^{\ 2} - 4\, m_{14}\, n_6\Big)\ \omega_2^{\ 6} + \Big(\left(\frac{2}{3}\ n_{14}^2 + \frac{1}{2}\ n_{32}\right) \omega_1^{\ 4} + \Big(-\frac{20}{3}\ n_{14}\, n_7 + \frac{1}{2}\ m_{14}\, n_6$$

$$+ m_7\, n_{13} + \left(-n_9 + \frac{1}{2}\ n_{11}\right) m_{12} - \frac{2}{3}\ n_{12}^2 - 6\, n_{18}\Big)\ \omega_1^{\ 2} - 4\, m_7\, n_6\Big)\ \omega_2^{\ 4} + \frac{3}{2}\ \Big(\Big(\frac{10}{9}\ n_{14}\, n_7 + \frac{1}{9}\ n_{12}^2 + n_{18}\Big)\ \omega_1^{\ 2} + m_7\, n_6 - \frac{40}{9}\ n_7^2\Big)\ \omega_1^{\ 2}\ \omega_2^{\ 2} + \frac{5}{3}\ \omega_1^{\ 4}$$

$$n_7^2\Big)\Big)$$

$$qq_{8,\,1} = \frac{1}{2\ \omega_1^{\ 4}\ \omega_2^{\ 2} - 8\ \omega_1^{\ 2}\ \omega_2^{\ 4}} \Big(2\ \varepsilon^2 \Big((-6\ \omega_1^{\ 2}\, n_{34} - 4\, m_{14}\, n_{11})\ \omega_2^{\ 6} + \Big(\frac{3}{2}\ n_{34}\, \omega_1^{\ 4} + \Big(m_{12}\, n_{13} - n_9\, m_{14} - 2\, n_{12}\, n_{14} + \frac{3}{2}\ m_{14}\, n_{11} - 2\, n_{27}\Big)\ \omega_1^{\ 2}$$

$$- 4\, n_{11}\, m_7\Big)\ \omega_2^{\ 4} + \Big(\left(\frac{1}{2}\ n_{12}\, n_{14} + \frac{1}{2}\ n_{27}\right) \omega_1^{\ 2} + n_9\, m_7 + \frac{1}{2}\ n_{11}\, m_7 + \frac{1}{2}\ m_{12}\, n_6 - 2\, n_{12}\, n_7\Big)\ \omega_1^{\ 2}\ \omega_2^{\ 2} + \frac{1}{2}\ n_{12}\, n_7\, \omega_1^{\ 4}\Big)\Big)$$

$$pp_{9,1} = \frac{(\omega_1^2\, mm_1 - \omega_2^2\, mm_1 - \varepsilon\, mm_2\, nn_3 - \varepsilon\, mm_4\, nn_1)\, \varepsilon}{2\, \omega_1^2 - 2\, \omega_2^2}$$

$$pp_{9,2} = -\frac{\varepsilon^2\, ((mm_1^2 + 4\, mm_2\, nn_1)\, \omega_1^2 - mm_1^2\, \omega_2^2 - 4\, mm_4\, nn_3)}{8\, \omega_1^3 - 8\, \omega_1\, \omega_2^2}$$

$$pp_{10,1} = \frac{1}{24\, \omega_1^4\, \omega_2 - 24\, \omega_1^2\, \omega_2^3} \Big(12 \Big(\frac{1}{2}\, m_{14}\, \varepsilon \Big(nn_2 - \frac{1}{2}\, mm_1\Big)\, \omega_2^5 - \frac{2}{3}\, \omega_1 \Big(\Big(\frac{3}{2}\, nn_2\, m_{14} + mm_2 \Big(n_{14} + \frac{3}{2}\, m_{13}\Big)\Big)\, \varepsilon + \frac{3}{2}\, m_{12}\Big)\, \omega_2^4 - \frac{1}{2}\, \varepsilon\, (\omega_1^2\, m_{14}$$
$$+ m_7) \Big(nn_2 - \frac{1}{2}\, mm_1\Big)\, \omega_2^3 + \omega_1 \Big(\Big(\Big(\frac{2}{3}\, mm_2\, n_{14} + nn_2\, m_{14}\Big)\, \omega_1^2 + \Big(m_6 + \frac{2}{3}\, n_7\Big)\, mm_2 + \frac{1}{3}\, mm_4\, (n_{12} + 3\, m_9 + 3\, m_{11})\Big)\, \varepsilon + \omega_1^2\, m_{12}\Big)\, \omega_2^2$$
$$+ \frac{1}{2}\, \omega_1^2\, \varepsilon \Big(nn_2 - \frac{1}{2}\, mm_1\Big)\, m_7\, \omega_2 - \frac{2}{3}\, \omega_1^3\, \varepsilon \Big(mm_2\, n_7 + \frac{1}{2}\, mm_4\, n_{12}\Big)\Big)\, \varepsilon \Big)$$

$$pp_{10,2} = -\frac{1}{24\, \omega_1^4\, \omega_2^2 - 24\, \omega_1^2\, \omega_2^4} \Big(12\, \varepsilon \Big(m_{14}\, \omega_1\, \omega_2^6 + \frac{1}{2}\, m_{12}\, \varepsilon \Big(nn_2 - \frac{1}{2}\, mm_1\Big)\, \omega_2^5 - \frac{2}{3}\, \omega_1 \Big(\frac{3}{2}\, \omega_1^2\, m_{14} + \Big(\frac{3}{4}\, nn_2\, m_{12} + \Big(\frac{1}{2}\, n_{14} + \frac{3}{2}\, m_{13}\Big)\, mm_4$$
$$+ mm_2 \Big(n_{12} + \frac{3}{2}\, m_9 + \frac{3}{2}\, m_{11}\Big)\Big)\, \varepsilon + \frac{3}{2}\, m_7\Big)\, \omega_2^4 - \frac{1}{2}\, \omega_1^2\, m_{12}\, \varepsilon \Big(nn_2 - \frac{1}{2}\, mm_1\Big)\, \omega_2^3 + \omega_1 \Big(\Big(\Big(\frac{2}{3}\, mm_2\, n_{12} + \frac{1}{3}\, mm_4\, n_{14} + \frac{1}{2}\, nn_2\, m_{12}\Big)\, \varepsilon$$
$$+ m_7\Big)\, \omega_1^2 + mm_4\, \varepsilon \Big(m_6 + \frac{1}{3}\, n_7\Big)\Big)\, \omega_2^2 - \frac{1}{3}\, mm_4\, n_7\, \omega_1^3\, \varepsilon \Big)\Big)$$

$$pp_{11,1} = \frac{1}{8\, \omega_1^4\, \omega_2^2 - 2\, \omega_1^2\, \omega_2^4} \Big(4\, \varepsilon^2 \Big((3\, m24\, \omega_2^2 + 2\, m9\, n10)\, \omega_1^6 + \Big(-\frac{3}{4}\, m24\, \omega_2^4 + \Big(-\frac{3}{4}\, n10\, m9 + \frac{1}{2}\, n10\, m11 + m8\, m10 - \frac{1}{2}\, n8\, m13 + m19\Big)\, \omega_2^2$$
$$+ 2\, m9\, n5\Big)\, \omega_1^4 + \Big(\Big(-\frac{1}{4}\, m8\, m10 - \frac{1}{4}\, m19\Big)\, \omega_2^2 + m5\, m8 - \frac{1}{4}\, m6\, n8 - \frac{1}{4}\, m9\, n5 - \frac{1}{2}\, n5\, m11\Big)\, \omega_2^2\, \omega_1^2 - \frac{1}{4}\, m5\, m8\, \omega_2^4\Big)\Big)$$

$$pp_{11,2} = -\frac{1}{24\, \omega_1^5\, \omega_2^2 - 6\, \omega_1^3\, \omega_2^4} \Big(40\, \varepsilon^2 \Big(\Big(\Big(\frac{3}{20}\, n10\, m13 + \frac{2}{5}\, m10^2 + \frac{3}{10}\, m22\Big)\, \omega_2^2 + \frac{3}{5}\, n10\, m6\Big)\, \omega_1^6 + \Big(\Big(-\frac{1}{10}\, m10^2 - \frac{3}{40}\, m22\Big)\, \omega_2^4 + \Big(m5\, m10$$
$$- \frac{3}{40}\, n10\, m6 - \frac{3}{20}\, n5\, m13 + \frac{9}{10}\, m15 + \frac{1}{10}\, m8^2 + \Big(-\frac{3}{40}\, m9 + \frac{3}{20}\, m11\Big)\, n8\Big)\, \omega_2^2 + \frac{3}{5}\, m6\, n5\Big)\, \omega_1^4 + \Big(\Big(-\frac{1}{4}\, m5\, m10 - \frac{1}{40}\, m8^2$$
$$- \frac{9}{40}\, m15\Big)\, \omega_2^2 + m5^2 - \frac{9}{40}\, m6\, n5\Big)\, \omega_2^2\, \omega_1^2 - \frac{1}{4}\, m5^2\, \omega_2^4\Big)\Big)$$

$$pp_{12,1} = -\frac{1}{4}\, \frac{1}{\omega_2^2\, \omega_1^2\, (\omega_1 + 2\, \omega_2)} \Big(\Big((-8\, m_{33}\, \omega_1^2 + 2\, m_{14}\, (n_{11} - 4\, m_8))\, \omega_2^5 - 4\, \omega_1 \Big(m_{33}\, \omega_1^2 + \Big(-\frac{7}{4}\, n_{11} + m_8 - \frac{3}{2}\, n_9\Big)\, m_{14} + \frac{1}{2}\, n_{13}\, m_{12}\Big)\, \omega_2^4$$
$$+ \Big(((2\, n_{11} + n_9)\, m_{14} - n_{13}\, m_{12} - 8\, n_{14}\, m_9 - 8\, m_{21})\, \omega_1^2 - 2\, n_6\, m_{12} + 6\, m_7 \Big(n_{11} - \frac{4}{3}\, m_8\Big)\Big)\, \omega_2^3 + ((-4\, m_9\, n_{14} + m_{12}\, n_{13} - 2\, m_{14}\, n_9 - 4\, m_{21})\, \omega_1^2$$
$$+ 3\, n_6\, m_{12} + m_7\, (n_{11} - 4\, m_8 + 2\, n_9))\, \omega_1\, \omega_2^2 - \omega_1^2\, (m_7\, n_9 + 8\, m_9\, n_7 - m_{12}\, n_6)\, \omega_2 - 4\, m_9\, n_7\, \omega_1^3\Big)\, \varepsilon^2\Big)$$

$$pp_{12,2} = -\frac{1}{\omega_2^2\, \omega_1^3\, (\omega_1 + 2\, \omega_2)\, (4\, \omega_1^2 - \omega_2^2)} \Big(8 \Big(\Big(\Big(\Big(-\frac{1}{4}\, m_{31} - \frac{1}{16}\, m_{14}\, n_{13}\Big)\, \omega_1^2 - \frac{1}{2}\, m_5\, m_{14}\Big)\, \omega_2^7 - \frac{1}{4}\, \Big(\Big(\frac{7}{8}\, m_{14}\, n_{13} + \frac{1}{2}\, m_{31}\Big)\, \omega_1^2 + \Big(m_5$$
$$- \frac{3}{4}\, n_6\Big)\, m_{14} + \frac{1}{4}\, n_{11}\, m_{12}\Big)\, \omega_1\, \omega_2^6 + \Big(\Big(\frac{1}{4}\, m_{13}^2 + m_{31} + \frac{3}{16}\, m_{14}\, n_{13}\Big)\, \omega_1^4 + \Big(\Big(\frac{1}{32}\, n_6 + 2\, m_5\Big)\, m_{14} + \Big(-\frac{1}{4}\, n_{14} + \frac{1}{4}\, m_{13}\Big)\, m_6 - \frac{3}{16}\, n_{13}\, m_7 + \Big($$
$$-\frac{1}{32}\, n_{11} + \frac{1}{16}\, n_9\Big)\, m_{12} - \frac{1}{4}\, m_9\, m_{11} + \frac{1}{4}\, m_{11}^2 - \frac{1}{4}\, m_{17}\Big)\, \omega_1^2 - \frac{1}{2}\, m_5\, m_7\Big)\, \omega_2^5 + \omega_1 \Big(\Big(\frac{1}{8}\, m_{13}^2 + \frac{1}{2}\, m_{31} + \frac{7}{8}\, m_{14}\, n_{13}\Big)\, \omega_1^4 + \Big(\Big(m_5 - \frac{13}{16}\, n_6\Big)\, m_{14}$$
$$+ \Big(-\frac{1}{8}\, n_{14} + \frac{1}{8}\, m_{13}\Big)\, m_6 - \frac{1}{32}\, n_{13}\, m_7 + \Big(\frac{9}{32}\, n_{11} - \frac{3}{32}\, n_9\Big)\, m_{12} - \frac{1}{8}\, m_9\, m_{11} + \frac{1}{8}\, m_{11}^2 - \frac{1}{8}\, m_{17}\Big)\, \omega_1^2 - \frac{1}{4}\, m_7 \Big(m_5 - \frac{1}{4}\, n_6\Big)\Big)\, \omega_2^4$$
$$+ 2\, \omega_1^2 \Big(\frac{1}{8}\, m_{14}\, n_{13}\, \omega_1^4 + \Big(-\frac{1}{16}\, m_{14}\, n_6 + \frac{1}{2}\, n_{14}\, m_6 + \frac{3}{8}\, n_{13}\, m_7 + \Big(\frac{1}{16}\, n_{11} - \frac{9}{64}\, n_9\Big)\, m_{12} + \frac{1}{8}\, m_9^2 + \frac{1}{2}\, m_{17}\Big)\, \omega_1^2 + \frac{1}{8}\, m_6^2 - \frac{1}{8}\, m_6\, n_7 + m_7 \Big(m_5$$
$$- \frac{1}{64}\, n_6\Big)\Big)\, \omega_2^3 + \omega_1^3 \Big(\Big(\frac{1}{4}\, m_{14}\, n_6 + \frac{1}{2}\, n_{14}\, m_6 + \frac{1}{8}\, n_{13}\, m_7 + \Big(-\frac{1}{8}\, n_{11} + \frac{3}{8}\, n_9\Big)\, m_{12} + \frac{1}{8}\, m_9^2 + \frac{1}{2}\, m_{17}\Big)\, \omega_1^2 + \frac{1}{8}\, m_6^2 - \frac{1}{8}\, m_6\, n_7 + m_7 \Big(m_5$$
$$- \frac{1}{4}\, n_6\Big)\Big)\, \omega_2^2 + \frac{1}{8}\, \omega_1^4\, (\omega_1^2\, m_{12}\, n_9 + 8\, m_6\, n_7 + m_7\, n_6)\, \omega_2 + \frac{1}{2}\, m_6\, n_7\, \omega_1^5\Big)\, \varepsilon^2\Big)$$

