

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک

پایان نامه کارشناسی ارشد مهندسی طراحی کاربردی

تحلیل رفتار ارتعاشی یک میکروتیر یک سر گیردار متصل شده به لایه الاستومر  
مگنتورئولوژیکال در انتهای آزاد آن تحت مود برشی و فشاری

نگارنده: امین شریفی اردغان

اساتید راهنما:

دکتر حبیب احمدی

دکتر امیر جلالی

شهریور ۱۳۹۶

تقدیم به:

پدر و مادر عزیز و خواهر و برادر مهربانم که در تمامی مراحل زندگی، پشتیبان

همیشگی ام هستند.

## تشکر و قدردانی

وظیفه خود می‌دانم سپاسگزار تمام آن‌هایی باشم که در این دوره ارزشمند، بودنشان و امیدشان راهگشای من بود؛ پدر و مادر عزیزم که همانند تمام روزهای گذشته با صبر و حوصله در کنارم بودند. همچنین از اساتید عزیز و گرانقدرم جناب آقای دکتر جلالی و دکتر احمدی که با تلاش‌های بی‌شائبه خود مرا در انجام این پایان‌نامه یاری نمودند و به هنگام نیاز برای حل مشکلات اینجانب از هیچ کمکی دریغ نوزیدند. برایشان آرزوی سلامتی، موفقیت و سربلندی را دارم.

همچنین تشکر و قدردانی می‌نمایم از جناب آقای دکتر حمید رضا ایپک‌چی و جناب آقای دکتر مهدی بامداد که برای داوری این پایان‌نامه قبول زحمت نمودند و وقت گرانبه‌ای خود را در اختیار اینجانب قرار دادند.

## تعهد نامه

اینجانب امین شریفی اردغان دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مکانیک / طراحی کاربردی دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه تحلیل رفتار ارتعاشی یک میکروتیر یک سر گیردار متصل شده به لایه الاستومر مگنتورئولوژیکال در انتهای آزاد آن تحت مود برشی و فشاری تحت راهنمایی دکتر حبیب احمدی و دکتر امیر جلالی متعهد می شوم .

- ♦ تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- ♦ در استفاده از نتایج پژوهش محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- ♦ مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- ♦ کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید .
- ♦ حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- ♦ در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده ( یا بافتهای آنها ) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- ♦ در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

### تاریخ

### امضای دانشجو

#### مالکیت نتایج و حق نشر

- ♦ کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده است ) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
- ♦ استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

## چکیده

این پژوهش به تحلیل استاتیکی و دینامیکی میکروتیر یک سر گیردار تحت تحریک الکترواستاتیک، پیزوالکتریک و میدان مغناطیسی می پردازد. میکروتیر به صورت یک تیر اویلر برنولی در نظر گرفته شده است و یک لایه پیزوالکتریک روی آن قرار گرفته است. همچنین، سر آزاد این میکروتیر به لایه‌ی الاستومر مگنتورئولوژیکال متصل شده است و میدان مغناطیسی ثابتی نیز به آن اعمال می شود. از طرف دیگر میکروتیر تحت میدان الکترواستاتیک نیز قرار دارد. معادلات حرکت و شرایط مرزی به وسیله اصل هامیلتون استخراج شده اند. اثر تحریک مغناطیسی لایه الاستومر به صورت تابع دیراگ وارد معادلات حرکت می شود. سپس معادلات حرکت با استفاده از ترکیبی از روش گالرکین و تئوری اغتشاشات حل شده است.

در این پایان نامه تغییر شکل استاتیکی، ولتاژ پولین، فرکانس طبیعی و پاسخ دینامیکی با دو روش مدل سازی مورد مطالعه قرار گرفته است. در مدل سازی اول، لایه الاستومر مگنتورئولوژیکال در سر آزاد در مود برشی و در مدل سازی دوم در مود فشاری به میکروتیر متصل شده است.

کلمات کلیدی:

MEMS، میکروتیر یک سر گیردار، تحریک پیزوالکتریک، تحریک الکترواستاتیک، لایه الاستومر مگنتورئولوژیکال، روش گالرکین، تئوری اغتشاشات.

## فهرست مطالب

فصل ۱: مقدمه و مروری بر کارهای انجام شده.....	۱
۱-۱- مقدمه.....	۲
۲-۱- میکرونیبر در سیستمهای MEMS.....	۵
۳-۱- تحریک در سیستمهای MEMS.....	۵
۱-۳-۱- تحریک الکترواستاتیک.....	۵
۲-۳-۱- تحریک پیزوالکتریک.....	۶
۳-۳-۱- تحریک مغناطیسی الاستومر مگنتورئولوژیکال.....	۸
۴- تئوری تنش-کوپل اصلاح شده.....	۱۱
۵-۱- مروری بر کارهای انجام شده.....	۱۳
۱-۵-۱- تحریک سیستمهای MEMS.....	۱۳
۱-۱-۵-۱- تحریک الکترواستاتیک.....	۱۳
۲-۱-۵-۱- تحریک با لایه پیزوالکتریک.....	۱۴
۳-۱-۵-۱- تحریک همزمان الکترواستاتیک با لایه پیزوالکتریک.....	۱۵
۲-۵-۱- تئوری تنش-کوپل اصلاح شده.....	۱۶
۳-۵-۱- کنترل ارتعاشات توسط لایه الاستومر مگنتورئولوژیکال.....	۱۷
۶- نوآوری.....	۱۷
۷-۱- تعریف مساله.....	۱۸
فصل ۲: مدلسازی و استخراج معادلات.....	۱۹
۱-۱- مقدمه.....	۲۰
۲-۲- مدلسازی اول و استخراج معادلات حاکم بر این مدلسازی.....	۲۲
۳-۲- مدلسازی دوم و استخراج معادلات حاکم در این مدلسازی.....	۲۳
فصل ۳: تغییر شکل استاتیکی و فرکانس طبیعی.....	۳۹
۱-۳- تغییر شکل استاتیکی.....	۴۰
۱-۱-۳- تغییر شکل استاتیکی مدل اول.....	۴۰
۲-۱-۳- تغییر شکل استاتیکی مدل دوم.....	۴۲
۲-۳- فرکانس طبیعی.....	۴۳
۱-۲-۳- فرکانس طبیعی و شکل مود خطی مدل اول.....	۴۳
۲-۲-۳- فرکانس طبیعی و شکل مود خطی مدل دوم.....	۴۴
فصل ۴: پاسخ دینامیکی سیستم تحت هارمونیک اولیه.....	۴۷
۱-۴- مقدمه.....	۴۸
۱-۱-۴- نگاهی بر تئوری اغتشاشات.....	۴۸
۲-۴- پاسخ دینامیکی سیستم مدل اول.....	۴۹
۳-۴- پاسخ دینامیکی سیستم مدل دوم.....	۵۶
فصل ۵: بررسی نتایج.....	۶۵
۱-۵- مقدمه.....	۶۶

۶۷	۲-۵- اعتبار سنجی
۶۹	۳-۵- بررسی تغییر شکل استاتیکی
۶۹	۱-۳-۵- بررسی تغییر شکل استاتیکی مدل اول
۷۸	۲-۳-۵- بررسی تغییر شکل استاتیکی مدل دوم
۸۳	۴-۵- بررسی فرکانس طبیعی
۸۳	۱-۴-۵- بررسی فرکانس طبیعی مدل اول
۸۹	۲-۴-۵- بررسی فرکانس طبیعی مدل دوم
۹۱	۵-۵- بررسی پاسخ فرکانسی
۹۱	۱-۵-۵- بررسی پاسخ فرکانسی مدل اول
۱۰۱	۲-۵-۵- بررسی پاسخ فرکانسی مدل دوم
۱۰۵	فصل ۶: نتیجه‌گیری و ارائه پیشنهادها
۱۰۶	۱-۶- مقدمه
۱۰۶	۱-۱-۶- نتیجه‌گیری‌ها
۱۰۶	۲-۱-۶- پیشنهادها
۱۰۷	مراجع



## فهرست شکل‌ها

- شکل (۱-۱) عوامل غیر خطی در سیستم‌های MEMS [۱]..... ۳
- شکل (۲-۱) شماتیک ساده‌ای از مراحل ساخت الاستومر مگنتورئولوژیکال ایزوتروپ و غیر ایزوتروپ [۲۰]..... ۹
- شکل (۱-۲) جابه‌جایی طولی و عرضی المان میکروتیر و دستگاه مختصات..... ۲۰
- شکل (۲-۲) شکل هندسی سیستم مدل اول..... ۲۲
- شکل (۳-۲) شکل هندسی سیستم مدل دوم..... ۳۳
- شکل (۱-۵) مقایسه ماکزیمم تغییر شکل استاتیکی نسبت به تغییرات  $e_{dc}$  برای سیستم مورد بررسی هماهنگ با میکروتیر شرایط مرجع [۱۴]..... ۶۸
- شکل (۲-۵) مقایسه فرکانس طبیعی نسبت به تغییرات  $e_{dc}$  برای سیستم مورد بررسی هماهنگ با میکروتیر شرایط مرجع [۱۴]..... ۶۸
- شکل (۳-۵) تغییرات خیز استاتیکی نسبت به تغییرات  $x$  به ازای یک، دو و سه تابع مقایسه‌ای در حالتی که پیزوالکتریک کل طول میکروتیر را پوشانده در تحریک الکترواستاتیک  $e_{dc} = 1.7v$ ..... ۷۰
- شکل (۴-۵) تاثیر تغییر طول لایه پیزوالکتریک بر ماکزیمم تغییر شکل استاتیکی نسبت به تغییرات  $e_{dc}$ ..... ۷۲
- شکل (۵-۵) تاثیر مقدار  $p$  بر ماکزیمم تغییر شکل استاتیکی سیستم نسبت به تغییرات  $e_{dc}$  در حالتی که  $L_1 = 0$  و  $B = 0.3T$ ..... ۷۳
- شکل (۶-۵) تاثیر مقدار  $p$  بر ماکزیمم تغییر شکل استاتیکی سیستم نسبت به تغییرات  $e_{dc}$  در حالتی که  $L_1 = 0.5L$  و  $B = 0.3T$ ..... ۷۴
- شکل (۷-۵) تاثیر تغییر ضخامت لایه پیزوالکتریک بر ماکزیمم تغییر شکل استاتیکی سیستم نسبت به تغییرات  $e_{dc}$  در حالتی که  $L_1 = 0$  و  $p = 0.1v$  و  $B = 0.6T$ ..... ۷۵
- شکل (۸-۵) تاثیر تغییر فاصله هوایی بین میکروتیر و الکتروود بر ماکزیمم تغییر شکل استاتیکی نسبت به تغییرات  $e_{dc}$  در حالتی که  $L_1 = 0$  و  $p = 0.1v$  و  $B = 0.2T$ ..... ۷۶
- شکل (۹-۵) تاثیر پارامتر مقیاس طولی بر ماکزیمم تغییر شکل استاتیکی نسبت به تغییرات  $e_{dc}$  در حالتی که  $L_1 = 0$  و  $p = 0.1v$  و  $B = 0$ ..... ۷۷
- شکل (۱۰-۵) تاثیر میدان مغناطیسی اعمالی به لایه الاستومر مگنتورئولوژیکال بر ماکزیمم تغییر شکل استاتیکی نسبت به تغییرات  $e_{dc}$  در حالتی که  $L_1 = 0.5L$  و  $p = 0.1v$ ..... ۷۸
- شکل (۱۱-۵) تغییرات شکل استاتیکی طولی در مدل دوم در حالتی که پیزوالکتریک کل طول میکروتیر را پوشانده در تحریک الکترواستاتیک  $e_{dc} = 5v$  و تحریک مغناطیسی  $B = 0.2T$ ..... ۷۹
- شکل (۱۲-۵) تغییرات شکل استاتیکی عرضی در مدل دوم در حالتی که پیزوالکتریک کل طول میکروتیر را پوشانده در تحریک الکترواستاتیک  $e_{dc} = 5v$  و تحریک مغناطیسی  $B = 0.2T$ ..... ۷۹
- شکل (۱۳-۵) تاثیر تغییر طول لایه پیزوالکتریک بر ماکزیمم تغییر شکل استاتیکی نسبت به تغییرات  $e_{dc}$ ..... ۸۰

- شکل (۱۴-۵) تاثیر مقدار  $p$  بر ماکزیمم تغییر شکل استاتیکی سیستم نسبت به تغییرات  $e_{dc}$  در حالتی که  $B = 0.2T$  و  $L_2 - L_1 = 0.5L$  ..... ۸۱
- شکل (۱۵-۵) تاثیر پارامتر مقیاس طولی بر ماکزیمم تغییر شکل استاتیکی نسبت به تغییرات  $e_{dc}$  در حالتی که  $B = 0.2T$  و  $p = 0.1v$  و  $L_2 - L_1 = 0.5L$  ..... ۸۲
- شکل (۱۶-۵) تاثیر میدان مغناطیسی اعمالی به لایه الاستومر مگنتورئولوژیکال بر ماکزیمم تغییر شکل استاتیکی طولی ... ۸۳
- شکل (۱۷-۵) تاثیر تغییر طول لایه پیزوالکتریک بر فرکانس طبیعی سیستم نسبت به تغییرات  $e_{dc}$  ..... ۸۴
- شکل (۱۸-۵) تاثیر مقدار  $p$  بر فرکانس طبیعی سیستم نسبت به تغییرات  $e_{dc}$  در حالتی که  $L_1 = 0$  و  $B = 0.3T$  ..... ۸۵
- شکل (۱۹-۵) تاثیر مقدار  $p$  بر فرکانس طبیعی سیستم نسبت به تغییرات  $e_{dc}$  در حالتی که  $L_1 = 0.5L$  و  $B = 0.3T$  ..... ۸۶
- شکل (۲۰-۵) تاثیر تغییر ضخامت لایه پیزوالکتریک بر فرکانس طبیعی سیستم نسبت به تغییرات  $e_{dc}$  در حالتی که  $L_1 = 0$  و  $B = 0.6T$  و  $p = 0.1v$  ..... ۸۶
- شکل (۲۱-۵) تاثیر تغییر فاصله هوایی بین میکروتیر و الکتروود بر فرکانس طبیعی سیستم نسبت به تغییرات  $e_{dc}$  در حالتی که  $L_1 = 0$  و  $p = 0.1v$  و  $B = 0.2T$  ..... ۸۷
- شکل (۲۲-۵) تاثیر پارامتر مقیاس طولی بر فرکانس طبیعی نسبت به تغییرات  $e_{dc}$  در حالتی که  $L_1 = 0$  و  $p = 0.1v$  و  $B = 0$  ..... ۸۸
- شکل (۲۳-۵) تاثیر میدان مغناطیسی اعمالی به لایه الاستومر مگنتورئولوژیکال بر فرکانس طبیعی سیستم نسبت به تغییرات  $e_{dc}$  در حالتی که  $L_1 = 0.5L$  و  $p = 0.1v$  ..... ۸۹
- شکل (۲۴-۵) تاثیر تغییر طول لایه پیزوالکتریک بر فرکانس طبیعی سیستم نسبت به تغییرات  $e_{dc}$  ..... ۹۰
- شکل (۲۵-۵) تاثیر مقدار  $p$  بر فرکانس طبیعی سیستم نسبت به تغییرات  $e_{dc}$  در حالتی که  $L_2 - L_1 = 0.5L$  و  $B = 0.2T$  ..... ۹۰
- شکل (۲۶-۵) تاثیر پارامتر مقیاس طولی بر فرکانس طبیعی سیستم نسبت به تغییرات  $e_{dc}$  در حالتی که  $L_2 - L_1 = 0.5L$  و  $B = 0.2T$  و  $p = 0.1v$  ..... ۹۱
- شکل (۲۷-۵) تغییرات ضرایب غیر خطی نسبت به تغییرات  $e_{dc}$  در مدل اول ..... ۹۲
- شکل (۲۸-۵) تغییرات  $\frac{\Omega}{\omega}$  نسبت به  $e_{ac}$  به ازای مقادیر متفاوت  $e_{dc}$  ..... ۹۳
- شکل (۲۹-۵) تغییرات  $a_0$  نسبت به  $\sigma$  به ازای مقادیر متفاوت  $e_{dc}$  ..... ۹۴
- شکل (۳۰-۵) تاثیر تغییر طول لایه پیزوالکتریک بر منحنی فرکانسی سیستم به ازای  $e_{dc} = 0.72v$  ..... ۹۵
- شکل (۳۱-۵) تاثیر مقدار  $p$  بر پاسخ فرکانسی سیستم در حالتی که  $L_1 = 0$  و  $B = 0.3T$  به ازای  $e_{dc} = 0.7v$  و  $e_{dc} = 1.1v$  ..... ۹۶
- شکل (۳۲-۵) تاثیر مقدار  $p$  بر پاسخ فرکانسی سیستم در حالتی که  $L_1 = 0.5L$  و  $B = 0.3T$  به ازای  $e_{dc} = 0.7v$  ..... ۹۷
- شکل (۳۳-۵) تاثیر ضخامت پیزوالکتریک بر پاسخ فرکانسی سیستم در حالتی که  $L_1 = 0.8L$  و  $B = 0.2T$  و  $p = 0.1v$  به ازای  $e_{dc} = 0.7v$  و  $e_{dc} = 0.9v$  ..... ۹۸

- شکل (۳۴-۵) تاثیر تغییر فاصله هوایی بین میکروتیر و الکتروود بر پاسخ فرکانسی سیستم در حالی که  $L_1 = 0$  و  $p = 0.1v$  و  $B = 0.2T$  و  $e_{dc} = 0.4v$  ..... ۹۹
- شکل (۳۵-۵) تاثیر پارامتر مقیاس طولی بر فرکانس طبیعی نسبت به تغییرات  $e_{dc}$  در حالی که  $L_1 = 0$  و  $p = 0.1v$  و  $B = 0$  و  $e_{dc} = 0.8v$  ..... ۱۰۰
- شکل (۳۶-۵) تاثیر میدان مغناطیسی اعمالی به لایه الاستومر مگنتورئولوژیکال بر پاسخ فرکانسی نسبت به تغییرات  $e_{dc}$  در حالی که  $L_1 = 0.5L$  و  $p = 0.1v$  ..... ۱۰۱
- شکل (۳۷-۵) تاثیر تغییر طول لایه پیزوالکتریک بر منحنی فرکانسی سیستم به ازای  $e_{dc} = 0.72v$  ..... ۱۰۲
- شکل (۳۸-۵) تاثیر مقدار  $p$  بر پاسخ فرکانسی سیستم نسبت به تغییرات  $e_{dc}$  در حالی که  $L_2 - L_1 = 0.5L$  و  $B = 0.2T$  و  $e_{dc} = 2.7v$  ..... ۱۰۳
- شکل (۳۹-۵) تاثیر پارامتر مقیاس طولی بر پاسخ فرکانسی در حالی که  $L_2 - L_1 = 0.5L$  و  $p = 0.1v$  و  $B = 0.2T$  و  $e_{dc} = 0.8v$  ..... ۱۰۴

## فهرست جدول‌ها

جدول (۱-۵) مشخصات ماده و هندسه میکروتیر و لایه پیزوالکتریک [۱۴] ..... ۶۷

# **فصل ۱: مقدمه و مروری بر کارهای انجام**

**شده**

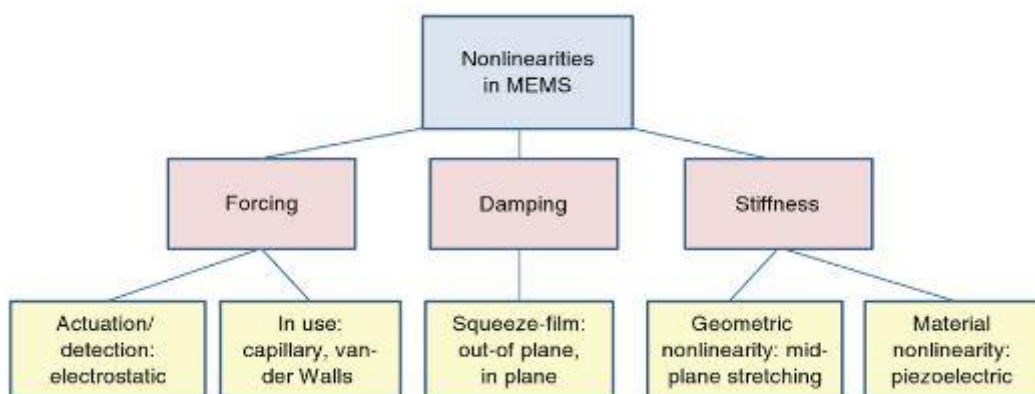
## ۱-۱- مقدمه

MEMS<sup>۱</sup>، به عنوان یکی از آینده‌دارترین تکنولوژی‌ها در قرن ۲۱ شناخته شده است که می‌توان آن را تلاشی برای بهره برداری و گسترش تکنیک‌هایی در اضافه کردن عناصر مکانیکی مانند تیرها، چرخ‌دنده‌ها، فنرها و ... به مدارات الکتریکی دانست. MEMS، تکنولوژی ساخت قطعات و سیستم‌های مجتمع متشکل از اجزای الکتریکی و مکانیکی می‌باشد که با تکنیک‌های میکرو ماشین‌کاری ساخته می‌شوند. کلمه MEMS، مخفف عبارت سیستم‌های میکروالکترومکانیکی می‌باشد، در این سیستم‌ها حداقل یکی از ابعاد آن‌ها در مقیاس میکرو قرار دارد [۱].

در بیشتر موارد، MEMS شامل میکروساختار، میکرو حسگر، میکرو عملگر و مدارهای میکروالکترونیک می‌باشند که همه روی یک تراشه سیلیکونی جمع شده‌اند. مدارهای مجتمع میکرو-الکترونیک را می‌توان به عنوان مغز متفکر سیستم‌ها در نظر گرفت و MEMS با اضافه کردن چشم و بازو، این قدرت تفکر را توسعه می‌دهند تا این میکرو سیستم‌ها بتوانند محیط اطرافشان را حس کرده و کنترل نمایند. میکرو حسگر تغییرات محیط اطراف سیستم را از طریق اندازه‌گیری پدیده‌ها و اطلاعات مکانیکی، حرارتی، مغناطیسی، شیمیایی و یا الکترومغناطیسی شناسایی می‌کند. بخش میکروالکترونیک این اطلاعات را پردازش می‌کند و سیگنال کنترلی را به عمل‌گر می‌فرستد تا تغییرات لازم انجام شود. امروزه این تکنولوژی به سطح قابل قبولی رسیده است، به طوری که بشر در این زمینه به تکنولوژی ساخت شتاب‌سنج کوچک‌تر از یک میلی‌متر، چرخ‌دنده‌هایی کوچک‌تر از موی انسان و سوزن‌هایی بسیار باریک که می‌تواند ماده دارویی را بدون آسیب به اعصاب تزریق کنند. این سیستم‌ها با داشتن ویژگی‌هایی از جمله وزن سبک، اندازه کوچک، حساسیت بالا، مصرف انرژی کم، سازگاری با مدارهای مجتمع میکروالکترونیک تکنولوژی جدیدی را عرضه نمودند که به علت کاربرد گسترده آن‌ها در زمینه‌های

<sup>1</sup> Micro Electro Mechanical System

مختلفی از جمله مکانیک، هوافضا، رباتیک، پزشکی و ... مورد توجه قرار گرفته اند. امروزه مشاهده می شود که تئوری های خطی برای مدل کردن ایده های پیشرفته پاسخگو نیست، بنابراین بیشتر به جنبه های دینامیکی غیر خطی MEMS توجه می شود تا با استفاده از روش های غیر خطی بتوان فرصت های جدیدی برای این سیستم ها بوجود آورد. عوالی که باعث ایجاد جمله های غیر خطی در این سیستم ها می شوند به طور شماتیک در شکل (۱-۱) نشان داده شده است. عوامل غیر خطی موجود در MEMS مانند سایر سیستم های ماکرو می باشد. نیرو از طریق تحریک باعث ایجاد جمله های غیر خطی می شود. به عنوان مثال نیروی الکترواستاتیکی که از طریق صفحات موازی اعمال می شوند به طور ذاتی غیر خطی هستند. همچنین بسیاری از میکرو ساختارها به این منظور ساخته می شوند که تحت تغییر شکل قرار گیرند، و زمانی که تحریک می شوند تغییر شکل های قابل توجهی نسبت به ابعادشان در آن ها بوجود می آید، که منجر به ایجاد جمله های غیر خطی از نوع هندسی در آن ها می شود. به طور کلی می توان گفت که این منابع غیر خطی گوناگون در سیستم های میکروالکترومکانیکی، نقش مهمی در عملکرد و پاسخ آن ها ایفا می کنند. بنابراین مدل کردن و طراحی براساس تئوری خطی نامناسب خواهد بود.



شکل (۱-۱) عوامل غیر خطی در سیستم های MEMS [۱].

آزمایشات انجام گرفته حاکی از این واقعیت است که رفتار مکانیکی برخی مواد در مقیاس طولی میکرون یا پایین تر، به شدت وابسته به اندازه می باشد، که این گونه رفتار مواد در ابعاد میکرون و پایین تر را در اصطلاح رفتار وابسته به اندازه<sup>۱</sup> نامند. منظور از رفتار وابسته به اندازه، تغییر در خصوصیات و ویژگی های مکانیکی ماده با کاهش مقیاس آن می باشد. برای اولین بار این پدیده با انجام آزمایش بر روی برخی از فلزات و پلیمرها دیده شد [۲-۴]. به عنوان مثال، در تست میکرو خمش تیرهای پلیمری اپوکسی در سال ۲۰۰۳، لام و همکاران [۵] دریافتند که با کاهش ضخامت تیر از  $115\mu\text{m}$  به  $20\mu\text{m}$ ، صلبیت تیر  $2/4$  برابر افزایش می یابد.

مطالعات فراوانی بر روی رفتار دینامیکی سیستم های MEMS با استفاده از تئوری الاستیسیته کلاسیک صورت گرفته است [۶و۷]. اما نتایج حاصل از تئوری های کلاسیک در ابعاد میکرون و پایین تر قابل اعتماد نیستند زیرا در معادلات بنیادی تئوری های الاستیسیته کلاسیک، پارامتر یا پارامترهایی که توجیه کننده رفتارهای وابسته به اندازه ماده باشد، وجود ندارد. به چنین پارامترهایی در اصطلاح پارامتر مقیاس طول ماده<sup>۲</sup> گفته می شود. از این رو، برای بررسی رفتار مکانیکی مواد در مقیاس طولی میکرون و پایین تر، تئوری غیر کلاسیک که معادلات بنیادی آنها شامل جملات اضافی که در برگیرنده پارامترهای مقیاس طولی ماده نیز می باشند، وجود دارد.

المان اصلی سیستم های MEMS معمولاً یک میکروتیر پایه از جنس سیلیکون و یا مواد پلیمری می باشد که به روش های مختلف الکتریکی، هیدرولیکی، مغناطیسی، پیزوالکتریک و ... تحریک می شوند.

<sup>1</sup> Size dependent behavior

<sup>2</sup> Material Length Scale Parameter



## ۲-۱- میکروتیر در سیستم‌های MEMS

میکروتیرها بخاطر ویژگی برجسته‌شان همچون ساختار ساده‌ی آن، به سادگی قرار گرفتن در یک مدار مجتمع و ... بسیار مورد توجه می‌باشند و به‌عنوان المان اصلی سیستم‌های MEMS می‌باشند. بنابراین محاسبه‌ی تغییر شکل، فرکانس طبیعی و دینامیک این عنصر مورد توجه بسیاری از پژوهشگران قرار گرفته است.

به علت طبیعت میکرو مقیاس بودن این سیستم، دامنه تحریک نقش مهمی را ایفا میکند، زیرا ممکن است حتی یک تغییر کم در دامنه تحریک ارتعاشات و شیف‌ت فرکانسی قابل ملاحظه‌ای را در بر داشته باشد [۸]. میکروتیرها در اکثر سیستم‌های MEMS به‌عنوان ادوات حس‌گر و عملگر مورد استفاده قرار می‌گیرند [۹-۱۲].

## ۳-۱- تحریک در سیستم‌های MEMS

### ۱-۳-۱- تحریک الکترواستاتیک

تحریک الکترواستاتیک به دلیل سرعت بالا، امکان ساخت و تحقق راحت‌تر در کنار المان‌های کوچک، مصرف توان بسیار کم و تکیه بر انرژی ذخیره شده برای حفظ حالت دلخواه المان، به‌عنوان رایج‌ترین روش تحریک مطرح هستند. در تحریک الکترواستاتیک، پتانسیل الکتریکی بین میکروتیر و صفحه‌الکتروود ثابت که موازی هم هستند اعمال می‌شود که منجر به جابه‌جایی نسبی تیر نسبت به الکتروود می‌شود.

ولتاژ اعمالی می‌تواند متشکل از یک قسمت DC برای اعمال جابه‌جایی ثابت و یک قسمت AC به منظور تحریک هارمونیک میکروتیر باشد. هنگامی که ولتاژ DC بین میکروتیر و الکتروود اعمال می‌شود میدان الکتریکی ناشی از اعمال یک نیروی الکترواستاتیک بر روی میکروتیر شکل‌پذیر، آن را به سمت

الکتروود ثابت منحرف می‌کند. این انحراف را تغییر شکل استاتیکی می‌نامند.

در یک ولتاژ الکتریکی معین میکروتیر ناپایدار شده و به الکتروود ثابت متصل می‌شود این بدان معنا است که مقدار نیروی جاذبه‌ای اعمالی بر مقاومت تیر غلبه کرده و باعث بی‌ثباتی میکروتیر می‌شود. این ناپایداری که در اثر غیر خطی بودن نیروی الکترواستاتیک ایجاد می‌شود به پولین<sup>۱</sup> شناخته می‌شود. اگر مستقل از زمان و با موقعیت اولیه میکروتیر بررسی شود، به آن پولین استاتیکی گفته می‌شود. به مقدار ولتاژی که باعث این ناپایداری می‌شود، ولتاژپولین گفته می‌شود.

رابطه نیروی تحریک الکترواستاتیک بین میکروتیر و الکتروود به صورت زیر می‌باشد [۱۳].

$$F_e = -\frac{1}{2} \epsilon_0 w_b \frac{(e_{dc} + e_{ac} \cos(\Omega t))^2}{(d + w)^2} \quad (1-1)$$

که در آن  $F_e$  نیروی الکترواستاتیکی،  $d$  فاصله بین الکتروود و میکروتیر،  $w$  تغییر شکل عرضی میکروتیر نسبت به حالت ساکن،  $w_b$  پهنا،  $e_{dc}$  ولتاژ DC،  $e_{ac}$  ولتاژ AC،  $\Omega$  فرکانس تحریک و  $\epsilon_0$  ثابت خلأ بوده و مقدار آن برابر با  $\frac{A.s}{V.m}$   $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$  است.

### ۱-۳-۲- تحریک پیزوالکتریک

مواد پیزوالکتریک موادی هوشمند<sup>۲</sup> هستند که در سیستم‌های MEMS مورد استفاده قرار می‌گیرند. این امر از توانایی آن‌ها در ایجاد تبدیل انرژی مکانیکی به انرژی الکتریکی و بالعکس، آن‌ها را جزو مواد هوشمند کرده است. نخستین بار اثر پیزوالکتریک توسط دو برادر پیر کوری و ژاکوپ کوری در سال ۱۸۸۰ کشف شد.

پیزوالکتریک به مواد کریستالی گفته می‌شود که قادرند متناسب با نیروی خارجی مکانیکی که به آن‌ها وارد می‌شود مقداری بار الکتریکی در سطح خود تولید کنند. این بار الکتریکی در اثر نامتقارن بودن

<sup>1</sup> Pull-in

<sup>2</sup> Smart material

سلول یک واحد کریستال، به تولید پتانسیل الکتریکی منجر می‌شود که به این اثر مستقیم پیزوالکتریک گویند. حال اگر در پی اعمال ولتاژ الکتریکی، ساختار ماده دچار تغییرات مکانیکی شود، به این اثر معکوس گویند. از اثر مستقیم در ساخت حسگرها مانند شتاب‌سنج‌ها و مبدل‌های فشار و از اثر معکوس در مبدل الکترومکانیکی مانند ژنراتورها و عملگرهای پنوماتیکی و هیدرولیکی استفاده می‌شود.

رایج ترین مواد پیزوالکتریک مورد استفاده ZNO، PVDF و PZT می‌باشند. از کاربردهای مواد پیزوالکتریک می‌توان به کاربرد آن‌ها در سنسورها و عملگرهایی که پایه اصلی آن‌ها رفتار میکروتیرهاست اشاره کرد. در این سیستم‌ها تحریک پیزوالکتریک با اعمال ولتاژ الکتریکی بین دو سطح بالا و پایین لایه‌ی پیزوالکتریک اعمال می‌شود. همان طور که بیان شد، مواد پیزوالکتریک در اثر اعمال ولتاژ الکتریکی تغییر طول می‌دهند. اگر یک لایه از ماده پیزوالکتریک بر روی میکروتیر قرار گیرد و بین دو سطح آن ولتاژ اعمال شود، به علت اثر پیزوالکتریک، لایه‌ی پیزوالکتریک تمایل به کاهش یا افزایش طول خواهد داشت، ولی چون به میکروتیر متصل است، باعث خمیده شدن میکروتیر می‌شود. با توجه به ویژگی‌های ماده پیزوالکتریک، می‌توان از آن برای کنترل ارتعاشات و ناپایداری پولین استفاده کرد.

خاصیت پیزوالکتریک مواد در ساده‌ترین حالت، به صورت دو معادله در (۲-۱) نمایش داده می‌شود

[۱]:

$$\begin{aligned} \{S\} &= [S]^E \{T\} + [d]\{E\} \\ \{S\} &= [d]\{T\} + [\varepsilon]^T \{E\} \end{aligned} \quad (2-1)$$

در این معادله،  $\{S\}$  بردار مؤلفه‌های کرنش،  $[S]^E$  ماتریس نرمی،  $\{T\}$  بردار مؤلفه‌های تنش،  $[d]$  ماتریس کوپلینگ پیزوالکتریک،  $\{E\}$  بردار شدت میدان الکتریکی،  $[D]$  بردار جابه‌جایی الکتریکی و  $[\varepsilon]^T$  ماتریس نفوذپذیری الکتریکی می‌باشد.

در معادله (۲-۱) رابطه تنش-کرنش برای لایه‌ی پیزوالکتریک، با توجه به کوپل بودن خواص مکانیکی و الکتریکی در این مواد و در نظر گرفتن جابه‌جایی الکتریکی یک بعدی برای لایه‌ی

پیزوالکتریک، مطابق با [۱۴] به صورت (۳-۱) به دست می‌آید:

$$\sigma_p = E_p \varepsilon - 2E_p d_{31} \frac{p}{t_p} \quad (3-1)$$

در این معادله  $d_{31}$  ثابت کرنش لایه پیزوالکتریک است که معمولاً مقادیر منفی را به خوداختصاص می‌دهد،  $p$  ولتاژ DC اعمالی به دو سطح لایه‌ی پیزوالکتریک،  $E_p$  مدول الاستیسیته لایه پیزوالکتریک،  $t_p$  ضخامت لایه پیزوالکتریک،  $\varepsilon$  کرنش نرمال و  $\sigma_p$  تنش نرمال پیزوالکتریک می‌باشد.

### ۱-۳-۳- تحریک مغناطیسی الاستومر مگنتورئولوژیکال<sup>۱</sup>

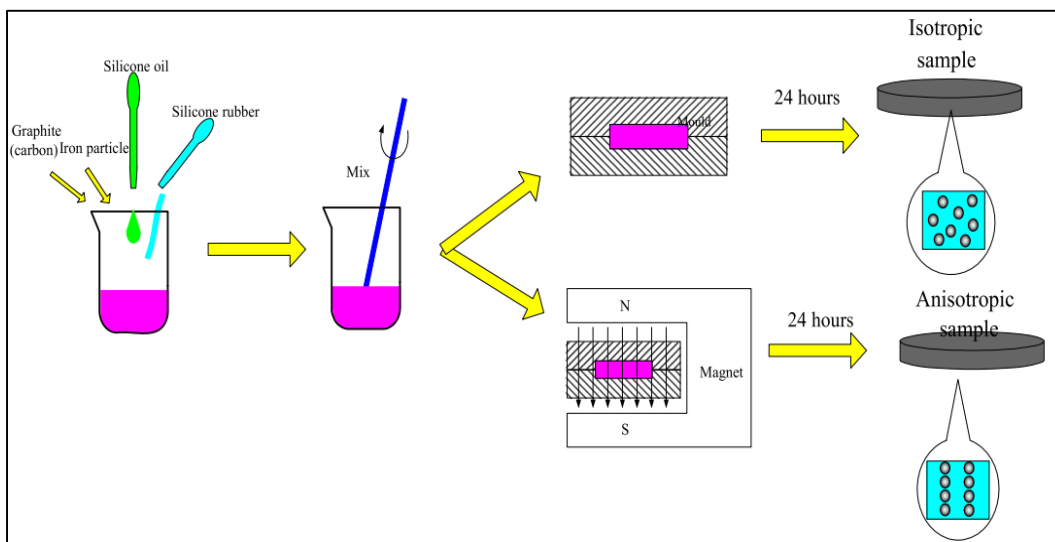
علاوه بر پیزوالکتریک، مواد مگنتورئولوژیکال<sup>۲</sup>، مانند سیال‌های مگنتورئولوژیکال<sup>۳</sup> و الاستومرهای مگنتورئولوژیکال، گروهی از مواد هوشمندی هستند که خواص مکانیکی، رئولوژی و ویسکوالاستیک آن‌ها با اعمال میدان مغناطیسی خارجی تغییر می‌کنند. این تغییر با حذف میدان مغناطیسی به سرعت برگشت پذیر بوده و اندازه آن با میزان میدان مغناطیسی متناسب است [۱۵-۱۷]. تحقیق در زمینه مواد مگنتورئولوژیکال اولین بار توسط رابینو [۱۸] با مطالعه بر روی سیال‌های مگنتورئولوژیکال صورت گرفت. الاستومرهای مگنتورئولوژیکال با قرار دادن ذرات ریز آهنی مغناطیس شونده در داخل یک محیط الاستومری غیر مغناطیسی تشکیل می‌شوند که در حضور میدان مغناطیسی ذرات ریز آهنی در جهت میدان جهت گیری کرده و تشکیل زنجیره‌هایی از ذرات را می‌دهند. این ساختارهای زنجیری در محیط‌های الاستومری باعث افزایش مدول ذخیره برشی می‌گردد. هنگامی که میدان مغناطیسی حذف می‌گردد این مواد به حالت اولیه باز خواهند گشت [۱۹].

<sup>1</sup> Magnetorheological elastomers (MREs)

<sup>2</sup> Magnetorheological materials (MR materials)

<sup>3</sup> Magnetorheological fluids (MRFs)

اندازه این ذرات مغناطیس شونده در الاستومرهای مگنتورئولوژیکال بین ۰٫۱ تا ۱۰ میکرومتر می-باشند و عموماً این ذرات دارای خواص اشباع مغناطیسی بالا و پسماند پایین مغناطیسی می باشند. این ذرات می‌توانند هم به صورت همگن و یکنواخت داخل محیط الاستومری و هم به صورت زنجیره‌هایی از ذرات پخش شوند که در حالت اول تشکیل الاستومرهای مگنتورئولوژیکال ایزوتروپ<sup>۱</sup> و در حالت دوم تشکیل الاستومرهای غیر ایزوتروپ<sup>۲</sup> را می‌دهند.



شکل (۲-۱) شماتیک ساده‌ای از مراحل ساخت الاستومر مگنتورئولوژیکال ایزوتروپ و غیر ایزوتروپ [۲۰].

ساخت این دو نوع از الاستومرهای مگنتورئولوژیکال بستگی به حضور یا عدم حضور میدان مغناطیسی در خلال فرایند پخت<sup>۳</sup> دارد [۲۰]. شکل (۲-۱) شماتیک ساده‌ای از مراحل ساخت این دو نوع از الاستومر را نشان می‌دهد.

معمولاً میدان مغناطیسی در مرحله آخر فرایند پخت الاستومرهای مگنتورئولوژیکال اعمال می‌گردد که باعث شکل‌گیری زنجیره‌های ذرات مغناطیس شونده و همچنین به دام افتادن آن‌ها در

<sup>1</sup> Isotropic magnetorheological elastomer

<sup>2</sup> Anisotropic magnetorheological elastomer

<sup>3</sup> Curing process

داخل الاستومر می شود. در الاستومرهای مگنتورئولوژیکال غیرایزوتروپ برای اعمال نیروی برشی در حضور میدان مغناطیسی در مقایسه با الاستومرهای مگنتورئولوژیکال ایزوتروپ، نیروی بیشتری لازم است که نهایتاً باعث افزایش مدول برشی می شود. مقدار این نیرو و مدول برشی الاستومرهای مگنتورئولوژیکال با افزایش میدان مغناطیسی بیشتر می گردد [۲۱].

بنابراین تغییر در خواص مکانیکی و رئولوژی الاستومرهای مگنتورئولوژیکال به شدت وابسته به اعمال میدان مغناطیسی خارجی می باشد. هنگام اعمال میدان مغناطیسی برهم کنش بین ذرات آهنی باعث می گردد این ذرات به هم نزدیک تر شده و در نتیجه باعث افزایش سختی الاستومرهای مگنتورئولوژیکال می گردد. این تغییر باعث افزایش شیب منحنی تنش- کرنش که نماینگر سختی معادل<sup>۱</sup> الاستومرهای مگنتورئولوژیکال است، می گردد.

در سال‌های اخیر دو ویژگی منحصر به فرد سختی و میرایی قابل تنظیم الاستومرهای مگنتورئولوژیکال باعث استفاده چشم‌گیر آن‌ها در کاربرد های مختلف مهندسی شده است. این مواد دارای پتانسیل بسیار بالایی به عنوان یک عضو فعال و وفق پذیر می باشند، که در سیستم های مکانیکی توسط کنترل کننده های الکترونیکی عمل می کنند. الاستومرهای مگنتورئولوژیکال دارای کاربردهایی در جاذب های ارتعاشی قابل تنظیم، ایزوله کننده های سختی و میرایی تنظیم شونده، سیستم های تعلیق خودرو، سنسور ها، وسایل پزشکی، کنترل ارتعاشات و سختی فعال و به طور خاص در تغییر فرکانس های طبیعی سیستم های مکانیکی می باشد.

