بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک

پایان‌نامه کارشناسی ارشد مهندسی طراحی کاربردی

تحلیل ارتعاشی ورق مدوّر نامتقارن ویسکوالاستیک به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اوّل

نگارنده: سید هاشم علوی سیزکوهی

استاد راهنما:

دکتر حمیدرضا ایپک‌چی

شهریور ۱۳۹۶

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده محمد محسن شاه مردان تاریخ و امضاء و مهر دانشکده

شماره: ۳د/۲۹۷/۱۵۳
تاریخ: ۹۶/۹/۲۲

باسمه‌تعالی

دانشگاه صنعتی شاهرود
مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد آقای سید هاشم علوی سبزکوهی با شماره دانشجویی ۹۴۱۲۵۱۴ رشته مهندسی مکانیک گرایش طراحی کاربردی تحت عنوان تحلیل ارتعاشی ورق مدوّر نامتقارن ویسکوالاستیک به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اوّل که در تاریخ ۱۳۹۶/۶/۲۰ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با درجه: عالی) ☑ مردود ☐

نوع تحقیق: نظری ☑ عملی ☐

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ استادراهنمای اول	دکتر حمیدرضا اپیک‌چی	دانشیار	
۲- استادراهنمای دوم	-	—	—
۳- استاد مشاور	-	—	—
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر هادی پروز	استادیار	
۵- استاد ممتحن اول	دکتر امیر جلالی	استادیار	
۶ـ استاد ممتحن دوم	دکتر حبیب احمدی	استادیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: محمد محسن شاه مردان

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

شاه مردان

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشکده مهندسی مکانیک

تقدیر و تشکر

این پایان‌نامه را ضمن تشکر و سپاس بیکران و در کمال افتخار و امتنان تقدیم می‌نمایم به:

– محضر ارزشمند خانواده عزیزم به خاطر همه‌ی تلاش‌های محبت آمیزی که در دوران مختلف زندگی‌ام انجام داده‌اند و با مهربانی چگونه زیستن را به من آموخته‌اند.

– به استادان فرزانه و فرهیخته‌ای که در راه کسب علم و معرفت مرا یاری نمودند.

– به آنان که نفس خیرشان و دعای روح پرورشان بدرقه‌ی راهم بود.

– الها به من کمک کن تا بتوانم ادای دین کنم و به خواسته‌ی آنان جامه‌ی عمل بپوشانم.

– پروردگارا حسن عاقبت، سلامت و سعادت را برای آنان مقدر نما.

– خدایا توفیق خدمتی سرشار از شور و نشاط و همراه و همسو با علم و دانش و پژوهش جهت رشد و شکوفایی ایران کهنسال عنایت بفرما.

به مصداق «من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق » بسی شایسته است از استاد فرهیخته و فرزانه جناب آقای دکتر حمیدرضا ایپکچی که با کرامتی چون خورشید، سرزمین دل را روشنی بخشیدند و گلشن سرای علم و دانش را با راهنمایی‌های کار ساز و سازنده بارور ساختند، تقدیر و تشکر نمایم.

تعهد نامه

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام "دانشگاه صنعتی شاهرود" و یا " Shahrood University of Technology " به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آن‌ها) استفاده‌شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده‌شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان‌نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پایان‌نامه، تحلیل ارتعاشات آزاد و اجباری ورق‌های حلقوی با خیز کوچک در حالت نامتقارن و قطاع‌های حلقوی ویسکوالاستیک، به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اوّل مطالعه می‌شود. رفتار ورق ویسکوالاستیک با مدل جامد استاندارد خطی در برش و الاستیک در بالک درنظر گرفته می‌شود. شرایط مرزی به صورت گیردار، ساده یا آزاد در هر لبه برای ارتعاش آزاد و در ارتعاش اجباری، بارگذاری به‌صورت عرضی و شرایط مرزی، ساده است. معادلات حاکم با اصل هامیلتون استخراج شده که شامل پنج معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی و کوپل به هم با ضرایب متغیر است. برای حل معادلات حاکم بر سیستم، از روش نیمه تحلیلی مبتنی بر تئوری اغتشاشات و سری‌های فوریه استفاده می‌شود. تعیین فرکانس‌های طبیعی، شکل مد و پاسخ مدنظر بوده و حساسیت نتایج به پارامترهای هندسی و مکانیکی نیز بررسی می‌گردد. نتایج به‌دست آمده از این تحقیق با نتایج سایر مراجع و نرم‌افزار اجزاء محدود مقایسه می‌شوند.

واژگان کلیدی: ورق حلقوی ویسکوالاستیک، ارتعاشات نامتقارن، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، تئوری اغتشاشات

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها

فهرست جدول‌ها

فهرست نشانه‌ها

مختصه‌های استوانه‌ای	r, θ, z
شعاع داخلی	r_i
شعاع خارجی	r_o
ضخامت	h
مؤلفه‌های جابجایی	u, v, w
مؤلفه‌های جابجایی صفحه میانی	u_0, v_0, w_0
توابع مجهول با بعد چرخش	u_1, v_1
کرنش‌های نرمال	$\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z$
کرنش‌های برشی	$\gamma_{r\theta}, \gamma_{rz}, \gamma_{\theta z}$
تنش‌های نرمال	$\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$
تنش‌های برشی	$\tau_{r\theta}, \tau_{rz}, \tau_{\theta z}$
مدول برشی	G
مدول بالک	K
ضریب پوآسون	ν
ضریب تصحیح برشی	K_s
چگالی انرژی کرنشی	U^*
انرژی کرنشی	U
انرژی جنبشی	T
بار عرضی گسترده	Q
کار انجام شده توسط نیروی گسترده	W
منتجه‌های تنش	$N_r, N_\theta, N_z, N_{r\theta}, M_r, M_\theta, M_{r\theta}, Q_r, Q_\theta$
چگالی	ρ
مدول‌های ویسکوالاستیک	G_1, G_2
ضریب ویسکوزیته	η
کمیت با دیمانسیون سرعت	c
مدول‌های تناسب	$\bar{k}_i^p, \bar{g}_i^p$
زمان رهایش	τ_i^G
نرخ کرنش برشی	$\dot{\varepsilon}$
پارامتر بی‌بعدکوچک	ε
مقادیر ویژه	m_n, s_n
بردار ویژه	V_n
فرکانس طبیعی بی‌بعد خارج صفحه‌ای	ω
فرکانس طبیعی بی‌بعد درون صفحه‌ای	ω_1
ثابت‌ها در حل عمومی	$c_1, c_2, c_3, c_4, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6$
مدول یانگ	E
زاویه سکتور	α

فصل اول

تاریخچه و مرور مقالات

۱-۱- مقدمه

به‌منظور انجام هر نوع تحلیل مکانیکی برای هر ماده‌ای، شناخت کافی از مادّه‌ی موردنظر حائز اهمیت است. به همین دلیل در این فصل ابتدا به معرفی مواد ویسکوالاستیک و خواص مکانیکی آنها پرداخته می‌شود. سپس معادلات بنیادین تنش-کرنش، مدل‌های رئولوژیکی مورداستفاده در مدل‌سازی مواد ویسکوالاستیک و فرضیات متداول در تحلیل تنش این مواد بیان‌شده است. در ادامه، توضیح مختصری درباره‌ی اجزای سازه‌ای داده‌شده است. پس‌ازآن به معرفی تئوری ورق‌ها پرداخته می‌شود.

۱-۲- مواد ویسکوالاستیک

دمپینگ (میرایی) پارامتر دینامیکی مهمی برای بررسی ارتعاشات، کنترل صوت، پایداری دینامیکی، دقت موقعیت، خستگی و مقاومت ضربه است. بسیاری از کاربردها از قبیل، پره‌های موتورها، ماشین‌آلات با سرعت-های بالا نیازمند وزن سبک و کارایی[1] دینامیکی بالایی هستند. این ویژگی‌ها و کاربردها در مواد ویسکوالاستیک یافت می‌شود.

ویسکوالاستیک خاصیتی از مواد است که هر دو ویژگی ویسکو و الاستیک را هنگامی‌که تحت تغییر شکل قرار می‌گیرد دارا می‌باشد. در مواد ویسکوز، مقاومت جریان برش و کرنش در هنگام اعمال تنش با گذشت زمان به‌صورت خطی است. در مواد الاستیک با حذف تنش، مقدار کرنش به‌سرعت به مقدار اولیه باز می‌گردد. مواد ویسکوالاستیک هر دو خاصیت ذکر شده و هم‌چنین کرنش وابسته به زمان را با هم دارند. خاصیت الاستیک نتیجه‌ی کشش مقید صفحات بلوره‌ی ماده است درحالی‌که ویسکوز نتیجه‌ی پخش شدن اتم‌ها یا مولکول‌های مواد غیر متبلور است. برخی از مواد پلیمری، مواد متشکل از الیافی مانند ابریشم، راین، سلولز و شیشه‌ها، سرامیک‌ها، بیومتریال‌ها[2] (مواد زیستی) مانند پوست و ماهیچه‌ها و هم‌چنین فلزات در دماهای بالا می‌توانند با مدل‌های ویسکو الاستیک خطی مدل شوند [۱].

[1] Performance
[2] Bio-Material

در محیط واقعی، بسیاری از این مواد، به‌نوعی از رفتار ایده‌آل ویسکوالاستیک انحراف دارند. یعنی، رفتار ویسکوالاستیک در اکثر مواد وجود دارد، اما انحراف از حالت الاستیک در برخی از مواد، مانند: فلزات، استخوان و سنگ‌ها، ناچیز و در برخی دیگر، مانند پلیمرها، چوب‌ها و نسوج بدن، زیاد می‌باشد. در این‌گونه مواد، برخلاف مواد الاستیک، رابطه‌ی تنش-کرنش (خواص ماده) تابع زمان است. حالت میرایی ویسکوالاستیک در بسیاری از مواد پلیمری و شیشه‌ای بروز پیدا می‌کند و مکانیسم دمپینگ داخلی آن، برای افزایش میرایی، به‌منظور کاهش ارتعاشات بسیار حائز اهمیت است. میرایی از رهایش و بازگشت شبکه پلیمر بعد از تغییر شکل ناشی می‌شود.

۱-۳- رفتار ویسکوالاستیسیته‌ی خطی

رفتار بسیاری از جامدات، در کرنش‌های کوچک، با استفاده از قانون هوک در الاستیسیته خطی بیان می‌شود. در این صورت پارامترهای تنش و کرنش با زمان تغییر نمی‌کنند. برای مواد الاستیک در یک بعد، رابطه‌ی تنش با کرنش به‌صورت زیر است [۲].

$$\sigma = E\varepsilon \qquad (۱-۲)$$

E مدول یانگ و عکس آن کامپلیانس[1] J است ($E = \frac{1}{J}$)، σ تنش و ε کرنش می‌باشد.

برخلاف مواد الاستیک که تغییر شکل آن در اثر اعمال نیروی خارجی، بعد از حذف نیرو قابل برگشت است، یک ماده‌ی ویسکوز تحت اعمال بار خارجی جریان می‌یابد و از رابطه‌ی زیر پیروی می‌کند [۲].

$$\tau = \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \qquad (۲-۲)$$

در مواد ویسکوز بر اثر اعمال بار خارجی ماده جریان (حرکت) پیدا می‌کند. در حالت جریان پایا، بر اساس تعریف، ویسکوزیته به‌صورت نسبت تنش برشی به نرخ برش تعریف می‌شود.

[1] Compliance

$$\eta = \frac{\tau}{\dot{\varepsilon}} \qquad (۲-۳)$$

η ویسکوزیته‌ی برشی[1] (نیوتنی) سیال می‌باشد که واحد آن Pa.s است. $\dot{\varepsilon}$ و τ به ترتیب نرخ کرنش و تنش برشی هستند. برای مطالعه‌ی یک ماده‌ی ویسکوالاستیک خطی از ترکیب فنرها و دمپرها استفاده می‌شود. معادلات رفتاری این مدل‌ها به‌صورت دیفرانسیل خطی می‌باشند.

آزمایش[2] مواد ویسکوالاستیک، با اعمال یک کرنش یا تنش پله‌ای انجام می‌شود. پاسخ به کرنش پله‌ای، رهایش تنش[3] و پاسخ به تنش پله‌ای، خزش[4] می‌باشد [۲].

برخی از پدیده‌هایی که در مواد ویسکوالاستیک اتفاق می‌افتد شامل [۲].

- اگر تنش ثابت باقی بماند؛ باگذشت زمان، کرنش افزایش می‌یابد (خزش).
- اگر کرنش ثابت باقی بماند؛ باگذشت زمان، تنش کاهش می‌یابد (رهایش).

۱-۴- معادلات حاکم بر مواد ویسکوالاستیک

بیان معادلات بنیادین تنش-کرنش در مواد ویسکوالاستیک، به دو شکل کلی انتگرالی و دیفرانسیلی امکان‌پذیر است که در ادامه به بیان روش دیفرانسیلی پرداخته می‌شود.

معادله‌ی ساختاری برای یک ماده‌ی ایزوتروپیک که پاسخ آن به مشتقات تنش و کرنش نیز حساس است، به‌صورت کلی زیر نوشته می‌شود [۱].

$$f(\sigma,\dot{\sigma},\ddot{\sigma},...,\gamma,\dot{\gamma},\ddot{\gamma},..) = 0 \qquad (۲-۴)$$

که در آن تنش و کرنش به زمان وابسته می‌باشند. شکل اپراتوری معادله‌ی فوق به‌صورت زیر است.

$$P(D)\sigma_{ij}(t) = \mathrm{Q}(D)\varepsilon_{ij}(t) \qquad (۲-۵)$$

---

[1] Shear Viscosity
[2] Test
[3] Stress Relaxation
[4] Creep

که $P(D)$ و $\mathrm{Q}(D)$ به‌صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$P(D)=\sum_{r=0}^{N}P_r\frac{\partial^r}{\partial t^r},\mathrm{Q}(D)=\sum_{r=0}^{N}Q_t\frac{\partial^r}{\partial t^r} \qquad (۲-۶)$$

$D=\frac{d}{dt}$ و P_r و Q_r ثابت می‌باشند که به مدل رئولوژیکی انتخابی وابسته‌اند.

جهت توصیف رفتار ویسکوالاستیک یک سیستم تحت کشش محوری، قسمت برشی[1] و بالکی[2] تنش را از هم جدا می‌کنند. این قاعده به دلیل پاسخ متفاوت ماده‌ی ویسکوالاستیک به برش و بالک می‌باشد. با توجه به این نکته، مؤلفه‌های برش و بالک را می‌توان به‌صورت زیر جدا کرد [۱].

$$\begin{aligned}P_1\sigma_{ij}^d&=\mathrm{Q}_1\varepsilon_{ij}^d\\P_2\sigma_{ii}&=\mathrm{Q}_2\varepsilon_{ii}\end{aligned} \qquad (۲-۷)$$

بالانویس d معرف بخش برشی و P_1، P_2، Q_1 و Q_2 اپراتورهایی به شکل کلی زیر می‌باشند.

$$P_1=p_0+p_1\frac{\partial}{\partial t}+p_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}+..+p_n\frac{\partial^n}{\partial t^n} \qquad (۲-۸)$$

رابطه‌ی مدول الاستیسیته و ضریب پوآسون برحسب مدول رهایش و برش به‌صورت زیر می‌باشد.

$$\mathrm{E}=\frac{9K_0G}{3K_0+G},\nu=\frac{3K_0-2G}{6K_0+2G} \qquad (۲-۹)$$

G و K_0 به ترتیب مدول‌های رهایش برش و بالک هستند و به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$G=\frac{1}{2}(\frac{P_1}{\mathrm{Q}_1}),K_0=\frac{1}{3}(\frac{P_2}{\mathrm{Q}_2}) \qquad (۲-۱۰)$$

با توجه به معادله‌ی (۲-۹)، معادله (۲-۱۰) را برای ماده‌ی ویسکوالاستیک، می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد.

[1] Deviatoric
[2] Dilatational

$$\nu = \frac{P_1 Q_2 - P_2 Q_1}{P_2 Q_1 + 2 P_1 Q_2}, E = \frac{3 Q_1 Q_2}{P_2 Q_1 + 2 P_1 Q_2} \tag{۲-۱۱}$$

۱-۵- فرضیات متداول در مواد ویسکوالاستیک

ازآنجاکه جمع‌آوری اطلاعات وابسته به زمان برای خصوصیات مواد ویسکوالاستیک مشکل و زمان‌بر است، برای حل مسائل تحلیل تنش در این حوزه، اعمال فرض‌هایی بر روی خصوصیات ماده ضروری است. بنابراین اغلب برای ماده‌ی ویسکوالاستیک، یکی از خصوصیات مدول برش G(t) یا مدول یانگ E(t) تعریف می‌شود و مدول دیگر بر اساس یکی از فرضیات زیر تعیین می‌شود.

- تراکم ناپذیری: برای تغییرشکل‌های کوچک در حوزه‌ی مسائل الاستیک خطی، در حالت تراکم ناپذیری، ضریب پوآسون برابر با ۰/۵ یا مدول بالک بی‌نهایت است. تحت شرایط مشابه، برای یک ماده‌ی تراکم ناپذیر ویسکوالاستیک، ضریب پوآسون برابر با ۰/۵ و مدول بالک بی‌نهایت می‌باشد. بنابراین با وجود این شرط، کرنش‌های بالکی صفر می‌باشد (تغییر حجم قابل صرف‌نظر باشد).
- الاستیک در بالک: در این حالت مدول بالک، مقدار ثابت K_0 را داشته و $K(t) = K_0 H(t)$ می‌باشد که $H(t)$ تابع پله‌ای[1] است. این فرض بر این اساس است که تغییرات مدول بالک نسبت به مدول برشی، با دما و زمان بسیار کم است. در این حالت ضریب پوآسون، تابعی از زمان است. فرض رفتار الاستیک، برای ماده‌ی ویسکوالاستیک در بالک، معمولاً فرض مناسبی است.
- هم‌زمانی[2] مدول بالک و برشی: در این حالت فرض می‌شود که نسبت مدول بالک به برشی مقدار ثابتی باشد، به‌طوری که $K(t) = c_1 G(t)$ که c_1 مقداری ثابت است. بنابراین در این حالت وابستگی زمانی این دو یکسان بوده و فقط مقادیر آنها متفاوت می‌باشد. صحت این فرض به‌شدت وابسته به دماست. در این حالت ضریب پوآسون مقداری ثابت است [۱].

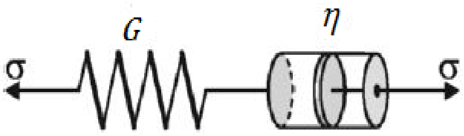
۱-۶- مدل‌های رئولوژیک مواد ویسکوالاستیک

[1] Heaviside Step Function
[2] Synchronous

مدل‌سازی پاسخ به تحریک مکانیکی مواد ویسکوالاستیک، توسط مواد الاستیک و ویسکوز، از قبیل فنر و دمپر انجام می‌شود استفاده از این مدل‌های مکانیکی خطی، ساده‌ترین حالت جهت تفسیر رفتار ویسکوالاستیسیته مواد می‌باشد. فنر رفتار ناگهانی (الاستیک) پاسخ و دمپر رفتار (اتلافی) سیستم را شبیه‌سازی می‌کند [۱].

۱-۶-۱ مدل ماکسول

مدل ماکسول[1] شامل فنر و دمپر سری است (شکل ۱-۲) [۳].



شکل ۲-۲ مدل ماکسول

رابطه‌ی کلی تنش و کرنش را برای این مدل، می‌توان به‌صورت زیر نوشت.

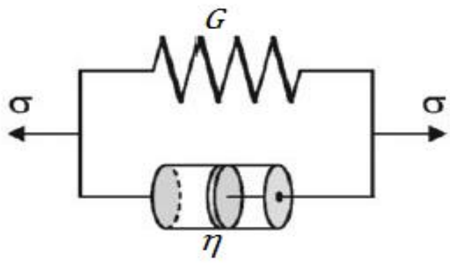
$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{G} + \frac{\sigma}{\eta} \qquad (۱۲-۲)$$

این رفتار برای بسیاری از مواد مناسب نیست و معمولاً توصیف‌کننده رفتار سیال است، همچنین این مدل، رفتار مناسبی را برای خزش پیش‌بینی نمی‌کند.

۱-۶-۲ مدل کلوین ویت

مدل کلوین ویت[2] شامل یک فنر موازی با دمپر است (شکل ۱-۳) و به‌خوبی رفتار خزشی را توصیف می‌کند ولی مدل مناسبی برای پیش‌بینی رهایش نیست [۳].

---
[1] Maxwell Model
[2] Kelvin-voigt Model



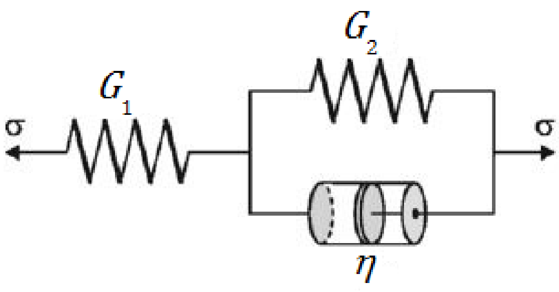
شکل ۲-۳ مدل کلوین-ویت

رابطه‌ی تنش-کرنش در این مدل به‌صورت زیر است.

$$\sigma = G\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} \qquad (۱۳-۲)$$

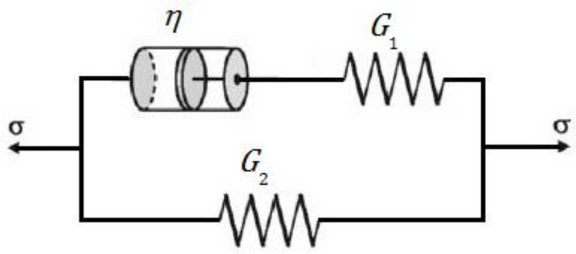
۱-۶-۳ جامد استاندارد خطی (مدل زنر)[1]

مدل ماکسول، رفتار رهایش تنش و مدل کلوین نیز فقط رفتار خزشی یک جامد ویسکوالاستیک را توصیف می‌کند، امّا هیچ‌کدام برای ارائه رفتار عمومی جامد ویسکوالاستیک مناسب نیستند. آنچه به‌طورمعمول جامد استاندارد سه المانی نامیده می‌شود، ترکیبی از المان کلوین-ویت به‌صورت سری با فنر (شکل ۱-۴) یا المان ماکسول موازی با فنر (شکل ۱-۵) است [۳].



شکل ۲-۴ اولین مدل جامد استاندارد خطی

[1] Standard Solid (Zener) Model



شکل ۱-۵ دومین مدل جامد استاندارد خطی

معادله‌ی بنیادین برای اولین مدل به‌صورت رابطه‌ی (۱-۱۴) است.

$$\left(\frac{1}{G_1}+\frac{1}{G_2}\right)\sigma+\frac{\eta}{G_1G_2}\dot{\sigma}=\varepsilon+\frac{\eta}{G_2}\dot{\varepsilon} \qquad (۱۴\text{-}۲)$$

با استفاده از آزمایش رهایش تنش، مدول رهایش با معادله‌ی زیر تعیین می‌گردد.

$$G(t)=\frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0}=\frac{G_1}{G_1+G_2}\left(G_2+G_1e^{(-\frac{t}{\tau})}\right) \qquad (۱۵\text{-}۲)$$

که در رابطه‌ی اخیر $\tau=\frac{\eta}{G_2}$ است.

برای دومین مدل، معادله‌ی بنیادین به‌صورت رابطه‌ی (۱-۱۶) است.

$$\sigma\left(\frac{1}{\eta}+\frac{1}{G_2}\right)=\varepsilon\frac{G_1}{\eta}+\dot{\varepsilon}\left(1+\frac{G_1}{G_2}\right) \qquad (۱۶\text{-}۲)$$

مدول رهایش نیز به‌صورت:

$$G(t)=G_1+G_2e^{(-\frac{t}{\tau})} \qquad (۱۷\text{-}۲)$$

۱-۷- اجزای سازه‌ای

یک سازه در حالت کلی یک جسم سه‌بعدی است که به‌منظور تحمل و انتقال بارهای وارده طراحی می‌شود. این جسم سه‌بعدی خود از بخش‌های ساده‌تر سه‌بعدی تشکیل‌شده است. روابط حاکم بر هر یک از این بخش‌ها، درواقع همان روابط حاکم بر الاستیسیتهٔ سه‌بعدی است. لیکن به‌منظور سهولت در طراحی و تحلیل سازهٔ موردنظر، درصورتی‌که زیرمجموعه‌های سازه، حائز شرایط خاصی باشند، می‌توان آنها را با سازه‌های دوبعدی یا یک‌بعدی حل کرد و زمان و هزینهٔ طراحی و تحلیل این‌گونه سازه‌ها را به‌شدت کاهش داد. زیر سازه‌های استانداردی که غالباً در سازه‌های بزرگ در نظر گرفته می‌شوند عبارت‌اند از: خرپا[1]، تیر[2]، صفحه[3]، پوسته[4]، غشاء[5] و ... . اینکه هر جزء سه‌بعدی با کدام‌یک از گروه‌های استاندارد فوق تخمین زده شود، به تجربه طراح سازه بستگی دارد، ولی با توجه به وظیفه آن جزء در کل سازه و ابعاد آن جزء تا اندازه‌ای می‌توان گروه سازه‌ای مربوط به آن جزء را مشخص کرد. به‌عنوان نمونه اگر دو بعد سازه در مقایسه با یک بعد دیگر آن کوچک باشد و آن جزء تحت گشتاور خمشی نیز قرار نگرفته باشد، معمولاً از خرپا برای مدل‌سازی آن استفاده می‌کنند، ولی اگر شرایط هندسی مذکور را داشته باشد، ولی تحت گشتاور خمشی نیز قرارگرفته باشد، سازهٔ مناسب برای مدل‌سازی آن معمولاً تیر خواهد بود. مشابه همین مطالب را می‌توان برای صفحه، غشاء و ... هم بکار برد. در این پروژه تنها به بررسی صفحه پرداخته خواهد شد. صفحه یک جزء سازه‌ای است که ابعاد درون صفحه‌ای (طول و عرض) آن در مقایسه با ضخامتش قابل‌ملاحظه باشد و تحت بارهایی قرار می‌گیرد که علاوه بر ایجاد کشیدگی[6] در آن منجر به خمش آن نیز می‌شود. در بیشتر موارد، ضخامت صفحه نسبت به ابعاد درون صفحه‌ای (طول و عرض) آن از یک‌دهم تجاوز نمی‌کند. به همین دلیل، استفاده از معادلات الاستیسیتهٔ سه‌بعدی لزومی ندارد و می‌توان از معادلات ساده‌تر دوبعدی استفاده کرد. هرچند این ساده‌سازی در بعضی از حالات باعث اختلافاتی نسبت به حالت سه‌بعدی می‌گردد [۴].

[1] Truss
[2] Beam
[3] Plate
[4] Shell
[5] Membrane
[6] Extension

۱-۸- تئوری ورق‌ها

تئوری‌های موجود برای تحلیل ورق‌ها را به سه دسته عمده به‌صورت زیر تقسیم‌بندی می‌کنند:

- تئوری ورق کلاسیک[1]
- تئوری مرتبه اول یا میندلین[2]
- تئوری‌های مرتبه بالاتر[3]

هریک از تئوری‌های فوق در ذیل شرح داده خواهند شد.

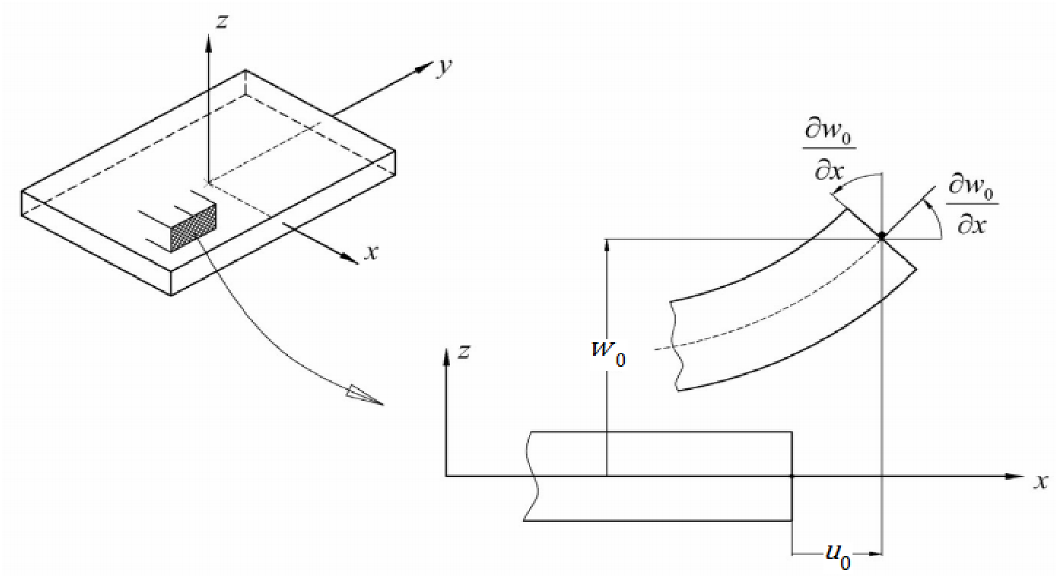
۱-۸-۱ تئوری ورق کلاسیک

تئوری ورق کلاسیک، نظریه‌ای است که میدان جابجایی آن به‌گونه‌ای انتخاب گردد که فرضیات کیرشهف را برآورده سازد. فرضیات کیرشهف شامل:

- صفحات مسطح عمود بر صفحه میانی ورق[4] قبل از تغییر شکل، پس از تغییر شکل نیز همچنان مسطح باقی بمانند.
- صفحات مسطح عمود بر صفحه میانی ورق، دچار تغییر طول نشوند.
- خیز صفحه‌ی میانی در مقایسه با ضخامت ورق کوچک است بنابراین شیب آن نیز کوچک و از مجزور شیب در مقایسه با یک می‌توان صرف‌نظر کرد.
- تنش نرمال بر صفحه‌ی میانی در مقایسه با سایر مؤلفه‌های تنش قابل صرف‌نظر است.

در (شکل ۱-۶)، فرضیات کیرشهف روی بخشی از صفحه نشان داده‌شده است. در این شکل خطی که به‌عنوان لبه صفحه نشان داده‌شده است، درواقع می‌تواند هر صفحه دلخواهی در وسط صفحه نیز باشد.

[1] Classical Plate Theory(CPT)
[2] Mindlin or First-order Shear Deformation Theory(FSDT)
[3] Higher-order Shear Deformation Theory(HSDT)
[4] Transverse normal



شکل ۲-۶ وضعیت قبل و بعد از تغییر شکل لبه‌ی ورق با فرضیات کیرشهف

میدان جابجایی در تئوری کلاسیک عبارت است از:

$$
\begin{aligned}
u(x,y,z,t) &= u_0(x,y,t) - z\frac{\partial w_0(x,y,t)}{\partial x} \\
v(x,y,z,t) &= v_0(x,y,t) - z\frac{\partial w_0(x,y,t)}{\partial y} \\
w(x,y,z,t) &= w_0(x,y,t)
\end{aligned}
\qquad (۱۸-۲)
$$

(u_0,v_0,w_0) جابجایی نقاط صفحه میانی در سه جهت دستگاه مختصات هستند.

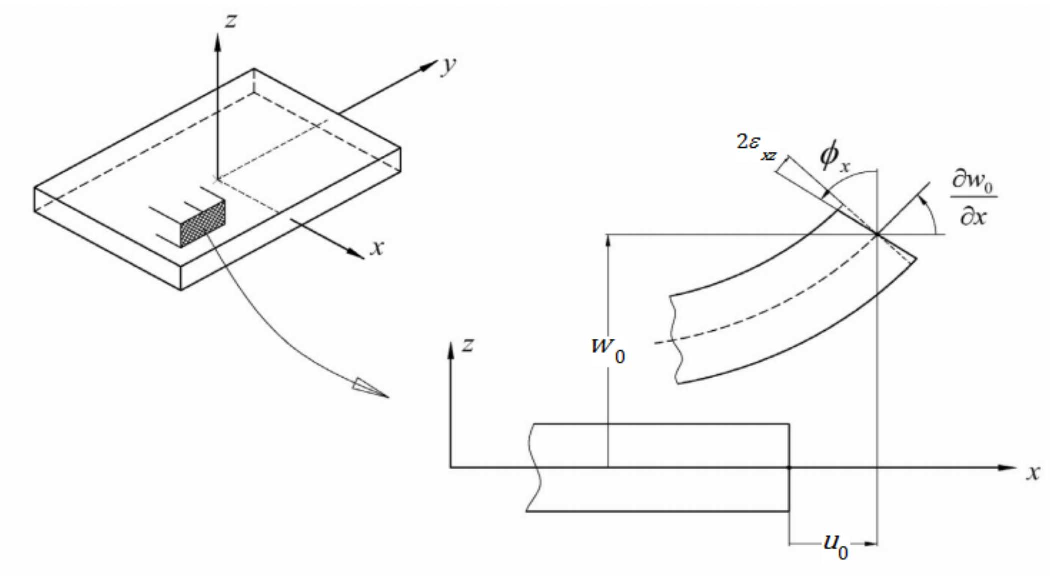
۱-۸-۲ تئوری تغییر شکل‌های برشی مرتبه اول ورق (میندلین)

فرض‌های ورق کلاسیک، برای ورق میندلین نیز صادق است به‌جز اینکه مقاطع مسطح عمود بر صفحه میانی پس از تغییر شکل نیز مسطح باقی می‌مانند، ولی ممکن است بر صفحه میانی ورق عمود نباشند. به‌عبارت‌دیگر جابجایی در جهات x و y تابعی خطی از مختصات ضخامت (z) خواهد بود. ازاین‌رو، این تئوری را تئوری تغییر شکل‌های برشی مرتبه اول گویند. تفاوت این تئوری با تئوری ورق کلاسیک منجر به تفاوت در جواب‌های حاصل از این تئوری‌ها نظیر تغییر شکل‌ها، فرکانس‌های ارتعاشی و بارهای کمانش می‌شود. این تفاوت بدین‌صورت است که تئوری ورق کلاسیک تغییر شکل‌ها را کمتر از تئوری مرتبه اول به‌دست می‌دهد، درحالی‌که فرکانس‌ها و بارهای کمانش را بیشتر از تئوری مرتبه اول تخمین می‌زند [۴]. این اختلاف در

نسبت ضخامت (نسبت ضخامت به ابعاد صفحه) بالا، بیشتر نمایان می‌شود. بنابراین بهتر است که برای ورق-های نسبتاً ضخیم از تئوری مرتبه اول استفاده شود با توجه به فرضیات مطرح‌شده در بالا و با توجه به (شکل ۱-۷)، میدان جابجایی تئوری مرتبه اول را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t) &= u_0(x,y,t) - z\phi_x(x,y,t) \\ v(x,y,z,t) &= v_0(x,y,t) - z\phi_y(x,y,t) \\ w(x,y,z,t) &= w_0(x,y,t) \end{aligned} \tag{۱۹-۲}$$

با مقایسه این میدان جابجایی با میدان جابجایی ورق کلاسیک، می‌توان دریافت که چگونه از بین بردن قید عمود بودن باعث ظاهر شدن دو تابع مجهول ϕ_x و ϕ_y به مجموعه توابع مجهول شده است. درواقع توابع ϕ_x و ϕ_y همان چرخش صفحه نرمال حول محورهای y و x می‌باشند.



شکل ۲-۷ وضعیت قبل و بعد از تغییر شکل لبه‌ی ورق با فرضیات تئوری مرتبه اول

برای ورق نازک، توابع چرخش ϕ_x و ϕ_y به مقدار شیب صفحه میانی میل می‌کنند:

$$\phi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x}, \phi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} \tag{۲۰-۲}$$

کرنش‌های ورق برحسب میدان جابجایی مفروض را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

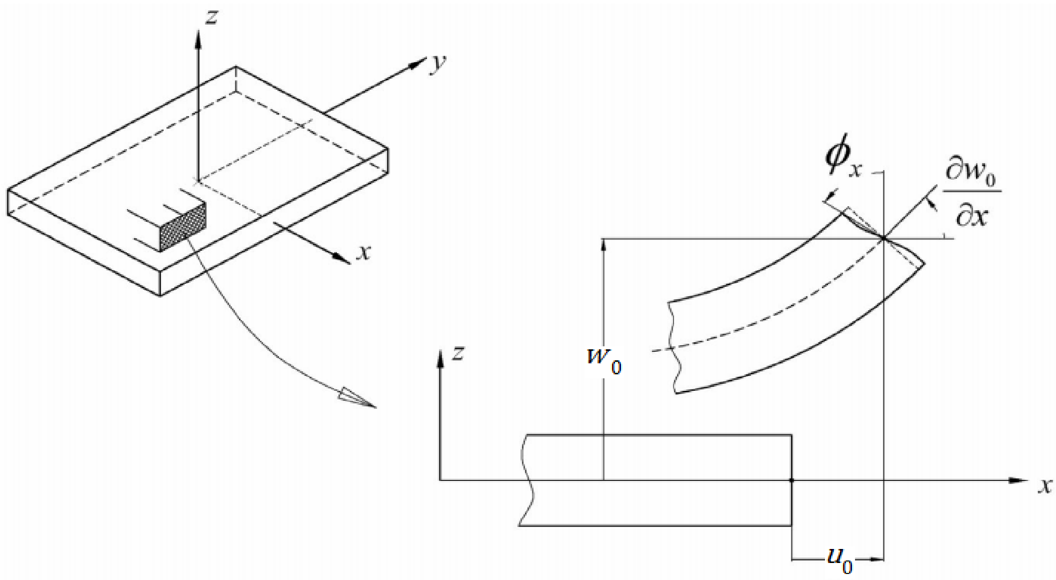
$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u_0}{\partial x}-z\frac{\partial \phi_x}{\partial x},\varepsilon_{yy}=\frac{\partial v_0}{\partial y}-z\frac{\partial \phi_y}{\partial y},\varepsilon_{zz}=0,\gamma_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial x}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y}+\frac{\partial \phi_y}{\partial x}\right)$$
$$\gamma_{xz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}-\phi_x\right),\gamma_{yz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}-\phi_y\right) \quad (۲۱-۲)$$

همان‌گونه که در روابط اخیر مشاهده می‌شود، کرنش‌های برشی γ_{xz} و γ_{yz} مستقل از z هستند و این بیانگر وجود تنش‌های برشی غیر صفر در سطوح آزاد ورق $z=\pm\frac{h}{2}$ است که در حقیقت می‌بایست در این سطوح برابر صفر باشد. جهت جبران این خطا، اعمال ضریب تصحیح برشی[1] بر نیروهای برشی توسط میندلین پیشنهاد شد.

۱-۸-۳ تئوری تغییر شکل‌های برشی مرتبه بالاتر

در حالت کلی بسط میدان جابجایی برحسب مختصات ضخامت (z) تا هر درجه دلخواهی امکان‌پذیر است. بااین‌وجود به علت پیچیدگی‌های جبری و مشکلات محاسباتی که در تئوری‌های مرتبه بالا وجود دارد، عملاً استفاده از تئوری‌های بالاتر از مرتبه سوم توصیه نشده است. دلیل اینکه از میدان جابجایی درجه سوم استفاده می‌شود این است که کرنش‌های برشی عرضی (γ_{xz} و γ_{yz}) و تنش‌های برشی عرضی (τ_{xz} و τ_{yz}) از درجه دوم خواهد بود و می‌توان این کرنش‌ها و تنش‌ها در سطوح آزاد بالا و پایین صفحه صفر کرد. لذا دیگر به ضریب تصحیح برشی که در تئوری مرتبه اول مطرح شد، نیازی نیست عدم نیاز به تئوری‌های بالاتر از مرتبه ۳ را می‌توان از حل سه‌بعدی میدان نیز نتیجه گرفت. این مطلب در مرجع [۵]. یافت می‌شود. در این مرجع که از روش ریلی-ریتز[2] برای بررسی ارتعاشات ورق استفاده‌شده است، نشان داده‌شده که افزایش درجه z بیش از ۳، تأثیری در همگرایی فرکانس‌های به‌دست‌آمده ندارد. تئوری‌های مرتبه سوم یا بالاتر از آن با توجه به فرض‌های اولیه‌شان ممکن است میدان‌های جابجایی متفاوتی داشته باشند. اما در این پایان‌نامه تنها یک نوع تئوری مرتبه سوم که به تئوری مرتبه سوم ردی[3] معروف است، ذکر می‌شود.

[1] Shear correction factor
[2] Rayleigh-Ritz
[3] Reddy



شکل ۲-۸ وضعیت قبل و بعد از تغییر شکل لبه‌ی ورق با فرضیات تئوری مرتبه سوم و بالاتر

تئوری مرتبه سوم ردی، میدان جابجایی را به‌صورت زیر فرض می‌کند:

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t) &= u_0(x,y,t) + z\varphi_x(x,y,t) - \alpha z^3(\varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}) \\ v(x,y,z,t) &= v_0(x,y,t) + z\varphi_y(x,y,t) - \alpha z^3(\varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}) \\ w(x,y,z,t) &= w_0(x,y,t) \end{aligned} \tag{۲-۲۲}$$

$\alpha = 4/(3h^2)$ می‌باشد و با صفر قرار دادن آن، تئوری مرتبه اول حاصل می‌شود. این میدان جابجایی به‌گونه‌ای انتخاب‌شده است که خودبه‌خود شرط صفر بودن تنش‌های برشی عرضی را در سطوح آزاد بالا و پایین ورق ارضاء می‌کند.

$$\tau_{xz}(x,y,\pm\frac{h}{2}) = \tau_{yz}(x,y,\pm\frac{h}{2}) = 0 \tag{۲-۲۳}$$

علاوه بر سادگی ذاتی و هزینه‌ی محاسباتی پایین، تئوری ورق مرتبه اول اغلب یک توصیف با دقت کافی از پاسخ‌های عمومی (مانند خیز، بار کمانشی و فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات) برای ورق‌های نازک فراهم می‌آورد.

۱-۹- مرور مقالات

لیزا[1] [۶] ارتعاشات خطی ورق‌های دایره‌ای و حلقوی را به‌طور جامع مورد بررسی و مطالعه قرار داد. وی از تئوری کلاسیک برای به‌دست آوردن معادلات و از بسط فوریه عمومی و توابع بسل برای حل معادلات استفاده کرد. روبرتسون[2] [۷] ارتعاش اجباری ورق مدوّر ویسکوالاستیک را با به‌کارگیری روش ویلیامز (الگوریتم فاکتورگیری عددی) و با در نظر گرفتن اثر چرخش‌ها و اثر برشی بررسی کردند. کونگ و پاو[3] [۸] ارتعاشات خمشی غیرخطی ورق دایروی الاستیک، با شرایط مرزی گیردار را با استفاده از روش گالرکین و با در نظر گرفتن یک جمله از بسط، مورد مطالعه قرار دادند و سپس نتایج تحلیلی خود را با نتایج آزمایشگاهی مقایسه کردند. هیرانو و اکازاکی[4] [۹] ارتعاشات ورق‌های دایره‌ای با داشتن شرایط مرزی قسمتی ساده یا قسمتی گیردار را بررسی کردند. آنها ادغام شرایط قیود برای جابجایی‌های ورق بر محیط خود را با استفاده از روش باقیمانده وزنی فرمول‌بندی کردند و محاسبات عددی را برای سه نمونه انجام دادند: ورق دایره‌ای گیردار بر روی بخشی از مرز و ساده در بخش باقیمانده؛ بخشی تکیه‌گاه ساده و بخش دیگر آزاد؛ بخشی گیردار و بخشی آزاد. در انتها برخی مقادیر تجربی برای لبه گیردار-آزاد را ارائه دادند. آلوار و ناس[5] [۱۰] پاسخ دینامیکی غیرخطی ورق‌های دایروی تحت بارهای گذرا را بررسی نمودند. آنها چند جمله‌ای‌های چبی‌چف برای حرکت‌های با دامنه‌ی زیاد تحت بارهای گذرا با در نظر گرفتن میرایی و نامیرایی استفاده کردند. ناگایا[6] [۱۱] ارتعاشات خطی ورق مدور ویسکوالاستیک با مرزهای داخلی دایره‌ای خارج از مرکز را با استفاده از تئوری کلاسیک برای شرایط مرزی مختلف به کمک روش عددی مطالعه کرد. یامادا و تاناکا[7] [۱۲] ارتعاش آزاد یک ورق دایره‌ای که در امتداد چند بخش شعاعی مقید شده است را بررسی کردند. با در نظر گرفتن نیروهای عکس‌العمل بر چند بخش به‌عنوان بارهای هارمونیک نامعلوم، پاسخ ثابت صفحه به این

[1] Leissa
[2] Robertson
[3] Kung and Pao
[4] Hirano and Okazaki
[5] Alwar and Nath
[6] Nagaya
[7] Yamada and Tanaka

بارها را با استفاده از تابع گرین بیان کردند. بیلی و چن[1] [۱۳] مدهای طبیعی ورق مدور ویسکوالاستیک خطی را با تعمیم تئوری خمش کلاسیک ورق‌های نازک و در نظر گرفتن اثر اتلاف مکانیکی و چرخش بدون در نظر گرفتن اثر برش را به‌دست آوردند. هانگ و والکر[2] [۱۴] به تحلیل محاسباتی ارتعاشات غیرخطی ورق مدور الاستیک لولا شده، با جرم صلب متمرکز برای حالت‌هایی که لولا متحرک و غیرقابل حرکت است، پرداختند. معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی با حذف متغیر زمانی به‌وسیله روش میانگین زمانی[3] کانترویچ به معادله دیفرانسیل غیرخطی معمولی تبدیل و با استفاده از روش تکرار نیوتنی، حل‌های پاسخ را به‌دست آوردند. سدرباوم و ابودی[4] [۱۵] پاسخ دینامیکی ورق‌های چندلایه تحت بار ضربه‌ای را بررسی کردند. آنها با استفاده از مدل ویسکوالاستیک بولتزمن و با استفاده از روش تحلیلی تبدیل فوریه در محدوده‌ی فرکانسی تحلیل را انجام دادند. تئوری ورق مورد استفاده آنها تئوری برشی مرتبه اول بود. سیواکوماران[5] [۱۶] تحلیل ارتعاشات آزاد ورق‌های کامپوزیتی نامتقارن دایره‌ای و حلقوی با شرایط مرزی آزاد در تمام لبه‌ها را مطالعه نمود و برای به‌دست آوردن فرکانس‌های طبیعی از روش ریلی ریتز استفاده کرد. خدیر[6] و ردی [۱۷] حل دقیق پاسخ گذرای ورق چندلایه‌ی متقارن متعامد را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی بالا ورق-ها ارائه کردند. آنها با استفاده از روش تعامد مودها و تکنیک متغیرهای حالت، به بررسی پاسخ دینامیکی چندلایه‌ی متقارن متعامد پرداختند. آنها جواب‌های دقیق حل را برای ورق‌های مستطیلی با تکیه‌گاه ساده با بارهای مختلف با حل‌های ریتز-میندلین و کلاسیک مقایسه کردند. وینسل[7] [۱۸] با مرور کلی بر کارهای انجام شده برای ورق توپر و حلقوی الاستیک بر اساس تئوری برشی و کلاسیک ارائه کرد. وی اثر شرایط مرزی، خواص مکانیکی و ابعاد هندسی ورق بر فرکانس طبیعی را بررسی نمود. هادیان و نایفه [۱۹] با استفاده از معادلات فن-کارمن در مختصات قطبی و استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه برای به‌دست آوردن معادلات حرکت، پاسخ مودهای متقارن ورق‌های مدوّر را با در نظر گرفتن اثر میرایی بررسی کردند.

