بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک

پایان نامه کارشناسی ارشد طراحی جامدات

تحلیل تنش صفحات بی‌نهایت حاوی بگشودگی‌های غیردایروی تحت منبع حرارتی نقطه‌ای

نگارنده : فاطمه کریمی کناری

استاد راهنما

دکتر محمد جعفری

شهریور ۱۳۹۶

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده : مکانیک

گروه : طراحی جامدات

پایان نامه کارشناسی ارشد خانم فاطمه کریمی کناری

تحت عنوان: تحلیل تنش صفحات بی نهایت حاوی گشودگی های غیردایروی تحت منبع حرارتی

در تاریخ .... توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد مورد ارزیابی و با درجه .... مورد پذیرش قرار گرفت.

اساتید راهنما	امضاء	اساتید مشاور	امضاء
نام و نام خانوادگی : دکتر محمد جعفری		نام و نام خانوادگی :	
		نام و نام خانوادگی :	

اساتید داور	امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء
نام و نام خانوادگی : دکتر محمدباقر نظری		نام و نام خانوادگی : دکتر مهدی قناد کهتویی	
نام و نام خانوادگی : دکتر علیرضا شاطرزاده			
نام و نام خانوادگی :			
نام و نام خانوادگی :			

تقدیم به پدر و مادر دلسوز و مهربانم، قهرمانان زندگی‌ام که هرچه دارم از وجود پر مهر آن‌هاست.

سپاس و ستایش از آن پروردگار متعال، مهربان‌ترین مهربانان است که همواره پناه و تکیه‌گاه این بنده‌ی کوچکش بوده است.

سپاس از پدر و مادر مهربانم و خواهر عزیزتر از جانم که وجودشان روشنی‌بخش و بهانه‌ی زندگی‌ام است.

از تمامی استادان گرامی به ویژه جناب آقای رضا موسوی، که در راستای این پروژه راهنمایی‌ام کرده-اند کمال تقدیر و تشکر را دارم.

همچنین از تمامی دوستان عزیزم که به نحوی مرا در انجام این تحقیق یاری نموده‌اند، تشکر می‌نمایم.

و در آخر از استاد عزیز و گرانقدرم جناب آقای دکتر محمد جعفری که زحمات بی‌دریغ و راهنمایی-های ارزشمندشان در راستای انجام این پروژه همواره شامل حال اینجانب بوده‌است و از ایشان بسیار آموخته‌ام، نهایت سپاس و قدردانی را دارم.

تعهدنامه

اینجانب فاطمه کریمی کناری دانشجوی دوره‌ی کارشناسی ارشد رشته مهندسی مکانیک گرایش طراحی کاربردی دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده‌ی پایان نامه‌ی تحلیل تنش صفحات بی نهایت حاوی گشودگی های غیردایروی تحت منبع حرارتی تحت راهنمایی دکتر محمد جعفری متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « **Shahrood University of Technology** » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.

چکیده

در این پایان‌نامه، بر پایه‌ی تئوری ترموالاستیسیته‌ی دوبعدی حالت پایدار، میدان تنش در اطراف گشودگی در یک ورق نامحدود همسانگرد مورد بررسی قرار می‌گیرد. ورق فلزی در نزدیکی گشودگی دارای منبع حرارتی نقطه‌ای بوده و مرز گشودگی مرکزی، عایق است. با استفاده از توابع پتانسیل مختلط و با به کارگیری نگاشت همنوا و حلّ معادلات انتگرالی، توزیع تنش در اطراف گشودگی و اطراف منبع حرارتی ارائه می‌شود. روش استفاده، روش متغیّر مختلط برای ورق نامحدود همسانگرد حاوی گشودگی دایره‌ای و بیضی‌شکل است. برای سادگی استفاده از انتگرال کوشی، ورق نامحدود شامل گشودگی، به ناحیه‌ی درون دایره‌ای به شعاع واحد نگاشته می‌شود. زاویه‌ی چرخش گشودگی، شعاع انحنای گوشه‌های گشودگی و کشیدگی گشودگی از جمله پارامترهای مهمّی هستند که در این تحقیق مورد بررسی قرار می‌گیرند. نتایج حاصل از این تحقیق نشان می‌دهند که پارامترهای مذکور تأثیر بسزایی در توزیع تنش اطراف گشودگی و تنش اطراف منبع حرارتی دارند.

کلمات کلیدی: ورق همسانگرد، نگاشت همنوا، منبع حرارتی نقطه‌ای، تنش حرارتی، گشودگی، برهم‌کنش منبع حرارتی و گشودگی

فهرست مطالب

فهرست شکل ها

فهرست جدول ها

فهرست نشانه‌ها

λ	بزرگی گشودگی
c	کشیدگی گشودگی
n	۱ تعداد اضلاع گشودگی
w	انحنای گشودگی
z	نقطه‌ی دلخواه در صفحه‌ی مختلط
ζ	نقطه‌ی دلخواه در صفحه‌ی نگاشت
ζ_a	مختصات منبع حرارتی در صفحه‌ی نگاشت
r	شعاع دایره‌ی نگاشت
T	تابع دمایی
$\Omega(\zeta)$	تابع دمایی مختلط
q_x,q_y	مولفه‌های شار حرارتی در جهت xوy
$\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$	مؤلفه‌های تنش
$\phi(\zeta),\psi(\zeta)$	توابع تحلیلی تنش
P_x,P_y	نیروهای خارجی در جهات xوy
G	مدول برشی
$\omega(\zeta)$	تابع نگاشت
Γ	عدد ثابت
κ و α'	ضرایب ثابت وابسته به جنس مآده
α	ضریب انبساط حرارتی
k	ضریب هدایت گرمایی
A,B	اعداد موهومی ثابت

M	شدت منبع حرارتی
R	ضریب ثابت
σ	نقاط روی مرز دایره‌ی نگاشت
a , b , c , d	ضرایب جمله‌های تابع نگاشت

فصل ۱

مقدّمه

۱-۱ ضرورت و اهمیّت پژوهش

تنش‌های حرارتی نقش مهمی در صنایع متنوع مهندسی، از جمله طرّاحی وسایل نقلیه با سرعت بالا، اجزای ماشین‌ها، ساخت موتورهای موشک و جت، ساخت توربین‌های بخار و گاز و رآکتورهای هسته-ای دارد. تعیین مقدار، تأثیر و محلّ این تنش‌ها برای دست‌یابی به طرّاحی منطقی و واقع‌بینانه‌ی این اجزا ضروری است. از این لحاظ، تحقیق در مورد تمرکز تنش ایجاد شده در اطراف بگشودگی‌های مختلف در مواد الاستیک که تحت جریان‌های حرارتی قرار گرفته‌اند، در طرّاحی پیشرفته‌ی سازه‌های مهندسی بسیار مهم است. یکی از مسائل جذاب در این حوزه‌ها، تحلیل توزیع تنش در صفحات حاوی گشودگی است. گرما و میدان‌های حرارتی یکنواخت و غیر یکنواخت یا منبع حرارتی متمرکز، باعث از کارافتادگی و یا کاهش عمر مفید مواد و سازه‌ها می‌شوند

وجود عیوب و ناپیوستگی‌هایی مانند گشودگی در صفحات که تحت جریان حرارتی یکنواخت یا منبع حرارتی متمرکز قرار می‌گیرند؛ باعث تجمع تنش در اطراف آن شده و در عمر مفید و ضریب اطمینان سازه، تأثیرگذار است. وقتی جریان حرارتی ناشی از منبع حرارتی متمرکز در یک جسم جامد به-وسیله‌ی ناپیوستگی‌های هندسی مثل ترک یا گشودگی و یا ناخالصی‌ها، مختل یا مغشوش می‌شود؛ افزایش محلّی در توزیع جریان اتّفاق می‌افتد. این امر باعث افزایش تنش‌های حرارتی محلّی و به دنبال آن ازکارافتادگی اجزای سازه‌های مهندسی می‌شود. در همه‌ی این موارد آنچه که مهم است بررسی تأثیر این گشودگی‌ها در تنش‌های ایجاد شده در سازه است؛ زیرا گشودگی باعث ایجاد تنش‌های موضعی شدیدی در اطراف آن می‌شود. بنابراین مسأله‌ی تمرکز بر روی جریان سیّال و تنش‌های الاستیک اطراف ناپیوستگی‌ها و ناخالصی‌ها، علاقه‌ی بسیاری از محقّقان را جلب کرده است. دانستن مقدار تنش بیشینه در اطراف گشودگی، همچنین نقطه‌ای که این تنش بیشینه رخ می‌دهد؛ برای ارائه‌ی طرّاحی مناسب، بسیار مؤثّر است.

پارامترهای بسیاری بر توزیع تنش اطراف گشودگی در صفحات حاوی گشودگی، تأثیرگذار هستند.

نوع گشودگی، شعاع انحنای گشودگی و جهت‌گیری (زاویه‌ی چرخش) گشودگی، پارامترهایی هستند که بر توزیع تنش مؤثر بوده و انتخاب صحیح آنها در دست‌یابی به طرح موفق، مفید است وانتخاب صحیح آنها منجر به کمترین تنش ممکن می‌شود که از بگشودگی‌های دایره‌ای نیز کمتر خواهد بود. بنابراین به منظور ارائه‌ی یک طرح بهین، بررسی این تأثیرات لازم به نظر می‌رسد.

حل‌های ترموالاستیک متعددی برای اجسام با هندسه‌های مختلف وجود دارد. از میان تمامی آنها استفاده از روش متغیّر مختلط برای مطالعه‌ی محدوده‌ی وسیعی از مسائل دوبعدی، حائز اهمیّت است. بررسی‌های علمی، بیشتر بر رفتار مواد تحت بارگذاری‌های مکانیکی متمرکز بوده و کمتر به سایر پدیده‌ها نظیر تنش‌های حرارتی پرداخته شده است؛ در حالی که گشودگی، باعث تمرکز تنش شده و اختلالات حرارتی محلّی ایجاد می‌کند. بنابراین، آگاهی از تنش‌های حرارتی ناشی از اختلالات حرارتی محلّی برای شکست مواد، ضروری است.

۱-۲ فرضیه‌ها و اهداف پژوهش

با عنایت به موضوعات مطرح شده، در این پایان‌نامه سعی شده است تا پارامترهای مختلف مؤثر بر مقدار و نحوه‌ی توزیع تنش و جابه‌جایی در یک صفحه‌ی همسانگرد نامحدود حاوی گشودگی با اشکال مختلف دارای منبع حرارتی نقطه‌ای، مورد مطالعه و بررسی قرار گیرد. در حالت کلّی، شکل گشودگی می‌تواند مثلّثی، مستطیلی، پنج‌ضلعی و یا nضلعی باشد. منبع حرارتی در نزدیکی گشودگی اعمال شده است. صفحه‌ی مورد نظر، همگن و الاستیک خطّی در نظر گرفته شده که قانون عمومی هوک را ارضا می‌کند. گشودگی عایق بوده و مرز آن از بار خارجی آزاد است. اندازه‌ی گشودگی، نسبت به ابعاد صفحه به قدر کافی کوچک است که بتوان صفحه را بی‌نهایت فرض کرد. به‌عبارت دیگر اثر وجود گشودگی در دوردست، قابل صرف نظر کردن است. گشودگی می‌تواند در هر جهت دلخواه باشد.

جریان حرارتی ناشی از منبع حرارتی، در اثر وجود گشودگی عایق، مغشوش شده و این امر، باعث ایجاد تنش حرارتی، در اطراف گشودگی می‌شود.

۱-۳ طرح کلّی فصول پایان‌نامه

در این پایان‌نامه در قالب پنج فصل مقدّمه، پیشینه‌ی پژوهش، حلّ تحلیلی، نتایج و نتیجه‌گیری و پیشنهادها ارائه شده است. در فصل بعد، مسأله‌ی مورد نظر معرفی شده است، سپس مروری بر مطالعات پیشین در زمینه‌ی توزیع تنش صورت گرفته است. در فصل سوم، روش حل به طور کامل ارائه شده و روابط وو معادلات مربوط آمده است. در فصل چهارم، نتایج و نمودارها برای بگشودگی‌های مثلّثی، مربعی، پنج‌ضلعی و شش‌ضلعی ارائه شده است و پارامترهای مؤثر بر توزیع تنش و جابه‌جایی اطراف گشودگی، مورد مطالعه و بحث قرار گرفته است. در انتهای این فصل، نتیجه‌گیری کلّی و جمع-بندی آمده است و پیشنهاداتی برای پژوهش‌های آینده ارائه شده است.

فصل ۲

پیشینه‌ی پژوهش

۲-۱ مروری بر پژوهش‌های پیشین

نظریه‌ی ترموالاستیسیته، به عنوان یک مسأله‌ی کلاسیک در زمینه‌ی مکانیک جامدات، از قرن ۱۹ توسعه یافته شده است. پژوهش بر روی مسأله‌ی تنش حرارتی، با توجّه به برخی از برنامه‌های کاربردی مهندسی جدید مانند مهندسی هسته‌ای، مواد جدید، زمینه‌ی هوانوردی و همچنین شکست و یا کاهش عمر مواد و سازه‌ها در اثر درجه‌ی حرارت و یا گرمای غیر یکنواخت در سال‌های اخیر همچنان ادامه دارد. تحقیقات متعددی در مورد مسأله‌ی ترموالاستیک صفحات حاوی گشودگی یا نقص هندسی انجام شده است. برخی مربوط به صفحاتی از جنس مواد همسانگرد[۱] و برخی مربوط به صفحات ناهمسانگرد[۲] هستند. بخشی از این تحقیقات، شامل بررسی تأثیر وجود گشودگی یا میان‌بار[۳] در تحلیل تنش صفحات نامحدود و تحت بارگذاری حرارتی است. بخش دیگر تحقیقات به بررسی حضور ترک می‌پردازد.

گودیر[۴] و فلورنس[۵][۱] و موشخلیشویلی[۶] [۲] پایه‌گذار تئوری‌های مربوط به حلّ مسائل ترموالاستیک دوبعدی با استفاده از روش متغیّر مختلط هستند. فلورنس و گودیر [۱و۳] تنش‌های حرارتی برای یک صفحه‌ی الاستیک همسانگرد، شامل گشودگی دایروی و بیضوی را با استفاده از روش متغیّر مختلط، حل کردند. فوکویی[۷] و همکاران[۴]، مسئله‌ی ورق نامحدود با گشودگی دایروی که جریان حرارتی از یک منبع حرارتی نقطه‌ای ساطع می‌شود در شرایط مرزی هم‌دما بررسی کردند. همچنین فوکویی و فوکویی[۵] تنش حرارتی در اطراف میان‌بار دایره‌ای در نزدیکی یک منبع حرارتی و یک چاه حرارتی

---

[1] Isotropic
[2] Anisotropic
[3] Inclusion
[4] Goodier
[5] Florence
[6] Mushkhelishvili
[7] Fukui

را بررسی کردند. درسیویچ[۱] [۶] با بسط حلّ گودیر و فلورنس، توابع پتانسیل مختلط را برای بگشودگی‌هایی که مرز آن‌ها قابل نگاشت به دایره‌ای به شعاع واحد است؛ ارائه کرد. این نگاشت، به وسیله‌ی تابع نگاشتی همنوا به صورت چندجمله‌ای انجام شد. در انتهای مقاله برای حالتی خاص، توابع پتانسیل، نظیر یک حالت از گشودگی مثلثی‌شکل به دست آورده شد. رائو[۲] و همکاران[۷و۸] با استفاده از روش حدّاقل مربعات در نقاط مرزی، توزیع دما و تنش‌های درون‌صفحه‌ای را در یک صفحه‌ی الاستیک مستطیلی با گشودگی دایره‌ای و بیضی‌شکل، تحت جریان حرارتی یکنواخت به دست آوردند. توزیع دما نیز با حلّ معادله‌ی هدایت حرارتی حالت پایدار، محاسبه شده است. تاکیوتی[۳] و همکاران[۹] با به کارگیری روش متغیّر مختلط و استفاده از توابع تنش مختلط، توانستند توزیع تنش حرارتی در ورقی با ابعاد محدود و دارای گشودگی دایره‌ای در مرکز را به دست آورند.

توید[۴] و همکاران[۱۰]، تحلیل تنش حرارتی و توزیع دما برای یک صفحه‌ی نامحدود دارای گشودگی دایره‌ای که حاوی ترک می‌باشد؛ تحت جریان حرارتی یکنواخت در جهت دلخواه انجام دادند. ضریب شدّت تنش و تکینگی شار حرارتی در نوک ترک را نیز به‌دست آوردند. برای حل، از روش متغیّر مختلط، نگاشت کسری و روش نابه‌جایی[۵] استفاده شد. توسط هاسبه[۶] و همکاران[۱۱] روابط مربوط به حلّ مسأله‌ی ترموالاستیک دوبعدی برای صفحه‌ی الاستیک خطی همگن و همسانگرد، به صورت کامل تشریح شد. در این مقاله آن‌ها از روش متغیّر مختلط برای ارائه‌ی روابط خود استفاده کردند. توابع پتانسیل مختلط برای توابع نگاشت مورد استفاده در مقاله و همچنین برای شرایط مرزی و دمایی مختلف استخراج شدند. حلّ عمومی برای مسائل با شرایط مرزی نیرویی، جابه‌جایی و ترکیبی، تحت شار حرارتی یکنواخت و یا تحت یک منبع حرارتی نقطه‌ای به‌دست آمد. بهولار[۲][۱۲] مدل

[1] Deresiewicz
[2] Rao
[3] Takiuty
[4] Tweed
[5] Dislocation
[6] Hasebe
[2] Bhullar
[2] Aseeri

دوبعدی مسأله‌ی ترموالاستیک دریک ناحیه‌ی شش‌ضلعی با یک گشودگی بیضی‌شکل را مورد بررسی قار داد. مرز خارجی، تحت جریان حرارتی یکنواخت در نظر گرفته شد. در این تحقیق فرض شد که گشودگی بیضی‌شکل در مرکز ناحیه، عایق است. آسری[۲] [۱۳] از روش متغیّر مختلط برای به دست آوردن توابع پتانسیل و توابع گورست[۳] برای یک صفحه‌ی الاستیک نامحدود دارای بگشودگی‌هایی با شکل‌های مختلف استفاده کرد. به‌منظور دسترسی به حلّی صریح، این گشودگی‌ها با استفاده از تابع نگاشتی مناسب و همنوا به خارج دایره‌ای به شعاع واحد نگاشته شد. بهولار و همکارش[۱۴] با فرض تنش صفحه‌ای، تحلیل تنش حرارتی در یک صفحه‌ی همسانگرد با یک گشودگی شبه‌بیضی را بررسی کردند. آن‌ها از روش متغیّر مختلط و از شرایط هم‌دمایی در مرز گشودگی استفاده کردند. تنش ماکزیمم در اطراف بگشودگی‌های مختلف محاسبه شد. در مورد موادّ ناهمسانگرد، از تعمیم تئوری‌های ارائه شده توسط اشترو[۴] و لخنیتسکی[۵] برای تحلیل صفحات حاوی گشودگی تحت جریان حرارتی یکنواخت استفاده شد. چن[۶] و همکاران[۱۵] با استفاده از روش متغیّر مختلط، برای صفحه‌ی ارتوتروپیک[۷] دارای گشودگی عایق دایروی و بیضی‌شکل، و به منظور ارائه‌ی تنش‌های اطراف گشودگی، عبارتی تحلیلی به دست آوردند. تارن[۸] و همکاران[۱۶] روش پتانسیل مختلط لخنیتسکی، مربوط به الاستیسیته‌ی ناهمسانگرد را به بررسی مسأله‌ی ترموالاستیک بسط دادند. در این مقاله، فرمول‌بندی مسأله‌ی تنش حراری جسم الاستیک ناهمسانگرد با یک گشودگی یا میان‌بار صلب در قالب شرط تنش صفحه‌ای یا کرنش صفحه‌ای ارائه شد.

صفحه‌ی ناهمسانگرد نامحدود حاوی گشودگی بیضی‌شکل، تحت جریان حرارتی یکنواخت با استفاده از فرمول‌بندی لخنیتسکی و نگاشت همنوا توسط چاو[۱] و همکارش[۱۷] حل شد. ژانگ[۲] و

---

[3] Gourset
[4] Eshtro
[5] Lekhnitskii
[6] Chen
[7] Orthotropic
[8] Tarn
[1] Chao
[2] Xang

هاسبه[۱۸] مسئله‌ای را برای ترک آدیاباتیک در یک صفحه‌ی بی‌نهایت که دارای منبع حرارتی نقطه-ای بود با استفاده از راه حل‌های اولیّه برای یک ورق بی‌نهایت بدون گشودگی حل کردند. یوشیکاوا[3] و هاسبه[۱۹] با استفاده از تابع گرین در شرایط مرزی نیروی خارجی، معادلات مربوط به ورق همسانگرد نامحدود با بگشودگی‌های دلخواه هندسی، دارای منبع حرارتی را به دست آوردند. در این مقاله، دو شرایط ورق با منبع حررتی و چاه حراری در نقاط مقابل هم و ورق با منبع حرارتی و چاه حرارتی در بی‌نهایت مورد بررسی قرار گرفت. آن‌ها همچنین تنش در صفحه‌ی بی‌نهایت همسانگرد را در سه حالت گشودگی بیضوی دارای منبع حرارتی، میان‌بار بیضوی با چرخش و میان‌بار بیضوی تحت بار متمرکز بررسی کردند[۲۰].