$$qq_{9,1} = \frac{(\omega_1^2\, nn_2 - \omega_2^2\, nn_2 + \varepsilon\, mm_2\, nn_3 + \varepsilon\, mm_4\, nn_1)\, \varepsilon}{2\, \omega_1^2 - 2\, \omega_2^2}$$

$$q_{9,2} = \frac{(-\omega_1^2\, nn_2^2 + 4\, \omega_2^2\, mm_2\, nn_1 + \omega_2^2\, nn_2^2 - 4\, mm_4\, nn_3)\, \varepsilon^2}{8\, \omega_1^2\, \omega_2 - 8\, \omega_2^3}$$

$$qq_{10,1} = \frac{1}{2}\, \frac{1}{\omega_2^2\, (2\, \omega_1 - \omega_2)\, (\omega_1^2 - \omega_2^2)} \Big(\varepsilon \Big(\Big(-\frac{1}{2}\, \varepsilon\, n_{13}\, mm_1 - n_{11}\Big)\, \omega_2^5 + \frac{5}{4}\, \omega_1 \Big(\Big(mm_1\, n_{13} + \frac{8}{5}\, mm_2\, n_{10} + \frac{2}{5}\, nn_2\, n_{13} + \frac{4}{5}\, m_{13}\, nn_1\Big)\, \varepsilon + \frac{8}{5}\, n_{11}$$
$$+ \frac{4}{5}\, n_9\Big)\, \omega_2^4 + \Big((((2\, n_{14} - m_{13})\, nn_1 - 4\, mm_2\, n_{10} - nn_2\, n_{13})\, \varepsilon + n_{11} - 2\, n_9)\, \omega_1^2 + \varepsilon \Big(nn_1\, m_6 + \frac{1}{4}\, mm_1\, n_6 + (-n_{12} + m_{11})\, nn_3 + 2\, mm_2\, n_5$$
$$+ n_8\, mm_4\Big)\Big)\, \omega_2^3 - \omega_1 \Big(\Big(\Big((4\, n_{14} + m_{13})\, nn_1 + \frac{5}{4}\, n_{13} \Big(mm_1 + \frac{2}{5}\, nn_2\Big)\Big)\, \varepsilon + 2\, n_{11} + n_9\Big)\, \omega_1^2 + \Big((m_6 - 2\, n_7)\, nn_1 + \frac{1}{2}\, mm_1\, n_6 + (-3\, n_{12} + m_9)\, nn_3$$
$$+ 4\, mm_2\, n_5 + 3\, n_8\, mm_4\Big)\, \varepsilon\Big)\, \omega_2^2 - \omega_1^2 \Big(\Big(\Big(-m_{13}\, nn_1 - \frac{1}{2}\, n_{13}\, (mm_1 + 2\, nn_2)\Big)\, \varepsilon - 2\, n_9\Big)\, \omega_1^2 + \Big((m_6 + 4\, n_7)\, nn_1 + \frac{1}{4}\, mm_1\, n_6 + (2\, n_{12} + m_{11})\, nn_3$$
$$- 2\, n_8\, mm_4\Big)\, \varepsilon\Big)\, \omega_2 + \omega_1^3\, \varepsilon \Big(nn_1\, m_6 + nn_3\, m_9 + \frac{1}{2}\, mm_1\, n_6\Big)\Big)\Big)$$