[1] Bailey and Chen
[2] Huang and Walker
[3] Time-averaging
[4] Cederbaum and Aboudi
[5] Sivakumaran
[6] Khdeir
[7] Weintsel

سدربام و دراوشی[1] [۲۰] پایداری ورق‌های مدور ویسکوالاستیک با هندسه‌ی غیرخطی که در معرض بار شعاعی و ممان خمشی در لبه‌ها بودند را بررسی کردند. آنها از روش عددی رانج کوتاه مرتبه چهار برای حل معادلات استفاده کردند. ابراهیمی و نائی [۲۱] ارتعاشات غیرخطی متقارن با دامنه زیاد یک ورق الاستیک دایره‌ای شکل با یک جرم صلب متمرکز برای شرایط مرزی مختلف با استفاده از روش اجزاء محدود را بررسی کردند. انواع تکیه‌گاه‌های مفصلی غیرقابل حرکت، مفصلی متحرک، گیردار، تکیه‌گاه‌های الاستیک پیچشی، فنردار و اثر ضریب الاستیک تکیه‌گاه‌ها روی پاسخ سیستم را ارائه نمودند. همچنین تحلیل ارتعاشات آزاد و ارتعاشات اجباری سیستم فوق تحت بار سینوسی برای انواع نسبت‌های شعاع و نسبت جرم‌های جرم را انجام دادند. گوپتا و انصاری[2] [۲۲] ارتعاشات نامتقارن صفحات دایره‌ای ناهمسانگرد قطبی ضخامت متغیر خطی در معرض نیروی هیدرواستاتیکی درون صفحه‌ای بر پایه تئوری کلاسیک بررسی و حل تقریبی مسأله را از روش ریلی ریتز به‌دست آوردند. رومانلی[3] و همکاران [۲۳] ارتعاش عرضی ورق حلقوی الاستیک با شرایط مرزی میانی (تکیه‌گاه‌های میانی در ورق) و لبه‌ی خارجی آزاد را بررسی نمودند. آنها با استفاده از تئوری کلاسیک ورق‌ها و استفاده از روش تربیع دیفرانسیلی فرکانس‌های بنیادی ورق را به‌دست آوردند. امابیلی و کواک[4] [۲۴] امواج سطح آزاد بر ارتعاشات آزاد ورق‌های دایره‌ای بر بستر سطح سیال آزاد را مطالعه کردند. آنها حل را با استفاده از تکنیک اغتشاشات و تبدیل هنکل به‌دست آوردند. گوپتا و انصاری [۲۵] ارتعاشات نامتقارن ورق‌های مدور ناهمسانگرد قطبی ضخامت متغیر خطی بر بستر الاستیک (نوع وینکلر) بر پایه تئوری کلاسیک بحث کردند. از روش ریتز برای به‌دست آوردن فرکانس‌های طبیعی استفاده کرده و نتایج را با روش اجزاء محدود مقایسه نمودند. یئو و لی[5] [۲۶] ارتعاشات نامتقارن غیرخطی صفحه مدور گیردار تحت تحریک هارمونیک را با استفاده از تئوری کلاسیک بررسی نمودند. وانگ و چن [۲۷] تحلیل میرایی و ارتعاشی صفحه حلقوی کامپوزیتی سه لایه با لایه میانی ویسکوالاستیک را به روش اجزاء محدود بررسی کردند و نتایج را برای ورق‌های حلقوی کامپوزیتی نامتقارن و متقارن ارائه کردند. صالحی و آقایی [۲۸] رهایش دینامیکی با

[1] Drawshi
[2] Gupta and Ansari
[3] Romanelli
[4] Amabili and Kwak
[5] Yeo and Lee

تغییر شکل‌های بزرگ ورق‌های مدور ویسکوالاستیک نامتقارن با در نظر گرفتن برش عرضی و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم و با فرض مدل جامد استاندارد خطی را ارائه نمودند و معادلات غیرخطی به‌دست‌آمده را با ترکیب روش رهایش پویا[1] و تفاضل محدود حل کردند. پراکاش و گاناپاتی[2] [۲۹] ویژگی-های ارتعاش آزاد نامتقارن و پایداری ترموالاستیک ورق‌های دایره‌ای هدفمند[3] را با استفاده از روش اجزاء محدود بررسی کردند. آنها میدان دما را که دارای توزیع یکنواخت روی سطح ورق و در راستای ضخامت متغیر فرض شده است در نظر گرفتند. اللهوردی زاده و همکاران [۳۰] روابط حاکم بر ارتعاشات غیرخطی متقارن محوری ورق‌های نازک دایروی هدفمند را بر اساس معادلات دینامیکی فن–کارمن، فرمول‌بندی کردند و اثرات دامنه ارتعاش و کسر حجمی را بر تنش اعمالی در ورق بررسی کردند. آنها از تئوری کلاسیک و حل عددی برای به‌دست آوردن معادلات و حل استفاده کردند. اشماتوف [۳۱] ارتعاشات غیرخطی ورق‌های ویسکوالاستیک را بر اساس تئوری تیموشنکو اصلاح‌شده بررسی کرد. وی معادله‌ی غیرخطی به‌دست‌آمده را به روش بابنوف–گالرکین و روش عددی بر پایه‌ی قاعده‌ی تربیع حل کرد و در انتها، تأثیر ویسکوالاستیسیته و ناهمگنی مواد بر ارتعاشات ورق را نشان داد. دونگ[4] [۳۲] ارتعاشات آزاد سه‌بعدی صفحات حلقوی هدفمند با شرایط مرزی مختلف را با استفاده از روش چبی‌چف–ریتز مطالعه کرد و همگرایی روش چبی‌چف–ریتز بررسی گردید و نتایج را با سایر مراجع مقایسه کرد. گانس و ردی[5] [۳۳] تحلیل غیرخطی هندسی ورق‌های مدور هدفمند در معرض بارهای مکانیکی و حرارتی را انجام دادند. آنها خواص مواد مؤثر را به‌صورت محلی، با استفاده از روش یکسان‌سازی[6] که بر اساس رویه موری–تاناکا است ارزیابی نمودند. سعیدی و آتشی‌پور [۳۴] حل تحلیلی ارتعاشات آزاد ورق‌های ضخیم مستطیلی همسانگرد عرضی بر اساس تئوری برشی مرتبه اول را انجام دادند و فرمول‌بندی جدیدی از معادلات حرکت ورق‌های همسانگرد عرضی بر پایه تئوری برشی مرتبه

[1] Dynamic Relaxation (DR)
[2] Prakash and Ganapathi
[3] Functionaly Graded Materials (FGM)
[4] Dong
[5] Gunes and Reddy
[6] Homogenization

اول را ارائه دادند و برای حل معادلات، از سری فوریه استفاده کردند. ویسواناتان[1] و همکاران [۳۵] ارتعاشات آزاد نامتقارن صفحات مدور حلقوی با استفاده از تابع تقریبی اسپیلاین[2] را بررسی کردند. معادلات حاکم شامل اثرات تغییر شکل برشی و اینرسی دورانی است. آنها دستگاه معادلات دیفرانسیل کوپل برحسب توابع جابجایی و توابع چرخشی به‌دست آوردند و این توابع را با استفاده از توابع اسپیلاین نوع بیکلی[3] با مرتبه مناسب تقریب زدند. آسیه و الطاهر[4] [۳۶ و ۳۷] محاسبه‌ی مدل اجزاء محدود با قابلیت شبیه‌سازی پاسخ ضربه‌ی بدنه‌های ویسوالاستیک را ارائه دادند. روش حساب تغییرات برای نوشتن معادلات حرکت و معادلات بنیادی که به فرم انتگرالی بیان‌شده بودند، بکار گرفته شد. همچنین مدل ویچرت برای شبیه‌سازی میرایی رفتار ویسکوالاستیک ماده بکار گرفته شد. بختیاری و نظری [۳۸] ارتعاشات غیرخطی ورق یکسر گیردار همسانگرد با لایه‌های ویسکوالاستیک را بررسی کردند. بر اساس هندسه‌ی غیرخطی فن-کارمن و با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه و تفاضل محدود، معادلات حرکت غیرخطی بی‌بعد شده را تحلیل و حل نمودند و از روش ریتز برای به‌دست آوردن شکل مودهای ارتعاش عرضی ورق استفاده کردند. گوپتا و کومار[5] [۳۹] ارتعاشات آزاد خطی ورق دایروی ناهمگن ویسکوالاستیک (مدل کلوین-ویت) که ضخامت آن در جهت شعاع به‌صورت خطی تغییر می‌کند و در معرض یک توزیع دمای خطی در این جهت می‌باشد را با استفاده از تئوری کلاسیک و به‌کمک روش تقریبی ریلی ریتز بررسی کردند. فلاحتگر و صالحی [۴۰] با استفاده از روش رهایش پویا و تفاضل محدود به مطالعه رفتار خمشی قطاع حلقوی میندلین حاوی هندسه‌ی غیرخطی تحت فشار جانبی یکنواخت با قیود لبه‌ای گیردار و لولا پرداختند. معصومی و همکاران [۴۱] تحلیل چند مقیاسی ورق‌های کامپوزیتی چندلایه ویسکوالاستیک-ویسکوپلاستیک را با استفاده از روش تربیع دیفرانسیلی تعمیم‌یافته[6] بررسی کردند. آنها رفتار ویسکوالاستیکی ماتریس را با استفاده از اصل برهم‌نهی بولتزمن و کامپلیانس خزش را با استفاده از سری پرونی مدل کردند و برای توصیف رفتار ویسکوپلاستیک ماتریس از

[1] Viswanathan
[2] Spline
[3] Bickley
[4] Assie and Eltaher
[5] Gupta and Kumar
[6] Gneralized Differential Quadrature

مدل فانکشنال زاپاس-کریسمن[1] استفاده نمودند. تاریوردیلو[2] و همکاران [۴۲] جرم اضافه شده و فرکانس‌ها را برای ارتعاش آزاد نامتقارن دستگاه کوپل ازجمله ورق مدور گیردار در تماس با سیال بررسی کردند. آنها با توجه به نوسانات کوچک ناشی از ارتعاش ورق در سیال غیر لزج و تراکم ناپذیر، از تابع پتانسیل سرعت برای توصیف حرکت سیال استفاده کردند. جلالی و اسماعیل زاده خادم [۴۳] ارتعاشات غیرخطی و پایداری دینامیکی یک میکرو ورق مربعی ویسکوالاستیک (مدل کلوین-ویت) کامپوزیتی تقویت‌شده با نانولوله کربنی را تحت بار الکتروستاتیکی را مورد بررسی قرار دادند. معادلات حرکت غیرخطی میکرو ورق با استفاده از روش نیوتن و تئوری فن-کارمن استخراج و با به‌کارگیری ترکیبی از روش گالرکین و تئوری مقیاس چندگانه معادله‌ها را حل کردند. امینی و همکاران [۴۴] به بررسی اثرات غیرخطی هندسی بر تحلیل ارتعاشات آزاد و اجباری ورق هدفمند حلقوی نسبتاً ضخیم پرداختند. آنها از تغییرات خواص مواد در راستای ضخامت بر اساس توزیع نمایی و از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول ورق و رابطه فن-کارمن استفاده کردند و همچنین تحلیل ارتعاش آزاد و اجباری حالت پایدار را بررسی نمودند و نتایج را برای ارتعاشات خطی و غیرخطی صفحه حلقوی ایزوتروپیک با دیگر منابع آوردند. خلفی و روس[3] [۴۵] برای به‌دست آوردن پاسخ گذرای ورق مستطیلی لایه‌ای ویسکوالاستیک، هسته‌ی ویسکوالاستیک را به‌صورت سری پرونی مدل کردند. آنها معادله‌ی حرکت را از معادله لاگرانژ به‌دست آوردند؛ همچنین معادله حرکت را با استفاده از تبدیل فوریه حل کردند. آنها تنها برش عرضی را مدنظر قرار دادند و از تنش‌های نرمال نیز صرف‌نظر کردند. شرعیات و همکاران [۴۶] ارتعاشات آزاد ورق مدور ویسکوالاستیک ضخامت متغیر از ماده‌ی ناهمگن با بستر الاستیک در لبه‌ی ورق را بررسی کردند. در این تحقیق فرض شد خواص ویسکوالاستیک ورق در جهت ضخامت و شعاع متغیر است. آنها معادلات به‌دست‌آمده را به‌وسیله‌ی سری‌های توانی حل کردند. لال و آلاوات[4] [۴۷] نتایج عددی و تحلیلی برای ارتعاشات متقارن ورق‌های مدور هدفمند در معرض بار درون صفحه‌ای یکنواخت

[1] Zapas–Crissman
[2] Tariverdilo
[3] Khalfi and Ross
[4] Lal and Ahlawat

را بر اساس تئوری کلاسیک ارائه دادند. از روش تبدیل دیفرانسیل[1] برای حل معادله دیفرانسیل حرکت صفحات مدور با شرایط مرزی گیردار و ساده استفاده کردند. آنها اثر شاخص کسر حجمی و پارامتر نیروی درون صفحه‌ای بر سه فرکانس اول را مورد بررسی قرار دادند. رضایی و جهانگیری [۴۸] ارتعاشات غیرخطی ورق‌های ساندویچی تابعی با بستر پاسترناک غیرخطی که همزمان تحت نیرویی هارمونیک عرضی و استاتیکی درون صفحه‌ای قرار دارد را مطالعه کردند. بر اساس تئوری اصلاح‌شده تغییر شکل برشی مرتبه اول ورق‌ها و با به‌کارگیری تئوری فن-کارمن و اصل همیلتون، معادلات غیرخطی حاکم بر حرکت ورق را به‌دست آوردند و با اعمال روش گالرکین، معادلات حاکم را حل کردند. قاهری و نثیر [۴۹] ارتعاشات اجباری غیرخطی نامتقارن ورق‌های نازک دایره‌ای از جنس مواد هدفمند را با استفاده از تئوری کلاسیک ورق‌ها و روش اغتشاشات مورد بررسی قرار دادند. امابیلی[2] [۵۰] ارتعاشات غیرخطی ورق مستطیلی ویسکوالاستیک (مدل کلوین-ویت) را با استفاده از روش عددی حل کرد. وی با فرض نازک بودن ورق از تغییر شکل برشی و اینرسی دورانی صرف‌نظر کرده است.

[1] Differential Transform
[2] Amabili

جدول ۱-۱ خلاصه ای بر مطالعات انجام شده

نویسنده	سال	سازه	جنس	سینماتیک	نوع بارگذاری	تئوری	نوع تحلیل	روش حل	مرجع
لیزا	۱۹۶۹	دایروی و حلقوی	الاستیک	خطی	-	کلاسیک	ارتعاشات آزاد	بسل	[۶]
رویرتسون	۱۹۷۱	دایروی	ویسکوالاستیک	خطی	بارگذاری متقارن	میندلین	ارتعاشات اجباری	ویلیامز	[۷]
کونگ	۱۹۷۲	دایروی	الاستیک	غیرخطی	یکنواخت	کلاسیک	ارتعاشات	ریتز-گالرکین	[۸]
هیرانو	۱۹۷۶	دایروی	الاستیک	خطی	-	کلاسیک	ارتعاشات آزاد	باقیمانده وزنی	[۹]
آلوار	۱۹۷۷	دایروی	الاستیک	خطی	دینامیکی (پله)	کلاسیک	پاسخ دینامیکی	چند جمله ای چبی چف	[۱۰]
ناگایا	۱۹۷۹	دایروی	ویسکوالاستیک	خطی	-	کلاسیک	ارتعاشات	عددی و تبدیل لاپلاس	[۱۱]
یامادا	۱۹۸۳	دایروی	الاستیک	خطی	هارمونیک	کلاسیک	ارتعاشات آزاد	تابع گرین	[۱۲]
بیلی	۱۹۸۷	دایروی	ویسکوالاستیک	خطی	-	کلاسیک	مدهای طبیعی	حل عمومی (بسل)	[۱۳]
هانگ	۱۹۸۸	دایروی	الاستیک	غیرخطی	-	کلاسیک	ارتعاشات	تکرار نیوتنی و میانگین کانترویچ	[۱۴]
سدرباوم	۱۹۸۹	مربعی	کامپوزیت	خطی	ضربه	برشی مرتبه اول	پاسخ دینامیکی	تبدیل فوریه	[۱۵]
سیواکوماران	۱۹۸۹	دایروی و حلقوی	کامپوزیت	خطی	-	کلاسیک	ارتعاشات آزاد	ریلی-ریتز	[۱۶]
خدیر	۱۹۸۹	مستطیلی	کامپوزیت	خطی	دینامیکی	برشی مرتبه بالا	پاسخ دینامیکی	تعامد مودها	[۱۷]
وینتسل	۱۹۸۹	دایروی و حلقوی	الاستیک	-	-	کلاسیک	ارتعاشات آزاد	-	[۱۸]
هادیان	۱۹۹۰	دایروی	الاستیک	غیر خطی فن-کارمن	درون صفحه ای	کلاسیک	پاسخ مودهای متقارن	مقیاس چندگانه	[۱۹]
سدرباوم	۱۹۹۴	دایروی	ویسکوالاستیک	غیرخطی	بار شعاعی و ممان خمشی	میندلین	پایداری	رانج کوتاه	[۲۰]

ادامه جدول ۱-۱

ابراهیمی	۱۳۷۴	دایروی	الاستیک	غیرخطی فن-کارمن	سینوسی	کلاسیک	ارتعاشات آزاد و اجباری	اجزاء محدود	[۲۱]
گوپتا	۱۹۹۸	دایروی	ناهمسانگرد	غیرخطی	هیدرواستاتیکی	کلاسیک	پایداری و ارتعاشات	ریلی-ریتز	[۲۲]
رومانلی	۱۹۹۸	حلقوی	الاستیک	خطی	-	کلاسیک	ارتعاشات آزاد	تربیع دیفرانسیلی	[۲۳]
امابیلی	۱۹۹۹	دایروی	الاستیک	خطی	-	کلاسیک	ارتعاشات	تبدیل هنکل	[۲۴]
گوپتا	۲۰۰۲	دایروی	ناهمسانگرد	غیرخطی	-	کلاسیک	ارتعاشات آزاد	ریلی-ریتز	[۲۵]
یئو	۲۰۰۲	دایروی	الاستیک	غیرخطی	تحریک هارمونیک	کلاسیک	ارتعاشات	مقیاس چندگانه	[۲۶]
وانگ	۲۰۰۲	حلقوی	کامپوزیتی	خطی	-	میندلین	ارتعاشات	اجزاء محدود	[۲۷]
صاحی	۲۰۰۵	دایروی	ویسکوالاستیک	غیرخطی	فشار یکنواخت	برشی مرتبه سوم	رهایش پویا	تفاضل محدود	[۲۸]
پراکاش	۲۰۰۶	دایروی	هدفمند	خطی	دمائی	میندلین	ارتعاشات آزاد و پایداری ترموالاستیک	اجزاء محدود	[۲۹]
الله وردی زاده	۲۰۰۶	دایروی	هدفمند	غیرخطی فن-کارمن	دینامیکی	کلاسیک	ارتعاشات اجباری	رانج کوتاه مرتبه چهار	[۳۰]
اشماتوف	۲۰۰۶	مستطیلی	ارتوتروپیک ویسکوالاستیک	غیرخطی	ثابت	تیموشنکو اصلاح شده	ارتعاشات غیرخطی	بابنوف-گالرکین	[۳۱]
دونگ	۲۰۰۸	حلقوی	هدفمند	خطی	-	میندلین	ارتعاشات آزاد	چبی چف-ریتز	[۳۲]
گانس	۲۰۰۸	دایروی	هدفمند	غیرخطی	مکانیکی و حرارتی	تئوری الاستیسیته	خمش نامتقارن	رویه موری-تاناکا	[۳۳]
سعیدی	۱۳۸۷	مستطیلی	همسانگرد عرضی	خطی	-	برشی مرتبه اول	ارتعاشات آزاد	سری فوریه	[۳۴]
ویسواناتان	۲۰۰۹	حلقوی	کامپوزیت	خطی	-	برشی مرتبه اول	ارتعاشات آزاد	اسپیلاین	[۳۵]
آسیه	۲۰۰۹	میله، صفحه	ویسکوالاستیک	-	ضربه	-	پاسخ	اجزاء محدود	[۳۶]
آسیه	۲۰۰۹	میله، صفحه	ویسکوالاستیک		تماس-ضربه	-	پاسخ	اجزاء محدود و نیومارک	[۳۷]

ادامه جدول ۱-۱

بختیاری	۲۰۰۹	مستطیلی	همسانگرد با لایه های ویسکوالاستیک	غیرخطی فن-کارمن	دینامیکی	کلاسیک	ارتعاشات غیرخطی	مقیاس چندگانه و تفاضل محدود	[۳۸]
گوپتا	۲۰۱۰	دایروی	ناهمگن ویسکوالاستیک	خطی	-	کلاسیک	ارتعاشات آزاد	ریلی-ریتز	[۳۹]
فلاحتگر	۲۰۱۱	قطاع حلقوی	کامپوزیت	غیرخطی	فشار جانبی	میندلین	خمش نامتقارن	رهایش پویا و تفاضل محدود	[۴۰]
معصومی	۲۰۱۲	مستطیلی	کامپوزیتی ویسکوالاستیک	-	یکنواخت	برشی مرتبه اول	مقیاس چندگانه	تربیع دیفرانسیلی تعمیم یافته	[۴۱]
تاریوردیلو	۲۰۱۲	دایروی	الاستیک	خطی	فشار سیال	کلاسیک	ارتعاشات آزاد	بسل	[۴۲]
جلالی	۱۳۹۱	میکرو ورق مربعی	ویسکوالاستیک کامپوزیتی	غیرخطی	الکتروستاتیکی	وون-کارمن	ارتعاشات غیرخطی و پایداری دینامیکی	گالرکین و مقیاس چندگانه	[۴۳]
امینی	۲۰۱۳	حلقوی	هدفمند	غیرخطی فن-کارمن	دینامیکی	برشی مرتبه اول	ارتعاشات آزاد و اجباری	فضا- حالت	[۴۴]
خلفی	۲۰۱۳	مستطیلی	ویسکوالاستیک	خطی	ضربه	کلاسیک	ارتعاشات گذرا	تبدیل فوریه	[۴۵]
شرعیات	۲۰۱۳	دایروی	ویسکوالاستیک	خطی	-	کلاسیک	ارتعاشات آزاد	سری توانی	[۴۶]
لال	۲۰۱۴	دایروی	هدفمند	خطی	درون صفحه ای	کلاسیک	ارتعاشات و کمانش	تبدیل دیفرانسیل	[۴۷]
رضایی	۱۳۹۳	مستطیلی	ساندویچی هدفمند	غیرخطی فن-کارمن	هارمونیک عرضی و استاتیکی درون صفحه ای	اصلاح شده برشی مرتبه اول	ارتعاشات غیرخطی	گالرکین	[۴۸]
قاهری	۱۳۹۳	دایروی	هدفمند	غیرخطی فن-کارمن	هارمونیک	کلاسیک	ارتعاشات اجباری	اغتشاشات	[۴۹]
امابیلی	۲۰۱۵	مستطیلی	ویسکوالاستیک	غیرخطی فن-کارمن	هارمونیک	-	ارتعاشات غیرخطی	اصل برهم نهی	[۵۰]

۱-۱۰- جمع‌بندی

در این فصل، ابتدا به معرفی مواد ویسکوالاستیک، رفتار و ویژگی‌های این مواد، معادلات بنیادین تنش-کرنش در شکل دیفرانسیلی و معرفی مدل‌های رئولوژیکی این مواد پرداخته شد. سپس انواع اجزای سازه‌ای معرفی شد. سپس به معرفی تئوری‌های متداول در بررسی ورق و درنهایت به مرور مقالات مرتبط با پایان‌نامه پرداخته شد. مرور مقالات نشان می‌دهد تحقیق‌های زیادی در زمینه ارتعاشات خطی و غیرخطی ورق‌های دایروی در حالت متقارن و نامتقارن، برای مواد در حالت الاستیک و FGM انجام شده است. برای ارتعاشات ورق‌های دایروی در حالت متقارن و نامتقارن برای مواد الاستیک و FGM با استفاده از تئوری‌های مختلف و روش‌های تحلیلی و عددی، مطالعات زیادی انجام شده است. از مطالعات انجام شده می‌توان نتیجه گرفت، در بیشتر مواردی که از تئوری کلاسیک استفاده نموده‌اند از روش تحلیلی برای حل بهره گرفته ولی تحقیقاتی که با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی انجام شده از روش عددی برای حل استفاده کرده‌اند. **در این پایان‌نامه، به‌صورت تحلیلی تقریبی به بررسی ارتعاشات آزاد و اجبای ورق مدور ویسکوالاستیک در حالت نامتقارن با خیز کوچک و استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول پرداخته می‌شود.**

فصل دوم

استخراج معادلات

۲-۱- مقدمه

در این فصل به استخراج معادلات حرکت ورق و قطاع الاستیک با در نظر گرفتن تغییر شکل‌های کوچک با استفاده از اصل همیلتون پرداخته خواهد شد. سپس با در نظر گرفتن رفتار ماده ویسکوالاستیک در برش و الاستیک در بالک، معادلات به‌دست‌آمده برای ماده‌ی ویسکوالاستیک تعمیم داده می‌شود. معادلات به‌دست آمده بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول خواهد بود و دارای فرضیات زیر است.

۱. ورق همگن و همسانگرد است؛

۲. خیز کوچک فرض شده و رابطه کرنش جابجایی خطی است؛

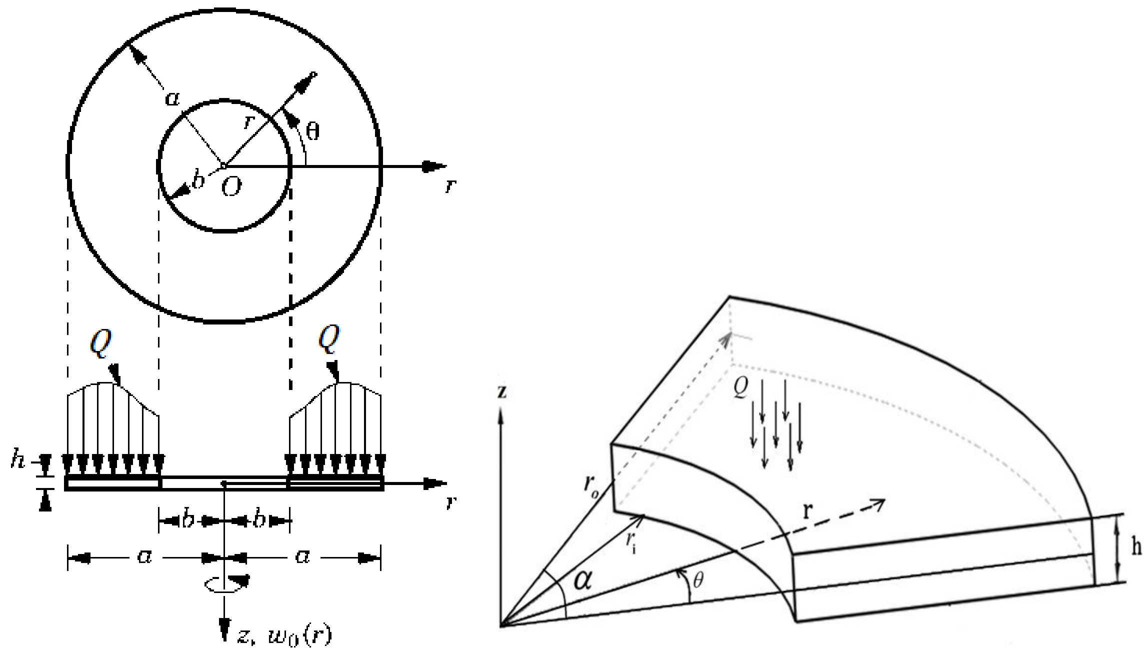
۳. جنس ورق، ویسکوالاستیک خطی در نظر گرفته می‌شود و رابطه تنش کرنش خطی است؛

۴. رفتار ماده در بالک الاستیک و در برش استاندارد است؛

۵. بار عرضی تابع مکان و زمان است؛

۲-۲- تعریف مسأله

مطابق شکل ۲-۱ ورق و قطاع حلقوی با شعاع داخلی r_i، شعاع خارجی r_o، ضخامت h و چگالی ρ مفروض است. ورق تحت بار عرضی دینامیکی بر واحد سطح قرار دارد که تابع مکان و زمان $Q(r,\theta,t)=f\,(X\,,\theta)g(t)$ می باشد. فرمول‌بندی مسأله بر اساس دستگاه مختصات استوانه‌ای (r,θ,z) بوده که در آن r جهت شعاع، θ زاویه‌ی چرخش حول محور z و جهت z نیز در راستای عمود بر سطح ورق و از سطح میانی می‌باشد.



شکل ۲-۱ هندسه و دستگاه مختصات ورق و قطاع حلقوی

بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، میدان جابجایی به‌صورت زیر در نظر گرفته‌شده است.

$$\begin{aligned} u(r,\theta,z,t) &= u_0(r,\theta,t) + zu_1(r,\theta,t) \\ v(r,\theta,z,t) &= v_0(r,\theta,t) + zv_1(r,\theta,t) \\ w(r,\theta,z,t) &= w_0(r,\theta,t) \end{aligned} \tag{۲-۱}$$

که در آن u، v و w سه مؤلفه‌ی جابجایی به ترتیب در راستای r، θ و z می‌باشند. u_0، v_0 و w_0 دارای بعد طول بوده و بیانگر جابجایی صفحه‌ی میانی بوده است. u_1، v_1 و توابعی بی‌بعدبوده و همانند u_0، v_0 و w_0 مجهول می‌باشند. رابطه‌ی کرنش جابجایی به‌صورت زیر است [۵۱].

$$\begin{aligned} &\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u_0}{\partial r} + \mathrm{z}\frac{\partial u_1}{\partial r}; \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{1}{r}\left(u_0 + zu_1\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{z}{r}\frac{\partial v_1}{\partial \theta}; \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ &\gamma_{\theta z} = \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial w_0}{\partial \theta}\right) + v_1; \gamma_{rz} = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial r} + u_1 \\ &\gamma_{r\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_0}{\partial \theta} + z\frac{\partial u_1}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial v_0}{\partial r} + z\frac{\partial v_1}{\partial r} \end{aligned} \tag{۲-۲}$$

بر اساس میدان کرنش فوق، روابط تنش-کرنش به‌صورت زیر بیان می‌شود [۵۱].

$$\sigma_r=(K-\frac{2G}{3})(\varepsilon_r+\varepsilon_\theta+\varepsilon_z)+2G\varepsilon_r;\sigma_\theta=(K-\frac{2G}{3})(\varepsilon_r+\varepsilon_\theta+\varepsilon_z)+2G\varepsilon_\theta$$
$$\sigma_z=(K-\frac{2G}{3})(\varepsilon_r+\varepsilon_\theta+\varepsilon_z)+2G\varepsilon_z;\tau_{rz}=G\gamma_{rz};\tau_{\theta z}=G\gamma_{\theta z};\tau_{r\theta}=G\gamma_{r\theta} \qquad (۲-۳)$$

که در این روابط K مدول بالک و G مدول برشی می‌باشد.

۲-۳- محاسبه‌ی انرژی کرنشی ورق

چگالی انرژی کرنشی به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۵۲]:

$$U^*=\frac{1}{2}(\sigma_r\varepsilon_r+\sigma_\theta\varepsilon_\theta+\sigma_z\varepsilon_z+\tau_{r\theta}\gamma_{r\theta}+\tau_{rz}\gamma_{rz}+\tau_{\theta z}\gamma_{\theta z}) \qquad (۲-۴)$$

تغییرات[1] چگالی انرژی کرنشی در شرایطی که رابطه تنش کرنش خطی است، عبارت است از:

$$\delta U^*=\sigma_r\delta\varepsilon_r+\sigma_\theta\delta\varepsilon_\theta+\sigma_z\delta\varepsilon_z+\tau_{r\theta}\delta\gamma_{r\theta}+\tau_{rz}\delta\gamma_{rz}+\tau_{\theta z}\delta\gamma_{\theta z} \qquad (۲-۵)$$

با جایگذاری مؤلفه‌های میدان کرنش (۲-۲) در (۲-۵) نتیجه می‌شود.

$$\delta U^*=\sigma_r\delta\left(\frac{\partial u_0}{\partial r}+\mathrm{z}\frac{\partial u_1}{\partial r}\right)+\sigma_\theta\delta\left(\frac{1}{r}\left(u_0+zu_1\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial v_0}{\partial\theta}+\frac{z}{r}\frac{\partial v_1}{\partial\theta}\right)+\tau_{rz}\delta\left(\frac{\partial w_0}{\partial r}+u_1\right)$$
$$+\tau_{r\theta}\delta\left(\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_0}{\partial\theta}+z\frac{\partial u_1}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial v_0}{\partial r}+z\frac{\partial v_1}{\partial r}\right)+\tau_{\theta z}\delta\left(\frac{1}{r}\left(\frac{\partial w_0}{\partial\theta}\right)+v_1\right) \qquad (۲-۶)$$

انرژی کرنشی ورق با انتگرال‌گیری چگالی انرژی کرنشی بر روی حجم ورق به‌دست می‌آید. المان حجم به‌صورت $dV=rdrd\theta dz$ بوده و در آن محدوده‌ی تغییرات مؤلفه‌های محورهای مختصات به‌صورت $r_i\le r\le r_o$، $0\le\theta\le 2\pi$ و $-h/2\le z\le h/2$ است.

$$\delta U=\int_{r_i}^{r_o}\int_0^{2\pi}(rN_r\delta\frac{\partial u_0}{\partial r}+rM_r\delta\frac{\partial u_1}{\partial r}+N_\theta\delta u_0+M_\theta\delta u_1+N_\theta\delta\frac{\partial v_0}{\partial\theta}+M_\theta\delta\frac{\partial v_1}{\partial\theta}+N_{r\theta}\delta\frac{\partial u_0}{\partial\theta}+rQ_r\delta u_1+$$
$$M_{r\theta}\delta\frac{\partial u_1}{\partial\theta}+rN_{r\theta}\delta\frac{\partial v_0}{\partial\theta}+rM_{r\theta}\delta\frac{\partial v_1}{\partial\theta}-N_{r\theta}\delta \mathrm{v}_0-M_{r\theta}\delta v_1+rQ_r\delta\frac{\partial w_0}{\partial r}+Q_\theta\delta\frac{\partial w_0}{\partial\theta}+rQ_z\delta v_1)drd\theta \qquad (۲-۷)$$

[1] Variation

که در رابطه اخیر N_r، N_θ، N_z، M_r، M_θ، $M_{r\theta}$، M_{rz}، $M_{\theta z}$، Q_θ، Q_r و $N_{r\theta}$ منتجه‌های تنش است که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{gathered}(N_r,N_\theta,\mathrm{N}_z)=\int_{-h/2}^{h/2}(\sigma_r,\sigma_\theta,\sigma_z)dz;(M_r,M_\theta)=\int_{-h/2}^{h/2}\mathrm{z}(\sigma_r,\sigma_\theta)dz;\\(M_{r\theta},M_{rz},M_{\theta z})=K_s\int_{-h/2}^{h/2}\mathrm{z}(\tau_{r\theta},\tau_{rz},\tau_{\theta z})dz;(Q_r,N_{r\theta},Q_\theta)=K_s\int_{-h/2}^{h/2}(\tau_{rz},\tau_{r\theta},\tau_{\theta z})dz\end{gathered} \tag{۸-۲}$$

۲-۴- محاسبه‌ی انرژی جنبشی ورق

چگالی انرژی جنبشی T^* به‌صورت زیر است [۵۳].

$$T^*=\frac{1}{2}\rho\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right) \tag{۹-۲}$$

با جایگذاری میدان جابجایی (۲-۱) در رابطه‌ی (۲-۹) و انتگرال‌گیری از آن بر روی حجم ورق، انرژی جنبشی T به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$T=\frac{1}{2}\rho\int_{r_i}^{r_o}\int_0^{2\pi}\left(h\left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial v_0}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial w_0}{\partial t}\right)^2\right)+\frac{h^3}{12}\left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial v_1}{\partial t}\right)^2\right)\right)rdrd\theta \tag{۱۰-۲}$$

۲-۵- کار نیروی خارجی

کار ناشی از تحریک عرضی Q که بر روی سطح ورق یعنی $z=\frac{h}{2}$ اعمال می‌شود به‌صورت زیر است [۵۳]:

$$w_Q=\int_0^{2\pi}\int_{r_i}^{r_o}rQ(r,\theta,t)W(r,\theta,z,t)drd\theta \tag{۱۱-۲}$$

۲-۶- تعیین معادلات حرکت با استفاده از اصل همیلتون

با استفاده از اصل هامیلتون در بازه‌ی زمانی (t_1,t_2) نتیجه می‌شود [۵۳]:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}Ldt=0;L=T-V+W_Q \tag{۱۲-۲}$$

با به‌کارگیری روابط (۲-۶) تا (۲-۱۲) معادله‌ی حرکت برحسب منتجه‌های تنش ورق الاستیک به‌صورت زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned}
&-\rho rh\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}-N_\theta+\frac{\partial}{\partial r}(rN_r)+\frac{\partial N_{r\theta}}{\partial\theta}=0\\
&-\rho r\frac{h^3}{12}\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}+\frac{\partial}{\partial r}(rM_r)-\mathrm{r}Q_r-M_\theta+\frac{\partial M_{r\theta}}{\partial\theta}=0\\
&-\rho rh\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}+\frac{\partial N_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial}{\partial r}(rN_{r\theta})+N_{r\theta}=0\\
&-\rho r\frac{h^3}{12}\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}+M_{r\theta}+\frac{\partial M_\theta}{\partial\theta}-rQ_\theta+\frac{\partial}{\partial r}(rM_{r\theta})=0\\
&-\rho rh\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}+\frac{\partial}{\partial r}(rQ_r)+\frac{\partial Q_\theta}{\partial\theta}-rQ(r,\theta,t)=0
\end{aligned} \tag{۲-۱۳}$$

با جایگذاری منتجه‌های تنش (۲-۸) در (۲-۱۳) معادلات حرکت برحسب جابجایی به‌صورت زیر است.

$$(K+\frac{4}{3}G)\left(r\frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2}+\frac{\partial u_0}{\partial r}-\frac{u_0}{r}\right)+\frac{G}{r}\frac{\partial^2 u_0}{\partial\theta^2}+(\frac{G}{3}+K)\frac{\partial^2 v_0}{\partial r\partial\theta}-\frac{1}{r}(\frac{7G}{3}+K)\frac{\partial v_0}{\partial\theta}-\rho r\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}=0 \tag{۲-۱۴-الف}$$

$$\begin{aligned}
&(K+\frac{4}{3}G)\frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial r}-\frac{u_1}{r^2}\right)+\frac{h^2G}{12r^2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial\theta^2}+\frac{h^2}{12r}(\frac{G}{3}+K)\frac{\partial^2 v_1}{\partial r\partial\theta}-K_sG(u_1+\frac{\partial w_0}{\partial r})\\
&-\frac{h^2}{12r^2}(\frac{7G}{3}+K)\frac{\partial v_0}{\partial\theta}-\frac{\rho h^2}{12}\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}=0
\end{aligned} \tag{۲-۱۴-ب}$$

$$\frac{1}{r}(K+\frac{4}{3}G)\frac{\partial^2 v_0}{\partial\theta^2}+G(r\frac{\partial^2 v_0}{\partial r^2}+\frac{\partial v_0}{\partial r}-\frac{v_0}{r})+(\frac{G}{3}+K)\frac{\partial^2 u_0}{\partial r\partial\theta}-\frac{1}{r}(\frac{7G}{3}+K)\frac{\partial u_0}{\partial\theta}-\rho r\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}=0 \tag{۲-۱۴-ج}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{h^2G}{12}\left(r\frac{\partial^2 v_1}{\partial r^2}+\frac{\partial v_1}{\partial r}-\frac{v_1}{r}\right)+(K+\frac{4}{3}G)\frac{h^2}{12r}\frac{\partial^2 v_1}{\partial\theta^2}+\frac{h^2}{12}(\frac{G}{3}+K)\frac{\partial^2 u_1}{\partial r\partial\theta}-\frac{h^2}{12r}(\frac{7G}{3}+K)\frac{\partial u_1}{\partial\theta}\\
&-K_sG(rv_1+\frac{\partial w_0}{\partial\theta})-\frac{\rho rh^2}{12}\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}=0
\end{aligned} \tag{۲-۱۴-د}$$

$$K_sG\frac{\partial v_1}{\partial\theta}+K_sG(r\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2}+\frac{\partial w_0}{\partial r})+K_sG(r\frac{\partial u_1}{\partial r}+u_1)+K_s\frac{G}{r}\frac{\partial^2 w_0}{\partial\theta^2}-rQ(r,\theta,t)-\rho r\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}=0 \tag{۲-۱۴-ه}$$

۲-۷- تعمیم معادلات الاستیک استخراج‌شده به ورق ویسکوالاستیک

همان‌گونه که در فصل اول بیان شد، مرسوم است جهت توصیف رفتار ماده‌ی ویسکوالاستیک یک سیستم، اثر مؤلفه‌ی برشی را از مؤلفه‌ی تغییر حجم خالص جدا کنند. زیرا بخش‌های برشی و حجمی تنش، رفتارهای رهایش متفاوتی را دنبال می‌کنند. در این پایان‌نامه رفتار ماده در بالک، الاستیک و در برش، ویسکوالاستیک در نظر گرفته می‌شود.

۲-۷-۱ اعمال مدل ویسکوالاستیک مدل جامد استاندارد خطی نوع اول

برای مدل‌سازی ویسکوالاستیک از مدل جامد استاندارد خطی نوع اول استفاده‌شده است. (شکل ۱-۴) و رابطه‌ی تنش و کرنش آن مطابق رابطه‌ی (۱-۱۴)(۲-۱۲) است. در این حالت اپراتورهای P_1 و Q_1 در رابطه-ی (۲-۷) (رابطه‌ی بین P_1، Q_1، P_2، Q_2، G و K) به‌صورت زیر تعریف می‌شوند [۱].

$$P_1 = (\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2}) + \frac{\tau}{G_1} D; Q_1 = 2(1 + \tau D) \qquad (۱۵\text{-}۲)$$

که $\tau = \eta / G_2$ زمان رهایش و D اپراتور مشتق زمانی ($D = \partial / \partial t$) می‌باشند. اپراتورهای P_2 و Q_2 نیز به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$P_2 = 1; Q_2 = 3K_0 \qquad (۱۶\text{-}۲)$$

K_0 مدول بالک می‌باشد. بنابراین رابطه K و G و اپراتورها به‌صورت زیر است.

$$G = \frac{1}{2}\frac{Q_1}{P_1} = \frac{(1 + \tau D)}{(\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2}) + \frac{\tau}{G_1} D}; K = \frac{1}{3}\frac{Q_2}{P_2} = K_0 \qquad (۱۷\text{-}۲)$$

متغیرهای G_0^* و G_1^* را می‌توان به‌صورت زیر تعریف کرد.

$$G_0^* = K(\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2}); G_1^* = \frac{K}{G_1} \qquad (۱۸\text{-}۲)$$

با اعمال اپراتورهای (۲-۱۵) و (۲-۱۶) و استفاده از رابطه‌ی (۲-۱۷) و (۲-۱۴)، معادلات حرکت ورق ویسکوالاستیک به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned} eq_1: & -3r^2\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\tau G_1^*\frac{\partial u_0}{\partial t}+G_0^*u_0)+K[\tau(4+3G_1^*)(r^2\frac{\partial^3 u_0}{\partial t\partial r^2}+r\frac{\partial^2 u_0}{\partial t\partial r}-\frac{\partial u_0}{\partial t})+r(1+3G_0^*)\frac{\partial^2 v_0}{\partial r\partial\theta} \\ & +r\tau(1+3G_1^*)\frac{\partial^3 v_0}{\partial t\partial r\partial\theta}-\frac{\partial}{\partial\theta}(\tau(3G_1^*+7)\frac{\partial v_0}{\partial t}+(3G_0^*+7)v_0)+(4+3G_0^*)(r^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2}+r\frac{\partial u_0}{\partial r}-u_0) \\ & +3\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(u_0+\tau\frac{\partial u_0}{\partial t})]=0 \end{aligned} \tag{۱۹-۲}$$

$$\begin{aligned} eq_2: & -3r^2h^2\rho(\tau G_1^*\frac{\partial^3 u_1}{\partial t^3}+G_0^*\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2})-K[\frac{\partial u_1}{\partial t}(\tau h^2(4+3G_1^*)+36K_s r^2)+3h^2(\frac{\partial^2 u_1}{\partial\theta^2}+\tau\frac{\partial^3 u_1}{\partial t\partial\theta^2}) \\ & -h^2(3G_0^*+7)(\frac{\partial v_1}{\partial\theta}+\tau\frac{\partial^2 v_1}{\partial t\partial\theta})+rh^2(4+3G_0^*)(\frac{\partial u_1}{\partial r}+r\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2})+h^2r\tau(4+3G_1^*)(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t\partial r}+r\frac{\partial^3 u_1}{\partial t\partial r^2}) \\ & 36K_s r^2(\frac{\partial w_0}{\partial r}+\tau\frac{\partial^2 w_0}{\partial t\partial r})-h^2u_1(4+3G_0^*)+h^2r\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}(v_1+3G_0^*v_1+3\tau\frac{\partial v_1}{\partial t})-36K_s r^2u_1]=0 \end{aligned} \tag{۲۰-۲}$$

$$\begin{aligned} eq_3: & -3r^2\rho(\tau G_1^*\frac{\partial^3 v_0}{\partial t^3}+G_0^*\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2})-K[3\tau\frac{\partial v_0}{\partial t}+r\tau(1+3G_1^*)\frac{\partial^3 u_0}{\partial t\partial r\partial\theta}+\tau(3G_1^*+7)\frac{\partial^2 u_0}{\partial t\partial\theta}+ \\ & r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}(3v_0+4\tau\frac{\partial v_0}{\partial t})+(7+3G_0^*)\frac{\partial u_0}{\partial\theta}+\tau(3G_1^*+4)\frac{\partial^3 v_0}{\partial t\partial\theta^2}+(3G_0^*+4)\frac{\partial^2 v_0}{\partial\theta^2}+r(1+3G_0^*)\frac{\partial^2 u_0}{\partial r\partial\theta} \\ & +3r\frac{\partial}{\partial r}(v_0+\tau\frac{\partial v_0}{\partial t})-3v_0]=0 \end{aligned} \tag{۲۱-۲}$$

$$\begin{aligned} eq_4: & -3r^2h^2\rho(\tau G_1^*\frac{\partial^3 v_1}{\partial t^3}+G_0^*\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2})+K[3h^2(r\tau\frac{\partial^2 v_1}{\partial t\partial r}+\tau r^2\frac{\partial^3 v_1}{\partial t\partial r^2}-\tau\frac{\partial v_1}{\partial t}+r^2\frac{\partial^2 v_1}{\partial r^2}+r\frac{\partial v_1}{\partial r}) \\ & +h^2((7+3G_0^*)\frac{\partial u_1}{\partial\theta}+\tau r(1+3G_1^*)\frac{\partial^3 u_1}{\partial t\partial r\partial\theta}+\tau(7+3G_1^*)\frac{\partial^2 u_1}{\partial t\partial\theta}+r(1+3G_0^*)\frac{\partial^2 u_1}{\partial r\partial\theta}-3u_1)+ \\ & h^2(\tau(4+3G_1^*)\frac{\partial^3 v_1}{\partial t\partial\theta^2}+(4+3G_0^*)\frac{\partial^2 v_1}{\partial\theta^2}-36KK_s r(r\tau\frac{\partial v_1}{\partial t}+rv_1+\tau\frac{\partial^2 w_0}{\partial t\partial\theta}+\frac{\partial w_0}{\partial\theta})]=0 \end{aligned} \tag{۲۲-۲}$$

$$\begin{aligned} eq_5: & -r^2\rho(\tau G_1^*\frac{\partial^3 w_0}{\partial t^3}+G_0^*\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2})+KK_s[r\tau\frac{\partial^2 w_0}{\partial t\partial r}+r\frac{\partial w_0}{\partial r}+r^2\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2}+r^2\tau\frac{\partial^3 w_0}{\partial t\partial r^2}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial\theta^2} \\ & +\tau\frac{\partial^3 w_0}{\partial t\partial\theta^2}+r\tau\frac{\partial^2 v_1}{\partial t\partial\theta}+ru_1+r\frac{\partial v_1}{\partial\theta}+r^2\frac{\partial u_1}{\partial r}+\tau r\frac{\partial u_1}{\partial t}+\tau r^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial t\partial r}]=0 \end{aligned} \tag{۲۳-۲}$$

معادلات حاضر، شامل پنج معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی و ضرایب متغیر هستند که معادله یک و سه و همچنین معادلات دو، چهار و پنج به یکدیگر کوپل هستند. شرایط مرزی به‌دست‌آمده با استفاده از اصل همیلتون برحسب منتجه‌های تنش برای ورق و قطاع به‌صورت زیر خواهد بود.

$$\oint[(rN_r d\theta+N_{r\theta}dr)\delta u_0+(rM_r d\theta+M_{r\theta}dr)\delta u_1+(rN_{r\theta}d\theta+N_\theta dr)\delta v_0 +(rM_{r\theta}d\theta+M_\theta dr)\delta v_1+(rQ_r d\theta+Q_\theta dr)\delta w_0]=0 \qquad (۲-۲۴)$$

از رابطه (۲-۲۴) شرایط مرزی مختلف را می‌توان استخراج نمود.

شرط مرزی لبه گیردار:

$$\text{at } r=r_i,r_o \quad u_0=0;u_1=0;v_0=0;v_1=0;w_0=0 \qquad (۲-۲۵)$$

شرط مرزی لبه ساده:

$$\text{at } r=r_i,r_o \quad \begin{array}{l}\oint(rM_r d\theta+M_{r\theta}dr)=0;\oint(rM_{r\theta}d\theta+M_\theta dr)=0\\ u_0=0,v_0=0,w_0=0\end{array} \qquad (۲-۲۶)$$

شرط مرزی لبه آزاد:

$$\text{at } r=r_i,r_o \quad \begin{array}{l}\oint(rN_r d\theta+N_{r\theta}dr)=0;\oint(rM_r d\theta+M_{r\theta}dr)=0;\oint(rN_{r\theta}d\theta+N_\theta dr)=0;\\ \oint(rM_{r\theta}d\theta+M_\theta dr)=0;\oint(rQ_r d\theta+Q_\theta dr)=0\end{array} \qquad (۲-۲۷)$$

شرط مرزی در مرکز ورق:

$$\begin{array}{lll}\text{at } r=0 \quad \text{و} \quad \text{n=۱،۳،۵} & w_{00}=\dfrac{du_{10}}{dx}=\dfrac{dv_{10}}{dx}=0\\ \text{at } r=0 \quad \text{و} \quad \text{n=۰،۲،۴} & \dfrac{dw_{00}}{dx}=u_{10}=v_{10}=0\end{array} \qquad (۲-۲۸)$$

۲-۸- جمع‌بندی

در این فصل، ابتدا معادلات حرکت ورق مدوّر الاستیک و قطاع دایروی بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و با در نظر گرفتن تغییر شکل‌های کوچک استخراج شد. سپس با اعمال اپراتورهای ویسکوالاستیک با در نظر گرفتن مدل جامد استاندارد خطی نوع اول، معادلات ورق مدوّر ویسکوالاستیک به‌دست می‌آمد. معادلات حاضر، شامل پنج معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی و ضرایب متغیر که به یکدیگر کوپل هستند.

فصل سوم

حل تحلیلی

۳-۱- مقدمه

در فصل قبل، معادلات حاکم بر ارتعاشات ورق مدوّر بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، استخراج شد. معادلات به‌صورت یک دستگاه معادله دیفرانسیل، شامل پنج معادله ضریب متغیّر با مشتقات جزئی نسبت به متغیرهای زمان و مکان بوده به یکدیگر کوپل هستند. برای حل این معادلات، از تئوری اغتشاشات استفاده می‌شود. برای این منظور، ابتدا معادلات بی‌بعد می‌شوند، پس از بی‌بعدسازی، فرکانس‌های طبیعی سیستم تعیین‌شده و سپس پاسخ دینامیکی ورق به‌دست می‌آید.

۳-۲- بی‌بعد سازی معادلات

پارامترهای بی‌بعد به‌صورت زیر تعریف می‌گردند.

$$r^* = \frac{r}{r_0}; h^* = \frac{h}{h_0}; t^* = \frac{t}{t_0}; u_0^* = \frac{u_0}{h_0}; u_1^* = u_1; w_0^* = \frac{w_0}{h_0}; v_0^* = \frac{v_0}{h_0}; v_1^* = v_1 \tag{۳-۱}$$

پارامترهای r^* و t^* به ترتیب شعاع و زمان بی‌بعد هستند، u_0^*، w_0^* و v_0^* جابجایی‌های بی‌بعد مؤلفه‌ی u_0، w_0 و v_0 بوده و مؤلفه‌های جابجایی u_1 و v_1 نیز بی‌بعد هستند. h_0 و t_0 به ترتیب شاخص‌های ضخامت و زمان هستند که مقادیر آنها به‌صورت $h = h_0$ و $t_0 = \frac{r_0}{c}$ در نظر گرفته‌شده است. c کمیتی با دیمانسیون سرعت است و به‌صورت $c = \sqrt{K_0 / \rho}$ تعریف‌شده است.

