

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک

پایان نامه کارشناسی ارشد مهندسی طراحی کاربردی

مدل سازی و تحلیل حرکت بازوی رباتیک با محرکه کابل تاییده شده ویسکوالاستیک

نگارنده: مسعود جعفرپور

اساتید راهنما

دکتر مهدی بامداد

دکتر محمدباقر نظری

شهریور ۱۳۹۷

تقدیم به :

پدرم

و

مادرم

تشکر و قدردانی

با تقدیر بیکران از محضر اساتید محترم و گران قدر جناب آقایان دکتر مهدی بامداد و دکتر محمدباقر نظری که زحمات بی دریغ و راهنمایی های مستمرشان در تمامی مراحل نگارش این پژوهش همواره چراغ راه اینجانب بود.

تعهدنامه

اینجانب مسعود جعفرپور محله دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی مکانیک - گرایش طراحی کاربردی دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه "مدلسازی و تحلیل حرکت بازوی رباتیک با محرکه کابل تابیده شده ویسکوالاستیک" تحت راهنمایی آقای دکتر مهدی بامداد و آقای دکتر محمدباقر نظری متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « **Shahrood University of Technology** » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پایان‌نامه، به مدل‌سازی و تحلیل دینامیکی سیستم محرکه ریسمان تابیده پرداخته شده است. برای این کار، ریسمان به صورت یک جسم پیوسته فرض شده و سپس معادلات دینامیکی حرکت آن بدست آمده است. در استخراج معادلات دینامیکی ریسمان فرض شده است که جنس ریسمان یک ماده ویسکوالاستیک می‌باشد. در این مدل‌سازی، معادلات دینامیکی ریسمان تابیده یک سری معادلات دیفرانسیل جزئی می‌باشد که حل آن به وسیله روش عددی تفاضل محدود انجام شده است. همچنین برای آنکه بتوان تحلیل دقیقی از رفتار دینامیکی ریسمان ارائه داد، سیستم ریسمان تابیده در نرم‌افزار آباکوس نیز مدل شده است. در این پایان‌نامه، علاوه بر نتایج حالت پایای ریسمان تابیده، نتایج حالت گذرای آن نیز گزارش شده است. همچنین، نحوه انتخاب موتور مناسب برای ریسمان نیز بیان شده است.

واژه‌های کلیدی: سیستم محرکه، سیستم محرکه ریسمان تابیده، ویسکوالاستیک، مدل‌سازی دینامیکی، روش عددی تفاضل محدود، بازوی رباطیکی.

فهرست مطالب

فصل اول:	۱
۱-۱- مقدمه	۲
۲-۱- سیستم محرکه ریسمان تاییده	۲
۳-۱- هدف پایان نامه	۱۲
۴-۱- ساختار پایان نامه	۱۴
فصل دوم:	۱۷
۱-۲- مقدمه	۱۸
۲-۲- معادلات سینماتیکی ریسمان تاییده	۱۸
۳-۲- مقدمه ای بر مواد ویسکوالاستیک	۲۳
۴-۲- معادلات دینامیکی ریسمان تاییده	۲۶
۵-۲- تاثیر مدل ویسکوالاستیک در مدلسازی دینامیکی	۳۹
۶-۲- گسسته سازی	۴۱
۷-۲- جمع بندی	۴۴
فصل سوم:	۴۵
۱-۳- مقدمه	۴۶
۲-۳- همگرایی حل عددی معادلات دینامیکی ریسمان	۴۶
۳-۳- تاثیر مدل ویسکوالاستیک بر دینامیک ریسمان	۵۰
۴-۳- مدلسازی در نرم افزار آباکوس	۵۴
۵-۳- صحت سنجی	۶۰
۶-۳- نتایج دیگر	۶۳
۷-۳- انتخاب موتور	۶۶
۸-۳- جمع بندی	۷۱
فصل چهارم:	۷۳
۱-۴- جمع بندی مطالب پایان نامه	۷۴

۷۵	۲-۴- نتیجه گیری
۷۵	۳-۴- پیشنهاد تحقیقات آینده
۷۶	پیوست الف
۸۰	مراجع

فهرست جداول

- جدول ۳-۱- مشخصات هندسی و جنس ماده ریسمان ۴۷
- جدول ۳-۲- تفاوت تغییر طولهای بدست آمده از روشهای مختلف به ازای نیروهای مختلف و تعداد ۱۰۰ دور ۶۰
- جدول ۳-۳- مشخصات هندسی و جنس ماده ریسمان بر اساس [۸] ۶۱
- جدول ۳-۴- مقایسه تغییر طولهای بدست آمده برحسب سانتیمتر از شبیه سازی آباکوس و مقادیر تجربی به ازای نیروهای مختلف و تعداد ۴۰ دور برای دو الیاف ۶۲
- جدول ۳-۵- مقایسه تغییر طولهای بدست آمده برحسب سانتیمتر از شبیه سازی آباکوس و مقادیر تجربی به ازای نیروهای مختلف و تعداد ۴۰ دور برای سه الیاف ۶۲
- جدول ۳-۶- نتایج بدست آمده به ازای $M_{stall} = 0.001 N \cdot m$ و $\omega_{nl} = 2000 rpm$ ۶۸
- جدول ۳-۷- نتایج بدست آمده به ازای $M_{stall} = 0.001 N \cdot m$ و $\omega_{nl} = 5000 rpm$ ۶۹
- جدول ۳-۸- نتایج بدست آمده به ازای $M_{stall} = 0.001 N \cdot m$ و $\omega_{nl} = 10000 rpm$ ۷۰

فهرست شکل‌ها

- شکل ۱-۱- کاربردهای سنتی ریسمان تابیده [۱] ۳
- شکل ۲-۱- دست رباتیکی با سیستم محرکه ریسمان تابیده [۲] ۳
- شکل ۳-۱- انگشت رباتیکی با سیستم محرکه ریسمان تابیده [۳] ۴
- شکل ۴-۱- نمای شماتیک یک محرکه ریسمان تابیده [۴] ۵
- شکل ۵-۱- استفاده از محرکه ریسمان تابیده در کمک به بازو [۵] ۵
- شکل ۶-۱- ربات مکعبی شکل در دو حالت مختلف [۶] ۶
- شکل ۷-۱- تغییر طول ریسمان در اثر تابیدگی آن برای ریسمانی با دو رشته الیاف [۷] ۷
- شکل ۸-۱- تغییر طول ریسمان در اثر تابیدگی آن برای ریسمانی با چند رشته الیاف [۵] ۷
- شکل ۹-۱- رفتار ریسمان نسبت به گشتاور موتور وارد شده [۹] ۸
- شکل ۱۰-۱- نمودار درختی ساختار پایان نامه ۱۵
- شکل ۱-۲- نمای شماتیک از سیستم محرکه ریسمان تابیده [۲۱] ۱۹
- شکل ۲-۲- نظم ایجاد شده در الیاف ریسمان در اثر تابیدگی [۵] ۲۰
- شکل ۳-۲- تاثیر تابیدگی بر تغییر طول و شعاع ریسمان [۲۱] ۲۰
- شکل ۴-۲- تغییر هندسه ریسمان در اثر تابیدگی و نیروهای وارد بر آن [۲۱] ۲۱
- شکل ۵-۲- پاسخ سه گونه مواد، الاستیک، ویسکوز و ویسکوالاستیک به تنش اعمال شده [۲۷] ۲۳
- شکل ۶-۲- سه مدل فنر و دمپر مشهور مواد ویسکوالاستیک [۲۹] ۲۴
- شکل ۷-۲- مدل استاندارد و تنش و کرنشهای داخلی مربوط به این مدل ۲۵
- شکل ۸-۲- دستگاه مختصات تعریف شده برای بیان معادلات دینامیکی ریسمان تابیده ۲۸
- شکل ۹-۲- المانی از ریسمان [۳۱] ۲۸
- شکل ۱-۳- نمودار گشتاور موتور DC بر حسب سرعت دورانی آن ۴۸
- شکل ۲-۳- درصد تغییر طول و میزان زاویه پیچش کل ریسمان در مدل دینامیکی و مدل سینماتیکی ۴۹
- شکل ۳-۳- درصد تغییر طول و میزان زاویه پیچش کل ریسمان به ازای تقسیمبندی مختلف ریسمان ۵۰
- شکل ۴-۳- مقایسه مدل کلونین و استاندارد به ازای $E_1 = 1e5 Pa$ و درصد تغییر طول و میزان زاویه تابیده شده ریسمان ۵۱
- شکل ۵-۳- مقایسه مدل کلونین و استاندارد و درصد تغییر طول و میزان زاویه تابیده شده ریسمان به ازای مقادیر ۵۲

- شکل ۳-۶ - مقایسه مدل کلویین استاندارد و درصد تغییر طول و میزان زاویه تابیده شده ریسمان به ازای مقادیر
 ۵۲.....
- شکل ۳-۷ - تغییر طول ریسمان تابیده شده در سیستم رباتیکی
 ۵۳.....
- شکل ۳-۸ - تغییر طول ریسمان در $t = 0.25s$ ، $t = 0.5s$ ، $t = 1s$ و $t = 2s$
 ۵۴.....
- شکل ۳-۹ - رباتی با چند ریسمان [۹]
 ۵۴.....
- شکل ۳-۱۰ - آرایشهای مختلف الیاف ریسمان [۸]
 ۵۵.....
- شکل ۳-۱۱ - مدل ریسمان مدل شده در نرمافزار آباکوس با دو الیاف
 ۵۶.....
- شکل ۳-۱۲ - نمایی نزدیک از ریسمان مدل شده در نرمافزار آباکوس با دو الیاف
 ۵۷.....
- شکل ۳-۱۳ - حالت تغییر شکلیافته ریسمان تابیده شده با دو الیاف
 ۵۷.....
- شکل ۳-۱۴ - نمایی نزدیک از حالت تغییر شکلیافته ریسمان تابیده شده با دو الیاف
 ۵۸.....
- شکل ۳-۱۵ - درصد تغییر طول و میزان زاویه پیچش کل ریسمان با دو الیاف
 ۵۸.....
- شکل ۳-۱۶ - درصد تغییر طول و میزان زاویه پیچش کل ریسمان با سه الیاف
 ۵۹.....
- شکل ۳-۱۷ - درصد تغییر طول و میزان زاویه پیچش کل ریسمان با شش الیاف
 ۵۹.....
- شکل ۳-۱۸ - جابجایی ریسمان در $x = L/2$ در راستاهای عرضی به ازای $fz = 0.5\sin 2t$ و $fy = 0.2\sin t$
 ۶۳.....
- شکل ۳-۱۹ - جابجایی ریسمان در $x = L/2$ در راستاهای عرضی به ازای $fz = 0.5$ و $fy = 0.2$
 ۶۴.....
- شکل ۳-۲۰ - تغییر شکل هندسه ریسمان در $t = 0.5s$ در راستاهای عرضی به ازای $fy = \sin 3\pi x/l$ و
 $fz = 0.5\sin 4\pi x/l$
 ۶۴.....
- شکل ۳-۲۱ - تغییر شکل هندسه ریسمان در $t = 1s$ در راستاهای عرضی به ازای $fy = \sin 3\pi x/l$ و
 $fz = 0.5\sin 4\pi x/l$
 ۶۵.....
- شکل ۳-۲۲ - تغییر شکل هندسه ریسمان در $t = 1.5s$ در راستاهای عرضی به ازای $fy = \sin 3\pi x/l$ و
 $fz = 0.5\sin 4\pi x/l$
 ۶۵.....
- شکل ۳-۲۳ - تغییر شکل هندسه ریسمان در $t = 2s$ در راستاهای عرضی به ازای $fy = \sin 3\pi x/l$ و
 $fz = 0.5\sin 4\pi x/l$
 ۶۶.....
- شکل ۳-۲۴ - درصد تغییر طول ریسمان به ازای دو $Mstall$ مختلف
 ۶۷.....
- شکل ۳-۲۵ - درصد تغییر طول و میزان زاویه تابیده شده ریسمان به ازای ωnl های مختلف
 ۶۷.....

فهرست علائم و اختصارات

Ω	سرعت دورانی المان ریسمان	r	شعاع ریسمان
θ	زاویه تابیدگی ریسمان	L	طول ریسمان
E	مدول الاستیسیته	F_i	نیروی الیاف ریسمان
\tilde{E}	اپراتور الاستیسیته ماده ویسکوالاستیک	F_T	نیروی سطح مقطع ریسمان در راستای T
J_{TT}	ممان سطح مقطع ریسمان	F_N	نیروی سطح مقطع ریسمان در راستای N
C	مدول دمپینگ ماده ریسمان	F_B	نیروی سطح مقطع ریسمان در راستای B
ε	کرنش الیاف ریسمان	M_T	گشتاور سطح مقطع ریسمان در راستای T
σ	تنش الیاف ریسمان	M_N	گشتاور سطح مقطع ریسمان در راستای N
		M_B	گشتاور سطح مقطع ریسمان در راستای B
		T	بردار یکه دستگاه مختصات TNB در راستای T
		N	بردار یکه دستگاه مختصات TNB در راستای N
		B	بردار یکه دستگاه مختصات TNB در راستای B
		f	نیروی خارجی وارد بر واحد طول ریسمان
		ρ	چگالی ماده ریسمان
		κ	انحنای منحنی ریسمان
		τ	تابیدگی منحنی ریسمان

فصل اول:

مقدمه

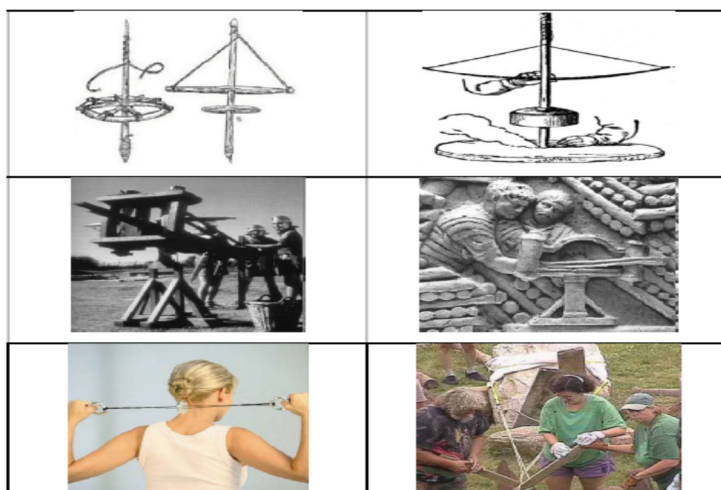
۱-۱- مقدمه

سیستم محرکه ریسمان تابیده^۱ یکی از سیستم‌های محرکه مکانیکی است که در صنایع قدیمی به وفور از آن استفاده می‌شده است. منجنیق و فلاخن نمونه‌های استفاده از این نوع سیستم محرکه در صنایع قدیم می‌باشد. مزایای این نوع سیستم محرکه باعث شده است تا در صنایع جدید به خصوص صنایع رباتیک از آن استفاده شود. بازوی رباتیکی یکی از موارد استفاده از این نوع سیستم محرکه در صنایع جدید می‌باشد. در کاربرد ریسمان به عنوان یک سیستم محرکه از تابیده شدن ریسمان با استفاده از یک گشتاور کوچک برای جابجایی جسم مورد نظر استفاده می‌شود. میزان گشتاور و میزان تابیدگی لازم برای جابجایی معین جسم از اهمیت بالایی برخوردار است که به جنس و هندسه ریسمان بستگی دارد.

۱-۲- سیستم محرکه ریسمان تابیده

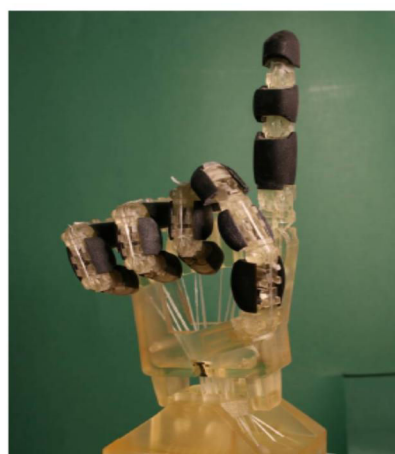
قدمت استفاده از این سیستم محرکه به چند هزار سال پیش برمی‌گردد که معمولاً برای اهداف نجاری و آتش‌افروزی استفاده می‌شده است. رفته رفته پدیده‌های دیگری از ریسمان تابیده بر انسان‌ها آشکار گردید که کاربردهای مختلفی پیدا کرد. کاهش طول چند ریسمان موازی تابیده شده یکی از این پدیده‌ها بود که از آن در کاربردهای نظامی مانند منجنیق، و یا کاربردهای ساخت و ساز مانند چرخ چاه استفاده شده است. سیستم‌های محرکه ریسمان تابیده از لحاظ مکانیکی ساده و قابل اعتماد می‌باشند و انتقال نیروهای بزرگ با گشتاور ورودی کوچک را ممکن می‌سازند. شکل ۱-۱ کاربردهای سنتی ریسمان تابیده را از ابزارهای یونانیان گرفته تا کاربرد آن در کشیدن بارهای سنگین، تثبیت سازه و همچنین در تفریح و سرگرمی نشان می‌دهد.

¹ Twisted String Actuator

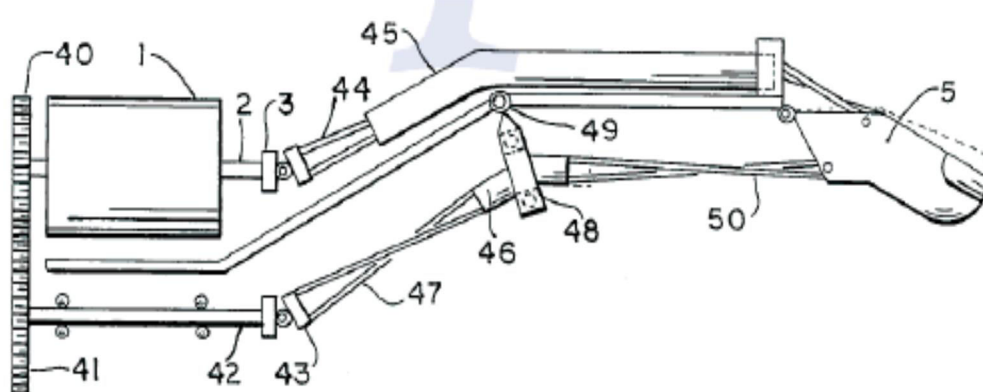


شکل ۱-۱- کاربردهای سنتی ریسمان تابیده [۱]

با توجه به پیشرفت‌های انجام گرفته در سال‌های اخیر در زمینه علم رباطیک، نیاز به سیستم‌های محرکه خطی دقیق محسوس شده است. توسعه دست‌های رباطیکی با حرکت تاندون یکی از این پیشرفت‌ها می‌باشد که نیاز به یک سیستم محرکه ظریف دارد. از این رو در کاربردهایی مانند دست رباطیکی که ابعاد و وزن سیستم محرکه حائز اهمیت می‌باشد، با توجه به مزایای ریسمان تابیده، از این نوع سیستم محرکه استفاده می‌شود. شکل ۱-۲- دست رباطیکی با سیستم محرکه ریسمان تابیده [۲] و شکل ۱-۳- انگشت رباطیکی با سیستم محرکه ریسمان تابیده [۳] را نشان می‌دهد.

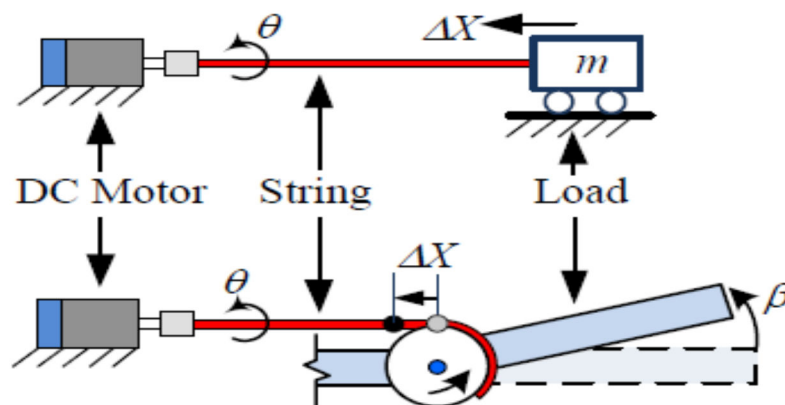


شکل ۱-۲- دست رباطیکی با سیستم محرکه ریسمان تابیده [۲]



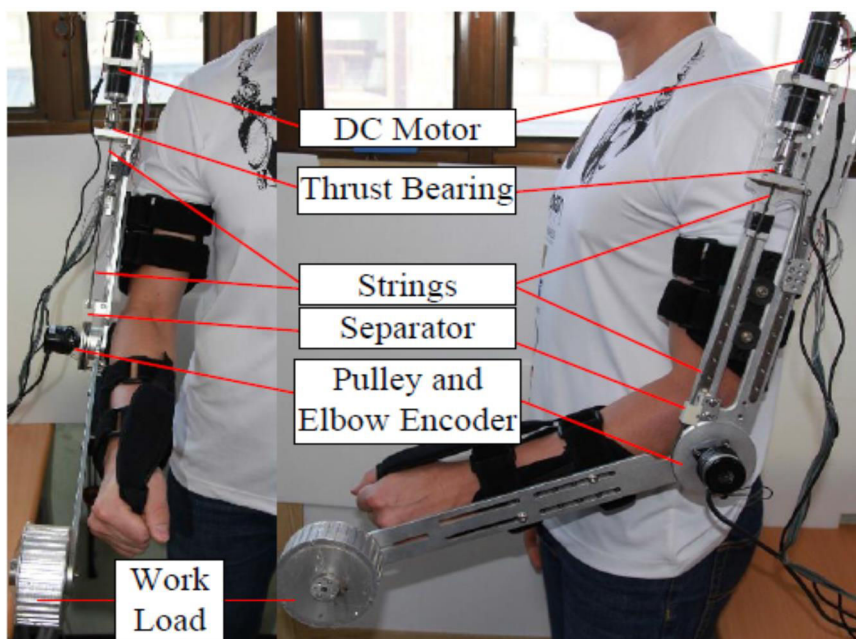
شکل ۱-۳- انگشت ربائیکی با سیستم محرکه ریسمان تابیده [۳]

سیستم محرکه ریسمان تابیده برخلاف سیستم‌های محرکه دیگر از ساختار ساده‌ای برخوردار است. شکل ۱-۴ یک نمای شماتیک از این نوع سیستم محرکه را نشان می‌دهد. همانطور که از شکل ۱-۴ نیز معلوم است، این نوع سیستم محرکه دارای ساختار ساده‌ای است و تنها شامل دو قسمت اساسی، یعنی موتور الکتریکی و ریسمان می‌باشد. در سیستم‌های محرکه دیگر برای ایجاد نیروی محرکه مناسب لازم است تا از چرخدنده برای افزایش نیروی محرکه استفاده شود و اگر چرخدنده مورد استفاده قرار نگیرد موتور با توان بالاتر و در نتیجه ابعاد و وزن بالاتر لازم خواهد بود. همانطور که در شکل ۱-۴ نیز معلوم است، از آنجا که ریسمان تابیده شده توانایی تبدیل گشتاور کوچک به نیروی خطی بزرگ را دارد، در سیستم محرکه ریسمان تابیده نیازی به چرخدنده و یا انتخاب موتوری با توان بالا نمی‌باشد. نحوه کار این سیستم محرکه به این صورت است که موتور الکتریکی گشتاور مورد نیاز برای تاباندن ریسمان را محیا می‌کند که با تابیده شدن ریسمان، طول ریسمان تغییر پیدا کرده و در نتیجه، جرم مورد نظر جابجا می‌شود.



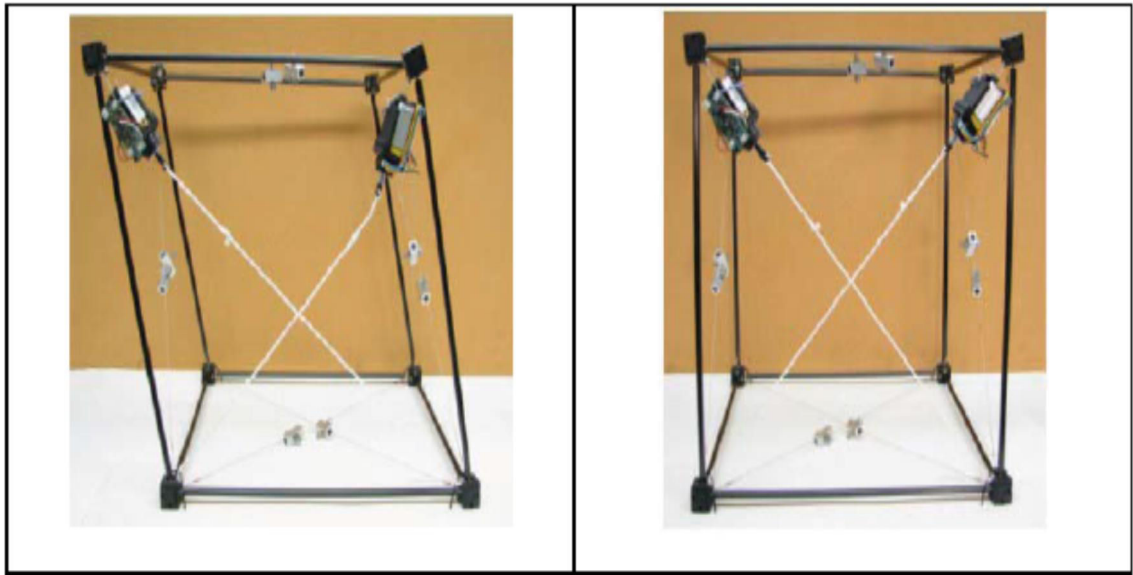
شکل ۴-۱- نمای شماتیک یک محرکه ریسمان تابیده [۴]

این سیستم محرکه مانند ماهیچه عمل می‌کند و علاوه بر وزن کم و ابعاد کوچک، سیستمی ارزان و بی‌صدا می‌باشد. ویژگی‌های منحصر به فرد این سیستم محرکه باعث گردیده که کاربردهای گسترده‌ای داشته باشد. به طور مثال در توان‌بخشی و فیزیوتراپی برای کمک به حرکت اعضای بدن همچون بازو، از این سیستم محرکه استفاده می‌شود؛ همان‌گونه که در شکل ۵-۱ نیز نشان داده شده است.



شکل ۵-۱- استفاده از محرکه ریسمان تابیده در کمک به بازو [۵]

یکی دیگر از کاربردهای این سیستم محرکه در ربات مکعبی شکل است. ربات مکعبی شکل یک ربات بسیار انعطاف پذیر می باشد که سیستم محرکه آن در قطرهای هر وجه مکعب و در مجموع دوازده سیستم محرکه در هر مکعب قرار دارد [۶]. این ربات قادر است وضعیت خود را بر روی حالت های مختلفی تنظیم کند. شکل ۱-۶ تبدیل شدن مکعب به متوازی الاضلاع را نشان می دهد.