$$
\begin{aligned}
qq_{10,2} = {} & -\frac{1}{2}\,\frac{1}{\omega_2^2\,(2\,\omega_1-\omega_2)\,(\omega_1^2-\omega_2^2)}\Big(\varepsilon\Big(\omega_1\,n_{13}\,\omega_2^5+\Big(\Big(nn_1\,m_{11}+\Big(\frac{1}{4}\,n_{11}+\frac{1}{2}\,n_9\Big)\,mm_1+\frac{1}{2}\,n_{11}\,nn_2+mm_2\,n_8\Big)\,\varepsilon-2\,n_{13}\,\omega_1^2+n_6\Big)\,\omega_2^4 \\
& -\frac{1}{2}\,\omega_1\Big(\Big((-2\,n_{12}+2\,m_9+2\,m_{11})\,nn_1+\Big(n_{11}+\frac{5}{2}\,n_9\Big)\,mm_1+2\,n_{11}\,nn_2+(-4\,n_{14}+2\,m_{13})\,nn_3+6\,mm_2\,n_8+4\,n_{10}\,mm_4\Big)\,\varepsilon+2\,n_{13}\,\omega_1^2 \\
& +4\,n_6\Big)\,\omega_2^3+\Big(\Big(\Big(\Big((-m_{11}+m_9-3\,n_{12})\,nn_1-\frac{1}{4}\,mm_1\,n_{11}+2\,mm_2\,n_8+4\,n_{10}\,mm_4-\frac{1}{2}\,n_{11}\,nn_2-4\,n_{14}\,nn_3\Big)\,\omega_1^2+(-m_6+2\,n_7)\,nn_3-2\,n_5\,mm_4\Big)\,\varepsilon \\
& +2\,n_{13}\,\omega_1^4-n_6\,\omega_1^2\Big)\,\omega_2^2+\frac{1}{2}\,\Big(\Big(\Big(\Big((4\,n_{12}+2\,m_9+2\,m_{11})\,nn_1+\Big(n_{11}+\frac{5}{2}\,n_9\Big)\,mm_1+2\,n_{11}\,nn_2+2\,m_{13}\,nn_3\Big)\,\omega_1^2+8\,n_5\,mm_4-8\,n_7\,nn_3\Big)\,\varepsilon \\
& +4\,n_6\,\omega_1^2\Big)\,\omega_1\,\omega_2+\Big(\Big(-nn_1\,m_9-\frac{1}{2}\,mm_1\,n_9\Big)\,\omega_1^2+m_6\,nn_3\Big)\,\omega_1^2\,\varepsilon\Big)\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
qq_{11,1} = {} & \frac{1}{16\,\omega_1^4\,\omega_2^2-4\,\omega_1^2\,\omega_2^4}\Big(16\,\Big(\Big(n_{30}\,\omega_2^2+(n_{12}-m_9)\,n_{10}+\frac{1}{4}\,n_{13}\,n_9\Big)\,\omega_1^6-\frac{1}{2}\,n_{13}\,n_9\,\omega_2\,\omega_1^5+\Big(-\frac{1}{4}\,\omega_2^4\,n_{30}+\Big(n_{11}\,m_{10}+\Big(-\frac{1}{4}\,n_{12}+\frac{1}{2}\,m_9 \\
& -\frac{1}{2}\,m_{11}\Big)\,n_{10}+n_{25}+\frac{1}{2}\,n_8\,m_{13}-\frac{1}{16}\,n_{13}\,n_9\Big)\,\omega_2^2+\frac{1}{4}\,n_{11}\,n_6+n_5\,(n_{12}-m_9)\Big)\,\omega_1^4+\Big(\frac{1}{8}\,n_{13}\,n_9\,\omega_2^3-\frac{1}{2}\,n_{11}\,n_6\,\omega_2\Big)\,\omega_1^3+\Big(\Big(-\frac{1}{4}\,n_{25} \\
& -\frac{1}{4}\,n_{11}\,m_{10}\Big)\,\omega_2^2+\Big(m_5-\frac{1}{16}\,n_6\Big)\,n_{11}-\frac{1}{4}\,n_5\,n_{12}+\frac{1}{4}\,m_6\,n_8+\frac{1}{2}\,n_5\,m_{11}\Big)\,\omega_2^2\,\omega_1^2+\frac{1}{8}\,n_{11}\,n_6\,\omega_2^3\,\omega_1-\frac{1}{4}\,\omega_2^4\,n_{11}\,m_5\Big)\,\varepsilon^2\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
qq_{11,2} = {} & -\frac{1}{\omega_1^2\,\omega_2^3\,(\omega_1+2\,\omega_2)\,(4\,\omega_1^2-\omega_2^2)}\Big(4\,\Big(\Big(\Big(n_{10}\,m_{13}-\frac{3}{8}\,n_{13}^2+n_{23}\Big)\,\omega_2^2-\frac{1}{8}\,n_9^2+2\,n_7\,n_{10}\Big)\,\omega_1^7+2\,\omega_2\,\Big(\Big(n_{10}\,m_{13}-\frac{1}{8}\,n_{13}^2+n_{23}\Big)\,\omega_2^2 \\
& -\frac{1}{4}\,n_{13}\,n_6+2\,n_7\,n_{10}+\frac{1}{4}\,n_9\,\Big(n_{11}-\frac{1}{2}\,n_9\Big)\Big)\,\omega_1^6+\Big(\Big(-\frac{1}{2}\,n_{10}\,m_{13}+\frac{19}{32}\,n_{13}^2-\frac{1}{4}\,n_{23}\Big)\,\omega_2^4+\Big(\Big(-\frac{3}{2}\,n_{13}+m_{10}\Big)\,n_6+\Big(-\frac{1}{2}\,m_6-\frac{1}{2}\,n_7\Big)\,n_{10} \\
& +\frac{3}{2}\,n_{11}\,n_9+\frac{1}{2}\,m_9\,n_8+n_5\,m_{13}-\frac{3}{8}\,n_{11}^2-\frac{15}{32}\,n_9^2+n_{16}\Big)\,\omega_2^2-\frac{1}{8}\,n_6^2+2\,n_5\,n_7\Big)\,\omega_1^5-\Big(\Big(n_{10}\,m_{13}-\frac{1}{16}\,n_{13}^2+\frac{1}{2}\,n_{23}\Big)\,\omega_2^4+\Big(\Big(-\frac{1}{8}\,n_{13} \\
& -2\,m_{10}\Big)\,n_6+(m_6+n_7)\,n_{10}-2\,n_5\,m_{13}+\frac{1}{4}\,n_{11}^2+\frac{1}{8}\,n_{11}\,n_9-m_9\,n_8-\frac{1}{16}\,n_9^2-2\,n_{16}\Big)\,\omega_2^2-4\,n_5\,n_7+\frac{1}{4}\,n_6^2\Big)\,\omega_2\,\omega_1^4+\Big(-\frac{1}{8}\,n_{13}^2\,\omega_2^4+\Big(\Big(\frac{3}{8}\,n_{13} \\
& -\frac{1}{4}\,m_{10}\Big)\,n_6-\frac{3}{8}\,n_{11}\,n_9-\frac{1}{4}\,m_{11}\,n_8+\frac{19}{32}\,n_{11}^2+\frac{1}{8}\,n_9^2-\frac{1}{4}\,n_{16}\Big)\,\omega_2^2-\frac{15}{32}\,n_6^2+m_5\,n_6+\frac{1}{2}\,n_5\,(m_6-n_7)\Big)\,\omega_2^2\,\omega_1^3+2\,\Big(\Big(-\frac{1}{4}\,m_{11}\,n_8+\frac{1}{32}\,n_{11}^2 \\
& -\frac{1}{4}\,n_6\,m_{10}-\frac{1}{4}\,n_{16}\Big)\,\omega_2^2+\frac{1}{32}\,n_6^2+m_5\,n_6+\frac{1}{2}\,n_5\,(m_6-n_7)\Big)\,\omega_2^3\,\omega_1^2-\frac{1}{4}\,\Big(\frac{1}{2}\,n_{11}^2\,\omega_2^2+n_6\,\Big(m_5-\frac{1}{2}\,n_6\Big)\Big)\,\omega_2^4\,\omega_1-\frac{1}{2}\,m_5\,n_6\,\omega_2^5\Big)\,\varepsilon^2\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
qq_{12,1} = {} & \frac{1}{8}\,\frac{1}{\omega_2^2\,\omega_1^2}\Big(\varepsilon^2\,\Big(\Big(12\,n_{34}\,\omega_2^4+(m_{12}\,n_{13}-m_{14}\,n_9+4\,n_{12}\,n_{14}+4\,n_{27})\,\omega_2^2+m_7\,n_9+4\,n_7\,n_{12}\Big)\,\omega_1^2-2\,\omega_2\,\Big(\Big(\Big(-n_9-\frac{1}{2}\,n_{11}\Big)\,m_{14}+m_{12}\,n_{13}\Big)\,\omega_2^2 \\
& +m_7\,n_9+\frac{1}{2}\,m_7\,n_{11}-\frac{1}{2}\,n_6\,m_{12}\Big)\,\omega_1+8\,\omega_2^2\,n_{11}\,(\omega_2^2\,m_{14}+m_7)\Big)\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
qq_{12,2} = {} & -\frac{1}{8}\,\frac{1}{\omega_2^3\,\omega_1^2}\Big(\varepsilon^2\,\Big(2\,m_{14}\,n_{13}\,\omega_1\,\omega_2^5+\Big(\Big(\frac{16}{3}\,n_{14}^2-m_{14}\,n_{13}+4\,n_{32}\Big)\,\omega_1^2+8\,m_{14}\,n_6\Big)\,\omega_2^4-2\,\omega_1\,\Big(\frac{1}{2}\,m_{14}\,n_6+n_{13}\,m_7-\Big(n_9+\frac{1}{2}\,n_{11}\Big)\,m_{12}\Big)\,\omega_2^3 \\
& +\Big(\Big(n_{13}\,m_7+\frac{40}{3}\,n_{14}\,n_7-n_9\,m_{12}+\frac{4}{3}\,n_{12}^2+12\,n_{18}\Big)\,\omega_1^2+8\,m_7\,n_6\Big)\,\omega_2^2+m_7\,n_6\,\omega_1\,\omega_2+\frac{40}{3}\,n_7^2\,\omega_1^2\Big)\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
pp_{20,1} = {} & \frac{1}{(\omega_1-2\,\omega_2)\,\omega_1^2\,(\omega_1^2-\omega_2^2)}\Big(\Big(\Big(-\frac{1}{4}\,\varepsilon\,m_{13}\,nn_2-\frac{1}{2}\,m_9\Big)\,\omega_1^5+\frac{1}{4}\,\Big(\Big(2\,mm_2\,n_{13}+\Big(mm_1+\frac{5}{2}\,nn_2\Big)\,m_{13}+4\,nn_1\,m_{14}\Big)\,\varepsilon+4\,m_9+2\,m_{11}\Big)\,\omega_2\,\omega_1^4 \\
& +\Big(\Big(\Big(\Big(m_{10}-\frac{1}{2}\,n_{13}\Big)\,mm_2-\frac{1}{2}\,mm_1\,m_{13}-2\,nn_1\,m_{14}\Big)\,\varepsilon-m_{11}+\frac{1}{2}\,m_9\Big)\,\omega_2^2+\frac{1}{2}\,\Big(mm_2\,n_6+\frac{1}{4}\,nn_2\,m_6+(-m_8+n_9)\,mm_4+nn_3\,m_{12} \\
& +2\,nn_1\,m_7\Big)\,\varepsilon\Big)\,\omega_1^3+\Big(\Big(\Big(\Big(-2\,m_{10}-\frac{1}{2}\,n_{13}\Big)\,mm_2-\frac{1}{4}\,\Big(mm_1+\frac{5}{2}\,nn_2\Big)\,m_{13}\Big)\,\varepsilon-\frac{1}{2}\,m_{11}-m_9\Big)\,\omega_2^2+\varepsilon\,\Big(\Big(m_5-\frac{1}{2}\,n_6\Big)\,mm_2-\frac{1}{4}\,nn_2\,m_6+\Big(\frac{3}{2}\,m_8 \\
& -\frac{1}{2}\,n_{11}\Big)\,mm_4-\frac{3}{2}\,nn_3\,m_{12}-2\,nn_1\,m_7\Big)\Big)\,\omega_2\,\omega_1^2-2\,\Big(\Big(\Big(-\frac{1}{4}\,mm_2\,n_{13}-\frac{1}{4}\,\Big(mm_1+\frac{1}{2}\,nn_2\Big)\,m_{13}\Big)\,\varepsilon-\frac{1}{2}\,m_{11}\Big)\,\omega_2^2+\varepsilon\,\Big(\Big(m_5+\frac{1}{4}\,n_6\Big)\,mm_2 \\
& +\frac{1}{16}\,nn_2\,m_6+\Big(\frac{1}{2}\,m_8+\frac{1}{4}\,n_9\Big)\,mm_4-\frac{1}{2}\,nn_3\,m_{12}\Big)\Big)\,\omega_2^2\,\omega_1+\frac{1}{2}\,\varepsilon\,\Big(mm_2\,n_6+n_{11}\,mm_4+\frac{1}{2}\,nn_2\,m_6\Big)\,\omega_2^3\Big)\,\varepsilon\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
pp_{20,2} = {} & -\frac{1}{(\omega_1-2\,\omega_2)\,\omega_1^2\,(\omega_1^2-\omega_2^2)}\Big(\varepsilon\,\Big(\frac{1}{2}\,m_{13}\,\omega_2\,\omega_1^5+\Big(\Big(\frac{1}{2}\,n_9\,mm_2+\Big(\frac{1}{4}\,m_{11}+\frac{1}{8}\,m_9\Big)\,nn_2+\frac{1}{2}\,nn_1\,m_{12}+\frac{1}{4}\,m_9\,mm_1\Big)\,\varepsilon-m_{13}\,\omega_2^2 \\
& +\frac{1}{2}\,m_6\Big)\,\omega_1^4-\frac{3}{2}\,\Big(\Big(\Big(\Big(\frac{1}{3}\,n_{11}-\frac{1}{3}\,m_8+\frac{1}{3}\,n_9\Big)\,mm_2+\Big(\frac{1}{3}\,n_{13}-\frac{2}{3}\,m_{10}\Big)\,mm_4+\Big(\frac{1}{6}\,m_9+\frac{5}{12}\,m_{11}\Big)\,nn_2+nn_1\,m_{12}+\frac{2}{3}\,nn_3\,m_{14}+\frac{1}{3}\,m_9\,mm_1\Big)\,\varepsilon \\
& +\frac{1}{3}\,m_{13}\,\omega_2^2+\frac{2}{3}\,m_6\Big)\,\omega_2\,\omega_1^3+\Big(\Big(\Big(\Big(\Big(-\frac{3}{2}\,m_8+\frac{1}{2}\,n_{11}-\frac{1}{2}\,n_9\Big)\,mm_2-2\,m_{10}\,mm_4+nn_1\,m_{12}+2\,nn_3\,m_{14}-\frac{1}{4}\,m_9\,mm_1-\frac{1}{8}\,nn_2\,m_9\Big)\,\omega_2^2+\Big(m_5 \\
& -\frac{1}{2}\,n_6\Big)\,mm_4-nn_3\,m_7\Big)\,\varepsilon+\omega_2^2\,\Big(m_{13}\,\omega_2^2-\frac{1}{2}\,m_6\Big)\Big)\,\omega_1^2-2\,\Big(\Big(\Big(\Big(\Big(-\frac{1}{4}\,n_{11}-\frac{1}{2}\,m_8-\frac{1}{4}\,n_9\Big)\,mm_2-\frac{1}{4}\,mm_4\,n_{13}+\Big(-\frac{1}{8}\,m_9-\frac{5}{16}\,m_{11}\Big)\,nn_2 \\
& -\frac{1}{4}\,m_9\,mm_1\Big)\,\omega_2^2+m_5\,mm_4-nn_3\,m_7\Big)\,\varepsilon-\frac{1}{2}\,m_6\,\omega_2^2\Big)\,\omega_2\,\omega_1-\frac{1}{2}\,\varepsilon\,\Big(\Big(n_{11}\,mm_2+\frac{1}{2}\,nn_2\,m_{11}\Big)\,\omega_2^2-n_6\,mm_4\Big)\,\omega_2^2\Big)\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
pp_{30,1} = {} & -\frac{1}{4\,\omega_1^4\,\omega_2^2-16\,\omega_1^2\,\omega_2^4}\Big(2\,\Big(\Big(8\,m_{33}\,\omega_1^2+(-8\,n_{11}+8\,m_8)\,m_{14}+2\,m_{13}\,m_{11}\Big)\,\omega_2^6-4\,m_{13}\,m_{11}\,\omega_1\,\omega_2^5+\Big(-2\,m_{33}\,\omega_1^4+\Big(8\,n_{14}\,m_9+(4\,n_{11}-2\,m_8 \\
& -4\,n_9)\,m_{14}-\frac{1}{2}\,m_{13}\,m_{11}+4\,n_{13}\,m_{12}+8\,m_{21}\Big)\,\omega_1^2+2\,m_6\,m_9-8\,m_7\,(n_{11}-m_8)\Big)\,\omega_2^4+(\omega_1^3\,m_{11}\,m_{13}-4\,\omega_1\,m_6\,m_9)\,\omega_2^3-\frac{1}{2}\,\omega_1^2\,((4\,m_9\,n_{14} \\
& +4\,m_{21})\,\omega_1^2+(m_6-16\,n_7)\,m_9+(4\,m_8-8\,n_9)\,m_7-4\,n_6\,m_{12})\,\omega_2^2+m_6\,m_9\,\omega_1^3\,\omega_2-2\,m_9\,n_7\,\omega_1^4\Big)\,\varepsilon^2\Big)
\end{aligned}
$$

$$pp_{30,2} = -\frac{1}{\omega_2^2\,\omega_1^3\,(2\,\omega_1+\omega_2)\,(\omega_1^2-4\,\omega_2^2)}\Big(4\Big(\Big(\Big(-m14\,n13+\frac{3}{8}\,m13^2-m31\Big)\omega_1^2-2\,m5\,m14+\frac{1}{8}\,m11^2\Big)\omega_2^7-4\Big(\Big(-\frac{1}{16}\,m13^2+\frac{1}{2}\,m14\,n13+\frac{1}{2}\,m31\Big)\omega_1^2-\frac{1}{8}\,m13\,m6+m5\,m14+\frac{1}{8}\Big(m9-\frac{1}{2}\,m11\Big)m11\Big)\omega_1\,\omega_2^6+\Big(\Big(\frac{1}{2}\,m14\,n13-\frac{19}{32}\,m13^2+\frac{1}{4}\,m31\Big)\omega_1^4+\Big(\Big(\frac{3}{2}\,m13-n14\Big)m6+\Big(\frac{1}{2}\,m5+\frac{1}{2}\,n6\Big)m14-\frac{1}{2}\,n11\,m12-n13\,m7-\frac{3}{2}\,m9\,m11+\frac{3}{8}\,m9^2+\frac{15}{32}\,m11^2-m17\Big)\omega_1^2-2\,m5\,m7+\frac{1}{8}\,m6^2\Big)\omega_2^5+\Big(\Big(m14\,n13-\frac{1}{16}\,m13^2+\frac{1}{2}\,m31\Big)\omega_1^4+\Big(\Big(-\frac{1}{8}\,m13-2\,n14\Big)m6+(m5+n6)\,m14-n11\,m12-2\,n13\,m7+\frac{1}{8}\,m9\,m11+\frac{1}{4}\,m9^2-\frac{1}{16}\,m11^2-2\,m17\Big)\omega_1^2-4\,m5\,m7+\frac{1}{4}\,m6^2\Big)\omega_1\,\omega_2^4+\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{4}\,m13^2\,\omega_1^4+\Big(\Big(-\frac{3}{4}\,m13+\frac{1}{2}\,n14\Big)m6-\frac{19}{16}\,m9^2+\frac{3}{4}\,m9\,m11+\frac{1}{2}\,n9\,m12-\frac{1}{4}\,m11^2+\frac{1}{2}\,m17\Big)\omega_1^2+\frac{15}{16}\,m6^2-2\,m6\,n7+m7\,(m5-n6)\Big)\omega_1^2\,\omega_2^3+\omega_1^3\Big(\Big(\frac{1}{2}\,n14\,m6+\frac{1}{2}\,n9\,m12-\frac{1}{16}\,m9^2+\frac{1}{2}\,m17\Big)\omega_1^2-\frac{1}{16}\,m6^2-2\,m6\,n7+m7\,(m5-n6)\Big)\omega_2^2+\frac{1}{8}\,(\omega_1^2\,m9^2-m6\,(m6-2\,n7))\,\omega_1^4\,\omega_2+\frac{1}{2}\,m6\,n7\,\omega_1^5\Big)\varepsilon^2\Big)$$

$$pp_{40,1} = \frac{(\omega_1^2\,mm_1-\omega_2^2\,mm_1-\varepsilon\,mm_2\,nn_3-\varepsilon\,mm_4\,nn_1)\,\varepsilon}{2\,\omega_1^2-2\,\omega_2^2}$$

$$pp_{40,2} = -\frac{((mm_1^2+4\,mm_2\,nn_1)\,\omega_1^2-mm_1^2\,\omega_2^2-4\,mm_4\,nn_3)\,\varepsilon^2}{8\,\omega_1^3-8\,\omega_1\,\omega_2^2}$$