با اعمال پارامترهای بی‌بعد فوق در معادله‌های (۲-۱۹) تا (۲-۲۳) پارامترهای بی‌بعد زیر قابل تعریف است.

$$e = \frac{\rho h_0^2}{K_0 t_0^2}; \beta = \frac{\tau}{t_0}; Q^* = \frac{Q}{K_0}; \varepsilon = \frac{h_0}{r_0}; \Theta = \frac{\theta}{\varepsilon}; X_i = \frac{r_i^* - 1}{\varepsilon}; X_o = \frac{r_o^* - 1}{\varepsilon} \tag{۳-۲}$$

ε پارامتری کوچک است و به‌عنوان پارامتر اغتشاش در نظر گرفته می‌شود. همچنین از تغییر متغیّر $X = \frac{r^* - 1}{\varepsilon}$، استفاده می‌شود. شکل بی‌بعد معادلات عبارت است از:

$$Eq_1: \varepsilon^2[X^2 \frac{\partial^2 g_0[u_0^*]}{\partial X^2} - eX^2 g_5[u_0^*] - g_0[u_0^*] + X\frac{\partial g_0[u_0^*]}{\partial X}] + \varepsilon[2X\frac{\partial^2 g_0[u_0^*]}{\partial X^2} + X\frac{\partial^2 g_6[v_0^*]}{\partial X \partial \Theta}$$
$$-\frac{\partial g_7[v_0^*]}{\partial \Theta} + \frac{\partial g_0[u_0^*]}{\partial X} - 2eXg_5[u_0^*]] + \frac{\partial^2 g_0[u_0^*]}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 g_3[u_0^*]}{\partial \Theta^2} + \frac{\partial^2 g_6[v_0^*]}{\partial X \partial \Theta} - eg_5[u_0^*] = 0 \quad (۳-۳)$$

$$Eq_2: \varepsilon^2[h^{*2}X^2 \frac{\partial^2 g_0[u_1^*]}{\partial X^2} - eh^{*2}X^2 g_5[u_1^*] - h^{*2}g_0[u_1^*] + h^{*2}X\frac{\partial g_0[u_1^*]}{\partial X} - 12K_sX^2 g_3[u_1^*] - 12K_sX^2\frac{\partial g_3[w_0^*]}{\partial X}] +$$
$$\varepsilon[h^{*2}\frac{\partial g_0[u_1^*]}{\partial X} + 2h^{*2}X\frac{\partial^2 g_0[u_1^*]}{\partial X^2} + h^{*2}X\frac{\partial^2 g_6[v_1^*]}{\partial X\partial\Theta} - h^{*2}\frac{\partial g_7[v_1^*]}{\partial\Theta} - 2eh^{*2}Xg_5[u_1^*] - 24K_sXg_3[u_1^*] - 24K_sX\frac{\partial g_3[w_0^*]}{\partial X}] \quad (۴-۳)$$
$$h^{*2}\frac{\partial^2 g_6[v_1^*]}{\partial X\partial\Theta} + h^{*2}\frac{\partial^2 g_3[u_1^*]}{\partial\Theta^2} - eh^{*2}g_5[u_1^*] + h^{*2}\frac{\partial^2 g_0[u_1^*]}{\partial X^2} - 12K_sg_3[u_1^*] - 12K_s\frac{\partial g_3[w_0^*]}{\partial X} = 0$$

$$Eq_3: \varepsilon^2[X^2\frac{\partial^2 g_0[v_0^*]}{\partial X^2} - eX^2g_5[v_0^*] - g_3[v_0^*] + X\frac{\partial g_3[v_0^*]}{\partial X}] + \varepsilon[\frac{\partial g_3[v_0^*]}{\partial X} + 2X\frac{\partial^2 g_3[v_0^*]}{\partial X^2} + \frac{\partial g_7[u_0^*]}{\partial\Theta} +$$
$$\frac{\partial^2 g_7[u_0^*]}{\partial X\partial\Theta} - 2eXg_5[v_0^*]] + \frac{\partial^2 g_0[v_0^*]}{\partial\Theta^2} + \frac{\partial^2 g_6[u_0^*]}{\partial X\partial\Theta} - eg_5[v_0^*] + \frac{\partial^2 g_3[v_0^*]}{\partial X^2} = 0 \quad (۵-۳)$$

$$Eq_4: \varepsilon^2[h^{*2}X^2\frac{\partial^2 g_3[v_1^*]}{\partial X^2} - eh^{*2}X^2g_5[v_1^*] - h^{*2}g_3[v_1^*] + h^{*2}X\frac{\partial g_3[v_1^*]}{\partial X} - 12K_sX^2g_3[v_1^*]] + \varepsilon[2h^{*2}X\frac{\partial^2 g_3[v_1^*]}{\partial X^2}$$
$$+h^{*2}X\frac{\partial^2 g_6[u_1^*]}{\partial X\partial\Theta} - 12K_sX\frac{\partial g_3[w_0^*]}{\partial\Theta} - 2eh^{*2}Xg_5[v_1^*] - 24K_sXg_3[v_1^*] + h^{*2}\frac{\partial g_3[v_1^*]}{\partial X} + h^{*2}\frac{\partial g_7[u_1^*]}{\partial\Theta}] \quad (۶-۳)$$
$$+h^{*2}\frac{\partial^2 g_6[u_1^*]}{\partial X\partial\Theta} - 12K_s\frac{\partial g_3[w_0^*]}{\partial\Theta} + h^{*2}\frac{\partial^2 g_0[v_1^*]}{\partial\Theta^2} - eh^{*2}g_5[v_1^*] + h^{*2}\frac{\partial^2 g_3[v_1^*]}{\partial X^2} - 12K_sg_3[v_1^*] = 0$$

$$Eq_5: h^*(\varepsilon^2[K_sX^2\frac{\partial^2 g_3[w_0^*]}{\partial X^2} - eX^2g_5[w_0^*] + K_sX^2\frac{\partial g_3[u_1^*]}{\partial X} + K_sX\frac{\partial g_3[w_0^*]}{\partial X} + K_sX^2\frac{\partial g_3[u_1^*]}{\partial X} - X^2g_4[Q^*]$$
$$+K_sXg_3[u_1^*]] + \varepsilon[K_s\frac{\partial g_3[w_0^*]}{\partial X} + 2K_sX\frac{\partial^2 g_3[w_0^*]}{\partial X^2} + K_sX\frac{\partial g_3[v_1^*]}{\partial\Theta} - 2eXg_5[w_0^*] - 2Xg_4[Q^*] + K_sg_3[u_1^*] \quad (۷-۳)$$
$$+2K_sX\frac{\partial g_3[u_1^*]}{\partial X}] + K_s\frac{\partial g_3[v_1^*]}{\partial\Theta} + K_s\frac{\partial^2 g_3[w_0^*]}{\partial\Theta^2} - eg_5[w_0^*] + K_s\frac{\partial^2 g_3[w_0^*]}{\partial X^2} + K_s\frac{\partial g_3[u_1^*]}{\partial X}) - g_4[Q^*] = 0$$

$$a_0 = G_0^* + \frac{4}{3}; a_1 = G_1^* + \frac{4}{3}; c_0 = G_0^* + \frac{1}{3}; c_1 = G_1^* + \frac{1}{3}; d_0 = a_0 + 1; d_1 = a_1 + 1$$
$$g_0[\blacktriangle] = a_0(\blacktriangle) + \beta a_1\frac{\partial}{\partial t^*}(\blacktriangle); g_3[\blacktriangle] = (\blacktriangle) + \beta\frac{\partial}{\partial t^*}(\blacktriangle); g_4[\blacktriangle] = G_0^*(\blacktriangle) + \beta G_1^*\frac{\partial}{\partial t^*}(\blacktriangle); \quad (۸-۳)$$
$$g_5[\blacktriangle] = G_0^*\frac{\partial^2}{\partial t^{*2}}(\blacktriangle) + \beta G_1^*\frac{\partial^3}{\partial t^{*3}}(\blacktriangle); g_6[\blacktriangle] = c_0(\blacktriangle) + \beta c_1\frac{\partial}{\partial t^*}(\blacktriangle); g_7[\blacktriangle] = d_0(\blacktriangle) + \beta d_1\frac{\partial}{\partial t^*}(\blacktriangle);$$

۳-۳- ارتعاشات آزاد

در تحلیل فرکانسی بار عرضی تأثیری بر فرکانس طبیعی نخواهد داشت. برای حل معادلات از روش مقیاس‌های چندگانه در تئوری اغتشاشات استفاده می‌گردد [۵۴]. در ابتدا مؤلفه‌های دامنه‌ی ارتعاشات به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{aligned}
&u_0^*(X,\Theta,t^*;\varepsilon)=u_{00}^*(X,\Theta,T_0,T_1)+\varepsilon u_{01}^*(X,\Theta,T_0,T_1)\\
&u_1^*(X,\Theta,t^*;\varepsilon)=u_{10}^*(X,\Theta,T_0,T_1)+\varepsilon u_{11}^*(X,\Theta,T_0,T_1)\\
&v_0^*(X,\Theta,t^*;\varepsilon)=v_{00}^*(X,\Theta,T_0,T_1)+\varepsilon v_{01}^*(X,\Theta,T_0,T_1)\\
&v_1^*(X,\Theta,t^*;\varepsilon)=v_{10}^*(X,\Theta,T_0,T_1)+\varepsilon v_{11}^*(X,\Theta,T_0,T_1)\\
&w_0^*(X,\Theta,t^*;\varepsilon)=w_{00}^*(X,\Theta,T_0,T_1)+\varepsilon w_{01}^*(X,\Theta,T_0,T_1)
\end{aligned} \tag{۹-۳}$$

که $T_0=t^*$ و $T_1=\varepsilon t^*$ است. با توجه به این تعریف‌ها، اپراتورهای مشتق زمانی به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\frac{\partial}{\partial t^*}=\frac{\partial}{\partial T_0}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1};\frac{\partial^2}{\partial t^{*2}}=\frac{\partial^2}{\partial T_0^2}+2\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial T_0\partial T_1};\frac{\partial^3}{\partial t^{*3}}=\frac{\partial^3}{\partial T_0^3}+3\varepsilon\frac{\partial^3}{\partial T_0^2\partial T_1} \tag{۱۰-۳}$$

با جایگذاری روابط (۳-۹) و (۳-۱۰) در معادلات (۳-۳) تا (۳-۷) و جداسازی معادلات بر اساس مرتبه‌های ε^0 و ε^1، معادلات زیر حاصل می‌شود.

معادلات مرتبه صفر:

$$Eq_1:\frac{\partial^2 f_0[u_{00}]}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 f_3[u_{00}]}{\partial\Theta^2}+\frac{\partial^2 f_6[v_{00}]}{\partial X\partial\Theta}-ef_5[u_{00}]=0 \tag{۱۱-۳}$$

$$Eq_2:h^{*2}(\frac{\partial^2 f_6[v_{10}]}{\partial X\partial\Theta}+\frac{\partial^2 f_3[u_{10}]}{\partial\Theta^2}+\frac{\partial^2 f_0[u_{10}]}{\partial X^2}-ef_5[u_{10}])-12K_s(\frac{\partial f_3[w_{00}]}{\partial X}+f_3[u_{10}])=0 \tag{۱۲-۳}$$

$$Eq_3:\frac{\partial^2 f_0[v_{00}]}{\partial\Theta^2}+\frac{\partial^2 f_6[u_{00}]}{\partial X\partial\Theta}+\frac{\partial^2 f_3[v_{00}]}{\partial X^2}-ef_5[v_{00}]=0 \tag{۱۳-۳}$$

$$Eq_4: h^{*2}\left(\frac{\partial^2 f_6[u_{10}]}{\partial X\partial\Theta}+\frac{\partial^2 f_0[v_{10}]}{\partial\Theta^2}+\frac{\partial^2 f_3[v_{10}]}{\partial X^2}-ef_5[v_{10}]\right)-12K_s\left(\frac{\partial f_3[w_{00}]}{\partial\Theta}+f_3[v_{10}]\right)=0 \qquad (۱۴\text{-}۳)$$

$$Eq_5: K_s\left(\frac{\partial^2 f_3[w_{00}]}{\partial\Theta^2}+\frac{\partial f_3[v_{10}]}{\partial\Theta}+\frac{\partial^2 f_3[w_{00}]}{\partial X^2}+\frac{\partial f_3[u_{10}]}{\partial X}\right)-ef_5[w_{00}]-f_4[Q^*]=0 \qquad (۱۵\text{-}۳)$$

معادلات مرتبه یک:

$$Eq_1: 2X\frac{\partial^2 f_0[u_{00}]}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 f_0[u_{01}]}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 f_3[u_{01}]}{\partial\Theta^2}+X\frac{\partial^2 f_6[v_{00}]}{\partial X\partial\Theta}-\frac{\partial f_{10}[v_{00}]}{\partial\Theta}+a_1\beta\frac{\partial^3 u_{00}}{\partial X^2\partial T_1}+\frac{\partial^2 f_6[v_{01}]}{\partial X\partial\Theta}+$$
$$b_1\beta\frac{\partial^3 v_{00}}{\partial X\partial\Theta\partial T_1}+\beta\frac{\partial^3 v_{00}}{\partial\Theta^2\partial T_1}+\frac{\partial f_0[u_{00}]}{\partial X}-ef_5[u_{01}]-2eXf_5[u_{00}]-Xf_9[u_{00}]=0 \qquad (۱۶\text{-}۳)$$

$$Eq_2: h^{*2}\left(\frac{\partial f_2[u_{10}]}{\partial X}+2X\frac{\partial^2 f_0[u_{10}]}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 f_0[u_{11}]}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 f_6[v_{11}]}{\partial X\partial\Theta}-ef_9[u_{10}]+\beta c_1\frac{\partial^3 v_{10}}{\partial X\partial\Theta\partial T_1}\right.$$
$$\left.X\frac{\partial^2 f_6[v_{10}]}{\partial X\partial\Theta}-\frac{\partial f_{10}[v_{10}]}{\partial\Theta}-ef_5[u_{11}]-2eXf_5[u_{10}]+\frac{\partial^2 f_3[u_{11}]}{\partial\Theta^2}+\beta\frac{\partial^3 u_{10}}{\partial\Theta^2\partial T_1}+\beta a_1\frac{\partial^3 u_{10}}{\partial X^2\partial T_1}\right) \qquad (۱۷\text{-}۳)$$
$$-12K_s\left(2X\frac{\partial f_4[w_{00}]}{\partial X}+\frac{\partial f_3[w_{01}]}{\partial X}+\beta\frac{\partial^2 w_{00}}{\partial X\partial T_1}+2Xf_3[u_{10}]+f_3[u_{11}]\right)=0$$

$$Eq_3: 2X\frac{\partial^2 f_4[v_{00}]}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 f_3[u_{00}]}{\partial X\partial\Theta}+\frac{\partial f_4[v_{00}]}{\partial X}+\frac{\partial^2 f_4[v_{01}]}{\partial X^2}-2eXf_6[v_{00}]-ef_7[v_{00}]-ef_6[v_{01}]+\beta\frac{\partial^3 v_{00}}{\partial X^2\partial T_1}=0 \qquad (۱۸\text{-}۳)$$

$$Eq_4: h^{*2}\left(X\frac{\partial^2 g_6[u_{11}]}{\partial X\partial\Theta}+\frac{\partial g_{10}[u_{10}]}{\partial\Theta}+\frac{\partial^2 g_0[v_{11}]}{\partial\Theta^2}-eg_5[v_{11}]-2Xeg_5[v_{10}]+\beta c_1\frac{\partial^3 u_{10}}{\partial X\partial\Theta\partial T_1}\right.$$
$$+2X\frac{\partial^2 g_3[v_{10}]}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 g_3[v_{11}]}{\partial X^2}-eg_9[v_{10}]+\frac{\partial g_3[v_{10}]}{\partial X}+X\frac{\partial^2 g_6[u_{10}]}{\partial X\partial\Theta}+\beta\frac{\partial^3 v_{10}}{\partial X^2\partial T_1}$$
$$\left.+c_0\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial X\partial\Theta}+\beta a_1\frac{\partial^3 v_{10}}{\partial\Theta^2\partial T_1}\right)-12K_s\left(\beta\frac{\partial v_{10}}{\partial T_1}+2g_3[v_{11}]+\frac{\partial g_3[w_{01}]}{\partial\Theta}+\beta\frac{\partial^2 w_{00}}{\partial\Theta\partial T_1}+\right. \qquad (۱۹\text{-}۳)$$
$$2Xg_3[v_{10}]+X\frac{\partial g_3[w_{00}]}{\partial\Theta}=0$$

$$Eq_5: h^*K_s\left(\frac{\partial g_3[v_{10}]}{\partial\Theta}+2X\frac{\partial^2 g_3[w_{00}]}{\partial X^2}+\frac{\partial g_3[v_{11}]}{\partial\Theta}+\frac{\partial^2 g_3[w_{01}]}{\partial\Theta^2}+\frac{\partial^2 g_3[w_{01}]}{\partial X^2}+\right. \qquad (۲۰\text{-}۳)$$
$$\left.\frac{\partial g_3[w_{00}]}{\partial X}+2X\frac{\partial g_3[u_{10}]}{\partial X}+\frac{\partial g_3[u_{11}]}{\partial X}+\beta\left[\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial X\partial T_1}+\frac{\partial^2 v_{10}}{\partial\Theta\partial T_1}+\frac{\partial^3 w_{00}}{\partial\Theta^2\partial T_0}\right]+g_3[u_{10}]\right)-$$

$$h^{*}e(g_{5}[w_{01}]+eg_{9}[w_{00}])-2X\ (g_{4}[Q^{*}]+eg_{5}[w_{00}])=0$$

$$\begin{aligned}
&f_0[\blacktriangle]=a_0(\blacktriangle)+\beta a_1\frac{\partial}{\partial T_0}(\blacktriangle);f_3[\blacktriangle]=(\blacktriangle)+\beta\frac{\partial}{\partial T_0}(\blacktriangle);f_4[\blacktriangle]=G_0^{*}(\blacktriangle)+\beta G_1^{*}\frac{\partial}{\partial T_0}(\blacktriangle);\\
&f_5[\blacktriangle]=G_0^{*}\frac{\partial^2}{\partial T_0^2}(\blacktriangle)+\beta G_1^{*}\frac{\partial^3}{\partial T_0^3}(\blacktriangle);f_6[\blacktriangle]=c_0(\blacktriangle)+\beta c_1\frac{\partial}{\partial T_0}(\blacktriangle);f_9[\blacktriangle]=(\blacktriangle)+\beta\frac{\partial}{\partial T_1}(\blacktriangle);\\
&f_8[\blacktriangle]=a_0(\blacktriangle)+\beta a_1\frac{\partial}{\partial T_1}(\blacktriangle);f_9[\blacktriangle]=2G_0^{*}\frac{\partial^2}{\partial T_1\partial T_0}(\blacktriangle)+3\beta G_1^{*}\frac{\partial^3}{\partial T_1\partial T_0^2}(\blacktriangle);\\
&f_{10}[\blacktriangle]=d_0(\blacktriangle)+\beta d_1\frac{\partial}{\partial T_0}(\blacktriangle)
\end{aligned} \qquad (۲۱\text{-}۳)$$

معادلات (۳-۱۱) تا (۳-۱۵) شامل پنج معادله دیفرانسیل همگن با ضرایب ثابت که معادلات (۳-۱۱) و (۳-۱۳) با هم و معادلات (۳-۱۲)، (۳-۱۴) و (۳-۱۵) به یکدیگر کوپل می‌باشند. به‌این‌ترتیب، تغییر متغیّر تعریف‌شده توانسته است معادلات را به معادلاتی با ضرایب ثابت تبدیل کند. از حل دستگاه معادله اول فرکانس محیطی و شعاعی و از حل دستگاه دوم فرکانس عرضی به‌دست می‌آید. معادله تحلیل فرکانسی به روش پرتوربیشن برای تئوری کلاسیک در پیوست آورده شده است. لازم به ذکر است که در تحلیل ارتعاشات آزاد، بار عرضی صفر است.

۳-۳-۱ حل معادلات مرتبه صفر ورق حلقوی

حل معادلات (۳-۱۱) تا (۳-۱۵) را می‌توان به‌صورت زیر در نظر گرفت.

$$\begin{Bmatrix} u_{00}(X,\Theta,T_0,T_1) \\ v_{00}(X,\Theta,T_0,T_1) \end{Bmatrix}=\sum_{m=1}^{4}\sum_{n=1}^{\infty}c_m(T_1)\{V_m\}\exp(m_mX+i\,\omega_1 T_0)e^{in\Theta},\quad \{V_m\}=\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_3 \end{Bmatrix} \qquad (۲۲\text{-}۳)$$

$$\begin{Bmatrix} u_{10}(X,\Theta,T_0,T_1) \\ v_{10}(X,\Theta,T_0,T_1) \\ w_{00}(X,\Theta,T_0,T_1) \end{Bmatrix}=\sum_{m=1}^{6}\sum_{n=1}^{\infty}d_m(T_1)\{V_m\}\exp(s_mX+i\,\omega T_0)e^{in\Theta},\quad \{V_m\}=\begin{Bmatrix} F_2 \\ F_4 \\ F_5 \end{Bmatrix} \qquad (۲۳\text{-}۳)$$

که ω_1 و ω به ترتیب فرکانس طبیعی بی‌بعد صفحه‌ای[1] و خارج صفحه‌ای[2]، m_m و s_m مقادیر ویژه و $\{V_m\}$ بردارهای ویژه می‌باشند. در این پایان‌نامه از فرکانس‌های صفحه‌ای به‌عنوان فرکانس شعاعی یا محیطی و از فرکانس خارج صفحه به‌عنوان فرکانس عرضی یاد شده است.

با جایگذاری رابطه (۳-۲۲)، در معادله (۳-۱۱) و (۳-۱۳) یک دستگاه معادله جبری به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$a_{11} = 3ie\beta G_1^*\omega_1^3 + 3i\beta G_1^*\omega_1 m_m^2 + 4m_m^2 4i\beta\omega_1 n^2 + 4i\beta\omega_1 m_m^2 + 3G_0^* m_m^2 + 3eG_0^*\omega_1^2 - 3n^2 \tag{۳-۲۴}$$

$$a_{12} = -\beta\omega_1 m_m ni - 3i\beta G_1^*\omega_1 m_m n - m_m n - 3G_0^* m_m n$$

$$a_{21} = \beta i\omega_1 m_m n + 3i\beta G_1^*\omega_1 m_m n + m_m n + 3G_0^* m_m n$$

$$a_{22} = 3m_m^2 + 3i\beta\omega_1 m_m^2 - 3i\beta G_1^*\omega_1 n^2 + 3ie\beta G_1^*\omega_1^3 - 4n^2 - 4i\beta\omega_1 n^2 - 3G_0^* n^2 + 3eG_0^*\omega_1^2$$

همچنین با قرار دادن رابطه (۳-۲۳) در (۳-۱۲) ، (۳-۱۴) و (۳-۱۵) یک دستگاه معادله جبری به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_2 \\ F_4 \\ F_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$b_{11} = -3ih^{*2}\beta\omega n^2 - 3h^{*2}n^2 - 36iK_s\beta\omega + 4h^{*2}s_m^2 + 3ieh^{*2}\beta G_1^*\omega^3 + 3eh^{*2}G_0^*\omega^2$$

$$+3ih^{*2}\beta G_1^*\omega s_m^2 + 3h^{*2}G_0^* s_m^2 + 4ih^{*2}\beta\omega s_m^2 - 36K_s ; b_{13} = -36K_s s_m(1 + i\beta\omega) \tag{۳-۲۵}$$

$$b_{12} = -h^{*2}s_m n(i\beta\omega + 3G_0^* + 3i\beta\omega G_1^* + 1); b_{21} = h^{*2}s_m n(i\beta\omega + 3G_0^* + 3i\beta\omega G_1^* + 1);$$

$$b_{22} = -4ih^{*2}\beta\omega n^2 + 3h^{*2}s_n^2 - 4h^{*2}n^2 - 36K_s - 3iK_s\beta\omega + 3ih^{*2}\beta\omega s_m^2 + 3eh^{*2}G_0^*\omega^2$$

$$-3h^{*2}G_0^* n^2 - 3ih^{*2}\beta G_1^*\omega n^2 + 3ieh^{*2}\beta G_1^*\omega^3 ; b_{32} = -K_s h^* s_m(i\beta\omega + 1); b_{23} = -36K_s s_m(1 + i\beta\omega)$$

$$b_{33} = h^*(ei\beta G_1^*\omega^3 - K_s i\beta\omega n^2 + K_s i\beta\omega s_m^2 - K_s n^2 + eG_0^*\omega^2 + K_s s_m^2 ; b_{31} = K_s h^* s_m(i\beta\omega + 1);$$

---

[1] In-plane
[2] Out-of-plane

برای وجود جواب غیر صفر، دترمینان ماتریس ضرایب رابطه (۳-۲۴) و (۳-۲۵) باید صفر شود. معادله‌ی به‌دست‌آمده، معادله‌ی تفرق است، از حل معادله‌ی دستگاه اول چهار مقدار ویژه $m_m (m=1..4)$ برحسب ω_1 و همچنین از حل معادله‌ی دستگاه دوم شش مقدار ویژه $s_m (m=1..6)$ برحسب ω نتیجه می‌گردد. بردارهای ویژه نیز از روابط (۳-۲۴) و (۳-۲۵) محاسبه می‌شوند. بردارهای $\{V_m\}$، بردارهای ویژه متناظر با m_m و s_m هستند. پس از یافتن بردارهای ویژه و مقادیر ویژه، حل کلی به‌صورت رابطه (۳-۲۲) و (۳-۲۳) است. با اعمال شرایط مرزی (گیردار، ساده و آزاد)، دو دستگاه معادله جبری به‌صورت $[a]\{c_m(T_1)\}=\{0\}$ و $[b]\{d_m(T_1)\}=\{0\}$ نتیجه می‌شود که بردار $\{c_m(T_1)\}$ از دستگاه اول شامل ثابت‌های c_1، c_2، c_3 و c_4 بوده و ماتریس $[a]$ شامل ضرایب معادله‌ها است و همچنین بردار $\{d_m(T_1)\}$ از دستگاه دوم شامل ثابت‌های d_1، d_2، d_3، d_4، d_5 و d_6 بوده و ماتریس $[b]$ شامل ضرایب معادله‌ها می‌باشد.. برای جواب غیر صفر، دترمینان ماتریس ضرایب ماتریس $[a]$ و $[b]$ باید برابر صفر شود که درنهایت یک معادله‌ی جبری پیچیده برحسب ω و ω_1 به‌دست می‌آید. ریشه‌های این دو معادله، فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد عرضی و شعاعی را می‌دهند که این معادلات به‌وسیله‌ی روش عددی تنصیف فاصله[1] حل‌شده است. در این صورت، در دستگاه اول از چهار معادله، فقط سه معادله مستقل بوده و می‌توان c_1 تا c_3 را برحسب c_4 تعیین و در دستگاه دوم از شش معادله، فقط پنج معادله مستقل بوده و می‌توان ثابت‌های d_1 تا d_5 را برحسب d_6 تعیین نمود.

$$\begin{Bmatrix} u_{00}(X,\Theta,T_0,T_1) \\ v_{00}(X,\Theta,T_0,T_1) \end{Bmatrix} = c_4(T_1)\begin{Bmatrix} y_1(X) \\ y_3(X) \end{Bmatrix} e^{(i\omega_1 T_0)} e^{(in\Theta)} + C.C. \tag{۳-۲۶}$$

$$\begin{Bmatrix} u_{10}(X,\Theta,T_0,T_1) \\ v_{10}(X,\Theta,T_0,T_1) \\ w_{00}(X,\Theta,T_0,T_1) \end{Bmatrix} = d_6(\mathrm{T}_1)\begin{Bmatrix} y_2(X) \\ y_4(X) \\ y_5(X) \end{Bmatrix} \mathrm{e}^{(\mathrm{i}\omega \mathrm{T}_0)} \mathrm{e}^{(\mathrm{in}\Theta)} + \mathrm{C.C.} \tag{۳-۲۷}$$

که در این رابطه، .C.C بیانگر قسمت مزدوج مختلط می‌باشد. با جایگذاری روابط (۳-۲۶) و (۳-۲۷) در معادلات (۳-۱۶) تا (۳-۲۰)، قسمت ناهمگن معادلات مرتبه اول به‌صورت زیر خواهد بود.

[1] Bisection

$$Eq_1=\left(Z_{11}c_4(T_1)+Z_{12}\frac{dc_4(T_1)}{dT_1}\right)e^{i\omega_1 T_0}+NST_1+C.C_1$$
$$Z_{11}=(6XG_0^*+6i\beta\omega_1XG_1^*+8X+8i\beta\omega_1X)\frac{d^2y_1(X)}{dX^2}+(4i\beta\omega_1+3G_1^*+4+3i\beta\omega_1G_1^*)\frac{dy_1(X)}{dX}$$
$$(Xn+i\beta\omega_1Xn+3i\beta\omega_1XG_1^*n+3G_0^*Xn)\frac{dy_3(X)}{dX}+(6e\beta XG_0^*\omega_1^2+6ie\beta XG_0^*\omega_1^3)y_1(X)-$$
$$(3nG_0^*+3i\beta\omega_1G_1^*n+7n+7ni\beta\omega_1)y_3(X)$$
$$Z_{12}=(4\beta+3\beta G_1^*)\frac{dy_1(X)}{dX}+(\beta n+3\beta G_1^*n)\frac{dy_3(X)}{dX}+(9e\beta G_1^*\omega_1^2-3\beta n^2-6ieG_1^*\omega_1)y_1(X)$$
(۲۸-۳)

$$Eq_2=\left(Z_{21}d_6(T_1)+Z_{22}\frac{dd_6(T_1)}{dT_1}\right)e^{i\omega T_0}+NST_2+C.C_2$$
$$Z_{21}=-h^{*2}X(3i\beta\omega nG_1^*+i\beta\omega n+n+3G_0^*n)\frac{dy_4(X)}{dX}+h^{*2}X(6G_0^*+6i\beta\omega G_1^*+8+8i\beta\omega)\frac{d^2y_2(X)}{dX^2}$$
$$+h^{*2}n(3G_0^*+7i\beta\omega+3i\beta\omega G_1^*+7)y_4(X)+h^{*2}(4i\beta\omega+4+3G_0^*+3i\beta\omega G_1^*)\frac{dy_2(X)}{dX}$$
$$-72XK_s(1+i\beta\omega)\frac{dy_5(X)}{dX}+X(-72K_s-72K_si\beta\omega+6ieh^{*2}\beta\omega^3G_1^*+6eh^{*2}\omega^2G_0^*)y_2(X)$$
$$Z_{22}=(-36Ks\beta+9eh^{*2}\beta G_1^*\omega^2-3h^{*2}\beta n^2-6ieh^{*2}G_0^*\omega)y_2(X)-h^{*2}\beta n(3G_1^*+1)\frac{dy_4(X)}{dX}$$
$$-36Ks\beta\frac{dy_5(X)}{dX}+h^{*2}\beta(3G_1^*+4)\frac{d^2y_2(X)}{dX^2}$$
(۲۹-۳)

$$Eq_3=\left(Z_{31}c_4(T_1)+Z_{32}\frac{dc_4(T_1)}{dT_1}\right)e^{i\omega_1 T_0}+NST_3+C.C_3$$
$$Z_{31}=6X(1+i\beta\omega_1)\frac{d^2y_3(X)}{dX^2}+(3i\beta\omega_1+3)\frac{dy_3(X)}{dX}-Xn(3i\beta\omega_1G_1^*+3G_0^*+1+i\beta\omega_1)\frac{dy_1(X)}{dX}$$
$$-n(3i\omega_1G_1^*+7i\beta\omega_1+3G_0^*+7)y_1(X)+6eX(i\beta G_1^*\omega_1^3+G_0^*\omega_1^2)y_3(X)$$
$$Z_{32}=3\beta\frac{d^2y_3(X)}{dX^2}-\beta n(1+3G_1^*)\frac{dy_1(X)}{dX}+(9e\beta G_1^*\omega_1^2-3\beta G_1^*n^2-6ieG_0^*\omega_1-4\beta n^2)y_3(X)$$
(۳۰-۳)

$$Eq_4=\left(Z_{41}d_6(T_1)+Z_{42}\frac{dd_6(T_1)}{dT_1}\right)e^{i\omega T_0}+NST_4+C.C_4$$
$$Z_{41}=h^{*2}(7i\beta\omega n+7n+3G_0^*n+3i\beta\omega nG_1^*)y_2(X)-36XK_sn(1+i\beta\omega)y_5(X)$$
$$+3h^{*2}(1+i\beta\omega)\frac{dy_4(X)}{dX}+X(-72K_s-72K_si\beta\omega+6ieh^{*2}\beta\omega^3G_1^*+6eh^{*2}\omega^2G_0^*)y_4(X)$$
$$+Xh^{*2}n(3G_0^*+3i\beta\omega G_1^*+1+i\beta\omega)\frac{dy_2(X)}{dX}+6Xh^{*2}(1+i\beta\omega)\frac{d^2y_4(X)}{dX^2}$$
$$Z_{42}=(-36K_s\beta-3h^{*2}\beta G_1^*n^2-4h^{*2}\beta n^2-6ieh^{*2}G_0^*\omega+9eh^{*2}\beta G_1^*\omega^2)y_4(X)$$
$$-36Ks\beta ny_5(X)+3h^{*2}\beta\frac{d^2y_4(X)}{dX^2}\,h^{*2}\beta n(1+3G_1^*)\frac{dy_2(X)}{dX}$$
(۳۱-۳)

$$Eq_5=\left(Z_{51}d_6(T_1)+Z_{52}\frac{dd_6(T_1)}{dT_1}\right)e^{i\omega T_0}+NST_5+C.C_5$$
$$Z_{51}=K_sh^{*2}(1+i\beta\omega)y_2(X)-XK_sh^{*2}n(1+i\beta\omega)y_4(X)+2Xeh^*\omega^2(G_0^*+i\beta\omega G_1^*)y_5(X)$$
$$2XK_sh^*(1+i\beta\omega)\frac{dy_2(X)}{dX}+K_sh^*(1+i\beta\omega)\frac{dy_5(X)}{dX}+2XK_sh^*(1+i\beta\omega)\frac{d^2y_5(X)}{dX^2} \quad (۳-۳۲)$$
$$Z_{52}=-K_sh^*\beta ny_4(X)+h^*(-K_s\beta n^2+3eh^*\beta G_1^*\omega^2-2ieh^*G_0^*\omega)y_5(X)+$$
$$K_sh^*\beta(\frac{d^2y_5(X)}{dX^2}+\frac{dy_2(X)}{dX})$$

در روابط (۳-۲۸) تا (۳-۳۲)، NST_i که $i(1..5)$ معرف جمله‌های غیر سکولار می‌باشد.

۳-۳-۲ حلّ معادلات مرتبه یک

برای حلّ معادلات مرتبه یک، ابتدا بایستی با استفاده از شرط حل‌پذیری، سکولاریتی معادلات را حذف و سپس معادلات ناهمگن را حل کرد. با تعیین توابع $c_4(T_1)$ و $d_6(T_1)$ که در حل معادلات مرتبه صفر مجهول بود، سکولاریتی معادلات حذف خواهد شد.

۳-۳-۲-۱ تعیین $c_4(T_1)$

در این قسمت از شرط حل‌پذیری تابع $c_4(T_1)$ تعیین می‌شود [۵۴]. به‌صورتی که دو تابع الحاقی ϕ_1 و ϕ_3 در معادلات مرتبه صفر (۳-۱۱) و (۳-۱۳) ضرب نموده و دو معادله با هم جمع شده و انتگرال گرفته می‌شود. در این حالت سیستم خود الحاق نیست و نمی‌توان به‌جای توابع الحاقی از شکل مودها استفاده نمود. معادلات (۳-۱۱) و (۳-۱۳)، پس از جایگزینی رابطه‌ی (۳-۲۶) عبارت است از:

$$Eq_1=a_1\frac{d^2y_1(X)}{dX^2}+a_2\frac{dy_3(X)}{dX}+a_3y_1(X)=0 \quad (۳-۳۳)$$

$$Eq_3=b_1\frac{d^2y_3(X)}{dX^2}+b_2\frac{dy_1(X)}{dX}+b_3y_3(X)=0 \quad (۳-۳۴)$$

که در اینجا:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 3i\,\beta\omega_1 G_1^* + 3G_0^* + 4 + 4i\,\beta\omega_1 \\
a_2 &= i\,\beta\omega_1 + 3G_0^* + 1 + 3i\,\omega_1 G_1^* \\
a_3 &= -3n^2(i\,\beta\omega_1 + 1) + e\,\omega_1^2(G_0^* + i\,\beta\omega_1 G_1^*)
\end{aligned}
\tag{۳-۳۵}
$$

$$
\begin{aligned}
b_1 &= 3(1 + i\beta\omega_1) \\
b_2 &= -n(3G_0^* + 3i\beta\omega_1 G_1^* + 1 + i\beta\omega_1) \\
b_3 &= -3G_0^* n^2 + 3eG_0^*\omega_1^2 - 4n^2 - 4i\omega_1 n^2 - 3i\beta\omega_1 G_1^* n^2 + 3ie\beta G_1^*\omega_1^3
\end{aligned}
\tag{۳-۳۶}
$$

معادله اول در ϕ_1 و معادله سوم در ϕ_3 و در بازه تعریف شده انتگرال گرفته می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&\int_{X_i}^{X_o} (\phi_1 \times Eq_1 + \phi_3 \times Eq_3)dX = \int_{X_i}^{X_o} (a_1 \frac{d^2\phi_1}{dX^2} - b_2 \frac{d\phi_3}{dX} + a_3\phi_1) y_1 dX + \int_{X_i}^{X_o} (b_1 \frac{d^2\phi_3}{dX^2} - a_2 \frac{d\phi_1}{dX} + b_3\phi_3) y_3 dX \\
&+ a_1\left[\phi_1 \frac{dy_1}{dX} - y_1 \frac{d\phi_1}{dX}\right]_{X_i}^{X_o} + \left[a_2\phi_1 y_3\right]_{X_i}^{X_o} + b_1\left[\phi_3 \frac{dy_3}{dX} - y_3 \frac{d\phi_3}{dX}\right]_{X_i}^{X_o} + \left[b_2\phi_3 y_1\right]_{X_i}^{X_o} = 0
\end{aligned}
\tag{۳-۳۷}
$$

با توجه به معادله بالا توابع ϕ_1 و ϕ_3 باید به ازای تمام مقادیر y_1 و y_3 برقرار باشند، لذا ضرایب آنها در انتگرال باید برابر صفر انتخاب شود.

$$
\left(a_1 \frac{d^2\phi_1}{dX^2} - b_2 \frac{d\phi_3}{dX} + a_3\phi_1\right) = 0
\tag{۳-۳۸}
$$

$$
\left(b_1 \frac{d^2\phi_3}{dX^2} - a_2 \frac{d\phi_1}{dX} + b_3\phi_3\right) = 0
\tag{۳-۳۹}
$$

با توجه به شرایط مرزی ورق حلقوی دوسرگیردار و دو سر ساده، شرایط مرزی لازم برای حل دو معادله کوپل به هم (۳-۳۸) و (۳-۳۹) را می‌توان از معادله (۳-۳۷) به‌صورت رابطه‌ی (۳-۴۰) برای شرط مرزی دوسرگیردار و رابطه‌ی (۳-۴۱) برای شرط مرزی ساده در نظر گرفت.

$$
\begin{aligned}
\phi_1 &= 0 \quad at \quad X = X_i, X_o \\
\phi_3 &= 0 \quad at \quad X = X_i, X_o
\end{aligned}
\tag{۳-۴۰}
$$

$$
\begin{aligned}
\phi_1 &= 0 \quad at \quad X = X_i, X_o \\
\phi_3 &= 0 \quad at \quad X = X_i, X_o
\end{aligned}
\tag{۳-۴۱}
$$

حل دو معادله کوپل به هم (۳-۳۸) و (۳-۳۹) را می‌توان به‌صورت زیر در نظر گرفت.

$$\begin{Bmatrix}\phi_1\\ \phi_3\end{Bmatrix}=\sum_{m=1}^{4}c_m\{V_m\}\exp(m_m X);\ \{V_m\}=\begin{Bmatrix}F_1\\ F_3\end{Bmatrix} \qquad (۳-۴۲)$$

که m_m مقادیر ویژه و $\{V_m\}$ بردارهای ویژه می‌باشند. با جایگذاری رابطه (۳-۴۲) در (۳-۳۸) و (۳-۳۹) یک دستگاه معادله جبری به‌صورت رابطه (۳-۴۳) به‌دست می‌آید.

$$\begin{bmatrix}a_3+a_1m_m^2 & -b_2m_m\\ -a_2m_m & b_3+b_1m_m^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}F_1\\ F_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix} \qquad (۳-۴۳)$$

برای وجود جواب غیر صفر، دترمینان ماتریس ضرایب رابطه (۳-۴۳) باید صفر شود. از حل معادله‌ی به‌دست آمده، چهار مقدار ویژه $m_m(m=1..4)$ نتیجه می‌گردد. بردارهای ویژه نیز از رابطه (۳-۴۳) محاسبه می‌شوند. بردارهای $\{V_m\}$، بردارهای ویژه متناظر با m_m هستند. پس از یافتن بردارهای ویژه و مقادیر ویژه، حل کلی به‌صورت رابطه (۳-۴۲) است. با اعمال شرایط مرزی الحاقی، می‌توان ثابت‌های c_1، c_2 و c_3 را برحسب c_4 تعیین کرد. پس از به‌دست آوردن توابع الحاقی، ابتدا تابع ϕ_1 در معادله (۳-۲۸) و تابع ϕ_3 در معادله (۳-۳۰) ضرب و سپس با هم جمع شده و در انتها انتگرال گرفته می‌شود.

$$\int_{X_i}^{X_o}(\phi_1\times Eq_1+\phi_3\times Eq_3)dX=\int_{X_i}^{X_o}(\phi_1\times A_1+\phi_3\times A_3)dX \qquad (۳-۴۴)$$

A_1 و A_3 در رابطه (۳-۴۴) شامل جملات سکولار موجود در قسمت ناهمگن معادلات مرتبه اول هست، زیرا $c_4(T_1)$ از صفر کردن جملات سکولار به‌دست می‌آید. لذا با انتگرال‌گیری از سمت راست معادله (۳-۴۴)، معادله زیر حاصل می‌شود.

$$\left[\frac{dc_4(T_1)}{dT_1}-R_1c_4(T_1)\right]e^{i\omega_1T_0}=0 \qquad (۳-۴۵)$$

$$R_1=\frac{Q_1}{P_1} \qquad (۳-۴۶)$$

$$Q_1=\int_{X_i}^{X_o}(\phi_1\times Z_{11}+\phi_3\times Z_{31})dX,P_1=\int_{X_i}^{X_o}(\phi_1\times Z_{12}+\phi_3\times Z_{32})dX \qquad (۳-۴۷)$$

معادله (۳-۴۵) یک معادله خطی مرتبه اول است که حل آن به‌صورت زیر می‌باشد.

$$c_4(T_1) = C_0 e^{k_1 T_1} \tag{۳-۴۸}$$

در رابطه (۳-۴۸)، k_1 دارای مقداری ثابت و در حالت کلی به‌صورت عددی مختلط می‌باشد. با استفاده از رابطه (۳-۴۸)، رابطه‌ی (۳-۲۷) به‌صورت زیر تبدیل خواهد شد.

$$\begin{Bmatrix} u_{00}(X,\Theta,T_0,T_1) \\ v_{00}(X,\Theta,T_0,T_1) \end{Bmatrix} = C_0 \begin{Bmatrix} y_1(X) \\ y_3(X) \end{Bmatrix} e^{(k_1 T_1 + i\omega_1 T_0)} e^{in\Theta} = C_0 \begin{Bmatrix} y_1(X) \\ y_3(X) \end{Bmatrix} e^{(\alpha_1 T_0)} e^{(i\omega_{in})T_0} e^{in\Theta} \tag{۳-۴۹}$$

در رابطه‌ی (۳-۴۹)، α_1 معرف کاهش نرخ دامنه‌ی نوسانات است که در این متن آن را میرایی می‌نامیم.

با تعیین $c_4(T_1)$، سکولاریتی معادلات مرتبه یک حذف می‌شود. اکنون حل معادلات (۳-۲۸) و (۳-۳۰) را به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{Bmatrix} u_{01}(X,\Theta,T_0,T_1) \\ v_{01}(X,\Theta,T_0,T_1) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{01}(X) \\ v_{01}(X) \end{Bmatrix} e^{i\omega_{ax}T_0} e^{in\Theta} \tag{۳-۵۰}$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۳-۵۰) در معادلات (۳-۲۸) و (۳-۳۰)، دو معادله‌ی مرتبه دو به‌دست می‌آید که به یکدیگر کوپل می‌باشند و دارای جواب عمومی هستند. جواب عمومی همانند مرتبه صفر تعیین می‌شود. با اعمال شرایط مرزی، ثابت‌های مسأله نیز به‌دست می‌آید.

۳-۲-۳-۲ تعیین $d_6(T_1)$

در این اینجا، مانند بخش قبل از شرط حل‌پذیری تابع $d_6(T_1)$ تعیین می‌شود. به‌صورتی که سه تابع الحاقی ϕ_2، ϕ_4 و ϕ_5 در معادلات مرتبه صفر (۳-۱۲)، (۳-۱۴) و (۳-۱۵) ضرب نموده و سه معادله با هم جمع شده و انتگرال گرفته می‌شود. معادلات (۳-۱۲)، (۳-۱۴) و (۳-۱۵) با توجه به رابطه‌ی (۳-۲۷) به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند.

$$Eq_2 = a_1 \frac{d^2 y_2(X)}{dX^2} + a_2 \frac{dy_4(X)}{dX} + a_3 \frac{dy_5(X)}{dX} + a_4 y_2(X) = 0 \tag{۳-۵۱}$$

$$Eq_4 = b_1 \frac{d^2 y_4(X)}{dX^2} + b_2 \frac{dy_2(X)}{dX} + b_3 y_5(X) + b_4 y_4(X) = 0 \tag{۵۲-۳}$$

$$Eq_5 = c_1 \frac{d^2 y_5(X)}{dX^2} + c_2 \frac{dy_2(X)}{dX} + c_3 y_4(X) + c_4 y_5(X) = 0 \tag{۵۳-۳}$$

که در اینجا:

$$\begin{aligned} &a_1 = h^{*2}(3i\beta\omega G_1^* + 3G_0^* + 4i\beta\omega + 4); a_2 = h^{*2}n(1 + 3i\beta\omega G_1^* + i\beta\omega + 3G_0^*); \\ &a_4 = -36iK_s\beta\omega - 3h^{*2}i\beta\omega n^2 - 3h^{*2}n^2 - 36K_s + 3ieh^{*2}\beta G_1^* n^2\omega^3 + 3eh^{*2}G_0^*\omega^2 \\ &a_3 = -36K_s(1 + i\beta\omega) \end{aligned} \tag{۵۴-۳}$$

$$\begin{aligned} &b_1 = 3h^{*2}(1 + i\beta\omega); b_2 = -h^{*2}n(1 + 3i\beta\omega G_1^* + i\beta\omega + 3G_0^*) \\ &b_4 = -3h^{*2}G_1^* i\beta\omega n^2 - 36K_s + 3eh^{*2}G_0^*\omega^2 + 3ieh^{*2}\beta G_1^* n^2\omega^3 - 3h^{*2}G_0^* n^2 \\ &-4h^{*2}i\beta\omega n^2 - 4h^{*2}n^2 - 36iK_s\beta\omega; b_3 = 36K_s n(1 + i\beta\omega) \end{aligned} \tag{۵۵-۳}$$

$$\begin{aligned} &c_1 = K_s h^*(1 + i\beta\omega); c_2 = K_s h^*(1 + i\beta\omega); c_3 = K_s h^* n(1 + i\beta\omega) \\ &c_4 = ieh^*\beta G_1^*\omega^3 - K_s h^* n^2 - iK_s h^*\beta\omega n^2 + eh^* G_0^*\omega^2; \end{aligned} \tag{۵۶-۳}$$

معادله دوم در ϕ_2، معادله چهارم در ϕ_4 و معادله پنجم در ϕ_5 و در بازه تعریف شده انتگرال گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} &\int_{X_i}^{X_o} (\phi_2 \times Eq_2 + \phi_4 \times Eq_4 + \phi_5 \times Eq_5) dX = \int_{X_i}^{X_o} (a_1 \frac{d^2\phi_2}{dX^2} - b_2 \frac{d\phi_4}{dX} - c_2 \frac{d\phi_5}{dX} + a_4\phi_2) y_2 dX + \\ &\int_{X_i}^{X_o} (b_1 \frac{d^2\phi_4}{dX^2} - a_2 \frac{d\phi_2}{dX} + c_3\phi_5 + b_4\phi_4) y_4 dX + \int_{X_i}^{X_o} (c_1 \frac{d^2\phi_5}{dX^2} - a_3 \frac{d\phi_2}{dX} + c_4\phi_5 + b_3\phi_4) y_5 dX \\ &\left[\begin{aligned} &a_1(\phi_2 \frac{dy_2}{dX} - y_2 \frac{d\phi_2}{dX}) + a_2\phi_2 y_4 + a_3\phi_2 y_5 + b_1(\phi_4 \frac{dy_4}{dX} - y_4 \frac{d\phi_4}{dX}) + b_2\phi_4 y_2 \\ &+ c_1(\phi_5 \frac{dy_5}{dX} - y_5 \frac{d\phi_5}{dX}) + c_2\phi_5 y_2 \end{aligned} \right]_{X_i}^{X_o} = 0 \end{aligned} \tag{۵۷-۳}$$

با توجه به معادله بالا توابع ϕ_2، ϕ_4 و ϕ_5 باید به ازای تمام مقادیر y_2، y_4 و y_5 برقرار باشند، لذا ضرایب آنها در انتگرال باید برابر صفر انتخاب شود.

$$(a_1 \frac{d^2\phi_2}{dX^2} - b_2 \frac{d\phi_4}{dX} - c_2 \frac{d\phi_5}{dX} + a_4\phi_2) = 0 \qquad (۵۸\text{-}۳)$$

$$(b_1 \frac{d^2\phi_4}{dX^2} - a_2 \frac{d\phi_2}{dX} + c_3\phi_5 + b_4\phi_4) = 0 \qquad (۵۹\text{-}۳)$$

$$(c_1 \frac{d^2\phi_5}{dX^2} - a_3 \frac{d\phi_2}{dX} + c_4\phi_5 + b_3\phi_4) = 0 \qquad (۶۰\text{-}۳)$$

با توجه به شرایط مرزی ورق حلقوی دوسرگیردار و دو سر ساده، شرایط مرزی لازم برای حل سه معادله کوپل به هم (۳-۵۸)، (۳-۵۹) و (۳-۶۰) را می‌توان از معادله (۳-۵۷) به‌صورت رابطه‌ی (۳-۶۱) برای شرط مرزی دوسرگیردار و رابطه‌ی (۳-۶۲) برای شرط مرزی ساده در نظر گرفت.

$$\phi_2 = \phi_4 = \phi_5 = 0 \quad at \quad X = X_i, X_o \qquad (۶۱\text{-}۳)$$

$$\frac{d\phi_2}{dx} = \frac{d\phi_4}{dx} = \phi_5 = 0 \quad at \quad X = X_i, X_o \qquad (۶۲\text{-}۳)$$

حل سه معادله کوپل به هم را می‌توان به‌صورت زیر در نظر گرفت.

$$\begin{Bmatrix} \phi_2 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{6} d_m \{V_m\} \exp(s_m X); \; \{V_m\} = \begin{Bmatrix} F_2 \\ F_4 \\ F_5 \end{Bmatrix} \qquad (۶۳\text{-}۳)$$

که s_m مقادیر ویژه و $\{V_m\}$ بردارهای ویژه می‌باشند. با جایگذاری رابطه (۳-۶۳) در (۳-۵۸)، (۳-۵۹) و (۳-۶۰) یک دستگاه معادله جبری به‌صورت رابطه (۳-۶۴) به‌دست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} a_1 s_m^2 + a_4 & -b_2 & -c_2 \\ -a_2 s_m & b_1 s_m^2 + b_4 & c_3 \\ -a_3 s_m & b_3 & c_1 s_m^2 + c_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_2 \\ F_4 \\ F_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (۶۴\text{-}۳)$$

برای وجود جواب غیر صفر، دترمینان ماتریس ضرایب رابطه (۳-۶۴) باید صفر شود. از حل معادله‌ی به‌دست آمده، شش مقدار ویژه $s_m\,(m = 1..6)$ نتیجه می‌گردد. بردارهای ویژه نیز از رابطه (۳-۶۴) محاسبه می‌شوند.

پس از یافتن بردارهای ویژه و مقادیر ویژه، حل کلی به‌صورت رابطه (۳-۶۳) است. با اعمال شرایط مرزی الحاقی، می‌توان ثابت‌های d_1، d_2، d_3، d_4، d_5 را برحسب d_6 تعیین کرد.

