بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک

پایان‌نامه کارشناسی ارشد مهندسی طراحی کاربردی

محاسبه‌ی ضرایب شدّت تنش در یک محیط همسانگرد محدود دوبعدی دارای ترک تحت شوک حرارتی با درنظر گرفتن تئوری گرین-لیندزی و استفاده از روش المان محدود توسعه‌یافته

نگارنده

نوید روشنی زرمهری

اساتید راهنما

دکتر محمدباقر نظری

دکتر مسعود مهدی‌زاده رخی

شهریور ماه ۱۳۹۶

شماره: ۹۶/۱۶۳ ر د م
تاریخ: ۹۶/۷/۱۷

باسمه‌تعالی

دانشگاه صنعتی شاهرود
مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد آقای نوید روشنی زرمهری با شماره دانشجویی۹۳۳۳۳۵۴ رشته مکانیک گرایش طراحی کاربردی تحت عنوان محاسبه‌ی ضرایب شدّت تنش در یک محیط همسانگرد محدود دوبعدی دارای ترک تحت شوک حرارتی با درنظر گرفتن تئوری گرین-لیندزی و استفاده از روش المان محدود توسعه‌یافته که در تاریخ ۹۶/۶/۲۱ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با امتیاز ۱۸/۵ درجه بسیار خوب) ☑ مردود ☐

نوع تحقیق: نظری ☑ عملی ☐

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ استادراهنمای اول	محمدباقر نظری	استادیار	
۲- استادراهنمای دوم	مسعود مهدی زاده رخی	استادیار	
۳- استاد مشاور	—	—	—
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	حبیب احمدی		
۵- استاد ممتحن اول	علیرضا شاطرزاده	استادیار	
۶ـ استاد ممتحن دوم	محمد جعفری	دانشیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده:

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

تبصره: در صورتی که کسی مردود شود حداکثر یکبار دیگر (در مدت مجاز تحصیل) می تواند از پایان نامه خود دفاع نماید (دفاع مجدد نباید زودتر از ۴ ماه برگزار شود).

صفحه تقدیم

تقدیم به ساحت مقدس معلم بزرگ آزادی و مردانگی، سید و سالار شهیدان، حضرت ابا عبدالله الحسین (ع)

تقدیم به ساحت مقدس معلم بزرگ ایستادگی و استقامت، حضرت ابوالفضل العباس (ع)

تقدیم به ساحت مقدس ضامن آهو، امام مهربانی‌ها، حضرت علی ابن موسی الرضا (ع)

تقدیم به ساحت مقدس امام عصر، حضرت مهدی (عج)

تقدیم به مهربان فرشتگانی که:

لحظات ناب باور بودن، لذت و غرور دانستن، جسارت خواستن، عظمت رسیدن و تمام تجربه‌های یکتا و زیبای زندگیم، مدیون حضور سبز آنهاست.

تقدیم به پدر و مادرم که با صبر و بردباری بی‌نظیرشان، سختی کار را بر من آسان نمودند

صفحه تشکر

سپاس خدای را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت‌های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند. و سلام و دورد بر محمّد و خاندان پاک او، طاهران معصوم، هم آنان که وجودمان وامدار وجودشان است؛ و نفرین پیوسته بر دشمنان ایشان تا روز رستاخیز...

بدون شک جایگاه و منزلت معلم، اجّل از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی‌شائبه او، با زبان قاصر و دست ناتوان، چیزی بنگاریم.

بر حسب وظیفه و از باب "من لم یشکر المنعم من المخلوقین لم یشکر اللّه عزّ و جلّ" :

از استاد با کمالات و شایسته؛ جناب آقای دکتر محمدباقر نظری که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این پایان‌نامه را بر عهده گرفتند؛

از استاد صبور و با تقوا، جناب آقای دکتر مسعود مهدی‌زاده رخی، که زحمت راهنمایی این پایان‌نامه را در حالی متقبل شدند که بدون مساعدت ایشان، این پروژه به نتیجه مطلوب نمی رسید؛

کمال تشکر را دارم.

در پایان از همه عزیزانی که مرا در به انجام رساندن این پایان‌نامه یاری نموده‌اند، تشکر و قدردانی می‌نمایم.

تعهد نامه

اینجانب **نوید روشنی زرمهری** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته **مهندسی مکانیک - طراحی کاربردی** دانشکده **مکانیک** دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان نامه **محاسبه‌ی ضرایب شدّت تنش در یک محیط همسانگرد محدود دوبعدی دارای ترک تحت شوک حرارتی با درنظر گرفتن تئوری گرین-لیندزی و استفاده از روش المان محدود توسعه‌یافته** تحت راهنمایی **دکتر محمدباقر نظری و دکتر مسعود مهدی‌زاده رخی** متعهد می‌شوم:

❊ تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است.

❊ در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.

❊ مطالب مندرج در پایان نامه تا کنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچگونه مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.

❊ کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.

❊ حقوق معنوی تمام افرادی که در بدست آمدن نتایج اصلی رساله تاثیر گذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از رساله رعایت می‌گردد.

❊ در کلیه مراحل انجام این رساله در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا از آن استفاده شده است، اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ :

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

چکیده

در این پایان‌نامه، ضرایب شدت تنش در یک محیط همسانگرد محدود دوبعدی دارای ترک ساکن برای اولین بار با استفاده از روش انتگرال برهمکنش و بهره‌گیری از روش المان محدود توسعه‌یافته با در نظر گرفتن تئوری ترموالاستیسیته کوپل تعمیم‌یافته بر پایه مدل گرین-لیندزی (G-L) محاسبه شده است. ترم مستهلک‌کننده چگالی انرژی کرنشی جهت حفظ خصوصیت استقلال از ناحیه در انتگرال برهمکنش برای محاسبه ضرایب شدت تنش در نظر گرفته شده است. معادلات گسسته حاکم با استفاده از روش انتگرال‌گیری نیومارک در قلمرو زمان حل شده‌اند. در چند مثال عددی، اثر موج‌های گرما و تنش روی ضریب شدت تنش و همچنین، اثر موج گرما بر توزیع دما براساس مدل گرین لیندزی بررسی شده است. بر اساس نتایج، سرعت امواج تنش و گرما، روند تغییرات ضریب شدت تنش را به‌خصوص در زمان‌های اولیه اعمال شوک گرمایی کنترل می‌کند. ضرایب شدت تنش در بارگذاری مکانیکی-گرمایی با رسیدن موج تنش مکانیکی به نوک ترک نسبت به بارگذاری گرمایی افزایش می‌یابد. اگرچه برای شوک مکانیکی- گرمایی کلاسیک ضریب شدت تنش از ابتدا نسبت به مدل گرین- لیندزی بزرگتر است؛ اما با رسیدن موج گرما به نوک ترک، ضریب شدت تنش برای مدل گرین- لیندزی بزرگتر می‌شود. علاوه بر این، اثر موج مکانیکی بر تغییرات زمانی ضریب شدت تنش در مدل گرین- لیندزی نمایان‌تر است.

کلیدواژگان

شوک حرارتی، مدل گرین-لیندزی، روش المان محدود توسعه یافته (XFEM)، انتگرال برهمکنش، ضرایب شدت تنش.

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها

عنوان **صفحه**

فهرست جدول‌ها

عنوان **صفحه**

فهرست علامت‌ها

A	مساحت المان، (m^2)
A^*	مساحت ناحیه انتگرال برهمکنش، (m^2)
A	طول ترک، (m)
$\mathbf{A}$	بردار مجهولات گره‌ای مربوط به توابع شکل المان محدود
B	بردار نیروی کالبدی بر واحد حجم، (N/m^3)
B_x و B_y	مولفه‌های بردار نیروی کالبدی بر واحد حجم، (N/m^3)
$\mathbf{B}$	بردار مجهولات گره‌ای مربوط به توابع شکل غنی‌شده با تابع هویساید
$\mathbf{C}$	بردار مجهولات گره‌ای مربوط به توابع شکل غنی‌شده نوک ترک
[C]	ماتریس میرایی
C_{ijkl}	مولفه‌های ماتریس تشکیل دهنده ماده (N/m^2)
C_i	ثابت ارتباط دهنده شار حرارتی و دما
c_i	ثابت ارتباط دهنده شار حرارتی و نرخ دما
C_P	سرعت موج تنش
c_ε	ظرفیت گرمایی
c_t	ظرفیت گرمایی ویژه، $(J/(kg.^\circ K))$
C_T	سرعت موج دما
$[D]$	ماتریس خواص ماده، (N/m^2)
E	مدول یانگ، (N/m^2)
F	بردار نیروهای گره‌ای، (N)
f	تابع زاویه‌ای میدان تنش نوک ترک
F_m	توابع غنی سازی نوک ترک، $(m^{0.5})$
g	تابع زاویه‌ای میدان جابه‌جایی نوک ترک
H	تابع هویساید

J	انتگرال J، (N/m)
Ja	ماتریس ژاکوبی
K	هدایت گرمایی، (W/(m.°K))
[K]	ماتریس سفتی
K_I	مد I ضریب شدت تنش، ($N.m^{-1.5}$)
K_{IDim}	ضریب شدت تنش بی بعد،
K_{II}	ضریب شدت تنش مد دوم، ($N.m^{-1.5}$)
K_T	ضریب شدت تنش حرارتی، ($N.m^{-1.5}$)
l	طول مشخصه
L	طول نمونه، (m)
M	بردار نرمال بر مسیر انتگرال گیری در انتگرال J
[M]	ماتریس جرم، (kg)
M	انتگرال برهمکنش، (N/m)
ns	تعداد توابع شکل المان محدود توسعه یافته
N	تابع شکل روش المان محدود
N_A	مجموعه گره‌های شبکه
N_H	مجموعه گره‌های اطراف مسیر ترک
N_C	مجموعه گره‌های المان‌های نوک ترک
nQ	تعداد نقاط گوسی
Q	تابع وزنی برای محاسبه انتگرال برهمکنش، بی بعد
q_i	مولفه‌های بردار شار گرمایی بر واحد سطح، (W/m^2)
R	گرمای تولید شده بر واحد حجم، (W/m^3)
R	مولفه دستگاه مختصات قطبی، (m)
rc	پارامتر تعریف شده با رابطه (۳-۲۵)

rs	پارامتر تعریف شده با رابطه (۳-۲۶)
$\boldsymbol{S}$	بردار توابع شکل روش المان محدود توسعه یافته
T	دما، (°K)
Tr	بردار نیروی سطحی بر واحد سطح، (N/m^2)
T	زمان، (sec)
t_1	زمان تاخیر تنش
t_2	زمان تاخیر آنتروپی
t_D	زمان بی بعد شده
$\mathbf{U}$	بردار جابه‌جایی
u^{aux}	میدان جابه‌جایی کمکی
V	حجم، (m^3)
v	سرعت مشخصه
w	توابع وزنی در انگرال گیری گوسی
W	عرض نمونه، (m)
W	چگالی انرژی کرنشی مکانیکی
X_1 و X_2	مولفه‌های دستگاه مختصات دکارتی سراسری، (m)
x_1 و x_2	مولفه‌های دستگاه مختصات دکارتی محلی، (m)
Z	تابع فاصله علامت‌دار، (m)

علامت‌های یونانی

α	ضریب انبساط گرمایی، (1/°C)
β	تانسور مدول تنش-دما
ζ و γ	پارامترهای فرمول‌بندی نیومارک، بی بعد
δ_{ij}	دلتای کرونکر، بی بعد

ε	تانسور کرنش، بی بعد
ε^{aux}	تانسور کرنش کمکی، بی بعد
Θ	تغییر دما، (°K)
λ و μ	ثوابت لامه، (N/m^2)
η و ξ	مولفه‌های دستگاه مختصات محلی در المان‌های ایزوپارامتریک
κ	ضریب کلوسوف، بی بعد
ν	نسبت پواسون، بی بعد
ρ	چگالی، (kg/m^3)
φ	مولفه دستگاه مختصات قطبی، بی بعد
σ	تانسور تنش، (N/m^2)
σ^{aux}	تانسور تنش کمکی، (N/m^2)
Φ	تابع شکل غنی شده برای المان‌های مسیر ترک، بی بعد
Ψ	تابع شکل غنی شده برای المان‌های نوک ترک، بی بعد
ω	زاویه بین دستگاه‌های مختصات محلی و سراسری، بی بعد
Δ	بردار مجهولات گره‌ای
Γ	مسیر انتگرال گیری در انتگرال J

بالا نویس‌ها

Aux	مربوط به میدان‌های کمکی
S	مربوط به حالت برهم نهی
T	مربوط به دما
v و u	به ترتیب مربوط به جابجایی در جهت محورهای مختصات افقی و قائم

زیر نویس‌ها

g	نشان‌دهنده مختصات سراسری

H	شمارنده، مربوط به گره‌ها در یک المان
i	شمارنده، مربوط به مولفه x دستگاه مختصات دکارتی
J	شمارنده، مربوط به مولفه y دستگاه مختصات دکارتی
L	شمارنده مربوط به توابع شکل و همچنین نشان‌دهنده مختصات محلی
M	شمارنده، مربوط به توابع غنی سازی نوک ترک
N	شمارنده، مربوط به گره‌ها، گام زمانی، و مولفه‌های دستگاه مختصات
Ne	شمارنده، مربوط به گره‌ها در المان e
Ns	شمارنده، مربوط به توابع شکل المان محدود توسعه‌یافته
Tip	مربوط به نوک ترک

فصل اول

مقدمه

۱-۱-مروری بر کارهای پیشین

در تئوری کلاسیک ترموالاستیسیته، قانون فوریه و فرضیه نیومن-دوهامل به عنوان معادلات ساختاری شار گرمایی و تنش در نظر گرفته می‌شوند. ترکیب این معادلات با رابطه آنتروپی بصورت یک تابع خطی از دما و کرنش، منجر به معادله انرژی با طبیعت سهموی می‌شود که نتیجه آن، سرعت نامحدود انتقال انرژی گرمایی است. این موضوع بدان معناست که وقتی یک اغتشاش گرمایی بر روی مرز محیط اعمال می‌شود، تاثیر آن به‌طور همزمان در نقاط دور از مرز مشاهده می‌شود که از نظر فیزیکی قابل قبول نیست [۱]. مشاهدات آزمایشگاهی سرعت محدود موج گرما در مسائل بیولوژیکی [۲] و در مقیاس میکرو/نانو یا هدایت گرمایی فوق سریع [۳] را تایید می‌کند. تاکنون چند تئوری بنام تئوری‌های ترموالاستیسیته تعمیم‌یافته یا هذلولوی برای حل مشکل تئوری کلاسیک ترموالاستیسیته مطرح شده‌اند [۴-۷]. در بیشتر تئوری‌های ترموالاستیسیته تعمیم‌یافته ، سرعت انتقال انرژی به علت فرم هذلولوی معادله هدایت گرمایی محدود است.

گرین و لیندزی [۸]، یک تئوری تعمیم‌یافته ترموالاستیسیته بر پایه نابرابری تولید آنتروپی گرین و لاوز [۹] پیشنهاد دادند. مدل گرین-لیندزی، دو زمان تاخیر نرخ دما را در معادلات انتروپی و تنش معرفی می‌کند. بنابراین، تنش و آنتروپی علاوه بر تغییرات دما به نرخ دما هم وابسته‌اند. در این تئوری، شکل کلی شار گرمایی فوریه نیز به‌صورت تابعی از گرادیان دما و نرخ دما تعریف می‌شود. البته، در مدل گرین لیندزی قانون فوریه نقض نمی‌شود [۸].

از طرف دیگر، عمر مورد انتظار یا ظرفیت بارگذاری سازه‌ها با وجود عیوب یا ترکها کاهش می‌یابد. در قطعاتی که تحت دمای بالا یا گرادیان دمایی هستند؛ ایجاد و رشد ترک مرسوم‌ترین مود گسیختگی است. به علت محدودیت روش‌های آزمایشگاهی و تحلیلی، روش‌های عددی برای تحلیل مسائل مختلف ترموالاستیسیته به‌طور گسترده توسعه یافتند [۱۰]. تما و رایلکار [۱۱]، با استفاده از روش المان محدود در فضای لاپلاس و سپس کاربرد یک روش لاپلاس معکوس عددی، تاثیر زمان‌های تاخیر بر دما و توزیع تنش ناشی از آن را در مسائل ترموالاستیسیته تعمیم‌یافته غیرکوپل

بررسی کردند. حل‌های تقریبی برای مسائل ترمومکانیکی با معادلات ترموالاستیسیته دینامیکی کوپل و غیرکوپل با استفاده از روش المان محدود توسط تینگ و چن [۱۲]، لیو و پانگ [۱۳]، تما و رایلکار [۱۴و۱۵] و تما و نامبورو [۱۶و۱۷] ارائه شده است. تما [۱۸] و تما و نامبرو [۱۹] با در نظر گرفتن ویسکوزیته مصنوعی[1] در معادلات دینامیکی ترموالاستیسیته، نوسانات عددی در توزیع دما و تنش را حذف کردند که با استفاده از روش انتگرال‌گیری مستقیم زمانی به دست آمده‌اند. چن و دارگوش [۲۰] با استفاده از روش المان مرزی در فضای لاپلاس، مساله ترموالاستیسیته تعمیم‌یافته را در یک نیم‌صفحه حل کردند. حسینی تهرانی و اسلامی [۲۱] با استفاده از روش المان مرزی تاثیر ضریب کوپل بین میدان‌های دما و کرنش بر فرکانس طبیعی و دامنه ارتعاشات در یک فضای محدود را مطالعه کردند. علاوه بر این، حسینی تهرانی و اسلامی [۲۲] با بکارگیری روش المان مرزی در فضای لاپلاس، توزیع تنش بهمراه جابه‌جایی و دما را در یک فضای محدود تحت شوک گرمایی براساس تئوری‌های کلاسیک، لرد شلمان و گرین لیندزی مقایسه کردند. چن و ونگ [۲۳] از روش المان محدود در فضای لاپلاس جهت در نظر گرفتن اثر زمان‌های تاخیر تئوری‌های تعمیم‌یافته بر میدان‌های دما و تنش استفاده کردند. پریوست و تائو [۲۴] روش نیومارک صریح/ضمنی بر پایه روش تقسیم‌بندی ناحیه حل[2] که توسط هیوز و لیو [۲۵و۲۶] معرفی شد را جهت محاسبه توزیع دما، تنش و جابه‌جایی در یک صفحه یک‌بعدی ایزوتروپیک تحت شوک گرمایی با مدل گرین لیندزی، بکار بردند. تیان و همکاران [۲۷] از روش نیومارک به منظور حل معادلات گسسته گرین-لیندزی در محیط المان محدود برای یک نیم‌صفحه استفاده کردند. آنها نوسانات ایجاد شده در نتایج به‌علت استفاده از روش نیومارک را توسط تکنیک‌های هموارسازی حذف کردند.

پورتلا و علی‌آبادی [۲۸] روش المان مرزی دوگانه[3] جهت مدل کردن یک ترک دلخواه در یک ماده را پیشنهاد کردند. یک روش المان مرزی دوگانه برای تحلیل ترک ترموالاستیک گذرای غیرکوپل

---

[1] Artificial viscosity
[2] splitting method
[3] Dual boundary element method

[۲۹] و رشد ترک شبه‌استاتیکی تحت بارگذاری ترمومکانیکی [۳۰] و برای مسائل سه‌بعدی ترموالاستیک دارای ترک، توسط علی‌آبادی و همکاران [۳۱] توسعه یافته است. اخلاکف و همکاران [۳۲ و ۳۳] از یک روش ترکیبی روی دامنه حل و مرز آن جهت محاسبه ضریب شدت تنش برای یک ترک در صفحه‌ای از جنس مواد تابعی تحت شوک گرمایی با در نظر گرفتن تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک استفاده کردند. حسینی تهرانی و همکاران روش المان مرزی را در فضای لاپلاس جهت محاسبه ضریب شدت تنش مود اول برای یک ترک، در فضای محدود ایزوتروپیک دو بعدی، تحت شوک گرمایی با در نظر گرفتن تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک [۳۴]، لرد شلمان [۳۵] و گرین-لیندزی [۳۶] بکار بردند. همچنین، تاثیر ضرایب اینرسی و کوپل بر ضریب شدت تنش مود اول بر اساس تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک در [۳۷] گزارش شده است. زمانی و همکاران اثر صدای دوم را در مدل لرد-شلمان بر ضریب شدت تنش برای باریکه‌ای شامل یک ترک عمودی بررسی کردند [۳۸]. در این تحقیق از المان‌های تکین برای رصد تکینی میدان تنش در حوزه نوک ترک استفاده شده است. محاسبه ضریب شدت تنش مود اول در یک باریکه از جنس مواد تابعی با استفاده از شبکه غیریکنواخت ۸ گره‌ای با المان‌های مربعی، تحت شوک گرمایی کلاسیک در مرجع [۳۹] گزارش شده است. لی و همکاران [۴۰] به کمک پتانسیل‌های جابه‌جایی و تحلیل مجانبی، عبارت‌هایی تحلیلی را برای میدان‌های تنش و جابه‌جایی در نوک یک ترک دینامیکی تحت بارگذاری ترمومکانیکی در مواد تابعی ارائه کردند. همچنین، تحلیل شکست دینامیکی ترموالاستیک غیرکوپل برای یک ترک ساکن [۴۱] و تاثیر جملات درجه بالاتر تابع غنی‌سازی نوک ترک بر ضریب شدت تنش گرمایی غیرکوپل با روش المان محدود توسعه‌یافته [۴۲] گزارش شده است. روش المان محدود توسعه‌یافته برای تحلیل مسائل شامل ترک تحت بارگذاری ترمومکانیکی استاتیکی و غیرکوپل توسط حسینی و همکاران [۴۳] به کار گرفته شد. مهدی‌زاده رخی [۴۴] با استفاده از این روش شکست مواد تابعی تحت شوک‌های حرارتی-مکانیکی را مورد بررسی و تحلیل قرار دادند. حاجی‌محمدی [۴۵] با استفاده از روش المان محدود توسعه‌یافته، رفتار ترک را در مواد ارتوتروپیک تحت بار حرارتی بررسی کردند. همچنین، این

روش در ترموالاستیسیته شبه استاتیکی برای محاسبه ضریب شدت تنش و رشد ترک توسط گلی و همکاران [۴۶] و بایسته و همکاران [۴۷] جهت مدل کردن ترک عایق و هم‌دما در مواد تابعی بکار گرفته شده است.

۱-۲-نوآوری

نوآوری‌های این تحقیق شامل در نظر گرفتن مد ترک مختلط (I و II)، استخراج انتگرال برهمکنش برای تئوری گرین-لیندزی و کاربرد آن برای محاسبه ضرایب شدت تنش و استفاده از روش اجزا محدود توسعه‌یافته[1] برای مدل‌سازی ترک است. از جمله کاربردهای این تحقیق می‌توان به مخازن N_2 و O_2 مایع در نیروگاه‌های هسته‌ای، لوله‌ها در راکتورهای شیمیایی و اجزای دستگاه‌های تولید و انتقال اشعه‌ی X و لیزر اشاره نمود.

همان‌طور که گفته شد در این پایان‌نامه، از روش اجزا محدود توسعه‌یافته برای تحلیل شکست صفحه دوبعدی دارای ترک استفاده شده است. این پایان‌نامه به شرح ذیل سازماندهی شده است: در فصل دوم روش اجزا محدود توسعه‌یافته بیان شده است. در فصل سوم به گسسته‌سازی فرم اجزا محدود معادلات حاکم ترموالاستیسیته تعمیم‌یافته دوبعدی بر اساس تئوری گرین-لیندزی پرداخته شده است. در فصل چهارم، انتگرال برهمکنش جهت استخراج ضریب شدت تنش مود اول یا دوم، توسط معادلات تشکیل دهنده گرین لیندزی توسعه یافته است. در فصل پنجم نتایج ارائه شده است.

[1] Extended Finite Element Method (XFEM)

فصل دوم

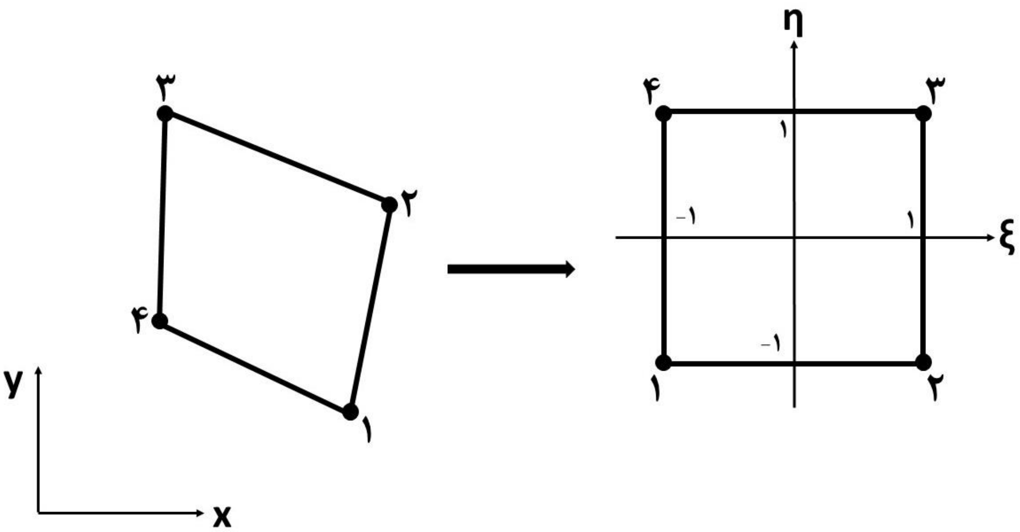
روش اجزا محدود توسعه‌یافته

۲-۱-مقدمه

یکی از مهمترین روش‌های حل مسائل مهندسی، روش‌هـای عـددی اسـت. اسـتفاده از روش‌هـای عددی زمانی حائز اهمیت اسـت کـه حـل مسـاله از طریـق روش‌هـای تحلیلـی یـا تجربـی بـه علـت پیچیدگی‌های هندسی یا شـرایط مـرزی امکـان‌پـذیر نباشـد. در ایـن تحقیـق از روش اجـزا محـدود توسعه‌یافته جهت مدل‌سازی ترک استفاده شده است.

۲-۲-المان‌های ایزوپارامتریک تعمیم‌یافته

با توجه به روابط ریاضی یک ناحیه چهارضلعی را مطابق شکل (۲-۱) به یک مربع ۲×۲ نگاشت می‌شود، مختصات x و y نقاط در المان اولیه از رابطه (۲-۱) بدست می‌آیند [۴۸].



شکل ۲-۱- المان ایزوپارامتریک

دستگاه مختصات $(\xi ،\eta)$ دستگاه مختصات ایزوپارامتریک نامیده می‌شود.

$$x = \sum_{i=1}^{4} x_i N_i \ , \qquad y = \sum_{i=1}^{4} y_i N_i \qquad (۲-۱)$$

N_iها توابع شکل اجزا محدود هستند که برای المان‌های ایزوپارامتریک با رابطه (۲-۲) بیان می‌شوند.

$$N_i(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i) \qquad (۲-۲)$$

که این رابطه را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$N(\xi,\eta)=\Big[\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\quad \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)\quad \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)\quad \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)\Big] \tag{۳-۲}$$

۲-۳-انتگرال‌گیری عددی

در روش اجزا محدود برای محاسبه انتگرال‌های حاصل از گسسته‌سازی معادلات، از روش‌های عددی استفاده می‌شود. در اینجا برای محاسبه عبارت‌های انتگرالی از روش انتگرال‌گیری گاوس استفاده شده است. در این روش، لازم است مقادیر تابع تحت انتگرال در نقاط گاوسی (درون المان) محاسبه شوند و این مقادیر را در ضرایب وزنی گاوس ضرب نمود. با جمع کردن این مقادیر، جواب انتگرال به دست می‌آید. در این روش عبارت $\int_{-1}^{1} f(\xi)\mathrm{d}\xi$ به صورت زیر محاسبه می‌شود [۴۹]:

$$\int_{-1}^{1} f(\xi)\mathrm{d}\xi=\sum_{i=1}^{nQ} f(\xi_i)w_i \tag{۴-۲}$$

در رابطه فوق w_i توابع وزنی، ξ_i مقادیر نقاط گوسی و nQ تعداد نقاط گوسی در حالت یک بعدی است.

از آنجا که در روش اجزا محدود بیشتر انتگرال‌گیری‌ها بر روی سطوح المان‌ها انجام می‌شوند، لذا نیاز به محاسبه انتگرال‌های دوگانه است. به کمک روش گاوس می‌توان این انتگرال‌ها را به صورت زیر محاسبه نمود:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\xi,\eta)d\xi d\eta=\sum_{i=1}^{nQ}\sum_{j=1}^{nQ} f(\xi_i,\eta_i)w_i\,w_j \tag{۵-۲}$$

۲-۴-روش اجزا محدود توسعه‌یافته

برای مدل‌سازی ترک از روش اجزا محدود توسعه‌یافته (XFEM) استفاده شده است. در این روش، از توابع شکل روش اجزا محدود استفاده می‌شود با این تفاوت که المان‌های مسیر ترک و نوک ترک غنی سازی می‌شوند. یعنی درجات آزادی این المان‌ها با اضافه نمودن توابع غنی سازی به توابع شکل اجزا محدود کلاسیک افزایش می‌یابد. این روش توسط بلیچکو و همکارانش جهت مدل‌سازی ناپیوستگی‌های دلخواه در شبکه‌های المان محدود کلاسیک پیشنهاد شد [۵۰-۵۲]. به طور کلی روش اجزا محدود توسعه‌یافته شامل دو مرحله است. مرحله اول، شبکه بندی هندسه مساله و مرحله دوم، غنی‌سازی المان‌های مسیر ترک و نوک ترک است.

در این روش تابع غنی‌سازی می‌تواند به کمک تقریب زیر به دست آید [۵۳]:

$$\mathrm{u}(\mathbf{x}) = \sum_{\forall i} N_i(\mathbf{x})\mathrm{a}_i + \sum_{\forall I} \phi_i(\mathbf{x})\Psi(\mathbf{x})\mathrm{b}_i \qquad (۲-۶)$$

در این رابطه جمله اول شامل تقریب اجزا محدود کلاسیک می‌شود که در آن N_i ها توابع شکل روش اجزا محدود کلاسیک هستند و برای المان‌های ایزوپارامتریک از رابطه (۲-۲) به دست می‌آیند. a_i ها هم درجات آزادی اجزا محدود کلاسیک هستند.

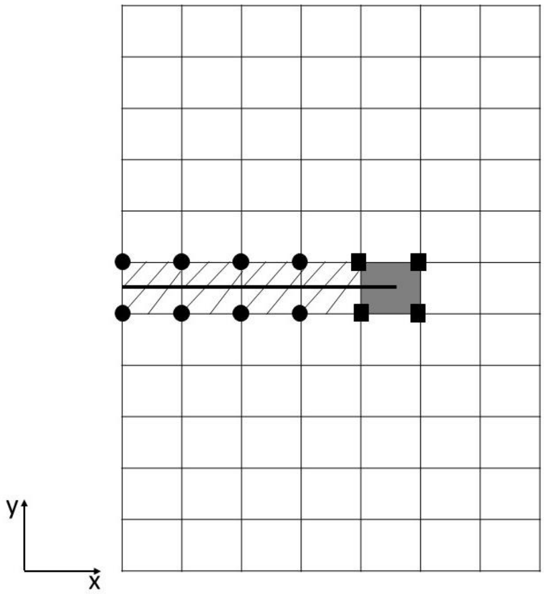
جمله دوم رابطه شامل عبارت‌های غنی‌سازی است که در آن $\phi_i(\mathbf{x})$ توابع شکل، $\Psi(\mathbf{x})$ تابع غنی‌سازی و b_i پارامترهای مجهول مجازی هستند.