$$pp_{50,1} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\omega_1^2\,\omega_2^2}\Big(\Big((3\,\omega_2^2\,m_{24}+2\,m_9\,n_{10})\,\omega_1^4+\frac{1}{4}\,\omega_2\,(m_9\,n_{10}+2\,m_{11}\,n_{10}-2\,m_{13}\,n_8)\,\omega_1^3+\Big(\Big(-\frac{1}{4}\,n_{10}\,m_{11}+m_8\,m_{10}+\frac{1}{4}\,n_8\,m_{13}+m_{19}\Big)\omega_2^2+2\,m_9\,n_5\Big)\omega_1^2+\frac{1}{4}\,\omega_2\,(m_6\,n_8-m_9\,n_5-2\,m_{11}\,n_5)\,\omega_1+\omega_2^2\Big(m_5\,m_8+\frac{1}{4}\,m_{11}\,n_5\Big)\Big)\varepsilon^2\Big)$$

$$pp_{50,2} = -\frac{5}{3}\,\frac{1}{\omega_1^3\,\omega_2^2}\Big(\Big(\frac{3}{20}\,n_{10}\,m_{13}\,\omega_2\,\omega_1^5+\Big(\Big(-\frac{3}{40}\,n_{10}\,m_{13}+\frac{2}{5}\,m_{10}^2+\frac{3}{10}\,m_{22}\Big)\omega_2^2+\frac{3}{5}\,n_{10}\,m_6\Big)\omega_1^4-\frac{3}{40}\,\omega_2\,(2\,n_5\,m_{13}+n_{10}\,m_6-n_8\,(m_9+2\,m_{11}))\,\omega_1^3+\Big(\Big(m_5\,m_{10}+\frac{1}{10}\,m_8^2+\frac{3}{40}\,n_5\,m_{13}-\frac{3}{40}\,n_8\,m_{11}+\frac{9}{10}\,m_{15}\Big)\omega_2^2+\frac{3}{5}\,m_6\,n_5\Big)\omega_1^2+\frac{3}{40}\,m_6\,n_5\,\omega_2\,\omega_1+m_5^2\,\omega_2^2\Big)\varepsilon^2\Big)$$

$$qq_{20,1} = -\frac{1}{24\,\omega_1^3\,\omega_2^2-24\,\omega_1\,\omega_2^4}\Big(8\,\varepsilon\Big(-\frac{3}{8}\,\varepsilon\,n_{10}\,(nn_2-2\,mm_1)\,\omega_1^5-\frac{3}{2}\,\omega_2\Big(\Big(mm_1\,n_{10}+nn_1\Big(n_{13}+\frac{2}{3}\,m_{10}\Big)\Big)\varepsilon+n_8\Big)\omega_1^4+\frac{3}{8}\,\varepsilon\,(\omega_2^2\,n_{10}+n_5)\,(nn_2-2\,mm_1)\,\omega_1^3+\omega_2\Big(\Big(\Big(nn_1\,m_{10}+\frac{3}{2}\,mm_1\,n_{10}\Big)\omega_2^2+\Big(m_5+\frac{3}{2}\,n_6\Big)nn_1+\frac{3}{2}\Big(n_{11}+\frac{1}{3}\,m_8+n_9\Big)nn_3\Big)\varepsilon+\frac{3}{2}\,n_8\,\omega_2^2\Big)\omega_1^2-\frac{3}{8}\,\omega_2^2\,\varepsilon\,n_5\,(nn_2-2\,mm_1)\,\omega_1-\omega_2^3\Big(m_5\,nn_1+\frac{1}{2}\,nn_3\,m_8\Big)\varepsilon\Big)\Big)$$

$$qq_{20,2} = \frac{1}{24\,\omega_1^4\,\omega_2^2-24\,\omega_1^2\,\omega_2^4}\Big(4\,\varepsilon\Big(3\,n_{10}\,\omega_2\,\omega_1^6-\frac{3}{4}\,\varepsilon\,n_8\,(nn_2-2\,mm_1)\,\omega_1^5-3\Big(n_{10}\,\omega_2^2+\Big(\Big(n_{13}+\frac{1}{3}\,m_{10}\Big)nn_3+\frac{1}{2}\,n_8\,mm_1+nn_1\Big(n_{11}+\frac{2}{3}\,m_8+n_9\Big)\Big)\varepsilon+n_5\Big)\omega_2\,\omega_1^4+\frac{3}{4}\,\omega_2^2\,\varepsilon\,n_8\,(nn_2-2\,mm_1)\,\omega_1^3+\omega_2\Big(\Big(\Big(m_{10}\,nn_3+2\,nn_1\,m_8+\frac{3}{2}\,n_8\,mm_1\Big)\varepsilon+3\,n_5\Big)\omega_2^2+nn_3\,\varepsilon\,(m_5+3\,n_6)\Big)\omega_1^2-\omega_2^3\,\varepsilon\,m_5\,nn_3\Big)\Big)$$

$$qq_{30,1} = \frac{1}{8\,\omega_1^3\,\omega_2^2+4\,\omega_1^2\,\omega_2^3}\Big(8\,\varepsilon^2\Big(\Big(n_{30}\,\omega_2^2+n_{10}\Big(n_{12}-\frac{1}{4}\,m_9\Big)\Big)\omega_1^5+\frac{1}{2}\Big(n_{30}\,\omega_2^2+\Big(n_{12}-\frac{7}{4}\,m_9-\frac{3}{2}\,m_{11}\Big)n_{10}+\frac{1}{2}\,n_8\,m_{13}\Big)\omega_2\,\omega_1^4+\Big(\Big(\Big(-\frac{1}{4}\,m_9-\frac{1}{8}\,m_{11}\Big)n_{10}+n_{25}+n_{11}\,m_{10}+\frac{1}{8}\,n_8\,m_{13}\Big)\omega_2^2+\Big(n_{12}-\frac{3}{4}\,m_9\Big)n_5+\frac{1}{4}\,m_6\,n_8\Big)\omega_1^3+\frac{1}{2}\,\omega_2\Big(\Big(n_{11}\,m_{10}-\frac{1}{4}\,n_8\,m_{13}+\frac{1}{2}\,n_{10}\,m_{11}+n_{25}\Big)\omega_2^2+\Big(n_{12}-\frac{1}{4}\,m_9-\frac{1}{2}\,m_{11}\Big)n_5-\frac{3}{4}\,m_6\,n_8\Big)\omega_1^2+\omega_2^2\Big(m_5\,n_{11}-\frac{1}{8}\,m_6\,n_8+\frac{1}{8}\,n_5\,m_{11}\Big)\omega_1+\frac{1}{2}\,m_5\,n_{11}\,\omega_2^3\Big)\Big)$$

$$qq_{30,2} = -\frac{1}{\omega_1^2\,\omega_2^3\,(2\,\omega_1+\omega_2)\,(\omega_1^2-4\,\omega_2^2)}\Big(2\,\varepsilon^2\Big(\Big(\Big(n_{23}+\frac{1}{4}\,n_{10}\,m_{13}\Big)\omega_2^2+2\,n_{10}\,n_7\Big)\omega_1^7+\frac{7}{8}\,\omega_2\Big(\Big(n_{10}\,m_{13}+\frac{4}{7}\,n_{23}\Big)\omega_2^2+\Big(-\frac{6}{7}\,m_6+\frac{8}{7}\,n_7\Big)n_{10}+\frac{2}{7}\,m_9\,n_8\Big)\omega_1^6+\Big(\Big(-n_{13}^2-4\,n_{23}-\frac{3}{4}\,n_{10}\,m_{13}\Big)\omega_2^4+\Big(\Big(-\frac{1}{8}\,m_6-8\,n_7\Big)n_{10}+\frac{3}{4}\,n_5\,m_{13}+(-n_{13}+m_{10})\,n_6+\Big(-\frac{1}{4}\,m_{11}+\frac{1}{8}\,m_9\Big)n_8+n_{11}\,n_9-n_9^2+n_{16}\Big)\omega_2^2+2\,n_5\,n_7\Big)\omega_1^5+\frac{3}{8}\,\omega_2\Big(\Big(-\frac{28}{3}\,n_{10}\,m_{13}-\frac{4}{3}\,n_{13}^2-\frac{16}{3}\,n_{23}\Big)\omega_2^4+\Big(\Big(\frac{26}{3}\,m_6-\frac{32}{3}\,n_7\Big)n_{10}+\frac{1}{3}\,n_5\,m_{13}+\Big(-\frac{4}{3}\,n_{13}+\frac{4}{3}\,m_{10}\Big)n_6+(m_{11}-3\,m_9)\,n_8+\frac{4}{3}\,n_{11}\,n_9-\frac{4}{3}\,n_9^2+\frac{4}{3}\,n_{16}\Big)\omega_2^2-\frac{2}{3}\,n_5\,(m_6-4\,n_7)\Big)\omega_1^4+\omega_2^2\Big(-m_{13}\,n_{10}\,\omega_2^4+\Big(\frac{1}{2}\,n_{10}\,m_6-3\,n_5\,m_{13}-4\,n_6\,m_{10}+\Big(\frac{9}{8}\,m_{11}-\frac{1}{2}\,m_9\Big)n_8-n_{11}^2-4\,n_{16}\Big)\omega_2^2+\Big(\frac{1}{8}\,m_6-8\,n_7\Big)n_5+n_6\,(m_5-n_6)\Big)\omega_1^3+\frac{1}{2}\,\omega_2^3\,((-2\,n_{10}\,m_6-n_5\,m_{13}-4\,n_6\,m_{10}+(-3\,m_{11}+m_9)\,n_8-n_{11}^2-4\,n_{16})\,\omega_2^2+(2\,m_6-8\,n_7)\,n_5+n_6\,(m_5-n_6))\,\omega_1^2-4\,\omega_2^4\Big(\frac{1}{8}\,m_{11}\,\omega_2^2\,n_8+m_5\,n_6+\frac{1}{8}\,m_6\,n_5\Big)\omega_1-2\,m_5\,n_6\,\omega_2^5\Big)\Big)$$

$$qq_{40,1} = \frac{(\omega_1^2\,nn_2-\omega_2^2\,nn_2+\varepsilon\,mm_2\,nn_3+\varepsilon\,mm_4\,nn_1)\,\varepsilon}{2\,\omega_1^2-2\,\omega_2^2}$$

$$qq_{40,2} = \frac{(-\omega_1^2\,nn_2^2+4\,\omega_2^2\,mm_2\,nn_1+\omega_2^2\,nn_2^2-4\,mm_4\,nn_3)\,\varepsilon^2}{8\,\omega_1^2\,\omega_2-8\,\omega_2^3}$$

$$qq_{50,1} = \frac{1}{2\omega_1^4\omega_2^2 - 8\omega_1^2\omega_2^4}\Big(2\Big(\big(-6\omega_1^2 n_{34} - 4 m_{14} n_{11}\big)\omega_2^6 + \Big(\frac{3}{2} n_{34}\omega_1^4 + \big(n_{13} m_{12} - n_9 m_{14} - 2 n_{14} n_{12} + \frac{3}{2} m_{14} n_{11} - 2 n_{27}\big)\omega_1^2 - 4 m_7 n_{11}\Big)\omega_2^4 + \Big(\big(\frac{1}{2} n_{14} n_{12} + \frac{1}{2} n_{27}\big)\omega_1^2 + m_7 n_9 + \frac{1}{2} m_7 n_{11} + \frac{1}{2} n_6 m_{12} - 2 n_7 n_{12}\Big)\omega_1^2\omega_2^2 + \frac{1}{2} n_7 n_{12}\omega_1^4\Big)\varepsilon^2\Big)$$

$$qq_{50,2} = -\frac{1}{6\omega_1^4\omega_2^3 - 24\omega_1^2\omega_2^5}\Big(6\varepsilon^2\Big(\Big(\big(-\frac{8}{3} n_{14}^2 - m_{14} n_{13} - 2 n_{32}\big)\omega_1^2 - 4 n_6 m_{14}\Big)\omega_2^6 + \Big(\big(\frac{2}{3} n_{14}^2 + \frac{1}{2} n_{32}\big)\omega_1^4 + \Big(-\frac{20}{3} n_{14} n_7 + \frac{1}{2} n_6 m_{14} + n_{13} m_7 + \big(-n_9 + \frac{1}{2} n_{11}\big) m_{12} - \frac{2}{3} n_{12}^2 - 6 n_{18}\Big)\omega_1^2 - 4 m_7 n_6\Big)\omega_2^4 + \frac{3}{2}\Big(\big(\frac{10}{9} n_{14} n_7 + \frac{1}{9} n_{12}^2 + n_{18}\big)\omega_1^2 + m_7 n_6 - \frac{40}{9} n_7^2\Big)\omega_1^2\omega_2^2 + \frac{5}{3} n_7^2\omega_1^4\Big)\Big)$$

$$pp_{100,1} = \frac{(\omega_1^2 mm_1 - \omega_2^2 mm_1 - \varepsilon mm_2 nn_3 - \varepsilon mm_4 nn_1)\varepsilon}{2\omega_1^2 - 2\omega_2^2}$$

$$pp_{100,2} = -\frac{\big((mm_1^2 + 4 mm_2 nn_1)\omega_1^2 - mm_1^2\omega_2^2 - 4 nn_3 mm_4\big)\varepsilon^2}{8\omega_1^3 - 8\omega_1\omega_2^2}$$