پس از به‌دست آوردن توابع الحاقی، ابتدا تابع ϕ_2 را در معادله (۳-۲۹)، تابع ϕ_4 را در معادله (۳-۳۱) و تابع ϕ_5 را در معادله (۳-۳۲) ضرب و سپس با هم جمع کرده و در انتها انتگرال گرفته شود.

$$\int_{X_i}^{X_o} (\phi_2 \times Eq_2 + \phi_4 \times Eq_4 + \phi_5 \times Eq_5)dX = \int_{X_i}^{X_o} (\phi_2 \times A_2 + \phi_4 \times A_4 + \phi_5 \times A_5)dX \qquad (۳\text{-}۶۵)$$

A_2، A_4 و A_5 در رابطه (۳-۶۵) شامل جملات سکولار موجود در قسمت ناهمگن معادلات مرتبه اول هست، زیرا $d_6(T_1)$ از صفر کردن جملات سکولار به‌دست می‌آید. بدلیل شرط مرزی گیردار، انتگرال سمت چپ صفر است. لذا با انتگرال‌گیری از سمت راست معادله (۳-۶۵)، معادله زیر حاصل می‌شود.

$$\left[\frac{dd_6(T_1)}{dT_1} - R_2 d_6(T_1)\right] e^{i\omega T_0} = 0 \qquad (۳\text{-}۶۶)$$

$$R_2 = \frac{Q_2}{P_2} \qquad (۳\text{-}۶۷)$$

$$Q_2 = \int_{X_i}^{X_o} (\phi_2 \times Z_{21} + \phi_4 \times Z_{41} + \phi_5 \times Z_{51})dX, P_2 = \int_{X_i}^{X_o} (\phi_2 \times Z_{22} + \phi_4 \times Z_{42} + \phi_5 \times Z_{52})dX \qquad (۳\text{-}۶۸)$$

معادله (۳-۶۶) یک معادله خطی مرتبه اول است که حل آن به‌صورت زیر می‌باشد.

$$d_6(T_1) = C_0 e^{k_2 T_1} \qquad (۳\text{-}۶۹)$$

در رابطه (۳-۶۹)، k_2 دارای مقداری ثابت و در حالت کلی به‌صورت عددی مختلط می‌باشد. با استفاده از رابطه (۳-۶۹)، رابطه‌ی (۳-۲۷) به‌صورت زیر تبدیل خواهد شد.

$$\begin{Bmatrix} u_{10}(X,\Theta,T_0,T_1) \\ v_{10}(X,\Theta,T_0,T_1) \\ w_{00}(X,\Theta,T_0,T_1) \end{Bmatrix} = C_1 \begin{Bmatrix} y_2(X) \\ y_4(X) \\ y_5(X) \end{Bmatrix} e^{(k_2 T_1 + i\omega T_0)} e^{in\Theta} = C_1 \begin{Bmatrix} y_2(X) \\ y_4(X) \\ y_5(X) \end{Bmatrix} e^{(\alpha_2 T_0)} e^{(i\omega_{out})T_0} e^{in\Theta} \qquad (۳\text{-}۷۰)$$

در رابطه‌ی (۳-۷۰)، α_2 معرف کاهش نرخ دامنه‌ی نوسانات است که مشابه معادلات اول و سوم، میرایی نامیده شده است. با تعیین $d_6(T_1)$، سکولاریتی معادلات مرتبه یک حذف می‌شود. اکنون حل معادلات (۳-۲۹)، (۳-۳۱) و (۳-۳۲) را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$\begin{Bmatrix} u_{11}(X,\Theta,T_0,T_1) \\ v_{11}(X,\Theta,T_0,T_1) \\ w_{00}(X,\Theta,T_0,T_1) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{11}(X) \\ v_{11}(X) \\ w_{01}(X) \end{Bmatrix} e^{i\omega_{bx}T_0} e^{in\Theta} \qquad (۳-۷۱)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۳-۷۱) در معادلات (۳-۲۹)، (۳-۳۱) و (۳-۳۲)، سه معادله‌ی مرتبه دو به‌دست می‌آید که به یکدیگر کوپل می‌باشند و دارای جواب عمومی هستند. جواب عمومی همانند مرتبه صفر تعیین می‌شود. با اعمال شرایط مرزی، ثابت‌های مسأله نیز به‌دست می‌آید.

۳-۴- حل معادلات قطاع حلقوی

برای تعیین فرکانس طبیعی قطاع حلقوی فرض می‌شود (شکل ۱-۲) که لبه‌ی شعاعی ورق شرط مرزی ساده و در لبه‌ی محیطی شرط مرزی دلخواه باشد. در این صورت، حل معادلات (۲-۱۱) تا (۳-۱۵) را می‌توان به‌صورت زیر در نظر گرفت.

$$\begin{Bmatrix} u_{00}(X,\Theta,T_0,T_1) \\ v_{00}(X,\Theta,T_0,T_1) \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{4}\sum_{n=1}^{\infty} c_m(T_1)\{V_m\}\exp(m_m X + i\omega_1 T_0)\begin{Bmatrix} \sin(n\Theta/\alpha) \\ \cos(n\Theta/\alpha) \end{Bmatrix},\quad \{V_m\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_3 \end{Bmatrix} \qquad (۳-۷۲)$$

$$\begin{Bmatrix} u_{10}(X,\Theta,T_0,T_1) \\ v_{10}(X,\Theta,T_0,T_1) \\ w_{00}(X,\Theta,T_0,T_1) \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{6}\sum_{n=1}^{\infty} d_m(T_1)\{V_m\}\exp(s_m X + i\omega T_0)\begin{Bmatrix} \sin(n\Theta/\alpha) \\ \cos(n\Theta/\alpha) \\ \sin(n\Theta/\alpha) \end{Bmatrix},\quad \{V_m\} = \begin{Bmatrix} F_2 \\ F_4 \\ F_5 \end{Bmatrix} \qquad (۳-۷۳)$$

که ω_1، و ω به ترتیب فرکانس طبیعی بی‌بعد شعاعی و عرضی، m_m و s_m مقادیر ویژه و $\{V_m\}$ بردارهای ویژه می‌باشند. با جایگذاری رابطه (۳-۷۲)، در معادله (۳-۱۱)، (۳-۱۳) یک دستگاه معادله جبری به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$a_{11} = 3ie\beta G_1^* \omega_1^3 + 3i\beta G_1^* \omega_1 m_m^2 + 4m_m^2 - 3i\beta\omega_1 \frac{n^2\pi^2}{\alpha^2} + 4i\beta\omega_1 m_m^2 + 3G_0^* m_m^2$$

$$+3eG_0^* \omega_1^2 - 3\frac{n^2\pi^2}{\alpha^2}; a_{12} = -m_m \frac{n\pi}{\alpha}(\beta\omega_1 i + 3i\beta G_1^* \omega_1 + 1 + 3G_0^*) \qquad (۷۴\text{-}۳)$$

$$a_{21} = m_m \frac{n\pi}{\alpha}(\beta\omega_1 i + 3i\beta G_1^* \omega_1 + 1 + 3G_0^*); a_{22} = 3m_m^2 + 3i\beta\omega_1 m_m^2 - 3i\beta G_1^* \omega_1 \frac{n^2\pi^2}{\alpha^2}$$

$$+3ie\beta G_1^* \omega_1^3 - 4\frac{n^2\pi^2}{\alpha^2} - 4i\beta\omega_1 \frac{n^2\pi^2}{\alpha^2} - 3G_0^* \frac{n^2\pi^2}{\alpha^2} + 3eG_0^* \omega_1^2$$

همچنین با قرار دادن رابطه (۳-۷۲) در (۳-۱۲)، (۳-۱۴) و (۳-۱۵) یک دستگاه معادله جبری به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_2 \\ F_4 \\ F_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$b_{11} = -3ih^{*2}\beta\omega \frac{n^2\pi^2}{\alpha^2} - 3h^{*2} \frac{n^2\pi^2}{\alpha^2} - 36iK_s\beta\omega + 4h^{*2}s_m^2 + 3ieh^{*2}\beta G_1^* \omega^3 + 3eh^{*2}G_0^* \omega^2 \qquad (۷۵\text{-}۳)$$

$$+3ih^{*2}\beta G_1^* \omega s_m^2 + 3h^{*2}G_0^* s_m^2 + 4ih^{*2}\beta\omega s_m^2 - 36K_s; b_{13} = -36K_s s_m(1 + i\beta\omega)$$

$$b_{12} = -h^{*2}s_m \frac{n\pi}{\alpha}(i\beta\omega + 3G_0^* + 3i\beta\omega G_1^* + 1); b_{32} = -K_s h^* s_m(i\beta\omega + 1);$$

$$b_{22} = -4ih^{*2}\beta\omega \frac{n^2\pi^2}{\alpha^2} + 3h^{*2}s_m^2 - 4h^{*2} \frac{n^2\pi^2}{\alpha^2} - 36K_s - 3iK_s\beta\omega + 3ih^{*2}\beta\omega s_m^2$$

$$+3eh^{*2}G_0^* \omega^2 - 3h^{*2}G_0^* \frac{n^2\pi^2}{\alpha^2} - 3ih^{*2}\beta G_1^* \omega n^2 + 3ieh^{*2}\beta G_1^* \omega^3; b_{31} = K_s h^* s_m(i\beta\omega + 1);$$

$$b_{23} = -36K_s s_m(1 + i\beta\omega); b_{21} = h^{*2}s_m \frac{n\pi}{\alpha}(i\beta\omega + 3G_0^* + 3i\beta\omega G_1^* + 1);$$

$$b_{33} = h^*(ei\beta G_1^* \omega^3 - K_s i\beta\omega \frac{n^2\pi^2}{\alpha^2} + K_s i\beta\omega s_m^2 - K_s \frac{n^2\pi^2}{\alpha^2} + eG_0^* \omega^2 + K_s s_m^2)$$

برای وجود جواب غیر صفر، دترمینان ماتریس ضرایب رابطه (۳-۲۴) و (۳-۲۵) باید صفر شود. معادله‌ی به‌دست‌آمده، معادله‌ی تفرق است، از حل معادله‌ی دستگاه اول چهار مقدار ویژه $m_m(m=1..4)$ برحسب ω_1 و همچنین از حل معادله‌ی دستگاه دوم شش مقدار ویژه $s_m(m=1..6)$ برحسب ω نتیجه می‌گردد.

بردارهای ویژه نیز از روابط (۳-۲۴) و (۳-۲۵) محاسبه می‌شوند. بردارهای $\{V_m\}$، بردارهای ویژه متناظر با m_m و s_m هستند. پس از یافتن بردارهای ویژه و مقادیر ویژه، حل کلی به‌صورت رابطه (۳-۲۲) و (۳-۲۳) است. با اعمال شرایط مرزی، یک دستگاه معادله جبری به‌صورت $[a]\{c_m(T_1)\}=\{0\}$ و $[b]\{d_m(T_1)\}=\{0\}$ نتیجه می‌شود که بردار $\{c_m(T_1)\}$ از دستگاه اول شامل ثابت‌های c_1، c_2، c_3 و c_4 بوده و ماتریس $[a]$ شامل ضرایب معادله‌ها است و همچنین بردار $\{d_m(T_1)\}$ از دستگاه دوم شامل ثابت‌های d_1، d_2، d_3، d_4، d_5 و d_6 بوده و ماتریس $[b]$ شامل ضرایب معادله‌ها می‌باشد.. برای جواب غیر صفر، دترمینان ماتریس ضرایب ماتریس $[a]$ و $[b]$ باید برابر صفر شود که درنهایت یک معادله‌ی جبری پیچیده برحسب ω و ω_1 به‌دست می‌آید. ریشه‌های این دو معادله، فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد خارج صفحه‌ای و درون صفحه‌ای را می‌دهند که این معادلات به‌وسیله‌ی روش عددی تنصیف فاصله[1] حل‌شده است. در این صورت، در دستگاه اول از چهار معادله، فقط سه معادله مستقل بوده و می‌توان c_1 تا c_3 را برحسب c_4 تعیین و در دستگاه دوم از شش معادله، فقط پنج معادله مستقل بوده و می‌توان ثابت‌های d_1 تا d_5 را برحسب d_6 تعیین نمود. حل سایر قسمت‌ها نیز مانند بخش قبل است.

۳-۵- تعیین پاسخ ورق تحت بار عرضی

برای تعیین پاسخ، همانند تعیین فرکانس، از روش مقیاس‌های چندگانه در تئوری اغتشاشات استفاده‌شده است. در این پایان‌نامه، پاسخ برای ورق حلقوی با تکیه‌گاه ساده-ساده محاسبه‌شده است.

حل معادلات مرتبه صفر به‌صورت رابطه (۳-۷۶) در نظر گرفته می‌شود. این حل شرایط مرزی مسأله ارضاء می‌کند.

[1] Bisection

$$u_{10}(X,\Theta,T_0,T_1)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{2m}(T_0,T_1)\cos(\frac{m\pi X}{L})\cos(n\Theta)$$
$$v_{10}(X,\Theta,T_0,T_1)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{4m}(T_0,T_1)\sin(\frac{m\pi X}{L})\sin(n\Theta) \qquad (۳-۷۶)$$
$$w_{00}(X,\Theta,T_0,T_1)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{5m}(T_0,T_1)\sin(\frac{m\pi X}{L})\cos(n\Theta)$$

که در آن

$$L=X_o-X_i \qquad (۳-۷۷)$$

با جایگذاری حل به‌صورت روابط (۳-۷۷) در معادلات (۳-۱۲)، (۳-۱۴) و (۳-۱۵) نتیجه می‌شود:

$$\sum_{m=1}^{\infty}P_{2m}\cos(\frac{m\pi X}{L})=F_2;\sum_{m=1}^{\infty}P_{4m}\cos(\frac{m\pi X}{L})=F_4;\sum_{m=1}^{\infty}P_{5m}\sin(\frac{m\pi X}{L})=F_5 \qquad (۳-۷۸)$$

که در آن P_{2m}، P_{4m} و P_{5m} عباراتی برحسب $A_{2m}(T_0,T_1)$، $A_{4m}(T_0,T_1)$ و $A_{5m}(T_0,T_1)$ و مشتقات آنها و $F_2=0$، $F_4=0$ و $F_5=Q^*$ می‌باشند. با بسط فوریه از روابط (۳-۷۸) می‌توان مقادیر P_{2m}، P_{4m} و P_{5m} را به‌صورت زیر به‌دست آورد.

$$P_{2m}=\frac{2}{L}\int_{X_i}^{X_o}F_2\cos(\frac{m\pi X}{L})dX$$
$$P_{4m}=\frac{2}{L}\int_{X_i}^{X_o}F_4\sin(\frac{m\pi X}{L})dX \qquad (۳-۷۹)$$
$$P_{5m}=\frac{2}{L}\int_{X_i}^{X_o}F_5\sin(\frac{m\pi X}{L})dX$$

رابطه‌ی (۳-۷۹) شامل سه معادله دیفرانسیل می‌باشد و حل عمومی آن به‌صورت رابطه‌ی (۳-۸۰) در نظر گرفته می‌شود.

$$A_{2m}(T_0,T_1)=\sum_{j=1}^{9}a_j(T_1)e^{i\alpha_j T_0}$$
$$A_{4m}(T_0,T_1)=\sum_{j=1}^{9}b_j(T_1)e^{i\alpha_j T_0} \qquad (۳-۸۰)$$
$$A_{5m}(T_0,T_1)=\sum_{j=1}^{9}c_j(T_1)e^{i\alpha_j T_0}$$

که α_j فرکانس طبیعی عرضی، $a_j(T_1)$، $b_j(T_1)$ و $c_j(T_1)$ ضرایب مجهولی هستند که بعداً از حذف جملات سکولار محاسبه می‌شوند. حل بخش همگن معادلات (۳-۱۷)، (۳-۱۹) و (۳-۲۰) به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{aligned}
u_{11}(X,\Theta,T_0,T_1) &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{22m}(T_0,T_1)\cos(\frac{m\pi X}{L})\cos(n\Theta) \\
v_{11}(X,\Theta,T_0,T_1) &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{44m}(T_0,T_1)\sin(\frac{m\pi X}{L})\sin(n\Theta) \\
w_{01}(X,\Theta,T_0,T_1) &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{55m}(T_0,T_1)\sin(\frac{m\pi X}{L})\cos(n\Theta)
\end{aligned} \tag{۳-۸۱}$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۳-۸۱) به‌عنوان حل بخش همگن و استفاده از روابط (۳-۷۶) و (۳-۷۷) در معادلات مرتبه اول، معادلات مرتبه اول به شکل زیر تبدیل خواهد شد.

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty} P_{22m}\cos(\frac{m\pi X}{L}) &= F_{22} \\
\sum_{m=1}^{\infty} P_{44m}\sin(\frac{m\pi X}{L}) &= F_{44} \\
\sum_{m=1}^{\infty} P_{55m}\sin(\frac{m\pi X}{L}) &= F_{55}
\end{aligned} \tag{۳-۸۲}$$

که در آن P_{22m}، P_{44m} و P_{55m} عباراتی برحسب $A_{22m}(T_0,T_1)$، $A_{44m}(T_0,T_1)$ و $A_{55m}(T_0,T_1)$ و مشتقات آنها هستند. F_{22}، F_{44} و F_{55} عبارت‌هایی شامل $e^{i\alpha_j T_0}$ که $j=1..9$ و $\sin(\frac{m\pi X}{L})$ و $\cos(\frac{m\pi X}{L})$ هستند.

P_{22m}، P_{44m} و P_{55m} از روابط سری فوریه، به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند.

$$\begin{aligned}
P_{22m} &= \frac{2}{L}\int_{X_i}^{X_o} F_{22}\cos(\frac{m\pi X}{L})dX \\
P_{44m} &= \frac{2}{L}\int_{X_i}^{X_o} F_{44}\sin(\frac{m\pi X}{L})dX \\
P_{55m} &= \frac{2}{L}\int_{X_i}^{X_o} F_{55}\sin(\frac{m\pi X}{L})dX
\end{aligned} \tag{۳-۸۳}$$

جملات $e^{i\alpha_j T_0}$ برای معادلات دوم، چهارم و پنجم، جملات سکولار محسوب می‌شوند. قبل از تعیین حل خصوصی، سکولاریتی مسأله باید از بین برود. بدین منظور از شرط حل‌پذیری استفاده می‌شود [۵۴]. حل خصوصی معادلات به‌صورت رابطه‌ی (۳-۸۴) در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{aligned} A_{22m}(T_0,T_1) &= \sum_{j=1}^{9} P_{2j}(T_1) e^{i\alpha_j T_0} \\ A_{44m}(T_0,T_1) &= \sum_{j=1}^{9} R_{2j}(T_1) e^{i\alpha_j T_0} \\ A_{55m}(T_0,T_1) &= \sum_{j=1}^{9} Q_{2j}(T_1) e^{i\alpha_j T_0} \end{aligned} \tag{۳-۸۴}$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۳-۸۴) در (۳-۸۳) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{9} P_{2j}(T_1) e^{i\alpha_j T_0} &= K_2 \\ \sum_{j=1}^{9} R_{2j}(T_1) e^{i\alpha_j T_0} &= K_4 \\ \sum_{j=1}^{9} Q_{2j}(T_1) e^{i\alpha_j T_0} &= K_5 \end{aligned} \tag{۳-۸۵}$$

K_2، K_4 و K_5 عبارت‌هایی شامل $e^{i\alpha_j T_0}$ که $j=1..9$ و جمله‌های نمایی دیگری هستند. با برابر صفر قرار دادن دترمینان ضرایب $e^{i\alpha_j T_0}$ (جمله‌ی سکولار)، به تعداد جملات مجهول، معادله دیفرانسیل مرتبه یک به‌دست می‌آید. که با حل این معادلات و استفاده از شرایط اولیه صفر، ضرایب مجهول $a_j(T_1)$، $c_j(T_1)$ و $b_j(T_1)$ در معادلات (۳-۸۰) به‌دست می‌آیند. با جایگذاری ضرایب به‌دست‌آمده در معادلات مرتبه اول و حذف جملات سکولار، می‌توان معادلات مرتبه اول را نیز حل کرد. حل ارائه‌شده برای هر تابع Q^* مکانی قابل استفاده است.

۳-۶- جمع‌بندی

در این فصل، نخست به بی‌بعد سازی معادلات پرداخته شد. سپس، روش تعیین فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد و روند حذف سکولاریتی بیان شد و درنهایت پاسخ ورق به ازای بار عرضی تعیین شد، با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه، حل تحلیلی به‌دست آمد. در فصل پنجم نتایج حاصل از این فصل ارائه خواهد شد.

فصل چهارم

تحلیل عددی

۴-۱- مقدمه

در این فصل حل عددی مسأله، شامل حل مودال و حل گذرا با استفاده از نرم‌افزار آباکوس ارائه خواهد شد. در ابتدای فصل به تعیین خصوصیات ویسکوالاستیک با استفاده از سری پرونی پرداخته‌شده و سپس المان مورداستفاده در تحلیل معرفی می‌شود. در بخش بعد همگرایی مش تعیین‌شده و اندازه‌ی مش بهینه در مدل‌سازی دوبعدی تعیین‌شده است و درنهایت به بیان مراحل حل مودال و تعیین پاسخ پرداخته می‌شود.

۴-۲- تعیین خصوصیات ویسکوالاستیک بر اساس سری پرونی

برای تعیین خصوصیات ویسکوالاستیک مادّه، از مدول رهایش بالک و برشی استفاده می‌شود. در نرم‌افزار آباکوس این توابع را می‌توان برحسب جملاتی از سری توانی پرونی به‌صورت زیر بیان کرد [۵۵].

$$G_R(t) = G_\infty + \sum_{i=1}^{N} G_i e^{\frac{-t}{\tau_i^G}} ; K_R(t) = K_\infty + \sum_{i=1}^{N} K_i e^{\frac{-t}{\tau_i^k}} \qquad (۴-۱)$$

G_∞ و G_i مدول الاستیسیته برشی، K_i و K_∞ مدول الاستیک بالک، τ_i^G و τ_i^k زمان رهایش برای هرکدام از اجزای سری پرونی است. نسبت مدول‌ها[1] به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\bar{g}_i^p = \frac{G_i}{G_0}, \bar{k}_i^p = \frac{K_i}{K_0} \qquad (۴-۲)$$

که در آن:

$$G_\infty = G_0\left(1 - \sum_{k=1}^{N} \bar{g}_G^p\right), K_\infty = K_0\left(1 - \sum_{k=1}^{N} \bar{k}_k^p\right) \qquad (۴-۳)$$

در اینجا G_0 و K_0 به ترتیب مدول برشی و مدول بالک در بارگذاری سریع یا مدول آنی[2]، G_∞ و K_∞ مدول مربوط به بارگذاری‌های کند یا مدول نهایی[3] می‌باشد.

۴-۳- تعیین مدول رهایش برشی و بالک

[1] Modulus ratio
[2] Instantaneous modulus
[3] Long-term modulus

بر اساس فرضیات فصل دوم، رفتار ماده در برش ویسکوالاستیک بوده و برای مدل‌سازی این رفتار از اولین مدل جامد استاندارد خطی استفاده می‌شود و مدول رهایش G به‌صورت تابعی از زمان تعیین می‌شود. همچنین رفتار ماده در بالک الاستیک در نظر گرفته‌شده و بدین ترتیب مدول بالک K عددی ثابت است.

۴-۳-۱ مدول رهایش برشی

یکی از بهترین روش‌های تعیین خصوصیات مواد ویسکوالاستیک در آباکوس استفاده از سری پرونی است. روش‌های مختلفی برای تعیین این سری در آباکوس وجود دارد. اولین روش این است که داده‌های مدول رهایش برشی نسبت به زمان که از آزمایش رهایش به‌دست‌آمده است را به‌طور مستقیم وارد آباکوس کرد. در این صورت، نرم‌افزار سری پرونی را بر این داده‌ها منطبق می‌کند. آباکوس در هنگام انطباق تابع نمایی داده-ها، G_0 و G_∞ را به ترتیب اولین و آخرین داده در نظر می‌گیرد و مقدار $\bar{g}_i^p$، $\bar{k}_i^p$ و τ_i را محاسبه می‌کند ولی بعد از آن، G_0 و G_∞ را در حافظه نگه نمی‌دارد. ازاین‌رو آباکوس مدول آنی G_0 را با استفاده از مدول الاستیک E و ضریب پوآسون ν و بر اساس فرمول زیر محاسبه می‌کند.

$$G_0 = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{۴-۴}$$

نکته دیگر این است که در داده‌های آزمایشگاهی، درصورتی‌که آخرین داده صفر باشد، مدول رهایش المان ماکسول به‌دست می‌آید.

با توجه به اینکه در حل تحلیلی مسأله، از مدل جامد استاندارد برای شبیه‌سازی رفتار برشی مادّه استفاده‌شده است، ضرایب سری پرونی به‌صورت زیر تعیین گردیده است.

$$G = G_\infty + G_i e^{\frac{-t}{\tau_i^G}} \tag{۵-۴}$$

که در آن:

$$G_i = \frac{G_1^2}{G_1+G_2}, \tau_i^G = \frac{\eta}{G_1+G_2}, G_\infty = \frac{G_1 G_2}{G_1+G_2} \tag{۶-۴}$$

بنابراین ضرایب سری پرونی موردنظر $\bar{g}_i^p$ و τ_i به‌طور مستقیم وارد آباکوس می‌شود ولی G_0 را نمی‌توان وارد آباکوس کرد و همان‌طور که قبلاً اشاره شد، آباکوس این مقدار را برحسب مدول الاستیک E و ضریب پوآسون ν محاسبه می‌کند.

۴-۳-۲ مدول بالک

با توجه به اینکه رفتار ماده در بالک الاستیک در نظر گرفته می‌شود، برای حالت بالک سری پرونی تعریف نمی‌شود و با واردکردن مدول الاستیک و ضریب پوآسون، آباکوس مقدار مدول بالک را بر اساس رابطه‌ی زیر محاسبه می‌کند.

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \tag{۴-۷}$$

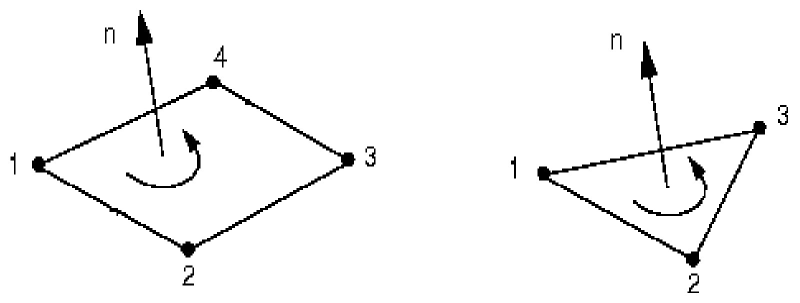
۴-۴- معرفی المان‌ها

در این پایان‌نامه برای ورق های نازک از المان S4R چهار گره‌ای و در ورق‌های ضخیم‌تر از المان سه‌بعدی ۲۰ گره‌ای C3D20 استفاده‌شده است که در ادامه توضیح مختصری در مورد این المان‌ها داده می‌شود.

۴-۴-۱ المان S4R

در حالتی که یکی از ابعاد مدل (ضخامت آن) در برابر دو بعد دیگر بسیار و تنش‌ها در جهت ضخامت مدل قابل طرفنظر کردن باشد، از المان پوسته‌ای برای مدل‌سازی سازه‌ها استفاده می‌شود. سازه‌ای مانند یک مخزن فشار که ضخامت آن کمتر از ۰/۱ ابعاد دیگر آن است را می‌توان با استفاده از المان‌های پوسته‌ای مدل‌سازی کرد. فرض می‌شود که در المان‌های پوسته‌ای آباکوس مقاطع صفحه‌ای عمود بر صفحه پوسته به‌صورت صفحه باقی می‌ماند. المان‌های پوسته‌ای معمولی علاوه بر جابجایی‌های گرهی دارای درجه آزادی دورانی نیز می‌باشند. این المان‌ها فقط یک سطح مرجع از جسم را مدل می‌کنند و مقادیر جابجایی‌ها و دوران‌های گرهی فقط در این سطح مرجع محاسبه می‌شود، سپس مقادیر جابجایی در راستای ضخامت با استفاده از تئوری‌های کامپوزیت (تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول یا تئوری کیرشهف) محاسبه می‌شود.

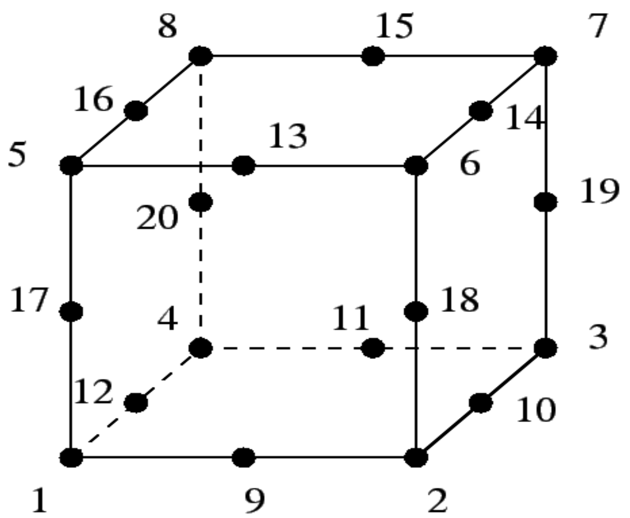
این المان با چهار گره دارای شش درجه آزادی در هر گره تعریف می‌شود [۵۵].



شکل ۴-۱ هندسه المان S4R

۴-۴-۲ المان C3D20

المان‌های کانتینیوم سه‌بعدی کل حجم سه‌بعدی سازه را مدل می‌کنند و مقادیر جابجایی‌های گرهی را در کل حجم ماده محاسبه می‌کنند. سپس مقادیر کرنش را با استفاده از همین جابجایی‌های گرهی با استفاده از تئوری الاستیسیته محاسبه می‌کنند.



شکل ۴-۲ هندسه المان C3D20

۴-۵- حل مودال

از آنالیز مودال[1] جهت تعیین فرکانس‌های طبیعی و شکل مود آن، در فرکانس مورد نظر استفاده می‌شود. مقدار فرکانس طبیعی هر سازه بستگی به شکل، جنس و تکیه گاه‌های آن سازه دارد.

۴-۵-۱ تعیین مش بهینه

ورقی به ابعاد و خواص مکانیکی مطابق جدول (۴-۱) مفروض است. برای مدل‌سازی، ورق حلقوی شکل با شرایط مرزی دو سرگیردار مدنظر قرار گرفته است. پس از تعریف خواص مکانیکی و ابعاد ورق، شبکه‌بندی صورت می‌گیرد.

جدول ۴-۱ مشخصات هندسی و مکانیکی ورق [۵۶]

شعاع خارجی (m)	r_o=۰/۱۵
شعاع داخلی (m)	r_i=۰/۰۴۵
ضخامت (m)	h= ۰/۰۰۴
مدول های ویسکوالاستیک (Pa)	G_0=۵/۳۵۴e۹, G_1=۴/۵۰۴e۹
ضریب ویسکوالاستیک (Pa.s)	η=۲/۶۷۳e۱۰
ضریب پوآسون	ν=۰/۳
چگالی (Kg/m^2)	ρ=۰/۲۲

باید به این نکته توجه شود که چگالی ذکر شده در جدول، چگالی سطحی است و برای مدل‌سازی باید به ضخامت تقسیم شود.

با استفاده از المان S4R، فرکانس طبیعی عرضی اول برای تعداد المان‌های مختلف در جدول (۴-۲) گزارش شده است. بر اساس این جدول، مش بهینه به‌ازای تقریباً ۴۰۰۰ المان حاصل می‌شود.

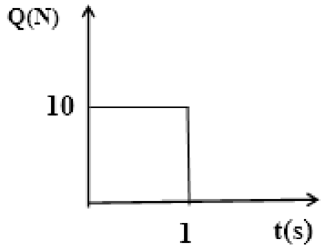
جدول ۴-۲ مقادیر فرکانس طبیعی عرضی اول به ازای المان‌های مختلف برحسب (Hz)

تعداد المان	۳۰۰۰	۴۰۰۰	۵۰۰۰	۵۵۰۰	۶۰۰۰	۶۵۰۰	۷۰۰۰	۷۵۰۰	۸۰۰۰
فرکانس	۲۵۷۹۱	۲۵۷۹۰	۲۵۷۹۰	۲۵۷۷۵	۲۵۷۵۸	۲۵۷۴۹	۲۵۷۳۸	۲۵۷۳۳	۲۵۷۲۶

[1] Modal

۴-۶- حل دینامیکی

به کمک این تحلیل می‌توان به محاسبه‌ی پاسخ دینامیکی یک سازه تحت تأثیر بارگذاری‌های وابسته به زمان پرداخت. برای تحلیل یک مدل وابسته به زمان، باید تحلیل اجزاء زیرمجموعه ضمنی[۱] انتخاب شود. به‌عنوان نمونه، تحلیل طیف ضمنی با بارگذاری زیر انجام می‌شود. این بار فقط تابع زمان است.



شکل ۴-۳ تغییرات زمانی نیروی گسترده

تغییرات نیرو برحسب زمان را می‌توان به دو قسمت مجزا تقسیم نمود. هر یک از این قسمت‌ها یک مرحله‌ی بارگذاری[۲] نامیده می‌شود. هنگام تحلیل اجزاء محدود، هر یک از مراحل بارگذاری، به بخش‌های کوچک‌تر تقسیم می‌شوند تا دقت حاصل از تحلیل افزایش یابد. به این بخش‌های کوچک‌تر گام‌های بارگذاری[۳] گفته می‌شود.

۴-۷- جمع‌بندی

در این فصل، روند حل عددی دوبعدی و سه‌بعدی مسأله ارائه شد. در ابتدای فصل تعیین خصوصیات مواد ویسکوالاستیک (مدول رهایش برشی و بالک) بر اساس سری پرونی موردمطالعه قرار گرفت. سپس المان‌های به‌کاررفته در تحلیل معرفی شد. در بخش بعدی به حل مودال مسأله و حساسیت مش و درنهایت به حل دینامیکی پرداخته شد. در فصل پنجم نتایج حاصل از این فصل ارائه خواهد شد.

[1] Implicit subspace
[2] Load Step
[3] Loading Substeps

فصل پنجم

نتایج

۵-۱- مقدمه

در این فصل، به بررسی نتایج حاصل از روش‌های ارائه‌شده در فصل‌های سوم و چهارم پرداخته خواهد شد. محاسبات ریاضی در محیط Maple 15 انجام‌شده است.

۵-۲- فرکانس طبیعی

برای تحلیل فرکانسی، از ورقی با مشخصات هندسی و خواص مکانیکی زیر استفاده‌شده است.

جدول ۵-۱ مشخصات هندسی و مکانیکی ورق [۵۶]

شعاع خارجی (m)	r_0=۰/۱۵
مدول‌های ویسکوالاستیک (Pa)	G_1=۵/۳۵۴×۱۰^۹, G_2=۴/۵۰۴×۱۰^۹
ضریب ویسکوالاستیک (Pa.s)	η=۲/۶۷۳×۱۰^۶
ضریب پوآسون	ν=۰/۳
چگالی (Kg/m^2)	ρ=۰/۲۲

نتایج به‌دست‌آمده برای ورق ویسکوالاستیک، می‌تواند برای ورق الاستیک نیز با قرار دادن $\tau \to 0$ به‌دست آید. در این حالت مدول بالک با رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود [۶۸].

$$K_0 = \frac{2}{3}G_s\,\frac{1+\nu}{1-2\nu};\left\{\begin{matrix}\eta \neq 0 \to G_s = G_1 \\ \eta = 0 \to G_s = \dfrac{G_1 G_2}{G_1+G_2}\end{matrix}\right\};E = 2G_s(1+\nu) \qquad (۵-۱)$$

نتایج به‌دست‌آمده بر اساس تئوری برشی مرتبه اول با روش‌های عددی و نتایجی که توسط چندین مرجع ارائه‌شده، مقایسه شده است. مرجع [۶] حل دقیق را با استفاده از تئوری کلاسیک، مرجع [۵۷] از تئوری میندلین، مرجع [۴۴] از تئوری برشی مرتبه اول و در حالت متقارن محوری، مرجع [۵۸] با استفاده از روش ریتز سه‌بعدی فرکانس‌های طبیعی را استخراج نمود و مرجع [۵۹] با استفاده از روش DQ استفاده کرده است. تمامی فرکانس‌ها به‌صورت بی‌بعد ارائه‌شده‌اند و از رابطه (۵-۲) برای بی‌بعد سازی فرکانس‌ها استفاده شده است. همچنین رابطه دمپینگ در حالت کلی، مطابق رابطه (۵-۲) می باشد.

$$\lambda = a^2\omega\sqrt{\rho h / D};\zeta = e^{-\alpha_2 T_0}\sin(\omega T_0) \qquad (۵-۲)$$

در جدول‌ها (۵-۲) تا (۵-۴)، فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد ورق حلقوی الاستیک با شرط مرزی گیردار-گیردار برای نسبت‌های مختلف r_i / r_o و r_o / h و با تئوری‌های مختلف آورده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود در ورق‌های نازک، دقت تئوری کلاسیک نسبت به تئوری برشی در مقایسه با مراجع و حل اجزاء محدود بهتر می‌باشد که این دقت در ضخامت‌های بالا کاهش می‌یابد. به‌عبارتی، هرچه نسبت ضخامت به شعاع خارجی ورق افزایش یابد، دقت تئوری برشی مرتبه اول افزایش یافته و دقت تئوری کلاسیک در مقایسه با حل اجزاء محدود کاهش می‌یابد. بعلت اینکه در تئوری برشی مرتبه اول، اثر برش عرضی در نظر گرفته شده است و در تئوری کلاسیک این اثر، صرفنظر می‌شود، مسبب این است که در ورق‌های نازک‌تر، تئوری برشی مرتبه اول فرکانس‌های طبیعی را بیشتر گزارش می‌کند. این روال برای سایر شرایط مرزی نیز صادق هست.

جدول ۵-۲ فرکانس طبیعی بی‌بعد ورق حلقوی الاستیک گیردار-گیردار n=۰

h / r_o	r_i / r_o	تئوری‌ها	فرکانس اول	فرکانس دوم
۰/۰۱	۰/۱	آباکوس	۲۷/۳۵۶	۷۶/۹۲
		مطالعه جاری	۳۰/۱۳۶	۸۰/۰۰۹
		کلاسیک مرجع [۶]	۲۷/۲۵۰	۷۵/۳۰۰
		کلاسیک [پرتوربیشن]	۲۷/۳۲۲	۷۵/۵۵۶
	۰/۳	آباکوس	۴۵/۴۳۳	۱۲۶/۰۸۹
		مطالعه جاری	۴۹/۳۱۵	۱۳۰/۷۱۵
		کلاسیک مرجع [۶]	۴۵/۳۶	۱۲۵
		کلاسیک [پرتوربیشن]	۴۵/۴۵۸	۱۲۵/۶۷۵
	۰/۵	آباکوس	۸۹/۲۸۳	۲۴۶/۹۱۰
		مطالعه جاری	۹۵/۶۸۶	۲۵۱/۷۷۴
		کلاسیک مرجع [۶]	۸۹/۳۰۰	۲۴۶
		کلاسیک [پرتوربیشن]	۸۹/۳۸۹	۲۴۶/۳۱۳
۰/۱	۰/۱	آباکوس	۲۵/۲۶۰	۶۵/۲۹۹
		مطالعه جاری	۲۷/۰۱۹	۶۷/۵۷۷
		مرجع [۵۷]	۲۴/۶۳۰	۶۲/۱۴۰
		مرجع [۴۴]	۲۴/۶۳۴	۶۲/۱۴۶
		کلاسیک [پرتوربیشن]	۲۷/۵۲۲	۷۶/۱۴۴
		کلاسیک [بسل]	۲۷/۳۷۸	۷۶/۰۶۲

	۰/۳	آباکوس	۴۰/۵۸۶	۱۰۰/۶۲۲
		مطالعه جاری	۴۲/۷۵۸	۱۰۱/۷۴
		مرجع [۵۷]	۳۹/۴۰۰	۹۵/۵۹۰
		مرجع [۴۴]	۳۹/۳۹۵	۹۵/۵۹۸
		کلاسیک [پرتوربیشن]	۴۵/۵۶۳	۱۲۵/۸۶۰
		کلاسیک [بسل]	۴۵/۴۵۸	۱۲۵/۴۵۸
	۰/۵	آباکوس	۷۳/۱۷۱	۱۶۸/۳۰۳
		مطالعه جاری	۷۵/۴۳۷	۱۶۸/۴۰۳
		مرجع [۵۷]	۷۰/۲۸۰	۱۵۹/۷۸۰
		مرجع [۴۴]	۷۰/۲۴۳	۱۵۹/۷۸۶
		کلاسیک [پرتوربیشن]	۸۹/۳۹۵	۲۴۶/۴۹۴
		کلاسیک [بسل]	۸۹/۲۴۶	۲۴۶/۳۳۱
۰/۲	۰/۱	آباکوس	۲۰/۵۲۰	۴۷/۳۷۲
		مطالعه جاری	۲۱/۸۲۵	۴۷/۶۱۱
		مرجع [۵۷]	۱۹/۸۴۰	۴۴/۹۱۰
		مرجع [۴۴]	۱۹/۸۵۲	۴۴/۹۲۲
		کلاسیک [پرتوربیشن]	۲۷/۴۸۸	۷۵/۹۴۳
		کلاسیک [بسل]	۲۷/۳۸۰	۷۵/۳۶۷
	۰/۳	آباکوس	۳۰/۹۱۳	۶۷/۰۱۳
		مطالعه جاری	۳۲/۱۶۳	۶۷/۲۵۱
		مرجع [۵۷]	۳۰/۰۴۰	۶۴/۲۳۰
		مرجع [۴۴]	۳۰/۰۴۶	۶۴/۲۳۹
		کلاسیک [پرتوربیشن]	۴۵/۴۶۰	۱۲۵/۶۲۹
		کلاسیک [بسل]	۴۵/۳۴۵	۱۲۵/۳۶۱
	۰/۵	آباکوس	۵۰/۳۶۵	۱۰۰/۵۱۲
		مطالعه جاری	۵۰/۳۸۶	۱۰۰/۵۳۱
		مرجع [۵۷]	۴۸/۳۱۰	۹۷/۳۹۰
		مرجع [۴۴]	۴۸/۳۱۷	۹۷/۳۹۷
		کلاسیک [پرتوربیشن]	۸۹/۳۸۹	۲۴۶/۶۸۵
		کلاسیک [بسل]	۸۹/۲۴۵	۲۴۶/۳۳۴

جدول ۵-۳ فرکانس طبیعی بی‌بعد ورق حلقوی الاستیک گیردار-گیردار n=۱

h / r_o	r_i / r_o	**تئوری‌ها**	**فرکانس اول**	**فرکانس دوم**
۰/۰۱	۰/۱	آباکوس	۲۸/۲۳۲	۸۰/۱۴۸
		مطالعه جاری	۳۱/۷۶۸	۸۲/۴۱۱
		کلاسیک مرجع [۶]	۲۸/۸۴۰	۷۸/۶۰۰
		کلاسیک [پرتوربیشن]	۲۸/۷۰۸	۷۸/۳۹۵
	۰/۳	آباکوس	۴۷/۷۱۵	۱۳۰/۰۵۱
		مطالعه جاری	۵۰/۰۱۸	۱۳۳/۶۸۶

		کلاسیک مرجع [۶]	۴۶/۶۰۰	۱۲۷
		کلاسیک [پرتوربیشن]	۴۶/۳۱۷	۱۲۶/۷۰۴
	۰/۵	آباکوس	۹۰/۲۸۳	۲۵۰/۲۱۵
		کلاسیک مرجع [۶]	۸۹/۶۸۳	۲۴۸
		کلاسیک [پرتوربیشن]	۸۹/۹۴۳	۲۴۷/۵۴۹
		مرجع [۵۸]	۸۹/۸۶۵۵	–
		مرجع [۵۹]	۸۹/۷۶۵۳	–
		مطالعه جاری	۹۵/۹۷۶	۲۵۶/۸۱۹
۰/۱	۰/۱	آباکوس	۲۶/۰۲۳	۶۶/۸۸۰
		مطالعه جاری	۲۷/۴۵۵	۶۸/۷۰۴
		مرجع [۵۷]	۲۵/۹۰۰	۶۴/۷۸۰
		کلاسیک [پرتوربیشن]	۲۸/۵۸۲	۷۶/۸۹۵
		کلاسیک [بسل]	۲۸/۷۷۹	۷۷/۶۳۴
	۰/۳	آباکوس	۴۱/۵۷۶	۱۰۱/۰۳۵
		مطالعه جاری	۴۲/۹۸۴	۱۰۲/۵۵۶
		مرجع [۵۷]	۴۰/۳۷۰	۹۶/۹۹۰
		کلاسیک [پرتوربیشن]	۴۶/۴۱۷	۱۲۷/۶۰۶
		کلاسیک [بسل]	۴۶/۶۴۲	۱۲۷/۳۷۴
	۰/۵	آباکوس	۷۴/۸۱۵	۱۶۸/۳۹۷
		مطالعه جاری	۷۷/۳۳۴	۱۶۹/۴۳۱
		مرجع [۵۷]	۷۰/۹۰۰	۱۶۰/۶۰۰
		کلاسیک [پرتوربیشن]	۹۰/۰۴۴	۲۴۷/۴۳۹
		کلاسیک [بسل]	۹۰/۲۳۴	۲۴۷/۷۵۴
۰/۲	۰/۱	آباکوس	۲۲/۶۰۷	۴۸/۳۱۵
		مطالعه جاری	۲۲/۷۱۰	۴۸/۸۱۳
		مرجع [۵۷]	۲۱/۱۸۰	۴۷/۵۹۰
		کلاسیک [پرتوربیشن]	۲۸/۱۸۳	۷۸/۳۹۱
		کلاسیک [بسل]	۲۸/۶۱۵	۷۸/۶۴۰
	۰/۳	آباکوس	۳۱/۶۳۸	۶۷/۱۳۸
		مطالعه جاری	۳۲/۵۰۴	۶۷/۴۱۴
		مرجع [۵۷]	۳۰/۷۷۰	۶۵/۳۶۰
		کلاسیک [پرتوربیشن]	۴۶/۳۱۶	۱۲۷/۴۰۸
		کلاسیک [بسل]	۴۶/۴۶۱	۱۲۷/۳۷۵
	۰/۵	آباکوس	۵۰/۲۷۱	۱۰۰/۴۶۲
		مطالعه جاری	۵۰/۶۰۱	۱۰۰/۶۳۵
		مرجع [۵۷]	۴۸/۷۳۰	۹۸/۰۲۰
		کلاسیک [پرتوربیشن]	۹۰/۱۶۰	۲۴۷/۴۴۹
		کلاسیک [بسل]	۹۰/۲۲۵	۲۴۷/۷۵۱

جدول ۵-۴ فرکانس طبیعی بی‌بعد ورق حلقوی الاستیک گیردار-گیردار n=۲

h/r_o	r_i/r_o	**تئوری‌ها**	**فرکانس اول**	**فرکانس دوم**
۰/۰۱	۰/۱	آباکوس	۳۶/۷۳۳	۹۰/۸۷۳
		مطالعه جاری	۳۳/۰۰۱	۸۶/۸۵۶
		کلاسیک مرجع [۶]	۳۶/۶۰۹	۹۰/۵۰۰
	۰/۳	آباکوس	۵۱/۶۹۳	۱۳۴/۲۰۹
		مطالعه جاری	۵۲/۵۹۱	۱۳۹/۲۲۹
		کلاسیک مرجع [۶]	۵۱	۱۳۴
		کلاسیک [پرتوربیشن]	۵۰/۶۷۱	۱۳۲/۵۲۱
	۰/۵	آباکوس	۹۴/۲۴۲	۲۵۵/۱۷۳
		مطالعه جاری	۹۷/۲۴۳	۲۶۹/۷۹۷
		کلاسیک مرجع [۶]	۹۳/۳	۲۵۳
		کلاسیک [پرتوربیشن]	۹۳/۰۲۱	۲۵۲/۱۳۲
۰/۱	۰/۱	آباکوس	۳۳/۱۳۵	۷۷/۹۷۲
		مطالعه جاری	۳۳/۳۷۰	۷۹/۱۵۳
		مرجع [۵۷]	۳۳/۱۲۰	۷۴/۸۷۰
		کلاسیک [بسل]	۳۶/۶۱۵	۹۰/۴۵۳۸
	۰/۳	آباکوس	۴۵/۲۲۸	۱۰۴/۰۸۸
		مطالعه جاری	۴۶/۴۳۷	۱۰۴/۳۹۰
		مرجع [۵۷]	۴۳/۹۸۰	۱۰۱/۴۳۰
		کلاسیک [بسل]	۵۱/۱۳۹	۱۳۳/۶۷۱
		کلاسیک [پرتوربیشن]	۵۰/۶۶۸	۱۳۲/۹۹۵
	۰/۵	آباکوس	۷۶/۹۲۵	۱۶۹/۱۲۱
		مطالعه جاری	۷۷/۷۴۳	۱۶۹/۴۳۱
		مرجع [۵۷]	۷۲/۹۶۰	۱۶۳/۰۸۰
		کلاسیک [بسل]	۹۳/۳۲۶	۲۵۱/۹۵۷
		کلاسیک [پرتوربیشن]	۹۳/۰۱۳۱	۲۵۱/۲۰۳
۰/۲	۰/۱	آباکوس	۲۷/۹۵۷	۵۷/۷۲۶
		مطالعه جاری	۲۷/۳۷۸	۵۷/۸۲۹
		مرجع [۵۷]	۲۷/۴۴۰	۵۵/۵۳۰
		کلاسیک [بسل]	۳۶/۶۱۵	۹۰/۴۴۹
	۰/۳	آباکوس	۳۳/۵۱۷	۶۸/۶۷۱
		مطالعه جاری	۳۳/۴۹۶	۶۸/۱۳۲
		مرجع [۵۷]	۳۳/۶۷۰	۶۸/۸۱۰
		کلاسیک [بسل]	۵۱/۱۳۷	۱۳۳/۶۸۴
	۰/۵	آباکوس	۵۱/۳۳۸	۱۰۰/۱۱۵

مطالعه جاری	۵۱/۷۵۵	۱۰۰/۹۶۳
مرجع [۵۷]	۵۰/۱۸۰	۹۹/۹۰۰
کلاسیک [بسل]	۹۳/۳۲۶	۲۵۱/۹۵۸

با توجه به نتایج ارائه شده در بالا، برای سایر شرایط مرزی، نتایج فقط به‌ازای نسبت ضخامت به شعاع خارجی ۰/۲، نسبت شعاع داخلی به خارجی ۰/۳ و مقایر مختلف n گزارش شده‌اند.