از کاربردهای الاستومرهای مگنتورئولوژیکال می توان به کاربرد آن‌ها در کنترل ارتعاشات میکروتیرها وقتی به انتهای میکروتیر متصل شده است اشاره کرد که این امر با تنظیم سختی برشی به ازای اعمال میدان مغناطیسی مورد نیاز حاصل می شود. برای تنظیم سختی در این سیستم با اعمال میدان مغناطیسی به لایه الاستومر مگنتورئولوژیکال سبب افزایش مدول برشی لایه الاستومر

<sup>1</sup> Equivalent stiffness

مگنتورئولوژیکال می شود و در نتیجه ارتعاشات سر آزاد میکروتیر را کنترل می کند. در این سیستم برای استخراج معادلات لایه الاستومر را می توان یک فنر با سختی قابل تنظیم معادل سازی کرد که سختی معادل آنرا طبق رابطه (۴-۱) به دست می آید [۲۲].

$$K_{eq} = G(B_{MRE}) \frac{S_{MRE}}{h_{MRE}} \quad (۴-۱)$$

در رابطه (۴-۱)،  $S_{MRE}$  بیانگر سطح برش لایه الاستومر مگنتورئولوژیکال و  $h_{MRE}$  ضخامت لایه الاستومر مگنتورئولوژیکال می باشد.

که سختی برشی  $G(B_{MRE})$  برحسب میدان مغناطیسی توسط نایاک و همکاران [۲۳] در رابطه (۱-۵) ارائه شده استفاده کرد که از برازش منحنی داده های آزمایشگاهی [۲۴] در بازه ۰ تا ۰٫۶ تسلا انجام گرفته است، حاصل شده است.

$$G(B_{MRE}) = (-6.9395B^6 - 9.1077B^5 + 71.797B^4 - 93.422B^3 + 38.778B^2 + 2.43B + 2.7006) MPa \quad (۵-۱)$$

#### ۴-۱- تئوری تنش-کوپل اصلاح شده<sup>۱</sup>

یکی از مهمترین تئوری های غیر کلاسیک، تئوری تنش-کوپل اصلاح شده است. این تئوری در ابتدا در سال ۲۰۰۲ توسط یانگ و همکاران [۲۵] ارائه گردید. به منظور پیش بینی رفتار تنش های مرتبه بالاتر، آنها یک معادله تعادلی دیگر را علاوه بر معادلات تعادل نیروها و گشتاور نیروها در حالت کلاسیک، یعنی معادله تعادل گشتاور نیروها، معرفی کردند. آنها دریافتند که تانسور تنش-کوپل متقارن بوده و بخش غیر متقارن تانسور گرادیان چرخش نقشه در انرژی تغییر شکل ندارد. معادلات ساختاری تئوری تنش-کوپل اصلاح شده، شامل یک پارامتر مقیاس طولی ماده علاوه بر دو ثابت کلاسیک ماده می باشند.

<sup>1</sup> Modified Couple Stress theory

چگالی انرژی کرنش تابعی از دو تانسور کرنش (متناظر با تانسور تنش) و پیچیدگی (متناظر با تانسور تنش-کوپل) می‌باشد. در این صورت انرژی کرنش  $U$  برای یک ماده تغییر شکل یافته الاستیک خطی و همگن در دامنه  $\Omega$  به صورت زیر داده می‌شود:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + m_{ij} \chi_{ij}) dv \quad (6-1)$$

که در رابطه فوق  $\sigma$  تانسور تنش،  $\varepsilon$  تانسور کرنش،  $m$  بخشی از تانسور تنش-کوپل که منجر به انحراف رفتار ماده می‌گردد و  $\chi$  تانسور متقارن پیچیدگی<sup>۱</sup> می‌باشند که به صورت زیر تعریف می‌گردند:

$$\sigma_{ij} = \lambda tr(\varepsilon) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (7-1)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (8-1)$$

$$m_{ij} = 2\mu l^2 \chi_{ij} \quad (9-1)$$

$$\chi_{ij} = \frac{1}{2} (\theta_{i,j} + \theta_{j,i}) \quad (10-1)$$

$$\theta_i = \frac{1}{2} curl(u_i)$$

در روابط فوق  $\lambda$  و  $\mu$  ثابت‌های لامه<sup>۲</sup>،  $l$  پارامتر مقیاس طول ماده،  $u_i$  مؤلفه‌های بردار جابه‌جایی و  $\theta_i$  مؤلفه‌های بردار چرخش می‌باشند. ثابت‌های لامه با استفاده از مدول یانگ  $E$  و ضریب پواسان  $\nu$  به صورت  $\lambda = \nu E / (1+\nu)(1-2\nu)$  و  $\mu = E / 2(1+\nu)$  به دست می‌آیند.

با توجه به تقارن تانسورهای  $\varepsilon_{ij}$  و  $\chi_{ij}$ ، تانسورهای  $\sigma_{ij}$  و  $m_{ij}$  نیز متقارن می‌باشند.

در این پایان‌نامه، از ضریب پواسان صرف نظر می‌کنیم، در این صورت رابطه (۷-۱) به صورت رابطه

(۱۱-۱) ساده می‌شود:

$$\sigma_{ij} = E \varepsilon_{ij} \quad (11-1)$$

<sup>1</sup> symmetric curvature tensor

<sup>2</sup> Lama constant



## ۱-۵- مروری بر کارهای انجام شده

### ۱-۵-۱- تحریک سیستم‌های MEMS

#### ۱-۵-۱-۱- تحریک الکترواستاتیک

عبدالرحمان و همکاران [۱۴] مقدار تغییر شکل استاتیکی و فرکانس طبیعی ارتعاشات میکروتیر دو سر گیردار تحت تحریک الکترواستاتیک را حول موقعیت استاتیکی بررسی کردند. تا قبل از آن مقالات فاقد مدل تئوری جامعی که هر دو اثر کشیدگی و نیروی الکترواستاتیک به همراه نیروی محوری را مورد بررسی قرار دهند، بودند. آن‌ها با حل عددی (روش شوتینگ) این مدل به بررسی تغییر شکل استاتیکی و فرکانس طبیعی و تاثیر پارامترهایی نظیر نیروی محوری و اثر کشیدگی بر روی آن‌ها پرداختند. آن‌ها نشان دادند که در پاسخ دینامیکی سیستم، افزایش نیروی الکترواستاتیک منجر به افزایش رفتار نرم‌شوندگی و افزایش کشش لایه‌ی میانی منجر به ایجاد رفتار سخت‌شوندگی می‌شود.

نجار و همکاران [۲۶] با تغییر در هندسه میکروتیر یعنی ثابت نبودن ارتفاع و فاصله از الکتروود و حل عددی آن، ولتاژ پولین را در آن مورد بررسی قرار دادند و همچنین تاثیر افزایش و کاهش مقادیر ارتفاع و فاصله از الکتروود را نسبت به نتایج قبلی مقایسه کردند.

اوکاد و همکاران [۲۷] رفتار استاتیکی و دینامیکی میکروتیر دو سرگیردار دارای قوس را تحت تحریک الکترواستاتیک مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها ماکزیمم تغییر شکل میکروتیر را به ازای ولتاژهای مختلف DC و مقدار قوس‌های متفاوت به دست آورده و با هم مقایسه نمودند.

وانگ و همکاران [۲۸] رفتار ارتعاشی و ناپایداری پولین را برای یک میکروتیر چند لایه تحت تحریک میدان الکترواستاتیک، مورد بررسی قرار دادند. سیستم بر پایه تئوری تیر اویلر برنولی استوار

بوده و معادلات حرکت با محاسبه تار خنثی جدید، مشابه با تئوری تیر تک لایه استخراج شد. راسخ و همکاران [۲۹] ولتاژ پولین بر روی یک نانوتیوب یکسر گیردار غیر خطی تحت تحریک الکترواستاتیک بررسی کردند.

مجاهدی و همکاران [۳۰] تغییر شکل استاتیکی و ناپایداری پولین را برای یک ژيروسکوپ که به عنوان یک میکروتیر یکسر گیردار با جرم متمرکز در انتهای آزاد آن مدل شده است، مورد مطالعه قرار دادند. جرم متمرکز در این سیستم، تحت تحریک دو ولتاژ الکتریکی DC قرار گرفته و تاثیر جملات غیر خطی به علت هندسه سیستم، نیروی الکتریکی، نیروهای سطحی درون مولکولی و اینرسی بررسی شده است.

یوان و همکاران [۳۱] پدیده پولین را با در نظر گرفتن اثر انحنای زاویه بررسی کرد که در مطالعات قبلی اثر زاویه در نظر گرفته نشده بود.

### ۱-۵-۱-۲- تحریک با لایه پیزوالکتریک

محمودی و جلیلی [۸] ارتعاشات غیر خطی یک میکروتیر یکسر گیردار که لایه پیزوالکتریک بر روی قسمتی از طول آن قرار گرفته است را با فرض عدم کشیدگی لایه میانی میکروتیر تحلیل کردند. رضازاده و همکاران [۳۲] میکروتیر یکسر گیردار و دو سر گیردار را تحت تحریک لایه پیزوالکتریک قرار داده و ولتاژ بحرانی پیزوالکتریک را برای جلوگیری از ناپایداری سیستم از روش عددی به دست آوردند.

قضاوی و همکاران [۳۳] به تحلیل پایداری ارتعاشات عرضی میکروتیر یکسر گیردار تحت تحریک دو لایه پیزوالکتریک پرداختند. کاربرد ولتاژ DC و AC برای پیزوالکتریک، باعث ایجاد یک نیروی محوری با دو بخش پایدار و متغیر با زمان شده است.

زمانیان و همکاران [۳۴] به تحلیل استاتیکی و دینامیکی غیر خطی میکروتیر یکسر گیردار با تحریک پیزوالکتریک پرداختند. آن‌ها به منظور دستیابی به یک دید کلی در مورد اثر لایه پیزوالکتریک

بر پاسخ سیستم، اثر موقعیت، ضخامت و طول این لایه روی دامنه و فرکانس پاسخ را بررسی کردند.

### ۱-۵-۱-۳- تحریک همزمان الکترواستاتیک با لایه پیزوالکتریک

پیزا و همکاران [۳۵] به تحلیل غیر خطی بودن معادلات حرکت میکروتیری که لایه پیزوالکتریک روی کل آن قرار گرفته است و تحت تحریک میدان الکترواستاتیک می‌باشد، پرداختند. در این تحقیق الکتروود تنها بخشی از طول میکروتیر را می‌پوشاند. آن‌ها میکروتیر را در راستای طولی به بخش تقسیم‌بندی و معادلات را به دست آوردند.

زمانیان و خادم [۳۶] به مطالعه رفتار دینامیکی یک میکروتیر دو سر گیردار به عنوان یک میکرورزوناتور تحت تحریک نیروی الکتریکی و لایه پیزوالکتریک پرداختند. نیروی الکتریکی متشکل از بخش DC و یک بخش کوچک AC بوده و ولتاژ اعمالی به لایه پیزوالکتریک DC می‌باشد. با فرض کشیدگی لایه میانی، معادلات حاکم بر حرکت از قانون دوم نیوتن استخراج گردید. آن‌ها با استفاده از روش گالرکین و روش مقیاس‌های چندگانه در تئوری اغتشاشات با تقریب سه شکل مود متقارن اول، به بررسی رفتار دینامیکی سیستم به ازای تاثیر پارامترهای مختلف طراحی پرداختند.

رئیس‌فرد و همکاران [۳۷] یک میکروسوئیچ را تحت تحریک میدان الکترواستاتیک و لایه پیزوالکتریک قرار دادند. آن‌ها سیستم را به صورت یک میکروتیر یک سر گیردار مدل کرده و از فرض عدم کشیدگی لایه میانی و تئوری تیر اویلر برنولی برای استخراج معادلات استفاده کرده‌اند. معادلات حرکت توسط روش لاگرانژ استخراج و با استفاده از روش عددی گالرکین با تقریب پنج مود حل شده است. آن‌ها تغییر شکل استاتیک و ولتاژ پولین را با در نظر گرفتن تاثیر تمام جمله‌های غیر خطی اینرسی، هندسی، الکتریکی و پیزوالکتریک مورد مطالعه قرار دادند.

## ۱-۵-۲- تئوری تنش-کوپل اصلاح شده

پارک و گائو [۳۸] با استفاده از تئوری تنش-کوپل اصلاح شده، ویژگی‌های مکانیکی استاتیکی تیر اویلر برنولی را مورد مطالعه قرار داده و نتایج تست خمش تیر پلیمری اپوکسی را به طور موفقیت‌آمیز صحنه‌گذاری نمودند.

کانگ و ژای [۳۹] بر مبنای تئوری مذکور، فرکانس تشدید یک میکروتیر را مورد تحلیل قرار دادند و مشاهده نمودند که فرکانس تشدید میکروتیر مذکور وابسته به اندازه می‌باشد.

کانگ و همکاران [۴۰] معادله حرکت و شرایط مرزی یک تیر اویلر برنولی را بر مبنای تئوری تنش کوپل اصلاح شده و با استفاده از اصل هامیلتون به دست آوردند. با حل معادله حاکم آن‌ها دریافتند هنگامی که پارامتر مقیاس طولی در حدود اندازه مشخصه تیر قرار گیرد، تفاوت بین فرکانس تشدید حاصل از تئوری تنش-کوپل اصلاح شده و تیر کلاسیک قابل ملاحظه می‌باشد.

کهربا بیان و همکاران [۴۱] با بهره‌گیری از این تئوری، فرکانس تشدید و حساسیت ارتعاشات میکروتیر یکسر گیردار را مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها نتیجه گرفتند که به ازای برخی مقادیر سختی سطح، تفاوت بین نتایج تئوری تنش-کوپل اصلاح شده و تیر کلاسیک در پیش‌بینی فرکانس تشدید و حساسیت ارتعاشات چشم‌گیر می‌باشد.

رهایبی فرد و همکارانش [۴۲] خیز و ناپایداری استاتیکی میکروتیرهای دو سر گیردار را بر اساس نظریه کوپل تنش اصلاح شده ارائه دادند. آن‌ها در این مطالعه اثرات نیروهای بین مولکولی را نادیده گرفتند و تنها اثر نیروی الکترواستاتیک را در معادلات خود اعمال نمودند.

آلاشتی و ابوالقاسمی [۴۳] فرمولاسیونی برای مطالعه‌ی ارتعاشات آزاد میکروتیرهای اویلر برنولی براساس تئوری تنش کوپل ارائه نمودند. نتایج آن‌ها نشان‌دهنده‌ی بالاتر بودن مقدار پیش‌بینی شده برای فرکانس‌های طبیعی توسط تئوری مورد استفاده نسبت به تئوری کلاسیک بود.

نیک‌پوریان و همکاران [۴۴] به بررسی رفتار استاتیکی و دینامیکی وابسته به اندازه یک میکروتیر

دو سر گیر دار تحت تحریک الکترواستاتیک و پیزوالکتریک با فرض کشیدگی لایه میانی پرداختند.

### ۱-۵-۳- کنترل ارتعاشات توسط لایه الاستومر مگنتورئولوژیکال

سان و همکاران [۴۵] به بررسی ارتعاشات آزاد تیر با هسته الاستومر مگنتورئولوژیکال و ارائه حل دقیق برای این مساله پرداخت.

دیودی و همکاران [۴۶] بررسی ارتعاشات آزاد تیر با هسته الاستومر مگنتورئولوژیکال به وسیله روش گالرکین را در دستور کار قرار داد.

نی و بینگ [۴۷] به بررسی ارتعاشات آزاد تیرهای ساندویچی با الاستومر مگنتورئولوژیکال در لایه وسط پرداختند.

نایاک و همکاران [۲۳] رفتار ارتعاشی آزاد و اجباری تیر ساندویچی سه لایه با لایه میانی الاستومر مگنتورئولوژیکال را با استفاده از روش المان محدود مورد بررسی قرار دادند.

ژوو و وانگ [۴۸] یک عملگر هوشمند جدید با خواص قابل کنترل بر پایه‌ی الاستومر مگنتورئولوژیکال طراحی کردند که در آن لایه الاستومر مگنتورئولوژیکال در انتهای تیر در شرایط مرزی قرار گرفته و ارتعاشات تیر را کنترل می‌کند.

### ۱-۶- نوآوری

همان طور که اشاره شد، بررسی میکروتیر تحت تحریک همزمان پیزوالکتریک و الکترواستاتیک بسیار مورد توجه محققان بوده است و در پژوهش‌های زیادی به بررسی رفتار دینامیکی این سیستم‌ها پرداخته شده است. بررسی‌ها نشان می‌دهد، برای کنترل ارتعاشات این سیستم‌ها تا کنون از لایه الاستومر مگنتورئولوژیکال در شرط مرزی انتهایی میکروتیر استفاده نشده است. همچنین در این پژوهش برای اولین بار از تئوری تنش-کوپل اصلاح شده برای این سیستم مورد استفاده قرار گرفته است.

در این پژوهش با در نظر گرفتن میکروتیر یکسر گیردار، به بررسی تاثیرات اعمال میدان مغناطیسی و تاثیر پارامتر مقیاس طول بر روی رفتار غیر خطی استاتیکی، دینامیکی، فرکانس طبیعی پرداخته شده است.

## ۱-۷- تعریف مساله

در این پژوهش به تحلیل استاتیکی، فرکانس طبیعی، ولتاژ پولین و پاسخ دینامیکی یک میکروتیر یکسر گیردار تحت تحریک پیزوالکتریک و الکترواستاتیک که سر آزاد آن به لایه الاستومر مگنتورئولوژیکال متصل است با استفاده از دو روش مدل سازی مورد بررسی قرار گرفته است. در مدل اول فرض می شود که لایه الاستومر مگنتو رئولوژیکال در مود برشی و در مدل دوم لایه الاستومر در مود فشاری به میکروتیر متصل شده است. در هر دو مدل سازی از یک فنر با سختی معادل به جای لایه الاستومر مگنتورئولوژیکال استفاده شده که به وسیله تابع دیراگ در معادلات حرکت ظاهر شده اند. در این پژوهش ابتدا معادلات حرکت غیر خطی بر اساس تئوری تنش-کوپل اصلاح شده با استفاده از اصل هامیلتون استخراج می شود. سپس معادلات دیفرانسیل حاکم بر تغییر شکل استاتیکی و ارتعاش آزاد حول موقعیت استاتیکی سیستم، به کمک روش گالرکین حل می شوند و سپس معادله دینامیکی غیر خطی با استفاده از روش مقیاس چندگانه بررسی می شوند.

## فصل ۲: مدل سازی و استخراج معادلات

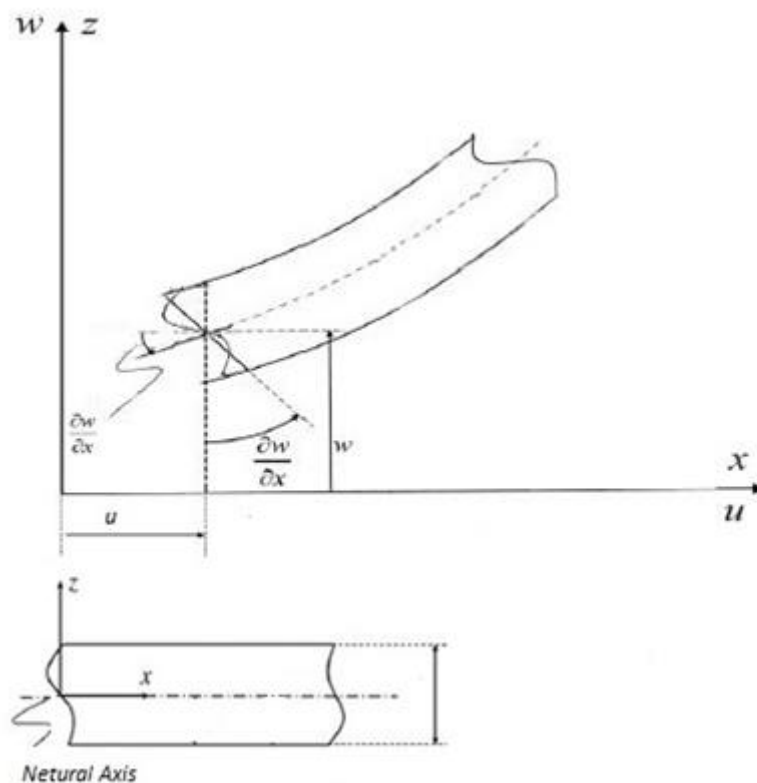
## ۱-۲- مقدمه

شکل (۱-۲) نشان دهنده‌ی یک المان برای میکروتیر می‌باشد. همان طور که در این شکل مشاهده می‌کنید جابه‌جایی اولیه  $w$  و  $u$  برای میکروتیر در نظر گرفته شده که به ترتیب در جهت محورهای  $x$  و  $y$  می‌باشند.

بر اساس نظریه مدل تیر اویلر برنولی مؤلفه‌های بردار جابه‌جایی به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\begin{aligned} u_1 &= u(x, t) - z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \\ u_2 &= 0 \\ u_3 &= w(x, t) \end{aligned} \quad (1-2)$$

که در آن  $u_1$ ،  $u_2$  و  $u_3$  به ترتیب جابه‌جایی در جهت محورهای  $x$ ،  $y$  و  $z$  هستند.



شکل (۱-۲) جابه‌جایی طولی و عرضی المان میکروتیر و دستگاه مختصات [۴۹].



در استخراج کرنش به جای استفاده از معادله (۸-۱)، با جایگذاری معادله (۲-۱) در معادله کرنش

غیر خطی ون کارمن، تنها مؤلفه غیر صفر  $\varepsilon_{ij}$  به صورت رابطه زیر به دست خواهد آمد [۴۹]:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (2-2)$$

با جایگذاری معادله (۲-۲) در معادله (۱۰-۱) مؤلفه‌های غیر صفر تانسور  $\chi_{ij}$  به صورت زیر محاسبه

می‌شوند:

$$\chi_{12} = \chi_{21} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3-2)$$

مؤلفه‌ی غیر صفر تنش کلاسیک برای میکروتیر  $\sigma_b$  و پیزوالکتریک  $\sigma_p$ ، به ترتیب با جایگذاری

معادله (۲-۲) در معادلات (۱۱-۱) و (۳-۱) به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\sigma_b = E_b \left( \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \quad (4-2)$$

$$\sigma_p = E_p \left( \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) - 2E_p d_{31} \frac{P}{t_p} \quad (5-2)$$

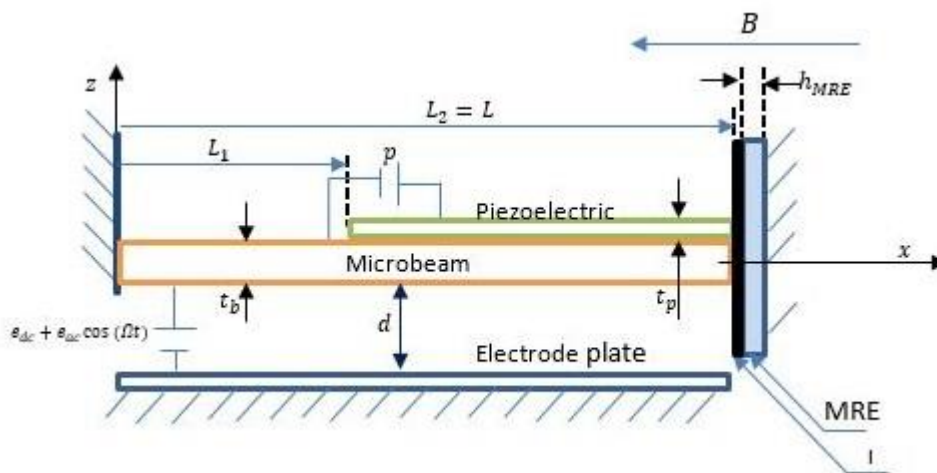
مؤلفه‌های غیر صفر تنش غیر کلاسیک برای میکروتیر و پیزوالکتریک، با جایگذاری معادله (۳-۲)

در معادله (۹-۱) به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$m_{12} = m_{21} = -\mu l^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (6-2)$$

## ۲-۲- مدل سازی اول و استخراج معادلات حاکم بر این مدل سازی

شکل (۲-۲) ساختار و موقعیت اجزای سیستم را در مدل سازی اول نشان می دهد. همان طور که در این شکل مشاهده می شود در این مدل لایه ی الاستومر مگنتورئولوژیکال در مود برش به سر آزاد میکروتیر توسط صفحه نارسانا I متصل شده و انتهای لایه ی پیزوالکتریک در انتهای میکروتیر قرار دارد. در این پژوهش جرم صفحه I کوچک و قابل صرف نظر می باشد. مطابق با این شکل،  $t_p$ ،  $t_b$  و  $h_{MRE}$  به ترتیب ضخامت سطح مقطع میکروتیر و لایه پیزوالکتریک و لایه الاستومر مگنتورئولوژیکال می باشند. همچنین  $L_1$  بیان گر فاصله ابتدای میکروتیر تا ابتدای لایه ی پیزوالکتریک است و  $L_2$  که بیان گر فاصله ابتدای میکروتیر تا انتهای لایه ی پیزوالکتریک است در این مدل برابر طول میکروتیر می باشد.



شکل (۲-۲) شکل هندسی سیستم مدل اول

با توجه به استفاده از اصل هامیلتون در استخراج معادلات حرکت، ابتدا باید انرژی جنبشی و پتانسیل و نیروی خارجی محاسبه شود. با صرف نظر از ترم اینرسی چرخشی، انرژی جنبشی سیستم، به صورت زیر بیان می گردد:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L m_0(x) (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dx \quad (7-2)$$

در رابطه (۷-۲)، علامت " $\dot{\phantom{x}}$ " نشان گر مشتق نسبت به زمان و  $m_0(x)$  جرم بر واحد طول سیستم

می باشد که با توجه به وجود لایه پیزوالکتریک بر روی میکروتیر، جرم سیستم مورد بررسی، مجموعی از این دو المان است. در نتیجه  $m(x)$  به صورت زیر تعریف می شود.

$$m_0(x) = w_b (\rho_b t_b + (H_{L_1} - H_{L_2}) \rho_p t_p) \quad (۸-۲)$$

در این رابطه،  $w_b$  بیان گر ضخامت میکروتیر و پیزوالکتریک می باشد. همچنین  $\rho_b$  و  $\rho_p$  به ترتیب نشان دهنده ی چگالی جرمی میکروتیر و پیزوالکتریک می باشند. با توجه به این که لایه ی پیزوالکتریک تنها بر روی قسمتی از میکروتیر نصب شده، از تابع پله<sup>۱</sup> که به صورت زیر تعریف شده، استفاده می شود:

$$H_{L_i} = \text{Heaviside function}(x - L_i) = \begin{cases} 1 & x \geq L_i \\ 0 & x < L_i \end{cases} \quad i = 1, 2 \quad (۹-۲)$$

با توجه به این که لایه پیزوالکتریک کل طول میکروتیر را نمی پوشاند، در بخش هایی از میکروتیر که لایه پیزوالکتریک وجود ندارد محور خنثی منطبق بر محور میانی سطح مقطع میکروتیر می باشد و در قسمتی که پیزوالکتریک بر روی میکرو تیر قرار دارد، محور خنثی در فاصله  $z_n$  از محور میانی قرار می گیرد، که این فاصله به صورت زیر محاسبه می شود [۱۳].

$$\int_{-\frac{t_b}{2}-z_n}^{\frac{t_b}{2}-z_n} E_b z dz + \int_{\frac{t_b}{2}-z_n}^{\frac{t_b}{2}-z_n+t_p} E_p z dz = 0 \Rightarrow z_n = \frac{E_p t_p (t_p + t_b)}{2(E_b t_b + E_p t_p)} \quad (۱۰-۲)$$

برای به دست آوردن انرژی پتانسیل سیستم براساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده، با تعمیم رابطه (۶-۱) برای دو ماده شامل میکروتیر و لایه ی پیزوالکتریک، انرژی پتانسیل روی حجم کل سیستم مورد بررسی به صورت زیر بیان می شود:

$$U = \frac{1}{2} \int (\sigma_b \varepsilon + [m_{ij}]_b \chi_{ij}) dv_b + \frac{1}{2} \int (\sigma_p \varepsilon + [m_{ij}]_p \chi_{ij}) dv_p \quad (۱۱-۲)$$

بسط رابطه فوق به صورت زیر بیان می شود:

<sup>1</sup> Heaviside function

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-\frac{t_b}{2}}^{\frac{t_b}{2}} (1 - H_{L_1}) (\sigma_b \varepsilon + [m_{ij}]_b \chi_{ij}) w_b dz dx \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-\frac{t_b}{2} - z_n}^{\frac{t_b}{2} - z_n} (H_{L_1} - H_{L_2}) (\sigma_b \varepsilon + [m_{ij}]_b \chi_{ij}) w_b dz dx \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-\frac{t_b}{2} - z_n}^{\frac{t_b}{2} - z_n + t_p} (H_{L_1} - H_{L_2}) (\sigma_p \varepsilon + [m_{ij}]_p \chi_{ij}) w_b dz dx \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-\frac{t_b}{2}}^{\frac{t_b}{2}} H_{L_2} (\sigma_b \varepsilon + [m_{ij}]_b \chi_{ij}) w_b dz dx
\end{aligned} \tag{۱۲-۲}$$

با قرار دادن روابط (۲-۲)، (۳-۲)، (۴-۲)، (۵-۲) و (۶-۲) در رابطه (۱۲-۲) و سپس اضافه نمودن

انرژی الاستیک ناشی از لایه الاستومر مگنتورئولوژیکال، انرژی پتانسیل کل سیستم بر اساس تئوری

تنش کوپل اصلاح شده به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-\frac{t_b}{2}}^{\frac{t_b}{2}} (1 - H_{L_1}) \left( E_b \left( \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \mu_b l_b^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right) w_b dz dx \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-\frac{t_b}{2} - z_n}^{\frac{t_b}{2} - z_n} (H_{L_1} - H_{L_2}) \left( E_b \left( \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \mu_b l_b^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right) w_b dz dx \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-\frac{t_b}{2} - z_n}^{\frac{t_b}{2} - z_n + t_p} (H_{L_1} - H_{L_2}) \left( E_p \left( \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right)^2 \right. \\
&\quad - 2E_p d_{31} \frac{p}{t_p} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \\
&\quad \left. + \mu_p l_p^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right) w_b dz dx \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-\frac{t_b}{2}}^{\frac{t_b}{2}} H_{L_2} \left( E_b \left( \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \mu_b l_b^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right) w_b dz dx + \frac{1}{2} k_v (w(L, t))^2
\end{aligned} \tag{۱۳-۲}$$

که  $l_p$  و  $l_b$  به ترتیب بیان گر پارامتر مقیاس طولی مربوط به میکروتیر و پیزوالکتریک می باشند.

همچنین  $\mu_p$  و  $\mu_b$  به ترتیب نمایان گر ثابت لامه مربوط به میکروتیر و پیزوالکتریک می باشند.

حال با باز کردن اتحاد جملات در معادله (۲-۱۳) و به دنبال آن جداسازی آن ها، و در انتها حذف

جمله هایی که حاصل صفر دارند، رابطه ی نهایی برای انرژی پتانسیل کل به صورت زیر حاصل می شود:

$$\begin{aligned}
 U = & \frac{1}{2} \int_0^L C_\zeta(x) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L C_\eta(x) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx \\
 & - \int_0^L C_\alpha(x) p \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) dx + \int_0^L C_\gamma(x) p \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^L k_v w^2 \text{Dirac}(x-L) dx
 \end{aligned} \tag{۲-۱۴}$$

که در آن

$$\begin{aligned}
 C_\zeta(x) = & (1 - H_{L_1}) E_b A_b + (H_{L_1} - H_{L_2}) (E_b A_b + E_p A_p) + H_{L_2} E_b A_b \\
 C_\eta(x) = & (1 - H_{L_1}) (E_b I_b + \mu_b l_b^2 A_b) \\
 & + (H_{L_1} - H_{L_2}) (E_b \bar{I}_b + \mu_b l_b^2 A_b + E_p I_p + \mu_p l_p^2 A_p) \\
 & + H_{L_2} (E_b I_b + \mu_b l_b^2 A_b)
 \end{aligned} \tag{۲-۱۵}$$

$$C_\alpha(x) = (H_{L_1} - H_{L_2}) \frac{E_p A_p d_{31}}{t_p}$$

$$C_\gamma(x) = (H_{L_1} - H_{L_2}) \frac{E_p \bar{A}_p d_{31}}{t_p}$$

و پارامترها در معادله بالا، در (۲-۱۶) آمده است.

$$\begin{aligned}
 A_b = & w_b t_b, \quad A_p = w_p t_p, \quad \bar{A}_p = \frac{w_b}{2} (t_p^2 + t_p t_b - 2t_p z_n), \\
 I_b = & \frac{1}{12} w_b t_b^3, \quad \bar{I}_b = \frac{1}{12} w_b t_b^3 + t_b w_b z_n^2 \\
 I_p = & w_b \left( \frac{1}{3} (t_p^3 + \frac{3}{2} t_b t_p^2 + \frac{3}{4} t_p t_b^2) + t_p z_n^2 - (t_p^2 + t_b t_p) z_n \right)
 \end{aligned} \tag{۲-۱۶}$$

نیروهای خارجی که به سیستم وارد می شود شامل نیروی الکترواستاتیک و نیروی میرایی است.

نیروی الکترواستاتیک از رابطه (۱-۱) که در فصل اول گفته شد، به دست می آید. نیروی میرایی ناشی

از ویسکوزیته هوا  $\ell$ ، می باشد که از رابطه زیر به دست می آید:

$$F_a = -cw \tag{۱۷-۲}$$

پس نیروی خارجی به صورت مجموع دو نیروی الکترواستاتیک و نیروی میرایی به صورت زیر به دست می آید [۳۶]:

$$Q = -cw - \frac{1}{2} \epsilon_0 w_b \frac{(e_{dc} + e_{ac} \cos(\Omega t))^2}{(d+w)^2} \tag{۱۸-۲}$$

حال با در نظر گرفتن روابط داده شده برای  $T$ ،  $U$  و  $Q$ ، سپس اعمال آن‌ها در رابطه هامیلتون، معادله حاکم و شرایط مرزی سیستم مورد بررسی براساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده به دست خواهند آمد. رابطه هامیلتون به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U + \int_0^L Q \delta W ds) dt = 0 \tag{۱۹-۲}$$

به منظور انجام عملیات وریشنال گیری در رابطه هامیلتون (۱۹-۲)، برای هر یک از ترم‌ها به صورت جداگانه عمل می شود.

وریشنال انرژی جنبشی برابر خواهد بود با:

$$\delta T = \int_0^L m_0(x) \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial(\delta u)}{\partial t} dx + \int_0^L m_0(x) \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial(\delta w)}{\partial t} dx \tag{۲۰-۲}$$

وریشنال انرژی پتانسیل نیز به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} \delta U = & \int_0^L \left( C_\zeta(x) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) - C_\alpha(x) p \right) \frac{\partial(\delta u)}{\partial x} dx \\ & + \int_0^L \left( C_\zeta(x) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) - C_\alpha(x) p \right) \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial(\delta w)}{\partial x} dx \\ & + \int_0^L \left( C_\eta(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + C_\gamma(x) p \right) \frac{\partial^2(\delta w)}{\partial x^2} dx \\ & + \int_0^L k_v w \text{Dirac}(x-L) \delta w dx \end{aligned} \tag{۲۱-۲}$$

با جایگذاری روابط (۱۸-۲)، (۲۱-۲) و (۲۰-۲) در رابطه (۱۹-۲) و سپس محاسبه انتگرال‌های

جزء به جزء رابطه‌ای به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left( -m_0(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left( C_\zeta(x) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \right) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\partial}{\partial x} (C_\alpha(x) p) \right) \delta u dx dt \\
 & + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left( -m_0(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left( C_\zeta(x) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 \right) \right) \right. \\
 & \quad - \frac{\partial}{\partial x} \left( C_\alpha(x) \frac{\partial w}{\partial x} p \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( C_\eta(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\
 & \quad - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (C_\gamma(x) p) - k_{v,w} \text{Dirac}(x-L) \\
 & \quad \left. - \frac{1}{2} \varepsilon_0 w_b \frac{(e_{dc} + e_{ac} \cos(\Omega t))^2}{(d+w)^2} \right) \delta w dx dt \tag{۲۲-۲} \\
 & - \int_{t_1}^{t_2} \left( C_\zeta(x) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) - C_\alpha(x) p \right) \delta u \Big|_0^L dx \\
 & + \int_{t_1}^{t_2} \left( -C_\zeta(x) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 \right) + C_\alpha(x) \frac{\partial w}{\partial x} p \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\partial}{\partial x} \left( C_\eta(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + C_\gamma(x) p \right) \right) \delta w \Big|_0^L dx = 0
 \end{aligned}$$

در رابطه فوق، با برابر صفر قرار دادن ضرایب  $\delta u$  و  $\delta w$  به صورت جداگانه، به ترتیب معادلات

حرکت کوپل طولی و عرضی میکروتیر به دست می‌آیند:

$$-m_0(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left( C_\zeta(x) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \right) - \frac{\partial}{\partial x} (C_\alpha(x) p) = 0 \tag{۲۳-۲}$$

$$\begin{aligned}
 & m_0(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( C_\zeta(x) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( C_\alpha(x) \frac{\partial w}{\partial x} p \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( C_\eta(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\
 & + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (C_\gamma(x) p) + \frac{1}{2} \varepsilon_0 w_b \frac{(e_{dc} + e_{ac} \cos(\Omega t))^2}{(d+w)^2} + k_{v,w} \text{Dirac}(x-L) = 0
 \end{aligned} \tag{۲۴-۲}$$

و همچنین با توجه به رابطه (۲۲-۲) شرایط مرزی به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
 & u(0,t) = u(L,t) = 0 \\
 & w(0,t) = 0, \quad \frac{\partial^3 w(L,t)}{\partial x^3} = 0 \\
 & \frac{\partial w(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial w(L,t)}{\partial x} = 0
 \end{aligned} \tag{۲۵-۲}$$

به منظور سهولت در بررسی و تحلیل سیستم و یکنواختی معادله حرکت با سایر معادلات، از معادلات بی بعد شده استفاده می‌شود. برای بی بعد سازی معادلات (۲۳-۲) و (۲۴-۲) از تغییر متغیرهای زیر استفاده می‌شود:

$$\hat{u} = \frac{u}{d}, \quad \hat{w} = \frac{w}{d}, \quad \hat{x} = \frac{x}{L}, \quad \hat{t} = \frac{t}{T}, \quad T = \sqrt{\frac{\rho_b t_b w_b L^4}{E_b I_b}} \quad (26-2)$$

با جایگذاری متغیرهای موجود در رابطه (۲۶-۲) در معادلات (۲۳-۲) و (۲۴-۲)، به ترتیب معادلات حرکت کوپل طولی و عرضی سیستم بی بعد شده و به معادلات (۲۷-۲) و (۲۸-۲) تبدیل می‌شوند.

$$\frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left( H_\zeta(\hat{x}) \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} \right) - \alpha_1^u M(\hat{x}) \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{t}^2} + \alpha_2^u \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left( H_\zeta(\hat{x}) \left( \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} \right)^2 \right) - \alpha_3^u p \frac{\partial}{\partial \hat{x}} (H_p(\hat{x})) = 0 \quad (27-2)$$

$$\hat{u}(0, t) = 0, \quad \hat{u}(1, t) = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2} \left( H_\eta(\hat{x}) \frac{\partial^3 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2} \right) + M(\hat{x}) \frac{\partial^3 \hat{w}}{\partial \hat{t}^2} + c \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{t}} + \alpha_1^w p \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left( H_p(\hat{x}) \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} \right) - \alpha_2^w \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left( H_\zeta(\hat{x}) \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} \right) - \alpha_3^w \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left( H_\zeta(\hat{x}) \left( \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} \right)^3 \right) + \alpha_4^w p \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2} (H_p(\hat{x})) + \alpha_5^w \frac{(e_{dc} + e_{ac} \cos(\hat{\Omega} \hat{t}))^2}{(1 + \hat{w})^2} + \beta_w w \text{Dirac}(\hat{x} - 1) = 0 \quad (28-2)$$

$$\hat{w}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial^3 \hat{w}}{\partial \hat{x}^3}(1, t) = 0, \quad \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}}(1, t) = 0$$

پارامترهایی که در معادلات (۲۷-۲) و (۲۸-۲) ظاهر شده‌اند با مقادیر زیر تعریف می‌شوند.



$$H_{\frac{L_i}{L}} = \text{Heaviside function} \left( \hat{x} - \frac{L_i}{L} \right) = \begin{cases} 1 & \hat{x} \geq \frac{L_i}{L} \\ 0 & \hat{x} \leq \frac{L_i}{L} \end{cases} \quad i = 1, 2$$

$$M(\hat{x}) = 1 + \frac{\rho_p t_p}{\rho_b t_b} \left( H_{\frac{L_1}{L}} - H_{\frac{L_2}{L}} \right),$$

$$H_\zeta(\hat{x}) = \left( 1 - H_{\frac{L_1}{L}} \right) + \left( H_{\frac{L_1}{L}} - H_{\frac{L_2}{L}} \right) \left( 1 + \frac{E_p A_p}{E_b A_b} \right) + H_{\frac{L_2}{L}},$$

$$H_\eta(\hat{x}) = \left( 1 - H_{\frac{L_1}{L}} \right) \left( 1 + 12 \frac{\mu_b}{E_b} \left( \frac{l_b}{t_b} \right)^2 \right) + \left( H_{\frac{L_1}{L}} - H_{\frac{L_2}{L}} \right) \left( \frac{\bar{l}_b}{I_b} + \frac{E_p I_p}{E_b I_b} + 12 \frac{\mu_b}{E_b} \left( \frac{l_b}{t_b} \right)^2 + 12 \frac{\mu_p}{E_b} \left( \frac{l_p}{t_p} \right)^2 \left( \frac{t_p}{t_b} \right)^3 \right) + H_{\frac{L_2}{L}} \left( 1 + 12 \frac{\mu_b}{E_b} \left( \frac{l_b}{t_b} \right)^2 \right) \quad (29-2)$$

$$H_p(\hat{x}) = \left( H_{\frac{L_1}{L}} - H_{\frac{L_2}{L}} \right)$$

$$\alpha_1^u = \frac{I_b}{A_b L^2}, \quad \alpha_2^u = \frac{1}{2} \frac{d}{L}, \quad \alpha_3^u = \frac{L d_{31} E_p A_p}{t_p E_b A_b d},$$

$$\alpha_1^w = \frac{L^2 E_p A_p d_{31}}{E_b I_b t_p}, \quad \alpha_2^w = \frac{L A_b d}{I_b}, \quad \alpha_3^w = \frac{A_b d^2}{2 I_b}, \quad \alpha_4^w = \frac{L^2 E_p \bar{A}_p d_{31}}{E_b I_b t_p d},$$

$$\alpha_5^w = \frac{\varepsilon_0 w_b L^4}{2 E_b I_b d^3}, \quad \hat{c} = \frac{c L^4}{E_b I_b T}, \quad \beta_v = \frac{k_v L^4}{E_b I_b}$$

از این پس در این متن برای ساده نوشتن روابط و جلوگیری از اشتباه، به جای  $\hat{u}$  و  $\hat{w}$  از  $u$  و  $w$  استفاده می‌شود.