$$pp_{200,1} = \frac{1}{6\omega_1^3\omega_2 - 24\omega_1\omega_2^3}\Big(3\Big(4 m_{34}\omega_2^6 + \Big(-m_{34}\omega_1^2 + (-4 n_{14} - 2 m_{13}) m_{12} + \big(-\frac{16}{3} n_{12} - 2 m_9 - m_{11}\big) m_{14} - 4 m_{27}\Big)\omega_2^4 + \Big(\big(\frac{4}{3} n_{12} m_{14} + n_{14} m_{12} + m_{27}\big)\omega_1^2 + (m_6 + 4 n_7) m_{12} + \frac{8}{3} m_7\big(n_{12} + \frac{3}{4} m_9 + \frac{3}{8} m_{11}\big)\Big)\omega_2^2 - \frac{2}{3}\big(n_{12} m_7 + \frac{3}{2} n_7 m_{12}\big)\omega_1^2\Big)\varepsilon^2\Big)$$

$$pp_{200,2} = \frac{1}{6\omega_1^3\omega_2^2 - 24\omega_1\omega_2^4}\Big(3\Big(\Big(\big(-\frac{16}{3} n_{14} - 2 m_{13}\big) m_{14} - 4 m_{32}\Big)\omega_2^6 + \Big(\big(\frac{4}{3} n_{14} m_{14} + m_{32}\big)\omega_1^2 + \big(m_6 + \frac{16}{3} n_7\big) m_{14} + \big(\frac{8}{3} n_{14} + 2 m_{13}\big) m_7 + (4 n_{12} + 2 m_9 + m_{11}) m_{12} + 4 m_{18}\Big)\omega_2^4 + \Big(\big(-n_{12} m_{12} - \frac{2}{3} n_{14} m_7 - \frac{4}{3} n_7 m_{14} - m_{18}\big)\omega_1^2 - \big(m_6 + \frac{8}{3} n_7\big) m_7\Big)\omega_2^2 + \frac{2}{3} m_7 n_7\omega_1^2\Big)\varepsilon^2\Big)$$

$$pp_{300,1} = \frac{1}{8\omega_1^4\omega_2^2 - 2\omega_1^2\omega_2^4}\Big(4\varepsilon^2\Big((3\omega_2^2 m_{24} + 2 m_9 n_{10})\omega_1^6 + \Big(-\frac{3}{4} m_{24}\omega_2^4 + \big(-\frac{3}{4} n_{10} m_9 + \frac{1}{2} n_{10} m_{11} + m_8 m_{10} - \frac{1}{2} n_8 m_{13} + m_{19}\big)\omega_2^2 + 2 n_5 m_9\Big)\omega_1^4 + \omega_2^2\Big(\big(-\frac{1}{4} m_8 m_{10} - \frac{1}{4} m_{19}\big)\omega_2^2 + m_8 m_5 - \frac{1}{4} n_8 m_6 - \frac{1}{4} n_5 m_9 - \frac{1}{2} n_5 m_{11}\Big)\omega_1^2 - \frac{1}{4} m_5\omega_2^4 m_8\Big)\Big)$$

$$pp_{300,2} = -\frac{1}{24\omega_1^5\omega_2^2 - 6\omega_1^3\omega_2^4}\Big(40\varepsilon^2\Big(\Big(\big(\frac{3}{20} n_{10} m_{13} + \frac{2}{5} m_{10}^2 + \frac{3}{10} m_{22}\big)\omega_2^2 + \frac{3}{5} n_{10} m_6\Big)\omega_1^6 + \Big(\big(-\frac{1}{10} m_{10}^2 - \frac{3}{40} m_{22}\big)\omega_2^4 + \Big(m_5 m_{10} - \frac{3}{40} n_{10} m_6 - \frac{3}{20} n_5 m_{13} + \frac{9}{10} m_{15} + \frac{1}{10} m_8^2 + \big(-\frac{3}{40} m_9 + \frac{3}{20} m_{11}\big) n_8\Big)\omega_2^2 + \frac{3}{5} n_5 m_6\Big)\omega_1^4 + \omega_2^2\Big(\big(-\frac{1}{4} m_5 m_{10} - \frac{1}{40} m_8^2 - \frac{9}{40} m_{15}\big)\omega_2^2 + m_5^2 - \frac{9}{40} n_5 m_6\Big)\omega_1^2 - \frac{1}{4} m_5^2\omega_2^4\Big)\Big)$$

$$pp_{400,1} = \frac{1}{\omega_1^4\omega_2^2 - 4\omega_1^2\omega_2^4}\Big(4\Big(\big(-m_{33}\omega_1^2 + m_{14}(n_{11} - m_8)\big)\omega_2^6 + \Big(\frac{1}{4} m_{33}\omega_1^4 + \Big(\big(-\frac{1}{2} n_{11} + \frac{1}{4} m_8 + \frac{1}{2} n_9\big) m_{14} - \frac{1}{2} n_{13} m_{12} - n_{14} m_9 - m_{21}\Big)\omega_1^2 + m_7(n_{11} - m_8)\Big)\omega_2^4 + \frac{1}{4}\big((m_9 n_{14} + m_{21})\omega_1^2 + (m_8 - 2 n_9) m_7 - 4 n_7 m_9 - n_6 m_{12}\big)\omega_1^2\omega_2^2 + \frac{1}{4}\omega_1^4 m_9 n_7\Big)\varepsilon^2\Big)$$

$$pp_{400,2} = -\frac{1}{4\omega_1^7\omega_2^2 - 17\omega_1^5\omega_2^4 + 4\omega_1^3\omega_2^6}\Big(8\Big(\Big(\big(\frac{1}{2} m_{31} + \frac{1}{2} n_{13} m_{14}\big)\omega_1^2 + m_5 m_{14}\Big)\omega_2^8 + \Big(\big(-\frac{17}{8} m_{31} - \frac{1}{2} m_{13}^2 - \frac{9}{4} n_{13} m_{14}\big)\omega_1^4 + \Big(\big(-\frac{1}{2} m_{13} + \frac{1}{2} n_{14}\big) m_6 + \big(-\frac{17}{4} m_5 - \frac{1}{4} n_6\big) m_{14} - \frac{1}{2} m_{11}^2 + \frac{1}{2} m_{17} + \frac{1}{2} m_9 m_{11} + \frac{1}{4} n_{11} m_{12} + \frac{1}{2} n_{13} m_7\Big)\omega_1^2 + m_7 m_5\Big)\omega_2^6 + \omega_1^2\Big(\big(\frac{1}{8} m_{13}^2 + \frac{1}{2} m_{31} + n_{13} m_{14}\big)\omega_1^4 + \Big(\big(\frac{1}{8} m_{13} - \frac{17}{8} n_{14}\big) m_6 + (m_5 + n_6) m_{14} - 2 n_{13} m_7 + \frac{1}{8} m_{11}^2 - \frac{1}{8} m_9 m_{11} + \big(-n_{11} - \frac{1}{8} n_9\big) m_{12} - \frac{1}{2} m_9^2 - \frac{17}{8} m_{17}\Big)\omega_1^2 - \frac{1}{2} m_6^2 + \frac{1}{2} n_7 m_6 - \frac{17}{4} m_7\big(m_5 - \frac{1}{17} n_6\big)\Big)\omega_2^4 + \omega_1^4\Big(\big(\frac{1}{2} m_{17} + \frac{1}{8} m_9^2 + \frac{1}{2} n_9 m_{12} + \frac{1}{2} n_{14} m_6\big)\omega_1^2 + \frac{1}{8} m_6^2 - \frac{17}{8} n_7 m_6 + m_7(m_5 - n_6)\Big)\omega_2^2 + \frac{1}{2} m_6 n_7\omega_1^6\Big)\varepsilon^2\Big)$$

$$qq_{100,2} = \frac{(-\omega_1^2 nn_2^2 + 4\omega_2^2 mm_2 nn_1 + \omega_2^2 nn_2^2 - 4 mm_4 nn_3)\varepsilon^2}{8\omega_1^2\omega_2 - 8\omega_2^3}$$

$$qq_{100,1} = \frac{(\omega_1^2 nn_2 - \omega_2^2 nn_2 + \varepsilon mm_2 nn_3 + \varepsilon mm_4 nn_1)\varepsilon}{2\omega_1^2 - 2\omega_2^2}$$

$$qq_{200,1} = -\frac{1}{4}\,\frac{1}{(2\omega_2 + \omega_1)\,\omega_2^3\,\big(\omega_1 - \frac{1}{2}\omega_2\big)\,\omega_1\,(-2\omega_2 + \omega_1)}\Big(\Big(\big(4\omega_1^2 n_{33} - 4 n_{11} n_{14}\big)\omega_2^7 + 2\Big(-4 n_{33}\omega_1^2 + 2 n_{14} n_9 + \frac{19}{3} n_{11} n_{14} + (2 n_{12} + 2 m_{11}) n_{13} + m_{14} n_8 + 2 n_{26}\Big)\omega_1\omega_2^6 + \Big(-n_{33}\omega_1^4 + \Big(\big(-4 m_{13} - \frac{34}{3} n_{14}\big) n_9 + \big(-4 m_{13} - \frac{22}{3} n_{14}\big) n_{11} + \big(-4 m_{11} - 4 m_9 - \frac{32}{3} n_{12}\big) n_{13} - 4 n_{10} m_{12} - 5 m_{14} n_8 - 4 n_{21} - 8 n_{26}\Big)\omega_1^2 + 4 n_{11} n_7 + 4 n_6 n_{12}\Big)\omega_2^5 - 4\Big(-\frac{1}{2} n_{33}\omega_1^4 + \Big(\big(-m_{13} - \frac{7}{6} n_{14}\big) n_9 + \frac{7}{6} n_{11} n_{14} + \big(\frac{1}{4} m_{11} - m_9 - \frac{13}{12} n_{12}\big) n_{13} - 2 n_{21} + \frac{1}{4} n_{26} - 2 n_{10} m_{12} - \frac{1}{2} m_{14} n_8\Big)\omega_1^2 + (n_7 + m_6) n_9 + \big(\frac{13}{6} n_7 + m_6\big) n_{11} + \frac{1}{2} m_7 n_8 + \frac{7}{3} n_6 n_{12} + n_6 m_{11} + \frac{1}{2} n_5 m_{12}\Big)$$

$$\omega_1\,\omega_2^{\,4}+4\,\Big(\Big(\Big(\frac{1}{4}\,m_{13}+\frac{13}{12}\,n_{14}\Big)\,n_9+\Big(\frac{1}{4}\,m_{13}+\frac{1}{3}\,n_{14}\Big)\,n_{11}+\Big(\frac{2}{3}\,n_{12}+\frac{1}{4}\,m_9+\frac{1}{4}\,m_{11}\Big)\,n_{13}+\frac{1}{4}\,n_{21}+\frac{1}{2}\,n_{26}\Big)\,\omega_1^{\,2}+\Big(m_6+\frac{11}{6}\,n_7\Big)\,n_9$$

$$+n_5\,m_{12}+\frac{1}{3}\,n_{11}\,n_7+\frac{5}{12}\,n_6\,n_{12}+\frac{5}{4}\,m_7\,n_8+m_9\,n_6\Big)\,\omega_1^{\,2}\,\omega_2^{\,3}+\Big(\Big(\Big(\Big(-m_{13}-\frac{2}{3}\,n_{14}\Big)\,n_9+\Big(-m_9-\frac{4}{3}\,n_{12}\Big)\,n_{13}-2\,n_{21}\Big)\,\omega_1^{\,2}+\Big(\frac{4}{3}\,n_7+m_6\Big)\,n_9$$

$$+\Big(\frac{2}{3}\,n_7+m_6\Big)\,n_{11}-2\,m_7\,n_8+\frac{7}{3}\,n_6\,n_{12}+n_6\,m_{11}\Big)\,\omega_1^{\,3}\,\omega_2^{\,2}-\Big(\Big(m_6+\frac{1}{3}\,n_7\Big)\,n_9+\frac{4}{3}\,n_{11}\,n_7+\frac{2}{3}\,n_6\,\Big(n_{12}+\frac{3}{2}\,m_9\Big)\Big)\,\omega_1^{\,4}\,\omega_2+\frac{2}{3}\,n_7\,n_9\,\omega_1^{\,5}\Big)\,\varepsilon^2\Big)$$

$$qq_{200,\,2}=-\frac{1}{4}\;\frac{1}{(2\,\omega_2+\omega_1)\,\Big(\omega_1-\frac{1}{2}\,\omega_2\Big)\,\omega_2^{\,3}\,\omega_1\,(-2\,\omega_2+\omega_1)}\,\Big(\Big(-4\,\omega_1\,(n_{13}\,n_{14}+n_{31})\,\omega_2^{\,7}+\Big(\Big(\Big(4\,m_{13}+\frac{38}{3}\,n_{14}\Big)\,n_{13}+4\,m_{14}\,n_{10}+4\,n_{29}+8\,n_{31}\Big)\,\omega_1^{\,2}$$

$$-4\,n_{11}\,n_{12}-4\,n_{14}\,n_6\Big)\,\omega_2^{\,6}+4\,\Big(\Big(\Big(-m_{13}-\frac{11}{6}\,n_{14}\Big)\,n_{13}-2\,m_{14}\,n_{10}-2\,n_{29}+\frac{1}{4}\,n_{31}\Big)\,\omega_1^{\,2}+(n_7+m_6)\,n_{13}+\frac{17}{6}\,n_{14}\,n_6+(n_{12}+m_{11})\,n_9$$