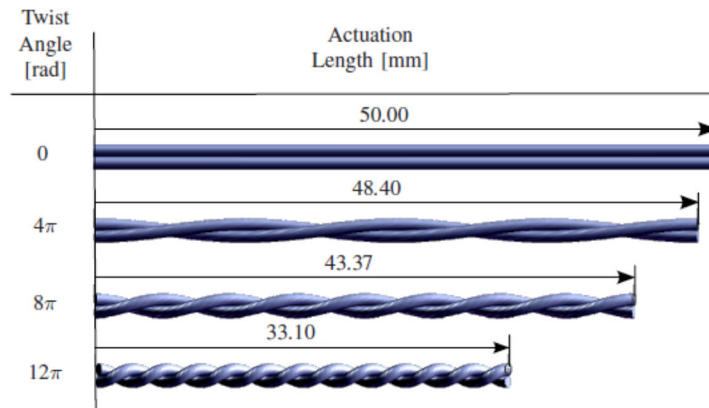


شکل ۱-۶- ربات مکعبی شکل در دو حالت مختلف [۶]

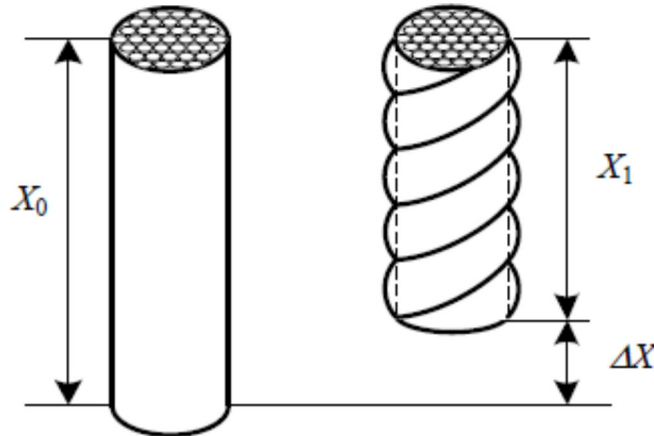
همانگونه که ذکر شد، به دلیل مزایای سیستم محرکه ریسمان تابیده، در کاربردهای مختلفی از آن استفاده شده است که در منابع مختلف به آن اشاره شده است. به دلیل کاربردهای مختلف این نوع سیستم محرکه و نیاز به دقت مناسب در کاربردهای ظریف، شناسایی دقیق این سیستم محرکه امری ضروری است. شناسایی این سیستم محرکه در واقع شناسایی رفتار ریسمان نسبت به گشتاور موتور اعمال شده می باشد. بنابراین بررسی رفتار استاتیکی و دینامیکی ریسمان به ازای گشتاور اعمال شده موضوعی است که باید مورد بررسی قرار گیرد.

ریسمان تابیده شده در واقع از تعدادی رشته الیاف تشکیل شده است که به هم بافته شده اند (فرض می شود که الیاف به صورت ایده آل هستند به نحوی که سطح مقطع آنها به صورت دایره و در تمام طول ریسمان یکسان است). زمانی که گشتاور موتور بیشتری به ریسمان وارد می شود الیاف

موردنظر بیشتر در هم بافته می‌شوند و باعث کوتاه‌تر شدن طول ریسمان می‌شود. شکل ۷-۱ این امر را به صورت شماتیک برای ریسمانی با دو رشته الیاف و شکل ۸-۱ برای ریسمانی با چند رشته الیاف نشان می‌دهد.



شکل ۷-۱- تغییر طول ریسمان در اثر تابیدگی آن برای ریسمانی با دو رشته الیاف [۷]

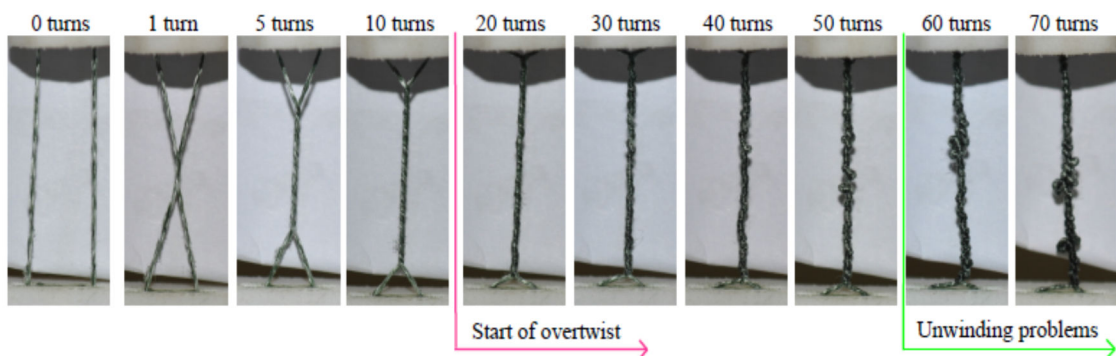


شکل ۸-۱- تغییر طول ریسمان در اثر تابیدگی آن برای ریسمانی با چند رشته الیاف [۵]

الیاف موجود در یک ریسمان می‌تواند به هر تعدادی و با آرایش‌های مختلف باشد. ریسمان با دو رشته الیاف ساده‌ترین نوع ریسمان برای این کاربرد می‌باشد.

تابیده شدن ریسمان معمولاً یک پدیده خطی خالص نیست. یعنی ممکن است ریسمان به آن صورتی که مورد انتظار است تابیده نشود. این رفتار غیرخطی در تابیده شدن ریسمان بیشتر زمانی رخ

می‌دهد که ریسمان بیش از حد تابیده شده باشد. شکل ۱-۱۰ تابیده شدن ریسمان را به صورت مرحله به مرحله با افزایش مقدار گشتاور موتور نشان می‌دهد. همانگونه که از شکل ۱-۱۰ نیز معلوم است از یک مرحله به بعد ریسمان شروع به گره خوردن می‌کند که یک رفتار غیرخطی است. در این مرحله، ریسمان شاید کارایی مناسب را نداشته باشد و بهتر باشد که از ریسمان در این محدوده استفاده نشود.



شکل ۱-۹- رفتار ریسمان نسبت به گشتاور موتور وارد شده [۹]

با آنکه طول ریسمان به صورت کنترلی کنترل می‌شود ولی بهتر است زمانی که ریسمان بر روی سیستم محرکه جاسازی می‌شود، در حالت اولیه دارای یک تابیدگی اولیه باشد تا محدوده عملکرد ریسمان در محدوده خطی آن باشد تا از رفتارهای غیرخطی که پیش‌بینی آنها تا حدودی مشکل می‌باشد، جلوگیری شود.

کارهای مختلفی بر روی سیستم محرکه ریسمان تابیده انجام شده است. به عنوان کارهای اولیه بر روی این سیستم محرکه، اصول پایه‌ای این نوع سیستم محرکه در [۱۰-۱۳] و کاربردهایی از آن در [۱۴-۱۶] گزارش شده است. در سال ۱۹۷۸ هونگ [۳۳] به بررسی کشش محدود یک ریسمان الاستیک با هسته مرکزی احاطه شده توسط یک لایه از سیم‌های مارپیچ پرداخت. در این کار هسته مرکزی به عنوان یک میله مستقیم با مقطع دایروی و سیم‌های مارپیچ به عنوان میله‌های باریک خمیده با مقطع عرضی دایره‌ای در نظر گرفته شده‌اند. در اثر تماس مابین هسته مرکزی و سیم‌های مارپیچ حین کشش، این دو از هم جدا می‌شوند. همچنین وی به بررسی نیروهای تماسی مابین

هسته و سیم‌ها با زوایای مختلف مارپیچ که در معرض نیروی محوری قرار دارند پرداخت. در همان سال هونگ در مطالعه‌ای دیگر [۳۴] تأثیر رفتار ریسمان با ماده ویسکو الاستیک را مورد مطالعه قرار داد. در این تحلیل از نظریه میله های خمیده استفاده شده است. همچنین در این مقاله رفتار مکانیکی ریسمان بر اساس ویژگی های وابسته به زمان بیان شده و نیروهای تماسی بین الیاف ریسمان و تغییر شکل سطح مقطع آن مطالعه شده است.

پالی و همکاران در [۷]، مدلسازی و کنترل سیستم محرکه ریسمان تابیده را برای دست رباتیکی ارائه کرده‌اند. در این کار، از قواعد سینماتیکی برای بیان روابط حاکم بر این سیستم محرکه استفاده شده است. در این کار، با آنکه آنها فرض کرده‌اند الیاف ریسمان قابلیت تغییر طول را دارند ولی فرض کرده‌اند که سطح مقطع ریسمان در فرایند تابیده شدن هیچگونه تغییری نمی‌کند. آنها در ادامه، نتایج بدست آمده از شبیه‌سازی را با نتایج تجربی مقایسه کرده‌اند و در آخر با در نظر گرفتن مدل دینامیکی موتور، به طراحی کنترل‌کننده‌ای برای کنترل طول ریسمان در یک بازوی رباتیکی پرداخته‌اند و نتایج بدست آمده از اعمال این کنترل‌کننده بر روی مدل واقعی و نتایج حاصل شده از شبیه‌سازی را مقایسه کرده‌اند. پالی و همکاران در [۱۷] از همان مدلسازی ارائه شده در [۷] استفاده کرده و به طراحی کنترل‌کننده با استفاده از سیستم محرکه ریسمان تابیده برای کنترل زانوی رباتیکی با فنریت متغیر پرداخته‌اند. همچنین آنها در [۱۸] برای یک زانوی رباتیکی با فنریت متغیر که به وسیله یک سیستم محرکه ریسمان تابیده کنترل می‌شود، یک کنترل‌کننده با استفاده از خطی‌سازی فیدبک طراحی کرده‌اند.

گادلر و سونادا در [۱۹]، یک انگشت رباتیکی تحریک شده با محرکه ریسمان تابیده شده را طراحی کرده‌اند. در این کار، قواعد محرکه ریسمان تابیده شده توصیف و داده‌های آزمایشگاهی که مدل ارائه شده را تحت پوشش قرار می‌دهد، نشان داده شده است. در این کار فرض شده است که الیاف ریسمان دارای سطح مقطع دایره‌ای و غیرقابل تغییر می‌باشند و هیچگونه مقاومتی در برابر پیچش و خمش

ندارند. همچنین از اصطکاک داخلی و سطحی ریسمان‌ها نیز صرف‌نظر شده است. آن‌ها همچنین کنترل موقعیت و نیرو برای انگشت رباتیکی با محرکه ریسمان تابیده را در [۲۰] ارائه داده‌اند.

دیمیتری پوپوف و همکاران در [۲۱]، مطالعه‌ای بر روی سیستم محرکه ریسمان تابیده انجام داده‌اند. آنها نیز مشابه [۷] از روابط سینماتیکی برای مدل کردن ریسمان استفاده کرده و فرض کرده‌اند که سطح مقطع الیاف ریسمان در فرایند تابیده شدن همچنان به صورت دایره‌ای باقی می‌ماند ولی برخلاف [۷] فرض کرده‌اند که الیاف ریسمان غیرقابل تراکم و در نتیجه حجم الیاف ریسمان یک مقدار ثابتی می‌باشد. در نتیجه با افزایش طول الیاف ریسمان، شعاع سطح مقطع آن کاهش پیدا خواهد کرد. در ادامه، آنها به مقایسه نتایج تجربی با نتایج مدل خود و مدل [۷] پرداخته‌اند و در آخر به طراحی یک کنترل‌کننده برای کنترل طول ریسمان پرداخته‌اند. آنها نشان داده‌اند که نتایج مدلی که ارائه کرده‌اند در مقایسه با نتایج مدل [۷]، همخوانی بیشتری با نتایج تجربی دارد. همچنین آنها در [۴] و [۵] به معرفی سیستم محرکه با دو ریسمان تابیده برای کنترل بازوی رباتیکی پرداخته‌اند و با طراحی کنترل‌کننده برای این سیستم، نتایج حاصل از شبیه‌سازی را با نتایج کنترل‌کننده اعمال شده بر سیستم واقعی مقایسه کرده‌اند.

لی و همکارانش در [۸]، آرایش‌های مختلفی از الیاف موجود در ریسمان را ارائه داده‌اند. در این کار، آنها به بیان مدل‌های ارائه شده در [۷] و [۲۱] پرداخته و تفاوت‌های این دو مدل را بیان کرده‌اند. سپس با بیان شرایط نمونه آزمایشگاهی، به مقایسه نتایج تجربی با نتایج شبیه‌سازی مدل [۷] و [۲۱] پرداخته‌اند. در آخر، آنها یک کنترل‌کننده برای کنترل طول ریسمان طراحی کرده‌اند. آنها همچنین در [۲۲] پس از بیان روابط سینماتیکی ریسمان تابیده شده و مقایسه نتایج تجربی با نتایج شبیه‌سازی، به طراحی یک کنترل‌کننده مقاوم تطبیقی برای کنترل حرکت بازوی رباتیکی با استفاده از سیستم محرکه با دو ریسمان تابیده شده پرداخته‌اند. آنها در [۲۳] نیز به طراحی کنترل‌کننده PID و

LQR برای کنترل طول ریسمان تابیده پرداخته‌اند و نتایج بدست آمده از این دو کنترل‌کننده را با هم مقایسه کرده‌اند.

توکلی و همکاران در [۹] ، بعد از تشریح نمونه آزمایشگاهی به بررسی نتایج بدست آمده از بارگذاری ریسمان تابیده شده پرداخته‌اند. در این کار، رفتار غیرخطی ریسمان به ازای گشتاورهای بالا بررسی شده است. همچنین به مقایسه نتایج شبیه‌سازی دو مدل [۷] و [۲۱] با نتایج تجربی پرداخته شده است. اینوئی و همکارانش در [۲۴] و [۲۵] به رفتار هیستریزیس ریسمان تابیده شده پرداخته‌اند. در این کارها، رفتار هیستریزیس ریسمان تابیده شده با استفاده از نتایج تجربی نشان داده شده است. سپس با در نظر گرفتن رفتار هیستریزیس ریسمان، کنترل‌کننده‌ای برای کنترل طول ریسمان در سیستم رباتیکی موردنظر طراحی شده است. پارک و سان‌اسپیرال در [۲۶]، کاربرد جدیدی از سیستم محرکه ریسمان تابیده ارائه داده‌اند. آنها از این سیستم محرکه به جای محرکه کابل-قرقره سنتی، برای کنترل ربات‌های تنسگریتی^۲ استفاده کرده‌اند. مولر و همکارانش نیز در [۲۷]، از این سیستم محرکه در کاربردی جدید بهره گرفته‌اند. آنها سیستم محرکه ریسمان تابیده را برای استخوان زانو استفاده کرده‌اند. در کار آنها سیستم محرکه دارای دو ریسمان تابیده شده موازی است.

در بیشتر کارهای انجام شده بر روی سیستم محرکه ریسمان تابیده، مدل‌سازی انجام گرفته یک مدل‌سازی استاتیکی و سینماتیکی می‌باشد که در آن، ریسمان به صورت یک جسم یکپارچه در نظر گرفته شده است که هیچگونه دینامیکی ندارد. این نوع مدل‌سازی تا حد خوبی نتایج قابل قبولی بدست می‌دهد؛ ولی از آنجا که ریسمان تابیده شده یک سیستم دینامیکی می‌باشد لازم است تا مشخصات دینامیکی آن مانند زمان پاسخ‌دهی به گشتاور وارده مورد بررسی قرار گیرد. در [۱] مدل‌سازی دینامیکی ریسمان تابیده با استفاده از روش ماتریس انتقال^۳ (TMM) مورد بررسی قرار گرفته است. در این کار، ریسمان تابیده به صورت یک چندجسمی مدل شده است به نحوی که

^۲ Tensegrity

^۳ Transfer Matrix Method

ریسمان معادل تعدادی جرم متمرکز می‌باشد که به وسیله فنر به همدیگر متصل شده‌اند. ضرایب فنریت فنرها و جرم جسم‌های متمرکز به تعداد تقسیم‌بندی ریسمان و ماده ریسمان بستگی دارد. در این کار، علاوه بر این که نتایج مربوط به تغییر طول ریسمان گزارش شده است، یک کنترل‌کننده PID برای کنترل طول ریسمان طراحی شده است و همچنین نتایج مربوط به فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ریسمان نیز آورده شده است.

در یک سیستم دینامیکی وقتی مکانیزم دمپینگ در سیستم نباشد پاسخ سیستم به تحریک خارجی به صورت نوسانی خواهد بود. این مکانیزم می‌تواند دمپینگ خشک مانند اصطکاک، یا دمپینگ نرم مانند دمپر، و یا هر مکانیزم دمپینگ دیگری باشد. در سیستم محرکه ریسمان تابیده نیز اگر مکانیزم دمپینگ وجود نداشته باشد، پاسخ ریسمان به گشتاور وارده به صورت نوسانی خواهد بود. اصطکاک بین رشته‌ها می‌تواند همان مکانیزم مناسب برای سیستم محرکه ریسمان تابیده باشد. مکانیزم دمپینگ دیگری که برای ریسمان تابیده می‌توان متصور بود، خاصیت دمپینگ ماده ریسمان می‌باشد.

هر ماده‌ای، حتی موادی مانند فولاد دارای یک مقدار خاصیت دمپینگ می‌باشد که معمولاً با دما متغیر است. میزان خاصیت دمپینگ در بعضی مواد در حدی نیست که لازم باشد در مدل‌سازی‌ها لحاظ شود ولی در بعضی مواد مانند نایلون، این خاصیت به حدی می‌باشد که مدل‌سازی آن امری ضروری است. موادی مانند نایلون که به عنوان ماده سازنده ریسمان تابیده نیز استفاده می‌شود، در دسته موادی قرار دارند که اصطلاحاً مواد ویسکوالاستیک^۴ نامیده می‌شوند.

۱-۳- هدف پایان‌نامه

در این پژوهش، مدل‌سازی دینامیکی ریسمان تابیده شده مورد بررسی قرار خواهد گرفت. در مدل‌سازی انجام گرفته، ریسمان به صورت یک جسم پیوسته^۵ در نظر گرفته شده است که معادلات

^۴ Viscoelastic

^۵ Continuum

حرکت آن به وسیله تعدادی معادله دیفرانسیل جزئی^۶ توصیف می‌شود. بنابراین در این کار، در حالت کلی، ماده سازنده ریسمان یک ماده ویسکوالاستیک در نظر گرفته شده است که می‌توان آن را با یک سری فرض‌های ساده‌سازی به ماده الاستیک نیز تبدیل کرد.

برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی روش‌های مختلفی را می‌توان به کار بست که از این روش‌ها می‌توان، روش‌های تحلیلی، روش‌های عددی مانند المان محدود^۷ و یا تفاضل محدود^۸ را نام برد. در این کار معادلات بدست آمده از روش حل عددی تفاضل محدود استفاده شده است.

از آنجا که در هیچ یک از کارهای قبلی، سیستم ریسمان تابیده در نرم‌افزارهای حل عددی مانند انسیس^۹ و یا آباکوس^{۱۰} مدل نشده بود و همچنین برای آنکه بتوان به تحلیل درست و محکمی از دینامیک ریسمان رسید، سیستم ریسمان تابیده در نرم‌افزار آباکوس مدل‌سازی گردیده است.

پس در کل می‌توان گفت که در این پژوهش کارهای زیر انجام خواهد گردید:

- مدل‌سازی پیوسته دینامیک ریسمان تابیده
- مدل‌سازی ویسکوالاستیکی ماده سازنده ریسمان
- گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل جزئی حرکت ریسمان تابیده با استفاده از روش حل عددی تفاضل محدود
- مدل‌سازی ریسمان تابیده در نرم‌افزار آباکوس
- صحت‌سنجی نتایج بدست آمده
- تحلیل پاسخ گذرا به منظور طراحی موتور محرکه

⁶ Partial Differential Equation

⁷ Finite Element

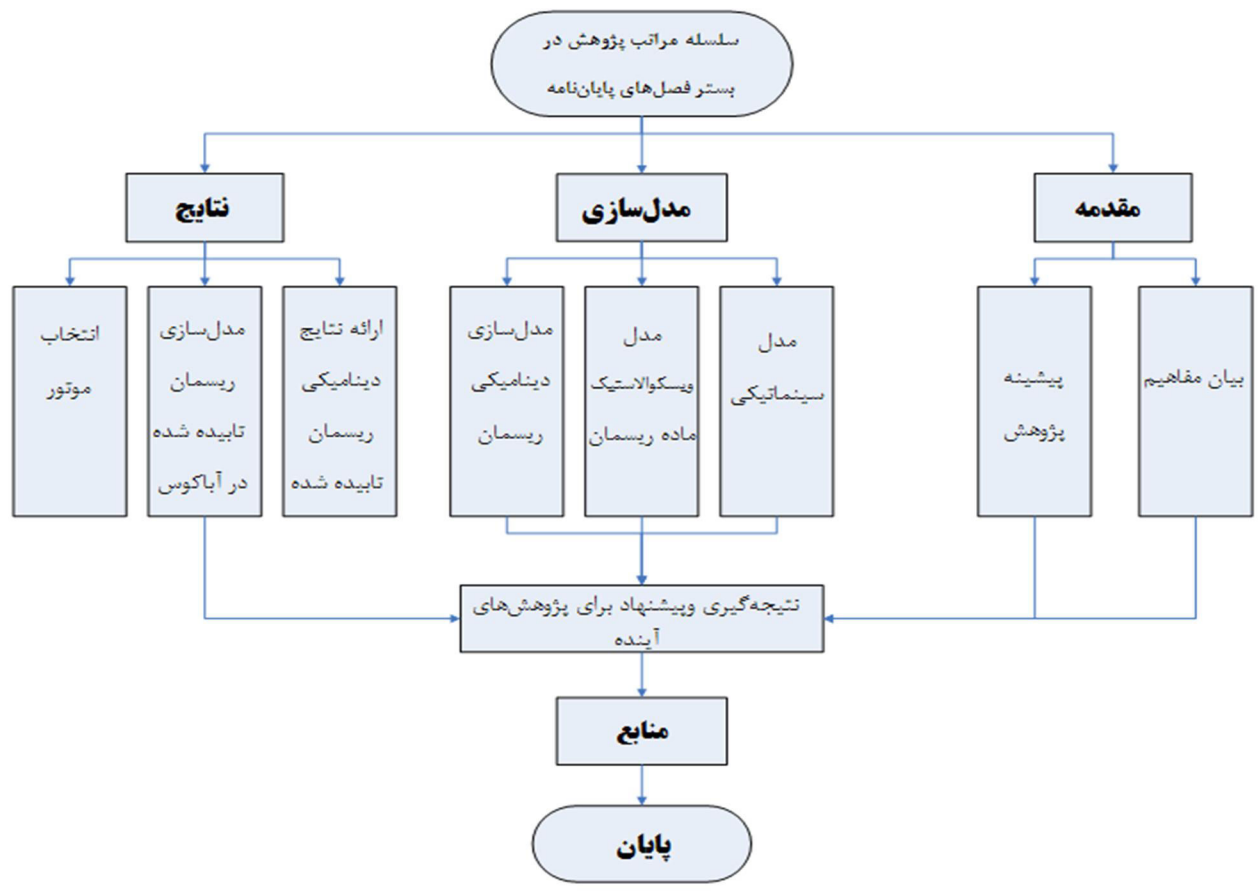
⁸ Finite Difference

⁹ ANSYS

¹⁰ ABAQUS

۴-۱- ساختار پایان نامه

در این پایان نامه، در فصل دوم، ابتدا معرفی کوتاهی بر روابط سینماتیکی ریسمان تابیده انجام خواهد شد و سپس روابط دینامیکی ریسمان تابیده به ازای ماده الاستیک استخراج خواهد شد. در ادامه، در فصل دوم، مواد ویسکوالاستیک به صورت اجمالی معرفی خواهد شد و تغییرات معادلات دینامیکی ریسمان به ازای ماده ویسکوالاستیک بیان خواهد شد. در آخر، معادلات دینامیکی بدست آمده برای ریسمان به وسیله روش عددی تفاضل محدود گسسته خواهد شد. در فصل سوم این پایان نامه، ابتدا به صحت نتایج بدست آمده پرداخته خواهد شد و نتایج حاصل از حل معادلات بدست آمده با نتایج نرم افزار آباکوس و نتایج کارهای قبلی مقایسه خواهد شد. سپس به بیان نتایج بدست آمده برای پاسخ گذرای ریسمان نسبت به گشتاور موتور اعمال شده پرداخته می شود و نتایج آن با نتایج حالت گذرای ریسمان که توسط نرم افزار آباکوس بدست آمده است مقایسه خواهد گردید. در نهایت، در فصل سوم، به بررسی و تحلیل نتایج بدست آمده پرداخته خواهد شد. در آخر، این پایان نامه با بررسی نتایج و پیشنهاد کارهای آینده در فصل چهارم پایان خواهد پذیرفت.



شکل ۱-۱۰ - نمودار درختی ساختار پایان‌نامه

فصل دوم:

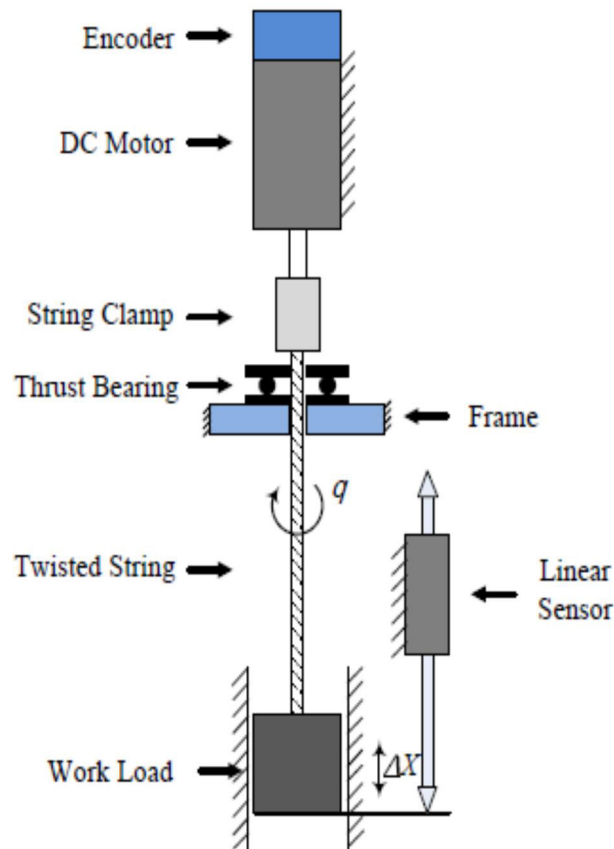
مدل سازی

۲-۱- مقدمه

در این فصل، ابتدا به معرفی مدل سینماتیکی ریسمان تابیده پرداخته خواهد شد. سپس معرفی کوتاهی بر مواد ویسکوالاستیک انجام خواهد گرفت. سپس روابط دینامیکی ریسمان تابیده برای ریسمانی با ماده ویسکوالاستیک استخراج خواهد گردید. برای این کار، ریسمان به صورت یک محیط پیوسته در نظر گرفته شده است که در نتیجه، معادلات دینامیکی بدست آمده برای آن، یک سری معادله دیفرانسیل جزئی خواهد بود. در نهایت به نحوه گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل جزئی بدست آمده با استفاده از روش تفاضل محدود پرداخته خواهد شد.