کین[4][۲۱] مسألهی ترموالاستیک برای صفحه‌ی نامحدود حاوی یک گشودگی به شکل‌های مختلف را مورد بررسی قرار داد. با استفاده از فرمول‌بندی اشترو و روش نگاشت همنوا حلّی واحد برای یک صفحه ترموپیزوالکتریک با بگشودگی‌هایی با شکل‌های مختلف تحت بار حرارتی به دست آمد. بارگذاری می‌تواند به صورت جریان حرارتی یکنواخت در بی‌نهایت، منبع حرارتی نقطه‌ای و ناپیوستگی دمایی باشد. هاسبه و همکاران[۲۲] با استفاده از روش متغیّر مختلط و تابع نگاشت کسری مناسب، مسأله‌ی توزیع جریان الکتریکی، دما و تنش‌های حرارتی در یک صفحه‌ی هادی نامحدود داراری گشودگی بیضی‌شکل که در مرز گشودگی دارای یک ترک لبه‌ای است؛ حل کردند. مسأله‌ی یک صفحه‌ی نامحدود دارای میان‌بار دایره‌ای تحت جریان حرارتی یکنواخت توسط دندرس[5][۲۳] مورد بحث قرار گرفت.

محاسبه‌ی تابع تنش مربوط به ورق نامحدود الاستیک تحت جریان حرارتی یکنواخت در حالت دوبعدی که در مرکز دارای یک میان‌بار صلب با شکلی دلخواه است به کمک روش پتانسیل مختلط

---

[3] Yoshikava
[4] Qin
[5] Dundurgs

توسط لی[1] و همکارش[۲۴] انجام شد. میان‌بار صلب در فصل مشترک با ورق در دمای ثابت صفر و یا عایق در نظر گرفته شد. روابط مربوط به ضرایب شدّت تنش مربوط به مود یک و دو برای میان‌بارهای با گوشه‌های تیز نیز به دست آمد. فام[2][۲۵] مسأله‌ی تقابل بین یک گشودگی دارای ترک و یک ترک خطی را با استفاده تابع گرین[3]، تابع نگاشت و روش متغیّر مختلط بررسی کرد. هاسبه و همکاران[۲۶] مسأله‌ی مقدار مرزی ترموالاستیک برای یک میان‌بار صلب در تقابل با یک ترک خطی در یک صفحه‌ی نامحدود، تحت جریان حرارتی بکنواخت را حل کردند. در این مقاله سعی شد تا چرخش صلب میان‌بار نبز بررسی شود. مسأله با استفاده از روش متغیّر مختلط و با ارائه‌ی تابع نگاشت کسری حل شد.

در مورد تحلیل صفحات ناهمسانگرد حاوی میان‌بار، با استفاده از روش متغیّر مختلط می‌توان به موارد زیر اشاره کرد. هووا[4][۲۷] برای صفحه‌ی ناهمسانگرد با گشودگی بیضی‌شکل بر اساس فرمول‌بندی اشترو، چاو و شن[5][۲۸]، برای یک صفحه‌ی ناهمسانگرد عمومی بر اساس فرمول‌بندی لخنیتسکی و روش نگاشت همنوا تحقیقاتی را انجام دادند. حلّ تحلیلی عمومی برای یک میان‌بار ناهمسانگرد بیضی‌شکل در یک صفحه‌ی نامحدود ناهمسانگرد تحت جریان حرارتی یکنواخت توسط چاو و همکارش[۲۹] مورد بررسی قرار گرفت. روش مورد استفاده بر اساس فرمول‌بندی لخنیتسکی و استفاده از تکنیک نگاشت همنوا بود.

در مورد صفحات همسانگرد دارای ترک می‌توان به تحقیقات زیر اشاره کرد:

سکین[2][۳۰] در چارچوب مسائل ترموالاستیک صفحه‌ای، میدان تنش در نزدیک ینوک یک ترک مورّب دلخواه را در یک صفحه‌ی بی‌نهایت همسانگرد تحت بار حرارتی یکنواخت مورد برسی قرار داد.

[1] Lee
[2] Pham
[3] Green function
[4] Hwu
[5] Shen
[2] Sekine

با استفاده از روش متغیّر مختلط، تکینگی تنش حرارتی در نوک ترک و ضرایب شدّت تنش محاسبه شد. ضرایب شدّت تنش حرارتی حالت پایدار برای بگشودگی‌هایی با نوک تز و مقارن در یک جامد الاستیک نامحدود با استفاده از روش متغیّر مختلط در مقاله‌ای توسط لی و همکارانش[۳۱] مورد مطالعه قرار گرفت. تحلیل تنش حرارتی و توزیع دما برای یک صفحه‌ی همسانگرد نامحدود با ترک-هایی متقارن در اطراف گشودگی لوزی‌شکل توسط هاسبه و همکارانش[۳۲] انجام شد. جریان حرارتی یکنواخت در یک جهت در نظر گرفته شد. ضرایب شدت تنش و تکینگی شار حرارتی در نوک ترک نیز به دست آمد. چن[۳۳] مسأله‌ی یک ترک به شکل کمانی از دایره در یک صفحه‌ی نامحدود را تحت بارگذاری حرارتی به کمک تابع پتانسیل متغیّر مختلط و روش معادله‌ی انتگرالی حل کرد. فام و همکاران[۳۴] تقابل بین یک گشودگی ترک‌دار و ک ترک خطی تحت جریان حرارتی یکنواخت را بررسی کردند. نتایج آن‌ها نشان داد که تقابل بین گشودگی ترک‌دار و ترک خطّی تحت جریان حرارتی یکنواخت منتهی به حذف ضرایب شدّت تنش در نوک ترک لبه‌ای گشودگی می‌شود. این امر برای تقابل بین گشودگی ترک‌دار و ترک خطّی تحت کشش یکنواخت در دوردست دیده نشد. اتکینستون[2][۳۵]، تئوری ترموالاستیسیته‌ی مربوط به صفحات ناهمسانگرد دارای ترک را ارائه کرد. هر دو معادلات هدایت حرارتی و معادلات الاستیک به صورت ناهمسانگرد و جدا از هم در نظر گرفته شدند. کلمنتس[3][۳۶] روش متغیّر مختلط را برای مطالعه‌ی مسائل ترموالاستیک موادّ ناهمسانگرد همگن و غیر همگن داری ترک به کار گرفت. کادوماتیس[4][۳۷] با استفاده از فرمول‌بندی نابه‌جایی اشترو، پیشرفت ترک برای یک مادّه‌ی ناهمسانگرد تحت بارهای ترکیبی مکانیکی و حرارتی را مورد بررسی قرارداد. بر اساس تئوری ترموالاستیسیته‌ی دوبعدی مربوط به موادّ ناهمسانگرد، لی و همکاران[۳۸] ضرایب شدّت تنش حرارتی مربوط به ترک خطّی عایق در یک ورق نامحدود ناهمسانگرد، در نتیجه‌ی جریان حرارتی یکنواخت را محاسبه کردند.

---

[2] Atkinston
[3] Clements
[4] Kardomateas

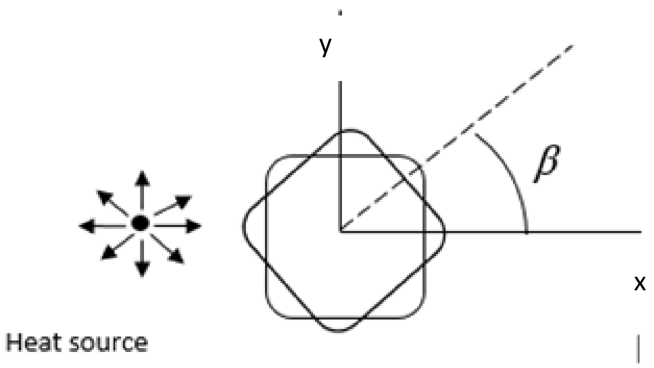
به طور معمول، دو نوع روش در حلّ مسائل تنش حرارتی وجود دارد، یک روش متغیر حقیقی و دیگری روش متغیر مختلط است که هر دوی آن‌ها به معرفی تابع پتانسیل ترموالاستیک نیاز دارند. بعد از اینکه بگنداف[1][۳۹] و دیگر محقّقان، تحلیل‌های مربوط به تنش‌های حرارتی مسائل ترموالاستیسیته صفحه‌ای تحت توزیع دمای پایدار به روش متغیّر مختلط را پایه‌گذاری کردند؛ تحقیقات زیادی در محاسبه‌ی ضریب شدت تنش حرارتی برای استفاده در مسائل مکانیک شکست مورد بررسی قرار گرفت. طاهری‌نسب و جعفری[۴۰] به بررسی تنش حرارتی در صفحات همسانگرد نامحدود حاوی گشودگی غیر دایروی تحت شار حرارتی پرداختند. آن‌ها زاویه‌ی چرخش و کشیدگی گشودگی و زاویه‌ی شار حرارتی را به عنوان پارامترهای تأثیرگذار بر تنش حرارتی در نظر گرفتند. رسولی و جعفری[۴۱] به تحلیل تنش حرارتی در صفحه‌ی ناهمسانگرد نامحدود حاوی گشودگی بیضوی تحت شار حرارتی یکنواخت پرداختند. در این پژوهش، زاویه‌ی چرخش گشودگی و زاویه‌ی الیاف به عنوان پارامترهای مؤثر، مورد مطالعه قرار گرفته است.

واضح است که تکنیک نگاشت همنوا یکی از روش‌های کاربردی برای حل مسائل نواحی با شکل‌های هندسی پیچیده است. اگرچه تحقیقات بسیاری در زمینه‌ی تحلیل تنش‌های حرارتی صفحات حاوی گشودگی با منبع حرارتی صورت گرفته است، ولی در هیچ‌یک از آن‌ها تأثیر متقابل پارامترهای مهمی از قبیل زاویه‌ی چرخش گشودگی، کشیدگی گشودگی و شعاع انحنای گوشه‌های گشودگی بر توزیع تنش بررسی نشده است. مسأله‌ی توزیع تنش حرارتی و جابه‌جایی در صفحات همسانگرد نامحدود حاوی گشودگی غیر دایروی و دارای منبع حرارتی، با به کارگیری تکنیک نگاشت همنوا و با استفاده از روش متغیّر مختلط، به طور کامل در تحقیق حاضر حل شده و به منظور دست‌یابی به کمترین تنش ممکن، تأثیر پارامترهای ذکر شده ارائه شده است.

[1] Bogdanoff

۲-۲ تعریف مسأله

موضوع تنش حرارتی دوبعدی، یکی از مسائل مهم در زمینه‌ی مکانیک جامدات است.وجود گشودگی در نزدیکی منبع حرارتی، باعث مغشوش شدن جریان حرارتی می‌شود و تنش‌های بزرگی را در اطراف گشودگی و محلّ قرار گرفتن منبع حرارتی ایجاد می‌کند. این تنش‌ها می‌توانند منجر به شکست سازه به ویژه برای موادّ ترد شوند. در این پایان‌نامه، هدف، محاسبه‌ی تنش‌های حرارتی موضعی در اطراف یک گشودگی از روش تحلیلی و بررسی تأثیر پارامترهای مختلف همچون: نوع گشودگی، شعاع انحنای گشودگی، جهت‌گیری(زاویه‌ی چرخش) گشودگی بر توزیع تنش صفحه‌ی حاوی گشودگی غیر دایروی است.



شکل (۲-۱): صفحه‌ی همسانگرد نامحدود حاوی گشودگی و منبع حرارتی

شکل (۲-۱)، یک صفحه‌ی همسانگرد نامحدود حاوی یک گشودگی در مرکز، و یک منبع حرارتی نقطه‌ای در نزدیکی آن را نشان می‌دهد.در حالت کلّی، شکل گشودگی می‌تواند مثلثی، مستطیلی، پنج‌ضلعی و به طور کلی nضلعی باشد. صفحه‌ی مورد نظر، همگن و الاستیک خطّی در نظر گرفته شده و قانون عمومی هوک را ارضا می‌کند. گشودگی عایق بوده و اندازه‌ی آن نسبت به ابعاد صفحه به‌-قدر کافی کوچک است که بتوان صفحه را بی‌نهایت فرض کرد. به عبارت دیگر اثر وجود گشودگی در دوردست قابل صرف نظر است. گشودگی می‌تواند در هر جهت دلخواه باشد. زاویه‌ی چرخش گشودگی

که بیان‌گر نحوه‌ی قرارگیری آن نسبت به افق است با β نمایش داده شده است. مرز گشودگی از بار خارجی آزاد است.

جریان حرارتی ناشی از منبع حرارتی به علت وجود گشودگی مغشوش شده و این امر باعث ایجاد تنش حرارتی در اطراف گشودگی می‌شود. از آن‌جا که محلّ قرار گرفتن منبع حرارتی در صفحه، نقطه‌ای بحرانی برای تنش حرارتی است ، تغییرات تنش در این نقطه نیز مورد بررسی قرار می‌گیرد. تنش ایجاد شده در مرز گشودگی، تنش محیطی σ_θ و در نقاط بیرون از گشودگی، تنش در دستگاه کارتزین σ_x و σ_y است. مسأله، حالت تنش صفحه‌ای و تغییر شکل‌ها کوچک در نظر گرفته شده‌اند.

برای حلّ مسأله از توابع پتانسیل موهومی و روش متغیّر مختلط استفاده شده است. این روش ابزار قدرتمندی برای حلّ مسائل دوبعدی از جمله مسائل تنش حرارتی می‌باشد. به کارگیری روش متغیّر مختلط، حلّ بسیاری از مسائل را که بررسی آن‌ها با روش‌های دیگر مشکل است، ممکن می‌سازد. این روش بر پایه‌ی ارائه‌ی مسائل مقدار مرزی الاستیسیته، با به کارگیری توابع پتانسیل مختلط استوار است. در فصل بعد، فرض‌ها و روابط و معادلات مربوطه برای حلّ مسأله‌ی مورد نظر به تفصیل آمده است.

فصل ۳

حل تحلیلی

۳-۱ مقدّمه

امروزه در بسیاری از موارد، اجزای سازه‌ها و ماشین‌ها علاوه بر نیروهای مکانیکی در معرض بارگذاری حرارتی نیز قرار می‌گیرند. مخازن تحت فشار و لوله‌ها در رآکتورهای هسته‌ای، اجزای داخلی رآکتورهای شیمیایی و بدنه‌ی هواپیماهای فوق سریع در دماهای بالا، تحت گرادیان شدید و تغییر نوسانی دما قرار می‌گیرند. بنابراین تحلیل تنش‌های حرارتی یکی از مهم‌ترین موضوع‌های مهندسی است.

طرّاح هنگام طراحی قطعه، حتما تجزیه و تحلیل لازم برای به دست آوردن مقدار تنش ماکزیمم را نیاز خواهد داشت. یک طرّاح بیش از آن که مایل به دانستن نحوه‌ی توزیع تنش در یک سطح مقطع داده شده باشد؛ به دانستن مقدار حداکثر تنش در همان سطح مقطع علاقه‌مند است. چرا که بررسی کند که آیا بار وارد شده از تنش مجاز، تجاوز می‌کند یا نه و مهم نیست که این تجاوز در کجا اتفاق می‌افتد.

همان‌طور که در فصل قبل اشاره شد؛ هدف از این تحقیق، محاسبه‌ی تنش‌های حرارتی موضعی در اطراف یک گشودگی و منبع حرارتی از روش تحلیلی و بررسی تأثیر پارامترهای مختلف همچون: نوع گشودگی، شعاع انحنای گشودگی و جهت‌گیری (زاویه‌ی چرخش) گشودگی بر توزیع تنش صفحه‌ی دارای گشودگی است.

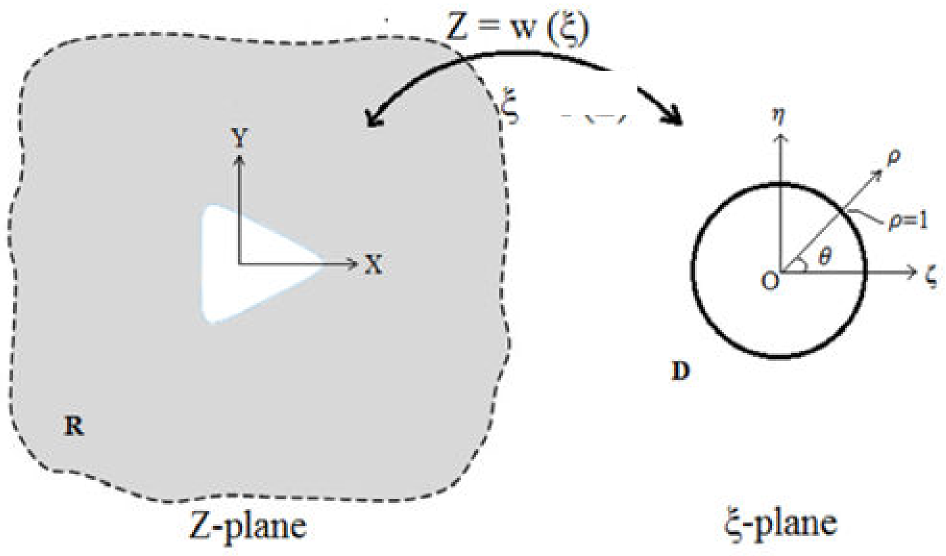
۳-۲ فرضیات حاکم بر مسأله

مفروضات و ویژگی‌های تجزیه و تحلیل مورد استفاده در این پایان‌نامه به شرح زیر است:

- صفحه همگن، الاستیک و همسانگرد است که قانون عمومی هوک را ارضا می‌کند.

- حالت تنش صفحه‌ای و تغییر شکل‌ها کوچک هستند.
- گشودگی عایق بوده و اندازه‌ی آن در مقابل ابعاد صفحه کوچک است. (صفحه بی-نهایت)
- مرز گشودگی از بار خارجی آزاد است.
- صفحه دارای منبع حرارتی نقطه‌ای، به فاصله‌ی یک واحد از مرز دایره‌ای به شعاع واحد محاط بر گشودگی است.
- جهت استفاده از تابع نگاشت، از روش متغیّر مختلط استفاده شده است.

۳-۳ معرفی توابع شکل برای مدل کردن انواع گشودگی



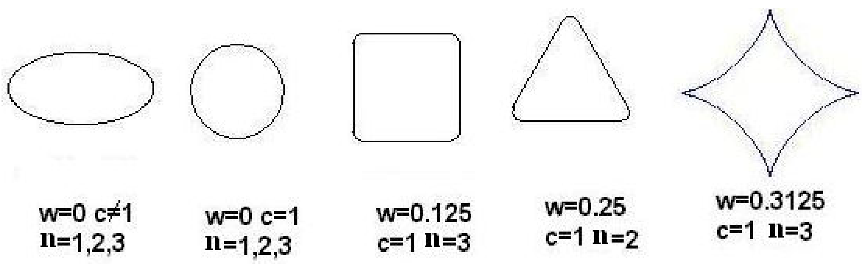
شکل (۳-۱): نگاشت همنوا

برای بسط روش تحلیلی مربوط به گشودگی دایروی به گشودگی با اشکال مختلف و به منظور ساده‌سازی فرمول انتگرال کوشی، ابتدا ناحیه‌ی نامحدود خارج از گشودگی مورد نظر مطابق شکل (۳-۱) به وسیله‌ی نگاشت همنوا به ناحیه‌ی بیرون دایره‌ی واحد نگاشته می‌شود.

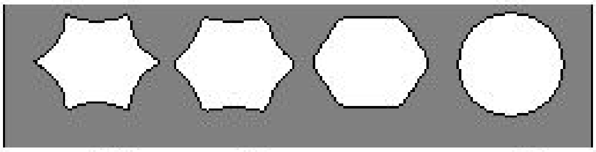
برای نگاشت نقاط روی مرز گشودگی با شکل دلخواه به دایره‌ای به شعاع واحد، از تابع نگاشت ساده‌ی $z=x+iy$ استفاده می‌کنیم؛ که مقادیر x و y از رابطه‌ی زیر به دست می‌آیند[۳۹]:

$$x = \lambda(\cos\theta + \omega \cos n\theta) \qquad (۳-۱)$$
$$y = \lambda(c\sin\theta - \omega \sin n\theta)$$

در رابطه‌ی (۳-۱)، پازامترهای مختلفی وجود دارند که با تغییر آن‌ها می‌توان بگشودگی‌های مختلف را مدل کرد. این پارامترها نوع شکل، بزرگی، تیزی یا نرمی آن را نشان می‌دهند. n و c نشان‌دهنده‌ی نوع هندسه‌ی گشودگی هستند که، ۱-تعداد اضلاع گشودگی=n و c، مربوط به کشیدگی گشودگی است. λ بزرگی گشودگی را نشان می‌دهد و در بگشودگی‌های لبه‌دار، w معیار تیزی یا نرمی انحنای گشودگی است. با تغییر این پارامتر می‌توان بگشودگی‌های مختلف را با شعاع انحناهای متفاوت ایجاد کرد.



شکل (۳-۲): تأثیر پارامترهای مختلف در ایجاد گشودگی[۳۹]



شکل (۳-۳): تأثیر پارامتر w بر روی انحنای گوشه‌های گشودگی[۳۹]

تأثیر پارامترهای مختلف در ایجاد گشودگی در شکل (۳-۲) نشان داده شده است. تغییرات w و روند میل کردن گشودگی شش‌ضلعی به دایره در شکل (۳-۳) نشان داده شده است. وقتی w کاهش می‌یابد، گشودگی ملایم‌تر می‌شود تا اینکه به کم‌ترین مقدار خود w=0 می‌رسد و در این حالت گشودگی به دایره تبدیل می‌شود.

