

اللَّهُ الرَّحْمَنُ



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک

پایان نامه دوره‌ی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک – طراحی کاربردی

**محاسبه‌ی ضریب شدت تنش مود I در یک صفحه و استوانه‌ی
ترموالکتريک همسانگرد دارای ترک تحت شوک حرارتی
با استفاده از روش تابع وزنی**

نگارنده:

محمدحسین کامروا

استاد راهنما:

دکتر محمدباقر نظری

بهمن ۱۳۹۶

شماره: ۳/۲۹۲/۱۷۷
تاریخ: ۱۳/۱۲/۱۳۹۶

باسمه تعالی



مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (3) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم / آقای محمد حسین کامروا با شماره دانشجویی ۹۳۱۳۹۴۴ رشته مکانیک گرایش طراحی کاربردی.
تحت عنوان: محاسبه ضریب شدت تنش مود I در یک صفحه و استوانه‌ی ترموالکتریک همسانگرد دارای ترک تحت شوک حرارتی با استفاده از روش تابع وزنی
که در تاریخ ۱۳۹۶/۱۱/۹ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می‌گردد:

قبول (با امتیاز ۱۶/۵۷ درجه) مردود
نوع تحقیق: نظری عملی

عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
1- استاد راهنمای اول	دکتر محمد باقر نظری	استاد یار	
4- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر محمد جعفری	دانش یار	
5- استاد ممتحن اول	مهدی قنّاد کهنونی	دانش یار	
6- استاد ممتحن دوم	علیرضا شاطرزاده	استاد یار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده:

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

تبصره: در صورتی که کسی مردود شود حداکثر یکبار دیگر (در مدت مجاز تحصیل) می‌تواند از پایان نامه خود دفاع نماید (دفاع مجدد نباید زودتر از 4 ماه برگزار شود).



تقدیم بہ

فرشتگانی کہ محظمت ناب باور بودن، لذت و غرور دانستن، جسارت خواستن، عظمت رسیدن و تمام تجربہ ہائی یکتا و زیبای زندگی ام مدیون حضور سبز آن ہاست...

تقدیم بہ خانوادہ و ہمسر عزیزم

تقدیر و تشکر

استاد گرامی جناب آقای دکتر محمد باقر نظری:

دلسوزی، تلاش و کوشش حضرت عالی در تعلیم و تربیت و انتقال معلومات و تجربیات ارزشمند در کنار برقراری رابطی صمیمی و دوستانه برای کسب علم و دانش حقیقتاً قابل ستایش است. اینجانب بر خود وظیفه می‌دانم در کسوت شاکردی از زحمات و خدمات ارزشمند شما استاد گران قدر تقدیر و تشکر نمایم.

بهمچنین از مسئول آرمایشگاه محاسبات دانشکده می‌کانیک دانشگاه شاهرود نیز کمال تشکر را دارم. و در انتها از خانواده و همچنین همسرم کمال تشکر را دارم که با صبر چراغ راه من شدند.

تهدیه نامه

اینجانب محمدحسین کامروا دانشجوی دوره‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی مهندسی مکانیک دانشکده‌ی مکانیک و مکترونیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده‌ی پایان‌نامه با عنوان محاسبه‌ی ضریب شدت تنش مود I در یک باریکه و استوانه‌ی ترموالکتریک دارای ترک تحت شوک حرارتی با استفاده از روش تابع وزنی، تحت راهنمایی دکتر محمدباقر نظری متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا "Shahrood University of Technology" به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان‌نامه تأثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آن‌ها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه‌ی اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

بابت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان‌نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

حکیده

در این پایان‌نامه به محاسبه‌ی ضریب شدت تنش مود I در یک باریکه‌ی شامل ترک لبه‌ای و یک استوانه‌ی جدار ضخیم شامل ترک محیطی و نیم بیضوی با استفاده از روش تابع وزنی پرداخته‌شده است. جنس باریکه و استوانه از ماده‌ی ترموالکتریک بیسموت تلورید و به‌صورت همسانگرد بوده است که تحت شوک حرارتی یک‌بعدی قرار دارد. شوک حرارتی، طبق مدل‌های هدایت گرمایی غیر فوریه‌ای کاتانو-ورنات و تأخیر فاز دوگانه که با در نظر گرفتن شرایط مرزی دمایی در دو سمت باریکه و همچنین در دیواره داخلی و خارجی استوانه انجام شده است.

در مدل‌های هدایت گرمایی موردبررسی، ابتدا معادله‌ی هدایت گرمایی در فضای لاپلاس حل می‌شود، پس از به دست آوردن میدان دما و تنش، از تبدیل لاپلاس معکوس استفاده‌شده و میدان‌ها به فضای زمان نگاشت می‌شود. سپس، مقدار ضریب شدت تنش با استفاده از توابع وزنی حاصل می‌شود که نتایج، در اثر ژول و تامسون در توزیع دما، توزیع تنش و ضریب شدت تنش بررسی می‌شود.

کلمات کلیدی:

ترموالکتریک، اثر ژول، مدل هدایت گرمایی هایپربولیک، مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه، تابع وزنی، استوانه‌ی جدار ضخیم، باریکه

فهرست مطالب

فصل ۱ مرور مطالعات پیشین.....	۱
۱-۱ مقدمه.....	۲
۲-۱ تحقیقات گذشتگان.....	۳
۳-۱ ساختار پایان نامه.....	۶
فصل ۲ معادلات حاکم و روش حل.....	۷
۱-۲ مقدمه.....	۸
۱-۱-۲ معرفی مواد ترموالکتریک.....	۸
۲-۱-۲ معادلات حاکم بر پیوستار ترموالکتریک.....	۸
۳-۱-۲ مروری بر اثرات پایه‌ای ترموالکتریک.....	۱۰
۴-۱-۲ چگالی جریان الکتریکی.....	۱۲
۲-۲ قانون‌های هدایت گرمایی.....	۱۳
۱-۲-۲ مدل هدایت گرمایی فوریه.....	۱۳
۲-۲-۲ مدل هدایت گرمایی غیر فوریه‌ای کاتانو-ورنات.....	۱۳
۳-۲-۲ مدل هدایت گرمایی غیر فوریه‌ای تأخیر فاز دوگانه.....	۱۳
۳-۲ تابع وزنی.....	۱۴
۱-۳-۲ تابع وزنی باریکه.....	۱۵
۲-۳-۲ تابع وزنی ترک محیطی داخلی.....	۱۶
۳-۳-۲ تابع وزنی ترک نیم بیضوی برای $R_o / R_i = 1.25$	۱۷
۴-۳-۲ تابع وزنی ترک نیم بیضوی برای $R_o / R_i = 2$	۱۹

۲۱	تبدیل لاپلاس معکوس عددی
۲۳	فصل ۳ باریکه شامل ترک لبه‌ای
۲۴	۱-۳ مقدمه
۲۴	۲-۳ تحلیل باریکه‌ی شامل ترک لبه‌ای
۲۴	۱-۲-۳ مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات
۳۱	۲-۲-۳ مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه
۳۳	۳-۳ محاسبه‌ی چگالی جریان الکتریکی
۳۴	۴-۳ روابط توزیع دما و تنش
۳۵	۵-۳ نتایج توزیع دما
۳۷	۶-۳ نتایج توزیع تنش
۴۰	۷-۳ نتایج ضریب شدت تنش ترک لبه‌ای
۴۳	فصل ۴ استوانه دارای ترک محیطی کامل
۴۴	۱-۴ مقدمه
۴۴	۲-۴ تحلیل استوانه‌ی بدون ترک
۴۶	۳-۴ محاسبه‌ی چگالی جریان الکتریکی
۴۷	۴-۴ نتایج توزیع دما
۵۲	۵-۴ نتایج توزیع تنش محوری
۵۶	۶-۴ نتایج ضریب شدت تنش ترک محیطی
۶۵	فصل ۵ استوانه شامل ترک نیم بیضوی
۶۶	۱-۵ مقدمه
۶۶	۲-۵ تحلیل استوانه‌ی بدون ترک

۳-۵ محاسبه‌ی چگالی جریان الکتریکی	۶۷
۴-۵ نتایج توزیع دما	۶۸
۵-۵ میدان تنش محیطی	۷۱
۶-۵ نتایج توزیع تنش محیطی	۷۱
۷-۵ نتایج ضریب شدت تنش در عمق ترک نیم بیضوی	۷۴
فصل ۶ نتیجه‌گیری و پیشنهادها	۷۹
۱-۶ نتیجه‌گیری	۸۰
۲-۶ پیشنهادها	۸۱

فهرست شکل‌ها

شکل ۱-۲ تعادل انرژی در یک دامنه‌ی Ω [۳۱]	۱۰
شکل ۲-۲ طرح یک ترک در استوانه [۴۸]	۱۵
شکل ۲-۳ شکل کلی باریکه‌ی دارای ترک لبه‌ای [۳۰]	۱۶
شکل ۲-۴ شکل کلی استوانه شامل ترک محیطی [۲۰]	۱۶
شکل ۲-۵ شکل کلی استوانه شامل ترک نیم بیضوی [۲۴]	۱۷
شکل ۱-۳ مقایسه‌ی توزیع دمای روش نیمه‌تحلیلی با مرجع [۳۱] در $\tau=0.071$	۲۷
شکل ۲-۳ توزیع دمای مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات در حضور و عدم حضور اثر تامسون ...	۲۸
شکل ۳-۳ توزیع دمای مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات با در نظر گرفتن شرایط مرزی مورد مطالعه	۲۹

- شکل ۳-۴ توزیع تنش مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات با در نظر گرفتن شرایط مرزی مورد مطالعه..... ۳۰
- شکل ۳-۵ ضریب شدت تنش ترک لبه‌ای با در نظر گرفتن شرایط مرزی مورد مطالعه..... ۳۰
- شکل ۳-۶ چگونگی محاسبه‌ی چگالی جریان الکتریکی..... ۳۴
- شکل ۳-۷ صحت‌سنجی توزیع دما در باریکه با مرجع [۳۷]..... ۳۶
- شکل ۳-۸ توزیع دمای ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات..... ۳۶
- شکل ۳-۹ توزیع دمای ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه..... ۳۷
- شکل ۳-۱۰ صحت‌سنجی توزیع تنش در باریکه با مرجع [۳۷]..... ۳۸
- شکل ۳-۱۱ توزیع تنش ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات..... ۳۹
- شکل ۳-۱۲ توزیع تنش ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه..... ۳۹
- شکل ۳-۱۳ صحت‌سنجی ضریب شدت تنش با مرجع در زمان ۲۰ ثانیه [۳۷]..... ۴۰
- شکل ۳-۱۴ ضریب شدت تنش ترک لبه‌ای ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات برحسب طول نسبی ترک..... ۴۱
- شکل ۳-۱۵ ضریب شدت تنش ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه برحسب طول نسبی ترک..... ۴۲
- شکل ۴-۱ شکل کلی استوانه‌ی توخالی..... ۴۴
- شکل ۴-۲ صحت‌سنجی توزیع دما طبق مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات (C-V) با مرجع [۳۰]..... ۴۷
- شکل ۴-۳ صحت‌سنجی توزیع دما طبق مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه با مرجع [۳۰]..... ۴۸
- شکل ۴-۴ توزیع دمای ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات..... ۴۸
- شکل ۴-۵ توزیع دمای ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه..... ۴۹
- شکل ۴-۶ مقایسه‌ی توزیع دمای مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات (C-V) و تأخیر فاز دوگانه (DPL) در غیاب اثر ژول..... ۵۰

- شکل ۴-۷ مقایسه‌ی توزیع دمای مدل‌های هدایت گرمایی کاتانو-ورنات (C-V) و تأخیر فاز دوگانه (DPL)..... ۵۰
- شکل ۴-۸ توزیع دمای مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات با مقادیر مختلف چگالی جریان الکتریکی..... ۵۱
- شکل ۴-۹ توزیع دمای مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه با مقادیر مختلف چگالی جریان الکتریکی..... ۵۱
- شکل ۴-۱۰ صحت‌سنجی توزیع تنش محوری مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات با مرجع [۳۰]..... ۵۳
- شکل ۴-۱۱ صحت‌سنجی توزیع تنش محوری مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه با مرجع [۳۰]..... ۵۳
- شکل ۴-۱۲ توزیع تنش محوری ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات... ۵۴
- شکل ۴-۱۳ توزیع تنش محوری ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه..... ۵۵
- شکل ۴-۱۴ توزیع تنش محوری ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات با مقادیر مختلف چگالی جریان الکتریکی..... ۵۵
- شکل ۴-۱۵ توزیع تنش محوری ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه با مقادیر مختلف چگالی جریان الکتریکی..... ۵۶
- شکل ۴-۱۶ صحت‌سنجی ضریب شدت تنش ترک محیطی ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات با مرجع [۳۰]..... ۵۸
- شکل ۴-۱۷ صحت‌سنجی ضریب شدت تنش ترک محیطی ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه با مرجع [۳۰]..... ۵۸
- شکل ۴-۱۸ ضریب شدت تنش ترک محیطی ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات..... ۵۹

- شکل ۴-۱۹ ضریب شدت تنش ترک محیطی ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه ۶۰
- شکل ۴-۲۰ ضریب شدت تنش ترک محیطی ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات با مقادیر مختلف چگالی جریان الکتریکی ۶۱
- شکل ۴-۲۱ ضریب شدت تنش ترک محیطی ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه با مقادیر مختلف چگالی جریان الکتریکی ۶۲
- شکل ۴-۲۲ مقایسه‌ی ضریب شدت تنش ترک محیطی ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل‌های هدایت گرمایی کاتانو-ورنات (C-V) و تأخیر فاز دوگانه (DPL) ۶۲
- شکل ۵-۱ توزیع دما در ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات ۶۸
- شکل ۵-۲ توزیع دما در ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه ۶۹
- شکل ۵-۳ مقایسه‌ی توزیع دما در ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل‌های هدایت گرمایی کاتانو-ورنات (C-V) و تأخیر فاز دوگانه (DPL) ۶۹
- شکل ۵-۴ توزیع دمای ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات با مقادیر مختلف چگالی جریان الکتریکی ۷۰
- شکل ۵-۵ توزیع دمای ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه با مقادیر مختلف چگالی جریان الکتریکی ۷۰
- شکل ۵-۶ توزیع تنش محیطی در ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات ۷۲
- شکل ۵-۷ توزیع تنش محیطی ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه ۷۳
- شکل ۵-۸ توزیع تنش محیطی ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات با مقادیر مختلف چگالی جریان الکتریکی ۷۳
- شکل ۵-۹ توزیع تنش محیطی ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه با مقادیر مختلف چگالی جریان الکتریکی ۷۴

شکل ۵-۱۰ ضریب شدت تنش عمق ترک نیم بیضوی در ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات ۷۵

شکل ۵-۱۱ ضریب شدت تنش عمق ترک نیم بیضوی در ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه ۷۶

شکل ۵-۱۲ ضریب شدت تنش عمق ترک نیم بیضوی ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات با مقادیر مختلف چگالی جریان الکتریکی ۷۷

شکل ۵-۱۳ ضریب شدت تنش عمق ترک نیم بیضوی ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه با مقادیر مختلف چگالی جریان الکتریکی ۷۷

فهرست اعلام

\mathbf{j}	بردار چگالی جریان	δ	زمان آسایش گرادیان دمای بی بعد
\mathbf{q}	بردار شار	r	شعاع
\mathbf{Z}_{EM}	بردار نیروی الکترومغناطیس	η	شعاع بی بعد
\mathbf{E}	بردار میدان الکتریکی	r_i	شعاع داخلی
\mathbf{I}	بردار جریان الکتریکی	r_o	شعاع خارجی
$\tilde{\sigma}$	تانسور تنش	R_i	شعاع داخلی بی بعد
C	تانسور الاستیک	R_o	شعاع خارجی بی بعد
$\tilde{\epsilon}$	تانسور کرنش	K_I	شدت تنش
$\tilde{\epsilon}_{th}$	تانسور کرنش حرارتی	t_w	ضخامت
σ_z	تنش محوری	t_h	ضریب اثر تامسون
σ_ϕ	تنش محیطی	σ	ضریب انتقال الکتریکی
σ'_z	تنش محوری بی بعد	α	ضریب انبساط حرارتی
σ'_ϕ	تنش محیطی بی بعد	κ	ضریب انتقال حرارتی
m	تابع وزنی	a	طول ترک
ρ	چگالی	C_p	ظرفیت گرمایی ویژه
T	دما	x	مکان
θ	دمای بی بعد	X	مکان بی بعد
t	زمان	E	مدول یانگ
τ	زمان بی بعد	I	مقدار جریان الکتریکی
τ_q	زمان آسایش شار حرارتی	A	مساحت
τ_T	زمان آسایش گرادیان دما	J	مقدار چگالی جریان
ϵ	زمان آسایش شار حرارتی بی بعد	V	ولتاژ

فصل ۱

مرور مطالعات پیشین

۱-۱ مقدمه

ترموالکتريسيته، علم تبديل گرما به انرژي الكتريكي و يا به طور معكوس تبديل انرژي الكتريكي به گرمایش و يا سرمايش است. تبديل گرما به انرژي الكتريكي اين امكان را فراهم مي آورد كه انرژي حرارتي اتلافي به صورت انرژي الكتريكي ذخيره شود. باوجود آنكه بازدهي اين نوع تبديل معمولاً كم است ولي مدتي است كه به دليل تجديد پذير بودن آن مورد توجه قرار گرفته است و تحقيقات و پيشرفت هايي در ساخت مواد جديد و يا ساختارهاي متفاوت در اندازه هاي ماكرو و ميكرو در حال انجام است. مواد ترموالكتريك به دليل تبديل مستقيم گرمای اتلافي به الكتريسيته مورد توجه بسياري قرار دارند [۱]. نداشتن قطعه ي متحرك، كار كرد بدون سروصدا، اعتماد پذيري قابل قبول و قابليت انتقال آسان آن از مزايای اين تجهيزات است. مواد ترموالكتريك در خنك كن مدارهاي الكترونيكي، حسگرهاي كنترل دما و شار گرمایی و ... کاربرد دارند. اختلاف دمای دو سر يك المان ترموالكتريك علاوه بر ايجاد گرمایش ژول، مشابه يك منبع گرمایی در شرايط كاري باعث ايجاد تنش- های گرمایی در آن ها مي شود. كوپل غيرخطي ميدان هاي الاستيسيته، دما و الكتريسيته به همراه خصوصيات غير همگن و وابسته به دمای اين مواد باعث پيچيدگي تحليل آن ها مي شود. از طرفي، طبيعت ترد اين مواد، امكان ايجاد و رشد ترك حين كار در آن ها را افزايش مي دهد. بعلاوه، وجود نقص هايي مثل گشودگي و ترك در المان هاي ترموالكتريك اين تجهيزات باعث اختلال در عملكرد آن ها مي شود.

از تئوري هاي مورد استفاده براي تحليل توزيع دما، قانون فوريه مي باشد كه نتايج حاصل از آن تفاوت زيادي با نتايج تجربي دارد [۲]. از نقص هاي اين قانون، مي توان به فرض سرعت بي نهايت موج گرما اشاره كرد. در مواردی كه هدايت گرمایی سريع رخ مي دهد توزيع دمای حاصل از قانون فوريه به اندازه ي كافي دقيق نيست. براي مثال، دمای اندازه گيري شده در باريكه ي نازكي كه تحت گرمایش سريع از طريق ليزر قرار گرفته است، در زمان هاي نزديك به زمان اعمال شوک گرمایی حدود ۳۰۰ درجه ي سانتی گراد بيشتر از دمایي است كه توسط قانون فوريه محاسبه مي شود [۳]. هدايت گرمایی

کاتانو-ورنات^۱ نیز در برخی موارد نمی‌تواند نتایج را به‌درستی پیش‌بینی کند و در مواردی چون فرآیندهای سریع انتقال گرما و انتقال میکرو منجر به نتایج غیرطبیعی می‌شود [۴,۵]. هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه^۲ با توجه به روابط ساختاری در نظر گرفته‌شده، نتایج دما و تنش را در سازه به‌گونه‌ای پیش‌بینی می‌کند که با نتایج آزمایشگاهی سازگاری دارد و از طرف دیگر در هدایت گرمایی سریع و هدایت گرمایی در مقیاس میکرو و نانو نتایج قابل قبولی ارائه می‌کند.

۲-۱ تحقیقات گذشتگان

در بخشی از تحقیقات، ترک محیطی به‌عنوان مدل مناسبی از عیوب در ناحیه‌ی اتصال لوله‌ها به یکدیگر پیشنهاد شده است [۶]. ایردل و اردوغان [۷]، آیدین و آرتم [۸]، نید و اردوغان [۹]، با استفاده از روش تبدیل انتگرالی، ضریب شدت تنش را برای یک ترک محیطی در یک استوانه‌ی تحت بار مکانیکی و گرمایی به‌صورت متقارن محوری به دست آوردند. ونگ [۱۰]، با استفاده از روش المان محدود، ضریب شدت تنش دینامیکی را برای ترک محیطی در یک استوانه‌ی جدار ضخیم تحت فشار داخلی متغیر با زمان را محاسبه کرد. همچنین، گربنر [۱۱]، ضریب شدت تنش را برای استوانه‌ی شامل یک ترک محیطی و تحت بار محوری، با استفاده از روش المان محدود به دست آورد. نبوی و قاجار [۱۲]، با استفاده از نتایج المان محدود، ضرایب تابع وزنی گلینکا و شن [۱۳] را به‌صورت توابع چندجمله‌ای برای محدوده‌ی وسیعی از نسبت قطرهای خارجی به داخلی و طول نسبی ترک محیطی، تعیین کردند و با استفاده از آن، ضریب شدت تنش را برای بارگذاری حرارتی پایا به دست آوردند. همچنین ایشان ضرایب تابع وزنی گلینکا و شن را برای نسبت قطر خاص به‌صورت توابع متعالی ابعاد هندسی استوانه ارائه کردند [۱۴].

در تحقیقات فوق از تئوری هدایت گرمایی فوریه استفاده شده است. چانگ و ونگ [۱۵] رفتار یک ترک لبه‌ای عمود بر لبه‌ی یک نیم‌صفحه تحت کاهش دمای لبه را با استفاده از روش تبدیل لاپلاس و در نظر گرفتن مدل هدایت گرمایی هایپربولیک بررسی کردند. هو و چن [۱۶]، ضریب شدت تنش را

¹ Cattaneo-Vernotte (C-V)

² Dual Phase Lag (DPL)

برای یک ترک موازی با لبه‌های یک باریکه با در نظر گرفتن مدل هدایت گرمایی هایپربولیک به دست آوردند. چن و هو تغییرات ضریب شدت تنش با زمان، برای یک نیم‌صفحه با پوشش [۱۷] و بدون پوشش [۱۸] شامل یک ترک تحت اغتشاش حرارتی در مرز را با در نظر گرفتن مدل هدایت گرمایی هایپربولیک به دست آوردند. ونگ [۱۹]، ضریب شدت تنش را برای یک استوانه‌ی شامل یک ترک سکه‌ای کوچک به صورت تحلیلی به دست آورده است. فو و همکاران، ضریب شدت تنش برای استوانه‌ی تو خالی [۲۰] شامل یک ترک محیطی را با استفاده از روش تبدیل انتگرالی و تبدیل لاپلاس معکوس عددی با در نظر گرفتن مدل هدایت گرمایی هایپربولیک ارائه کردند.

لین و اسمیت [۲۱]، [۲۲]، نشان دادند که ترک‌های سطحی پس از تکرار بارگذاری به شکل نیم بیضوی نزدیک می‌شوند. ایشان همچنین با استفاده از روش المان محدود، ضریب شدت تنش و عمر خستگی را برای یک استوانه‌ی شامل یک ترک نیم بیضوی^۱ محاسبه کردند. پتروسکی و آخنباخ [۲۳]، یک بیان تقریبی از جابجایی سطح ترک را برای محاسبه‌ی تابع وزنی از ضرایب شدت تنش برای یک بارگذاری مرجع بیان کردند و ضریب شدت تنش را برای نیم‌صفحه‌ی حاوی ترک‌های شعاعی روی حفره‌ی دایره‌ای و ترک شعاعی در حلقه به دست آوردند. شاهانی و نبوی با استفاده از روش تابع وزنی، یک عبارت تحلیلی برای ضرایب شدت تنش در عمق و سطح یک ترک نیم بیضوی طولی در یک استوانه‌ی تحت فشار داخلی و با حرارت پایا [۲۴] ارائه کردند. ژنگ و همکاران [۲۵] [۲۶]، به کمک روش تابع وزنی یک رابطه‌ی صریح برای ضریب شدت تنش گوشه‌ها و عمق ترک نیم بیضوی طولی ارائه دادند. در تحقیقات فوق هدایت گرمایی بر اساس قانون فوریه در نظر گرفته شده است. لی و همکاران [۲۷] با استفاده از روش معادله‌ی انتگرال مرزی، تابع وزنی را برای ترک‌های طولی و محیطی بیان کردند. وارفومولیف و هدولاک [۲۸]، تابع وزنی ترک‌های طولی و محیطی در سطح داخلی استوانه را با استفاده از این تابع، ضرایب شدت تنش تحت بارگذاری کششی یکنواخت را محاسبه کردند. نظری و عاصمی [۲۹] ضریب شدت تنش مود I برای گوشه‌ها و عمق یک ترک نیم بیضوی تحت بار گرمایی هایپربولیک را با استفاده از تابع وزنی به دست آورده‌اند. اخیراً نظری و فرحی

¹ Semi - Elliptical

نژاد، ضریب شدت تنش مود I را برای گوشه‌ها و عمق ترک نیم بیضوی را با استفاده از تئوری‌های تعمیم‌یافته‌ی ترموالاستیسیته با روش حل نیمه‌تحلیلی و با استفاده از تابع وزنی به دست آوردند [۳۰].

ازجمله تحقیقاتی که در زمینه‌ی استفاده از تئوری‌های فوریه‌ای و غیرفوریه‌ای بر روی مواد ترموالکتریک انجام گرفته، می‌توان به مواردی اشاره نمود. ازجمله اینکه: پالما و همکارانش [۳۱] با در نظر گرفتن کوپل میدان‌های دما و الکتریسیته و تئوری کاتانو تنش گرمایی را در یک المان ترموالکتریک به دست آوردند. پرز و همکارانش [۳۲] اثر پلتیر را در تعیین میدان‌های دما و الکتریسیته لحاظ کردند. هوانگ و همکارانش [۳۳] تنش گرمایی را در یک فیلم نازک ترموالکتریک به دست آوردند. ونگ [۳۴] با در نظر گرفتن خصوصیات تابع دما، تنش‌های گرمایی را در یک المان ترموالکتریک بر اساس هدایت گرمایی فوریه‌ای به دست آورد. ژنگ و همکاران [۳۵] نشان دادند در نوک ترک، شار گرمایی و الکتریکی مانند تنش دارای تکینی مرتبه ۱/۲ است. سانگ و همکاران [۳۶] ضریب شدت تنش را برای یک ترک در یک محیط بی‌نهایت ترموالکتریک تحت شار گرمایی و الکتریکی دوردست به دست آوردند. ونگ و همکاران [۳۷] ضریب شدت تنش برای یک باریکه شامل یک ترک لبه‌ای را با استفاده از روش تابع وزنی تحت شوک گرمایی فوریه‌ای محاسبه کردند.

در سال‌های اخیر، استفاده از کولرها و میکرو کولرها بیشتر مورد توجه قرار گرفته است. از آنجاکه هدایت گرمایی در این مواد غیرفوریه‌ای است و باوجود تحقیقاتی که در روی مواد ترموالکتریک صورت گرفته است، اما تاکنون مدل‌های هدایت گرمایی کاتانو-ورنات و تأخیر فاز دوگانه که سرعت موج محدود را به‌خوبی نشان می‌دهند انجام نگرفته است. در مورد اثر شوک حرارتی روی رشد ترک در این مواد نیز تحقیقات کمی صورت گرفته است؛ بنابراین در این پایان‌نامه علاوه بر مدل‌های هدایت گرمایی ذکر شده، اثر تامسون در باریکه و اثر ژول نیز همراه با مدل‌های گرمایی بالا مورد بررسی قرار گرفته است. در واقع مواد ترموالکتریک مورد بررسی در این پایان‌نامه دارای اثر ضریب ژول در باریکه و استوانه و اثر تامسون در باریکه هستند و با مدل‌های هدایت گرمایی کاتانو-ورنات و تأخیر فاز دوگانه در دو هندسه‌ی باریکه و استوانه مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

۱-۳ ساختار پایان نامه

پایان‌نامه‌ی حاضر شامل ۶ فصل است. در فصل اول مواد ترموالکتریک معرفی می‌شود و اهمیت مطالعه‌ی آن مورد بحث قرار می‌گیرد و در ادامه، تحقیقاتی که تاکنون در این زمینه انجام شد مورد بررسی قرار گرفت.

در فصل دوم معادلات حاکم و روش محاسبه‌ی لاپلاس معکوس (دورباین) شرح داده می‌شود، همچنین به بررسی روابط تابع وزنی مربوط به باریکه دارای ترک لبه‌ای و تابع وزنی استوانه‌ی شامل ترک‌های محیطی و نیم بیضوی پرداخته می‌شود.

در فصل سوم، پس از معرفی روابط توزیع دما و تنش در یک باریکه‌ی ترموالکتریک، به محاسبه‌ی ضرایب تمرکز تنش پرداخته و در نهایت اثر ضریب تامسون در توزیع دما و توزیع تنش مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در فصل چهارم روابط دما و تنش محوری و ضریب شدت تنش برای یک استوانه شامل یک ترک محیطی تحت شوک گرمایی طبق مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات و تأخیر فاز دوگانه گزارش شده است.

در فصل پنجم، روابط دما و تنش محیطی و ضریب شدت تنش برای یک استوانه دارای ترک نیم بیضوی طولی برای مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات و تأخیر فاز دوگانه گزارش شده است. در فصل ششم نیز نتیجه‌گیری و پیشنهادها برای کارهای آینده ارائه می‌شود.

فصل ۲

معادلات حاکم و روش حل

۱-۲ مقدمه

در این فصل به معرفی مواد ترموالکتریک و اثرات پایه‌ای آن پرداخته می‌شود. همچنین، خواص مواد ترموالکتریک بیان خواهند شد. درباره‌ی چگالی جریان الکتریکی و نحوه‌ی محاسبه‌ی آن توضیحاتی داده می‌شود و در ادامه به معرفی توابع وزنی ترک لبه‌ای، ترک محیطی و ترک نیم بیضوی پرداخته می‌شود. در نهایت درباره‌ی تبدیل لاپلاس معکوس بحث و روابط آن آورده شده است.