۲-۲- معادلات سینماتیکی ریسمان تابیده

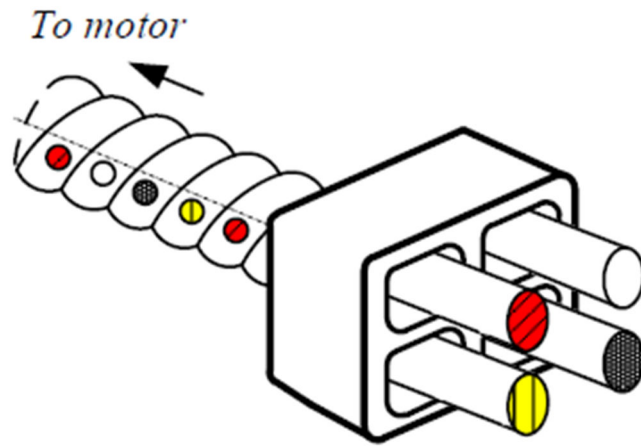
همانگونه که قبلاً نیز به آن اشاره شد، از سیستم محرکه ریسمان تابیده در مکانیزم‌هایی مانند بازوی ربات استفاده می‌گردد. شکل ۱-۲ نمای شماتیکی از این سیستم و قسمت‌های مختلف آن را نشان می‌دهد. با توجه به شکل ۱-۲، نحوه کار مجموعه سیستم محرکه ریسمان تابیده به این صورت است که بار انتهایی با استفاده از تابیده شدن ریسمان توسط موتور، در راستای مورد نظر جابجا می‌شود. مجموعه موردنظر به صورت یک سیستم حلقه بسته عمل می‌کند. به این صورت که سنسور تعبیه شده، در هر لحظه مقدار جابجایی بار انتهایی را اندازه‌گیری می‌کند و به کنترل‌کننده می‌فرستد و کنترل‌کننده نیز فرمان مورد نیاز را به موتور برای تولید گشتاور لازم ارسال می‌کند. گشتاور اعمال شده باعث تابیده شدن ریسمان و در نتیجه، تغییر طول ریسمان و جابجایی بار انتهایی می‌شود. این عمل تا جایی تکرار می‌شود که جابجایی موردنظر برای بار انتهایی حاصل شود. ریسمان از یک طرف به بار و از طرف دیگر به گیره متصل شده است به نحوی که تحت تاثیر بار انتهایی، همیشه در حالت کشیده شده و مستقیم قرار دارد. بار انتهایی قابلیت دوران ندارد به نحوی که میزان تابیدگی ریسمان در محل اتصال به بار انتهایی برابر صفر می‌باشد.



شکل ۱-۲ - نمای شماتیک از سیستم محرکه ریسمان تابیده [۲۱]

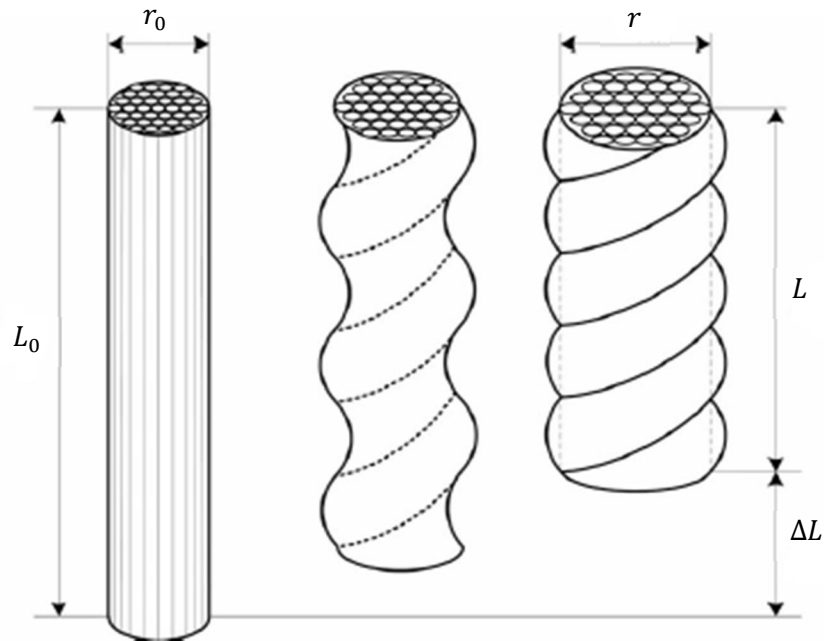
رایج‌ترین روشی که برای مدل‌سازی ریسمان تابیده معرفی شده است، مدل‌سازی سینماتیکی می‌باشد. در این نوع مدل‌سازی فرض بر این است که سرعت پاسخ‌دهی ریسمان به گشتاور وارد شده خیلی سریع می‌باشد به نحوی که می‌توان از دینامیک آن صرف‌نظر کرد. در ادامه، این نوع مدل‌سازی، بر پایه مدل معرفی شده در [۲۱] توضیح داده خواهد شد.

زمانی که ریسمان تابیده می‌شود، در حالت ایده‌آل، هر کدام از الیاف ریسمان شکل منحنی مارپیچی را به خود می‌گیرد به نحوی که الیاف ریسمان یک نظم ترتیبی را ایجاد می‌کند [۵]. این امر در شکل ۲-۲ برای ریسمانی با چهار رشته نشان داده شده است.



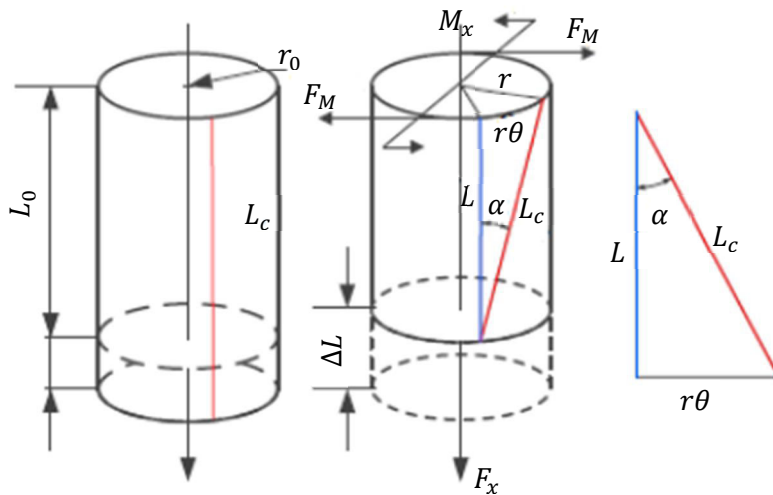
شکل ۲-۲ - نظم ایجاد شده در الیاف ریسمان در اثر تابیدگی [۵]

در مدل ارائه شده در [۲۱]، ریسمان با یک استوانه توپر معادل سازی می‌شود؛ به نحوی که حجم آن تغییر نمی‌کند. بنابراین زمانی که ریسمان تابیده می‌شود طول آن کاهش و شعاع آن افزایش می‌یابد. در واقع، در این مدل فرض می‌شود که ریسمان از بی‌نهایت رشته الیاف تشکیل شده است. شکل ۳-۲ تبدیل ریسمان را از حالت اولیه به حالت نهایی در اثر تابیده شدن نشان می‌دهد.



شکل ۳-۲ - تاثیر تابیدگی بر تغییر طول و شعاع ریسمان [۲۱]

در شکل ۲-۳، L_0 و r_0 به ترتیب طول و شعاع ریسمان بدون بارگذاری و بدون تابیدگی، و L و r به ترتیب طول و شعاع ریسمان در حالت تابیده شده و تحت بارگذاری می‌باشد. زمانی که ریسمان در حالت تابیده شده باشد، به دلیل آنکه رشته‌های الیاف کشیده شده‌اند طول آنها افزایش پیدا می‌کند. در نتیجه، اگر ریسمان تابیده شده باز شود، استوانه‌ای حاصل می‌شود که طول آن از طول بدون تابیدگی بیشتر می‌باشد. با توجه به این قضیه، شکل ۲-۴ ریسمان و نیروهای وارد بر ریسمان را در حالت تابیده شده و باز شده نشان می‌دهد.



شکل ۲-۴ - تغییر هندسه ریسمان در اثر تابیدگی و نیروهای وارد بر آن [۲۱]

با توجه به شکل ۲-۴ می‌توان روابط هندسی (۲-۱) را نوشت.

$$\begin{cases} L_c^2 = L^2 + (r\theta)^2 \\ \sin \alpha = \frac{r\theta}{L_c} \\ \cos \alpha = \frac{L}{L_c} \end{cases} \quad (1-2)$$

در شکل ۲-۴، طول ریسمان بدون هیچگونه بارگذاری و تابیدگی L_0 ، طول ریسمان در حالت تابیده و تحت بارگذاری L ، و تحت بارگذاری و در حالت باز شده L_c می‌باشد. همچنین θ مقدار زاویه‌ای است که ریسمان تابیده شده است. در اثر کشیدگی الیاف ریسمان، نیرویی کششی در آنها ایجاد می‌شود. اگر این نیرو با F_i نشان داده شود آنگاه می‌توان رابطه (۲-۲) را برای نیروی F_i نوشت.

$$F_i = k(L_c - L_0) \quad (2-2)$$

با توجه به توضیحات بیان شده در [۲۱]، k ضریب سفتی ریسمان در حالت بدون تابیدگی و بارگذاری می‌باشد که با توجه به روابط الاستیکی می‌توان آن را بر اساس مدول الاستیسیته و هندسه ریسمان نوشت. رابطه (۲-۲) در واقع معادل رابطه الاستیکی زیر می‌باشد. این رابطه به صورت (۳-۲) می‌باشد.

$$F_i = A_0 E \left(\frac{L_c - L_0}{L_0} \right) \quad (3-2)$$

که E مدول الاستیسیته ماده ریسمان، و $\frac{L_c - L_0}{L_0}$ در واقع مقدار کرنشی است که در الیاف ایجاد می‌شود. نیروی F_i در واقع عکس‌العمل الیاف ریسمان نسبت به نیرو و گشتاور خارجی است. در نتیجه، می‌توان روابط تعادلی (۴-۲) را با استفاده از شکل ۲-۴ برای ریسمان نوشت.

$$\begin{cases} F_x = F_i \cos \alpha \\ M_x = F_i r \sin \alpha \end{cases} \quad (4-2)$$

با ترکیب رابطه (۴-۲) با رابطه (۲-۲) حاصل خواهد شد.

$$\begin{cases} F_x = \left\{ A_0 E \left(\frac{L_c - L_0}{L_0} \right) \right\} \cos \alpha \\ M_x = \left\{ A_0 E \left(\frac{L_c - L_0}{L_0} \right) \right\} r \sin \alpha \end{cases} \quad (5-2)$$

رابطه (۵-۲) را می‌توان با در نظر گرفتن رابطه (۱-۲) و کمی مرتب‌سازی، به صورت رابطه (۶-۲) نوشت.

$$\begin{cases} F_x = \left\{ A_0 E \left(\frac{\sqrt{L^2 + (r\theta)^2} - L_0}{L_0} \right) \right\} \frac{L}{\sqrt{L^2 + (r\theta)^2}} \\ M_x = \left\{ A_0 E \left(\frac{\sqrt{L^2 + (r\theta)^2} - L_0}{L_0} \right) \right\} \frac{r^2 \theta}{\sqrt{L^2 + (r\theta)^2}} \end{cases} \quad (6-2)$$

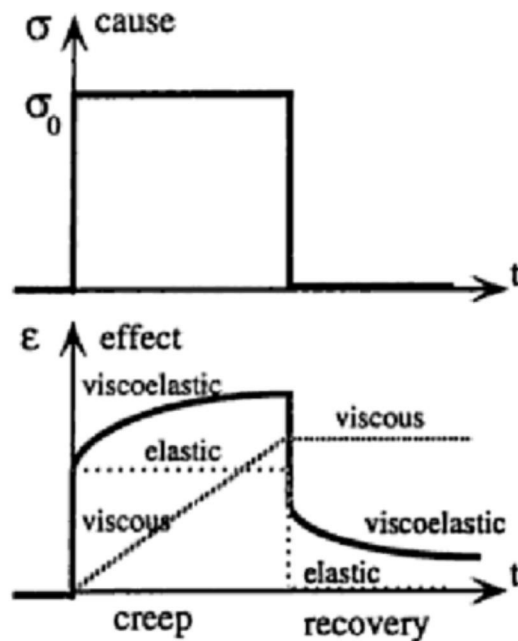
نکته آخری که لازم به ذکر است این است که حجم ریسمان در اثر تابیده شدن تغییر نمی‌کند، که در نتیجه، رابطه $V = \pi r_f^2 L_f = \pi r^2 L$ همیشه برقرار می‌باشد.

۲-۳- مقدمه‌ای بر مواد ویسکوالاستیک

استفاده از مواد ویسکوالاستیک در بخش‌های مختلف مهندسی به دلیل خصوصیات فیزیکی و مکانیکی آن افزایش پیدا کرده است. رفتار این مواد در استهلاک انرژی و میرایی نیروها باعث ایجاد علاقه در مهندسين جهت مطالعه و بررسی کاربرد این مواد گردیده است.

شکل ۲-۵ مقایسه‌ای بین پاسخ سه گونه ماده (الاستیک، ویسکوز و ویسکوالاستیک) در برابر تنش

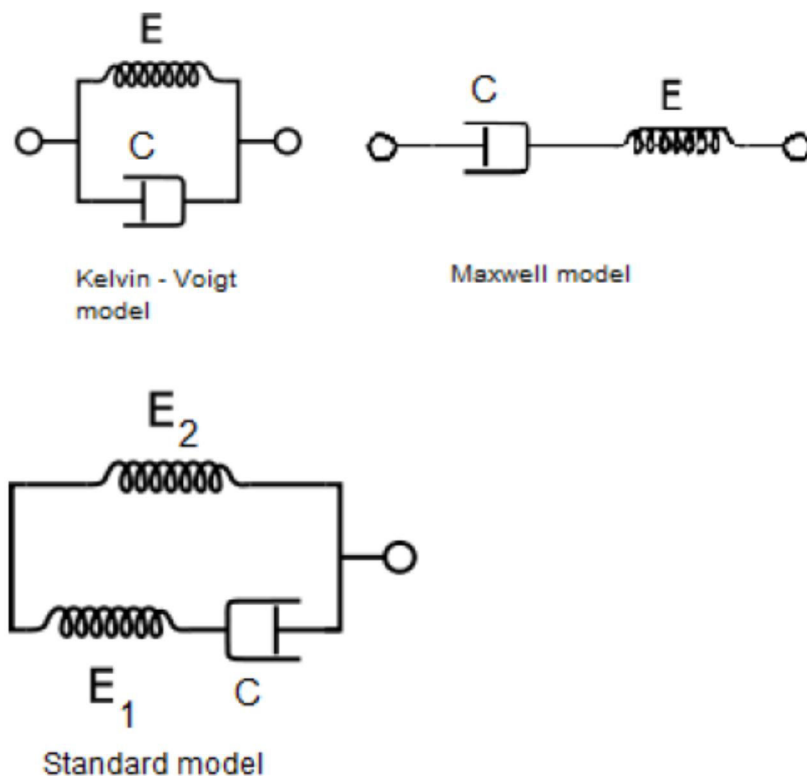
اعمال شده را نشان می‌دهد [۲۷].



شکل ۲-۵ - پاسخ سه گونه ماده، الاستیک، ویسکوز و ویسکوالاستیک به تنش اعمال شده [۲۷]

رفتار مواد ویسکوالاستیک مابین رفتار الاستیک و مواد ویسکوز می‌باشد [۲۸]. بر همین اساس

مدلهایی که برای رابطه تنش کرنش این مواد ارائه می‌شود، ترکیبی از فنر و دمپر می‌باشد.



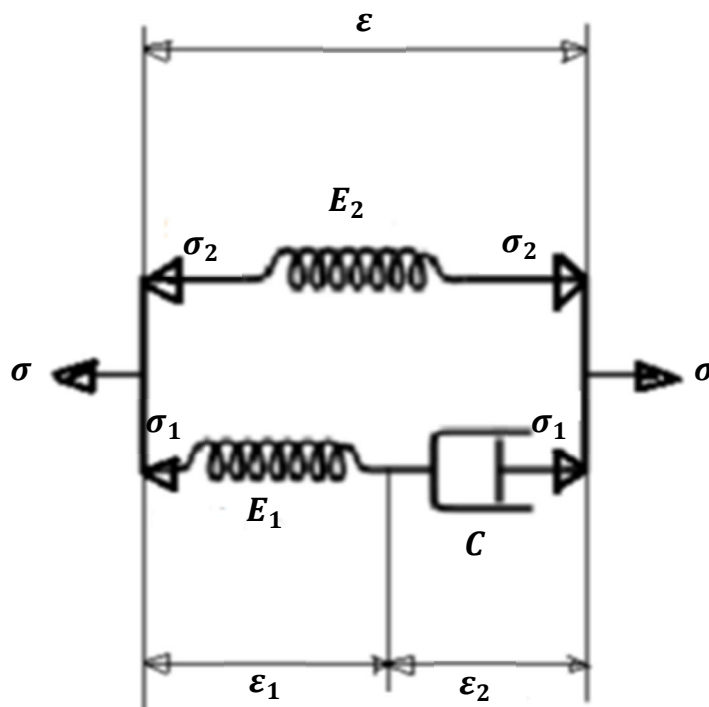
شکل ۶-۲- سه مدل فنر و دمپر مشهور مواد ویسکوالاستیک [۲۹]

همانطور که در شکل ۶-۲ مشاهده می‌شود [۲۹]، سه مدل نشان داده شده، مدل ماکسول، مدل کلوین-وویت و مدل استاندارد نام دارند که از مشهورترین مدل‌های تنش-کرنش مواد ویسکوالاستیک می‌باشند. مدل کلوین-وویت بیشتر برای موادی به کار می‌رود که نزدیک به مواد الاستیک می‌باشد و مدل ماکسول نیز برای موادی با رفتار نزدیک به مواد ویسکوز کاربرد دارد. در بین این سه مدل، مدل استاندارد، مدل کلی‌تری هست به نحوی که مدل ماکسول و کلوین-وویت را نیز در بر دارد. به طور مثال با توجه به شکل ۶-۲، اگر در مدل استاندارد $E_2 = 0$ فرض شود، مدل باقیمانده همان مدل ماکسول خواهد بود. و یا اگر $E_1 = \infty$ فرض شود، مدل کلوین-وویت حاصل خواهد شد. پس اگر رابطه تنش و کرنش مدل استاندارد بدست آید می‌توان با استفاده از آن، رابطه تنش و کرنش مدل ماکسول و مدل کلوین-وویت را نیز بدست آورد.

برای استخراج رابطه تنش و کرنش مدل استاندارد می‌توان از شکل ۷-۲ استفاده کرد و روابط (۲-۷)

(۷) را نوشت.

$$\begin{cases} \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ \sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \\ \sigma_2 = E_2 \varepsilon \\ \sigma_1 = E_1 \varepsilon_1 \\ \sigma_1 = C \dot{\varepsilon}_2 \end{cases} \quad (7-2)$$



شکل ۷-۲ - مدل استاندارد و تنش و کرنش‌های داخلی مربوط به این مدل

با مشتق‌گیری و یک سری عملیات جبری می‌توان روابط رابطه (۷-۲) را ترکیب نموده و با حذف ε_1 ,

ε_2 , σ_1 و σ_2 به رابطه (۸-۲) رسید.

$$\frac{1}{E_1} \dot{\sigma} + \frac{1}{C} \sigma = \left(1 + \frac{E_2}{E_1}\right) \dot{\varepsilon} + \frac{E_2}{C} \varepsilon \quad (8-2)$$

رابطه (۸-۲) بیان‌کننده رابطه تنش-کرنش ماده ویسکوالاستیک مدل شده با مدل استاندارد می‌باشد.

این رابطه را می‌توان به صورت اپراتور مشتقی نیز نوشت که به صورت رابطه (۹-۲) خواهد بود.

$$\sigma = \frac{\left(1 + \frac{E_2}{E_1}\right) \frac{\partial}{\partial t} + \frac{E_2}{C}}{\frac{1}{E_1} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{C}} \varepsilon \quad (9-2)$$

برای بدست آوردن رابطه تنش- کرنش مدل کلوین-وویت کافیت که در رابطه (۸-۲)، E_1 به سمت بی‌نهایت میل داده شود. در نتیجه، رابطه تنش-کرنش در مدل کلوین-وویت به صورت رابطه (۱۰-۲) خواهد بود.

$$\sigma = E_2 \varepsilon + C \dot{\varepsilon} \quad (10-2)$$

و فرم اپراتور مشتقی آن نیز به صورت رابطه (۱۱-۲) خواهد بود.

$$\sigma = \left(E_2 + C \frac{\partial}{\partial t}\right) \varepsilon \quad (11-2)$$

جدای از نوع مدل تنش-کرنش انتخاب شده برای ماده ریسمان، رابطه تنش-کرنش آن را می‌توان به صورت کلی زیر بیان کرد.

$$\sigma = \tilde{E} \varepsilon \quad (12-2)$$

که \tilde{E} اپراتور مشتقی می‌باشد.

نکته آخر اینکه، در این پژوهش، الیاف ریسمان فقط تحت تاثیر بار محوری کششی هستند. بنابراین تنها مدل تنش-کرنش ماده الاستیک در بارگذاری محوری مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

۲-۴- معادلات دینامیکی ریسمان تابیده

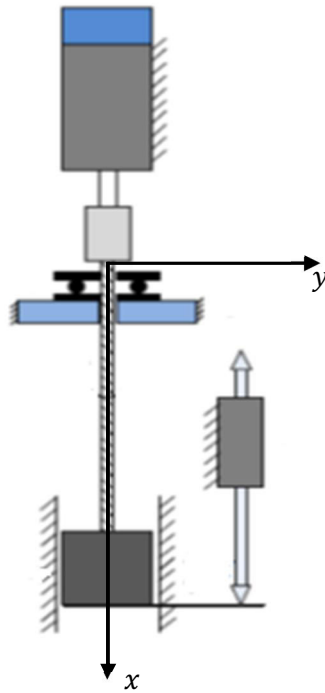
در بخش ۲-۲ مدل‌سازی سینماتیکی ریسمان تابیده بیان گردید. این مدل‌سازی تا حد خوبی نتایج مطلوب از رفتار حالت پایای ریسمان تابیده بدست می‌دهد. ولی برای بررسی رفتار حالت گذرای ریسمان تابیده لازم است تا ریسمان به صورت دینامیکی مدل‌سازی شود.

زمانی که گشتاور موتور به ریسمان اعمال می‌شود ریسمان یک حرکت دینامیکی را شروع می‌کند تا در نهایت به یک حالت پایا می‌رسد. این حرکت دینامیکی و تاثیر گشتاور اعمال شده بر آن به عوامل مختلفی می‌تواند بستگی داشته باشد. از جمله این عوامل می‌توان به جنس ماده و هندسه ریسمان اشاره کرد.

در حالت کلی، ریسمان می‌تواند حرکت‌های مختلفی داشته باشد ولی در شرایط سیستم محرکه مورد نظر، حرکت پیچشی و طولی آن از اهمیت برخوردار است؛ هر چند که می‌تواند حرکات عرضی نیز داشته باشد. برای آنکه بتوان پاسخ ریسمان به گشتاور اعمال شده را بدست آورد لازم است تا معادلات دینامیکی ریسمان استخراج شود. ابتدا معادلات حرکت ریسمان در حالت کلی بدست خواهد آمد و سپس معادلات بدست آمده برای شرایط مسئله مورد نظر ساده‌سازی خواهد شد.

ریسمان مورد نظر را می‌توان با استفاده از معادلات الاستیسیته سه بعدی مدل کرد. این کار با اینکه جواب دقیق‌تری بدست می‌دهد ولی حجم محاسبات بالایی را طلب می‌کند و پیچیدگی بالایی نیز دارد. راه حل مناسبی که برای مدل کردن ریسمان بیان شده است تئوری کیرشهوف برای ریسمان‌ها می‌باشد که از دقت خوبی نیز برخوردار است. در این روش، ریسمان به صورت یک منحنی در نظر گرفته می‌شود که دارای حرکت سه بعدی در فضای سه بعدی می‌باشد. هم‌چنین علاوه بر حرکت سه بعدی دارای تابیدگی (تابیده شدن) نیز می‌باشد.

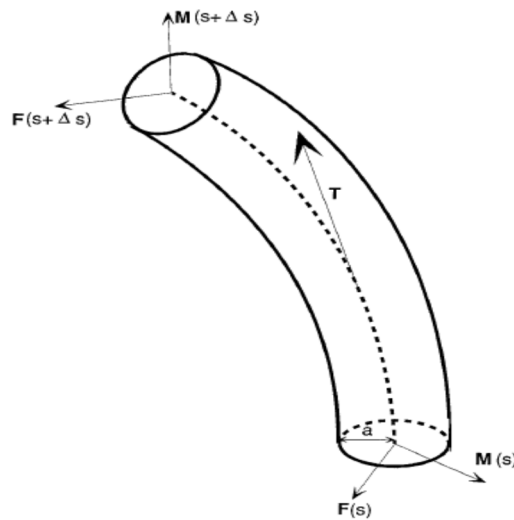
برای بدست آوردن معادلات دینامیکی ریسمان لازم است تا دستگاه مختصاتی برای بیان معادلات معرفی شود. بنابراین دستگاه مختصات xyz طوری در نظر گرفته می‌شود که محور x در راستای ریسمان باشد و مبدا مختصات در محل اتصال ریسمان به گیره باشد؛ همانگونه که در شکل ۲-۸ از [۲۱] نشان داده شده است.



شکل ۲-۸- دستگاه مختصات تعریف شده برای بیان معادلات دینامیکی ریسمان تابیده

برای استخراج معادلات حرکت ریسمان تابیده شده، لازم است تا المانی از ریسمان مورد بررسی

قرار گیرد. شکل ۲-۹ از [۳۱] المانی از ریسمان را نشان می‌دهد.



شکل ۲-۹- المانی از ریسمان [۳۱]

در شکل ۲-۹، s نشان‌دهنده پارامتر طول منحنی در حالت اولیه می‌باشد. F و M به ترتیب بیانگر

بردار نیروی داخلی کل و گشتاور داخلی کل وارد بر سطح مقطع ریسمان هست. سطح مقطع ریسمان

به صورت دایره‌ای با شعاع $r(s, t)$ در نظر گرفته شده است. به دلیل تابیده شدن ریسمان، شعاع سطح مقطع آن در هر لحظه در حال تغییر است و مقدار اولیه آن برابر با r_0 فرض می‌شود. بردار T نیز نشان‌دهنده بردار مماس بر منحنی (منحنی منطبق با ریسمان) می‌باشد.

همانطور که گفته شد ریسمان را می‌توان به وسیله یک منحنی فضایی مدل کرد و می‌توان از دستگاه مختصات TNB که در منحنی‌ها به کار می‌رود، برای بیان معادلات ریسمان استفاده کرد. بر همین اساس، بردار مکان ریسمان را می‌توان در فضای سه بعدی با مجموعه نقاط $X(s, t): [0, L_0] \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ نشان داد که t نشان‌دهنده زمان و s نشان‌دهنده پارامتر طول ریسمان در حالت اولیه می‌باشد. در این بیان، L_0 نشان‌دهنده طول اولیه ریسمان می‌باشد. برای این منحنی دستگاه مختصات TNB طوری تعریف می‌شود که بردارهای یکه آن از روابط (۱۳-۲) محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} T &= \frac{X'}{\|X'\|} \\ N &= \frac{T'}{\|T'\|} \\ B &= T \times N \end{aligned} \quad (13-2)$$

که T بردار مماس بر منحنی، N بردار عمود بر آن می‌باشد و بردار B نیز با استفاده از قانون دست راست بدست می‌آید. در رابطه بالا، $X' = \frac{dX}{ds}$ و $T' = \frac{dT}{ds}$ می‌باشد. علاوه بر رابطه بالا، رابطه دیگری نیز در منحنی‌ها کاربرد زیادی دارد که به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} \frac{dT}{ds'} &= \kappa N \\ \frac{dN}{ds'} &= -\kappa T + \tau B \\ \frac{dB}{ds'} &= -\tau N \end{aligned} \quad (14-2)$$

در رابطه (۱۴-۲)، κ و τ به ترتیب نشان‌دهنده انحنای منحنی و پیچش منحنی است و s' نیز پارامتر طول منحنی در لحظه t می‌باشد که در واقع وابسته به t هست.