رابطه‌ی پارامتری (۳-۱) تنها برای نقاط روی مرز گشودگی به کار می‌رود. برای نقاط خارج از گشودگی از متغیّر موهومی ζ استفاده می‌شود که بر حسب مختصات θ و ρ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\zeta = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad (۳-۲)$$

از رابطه‌ی اویلر داریم:

$$\begin{aligned} e^{in\theta} &= \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \\ e^{-in\theta} &= \cos(n\theta) - i\sin(n\theta) \end{aligned} \qquad (۳-۳)$$

برای دایره‌ای به شعاع واحد، ۱= ρ می‌باشد. از طرفی با ترکیب روابط (۳-۲) و (۳-۳):

$$\begin{aligned} \cos(n\theta) &= 1/2\left[\zeta^n + 1/\zeta^n\right] \\ \sin(n\theta) &= -i/2\left[\zeta^n - 1/\zeta^n\right] \end{aligned} \qquad (۳-۴)$$

برای نگاشت کلّیه‌ی نقاط بگشودگی‌های مختلف روی دایره‌ای به شعاع واحد از تابع انتقال $w(\zeta)$ به صورت زیر استفاده می‌شود:

$$w(\zeta) = rx + iy \qquad (۳-۵)$$

با تلفیق معادلات (۳-۱) و (۳-۵) داریم:

$$w(\zeta) = \frac{\lambda}{2}\left[r\left(\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) + w\left(\zeta^{n} + \frac{1}{\zeta^{n}}\right)\right) - c\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right) + w\left(\zeta^{n} - \frac{1}{\zeta^{n}}\right)\right] \qquad (۳-۶)$$

یا به صورت ساده‌تر:

$$w(\zeta) = \frac{\lambda}{2}\left[\frac{a}{\zeta} + b\zeta + wd\zeta^{n} + \frac{we}{\zeta^{n}}\right] \qquad (۳-۷)$$

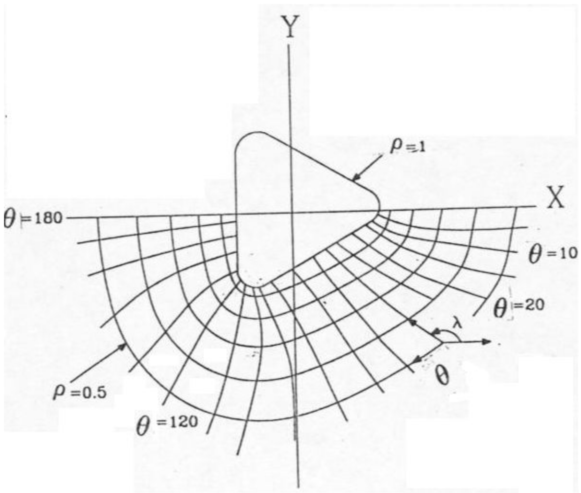
که:

$$\begin{aligned} a &= r - c \\ b &= r + c \\ d &= r - 1 \\ e &= r + 1 \end{aligned} \qquad (۳-۸)$$

که در آن c کشیدگی گشودگی، w شعاع انحنای گشودگی، λ بزرگی گشودگی و r شعاع دایره‌ی نگاشت است.

حال اگر بخواهیم نقاط روی مرز گشودگی را مشخص کنیم، ρ =۱ خواهد بود.

برای نقاط خارج گشودگی مانند شکل (۳-۴) کافیست مقدار ρ را کوچک‌تر انتخاب کنیم. به این ترتیب و به کمک روابط (۳-۲) و (۳-۷) و با انتخاب پارامترهای مناسب برای n، c، و w توانایی مدل کردن بگشودگی‌هایی با هندسه‌های مختلف را خواهیم داشت.



شکل (۳-۴): تعریف نقاط خارج از مرز گشودگی[۳۹]

۳-۴ اثر دما

تابع دمایی T (x , y) برای یک جسم الاستیک خطی باید یک تابع هارمونیک باشد که معادله‌ی انتقال حرارت زیر را ارضا کند.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0 \qquad (۳-۹)$$

با استفاده از متغیّرهای مختلط $z=x+iy$ و $\bar{z}=x-iy$، تابع دمایی $T(x,y)$ را می‌توان به عنوان بخشی حقیقی از تابع مختلط $\Omega_0(z)$ به صورت زیر در نظر گرفت:

$$T(x,y)=1/2\left[\Omega_0(z)+\overline{\Omega_0(z)}\right] \tag{۳-۱۰}$$

مؤلفه‌های شار حرارتی q_y و q_x در جهات x و y به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$q_x=-k\frac{\partial T}{\partial x} \tag{۳-۱۱}$$

$$q_y=-k\frac{\partial T}{\partial y} \tag{۳-۱۲}$$

با توجه به رابطه‌ی (۳-۱۰)، می‌توانیم $\Omega_0(z)$ را به صورت زیر بنویسیم:

$$\Omega_0(z)=T+iT' \tag{۳-۱۳}$$

که در آن T'، قسمت موهومی T است.

$$q_x-iq_y=-k\left(\frac{\partial T}{\partial x}-i\frac{\partial T}{\partial y}\right) \tag{۳-۱۴}$$

طبق معادلات کوشی-ریمن:

$$-k\left(\frac{\partial T}{\partial x}-i\frac{\partial T'}{\partial y}\right)=-k\frac{d\Omega_0}{dz} \tag{۳-۱۵}$$

$$q_x-iq_y=-k\Omega_0'(z) \tag{۳-۱۶}$$

که در آن k نشان‌دهنده‌ی ضریب هدایت حرارتی مادّه است.

شرایط مرزی برای تابع دمایی داده شده می‌توان از معادله‌ی (۳-۱۰) به دست آورد.

$$\Omega_0(z)+\overline{\Omega_0(z)}=2T(x,y) \tag{۳-۱۷}$$

۳-۵ تنش‌های حرارتی

مؤلفه‌های تنش با استفاده از تابع تنش ایری $F(x,y)$ به صورت زیر است.

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$
$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \qquad (۳-۱۸)$$
$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \partial x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \partial y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \qquad (۳-۱۹)$$

با جای‌گذاری تابع تنش (۳-۱۸) در معادله‌ی همساز (۳-۱۹)، معادله‌ی دوهمسازه‌ی (۳-۲۰) بر حسب تابع تنش به دست می‌آید:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \qquad (۳-۲۰)$$

با حل معادله‌ی (۳-۲۰)، تابع F به صورت زیر به دست می‌آید:

$$F(x,y) = \mathrm{Re}\left[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)\right] = 1/2\left[\bar{z}\varphi(z) + z\overline{\varphi(z)} + \chi(z) + \overline{\chi(z)}\right] \qquad (۳-۲۱)$$

که در آن $\chi(z)$ و $\varphi(z)$، توابع تحلیلی در ناحیه‌ی در نظر گرفته شده هستند[۴۲].

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} + z\overline{\varphi''(z)} + \overline{\psi'(z)}$$
$$-\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + i\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -\varphi'(z) - \overline{\varphi'(z)} + z\overline{\varphi''(z)} + \overline{\psi'(z)} \qquad (۳-۲۲)$$

اگر معادلات بالا را یک بار از هم کم کنیم، مؤلفه‌های تنش با استفاده از این توابع به صورت زیر به دست می‌آید ($\chi'(z)\equiv\psi(z)$).

$$\begin{aligned}
&\sigma_x+\sigma_y=2\left[\varphi'(z)+\overline{\varphi'(z)}\right]=4\operatorname{Re}\left[\varphi'(z)\right]\\
&\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}=2\left[\bar{z}\varphi''(z)+\psi(z)\right]
\end{aligned} \tag{۳-۲۳}$$

برای مسأله‌ی ترموالاستیک، تابع دمایی معادله‌ی (۳-۱۰) ممکن است جابه‌جایی تولید کند. کلّ این جابه‌جایی که شامل اثر گرمایی نیز می‌شود را می‌توان با استفاده از معادله‌ی زیر محاسبه نمود[۱۱].

$$u+iv=1/2G\left[\kappa\varphi(z)-z\overline{\varphi'(z)}-\overline{\psi(z)}\right]+\alpha'\int\Omega_0(z)dz \tag{۳-۲۴}$$

که در آن G نشان‌دهنده‌ی مدول برشی مادّه است. α' و κ ضرایبی هستند که با فرض تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای به صورت زیر تعیین می‌شوند.

$$\kappa=3-4\nu\quad \alpha'=(1+\nu)\alpha_0 \tag{۳-۲۵ حالت کرنش صفحه‌ای}$$

$$\alpha'=\alpha_0\quad \kappa=\frac{3-\nu}{1+\nu} \tag{۳-۲۶ حالت تنش صفحه‌ای}$$

در روابط فوق α_0 ضریب انبساط حرارتی و ν ضریب پواسون است.

نیروی حاصل بین دو نقطه در یک جسم الاستیک را می‌توان از رابطه‌ی زیر به دست آورد[۱۱].

$$\varphi(z)+z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)}=i\int(P_x+iP_y)ds+\mathrm{const} \tag{۳-۲۷}$$

وقتی p_y و p_x به مرز اعمال می‌شوند، این معادله به عنوان شرط مرزی نیروی خارجی استفاده می‌شود؛ مقدار ثابت را می‌توان صفر در نظر گرفت. شرط مرزی جابه‌جایی با استفاده از معادله‌ی (۳-۲۴) به صورت زیر است[۱۱]:

$$\kappa\varphi(z)-z\overline{\varphi'(z)}-\overline{\psi(z)}=2G(u+iv)-2G\alpha'\int\Omega_0(z)dz \tag{۳-۲۸}$$

۳-۶ معادلات پایه در صفحه‌ی نگاشت

در این بخش معادلات پایه برای دما و تجزیه و تحلیل بخش ترموالاستیک با توجه به تابع نگاشت $z=\omega(\zeta)$ در صفحه‌ی نگاشت بررسی می‌شود.

۳-۶-۱ توزیع دما

تابع پتانسیل مربوط به درجه‌ی حرارت مختلط به صورت زیر است:

$$\Omega_0(z)=\Omega_0\left[\omega(\zeta)\right]\equiv\Omega(\zeta) \quad (۳-۲۹)$$

دمای $T(x,y)$ و مؤلفه‌های شار حرارتی q_y و q_x در جهات x و y نیز به صورت زیر نوشته می-شوند:

$$T(x,y)=1/2\left[\Omega(\zeta)+\overline{\Omega(\zeta)}\right] \quad (۳-۳۰)$$

$$q_x-iq_y=-k\frac{\Omega'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \quad (۳-۳۱)$$

مؤلفه‌های شار حرارتی در مختصات قطبی با استفاده از تابع نگاشت به صورت زیر به دست می‌آید:

$$q_r+iq_\theta=\frac{\overline{\zeta\omega'(\zeta)}}{\left|\zeta\omega'(\zeta)\right|}(q_x+iq_y) \quad (۳-۳۲)$$

شار حرارتی خالص در امتداد یک خط بین دو نقطه را می‌توان با استفاده از رابطه‌ی زیر محاسبه نمود[۴۳].

$$\Omega(\zeta)-\overline{\Omega(\zeta)}=-2\frac{i}{k}\int q_n(s)ds+const \quad (۳-۳۳)$$

با در نظر گرفتن نقطه‌ی مرزی $\zeta=\sigma$، شرایط مرزی برای دما و شار حرارتی به شرح زیر است:

برای شرط مرزی دمایی:

$$\Omega(\sigma)+\overline{\Omega(\sigma)}=2T(x,y)\equiv 2T(\sigma,\overline{\sigma}) \qquad (۳۴-۳)$$

برای شرط مرزی شار حرارتی:

$$\Omega(\sigma)-\overline{\Omega(\sigma)}=-\frac{2i}{k}\int q_n(s)ds+const \qquad (۳۵-۳)$$

زمانی که طرف راست این روابط صفر است، آن‌ها را می‌توان به صورت زیر ترکیب نمود:

$$\Omega(\sigma)-\Gamma\overline{\Omega(\sigma)}=const \qquad (۳۶-۳)$$

که $\Gamma=1$ برای شرط مرزی عایق و $\Gamma=-1$ برای شرط مرزی هم‌دما است(Γ عدد ثابت).

۳-۶-۲ تنش حرارتی

با معرفی تابع نگاشت، مؤلفه‌های تابع تنش مختلط به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$\begin{aligned}\varphi(z)&=\varphi\left[\omega(\zeta)\right]\equiv\phi(\zeta)\\ \chi'(z)&=\chi'\left[\omega(\zeta)\right]\equiv\psi(\zeta)\end{aligned} \qquad (۳۷-۳)$$

مؤلفه‌های تنش در معادله‌ی (۳-۲۲) و جابه‌جایی در معادله‌ی (۳-۲۳) نیز به صورت زیر به دست می-

آیند.

$$\begin{aligned}\sigma_x+\sigma_y&=4\,\mathrm{Re}\left[\frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\right]\\ \sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}&=2\left[\frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega'(\zeta)}\left\{\frac{\phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\right\}'+\frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\right]\\ u+iv&=1/2G\left[\kappa\phi(\zeta)-\frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega(\zeta)}}\phi'(\zeta)-\overline{\psi(\zeta)}\right]+\alpha'\int\Omega(\zeta)\omega'(\zeta)d\zeta\end{aligned} \qquad (۳۸-۳)$$

و مؤلفه‌های تنش و جابه‌جایی در مختصات قطبی با استفاده از تابع نگاشت به صورت زیر است.

$$\sigma_r + \sigma_\theta = \sigma_x + \sigma_y$$

$$\sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} = \frac{\zeta^2 \omega'(\zeta)}{|\zeta|^2 \overline{\omega'(\zeta)}} (\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}) \qquad (۳-۳۹)$$

$$u_r + iv_\theta = \frac{\overline{\zeta \omega'(\zeta)}}{|\zeta \omega'(\zeta)|} (u + iv)$$

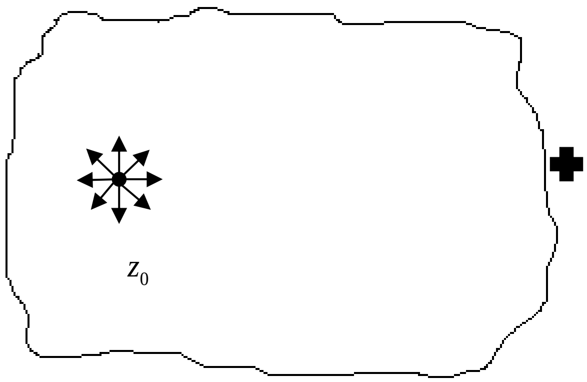
و شرط مرزی تنش و جابه‌جایی را به صورت زیر داریم[۱۱]:

($\sigma = \zeta$ روی مرز)

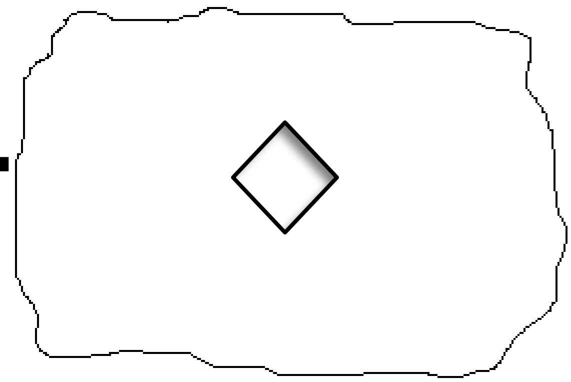
$$\phi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}} \overline{\phi'(\sigma)} = -\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}} \sigma \bar{A}$$

$$\kappa \phi(\sigma) - \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}} \overline{\phi'(\sigma)} - \overline{\psi(\sigma)} = -2G\alpha' \int \Omega(\sigma) \omega'(\sigma) d\sigma \qquad (۳-۴۰)$$

۳-۷ تابع دمایی مختلط



شکل (۳-۵): ورق بی‌نهایت با منبع حرارتی



شکل (۳-۶): ورق بی‌نهایت دارای گشودگی در مرکز

برای محاسبه‌ی تابع دمایی مختلط ابتدا باید تابع دمایی برای صفحه‌ی بی‌نهایت حاوی منبع حرارتی بدون گشودگی را داشته باشیم (شکل(۳-۵)) که به صورت زیر است[۲۰].

$$\Omega_0(z) = -\frac{M}{2\pi k}\log(z - z_0) \tag{۳-۴۱}$$

که در آن M شدت منبع حرارتی و k ضریب هدایت گرمایی مادّه است.

با اعمال تابع نگاشت:

$$\Omega_0(z) = \Omega_0\left[\omega(\zeta)\right] \equiv \Omega(\zeta) \tag{۳-۴۲}$$

تابع دمایی مختلط از دو بخش مجزا به صورت زیر به دست می‌آید:

تابع دمایی مختلط از دو بخش مجزا به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\Omega(\zeta)=\Omega_1(\zeta)+\Omega_2(\zeta) \tag{۳-۴۳}$$

که $\Omega_1(\zeta)$همان تابع دمایی در صفحه‌ی بدون گشودگی است.

$$\Omega_1(\zeta)=-\frac{M}{2\pi k}\{\log(\zeta-\zeta_a)\} \tag{۳-۴۴}$$

که در آن ζ_a، مختصات منبع حرارتی در صفحه‌ی نگاشت است.

با جایگذاری (۳-۴۴) در (۳-۳۶):

$$-\frac{M}{2\pi k}\{\log(\sigma-\zeta_a)\}+\Omega_2(\sigma)+\frac{\Gamma M}{2\pi k}\left\{\log(\frac{1}{\sigma}-\overline{\zeta_a})+\overline{\Omega_2(\sigma)}\right\}=c \tag{۳-۴۵}$$

با ضرب طرفین معادله‌ی (۳-۴۵) در $\frac{d\sigma}{2\pi i(\sigma-\zeta)}$ و گرفتن انتگرال کوشی:

$$\frac{1}{2\pi i}(\frac{-M}{2\pi k})\int\log(\sigma-\zeta_a)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}+\frac{1}{2\pi i}\int\Omega_2(\sigma)\frac{d\sigma}{(\sigma-\zeta)}+\frac{1}{2\pi i}\frac{\Gamma M}{2\pi k}\int\{\log(\frac{1}{\sigma}-\overline{\zeta_a})\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}$$

$$+\frac{\Gamma M}{2\pi k}\frac{1}{2\pi i}\int\overline{\Omega_2}(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}=\int c\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} \tag{۳-۴۶}$$

$$\Omega_2(\zeta)+\frac{\Gamma M}{2\pi k}\{-\log\frac{1-\zeta\overline{\zeta_a}}{\zeta}+\log(-\overline{\zeta_a})\}=c$$

$$\Omega_2(\zeta)=\frac{-\Gamma M}{2\pi k}\{\log(-\overline{\zeta_a}\frac{\zeta}{1-\zeta\overline{\zeta_a}})\}+c=$$

$$\frac{-\Gamma M}{2\pi k}\{\log(\frac{1-\zeta\overline{\zeta_a}}{\overline{\zeta_a}\zeta})\}+c=\frac{-\Gamma M}{2\pi k}\{\log(\frac{\zeta-\zeta'_a}{\zeta})\}+c \tag{۳-۴۷}$$

$$\Omega(\zeta)=\frac{-M}{2\pi k}\{\log(\zeta-\zeta_a)+\Gamma\log(\frac{\zeta-\zeta'_a}{\zeta})\}+c \tag{۳-۴۸}$$

که $\zeta'_a=\frac{1}{\overline{\zeta_a}}$ و c ثابت است که می‌توان با داشتن دما در یک نقطه‌ی استاندارد آن را تعیین کرد.

۳-۸ محاسبه‌ی توابع تنش تحلیلی مختلط $\psi(z)$ و $\phi(z)$:

در صفحه‌ی بی‌نهایت دارای منبع حرارتی بدون گشودگی (شکل (۳-۵))، جابه‌جایی در اثر انبساط حرارتی به وجود می‌آید که می‌توان به صورت زیر نشان داد[۲۰].

$$u_0 + iv_0 = \alpha' \int \Omega_0(z)dz = -\frac{\alpha' M}{2\pi k}\int \log(z-z_0)dz =$$
$$-\frac{\alpha' M}{2\pi k}(z-z_0)\{\log(z-z_0)-1\} \tag{۳-۴۹}$$

با جایگذاری معادله‌ی (۳-۴۹) در معادلات شرایط مرزی نیرو و جابه‌جایی زیر[۱۱]:

$$\phi(z) + \overline{\phi'(z)} + \overline{\psi}(z) = i\int (p_x + ip_y)ds \tag{۳-۵۰}$$
$$\kappa\phi(z) - z\overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)} + 2G\alpha' \int \Omega_0(z)dz = 2G(u+iv) \tag{۳-۵۱}$$

که برای حالت تنش صفحه‌ای $\alpha' = \alpha(1+\nu)$، $\kappa = 3-4\nu$ و $R = \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)}$ و برای حالت کرنش صفحه‌ای

$\alpha' = \alpha$، $\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$ و $R = 1+\nu$ است.

با جایگذاری (۳-۴۹) در (۳-۵۱) و در نظر گرفتن اینکه نیروهای خارجی p_x و p_y حول منبع صفر است توابع تحلیلی تنش مختلط برای ورق بی‌نهایت با منبع حرارتی به صورت زیر است[۱۱]:

$$\phi_h(z) = \frac{\alpha MGR}{4\pi k}(z-z_0)\{\log(z-z_0)-1\} \tag{۳-۵۲}$$

$$\psi_h(z) = -\frac{\alpha MGR}{4\pi k}\overline{z}_0 \log(z-z_0) \tag{۳-۵۳}$$

برای صفحه‌ی بی‌نهایت دارای گشودگی، جابه‌جایی که از طریق دما $\Omega(\zeta)$ اتفاق می‌افتد، یعنی عبارت دوم سمت چپ معادله‌ی (۳-۳۸) شامل تابع چندمقداره است. بنابراین بعد از یک دور حول گشودگی یک نابه‌جایی ظاهر می‌شود در نتیجه برای ارضا شدن تک مقداره بودن جابه‌جایی، تابع دیگری معرفی می‌شود که این نابه‌جایی‌ها را حذف کند. بدین ترتیب توابع تنش تحلیلی مختلط در صفحه‌ی نگاشت به صورت زیر تعریف می‌شوند[۲۰]:

$$\phi(\zeta) = \phi_1(\zeta) + \phi_2(\zeta)$$
$$\psi(\zeta) = \psi_1(\zeta) + \psi_2(\zeta) \tag{۵۴-۳}$$

$$\phi_1(\zeta) = \frac{\alpha MGR}{4\pi k}[\{\omega(\zeta) - \omega(\zeta_a)\}\{\log(\zeta - \zeta_a) - 1\}] + A\log\zeta \tag{۵۵-۳}$$

$$\psi_1(\zeta) = -\frac{\alpha MGR}{4\pi k}[\overline{\omega(\zeta_a)}\log(\zeta - \zeta_a)] + B\log\zeta \tag{۵۶-۳}$$

با جایگذاری (۳-۵۶) در شرط مرزی جابه‌جایی (۳-۵۱) و با توجه به اینکه مقدار تنش بعد از یک دور حول گشودگی نباید تغییر کند، رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود[۲۰]:

$$B = \overline{A} \tag{۵۷-۳}$$

(A و B اعداد مختلط ثابت)

روابط (۳-۵۵) و (۳-۵۶) را در شرط مرزی جابه‌جایی جایگذاری می‌کنیم و با در نظر گرفتن این که بعد از یک دور حول گشودگی نابه‌جایی باید برطرف شود:

$$(u+iv)_2 - (u+iv)_1 = 2G\alpha'\int_1^2 \Omega(\zeta)\omega'(\zeta)d\zeta$$
$$(u+iv)_2 - (u+iv)_1 = \kappa\phi(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}}\overline{\phi'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)} \tag{۵۸-۳}$$

که ζ_1 نقطه‌ی $(r,0)$ و ζ_2 نقطه‌ی $(r,2\pi)$ روی مرز است.