۱-۱-۲ معرفی مواد ترموالکتریک

مواد ترموالکتریک، انرژی‌های الکتریکی و حرارتی را با استفاده از سه اثر انتقال جداگانه به یکدیگر مرتبط می‌کنند: سیبک^۱، پلتیر^۲ و تامسون^۳. مواد ترموالکتریک به‌عنوان پمپ‌های گرما (گرمایش و سرمایش) و ژنراتورها استفاده می‌شوند [۳۸] و در دهه‌ی گذشته دستگاه‌های ترموالکتریک کوچک فرکانس بالا به‌طور فزاینده‌ای برای خنک کردن دستگاه‌های میکروالکترونیک مورد استفاده قرار می‌گیرند [۳۹].

۲-۱-۲ معادلات حاکم بر پیوستار ترموالکتریک

معادلات ساختاری حاکم بر ماده‌ی ترموالکتریک به‌صورت رابطه‌ی مکسول (۱-۲) تعریف می‌شود [۳۱].

$$\dot{\rho}_{\Omega} = -\nabla \cdot \mathbf{j} \quad (1-2)$$

¹ Seebeck
² Peltier
³ Thomson

در این رابطه، با توجه به شکل ۲-۱ و قانون مکانیک محیط‌های پیوسته، منظور از Ω دامنه، ρ_Ω چگالی بار الکتریکی و j چگالی جریان الکتریکی می‌باشد. همچنین علامت نقطه ($\dot{\rho}$) به مشتق زمان اشاره می‌کند.

معادله‌ی بقای انرژی برای ماده‌ی ترموالکتریک از قانون اول ترمودینامیک، طبق رابطه‌ی (۲-۲) به دست می‌آید.

$$\rho \dot{u} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \quad (2-2)$$

که در آن u چگالی انرژی داخلی، q شار حرارتی، \mathbf{z} میدان الکتریکی، ρ چگالی و C_p ظرفیت گرمایی ویژه در فشار ثابت و \mathbf{E} میدان الکتریکی می‌باشد. همچنین، $\rho \dot{u}$ برای یک جسم جامد صلب پس از ساده‌سازی به صورت $\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}$ در خواهد آمد. رابطه تعادل جریان الکتریکی $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ می‌باشد که j نیز از معادله‌ی ساختاری شار الکتریکی (رابطه (۲-۳)) قابل محاسبه است.

$$\mathbf{j} = -\sigma \nabla V - \alpha \sigma \nabla T \quad (3-2)$$

در این رابطه σ ، α ، v به ترتیب ضریب انتقال الکتریکی و ضریب هدایت حرارتی و ولتاژ می‌باشد. معادله‌ی موسوم به تأخیر فاز دوگانه از دیگر معادلات ساختاری شار حرارتی مدل هدایت گرمایی می‌باشد که رابطه‌ی مربوط آن به تفصیل در فصل بعدی آورده شده است و در این قسمت تنها به آن اشاره‌ای می‌شود. این رابطه به صورت (۲-۴) قابل نمایش است.

$$\mathbf{q} + \tau_q \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\tau_q^2}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial t^2} = -\kappa \left[\nabla T + \tau_T \frac{\partial}{\partial t} \nabla T \right] + \alpha T \mathbf{j} \quad (4-2)$$

در این رابطه، τ_q ، τ_T ، κ و T به ترتیب زمان آسایش شار حرارتی، زمان آسایش گرادیان دما، ضریب انتقال حرارتی و ضریب انتقال الکتریکی، دما و چگالی جریان الکتریکی می‌باشند.

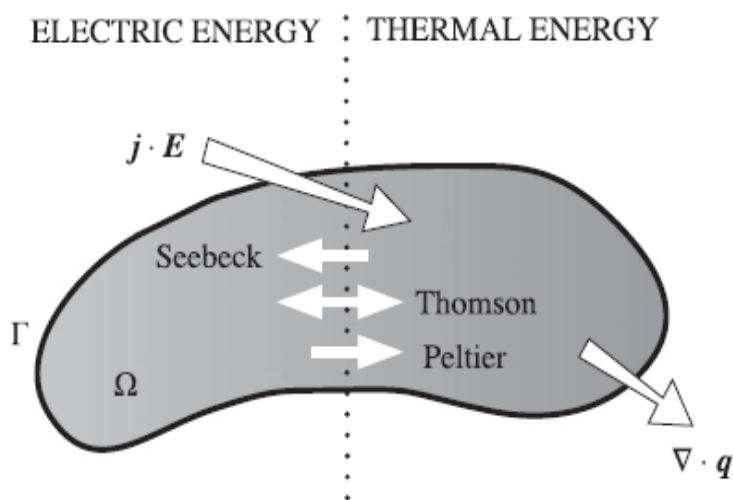
همچنین، معادله‌ی ساختاری تنش در رابطه (۲-۵) آورده شده است. در این رابطه، σ تنش و ε کرنش و ε_{Th} کرنش حرارتی می‌باشد.

$$\tilde{\sigma} = C (\tilde{\varepsilon} - \tilde{\varepsilon}^{Th}) \quad (5-2)$$

۳-۱-۲ مروری بر اثرات پایه‌ای ترموالکتریک

در این بخش به معرفی اثرات پایه‌ای در مواد ترموالکتریک به نام‌های سیبک، پلتیر و تامسون پرداخته می‌شود

شکل ۲-۱، تعادل انرژی در یک دامنه‌ی Ω را نشان می‌دهد که در آن سه اثر، کوپلینگ برگشت-پذیر (فلش داخل مرز) و شار گرمایی و الکتریکی برگشت ناپذیر (فلش در برخورد با مرز) مشاهده می‌شود.



شکل ۲-۱ تعادل انرژی در یک دامنه‌ی Ω . [۳۱]

سه اثر، کوپل برگشت‌پذیر (فلش داخل مرز) و شار گرمایی و الکتریکی برگشت ناپذیر (فلش در برخورد با مرز)

۳-۱-۲-۱ اثر سیبک

ایجاد یک نیروی الکترومغناطیسی Z_{EM} زمانی که توزیع دما T در داخل ماده ترموالکتریک تغییر می‌کند، به شکل رابطه‌ی (۲-۶) است که اثر سیبک نامیده می‌شود. [۳۲]

$$Z_{EM} = -\alpha \nabla T \Big|_{j=0} \quad (۲-۶)$$

این نیروی الکترومغناطیسی، باعث گرادیان ولتاژ شده [۴۰] به عبارت دیگر اثر سبیک وظیفه‌ی تبدیل انرژی گرمایی به انرژی الکتریکی را بر عهده دارد. اثر سبیک به‌طور معمول، برای اندازه‌گیری درجه حرارت با استفاده از ترموکوپل‌های پایه استفاده می‌شود.

۲-۳-۱-۲ اثر پلتیر

برای بررسی اثر پلتیر نیز توصیف مشابهی وجود دارد: بار الکتریکی می‌تواند نوعی انرژی حرارتی در جسم به وجود آورد که به قانون فوریه اضافه می‌شود [۴۰].

$$\mathbf{q} = \alpha T \mathbf{j} \quad (۷-۲)$$

به عبارت دیگر اثر پلتیر انرژی الکتریکی را به انرژی گرمایی تبدیل می‌کند.

۲-۳-۱-۳ اثر تامسون

اثر تامسون به درجه حرارت ضریب سبیک وابسته است.

طبق رابطه‌ی (۷-۲) شار گرمایی با تغییرات ضریب سبیک تغییر می‌کند، به‌ویژه در مواردی که این ضریب تابعی از تغییرات دما است، به‌طور کلی، ضریب تامسون t_h با رابطه‌ی (۸-۲) بیان می‌شود [۴۰].

$$t_h = T \left[\frac{\partial \alpha(T)}{\partial T} \right] \quad (۸-۲)$$

۴-۱-۲ چگالی جریان الکتریکی

چگالی جریان الکتریکی کمیتی است که وابسته به ابعاد ماده‌ی ترموالکتریک و میزان جریان الکتریکی عبوری از آن می‌باشد.

برای تمامی موارد مورد مطالعه در این پایان‌نامه، قطعات از جنس ترموالکتریک نوع P بیسموت-تلورید^۲ ساخته‌شده توسط شرکت ملکور^۳ [۲۱] می‌باشند. خواص ترموالکتریکی وابسته به دما در رابطه‌ی (۹-۲) [۳۱].

$$\begin{aligned}\alpha(T) &= 1.98 \times 10^{-4} + 3.35 \times 10^{-7} T - 7.52 \times 10^{-10} T^2 \\ \sigma(T) &= 1.09 \times 10^5 + 5.59 \times 10^2 T + 2.49 T^2 \\ \kappa(T) &= 1.66 - 3.58 \times 10^{-3} T + 3.19 \times 10^{-5} T^2\end{aligned}\quad (9-2)$$

که α ، σ و κ به ترتیب ضریب انبساط حرارتی، ضریب انتقال الکتریکی و ضریب انتقال حرارتی با واحدهای $[V/K]$ ، $[A/mV]$ و $[W/mK]$ می‌باشند. و همچنین مقادیر ظرفیت گرمایی C_p و چگالی ρ و ضریب انبساط حرارتی مستقل از دما به ترتیب برای ترموالکتریک نوع p (بیسموت-تلورید)

$$[J/KgK] \text{ و } 544 \text{ و } 7530 [Kg/m^3] \text{ و } 16/8 \times 10^{-6} [K^{-1}] \text{ می‌باشد}$$

مقدار چگالی جریان الکتریکی از رابطه‌ی (۱۰-۲) به دست می‌آید که در آن جریان الکتریکی (I) برحسب آمپر و مساحت (A) برحسب m^2 می‌باشد.

$$J = \frac{I}{A} \quad (10-2)$$

¹ P-type Thermolement (TE)

² Bismuth-telluried (Bi_2Te_3)

³ MELCOR

۲-۲ قانون‌های هدایت گرمایی

۱-۲-۲ مدل هدایت گرمایی فوریه

در هدایت گرمایی فوریه‌ای (قانون فوریه و تئوری کلاسیک ترموالاستیسیته)، شار گرمایی در یک محیط پیوسته و همسانگرد، با گرادیان دما متناسب است و ثابت این تناسب، ضریب هدایت گرمایی نام دارد. رابطه‌ی ساختاری شار گرمایی فوریه به صورت رابطه‌ی (۱۱-۲) بیان می‌شود.

$$q(x,t) = -k\nabla T(x,t) \quad (11-2)$$

۲-۲-۲ مدل هدایت گرمایی غیر فوریه‌ای کاتانو-ورنات

کاتانو [۴۱] و ورنات [۴۲]، یک مدل هذلولی برای شار گرمایی پیشنهاد کردند که در آن در نظر گرفتن یک‌زمان آسایش برای شار گرمایی τ_q منجر به سرعت محدود موج گرما می‌شود. رابطه‌ی (۲-۱۲)، رابطه‌ی ساختاری شار گرمایی مدل کاتانو-ورنات را نشان می‌دهد.

$$q(x,t+\tau_q) = -k\nabla T(x,t) \quad (12-2)$$

در مدل کاتانو-ورنات، رابطه‌ی هایپربولیک حاکم بر توزیع دما با جایگزینی بسط تیلور یک جمله‌ای رابطه‌ی ساختاری فوق در قانون اول ترموالکتریک (بقای انرژی) حاصل می‌شود.

۳-۲-۲ مدل هدایت گرمایی غیر فوریه‌ای تأخیر فاز دوگانه

تزو [۴۴]، [۴۳]، یک مدل هایپربولیک دو مرحله‌ای را برای لحاظ کردن برهم‌کنش میکرو ساختار ماده در فرآیندهای سریع انتقال گرما پیشنهاد کرد. در این مدل که مدل تأخیر فاز دوگانه نامیده می‌شود، رابطه‌ی ساختاری شار گرمایی از بسط تیلور دو جمله برای شار گرمایی q و یک جمله برای گرادیان دمای T ، حاصل می‌شود که به صورت رابطه‌ی (۲-۱۳) است.

$$q(x,t+\tau_q) = -k\nabla T(x,t+\tau_T) \quad (13-2)$$

در مدل تأخیر فاز دوگانه، دو زمان آسایش، یکی برای گرادیان دما و دیگری برای شار گرمایی معرفی شده است. مدل تأخیر فاز دوگانه منجر به معادله‌ی حاکم هایپربولیک بر مسئله می‌شود و تأیید می‌کند که موج گرمایی با سرعت محدود در جسم منتشر می‌شود. زمان آسایش گرادیان دما، تأخیر زمانی ناشی از برهم‌کنش میکرو ساختار (برهم‌کنش فوتون-الکترون و پراکنش فوتون‌ها) و زمان آسایش گرمایی، اثر اینرسی گرمایی را لحاظ می‌کند. نتایج آزمایش‌ها نشان می‌دهد مدل تأخیر فاز

دوگانه، رفتار واقعی ماده در انتقال گرمای سریع و یا در مقیاس میکرو را بهتر از مدل هایپربولیک بیان می‌کند.

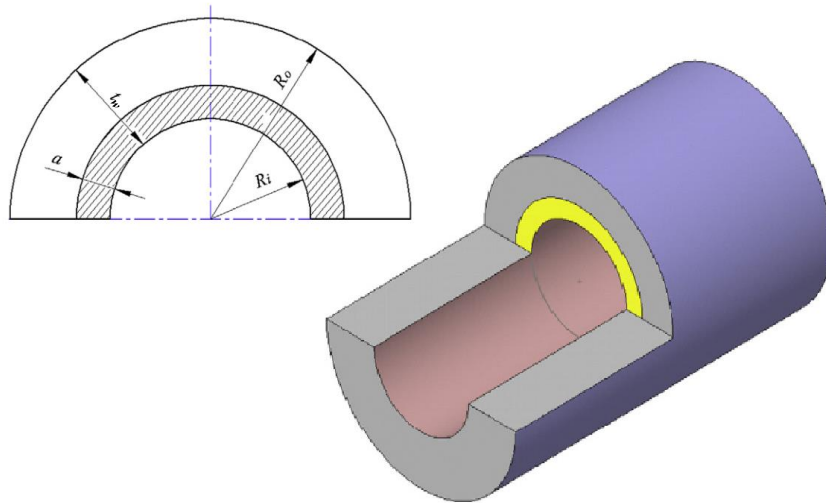
۲-۳ روش تابع وزنی

در این بخش، روش نیمه‌تحلیلی کارآمدی برای محاسبه‌ی ضریب شدت تنش در مسائل شامل ترک معرفی خواهد شد. با توجه به هندسه‌ی ترک، می‌توان ضریب K را برای بارگذاری‌های دلخواه همان ترک یافت. البته باید به این نکته توجه داشت که برای حل یک مسئله‌ی مقدار مرزی خاص، راه‌حل‌های مختلفی برای تحلیل ترک وجود دارد. راه حل پیشنهادی، استفاده از توابع وزنی ترک است [۴۵].

اکثر روش‌های موجود برای محاسبه‌ی ضریب شدت تنش، برای هر هندسه یا بارگذاری لازم است تحلیل شوند. باکتر [۴۶] و رایس [۴۷] روشی ساده و کارآمد برای تعیین ضریب شدت تنش ارائه کردند. در این روش، اثر بارگذاری و هندسه‌ی جسم روی ضریب شدت تنش از هم جدا می‌شود. به طوری که اگر تابع وزنی برای یک جسم حاوی ترک با هندسه‌ی معلوم در دسترس باشد، می‌توان ضریب شدت تنش را برای هر سیستم بارگذاری دلخواه دیگر در آن هندسه محاسبه کرد. اگر تابع وزنی $m(r, a)$ برای یک هندسه‌ی خاص معلوم باشد؛ ضریب شدت تنش K با انتگرال-گیری از حاصل ضرب توزیع تنش $\sigma(r)$ ، در هندسه‌ی بدون ترک و تابع وزنی روی سطح فرضی ترک تعیین می‌شود که در رابطه‌ی (۲-۱۴) آمده است.

$$K = \int_0^a m(r, a) \sigma(r) dr \quad (۲-۱۴)$$

کمیت‌های این رابطه، در شکل ۲-۲ نشان داده شده‌اند.



شکل ۲-۲ طرح یک ترک در استوانه [۴۸]

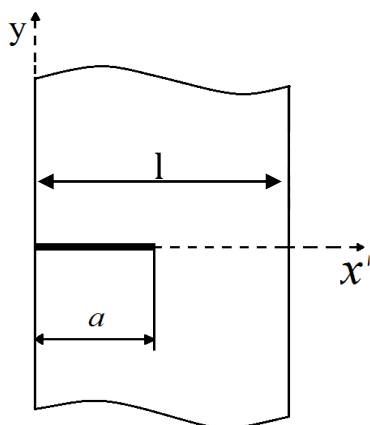
تسهیل محاسبه‌ی ضریب شدت تنش با استفاده از روش تابع وزنی، در نتیجه‌ی استفاده از اصل جمع آثار است. برای جسم دارای ترک، ضریب شدت تنش ناشی از بارگذاری خارجی و میدان تنش روی سطح ترک، یکسان هستند.

تاکنون تحقیقات زیادی در زمینه‌ی تعیین تابع وزنی برای هندسه‌ها و انواع مختلف ترک انجام شده است. از جمله انواع ترک، ترک‌های لبه‌ای و داخلی هستند که معمولاً با توجه به نوع بارگذاری در نقاط بحرانی سازه در نظر گرفته می‌شوند تا منجر به طراحی ایمن سازه شوند.

در ابتدا تابع وزنی بر اساس بازشدگی سطح ترک متناظر با بارگذاری‌های مرجع بیان شد [۴۸] که خود نیاز به حل تحلیلی مسئله دارد. برای حل این مشکل، روش‌های مختلفی از جمله تابع تقریبی بازشدگی سطح ترک [۴۹] و توابع وزنی تقریبی - معمولاً قابل کاربرد برای یک هندسه‌ی خاص - پیشنهاد شده است.

۲-۳-۱ تابع وزنی باریکه

در این بخش، تابع وزنی مربوط به باریکه‌ی دارای ترک لبه‌ای بیان می‌شود. برای این منظور، باریکه‌ای به عرض واحد با طول ترک a که از باریکه‌ی $x' = 0$ به سمت راست کشیده شده است، مطابق شکل ۲-۳ در نظر گرفته می‌شود.



شکل ۲-۳ شکل کلی باریکه‌ی دارای ترک لبه‌ای [۳۰]

با استفاده از رابطه‌ی (۱۵-۲)، ضریب شدت تنش مود I در باریکه تعیین می‌شود:

$$K_I = \int_0^a m(x, a) \sigma_y(x) dx \quad (15-2)$$

تابع وزنی پیشنهادی برای باریکه‌ی شامل ترک لبه‌ای [۵۰] به صورت رابطه‌ی (۱۶-۲) است.

$$m(x, a) = [2\pi(a-x)]^{-\frac{1}{2}} \left[1 + M_1 \left(\frac{a-x}{a} \right) + M_2 \left(\frac{a-x}{a} \right)^2 \right] \quad (16-2)$$

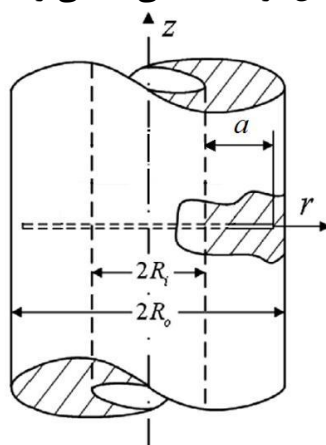
که در آن:

$$M_1 = 0.6174 + 17.1844a^2 + 8.7822a^6 \quad (17-2)$$

$$M_2 = 0.2502 + 3.2899a^2 + 70.0444a^6 \quad (18-2)$$

۲-۳-۲ تابع وزنی ترک محیطی داخلی

شکل ۲-۴، هندسه‌ی استوانه‌ی شامل ترک محیطی داخلی را نشان می‌دهد.



شکل ۲-۴ شکل کلی استوانه شامل ترک محیطی [۲۰]

تابع وزنی پیشنهادی گیلینکا و شن برای ترک محیطی در استوانه‌ی جدار ضخیم، به شکل رابطه‌ی

(۱۹-۲) است [۱۳].

$$m(r, a) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{1}{R_i + a - r}} + M_1 \sqrt{\frac{2}{\pi a}} \quad (19-2)$$

$$+ M_2 \sqrt{\frac{2}{\pi a}} \frac{1}{a} \sqrt{R_i + a - r} + M_3 \sqrt{\frac{2}{\pi a^3}} \sqrt{R_i + a - r}$$

که در آن، نوک ترک در $r = R_i + a$ قرار دارد و ثابت‌های M_i از صفر بودن مشتق دوم تابع وزنی در نوک ترک - که منجر به $M_2 = 3$ می‌شود- و دو بارگذاری مرجع تعیین می‌شوند. معادلات آن طبق روابط (۲۰-۲)، (۲۱-۲) و (۲۲-۲) می‌باشد.

$$M_1 = -\sqrt{2}\pi Y_1 + 3\sqrt{2}\pi Y_2 - \frac{24}{5} \quad (20-2)$$

$$M_2 = 3 \quad (21-2)$$

$$M_3 = 3\sqrt{2}\pi Y_1 - 6\sqrt{2}\pi \frac{t_w}{a} Y_2 + \frac{8}{5} \quad (22-2)$$

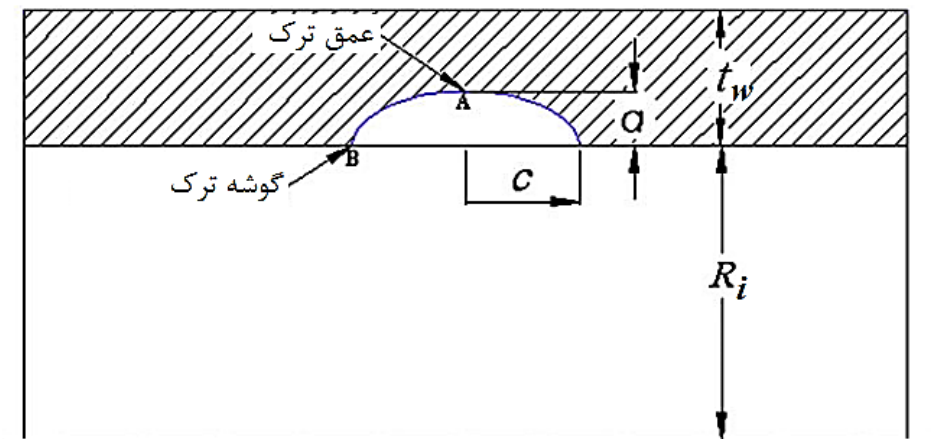
ضرایب Y_j نیز با توجه به نتایج المان محدود به شکل رابطه‌ی (۲۳-۲) بیان می‌شوند.

$$Y_j = \sum_{m=1}^5 \sum_{n=0}^{15} A_{jmn} (a/t_w)^{n-1} (R_o/R_i)^{m-1}, \quad j=1,2 \quad (23-2)$$

که ضرایب A_{jmn} در مرجع [۱۳] برای نسبت‌های $1.1 \leq R_o/R_i \leq 2$ ذکر شده‌اند.

۳-۳-۲ تابع وزنی ترک نیم بیضوی برای $R_o/R_i = 1.25$

در شکل ۲-۵، هندسه‌ی استوانه شامل ترک نیم بیضوی داخلی نشان داده شده است.



شکل ۲-۵ شکل کلی استوانه شامل ترک نیم بیضوی [۲۴]

در حالت بارگذاری یک بعدی شعاعی، تابع وزنی عمق ترک در مرجع [۲۴] به صورت رابطه‌ی (۲)-

(۲۴) پیشنهاد شده است.

$$m_A(r, a) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{1}{R_i + a - r}} + M_{A1} \sqrt{\frac{2}{\pi a}} \quad (24-2)$$

$$+ M_{A2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a} \sqrt{R_i + a - r} + M_{A3} \sqrt{\frac{2}{\pi a^3}} \sqrt{R_i + a - r}$$

که در آن $r = R_i + a$ ، موقعیت نوک ترک را بیان می‌کند. تابع وزنی گوشه‌های ترک نیم بیضوی در مرجع [۲۴] به شکل رابطه‌ی (۲۵-۲) پیشنهاد شده‌است.

$$m_B(r, a) = \sqrt{\frac{4}{\pi}} \sqrt{\frac{1}{r - R_i}} + M_{B1} \sqrt{\frac{4}{\pi a}} \quad (25-2)$$

$$+ M_{B2} \sqrt{\frac{4}{\pi}} \frac{1}{a} \sqrt{r - R_i} + M_{B3} \sqrt{\frac{4}{\pi a^3}} \sqrt{r - R_i}$$

فاکتور شکل ترک نیم بیضوی به صورت رابطه‌ی (۲۶-۲) بیان می‌شود.

$$Q = 1 + 1.464 \left(\frac{a}{c} \right)^{1.65} \quad (26-2)$$

برای نقطه‌ی عمق ترک نیم بیضوی ضرایب M_{Ai} ، به شکل مجموعه روابط (۲۷-۲) تا (۲۹-۲) بیان می‌شوند.

$$M_{A1} = \frac{2\pi}{\sqrt{2Q}} (Y_0 - 3Y_1) + \frac{24}{5} \quad (27-2)$$

$$M_{2A} = 3 \quad (28-2)$$

$$M_{3A} = \frac{6\pi}{\sqrt{2Q}} (2Y_1 - Y_0) - \frac{8}{5} \quad (29-2)$$

که در آن:

$$Y_0 = B_0 + B_1 \left(\frac{a}{t_w} \right) + B_2 \left(\frac{a}{t_w} \right)^2 + B_3 \left(\frac{a}{t_w} \right)^4 \quad (30-2)$$

$$Y_1 = A_0 + A_1 \left(\frac{a}{t_w} \right) + A_2 \left(\frac{a}{t_w} \right)^2 + A_3 \left(\frac{a}{t_w} \right)^4 \quad (31-2)$$

در مرجع [۲۴] ضرایب A_i و B_j ، به صورت توابع نمایی از $\left(\frac{a}{c} \right)$ بیان شده‌اند.

ثابت‌های M_{Bj} برای گوشه‌های ترک نیم بیضوی به شکل مجموعه روابط (۳۲-۲) تا (۳۴-۲) بیان می‌شوند.

$$M_{B1} = \frac{3\pi}{\sqrt{Q}} (2F_1 - 5F_0) - 8 \quad (32-2)$$

$$M_{B2} = \frac{15\pi}{\sqrt{Q}}(3F_1 - F_0) + 15 \quad (33-2)$$

$$M_{B1} = \frac{3\pi}{\sqrt{Q}}(3F_0 - 10F_1) - 8 \quad (34-2)$$

که در آن ضرایب تصحیح هندسه به شکل رابطه‌ی (۳۵-۲) و (۳۶-۲) - با استفاده از انطباق منحنی - بیان می‌شوند.

$$F_0 = \left[C_0 + C_1 \left(\frac{a}{t_w} \right) + C_2 \left(\frac{a}{t_w} \right)^2 + C_3 \left(\frac{a}{t_w} \right)^4 \right] \left(\frac{a}{c} \right) \quad (35-2)$$

$$F_1 = \left[D_0 + D_1 \left(\frac{a}{t_w} \right) + D_2 \left(\frac{a}{t_w} \right)^2 + D_3 \left(\frac{a}{t_w} \right)^4 \right] \left(\frac{a}{c} \right) \quad (36-2)$$

ضرایب C_i و D_i در مرجع [۲۴]، به صورت توابع چندجمله‌ای معرفی شده‌اند.

۴-۳-۲ تابع وزنی ترک نیم بیضوی برای $R_o/R_i = 2$

تابع وزنی برای عمیق‌ترین نقطه‌ی یک ترک نیم بیضوی در راستای طولی استوانه به صورت رابطه‌ی (۳۷-۲) است [۵۱].

$$m_A(r, a) = \frac{2}{\sqrt{2\pi(a-r)}} \left[1 + M_{1A} \left(1 - \frac{r}{a} \right)^{\frac{1}{2}} + M_{2A} \left(1 - \frac{r}{a} \right) + M_{3A} \left(1 - \frac{r}{a} \right)^{\frac{3}{2}} \right] \quad (37-2)$$

تابع وزنی برای گوشه‌های یک ترک نیم بیضوی در راستای طولی استوانه نیز به صورت رابطه‌ی (۳۸) ارائه شده است.

$$m_B(r, a) = \frac{2}{\sqrt{\pi r}} \left[1 + M_{1B} \left(\frac{r}{a} \right)^{\frac{1}{2}} + M_{2B} \left(\frac{r}{a} \right) + M_{3B} \left(\frac{r}{a} \right)^{\frac{3}{2}} \right] \quad (38-2)$$

فاکتور شکل ترک نیم بیضوی Q ، با استفاده از رابطه‌ی (۳۹-۲) تقریب زده می‌شود.

$$Q = 1 + 1.464 \left(\frac{a}{c} \right)^{1.65} \quad (39-2)$$

ثابت‌های مجهول M_{iA} ($i=1,2,3$) با در نظر گرفتن دو بارگذاری مرجع (روابط (۴۰-۲) تا (۴۲-۲))

و شرط صفر بودن مشتق دوم تابع وزنی در دهانه‌ی ترک $r = R_i$ برای نقطه‌ی عمق ترک تعیین می‌شوند [۵۱].

$$M_{1A} = \frac{2\pi}{\sqrt{2Q}}(3Y_1 - Y_0) - \frac{24}{5} \quad (40-2)$$

$$M_{2A} = 3 \quad (41-2)$$

$$M_{3A} = \frac{6\pi}{\sqrt{2Q}}(Y_0 - 2Y_1) + \frac{8}{5} \quad (42-2)$$

ضرایب تصحیح هندسه‌ی Y_1 و Y_0 به صورت توابعی از a/t و a/c به صورت روابط (۴۳-۲) و (۴۲-۲) تعریف می‌شوند.

$$Y_0 = B_0 + B_1 \left(\frac{a}{t_w}\right) + B_2 \left(\frac{a}{t_w}\right)^2 + B_3 \left(\frac{a}{t_w}\right)^4 \quad (43-2)$$

$$Y_1 = A_0 + A_1 \left(\frac{a}{t_w}\right) + A_2 \left(\frac{a}{t_w}\right)^2 + A_3 \left(\frac{a}{t_w}\right)^4 \quad (44-2)$$

ضرایب ثابت B_i و A_i به صورت چند جمله‌هایی از a/c در مرجع [۵۱] ذکر شده است.