جدول ۵-۵ فرکانس طبیعی بی‌بعد ورق حلقوی الاستیک گیردار-ساده

n	h/r_o	r_i/r_o	تئوری‌ها	فرکانس اول	فرکانس دوم
۰	۰/۲	۰/۳	آباکوس	۲۳/۱۱۵	۶۱/۰۲۳
			مطالعه جاری	۲۴/۳۷۴	۶۲/۹۳۱
			مرجع [۵۷]	۲۲/۴۴۰	۵۹/۳۸۰
۱			آباکوس	۲۴/۰۱۵	۶۲/۳۸۸
			مطالعه جاری	۲۷/۱۳۵	۶۴/۱۲۴
			مرجع [۵۷]	۲۳/۵۲۰	۶۰/۶۲۰
۲			آباکوس	۲۷/۸۱۳	۶۵/۴۵۰
			مطالعه جاری	۲۹/۳۵۲	۶۵/۱۶۳
			مرجع [۵۷]	۲۷/۳۲۰	۶۴/۴۲۰

جدول ۵-۶ فرکانس طبیعی بی‌بعد ورق حلقوی الاستیک ساده-آزاد

n	h/r_o	r_i/r_o	تئوری‌ها	فرکانس اول	فرکانس دوم
۰	۰/۲	۰/۳	آباکوس	۴/۰۳۶	۲۶/۸۵۵
			مطالعه جاری	۴/۹۲۸	۲۷/۰۸۷
			مرجع [۵۷]	۳/۳۳	۲۵/۸۹۰
۱			آباکوس	۵/۰۹۸	۲۸/۸۵۶
			مطالعه جاری	۵/۵۹۵	۲۹/۵۷۸
			مرجع [۵۷]	۳/۲۳	۲۷/۸۷۰
۲			آباکوس	۱۱/۲۳۰	۳۴/۸۳۵
			مطالعه جاری	۱۲/۱۹۳	۳۵/۱۷۴
			مرجع [۵۷]	۵/۷۴	۳۳/۵۲۰

جدول ۵-۷ فرکانس طبیعی بی‌بعد ورق حلقوی الاستیک ساده-ساده

n	h/r_o	r_i/r_o	تئوری‌ها	فرکانس اول	فرکانس دوم
۰	۰/۲	۰/۳	آباکوس	۱۹/۰۲۱	۵۸/۰۳۲
			مطالعه جاری	۱۹/۲۹۴	۵۹/۲۷۸
			مرجع [۵۷]	۱۸/۲۱۰	۵۶/۰۸۰
۱			آباکوس	۲۰/۱۵۱	۵۹/۱۱۱
			مطالعه جاری	۲۰/۰۲۰	۶۰/۰۲۳
			مرجع [۵۷]	۱۹/۹۸۰	۵۷/۶۰۰
۲			آباکوس	۲۵/۷۴۲	۶۲/۱۲۹
			مطالعه جاری	۲۶/۳۲۰	۶۲/۱۹۹
			مرجع [۵۷]	۲۵/۲۲	۶۲/۱۱۰

جدول ۵-۸ فرکانس طبیعی بی‌بعد ورق حلقوی الاستیک آزاد-آزاد

n	h/r_o	r_i/r_o	تئوری‌ها	فرکانس اول	فرکانس دوم
۰	۰/۲	۰/۳	آباکوس	۷/۷۹۵	۳۹/۸۴۲
			مطالعه جاری	۸/۳۴۸	۳۹/۹۷۰
			مرجع [۵۷]	۷/۸۹۰	۳۹/۵۷۰
۱			آباکوس	۱۵/۱۹۳	۴۳/۵۱۱
			مطالعه جاری	۱۲/۶۲۹	۴۱/۶۳۳
			مرجع [۵۷]	۱۵/۱۳۰	۴۳/۱۷۰
۲			آباکوس	۴/۶۱۵	۵۳/۵۶۵
			مطالعه جاری	۴/۷۲۱	۴۵/۵۸۶
			مرجع [۵۷]	۴/۶۱۰	۲۶/۶۳۰

جدول ۵-۹ فرکانس طبیعی بی‌بعد ورق حلقوی الاستیک گیردار-آزاد

n	h/r_o	r_i/r_o	تئوری‌ها	فرکانس اول	فرکانس دوم
۰	۰/۲	۰/۳	آباکوس	۱۰/۴۵۶	۳۷/۴۴۲
			مطالعه جاری	۹/۱۳۵	۳۶/۵۴۰
			مرجع [۵۷]	۱۰/۳۵۰	۳۶/۷۷۰
۱			آباکوس	۱۶/۵۵۱	۴۰/۹۰۰
			مطالعه جاری	۱۶/۹۴۴	۳۹/۷۲۱
			مرجع [۵۷]	۱۵/۸۷۰	۴۰/۱۸۰
۲			آباکوس	۲۵/۶۹۸	۵۰/۶۵۰
			مطالعه جاری	۲۴/۶۵۰	۴۵/۲۴۹
			مرجع [۵۷]	۲۵/۳۳۰	۴۹/۷۴۰

جدول ۵-۱۰ فرکانس طبیعی بی‌بعد ورق حلقوی الاستیک ساده-گیردار

n	h / r_o	r_i / r_o	تئوری‌ها	فرکانس اول	فرکانس دوم
۰	۰/۲	۰/۳	آباکوس	۲۶/۴۳۲	۶۴/۰۹۶
			مطالعه جاری	۲۵/۶۸۶	۶۲/۹۳۰
			مرجع [۵۷]	۲۵/۶۸۰	۶۱/۵۶۰
۱			آباکوس	۲۷/۱۶۳	۶۴/۱۵۶
			مطالعه جاری	۲۷/۳۴۴	۶۵/۵۳۸
			مرجع [۵۷]	۲۷/۰۴۰	۶۲/۸۷۰
۲			آباکوس	۳۱/۲۱۴	۶۸/۳۲۱
			مطالعه جاری	۳۱/۸۱۰	۶۸/۸۹۱
			مرجع [۵۷]	۳۱/۳۲۰	۶۶/۸۱۰

در ادامه روند ارائه نتایج ورق مدور الاستیک، به ارائه نتایج ورق مدور توپر پرداخته می‌شود. برای این حالت، سه شرط مرزی آزاد، گیردار و ساده با نسبت‌های مختلف ضخامت به شعاع و مقادیر مختلف n گزارش شده است. برای صحت سنجی نتایج به‌دست آمده از ورق توپر، نتایج این بخش با حل عددی و مرجع [۶۳] که به حل تحلیلی ارتعاشات آزاد ورق دایروی نامتقارن با تئوری میندلین و مرجع [۶۴] که یک فرم بسته دقیق[1] برای ارتعاشات آزاد ورق دایروی با استفاده از تئوری مرتبه بالای برشی ارائه داده‌اند، مقایسه می‌گردد. این مراجع برای ارائه پاسخ تحلیلی، از شکل بسل استفاده نموده و با استفاده از شرایط تکینگی در مرکز ورق، ثابت‌های حل را به‌دست آورده‌اند. ولی در پژوهش حاضر، با توجه به شرایط مرزی معرفی شده در مرکز ورق، فرم جدیدی از حل بدون استفاده از شرط محدودیت، ارائه داده شده است. همانطور که در جدول‌های (۵-۱۱) تا (۵-۱۶) دیده می‌شود، با افزایش نسبت ضخامت به شعاع، فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد کاهش می‌یابند. همچنین، مشاهده می‌شود که نتایج ارائه شده به‌وسیله مراجع [۶۳] و [۶۴] به هم نزدیک بوده و حل در نظر گرفته شده باعث شده جواب‌ها برای هر دو تئوری (میندلین و برشی مرتبه بالاتر) به سرعت همگرا شود، ولی حل ارائه شده برای تعیین فرکانس‌های طبیعی، در نسبت‌های بزرگ‌تر ضخامت به شعاع خارجی به مراجع همگرا می‌شود.

---
[1] Closed form

جدول ۵-۱۱ فرکانس طبیعی بی‌بعد ورق توپر الاستیک گیردار به‌ازای n=۱

h / r_o	تئوری‌ها	فرکانس اول	فرکانس دوم
۰/۰۵	آباکوس	۲۱/۳۲۱	۵۹/۵۹۰
	مطالعه جاری	۲۲/۰۲۴	۵۹/۹۸۷
	مرجع [۶۳]	۲۱/۰۰۲	۵۸/۸۲۷
	مرجع [۶۴]	۲۰/۹۷۶	۵۸/۸۳۳
۰/۱	آباکوس	۲۰/۳۳۵	۵۴/۴۷۵
	مطالعه جاری	۲۱/۱۶۰	۵۴/۴۲۱
	مرجع [۶۳]	۲۰/۲۳۲	۵۳/۸۹۰
	مرجع [۶۴]	۲۰/۱۹۹	۵۳/۹۹۸
۰/۱۵	آباکوس	۲۰/۰۷۳	۴۸/۷۸۰
	مطالعه جاری	۲۰/۱۶۸	۴۷/۸۵۱
	مرجع [۶۳]	۱۹/۱۱۶	۴۸/۰۰۲
	مرجع [۶۴]	۱۹/۱۰۰	۴۸/۲۸۱
۰/۲	آباکوس	۱۷/۹۷۰	۴۳/۱۴۰
	مطالعه جاری	۱۷/۸۶۷	۴۱/۲۸۵
	مرجع [۶۳]	۱۷/۸۳۴	۴۲/۴۰۹
	مرجع [۶۴]	۱۷/۸۵۵	۴۲/۸۷۵
۰/۲۵	آباکوس	۱۶/۶۹۸	۳۸/۳۴۶
	مطالعه جاری	۱۶/۲۲۹	۳۶/۱۱۰
	مرجع [۶۳]	۱۶/۵۲۱	۳۷/۵۵۰
	مرجع [۶۴]	۱۶/۵۹۱	۳۸/۱۷۷
۰/۳	آباکوس	۱۵/۴۶۹	۳۳/۵۸۸
	مطالعه جاری	۱۵/۹۸۷	۳۲/۳۲۲
	مرجع [۶۴]	۱۵/۳۸۵	۳۴/۲۴۶
۰/۳۵	آباکوس	۱۴/۳۲۷	۳۰/۵۸۵
	مطالعه جاری	۱۴/۱۷۸	۳۰/۰۲۳
	مرجع [۶۴]	۱۴/۲۷۳	۳۰/۹۵۷

جدول ۵-۱۲ فرکانس طبیعی بی‌بعد ورق توپر الاستیک گیردار به‌ازای n=۲

h / r_o	تئوری‌ها	فرکانس اول	فرکانس دوم
۰/۰۵	آباکوس	۳۳/۸۹۹	۸۱/۶۴۳
	مطالعه جاری	۳۵/۶۶۹	۸۱/۷۰۱
	مرجع [۶۳]	۳۴/۲۵۸	۸۰/۹۳۳
	مرجع [۶۴]	۳۴/۱۵۰	۸۰/۸۸۷

۰/۱	آباکوس	۳۱/۸۸۹	۷۳/۱۴۷
	مطالعه جاری	۳۰/۳۰۸	۷۱/۷۸۶
	مرجع [۶۳]	۳۲/۴۰۶	۷۲/۳۶۸
	مرجع [۶۴]	۳۲/۲۶۳	۷۲/۴۸۹
۰/۱۵	آباکوس	۳۰/۰۵۲	۶۳/۹۶۹
	مطالعه جاری	۲۷/۱۵۷	۵۹/۰۳۶
	مرجع [۶۳]	۲۹/۸۹۰	۶۲/۹۲۹
	مرجع [۶۴]	۲۹/۷۹۳	۶۳/۳۳۸
۰/۲	آباکوس	۲۷/۳۷۸	۵۵/۵۷۸
	مطالعه جاری	۲۵/۰۳۷	۵۳/۸۲۱
	مرجع [۶۳]	۲۷/۲۱۴	۵۴/۵۵۷
	مرجع [۶۴]	۲۷/۲۱۵	۵۵/۲۵۸
۰/۲۵	آباکوس	۲۴/۰۱۵	۴۸/۷۷۰
	مطالعه جاری	۲۳/۲۷۹	۴۷/۶۷۳
	مرجع [۶۳]	۲۴/۶۷۰	۴۷/۶۵۰
	مرجع [۶۴]	۲۴/۷۸۹	۴۸/۵۹۳
۰/۳	آباکوس	۲۲/۴۰۱	۴۳/۱۵۶
	مطالعه جاری	۲۲/۴۴۵	۴۳/۳۹۱
	مرجع [۶۴]	۲۲/۶۱۶	۴۳/۱۸۴
۰/۳۵	آباکوس	۲۰/۷۲۸	۳۸/۶۲۸
	مطالعه جاری	۲۰/۸۲۹	۳۸/۶۲۸
	مرجع [۶۴]	۲۰/۷۱۵	۳۸/۷۷۸

جدول ۵-۱۳ فرکانس طبیعی بی‌بعد ورق توپر الاستیک ساده به‌ازای n=۱

h / r_o	**تئوری‌ها**	**فرکانس اول**	**فرکانس دوم**
۰/۱	آباکوس	۱۳/۵۳۰	۴۴/۸۹۲
	مطالعه جاری	۱۳/۴۳۶	۴۴/۵۸۲
	مرجع [۶۳]	۱۳/۵۱۰	۴۴/۶۹۱
	مرجع [۶۴]	۱۳/۵۱۴	۴۴/۷۲۸
۰/۱۵	آباکوس	۱۳/۱۴۹	۴۱/۵۱۳
	مطالعه جاری	۱۳/۰۳۳	۳۸/۴۱۰
	مرجع [۶۳]	۱۳/۱۰۹	۴۱/۱۷۴
	مرجع [۶۴]	۱۳/۱۱۷	۴۱/۲۴۷
۰/۲	آباکوس	۱۲/۶۷۷	۳۷/۹۵۴
	مطالعه جاری	۱۲/۵۱۲	۳۶/۶۴۴
	مرجع [۶۳]	۱۲/۶۲۰	۳۷/۵۳۷

	مرجع [۶۴]	۱۲/۶۳۲	۳۷/۶۴۷
۰/۲۵	آباکوس	۱۲/۱۵۷	۳۴/۶۱۹
	مطالعه جاری	۱۲/۱۵۰	۳۳/۰۳۱
	مرجع [۶۳]	۱۲/۰۸۰	۳۴/۱۲۷
	مرجع [۶۴]	۱۲/۰۹۸	۳۴/۲۷۶
۰/۳	آباکوس	۱۱/۶۱۸	۳۱/۶۱۳
	مطالعه جاری	۱۱/۲۴۴	۲۹/۶۵۹
	مرجع [۶۴]	۱۱/۵۴۳	۳۱/۲۵۸
۰/۳۵	آباکوس	۱۱/۰۷۷	۲۸/۹۵۵
	مطالعه جاری	۱۰/۴۲۳	۲۶/۴۰۵
	مرجع [۶۴]	۱۰/۹۹۰	۲۸/۶۰۹

جدول ۵-۱۴ فرکانس طبیعی بی‌بعد ورق توپر الاستیک ساده به‌ازای n=۲

h / r_o	**تئوری‌ها**	**فرکانس اول**	**فرکانس دوم**
۰/۱	آباکوس	۲۴/۱۷۵	۶۲/۹۶۳
	مطالعه جاری	۲۳/۸۶۱	۶۱/۰۲۵
	مرجع [۶۳]	۲۴/۳۱۳	۶۲/۵۵۲
	مرجع [۶۴]	۲۴/۳۲۶	۶۲/۶۲۸
۰/۱۵	آباکوس	۲۳/۱۹۶	۵۶/۸۳۶
	مطالعه جاری	۲۳/۰۰۱	۵۳/۴۸۳
	مرجع [۶۳]	۲۳/۰۷۹	۵۶/۲۱۲
	مرجع [۶۴]	۲۳/۱۰۴	۵۶/۳۵۳
۰/۲	آباکوس	۲۱/۸۴۵	۵۰/۸۲۰
	مطالعه جاری	۲۱/۱۲۸	۴۸/۰۸۹
	مرجع [۶۳]	۲۱/۶۸۷	۵۰/۱۲۶
	مرجع [۶۴]	۲۱/۷۲۸	۵۰/۳۳۴
۰/۲۵	آباکوس	۲۰/۴۷۲	۴۵/۵۵۴
	مطالعه جاری	۱۹/۸۹۷	۴۳/۱۰۰
	مرجع [۶۳]	۲۰/۲۷۰	۴۴/۷۵۱
	مرجع [۶۴]	۲۰/۳۲۵	۴۵/۰۲۵
۰/۳	آباکوس	۱۹/۱۴۳	۴۰/۹۹۷
	مطالعه جاری	۱۸/۴۰۴	۳۸/۷۷۶
	مرجع [۶۴]	۱۸/۹۷۳	۴۰/۴۸۸
۰/۳۵	آباکوس	۱۷/۸۹۶	۳۷/۰۹۳
	مطالعه جاری	۱۷/۰۷۰	۳۴/۶۹۳
	مرجع [۶۴]	۱۷/۷۱۰	۳۶/۶۴۶

جدول ۵-۱۵ فرکانس طبیعی بی‌بعد ورق توپر الاستیک آزاد به‌ازای n=۱

h / r_o	تئوری‌ها	فرکانس اول	فرکانس دوم
۰/۱	آباکوس	۱۹/۷۴۰	۵۵/۰۸۱
	مطالعه جاری	۱۹/۷۱۴	۵۶/۰۰
	مرجع [۶۳]	۱۹/۷۱۱	۵۴/۲۵۷
	مرجع [۶۴]	۱۹/۷۱۷	۵۴/۳۰۶
۰/۱۵	آباکوس	۱۸/۷۲۶	۴۹/۱۵۱
	مطالعه جاری	۱۷/۸۵۱	۴۸/۳۵۵
	مرجع [۶۳]	۱۸/۹۱۷	۴۹/۳۴۱
	مرجع [۶۴]	۱۸/۹۲۹	۴۹/۴۳۵
۰/۲	آباکوس	۱۸/۰۵۷	۴۴/۹۱۷
	مطالعه جاری	۱۶/۸۶۱	۴۲/۴۱۳
	مرجع [۶۳]	۱۷/۹۷۸	۴۴/۴۳۴
	مرجع [۶۴]	۱۷/۹۹۸	۴۴/۵۷۵
۰/۲۵	آباکوس	۱۷/۰۸۲	۴۰/۴۹۸
	مطالعه جاری	۱۶/۱۹۲	۳۸/۰۷۶
	مرجع [۶۳]	۱۶/۹۷۹	۳۹/۹۴۸
	مرجع [۶۴]	۱۷/۰۰۸	۴۰/۱۳۵
۰/۳	آباکوس	۱۶/۱۰۲	۳۵/۹۶۶
	مطالعه جاری	۱۵/۳۴۶	۳۴/۱۲۴
	مرجع [۶۴]	۱۶/۰۱۵	۳۶/۲۱۰
۰/۳۵	آباکوس	۱۴/۹۲۱	۳۳/۰۸۲
	مطالعه جاری	۱۴/۰۵۷	۳۰/۷۳۲
	مرجع [۶۴]	۱۵/۰۵۴	۳۲/۷۵۵

جدول ۵-۱۶ فرکانس طبیعی بی‌بعد ورق توپر الاستیک آزاد به‌ازای n=۲

h / r_o	تئوری‌ها	فرکانس اول	فرکانس دوم
۰/۱	مطالعه جاری	۵/۶۵۰	۳۵/۷۴۸
	مرجع [۶۳]	۵/۲۷۸	۳۳/۰۳۳
	مرجع [۶۴]	۵/۲۷۸	۳۳/۰۵۳
۰/۱۵	مطالعه جاری	۴/۷۴۴	۳۴/۵۲۸
	مرجع [۶۳]	۵/۲۰۵	۳۰/۹۴۲
	مرجع [۶۴]	۵/۲۰۶	۳۰/۹۷۹
۰/۲	مطالعه جاری	۴/۶۹۰	۲۷/۰۹۰

	مرجع [۶۳]	۵/۱۱۴	۲۸/۶۶۸
	مرجع [۶۴]	۵/۱۱۶	۲۶/۷۲۵
۰/۲۵	مطالعه جاری	۴/۴۱۸	۲۶/۵۴۱
	مرجع [۶۳]	۵/۰۰۸	۲۶/۴۲۷
	مرجع [۶۴]	۵/۰۱۱	۲۶/۵۰۵
۰/۳	مطالعه جاری	۴/۳۱۹	۲۵/۳۳۹
	مرجع [۶۴]	۴/۸۹۶	۲۴/۴۲۱
۰/۳۵	مطالعه جاری	۴/۲۳۱	۲۴/۲۲۸
	مرجع [۶۴]	۴/۷۷۳	۲۲/۵۱۰

پس از ارائه نتایج الاستیک، به ارائه نتایج ویسکوالاستیک ورق پرداخته می‌شود. همانطور که در جدول‌های (۵-۱۷) تا (۵-۲۴) مشاهده می‌شود، فرکانس‌های طبیعی برای ورق ویسکوالاستیک مشابه ورق الاستیک در حالت بی‌بعد می‌باشند ولی برحسب هرتز متفاوت هستند. در ادامه روند ارائه نتایج، به مقایسه نتایج ویسکوالاستیک و الاستیک برحسب هرتز پرداخته می‌شود. در مواد ویسکوالاستیک مسأله میرایی نیز حائز اهمیت است که در اینجا فقط برای شرایط مرزی گیردار و مود اول، میرایی گزارش شده است. با توجه به داده‌های جدول‌های (۵-۱۸) و (۵-۱۹)، با افزایش ضخامت به شعاع خارجی، قدرمطلق میرایی کاهش می‌یابد. همچنین این روند کاهشی برای میرایی با افزایش پارارمتر n ادامه دارد.

جدول ۵-۱۷ فرکانس طبیعی بی‌بعد ورق حلقوی ویسکوالاستیک گیردار-گیردار n=۰

h/r_o	r_i/r_o	**تئوری‌ها**	**فرکانس اول**	**فرکانس دوم**
۰/۰۱	۰/۱	آباکوس	۲۷/۳۵۶	۷۶/۹۲
		مطالعه جاری	۳۰/۵۳۶	۸۰/۰۰۹
		کلاسیک	۲۷/۶۲۵	۷۶/۱۲۵
	۰/۳	آباکوس	۴۵/۴۳۳	۱۲۸/۰۸۹
		مطالعه جاری	۴۹/۳۱۵	۱۳۰/۷۱۵
		کلاسیک	۴۵/۶۶۳	۱۲۵/۸۴۹
	۰/۵	آباکوس	۸۹/۲۸۳	۲۴۶/۹۱
		مطالعه جاری	۹۵/۶۸۶	۲۵۱/۷۷۴
		کلاسیک	۸۹/۵۰۴	۲۴۶/۶۸۱
۰/۱	۰/۱	آباکوس	۲۵/۲۶۰	۶۵/۲۹۹
		مطالعه جاری	۲۷/۰۱۹	۶۷/۵۷۷

		کلاسیک	۲۷/۶۲۷	۷۶/۱۴۰
	۰/۳	آباکوس	۴۰/۵۸۶	۱۰۰/۶۲۲
		مطالعه جاری	۴۲/۷۵۸	۱۰۱/۷۴
		کلاسیک	۴۵/۶۶۱	۱۲۵/۸۶۵
	۰/۵	آباکوس	۷۳/۱۷۱	۱۶۸/۳۰۳
		مطالعه جاری	۷۵/۴۳۷	۱۶۸/۴۰۳
		کلاسیک	۸۹/۴۸۸	۲۴۶/۶۸۴
۰/۲	۰/۱	آباکوس	۲۰/۵۲۰	۴۷/۳۷۲
		مطالعه جاری	۲۱/۸۲۵	۴۷/۶۱۱
		کلاسیک	۲۷/۶۲۶	۷۶/۱۴۲
	۰/۳	آباکوس	۳۰/۹۱۳	۶۷/۰۱۳
		مطالعه جاری	۳۲/۱۶۳	۶۷/۲۵۱
		کلاسیک	۴۵/۶۵۳	۱۲۵/۸۶۶
	۰/۵	آباکوس	۵۰/۳۶۵	۱۰۰/۵۱۲
		مطالعه جاری	۵۰/۳۸۶	۱۰۰/۵۳۱
		کلاسیک	۸۹/۴۹۴	۲۴۶/۷۰۰

جدول ۵-۱۸ فرکانس طبیعی بی‌بعد و دمپینگ ورق حلقوی ویسکوالاستیک گیردار-گیردار n=۱

h/r_o	r_i/r_o	**تئوری‌ها**	**فرکانس اول**	**فرکانس دوم**
۰/۰۱	۰/۱	آباکوس	۲۸/۲۳۲	۸۰/۱۴۸
		مطالعه جاری	۳۱/۷۶۸	۸۲/۴۱۱
		کلاسیک	۲۷/۶۵۷	۷۶/۱۶۶
		دمپینگ	۶/۵۰۲e-۳	-
	۰/۳	آباکوس	۴۷/۷۱۵	۱۳۰/۰۵۱
		مطالعه جاری	۵۰/۰۱۸	۱۳۳/۶۸۶
		کلاسیک	۴۵/۶۷۸	۱۲۵/۸۷۹
		دمپینگ	۵/۷۳۱e-۳	-
	۰/۵	آباکوس	۹۰/۲۸۳	۲۵۰/۲۱۵
		مطالعه جاری	۹۵/۹۷۶	۲۵۶/۸۱۹
		کلاسیک	۸۹/۹۴۳	۲۴۶/۶۸۱
		دمپینگ	۵/۱۴۲e-۳	-
۰/۱	۰/۱	آباکوس	۲۶/۰۲۳	۶۶/۸۸
		مطالعه جاری	۲۷/۴۵۵	۶۸/۷۰۴
		کلاسیک	۲۷/۶۸۴	۷۶/۱۵۱
		دمپینگ	۴/۴۳۱e-۳	-

	۰/۳	آباکوس	۴۱/۵۷۶	۱۰۱/۰۳۵
		مطالعه جاری	۴۳/۴۲۴	۱۰۳/۲۶۲
		کلاسیک	۴۶/۳۱۶	۱۲۷/۴۰۸
		دمپینگ	۳/۸۹۱e-۳	-
	۰/۵	آباکوس	۷۴/۸۱۵	۱۶۸/۳۹۷
		مطالعه جاری	۷۷/۳۳۴	۱۶۸/۹۰۷
		کلاسیک	۹۰/۰۴۴	۲۴۷/۴۳۹
		دمپینگ	۳/۱۶۲e-۳	-
۰/۲	۰/۱	آباکوس	۲۲/۶۰۷	۴۸/۳۱۵
		مطالعه جاری	۲۲/۷۱۰	۴۸/۸۱۳
		کلاسیک	۲۸/۱۸۳	۷۸/۳۹۱
		دمپینگ	۴/۱۲۹e-۳	-
	۰/۳	آباکوس	۳۱/۶۳۸	۶۷/۱۳۸
		مطالعه جاری	۳۲/۵۰۴	۶۷/۴۱۴
		کلاسیک	۴۶/۲۱۶	۱۲۶/۸۰۸
		دمپینگ	۳/۳۱۹e-۳	-
	۰/۵	آباکوس	۵۰/۲۷۱	۱۰۰/۴۶۲
		مطالعه جاری	۵۰/۶۰۱	۱۰۰/۶۳۵
		کلاسیک	۹۰/۱۶۰	۲۴۷/۴۴۹
		دمپینگ	۲/۸۱۱e-۳	-

جدول ۵-۱۹ فرکانس طبیعی بی‌بعد و دمپینگ ورق حلقوی ویسکوالاستیک گیردار-گیردار n=۲

h / r_o	r_i / r_o	**تئوری‌ها**	**فرکانس اول**	**فرکانس دوم**
۰/۰۱	۰/۱	آباکوس	۳۷/۰۳۳	۹۰/۸۷۳
		مطالعه جاری	۳۳/۰۰۱	۸۶/۸۵۶
		دمپینگ	۶/۳۳۱e-۳	-
	۰/۳	آباکوس	۵۱/۶۹۳	۱۳۴/۲۰۹
		مطالعه جاری	۵۲/۵۹۱	۱۳۹/۲۲۹
		کلاسیک	۴۵/۷۵۶	۱۲۵/۹۹۸
		دمپینگ	۵/۴۸۹e-۳	-
	۰/۵	آباکوس	۹۴/۲۴۲	۲۵۵/۱۷۳
		مطالعه جاری	۹۷/۲۴۳	۲۶۹/۷۹۷
		کلاسیک	۸۹/۵۴۵	۲۴۶/۸۱۹
		دمپینگ	۴/۸۳۷e-۳	-
۰/۱	۰/۱	آباکوس	۳۳/۱۳۵	۷۷/۹۷۲
		مطالعه جاری	۳۳/۳۷۰	۷۹/۱۵۳
		کلاسیک	۲۷/۸۹۶	۷۶/۲۲۶

		دمپینگ	۴/۱۵۹e-۳	–
	۰/۳	آباکوس	۴۵/۲۲۸	۱۰۴/۰۸۸
		مطالعه جاری	۴۶/۴۳۷	۱۰۴/۳۹۰
		کلاسیک	۴۵/۷۹۲	۱۲۵/۹۴۹
		دمپینگ	۳/۷۱۶e-۳	–
	۰/۵	آباکوس	۷۶/۹۲۵	۱۶۹/۱۲۱
		مطالعه جاری	۷۷/۷۴۳	۱۶۹/۴۳۱
		کلاسیک	۸۹/۵۴۵	۲۴۶/۷۳۵
		دمپینگ	۲/۹۲۱e-۳	–
۰/۲	۰/۱	آباکوس	۲۷/۹۵۷	۵۷/۷۲۶
		مطالعه جاری	۲۷/۳۷۸	۵۷/۸۲۹
		کلاسیک	۲۷/۹۲۱	۷۶/۲۳۶
		دمپینگ	۳/۹۵۲e-۳	–
	۰/۳	آباکوس	۳۳/۵۱۷	۶۸/۶۷۱
		مطالعه جاری	۳۳/۴۹۶	۶۸/۱۳۲
		کلاسیک	۴۵/۸۲۸	۱۲۵/۹۰۱
		دمپینگ	۳/۰۲۸e-۳	–
	۰/۵	آباکوس	۵۱/۳۳۸	۱۰۰/۱۱۵
		مطالعه جاری	۵۱/۷۵۵	۱۰۰/۹۶۳
		کلاسیک	۸۹/۶۰۵	۲۴۶/۷۵۹
		دمپینگ	۲/۶۷۸e-۳	–

جدول ۵-۲۰ فرکانس طبیعی بی‌بعد ورق حلقوی ویسکوالاستیک ساده-گیردار

n	h/r_o	r_i/r_o	**تئوری‌ها**	**فرکانس اول**	**فرکانس دوم**
۰	۰/۲	۰/۳	آباکوس	۲۶/۵۴۷	۶۴/۰۹۶
			مطالعه جاری	۲۶/۹۷۵	۶۴/۳۸۷
۱			آباکوس	۲۷/۱۶۳	۶۴/۱۵۶
			مطالعه جاری	۲۷/۳۴۱	۶۴/۱۵۷
۲			آباکوس	۳۱/۲۱۴	۶۸/۳۲۱
			مطالعه جاری	۳۱/۸۰۷	۶۸/۸۹۱

جدول ۵-۲۱ فرکانس طبیعی بی‌بعد ورق حلقوی ویسکوالاستیک ساده-آزاد

n	h/r_o	r_i/r_o	**تئوری‌ها**	**فرکانس اول**	**فرکانس دوم**
۰	۰/۲	۰/۳	آباکوس	۴/۰۳۶	۲۶/۸۵۵
			مطالعه جاری	۴/۹۲۸	۲۷/۰۸۷

۱			آباکوس	۵/۰۹۸	۲۸/۸۵۶
			مطالعه جاری	۵/۵۹۵	۲۹/۵۷۸
۲			آباکوس	۱۱/۲۳۰	۳۴/۸۳۵
			مطالعه جاری	۱۲/۱۹۳	۳۵/۱۷۴

جدول ۵-۲۲ فرکانس طبیعی بی‌بعد ورق حلقوی ویسکوالاستیک ساده-ساده

n	h / r_o	r_i / r_o	**تئوری‌ها**	**فرکانس اول**	**فرکانس دوم**
۰	۰/۲	۰/۳	آباکوس	۱۹/۰۲۱	۵۸/۰۳۲
			مطالعه جاری	۱۹/۲۹۴	۵۹/۲۷۸
۱			آباکوس	۲۰/۵۵۱	۵۹/۱۱۱
			مطالعه جاری	۲۱/۴۵۸	۶۰/۰۲۳
۲			آباکوس	۲۵/۷۴۲	۶۲/۱۲۹
			مطالعه جاری	۲۶/۳۲۰	۶۲/۱۹۹

جدول ۵-۲۳ فرکانس طبیعی بی‌بعد ورق حلقوی ویسکوالاستیک آزاد-آزاد

n	h / r_o	r_i / r_o	**تئوری‌ها**	**فرکانس اول**	**فرکانس دوم**
۰	۰/۲	۰/۳	آباکوس	۷/۷۹۵	۳۹/۸۴۲
			مطالعه جاری	۸/۳۴۸	۳۹/۹۷۰
۱			آباکوس	۱۵/۱۹۳	۴۳/۵۱۱
			مطالعه جاری	۱۶/۶۲۱	۴۳/۸۰۰
۲			آباکوس	۴/۶۱۵	۵۳/۵۶۵
			مطالعه جاری	۴/۷۲۱	۴۵/۵۸۶

جدول ۵-۲۴ فرکانس طبیعی بی‌بعد ورق حلقوی ویسکوالاستیک گیردار-آزاد

n	h / r_o	r_i / r_o	**تئوری‌ها**	**فرکانس اول**	**فرکانس دوم**
۰	۰/۲	۰/۳	آباکوس	۱۰/۱۵۶	۳۷/۴۴۲
			مطالعه جاری	۹/۱۳۵	۳۶/۵۴۰
۱			آباکوس	۱۶/۵۵۱	۴۰/۹۰۰
			مطالعه جاری	۱۶/۹۴۴	۳۹/۷۲۱
۲			آباکوس	۲۵/۶۹۸	۵۰/۶۵۰
			مطالعه جاری	۲۴/۶۵۰	۴۹/۲۴۹

همچنین فرکانس‌های ورق توپر ویسکوالاستیک به‌صورت جدول‌های (۵-۲۵)-(۵-۳۰) برای نسبت‌های مختلف ضخامت به شعاع ارائه شده است. با توجه به داده‌های جدول‌ها، فرکانس طبیعی بی‌بعد ورق الاستیک و ویسکوالاستیک یکسان می‌باشد.

جدول ۵-۲۵ فرکانس طبیعی بی‌بعد ورق توپر ویسکوالاستیک گیردار به‌ازای n=۱

h / r_o	تئوری‌ها	فرکانس اول	فرکانس دوم
۰/۰۵	آباکوس	۲۱/۳۲۱	۵۹/۵۹۰
	مطالعه جاری	۲۲/۰۲۴	۵۹/۹۸۷
۰/۱	آباکوس	۲۰/۳۳۵	۵۴/۴۷۵
	مطالعه جاری	۲۱/۱۶۰	۵۴/۴۲۱
۰/۱۵	آباکوس	۲۰/۰۷۳	۴۸/۷۸۰
	مطالعه جاری	۲۰/۱۶۸	۴۷/۸۵۱
۰/۲	آباکوس	۱۷/۹۷۰	۴۳/۱۴۰
	مطالعه جاری	۱۷/۸۶۷	۴۱/۲۸۵
۰/۲۵	آباکوس	۱۶/۶۹۸	۳۸/۳۴۶
	مطالعه جاری	۱۶/۲۲۹	۳۶/۱۱۰
۰/۳	آباکوس	۱۵/۴۶۹	۳۳/۵۸۸
	مطالعه جاری	۱۵/۹۸۷	۳۲/۳۲۲
۰/۳۵	آباکوس	۱۴/۳۲۷	۳۰/۵۸۵
	مطالعه جاری	۱۴/۱۷۸	۳۰/۰۲۳

جدول ۵-۲۶ فرکانس طبیعی بی‌بعد ورق توپر ویسکوالاستیک گیردار به‌ازای n=۲

h / r_o	تئوری‌ها	فرکانس اول	فرکانس دوم
۰/۰۵	آباکوس	۳۳/۸۹۹	۸۱/۶۴۳
	مطالعه جاری	۳۵/۶۶۹	۸۱/۷۰۱
۰/۱	آباکوس	۳۱/۸۸۹	۷۳/۱۴۷
	مطالعه جاری	۳۰/۳۰۸	۷۱/۷۸۶
۰/۱۵	آباکوس	۳۰/۰۵۲	۶۳/۹۶۹
	مطالعه جاری	۲۷/۱۵۷	۵۹/۰۳۶
۰/۲	آباکوس	۲۷/۳۷۸	۵۵/۵۷۸

	مطالعه جاری	۲۵/۰۳۷	۵۳/۸۲۱
۰/۲۵	آباکوس	۲۴/۰۱۵	۴۸/۷۷۰
	مطالعه جاری	۲۳/۲۷۹	۴۷/۶۷۳
۰/۳	آباکوس	۲۲/۴۰۱	۴۳/۱۵۶
	مطالعه جاری	۲۲/۴۴۵	۴۳/۳۹۱
۰/۳۵	آباکوس	۲۰/۷۲۸	۳۸/۶۲۸
	مطالعه جاری	۲۰/۸۲۹	۳۸/۶۲۸

جدول ۵-۲۷ فرکانس طبیعی بی‌بعد ورق توپر ویسکوالاستیک ساده به‌ازای n=۱

h/r_o	**تئوری‌ها**	**فرکانس اول**	**فرکانس دوم**
۰/۱	آباکوس	۱۳/۵۳۰	۴۴/۸۹۲
	مطالعه جاری	۱۳/۴۳۶	۴۴/۵۸۲
۰/۱۵	آباکوس	۱۳/۱۴۹	۴۱/۵۱۳
	مطالعه جاری	۱۳/۰۳۳	۳۸/۴۱۰
۰/۲	آباکوس	۱۲/۶۷۷	۳۷/۹۵۴
	مطالعه جاری	۱۲/۵۱۲	۳۶/۶۴۴
۰/۲۵	آباکوس	۱۲/۱۵۷	۳۴/۶۱۹
	مطالعه جاری	۱۲/۱۵۰	۳۳/۰۳۱
۰/۳	آباکوس	۱۱/۶۱۸	۳۱/۶۱۳
	مطالعه جاری	۱۱/۲۴۴	۲۹/۶۵۹
۰/۳۵	آباکوس	۱۱/۰۷۷	۲۸/۹۵۵
	مطالعه جاری	۱۰/۴۲۳	۲۶/۴۰۵

جدول ۵-۲۸ فرکانس طبیعی بی‌بعد ورق توپر ویسکوالاستیک ساده به‌ازای n=۲

h/r_o	**تئوری‌ها**	**فرکانس اول**	**فرکانس دوم**
۰/۱	آباکوس	۲۴/۱۷۵	۶۲/۹۶۳
	مطالعه جاری	۲۳/۸۶۱	۶۱/۰۲۵
۰/۱۵	آباکوس	۲۳/۱۹۶	۵۶/۸۳۶
	مطالعه جاری	۲۳/۰۰۱	۵۳/۴۸۳
۰/۲	آباکوس	۲۱/۸۴۵	۵۰/۸۲۰
	مطالعه جاری	۲۱/۱۲۸	۴۸/۰۸۹

۰/۲۵	آباکوس	۲۰/۴۷۲	۴۵/۵۵۴
	مطالعه جاری	۱۹/۸۹۷	۴۳/۱۰۰
۰/۳	آباکوس	۱۹/۱۴۳	۴۰/۹۹۷
	مطالعه جاری	۱۸/۴۰۴	۳۸/۷۷۶
۰/۳۵	آباکوس	۱۷/۸۹۶	۳۷/۰۹۳
	مطالعه جاری	۱۷/۰۷۰	۳۴/۶۹۳

جدول ۵-۲۹ فرکانس طبیعی بی‌بعد ورق توپر ویسکوالاستیک آزاد به‌ازای n=۱

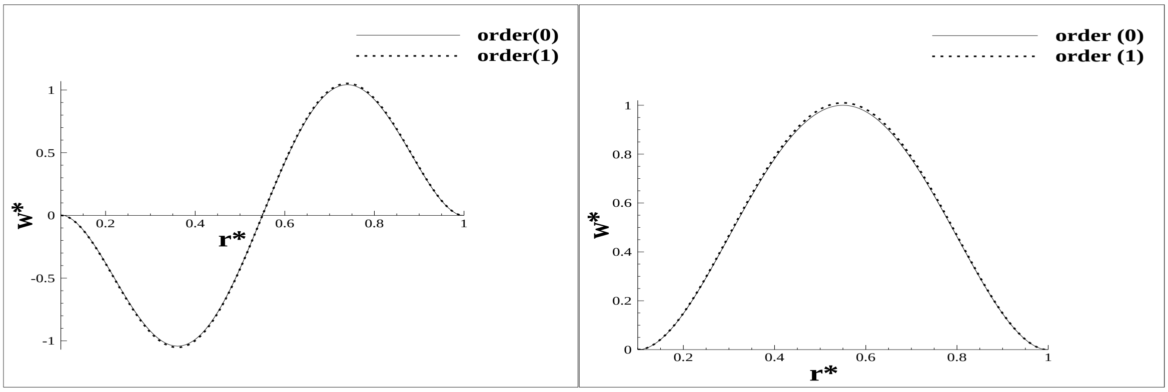
h / r_o	**تئوری‌ها**	**فرکانس اول**	**فرکانس دوم**
۰/۱	آباکوس	۱۹/۷۴۰	۵۵/۰۸۱
	مطالعه جاری	۱۹/۷۱۴	۵۶/۰۰
۰/۱۵	آباکوس	۱۸/۷۲۶	۴۹/۱۵۱
	مطالعه جاری	۱۷/۸۵۱	۴۸/۳۵۵
۰/۲	آباکوس	۱۸/۰۵۷	۴۴/۹۱۷
	مطالعه جاری	۱۶/۸۶۱	۴۲/۴۱۳
۰/۲۵	آباکوس	۱۷/۰۸۲	۴۰/۴۹۸
	مطالعه جاری	۱۶/۱۹۲	۳۸/۰۷۶
۰/۳	آباکوس	۱۶/۱۰۲	۳۵/۹۶۶
	مطالعه جاری	۱۵/۳۴۶	۳۴/۱۲۴
۰/۳۵	آباکوس	۱۴/۹۲۱	۳۳/۰۸۲
	مطالعه جاری	۱۴/۰۵۷	۳۰/۷۳۲

جدول ۵-۳۰ فرکانس طبیعی بی‌بعد ورق توپر ویسکوالاستیک آزاد به‌ازای n=۲

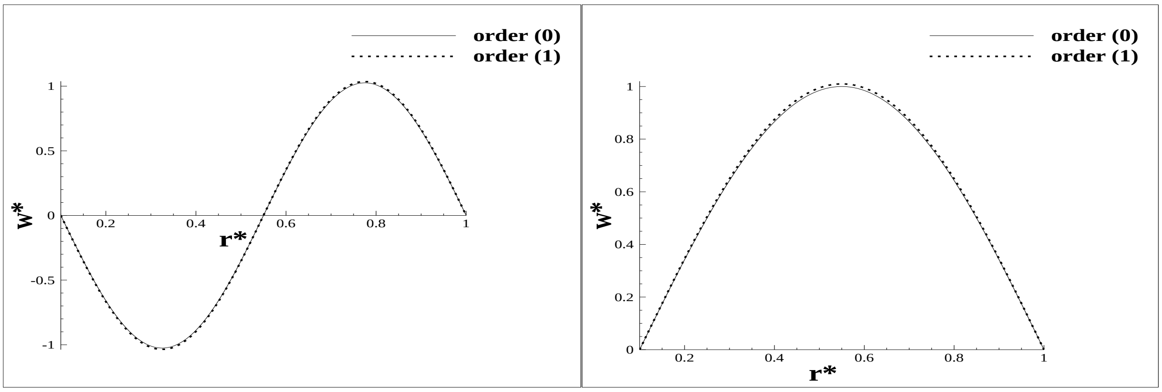
h / r_o	**تئوری**	**فرکانس اول**	**فرکانس دوم**
۰/۱	مطالعه جاری	۵/۶۵۰	۳۵/۷۴۸
۰/۱۵	مطالعه جاری	۴/۷۴۴	۳۴/۵۲۸
۰/۲	مطالعه جاری	۴/۶۹۰	۲۷/۰۹۰
۰/۲۵	مطالعه جاری	۴/۴۱۸	۲۶/۵۴۱
۰/۳	مطالعه جاری	۴/۳۱۹	۲۵/۳۳۹
۰/۳۵	مطالعه جاری	۴/۲۳۱	۲۴/۲۲۸

در (شکل ۵-۱) شکل مودهای اول و دوم ورق حلقوی گیردار-گیردار، (شکل ۵-۲)، شکل مودهای اول و دوم برای ورق حلقوی ساده-ساده، (شکل ۵-۳)، شکل مودهای اول و دوم برای ورق حلقوی گیردار-ساده و در

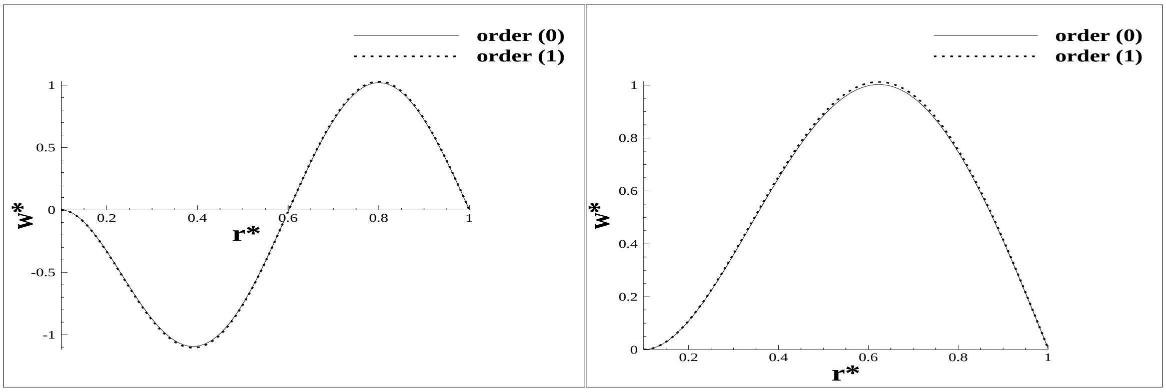
(شکل ۵-۴)، شکل مودهای اول و دوم برای ورق حلقوی ساده-گیردار با درنظر گرفتن حل معادلات مرتبه صفر و اول بسط ارائه‌شده است. با توجه به شکل‌ها دیده می‌شود که همگرایی مناسبی بین حل مرتبه صفر و یک وجود دارد.



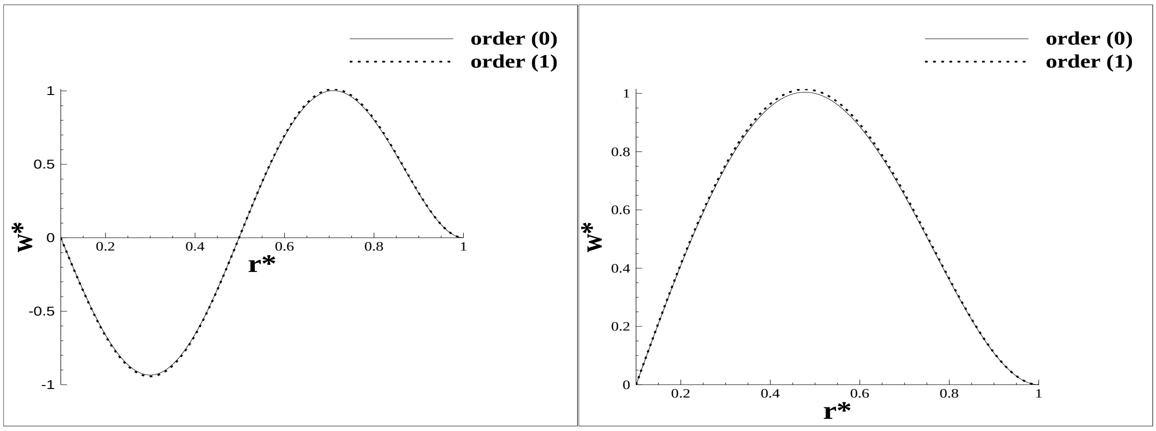
شکل ۵-۱ شکل مود اول و دوم برای ورق حلقوی گیردار-گیردار



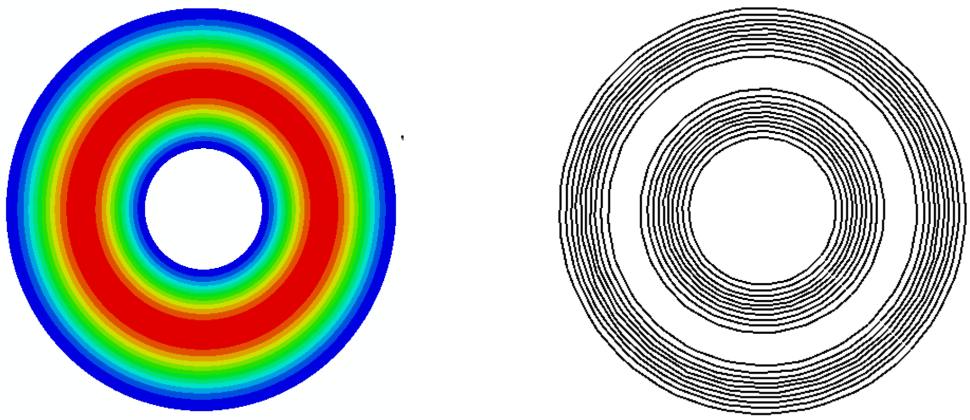
شکل ۵-۲ شکل مود اول و دوم برای ورق حلقوی ساده-ساده



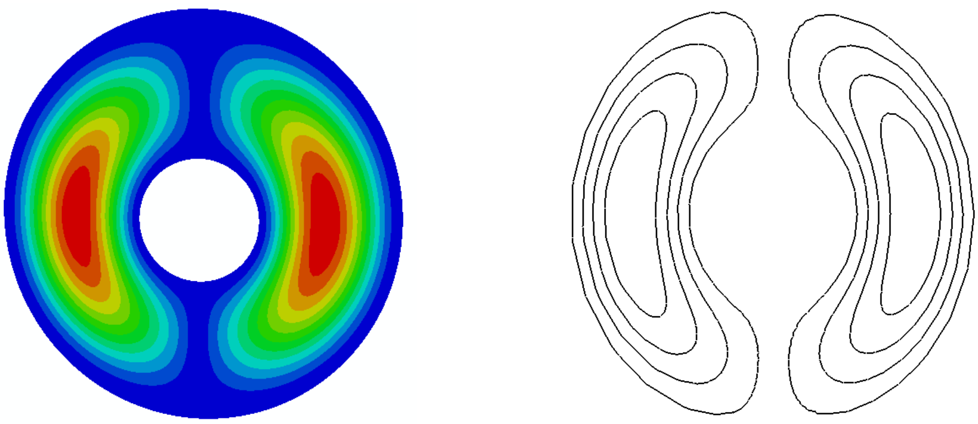
شکل ۵-۳ شکل مود اول و دوم برای ورق حلقوی گیردار-ساده



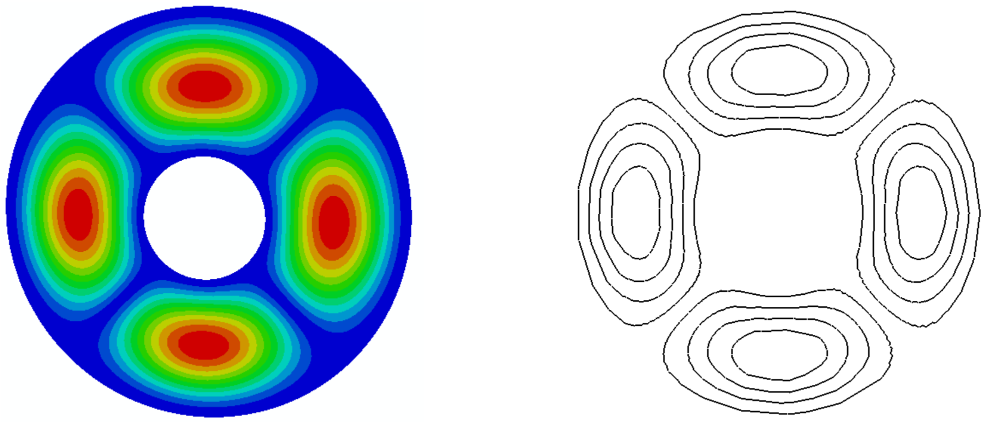
شکل ۵-۴ شکل مود اول و دوم برای ورق حلقوی ساده-گیردار



n=۰



n=۱



شکل ۵-۵ شکل مود ورق حلقوی

پس از بررسی نتایج ورق حلقوی و توپر در حالت الاستیک و ویسکوالاستیک، به بررسی فرکانس‌های طبیعی قطاع حلقوی با شرایط مرزی متفاوت پرداخته می‌شود. هدف اصلی این بخش بررسی اثرات شرایط مرزی، تغییر زاویه قطاع، تغییر ضخامت و نسبت‌های مختلف r_i / r_o است. بخشی از نتایج این پژوهش با سایر تحقیقات انجام شده و یا نرم‌افزار اجزاء محدود مقایسه و صحت سنجی می‌شود. به این ترتیب، نتایج فرکانس طبیعی اول به‌ازای شرایط مرزی مختلف و همچنین نتایج به‌دست آمده از مدل اجزاء محدود توسط نرم‌افزار آباکوس و مراجع [۵۸]، [۶۰]، [۶۱] و [۶۲] در جدول‌ها آورده شده است. مرجع [۵۸]، از روش ریتز سه بعدی، مرجع [۶۰]، از تئوری میندلین و روش چند جمله‌ای چبی‌چف و مرجع [۶۱] از روش DQ و تئوری میندلین استفاده نموده‌اند. تطابق خوبی بین نتایج تحلیلی، نتایج محاسبه شده به روش اجزاء محدود و مراجع دیده می‌شود. در جدول‌های (۵-۳۱)-(۵-۳۹)، فرکانس طبیعی قطاع حلقوی، برای شرایط مرزی و زاویه‌های مختلف گزارش شده است. در تمامی جدول‌ها مشاهده می‌شود، با افزایش زاویه قطاع، فرکانس طبیعی بی‌بعد سازه کاهش می‌یابد. همچنین با توجه با داده‌های جدول‌ها، نرخ همگرایی جواب‌ها برای ورق‌های با زاویه‌ی بالاتر و نسبت h / r_o بزرگ‌تر، سریع‌تر است.