بردارهای T ، N و B را می‌توان در دستگاه مختصات xyz بیان کرد و مولفه‌های این بردارها را به صورت روابطی از بردار مکان ریسمان بیان کرد. برای بدست آوردن بردارهای یکه دستگاه مختصات

TNB باید از رابطه (۲-۱۳) استفاده کرد. بنابراین، اگر بردار مکان ریسمان \mathbf{X} و بردارهای یکه \mathbf{T} ، \mathbf{N} و \mathbf{B} در دستگاه مختصات xyz به صورت رابطه زیر نشان داده شود [۳۱].

$$\begin{cases} \mathbf{X} = X_x \mathbf{i} + X_y \mathbf{j} + X_z \mathbf{k} \\ \mathbf{T} = T_x \mathbf{i} + T_y \mathbf{j} + T_z \mathbf{k} \\ \mathbf{N} = N_x \mathbf{i} + N_y \mathbf{j} + N_z \mathbf{k} \\ \mathbf{B} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k} \end{cases} \quad (۱۵-۲)$$

آنگاه مولفه‌های بردارهای یکه دستگاه مختصات به صورت روابط (۲-۱۶) تا (۲-۱۸) بدست خواهد آمد [۳۱].

$$\begin{cases} T_x = \frac{\frac{dX_x}{ds}}{\sqrt{\left(\frac{dX_x}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dX_y}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dX_z}{ds}\right)^2}} \\ T_y = \frac{\frac{dX_y}{ds}}{\sqrt{\left(\frac{dX_x}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dX_y}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dX_z}{ds}\right)^2}} \\ T_z = \frac{\frac{dX_z}{ds}}{\sqrt{\left(\frac{dX_x}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dX_y}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dX_z}{ds}\right)^2}} \end{cases} \quad (۱۶-۲)$$

$$\begin{cases} N_x = \frac{\frac{dT_x}{ds}}{\sqrt{\left(\frac{dT_x}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dT_y}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dT_z}{ds}\right)^2}} \\ N_y = \frac{\frac{dT_y}{ds}}{\sqrt{\left(\frac{dT_x}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dT_y}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dT_z}{ds}\right)^2}} \\ N_z = \frac{\frac{dT_z}{ds}}{\sqrt{\left(\frac{dT_x}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dT_y}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dT_z}{ds}\right)^2}} \end{cases} \quad (۱۷-۲)$$

$$\begin{cases} B_x = T_y N_z - T_z N_y \\ B_y = T_z N_x - T_x N_z \\ B_z = T_x N_y - T_y N_x \end{cases} \quad (۱۸-۲)$$

همچنین انحنا و پیچش منحنی ریسمان را نیز می‌توان با استفاده از رابطه (۲-۱۴) حساب کرد که به صورت روابط (۲-۱۹) و (۲-۲۰) خواهند بود.

$$\kappa = \left\{ N_x \frac{dT_x}{ds} + N_y \frac{dT_y}{ds} + N_z \frac{dT_z}{ds} \right\} \frac{ds}{ds'} \quad (19-2)$$

$$\tau = \left\{ B_x \frac{dN_x}{ds} + B_y \frac{dN_y}{ds} + B_z \frac{dN_z}{ds} \right\} \frac{ds}{ds'} \quad (20-2)$$

اثبات روابط (۲-۱۶) تا (۲-۲۰) در پیوست الف آمده است [۳۱].

علاوه بر منحنی مرکزی ریسمان که نشان دهنده موقعیت فضایی ریسمان می‌باشد، ریسمان دارای یک حرکت تابیدگی نیز می‌باشد که با $\omega(s, t): [0, L_0] \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ نشان داده خواهد شد. به صورت دقیق، ω به صورت $\omega = \left(\mathbf{V}(s, t) \times \frac{d\mathbf{V}(s, t)}{dt} \right) \cdot \mathbf{T}$ تعریف می‌شود. برداری است که در صفحه سطح مقطع ریسمان قرار دارد به نحوی که $\mathbf{V} \cdot \mathbf{T} = 0$ برقرار می‌باشد.

با توصیفاتی که بیان شد، می‌توان معادلات دینامیکی ریسمان را بدست آورد. ابتدا می‌توان بر اساس قوانین نیوتن، با توجه به شکل ۲-۹ معادلات تعادل نیروها را برای المان ریسمان نوشت که به صورت برداری (۲-۲۱) خواهد بود.

$$\frac{d}{dt} \left(dm \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) = \mathbf{F}(s + \Delta s, t) - \mathbf{F}(s, t) + \mathbf{f} \Delta s \quad (21-2)$$

که $dm \frac{d\mathbf{x}}{dt}$ نشان‌دهنده مومنتوم خطی المان می‌باشد که dm جرم المان مورد نظر و برابر با $\rho A_0 \Delta s$ و نامتغیر نسبت به زمان می‌باشد که ρ چگالی ماده ریسمان، A_0 سطح مقطع اولیه ریسمان و برابر با πr_0^2 می‌باشد. ترم \mathbf{f} نیز نیروی وارد بر واحد طول ریسمان می‌باشد. با توجه به بسط تیلور می‌توان گفت که $\mathbf{F}(s + \Delta s, t) - \mathbf{F}(s, t) \approx \frac{d\mathbf{F}(s, t)}{ds} \Delta s$ می‌باشد که با جایگذاری آن در معادله (۲-۲۱)، رابطه (۲-۲۲) حاصل خواهد شد.

$$\rho A_0 \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} \Delta s = \frac{d\mathbf{F}(s, t)}{ds} \Delta s + \mathbf{f} \Delta s \quad (22-2)$$

با حذف Δs از طرفین این رابطه، رابطه (۲-۲۳) حاصل خواهد شد.

$$\rho A_0 \frac{d^2 \mathbf{X}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{F}}{ds} + \mathbf{f} \quad (23-2)$$

معادله (۲۳-۲) به صورت برداری می‌باشد که برای حل حرکت ریسمان به وسیله کدنویسی لازم است به صورت مولفه‌ای بیان گردد. بردار مکان ریسمان، \mathbf{X} را می‌توان در دستگاه مختصات xyz به صورت $\mathbf{X} = X_x \mathbf{i} + X_y \mathbf{j} + X_z \mathbf{k}$ نشان داد. نیروی \mathbf{F} را نیز می‌توان در دستگاه مختصات TNB به صورت $\mathbf{F} = F_T \mathbf{T} + F_N \mathbf{N} + F_B \mathbf{B}$ بیان کرد. از آنجا که ریسمان قابلیت تحمل نیروی برشی را ندارد، $F_N = F_B = 0$ خواهد بود که در نتیجه $\mathbf{F} = F_T \mathbf{T}$ می‌باشد. با توجه به توضیحات بیان شده، رابطه برداری (۲۲-۲) را می‌توان به صورت رابطه زیر نوشت.

$$\rho A_0 \frac{d^2}{dt^2} (X_x \mathbf{i} + X_y \mathbf{j} + X_z \mathbf{k}) = \frac{d}{ds} (F_T \mathbf{T}) + (f_x \mathbf{i} + f_y \mathbf{j} + f_z \mathbf{k})$$

$$\rightarrow \rho A_0 \frac{d^2}{dt^2} (X_x \mathbf{i} + X_y \mathbf{j} + X_z \mathbf{k}) = \frac{dF_T}{ds} \mathbf{T} + F_T \frac{d\mathbf{T}}{ds} + (f_x \mathbf{i} + f_y \mathbf{j} + f_z \mathbf{k}) \quad (24-2)$$

$$\rightarrow \rho A_0 \frac{d^2}{dt^2} (X_x \mathbf{i} + X_y \mathbf{j} + X_z \mathbf{k}) = \frac{dF_T}{ds} \mathbf{T} + F_T \frac{d\mathbf{T}}{ds} \frac{ds'}{ds} + (f_x \mathbf{i} + f_y \mathbf{j} + f_z \mathbf{k})$$

با توجه به رابطه (۲-۱۴) می‌توان رابطه (۲-۲۴) را به صورت رابطه زیر نوشت.

$$\rho A_0 \frac{d^2}{dt^2} (X_x \mathbf{i} + X_y \mathbf{j} + X_z \mathbf{k}) = \frac{dF_T}{ds} \mathbf{T} + \kappa F_T \frac{ds'}{ds} \mathbf{N} + (f_x \mathbf{i} + f_y \mathbf{j} + f_z \mathbf{k}) \quad (25-2)$$

ترم $\frac{ds'}{ds}$ در رابطه (۲-۲۵) را نیز می‌توان بر حسب بردار جابجایی ریسمان بیان کرد که به صورت رابطه زیر می‌باشد.

$$\frac{ds'}{ds} = \sqrt{\left(\frac{dX_x}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dX_y}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dX_z}{ds}\right)^2} \quad (26-2)$$

اثبات رابطه (۲-۲۶) نیز در پیوست الف آمده است. با جایگذاری رابطه (۲-۲۶) در رابطه (۲-۲۵) و بیان بردارهای \mathbf{T} و \mathbf{N} به صورت مولفه‌ای در دستگاه مختصات xyz ، رابطه (۲-۲۷) حاصل خواهد شد.

$$\rho A_0 \frac{d^2}{dt^2} (X_x \mathbf{i} + X_y \mathbf{j} + X_z \mathbf{k}) = \frac{dF_T}{ds} (T_x \mathbf{i} + T_y \mathbf{j} + T_z \mathbf{k}) + F_T \kappa \sqrt{\left(\frac{dX_x}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dX_y}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dX_z}{ds}\right)^2} (N_x \mathbf{i} + N_y \mathbf{j} + N_z \mathbf{k}) + (f_x \mathbf{i} + f_y \mathbf{j} + f_z \mathbf{k}) \quad (27-2)$$

در نهایت، معادله برداری (27-2) معادلات (28-2) را نتیجه خواهد داد.

$$\begin{cases} \rho A_0 \frac{d^2 X_x}{dt^2} = \frac{dF_T}{ds} T_x + \kappa F_T \sqrt{\left(\frac{dX_x}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dX_y}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dX_z}{ds}\right)^2} N_x + f_x \\ \rho A_0 \frac{d^2 X_y}{dt^2} = \frac{dF_T}{ds} T_y + \kappa F_T \sqrt{\left(\frac{dX_x}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dX_y}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dX_z}{ds}\right)^2} N_y + f_y \\ \rho A_0 \frac{d^2 X_z}{dt^2} = \frac{dF_T}{ds} T_z + \kappa F_T \sqrt{\left(\frac{dX_x}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dX_y}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dX_z}{ds}\right)^2} N_z + f_z \end{cases} \quad (28-2)$$

علاوه بر معادله تعادل نیروها می‌توان معادله تعادل ممان‌ها را نیز برای این المان نوشت. سرعت دورانی المان ریسمان، Ω متشکل از دو بخش است که بخش اول شامل سرعت دوران دستگاه مختصات TNB و بخش دوم مربوط به سرعت تابیدگی المان ریسمان، $\frac{d\theta}{dt}$ می‌باشد. اگر سرعت دورانی دستگاه مختصات TNB با ω نشان داده شود آنگاه می‌توان رابطه (29-2) را برای Ω نوشت.

$$\Omega = \omega + \frac{d\theta}{dt} \mathbf{T} \quad (29-2)$$

با توجه به اینکه در تئوری تیر اویلر-برنولی و یا معادلات دینامیکی-ارتعاشی ریسمان از ترم سرعت دورانی ω صرف نظر می‌شود [31][32] و با توجه فرضیات مساله در اینجا نیز از این ترم صرف نظر می‌شود. در نتیجه:

$$\Omega = \frac{d\theta}{dt} \mathbf{T} \quad (30-2)$$

و با استفاده از رابطه (30-2) و با فرض استوانه‌ای بودن المان ریسمان، مومنوم دورانی المان حول مرکز جرم آن به صورت رابطه (31-2) خواهد بود.

$$\mathbf{I}\Omega = I_{TT} \frac{d\theta}{dt} \mathbf{T} \quad (31-2)$$

که در رابطه بالا، $I_{TT} = \frac{1}{2} r^2 dm$ می‌باشد. رابطه (31-2) را می‌توان با یک تغییر کوچک به صورت رابطه (32-2) نوشت.

$$\mathbf{I}\Omega = \mathbf{J}\Omega ds = J_{TT} \frac{d\theta}{dt} \mathbf{T} ds \quad (32-2)$$

به نحوی که $J_{TT} = \frac{1}{2} \rho A_0 r^2$ می‌باشد. حال می‌توان معادلات دینامیکی مربوط به گشتاورها را برای المان مورد نظر نوشت. این رابطه به این صورت است که تغییرات مومنتوم دورانی المان حول مرکز جرم، نسبت به زمان، برابر است با تمام گشتاورهای خارجی و گشتاورهای حاصل از نیروهای خارجی نسبت به مرکز جرم المان. در نتیجه رابطه (33-2) حاصل می‌شود.

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{I}\Omega) = \mathbf{M}(s + \Delta s, t) - \mathbf{M}(s, t) + \mathbf{F} \times \mathbf{T} \Delta s' \quad (33-2)$$

از آنجا که $\mathbf{M}(s + \Delta s, t) - \mathbf{M}(s, t) \approx \frac{d\mathbf{M}(s,t)}{ds} \Delta s$ می‌باشد و همچنین با جایگذاری رابطه (32-2) در رابطه (33-2)، رابطه (34-2) حاصل خواهد شد.

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{J}\Omega ds) = \frac{d\mathbf{M}}{ds} ds + \mathbf{F} \times \mathbf{T} ds' \quad (34-2)$$

با حذف ترم ds از طرفین رابطه بالا، رابطه (35-2) بدست خواهد آمد.

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{J}\Omega) = \frac{d\mathbf{M}}{ds} + \mathbf{F} \times \mathbf{T} \frac{ds'}{ds} \quad (35-2)$$

معادله (35-2) را نیز می‌توان به صورت مولفه‌ای بیان کرد. از آنجا که ریسمان قابلیت تحمل گشتاور خمشی را نیز ندارد $\mathbf{M} = M_T \mathbf{T}$ می‌باشد. در نتیجه معادله (35-2) به صورت معادله زیر خواهد بود.

$$\frac{d}{dt} (J_{TT} \dot{\theta} \mathbf{T}) = \frac{d}{ds} (M_T \mathbf{T}) + (F_T \mathbf{T}) \times \mathbf{T} \frac{ds'}{ds} \quad (36-2)$$

از معادله (36-2) معادله دینامیکی تعادل ممانها در راستای بردار \mathbf{T} به صورت رابطه (37-2) بدست خواهد آمد.

$$J_{TT}\ddot{\theta} + \dot{J}_{TT}\dot{\theta} = \frac{dM_T}{ds} \quad (37-2)$$

از آنجا که $J_{TT} = \frac{1}{2}\rho A_0 r^2$ می‌باشد؛ رابطه (37-2) را می‌توان به صورت رابطه (38-2) نوشت.

$$\frac{1}{2}\rho A_0 r^2 \ddot{\theta} + \rho A_0 r \dot{r} \dot{\theta} = \frac{dM_T}{ds} \quad (38-2)$$

تا اینجا، تنها معادلات تعادل نیروها و ممانها بیان گردیده است؛ ولی هنوز بحثی از روابط بین نیروها و تغییر طولها به میان نیامده است. در بخش 2-2 روابط سینماتیکی ریسمان برای کل طول آن بیان گردید.

در این قسمت می‌توان همان روابط سینماتیکی را برای المان ریسمان بیان کرد. ولی قبل از آن ذکر این نکته ضروری است که زمانی که جنس ریسمان از جنس ویسکوالاستیک باشد، رابطه تنش و کرنش در آن به فرم رابطه (12-2) خواهد بود. برای المان ریسمان، کرنش الیاف برابر با $\frac{\sqrt{\Delta s'^2 + (r\Delta\theta)^2} - \Delta s}{\Delta s}$ می‌باشد که Δs طول اولیه و $\Delta s'$ طول تغییر یافته المان ریسمان و $\Delta\theta$ میزان زاویه تابیدگی المان ریسمان می‌باشد. در نتیجه، مشابه رابطه (3-2) می‌توان رابطه (39-2) را برای نیروی کششی الیاف المان ریسمان از جنس ماده ویسکوالاستیک نوشت.

$$F_i = A_0 \tilde{E} \left(\frac{\sqrt{\Delta s'^2 + (r\Delta\theta)^2} - \Delta s}{\Delta s} \right) \quad (39-2)$$

که اپراتور مشتق ماده ویسکوالاستیک ریسمان می‌باشد بسته به نوع مدلسازی ماده، اپراتورهای مختلفی می‌تواند باشد. در نتیجه، مشابه رابطه (6-2) می‌توان رابطه (40-2) را برای المان ریسمان نوشت.

$$\begin{cases} F_T = A_0 \frac{\Delta s'}{\sqrt{\Delta s'^2 + (r\Delta\theta)^2}} \tilde{E} \left(\frac{\sqrt{\Delta s'^2 + (r\Delta\theta)^2} - \Delta s}{\Delta s} \right) \\ M_T = A_0 \frac{r^2 \Delta\theta}{\sqrt{\Delta s'^2 + (r\Delta\theta)^2}} \tilde{E} \left(\frac{\sqrt{\Delta s'^2 + (r\Delta\theta)^2} - \Delta s}{\Delta s} \right) \end{cases} \quad (40-2)$$

رابطه بالا در حالت حدی به صورت رابطه (۴۱-۲) خواهد بود.

$$\begin{cases} F_T = A_0 \frac{\frac{ds'}{ds}}{\sqrt{\left(\frac{ds'}{ds}\right)^2 + \left(r \frac{d\theta}{ds}\right)^2}} \tilde{E} \left(\sqrt{\left(\frac{ds'}{ds}\right)^2 + \left(r \frac{d\theta}{ds}\right)^2} - 1 \right) \\ M_T = A_0 \frac{r^2 \frac{d\theta}{ds}}{\sqrt{\left(\frac{ds'}{ds}\right)^2 + \left(r \frac{d\theta}{ds}\right)^2}} \tilde{E} \left(\sqrt{\left(\frac{ds'}{ds}\right)^2 + \left(r \frac{d\theta}{ds}\right)^2} - 1 \right) \end{cases} \quad (۴۱-۲)$$

با جایگذاری رابطه (۲۶-۲) در رابطه (۴۱-۲) رابطه (۴۲-۲) حاصل خواهد شد.

$$\begin{cases} F_T = A_0 \frac{\sqrt{\left(\frac{dX_x}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dX_y}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dX_z}{ds}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{dX_x}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dX_y}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dX_z}{ds}\right)^2 + \left(r \frac{d\theta}{ds}\right)^2}} \tilde{E} \left(\sqrt{\left(\frac{dX_x}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dX_y}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dX_z}{ds}\right)^2 + \left(r \frac{d\theta}{ds}\right)^2} - 1 \right) \\ M_T = A_0 \frac{r^2 \frac{d\theta}{ds}}{\sqrt{\left(\frac{dX_x}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dX_y}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dX_z}{ds}\right)^2 + \left(r \frac{d\theta}{ds}\right)^2}} \tilde{E} \left(\sqrt{\left(\frac{dX_x}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dX_y}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dX_z}{ds}\right)^2 + \left(r \frac{d\theta}{ds}\right)^2} - 1 \right) \end{cases} \quad (۴۲-۲)$$

به دلیل پیچش ریسمان، شعاع آن هر لحظه در حال تغییر است. به دلیل آنکه ماده ریسمان غیر تراکم‌پذیر است؛ برای المان ریسمان می‌توان گفت که $V = \pi r_0^2 \Delta s = \pi r^2 \Delta s'$ می‌باشد. که در نتیجه با کمی عملیات جبری، شعاع ریسمان در هر زمان به صورت رابطه زیر محاسبه خواهد شد.

$$r = \frac{r_0}{\sqrt{\frac{ds'}{ds}}} \quad (۴۳-۲)$$

با جایگذاری رابطه (۲۶-۲) در رابطه (۴۳-۲)، رابطه (۴۴-۲) حاصل خواهد شد.

$$r = \frac{r_0}{\sqrt[4]{\left(\frac{dX_x}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dX_y}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dX_z}{ds}\right)^2}} \quad (۴۴-۲)$$

قبل از آنکه به بیان شرایط مرزی معادلات دینامیکی بدست آمده پرداخته شود، نکته‌ای لازم به ذکر است. با توجه به شرایط مسئله که ریسمان یک ریسمان تاییده می‌باشد، فرض بر این است که ریسمان در حالت اولیه در حالت مستقیم قرار دارد.

در کنار معادلات بیان شده برای ریسمان، روابطی برای شرایط مرزی ریسمان نیز باید بیان گردد. شرایط مرزی ریسمان به صورت رابطه زیر می‌باشد.

$$\left\{ \begin{array}{l} Xx(0, t) = 0 \\ Xy(0, t) = 0 \\ Xz(0, t) = 0 \\ M_T(0, t) = M_m \\ Xy(L_0, t) = 0 \\ Xz(L_0, t) = 0 \\ F_T(L_0, t) = F_L \\ \theta(L_0, t) = 0 \end{array} \right. \quad (45-2)$$

که M_m گشتاور وارد شده از طرف موتور جهت تاییده شدن ریسمان و F_L نیروی وارد شده از طرف بار انتهایی می‌باشد.

با یک جمع‌بندی و با توجه به نکته ذکر شده معادلات حرکت ریسمان به صورت روابط (46-2) تا (49-2) می‌باشد.

$$\left\{ \begin{array}{l}
\rho A_0 \frac{d^2 X_x}{dt^2} = \frac{dF_T}{dx} T_x + \kappa F_T \sqrt{\left(\frac{dX_x}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_z}{dx}\right)^2} N_x + f_x \\
\rho A_0 \frac{d^2 X_y}{dt^2} = \frac{dF_T}{dx} T_y + \kappa F_T \sqrt{\left(\frac{dX_x}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_z}{dx}\right)^2} N_y + f_y \\
\rho A_0 \frac{d^2 X_z}{dt^2} = \frac{dF_T}{dx} T_z + \kappa F_T \sqrt{\left(\frac{dX_x}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_z}{dx}\right)^2} N_z + f_z \\
\frac{1}{2} \rho A_0 r^2 \ddot{\theta} + \rho A_0 r \dot{r} \dot{\theta} = \frac{dM_T}{ds} \\
F_T = A_0 \frac{\sqrt{\left(\frac{dX_x}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_z}{dx}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{dX_x}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_z}{dx}\right)^2 + \left(r \frac{d\theta}{dx}\right)^2}} \tilde{E} \left(\sqrt{\left(\frac{dX_x}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_z}{dx}\right)^2 + \left(r \frac{d\theta}{dx}\right)^2} - 1 \right) \\
M_T = A_0 \frac{r^2 \frac{d\theta}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dX_x}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_z}{dx}\right)^2 + \left(r \frac{d\theta}{dx}\right)^2}} \tilde{E} \left(\sqrt{\left(\frac{dX_x}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_z}{dx}\right)^2 + \left(r \frac{d\theta}{dx}\right)^2} - 1 \right) \\
r = \frac{r_0}{\sqrt[4]{\left(\frac{dX_x}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_z}{dx}\right)^2}} \\
\kappa = \frac{\left\{ N_x \frac{dT_x}{dx} + N_y \frac{dT_y}{dx} + N_z \frac{dT_z}{dx} \right\}}{\sqrt{\left(\frac{dX_x}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_z}{dx}\right)^2}}
\end{array} \right.$$

(46-2)

$$\left\{ \begin{array}{l}
T_x = \frac{\frac{dX_x}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dX_x}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_z}{dx}\right)^2}} \\
T_y = \frac{\frac{dX_y}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dX_x}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_z}{dx}\right)^2}} \\
T_z = \frac{\frac{dX_z}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dX_x}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_z}{dx}\right)^2}}
\end{array} \right.$$

(47-2)

$$\left\{ \begin{array}{l}
N_x = \frac{\frac{dT_x}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dT_x}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dT_y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dT_z}{dx}\right)^2}} \\
N_y = \frac{\frac{dT_y}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dT_x}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dT_y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dT_z}{dx}\right)^2}} \\
N_z = \frac{\frac{dT_z}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dT_x}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dT_y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dT_z}{dx}\right)^2}}
\end{array} \right.$$

(48-2)

$$\begin{cases} Xx(0, t) = 0 \\ Xy(0, t) = 0 \\ Xz(0, t) = 0 \\ M_T(0, t) = M_m \\ Xy(L_0, t) = 0 \\ Xz(L_0, t) = 0 \\ F_T(L_0, t) = F_L \\ \theta(L_0, t) = 0 \end{cases} \quad (49-2)$$

۲-۵- تاثیر مدل ویسکوالاستیک در مدلسازی دینامیکی

در بخش ۲-۳ انواع مدلسازی‌های ماده ویسکوالاستیک معرفی گردید و رابطه تنش- کرنش برای مدل استاندارد و مدل کلویین بدست آمد. در بخش ۲-۴ نیز مدلسازی دینامیکی ریسمان تابیده بیان گردید. در این بخش نحوه تاثیر مدل ویسکوالاستیک بر مدلسازی دینامیکی ریسمان بیان خواهد شد.

در بخش ۲-۳ بیان گردید که اپراتور مشتقی ماده ویسکوالاستیک در مدل استاندارد به صورت

$$\tilde{E} = \frac{(1 + \frac{E_2}{E_1}) \frac{\partial}{\partial t} + E_2}{\frac{1}{E_1} \frac{\partial}{\partial t} + C}$$

می‌باشد که از آن می‌توان اپراتور مشتقی مدل کلویین-وویت را نیز بدست آورد که

$$\tilde{E} = E_2 + C \frac{\partial}{\partial t} \text{ می‌باشد. این اپراتور نیز در بخش ۲-۳ بیان گردید و به صورت}$$

تاثیر مدل ویسکوالاستیک ماده ریسمان بر روی معادلات دینامیکی ریسمان مستقیماً بر روی روابط پنجم و ششم رابطه (۲-۴۶) می‌باشد. بنابراین زمانی که ماده ویسکوالاستیک با مدل کلویین-وویت مدل شود، این روابط به صورت زیر خواهند بود.

$$F_T = A_0 \frac{\sqrt{\left(\frac{dX_x}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_z}{dx}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{dX_x}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_z}{dx}\right)^2 + \left(r \frac{d\theta}{dx}\right)^2}} \left\{ E_2 \left(\sqrt{\left(\frac{dX_x}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_z}{dx}\right)^2 + \left(r \frac{d\theta}{dx}\right)^2} - 1 \right) + C \left(\sqrt{\left(\frac{dX_x}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_z}{dx}\right)^2 + \left(r \frac{d\theta}{dx}\right)^2} - 1 \right) \right\} \quad (50-2)$$

$$M_T = A_0 \frac{r^2 \frac{d\theta}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dX_x}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_z}{dx}\right)^2 + \left(r \frac{d\theta}{dx}\right)^2}} \left\{ E_2 \left(\sqrt{\left(\frac{dX_x}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_z}{dx}\right)^2 + \left(r \frac{d\theta}{dx}\right)^2} - 1 \right) + C \left(\sqrt{\left(\frac{dX_x}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_z}{dx}\right)^2 + \left(r \frac{d\theta}{dx}\right)^2} - 1 \right) \right\} \quad (51-2)$$

زمانی که مدلسازی ماده ویسکوالاستیک از نوع مدل استاندارد باشد، لازم است تا کمی بحث و بررسی بر روی معادلات انجام گردد. با توجه به بخش ۲-۳، رابطه تنش و کرنش مدل استاندارد مطابق با رابطه (۵۲-۲) می‌باشد.

$$\frac{1}{E_1} \dot{\sigma} + \frac{1}{c} \sigma = \left(1 + \frac{E_2}{E_1} \right) \dot{\varepsilon} + \frac{E_2}{c} \varepsilon \quad (52-2)$$

قبلا بیان گردید که کرنش الیاف ریسمان برابر $\varepsilon = \frac{\sqrt{\Delta s'^2 + (r\Delta\theta)^2} - \Delta s}{\Delta s}$ می‌باشد. همچنین با دقت در رابطه (۳۹-۲) می‌توان نتیجه گرفت که $F_i = A_0 \sigma$ می‌باشد که σ تنش الیاف ریسمان می‌باشد. در نتیجه کافیسیت تا با حل رابطه (۵۲-۲)، تنش الیاف بدست آمده و از آن برای محاسبه نیروی F_i ایجاد شده در الیاف ریسمان و بالطبع در محاسبه F_T و M_T استفاده گردد. در نتیجه با یک جمع‌بندی می‌توان گفت که در این حالت نیروی F_T از رابطه (۵۳-۲) حساب خواهد شد.

$$\begin{cases} F_T = A_0 \frac{\sqrt{\left(\frac{dX_x}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_z}{dx}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{dX_x}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_z}{dx}\right)^2 + \left(r \frac{d\theta}{dx}\right)^2}} \sigma \\ \dot{\sigma} = -\frac{E_1}{c} \sigma + (E_1 + E_2) \left(\sqrt{\left(\frac{dX_x}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_z}{dx}\right)^2 + \left(r \frac{d\theta}{dx}\right)^2} - 1 \right) + \frac{E_1 E_2}{c} \left(\sqrt{\left(\frac{dX_x}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_z}{dx}\right)^2 + \left(r \frac{d\theta}{dx}\right)^2} - 1 \right) \end{cases} \quad (53-2)$$

و همچنین گشتاور M_T نیز از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$\begin{cases} M_T = A_0 \frac{r^2 \frac{d\theta}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dX_x}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_z}{dx}\right)^2 + \left(r \frac{d\theta}{dx}\right)^2}} \sigma \\ \dot{\sigma} = -\frac{E_1}{c} \sigma + (E_1 + E_2) \left(\sqrt{\left(\frac{dX_x}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_z}{dx}\right)^2 + \left(r \frac{d\theta}{dx}\right)^2} - 1 \right) + \frac{E_1 E_2}{c} \left(\sqrt{\left(\frac{dX_x}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_z}{dx}\right)^2 + \left(r \frac{d\theta}{dx}\right)^2} - 1 \right) \end{cases} \quad (54-2)$$

۲-۶- گسسته‌سازی

برای حل معادلات بدست آمده در بخش ۲-۵ می‌توان روش‌های مختلفی را به کار برد. یکی از این

روش‌ها، روش حل عددی تفاضل گسسته می‌باشد. برای این کار، طول ریسمان را می‌توان به N

قسمت مساوی تقسیم کرد.