برای گوشه‌های ترک نیم بیضوی، ضرایب مجهول M_{iB} ($i=1,2,3$) از روابط (۴۵-۲) تا (۴۷-۲) با در نظر گرفتن دو بارگذاری مرجع و شرط صفر بودن تابع وزنی در نوک ترک به دست می‌آیند.

$$M_{1B} = \frac{3\pi}{\sqrt{Q}}(2F_0 - 5F_1) - 8 \quad (45-2)$$

$$M_{2B} = \frac{15\pi}{\sqrt{Q}}(3F_1 - F_0) + 15 \quad (46-2)$$

$$M_{3B} = \frac{3\pi}{\sqrt{Q}}(3F_0 - 10F_1) - 8 \quad (47-2)$$

که در آن، F_1 و F_0 ضرایب تصحیح هندسه به صورت توابعی از a/t و a/c به شکل رابطه‌های (۴۸) و (۴۹) می‌باشند.

$$F_0 = \left[C_0 + C_1 \left(\frac{a}{t}\right) + C_2 \left(\frac{a}{t}\right)^2 + C_3 \left(\frac{a}{t}\right)^4 \right] \left(\frac{a}{c}\right) \quad (48-2)$$

$$F_1 = \left[D_0 + D_1 \left(\frac{a}{t}\right) + D_2 \left(\frac{a}{t}\right)^2 + D_3 \left(\frac{a}{t}\right)^4 \right] \left(\frac{a}{c}\right) \quad (49-2)$$

ضرایب ثابت D_i و C_i به صورت چند جمله‌هایی از a/c در مرجع [۵۱] ذکر شده است.

۴-۲ تبدیل لاپلاس معکوس عددی

در علوم مهندسی جهت حل بسیاری از معادلات دیفرانسیل و انتگرالی از روش تبدیل لاپلاس استفاده می‌شود. یکی از مشکلات رایج در استفاده از این روش تبدیل معکوس آن است که به صورت عمومی امکان‌پذیر نیست. از این رو روش‌های تبدیل لاپلاس معکوس به صورت تقریبی یا عددی پیشنهاد شده است. تقریب سری‌های فوریه یکی از رایج‌ترین این روش‌هاست که به علت سادگی و دقت بالا پرکاربرد است. دانبر و ابیت [۵۲]، در زمینه‌ی سری‌های فوریه مطالعاتی انجام دادند، دورباین [۵۳] نیز در راستای این تحقیقات، به بهبود این روش پرداخت.

به منظور افزایش سرعت همگرایی سری‌های فوریه، از روش‌های شتاب‌دهی مختلفی استفاده می‌شود که برخی از آن‌ها منجر به کاهش قابل ملاحظه‌ی خطای انباشتگی می‌شوند؛ اما اثربخشی آن به انتخاب کمیت‌های ارائه شده در روش وابسته است. همچنین، وابستگی خطاهای گسسته سازی و انباشتگی از معایب دیگر این روش است. هانیگ و هیردس [۵۴] جهت رفع این مشکل روشی ارائه کرده‌اند که در آن خطای گسسته سازی می‌تواند بدون افزایش خطای انباشتگی، کمینه شود. البته دقت این روش نیز به انتخاب کمیت‌های آزاد بستگی دارد.

در این مطالعه برای تبدیل معکوس لاپلاس از روش دورباین^۱ استفاده شده که تبدیل لاپلاس تابع حقیقی $f(t)$ و معکوس آن به صورت روابط (۵۰-۲) و (۵۱-۲) بیان می‌شوند:

$$\tilde{f}(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (50-2)$$

$$f(t) = L^{-1}\{\tilde{f}(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{v-i\infty}^{v+i\infty} \tilde{f}(s) e^{st} ds \quad (51-2)$$

در این روابط s متغیر استاندارد تبدیل لاپلاس است که به شکل مختلط $s = v + iw$ است. s باید برای تابع $\tilde{f}(s)$ به گونه‌ای انتخاب شود که v از قسمت حقیقی تمام تکین‌های تابع $\tilde{f}(s)$ بزرگ‌تر باشد. برای محاسبه‌ی معکوس عددی تبدیل لاپلاس، رابطه‌ی (۵۱-۲) به شکل زیر بیان می‌شود.

$$f(t) = \frac{e^{vt}}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\operatorname{Re}\{\tilde{f}(s)\} \cos wt - \operatorname{Im}\{\tilde{f}(s)\} \sin wt \right] dw \quad (52-2)$$

¹ Durbin Method

با استفاده از رابطه‌ی (۵۲-۲) و بسط سری فوریه‌ی $h(t) = e^{-\nu t} f(t)$ در بازه‌ی $[0, 2T]$ ، یک رابطه‌ی تقریبی به صورت (۵۳-۲) به دست می‌آید.

$$f(t) = \frac{e^{\nu t}}{\pi} \left[-\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \tilde{f}(s) \right\} + \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ \tilde{f} \left(\nu + i \frac{n\pi}{T} \right) \right\} \cos \frac{n\pi}{T} t \right. \\ \left. - \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im} \left\{ \tilde{f} \left(\nu + i \frac{n\pi}{T} \right) \right\} \sin \frac{n\pi}{T} t \right] - \operatorname{Er1}(\nu, t, T) \quad (53-2)$$

$\operatorname{Er1}(\nu, t, T)$ خطای گسسته سازی نام دارد که به شکل رابطه‌ی (۵۴-۲) بیان می‌شود.

$$\operatorname{Er1}(\nu, t, T) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n\nu T} f(2nT + t) \quad (54-2)$$

با توجه به رابطه‌ی (۵۴-۲) مشاهده می‌شود که خطای گسسته سازی می‌تواند با انتخاب ν به اندازه‌ی کافی بزرگ، کاهش یابد.

رابطه‌ی (۵۳-۲) به عنوان یک سری بی نهایت می‌تواند تنها به تعداد محدود N جمله خلاصه شود.

که خطای انباشتگی به صورت رابطه‌ی (۵۵-۲) بیان می‌شود.

$$\operatorname{Er2}(N, \nu, t, T) = \frac{e^{\nu t}}{T} \left[\sum_{n=N+1}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ \tilde{f} \left(\nu + i \frac{n\pi}{T} \right) \right\} \cos \frac{n\pi}{T} t \right. \\ \left. - \sum_{n=N+1}^{\infty} \operatorname{Im} \left\{ \tilde{f} \left(\nu + i \frac{n\pi}{T} \right) \right\} \sin \frac{n\pi}{T} t \right] \quad (55-2)$$

بنابراین تخمین مقادیر $f(t)$ به صورت رابطه‌ی (۵۶-۲) خواهد بود.

$$f_N(t) = \frac{e^{\nu t}}{T} \left[-\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ F(\nu) \right\} \right. \\ \left. + \sum_{n=0}^N \left\{ \operatorname{Re} \left\{ F \left(\nu + i \frac{n\pi}{T} \right) \right\} \cos \frac{n\pi}{T} t - \operatorname{Im} \left\{ F \left(\nu + i \frac{n\pi}{T} \right) \right\} \sin \frac{n\pi}{T} t \right\} \right] \quad (56-2)$$

فصل ۳

باریکه شامل ترک لبه‌ای

۳-۱ مقدمه

در این فصل، تحقیقات در هندسه‌ی باریکه صورت می‌گیرد و اثر کمیت‌های مختلفی از جمله ضریب ژول، اثر تامسون و اثر ولتاژ در تئوری‌های مختلف فوریه، کاتانو-ورنات و همچنین تأخیر فاز دوگانه در مواد ترموالکتریک مورد بررسی قرار می‌گیرند.

۳-۲ تحلیل باریکه‌ی شامل ترک لبه‌ای

۳-۲-۱ مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات

برای محاسبه‌ی میدان دما در باریکه به روابط ساختاری (۲-۱۲) و (۲-۱) و همچنین معادله‌ی بقای انرژی یا همان قانون اول ترمودینامیک یعنی رابطه‌ی (۲-۲) به‌عنوان روابط حاکم نیاز است که در فصل اول آورده شده‌اند.

طبق معادلات حاکم بیان شده، معادله‌ی حاکم بر دما در یک باریکه‌ی ترموالکتریک به‌صورت رابطه‌ی (۳-۱) می‌باشد [۵۵].

$$\tau_q \rho C_p \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T + \frac{J^2}{\sigma} - t_h \nabla T - \tau_q \frac{\partial}{\partial t} \{ J \cdot \nabla V \} \quad (۳-۱)$$

که در آن عبارت اول از سمت چپ مربوط به توزیع دمای هایپربولیک بوده و در سمت راست رابطه، عبارت اول، دوم و سوم به ترتیب به هدایت گرمایی فوریه، اثر ژول و اثر تامسون اشاره دارد و جمله‌ی آخر نیز مربوط به مدل گرمایی هایپربولیک کاتانو-ورنات می‌باشد.

در این رابطه، τ_q ، ρ ، C_p ، κ ، σ ، J به ترتیب زمان آسایش شار حرارتی، چگالی، ظرفیت گرمایی در فشار ثابت، ضریب انتقال حرارتی و ضریب انتقال الکتریکی و چگالی جریان الکتریکی می‌باشند. t_h نیز مربوط به اثر تامسون است که در رابطه‌ی (۲-۸) آمده است. باید توجه داشت در این رابطه، ابتدا از α نسبت به T مشتق گرفته و سپس دمای میانگین (T_m) را به ازای تمام T های رابطه‌ی (۲-۸) جایگذاری شود. مقدار T_m نیز از رابطه‌ی (۳-۲) به دست می‌آید. در این رابطه، T_h دمای گرم‌تر و T_c دمای سردتر باریکه‌ی ترموالکتریک است.

$$T_m = \frac{(T_h + T_c)}{2} \quad (۳-۲)$$

همچنین ∇V طبق رابطه‌ی (۳-۳) محاسبه می‌شود [۳۱]:

$$\nabla V = -\alpha(T) \nabla T - \frac{\mathbf{j}}{\sigma(T)} \quad (3-3)$$

که در روابط بالا، مقادیر مربوط به α ، σ و κ ، در رابطه‌ی (۲-۹) از فصل دوم آمده است.

پس از بسط رابطه‌ی (۳-۱)، می‌توان آن را به صورت رابطه‌ی (۳-۴) بازنویسی کرد.

$$\kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{J^2}{\sigma} + t_h J \frac{\partial T}{\partial x} + \tau_q \frac{\partial}{\partial t} \left(J \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \tau_q \rho C_p \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \quad (3-4)$$

برای ساده‌سازی رابطه‌ی (۳-۴)، کمیت‌های بی‌بعد طبق مرجع [۳۱] به صورت مجموعه روابط (۳-۳)

(۵) تعریف می‌شوند:

$$X = \frac{x}{L} \quad (5-3)$$

$$\tau = \frac{t \kappa}{\rho c_p L^2}$$

که در آن، طول با بعد x و ضخامت دیواره با L مشخص شده‌اند. طول و زمان بی‌بعد نیز به ترتیب

با نمادهای X و τ نشان داده شده‌اند.

رابطه‌ی (۳-۴) بعد از بی‌بعد سازی به شکل رابطه‌ی (۳-۶) بازنویسی خواهد شد.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + F_1 \frac{\partial T}{\partial X} + F_2 - \frac{\partial T}{\partial \tau} - \tau_q F_3 \frac{\partial^2 T}{\partial \tau^2} + \tau_q F_4 \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ F_2 \frac{A \kappa}{L^2} - \frac{\alpha \kappa A}{t_h L^2} F_1 \frac{\partial T}{\partial X} \right\} = 0 \quad (3-6)$$

که در آن:

$$F_1 = \frac{-t_h I L}{\kappa A}$$

$$F_2 = \frac{I^2 L^2}{\kappa \sigma A^2}$$

$$F_3 = \frac{\kappa}{\rho c L^2}$$

$$F_4 = \frac{1}{\rho c A} \quad (3-7)$$

به منظور صحت‌سنجی شرایط مرزی و اولیه طبق مرجع [۳۱]، به صورت مجموعه روابط (۳-۸) در

نظر گرفته شده‌اند.

$$\begin{aligned} T(0, t) &= T_{wi} = 50^\circ C \\ T(L, t) &= T_{wo} = 30^\circ C \\ T(x, 0) &= 0^\circ C \\ \frac{\partial T}{\partial t}(x, 0) &= 0 \end{aligned} \quad (8-3)$$

که صورت بی بعد شده‌ی شرایط مرزی و اولیه در رابطه‌ی (۹-۳) آورده شده است:

$$\begin{aligned} T(0, \tau) &= T_{wi} = 50^\circ \\ T(1, \tau) &= T_{wo} = 30^\circ \\ T(X, 0) &= 0^\circ C \\ \frac{\partial T}{\partial \tau}(X, 0) &= 0 \end{aligned} \quad (9-3)$$

حال، رابطه‌ی (۷-۳) و شرایط مرزی (۹-۳) به فضای لاپلاس انتقال داده می‌شود و به صورت رابطه‌ی (۱۰-۳) و (۱۱-۳) بازنویسی می‌شود.

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial X} + F_1 \frac{\partial \tilde{T}}{\partial X} + F_2 + s\tilde{T} - s^2 F_3 \tilde{T} + \tau F_4 s \left[F_2 \frac{Ak}{L^2} - \frac{\alpha k A}{t_h L^2} F_1 \frac{\partial \tilde{T}}{\partial X} \right] = 0 \quad (10-3)$$

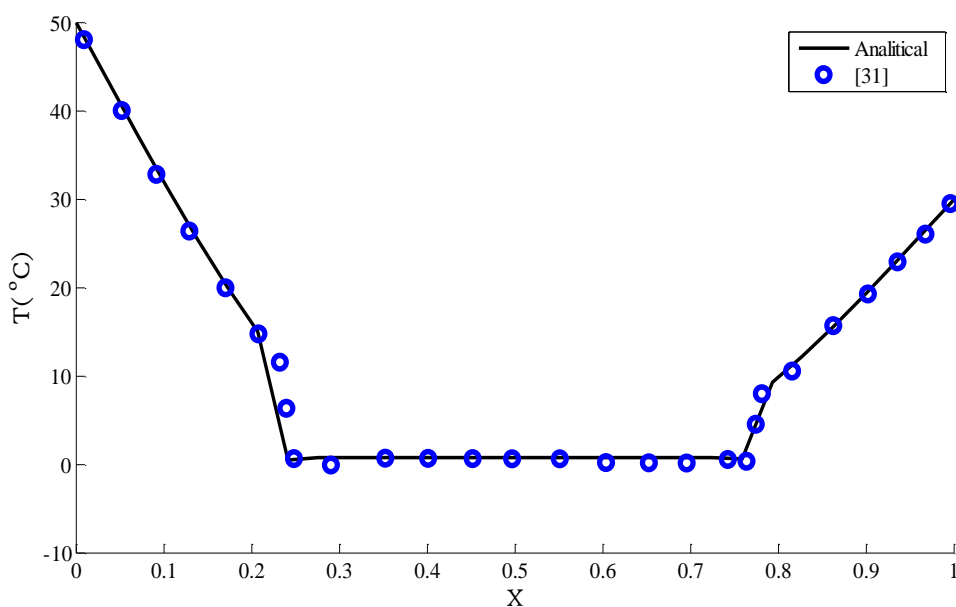
$$\begin{aligned} T(0, s) &= \frac{T_{wi}}{s} = \frac{50}{s} \\ T(1, s) &= \frac{T_{wo}}{s} = \frac{30}{s} \end{aligned} \quad (11-3)$$

به منظور مقایسه نتایج با مرجع [۳۱]، از ابعاد بیان شده در این مرجع استفاده شده که L در آن 1.14 mm و ابعاد کلی باریکه‌ی ترموالکتریک $1.4 \times 1.4 \times 1.14 \text{ mm}^3$ است. همچنین، در این مرجع، مقدار شدت جریان 5.7 A بوده و مقدار مساحت برابر با $A = 1.4 \times 1.4 \times 10^{-6} \text{ mm}^2$ می‌باشد، در نتیجه مقدار چگالی جریان الکتریکی طبق رابطه‌ی (۱۰-۲) از فصل دوم برابر است با

$$J = 2.56 \times 10^{-6} \text{ A/m}^2$$

مرجع [۳۱]، از روش نیمه تحلیلی برای حل معادلات مشتق جزئی مربوط به توزیع دما و تنش استفاده کرده است. به عبارت دیگر در ابتدا معادله‌ی مشتق جزئی مربوطه را به فضای لاپلاس برده شده و پس از حل با استفاده از تقریب‌های سری فوریه به صورت عددی از آن معکوس گرفته شده است.

شکل ۳-۱، توزیع دمای محاسبه شده با نتایج مرجع [۳۱]، مقایسه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود نتایج از انطباق قابل قبولی برخوردار می‌باشد.

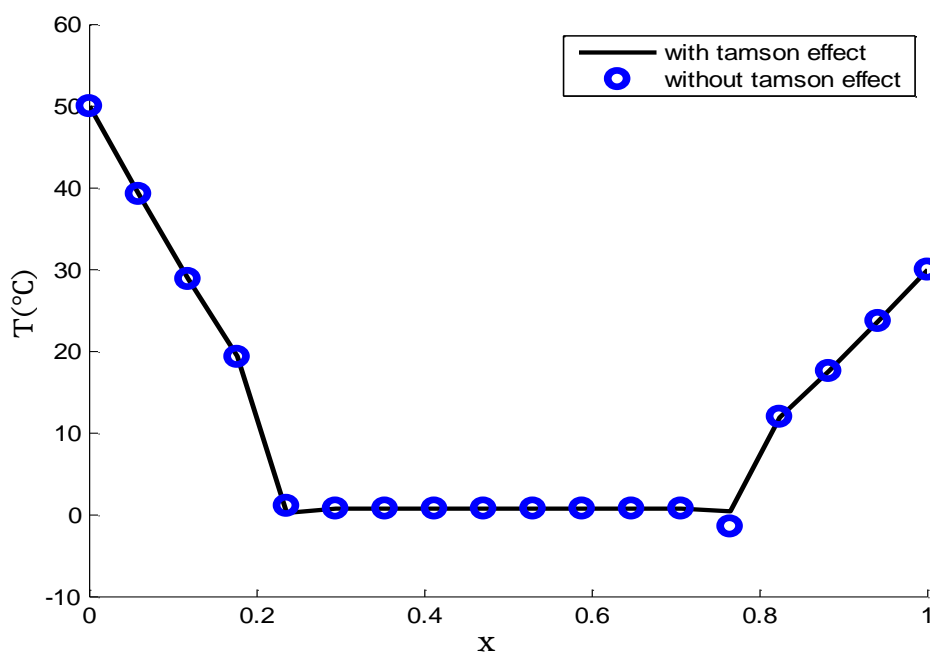


شکل ۳-۱ مقایسه‌ی توزیع دمای روش نیمه‌تحلیلی با مرجع [۳۱] در $\tau = 0.071$

همان‌طور که مشاهده می‌شود در شکل ۳-۱ موج گرما در مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات از هر دو طرف شروع به حرکت کرده و به سمت داخل پیش می‌رود. در این شکل سرعت محدود موج گرما در زمان‌های ابتدایی به خوبی قابل مشاهده است. این نمودار در زمان بی بعد 0.071 رسم شده است. همچنین می‌توان دریافت، در نقاطی که موج گرما عبور کرده دما در سمت راست و سمت چپ تحت تأثیر شرایط مرزی اعمالی است. ولی در سایر نقاط مقدار دما، طبق شرایط اولیه‌ی (۳-۹) همچنان صفر می‌باشد.

شکل ۳-۲، نتایج را در حضور و عدم حضور اثر تامسون مقایسه کرده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود حضور اثر تامسون در این مطالعه تأثیر چندانی ندارد و هر دو نمودار یکدیگر را پوشش داده‌اند.

و در ادامه از بررسی اثر این صرف نظر می‌شود.



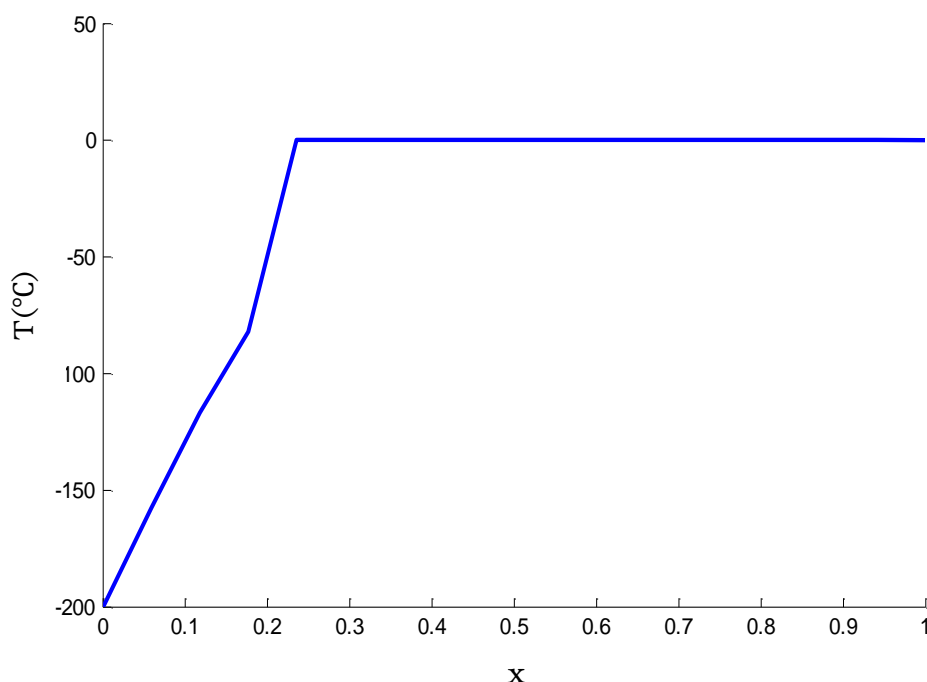
شکل ۳-۲ توزیع دمای مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات در حضور و عدم حضور اثر تامسون

در ادامه، شرایط مرزی مورد مطالعه عبارت است از:

$$T(0,s) = \frac{T_{wi}}{s} = \frac{-200}{s} \quad (12-3)$$

$$T(1,s) = \frac{T_{wo}}{s} = 0$$

در شکل ۳-۳ مشابه شکل ۱-۳ مشاهده می‌شود موج گرما از دیواره‌ی داخلی به سمت دیواره‌ی خارجی شروع به حرکت کرده است. همان‌طور که شرایط مرزی (۱۲-۳) بیان می‌کند، دما در دیواره‌ی داخلی مقدار با بعد ۲۰۰- درجه‌ی سانتی‌گراد و در دیواره‌ی خارجی صفر انتخاب شده است. لازم به ذکر است این نمودار در زمان با بعد ۰/۰۲ ثانیه رسم شده است.

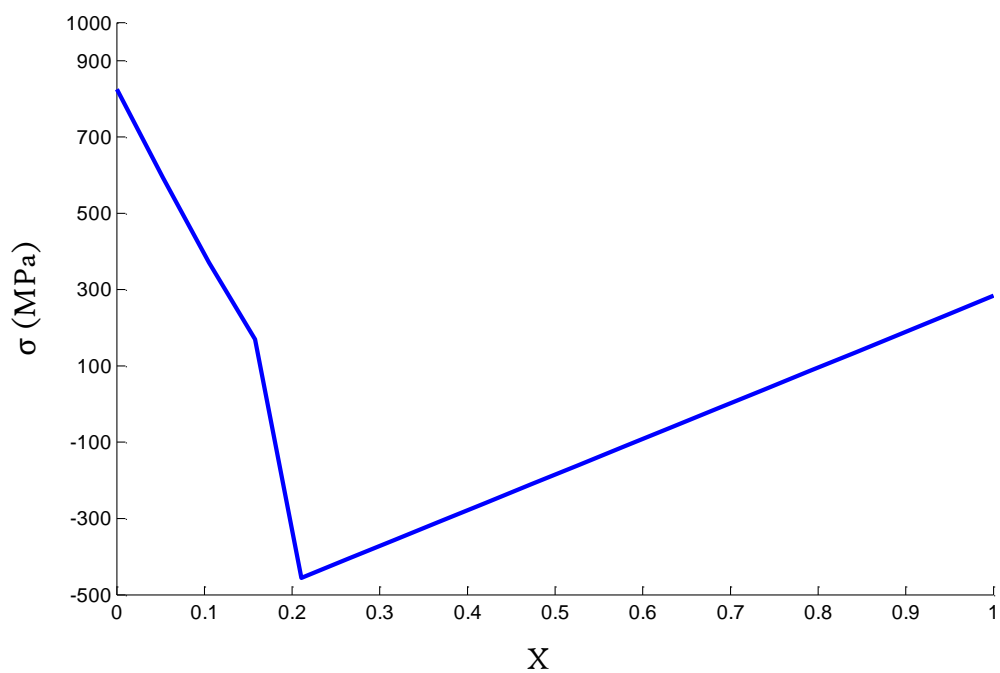


شکل ۳-۳ توزیع دمای مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات با در نظر گرفتن شرایط مرزی مورد مطالعه

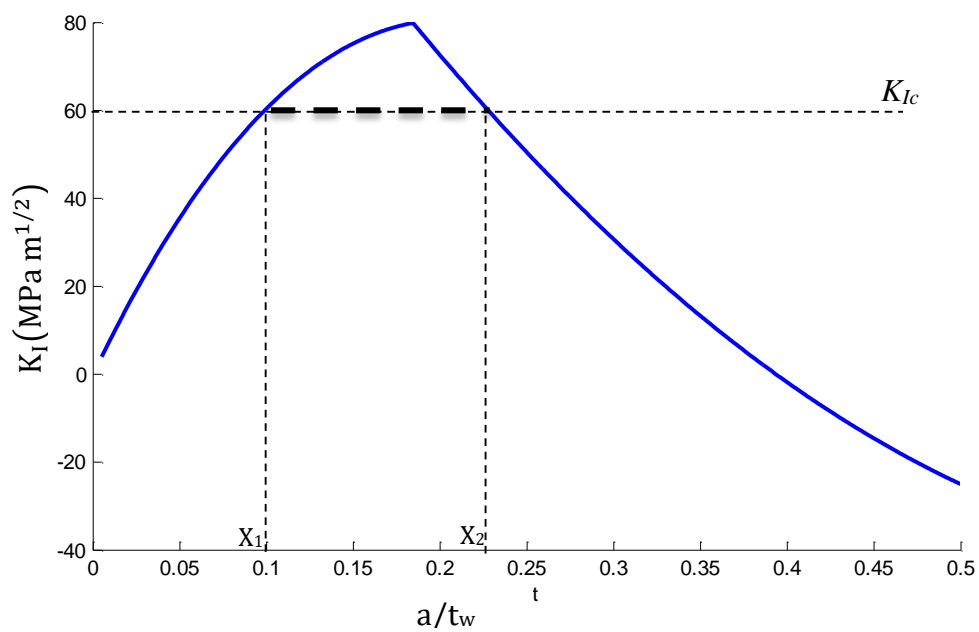
شکل ۳-۴ نیز توزیع تنش مربوط به مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات را با در نظر گرفتن شرایط مرزی مورد مطالعه نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود پیشانی موج در بازه‌ی طول بی‌بعد ۰/۱۵ تا ۰/۲ قرار دارد.

در نقاط ابتدایی باریکه، تنش از نوع کششی بوده و رفته‌رفته به صفر می‌رسد و در ادامه تا کمینه نمودار در محدوده‌ی فشاری کاهش می‌یابد و تا انتهای نمودار روند کاهش ادامه می‌یابد تا اینکه در نهایت نمودار در ناحیه‌ی تنش کششی به اتمام می‌رسد. این نمودار در زمان ۰/۰۴ ثانیه ترسیم شده است.

در شکل ۳-۵، ضریب شدت تنش برای یک ترک لبه‌ای رسم شده است. بیشینه‌ی این نمودار، در محدوده‌ی ۰/۱۵ تا ۰/۲ واقع شده است. همچنین، اگر ضریب شدت تنش بحرانی مقدار $K_{Ic} = 6 \times 10^7 \text{ (Pa}\sqrt{m})$ باشد، در زمان ۰/۰۴ ثانیه که همان زمان ترسیم نمودار می‌باشد، طول ترک‌هایی که طول اولیه‌ی آن‌ها در محدوده‌ی $[X_1 \quad X_2]$ قرار دارند، افزایش خواهد یافت و همچنین طول ترک با طول اولیه‌ی ۰/۱ به مقدار ۰/۲۲ افزایش می‌یابد.



شکل ۳-۴ توزیع تنش مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات با در نظر گرفتن شرایط مرزی مورد مطالعه



شکل ۳-۵ ضریب شدت تنش ترک لبه‌ای با در نظر گرفتن شرایط مرزی مورد مطالعه

۲-۲-۳ مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه

همان‌طور که در فصل دوم بیان شد، معادله‌ی ساختاری مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه به صورت رابطه‌ی (۱۳-۳) می‌باشد که با در نظر گرفتن دو جمله از بسط تیلور q و یک جمله از بسط تیلور دما، رابطه‌ی توزیع دمای مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه به دست می‌آید که منجر به سرعت محدود موج گرما می‌شود.

$$q(x, t + \tau_q) = -k \nabla T(x, t + \tau_T) \quad (13-3)$$

با جایگذاری این رابطه در معادله‌ی حاکم (۲-۲)، معادله‌ی حاکم بر دما به صورت رابطه‌ی (۱۴-۳) می‌شود.

$$\left(1 + \tau_q \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\tau_q^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \left(\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{J^2}{\sigma}\right) = \nabla \cdot \left(K \left(1 + \tau_T \frac{\partial}{\partial t}\right) \nabla T\right) \quad (14-3)$$

در این رابطه، با در نظر گرفتن بسط تیلور یک جمله‌ای برای τ_q و با فرض $\tau_T = 0$ می‌توان به معادله‌ی هدایت گرمایی کاتانو-ورنات یا همان هایپربولیک رسید. همچنین اگر مقدار τ_q و τ_T برابر صفر قرار داده شود به مدل هدایت گرمایی فوریه تبدیل خواهد شد.