جدول ۵-۳۱ فرکانس طبیعی بی‌بعد قطاع حلقوی الاستیک با لبه‌های شعاعی ساده و لبه‌های دایره‌ای گیردار

α (deg)	h / r_o	r_i / r_o	تئوری‌ها	فرکانس اول
۱۲۰	۰/۰۱	۰/۱	آباکوس	۳۱/۷۲۵
			مرجع [۶۰]	۳۱/۷۳۹
			مرجع [۶۱]	۳۱/۷۳۰
			مطالعه جاری	۳۱/۷۹۵
			کلاسیک [بسل]	۳۱/۷۷۹
			کلاسیک [پرتوربیشن]	۳۱/۳۲۱
	۰/۱		آباکوس	۲۸/۱۸۰
			مرجع [۶۰]	۲۸/۵۹۸
			مرجع [۶۱]	۲۸/۵۷۰
			مطالعه جاری	۲۹/۳۱۰
			کلاسیک [بسل]	۳۱/۷۷۹
			کلاسیک [پرتوربیشن]	۳۱/۳۲۱
	۰/۲		آباکوس	۲۳/۴۰۹
			مرجع [۶۰]	۲۳/۷۳۳
			مرجع [۶۱]	۲۳/۶۷۸
			مطالعه جاری	۲۴/۲۲۲
			کلاسیک [بسل]	۳۱/۷۷۹
			کلاسیک [پرتوربیشن]	۳۱/۳۲۱
	۰/۰۱	۰/۲۵	آباکوس	۴۲/۷۵۳
			مرجع [۶۱]	۴۲/۷۲۸
			مطالعه جاری	۴۳/۹۴۷
			کلاسیک [بسل]	۴۲/۸۰۱
			کلاسیک [پرتوربیشن]	۴۲/۴۲۲
	۰/۱		آباکوس	۳۷/۰۳۳
			مرجع [۶۱]	۳۷/۴۱۵
			مطالعه جاری	۳۹/۸۷۵
			کلاسیک [بسل]	۴۲/۷۹۸
			کلاسیک [پرتوربیشن]	۴۲/۴۳۸
	۰/۲		آباکوس	۲۹/۲۷۸
			مرجع [۶۱]	۲۹/۱۶۱
			مطالعه جاری	۳۲/۷۷۱
۱۳۵	۰/۰۱	۰/۱	آباکوس	۳۰/۵۹۴۳
			مطالعه جاری	۳۰/۷۴۷
			کلاسیک [بسل]	۳۰/۶۱۴
			کلاسیک [پرتوربیشن]	۳۰/۴۱۱

		۰/۳	آباکوس	۴۹/۷۱۶
			مطالعه جاری	۵۰/۵۳۲
			کلاسیک [بسل]	۴۷/۷۳۰
			کلاسیک [پرتوربیشن]	۴۷/۳۷۴
	۰/۱	۰/۱	آباکوس	۲۷/۲۵۴
			مطالعه جاری	۲۹/۱۰۱
		۰/۳	آباکوس	۴۳/۳۰۹۴
			مطالعه جاری	۴۴/۴۳۸
	۰/۲	۰/۱	آباکوس	۲۲/۸۹۸
			مطالعه جاری	۲۳/۹۹۴
		۰/۳	آباکوس	۳۳/۹۹۶
			مطالعه جاری	۳۴/۱۴۲

جدول ۵-۳۲ فرکانس طبیعی بی‌بعد قطاع حلقوی الاستیک با لبه‌های شعاعی ساده و لبه‌های دایره‌ای گیردار

α (deg)	h/r_o	r_i/r_o	**تئوری‌ها**	**فرکانس اول**
۱۹۵	۰/۰۱	۰/۱	آباکوس	۲۹/۲۷۸
			مرجع [۶۲]	۲۸/۶۳۰
			مطالعه جاری	۳۰/۱۰۲
			کلاسیک [پرتوربیشن]	۲۸/۶۳۱
	۰/۱		آباکوس	۲۶/۹۹۴
			مرجع [۶۲]	۲۵/۶۵۵۹
			مطالعه جاری	۲۸/۴۶۴
	۰/۲		آباکوس	۲۱/۸۹۴
			مرجع [۶۲]	۲۰/۹۳۲
			مطالعه جاری	۲۲/۴۳۱
	۰/۰۱	۰/۳	آباکوس	۴۸/۹۲۴
			مرجع [۶۲]	۴۶/۴۴۴
			مطالعه جاری	۴۹/۸۴۲
			کلاسیک [بسل]	۴۶/۴۴۴
			کلاسیک [پرتوربیشن]	۴۶/۴۷۰
	۰/۱		آباکوس	۴۲/۹۵۰
			مرجع [۶۲]	۴۰/۲۱۷
			مطالعه جاری	۴۴/۲۵۰
	۰/۲		آباکوس	۳۲/۱۲۱
			مرجع [۶۲]	۳۰/۶۵۴

۳۲/۵۱۸	مطالعه جاری			
۹۰/۱۰۳	آباکوس	۰/۵	۰/۰۱	
۹۰/۰۸۳	مرجع [۶۲]			
۹۰/۱۱۲	مرجع [۵۸]			
۹۰/۱۱۲	مرجع [۵۹]			
۹۴/۱۵۳	مطالعه جاری			
۹۰/۱۹۶	کلاسیک [پرتوربیشن]			
۷۱/۰۵۴	آباکوس		۰/۱	
۷۱/۹۱۴	مرجع [۵۹]			
۷۰/۸۰۹	مرجع [۶۲]			
۷۱/۹۱۴	مرجع [۵۸]			
۷۵/۳۲۹	مطالعه جاری			
۵۰/۴۷۱	آباکوس		۰/۲	
۵۰/۰۰۶	مرجع [۵۹]			
۴۸/۶۶۲	مرجع [۶۲]			
۵۰/۰۰۶	مرجع [۵۸]			
۵۰/۷۵۷	مطالعه جاری			

جدول ۵-۳۳ فرکانس طبیعی بی‌بعد قطاع حلقوی الاستیک با لبه‌های شعاعی ساده و لبه‌های دایره‌ای گیردار

فرکانس اول	تئوری‌ها	r_i / r_o	h / r_o	α (deg)
۲۶/۹۶۰	آباکوس	۰/۱	۰/۱	**۲۱۰**
۲۸/۱۶۸	مطالعه جاری			
۲۵/۷۲۰	مرجع [۶۲]			
۲۸/۴۱۳	کلاسیک [بسل]			
۲۸/۴۰۵	کلاسیک [پرتوربیشن]			
۴۲/۱۵۴	آباکوس	۰/۳		
۴۴/۰۶۴	مطالعه جاری			
۴۰/۰۹۸	مرجع [۶۲]			
۴۶/۲۸۶	کلاسیک [بسل]			
۴۶/۳۵۸	کلاسیک [پرتوربیشن]			
۲۱/۰۷۸	آباکوس	۰/۱	۰/۲	
۲۲/۳۹۱	مطالعه جاری			
۲۰/۷۴۲	مرجع [۶۲]			
۳۱/۲۹۵	آباکوس	۰/۳		
۳۲/۴۶۱	مطالعه جاری			
۳۰/۵۶۳	مرجع [۶۲]			

	۰/۰۱	۰/۵	آباکوس	۹۰/۶۳۲
			مرجع [۵۹]	۹۰/۰۲۶
			مرجع [۶۲]	۸۹/۹۶۷
			مرجع [۵۸]	۹۰/۰۲۶
			مطالعه جاری	۹۴/۰۷۶
			کلاسیک [پرتوربیشن]	۸۹/۹۰۱
	۰/۱	۰/۵	آباکوس	۷۰/۱۰۶
			مرجع [۵۹]	۷۱/۷۴۰
			مرجع [۶۲]	۷۰/۷۳۴
			مرجع [۵۸]	۷۱/۸۴۰
			مطالعه جاری	۷۴/۱۹۶
	۰/۲	۰/۵	آباکوس	۵۰/۴۱۳
			مرجع [۵۹]	۴۹/۹۵۶
			مرجع [۶۲]	۴۸/۶۱۱
			مرجع [۵۸]	۴۹/۹۵۶
			مطالعه جاری	۵۰/۷۰۵

جدول ۵-۳۴ فرکانس طبیعی بی‌بعد قطاع حلقوی الاستیک با لبه‌های شعاعی ساده و لبه‌های دایره‌ای گیردار

α (deg)	h / r_o	r_i / r_o	**تئوری‌ها**	**فرکانس اول**
۲۷۰	۰/۰۱	۰/۱	آباکوس	۲۸/۵۳۲
			مطالعه جاری	۲۹/۳۵۱
			مرجع [۶۲]	۲۷/۹۱۹
			کلاسیک [پرتوربیشن]	۲۷/۶۴۳
		۰/۳	آباکوس	۴۸/۲۸۷
			مطالعه جاری	۴۹/۳۵۲
			مرجع [۶۲]	۴۵/۹۰۹
			کلاسیک [بسل]	۴۵/۹۱۱
			کلاسیک [پرتوربیشن]	۴۵/۷۳۵
	۰/۱	۰/۱	آباکوس	۲۶/۳۴۵
			مطالعه جاری	۲۷/۹۳۷
			مرجع [۶۲]	۲۵/۰۷۲
		۰/۳	آباکوس	۴۱/۹۶۶
			مطالعه جاری	۴۳/۶۳۹
			مرجع [۶۲]	۳۹/۸۱۳
	۰/۲	۰/۱	آباکوس	۲۰/۷۲۹
			مطالعه جاری	۲۱/۷۲۹
			مرجع [۶۲]	۲۰/۳۲۰

		۰/۳	آباکوس	۳۱/۰۸۶
			مطالعه جاری	۳۲/۱۵۰
			مرجع [۶۲]	۳۰/۳۴۷
۳۶۰	۰/۰۱	۰/۱	آباکوس	۲۸/۲۳۲
			مطالعه جاری	۲۹/۰۲۱
		۰/۳	آباکوس	۴۷/۷۱۵
			مطالعه جاری	۴۹/۰۱۸
		۰/۵	آباکوس	۸۹/۲۸۳
			مرجع [۶۲]	۸۹/۶۸۲
			مرجع [۵۸]	۸۹/۸۶۵
			مرجع [۵۹]	۸۹/۷۶۵
			مطالعه جاری	۹۳/۹۷۶
	۰/۱	۰/۱	آباکوس	۲۶/۰۲۳
			مطالعه جاری	۲۷/۳۵۵
		۰/۳	آباکوس	۴۱/۵۷۶
			مطالعه جاری	۴۲/۷۹۹

جدول ۵-۳۵ فرکانس طبیعی بی‌بعد قطاع حلقوی الاستیک با هر چهار لبه ساده

α (deg)	h / r_o	r_i / r_o	**تئوری‌ها**	**فرکانس اول**	**فرکانس دوم**
۱۲۰	۰/۱	۰/۱	آباکوس	۱۸/۸۷۰	۵۵/۲۷۵
			مطالعه جاری	۱۹/۶۰۶	۵۶/۶۱۵
		۰/۳	آباکوس	۲۴/۲۳۴	۷۷/۱۱۰
			مطالعه جاری	۲۷/۴۵۷	۷۸/۸۳۶
	۰/۲	۰/۱	آباکوس	۱۷/۸۱۸	۴۴/۶۹۲
			مطالعه جاری	۱۸/۶۷۷	۴۴/۸۳۷
		۰/۳	آباکوس	۲۱/۱۷۸	۵۹/۴۸۶
			مطالعه جاری	۲۱/۲۵۵	۵۹/۸۲۳
۱۳۵	۰/۱	۰/۱	آباکوس	۱۷/۴۰۸	۵۳/۴۰۳
			مطالعه جاری	۱۸/۲۳۰	۵۵/۱۴۳
		۰/۳	آباکوس	۲۳/۳۲۱	۷۵/۳۶۲
			مطالعه جاری	۲۶/۲۱۷	۷۸/۴۸۱
	۰/۲	۰/۱	آباکوس	۱۶/۶۰۱	۴۳/۳۵۷
			مطالعه جاری	۱۷/۵۳۰	۴۳/۹۳۴
		۰/۳	آباکوس	۲۰/۵۰۶	۶۴/۷۹۸

۶۱/۴۸۱	۲۰/۶۶۴	مطالعه جاری

جدول ۵-۳۶ فرکانس طبیعی بی‌بعد قطاع حلقوی الاستیک با هر چهار لبه ساده

فرکانس اول	**تئوری‌ها**	r_i / r_o	h / r_o	α (deg)
۱۵/۱۰۸	آباکوس	۰/۱	۰/۱	**۱۹۵**
۱۵/۴۸۷	مطالعه جاری			
۱۵/۷۱۲	مرجع [۶۲]			
۲۲/۰۲۶	آباکوس	۰/۳		
۲۳/۶۸۵	مطالعه جاری			
۲۱/۹۸۸	مرجع [۶۲]			
۱۴/۶۰۱	آباکوس	۰/۱	۰/۲	
۱۳/۸۹۱	مطالعه جاری			
۱۴/۲۷۳	مرجع [۶۲]			
۱۹/۳۰۰	آباکوس	۰/۳		
۱۹/۹۰۵	مطالعه جاری			
۱۹/۷۱۸	مرجع [۶۲]			
۱۵/۵۳۲	آباکوس	۰/۱	۰/۱	**۲۱۰**
۱۵/۱۵۹	مطالعه جاری			
۱۵/۴۱۶	مرجع [۶۲]			
۲۱/۵۵۳	آباکوس	۰/۳		
۲۳/۳۹۰	مطالعه جاری			
۲۱/۷۴۳	مرجع [۶۲]			
۱۳/۲۴۱	آباکوس	۰/۱	۰/۲	
۱۲/۶۹۲	مطالعه جاری			
۱۳/۹۹۰	مرجع [۶۲]			
۱۹/۱۷۱	آباکوس	۰/۳		
۱۹/۸۱۸	مطالعه جاری			
۱۹/۵۱۰	مرجع [۶۲]			
۱۴/۳۱۱	آباکوس	۰/۱	۰/۱	**۲۷۰**
۱۴/۲۳۵	مطالعه جاری			
۱۴/۷۳۳	مرجع [۶۲]			
۲۱/۱۱۲	آباکوس	۰/۳		
۲۲/۵۷۳	مطالعه جاری			
۲۱/۱۳۷	مرجع [۶۲]			

۱۲/۸۱۷	آباکوس	۰/۱	۰/۲	
۱۲/۵۲۲	مطالعه جاری			
۱۳/۳۲۲	مرجع [۶۲]			
۱۹/۰۵۱	آباکوس	۰/۳		
۱۹/۶۲۲	مطالعه جاری			
۱۸/۹۹۷	مرجع [۶۲]			

جدول ۵-۳۷ فرکانس طبیعی بی‌بعد قطاع حلقوی الاستیک با لبه‌های شعاعی ساده و ساده-گیردار

فرکانس اول	**تئوری‌ها**	r_i / r_o	h / r_o	α (deg)
۲۸/۸۲۵	آباکوس	۰/۳	۰/۲	**۱۲۰**
۲۹/۲۸۹	مطالعه جاری			
۲۸/۰۱۳	آباکوس			**۱۳۵**
۲۸/۵۶۸	مطالعه جاری			
۲۷/۰۸۵	آباکوس			**۱۹۵**
۲۷/۱۰۵	مطالعه جاری			
۲۶/۸۳۲	مرجع [۶۲]			
۲۶/۸۸۰	آباکوس			**۲۱۰**
۲۶/۹۱۳	مطالعه جاری			
۲۶/۶۷۰	مرجع [۶۲]			
۲۶/۴۱۱	آباکوس			**۲۷۰**
۲۶/۴۳۴	مطالعه جاری			
۲۶/۲۷۶	مرجع [۶۲]			

جدول ۵-۳۸ فرکانس طبیعی بی‌بعد قطاع حلقوی الاستیک با لبه‌های شعاعی ساده و آزاد-ساده

فرکانس اول	**تئوری‌ها**	r_i / r_o	h / r_o	α (deg)
۱۱/۱۱۳	آباکوس	۰/۳	۰/۲	**۱۹۵**
۱۲/۰۸۳	مطالعه جاری			
۱۰/۵۰۰	مرجع [۶۲]			
۱۰/۱۲۵	آباکوس			**۲۱۰**
۱۱/۶۸۵	مطالعه جاری			
۹/۹۱۳	مرجع [۶۲]			
۸/۴۰۵	آباکوس			**۲۷۰**
۸/۱۵۶	مطالعه جاری			
۸/۲۵۹	مرجع [۶۲]			

جدول ۵-۳۹ فرکانس طبیعی بی‌بعد قطاع حلقوی الاستیک با لبه‌های شعاعی ساده و آزاد-گیردار

α (deg)	h/r_o	r_i/r_o	تئوری‌ها	فرکانس اول
۱۹۵	۰/۲	۰/۳	آباکوس	۱۵/۷۲۲
			مطالعه جاری	۱۵/۹۸۷
			مرجع [۶۲]	۱۵/۲۰۷
۲۱۰			آباکوس	۱۵/۱۸۱
			مطالعه جاری	۱۵/۲۲۰
			مرجع [۶۲]	۱۴/۶۵۵
۲۷۰			آباکوس	۱۳/۱۵۵
			مطالعه جاری	۱۳/۰۶۴
			مرجع [۶۲]	۱۳/۱۶۳

در ادامه ارائه نتایج برای قطاع حلقوی الاستیک، به بررسی قطاع توپر الاستیک با زوایا و نسبت‌های مختلف ضخامت به شعاع پرداخته می‌شود. برای این حالت فرض می‌شود که لبه‌های شعاعی قطاع به‌صورت تکیه‌گاه ساده مقید شده و لبه بیرونی دارای شرط مرزی گیردار و ساده باشد. برای صحت سنجی نتایج به‌دست آمده از مطالعه جاری، نتایج این بخش با نتایج به‌دست آمده از نرم‌افزار آباکوس و مراجع [۶۵] و [۶۶] مقایسه می گردد. مرجع [۶۵] از روش DQ و تئوری میندلین و مرجع [۶۶] از تئوری برشی مرتبه بالاتر و حل بسل استفاده نموده‌اند. مشاهده شده است که دقت روش استفاده شده در زوایای کم نسبت به مراجع ارائه شده پایین می‌باشد که این دقت با افزایش زاویه قطاع بهتر می‌شود. همچنین نتایج به‌دست آمده نشان می‌دهد، زمانی‌که نسبت شعاع داخلی به خارجی ورق صفر باشد، مقدار عددی فرکانس محاسبه شده از مطالعه جاری کمتر از نتایج ارائه شده توسط سایر مراجع و حل اجزاء محدود می‌باشد. در این حالت نیز با افزایش زاویه قطاع و نسبت h/r_o، فرکانس طبیعی بی‌بعد کاهش می‌یابد. همچنین با توجه به داده‌های جدول مشاهده می‌شود، نرخ همگرایی جواب‌ها برای ورق‌های با زاویه‌ی بالاتر و نسبت h/r_o بزرگ‌تر، سریع‌تر است.

جدول ۵-۴۰ فرکانس طبیعی بی‌بعد قطاع توپر الاستیک با لبه‌های شعاعی ساده و لبه دایروی گیردار

α (deg)	h/r_o	تئوری‌ها	فرکانس اول
۳۰	۰/۱	آباکوس	۹۰/۵۹۱

		مطالعه جاری	۹۰/۳۴۹
		کلاسیک	۱۱۴/۲۱۸
		مرجع [۶۵]	۹۳/۵۰۹
		مرجع [۶۶]	۹۳/۹۰۶
	۰/۲	آباکوس	۶۷/۷۲۳
		مطالعه جاری	۷۰/۶۲۵
		کلاسیک	۱۱۴/۲۰۶
		مرجع [۶۵]	۶۸/۰۶۳
		مرجع [۶۶]	۶۹/۰۶۲۲
۹۰		آباکوس	۲۶/۴۰۷
		مطالعه جاری	۲۴/۴۴۱
		کلاسیک	۳۴/۸۷۴
		مرجع [۶۵]	۲۷/۰۴۰
۱۸۰		آباکوس	۱۷/۳۲۵
		مطالعه جاری	۱۶/۹۳۲
		مرجع [۶۵]	۱۷/۸۰۸
		مرجع [۶۶]	۱۷/۸۵۵
۲۱۰		آباکوس	۱۶/۷۵۸
		مطالعه جاری	۱۶/۲۲۷
		کلاسیک	۱۹/۵۲۶
		مرجع [۶۵]	۱۷/۱۰۴
		مرجع [۶۶]	۱۷/۰۹۲
۲۷۰		آباکوس	۱۵/۹۲۱
		مطالعه جاری	۱۵/۸۷۸
		مرجع [۶۵]	۱۶/۲۱۰
		مرجع [۶۶]	۱۶/۴۴۵
۳۶۰		مطالعه جاری	۱۵/۱۵۵
		مرجع [۶۵]	۱۵/۶۳۷

جدول ۵-۴۱ فرکانس طبیعی بی‌بعد قطاع توپر الاستیک با هر سه لبه‌ی ساده

α (deg)	h / r_o	**تئوری‌ها**	**فرکانس اول**
۳۰	۰/۱	آباکوس	۸۰/۱۰۱
		مطالعه جاری	۸۶/۷۵۶
		مرجع [۶۶]	۸۴/۵۷۵
	۰/۲	آباکوس	۶۲/۰۲۰
		مطالعه جاری	۶۵/۵۴۳

۶۵/۰۴۸	مرجع [۶۶]	
۱۹/۱۷۱	آباکوس	**۹۰**
۱۷/۷۲۱	مطالعه جاری	
۱۵/۳۷۶	آباکوس	**۱۲۰**
۱۴/۶۲۵	مطالعه جاری	
۱۲/۴۲۹	آباکوس	**۱۸۰**
۱۲/۹۸۵	مطالعه جاری	
۱۲/۷۲۰	مرجع [۶۶]	
۱۱/۵۵۸	آباکوس	**۲۱۰**
۱۲/۳۱۱	مطالعه جاری	
۱۱/۹۷۰	مرجع [۶۶]	
۱۰/۸۵۱	آباکوس	**۲۷۰**
۱۱/۱۹۷	مطالعه جاری	
۱۱/۳۳۹	مرجع [۶۶]	

پس از ارائه نتایج الاستیک قطاع، به ارائه نتایج ویسکوالاستیک قطاع پرداخته می‌شود. همانطور که در جدول‌ها (۵-۴۲) تا (۵-۴۹) مشاهده می‌شود، فرکانس‌های طبیعی برای ورق ویسکوالاستیک مشابه ورق الاستیک در حالت بی‌بعد می‌باشند. با توجه به این جدول‌ها، با افزایش زاویه‌ی قطاع، فرکانس بی‌بعد کاهش می‌یابد. همچنین با افزایش نسبت h/r_o فرکانس طبیعی بی‌بعد کاهش و با افزایش نسبت شعاع داخلی به خارجی، افزایش می‌یابد. این روند برای تمام ترکیب‌های شرایط مرزی صادق و نرخ همگرایی جواب‌ها برای ورق‌های با زاویه‌ی بالاتر و نسبت h/r_o بزرگ‌تر، سریع‌تر است.

جدول ۵-۴۲ فرکانس طبیعی بی‌بعد قطاع حلقوی ویسکوالاستیک با لبه‌های شعاعی ساده و لبه‌های دایره‌ای گیردار

فرکانس اول	**تئوری‌ها**	r_i/r_o	h/r_o	α (deg)
۳۱/۷۲۵	آباکوس	۰/۱	۰/۰۱	**۱۲۰**
۳۱/۷۹۵	مطالعه جاری			
۲۸/۱۸۰۶	آباکوس		۰/۱	
۲۹/۳۱۰	مطالعه جاری			
۲۳/۴۰۹۰	آباکوس		۰/۲	
۲۴/۲۲۲۸	مطالعه جاری			

۴۲/۷۵۳	آباکوس	۰/۲۵	۰/۰۱	
۴۳/۹۴۷	مطالعه جاری			
۳۷/۰۳۳	آباکوس		۰/۱	
۳۹/۸۷۵	مطالعه جاری			
۲۹/۲۷۸	آباکوس		۰/۲	
۳۲/۷۷۱	مطالعه جاری			
۳۰/۵۹۴۳	آباکوس	۰/۱	۰/۰۱	**۱۳۵**
۳۰/۷۴۷	مطالعه جاری			
۴۹/۷۱۶	آباکوس	۰/۳		
۵۰/۵۳۲	مطالعه جاری			
۲۷/۲۵۴	آباکوس	۰/۱	۰/۱	
۲۹/۱۰۱	مطالعه جاری			
۴۳/۳۰۹۴	آباکوس	۰/۳	۰/۲	
۴۴/۴۳۸	مطالعه جاری			
۲۲/۸۹۸	آباکوس	۰/۱		
۲۳/۹۹۴	مطالعه جاری			
۳۳/۹۹۶	آباکوس	۰/۳		
۳۴/۱۴۲	مطالعه جاری			

جدول ۵-۴۳ فرکانس طبیعی بی‌بعد قطاع حلقوی ویسکوالاستیک با لبه‌های شعاعی ساده و لبه‌های دایره‌ای گیردار

فرکانس اول	**تئوری‌ها**	r_i / r_o	h / r_o	α (deg)
۲۹/۲۷۸	آباکوس	۰/۱	۰/۰۱	**۱۹۵**
۳۰/۱۰۲۲	مطالعه جاری			
۲۶/۹۹۴	آباکوس		۰/۱	
۲۸/۴۶۴	مطالعه جاری			
۲۱/۸۹۴۶	آباکوس		۰/۲	
۲۲/۴۳۱	مطالعه جاری			
۴۸/۹۲۴۱	آباکوس	۰/۳	۰/۰۱	
۴۹/۸۴۲۵	مطالعه جاری			
۴۲/۹۵۰۲	آباکوس		۰/۱	

			مطالعه جاری	۴۴/۲۵۰
	۰/۲		آباکوس	۳۲/۱۲۱
			مطالعه جاری	۳۲/۵۱۸
	۰/۰۱	۰/۵	آباکوس	۹۰/۱۰۳۲
			مطالعه جاری	۹۴/۱۵۳۲
	۰/۱		آباکوس	۷۱/۰۵۴۸
			مطالعه جاری	۷۵/۳۲۹۶
	۰/۲		آباکوس	۵۰/۴۷۰۹
			مطالعه جاری	۵۰/۷۵۷

جدول ۵-۴۴ فرکانس طبیعی بی‌بعد قطاع حلقوی ویسکوالاستیک با لبه‌های شعاعی ساده و لبه‌های دایره‌ای گیردار

α (deg)	h / r_o	r_i / r_o	**تئوری‌ها**	**فرکانس اول**
۲۱۰	۰/۱	۰/۱	آباکوس	۲۶/۹۶۰
			مطالعه جاری	۲۸/۱۶۸
		۰/۳	آباکوس	۴۲/۱۵۴
			مطالعه جاری	۴۴/۰۶۴
	۰/۲	۰/۱	آباکوس	۲۱/۰۷۸
			مطالعه جاری	۲۲/۳۹۱
		۰/۳	آباکوس	۳۱/۲۹۵
			مطالعه جاری	۳۲/۴۶۱
	۰/۰۱	۰/۵	آباکوس	۹۰/۶۳۲۱
			مطالعه جاری	۹۴/۰۷۶۴
	۰/۱		آباکوس	۷۰/۱۰۶۵
			مطالعه جاری	۷۴/۱۹۶۸
	۰/۲		آباکوس	۵۰/۴۱۳
			مطالعه جاری	۵۰/۷۰۵
۲۷۰	۰/۰۱	۰/۱	آباکوس	۲۸/۵۳۲
			مطالعه جاری	۲۹/۳۵۱
		۰/۳	آباکوس	۴۸/۲۸۷
			مطالعه جاری	۴۹/۳۵۲

	۰/۱	۰/۱	آباکوس	۲۶/۳۴۵
			مطالعه جاری	۲۷/۹۳۷
		۰/۳	آباکوس	۴۱/۹۶۶
			مطالعه جاری	۴۳/۶۳۹
	۰/۲	۰/۱	آباکوس	۲۰/۷۲۹
			مطالعه جاری	۲۲/۳۲۹
		۰/۳	آباکوس	۳۱/۰۸۶
			مطالعه جاری	۳۰/۳۵۰

جدول ۵-۴۵ فرکانس طبیعی بی‌بعد قطاع حلقوی ویسکوالاستیک با لبه‌های شعاعی ساده و لبه‌های دایره‌ای گیردار

α (deg)	h / r_o	r_i / r_o	**تئوری‌ها**	**فرکانس اول**
۳۶۰	۰/۰۱	۰/۱	آباکوس	۲۸/۲۳۲
			مطالعه جاری	۲۹/۰۲۱
		۰/۳	آباکوس	۴۷/۷۱۵
			مطالعه جاری	۴۹/۰۱۸
		۰/۵	آباکوس	۸۹/۲۸۳
			مطالعه جاری	۹۳/۹۷۶
	۰/۱	۰/۱	آباکوس	۲۶/۰۲۳
			مطالعه جاری	۲۷/۳۵۵
		۰/۳	آباکوس	۴۱/۵۷۶
			مطالعه جاری	۴۲/۷۹۹

جدول ۵-۴۶ فرکانس طبیعی بی‌بعد قطاع حلقوی ویسکوالاستیک با هر چهار لبه ساده

α (deg)	h / r_o	r_i / r_o	**تئوری‌ها**	**فرکانس اول**
۱۲۰	۰/۱	۰/۱	آباکوس	۱۸/۸۷۰
			مطالعه جاری	۱۹/۶۰۶
		۰/۳	آباکوس	۲۴/۲۳۴
			مطالعه جاری	۲۷/۴۵۷
	۰/۲	۰/۱	آباکوس	۱۷/۸۱۸
			مطالعه جاری	۱۸/۶۷۷
		۰/۳	آباکوس	۲۱/۱۷۸
			مطالعه جاری	۲۱/۲۵۵

α (deg)	h/r_o	r_i/r_o	**تئوری‌ها**	**فرکانس اول**
۱۳۵	۰/۱	۰/۱	آباکوس	۱۷/۴۰۸
			مطالعه جاری	۱۸/۲۳۰
		۰/۳	آباکوس	۲۴/۳۲۱
			مطالعه جاری	۲۶/۲۱۷
	۰/۲	۰/۱	آباکوس	۱۶/۶۰۱
			مطالعه جاری	۱۷/۵۳۰
		۰/۳	آباکوس	۲۰/۵۰۶
			مطالعه جاری	۲۰/۶۶۴
۱۹۵	۰/۱	۰/۱	آباکوس	۱۵/۱۰۸
			مطالعه جاری	۱۵/۴۸۷
		۰/۳	آباکوس	۲۲/۰۲۶
			مطالعه جاری	۲۳/۶۸۵
	۰/۲	۰/۱	آباکوس	۱۴/۶۰۱
			مطالعه جاری	۱۳/۸۹۱
		۰/۳	آباکوس	۱۹/۳۰۰
			مطالعه جاری	۱۹/۹۰۵
۲۱۰	۰/۱	۰/۱	آباکوس	۱۵/۵۳۲
			مطالعه جاری	۱۵/۱۵۹
		۰/۳	آباکوس	۲۱/۵۵۳
			مطالعه جاری	۲۳/۳۹۰
	۰/۲	۰/۱	آباکوس	۱۳/۲۴۱
			مطالعه جاری	۱۲/۶۹۲
		۰/۳	آباکوس	۱۹/۱۷۱
			مطالعه جاری	۱۹/۸۱۸
۲۷۰	۰/۱	۰/۱	آباکوس	۱۴/۳۱۱
			مطالعه جاری	۱۴/۲۳۵
		۰/۳	آباکوس	۲۱/۱۱۲
			مطالعه جاری	۲۲/۵۷۳
	۰/۲	۰/۱	آباکوس	۱۲/۸۱۷
			مطالعه جاری	۱۲/۵۲۲

۱۹/۰۵۱	آباکوس	۰/۳		
۱۹/۶۲۲	مطالعه جاری			

جدول ۵-۴۷ فرکانس طبیعی بی‌بعد قطاع حلقوی ویسکوالاستیک با لبه‌های شعاعی ساده و ساده-گیردار

فرکانس اول	تئوری‌ها	r_i / r_o	h / r_o	α (deg)
۲۸/۸۲۵	آباکوس	۰/۳	۰/۲	**۱۲۰**
۲۹/۲۸۹	مطالعه جاری			
۲۸/۰۱۳	آباکوس			**۱۳۵**
۲۸/۵۶۸	مطالعه جاری			
۲۷/۰۸۵	آباکوس			**۱۹۵**
۲۷/۱۰۵	مطالعه جاری			
۲۶/۸۸۰	آباکوس			**۲۱۰**
۲۶/۹۱۳	مطالعه جاری			
۲۶/۴۱۱	آباکوس			**۲۷۰**
۲۶/۴۳۴	مطالعه جاری			

جدول ۵-۴۸ فرکانس طبیعی بی‌بعد قطاع حلقوی ویسکوالاستیک با لبه‌های شعاعی ساده و آزاد-ساده

فرکانس اول	تئوری‌ها	r_i / r_o	h / r_o	α (deg)
۱۱/۱۱۳	آباکوس	۰/۳	۰/۲	**۱۹۵**
۱۲/۰۸۳	مطالعه جاری			
۱۰/۱۲۵	آباکوس			**۲۱۰**
۱۱/۶۸۵	مطالعه جاری			
۸/۴۰۵	آباکوس			**۲۷۰**
۸/۱۵۶	مطالعه جاری			

جدول ۵-۴۹ فرکانس طبیعی بی‌بعد قطاع حلقوی ویسکوالاستیک با لبه‌های شعاعی ساده و آزاد-گیردار

فرکانس اول	تئوری‌ها	r_i / r_o	h / r_o	α (deg)
۱۵/۷۲۲	آباکوس	۰/۳	۰/۲	**۱۹۵**
۱۵/۹۸۷	مطالعه جاری			
۱۵/۱۸۱	آباکوس			**۲۱۰**
۱۵/۲۲۰	مطالعه جاری			

۱۳/۱۵۵	آباکوس	**۲۷۰**
۱۳/۰۶۴	مطالعه جاری	

جدول ۵-۵۰ فرکانس طبیعی بی‌بعد قطاع توپر ویسکوالاستیک با لبه‌های شعاعی ساده و لبه دایروی گیردار

فرکانس اول	تئوری‌ها	h / r_o	α (deg)
۹۰/۵۹۱	آباکوس	۰/۱	**۳۰**
۹۰/۳۴۹	مطالعه جاری		
۶۷/۷۲۳	آباکوس	۰/۲	
۷۰/۶۲۵	مطالعه جاری		
۲۶/۴۰۷	آباکوس		**۹۰**
۲۴/۳۸۳	مطالعه جاری		
۱۷/۳۲۵	آباکوس		**۱۸۰**
۱۶/۹۳۲	مطالعه جاری		
۱۶/۷۵۸	آباکوس		**۲۱۰**
۱۶/۲۲۷	مطالعه جاری		
۱۵/۹۲۱	آباکوس		**۲۷۰**
۱۵/۸۷۸	مطالعه جاری		

جدول ۵-۵۱ فرکانس طبیعی بی‌بعد قطاع توپر ویسکوالاستیک با هر سه لبه‌ی ساده

فرکانس اول	تئوری‌ها	h / r_o	α (deg)
۸۰/۱۰۱	آباکوس	۰/۱	**۳۰**
۸۶/۷۵۶	مطالعه جاری		
۶۲/۰۲۰	آباکوس	۰/۲	
۶۵/۵۴۳	مطالعه جاری		
۱۹/۱۷۱	آباکوس		**۹۰**
۱۷/۷۲۱	مطالعه جاری		
۱۵/۳۷۶	آباکوس		**۱۲۰**
۱۴/۶۲۵	مطالعه جاری		
۱۲/۴۲۹	آباکوس		**۱۸۰**
۱۲/۹۸۵	مطالعه جاری		
۱۱/۵۵۸	آباکوس		**۲۱۰**
۱۲/۳۱۱	مطالعه جاری		

۲۷۰	آباکوس	۱۰/۸۵۱
	مطالعه جاری	۱۱/۱۹۷

همانطور که مشاهده شده بود، فرکانس طبیعی بی‌بعد ورق الاستیک با ورق ویسکوالاستیک برابر می‌باشد. برای پی بردن به چگونگی اختلاف فرکانس‌های طبیعی برای حالت الاستیک و ویسکوالاستیک، در اینجا به بررسی ابعادی فرکانس‌های به‌دست آمده پرداخته می‌شود. در این پایان‌نامه فقط برای شرایط مرزی گیردار مقایسه فرکانس ابعادی صورت گرفته است. مشاهده می‌شود که فرکانس طبیعی ورق ویسکوالاستیک بیشتر از ورق الاستیک می‌باشد. علت این امر سفتی ورق ویسکوالاستیک از ورق الاستیک است.

جدول ۵-۵۲ مقایسه فرکانس طبیعی ورق حلقوی ویسکوالاستیک و الاستیک برحسب هرتز

n	h/r_o	r_i/r_o	فرکانس اول		فرکانس دوم	
			الاستیک	**ویسکوالاستیک**	**الاستیک**	**ویسکوالاستیک**
۱	۰/۱	۰/۳	۱۹۷۷۲۰	۲۹۲۱۹۹	۴۳۸۷۱۷	۶۴۹۲۷۸
۲			۲۴۰۰۲۸	۳۵۵۰۳۱	۴۵۹۴۷۶	۶۷۹۸۰۹
۱	۰/۲		۳۹۸۲۳۷	۵۸۹۱۶۵	۸۰۶۸۷۰	۱۱۹۳۷۰۹
۲			۴۴۲۳۲۷	۶۵۴۳۹۲	۸۲۹۸۱۰	۱۲۲۷۶۴۹

مزیت تئوری برشی مرتبه اول نسبت به تئوری کلاسیک، علاوه بر تعیین فرکانس‌های عرضی، امکان به‌دست آوردن فرکانس طبیعی درون صفحه‌ای است. در جدول (۵-۵۳)، فرکانس‌های درون صفحه‌ای اول و دوم برای نسبت‌های مختلف r_i/r_o ارائه شده است. در این قسمت فقط برای شرط مرزی گیردار-گیردار و نسبت h/r_o=۰/۱ فرکانس‌ها محاسبه شده‌اند. برای صحت سنجی نتایج به‌دست آمده از مطالعه جاری، نتایج این بخش با نتایج به‌دست آمده از نرم‌افزار آباکوس و مرجع [۶۷] مقایسه می‌گردند. همانطور که مشاهده می‌شود، افزایش نسبت r_i/r_o باعث افزایش فرکانس بی‌بعد شده و این روند، با افزایش پارامتر n ادامه دارد. همچنین، با توجه به داده‌های جدول، تطابق مناسبی بین روش ارائه شده و حل اجزاء محدود وجود دارد.

جدول ۵-۵۳ فرکانس طبیعی بی‌بعد درون-صفحه‌ای ورق حلقوی الاستیک

r_i / r_o	n=۱			n=۲			n=۳		
	مطالعه جاری	آباکوس	مرجع [۶۷]	مطالعه جاری	آباکوس	مرجع [۶۷]	مطالعه جاری	آباکوس	مرجع [۶۷]
۰/۲	۲/۹۲۶	۲/۷۸۷	۲/۸۰۶	۳/۵۸۵	۳/۴۰۶	۳/۳۹۴	۴/۴۵۷	۴/۰۷۵	۴/۰۸۴
	۴/۱۸۸	۴/۲۵۵	۴/۱۰۲	۴/۶۶۹	۴/۷۶۵	۴/۳۸۲	۴/۷۷۸	۴/۸۰۹	۵/۱۲۰
۰/۴	۳/۶۵۵	۳/۵۳۱	۳/۴۵۶	۴/۲۹۱	۴/۱۲۹	۴/۰۴۶	۵/۰۵۳	۴/۸۲۰	۴/۷۳۷
	۵/۶۴۷	۵/۴۳۰	۵/۳۵۰	۵/۴۸۲	۵/۴۲۷	۵/۳۴۸	۶/۲۰۹	۵/۷۲۴	۵/۶۵۰

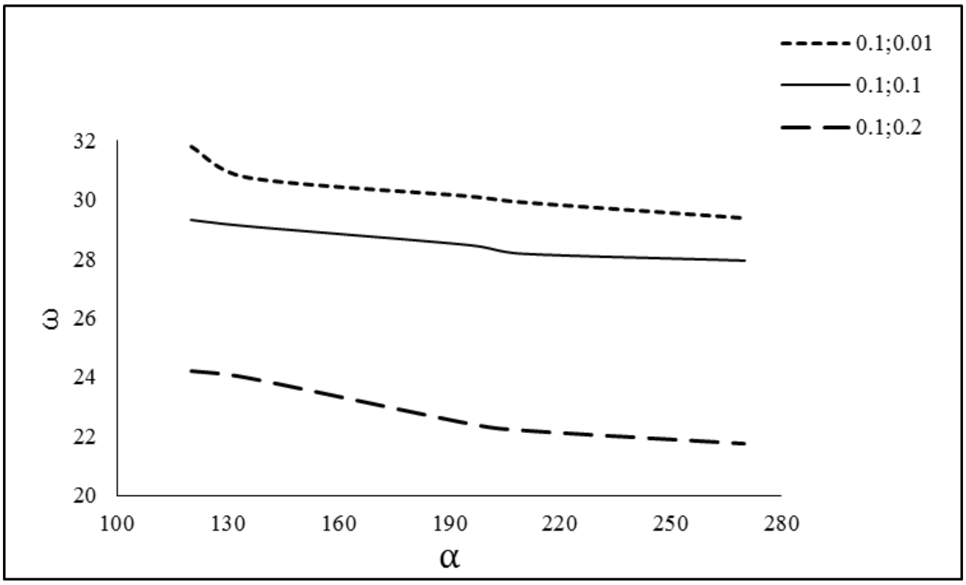
علاوه بر ارائه فرکانس طبیعی بی‌بعد درون صفحه‌ای در حالت الاستیک، به ارائه فرکانس طبیعی بی‌بعد درون صفحه‌ای ویسکوالاستیک نیز پرداخته می‌شود. در جدول (۵-۵۴) فرکانس طبیعی بی‌بعد درون صفحه‌ای ورق ویسکوالاستیک آورده شده است. مشاهده می‌شود که فرکانس طبیعی ورق ویسکوالاستیک مشابه ورق الاستیک در حالت بی‌بعد می‌باشد.

جدول ۵-۵۴ فرکانس طبیعی بی‌بعد درون-صفحه‌ای ورق حلقوی ویسکوالاستیک

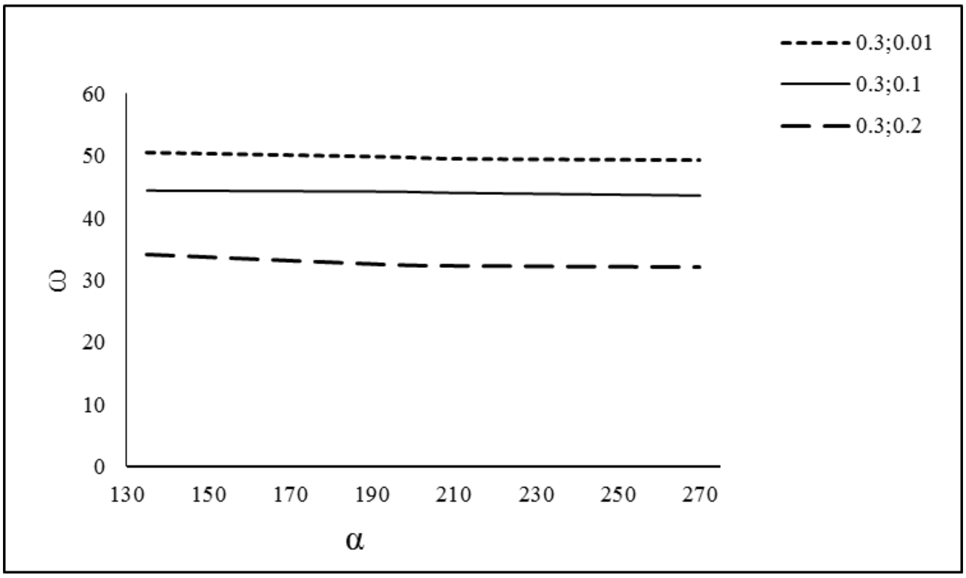
r_i / r_o	n=۱		n=۲		n=۳	
	مطالعه جاری	آباکوس	مطالعه جاری	آباکوس	مطالعه جاری	آباکوس
۰/۲	۲/۹۲۶	۲/۷۸۷	۳/۵۸۵	۳/۴۰۶	۴/۴۵۷	۴/۰۷۵
	۴/۱۸۸	۴/۲۵۵	۴/۶۶۹	۴/۷۶۵	۴/۷۷۸	۴/۸۰۹
۰/۴	۳/۶۵۵	۳/۵۳۱	۴/۲۹۱	۴/۱۲۹	۵/۰۵۳	۴/۸۲۰
	۵/۶۴۷	۵/۴۳۰	۵/۴۸۲	۵/۴۲۷	۶/۲۰۹	۵/۷۲۴

برای اینکه روند تغییرات اعداد جدول‌های بالا واضح‌تر شود، در نمودارهایی، چگونگی تغییرات فرکانس اول نسبت به تغییر خصوصیات هندسی صفحه آورده شده است. این نمودارها در شکل‌های (۵-۶) و (۵-۷) قابل مشاهده است. در شکل (۵-۶) تغییر فرکانس اول قطاع حلقوی با شرایط مرزی گیردار-گیردار نسبت به تغییر زاویه قطاع برای نسبت‌های مختلف h / r_o و نسبت $r_i / r_o =$۰/۱ نشان داده شده است. مشاهده می شود که برای این شرط مرزی تغییرات فرکانس، برای ورق‌های ضخیم‌تر نسبت به ورق‌های نازکتر بیشتر می‌باشد. در شکل (۵-۷) تغییر فرکانس اول قطاع حلقوی با شرایط مرزی گیردار-گیردار نسبت به تغییر

زاویه قطاع برای نسبت‌های مختلف h/r_o و نسبت r_i/r_o =۰/۳ ارائه شده است. با توجه به این شکل، برای این شرط مرزی خاص، تغییرات فرکانس اول تقریبا برای نسبت‌های مختلف h/r_o ثابت می‌باشد.



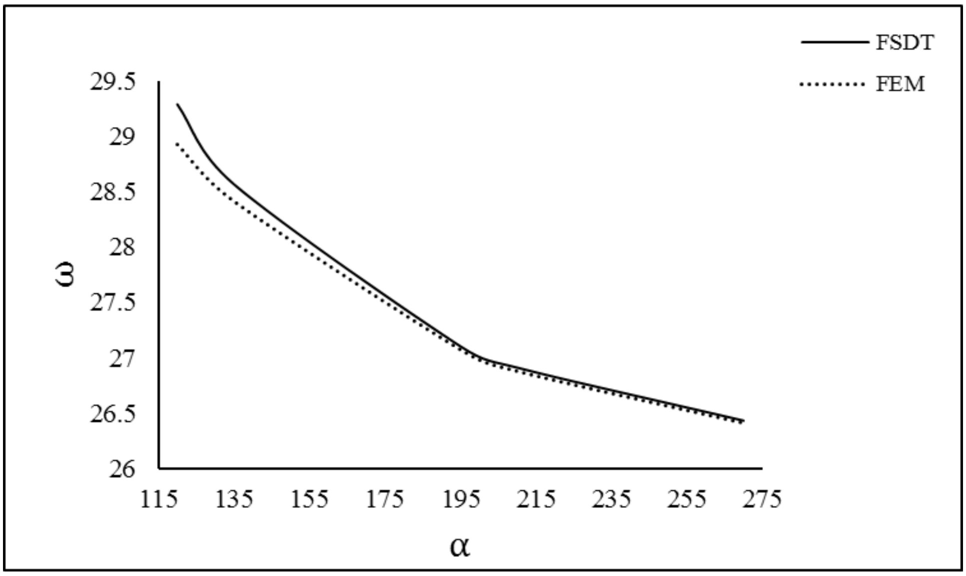
شکل ۵-۶ تغییر فرکانس اول قطاع گیردار-گیردار نسبت به زاویه به‌ازای r_i/r_o =۰/۱



شکل ۵-۷ تغییر فرکانس اول قطاع گیردار-گیردار نسبت به زاویه به‌ازای r_i/r_o =۰/۳

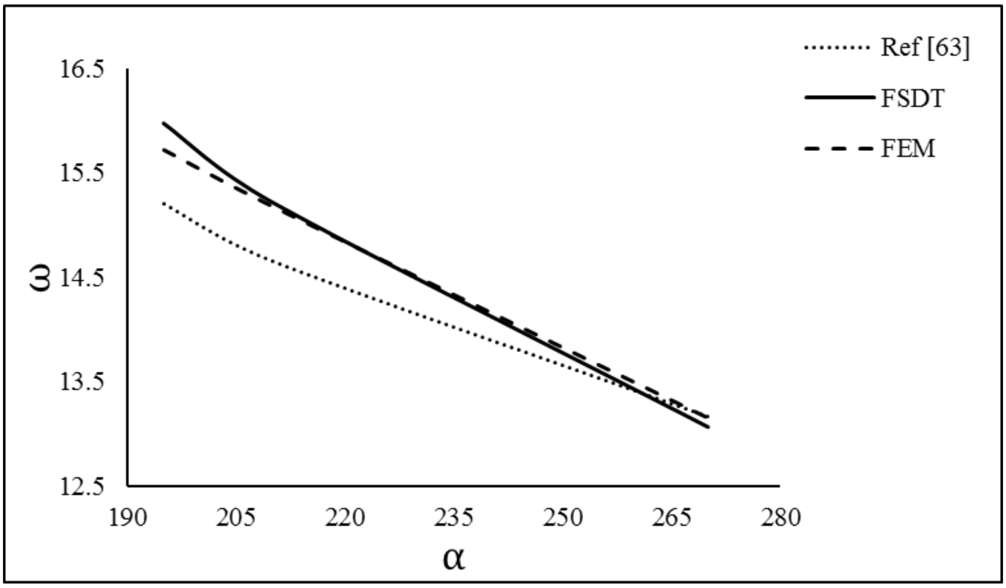
شکل (۵-۸) اثر تغییر زاویه بر فرکانس طبیعی اول قطاع حلقوی ساده-گیردار برای نسبت ضخامت به شعاع خارجی ۰/۲ و نسبت شعاع داخلی به خارجی ۰/۳ را بیان می‌کند. با توجه به این نمودار، با افزایش زاویه

قطاع، فرکانس طبیعی بی‌بعد ورق کاهش می‌یابد. همانطور که مشاهده می‌شود، تطابق خوبی بین تئوری برشی مرتبه اول با حل اجزاء محدود وجود دارد. همچنین، هرچه زاویه قطاع، افزایش‌می یابد، به‌عبارتی، به دایره‌ی کامل نزدیکتر شود، حل ارائه شده به حل اجزاء محدود نزدیک‌تر می‌شود.