چهار معادله اول رابطه (۲-۴۶) به صورت روابط (۲-۵۵) تا (۲-۵۸) گسسته خواهند شد.

$$\begin{aligned} \rho A_0 \frac{d^2 X_x(i,t)}{dt^2} = & \\ \frac{F_T(i,t) - F_T(i-1,t)}{\Delta x} T_x(i,t) + & \\ \kappa(i,t) F_T(i,t) \sqrt{\left(\frac{X_x(i,t) - X_x(i-1,t)}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{X_y(i,t) - X_y(i-1,t)}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{X_z(i,t) - X_z(i-1,t)}{\Delta x}\right)^2} N_x(i,t) + f_x(i,t), & i = \\ 2, \dots, N+1 & \end{aligned} \quad (55-2)$$

$$\begin{aligned} \rho A_0 \frac{d^2 X_y(i,t)}{dt^2} = & \\ \frac{F_T(i,t) - F_T(i-1,t)}{\Delta x} T_y(i,t) + & \\ \kappa(i,t) F_T(i,t) \sqrt{\left(\frac{X_x(i,t) - X_x(i-1,t)}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{X_y(i,t) - X_y(i-1,t)}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{X_z(i,t) - X_z(i-1,t)}{\Delta x}\right)^2} N_y(i,t) + f_y(i,t), & i = \\ 2, \dots, N & \end{aligned} \quad (56-2)$$

$$\begin{aligned} \rho A_0 \frac{d^2 X_z(i,t)}{dt^2} = & \\ \frac{F_T(i,t) - F_T(i-1,t)}{\Delta x} T_z(i,t) + & \\ \kappa(i,t) F_T(i,t) \sqrt{\left(\frac{X_x(i,t) - X_x(i-1,t)}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{X_y(i,t) - X_y(i-1,t)}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{X_z(i,t) - X_z(i-1,t)}{\Delta x}\right)^2} N_z(i,t) + f_z(i,t), & i = \\ 2, \dots, N & \end{aligned} \quad (57-2)$$

$$\frac{1}{2} \rho A_0 r^2(i,t) \frac{d^2 \theta(i,t)}{dt^2} + \rho A_0 r(i,t) \frac{dr(i,t)}{dt} \frac{d\theta(i,t)}{dt} = \frac{M_T(i+1,t) - M_T(i,t)}{\Delta x}, \quad i = 1, \dots, N \quad (58-2)$$

زمانی که مدل ماده ریسمان مدل کلوین-وویت باشد، معادله پنجم و ششم رابطه (۴۶-۲) به صورت رابطه (۵۹-۲) و (۶۰-۲) گسسته خواهند شد.

$$F_T(i, t) = A_0 \frac{\sqrt{\left(\frac{X_x(i+1, t) - X_x(i, t)}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{X_y(i+1, t) - X_y(i, t)}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{X_z(i+1, t) - X_z(i, t)}{\Delta x}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{X_x(i+1, t) - X_x(i, t)}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{X_y(i+1, t) - X_y(i, t)}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{X_z(i+1, t) - X_z(i, t)}{\Delta x}\right)^2 + \left(r(i, t) \frac{\theta(i+1, t) - \theta(i, t)}{\Delta x}\right)^2}} \left\{ E_2 \left(\sqrt{\left(\frac{X_x(i+1, t) - X_x(i, t)}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{X_y(i+1, t) - X_y(i, t)}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{X_z(i+1, t) - X_z(i, t)}{\Delta x}\right)^2 + \left(r(i, t) \frac{\theta(i+1, t) - \theta(i, t)}{\Delta x}\right)^2} - 1 \right) + C \left(\sqrt{\left(\frac{X_x(i+1, t) - X_x(i, t)}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{X_y(i+1, t) - X_y(i, t)}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{X_z(i+1, t) - X_z(i, t)}{\Delta x}\right)^2 + \left(r(i, t) \frac{\theta(i+1, t) - \theta(i, t)}{\Delta x}\right)^2} - 1 \right) \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (59-2)$$

$$M_T(i, t) = A_0 \frac{r^2(i-1, t) \frac{\theta(i, t) - \theta(i-1, t)}{\Delta x}}{\sqrt{\left(\frac{X_x(i, t) - X_x(i-1, t)}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{X_y(i, t) - X_y(i-1, t)}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{X_z(i, t) - X_z(i-1, t)}{\Delta x}\right)^2 + \left(r(i-1, t) \frac{\theta(i, t) - \theta(i-1, t)}{\Delta x}\right)^2}} \left\{ E_2 \left(\sqrt{\left(\frac{X_x(i, t) - X_x(i-1, t)}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{X_y(i, t) - X_y(i-1, t)}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{X_z(i, t) - X_z(i-1, t)}{\Delta x}\right)^2 + \left(r(i-1, t) \frac{\theta(i, t) - \theta(i-1, t)}{\Delta x}\right)^2} - 1 \right) + C \left(\sqrt{\left(\frac{X_x(i, t) - X_x(i-1, t)}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{X_y(i, t) - X_y(i-1, t)}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{X_z(i, t) - X_z(i-1, t)}{\Delta x}\right)^2 + \left(r(i-1, t) \frac{\theta(i, t) - \theta(i-1, t)}{\Delta x}\right)^2} - 1 \right) \right\}, \quad i = 2, 3, \dots, N+1 \quad (60-2)$$

زمانی که مدل ماده ویسکوالاستیک مدل استاندارد در نظر گرفته شود، گسسته شده معادله پنجم رابطه (۴۶-۲) با در نظر گرفتن رابطه (۵۳-۲) به صورت روابط (۶۱-۲) و (۶۲-۲) خواهد بود.

$$F_T(i, t) = A_0 \frac{\sqrt{\left(\frac{X_x(i+1, t) - X_x(i, t)}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{X_y(i+1, t) - X_y(i, t)}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{X_z(i+1, t) - X_z(i, t)}{\Delta x}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{X_x(i+1, t) - X_x(i, t)}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{X_y(i+1, t) - X_y(i, t)}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{X_z(i+1, t) - X_z(i, t)}{\Delta x}\right)^2 + \left(r(i, t) \frac{\theta(i+1, t) - \theta(i, t)}{\Delta x}\right)^2}} \sigma(i, t), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (61-2)$$

$$\frac{d\sigma(i, t)}{dt} = -\frac{E_1}{C} \sigma(i, t) + (E_1 + E_2) \left(\sqrt{\left(\frac{X_x(i+1, t) - X_x(i, t)}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{X_y(i+1, t) - X_y(i, t)}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{X_z(i+1, t) - X_z(i, t)}{\Delta x}\right)^2 + \left(r(i, t) \frac{\theta(i+1, t) - \theta(i, t)}{\Delta x}\right)^2} - 1 \right) + \frac{E_1 E_2}{C} \left(\sqrt{\left(\frac{X_x(i+1, t) - X_x(i, t)}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{X_y(i+1, t) - X_y(i, t)}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{X_z(i+1, t) - X_z(i, t)}{\Delta x}\right)^2 + \left(r(i, t) \frac{\theta(i+1, t) - \theta(i, t)}{\Delta x}\right)^2} - 1 \right), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (62-2)$$

همچنین گسسته شده معادله ششم رابطه (۴۶-۲) با در نظر گرفتن رابطه (۵۴-۲) به صورت روابط (۶۳-۲) و (۶۴-۲) می‌باشد.

$$M_T(i, t) = A_0 \frac{\sqrt{\left(\frac{X_x(i, t) - X_x(i-1, t)}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{X_y(i, t) - X_y(i-1, t)}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{X_z(i, t) - X_z(i-1, t)}{\Delta x}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{X_x(i, t) - X_x(i-1, t)}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{X_y(i, t) - X_y(i-1, t)}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{X_z(i, t) - X_z(i-1, t)}{\Delta x}\right)^2 + \left(r(i-1, t) \frac{\theta(i, t) - \theta(i-1, t)}{\Delta x}\right)^2}} \sigma(i, t), \quad i = 2, 3, \dots, N + 1 \quad (63-2)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma(i, t)}{dt} = & -\frac{E_1}{c} \sigma(i, t) + \\ & (E_1 + \\ & E_2) \left(\sqrt{\left(\frac{X_x(i, t) - X_x(i-1, t)}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{X_y(i, t) - X_y(i-1, t)}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{X_z(i, t) - X_z(i-1, t)}{\Delta x}\right)^2 + \left(r(i-1, t) \frac{\theta(i, t) - \theta(i-1, t)}{\Delta x}\right)^2} - 1 \right) + \\ & \frac{E_1 E_2}{c} \left(\sqrt{\left(\frac{X_x(i, t) - X_x(i-1, t)}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{X_y(i, t) - X_y(i-1, t)}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{X_z(i, t) - X_z(i-1, t)}{\Delta x}\right)^2 + \left(r(i-1, t) \frac{\theta(i, t) - \theta(i-1, t)}{\Delta x}\right)^2} - 1 \right), \quad i = 2, 3, \dots, N + 1 \quad (64-2) \end{aligned}$$

معادله هفتم و هشتم رابطه (۴۶-۲) نیز به صورت روابط (۶۵-۲) و (۶۶-۲) گسسته خواهد شد.

$$r(i, t) = \frac{r_0}{\sqrt[4]{\left(\frac{X_x(i+1, t) - X_x(i, t)}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{X_y(i+1, t) - X_y(i, t)}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{X_z(i+1, t) - X_z(i, t)}{\Delta x}\right)^2}}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (65-2)$$

$$\kappa(i, t) = \frac{\left\{ N_x(i, t) \frac{T_x(i, t) - T_x(i-1, t)}{\Delta x} + N_y(i, t) \frac{T_y(i, t) - T_y(i-1, t)}{\Delta x} + N_z(i, t) \frac{T_z(i, t) - T_z(i-1, t)}{\Delta x} \right\}}{\sqrt{\left(\frac{X_x(i, t) - X_x(i-1, t)}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{X_y(i, t) - X_y(i-1, t)}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{X_z(i, t) - X_z(i-1, t)}{\Delta x}\right)^2}}, \quad i = 2, 3, \dots, N + 1 \quad (66-2)$$

به همین ترتیب روابط (۴۷-۲) و (۴۸-۲) نیز گسسته خواهند شد.

شرایط مرزی نیز به صورت رابطه (۶۷-۲) خواهد بود.

$$\begin{cases} X_x(1, t) = 0 \\ X_y(1, t) = 0 \\ X_z(1, t) = 0 \\ M_T(1, t) = M_m \\ X_y(N + 1, t) = 0 \\ X_z(N + 1, t) = 0 \\ F_T(N + 1, t) = F_L \\ \theta(N + 1, t) = 0 \end{cases} \quad (67-2)$$

در روابط گسسته بیان شده، Δx برابر $\frac{L_0}{N}$ می‌باشد.

۲-۷- جمع‌بندی

در این فصل، ابتدا معادلات سینماتیکی ریسمان معرفی شد. سپس مرور کوتاهی بر مواد ویسکوالاستیک انجام گردید. در آخر، معادلات دینامیکی ریسمان تابیده از جنس ماده ویسکوالاستیک بر اساس تئوری کیرشهوف و با کمی تغییرات استخراج گردید و در نهایت معادلات دینامیکی بدست آمده برای ریسمان با استفاده از روش حل عددی تفاضل محدود گسسته‌سازی شد. در فصل بعد از این معادلات بدست آمده برای بدست آوردن نتایج عددی و بررسی رفتار استاتیکی و دینامیکی ریسمان استفاده خواهد شد.

فصل سوم:

نتایج

۳-۱-مقدمه

در فصل ۲، معادلات دینامیکی حاکم بر ریسمان استخراج گردید. در این فصل، با استفاده از معادلات بدست آمده در فصل دوم، حرکت ریسمان شبیه‌سازی خواهد گردید. همچنین برای اطمینان بیشتر از نتایج بدست آمده و ارائه تحلیلی درست از دینامیک ریسمان تابیده، مدل‌سازی دینامیکی ریسمان در نرم‌افزار آباکوس نیز انجام خواهد گردید. بر همین اساس، در این فصل، ابتدا صحت نتایج بدست آمده مورد بررسی قرار خواهد گرفت. سپس نتایجی از دینامیک ریسمان که از شبیه‌سازی و همچنین نرم‌افزار آباکوس بدست آمده است، ارائه خواهد گردید. در آخر نحوه انتخاب موتور مناسب برای ریسمان بیان خواهد گردید.

۳-۲-همگرایی حل عددی معادلات دینامیکی ریسمان

در فصل دوم، معادلات دینامیکی ریسمان تابیده بدست آمد و گسسته‌سازی آن بر روی متغیر مکان نیز انجام گردید. معادلات گسسته شده در واقع یک سری معادلات دیفرانسیل معمولی کوپل شده می‌باشند که برای حل عددی آن‌ها می‌توان روشهای عددی مختلفی را به کار برد. فارغ از این که چه روش عددی برای حل این معادلات به کار رود، مهمترین مسئله در حل آنها، بحث همگرایی جواب می‌باشد. در این پژوهش، برای حل این معادلات از روش حل عددی تفاضل گسسته و کدنویسی در نرم‌افزار MATLAB استفاده شده است. در همین راستا، معادلات گسسته شده (۲-۵۵) تا (۲-۶۹) با استفاده از این نرم‌افزار حل شده است. شرایط اولیه ریسمان به صورت رابطه (۳-۱) فرض شده است.

$$\left\{ \begin{array}{l} Xx(i, 1) = x(i) \\ Xy(i, 1) = 0 \\ Xz(i, 1) = 0 \\ \dot{X}x(i, 1) = 0 \\ \dot{X}y(i, 1) = 0 \\ \dot{X}z(i, 1) = 0 \\ \theta(i, 1) = 0 \\ \dot{\theta}(i, 1) = 0 \\ \sigma(i, 1) = 0 \end{array} \right. \quad i = 1, 2, \dots, N + 1 \quad (1-3)$$

برای شبیه‌سازی ریسمان لازم است تا هندسه و مشخصات ماده آن در دست باشد. جدای از بررسی همگرایی تحلیل‌های بیان شده، برای مقایسه نتایج، لازم است تا هندسه و خواص ماده ریسمان مطابق منابع قبلی انتخاب شود. ولی از آنجا که در منابع قبلی دینامیک ریسمان مورد بررسی قرار نگرفته است، خواصی از ماده ریسمان مانند چگالی آن و همچنین مدول دمپینگ که بر روی دینامیک ریسمان تاثیر می‌گذارند تا جواب حالت پایا، در منابع قبلی گزارش نشده است و می‌توان آنها را مقدار مناسب دلخواهی انتخاب کرد.

بنابراین برای شبیه‌سازی، هندسه و خواص ماده ریسمان به صورت جدول ۱-۳ انتخاب گردیده است. هندسه و مدول الاستیسیته ریسمان که در جدول ۱-۳ بیان شده است از منبع [۱۰] استخراج شده است که در [۱] نیز از این هندسه و خواص ماده برای شبیه‌سازی استفاده شده است. مدل ویسکوالاستیک پیش فرض که برای ماده ریسمان در نظر گرفته شده، مدل کلوین-وویت می‌باشد. ولی در جاهایی از مدل استاندارد نیز استفاده شده است که خواص آن در همان جا ذکر خواهد شد و خواص ذکر شده در جدول ۱-۳ برای مدل کلوین-وویت می‌باشد.

جدول ۱-۳- مشخصات هندسی و جنس ماده ریسمان

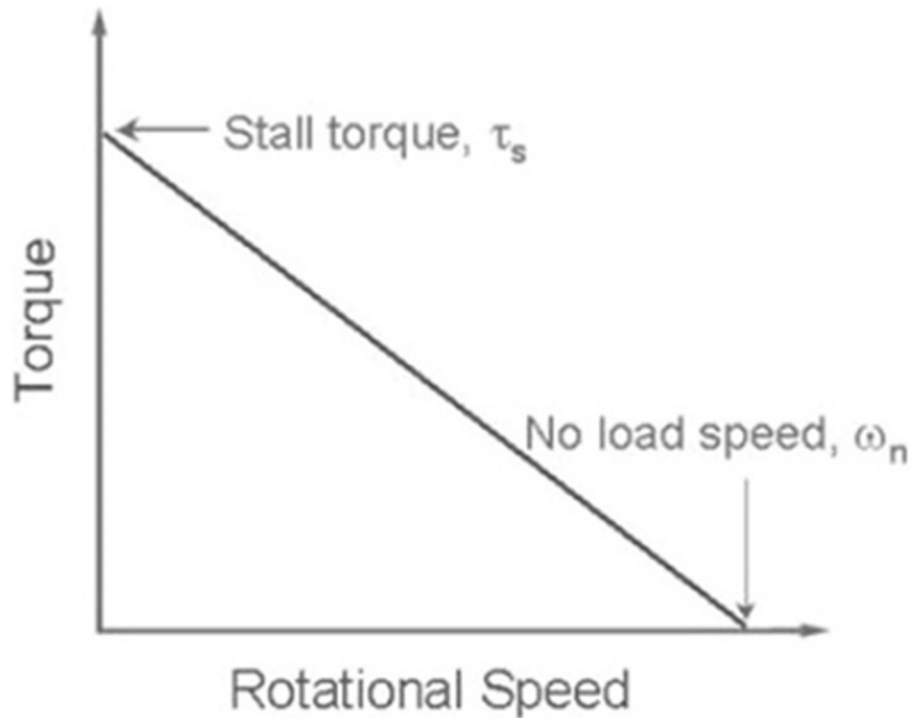
$E_2 (Pa)$	$C (Pa \cdot s)$	$\rho \left(\frac{kg}{m^3}\right)$	$r_0 (m)$	$L_0 (m)$
$4 \cdot 14 \times 10^{10}$	1×10^7	3000	19×10^{-5}	235×10^{-3}

در جدول ۱-۳، L_0 طول اولیه ریسمان، r_0 شعاع اولیه ریسمان، ρ چگالی ماده ریسمان، و E_2 و C مدول‌های ماده ویسکوالاستیک می‌باشد که در فصل دوم توضیح داده شده‌اند.

موضوع دیگری که اهمیت دارد، موتوری است که برای تاباندن ریسمان مورد استفاده قرار می‌گیرد که یک موتور DC می‌باشد که معادله گشتاور و سرعت دورانی آن به صورت رابطه (۲-۳) می‌باشد.

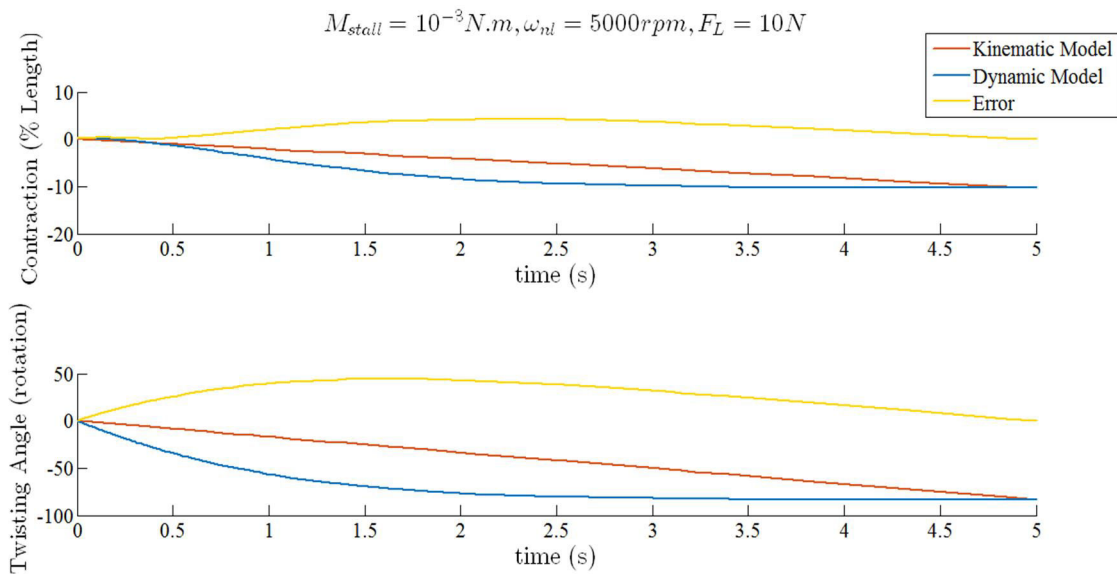
$$M_m = M_{stall} \left(1 - \frac{\omega_m}{\omega_{nl}}\right) \quad (2-3)$$

که M_{stall} گشتاور موتور در حالتی است که موتور هیچگونه سرعت دورانی ندارد و ω_{nl} نیز سرعت دورانی موتور در حالت بدون بار می‌باشد. شکل ۱-۳ نمودار تغییرات گشتاور نسبت به سرعت دورانی را نشان می‌دهد.



شکل ۱-۳ - نمودار گشتاور موتور DC بر حسب سرعت دورانی آن

شکل ۲-۳ نتیجه شبیه‌سازی ریسمان مدل شده با معادلات گسسته شده (۲-۴۶) تا (۲-۴۹) و مقایسه آن با مدل سازی سینماتیکی را به ازای $M_{stall} = 1 \times 10^{-3} N \cdot m$ ، $\omega_{nl} = 5000rpm$ ، $F_L = 10N$ نشان می‌دهد. همانگونه که از شکل ۲-۳ نیز معلوم است، ریسمان در اثر بارگذاری از حالت اولیه شروع به تغییر شکل می‌کند و بر اثر ویژگی ساختاری که ماده آن دارد، در آخر به یک حالت نهایی پایا می‌رسد. در شکل ۲-۳ اختلاف دو مدل دینامیکی و سینماتیکی نیز مشخص شده است.



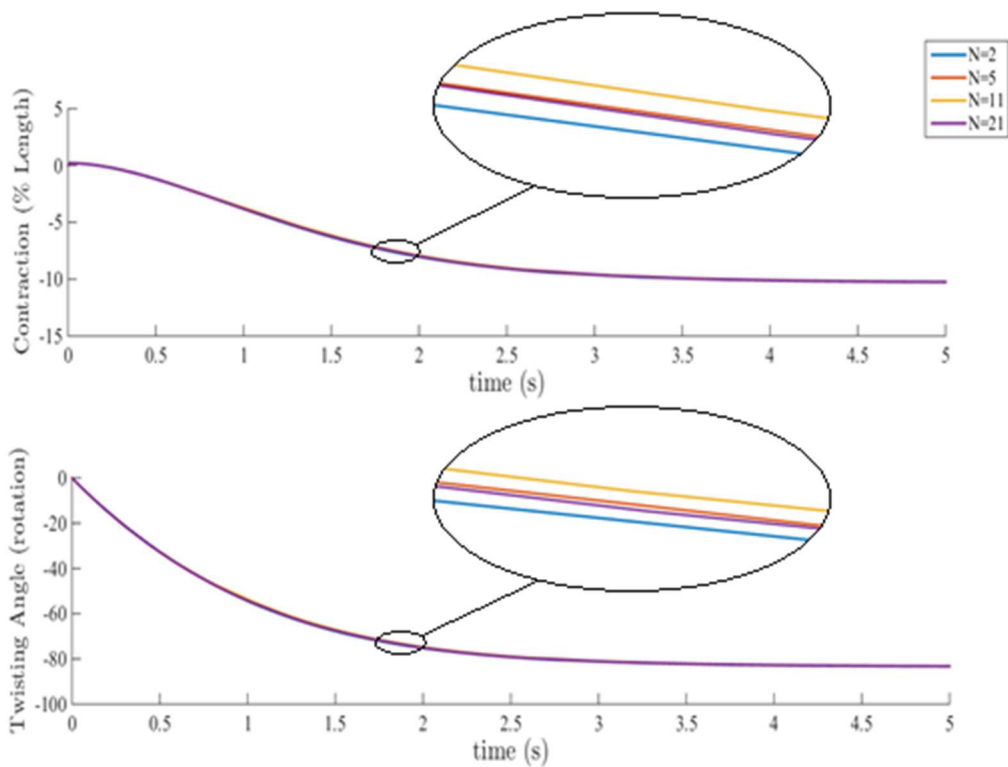
شکل ۳-۲ - درصد تغییر طول و میزان زاویه پیچش کل ریسمان در مدل دینامیکی و مدل سینماتیکی

در این شکل ها درصد تغییر طول نسبت به زمان و همچنین زاویه تابیدگی ریسمان بر حسب دور نسبت به زمان نشان داده شده است.

شکل ۳-۳ نیز نتیجه شبیه سازی را به ازای تعداد تقسیم بندی مختلف ریسمان، N نشان می دهد. همانگونه که از شکل ۳-۳ نیز معلوم است حل مورد نظر به ازای مقدار مختلف N نتایج نزدیک به هم بدست می دهد. این امر ابتدا نشان دهنده همگرا بودن حل با افزایش مقدار N می باشد.