اگرچه لازم نیست توابع شکل برای تقریب اجزا محدود کلاسیک و تعمیم‌یافته یکسان باشند، اما می‌توان توابع یکسانی در نظر گرفت یعنی $\phi_i(\mathbf{x}) = N_i(\mathbf{x})$ [۵۳]. در این تحقیق توابع شکل یکسان در نظر گرفته شده است.

۲-۵-مدل‌سازی ترک در روش اجزا محدود توسعه‌یافته

مطابق شکل ۲-۲ فرض می‌شود $\mathrm{N_A}$ تعداد تمام گره‌های شبکه اجزا محدود، $\mathrm{N_C}$ تعداد گره‌های المان‌های اطراف نوک ترک و $\mathrm{N_H}$ تعداد گره‌های المان‌های اطراف مسیر ترک باشند. در شکل ۲-۲

المان‌های هاشور خورده، المان‌های مسیر ترک و المان پررنگ شده، المان نوک ترک است. گره‌هایی که توسط مربع و دایره مشخص شده‌اند، به ترتیب گره‌های غنی شده نوک ترک و مسیر ترک هستند.



شکل ۲-۲ نمایش یک شبکه اجزا محدود توسعه‌یافته شامل ترک و گره‌های غنی شده

در روش اجزا محدود توسعه‌یافته برای یک المان غنی شده شامل ترک میدان جابجایی به قرار زیر است [۴۸]:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(x,y,t) &= \sum_{\mathrm{n}\in \mathrm{N_A}} N_{\mathrm{n}}(x,y)\mathbf{a}_{\mathrm{n}}(t) + \sum_{\mathrm{n}\in \mathrm{N_H}} N_{\mathrm{n}}(x,y)[\mathrm{H(Z)}-\mathrm{H(Z_n)}]\mathbf{b}_{\mathrm{n}}(t) \\ &+ \sum_{\mathrm{m}}\sum_{\mathrm{n}\in \mathrm{N_C}} N_{\mathrm{n}}(x,y)[F_{\mathrm{m}}(r,\varphi)-F_{\mathrm{m}}(r_{\mathrm{n}},\varphi_{\mathrm{n}})]\mathbf{c}_{\mathrm{nm}}(t)\end{aligned} \quad (۲-۷)$$

در رابطه فوق $\mathbf{a}_{\mathrm{n}}(t)$ ، $\mathbf{b}_{\mathrm{n}}(t)$ و $\mathbf{c}_{\mathrm{nm}}(t)$ مجهولات گره‌ای هستند. این بردارها تابع زمان هستند.

$$\mathbf{a}_{\mathrm{n}}(t) = \{\mathrm{a}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{u}}(t), \mathrm{a}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{v}}(t)\}^T \quad (۲-۸)$$

$$\mathbf{b}_{\mathrm{n}}(t) = \{\mathrm{b}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{u}}(t), \mathrm{b}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{v}}(t)\}^T \quad (۲-۹)$$

$$\mathbf{c}_{\mathrm{nm}}(t) = \{\mathrm{c}_{\mathrm{nm}}^{\mathrm{u}}(t), \mathrm{c}_{\mathrm{nm}}^{\mathrm{v}}(t)\}^T \quad (۲-۱۰)$$

در رابطه (۲-۷) $\mathrm{H(Z)}$ تابع هویساید به قرار زیر است:

$$\mathrm{H(Z)} = \begin{cases} 1, & \mathrm{Z} > 0 \\ 0, & \mathrm{Z} \leq 0 \end{cases} \tag{۲-۱۱}$$

در رابطه فوق Z تابعی از موقعیت یک نقطه نسبت به مسیر ترک است.

در رابطه (۲-۷)، F_{m} مجموعه توابع غنی‌سازی نوک ترک هستند. توابع غنی‌سازی برحسب مختصات محلی نوک ترک (r و φ) عبارتند از [۴۸]:

$$\{F_{\mathrm{m}}\} = \left\{\sqrt{r}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right), \sqrt{r}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right), \sqrt{r}\sin(\varphi)\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right), \sqrt{r}\sin(\varphi)\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right\} \tag{۲-۱۲}$$

با جایگذاری روابط (۲-۸) تا (۲-۱۰) و (۲-۱۲) در رابطه (۲-۷)، مولفه‌های میدان جابه‌جایی در روش المان محدود توسعه‌یافته به صورت زیر به دست می‌آیند (در مختصات سراسری):

$$\begin{aligned}
\mathrm{u}(x,y,t) = &\sum_{\mathrm{n}\in \mathrm{N_A}} N_{\mathrm{n}}(x,y)\mathrm{a}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{u}}(t) + \sum_{\mathrm{n}\in \mathrm{N_H}} N_{\mathrm{n}}(x,y)[\mathrm{H(Z)} - \mathrm{H(Z_n)}]\mathrm{b}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{u}}(t) \\
&+ \sum_{\mathrm{n}\in \mathrm{N_C}} N_{\mathrm{n}}(x,y)\left[\sqrt{r}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{r_{\mathrm{n}}}\sin\left(\frac{\varphi_{\mathrm{n}}}{2}\right)\right]\mathrm{c}_{\mathrm{n1}}^{\mathrm{u}}(t) \\
&+ \sum_{\mathrm{n}\in \mathrm{N_C}} N_{\mathrm{n}}(x,y)\left[\sqrt{r}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{r_{\mathrm{n}}}\cos\left(\frac{\varphi_{\mathrm{n}}}{2}\right)\right]\mathrm{c}_{\mathrm{n2}}^{\mathrm{u}}(t) \\
&+ \sum_{\mathrm{n}\in \mathrm{N_C}} N_{\mathrm{n}}(x,y)\left[\sqrt{r}\sin(\varphi)\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{r_{\mathrm{n}}}\sin(\varphi_{\mathrm{n}})\sin\left(\frac{\varphi_{\mathrm{n}}}{2}\right)\right]\mathrm{c}_{\mathrm{n3}}^{\mathrm{u}}(t) \\
&+ \sum_{\mathrm{n}\in \mathrm{N_C}} N_{\mathrm{n}}(x,y)\left[\sqrt{r}\sin(\varphi)\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{r_{\mathrm{n}}}\sin(\varphi_{\mathrm{n}})\cos\left(\frac{\varphi_{\mathrm{n}}}{2}\right)\right]\mathrm{c}_{\mathrm{n4}}^{\mathrm{u}}(t)
\end{aligned} \tag{۲-۱۳}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{v}(x,y,t) = &\sum_{\mathrm{n}\in \mathrm{N_A}} N_{\mathrm{n}}(x,y)\mathrm{a}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{v}}(t) + \sum_{\mathrm{n}\in \mathrm{N_H}} N_{\mathrm{n}}(x,y)[\mathrm{H(Z)} - \mathrm{H(Z_n)}]\mathrm{b}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{v}}(t) \\
&+ \sum_{\mathrm{n}\in \mathrm{N_C}} N_{\mathrm{n}}(x,y)\left[\sqrt{r}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{r_{\mathrm{n}}}\sin\left(\frac{\varphi_{\mathrm{n}}}{2}\right)\right]\mathrm{c}_{\mathrm{n1}}^{\mathrm{v}}(t) \\
&+ \sum_{\mathrm{n}\in \mathrm{N_C}} N_{\mathrm{n}}(x,y)\left[\sqrt{r}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{r_{\mathrm{n}}}\cos\left(\frac{\varphi_{\mathrm{n}}}{2}\right)\right]\mathrm{c}_{\mathrm{n2}}^{\mathrm{v}}(t) \\
&+ \sum_{\mathrm{n}\in \mathrm{N_C}} N_{\mathrm{n}}(x,y)\left[\sqrt{r}\sin(\varphi)\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{r_{\mathrm{n}}}\sin(\varphi_{\mathrm{n}})\sin\left(\frac{\varphi_{\mathrm{n}}}{2}\right)\right]\mathrm{c}_{\mathrm{n3}}^{\mathrm{v}}(t)
\end{aligned}$$

$$+\sum_{\mathrm{n}\in \mathrm{N_C}} N_{\mathrm{n}}(x,y)\left[\sqrt{r}\sin(\varphi)\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)-\sqrt{r_{\mathrm{n}}}\sin(\varphi_{\mathrm{n}})\cos\left(\frac{\varphi_{\mathrm{n}}}{2}\right)\right]\mathrm{c}_{\mathrm{n}4}^{\mathrm{v}}(t) \tag{۲-۱۴}$$

با فرض عایق بودن ترک، میدان دما در امتداد ترک ناپیوسته است. لذا برای در نظر گرفتن این ناپیوستگی از تابع هویساید استفاده می‌شود. شار حرارتی نیز در نوک ترک تکین است. میدان دمای نوک ترک مشابه میدان جابه‌جایی مد پارگی (مد III) ترک به قرار زیر است [۵۴]:

$$T=-\frac{K_T}{k}\sqrt{\frac{2r}{\pi}}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \tag{۲-۱۵}$$

در رابطه فوق K_T ضریب شدت تنش حرارتی و k ضریب هدایت حرارتی است.

با توجه به رابطه (۲-۱۵) میدان دما مثل میدان جابه‌جایی گسسته می‌شود، اما فقط از اولین تابع رابطه (۲-۱۲) برای غنی‌سازی گره‌های نوک ترک استفاده می‌شود [۵۵]. لذا میدان دما به قرار زیر است:

$$\begin{aligned}\theta(x,y,t)=&\sum_{\mathrm{n}\in \mathrm{N_A}} N_{\mathrm{n}}(x,y)\mathrm{a}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{T}}(t)+\sum_{\mathrm{n}\in \mathrm{N_H}} N_{\mathrm{n}}(x,y)[\mathrm{H(Z)}-\mathrm{H(Z_n)}]\mathrm{b}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{T}}(t)\\&+\sum_{\mathrm{n}\in \mathrm{N_C}} N_{\mathrm{n}}(x,y)\left[\sqrt{r}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)-\sqrt{r_{\mathrm{n}}}\sin\left(\frac{\varphi_{\mathrm{n}}}{2}\right)\right]\mathrm{c}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{T}}(t)\end{aligned} \tag{۲-۱۶}$$

در رابطه فوق $\mathrm{a}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{T}}(t)$، $\mathrm{b}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{T}}(t)$ و $\mathrm{c}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{T}}(t)$ مقادیر تغییرات دمای گره‌ها برای هر تابع شکل هستند. روابط (۲-۱۳)، (۲-۱۴) و (۲-۱۶) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned}\mathrm{u}(x,y,t)=&\\&\sum_{\mathrm{n}\in \mathrm{N_A}} N_{\mathrm{n}}(x,y)\mathrm{a}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{u}}(t)+\sum_{\mathrm{n}\in \mathrm{N_H}} \Phi_{\mathrm{n}}(x,y)\mathrm{b}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{u}}(t)+\sum_{\mathrm{n}\in \mathrm{N_C}}\sum_{\mathrm{m}=1}^{4} \Psi_{\mathrm{nm}}(x,y)\mathrm{c}_{\mathrm{nm}}^{\mathrm{u}}(t)\end{aligned} \tag{۲-۱۷}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{v}(x,y,t)=&\\&\sum_{\mathrm{n}\in \mathrm{N_A}} N_{\mathrm{n}}(x,y)\mathrm{a}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{v}}(t)+\sum_{\mathrm{n}\in \mathrm{N_H}} \Phi_{\mathrm{n}}(x,y)\mathrm{b}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{v}}(t)+\sum_{\mathrm{n}\in \mathrm{N_C}}\sum_{\mathrm{m}=1}^{4} \Psi_{\mathrm{nm}}(x,y)\mathrm{c}_{\mathrm{nm}}^{\mathrm{v}}(t)\end{aligned} \tag{۲-۱۸}$$

$$\theta(x,y,t) = \sum_{n\in N_A} N_n(x,y)a_n^T(t) + \sum_{n\in N_H} \Phi_n(x,y)b_n^T(t) + \sum_{n\in N_C} \Psi_{n1}(x,y)c_{n1}^T(t) \qquad (۲-۱۹)$$

در روابط فوق Φ و Ψ توابع غنی‌سازی میدان‌های جابه‌جایی و دما هستند که به ترتیب مسیر و نوک ترک را غنی می‌کنند. با توجه به روابط (۲-۱۳)، (۲-۱۴) و (۲-۱۶) این توابع به صورت زیر استخراج می‌شوند:

$$\Phi_n(x,y) = N_n(x,y)[H(Z) - H(Z_n)] \qquad (۲-۲۰)$$

$$\begin{aligned}\Psi_n(x,y) = N_n(x,y)\Big[&\sqrt{r}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{r_n}\sin\left(\frac{\varphi_n}{2}\right), \sqrt{r}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{r_n}\cos\left(\frac{\varphi_n}{2}\right),\\ &\sqrt{r}\sin(\varphi)\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{r_n}\sin(\varphi_n)\sin\left(\frac{\varphi_n}{2}\right),\\ &\sqrt{r}\sin(\varphi)\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{r_n}\sin(\varphi_n)\cos\left(\frac{\varphi_n}{2}\right)\Big]\end{aligned} \qquad (۲-۲۱)$$

با قرار دادن روابط (۲-۱۷) تا (۲-۱۹) در معادلات حاکم بر مساله مورد نظر معادلات حاکم را می‌توان گسسته‌سازی نمود.

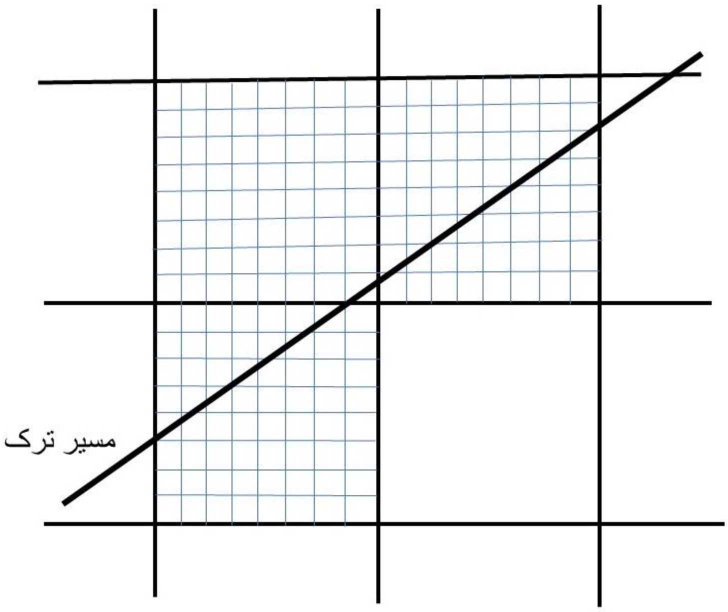
۲-۶-انتگرال‌گیری عددی برای توابع غنی‌سازی

به علت عدم توانایی روش گاوس در محاسبه انتگرال توابع غنی‌سازی المان‌های مسیر و نوک ترک، دالبو [۵۶] دو روش برای حل این مشکل ارائه نمود. روش اول بدین گونه است که المان دارای ترک به المان‌های مثلثی کوچکتر در دو طرف ترک به گونه‌ای که لبه‌های المان‌های مثلثی بر سطح ترک منطبق باشند، تقسیم می‌شود. روش دوم این است که المان ترک خورده به المان‌های چهار ضلعی کوچک‌تر تقسیم می‌شود.

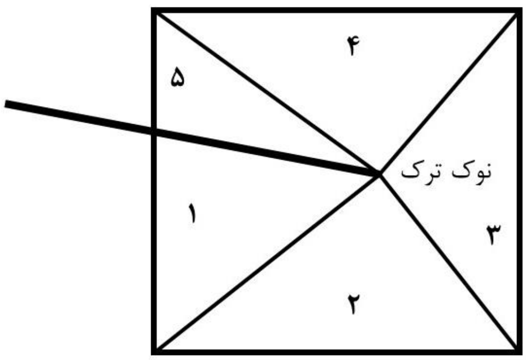
در این پایان‌نامه از روش دوم استفاده شده است. مطابق شکل (۲-۳) المان‌های مسیر ترک به مربع‌های کوچک‌تری تقسیم می‌شوند. لذا برای محاسبه تابع هویساید و انتگرال‌گیری عددی، موقعیت

مرکز هر مربع کوچک نسبت به ترک سنجیده می‌شود. بنابراین اگر مرکز مربع در یک طرف ترک باشد، کل نقاط گاوسی روی آن مربع در همان طرف ترک در نظر گرفته می‌شوند.

جهت حذف اثر تکینگی نوک ترک در عبارت زیر انتگرال، لازم است تا المان نوک ترک مطابق شکل (۲-۴) به چند مثلث کوچک‌تر تقسیم شود.



شکل ۲-۳- تقسیم بندی المان‌های شامل ترک برای انتگرال‌گیری عددی



شکل ۲-۴- تقسیم بندی المان شامل نوک ترک برای انتگرال‌گیری عددی

۲-۷-تشخیص موقعیت نقاط نسبت به مسیر ترک

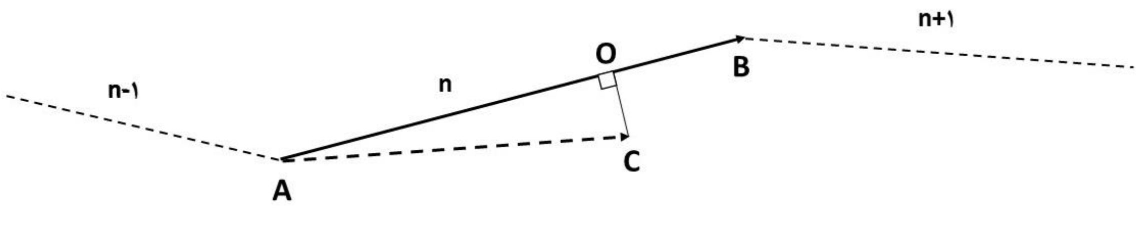
تشخیص موقعیت نقاط (گره‌ای یا گاوسی) نسبت به مسیر ترک، برای محاسبه تابع هویساید و انتگرال‌گیری‌های عددی روی المان‌های شامل ترک حائز اهمیت است.

جهت تشخیص موقعیت نقاط از روابط برداری، الگوریتمی برای محاسبه Z (در رابطه ۲-۱۱) مطرح می‌شود. این الگوریتم به صورت زیر است:

فرض می‌کنیم مسیر ترک به n بخش تقسیم شود طوریکه هر بخش یک خط راست باشد. مطابق شکل (۲-۵) نقاط A و B را نقاط ابتدا و انتهای بخش n ام مسیر ترک در نظر می‌گیریم. نقطه C نقطه دلخواهی است که می‌خواهیم موقعیت آن را تشخیص دهیم. نقطه O تصویر نقطه C بر روی خط AB است. پارامتر rc به قرار زیر تعریف می‌شود:

$$rc = \frac{\mathbf{AO}}{\mathbf{AB}} = \frac{\mathbf{AC.AB}}{|\mathbf{AB}|^2} \qquad (۲-۲۲)$$

با توجه به مقدار rc موقعیت تصویر نقطه C، یعنی نقطه O مشخص می‌شود. اگر $rc = 0$ و $rc = 1$ به ترتیب بدین معناست که نقطه O روی نقاط A و B قرار دارد. اگر $0 < rc < 1$ بدین معناست که نقطه O بین نقاط A و B قرار دارد. اگر $rc < 0$ و $rc > 1$ به ترتیب بدین معناست که نقطه O قبل از نقطه A و بعد از نقطه B قرار دارد.



شکل ۲-۵- موقعیت یک نقطه دلخواه نسبت به مسیر ترک

پارامتر rs به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$rs = \frac{\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}}{|\mathbf{AB}|^2} \tag{۲-۲۳}$$

با توجه به علامت rs وقتی که علامت rs منفی باشد، نقطه C در سمت راست بردار **AB** و علامت rs مثبت باشد، نقطه C در سمت چپ بردار **AB** قرار دارد. همچنین اگر $rs = 0$ باشد، نقطه C بر روی بردار **AB** قرار دارد.

با فرض اینکه تغییر زاویه هر بخش نسبت به بخش قبلی از ۹۰ درجه بیشتر نمی‌شود، می‌توان با توجه به پارامترهای rc و rs، موقعیت نقاط را نسبت به ترک سنجید.

فصل سوم

استخراج معادلات حاکم

۳-۱-مقدمه

در این فصل نحوه حل معادلات کوپل ترموالاستیک گرین لیندزی با استفاده از المان‌های ایزوپارامتریک تعمیم‌یافته و به کمک روش اجزا محدود توسعه‌یافته بیان می‌شود.

۳-۲-استخراج معادلات ترموالاستیک کوپل گرین لیندزی

جهت تحلیل یک سازه تحت شوک حرارتی باید از شکل کوپل معادلات ترموالاستیک و انرژی استفاده شود.

معادله حرکت بر حسب مولفه‌های تنش عبارت است از [۵۷]:

$$\sigma_{ij,j} + B_i = \rho \ddot{u}_i \tag{۳-۱}$$

در رابطه فوق σ تانسور تنش، B_i بردار نیروی کالبدی بر واحد حجم در جهت i، ρ چگالی و u بردار جابه‌جایی هستند. رابطه سینماتیک برای تغییرشکلهای بسیار کوچک به قرار زیر است:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \tag{۳-۲}$$

در رابطه فوق ε تانسور کرنش کل است. معادله تنش گرین لیندزی عبارت است از [۸]:

$$\sigma_{ij} = \mu\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) + \lambda u_{k,k}\delta_{ij} - \beta(t_1\dot{T} + T - T_0)\delta_{ij} \tag{۳-۳}$$

در این رابطه β، T و t_1 به ترتیب تانسور مدول تنش-دما، دما و زمان تاخیر تنش هستند. با جایگذاری معادله (۳-۳) در معادله (۳-۱) معادله حرکت برحسب جابه‌جایی‌ها به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\left[\mu\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)\right]_{,j} + \left[\lambda u_{k,k} - \beta t_1\dot{T} - \beta\theta\right]_{,i} + B_i = \rho \ddot{u}_i \tag{۳-۴}$$

در رابطه فوق $\beta = \alpha(3\lambda + 2\mu)$ و $\theta = (T - T_0)$ است. با مقدار دادن به اندیس‌های رابطه فوق برای مسائل دوبعدی معادله حرکت به قرار زیر است:

$$\left[2\mu u_{1,1}\right]_{,1} + \left[\mu\left(u_{1,2} + u_{2,1}\right)\right]_{,2} + \left[\lambda u_{k,k} - \beta t_1 \dot{T} - \beta\theta\right]_{,1} + B_1 = \rho \ddot{u}_1 \qquad (۵-۳)$$

$$\left[\mu\left(u_{2,1} + u_{1,2}\right)\right]_{,1} + \left[2\mu u_{2,2}\right]_{,2} + \left[\lambda u_{k,k} - \beta t_1 \dot{T} - \beta\theta\right]_{,2} + B_2 = \rho \ddot{u}_2 \qquad (۶-۳)$$

در روابط فوق μ و λ عبارتند از:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad (۷-۳)$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad (۸-۳)$$

در این روابط ν نسبت پواسون است. معادله ساختاری انتروپی عبارت است از [۸]:

$$\rho s = \frac{\rho c_\varepsilon}{T_0}\left[(T - T_0) + t_2 \dot{T}\right] - \frac{C_i}{T_0} T_{,i} + \beta_{ij}\varepsilon_{ij} \qquad (۹-۳)$$

که در آن c_ε ظرفیت گرمایی، C_i ثابت ارتباط دهنده شار حرارتی و دما و t_2 زمان تاخیر انتروپی است. معادله ساختاری شار حرارتی به قرار زیر است [۵۷]:

$$q_i = -(k_{ij} T_{,j} + c_i \dot{T}) \qquad (۱۰-۳)$$

در رابطه فوق k_{ij} تانسور هدایت گرمایی برای یک ماده ناهمسانگرد[1] و c_i ثابت ارتباط دهنده شار حرارتی و نرخ دما هستند. با توجه به قانون اول ترمودینامیک برای تئوری گرین لیندزی داریم [۸]:

$$\left(k_{ij} T_{,j}\right)_{,i} - c_t \rho(\dot{T} + t_2 \ddot{T}) - T_0\left(1 + \frac{\theta}{T_0}\right)\beta_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} = 0 \qquad (۱۱-۳)$$

رابطه فوق قانون تعادل حرارتی برای تئوری گرین لیندزی را در یک جامد ناهمسانگرد ناهمگن بیان می‌کند. که در آن c_t گرمای ویژه است. برای یک جامد همسانگرد رابطه (۳-۱۱) به قرار زیر است:

$$\left(k T_{,i}\right)_{,i} - c_t \rho(\dot{T} + t_2 \ddot{T}) - T_0\left(1 + \frac{\theta}{T_0}\right)\beta\dot{\varepsilon}_{ii} = 0 \qquad (۱۲-۳)$$

اگر در جسم گرما با نرخ R بر واحد حجم و زمان تولید شود، معادله (۳-۱۲) به صورت زیر اصلاح می‌شود:

---

[1] Anisotropic material

$$\left(kT_{,i}\right)_{,i} - c_t\rho(\dot{T} + t_2\ddot{T}) - T_0\left(1 + \frac{\theta}{T_0}\right)\beta\dot{\varepsilon}_{ii} + R = 0 \qquad (۱۳\text{-}۳)$$

بدین ترتیب، معادلات حاکم ترموالاستیسیته کوپل گرین لیندزی از معادله حرکت (۳-۴) و قانون اول ترمودینامیک (۳-۱۳) تشکیل می‌شوند. معادلات حاکم تئوری گرین لیندزی برای یک جامد همگن همسانگرد بر حسب مولفه‌های جابجایی و دما به قرار زیر است:

$$\left[\mu\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)\right]_{,j} + \left[\lambda u_{k,k} - \beta t_1\dot{T} - \beta\theta\right]_{,i} + B_i = \rho\ddot{u}_i \qquad (۱۴\text{-}۳)$$

$$\left(kT_{,i}\right)_{,i} - \rho c_t(\dot{T} + t_2\ddot{T}) - T_0\left(1 + \frac{\theta}{T_0}\right)\beta\dot{\varepsilon}_{ii} + R = 0 \qquad (۱۵\text{-}۳)$$

در صورت عدم وجود منبع گرمایی و نیروهای کالبدی معادلات حاکم را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\left[\mu\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)\right]_{,j} + \left[\lambda u_{k,k} - \beta t_1\dot{T} - \beta\theta\right]_{,i} = \rho\ddot{u}_i \qquad (۱۶\text{-}۳)$$

$$\left(kT_{,i}\right)_{,i} - \rho c_t(\dot{T} + t_2\ddot{T}) - T_0\left(1 + \frac{\theta}{T_0}\right)\beta\dot{\varepsilon}_{ii} = 0 \qquad (۱۷\text{-}۳)$$

اگر $\theta \ll T_0$ بنابراین $1 + \frac{\theta}{T_0} \approx 1$ لذا با صرف نظر از جمله $\frac{\theta}{T_0}$ در معادله (۳-۱۷) و ساده‌سازی مجدد رابطه (۳-۱۷) به روابط زیر می‌رسیم:

$$(\lambda + \mu)u_{i,jj} + \mu u_{j,ij} - \beta\left(t_1\dot{T}_{,i} + T_{,i}\right) = \rho\ddot{u}_i \qquad (۱۸\text{-}۳)$$

$$kT_{,ii} - \rho c_t(\dot{T} + t_2\ddot{T}) - T_0\beta\dot{\varepsilon}_{ii} = 0 \qquad (۱۹\text{-}۳)$$

شرایط مرزی حرارتی بصورت زیر بیان می‌شوند:

$$\theta = \theta_s \qquad (۲۰\text{-}۳)$$

$$\theta_{,n} + a\theta = b \qquad (۲۱\text{-}۳)$$

شرایط مرزی مکانیکی بصورت زیر درنظر گرفته می‌شود:

$$Tr_i^{\boldsymbol{n}} = \sigma_{ij}n_j \qquad (۲۲\text{-}۳)$$

در رابطه فوق $Tr_i^{\boldsymbol{n}}$ مولفه‌های تنش سطحی بر روی سطح مرز پیوستار است. بردار $\boldsymbol{n}$ بردار یکه نرمال بر سطح می‌باشد.

برای سادگی، معادلات حاکم (روابط (۳-۱۸) و (۳-۱۹)) با استفاده از روابط زیر بی‌بعد می‌شوند:

$$\hat{x}_i = \frac{x}{l} \quad (۳\text{-}۲۳)$$

$$\hat{t} = \frac{tv}{l}, \hat{t}_1 = \frac{t_1 v}{l}, \hat{t}_2 = \frac{t_2 v}{l} \quad (۳\text{-}۲۴)$$

$$\hat{u}_i = \frac{(\lambda + 2\mu)u_i}{l\beta T_0} \quad (۳\text{-}۲۵)$$

$$\hat{T} = \frac{T - T_0}{T_0} \quad (۳\text{-}۲۶)$$

$$\kappa = T_0\beta^2/\rho c(\lambda+2\mu) \quad (۳\text{-}۲۷)$$

$$\hat{\mu} = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \quad (۳\text{-}۲۸)$$

$$\hat{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \quad (۳\text{-}۲۹)$$

$$\hat{\rho} = \rho \frac{v^2}{\lambda + 2\mu} \quad (۳\text{-}۳۰)$$

$$\hat{k} = \frac{k}{l\rho c v} \quad (۳\text{-}۳۱)$$

در روابط فوق، l و v به ترتیب طول مشخصه و سرعت مشخصه هستند و می‌توانند هر مقداری را بگیرند. اما در حالت خاص می‌توان از روابط زیر استفاده نمود [۳۷]:

$$v = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho} \quad (۳\text{-}۳۲)$$

$$l = \frac{k}{\rho c v} \quad (۳\text{-}۳۳)$$

با استفاده از روابط بی‌بعد سازی فوق معادلات (۳-۱۸) و (۳-۱۹) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\hat{\mu}\hat{u}_{i,jj} + (\hat{\lambda} + \hat{\mu})\hat{u}_{j,ij} - \left(\hat{T}_{,i} + \hat{t}_1\dot{\hat{T}}_{,i}\right) - \hat{\rho}\ddot{\hat{u}}_i = 0 \quad (۳\text{-}۳۴)$$

$$\hat{k}\hat{T}_{,ii} - \dot{\hat{T}} - \hat{t}_2\ddot{\hat{T}} - \kappa\dot{\hat{u}}_{j,j} = 0 \quad (۳\text{-}۳۵)$$

همچنین معادله تنش (۳-۳) پس از بی‌بعد سازی به شکل زیر در می‌آید:

$$\hat{\sigma}_{ij} = \hat{\mu}(\hat{u}_{i,j} + \hat{u}_{j,i}) + \hat{\lambda}\hat{u}_{k,k}\delta_{ij} - \hat{\beta}\hat{\theta}\delta_{ij} - \hat{\beta}\hat{t}_1\dot{\hat{T}}\delta_{ij} \quad (۳\text{-}۳۶)$$

c_i یکی از خصوصیات مادّه است و باید به‌صورت تجربی تعیین شود. چون مقدار آن گزارش نشده است، صفر در نظر گرفته می‌شود. بنابراین با در نظر گرفتن $c_i = 0$ و بی‌بعد سازی معادله شار حرارتی (۳-۱۰) داریم:

$$\hat{q}_i = -\hat{k}_{ij}\hat{T}_{,j} \qquad (۳-۳۷)$$

بنابراین با جایگذاری این رابطه در معادله (۳-۳۵)، معادله (۳-۳۵) را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\hat{q}_{i,i} + \dot{\hat{T}} + \hat{t}_2\ddot{\hat{T}} + \kappa\dot{\hat{u}}_{j,j} = 0 \qquad (۳-۳۸)$$

همچنین با توجه به معادلات حاکم، سرعت امواج تنش C_P و دما C_T به قرار زیر است:

$$C_P = \sqrt{\left(\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}\right)/\hat{\rho}} \qquad (۳-۳۹)$$

$$C_T = \sqrt{\hat{k}/\hat{t}_2} \qquad (۳-۴۰)$$

ازین پس تمام معادلات در فضای بی‌بعد است، اما جهت سادگی، از نوشتن علامت $\widehat{\ }$ صرف نظر شده است.