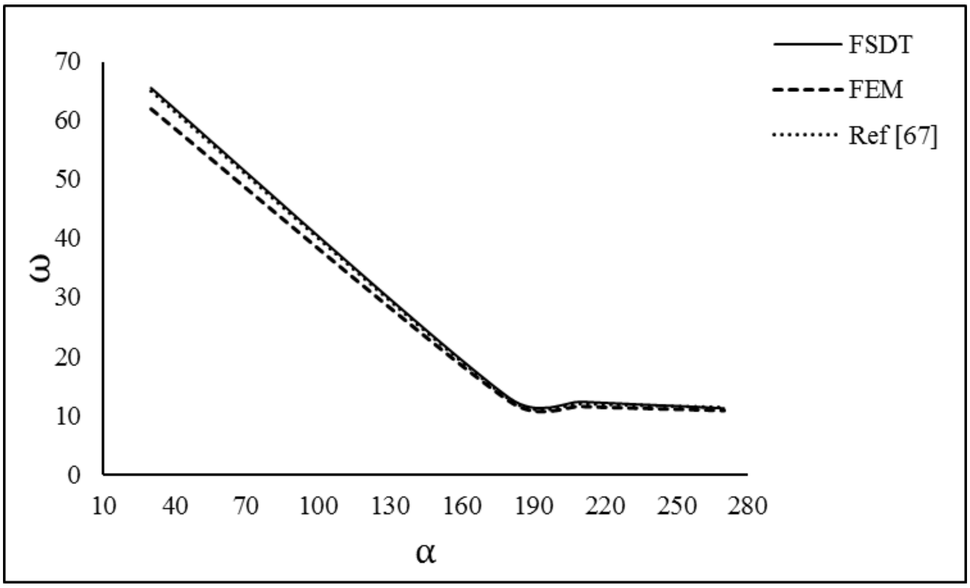
شکل ۵-۸ تغییر فرکانس ورق ساده-گیردار نسبت به زاویه قطاع

شکل (۵-۹) اثر تغییر زاویه بر فرکانس طبیعی اول قطاع حلقوی آزاد-گیردار برای نسبت ضخامت به شعاع خارجی ۰/۲ و نسبت شعاع داخلی به خارجی ۰/۳ را بیان می‌کند. در این شکل، نتایج حاصل از حل تحلیلی با نتایج اجزاء محدود و مرجع [۶۲] مقایسه شده است. با توجه به این شکل، در زوایای بالاتر، نتایج هر سه حالت تقریبا یکسان می‌باشند ولی با کاهش زاویه قطاع، حل ارائه شده نسبت به حل مرجع [۶۲]، به حل اجزاء محدود نزدیکتر می باشد.



شکل ۵-۹ تغییر فرکانس ورق آزاد-گیردار نسبت به زاویه قطاع

در شکل (۵-۱۰) اثر تغییر زاویه بر فرکانس طبیعی اول قطاع توپر با لبه‌ی ساده برای نسبت $h/r_o=۰/۲$ و نسبت شعاع داخلی به خارجی ۰/۳ را نشان می‌دهد. همگرایی مناسبی بین مرجع [۶۶] و روش ارائه شده مشاهده می‌شود. علت نزدیک شدن حل ارائه شده به مرجع [۶۶] این است که این مرجع از تئوری مرتبه بالاتر برشی برای حل قطاع استفاده نموده است. بنابراین، اختلاف کمی بین تئوری برشی مرتبه اول و تئوری‌های مرتبه بالاتر در فرکانس‌های به‌دست آمده وجود دارد.



شکل ۵-۱۰ تغییر فرکانس قطاع توپر با لبه‌ی ساده نسبت به زاویه

۵-۳- پاسخ به بار دینامیکی

در این بخش به بررسی پاسخ ورق به بار عرضی تابع زمان پرداخته می‌شود. بار عرضی تعریف شده، شامل یک بار فشاری گسترده به مقدار ۲۷۰ پاسکال است که به مدت یک ثانیه و به‌صورت کسینوسی (نامتقارن) که به ورق اعمال می‌شود. معادله ریاضی بارگذاری به‌صورت رابطه‌ی (۵-۳) می‌باشد که در اینجا، H تابع پله[1] می‌باشد. برای پروفیل مکانی بارگذاری، چهار نوع مدل در نظر گرفته شده است که شامل بارگذاری ثابت، خطی، سهموی و سینوسی است. این توزیع بارگذاری در جدول (۵-۵۶) آورده شده است. در تحلیل پاسخ مشخصات هندسی و خواص مکانیکی ورق به‌صورت جدول (۵-۵۵) درنظر گرفته شده است.

$$Q(X,\theta,t)=(1-H(t-t_0))Q(X)\cos(n\theta) \qquad (۵-۳)$$

جدول ۵-۵۵ مشخصات هندسی و مکانیکی ورق

شعاع خارجی (m)	r_o=۰/۱۵
شعاع داخلی (m)	r_i=۰/۰۴۵
ضخامت (m)	h= ۰/۰۱۵
مدول‌های ویسکوالاستیک (Pa)	G_0=۹/۸ ×۱۰^{۵}, G_1=۲/۴۵×۱۰^{۷}
ضریب ویسکوالاستیک (Pa.s)	η=۲/۷۴۴×۱۰^{۵}
ضریب پوآسون	ν=۰/۲۵
چگالی (Kg/m^2)	ρ=۱۵۰۰

- **پاسخ گذرا: تابع پله‌ای**

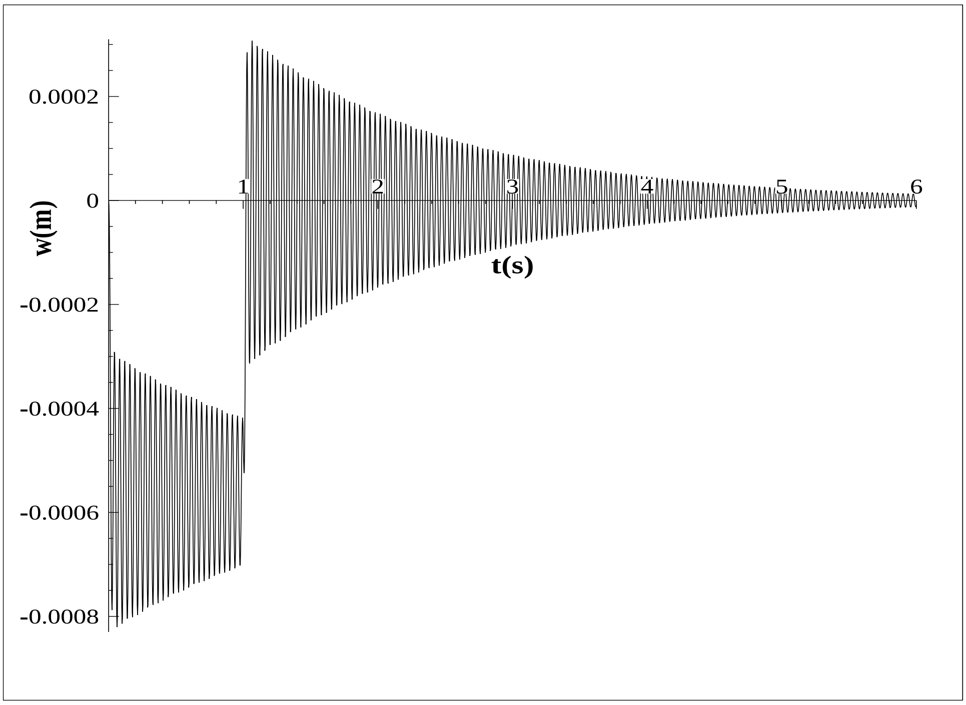
شکل (۵-۱۱)، پاسخ عرضی در شعاع میانی ورق به‌ازای بارگذاری متقارن و پروفیل بارگذاری ثابت، با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول، تئوری کلاسیک و حل عددی به مدت ۶ ثانیه را نشان می‌دهند. تمامی این پاسخ‌ها در $\theta=30^\circ$ گرفته شده است. در زمان اعمال بار، ورق حول خیز استاتیکی خود نوسان کرده و پس از حذف بار، خیز نوسانی ورق حول صفر ادامه می‌یابد. همچنین، متوسط خیز در تئوری برشی به حل عددی

[1] Heaviside function

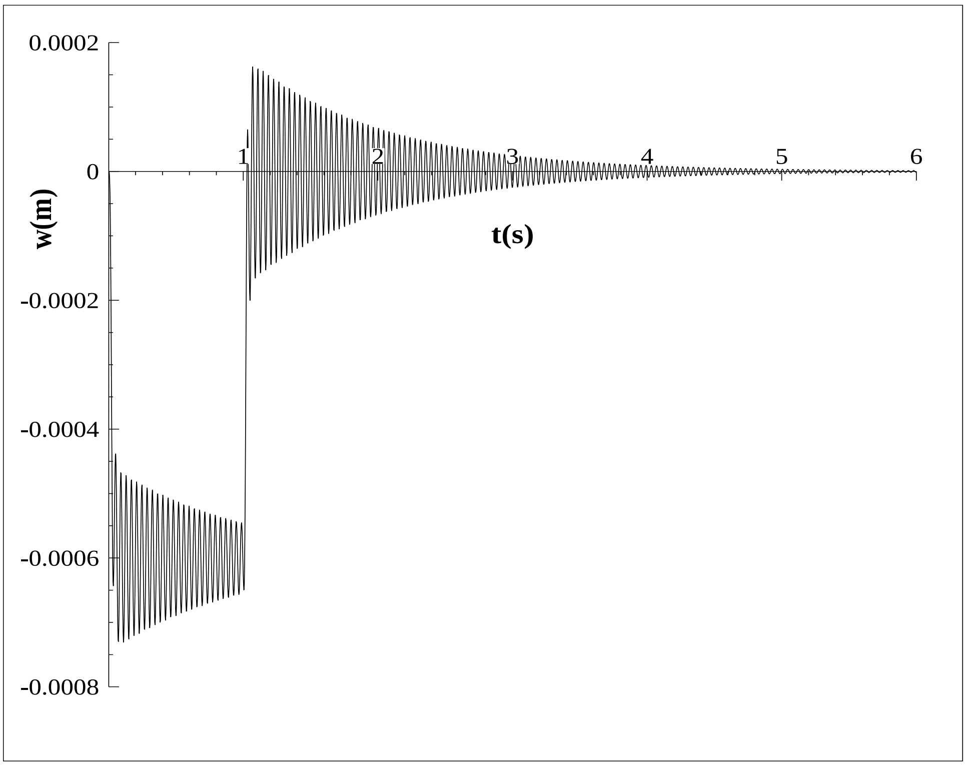
نزدیک‌تر است. پروفیل های بار، معادل استاتیکی یکسان دارند. در حل عددی گام بارگذاری ۰/۰۰۱ درنظر گرفته شده است.

جدول ۵-۵۶ معادله‌ی پروفیل‌های مختلف بارگذاری

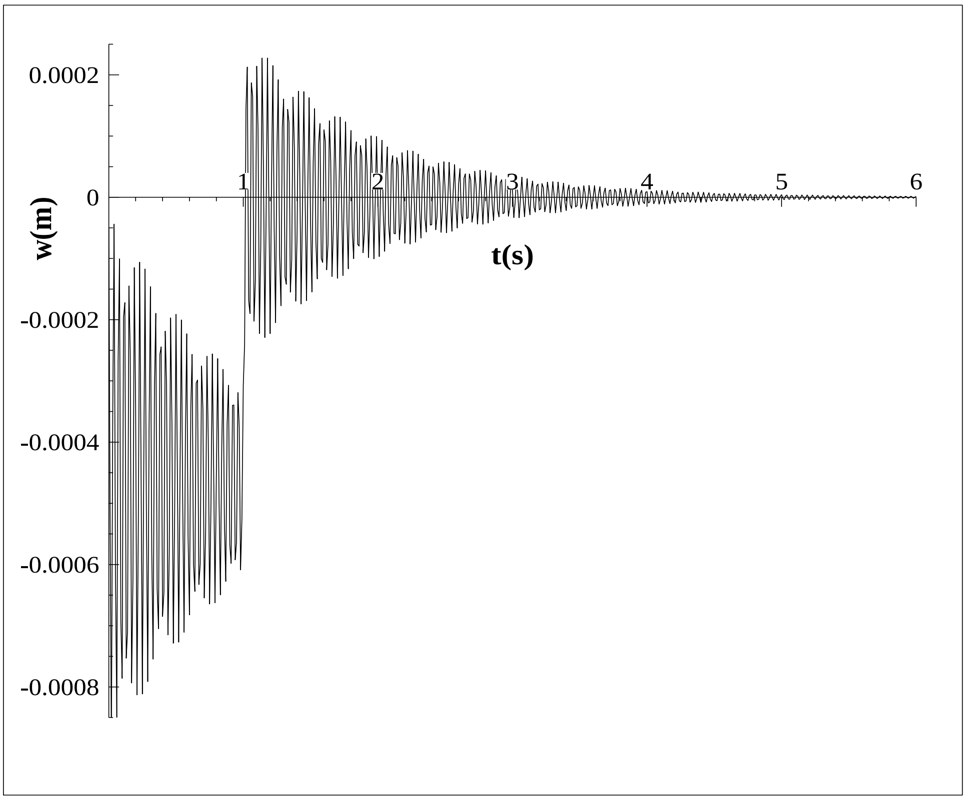
نوع بارگذاری	معادله	
ثابت	$Q(X)=Q_0$	
خطی	$Q(X)=a_1X+b_1$	$a_1=2.857e^{-1}, b_1=2$
سهموی	$Q(X)=a_1X^2+b_1X+c_1$	$a_1=2.449e^{-2}, b_1=-1.714e^{-1}, c_1=0$
سینوسی	$Q(X)=a_1\sin(\frac{\pi X}{L})$ $L=X_{out}-X_{in}$	$a_1=-1.570$



شکل ۵-۱۱ الف پاسخ گذرای عرضی ورق ویسکوالاستیک در $r=(r_i+r_{out})/2$ به‌ازای بارگذاری متقارن، تئوری برشی مرتبه اول

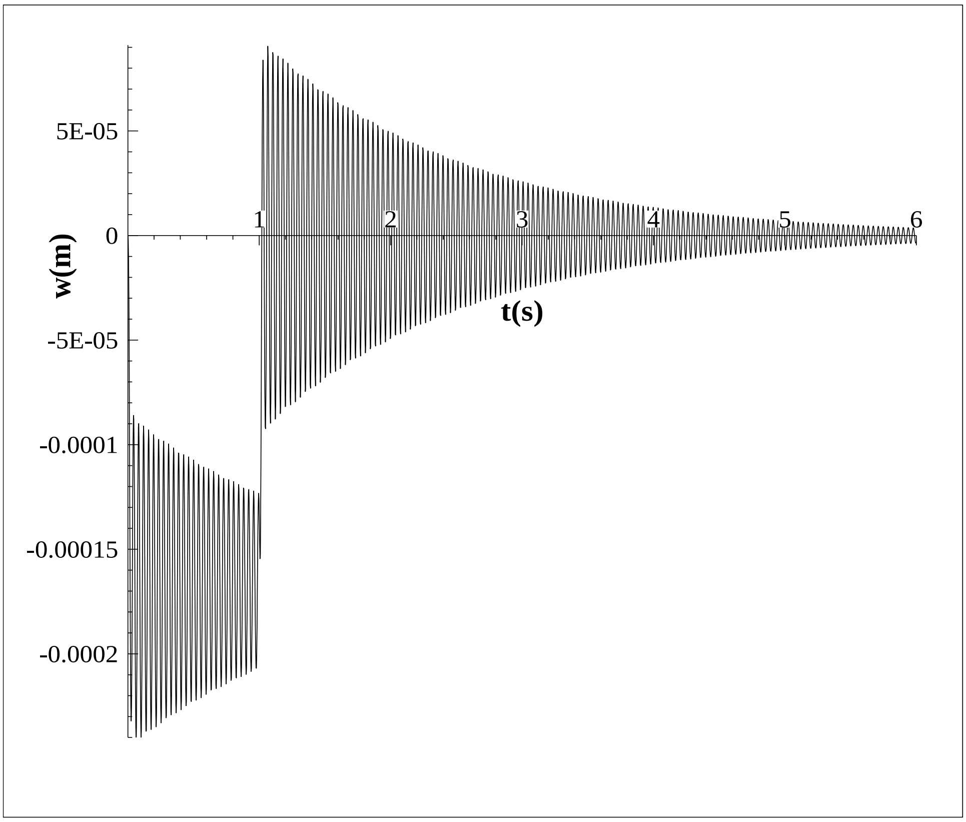


شکل ۵-۱۱ ب پاسخ گذرای عرضی ورق ویسکوالاستیک در ($r=(r_i+r_{out})/2$) به‌ازای بارگذاری متقارن، تئوری کلاسیک

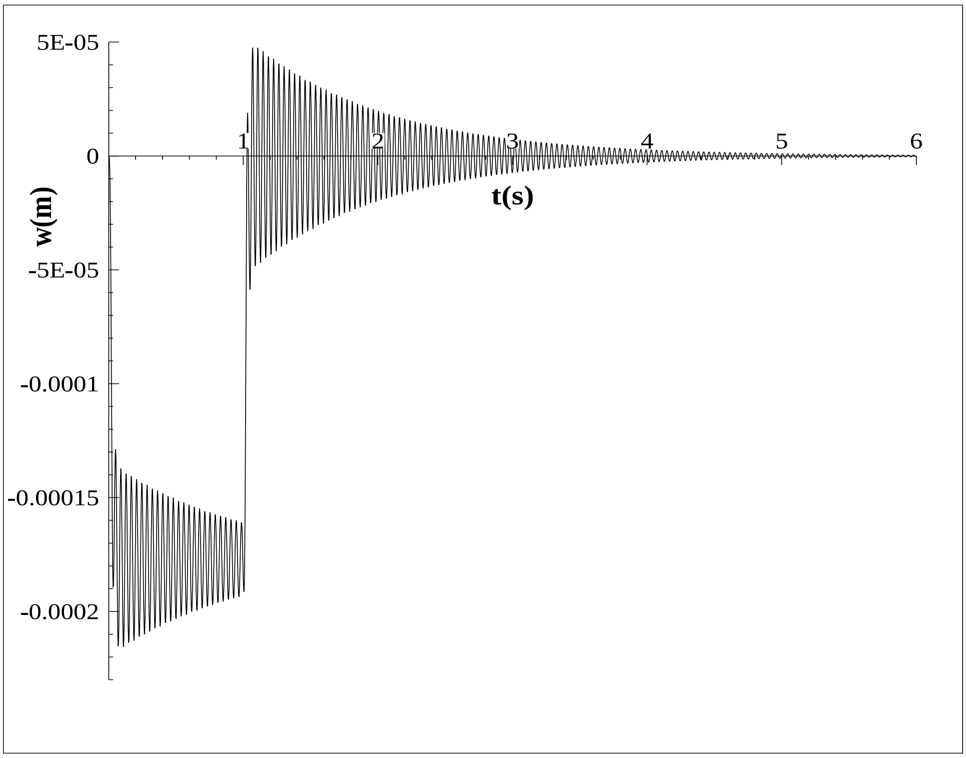


شکل ۵-۱۱ ج پاسخ گذرای عرضی ورق ویسکوالاستیک در ($r=(r_i+r_{out})/2$) به‌ازای بارگذاری متقارن، حل عددی

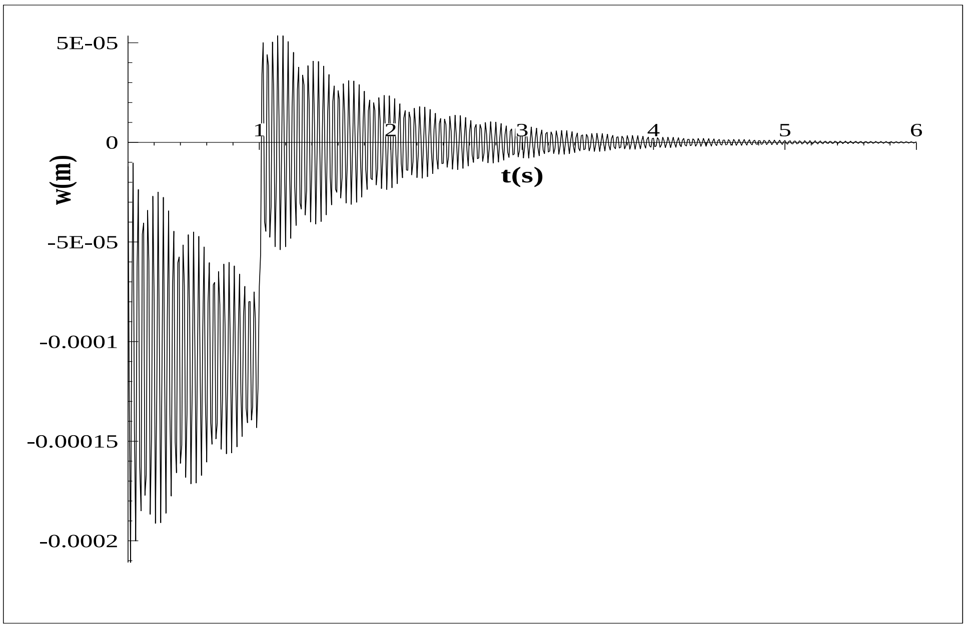
شکل‌های (۵-۱۲)، پاسخ عرضی در نزدیکی شعاع خارجی ورق به‌ازای بارگذاری متقارن و پروفیل بارگذاری ثابت، با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول، تئوری کلاسیک و حل عددی را نشان می‌دهند. تمامی این پاسخ‌ها در $\theta = 30^{\circ}$ گرفته شده است. مشاهده می‌شود که با نزدیک شدن به مرز ورق، خیز ورق کاهش می‌یابد. همگرایی قابل قبولی بین تئوری کلاسیک و برشی مرتبه اول با حل عددی قابل مشاهده است.



شکل ۵-۱۲ الف پاسخ گذرای عرضی ورق ویسکوالاستیک در ($r = 0.717(r_i + r_{out})$) به‌ازای بارگذاری متقارن، تئوری برشی مرتبه اول

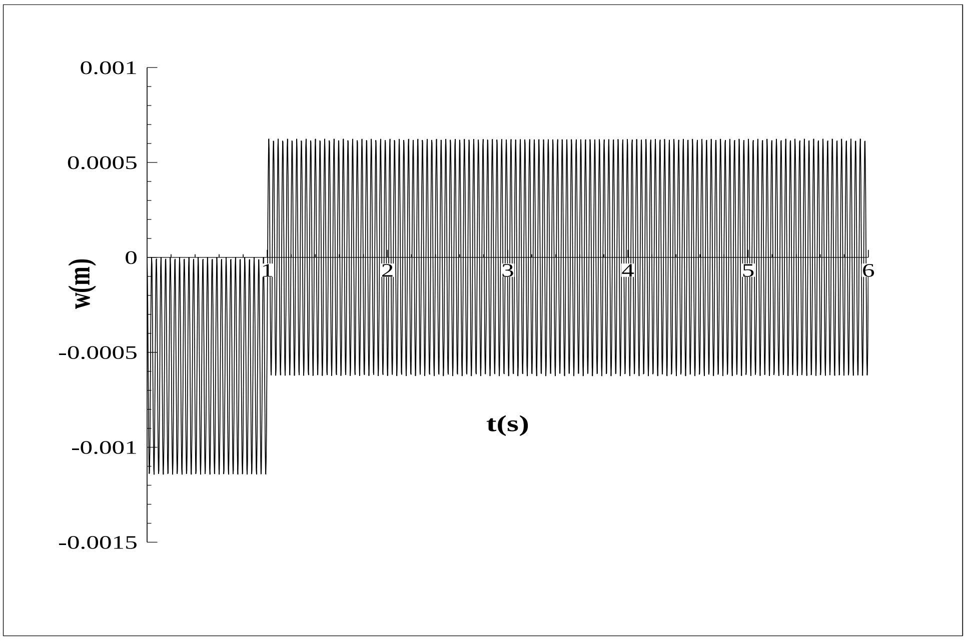


شکل ۵-۱۲ ب پاسخ گذرای عرضی ورق ویسکوالاستیک در ($r = 0.717(r_i + r_{out})$) به‌ازای بارگذاری متقارن، تئوری کلاسیک

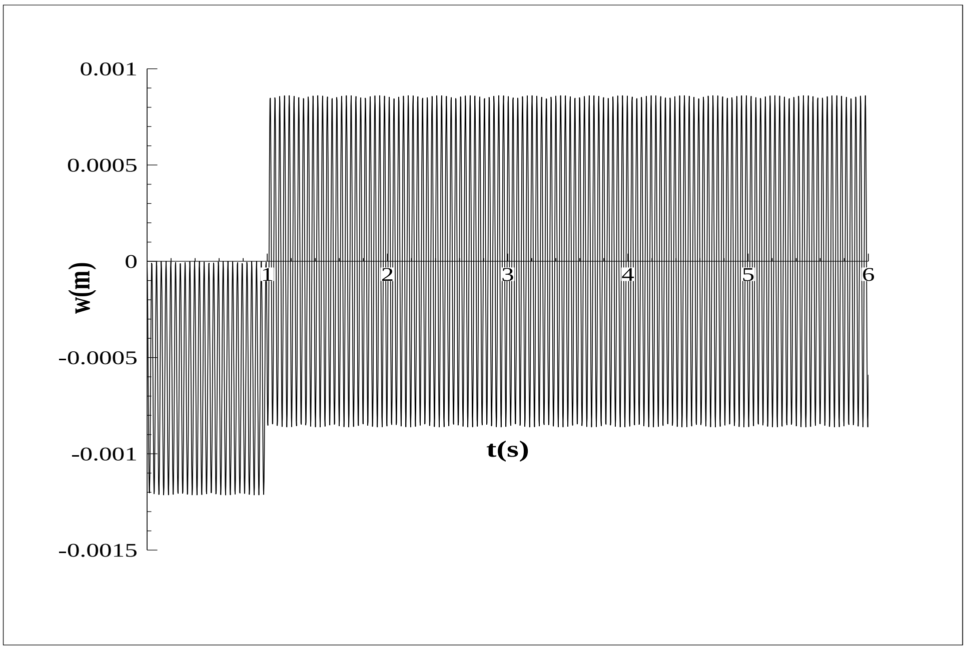


شکل ۵-۱۲ ج پاسخ گذرای عرضی ورق ویسکوالاستیک در ($r = 0.717(r_i + r_{out})$) به‌ازای بارگذاری متقارن، حل عددی

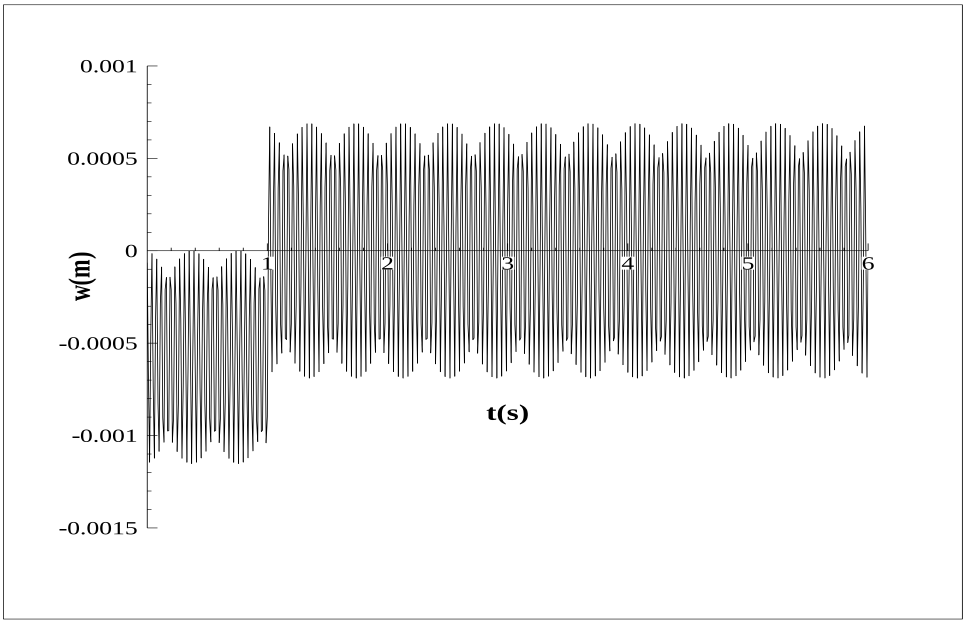
پاسخ عرضی ورق الاستیک با قرار دادن $\tau \to 0$ برای تئوری برشی مرتبه اول، کلاسیک و عددی به‌دست می آید. شکل‌های (۵-۱۳ الف)-(۵-۱۳ ج) پاسخ عرضی در شعاع میانی ورق به‌ازای بارگذاری متقارن و پروفیل بارگذاری ثابت، با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول، تئوری کلاسیک و حل عددی را نشان می‌دهند.



شکل ۵-۱۳الف پاسخ گذرای عرضی ورق الاستیک در $r=(r_i+r_{out})/2$ به‌ازای بارگذاری متقارن، تئوری برشی مرتبه اول

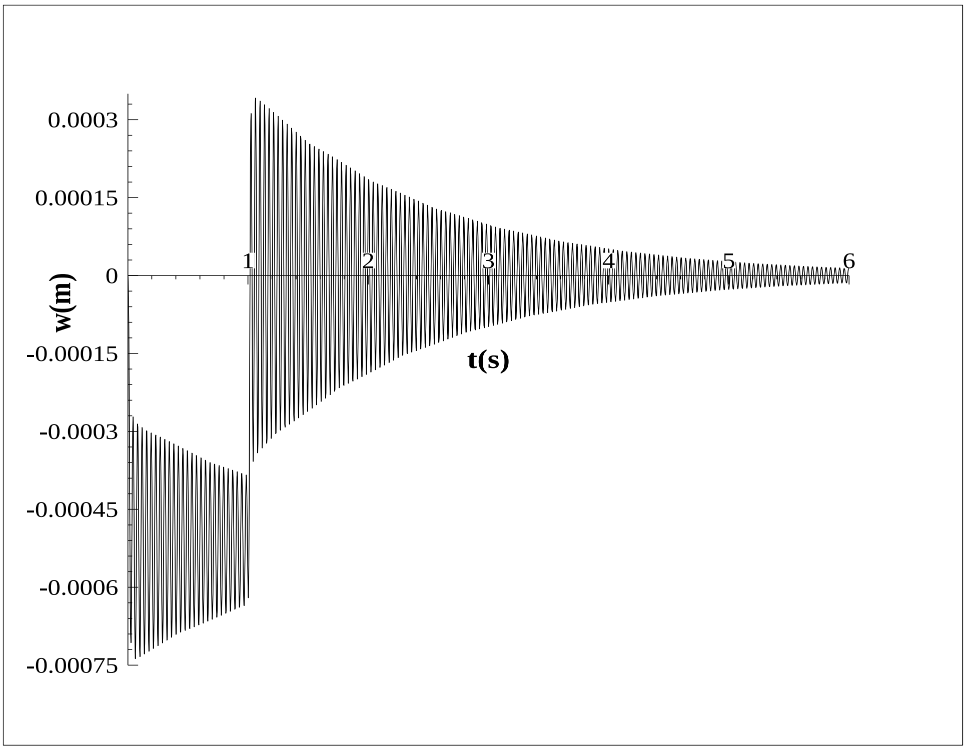


شکل ۵-۱۳ ب پاسخ گذرای عرضی ورق در $r=(r_i+r_{out})/2$ به‌ازای بارگذاری متقارن، تئوری کلاسیک

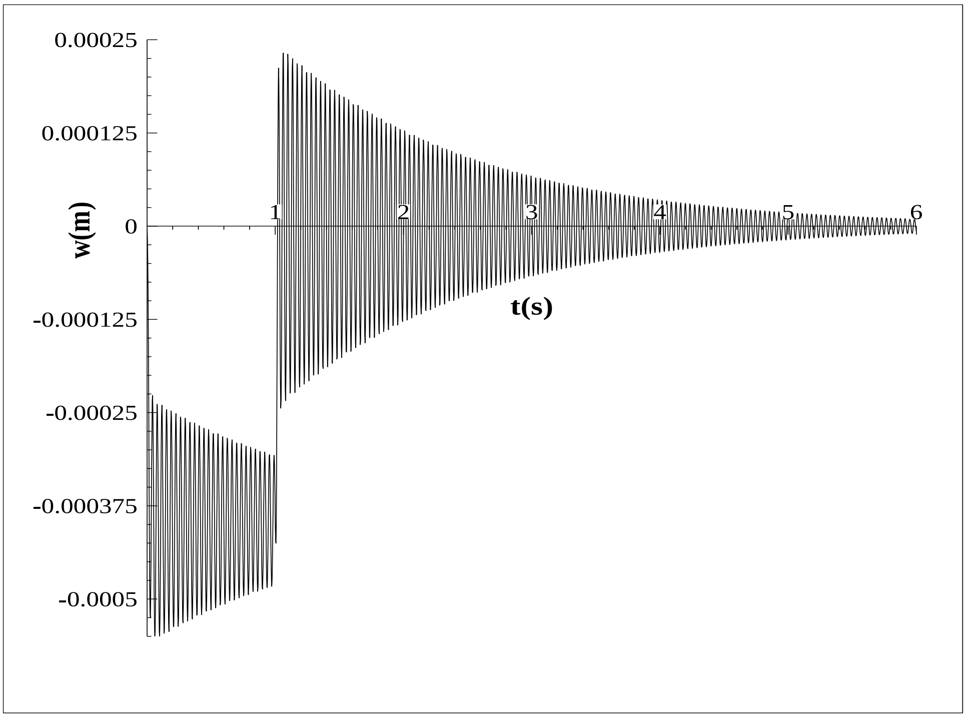


شکل ۵-۱۳ ج پاسخ گذرای عرضی ورق در $r=(r_i+r_{out})/2$ به‌ازای بارگذاری متقارن، حل عددی

همانطور که مشاهده می‌شود خیز ورق الاستیک بیشتر از خیز ورق ویسکوالاستیک، که با توجه به تعریف مواد ویسکوالاستیک صحیح می‌باشد. برای بارگذاری نامتقارن دو نوع بارگذاری به ازای ۲ و $n=1$ در نظر گرفته شده و نتایج این نوع بارگذاری‌ها در شکل‌های (۵-۱۴) و (۵-۱۵) ارائه شده است. در این شکل‌ها، پاسخ عرضی ورق برای دو بارگذاری متفاوت به ازای ۲ و $n=1$ و پروفیل بارگذاری ثابت در شعاع میانی ارائه شده است. همانطور که قابل مشاهده است، مقدار دامنه نوسانات برای بارگذاری نوع دوم کمتر از نوع اول می‌باشد.

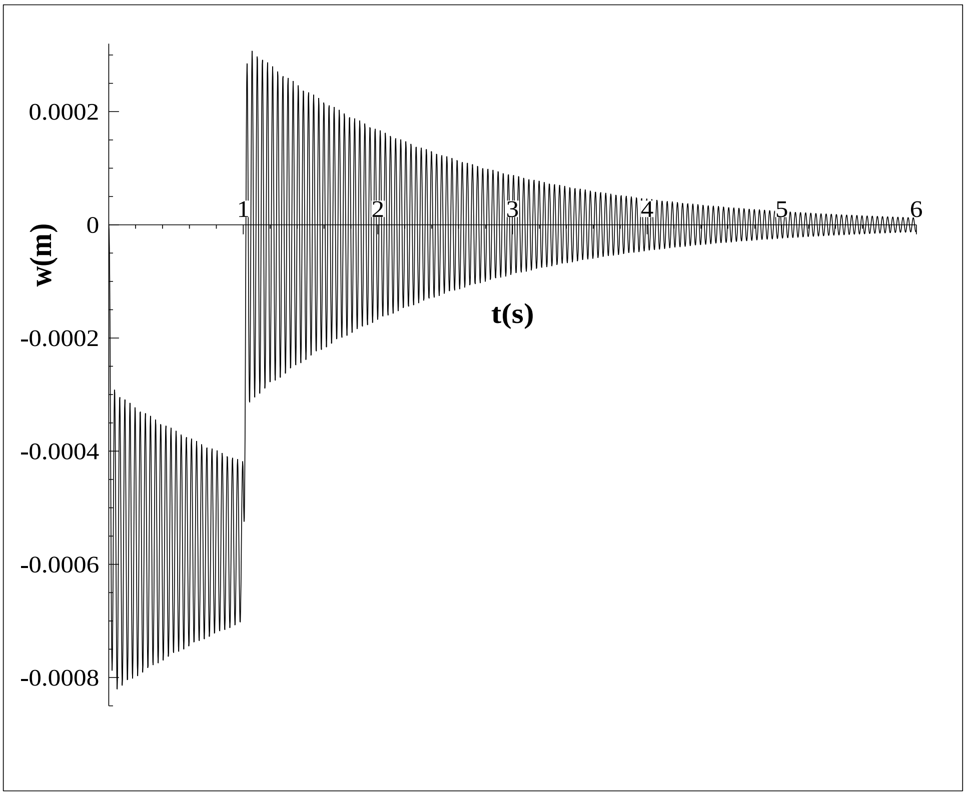


شکل ۵-۱۴ پاسخ گذرای عرضی ورق ویسکوالاستیک در $r=(r_i+r_{out})/2$ به‌ازای بارگذاری نامتقارن (n=۱)، تئوری برشی مرتبه اول

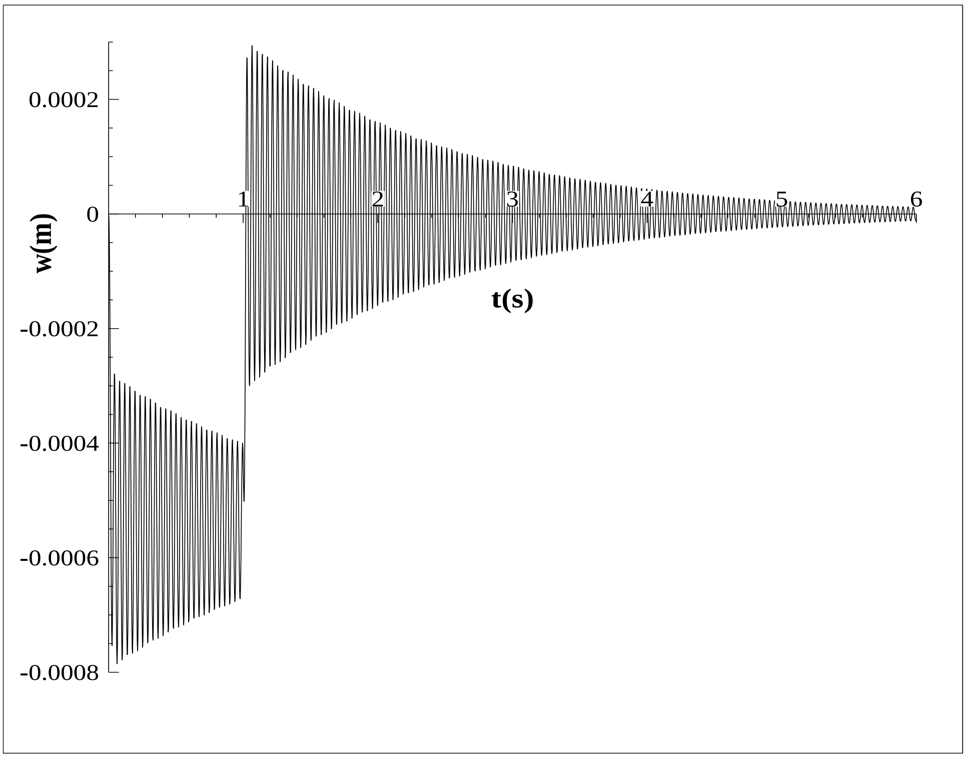


شکل ۵-۱۵ پاسخ گذرای عرضی ورق ویسکوالاستیک در $r=(r_i+r_{out})/2$ به‌ازای بارگذاری نامتقارن (n=۲)، تئوری برشی مرتبه اول

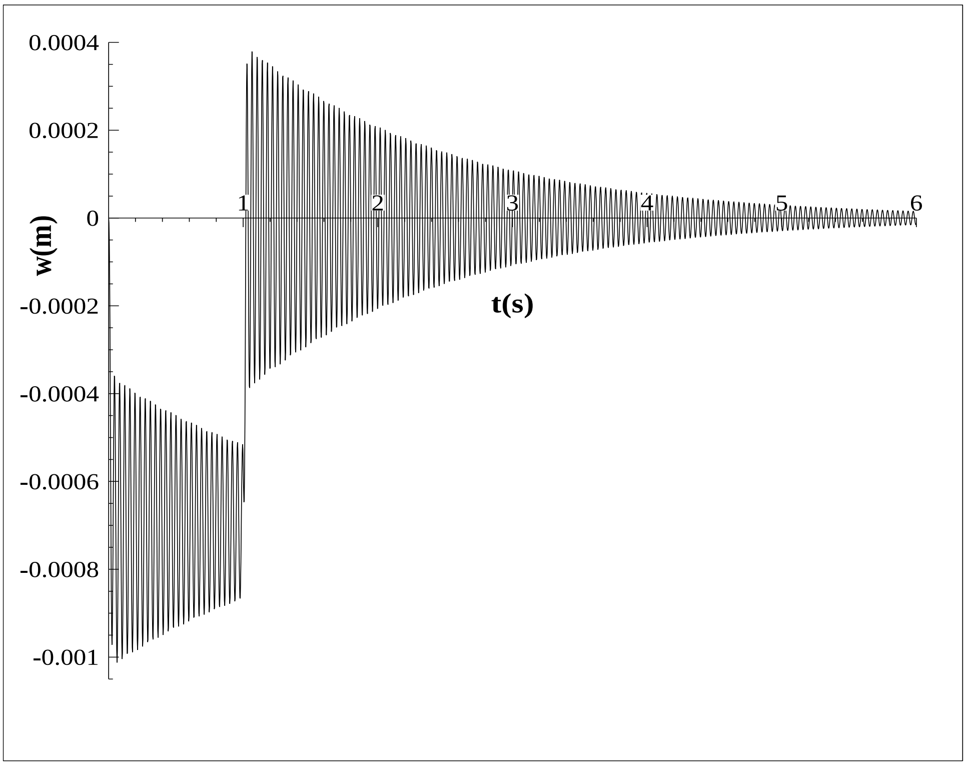
در تمامی موارد بالا، پروفیل بارگذاری ثابت فرض شده اکنون به ارائه نتایج برای پروفیل‌های مختلف بارگذاری پرداخته می‌شود. شکل (۵-۱۶) پروفیل بارگذاری خطی، شکل (۵-۱۷) بارگذاری سهموی و شکل (۵-۱۸) بارگذاری سینوسی را در شعاع میانی ورق نشان می‌دهد. این نتایج برای بارگذاری متقارن ارائه شده اند. همانطور که قابل مشاهده است، با توجه به معادلات انتخاب شده برای بارگذاری، خیز ناشی از پروفیل های خطی و سهموی تقریبا با پروفیل ثابت بارگذاری برابر می‌باشند ولی پروفیل سینوسی، باعث افزایش خیز عرضی ورق نسبت به سه حالت قبلی می‌شود.



شکل ۵-۱۶ پاسخ گذرای عرضی ورق ویسکوالاستیک در $r = (r_i + r_{out})/2$ به‌ازای بارگذاری متقارن (n=۰) و پروفیل خطی، تئوری برشی مرتبه اول



شکل ۵-۱۷ پاسخ گذرای عرضی ورق ویسکوالاستیک در $r=(r_i+r_{out})/2$ به‌ازای بارگذاری متقارن (n=۰) و پروفیل سهموی، تئوری برشی مرتبه اول

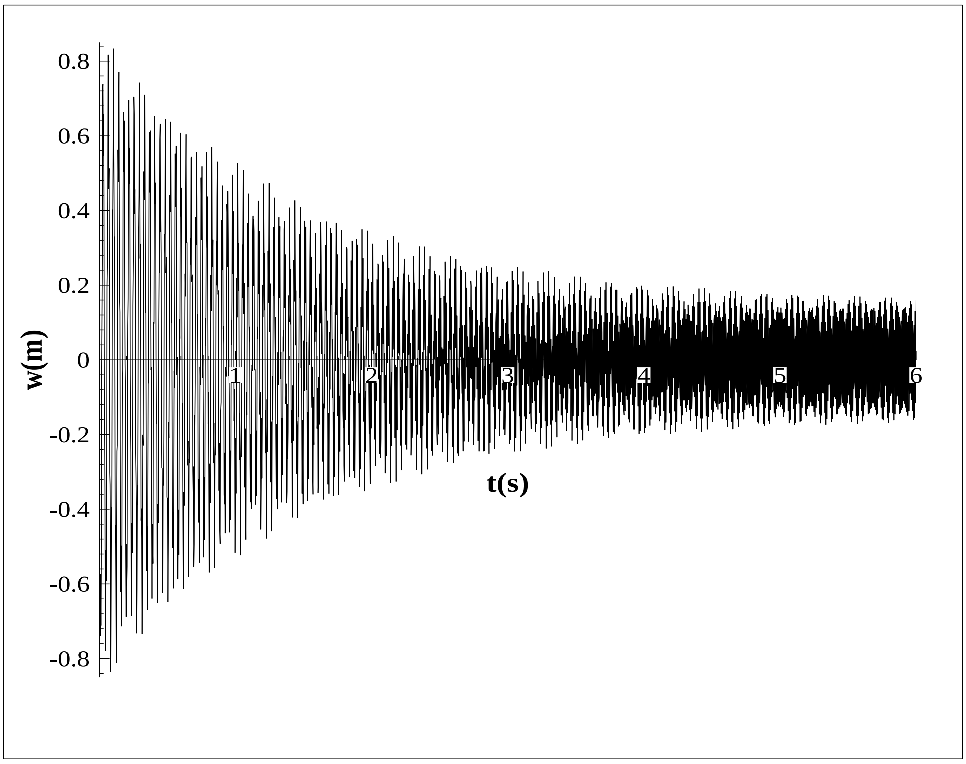


شکل ۵-۱۸ پاسخ گذرای عرضی ورق ویسکوالاستیک در $r=(r_i+r_{out})/2$ به‌ازای بارگذاری متقارن (n=۰) و پروفیل سینوسی، تئوری برشی مرتبه اول

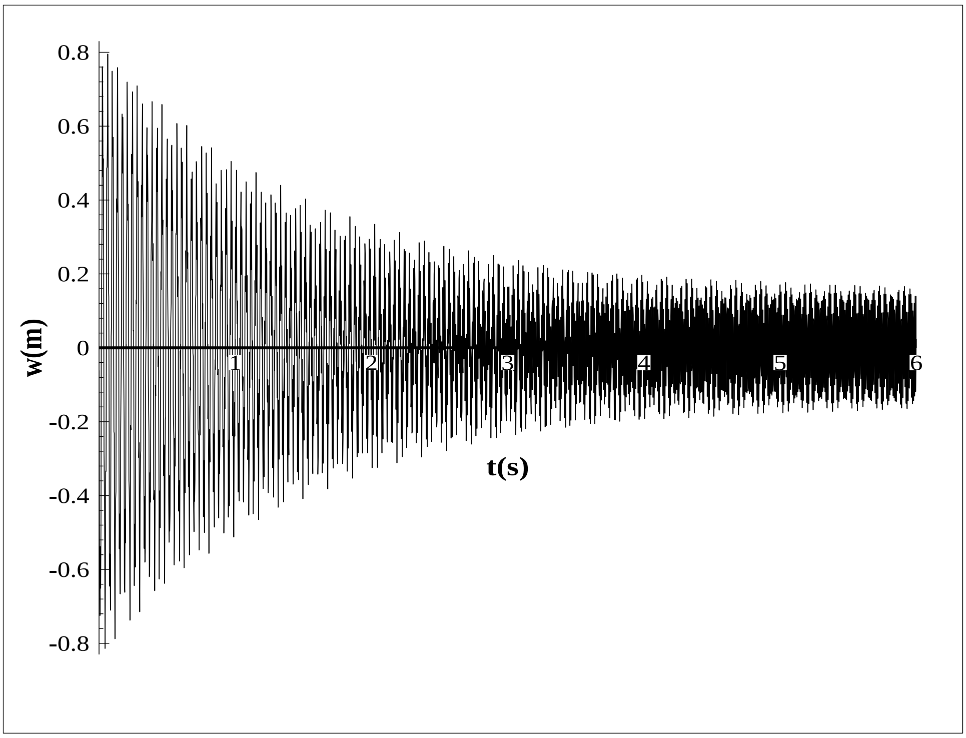
- **پاسخ هارمونیک**

در این قسمت، به پاسخ ورق تحت تحریک هارمونیک پرداخته می‌شود. دامنه پاسخ واحد فرض شده و نتایج به‌ازای چند فرکانس تحریک گزارش شده است. در شکل (۵-۱۹) پاسخ هارمونیک ورق تحت بارگذاری متقارن، شکل (۵-۲۰) پاسخ هارمونیک ورق تحت بارگذاری نامتقارن نوع اول و شکل (۵-۲۱) پاسخ هارمونیک ورق تحت بارگذاری نامتقارن نوع دوم را در شعاع میانی ورق و با تحریک ۳/۶ نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که با افزایش مقدار n (بارگذاری نامتقارن) دامنه بارگذاری کاهش می‌یابد. این تحریک به صورت بی‌بعد و معادله‌ی ریاضی بارگذاری مطابق رابطه (۵-۴) می‌باشد. در اینجا ω_{exc}، فرکانس تحریک است.