با توجه به این که تیر مورد بررسی در این پایان نامه نازک فرض شده است، فرکانس طبیعی محوری سیستم خیلی بزرگ‌تر از فرکانس طبیعی عرضی آن می‌باشد. در نتیجه جمله اینرسی در راستای طولی، قابل چشم‌پوشی می‌باشد [۵۰]. با در نظر گرفتن این فرض، معادله حرکت طولی سیستم در (۲۷-۲) به معادله (۳۰-۲) کاهش می‌یابد.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( H_\zeta(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \alpha_2^u \frac{\partial}{\partial x} \left( H_\zeta(x) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) - \alpha_3^u p \frac{\partial}{\partial x} (H_p(x)) = 0 \quad (30-2)$$

با انتگرال گیری از معادله بالا نسبت به  $x$  نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\alpha_2'' \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \alpha_3'' p \frac{H_p(x)}{H_\zeta(x)} + \frac{H_1(t)}{H_\zeta(x)} \quad (31-2)$$

که در آن  $H_1(t)$  ثابت انتگرال گیری است و تنها ممکن است تابعی از زمان باشد. به منظور دست یابی به مقدار  $H_1(t)$  شرایط مرزی حرکت محوری میکروتیر مورد نیاز می باشد. پس با انتگرال گیری از معادله (31-2) نسبت به  $x$  در بازه 0 تا 1 نتیجه می شود:

$$u(1) - u(0) = -\alpha_2'' \int_0^1 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx + \alpha_3'' p \int_0^1 \frac{H_p(x)}{H_\zeta(x)} dx + \int_0^1 \frac{H_1(t)}{H_\zeta(x)} dx \quad (32-2)$$

حال با جایگذاری شرایط مرزی ارتعاشات طولی از معادله (25-2) و (27-2) در معادله (32-2) به دست می آید:

$$H_1(t) = \alpha_2'' B_1 \int_0^1 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx - \alpha_3'' B_2 p$$

$$B_1 = \frac{\left( 1 + \frac{E_p t_p}{E_b t_b} \right)}{\left( 1 + \frac{E_p t_p}{E_b t_b} \right) \left( 1 - \frac{L_2 - L_1}{L} \right) + \frac{L_2 - L_1}{L}} \quad (33-2)$$

$$B_2 = \frac{\frac{L_2 - L_1}{L}}{\left( 1 + \frac{E_p t_p}{E_b t_b} \right) \left( 1 - \frac{L_2 - L_1}{L} \right) + \frac{L_2 - L_1}{L}}$$

با استفاده از معادله (33-2) و جایگذاری  $\frac{\partial u}{\partial x}$  از معادله (31-2) در معادله (28-2)، معادله حرکت

ارتعاشات عرضی سیستم به صورت مستقل از ارتعاشات طولی به دست می آید:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( H_\eta(x) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2} \right) + M(x) \frac{\partial^3 w}{\partial t^2} + c \frac{\partial w}{\partial t} + \left( \alpha_1'' B_2 p - \alpha_3'' B_1 \int_0^1 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \alpha_4'' p \frac{\partial^2}{\partial x^2} (H_p(x))$$

$$+ \alpha_5'' \frac{(e_{dc} + e_{ac} \cos(\Omega t))^2}{(1+w)^2} + \beta_v w \text{ Dirac}(x-1) = 0 \quad (34-2)$$

$$w(0,t) = 0, \quad \frac{\partial^3 w(1,t)}{\partial x^3} = 0, \quad \frac{\partial w(0,t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w(1,t)}{\partial x} = 0$$

با برابر صفر قراردادن مشتق جابه جایی نسبت به زمان در معادله (27-2)، معادله دیفرانسیل حاکم

بر موقعیت استاتیکی به صورت زیر به دست می آید:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( H_\eta(x) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \right) + \left( \alpha_1^w B_2 p - \alpha_3^w B_1 \int_0^1 \left( \frac{\partial w_s}{\partial x} \right)^2 dx \right) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \alpha_4^w p \frac{\partial^2}{\partial x^2} (H_p(x)) + \alpha_5^w \frac{(e_{dc})^2}{(1+w_s)^2} + \beta_1 w_s \text{Dirac}(x-1) = 0 \quad (35-2)$$

$$w_s|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial w_s}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial w_s}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0, \quad \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} \Big|_{x=1} = 0$$

در سیستم مورد بررسی، با اعمال دو ولتاژ ثابت  $e_{dc}$  ناشی از تحریک الکترواستاتیک و  $p$  ناشی از تحریک پیزوالکتریک، میکرو تیر تغییر شکل استاتیکی پیدا می کند و سپس توسط ولتاژ تحریک کوچک  $e_{ac}$  ناشی از تحریک الکترواستاتیک، سیستم حول موقعیت تعادلی ناشی از تحریکات  $dc$  که از حل معادله (۳۵-۲) به دست می آید، ارتعاش خواهد کرد. در این صورت جابه جایی کل سیستم  $W$  از دو بخش تغییر شکل استاتیکی  $w_s$  و تغییر شکل دینامیکی  $w_d$  تشکیل می شود:

$$w(x,t) = w_d(x,t) + w_s(x) \quad (36-2)$$

با جایگذاری معادله (۳۶-۲) در معادله (۳۴-۲) و با استفاده از بسط سری تیلور نیروی الکترواستاتیک حول موقعیت استاتیکی و استفاده از معادله (۳۵-۲) برای حذف جمله هایی که موقعیت استاتیکی را توصیف می کنند، معادله حرکت دینامیکی سیستم حول موقعیت استاتیکی به دست می آید:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( H_\eta(x) \frac{\partial^2 w_d}{\partial x^2} \right) + M(x) \frac{\partial^2 w_d}{\partial t^2} + c \frac{\partial w_d}{\partial t} + \left( \alpha_1^w B_2 p - \alpha_3^w B_1 \int_0^1 \left( \frac{\partial w_s}{\partial x} \right)^2 dx \right) \frac{\partial^2 w_d}{\partial x^2} =$$

$$2\alpha_3^w B_1 \left( \int_0^1 \left( \frac{\partial w_s}{\partial x} \frac{\partial w_d}{\partial x} \right) dx \right) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \alpha_3^w B_1 \left( \int_0^1 \left( \frac{\partial w_d}{\partial x} \right)^2 dx \right) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \alpha_3^w B_1 \left( \int_0^1 \left( \frac{\partial w_d}{\partial x} \right)^2 dx \right) \frac{\partial^2 w_d}{\partial x^2}$$

$$+ 2\alpha_3^w B_1 \left( \int_0^1 \left( \frac{\partial w_s}{\partial x} \frac{\partial w_d}{\partial x} \right) dx \right) \frac{\partial^2 w_d}{\partial x^2} + 2\alpha_5^w \frac{(e_{dc})^2}{(1+w_s)^3} w_d - 3\alpha_5^w \frac{(e_{dc})^2}{(1+w_s)^4} w_d^2 + 4\alpha_5^w \frac{(e_{dc})^2}{(1+w_s)^5} w_d^3 \quad (37-2)$$

$$- 2\alpha_5^w \frac{e_{ac} e_{ac} \cos(\Omega t)}{(1+w_s)^2} + 4\alpha_5^w \frac{e_{ac} e_{ac} \cos(\Omega t)}{(1+w_s)^3} w_d - \alpha_5^w \frac{(e_{ac} \cos(\Omega t))^2}{(1+w_s)^2} - \beta_w w_d \text{Dirac}(x-1)$$

$$w_d(0,t) = 0, \quad \frac{\partial w_d}{\partial x}(0,t) = 0, \quad \frac{\partial w_d}{\partial x}(1,t) = 0, \quad \frac{\partial^3 w_d}{\partial x^3}(1,t) = 0$$

از این پس در این پژوهش برای ساده نوشتن روابط و جلوگیری از اشتباه، به جای علامت  $w_d$  از علامت  $W$  استفاده شده است.

به منظور دستیابی به شکل مودهای خطی سیستم و فرکانس های طبیعی متناظر با آن، لازم است معادله دینامیکی سیستم حول موقعیت استاتیکی، خطی سازی گردد. در نتیجه با صفر قرار دادن

جمله‌های حاوی میرایی، تحریک  $e_{ac}$  و عبارات غیر خطی در معادله (۲-۳۷)، معادله ارتعاشات آزاد سیستم خطی نامیرا حول موقعیت استاتیکی به صورت زیر ایجاد خواهد شد:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( H_\eta(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + M(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \left( \alpha_1^w B_2 p - \alpha_3^w B_1 \int_0^1 \left( \frac{\partial w_s}{\partial x} \right)^2 dx \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 2\alpha_3^w B_1 \left( \int_0^1 \left( \frac{\partial w_s}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx \right) \frac{d^2 w_s}{dx^2} + 2\alpha_5^w \frac{(e_{dc})^2}{(1+w_s)^3} w - \beta_w w \text{Dirac}(x-1) \quad (۲-۳۸)$$

$$w(0,t) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}(0,t) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}(1,t) = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(1,t) = 0$$

برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها می‌توان نوشت:

$$w(x,t) = \varphi(x) e^{i\omega t} \quad (۲-۳۹)$$

در این معادله،  $\varphi$  شکل مود خطی و  $\omega$  فرکانس طبیعی سیستم حول موقعیت استاتیکی می‌باشد.

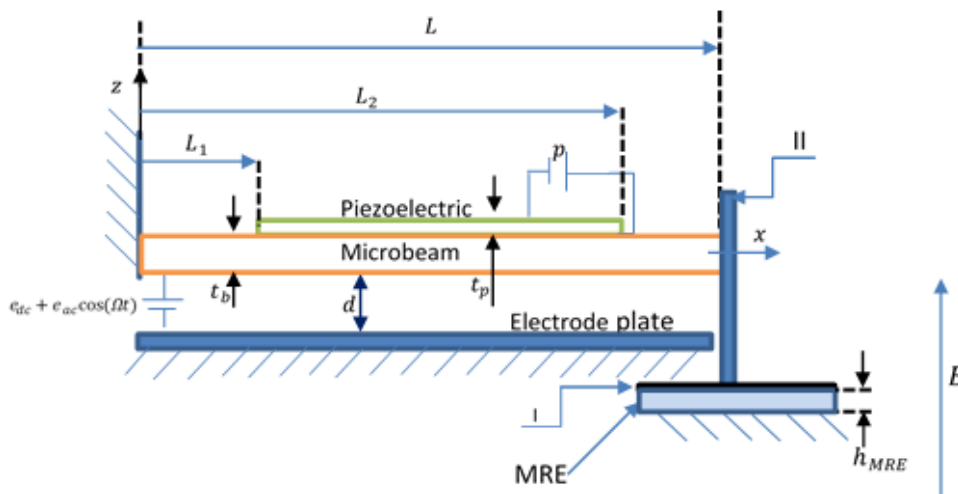
با جایگذاری معادله (۲-۳۹) در معادله (۲-۳۸)، معادله دیفرانسیل شکل مودها برای سیستم خطی حول موقعیت استاتیکی به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( H_\eta(x) \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right) + \left( \alpha_1^w B_2 p - \alpha_3^w B_1 \int_0^1 \left( \frac{dw_s}{dx} \right)^2 dx \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - 2\alpha_3^w B_1 \left( \int_0^1 \left( \frac{dw_s}{dx} \frac{d\varphi}{dx} \right) dx \right) \frac{d^2 w_s}{dx^2} - \left( 2\alpha_5^w \frac{(e_{dc})^2}{(1+w_s)^3} + M(x) \omega^2 - \beta_w \text{Dirac}(x-1) \right) \varphi = 0 \quad (۲-۴۰)$$

$$\varphi|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}|_{x=1} = 0, \quad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3}|_{x=1} = 0$$

## ۲-۳- مدل سازی دوم و استخراج معادلات حاکم در این مدل سازی

شکل (۲-۳) ساختار و موقعیت اجزای سیستم را در مدل سازی دوم نشان می‌دهد. همان طور که در این شکل مشاهده می‌شود در این مدل لایه‌ی الاستومر مگنتورئولوژیکیال در مود فشاری به سر آزاد میکروتیر توسط دو صفحه نارسانا I و II متصل شده و لایه‌ی پیزوالکتریک به صورت متقارن بر روی میکروتیر قرار دارد. در این پژوهش جرم صفحات I و II کوچک و قابل صرف نظر می‌باشند.



شکل (۲-۳) شکل هندسی سیستم مدل دوم

به دلیل یکسان بودن روند استخراج ترم‌های جنبشی، پتانسیل و کار خارجی با مدل سازی اول، فقط به بیان این جملات به صورت شکل نهایی و ساده شده به صورت معادلات زیر اکتفا می‌شود.

انرژی جنبشی عبارتست از:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L m_0(x) (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dx \quad (۲-۴۱)$$

انرژی پتانسیل عبارتست از:

$$\begin{aligned}
 U = & \frac{1}{2} \int_0^L \left( C_\zeta(x) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L C_\eta(x) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx \right. \\
 & - \int_0^L C_\alpha(x) p \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) dx + \int_0^L C_\gamma(x) p \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx \\
 & \left. + \frac{1}{2} \int_0^L k_h u^2 \text{Dirac}(x-L) dx \right) \quad (42-2)
 \end{aligned}$$

که در آن

$$\begin{aligned}
 C_\zeta(x) = & (1 - H_{L_1}) E_b A_b + (H_{L_1} - H_{L_2}) (E_b A_b + E_p A_p) + H_{L_2} E_b A_b \\
 C_\eta(x) = & (1 - H_{L_1}) (E_b I_b + \mu_b l_b^2 A_b) \\
 & + (H_{L_1} - H_{L_2}) (E_b \bar{I}_b + \mu_b l_b^2 A_b + E_p I_p + \mu_p l_p^2 A_p) \\
 & + H_{L_2} (E_b I_b + \mu_b l_b^2 A_b) \\
 C_\alpha(x) = & (H_{L_1} - H_{L_2}) \frac{E_p A_p d_{31}}{t_p} \\
 C_\gamma(x) = & (H_{L_1} - H_{L_2}) \frac{E_p \bar{A}_p d_{31}}{t_p} \quad (43-2)
 \end{aligned}$$

و پارامترها در معادله بالا، در (44-2) آمده است.

$$\begin{aligned}
 A_b = & w_b t_b, \quad A_p = w_p t_p, \quad \bar{A}_p = \frac{w_b}{2} (t_p^2 + t_p t_b - 2t_p z_n), \\
 I_b = & \frac{1}{12} w_b t_b^3, \quad \bar{I}_b = \frac{1}{12} w_b t_b^3 + t_b w_b z_n^2 \\
 I_p = & w_b \left( \frac{1}{3} (t_p^3 + \frac{3}{2} t_b t_p^2 + \frac{3}{4} t_p t_b^2) + t_p z_n^2 - (t_p^2 + t_b t_p) z_n \right) \quad (44-2)
 \end{aligned}$$

کار خارجی عبارتست از:

$$Q = -cw - \frac{1}{2} \epsilon_0 w_b \frac{(e_{dc} + e_{ac} \cos(\Omega t))^2}{(d+w)^2} \quad (45-2)$$

حال بر اساس اصل هامیلتون معادلات حاکم بر مدل دوم به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} \left( H_\zeta(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \alpha_1'' M(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha_2'' \frac{\partial}{\partial x} \left( H_\zeta(x) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) - \alpha_3'' p \frac{\partial}{\partial x} (H_p(x)) - \beta_h u \text{Dirac}(x-1) = 0 \\
 u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u(1,t)}{\partial x} = 0 \quad (46-2)
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( H_\eta(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + M(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c \frac{\partial w}{\partial t} + \alpha_1^w p \frac{\partial}{\partial x} \left( H_p(x) \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \alpha_2^w \frac{\partial}{\partial x} \left( H_\zeta(x) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \alpha_3^w \frac{\partial}{\partial x} \left( H_\zeta(x) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 \right) + \alpha_4^w p \frac{\partial^2}{\partial x^2} (H_p(x)) + \alpha_5^w \frac{(e_{dc} + e_{ac} \cos(\Omega t))^2}{(1+w)^2} = 0 \quad (47-2)$$

$$w(0,t) = 0, \quad w(L,t) = 0, \quad \frac{\partial w(0,t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w(L,t)}{\partial x} = 0$$

پارامترهایی که در معادلات (۴۶-۲) و (۴۷-۲) ظاهر شده‌اند با مقادیر زیر تعریف می‌شوند.

$$H_{\frac{L_i}{L}} = \text{Heaviside function} \left( x - \frac{L_i}{L} \right) = \begin{cases} 1 & x \geq \frac{L_i}{L} \\ 0 & x \leq \frac{L_i}{L} \end{cases} \quad i = 1, 2$$

$$M(x) = 1 + \frac{\rho_p t_p}{\rho_b t_b} \left( H_{\frac{L_1}{L}} - H_{\frac{L_2}{L}} \right),$$

$$H_\zeta(x) = \left( 1 - H_{\frac{L_1}{L}} \right) + \left( H_{\frac{L_1}{L}} - H_{\frac{L_2}{L}} \right) \left( 1 + \frac{E_p A_p}{E_b A_b} \right) + H_{\frac{L_2}{L}},$$

$$H_\eta(x) = \left( 1 - H_{\frac{L_1}{L}} \right) \left( 1 + 12 \frac{\mu_b}{E_b} \left( \frac{l_b}{t_b} \right)^2 \right) + \left( H_{\frac{L_1}{L}} - H_{\frac{L_2}{L}} \right) \left( \frac{\bar{l}_b}{I_b} + \frac{E_p I_p}{E_b I_b} + 12 \frac{\mu_b}{E_b} \left( \frac{l_b}{t_b} \right)^2 + 12 \frac{\mu_p}{E_b} \left( \frac{l_p}{t_p} \right)^2 \left( \frac{t_p}{t_b} \right)^3 \right) + H_{\frac{L_2}{L}} \left( 1 + 12 \frac{\mu_b}{E_b} \left( \frac{l_b}{t_b} \right)^2 \right) \quad (48-2)$$

$$H_p(x) = \left( H_{\frac{L_1}{L}} - H_{\frac{L_2}{L}} \right)$$

$$\alpha_1^u = \frac{I_b}{A_b L^2}, \quad \alpha_2^u = \frac{1}{2} \frac{d}{L}, \quad \alpha_3^u = \frac{L d_{31} E_p A_p}{t_p E_b A_b d},$$

$$\alpha_1^w = \frac{L^2 E_p A_p d_{31}}{E_b I_b t_p}, \quad \alpha_2^w = \frac{L A_b d}{I_b}, \quad \alpha_3^w = \frac{A_b d^2}{2 I_b}, \quad \alpha_4^w = \frac{L^2 E_p \bar{A}_p d_{31}}{E_b I_b t_p d},$$

$$\alpha_5^w = \frac{\varepsilon_0 w_b L^4}{2 E_b I_b d^3}, \quad \hat{c} = \frac{c L^4}{E_b I_b T}, \quad \beta_h = \frac{k_h L^2}{E_b A_b}$$

با برابر صفر قراردادن مشتق جابه‌جایی در راستای  $x$  و  $z$  نسبت به زمان به ترتیب در معادلات

(۴۶-۲) و (۴۷-۲)، معادلات دیفرانسیل کوپل طولی و عرضی حاکم بر موقعیت استاتیکی به صورت زیر

به دست می‌آیند:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( H_{\zeta}(x) \frac{\partial u_s}{\partial x} \right) + \alpha_2^u \frac{\partial}{\partial x} \left( H_{\zeta}(x) \left( \frac{\partial w_s}{\partial x} \right)^2 \right) - \alpha_3^u p \frac{\partial}{\partial x} (H_p(x)) - \beta_n u_s \text{Dirac}(x-1) = 0$$

$$u_s|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u_s}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0 \quad (49-2)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( H_{\eta}(x) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \right) + \alpha_1^w p \frac{\partial}{\partial x} \left( H_p(x) \frac{\partial w_s}{\partial x} \right) - \alpha_2^w \frac{\partial}{\partial x} \left( H_{\zeta}(x) \frac{\partial u_s}{\partial x} \frac{\partial w_s}{\partial x} \right) - \alpha_3^w \frac{\partial}{\partial x} \left( H_{\zeta}(x) \left( \frac{\partial w_s}{\partial x} \right)^3 \right)$$

$$+ \alpha_4^w p \frac{\partial^2}{\partial x^2} (H_p(x)) + \alpha_5^w \frac{(e_{dc})^2}{(1+w_s)^2} = 0 \quad (50-2)$$

$$w_s|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial w_s}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial w_s}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0, \quad \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} \Big|_{x=1} = 0$$

جابه‌جایی کلی سیستم در هر راستا از دو بخش تغییر شکل استاتیکی و تغییر شکل دینامیکی

تشکیل می‌شود:

$$u(x,t) = u_d(x,t) + u_s(x)$$

$$w(x,t) = w_d(x,t) + w_s(x) \quad (51-2)$$

ابتدا با جایگذاری معادله (51-2) به ترتیب در هر یک از معادلات (49-2) و (50-2) و سپس با

استفاده از بسط سری تیلور نیروی الکترواستاتیک حول موقعیت استاتیکی و در انتها با استفاده از

معادلات (46-2) و (47-2) به ترتیب برای حذف جمله‌هایی که موقعیت استاتیکی را در راستای  $x$  و

$z$  را توصیف می‌کنند، معادلات کوپل حرکت دینامیکی سیستم حول موقعیت استاتیکی در دو راستای

طولی و عرضی به دست می‌آیند:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( H_{\zeta}(x) \frac{\partial u_d}{\partial x} \right) - \alpha_1^u M(x) \frac{\partial^2 u_d}{\partial t^2} = -2\alpha_2^u \frac{\partial}{\partial x} \left( H_{\zeta}(x) \left( \frac{\partial w_d}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial w_s}{\partial x} \right) \right) - \alpha_2^u \frac{\partial}{\partial x} \left( H_{\zeta}(x) \left( \frac{\partial w_d}{\partial x} \right)^2 \right)$$

$$+ \beta_n u_d \text{Dirac}(x-1) \quad (52-2)$$

$$u_d(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u_d(1,t)}{\partial x} = 0$$



$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( H_\eta(x) \frac{\partial^2 w_d}{\partial x^2} \right) + M(x) \frac{\partial^2 w_d}{\partial t^2} + c \frac{\partial w_d}{\partial t} = -\alpha_1^w p \frac{\partial}{\partial x} \left( H_p(x) \frac{\partial w_d}{\partial x} \right) + \alpha_2^w \frac{\partial}{\partial x} \left( H_\zeta(x) \frac{\partial u_d}{\partial x} \frac{\partial w_d}{\partial x} \right) \\ & + \alpha_2^w \frac{\partial}{\partial x} \left( H_\zeta(x) \frac{\partial u_d}{\partial x} \frac{\partial w_s}{\partial x} \right) + \alpha_2^w \frac{\partial}{\partial x} \left( H_\zeta(x) \frac{\partial u_s}{\partial x} \frac{\partial w_d}{\partial x} \right) + 3\alpha_3^w \frac{\partial}{\partial x} \left( H_\zeta(x) \left( \frac{\partial w_s}{\partial x} \right)^2 \left( \frac{\partial w_d}{\partial x} \right) \right) \\ & + 3\alpha_3^w \frac{\partial}{\partial x} \left( H_\zeta(x) \left( \frac{\partial w_d}{\partial x} \right)^2 \left( \frac{\partial w_s}{\partial x} \right) \right) + \alpha_3^w \frac{\partial}{\partial x} \left( H_\zeta(x) \left( \frac{\partial w_d}{\partial x} \right)^3 \right) + 2\alpha_5^w \frac{(e_{dc})^2}{(1+w_s)^3} w_d - 3\alpha_5^w \frac{(e_{dc})^2}{(1+w_s)^4} w_d^2 \quad (53-2) \\ & + 4\alpha_5^w \frac{(e_{dc})^2}{(1+w_s)^5} w_d^3 - 2\alpha_5^w \frac{e_{dc} e_{ac} \cos(\Omega t)}{(1+w_s)^2} + 4\alpha_5^w \frac{e_{dc} e_{ac} \cos(\Omega t)}{(1+w_s)^3} w_d - \alpha_5^w \frac{(e_{ac} \cos(\Omega t))^2}{(1+w_s)^2} \\ & w_d(0,t) = 0, \quad w_d(1,t) = 0, \quad \frac{\partial w_d(0,t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w_d(1,t)}{\partial x} = 0 \end{aligned}$$

به منظور دستیابی به شکل مودهای خطی سیستم و فرکانس‌های طبیعی متناظر با آن، لازم است معادلات کوپل دینامیکی طولی و عرضی سیستم حول موقعیت استاتیکی، خطی سازی گردد. در نتیجه با صفر قرار دادن جمله‌های حاوی میرایی و تحریک  $e_{ac}$  و جملات غیر خطی در معادلات (2-52) و (2-53) معادلات ارتعاشات آزاد کوپل طولی و عرضی سیستم خطی نامیرا حول موقعیت استاتیکی به صورت زیر ایجاد خواهند شد:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left( H_\zeta(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \alpha_1^u M(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\alpha_2^u \frac{\partial}{\partial x} \left( H_\zeta(x) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial w_s}{\partial x} \right) \right) - \beta_h u \text{Dirac}(x-1) = 0 \\ & u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u(1,t)}{\partial x} = 0 \quad (54-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( H_\eta(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + M(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \alpha_1^w p \frac{\partial}{\partial x} \left( H_p(x) \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \alpha_2^w \frac{\partial}{\partial x} \left( H_\zeta(x) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w_s}{\partial x} \right) \\ & - \alpha_2^w \frac{\partial}{\partial x} \left( H_\zeta(x) \frac{\partial u_s}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \right) - 3\alpha_3^w \frac{\partial}{\partial x} \left( H_\zeta(x) \left( \frac{\partial w_s}{\partial x} \right)^2 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) - 2\alpha_5^w \frac{(e_{dc})^2}{(1+w_s)^3} w = 0 \quad (55-2) \\ & w(0,t) = 0, \quad w(1,t) = 0, \quad \frac{\partial w(0,t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w(1,t)}{\partial x} = 0 \end{aligned}$$

برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} u &= \varphi_u(x) e^{i\omega t} \\ w &= \varphi_w(x) e^{i\omega t} \quad (56-2) \end{aligned}$$

در این معادلات،  $\varphi_u(x)$  و  $\varphi_w(x)$  به ترتیب شکل مود خطی در راستای طولی و عرضی هستند و  $\omega$  فرکانس طبیعی سیستم تغییر شکل یافته حول موقعیت استاتیکی می‌باشد. با جایگذاری معادله (2-56) در هر یک از معادلات (2-54) و (2-55)، معادلات دیفرانسیل کوپل طولی و عرضی شکل

مودها برای سیستم خطی حول موقعیت استاتیکی به صورت زیر به دست می آیند.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( H_{\zeta}(x) \frac{\partial \varphi_u}{\partial x} \right) + 2\alpha_2^u \frac{\partial}{\partial x} \left( H_{\zeta}(x) \left( \frac{\partial \varphi_w}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial w_s}{\partial x} \right) \right) + (\omega^2 \alpha_1^u M(x) - \beta_h \text{Dirac}(x-1)) \varphi_u = 0$$

$$\varphi_u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial \varphi_u(1,t)}{\partial x} = 0 \quad (57-2)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( H_{\eta}(x) \frac{\partial^2 \varphi_w}{\partial x^2} \right) + \alpha_1^w p \frac{\partial}{\partial x} \left( H_p(x) \frac{\partial \varphi_w}{\partial x} \right) - \alpha_2^w \frac{\partial}{\partial x} \left( H_{\zeta}(x) \frac{\partial \varphi_u}{\partial x} \frac{\partial w_s}{\partial x} \right) - \alpha_2^w \frac{\partial}{\partial x} \left( H_{\zeta}(x) \frac{\partial u_s}{\partial x} \frac{\partial \varphi_w}{\partial x} \right)$$

$$- 3\alpha_3^w \frac{\partial}{\partial x} \left( H_{\zeta}(x) \left( \frac{\partial w_s}{\partial x} \right)^2 \left( \frac{\partial \varphi_w}{\partial x} \right) \right) - \left( 2\alpha_5^w \frac{(e_{dc})^2}{(1+w_s)^3} + \omega^2 M(x) \right) \varphi_w = 0 \quad (58-2)$$

$$\varphi_w(0,t) = 0, \quad \varphi_w(1,t) = 0, \quad \frac{\partial \varphi_w(0,t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_w(1,t)}{\partial x} = 0$$

## فصل ۳: تغییر شکل استاتیکی و فرکانس

طبیعی

### ۳-۱- تغییر شکل استاتیکی

#### ۳-۱-۱- تغییر شکل استاتیکی مدل اول

برای حل معادله استاتیکی (۲-۳۵)، به علت غیر خطی بودن آن، باید از روش‌های تقریبی بهره جست. با در نظر گرفتن این فرض که پاسخ سیستم از ترکیب بینهایت مود ارتعاشی تشکیل شده است، از روش گلرکین استفاده می‌شود. بنابراین در معادله (۲-۳۵)،  $w_s$  می‌تواند به صورت تقریبی زیر در نظر گرفته شود:

$$w_s = \sum_{j=1}^n b[j] w_s[j] \quad (۱-۳)$$

در معادله بالا،  $w_s[j]$  تابع مقایسه‌ای<sup>۱</sup> مورد نیاز در حل گلرکین است که به عنوان  $j$  امین شکل مود از تیر ساده یکسر گیردار می‌باشد که تمام شرط مرزی‌های معادله استاتیکی (۲-۳۵) را ارضا می‌کند و  $b[j]$  ضرایب ثابتی هستند که با اعمال روش گلرکین به دست آورده می‌شوند و  $n$  تعداد شکل مود برای حل معادله می‌باشد.

بنابراین برای حل معادله استاتیکی (۲-۳۵) به روش گلرکین، در ابتدا برای ساده‌سازی محاسبات عددی، مخرج جمله الکترواستاتیک یعنی  $(1+w_s)^2$  در معادله (۲-۳۵) ضرب می‌کنیم و سپس با جایگذاری معادله (۱-۳) در معادله حاصل و با ضرب نمودن این معادله در  $w_s[n]$  به عنوان تابع وزن‌دار در روش گلرکین که  $n = 1, 2, \dots, M$  تعداد مود مورد استفاده برای تابع مقایسه‌ای می‌باشد و در انتها با انتگرال‌گیری عبارت حاصل در طول بی بعد شده تیر، معادله نهایی به صورت دستگاه معادلات جبری بر حسب  $b[j]$  در (۲-۳) به دست آمده است:

<sup>1</sup>Comparison function

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^M b[j] \int_0^1 \frac{d^2}{dx^2} \left( H_\eta(x) \frac{d^2 w_s[j]}{dx^2} \right) w_s[n] dx + 2 \sum_{j,k=1}^M b[j] b[k] \int_0^1 \frac{d^2}{dx^2} \left( H_\eta(x) \frac{d^2 w_s[j]}{dx^2} \right) w_s[k] w_s[n] dx \\
 & + \sum_{j,k,m=1}^M b[j] b[k] b[m] \int_0^1 \frac{d^2}{dx^2} \left( H_\eta(x) \frac{d^2 w_s[j]}{dx^2} \right) w_s[k] w_s[m] w_s[n] dx + \alpha_1^w B_{2p} \sum_{j=1}^M b[j] \int_0^1 \frac{d^2 w_s[j]}{dx^2} \\
 & \times w_s[n] dx + 2\alpha_1^w B_{2p} \sum_{j,k=1}^M b[j] b[k] \int_0^1 \frac{d^2 w_s[j]}{dx^2} w_s[k] w_s[n] dx + \alpha_1^w B_{2p} \sum_{j,k,m=1}^M b[j] b[k] b[m] \int_0^1 \frac{d^2 w_s[j]}{dx^2} \\
 & \times w_s[k] w_s[m] w_s[n] dx - \alpha_3^w B_1 \sum_{j,k,m=1}^M b[j] b[k] b[m] \left( \int_0^1 \frac{dw_s[j]}{dx} \frac{dw_s[k]}{dx} dx \right) \int_0^1 \frac{d^2 w_s[m]}{dx^2} w_s[n] dx \\
 & - 2\alpha_3^w B_1 \sum_{j,k,m,p=1}^M b[j] b[k] b[m] b[p] \left( \int_0^1 \frac{dw_s[j]}{dx} \frac{dw_s[k]}{dx} dx \right) \int_0^1 \frac{d^2 w_s[m]}{dx^2} w_s[p] w_s[n] dx \\
 & - \alpha_3^w B_1 \sum_{j,k,m,p,q=1}^M b[j] b[k] b[m] b[p] b[q] \left( \int_0^1 \frac{dw_s[j]}{dx} \frac{dw_s[k]}{dx} dx \right) \int_0^1 \frac{d^2 w_s[m]}{dx^2} w_s[p] w_s[q] w_s[n] dx \\
 & + \alpha_4^w p \int_0^1 \frac{d^2 H_p(x)}{dx^2} w_s[n] dx + 2\alpha_4^w p \sum_{j=1}^M b[j] \int_0^1 \frac{d^2 H_p(x)}{dx^2} w_s[j] w_s[n] dx + \alpha_4^w p \sum_{j,k=1}^M b[j] b[k] \int_0^1 \frac{d^2 H_p(x)}{dx^2} \\
 & \times w_s[j] w_s[k] w_s[n] dx + \alpha_5^w e_{dc}^2 \int_0^1 w_s[n] dx + \beta_v \sum_{j=1}^M b[j] \int_0^1 w_s[j] w_s[n] Dirac(x-1) dx + 2\beta_v \sum_{j,k=1}^M b[j] b[k] \\
 & \times \int_0^1 w_s[j] w_s[k] w_s[n] Dirac(x-1) dx + \beta_v \sum_{j,k,m=1}^M b[j] b[k] b[m] \int_0^1 w_s[j] w_s[k] w_s[m] w_s[n] \\
 & \times Dirac(x-1) dx = 0
 \end{aligned} \tag{۲-۳}$$

معادله (۲-۳)، دستگاه معادلاتی می‌باشد که با حل آن به روش عددی، ضرایب  $b[j]$  به دست می‌آیند. حال با جایگذاری این ضرایب و تابع مقایسه‌ای  $w_s[j]$  به صورت شکل مود تیر یکسر گیرداری که شرایط مرزی معادله استاتیکی را ارضا می‌کند در معادله (۱-۳)، رابطه‌ی تغییر شکل استاتیکی برحسب طول بی بعد شده میکروتیر حاصل می‌شود.

### ۳-۱-۲- تغییر شکل استاتیکی مدل دوم

به دلیل یکسان بودن روند حل معادلات کوپل طولی و عرضی استاتیکی (۲-۴۹) و (۲-۵۰) با مدل سازی اول از بیان توضیحات اضافه صرف نظر می شود.

$w_s$  و  $u_s$  می تواند به صورت تقریبی زیر در نظر گرفته شود:

$$\begin{aligned} u_s &= \sum_{j=1}^n a[j] u_s[j] \\ w_s &= \sum_{j=1}^n b[j] w_s[j] \end{aligned} \quad (3-3)$$

بنابراین برای حل معادلات کوپل طولی و عرضی استاتیکی (۲-۴۹) و (۲-۵۰) به روش گلرکین، در معادله (۲-۵۰) ضرب می کنیم و سپس با جایگذاری معادله (۳-۳) در معادله حاصل و با ضرب نمودن این معادله در  $w_s[n]$  و در انتها با انتگرال گیری عبارت حاصل در طول بی بعد شده تیر، معادله نهایی بر حسب  $a[j]$  و  $b[j]$  در (۳-۵) به دست آمده است. همچنین به همین صورت با جایگذاری معادله (۳-۳) در معادله طولی (۲-۴۹) و با ضرب نمودن این معادله در  $u_s[n]$  بعنوان تابع وزن دار در راستای طولی و در انتها با انتگرال گیری از عبارت حاصل بر روی طول بی بعد شده تیر، معادله نهایی بر حسب  $a[j]$  و  $b[j]$  در (۳-۴) به دست آمده است.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^M a[j] \int_0^1 \frac{d}{dx} \left( H_\zeta(x) \frac{du_s[j]}{dx} \right) u_s[n] dx + \alpha_2^u \sum_{j,k=1}^M b[j] b[k] \int_0^1 \frac{d}{dx} \left( H_\zeta(x) \frac{dw_s[j]}{dx} \frac{dw_s[k]}{dx} \right) u_s[n] dx \\ - \alpha_3^u p \int_0^1 \frac{dH_p(x)}{dx} u_s[n] dx - \beta_h \sum_{j=1}^M a[j] \int_0^1 u_s[j] u_s[n] Dirac(x-1) dx = 0 \end{aligned} \quad (4-3)$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^M b[j] \int_0^1 \frac{d^2}{dx^2} \left( H_\eta(x) \frac{d^2 w_s[j]}{dx^2} \right) w_s[n] dx + 2 \sum_{j,k=1}^M b[j] b[k] \int_0^1 \frac{d^2}{dx^2} \left( H_\eta(x) \frac{d^2 w_s[j]}{dx^2} \right) w_s[k] w_s[n] dx \\
 & + \sum_{j,k,m=1}^M b[j] b[k] b[m] \int_0^1 \frac{d^2}{dx^2} \left( H_\eta(x) \frac{d^2 w_s[j]}{dx^2} \right) w_s[k] w_s[m] w_s[n] dx + \alpha_1^w p \sum_{j=1}^M b[j] \\
 & \times \int_0^1 \frac{d}{dx} \left( H_p(x) \frac{dw_s[j]}{dx} \right) w_s[n] dx + 2\alpha_1^w p \sum_{j,k=1}^M b[j] b[k] \int_0^1 \frac{d}{dx} \left( H_p(x) \frac{dw_s[j]}{dx} \right) w_s[k] w_s[n] dx \\
 & + \alpha_1^w p \sum_{j,k,m=1}^M b[j] b[k] b[m] \int_0^1 \frac{d}{dx} \left( H_p(x) \frac{dw_s[j]}{dx} \right) w_s[k] w_s[m] w_s[n] dx - \alpha_2^w \sum_{j,k=1}^M a[j] b[k] \\
 & \times \int_0^1 \frac{d}{dx} \left( H_\zeta(x) \frac{du_s[j]}{dx} \frac{dw_s[k]}{dx} \right) w_s[n] dx - 2\alpha_2^w \sum_{j,k,m=1}^M a[j] b[k] b[m] \int_0^1 \frac{d}{dx} \left( H_\zeta(x) \frac{du_s[j]}{dx} \frac{dw_s[k]}{dx} \right) \\
 & \times w_s[m] w_s[n] dx - \alpha_2^w \sum_{j,k,m,p=1}^M a[j] b[k] b[m] b[p] \int_0^1 \frac{d}{dx} \left( H_\zeta(x) \frac{du_s[j]}{dx} \frac{dw_s[k]}{dx} \right) w_s[m] w_s[p] w_s[n] dx \quad (5-3) \\
 & - \alpha_3^w \sum_{j,k,m=1}^M b[j] b[k] b[m] \int_0^1 \frac{d}{dx} \left( H_\zeta(x) \frac{dw_s[j]}{dx} \frac{dw_s[k]}{dx} \frac{dw_s[m]}{dx} \right) w_s[n] dx - 2\alpha_3^w \sum_{j,k,m,p=1}^M b[j] b[k] b[m] \\
 & \times b[p] \int_0^1 \frac{d}{dx} \left( H_\zeta(x) \frac{dw_s[j]}{dx} \frac{dw_s[k]}{dx} \frac{dw_s[m]}{dx} \right) w_s[p] w_s[n] dx - \alpha_3^w \sum_{j,k,m,p,q=1}^M b[j] b[k] b[m] b[p] b[q] \\
 & \times \int_0^1 \frac{d}{dx} \left( H_\zeta(x) \frac{dw_s[j]}{dx} \frac{dw_s[k]}{dx} \frac{dw_s[m]}{dx} \right) w_s[p] w_s[q] w_s[n] dx + \alpha_4^w p \int_0^1 \frac{d^2 H_p(x)}{dx^2} w_s[n] dx \\
 & + 2\alpha_4^w p \sum_{j=1}^M b[j] \int_0^1 \frac{d^2 H_p(x)}{dx^2} w_s[j] w_s[n] dx + \alpha_4^w p \sum_{j,k=1}^M b[j] b[k] \int_0^1 \frac{d^2 H_p(x)}{dx^2} w_s[j] w_s[k] w_s[n] dx \\
 & + \alpha_5^w (e_{dc})^2 \int_0^1 w_s[n] dx = 0
 \end{aligned}$$

### ۳-۲- فرکانس طبیعی

#### ۳-۲-۱- فرکانس طبیعی و شکل مود خطی مدل اول

به منظور دستیابی به فرکانس طبیعی و شکل مود خطی سیستم مدل اول، از روش گالرکین برای حل معادله (۲-۴۰) استفاده می‌شود. مطابق با روش گالرکین حل معادله (۲-۴۰) به صورت زیر فرض می‌شود.

$$\varphi = \sum_{j=1}^n b[j] \varphi_b[j] \quad (6-3)$$

در معادله بالا،  $\varphi_b[j]$  تابع مقایسه‌ای<sup>۱</sup> مورد نیاز در حل گالرکین است که به‌عنوان  $z$  امین شکل

<sup>1</sup>Comparison function

مود از تیر ساده یکسر گیردار می‌باشد که تمام شرط مرزی‌های معادله دینامیکی خطی (۲-۴۰) را ارضا می‌کند و  $b[j]$  ضرایب ثابتی هستند که با اعمال روش گلرکین به دست آورده می‌شوند و  $n$  تعداد شکل مود برای حل معادله می‌باشد.