$$+\frac{1}{2}\,m_{12}\,n_8+\frac{1}{2}\,m_{14}\,n_5+\frac{8}{3}\,n_{11}\,n_{12}+m_{11}\,n_{11}+n_{17}\Big)\,\omega_1\,\omega_2^{\,5}+\Big(\Big(\Big(\Big(-m_{13}-\frac{14}{3}\,n_{14}\Big)\,n_{13}-2\,n_{31}-n_{29}\Big)\,\omega_1^{\,4}+\Big(\Big(-4\,m_6-\frac{26}{3}\,n_7\Big)\,n_{13}+\Big(-4\,m_{13}$$

$$-\frac{14}{3}\,n_{14}\Big)\,n_6+\Big(-4\,m_{11}-4\,m_9-\frac{28}{3}\,n_{12}\Big)\,n_9-5\,m_{12}\,n_8-4\,m_{14}\,n_5-4\,m_7\,n_{10}-4\,m_9\,n_{11}-\frac{13}{3}\,n_{11}\,n_{12}-8\,n_{17}\Big)\,\omega_1^{\,2}+4\,n_6\,n_7\Big)\,\omega_2^{\,4}-\Big(\Big(\Big(-m_{13}$$

$$-\frac{4}{3}\,n_{14}\Big)\,n_{13}-2\,n_{29}\Big)\,\omega_1^{\,4}+\Big(\Big(m_6-\frac{4}{3}\,n_7\Big)\,n_{13}+\frac{13}{3}\,n_{14}\,n_6+\Big(-\frac{5}{3}\,n_{12}-4\,m_9+m_{11}\Big)\,n_9-2\,m_{12}\,n_8-8\,m_7\,n_{10}+\frac{8}{3}\,n_{11}\,n_{12}+m_{11}\,n_{11}+n_{17}\Big)\,\omega_1^{\,2}$$

$$+\Big(4\,m_6+\frac{22}{3}\,n_7\Big)\,n_6+2\,m_7\,n_5\Big)\,\omega_1\,\omega_2^{\,3}+\Big(\Big(\Big(\Big(\frac{2}{3}\,n_7+m_6\Big)\,n_{13}+\Big(m_{13}+\frac{2}{3}\,n_{14}\Big)\,n_6+\Big(m_{11}+m_9+\frac{7}{3}\,n_{12}\Big)\,n_9+m_9\,n_{11}+\frac{4}{3}\,n_{11}\,n_{12}+2\,n_{17}\Big)\,\omega_1^{\,2}$$

$$+4\,m_7\,n_5-\frac{4}{3}\,n_6\,n_7\Big)\,\omega_1^{\,2}\,\omega_2^{\,2}+\Big(\Big(-\frac{4}{3}\,n_{13}\,n_7-\frac{2}{3}\,\Big(n_{12}+\frac{3}{2}\,m_9\Big)\,n_9\Big)\,\omega_1^{\,2}+n_6\,\Big(m_6+\frac{1}{3}\,n_7\Big)\Big)\,\omega_1^{\,3}\,\omega_2-\frac{2}{3}\,n_6\,n_7\,\omega_1^{\,4}\Big)\,\varepsilon^2\Big)$$

$$qq_{300,\,1}=\frac{1}{2\,\omega_1^{\,4}\,\omega_2^{\,2}-8\,\omega_1^{\,2}\,\omega_2^{\,4}}\,\Big(2\,\varepsilon^2\,\Big(\Big(-6\,\omega_1^{\,2}\,n_{34}-4\,m_{14}\,n_{11}\Big)\,\omega_2^{\,6}+\Big(\frac{3}{2}\,n_{34}\,\omega_1^{\,4}+\Big(n_{13}\,m_{12}-n_9\,m_{14}-2\,n_{14}\,n_{12}+\frac{3}{2}\,n_{11}\,m_{14}-2\,n_{27}\Big)\,\omega_1^{\,2}$$

$$-4\,n_{11}\,m_7\Big)\,\omega_2^{\,4}+\Big(\Big(\frac{1}{2}\,n_{14}\,n_{12}+\frac{1}{2}\,n_{27}\Big)\,\omega_1^{\,2}+n_9\,m_7+\frac{1}{2}\,n_{11}\,m_7+\frac{1}{2}\,n_6\,m_{12}-2\,n_7\,n_{12}\Big)\,\omega_1^{\,2}\,\omega_2^{\,2}+\frac{1}{2}\,n_7\,n_{12}\,\omega_1^{\,4}\Big)\Big)$$

$$qq_{300,\,2}=-\frac{1}{6\,\omega_1^{\,4}\,\omega_2^{\,3}-24\,\omega_1^{\,2}\,\omega_2^{\,5}}\,\Big(6\,\varepsilon^2\,\Big(\Big(\Big(-\frac{8}{3}\,n_{14}^2-n_{13}\,m_{14}-2\,n_{32}\Big)\,\omega_1^{\,2}-4\,n_6\,m_{14}\Big)\,\omega_2^{\,6}+\Big(\Big(\frac{2}{3}\,n_{14}^2+\frac{1}{2}\,n_{32}\Big)\,\omega_1^{\,4}+\Big(-\frac{20}{3}\,n_7\,n_{14}+\frac{1}{2}\,n_6\,m_{14}$$

$$+n_{13}\,m_7+\Big(-n_9+\frac{1}{2}\,n_{11}\Big)\,m_{12}-\frac{2}{3}\,n_{12}^2-6\,n_{18}\Big)\,\omega_1^{\,2}-4\,n_6\,m_7\Big)\,\omega_2^{\,4}+\frac{3}{2}\,\omega_1^{\,2}\,\Big(\Big(\frac{10}{9}\,n_7\,n_{14}+\frac{1}{9}\,n_{12}^2+n_{18}\Big)\,\omega_1^{\,2}+n_6\,m_7-\frac{40}{9}\,n_7^2\Big)\,\omega_2^{\,2}+\frac{5}{3}$$

$$n_7^2\,\omega_1^{\,4}\Big)\Big)$$

$$qq_{400,\,1}=\frac{1}{4\,\omega_1^{\,4}\,\omega_2^{\,2}-\omega_1^{\,2}\,\omega_2^{\,4}}\,\Big(4\,\Big(\Big(n_{30}\,\omega_2^{\,2}+n_{10}\,(n_{12}-m_9)\Big)\,\omega_1^{\,6}+\Big(-\frac{1}{4}\,n_{30}\,\omega_2^{\,4}+\Big(\Big(-\frac{1}{4}\,n_{12}+\frac{1}{2}\,m_9-\frac{1}{2}\,m_{11}\Big)\,n_{10}+n_{11}\,m_{10}+\frac{1}{2}\,n_8\,m_{13}+n_{25}\Big)\,\omega_2^{\,2}$$

$$+n_5\,(n_{12}-m_9)\Big)\,\omega_1^{\,4}+\omega_2^{\,2}\,\Big(\Big(-\frac{1}{4}\,n_{11}\,m_{10}-\frac{1}{4}\,n_{25}\Big)\,\omega_2^{\,2}+n_{11}\,m_5-\frac{1}{4}\,n_5\,n_{12}+\frac{1}{4}\,n_8\,m_6+\frac{1}{2}\,n_5\,m_{11}\Big)\,\omega_1^{\,2}-\frac{1}{4}\,n_{11}\,m_5\,\omega_2^{\,4}\Big)\,\varepsilon^2\Big)$$

$$qq_{400,\,2}=-\frac{1}{4\,\omega_1^{\,6}\,\omega_2^{\,3}-17\,\omega_1^{\,4}\,\omega_2^{\,5}+4\,\omega_1^{\,2}\,\omega_2^{\,7}}\,\Big(4\,\varepsilon^2\,\Big(\Big((m_{13}\,n_{10}+n_{23})\,\omega_2^{\,2}+2\,n_{10}\,n_7\Big)\,\omega_1^{\,8}+\Big(\Big(-n_{13}^2-\frac{17}{4}\,n_{23}-\frac{9}{2}\,m_{13}\,n_{10}\Big)\,\omega_2^{\,4}+\Big((m_{10}-n_{13})\,n_6+\Big($$

$$-\frac{1}{2}\,m_6-\frac{17}{2}\,n_7\Big)\,n_{10}+n_{16}-n_9^2+n_5\,m_{13}+\frac{1}{2}\,n_8\,m_9+n_9\,n_{11}\Big)\,\omega_2^{\,2}+2\,n_5\,n_7\Big)\,\omega_1^{\,6}+\omega_2^{\,2}\,\Big(\Big(n_{23}+\frac{1}{4}\,n_{13}^2+2\,m_{13}\,n_{10}\Big)\,\omega_2^{\,4}+\Big(\Big(-\frac{17}{4}\,m_{10}$$

$$+\frac{1}{4}\,n_{13}\Big)\,n_6+(2\,m_6+2\,n_7)\,n_{10}-4\,n_5\,m_{13}-n_{11}^2-\frac{1}{4}\,n_9\,n_{11}+\Big(-\frac{1}{4}\,m_{11}-2\,m_9\Big)\,n_8+\frac{1}{4}\,n_9^2-\frac{17}{4}\,n_{16}\Big)\,\omega_2^{\,2}-n_6^2+n_6\,m_5+\frac{1}{2}\,n_5\,(m_6-17\,n_7)\Big)$$

$$\omega_1^{\,4}-\frac{17}{4}\,\omega_2^{\,4}\,\Big(\Big(-\frac{4}{17}\,n_8\,m_{11}-\frac{1}{17}\,n_{11}^2-\frac{4}{17}\,n_6\,m_{10}-\frac{4}{17}\,n_{16}\Big)\,\omega_2^{\,2}-\frac{1}{17}\,n_6^2+n_6\,m_5+\frac{8}{17}\,n_5\,(m_6-n_7)\Big)\,\omega_1^{\,2}+n_6\,m_5\,\omega_2^{\,6}\Big)\Big)$$

$$pp_{70,\,1}=\frac{1}{\omega_1^{\,4}\,\omega_2^{\,2}-4\,\omega_1^{\,2}\,\omega_2^{\,4}}\,\Big(4\,\varepsilon^2\,\Big(\Big(-m_{33}\,\omega_1^{\,2}+m_{14}\,(n_{11}-m_8)\Big)\,\omega_2^{\,6}+\Big(\frac{1}{4}\,m_{33}\,\omega_1^{\,4}+\Big(\Big(-\frac{1}{2}\,n_{11}+\frac{1}{4}\,m_8+\frac{1}{2}\,n_9\Big)\,m_{14}-\frac{1}{2}\,n_{13}\,m_{12}-n_{14}\,m_9$$

$$-m_{21}\Big)\,\omega_1^{\,2}+m_7\,(n_{11}-m_8)\Big)\,\omega_2^{\,4}+\frac{1}{4}\,\omega_1^{\,2}\,\Big((m_9\,n_{14}+m_{21})\,\omega_1^{\,2}+(m_8-2\,n_9)\,m_7-4\,n_7\,m_9-n_6\,m_{12}\Big)\,\omega_2^{\,2}+\frac{1}{4}\,\omega_1^{\,4}\,m_9\,n_7\Big)\Big)$$

$$pp_{70,\,2}=-\frac{1}{4\,\omega_1^{\,7}\,\omega_2^{\,2}-17\,\omega_1^{\,5}\,\omega_2^{\,4}+4\,\omega_1^{\,3}\,\omega_2^{\,6}}\,\Big(8\,\varepsilon^2\,\Big(\Big(\Big(\frac{1}{2}\,m_{31}+\frac{1}{2}\,n_{13}\,m_{14}\Big)\,\omega_1^{\,2}+m_5\,m_{14}\Big)\,\omega_2^{\,8}+\Big(\Big(-\frac{17}{8}\,m_{31}-\frac{1}{2}\,m_{13}^2-\frac{9}{4}\,n_{13}\,m_{14}\Big)\,\omega_1^{\,4}+\Big(\Big(\frac{1}{2}\,n_{14}$$

$$-\frac{1}{2}\,m_{13}\Big)\,m_6+\Big(-\frac{17}{4}\,m_5-\frac{1}{4}\,n_6\Big)\,m_{14}+\frac{1}{2}\,m_{17}-\frac{1}{2}\,m_{11}^2+\frac{1}{2}\,n_{13}\,m_7+\frac{1}{2}\,m_9\,m_{11}+\frac{1}{4}\,n_{11}\,m_{12}\Big)\,\omega_1^{\,2}+m_7\,m_5\Big)\,\omega_2^{\,6}+\Big(\Big(\frac{1}{8}\,m_{13}^2+\frac{1}{2}\,m_{31}$$

$$+n_{13}\,m_{14}\Big)\,\omega_1^{\,4}+\Big(\Big(-\frac{17}{8}\,n_{14}+\frac{1}{8}\,m_{13}\Big)\,m_6+(m_5+n_6)\,m_{14}-2\,n_{13}\,m_7+\frac{1}{8}\,m_{11}^2-\frac{1}{8}\,m_9\,m_{11}+\Big(-n_{11}-\frac{1}{8}\,n_9\Big)\,m_{12}-\frac{17}{8}\,m_{17}-\frac{1}{2}\,m_9^2\Big)\,\omega_1^{\,2}-\frac{1}{2}$$