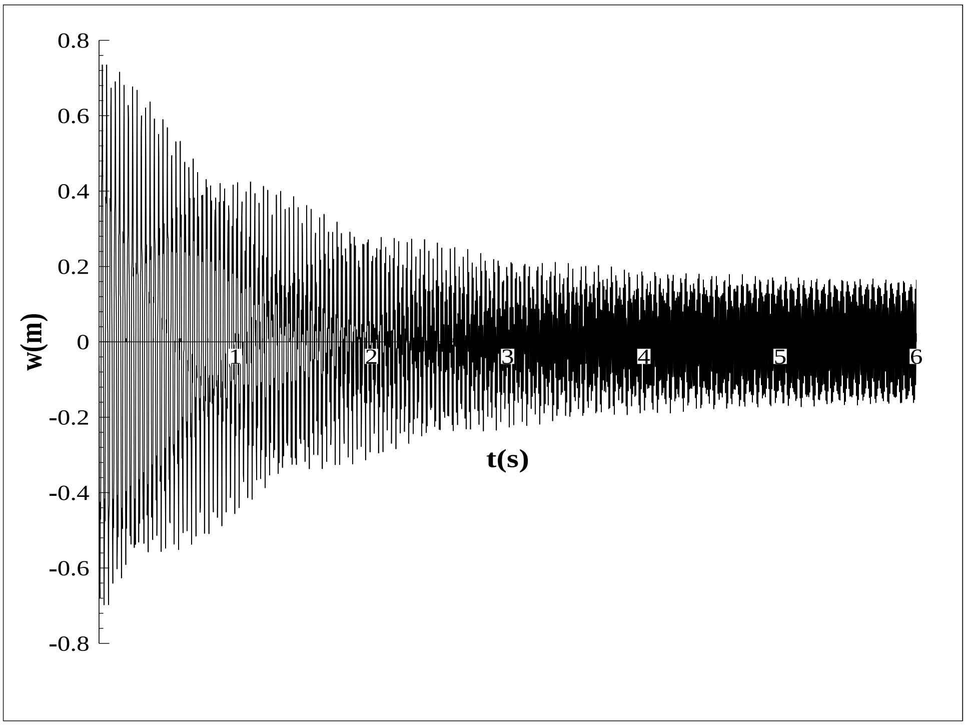
$$Q(X,\theta,t) = Q_0 \cos(n\theta)\sin(\omega_{exc} t) \qquad (۵-۴)$$



شکل ۵-۱۹ پاسخ هارمونیک عرضی ورق ویسکوالاستیک در $r = (r_i + r_{out})/2$ به‌ازای بارگذاری متقارن (n=۰) و فرکانس تحریک ۳/۶، تئوری برشی مرتبه اول

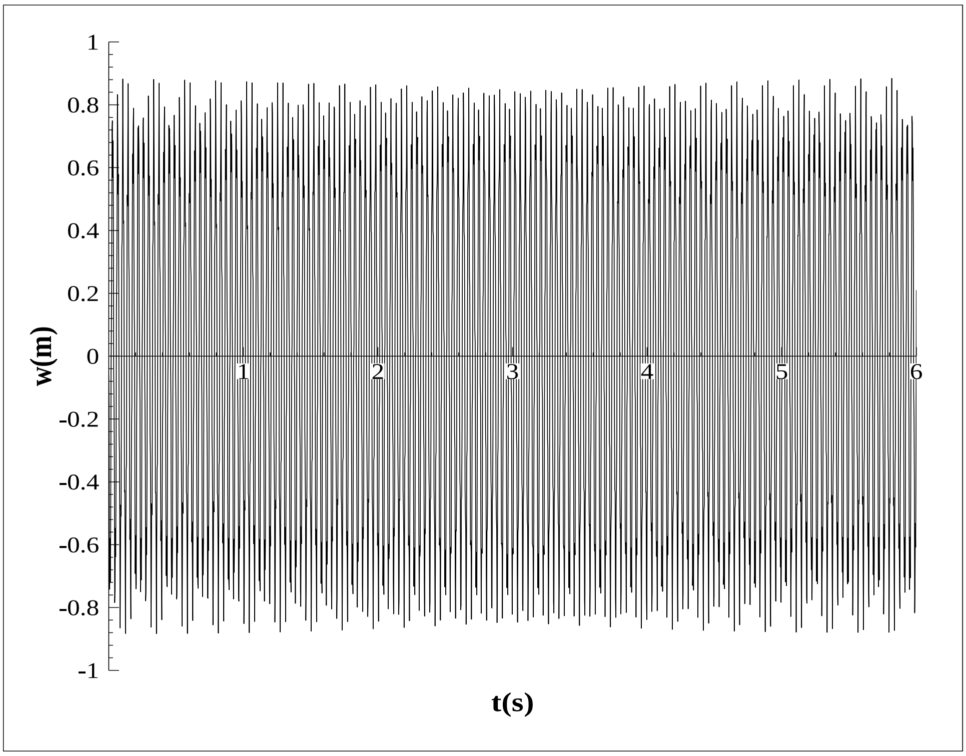


شکل ۵-۲۰ پاسخ هارمونیک عرضی ورق ویسکوالاستیک در $r=(r_i+r_{out})/2$ به‌ازای بارگذاری نامتقارن (n=۱) و فرکانس تحریک ۳/۶، تئوری برشی مرتبه اول



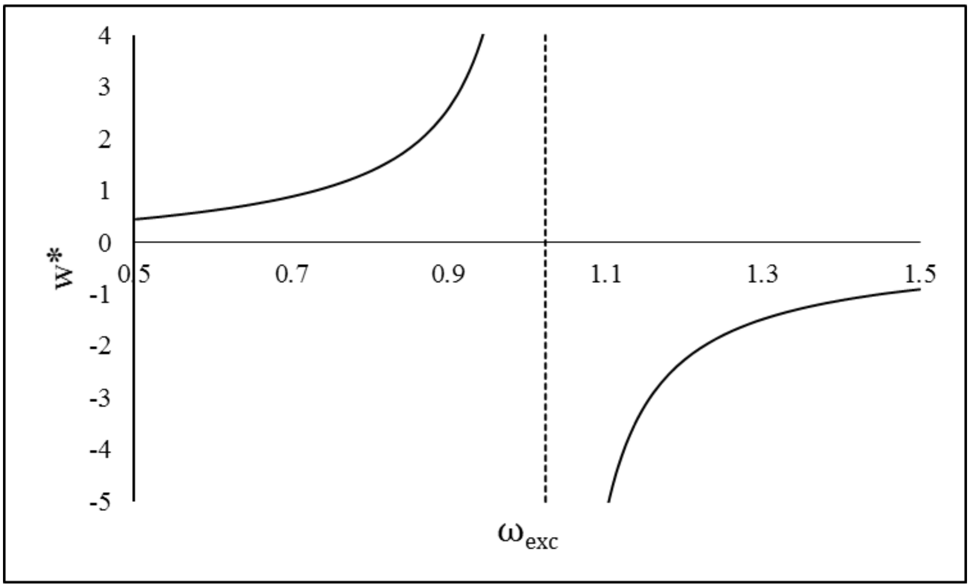
شکل ۵-۲۱ پاسخ هارمونیک عرضی ورق ویسکوالاستیک در $r=(r_i+r_{out})/2$ به‌ازای بارگذاری نامتقارن (n=۲) و فرکانس تحریک ۳/۶، تئوری برشی مرتبه اول

شکل (۵-۲۲) پاسخ هارمونیک ورق الاستیک برای بارگذاری متقارن و فرکانس تحریک ۳/۶ را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که پارامتر ویسکوالاستیک برای این نوع از پاسخ نیز دامنه ارتعاشات را کاهش داده است.

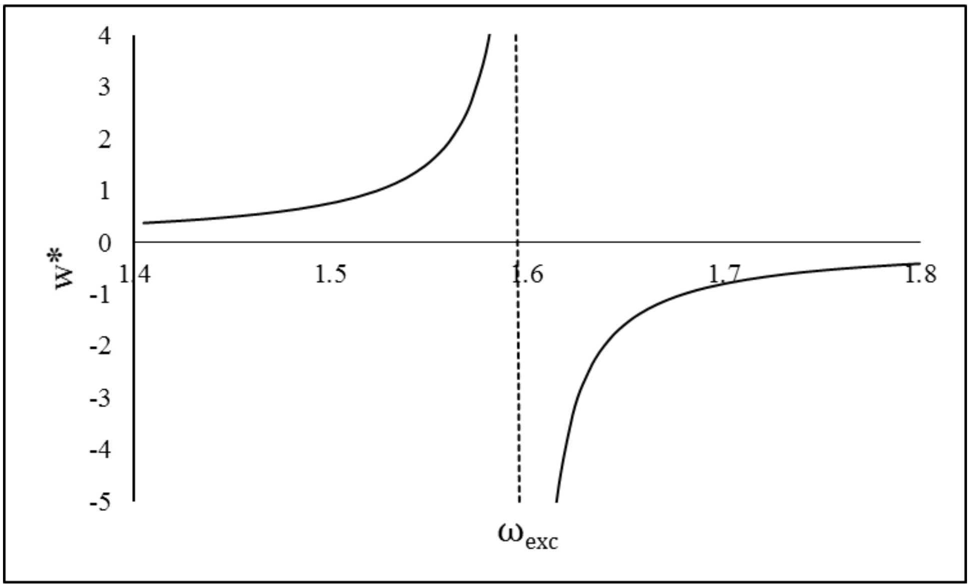


شکل ۵-۲۲ پاسخ هارمونیک عرضی ورق الاستیک در $r=(r_i+r_{out})/2$ به‌ازای بارگذاری متقارن (n=۰) و فرکانس تحریک ۳/۶، تئوری برشی مرتبه اول

با توجه به نتایج ارائه شده برای پاسخ هارمونیک به‌ازای مقادیر مختلف n، مشاهده می‌شود که با افزایش این پارامتر، دامنه پاسخ کاهش می‌یابد. در شکل‌های (۵-۲۳) و (۵-۲۴)، شکل کلی منحنی مشخصه پاسخ فرکانسی، برای تشدید به ازای مقادیر مختلف پارامتر n مشاهده می‌شود. محور افقی بیانگر فرکانس تحریک سیستم بوده و محور عمودی نیز بیشینه دامنه نوسانات در حالت تشدید است که مربوط به نقطه میانی ورق می‌باشد. پاسخ برای فرکانس دوم ورق به ازای n=۰،۱ گزارش شده است. مشاهده شده است که با افزایش فرکانس تحریک، دامنه نوسانات کاهش می‌یابد. لازم به ذکر است که این نتایج در حوالی فرکانس تشدید رسم شده‌اند.

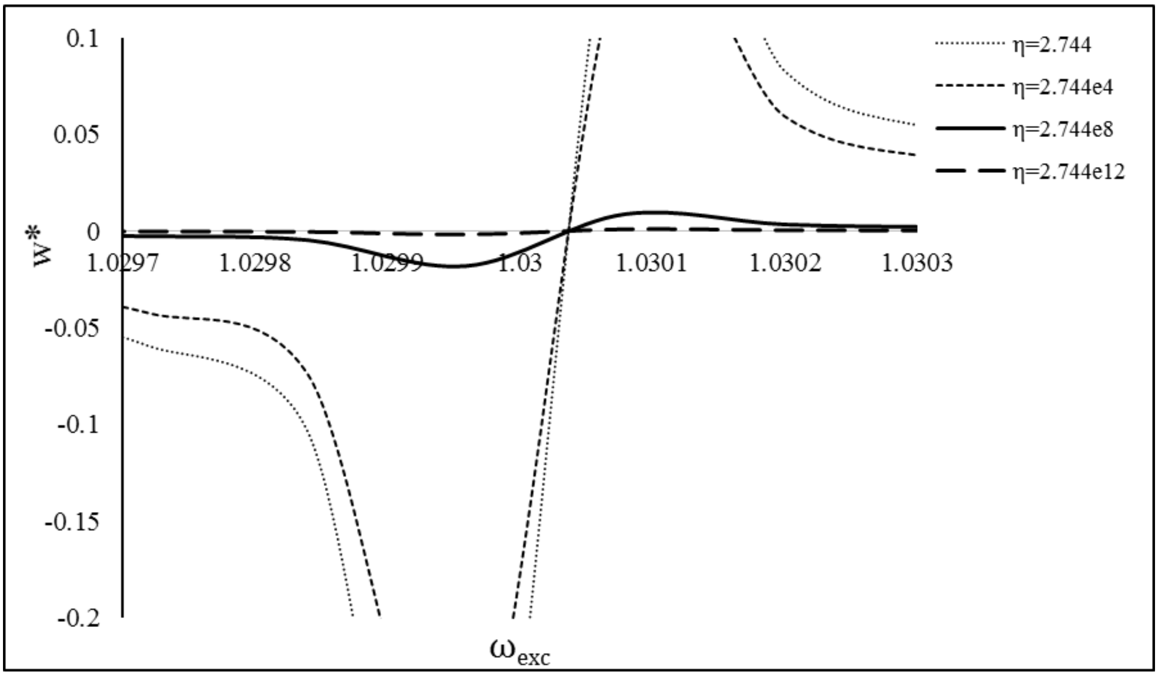


شکل ۵-۲۳ منحنی رابطه دامنه-فرکانس نیروی تحریک در $r=(r_i+r_{out})/2$ به‌ازای (n=۱)، تئوری برشی مرتبه اول



شکل ۵-۲۴ منحنی رابطه دامنه-فرکانس نیروی تحریک در $r=(r_i+r_{out})/2$ به‌ازای (n=۲)، تئوری برشی مرتبه اول

در شکل (۵-۲۵) اثر ضریب ویسکوزیته بر پاسخ فرکانسی مطالعه شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، با افزایش مقدار ضریب ویسکوزیته، دامنه تشدید کاهش می‌یابد.

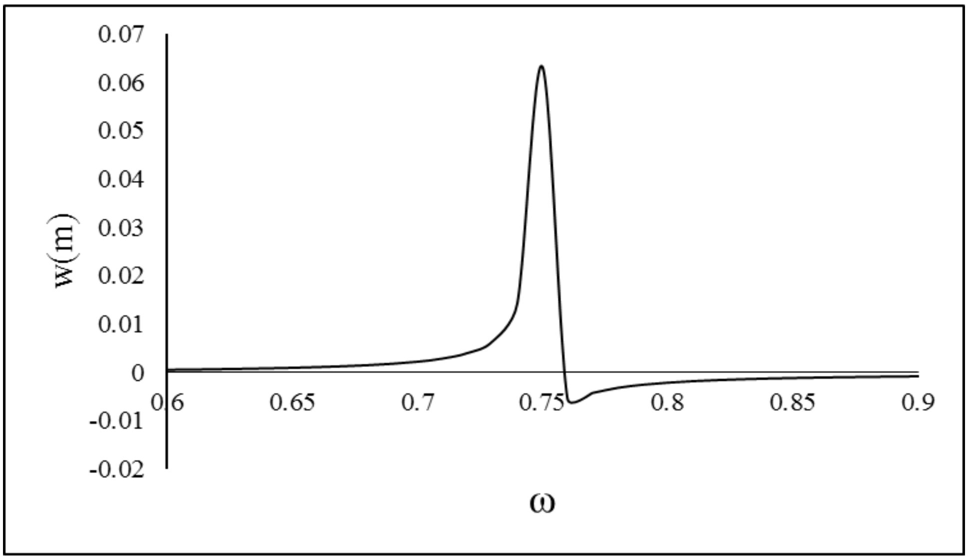


شکل ۵-۲۵ منحنی‌های دامنه-فرکانس نیروی تحریک در ($r=(r_i+r_{out})/2$) به‌ازای مقادیر مختلف ضرایب میرایی

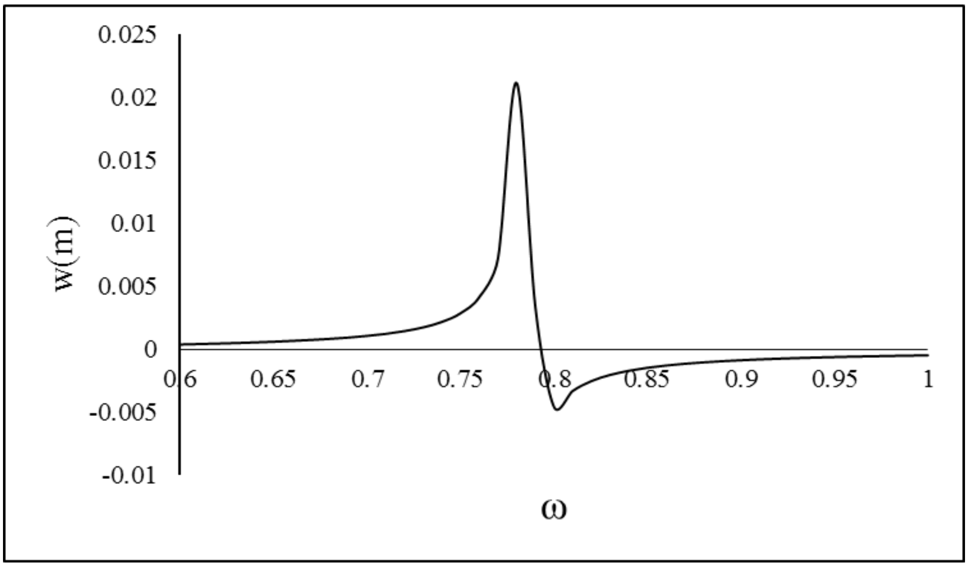
- **پاسخ گذرا: تابع ضربه**

سکوی پرواز بالگرد یکی از نیازمندی‌های شناورها و سکوهای دریایی هستند. سطح و نوع سازه بر اساس نوع بالگرد که از آنها استفاده می‌کند و همچنین محیطی که در آن قرار دارند طراحی می‌شوند. این سکوها علاوه بر بارهای مختلف گاهی در معرض بار ضربه‌ای ناشی از فرود بالگرد قرار می‌گیرند. این دسته از بارها می‌تواند به‌صورت موضعی اثر کنند. در این بخش، پاسخ ورق به ورودی ضربه بررسی شده است. نیروی ضربه با اندازه ۲۷۰ پاسکال با پروفیل ثابت بر سطح ورق وارد می‌شود. معادله‌ی ریاضی بارگذاری مطابق رابطه (۵-۵) می‌باشد. در شکل‌های (۵-۲۶) و (۵-۲۷) نمودار دامنه برحسب فرکانس نیروی ضربه به ازای n=۰،۱ آورده شده است. مشاهده می‌شود با افزایش پارامتر n، دامنه نوسانات کاهش یافته ولی فرکانس سازه افزایش می‌یابد.

$$Q(X,\theta,t)=Q_0\delta(t) \qquad (۵-۵)$$

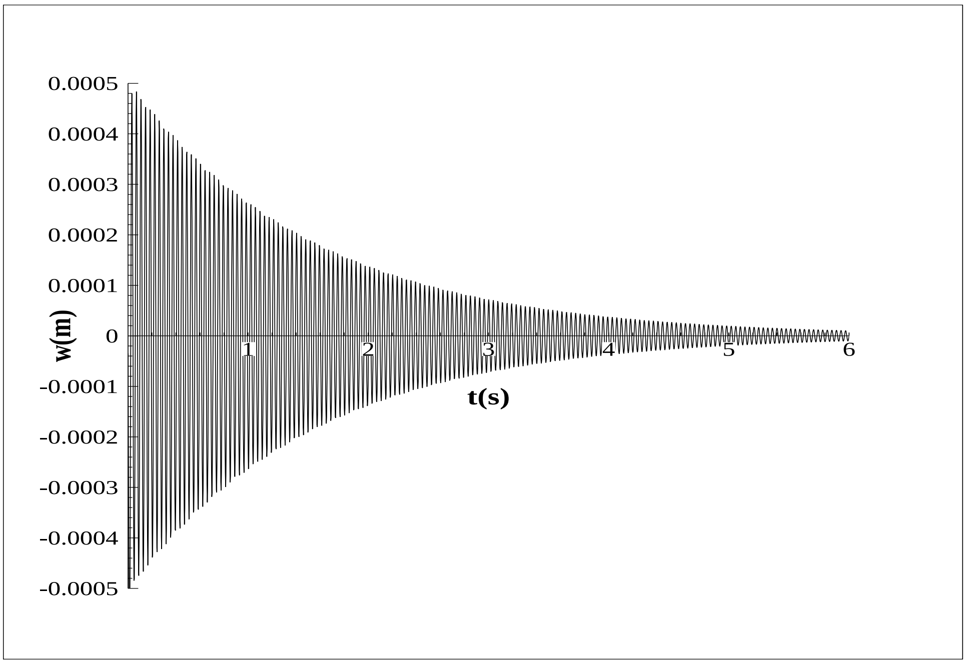


شکل ۵-۲۶ منحنی رابطه دامنه-فرکانس نیروی ضربه در $r = (r_i + r_{out})/2$ به‌ازای (n=۰)، تئوری برشی مرتبه اول

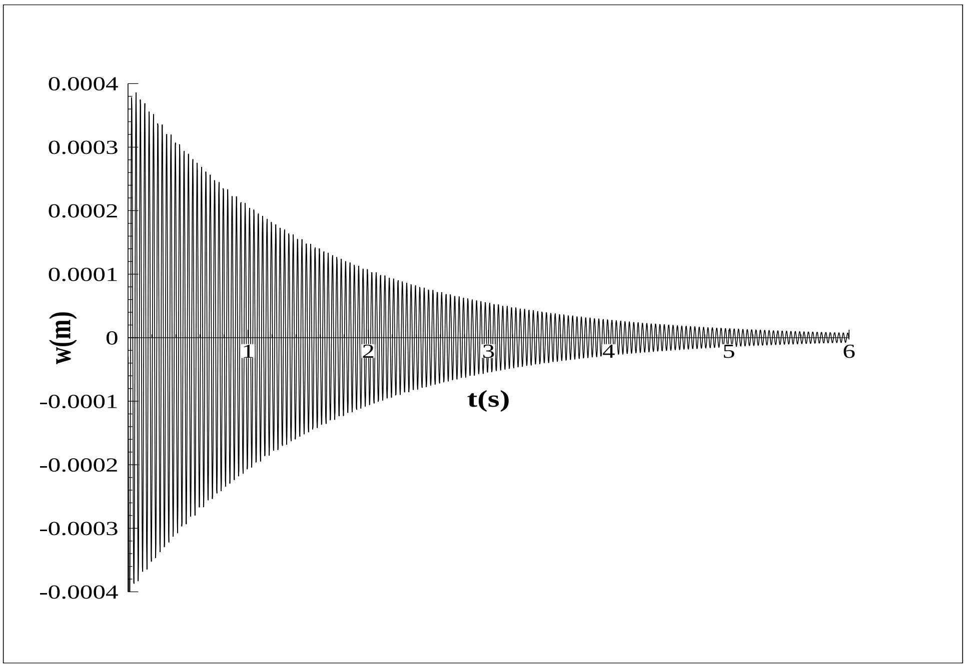


شکل ۵-۲۷ منحنی رابطه دامنه-فرکانس نیروی ضربه در $r = (r_i + r_{out})/2$ به‌ازای (n=۱)، تئوری برشی مرتبه اول

شکل‌های (۵-۲۸) و (۵-۲۹)، پاسخ دامنه برحسب زمان نیروی ضربه به ازای n=۰،۱ را نشان می‌دهند. مشاهده می‌شود که با افزایش پارامتر n خیز عرضی ورق کاهش می یابد.



شکل ۵-۲۸ پاسخ دامنه-زمان نیروی ضربه در $r=(r_i+r_{out})/2$ به‌ازای (n=۰)، تئوری برشی مرتبه اول



شکل ۵-۲۹ پاسخ دامنه-زمان نیروی ضربه در $r=(r_i+r_{out})/2$ به‌ازای (n=۱)، تئوری برشی مرتبه اول

۵-۴- جمع‌بندی

در این فصل، به بررسی نتایج حاصل از روش‌های ارائه شده در فصل‌های سوم و چهارم پرداخته شد. ابتدا نتایج فرکانس بی‌بعد الاستیک و ویسکوالاستیک برای ورق‌های مدور ارائه شد و سپس به ارائه نتایج برای قطاع‌های حلقوی و توپر با در نظر گرفتن ماده به‌صورت الاستیک و ویسکوالاستیک پرداخته شد. در این بخش، تاثیر پارامترهای مختلف از جمله: نسبت شعاع داخلی به خارجی، نسبت ضخامت به شعاع خارجی و تغییر زاویه قطاع بررسی شد. علاوه بر آن، پاسخ دینامیکی سازه تحت بارهای نامتقارن و پروفیل مکانی مختلف تحت تحریک‌های پله، هارمونیک و ضربه تعیین شد. در نتایج مربوط به تحلیل فرکانسی و پاسخ، حل تحلیلی تئوری برشی مرتبه اول با حل تحلیلی تئوری کلاسیک و حل عددی مقایسه شد.

فصل ششم

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

۶-۱- مقدمه

در این پایان‌نامه، ارتعاشات آزاد ورق مدور ویسکوالاستیک، حلقوی و قطاع در حالت نامتقارن با شرایط مرزی مختلف و با درنظر گرفتن مدل جامد استاندارد خطی نوع اول و براساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول و کلاسیک ارائه شد. در ابتدا، معادلات حاکم بر ارتعاشات ورق استخراج شد. معادلات حاکم، معادلاتی با مشتقات جزئی نسبت به متغیرهای زمان و مکان با ضرایب متغیر است که به‌کمک اصل همیلتون تعیین شده اند. برای حل این معادلات از تئوری اغتشاشات استفاده شد. در نهایت میرایی و فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد ورق با شرایط مرزی مختلف تعیین شد. در بخش بعدی، به حل ریاضی ورق حلقوی تحت بارهای دینامیکی عرضی پرداخته شد. پاسخ سیستم از روش مدهای نرمال محاسبه شد. نتایج برای ورق‌های الاستیک نیز ارائه شد و حل عددی مسأله با استفاده از نرم‌افزار آباکوس به‌دست آمد.

۶-۲- نتیجه‌گیری

- با استفاده از تغییر متغیر مناسب، معادلات حرکت که دارای ضرایب متغیر بودند، به معادلاتی با ضرایب ثابت تبدیل شدند.
- با استفاده از معادلات استخراج شده بر اساس تئوری برشی مرتبه اول، امکان به‌دست آوردن فرکانس‌های درون صفحه‌ای علاوه بر فرکانس‌های عرضی وجود دارد.
- فرکانس بی‌بعد الاستیک و ویسکوالاستیک در تئوری برشی مرتبه اول یکسان می‌باشد. ولی در تئوری کلاسیک اندکی اختلاف دارد.
- با افزایش نسبت ضخامت به شعاع خارجی، فرکانس بی‌بعد ورق کاهش می‌یابد.
- با افزایش شعاع داخلی به خارجی، فرکانس طبیعی بی‌بعد ورق افزایش می‌یابد.
- با افزایش زاویه قطاع، فرکانس طبیعی بی‌بعد کاهش می‌یابد.

- با افزایش نسبت ضخامت نسبت به شعاع خارجی، اختلاف فرکانس طبیعی محاسبه شده، با مراجع کاهش می‌یابد.
- با توجه به مدول‌های انتخابی، فرکانس طبیعی ورق ویسکوالاستیک بیشتر از ورق الاستیک می‌باشد.
- در مقادیر بزرگ نسبت ضخامت به شعاع خارجی، با افزایش نسبت شعاع داخلی به خارجی، در مقایسه با حل عددی، دقت تئوری برشی افزایش و دقت تئوری کلاسیک کاهش می‌یابد.
- با افزایش نسبت ضخامت به شعاع خارجی، قدرمطلق میرایی کاهش می‌یابد.
- با افزایش نسبت شعاع داخلی به خارجی، قدرمطلق میرایی کاهش می‌یابد.
- برای قطاع‌های با زاویه کوچک، تئوری برشی فرکانس‌های طبیعی را کمتر گزارش کرده و سایر مراجع بیشتر که این نتیجه برای قطاع‌های با زاویه بیشتر، عکس می‌شود.
- با افزایش پارامتر n در پاسخ، خیز عرضی ورق کاهش می‌یابد.
- در پروفیل‌های مختلف بارگذاری، مدل سینوسی باعث بیشترین افزایش خیز می‌شود.
- خیز الاستیک ورق در تمامی بارگذاری‌ها بیشتر از خیز ورق ویسکوالاستیک است.
- افزایش ضریب ویسکوزیته، مقدار دامنه نوسانات را کاهش، اما مقدار متوسط را تغییر نمی‌دهد.
- با افزایش مقدار n در پاسخ ضربه، فرکانس سازه افزایش ولی دامنه نوسانات کاهش می‌یابد.
- با افزایش فرکانس تحریک، دامنه نوسان کم می‌شود.

۶-۳- پیشنهادها

جهت انجام مطالعه‌ی جامع‌تر در موضوع، موارد زیر قابل بررسی هستند.

- استفاده از تئوری‌های برشی مرتبه بالاتر؛
- در نظر گرفتن ماده بصورت FG؛

- بررسی رفتار ارتعاشی ورق مدور ویسکوالاستیک با بستر؛
- بررسی پاسخ ورق تحت تحریک‌های گذرا و هارمونیک با سایر شرایط مرزی؛
- تحلیل ورق ضخامت متغیر؛
- بررسی کمانش ورق‌های نامتقارن:
- بررسی ارتعاشات غیرخطی ورق نامتقارن؛
- بررسی ارتعاشات ورق مدور ویسکوالاستیک تقویت شده با نانو لوله‌ها.

پیوست

معادلات مرتبه صفر و اول در تئوری کلاسیک به‌صورت زیر می‌باشد.

$$O(\varepsilon^{0}):$$

$$\beta(18\mathrm{G}_0^*\mathrm{G}_1^*+12\mathrm{G}_0^*+12\mathrm{G}_1^*)\frac{\partial Q^*}{\partial T_0}+\beta^2\mathrm{G}_1^*(12+9\mathrm{G}_1^*)\frac{\partial^2 Q^*}{\partial T_0^{\,2}}+\mathrm{G}_0^*(9\mathrm{G}_0^* Q^*+12)Q^*$$

$$h^{*3}n^4(3\mathrm{G}_0^*+1)w_{00}+h^{*3}\beta n^4(3\mathrm{G}_1^*+3\mathrm{G}_0^*+2)\frac{\partial w_{00}}{\partial T_0}+h^*(\beta^2h^{*2}n^4+9e\mathrm{G}_0^*+12e\mathrm{G}_0^*+$$

$$3\beta^2h^{*2}n^4\mathrm{G}_1^*)\frac{\partial^2 w_{00}}{\partial T_0^{\,2}}-2h^{*3}n^2(3\mathrm{G}_0^*+1)\frac{\partial^2 w_{00}}{\partial X^{\,2}}+\beta e h^*(12\mathrm{G}_0^*+18\mathrm{G}_0^*\mathrm{G}_1^*+12\mathrm{G}_1^*)\frac{\partial^3 w_{00}}{\partial T_0^{3}}-$$

$$h^{*3}\beta n^2(4+6\mathrm{G}_0^*+6\mathrm{G}_1^*)\frac{\partial^3 w_{00}}{\partial X^{\,2}\partial T_0}+\beta^2\mathrm{G}_1^*h^*e(12+9\mathrm{G}_1^*)\frac{\partial^4 w_{00}}{\partial T_0^{\,4}}+h^{*3}(3\mathrm{G}_0^*+1)\frac{\partial w_{00}^{\;4}}{\partial X^{\,4}}+$$

$$h^{*3}\beta(3\mathrm{G}_1^*+3\mathrm{G}_0^*+2)\frac{\partial^5 w_{00}}{\partial X^{\,4}\partial T_0}+h^{*3}\beta^2(3\mathrm{G}_0^*+1)\frac{\partial^6 w_{00}}{\partial X^{\,4}\partial T_0^{\,2}}=0$$

$$O(\varepsilon^{1}):$$

$$\mathrm{G}_0^*X\,(48+36\mathrm{G}_0^*)Q^*+h^{*3}n^4(1+3\mathrm{G}_0^*)w_{01}-2h^{*3}n^2(\mathrm{G}_0^*+1)\frac{\partial^2 w_{01}}{\partial X^{\,2}}+h^*\beta eX\,(48\mathrm{G}_0^*+72\mathrm{G}_0^*\mathrm{G}_1^*+48\mathrm{G}_1^*)\frac{\partial^3 w_{00}}{\partial T_0^{3}}$$

$$+h^*\beta e(36\mathrm{G}_0^*+54\mathrm{G}_0^*\mathrm{G}_1^*+36\mathrm{G}_1^*)\frac{\partial^3 w_{00}}{\partial T_0^{\,2}\partial T_1}-h^{*3}\beta n^2X\,(8+12\mathrm{G}_0^*+12\mathrm{G}_1^*)\frac{\partial^3 w_{00}}{\partial X^{\,2}\partial T_0}+\beta^2\mathrm{G}_1^*X\,(48+36\mathrm{G}_1^*)\frac{\partial^2 Q^*}{\partial T_0^{\,2}}$$

$$+h^*\beta^2\mathrm{G}_1^*e(48+36\mathrm{G}_1^*)\frac{\partial^4 w_{00}}{\partial T_0^{\,3}\partial T_1}+2h^{*3}\beta(3\mathrm{G}_1^*+3\mathrm{G}_0^*+2)\frac{\partial^4 w_{00}}{\partial X^{\,3}\partial T_0}+4h^{*3}X\,(3\mathrm{G}_0^*+1)\frac{\partial^4 w_{00}}{\partial X^{\,4}}+$$

$$\beta^2\mathrm{G}_1^*h^*e(12+9\mathrm{G}_1^*)\frac{\partial^4 w_{01}}{\partial T_0^{4}}h^{*3}(3\mathrm{G}_0^*+1)\frac{\partial^4 w_{01}}{\partial X^{\,4}}+h^{*3}\beta X\,(12\mathrm{G}_1^*+12\mathrm{G}_0^*+8)\frac{\partial^5 w_{00}}{\partial X^{\,4}\partial T_0}+2h^{*3}n^2(3\mathrm{G}_0^*+1)\frac{\partial w_{00}}{\partial X}$$

$$+h^{*3}\beta(3\mathrm{G}_1^*+3\mathrm{G}_0^*+2)\frac{\partial^5 w_{00}}{\partial X^{\,4}\partial T_1}+h^{*3}\beta(3\mathrm{G}_1^*+3\mathrm{G}_0^*+2)\frac{\partial^5 w_{01}}{\partial X^{\,4}\partial T_0}+4h^{*3}\beta^2X\,(3\mathrm{G}_0^*+1)\frac{\partial^6 w_{00}}{\partial X^{\,4}\partial T_0^{\,2}}+$$

$$2h^{*3}\beta^2(3\mathrm{G}_1^*+1)\frac{\partial^6 w_{00}}{\partial X^{\,4}\partial T_0\partial T_1}+h^{*3}\beta^2(3\mathrm{G}_0^*+1)\frac{\partial^6 w_{01}}{\partial X^{\,4}\partial T_0^{\,2}}+\beta^2\mathrm{G}_1^*(24+18\mathrm{G}_1^*)\frac{\partial^2 Q^*}{\partial T_0\partial T_1}+$$

$$h^*eX\mathrm{G}_0^*(36\mathrm{G}_0^*+48)\frac{\partial^2 w_{00}}{\partial T_0^{\,2}}+(6\beta^2h^{*3}n^4\mathrm{G}_1^*+18eh^*\mathrm{G}_0^{*2}+2\beta^2h^{*3}n^4+12eh^*\mathrm{G}_0^*)\frac{\partial^2 w_{00}}{\partial T_0\partial T_1}+$$

$$h^{*3}\beta n^2(4+6\mathrm{G}_0^*+6\mathrm{G}_1^*)\frac{\partial^3 w_{00}}{\partial X_0^{\,2}\partial T_0}-4h^{*3}n^2X\,(3\mathrm{G}_0^*+1)\frac{\partial^2 w_{00}}{\partial X_0^{\,2}}+(3\beta^2h^{*3}n^4\mathrm{G}_1^*+9eh^*\mathrm{G}_0^{*2}+\beta^2h^{*3}n^4+$$

$$12eh^{*}G_0^{*})\frac{\partial^2 w_{01}}{\partial T_0^{2}} - h^{*3}\beta n^2(4+6G_0^{*}+6G_1^{*})\frac{\partial^3 w_{00}}{\partial X_0^{2}\partial T_1} + 2h^{*3}(3G_0^{*}+1)\frac{\partial^3 w_{00}}{\partial X^{3}} + h^{*3}\beta n^4(3G_1^{*}+3G_0^{*}+2)\frac{\partial w_{01}}{\partial T_0}$$

$$+h^{*}\beta e(12G_0^{*}+18G_0^{*}G_1^{*}+12G_1^{*})\frac{\partial^3 w_{01}}{\partial T_0^{3}} - h^{*3}\beta n^2(4+6G_0^{*}+6G_1^{*})\frac{\partial^3 w_{01}}{\partial X_0^{2}\partial T_0} + h^{*}eXG_1^{*}(36G_1^{*}+48)\frac{\partial^4 w_{00}}{\partial T_0^{4}}$$

$$\beta X\ (72G_0^{*}G_1^{*}+48G_0^{*}+48G_1^{*})\frac{\partial Q^{*}}{\partial T_0} + \beta(12G_0^{*}+18G_0^{*}G_1^{*}+12G_1^{*})\frac{\partial Q^{*}}{\partial T_1} + h^{*3}\beta n^4(3G_1^{*}+3G_0^{*}+2)\frac{\partial w_{00}}{\partial T_1} = 0$$

مراجع

[1] Brinson H. F. Brinson L. C. (2008) “**Polymer Engineering Science and Viscoelasticity; An Introduction**”, Springer Science Business Media, LLC.

[2] Roylance D. (2001) “**Engineering Viscoelasticity**”, Cambridge, MA 02139.

[3] Lakes R. (2009) “**Viscoelastic Materials**”, Cambridge University Press, New York.

[۴] خسروی ش. و حسینی هاشمی ش.، (۱۳۸۴)، پایان‌نامه ارشد: "ارتعاشات قطاع دایروی تشکیل شده از مواد با خصوصیات متغیر (FGM)"، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت.

[5] Kang J. H. (2003) “Three-dimensional vibration analysis of thick, circular and annular plates with nonlinear thickness variation” **Computers & Structures**, 81, 16, pp. 1663–1675.

[6] Leissa A. W. (1969) “**Vibration of Plates**”, NASA SP-160, Office of Technology Utilization, Washington, DC.

[7] Robertson S. R. (1971) “Forced axisymmetric motion of circular viscoelastic plate” **Journal of Sound and Vibration**, 17, 3, pp. 363-381.

[8] Kung G. and Pao Y.-H (1972) “Nonlinear flexural vibrations of a clamped circular plate” **Journal of Applied Mechanics**, 39, 4, pp. 1050-1054.

[9] Hirano Y. and Okazaki K. (1976) “Vibration of a circular plate having partly clamped or partly simply supported boundary**” Bulletin of the JSME**, 19, 132, pp. 1-9.

[10] Alwar R. S. and Nath Y. (1977) “Non-linear dynamic response of circular plates subjected to transient loads” **Journal of the Franklin Institute**, 303, 6, pp. 527-542.

[11] Nagaya K. (1979) “Vibration of a viscoelastic plate having a circular outer boundary and an eccentric circular inner boundary for various edges conditions” **Journal of Sound and Vibration**, 63, 1, pp. 73-85.

[12] Yamada G. and Tanaka K. (1983) “Free vibration of a circular plate elastically restrained along some radial segments” **Journal of Sound and Vibration**, 89, 3, pp. 295-308.

[13] Bailey P. and Chen P.J. (1987) “Natural mode of vibration of linear viscoelastic circular plate with free edges” **International Journal of Solids and Structures**, 23, 6, pp. 785-795.

[14] Huang C. L. D. and Walker H. S. (1988) “Non-linear vibration of a hinged circular plate with a concentric rigid mass” **Journal of Sound and Vibration**, 126, l, pp. 9-17.

[15] Cederbaum G. and Aboudi J. (1989) “Dynamic response of viscoelastic laminated plate” **Journal of Sound and Vibration**, 133, 2, pp. 55-64.

[16] Sivakumaran K. S. (1989) “Free vibration of annular and circular asymmetric composite laminates” **Composite Structures**, 11, pp. 205-226.

[17] Khdeir A. A. and Reddy J. N. (1989) “Exact solutions for the transients response of symmetric cross-ply laminates using a higher-order plate theory” **Composite Science and Technology**, 34, 3, pp. 205-224.

[18] Weintsel G. N. (1989) “Natural frequency information for circular and annular plates” **Journal of Sound and Vibration**, 133, 1, pp. 205-224.

[19] Hadian J. and Nayfeh A. H. (1990) “Modal interaction in circular plate” **Journal of Sound and Vibration**, 142, 2, pp. 279-292.

[20] Cederbaum G. and Drawshi M. (1994) “Multiple equilibrium states in the analysis of viscoelastic nonlinear circular plates” **Int. J. Mech. Sci.**, 36, 2, pp. 149-155.

[۲۱] ابراهیمی ع. و نائی م. ح.، (۱۳۷۴) "ارتعاشات غیرخطی صفحات مدور به روش اجزاء محدود" **سومین کنفرانس سالانه مهندسی مکانیک**.

[22] Gupta S. U. and Ansari A. H. (1998) “Asymmetric vibrations and elastic stability of polar orthotropic circular plates of linearly varying profile” **Journal of Sound and Vibration**, 215, 2, pp. 231–250.

[23] Romanelli E., Rossi R. E., Laura P. A. A. and Gutierrez R. H. (1998) “Transverse vibrations of a circular annular plate with an intermediate circular support and a free inner edge” **Journal of Sound and Vibration**, 212, 3, pp. 564-571.

[24] Amabili M. and Kwak M. K. (1999) “Vibration of circular plates on a free fluid surface: effect of surface waves” **Journal of Sound and Vibration**, 226, 3, pp. 407-424.

[25] Gupta S. U. and Ansari A. H. (2002) “Effect of elastic foundation on asymmetric vibration of polar orthotropic linearly tapered circular plates” **Journal of Sound and Vibration**, 254, 3, pp. 411-426.

[26] Yeo M. H. and Lee W. K. (2002) “Corrected solvability conditions for non-linear asymmetric vibrations of a circular plate” **Journal of Sound and Vibration**, 257(4), pp. 653–665.

[27] Wang H.-J. and Chen L.-W. (2002) “Vibration and damping analysis of a three-layered composite annular plate with a viscoelastic mid-layer” **Composite Structures**, 58, 563–570.

[28] Salehi M. and Aghaei H. (2005) “Dynamic relaxation large deflection analysis of non-axisymmetric circular viscoelastic plates” **Computer and Structures**, 83, 23-24, pp. 1878-1890.

[29] Prakash T. and Ganapathi M. (2006) “Asymmetric flexural vibration and thermo elastic stability of FGM circular plates using finite element method” **Composites: Part B**, 37, pp. 642–649.

[30] Allahverdizadeh A., Naei M. H., Rastgo A. (2006) “The effect of large vibration amplitude on the stresses of thin circular functionally graded plate” **International Journal of Mechanics and Materials in Design**, 3, 2, pp. 161-174.

[31] Éshmatov Kh. B. (2006) “Nonlinear vibration analysis of viscoelastic plates based on a refined Timoshenko theory” **International Applied Mechanics**, 42, 5, pp. 120-131.

[32] Dong C.Y. (2008) “Three-dimensional free vibration analysis of functionally graded annular plates using the Chebyshev–Ritz method” **Materials and Design**, 29. Pp. 1518–1525.

[33] Gunes R. and Reddy J. N. (2008) “Nonlinear analysis of functionally graded circular plates under different loads and boundary conditions” **International Journal of Structural Stability and Dynamics**, 8, 1, pp. 131–159.

[۳۴] سعیدی ع. و آتشی‌پور س. ر.، (۱۳۸۷) "حل تحلیلی ارتعاشات آزاد ورق‌های ضخیم مستطیلی همسانگرد عرضی بر اساس تئوری برشی مرتبه اول" **نشریه مکانیک و هوافضا**، شماره ۳، ص.ص. ۵۹-۶۹.

[35] Viswanathan K. K., Kim K. S. and Lee J. H. (2009) “Asymmetric free vibrations of laminated annular cross-ply circular plates including the effects of shear deformation and rotary inertia: spline method” **Forsch Ingenieurwes**, 73, pp. 205–217.

[36] Assie A. E., Eltaher M. A. and Mahmoud F. F. (2009) “The response of viscoelastic-frictionless bodies under normal impact” **International Journal of Mechanical Sciences**, 52, pp. 446–454.

[37] Assie A. E., Eltaher M. A. and Mahmoud F. F. (2009) “Modeling of viscoelastic contact-impact problems**” Applied Mathematical Modelling**, 34, pp. 2336–2352.

[38] Bakhtiari-Nejad F. and Nazari M. (2009) “Nonlinear vibration analysis of isotropic cantilever plate with viscoelastic laminate” **Nonlinear Dynamics**, 56, pp. 325–356.

[39] Gupta A. K. and L. Kumar (2010) “Vibration analysis of visco-elastic rectangular plate of linearly varying thickness in steady state temperature field” **Journal of Theoretical and Applied Mechanics**, 48, 1, pp. 255-266.

[40] Falahatgar S. R. and Salehi M. (2011) “Nonlinear viscoelastic response of unidirectional polymeric laminated composite plates under bending loads” **Applied Composite Materials**, pp. 471–483.

[41] Masoumi S., Akhlaghi M. and M Salehi (2012) “Multi-scale analysis of viscoelastic–viscoplastic laminated composite plates using generalized differential quadrature method” **Proc IMechE Part C: J Mechanical Engineering Science**, 227, 7, pp. 1406–1416.
[42] Tariverdilo S., Shahmardani M., Mirzapour J. and Shabani R. (2012) “Asymmetric free vibration of circular plate in contact with incompressible fluid” **Applied Mathematical Modelling**, 37, pp. 228–239.
[۴۳] جلالی ا. و اسماعیل زاده خادم س.، (۱۳۹۱) "تحلیل ارتعاشات غیرخطی و پایداری دینامیکی میکرو ورق ویسکوالاستیک نانو کامپوزیتی تحت میدان الکترواستاتیک" **مجله مکانیک هوافضا**، شماره ۸، دوره ۳، ص.ص. ۵۱–۶۸.
[44] Amini M. H., Soleimani M., Altafi A. and Rastgoo A. (2013) “Effects of geometric nonlinearity on free and forced vibration analysis of moderately thick annular functionally graded plate” **Mechanics of Advanced Materials and Structures**, 20, pp. 709–720.
[45] Khalfi B. and Ross A. (2013) “Transient response of a plate with partial constrained viscoelastic layer damping” **International Journal of Mechanical Sciences**, 68, pp. 304–312.
[46] Shariyat M., Jafari A. A. and Alipour M.M. (2013) “Investigation of the thickness variability and material heterogeneity effects on free vibration of the viscoelastic circular plates” **Journal of Acta Mechanica Solida Sinica**, 26, 1, pp. 83-98.
[47] Lal R. and Ahlawat N. (2014) “Axisymmetric vibrations and buckling analysis of functionally graded circular plates via differential transform method” **European Journal of Mechanics / A Solids**, pp. 1-27.
[48] Rezaee M. and Jahangiri R. (2015) “Nonlinear vibrations of sandwich FG plates resting on nonlinear pasternak foundation under primary resonance excitation using modified FSDT” **Modares Mechanical Engineering**, 14, 15, pp. 186-198.
[49] Ghaheri A. and Nosier A. (2015) “Nonlinear forced vibrations of thin circular functionally graded plates” **Journal of Science and Technology of Composite**, 1, 2, pp. 1-10.
[50] Amabili M. (2015) “Nonlinear vibrations of viscoelastic rectangular plates” **Journal of Sound and Vibration**, 362, pp. 142-156.
[51] Amabili M. (2008) “**Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates**”, Cambridge University Press, New York.

[52] Boresi A. P., Chon K. P., (2000) “**Elasticity in Engineering Mechanics**”, Second Edition, John Willy & Sons, New York.

[53] Rao S. S., (2007) “**Vibration of Continuous Systems**”, John Willy & Sons, New Jersey.

[54] Nayfeh A. H. (1993), “**Introduction to Perturbation Techniques**”, John Wiley & Sons, New York.

[55] Abaqus documentation.

[56] Marynowski K. (2005) “**Dynamics of the Axially Moving Orthotropic Web**” first edition, Springer Inc., Germany.

[57] Irie T., Yamada G. and Takagi K. (1982), “Natural frequencies of thick annular plates” **Journal of Applied Mechanics,** 49, pp. 633-638.

[58] Zhou D., Lo S. H. and Cheung Y. K. (2009) ‘3-D vibration analysis of annular sector plates using the Chebyshev–Ritz method” **Journal of Sound and Vibration**, 320, pp. 421-437.

[59] Tahouneh V. and Yas M. H. (2012), “3-D free vibration analysis of thick functionally graded annular sector plates on Pasternak elastic foundation via 2-D differential quadrature method” **Acta Mech** , 223, pp.1879-1897.

[60] Sharma A. and Sharda H. B. (2005), “Stability and vibration of mindlin sector plates: an analytical approach” **Aiaa Journal**, 43, 5, pp. 1109-1116.

[61] Liew K. M. and Liu F.L. (2000), “Differential quadrature method for vibration analysis of shear deformable annular sector plates” **Journal of Sound and Vibration**, 230, 2, pp. 335-356.

[62] Mcgee O. G., Huang C. S. and Leissa A. W. (1995), “Comprehensive exact solutions for free vibrations of thick annular sectorial plates with simply supported radial edges” **International Journal of Mechanical Sciences**, 37, 5, pp. 537-566.

[63] Irie T., Yamada G. and Aomura S. (1979), “Natural frequencies of mindlin circular plates” **Journal of Applied Mechanics**, 42, pp. 652-655.

[64] Hosseini-Hashemi Sh., Es’haghi M., Rokni Damavandi Taher H. and Fadaie M. (2010), “Exact closed-form frequency equations for thick circular plates using a third-order shear deformation theory” **Journal of Sound and Vibration**, 329, pp. 3382–3396.

[65] Liu F. L. and Liew K. M. (1999), “Free vibration analysis of Mindlin sector plates: numerical solutions by differential quadrature method” **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 177, pp 77-92.

[66] Fadaee M. (2015), ” A novel approach for free vibration of circular/annular sector plates using Reddy’s third order shear deformation theory” **Meccanica**, pp. 1-27.

[67] Irie T., Yamada G. and Muramoto Y. (1984), “Natural frequencies of in-plane vibration of annular plates” **Journal of Sound and Vibration**, 97, 1, pp. 171-175.

[۶۸] خادم مشیر س.، ایپک‌چی ح. و سوهانی ف.، (۱۳۹۳)، پایان‌نامه ارشد: "تحلیل ارتعاشات ورق مدور متقارن محوری ویسکوالاستیک به‌کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول" دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود.

Abstract

In the present thesis, the free and forced vibrations analysis of asymmetric viscoelastic annular and sector plates with small deflection are studied using the first order shear deformation theory. The viscoelastic behavior is assumed to be the standard linear solid in shear and elastic in bulk. The boundary conditions are clamped, simple and free for free vibrations. The applied force is transverse and the boundary condition is simply supported for the forced vibration. The Hamilton's principle was employed to derive governing equations including five coupled partial differential equations with variable coefficients. An analytical method based on the perturbation technique and the Fourier series has been used to solve the governing equations. Determination of the natural frequencies, mode shapes and the response are considered. In addition, the sensitivity of the results to the geometrical and mechanical parameters is investigated. The results are compared with those obtained from the literatures and finite elements package.
Key words: Viscoelastic annular plate, Asymmetric vibrations, First order shear deformation theory, Perturbation technique.

Mechanical and Mechatronics Engineering
M.SC Thesis in Applied Mechanics Engineering

Vibrations analysis of an asymmetric circular viscoelastic plate using first order shear deformation theory

By: Seyed Hashem Alavi Sizkuhi

Supervisor:

Dr. Hamidreza Eipakchi

September 2017