۳-۳-گسسته‌سازی معادلات ترموالاستیک کوپل گرین لیندزی

برای گسسته سازی معادلات حاکم از روش گلرکین استفاده می‌شود. برای یک المان مبنا (e) که تمامی گره‌های آن توسط هر دو تابع غنی‌سازی، غنی شده‌اند؛ مولفه‌های جابه‌جایی و تغییر دما به قرار زیر است:

$$\mathrm{u}^e(x,y,t) = N_h(x,y)\mathrm{a}_h^{\mathrm{u}}(t) + \Phi_h(x,y)\mathrm{b}_h^{\mathrm{u}}(t) + \Psi_{hm}(x,y)\mathrm{c}_{hm}^{\mathrm{u}}(t) \qquad (۳-۴۱)$$

$$\mathrm{v}^e(x,y,t) = N_h(x,y)\mathrm{a}_h^{\mathrm{v}}(t) + \Phi_h(x,y)\mathrm{b}_h^{\mathrm{v}}(t) + \Psi_{hm}(x,y)\mathrm{c}_{hm}^{\mathrm{v}}(t) \qquad (۳-۴۲)$$

$$\theta^e(x,y,t) = N_h(x,y)\mathrm{a}_h^{\mathrm{T}}(t) + \Phi_h(x,y)\mathrm{b}_h^{\mathrm{T}}(t) + \Psi_{hm}(x,y)\mathrm{c}_{hm}^{\mathrm{T}}(t) \qquad (۳-۴۳)$$

$$h = 1,\dots,ne, \quad m = 1,\dots,4$$

در روابط فوق ne تعداد گره‌های المان مبنا (e) است. در این روابط مولفه‌های جابه‌جایی و تغییر دما در هر گره تابع زمان هستند. توابع شکل $N_h(x,y)$، $\Phi_h(x,y)$ و $\Psi_{hm}(x,y)$ تابعی از متغیرهای مکان هستند. مشتقات مرتبه اول و دوم مولفه‌های جابه‌جایی و تغییر دما به قرار زیر است:

$$\dot{\mathrm{u}}^e(x,y,t) = N_h(x,y)\dot{\mathrm{a}}_h^{\mathrm{u}}(t) + \Phi_h(x,y)\dot{\mathrm{b}}_h^{\mathrm{u}}(t) + \Psi_{hm}(x,y)\dot{\mathrm{c}}_{hm}^{\mathrm{u}}(t) \tag{۴۴-۳}$$

$$\ddot{\mathrm{u}}^e(x,y,t) = N_h(x,y)\ddot{\mathrm{a}}_h^{\mathrm{u}}(t) + \Phi_h(x,y)\ddot{\mathrm{b}}_h^{\mathrm{u}}(t) + \Psi_{hm}(x,y)\ddot{\mathrm{c}}_{hm}^{\mathrm{u}}(t) \tag{۴۵-۳}$$

$$\dot{\mathrm{v}}^e(x,y,t) = N_h(x,y)\dot{\mathrm{a}}_h^{\mathrm{v}}(t) + \Phi_h(x,y)\dot{\mathrm{b}}_h^{\mathrm{v}}(t) + \Psi_{hm}(x,y)\dot{\mathrm{c}}_{hm}^{\mathrm{v}}(t) \tag{۴۶-۳}$$

$$\ddot{\mathrm{v}}^e(x,y,t) = N_h(x,y)\ddot{\mathrm{a}}_h^{\mathrm{v}}(t) + \Phi_h(x,y)\ddot{\mathrm{b}}_h^{\mathrm{v}}(t) + \Psi_{hm}(x,y)\ddot{\mathrm{c}}_{hm}^{\mathrm{v}}(t) \tag{۴۷-۳}$$

$$\dot{\theta}^e(x,y,t) = N_h(x,y)\dot{\mathrm{a}}_h^{\mathrm{T}}(t) + \Phi_h(x,y)\dot{\mathrm{b}}_h^{\mathrm{T}}(t) + \Psi_{hm}(x,y)\dot{\mathrm{c}}_{hm}^{\mathrm{T}}(t) \tag{۴۸-۳}$$

$$h = 1,\dots,ne, \quad m = 1,\dots,4$$

با استفاده از انتگرال باقی‌مانده وزنی نسبت به توابع وزنی $S_l(x,y)$، تقریب گلرکین به قرار زیر است:

$$\int_{V(e)} \left(\sigma_{ij,j} + B_i - \rho\ddot{u}_i\right) S_l dV = 0 \qquad l = 1,2,\dots,ns, \quad i,j = 1,2 \tag{۴۹-۳}$$

در رابطه (۳-۴۹) توابع وزنی $S_l(x,y)$، توابع شکل اجزا محدود توسعه‌یافته به صورت زیر هستند:

$$S_l = \{N_1, N_2, N_3, N_4, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Psi_{1m}, \Psi_{2m}, \Psi_{3m}, \Psi_{4m}\} \quad m = 1,\dots,4 \tag{۵۰-۳}$$

با اعمال فرمول‌بندی ضعیف[1] به اولین عبارت رابطه (۳-۴۹) و استفاده از تئوری گاوس داریم:

$$\int_{V(e)} \left(\sigma_{ij,j}\right) S_l dV = \int_{A(e)} \sigma_{ij} n_j S_l dA - \int_{V(e)} \frac{\partial S_l}{\partial x_j} \sigma_{ij} dV \tag{۵۱-۳}$$

در رابطه فوق n_j مولفه‌های بردار یکه نرمال خارجی بر روی مرز پیوستار هستند. با جایگذاری رابطه (۳-۵۱) در رابطه (۳-۴۹) داریم:

$$\int_{A(e)} \sigma_{ij} n_j S_l dA - \int_{V(e)} \frac{\partial S_l}{\partial x_j} \sigma_{ij} dV + \int_{V(e)} B_i S_l dV - \int_{V(e)} \rho\ddot{u}_i S_l dV = 0 \tag{۵۲-۳}$$

[1] Weak formulation

با توجه به فرمول کوشی (۳-۲۲) عبارت اول رابطه (۳-۵۲) به قرار زیر است:

$$\int_{A(e)} \sigma_{ij} n_j S_l dA = \int_{A(e)} Tr_i^n S_l dA \qquad (۵۳-۳)$$

با جایگذاری σ_{ij} از رابطه (۳-۳۶) در عبارت دوم رابطه (۳-۵۲) به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned}&\int_{V(e)} \frac{\partial S_l}{\partial x_j} \sigma_{ij} dV \\ &= \int_{V(e)} \frac{\partial S_l}{\partial x_j} \left[\mu\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) + \lambda u_{k,k}\delta_{ij} - \beta\theta\delta_{ij} - \beta t_1 \dot{T}\delta_{ij}\right] dV\end{aligned} \qquad (۵۴-۳)$$

با جایگذاری روابط (۳-۵۳) و (۳-۵۴) در معادله (۳-۵۲)، معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}&\int_{V(e)} \rho \ddot{u}_i S_l dV + \int_{V(e)} \frac{\partial S_l}{\partial x_j} \left[\mu\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) + \lambda u_{k,k}\delta_{ij}\right] dV \\ &- \int_{V(e)} (\beta\theta + \beta t_1 \dot{\theta}) \frac{\partial S_l}{\partial x_i} dV = \int_{V(e)} B_i S_l dV + \int_{A(e)} Tr_i^n S_l dA \qquad i,j = 1,2\end{aligned} \qquad (۵۵-۳)$$

حال با در نظر گرفتن المان مبنای e که تعداد ne گره دارد و تمامی گره‌های آن شامل هر دو تابع غنی‌سازی می‌شوند و جایگذاری مولفه‌های جابه‌جایی و تغییر دمای این المان (معادلات (۳-۴۱) تا (۳-۴۳)) در رابطه (۳-۵۵)، می‌توان آن را به صورت زیر تفکیک و بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned}&\left(\int_{V(e)} \rho S_l N_h dV\right) \ddot{\mathrm{a}}_h^{\mathrm{u}} + \left(\int_{V(e)} \rho S_l \Phi_h dV\right) \ddot{\mathrm{b}}_h^{\mathrm{u}} + \left(\int_{V(e)} \rho S_l \Psi_{hm} dV\right) \ddot{\mathrm{c}}_{hm}^{\mathrm{u}} \\ &+ \int_{V(e)} S_{l,x}\left[(\lambda + 2\mu)\left(N_{h,x}\mathrm{a}_h^{\mathrm{u}} + \Phi_{h,x}\mathrm{b}_h^{\mathrm{u}} + \Psi_{hm,x}\mathrm{c}_{hm}^{\mathrm{u}}\right)\right. \\ &\qquad\qquad \left.+ \lambda\left(N_{h,y}\mathrm{a}_h^{\mathrm{v}} + \Phi_{h,y}\mathrm{b}_h^{\mathrm{v}} + \Psi_{hm,y}\mathrm{c}_{hm}^{\mathrm{v}}\right)\right] dV \\ &+ \int_{V(e)} \mu S_{l,y}\left(N_{h,y}\mathrm{a}_h^{\mathrm{u}} + \Phi_{h,y}\mathrm{b}_h^{\mathrm{u}} + \Psi_{hm,y}\mathrm{c}_{hm}^{\mathrm{u}} + N_{h,x}\mathrm{a}_{\mathrm{h}}^{\mathrm{v}} + \Phi_{h,x}\mathrm{b}_h^{\mathrm{v}}\right. \\ &\qquad\qquad \left.+ \Psi_{hm,x}\mathrm{c}_{hm}^{\mathrm{v}}\right) dV - \int_{V(e)} \beta S_{l,x}\left(N_h \mathrm{a}_h^{\mathrm{T}} + \Phi_h \mathrm{b}_h^{\mathrm{T}} + \Psi_{hm}\mathrm{c}_{hm}^{\mathrm{T}}\right) dV \\ &- \int_{V(e)} \beta \mathrm{t}_1 S_{l,x}\left(N_h \dot{\mathrm{a}}_h^{\mathrm{T}} + \Phi_h \dot{\mathrm{b}}_h^{\mathrm{T}} + \Psi_{hm}\dot{\mathrm{c}}_{hm}^{\mathrm{T}}\right) dV\end{aligned} \qquad (۵۶-۳)$$

$$= \int_{V(e)} B_x S_l dV + \int_{A(e)} Tr_x^n S_l dA$$

$$\left(\int_{V(e)} \rho S_l N_h dV\right) \ddot{\mathrm{a}}_h^{\mathrm{v}} + \left(\int_{V(e)} \rho S_l \Phi_h dV\right) \ddot{\mathrm{b}}_h^{\mathrm{v}} + \left(\int_{V(e)} \rho N S_l \Psi_{hm} dV\right) \ddot{\mathrm{c}}_{hm}^{\mathrm{v}}$$

$$+ \int_{V(e)} \mu S_{l,x} \big(N_{h,x} \mathrm{a}_h^{\mathrm{v}} + \Phi_{h,x} \mathrm{b}_h^{\mathrm{v}} + \Psi_{hm,x} \mathrm{c}_{hm}^{\mathrm{v}} + N_{h,y} \mathrm{a}_h^{\mathrm{u}} + \Phi_{h,y} \mathrm{b}_h^{\mathrm{u}}$$
$$+ \Psi_{hm,y} \mathrm{c}_{hm}^{\mathrm{u}}\big) dV$$

$$+ \int_{V(e)} S_{l,y} \big[(\lambda + 2\mu)\big(N_{h,y} \mathrm{a}_h^{\mathrm{v}} + \Phi_{h,y} \mathrm{b}_h^{\mathrm{v}} + \Psi_{hm,y} \mathrm{c}_{hm}^{\mathrm{v}}\big)$$
$$+ \lambda\big(N_{h,x} \mathrm{a}_h^{\mathrm{u}} + \Phi_{h,x} \mathrm{b}_h^{\mathrm{u}} + \Psi_{hm,x} \mathrm{c}_{hm}^{\mathrm{u}}\big)\big] dV \qquad (۵۷\text{-}۳)$$

$$- \int_{V(e)} \beta S_{l,y} \big(N_h \mathrm{a}_h^{\mathrm{T}} + \Phi_h \mathrm{b}_h^{\mathrm{T}} + \Psi_{hm} \mathrm{c}_{hm}^{\mathrm{T}}\big) dV$$

$$- \int_{V(e)} \beta \mathrm{t}_1 S_{l,y} \big(N_h \dot{\mathrm{a}}_h^{\mathrm{T}} + \Phi_h \dot{\mathrm{b}}_h^{\mathrm{T}} + \Psi_{hm} \dot{\mathrm{c}}_{hm}^{\mathrm{T}}\big) dV$$

$$= \int_{V(e)} B_y S_l dV + \int_{A(e)} Tr_y^n S_l dA$$

$l = 1,2, \dots, ns, \qquad h = 1, \dots, ne \quad m = 1, \dots, 4$

تقریب گلرکین معادله انرژی (۳-۳۸) عبارت است از:

$$\int_{V(e)} \big(q_{i,i} + \dot{T} + t_2 \ddot{T} + \kappa \dot{u}_{j,j}\big) S_l dV = 0 \quad l = 1,2, \dots, ns \qquad (۵۸\text{-}۳)$$

برای مسائل دو بعدی فرم انتگرالی گرادیان شار حرارتی $q_{i,i}$ به قرار زیر است [۵۷]:

$$\int_{V(e)} q_{i,i} S_l dV = \int_{V(e)} \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y}\right) S_l dV$$
$$= \int_{A(e)} (q_i n_i) S_l dA - \int_{V(e)} q_i \frac{\partial S_l}{\partial x_i} dV \qquad l = 1,2, \dots, ns \qquad (۵۹\text{-}۳)$$

در رابطه فوق $A(e)$ مساحت مرزی المان e است، که تحت شار حرارتی قرار دارد. با جایگذاری رابطه (۳-۵۹) در معادله (۳-۵۸) به معادله زیر می‌رسیم:

$$\int_{V(e)} \dot{T} + t_2 \ddot{T} S_l dV - \int_{V(e)} q_i \frac{\partial S_l}{\partial x_i} dV + \int_{V(e)} \kappa \dot{u}_{i,i} S_l dV = - \int_{A(e)} (q_i n_i) S_l dA \qquad l = 1,2,\dots,ns \tag{۶۰-۳}$$

با جایگذاری مولفه‌های جابه‌جایی u_i و تغییر دما θ از روابط (۳-۴۱) تا (۳-۴۳) در رابطه (۳-۶۰)، شکل گسسته شده معادله انرژی کوپل بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{V(e)} t_2 S_l N_h dV\right) \ddot{\mathrm{a}}_h^{\mathrm{T}} + \left(\int_{V(e)} t_2 S_l \Phi_h dV\right) \ddot{\mathrm{b}}_h^{\mathrm{T}} + \left(\int_{V(e)} t_2 S_l \Psi_{hm} dV\right) \ddot{\mathrm{c}}_{hm}^{\mathrm{T}} + \\
&\left(\int_{V(e)} S_l N_h dV\right) \dot{\mathrm{a}}_h^{\mathrm{T}} + \left(\int_{V(e)} S_l \Phi_h dV\right) \dot{\mathrm{b}}_h^{\mathrm{T}} + \left(\int_{V(e)} S_l \Psi_{hm} dV\right) \dot{\mathrm{c}}_{hm}^{\mathrm{T}} + \\
&\left(\int_{V(e)} k_x S_{l,x} N_{h,x} dV\right) \mathrm{a}_h^{\mathrm{T}} + \left(\int_{V(e)} k_x S_{l,x} \Phi_{h,x} dV\right) \mathrm{b}_h^{\mathrm{T}} + \left(\int_{V(e)} k_x S_{l,x} \Psi_{1h,x} dV\right) \mathrm{c}_h^{\mathrm{T}} + \\
&\left(\int_{V(e)} k_y S_{l,y} N_{h,y} dV\right) \mathrm{a}_h^{\mathrm{T}} + \left(\int_{V(e)} k_y S_{l,y} \Phi_{h,y} dV\right) \mathrm{b}_h^{\mathrm{T}} + \left(\int_{V(e)} k_y S_{l,y} \Psi_{h1,y} dV\right) \mathrm{c}_h^{\mathrm{T}} + \\
&\left(\int_{V(e)} \kappa S_l N_{h,x} dV\right) \dot{\mathrm{a}}_h^{\mathrm{u}} + \left(\int_{V(e)} \kappa S_l \Phi_{h,x} dV\right) \dot{\mathrm{b}}_h^{\mathrm{u}} + \left(\int_{V(e)} \kappa S_l \Psi_{hm,x} dV\right) \dot{\mathrm{c}}_{hm}^{\mathrm{u}} + \\
&\left(\int_{V(e)} \kappa S_l N_{h,y} dV\right) \dot{\mathrm{a}}_h^{\mathrm{v}} + \left(\int_{V(e)} \kappa S_l \Phi_{h,y} dV\right) \dot{\mathrm{b}}_h^{\mathrm{v}} + \left(\int_{V(e)} \kappa S_l \Psi_{hm,y} dV\right) \dot{\mathrm{c}}_{hm}^{\mathrm{v}} \\
&= - \int_{A(e)} (q_x n_x) S_l dA - \int_{A(e)} (q_y n_y) S_l dA \\
&l = 1,2,..,ns \qquad h = 1,\dots,ne \qquad m = 1,\dots,4
\end{aligned} \tag{۶۱-۳}$$

با مرتب کردن معادلات (۳-۵۶)، (۳-۵۷) و (۳-۶۱)، می توان آن‌ها را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{V(e)} \rho S_l N_h dV\right) \ddot{\mathrm{a}}_h^{\mathrm{u}} + \left(\int_{V(e)} \rho S_l \Phi_h dV\right) \ddot{\mathrm{b}}_h^{\mathrm{u}} + \left(\int_{V(e)} \rho S_l \Psi_{hm} dV\right) \ddot{\mathrm{c}}_{hm}^{\mathrm{u}} - \\
&\left(\int_{V(e)} \beta \mathrm{t}_1 S_{l,x} N_h dV\right) \dot{\mathrm{a}}_h^{\mathrm{T}} - \left(\int_{V(e)} \beta \mathrm{t}_1 S_{l,x} \Phi_h dV\right) \dot{\mathrm{b}}_h^{\mathrm{T}} - \left(\int_{V(e)} \beta \mathrm{t}_1 S_{l,x} \Psi_{hm} dV\right) \dot{\mathrm{c}}_{hm}^{\mathrm{T}} + \\
&\left(\int_{V(e)} \left[(\lambda + 2\mu) S_{l,x} N_{h,x} + \mu S_{l,y} N_{h,y}\right] dV\right) \mathrm{a}_h^{\mathrm{u}} +
\end{aligned}$$

$$\left(\int_{V(e)}\left[(\lambda+2\mu)S_{l,x}\Phi_{h,x}+\mu S_{l,y}\Phi_{h,y}\right]dV\right)\mathrm{b}_h^{\mathrm{u}}+$$

$$\left(\int_{V(e)}\left[(\lambda+2\mu)S_{l,x}\Psi_{hm,x}+\mu S_{l,y}\Psi_{hm,y}\right]dV\right)\mathrm{c}_{hm}^{\mathrm{u}}+$$

$$\left(\int_{V(e)}\left[\lambda S_{l,x}N_{h,y}+\mu S_{l,y}N_{h,x}\right]dV\right)\mathrm{a}_h^{\mathrm{v}}+\left(\int_{V(e)}\left[\lambda S_{l,x}\Phi_{h,y}+\mu S_{l,y}\Phi_{h,x}\right]dV\right)\mathrm{b}_h^{\mathrm{v}}+$$

$$\left(\int_{V(e)}\left[\lambda S_{l,x}\Psi_{hm,y}+\mu S_{l,y}\Psi_{hm,x}\right]dV\right)\mathrm{c}_{hm}^{\mathrm{v}}-\int_{V(e)}\beta S_{l,x}\left(N_h\mathrm{a}_h^{\mathrm{T}}+\Phi_h\mathrm{b}_h^{\mathrm{T}}+\Psi_{hm}\mathrm{c}_{hm}^{\mathrm{T}}\right)dV$$

$$=\int_{V(e)}B_xS_ldV+\int_{A(e)}Tr_x^nS_ldA \tag{۶۲-۳}$$

$$\left(\int_{V(e)}\rho S_lN_hdV\right)\ddot{\mathrm{a}}_h^{\mathrm{v}}+\left(\int_{V(e)}\rho S_l\Phi_hdV\right)\ddot{\mathrm{b}}_h^{\mathrm{v}}+\left(\int_{V(e)}\rho S_l\Psi_{hm}dV\right)\ddot{\mathrm{c}}_{hm}^{\mathrm{v}}-$$

$$\left(\int_{V(e)}\beta \mathrm{t}_1S_{l,y}N_hdV\right)\dot{\mathrm{a}}_h^{\mathrm{T}}-\left(\int_{V(e)}\beta \mathrm{t}_1S_{l,y}\Phi_hdV\right)\dot{\mathrm{b}}_h^{\mathrm{T}}-\left(\int_{V(e)}\beta \mathrm{t}_1S_{l,y}\Psi_{hm}dV\right)\dot{\mathrm{c}}_{hm}^{\mathrm{T}}+$$

$$\left(\int_{V(e)}\left[\mu S_{l,x}N_{h,y}+\lambda S_{l,y}N_{h,x}\right]dV\right)\mathrm{a}_h^{\mathrm{u}}+\left(\int_{V(e)}\left[\mu S_{l,x}\Phi_{h,y}+\lambda S_{l,y}\Phi_{h,x}\right]dV\right)\mathrm{b}_h^{\mathrm{u}}+$$

$$\left(\int_{V(e)}\left[\mu S_{l,x}\Psi_{hm,y}+\lambda S_{l,y}\Psi_{,x}\right]dV\right)\mathrm{c}_{hm}^{\mathrm{u}}+$$

$$\left(\int_{V(e)}\left[\mu S_{l,x}N_{h,x}+(\lambda+2\mu)S_{l,y}N_{h,y}\right]dV\right)\mathrm{a}_h^{\mathrm{v}}+$$

$$\left(\int_{V(e)}\left[\mu S_{l,x}\Phi_{h,x}+(\lambda+2\mu)S_{l,y}\Phi_{h,y}\right]dV\right)\mathrm{b}_h^{\mathrm{v}}+$$

$$\left(\int_{V(e)}\left[\mu S_{l,x}\Psi_{hm,x}+(\lambda+2\mu)S_{l,y}\Psi_{hm,y}\right]dV\right)\mathrm{c}_{hm}^{\mathrm{v}}-$$

$$\int_{V(e)}\beta S_{l,y}\left(N_h\mathrm{a}_h^{\mathrm{T}}+\Phi_h\mathrm{b}_h^{\mathrm{T}}+\Psi_{hm}\mathrm{c}_{hm}^{\mathrm{T}}\right)dV=\int_{V(e)}B_yS_ldV+\int_{A(e)}Tr_y^nS_ldA \tag{۶۳-۳}$$

$$\left(\int_{V(e)} t_2 S_l N_h dV\right) \ddot{\mathrm{a}}_h^{\mathrm{T}} + \left(\int_{V(e)} t_2 S_l \Phi_h dV\right) \ddot{\mathrm{b}}_h^{\mathrm{T}} + \left(\int_{V(e)} t_2 S_l \Psi_{hm} dV\right) \ddot{\mathrm{c}}_{hm}^{\mathrm{T}} +$$

$$\left(\int_{V(e)} S_l N_h dV\right) \dot{\mathrm{a}}_h^{\mathrm{T}} + \left(\int_{V(e)} S_l \Phi_h dV\right) \dot{\mathrm{b}}_h^{\mathrm{T}} + \left(\int_{V(e)} S_l \Psi_{hm} dV\right) \dot{\mathrm{c}}_{hm}^{\mathrm{T}} +$$

$$\left(\int_{V(e)} \left[k_x S_{l,x} N_{h,x} + k_y S_{l,y} N_{h,y}\right] dV\right) \mathrm{a}_h^{\mathrm{T}} + \left(\int_{V(e)} \left[k_x S_{l,x} \Phi_{h,x} + k_y S_{l,y} \Phi_{h,y}\right] dV\right) \mathrm{b}_h^{\mathrm{T}} +$$

$$\left(\int_{V(e)} \left[k_x S_{l,x} \Psi_{h1,x} + k_y S_{l,y} \Psi_{hm,y}\right] dV\right) \mathrm{c}_{hm}^{\mathrm{T}} + \left(\int_{V(e)} \kappa S_l N_{h,x} dV\right) \dot{\mathrm{a}}_h^{\mathrm{u}} +$$

$$\left(\int_{V(e)} \kappa S_l \Phi_{h,x} dV\right) \dot{\mathrm{b}}_h^{\mathrm{u}} + \left(\int_{V(e)} \kappa S_l \Psi_{hm,x} dV\right) \dot{\mathrm{c}}_{hm}^{\mathrm{u}} + \left(\int_{V(e)} \kappa S_l N_{h,y} dV\right) \dot{\mathrm{a}}_h^{\mathrm{v}} +$$

$$\left(\int_{V(e)} \kappa S_l \Phi_{h,y} dV\right) \dot{\mathrm{b}}_h^{\mathrm{v}} + \left(\int_{V(e)} \kappa S_l \Psi_{hm,y} dV\right) \dot{\mathrm{c}}_{hm}^{\mathrm{v}}$$

$$= - \int_{A(e)} (q_x n_x) S_l dA - \int_{A(e)} (q_y n_y) S_l dA \qquad (۳-۶۴)$$

$$l = 1,2,..,ns \qquad h = 1,\ldots,ne \qquad m = 1,\ldots,4$$

معادلات (۳-۶۲) تا (۳-۶۴) را می توان در غالب یک معادله ماتریسی در کنار هم قرار داد. این معادله ماتریسی، همان معادله کوپل اجزا محدود توسعه‌یافته است که به شکل زیر بدست می آید:

$$[\mathrm{M}]\{\ddot{\Delta}\} + [\mathrm{C}]\{\dot{\Delta}\} + [\mathrm{K}]\{\Delta\} = \{\mathrm{F}\} \qquad (۳-۶۵)$$

در رابطه فوق ماتریس‌های [M]، [C] و [K] به ترتیب ماتریس‌های جرم، میرایی، و سفتی هستند. {Δ} بردار مجهولات گره‌ای و {F} بردار نیروهای گره‌ای است. برای یک المان مبنا (e) این ماتریس‌ها و بردارها به صورت زیر بدست می آیند:

$$[\mathrm{M}]^{(e)} = \begin{bmatrix} [M_{11}] & [M_{12}] & [M_{13}] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [M_{24}] & [M_{25}] & [M_{26}] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [M_{37}] & [M_{38}] & [M_{39}] \end{bmatrix} \qquad (۳-۶۶)$$

$$[\mathrm{C}]^{(e)} = \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [C_{17}] & [C_{18}] & [C_{19}] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [C_{27}] & [C_{28}] & [C_{29}] \\ [C_{31}] & [C_{32}] & [C_{33}] & [C_{34}] & [C_{35}] & [C_{36}] & [C_{37}] & [C_{38}] & [C_{39}] \end{bmatrix} \qquad (۳-۶۷)$$

$$[\mathrm{K}]^{(e)} =$$

$$\begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] & [K_{13}] & [K_{14}] & [K_{15}] & [K_{16}] & [K_{17}] & [K_{18}] & [K_{19}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] & [K_{23}] & [K_{24}] & [K_{25}] & [K_{26}] & [K_{27}] & [K_{28}] & [K_{29}] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [K_{37}] & [K_{38}] & [K_{39}] \end{bmatrix} \qquad (۶۸\text{-}۳)$$

$$\{\Delta\}^{(e)} = \left\{\mathrm{a}_h^{\mathrm{u}}, \mathrm{b}_h^{\mathrm{u}}, \mathrm{c}_{hm}^{\mathrm{u}}, \mathrm{a}_h^{\mathrm{v}}, \mathrm{b}_h^{\mathrm{v}}, \mathrm{c}_{hm}^{\mathrm{v}}, \mathrm{a}_h^{\mathrm{T}}, \mathrm{b}_h^{\mathrm{T}}, \mathrm{c}_{hm}^{\mathrm{T}}\right\}^T, \qquad (۶۹\text{-}۳)$$

$$h = 1, \dots, ne, \quad m = 1, \dots, 4$$

$$\{\mathrm{F}\}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \int_{V(e)} B_x S_l dV + \int_{A(e)} Tr_x^n S_l dA \\ \int_{V(e)} B_y S_l dV + \int_{A(e)} Tr_y^n S_l dA \\ \int_{V(e)} R S_l dV - \int_{A(e)} (q_x n_x) S_l dA - \int_{A(e)} \left(q_y n_y\right) S_l dA \end{Bmatrix} \qquad (۷۰\text{-}۳)$$