$$m_6^2+\frac{1}{2}\,n_7\,m_6-\frac{17}{4}\,\Big(m_5-\frac{1}{17}\,n_6\Big)\,m_7\Big)\,\omega_1^{\,2}\,\omega_2^{\,4}+\Big(\Big(\frac{1}{2}\,m_{17}+\frac{1}{8}\,m_9^2+\frac{1}{2}\,n_{14}\,m_6+\frac{1}{2}\,n_9\,m_{12}\Big)\,\omega_1^{\,2}+\frac{1}{8}\,m_6^2-\frac{17}{8}\,n_7\,m_6+m_7\,(m_5-n_6)\Big)\,\omega_1^{\,4}\,\omega_2^{\,2}$$

$$+\frac{1}{2}\,m_6\,n_7\,\omega_1^{\,6}\Big)\Big)$$

$$pp_{60,\,1}=\frac{\Big(\omega_1^{\,2}\,mm_1-\omega_2^{\,2}\,mm_1-\varepsilon\,mm_2\,nn_3-\varepsilon\,mm_4\,nn_1\Big)\,\varepsilon}{2\,\omega_1^{\,2}-2\,\omega_2^{\,2}}$$

$$pp_{60,\,2}=-\frac{\Big(\Big(mm_1^2+4\,mm_2\,nn_1\Big)\,\omega_1^{\,2}-mm_1^2\,\omega_2^{\,2}-4\,nn_3\,mm_4\Big)\,\varepsilon^2}{8\,\omega_1^{\,3}-8\,\omega_1\,\omega_2^{\,2}}$$

$$
\begin{aligned}
pp_{80,1} = {} & \frac{1}{8\,\omega_1^{\,4}\,\omega_2^{\,2} - 2\,\omega_1^{\,2}\,\omega_2^{\,4}} \Big(4 \Big(\big(3\,\omega_2^{\,2}\, m_{24} + 2\, m_9\, n_{10}\big)\, \omega_1^{\,6} + \Big(-\frac{3}{4}\, m_{24}\, \omega_2^{\,4} + \Big(-\frac{3}{4}\, n_{10}\, m_9 + \frac{1}{2}\, n_{10}\, m_{11} + m_8\, m_{10} - \frac{1}{2}\, n_8\, m_{13} + m_{19} \Big)\, \omega_2^{\,2} \\
& + 2\, n_5\, m_9 \Big)\, \omega_1^{\,4} + \omega_2^{\,2} \Big(\Big(-\frac{1}{4}\, m_8\, m_{10} - \frac{1}{4}\, m_{19} \Big)\, \omega_2^{\,2} + m_8\, m_5 - \frac{1}{4}\, n_8\, m_6 - \frac{1}{4}\, n_5\, m_9 - \frac{1}{2}\, n_5\, m_{11} \Big)\, \omega_1^{\,2} - \frac{1}{4}\, m_5\, \omega_2^{\,4}\, m_8 \Big)\, \varepsilon^2 \Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
pp_{80,2} = {} & -\frac{1}{24\,\omega_1^{\,5}\,\omega_2^{\,2} - 6\,\omega_1^{\,3}\,\omega_2^{\,4}} \Big(40 \Big(\Big(\Big(\frac{3}{20}\, n_{10}\, m_{13} + \frac{2}{5}\, m_{10}^2 + \frac{3}{10}\, m_{22} \Big)\, \omega_2^{\,2} + \frac{3}{5}\, n_{10}\, m_6 \Big)\, \omega_1^{\,6} + \Big(\Big(-\frac{1}{10}\, m_{10}^2 - \frac{3}{40}\, m_{22} \Big)\, \omega_2^{\,4} + \Big(m_5\, m_{10} \\
& - \frac{3}{40}\, n_{10}\, m_6 - \frac{3}{20}\, n_5\, m_{13} + \frac{9}{10}\, m_{15} + \frac{1}{10}\, m_8^2 + \Big(-\frac{3}{40}\, m_9 + \frac{3}{20}\, m_{11} \Big)\, n_8 \Big)\, \omega_2^{\,2} + \frac{3}{5}\, n_5\, m_6 \Big)\, \omega_1^{\,4} + \omega_2^{\,2} \Big(\Big(-\frac{1}{4}\, m_5\, m_{10} - \frac{1}{40}\, m_8^2 - \frac{9}{40}\, m_{15} \Big)\, \omega_2^{\,2} + \\
& m_5^2 - \frac{9}{40}\, n_5\, m_6 \Big)\, \omega_1^{\,2} - \frac{1}{4}\, m_5^2\, \omega_2^{\,4} \Big)\, \varepsilon^2 \Big)
\end{aligned}
$$

$$
qq_{60,1} = \frac{\big(\omega_1^{\,2}\, nn_2 - \omega_2^{\,2}\, nn_2 + \varepsilon\, mm_2\, nn_3 + \varepsilon\, mm_4\, nn_1\big)\, \varepsilon}{2\,\omega_1^{\,2} - 2\,\omega_2^{\,2}}
$$

$$
qq_{60,2} = \frac{\big(-\omega_1^{\,2}\, nn_2^2 + 4\,\omega_2^{\,2}\, mm_2\, nn_1 + \omega_2^{\,2}\, nn_2^2 - 4\, mm_4\, nn_3\big)\, \varepsilon^2}{8\,\omega_1^{\,2}\,\omega_2 - 8\,\omega_2^{\,3}}
$$

$$
\begin{aligned}
qq_{80,1} = {} & \frac{1}{2\,\omega_1^{\,4}\,\omega_2^{\,2} - 8\,\omega_1^{\,2}\,\omega_2^{\,4}} \Big(2 \Big(\big(-6\,\omega_1^{\,2}\, n_{34} - 4\, m_{14}\, n_{11}\big)\, \omega_2^{\,6} + \Big(\frac{3}{2}\, n_{34}\, \omega_1^{\,4} + \Big(n_{13}\, m_{12} - n_9\, m_{14} - 2\, n_{14}\, n_{12} + \frac{3}{2}\, n_{11}\, m_{14} - 2\, n_{27} \Big)\, \omega_1^{\,2} - 4\, n_{11}\, m_7 \Big)\, \omega_2^{\,4} \\
& + \omega_1^{\,2} \Big(\Big(\frac{1}{2}\, n_{14}\, n_{12} + \frac{1}{2}\, n_{27} \Big)\, \omega_1^{\,2} + n_9\, m_7 + \frac{1}{2}\, n_{11}\, m_7 + \frac{1}{2}\, n_6\, m_{12} - 2\, n_7\, n_{12} \Big)\, \omega_2^{\,2} + \frac{1}{2}\, n_7\, n_{12}\, \omega_1^{\,4} \Big)\, \varepsilon^2 \Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
qq_{80,2} = {} & -\frac{1}{6\,\omega_1^{\,4}\,\omega_2^{\,3} - 24\,\omega_1^{\,2}\,\omega_2^{\,5}} \Big(6 \Big(\Big(\Big(-\frac{8}{3}\, n_{14}^2 - n_{13}\, m_{14} - 2\, n_{32} \Big)\, \omega_1^{\,2} - 4\, n_6\, m_{14} \Big)\, \omega_2^{\,6} + \Big(\Big(\frac{2}{3}\, n_{14}^2 + \frac{1}{2}\, n_{32} \Big)\, \omega_1^{\,4} + \Big(-\frac{20}{3}\, n_7\, n_{14} + \frac{1}{2}\, n_6\, m_{14} + n_{13}\, m_7 \\
& + \Big(-n_9 + \frac{1}{2}\, n_{11} \Big)\, m_{12} - \frac{2}{3}\, n_{12}^2 - 6\, n_{18} \Big)\, \omega_1^{\,2} - 4\, n_6\, m_7 \Big)\, \omega_2^{\,4} + \frac{3}{2}\, \omega_1^{\,2} \Big(\Big(\frac{10}{9}\, n_7\, n_{14} + \frac{1}{9}\, n_{12}^2 + n_{18} \Big)\, \omega_1^{\,2} + n_6\, m_7 - \frac{40}{9}\, n_7^2 \Big)\, \omega_2^{\,2} + \frac{5}{3}\, n_7^2\, \omega_1^{\,4} \Big)\, \varepsilon^2 \Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
qq_{70,1} = {} & \frac{1}{4\,\omega_1^{\,4}\,\omega_2^{\,2} - \omega_1^{\,2}\,\omega_2^{\,4}} \Big(4 \Big(\big(n_{30}\, \omega_2^{\,2} + n_{10}\, (n_{12} - m_9)\big)\, \omega_1^{\,6} + \Big(-\frac{1}{4}\, n_{30}\, \omega_2^{\,4} + \Big(\Big(-\frac{1}{4}\, n_{12} + \frac{1}{2}\, m_9 - \frac{1}{2}\, m_{11} \Big)\, n_{10} + n_{11}\, m_{10} + \frac{1}{2}\, n_8\, m_{13} + n_{25} \Big)\, \omega_2^{\,2} \\
& + n_5\, (n_{12} - m_9) \Big)\, \omega_1^{\,4} + \Big(\Big(-\frac{1}{4}\, n_{11}\, m_{10} - \frac{1}{4}\, n_{25} \Big)\, \omega_2^{\,2} + n_{11}\, m_5 - \frac{1}{4}\, n_5\, n_{12} + \frac{1}{4}\, n_8\, m_6 + \frac{1}{2}\, n_5\, m_{11} \Big)\, \omega_2^{\,2}\, \omega_1^{\,2} - \frac{1}{4}\, \omega_2^{\,4}\, n_{11}\, m_5 \Big)\, \varepsilon^2 \Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
qq_{70,2} = {} & -\frac{1}{4\,\omega_1^{\,6}\,\omega_2^{\,3} - 17\,\omega_1^{\,4}\,\omega_2^{\,5} + 4\,\omega_1^{\,2}\,\omega_2^{\,7}} \Big(4 \Big(\big((m_{13}\, n_{10} + n_{23})\, \omega_2^{\,2} + 2\, n_{10}\, n_7 \big)\, \omega_1^{\,8} + \Big(\Big(-\frac{9}{2}\, m_{13}\, n_{10} - \frac{17}{4}\, n_{23} - n_{13}^2 \Big)\, \omega_2^{\,4} + \Big((m_{10} - n_{13})\, n_6 + \Big(\\
& -\frac{1}{2}\, m_6 - \frac{17}{2}\, n_7 \Big)\, n_{10} - n_9^2 + n_{16} + n_5\, m_{13} + \frac{1}{2}\, n_8\, m_9 + n_9\, n_{11} \Big)\, \omega_2^{\,2} + 2\, n_5\, n_7 \Big)\, \omega_1^{\,6} + \omega_2^{\,2} \Big(\Big(2\, m_{13}\, n_{10} + n_{23} + \frac{1}{4}\, n_{13}^2 \Big)\, \omega_2^{\,4} + \Big(\Big(-\frac{17}{4}\, m_{10} \\
& + \frac{1}{4}\, n_{13} \Big)\, n_6 + (2\, m_6 + 2\, n_7)\, n_{10} - 4\, n_5\, m_{13} - n_{11}^2 - \frac{1}{4}\, n_9\, n_{11} + \Big(-\frac{1}{4}\, m_{11} - 2\, m_9 \Big)\, n_8 + \frac{1}{4}\, n_9^2 - \frac{17}{4}\, n_{16} \Big)\, \omega_2^{\,2} - n_6^2 + n_6\, m_5 + \frac{1}{2}\, n_5\, (m_6 - 17\, n_7) \Big) \\
& \omega_1^{\,4} - \frac{17}{4}\, \omega_2^{\,4} \Big(\Big(-\frac{4}{17}\, n_8\, m_{11} - \frac{1}{17}\, n_{11}^2 - \frac{4}{17}\, n_6\, m_{10} - \frac{4}{17}\, n_{16} \Big)\, \omega_2^{\,2} - \frac{1}{17}\, n_6^2 + n_6\, m_5 + \frac{8}{17}\, n_5\, (m_6 - n_7) \Big)\, \omega_1^{\,2} + n_6\, m_5\, \omega_2^{\,6} \Big)\, \varepsilon^2 \Big)
\end{aligned}
$$

مراجع

[1] Y. Hikami . (1986), ” Rain vibrations of cables of cable stayed bridge ” **Journal of Wind Engineering** , 27(3):23-34

[2] J.A. Main, N.P. Jones. (2000), ” A comparison of full-scale measurements of stay cable vibration ” **In Advanced Technology in Structural Engineering**, 1-8

[3] J. Main, N. Jones, H. Yamaguchi. (2001), ”Characterization of rain-wind-induced stay-cable vibrations from full-scale measurements”, In Proceedings of the Fourth International Symposium on Cable Dynamics, 235-242

[4] M. Matsumoto. (1998), ” Observed behavior of prototype cable vibrationn and its generation mechanism ” **Bridge Aerodynamics**, 189-211

[5] M. Matsumoto, Y. Daito, T. Kanamura, Y. Shigemura, S. Sakuma, H. Ishizaki. (1998), ” Wind-induced vibration of cables of cable-stayed bridges” **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, 74:1015-1027

[6] Y. Hikami, N. Shiraishi. (1988), ” Rain-wind induced vibrations of cables stayed bridges ” **Journal of wind engineering and industrial aerodynamics**, 29(1):409-418

[7] D. Zuo, N.P. Jones. (2010), ” Interpretation of field observations of wind-and rain-wind-induced stay cable vibrations ” **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, 98(2):73-87

[8] T. Saito, M. Matsumoto, M. Kitazawa. (1994), ” Rain-wind excitation of cables on cable-stayed Higashi-Kobe Bridge and cable vibration control ” **Proceedings of the Cable-Stayed and Suspension Bridges**, 2:507-514