رابطه‌ی اول:

$$(u+iv)_2-(u+iv)_1=\frac{G\alpha M}{2\pi k}\int\{\log(\zeta-\zeta_a)+\Gamma\log(\zeta-\zeta'_a)$$

$$-\Gamma\log\zeta\}\{-\frac{a}{\zeta^2}+b+nwd\zeta^{n-1}-\frac{nwe}{\zeta^{n+1}}\}d\zeta=$$

$$\frac{G\alpha' M}{2\pi k}[\frac{a}{\zeta}\log(\zeta-\zeta_a)+\frac{a}{\zeta_a}\log\zeta-\frac{a}{\zeta_a}\log(\zeta-\zeta_a)$$

$$+b(\zeta-\zeta_a)\log(\zeta-\zeta_a)-b(\zeta-\zeta_a)+wd\zeta^n\log(\zeta-\zeta_a)$$

$$+\frac{we}{\zeta^n}\log(\zeta-\zeta_a)+\frac{a\Gamma}{\zeta}\log(\zeta-\zeta'_a)+\frac{a\Gamma}{\zeta_a}\log\zeta-\frac{a\Gamma}{\zeta_a}\log(\zeta-\zeta'_a)$$

$$+b\Gamma(\zeta-\zeta'_a)\log(\zeta-\zeta'_a)-b\Gamma(\zeta-\zeta'_a)+wd\Gamma\zeta^n\log(\zeta-\zeta'_a)$$

$$+\frac{we\Gamma}{\zeta^n}\log(\zeta-\zeta'_a)-\frac{a\Gamma}{\zeta}\log\zeta-\Gamma b\zeta\log\zeta+\Gamma b\zeta-wd\Gamma\zeta^n\log\zeta]_{\zeta_1}^{\zeta_2} \quad (۵۹-۳)$$

رابطه‌ی دوم با در نظر گرفتن فقط جمله‌های لگاریتمی (چون جمله‌ی لگاریتمی را برای از بین بردن نابه‌جایی اضافه کردیم و باید این جمله‌ها را در دو طرف معادله برابر باشند.)

$$\kappa\frac{\alpha MGR}{4\pi k}[\frac{a}{\zeta}\log(\zeta-\zeta_a)+b\zeta\log(\zeta-\zeta_a)$$

$$+wd\zeta^n\log(\zeta-\zeta_a)+\frac{we}{\zeta^n}\log(\zeta-\zeta_a)-\frac{a}{\zeta_a}\log(\zeta-\zeta_a)$$

$$-b\zeta_a\log(\zeta-\zeta_a)-wd\zeta_a^n\log(\zeta-\zeta_a)+\kappa A\log\zeta$$

$$-\frac{\alpha MGR}{4\pi k}[\frac{a}{\zeta}\log(\overline{\zeta}-\overline{\zeta'_a})+b\zeta\log(\overline{\zeta}-\overline{\zeta_a})+wd\zeta^n\log(\overline{\zeta}-\overline{\zeta_a})$$

$$-\frac{we}{\zeta_a^n}\log(\zeta-\zeta_a)]+\frac{we}{\zeta^n}\log(\overline{\zeta}-\overline{\zeta_a})]+A\log\zeta\ \Big|_{\zeta_1}^{\zeta_2} \quad (۶۰-۳)$$

با در نظر گرفتن رابطه‌ی (۳-۶۰) و مساوی قرار دادن دو رابطه‌ی (۳-۵۸) و (۳-۵۹):

$$\frac{G\alpha M}{2\pi k} = \frac{\alpha MGR}{4\pi k}(\kappa + 1)$$

$$\log(\frac{\zeta_2}{\zeta_1}) = 2\pi i \qquad (۶۱-۳)$$

$$A = \frac{\alpha MGR}{4\pi k}[\frac{a}{\zeta_a} + wd\zeta_a^n + \frac{we}{\zeta_a^n} - b\Gamma\zeta_a'] \qquad (۶۲-۳)$$

با جایگذاری روابط (۳-۵۴)، (۳-۵۵)، (۳-۵۶) و (۳-۶۲) در معادله‌ی اول شرط مرزی (۳-۵۲) و با توجه به این که نیروهای خارجی صفر است، روابط زیر را بدست می‌آوریم:

$$\phi(\sigma) = \frac{\alpha MGR}{4\pi k}[\{\omega(\sigma) - \omega(\zeta_a)\}\{\log(\sigma - \zeta_a) - 1\}] + A\log\sigma + \phi_2(\sigma) \qquad (۶۳-۳)$$

$$\phi'(\sigma) = \frac{\alpha MGR}{4\pi k}[\omega'(\sigma)\log(\sigma - \zeta_a) + \frac{\omega(\sigma) - \omega(\zeta_a)}{\sigma - \zeta_a} - \omega'(\sigma)]$$
$$+\frac{A}{\sigma} + \phi_2'(\sigma) \qquad (۶۴-۳)$$

$$\overline{\phi'(\sigma)} = \frac{\alpha MGR}{4\pi k}[\overline{\omega'(\sigma)}\log(\bar{\sigma} - \bar{\zeta}_a) + \frac{\overline{\omega(\sigma) - \omega(\zeta_a)}}{\overline{\sigma - \zeta_a}} - \overline{\omega'(\sigma)}] + \frac{\bar{A}}{\bar{\sigma}} \qquad (۶۵-۳)$$

$$\psi(\sigma) = -\frac{\alpha MGR}{4\pi k}[\overline{\omega(\zeta_a)}\log(\sigma - \zeta_a)] + B\log\sigma \qquad (۶۶-۳)$$

$$\overline{\psi(\sigma)} = -\frac{\alpha MGR}{4\pi k}[\omega(\zeta_a)\log(\bar{\sigma} - \bar{\zeta}_a)] + \bar{B}\log\bar{\sigma} \qquad (۶۷-۳)$$

$$\phi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\overline{\phi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} = 0 \qquad (۶۸-۳)$$

با جایگذاری روابط (۳-۶۳) تا (۳-۶۷) در (۳-۶۸) داریم:

$$\frac{\alpha MGR}{4\pi k}[\{\omega(\sigma)-\omega(\zeta_a)\}\{\log(\sigma-\zeta_a)-1\}]+A\log\sigma+\phi_2(\sigma)$$
$$+\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}[\frac{\alpha MGR}{4\pi k}\overline{\omega'(\sigma)}\log(\frac{1}{\sigma}-\overline{\zeta_a})+\frac{\alpha MGR}{4\pi k}\frac{\overline{\omega(\sigma)-\omega(\zeta_a)}}{\frac{1}{\sigma}-\overline{\zeta_a}}$$
$$-\frac{\alpha MGR}{4\pi k}\overline{\omega'(\sigma)}+A\sigma+\overline{\phi_2'}(\sigma)]-\frac{\alpha MGR}{4\pi k}[\omega(\zeta_a)\log(\frac{1}{\sigma}-\overline{\zeta_a})]$$
$$+\overline{B}\log\frac{1}{\sigma}+\overline{\psi_2(\sigma)}=0 \qquad (۳-۶۹)$$

با ضرب دو طرف معادله‌ی (۳-۶۹) در $\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}$ و گرفتن انتگرال کوشی، تابع تحلیلی مختلط تنش $\phi(\zeta)$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم (پیوست الف):

$$\phi(\zeta)=\phi_1(\zeta)+\phi_2(\zeta)=$$
$$A\log\zeta+[\{\omega(\zeta)-\omega(\zeta_a)\}\{\log(\zeta-\zeta_a)\}-\{\omega(\zeta)-\omega(\zeta_a)\}]$$
$$+\frac{\alpha MGR}{4\pi k}\left[-\frac{a}{\zeta}\log(-\zeta_a)+\frac{we}{(n-1)!}\frac{d^n}{d\sigma^n}(\frac{\log(\sigma-\zeta_a)}{\sigma-\zeta})\Big|_{\sigma=0}\right]$$
$$+2\frac{\alpha MGR}{4\pi k}[\frac{a}{\zeta}+\frac{we}{\zeta^n}]\frac{\alpha MGR}{4\pi k}\left[-\omega(\zeta)\log(\frac{1}{\zeta}-\overline{\zeta_a})+b\zeta\log(-\overline{\zeta_a})\right.$$
$$\left.+\frac{wd}{n!}\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{\log(z-\overline{\zeta_a})}{\zeta(z-\frac{1}{\zeta})}\right)\Bigg|_{z=0}\right]+\frac{\alpha MGR}{4\pi k}\left[\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^n}{d\sigma^n}\left(\frac{(a\sigma^{n-1}+b\sigma^{n+1}+wd\sigma^{2n}+we)}{(\sigma-\zeta)(1-\sigma\overline{\zeta_a})}\right.\right.$$
$$\left.\left.\frac{(\overline{a}\sigma^{n+1}+\overline{b}\sigma^{n-1}+\overline{wd}+\overline{we}\sigma^{2n}-\sigma^n\overline{\omega(\zeta_a)})}{(-\overline{a}\sigma^{n+1}+\overline{b}\sigma^{n-1}+n\overline{wd}-n\overline{we}\sigma^{2n})}\right)\Bigg|_{\sigma=0}\right]$$
$$\frac{\omega(\zeta_a')}{\overline{\omega'(\zeta_a')}}\frac{\overline{\omega(\zeta_a')}-\overline{\omega(\zeta_a)}}{\zeta_a'-\zeta}-\frac{\alpha MGR}{4\pi k}\omega(\zeta_a)[-\log(\frac{1}{\zeta}-\overline{\zeta_a})+\log(-\overline{\zeta_a})]$$

(۷۰-۳)

برای به دست آوردن $\psi(\zeta)$ به همین ترتیب از مزدوج رابطه‌ی (۳-۶۹) استفاده می‌کنیم (پیوست الف):

$$
\begin{aligned}
&\psi(\zeta)=\psi_1(\zeta)+\psi_2(\zeta)=-\frac{\alpha MGR}{4\pi k}[\overline{\omega(\zeta_a)}\log(\zeta-\zeta_a)] \\
&+B\log\zeta-\frac{\alpha MGR}{4\pi k}\{a\zeta+\frac{b}{\zeta}+\frac{wd}{\zeta^n}+we\zeta^n-\overline{\omega(\zeta_a)}\}\{\log(\frac{1}{\zeta}-\overline{\zeta_a})\} \\
&+\frac{\alpha MGR}{4\pi k}a\zeta\log(-\overline{\zeta_a})+\frac{\alpha MGR}{4\pi k}we(\frac{\log(z-\overline{\zeta_a})}{\zeta(z-\frac{1}{\zeta})})\Bigg|_{z=0}+2\frac{\alpha MGR}{4\pi k}(\frac{b}{\zeta}+\frac{wd}{\zeta^n}) \\
&+\frac{\alpha MGR}{4\pi k}[\frac{-b}{\zeta}\log(-\zeta_a)+\frac{wd}{(n-1)!}\frac{d^n}{d\sigma^n}(\frac{\log(\sigma-\zeta_a)}{\sigma-\zeta}\Bigg|_{\sigma=0}]+ \\
&\frac{\alpha MGR}{4\pi k}\frac{1}{(n-2)!}\frac{d^{n-2}}{d\sigma^{n-2}}(\frac{a\sigma^{n+1}+b\sigma^{n-1}+wd+we\sigma^{2n}}{-a\sigma^{n-1}+b\sigma^{n+1}+nwd\sigma^{2n}-nwe}\times \\
&\frac{a\sigma^{n-1}+b\sigma^{n+1}+wd\sigma^{2n}+we-\sigma^n\omega(\zeta_a)}{(\sigma-\zeta_a)(\sigma-\zeta)})\Big|_{\sigma=0}
\end{aligned}
$$

(۷۱-۳)

با جای‌گذاری (۲-۷۰) و (۲-۷۱) در معادلات (۳-۳۸) و (۳-۳۹) مؤلفه‌های تنش در مختصات قطبی به دست می‌آیند:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_\theta=\mathrm{Re}\left[\frac{\zeta^2}{|\zeta|^2}\frac{\omega'(\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}}\left[\frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega'(\zeta)}\left\{\frac{\varphi''(\zeta)\omega'(\zeta)-\varphi'(\zeta)\omega''(\zeta)}{\omega'(\zeta)^2}\right\}+\frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\right]\right] \\
&+2\,\mathrm{Re}[\frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}]
\end{aligned}
$$

(۷۲-۳)

$$\sigma_r = 4\,\mathrm{Re}[\frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}] - \sigma_\theta \tag{۷۳-۳}$$

$$\tau_{r\theta} = \mathrm{Im}\left[\frac{\zeta^2}{|\zeta|^2}\frac{\omega'(\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}}\left[\frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega'(\zeta)}\left\{\frac{\varphi''(\zeta)\omega'(\zeta) - \varphi'(\zeta)\omega''(\zeta)}{\omega'(\zeta)^2} + \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\right\}\right]\right] \tag{۷۴-۳}$$

۳-۹ چرخش گشودگی

برای مدل کردن ماتریس چرخش گشودگی از ماتریس انتقال زیر استفاده می‌شود:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\beta & \cos\beta \\ -\cos\beta & \sin\beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{۷۵-۳}$$

که در آن β زاویه‌ی چرخش گشودگی است. با جایگذاری رابطه‌ی (۳-۱) در (۳-۷۵) و نتیجه‌ی آن در (۳-۵) داریم:

$$\omega(\zeta) = \frac{\lambda}{2}[a'\zeta + \frac{b'}{\zeta} + c'w\zeta^n + \frac{d'w}{\zeta^n}] \tag{۷۶-۳}$$

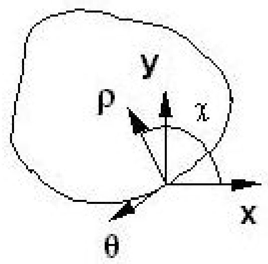
$$\begin{aligned} a' &= \cos\beta\,(1+c) + \sin\beta\,(-ic - i) \\ b' &= \cos\beta\,(1-c) + \sin\beta\,(ic - i) \\ c' &= 0 \\ d' &= 2\cos\beta - 2i\sin\beta \end{aligned} \tag{۷۷-۳}$$

برای این که از $\tau_{r\theta}$ ، σ_θ و σ_r مقادیر τ_{xy} ، σ_y و σ_x و برعکس را به دست آوریم از روابط انتقال زیر می‌توان استفاده کرد:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}m^2 & n^2 & -2mn\\ n^2 & m^2 & 2mn\\ mn & -mn & m^2-n^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_\rho\\ \sigma_\theta\\ \tau_{\rho\theta}\end{Bmatrix} \qquad (۷۸-۳)$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_\rho\\ \sigma_\theta\\ \tau_{\rho\theta}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}m^2 & n^2 & 2mn\\ n^2 & m^2 & -2mn\\ -mn & mn & m^2-n^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix} \qquad (۷۹-۳)$$

$$m=\cos\chi$$
$$n=\sin\chi$$



شکل (۳-۷): انتقال بین مختصات کارتزین (x,y) و منحنی‌الخط (ρ,θ) و بالعکس

مطابق شکل (۳-۷)، χ زاویه‌ی بین محور x ها و محور منحنی‌الخط ρ می‌باشد(جهت ρ جهت عمود بر سطح گشودگی است).

با توجّه به مطالب بیان شده الگوریتم حل تحلیلی به این صورت انجام می‌گیرد:

۱. با توجه به پارامترهای n ، c و w هندسه‌ی گشودگی مشخص می‌شود.

۲. با انتخاب ρ و θ یک نقطه روی دایره‌ی مبنا مشخص شده و آنگاه پارامترهای موهومی ζ به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\xi=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$$

۳. با توجه به تابع تبدیل مقادیر x و y مشخص می‌شوند.

۴. مقادیر توابع تنش محاسبه می‌شوند.

۵. مقادیر $\sigma_r, \sigma_\vartheta, \tau_{r\vartheta}$ از روابط مربوطه به دست می‌آیند.

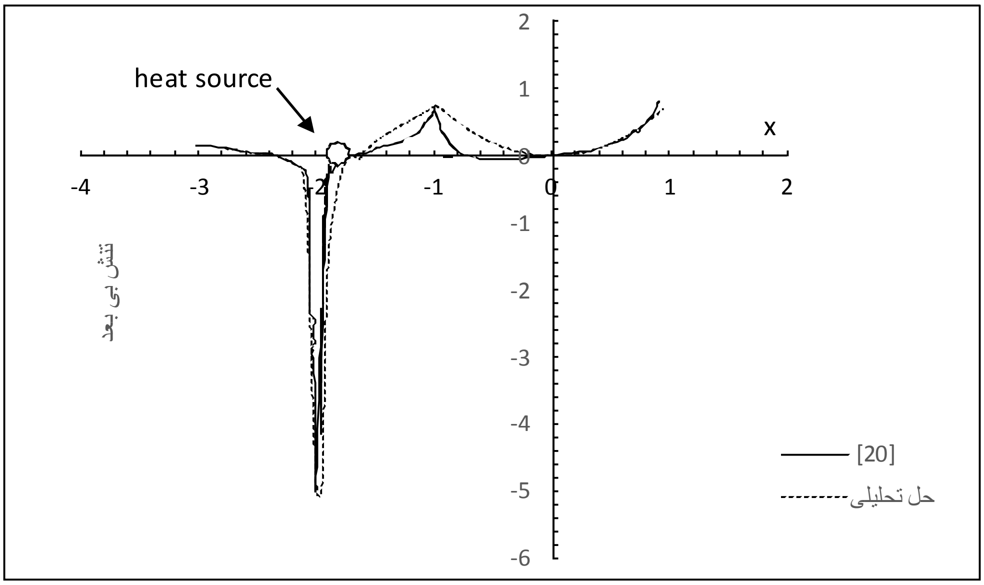
۶. مقادیر σ_x و σ_y در نقاط خارج از گشودگی محاسبه می‌شوند.

به کمک روابط ارائه شده می‌توان پارامترهای مختلف و مؤثر بر توزیع تنش را وارد مسأله کرد و اثرات آن‌ها را بررسی نمود. این پارامترها عبارت‌اند از: نوع گشودگی، شعاع انحنای گشودگی، جهت‌گیری(زاویه‌ی چرخش) گشودگی، که بر توزیع تنش مؤثر بوده و انتخاب صحیح آن‌ها در دست‌یابی به طرح موفق کاملا مفید است.

تأثیر این پارامترها بر توزیع تنش در فصل بعد بررسی می‌شود.

۳-۱۰ بررسی درستی نتایج

برای تأیید درستی نتایج، مقایسه‌ای بین حلّ تحلیلی حاضر و نتایج ارائه شده در مرجع[۲۰] که توسط یوشیکاوا و هاسبه انجام شده است؛ صورت گرفته است. آن‌ها توزیع تنش در یک صفحه‌ی نامحدود همسانگرد با منبع حرارتی نقطه‌ای در نزدیکی گشودگی بیضوی را بررسی کردند. تابع نگاشت مورد استفاده در این تحقیق متفاوت از مرجع [۲۰] می‌باشد. مقایسه‌ی حلّ تحلیلی حاضر و [۲۰] در شکل زیر آمده است:



شکل (۳-۸) مقایسه‌ی روش تحلیلی حاضر و [۲۰] برای گشودگی بیضوی

در فصل بعد هر یک از پارامترهای مؤثر بر تنش، از قبیل زاویه‌ی چرخش گشودگی، شعاع انحنای گشودگی و کشیدگی گشودگی بررسی خواهد شد. این بررسی‌ها به طور مفصل بر روی مثلث و مربع خواهد بود. برای پنج‌ضلعی و شش‌ضلعی نیز نتایج آمده است.

فصل ۴

بررسی پارامترهای مؤثر بر توزیع تنش

۴-۱ مقدمه

در این فصل تأثیر هر پارامتر بر روی توزیع تنش اطراف گشودگی به تنهایی مورد بررسی قرار می-گیرد. لذا در بررسی هر پارامتر، سایر پارامترها ثابت در نظر گرفته می‌شوند. در بررسی نتایج، دو پارامتر زاویه‌ی چرخش گشودگی و کشیدگی گشودگی، پارامترهای اصلی است. در این فصل سعی شده است که تأثیر این پارامترها به طور مجزا بررسی شود. سایر پارامترها مانند گشودگی و انحنای گوشه‌ی گشودگی در حین بررسی پارامترهای اصلی، مطالعه می‌شود.