هر یک از مولفه‌های ماتریس‌های جرم، میرایی و سفتی، ماتریس‌هایی هستند که از معادلات (۳-۶۲) تا (۳-۶۴) به صورت زیر استخراج می‌شوند:

$$[M_{11}] = [M_{24}] = \left[\int_{V(e)} \rho S_l N_h dV\right] \qquad (۷۱\text{-}۳)$$

$$[M_{12}] = [M_{25}] = \left[\int_{V(e)} \rho S_l \Phi_h dV\right] \qquad (۷۲\text{-}۳)$$

$$[M_{13}] = [M_{26}] = \left[\int_{V(e)} \rho S_l \Psi_{hm} dV\right] \qquad (۷۳\text{-}۳)$$

$$[M_{37}] = \left[\int_{V(e)} t_2 S_l N_h dV\right] \qquad (۷۴\text{-}۳)$$

$$[M_{38}] = \left[\int_{V(e)} t_2 S_l \Phi_h dV\right] \qquad (۷۵\text{-}۳)$$

$$[M_{39}] = \left[\int_{V(e)} t_2 S_l \Psi_{hm} dV\right] \qquad (۷۶\text{-}۳)$$

$$[C_{17}] = \left[-\int_{V(e)} \beta \mathrm{t}_1 S_{l,x} N_h dV\right] \qquad (۷۷\text{-}۳)$$

$$[C_{18}] = \left[-\int_{V(e)} \beta \mathrm{t}_1 S_{l,x} \Phi_h \, dV\right] \qquad (۷۸\text{-}۳)$$

$$[C_{19}] = \left[-\int_{V(e)} \beta \mathrm{t}_1 S_{l,x} \Psi_{hm} dV\right] \tag{۷۹-۳}$$

$$[C_{27}] = \left[-\int_{V(e)} \beta \mathrm{t}_1 S_{l,y} N_h dV\right] \tag{۸۰-۳}$$

$$[C_{28}] = \left[-\int_{V(e)} \beta \mathrm{t}_1 S_{l,y} \Phi_h \, dV\right] \tag{۸۱-۳}$$

$$[C_{29}] = \left[-\int_{V(e)} \beta \mathrm{t}_1 S_{l,y} \Psi_{hm} dV\right] \tag{۸۲-۳}$$

$$[C_{31}] = \left[\int_{V(e)} \kappa S_l N_{h,x} dV\right] \tag{۸۳-۳}$$

$$[C_{32}] = \left[\int_{V(e)} \kappa S_l \Phi_{h,x} dV\right] \tag{۸۴-۳}$$

$$[C_{33}] = \left[\int_{V(e)} \kappa S_l \Psi_{hm,x} dV\right] \tag{۸۵-۳}$$

$$[C_{34}] = \left[\int_{V(e)} \kappa S_l N_{h,y} dV\right] \tag{۸۶-۳}$$

$$[C_{35}] = \left[\int_{V(e)} \kappa S_l \Phi_{h,y} dV\right] \tag{۸۷-۳}$$

$$[C_{36}] = \left[\int_{V(e)} \kappa S_l \Psi_{hm,y} dV\right], \tag{۸۸-۳}$$

$$[C_{37}] = \left[\int_{V(e)} S_l N_h dV\right] \tag{۸۹-۳}$$

$$[C_{38}] = \left[\int_{V(e)} S_l \Phi_h dV\right] \tag{۹۰-۳}$$

$$[C_{39}] = \left[\int_{V(e)} S_l \Psi_{hm} dV\right] \tag{۹۱-۳}$$

$$[K_{11}] = \left[\int_{V(e)} \left((\lambda + 2\mu) S_{l,x} N_{h,x} + \mu S_{l,y} N_{h,y}\right) dV\right] \tag{۹۲-۳}$$

$$[K_{12}] = \left[\int_{V(e)} \left((\lambda + 2\mu) S_{l,x} \Phi_{h,x} + \mu S_{l,y} \Phi_{h,y}\right) dV\right] \tag{۹۳-۳}$$

$$[K_{13}] = \left[\int_{V(e)} \left((\lambda + 2\mu) S_{l,x} \Psi_{hm,x} + \mu S_{l,y} \Psi_{hm,y}\right) dV\right] \tag{۹۴-۳}$$

$$[K_{14}] = \left[\iint_{V(e)} \left(\lambda S_{l,x} N_{h,y} + \mu S_{l,y} N_{h,x}\right) dV\right] \tag{۹۵-۳}$$

$$[K_{15}] = \left[\iint_{V(e)} \left(\lambda S_{l,x} \Phi_{h,y} + \mu S_{l,y} \Phi_{h,x}\right) dV\right] \tag{۹۶-۳}$$

$$[K_{16}] = \left[\iint_{V(e)} \left(\lambda S_{l,x} \Psi_{hm,y} + \mu S_{l,y} \Psi_{hm,x}\right) dV\right], \tag{۹۷-۳}$$

$$[K_{17}] = \left[-\int_{V(e)} \beta S_{l,x} N_h dV\right] \tag{۹۸-۳}$$

$$[K_{18}] = \left[-\int_{V(e)} \beta S_{l,x} \Phi_h dV\right] \tag{۹۹-۳}$$

$$[K_{19}] = \left[-\int_{V(e)} \beta S_{l,x} \Psi_{hm} dV\right] \tag{۱۰۰-۳}$$

$$[K_{21}] = \left[\iint_{V(e)} \left(\mu S_{l,x} N_{h,y} + \lambda S_{l,y} N_{h,x}\right) dV\right] \tag{۱۰۱-۳}$$

$$[K_{22}] = \left[\iint_{V(e)} \left(\mu S_{l,x} \Phi_{h,y} + \lambda S_{l,y} \Phi_{h,x}\right) dV\right] \tag{۱۰۲-۳}$$

$$[K_{23}] = \left[\iint_{V(e)} \left(\mu S_{l,x} \Psi_{hm,y} + \lambda S_{l,y} \Psi_{hm,x}\right) dV\right] \tag{۱۰۳-۳}$$

$$[K_{24}] = \left[\iint_{V(e)} \left(\mu S_{l,x} N_{h,x} + (\lambda + 2\mu) S_{l,y} N_{h,y}\right) dV\right] \tag{۱۰۴-۳}$$

$$[K_{25}] = \left[\iint_{V(e)} \left(\mu S_{l,x} \Phi_{h,x} + (\lambda + 2\mu) S_{l,y} \Phi_{h,y}\right) dV\right] \tag{۱۰۵-۳}$$

$$[K_{26}] = \left[\iint_{V(e)} \left(\mu S_{l,x} \Psi_{hm,x} + (\lambda + 2\mu) S_{l,y} \Psi_{hm,y}\right) dV\right] \tag{۱۰۶-۳}$$

$$[K_{27}] = \left[-\int_{V(e)} \beta S_{l,y} N_h dV\right] \tag{۱۰۷-۳}$$

$$[K_{28}] = \left[-\int_{V(e)} \beta S_{l,y} \Phi_h dV\right] \tag{۱۰۸-۳}$$

$$[K_{29}] = \left[-\int_{V(e)} \beta S_{l,y} \Psi_{hm} dV\right] \quad (۱۰۹\text{-}۳)$$

$$[K_{37}] = \left[\int_{V(e)} \left(k_x S_{l,x} N_{h,x} + k_y S_{l,y} N_{h,y}\right) dV\right] \quad (۱۱۰\text{-}۳)$$

$$[K_{38}] = \left[\int_{V(e)} \left(k_x S_{l,x} \Phi_{h,x} + k_y S_{l,y} \Phi_{h,y}\right) dV\right] \quad (۱۱۱\text{-}۳)$$

$$[K_{39}] = \left[\int_{V(e)} \left(k_x S_{l,x} \Psi_{hm,x} + k_y S_{l,y} \Psi_{hm,y}\right) dV\right] \quad (۱۱۲\text{-}۳)$$

مولفه‌های ماتریس‌های جرم، میرایی و سفتی برای المان (e) را می‌توان به فرم ماتریسی زیر بازنویسی کرد:

$$[M_{11}] = [M_{24}] = \int_{V(e)} \rho [S]^T [N] dV \quad (۱۱۳\text{-}۳)$$

$$[M_{12}] = [M_{25}] = \int_{V(e)} \rho [S]^T [\Phi] dV \quad (۱۱۴\text{-}۳)$$

$$[M_{13}] = [M_{26}] = \int_{V(e)} [\rho [S]^T [\Psi_1] \quad \rho [S]^T [\Psi_2] \quad \rho [S]^T [\Psi_3] \quad \rho [S]^T [\Psi_4]] \, dV \quad (۱۱۵\text{-}۳)$$

$$[M_{37}] = \int_{V(e)} t_2 [S]^T [N] dV \quad (۱۱۶\text{-}۳)$$

$$[M_{38}] = \int_{V(e)} t_2 [S]^T [\Phi] dV \quad (۱۱۷\text{-}۳)$$

$$[M_{39}] = \int_{V(e)} [t_2 [S]^T [\Psi_1] \quad t_2 [S]^T [\Psi_2] \quad t_2 [S]^T [\Psi_3] \quad t_2 [S]^T [\Psi_4]] \, dV \quad (۱۱۸\text{-}۳)$$

$$[C_{17}] = -\int_{V(e)} \beta t_1 [G_{13}]^T [N] dV \quad (۱۱۹\text{-}۳)$$

$$[C_{18}] = -\int_{V(e)} \beta t_1 [G_{13}]^T [\Phi] dV \quad (۱۲۰\text{-}۳)$$

$$[C_{19}] = \quad (۱۲۱\text{-}۳)$$
$$-\int_{V(e)} [\beta t_1 [G_{13}]^T [\Psi_1] \quad \beta t_1 [G_{13}]^T [\Psi_2] \quad \beta t_1 [G_{13}]^T [\Psi_3] \quad \beta t_1 [G_{13}]^T [\Psi_4]] d$$

$$[C_{27}] = -\int_{V(e)} \beta t_1 [G_{14}]^T [N] dV \quad (۱۲۲\text{-}۳)$$

$$[C_{28}] = -\int_{V(e)} \beta t_1 [G_{14}]^T [\Phi] dV \tag{۱۲۳-۳}$$

$$[C_{29}] =$$

$$-\int_{V(e)} [\beta t_1 [G_{14}]^T [\Psi_1] \quad \beta t_1 [G_{14}]^T [\Psi_2] \quad \beta t_1 [G_{14}]^T [\Psi_3] \quad \beta t_1 [G_{14}]^T [\Psi_4]] d \tag{۱۲۴-۳}$$

$$[C_{31}] = \int_{V(e)} \kappa [S]^T [G_1] dV \tag{۱۲۵-۳}$$

$$[C_{32}] = \int_{V(e)} \kappa [S]^T [G_3] dV \tag{۱۲۶-۳}$$

$$[C_{33}] = \int_{V(e)} [\kappa [S]^T [G_5] \quad \kappa [S]^T [G_6] \quad \kappa [S]^T [G_7] \quad \kappa [S]^T [G_8]] dV \tag{۱۲۷-۳}$$

$$[C_{34}] = \int_{V(e)} \kappa [S]^T [G_2] dV \tag{۱۲۸-۳}$$

$$[C_{35}] = \int_{V(e)} \kappa [S]^T [G_4] dV \tag{۱۲۹-۳}$$

$$[C_{36}] =$$

$$\int_{V(e)} [\kappa [S]^T [G_9] \quad \kappa [S]^T [G_{10}] \quad \kappa [S]^T [G_{11}] \quad \kappa [S]^T [G_{12}]]\, dV \tag{۱۳۰-۳}$$

$$[C_{37}] = \int_{V(e)} [S]^T [N] dV \tag{۱۳۱-۳}$$

$$[C_{38}] = \int_{V(e)} [S]^T [\Phi] dV \tag{۱۳۲-۳}$$

$$[C_{39}] = \int_{V(e)} [[S]^T [\Psi_1] \quad [S]^T [\Psi_2] \quad [S]^T [\Psi_3] \quad [S]^T [\Psi_4]] dV \tag{۱۳۳-۳}$$

$$[K_{11}] = \int_{V(e)} \big((\lambda + 2\mu)[G_{13}]^T [G_1] + \mu [G_{14}]^T [G_2] \big)\, dV \tag{۱۳۴-۳}$$

$$[K_{12}] = \int_{V(e)} \big((\lambda + 2\mu)[G_{13}]^T [G_3] + \mu [G_{14}]^T [G_4] \big)\, dV \tag{۱۳۵-۳}$$

$$[K_{13}] = \Big[\int_{V(e)} \big((\lambda + 2\mu)[G_{13}]^T [G_5] + \mu [G_{14}]^T [G_9] \big)\, dV \tag{۱۳۶-۳}$$

$$\int_{V(e)} \big((\lambda+2\mu)[G_{13}]^T[G_6] + \mu[G_{14}]^T[G_{10}]\big)\,dV$$

$$\int_{V(e)} \big((\lambda+2\mu)[G_{13}]^T[G_7] + \mu[G_{14}]^T[G_{11}]\big)\,dV$$

$$\int_{V(e)} \big((\lambda+2\mu)[G_{13}]^T[G_8] + \mu[G_{14}]^T[G_{12}]\big)dV\Big]$$

$$[K_{14}] = \int_{V(e)} (\lambda[G_{13}]^T[G_2] + \mu[G_{14}]^T[G_1])dV \qquad (۱۳۷\text{-}۳)$$

$$[K_{15}] = \int_{V(e)} (\lambda[G_{13}]^T[G_4] + \mu[G_{14}]^T[G_3])dV \qquad (۱۳۸\text{-}۳)$$

$$[K_{16}] = \int_{V(e)} [(\lambda[G_{13}]^T[G_9] + \mu[G_{14}]^T[G_5]) \quad (\lambda[G_{13}]^T[G_{10}] + \mu[G_{14}]^T[G_6]) \quad (\lambda[G_{13}]^T[G_{11}] + \mu[G_{14}]^T[G_7]) \quad (\lambda[G_{13}]^T[G_{12}] + \mu[G_{14}]^T[G_8])]dV \qquad (۱۳۹\text{-}۳)$$

$$[K_{17}] = -\int_{V(e)} \beta[G_{13}]^T[N]dV \qquad (۱۴۰\text{-}۳)$$

$$[K_{18}] = -\int_{V(e)} \beta[G_{13}]^T[\Phi]dV \qquad (۱۴۱\text{-}۳)$$

$$[K_{19}] = -\int_{V(e)} [\beta[G_{13}]^T[\Psi_1] \quad \beta[G_{13}]^T[\Psi_2] \quad \beta[G_{13}]^T[\Psi_3] \quad \beta[G_{13}]^T[\Psi_4]]\,dV \qquad (۱۴۲\text{-}۳)$$

$$[K_{21}] = \int_{V(e)} (\mu[G_{13}]^T[G_2] + \lambda[G_{14}]^T[G_1])dV \qquad (۱۴۳\text{-}۳)$$

$$[K_{22}] = \int_{V(e)} (\mu[G_{13}]^T[G_4] + \lambda[G_{14}]^T[G_3])dV \qquad (۱۴۴\text{-}۳)$$

$$[K_{23}] = \int_{V(e)} [(\mu[G_{13}]^T[G_9] + \lambda[G_{14}]^T[G_5]) \quad (\mu[G_{13}]^T[G_{10}] + \lambda[G_{14}]^T[G_6]) \quad (\mu[G_{13}]^T[G_{11}] + \lambda[G_{14}]^T[G_7]) \quad (\mu[G_{13}]^T[G_{12}] + \lambda[G_{14}]^T[G_8])]dV \qquad (۱۴۵\text{-}۳)$$

$$[K_{24}] = \int_{V(e)} (\mu[G_{13}]^T[G_1] + (\lambda + 2\mu)[G_{14}]^T[G_2])dV \tag{۳-۱۴۶}$$

$$[K_{25}] = \int_{V(e)} (\mu[G_{13}]^T[G_3] + (\lambda + 2\mu)[G_{14}]^T[G_4])dV \tag{۳-۱۴۷}$$

$$\begin{gathered}[K_{26}] = \left[\int_{V(e)} (\mu[G_{13}]^T[G_5] + (\lambda + 2\mu)[G_{14}]^T[G_9])dV \right. \\ \int_{V(e)} (\mu[G_{13}]^T[G_6] + (\lambda + 2\mu)[G_{14}]^T[G_{10}])dV \\ \int_{V(e)} (\mu[G_{13}]^T[G_7] + (\lambda + 2\mu)[G_{14}]^T[G_{11}])dV \\ \left. \int_{V(e)} (\mu[G_{13}]^T[G_8] + (\lambda + 2\mu)[G_{14}]^T[G_{12}])dV \right]\end{gathered} \tag{۳-۱۴۸}$$

$$[K_{27}] = -\int_{V(e)} \beta[G_{14}]^T[N]dV \tag{۳-۱۴۹}$$

$$[K_{28}] = -\int_{V(e)} \beta[G_{14}]^T[\Phi]dV \tag{۳-۱۵۰}$$

$$\begin{gathered}[K_{29}] = \\ -\int_{V(e)} [\beta[G_{14}]^T[\Psi_1] \quad \beta[G_{14}]^T[\Psi_2] \quad \beta[G_{14}]^T[\Psi_3] \quad \beta[G_{14}]^T[\Psi_4]]\, dV\end{gathered} \tag{۳-۱۵۱}$$

$$[K_{37}] = \int_{V(e)} \left(k_x[G_{13}]^T[G_1] + k_y[G_{14}]^T[G_2]\right)dV \tag{۳-۱۵۲}$$

$$[K_{38}] = \int_{V(e)} \left(k_x[G_{13}]^T[G_3] + k_y[G_{14}]^T[G_4]\right)dV \tag{۳-۱۵۳}$$

$$\begin{gathered}[K_{39}] = \\ \int_{V(e)} \left[\left(k_x[G_{13}]^T[G_5] + k_y[G_{14}]^T[G_9]\right) \quad \left(k_x[G_{13}]^T[G_6] + k_y[G_{14}]^T[G_{10}]\right)\right. \\ \left.\left(k_x[G_{13}]^T[G_7] + k_y[G_{14}]^T[G_{11}]\right) \quad \left(k_x[G_{13}]^T[G_8] + k_y[G_{14}]^T[G_{12}]\right)\right]dV\end{gathered} \tag{۳-۱۵۴}$$

ماتریس‌ها و بردارهای استفاده شده در روابط فوق برای یک المان چهار گره‌ای با ne = ۴ به قرار زیر هستند:

$$[S] = [N_1 \quad \cdots \quad N_4 \quad \Phi_1 \quad \cdots \quad \Phi_4 \quad \Psi_{11} \quad \cdots \quad \Psi_{44}]$$ (۱۵۵-۳)

$$[N] = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4]$$ (۱۵۶-۳)

$$[\Phi] = [\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \Phi_3 \quad \Phi_4]$$ (۱۵۷-۳)

$$[\Psi_1] = [\Psi_{11}, \Psi_{12}, \Psi_{13}, \Psi_{14}]$$ (۱۵۸-۳)

$$[\Psi_2] = [\Psi_{21}, \Psi_{22}, \Psi_{23}, \Psi_{24}]$$ (۱۵۹-۳)

$$[\Psi_3] = [\Psi_{31}, \Psi_{32}, \Psi_{33}, \Psi_{34}]$$ (۱۶۰-۳)

$$[\Psi_4] = [\Psi_{41}, \Psi_{42}, \Psi_{43}, \Psi_{44}]$$ (۱۶۱-۳)

$$[G_1] = [N_{1,x} \quad N_{2,x} \quad N_{3,x} \quad N_{4,x}]$$ (۱۶۲-۳)

$$[G_2] = [N_{1,y} \quad N_{2,y} \quad N_{3,y} \quad N_{4,y}]$$ (۱۶۳-۳)

$$[G_3] = [\Phi_{1,x} \quad \Phi_{2,x} \quad \Phi_{3,x} \quad \Phi_{4,x}]$$ (۱۶۴-۳)

$$[G_4] = [\Phi_{1,y} \quad \Phi_{2,y} \quad \Phi_{3,y} \quad \Phi_{4,y}]$$ (۱۶۵-۳)

$$[G_5] = [\Psi_{11,x} \quad \Psi_{12,x} \quad \Psi_{13,x} \quad \Psi_{14,x}]$$ (۱۶۶-۳)

$$[G_6] = [\Psi_{21,x} \quad \Psi_{22,x} \quad \Psi_{23,x} \quad \Psi_{24,x}]$$ (۱۶۷-۳)

$$[G_7] = [\Psi_{31,x} \quad \Psi_{32,x} \quad \Psi_{33,x} \quad \Psi_{34,x}]$$ (۱۶۸-۳)

$$[G_8] = [\Psi_{41,x} \quad \Psi_{42,x} \quad \Psi_{43,x} \quad \Psi_{44,x}]$$ (۱۶۹-۳)

$$[G_9] = [\Psi_{11,y} \quad \Psi_{12,y} \quad \Psi_{13,y} \quad \Psi_{14,y}]$$ (۱۷۰-۳)

$$[G_{10}] = [\Psi_{21,y} \quad \Psi_{22,y} \quad \Psi_{23,y} \quad \Psi_{24,y}]$$ (۱۷۱-۳)

$$[G_{11}] = [\Psi_{31,y} \quad \Psi_{32,y} \quad \Psi_{33,y} \quad \Psi_{34,y}]$$ (۱۷۲-۳)

$$[G_{12}] = [\Psi_{41,y} \quad \Psi_{42,y} \quad \Psi_{43,y} \quad \Psi_{44,y}] \tag{۱۷۳-۳}$$

$$[G_{13}] = [N_{1,x} \quad \cdots \quad N_{4,x} \quad \Phi_{1,x} \quad \cdots \quad \Phi_{4,x} \quad \Psi_{11,x} \quad \cdots \quad \Psi_{44,x}] \tag{۱۷۴-۳}$$

$$[G_{14}] = [N_{1,y} \quad \cdots \quad N_{4,y} \quad \Phi_{1,y} \quad \cdots \quad \Phi_{4,y} \quad \Psi_{11,y} \quad \cdots \quad \Psi_{44,y}] \tag{۱۷۵-۳}$$

حال جهت ساده شدن ماتریس‌ها در برنامه‌نویسی، معادلات به صورتی جابه‌جا می‌شوند که بردار مجهولات گره‌ای برای یک المان (e) با فرض اینکه به طور کامل غنی‌سازه شده باشد، به شکل زیر تبدیل شود:

$$\begin{gathered}\{\Delta\}^{(e)} = \left\{\mathrm{a}_h^{\mathrm{u}}, \mathrm{a}_h^{\mathrm{v}}, \mathrm{b}_h^{\mathrm{u}}, \mathrm{b}_h^{\mathrm{v}}, \mathrm{c}_{hm}^{\mathrm{u}}, \mathrm{c}_{hm}^{\mathrm{v}}, \mathrm{a}_h^{\mathrm{T}}, \mathrm{b}_h^{\mathrm{T}}, \mathrm{c}_{hm}^{\mathrm{T}}\right\}^T \\ h = 1, \dots, ne, \qquad m = 1, \dots, 4\end{gathered} \tag{۱۷۶-۳}$$

بنابراین ماتریس‌های جرم، میرایی و سفتی برای المان مبنای (e) به شکل زیر در می آیند:

$$[\mathrm{M}]^{(\mathrm{e})} = \begin{bmatrix} [\mathrm{M}_1] & [0]_{48\times24} \\ [0]_{24\times48} & [\mathrm{M}_2]_{24\times24} \end{bmatrix} \tag{۱۷۷-۳}$$

$$[\mathrm{C}]^{(e)} = \begin{bmatrix} [0]_{48\times48} & [C_3]_{48\times24} \\ [C_1] & [C_2] \end{bmatrix} \tag{۱۷۸-۳}$$

$$[\mathrm{K}]^{(e)} = \begin{bmatrix} [K_1] & [K_2] \\ [0]_{24\times48} & [K_3] \end{bmatrix} \tag{۱۷۹-۳}$$

بردار نیروی المان مبنا به صورت ساده شده زیر است:

$$\{\mathrm{F}\}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \int_{V(e)} [\mathrm{B}]^T \{Bf\} dV + \int_{A(e)} [\mathrm{B}]^T \{Tr\} dA \\ -\int_{A(e)} \left(q_x n_x + q_y n_y\right) [St]^T dA \end{Bmatrix} \tag{۱۸۰-۳}$$

همچنین المان‌های ماتریس‌های جرم، میرایی و سفتی به قرار زیر هستند:

$$[\mathrm{M}_1] = \int_{\mathrm{V(e)}} \rho [\mathrm{B}]^{\mathrm{T}} [\mathrm{B}] \mathrm{dV} \tag{۱۸۱-۳}$$

$$[\mathrm{M}_2] = \int_{\mathrm{V(e)}} t_2 [\mathrm{St}]^{\mathrm{T}} [\mathrm{St}] \mathrm{dV} \tag{۱۸۲-۳}$$

$$[C_1] = \int_{V(e)} \kappa [St]^T [S1] dV \qquad (۱۸۳-۳)$$

$$[\mathrm{C}_2] = \int_{\mathrm{V(e)}} [\mathrm{St}]^{\mathrm{T}} [\mathrm{St}] \mathrm{dV} \qquad (۱۸۴-۳)$$

$$[\mathrm{C}_3] = -\int_{\mathrm{V(e)}} t_1 \beta [\mathrm{S1}]^{\mathrm{T}} [\mathrm{St}]\, \mathrm{dV} \qquad (۱۸۵-۳)$$

$$[\mathrm{K}_1] = \int_{\mathrm{V(e)}} [\mathrm{S2}]^{\mathrm{T}} [\mathrm{D}] [\mathrm{S2}]\, \mathrm{dV} \qquad (۱۸۶-۳)$$

$$[\mathrm{K}_2] = -\int_{\mathrm{V(e)}} \beta [\mathrm{S1}]^{\mathrm{T}} [\mathrm{St}]\, \mathrm{dV} \qquad (۱۸۷-۳)$$

از آنجا که برای مواد همسانگرد $k_x = k_y = k$ است، داریم:

$$[\mathrm{K}_3] = \int_{V(e)} k [S3]^T [S3] dV \qquad (۱۸۸-۳)$$

در روابط فوق:

$$[St] = [N_1 \quad \cdots \quad N_4 \quad \Phi_1 \quad \cdots \quad \Phi_4 \quad \Psi_{11} \quad \cdots \quad \Psi_{44}] \qquad (۱۸۹-۳)$$

$$[\mathrm{B}] = \begin{bmatrix} N_1 & \cdots & N_4 & 0 & \cdots & 0 & \Phi_1 & \cdots & \cdots & 0 & \Psi_{11} & \cdots & \Psi_{44} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & N_1 & \cdots & N_4 & 0 & \cdots & \cdots & \Phi_4 & 0 & \cdots & 0 & \Psi_{11} & \cdots & \Psi_{44} \end{bmatrix}$$

(۱۹۰-۳)

$$[S1] = [\mathrm{N}_{1,\mathrm{x}} \quad \cdots \quad \mathrm{N}_{4,\mathrm{x}} \quad \mathrm{N}_{1,\mathrm{y}} \quad \cdots \quad \mathrm{N}_{4,\mathrm{y}} \quad \Phi_{1,\mathrm{x}} \quad \cdots \quad \Phi_{4,\mathrm{x}} \quad \Phi_{1,\mathrm{y}} \quad \cdots \quad \Phi_{4,\mathrm{y}}$$
$$\Psi_{11,\mathrm{x}} \quad \cdots \quad \Psi_{44,\mathrm{x}} \quad \Psi_{11,\mathrm{y}} \quad \cdots \quad \Psi_{44,\mathrm{y}}] \qquad (۱۹۱-۳)$$

$$[S2] = \begin{bmatrix} N_{1,x} & N_{2,x} & N_{3,x} & N_{4,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_{1,x} & \Phi_{2,x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{1,y} & N_{2,y} & N_{3,y} & N_{4,y} & 0 & 0 \\ N_{1,y} & N_{2,y} & N_{3,y} & N_{4,y} & N_{1,x} & N_{2,x} & N_{3,x} & N_{4,x} & \Phi_{1,y} & \Phi_{2,y} \end{bmatrix}$$
$$\begin{matrix} \Phi_{3,x} & \Phi_{4,x} & 0 & \dots & 0 & \Psi_{11,x} & \dots & \Psi_{44,x} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_{1,y} & \dots & \Phi_{4,y} & 0 & \dots & 0 & \Psi_{11,y} & \dots & \Psi_{44,y} \\ \Phi_{3,y} & \Phi_{4,y} & \Phi_{1,x} & \dots & \Phi_{4,x} & \Psi_{11,y} & \dots & \Psi_{44,y} & \Psi_{11,x} & \dots & \Psi_{44,x} \end{matrix} \qquad (۱۹۲-۳)$$

$$[S3] = \begin{bmatrix} N_{1,x} & N_{2,x} & N_{3,x} & N_{4,x} & \Phi_{1,x} & \Phi_{2,x} & \Phi_{3,x} & \Phi_{4,x} & \Psi_{11,x} & \cdots & \Psi_{44,x} \\ N_{1,y} & N_{2,y} & N_{3,y} & N_{4,y} & \Phi_{1,y} & \Phi_{2,y} & \Phi_{3,y} & \Phi_{4,y} & \Psi_{11,y} & \cdots & \Psi_{44,y} \end{bmatrix} \qquad (۱۹۳\text{-}۳)$$

در روابط فوق $[D]$ ماتریسی وابسته به خصوصیات مواد است و برای حالت کرنش صفحه‌ای و تنش صفحه‌ای به ترتیب به قرار زیر بدست می آید:

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \upsilon & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \qquad (۱۹۴\text{-}۳)$$

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \qquad (۱۹۵\text{-}۳)$$

در روابط فوق E مدول ارتجاعی و ν نسبت پواسون است.