[9] T. Miyata, H. Yamada, T. Hojo. (1994), ”Aerodynamic response of PE stay cables with pattern-indented surface”, In Proceedings of the International Conference on Cablestayed and Suspension Bridges, 515-522

[10] S. Cheng, G. L. Larose, M. G. Savage, H. Tanaka. (2003), " Aerodynamic behaviour of an inclined circular cylinder " **Wind and Structures** , 6(3):197-208

[11] N. Nikitas, J. Macdonald, T. Andersen, J. Jakobsen, M. Savage, B. R. McAuliffe . (2009), " Wind tunnel testing of an inclined aeroelastic cable model-Pressure and motion characteristics, Part I " **Proceedings of EACWE** , 5:477-480

[12] J.L. Lilien . (2000), " Review of galloping control methods " **Electra** , 191:45-61

[13] M. Novak . (1971), "Galloping and vortex induced oscillations of structures", In Proceedings of the third interrational conference on Wind effect on building and structures

[14] C. Gurung, H. Yamaguchi, T. Yukino . (2002), " Identification of large amplitude wind-induced vibration of ice-accreted transmission lines based on field observed data " **Engineering structures** , 24(2):179-188

[15] J. Wang, J.L. Lilien . (1998), " Overhead electrical transmission line galloping. A full multi-span 3-DOF model, some applications and design recommendations " **IEEE Transactions on Power Delivery** , 13(3):909-916

[16] J. Jakobsen, T. Andersen, J. Macdonald, N. Nikitas, G. Larose, M. Savage, B. McAuliffe . (2012), " Wind-induced response and excitation characteristics of an inclined cable model in the critical Reynolds number range " **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics** , 110:100-112

[17] G. Alonso, J. Meseguer, I. Pérez-Grande . (2007), " Galloping stability of triangular cross-sectional bodies: a systematic approach " **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics** , 95(9):928-940

[18] G. Piccardo, L. Carassale, A. Freda . (2011), " Critical conditions of galloping for inclined square cylinders " **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics** , 99(6):748-756

[19] G. Alonso, J. Meseguer, A. Sanz-Andrés, E. Valero . (2010), " On the galloping instability of two-dimensional bodies having elliptical cross-sections " **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics** , 98(8):438-448

[20] A. Luongo, D. Zulli . (2012), " Dynamic instability of inclined cables under combined wind flow and support motion. Nonlinear Dynamics " **Nonlinear Dynamics** , 67(1):71-87

[21] M. Lepidi, V. Gattulli . (2016), " Nonlinear interactions in the flexible multi-body dynamics of cable-supported bridge cross-sections " **International Journal of Non-Linear Mechanics** , 80:14-28

[22] A. LUONGO, G. REGA AND F. VESTRONI . (1982), " MONOFREQUENT OSCILLATIONS OF A NON-LINEAR MODEL OF A SUSPENDED CABLE " **Journal of Sound and Vibration** , 82(2):247-259

[23] B.Z. Guo . (2000), " Asymptotic behavior of the energy of vibration of a moving string with varying lengths " **Journal of Vibration and Control** , 6(4):491-507

[24] S.Y. Lee, M. Lee . (2002), " An ewwave technique for free vibration of a string with time-varying length " **Journal of Applied Mechanics** , 69(1):83-87

[25] E.W. Chen, N.S. Ferguson . (2014), " Analysis of energy dissipation in an elastic moving string with a viscous damper at one end " **Journal of Sound and Vibration** , 333:2556-2570

[26] F. Benedettini, G. Rega . (1987), " Non-linear dynamics of an elastic cable under planar excitation " **International Journal of non-linear mechanics** , 22(6):497-509

[27] F. Benedettini, G. Rega . (1989), " Planar non-linear oscillations of elastic cables under subharmonic resonance conditions " **Journal of Sound and Vibration** , 132(3):367-381

[28] K. Takahashi, Q. Wu, S. Nakamura . (), " In-plane antisymmetric response of cables through bifurcation under symmetric sinusoidally time-varying load " **Journal of Sound and Vibration** , 268(1):1-14

[29] Y. Zhao, C. Sun, Z. Wang, L. Wang . (2014), " Analytical solutions for resonant response of suspendedcables subjected to external excitation, Jornal of Nonlinear Dynamics " **Nonlinear Dynamics** , 78(2):1017-1032

[30] N.C. Perkins . (1992), " Modal interactions in the nonlinear response of elastic cables under parametric external excitation " **The International Journal of Non- Linear Mechanics** , 27:233-250

[31] F. Benedettini, G. Rega, R. Alaggio . (1995), " Non-linear oscillations of a four-degree-of-freedom model of asuspended cable under multiple internal resonance conditions " **Journal of sound and vibration** , 182(5):775-798

[32] Y. Cai, S.S. Chen . (1994), " Dynamics of elastic cable under parametric and external resonances " **Journal of Engineering Mechanics** , 120:1786-1802

[33] T. Guo, etal . (2016), ” Cable dynamics under non-ideal support excitations: Nonlinear dynamic interactions and asymptotic modelling ” **Journal of Sound and Vibration** , 384:253-272

[34] G. Piccardo, L.C. Pagnini, F. Tubino . (2015), ” Some research perspectives in galloping phenomena: critical conditions and post-critical behavior ” **Continuum Mechanics and Thermodynamics** , 27(1-2):261-285

[35] R.D. Blevins . (2001), ”**Flow-induced vibration** ”, Krieger Pub Co

[36] P. Hemon, F. Santi . (2002), ” On the aeroelastic behaviour of rectangular cylinders in cross-flow ” **Journal of Fluids and Structures** , 16(7):855-889

[37] P. Maniadis, G. Kopidakis, S. Aubry . (2004), ” Classical and quantum targeted energy transfer between nonlinear oscillators ” **Physica D: Nonlinear Phenomena** , 188(3-4):153-177

[38] J. Guckenheimer,M. Wechselberger, L.S. Young . (2006), ” Chaotic attractors of relaxation oscillators ” **Nonlinearity** , 19(3):701

[39] Y. Starosvetsky, O.V. Gendelman . (2008), ” Dynamics of a strongly nonlinear vibration absorber coupled to a harmonically excited two-degree-of-freedom system ” **Journal of Sound and Vibration** , 312:234-256

[40] B. Vaurigaud, L.I. Manevitch, C.H. Lamarque . (2011), ” Passive control of aeroelastic instability in a long span bridge model prone to coupled flutter using targeted energy transfer ” **Journal of Sound and Vibration** , 330:2580-2595

[41] S.N.J. Costa , C.H.G. Hassmann , J.M. Balthazar, M.J.H. Dantas . (2009), ” On energy transfer between vibrating systems under linear and nonlinear interactions. Nonlinear Dynamics ” **Nonlinear dynamics** , 57(1-2):57-67

[42] M.J.H. Dantas, J.M. Balthazar . (2008), ” On energy transfer between linear and nonlinear oscillators ” **Journal of Sound and Vibration** , 315:1047-1070

[43] J.L.P. Felix, J.M. Balthazar, M.J.H. Dantas . (2009), ” On energy pumping, synchronization and beat phenomenon in a nonideal structure coupled to an essentially nonlinear oscillator ” **Nonlinear dynamics** , 56:1-11

[44] A.M. Tusset, J.M. Balthazar, F.R. Chavarette, , J.L.P. Felix . (2012), " On energy transfer phenomena, in a nonlinear ideal and nonideal essential vibrating systems, coupled to a (MR) magneto-rheological damper " **Nonlinear Dynamics** , 69:1859-1880

[45] Y. Zhang, J. Zang, T.Z. Yang, B. Fang, X. Wen . (2013), " Vibration Suppression of an Axially Moving String with Transverse Wind Loadings by a Nonlinear Energy Sink " **Mathematical Problems in Engineering** , Article ID 348042

[46] A. Luongo, D. Zulli . (2015), " Nonlinear energy sink to control vibrations of an internally nonresonant elastic string " **Meccanica** , 50(3):781-794

[47] D. Zulli, A. Luongo . (2013), "Nonlinear Energy Sink to control vibrations of a nonlinear elastic string ", InXXI AIMETA Conference-Italian Association of Theoretical and Applied Mechanics, Italian Ministry of University

[48] S. Cheng, G.L. Larose, M.G. Savage, H. Tanaka . (2003), " Aerodynamic behaviour of an inclined circular cylinder " **Wind and Structures** , 6(3):197-208

[49] J.H. Macdonald, G.L. Larose . (2006), " A unified approach to aerodynamic damping and drag/lift instabilities, and its application to dry inclined cable galloping " **Journal of Fluids and Structures** , 22(2):229-252

[50] J. H. Macdonald, G. L. Larose . (2008), " Two-degree-of-freedom inclined cable galloping—Part 2: Analysis and prevention for arbitrary frequency ratio " **, Journal of wind Engineering and industrial Aerodynamics** , 96(3):308-326

[51] P. Yu, A. Shah, N. Popplewell . (1992), " Inertially coupled galloping of iced conductors " **Journal of applied mechanics** , 59(1):140-145

[52] P. Yu, Y. Desai, A. Shah, N. Popplewell . (1993), " Three-degree-of-freedom model for galloping. Part I: Formulation " **Journal of Engineering Mechanics** , 119(12):2404-2425

[53] P. Yu, Y. Desai, N. Popplewell, A. Shah . (1993), " Three-degree-of-freedom model for galloping. Part II: Solutions " **Journal of engineering mechanics** , 119(12):2426-2448

[54] A. Luongo, G. Piccardo . (1996), "On the Influence of the Torsional Stiffness of Non-linear Galloping of Suspended Cables", InEUROMECH 2nd European Nonlinear Oscillations Conference

[55] K. McConnell, C.N. Chang . (1986), " A study of the axial-torsional coupling effect on a sagged transmission line " **Experimental Mechanics** , 26(4):324-329

[56] W. N. White, S. Venkatasubramanian, P. M. Lynch, C.L. D. Huang . (1992), " The equations of motion for the torsional and bending vibrations of a stranded cable " **Journal of applied mechanics** , 59(2):224-229

[57] A. Luongo, D. Zulli, G. Piccardo . (2007), " A linear curved-beam model for the analysis of galloping in suspended cables " **Journal of Mechanics of Materials and Structures** , 2(4):675-694

[58] A. Luongo, D. Zulli, G. Piccardo . (2009), " On the effect of twist angle on nonlinear galloping of suspended cables " **Computers and Structures** , 87(15-16):1003-1014

[59] Z. Yan, Z. Yan, Z. Li, T. Tan . (2012), " Nonlinear galloping of internally resonant iced transmission lines considering eccentricity " **Journal of Sound and Vibration** , 331(15):3599-3616

[60] C.L.Lee , N.C.Perkins . (1992), " Nonlinear oscillations of suspended cables containing a two-to-one internal resonance " **Nonlinear Dynamics** , 3(6):465-490

[61] A. Luongo, D. Zulli . (2013), "**Mathematical models of beams and cables** ", John Wiley and Sons

[62] H.M.Irvine . (1981), "**Cable Structure** ", The MIT Press

[63] A. Luongo, D. Zulli . (2015), " Nonlinear energy sink to control elastic strings: the internal resonance case " **Nonlinear Dynamics** , 81(1-2):425-435

[64] P. Hagedorn, A. DasGupta . (2007), "**Vibrations and Waves in Continuous Mechanical Systems** ", John Wiley and Sons

[65] Sadripoor S.,(2017), Master thesis,"Analysis of the dynamic behavior and vibration caused by galloping of a hanging cable with cosideration different boundry conditin", Faculty of Mechanical Engineering, Shahrood University of Technology

Aabstract

Galloping of cables is a kind of self-excited vibration with high amplitude and low frequency. In this thesis, based on the curved-beam theory, a nonlinear galloping model considering four degrees of freedom (normal, bi-normal and tangential displacement components and twist), bending stiffness and torsional stiffness, for a horizontal iced cable with eccentricity of cross section, in two cases simply support cable and elastically constrained on a cable support (normal and bi-normal directions), is formulated. Aerodynamic modeling is also done with the assumption of quasi-steady theory. The equations of motion include four equations, using a reduced galloping model, the number of equations has reached two. These two equations that contain quadratic and cubic nonlinearities in both velocity and displacement terms, are discretized via the Galerkin method. By using Multiple Scale method, for simply support cable in two cases 1:1 and 2:1 internal resonant and for elastically constrained on a cable support in five cases 1:1, 2:1, 3:1, 1:2 internal resonant and no internal resonant, Reduced Amplitude Modulation Equations (RAME) is obtained. The RAME equations are solved and the results are presented for different states of the stiffness of the support in two directions, normal and bi-normal. Finally, to ensure the accuracy of the results, two equations of the reduced model are solved by numerical simulation and the results proved by the reduced model numerically integrated in time history. Wind speed, stiffness of the support in two directions (normal and bi-normal) and time are as variable parameters in the results.

Keywords: galloping, cable, curved-beam, stiffness of the support, Multiple Scale method, nonlinear, internal resonant

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mechanical Engineering

MSc Thesis in: Nonlinear Vibration

Nonlinear vibration and stability analysis of a cable, considering boundary condition stiffness

By: Mohammadreza Shekari

Supervisor

Amir Jalali

September 2018