بنابراین برای حل معادله دینامیکی خطی (۲-۴۰) به روش گلرکین، ابتدا معادله (۳-۶) را در معادله (۲-۴۰) جایگذاری می‌کنیم و سپس با ضرب معادله حاصل در  $\phi_b[n]$  بعنوان تابع وزن‌دار در روش گلرکین که  $n = 1, 2, \dots, M$  تعداد مود مورد استفاده برای تابع مقایسه‌ای می‌باشد و در انتها با انتگرال‌گیری عبارت حاصل در طول بی بعد شده تیر، معادله نهایی به صورت دستگاه معادلات جبری به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^M b[j] \int_0^1 \frac{d^2}{dx^2} \left( H_\eta(x) \frac{d^2 \phi_b[j]}{dx^2} \right) \phi_b[n] dx + \sum_{j=1}^M b[j] \int_0^1 \left( \alpha_1^w B_{2p} - \alpha_3^w B_1 \int_0^1 \left( \frac{dw_s}{dx} \right)^2 dx \right) \times \frac{d^2 \phi_b[j]}{dx^2} \phi_b[n] dx \\ & - 2\alpha_3^w B_1 \sum_{j=1}^M b[j] \int_0^1 \frac{d^2 w_s}{dx^2} \left( \int_0^1 \frac{dw_s}{dx} \frac{d \phi_b[j]}{dx} dx \right) \phi_b[n] dx - 2\alpha_3^w e_{dc}^2 \sum_{j=1}^M b[j] \int_0^1 \frac{\phi_b[j] \phi_b[n]}{(1+w_s)^3} dx \\ & - \omega^2 \sum_{j=1}^M b[j] \int_0^1 M(x) \phi_b[j] \phi_b[n] dx + \beta_w \sum_{j=1}^M b[j] \int_0^1 \phi_b[j] \phi_b[n] Dirac(x-1) dx = 0 \end{aligned} \quad (7-3)$$

معادله (۷-۳) تنها زمانی دارای جواب غیر صفر می‌باشد که دترمینان ضرایب  $b[j]$  در معادله جبری حاصل، برابر صفر باشد. با مساوی صفر قرار دادن دترمینان این ماتریس، فرکانس طبیعی سیستم به دست می‌آیند. با جایگذاری فرکانس‌های طبیعی حاصل در  $n-1$  معادله از دستگاه معادلات به دست آمده از معادله (۷-۳)، ضرایب  $b[j]$  به دست می‌آیند. حال با جایگذاری این ضرایب و تابع مقایسه‌ای  $\phi_b[j]$  در معادله (۳-۶)، شکل مودهای ارتعاشی سیستم به دست می‌آیند.

### ۳-۲-۲- فرکانس طبیعی و شکل مود خطی مدل دوم

به دلیل یکسان بودن روند حل معادلات کوپل طولی و عرضی (۲-۴۷) و (۲-۴۸) برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی سیستم و شکل مودها در هر راستا با مدل‌سازی اول از بیان توضیحات اضافه صرف نظر می‌شود.



مطابق با روش گالرکین حل معادلات (۲-۵۷) و (۲-۵۸) صورت زیر فرض می‌شود.

$$\begin{aligned}\varphi_u &= \sum_{j=1}^n a[j] \varphi_a[j] \\ \varphi_w &= \sum_{j=1}^n b[j] \varphi_b[j]\end{aligned}\tag{۸-۳}$$

بنابراین برای حل معادلات کوپل دینامیک خطی طولی و عرضی (۲-۵۷) و (۲-۵۸) به روش گالرکین، در ابتدا معادله (۸-۳) را در معادله (۲-۵۷) جایگذاری می‌کنیم و سپس با ضرب نمودن این معادله در  $\varphi_a[j]$  در راستای طولی و در انتها با انتگرال‌گیری عبارت حاصل در طول بی‌بعد شده تیر، معادله نهایی بر حسب  $a[j]$  و  $b[j]$  در (۳-۹) به دست آمده است. همچنین به همین صورت با جایگذاری معادله (۸-۳) در معادله عرضی (۲-۵۸) و با ضرب نمودن این معادله در  $\varphi_b[j]$  در راستای عرضی و در انتها با انتگرال‌گیری از عبارت حاصل بر روی طول بی‌بعد شده تیر، معادله نهایی بر حسب  $a[j]$  و  $b[j]$  در (۳-۱۰) به دست آمده است.

$$\begin{aligned}& \sum_{j=1}^M a[j] \int_0^1 \frac{d}{dx} \left( H_\zeta(x) \frac{d\varphi_a[j]}{dx} \right) \varphi_a[n] dx + \omega^2 \alpha_1^u \sum_{j=1}^M a[j] \int_0^1 M(x) \varphi_a[j] \varphi_a[n] dx + 2\alpha_2^u \sum_{j=1}^M b[j] \\ & \times \int_0^1 \frac{d}{dx} \left( H_\zeta(x) \frac{dw_s}{dx} \frac{d\varphi_b[j]}{dx} \right) \varphi_a[n] dx - \beta_h \sum_{j=1}^M a[j] \int_0^1 \varphi_a[j] \varphi_a[n] \text{Dirac}(x-1) dx = 0\end{aligned}\tag{۹-۳}$$

$$\begin{aligned}& \sum_{j=1}^M b[j] \int_0^1 \frac{d^2}{dx^2} \left( H_\eta(x) \frac{d^2\varphi_b[j]}{dx^2} \right) \varphi_b[n] dx - \omega^2 \sum_{j=1}^M b[j] \int_0^1 M(x) \varphi_b[j] \varphi_b[n] dx + \alpha_1^w p \sum_{j=1}^M b[j] \\ & \times \int_0^1 \frac{d}{dx} \left( H_p(x) \frac{d\varphi_b[j]}{dx} \right) \varphi_b[n] dx - \alpha_2^w \sum_{j=1}^M a[j] \int_0^1 \frac{d}{dx} \left( H_\zeta(x) \frac{dw_s}{dx} \frac{d\varphi_a[j]}{dx} \right) \varphi_b[n] dx - \alpha_2^w \sum_{j=1}^M b[j] \\ & \times \int_0^1 \frac{d}{dx} \left( H_\zeta(x) \frac{du_s}{dx} \frac{d\varphi_b[j]}{dx} \right) \varphi_b[n] dx - 3\alpha_3^w \sum_{j=1}^M b[j] \int_0^1 \frac{d}{dx} \left( H_\zeta(x) \left( \frac{dw_s}{dx} \right)^2 \frac{d\varphi_b[j]}{dx} \right) \varphi_b[n] dx \\ & - 2\alpha_5^w e_{dc}^2 \sum_{j=1}^M b[j] \int_0^1 \frac{\varphi_b[j] \varphi_b[n]}{(1+w_s)^3} dx = 0\end{aligned}\tag{۱۰-۳}$$



# فصل ۴: پاسخ دینامیکی سیستم تحت

## هارمونیک اولیه

## ۴-۱- مقدمه

برای به دست آوردن حل معادلات و سیستم‌های غیر خطی نمی‌توان از روش‌های خطی بهره جست، زیرا مباحثی از جمله هیستریزیس، پرش، داشتن چند نقطه تعادل و ... تنها برای سیستم‌های غیر خطی معنا پیدا می‌کند. به منظور بررسی سیستم‌های غیر خطی و به دست آوردن پاسخ دینامیکی روش‌های زیادی وجود دارد. روش‌های پیشنهادی حل سیستم‌های غیر خطی و از جمله MEMS می‌تواند به دو دسته‌ی کیفی و کمی تقسیم‌بندی شود. روش کیفی توسط هنری پوانکاره<sup>۱</sup> ارائه شده است. روش‌های کمی با در نظر گرفتن اغتشاشات کوچک، به خطی سازی و بررسی سیستم در همسایگی نزدیک نقطه تعادل می‌پردازند. در سیستم‌های حاوی عبارات غیر خطی‌های ضعیف، روش‌های تئوری اغتشاشات و مجانبی استفاده می‌شود. و در سیستم‌های حاوی عبارات غیر خطی‌های قوی نیاز به روش‌های عددی می‌باشد که از این جمله می‌توان به روش‌های اجزا محدود، اختلاف محدود و شوتینگ اشاره کرد.

### ۴-۱-۱- نگاهی بر تئوری اغتشاشات

بسیاری از معادلات مورد بررسی غیر خطی می‌باشند که نمی‌توان برای آن‌ها حل دقیق به دست آورد. در نتیجه پاسخ معادله به کمک روش‌های تحلیلی، عددی و یا ترکیبی از این دو حاصل می‌شود. روش تئوری اغتشاشات این امکان را به وجود می‌آورد که بتوان میزان تاثیر قسمت‌های غیر خطی معادلات را مورد بررسی قرار داد. تئوری اغتشاشات با در نظر گرفتن مرتبه کوچک برای جمله غیر خطی، به تحلیل آن می‌پردازد. حل کامل معادله، با استفاده از چند جمله اول یک سری، بر حسب یک پارامتر کوچک یا بزرگ بیان می‌شود.

<sup>1</sup> Henry Poincaré

روش‌های مختلفی در تئوری اغتشاشات وجود دارد که از آن جمله می‌توان به روش مقیاس‌های چندگانه، هموتویی اغتشاشات کرنشی و ... اشاره کرد. در این پایان‌نامه از روش مقیاس‌های چندگانه به کمک روش گالرکین به صورت نیمه تحلیلی، برای به دست آوردن پاسخ دینامیکی غیر خطی میکروتیر مورد بررسی، استفاده می‌شود.

## ۴-۲- پاسخ دینامیکی سیستم مدل اول

سه مقیاس زمانی  $T_0 = t$ ،  $T_1 = \varepsilon t$  و  $T_2 = \varepsilon^2 t$  برای حل در نظر گرفته می‌شود. همچنین  $\varepsilon$  پارامتر بی بعد کوچک اغتشاش می‌باشد که نشان می‌دهد جمله‌های غیر خطی از مرتبه ضعیف‌تری نسبت به جمله‌های خطی برخوردار هستند. حل معادله دیفرانسیل دینامیکی مدل اول را می‌توان به صورت تقریبی زیر در نظر گرفت:

$$w(x, T_0, T_1, T_2) = \varepsilon w_1(x, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 w_2(x, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^3 w_3(x, T_0, T_1, T_2) \quad (1-4)$$

با توجه به عملیات مورد بررسی، مشتقات زنجیره‌ای به صورت زیر معرفی می‌شوند.

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial w}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial w}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial w}{\partial T_2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 w}{\partial T_0^2} + 2\varepsilon \left( \frac{\partial^2 w}{\partial T_1 \partial T_0} \right) + \varepsilon^2 \left( \frac{2\partial^2 w}{\partial T_2 \partial T_0} + \frac{\partial^2 w}{\partial T_1^2} \right) \end{aligned} \quad (2-4)$$

چون در سیستم‌های واقعی ارتعاشات دامنه بزرگ معمولاً توسط عبارات‌های میرایی و غیر خطی محدود می‌شوند، لذا برای دستیابی به یک پاسخ تقریبی معتبر برای این مساله می‌بایست نیروی تحریک، عبارت میرایی و عبارت غیر خطی به گونه‌ای در نظر گرفت که همگی در یک مرتبه از  $\varepsilon$  قرار بگیرند. به منظور برقراری تعادل بین جملات غیر خطی، میرایی و ولتاژ هارمونیک در این سیستم، می‌توان مرتبه میرایی را برابر  $\varepsilon^2$  و مرتبه تحریک AC را برابر  $\varepsilon^3$  در نظر گرفت [۵۰]. در نتیجه معادله (۲-۳۷) به صورت معادله (۳-۴) بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( H_\eta(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + M(x) \frac{\partial^3 w}{\partial t^2} + \varepsilon^2 c \frac{\partial w}{\partial t} + \left( \alpha_1^w B_2 p - \alpha_3^w B_1 \int_0^1 \left( \frac{\partial w_s}{\partial x} \right)^2 dx \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2} = \\ & 2\alpha_3^w B_1 \left( \int_0^1 \left( \frac{\partial w_s}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx \right) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \alpha_3^w B_1 \left( \int_0^1 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \alpha_3^w B_1 \left( \int_0^1 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ & + 2\alpha_3^w B_1 \left( \int_0^1 \left( \frac{\partial w_s}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\alpha_5^w \frac{(e_{dc})^2}{(1+w_s)^3} w - 3\alpha_5^w \frac{(e_{dc})^2}{(1+w_s)^4} w^2 + 4\alpha_5^w \frac{(e_{dc})^2}{(1+w_s)^5} w^3 \\ & - 2\varepsilon^3 \alpha_5^w \frac{e_{dc} e_{ac} \cos(\Omega t)}{(1+w_s)^2} + 4\varepsilon^3 \alpha_5^w \frac{e_{dc} e_{ac} \cos(\Omega t)}{(1+w_s)^3} w - \varepsilon^6 \alpha_5^w \frac{(e_{ac} \cos(\Omega t))^2}{(1+w_s)^2} - \beta_w w \text{Dirac}(x-1) \\ & w(0,t) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}(0,t) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}(1,t) = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(1,t) = 0 \end{aligned} \quad (3-4)$$

با جایگزینی رابطه (۴-۱) و (۴-۲) در معادله (۴-۳) و با در نظر گرفتن حل سیستم تا تقریب مرتبه

۳ و جداسازی جملات با مرتبه‌های یکسان  $\varepsilon$  مساوی با صفر داریم:

مرتبه  $\varepsilon^1$ :

$$\begin{aligned} L(w_1) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( H_\eta(x) \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right) + M(x) \frac{\partial^3 w_1}{\partial T_0^2} + \left( \alpha_1^w B_2 p - \alpha_3^w B_1 \int_0^1 \left( \frac{\partial w_s}{\partial x} \right)^2 dx \right) \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^2} \\ & - 2\alpha_3^w B_1 \left( \int_0^1 \left( \frac{\partial w_s}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) dx \right) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} - 2\alpha_5^w \frac{(e_{dc})^2}{(1+w_s)^3} w_1 + \beta_w w_1 \text{Dirac}(x-1) = 0 \\ & w_1(0,t) = 0, \quad \frac{\partial w_1}{\partial x}(0,t) = 0, \quad \frac{\partial w_1}{\partial x}(1,t) = 0, \quad \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3}(1,t) = 0 \end{aligned} \quad (4-4)$$

مرتبه  $\varepsilon^2$ :

$$\begin{aligned} L(w_2) &= -2M(x) \frac{\partial^2 w_1}{\partial T_1 \partial T_0} + \alpha_3^w B_1 \left( \int_0^1 \left( \frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 dx \right) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + 2\alpha_3^w B_1 \left( \int_0^1 \left( \frac{\partial w_s}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) dx \right) \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \\ & - 3\alpha_5^w \frac{(e_{dc})^2}{(1+w_s)^4} w_1^2 \\ & w_2(0,t) = 0, \quad \frac{\partial w_2}{\partial x}(0,t) = 0, \quad \frac{\partial w_2}{\partial x}(1,t) = 0, \quad \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3}(1,t) = 0 \end{aligned} \quad (5-4)$$

مرتبه  $\varepsilon^3$ :

$$\begin{aligned} L(w_3) &= -2M(x) \frac{\partial^3 w_2}{\partial T_1 \partial T_0} - M(x) \frac{\partial^3 w_1}{\partial T_1^2} - 2M(x) \frac{\partial^2 w_1}{\partial T_2 \partial T_0} - c \frac{\partial w_1}{\partial T_0} + 2\alpha_3^w B_1 \left( \int_0^1 \left( \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) dx \right) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ & + 2\alpha_3^w B_1 \left( \int_0^1 \left( \frac{\partial w_s}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) dx \right) \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + 2\alpha_3^w B_1 \left( \int_0^1 \left( \frac{\partial w_s}{\partial x} \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) dx \right) \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \alpha_3^w B_1 \left( \int_0^1 \left( \frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 dx \right) \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \\ & - 6\alpha_5^w \frac{(e_{dc})^2}{(1+w_s)^4} w_1 w_2 + 4\alpha_5^w \frac{(e_{dc})^2}{(1+w_s)^5} w_1^3 - 2\alpha_5^w \frac{e_{dc} e_{ac} \cos(\Omega T_0)}{(1+w_s)^2} \\ & w_3(0,t) = 0, \quad \frac{\partial w_3}{\partial x}(0,t) = 0, \quad \frac{\partial w_3}{\partial x}(1,t) = 0, \quad \frac{\partial^3 w_3}{\partial x^3}(1,t) = 0 \end{aligned} \quad (6-4)$$

با استفاده از شکل مودهای نرمال سیستم، یعنی شکل مودهایی با  $\int_0^1 \varphi^2 dx = 1$ ، حل معادله (۴-۶)

(۴) به صورت زیر خواهد بود:

$$w_1 = A(T_1, T_2) e^{i\omega T_0} \varphi(x) + \bar{A}(T_1, T_2) e^{-i\omega T_0} \varphi(x) \quad (۷-۴)$$

در رابطه بالا  $\varphi(x)$  و  $\omega$ ، به ترتیب اولین شکل مود و اولین فرکانس طبیعی سیستم هستند. همچنین  $A(T_1, T_2)$  تابع مختلط و  $\bar{A}(T_1, T_2)$  مزدوج مختلط آن می باشد که با اعمال شرایط حل-پذیری به مساله، به دست می آیند. حال با جایگذاری رابطه (۷-۴) در (۵-۴) داریم:

$$L(w_2) = -2M(x) \left( i\omega \frac{dA(T_1, T_2)}{dT_1} e^{i\omega T_0} - i\omega \frac{d\bar{A}(T_1, T_2)}{dT_1} e^{-i\omega T_0} \right) \varphi(x) + (A^2 e^{2i\omega T_0} + 2A\bar{A} + \bar{A}^2 e^{-2i\omega T_0}) h(x) \quad (۸-۴)$$

در حالی که

$$h(x) = \alpha_3^w B_1 \left( \int_0^1 \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx \right) \frac{d^2 w_s}{dx^2} + 2\alpha_3^w B_1 \left( \int_0^1 \left( \frac{dw_s}{dx} \frac{d\varphi}{dx} \right) dx \right) \frac{d^2 \varphi}{dx^2} - 3\alpha_3^w \frac{(e_{dc})^2}{(1+w_s)^4} \varphi^2 \quad (۹-۴)$$

اگر  $A$  فقط تابع  $T_2$  باشد، ترم سکولار در معادله (۸-۴) وجود نخواهد داشت. با استفاده از این فرض، حل خصوصی معادله (۸-۴) به صورت زیر می باشد.

$$w_2 = \psi_1(x) A^2 e^{2i\omega T_0} + 2\psi_2(x) A\bar{A} + \psi_1(x) \bar{A}^2 e^{-2i\omega T_0} \quad (۱۰-۴)$$

در معادله (۱۰-۴)،  $\psi_1(x)$  و  $\psi_2(x)$  توابعی هستند که از حل مساله مقدار مرزی (۱۱-۴) به دست می آیند:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( H_\eta(x) \frac{d^2 \psi_j}{dx^2} \right) + \left( \alpha_1^w B_2 p - \alpha_3^w B_1 \int_0^1 \left( \frac{dw_s}{dx} \right)^2 dx \right) \frac{d^2 \psi_j}{dx^2} - 2\alpha_3^w B_1 \left( \int_0^1 \left( \frac{dw_s}{dx} \frac{d\psi_j}{dx} \right) dx \right) \frac{d^2 w_s}{dx^2} - 2\alpha_3^w \frac{(e_{dc})^2}{(1+w_s)^3} \psi_j - 4M(x) \omega^2 \delta_{1j} \psi_j + \beta_w \psi_j \text{Dirac}(x-1) = h(x) \quad (۱۱-۴)$$

$$\psi_j|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0, \quad \frac{\partial^3 \psi_j}{\partial x^3} \Big|_{x=1} = 0$$

$\delta_{1j}$ ، تابع دلتای کرونکر<sup>۱</sup> است که برای  $j=1$  برابر با یک و برای  $j=2$  برابر صفر می باشد. برای دستیابی به حل معادله (۱۱-۴) می توان از روش گلرکین بهره جست. در این حالت از شکل موده‌های

<sup>1</sup> Kronecker delta

خطی میکروتیر حول موقعیت استاتیکی به عنوان تابع مقایسه‌ای استفاده می‌شود.

$$\psi_j = \sum_{k=1}^M b[k] \varphi[k] \quad j = 1, 2 \quad (12-4)$$

در این معادله  $\varphi[k]$  نشان‌دهنده‌ی  $k$  امین شکل مود متقارن خطی میکروتیر تغییر شکل یافته حول موقعیت استاتیکی است و  $b[k]$  ضرایبی هستند که از روش گالرکین به دست می‌آیند. با جایگذاری معادله (12-4) در معادله (11-4) و ضرب نتیجه در  $\varphi_b[n]$  به عنوان توابع وزن‌دار و سپس انتگرال‌گیری بر روی طول بی‌بعد شده میکروتیر، سیستم جبری به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^M b[k] \int_0^1 \frac{d^2}{dx^2} \left( H_\eta(x) \frac{d^2 \varphi[k]}{dx^2} \right) \varphi[n] dx + \sum_{k=1}^M b[k] \int_0^1 \left( \alpha_1^w B_2 p - \alpha_3^w B_1 \int_0^1 \left( \frac{dw_s}{dx} \right)^2 dx \right) \times \frac{d^2 \varphi[k]}{dx^2} \varphi[n] dx \\ & - 2\alpha_3^w B_1 \sum_{k=1}^M b[k] \int_0^1 \frac{d^2 w_s}{dx^2} \left( \int_0^1 \frac{dw_s}{dx} \frac{d\varphi[k]}{dx} dx \right) \varphi[n] dx - 2\alpha_5^w e^{2\beta} \sum_{k=1}^M b[k] \int_0^1 \frac{\varphi[k] \varphi[n]}{(1+w_s)^3} dx \\ & - 4\omega^2 \delta_{ij} \sum_{k=1}^M b[k] \int_0^1 M(x) \varphi[k] \varphi[n] dx + \beta_w \sum_{k=1}^M b[k] \int_0^1 \varphi[k] \varphi[n] Dirac(x-1) dx - \int_0^1 h(x) \varphi[n] dx = 0 \end{aligned} \quad (13-4)$$

$j = 1, 2$

$b[k]$  ها از حل عددی دستگاه معادلات جبری (13-4) به دست می‌آیند. در نتیجه با جایگذاری ضرایب  $b[k]$  در معادله (12-4) و سپس قرار دادن نتیجه در معادله (10-4)، حل  $w_2$  حاصل می‌شود. با جایگذاری  $w_1$  و  $w_2$  از معادله‌های (7-4) و (10-4) در معادله (6-4) و سپس با تجزیه جملات موجود در معادله حاصل داریم:



$$\begin{aligned}
 L(w_3) = & -2M(x)\omega i \frac{dA}{dT_2} \varphi(x) e^{i\omega T_0} - ci \omega A \varphi(x) e^{i\omega T_0} + 2A^2 \bar{A} \alpha_3^w B_1 \left( \int_0^1 \left( \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\psi_1}{dx} \right) dx \right) \frac{d^2 w_s}{dx^2} e^{i\omega T_0} \\
 & + 4A^2 \bar{A} \alpha_3^w B_1 \left( \int_0^1 \left( \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\psi_2}{dx} \right) dx \right) \frac{d^2 w_s}{dx^2} e^{i\omega T_0} + 2A^3 \alpha_3^w B_1 \left( \int_0^1 \left( \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\psi_1}{dx} \right) dx \right) \frac{d^2 w_s}{dx^2} e^{3i\omega T_0} \\
 & + 2A^2 \bar{A} \alpha_3^w B_1 \left( \int_0^1 \left( \frac{dw_s}{dx} \frac{d\varphi}{dx} \right) dx \right) \frac{d^2 \psi_1}{dx^2} e^{i\omega T_0} + 4A^2 \bar{A} \alpha_3^w B_1 \left( \int_0^1 \left( \frac{dw_s}{dx} \frac{d\varphi}{dx} \right) dx \right) \frac{d^2 \psi_2}{dx^2} e^{i\omega T_0} \\
 & + 2A^3 \alpha_3^w B_1 \left( \int_0^1 \left( \frac{dw_s}{dx} \frac{d\varphi}{dx} \right) dx \right) \frac{d^2 \psi_1}{dx^2} e^{3i\omega T_0} + 2A^2 \bar{A} \alpha_3^w B_1 \left( \int_0^1 \left( \frac{dw_s}{dx} \frac{d\psi_1}{dx} \right) dx \right) \frac{d^2 \varphi}{dx^2} e^{i\omega T_0} \\
 & + 4A^2 \bar{A} \alpha_3^w B_1 \left( \int_0^1 \left( \frac{dw_s}{dx} \frac{d\psi_2}{dx} \right) dx \right) \frac{d^2 \varphi}{dx^2} e^{i\omega T_0} + 2A^3 \alpha_3^w B_1 \left( \int_0^1 \left( \frac{dw_s}{dx} \frac{d\psi_1}{dx} \right) dx \right) \frac{d^2 \varphi}{dx^2} e^{3i\omega T_0} \\
 & + 3A^2 \bar{A} \alpha_3^w B_1 \left( \int_0^1 \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx \right) \frac{d^2 \varphi}{dx^2} e^{i\omega T_0} + A^3 \alpha_3^w B_1 \left( \int_0^1 \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx \right) \frac{d^2 \varphi}{dx^2} e^{3i\omega T_0} \\
 & - 6A^2 \bar{A} \alpha_5^w \frac{(e_{dc})^2}{(1+w_s)^4} \varphi \psi_1 e^{i\omega T_0} - 12A^2 \bar{A} \alpha_5^w \frac{(e_{dc})^2}{(1+w_s)^4} \varphi \psi_2 e^{i\omega T_0} - 6A^3 \alpha_5^w \frac{(e_{dc})^2}{(1+w_s)^4} \varphi \psi_1 e^{3i\omega T_0} \\
 & + 12A^2 \bar{A} \alpha_5^w \frac{(e_{dc})^2}{(1+w_s)^5} \varphi^3 e^{i\omega T_0} + 4A^3 \alpha_5^w \frac{(e_{dc})^2}{(1+w_s)^5} \varphi^3 e^{3i\omega T_0} - 2A^2 \bar{A} \alpha_5^w \frac{e_{dc} e_{ac} \cos(\Omega T_0)}{(1+w_s)^2} + c.c.
 \end{aligned} \tag{۱۴-۴}$$

در این معادله  $C.C.$  بیانگر مزدوج مختلط جملات موجود است. در معادله (۱۴-۴) می‌توان از

رابطه‌ی  $\cos(\Omega T_0) = \frac{1}{2} e^{i\Omega T_0} + c.c.$  برای جمله آخر استفاده کرد. همچنین به منظور بررسی فرکانس

تشدید اولیه سیستم، فرکانس طبیعی به صورت  $\omega = \Omega - \varepsilon^2 \sigma$  در نظر گرفته می‌شود که  $\sigma$  پارامتر

تنظیم است و بیانگر اختلاف فرکانس تشدید و فرکانس طبیعی سیستم خطی می‌باشد. با مرتب‌سازی

جملات موجود در معادله (۱۴-۴)، نتیجه به صورت زیر بیان می‌شود:

$$L(w_3) = \left[ -2M(x)\omega i \frac{dA}{dT_2} \varphi(x) - ci \omega A \varphi(x) + \chi(x) A^2 \bar{A} + \bar{F}(x) e^{i\sigma T_2} \right] e^{i\omega T_0} + c.c. + N.S.T. \tag{۱۵-۴}$$

در حالی که  $N.S.T.$  نشان‌دهنده‌ی تمام جملات غیر سکولار می‌باشد. جملات پارامتری موجود

در معادله بالا به صورت زیر معرفی می‌شوند:

$$\begin{aligned} \bar{F}(x) &= -\alpha_3^w \frac{e_{dc} e_{ac}}{(1+w_s)^2} \\ \chi_q^G &= \chi_q^G + \chi_c^G + \chi_q^E + \chi_c^E \\ \chi_q^G &= \left( 2\alpha_3^w B_1 \left( \int_0^1 \left( \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\psi_1}{dx} \right) dx \right) + 4\alpha_3^w B_1 \left( \int_0^1 \left( \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\psi_2}{dx} \right) dx \right) \right) \frac{d^2 w_s}{dx^2} + \left( 2\alpha_3^w B_1 \frac{d^2 \psi_1}{dx^2} + 4\alpha_3^w B_1 \frac{d^2 \psi_2}{dx^2} \right) \times \\ &\int_0^1 \left( \frac{dw_s}{dx} \frac{d\varphi}{dx} \right) dx + \left( 2\alpha_3^w B_1 \left( \int_0^1 \left( \frac{dw_s}{dx} \frac{d\psi_1}{dx} \right) dx \right) + 4\alpha_3^w B_1 \left( \int_0^1 \left( \frac{dw_s}{dx} \frac{d\psi_2}{dx} \right) dx \right) \right) \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \\ \chi_c^G &= 3\alpha_3^w B_1 \left( \int_0^1 \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx \right) \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \\ \chi_q^E &= -6\alpha_3^w \frac{(e_{dc})^2}{(1+w_s)^4} (\varphi\psi_1 + 2\varphi\psi_2) \\ \chi_c^E &= 12\alpha_3^w \frac{(e_{dc})^2}{(1+w_s)^5} \varphi^3 \end{aligned} \quad (16-4)$$

در این معادله،  $\chi_q^G$  و  $\chi_c^G$  به ترتیب جملات غیر خطی هندسی مرتبه ۲ و مرتبه ۳ و  $\chi_q^E$  و

$\chi_c^E$  به ترتیب جملات غیر خطی الکتریکی مرتبه ۲ و مرتبه ۳ هستند.

سمت چپ معادله (۴-۱۵) خود الحاق است، بنابراین حل معادله الحاقی آن، شبیه حل همگن

معادله (۴-۷) است. معادله غیر همگن (۴-۱۵) تنها زمانی که سمت راست آن عمود بر هر حل همگن

معادله خود الحاق یعنی  $\varphi(x)e^{i\omega T_0}$  باشد دارای جواب است. در این حالت با ضرب کردن سمت راست

معادله در  $\varphi(x)e^{i\omega T_0}$  و انتگرال گیری از نتایج در بازه  $x=0$  تا  $x=1$ ، شرایط حل پذیری به صورت

زیر حاصل می‌شود:

$$2\omega i \left( \bar{M}(x) \frac{dA}{dT_2} + \frac{A\mu_1}{2} \right) + 8SA^2 \bar{A} - Fe^{i\omega T_2} = 0 \quad (17-4)$$

در حالی که

$$\begin{aligned} F &= \int_0^1 \bar{F}(x) \varphi dx \\ \bar{M} &= \int_0^1 M(x) \varphi^2 dx \\ \mu_1 &= \int_0^1 c \varphi^2 dx \\ S_q^G &= S_q^G + S_c^G + S_q^E + S_c^E \\ S_q^G &= -\frac{1}{8} \int_0^1 \chi_q^G \varphi dx, \quad S_c^G = -\frac{1}{8} \int_0^1 \chi_c^G \varphi dx \\ S_q^E &= -\frac{1}{8} \int_0^1 \chi_q^E \varphi dx, \quad S_c^E = -\frac{1}{8} \int_0^1 \chi_c^E \varphi dx \end{aligned} \quad (18-4)$$

در معادله (۴-۱۸) مشاهده می‌شود که  $\bar{M}$  پارامتری همواره مثبت است و  $\mu_1$  بیانگر میرایی هوا

می‌باشد. به منظور دستیابی به شرایط حل‌پذیری مساله، تابع مختلط  $A$  در فرم قطبی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$A = \frac{1}{2}ae^{i\beta} \quad (19-4)$$

در این معادله  $\beta$  و  $l$  توابعی هستند که به ترتیب معرف دامنه و فاز پاسخ سیستم می‌باشند. اکنون معادله (19-4) در (17-4) جایگزین می‌شود.

$$2\omega i \left( \frac{1}{2}\bar{M} \frac{da}{dT_2} e^{i\beta} + i \frac{1}{2}\bar{M}a \frac{d\beta}{dT_2} e^{i\beta} + \frac{\mu_1}{4}ae^{i\beta} \right) + 8S \left( \frac{1}{2}ae^{i\beta} \right)^2 \left( \frac{1}{2}ae^{-i\beta} \right) - Fe^{i\sigma T_2} = 0 \quad (20-4)$$

با در نظر گرفتن  $\beta = \sigma T_2 - \gamma$  و جایگزین کردن آن در معادله و جدا کردن بخش حقیقی و موهومی، معادله زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \bar{M} \frac{da}{dT_2} &= -\frac{\mu_1}{2}a + \frac{F}{\omega} \sin(\gamma) = f(a, \gamma) \\ \bar{M} \frac{d\gamma}{dT_2} &= \bar{M} \sigma - \frac{Sa^2}{\omega} + \frac{F}{a\omega} \cos(\gamma) = g(a, \gamma) \end{aligned} \quad (21-4)$$

با جایگذاری معادلات (7-4) و (10-4) درون معادله (1-4) و جایگذاری  $\varepsilon = 1$ ، حل معادله (4-1) به صورت زیر به دست می‌آید.

$$w(x, t) = a \cos(\Omega t - \gamma) \varphi(x) + \frac{1}{2}a^2 (\psi_2(x) + \psi_1(x) \cos 2(\Omega t - \gamma)) \quad (22-4)$$

در معادله (21-4) نقطه‌ای که  $\frac{d\gamma}{dT_2} = 0$  و  $\frac{da}{dT_2} = 0$  برقرار باشد، نقطه تعادل سیستم است که حالت پایدار سیستم را نشان می‌دهد. در نتیجه معادله حاکم بر نقطه‌ی تعادل سیستم به صورت زیر به دست می‌آید.

$$a_0^2 \left[ \left( \frac{\mu_1}{2} \right)^2 + \left( \bar{M} \sigma - \frac{Sa_0^2}{\omega} \right)^2 \right] = \frac{F^2}{\omega^2} \quad (23-4)$$

از معادله (23-4) مشخص می‌شود برای دستیابی به ماکزیمم مقدار برای دامنه ارتعاشات  $a_0$ ، باید عبارت  $\left( \bar{M} \sigma - \frac{Sa_0^2}{\omega} \right)$  برابر صفر باشد. با در نظر گرفتن این حالت، پارامتر تنظیم به صورت زیر به

دست می آید.

$$\sigma = \frac{Sa_0^2}{M\omega} \quad (24-4)$$

همچنین ماکزیمم مقدار برای  $a_0$ ، به صورت معادله زیر خواهد بود.

$$a_0 = \frac{2F}{\omega\mu} \quad (25-4)$$

از طرفی با استفاده از  $\Omega = \omega + \varepsilon^2\sigma$  و معادله های (24-4) و (25-4)، فرکانس تشدید غیر خطی

به صورت زیر به دست می آید:

$$\Omega = \omega + \frac{4SF^2}{M\omega^3\mu^2} \quad (26-4)$$

همان طور که مشاهده می شود، ماکزیمم دامنه پاسخ در نزدیکی فرکانس طبیعی سیستم نبوده و

در حدود فرکانس ارتعاشات غیر خطی سیستم است.

### ۴-۳- پاسخ دینامیکی سیستم مدل دوم

سه مقیاس زمانی  $T_0 = t$ ،  $T_1 = \varepsilon t$  و  $T_2 = \varepsilon^2 t$  نیز برای حل مدل دوم در نظر گرفته می شود.

حل معادله دیفرانسیل دینامیکی سیستم مدل دوم را می توان به صورت تقریبی زیر در نظر گرفت:

$$\begin{aligned} u(x, T_0, T_1, T_2) &= \varepsilon u_1(x, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 u_2(x, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^3 u_3(x, T_0, T_1, T_2) \\ w(x, T_0, T_1, T_2) &= \varepsilon w_1(x, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 w_2(x, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^3 w_3(x, T_0, T_1, T_2) \end{aligned} \quad (27-4)$$

پس به منظور برقراری تعادل بین جملات غیر خطی، میرایی و ولتاژ هارمونیک در این سیستم،

می توان مرتبه میرایی را برابر  $\varepsilon^2$  و مرتبه تحریک AC را برابر  $\varepsilon^3$  در نظر گرفت. در نتیجه معادلات (2-2)

(52) و (53-2) صورت معادلات (28-4) و (29-4) بازنویسی می شود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( H_\varepsilon(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \alpha_1'' M(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -2\alpha_2'' \frac{\partial}{\partial x} \left( H_\varepsilon(x) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial w_s}{\partial x} \right) \right) - \alpha_2'' \frac{\partial}{\partial x} \left( H_\varepsilon(x) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \\ + \beta_u u \text{ Dirac}(x-1) & \quad (28-4) \\ u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u(1, t)}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( H_\eta(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + M(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \varepsilon^2 c \frac{\partial w}{\partial t} = -\alpha_1^w p \frac{\partial}{\partial x} \left( H_p(x) \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \alpha_2^w \frac{\partial}{\partial x} \left( H_\zeta(x) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ & + \alpha_2^w \frac{\partial}{\partial x} \left( H_\zeta(x) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w_s}{\partial x} \right) + \alpha_2^w \frac{\partial}{\partial x} \left( H_\zeta(x) \frac{\partial u_s}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + 3\alpha_3^w \frac{\partial}{\partial x} \left( H_\zeta(x) \left( \frac{\partial w_s}{\partial x} \right)^2 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) \\ & + 3\alpha_3^w \frac{\partial}{\partial x} \left( H_\zeta(x) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left( \frac{\partial w_s}{\partial x} \right) \right) + \alpha_3^w \frac{\partial}{\partial x} \left( H_\zeta(x) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 \right) + 2\alpha_5^w \frac{(e_{dc})^2}{(1+w_s)^3} w - 3\alpha_5^w \frac{(e_{dc})^2}{(1+w_s)^4} w^2 \\ & + 4\alpha_5^w \frac{(e_{dc})^2}{(1+w_s)^5} w^3 - 2\varepsilon^3 \alpha_5^w \frac{e_{dc} e_{ac} \cos(\Omega t)}{(1+w_s)^2} + 4\varepsilon^3 \alpha_5^w \frac{e_{dc} e_{ac} \cos(\Omega t)}{(1+w_s)^3} w - \varepsilon^6 \alpha_5^w \frac{(e_{ac} \cos(\Omega t))^2}{(1+w_s)^2} \end{aligned} \quad (29-4)$$

$$w(0,t) = 0, \quad w(1,t) = 0, \quad \frac{\partial w(0,t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w(1,t)}{\partial x} = 0$$

با در نظر گرفتن حل سیستم تا تقریب مرتبه ۳ و جداسازی جملات با مرتبه‌های یکسان  $\varepsilon$  مساوی

با صفر داریم:

مرتبه  $\varepsilon^1$ :

$$\begin{aligned} L(u_1) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( H_\zeta(x) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) - \alpha_1^w M(x) \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} + 2\alpha_2^w \frac{\partial}{\partial x} \left( H_\zeta(x) \left( \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial w_s}{\partial x} \right) \right) - \beta_1 u_1 \text{Dirac}(x-1) \\ u_1(0,t) &= 0, \quad \frac{\partial u_1(1,t)}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (30-4)$$

$$\begin{aligned} L(w_1) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( H_\eta(x) \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right) + M(x) \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + \alpha_1^w p \frac{\partial}{\partial x} \left( H_p(x) \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) - \alpha_2^w \frac{\partial}{\partial x} \left( H_\zeta(x) \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial w_s}{\partial x} \right) \\ & - \alpha_2^w \frac{\partial}{\partial x} \left( H_\zeta(x) \frac{\partial u_s}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) - 3\alpha_3^w \frac{\partial}{\partial x} \left( H_\zeta(x) \left( \frac{\partial w_s}{\partial x} \right)^2 \left( \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) \right) - 2\alpha_5^w \frac{(e_{dc})^2}{(1+w_s)^3} w_1 = 0 \\ w_1(0,t) &= 0, \quad w_1(1,t) = 0, \quad \frac{\partial w_1(0,t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w_1(1,t)}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (31-4)$$

مرتبه  $\varepsilon^2$ :

$$\begin{aligned} L(u_2) &= 2\alpha_1^w M(x) \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_1 \partial T_0} - \alpha_2^w \frac{\partial}{\partial x} \left( H_\zeta(x) \left( \frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 \right) \\ u_2(0,t) &= 0, \quad \frac{\partial u_2(1,t)}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (32-4)$$

$$\begin{aligned} L(w_2) &= -2M(x) \frac{\partial^2 w_1}{\partial T_1 \partial T_0} + \alpha_2^w \frac{\partial}{\partial x} \left( H_\zeta(x) \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) + 3\alpha_3^w \frac{\partial}{\partial x} \left( H_\zeta(x) \left( \frac{\partial w_s}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 \right) \\ & - 3\alpha_5^w \frac{(e_{dc})^2}{(1+w_s)^4} w_1^2 = 0 \\ w_2(0,t) &= 0, \quad w_2(1,t) = 0, \quad \frac{\partial w_2(0,t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w_2(1,t)}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (33-4)$$

مرتبه  $\varepsilon^3$  :

$$L(u_3) = \alpha_1^u M(x) \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_1^2} + 2\alpha_1^u M(x) \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_2 \partial T_0} + 2\alpha_1^u M(x) \frac{\partial^2 u_2}{\partial T_1 \partial T_0} - 2\alpha_2^u \frac{\partial}{\partial x} \left( H_\zeta(x) \left( \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) \right) \quad (34-4)$$

$$u_3(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u_3(1,t)}{\partial x} = 0$$

$$L(w_3) = -M(x) \frac{\partial^2 w_1}{\partial T_1^2} - 2M(x) \frac{\partial^2 w_1}{\partial T_2 \partial T_0} - 2M(x) \frac{\partial^2 w_2}{\partial T_1 \partial T_0} - c \frac{\partial w_1}{\partial T_0} + \alpha_2^w \frac{\partial}{\partial x} \left( H_\zeta(x) \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) \\ + \alpha_2^w \frac{\partial}{\partial x} \left( H_\zeta(x) \frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) + 6\alpha_3^w \frac{\partial}{\partial x} \left( H_\zeta(x) \left( \frac{\partial w_s}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) \right) + \alpha_3^w \frac{\partial}{\partial x} \left( H_\zeta(x) \left( \frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^3 \right) \quad (35-4)$$

$$-6\alpha_5^w \frac{(e_{dc})^2}{(1+w_s)^4} w_1 w_2 + 4\alpha_5^w \frac{(e_{dc})^2}{(1+w_s)^5} w_1^3 - 2\alpha_5^w \frac{e_{dc} e_{ac}}{(1+w_s)^2} \cos(\Omega T_0)$$

$$w_3(0,t) = 0, \quad w_3(1,t) = 0, \quad \frac{\partial w_3(0,t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w_3(1,t)}{\partial x} = 0$$

با استفاده از شکل موده‌های نرمال سیستم در هر راستا، حل معادلات (۳۰-۴) و (۳۱-۴) به صورت

زیر خواهند بود:

$$u_1 = A_u(T_1, T_2) e^{i\omega_u T_0} \varphi_u(x) + \bar{A}_u(T_1, T_2) e^{-i\omega_u T_0} \varphi_u(x) = A(T_1, T_2) e^{i\omega T_0} \varphi_u(x) + \bar{A}(T_1, T_2) e^{-i\omega T_0} \varphi_u(x) \quad (36-4)$$

$$w_1 = A_w(T_1, T_2) e^{i\omega_w T_0} \varphi_w(x) + \bar{A}_w(T_1, T_2) e^{-i\omega_w T_0} \varphi_w(x) = A(T_1, T_2) e^{i\omega T_0} \varphi_w(x) + \bar{A}(T_1, T_2) e^{-i\omega T_0} \varphi_w(x)$$

در رابطه بالا  $\varphi_u(x)$  و  $\varphi_w(x)$ ، به ترتیب اولین شکل مود در راستای افقی وعمودی می‌باشند.