همچنین بردارهای نیروهای کالبدی $\{Bf\}$ و اثرات سطحی $\{Tf\}$ عبارتند از:

$$\{Bf\} = \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{Bmatrix} \qquad (۱۹۶\text{-}۳)$$

$$\{Tf\} = \begin{Bmatrix} Tr_x^n \\ Tr_y^n \end{Bmatrix} \qquad (۱۹۷\text{-}۳)$$

با توجه به رابطه (۲-۱۹)، و اینکه برای تقریب دما در غنی‌سازی المان‌های نوک ترک، فقط از یک تابع غنی‌سازی استفاده می‌شود، بنابراین روابط (۳-۴۳)، (۳-۱۷۶)، (۳-۱۸۹) و (۳-۱۹۳) را باید به صورت زیر اصلاح نمود:

$$\theta^{\mathrm{e}}(x,y,t) = N_h(x,y)\mathrm{a}_h^{\mathrm{T}}(t) + \Phi_h(x,y)\mathrm{b}_h^{\mathrm{T}}(t) + \Psi_{h1}(x,y)\mathrm{c}_h^{\mathrm{T}}(t), \quad h = 1, \dots, ne \qquad (۱۹۸\text{-}۳)$$

$$\{\Delta\}^{(e)} = \left\{\mathrm{a}_h^{\mathrm{u}}, \mathrm{a}_h^{\mathrm{v}}, \mathrm{b}_h^{\mathrm{u}}, \mathrm{b}_h^{\mathrm{v}}, \mathrm{c}_{hm}^{\mathrm{u}}, \mathrm{c}_{hm}^{\mathrm{v}}, \mathrm{a}_h^{\mathrm{T}}, \mathrm{b}_h^{\mathrm{T}}, \mathrm{c}_h^{\mathrm{T}}\right\}^T, \qquad h = 1, \dots, ne \qquad (۱۹۹\text{-}۳)$$

$$[St] = [N_1 \quad \cdots \quad N_4 \quad \Phi_1 \quad \cdots \quad \Phi_4 \quad \Psi_{11} \quad \Psi_{21} \quad \Psi_{31} \quad \Psi_{41}] \qquad (۲۰۰\text{-}۳)$$

$$[S3] = \begin{bmatrix} N_{1,x} & \cdots & N_{4,x} & \Phi_{1,x} & \cdots & \Phi_{4,x} & \Psi_{11,x} & \Psi_{21,x} & \Psi_{31,x} & \Psi_{41,x} \\ N_{1,y} & \cdots & N_{4,y} & \Phi_{1,y} & \cdots & \Phi_{4,y} & \Psi_{11,y} & \Psi_{21,y} & \Psi_{31,y} & \Psi_{41,y} \end{bmatrix} \qquad (۲۰۱\text{-}۳)$$

در صورت استفاده از المان‌های ایزوپارامتریک، جهت محاسبه ماتریس‌های $[S1]$، $[S2]$ و $[S3]$ لازم است ابتدا مشتقات توابع شکل نسبت به دستگاه مختصات محلی $(\xi\ ,\ \eta)$ به دست آیند و سپس با استفاده از ماتریس ژاکوبی [Ja] به دستگاه مختصات $(x\ ,\ y)$ انتقال یابند. ماتریس ژاکوبی به قرار زیر است:

$$[\mathrm{Ja}] = \begin{bmatrix} \mathrm{j}_{11} & \mathrm{j}_{12} \\ \mathrm{j}_{21} & \mathrm{j}_{22} \end{bmatrix} \tag{۳-۲۰۲}$$

مولفه‌های این ماتریس عبارتند از [۵۸]:

$$\begin{aligned} \mathrm{j}_{11} &= \frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^{4} x_i N_{i,\xi}\ , \qquad \mathrm{j}_{12} = \frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^{4} y_i N_{i,\xi}, \\ \mathrm{j}_{21} &= \frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^{4} x_i N_{i,\eta}\ , \qquad \mathrm{j}_{22} = \frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^{4} y_i N_{i,\eta} \end{aligned} \tag{۳-۲۰۳}$$

بنابراین ماتریس‌های $[S2]$ و $[S3]$ به شکل زیر تعیین می شوند:

$$\begin{aligned} &[S2] = \\ &\frac{1}{\det(\mathrm{Ja})} \begin{bmatrix} \mathrm{j}_{22} & -\mathrm{j}_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{j}_{21} & \mathrm{j}_{11} \\ -\mathrm{j}_{21} & \mathrm{j}_{11} & \mathrm{j}_{22} & -\mathrm{j}_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{1,\xi} & \cdots & N_{4,\xi} & 0 & \cdots & 0 \\ N_{1,\eta} & \cdots & N_{4,\eta} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & N_{1,\xi} & \cdots & N_{4,\xi} \\ 0 & \cdots & 0 & N_{1,\eta} & \cdots & N_{4,\eta} \end{bmatrix} \\ &\left. \begin{matrix} \Phi_{1,\xi} & \cdots & \Phi_{4,\xi} & 0 & \cdots & 0 & \Psi_{11,\xi} & \cdots & \Psi_{44,\xi} & 0 & \cdots & 0 \\ \Phi_{1,\eta} & \cdots & \Phi_{4,\eta} & 0 & \cdots & 0 & \Psi_{11,\eta} & \cdots & \Psi_{44,\eta} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \Phi_{1,\xi} & \cdots & \Phi_{4,\xi} & 0 & \cdots & 0 & \Psi_{11,\xi} & \cdots & \Psi_{44,\xi} \\ 0 & \cdots & 0 & \Phi_{1,\eta} & \cdots & \Phi_{4,\eta} & 0 & \cdots & 0 & \Psi_{11,\eta} & \cdots & \Psi_{44,\eta} \end{matrix} \right] \end{aligned} \tag{۳-۲۰۴}$$

$$\begin{aligned} &[S3] = \frac{1}{\det(\mathrm{Ja})} \begin{bmatrix} \mathrm{j}_{22} & -\mathrm{j}_{12} \\ -\mathrm{j}_{21} & \mathrm{j}_{11} \end{bmatrix} \\ &\begin{bmatrix} N_{1,\xi} & \cdots & N_{4,\xi} & \Phi_{1,\xi} & \cdots & \Phi_{4,\xi} & \Psi_{11,\xi} & \Psi_{21,\xi} & \Psi_{31,\xi} & \Psi_{41,\xi} \\ N_{1,\eta} & \cdots & N_{4,\eta} & \Phi_{1,\eta} & \cdots & \Phi_{4,\eta} & \Psi_{11,\eta} & \Psi_{21,\eta} & \Psi_{31,\eta} & \Psi_{41,\eta} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{۳-۲۰۵}$$

در روابط فوق $\det(\mathrm{Ja})$ دترمینان ماتریس ژاکوبی است. در برنامه نویسی می‌توان درایه‌های ماتریس $[S1]$ را از ماتریس $[S2]$ برداشت کرد. از آنجا که توابع غنی سازی نوک ترک بر حسب مولفه‌های دستگاه مختصات قطبی نوک ترک (r و φ) تعریف شده‌اند، بنابراین لازم است برای مشتق‌گیری،

مولفه‌های مختصات قطبی این توابع بر حسب مولفه‌های مختصات دکارتی محلی نوک ترک (x_1 و x_2) به صورت زیر نوشته شوند:

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,, \qquad \varphi = tan^{-1}\frac{x_2}{x_1} \tag{۳-۲۰۶}$$

با استفاده از رابطه (۳-۲۰۷) مشتق هر تابع دلخواه مثل F را می‌توان نسبت به مولفه‌های دستگاه مختصات دکارتی محلی بر حسب مولفه‌های دستگاه مختصات سراسری (x و y) به دست آورد [۴۸]:

$$\begin{aligned} F_{,x} &= F_{,x_1}\cos(\omega) - F_{,x_2}\sin(\omega) \\ F_{,y} &= F_{,x_1}\sin(\omega) + F_{,x_2}\cos(\omega) \end{aligned} \tag{۳-۲۰۷}$$

در روابط فوق ω زاویه بین دستگاه مختصات محلی نوک ترک و دستگاه مختصات سراسری است. همچنین x و y با استفاده از رابطه (۲-۱) به ξ و η مرتبط می‌شوند.

۳-۴-روش نیومارک

روش نیومارک[1] برای حل عددی معادلات درجه دوم در دینامیک سازه‌ها و سایر زمینه‌های مهندسی مکانیک، در طی پنجاه سال گذشته به طور گسترده مورد استفاده قرار گرفته است. این روش از پرکاربردترین روش‌ها برای حل معادله حرکت گسسته‌سازی شده است و به صورت زیر بیان می‌شود [۵۹]:

$$[\mathrm{M}]\{\ddot{\Delta}_{n+1}\} + [\mathrm{C}]\{\dot{\Delta}_{n+1}\} + [\mathrm{K}]\{\Delta_{n+1}\} = \{\mathrm{F}_{n+1}\} \tag{۳-۲۰۸}$$

$$\{\Delta_{n+1}\} = \{\Delta_n\} + \Delta t\{\dot{\Delta}_{n+1}\} + \Delta t^2(1/2 - \zeta)\{\ddot{\Delta}_n\} + \Delta t^2\zeta\{\ddot{\Delta}_{n+1}\} \tag{۳-۲۰۹}$$

$$\{\dot{\Delta}_{n+1}\} = \{\dot{\Delta}_n\} + \Delta t(1-\gamma)\{\ddot{\Delta}_n\} + \Delta t\gamma\{\ddot{\Delta}_{n+1}\} \tag{۳-۲۱۰}$$

در روابط فوق پارامترهای ζ و γ تعیین کننده مشخصات پایداری و دقت الگوریتم هستند.

[1] Newmark method

خانواده نیومارک شامل روش‌های ویژه‌ای است که خیلی شناخته شده و پرکاربرد هستند. یکی از روش‌های پرکاربرد، روش شتاب متوسط[1] بوده که برای کاربردهای دینامیک سازه‌ای مناسب است. ویژگی این روش پایداری بی قید و شرط آن می‌باشد. در روش شتاب متوسط ۰/۵ = γ و ۰/۲۵ = ζ هستند [۵۹]. در این پایان‌نامه از روش شتاب متوسط برای حل معادلات حاکم استفاده شده است.

با استفاده از روش شتاب متوسط معادلات (۳-۲۰۸) تا (۳-۲۱۰) به شکل زیر تبدیل می‌شوند [۶۰]:

$$[\mathrm{M}_{n+1}^{n+1}][\ddot{\Delta}_{n+1}^{n+1}] + [\mathrm{C}_{n+1}^{n+1}][\dot{\Delta}_{n+1}^{n+1}] + [\mathrm{K}_{n+1}^{n+1}][\Delta_{n+1}^{n+1}] = [\mathrm{F}_{n+1}^{n+1}] \tag{۳-۲۱۱}$$

$$[\Delta_{n+1}^{n+1}] = [\Delta_{n}^{n+1}] + \Delta t[\dot{\Delta}_{n}^{n+1}] + \frac{\Delta t^2}{4}\left([\ddot{\Delta}_{n}^{n+1}] + [\ddot{\Delta}_{n+1}^{n+1}]\right) \tag{۳-۲۱۲}$$

$$[\dot{\Delta}_{n+1}^{n+1}] = [\dot{\Delta}_{n}^{n+1}] + \frac{\Delta t}{2}\left([\ddot{\Delta}_{n}^{n+1}] + [\ddot{\Delta}_{n+1}^{n+1}]\right) \tag{۳-۲۱۳}$$

در رابطه فوق X_n^{n+1} بردار X در زمان t_n است که بر مبنای توابع شکل در زمان t_{n+1} نوشته شده است. حال با جایگذاری روابط (۳-۲۱۲) و (۳-۲۱۳) در رابطه (۳-۲۱۱) به معادله زیر می‌رسیم:

$$\begin{gathered}\left([\mathrm{M}_{n+1}^{n+1}] + \frac{\Delta t}{2}[\mathrm{C}_{n+1}^{n+1}] + \frac{\Delta t^2}{4}[\mathrm{K}_{n+1}^{n+1}]\right)[\ddot{\Delta}_{n+1}^{n+1}] = [F_{n+1}^{n+1}] - \\ [\mathrm{C}_{n+1}^{n+1}]\left([\dot{\Delta}_{n}^{n+1}] + \frac{\Delta t}{2}[\ddot{\Delta}_{n}^{n+1}]\right) - [\mathrm{K}_{n+1}^{n+1}]\left([\Delta_{n}^{n+1}] + \Delta t[\dot{\Delta}_{n}^{n+1}] + \frac{\Delta t^2}{4}[\ddot{\Delta}_{n}^{n+1}]\right)\end{gathered} \tag{۳-۲۱۴}$$

پس از حل معادله فوق، بردار شتاب در زمان t_{n+1} به دست می‌آید. با قراردادن بردار شتاب در رابطه (۳-۲۱۳) بردار سرعت حاصل می‌گردد. پس از این با قراردادن بردارهای شتاب و سرعت در رابطه (۳-۲۱۲) بردار جابه‌جایی حاصل می‌شود [۶۰].

[1] Average acceleration method

فصل چهارم

انتگرال برهمکنش

۴-۱-مقدمه

در تئوری‌های مرسوم مکانیک شکست، میدان‌های تنش و کرنش حوزه نوک ترک با یک پارامتر مثل انتگرال J، ضریب شدت تنش و یا بازشدگی سطح ترک تعیین می‌شود. اما کاربرد این پارامترها به اندازه ناحیه پلاستیک به وجود آمده در نوک ترک وابسته است. اگر اندازه این ناحیه کوچک باشد، یعنی اندازه ناحیه پلاستیک در مقایسه با طول‌های مشخصه سازه دارای ترک، مثل طول ترک، طول سازه در راستای ترک و ضخامت کوچک باشد (شرایط ناحیه تسلیم کوچک[1])؛ برای توصیف میدان‌های تنش و کرنش حوزه نوک ترک می‌توان یکی از پارامترهای فوق را به عنوان خصوصیت ماده بیان کرد [۶۱].

میدان تنش حوزه نوک ترک مطابق شکل (۴-۱) در دستگاه مختصات محلی برای یک پیوستار جامد به قرار زیر است:

$$\sigma_{ij} = K_I(2\pi r)^{-\frac{1}{2}}f_{ij}^{I}(\varphi) + K_{II}(2\pi r)^{-\frac{1}{2}}f_{ij}^{II}(\varphi) \qquad (۴-۱)$$

در رابطه فوق، K_I و K_{II} ضرایب شدت تنش مود اول و دوم هستند. توابع f و میدان جابه‌جایی نوک ترک در پیوست الف آورده شده است.

یکی از روش‌های کارآمد جهت محاسبه ضرایب شدت تنش در سیستم‌های خطی، انتگرال برهمکنش است. این روش برای تئوری‌های مختلف ترموالاستیسیته قابل استفاده است. در این فصل، روش انتگرال برهم‌کنش برای تئوری گرین لیندزی بیان می‌شود.

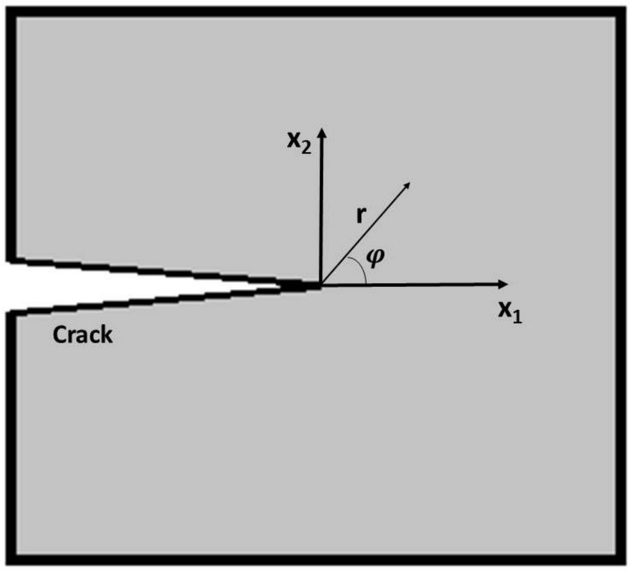
جهت محاسبه پارامترهای ضرایب شدت تنش با استفاده از انتگرال برهم‌کنش لازم است از میدان‌های کمکی مثل میدان جابه‌جایی، میدان کرنش و میدان تنش استفاده شود.

[1] - small-scale yielding (SSY)

۴-۲-میدان‌های کمکی

همانطور که گفته شد بـرای اسـتفاده از انتگـرال بـرهم‌کـنش لازم اسـت میـدان‌هـای کمکـی جابه‌جایی u^{aux}،کرنش ε^{aux} و تنش σ^{aux} به کار گرفته شوند. میدان‌های کمکی را مـی‌تـوان بـه صـورت تحلیلی یا عددی در نظر گرفت. میدان‌های کمکی انتخابی معمولا هر سه قـانون مکانیـک جامـدات را ارضا می‌کنند. این میدان‌ها را می‌توان برای بارگذاری‌های مکانیکی و حرارتی بـه صـورت اسـتاتیکی و دینامیکی به کار برد.

برای محاسبه ضرایب شدت تنش، حل تحلیلی ویلیامز برای یک ترک لبه‌ای در مواد همگن به کار برده می‌شود. در شکل (۴-۱) یک ترک در یک صفحه دو بعدی و نیز دستگاه‌های مختصات دکارتی و قطبی نوک ترک مشاهده می‌شود.



شکل ۴-۱ محیط دو بعدی شامل ترک و دستگاه‌های مختصات دکارتی و قطبی نوک ترک

میدان‌های کمکی برای یک ترک ایستا در پیوست ب بیان شده است.

۴-۳-فرمول‌بندی انتگرال برهمکنش

انتگرال برهمکنش، عبارت است از برهمکنش دو حالت بارگذاری مستقل و قابل قبول برای یک پیوستار دارای ترک که در انتگرال‌های پایستار الاستیسیته به وجود می‌آید. در این قسمت انتگرال برهمکنش برای بارگذاری حرارتی با استفاده از تئوری گرین لیندزی بیان می‌شود.

برای یک ترک که هیچ نیرویی به سطوح آن وارد نمی‌شود، فرم انتگرال J به قرار زیر است:

$$J = \lim_{\Gamma_s \to 0} \int_{\Gamma_s} \left(W\delta_{ij} - \sigma_{ij}u_{i,1}\right)n_j d\Gamma_s \qquad (۴-۲)$$

در رابطه فوق، u_i مولفه‌های بردار جابه‌جایی، n بردار یکه و عمود رو به خارج منحنی است. W چگالی انرژی کرنشی مکانیکی به قرار زیر است:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^t \frac{1}{2}\sigma_{ij}\,\dot{\varepsilon}_{ij}\,d\tau \\ &= \frac{1}{2}C_{ijkl}\varepsilon_{ij}\,\varepsilon_{kl} - \beta_{kl}\varepsilon_{kl}\Delta T + \frac{1}{2}\beta_{kl}\alpha_{kl}\Delta T^2 + \beta_{kl}\alpha_{kl}t_1\Delta T\dot{T} \\ &+ \frac{1}{2}\beta_{kl}\alpha_{kl}{t_1}^2\dot{T}^2 - t_1\beta_{kl}\varepsilon_{kl}\dot{T} \end{aligned} \qquad (۴-۳)$$

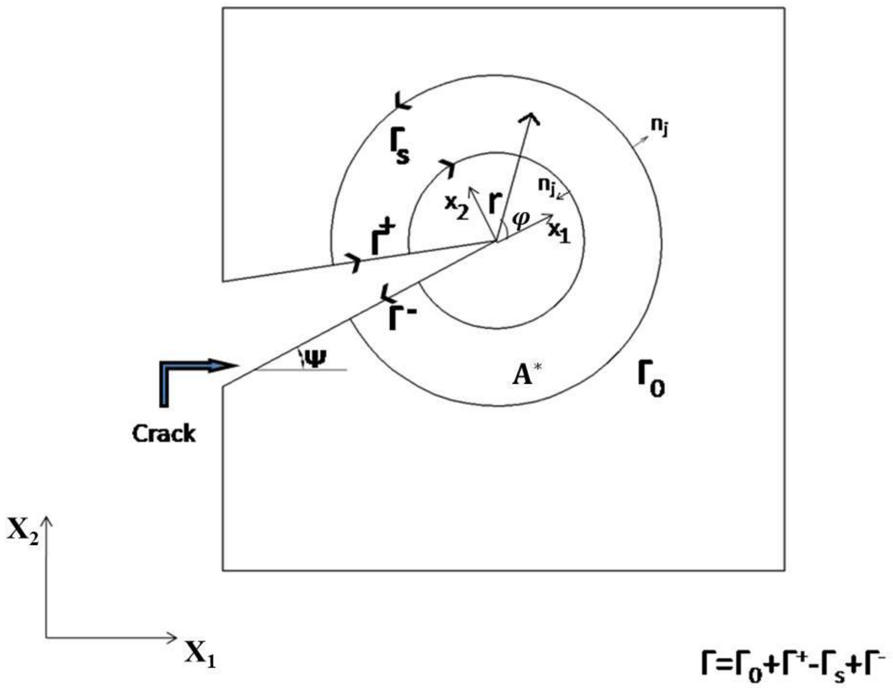
در رابطه فوق، ε_{ij} مولفه‌های کرنش کل است.

به منظور سهولت در محاسبه انتگرال‌های سطح به روش عددی، لازم است انتگرال خطی فوق به یک انتگرال ناحیه‌ای تبدیل شود.

برای تبدیل فرم کانتوری انتگرال J به یک فرم ناحیه‌ای معادل، انتگرال کانتوری زیر تعریف می-شود.

$$I = \oint_{\Gamma} \left(W\delta_{ij} - \sigma_{ij}u_{i,1}\right)m_j q d\Gamma \qquad (۴-۴)$$

در رابطه فوق، $\Gamma=\Gamma_0+\Gamma^++\Gamma^--\Gamma_s$ و m_i بردار یکه و عمود رو به خـارج کـانتور Γ اسـت (یعنــی $m_i=n_j$ روی Γ_0 و $m_i=-n_j$ روی Γ_s) (مطابق شکل ۴-۲). همچنین، q تابع وزنی دلخواه و همـواری اسـت کـه از $q=1$ روی Γ_s تا $q=0$ روی Γ_0 تغییر می‌کند. با حدگیری از رابطه فوق داریم:



شکل ۴-۲- تبدیل فرم کانتوری انتگرال J به فرم ناحیه‌ای

$$\lim_{\Gamma_s\to 0} I = \lim_{\Gamma_s\to 0}\oint_{\Gamma}\left(W\delta_{1j}-\sigma_{ij}u_{i,1}\right)m_j q d\Gamma$$

$$=\lim_{\Gamma_s\to 0}\oint_{\Gamma_0+\Gamma^++\Gamma^--\Gamma_s}\left(W\delta_{1j}-\sigma_{ij}u_{i,1}\right)m_j q d\Gamma$$

(۵-۴)

$$=\lim_{\Gamma_s\to 0}[\oint_{\Gamma_0+\Gamma^++\Gamma^-}\left(W\delta_{1j}-\sigma_{ij}u_{i,1}\right)m_j q d\Gamma+\oint_{-\Gamma_s}\left(W\delta_{1j}-\sigma_{ij}u_{i,1}\right)m_j q d\Gamma]$$

$$=\lim_{\Gamma_s\to 0}[\oint_{\Gamma_0+\Gamma^++\Gamma^-}\left(W\delta_{1j}-\sigma_{ij}u_{i,1}\right)m_j q d\Gamma-\oint_{\Gamma_s}\left(W\delta_{1j}-\sigma_{ij}u_{i,1}\right)m_j q d\Gamma]$$

از آنجایی که در روی مرز Γ_0، $q=0$ است و همچنین فرض بدون تنش بودن سطوح ترک، می‌توان رابطه فوق را به صورت زیر ساده نمود:

$$J = -\lim_{\Gamma_s \to 0} I = \lim_{\Gamma_s \to 0} \oint_{\Gamma} \left(W\delta_{1j} - \sigma_{ij}u_{i,1}\right)m_j q d\Gamma \tag{۴-۶}$$

با استفاده از قضیه دیورژانس و با توجه به تغییرات تابع وزنی q، انتگرال ناحیه‌ای معادل به صورت زیر بدست می‌آید:

$$J = \int_{A^*} \left(\sigma_{ij}u_{i,1} - W\delta_{1j}\right)q_{,j} dA + \int_{A^*} \left(\sigma_{ij}u_{i,1} - W\delta_{1j}\right)_{,j} q dA \tag{۴-۷}$$

در رابطه فوق، A^* مساحت ناحیه محصور به منحنی است. برای یک سیستم خطی، با اعمال همزمـان میدان‌های اصلی و کمکی، انتگرال J به شکل زیر نوشته می شود:

$$J^s = \int_{A^*} [\left(\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^{aux}\right)\left(u_{i,1} + u_{i,1}^{aux}\right) - \frac{1}{2}(\sigma_{ik} + \sigma_{ik}^{aux})(\varepsilon_{ik} + \varepsilon_{ik}^{aux})\delta_{1j}]q_{,j} dA + \int_{A^*} [\left(\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^{aux}\right)\left(u_{i,1} + u_{i,1}^{aux}\right) - \frac{1}{2}(\sigma_{ik} + \sigma_{ik}^{aux})(\varepsilon_{ik} + \varepsilon_{ik}^{aux})\delta_{1j}]_{,j} q dA \tag{۴-۸}$$

انتگرال فوق را می توان به صورت زیر تجزیه کرد:

$$J^s = J + J^{aux} + M \tag{۴-۹}$$

در رابطه (۴-۹) J^{aux} به قرار زیر است:

$$J^{aux} = \int_{A^*} \left(\sigma_{ij}^{aux}u_{i,1}^{aux} - W^{aux}\delta_{1j}\right)q_{,j} dA + \int_{A^*} \left(\sigma_{ij}^{aux}u_{i,1}^{aux} - W^{aux}\delta_{1j}\right)_{,j} q dA \tag{۴-۱۰}$$

در رابطه فوق W^{aux} عبارت است از:

$$W^{aux} = \frac{1}{2}\sigma_{ik}^{aux}\varepsilon_{ik}^{aux} \quad (۱۱\text{-}۴)$$

انتگرال برهم‌کنش M به صورت زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned} M &= \int_{A^*} \left(\sigma_{ij}u_{i,1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux}u_{i,1} - W^{int}\delta_{1j}\right)q_{,j}dA \\ &+ \int_{A^*} \left(\sigma_{ij}u_{i,1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux}u_{i,1} - W^{int}\delta_{1j}\right)_{,j}qdA \\ &= M_1 + M_2 \end{aligned} \quad (۱۲\text{-}۴)$$

در رابطه فوق، W^{int} تابع چگالی انرژی کرنشی مکـانیکی بـرهم‌کـنش اسـت و بـرای تئـوری گـرین لیندزی عبارت است از:

$$\begin{aligned} W^{int} &= \frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux}\varepsilon_{ij}^{m}\right) = \\ &2\mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}^{aux} + \lambda\varepsilon_{kk}\varepsilon_{ll}^{aux} - \beta(\Delta T + t_1\dot{T})\varepsilon_{kk}^{aux} \end{aligned} \quad (۱۳\text{-}۴)$$

با توجه به رابطه (۴-۱۲) با مشتق‌گیری از عبارت داخل پرانتز انتگرال دوم و با توجه به اینکه $\sigma_{ij,1}^{aux} = 0$، انتگرال M را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} M &= \int_{A^*} \left(\sigma_{ij}u_{i,1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux}u_{i,1} - W^{int}\delta_{1j}\right)q_{,j}dA \\ &+ \int_{A^*} \left(\sigma_{ij,1}u_{i,1}^{aux} + \sigma_{ij}u_{i,1j}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux}u_{i,1j} - W^{int}{}_{,1}\right)qdA \end{aligned} \quad (۱۴\text{-}۴)$$

در حالت استاتیکی با اعمال معادله تعادل $\sigma_{ij,j} = 0$، انتگرال M به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$M=\int_{A^*}\left(\sigma_{ij}u_{i,1}^{aux}+\sigma_{ij}^{aux}u_{i,1}-W^{int}\delta_{1j}\right)q_{,j}dA$$

$$+\int_{A^*}\left(\sigma_{ij}u_{i,1j}^{aux}+\sigma_{ij}^{aux}u_{i,1j}-W^{int}{}_{,1}\right)qdA \tag{۱۵-۴}$$

برای حالت دینامیکی و با استفاده از معادله حرکت $\sigma_{ij,j}+X_i=\rho\ddot{u}$ بـه جـای معادلـه تعـادل، انتگـرال برهم‌کنش به قرار زیر است:

$$M=\int_{A^*}\left(\sigma_{ij}u_{i,1}^{aux}+\sigma_{ij}^{aux}u_{i,1}-W^{int}\delta_{1j}\right)q_{,j}dA$$

$$+\int_{A^*}\left(\rho\ddot{u}_iu_{i,1}^{aux}+\sigma_{ij}u_{i,1j}^{aux}+\sigma_{ij}^{aux}u_{i,1j}-W^{int}{}_{,1}\right)qdA \tag{۱۶-۴}$$

در رابطه فوق، $\ddot{u}_i$ مولفه‌های بردار شتاب و ρ چگالی هستند. عبارت انتگرال دوم شـامل مشـتق جزئـی W^{int} نسبت به x_1 است و به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{\partial W^{int}}{\partial x_1}=\frac{\partial W^{int}}{\partial \varepsilon_{ij}}\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_1}+\frac{\partial W^{int}}{\partial \varepsilon_{lk}^{aux}}\frac{\partial \varepsilon_{lk}^{aux}}{\partial x_1}+\frac{\partial W_{\text{int}}}{\partial \Delta T}\frac{\partial \Delta T}{\partial x_1}+\frac{\partial W_{\text{int}}}{\partial \dot{T}}\frac{\partial \dot{T}}{\partial x_1} \tag{۱۷-۴}$$

در محدوده الاستیک خطی، داریم:

$$\frac{\partial W^{int}}{\partial \varepsilon_{ij}}=2\mu\varepsilon_{ij}^{aux}+\lambda\varepsilon_{ll}^{aux}\delta_{ij}=\sigma_{ij}^{aux} \tag{۱۸-۴}$$

$$\frac{\partial W^{int}}{\partial \varepsilon_{ij}^{aux}}=2\mu\varepsilon_{ij}+\lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}-\beta(\Delta T+t_1\dot{T})\delta_{ij}=\sigma_{ij} \tag{۱۹-۴}$$

$$\frac{\partial W_{\text{int}}}{\partial \Delta T}=-\beta\varepsilon_{jj}^{\text{aux}} \tag{۲۰-۴}$$

$$\frac{\partial W_{\text{int}}}{\partial \dot{T}}=-\beta t_1\varepsilon_{jj}^{\text{aux}} \tag{۲۱-۴}$$

بنابراین با توجه به روابط فوق و رابطه کرنش-تغییرمکان بی‌نهایت کوچک (۳-۲)، رابطه (۴-۱۷) بـه صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{\partial W^{int}}{\partial x_1} = \sigma_{ij} u_{i,j1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{i,j1} - \beta \varepsilon_{ll}^{\text{aux}} \frac{\partial(\Delta T)}{\partial x_1} - \beta t_1 \varepsilon_{ll}^{\text{aux}} \frac{\partial \dot{T}}{\partial x_1} \qquad (۲۲\text{-}۴)$$

با انتخاب میدان‌های کمکی، فرم عمومی انتگرال برهم‌کنش به صورت عبارت‌های ساده‌تر و قابل تفسیر تبدیل می‌گردد.

۴-۴-استخراج ضرایب شدت تنش

رابطه بین انتگرال J و ضرایب شدت تنش K_I و K_{II} به صورت زیر است:

$$J = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E_{tip}} \qquad (۲۳\text{-}۴)$$

با توجه به رابطه (۴-۹)، انتگرال بر هم‌کنش M را می توان برحسب ضرایب شدت تنش K_I و K_{II} به صورت زیر نوشت:

$$M = \frac{2}{E_{tip}} (K_I K_I^{aux} + K_{II} K_{II}^{aux}) \qquad (۲۴\text{-}۴)$$

با انتخاب صحیح میدان‌های کمکی (مودهای خالص I و II) و با استفاده از انتگرال بر هم‌کنش M، ضرایب شدت تنش K_I و K_{II} را می توان به صورت زیر بدست آورد:

$$K_I = \frac{E_{tip}}{2} M^{(1)} \, , (K_I^{aux} = 1, K_{II}^{aux} = 0) \qquad (۲۵\text{-}۴)$$

$$K_{II} = \frac{E_{tip}}{2} M^{(2)} \, , (K_I^{aux} = 0, K_{II}^{aux} = 1) \qquad (۲۶\text{-}۴)$$

فصل پنجم

ارائه نتایج

۵-۱-مقدمه

در این فصل، دقت و صحت توزیع دما و تنش به دست آمده برای یک نیم‌صفحه تحت شوک گرمایی با در نظر گرفتن تئوری گرین لیندزی و نیز ضریب شدت تنش برای یک صفحه با ترک لبه‌ای تحت شوک گرمایی به‌ترتیب در مثال‌های ۱ و ۲ بررسی شده است. در مثال سوم ضریب شدت تنش جهت صحت‌سنجی، برای یک صفحه تحت شوک حرارتی از جنس بیسموت بررسی شده است. در مثال‌های ۴ و ۵ ضرایب شدت تنش برای یک صفحه با ترک لبه‌ای عمودی و مایل تحت شوک حرارتی با در نظر گرفتن تئوری گرین لیندزی بررسی شده است. سپس در مثال‌های ۶ و ۷ ضرایب شدت تنش برای یک صفحه با ترک لبه‌ای عمودی و مایل تحت شوک ترمومکانیکی با در نظر گرفتن تئوری گرین لیندزی ارائه شده است. در مثال هشتم تاثیر زمان‌های تاخیر و پارامتر کوپل‌کننده بر ضریب شدت تنش با در نظر گرفتن تئوری گرین لیندزی بررسی شده است. نتایج با استفاده از نرم‌افزار MATLAB استخراج شده‌اند.

۵-۲-فرضیات حاکم بر مساله

۱- تغییرشکل‌ها بسیار کوچک، خصوصیات مستقل از دما و تغییر دما در مقایسه با دمای اولیه کوچک است (ترموالاستیسیته خطی).
۲- جامد همگن همسانگرد است.
۳- منبع گرمایی و نیروهای کالبدی وجود ندارند.
۴- سطح ترک عایق است.