شرایط مرزی و اولیه به صورت رابطه‌ی (۱۵-۳) در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{aligned} T(0, t) &= T_{wi} = 0^\circ C \\ T(L, t) &= T_{wo} = 200^\circ C \\ T(x, 0) &= 0^\circ C \\ \frac{\partial T}{\partial t}(x, 0) &= 0 \\ \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}(x, 0) &= 0 \end{aligned} \quad (15-3)$$

برای ساده‌سازی رابطه‌ی (۱۴-۳)، کمیت‌های بی‌بعد، به صورت مجموعه روابط (۱۶-۳) تعریف می‌-

شوند:

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{kt}{C_v l^2} \\ \varepsilon &= \frac{k \tau_q}{C_v l^2} \\ \theta &= \frac{T - T_\infty}{T_1 - T_\infty} \\ X &= \frac{x}{l} \\ \delta &= \frac{k \tau_T}{C_v l^2}\end{aligned}\tag{۱۶-۳}$$

که در آن τ ، ε ، θ ، X و δ به ترتیب معرف پارامترهای بی‌بعد زمان، زمان آسایش شار حرارتی، دما، طول و زمان آسایش گرادیان دما می‌باشند.

رابطه‌ی (۱۴-۳) و شرایط مرزی (۱۵-۳) بعد از بی‌بعد سازی به شکل روابط (۱۷-۳) و (۱۸-۳) درخواهند آمد.

$$\left(1 + \delta \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{j^2 L^2}{k T_{wo} \sigma} = \frac{\partial \theta}{\partial t} \left(1 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right) \theta\tag{۱۷-۳}$$

$$\begin{aligned}\theta(0, \tau) &= 0 \\ \theta(1, \tau) &= 1\end{aligned}\tag{۱۸-۳}$$

اگر $\tilde{\theta}$ تبدیل θ در فضای لاپلاس باشد، معادله‌ی (۱۷-۳) و شرایط مرزی (۱۸-۳) در فضای لاپلاس به صورت رابطه‌ی (۱۹-۳) و (۲۰-۳) بازنویسی می‌شوند.

$$(1 + \delta s) \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial X^2} - s(1 + \varepsilon s + \frac{\varepsilon^2}{2} s^2) \tilde{\theta} = -\frac{j^2 L^2}{sk T_{wo} \sigma}\tag{۱۹-۳}$$

$$\begin{aligned}T(0, s) &= 0 \\ T(1, s) &= \frac{1}{s}\end{aligned}\tag{۲۰-۳}$$

معادله دیفرانسیل معمولی^۱ (۱۹-۳) به صورت رابطه‌ی (۲۱-۳) ساده می‌شود:

$$\frac{d^2 \tilde{\theta}}{dX^2} - B \tilde{\theta} = -\frac{j^2 L^2}{sk T_{wo} \sigma (1 + \delta s)}\tag{۲۱-۳}$$

که در آن:

^۱ Ordinary Differential Equation (ODE)

$$B = \frac{s(1 + \varepsilon s + \frac{\varepsilon^2}{2} s^2)}{1 + \delta s} \quad (22-3)$$

معادله دیفرانسیل نمایی (۲۱-۳)، دارای پاسخی به صورت رابطه‌ی (۲۳-۳) است.

$$T = A_1 e^{\sqrt{E}} + A_2 e^{-\sqrt{E}} + \frac{2j^2 L^2}{s^2 k T_{wo} \sigma (2 + 2\varepsilon s + \varepsilon^2 s^2)} \quad (23-3)$$

که در آن A_1 و A_2 از شرایط مرزی (۱۵-۳) بدست می‌آیند.

در رابطه‌ی (۱۹-۳) مقدار زمان‌های آسایش گرادیان دما و زمان آسایش شار گرمایی برابر است با

[۳۰]:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 1 \\ \delta &= 0.5 \end{aligned} \quad (24-3)$$

طبق مقادیر (۲۴-۳)، سرعت موج گرما در مدل‌های هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه و کاتانو-

ورنات به ترتیب برابر است با [۳۰]:

$$\begin{aligned} C_{DPL} &= \frac{\sqrt{2\delta}}{\varepsilon} = 1 \\ C_{CV} &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} = 1 \end{aligned} \quad (25-3)$$

۳-۳ محاسبه‌ی چگالی جریان الکتریکی

همان‌طور که در فصل قبل بیان شد، چگالی جریان الکتریکی بین دو سطح سرد و گرم محاسبه

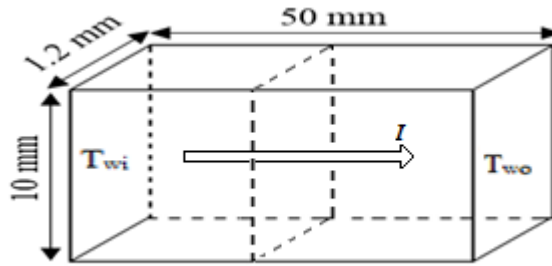
می‌شود. ابعاد مربوط به باریکه‌ی گذرنده‌ی جریان الکتریکی همان‌طور که در شکل ۳-۶ مشاهده می-

شود، دارای ضخامت 50mm ، ارتفاع 10mm و عرض 1.2mm می‌باشد که مساحت آن 12mm^2 می-

باشد. در مرجع [۳۲]، مقدار جریان 1.7A و 5.7A گزارش شده است. از آنجایی که در این مرجع، دو

مقدار برای جریان گزارش شده پس دو مقدار هم برای چگالی جریان (J) وجود دارد که مقادیر آن‌ها

به ترتیب $1.41 \times 10^5 \text{ A/m}^2$ و $4.57 \times 10^5 \text{ A/m}^2$ به دست می‌آید.



شکل ۳-۶ چگونگی محاسبه‌ی چگالی جریان الکتریکی

۳-۴ روابط توزیع دما و تنش

برای صحت‌سنجی، در رابطه‌ی (۳-۱۴) مقادیر $\tau_T = \tau_q = 0$ فرض شده و رابطه‌ی مدل هدایت گرمایی تاخیر فاز دوگانه به رابطه‌ی مدل هدایت گرمایی فوریه تبدیل می‌شود.

$$\kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{J^2}{\sigma} \quad (۳-۲۶)$$

در مرجع [۳۷]، معادله دیفرانسیل مشتق جزئی به روش جداسازی متغیرها حل شده که یک روش کاملاً تحلیلی می‌باشد و تنها اثر ژول مورد مطالعه قرار گرفته است. در این مرجع، توزیع دما طبق رابطه‌ی (۳-۲۷) بدست آمده است:

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{l} x \cdot \exp \left[-\frac{\kappa}{C_v} \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 t \right] - \frac{J^2}{2\kappa\sigma} x^2 + \left(\frac{J^2 l}{2\kappa\sigma} + \frac{T_a}{l} \right) x + T_0 \quad 0 < x \leq l \quad (۳-۲۷)$$

که حاصل جمع دو توابع کمکی $V(x)$ و $W(x,t)$ می‌باشد.

$$V(x) = \frac{J^2}{2\kappa\sigma} x^2 + \left(\frac{J^2 l}{2\kappa\sigma} + \frac{T_a}{l} \right) x \quad (۳-۲۸)$$

$$W(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{l} x \cdot \exp \left[-\frac{\kappa}{C_v} \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 t \right] \quad n=1,2,\dots \quad (۳-۲۹)$$

طبق مرجع [۳۷]، از آنجا که:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = 0 \quad (۳-۳۰)$$

مقدار کرنش در باریکه برابر است با:

$$\varepsilon_{yy}(x,t) = A(t)x + B(t) \quad (۳-۳۱)$$

در نتیجه مقدار تنش با توجه به رابطه‌ی هوک و نتایج توزیع دما به صورت رابطه‌ی (۳-۳۲) به دست می‌آید [۳۷].

$$\sigma_{yy}(x,t) = E[A(t)x + B(t) - \alpha T(x,t)] \quad (۳-۳۲)$$

رابطه‌ی (۳-۳۲) بعد از بی‌بعد سازی در فضای لاپلاس به صورت (۳-۳۳) نوشته می‌شود.

$$\sigma'_{yy}(X,s) = E[A(s)X + B(s) - \alpha\theta(X,s)] \quad (۳-۳۳)$$

که در آن مقدار A و B از مجموعه روابط (۳-۳۴) که معادلات تعادل نیرو و گشتاور در باریکه می‌باشند، نتیجه می‌شوند.

$$\int_0^L \sigma_{yy}(x,t) dx = 0 \quad (۳-۳۴)$$

$$\int_0^L x \cdot \sigma_{yy}(x,t) dx = 0$$

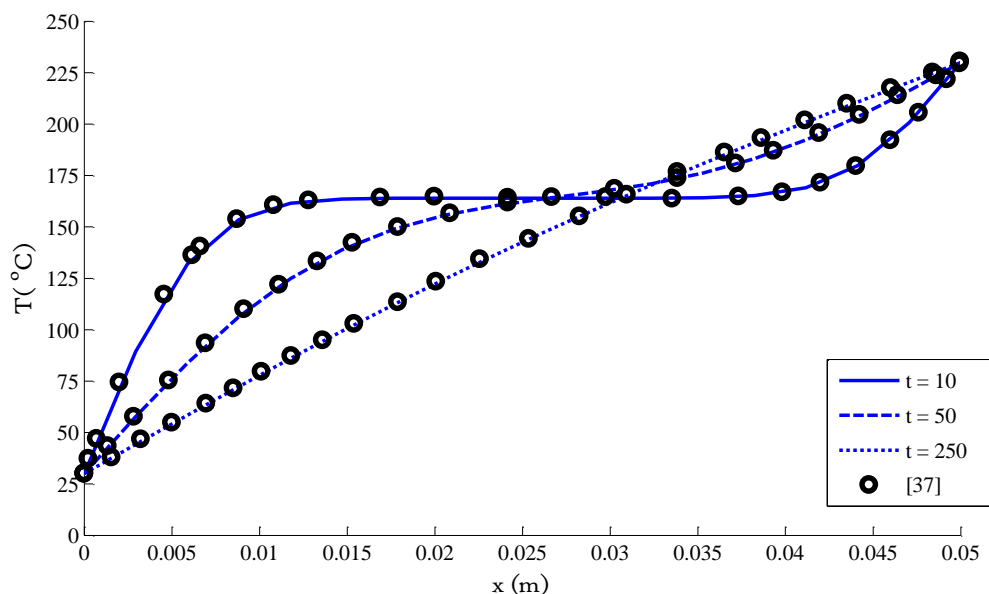
با جایگذاری رابطه‌ی بی‌بعد (۳-۳۳) در روابط (۳-۳۴) و بی‌بعد سازی کران انتگرال در فضای لاپلاس، رابطه به صورت (۳-۳۵) نوشته می‌شود.

$$\int_0^1 \sigma'_{yy}(X,s) dX = 0 \quad (۳-۳۵)$$

$$\int_0^1 \sigma'_{yy}(X,s) X dX = 0$$

۳-۵ نتایج توزیع دما

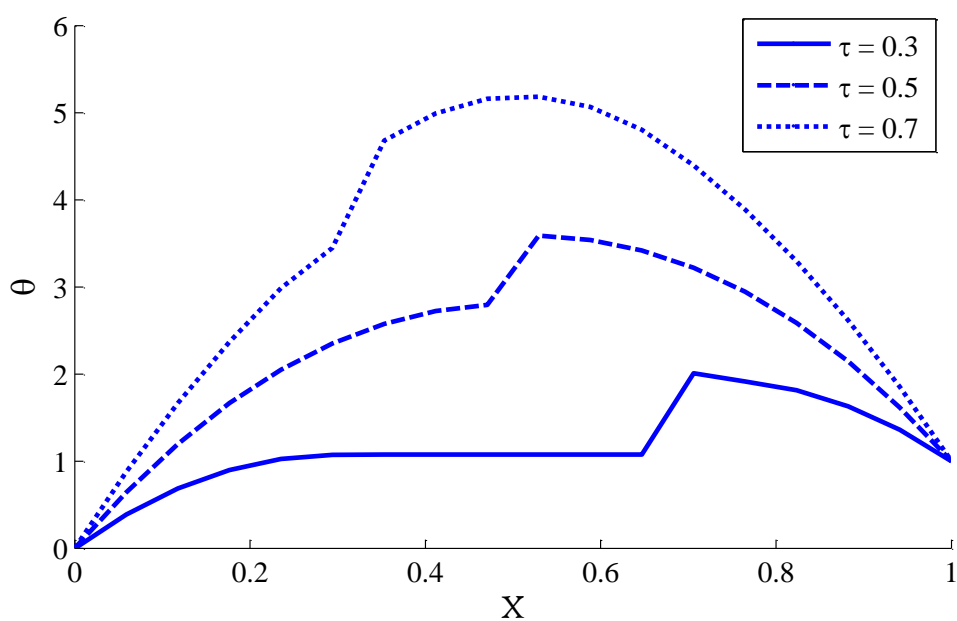
شکل ۳-۷ توزیع دما در باریکه در زمان‌های ۱۰ و ۵۰ و ۲۵۰ ثانیه را با مرجع [۳۷] مقایسه می‌کند که در آن مدل هدایت گرمایی فوریه استفاده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود نتایج انطباق قابل قبولی دارند.



شکل ۳-۷ صحت‌سنجی توزیع دما در باریکه با مرجع [۳۷]

شکل ۳-۸ نمودار توزیع دمای مدل کاتانو-ورنات ترموالکتریک را در زمان‌های بی بعد 0.3 ، 0.5 و

0.7 نشان می‌دهد.



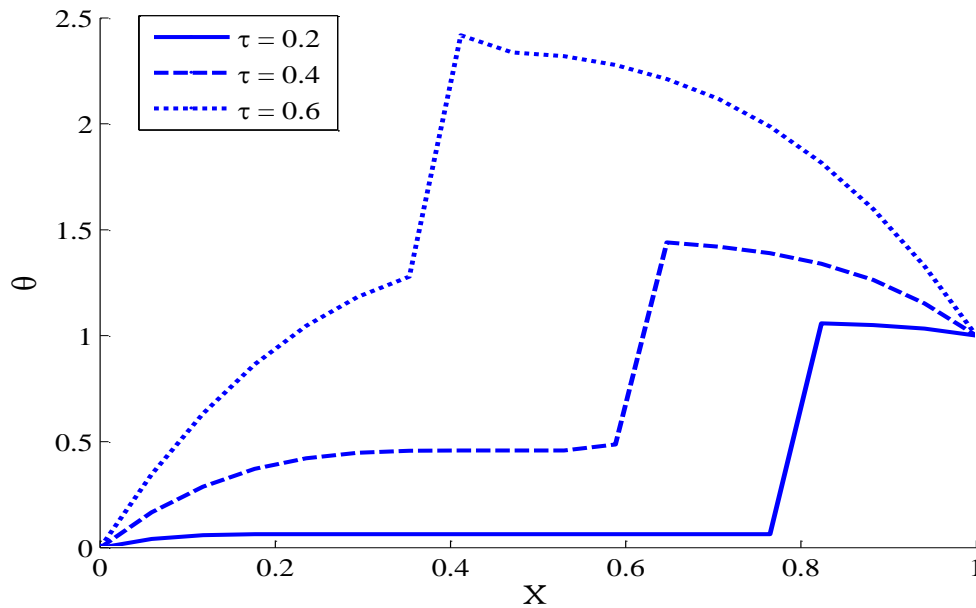
شکل ۳-۸ توزیع دمای ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات

همان‌طور که مشاهده می‌شود نمودار، تولید گرمای داخلی ناشی از اثر ژول را به‌خوبی نشان می‌-

دهد و از ابتدای نمودار تا پیشانی موج دما افزایش پیدا کرده است. در زمان‌های ابتدایی، در یک نقطه-

ی مشخص از مکان بی‌بعد، هرچه میزان زمان بی‌بعد افزایش یابد، میزان دمای آن نقطه نیز افزایش پیدا می‌کند.

در مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه، دو کمیت ε و δ نشان‌گر سرعت موج هستند. نتایج برای مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه در شکل ۳-۹ برای زمان‌های مختلف آورده شده است.

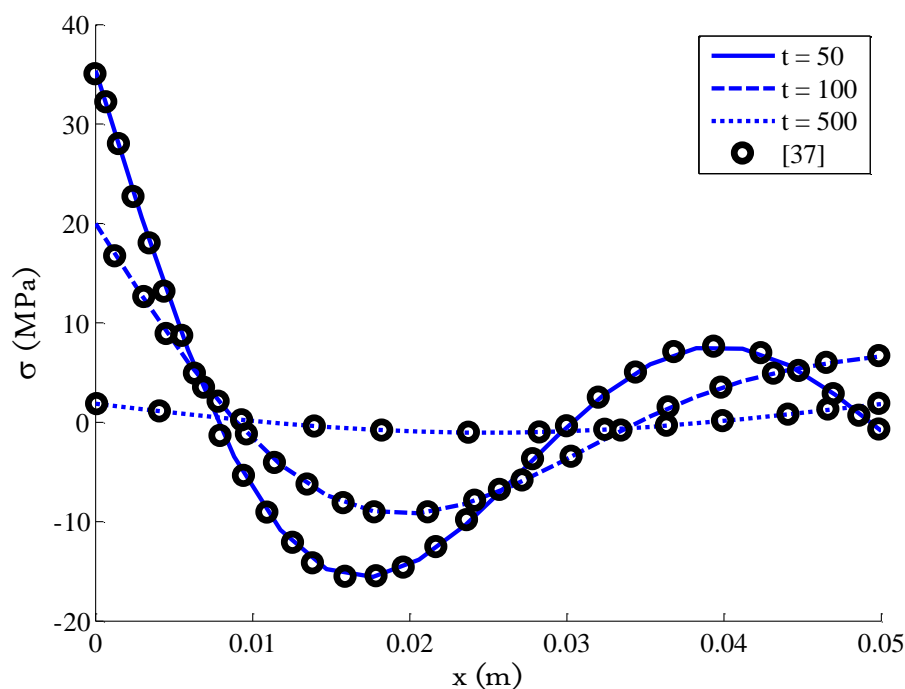


شکل ۳-۹ توزیع دمای ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه

در این شکل نیز مانند نتایج مدل کاتانو-ورنات اثر ژول توسط اثر جمله‌ی $\frac{J^2}{\sigma}$ در توزیع دما مشهود است.

۳-۶ نتایج توزیع تنش

شکل ۳-۱۰، به‌منظور صحت‌سنجی روش نیمه‌تحلیلی بکار گرفته شده، مقایسه‌ای از توزیع تنش مدل هدایت گرمایی فوریه با روش تحلیلی [۳۷] در زمان‌های ۵۰، ۱۰۰ و ۵۰۰ ثانیه آمده است که از انطباق قابل‌قبولی برخوردار است.



شکل ۳-۱۰ صحت‌سنجی توزیع تنش در باریکه با مرجع [۳۷]

تنش ارائه شده در رابطه‌ی (۳-۳۲) با استفاده از رابطه‌ی (۳-۳۶) بی‌بعد می‌شود که در آن E مدول یانگ می‌باشد.

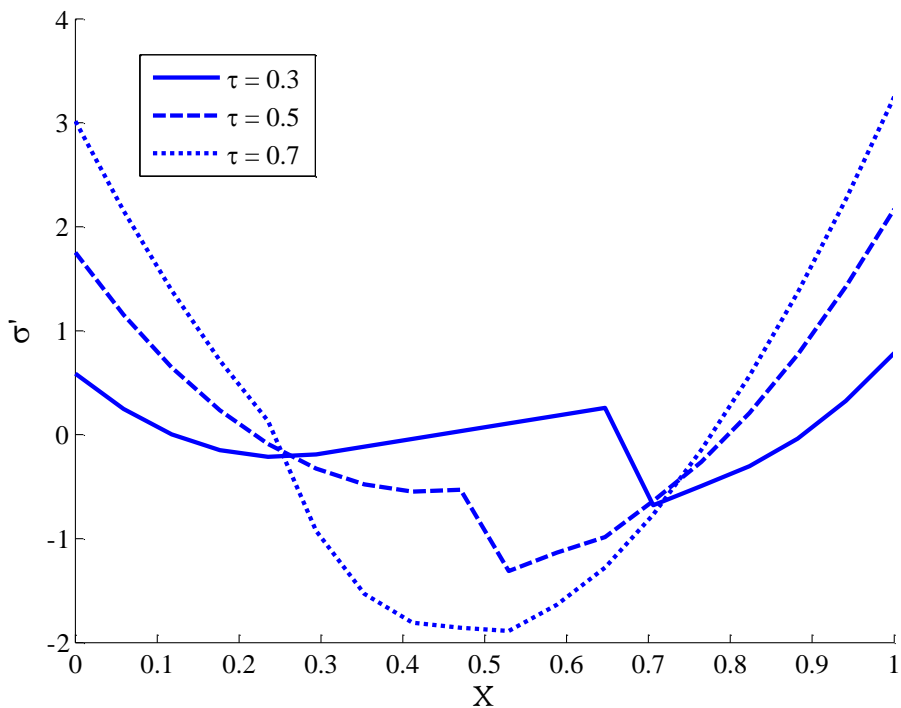
$$\sigma'_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{E \alpha T_{wo}} \quad (۳-۳۶)$$

در ادامه نتایج مربوط به مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات و تأخیر فاز دوگانه، ارائه شده که توزیع تنش برای باریکه‌ی ترموالکتریک با استفاده از تئوری کاتانو-ورنات در زمان‌های بی‌بعد ۰/۳، ۰/۵ و ۰/۷ در شکل ۳-۱۱ آمده است که سرعت محدود موج گرمای حاصل از مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات را در زمان‌های مختلف نشان می‌دهد.

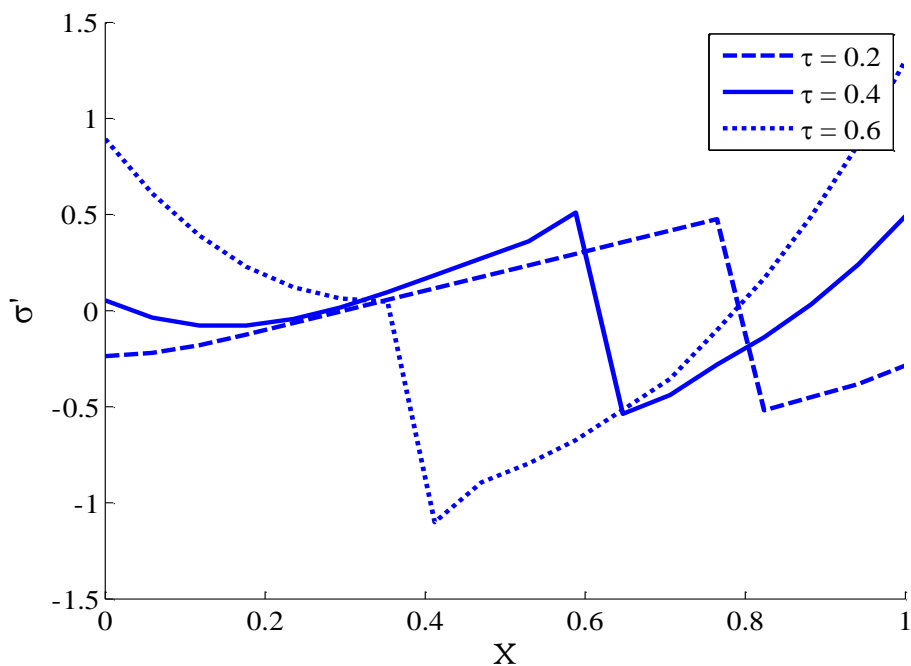
از این شکل می‌توان دریافت مقدار بی‌بعد تنش کششی در زمان‌های ابتدایی کم بوده و هر چه زمان افزایش می‌یابد، مقدار تنش افزایش می‌یابد. همچنین، باگذشت زمان مقدار بی‌بعد تنش فشاری افزایش می‌یابد.

همچنین، نتایج مربوط به توزیع تنش مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه در شکل ۳-۱۲ مشاهده می‌شود. نمودارهای مربوط این تنش در زمان‌های بی‌بعد ۰/۲، ۰/۴ و ۰/۶ آورده شده است. در این شکل، مشابه شکل ۳-۱۱، در زمان شروع مقدار تنش کم بوده و حتی در ناحیه‌ی فشاری قرار

دارد ولی با افزایش زمان، مقدار تنش کم‌کم افزایش یافته، تا اینکه به ناحیه‌ی کششی منتقل شده است.



شکل ۳-۱۱ توزیع تنش ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات

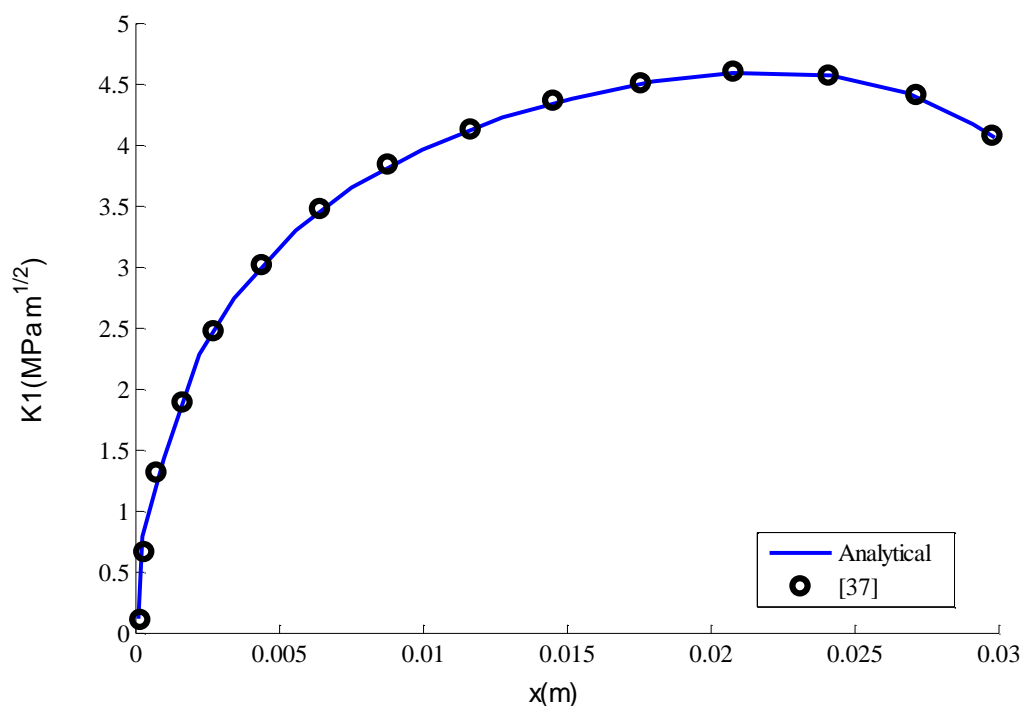


شکل ۳-۱۲ توزیع تنش ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه

۷-۳ نتایج ضریب شدت تنش ترک لبه‌ای

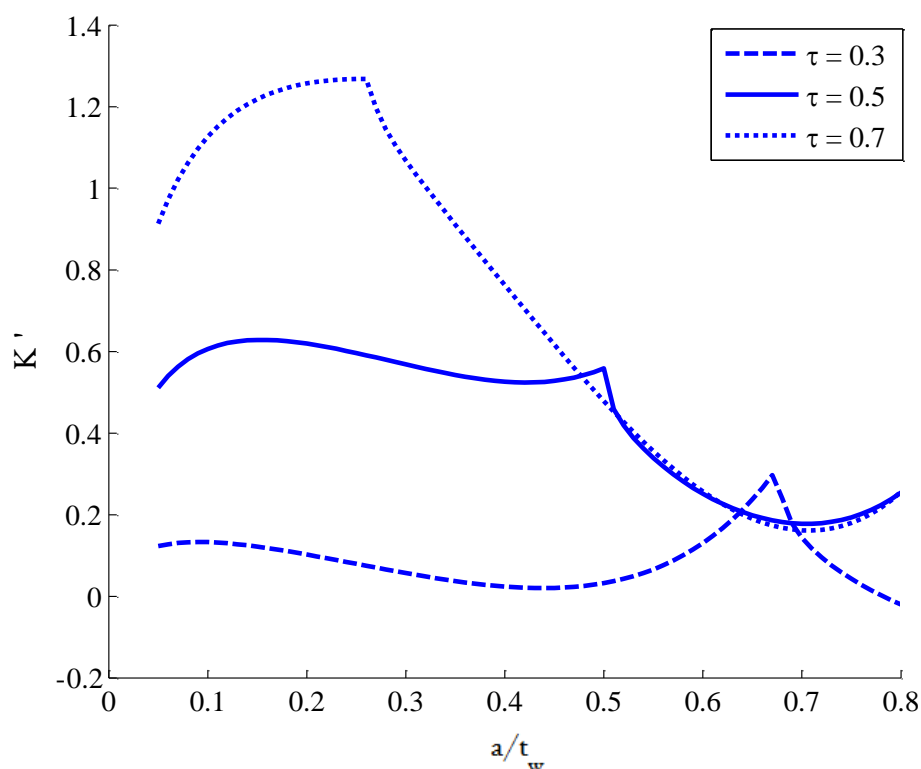
در این بخش ضریب شدت تنش در باریکه‌ی دارای ترک لبه‌ای از تابع وزنی بیان شده در بخش ۲-۱-۳، تعیین می‌شود.

در شکل ۳-۱۳، ضریب شدت تنش به‌دست‌آمده با نتایج مرجع [۳۷] مقایسه شده است. ضریب شدت تنش در مرجع [۳۷] نیز با روش تابع وزنی محاسبه شده است، اما توزیع در این مرجع، حل معادله‌ی هدایت گرمایی با روش جداسازی متغیرها به‌دست‌آمده است. مشاهده می‌شود نتایج از انطباق قابل‌قبولی برخوردار است.