۴-۲ ویژگی‌های مکانیکی ورق

همان‌طور که روابط تحلیلی [۴۴] نشان می‌دهد؛ تمرکز تنش در صفحات همسانگرد دارای گشودگی مستقل از جنس و خواص مکانیکی مادّه می‌باشد. بنابراین نتایج این پژوهش را می‌توان برای صفحات همسانگرد از سایر جنس‌ها نیز استفاده کرد. صفحه‌ی در نظر گرفته شده در این پژوهش، صفحه‌ای همسانگرد با خواصی مطابق جدول (۴-۱) می‌باشد. صفحه در مرکز دارای یک گشودگی بوده و مرز این گشودگی عایق حرارتی و عاری از هرگونه تنشی است؛ هم‌چنین تحت بارگذاری حرارتی به صورت منبع حرارتی نقطه‌ای در نزدیکی گشودگی قرار می‌گیرد.

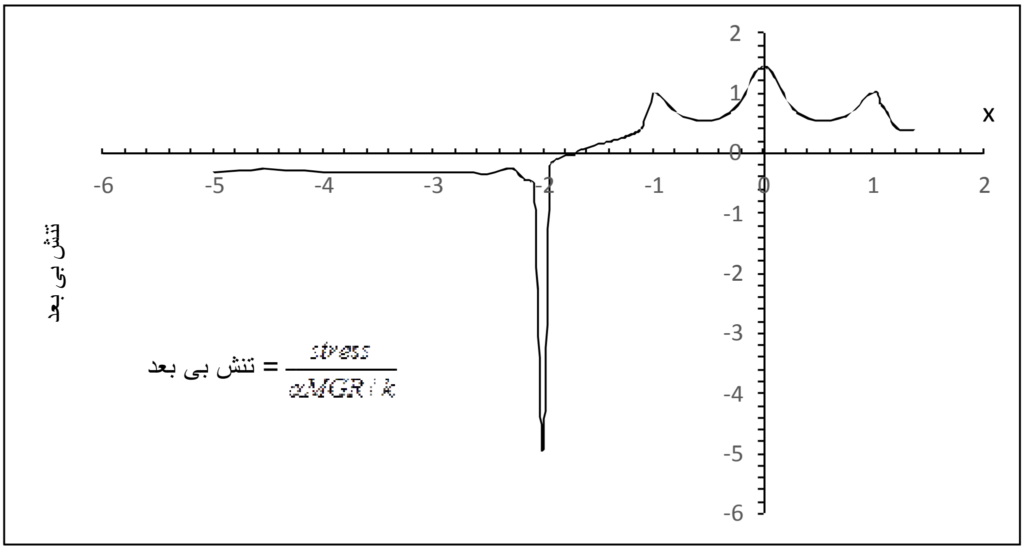
جدول (۴-۱): ویژگی‌های مکانیکی و حرارتی ورق فلزی

ماده	$\alpha_0(\frac{\mu m}{m}/°C)$	k(w/m°C)	ν	E(GPa)
فولاد	11.1	50.2	0.3	210

۴-۳ بررسی نتایج

۴-۳-۱ نمودار توزیع تنش

در این بخش به عنوان نمونه، نمودار تنش حول گشودگی مربعی و منبع حرارتی را با در نظر گرفتن خواص ورق فولادی مطابق جدول (۴-۱)، W =۰/۰۵ ، c=۱، β =۰ و مختصات (۲-,۰) برای منبع حرارتی را به صورت زیر داریم:



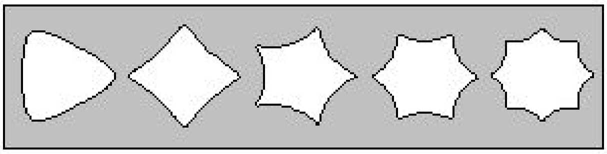
شکل(۴-۱): نمودار تنش بی‌بعد در گشودگی مربعی

در نمودار شکل (۴-۱)، تنش در بازه‌ی (۱, ۱-) که گشودگی در این قسمت واقع است، تنش محیطی σ_θ و در بقیه‌ی نقاط، تنش σ_y است.

همان‌طور که در شکل (۴-۱) مشاهده می‌شود بیش‌ترین تنش در محلّ قرار گرفتن منبع حرارتی است و برای به دست آوردن تنش مطلوب، بیش‌ترین مقدار تنش در همین نقطه برای حالت‌های مختلف بررسی می‌شود.

۴-۳-۲ تأثیر زاویه‌ی چرخش گشودگی

یکی از پارامترهایی که تأثیر عمده‌ای در توزیع تنش اطراف گشودگی‌ها ایجاد می‌کند؛ زاویه‌ی چرخش گشودگی است. منظور از زاویه‌ی چرخش گشودگی، زاویه‌ای است که محور اصلی گشودگی نسبت به محور افق (محور x) می‌سازد (شکل (۲-۱)). این زاویه در شکل با β نشان داده شده است. برای بگشودگی‌های مختلف وضعیت بدون چرخش آن‌ها، یعنی حالتی که $\beta = 0$ می‌باشد؛ در شکل (۴-۲) دیده می‌شود.



شکل (۴-۲): وضعیت بدون چرخش بگشودگی‌های مختلف

صفحه‌ای را که ابعاد آن نسبت به ابعاد گشودگی، بزرگتر است در نظر بگیرید. مرکز این صفحه شامل یک گشودگی می‌باشد؛ که شکل این گشودگی و نحوه‌ی قرار گرفتن آن از متغیرهای مسأله به شمار می‌آیند. منظور از نحوه‌ی قرار گرفتن گشودگی، مقدار زاویه‌ی β می‌باشد. بنابراین صفحه‌ای همسانگرد که در مرکز دارای یک گشودگی بوده و تحت بارگذاری حرارتی به صورت منبع حرارتی نقطه‌ای در راستای محور افقی است و گشودگی نسبت به انتقال حرارت عایق شده است؛ مورد تحلیل قرار می‌گیرد. توزیع تنش در اطراف گشودگی برحسب نوع گشودگی و نحوه‌ی قرار گرفتن آن متفاوت خواهد بود. در این قسمت این توزیع تنش بررسی می‌شود. در تمام نتایج زوایا برحسب درجه هستند.

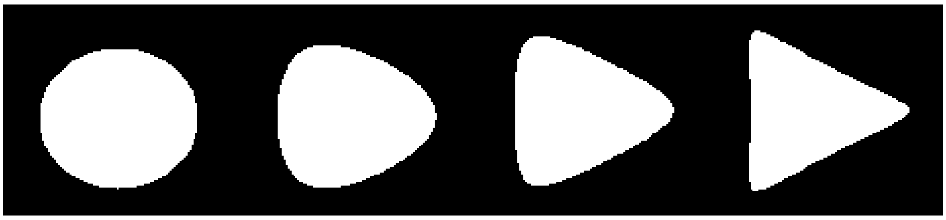
نتایج ارائه شده در این بخش برحسب نوع گشودگی مرتب شده است. برای هر گشودگی نیز، پارامتر چرخش گشودگی بطور کامل بررسی می‌شود.

از پارامترهای مهم دیگر که در بحث توزیع تنش مهم می‌باشد، انحنای گوشه‌های گشودگی است که با w نشان داده شده است. همان‌طور که قبلا اشاره شد، w پارامتری است که با تغییر آن می‌توان

انحنای گوشه‌های گشودگی را کنترل کرد. این امر تأثیر بسزایی بر توزیع تنش دارد. در این فصل در کنار هر پارامتر اصلی مورد بحث، تأثیر w نیز به عنوان یک پارامتر جانبی مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

۴-۳-۱ گشودگی مثلثی

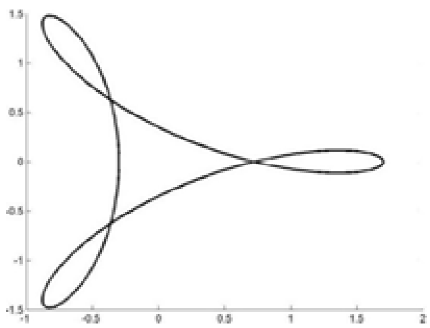
اگر در رابطه‌ای که در فصل قبل برای ایجاد گشودگی‌ها به آن اشاره شد (رابطه‌ی (۲-۱))؛ مقادیر n و c به ترتیب برابر ۲ و ۱ قرار داده شود؛ برای wهای مختلف در بازه‌ی $۰ < w < ۰/۵$ ، نقاط به دست آمده در فاصله‌ی $۰ \leq \theta \leq ۲\pi$ مثلث‌گونه‌هایی با انحناهای مختلف را ایجاد می‌کند (شکل (۴-۳)).



W=0 **W=0.1** **W=0.2** **W=0.3**

شکل (۴-۳): تأثیر انحنای گوشه‌ی w در شکل گشودگی مثلثی

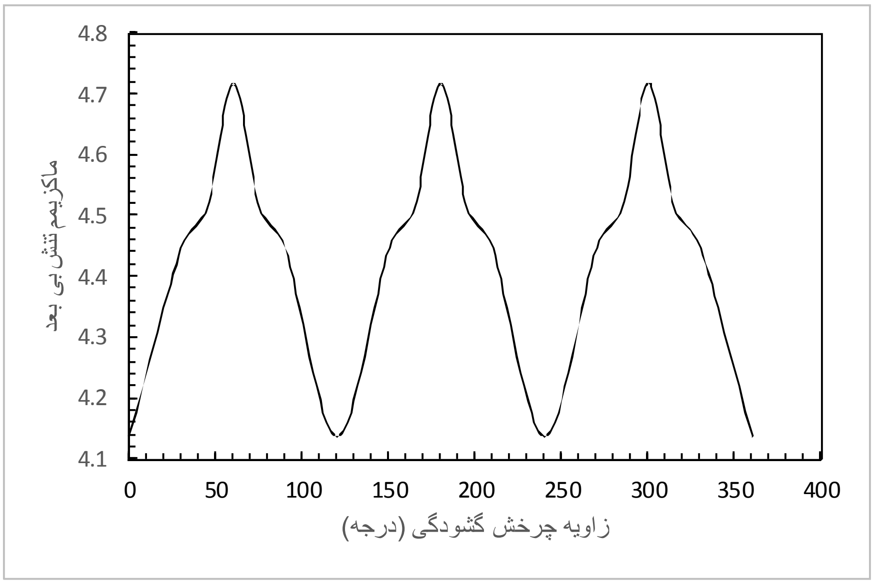
همانند شکل (۴-۴) اگر مقدار w خارج از محدوده‌ی فوق در نظر گرفته شود اضلاع مثلث در نقاطی یکدیگر را قطع خواهند کرد.



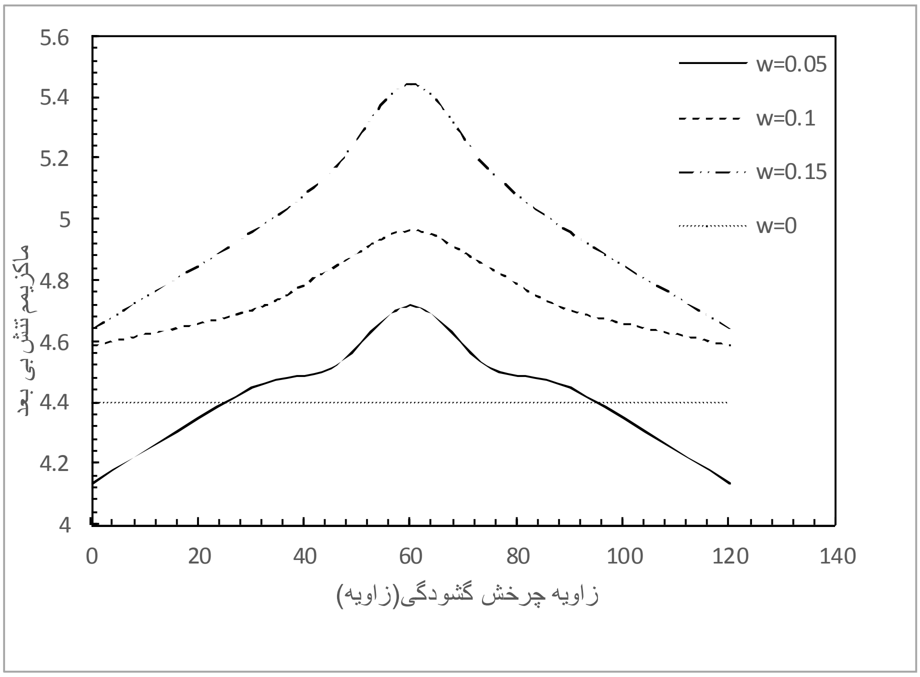
شکل (۴-۴): مثلث با w=۰/۷

ابتدا برای هر گشودگی بدون در نظر گرفتن تأثیر w، فقط به بررسی تأثیر زاویه‌ی چرخش گشودگی بر ماکزیمم تنش حرارتی پرداخته می‌شود. بدین منظور لازم است تا برای یک مقدار مشخص w، تأثیر زاویه‌ی چرخش گشودگی مورد مطالعه قرار گیرد.

نتایج شکل (۴-۵) در w =۱/۲۰ آورده شده است. این شکل گویای چند نکته‌ی مهم است: اول این‌که تابع شکل (۴-۵) یک تابع نوسانی با نوسان ۱۲۰ درجه است. بنابراین کافی است تا نتایج در زاویه‌ی چرخش بین صفر تا ۱۲۰ درجه ارائه شود. ثانیا این منحنی نشان می‌دهد که با تغییر زاویه‌ی چرخش، تنش تغییر می‌کند و در زوایای خاصی که برای بگشودگی‌های مختلف، متفاوت است؛ تنش کمترین و بیشترین مقدار را داراست. بنابراین برای گشودگی مثلثی و w =۱/۲۰ در زاویه‌ی چرخش خاصی (β)، تنش کمترین مقدار است (**تنش مطلوب**). این زاویه‌ی چرخش خاص برای گشودگی مثلثی صفر یا ۱۲۰ درجه می‌باشد که در شکل (۴-۶) مشخص شده‌اند. در طراحی باید با انتخاب زاویه‌ی چرخش مناسب سعی کرد تا به تنش مطلوب رسید. از طرفی اگر زاویه‌ی چرخش ۶۰ درجه انتخاب شود؛ آنگاه تنش بیشترین مقدار خواهد بود (**تنش نامطلوب**).



شکل (۴-۵): تأثیر زاویه‌ی چرخش β بر روی ماکزیمم تنش بی‌بعد برای گشودگی مثلثی و W=۱/۲۰



شکل (۴-۶): تأثیر زاویه‌ی چرخش گشودگی بر روی ماکزیمم تنش بی‌بعد برای گشودگی مثلثی در Wهای مختلف

نتیجه‌ای که از شکل‌های فوق برای استفاده در طراحی بکار برده می‌شود این است که، برای یک صفحه تحت منبع حرارتی و دارای گشودگی مثلثی، هیچ‌وقت نباید زاویه β را در محدوده‌ی ۶۰ درجه انتخاب کرد و بهتر آن است که این زاویه صفر یا ۱۲۰ درجه باشد. اگرچه این نتایج برای W=۱/۲۰ آورده شده ولی همان‌طور که در شکل (۴-۶) نشان داده شده است؛ برای سایر Wها نیز تنش مطلوب در همان زوایای صفر یا ۱۲۰ درجه اتفاق می‌افتد.

جدول (۴-۲): بازه‌ی زاویه‌ی چرخش که تنش در گشودگی مثلثی از تنش در گشودگی دایره‌ای کمتر است

محدوده‌ی β	W	محدوده‌ی β	W	محدوده‌ی β	W
۰<β<۲۵	۰/۰۵	۰<β<۲۳	۰/۰۴	۰<β<۱۹	۰/۰۳

با توجه به شکل (۴-۶) بسته به مقدار w، در محدوده‌ی خاصی از زاویه‌ی چرخش تنش مربوط به گشودگی مثلثی کمتر از تنش مربوط به گشودگی دایره‌ای است. این محدوده در جدول (۴-۲) مشخص شده است.

از تنش مطلوب و نامطلوب زیاد در این فصل استفاده می‌شود. لازم است تأکید شود که در بحث حاضر این دو تنش فقط با در نظر گرفتن زاویه‌ی چرخش تعریف شده‌اند. زوایایی که تحت آن‌ها تنش مطلوب و نامطلوب رخ می‌دهد، با تغییر w، تغییر نمی‌کند. ولی مقدار این تنش‌ها در wهای مختلف، متفاوت است.

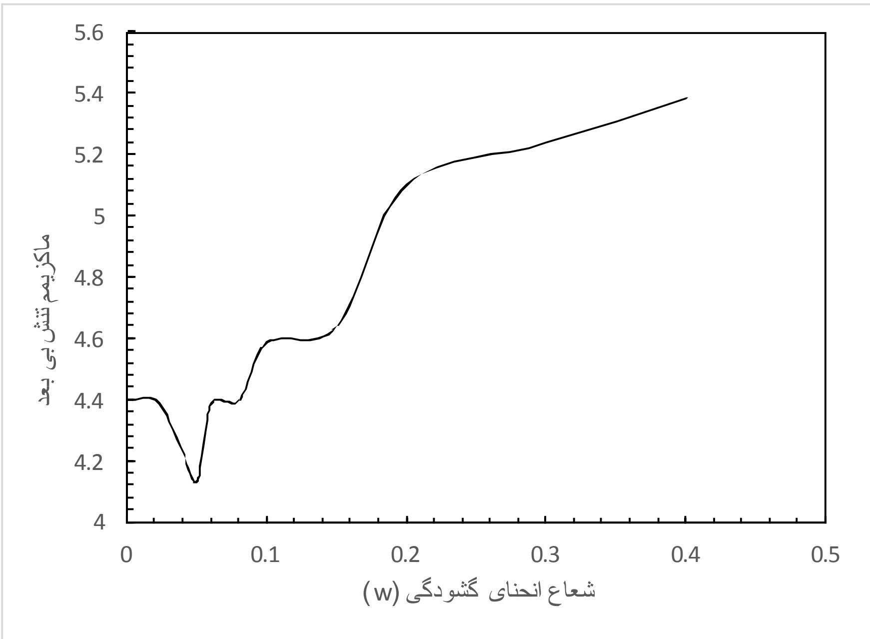
تغییرات تنش مطلوب همان‌طور که در جدول (۴-۳) نشان داده شده است، پراکندگی خاصی دارد.

جدول (۴-۳): مقادیر تنش مطلوب و نامطلوب بی‌بعد برای گشودگی مثلثی در wهای مختلف

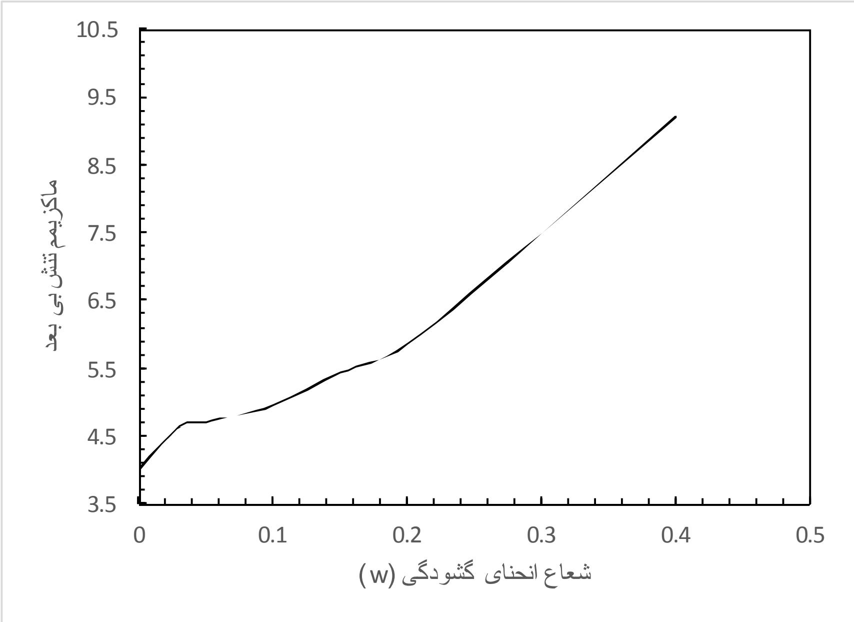
مقدار تنش نامطلوب	زاویه چرخش تنش نامطلوب	مقدار تنش مطلوب	زاویه چرخش تنش مطلوب	w
۴/۴۰۲	–	۴/۴۰۲	–	۰
۴/۶۶	۶۰	۴/۳۲۹	۰	۰/۰۳
۴/۷۱۹	۶۰	۴/۱۳۸	۰	۰/۰۵
۴/۹۶۶	۶۰	۴/۵۸۸	۰	۰/۱

نتایج تنش مطلوب در اثر تغییر w در شکل (۴-۷) و نتایج تنش نامطلوب در شکل (۴-۸) آورده شده است. همان‌طور که در شکل (۴-۷) نشان داده شده است، برای گشودگی مثلثی، تنش مطلوب با افزایش w=۰/۰۳ تا w=۰/۰۵ کمتر از تنش مطلوب ناشی از گشودگی دایره‌ای (w=۰) است؛ کمترین مقدار تنش در w=۰/۰۵ می‌باشد. قدر مطلق کمترین تنش مطلوب در w=۰/۰۵ برابر ۴/۱۳۸ می‌باشد. لازم به توضیح است که در حالت w=۰ یا گشودگی دایره‌ای، قدر مطلق مقدار تنش مطلوب ۴/۴۰۲ می‌یاشد.

شکل (۴-۸) نشان می‌دهد که با بیشتر شدن w مقدار تنش نامطلوب نیز افزایش می‌یابد. در w=۰ که معادل گشودگی دایره‌ای است؛ تنش نامطلوب کمترین مقدار ممکن است. همان‌طور که قبلا نیز اشاره شد، تنش مطلوب برای تمام wها در زاویه‌ی صفر یا ۱۲۰ درجه اتفاق می‌افتد و تنش نامطلوب در زاویه‌ی ۶۰ درجه. این زاویه مستقل از w است.