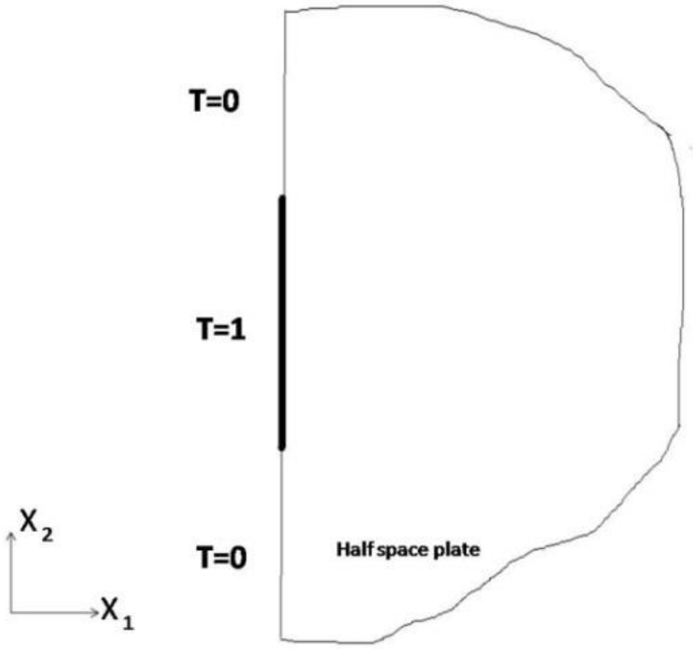
۵-۳-مثال اول: نیم‌صفحه با شرط مرزی دمایی

به منظور صحت‌سنجی روش حل، یک نیم‌صفحه $(X_1>0)$ از مواد همگن و همسانگرد با خصوصیات مکانیکی مندرج در جدول (۵-۱) تحت شوک گرمایی مطابق شکل (۵-۱) در نظر گرفته شده است. در روش المان محدود، یک ناحیه مستطیلی با طول L و عرض W در فضای بی‌بعد به عنوان مدلی از نیم‌صفحه فرض می‌شود (شکل ۵-۲). البته این مدل تا انعکاس موج‌های تنش و دما از

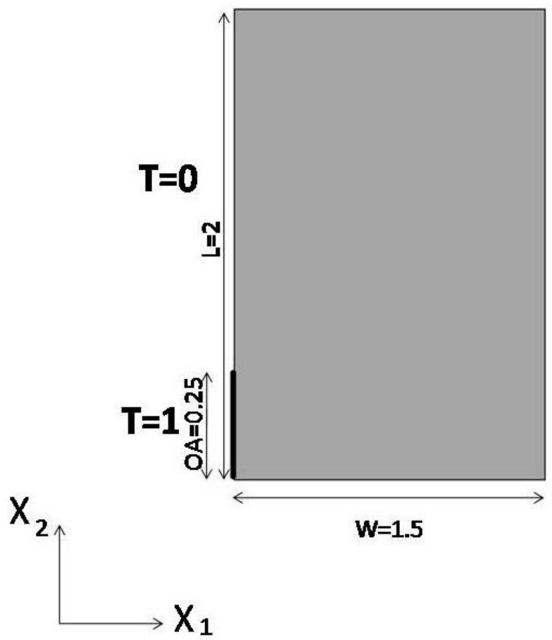
لبه مدل معتبر است. شوک گرمایی به‌صورت تغییر ناگهانی دما در قسمتی از لبه آزاد نیم‌صفحه وارد می‌شود (طول OA مطابق شکل ۵-۲). به علت تقارن فقط نیمی از صفحه در نظر گرفته شده است.

جدول ۵-۱ خواص مکانیکی نیم‌صفحه [۲۷]

ρ (Kg/ m^3)	α (1/ C)	ν	μ (GPa)	λ (GPa)
8945	1.78 e-5	0.3	38.6	77.6

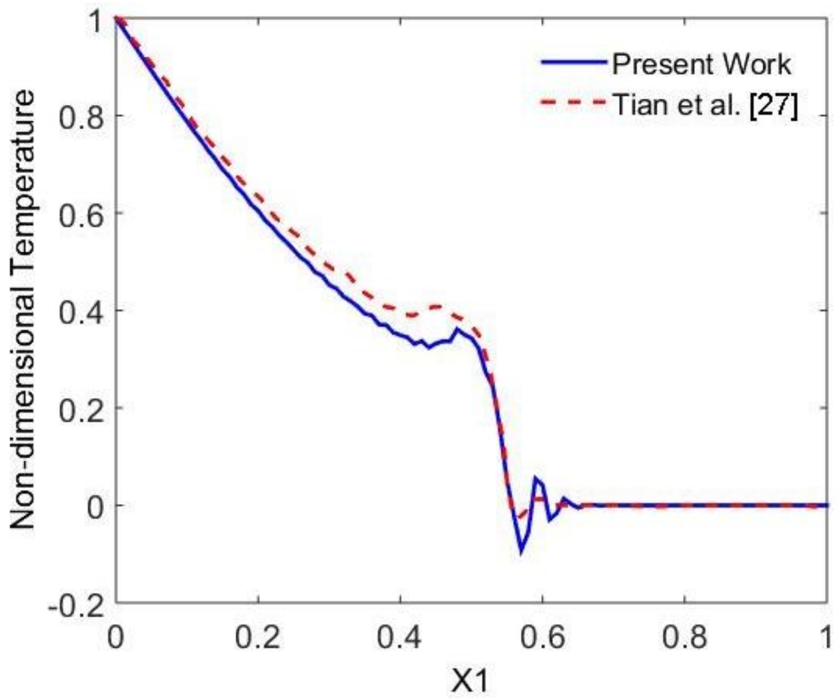


شکل ۵-۱ نیم‌صفحه تحت شوک دمایی

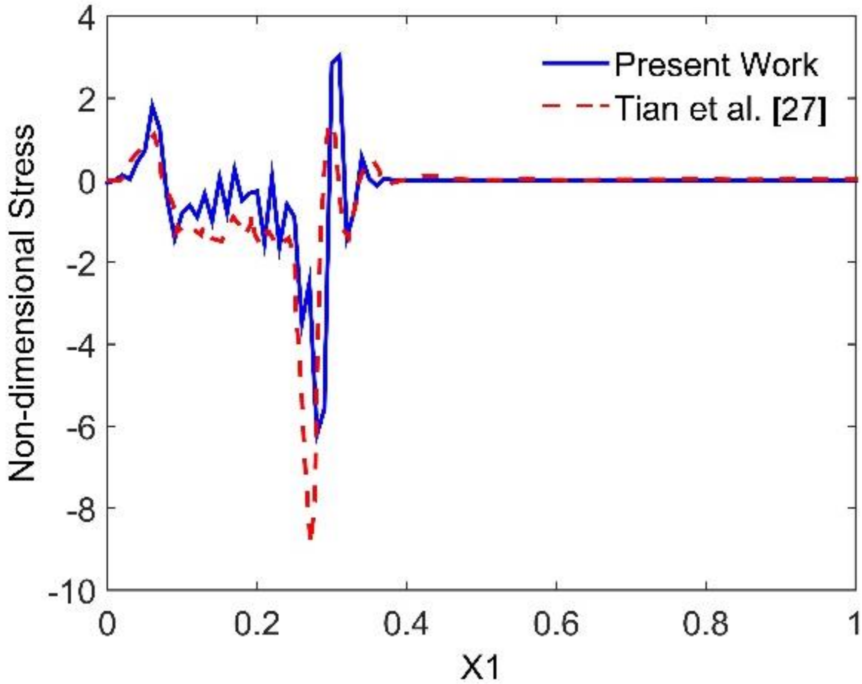


شکل ۵-۲ مدل فرض شده برای نیم‌صفحه [۲۷]

توزیع دما بر حسب X در زمان t=0.12 در شکل (۵-۳) نشان داده شده است. سرعت محدود یا رفتار موجی دما که از معادله (۳-۳۵) انتظار می‌رود، در شکل (۵-۳) مشهود است. طبق معادله (۳-۴۰)، سرعت موج دما در فضای بی‌بعد $\sqrt{\frac{1}{0.05}} = 4.47$ است. بنابراین، موج دما در زمان t=0.12 به مکان $X_1 = 4.47 \times 0.12 = 0.54$ می‌رسد که در شکل (۵-۳) تایید می‌شود. به علت استفاده از روش نیومارک برای انتگرال زمانی، کاهش دما در یک محدوده به مرکز $X_1 = 0.54$ به‌جای پرش در این نقطه، اتفاق می‌افتد. علاوه بر این، توزیع دما به نتایج گزارش شده در مقاله [۲۷] که در شکل (۵-۳) آمده است، نزدیک است. توزیع تنش بر حسب X (محور تقارن)، در زمان t=0.06، با نتایج مقاله [۲۷] در شکل (۵-۴) مقایسه شده است. با توجه به سرعت موج تنش، انتظار می‌رود که قله موج تنش در مکان $X_1 = 4.47 \times 0.06 = 0.268$ قرار داشته باشد که با نتایج مرجع [۲۷] انطباق دارد. نوسانات عددی ناشی از انتگرال زمانی در توزیع تنش نیز دیده می‌شود.



شکل ۵-۳ توزیع دمای نیم‌صفحه در زمان t=0.12



شکل ۵-۴ توزیع تنش نیم‌صفحه در زمان t=0.06

۵-۴-مثال دوم: صفحه همگن با ترک لبه‌ای تحت شوک گرمایی

به‌منظور صحت‌سنجی محاسبه ضرایب شدت تنش با استفاده از انتگرال برهمکنش و مدل‌سازی ترک با روش المان محدود توسعه‌یافته، نتایج با حل تحلیلی موجود مقایسه شده است. یک صفحه

همگن با عرض $W=1mm$ و طول $L=2mm$ دارای ترکی به طول $a=0.05mm$ مطابق شکل (۵-۵)، تحت شوک حرارتی در نظر گرفته شده است. ضخامت صفحه (در جهت محور X_3) برای فرض کرنش صفحه‌ای به اندازه کافی بزرگ است. صفحه در شرایط اولیه (بدون تنش) تحت دمای یکسان $T_0 = 400\,K$ قرار دارد. در لحظه $t = 0^+$ دمای لبه دارای ترک صفحه به‌طور ناگهانی به $T_1 = 350\,K$ کاهش می‌یابد و در این دما نگه داشته می‌شود. سایر لبه‌های صفحه از جمله ترک عایق فرض می‌شوند. یک شبکه شامل ۵۵×۱۰۵ المان مربعی چهار گره‌ای با گام زمانی $\Delta t = 0.0001$ جهت حل عددی مساله مورد استفاده قرار می‌گیرد. در مدل‌سازی ترک، اولین حلقه از المان‌های اطراف المان نوک ترک توسط توابع غنی‌سازی نوک ترک، غنی شده‌اند.

در این مثال به خاطر انطباق شرایط حل مسئله با شرایط حل تحلیلی لی و سیم [۶۲] از عبارت کوپل مکانیکی-گرمایی در معادله انرژی صرف‌نظر می‌شود. خواص مکانیکی این باریکه در جدول (۵-۲) آورده شده است. همچنین، ناحیه انتگرال‌گیری برای محاسبه انتگرال برهمکنش و ضریب شدت تنش گرمایی، یک ناحیه مربعی با ابعاد 0.1mm×0.1mm در نوک ترک در نظر گرفته شده است. به‌منظور مقایسه با نتایج تحلیلی، ضرایب شدت تنش عددی به‌دست آمده و زمان با استفاده از روابط زیر بی‌بعد شده‌اند [۶۲].

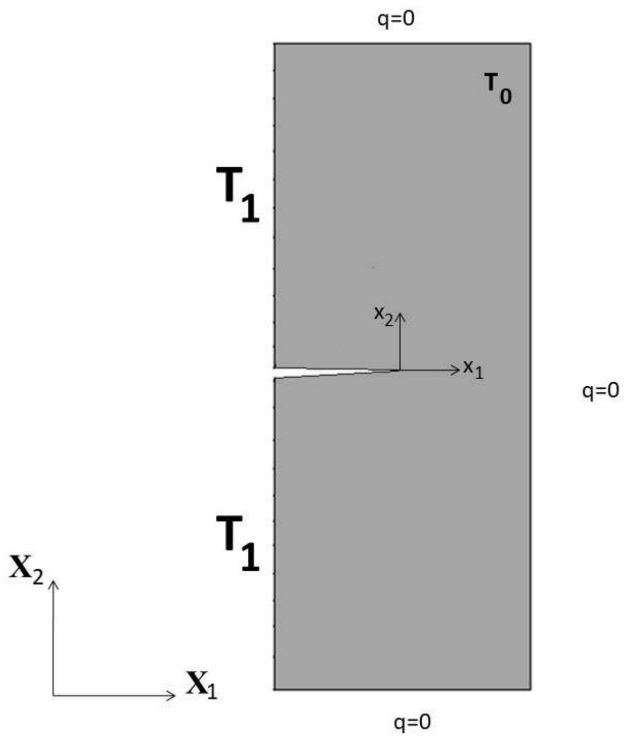
$$K_{IDim} = K_I(1-\nu)/\{E\alpha(T_0 - T_1)L^{0.5}\} \tag{۵-۱}$$

$$t_D = kt/\rho c_t L^2 \tag{۵-۲}$$

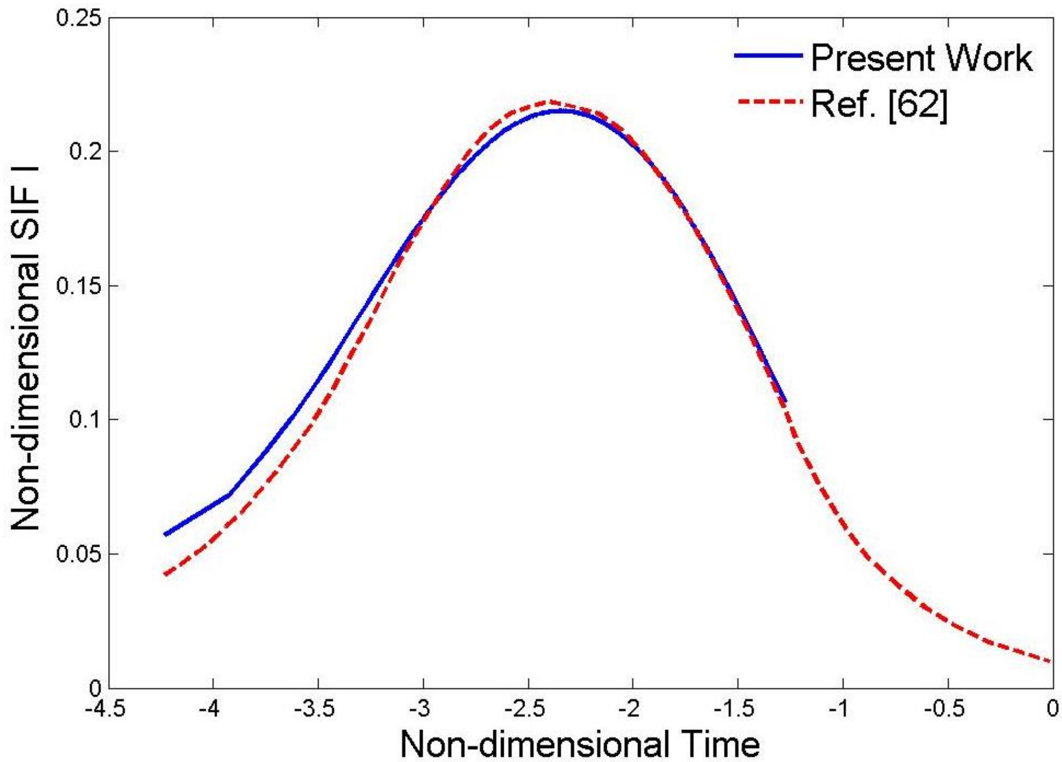
ضریب شدت تنش عددی محاسبه شده در این تحقیق با نتایج تحلیلی لی و سیم [۶۲] در شکل (۵-۶) مقایسه شده است. مطابق شکل (۵-۶) ضرایب شدت تنش گرمایی عددی و تحلیلی مطابقت قابل قبولی با یکدیگر دارند.

جدول ۵-۲ خواص مکانیکی صفحه [۶۲]

k (W/m°K)	ρ (Kg/m^3)	α (1/ C)	ν	C_t (J/kg°K)	E (GPa)
2.036	5600	7.118 e-6	0.333	615.6	117



شکل ۵-۵ مشخصات و بارگذاری صفحه با ترک افقی



شکل ۵-۶ ضریب شدت تنش بر حسب زمان برای ترک لبه‌ای تحت بارگذاری شبه‌استاتیکی

۵-۵-مثال سوم: صفحه همگن با ترک لبه‌ای تحت شار حرارتی کلاسیک

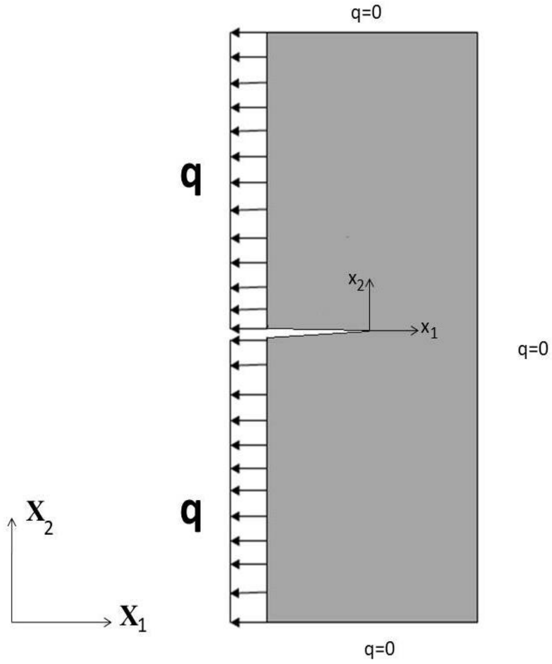
به‌منظور صحت‌سنجی محاسبه ضرایب شدت تنش با استفاده از انتگرال برهمکنش و میدان دمای نوک ترک، نتایج با حل عددی موجود مقایسه شده است. مطابق شکل ۵-۷ یک صفحه همگن از جنس بیسموت با خواص مندرج در جدول ۵-۳ و با عرض $W=1$ و طول $L=4$ با ترکی به طول $a=0.5$ در فضای بی‌بعد، تحت شوک حرارتی با استفاده از تئوری کلاسیک در نظر گرفته شده است. ضخامت صفحه (در جهت محور X_3) جهت تحلیل کرنش صفحه‌ای به اندازه کافی بزرگ است. ترک موازی با محور X_1 است. صفحه در شرایط اولیه (بدون تنش) تحت دمای یکسان $T_0 = 3.5\,K$ قرار دارد. در لحظه $t = 0^+$ لبه دارای ترک صفحه به طور ناگهانی تحت شار سرمایشی با مقدار بی‌بعد q=-0.045 قرار می‌گیرد. لبه‌های دیگر صفحه عایق هستند. مطابق شکل ۵-۸ برای انتخاب تعداد المان‌ها آزمون همگرایی انجام شده است. بنابراین یک شبکه شامل ۴۰۵×۱۰۱ المان مربعی چهار گره‌ای جهت حل عددی مساله استفاده شده است. گام زمانی $\Delta t = 0.001$ در نظر گرفته شده است.

توزیع دمای نوک ترک بر حسب زمان با نتایج [۳۸] در شکل ۵-۹ مقایسه شده است. دمای نوک ترک مطابق آنچه از توزیع دما انتظار می‌رود، به تدریج کاهش می‌یابد. مطابق شکل ۵-۱۰ ضریب شدت تنش مد اول نسبت به زمان با نتایج [۳۸] مقایسه شده است. با توجه به شکل ۵-۱۰ بیشترین اختلاف بین نتایج به دست آمده و نتایج [۳۸] کمتر از ۱۰٪ است. در این مثال و مثال‌های بعد، ضریب شدت تنش با استفاده از رابطه زیر بی‌بعد می‌شود [۳۸].

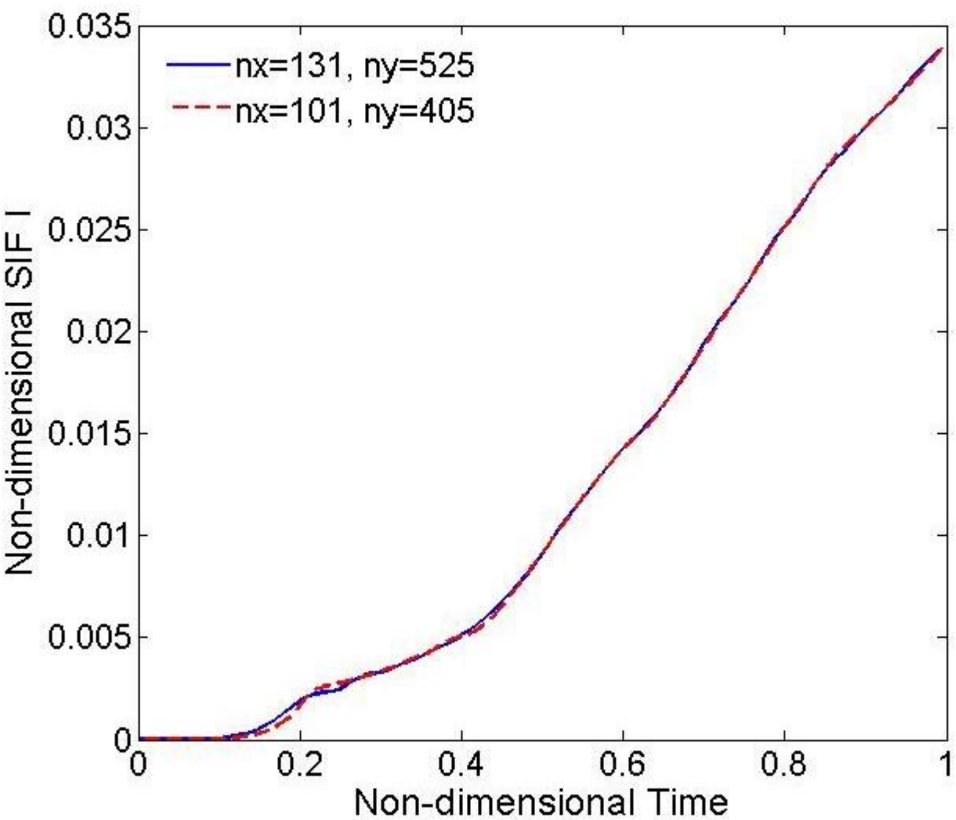
$$K_0 = \beta T_0 \sqrt{l} \qquad (۵-۳)$$

جدول ۵-۳ خواص مکانیکی صفحه [۳۸]

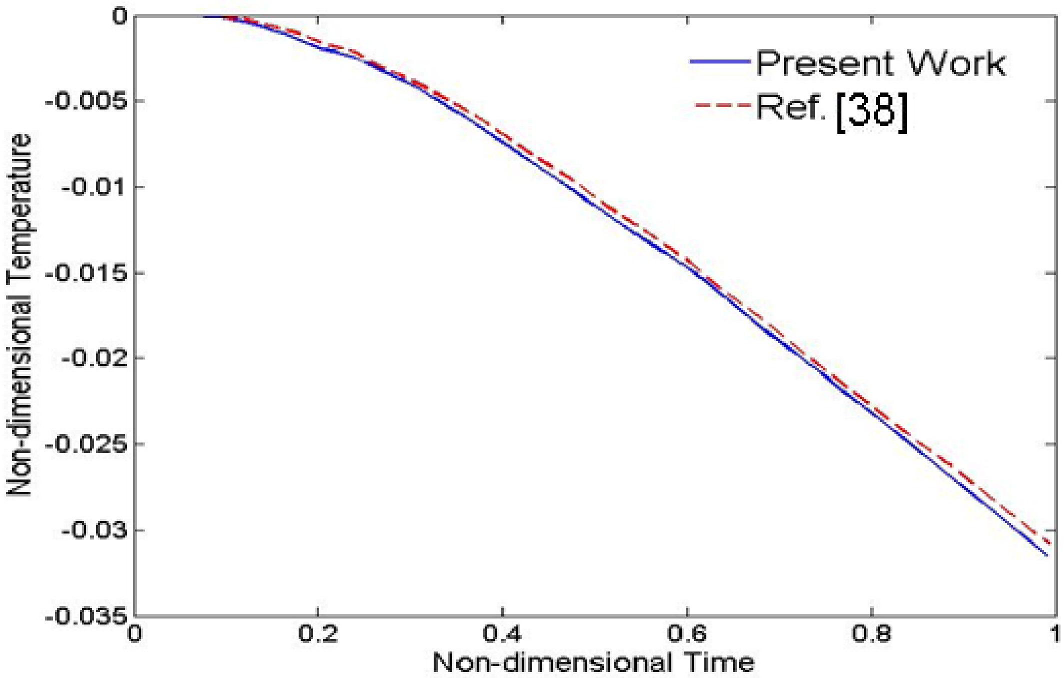
k (W/m°K)	ρ (Kg/m³)	α (1/°C)	ν	C_t (J/kg°K)	E (GPa)
875	9780	6.75 e-6	0.3	0.052	40



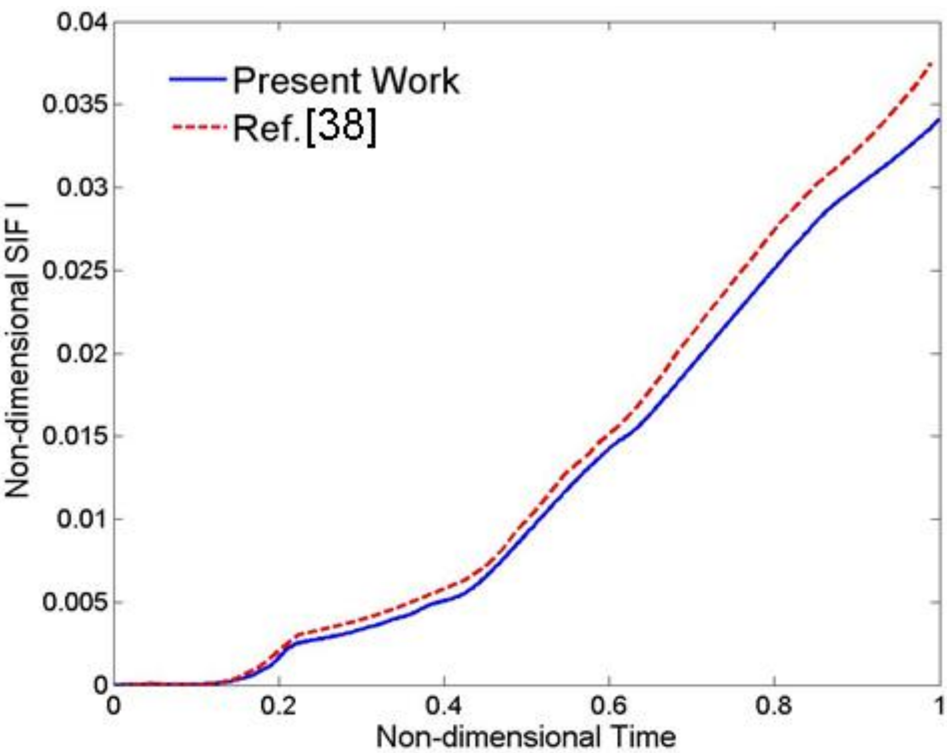
شکل ۵-۷ مشخصات و بارگذاری صفحه با ترک افقی تحت شار حرارتی



شکل ۵-۸ آزمون همگرایی ضریب شدت تنش با تعداد المان‌های متفاوت



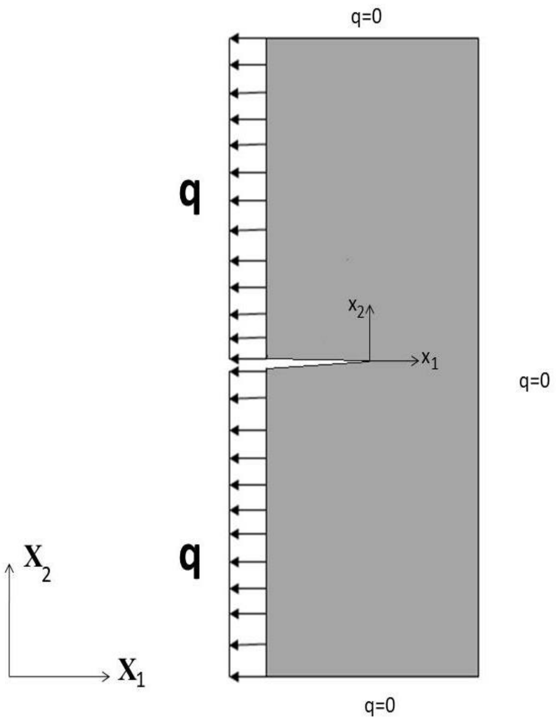
شکل ۵-۹ توزیع دمای نوک ترک



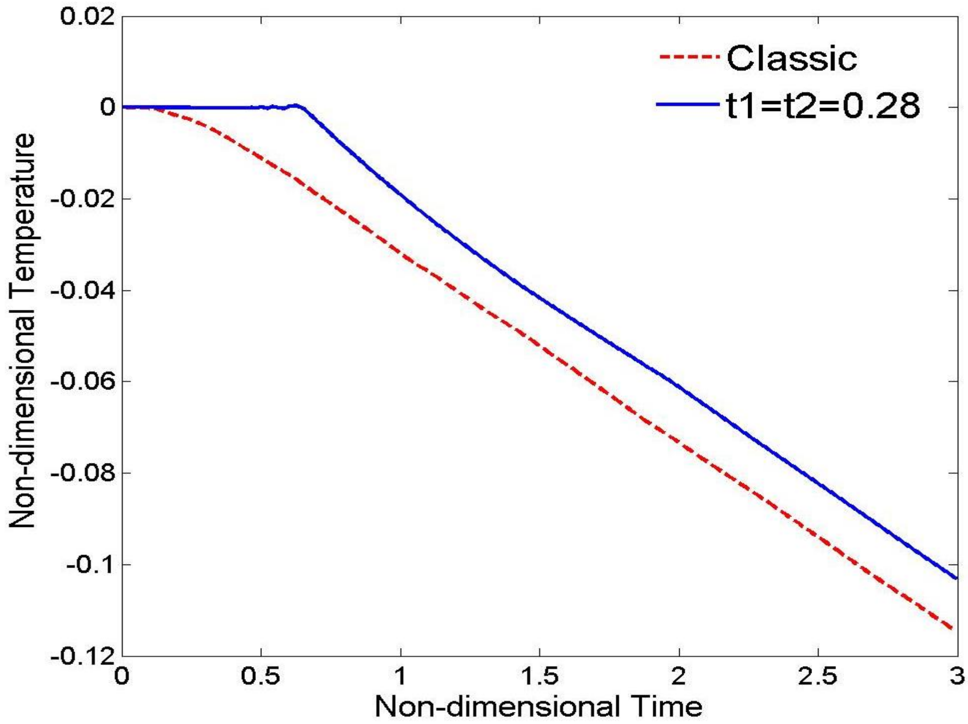
شکل ۵-۱۰ ضریب شدت تنش صفحه بر حسب زمان

۵-۶-مثال چهارم: صفحه همگن با ترک لبه‌ای تحت شوک حرارتی گرین لیندزی

در این مثال جهت جلوگیری از ایجاد نوسانات عددی به‌علت استفاده از روش نیومارک، بارگذاری حرارتی به صورت شار اعمال می‌شود. مطابق شکل ۵-۱۱، شوک حرارتی به صورت شار سرمایشی با مقدار بی‌بعد q=-0.045، به لبه دارای ترک اعمال می‌شود. بر اساس مطالعات تجربی، سرعت موج دما در دمای 3.5 K.، برای بیسموت $C_T = 780\, m/sec$ است [۶۳]. زمان تاخیر t_2، با جایگذاری C_T در معادله (۳-۴۰)، $t_2 = 2.82798 \times 10^{-6}\, sec$ به دست می‌آید. همچنین مقدار بی‌بعد آن $t_2 = 0.28$ است. با توجه به محدودیت ترمودینامیکی $t_1 \geq t_2 \geq 0$ [۸]، $t_1 = t_2 = 0.28$ در فضای بی‌بعد در نظر گرفته شده است. در شکل ۵-۱۲، توزیع دمای نوک ترک برحسب زمان، برای هر دو مدل کلاسیک و گرین لیندزی مشاهده می‌شود. به طور کلی، هدایت گرمایی بر اساس مدل گرین لیندزی با ترموالاستیسیته کلاسیک متفاوت است.