در وهله دوم، شکل ۳-۳ نشان دهنده آن است که حل دینامیکی ریسمان وابستگی کمی به تعداد تقسیم بندی ریسمان دارد که این می تواند به دلیل هندسه خاصی باشد که ریسمان دارد (نسبت طول ریسمان به شعاع آن مقدار بزرگی می باشد).

$$M_{stall} = 10^{-3} N.m, \omega_{nt} = 5000 rpm, F_L = 10 N$$



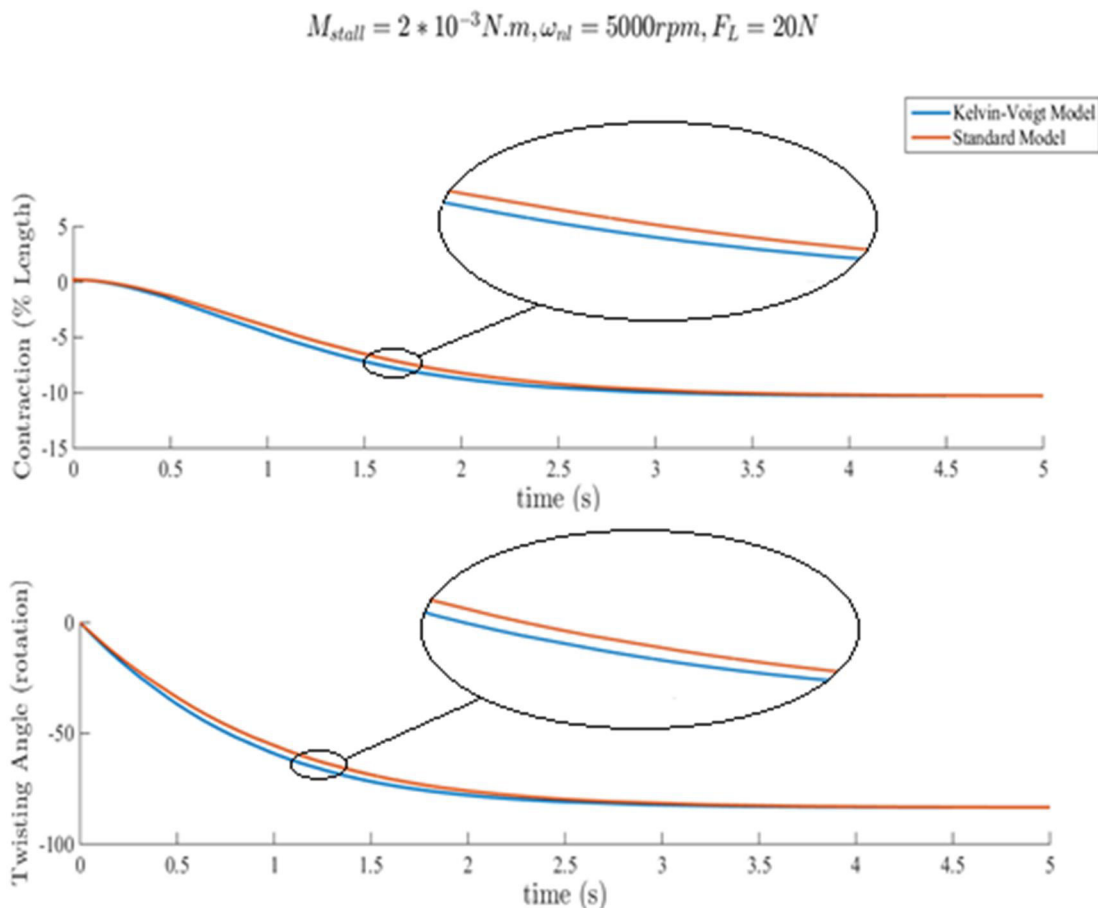
شکل ۳-۳ - درصد تغییر طول و میزان زاویه پیچش کل ریسمان به ازای تقسیم‌بندی مختلف ریسمان

۳-۳- تاثیر مدل ویسکوالاستیک بر دینامیک ریسمان

در فصل ۲ دو نوع مدل‌سازی ماده ویسکوالاستیک، مدل استاندارد و کلین-وویت و تاثیر آن بر مدل‌سازی دینامیک ریسمان بیان گردید. برای آنکه بتوان تاثیر این دو نوع مدل‌سازی بر دینامیک ریسمان را به صورت نمودار و شکل نیز نشان داد، در این بخش مقایسه‌ای برای این منظور انجام خواهد شد.

در همین راستا شکل ۳-۴ مقایسه این دو نوع مدل‌سازی ماده ویسکوالاستیک را نشان می‌دهد. با توجه به شکل ۳-۴ نتایج به دست آمده از دو روش مدل‌سازی کلین-وویت و مدل استاندارد می‌توان دریافت که نتایج نهایی مشابه هم می‌باشند، هرچند در بازه زمانی ۰.۵ تا ۲.۵ ثانیه اختلافاتی مشاهده می‌شود. علت تشابه این نتایج را می‌توان در خصوصیات و جنس ماده استفاده شده جستجو کرد.

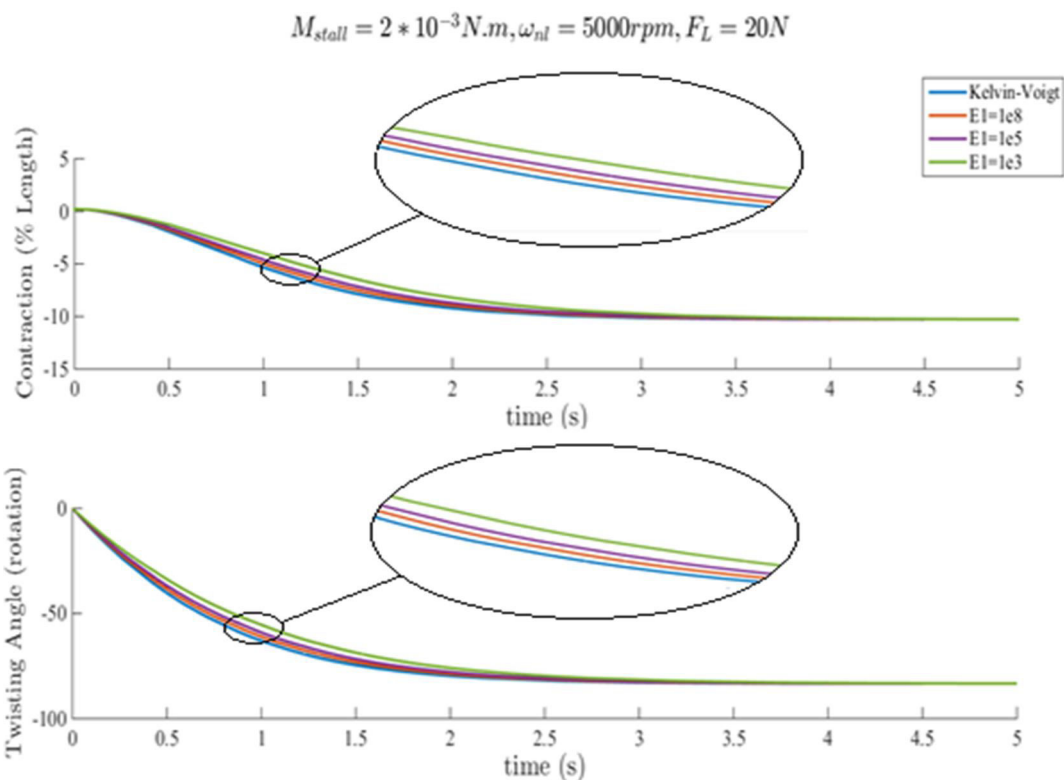
همانطور که در فصل دوم اشاره شد، مدل کلوین-وویت بیشتر برای موادی به کار می‌رود که نزدیک به مواد الاستیک بوده و مدل استاندارد، مدل کلی‌تری هست به نحوی که هم برای مواد الاستیک و هم برای مواد ویسکوز کاربرد دارد. با توجه به اینکه خصوصیات ماده انتخاب شده بیشتر به مواد الاستیک نزدیک تر می‌باشد لذا نتایج این دو مدل‌سازی مشابه هم می‌باشند.



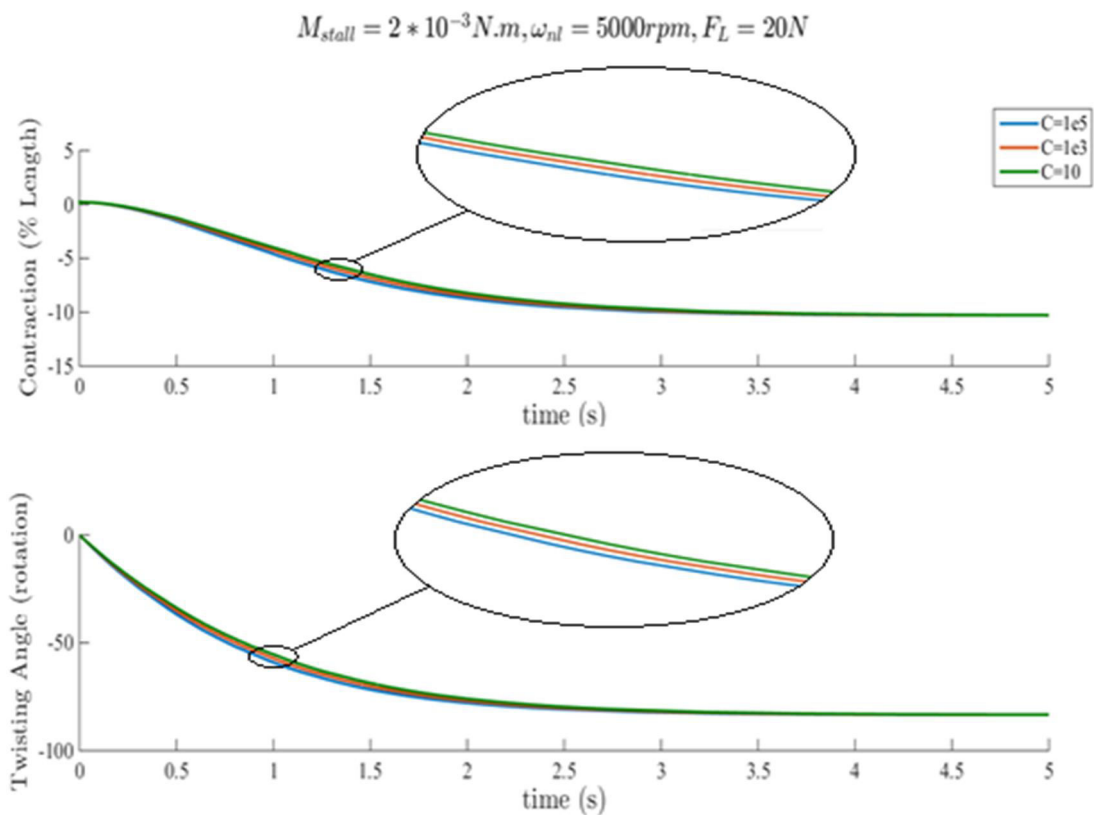
شکل ۳-۴ - مقایسه مدل کلوین و استاندارد به ازای $E_1 = 1e5 Pa$ و درصد تغییر طول و میزان زاویه تابیده شده

رسمان

شکل‌های ۳-۵ و ۳-۶ نیز در راستای همین مقایسه نتایج حاصل از تغییر خصوصیات ویسکوالاستیک در مدل استاندارد را نشان می‌دهند.



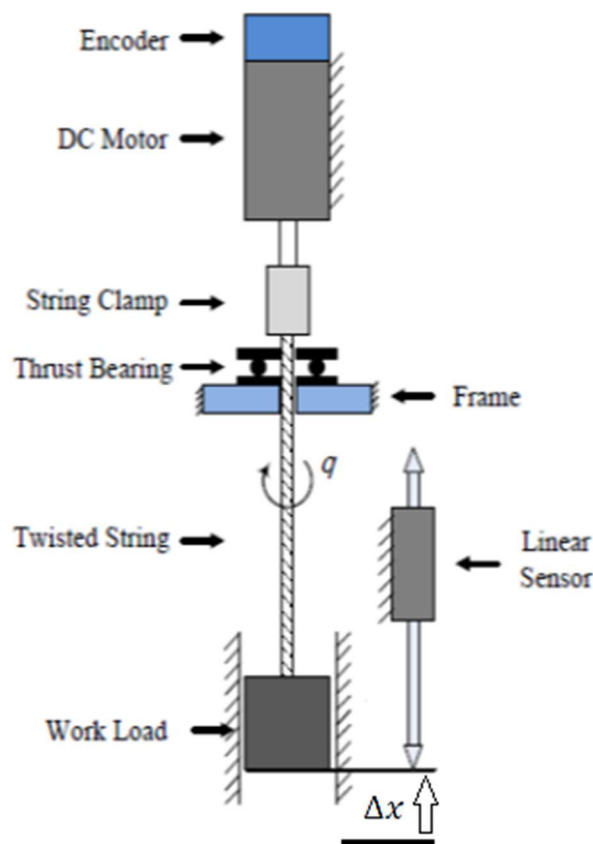
شکل ۳-۵ - مقایسه مدل کلوین و استاندارد و درصد تغییر طول و میزان زاویه تابیده شده ریسمان به ازای مقادیر E_1



شکل ۳-۶ - مقایسه مدل کلوین و استاندارد و درصد تغییر طول و میزان زاویه تابیده شده ریسمان به ازای مقادیر C

نتیجه‌ای که از مقایسه انجام شده در این بخش می‌توان گرفت این است که مدلسازی استاندارد و کلوین-وویت ماده ویسکوالاستیک ریسمان تفاوت چندانی با یکدیگر ندارند و می‌توان برای بدست آوردن نتایج دیگر از مدل کلوین-وویت استفاده نمود.

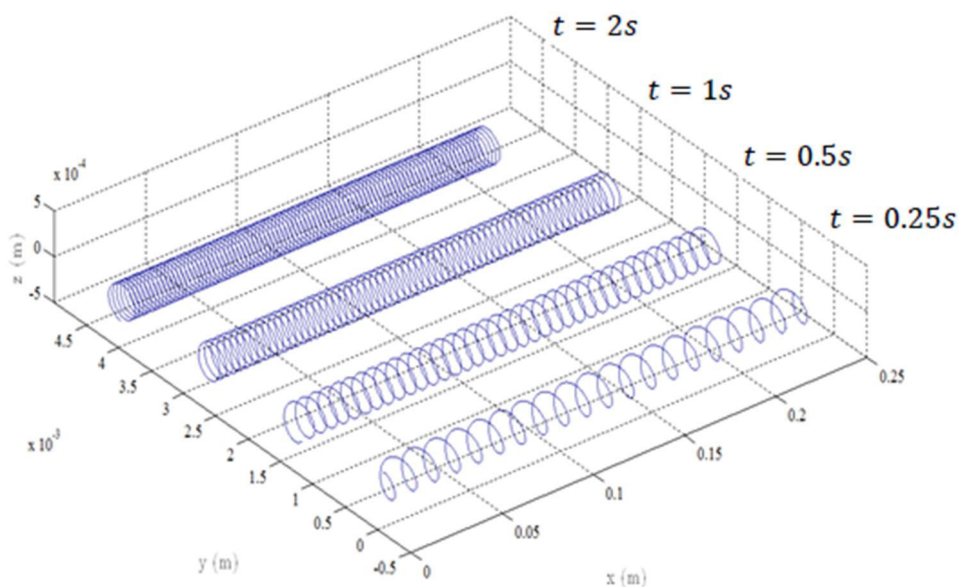
بدین ترتیب می‌توان نتایج بدست آمده از ریسمان تابیده شده و تغییر طول آن را در سیستم رباتیکی شکل ۷-۳ مشاهده نمود.



شکل ۷-۳ - تغییر طول ریسمان تابیده شده در سیستم رباتیکی

هم چنین تغییر طول های حاصل در زمان های مختلف به فرم سه بعدی در شکل ۸-۳ قابل

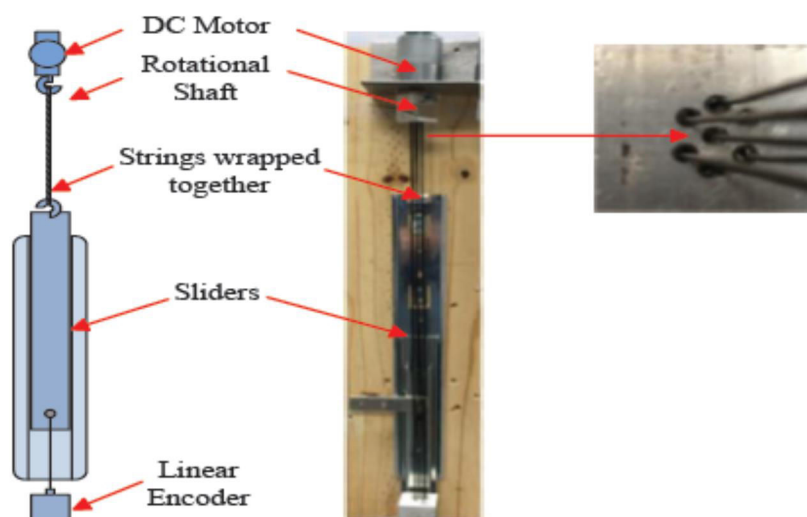
مشاهده می باشد.



شکل ۳-۸ - تغییر طول ریسمان در $t = 0.25s$ ، $t = 0.5s$ ، $t = 1s$ و $t = 2s$

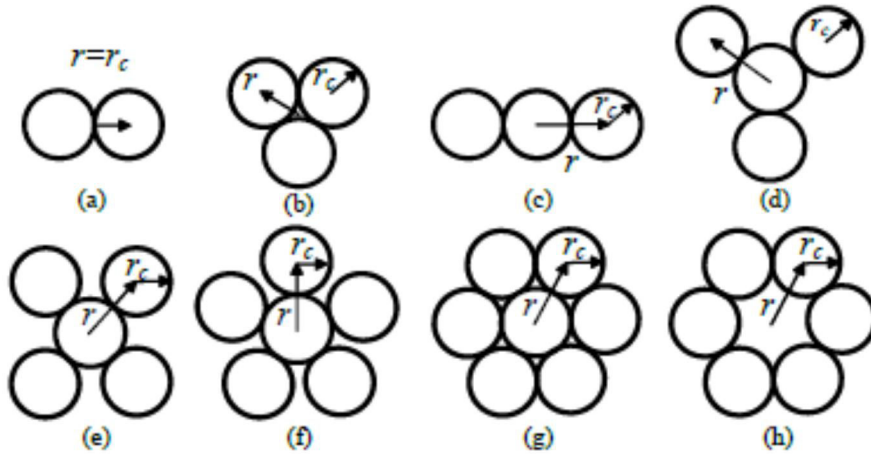
۳-۴- مدل سازی در نرم افزار آباکوس

در فصل ۲ به مدلسازی ریسمان تابیده شده با استفاده از روابط الاستیکی پرداخته شد. در واقعیت، ریسمان از یک سری الیاف تشکیل شده است که در کنار همدیگر کل ریسمان را تشکیل می دهد. شکل ۳-۹ رباتی با چند ریسمان را نشان می دهد.



شکل ۳-۹ - رباتی با چند ریسمان [۹]

با توجه به کاربرد های متفاوت هر یک از این آرایش ها در علم رباتیک، بسته به خروجی مدنظر می توان از دو یا چند ریسمان استفاده کرد. در این پژوهش هم برای بررسی دقیق تر رفتار ریسمان، از آرایش های مختلف برای مطالعه تاثیر آن ها استفاده شده است. شکل ۳-۱۰ یک سری آرایش الیاف در ریسمان را نشان می دهد.



شکل ۳-۱۰ - آرایش های مختلف الیاف ریسمان [۸]

شعاع ریسمان، r_0 که در روابط استخراج شده در فصل ۲ بیان شده است، در واقع یک شعاع معادل می باشد که با تعداد و شعاع الیاف ریسمان رابطه دارد. در [۸] نحوه بدست آوردن این رابطه بیان گردیده است. بر اساس توضیحات [۸]، مساحت سطح مقطع ریسمان معادل، برابر است با نصف مجموع مساحت سطح مقاطع الیاف ریسمان. بنابراین رابطه (۳-۳) را بر اساس توضیحات بیان شده می توان نوشت.

$$\pi r_0^2 = \frac{n}{2} \pi r_c^2 \quad (3-3)$$

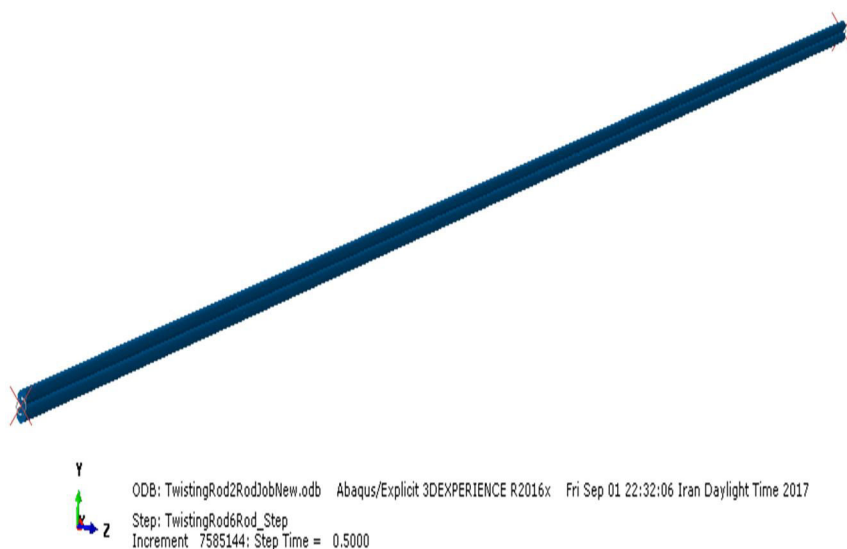
که r_c شعاع هر یک از الیاف ریسمان و n تعداد الیاف موجود در ریسمان می باشد. از رابطه (۳-۳)، رابطه (۴-۳) حاصل خواهد شد.

$$r_0 = \sqrt{\frac{n}{2}} r_c \quad (4-3)$$

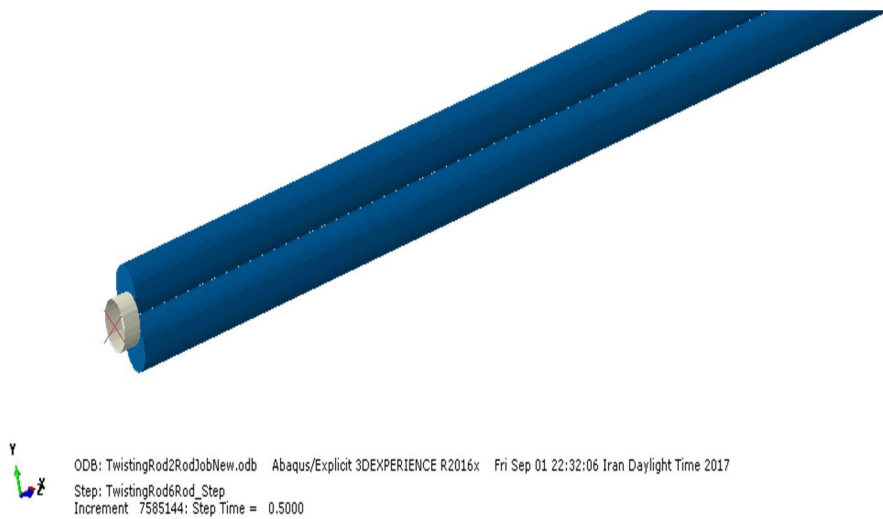
رابطه بیان شده یک رابطه تقریبی با تقریب خوب می باشد که از آن می توان برای بدست آوردن شعاع الیاف از روی شعاع معادل و یا برعکس استفاده کرد. با توجه به تعداد الیاف و آرایش آنها در ریسمان و همچنین شعاع معادل، r_0 که در جدول ۱-۳ بیان شده است، می توان شعاع هر یک از الیاف را از رابطه (۴-۳) بدست آورد. برای مدل سازی در نرم افزار آباکوس سه آرایش a، b و c شکل ۱۰-۳ در نظر گرفته شده است.

در نرم افزار آباکوس، هر کدام از الیاف به صورت المان Truss در نظر گرفته شده است که در برابر خمش مقاوم نیستند. مشخصات ماده ریسمان نیز مطابق جدول ۱-۳ اعمال گردیده است.

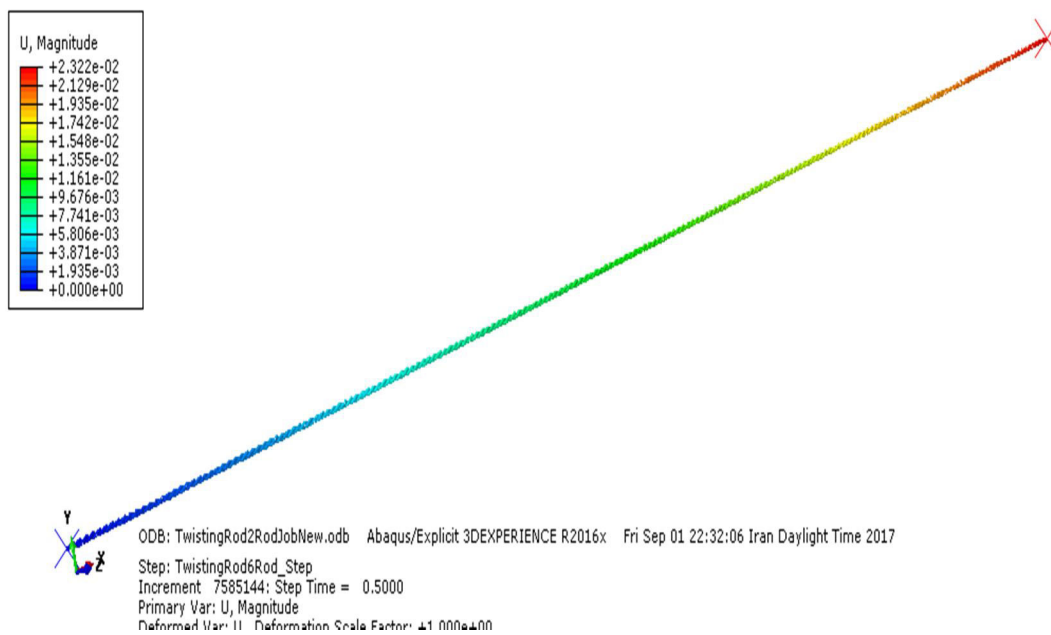
شکل های ۱۱-۳ و ۱۲-۳ مدل بدون تغییر شکل یافته ریسمان با دو الیاف و شکل های ۱۳-۳ و ۱۴-۳ حالت تغییر شکل یافته آن را نشان می دهد.