$\omega$  نیز بیانگر اولین فرکانس طبیعی سیستم است. همچنین  $A(T_1, T_2)$  تابع مختلط و  $\bar{A}(T_1, T_2)$

مزدوج مختلط آن می‌باشد که با اعمال شرایط حل‌پذیری به مساله، به دست می‌آیند. حال با جایگذاری

رابطه (۳۶-۴) در معادلات (۳۲-۴) و (۳۳-۴) داریم:

$$L(u_2) = 2\alpha_1^u M(x) \left( i\omega \frac{dA(T_1, T_2)}{dT_1} e^{i\omega T_0} - i\omega \frac{d\bar{A}(T_1, T_2)}{dT_1} e^{-i\omega T_0} \right) \varphi_u(x) \quad (37-4)$$

$$+ (A^2 e^{2i\omega T_0} + 2A\bar{A} + \bar{A}^2 e^{-2i\omega T_0}) h_u(x)$$

$$L(w_2) = -2M(x) \left( i\omega \frac{dA(T_1, T_2)}{dT_1} e^{i\omega T_0} - i\omega \frac{d\bar{A}(T_1, T_2)}{dT_1} e^{-i\omega T_0} \right) \varphi_w(x) \quad (38-4)$$

$$+ (A^2 e^{2i\omega T_0} + 2A\bar{A} + \bar{A}^2 e^{-2i\omega T_0}) h_w(x)$$

در حالی که

$$h_u(x) = -\alpha_2^u \frac{d}{dx} \left( H_\zeta(x) \left( \frac{d\varphi_w(x)}{dx} \right)^2 \right) \quad (39-4)$$

و

$$h_w(x) = \alpha_2^w \frac{d}{dx} \left( H_\zeta(x) \left( \frac{d\varphi_u(x)}{dx} \right) \left( \frac{d\varphi_w(x)}{dx} \right) \right) + 3\alpha_3^w \frac{d}{dx} \left( H_\zeta(x) \left( \frac{dw_s}{dx} \right) \left( \frac{d\varphi_w(x)}{dx} \right)^2 \right) - 3\alpha_5^w \frac{(e_{dc})^2}{(1+w_s)^4} \varphi_w^2 \quad (40-4)$$

اگر  $A$  فقط تابع  $T_2$  باشد، ترم سکولار در معادلات (37-4) و (38-4) وجود نخواهد داشت. با

استفاده از این فرض، حل خصوصی معادلات (37-4) و (38-4) به صورت زیر می‌باشد.

$$u_2 = \lambda_1(x) A^2 e^{2i\omega t_0} + 2\lambda_2(x) A \bar{A} + \lambda_1(x) \bar{A}^2 e^{-2i\omega t_0} \quad (41-4)$$

$$w_2 = \psi_1(x) A^2 e^{2i\omega t_0} + 2\psi_2(x) A \bar{A} + \psi_1(x) \bar{A}^2 e^{-2i\omega t_0} \quad (42-4)$$

در معادلات (41-4) و (42-4)،  $\psi_1(x)$ ،  $\psi_2(x)$ ،  $\lambda_1(x)$  و  $\lambda_2(x)$  توابعی هستند که از

حل مساله مقدار مرزی های زیر به دست می‌آیند:

$$\frac{d}{dx} \left( H_\zeta(x) \frac{d\lambda_j}{dx} \right) + 2\alpha_2^u \frac{d}{dx} \left( H_\zeta(x) \left( \frac{d\psi_j}{dx} \right) \left( \frac{dw_s}{dx} \right) \right) + 4\omega^2 \alpha_1^u M(x) \delta_{1j} \lambda_j - \beta_h \lambda_j \text{Dirac}(x-1) = h_u(x) \quad (43-4)$$

$$\lambda_j(0,t) = 0, \quad \frac{\partial \lambda_j(1,t)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( H_\eta(x) \frac{d^2 \psi_j}{dx^2} \right) + \alpha_1^w p \frac{d}{dx} \left( H_p(x) \frac{d\psi_j}{dx} \right) - \alpha_2^w \frac{d}{dx} \left( H_\zeta(x) \frac{d\lambda_j}{dx} \frac{dw_s}{dx} \right) - \alpha_2^w \frac{d}{dx} \left( H_\zeta(x) \frac{d\psi_j}{dx} \frac{dw_s}{dx} \right) - 3\alpha_3^w \frac{d}{dx} \left( H_\zeta(x) \left( \frac{dw_s}{dx} \right)^2 \left( \frac{d\psi_j}{dx} \right) \right) - 4\omega^2 M(x) \psi_j - 2\alpha_5^w \frac{(e_{dc})^2}{(1+w_s)^3} \psi_j = h_w(x) \quad (44-4)$$

$$\psi_j(0,t) = 0, \quad \psi_j(1,t) = 0, \quad \frac{d\psi_j(0,t)}{dx} = 0, \quad \frac{d\psi_j(1,t)}{dx} = 0$$

$\delta_{1j}$ ، تابع دلتای کرونر است که برای  $j=1$  برابر با یک و برای  $j=2$  برابر صفر می‌باشد. برای

دستیابی به حل معادله (43-4) و (44-4) می‌توان از روش گلرکین بهره جست. در این حالت از شکل

مودهای خطی میکروتیر حول موقعیت استاتیکی در راستای طولی و عرضی به عنوان تابع مقایسه‌ای

استفاده می‌شود.

$$\begin{aligned}\lambda_j &= \sum_{k=1}^M a[k] \varphi_u[k] & j=1,2 \\ \psi_j &= \sum_{k=1}^M b[k] \varphi_w[k] & j=1,2\end{aligned}\quad (45-4)$$

در معادله بالا،  $\varphi_u[k]$  و  $\varphi_w[k]$  به ترتیب بیان گر  $k$  امین شکل مود خطی از ارتعاشات طولی و ارتعاشات عرضی حول موقعیت استاتیکی می باشد.  $a[j]$  و  $b[j]$  ضرایب ثابتی هستند که با اعمال روش گلرکین به دست آورده می شوند.

در ابتدا معادله (45-4) را در (43-4) جایگذاری می کنیم و سپس با ضرب نمودن این معادله در  $\varphi_u[n]$  به عنوان تابع وزن دار در راستای طولی در روش گلرکین و در انتها با انتگرال گیری عبارت حاصل در طول بی بعد شده تیر، معادله نهایی بر حسب  $a[j]$  و  $b[j]$  در (46-4) به دست آمده است. همچنین به همین صورت با جایگذاری معادله (45-4) در معادله عرضی (44-4) و با ضرب نمودن این معادله در  $\varphi_w[n]$  بعنوان تابع وزن دار در راستای عرضی و در انتها با انتگرال گیری از عبارت حاصل بر روی طول بی بعد شده تیر، معادله نهایی بر حسب  $a[j]$  و  $b[j]$  در (47-4) و به دست آمده است.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^M a[k] \int_0^1 \frac{d}{dx} \left( H_\zeta(x) \frac{d\varphi_u[k]}{dx} \right) \varphi_u[n] dx + 4\omega^2 \delta_{ij} \alpha_1^n \int_0^1 M(x) \varphi_u[k] \varphi_u[n] dx \\ + 2\alpha_2^w \sum_{k=1}^M b[k] \int_0^1 \frac{d}{dx} \left( H_\zeta(x) \left( \frac{d\varphi_w[k]}{dx} \right) \left( \frac{dw_s}{dx} \right) \right) \varphi_u[n] dx - \beta_h \int_0^1 \varphi_u[k] \varphi_u[n] \text{Dirac}(x-1) dx \\ - \int_0^1 h_u(x) \varphi_u[n] dx = 0\end{aligned}\quad (46-4)$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^M b[k] \int_0^1 \frac{d^2}{dx^2} \left( H_\eta(x) \frac{d^2\varphi_w[k]}{dx^2} \right) \varphi_w[n] dx + \alpha_1^w p \sum_{k=1}^M b[k] \int_0^1 \frac{d}{dx} \left( H_p(x) \frac{d\varphi_w[k]}{dx} \right) \varphi_w[n] dx \\ - \alpha_2^w \sum_{k=1}^M a[k] \int_0^1 \frac{d}{dx} \left( H_\zeta(x) \frac{dw_s}{dx} \frac{d\varphi_u[k]}{dx} \right) \varphi_w[n] dx - \alpha_2^w \sum_{k=1}^M b[k] \int_0^1 \frac{d}{dx} \left( H_\zeta(x) \frac{du_s}{dx} \frac{d\varphi_w[k]}{dx} \right) \varphi_w[n] dx \\ - 3\alpha_3^w \sum_{k=1}^M b[k] \int_0^1 \frac{d}{dx} \left( H_\zeta(x) \left( \frac{dw_s}{dx} \right)^2 \frac{d\varphi_w[k]}{dx} \right) \varphi_w[n] dx + 2\alpha_3^w e_{dc}^2 \sum_{k=1}^M b[k] \int_0^1 \frac{\varphi_w[k] \varphi_w[n]}{(1+w_s)^3} dx \\ - 4\omega^2 \delta_{ij} \sum_{k=1}^M b[k] \int_0^1 M(x) \varphi_w[k] \varphi_w[n] dx - \int_0^1 h(x) \varphi_w[n] dx = 0\end{aligned}\quad (47-4)$$

$a[k]$  و  $b[k]$  ها از حل عددی دستگاه معادلات جبری (46-4) و (47-4) به دست می آیند.

نتیجه با جایگذاری ضرایب  $a[k]$  و  $b[k]$  در معادله (45-4) و سپس قرار دادن نتیجه در معادلات (4-4)

(41) و (42-4)، به ترتیب حل  $u_2$  و  $w_2$  حاصل می شود. با جایگذاری  $u_1$  و  $u_2$  از معادله های (4-4) (36-4)



و (۴۱-۴) در معادله (۳۴-۴) و جایگذاری  $w_1$  و  $w_2$  از معادله‌های (۳۶-۴) و (۴۲-۴) در معادله (۴-۴) (۳۵) و سپس با تجزیه جملات موجود در معادلات حاصل داریم:

$$L(u_3) = 2\alpha_1^u M(x) \omega i \frac{dA}{dT_2} \varphi_u e^{i\omega T_0} - 2A^2 \bar{A} \alpha_2^u \frac{d}{dx} \left( H_\zeta(x) \frac{d\varphi_w}{dx} \frac{d\psi_1}{dx} \right) e^{i\omega T_0} - 2A^3 \alpha_2^u \frac{d}{dx} \left( H_\zeta(x) \frac{d\varphi_w}{dx} \frac{d\psi_1}{dx} \right) e^{3i\omega T_0} - 4A^2 \bar{A} \alpha_2^u \frac{d}{dx} \left( H_\zeta(x) \frac{d\varphi_w}{dx} \frac{d\psi_2}{dx} \right) e^{i\omega T_0} + c.c. \quad (48-4)$$

$$L(w_3) = -2M(x) \omega i \frac{dA}{dT_2} \varphi_w e^{i\omega T_0} - ci \omega A \varphi_w e^{i\omega T_0} + A^2 \bar{A} \alpha_2^w \frac{d}{dx} \left( H_\zeta(x) \frac{d\varphi_u}{dx} \frac{d\psi_1}{dx} \right) e^{i\omega T_0} + A^3 \alpha_2^w \frac{d}{dx} \left( H_\zeta(x) \frac{d\varphi_u}{dx} \frac{d\psi_1}{dx} \right) e^{3i\omega T_0} + 2A^2 \bar{A} \alpha_2^w \frac{d}{dx} \left( H_\zeta(x) \frac{d\varphi_u}{dx} \frac{d\psi_2}{dx} \right) e^{i\omega T_0} + A^2 \bar{A} \alpha_2^w \frac{d}{dx} \left( H_\zeta(x) \frac{d\varphi_w}{dx} \frac{d\lambda_1}{dx} \right) e^{i\omega T_0} + A^3 \alpha_2^w \frac{d}{dx} \left( H_\zeta(x) \frac{d\varphi_w}{dx} \frac{d\lambda_1}{dx} \right) e^{3i\omega T_0} + 2A^2 \bar{A} \alpha_2^w \frac{d}{dx} \left( H_\zeta(x) \frac{d\varphi_w}{dx} \frac{d\lambda_2}{dx} \right) e^{i\omega T_0} + 6A^2 \bar{A} \alpha_3^w \frac{d}{dx} \left( H_\zeta(x) \frac{dw_s}{dx} \frac{d\varphi_w}{dx} \frac{d\psi_1}{dx} \right) e^{i\omega T_0} + 6A^3 \alpha_3^w \frac{d}{dx} \left( H_\zeta(x) \frac{dw_s}{dx} \frac{d\varphi_w}{dx} \frac{d\psi_1}{dx} \right) e^{3i\omega T_0} + 12A^2 \bar{A} \alpha_3^w \frac{d}{dx} \left( H_\zeta(x) \frac{dw_s}{dx} \frac{d\varphi_w}{dx} \frac{d\psi_2}{dx} \right) e^{i\omega T_0} + 3A^2 \bar{A} \alpha_3^w \frac{d}{dx} \left( H_\zeta(x) \left( \frac{d\varphi_w}{dx} \right)^3 \right) e^{i\omega T_0} + A^3 \alpha_3^w \frac{d}{dx} \left( H_\zeta(x) \left( \frac{d\varphi_w}{dx} \right)^3 \right) e^{3i\omega T_0} - 6A^2 \bar{A} \alpha_5^w \frac{(e_{dc})^2}{(1+w_s)^4} \varphi_w \psi_1 e^{i\omega T_0} - 6A^3 \alpha_5^w \frac{(e_{dc})^2}{(1+w_s)^4} \varphi_w \psi_1 e^{3i\omega T_0} - 12A^2 \bar{A} \alpha_5^w \frac{(e_{dc})^2}{(1+w_s)^4} \varphi_w \psi_2 e^{i\omega T_0} + 12A^2 \bar{A} \alpha_5^w \frac{(e_{dc})^2}{(1+w_s)^5} \varphi_w^3 e^{i\omega T_0} + 4A^3 \alpha_5^w \frac{(e_{dc})^2}{(1+w_s)^5} \varphi_w^3 e^{3i\omega T_0} - 2\alpha_5^w \frac{e_{dc} e_{ac} \cos(\Omega T_0)}{(1+w_s)^2} + c.c. \quad (49-4)$$

در این معادلات فوق  $c.c.$  بیانگر مزدوج مختلط جملات موجود است. در معادله (۴۹-۴) می‌توان

از رابطه‌ی  $\cos(\Omega T_0) = \frac{1}{2} e^{i\Omega T_0} + c.c.$  برای جمله آخر استفاده کرد. همچنین به منظور بررسی فرکانس

تشدید اولیه سیستم، فرکانس طبیعی به صورت  $\omega = \Omega - \varepsilon^2 \sigma$  در نظر گرفته می‌شود که  $\sigma$  پارامتر

تنظیم است و بیانگر اختلاف فرکانس تشدید و فرکانس طبیعی سیستم خطی می‌باشد. با مرتب‌سازی

جملات موجود در معادله (۴۸-۴) و (۴۹-۴)، نتیجه به صورت زیر بیان می‌شود:

$$L(u_3) = \left[ 2\alpha_1^u M(x) \omega i \frac{dA}{dT_2} \varphi_u(x) + \kappa(x) A^2 \bar{A} \right] e^{i\omega T_0} + c.c. + N.S.T. \quad (50-4)$$

$$L(w_3) = \left[ -2M(x)\omega i \frac{dA}{dT_2} \varphi_w(x) - ci \omega A \varphi_w(x) + \chi(x) A^2 \bar{A} + \bar{F}(x) e^{i\sigma T_2} \right] e^{i\omega t_0} + c.c. + N.S.T. \quad (51-4)$$

در حالی که  $N.S.T.$  نشان دهنده‌ی تمام جملات غیر سکولار می‌باشد. جملات پارامتری موجود

در معادلات بالا به صورت زیر معرفی می‌شوند:

$$\begin{aligned} \kappa(x) &= -2\alpha_2^u \frac{d}{dx} \left( H_\zeta(x) \frac{d\varphi_w}{dx} \frac{d\psi_1}{dx} \right) - 4\alpha_2^u \frac{d}{dx} \left( H_\zeta(x) \frac{d\varphi_w}{dx} \frac{d\psi_2}{dx} \right) \\ \bar{F}(x) &= -\alpha_3^v \frac{e_{dc} e_{ac}}{(1+w_s)^2} \\ \chi_q^G &= \chi_q^G + \chi_c^G + \chi_q^E + \chi_c^E \\ \chi_q^G &= \alpha_2^w \frac{d}{dx} \left( H_\zeta(x) \frac{d\varphi_u}{dx} \frac{d\psi_1}{dx} \right) + 2\alpha_2^w \frac{d}{dx} \left( H_\zeta(x) \frac{d\varphi_u}{dx} \frac{d\psi_2}{dx} \right) + \alpha_2^w \frac{d}{dx} \left( H_\zeta(x) \frac{d\varphi_w}{dx} \frac{d\lambda_1}{dx} \right) \\ &+ 2\alpha_2^w \frac{d}{dx} \left( H_\zeta(x) \frac{d\varphi_w}{dx} \frac{d\lambda_2}{dx} \right) + 6\alpha_3^w \frac{d}{dx} \left( H_\zeta(x) \frac{dw_s}{dx} \frac{d\varphi_w}{dx} \frac{d\psi_1}{dx} \right) + 12\alpha_3^w \frac{d}{dx} \left( H_\zeta(x) \frac{dw_s}{dx} \frac{d\varphi_w}{dx} \frac{d\psi_2}{dx} \right) \\ \chi_c^G &= 3\alpha_3^w \frac{d}{dx} \left( H_\zeta(x) \left( \frac{d\varphi_w}{dx} \right)^3 \right) \\ \chi_q^E &= -6\alpha_5^v \frac{(e_{dc})^2}{(1+w_s)^4} \varphi_w \psi_1 - 12\alpha_5^v \frac{(e_{dc})^2}{(1+w_s)^4} \varphi_w \psi_2 \\ \chi_c^E &= 12\alpha_5^v \frac{(e_{dc})^2}{(1+w_s)^5} \varphi^3 \end{aligned} \quad (52-4)$$

در این معادلات،  $\chi_q^G$  و  $\chi_c^G$  جملات غیر خطی هندسی مرتبه ۲ و  $\chi_q^E$  و  $\chi_c^E$  جملات غیر خطی هندسی

مرتبه ۳ و  $\chi_q^E$  و  $\chi_c^E$  به ترتیب جملات غیر خطی الکتریکی مرتبه ۲ و مرتبه ۳ هستند.

سمت چپ معادله (51-4) خود الحاق است، بنابراین

بنابراین شرط حل پذیری این دو معادله دو مجهول وابسته عبارت است از:

$$\int_0^1 \{ \varphi_w . RHS(L(w_3)) + \varphi_u . RHS(L(u_3)) \} dx = 0 \Rightarrow 2\omega i \left( \bar{M}(x) \frac{dA}{dT_2} + \frac{A\mu_1}{2} \right) + 8SA^2 \bar{A} - Fe^{i\sigma T_2} = 0 \quad (53-4)$$

در حالی که

$$\begin{aligned} F &= \int_0^1 \bar{F}(x) \varphi_w dx \\ \bar{M} &= \int_0^1 M(x) \varphi_w^2 dx - \int_0^1 \alpha_1^u M(x) \varphi_u^2 dx \\ \mu_1 &= \int_0^1 c \varphi_w^2 dx \\ S_q^G &= S_q^G + S_c^G + S_q^E + S_c^E \\ S_q^G &= -\frac{1}{8} \int_0^1 (\chi_q^G \varphi_w + \kappa \varphi_w) dx, \quad S_c^G = -\frac{1}{8} \int_0^1 \chi_c^G \varphi_w dx \\ S_q^E &= -\frac{1}{8} \int_0^1 \chi_q^E \varphi_w dx, \quad S_c^E = -\frac{1}{8} \int_0^1 \chi_c^E \varphi_w dx \end{aligned} \quad (54-4)$$

به منظور دستیابی به شرایط حل پذیری مساله، تابع مختلط  $A$  در فرم قطبی به صورت زیر بیان می شود:

$$A = \frac{1}{2}ae^{i\beta} \quad (55-4)$$

در این معادله  $\beta$  و  $a$  توابعی هستند که به ترتیب معرف دامنه و فاز پاسخ سیستم می باشند. اکنون معادله (55-4) در (53-4) جایگزین می شود.

$$2\omega i \left( \frac{1}{2}\bar{M} \frac{da}{dT_2} e^{i\beta} + i \frac{1}{2}\bar{M}a \frac{d\beta}{dT_2} e^{i\beta} + \frac{\mu_1}{4}ae^{i\beta} \right) + 8S \left( \frac{1}{2}ae^{i\beta} \right)^2 \left( \frac{1}{2}ae^{-i\beta} \right) - Fe^{i\sigma T_2} = 0 \quad (56-4)$$

با در نظر گرفتن  $\beta = \sigma T_2 - \gamma$  و جایگزین کردن آن در معادله (56-4) و جدا کردن بخش حقیقی و موهومی، معادله زیر به دست می آید.

$$\begin{aligned} \bar{M} \frac{da}{dT_2} &= -\frac{\mu_1}{2}a + \frac{F}{\omega} \sin(\gamma) = f(a, \gamma) \\ \bar{M} \frac{d\gamma}{dT_2} &= \bar{M} \sigma - \frac{Sa^2}{\omega} + \frac{F}{a\omega} \cos(\gamma) = g(a, \gamma) \end{aligned} \quad (57-4)$$

در معادله (57-4) نقطه ای که  $\frac{da}{dT_2} = 0$  و  $\frac{d\gamma}{dT_2} = 0$  برقرار باشد، نقطه تعادل سیستم است که حالت پایدار سیستم را نشان می دهد. در نتیجه معادله حاکم بر نقطه تعادل سیستم به صورت زیر به دست می آید.

$$a_0^2 \left[ \left( \frac{\mu_1}{2} \right)^2 + \left( \bar{M} \sigma - \frac{Sa_0^2}{\omega} \right)^2 \right] = \frac{F^2}{\omega^2} \quad (58-4)$$

از معادله (58-4) مشخص می شود برای دستیابی به ماکزیمم مقدار برای دامنه ارتعاشات  $a_0$ ، باید عبارت  $\left( \bar{M} \sigma - \frac{Sa_0^2}{\omega} \right)$  برابر صفر باشد. با در نظر گرفتن این حالت، پارامتر تنظیم به صورت زیر به دست می آید.

$$\sigma = \frac{Sa_0^2}{\bar{M} \omega} \quad (59-4)$$

همچنین ماکزیمم مقدار برای  $a_0$ ، به صورت معادله زیر خواهد بود.

$$a_0 = \frac{2F}{\omega\mu} \quad (60-4)$$

از طرفی با استفاده از  $\Omega = \omega + \varepsilon^2 \sigma$  و معادله‌های (4-59) و (4-60)، فرکانس تشدید غیر خطی

به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\Omega = \omega + \frac{4SF^2}{M\omega^3\mu^2} \quad (61-4)$$

## فصل ۵: بررسی نتایج

## ۵-۱- مقدمه

پس از استخراج معادلات حرکت سیستم مورد بررسی با حضور لایه‌ی الاستومر یک بار در مود برشی و یک بار در مود فشاری در سر آزاد میکروتیر، به تحلیل ارتعاشی این سیستم می‌پردازیم که منجر به استخراج نتایج لازم برای بررسی رفتار ارتعاشی این سیستم می‌شود. در این فصل در ابتدا به اعتبارسنجی نتایج و سپس به بررسی نتایج حاصل از تحلیل‌ها پرداخته می‌شود.

در این پژوهش تاثیر پارامترهای مختلف از جمله: ضخامت و ولتاژ لایه‌ی پیزوالکتریک، فاصله هوایی بین میکروتیر و الکتروود، میدان مغناطیسی وارد بر الاستومر مگنتورئولوژیکال و پارامتر مقیاس طولی بر تغییر شکل استاتیکی، فرکانس طبیعی سیستم و پاسخ فرکانسی مورد تحلیل و بررسی قرار خواهد گرفت.

جنس میکروتیر و لایه پیزوالکتریک به ترتیب سیلیکون و PZT5A در نظر گرفته شده که مطابق با بسیاری از تحقیقات خصوصیات مکانیکی و هندسی آن‌ها به صورت جدول (۵-۱) در نظر گرفته شده است.

لازم به ذکر است که در شبیه‌سازی‌ها فرض شده است که با تغییر پارامتر مورد بررسی، سایر پارامترها ثابت و مقدارشان مطابق جدول (۵-۱) باشند، مگر در حالتی که خلاف آن ذکر شده باشد.

جدول (۱-۵) مشخصات ماده و هندسه میکروتیر و لایه پیزوالکتریک [۱۴].

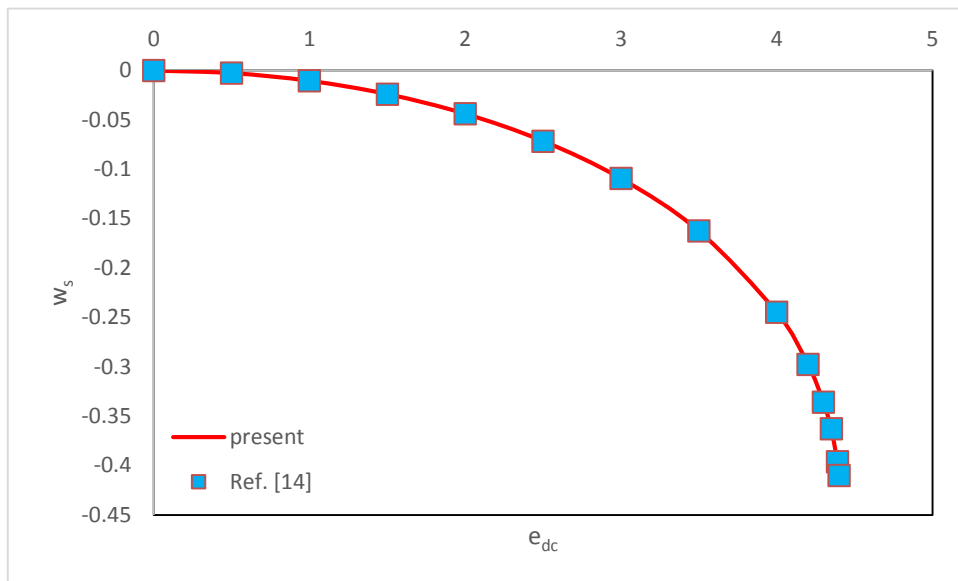
مگنتورئولوژیکال	لایه الاستومر	لایه پیزوالکتریک	میکروتیر	
	0.5 mm	510 $\mu m$	510 $\mu m$	طول
	0.5 mm	100 $\mu m$	100 $\mu m$	عرض
	1 mm	0.3 $\mu m$	1.5 $\mu m$	ضخامت
	-----	67 Gpa	166 Gpa	مدول الاستیسیته
	-----	7700 $kg.m^{-3}$	2330 $kg.m^{-3}$	چگالی جرمی
	-----	-----	1.18 $\mu m$	فاصله هوایی
	-----	-----	0.08 N. s. $m^{-1}$	ضریب میرایی
	-----	$-1.75 \times 10^{-10} m.volt^{-1}$	-----	ضریب پیزوالکتریک
	-----	17.6 $\mu m$	0.592 $\mu m$	پارامتر مقیاس طولی
	-----	0.1 v	-----	ولتاژ اعمالی بر لایه پیزوالکتریک
	-----	-----	0.05 v	تحریک الکترواستاتیک AC
0.2 T	-----	-----	-----	میدان مغناطیسی وارد بر لایه الاستومر مگنتورئولوژیکال

## ۵-۲- اعتبار سنجی

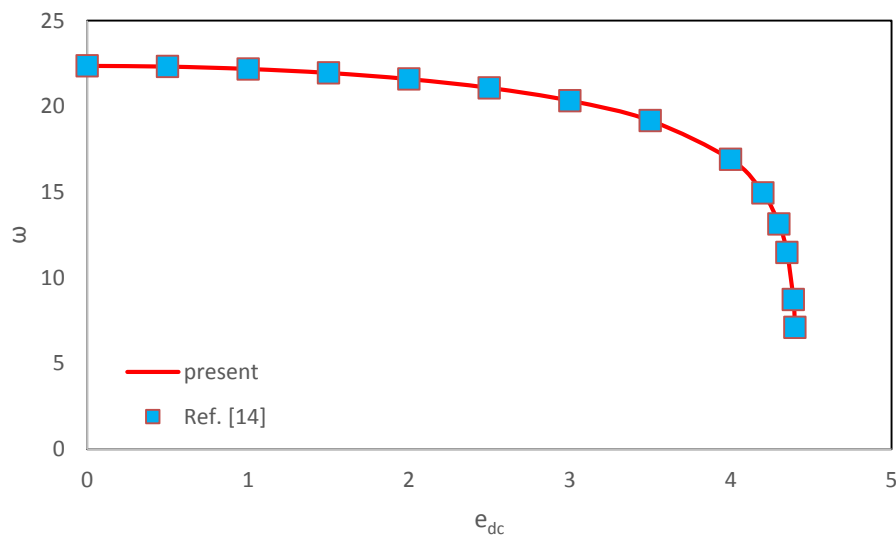
برای بررسی صحت کار صورت گرفته در این پایان نامه، مقایسه ای بین نتایج استخراج شده در این پایان نامه با مرجع [۱۴] صورت گرفته است، که برای این مقایسه لازم است در این پژوهش با صرف نظر از لایه پیزوالکتریک و پارامتر مقیاس طولی و با بی نهایت گرفتن سختی لایه ی الاستومر مگنتورئولوژیکال در هر دو حالت مود برشی و فشاری، شرایط مشابه با میکروتیر [۱۴] ایجاد شود.

شکل (۱-۵) و شکل (۲-۵) به ترتیب تغییرات ماکزیمم خیز استاتیکی مرکز میکروتیر و فرکانس طبیعی مورد بررسی در این پژوهش در مقایسه با شرایط مشابه مرجع [۱۴] نسبت به تغییرات ولتاژ الکترواستاتیک با تقریب سه شکل مود را نشان می دهد. براساس این شکل، مطابقت خوبی بین نتایج مشاهده می شود که نشان دهنده صحت معادلات و شبیه سازی های به دست آمده برای سیستم مورد

بررسی در این پژوهش می‌باشد.



شکل (۵-۱) مقایسه ماکزیمم تغییر شکل استاتیکی نسبت به تغییرات  $e_{dc}$  برای سیستم مورد بررسی هماهنگ با میکروتیر شرایط مرجع [۱۴].



شکل (۵-۲) مقایسه فرکانس طبیعی نسبت به تغییرات  $e_{dc}$  برای سیستم مورد بررسی هماهنگ با میکروتیر شرایط مرجع [۱۴].

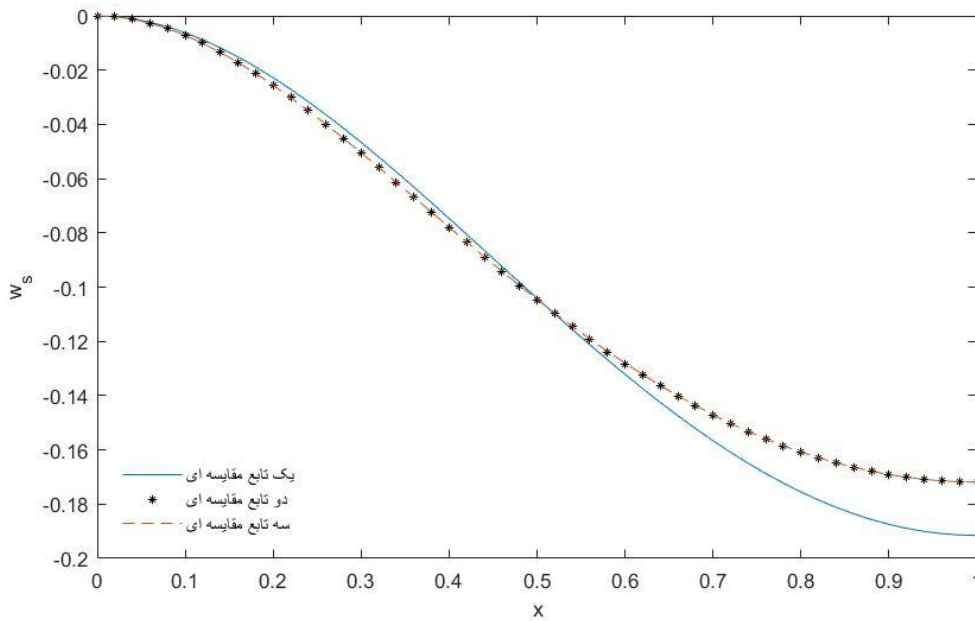


## ۵-۳- بررسی تغییر شکل استاتیکی

### ۵-۳-۱- بررسی تغییر شکل استاتیکی مدل اول

همان طور که بیان شد در مدل اول لایه‌ی الاستومر مگنتورئولوژیکال در سر آزاد میکروتیر در مود برشی حضور دارد و لایه‌ی پیزوالکتریک در سمت سر آزاد بر روی میکرو تیر می‌باشد. در این صورت با توجه به شرایط مرزی، ساختار میکروتیر و قرار دادن لایه پیزوالکتریک در سمت سر آزاد، مطابق شکل فلان ماکزیمم تغییر شکل سیستم در سر آزاد میکرو تیر یعنی در  $x = 1$  رخ می‌دهد.

برای بررسی تغییر شکل استاتیکی و فرکانس طبیعی اول سیستم در ابتدا باید تعداد کافی از توابع مقایسه‌ای در معادلات (۲-۳) و (۷-۳) به ترتیب برای همگرا شدن حل معادلات (۲-۳) و (۲-۴) استفاده شود. همان طور که در شکل (۳-۵) مشاهده می‌شود تغییر شکل استاتیکی میکرو تیر یعنی حل معادله (۲-۳) برای یک، دو و سه تابع مقایسه‌ای در حالتی که پیزوالکتریک کل طول میکروتیر را پوشانده، به دست آمده است. همان طور که مشاهده می‌شود حل مساله با سه تابع مقایسه‌ای همگرا می‌شود. فرکانس طبیعی اول میکروتیر مورد بررسی در شکل (۳-۵) با یک، دو و سه تابع مقایسه‌ای به ترتیب،  $۶,۸۰۳$ ،  $۶,۸۱۰$  و  $۶,۸۰۹$  به دست آمده است. مشاهده می‌شود حل معادله (۲-۴) نیز با سه تابع مقایسه‌ای همگرا می‌شود.



شکل (۳-۵) تغییرات خیز استاتیکی نسبت به تغییرات  $x$  به ازای یک، دو و سه تابع مقایسه ای در حالتی که پیزوالکتریک کل طول میکروتیر را پوشانده در تحریک الکترواستاتیک  $e_{dc} = 1.7v$

شکل (۴-۵) ماکزیمم تغییر شکل میکرو تیر به ازای طول‌های مختلف از لایه‌ی پیزوالکتریک را

نسبت به تغییرات ولتاژ الکترواستاتیک یعنی  $e_{dc}$ ، نمایش می‌دهد. با توجه به این که در شماتیک مدل اول فاصله‌ی ابتدای میکروتیر تا انتهای پیزوالکتریک همیشه ثابت و برابر انتهای میکروتیر یعنی  $L_2 = L$  می‌باشد بنابراین تغییر در طول پیزوالکتریک با تغییر در فاصله‌ی ابتدای میکروتیر تا ابتدای پیزوالکتریک یعنی  $L_1$  نسبت به انتهای میکروتیر صورت می‌گیرد. لازم به ذکر است که ولتاژ پولین که باعث ناپایداری سیستم می‌شود در ماکزیمم  $e_{dc}$  رخ می‌دهد.

این شکل نشان می‌دهد به ازای یک طول خاص از لایه‌ی پیزوالکتریک با افزایش  $e_{dc}$ ، مقدار ماکزیمم تغییر شکل استاتیکی میکروتیر افزایش می‌یابد. همچنین برای یک مقدار خاص از  $e_{dc}$ ، با افزایش طول لایه‌ی پیزوالکتریک از  $L_1 = L$  تا  $L_1 = 0.5L$  تغییر شکل استاتیکی افزایش و ولتاژ پولین کاهش می‌یابد. در حالی که به ازای افزایش طول لایه‌ی پیزوالکتریک از  $L_1 = 0.5L$  تا  $L_1 = 0$  تغییر شکل استاتیکی کاهش و ولتاژ پولین افزایش می‌یابد.

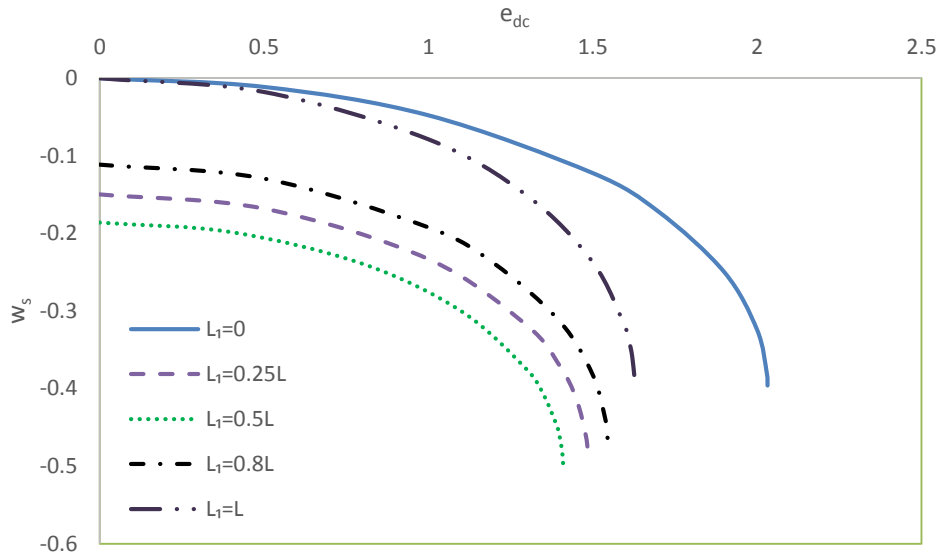
این رفتار استاتیکی سیستم، ناشی از تاثیر لایه‌ی پیزوالکتریک در در معادله استاتیکی (۲-۳۵) می‌باشد. جملات با ضریب  $\alpha_1^w B_2 p$  و  $\alpha_4^w p$  به ترتیب مربوط به بخش نیروی محوری کششی و ممان خمشی پیزوالکتریک می‌باشند. همان طور که در معادله (۲-۳۳) نشان داده شده است، اثر ترم محوری  $B_2$  با افزایش طول لایه‌ی پیزوالکتریک افزایش می‌یابد. در معادله (۳-۲) اثر ترم خمشی به صورت ضرب  $\alpha_4^w p$  با مقدار مشتق اول تابع مقایسه‌ای در موقعیت ابتدا و انتهای لایه‌ی پیزوالکتریک بر روی

$$\text{میکروتیر یعنی} \left( \frac{dw_s[n]}{dx} \Big|_{x=L_1} - \frac{dw_s[n]}{dx} \Big|_{x=L_2} \right) \alpha_4^w p \int_0^1 \frac{d^2 H_p(x)}{dx^2} w_s[n] dx = \alpha_4^w p$$

نشان داده شده است. مشتق

اول تابع مقایسه‌ای در این مدل با توجه به شرایط مرزی، در ابتدا و انتها میکروتیر برابر صفر و در مرکز میکروتیر یعنی  $x = 0.5$  برابر ماکزیمم مقدار می‌باشد. چون در این شماتیک انتهای لایه‌ی پیزوالکتریک همیشه در انتهای میکروتیر قرار دارد مشتق اول تابع مقایسه‌ای برابر صفر می‌شود و ترم خمشی فقط به مقدار مشتق اول تابع مقایسه‌ای در موقعیت ابتدا لایه‌ی پیزوالکتریک بستگی دارد که همان طور که گفته شد اگر موقعیت ابتدای لایه پیزوالکتریک در ابتدا و انتهای میکروتیر باشد برابر صفر و در مرکز میکروتیر ماکزیمم می‌باشد. پس در توجیه افزایش تغییر شکل استاتیکی میکروتیر با افزایش طول لایه‌ی پیزوالکتریک از  $L_1 = L$  تا  $L_1 = 0.5L$  می‌توان گفت که اثر ترم خمشی بر اثر ترم نیروی محوری کششی غلبه می‌کند.