شکل ۵-۱۱ مشخصات و بارگذاری صفحه با ترک افقی تحت بار حرارتی

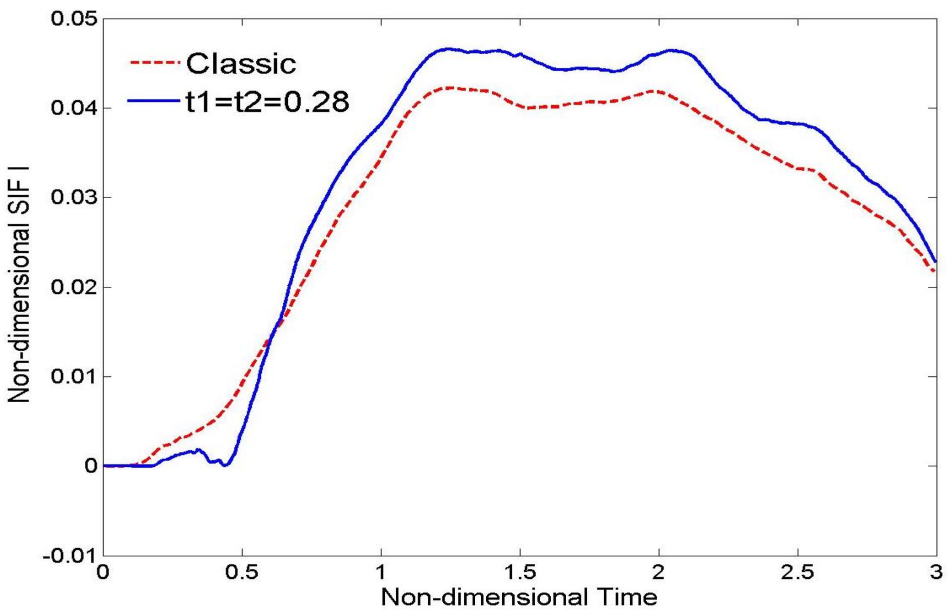


شکل ۵-۱۲ دمای نوک ترک برای مدل کلاسیک و گرین لیندزی

سرعت موج دما بر اساس مدل کلاسیک نامحدود و در مدل گرین لیندزی، محدود و برابر 0.78 در فضای بی‌بعد است. در مدل گرین- لیندزی، وقتی موج دما به نوک ترک می‌رسد، دمای آن به‌تدریج و به صورت تقریبا خطی کاهش می‌یابد. طبق معادله (۳-۴۰)، موج دما در زمان t=0.64 به نوک ترک می‌رسد که نتایج شکل ۵-۱۲ را تایید می‌کند.

ضریب شدت تنش مود اول برحسب زمان برای شوک حرارتی طبق دو مدل کلاسیک و گرین لیندزی در شکل ۵-۱۳ مقایسه شده است. سرعت موج تنش (الاستیک) در هر دو مدل کلاسیک و گرین لیندزی یکسان و برابر 2.35 در فضای بی‌بعد است. پس از اعمال شوک حرارتی به لبه دارای ترک، موج تنش که از سمت چپ به راست صفحه حرکت می‌کند؛ در زمان t=0.21 به نوک ترک می‌رسد. از این پس، ضریب شدت تنش به آرامی شروع به افزایش می‌کند تا زمانی‌که قسمت فشاری موج تنش به نزدیکی نوک ترک می‌رسد و باعث بسته شدن ترک و در نتیجه کاهش ضریب شدت تنش می‌شود. پس از این، ضریب شدت تنش با رسیدن امواج دما و تنش بازگشتی به نوک ترک به ترتیب در زمان t=0.641 و t=0.6394 به سرعت افزایش می‌یابد. پس از رسیدن دومین موج تنش

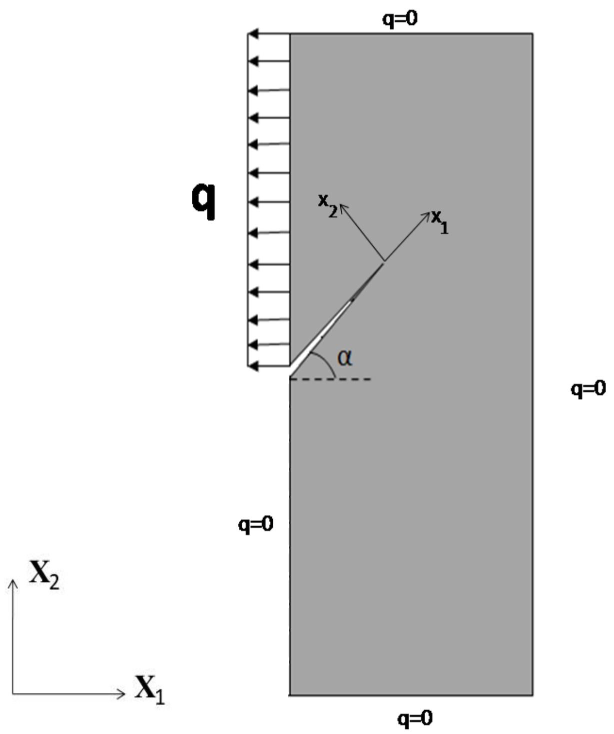
بازگشتی ضعیف از لبه سمت چپ صفحه در زمان t=1.066 به نوک ترک و کاهش گرادیان دما روند صعودی ضریب شدت تنش متوقف می‌شود. پس از این، با رسیدن امواج بازگشتی دما و تنش در زمان t=1.92 برای آخرین بار ضریب شدت تنش به آرامی افزایش می‌یابد. پس از این، با گذشت زمان ضریب شدت تنش افت می‌کند. سپس با رسیدن موج تنش بازگشتی در زمان t=2.34 به نوک ترک، نرخ نزول ضریب شدت تنش کاهش می‌یابد. تغییرات ضریب شدت تنش بر اساس شوک کلاسیک اندکی متفاوت است. طبق تئوری کلاسیک، گرما در صفحه پخش می‌شود. بنابراین، بلافاصله پس از اعمال شوک، ضریب شدت تنش به تدریج افزایش می‌یابد تا زمانی‌که موج تنش در زمان t=0.21 به نوک ترک می‌رسد و نرخ صعود ضریب شدت تنش را افزایش می‌دهد. با گذشت زمان و ضعیف شدن اثر موج گرما در مدل گرین لیندزی تغییرات ضریب شدت تنش نسبت به زمان برای هر دو مدل به طور کلی شبیه به هم است.



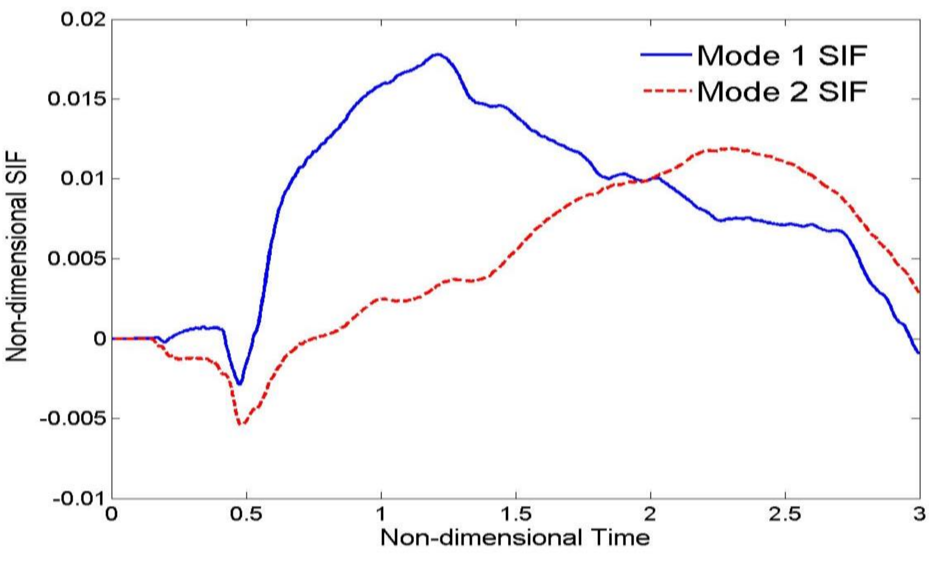
شکل ۵-۱۳ ضریب شدت تنش برحسب زمان برای تئوری‌های کلاسیک و گرین لیندزی

۵-۷-مثال پنجم: صفحه همگن با ترک لبه‌ای مایل تحت شوک حرارتی گرین لیندزی

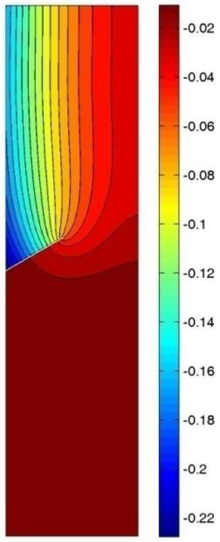
در این مثال، یک صفحه مستطیلی با خصوصیات مکانیکی و ابعاد مثال قبل، در نظر گرفته شده است. مطابق شکل ۵-۱۴، صفحه دارای ترک مایل با زاویه $\alpha=30$ است که در دمای اولیه $T_0=3.5$ K قرار دارد و شار سرمایشی $q=-0.045$ بی‌بعد به نیمه بالایی صفحه اعمال می‌شود. ضریب شدت تنش مد اول و دوم بر حسب زمان در شکل ۵-۱۵ گزارش شده است. همانطور که در مثال قبل گفته شد، سرعت موج تنش از دما بیشتر است. پس از اینکه موج تنش برای اولین بار در زمان $t=0.184$ به نوک ترک می‌رسد، ضرایب شدت تنش از صفر شروع به تغییر می‌کنند. با رسیدن موج دما به نزدیک نوک ترک، ضرایب شدت تنش مد اول و دوم به سرعت شروع به افزایش می‌کنند. پس از این، با رسیدن موج تنش بازگشتی از لبه سمت راست صفحه به نوک ترک، نرخ رشد ضرایب شدت تنش کاهش می‌یابد. ضریب شدت تنش مد اول تا زمان $t=1.2$ افزایش می‌یابد، اما ضریب شدت تنش مد دوم تا هنگامی که موج تنش برای ششمین بار به نوک ترک می‌رسد؛ یعنی $t=2.36$ افزایش می‌یابد. در شکل ۵-۱۶ توزیع دمای صفحه در زمان $t=2$ نشان داده شده است. عایق بودن ترک و سرعت محدود موج دما در این شکل به خوبی مشاهده می‌شود. همچنین نمای تغییر شکل یافته صفحه در زمان $t=2$ در شکل ۵-۱۷، ارائه شده است.



شکل ۵-۱۴ مشخصات و بارگذاری حرارتی صفحه با ترک مایل



شکل ۵-۱۵ تغییرات ضرایب شدت تنش مد اول و دوم بر حسب زمان در تئوری گرین لیندزی



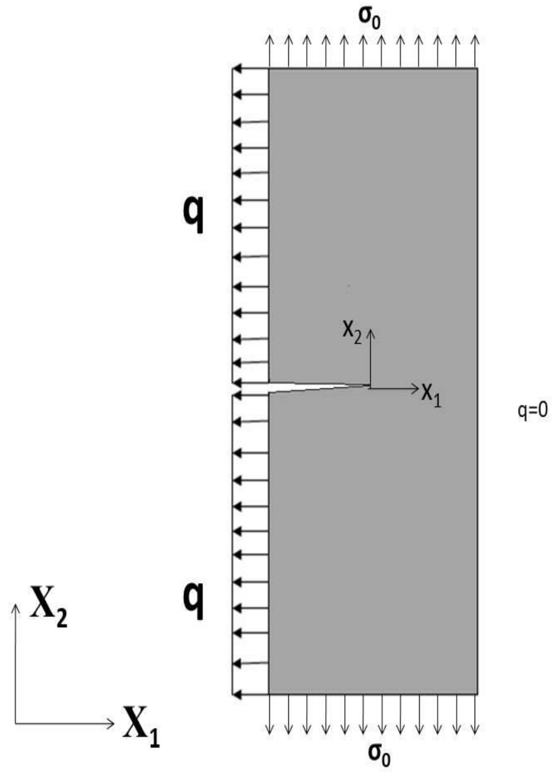
شکل ۵-۱۶ توزیع دمای صفحه در زمان t=2

شکل ۵-۱۷ نمای تغییرشکل یافته در زمان t=2

۵-۸-مثال ششم: صفحه همگن با ترک لبه‌ای تحت شوک مکانیکی-حرارتی

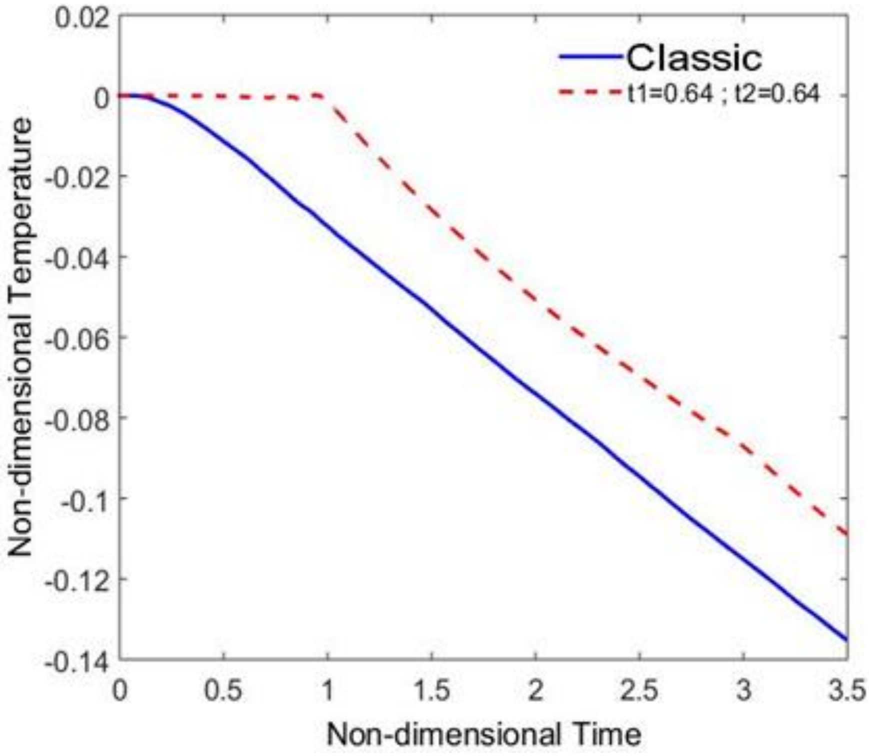
در این مثال یک صفحه مستطیلی با خصوصیات مکانیکی جدول ۵-۳ و ابعاد مثال سوم در نظر گرفته شده است. مطابق شکل ۵-۱۸، شوک گرمایی به صورت شار سرمایشی که مقدار آن در فضای بی‌بعد q=-0.045 است، به لبه دارای ترک اعمال می‌شود. علاوه بر این، تنش کششی یکنواخت با مقدار بی‌بعد σ_0=0.01 به دو لبه بالایی و پایینی صفحه بطور همزمان با شوک گرمایی وارد می‌گردد.

لبه‌های دیگر صفحه بدون تنش و عایق فرض می‌شوند. دمای اولیه صفحه 3.5 K است. علاوه براین، $t_1 = t_2 = 0.64$ در فضای بی‌بعد فرض شده است.



شکل ۵-۱۸ مشخصات و بارگذاری ترمومکانیکی صفحه با ترک افقی

در شکل ۵-۱۹، توزیع دمای نوک ترک برحسب زمان، برای هر دو مدل کلاسیک و گرین لیندزی نشان داده شده است. سرعت موج دما بر اساس مدل کلاسیک نامحدود و در مدل گرین لیندزی، محدود و برابر 0.52 در فضای بی‌بعد است. طبق معادله (۳-۴۰)، موج دما در زمان t=0.96 به نوک ترک می‌رسد که نتایج شکل ۵-۱۹ را تایید می‌کند.

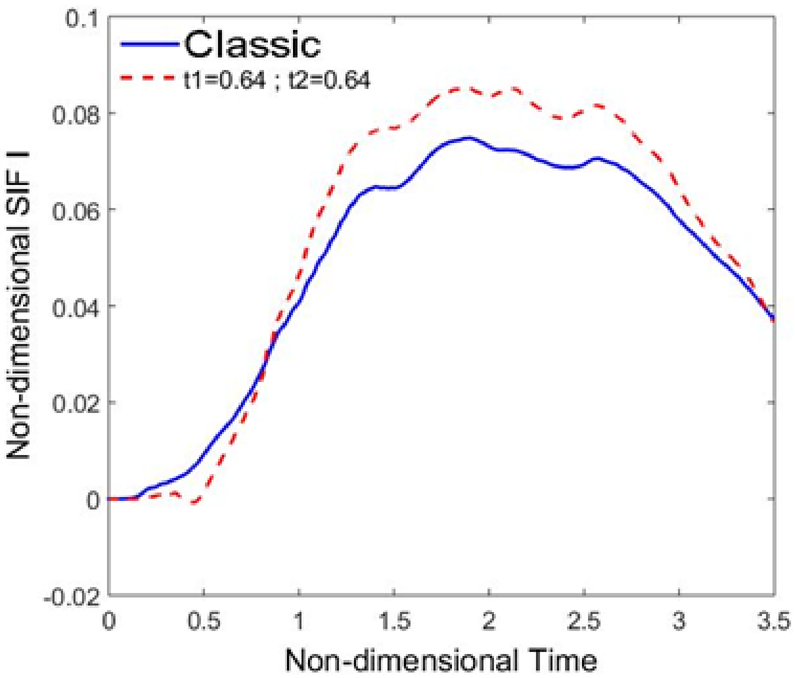


شکل ۵-۱۹ دمای نوک ترک برای مدل کلاسیک و گرین لیندزی

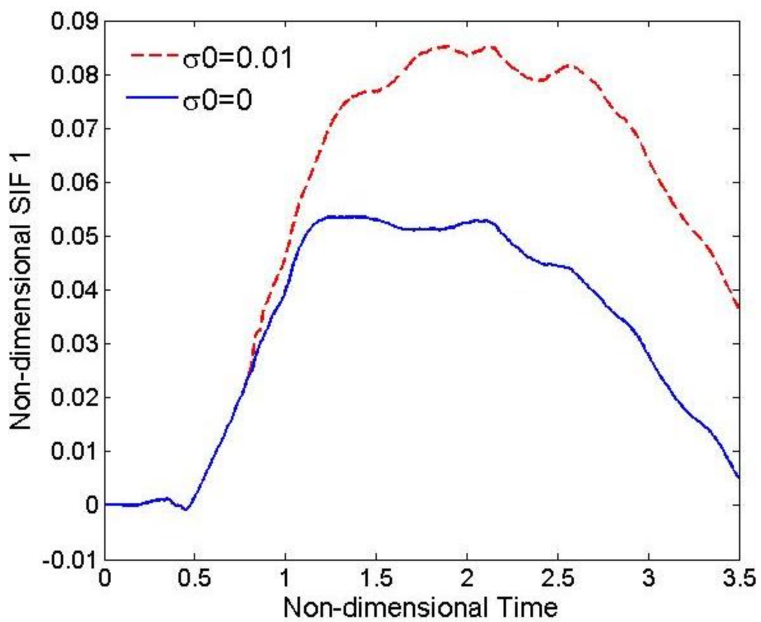
ضریب شدت تنش مود اول برحسب زمان برای شوک ترمومکانیکی طبق دو مدل کلاسیک و گرین لیندزی در شکل ۵-۲۰ مقایسه شده است. همان‌طور که در مثال چهارم گفته شد، سرعت موج تنش (الاستیک) در هر دو مدل کلاسیک و گرین لیندزی یکسان و برابر 2.35 در فضای بی‌بعد است. پس از اعمال شوک گرمایی به لبه دارای ترک، موج تنش گرمایی که از سمت چپ به راست صفحه حرکت می‌کند؛ در زمان t=0.21 به نوک ترک می‌رسد. از این پس، ضریب شدت تنش به آرامی شروع به افزایش می‌کند تا زمانی‌که قسمت فشاری موج تنش به نزدیکی نوک ترک می‌رسد و باعث بسته شدن ترک و در نتیجه کاهش ضریب شدت تنش می‌شود. پس از این، ضریب شدت تنش با رسیدن اولین تنش گرمایی بازگشتی در زمان t=0.64، به نوک ترک شروع به افزایش می‌کند. از طرف دیگر، موج تنش مکانیکی در زمان t=0.85 به نوک ترک می‌رسد که باعث می‌شود نرخ افزایش ضریب شدت تنش اندکی بیشتر شود. موج دما نیز در زمان t=0.96 به نوک ترک می‌رسد که باعث می‌شود شیب افزایش ضریب شدت تنش باز هم بیشتر شود. دومین موج تنش گرمایی بازگشتی -از لبه سمت چپ

صفحه- در زمان t=1.07 به نوک ترک می‌رسد که باعث توقف روند افزایش ضریب شدت تنش می‌شود. رسیدن سومین موج تنش گرمایی بازگشتی در t=1.49 به نوک ترک و از طرفی کاهش گرادیان دما، باعث می‌شود ضریب شدت تنش تقریبا ثابت بماند. با رسیدن چهارمین موج تنش گرمایی بازگشتی در زمان 1=1.92 ضریب شدت تنش به آرامی افزایش می‌یابد. پس از این، با گذشت زمان ضریب شدت تنش افت می‌کند، تا زمانیکه پنجمین موج تنش بازگشتی گرمایی در t=2.34 به نوک ترک می‌رسد و باعث افزایش ضریب شدت تنش می‌شود. موج تنش مکانیکی بازگشتی در t=2.55 به نوک ترک می‌رسد و سبب افزایش ضریب شدت تنش بخصوص در مدل گرین لیندزی می‌شود. پس از این، ضریب شدت تنش مجددا کاهش می‌یابد، تا زمانیکه ششمین موج تنش گرمایی بازگشتی در زمان t=2.77 به نوک ترک می‌رسد و نرخ نزول ضریب شدت تنش را کاهش می‌دهد. تغییرات ضریب شدت تنش بر اساس شوک کلاسیک اندکی متفاوت است. طبق تئوری کلاسیک، گرما در صفحه پخش می‌شود. بنابراین، بلافاصله پس از اعمال شوک، ضریب شدت تنش به تدریج افزایش می‌یابد تا زمانی‌که موج تنش در زمان t=0.21 به نوک ترک می‌رسد و نرخ صعود ضریب شدت تنش را افزایش می‌دهد. با گذشت زمان و ضعیف شدن اثر موج گرما در مدل گرین لیندزی تغییرات ضریب شدت تنش نسبت به زمان برای هر دو مدل به طور کلی شبیه به هم است.

در شکل ۵-۲۱ اثر شوک مکانیکی روی تغییرات زمانی ضریب شدت تنش بررسی شده است. اعمال شوک مکانیکی به صفحه، وقتی موج تنش مکانیکی و یا انعکاس آن به‌ترتیب در زمان‌های t=0.85 و t=2.55 به نوک ترک می‌رسد؛ تغییرات زمانی ضریب شدت تنش روند افزایشی پیدا می‌کند.



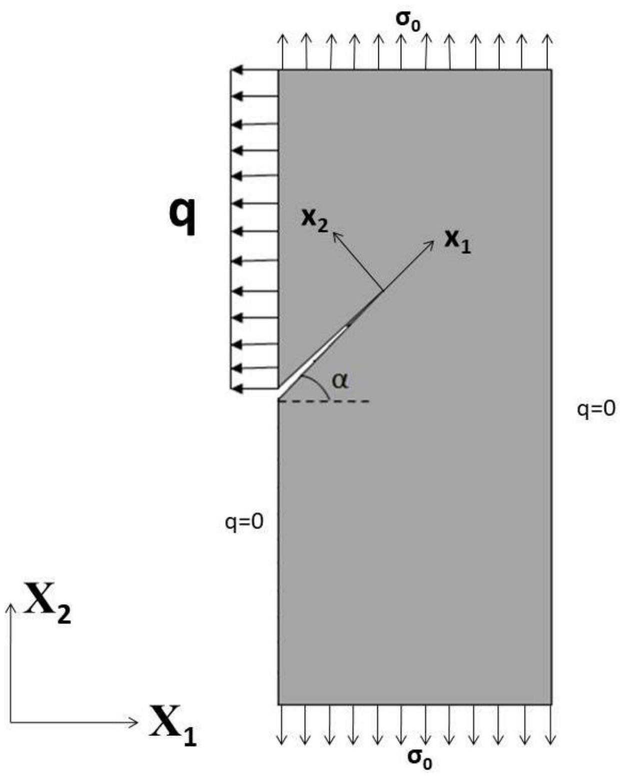
شکل ۵-۲۰ تغییرات ضریب شدت تنش برحسب زمان برای تئوری‌های کلاسیک و گرین لیندزی



شکل ۵-۲۱ تغییرات ضریب شدت تنش برحسب زمان برای تئوری گرین لیندزی تحت شوک حرارتی و ترمومکانیکی

۵-۹-مثال هفتم: صفحه همگن با ترک لبه‌ای مایل تحت شوک مکانیکی-حرارتی

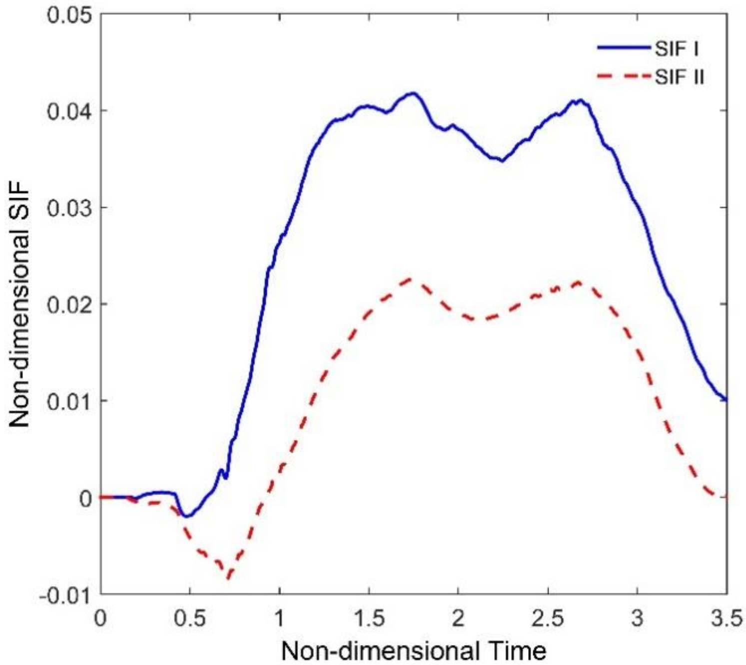
در این مثال، یک صفحه مستطیلی مشابه مثال قبل، در نظر گرفته شده است. مطابق شکل ۵-۲۲، صفحه دارای ترک مایل با زاویه $\alpha=30$ است که در دمای اولیه $T_0=3.5$ K قرار دارد و شار سرمایشی $q=-0.045$ به نیمه بالایی صفحه اعمال می‌شود.



شکل ۵-۲۲ مشخصات و بارگذاری ترمومکانیکی صفحه با ترک مایل

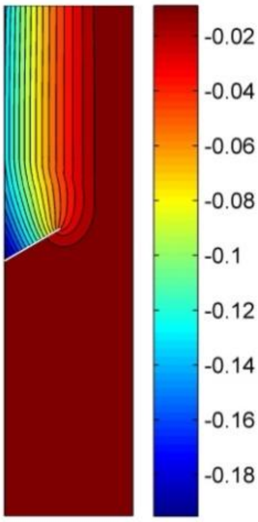
تغییرات ضرایب شدت تنش مد اول و دوم بر حسب زمان در شکل ۵-۲۳ گزارش شده است. همان‌طور که در مثال قبل گفته شد، سرعت موج تنش از دما بیشتر است. پس از اینکه موج تنش برای اولین بار در زمان $t=0.184$ به نوک ترک می‌رسد، ضرایب شدت تنش از صفر شروع به تغییر می‌کنند. هنگامی که موج دما در زمان $t=0.451$ و اولین موج تنش گرمایی بازگشتی در زمان $t=0.666$ به نوک ترک می‌رسد، ضرایب شدت تنش مد اول و دوم، به‌سرعت شروع به بالا رفتن

می‌کنند. با رسیدن موج تنش مکانیکی به لبه بالایی در زمان t=0.7447، جهت لغزش ترک با توجه به مثبت شدن شیب ضریب شدت تنش مد دوم تغییر می‌کند. همچنین با رسیدن موج تنش مکانیکی به لبه بالایی در زمان t=0.7447، موج تنش مکانیکی لبه پایینی در زمان t=0.9574، دومین موج تنش گرمایی بازگشتی در زمان t=1.03، سومین موج تنش گرمایی بازگشتی در زمان t=1.52 و اولین موج دمای بازگشتی در زمان t=1.63 ضرایب شدت تنش مد اول و دوم تا زمان t=1.73 بالا می‌روند. پس از این، با گذشت زمان ضرایب شدت تنش افت می‌کنند، تا زمانیکه چهارمین موج تنش گرمایی بازگشتی در زمان t=1.88 به نوک ترک می‌رسد و ضریب شدت تنش مد اول را اندکی افزایش می‌دهد. پس از این روند نزولی ضرایب شدت تنش ادامه می‌یابد تا زمانیکه پنجمین موج تنش گرمایی بازگشتی در زمان t=2.368 و اولین امواج تنش بازگشتی مکانیکی از لبه‌های بالایی و پایینی به ترتیب در زمان‌های t=2.44 و t=2.66 و دومین موج دمای بازگشتی در زمان t=2.534 به نوک ترک می‌رسد و باعث افزایش ضریب شدت تنش می‌شود. پس از این، ضرایب شدت تنش مجددا کاهش می‌یابند.



شکل ۵-۲۳ ضرایب شدت تنش مد اول و دوم تئوری گرین لیندزی

در شکل ۵-۲۴ توزیع دمای صفحه در زمان t=1.6 نشان داده شده است. عایق بودن ترک و سرعت محدود موج دما در این شکل به خوبی مشاهده می‌شود. همچنین نمای تغییر شکل یافته صفحه در زمان t=1.6 در شکل ۵-۲۵، ارائه شده است.