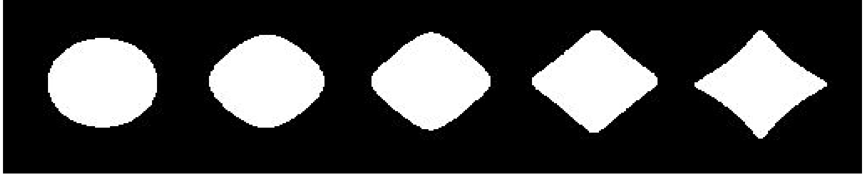
شکل (۴-۷): تأثیر w بر روی تنش مطلوب بی‌بعد برای گشودگی مثلثی



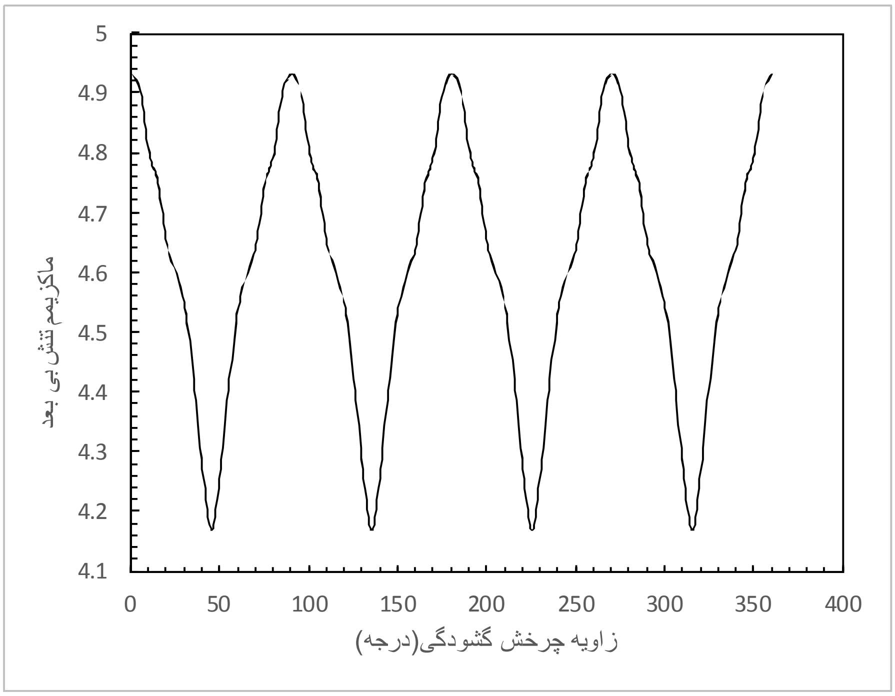
شکل (۴-۸): تأثیر w بر روی تنش نامطلوب بی‌بعد برای گشودگی مثلثی

۴-۳-۲ گشودگی مربعی

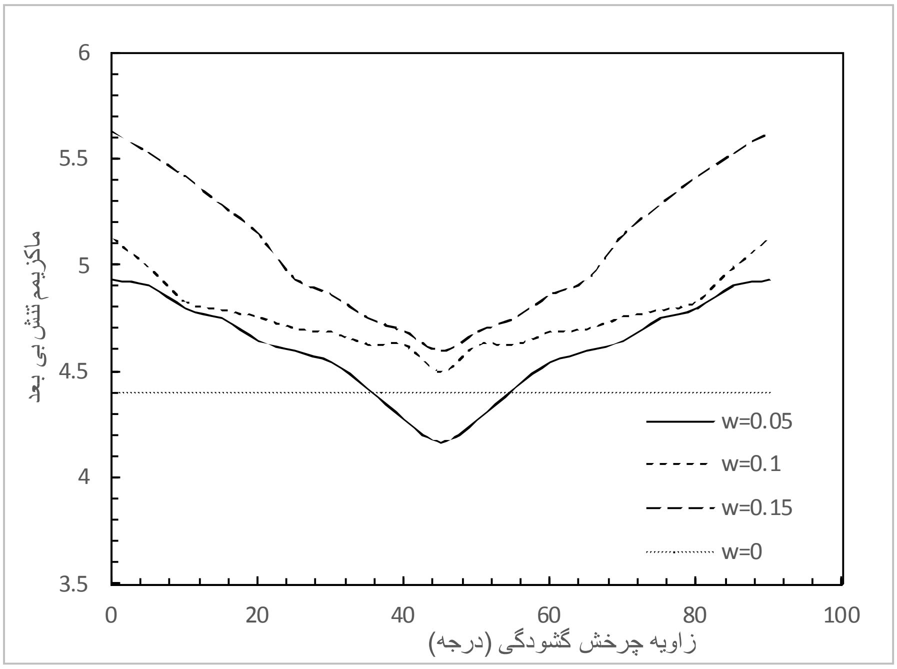
برای این گشودگی n=۳ و c=۱ می‌باشد. محدوده‌ی مجاز تغییرات w نیز بین صفر تا ۰/۳۳ خواهد بود ($0 \leq w \leq 0/33$). تأثیر w در ایجاد گشودگی شبه مربعی در شکل (۴-۹) نشان داده شده است.



شکل (۴-۹): تأثیر انحنای گوشه (w) در گشودگی شبه مربعی



شکل (۴-۱۰): تأثیر زاویه‌ی چرخش بر روی ماکزیمم تنش بی‌بعد برای گشودگی شبه مربعی و W=۱/۲۰



شکل (۴-۱۱): تأثیر زاویه‌ی چرخش گشودگی شبه مربعی بر ماکزیمم تنش بی‌بعد در Wهای مختلف

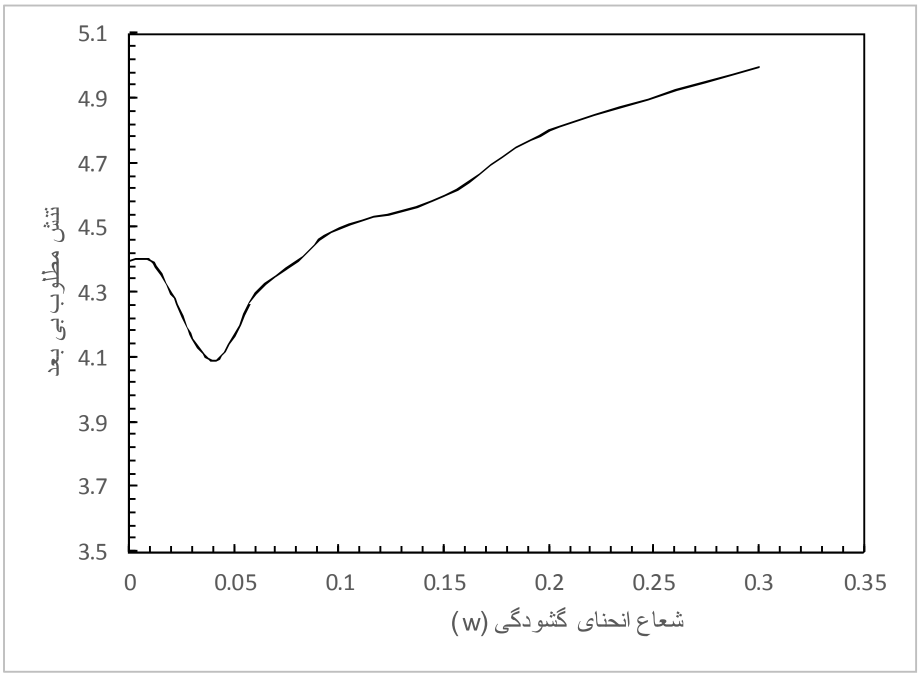
ابتدا در شکل (۴-۱۰) تأثیر زاویه‌ی چرخش در W=۱/۲۰ ارائه شده است. همان‌طور که از این شکل پیداست دوره‌ی نوسان در این حالت ۹۰ درجه است. تنش مطلوب در زاویه‌ی ۴۵ درجه و تنش نامطلوب در زوایای صفر یا ۹۰ درجه اتفاق می‌افتد. زوایایی که تحت آن‌ها تنش مطلوب و نامطلوب رخ می‌دهد با تغییر w، تغییر نمی‌کند. ولی مقدار این تنش‌ها در wهای مختلف، متفاوت است. شکل (۴-۱۰)، (۴-۱۱) و جدول (۴-۴) گویای این مطلب است.

جدول (۴-۴): مقادیر تنش مطلوب و نامطلوب بی‌بعد برای گشودگی شبه مربعی در wهای مختلف

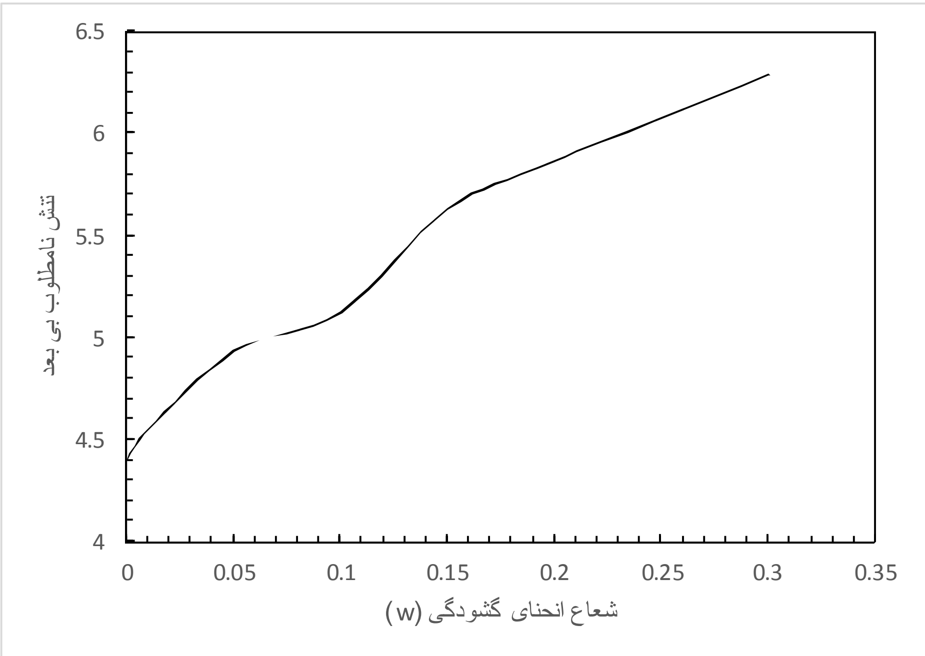
مقدار تنش نامطلوب	زاویه چرخش تنش نامطلوب	مقدار تنش مطلوب	زاویه‌ی چرخش تنش مطلوب	w
۴/۴۰۲	–	۴/۴۰۲	–	۰
۴/۵۵۲	۰	۴/۲۹۹	۴۵	۰/۰۲
۴/۶۹۷	۰	۴/۰۹	۴۵	۰/۰۴
۴/۹۳	۰	۴/۱۶	۴۵	۰/۰۵
۵/۱۲۸	۰	۴/۵	۴۵	۰/۱

جدول (۴-۵): بازه‌ی زاویه‌ی چرخش گشودگی شبه مربعی که در آن تنش مطلوب بی‌بعد از تنش بی‌بعد در گشودگی دایره‌ای کمتر است

محدوده β	w	محدوده β	w	محدوده β	w
۲۵<β<۳۵	۰/۰۵	۲۸<β<۳۳	۰/۰۴	۳۰<β<۴۰	۰/۰۲



شکل (۴-۱۲): تأثیر شعاع انحنای گشودگی بر روی تنش مطلوب بی‌بعد برای گشودگی شبه مربعی



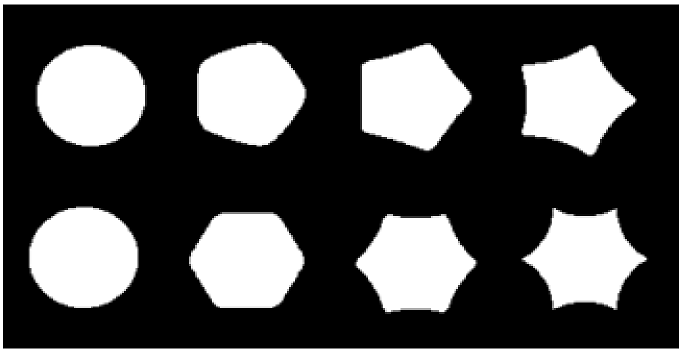
شکل (۴-۱۳): تأثیر شعاع انحنای گشودگی بر روی تنش نامطلوب بی‌بعد برای گشودگی شبه مربعی

نتایج تنش مطلوب و نامطلوب در اثر تغییر w به ترتیب در شکل‌های (۴-۱۲ و ۴-۱۳) آورده شده است. مطابق شکل (۴-۱۲) برای گشودگی شبه مربعی، تنش مطلوب بی‌بعد با افزایش w=۰/۰۱ تا w=۰/۰۵ کاهش می‌یابد و کمتر از تنش مطلوب در گشودگی دایروی است؛ همچنین با افزایش w از ۰/۰۵، تنش مطلوب بی‌بعد افزایش می‌یابد ولی در w=۰/۰۶ همچنان از تنش در گشودگی دایره‌ای کمتر است.

از طرفی با توجه به شکل (۴-۱۳) برای گشودگی شبه مربعی تنش نامطلوب بی‌بعد با افزایش w، افزایش می‌یابد.

با توجه به شکل (۴-۱۲) در یک w خاص تنش مطلوب کمترین مقدار خود را دارد. این مقدار w=۰/۰۴ می‌باشد. کمترین تنش مطلوب بی‌بعد در w=۰/۰۴ برابر ۴/۰۹ می‌باشد. لازم به توضیح است که در حالت w=۰ یا گشودگی دایره‌ای، مقدار تنش بی‌بعد ۴/۴۰۲ می‌باشد.

۴-۳-۳ بگشودگی‌های nضلعی

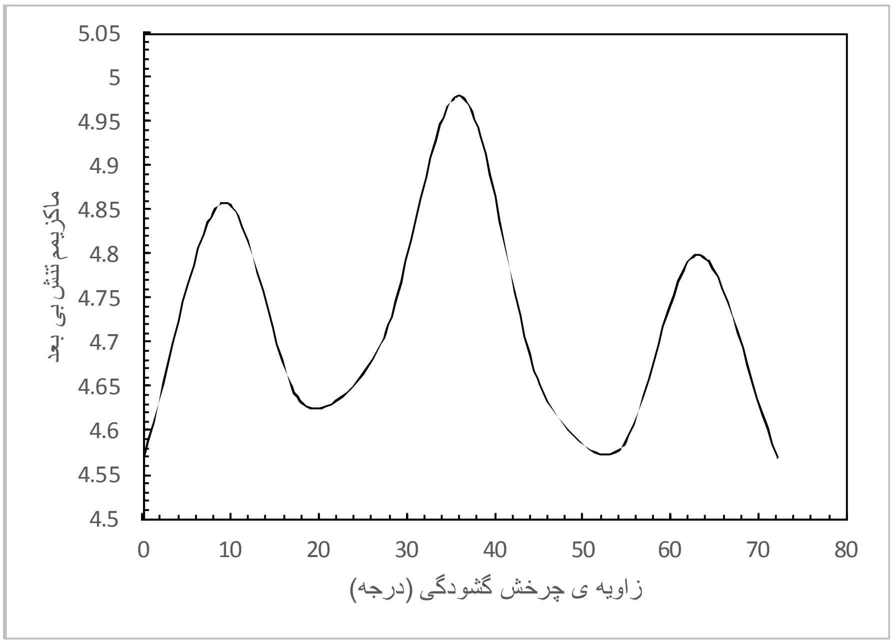


W=0 W=0.05 W=0.1 W=0.15

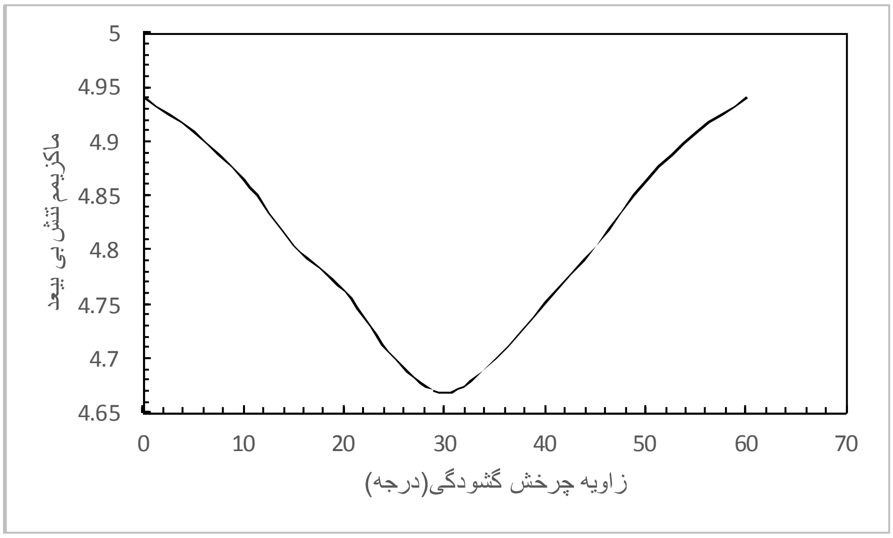
شکل (۴-۱۴): تأثیر انحنای گوشه‌ی w در شکل بگشودگی‌های nضلعی

برای این گونه گشودگی‌ها نیز مطابق با روندی که در ارائه‌ی نتایج بگشودگی‌های مثلثی و مربعی بکار برده شد؛ نتایج آورده می‌شود.

معمولاً رابطه‌ای که دوره‌ی تناوب در این حالت با تعداد اضلاع (n) دارد بصورت T=360/n می‌باشد. به همین دلیل نمودار تنش ماکزیمم بی‌بعد برای گشودگی پنج ضلعی از صفر تا ۷۲ درجه و برای گشودگی شش‌ضلعی از صفر تا ۶۰ درجه آورده شده است.



شکل (۴-۱۵): تأثیر زاویه‌ی چرخش گشودگی بر روی ماکزیمم تنش بی‌بعد برای گشودگی پنج‌ضلعی و w=۱/۲۰



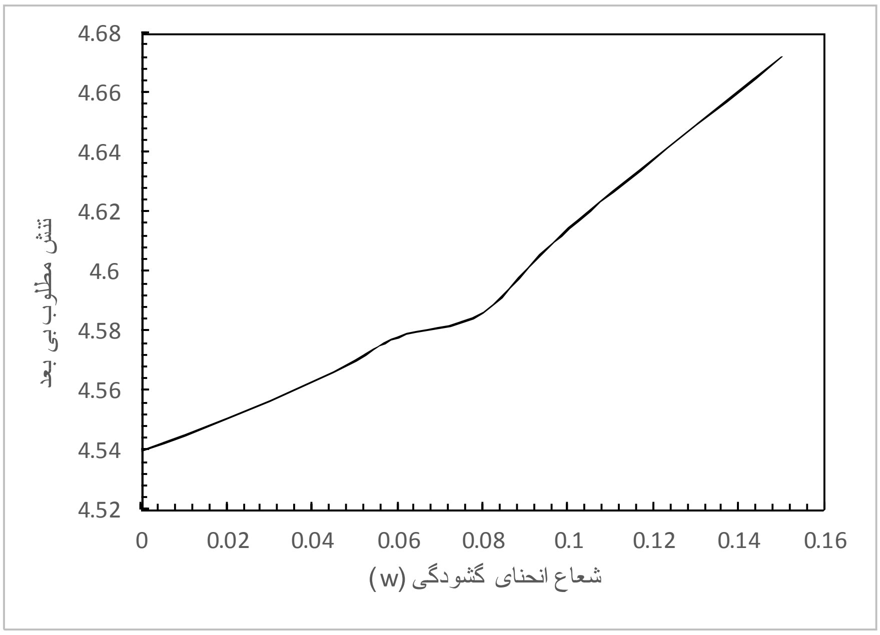
شکل (۴-۱۶): تأثیر زاویه‌ی چرخش گشودگی بر روی ماکزیمم تنش بی‌بعد برای گشودگی شش‌ضلعی و w=۱/۲۰

ابتدا برای بگشودگی‌های پنج و شش‌ضلعی تأثیر زاویه‌ی چرخش گشودگی بر روی ماکزیمم تنش بی‌بعد برای w=۱/۲۰ به ترتیب در شکل‌های (۴-۱۵) و (۴-۱۶) رسم شده است.

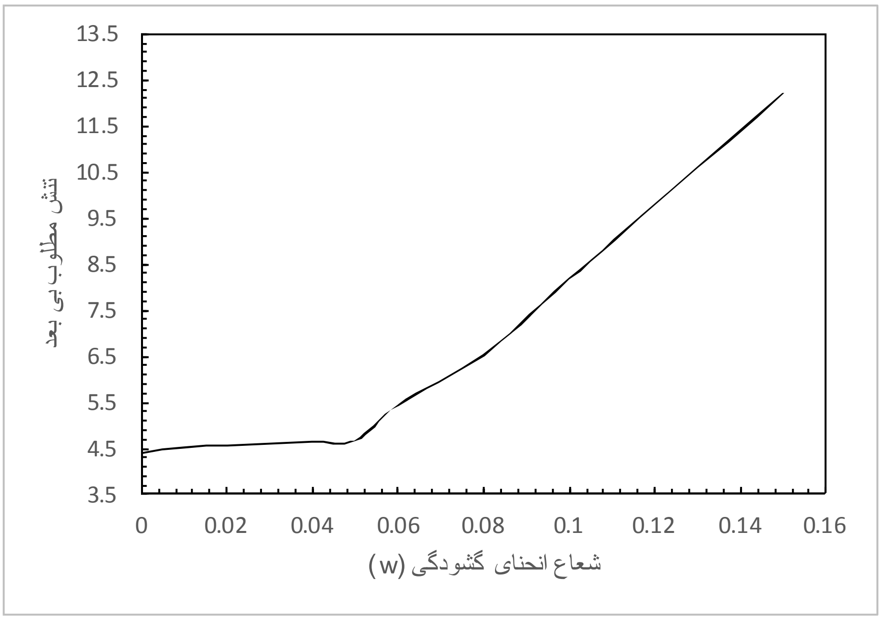
جدول (۴-۶): تنش مطلوب و نامطلوب بی‌بعد برای بگشودگی‌های پنج‌ضلعی و شش‌ضلعی در w=۱/۲۰

نوع گشودگی	زاویه‌ی چرخش مطلوب	مقدار تنش مطلوب	زاویه‌ی چرخش نامطلوب	مقدار تنش نامطلوب
پنج‌ضلعی	۰	۴/۵۷	۳۶	۴/۹۸
شش‌ضلعی	۳۰	۴/۶۶۹۱	۰	۴/۹۴

اکنون برای این دو گشودگی به بررسی تأثیر w بر روی تنش مطلوب بی‌بعد می‌پردازیم.