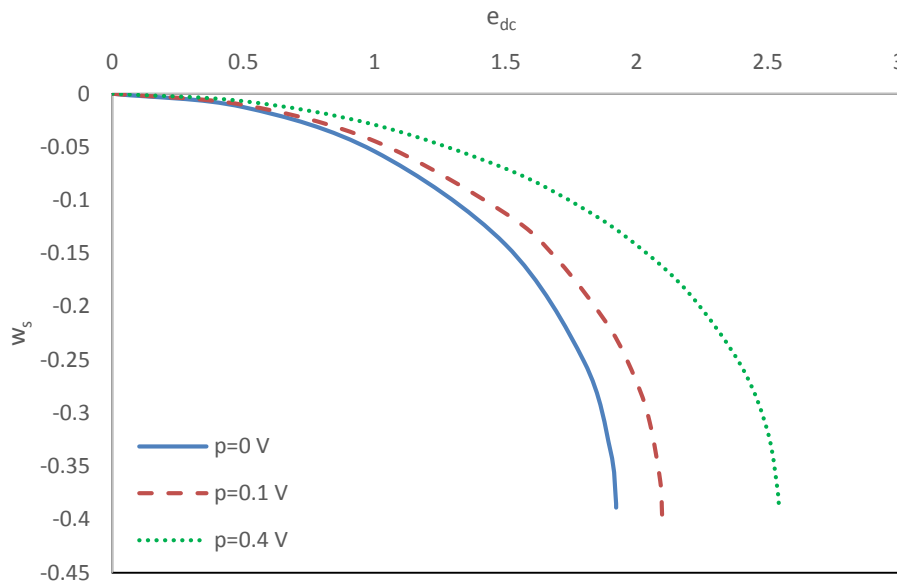
همچنین با مشاهده شکل (۵-۴) می‌توان دریافت که سختی سیستم برخلاف تغییر شکل استاتیکی با افزایش طول لایه‌ی پیزوالکتریک از  $L_1 = L$  تا  $L_1 = 0.5L$ ، کاهش می‌یابد و به ازای افزایش طول لایه‌ی پیزوالکتریک از  $L_1 = 0.5L$  تا  $L_1 = 0$ ، افزایش می‌یابد.



شکل (۴-۵) تاثیر تغییر طول لایه پیزوالکتریک بر ماکزیمم تغییر شکل استاتیکی نسبت به تغییرات  $e_{dc}$

شکل (۵-۵) ماکزیمم تغییر شکل استاتیکی میکروتیر نسبت به  $e_{dc}$  به ازای اعمال ولتاژهای مختلف

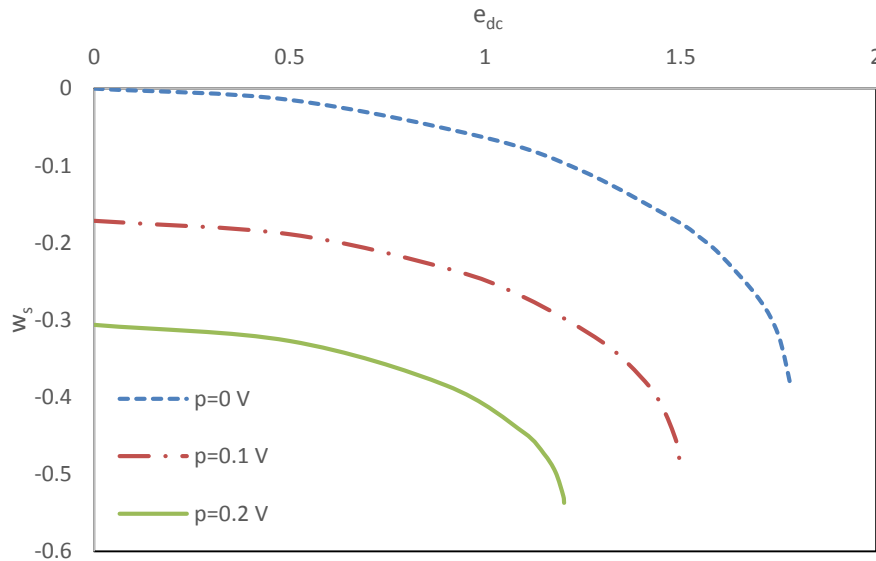
به لایه پیزوالکتریک  $p$  در حالتی که لایه پیزوالکتریک کل طول میکروتیر را پوشانده است و میدان مغناطیسی  $B = 0.3T$  بر لایه الاستومر مگنتورئولوژیکال وارد می‌شود را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود در یک  $e_{dc}$  ثابت، با افزایش مقدار قدر مطلق ولتاژ اعمالی به لایه پیزوالکتریک  $p$ ، تغییر شکل استاتیکی کاهش و ولتاژ پولین افزایش می‌یابد. برای توجیه این رفتار همان طور که گفته شد وقتی لایه پیزوالکتریک تمام طول میکروتیر را می‌پوشاند اثر خمشی پیزوالکتریک برابر صفر و اثر نیروی محوری کششی ماکزیمم مقدار را دارد. بنابراین با افزایش ولتاژ اعمالی به لایه پیزوالکتریک  $p$ ، نیروی محوری کششی افزایش می‌یابد و رفتار سخت‌شوندگی را در سیستم افزایش می‌دهد.



شکل (۵-۵) تاثیر مقدار  $p$  بر ماکزیمم تغییر شکل استاتیکی سیستم نسبت به تغییرات  $e_{dc}$  در حالی که  $L_1 = 0$  و  $B = 0.3T$

اگر لایه پیزوالکتریک تمام طول میکروتیر را نپوشاند و بر روی قسمتی از آن قرار بگیرد تاثیر ولتاژ اعمالی بر تغییر شکل استاتیکی با حالتی که کل طول میکروتیر را می پوشاند، متفاوت خواهد بود. شکل (۶-۵) ماکزیمم تغییر شکل استاتیکی به ازای اعمال ولتاژهای مختلف به لایه پیزوالکتریک در میدان مغناطیسی  $B = 0.3T$  زمانی که لایه پیزوالکتریک بر روی نصف طول میکروتیر قرار بگیرد یعنی  $L_1 = 0.5L$ ، نشان می دهد. مشاهده می شود در یک  $e_{dc}$  ثابت، با افزایش مقدار قدر مطلق  $p$ ، تغییر شکل استاتیکی افزایش و ولتاژ پولین کاهش می یابد. دلیل این رفتار این است که همان طور که گفته شد وقتی این لایه بر روی نصف طول میکروتیر در سمت سر آزاد آن قرار دارد، نیروی محوری کششی ناشی از اثر پیزوالکتریک مقداری مخالف صفر و ممان خمشی ناشی از پیزوالکتریک ماکزیمم مقدار خود را دارد. بنابراین با افزایش  $p$ ، هر دو جمله نیروی محوری کششی و ممان خمشی ناشی از پیزوالکتریک در معادله افزایش می یابند. پس در توجیه افزایش تغییر شکل استاتیکی میکروتیر با افزایش ولتاژ اعمالی به لایه پیزوالکتریک در  $L_1 = 0.5L$  می توان گفت که اثر ممان خمشی بر اثر نیروی محوری کششی ناشی از پیزوالکتریک غلبه می کند. بنابراین با افزایش ولتاژ اعمالی به لایه پیزوالکتریک  $p$ ، رفتار

سخت‌شوندگی در سیستم کاهش می‌یابد.



شکل (۶-۵) تاثیر مقدار  $P$  بر ماکزیمم تغییر شکل استاتیکی سیستم نسبت به تغییرات  $e_{dc}$  در حالتی که

$$B = 0.3T \text{ و } L_1 = 0.5L$$

لایه پیزوالکتریک قرار گرفته بر روی میکروتیر، می‌تواند در ضخامت‌های مختلف استفاده شود. در

شکل (۷-۵) مشاهده می‌شود، در حالتی که موقعیت لایه پیزوالکتریک به صورت  $L_1 = 0$  و  $L_2 = L$  بر

روی میکروتیر قرار گرفته، با افزایش ضخامت لایه پیزوالکتریک از  $t_p = 0.05t_b$  تا  $t_p = 0.4t_b$  به ازای

یک مقدار مشخص از  $e_{dc}$ ، تحت میدان  $B = 0.6T$  تغییر شکل استاتیکی کاهش و ولتاژ پولین افزایش

می‌یابد. دلیل این رفتار ناشی از تاثیر  $t_p$  بر روی جملات معادله استاتیکی (۲-۳۵) می‌باشد.

جملات با ضرایب  $H_\eta(x)$ ،  $B_1\alpha_3''$ ،  $B_2\alpha_1''$  و  $\alpha_4'' p$  که به ترتیب مربوط به سختی خمشی،

کشش غیر خطی لایه میانی، نیروی محوری کششی ناشی از پیزوالکتریک و ممان خمشی ناشی از

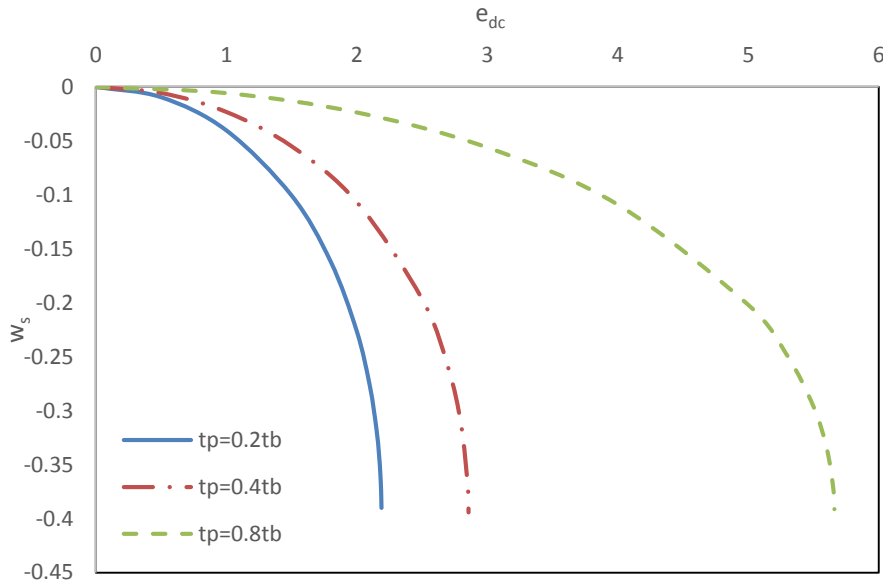
پیزوالکتریک می‌باشند. همان‌طور که در روابط (۲-۲۹) نشان داده شده است با افزایش ضخامت لایه

پیزوالکتریک مقدار ضرایب  $H_\eta(x)$ ،  $B_1\alpha_3''$  و  $\alpha_4'' p$  افزایش و  $B_2\alpha_1''$  کاهش می‌یابد.

پس در توجیه کاهش تغییر شکل استاتیکی میکروتیر با افزایش ضخامت لایه پیزوالکتریک از

بر  $t_p = 0.2t_b$  تا  $t_p = 0.8t_b$  می‌توان گفت که اثرات ترم سختی خمشی و ترم کشش لایه میانی بر

اثرات ترم نیروی محوری کششی و ممان خمشی ناشی از پیزوالکتریک غلبه می‌کنند. بنابراین همان طور که در شکل (۷-۵) مشاهده می‌شود می‌توان دریافت که سختی با افزایش  $t_p$ ، افزایش می‌یابد.



شکل (۷-۵) تاثیر تغییر ضخامت لایه پیزوالکتریک بر ماکزیمم تغییر شکل استاتیکی سیستم نسبت به تغییرات  $e_{dc}$  در حالتی که  $L_1 = 0$  و  $p = 0.1v$  و  $B = 0.6T$

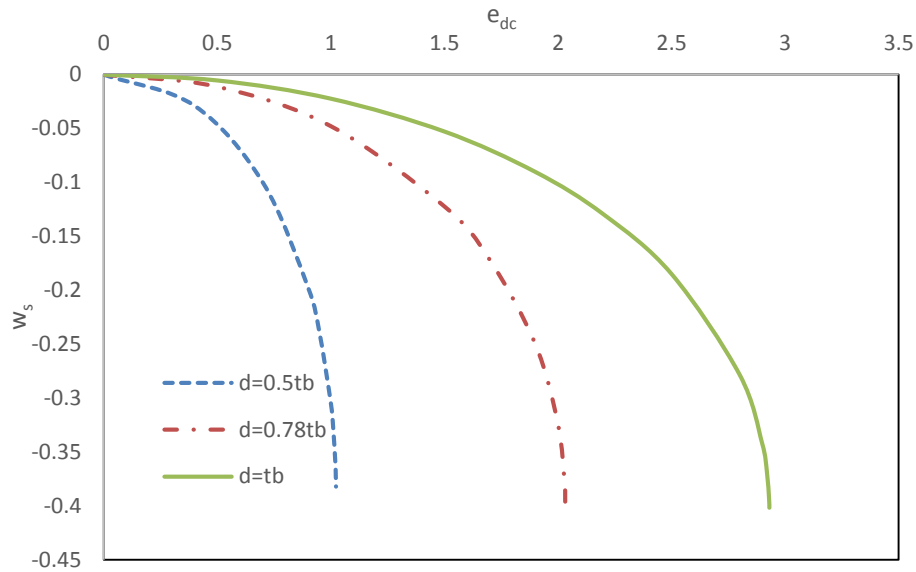
فاصله هوایی بین میکروتیر تا الکتروود یعنی  $d$  می‌تواند در یک محدوده معین تغییر کند. همان

طور که در شکل (۸-۵) مشاهده می‌شود برای مدل اول در حالتی که  $L_1 = 0$  و  $p = 0.1v$  و  $B = 0.2T$  با افزایش  $d$ ، تغییرات استاتیکی میکروتیر کاهش و ولتاژ پولین افزایش می‌یابد. دلیل این رفتار به تاثیر

$d$  در ضرایب  $B_1\alpha_3^w$  و  $\alpha_4^w p$  دارد که همان طور که در معادله (۳۵-۲) مشخص است با افزایش  $d$ ،

افزایش  $B_1\alpha_3^w$  و کاهش  $\alpha_4^w p$  می‌یابد. بنابراین در این سیستم با افزایش فاصله هوایی، هر دو ترم

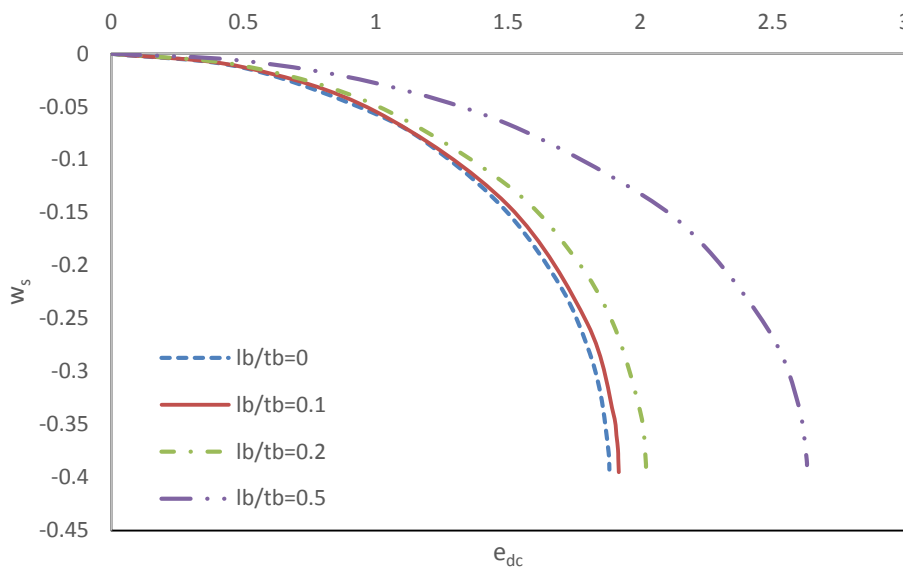
کشش لایه میانی و ممان خمشی ناشی از پیزوالکتریک، رفتار سخت شوندگی در سیستم را افزایش می‌دهند.



شکل (۸-۵) تاثیر تغییر فاصله هوایی بین میکروتیر و الکتروود بر ماکزیمم تغییر شکل استاتیکی نسبت به تغییرات  $e_{dc}$  در حالتی که  $L_1 = 0$  و  $p = 0.1v$  و  $B = 0.2T$

شکل (۹-۵) ماکزیمم تغییر شکل استاتیکی را بر اساس تئوری کلاسیک یعنی  $l_b = 0$  و  $l_p = 0$  و تئوری غیر کلاسیک با تغییر در نسبت پارامتر مقیاس طولی به ضخامت برای میکروتیر و پیزو در حالتی که  $L_1 = 0$  و  $p = 0.1v$  و  $B = 0$  نشان می‌دهد. همان طور که نشان داده شده است با افزایش نسبت پارامتر مقیاس طولی به ضخامت یک بار برای میکرو تیر و یک بار برای پیزوالکتریک، ماکزیمم تغییر شکل استاتیکی کاهش می‌یابد و ولتاژ پولین افزایش می‌یابد. علت آن را می‌توان در جمله سختی خمشی در معادله استاتیکی فلان پی برد. همان طور که مشخص است با افزایش این نسبت سختی خمشی افزایش می‌یابد. بنابراین سختی سیستم بر اساس تئوری کلاسیک کمتر از تئوری غیر کلاسیک می‌باشد و در تئوری غیر کلاسیک با افزایش نسبت پارامتر مقیاس طولی به ضخامت برای میکروتیر و پیزو رفتار سخت‌شوندگی را افزایش می‌دهد.



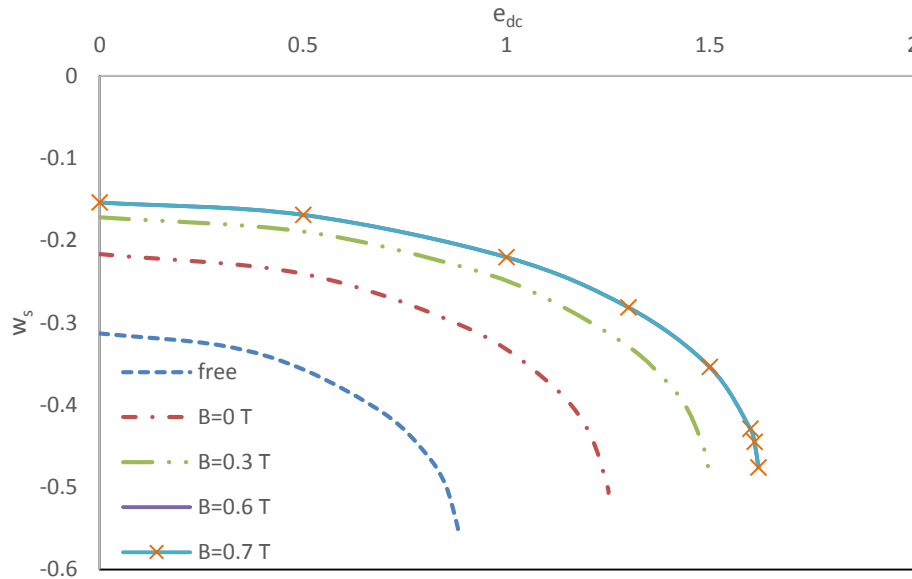


شکل (۵-۹) تاثیر پارامتر مقیاس طولی بر ماکزیمم تغییر شکل استاتیکی نسبت به تغییرات  $e_{dc}$  در حالتی که  $L_1 = 0$  و  $B = 0$  و  $p = 0.1v$

میدان مغناطیسی وارد بر لایه‌ی الاستومر مگنتورئولوژیکال همان طور که گفته شد از ۰ تسلا تا ۰,۶ تسلا می‌باشد. همان طور که گفته شد بجای لایه‌ی الاستومر مگنتورئولوژیکال می‌توان از فنر با سختی متغیر استفاده کرد. چون در این قسمت لایه الاستومر در مود برشی در سر آزاد میکروتیر می‌باشد فنر مورد نظر به صورت عمودی در سر آزاد میکروتیر با زمین معادل می‌شود. با تغییر در میدان مغناطیسی می‌توانیم سختی فنر معادل با این لایه الاستومر را تنظیم کنیم.

شکل (۵-۱۰) ماکزیمم تغییر شکل استاتیکی میکروتیر را برای حالتی که انتهای میکروتیر آزاد و حالتی که انتهای میکروتیر به لایه‌ی الاستومر مگنتورئولوژیکال است به ازای اعمال میدان مغناطیسی متفاوت، در  $L_1 = 0.5L$  و  $p = 0.1v$  نشان می‌دهد. همان طور که مشاهده می‌شود با افزایش میدان مغناطیسی از ۰ تا ۰,۶ تسلا ماکزیمم تغییر شکل استاتیکی کاهش و ولتاژ پولین افزایش می‌یابد. برای توجیه این رفتار می‌توان گفت که با افزایش میدان مغناطیسی، سختی فنر معادل مورد نظر در سر آزاد تیر افزایش می‌یابد که این امر سبب افزایش سخت شوندگی در سیستم می‌شود. توجه شود همان طور که در شکل مشاهده می‌شود با افزایش میدان مغناطیسی از ۰,۶ تسلا، اشباع مغناطیسی رخ می‌دهد و

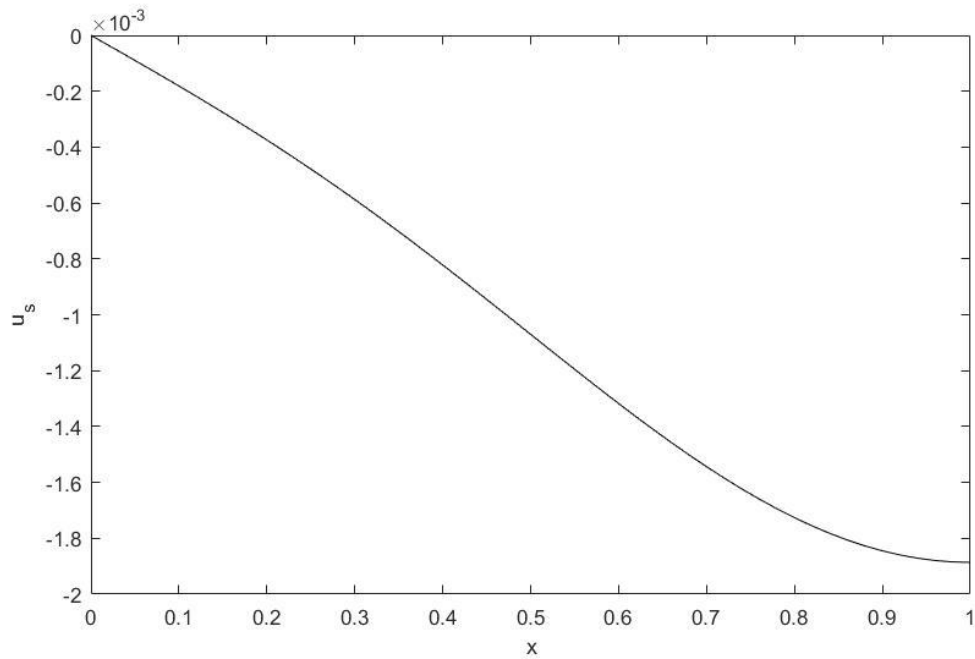
سختی برشی تغییری نمی‌کند و در نتیجه تغییر شکل استاتیکی نیز ثابت می‌ماند و تغییری نمی‌کند.



شکل (۵-۱۰) تاثیر میدان مغناطیسی اعمالی به لایه الاستومر مگنتورئولوژیکال بر ماکزیمم تغییر شکل استاتیکی نسبت به تغییرات  $e_{dc}$  در حالتی که  $L_1 = 0.5L$  و  $p = 0.1v$

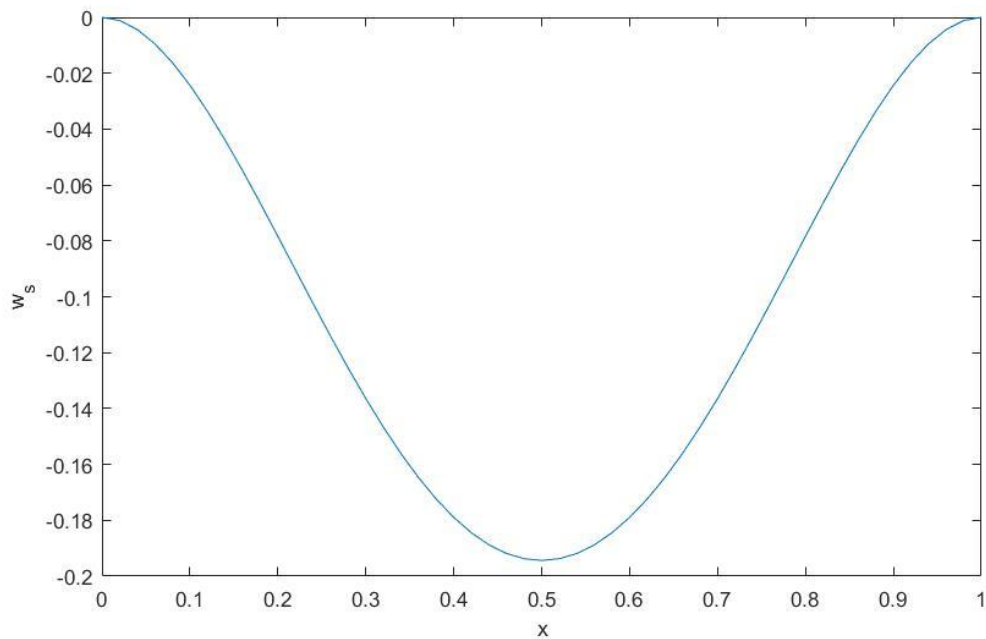
### ۵-۳-۲- بررسی تغییر شکل استاتیکی مدل دوم

همان طور که در شماتیک این مدل مشخص است لایه‌ی الاستومر در سر آزاد در مد فشاری قرار دارد و لایه‌ی پیزوالکتریک به صورت متقارن نسبت به مرکز میکروتیر بر روی آن قرار گرفته است. در این صورت با توجه به شرایط مرزی، ساختار میکروتیر و قرار دادن لایه پیزوالکتریک به صورت متقارن بر روی میکروتیر، بدیهی است مطابق شکل (۵-۱۱) ماکزیمم تغییر شکل طولی در انتهای میکروتیر یعنی  $x = 1$  رخ می‌دهد. و مطابق شکل (۵-۱۳) ماکزیمم تغییر شکل عرضی در وسط میکروتیر یعنی  $x = 0.5$  رخ می‌دهد.



شکل (۵-۱۱) تغییرات شکل استاتیکی طولی در مدل دوم در حالتی که پیزوالکتریک کل طول میکروتیر را پوشانده در

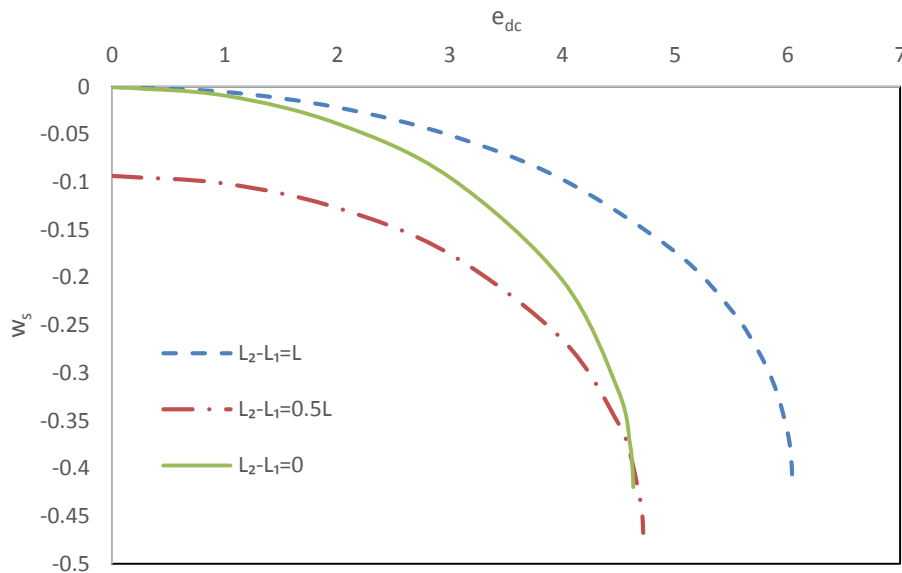
تحریک الکترواستاتیک  $e_{dc} = 5V$  و تحریک مغناطیسی  $B = 0.2T$



شکل (۵-۱۲) تغییرات شکل استاتیکی عرضی در مدل دوم در حالتی که پیزوالکتریک کل طول میکروتیر را پوشانده

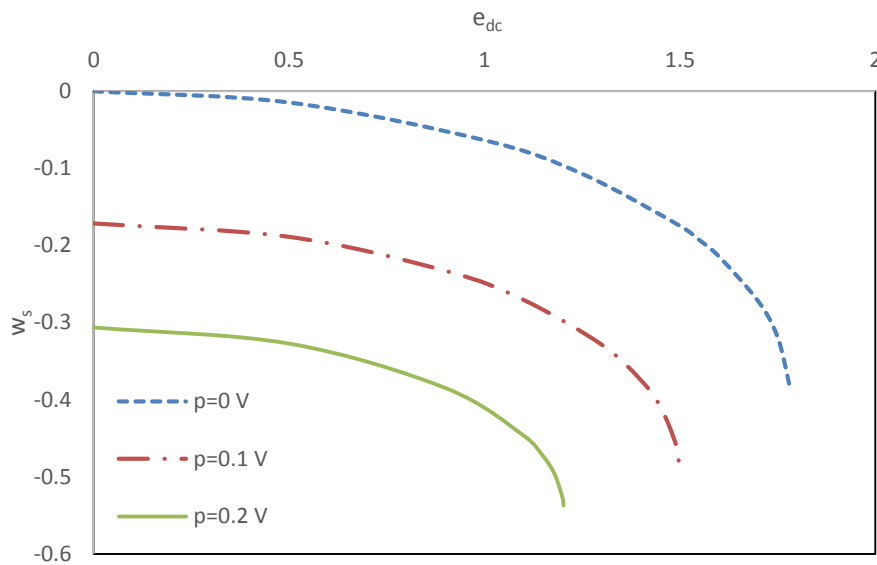
در تحریک الکترواستاتیک  $e_{dc} = 5V$  و تحریک مغناطیسی  $B = 0.2T$

شکل (۵-۱۳) ماکزیمم تغییر شکل میکروتیر به ازای طول‌های مختلف از لایه‌ی پیزوالکتریک را نسبت به تغییرات ولتاژ الکترواستاتیک یعنی  $e_{dc}$ ، نمایش می‌دهد. این شکل نشان می‌دهد همچنین برای یک مقدار خاص از  $e_{dc}$ ، با افزایش طول لایه‌ی پیزوالکتریک از  $L_2 - L_1 = 0$  تا  $L_2 - L_1 = 0.5L$  تغییر شکل استاتیکی افزایش و ولتاژ پولین کاهش می‌یابد. در حالی که به ازای افزایش طول لایه‌ی پیزوالکتریک از  $L_2 - L_1 = 0.5L$  تا  $L_2 - L_1 = L$  تغییر شکل استاتیکی کاهش و ولتاژ پولین افزایش می‌یابد.



شکل (۵-۱۳) تاثیر تغییر طول لایه پیزوالکتریک بر ماکزیمم تغییر شکل استاتیکی نسبت به تغییرات  $e_{dc}$

شکل (۵-۱۴) ماکزیمم تغییر شکل استاتیکی به ازای اعمال ولتاژهای مختلف به لایه پیزوالکتریک در میدان مغناطیسی  $B = 0.2T$  وارد بر لایه‌ی الاستومر مگنتورئولوژیکال را زمانی که لایه پیزوالکتریک بر روی نصف طول میکروتیر قرار بگیرد یعنی  $L_2 - L_1 = 0.5L$ ، نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود در یک  $e_{dc}$  ثابت، با افزایش مقدار قدر مطلق  $p$ ، تغییر شکل استاتیکی افزایش و ولتاژ پولین کاهش می‌یابد.



شکل (۱۴-۵) تاثیر مقدار  $p$  بر ماکزیمم تغییر شکل استاتیکی سیستم نسبت به تغییرات  $e_{dc}$  در حالتی که

$$B = 0.2T \text{ و } L_2 - L_1 = 0.5L$$

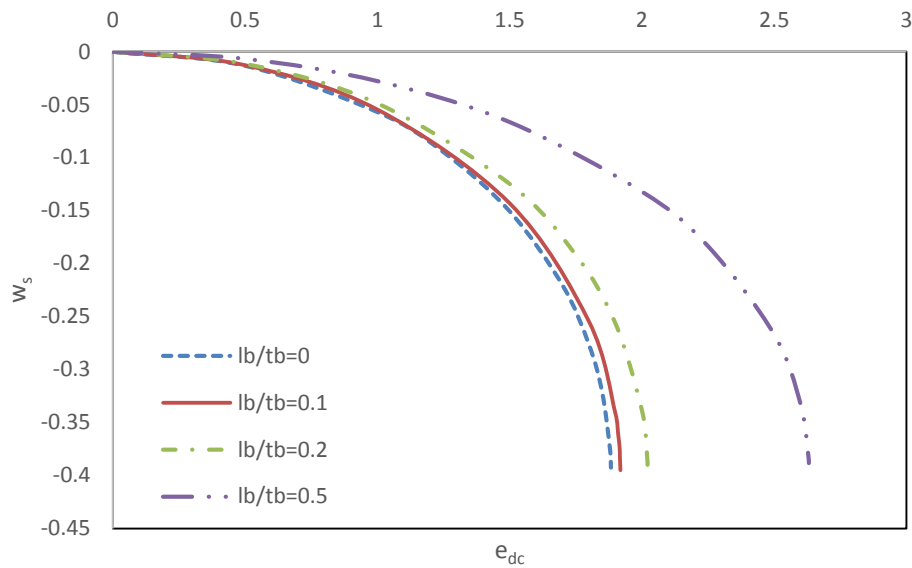
شکل (۱۵-۵) ماکزیمم تغییر شکل استاتیکی را بر اساس تئوری کلاسیک یعنی  $l_p = 0$  و  $l_b = 0$

و تئوری غیر کلاسیک با تغییر در نسبت پارامتر مقیاس طولی به ضخامت برای میکروتیر و پیزو در

حالتی که  $L_2 - L_1 = 0.5L$  و  $p = 0.1v$  و  $B = 0.2T$  نشان می‌دهد. همان طور که نشان داده شده

است با افزایش نسبت پارامتر مقیاس طولی به ضخامت یک بار برای میکروتیر و یک بار برای

پیزوالکتریک، ماکزیمم تغییر شکل استاتیکی کاهش می‌یابد و ولتاژ پولین افزایش می‌یابد.

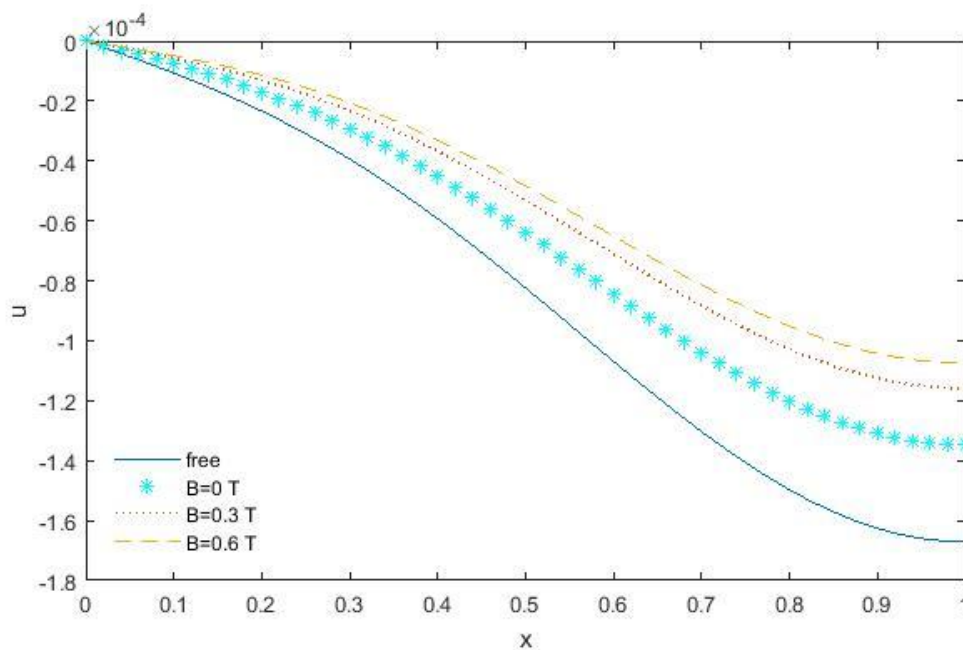


شکل (۵-۱۵) تاثیر پارامتر مقیاس طولی بر ماکزیمم تغییر شکل استاتیکی نسبت به تغییرات  $e_{dc}$  در حالتی که

$$B = 0.2T \text{ و } p = 0.1v \text{ و } L_2 - L_1 = 0.5L$$

با بررسی تاثیر میدان مغناطیسی وارد بر لایه‌ی الاستومر مگنتورئولوژیکال بر تغییر شکل عرضی و طولی مدل دوم متوجه می‌شویم که با افزایش میدان مغناطیسی ماکزیمم تغییر شکل عرضی و طولی کاهش می‌یابد و کاهش تغییر شکل عرضی نسبت به افزایش میدان مغناطیسی در این بازه بسیار کوچک است.

شکل (۵-۱۶) ماکزیمم تغییر شکل استاتیکی طولی میکروتیر برای حالتی که انتهای میکروتیر آزاد و حالتی که انتهای میکروتیر به لایه‌الاستومر مگنتورئولوژیکال است به ازای اعمال میدان مغناطیسی متفاوت، در  $L_1 = 0.5L$  و  $p = 0.1v$  نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش میدان مغناطیسی ماکزیمم تغییر شکل استاتیکی طولی کاهش می‌یابد.

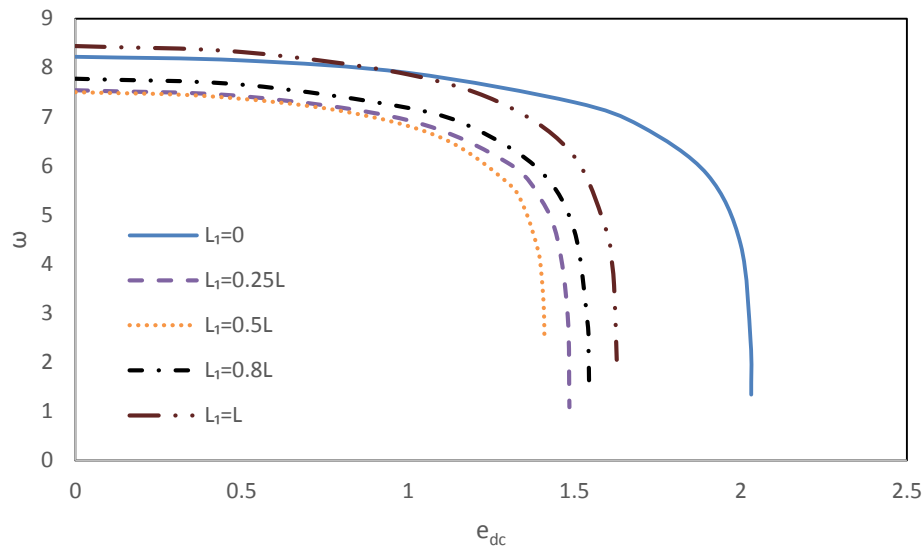


شکل (۵-۱۶) تاثیر میدان مغناطیسی اعمالی به لایه الاستومر مگنتورئولوژیکال بر ماکزیمم تغییر شکل استاتیکی طولی

## ۵-۴- بررسی فرکانس طبیعی

### ۵-۴-۱- بررسی فرکانس طبیعی مدل اول

شکل (۵-۱۷) به بررسی تغییرات فرکانس طبیعی سیستم به ازای طول‌های مختلف لایه پیزوالکتریک می‌پردازد. این شکل نشان می‌دهد که با افزایش طول لایه پیزوالکتریک از  $L_1 = L$  تا  $L_1 = 0.5L$  فرکانس طبیعی سیستم کاهش و با افزایش طول لایه پیزوالکتریک از  $L_1 = 0.5L$  تا  $L_1 = 0$ ، فرکانس طبیعی افزایش پیدا کرده است. دلیل این رفتار به تغییرات سختی نسبت به وزن سیستم مربوط می‌شود.