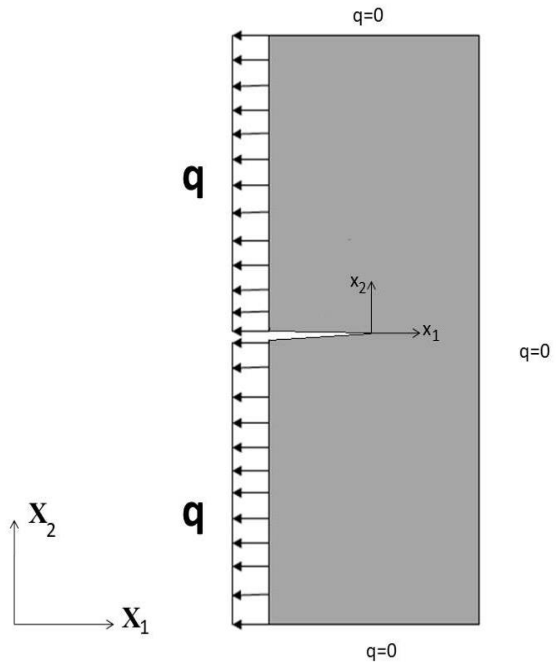


شکل ۵-۲۴ توزیع دمای صفحه در زمان t=1.6

شکل ۵-۲۵ شکل تغییریافته صفحه دارای ترک در زمان t=1.6

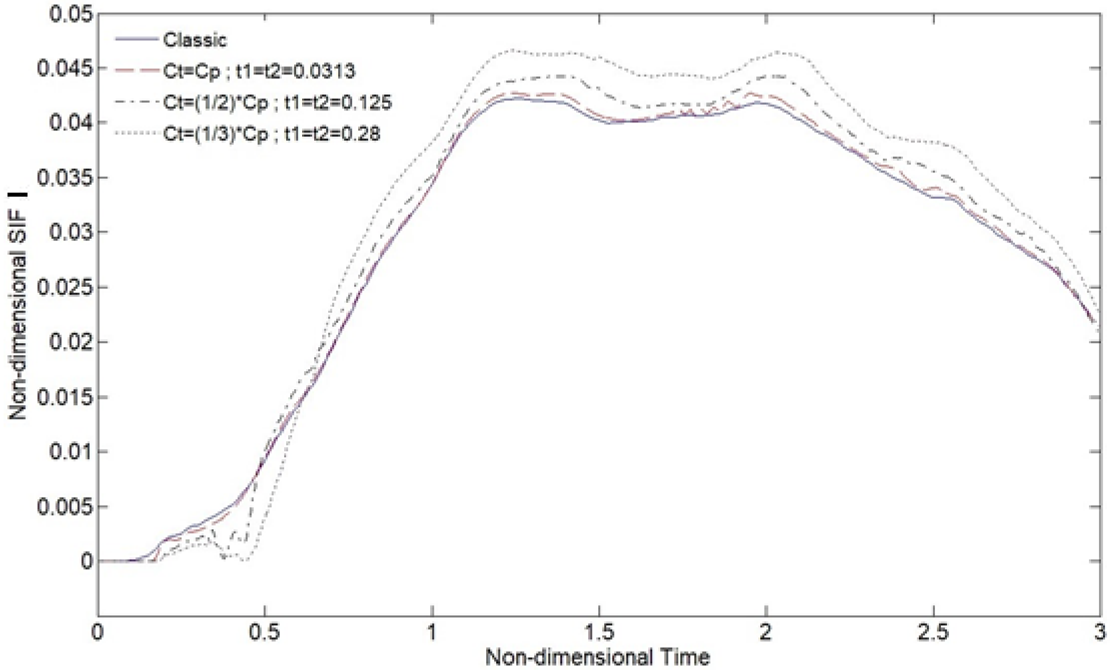
۵-۱۰-مثال هشتم: بررسی اثر زمان‌های تاخیر و پارامتر کوپل‌کننده در صفحه همگن با ترک لبه‌ای تحت شوک حرارتی

در این مثال به منظور بررسی تاثیر زمان‌های تاخیر و پارامتر کوپل‌کننده معادلات ترموالاستیسیته، یک صفحه مستطیلی از جنس بیسموت با خصوصیات مکانیکی مندرج در جدول ۵-۳ و با عرض W=1 و طول H=4 با ترکی به طول a=0.5 در فضای بی‌بعد، در نظر گرفته شده است. مطابق شکل ۵-۲۶، شوک گرمایی به صورت شار سرمایشی که مقدار آن در فضای بی‌بعد q=-0.045 است، به لبه دارای ترک اعمال می‌شود. لبه‌های دیگر صفحه عایق فرض می‌شوند. دمای اولیه صفحه 3.5 K است. از آنجا که سرعت موج تنش با توجه به رابطه (۳-۳۹) برای بیسموت 2.3464 بی‌بعد است؛ می‌توان برای سرعت‌های مختلف موج دما مقدار t_2 را با توجه به رابطه (۳-۴۰) به دست آورد.



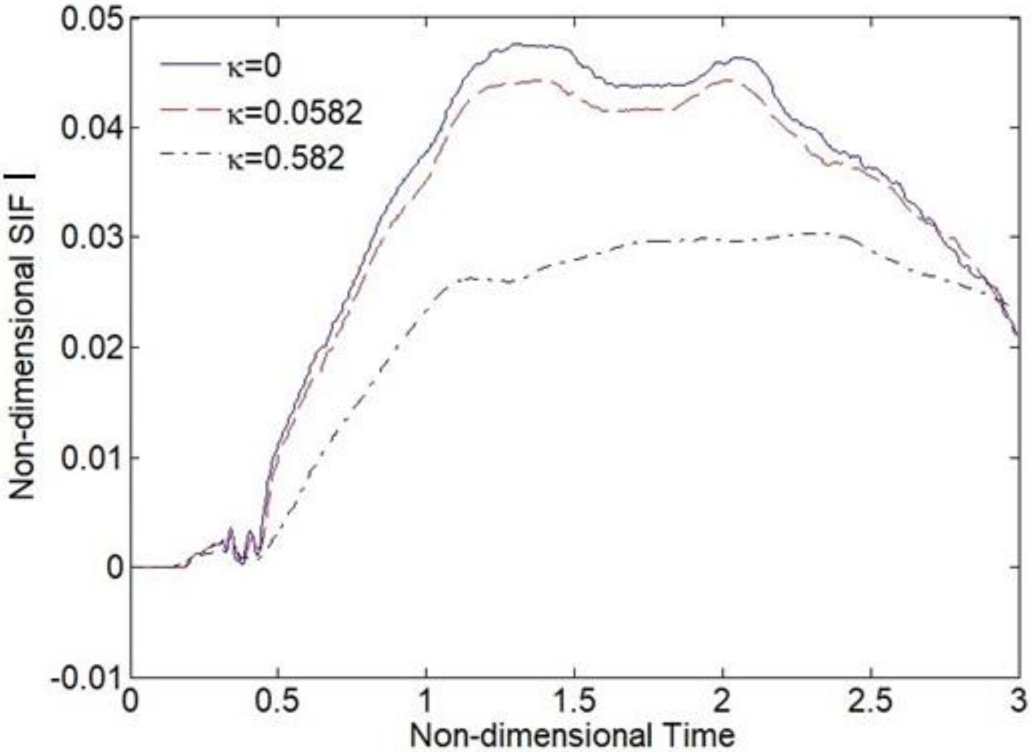
شکل ۵-۲۶ مشخصات و بارگذاری صفحه با ترک افقی تحت بار حرارتی

مطابق شکل ۵-۲۷، با افزایش مقدار t_2 موج دما دیرتر به نوک ترک می‌رسد. بنابراین افزایش ناگهانی ضریب شدت تنش با افزایش مقدار t_2 دیرتر اتفاق می‌افتد.



شکل ۵-۲۷ ضریب شدت تنش مد اول بر حسب زمان با زمان‌های تاخیر متفاوت

مطابق شکل ۵-۲۸، تاثیر پارامتر کوپل بر ضریب شدت تنش بررسی شده است. جهت بررسی تاثیر پارامتر کوپل $t_1=t_2=0.125$ در همه حالت‌ها ثابت در نظر گرفته شده است.



شکل ۵-۲۸ ضریب شدت تنش مد اول بر حسب زمان با پارامترهای کوپل متفاوت

مطابق شکل ۵-۲۸، با افزایش مقدار پارامتر کوپل انرژی بیشتری مستهلک می‌شود و ضریب شدت تنش کاهش می‌یابد.

فصل ششم

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

۶-۱-نتیجه‌گیری

در این پایان‌نامه، ضرایب شدت تنش برای یک صفحه ترکدار تحت شوک حرارتی و مکانیکی-حرارتی براساس مدل گرین لیندزی محاسبه شده است. ترک با استفاده از روش المان محدود توسعه‌یافته مدل شده است. بخش مستهلک شونده چگالی انرژی کرنشی جهت حفظ استقلال از مسیر ناحیه انتگرال برهمکنش در نظر گرفته شده است. به علت محدود بودن سرعت موج دما، دمای نوک ترک در مدل گرین لیندزی نسبت به مدل کلاسیک دیرتر تغییر می‌کند. با توجه به نتایج عددی، سرعت امواج تنش و دما تاثیر قابل ملاحظه‌ای بر ضرایب شدت تنش به خصوص در شروع شوک حرارتی دارد. در زمان‌های اولیه پس از اعمال شوک حرارتی یا مکانیکی-حرارتی ضریب شدت تنش مد اول تئوری کلاسیک بیشتر است، اما با رسیدن موج دما به نوک ترک ضریب شدت تنش تئوری گرین لیندزی بزرگتر می‌شود. برای ترک مایل تحت شوک حرارتی یا مکانیکی-حرارتی ضرایب شدت تنش مد اول و دوم پس از رسیدن موج دما به نوک ترک شروع به افزایش می‌کنند. با رسیدن موج دما به نوک ترک شیب ضریب شدت تنش مد دوم مثبت می‌شود که به معنای تغییر جهت لغزش ترک است. همچنین در حالت بارگذاری مکانیکی-حرارتی وقتی موج تنش مکانیکی به نوک ترک می‌رسد، ضریب شدت تنش نسبت به بارگذاری حرارتی روند افزایشی پیدا می‌کند.

با توجه به نتایج عددی با افزایش مقدار t_2 موج دما دیرتر به نوک ترک می‌رسد. بنابراین افزایش ناگهانی ضریب شدت تنش با افزایش مقدار t_2 دیرتر اتفاق می‌افتد.

با توجه به نتایج می‌توان پی برد که پارامتر کوپل تاثیر قابل ملاحظه‌ای بر ضرایب شدت تنش دارد. بنابراین با افزایش مقدار پارامتر کوپل انرژی بیشتری مستهلک می‌شود و ضریب شدت تنش کاهش می‌یابد.

۶-۲-پیشنهادها

۱) بررسی رشد ترک با در نظر گرفتن تئوری گرین لیندزی

۲) محاسبه ضرایب شدت تنش با در نظر گرفتن تئوری گرین لیندزی برای مواد تابعی (FGM)

۳) محاسبه ضرایب شدت تنش با در نظر گرفتن تئوری گرین لیندزی و توزیع دمای غیرخطی

پیوست الف

توابع زاویه‌ای میدان‌های تنش و جابه‌جایی نوک ترک

توابع زاویه‌ای میدان‌های تحلیلی حوزه نوک ترک در این پیوست بیان شده است. رابطه کلی میدان تنش نوک ترک به قرار زیر است:

$$\sigma_{ij} = K_I (2\pi r)^{-\frac{1}{2}} f_{ij}^{I}(\varphi) + K_{II} (2\pi r)^{-\frac{1}{2}} f_{ij}^{II}(\varphi) \tag{الف-۱}$$

توابع زاویه‌ای میدان تنش به قرار زیر است:

$$f_{11}^{I}(\varphi) = \cos\frac{\varphi}{2}\left(1 - \sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{3\varphi}{2}\right) \tag{الف-۲}$$

$$f_{11}^{II}(\varphi) = -\sin\frac{\varphi}{2}\left(2 + \cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{3\varphi}{2}\right) \tag{الف-۳}$$

$$f_{22}^{I}(\varphi) = \cos\frac{\varphi}{2}\left(1 + \sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{3\varphi}{2}\right) \tag{الف-۴}$$

$$f_{22}^{II}(\varphi) = \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{3\varphi}{2} \tag{الف-۵}$$

$$f_{12}^{I}(\varphi) = \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{3\varphi}{2} \tag{الف-۶}$$

$$f_{12}^{II}(\varphi) = \cos\frac{\varphi}{2}\left(1 - \sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{3\varphi}{2}\right) \tag{الف-۷}$$

فرم کلی میدان جابه‌جایی به قرار زیر است:

$$u_i = K_I \sqrt{\frac{2r}{\pi}}\, g_i^{I}(\varphi) + K_{II} \sqrt{\frac{2r}{\pi}}\, g_i^{II}(\varphi) \tag{الف-۸}$$

توابع زاویه‌ای میدان جابه‌جایی به قرار زیر است:

$$g_1^I(\varphi) = \frac{1}{4}\left[(2\kappa - 1)\cos\frac{\varphi}{2} - \cos\frac{3\varphi}{2}\right] \qquad \text{(الف-۹)}$$

$$g_1^{II}(\varphi) = \frac{1}{4}\left[(2\kappa + 3)\sin\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{3\varphi}{2}\right] \qquad \text{(الف-۱۰)}$$

$$g_2^I(\varphi) = \frac{1}{4}\left[(2\kappa + 1)\sin\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{3\varphi}{2}\right] \qquad \text{(الف-۱۱)}$$

$$g_2^{II}(\varphi) = -\frac{1}{4}\left[(2\kappa - 3)\cos\frac{\varphi}{2} + \cos\frac{3\varphi}{2}\right] \qquad \text{(الف-۱۲)}$$

پیوست ب

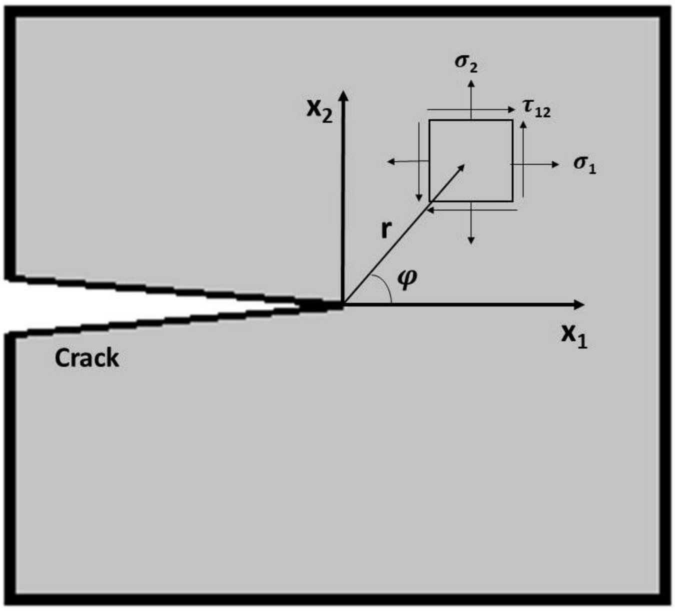
میدان‌های کمکی نوک ترک

مطابق شکل (ب-۱)، میدان‌های تنش و جابجایی کمکی اطراف نوک ترک همان میدان‌های مجانبی نوک ترک هستند که توسط ویلیامز [۶۴] ارائه شده است. بنابراین برای ترک ایستا در مختصات محلی نوک ترک میدان‌های کمکی برای مد I به قرار زیر هستند [۶۵]:

$$\sigma_1^{aux} = \frac{K_I^{aux}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left[1 - sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right)\right] \tag{ب-۱}$$

$$\sigma_2^{aux} = \frac{K_I^{aux}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left[1 + sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right)\right] \tag{ب-۲}$$

$$\tau_{12}^{aux} = \frac{K_I^{aux}}{\sqrt{2\pi r}} cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{3\varphi}{2}\right) \tag{ب-۳}$$



شکل ب-۱- دستگاه مختصات محلی نوک ترک

$$u_1^{aux} = \frac{K_I^{aux}}{2\mu_{Tip}}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left[\kappa_{Tip} - 1 + 2sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right] \quad \text{(ب-۴)}$$

$$u_2^{aux} = \frac{K_I^{aux}}{2\mu_{Tip}}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left[\kappa_{Tip} + 1 - 2cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right] \quad \text{(ب-۵)}$$

در روابط فوق κ ضریب کلوسوف[1] است که به قرار زیر است [۶۶]:

$$\kappa = \begin{cases}(3-\nu)/(1+\nu) & \text{تنش صفحه‌ای} \\ 3-4\nu & \text{کرنش صفحه‌ای}\end{cases} \quad \text{(ب-۶)}$$

برای ترک مد II نیز میدان‌های کمکی به قرار زیر هستند:

$$\sigma_1^{aux} = \frac{-K_{II}^{aux}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left[2 + cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{3\varphi}{2}\right)\right] \quad \text{(ب-۷)}$$

$$\sigma_2^{aux} = \frac{K_{II}^{aux}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{3\varphi}{2}\right) \quad \text{(ب-۸)}$$

$$\tau_{12}^{aux} = \frac{K_{II}^{aux}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left[1 - sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right)\right] \quad \text{(ب-۹)}$$

$$u_1^{aux} = \frac{K_{II}^{aux}}{2\mu_{Tip}}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left[\kappa_{Tip} + 1 + 2cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right] \quad \text{(ب-۱۰)}$$

$$u_2^{aux} = \frac{-K_{II}^{aux}}{2\mu_{Tip}}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left[\kappa_{Tip} - 1 - 2sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right] \quad \text{(ب-۱۱)}$$

میدان‌های کمکی ارائه شده مربوط به مختصات محلی نوک ترک هستند. با استفاده از روابط زیر تنش‌های دستگاه مختصات سراسری به دستگاه مختصات محلی تبدیل می‌شوند [۶۷]:

$$\sigma_1^g = \sigma_1^l cos^2\omega + \sigma_2^l sin^2\omega - \tau_{12}^l\sin(2\omega) \quad \text{(ب-۱۲)}$$

$$\sigma_2^g = \sigma_1^l sin^2\omega + \sigma_2^l cos^2\omega + \tau_{12}^l\sin(2\omega) \quad \text{(ب-۱۳)}$$

$$\tau_{12}^g = \tau_{12}^l\cos(2\omega) + 0.5(\sigma_1^l - \sigma_2^l)\sin(2\omega) \quad \text{(ب-۱۴)}$$

[1] Kolosov coefficient

در روابط فوق l نشان‌دهنده دستگاه مختصات محلی و g نشان‌دهنده دستگاه مختصات سراسری است. ω نیز زاویه بین دستگاه‌های مختصات محلی و سراسری است.

منابع

[1] Chester M. (1963) “Second Sound in Solids.” **Phys Rev.**, 131, pp 2013–2015.

[2] Mitra K., Kumar S., Vedavarz A. and Moallemi MK. (1995) “Experimental evidence of hyperbolic heat conduction in processed meat.” **Trans. ASME, J Heat Transfer.**, 117, pp 568–573.

[3] Tzou DY. (1995) “The generalized lagging response in small-scale and high-rate heating.” **Int J Heat Mass Transfer.**, 38, pp 3231–3234.

[4] Chandrasekharaiah DS. (1986) “Hyperbolic thermoelasticity: a review.” **Appl Mech Rev.**, 51, pp 705–729.

[5] Chandrasekharaiah DS. (1998) “Hyperbolic thermoelasticity: a review of recent literature.” **Appl Mech Rev.**, 51, pp 705–729.

[6] Joseph DD. and Preziosi L. (1989) “Heat waves.” **Rev Mod Phys.**, 61, pp 41–73.

[7] Joseph DD. and Preziosi L. (1990) “Heat waves: addendum.” **Rev Mod Phys.**, 62, pp 375–391.

[8] Green AE. and Lindsay KA. (1972) “Thermoelasticity.” **J Elasticity.**, 2, pp 1–7.

[9] Green AE. and Laws N. (1972) “On the entropy production inequality.” **Arch Rational Mech Anal.**, 45, pp 47–53.

[10] Tamma KK. and Namburu RR. (1997) “Computational Approaches with Applications to Non-classical and Classical Thermo-Mechanical Problems.” **Appl Mech Rev.**, 50, pp 514-551.

[11] Tamma KK. and Railkar SB. (1990) “Evaluation of Thermally Induced Non-Fourier StressWave Disturbances via Specially Tailored Hybrid Trans-finite Formulations.” **Comput and Struct.**, 34, pp 5-16.

[12] Ting E. C. and Chen H. C. A (1982) “Unified Numerical Approach for Thermal Stress Waves” **Comp. and Struct.**, 15, pp 165-175.

[13] Liu W. K. and Zhang Y. F. (1983) “Unconditionally stable implicit-explicit algorithms for coupled thermal stress waves” **Comp. Struct.**, 17, pp 371-374.

[14] Tamma K. K. and Railkar S. B. (1987) “A generalized hybrid transfinite element computational approach for nonlinear/linear unified thermal/structural analysis” **Comp. and Struct.**, 26(4), pp 655-665.

[15] Tamma K. K. and Railkar S. B. (1987) “Transfinite element methodology towards a unified thermal/structural analysis” **Comp. and Struct.**, 25(5), pp 649-660.

[16] Tamma K. K. and Railkar S. B. (1987) “Nonlinear/Linear unified thermal stress formulations: Transfinite element approach” **Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.**, 64, pp 415-428.

[17] Tamma K. K. and Railkar S. B. (1988) “On Heat Displacement Based Hybrid Transfinite Element Formulations for Uncoupled/Coupled Thermally Induced Stress Wave Propagation” **Comp. Struct.**, 30(5), pp 1025-1036.

[18] Tamma K. K. (1996) "**Numerical Simulations for Hyperbolic Heat Conduction/Dynamic Problems Induenced by Non-Fourier/Fourier Effects**." Thermal Stresses IV, edited by R. Hetnarski, Elsevier, Amsterdam.

[19] Tamma KK. and Namburu RR. (1992) "An Effective Finite Element Modeling/Analysis Approach for Dynamical Thermoelasticity due to Second Sound Effects." **Comput Mech.**, 9, pp 73–84.

[20] Chen J. and Dargush GF. (1995) "BEM for Dynamic Proelastic and Thermoelastic Analysis." **Int J Solids Struct.**, 32(15), pp 2257–2278.

[21] Hosseini Tehrani P. and Eslami MR. (1998) "Two-Dimensional Time Harmonic Dynamic Coupled Thermoelasticity Analysis by BEM Formulation." **Engng Anal B. E.**, 22, pp 245–250.

[22] Hosseini Tehrani P. and Eslami MR. (2000) "Boundary Element Analysis of Coupled Thermoelasticity With Relaxation Times in finite Domain." **AIAA J.**, 38(3), pp 534–541.

[23] Chen TC. and Weng CI. (1988) "Generalized coupled transient thermoelastic plane problems by Laplace transform/finite element method." **J Appl Mech.**, 55, pp 377–382.

[24] Prevost JH. and Tao D. (1983) "Finite element analysis of dynamic coupled thermoelasticity problems with relaxation times." **J Appl Mech.**, 50, pp 817–822.

[25] Hughes TJR. and Liu WK. (1978) "Implicit-Explicit Finite Element in Transient Analysis: Stability Theory." **ASME J APPL MECH.**, 45, pp 371-374.

[26] Hughes TJR. and Liu WK. (1978) "Implicit-Explicit Finite Element in Transient Analysis: Implementation and Numerical Examples." **ASME J APPL MECH.**, 45, pp 375-378.

[27] Tian X., Shen Y., Chen C. and He T. (2006) "A direct finite element method study of generalized thermoelastic problems." **Int J Solids Struct.**, 43(7–8) , pp 2050–2063.

[28] Portela A. and Aliabadi MH. (1992) "The Dual BEM Effective Implementation for Crack Problems." **Int J Num Meth Eng.**, 33, pp 1269–1287.

[29] Prasad NNV., Aliabadi MH. and Rooke DP. (1996) "The Dual Boundary Element Method for Transient Thermoelastic Crack Problems." **Int J Solids Struct.**, 33, pp 2695–2718.

[30] Prasad NNV., and Aliabadi MH. (1994) "Incremental Crack Growth in Thermoelastic Problems." **Int J Frac.**, 66, pp 45–50.

[31] Dell'Erba DN., Aliabadi MH. and Rooke DP. (1998) "Dual Boundary Element Method for Three-Dimensional Thermoelastic Crack Problems." **Int J Frac.**, 94, pp 89–101.

[32] Ekhlakov AV., Khay OM., Zhang Ch., Sladek J. and Sladek V. (2012) "A BDEM for transient thermoelastic crack problems in functionally graded materials under thermal shock." **Comput Mater Sci.**, 57, pp 30-37.

[33] Ekhlakov AV., Khay OM., Zhang Ch., Sladek J. and Sladek V. (2012) “Thermoelastic crack analysis in functionally graded materials and structures by a BEM.” **Fatigue & Fract of Eng Mater & Struct.**, 35, pp 742-766.
[34] Hosseini-Tehrani P., Eslami MR. and Daghyani HR. (2001) “Dynamic Crack Analysis Under Coupled Assumption.” **Trans ASME J Appl Mech.**, 38, pp 584–588.
[35] Hosseini-Tehrani P., and Hosseini-Godarzi AR. (2004) “Dynamic crack analysis under thermal shockconsidering Lord–Shulman theory.” **Int J Therm Sci.**, 43, pp 1003-1010.
[36] Hosseini-Tehrani P., Eslami MR. and Azari SH. (2006) “Analysis of Thermoelastic Crack Problems Using Green–Lindsay Theory.” **J Therm Stress.**, 29, pp 317–330.
[37] Hosseini-Tehrani P., Hosseini-Godarzi AR. and Tavangar M. (2005) “Boundary element analysis of stress intensity factor K-I in some two-dimensional dynamic thermoelastic problems.” **Eng Anal Bound Elem.**, 29, pp 232–240.
[38] Zamani A., Hetnarski RB. and Eslami MR. (2011) “Second Sound in a Cracked Layer Based on the Lord-Shulman Theory.” **J Therm Stress.**, 34(3) , pp 181-200.
[39] Zamani A. and Eslami MR. (2009) “Coupled Dynamical Thermoelasticity of a Functionally Graded Cracked Layer.” **J Therm Stress.**, 32, pp 969–985.
[40] Lee K. H., Chalivendra V. B. and Shukla A. (2009) “Dynamic crack-tip stress and displacement fields under thermomechanical loading in functionally graded materials” **J. Appl. Mech.**, 75(5), pp 1-7.
[41] Zamani A. and Eslami MR. (2010) “Implementation of the Extended Finite Element Method for Dynamic Thermoelastic Fracture Initiation.” **Int J Solids Struct.**, 47, pp 1392-1404.
[42] Zamani A., Gracie R. and Eslami MR. (2010) “Higher Order Tip Enrichment of Extended Finite Element Method in Thermoelasticity.” **Comput Mech.**, 46, pp 851–866.
[43] Hosseini S., Bayesteh H. and Mohammadi S. (2013) “Thermo-mechanical xfem crack propagation analysis of functionally graded materials.” **Mater Sci Eng A.**, 561, pp 285–302.
[٤٤] مهدی‌زاده رخی م، (۱۳۹۱)، رساله دکتری، “تحلیل عددی گسترش ترک در یک صفحه از جنس ماده تابعی تحت بار دینامیکی و شوک حرارتی” دانشکده مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود.
[٤٥] حاجی محمدی م، (۱۳۹۲)، پایان نامه ارشد، “محاسبه پارامترهای دینامیکی شکست در مواد مرکب تحت بار حرارتی با روش اجزا محدود توسعه یافته” دانشکده مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود.
[46] Goli E., Bayesteh H. and Mohammadi S. (2014) “Mixed mode fracture analysis of adiabatic cracks in homogeneous and non-homogeneous materials in the

frame-work of partition of unity and the path-independent interaction integral." **Eng Fract Mech.**, 131, pp 100–127.

[47] Bayesteh H., Afshar A. and Mohammadi S. (2015) "Thermo-mechanical fracture study of inhomogeneous cracked solids by the extended isogeometric analysis method." **Eur J Mech A/Solids.**, 51, pp 123–139.

[48] Mohammadi S. (2008) "**Extended Finite Element Method**" Blackwell Publishing Ltd.

[۴۹] پورپاک ع. م. (۱۳۸۳) "**محاسبات عددی، آنالیز عددی کاربردی**" انتشارات جهاد دانشگاهی.

[50] Kirugulige M. S. (2007), Ph.D thesis, "A study of mixed-mode dynamic fracture in advanced particulate composites by optical interferometry, digital image correlation and finite element methods", Auburn University.

[51] Belytschko T. and Black T. (1999) "Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing" **Int. J. Nume. Meth. Engin.**, 45, pp 601-620.

[52] Moës N., Dolbow J. and Belytschko T. (1999) "A finite element method for crack growth without remeshing" **Int. J. Nume. Meth. Engin.**, 46, pp 131-150

[53] Belytschko T., Gracie R. and Ventura G. (2009) "A Review of Extended/Generalized Finite Element Methods for Material Modelling" **Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.,** 17(4), pp 1-24.

[54] Duflot M. (2008) "The extended finite element method in thermoelastic fracture mechanics" **Int. J. for Num. Methods in Engin.**, 74, pp 827-847.

[55] Zamani A., Eslami M. R. (2010) "Implementation of the extended finite element method for dynamic thermoelastic fracture initiation" **Int J Solids and Struct.**, 47, pp 1392-1404.

[56] Dolbow J. E., (1999) Ph.D thesis "An extended finite element method with discontinuous enrichment for applied mechanics" Northwestern University, USA.

[57] Hetnarski R. B. and Eslami M. R. (2009) "**Thermal Stresses – Advanced Theory and Applications"** Springer.

[58] Melenk J. M. and Babuska I. (1996) "The partition of unity finite element method: Basic theory and applications" **Computer Meth. Appl. Mech. and Engin.**, 39, pp 289-314.

[59] Hughes T. J. R. (1987) "**The finite element method**" Prentice-Hall, INC., Englewood Cliffs, New Jersey.

[60] Réthoré J., Gravouil A. and Combescure A. (2005) "A combined space–time extended finite element method" **Int. J. Numer. Meth. Engng**., 64, pp 260-284.

[61] KC A. and Kim J. H. (2008) "Interaction integrals for thermal fracture of functionally graded materials" **Eng. Frac. Mech.** 75, 8, pp 2542-2565.

[62] Lee K. Y. and Sim K. (1990) "Thermal Shock Stress Intensity Factor by Bueckner's Weight Function Method" **Eng. Fract. Mech.**, 37, pp 799-804.

[63] Narayanamurti V, Dynes RC. (1972) "Observation of Second Sound in Bismuth." **Phys Rev.**, 28, pp 1461–1464.

[64] Williams M. L. (1957) "On the stress distribution at the base of a stationary crack" **J. Appl. Mech.**, **Trans. ASME**, 24(1), pp 109-114.

[65] Anderson T. L. (1995) “**Fracture mechanics**” 2nd edition, CRC Press LLC, Florida, USA.

[66] Menouillard T., Song J.-H., Duan Q. and Belytschko T. (2010) “Time dependent crack tip enrichment for dynamic crack propagation” **Int. J. Fract.**, 162, pp 33-49.

[٦٧] بی‌یر ف.، جانستون ر.، دی ولف ج. تی. و مازورک د. اف. (۱۳۸۷) “**مقاومت مصالح**” ویرایش پنجم، ترجمه افضلی م. ر. و ملکان م.، موسسه انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف.

Abstract

In this paper, the stress intensity factors (SIFs) are computed for a stationary crack in an isotropic 2D finite domain under thermal shock using the eXtended Finite Element Method (XFEM) and the interaction integral method. The fully coupled generalized thermoelasticity theory based on Green- Lindsay (G-L) model is considered. An interaction integral is developed to compute the stress intensity factors in which the dissipated part of the strain energy density is accounted to preserve domain-independency of. The Newmark time integration scheme is used to solve semidiscrete governing equations. In several numerical examples, the effect of stress and heat waves on the SIFs as well as the heat wave on the temperature distribution based on the G-L model is studied deeply. According to the results, the speed of stress and temperature waves controls the trend of stress intensity factors especially at early time of the thermal shock. When the mechanical stress wave reaches to the crack tip, the thermomechanical SIFs begins greater than thermal SIFs. Moreover, the effect of the mechanical stress wave on the SIFs in G-L model is more evident.

Keywords

thermal shock, Green- Lindsay model, eXtended Finite Element Method (XFEM), interaction integral, stress intensity factors.

Faculty of Mechanical and Mechatronics Engineering

M.Sc. Thesis in Applied Mechanics Engineering

Determination of stress intensity factors in a 2D finite cracked isotropic media under thermal shock considering Green-Lindsay theory and using extended finite element method

By

Navid Roshani Zarmehri

Supervisors

Dr. Mohammad Bagher Nazari
Dr. Masoud Mahdizadeh Rokhi

September 2017