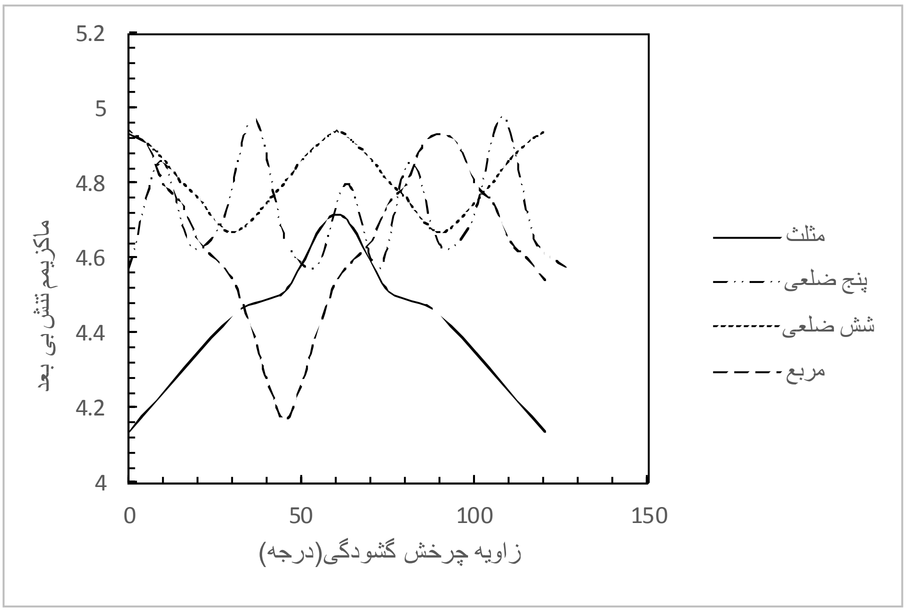
شکل (۴-۱۷): تأثیر شعاع انحنای گشودگی (w) بر روی تنش مطلوب بی‌بعد برای گشودگی پنج‌ضلعی



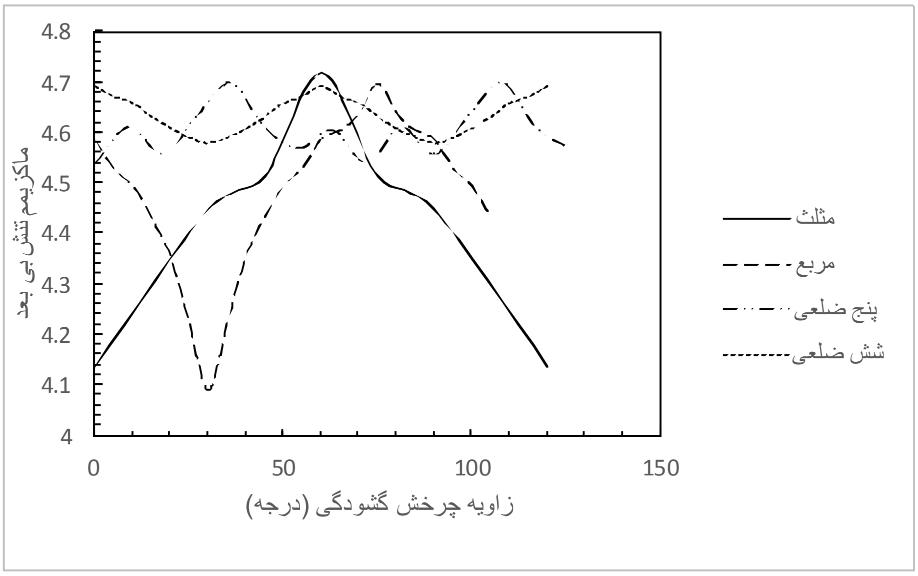
شکل (۴-۱۸): تأثیر شعاع انحنای گشودگی (w) بر روی تنش مطلوب بی‌بعد برای گشودگی شش‌ضلعی

در شکل‌های (۴-۱۷) و (۴-۱۸)، تأثیر w بر روی تنش مطلوب بی‌بعد ارائه شده است.

برای گشودگی پنج‌ضلعی با نرم‌تر شدن گشودگی یا کاهش w، تنش بی‌بعد کاهش می‌یابد و تغییرات آن بسیار کم است و در هیچ حالتی تنش، کمتر از تنش در گشودگی دایره‌ای نمی‌باشد. زاویه‌ی صفر درجه، زاویه‌ایست که در آن کمترین ماکزیمم تنش بی‌بعد اتفاق می‌افتد. در گشودگی شش‌ضلعی، شعاع انحنای گشودگی که در آن کمترین ماکزیمم تنش را داریم ۰/۰۱= w است و زاویه‌ی چرخش گشودگی برای تنش مطلوب، ۳۰ درجه است. در این گشودگی نیز هیچ‌گاه تنش ماکزیمم بی‌بعد کمتر از تنش در گشودگی دایره‌ای نمی‌شود. شعاع انحنای گشودگی که تنش مطلوب بی‌بعد در آن کمترین است؛ w بهینه نام دارد. برای پنج‌ضلعی و شش‌ضلعی ۰/۰۱=w؛ w بهینه می‌باشد. در این حالت مقدار تنش برابر ۴/۵۴ و ۴/۵۸ است.



شکل (۴-۱۹): ماکزیمم تنش بی‌بعد در W=۱/۲۰ برای بگشودگی‌های مختلف



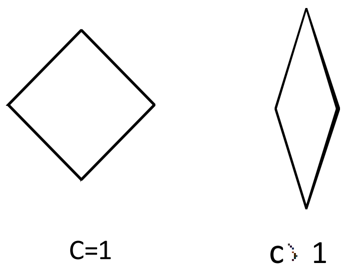
شکل (۴-۲۰): کمترین تنش مطلوب ممکن برای بگشودگی‌های مختلف

برای یک W خاص، مثلا W=۱/۲۰ تأثیر تعداد اضلاع بر روی تنش در شکل (۴-۱۹) بررسی شده است. در شکل (۴-۲۰)، منترین تنش مطلوب ممکن که در بگشودگی‌های مختلف در زوایای چرخش و شعاع انحناهای خاصی رخ می‌دهد؛ نشان داده شده است.

با توجه به شکل (۴-۲۰) مشاهده می‌شود که در گشودگی مربعی کمترین تنش مطلوب و نامطلوب را داریم و در بگشودگی‌های دیگر با افزایش تعداد اضلاع گشودگی تنش نامطلوب کاهش می‌یابد.

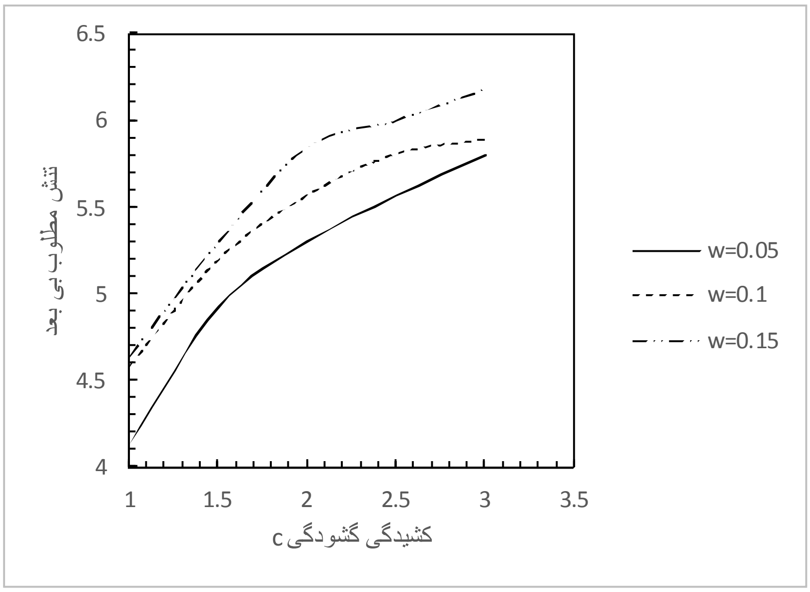
در ادامه کشیدگی گشودگی (c) به عنوان یکی دیگر از پارامترهای اصلی مؤثر بر توزیع تنش بررسی می‌شود.

۴-۳-۴ تأثیر کشیدگی گشودگی



شکل (۴-۲۱): تأثیر پارامتر c روی شکل گشودگی

این پارامتر همان‌طور که در تابع نگاشت به آن اشاره شد؛ به طور مستقیم بر هندسه‌ی گشودگی تأثیر می‌گذارد به گونه‌ای که با تغییر در مقدار c نسبت طول به عرض گشودگی (کشیدگی گشودگی) قابل کنترل خواهد بود (شکل (۴-۲۱)). با توجه به رابطه‌ی (۳-۱) پارامتر c فقط در جهت y تابع نگاشت اعمال شده است لذا با افزایش مقدار c شکل گشودگی در جهت محور y کشیده می‌شود.



شکل (۴-۲۲): تأثیر کشیدگی گشودگی و w بر روی تنش مطلوب بی‌بعد در گشودگی مثلثی

مطابق شکل (۴-۲۲) مقدار تنش با افزایش و کاهش پارامتر به ترتیب افزایش و یا کاهش حداکثر تنش خواهد شد و هم‌چنین با افزایش w برای کشیدگی‌های مختلف، تنش حداکثر افزایش می‌یابد. برای دست‌یابی به یک نگاشت همنوا مقدار c در تابع نگاشت باید در محدوده‌ی خاصی باشد لذا سعی شده است نتایج ارائه شده برای c در این محدوده قرار گیرد.

۴-۴ جمع‌بندی

در این فصل به بررسی زاویه‌ی چرخش گشودگی، انحنای گشودگی و همچنین کشیدگی گشودگی پرداخته شده است. با توجه به بررسی‌های انجام شده به این نتیجه رسیده شد که با انتخاب زاویه‌ی چرخش و شعاع انحنای گشودگی مناسب که با توجه به نوع گشودگی متفاوت است می‌توان به تنش-هایی حتی کمتر از تنش در گشودگی دایره‌ای دست یافت.

۴-۵ خلاصه نتایج

در این پایان‌نامه با استفاده از توابع پتانسیل مختلط و با به کارگیری نگاشت همنوا و حلّ معادلات انتگرالی، توزیع تنش در ورق همسانگرد حاوی گشودگی غیر دایروی با منبع حرارتی نقطه‌ای ارائه شد. روش حل، بر پایه‌ی بسط روش گودیر و فلورس است. آن‌ها از روش متغیّر مختلط برای ورق نامحدود همسانگرد با گشودگی دایره‌ای و بیضی‌شکل استفاده کردند. برای سادگی استفاده از انتگرال کوشی، ورق نامحدود شامل گشودگی، به ناحیه‌ی درون دایره‌ای به شعاع واحد نگاشته می‌شود. برای بررسی صحت نتایج تحلیل حاضر و درستی برنامه‌ی نوشته شده، نتایج به دست آمده با داده‌های موجود در مقالات دیگر مقایسه شده است. با بررسی نتایج ثابت شد که بیشترین تنش را در محل قرارگیری منبع داریم و تغییر پارامترهای گشودگی بر مقدار آن تأثیرگذار است. در انتها مقادیر تنش بیشینه با در نظر داشتن پارامترهای مهمی مانند: نوع گشودگی، زاویه‌ی چرخش گشودگی، شعاع انحنای گوشه‌های گشودگی و کشیدگی گشودگی به دست آمد.

طبق نتایج، با چرخش گشودگی در یک بازه‌ی خاص که بسته به نوع گشودگی متفاوت است، می‌توان به مقادیر تنشی کمتر از تنش ایجاد شده در گشودگی دایره‌ای رسید. بعد از یافتن زاویه‌ی چرخش مطلوب به بررسی تأثیر شعاع انحنای گشودگی دراین زاویه پرداخته شد. با بررسی شعاع انحنای گشودگی در مثلث و مربع بر خلاف انتظار با افزایش این مقدار تا محدوده‌ی خاصی که بسته به نوع گشودگی متفاوت است، تنش کمتر از تنش در ورق با گشودگی دایره‌ای شد، اما بعد از این محدوده با افزایش مجدد شعاع انحنا، تنش افزایش یافت.

از بین بگشودگی‌های مختلف در مربع با با انتخاب زاویه‌ی چرخش و شعاع انحنای مناسب کمترین مقدار تنش به دست آمد. این کمترین مقدار با انتخاب شعاع انحنای گشودگی ۰/۰۴ و زاویه‌ی چرخش گشودگی ۴۵ درجه اتفاق می‌افتد. حداکثر تنش در این حالت برابر ۴/۰۹ است. لازم به توضیح است که حداکثر تنش در گشودگی دایره‌ای برابر ۴/۴ می‌باشد.

با بررسی تأثیر کشیدگی گشودگی این نتیجه به دست آمد که با افزایش این پارامتر، تنش افزایش می‌یابد، و هم‌چنین مجاز به چرخش گشودگی در هر محدوده‌ی دلخواه از کشیدگی نیستیم چون منبع در نزدیکی گشودگی واقع است.

با توجه به روش تحلیلی ارائه شده در این پایان‌نامه، می‌توان با اطمینان بیشتر، از این روش در حلّ مسائل حرارتی استفاده کرد.

۴-۶ پیشنهادها

- تحلیل تنش حرارتی در صفحه‌ی همسانگرد دارای گشودگی تحت بارگذاری ترکیبی منبع حرارتی و مکانیکی
- تحلیل تنش حرارتی در صفحه‌ی همسانگرد دارای گشودگی با در نظر گرفتن منبع حرارتی داخل گشودگی
- تحلیل تنش حرارتی صفحه‌ی ناهمسانگرد با گشودگی و منبع حرارتی

پیوست الف

۱ حل انتگرال‌های کوشی برای $\phi(\zeta)$:

از معادله‌ی (۳-۶۹):

$$-\frac{\alpha MGR}{4\pi k}\frac{1}{2\pi i}\int\{\frac{a}{\sigma}+b\sigma+wd\sigma^{n}+\frac{we}{\sigma^{n}}-\omega(\zeta_a)]\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}$$

$$+\frac{\alpha MGR}{4\pi k}\frac{1}{2\pi i}\int(\frac{a}{\sigma}+b\sigma+wd\sigma^{n}+\frac{we}{\sigma^{n}})\log(\frac{1}{\sigma}-\overline{\zeta_a})\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}$$

$$+\frac{\alpha MGR}{4\pi k}\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\frac{\overline{\omega(\sigma)-\omega(\zeta_a)}}{\overline{\sigma-\zeta_a}}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}$$

$$-\frac{\alpha MGR}{4\pi k}\frac{1}{2\pi i}\int(\frac{a}{\sigma}+b\sigma+wd\sigma^{n}+\frac{we}{\sigma^{n}})\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}+\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}A\sigma\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}$$

$$-\frac{\alpha MGR}{4\pi k}\frac{1}{2\pi i}\int\omega(\zeta_a)\log(\frac{1}{\sigma}-\overline{\zeta_a})\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}+\frac{1}{2\pi i}\int\phi_2(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\overline{\phi_2'}(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}+\frac{1}{2\pi i}\int\overline{\psi_2(\sigma)}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}=0 \qquad \text{(A)}$$

با گرفتن انتگرال کوشی از جمله‌های رابطه‌ی (A) به صورت جداگانه:

$$I_1 = \frac{\alpha MGR}{4\pi k}\frac{1}{2\pi i}\int\{\frac{a}{\sigma}+b\sigma+wd\sigma^n+\frac{we}{\sigma^n}\}\{\log(\sigma-\zeta_a)\}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}=$$

$$\frac{\alpha MGR}{4\pi k}\frac{1}{2\pi i}\int\{\frac{a}{\sigma}\log(\sigma-\zeta_a)+\frac{we}{\sigma^n}\log(\sigma-\zeta_a)\}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}=$$

$$\frac{\alpha MGR}{4\pi k}[-\frac{a}{\zeta}\log(-\zeta_a)+\frac{we}{(n-1)!}\frac{d^n(\frac{\log(\sigma-\zeta_a)}{\sigma-\zeta})}{d\sigma^n}\Big|_{\sigma=0}$$

$$I_2 = -\frac{\alpha MGR}{4\pi k}\frac{1}{2\pi i}\int[\frac{a}{\sigma}+b\sigma+wd\sigma^n+\frac{we}{\sigma^n}-w(\zeta_a)]\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}$$

$$=\frac{\alpha MGR}{4\pi k}[\frac{a}{\zeta}+\frac{we}{\zeta^n}]$$

$$I_3 = \frac{\alpha MGR}{4\pi k}\frac{1}{2\pi i}\int(\frac{a}{\sigma}+b\sigma+wd\sigma^n)\log(\frac{1}{\sigma}-\overline{\zeta_a})\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}=$$

$$\frac{\alpha MGR}{4\pi k}[-\omega(\zeta)\log(\frac{1}{\zeta}-\overline{\zeta_a})+b\zeta\log(-\overline{\zeta_a})+\frac{wd}{n!}\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{\log\left(z-\overline{\zeta_a}\right)}{\zeta(z-\frac{1}{\zeta})}\right)\Big|_{z=0}]$$

$$I_4=\frac{\alpha MGR}{4\pi k}\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\frac{\overline{\omega(\sigma)}-\overline{\omega(\zeta_a)}}{\frac{1}{\sigma}-\overline{\zeta_a}}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}=$$

$$\frac{\alpha MGR}{4\pi k}\frac{1}{2\pi i}\int\frac{(a\sigma^{n-1}+b\sigma^{n+1}+wd\sigma^{2n}+we)(\bar{a}\sigma^{n+1}+\bar{b}\sigma^{n-1}}{\sigma^{n}(-\bar{a}\sigma^{n+1}+\bar{b}\sigma^{n-1}+n\overline{wd}-n\overline{we}\sigma^{2n})}$$

$$\frac{+\overline{wd}+\overline{we}\sigma^{2n}-\sigma^{n}\overline{\omega(\zeta_a)})}{(1-\sigma\overline{\zeta_a})}\frac{d\sigma}{(\sigma-\zeta)}=$$

$$\frac{\alpha MGR}{4\pi k}[\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^n}{d\sigma^n}\left[\frac{(a\sigma^{n-1}+b\sigma^{n+1}+wd\sigma^{2n}+we)}{(\sigma-\zeta)(1-\sigma\overline{\zeta_a})}\times\right.$$

$$\left.\frac{(\bar{a}\sigma^{n+1}+\bar{b}\sigma^{n-1}+\overline{wd}+\overline{we}\sigma^{2n}-\sigma^{n}\overline{\omega(\zeta_a)})}{(-\bar{a}\sigma^{n+1}+\bar{b}\sigma^{n-1}+n\overline{wd}-n\overline{we}\sigma^{2n})}\right]\Big|_{\sigma=0}$$

$$+\frac{(a\zeta_a'^{n-1}+b\zeta_a'^{n+1}+wd\zeta_a'^{2n}+we)}{\zeta_a'^{n}(-\bar{a}\zeta_a'^{n+1}+\bar{b}\zeta_a'^{n-1}+n\overline{wd}-n\overline{we}\zeta_a'^{2n})}$$

$$\frac{(\bar{a}\zeta_a'^{n-1}+\bar{b}\zeta_a'^{n+1}+wd\zeta_a'^{2n}+we-\zeta_a'^{n}\overline{\omega(\zeta_a)})}{(\zeta_a'-\zeta)}]$$

$$I_5=-\frac{\alpha MGR}{4\pi k}\frac{1}{2\pi i}\int(\frac{a}{\sigma}+b\sigma+wd\sigma^{n}+\frac{we}{\sigma^{n}})\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}=\frac{\alpha MGR}{4\pi k}(\frac{a}{\zeta}+\frac{we}{\zeta^{n}})$$

$$I_6=\frac{1}{2\pi i}\int A\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\sigma\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}=$$

$$\frac{A}{2\pi i}\int\frac{(a\sigma^{n-1}+b\sigma^{n+1}+wd\sigma^{2n}+we)}{(-\bar{a}\sigma^{n+1}+\bar{b}\sigma^{n-1}+n\overline{wd}-n\overline{we}\sigma^{2n})}\frac{d\sigma}{(\sigma-\zeta)}=0$$

$$I_7=-\frac{\alpha MGR}{4\pi k}\frac{1}{2\pi i}\int\omega(\zeta_a)\log(\frac{1}{\sigma}-\overline{\zeta_a})=\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}=$$
$$-\frac{\alpha MGR}{4\pi k}\omega(\zeta_a)[-\log(\frac{1}{\zeta}-\overline{\zeta_a})+\log(-\overline{\zeta_a})]$$

$$I_8=\frac{1}{2\pi i}\int\phi_2(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}=-\phi_2(\zeta)$$
$$I_9=\frac{1}{2\pi i}\int\overline{\phi_2'}(\zeta)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}=0$$
$$I_{10}=\frac{1}{2\pi i}\int\overline{\psi_2}(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}=0$$