شکل (۵-۱۷) تاثیر تغییر طول لایه پیزوالکتریک بر فرکانس طبیعی سیستم نسبت به تغییرات  $e_{dc}$

شکل (۵-۱۸) تاثیر ولتاژ اعمالی به لایه پیزوالکتریک بر روی فرکانس طبیعی سیستم را در حالی

که پیزوالکتریک کل طول میکروتیر را پوشانده است و میدان مغناطیسی  $B = 0.3T$  بر لایه الاستومر

مگنتورئولوژیکال وارد می شود را نشان می دهد. همان طور که در شکل مشاهده می شود در یک  $e_{dc}$  ثابت

با افزایش ولتاژ اعمالی به پیزوالکتریک، فرکانس طبیعی سیستم افزایش می یابد. علت افزایش فرکانس

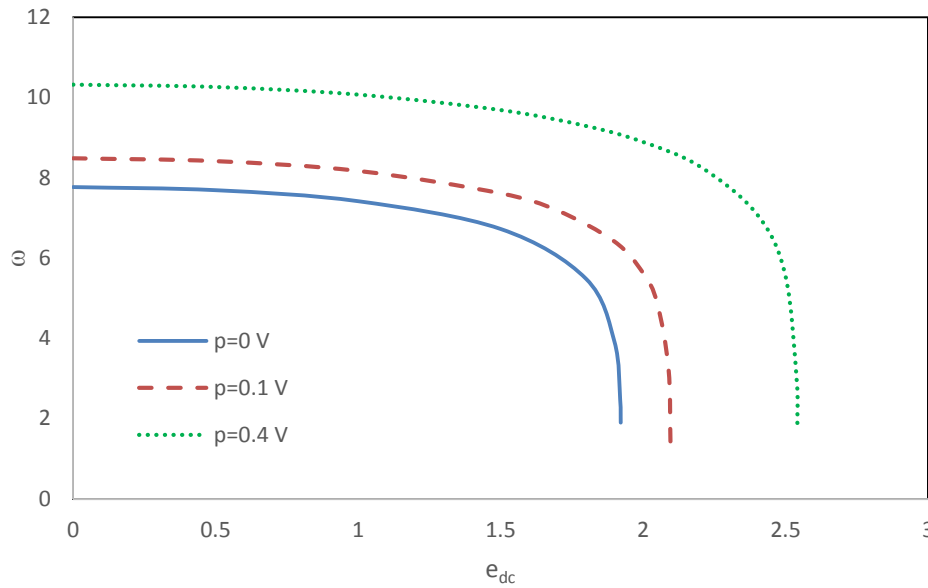
طبیعی به تاثیر اثر پیزوالکتریک بر جملات  $\alpha_1^* B_2 p$  و  $\alpha_3^* B_1 \int_0^1 \left(\frac{dw_s}{dx}\right)^2 dx$  در معادله (۲-۴۰) است که با

افزایش ولتاژ پیزوالکتریک، جمله  $\alpha_1^* B_2 p$  افزایش و با توجه به شکل (۵-۵) جابه جایی استاتیکی کاهش

می یابد و در نتیجه جمله  $\alpha_3^* B_1 \int_0^1 \left(\frac{dw_s}{dx}\right)^2 dx$  کاهش می یابد. بنابراین برای توجیه این رفتار می توان گفت

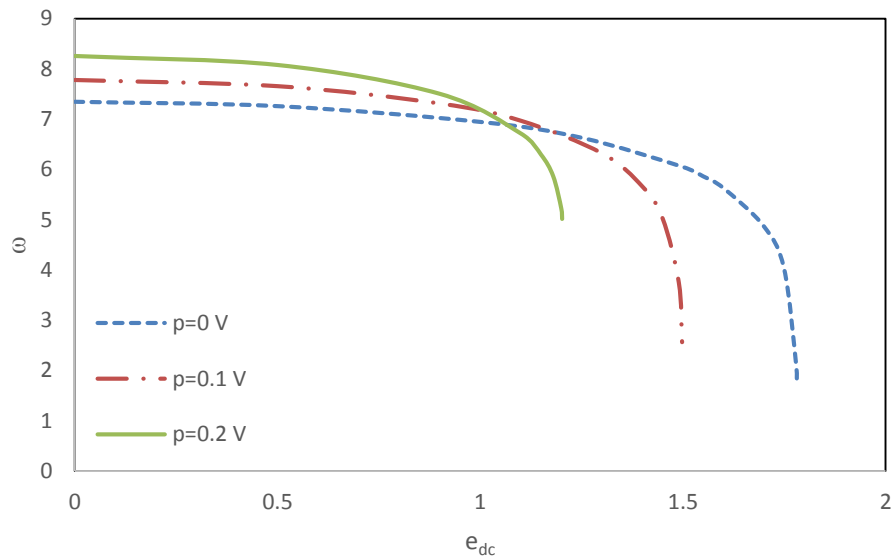
که اثر نیروی محوری کششی ناشی از پیزوالکتریک بر کشش لایه میانی غلبه می کند.





شکل (۱۸-۵) تاثیر مقدار  $p$  بر فرکانس طبیعی سیستم نسبت به تغییرات  $e_{dc}$  در حالی که  $L_1 = 0$  و  $B = 0.3T$  شکل (۱۹-۵) نشان می‌دهد که وقتی لایه پیزوالکتریک نصف طول پیزوالکتریک را می‌پوشاند در مقادیر  $e_{dc}$  دور از ولتاژ پولین با افزایش مقدار قدر مطلق  $p$ ، مقدار فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد و در مقادیر نزدیک به ولتاژ پولین با افزایش مقدار قدر مطلق  $p$ ، مقدار فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد. برای تایید صحت این رفتار ابتدا در  $e_{dc} = 0$ ، همان طور که از شکل (۶-۵) مشاهده شد با افزایش  $p$  جابه‌جایی استاتیکی افزایش می‌یابد. همچنین مقدار نیروی محوری کششی ناشی از پیزوالکتریک نیز با افزایش مقدار قدر مطلق  $p$  افزایش می‌یابد. بنابراین وقتی  $e_{dc} = 0$  در معادله (۲-۴۰) با افزایش مقدار قدر مطلق  $p$  ترم محوری  $\alpha_1^w B_2 p - \alpha_3^w B_1 \int_0^1 \left(\frac{dw_s}{dx}\right)^2 dx$  افزایش می‌یابد و در نتیجه سختی سیستم افزایش و فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد.

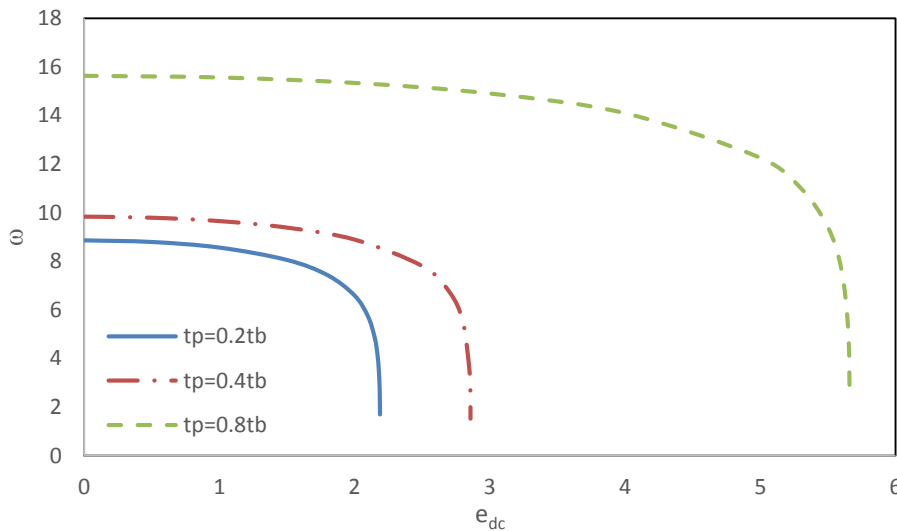
با اعمال یک ولتاژ dc ثابت بین میکروتیر و الکتروود ترم الکترواستاتیک به‌عنوان ترم نرم‌شوندگی به سیستم اضافه می‌شود. وقتی  $e_{dc}$  دور از ولتاژ پولین است افزایش ترم نرم‌شوندگی از افزایش ترم سخت‌شوندگی  $\alpha_1^w B_2 p - \alpha_3^w B_1 \int_0^1 \left(\frac{dw_s}{dx}\right)^2 dx$  کمتر است اما با افزایش  $e_{dc}$  تا نزدیکی ولتاژ پولین افزایش ترم نرم‌شوندگی بر افزایش ترم سخت‌شوندگی  $\alpha_1^w B_2 p - \alpha_3^w B_1 \int_0^1 \left(\frac{dw_s}{dx}\right)^2 dx$  غلبه می‌کند.



شکل (۵-۱۹) تاثیر مقدار  $p$  بر فرکانس طبیعی سیستم نسبت به تغییرات  $e_{dc}$  در حالتی که  $L_1 = 0.5L$  و  $B = 0.3T$

شکل (۵-۲۰) تغییرات فرکانس طبیعی سیستم را نسبت به تغییرات  $e_{dc}$  با افزایش ضخامت لایه

پیزوالکتریک نشان می‌دهد. این شکل نشان می‌دهد در حالتی که  $L_1 = 0$ ،  $p = 0.1v$  و  $B = 0.6T$  با افزایش مقدار ضخامت لایه پیزوالتریک، مقدار فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد. علت این رفتار را می‌توان از مقایسه تغییرات جملات معادله (۲-۴۰)، با افزایش ضخامت پیزوالکتریک یافت.

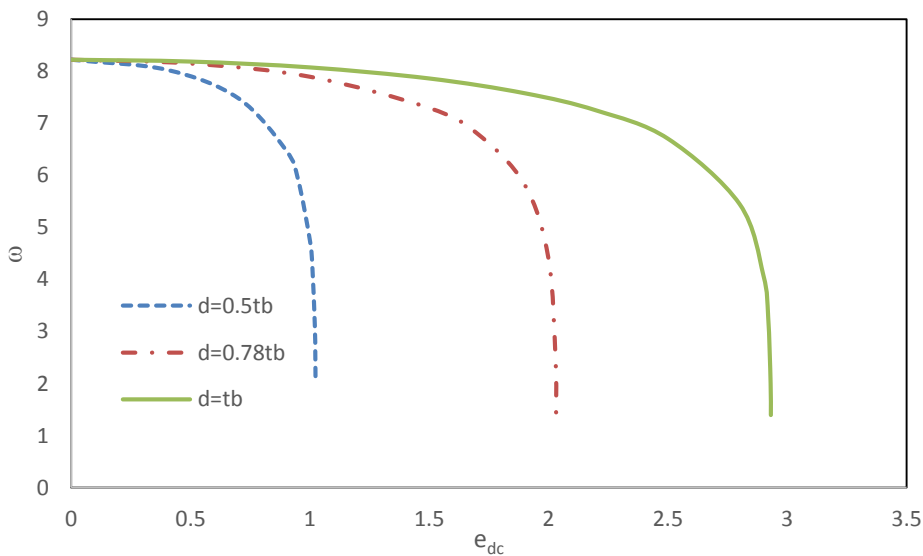


شکل (۵-۲۰) تاثیر تغییر ضخامت لایه پیزوالکتریک بر فرکانس طبیعی سیستم نسبت به تغییرات  $e_{dc}$  در حالتی که

$$B = 0.6T \text{ و } p = 0.1v \text{ و } L_1 = 0$$

شکل (۲۱-۵) تغییرات فرکانس طبیعی سیستم را نسبت به تغییرات  $e_{dc}$  با افزایش فاصله هوایی بین میکروتیر و الکتروود در حالتی که  $L_1 = 0$  و  $p = 0.1v$  و  $B = 0.2T$  نشان می‌دهد. همان طور که در این شکل مشاهده می‌شود با افزایش  $d$ ، فرکانس طبیعی سیستم افزایش می‌یابد. دلیل این رفتار به تاثیر  $d$  بر ضریب  $B_1\alpha_3^w$  دارد که همان طور که در معادله (۲-۴۰) مشخص است با افزایش  $d$ ،  $B_1\alpha_3^w$  افزایش می‌یابد و با توجه به شکل (۵-۸) ماکزیمم تغییر شکل استاتیکی کاهش می‌یابد و در نتیجه عبارت  $\int_0^1 \left(\frac{dw_s}{dx}\right)^2 dx$  کاهش می‌یابد.

بنابراین برای توجیه این رفتار می‌توان گفت که افزایش  $B_1\alpha_3^w$  از کاهش  $\int_0^1 \left(\frac{dw_s}{dx}\right)^2 dx$  بیشتر است و در نتیجه کشش لایه میانی افزایش می‌یابد و سختی سیستم افزایش می‌یابد و در نتیجه فرکانس سیستم نیز افزایش می‌یابد.

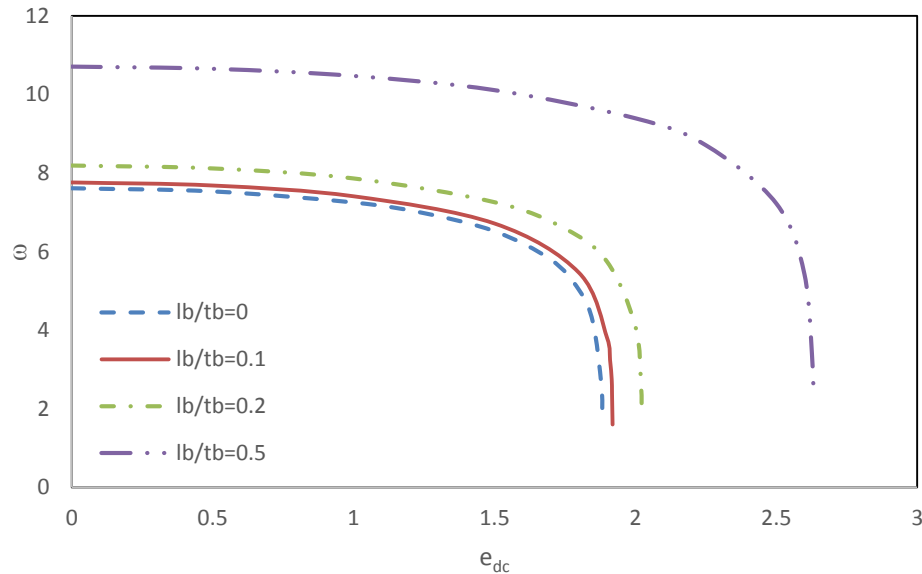


شکل (۲۱-۵) تاثیر تغییر فاصله هوایی بین میکروتیر و الکتروود بر فرکانس طبیعی سیستم نسبت به تغییرات  $e_{dc}$  در

$$\text{حالتی که } L_1 = 0 \text{ و } p = 0.1v \text{ و } B = 0.2T$$

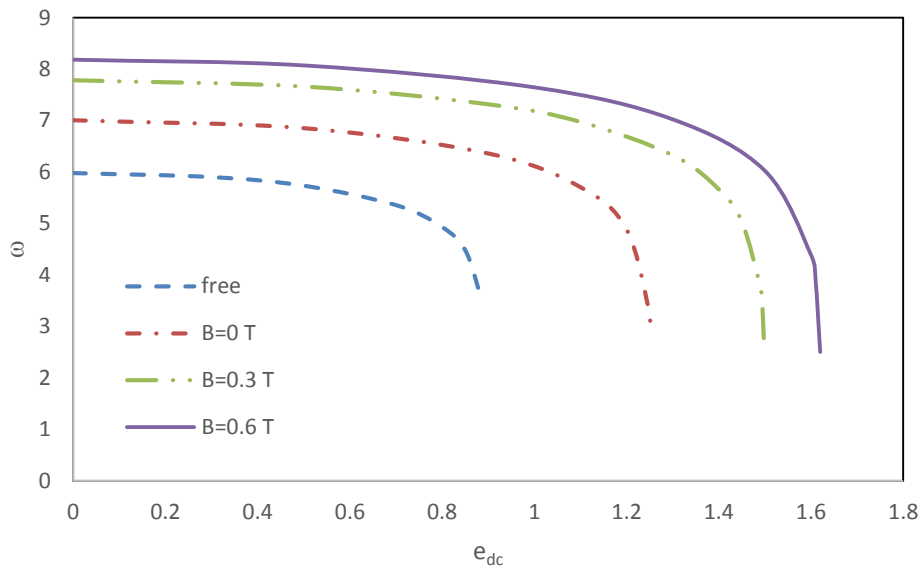
شکل (۲۲-۵) تغییرات فرکانس طبیعی سیستم را نسبت به تغییرات  $e_{dc}$  بر اساس تئوری کلاسیک

یعنی  $l_b = 0$  و  $l_p = 0$  و تئوری غیر کلاسیک با تغییر در نسبت پارامتر مقیاس طولی به ضخامت برای میکروتیر و پیزو در حالتی که  $L_1 = 0$  و  $p = 0.1v$  و  $B = 0$  نشان می‌دهد. دلیل این رفتار به افزایش سختی خمشی با افزایش نسبت پارامتر مقیاس طولی به ضخامت مربوط می‌شود که در نتیجه فرکانس طبیعی سیستم افزایش می‌یابد.



شکل (۲۲-۵) تاثیر پارامتر مقیاس طولی بر فرکانس طبیعی نسبت به تغییرات  $e_{dc}$  در حالتی که  $L_1 = 0$  و  $B = 0$  و  $p = 0.1v$

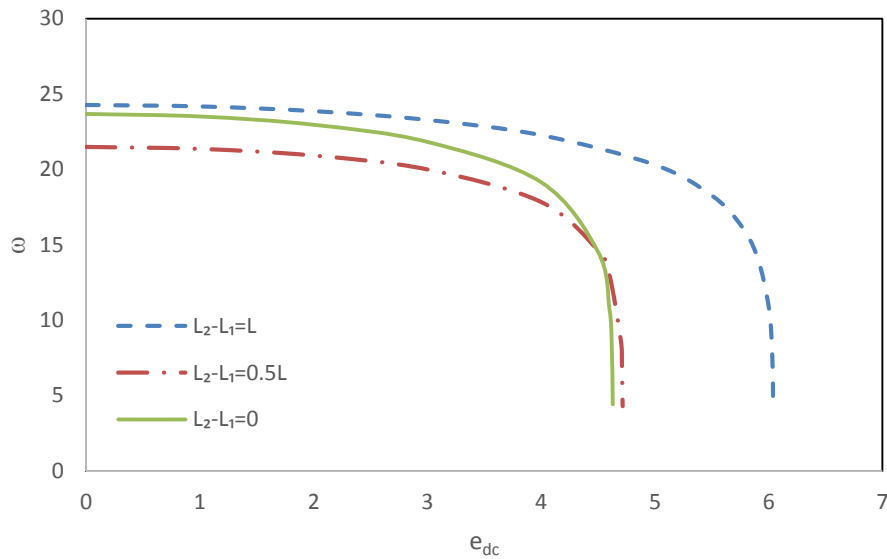
شکل (۲۳-۵) فرکانس طبیعی سیستم برای حالتی که انتهای میکروتیر آزاد و حالتی که انتهای میکروتیر به لایه الاستومر مگنتورئولوژیکیال است به ازای اعمال میدان مغناطیسی متفاوت، در  $L_1 = 0.5L$  و  $p = 0.1v$  نشان می‌دهد. همان طور که مشاهده می‌شود با افزایش میدان مغناطیسی فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد. برای توضیح این رفتار می‌توان گفت که با افزایش میدان مغناطیسی، سختی فنر معادل مورد نظر در سر آزاد تیر افزایش می‌یابد که این امر سبب افزایش سختی شونده‌گی در سیستم و در نتیجه افزایش فرکانس می‌شود.



شکل (۲۳-۵) تاثیر میدان مغناطیسی اعمالی به لایه الاستومر مگنتورئولوژیکال بر فرکانس طبیعی سیستم نسبت به تغییرات  $e_{dc}$  در حالتی که  $L_1 = 0.5L$  و  $p = 0.1v$

#### ۵-۴-۲- بررسی فرکانس طبیعی مدل دوم

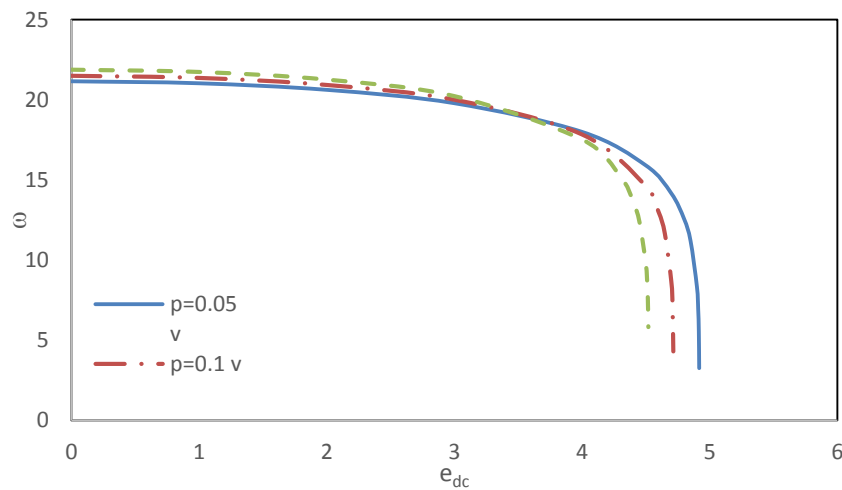
شکل (۲۴-۵) به بررسی تغییرات فرکانس طبیعی سیستم به ازای طول‌های مختلف لایه پیزوالکتریک می‌پردازد. این شکل نشان می‌دهد که با افزایش طول لایه پیزوالکتریک از  $L_2 - L_1 = 0$  تا  $L_2 - L_1 = 0.5L$  فرکانس طبیعی سیستم کاهش و با افزایش طول لایه پیزوالکتریک از  $L_2 - L_1 = 0.5L$  تا  $L_2 - L_1 = L$ ، فرکانس طبیعی افزایش پیدا کرده است.



شکل (۲۴-۵) تاثیر تغییر طول لایه پیزوالکتریک بر فرکانس طبیعی سیستم نسبت به تغییرات  $e_{dc}$

شکل (۲۵-۵) تاثیر ولتاژ اعمالی به لایه پیزوالکتریک بر روی فرکانس طبیعی سیستم را در حالتی

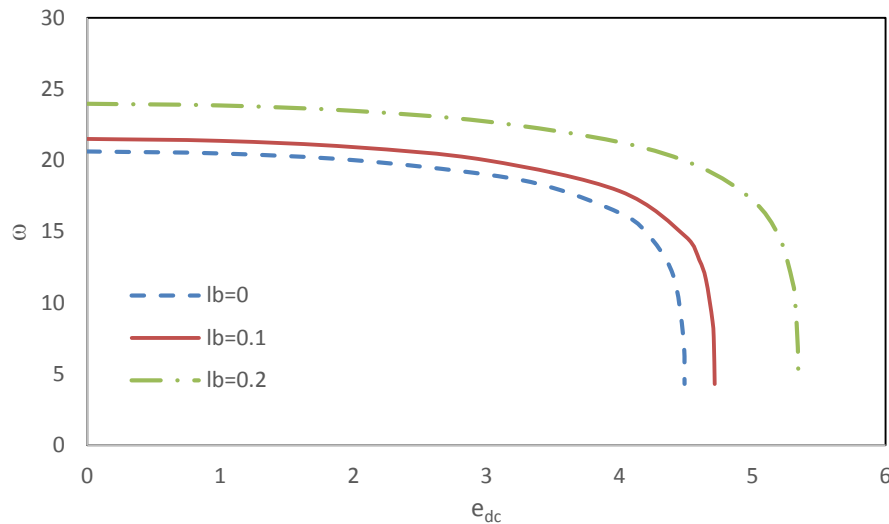
که پیزوالکتریک نصف طول میکروتیر را پوشانده و میدان مغناطیسی  $B = 0.2T$  بر لایه الاستومر مگنتورئولوژیکال وارد می شود نشان می دهد. همان طور که در شکل مشاهده می شود در  $e_{dc}$  ثابت دور از ولتاژ پولین با افزایش ولتاژ اعمالی به پیزوالکتریک، فرکانس طبیعی سیستم افزایش می یابد و در  $e_{dc}$  ثابت دور از ولتاژ پولین با افزایش ولتاژ اعمالی به پیزوالکتریک، فرکانس طبیعی سیستم کاهش می یابد.



شکل (۲۵-۵) تاثیر مقدار  $p$  بر فرکانس طبیعی سیستم نسبت به تغییرات  $e_{dc}$  در حالتی که  $L_2 - L_1 = 0.5L$  و

$$B = 0.2T$$

تغییرات فرکانس طبیعی سیستم را نسبت به تغییرات  $e_{dc}$  بر اساس تئوری کلاسیک یعنی  $l_b = 0$  و  $l_p = 0$  و تئوری غیر کلاسیک با تغییر در نسبت پارامتر مقیاس طولی به ضخامت برای میکروتیر و پیزو در حالتی که  $L_1 = 0$  و  $p = 0.1v$  و  $B = 0$  نشان می‌دهد. دلیل این رفتار به افزایش سختی خمشی با افزایش نسبت پارامتر مقیاس طولی به ضخامت مربوط می‌شود که در نتیجه فرکانس طبیعی سیستم افزایش می‌یابد.



شکل (۵-۲۶) تاثیر پارامتر مقیاس طولی بر فرکانس طبیعی سیستم نسبت به تغییرات  $e_{dc}$  در حالتی که

$$B = 0.2T \text{ و } p = 0.1v \text{ و } L_2 - L_1 = 0.5L$$

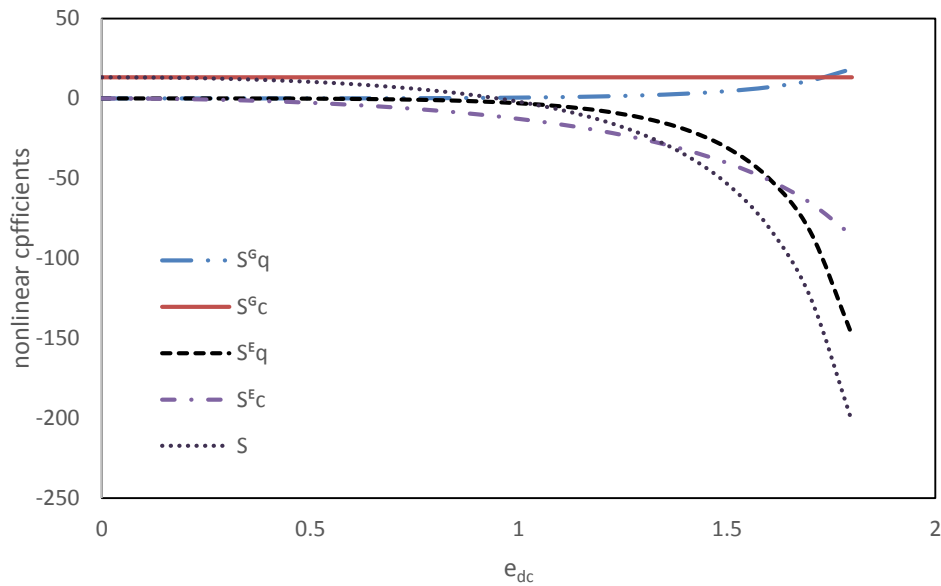
## ۵-۵- بررسی پاسخ فرکانسی

### ۵-۵-۱- بررسی پاسخ فرکانسی مدل اول

از معادله (۴-۲۶) نتیجه می‌شود که تغییرات غیر خطی در رفتار سیستم از پاسخ فرکانسی، به مقادیر  $S$ ،  $F$ ،  $\omega$ ،  $\bar{M}$  و  $\mu_1$  بستگی دارد. همان طور که مشخص است در این رابطه همه این مقادیر بجز  $S$ ، همواره مثبت هستند، بنابراین زمانی که  $S < 0$  باشد  $\frac{\Omega}{\omega}$  کوچکتر از ۱ خواهد بود و نرم شوندگی

در رفتار سیستم ایجاد خواهد شد و در مقابل زمانی که  $S > 0$  باشد  $\frac{\Omega}{\omega}$  بزرگتر از ۱ خواهد بود و سخت‌شوندگی در رفتار سیستم ایجاد خواهد شد.

شکل (۲۷-۵) تغییرات ضرایب غیر خطی  $S_c^G, S_q^G, S_c^E, S_q^E$  و  $S$  را نسبت به تغییرات  $e_{dc}$  در مدل اول نشان می‌دهد. همان طور که در شکل مشخص است با افزایش  $e_{dc}$  مقدار  $S$  از یک مقدار مثبت به یک مقدار منفی کاهش می‌یابد، بنابراین همان طور که در شکل مشاهده می‌شود با افزایش  $e_{dc}$  از  $0v$  تا  $0.947v$ ، تغییرات  $S$  سخت‌شوندگی را کاهش می‌دهد و رفتار سیستم به سمت رفتار خطی نزدیک می‌شود و با افزایش ولتاژ الکترواستاتیک از  $0.947v$  تا  $1.8v$ ، تغییرات  $S$  سبب افزایش نرم-شوندگی سیستم می‌شود. برای توجیه علت کاهش  $S$  با افزایش  $e_{dc}$  می‌توان گفت که کاهش  $S_q^E$  و  $S_c^E$  بر افزایش  $S_q^G$  غلبه می‌کند.



شکل (۲۷-۵) تغییرات ضرایب غیر خطی نسبت به تغییرات  $e_{dc}$  در مدل اول

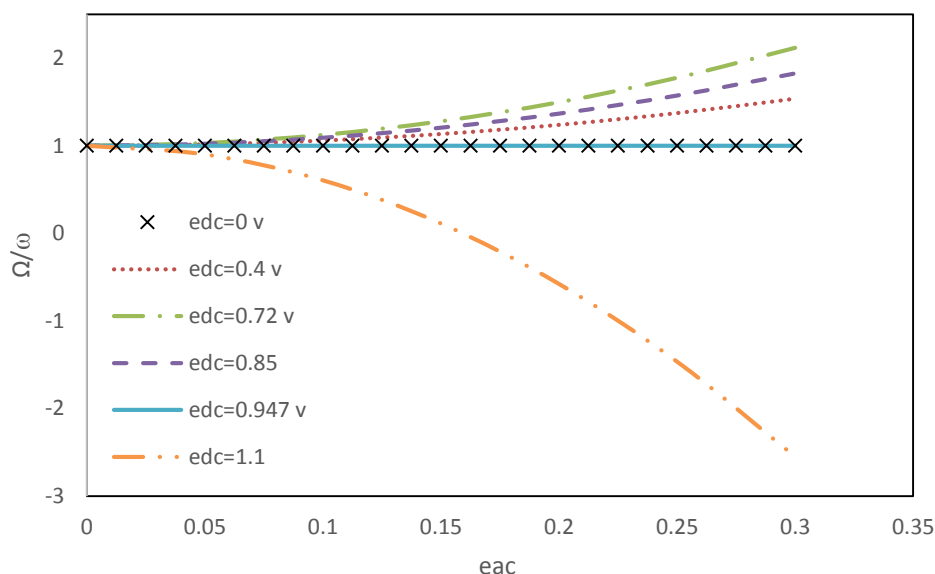
شکل (۲۸-۵) تغییرات  $\frac{\Omega}{\omega}$  نسبت به  $e_{ac}$ ، به ازای مقادیر متفاوت  $e_{dc}$  نشان می‌دهد. همان طور که از شکل مشخص است وقتی  $e_{dc} = 0$  باشد  $\frac{\Omega}{\omega}$  برابر ۱ خواهد بود که بیانگر رفتار خطی سیستم است و با افزایش  $e_{dc}$  تا مقدار خاص  $e_{dc} \cong 0.72v$ ،  $\frac{\Omega}{\omega}$  به مقادیر بیشتر از ۱ افزایش می‌یابد که بیانگر تغییر



از رفتار خطی به سمت افزایش رفتار سخت‌شوندگی سیستم است و در ادامه با افزایش  $e_{dc}$  تا مقدار خاص  $e_{dc} \cong 0.947v$ ،  $\frac{\Omega}{\omega}$  کاهش یافته و برابر ۱ خواهد بود که بیان‌گر کاهش رفتار سخت‌شوندگی به سمت رفتار خطی سیستم است. همان‌طور که مشخص است با ادامه افزایش  $e_{dc}$ ،  $\frac{\Omega}{\omega}$  به مقادیر کمتر از ۱ کاهش یافته که بیانگر تغییر رفتار خطی به سمت افزایش رفتار نرم‌شوندگی سیستم است.

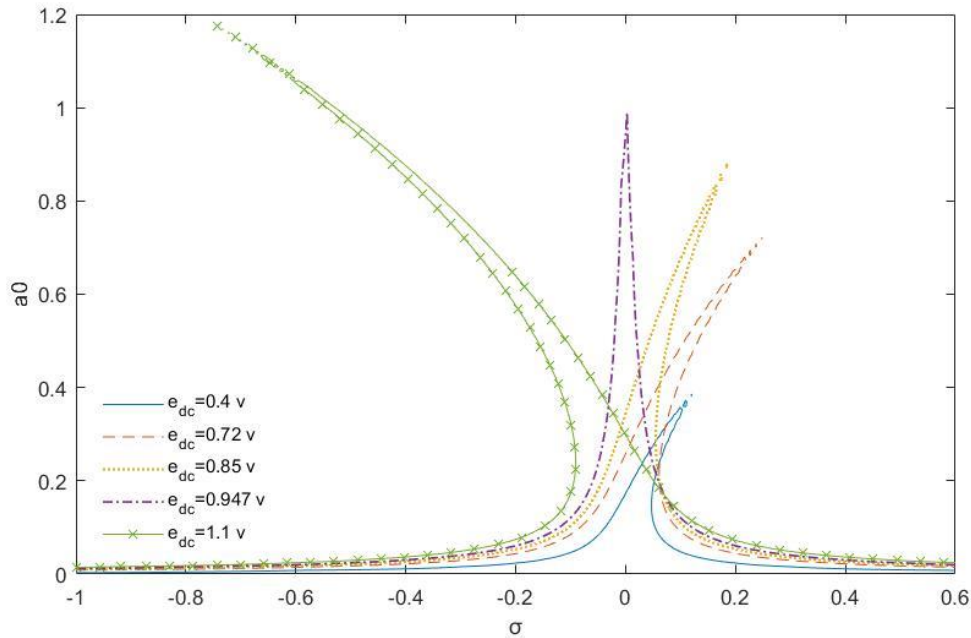
دلیل این رفتار را باید به تاثیر  $e_{dc}$  بر ترم‌های معادله (۴-۲۶) بررسی کرد که با افزایش  $e_{dc}$ ، نرم‌شوندگی در رفتار سیستم افزایش می‌یابد که سبب کاهش فرکانس طبیعی و افزایش جابه‌جایی استاتیکی می‌شود و با توجه به معادله (۴-۱۸)،  $F$  افزایش می‌یابد و با توجه به شکل (۵-۲۷) مقدار  $S$  از مقادیر مثبت به سمت مقادیر منفی کاهش می‌یابد.

پس در توجیه افزایش  $\frac{\Omega}{\omega}$  با افزایش  $e_{dc}$  از  $0v$  تا  $0.72v$  می‌توان گفت که تاثیر افزایش  $F$  و کاهش  $\omega$  از تاثیر کاهش  $S$  در معادله (۴-۲۶) بیشتر است و در توجیه کاهش  $\frac{\Omega}{\omega}$  با افزایش  $e_{dc}$  از  $0.72v$  تا  $0.947v$  می‌توان گفت که تاثیر کاهش  $S$  از تاثیر افزایش  $F$  و کاهش  $\omega$  در معادله (۴-۲۶) بیشتر است.



شکل (۵-۲۸) تغییرات  $\frac{\Omega}{\omega}$  نسبت به  $e_{ac}$  به ازای مقادیر متفاوت  $e_{dc}$

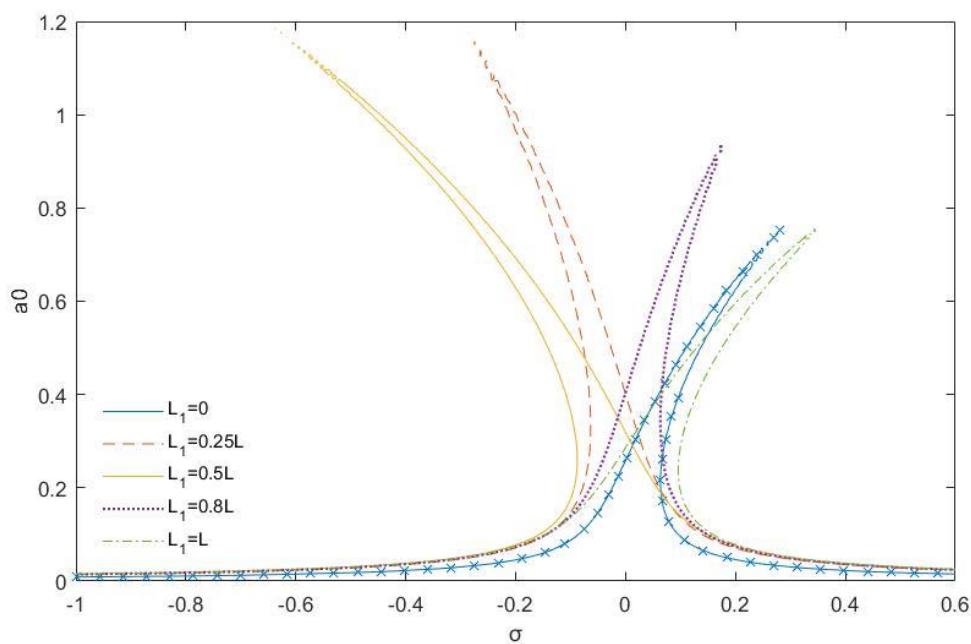
شکل (۲۹-۵) پاسخ دینامیکی سیستم به ازای مقادیر مختلف  $e_{dc}$  رسم شده است. این شکل نشان می‌دهد با افزایش  $e_{dc}$ ، مقدار ماکزیمم  $a0$  افزایش می‌یابد که علت این امر، افزایش مقدار  $F$  و کاهش  $\omega$  با افزایش  $e_{dc}$  در رابطه (۲۵-۴) است. همچنین رفتار سیستم با افزایش  $e_{dc}$  از  $0v$  تا  $0.72v$  از رفتار خطی به سمت افزایش رفتار سخت‌شوندگی تغییر می‌کند و با افزایش  $e_{dc}$  از  $0.72v$  تا  $0.947v$  با کاهش رفتار سخت‌شوندگی به سمت رفتار خطی تغییر می‌کند و با افزایش  $e_{dc}$  از  $0.947v$  تا ولتاژ پولین، رفتار خطی کاهش می‌یابد و رفتار نرم‌شوندگی سیستم افزایش می‌یابد.



شکل (۲۹-۵) تغییرات  $a0$  نسبت به  $\sigma$  به ازای مقادیر متفاوت  $e_{dc}$

شکل (۳۰-۵) تاثیر طول لایه پیزوالکتریک را بر روی رفتار دینامیکی سیستم به ازای  $e_{dc} = 0.72v$  نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود با افزایش طول پیزوالکتریک از  $L_1 = L$  تا  $L_1 = 0.5L$ ، دامنه ارتعاشی افزایش می‌یابد و رفتار سخت‌شوندگی در سیستم کاهش می‌یابد و با افزایش طول پیزوالکتریک از  $L_1 = 0.5L$  تا  $L_1 = 0$ ، دامنه ارتعاشی کاهش می‌یابد و رفتار سخت‌شوندگی افزایش می‌یابد. علت این تاثیر را می‌توان به تاثیر طول لایه پیزوالکتریک بر تغییر شکل استاتیکی و فرکانس طبیعی در شکل

شکل (۴-۵) و شکل (۵-۱۷) مشاهده کرد که با افزایش طول پیزوالکتریک از  $L_1 = L$  تا  $L_1 = 0.5L$ ، تغییر شکل استاتیکی افزایش و فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد و با افزایش طول پیزوالکتریک از  $L_1 = 0.5L$  تا  $L_1 = 0$ ، تغییر شکل استاتیکی کاهش و فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد. با توجه به معادله (۴-۱۸) با افزایش تغییر شکل استاتیکی قدر مطلق ضرایب  $S_c^E$  و  $S_q^E$  افزایش می‌یابند و چون این مقادیر منفی هستند در نتیجه با افزایش طول پیزوالکتریک از  $L_1 = L$  تا  $L_1 = 0.5L$  رفتار سخت-شوندگی کاهش و رفتار نرم‌شوندگی افزایش می‌یابد و با افزایش طول پیزوالکتریک از  $L_1 = 0.5L$  تا  $L_1 = 0$ ، رفتار نرم‌شوندگی کاهش و رفتار سخت‌شوندگی افزایش می‌یابد. همچنین تغییر رفتار ماکزیم دامنه  $a_0$  به ازای تاثیر تغییرات طول پیزوالکتریک بر  $\omega$  و مقدار  $F$ ، که با افزایش تغییر شکل استاتیکی افزایش و با کاهش تغییر شکل استاتیکی کاهش می‌یابد، توجیه می‌شود.

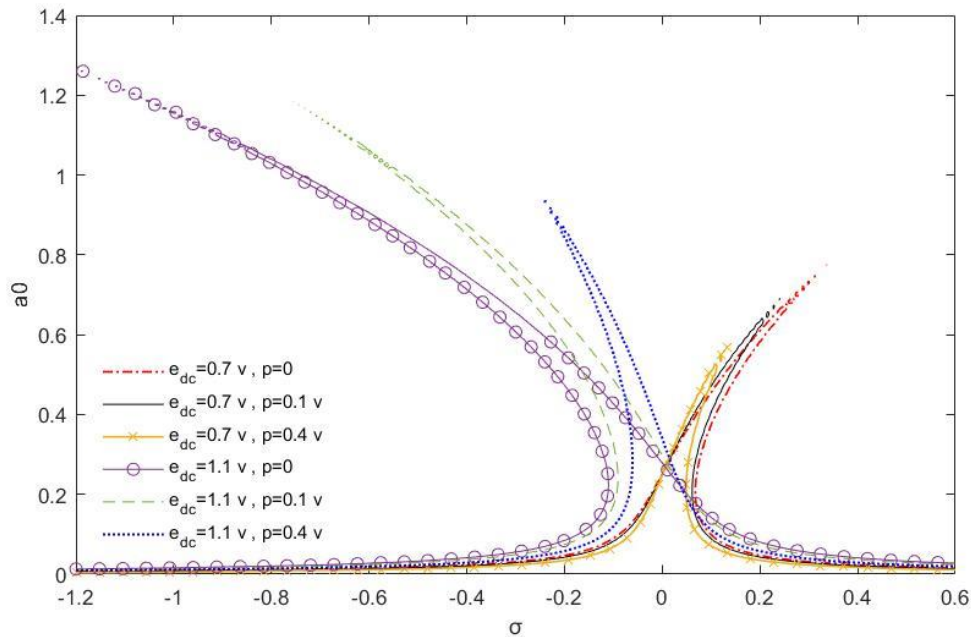


شکل (۵-۳۰) تاثیر تغییر طول لایه پیزوالکتریک بر منحنی فرکانسی سیستم به ازای  $e_{dc} = 0.72v$

شکل (۵-۳۱) تاثیر ولتاژ اعمالی به لایه پیزوالکتریک را بر روی رفتار دینامیکی سیستم وقتی لایه

پیزوالکتریک کل طول میکروتیر را می‌پوشاند و میدان مغناطیسی  $B = 0.3T$  به لایه الاستومر وارد

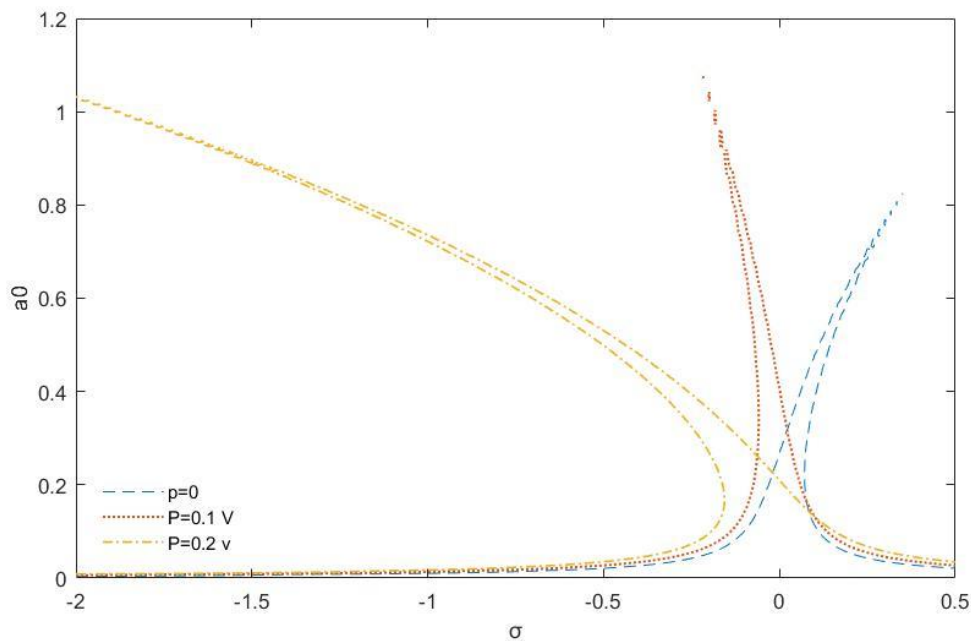
شود در  $e_{dc} = 0.7v$  و  $e_{dc} = 1.1v$  نشان می‌دهد. در این شکل مشاهده می‌شود با افزایش  $P$  دامنه ارتعاشی کاهش می‌یابد و رفتار غیرخطی سیستم در  $e_{dc} = 0.7v$  و  $e_{dc} = 1.1v$  کاهش می‌یابد، و به سمت رفتار خطی تغییر می‌کند. کاهش ماکزیمم  $a_0$  با افزایش  $P$  به این علت است که مطابق شکل (۵-۵) و شکل (۱۸-۵) با افزایش  $P$ ، تغییر شکل استاتیکی کاهش و فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد و در نتیجه  $F$  کاهش می‌یابد و  $a_0$  نیز افزایش می‌یابد. تغییر رفتار غیر خطی به رفتار خطی با افزایش  $P$  به این علت است که با افزایش  $P$  قدر مطلق مقدار  $S$  کاهش می‌یابد و  $F$  نیز کاهش و  $\omega$  افزایش می‌یابد که تغییر این ضرایب همگی نقش مثبت در کاهش مقدار قدر مطلق جمله غیر خطی در معادله (۴-۲۶) دارند.