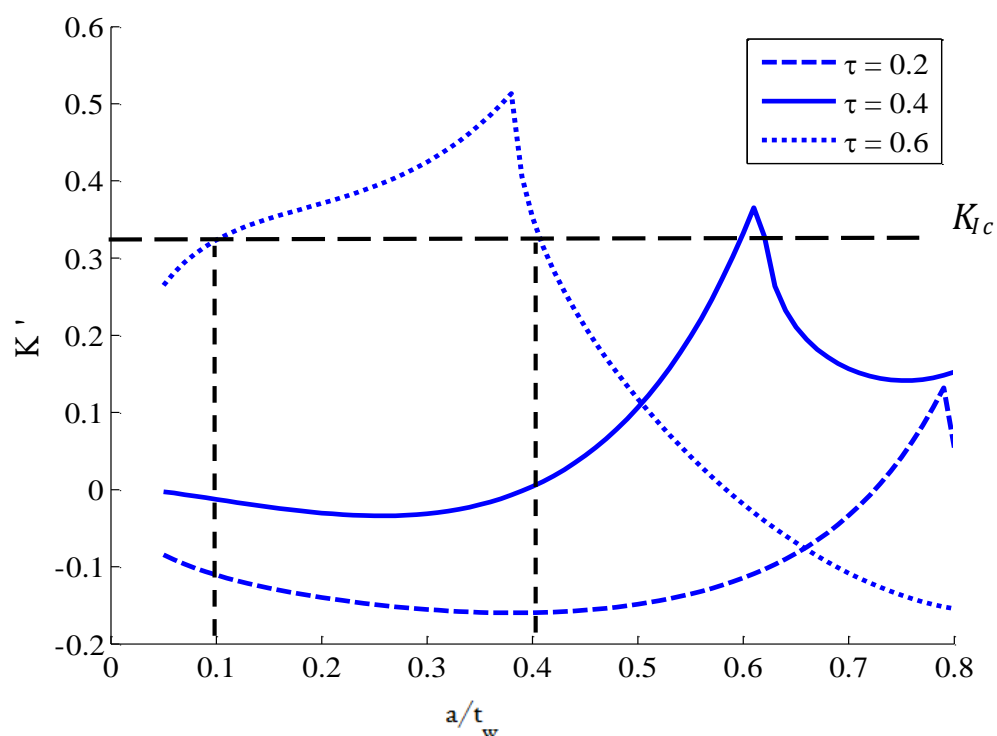
شکل ۳-۱۳ صحت‌سنجی ضریب شدت تنش با مرجع در زمان ۲۰ ثانیه [۳۷]

در شکل ۳-۱۴، ضریب شدت تنش مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات برای باریکه‌ی ترموالکتریک در زمان‌های مختلف آورده شده است.



شکل ۳-۱۴ ضریب شدت تنش ترک لبه‌ای ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات برحسب طول نسبی ترک

همان‌طور که مشاهده می‌شود در زمان‌های ابتدایی، بیشینه‌ی ضریب شدت تنش بزرگ‌تر است و باگذشت زمان به علت استهلاک موج تنش منتشر شده در باریکه، ضریب شدت تنش کاهش می‌یابد. در شکل ۳-۱۵ ضریب شدت تنش مربوط به تئوری تأخیر فاز دوگانه رسم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش طول ترک ابتدا ضریب شدت تنش افزایش می‌یابد تا به بیشینه‌ی خود (محل قرار گرفتن پیشانی موج در نمودار تنش) برسد. با افزایش طول ترک، به دلیل فشاری شدن تنش، ضریب شدت تنش کاهش می‌یابد. به عبارت دیگر در هر زمان ضریب شدت تنش بیشینه برای ترکی اتفاق می‌افتد که در موقعیت پیشانی موج تنش واقع می‌شود.



شکل ۳-۱۵ ضریب شدت تنش ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه برحسب طول نسبی ترک

در شکل ۳-۱۵ ضریب شدت تنش مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه در زمان بی‌بعد 0.2 ، 0.4 و 0.6 برحسب طول ترک به‌دست‌آمده است. در این شکل همان‌طور که مشاهده می‌شود؛ اگر $K'_{lc} = 0.3$ ضریب شدت تنش بحرانی فرض شود، در زمان بی‌بعد 0.6 ترک‌هایی با طول کمتر از 0.1 و همچنین ترک‌هایی با طول بیشتر از 0.4 بسته می‌ماند و در ناحیه‌ی 0.1 تا 0.4 ترک‌ها در حال رشد می‌باشند.

فصل ۴

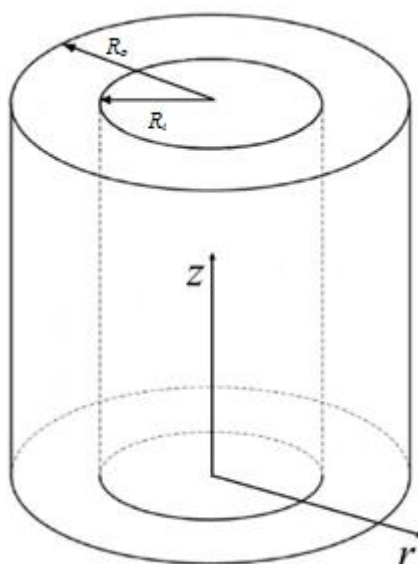
استوانه دارای ترک محیطی کامل

۱-۴ مقدمه

در این فصل، یک المان ترموالکتریک استوانه‌ای شامل ترک محیطی تحت شوک گرمایی خارجی مورد بررسی قرار می‌گیرد. مراحل کار در این فصل مانند فصل سوم می‌باشد، اما در هندسه و مختصات استوانه‌ای و ابعاد متفاوت انجام می‌شود.

۲-۴ تحلیل استوانه‌ی بدون ترک

در یک استوانه‌ی توخالی بلند دو سر باز (شرایط تنش باریکه‌ای)، شعاع‌های داخلی r_i و r_o و دمای اولیه‌ی T_0 فرض می‌شود.



شکل ۴-۱ شکل کلی استوانه‌ی توخالی

معادله‌ی حاکم هدایت گرمایی متقارن محوری برای یک استوانه طبق مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه به صورت رابطه‌ی (۴-۱) می‌باشد.

$$\left(1 + \tau_q \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\tau_q^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right) \left(\rho C_p \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{J^2}{\sigma}\right) = \nabla \cdot \left(k \left(1 + \tau_T \frac{\partial}{\partial t}\right) \nabla T\right) \quad (4-1)$$

که در آن، τ_q زمان آسایش گرمایی و τ_T زمان آسایش گرادیان دما می‌باشد. ρ نیز چگالی، C_p ظرفیت گرمایی ویژه، J چگالی الکتریکی و σ هدایت الکتریکی می‌باشد.

در رابطه‌ی (۱-۴)، اگر از جمله‌ی $\frac{\tau_q^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2}$ صرف‌نظر شود و $\tau_T = 0$ باشد، رابطه‌ی (۱-۴) به معادله‌ی مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات تبدیل خواهد شد. همچنین اگر $\tau_T = \tau_q$ باشد مدل هدایت گرمایی فوریه حاصل می‌شود.

شرایط مرزی و اولیه به صورت رابطه‌ی (۲-۴) انتخاب می‌شود.

$$\begin{aligned} T(r_i, t) &= T_{wi} = 0^\circ C \\ T(r_o, t) &= T_{wo} = 200^\circ C \\ T(r, 0) &= T_o = 0^\circ C \\ \frac{\partial T}{\partial t}(r, 0) &= 0 \\ \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}(r, 0) &= 0 \end{aligned} \quad (۲-۴)$$

برای سادگی مقایسه با بقیه‌ی نتایج، کمیت‌ها به صورت مجموعه روابط (۳-۴) زیر بی بعد می‌شوند.

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{k_o' t}{r_o^2} & k_o' &= \frac{k_o}{\rho_o C_o} \\ R_i &= \frac{r_i}{r_o} & \eta &= \frac{r}{r_o} \\ \varepsilon &= \frac{k_o' \tau_q}{r_o^2} & \theta &= \frac{T - T_o}{T_{wo} - T_o} \\ \delta &= \frac{k_o' \tau_t}{r_o^2} \end{aligned} \quad (۳-۴)$$

رابطه‌ی (۱-۴) با مجموعه روابط (۳-۴) بی بعد شده و به صورت رابطه‌ی (۴-۴) بازنویسی می‌شود.

$$\eta^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} \right) + \eta \left(\frac{\partial T}{\partial \eta} \right) - \eta^2 T \left(\frac{\frac{\partial}{\partial \tau} + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^3}{\partial \tau^3}}{\delta \frac{\partial}{\partial \tau} + 1} \right) = \frac{-J^2 \eta^2}{\sigma \left(\delta \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \frac{\partial}{\partial \tau} \right) T_1 k} \quad (۴-۴)$$

سپس رابطه‌ی (۴-۴) در فضای لاپلاس به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\eta^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} \right) + \eta \left(\frac{\partial T}{\partial \eta} \right) - B \eta^2 T = \frac{-J^2 \eta^2}{s \sigma (\delta s + 1) T_1 k} \quad (۵-۴)$$

که در آن:

$$B = \frac{\left(1 + \varepsilon s + \frac{1}{2} \varepsilon^2 s^2\right) s}{\delta s + 1} \quad (6-4)$$

با توجه به رابطه‌ی (۴-۲)، شرایط مرزی در فضای لاپلاس به صورت بی بعد (۴-۷) بازنویسی می‌شود.

$$\begin{aligned} \theta(R_i, s) &= 0 \\ \theta(R_o, s) &= \frac{1}{s} \end{aligned} \quad (7-4)$$

همچنین در این جا مقادیر پارامترهای بی بعد δ و ε طبق مرجع [۳۰] به صورت زیر در نظر گرفته شده:

$$\begin{aligned} \delta &= 0.25 \\ \varepsilon &= 0.35 \end{aligned} \quad (8-4)$$

در این صورت، سرعت موج گرمایی در مدل‌های هدایت گرمایی کاتانو-ورنات و تأخیر فاز دوگانه در فضای بی بعد برابر است با:

$$\begin{aligned} C_{DPL} &= \frac{\sqrt{2\delta}}{\varepsilon} = 2.02 \\ C_{CV} &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} = 1.69 \end{aligned} \quad (9-4)$$

۴-۳ محاسبه‌ی چگالی جریان الکتریکی

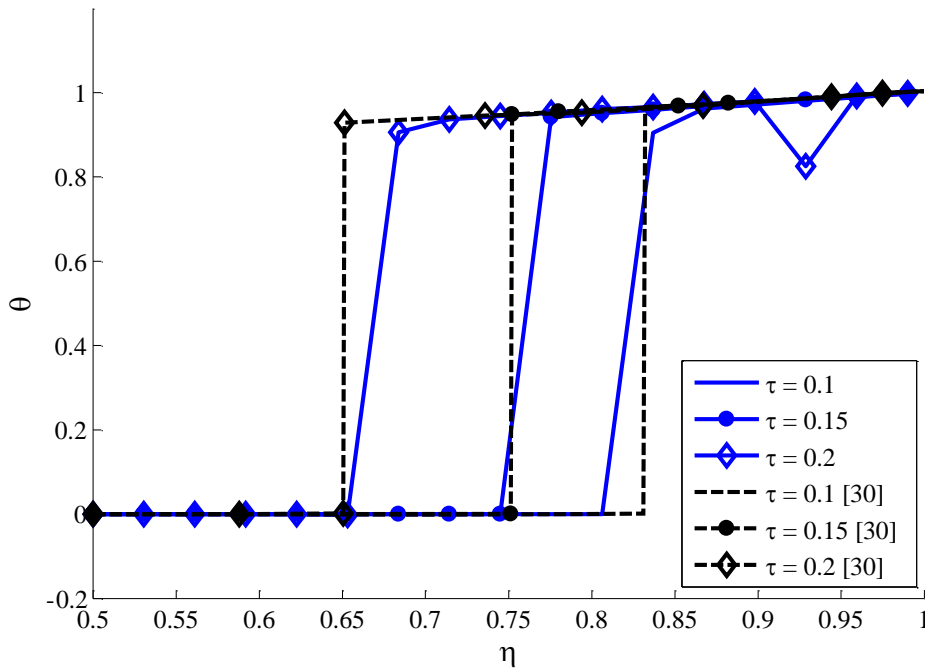
همان طور که در رابطه‌ی (۲-۱۰) از فصل دوم آمده است، میزان چگالی جریان الکتریکی وابسته به مقادیر I و A می‌باشد که طبق مرجع [۳۲]، مقدار جریان همان $I = 1.7A$ و $I = 5.7A$ بوده ولی مقدار مساحت میانگین با توجه به هندسه‌ی استوانه و شرایط مرزی برابر است با:

$$A = h \times 2\pi \times \frac{R_o + R_i}{2} = 10^{-2} \times 2\pi \times 0.75 \times 10^{-3} = 4.75 \times 10^{-5} m^2 \quad (10-4)$$

که در آن h ارتفاع استوانه می‌باشد. مقادیر چگالی جریان به ازای مقادیر جریان الکتریکی $I = 1.7A$ و $I = 5.7A$ به ترتیب برابر با $J = 3.61 \times 10^4 \frac{A}{m^2}$ و $J = 1.21 \times 10^5 \frac{A}{m^2}$ خواهد بود.

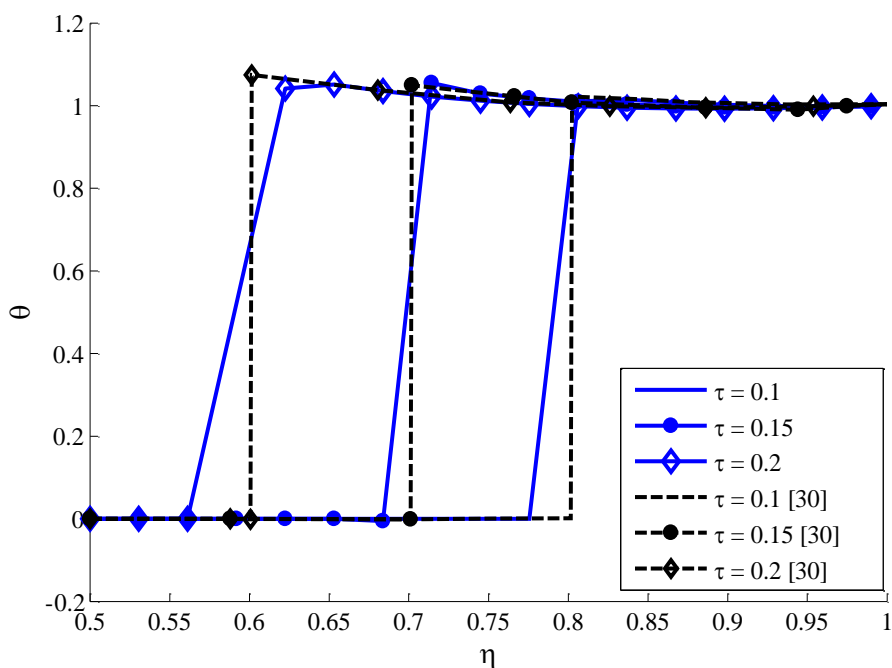
۴-۴ نتایج توزیع دما

نتایج حاصل در این فصل، برای نسبت شعاع خارجی به داخلی $R_o/R_i=2$ است که در آن شعاع-های داخلی و خارجی استوانه به ترتیب $R_i=0.5$ و $R_o=1$ می‌باشند. شکل ۴-۲ نشان‌دهنده‌ی مقایسه‌ی توزیع دما در دیواره‌ی استوانه طبق مدل کاتانو-ورنات در زمان‌های بی‌بعد 0.1 ، 0.15 و 0.2 با مرجع [۳۰] می‌باشد که در آن سرعت محدود موج گرما به خوبی مشهود است و نتایج انطباق قابل‌قبولی دارند. همان‌طور که مشاهده می‌شود دمای سطح خارجی استوانه تا پیشانی موج در اثر شوک گرمایی افزایش یافته، ولی دمای نقاط دیگر تا سطح داخلی استوانه بدون تغییر و در دمای اولیه‌ی خود باقی مانده است.



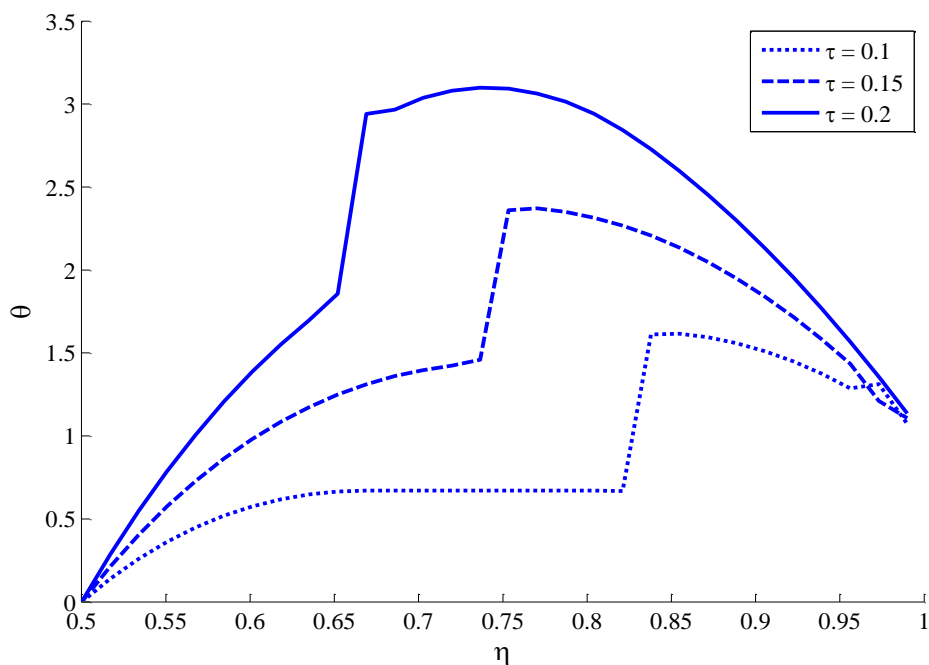
شکل ۴-۲ صحت‌سنجی توزیع دما طبق مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات (C-V) با مرجع [۳۰]

در شکل ۴-۳ مشابه قسمت قبل، مقایسه‌ای از توزیع دما در دیواره‌ی استوانه، طبق مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه در زمان‌های بی‌بعد 0.1 ، 0.15 و 0.2 با مرجع [۳۰] مقایسه شده است که انطباق قابل‌قبول نتایج مشهود است. در این‌جا نیز دمای سطح خارجی استوانه تا پیشانی موج افزایش یافته ولی دمای نقاط جلوتر تا سطح داخلی استوانه بدون تغییر مانده است که سرعت محدود موج گرما را تأیید می‌کند.



شکل ۴-۳ توزیع دما طبق مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه با مرجع [۳۰]

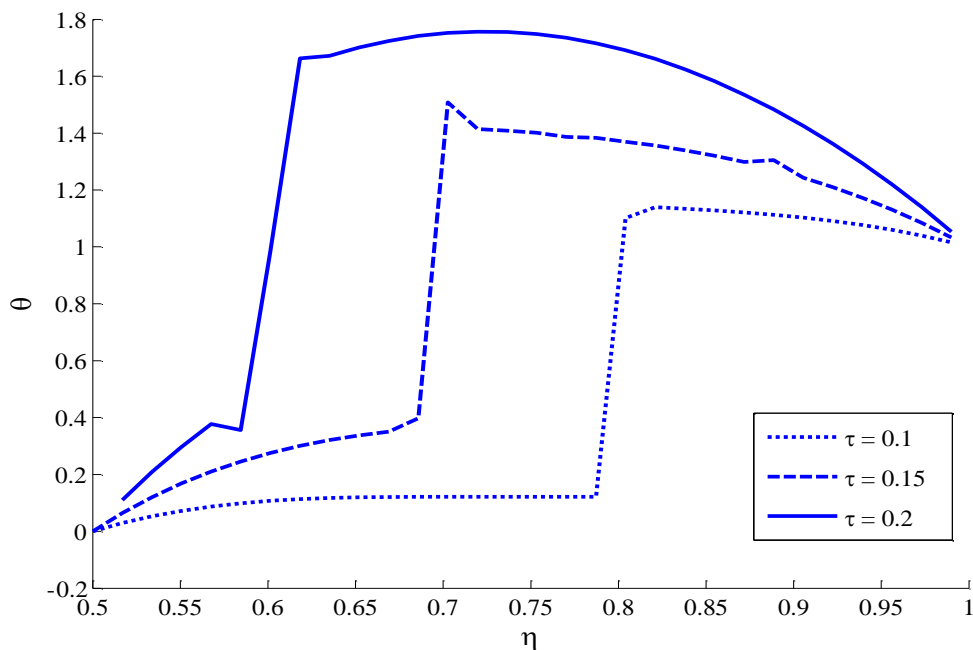
شکل ۴-۴، نمودار توزیع دمای المان ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات را در زمان‌های بی‌بعد ۰/۱، ۰/۱۵ و ۰/۲ نشان می‌دهد.



شکل ۴-۴ توزیع دمای ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات

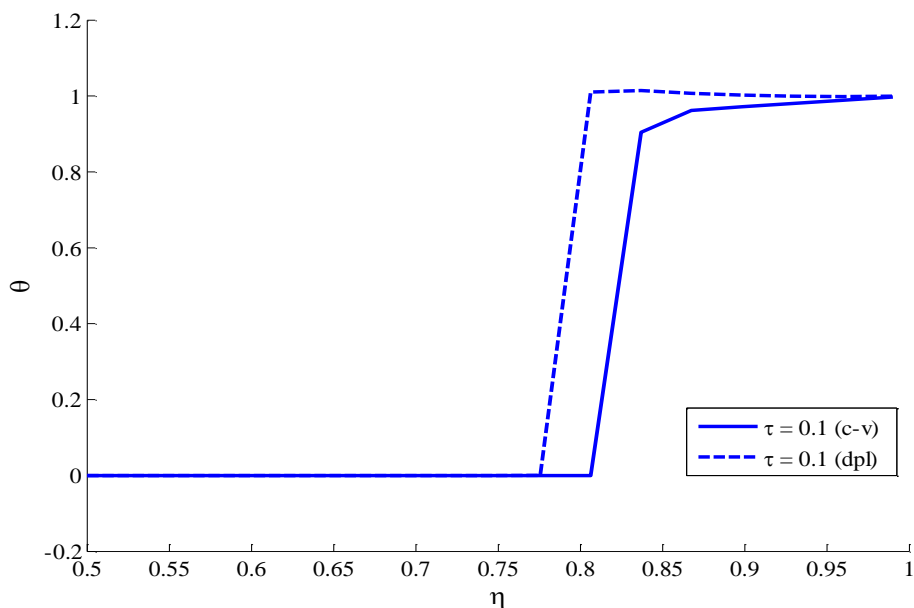
همان‌طور که در شکل ۴-۴ مشاهده می‌شود، به جز شرایط مرزی که در مقدار دمای بی‌بعد ۰ و ۱ قرار دارند، مابقی نمودار نسبت به مرجع [۳۰] دارای بیشینه‌ی بیشتری هستند. این تفاوت ناشی از اثر ژول می‌باشد که در آن مقدار چگالی جریان الکتریکی نقش اصلی را ایفا می‌کند. همچنین اثر ژول دارای رفتاری مشابه منبع گرمایی داخلی است که در شکل مشهود است.

شکل ۴-۵، توزیع دما در ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه در زمان‌های بی‌بعد ۰/۱، ۰/۱۵ و ۰/۲ آمده است. اثر ژول باعث افزایش دما نسبت به شرایط مرزی نسبت به نقاط میانی شده است.



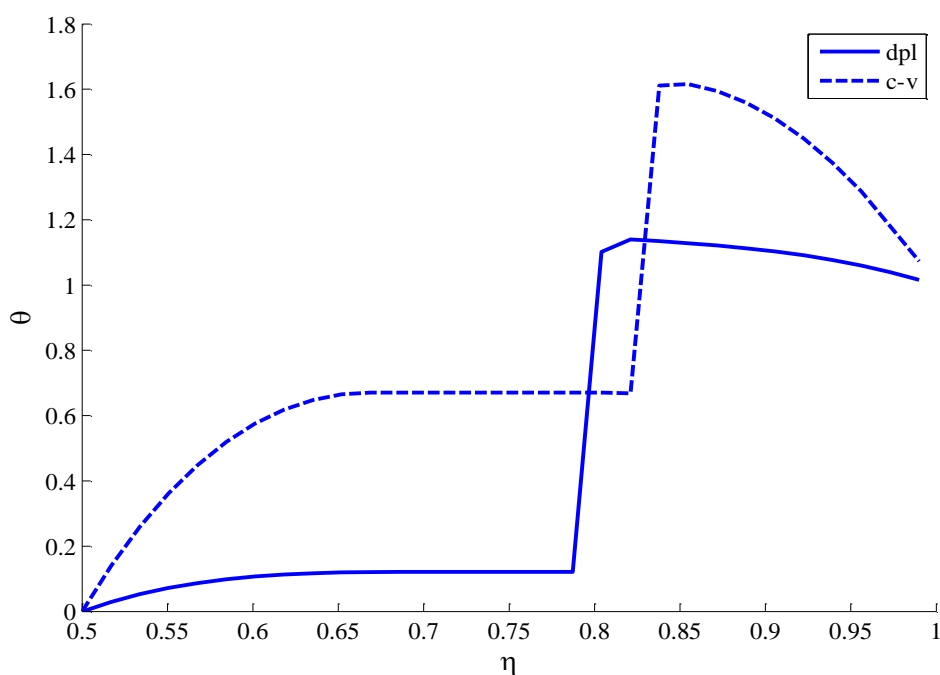
شکل ۴-۵ توزیع دمای ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه

در شکل ۴-۶، توزیع دمای حاصل از مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه و کاتانو-ورنات مقایسه شده است که با توجه به مقادیر شکل ۴-۱۱ و روابط شکل ۴-۱۲، سرعت موج گرما در مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه ۱۹ درصد بیشتر از سرعت موج گرما در مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات می‌باشد.



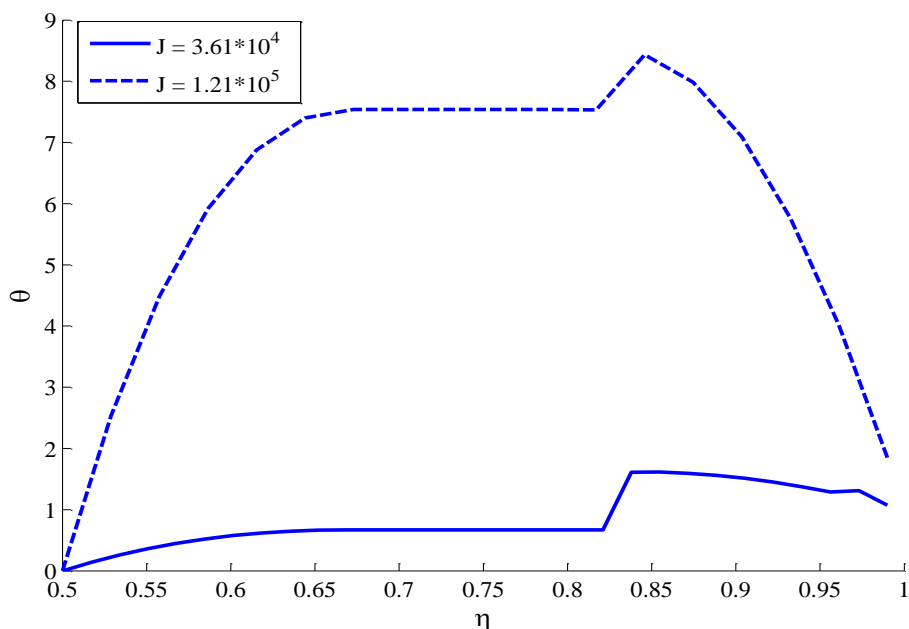
شکل ۴-۶ مقایسه‌ی توزیع دمای مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات (C-V) و تأخیر فاز دوگانه (DPL) در غیاب اثر ژول

در ادامه مقایسه‌ای از توزیع دمای مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات و تأخیر فاز دوگانه در شکل ۴-۷ آورده شده است که به وضوح می‌توان سرعت بیشتر موج گرمای مربوط به مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه را مشاهده نمود. همچنین، مقدار بیشینه‌ی دمای بی‌بعد در نمودار مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات بیشتر است. اثر ژول در توزیع دمای مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه بیشتر از توزیع دمای مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات است.

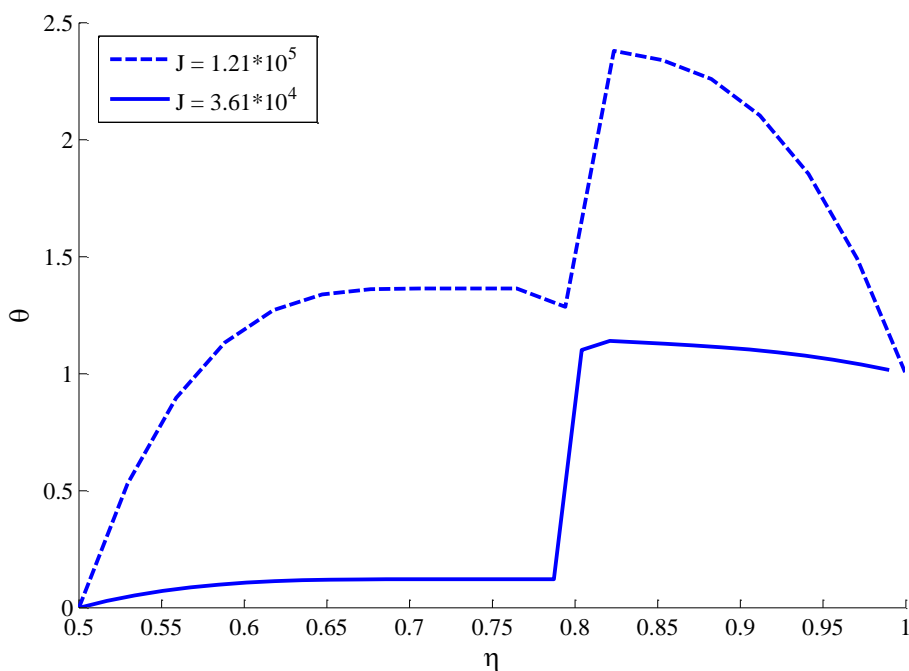


شکل ۴-۷ مقایسه‌ی توزیع دمای مدل‌های هدایت گرمایی کاتانو-ورنات (C-V) و تأخیر فاز دوگانه (DPL)

در شکل ۴-۸ و شکل ۴-۹ مقایسه‌ی توزیع دمای مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات و تأخیر فاز دوگانه با دو مقدار مختلف چگالی جریانی الکتریکی ($J = 1.21 \times 10^5 \frac{A}{m^2}$ و $J = 3.61 \times 10^4 \frac{A}{m^2}$) آورده شده است.



شکل ۴-۸ توزیع دمای مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات با مقادیر مختلف چگالی جریانی الکتریکی



شکل ۴-۹ توزیع دمای مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه با مقادیر مختلف چگالی جریانی الکتریکی

همان طور که انتظار می‌رفت با افزایش مقدار چگالی جریان الکتریکی، مقدار بیشینه‌ی دما افزایش می‌یابد.