با جمع حاصل انتگرال کوشی جملات $\phi_2(\zeta)$:

$$\phi_2(\zeta)=I_1+I_2+I_3+I_4+I_5+I_6+I_7+I_8+I_9+I_{10}$$

با جمع $\phi_2(\zeta)$ و $\phi_1(\zeta)$، تابع تنش مختلط $\phi(\zeta)$ بدست می‌آید :

$$\phi(\zeta)=\phi_1(\zeta)+\phi_2(\zeta)=$$
$$A\log\zeta+[\{\omega(\zeta)-\omega(\zeta_a)\}\{\log(\zeta-\zeta_a)\}-\{\omega(\zeta)-\omega(\zeta_a)\}]$$
$$+\frac{\alpha MGR}{4\pi k}\left[-\frac{a}{\zeta}\log(-\zeta_a)+\frac{we}{(n-1)!}\frac{d^n}{d\sigma^n}(\frac{\log(\sigma-\zeta_a)}{\sigma-\zeta})\Big|_{\sigma=0}\right]$$
$$+2\frac{\alpha MGR}{4\pi k}[\frac{a}{\zeta}+\frac{we}{\zeta^n}]\frac{\alpha MGR}{4\pi k}\left[-\omega(\zeta)\log(\frac{1}{\zeta}-\overline{\zeta_a})+b\zeta\log(-\overline{\zeta_a})\right.$$
$$\left.+\frac{wd}{n!}\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{\log(z-\overline{\zeta_a})}{\zeta(z-\frac{1}{\zeta})}\right)\Bigg|_{z=0}\right]+\frac{\alpha MGR}{4\pi k}\left[\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^n}{d\sigma^n}\left(\frac{(a\sigma^{n-1}+b\sigma^{n+1}+wd\sigma^{2n}+we)}{(\sigma-\zeta)(1-\sigma\overline{\zeta_a})}\right.\right.$$
$$\left.\left.\frac{(\bar{a}\sigma^{n+1}+\bar{b}\sigma^{n-1}+\overline{wd}+\overline{we}\sigma^{2n}-\sigma^n\overline{\omega(\zeta_a)})}{(-\bar{a}\sigma^{n+1}+\bar{b}\sigma^{n-1}+n\overline{wd}-n\overline{we}\sigma^{2n})}\right)\Bigg|_{\sigma=0}\right]$$
$$\frac{\omega(\zeta_a')}{\overline{\omega'(\zeta_a')}}\frac{\overline{\omega(\zeta_a')-\omega(\zeta_a)}}{\zeta_a'-\zeta}-\frac{\alpha MGR}{4\pi k}\omega(\zeta_a)[-\log(\frac{1}{\zeta}-\overline{\zeta_a})+\log(-\overline{\zeta_a})]$$

۲ حل انتگرال‌های کوشی برای $\psi(\zeta)$:

برای به دست آوردن $\psi(\zeta)$ از مزدوج رابطه‌ی (۳-۶۹) استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\alpha MGR}{4\pi k}[\{\overline{\omega(\sigma)}-\overline{\omega(\zeta_a)}\}\{\log(\frac{1}{\sigma}-\zeta_a)\}]-\frac{\alpha MGR}{4\pi k}\{\overline{\omega(\sigma)}-\overline{\omega(\zeta_a)}\}-B\log\sigma$$
$$+\frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\left[\frac{\alpha MGR}{4\pi k}[\omega'(\sigma)\log(\sigma-\zeta_a)+\frac{\omega(\sigma)-\omega(\zeta_a)}{\sigma-\zeta_a}-\omega'(\sigma)]+\frac{A}{\sigma}+\phi_2'(\sigma)\right]$$
$$-\frac{\alpha MGR}{4\pi k}[\overline{\omega(\zeta_a)}\log(\sigma-\zeta_a)]+B\log\sigma+\psi_2(\sigma)=0 \qquad \text{(B)}$$

با ضرب معادله‌ی (B) در $\frac{d\sigma}{2\pi i(\sigma-\zeta)}$ و گرفتن انتگرال کوشی از جمله‌های آن به صورت جداگانه:

$$I_1=\frac{\alpha MGR}{4\pi k}\frac{1}{2\pi i}\int\{a\sigma+\frac{b}{\sigma}+\frac{wd}{\sigma^n}+we\sigma^n-\overline{\omega(\zeta_a)}\}\{\log(\frac{1}{\sigma}-\overline{\zeta_a}\}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}=$$
$$-\frac{\alpha MGR}{4\pi k}\{a\zeta+\frac{b}{\zeta}+\frac{wd}{\zeta^n}+we\zeta^n-\overline{\omega(\zeta_a)}\}\{\log(\frac{1}{\zeta}-\overline{\zeta_a})\}+\frac{\alpha MGR}{4\pi k}a\zeta\log(-\overline{\zeta_a})$$
$$+\frac{\alpha MGR}{4\pi k}we\frac{d^n}{n!dz^n}\left.\left(\frac{\log(z-\overline{\zeta_a})}{\zeta(z-\frac{1}{\zeta})}\right)\right|_{z=0}$$

$$I_2=-\frac{\alpha MGR}{4\pi k}\frac{1}{2\pi i}\int\{a\sigma+\frac{b}{\sigma}+\frac{wd}{\sigma^n}+we\sigma^n-\overline{\omega(\zeta_a)}\}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}=$$
$$(\frac{b}{\zeta}+\frac{wd}{\zeta^n})(\frac{\alpha MGR}{4\pi k})$$

$$I_3=\frac{\alpha MGR}{4\pi k}\frac{1}{2\pi i}\int\overline{\omega(\sigma)}\log(\sigma-\zeta_a)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}=\frac{\alpha MGR}{4\pi k}\frac{1}{2\pi i}\int\{a\sigma+\frac{b}{\sigma}+$$
$$+\frac{wd}{\sigma^n}+we\sigma^n\}\log(\sigma-\zeta_a)\frac{d\sigma}{(\sigma-\zeta)}=\frac{\alpha MGR}{4\pi k}[-\frac{b}{\zeta}\log(-\zeta_a)$$
$$+\frac{wd}{(n-1)!}\frac{d^n}{d\sigma^n}\left.\left(\frac{\log(\sigma-\zeta_a)}{\sigma-\zeta}\right)\right|_{\sigma=0}]$$

$$I_4 = \frac{\alpha MGR}{4\pi k}\frac{1}{2\pi i}\int \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\frac{\omega(\sigma)-\omega(\zeta_a)}{\sigma-\zeta_a}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} =$$

$$\frac{a\sigma+\frac{b}{\sigma}+\frac{wd}{\sigma^n}+we\sigma^n}{-\frac{a}{\sigma^2}+b+nwd\sigma^{n-1}-\frac{nwe}{\sigma^{n+1}}}\frac{\frac{a}{\sigma}+b\sigma+wd\sigma^n+\frac{we}{\sigma^n}-\omega(\zeta_a)}{\sigma-\zeta_a}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} =$$

$$\frac{\alpha MGR}{4\pi k}\frac{1}{2\pi i}\int \frac{a\sigma^{n+1}+b\sigma^{n+1}+wd\sigma^{2n}+wd+we\sigma^{2n}}{\sigma^{n-1}(-a\sigma^{n-1}+b\sigma^{n+1}+nwd\sigma^{2n}-nwe)}\times$$

$$\frac{a\sigma^{n-1}+b\sigma^{n+1}+wd\sigma^{2n}+we-\sigma^n\omega(\zeta_a)}{(\sigma-\zeta_a)(\sigma-\zeta)}d\sigma =$$

$$\frac{\alpha MGR}{4\pi k}\frac{1}{(n-2)!}\frac{d^{n-2}}{d\sigma^{n-2}}\times(\frac{a\sigma^{n+1}+b\sigma^{n-1}+wd+we\sigma^{2n}}{-a\sigma^{n-1}+b\sigma^{n+1}+nwd\sigma^{2n}-nwe}\times$$

$$\frac{a\sigma^{n-1}+b\sigma^{n+1}+wd\sigma^{2n}+we-\sigma^n\omega(\zeta_a)}{(\sigma-\zeta_a)(\sigma-\zeta)})\Big|_{\sigma=0}$$

$$I_5 = -\frac{\alpha MGR}{4\pi k}\frac{1}{2\pi i}\int \overline{\omega(\sigma)}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} = -\frac{\alpha MGR}{4\pi k}\frac{1}{2\pi i}\int (a\sigma+\frac{b}{\sigma}$$

$$+\frac{wd}{\sigma^n}+we\sigma^n)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} = \frac{\alpha MGR}{4\pi k}(\frac{b}{\zeta}+\frac{wd}{\zeta^n})$$

$$I_6 = \frac{A}{2\pi i}\int \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\sigma\omega'(\sigma)}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} = \frac{A}{2\pi i}\int \frac{a\sigma+\frac{b}{\sigma}+\frac{wd}{\sigma^n}+we\sigma^n}{\sigma(\frac{-a}{\sigma^n}+b+nwd\sigma^{n-1}-\frac{nwe}{\sigma^{n+1}})}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} =$$

$$\frac{A}{2\pi i}\int \frac{a\sigma^{n+1}+b\sigma^{n-1}+wd+we\sigma^{2n}}{-a\sigma^{n-1}+b\sigma^{n+1}+nwd\sigma^{2n}-nwe}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} = 0$$

$$I_7 = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega'(\zeta)}\phi_2'(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} =$$

$$\frac{\sigma(a\sigma^{n+1}+b\sigma^{n-1}+wd+we\sigma^{2n})}{-a\sigma^{n-1}+b\sigma^{n+1}+nwd\sigma^{2n}-nwe}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} = 0$$

$$I_8 = -\frac{\alpha MGR}{4\pi k}\frac{1}{2\pi i}\int \overline{\omega(\zeta_a)}\log(\sigma-\zeta_a)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} = 0$$

$$I_9 = \frac{1}{2\pi i}\int \psi_2(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} = -\psi_2(\zeta)$$

با جمع حاصل انتگرال کوشی تمام جملات:

$$\psi_2(\zeta) = I_1+I_2+I_3+I_4+I_5+I_6+I_7+I_8+I_9$$

با جمع $\psi_1(\zeta)$ و $\psi_2(\zeta)$ تابع تنش مختلط $\psi(\zeta)$ بدست می‌آید:

$$\psi(\zeta) = \psi_1(\zeta)+\psi_2(\zeta) = -\frac{\alpha MGR}{4\pi k}[\overline{\omega(\zeta_a)}\log(\zeta-\zeta_a)]$$

$$+B\log\zeta - \frac{\alpha MGR}{4\pi k}\{a\zeta+\frac{b}{\zeta}+\frac{wd}{\zeta^n}+we\zeta^n-\overline{\omega(\zeta_a)}\}\{\log(\frac{1}{\zeta}-\overline{\zeta_a})\}$$

$$+\frac{\alpha MGR}{4\pi k}a\zeta\,\log(-\overline{\zeta_a})+\frac{\alpha MGR}{4\pi k}we(\frac{\log(z-\overline{\zeta_a})}{\zeta(z-\frac{1}{\zeta})})\Bigg|_{z=0} + 2\frac{\alpha MGR}{4\pi k}(\frac{b}{\zeta}+\frac{wd}{\zeta^n})$$

$$+\frac{\alpha MGR}{4\pi k}[\frac{-b}{\zeta}\log(-\zeta_a)+\frac{wd}{(n-1)!}\frac{d^n}{d\sigma^n}(\frac{\log(\sigma-\zeta_a)}{\sigma-\zeta}\Bigg|_{\sigma=0}]+$$

$$\frac{\alpha MGR}{4\pi k}\frac{1}{(n-2)!}\frac{d^{n-2}}{d\sigma^{n-2}}(\frac{a\sigma^{n+1}+b\sigma^{n-1}+wd+we\sigma^{2n}}{-a\sigma^{n-1}+b\sigma^{n+1}+nwd\sigma^{2n}-nwe}\times$$

$$\frac{a\sigma^{n-1}+b\sigma^{n+1}+wd\sigma^{2n}+we-\sigma^n\omega(\zeta_a)}{(\sigma-\zeta_a)(\sigma-\zeta)})\Big|_{\sigma=0}$$

مراجع

[1] A.L. Florence, J.N. Goodier. (1995), "Thermal stress at spherical cavities and circular holes in uniform heat flow", **J. Appl. Mech**., pp. 293-294.

[2] N.I. Mushkhelishvili. (1963), "**Some basic problems of mathematical theory of elasticity**", Netherlands: Noordhoff, Groningen, Holland.

[3] A.L Florence, J.N. Goodier. (1960), "Thermal stresses due to disturbance of uniform heat flow by an insulated ovaloid hole", **J. Appl. Mech**., pp. 635-639.

[4] K. Fukui, T. Fukui, H. Kaibori. (1970), "Thermal stresses of the elastic plane with a circular hole including one heat source", **Trans. Japan Soc. Mech. Eng**. Tokyo., pp. 1772-1776.

[5] K. Fukui, T. Fukui, "Thermal stresses around circular inclusion due to heat source and sink one", **Trans. Japan Soc. Mech. Eng**., pp. 3275-3283.

[6] H. Deresiewicz. (1961), "Thermal stress in a plate due to disturbance of uniform heat flow by a hole of general shape", **J.Appl.Mech**.

[7] K.S. Rao, M.N. Rao, T. Ariman. (1971), "Thermal stresses in plates with circular holes", **Nucl. Eng. Des.**, pp. 97-112.

[8] K.S. Rao, M.N. Rao, T. Ariman. (1974), "Thermal stresses in elastic plates with elliptic holes", **J.Eng. Ind**., Vol. 96, No. 3.

[9] Y. Takeuti, N. Sumi, Yhermal. (1976), "Stresses in rectangular plate with a circular hole based on an improve complex variable approach", **Mech. Res. Comm**., Vol. 3, pp. 133-138.

[10] J. Tweed, G. Melrose. (1988), "Thermal stress due to a uniform heat flow past two collinear cracks", **Int. J. Engng Sci**., Vol. 26, No. 10, pp. 1053-1057.

[11] N. Hasebe, K. Tamai, T. Nakamura. (1986), "Analysis of a kinked crack under uniform heat flow", **ASCE, J. Eng. Mech**., Vol. 112, pp. 31-42.

[12] S.K. Bhullar. (2006), "Thermal stresses in a hexagonal region with an elliptic hole", **Journal of nonlinear Dynamics and systems theory**., Vol. 6, No. 3, pp. 245-256.

[13] S.A. Aseeri. (2008), " Goursat functions for a problem of an isotropic plate with a curvilinear hole", **Int. J. Open Problems Compt. Math**., Vol. 1, No. 3.

[14] S.K. Bhullar, J.L. Weger. (2009), "Thermal stresses in a plate with hyperelliptical hole", **Journal of Engineering and Technology Research**., Vol. 1, No. 8, pp. 152-170.

[15] W.T. Chen. (1967), "Plane thermal stress at an insulated hole under uniform heat flow in an orthotropic medium", **ASME. J. Appl. Mech**., Vol. 34 pp. 133-136.

[16] J.Q. Tarn, Y.M. Wang. (1993), "Thermal stresses in anisotropic bodies with a hole or a rigid inclusion", **Journal of Thermal Stresses**, Vol. 16, No. 4, pp. 455-471.

[17] C.K. Chao, M.H. Shen. (1998), "Thermal stresses in a generally anisotropic body with an elliptic inclusion subject to uniform heat flow", **J. Appl. Mech**., Vol. 65, No.1, pp. 51-58.

[18] X. Zhang, N. Hasebe. (1993), "Basic singular thermoelastic solutions for a crack", Int. J. Fracture., Vol. 62, pp. 97-118.

[19] K. Yoshikawa, N. Hasebe. (1999), "Green's function of the displacement boundry value problem for a heat source in an infinite plane with an arbitrary shaped rigid inclusion", **J. App. Mech**., Vol. 69, pp. 227-239.

[20] K. Yoshikawa, N. Hasebe. (1999), "Heat source in infinite plane with elliptic rigid inclusion and hole", **J. Eng. Mech**., Vol. 125, pp. 684-691.

[21] Q.H. Qin. (2000), "General solutions for thermopiezoelectrics with various holes under thermal loading", **Int. J. Solid and Structures**., Vol. 37, pp. 5561-5578.

[22] N. Hasebe, C. Bucher, R. Heuer. (2010), "Heat conduction and thermal stress induced by an electric current in an infinite thin plate containing an elliptical hole with an edge crack", **Int. J. Solid and Structures**., Vol. 47, pp. 138-147.

[23] J. Dundrugs, O.C. Zienkiewicz. (1964), "Stresses around circular inclusions due to thermal gradients with particular reference to reinforced concrete", **J. Amer. Conc. Inst**., Vol. 61, pp. 1523-1532.

[24] T. Ariman, L.H.N. Lee. (1974), "Thermal analysis of plate with circular inclusions", **J. Nuclear Engineering and Design.**, Vol. 30, pp. 339-348.

[25] C.V. Pham, N. Hasebe, X.F. Wang, T. Saito. (2005), "Interaction between a cracked hole and a line crack under uniform heat flux" **Int. J. Fracture**., Vol. 131, pp. 367-348.

[26] N. Hasebe, X.F. Wang, T. Saito, W. Sheng. (2007), "Interaction between a rigid inclusion and a line crack under uniform heat flux" **Int. J. Solid and Structures**., Vol. 44, pp. 2426-2441.

[27] C. Hwu. (1990), "Thermal stresses in an anisotropic plate disturbed by an insulated elliptic hole or crack" **ASME J. Appl. Mech**., Vol. 57, pp. 916-922.

[28] C.K. Chao, M.H. Shen. (1998), "Thermal stresses in a generally anisotropic body with an elliptic inclusion subject to uniform heat flow" **ASME J. Appl. Mech.,** Vol. 65, pp. 51-58.

[29] C.K. Chao, B. Gao. (2001), "Mixed boundry value problems of two dimensional anisotropic thermoelasticity with elliptic boundries" **Int. J. Solid and Structures**., Vol. 38, pp. 5975-5994.

[30] H. Sekine. (1977), "Thermal stresses near tips of an insulated line crack in a semi-infinite medium under uniform heat flow" **Eng. Fract. Mech**., Vol. 9, No. 2, pp. 499-507.

[31] K.Y. Lee, H.S. Chois. (1989), "Determation of thermal stress intensity fracture for rigid cusp cracks under uniform heat flow" **Eng. Fract. Mech**. Vol. 32, No. 2, pp. 483-493.

[32] N. Hasebe, H. Irikura, T. Nakamura. (1992), "Stress intensity fracture of cracks initiating from a rhombic hole due to uniform heat flux" **Eng. Fract. Mech**. Vol. 32, No. 2, pp. 331-337.

[33] Y.Z. Chen. (2002), "General solution for arc crack problem in thermoelastic medium" **Int. J. Eng. Sci.,** Vol. 40, pp. 2223-2234.

[34] C.V. Pham, N. Hasebe, X.F. Wang, T. Saito. (2005), "Interaction between a cracked hole and a line crack under uniform heat flux" **Int. J. Fract.**, Vol. 131, pp. 367-384.

[35] C. Atkinston. (1917), "One some crack problems in anisotropic thermoelasticity" **Int. J. Solids Structures**., Vol. 13, pp. 855-864.

[36] C. Atkinston, D.L. Clements. (1972), "One some crack problems in anisotropic thermoelasticity" **Int. J. Solids Structures**., Vol. 13, pp. 855-864.

[37] R. Lee, G.A. Kardomates. (2005), "Thermo-elastic crack branching in general anisotropic media" **Int. J. Solids and Structures**., Vol. 42, pp. 1091-1109.

[38] K.Y. Lee, H.S. Choi. (1988), "Determination of thermal stress intensity fracture for traction free cusp cracks under uniform heat flow" **Eng. Fract. Mech.**, Vol. 31, No. 4, pp. 661-672.

[39] J.L. Bogdanoff. (1954), "Note on thermal stresses" **J. Appl. Mech.**, Vol. 76, pp. 88.

[40] A. Taherinasab, M. Jafari. (2014), "Thermal stress analysis of an infinite plate with non circular cutouts subjected to a uniform heat flow"

[41] M. Rasuli, M. Jafari. (2016), "Thermal stress analysis of infinite anisotropic plate with elliptical hole under uniform heat flux" **J. Thermal Stresses.**

[42] N.M. Abuelfoutouh. (1993), "Preliminary design of unstiffed composite shells" **Symposium of 7th Technical Conference of ASC**., pp. 693-786.

[۴۶] م. جعفری. (۱۳۸۸)، رساله‌ی دکترا، **"تحلیل تنش صفحات همسانگرد و غیر همسانگرد ارتوتروپیک با بگشودگی‌های غیر دایره‌ای تحت بار تک‌محوره"**، دانشکده‌ی مکانیک، دانشگاه فردوسی.

[47] N. Hasebe, K. Tamai, T. Nakamura. (1986), "Analysis of a kinked crack under uniform heat flow" **ASCE. J. Eng. Mech**., Vol. 112, pp. 31-42.

[48] C.H. Wang, C.K. Chao. (2002), "On perturbation solutions for nearly circular inclusion problems in plane thermoelasticity" **J. Appl. Mech**. Vol. 69, pp. 36-44.

[49] J. Rezaeepazhand, M. Jafari. (2010), "Stress concentration in metallic plates with special shaped cutout" **Int. J. Mech. Sci**., Vol. 52, pp. 96-102.

Abstract

On the basis of the steady-state two-dimensional theory of thermoelasticity, stress field around a hole in infinite isotropic plate is dicussed. The plate is subjected to a point heat source and thermal insulated condition along the hole boundry in assumed. By using the complex potential functions and applying the conformal mapping and solving the integral equations, stress distribution around the hole in represented. The used method is the expansion of the complex variable method for an infinite isotropic plate with circular and elliptical holes. For simplicity of using the Cauchy integral formula, the infinite area external to the hole can be represented by the area outside the unit circle. The rotation angle of hole, bluntness, aspect ratio of hole size are important parameters that are considered in this research. The results obtained demonstrate the effect of these parameters on stress distribution around hole and heat source.

Key words

isotropic plate, conformal mapping, point heat source, thermal stress, non-circular holes, interaction between point heat source and holes

Shahrood University of Technology

Faculty of Mechanical Engineering

Thermal stress analysis of an infinite plate with non-circular cutouts subjected to a point heat source

By:Fatemeh Karimi Kenari

Supervisor

Mohammad Jafari

September 2017