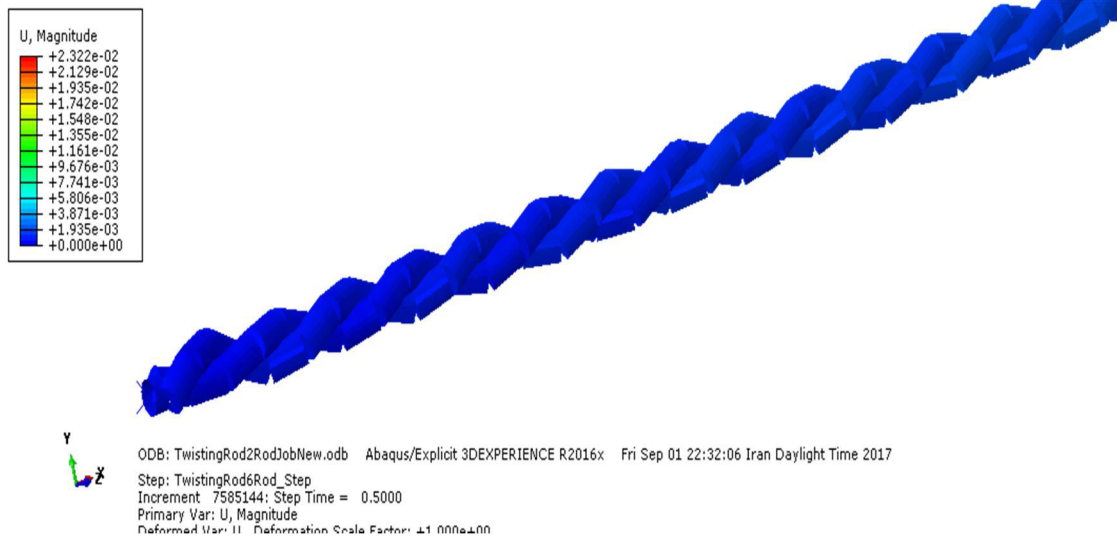
شکل ۱۱-۳ - مدل ریسمان مدل شده در نرم افزار آباکوس با دو الیاف



شکل ۳-۱۲ - نمایی نزدیک از ریسمان مدل شده در نرم افزار آباکوس با دو ایلف



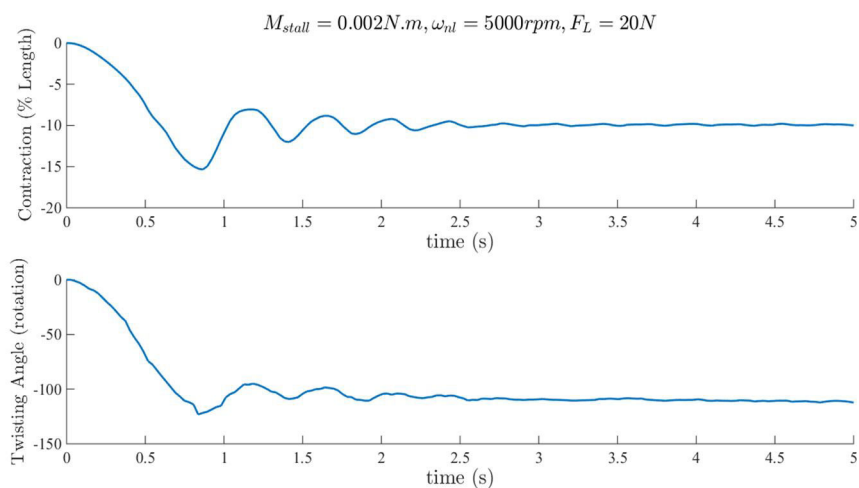
شکل ۳-۱۳ - حالت تغییر شکل یافته ریسمان تابیده شده با دو ایلف



شکل ۳-۱۴ - نمایی نزدیک از حالت تغییر شکل یافته ریسمان تابیده شده با دو لیاف

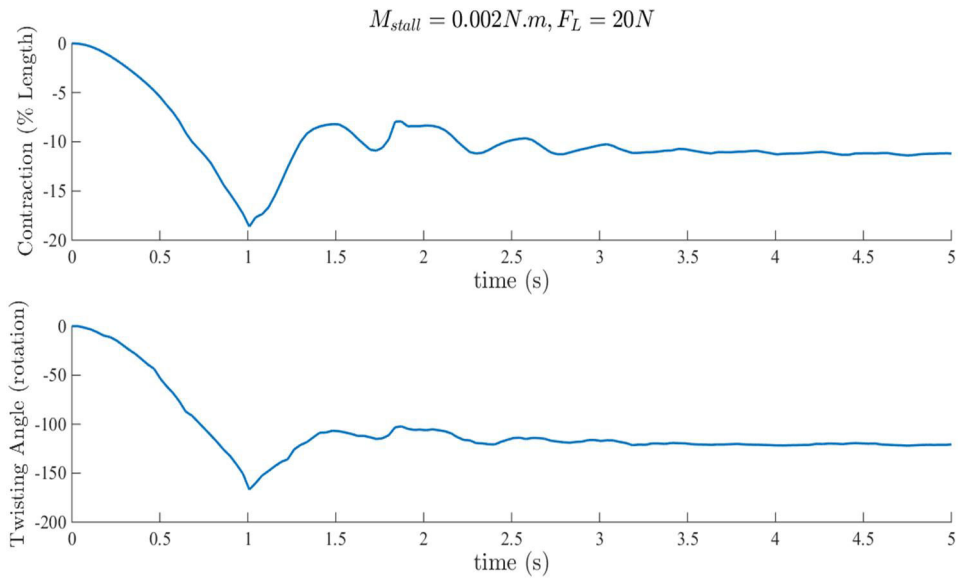
همانگونه که از شکل ۳-۱۴ معلوم است، ریسمان در اثر گشتاور موتوری که به آن وارد می شود دچار تابیدگی شده است و در اثر این تابیدگی، ریسمان تغییر طول داده است که در شکل ۳-۱۳ میزان این تغییر شکل در حالت پایا برای کل ریسمان نشان داده شده است.

علاوه بر شکل های بیان شده می توان منحنی تغییر طول و میزان تابیدگی ریسمان را نیز از نرم افزار آباکوس بدست آورد. شکل ۳-۱۵ این منحنی را نشان می دهد.

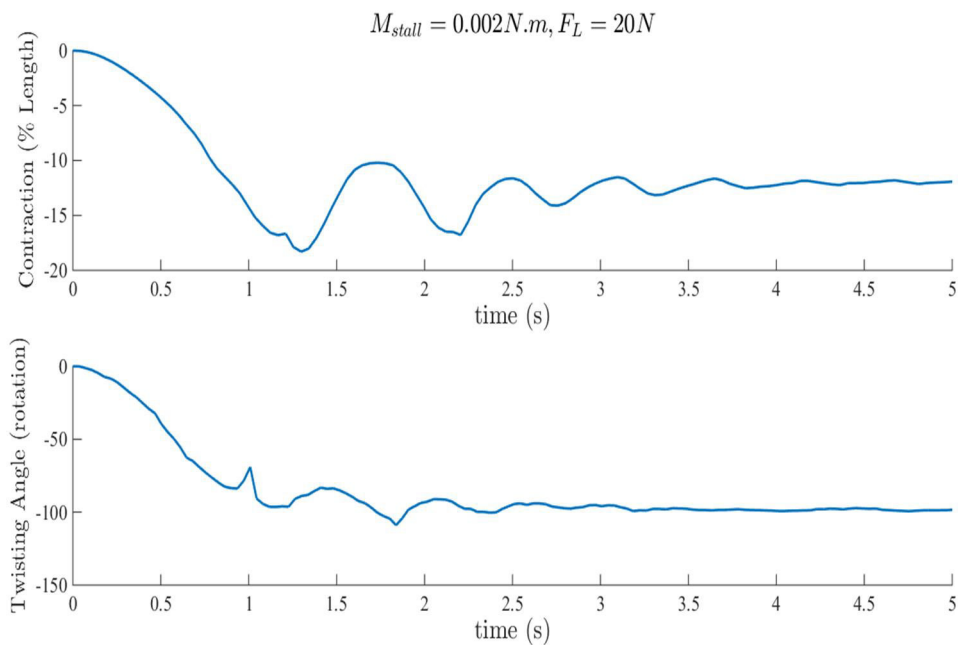


شکل ۳-۱۵ - درصد تغییر طول و میزان زاویه پیچش کل ریسمان با دو لیاف

برای آرایش b و h شکل ۳-۱۰ نیز می‌توان این روند را تکرار کرد که نتیجه شبیه‌سازی این آرایش‌ها به صورت شکل ۳-۱۶ و ۳-۱۷ شده است.



شکل ۳-۱۶ - درصد تغییر طول و میزان زاویه پیچش کل ریسمان با سه الیاف



شکل ۳-۱۷ - درصد تغییر طول و میزان زاویه پیچش کل ریسمان با شش الیاف

۳-۵-صحت‌سنجی

در بخش ۳-۲ به همگرایی روش بیان شده در فصل ۲ و در بخش ۳-۴ به مدلسازی ریسمان با استفاده از نرم‌افزار آباکوس پرداخته شد. برای آنکه بتوان بر نتایج بدست آمده صحت‌گذاری کرد و برای آنکه بتوان اطمینان بیشتری از نتایج تحلیل‌های بدست آمده بدست آورد، لازم است تا نتایج حاصل از هر دو شبیه‌سازی با نتایج مدلسازی‌ها و همچنین مقادیر تجربی منابع دیگر مورد مقایسه قرار گیرد.

اکثر کارهای قبلی که ریسمان در آنها مدل‌سازی گردیده است، دینامیک ریسمان در نظر گرفته نشده است و در واقع به آن به صورت یک مسئله سینماتیکی-استاتیکی نگاه شده است. علاوه بر این، در کارهای قبلی، مدل‌های ارائه شده برای ریسمان تحت کشش تابیده شده، مدلی ساده می‌باشد به نحوی که به ریسمان به عنوان یک جرم متمرکز نگاه شده است. بنابراین نتایجی که می‌توان برای صحت‌سنجی به کار برد در واقع حل حالت پایدار مجموعه می‌باشد. جدول ۳-۲ نیز تفاوت نتایج بدست آمده با نتایج منابع دیگر را نشان می‌دهد.

جدول ۳-۲- تفاوت تغییر طول‌های بدست آمده از روش‌های مختلف به ازای نیروهای مختلف و تعداد ۱۰۰ دور

$F_L = 31.5 N$	$F_L = 20 N$	$F_L = 11.5 N$	$F_L = 1.5 N$	
۱۱.۴	۱۱.۱	۱۲.۱	۱۲.۶	مدل‌سازی فصل ۲ روش اول-کلوین وویت
۱۱.۴	۱۱.۱	۱۲.۱	۱۲.۶	مدل‌سازی فصل ۲ روش دوم-استاندارد
....	۱۱.۱	۱۲.۰	روش اول [۱]
....	۱۱.۱	۱۲.۰	روش دوم [۱]
۱۰.۴	۱۰.۵	۱۰.۵	۱۰.۶	روش [۱۰]
۱۰.۵	۱۰.۸	۱۱.۰	۱۲.۱	مقادیر تجربی [۱۰]

برای مدل‌سازی ریسمان تابیده شده در روش اول [۱] جدول ۳-۲ ریسمان به صورت مجموع المان‌های جرم و فنر پیچشی در نظر گرفته شده است. با این مدل صرفاً پیچش بررسی شده و اثرهای ناشی از کشیدگی لحاظ نشده است. برای مدل‌سازی ریسمان تابیده شده در روش دوم [۱] ریسمان به صورت مجموع المان‌های جرم و فنر پیچشی و فنر خطی در نظر گرفته شده است. استفاده از فنرهای خطی به منظور نشان دادن اثر ازدیاد طول ایجاد شده در فنر ناشی از بارگذاری می‌باشد. در روش [۱۰] مدل‌سازی ریسمان تابیده شده بدون در نظر گرفتن تغییرات شعاعی ریسمان (حالت شعاع ثابت) و تحت بارگذاری محوری و پیچشی می‌باشد.

با مقایسه نتایج جدول ۳-۲، می‌توان دید که نتایج بدست آمده از مدل‌سازی فصل ۲، تا حد خوبی نتایج قابل قبولی بدست می‌دهد. اختلاف موجود مابین نتایج مدل‌سازی فصل ۲ و نتایج تجربی را شاید بتوان در شرایط اولیه ریسمان جستجو کرد. ریسمان استفاده شده برای مقادیر تجربی ریسمانی است که دارای یک تابیدگی اولیه می‌باشد در حالی که در شبیه‌سازی‌های انجام گرفته برای مدل فصل ۲، فرض بر این بوده است که ریسمان در حالت اولیه بدون هرگونه تابیدگی باشد.

برای صحت‌سنجی نتایج حاصل از شبیه‌سازی آباکوس، نتایج آن با [۸] که مدل‌سازی مشابهی براساس ریسمان با چند الیاف انجام داده است، مقایسه خواهد شد. در این مقاله آرایش‌های مختلف الیاف ریسمان با توجه به کاربرد آنها در رباتیک مطالعه شده است. بر این اساس و برای مقایسه شبیه‌سازی آباکوس و صحت‌سنجی آن لازم است هندسه جدید ریسمان براساس [۸] و مطابق با اطلاعات جدول ۳-۳ لحاظ گردد.

جدول ۳-۳- مشخصات هندسی و جنس ماده ریسمان بر اساس [۸]

E_2 (Pa)	C (Pa · s)	ρ ($\frac{kg}{m^3}$)	r_c (m)	L_0 (m)
2×10^{10}	1×10^7	3000	2×10^{-3}	5×10^{-1}

نتایج حاصل از شبیه سازی آباکوس با مشخصات جدول ۳-۳ و مقایسه تغییر طول آن به ازای نیروهای مختلف با مقادیر تجربی بدست آمده در [۸] در جدول ۳-۴ و ۳-۵ آورده شده است.

جدول ۳-۴- مقایسه تغییر طولهای بدست آمده برحسب سانتیمتر از شبیه سازی آباکوس و مقادیر تجربی به ازای نیروهای مختلف و تعداد ۴۰ دور برای دو الیاف

$F_L = 35 N$	$F_L = 25 N$	$F_L = 15 N$	$F_L = 5 N$	
۵.۸	۶.۲	۶.۷	۷.۲	مدل سازی آباکوس - دو الیاف
۶.۱	۶.۴	۷.۰	۷.۵	مقادیر تجربی [۸]- دو الیاف

جدول ۳-۵- مقایسه تغییر طولهای بدست آمده برحسب سانتیمتر از شبیه سازی آباکوس و مقادیر تجربی به ازای نیروهای مختلف و تعداد ۴۰ دور برای سه الیاف

$F_L = 35 N$	$F_L = 25 N$	$F_L = 15 N$	$F_L = 5 N$	
۷.۹	۸.۳	۸.۸	۹.۲	مدل سازی آباکوس - سه الیاف
۸.۲	۸.۶	۹.۱	۹.۶	مقادیر تجربی [۸]- سه الیاف

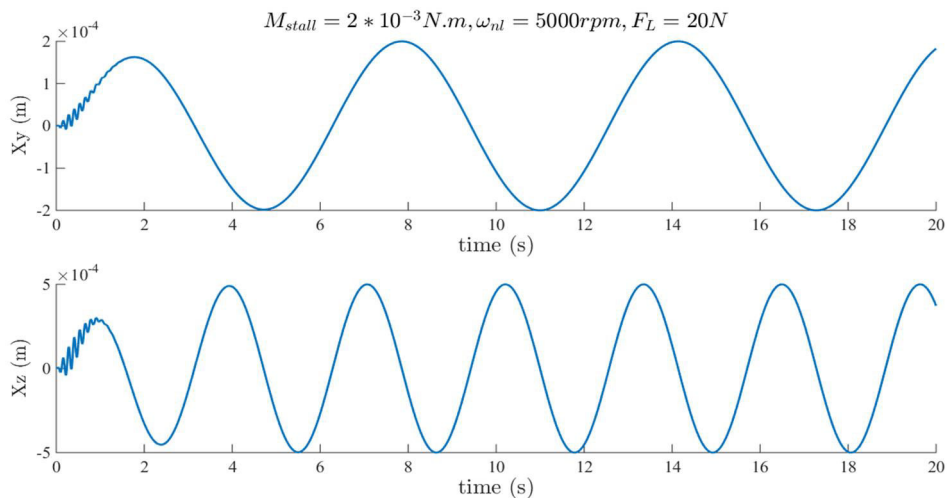
با مقایسه نتایج جدول ۳-۴ و ۳-۵ می توان دید نتایج تجربی تا حد قابل قبولی صحت شبیه سازی آباکوس را تایید میکند. در خصوص مقایسه نتایج به دست آمده از شبیه سازی آباکوس ذکر این نکته ضروریست که المان بندی و تعداد این المان ها در دقت جواب به دست آمده در آباکوس

نقش اساسی دارند که مدت زمان طولانی حل با المان های زیاد، استفاده از اینگونه روش های حل را توجیه پذیر نمی سازد.

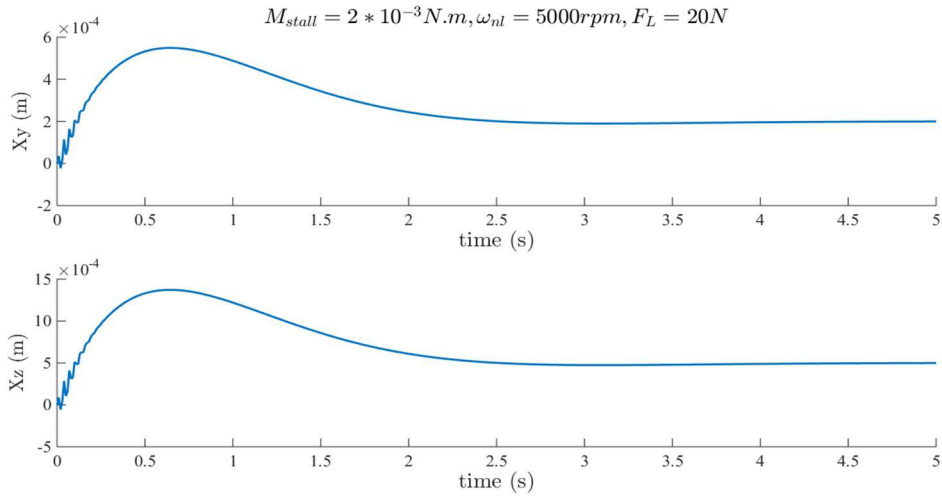
۳-۶- نتایج دیگر

در بخش های قبل صحبتی از جابجایی های ریسمان در راستای y و z نشده بود. و این به دلیل آن بود که فرض بر این بود که در این راستاها هیچگونه تحریک و نیرویی بر ریسمان تصور نشده بود. ولی زمانی که یک نیروی محرک خارجی بر ریسمان در راستاهای موردنظر وارد شود، ریسمان دچار جابجایی در این راستاها نیز خواهد شد.

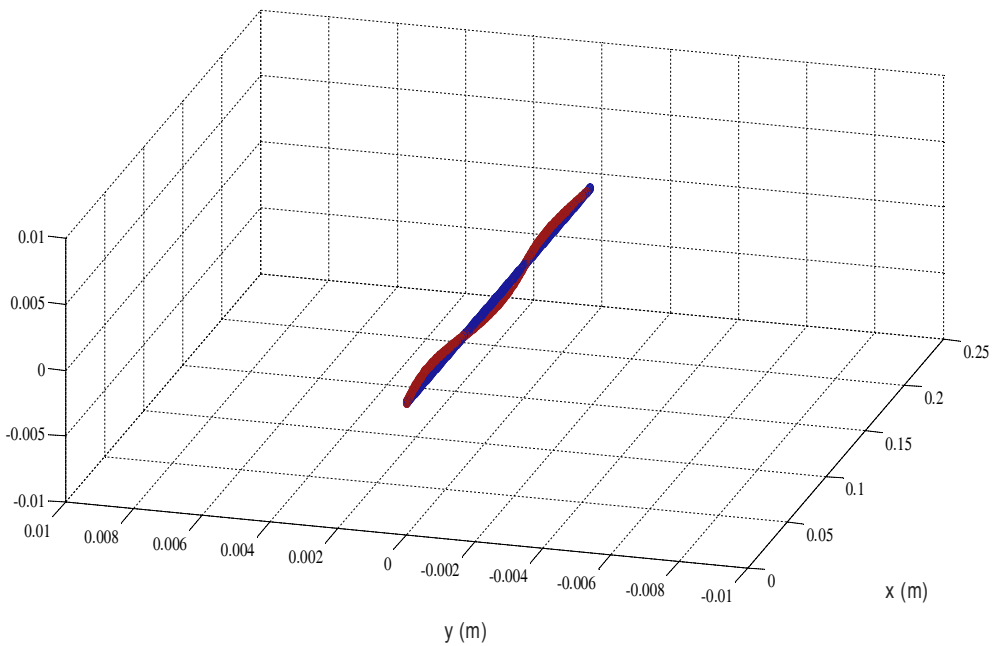
بنابراین در این بخش فرض بر این است که $f_y \neq 0$ و $f_z \neq 0$ می باشد. شکل های ۳-۱۸ و ۳-۱۹ این جابجایی ها را نشان می دهند.



شکل ۳-۱۸ - جابجایی ریسمان در $x = \frac{L_0}{2}$ در راستاهای عرضی به ازای $f_z = 0.5 \sin 2t$ و $f_y = 0.2 \sin t$



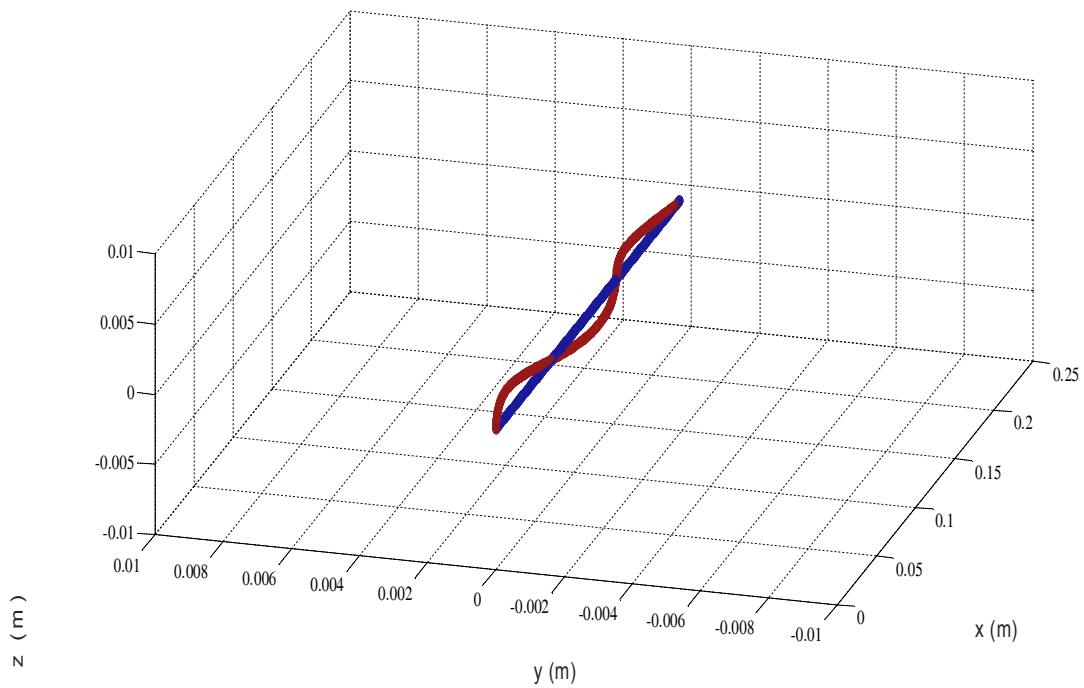
شکل ۳-۱۹ - جابجایی ریسمان در $x = \frac{L_0}{2}$ در راستاهای عرضی به ازای $f_y = 0.2$ و $f_z = 0.5$ با توجه به نیروهای وارده و تغییر شکل های ناشی از آن در طول زمان، می توان مسیر حرکت ریسمان را مطابق با شکل های ۳-۲۰ تا ۳-۲۳ در زمان های مختلف نمایش داد.



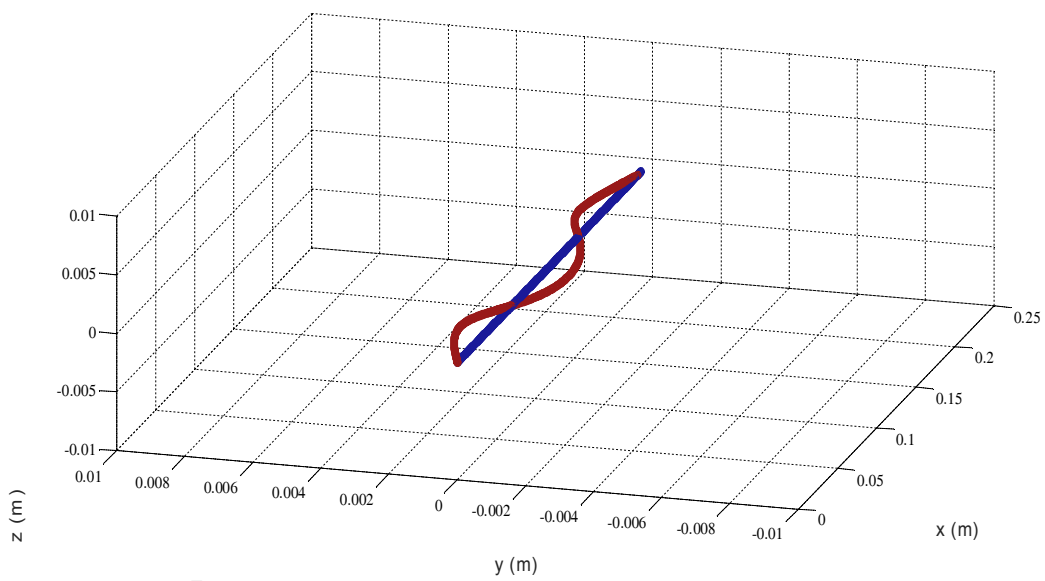
شکل ۳-۲۰ - تغییر شکل هندسه ریسمان در $t = 0.5s$ در راستاهای عرضی به ازای $f_y = \sin 3\pi x/l$ و

$$f_z = 0.5 \sin 4\pi x/l$$

(z)

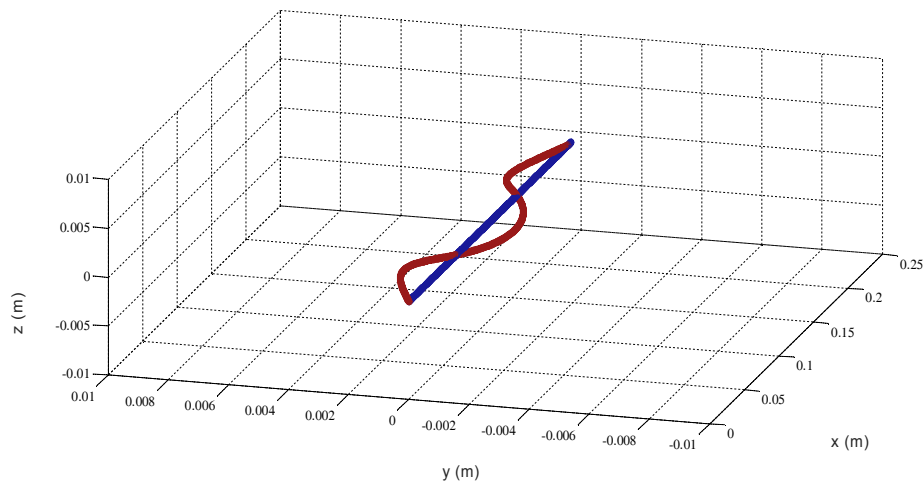


شکل ۳-۲۱ - تغییر شکل هندسه ریسمان در $t = 1s$ در راستاهای عرضی به ازای $f_y = \sin \frac{3\pi x}{l}$ و $f_z = 0.5 \sin \frac{4\pi x}{l}$



شکل ۳-۲۲ - تغییر شکل هندسه ریسمان در $t = 1.5s$ در راستاهای عرضی به ازای $f_y = \sin \frac{3\pi x}{l}$ و $f_z = 0.5 \sin \frac{4\pi x}{l}$

$$f_z = 0.5 \sin \frac{4\pi x}{l}$$



شکل ۳-۲۳

- تغییر شکل هندسه ریسمان در $t = 2s$ در راستاهای عرضی به ازای $f_y = \sin \frac{3\pi x}{l}$ و $f_z = 0.5 \sin \frac{4\pi x}{l}$

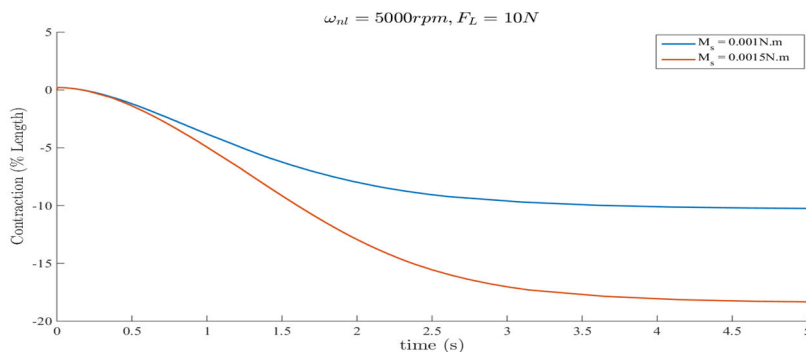
۳-۷- انتخاب موتور

در شبیه‌سازی‌هایی که آورده شد، بنا بر این بود که مشخصات موتور DC در دست می‌باشد. زمانی که ریسمان مورد نظر در دست باشد لازم است تا موتور مناسبی برای تاباندن آن طراحی و در اصل، انتخاب گردد. منظور از دست بودن ریسمان این است که هندسه و مشخصات ماده ریسمان مشخص باشد. برای آنکه بتوان موتور مناسبی را برای تاباندن ریسمان انتخاب کرد، ابتدا لازم است خواسته‌های مورد نظری که از این سیستم محرکه مد نظر می‌باشد مشخص شوند. سیستم محرکه مورد نظر باید تغییر طولی که مد نظر می‌باشد را برآورده کند. از آنجا که قبلاً نیز بیان شد، سیستم محرکه ریسمان تابیده، یک سیستم دینامیکی می‌باشد، زمان لازم برای رسیدن به این تغییر طول و نحوه حرکت ریسمان از حالت اولیه به حالت نهایی ایستا نیز دارای اهمیت می‌باشد.