۴-۵ نتایج توزیع تنش محوری

دو سر استوانه برای حرکت در راستای محور آن، آزاد در نظر گرفته می‌شود. این شرط مرزی به صورت رابطه‌ی (۴-۱۱) اعمال می‌شود.

$$\int_{R_i}^{R_o} r \sigma_z dr = 0 \quad (۴-۱۱)$$

تنش محوری در استوانه برحسب توزیع دما به صورت رابطه‌ی (۴-۱۲) به دست می‌آید [۲۰].

$$\sigma_z = \frac{2E\alpha}{(1-\nu)(R_o^2 - R_i^2)} \int_{R_i}^{R_o} r \Delta T dr - \frac{E\alpha}{1-\nu} \Delta T \quad (۴-۱۲)$$

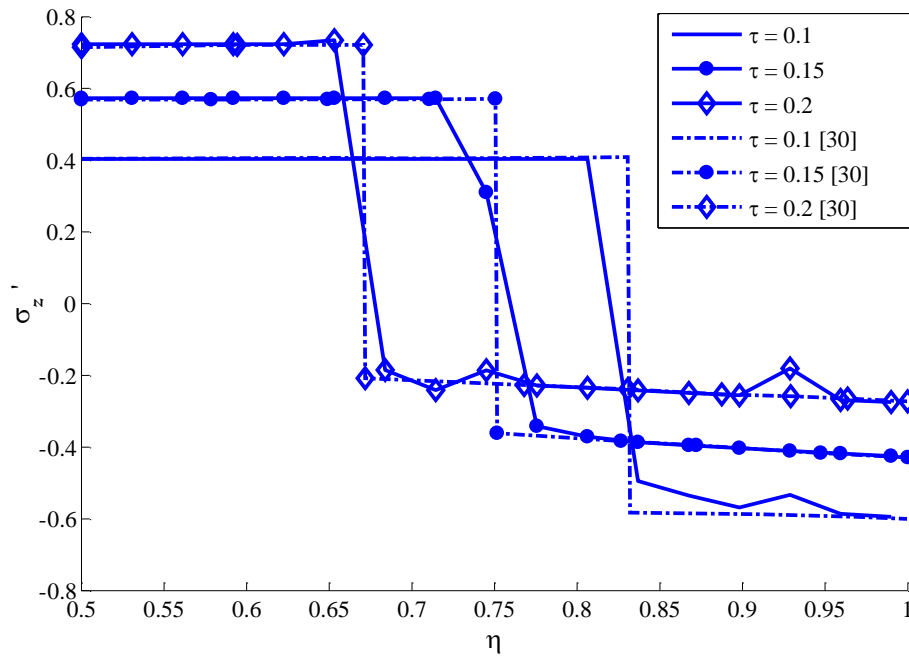
تنش محوری ارائه شده در رابطه‌ی (۴-۱۲) با استفاده از رابطه‌ی (۴-۱۳) بی بعد می‌شود.

$$\sigma'_z = \frac{\sigma_z (1-\nu)}{2E\alpha T_{wo}} \quad (۴-۱۳)$$

با قرار دادن توزیع تنش در رابطه‌ی (۴-۱۳)، تنش محوری بی بعد استخراج می‌شود.

$$\sigma'_z(\eta, s) = \frac{2}{1-R_i^2} \int_{R_i}^1 \eta \Delta \tilde{\theta} d\eta - \Delta \tilde{\theta} \quad (۴-۱۴)$$

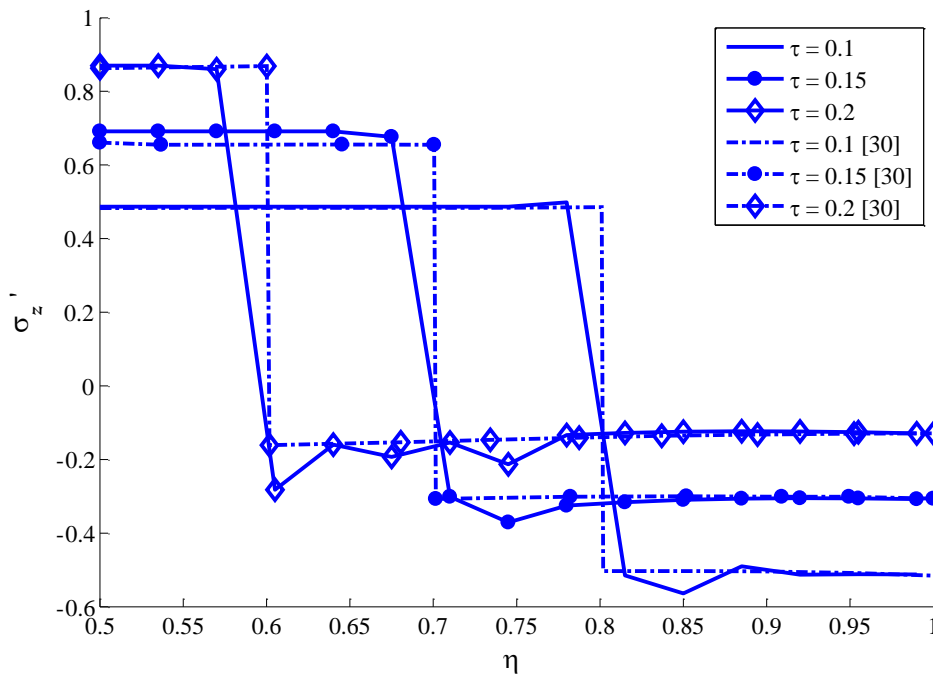
در شکل ۴-۱۰، به منظور صحت‌سنجی روش به کار گرفته شده، مقایسه‌ای از توزیع تنش محوری مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات با مرجع [۳۰] در زمان‌های بی بعد ۰/۱، ۰/۱۵ و ۰/۲ آمده است. همان طور که در بخش‌های نیز قبلی اشاره شد، به دلیل عدم حضور کمیت چگالی جریان الکتریکی، شیب نمودار توزیع تنش قبل و بعد از شکستگی صفر بوده، بنابراین اثر ژول مشاهده نشده است.



شکل ۴-۱۰ صحت‌سنجی توزیع تنش محوری مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات با مرجع [۳۰]

در ادامه، توزیع تنش محوری مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه با مرجع [۳۰] در زمان‌های

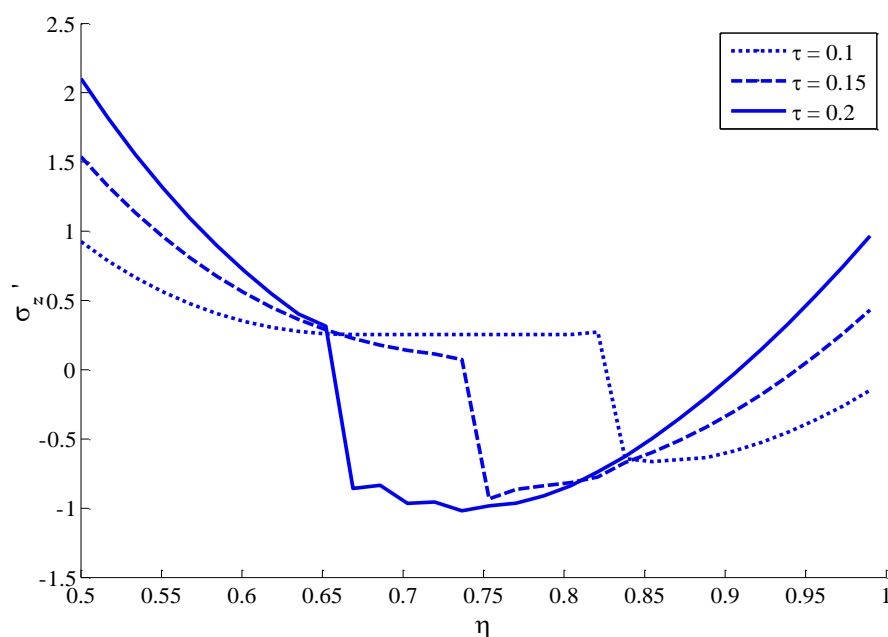
بی‌بعد ۰/۱، ۰/۱۵ و ۰/۲ در شکل ۴-۱۱ مقایسه شده است.



شکل ۴-۱۱ صحت‌سنجی توزیع تنش محوری مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه با مرجع [۳۰]

نتایج حاصل از مقایسه‌ی توزیع تنش محوری برای مدل‌های هدایت گرمایی کاتانو-ورنات (شکل ۴-۱۰) و تأخیر فاز دوگانه (شکل ۴-۱۱) و مرجع [۳۰] انطباق قابل قبولی دارند.

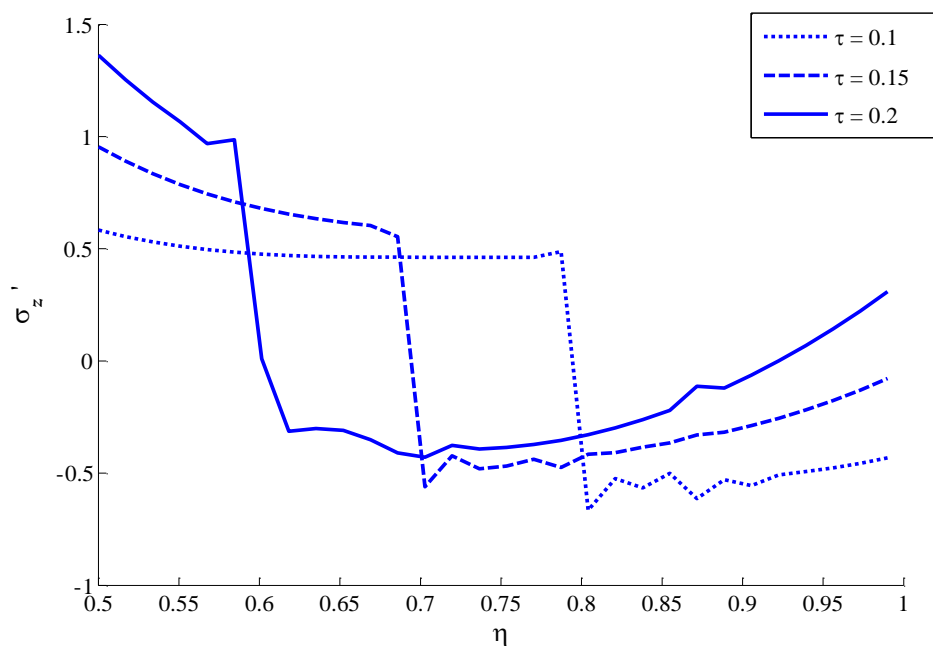
پس از اطمینان از صحت کارهای انجام شده، در ادامه به ارائه‌ی نتایج مربوط به ماده‌ی ترموالکتریک پرداخته می‌شود. در شکل ۴-۱۲، نتایج مربوط به توزیع تنش محوری ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات در زمان‌های بی‌بعد ۰/۱، ۰/۱۵ و ۰/۲ آمده است.



شکل ۴-۱۲ توزیع تنش محوری ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات

همان‌طور که مشاهده می‌شود در زمان‌های اولیه‌ی اعمال شوک گرمایی، حدفاصل دیواره‌ی داخلی و پیشانی موج دارای تنش کششی و حدفاصل پیشانی موج و دیواره‌ی خارجی دارای تنش فشاری خواهند بود. در زمان‌های ابتدایی، در دیواره‌ی داخلی، تنش کششی کمتر است و باگذشت زمان مقدار آن افزایش می‌یابد.

شکل ۴-۱۳ نیز توزیع تنش محوری ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه در زمان‌های بی‌بعد ۰/۱، ۰/۱۵ و ۰/۲ را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود مقدار تنش کششی در لبه‌ی داخلی و خارجی به‌شدت افزایش پیدا می‌کند.

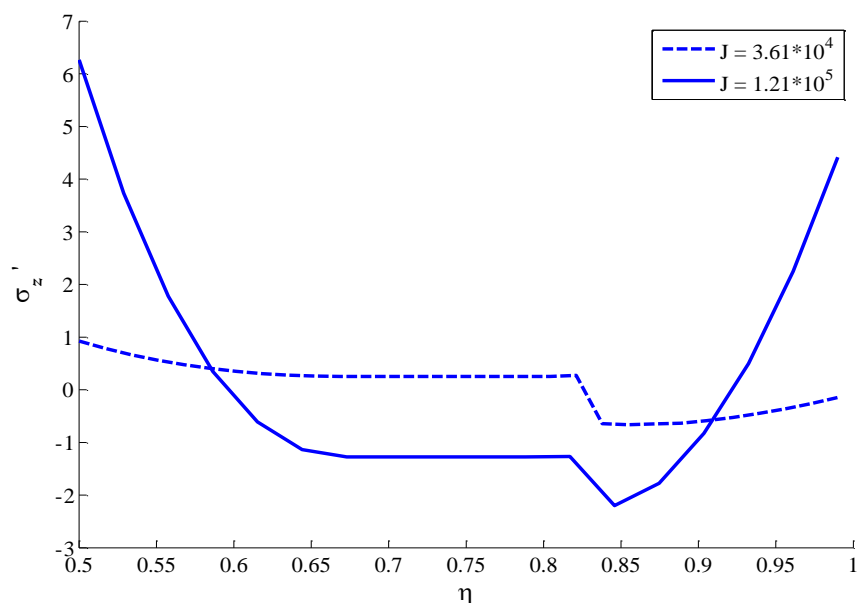


شکل ۴-۱۳ توزیع تنش محوری ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه

همان‌طور که در شکل ۴-۱۲ و شکل ۴-۱۳ مشاهده می‌شود، به دلیل صفر بودن بار مکانیکی، مساحت سطح زیر نمودار تنش در هر دو مدل صفر خواهد بود.

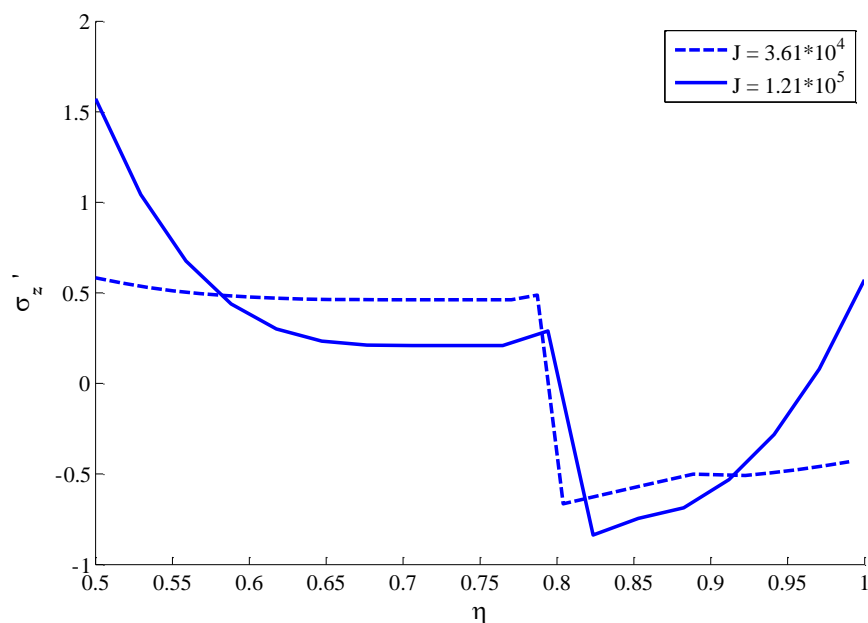
شکل ۴-۱۴ مقایسه‌ی توزیع تنش مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات را با دو مقدار مختلف چگالی

جریان الکتریکی ($J = 3.61 \times 10^4 \frac{A}{m^2}$ و $J = 1.21 \times 10^5 \frac{A}{m^2}$) نشان می‌دهد.



شکل ۴-۱۴ توزیع تنش محوری ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات با مقادیر مختلف چگالی جریان الکتریکی

همچنین شکل ۴-۱۵ توزیع تنش مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه را با مقادیر مختلف چگالی جریان مقایسه می‌کند. در این شکل نیز، چگالی جریان الکتریکی ($J = 3.61 \times 10^4 \frac{A}{m^2}$) و ($J = 1.21 \times 10^5 \frac{A}{m^2}$) در نظر گرفته شده است. همان‌طور که انتظار می‌رفت تنش کششی در این شکل نیز در لبه‌های داخلی و خارجی افزایش پیدا کرده ولی این میزان افزایش کمتر از افزایش تنش در توزیع تنش مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات است.



شکل ۴-۱۵ توزیع تنش محوری ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه با مقادیر مختلف چگالی جریان الکتریکی

همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش میزان چگالی جریان الکتریکی، مقدار تنش کششی در دیواره‌ی داخلی افزایش می‌یابد و همچنین میزان تنش فشاری نیز در حدفاصل دو دیواره افزایش می‌یابد.

۴-۶ نتایج ضریب شدت تنش ترک محیطی

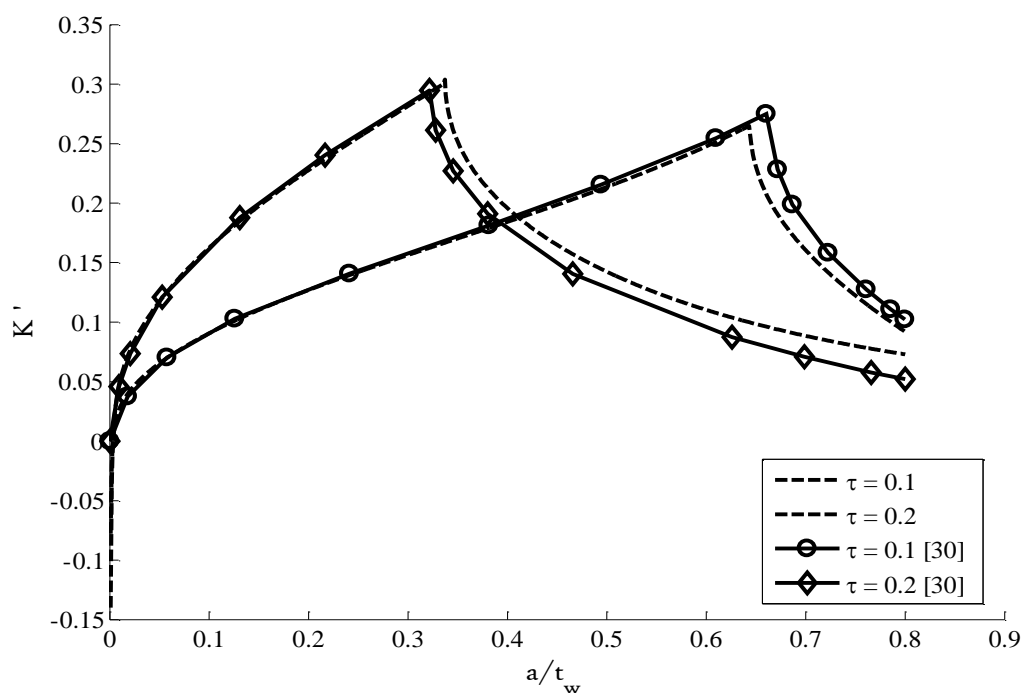
با معلوم بودن مقدار تنش به صورت یک تابع از r طبق رابطه‌ی (۲-۱۴) و تابع وزنی بخش ۲-۳-۲، می‌توان ضریب شدت تنش حرارتی را تعیین نمود.

انتگرال گیری از نتایج عددی تنش محوری در رابطه‌ی (۴-۱۴) منجر به نوسان نتایج می‌شود [۵۶]. برای حل این مشکل، از برازش دو منحنی چندجمله‌ای مرتبه دو بر عبارت تنش گرمایی در هر زمان استفاده شده است. این تقریب به‌خصوص در زمان‌های ابتدایی اعمال شوک گرمایی قابل قبول است. اگر موقعیت ناپیوستگی ρ باشد، توزیع تنش محوری در هر زمان، به دو بخش قبل و بعد از ناپیوستگی تقسیم می‌شود تا برازش منحنی دقیق‌تری صورت گیرد.

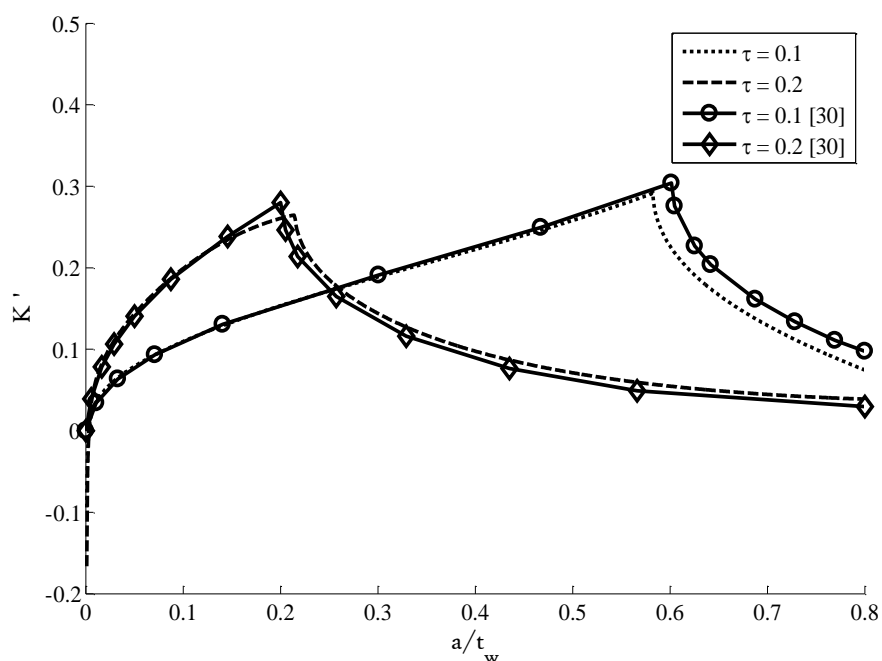
$$\begin{aligned} \sigma_{z1} &= A_1 r^2 + B_1 r + C_1, & R_i \leq r \leq R_i + \rho \\ \sigma_{z2} &= A_2 r^2 + B_2 r + C_2, & R_i + \rho \leq r \leq R_o \end{aligned} \quad (۴-۱۵)$$

ضریب شدت تنش ترک محیطی با استفاده از نتایج تنش محوری محاسبه می‌شود. در این بخش، به‌منظور صحت‌سنجی تحقیقات، مقایسه‌ای بین ضریب شدت تنش مدل‌های هدایت گرمایی کاتانو-ورنات و تأخیر فاز دوگانه با مرجع [۳۰] در زمان‌های بی‌بعد ۰/۱ و ۰/۲ صورت گرفته است که نتایج حاصل از آن به‌ترتیب در شکل ۴-۱۶ و شکل ۴-۱۷ نشان داده شده است. با توجه به شکل‌ها، نتایج از دقت کافی برخوردار هستند.

از آنجاکه در نمودار توزیع تنش محوری شکل ۴-۱۱، توزیع تنش به‌دست‌آمده با نمودار تنش مرجع [۳۰] دارای اختلاف جزئی می‌باشد؛ نقطه‌ی شکستگی در نمودار ضریب شدت تنش شکل ۴-۱۶ نیز دارای اختلاف جزئی می‌باشد.



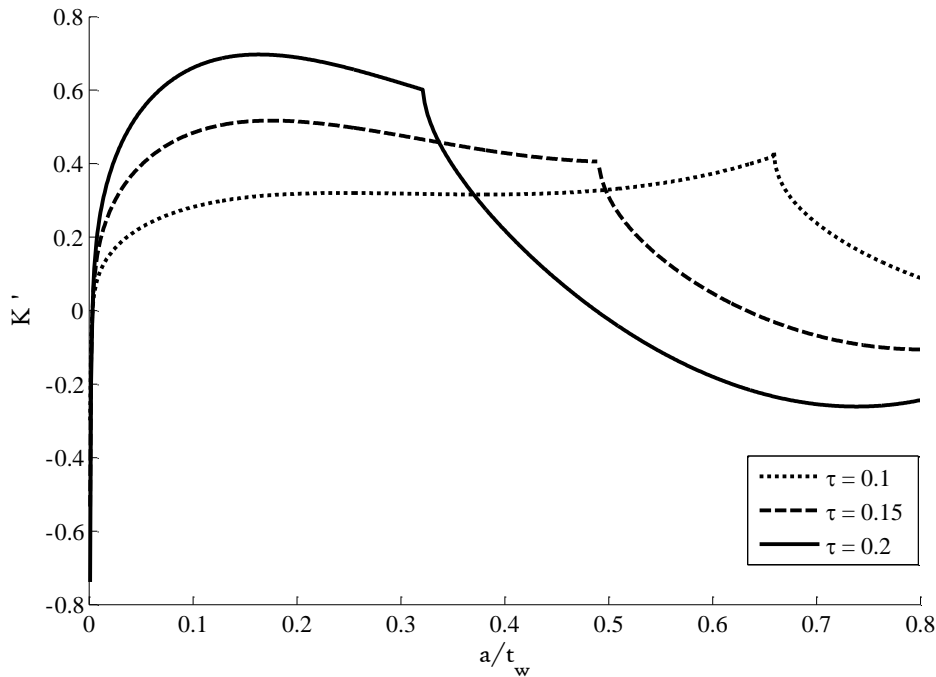
شکل ۴-۱۶ صحت‌سنجی ضریب شدت تنش ترک محیطی ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات با مرجع [۳۰]



شکل ۴-۱۷ صحت‌سنجی ضریب شدت تنش ترک محیطی ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه با مرجع [۳۰]

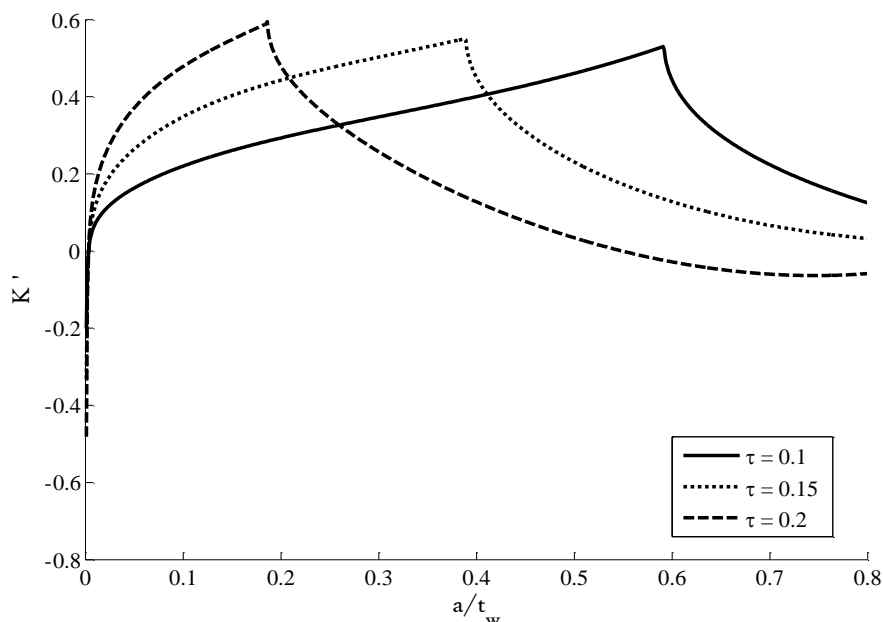
همان‌طور که از شکل ۴-۱۶ و شکل ۴-۱۷ قابل مشاهده است، قله‌ی نمودارهای ضریب شدت تنش محیطی، متناظر با پیشانی موج در نمودارهای تنش محوری می‌باشد.

در ادامه، نتایج مربوط به ضریب شدت تنش ترک محیطی برای ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات در سه زمان بی‌بعد مختلف ۰/۱، ۰/۱۵ و ۰/۲ در شکل ۴-۱۸ آورده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود نقاط شکستگی در نمودار ضریب شدت تنش، همان پیشانی موج گرما در نمودار تنش شکل ۴-۱۲ می‌باشند.



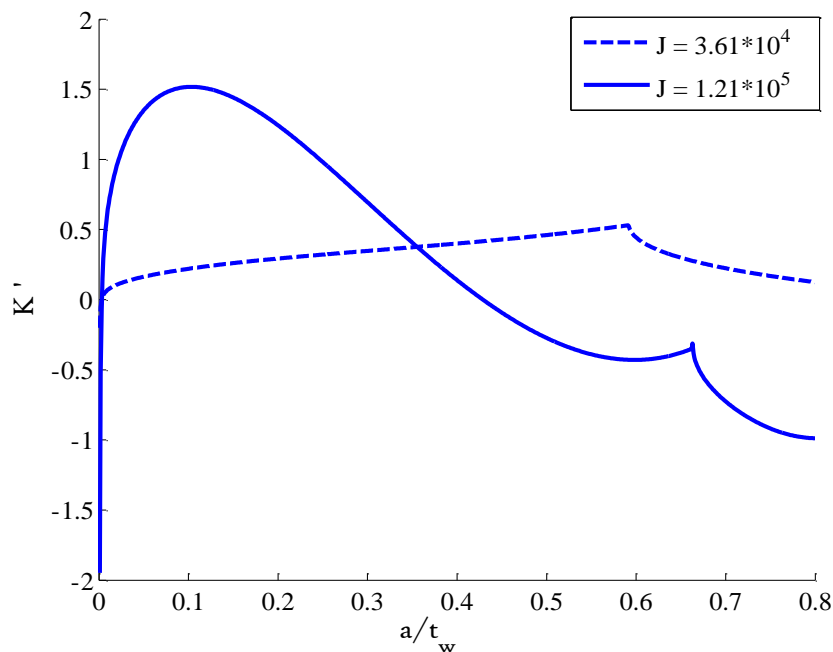
شکل ۴-۱۸ ضریب شدت تنش ترک محیطی ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات

شکل ۴-۱۹ نیز، نتایج مربوط به ضریب شدت تنش ترک محیطی را برای ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه در سه زمان بی‌بعد مختلف ۰/۱، ۰/۱۵ و ۰/۲ نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود نقاط شکستگی در نمودار ضریب شدت تنش، قله‌ی نمودار باگذشت زمان از دیواره‌ی خارجی به سمت دیواره‌ی داخلی تغییر مکان می‌دهد.