شکل (۳۱-۵) تاثیر مقدار  $P$  بر پاسخ فرکانسی سیستم در حالتی که  $L_1 = 0$  و  $B = 0.3T$  به ازای  $e_{dc} = 0.7v$  و  $e_{dc} = 1.1v$

شکل (۳۲-۵) پاسخ دینامیکی سیستم را به ازای اعمال ولتاژهای مختلف به لایه پیزوالکتریک در تحریک الکترواستاتیک  $e_{dc} = 0.7v$  و میدان مغناطیسی  $B = 0.3T$  زمانی که لایه پیزوالکتریک بر روی

نصف طول میکروتیر قرار بگیرد یعنی  $L_1 = 0.5L$ ، نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود با افزایش  $p$  دامنه ارتعاشی افزایش می‌یابد و رفتار سخت‌شوندگی کاهش می‌یابد و با افزایش بیشتر به نرم‌شوندگی تغییر می‌کند. علت افزایش ماکزیمم  $a_0$ ، در اثر افزایش تغییر شکل استاتیکی با افزایش  $p$  است که در نتیجه سبب افزایش  $F$  می‌شود. علت تغییر رفتار غیر خطی با افزایش  $P$  است که با افزایش  $p$ ، مقدار  $S$  از یک عدد مثبت به صفر و سپس به مقادیر منفی کاهش می‌یابد و  $F$  افزایش می‌یابد. پس در توجیه تغییر رفتار سیستم می‌توان گفت که اثر کاهش  $S$  از مقدار مثبت تا صفر بر اثر افزایش  $F$  غلبه می‌کند.



شکل (۳۲-۵) تاثیر مقدار  $p$  بر پاسخ فرکانسی سیستم در حالتی که  $L_1 = 0.5L$  و  $B = 0.3T$  به ازای

$$e_{dc} = 0.7v$$

شکل (۳۳-۵) تاثیر ضخامت پیزوالکتریک را بر روی رفتار دینامیکی سیستم در حالتی که  $L_1 = 0$

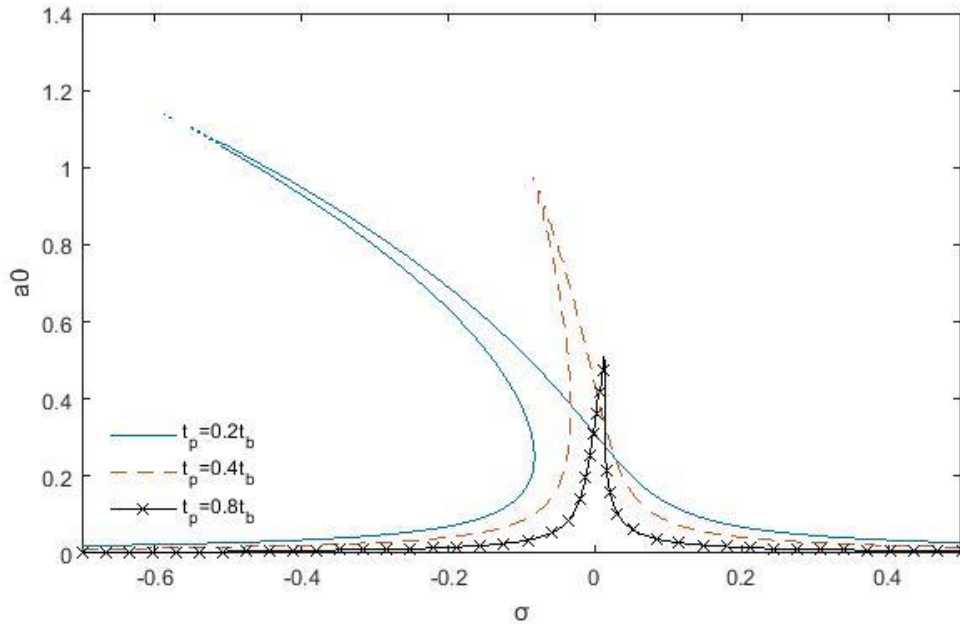
،  $p = 0.1v$ ،  $B = 0.6T$  و  $e_{dc} = 1.1v$  نشان می‌دهد. در این شکل مشاهده می‌شود با افزایش  $t_p$  دامنه

ارتعاشی کاهش می‌یابد و رفتار غیرخطی مدل اول رفتار نرم‌شوندگی کاهش می‌یابد و به با افزایش بیشتر

به رفتار خطی تغییر می‌کند. کاهش ماکزیمم  $a_0$  با افزایش  $t_p$  به این علت است که با افزایش  $t_p$  مطابق

شکل (۷-۵) و شکل (۲۰-۵)، تغییر شکل استاتیکی کاهش و فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد و در

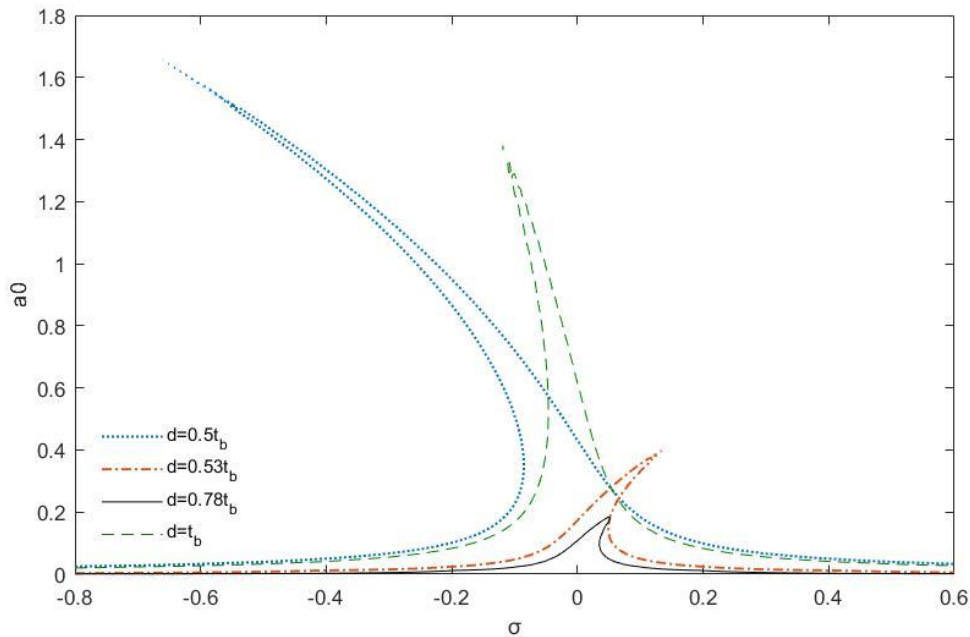
نتیجه  $F$  کاهش می‌یابد و  $a_0$  نیز کاهش می‌یابد. تغییر رفتار غیر خطی به رفتار خطی با افزایش  $t_p$  به این علت است که با افزایش  $t_p$  قدر مطلق مقدار  $S$  کاهش می‌یابد و  $F$  نیز کاهش می‌یابد که تغییر این دو ضریب نقش مثبت در کاهش مقدار قدر مطلق جمله غیر خطی در معادله (۴-۲۶) دارند.



شکل (۳۳-۵) تاثیر ضخامت پیزوالکتریک بر پاسخ فرکانسی سیستم در حالتی که  $B = 0.2T$ ،  $L_1 = 0.8L$  و  $p = 0.1v$  به ازای  $e_{dc} = 0.9v$  و  $e_{dc} = 0.7v$

شکل (۳۴-۵) تاثیر فاصله بین میکروتیر تا الکتروود را بر پاسخ دینامیکی سیستم در حالتی که  $L_1 = 0$ ،  $p = 0.1v$ ،  $B = 0.2T$  و  $e_{dc} = 0.4v$  نشان می‌دهد. در این شکل مشاهده می‌شود با افزایش  $d$  دامنه ارتعاشی  $a_0$  کاهش می‌یابد و رفتار غیرخطی سیستم به سمت رفتار خطی تغییر می‌کند. کاهش  $a_0$  به علت افزایش فرکانس طبیعی و کاهش ماکزیمم تغییر شکل استاتیکی با افزایش  $d$  است که سبب کاهش  $F$  و در نتیجه کاهش  $a_0$  می‌شود. همان طور که مشاهده می‌شود با افزایش  $d$  از  $0.5t_b$  تا  $0.53t_b$  به علت منفی بودن  $S$  سیستم دارای رفتار نرم‌شوندگی است که به دلیل کاهش اندازه‌ی  $S$  و مقدار  $F$  و افزایش  $\omega$ ، اندازه عبارت غیر خطی سیستم کاهش می‌یابد و رفتار سیستم به سمت رفتار خطی تغییر می‌کند. و با افزایش  $d$  از  $0.53t_b$  تا  $0.78t_b$  به علت تغییر علامت  $S$  از منفی به مثبت

رفتار سیستم از نرم‌شوندگی به سخت‌شوندگی تغییر می‌کند. و با افزایش  $d$  از  $0.78t_b$  تا  $t_b$  مقدار  $S$  که دارای علامت مثبت است، افزایش می‌یابد ولی با توجه به شکل سخت‌شوندگی کاهش می‌یابد و رفتار غیر خطی به رفتار خطی تغییر می‌کند که دلیل این رفتار تغییرات بیشتر  $F$  و  $\omega$  نسبت به  $S$  توجیه می‌شود.

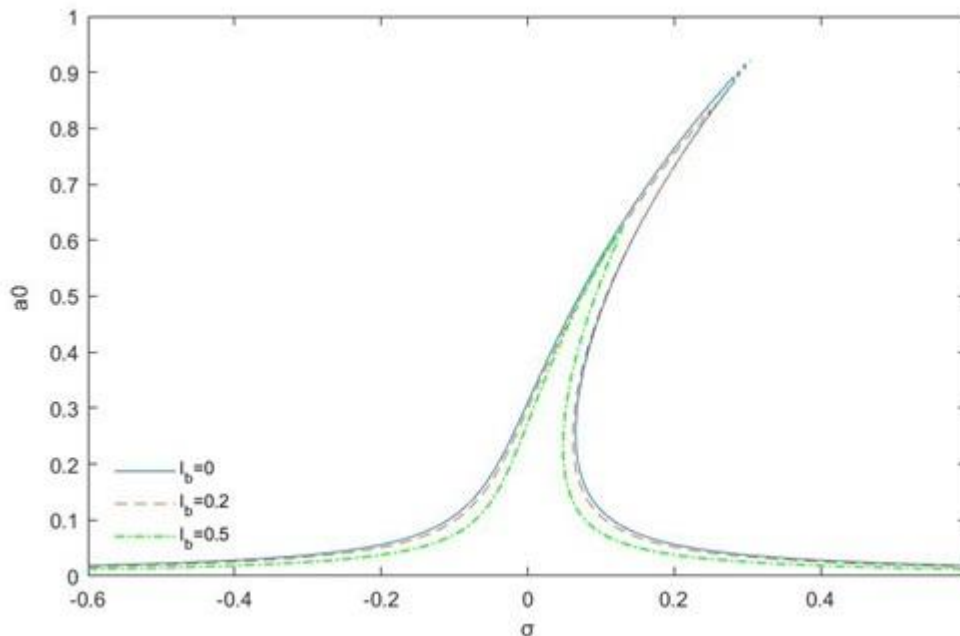


شکل (۳۴-۵) تاثیر تغییر فاصله هوایی بین میکروتیر و الکتروود بر پاسخ فرکانسی سیستم در حالتی که  $L_1 = 0$  و  $e_{dc} = 0.4v$  و  $B = 0.2T$  و  $p = 0.1v$

شکل (۳۵-۵) رفتار دینامیکی سیستم بر اساس تئوری کلاسیک یعنی  $l_b = 0$  و  $l_p = 0$  و تئوری غیر کلاسیک با تغییر در نسبت پارامتر مقیاس طولی به ضخامت برای میکروتیر و پیزو در حالتی که  $L_1 = 0$  و  $p = 0.1v$  و  $B = 0$  و  $e_{dc} = 0.8v$  نشان می‌دهد. در این شکل مشاهده می‌شود با افزایش  $\frac{l_b}{t_b}$

دامنه ارتعاشی کاهش می‌یابد و رفتار غیرخطی سیستم کاهش می‌یابد و به سمت رفتار خطی تغییر می‌کند. کاهش ماکزیمم  $a_0$  با افزایش  $\frac{l_b}{t_b}$  به این علت است که مطابق شکل (۹-۵) و شکل (۲۲-۵) با

افزایش  $\frac{l_b}{t_b}$ ، تغییر شکل استاتیکی کاهش و فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد و در نتیجه  $F$  کاهش می‌یابد در نتیجه  $a_0$  کاهش می‌یابد. تغییر رفتار غیر خطی به رفتار خطی با افزایش  $\frac{l_b}{t_b}$  به این علت است که با افزایش  $\frac{l_b}{t_b}$  قدر مطلق مقدار  $S$  کاهش می‌یابد و  $F$  نیز کاهش و  $\omega$  افزایش می‌یابد که تغییر این ضرایب همگی نقش مثبت در کاهش مقدار قدر مطلق جمله غیر خطی در معادله (۴-۲۶) دارند.



شکل (۳۵-۵) تاثیر پارامتر مقیاس طولی بر فرکانس طبیعی نسبت به تغییرات  $e_{dc}$  در حالی که  $L_1 = 0$  و

$$e_{dc} = 0.8v \text{ و } B = 0 \text{ و } p = 0.1v$$

شکل (۳۶-۵) تاثیر میدان مغناطیس را بر پاسخ دینامیکی سیستم در حالی که  $L_1 = 0.5L$  و

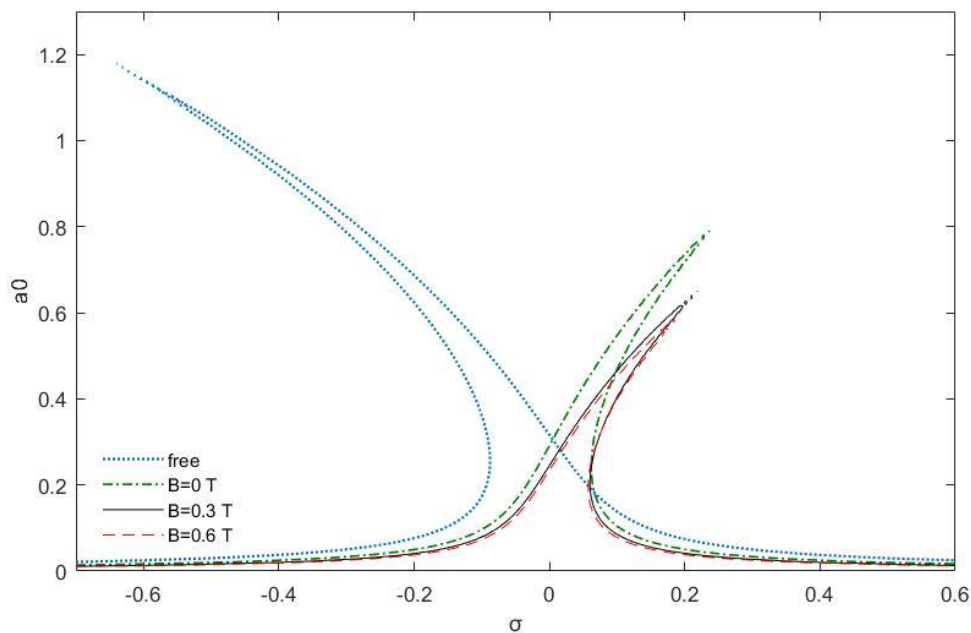
$$e_{dc} = 0.4v \text{ و } p = 0.1v$$

در این شکل مشاهده می‌شود با افزایش  $B$  دامنه ارتعاشی  $a_0$  کاهش می‌یابد و رفتار غیرخطی سیستم به سمت رفتار خطی تغییر می‌کند. کاهش  $a_0$  به علت افزایش فرکانس طبیعی و کاهش ماکزیمم تغییر شکل استاتیکی با افزایش  $B$  است که سبب کاهش  $F$  و در نتیجه کاهش  $a_0$  می‌شود. همان طور



که مشاهده می‌شود در حالتی که انتهای میکروتیر آزاد است به علت منفی بودن  $S$  سیستم دارای رفتار نرم‌شوندگی است که به دلیل کاهش اندازه‌ی  $S$  و مقدار  $F$  و افزایش  $\omega$ ، اندازه عبارت غیر خطی سیستم کاهش می‌یابد و رفتار سیستم به سمت رفتار خطی تغییر می‌کند.

و سپس در حالتی که لایه الاستومر مگنتورئولوژیکال به انتهای میکروتیر متصل است با افزایش  $B$  از 0 تا 0.6T مقدار  $S$  که دارای علامت مثبت است، افزایش می‌یابد در نتیجه تغییر رفتار سیستم از کاهش سخت‌شوندگی به سمت رفتار خطی، با افزایش تغییرات بیشتر  $F$  و  $\omega$  نسبت به  $S$ ، توجیه می‌شود.



شکل (۳۶-۵) تاثیر میدان مغناطیسی اعمالی به لایه الاستومر مگنتورئولوژیکال بر پاسخ فرکانسی نسبت به تغییرات

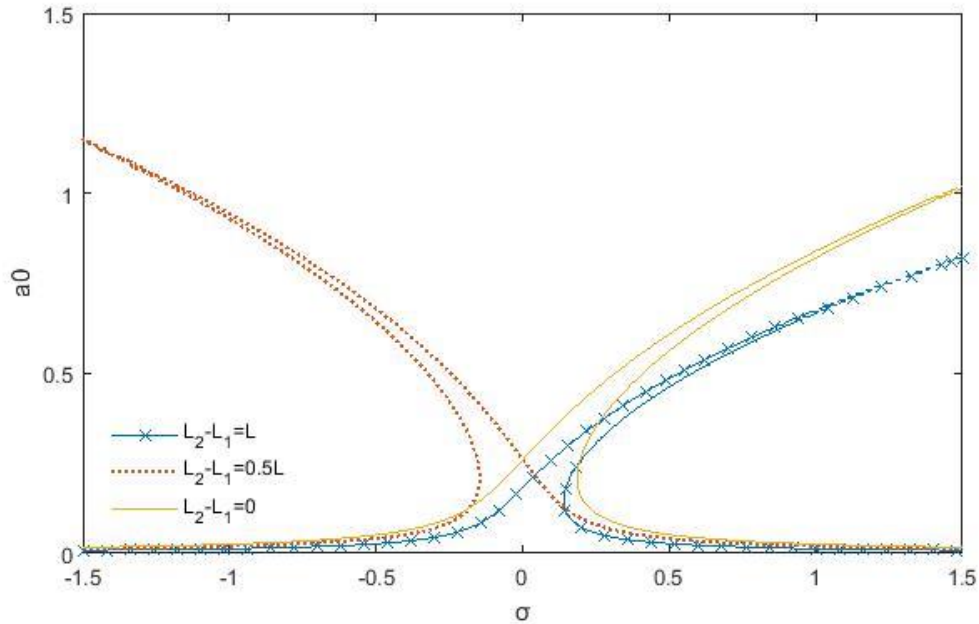
$$e_{dc} \text{ در حالتی که } L_1 = 0.5L \text{ و } p = 0.1v$$

## ۵-۲-۵- بررسی پاسخ فرکانسی مدل دوم

شکل (۳۷-۵) تاثیر طول لایه پیزوالکتریک را بر روی رفتار دینامیکی مدل دوم به ازای  $e_{dc} = 2.7v$

نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود با افزایش طول پیزوالکتریک از  $L_2 - L_1 = 0$  تا  $L_2 - L_1 = 0.5L$ ، دامنه

ارتعاشی افزایش می‌یابد و سخت‌شوندگی سیستم کاهش می‌یابد و به نرم‌شوندگی تغییر می‌کند و با افزایش طول پیزوالکتریک از  $L_2 - L_1 = 0.5L$  تا  $L_2 - L_1 = L$ ، دامنه ارتعاشی کاهش می‌یابد و نرم‌شوندگی سیستم کاهش می‌یابد و به سخت‌شوندگی تغییر می‌کند.



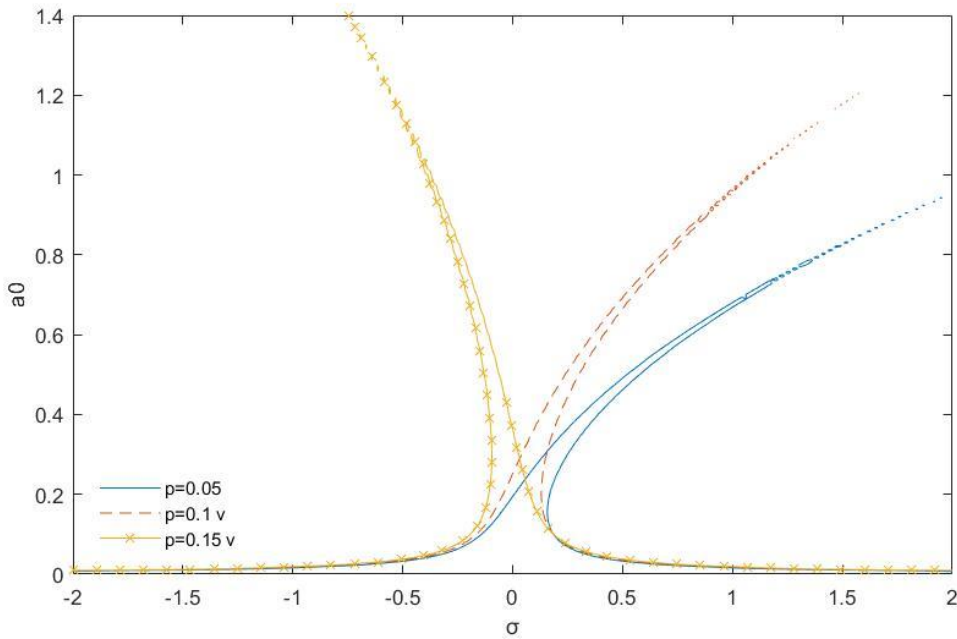
شکل (۳۷-۵) تاثیر تغییر طول لایه پیزوالکتریک بر منحنی فرکانسی سیستم به ازای  $e_{dc} = 0.72v$

شکل (۳۸-۵) تاثیر ولتاژ اعمالی به پیزوالکتریک را بر روی رفتار دینامیکی سیستم در

$L_2 - L_1 = 0.5L$  و  $B = 0.2T$  و  $e_{dc} = 2.7v$  نشان می‌دهد. در این شکل مشاهده می‌شود با افزایش

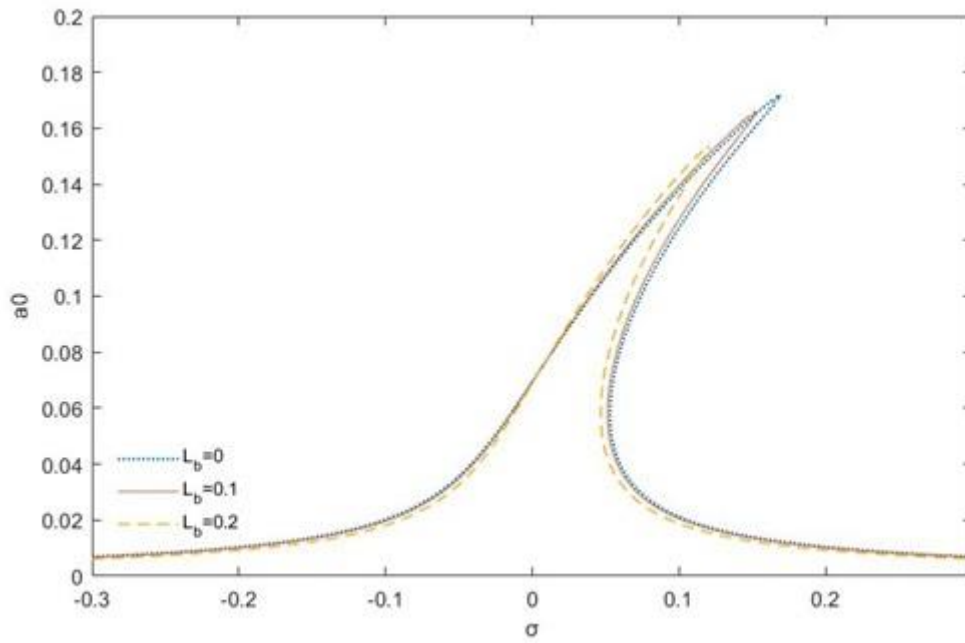
$P$  دامنه ارتعاشی افزایش می‌یابد و رفتار سخت‌شوندگی کاهش می‌یابد و با افزایش بیشتر  $P$

به رفتار نرم‌شوندگی تغییر می‌کند.



شکل (۳۸-۵) تاثیر مقدار  $p$  بر پاسخ فرکانسی سیستم نسبت به تغییرات  $e_{dc}$  در حالی که  $L_2 - L_1 = 0.5L$  و  $e_{dc} = 2.7v$  و  $B = 0.2T$

شکل (۳۹-۵) رفتار دینامیکی سیستم بر اساس تئوری کلاسیک یعنی  $l_b = 0$  و  $l_p = 0$  و تئوری غیر کلاسیک با تغییر در نسبت پارامتر مقیاس طولی به ضخامت برای میکروتیر و پیزو در حالی که  $L_2 - L_1 = 0.5L$  و  $p = 0.1v$  و  $B = 0.2T$  و  $e_{dc} = 0.8v$  نشان می‌دهد. در این شکل مشاهده می‌شود با افزایش  $\frac{l_b}{t_b}$  دامنه ارتعاشی کاهش می‌یابد و رفتار غیرخطی سیستم کاهش می‌یابد و به رفتار خطی تغییر می‌کند.



شکل (۳۹-۵) تاثیر پارامتر مقیاس طولی بر پاسخ فرکانسی در حالتی که  $L_2 - L_1 = 0.5L$  و  $p = 0.1\nu$  و  $e_{dc} = 0.8\nu$  و  $B = 0.2T$

## فصل ۶: نتیجه‌گیری و ارائه پیشنهادها

## ۶-۱- مقدمه

در این فصل به نتیجه‌گیری از فصل‌های قبلی و تاثیر پارامترهای مختلف از جمله طول و ضخامت لایه پیزوالکتریک، تغییر مقدار فاصله هوایی، تحریک پیزوالکتریک و الکترواستاتیک و مغناطیسی، پارامتر مقیاس طولی بر تغییر شکل استاتیکی، فرکانس طبیعی، ارتعاشات غیر خطی بر هر دو مدل مورد بررسی پرداخته می‌شود.

### ۶-۱-۱- نتیجه‌گیری‌ها

- ماکزیمم تغییر شکل استاتیکی در مدل اول در انتهای تیر و در مدل دوم در وسط تیر اتفاق می‌افتد.
- با در نظر گرفتن روش‌های گلرکین و مقیاس‌های چندگانه با تقریب سه شکل مود برای هر دو مدل، با فرض گیردار بودن انتهای میکروتیر و عدم حضور پیزوالکتریک مطابقت خوبی با مطالعات پیشین داشت.
- مهم‌ترین مساله در این دو مدل ولتاژ پولین می‌باشد که با استفاده لایه پیزوالکتریک با طول، ضخامت و ولتاژ مناسب و استفاده از لایه الاستومر مگنتورئولوژیکال تحت اعمال میدان مغناطیسی مناسب و با استفاده از تئوری تنش-کوپل اصلاح شده با استفاده از پارامتر مقیاس طولی مناسب می‌توان ولتاژ پولین را کنترل کرد.

### ۶-۱-۲- پیشنهادها

- استفاده از تئوری غیر محلی و تئوری گرادیان کرنشی برای حل مساله
- استفاده از تیر تیموشنکو با در نظر گرفتن تغییر شکل برشی و اینرسی دورانی در استخراج معادلات

مراجع

- [1] M. I. Younis, *MEMS linear and nonlinear statics and dynamics* vol. 20: Springer Science & Business Media, 2011.
- [2] N. Stelmashenko, M. Walls, L. Brown, and Y. V. Milman, "Microindentations on W and Mo oriented single crystals: an STM study," *Acta Metallurgica et Materialia*, vol. 41, pp. 2855-2865, 1993.
- [3] W. Poole, M. Ashby, and N. Fleck, "Micro-hardness of annealed and work-hardened copper polycrystals," *Scripta Materialia*, vol. 34, pp. 559-564, 1996.
- [4] G. X. F. D. L. Xide, "MEASUREMENT OF DEFORMATION OF PURE Ni FOILS BY SPECKLE PATTERN INTERFEROMETRY [J]," *Mechanics and Engineering*, vol. 2, 2005.
- [5] D. C. Lam, F. Yang, A. Chong, J. Wang, and P. Tong, "Experiments and theory in strain gradient elasticity," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 51, pp. 1477-1508, 2003.
- [6] Y. Moser and M. A. Gijs, "Miniaturized flexible temperature sensor," *Journal of Microelectromechanical Systems*, vol. 16, pp. 1349-1354, 2007.
- [7] M. T. Chorsi, S. Azizi, and F. Bakhtiari-Nejad, "Nonlinear dynamics of a functionally graded piezoelectric micro-resonator in the vicinity of the primary resonance," *Journal of Vibration and Control*, vol. 23, pp. 400-413, 2017.
- [8] S. N. Mahmoodi and N. Jalili, "Non-linear vibrations and frequency response analysis of piezoelectrically driven microcantilevers," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 42, pp. 577-587, 2007.
- [9] G. Rezazadeh, A. Tahmasebi, and M. Zubstov, "Application of piezoelectric layers in electrostatic MEM actuators: controlling of pull-in voltage," *Microsystem technologies*, vol. 12, pp. 1163-1170, 2006.
- [10] J. W. Zhou, H.-Y. Chan, T. K. To, K. W. Lai, and W. J. Li, "Polymer MEMS actuators for underwater micromanipulation," *IEEE/ASME Transactions on mechatronics*, vol. 9, pp. 334-342, 2004.
- [11] H. Rokni, R. J. Seethaler, A. S. Milani, S. Hosseini-Hashemi, and X.-F. Li, "Analytical closed-form solutions for size-dependent static pull-in behavior in electrostatic micro-actuators via Fredholm integral equation," *Sensors and Actuators A: Physical*, vol. 190, pp. 32-43, 2013.
- [12] M. Zamanian, M. Hadilu, and B. Firouzi, "A study on the use of perturbation technique for analyzing the nonlinear forced response of piezoelectric microcantilevers," *Journal of Computational & Applied*



- Research in Mechanical Engineering (JCARME)*, vol. 5, pp. 161-172, 2016.
- [13] M. Zamanian, S. Khadem, and S. Mahmoodi, "The effect of a piezoelectric layer on the mechanical behavior of an electrostatic actuated microbeam," *Smart Materials and Structures*, vol. 17, p. 065024, 2008.
- [14] E. M. Abdel-Rahman, M. I. Younis, and A. H. Nayfeh, "Characterization of the mechanical behavior of an electrically actuated microbeam," *Journal of Micromechanics and Microengineering*, vol. 12, p. 759, 2002.
- [15] J. D. Carlson and M. R. Jolly, "MR fluid, foam and elastomer devices," *mechatronics*, vol. 10, pp. 555-569, 2000.
- [16] J. M. Ginder, M. E. Nichols, L. D. Elie, and J. L. Tardiff, "Magnetorheological elastomers: properties and applications," in *Proc. SPIE*, 1999, pp. 131-138.
- [17] H. Vatandoost, M. Norouzi, S. M. S. Alehashem, and S. K. Smoukov, "A novel phenomenological model for dynamic behavior of magnetorheological elastomers in tension–compression mode," *Smart Materials and Structures*, vol. 26, p. 065011, 2017.
- [18] J. Rabinow, "The magnetic fluid clutch," *Electrical Engineering*, vol. 67, pp. 1167-1167, 1948.
- [19] W. Li and X. Zhang, "Research and applications of MR elastomers," *Recent Patents on Mechanical Engineering*, vol. 1, pp. 161-166, 2008.
- [20] Y. Li, J. Li, W. Li, and H. Du, "A state-of-the-art review on magnetorheological elastomer devices," *Smart materials and structures*, vol. 23, p. 123001, 2014.
- [21] G. Zhou, "Shear properties of a magnetorheological elastomer," *Smart materials and structures*, vol. 12, p. 139, 2003.
- [22] X.-M. Dong, Y. Miao, C.-R. Liao, and W.-M. Chen, "A new variable stiffness absorber based on magneto-rheological elastomer," *Transactions of Nonferrous Metals Society of China*, vol. 19, pp. s611-s615, 2009.
- [23] B. Nayak, S. Dwivedy, and K. Murthy, "Dynamic stability of a rotating sandwich beam with magnetorheological elastomer core," *European Journal of Mechanics-A/Solids*, vol. 47, pp. 143-155, 2014.
- [24] L. Chen, X.-l. Gong, W.-q. Jiang, J.-j. Yao, H.-x. Deng, and W.-h. Li, "Investigation on magnetorheological elastomers based on natural rubber," *Journal of Materials Science*, vol. 42, pp. 5483-5489, 2007.
- [25] F. Yang, A. Chong, D. C. C. Lam, and P. Tong, "Couple stress based strain gradient theory for elasticity," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 39, pp. 2731-2743, 2002.

- [26] F. Najar, S. Choura, S. El-Borgi, E. Abdel-Rahman, and A. Nayfeh, "Modeling and design of variable-geometry electrostatic microactuators," *Journal of micromechanics and microengineering*, vol. 15, p. 419, 2004.
- [27] H. M. Ouakad, M. I. Younis, F. M. Alsaleem, R. Miles, and W. Cui, "The static and dynamic behavior of MEMS arches under electrostatic actuation," in *Proceedings of the ASME 2009 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference IDETC/CIE*, 2009.
- [28] Y.-G. Wang, W.-H. Lin, Z.-J. Feng, and X.-M. Li, "Characterization of extensional multi-layer microbeams in pull-in phenomenon and vibrations," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 54, pp. 225-233, 2012.
- [29] M. Rasekh and S. Khadem, "Pull-in analysis of an electrostatically actuated nano-cantilever beam with nonlinearity in curvature and inertia," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 53, pp. 108-115, 2011.
- [30] M. Mojahedi, M. Ahmadian, and K. Firoozbakhsh, "The influence of the intermolecular surface forces on the static deflection and pull-in instability of the micro/nano cantilever gyroscopes," *Composites Part B: Engineering*, vol. 56, pp. 336-343, 2014.
- [31] Y.-T. Huang, H.-L. Chen, and W. Hsu, "An analytical model for calculating the pull-in voltage of micro cantilever beams subjected to tilted and curled effects," *Microelectronic Engineering*, vol. 125, pp. 73-77, 2014.
- [32] G. Rezazadeh, M. Fathalilou, and R. Shabani, "Static and dynamic stabilities of a microbeam actuated by a piezoelectric voltage," *Microsystem technologies*, vol. 15, p. 1785, 2009.
- [33] M.-R. Ghazavi, G. Rezazadeh, and S. Azizi, "Pure parametric excitation of a micro cantilever beam actuated by piezoelectric layers," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 34, pp. 4196-4207, 2010.
- [34] M. Zamanian, H. Rezaei, M. Hadilu, and S. Hosseini, "A comprehensive analysis on the discretization method of the equation of motion in piezoelectrically actuated microbeam," *Smart Structures and Systems*, vol. 16, pp. 891-918, 2015.
- [35] G. Piazza, R. Abdolvand, G. K. Ho, and F. Ayazi, "Voltage-tunable piezoelectrically-transduced single-crystal silicon micromechanical resonators," *Sensors and Actuators A: Physical*, vol. 111, pp. 71-78, 2004.

- [36] M. Zamanian and S. Khadem, "Nonlinear vibration of an electrically actuated microresonator tuned by combined DC piezoelectric and electric actuations," *Smart Materials and Structures*, vol. 19, p. 015012, 2009.
- [37] H. Raeisifard, M. N. Bahrami, A. Yousefi-Koma, and H. R. Fard, "Static characterization and pull-in voltage of a micro-switch under both electrostatic and piezoelectric excitations," *European Journal of Mechanics-A/Solids*, vol. 44, pp. 116-124, 2014.
- [38] S. Park and X. Gao, "Bernoulli–Euler beam model based on a modified couple stress theory," *Journal of Micromechanics and Microengineering*, vol. 16, p. 2355, 2006.
- [39] X. Kang and W. XI, "Size effect on the dynamic characteristic of a micro beam based on cosserat theory," 2007.
- [40] S. Kong, S. Zhou, Z. Nie, and K. Wang, "The size-dependent natural frequency of Bernoulli–Euler micro-beams," *International Journal of Engineering Science*, vol. 46, pp. 427-437, 2008.
- [41] M. Kahrobaiyan, M. Asghari, M. Rahaeifard, and M. Ahmadian, "Investigation of the size-dependent dynamic characteristics of atomic force microscope microcantilevers based on the modified couple stress theory," *International Journal of Engineering Science*, vol. 48, pp. 1985-1994, 2010.
- [42] M. Rahaeifard, M. Kahrobaiyan, M. Asghari, and M. Ahmadian, "Static pull-in analysis of microcantilevers based on the modified couple stress theory," *Sensors and Actuators A: Physical*, vol. 171, pp. 370-374, 2011.
- [43] R. A. Alashti and A. Abolghasemi, "A size-dependent Bernoulli-Euler beam formulation based on a new model of couple stress theory," *International Journal of Engineering TRANSACTIONS C*, vol. 27, pp. 951-960, 2014.
- [44] A. Nikpourian, M. R. Ghazavi, and S. Azizi, "On the nonlinear dynamics of a piezoelectrically tuned micro-resonator based on non-classical elasticity theories," *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, pp. 1-19.
- [45] Q. Sun, J.-X. Zhou, and L. Zhang, "An adaptive beam model and dynamic characteristics of magnetorheological materials," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 261, pp. 465-481, 2003.
- [46] S. Dwivedy, N. Mahendra, and K. Sahu, "Parametric instability regions of a soft and magnetorheological elastomer cored sandwich beam," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 325, pp. 686-704, 2009.

- [47] Y. Ni, Z. Ying, and Z. Chen, "Magneto-rheological elastomer (MRE) based composite structures for micro-vibration control," *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, vol. 9, pp. 345-356, 2010.
- [48] G. Zhou and Q. Wang, "Design of a smart piezoelectric actuator based on a magnetorheological elastomer," *Smart materials and structures*, vol. 14, p. 504, 2005.
- [49] M. Rahaeifard, M. Kahrobaiyan, M. Ahmadian, and K. Firoozbakhsh, "Strain gradient formulation of functionally graded nonlinear beams," *International Journal of Engineering Science*, vol. 65, pp. 49-63, 2013.
- [50] A. H. Nayfeh and P. F. Pai, *Linear and nonlinear structural mechanics*: John Wiley & Sons, 2008.

**Abstract:**

This research studies the static and dynamic analysis of the cantilever microbeam under electrostatic stimulation, piezoelectric and magnetic field. The microbeam is considered as a Euler-Bernoulli beam and a piezoelectric layer is placed on it. Also, the free end this microbeam is attached to the magnetorheological elastomer layer and a constant magnetic field is applied to it. Equations of motion and boundary conditions have been extracted by the Hamilton principle. The effect of magnetic stimulation of the elastomer layer as a dirac delta function enters into the equations of motion. Then, the motion equations are solved using a combination of the Galerkin method and Perturbation technique.

In this thesis, static deformation, pull-in voltage, natural frequency and dynamic response are studied using two methods of modeling. In the first modeling, the magnetorheological elastomer layer in the free end is connected to the microbeam in the shear mode and in the second modeling in the compression mode.

**Keywords: MEMS, cantiliver microbeam, piezoelectric excitation, electrostatic excitation, magnetorheological layer, Galerkin method, Perturbation technique**



**Shahrood University of Technology**  
**Faculty of Mechanical and Mechatronics Engineering**

**M.Sc Thesis in Applied Mechanical Engineering**

**Vibration Analysis of a Cantilever Microbeam  
Attached to a Magnetorheological Elastomer  
Layer at Free End Under Shear And Squeeze  
Mode**

**By:**  
**Amin sharifi ordoghan**

**Supervisor:**  
**Dr. Habib Ahmadi**  
**Dr. Amir Jalali**

**September 2017**