شکل ۳-۲۴ تغییر طول ریسمان را به ازای موتور با $\omega_{nl} = 5000rpm$ و دو M_{stall} مختلف نشان می‌دهد. همانگونه که انتظار می‌رود و از شکل ۳-۲۴ نیز پیداست، زمانی که M_{stall} مقدار بزرگتری باشد، تغییر طول ریسمان نیز مقدار بیشتری خواهد بود.

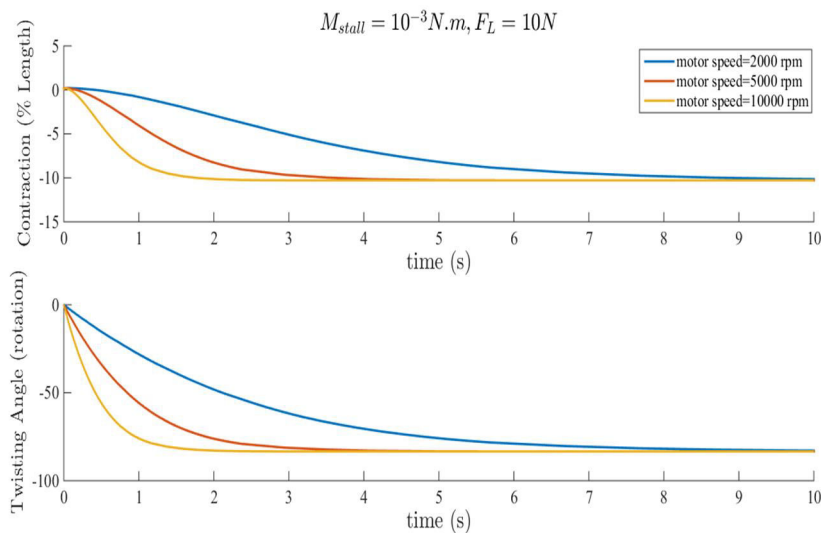
نکته دیگری که وجود دارد این است که زمانی که ریسمان به حالت پایا می‌رسد، سرعت دورانی موتور برابر صفر خواهد بود. در نتیجه، مقدار نهایی و ایستای ریسمان تنها به مقدار M_{stall} بستگی

دارد (به دلیل آنکه ریسمان تابیده شده با موتور در یک تعادل استاتیکی قرار می‌گیرد). بنابراین می‌توان مقدار M_{stall} مناسب موتور را با استفاده مقدار نهایی تغییر طول به نحوی بدست آورد که تغییر طول مورد نظر حاصل گردد.



شکل ۳-۲۴ - درصد تغییر طول ریسمان به ازای دو M_{stall} مختلف

شکل ۳-۲۵ پاسخ ریسمان را به ازای سه ω_{nl} مختلف و $M_{stall} = 1 \times 10^{-3} N \cdot m$ و $F_L = 10N$ نشان می‌دهد.



شکل ۳-۲۵ - درصد تغییر طول و میزان زاویه تابیده شده ریسمان به ازای ω_{nl} های مختلف

علاوه بر این، برای تحلیل دقیق‌تر، با توجه به شکل ۳-۲۵ می‌توان جداول ۳-۶ تا ۳-۸ را تشکیل داد که مقادیر عددی نمودارهای شکل ۳-۲۵ را در بعضی نقاط نمایش می‌دهد.

جدول ۳-۶ - نتایج بدست آمده به ازای $\omega_{nl} = 2000 \text{ rpm}$ و $M_{stall} = 0.001 \text{ N} \cdot \text{m}$

Contraction (%)	Twisting Angle (rotation)	Time (s)	Calculated Motor Speed (rad/s)
0	0	0	176.0400
-1.0114	28.6073	1.0210	134.8040
-2.0229	39.9050	1.5476	113.7251
-3.0344	48.7327	2.0353	101.1599
-4.0459	50.3319	2.1346	83.7283
-5.0573	61.2282	2.9523	63.5337
-6.0688	66.1635	3.4404	49.4893
-7.0803	70.0079	3.9285	35.7573
-8.0918	75.1298	4.8285	23.0075
-9.1032	78.2634	5.6843	7.12336
-10.1147	82.7983	9.6843	0

جدول ۳-۷ - نتایج بدست آمده به ازای $\omega_{nl} = 5000 \text{ rpm}$ و $M_{stall} = 0.001 \text{ N} \cdot \text{m}$

Contraction (%)	Twisting Angle (rotation)	Time (s)	Calculated Motor Speed (rad/s)
0	0	0	436.5455
-1.0290	30.0695	0.4327	343.2811
-2.0580	37.2425	0.5640	301.7365
-3.0871	45.0383	0.7264	246.0044
-4.1161	55.7903	1.0010	192.8756
-5.1451	62.0326	1.2043	155.6169
-6.1742	66.6978	1.3927	125.5525
-7.2032	70.3952	1.5777	86.8361
-8.2322	75.8638	1.9734	50.4257
-9.2613	79.0598	2.3717	3.6187
-10.2903	83.3778	9.8689	0

جدول ۳-۸ - نتایج بدست آمده به ازای $M_{stall} = 0.001 N \cdot m$ و $\omega_{nl} = 10000 rpm$

Contraction (%)	Twisting Angle (rotation)	Time (s)	Calculated Motor Speed (rad/s)
0	0	0	881.8371
-1.0290	29.3309	0.2089	670.7998
-2.0581	41.0127	0.3184	555.8119
-3.0872	49.3486	0.4126	478.8174
-4.1162	54.0648	0.4745	389.2799
-5.1453	61.9265	0.6014	304.8546
-6.1744	66.9133	0.7041	262.4339
-7.2034	68.8451	0.7504	196.8117
-8.2325	74.3150	0.9250	113.1425
-9.2616	78.7234	1.1698	4.3743
-10.2906	83.3788	7.8567	0

برای انتخاب موتور می توان از نتایج حاصل از جداول با توجه به میزان گشتاور اعمالی و ω_{nl} استفاده کرد. بدین ترتیب که اگر بطور مثال هدف، رسیدن به تغییر طولی برابر با ۵ درصد طول ریسمان باشد با توجه به شکل ۳-۲۴ می توان از دو موتور مختلف با گشتاور $M_{stall} = 0.001 N \cdot m$ و $M_{stall} = 0.0015 N \cdot m$ و با $\omega_{nl} = 5000 rpm$ استفاده کرد. نکته مهم در این انتخاب دخالت عامل زمان می باشد که هر موتور تغییر طول مورد نظر را در چه زمانی فراهم می کند. این زمان برای موتور با گشتاور $M_{stall} = 0.0015 N \cdot m$ برابر با 0.9 s و برای موتور با $M_{stall} = 0.001 N \cdot m$ برابر با 1.2 s می باشد. با توجه به اهمیت بالای بحث زمان در سیستم های رباتیکی می توان اختلاف زمانی اندک ذکر شده را توجیه نمود. حال در شکل ۳-۲۵ عامل گشتاور را ثابت فرض کرده ($M_{stall} = 0.001 N \cdot m$) و ω_{nl} را تغییر می دهیم. اگر مجدداً تغییر طول ۵ درصدی را مد نظر قرار دهیم در صورتی که از موتوری با $\omega_{nl} = 2000 rpm$ استفاده کنیم این تغییر طول در بازه زمانی حدوداً 3 s رخ خواهد داد.

درحالی که این عدد برای موتوری با $\omega_{nl} = 5000 \text{ rpm}$ برابر با 1.2 s و برای موتور $\omega_{nl} = 10000 \text{ rpm}$ برابر با 0.6 s می باشد. حال با توجه به این اطلاعات می توان با در نظر گرفتن تمامی جوانب (سرعت پاسخ دهی، هزینه موتور، دقت موتور، مورد کاربرد و...) موتور مد نظر را انتخاب کرد.

نحوه بدست آوردن جداول ۳-۶ تا ۳-۸ به این شکل می باشد که با توجه به شکل ۳-۲۵ زاویه تابیدن ریسمان بر حسب تعداد دور را بر بازه زمانی در نظر گرفته شده تقسیم کرده و سرعت دورانی متناظر را بدست می آوریم. همانگونه که از شکل ۳-۲۵ و جداول ۳-۶ تا ۳-۸ نیز پیداست، هر چه مقدار ω_{nl} کوچک باشد، حرکت ریسمان دیرتر به مقدار نهایی ایستا می رسد. بنابراین می توان مقدار ω_{nl} را نیز به نحوی حساب کرد که ریسمان زمان پاسخ دهی مناسبی داشته باشد.

۳-۸- جمع بندی

در این فصل، ابتدا با استفاده از معادلات بدست آمده در فصل دوم، حرکت ریسمان شبیه سازی و همگرایی آن بررسی گردید. همچنین برای اطمینان بیشتر از نتایج بدست آمده و ارائه تحلیلی درست از دینامیک ریسمان تابیده، مدل سازی دینامیکی ریسمان در نرم افزار آباکوس نیز انجام شد. در ادامه برای صحت گذاری نتایج بدست آمده، این نتایج با نتایج منابع دیگر مقایسه گردید. در آخر نحوه انتخاب موتور مناسب برای ریسمان بیان گردید.

فصل چهارم:

نتیجه‌گیری

و پیشنهادها

۴-۱- جمع بندی مطالب پایان نامه

ویژگی های اجرایی محرکه ها، انتخاب محرکه را تحت تاثیر قرار می دهد. بسیاری از ابزارهای رباتیکی که در گذشته گسترش یافته اند، راه حل های متعددی برای سیستم های محرکه خود پیشنهاد داده اند که به طور عمده در نوع موتور تفاوت دارند. اغلب موتورهای الکتریکی دورانی و گاهی اوقات پنوماتیکی ارائه شده است و در سیستم انتقال قدرت از جعبه دنده تاندون و یا شفت های انعطاف پذیر استفاده شده است.

سیستم محرکه ریسمان تابیده بسیار سبک، ارزان و با اصطکاک کم است و شبیه به ماهیچه عمل می کند. ویژگی های منحصر به فرد این سیستم محرکه کاربردهای گسترده ای را برای آن موجب می شود.

در این پژوهش سیستم محرکه ریسمان تابیده شده بررسی شده است. پس از بیان مقدمات مربوط به هندسه ریسمان و بررسی مدل های سینماتیکی، معادلات دینامیکی حاکم بر ریسمان استخراج و مدل سازی ریسمان تابیده شده با ماده ویسکوالاستیک صورت پذیرفت. برای مطالعه دقیق تر از دو مدل استاندارد و کلوین-وویت استفاده شده و تاثیر آن بر مدلسازی دینامیک ریسمان بیان گردید. بر همین اساس، مدلسازی انجام شده در این پایان نامه قابلیت بررسی جابجایی های عرضی جهت مطالعه رفتار ریسمان تحت نیروی محرک خارجی وارد بر ریسمان در راستاهای موردنظر را دارا می باشد. این امر سبب می شود نتایج حاصل از مدلسازی دقت مناسبی داشته باشد. همچنین برای اطمینان بیشتر از نتایج بدست آمده و ارائه تحلیلی درست از دینامیک ریسمان تابیده، مدلسازی دینامیکی ریسمان در نرم افزار آباکوس نیز انجام شد. در آخر با توجه به نتایج حاصل شده نحوه انتخاب موتور مناسب برای ریسمان بیان گردید.

۴-۲- نتیجه گیری

با مقایسه نتایج بدست آمده می توان دید که نتایج حاصل از مدلسازی فصل ۲، تا حد خوبی نتایج قابل قبولی بدست می دهد. البته می توان خطای موجود مابین نتایج مدلسازی فصل ۲ و نتایج تجربی را وابسته به شرایط اولیه ریسمان تحلیل کرد. ریسمان استفاده شده برای مقادیر تجربی ریسمانی است که دارای یک تابیدگی اولیه می باشد در حالی که در شبیه سازی های انجام گرفته برای مدل فصل ۲، فرض بر این بوده است که ریسمان در حالت اولیه بدون هرگونه تابیدگی باشد.

نتایج به دست آمده از دو روش مدل سازی کلون-وویت و مدل استاندارد می توان دریافت که نتایج نهایی مشابه هم می باشند، هرچند در بازه زمانی ۰.۵ تا ۲.۵ ثانیه اختلافاتی مشاهده می شود. علت تشابه این نتایج را می توان در خصوصیات و جنس ماده استفاده شده جستجو کرد.

در خصوص نتایج حاصل از شبیه سازی در نرم افزار آباکوس یک روند قابل پیش بینی نتایج قابل مشاهده است و آن اینکه با افزایش تعداد الیاف ریسمان، نتایج بدست آمده از آباکوس به نتایج تجربی نزدیک تر می شود.

۴-۳- پیشنهاد تحقیقات آینده

- مطالعه تغییر شکل ریسمان در فاز دوم (بعد از باز شدن ریسمان)
- بررسی آزمایشگاهی سیستم مورد بررسی
- استفاده از مدل های ترکیبی ویسکوالاستیک و بررسی دینامیک ریسمان

پیوست الف [۳۱]

برخی از پارامترها و بردارهای یکه بیان شده را می‌توان بر حسب بردار مکان ریسمان حساب کرد. بردارهای یکه دستگاه مختصات از روابط زیر حساب می‌شود.

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \frac{\mathbf{X}'}{\|\mathbf{X}'\|} \\ \mathbf{N} &= \frac{\mathbf{T}'}{\|\mathbf{T}'\|} \\ \mathbf{B} &= \mathbf{T} \times \mathbf{N} \end{aligned} \quad (\text{الف-۱})$$

اگر بردار مکان ریسمان را به صورت پارامتری به فرم $\mathbf{X}(s, t) = X_x(s, t)\mathbf{i} + X_y(s, t)\mathbf{j} + X_z(s, t)\mathbf{k}$ نشان دهیم. از آنجا که در لحظه اولیه فرض بر این است که ریسمان در حالت بدون تابیدگی و به صورت مستقیم قرار دارد، می‌توان گفت که s برابر با x می‌باشد. در نتیجه $\mathbf{X}(x, t) = X_x(x, t)\mathbf{i} + X_y(x, t)\mathbf{j} + X_z(x, t)\mathbf{k}$ می‌باشد. و در نتیجه بردار به صورت زیر خواهد بود.

$$\mathbf{T}(x, t) = \frac{\mathbf{X}'(x, t)}{\|\mathbf{X}'(x, t)\|} \quad (\text{الف-۲})$$

بردار به صورت زیر است.

$$\mathbf{X}'(x, t) = \frac{dX_x}{dx}(x, t)\mathbf{i} + \frac{dX_y}{dx}(x, t)\mathbf{j} + \frac{dX_z}{dx}(x, t)\mathbf{k} \quad (\text{الف-۳})$$

در نتیجه

$$\mathbf{T}(x, t) = \frac{\frac{dX_x}{dx}\mathbf{i} + \frac{dX_y}{dx}\mathbf{j} + \frac{dX_z}{dx}\mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{dX_x}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_z}{dx}\right)^2}} \quad (\text{الف-۴})$$

در نتیجه

$$\left\{ \begin{array}{l} T_x = \frac{\frac{dX_x}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dX_x}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_z}{dx}\right)^2}} \\ T_y = \frac{\frac{dX_y}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dX_x}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_z}{dx}\right)^2}} \\ T_z = \frac{\frac{dX_z}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dX_x}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX_z}{dx}\right)^2}} \end{array} \right. \quad \text{(الف-۵)}$$

همچنین بردار به صورت زیر است.

$$\mathbf{N}(x, t) = \frac{\mathbf{T}'(x, t)}{\|\mathbf{T}(x, t)\|} \quad \text{(الف-۶)}$$

بردار به صورت زیر است.

$$\mathbf{T}'(x, t) = \frac{dT_x}{dx}(x, t)\mathbf{i} + \frac{dT_y}{dx}(x, t)\mathbf{j} + \frac{dT_z}{dx}(x, t)\mathbf{k} \quad \text{(الف-۷)}$$

در نتیجه

$$\mathbf{N}(x, t) = \frac{\frac{dT_x}{dx}\mathbf{i} + \frac{dT_y}{dx}\mathbf{j} + \frac{dT_z}{dx}\mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{dT_x}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dT_y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dT_z}{dx}\right)^2}} \quad \text{(الف-۸)}$$

در نتیجه

$$\left\{ \begin{aligned} N_x &= \frac{\frac{dT_x}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dT_x}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dT_y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dT_z}{dx}\right)^2}} \\ N_y &= \frac{\frac{dT_y}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dT_x}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dT_y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dT_z}{dx}\right)^2}} \\ N_z &= \frac{\frac{dT_z}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dT_x}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dT_y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dT_z}{dx}\right)^2}} \end{aligned} \right. \quad \text{(الف-۹)}$$

همچنین

$$B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k} = (T_x \mathbf{i} + T_y \mathbf{j} + T_z \mathbf{k}) \times (N_x \mathbf{i} + N_y \mathbf{j} + N_z \mathbf{k}) \quad \text{(الف-۱۰)}$$

در نتیجه

$$\left\{ \begin{aligned} B_x &= T_y N_z - T_z N_y \\ B_y &= T_z N_x - T_x N_z \\ B_z &= T_x N_y - T_y N_x \end{aligned} \right. \quad \text{(الف-۱۱)}$$

همچنین انحنا و پیچش منحنی ریسمان را نیز می‌توان با استفاده از رابطه (۲-۱۴) حساب کرد. با ضرب داخلی طرفین رابطه اول (۲-۱۴) در N می‌توان انحنا را حساب کرد.

$$\frac{dT}{ds'} \cdot N = \kappa N \cdot N \quad \text{(الف-۱۲)}$$

$$\rightarrow \kappa = N \cdot \frac{dT}{ds} \frac{ds}{ds'} \quad \text{(الف-۱۳)}$$

$$\rightarrow \kappa = (N_x \mathbf{i} + N_y \mathbf{j} + N_z \mathbf{k}) \cdot \left(\frac{dT_x}{ds} \mathbf{i} + \frac{dT_y}{ds} \mathbf{j} + \frac{dT_z}{ds} \mathbf{k} \right) \frac{ds}{ds'} \quad \text{(الف-۱۴)}$$

$$\rightarrow \kappa = \left\{ N_x \frac{dT_x}{ds} + N_y \frac{dT_y}{ds} + N_z \frac{dT_z}{ds} \right\} \frac{ds}{ds'} \quad \text{(الف-۱۵)}$$

همچنین از آنجا که $ds' = \sqrt{(dX_x)^2 + (dX_y)^2 + (dX_z)^2}$ می‌باشد، در نتیجه

$$\frac{ds'}{ds} = \sqrt{\left(\frac{dX_x}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dX_y}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dX_z}{ds}\right)^2} \quad (\text{الف-۱۶})$$

1. Khodaei, F., (2016), MSc Thesis, Modeling and Control of a Robotic Arm Actuated by the Twisted String with Discrete Transfer Matrix, Department of Mechanical Engineering, Shahroud University of Technology. (In Persian)
2. May, C., Holz, B., Wurtz, T., Natale, C., Palli, G., & Melchiorri, C. (2010, October). Twisted string actuation - History principle and performance. *In Workshop on Actuation & Sensing in Robotics*.
3. Kremer, S. R. (1989). *U.S. Patent No. 4,843,921*. Washington, DC: U.S. Patent and Trademark Office.
4. Popov, D., Gaponov, I., & Ryu, J. H. (2013, November). Bidirectional elbow exoskeleton based on twisted-string actuators. *In Intelligent Robots and Systems (IROS), 2013 IEEE/RSJ International Conference on* (pp. 5853-5858). IEEE.
5. Popov, D., Gaponov, I., & Ryu, J. (2013, April). A preliminary study on a twisted strings-based elbow exoskeleton. *In World Haptics Conference (WHC), 2013* (pp. 479-484). IEEE.
6. Guzek, J. J., Petersen, C., Constantin, S., & Lipson, H. (2012). Mini twist: A study of long-range linear drive by string twisting. *Journal of mechanisms and robotics*, 4(1), 014501.
7. Würtz, T., May, C., Holz, B., Natale, C., Palli, G., & Melchiorri, C. (2010, July). The twisted string actuation system: Modeling and control. *In Advanced Intelligent Mechatronics (AIM), 2010 IEEE/ASME International Conference on* (pp. 1215-1220). IEEE.
8. Shisheie, R., Jiang, L., Banta, L., & Cheng, M. (2015, July). Modeling and control of a bidirectional twisted-string actuation for an upper arm robotic device. *In American Control Conference (ACC), 2015* (pp. 5794-5799). IEEE.
9. Tavakoli, M., Batista, R., & Neto, P. (2016). A compact two-phase twisted string actuation system: Modeling and validation. *Mechanism and Machine Theory*, 101, 23-35.
10. Jacobsen, S. C., Jerard, R. B., Knutti, P., & Carruth, J. (1975). THE LAPP ACTUATOR AS A PROSTHETIC MUSCLE. *In Advances in External Control of Human Extremities: Proceedings of the Fifth International Symposium on External Control of Human Extremities, Dubrovnik, August 25-30, 1975* (p. 191).

11. Beaman, J. J. (1983). A dynamic model of a concentric LADD actuator. *Journal of dynamic systems, measurement, and control*, 105, 157.
12. Buehler, M. (1997). LADD Transmissions: Design, Manufacture, and New Compliance Models. *Journal of Mechanical Design*, 119, 197.
13. Shoham, M. (2005). Twisting wire actuator. *Journal of Mechanical Design*, 127(3), 441-445.
14. Sonoda, T., & Godler, I. (2010, October). Multi-fingered robotic hand employing strings transmission named "Twist Drive". In *Intelligent Robots and Systems (IROS), 2010 IEEE/RSJ International Conference on* (pp. 2733-2738). IEEE.
15. Godler, I., & Sonoda, T. (2010, June). A five fingered robotic hand prototype by using twist drive. In *Robotics (ISR), 2010 41st International Symposium on and 2010 6th German Conference on Robotics (ROBOTIK)* (pp. 1-6). VDE.
16. Shin, Y. J., Lee, H. J., Kim, K. S., & Kim, S. (2012). A robot finger design using a dual-mode twisting mechanism to achieve high-speed motion and large grasping force. *IEEE Transactions on Robotics*, 28(6), 1398-1405.
17. Palli, G., Hosseini, M., Moriello, L., & Melchiorri, C. (2015, September). Modeling and identification of a variable stiffness joint based on twisted string actuators. In *Intelligent Robots and Systems (IROS), 2015 IEEE/RSJ International Conference on* (pp. 1757-1762). IEEE.
18. Palli, G., Hosseini, M., & Melchiorri, C. Stiffness Variability and Friction Effects on Twisted String Actuation.
19. Godler, I., & Sonoda, T. (2011, November). Performance evaluation of twisted strings driven robotic finger. In *Ubiquitous Robots and Ambient Intelligence (URAI), 2011 8th International Conference on* (pp. 542-547). IEEE.
20. Sonoda, T., & Godler, I. (2011, July). Position and force control of a robotic finger with twisted strings actuation. In *Advanced Intelligent Mechatronics (AIM), 2011 IEEE/ASME International Conference on* (pp. 611-616). IEEE.
21. Gaponov, I., Popov, D., & Ryu, J. H. (2014). Twisted string actuation systems: A study of the mathematical model and a comparison of twisted strings. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 19(4), 1331-1342.
22. Jiang, L., Shisheie, R., Cheng, M., & Bakhoun, E. (2015, July). Controller synthesis for assistive robotic device using twisted-string actuation. In *American Control Conference (ACC), 2015* (pp. 2248-2253). IEEE.

23. Jiang, L., Li, Y., & Cheng, M. H. (2016). Compensation for Cross-Coupled Dynamics of Dual Twisted-String Actuation Systems. *Journal of Control Science and Engineering*, 2016, 9.
24. Inoue, T., Miyata, R., & Hirai, S. (2016, October). Force control on antagonistic Twist-drive Actuator robot. In *Intelligent Robots and Systems (IROS), 2016 IEEE/RSJ International Conference on* (pp. 3830-3835). IEEE.
25. Inoue, T., Yamamoto, S., Miyata, R., & Hirai, S. (2015, September). Robotic joint design by agonist and antagonist arrangement with twisting small-diameter round-belts. In *Intelligent Robots and Systems (IROS), 2015 IEEE/RSJ International Conference on* (pp. 1751-1756). IEEE.
26. Park, I. W., & SunSpiral, V. (2014, October). Impedance controlled twisted string actuators for tensegrity robots. In *Control, Automation and Systems (ICCAS), 2014 14th International Conference on* (pp. 1331-1338). IEEE.
27. Brinson, H. F., & Brinson, L. C. (2008). Polymer engineering science and viscoelasticity. (pp. 403-414). Berlin: Springer.
28. <http://www.globalspec.com/reference/14112/121073/chapter-d1-5-2-viscoelasticity>
29. <http://en.wikipedia.org/wiki/Viscoelasticity>
30. <http://es.wikipedia.org/wiki/Viscoelasticidad>
31. Klapper, I. (1996). Biological applications of the dynamics of twisted elastic rods. *Journal of Computational Physics*, 125(2), 325-337.
32. Rao, S. (2007). Vibration of Continuous Systems. *John Wiley & Sons*, New Jersey, 319-322.
33. Huang, N. C. (1978). Finite Extension of an Elastic Strand With a Central Core. *Journal of applied Mechanics*, Vol. 45, (pp. 852-858). ASME.
34. Huang, N. C. (1978). Finite Extension of a Viscoelastic Multiple Filament Yarn. *International Journal of solids and structures*, Vol. 14, (pp. 579-590).

Abstract:

In this dissertation, modeling and a dynamic analysis of twisted string actuator system has been conducted. For this matter, the string has been considered as a continuum object, and then its dynamic motion equations have been yielded. In this case, it is presumed that the wire rope material is viscoelastic. In this modeling, the aforementioned equations type is PDE (partial differential equation) which have been solved via FDM (finite difference method). Moreover, in order to develop accurate dynamic behavior of twisted string, the system has been simulated by Abaqus software. In this study, in addition to steady-state results of the twisted string, the results of transient state have been provided as well. Also, a way of proper motor selection for the wire rope has been introduced.

Keywords: Actuator system, Actuator system of twisted string, Viscoelastic, Dynamic modeling, Finite Difference Method, Robotic arm



Shahrood University of Technology

Faculty of Mechanical Engineering

Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the
Requirements for the Degree of Master of Science (M.Sc.)
in Mechanical Engineering.

Modeling and Analysis of a Robotic Arm with Twisted Viscoelastic Cable Actuation

By: Masoud Jafarpour

Supervisors:

Dr. Mahdi Bamdad

Dr. Mohammad Bagher Nazari

September 2018