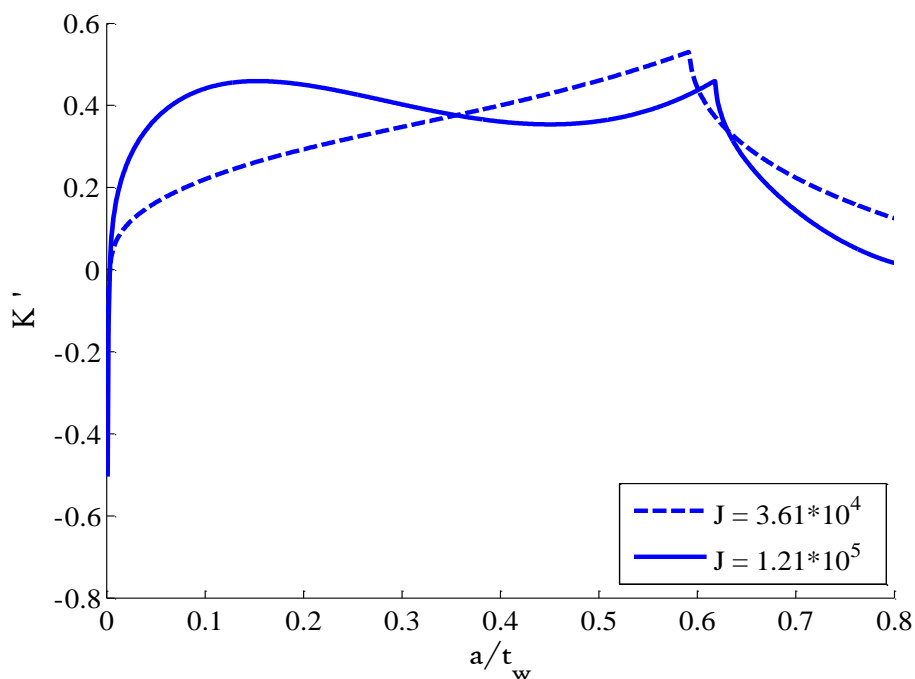
شکل ۴-۱۹ ضریب شدت تنش ترک محیطی ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه

شکل ۴-۲۰، مربوط به ضریب شدت تنش ترک محیطی است که از نتایج تنش محوری حاصل شده و برای دو مقدار چگالی جریان الکتریکی مختلف رسم شده است. قله‌ی نمودارها نشان‌دهنده‌ی پیشانی موج در نمودارهای تنش محوری مربوط به ماده‌ی ترموالکتریک خواهند بود. باید توجه داشت که ممکن است مقدار بیشینه‌ی ضریب شدت تنش در محل ناپیوستگی واقع نشود، چراکه این امکان وجود دارد که با افزایش اثر ژول، مقدار تنش در نقطه‌ی دیگری به‌جز پیشانی موج به مقدار بیشینه برسد. تنش ترسیم شده با مقدار چگالی جریان بیشتر به علت داشتن اختلاف دمای بیشتر و در نتیجه تنش بیشتر، دارای بیشینه‌ی شدت تنش بیشتری است. ضریب شدت تنش برحسب طول ترک بی‌بعد می‌باشد که در این فصل طول ترک از ۰ تا ۰/۸ فرض شده است.



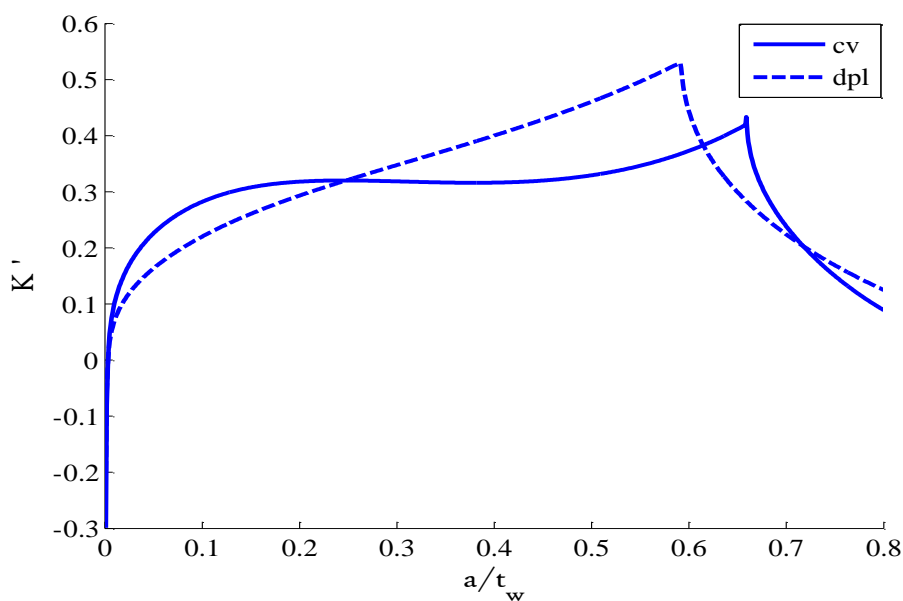
شکل ۴-۲۰ ضریب شدت تنش ترک محیطی ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات با مقادیر مختلف چگالی جریان الکتریکی

شکل ۴-۲۱ نیز تأثیر چگالی جریان الکتریکی را بر مقدار ضریب شدت تنش ترک محیطی طبق مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه نشان می‌دهد. از آنجایی که در شکل ۴-۲۰، پیشانی موج برای هر دو مقدار چگالی جریان الکتریکی از نظر مقدار تنش به یکدیگر نزدیک می‌باشد، پس بنابراین ناپیوستگی‌های نمودار ضریب شدت تنش در شکل ۴-۲۱ نیز از لحاظ مقدار، تفاوت چندانی ندارند.



شکل ۴-۲۱ ضریب شدت تنش ترک محیطی ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه با مقادیر مختلف چگالی جریان الکتریکی

شکل ۴-۲۲ نشان‌دهنده‌ی مقایسه‌ی ضریب شدت تنش ترک محیطی بین دو مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات و تأخیر فاز دوگانه در زمان $\tau = 0.1$ است که در آن $J = 3.61 \times 10^4 \frac{A}{m^2}$ می‌باشد.



شکل ۴-۲۲ مقایسه‌ی ضریب شدت تنش ترک محیطی ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل‌های هدایت گرمایی کاتانو-ورنات (C-V) و تأخیر فاز دوگانه (DPL)

همان‌طور که مشاهده می‌شود مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه دارای مقدار بیشینه‌ی بیشتری می‌باشد. همچنین، به علت سرعت موج بیشتر موقعیت بیشینه به دیواره‌ی داخلی نزدیک‌تر است

فصل ۵

استوانه شامل ترک نیم بیضوی

۵-۱ مقدمه

در این فصل همانند فصل چهارم، هندسه‌ی استوانه مورد مطالعه قرار گرفته است؛ اما دو تفاوت وجود دارد:

۱- ابعاد استوانه‌ی مورد مطالعه که شعاع داخلی آن $R_i = 0.8$ بی‌بعد و شعاع خارجی آن $R_o = 1$ بی‌بعد است که نسبت شعاع خارجی به داخلی $R_o/R_i = 1.25$ می‌باشد. در فصل چهارم نسبت $R_o/R_i = 2$ بوده است.

۲- بررسی تنش محیطی و در ادامه ترک نیم بیضوی به ترتیب به جای تنش محوری و ترک لبه‌ای که در فصل چهارم مورد مطالعه قرار گرفته بود.

۵-۲ تحلیل استوانه‌ی بدون ترک

در این فصل، همانند فصل چهارم معادله‌ی حاکم هدایت گرمایی متقارن محوری برای یک استوانه طبق مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه به صورت رابطه‌ی (۵-۱) در نظر گرفته می‌شود. با صرف-نظر از جمله‌ی $\frac{\tau_q^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2}$ و فرض $\tau_T = 0$ ، این رابطه به معادله‌ی مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات تبدیل خواهد شد.

$$\left(1 + \tau_q \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\tau_q^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right) \left(\rho C_p \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{J^2}{\sigma}\right) = \nabla \cdot \left(k \left(1 + \tau_T \frac{\partial}{\partial t}\right) \nabla T\right) \quad (۵-۱)$$

شرایط مرزی و اولیه به صورت رابطه‌ی (۵-۲) انتخاب می‌شود.

$$\begin{aligned} T(r_i, t) &= T_{wi} = 0^\circ C \\ T(r_o, t) &= T_{wo} = 200^\circ C \\ T(r, 0) &= T_o = 0^\circ C \\ \frac{\partial T}{\partial t}(r, 0) &= 0 \\ \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}(r, 0) &= 0 \end{aligned} \quad (۵-۲)$$

این کمیت‌ها به صورت مجموعه روابط (۳-۴) زیر بی بعد می‌شوند:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{k_o' t}{r_o^2} & k_o' &= \frac{k_o}{\rho_o C_o} \\ R_i &= \frac{r_i}{r_o} & \eta &= \frac{r}{r_o} \\ \varepsilon &= \frac{k_o' \tau_q}{r_o^2} & \theta &= \frac{T - T_0}{T_{wo} - T_0} \\ \delta &= \frac{k_o' \tau_i}{r_o^2} \end{aligned} \quad (3-5)$$

رابطه‌ی (۱-۵) با مجموعه روابط (۳-۵) بی بعد شده و در فضای لاپلاس به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\begin{aligned} \eta^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} \right) + \eta \left(\frac{\partial T}{\partial \eta} \right) - B \eta^2 T &= \frac{-j^2 \eta^2}{s \sigma (\delta s + 1) T_1 k} \\ B &= \frac{\left(1 + \varepsilon s + \frac{1}{2} \varepsilon^2 s^2 \right) s}{\delta s + 1} \end{aligned} \quad (4-5)$$

با توجه به رابطه‌ی (۲-۵)، شرایط مرزی در فضای لاپلاس به صورت بی بعد (۴-۵) (۵-۵) بازنویسی می‌شود.

$$\begin{aligned} \theta(R_i, t) &= 0 \\ \theta(R_o, t) &= \frac{1}{s} \end{aligned} \quad (5-5)$$

که در این فصل شعاع داخلی استوانه $R_i = 0.8$ بی بعد، شعاع خارجی استوانه $R_o = 1$ بی بعد و همچنین نسبت شعاع خارجی به داخلی $R_o/R_i = 1.25$ در نظر گرفته شده است.

۳-۵ محاسبه‌ی چگالی جریان الکتریکی

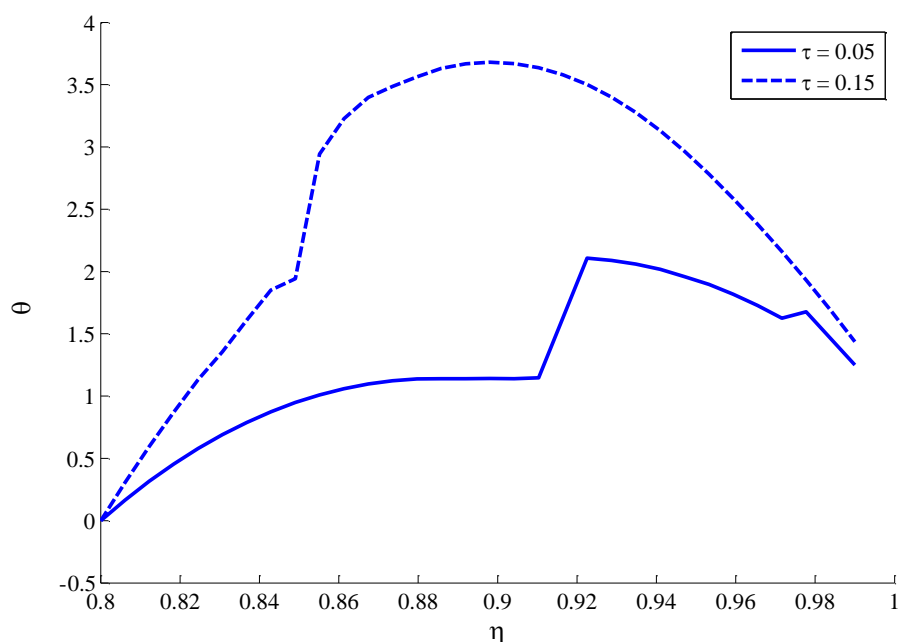
طبق مرجع [۳۲]، مقدار جریان $I = 1.7A$ و $I = 5.7A$ بوده ولی مقدار مساحت با توجه به هندسه‌ی استوانه و شرایط مرزی برابر است با:

$$A = h \times 2\pi \times \frac{R_o + R_i}{2} = 10^{-2} \times 2\pi \times 0.9 \times 10^{-3} = 5.65 \times 10^{-5} m^2 \quad (6-5)$$

که در آن h ارتفاع استوانه می‌باشد. مقادیر چگالی جریان به علت وجود دو مقدار جریان الکتریکی برابر با $J = 3.007 \times 10^4 \frac{A}{m^2}$ و $J = 1.008 \times 10^5 \frac{A}{m^2}$ خواهد بود.

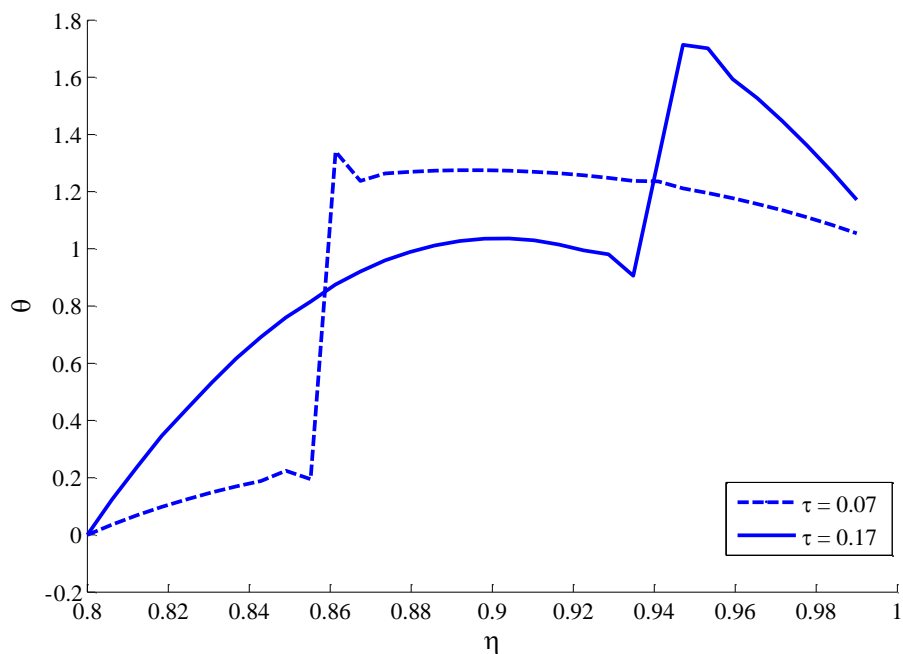
۴-۵ نتایج توزیع دما

شکل ۵-۱ نشان‌دهنده‌ی توزیع دما در استوانه‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات در زمان‌های بی‌بعد ۰/۵ و ۰/۱۵ می‌باشد که توزیع دما از دیواره‌ی داخلی با شعاع بی‌بعد $R_i = 0.8$ تا دیواره‌ی خارجی با شعاع بی‌بعد $R_o = 1$ ترسیم شده است. همچنین اثر ژول نیز در این نمودار قابل مشاهده می‌باشد؛ چرا که مقدار بیشینه‌ی نمودار از مقادیر شرایط مرزی بیشتر است و رفتاری شبیه به تولید گرمای داخلی مشاهده می‌شود.



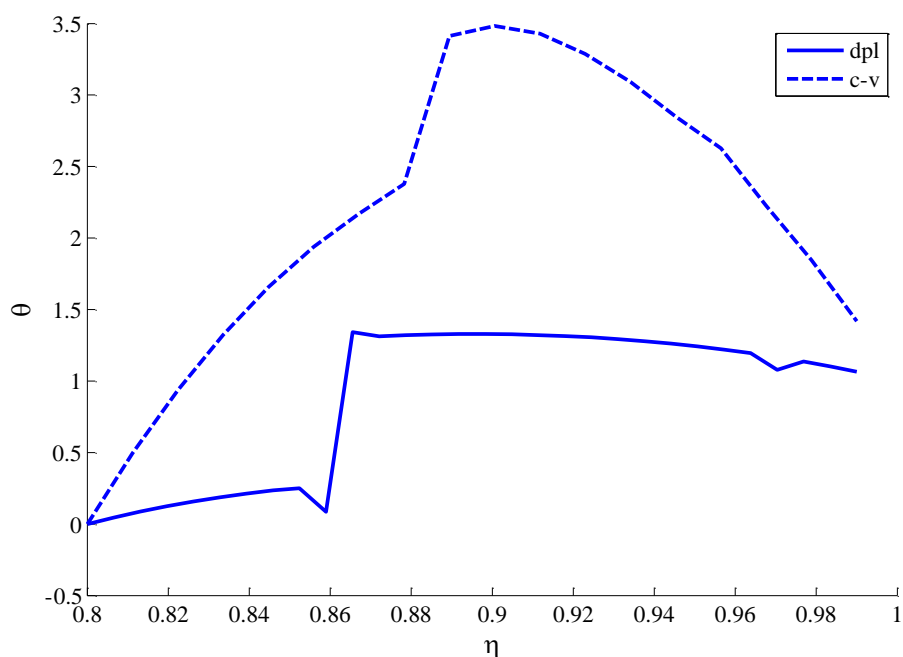
شکل ۵-۱ توزیع دما در ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات

شکل ۵-۲ توزیع دمای ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه را در زمان‌های بی‌بعد ۰/۰۷ و ۰/۱۷ نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، بیشینه‌ی توزیع دما با افزایش زمان بی‌بعد افزایش می‌یابد که این به دلیل وجود اثر ژول می‌باشد.



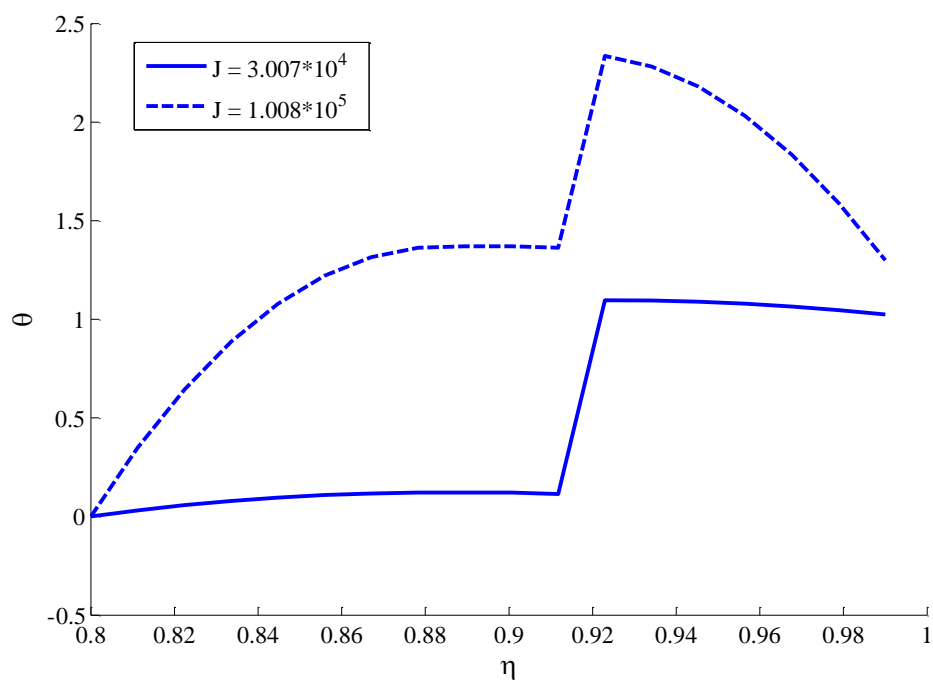
شکل ۵-۲ توزیع دما در ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه

شکل ۵-۳ مقایسه‌ی توزیع دمای بی‌بعد ترموالکتریک برحسب طول بی‌بعد را طبق مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات و تأخیر فاز دوگانه نشان می‌دهد که بیشینه‌ی نمودار مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات بیشتر از مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه می‌باشد. هر دو نمودار در زمان بی‌بعد ۰/۰۷ رسم شده‌اند.

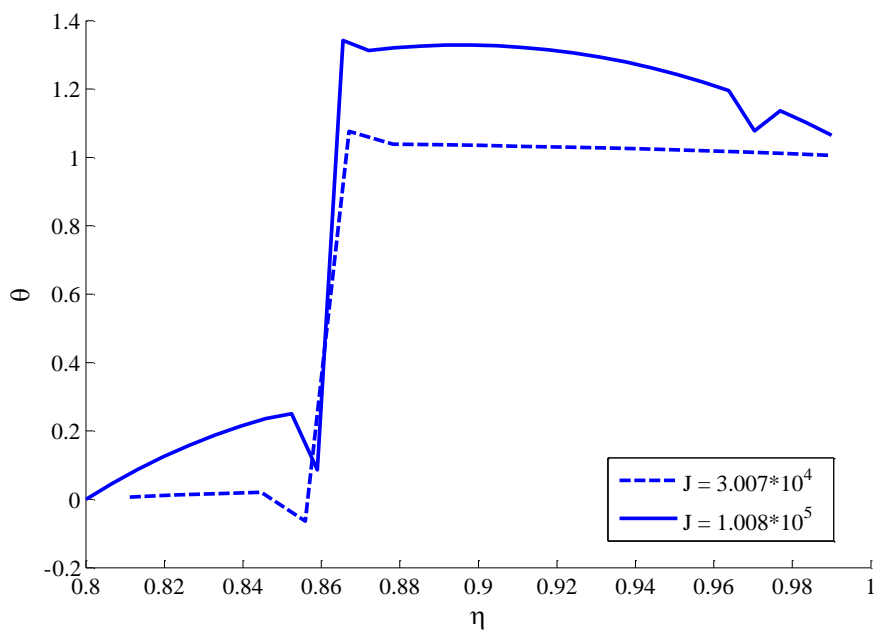


شکل ۵-۳ مقایسه‌ی توزیع دما در ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل‌های هدایت گرمایی کاتانو-ورنات (C-V) و تأخیر فاز دوگانه (DPL)

در ادامه، برای بررسی تأثیر چگالی جریان الکتریکی روی توزیع دمای ماده‌ی ترموالکتریک، شکل ۴-۵ و شکل ۵-۵ به ترتیب در زمان‌های بی‌بعد ۰/۰۵ و ۰/۰۷ برای مدل‌های هدایت گرمایی کاتانو-ورنات و تأخیر فاز دوگانه رسم شده‌اند.



شکل ۴-۵ توزیع دمای ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات با مقادیر مختلف چگالی جریان الکتریکی



شکل ۵-۵ توزیع دمای ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه با مقادیر مختلف چگالی جریان الکتریکی

همان‌طور که انتظار می‌رود با افزایش مقدار چگالی جریان الکتریکی، مقدار بیشینه‌ی دما در نمودارها افزایش یافته است.

۵-۵ میدان تنش محیطی

تنش محیطی در استوانه برحسب توزیع دما به صورت رابطه‌ی (۷-۵) به دست می‌آید:

$$\sigma_{\phi} = \frac{E\alpha}{(1-\nu)} \left[\frac{1}{(r_o^2 - r_i^2)} \left(1 + \frac{r_i^2}{r^2} \right) \int_{r_i}^{r_o} r \Delta T dr + \frac{1}{r^2} \int_{r_i}^r r \Delta T dr - \Delta T \right] \quad (7-5)$$

تنش محیطی ارائه شده در رابطه‌ی بالا (۴-۱۲) با استفاده از رابطه‌ی (۴-۱۳)، (۵-۸) بی‌بعد می‌شود.

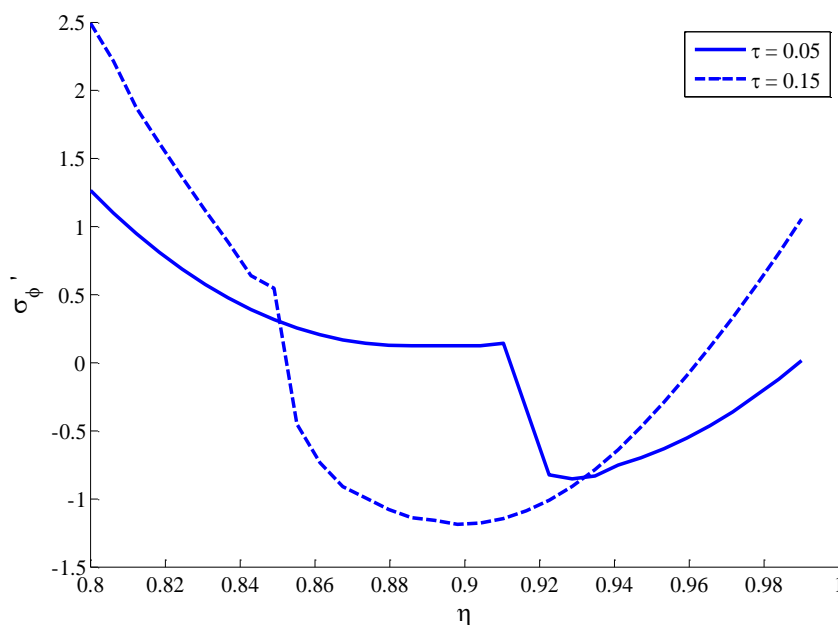
$$\sigma'_{\phi} = \frac{\sigma_{\phi}(1-\nu)}{E\alpha T_{wo}} \quad (8-5)$$

رابطه‌ی تنش محیطی بی‌بعد با قرار دادن رابطه‌ی (۷-۵) در (۵-۸)، به صورت زیر استخراج می‌شود.

$$\sigma'_{\phi}(\eta, s) = \frac{2}{1-R_i^2} \left(1 + \frac{R_i^2}{\eta^2} \right) \int_{R_i}^1 \eta \Delta \tilde{\theta} d\eta + \frac{1}{\eta^2} \int_{R_i}^{\eta} \eta \Delta \tilde{\theta} d\eta - \Delta \tilde{\theta} \quad (9-5)$$

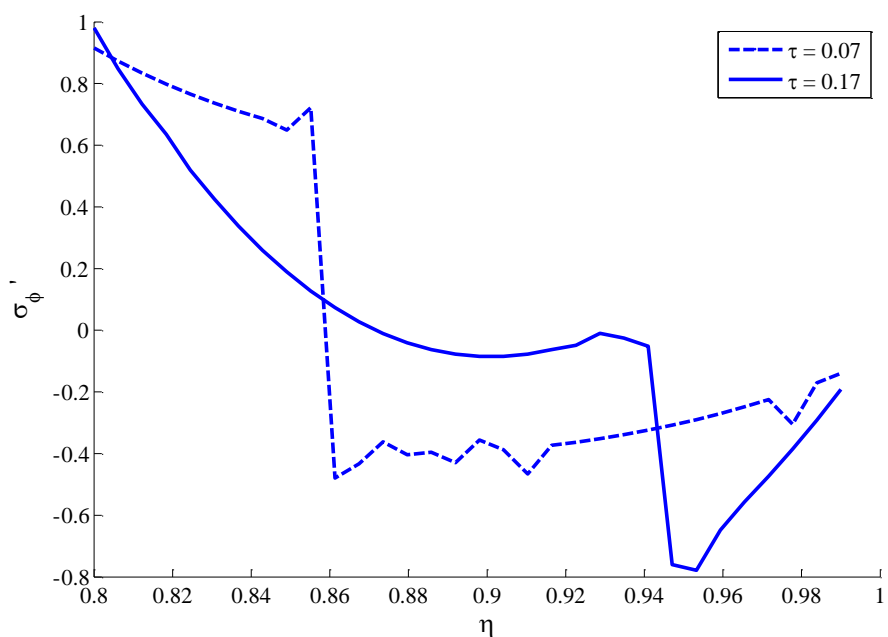
۵-۶ نتایج توزیع تنش محیطی

توزیع تنش محیطی در ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات برحسب شعاع بی‌بعد در شکل ۵-۶ نشان داده شده است که در آن موج گرما از دیواره‌ی خارجی به سمت دیواره‌ی داخلی با سرعت محدود در حال حرکت است. همچنین، در زمان‌های ابتدایی اعمال شوک گرمایی، نقاط بین دیواره‌ی داخلی و پیشانی موج دارای تنش کششی و نقاط بین پیشانی موج و دیواره‌ی خارجی دارای تنش فشاری می‌باشند.



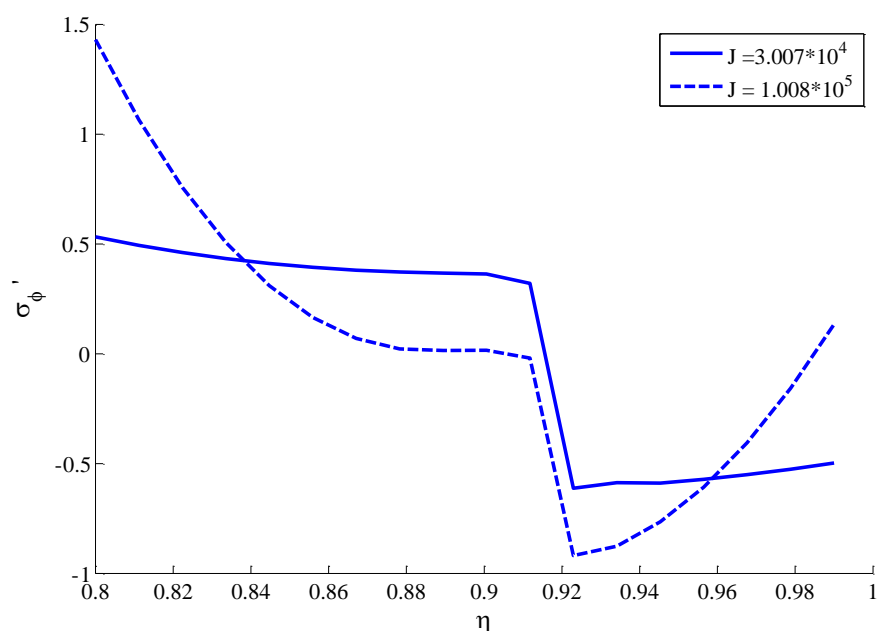
شکل ۵-۶ توزیع تنش محیطی در ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات

در شکل ۵-۷ توزیع تنش محیطی ماده‌ی ترموالکتریک را در مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه برحسب شعاع بی‌بعد رسم شده است. با توجه به شکل مشهود است که شکستگی در نمودار تنش محیطی، با نمودار دما متناظر است. همچنین با توجه به صفر بودن بار مکانیکی، سطح زیر نمودار تنش روی ضخامت استوانه در یک‌زمان مشخص، صفر خواهد بود.

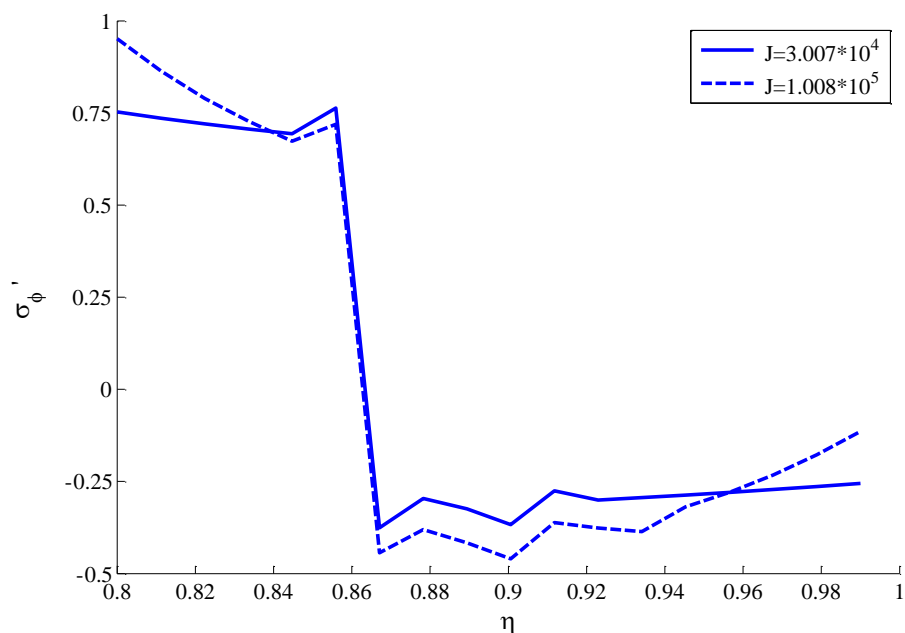


شکل ۵-۷ توزیع تنش محیطی ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه

در ادامه، تأثیر چگالی جریان الکتریکی روی توزیع تنش محیطی ماده‌ی ترموالکتریک در شکل ۵-۸ و شکل ۵-۹ به ترتیب در زمان‌های بی‌بعد ۰/۰۵ و ۰/۰۷ برای مدل‌های هدایت گرمایی کاتانو-ورنات و تأخیر فاز دوگانه بررسی شده‌اند.



شکل ۵-۸ توزیع تنش محیطی ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات با مقادیر مختلف چگالی جریان الکتریکی

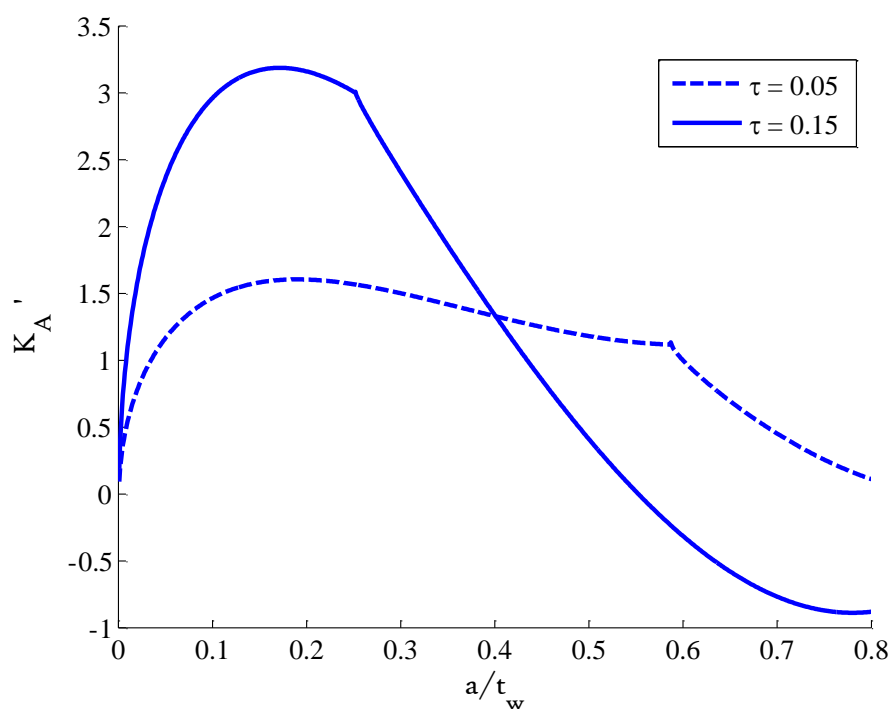


شکل ۵-۹ توزیع تنش محیطی ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه با مقادیر مختلف چگالی جریان الکتریکی

در شکل ۵-۸ و شکل ۵-۹ با افزایش مقدار چگالی جریان الکتریکی، مشاهده می‌شود میزان تنش کششی در دیواره‌ی داخلی رو به افزایش است.

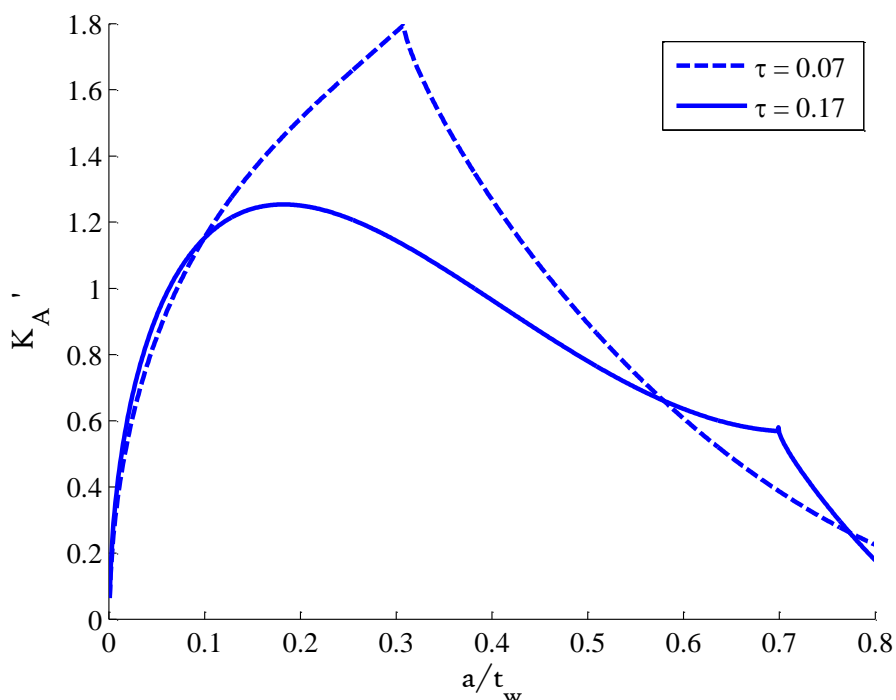
۵-۷ نتایج ضریب شدت تنش در عمق ترک نیم بیضوی

شکل ۵-۱۰، ضریب شدت تنش عمق ترک نیم بیضوی ماده‌ی ترموالکتریک در مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات برحسب طول ترک بی‌بعد نشان می‌دهد که نقاط نوک تیز همان شکستگی در نمودار تنش محیطی می‌باشد و بیشینه‌ی ضریب شدت تنش به مرور زمان از محل شکستگی دور می‌شود که این نشان‌دهنده‌ی حضور اثر ژول است.



شکل ۵-۱۰ ضریب شدت تنش عمق ترک نیم بیضوی در ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات

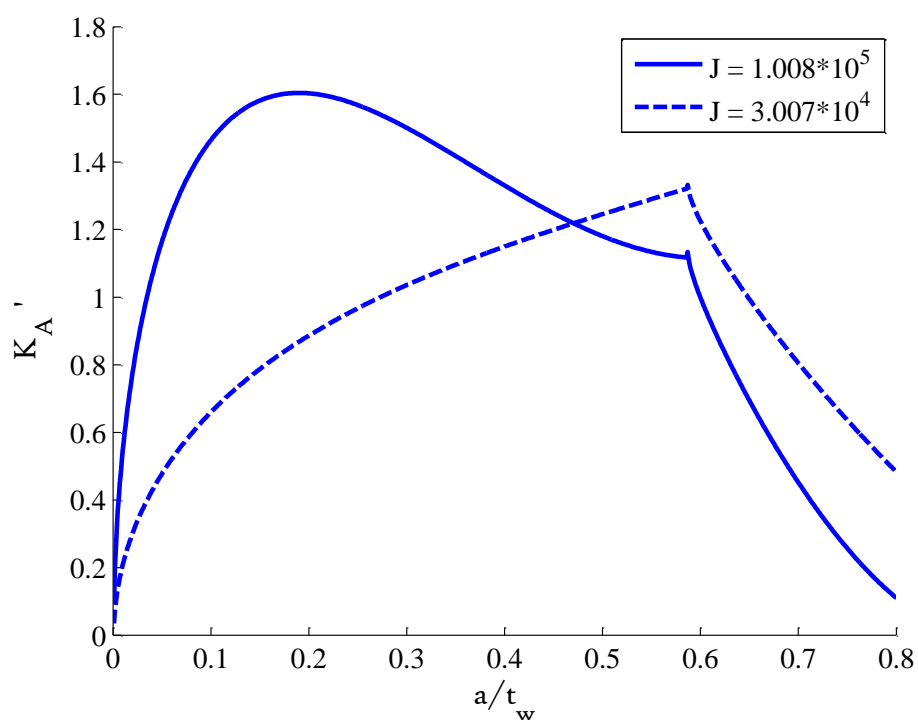
در ادامه، ضریب شدت تنش عمق ترک نیم بیضوی در استوانه‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه برحسب طول ترک بی‌بعد در شکل ۵-۱۱ نشان داده شده است. باید به این نکته توجه داشت که نمودار $\tau=0.17$ از بیشینه‌ی کمتری نسبت به $\tau=0.07$ برخوردار است، زیرا با توجه به شکل ۵-۷ گرادیان دمای پیشانی موج در زمان $\tau=0.07$ نسبت به زمان $\tau=0.17$ به دلیل داشتن یک رفت و برگشت بیشتر موج گرما، بیشتر است. به همین دلیل استهلاك موج گرما بیشتر شده و نمودار $\tau=0.17$ از بیشینه‌ی ضریب شدت تنش کمتری برخوردار است. همچنین شکستگی‌های مشاهده شده منطبق بر محل پیشانی موج در نمودار توزیع تنش محیطی شکل ۵-۷ است.



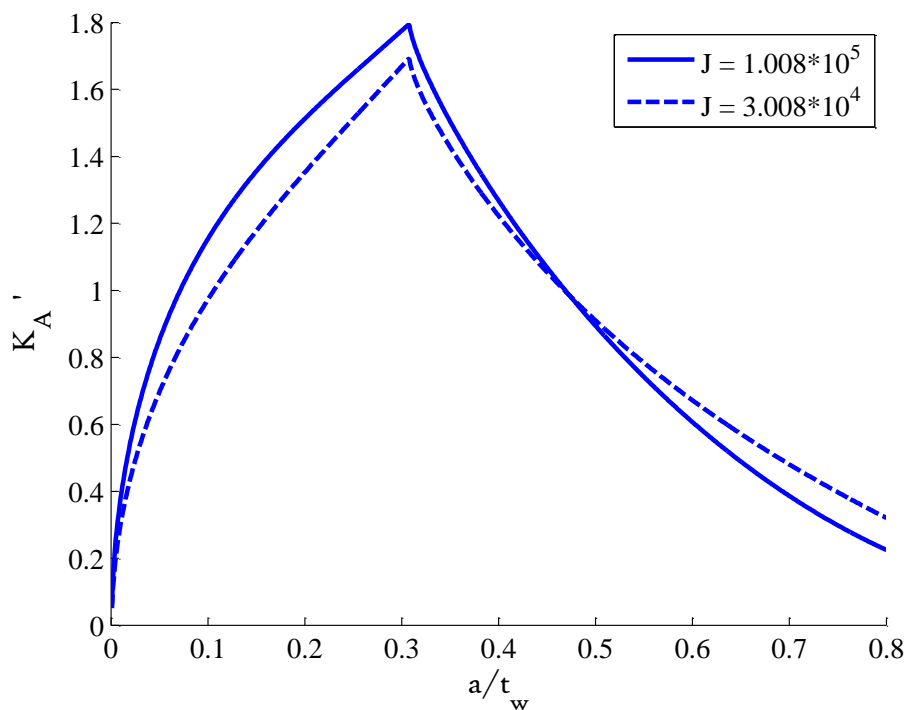
شکل ۵-۱۱ ضریب شدت تنش عمق ترک نیم بیضوی در ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه

شکل ۵-۱۲ و شکل ۵-۱۳ نشان‌دهنده‌ی ضریب شدت تنش در عمق ترک نیم بیضوی برای دو مقدار مختلف چگالی جریان الکتریکی در مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات و تأخیر فاز دوگانه برحسب طول ترک بی بعد می‌باشد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، با افزایش چگالی جریان الکتریکی، مقدار بیشینه‌ی ضریب شدت تنش عمق ترک نیم بیضوی افزایش یافته که نتایج با تغییرات تنش هم-خوانی دارد.

از آنجایی که افزایش اثر ژول تأثیری روی سرعت موج ندارد، بنابراین نقاط نوک تیز نمودار در یک موقعیت از طول ترک بی بعد قرار گرفته‌اند.



شکل ۵-۱۲ ضریب شدت تنش عمق ترک نیم بیضوی ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات با مقادیر مختلف چگالی جریان الکتریکی



شکل ۵-۱۳ ضریب شدت تنش عمق ترک نیم بیضوی ماده‌ی ترموالکتریک طبق مدل هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه با مقادیر مختلف چگالی جریان الکتریکی

فصل ۶

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

۶-۱ نتیجه‌گیری

در معادلات حاکم به دلیل وجود خاصیت ترموالکتریک، علاوه بر جملات ناشی از انتخاب مدل هدایت گرمایی، جملات دیگری نیز ظاهر خواهند شد که مربوط به اثر ژول و تامسون هستند.

- اثر ژول، رفتاری مشابه تولید گرمای داخلی دارد و افزایش آن، مقدار بیشینه‌ی نمودارهای توزیع دما را افزایش می‌دهد. همچنین، مقدار تنش کششی را در زمان‌های ابتدایی در دیواره‌ی داخلی و اندازه‌ی تنش فشاری را در حدفاصل دو دیواره افزایش می‌دهد. افزایش مقادیر تنش، خود باعث افزایش مقدار بیشینه‌ی ضریب شدت تنش می‌شود. در ادامه، نتایج اثر تامسون در دیواره مورد بررسی قرار گرفته است که تغییرات جزئی این اثر را نشان می‌دهد که باعث صرف‌نظر شدن از آن می‌شود.
- در حضور اثر ژول در زمان‌های ابتدایی، گذشت زمان باعث افزایش تولید گرمای داخلی می‌شود. باگذشت زمان میزان بیشینه‌ی دما افزایش می‌یابد.
- افزایش اثر ژول اندازه‌ی بیشینه‌ی تنش کششی و تنش فشاری را افزایش می‌دهد در نتیجه در نواحی تنش کششی امکان رشد ترک بیشتر می‌شود.
- در مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات اثر ژول تأثیرگذاری بیشتری دارد، به‌طوری که در شکل‌های مقایسه‌ی دو مدل هدایت گرمایی در یک‌زمان و با یک مقدار چگالی جریان الکتریکی، مدل هدایت گرمایی کاتانو-ورنات دارای بیشینه‌ی بلندتری می‌باشد.
- برخلاف انتظار که باگذشت زمان به‌علت استهلاک موج، ضریب شدت تنش کاهش می‌یابد، در حضور اثر ژول در زمان‌های ابتدایی باگذشت زمان مقدار ضریب شدت تنش افزایش می‌یابد و باعث افزایش طول ترک خواهد شد.
- با افزایش مقدار چگالی جریان الکتریکی در نمودار ضریب شدت تنش، ممکن است نقطه بیشینه به محلی غیر از نقطه پیشانی در موج تنش، انتقال یابد

- در حضور اثر ژول مقدار ضریب شدت تنش در مدل هدایت گرمایی کاتانوک-ورنات بیشتر از مدل تأخیر فاز دوگانه است.

۲-۶ پیشنهادها

چند پیشنهاد که برای کارهای آینده در این زمینه ارائه می‌شوند عبارت است از:

- ۱- محاسبه‌ی ضریب شدت تنش در استوانه‌ی ترموالکتریک با استفاده از تئوری گرین-لیندزی
- ۲- محاسبه‌ی ضریب شدت تنش در استوانه‌ی ترموالکتریک با استفاده از تئوری گرین-نقدی
- ۳- بررسی اثر انواع شرایط مرزی بر دما، تنش و ضرایب شدت تنش در استوانه‌ی ترموالکتریک

- [1] F. J. DiSalvo, "Thermoelectric cooling and power generation," *Science* (80-.), vol. 285, no. 5428, pp. 703–706, 1999.
- [2] M. H. Babaei and Z. Chen, "Transient hyperbolic heat conduction in a functionally graded hollow cylinder," *J. Thermophys. Heat Transf.*, vol. 24, no. 2, pp. 325–330, Apr. 2010.
- [3] M. J. Maurer and H. A. Thompson, "Non-fourier effects at high heat flux," *J. Heat Transfer*, vol. 95, no. 2, pp. 284–286, May 1973.
- [4] C. Körner and H. W. Bergmann, "The physical defects of the hyperbolic heat conduction equation," *Appl. Phys. A Mater. Sci. Process.*, vol. 67, no. 4, pp. 397–401, Oct. 1998.
- [5] S. Godoy and L. S. García-Colín, "Nonvalidity of the telegrapher's diffusion equation in two and three dimensions for crystalline solids," *Phys. Rev. E*, vol. 55, no. 3, pp. 2127–2131, Mar. 1997.
- [6] I. Jones and G. Rothwell, "Reference stress intensity factors with application to weight functions for internal circumferential cracks in cylinders," *Eng. Fract. Mech.*, vol. 68, no. 4, pp. 435–454, Mar. 2001.
- [7] R. Erdol and F. Erdogan, "A thick-walled cylinder with an axisymmetric internal or edge crack," *J. Appl. Mech.*, vol. 45, no. 2, pp. 281–286, Jun. 1978.
- [8] L. Aydin and H. S. A. Artem, "Axisymmetric crack problem of thick-walled cylinder with loadings on crack surfaces," *Eng. Fract. Mech.*, vol. 75, no. 6, pp. 1294–1309, Apr. 2008.
- [9] H. F. Nied and F. Erdogan, "The elasticity problem for a thick-walled cylinder containing a circumferential crack," *Int. J. Fract.*, vol. 22, no. 4, pp. 277–301, Aug. 1983.
- [10] Z. Q. Wang, "The calculation of dynamic stress intensity factors for a cracked thick walled cylinder," *Int. J. Fract.*, vol. 73, no. 4, pp. 359–366, 1995.
- [11] H. Grebner, "Finite element calculation of stress intensity factors for complete circumferential surface cracks at the outer wall of a pipe," *Int. J. Fract.*, vol. 27, no. 3–4, pp. R99–R102, 1985.
- [12] S. M. Nabavi and R. Ghajar, "Analysis of thermal stress intensity factors for cracked cylinders using weight function method," *Int. J. Eng. Sci.*, vol. 48, no. 12, pp. 1811–1823, Dec. 2010.
- [13] G. Glinka and G. Shen, "Universal features of weight functions for cracks in mode I," *Eng. Fract. Mech.*, vol. 40, no. 6, pp. 1135–1146, Jan. 1991.
- [14] R. Ghajar and S. M. Nabavi, "Closed-form thermal stress intensity factors for an internal circumferential crack in a thick-walled cylinder," *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.*, vol. 33, no. 8, pp. 504–512, May 2010.
- [15] D. M. Chang and B. L. Wang, "Transient thermal fracture and crack growth behavior in brittle media based on non-fourier heat conduction," *Eng. Fract. Mech.*, vol. 94, pp. 29–36, Nov. 2012.
- [16] K. Hu and Z. Chen, "Thermoelastic analysis of a partially insulated crack in a strip under thermal impact loading using the hyperbolic heat conduction theory," *Int. J. Eng. Sci.*, vol. 51, pp. 144–160, Feb. 2012.
- [17] Z. T. Chen and K. Q. Hu, "Thermoelastic analysis of a cracked substrate bonded to a coating using the hyperbolic heat conduction theory," *J. Therm. Stress.*, vol. 37, no. 3, pp. 270–291, Mar. 2014.
- [18] Z. T. Chen and K. Q. Hu, "Thermo-elastic analysis of a cracked half-plane under a thermal shock impact using the hyperbolic heat conduction theory," *J. Therm. Stress.*, vol. 35, no. 4, pp. 342–362, Apr. 2012.

- [19] B.L. Wang, "Transient thermal cracking associated with non-classical heat conduction in cylindrical coordinate system," *Acta Mech. Sin.*, vol. 29, no. 2, pp. 211–218, Apr. 2013.
- [20] J. Fu, Z. Chen, L. Qian, and Y. Xu, "Non-fourier thermoelastic behavior of a hollow cylinder with an embedded or edge circumferential crack," *Eng. Fract. Mech.*, vol. 128, pp. 103–120, Sep. 2014.
- [21] Melcor, *Thermoelectric Handbook*, Melcor, a unit of Laird technologies, <http://www.lairdtech.com>, 2000.
- [22] X. B. Lin and R. A. Smith, "Numerical analysis of fatigue growth of external surface cracks in pressurised cylinders," *Int. J. Press. Vessel. Pip.*, vol. 71, no. 3, pp. 293–300, May 1997.
- [23] H. J. Petroski and J. D. Achenbach, "Computation of the weight function from a stress intensity factor," *Eng. Fract. Mech.*, vol. 10, no. 2, pp. 257–266, Jan. 1978.
- [24] A. SHAHANI and S. NABAVI, "Closed form stress intensity factors for a semi-elliptical crack in a thick-walled cylinder under thermal stress," *Int. J. Fatigue*, vol. 28, no. 8, pp. 926–933, Aug. 2006.
- [25] X. J. Zheng, G. Glinka, and R. N. Dubey, "Calculation of stress intensity factors for semielliptical cracks in a thick-wall cylinder," *Int. J. Press. Vessel. Pip.*, vol. 62, no. 3, pp. 249–258, Jan. 1995.
- [26] X. J. Zheng, A. Kiciak, and G. Glinka, "Weight functions and stress intensity factors for internal surface semi-elliptical crack in thick-walled cylinder," *Eng. Fract. Mech.*, vol. 58, no. 3, pp. 207–221, Oct. 1997.
- [27] H.Y. Lee, Y.W. Kim, and B. In Yun, "Stress intensity factor solution for radial and circumferential cracks in hollow cylinders using indirect boundary integral," *Int. J. Press. Vessel. Pip.*, vol. 69, no. 1, pp. 45–52, Nov. 1996.
- [28] I. V. Varfolomeyev and L. Hodulak, "Improved weight functions for infinitely long axial and circumferential cracks in a cylinder," *Int. J. Press. Vessel. Pip.*, vol. 70, no. 2, pp. 103–109, Feb. 1997.
- [۲۹] ا. عاصمی، پایان‌نامه ارشد: "محاسبه‌ی ضریب شدت تنش مود I در صفحه و استوانه‌ی جدار ضخیم دارای ترک تحت شوک حرارتی غیر فوریه‌ای با استفاده از تابع وزنی"، دانشکده مهندسی مکانیک و مکترونیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، ۱۳۹۴.
- [۳۰] ا. فرحی، پایان‌نامه ارشد: "تعیین ضریب شدت تنش مود I در باریکه و استوانه دارای ترک با استفاده از تابع وزنی و در نظر گرفتن تئوری‌های تعمیم‌یافته‌ی ترموالاستیسیته"، دانشکده مهندسی مکانیک و مکترونیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، ۱۳۹۴.
- [31] R. Palma, J. L. PerezAparicio, and R. L. Taylor, "Non-linear finite element formulation applied to thermoelectric materials under hyperbolic heat conduction model," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 213–216, pp. 93–103, 2012.
- [32] J. L. PrezAparicio, R. Palma, and R. L. Taylor, "Finite element analysis and material sensitivity of Peltier thermoelectric cells coolers," *Int. J. Heat Mass Transf.*, vol. 55, no. 4, pp. 1363–1374, Jan. 2012.
- [33] M.J. Huang, P.K. Chou, and M.C. Lin, "An investigation of the thermal stresses induced in a thin-film thermoelectric cooler," *J. Therm. Stress.*, vol. 31, no. 5, pp. 438–454, 2008.
- [34] B. L. Wang, "A finite element computational scheme for transient and nonlinear coupling thermoelectric fields and the associated thermal stresses in thermoelectric materials," *Appl. Therm. Eng.*, vol. 110, pp. 136–143, 2017.
- [35] A. B. Zhang and B. L. Wang, "Crack tip field in thermoelectric media," *Theor. Appl. Fract. Mech.*, vol. 66, pp. 33–36, 2013.
- [36] H.P. Song, C.F. Gao, and J. Li, "Two-dimensional problem of a crack in

- thermoelectric materials,” *J. Therm. Stress.*, vol. 38, no. 3, pp. 325–337, 2015.
- [37] B. L. Wang, Y. B. Guo, and C. W. Zhang, “Cracking and thermal shock resistance of a Bi₂Te₃ based thermoelectric material,” *Eng. Fract. Mech.*, vol. 152, pp. 1–9, 2016.
- [38] S. . Riffat and X. Ma, “Thermoelectrics: a review of present and potential applications,” *Appl. Therm. Eng.*, vol. 23, no. 8, pp. 913–935, Jun. 2003.
- [39] G. J. Snyder, J.-P. Fleurial, T. Caillat, R. Yang, and G. Chen, “Supercooling of Peltier cooler using a current pulse,” *J. Appl. Phys.*, vol. 92, no. 3, pp. 1564–1569, Aug. 2002.
- [40] R. P. Guerrero and R. G. Sevilla, “Thermodynamic formulation for non-linear finite element applied to multi – coupled materials,” 2011.
- [41] C. Cattaneo, “A form of heat conduction equation which eliminates the paradox of instantaneous propagation,” *Compt. Rend*, vol. 247 (4), pp. 431-433, 1958.
- [42] P. Vernotte, “Some possible complications in the phenomena of thermal conduction,” *Compt Rend*, vol. 252, pp. 2190–2191, 1961.
- [43] D. Y. Tzou, “A unified field approach for heat conduction from macro- to micro-scales,” *J. Heat Transfer*, vol. 117(1), no. 1, pp. 8-16, Feb. 1995.
- [44] D. Y. Tzou, “The generalized lagging response in small-scale and high-rate heating,” *Int. J. Heat Mass Transf.*, vol. 38, no. 17, pp. 3231–3240, Nov. 1995.
- [45] Kuna, M., *Finite elements in fracture mechanics*, Dordrecht: Springer, 2013.
- [46] H. F. Bueckner, “Novel principle for the computation of stress intensity factors,” *Zeitschrift fuer Angew. Math. Mech.*, vol. 50, no. 9, pp. 529-546, Sep. 1970.
- [47] J. R. Rice, “Some remarks on elastic crack-tip stress fields,” *Int. J. Solids Struct.*, vol. 8, no. 6, pp. 751–758, Jun. 1972.
- [48] S. M. Nabavi and A. R. Shahani, “Thermal stress intensity factors for a cracked cylinder under transient thermal loading,” *Int. J. Press. Vessel. Pip.*, vol. 86, no. 2–3, pp. 153–163, Feb. 2009.
- [49] K, Y. Lee, S. Kwan-Bo, “Thermal shock stress intensity factor by bueckner’s weight function method,” *Eng. Fract. Mech.*, vol. 37, no. 4, pp. 799–804, Jan. 1990.
- [50] H. F. Bueckner, “Weight functions for the notched bar,” *Zamm - Zeitschrift fuer Angew. Math. und Mech.*, vol. 51, no. 2, pp. 97–109, Jan. 1971.
- [51] X. J. Zheng and G. Glinka, “Weight functions and stress intensity factors for longitudinal semi-elliptical cracks in thick-wall cylinders,” *J. Press. Vessel Technol.*, vol. 117, no. 4, pp. 383-389, Nov. 1995.
- [52] H. Dubner and J. Abate, “Numerical inversion of laplace transforms by relating them to the finite fourier cosine transform,” *J. ACM*, vol. 15, no. 1, pp. 115–123, Jan. 1968.
- [53] F. Durbin, “Numerical inversion of laplace transforms: an efficient improvement to dubner and abate’s method,” *Comput. J.*, vol. 17, no. 4, pp. 371–376, Nov. 1974.
- [54] G. Honig and U. Hirdes, “A method for the numerical inversion of Laplace transforms,” *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 10, no. 1, pp. 113–132, Feb. 1984.
- [55] C. Han-Taw and L. Jae-Yuh, “Numerical analysis for hyperbolic heat conduction,” *Int. J. Heat Mass Transf.*, vol. 36, no. 11, pp. 2891–2898, Jul. 1993.

[۵۶] ا. عاصمی، م، ب. نظری، “تعیین ضریب شدت تنش در استوانه‌های حاوی ترک محیطی تحت شوک حرارتی غیر کلاسیک، مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها، ش ۳، صص ۱۰۱–۱۱۲، ۱۳۹۴.

Aabstract

On this thesis, the stress intensity factor of mode **I** in a edge cracked plate or a cylindrical which is contains a circumferential or semi-elliptical crack is extracted by using the weight function method. the plate and cylinder which are made of thermoelectric material such as bismuth telluride are subjected to the Non-fourier thermal shock according to the Cattaneo- Vernotte as well as dual- phase lag models.

In order to extract the result, the Non- fourier heat conduction problem is solved in laplace domain at the first. Also, the stress distribution is obtained in laplace domain, the time variation of the stress distribution is by using numerical laplace inversion methods at last. The stress intensity factor are obtained by using the weight function method. The effect of Joule and Thompson coefficients on the results are investigated

Keywords:

Thermoelectric, Joule's effect, Hyperbolic thermal conductivity model, Dual Phase Lag heat conduction model (DPL), Inverse Laplace transform, Thick walled cylinder, Plate.



Shahrood University of Technology

Faculty of Mechanical and Mechatronic Engineering

Master of Science Thesis in Applied Mechanical Engineering

**Determination of mode I stress intensity factor in a
thermoelectric cracked plate and cylinder under
thermal shock using weight function method**

Mohammad Hossein Kamrava

Supervisor:
Dr. Mohammad Bagher Nazari

January 2018